ΘΝ

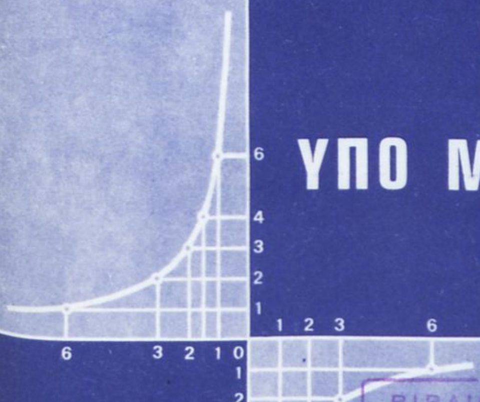
ΠΕΤΡΟΥ ΠΛΟΥΤΣΗ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν (Διπλ. Παρισίων)

**ΔΙΑ ΠΡΩΤΗΝ ΦΟΡΑΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ



ΔΡΑΧ. 8

ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΚΑΘΕ ΤΕΤΑΡΤΗ

ΤΕΥΧΟΣ
1

εἰς ἕνα (1) καὶ μόνον τόμον, ἤτοι:
22 συνολικῶς ἑβδομαδιαῖα τεύχη

ΠΕΤΡΟΥ Δ. ΠΛΟΥΤΣΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(Διπλ. Παρισίων)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

(ἐπίτομος)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ

Διὰ τοὺς μαθητὰς ἀπὸ **Α΄** μέχρι καὶ **ΣΤ΄** Γυμνασίου, ὑποψηφίους Ἀνωτάτων Σχολῶν, φοιτητὰς κ.λ.π.

ΑΘΗΝΑΙ 1969

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως - ἐκδότου :

Π. Πλούτσης

Ἡ **ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ** αὐτὴ περιέχει ὅλους τοὺς ὅρους, ὁρισμούς, κανόνας, ἰδιότητας, θεωρήματα ἀπὸ τὴν **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ-ΑΛΓΕΒΡΑΝ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ** ὅλων τῶν Γυμνασιακῶν τάξεων, μὲ πολλὰς λυμένας ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ὡς παραδείγματα.

***

Πολύτιμο **βοήθημα** διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων καὶ διὰ τὴν προετοιμασίαν διαγωνισμῶν καὶ εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

᾿Εγκυκλοπαίδειαι-βοηθήματα ὑπάρχουν δι᾿ ὅλους σχεδὸν τοὺς κλάδους τῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς ἀνθρωπίνης γνώσεως. Εἰδική, ὅμως, Μαθηματικὴ ᾿Εγκυκλοπαίδεια, ὅπως ὑπάρχει στὶς προηγμένες χῶρες, ποὺ νὰ περιέχῃ ὅλην τὴν διδασκομένην ὕλην τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὴν Μέσην ᾿Εκπαίδευσιν, δὲν ὑπῆρχε μέχρι σήμερον εἰς τὸν τόπον μας. ᾿Εξ ἄλλου ἡ πολυετής μας ἐπαφὴ μὲ τὰς ἀνάγκας καὶ δυσκολίας τοῦ Ἕλληνος μαθητοῦ καὶ ἡ πεῖρα, τὴν ὁποίαν ἀποκτήσαμε διδάσκοντες ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν εἰς Γαλλικὰ Λύκεια, μᾶς ὤθησε εἰς τὴν ἀπόφασιν νὰ καλύψωμε τὸ κενὸν αὐτὸ δίδοντες εἰς τὴν σπουδάζουσαν νεολαίαν τοῦ τόπου μας τὸ ἀπαραίτητο τοῦτο καὶ εὔχρηστο βοήθημα.

῾Η ᾿Εγκυκλοπαίδεια αὐτὴ περιέχει, κατ᾿ ἀλφαβητικὴν σειράν, ὅλους τοὺς ὅρους, ὁρισμούς, κανόνας, ἰδιότητας, σχέσεις, ποὺ ἕνας μαθητὴς ὀφείλει νὰ μάθῃ κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν Γυμνασιακῶν του σπουδῶν, ἀπὸ τὴν Α΄ ἕως καὶ τὴν ΣΤ΄ τάξιν τοῦ Γυμνασίου. Εἰς τὸ τέλος δὲ θὰ εὕρῃ, μαζὶ μὲ τοὺς χρησίμους ἀριθμητικοὺς καὶ λογαριθμικοὺς πίνακας, πολυτίμους ὁδηγίας διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων.

Δύναται, δι᾿ ὡρισμένην χρῆσιν, νὰ ἀντικαταστήσῃ τὸ σχολικὸ βιβλίο Μαθηματικῶν, παρ᾿ ὅλο ποὺ δὲν περιέχει ἀποδείξεις κανόνων καὶ θεωρημάτων. Εἶναι, ὅμως, ἕνα τέλειο ἐργαλεῖο δουλειᾶς ποὺ θὰ βοηθῇ τὸν μαθητὴν νὰ εὕρῃ ὑπεύθυνον ἀπάντησιν εἰς κάθε ἀπορίαν του, κυρίως ὅταν ἑτοιμάζῃ τὰ γραπτά του στὸ σπίτι ἢ ὅταν προγυμνάζεται διὰ τοὺς διαγωνισμοὺς καὶ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις εἰς τὰ Πολυτεχνεῖα καὶ τὰς ἄλλας ᾿Ανωτάτας Σχολάς. ᾿Αλλὰ καὶ ὅταν γίνῃ φοιτητής, ἢ καὶ ἐπιστήμων, θὰ μπορῇ νὰ βρίσκῃ ἐκεῖ ὅλας τὰς παλαιάς του γνώσεις ἀπὸ τὰ Μαθηματικὰ τοῦ Γυμνασίου.

῾Ο μαθητὴς δὲν ξέρει, γενικά, νὰ χρησιμοποιῇ τὸ σχολικό του

ἐγχειρίδιο Μαθηματικῶν. Ποιός δὲν τὸν εἶδε, ὅταν ἐργάζεται στὴν τάξη ἢ στὸ σπίτι, νὰ ξεφυλλίζη τὸ βιβλίο του πρὸς ὅλες τὶς κατευθύνσεις εἰς ἀναζήτησιν μιᾶς πληροφορίας ποὺ τὴν θυμᾶται συγκεχυμένα ἢ ποὺ εὔχεται ἁπλῶς τὴν ὕπαρξή της; Καὶ πῶς θὰ μποροῦσε νὰ τὴν εὕρη μέσα σ' ἕνα βιβλίο ποὺ δὲν τὸ ἔχει στὰ χέρια; Χάρις στὴν Ἐγκυκλοπαίδεια αὐτὴ ὁ μαθητὴς θὰ ξαναβρῆ μὲ βεβαιότητα τὸν ὁρισμό, τὸν κανόνα, τὸν τύπο, τὴν γεωμετρικὴ ἰδιότητα, τὴν μετρικὴ σχέση, πράγματα ἀπαραίτητα διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἀσκήσεως ἢ τοῦ προβλήματος.

Ὅλες αὐτὲς οἱ πληροφορίες ἀπὸ τὴν Ἀριθμητική, Ἄλγεβρα, Γεωμετρία, Στερεομετρία καὶ Τριγωνομετρία, ταξινομημένες κατὰ σχολικὰ ἔτη σπουδῶν, εἶναι συγκεντρωμένες κατ' ἀλφαβητικὴν σειρὰν καὶ μὲ τὸν πλέον συνοπτικὸν τρόπον, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ παραλείπεται τίποτε, καὶ μὲ ἄφθονα ἀντιπροσωπευτικὰ παραδείγματα λυμένων ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων. Καὶ ἔτσι, διαβάζοντας καὶ ξεφυλλίζοντας πολλὲς φορὲς τὴν Ἐγκυκλοπαίδεια αὐτὴ ὁ μαθητής, θὰ κατορθώση, στὸ τέλος, νὰ στερεώση στὴν μνήμη του τὰ ἀποτελέσματα ποὺ πρέπει νὰ συγκρατήση ἀπ' ἔξω, πολὺ πιὸ εὔκολα παρὰ ἀπὸ τὴν μελέτη ἑνὸς κανονικοῦ μαθήματος, ὅπου τὸ οὐδιῶδες βρίσκεται διεσπαρμένο ἀνάμεσα στὶς ἀπαραίτητες ἐπεξηγήσεις καὶ ἀποδείξεις.

Μὲ τὴν ἀφθονία τῶν πληροφοριῶν ποὺ δίδει καὶ μὲ τὴν βολικότητά της, ἡ Ἐγκυκλοπαίδεια αὐτὴ μπορεῖ νὰ βοηθήση ἀποτελεσματικὰ ὅλους τοὺς μαθητάς. Καὶ ἴσως οἱ λιγώτερο καλοί, ὅταν διαπιστώσουν ὅτι εἶναι ἱκανοὶ νὰ βροῦν κι' αὐτοὶ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος μὲ τὴν βοήθεια τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, ν' ἀγαπήσουν περισσότερο τὰ Μαθηματικά.

Ἀθῆναι, Φεβρουάριος 1969

Ὁ Συγγραφεὺς
ΠΕΤΡΟΣ Δ. ΠΑΟΥΤΣΗΣ
Καθηγητὴς Μαθηματικῶν
(Διπλ. Παρισίων)

ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ ΒΡΑΧΥΓΡΑΦΙΑΙ

ΣΥΜΒΟΛΑ

$>$ μεγαλύτερον ἀπὸ

$<$ μικρότερον ἀπὸ

$=$ ἴσον

$\neq$ διάφορον ἀπὸ

$\equiv$ ταυτόσημον πρὸς

$\Rightarrow$ ἄρα, συμπεραίνομε ὅτι

$\Leftrightarrow$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ. Ἡ πρότασις ὅπως δίδεται καὶ ἡ ἀντίστροφός της.

$\geq$ μεγαλύτερον ἢ ἴσον

$\leq$ μικρότερον ἢ ἴσον

∞ ἄπειρον

$/\!/$ παράλληλον πρὸς

$\perp$ κάθετος πρὸς

$\longrightarrow$ ἄρα, ἑπομένως

ΒΡΑΧΥΓΡΑΦΙΑΙ

Κ.Π. Κοινὸς παρονομαστὴς

Μ.Κ.Δ. μέγιστος κοινὸς διαιρέτης

Ε.Κ.Π ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Τὰ ἐντὸς τετραγωνιδίων ψηφία, στὸ περιθώριο, δεικνύουν εἰς ποίαν τάξιν κυρίως διδάσκεται τὸ ζήτημα (καὶ τὰ ζητήματα ποὺ ἀκολουθοῦν ἕως τὸ ἑπόμενο ψηφίο).

Λ.χ. ἕνας μαθητὴς Δ΄ Γυμνασίου θὰ μπορῆ νὰ χρησιμοποιήση τὶς πληροφορίες ποὺ σημειώνονται μὲ $\boxed{\text{Β΄}}$, $\boxed{\text{Γ΄}}$, $\boxed{\text{Δ΄}}$, ἀλλ' ὄχι ὅσες σημειώνονται μὲ $\boxed{\text{Ε΄}}$ καὶ $\boxed{\text{ΣΤ΄}}$.

Π.χ. $(-3)^0 = 1$, $12^0 = 1$

⋆ **'Εκθέτης ἀρνητικός.** Μία δύναμις μὲ ἐκθέτην ἀρνητικὸν εἶναι τὸ ἀντίστροφον μιᾶς δυνάμεως μὲ ἐκθέτην ἀντίθετον πρὸς τὸν προηγούμενον, ἤ, ἁπλούστερα, εἶναι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὴν μονάδα (1) καὶ παρονομαστὴν τὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην θετικόν.

Π.χ. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{-1}{125}$

● **Τετραγωνικὴ ρίζα ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.** Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ Α εἶναι ἕνας ἀριθμὸς α, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ Α.

Κανὼν πράξεων. Βλέπε *Ρίζα*.

'Ιδιότητες. ⋆ Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τετραγωνικὴν ρίζαν.
⋆ Ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς Α ἔχει δύο ἀντίθετες ρίζες ποὺ παριστάνονται μὲ $+\sqrt{A}$ καὶ $-\sqrt{A}$.

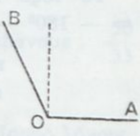
Π.χ. 36 ἔχει ὡς ρίζες $+6$ καὶ -6.

⋆ Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ εἶναι ρίζα. Συμβολίζει τὴν θετικὴν ρίζαν.

'Αλγόριθμος τῆς διαιρέσεως : $\begin{array}{c|c} \Delta & \delta \\ \hline \upsilon & \pi \end{array}$ ἢ $\Delta = \pi \cdot \delta + \upsilon$.

'Αλγόριθμος τοῦ **Εὐκλείδου** : εἶναι ἡ μέθοδος τῶν ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων διὰ νὰ εὕρωμε τὸν Μ.Κ.Δ.

| Α΄ | **'Αμβλεῖα.** Γωνία ἀμβλεῖα. Γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς. Ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.



'Αναγκαία. Συνθήκη ἀναγκαία καὶ ἱκανή. Βλέπε *Συνθήκη*.

'Αναγωγή. ◆ **Εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.** Βλέπε *Κλάσμα*.

| ΣΤ΄ | ◆ **Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον.** Συνίσταται στὸ νὰ εὕρωμε ἕνα θετικὸ τόξο μικρότερο τοῦ $\frac{\pi}{2}$ ἢ 90^0, τοῦ ὁποίου οἱ τριγωνομετρικὲς γραμμὲς συνδέονται μὲ τὶς ζητούμενες γραμμὲς μὲ ἁπλὲς σχέσεις.

⋆ 1ον. 'Εξάγομε τὶς ἀκέραιες περιφέρειες ποὺ μπορεῖ νὰ περιέχῃ τὸ τόξο. Διὰ τοῦτο ζητοῦμε νὰ εὕρωμε πόσες φορὲς τὸ τόξο περιέχει

2π, ἢ 360^0, ἢ 400 βαθ, ἀναλόγως πρὸς τὴν χρησιμοποιουμένην μονάδα, καὶ δὲν κρατοῦμε παρὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

α΄ Παράδειγμα: $\alpha = -931^0$.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 931 διὰ 360 δίδει ὑπόλοιπον 211.

Ἄρα κρατοῦμε $\alpha = -211^0$

β΄ Παράδειγμα: $\beta = \frac{137\pi}{8}$.

Ἡ διαίρεσις $\frac{137}{8}$ διὰ 2 δίδει ὑπόλοιπον $\frac{9}{8}$.

Ἄρα κρατοῦμε $\beta = \frac{9\pi}{8}$

γ΄ Παράδειγμα: $\gamma = 723$ βαθ.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 723 διὰ 400 δίδει ὑπόλοιπον 323.

Ἄρα κρατοῦμε $\gamma = 323$ βαθ.

★ 2ον. Ζητοῦμε σὲ ποιὸ τεταρτημόριο λήγει τὸ τόξο καὶ χρησιμοποιοῦμε τὶς σχέσεις:

— τῶν παραπληρωματικῶν τόξων, ἂν λήγῃ στὸ 2^0 τεταρτημόριο,

— τῶν τόξων τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι π ἢ 180^0, ἂν λήγῃ στὸ 3^0 τεταρτημόριο,

— τῶν ἀντιθέτων τόξων, ἂν λήγῃ στὸ 4^0 τεταρτημόριο.

α΄ Παράδειγμα: $\alpha = -211^0$

Τὸ τόξο λήγει στὸ 2^0 τεταρτημόριο. Μποροῦμε νὰ γράψωμε $\alpha = -180^0 - 31^0$. Χρησιμοποιοῦμε λοιπὸν τὸ $\alpha' = 31^0$.

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu 31^0 \qquad \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 31^0$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = -\varepsilon\varphi 31^0 \qquad \sigma\varphi\alpha = -\sigma\varphi 31^0$$

β΄ Παράδειγμα: $\beta = \frac{9\pi}{8}$

Τὸ τόξο λήγει στὸ 3^0 τεταρτημόριο. Μποροῦμε νὰ γράψωμε:

$\beta = \pi + \frac{\pi}{8}$. Χρησιμοποιοῦμε λοιπὸν τὸ τόξο $\beta' = \frac{\pi}{8}$

$$\eta\mu\,\beta = -\,\eta\mu\,\frac{\pi}{8} \qquad \sigma\upsilon\nu\,\beta = -\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{8}$$

$$\varepsilon\varphi\,\beta = \varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{8} \qquad \sigma\varphi\,\beta = \sigma\varphi\,\frac{\pi}{8}$$

γ΄ Παράδειγμα: $\gamma = 323$ βαθ.

Τὸ τόξο λήγει στὸ τέταρτο τεταρτημόριο. Μποροῦμε νὰ γράψωμε: $\gamma = 400$ βαθ — 77 βαθ. Χρησιμοποιοῦμε λοιπὸν τὸ τόξο $\gamma' = 77$ βαθ

ημγ = — ημ 77 βαθ   συνγ = συν 77 βαθ
εφγ = — εφ 77 βαθ   σφγ = — σφ77 βαθ

◆ **Ἀναγωγὴ μονωνύμου, πολυωνύμου.** Βλέπε *Μονώνυμον, Πολυώνυμον.*

Ἀνάγωγον. *Κλάσμα ἀνάγωγον.* Κλάσμα ποὺ δὲν μπορεῖ ν' ἁπλοποιηθῆ.

Π.χ. $\frac{2}{5}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{23}{35}$

| Β' | **Ἰδιότητες.** Ἂν ἕνα κλάσμα εἶναι ἀνάγωγο, οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους.

* Διὰ νὰ λάβωμε ἕνα ἀνάγωγο κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμε τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ.

Π.χ. $\frac{8400}{5544}$

Ἡ ἀνάλυσις δίδει: $8400 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$
$5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

Ὁ Μ.Κ.Δ. εἶναι: $2^3 \cdot 3 \cdot 7.$

Διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. λαμβάνομε: $\frac{50}{33}$ ποὺ εἶναι ἀνάγωγο.

| Δ' | **Ἀναλογία.** Μία ἀναλογία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσους λόγους

Π.χ. $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου λόγου καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου (α καὶ δ) εἶναι οἱ ἄκροι. Οἱ ἄλλοι (β καὶ γ) εἶναι οἱ μέσοι.

Ἰδιότητες. * Τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων.

Π.χ. Ἂν $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, ἔχομε $3 \times 20 = 5 \times 12$

Ἂν $\alpha\chi = \beta\psi$, ἔχομε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\psi}{\chi}$.

⋆ Ἂν τὸ γινόμενο δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο δύο ἄλλων, μποροῦμε νὰ σχηματίσωμε μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς τέσσερες διαφορετικὲς ἀναλογίες.

Π.χ. Ἂν $12 \times 10 = 15 \times 8$, ἔχομε :

$$\frac{12}{15} = \frac{8}{10} \qquad \frac{12}{8} = \frac{15}{10} \qquad \frac{10}{15} = \frac{8}{12} \qquad \frac{10}{8} = \frac{15}{12}$$

⋆ Εἰς μίαν ἀναλογίαν μποροῦμε :

— νὰ ἐναλλάξωμε τοὺς μέσους : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ γίνεται $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

— νὰ ἐναλλάξωμε τούς ἄκρους : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ γίνεται $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

— νὰ ἐναλλάξωμε τούς μέσους καὶ τοὺς ἄκρους ἢ νὰ ἐναλλάξωμε τοὺς λόγους : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ γίνεται $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$

⋆ Εἰς μίαν ἀναλογίαν μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσωμε κάθε ὅρον ἑνὸς λόγου δι' ἑνὸς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν ὅρων τοῦ λόγου αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ κάνωμε τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὸν δεύτερον λόγον.

Π.χ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ γίνεται $\frac{\alpha - \beta}{2\alpha + \beta} = \frac{\gamma - \delta}{2\gamma + \delta}$

Παρατήρησις. Οἱ νέοι λόγοι ποὺ λαμβάνονται δὲν εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς παλαιούς.

⋆ Εἰς μίαν ἀναλογίαν λαμβάνομε ἕνα νέον λόγον ἴσον μὲ τοὺς δύο πρώτους λόγους ἂν θέσωμε ὡς ἀριθμητὴν ἕνα γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν ἀριθμητῶν τῆς ἀναλογίας καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸν αὐτὸν συνδυασμὸν τῶν παρονομαστῶν.

Π.χ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{2\alpha + 3\gamma}{2\beta + 3\delta} \ldots$

Ἐφαρμογαί. ⋆ Νὰ ὑπολογισθοῦν δύο ἀριθμοὶ ὅταν γνωρίζωμε τὸ ἄθροισμά τους καὶ τὸν λόγον τους.

Π.χ. $\frac{x}{y} = \frac{7}{5} \qquad x + y = 144$

Μποροῦμε νὰ γράψωμε :

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{x + y}{7 + 5} = \frac{144}{12} = 12$$

'Εξάγομε : $x = 12 \times 7 = 84$
$y = 12 \times 5 = 60$

⁎ Νὰ ὑπολογισθοῦν δύο ἀριθμοὶ ὅταν γνωρίζωμε τὴν διαφορά τους καὶ τὸν λόγο τους. Ἐργαζόμεθα ὅπως στὸ προηγούμενο παράδειγμα.

'Ανάλογος. ● **Μεγέθη ἀνάλογα.** Βλέπε *Μεγέθη.*
● **Μέση ἀνάλογος.** Βλέπε *Μέση.*
● **Τετάρτη ἀνάλογος.** Βλέπε *Τετάρτη.*

'Ανάλυσις *εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.* Βλέπε *Πρῶτος.*
● **Ἀνάλυσις παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων.** Βλέπε *Πολυώνυμον.*

Γ′ **'Ανάπτυγμα** *γινομένου, πράξεων.* Εἶναι ἡ πρᾶξις ποὺ συνίσταται στὸ νὰ ἐκτελοῦμε τὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τὶς ἄλλες πράξεις.

Π.χ. Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(3x - 1)(x + 2)^2$
εἶναι $(3x - 1)(x^2 + 4x + 4)$
ἢ $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$

Δ′ **'Ανεξάρτητος.** **Μεγέθη ἀνεξάρτητα.** Μεγέθη ποὺ δὲν ἐξαρτῶντο ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Π.χ. Τὸ μέτρο μιᾶς γωνίας εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν της.

● **Μεταβλητὴ ἀνεξάρτητος.** Μέγεθος μεταβλητὸ στὸ ὁποῖο δίνομε συμβατικὲς τιμές. Τὰ ἄλλα μεγέθη ποὺ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν μεταβλητὴ αὐτὴ εἶναι συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς.

Π. χ. Ἡ τιμὴ ἑνὸς ἐμπορεύματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ποσότητα ποὺ ἀγοράζομε: ἡ ποσότης εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή, ἡ δὲ τιμὴ εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς. Στὴν ἄλγεβρα ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ παριστάνεται συχνὰ μὲ x.

Γ′ **'Ανισότης.** Σύνολο ἀπὸ δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς ἢ ἀπὸ δύο ἄνισες ἀλγεβρικὲς παραστάσεις. Χωρίζονται μὲ τὸ σημεῖο $>$ ποὺ διαβάζεται «μεγαλύτερο ἀπὸ» ἢ μὲ τὸ σημεῖο $<$ ποὺ διαβάζεται «μικρότερο ἀπό». Ἐκεῖνο ποὺ γράφεται ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ ἄνισο σημεῖο ἀποτελεῖ τὸ πρῶτο μέλος. Ὅ,τι γράφεται δεξιὰ ἀποτελεῖ τὸ δεύτερο μέρος.

Π.χ. $5 > -7$ $\quad 3x^2 - 4\alpha < 5x + 2.$

Κανών. Ἕνας ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ἕναν ἀριθμὸ β ($\alpha > \beta$) ὅταν ἡ διαφορὰ α-β εἶναι θετική.

● **'Ανισότης μεταξὺ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.**

Βλέπε ***'Αλγεβρικὸς*** (σύγκρισις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν).

● **Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.**

1η 'Ιδιότης. Μποροῦμε νὰ προσθέσωμε–ἢ ν' ἀφαιρέσωμε–τὴν αὐτὴ παράσταση στὰ–ἢ ἀπὸ τὰ–δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος.

'Εφαρμογαί. ⋆ Μποροῦμε νὰ διαγράψωμε ἕναν κοινὸ ὅρο ἀπὸ τὰ δύο μέλη (ὁ κοινὸς ὅρος πρέπει φυσικὰ νὰ ἔχη τὸ αὐτὸ σημεῖο στὰ δύο μέλη).

⋆ Μποροῦμε νὰ μεταθέσωμε ἕναν ὅρο ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος στὸ ἄλλο, ἀρκεῖ ν' ἀλλάξωμε τὸ πρόσημό του.

Π.χ. $3x-\alpha+4y>7x-\alpha-y+2.$

$$3x+4y>7x\boxed{-y}+2.$$

$$3x+4y\boxed{+y}>7x+2.$$

⋆ Μποροῦμε νὰ προσθέσωμε κατὰ μέλη δύο ἀνισότητες τῆς *αὐτῆς στροφῆς.*

$$2x-3>3\alpha-y$$

$$x+2\alpha>5-2y$$

Ἂς προσθέσωμε:

$$3x+2\alpha-3>3\alpha+5-3y$$

2α 'Ιδιότης. Μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἢ νὰ διαιρέσωμε τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος μὲ τὸν αὐτὸν *θετικὸν* ἀριθμόν:

$$5\alpha-2\beta+1>\alpha-6.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 2, ἔχομε:

$$10\alpha-4\beta+2>2\alpha-12.$$

Μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἢ νὰ διαιρέσωμε τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος μὲ τὸν αὐτὸν *ἀρνητικὸν* ἀριθμὸν *ἀλλάζοντες τὴν στροφὴν τῆς ἀνισότητος:*

$$3x-\alpha>2-4\beta.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ −3, ἔχομε:

$$-9x+3\alpha<-6+12\beta$$

'Εφαρμογαί. ⋆ Μποροῦμε ν' ἀπαλείψωμε ἕναν κοινὸ ἀριθμητικὸ παρονομαστή:

$$2\alpha-\frac{3}{4}>\frac{5\alpha}{3}-6$$

$$\frac{24\alpha}{12}-\frac{9}{12}>\frac{20\alpha}{10}-\frac{72}{12}$$

$$24\alpha-9>20\alpha-72.$$

Ἂν ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἀρνητικός, νὰ μὴ παραλείπωμε ν' ἀλλάξωμε τὴν στροφὴν τῆς ἀνισότητος.

Ἂν ὁ παρονομαστὴς εἶναι *ἐγγράμματος*, τότε δὲν γνωρίζομε τὸ σῆμα του καὶ *δὲν μποροῦμε νὰ τὸν ἀπαλείψωμε.*

★ Μποροῦμε ν' ἀλλάξωμε τὰ σήματα τῶν δύο μελῶν ὑπὸ τὸν ὅρο ν' ἀλλάξωμε τὴν στροφὴν τῆς ἀνισότητος:

$$-3+2\alpha-x>-3x-4\alpha$$
$$3-2\alpha+x<3x+4\alpha$$

$\boxed{\Delta'}$ **'Ανίσωσις. ('Ανισοεξίσωσις).** Εἶναι καὶ αὐτὴ μία ἀνισότης ποὺ περιέχει τοὐλάχιστον ἕνα ἄγνωστο γράμμα ποὺ τὴν ἐπαληθεύει μόνον δι' ὡρισμένας τιμὰς ποὺ δίδονται στά ἄγνωστα αὐτὰ γράμματα. Οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς ποὺ μετατρέπουν τὴν ἐγγράμματο αὐτὴ ἀνισότητα εἰς ἀριθμητικὴν ἀνισότητα καὶ τὴν ἐπαληθεύουν, εἶναι αἱ λύσεις. Ὁ ἀριθμὸς λύσεων διὰ κάθε ἀνισότητα εἶναι ἀπεριόριστος.

Π.χ. $2x-4>5-x.$

Οἱ τιμὲς 4, 6 ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν, ἑπομένως εἶναι λύσεις.

Οἱ τιμὲς −2, 0 δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν, ἑπομένως δὲν εἶναι λύσεις.

Τὸ νὰ λύσωμε μίαν ἀνίσωσιν σημαίνει νὰ εὕρωμε τὰς λύσεις τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς.

● **'Ανισώσεις ἰσοδύναμες.** 'Ανισώσεις ποὺ ἐπιδέχονται ἑκάστη τὶς αὐτὲς λύσεις μὲ τὴν ἄλλη.

◆ **'Ανισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.**

'Ιδιότητες. Βλέπε ***'Ανισότης*** (ἀριθμητική).

● **'Επίλυσις ἀνισώσεως.** Τρέπομε τὰ δύο μέλη στὸν αὐτὸ παρονομαστὴ (ἂν ὁ κοινὸς παρονομαστὴς δὲν περιέχη γράμματα).

Παράδειγμα: $\frac{x}{3}-4>5-\frac{x+3}{2}$ Κ.Π. 6

$$\frac{2x}{6}-\frac{24}{6}>\frac{30}{6}-\frac{3x+9}{6}.$$

'Εξαλείφομε τὸν παρονομαστὴ (ἀλλάζοντες τὴν στροφὴν τῆς ἀνισώσεως ἂν ὁ Κ.Π. εἶναι ἀρνητικός):

$$2x-24 > 30-3x-9$$

'Ανάγομε κάθε μέλος:

$$2x-24 > 21-3x$$

Μεταφέρομε τοὺς ἀγνώστους ὅρους εἰς ἕνα μέλος, τοὺς γνωστοὺς ὅρους στὸ ἄλλο, ἀλλάζοντες τὸ πρόσημό τους:

$$2x+3x > 21+24$$

'Ανάγομε κάθε μέλος:

$$5x > 45$$

Διαιροῦμε τὸ γνωστὸ μέλος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου. Ἂν ὁ συντελεστὴς αὐτὸς εἶναι ἀρνητικός, πρέπει ν' ἀντιστρέψωμε τὴν στροφὴν τῆς ἀνισώσεως:

$$x > 9$$

Γραφικὴ ἑρμηνεία. Βλέπε ***Γραφική***.

● **Συναληθεύουσαι ἀνισώσεις ἢ Συστήματα ἀνισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον.** Εἶναι ἀνισώσεις ποὺ πρέπει νὰ ἐπαληθευθοῦν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἀγνώστου. Λύομε κάθε ἀνίσωσιν χωριστὰ καὶ κρατοῦμε μόνον τὶς λύσεις ποὺ ἁρμόζουν σ' ὅλες τὶς ἀνισώσεις,

$$\text{Π.χ.}\quad \begin{cases} x-4 > 5-2x \\ 2x-2 < 3x \\ 2-x < 7-2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x > 9 \\ -x < 2 \\ 2x-x < 7-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3 \\ x > -2 \\ x < 5 \end{cases}$$

Λύσις .... $3 < x < 5$.

Γραφικὴ ἑρμηνεία. Βλέπε ***Γραφική***.

| Ε' | ● **Παραμετρικὴ ἀνίσωσις.** Ὁ τρόπος λύσεως εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὴν κοινὴν ἀνίσωσιν, ἀλλὰ ἂν ἡ παράμετρος βρίσκεται στὸν παρονομαστή, δὲν πρέπει νὰ ἐξαλείψωμε τὸν παρονομαστὴν αὐτόν. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις εἶναι ἀπαραίτητο νὰ διερευνήσωμε.

$$\text{Π.χ.}\qquad 3x-\frac{2}{3} < 1+\frac{x}{\mu-1}$$

Ἂς χωρίσωμε τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους

$$3x-\frac{x}{\mu+1} < 1+\frac{2}{3}.$$

Ἂς τρέψωμε στὸν αὐτὸν παρονομαστὴ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

Ἄγκιστρον. Παρένθεσις ὑπὸ μορφὴν διπλοῦ μύστακος { } ποὺ χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ περιβάλλῃ μίαν παράστασιν ποὺ περιέχει παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας. Βλέπε ***Παρένθεσις.***

Ἀγκύλη. Εἶδος παρενθέσεως ὑπὸ τὴν μορφὴν [ ]. Χρησιμοποιοῦμε τὶς ἀγκύλες διὰ νὰ περιβάλλωμε μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν ποὺ περιέχει παρενθέσεις. *Ἀπαλοιφὴ τῶν ἀγκυλῶν.* Βλέπε ***Παρένθεσις.***

$\boxed{\Delta'}$ **Ἀδύνατον.** Μία ἐξίσωσις ἢ ἕνα σύστημα εἶναι ἀδύνατα ὅταν δὲν ἐπιδέχωνται καμμίαν λύσιν.

1ον Παράδειγμα: $(x-3)^2-1=x(x-4)-2(x-2)$

Ἀνάγοντες λαμβάνομε:

$$0x=-4$$

Ἄρα καμμία τιμὴ τοῦ x δὲν ἐπαληθεύει.

2ον Παράδειγμα: $\begin{cases} 4x-10y=14 \\ 10x-25y=30 \end{cases}$

Ἁπλοποιοῦντες τὶς δύο ἐξισώσεις, λαμβάνομε:

$$\begin{cases} 2x-5y=7 \\ 2x-5y=6 \end{cases}$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ποσότης $2x-5y$ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἴση μὲ 7 καὶ 6. Ἄρα καμμία τιμὴ τοῦ x καὶ y δὲν ἐπαληθεύει.

Βλέπε **Ἐξίσωσις** (παραμετρικὴ ἐξίσωσις), **Σύστημα** (διερεύνησις).

Ἄθροισμα *δύο ἢ περισσοτέρων μεγεθῶν τοῦ αὐτοῦ εἴδους.* Εἶναι τὸ μέγεθος ποὺ λαμβάνομε ἀπὸ τὴν συνένωσιν τῶν δοθέντων μεγεθῶν.

● **Ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν.** Μποροῦμε νὰ θεωρήσωμε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς τὸ μέτρον δύο ἢ περισσοτέρων μεγεθῶν. Ἂν σχηματίσωμε τὸ ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν αὐτῶν, ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἄ ροισμα αὐτὸ ὀνομάζεται ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Οἱ διάφοροι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ *ὅροι* τοῦ ἀθροίσματος. Ἕνα ἄθροισμα λαμβάνεται διὰ προσθέσεως.

Ἰδιότητες. Ἕνα ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἂν μεταβάλωμε τὴν σειρὰν τῶν ὅρων. Π.χ. $2+8+13=13+2+8$.

∗ Ἕνα ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμε δύο ἢ περισσοτέρους ὅρους μὲ τὸ ἄθροισμά τους.

Π.χ. $74+3+97 = 74+100$

∗ Ἕνα ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμε ἕναν ὅρο μὲ τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν ποὺ ἔχουν καταλλήλως ἐπιλεχθῆ.

Π.χ. $48+372 = 48+2+370 = 50+370$

∗ Διὰ νὰ προσθέσωμε ἄθροισμα εἰς ἀριθμόν, μποροῦμε νὰ προσθέσωμε διαδοχικῶς στὸν ἀριθμὸ αὐτὸ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ὅρους αὐτούς.

$$\boxed{\alpha+(\beta+\gamma) = \alpha+\beta+\gamma}$$

Π.χ. $123+(13+32) = 123+13+32$

∗ Γινόμενον ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμόν Βλέπε ***Γινόμενον.***

∗ Γινόμενον ἀθροίσματος ἐπὶ διαφορὰν ἢ ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα. Βλέπε ***Πολυώνυμον.***

Αἴτημα. Πρότασις τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ, χωρὶς νὰ μποροῦμε νὰ τὴν ἀποδείξωμε. Βλέπε ***Εὐκλείδης.***

$\boxed{\Gamma'}$ **Ἀκεραία.** Παράστασις ἀκεραία, ἐξίσωσις ἀκεραία. Παράστασις, ἐξίσωσις ποὺ δὲν περιέχει γράμμα στὸν παρονομαστή.

Π.χ. $3\alpha x^2\psi \qquad \dfrac{x^3+2\alpha x}{5}$

Ἀκέραιος. Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων. Βλέπε ***Κλάσμα.***

Ἀκμή. Εὐθεῖα διατομῆς δύο ἐπιπέδων ποὺ ἀποτελοῦν τὶς ἕδρες μιᾶς διέδρου. Τὰ πολύεδρα, πρίσματα καὶ πυραμίδες ἔχουν καὶ ἕδρες.

$\boxed{\Sigma\mathrm{T}'}$ **Ἀκολουθία** *ἀριθμῶν* δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ διαδοχὴ τῶν τιμῶν: $\sigma(1), \quad \sigma(2), \quad \sigma(3), \quad \sigma(4), \cdots, \quad \sigma(\nu), \cdots$ τὰς ὁποίας λαμβάνει μιὰ συνάρτησις σ(x), ὅταν ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνη τὰς τιμάς :

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots \nu,\ \ \nu+1,\ \cdots$$

Εἰς κάθε ἀκολουθίαν ὑπάρχει ἕνα πρῶτον, ἕνα δεύτερον, ἕνα τρίτον κ.ο.κ. στοιχεῖον.

Ἂν εἰς μίαν ἀκολουθίαν $\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3, \cdots,\ \alpha_\nu, \cdots$ σταματήσωμε εἰς ἕνα ὡρισμένο στοιχεῖο α_ρ (π.χ. τὸ εἰκοστόν), τότε προκύπτει μία *πεπερασμένη ἀκολουθία* (εἰς τὸ παράδειγμα εἰκοσαμελὴς ἀκολουθία), ποὺ συμβολίζεται μὲ τὴν γραφήν :

$$\alpha_1,\ \ \alpha_2 \cdots,\ \alpha_\rho \text{ (εἰς τὸ παράδειγμα } \alpha_1,\ \ \alpha_2 \cdots,\ \alpha_{20}).$$

Τὰ στοιχεῖα ποὺ ἀποτελοῦν μίαν ἀκολουθίαν λέγονται *μέλη* ἢ *ὅροι* τῆς ἀκολουθίας.

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν λέγεται *αὔξουσα* μέν, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ οἱουδήποτε ὅρου της ἀπὸ τὸν προηγούμενό του εἶναι θετικὸς ἀριθμός :

$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu > 0,$$

φθίνουσα δέ, ὅταν ἡ διαφορὰ οἱουδήποτε ὅρου της ἀπὸ τὸν προηγούμενον του εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

● **Ὅριον ἀκολουθίας : 1. Ὅριον μηδέν.** Εἰς τὴν ἀκολουθίαν :

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{1}{2},\ \ x_3 = \frac{1}{3},\ \cdots,\ \ x_\nu = \frac{1}{\nu},\ \cdots$$

ὅσον τὸ ν μεγαλώνει, τόσον οἱ ὅροι της μικραίνουν καὶ πλησιάζουν πρὸς τὸ μηδέν, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ γίνωνται ἴσοι πρὸς μηδέν. Τότε λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία τείνει πρὸς μηδὲν ἢ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν. Συντόμως γράφομε :

$$x_\nu \to 0\ (\nu \to \infty)$$

2. Ὅριον πεπερασμένον. Εἰς τὴν ἀκολουθίαν :

$$x_1 = 2+1 = 3,\ \ x_2 = 2+\frac{1}{2},\ \ x_3 = 2+\frac{1}{3},\ \cdots x_\nu = 2+\frac{1}{\nu},\ \cdots$$

ὅσον τὸ ν μεγαλώνει, τόσον οἱ ὅροι της μικραίνουν καὶ τείνουν πρὸς τὸ 2. Τότε λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία ἔχει ὅριον τὸ 2 καὶ γράφομε συντόμως

$$x_\nu \to 2\ (\nu \to \infty)$$

3. Ὅριον τὸ ἄπειρον, $\nu \to \infty$: Εἰς τὴν ἀκολουθίαν :

$$1,\ \ 4,\ \ 27,\ \ 256,\ \cdots \nu^\nu,\ \ (\nu+1)^{\nu+1},\ \cdots,$$

εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἕκαστος ὅρος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου καὶ βρίσκεται πάντα ὁ ἑπόμενος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου κ.ο.κ. Συντόμως δὲ γράφομε:

$$x_\nu \to \infty \ (\nu \to \infty).$$

| Δ' | **Ἄκρος.** Εἰς μίαν ἀναλογίαν ὅπως $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, α καὶ δ εἶναι οἱ ἄκροι. Βλέπε ***Ἀναλογία.***

Ἀκτὶς *κύκλου.* Εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο τοῦ κύκλου μὲ ἕνα σημεῖο τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

| Δ' | **Ἀκτίνιον.** Μονὰς μετρήσεως τόξων καὶ γωνιῶν. Παριστάνεται μὲ τὸ σύμβολον ακτ. Τὸ τόξον ἑνὸς (1) ἀκτινίου ἔχει τὸ μῆκος του ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Μία ἐπίκεντρος γωνία ἑνὸς (1) ἀκτινίου βαίνει εἰς τόξον ἑνὸς (1) ἀκτινίου.

● **Μετατροπὴ τῶν ἀκτινίων εἰς μοίρας.** Ἕνας ὁλόκληρος κύκλος ἔχει ὡς μέτρον 2π ἀκτίνια. Ἄρα

$$1 \text{ ακτ} = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} = 57^0\ 17'\ 45''$$

$$1 \text{ ακτ} = \frac{400 \text{ βαθμοί}}{2\pi} = \frac{200 \text{ βαθ.}}{\pi} = 63{,}662 \text{ βαθ.}$$

Ἀλγεβρικὸς. Παράστασις ἀλγεβρική. Βλέπε ***Παράστασις.*** *Κλάσμα ῥητόν.* Βλέπε ***Κλάσμα.***

| Γ' | ◆ **Ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἢ Σχετικὸς ἀριθμός.** Εἶναι ἕνας ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς ποὺ ἔχει πρὸ αὐτοῦ πρόσημον + (θετικὸς ἀριθμὸς) ἢ —(ἀρνητικὸς ἀριθμός). Ὁ ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.

⋆ Ὅταν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ποὺ γράφεται εἶναι θετικός, παραλείπομε τὸ σῆμα του + (σύν), διότι ὑπονοεῖται. Ἀλλὰ τὸ σῆμα — (πλήν) ἑνὸς ἀρνητικοῦ πρέπει πάντα νὰ γράφεται.

π.χ. 3, —2, 5—7+3, —4+10

⋆ Ὁ ἀριθμὸς 0 δὲν συνοδεύεται ποτὲ ἀπὸ σῆμα.

● **Σύγκρισις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.**

⋆ Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 0.

⋆ Κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 0.

⋆ Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

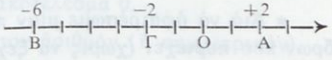
⋆ 'Από δύο θετικοὺς ἀριθμοὺς μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος ποὺ ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν.

⋆ 'Από δύο ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος ποὺ ἔχει τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

Γραφικὴ ἑρμηνεία. Μποροῦμε νὰ θεωρήσωμε κάθε ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ὡς τὴν τετμημένην σημείου ἐπὶ ἄξονος καὶ νὰ ἀντιστοιχίσωμε εἰς κάθε ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονος.

⋆ Ἡ ἀρχὴ 0 ἀντιστοιχεῖ στὸν ἀριθμὸ 0.

⋆ Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα σημεῖο κείμενο δεξιὰ τοῦ 0.



⋆ Κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα σημεῖο κείμενο ἀριστερὰ τοῦ 0.

⋆ Κάθε σημεῖο κείμενο δεξιὰ ἑνὸς ἄλλου ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕναν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Παράδειγμα: Τὸ σημεῖο Γ, τετμημένης —2, κεῖται δεξιὰ τοῦ Β, τετμημένης —6, καὶ γνωρίζομε ὅτι $-2 > -6$.

Ὁμοίως τὸ Α, τετμημένης +2, κεῖται δεξιὰ τοῦ Γ, καὶ γνωρίζομε ὅτι $+2 > -2$.

◆ Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

● **Ἀλληλουχία πράξεων.** ⋆ Εἰς μίαν ἀλληλουχίαν πράξεων πρέπει νὰ ἐκτελοῦμε πρῶτα τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ διαιρέσεις, κατόπιν τὶς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις.

⋆ Νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν αἱ παρενθέσεις, ἂν ὑπάρχουν. Βλέπε *Παρενθέσεις.*

● **Πρόσθεσις.** ⋆ Διὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ αὐτοῦ προσήμου, προσθέτομε τὶς ἀπόλυτες τιμές τους καὶ διατηροῦμε τὸ κοινὸ πρόσημο.

Π.χ. $(+3)+(+4)=(+7)$ ἢ $3+4=7$
$(-6)+(-5)=(-11)$ ἢ $-6-5=-11$.

⋆ Διὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς ἀντιθέτων προσήμων, ὑπολογίζομε τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν καὶ διατηροῦμε τὸ πρόσημον τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

Π.χ. $(+3)+(-8)=(-5)$ ἢ $3-8=-5$
$(-2)+(+9)=(+7)$ ἢ $-2+9=7$

⋆ Διὰ νὰ προσθέσωμε πολλοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, προσθέτομε τὸν δεύτερον μὲ τὸν πρῶτον, τὸν τρίτον μὲ τὸ προηγούμενο ἀποτέλεσμα κ.ο.κ. Μποροῦμε ἐξ ἄλλου νὰ ἀλλάξωμε τὴν σειρὰν τῶν ὅρων.

Π.χ. $(+3)+(-4)+(-5)=(-1)+(-5)=(-6)$

● **Ἀφαίρεσις.** ★ Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμε ἕνα ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ἀλλάζομε τὸ πρόσημόν του καὶ προσθέτομε τὸν νέον αὐτὸν ἀριθμὸν (ἀντίθετον ἢ συμμετρικὸν πρὸς τὸν παλαιόν).

Π.χ. $(-6)-(+3)=(-6)+(-3)=-6-3=-9$

$(+5)-(-2)=(+5)+(+2)=5+2=7$

Ἡ ἀφαίρεσις μετατρέπεται πάντα εἰς πρόσθεσιν.

★ Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μίαν παρένθεσιν, ἀλλάζομε τὰ πρόσημα τῶν ὅρων ποὺ περιέχει (χωρὶς νὰ ξεχάσωμε τὸν πρῶτον ὅρο). Μποροῦμε ν' ἀπαλείψωμε τὴν παρένθεση καὶ νὰ προσθέσωμε τὸ περιεχόμενό της μὲ τοὺς ἄλλους ἀριθμούς.

Π.χ. $-5-(3-6+2)=-5-3+6-2=-4.$

● **Ἀλγεβρικὸν Ἄθροισμα.** Εἶναι μία ἀλληλουχία ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ποὺ χωρίζονται ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλον μὲ + ἢ −.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμε τὴν πρᾶξιν, προσθέτομε ὅλους τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος, ὅλους τοὺς ἀρνητικοὺς ἀπὸ τὸ ἄλλο, καὶ βρίσκομε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀποτελεσμάτων (πρόσθεσις δύο ἀριθμῶν ἑτεροσήμων).

Π.χ. $4-6-7+2-3.$

Ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν: $4+2=6$

» » ἀρνητικῶν » : $-6-7-3=-16.$

Ἀποτέλεσμα: $-16+6=-10.$

Παρατήρησις. Ἂν τὸ ἄθροισμα περιέχῃ δύο ἀντιθέτους ἀριθμούς, μποροῦμε νὰ διαγράψωμε τοὺς δύο αὐτοὺς ἀριθμούς.

Π.χ. $-3+5+7-2+3-6.$

Διαγράφομε -3 καὶ $+3$.

Ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $5+7=12.$

» » ἀρνητικῶν » $-2-6=-8.$

Ἀποτέλεσμα $12-8=4.$

● **Πολλαπλασιασμός.** Γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. Εἶναι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ποὺ ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ὡς πρόσημον:

+ ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τοῦ αὐτοῦ σήματος (ὁμόσημοι)

− ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀντιθέτου σήματος (ἑτερόσημοι).

Τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου λαμβάνεται ἐπίσης σύμφωνα μὲ τὸν ἀκόλουθο κανόνα:

+	ἐπὶ	+	δίδει	+	Π. χ.	$(+5) \times (+2) = +10$
—	ἐπὶ	—	δίδει	+		$(-3) \times (-10) = +30$
+	ἐπὶ	—	δίδει	—		$(+2) \times (-7) = -14$
—	ἐπὶ	+	δίδει	—		$(-4) \times (+3) = -12$

Γινόμενον ἐπὶ 0. Δίδει πάντα ὡς ἀποτέλεσμα 0.

Γινόμενον ἐπὶ —1. Δίδει τὸν ἀντίθετον ἀριθμὸν (ἢ συμμετρικόν).

***Γινόμενον ἐπὶ* +1.** Δίδει τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Ὑπολογίζομε τὸ γινόμενο αὐτὸ πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ ἀποτέλεσμα ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέο ἀποτέλεσμα ἐπὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ.

Πρακτικὸς κανών. Βρίσκομε πρῶτα τὸ πρόσημο τοῦ ἀποτελέσματος μετρώντας τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων. Ἂν ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἄρτιος ἢ μηδέν, τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικό. Ἂν ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι περιττός, τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικό.

Λαμβάνομε τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ὑπολογίζοντες τὸ γινόμενο τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Π. χ. $(-2) \times (+4) \times (+3) \times (-5) \times (-1)$.

Ὑπάρχουν τρεῖς ἀρνητικοὶ παράγοντες, ἑπομένως τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικό.

Ἀποτέλεσμα: —120.

Ἰδιότητες. ⁎ Ἂν ἀλλάξωμε τὸ πρόσημο ἑνὸς παράγοντος, τὸ γινόμενο ἀλλάζει πρόσημο.

⁎ Ἂν ἀλλάξωμε τὸ πρόσημο δύο παραγόντων, τὸ γινόμενο δὲν ἀλλάζει πρόσημο.

Ἄλλαι ἰδιότητες. Βλέπε ***Γινόμενον.***

Διαίρεσις. ⁎ Τὸ πηλίκον ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α δι' ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ β εἶναι ἕνας τρίτος ἀριθμὸς γ, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ β δίδει α.

Ἡ ἀπόλυτος τιμή του εἶναι τὸ πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α δι' ἐκείνης τοῦ β· τὸ πρόσημόν του λαμβάνεται ὅπως ἐκεῖνο τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τῶν προσήμων.

⁎ Ἂν ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι ἀκριβής, γράφομε τὸ ἀποτέλεσμα ὑπὸ μορφὴν λόγου (κλάσματος).

Π.χ. $(-32):8=-4,\quad 5:(-3)=\frac{-5}{3},\quad -2\alpha:x=\frac{-2\alpha}{x}.$

Ἰδιότητες. ⁎ Ἂν ἀλλάξωμε τὸ πρόσημον ἑνὸς ὅρου, τὸ πηλίκον ἀλλάζει πρόσημον.

⁎ Ἂν ἀλλάξωμε τὸ πρόσημον δύο ὅρων, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάζει πρόσημον.

● **Δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.** ⁎ **Ἐκθέτης φυσικός.** Εἶναι τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ὅλων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Π. χ. Ἡ τρίτη δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ -2 ἰσοῦται μὲ

$$(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$$

Γράφομε: $(-2)^3$

Ἰδιότητες : ⁎ Ἡ δύναμις ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντα θετική.

Π.χ. $(3)^4=81$

⁎ Ἡ δύναμις μὲ ἄρτιον ἐκθέτην ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντα θετική.

Π. χ. $(-3)^4=81.$

⁎ Ἡ δύναμις μὲ περιττὸν ἐκθέτην ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντα ἀρνητική.

Π. χ. $(-3)^5=-243$

Παρατήρησις. Ἡ θέσις τοῦ σήματος — ἔχει μεγάλην σημασίαν στὶς πράξεις.

Π.χ. $(-3)^4=81$, ἀλλὰ $-3^4=-(3)^4=-81$

⁎ **Ἐκθέτης κλασματικός.** Ἡ δύναμις μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην ἰσοδυναμεῖ μὲ ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ ἡ ὁποία ἔχει δείκτην μὲν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου, ἐκθέτην δὲ τοῦ ὑπορρίζου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου

Π.χ. $\alpha^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\alpha^3}$

Στὸ πρῶτο παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς -3 εἶναι ποὺ ὑψώνεται στὴν τετάρτη δύναμη, ἐνῶ στὰ δύο ἄλλα τὸ πρόσημο — ἀφορᾷ τὸ ἀποτέλεσμα.

⁎ **Ἐκθέτης 2.** Ἡ δύναμις μὲ ἐκθέτην 2 (τετράγωνο) εἶναι πάντα θετική.

⁎ **Ἐκθέτης 1.** Ἡ δύναμις μὲ ἐκθέτην 1 ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

⁎ **Ἐκθέτης 0.** Ἡ δύναμις μὲ ἐκθέτην 0 ἰσοῦται πάντα μὲ 1.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ

ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

Ἀπαραίτητο βοήθημα διὰ τοὺς μαθητὰς ἀπὸ Α΄ μέχρι καὶ ΣΤ΄ Γυμνασίου, ὑποψηφίους Ἀνωτ. Σχολῶν, φοιτητάς, ἐπιστήμονας καὶ γονεῖς ποὺ θέλουν νὰ ἀνεβάσουν τὸ ἐπίπεδο τῶν Μαθηματικῶν των γνώσεων.

***

Περιέχει ὅλα τὰ διδασκόμενα Μαθηματικὰ (Ἀριθμητικὴν, Ἄλγεβραν, Γεωμετρίαν, Τριγωνομετρίαν)· ἐπίσης Σύνολα καὶ Μοντέρνα Μαθηματικὰ τῶν Γυμνασίων καὶ Φροντιστηρίων (θεωρίαν καὶ ἀσκήσεις), κατὰ τὸν πλέον κατανοητὸν καὶ συνοπτικὸν τρόπον, ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ.

***

Δίδει ὑπεύθυνον ἀπάντησιν εἰς κάθε ἀπορίαν, βοηθεῖ εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀσκήσεων καὶ προετοιμάζει διὰ διαγωνισμοὺς καὶ εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις.

***

Πρωτότυπο καὶ κλασσικὸ ἔργο ποὺ καθιστᾷ τὰ Μαθηματικά, κατὰ τὸν πλέον μοντέρνο τρόπο, προσιτὰ εἰς ὅλους.

***

Μοναδικό, εὔχρηστο καὶ οἰκονομικὸ βοήθημα: ὁλόκληρος ἡ Ἐγκυκλοπαίδεια εἰς **ἕνα** (1) καὶ μόνον **τόμον,** ἤτοι εἰς **22** συνολικῶς ἑβδομ. **τεύχη.**

ΕΚΔΟΤΗΣ: Πέτρος Πλούτσης–Καθηγ. Μαθηματικῶν
ὁδὸς Πατησίων 112–Τηλεφ. 819757
ΑΘΗΝΑΙ (801)

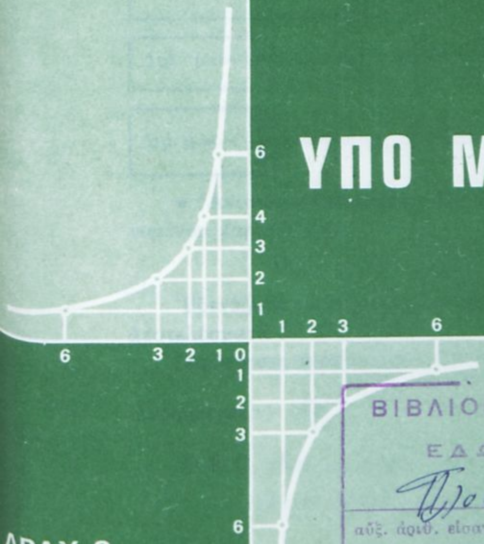
ΠΕΤΡΟΥ ΠΛΟΥΤΣΗ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν (Διπλ. Παρισίων)

ΔΙΑ ΠΡΩΤΗΝ ΦΟΡΑΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ



ΔΡΑΧ. 8
ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΚΑΘΕ ΤΕΤΑΡΤΗ

ΤΕΥΧΟΣ
2

εἰς ἕνα (1) καὶ μόνον τόμον, ἤτοι:
22 συνολικῶς ἑβδομαδιαῖα τεύχη

$$\frac{3x(\mu+1)-x}{\mu+1} < \frac{3+2}{3}$$

$$\frac{3\mu x+3x-x}{\mu+1} < \frac{5}{3}$$

$$\frac{3\mu x+2x}{\mu+1} < \frac{5}{3}$$

$$x.\frac{3\mu+2}{\mu+1} < \frac{5}{3}$$

'Εξετάζομε τὸ πρόσημο τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x.

$$\frac{3\mu+2}{\mu+1} \text{ εἶναι } \begin{cases} >0 & \text{διὰ } \mu<-1 \text{ ἢ } \mu>-\frac{2}{3} \\ <0 & \text{διὰ } -1<\mu<-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Ἂν $\mu<-1$ ἢ $\mu>-\frac{2}{3}$	, λύσις :	$x<\frac{5(\mu+1)}{3(3\mu+2)}$
Ἂν $-1<\mu<-\frac{2}{3}$	, λύσις :	$x>\frac{5(\mu+1)}{3(3\mu+2)}$

Διὰ $\mu=-1$ ἡ ἀνίσωσις δὲν ἔχει νόημα (ἀδύνατος) (παρονομαστὴς=0)

Διὰ $\mu=-\frac{2}{3}$ ἡ ἀνίσωσις ἀληθεύει πάντα.

● **'Ανίσωσις ἀναγομένη εἰς τὸν πρῶτον βαθμόν.** Περίπτωσις γινομένου παραγόντων.

Π.χ. $(2x-1)(3-x)(x+2)>0$

'Εξετάζομε τὸ πρόσημο ἑκάστης παρενθέσεως καὶ ἑρμηνεύομε τὰ ἀποτελέσματα εἰς ἕνα πίνακα.

Περίπτωσις παρονομαστοῦ ποὺ περιέχει τὸ ἄγνωστο.

Παράδειγμα : $\frac{3-x}{x+2} > \frac{2}{x+1}-1$ ἢ $\frac{3-x}{x+2}-\frac{2}{x+1}+1>0.$

'Ο Κ.Π. εἶναι $(x+2)(x+1)$. Ἡ ἀνίσωσις γίνεται :

$$\frac{(3-x)(x+1)-2(x+2)+(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)}>0$$

$$\frac{3x-x^2+3-x-2x-4+x^2+2x+x+2}{(x+2)\ (x+1)}>0$$

$$\frac{3x+1}{(x+2)\ (x+1)}>0.$$

'Εξετάζομε τὸ πρόσημο ἑκάστης παρενθέσεως.

$3x+1>0$ διὰ $x>-\frac{1}{3}$

$x+2>0$ διὰ $x>-2$

$x+1>0$ διὰ $x>-1.$

Πίναξ τῶν ἀποτελεσμάτων:

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
'Αποτέλεσμα		$-$		$+$		$-$		$+$	

Αἱ λύσεις εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ x ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸ δεύτερο καὶ τέταρτο διάστημα:

$\boxed{-2<x<-1}$ $\boxed{x>-\frac{1}{3}}$

◆ **'Ανίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους :** Βλέπε ***Γραφική.***

[Ε'] ◆ **'Ανίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστο.** Εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$$

Χρησιμοποιοῦμε τὸ θεώρημα τὸ σχετικὸ μὲ τὸ πρόσημο τοῦ τριωνύμου.

★ Ἂν τὸ τριώνυμο δὲν ἔχῃ ρίζα ($\Delta<0$), τὸ πρόσημό του εἶναι τὸ πρόσημο τοῦ α. Ἡ ἀνίσωσις λοιπὸν ἢ ἀληθεύει πάντα (ἀόριστος) ἢ δὲν ἀληθεύει ποτὲ (ἀδύνατος).

★ Ἂν τὸ τριώνυμο ἔχῃ ρίζες ($\Delta>0$), τὸ πρόσημό του εἶναι τὸ πρόσημο τοῦ α γιὰ τὶς τιμὲς τοῦ x ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν καὶ ἔχει πρόσημο ἀντίθετο τοῦ α γιὰ τὶς τιμὲς τοῦ x μεταξὺ τῶν ριζῶν.

1ο Παράδειγμα : $x^2-5x+7<0.$

Τὸ τριώνυμο δὲν ἔχει ρίζες ($\Delta=25-28=-3$).
Εἶναι πάντα θετικὸ ($\alpha=+1$). 'Ανίσωσις ἀδύνατος.
2ο Παράδειγμα: $2x^2-3x+1>0$.
Τὸ τριώνυμο ἔχει δύο ρίζες ($\Delta=9-8=1$).

$$x'=\frac{1}{2} \qquad x''=1.$$

$$\text{Λύσεις:}\quad x<\frac{1}{2} \qquad x>1$$

3ο Παράδειγμα: $-3x^2+6x-5<0$.
Τὸν τριώνυμο δὲν ἔχει ρίζα ($\Delta=9-15=-6$).
Εἶναι πάντα ἀρνητικὸ ($\alpha=-3$). 'Ανίσωσις πάντα ἀληθεύει.

$\boxed{\Gamma'}$ **'Αντίθετοι. Ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ἀντίθετοι.** Ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν, ἀλλὰ πρόσημα διάφορα.

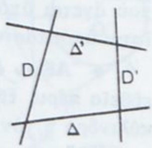
Π.χ. $+3$ καὶ -3 $\qquad x$ καὶ $-x$.

Λέγονται ἐπίσης «συμμετρικοὶ ἀριθμοί».

'Αντικατάστασις. Μέθοδος ἐπιλύσεως συστήματος ἐξισώσεων. Βλέπε ***Σύστημα***.

'Αντιμεταθετικότης. Ἰδιότης τῶν ἀθροισμάτων καὶ τῶν γινομένων ποὺ συνίσταται στὸ ὅτι μποροῦμε ν' ἀνατρέψωμε τὴν σειρὰν τῶν ὅρων ἑνὸς ἀθροίσματος ἢ τὴν σειρὰν τῶν παραγόντων ἑνὸς γινομένου.

$\boxed{E'}$ **'Αντιπαράλληλος. Εὐθεῖες ἀντιπαράλληλες.** Ὅταν μᾶς δίδωνται τέσσερες εὐθεῖες D, D', Δ, Δ', οἱ εὐθεῖες D καὶ D' εἶναι ἀντιπαράλληλες ὡς πρὸς Δ καὶ Δ' ἂν ἡ γωνία (D,Δ)=γωνία (Δ', D').



Ἰδιότητες. ⁎ Ἂν οἱ τέσσερες εὐθεῖες διέρχωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖο, οἱ γωνίες (D, D') καὶ (Δ, Δ') ἔχουν τὰς αὐτὰς διχοτόμους.

⁎ Ἂν οἱ τέσσερες εὐθεῖες εἶναι τεμνόμενες, σχηματίζουν ἕνα τετράπλευρο ἐγγράψιμο καὶ οἱ διχοτόμες τῶν γωνιῶν (D, D') καὶ (Δ, Δ') εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλες.

⁎ Τὰ ἀντίστροφα τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν ἀληθεύουν καὶ μποροῦν νὰ χαρακτηρίζουν ἀντιπαράλληλες εὐθεῖες.

$\boxed{\Sigma T'}$ **'Αντιστροφὴ** τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. Πρόβλημα ποὺ συνίσταται στὸ νὰ εὕρωμε τὸ τόξον x, ὅταν γνωρίζωμε ημx, συνx, εφx, σφx. Βλέπε ***Τριγωνομετρία***.

'Αντίστροφον ἀριθμοῦ, κλάσματος. Εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τοῦ 1 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἢ διὰ τοῦ κλάσματος αὐτοῦ.

Π.χ. Τὸ ἀντίστροφο τοῦ 3 εἶναι $\frac{1}{3}$· τοῦ -4, $-\frac{1}{4}$

$$\text{τοῦ } \frac{3}{5},\ 1 : \frac{3}{5} = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$

'Αντίστροφον θεωρήματος. Εἶναι τὸ ἀντίστροφο θεώρημα τοῦ πρώτου: τὸ συμπέρασμα τοῦ ἀμέσου θεωρήματος γίνεται ὑπόθεσις τοῦ ἀντιστρόφου· ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἀμέσου θεωρήματος γίνεται συμπέρασμα τοῦ ἀντιστρόφου. ● **'Αντίστροφοι ἐξισώσεις.** Βλέπε ***'Εξίσωσις.***

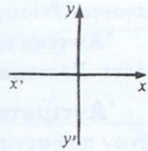
'Αξίωμα. Πρότασις τὴν ὁποίαν ἀποδεχόμεθα χωρὶς νὰ μποροῦμε νὰ τὴν ἀποδείξωμε καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

Π.χ. Δύο σημεῖα ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν.

Δύο ποσότητες ἴσες πρὸς μίαν τρίτην εἶναι ἴσες καὶ μεταξύ τους.

$\boxed{\Gamma'}$ **"Αξων.** Εἶναι εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχομε ἐκλέξει μίαν φορὰν διαδρομῆς. Ἡ θετικὴ φορὰ ὑποδεικνύεται μὲ ἕνα βέλος.

Ὁ ἄξων λέγεται ἐπίσης εὐθεῖα προσανατολισμένη.



$\boxed{\Delta'}$ ● **"Αξονες συντεταγμένων.** Εἶναι δύο ἄξονες, γενικὰ κάθετοι, ὅπου τὸ σημεῖο διατομῆς εἶναι ἡ κοινὴ ἀρχή.

Ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς ἄξονας, x΄x, εἶναι ὁ ἄξων τῶν τετμημένων (θετικὴ φορὰ πρὸς τὰ δεξιά). Ὁ ἄλλος, y΄y, εἶναι ὁ ἄξων τῶν τεταγμένων (θετικὴ φορὰ πρὸς τὰ ἄνω).

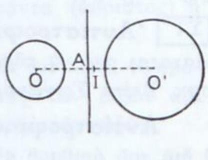
$\boxed{E'}$ ● **"Αξων κύκλου.** Εἶναι ἡ κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδο τοῦ κύκλου ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ κέντρο του. Κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονος εὑρίσκεται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας.

● **"Αξων ἐπιφανείας περιστροφῆς.** (Κύλινδρος ἢ κῶνος). Εἶναι ἡ εὐθεῖα πέριξ τῆς ὁποίας στρέφεται μία γενέτειρα διὰ νὰ παραγάγη τὸν κύλινδρο ἢ τὸν κῶνο.

Κάθε σημεῖο τῆς γενετείρας δημιουργεῖ ἕναν κύκλο ποὺ ὀνομάζεται παράλληλος καὶ ἔχει ὡς ἄξονα τὸν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας.

● **"Αξων συμμετρίας.** Βλέπε ***Συμμετρία.***

$\boxed{E'}$ ● **"Αξων ριζικός.** Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων 0, 0΄ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους. Εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος πρὸς τὴν διάκεντρον εἰς ἕνα σημεῖο A, ὁριζόμενο ἀπὸ τὴν ἀλγεβρικὴ σχέση:



$2\ \overline{00'} \cdot \overline{IA} = R^2 - R'^2$ (I μέσον τοῦ 00΄).

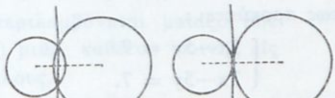
"Αν $R > R'$, IA ἔχει τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ 00΄.

"Αν $R < R'$, IA ἔχει ἀντίθετον φορὰν μὲ 00΄.

'Ιδιότητες. 'Από κάθε σημεῖο τοῦ ῥιζικοῦ ἄξονος, ἐκτὸς τῶν κύκλων, μποροῦμε νὰ φέρωμε πρὸς τοὺς δύο κύκλους ἐφαπτόμενες ἴσου μήκους.

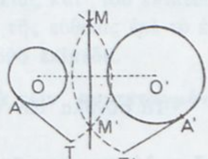
Ὁ ῥιζικὸς ἄξων διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῶν κοινῶν ἐφαφτομένων στοὺς δύο κύκλους.

Κατασκευή. ∗ Κύκλοι τεμνόμενοι. Ὁ ῥιζικὸς ἄξων διέρχεται ἀπὸ τὰ δύο κοινὰ σημεῖα.



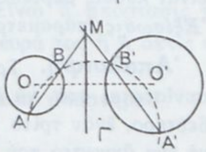
∗ Κύκλοι ἐφαπτόμενοι. Ὁ ῥιζικὸς ἄξων εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη ποὺ φέρεται ἀπὸ τὸ κοινὸ σημεῖο.

∗ Κύκλοι ἐσωτερικοὶ ἢ ἐξωτερικοί. Προσδιορίζομε ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἄξονος κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο : εἰς τυχὸν σημεῖον Α κύκλου Ο κατασκευάζομε τὴν ἐφαπτομένη ΑΤ μὲ μῆκος τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ 00′, καὶ εἰς σημεῖον Α′ τοῦ κύκλου 0′ τὴν ἐφαπτομένη Α′Τ′=ΑΤ.



Τὰ τόξα κύκλων μὲ κέντρο 0, ἀκτῖνα 0Τ, καὶ μὲ κέντρο 0′, ἀκτῖνα 0′Τ′, τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Μ, Μ′. Ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ εἶναι ὁ ῥιζικὸς ἄξων.

Μποροῦμε ἐπίσης νὰ χρησιμοποιήσωμε τὶς ἰδιότητες τοῦ ῥιζικοῦ κέντρου. Τέμνομε τοὺς δύο κύκλους Ο, Ο′ δι' ἑνὸς βοηθητικοῦ κύκλου Γ. Οἱ κύκλοι Ο καὶ Γ ἔχουν ὡς ῥιζικὸν ἄξονα ΑΒ. Ο′ καὶ Γ ἔχουν ὡς ῥιζικὸν ἄξονα Α′Β′. Οἱ δύο ἄξονες τέμνονται στὸ Μ, κέντρο ῥιζικό, ποὺ ἀνήκει στὸν ῥιζικὸ ἄξονα τῶν Ο καὶ Ο′.



'Αρκεῖ νὰ φέρωμε ἀπὸ τὸ Μ τὴν κάθετο πρὸς ΟΟ′.

[Δ′] 'Αόριστος (ἀπροσδιόριστος).

Μία ἐξίσωσις, ἕνα σύστημα, ἕνα πρόβλημα εἶναι ἀόριστα, ὅταν ἐπιδέχωνται ὡς λύσεις ἕναν ἀπειρόριστον ἀριθμὸ τιμῶν ποὺ ἐκλέγονται συμβατικά.

1ο Παράδειγμα : $(x-3)^2-5=x(x-4)-2(x-2)$.

'Αναπτύσσομε : $x^2-6x+9-5=x^2-4x-2x+4$.

Χωρίζομε τοὺς ἀγνώστους:

$$x^2-6x-x^2+4x+2x=4+5-9$$

ἤ $$0x=0.$$

Ὁποιοδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ x, ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύει.

2ο Παράδειγμα:

| Δ' |

$$\begin{cases} 4x-10y=14 \\ 10y-25y=35 \end{cases}$$

Δι' ἁπλοποιήσεως προκύπτει:

$$\begin{cases} 2x-5y=7 \\ 2x-5y=7. \end{cases}$$

Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν μὲ δυὸ ἀγνώστους. Μποροῦμε τότε νὰ ἐκλέξωμε διὰ τὸ ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων ὁποιαδήποτε τιμή.

Λαμβάνομε $x=1$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$2-5y=7$$
$$-5y=5$$
$$y=-1.$$

Λαμβάνομε $x=-4$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$-8-5y=7$$
$$-5y=7+8=15$$
$$y=-3.$$

Τὰ σύνολα τῶν τιμῶν $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

εἶναι λύσεις μερικῶς συμβατικές. Τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστο. Βλέπε *'Εξίσωσις* (παραμετρικὴ ἐξίσωσις). *Σύστημα* (διερεύνησις).

'Απαλοιφή. Τρόπος ἐπιλύσεως τῶν συστημάτων ἐξισώσεων ποὺ συνίσταται στὸ νὰ ἐξαφανίζωμε ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων, κατόπιν ἕνα δεύτερο, ἕναν τρίτο κ.ο.κ. μέχρις ὅτου καταλήξωμε εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστο ποὺ ξέρομε νὰ λύσωμε. Βλέπε *Σύστημα.*

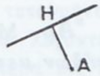
| B | **'Απόλυτος. Τιμὴ ἀπόλυτος.** Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἀπόλυτος ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ὅταν ἀπαλείψωμε τὸ πρόσημο.

Συμβολίζεται μὲ | |.

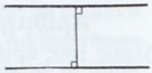
Π.χ.	3	εἶναι ἡ ἀπόλυτος	τιμὴ	τοῦ	(+3)
	5	»	»	»	(−5)
	$\lvert α \rvert$	»	»	»	α

Ἀποπλατυσμένη γωνία. Βλέπε *Εὐθυγωνία.*

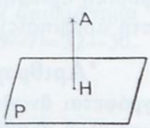
| Β΄ | **Ἀπόστασις ● Ἑνὸς σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν.** Εἶναι τὸ μῆκος (ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας) τῆς καθέτου φερομένης ἀπὸ τὸ σημεῖο ἐπὶ τῆς εὐθείας. Στὸ σχῆμα, ΑΗ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

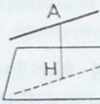


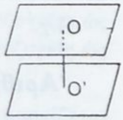
| Γ΄ | **● Ἀπόστασις δυὸ παραλλήλων.** Εἶναι τὸ μῆκος (ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων) μιᾶς καθέτου κοινῆς εἰς τὰς δύο παραλλήλους.



| Ε΄ | **● Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον.** Εἶναι τὸ μῆκος (ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τοῦ ἐπιπέδου) τῆς καθέτου ἡ ὁποία φέρεται ἀπὸ τὸ σημεῖο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. ΑΗ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο Ρ.







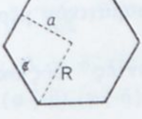
● Ἀπόστασις εὐθείας ἀπὸ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. Εἶναι τὸ μῆκος (ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου) μιᾶς καθέτου ΑΗ φερομένης ἀπὸ τυχὸν σημεῖο τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἢ τὸ μῆκος μιᾶς κοινῆς καθέτου ἐπὶ τὰ δύο ἐπίπεδα.

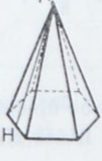
● Ἀπόστασις δύο δοθέντων σημείων διὰ τῶν συντεταγμένων των. Βλέπε *Συντεταγμέναι.*

| Δ΄ | **Ἀπόστημα ● Κανονικοῦ πολυγώνου.** Εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου ἀπὸ ὁποιαδήποτε πλευρά του ἢ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου στὸ πολύγωνο.

Ὀνομάζοντες γ τὴν πλευρά, R τὴν ἀκτῖνα, α τὸ ἀπόστημα :

$$\alpha = \sqrt{R^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$





| Ε΄ | • **Κανονικῆς πυραμίδος**. Εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀπὸ μίαν τῶν ἀκμῶν βάσεως. Εἶναι ἐπίσης τὸ ὕψος τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ποὺ ἀποτελοῦν κάθε ἕδραν. Π.χ. ΚΗ.

Ἄρ. Μονὰς μετρήσεως ἀγροτικῶν ἐπιφανειῶν. Βλέπε ***Πίναξ τῶν μονάδων μετρήσεως.***

Ἀρίθμησις. Σύνολον κανόνων ποὺ ἐπιτρέπουν νὰ ὀνομάζωμε ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς μικροῦ ἀριθμοῦ λέξεων (προφορικὴ ἀρίθμησις)καὶ νὰ γράφωμε μὲ ἕνα μικρὸν ἀριθμὸν σημάτων (γραπτὴ ἀρίθμησις).

Ἀριθμητής. Εἰς ἕνα κλάσμα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ γράφεται ἄνωθεν τῆς κλασματικῆς γραμμῆς. Σημαίνει πόσα μέρη τοῦ μεγέθους πρέπει νὰ πάρωμε.

Π.χ. $\frac{5}{9}$ ἀριθμητής : 5

Ἀριθμὸς ἀλγεβρικός. Βλέπε ***Ἀλγεβρικός.***

• **Ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἀριθμὸς ἀκέραιος·** λέξις ποὺ ἐκφράζει πόσα ἀντικείμενα περιέχονται εἰς μίαν συλλογήν. Ἡ λέξις αὐτὴ παριστάνεται διὰ σημείων τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται ψηφία.

Ἀριθμὸς δεκαδικός. Ἀριθμὸς μὲ ὑποδιαστολὴν ἀπαρτιζόμενος ἀπὸ ἕνα ἀκέραιον μέρος (ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς) καὶ ἀπὸ ἕνα δεκαδικὸν μέρος (δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς)

Π.χ. 35,632 ἀκέραιον μέρος : 35,
δεκαδικὸν μέρος : 632.

Κάθε θέσις δεκαδικῶν ψηφίων ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν δεκαδικὴν μονάδα· ἡ πρώτη θέσις, μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ δέκατα, ἡ δευτέρα εἰς τὰ ἑκατοστὰ κ.ο.κ. Βλέπε ***Κλάσματα δεκαδικά.***

Ἀριθμὸς μικτός. Ἀριθμὸς ἀποτελούμενος ἀπὸ ἕνα ἀκέραιον μέρος καὶ ἀπὸ ἕνα κλασματικὸν μέρος.

Π.χ. $3\frac{7}{8}$, ἀκέραιον μέρος : 3

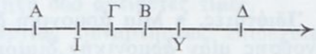
κλασματικὸν μέρος : $\frac{7}{8}$

Λαμβάνομε μικτὸν ἀριθμὸν ἐξάγοντες τοὺς ἀκεραίους ποὺ περιέχονται στὸ κλάσμα. Βλέπε ***Κλάσμα.***

᾿Αριθμόσημον λέγεται κάθε σημεῖον ἑκάστου ἄξονος μαζὶ μὲ τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῆς συναρτήσεως ποὺ παριστάνει. ᾿Εννοεῖται ὅτι ἕνα ἀριθμόσημον τοῦ x΄x δὲν ἔχει πάντοτε τὸν ἴδιον ἀριθμὸν μὲ τὴν τετμημένην του, ὅπως καὶ ἕνα ἀριθμόσημον τοῦ y΄y μὲ τὴν τεταγμένην του. Οἱ δύο ἄξονες βαθμολογημένοι κατ᾿ αὐτὸν τὸν τρόπον λέγονται *κλίμακες* ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς ποὺ παριστάνουν. Συχνότερα εἰς τὰ γραφικὰ χρησιμοποιοῦμε τὴν *μετρικὴν κλίμακα*. Εἰς τὴν μετρικὴν κλίμακα τὰ τμήματα, ποὺ ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ὅλα τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμοσήμων μὲ τὴν ἰδίαν διαφοράν, εἶναι ἴσα, π.χ. τὸ τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ ἀριθμόσημα 3 καὶ 5, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ ἀριθμόσημα 6 καὶ 8, 7 καὶ 9, 30 καὶ 32 κλπ., διότι $5-3=8-6=2=9-7=32-30$. Βλέπε ***Συνάρτησις.***

| Ε΄ | **῾Αρμονικός.** ● **Διαίρεσις ἁρμονική.** Τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, σχηματίζουν μιὰν ἁρμονικὴν διαίρεσιν, ὅταν τὰ Α καὶ Β διαιροῦν τὸ τμῆμα ΓΔ στὸν αὐτὸ λόγο. Α καὶ Β λέγονται ἁρμονικοὶ συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰ σημεῖα ΓΔ. ᾿Αντιστρόφως Γ καὶ Δ εἶναι ἁρμονικοὶ συζυγεῖς ὡς πρὸς Α καὶ Β.

Διάταξις τῶν σημείων. ⋆ Πρέπει πάντα τὸ τμῆμα ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δύο συζυγῆ σημεῖα νὰ κεῖται πάνω ἀπὸ τὸ τμῆμα ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα.



⋆ Δύο σημεῖα συζυγῆ εἶναι πάντα ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα.

Εἰς τὸ σχῆμα, Α καὶ Β εἶναι ἀριστερὰ τοῦ μέσου Υ τοῦ ΓΔ, Γ καὶ Δ εἶναι δεξιὰ τοῦ μέσου Ι τοῦ ΑΒ.

⋆ ῎Αν Β πλησιάζη στὸ Γ, Α πλησιάζει ἐπίσης. ῎Αν Β ἀπομακρύνεται, Α ἀπομακρύνεται ἐπίσης.

⋆ ῎Αν Β φθάνη στὸ μέσον τοῦ ΓΔ, τὸ συζυγές του Α ἀπομακρύνεται ἀπεριόριστα. Πρακτικά, τὸ μέσον Υ τοῦ ΓΔ ἢ Ι τοῦ ΑΒ δὲν ἔχει ἁρμονικὸ συζυγές.

᾿Αλγεβρικαὶ σχέσεις. ⋆ Μεταξὺ τῶν ἀλγεβρικῶν μέτρων ἔχομε τὴν σχέσιν

$$\frac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}}{\overline{\mathrm{A\Delta}}} = -\frac{\overline{\mathrm{B\Gamma}}}{\overline{\mathrm{B\Delta}}}.$$

⋆ ᾿Ονομάζοντες α, β, γ, δ, τὶς τετμημένες τοῦ Α, Β, Γ, Δ, ἔχομε

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 2(\alpha\beta+\gamma\delta).$$

῾Αρμονικὴ σχέσις :

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{A\Gamma} + \frac{1}{A\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{BA} = \frac{1}{B\Gamma} + \frac{1}{B\Delta}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{2}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{\Gamma A} + \frac{1}{\Gamma B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{\Delta A} + \frac{1}{\Delta B}$$

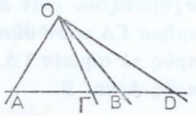
Λέγομεν ὅτι AB εἶναι *μέση ἁρμονικὴ* τοῦ ΑΓ καὶ ΑΔ. ῾Ομοίως ΓΔ εἶναι ἡ μέση ἁρμονικὴ τοῦ ΓΑ καὶ ΓΒ.

⁎ Μὲ τὰ μέσα τῶν τμημάτων :

$$\overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{I\Gamma} \cdot \overline{I\Delta}$$

$$\overline{Y\Gamma}^2 = \overline{Y\Delta}^2 = \overline{YA} \cdot \overline{YB}.$$

● **῾Αρμονικὴ δέσμη.** Σύνολον εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖο καὶ διερχομένων ἀπὸ 4 σημεῖα ποὺ σχηματίζουν μίαν ἁρμονικὴν διαίρεσιν.



Τὸ κοινὸ σημεῖο εἶναι τὸ *κέντρο*, οἱ εὐθεῖες εἶναι οἱ *ἀκτῖνες* τῆς δέσμης. Ἂν Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς Γ καὶ D, αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ OD.

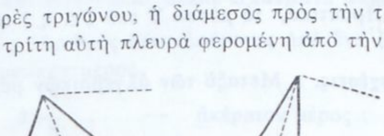
᾿Ιδιότητες. ⁎ Μία ἁρμονικὴ δέσμη προσδιορίζει ἐπὶ μιᾶς τυχούσης τεμνούσης μίαν ἁρμονικὴν διαίρεσιν.

⁎ Τέσσερες εὐθεῖες διερχόμενες ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖο διὰ νὰ σχηματίζουν δέσμην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τρεῖς ἐξ αὐτῶν νὰ προσδιορίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὴν τετάρτην.

⁎ Δύο συζυγεῖς ἀκτῖνες μιᾶς δέσμης διὰ νὰ εἶναι κάθετες, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι διχοτόμες τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες ἀκτῖνες.

Παραδείγματα ἁρμονικῶν δεσμῶν.

⁎ Δύο πλευρὲς τριγώνου, ἡ διάμεσος πρὸς τὴν τρίτη καὶ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν τρίτη αὐτὴ πλευρὰ φερομένη ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφή.



⁎ Δύο πλευρὲς γωνίας καὶ οἱ δύο διχοτόμες τῆς γωνίας αὐτῆς.

● **Μέση ἁρμονική.** Βλέπε ἀνωτέρω : ***Σχέσις ἁρμονική.***

'Αρνητικός. 'Αριθμὸς ἀρνητικός. 'Αλγεβρικὸς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου προηγεῖται τὸ σῆμα—

Π.χ. $-3, \quad -\frac{5}{2}$.

[Δ'] **"Αρρητος.** ● "Αρρητος παράστασις. Παράστασις ποὺ περιέχει τοὐλάχιστον ἕνα γράμμα ἐντὸς ὑπορρίζου. Μία ἄρρητος ἀλγεβρικὴ παράστασις μὲ τετραγωνικὰ ριζικὰ εἶναι ὡρισμένη μόνονδιὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων ποὺ καθιστοῦν θετικὴν τὴν ποσότητα ἐντὸς τοῦ ὑπορρίζου.

Π.χ. $3x-\sqrt{x^2-4} \qquad \frac{3-\beta}{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}$.

'Η πρώτη παράστασις εἶναι ὡρισμένη μόνον διὰ $x>2$ ἢ $x<-2$. 'Η δευτέρα εἶναι πάντα ὡρισμένη.

● **Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀρρήτων παραστάσεων.** Βλέπε ***Ρίζα***.

● **"Αρρητες ἐξισώσεις.** 'Εξισώσεις ποὺ περιέχουν στὸ ὑπόρριζο παραστάσεις ἐντὸς τῶν ὁποίων ὑπάρχει τὸ ἄγνωστον. Βλέπε ***'Εξισώσεις***.

[Ε'] **"Αρτιος.** ● **Συνάρτησις ἀρτία.** Συνάρτησις ποὺ λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν ὅταν δίδωμε στὴν μεταβλητὴ δύο ἀντίθετες τιμές.

'Η γραφικὴ παράστασις μιᾶς ἀρτίας συναρτήσεως ἐπιδέχεται τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων ὡς ἄξονα συμμετρίας.

Π.χ. $y=-x^2 \qquad y=5x^2$.

● **'Αριθμὸς ἄρτιος.** 'Αριθμὸς ἀκέραιος διαιρετὸς διὰ 2. Οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ καταλήγουν εἰς 0, 2, 4, 6, 8. 'Ο γενικὸς τύπος τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν εἶναι: 2α, ὅπου α ἰσοῦται μὲ ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν.

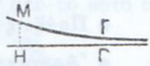
[ΣΤ'] **'Αρχικαὶ συναρτήσεις.** "Οταν μᾶς δίδεται ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως καὶ ζητῆται ἡ συνάρτησις ἀπὸ τὴν ὁποίαν προῆλθε, ἡ ἀντίστροφος αὐτὴ πρᾶξις λέγεται εὕρεσις τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως. Βλέπε ***Παράγωγος***. 'Απὸ τὰς παραγώγους, λοιπόν, βρίσκομε τὰς ἀρχικὰς ὡρισμένων συναρτήσεων, ὅπως π.χ.

Συναρτήσεις	Αρχικαὶ
x^{μ}	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$
αx^{μ}	$\frac{\alpha x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$

συνx	ημx + C
ημx	−συνx + C
$\frac{1}{συν^2x}$	εφx + C
$-\frac{1}{ημ^2x}$	σφx + C

'Ασύμβατοι εὐθεῖαι. Δύο εὐθεῖες ποὺ δὲν τέμνονται (δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ σημεῖο) ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν, ἀλλὰ καὶ δὲν ἀνήκουν εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδο. Δὲν λέγονται ὅμως παράλληλες. Βλέπε *Παράλληλος*.

'Ασύμπτωτος. Μία εὐθεῖα D εἶναι ἀσύμπτωτος πρὸς μίαν καμπύλην Γ, ὅταν ἡ ἀπόστασις ΜΗ σημείου Μ τῆς καμπύλης πρὸς τὴν εὐθεῖαν γίνεται ἀπείρως μικρά, ὅταν τὸ σημεῖο Μ ἀπομακρύνεται ἀπεριορίστως ἐπὶ τῆς καμπύλης.



● **'Αναζήτησις τῆς ἀσυμπτώτου.** ✱ "Αν ἡ συνάρτησις y τείνη πρὸς μίαν τιμὴν α ὡρισμένην, ὅταν x αὐξάνη ἀπεριορίστως, τότε ἡ καμπύλη—παράστασις ἐπιδέχεται μίαν ἀσύμπτωτον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων ποὺ ἔχει ὡς τεταγμένην y=α.

✱ "Αν ἡ συνάρτησις y αὐξάνη ἀπεριορίστως, ὅταν x τείνη πρὸς μίαν τιμὴν β ὡρισμένην, ἡ καμπύλη-παράστασις ἐπιδέχεται μίαν ἀσύμπτωτον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων ποὺ ἔχει ὡς τεταγμένην x=β.

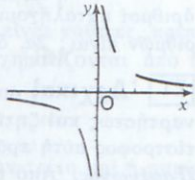
1ο Παράδειγμα : $y = \frac{3}{x}$

"Αν x εἶναι πολὺ μεγάλο εἰς ἀπόλυτον τιμήν, τότε y τείνει πρὸς Ο.

1η ἀσύμπτωτος $y = 0$.

"Αν x τείνη πρὸς Ο, τότε y αὐξάνει ἀπεριορίστως εἰς ἀπόλυτον τιμήν.

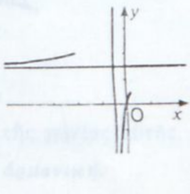
2α ἀσύμπτωτος $x = 0$



2ο Παράδειγμα : $y = \frac{3x}{2x+1}$.

"Αν x εἶναι πολὺ μεγάλο εἰς ἀπόλυτον τιμήν, τότε y τείνει πρὸς $\frac{3}{2}$.

1η ἀσύμπτωτος $y = \frac{3}{2}$.



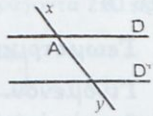
Ἄν x τείνῃ πρὸς $-\frac{1}{2}$, τότε y μεγαλώνει ἀπεριορίστως εἰς ἀπόλυτον τιμήν.

2α ἀσύμπτωτος $\quad x = -\frac{1}{2}$.

Ἄτοπον. Συλλογισμὸς διὰ τοῦ ἀτόπου ἢ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή. Τρόπος ἐμμέσου ἀποδείξεως, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο ὑποθέτομε ὡς λανθασμένο τὸ συμπέρασμα στὸ ὁποῖο θέλομε νὰ φθάσωμε. Ὁ συλλογισμὸς ὁδηγεῖ τότε εἰς μίαν ἀντίφασιν πρὸς τὴν ὑπόθεσιν ἢ πρὸς μίαν πρότασιν ποὺ ἔχει ἀποδειχθῆ προηγουμένως, ὁπότε ἡ γενομένη ὑπόθεσις εἶναι ἄτοπος, καὶ συνεπῶς τὸ συμπέρασμα στὸ ὁποῖο θέλομε νὰ φθάσωμε εἶναι σωστό. Συλλογισμὸν τοῦ εἴδους αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμε ἀρκετὰ συχνὰ διὰ ν' ἀποδείξωμε ἕνα ἀντίστροφο θεώρημα.

Γ΄ Παράδειγμα: Ἄν δύο εὐθεῖες D, D΄ εἶναι παράλληλες, κάθε εὐθεῖα xy ποὺ τέμνει D, τέμνει ἐπίσης D΄.

Ἄς ὑποθέσωμε ὅτι xy δὲν τέμνει D΄. Τότε θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς αὐτὴν καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖο A θὰ εἴχαμε δύο παράλληλες πρὸς D΄ (ἀντίφασις πρὸς τὸ Εὐκλείδειο αἴτημα), ἄρα xy τέμνει D΄.



Ἀφαίρεσις. Πρᾶξις ποὺ ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίζωμε τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν. Βλέπε *Διαφορά*.

Α΄ **Ἀφαιρετέος.** Εἶναι ὁ ἀριθμός πού μᾶς λέγει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῆ ὁ μειωτέος.

Π.χ. $\quad$ 5 — 3 = 2

μειωτέος — ἀφαιρετέος = ὑπόλοιπον

Β΄ **Βάσις. ● Ἀριθμητική.** Βάσις τοῦ συστήματος ἀριθμήσεως εἶναι ὁ ἀριθμός, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖο προβαίνομε στὴ σύνθεση τῶν ἀντικειμένων, διὰ νὰ τὰ ἀπαριθμήσωμε. Στὸ σύστημά μας ἡ βάσις εἶναι 10, δηλαδὴ συνθέτομε τὰ ἀντικείμενα κατὰ 10 (δεκάδες), κατόπιν κατὰ 10 δεκάδες (ἑκατοντάδες), κατόπιν κατὰ 10 ἑκατοντάδες κ.ο.κ.

● **Βάσις δυνάμεως.** Π.χ. τὸ γινόμενον $5 \cdot 5 \cdot 5$ γράφεται 5^3, μὲ δηλ. ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου, ποὺ λέγεται βάσις τῆς δυνάμεως.

● **Γεωμετρία.** ⁎ **Ἰσοσκελὲς τρίγωνον.** Ἡ βάσις του εἶναι ἡ πλευρὰ ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἴσων πλευρῶν.

Γ΄ ⁎ **Τραπέζιον.** Οἱ βάσεις του εἶναι οἱ παράλληλες πλευρές του.

Ἡ μέση βάσις εἶναι τὸ τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν δύο μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

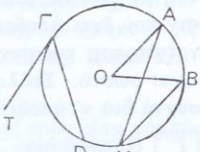
⋆ **Βάσις πρίσματος, πυραμίδος, κυλίνδρου,...** Βλέπε ***Πρῖσμα, Πυραμίς, Κύλινδρος.***

Βαθμός. Βλέπε ***Πίναξ τῶν μονάδων μετρήσεως.***

• **Πράξεις ἐπὶ τῶν βαθμῶν.** Βλέπε ***Συμμιγεῖς.***

• **Μετατροπὴ τῶν βαθμῶν.** Βλέπε ***Συμμιγεῖς.***

Βαίνει. Ἀπομονώνομε ἕνα τόξο μεταξὺ τῶν πλευρῶν γωνίας. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ βαίνει στὸ τόξο ΑΒ, ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΜΒ βαίνει στὸ τόξο ΑΒ.



Εἰδικὴ περίπτωσις. Ἂν μία τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι ἐφαπτομένη στὸν κύκλο, ἡ γωνία αὐτὴ βαίνει στὸ τόξο ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν κορυφή του καὶ ἀπὸ τὴν τέμνουσα πλευρὰ (χορδή). Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία DΓΤ βαίνει στὸ τόξο DΓ.

Γεωμετρικός. • **Τόπος γεωμετρικός.** Βλέπε ***Τόπος.***

Γινόμενον. • **Δύο ἀριθμῶν.** Τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἕνα θετικὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν β εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν β ἴσων ἀριθμῶν πρὸς α, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομε ἂν ἐκτελέσωμε ἕναν πολλαπλασιασμό.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ β ὀνομάζονται παράγοντες τοῦ γινομένου.

Παρατήρησις. Ἡ λέξις *γινόμενον* σημαίνει τὸ ἀποτέλεσμα ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ καὶ ὄχι ὁποιασδήποτε πράξεως.

• **Πολλῶν ἀριθμῶν.** Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ λαμβάνομε εὑρίσκοντες τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ β, κατόπιν τὸ γινόμενον τοῦ ἀποτελέσματος ἐπὶ γ, κατόπιν τὸ γινόμενον τοῦ νέου ἀποτελέσματος ἐπὶ δ, κ.ο.κ. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ὀνομάζονται παράγοντες τοῦ γινομένου.

• **Γινόμενον ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, κλασμάτων, διανυσμάτων.** Βλέπε ***Ἀλγεβρικός, Κλάσμα, Διάνυσμα.***

Ἰδιότητες. ⋆ Εἰς ἕνα γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων μποροῦμε νὰ ἐναλλάξωμε τὴν σειρὰν τῶν παραγόντων.

$$\boxed{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot x = \alpha \cdot x \cdot \gamma \cdot \beta}$$

Π.χ. $2 \times 5 = 5 \times 2.$

⋆ Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα ἄθροισμα (ἢ μίαν διαφορὰν) ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος (ἢ τῆς διαφορᾶς) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ νὰ προσθέσωμε (ἢ ἀφαιρέσωμε) τὰ ἀποτελέσματα.

$$\boxed{(\alpha - \beta + \gamma)\cdot x = \alpha \cdot x - \beta\ x + \gamma \cdot x}$$

Π.χ, $(7+3-5)\times 4 = 7\times 4 + 3\times 4 - 5\times 4.$

Ἡ ὡς ἄνω ἰδιότης λέγεται ἐπιμεριστική.

$\boxed{\Gamma'}$ ⋆ Γινόμενον ἀθροισμάτων καὶ διαφορῶν μεταξύ των. Βλέπε ***Πολυώνυμα***.

$\boxed{B'}$ ⋆ Εἰς ἕνα γινόμενον πολλῶν παραγόντων μποροῦμε νὰ ἐκτελέσωμε ἐπὶ μέρους γινόμενα.

Π.χ. $7\times\boxed{2}\times 3\times\boxed{5} = 7\times 3\times\boxed{10} = 21\times 10 = 210.$

⋆ Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε γινόμενον ἐπὶ ἀριθμὸν ἢ ἀριθμὸν ἐπὶ γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα μόνον παράγοντα ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

$$\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)\cdot x = \alpha\cdot\beta\cdot(\gamma\cdot x)\cdot\delta}$$

Π χ. $(7\times\boxed{5}\times 13)\times\boxed{2} = 7\times\boxed{10}\times 13.$

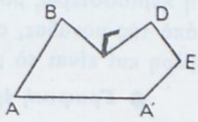
⋆ Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε γινόμενον ἐπὶ γινόμενον, γράφομε εἰς ἕνα μόνον γινόμενον ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν δύο γινομένων

$$\boxed{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot(x\cdot y) = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot x\cdot y}$$

Π.χ. $(2\times 7\times 4)\times(5\times 6) = 2\times 7\times 4\times 5\times 6.$

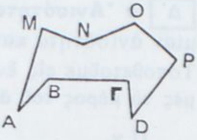
Γραμμή. ⋆ **Εὐθεῖα γραμμή.** Βλέπε ***Εὐθεῖα***,

● **Γραμμὴ τεθλασμένη.** Γραμμὴ ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα συνδεόμενα γωνιωδῶς.



$\boxed{\Delta'}$ **Ἰδιότητες.** ⋆ Μία τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μακροτέρα πάσης εὐθείας ἐχούσης τὰ αὐτὰ ἄκρα:

$$AA' < AB + B\Gamma + \Gamma D + DE + EA'$$

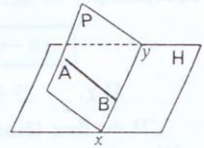


⋆ Μία κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε τεθλασμένην γραμμὴν ποὺ περιβάλλει τὴν πρώτην καὶ ποὺ ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα:

$$AB + B\Gamma + \Gamma D < AM + MN + NO + OP + PD.$$

⋆ **Γραμμὴ καμπύλη.** Κάθε γραμμὴ ποὺ δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα οὔτε τεθλασμένη.

$\boxed{\Sigma\mathrm{T}'}$ ● **Γραμμὴ κλίσεως ἢ μεγαλυτέρας κλίσεως ἐπιπέδου.** Ὅταν μᾶς δίδεται ἕνα ἐπίπεδο συγκρίσεως Η (γενικὰ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο) καὶ ἕνα ἐπίπεδο Ρ, ὀνομάζομε γραμμὴν κλίσεως τοῦ Ρ ὡς πρὸς Η μίαν τυχοῦσαν κάθετον ποὺ φέρεται στὸ ἐπίπεδο Ρ στὴ διατομὴ xy τῶν δύο ἐπιπέδων: ΑΒ εἶναι μία γραμμὴ κλίσεως.



Ἰδιότητες. ⋆ Ὅλες οἱ γραμμὲς κλίσεως ἑνὸς ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδο συγκρίσεως εἶναι παράλληλες.

⋆ Ἡ γωνία ποὺ σχηματίζει ἡ γραμμὴ κλίσεως μὲ τὸ ἐπίπεδο συγκρίσεως ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων.

⋆ Ἡ γωνία ποὺ σχηματίζει ἡ γραμμὴ κλίσεως μὲ τὸ ἐπίπεδο συγκρίσεως εἶναι ἡ μεγαλυτέρα γωνία ποὺ σχηματίζει μία τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ Ρ μὲ τὸ ἐπίπεδο συγκρίσεως.

⋆ Μία γωνία κλίσεως ἀρκεῖ διὰ νὰ ὁρίσῃ ἕνα ἐπίπεδο. Πράγματι, μποροῦμε εἰς αὐτὴν νὰ προσθέσωμε τὴν εὐθεῖαν διατομῆς xy, ποὺ γνωρίζομε εὔκολα, διότι ἡ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Η εἶναι κάθετος πρὸς ΑΒ στὸ Β.

$\boxed{\Delta'}$ **Γραμμική.** ● **Γραμμικὴ παράστασις.** Ἀκεραία παράστασις τῆς ὁποίας ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι τὸ πολὺ τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Π.χ. $2x + 3y - z$

● **Γραμμικὸς συνδυασμός.** Βλέπε *Συνδυασμός*.

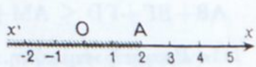
● **Γραμμικὴ συνάρτησις.** Βλέπε *Συνάρτησις*.

Γραφική. ◆ **Γραφικὴ κλῖμαξ.** Εἶναι ἡ κλῖμαξ ποὺ ὑπάρχει εἰς μίαν ἀπὸ τὰς γωνίας ἑνὸς χάρτου ἢ ἐπιπέδου καὶ ποὺ παριστάνει μίαν ἢ περισσοτέρας μονάδας ἀναγομένας εἰς τὴν κλίμακα τοῦ χάρτου. Μία ἀπὸ τὰς μονάδας, στὸ ἄκρο τῆς κλίμακος, συχνὰ ὑποδιαιρεῖται εἰς δέκα μέρη καὶ εἶναι τὸ μέτρο τῆς κλίμακος.

◆ **Γραφικὴ ἑρμηνεία ἀνισοτήτων.**

$\boxed{\Delta'}$ ● **Ἀνισότητες μὲ ἕνα ἄγνωστον.** ⋆ **Μία μόνον ἀνισότης.** Λύοντες μίαν ἀνισότητα καταλήγομε εἰς μίαν λύσιν τοῦ εἴδους $x < \alpha$ ἢ $x > \beta$. Τοποθετοῦμε εἰς ἕνα ἄξονα τὴν τιμὴν α ἢ β καὶ καλύπτομε μὲ γραμμὲς τὸ μέρος τοῦ ἄξονος ποὺ δὲν ἐπαληθεύει.

Π.χ. $3-(x+1) < 2(x-2)$



Ἡ ἐπίλυσις δίδει $x > 2$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

Ἀπαραίτητο βοήθημα διὰ τοὺς μαθητὰς ἀπὸ Α΄ μέχρι καὶ ΣΤ΄ Γυμνασίου, ὑποψηφίους Ἀνωτ. Σχολῶν, φοιτητάς, ἐπιστήμονας καὶ γονεῖς ποὺ θέλουν νὰ ἀνεβάσουν τὸ ἐπίπεδο τῶν Μαθηματικῶν των γνώσεων.

***

Περιέχει ὅλα τὰ διδασκόμενα Μαθηματικὰ (Ἀριθμητικὴν, Ἄλγεβραν, Γεωμετρίαν, Τριγωνομετρίαν)· ἐπίσης Σύνολα καὶ Μοντέρνα Μαθηματικὰ τῶν Γυμνασίων καὶ Φροντιστηρίων (θεωρίαν καὶ ἀσκήσεις), κατὰ τὸν πλέον κατανοήτὸν καὶ συνοπτικὸν τρόπον, ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ.

***

Δίδει ὑπεύθυνον ἀπάντησιν εἰς κάθε ἀπορίαν, βοηθεῖ εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀσκήσεων καὶ προετοιμάζει διὰ διαγωνισμοὺς καὶ εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις.

***

Πρωτότυπο καὶ κλασσικὸ ἔργο ποὺ καθιστᾷ τὰ Μαθηματικά, κατὰ τὸν πλέον μοντέρνο τρόπο, προσιτὰ εἰς ὅλους.

***

Μοναδικό, εὔχρηστο καὶ οἰκονομικὸ βοήθημα: ὁλόκληρος ἡ Ἐγκυκλοπαίδεια εἰς **ἕνα** (1) καὶ μόνον **τόμον,** ἤτοι εἰς **22** συνολικῶς ἑβδομ. **τεύχη**.

ΕΚΔΟΤΗΣ: Πέτρος Πλούτσης–Καθηγ. Μαθηματικῶν
ὁδὸς Πατησίων 112–Τηλεφ. 819757
ΑΘΗΝΑΙ (801)

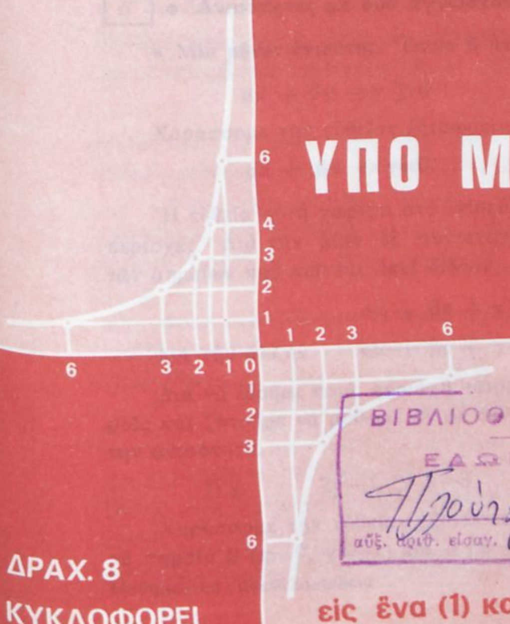
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν (Διπλ. Παρισίων)

ΔΙΑ ΠΡΩΤΗΝ ΦΟΡΑΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ-ΑΛΓΕΒΡΑ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙ

ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ



ΔΡΑΧ. 8
ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΚΑΘΕ ΤΕΤΑΡΤΗ

εἰς ἕνα (1) καὶ μόνον τόμον, ἤτοι:
22 συνολικῶς ἑβδομαδιαῖα τεύχη

ΤΕΥΧΟ
3

Τοποθετοῦμε στὸν ἄξονα x′ x, μὲ ἀρχὴν O, τὸ σημεῖο A τετμημένης 2, καὶ σβήνομε μὲ γραμμὲς τὴν ἡμιευθεῖαν Ax′.

⋆ **Πολλαὶ συναληθεύουσαι ἀνισότητες.** Ἐνεργοῦμε χωριστὰ διὰ κάθε ἀνισότητα, ὅπως στὸ προηγούμενο παράδειγμα. Τὸ μέρος τοῦ ἄξονος ποὺ μένει μὴ χαραγμένο δίδει τὴν λύσιν αὐτοῦ τοῦ συνόλου ἀνισοτήτων.

Π.χ.

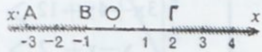
$$2x + 10 > 1 - x \qquad x > -3$$
$$x + 2 > 1 - 3(x+1) \qquad x > -1$$
$$2x - 1 < 1 + x \qquad x < 2.$$

Τοποθετοῦμε στὸν ἄξονα τὰ σημεῖα :

A τετμημένης −3.

B τετμημένης −1.

Γ τετμημένης 2.



Σβήνομε μὲ γραμμὲς τὸ μέρος Ax′ ($x > -3$), κατόπιν τὸ μέρος AB ($x > -1$), κατόπιν τὸ μέρος Γx ($x < 2$). Παραμένει τὸ τμῆμα BΓ : ὅλα τὰ σημεῖα τὰ κείμενα μεταξὺ B καὶ Γ ἔχουν μίαν τετμημένην ποὺ ἀληθεύει τὸ σύστημα ἀνισοτήτων.

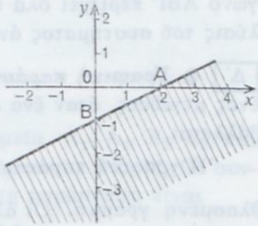
Δ′ ● Ἀνισότητες μὲ δύο ἀγνώστους.

⋆ **Μία μόνον ἀνισότης.** Ἔστω ἡ ἀνισότης :

$$\alpha x + \beta y + \gamma > 0$$

Χαράσσομε τὴν εὐθεῖαν ἐξισώσεως

$$\alpha x + \beta x + \gamma = 0.$$



Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ χωρίζει στὸ ἐπίπεδο δύο περιοχές. Διὰ τὴν μίαν οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων ποὺ κεῖνται ἐκεῖ δίδουν

$$\alpha x + \beta y + \gamma > 0$$

Διὰ τὴν ἄλλην, $\alpha x + \beta y + \gamma < 0$

Διὰ νὰ ἰδοῦμε ποιὰ περιοχὴ ταιριάζει, ἐκλέγομε ἕνα σημεῖο τῆς μιᾶς καὶ ζητοῦμε νὰ μάθωμε ἂν οἱ συντεταγμένες της ἀληθεύουν ἢ ὄχι τὴν ἀνισότητα.

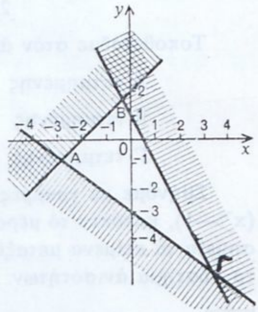
Π.χ. $2y - 1 > x - 3$ ἢ $2y - x + 2 > 0$.

Χαράσσομε τὴν εὐθεῖαν ἐξισώσεως $2y - x + 2 = 0$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα B ($x = 0$, $y = -1$) καὶ A ($x = 2$, $y = 0$). Οἱ συντεταγμένες τοῦ O δίδουν $0-0+2>0$. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἄνω περιοχῆς ταιριάζουν. Σβήνομε μὲ γραμμὲς τὸ κάτω ἡμιεπίπεδο.

⁕ **Πολλαὶ συναληθεύουσαι ἀνισότητες.** Ἐνεργοῦμε χωριστὰ διὰ κάθε ἀνισότητα, ὅπως στὸ προηγούμενο παράδειγμα. Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ μὴ σβησμένο μὲ γραμμὲς παριστάνει τὴν λύσιν τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων.

Παράδειγμα :

$$3x+4y+12>0$$
$$y<x+2$$
$$x+y<1-x$$



ἢ $\left\{\begin{array}{l} 3x+4y+12>0 \\ x-y+2>0 \\ 2x+y-1<0. \end{array}\right.$

Χαράσσομε τὶς εὐθεῖες ἐξισώσεων :

$$3x+4y+12=0 \ (\text{ΑΓ})$$
$$x-y+2=0 \ (\text{ΑΒ})$$
$$2x+y-1=0 \ (\text{ΒΓ}).$$

Οἱ συντεταγμένες τοῦ 0 ἀληθεύουν τὶς τρεῖς ἀνισότητες. Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ περιέχει ὅλα τὰ σημεῖα, οἱ συντεταγμένες τῶν ὁποίων εἶναι λύσις τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων.

$\boxed{\Delta'}$ ◆ **Γραφικὴ παράστασις.** Σχέδιο ποὺ παριστάνει τὴν μεταβολὴν ἑνὸς μεγέθους, ὅταν ἕνα ἄλλο μέγεθος, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἐξαρτᾶται, μεταβάλλεται.

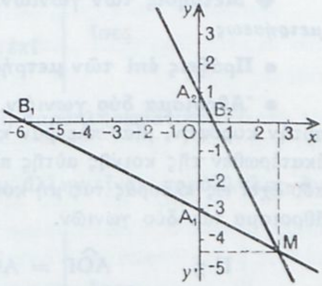
Ἡ γραφικὴ παράστασις μπορεῖ νὰ εἶναι εὐθεῖα ἢ καμπύλη ἢ τεθλασμένη γραμμή. Οἱ ἀλγεβρικὲς συναρτήσεις ($y=\alpha x+\beta$, $y=\dfrac{\alpha}{x}$, $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$) ἢ τὰ μεγέθη ποὺ μετροῦνται μὲ συσκευὲς ἀπογραφῆς (βαρόμετρα ἀπογραφικὰ) παριστάνονται μὲ γραμμὲς εὐθεῖες ἢ καμπύλες. Ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀρρώστου, ἡ μηνιαία ἢ ἐτησία παραγωγὴ μιᾶς βιομηχανίας παριστάνεται μὲ τεθλασμένες γραμμές.

Πῶς χαράσσεται ἡ γραφικὴ παράστασις. Χαράσσομε δύο καθέτους ἄξονας συντεταγμένων καὶ τοποθετοῦμε, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτούς, σημεῖα ποὺ ἔχουν ὡς τετμημένας τὰς λαμβανομένας τιμὰς τῆς μεταβλητῆς καὶ ὡς τεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως. Ἑνώνομε κατόπιν τὰ ληφθέντα σημεῖα μὲ μίαν τεθλασμένην ἢ καμπύλην γραμμήν.

Δ΄ ◆ **Γραφικὴ ἐπίλυσις συστήματος δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.** Χαράσσομε τὰς δύο εὐθείας ποὺ ἔχουν ὡς ἐξισώσεις τὰς δοθείσας ἐξισώσεις. Ἂν οἱ εὐθεῖες τέμνωνται, οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου διατομῆς εἶναι λύσις τοῦ συστήματος. Ἂν οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Ἂν οἱ εὐθεῖες ταυτίζωνται, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

Π.χ. $\begin{cases} x+2y=-6 \\ x+y=1-x. \end{cases}$

Μποροῦμε νὰ θέσωμε τὰς ἐξισώσεις ὑπὸ τὴν συνήθη μορφὴν $y=\alpha x+\beta$, ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι ἀπαραίτητο ὅταν πρόκειται νὰ χαράξωμε τὶς εὐθεῖες.



Βρίσκομε τὰ σημεῖα τετμημένης $x=0$.

Λαμβάνομε :

A_1 ($x=0$, $y=-3$)

A_2 ($x=0$, $y=1$).

Βρίσκομε τώρα τὰ σημεῖα τεταγμένης $y=0$.

Λαμβάνομε :

B_1 ($x=-6$, $y=0$)

B_2 ($x=\frac{1}{2}$, $y=0$).

Τοποθετοῦμε, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας, τὰ σημεῖα A_1, A_2, B_1, B_2, καὶ χαράσσομε τὰς εὐθείας $A_1 B_1$ καὶ $A_2 B_2$ ποὺ τέμνονται στὸ Μ. Οἱ συντεταγμένες τοῦ Μ ποὺ διαβάζονται στὴ γραφικὴ παράσταση εἶναι

$x=2,6 \qquad y=-4,3.$

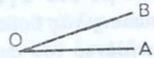
Ὁ ἀκριβὴς ὑπολογισμὸς θὰ ἔδιδε $x=\frac{8}{3}$ $\quad y=-\frac{13}{3}$.

● **Γραφικὴ ἐπίλυσις συστήματος ἀνισοτήτων πρώτου βαθμοῦ.** Βλέπε ἀνωτέρω *Γραφικὴ ἑρμηνεία.*

● **Γραφικὴ ἐπίλυσις ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.** Βλέπε *Ἐξίσωσις* : Προβλήματα ἐπὶ τῆς παραβολῆς.

Γωνία. Μέρος χώρου ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἡμιευθειῶν (πλευρῶν) ἀγομένων ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖο (κορυφή).

Συμβολίζομε μίαν γωνίαν μὲ τρία γράμματα, τὸ ἕνα διὰ τὴν κορυφήν, τὰ ἄλλα διὰ τὰ πέρατα τῶν πλευρῶν καὶ θέτομε ἀπὸ πάνω τὸ σύμβολο $\frown$ ποὺ διαβάζεται γωνία. Πρέπει πάντα νὰ ἐκφωνοῦμε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἀνάμεσα στὰ δύο ἄλλα: $A\widehat{O}B$.



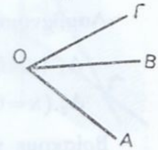
Παρατηρήσεις. Συμβολίζομε καμμιὰ φορὰ τὴν γωνίαν μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς μόνον ἢ μὲ ἕναν ἀριθμό, ἂν πολλὲς γωνίες ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφήν.

Π.χ. $\widehat{O}_1$, $\widehat{O}_2$

◆ **Μέτρησις τῶν γωνιῶν.** ● **Μονάδες.** Βλέπε ***Πίναξ τῶν μονάδων μετρήσεως.***

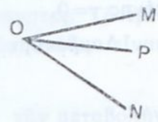
● **Πράξεις ἐπὶ τῶν μετρήσεων γωνιῶν.** Βλέπε ***Συμμιγεῖς.***

● **Ἄθροισμα δύο γωνιῶν.** Τὰς φέρομε ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφήν, μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς αὐτῆς πλευρᾶς. Ἡ νέα γωνία ποὺ ἔχει ὡς πλευρὰς τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν.



Π.χ. $A\widehat{O}\Gamma = A\widehat{O}B + B\widehat{O}\Gamma.$

● **Διαφορὰ δύο γωνιῶν.** Τὰς φέρομε ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφήν, μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς αὐτῆς πλευρᾶς.



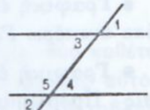
Ἡ γωνία ποὺ ἔχει ὡς πλευρὰς τὰς δύο μὴ κοινὰς πλευρὰς εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο γωνιῶν.

Π.χ. $M\widehat{O}P = M\widehat{O}N - P\widehat{O}N.$

● **Γωνία ὀξεῖα, ἀμβλεῖα, συμπληρωματική, παραπληρωματική, ἐφεξῆς, κατὰ κορυφήν, ἐγγεγραμμένη, ἐσωτερική, ἐξωτερική.** Βλέπε τὰς λέξεις αὐτάς.

◆ **Γωνίαι σχηματιζόμεναι ἀπὸ εὐθεῖαν ποὺ τέμνει δύο ἄλλας.**

● **Γωνίαι ἐκτὸς ἐναλλάξ.** Εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν (ἐναλλὰξ) τῆς τεμνούσης καὶ ἐκτὸς τῶν δύο εὐθειῶν.



Π.χ. οἱ γωνίες 1 καὶ 2.

● **Γωνίαι ἐντὸς ἐναλλάξ.** Εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν (ἐναλλὰξ) τῆς τεμνούσης καὶ ἐντὸς τῶν δύο εὐθειῶν.

Π.χ. οἱ γωνίες 3 καὶ 4.

● **Γωνίαι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη** (ἀντίστοιχες). Κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης, ἡ μία ἐκτός, ἡ ἄλλη ἐντὸς τῶν δύο εὐθειῶν.

Π.χ. οἱ γωνίες 1 καὶ 4.

● **Γωνίαι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη** τῆς τεμνούσης. Εὑρίσκονται ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης καὶ ἐντὸς τῶν δύο εὐθειῶν.

Π.χ. οἱ γωνίες 3 καὶ 5.

● **Ἰδιότητες.** Ἂν δύο παράλληλες τέμνωνται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν, σχηματίζουν:

⋆ γωνίες ἐκτὸς ἐναλλὰξ
» ἐντὸς ἐναλλὰξ
» ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
| ἴσες

⋆ γωνίες ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικές.

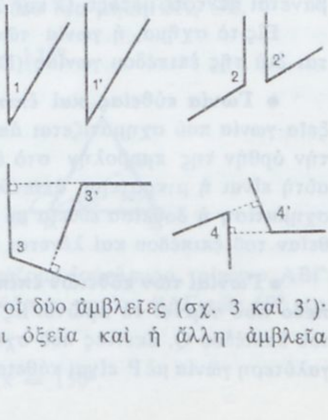
Ἀντιστρόφως:

Δύο εὐθεῖες ποὺ τέμνονται ἀπὸ μίαν ἄλλην εἶναι παράλληλες, ἂν σχηματίζουν:

⋆ γωνίες ἐκτὸς ἐναλλὰξ
» ἐντὸς ἐναλλὰξ
» ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
| ἴσες

⋆ γωνίες ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς τεμνούσης παραπληρωματικές.

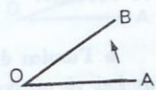
● **Γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθέτους.** ⋆ Ἂν δύο γωνίες ἔχουν τὶς πλευρές τους ἀντιστοιχως παράλληλες, ἀνὰ δύο τῆς αὐτῆς φορᾶς ἢ ἀνὰ δύο ἀντιθέτου φορᾶς, τότε εἶναι ἴσες (σχ. 1 καὶ 1′).



⋆ Ἂν δύο γωνίες ἔχουν τὶς πλευρές τους ἀντιστοίχως παράλληλες, δύο τῆς αὐτῆς φορᾶς κα δύο ἀντιθέτου φορᾶς, τότε εἶναι παραπληρωματικές. (σχ. 2 καὶ 2′).

⋆ Ἂν δύο γωνίες ἔχουν τὶς πλευρές τους ἀντιστοίχως κάθετες, εἶναι ἴσες, ἂν εἶναι καὶ οἱ δύο ὀξεῖες ἢ καὶ οἱ δύο ἀμβλεῖες (σχ. 3 καὶ 3′)· εἶναι παραπληρωματικὲς ἂν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα (σχ. 4 καὶ 4′).

Δ΄ ◆ **Γωνία προσανατολισμένη.** Γωνία τῆς ὁποίας διαφοροποιοῦμε τὴν φορὰν διαδρομῆς. Διακρίνομε τὴν *ἀρχικὴν πλευρὰν* καὶ τὴν *τελικὴν πλευρὰν* καὶ ἐκφωνοῦμε πάντοτε πρῶτα τὴν ἀρχικὴν πλευράν.

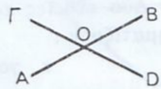


Εἰς τὸ σχῆμα, ἂν ἡ φορὰ διαδρομῆς εἶναι αὐτὴ τοῦ βέλους, ἡ προσανατολισμένη γωνία συμβολίζεται μὲ $\overline{\text{γωνίαν}}$ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

∗ Ὅταν προσανατολίζωμε τὸ ἐπίπεδο, ἡ προσανατολισμένη γωνία γίνεται ἀλγεβρικὸ μέγεθος∗ θετικὸ ἂν οἱ δύο φορὲς διαδρομῆς εἶναι οἱ αὐτές, ἀρνητικὸ στὴν ἀντίθετη περίπτωση.

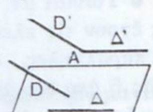
Θεωροῦμε, γενικά, ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἀντίθετη πρὸς ἐκείνην τῶν δεικτῶν ὡρολογίου. Στὸ σχῆμα, $\overline{\text{γωνία}}$ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ εἶναι θετική. Ἀντιθέτως $\overline{\text{γωνία}}$ $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ εἶναι ἀρνητική.

● **Γωνία δύο εὐθειῶν.** Ἔστω δύο εὐθεῖες AB καὶ ΓD ποὺ τέμνονται στὸ O. Ἡ γωνία τῆς εὐθείας AB μὲ τὴν εὐθεῖαν ΓD εἶναι ἡ μία ἐκ τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν, τῆς ὁποίας πρέπει νὰ στρέψωμε AB γύρω ἀπὸ O ὥστε νὰ τὴν φέρωμε ἐπὶ ΓD. Γενικά, θεωροῦμε τὴν θετικὴν γωνίαν μικροτέραν τῶν 2 ὀρθῶν.



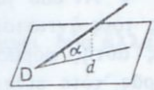
∗ Εἰς ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο ἡ γωνία δύο εὐθειῶν ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν δύο ἄλλων εὐθειῶν ποὺ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλες ἢ ἀντιστοίχως κάθετες. Συμβολίζεται μὲ $\overline{\text{γωνίαν}}$ (AB, ΓΔ).

◆ **Γωνία ἐν τῷ χώρῳ.** ● **Γωνία δύο εὐθειῶν ἐν τῷ χώρῳ.** Εἶναι ἡ γωνία ποὺ σχηματίζουν δύο παράλληλες πρὸς αὐτὲς τὶς εὐθεῖες, φερόμενες ἀπὸ τυχὸν σημεῖο. Ἡ γωνία αὐτὴ περιλαμβάνεται πάντοτε μεταξὺ O καὶ 2 ὀρθῶν.

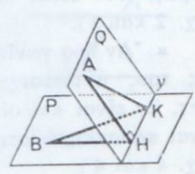


Εἰς τὸ σχῆμα, ἡ γωνία τῶν D καὶ Δ μετρεῖται διὰ τῆς ἐπιπέδου γωνίας (D΄, Δ΄).

● **Γωνία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.** Εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ τὴν ὀρθήν της προβολὴν στὸ ἐπίπεδο. Ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ἡ μικρότερη ἀπὸ ὅλες ποὺ μπορεῖ νὰ σχηματίσῃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μὲ μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου καὶ λέγεται γωνία κλίσεως.



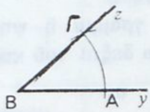
● **Γωνίαι τῶν εὐθειῶν ἐπιπέδου μὲ ἄλλο ἐπίπεδο ποὺ τέμνει τὸ πρῶτο.** Ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου Q, ἐκεῖνες ποὺ σχηματίζουν τὴν μεγαλύτερη γωνία μὲ P εἶναι κάθετες στὴ διατομὴ xy.

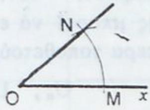


Εἰς τὸ σχῆμα, ἐφόσον ΑΗ εἶναι κάθετος πρὸς xy, ἔχομε $\widehat{AHB} > \widehat{AKB}$.

● **Γωνία δύο ἐπιπέδων.** Βλέπε *Δίεδρος*.

◆ **Κατασκευαὶ γωνιῶν.** ● **Γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν.** Θέλομε νὰ κατασκευάσωμε ἐπὶ Ox μία γωνίαν ἴσην πρὸς $\widehat{yBz}$. Μὲ κέντρον Β καὶ μὲ τυχοῦσαν ἀκτῖνα ποὺ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας στὰ Α, Γ χαράσσομε τόξον κύκλου· μὲ τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα διαβήτου χαράσσομε τόξον κύκλου μὲ κέντρον Ο ποὺ τέμνει Ox στὸ Μ· κατόπιν μὲ ἄνοιγμα

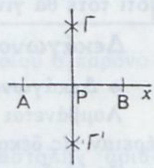




διαβήτου ἴσον μὲ ΑΓ χαράσσομε τόξον κύκλου μὲ κέντρον Μ ποὺ τέμνει τὸν κύκλον μὲ κέντρον Ο στὸ Ν.

$$\widehat{MON} = \widehat{yBz}.$$

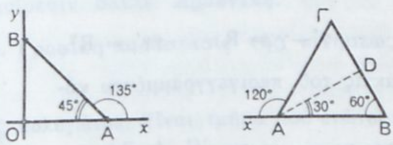
● **Γωνία ὀρθή.** Διὰ νὰ κατασκευάσωμε μία ὀρθὴν γωνίαν μὲ κορυφὴν Ρ καὶ μὲ πλευρὰν Ρx, λαμβάνομε ἐπὶ Ρx μὲ τὸν διαβήτην δύο σημεῖα Α, Β εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ σημεῖο Ρ. Ἀπὸ Α καὶ Β ὡς κέντρα καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τῆς ΑΡ, γράφομε τόξα κύκλου ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας. Τὰ τόξα αὐτὰ τέμνονται στὰ Γ,Γ′.



$$\widehat{\Gamma P x} = 1 \text{ ὀρθ.}$$

● **Γωνία τῶν 45°, 135°.** Κατασκευάζομε μίαν ὀρθὴν γωνίαν xOy ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὁποίας λαμβάνομε δύο ἴσα μήκη ΟΑ, ΟΒ.

$$\widehat{BAO} = 45^0 \quad \widehat{BAx} = 135^0.$$



● **Γωνία τῶν 60°, 120°.** Κατασκευάζομε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.

● **Γωνία τῶν 30°, 150°.** Κατασκευάζομε γωνίαν ΒΑΓ τῶν 60°, κατόπιν τὴν διχοτόμον της AD.

$$\widehat{DAB} = 30^0 \quad \widehat{DAx} = 150^0.$$

Γωνιακός. Συντελεστὴς γωνιακός. Βλέπε *Συντελεστής*.

Δακτύλιος. • **Κυκλικός**: τὸ ἐπίπεδον χωρίον ποὺ ὁρίζεται ὑπὸ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν. • **Σφαιρικός.** Βλέπε *Σφαῖρα*, *Ὄγκος*.

Δείκτης. Σῆμα ἀποτελούμενο ἀπὸ ἕνα ἢ περισσοτέρους τόνους τοποθετουμένους ἄνω δεξιὰ τοῦ γράμματος ποὺ παριστάνει διάφορα μὲν ἀλλὰ ὁμοειδῆ μεγέθη:

$$A', \; A'', \; \beta', \; \beta'', \; \beta'''.$$

Ἐκφωνοῦμε: «A τονούμενο», «A δίστονο», «β τρίστονο» κλπ.

⋆ Ὁ δείκτης μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνα γράμμα ἢ ψηφίο γραμμένο μὲ στοιχεῖα μικρότερα τοποθετούμενα κάτω δεξιὰ τοῦ κυρίου γράμματος:

$$U_\alpha, \; U_\beta \cdots \alpha_3, \; \alpha_4 \cdots$$

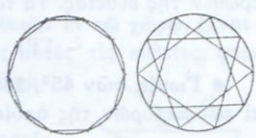
Ἐκφωνοῦμε: U_α, U_β, α τρία, α τέσσερα, χωρὶς νὰ συγχέωμε μὲ τὸ γινόμενο $U.\alpha$ ἢ μὲ τὴν δύναμιν α^3.

⋆ Εἰς ἕνα τρίγωνο, U_α καὶ M_α ἀντιπρωσωπεύουν τὸ ὕψος καὶ τὴν διάμεσον πρὸς τὴν πλευρὰν α. Ὁμοίως U_β, $U_\gamma \cdots$

Παρατήρησις. Δὲν πρέπει ποτὲ νὰ γράφωμε ἕνα δείκτην ἄνω δεξιά, διότι τότε θὰ γινόταν ἐκθέτης.

Δεκάγωνον. Πολύγωνον δέκα πλευρῶν.

• **Δεκάγωνον κανονικόν.** Μπορεῖ νὰ εἶναι κυρτὸ ἢ ἀστεροειδές.



Λαμβάνεται ὅταν διαιρέσωμε τὴν περιφέρειαν εἰς δέκα ἴσα τόξα καὶ ἑνώσωμε τὰ σημεῖα ὑποδιαιρέσεως:

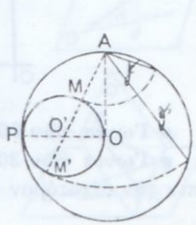
—διαδοχικῶς διὰ τὸ κυρτὸ δεκάγωνο.

—ἀνὰ τρία διὰ τὸ ἀστεροειδὲς δεκάγωνο.

Ἰδιότητες. Ἡ πλευρὰ γ τοῦ κυρτοῦ δεκαγώνου καὶ γ′ τοῦ ἀστεροειδοῦς δεκαγώνου συνδέονται διὰ τῶν σχέσεων:

$$\gamma' - \gamma = R \qquad \gamma\gamma' = R^2,$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγγραμμένου κύκλου.



Κατασκευή. Ἀνάγεται στὴν κατασκευὴ τῶν πλευρῶν, ἀφοῦ χρησιμοποιήσωμε τὶς προηγούμενες μετρικὲς σχέσεις. Χαράσσομε δηλ. ἕναν βοηθητικὸ κύκλο μὲ διάμετρον PO=R, κατόπιν μίαν ἐφαπτομένην OA πρὸς τὸν κύκλον αὐτόν. Ἡ διάμετρος

ΑΟ′ τοῦ βοηθητικοῦ κύκλου τέμνει τὸν κύκλο αὐτὸ εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′.

Ἔχομε : ΑΜ $= \gamma$ ΑΜ′ $= \gamma'$

Μεταφέροντες γ ἢ γ′ διαδοχικῶς ὡς χορδὴν τοῦ κύκλου, λαμβάνομε τὸ κυρτὸ ἢ ἀστεροειδὲς δεκάγωνο.

ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ–ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΩΝ–ΓΩΝΙΩΝ

	Κυρτὸν δεκάγωνον	**Ἀστεροειδὲςδεκάγωνον**
Ἐπίκεντρος γωνία	36^0	108^0
Γωνία τοῦ πολυγώνου	144^0	72^0
Πλευρὰ	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$
Ἀπόστημα	$\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
Ἐμβαδὸν	$\frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	

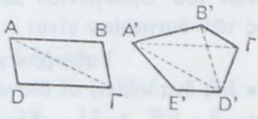
Δεκαδικόν. ● **Κλάσμα δεκαδικόν.** Κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι μία δύναμις τοῦ 10 : $\frac{3}{10}$ $\frac{147}{1000}$.

● **Δεκαδικὸς ἀριθμός.** Ἀριθμὸς ποὺ περιέχει ὑποδιαστολὴν· ἀριθμὸς δηλαδὴ ποὺ περιλαμβάνει ψηφία τῆς τάξεως τῶν δεκάτων, ἑκατοστῶν. χιλιοστῶν...

| Ε′ | **Δέσμη ἁρμονική.** Σύνολον τεσσάρων εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖο καὶ διερχομένων ἀπὸ τέσσερα σημεῖα ποὺ σχηματίζουν μίαν ἁρμονικὴν διαίρεσιν. Βλέπε *Ἁρμονική.*

Διάγραμμα. Γραφικὴ παράστασις τῆς κινήσεως ἑνὸς κινητοῦ. Βλέπε *Κίνησις.*

| Γ′ | **Διαγώνιος πολυγώνου.** Εἶναι τμῆμα ποὺ ἑνώνει δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς. Τὰ τμήματα ΑΓ, Α′ D′, Α′Γ′, Β′D′ εἶναι διαγώνιες.



Ἰδιότητες. ✶ Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμο, οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται

—*Ἀντιστρόφως*, ἂν οἱ διαγώνιες

ἑνὸς τετραπλεύρου διχοτομοῦνται, τὸ τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο.

★ Εἰς ἕνα *ὀρθογώνιο*, οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται καὶ εἶναι ἴσες.

—'*Αντιστρόφως*, ἂν οἱ διαγώνιες ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες, τὸ παραλληλόγραμμο τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιο.

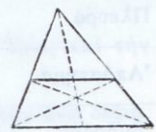
★ Εἰς ἕνα *ῥόμβον*, οἱ διαγώνιες διχοτομοῦνται, εἶναι κάθετες καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ποὺ διαιροῦν.

—'*Αντιστρόφως*, ἂν οἱ διαγώνιες ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι κάθετες ἢ ἂν ἡ μία εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ποὺ διαιρεῖ, τότε τὸ παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος.

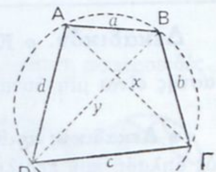
★ Εἰς ἕνα *τετράγωνο*, οἱ διαγώνιες τέμνονται δίχα καὶ καθέτως, εἶναι ἴσες καὶ διχοτόμες τῶν γωνιῶν ποὺ διαιροῦν.

★ Εἰς ἕνα *ἰσοσκελὲς τραπέζιον*, οἱ διαγώνιες εἶναι ἴσες.

— '*Αντιστρόφως*, ἂν οἱ διαγώνιες ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσες, τὸ τραπέζιον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.



| Δ' | ★ Εἰς ἕνα *τυχὸν τραπέζιον*, τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων εἶναι εὐθυγραμμισμένο μὲ τὰ μέσα τῶν βάσεων καὶ μὲ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν πλαγίων πλευρῶν.

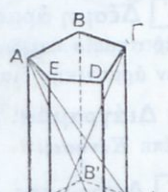


| Ε' | ★ Εἰς ἕνα *κυρτὸν τετράπλευρον* ἐγγράψιμον, οἱ πλευρές α, b, c, d καὶ οἱ διαγώνιες x, y συνδέονται μὲ τὶς σχέσεις τοῦ Πτολεμαίου :

$$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd} \qquad xy=ac+bd.$$

| ΣΤ' | ⊛ **Διαγώνιος πολυέδρου**. Εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἑνώνει δύο κορυφὲς τοῦ πολυέδρου μὴ κείμενες στὴν αὐτὴ ἕδρα :

ΑΓ', AD', ΓΕ'.



'Ιδιότητες. ★ Εἰς ἕνα *τυχὸν παραλληλεπίπεδον*, οἱ τέσσερες διαγώνιες τέμνονται δίχα.

★ Εἰς ἕνα *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*, οἱ τέσσερες διαγώνιες τέμνονται δίχα καὶ εἶναι ἴσες.

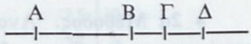
'Ονομάζοντες α,β,γ τὰ μήκη τῶν τριῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ μῆκος τῶν διαγωνίων εἶναι :

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

★ Εἰς ἕνα *κύβον*, οἱ διαγώνιες τέμνονται δίχα, εἶναι ἴσες καὶ ἔχουν ὡς μῆκος $\alpha\sqrt{3}$, ὅταν α εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου.

Διαδοχικός. ◆ **Ἀριθμοὶ διαδοχικοί.** Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διαδοχικοί: 3, 4, 5, 6, 7...

Περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοί: 5, 7, 9...



● **Σημεῖα καὶ τμήματα διαδοχικά.** Στὸ σχῆμα, τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ εἶναι διαδοχικά. Ὁρίζουν τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.

| Α′ | **Διαίρεσις δύο ἀριθμῶν.** Πρᾶξις ποὺ δίδει τὸ *πηλίκον* ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὀνομαζομένου *διαιρετέου*, δι' ἑνὸς ἄλλου, ὀνομαζομένου *διαιρέτου*. Ὅταν ἡ διαίρεσις δὲν γίνεται μὲ ἀκρίβεια, ὑπάρχει *ὑπόλοιπον*.

Ἡ διαίρεσις ἰσοδυναμεῖ μὲ σειρὰν ἀφαιρέσεων· ἀφαιροῦμε δηλαδὴ ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸν διαιρέτην πολλὲς φορὲς ἀλληλοδιαδόχως. Βλέπε *Πηλίκον*.

● **Διαίρεσις κλασμάτων, ἰσοτήτων, ἀνισοτήτων, ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, μονωνύμων καὶ πολυωνύμων.**

● **Διαίρεσις ἁρμονική.** Βλέπε *Ἁρμονική*.

Διαιρετέος. Βλέπε *Πηλίκον*.

| Β′ | **Διαιρέτης.** Ἕνας ἀριθμὸς β εἶναι διαιρέτης ἑνὸς ἀριθμοῦ α, ὅταν ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ β γίνεται ἀκριβῶς.

Π.χ. 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 15, τοῦ 21.
Ἀντιστρόφως, α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ β· 15 καὶ 21 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3.

Ἰδιότητες. Κάθε ἀριθμὸς ποὺ διαιρεῖ ἕνα διαιρέτην τοῦ α εἶναι ὁ ἴδιος διαιρέτης τοῦ α.

Π.χ. 6 εἶναι διαιρέτης τοῦ 24· 2 ποὺ διαιρεῖ 6, εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ 24.

● **Ἀναζήτησις ὅλων τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ.**

⋆ **1η Μέθοδος.** Ἐπιχειροῦμε νὰ διαιρέσωμε τὸν δοθέντα ἀριθμὸν δι' ἀλλεπαλλήλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, σημειώνοντες τὸ πηλίκον ἑκάστης διαιρέσεως. Μόλις εὕρωμε ὅτι τὸ πηλίκον μιᾶς τελείας διαιρέσεως εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς διαιρέτας, ποὺ ἤδη ἔχομε εὑρει, ἢ ὁ διαιρέτης ποὺ δοκιμάζομε, σταματᾶμε τὴν ἀναζήτηση. Ὁ κατάλογος τῶν διαιρετῶν περιλαμβάνει ὅλους τοὺς διαιρέτας, ποὺ ἔχομε εὑρει, καὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα.

Π.χ. Διαιρέται τοῦ 72· εὑρίσκομε διαδοχικῶς:

διαιρέται:	1	2	3	4	6	8	9
πηλίκα:	72	36	24	18	12	9	8.

Ὁ πλήρης κατάλογος τῶν διαιρετῶν εἶναι :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

* **2α Μέθοδος.** Ἀναλύομε τὸν ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ γράφομε ὅλα τὰ ληφθέντα γινόμενα, συνδυάζοντες τοὺς πρώτους αὐτοὺς παράγοντας καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Π.χ. Διὰ 72 λαμβάνομε :

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	1

$72 = 2^3 \times 3^2$.

Οἱ διαιρέται τοῦ 72 εἶναι :

2 $\quad 2^2$ $\quad 2^3$ $\quad 3$ $\quad 3^2$

$6 = 2\times 3$ $\quad 12 = 2^2\times 3$ $\quad 24 = 2^3\times 3$

$18 = 2\times 3^2$ $\quad 36 = 2^2\times 3^2$ $\quad 72 = 2^3\times 3^2$

● **Ἀναζήτησις τῶν πρώτων διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἀνάλυσις εἰς πρώτους παράγοντας.** Βλέπε *Πρῶτος*.

● **Κοινοὶ διαιρέται εἰς πολλοὺς ἀριθμούς.** Εἶναι οἱ διαιρέται τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Π.χ. 60 καὶ 72 ἔχουν ὡς Μ.Κ.Δ. 12.
Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἔχει ὡς διαιρέτας 2, 3, 4, 6, 12.

Οἱ κοινοὶ διαιρέται στοὺς 60 καὶ 72 εἶναι 2, 3, 4, 6, 12.

● **Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.).** Εὑρίσκομε τὸν Μ.Κ.Δ. κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Κανών. Ἀναλύομε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίζομε τὸ γινόμενον ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων ποὺ εἶναι *κοινοὶ στὶς διάφορες ἀναλύσεις μὲ τὸν μικρότερο ἐκθέτη τους.*

1ο Παράδειγμα:

60	2	72	2
30	2	36	2
15	3	18	2
5	5	9	3
1		3	3
		1	

$60 = 2^2\times 3\times 5$ $\qquad 72 = 2^2\times 3^2$

Μ.Κ.Δ. : $2^2\times 3 = 12$

2ο Παράδειγμα : Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 1260, 945, 225

1260	2	945	3	225	3
630	2	315	3	75	3
315	3	105	3	25	5
105	3	35	5	5	5
35	5	7	7	1	
7	7	1			
1					

$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$, $945 = 3^3 \times 5 \times 7$, $225 = 3^2 \times 5^2$.

Μ.Κ.Δ. : $3^2 \times 5 = 45$.

● **Διαιρέτης διαιρέσεως.** Βλέπε *Πηλίκον*.

Β′ Διαιρετότης.

Ἡ δυνατότης τὴν ὁποίαν ἔχει ἕνας ἀριθμὸς νὰ διαιρῆται μὲ ἀκρίβειαν δι᾿ ἑνὸς ἄλλου.

● **Κριτήρια διαιρετότητος.** Κανόνες ποὺ ἐπιτρέπουν νὰ προβλέπωμε ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι᾿ ἑνὸς ἄλλου.

⋆ **Διαιρετότης διὰ 2.** Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ὅταν λήγῃ εἰς 0 ἢ εἰς ἄρτιο ψηφίο.

Π.χ. 156 εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 (λήγει εἰς 6).

⋆ **Διαιρετότης διὰ 4.** Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ποὺ σχηματίζουν τὰ δύο τελευταῖα του (δεξιά) ψηφία εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.

Π.χ. 312 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 (λήγει εἰς 12 ποὺ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4).

⋆ **Διαιρετότης διὰ 5.** Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ὅταν λήγει εἰς 0 ἢ 5.

Π.χ. 725 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 (λήγει εἰς 5).

⋆ **Διαιρετότης διὰ 25.** Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 25, ὅταν λήγῃ εἰς 00, 25, 50, 75.

Π.χ. 1975 εἶναι διαιρετὸς διὰ 25 (λήγει εἰς 75).

⋆ **Διαιρετότης διὰ 3.** Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸ διὰ 3.

Π.χ. 8727 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 24 εἶναι διαιρετὸ διὰ 3.

⋆ **Διαιρετότης διὰ 9.** Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸ διὰ 9.

Π.χ. 1377 εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 18 εἶναι διαιρετὸ διὰ 9.

★ **Παρατηρήσεις**: α΄) Ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4,25,9, εἶναι ἐπίσης διαιρετὸς διὰ 2, 5, 3. Ἀλλὰ τὸ *ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει*: ἕνας ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2,5,3 δὲν εἶναι πάντα διαιρετὸς διὰ 4,25,9.

β΄) Εἰς τὴν διαιρετότητα διὰ 3 (ἢ 9) μποροῦμε νὰ παραβλέψωμε τὸ ψηφίο 3 (ἢ 9) στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων.

Π.χ. 78341. Ἄθροισμα τῶν ψηφίων: $7+8+4+1=20$

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3.

γ΄) Εἰς τὴν διαιρετότητα διὰ 3 καὶ 9 ἐφαρμόζομε τὸν κανόνα πολλὲς φορές: πρῶτα στὸν ἴδιο ἀριθμό, κατόπιν στὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, κατόπιν στὸ νέο ἄθροισμα, μέχρις ὅτου λάβωμε ἕναν ἀριθμὸ μικρότερο τοῦ 10.

Π.χ. 647987. Ἄθροισμα τῶν ψηφίων: 32 (παραβλέπουμε τὸ 9).

Ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ νέου ἀριθμοῦ εἶναι 5. Ἐπειδὴ 5 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, 32 δὲν εἶναι ἐπίσης· ἄρα καὶ 647987 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3.

Διαιρῶ ἕνα τμῆμα. Βλέπε ***Μερισμός***.

Διάκεντρος: Τὸ τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα δύο κύκλων. Ἀπόστασις τῶν κέντρων. Βλέπε ***Κύκλος***, *Σχετικαὶ θέσεις δύο κύκλων*.

| Ε΄ | **Διακρίνουσα**. Εἰς μίαν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, διακρίνουσα εἶναι ἡ παράστασις $\boxed{\beta^2-4\alpha\gamma}$.

Παριστάνομε τὴν διακρίνουσαν μὲ τὸ γράμμα Δ.

Παρατήρησις: Ὅταν ὁ συντελεστὴς β εἶναι διαιρετὸς διὰ δύο (2), ἀντικαθιστῶμε β μὲ 2β΄ καὶ θεωροῦμε τὴν διακρίνουσαν ἀναγομένην:

$$\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma.$$

● **Χρῆσις τῆς διακρινούσης**: Τὸ πρόσημον τῆς διακρινούσης προσδιορίζει τὴν ὕπαρξιν τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως.

★ Ἂν $\Delta < 0$, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζαν.

Π.χ. $3x^2 - x + 1=0$ $\Delta = 1 - 12 = -11.$

Ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζαν.

★ Ἂν $\Delta = 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει διπλῆν ρίζαν.

Π.χ. $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\Delta' = 4 - 4 = 0.$

Ἡ ἐξίσωσις ἔχει διπλῆν ρίζαν : $\boxed{x = 2}$.

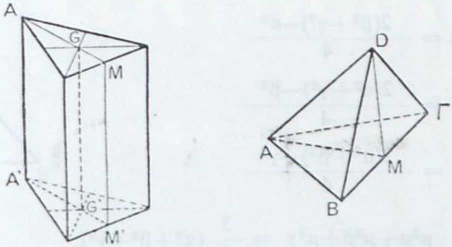
⋆ Ἄν $\Delta > 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο διαφόρους ρίζας.

Π.χ. $3x^2 - 7x + 2 = 0$ $\quad \Delta = 49 - 24 = 25$.

Ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας : $\boxed{x' = 2 \quad x'' = \frac{1}{3}}$

$\boxed{\text{ΣΤ'}}$ **Διάμεσον ἐπίπεδον τριγωνικοῦ πρίσματος.** Ἐπίπεδον πού διέρχεται ἀπό μίαν παράπλευρον ἀκμήν καί ἀπό τό μέσον μιᾶς ἀκμῆς πού κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως : ἐπίπεδον ΑΑ΄ ΜΜ΄.

Τά τρία διάμεσα ἐπίπεδα τριγωνικοῦ πρίσματος τέμνονται κατά τήν εὐθεῖαν GG΄, ἄν ἑνωθοῦν τά κέντρα βάρους τῶν δύο βάσεων.

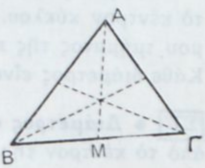


● **Διάμεσον ἐπίπεδον τετραέδρου.** Ἐπίπεδον διερχόμενον ἀπό μίαν ἀκμήν καί ἀπό τό μέσον τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς : ἐπίπεδον AMD.

Ὑπάρχουν 6 διάμεσα ἐπίπεδα πού τέμνονται στό αὐτό σημεῖο.

$\boxed{\text{Β'}}$ **Διάμεσος.** Εὐθεῖα πού ἀρχίζει ἀπό τήν κορυφήν τριγώνου καί καταλήγει στό μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς: ΑΜ εἶναι ἡ διάμεσος πρός τήν πλευράν ΒΓ. Νά μή τήν συγχέωμε μέ τήν *μεσοκάθετον*.

$\boxed{\text{Γ'}}$ **Ἰδιότητες** ⋆ Αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου διέρχονται ἀπό τό αὐτό σημεῖο πού ἀπέχει ἀπό ἑκάστην κορυφήν ἀπόστασιν ἴσην μέ τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου ἤ μέ τό $\frac{1}{3}$ αὐτῆς ἀπό τό μέσον ἑκάστης βάσεως. Τό σημεῖο αὐτό εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου.



⋆ Εἰς ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ διάμεσος πρός τήν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ αὐτῆς.

|Δ΄| Σχέσεις μετρικαὶ σχετικαὶ μὲ τὰς διαμέσους ⋆ Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιο τετράγωνο τῆς διαμέσου ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν πλευρῶν, σύν τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς τρίτης πλευρᾶς.

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu^2\alpha + \frac{\alpha^2}{2}$$

⋆ Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς τρίτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐπ' αὐτὴν προβολὴν τῆς διαμέσου ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν.

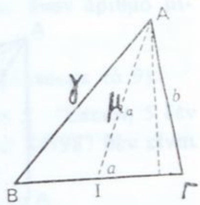
$$\gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha\cdot(\text{HI}) \quad \text{ὅταν} \quad \gamma > \beta.$$

⋆ Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων:

$$\mu^2\alpha = \frac{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}{4}$$

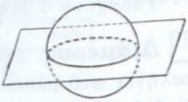
$$\mu^2\beta = \frac{2(\alpha^2+\gamma^2)-\beta^2}{4}$$

$$\mu^2\gamma = \frac{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2}{4}$$



$$\mu^2\alpha+\mu^2\beta+\mu^2\gamma = \frac{3}{4}\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

|ΣΤ΄| **Διαμετρικόν.** Ἐπίπεδον διαμετρικόν. Ἐπίπεδον ποὺ περιέχει μίαν διάμετρον σφαίρας. Κάθε διαμετρικὸ ἐπίπεδο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα μέγιστον κύκλον. Κάθε διαμετρικὸ ἐπίπεδο εἶναι ἐπίπεδο συμμετρίας τῆς σφαίρας.



Διάμετρος κύκλου. Ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον κύκλου. Ἡ διάμετρος εἶναι ἐπίσης τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τῆς προηγουμένης εὐθείας ποὺ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Κάθε διάμετρος εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὸν κύκλον.

|ΣΤ΄| ● **Διάμετρος σφαίρας.** Ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Εἶναι ἐπίσης τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας αὐτῆς ποὺ κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας. Κάθε διάμετρος εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὴν σφαῖραν.

|Δ΄| **Διάνυσμα.** Τμῆμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει ἐκλεγῆ μία φορὰ διαδρομῆς, δηλαδὴ τμῆμα προσανατολισμένο. Ἡ φορὰ διαδρομῆς ὁρίζεται

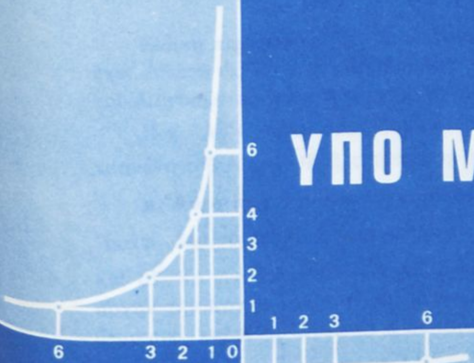
ΠΕΤΡΟΥ ΠΛΟΥΤΣΗ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν (Διπλ. Παρισίων)

ΔΙΑ ΠΡΩΤΗΝ ΦΟΡΑΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ



ΔΡΑΧ. 8
ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΚΑΘΕ ΤΕΤΑΡΤΗ

εἰς ἕνα (1) καὶ μόνον τόμον, ἤτοι:
22 συνολικῶς ἑβδομαδιαῖα τεύχη

ΤΕΥΧΟΣ
4

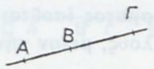
ἀπὸ τὴν σειρὰν τῶν γραμμάτων πού ὁρίζουν τὸ διάνυσμα. Τὸ πρῶτο γράμμα ὁρίζει τὴν ἀρχὴν τοῦ διανύσματος, τὸ δεύτερο τὸ τέλος.

Συμβολίζομε ἕνα διάνυσμα μὲ τὸ σημεῖο $\rightarrow$ ποὺ τὸ θέτομε πάνω ἀπὸ τὰ γράμματα: $\overrightarrow{AB}$.

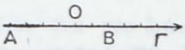
Παρατηρήσεις ✶ Δύο σημεῖα ὁρίζουν ἕνα μοναδικὸ τμῆμα, ἀλλὰ δύο διάφορα διανύσματα.

✶ Διὰ νὰ ἀλλάξωμε τὴν φορὰν διαδρομῆς, ἀντιστρέφομε τὰ γράμματα χωρὶς ν' ἀλλάξωμε τὸ σημεῖο.

Π.χ. $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$



● **Ἀλγεβρικὸν μέτρον διανύσματος.** Ἂν προσανατολίσωμε τὴν εὐθεῖαν ποὺ φέρει τὸ διάνυσμα, λαμβάνομε ἕνα ἄξονα καὶ τὸ μέτρο τοῦ διανύσματος γίνεται θετικὸς ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ἂν ἡ φορὰ διαδρομῆς τοῦ διανύσματος εἶναι ἡ θετικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος, ἀρνητικὸς δὲ στὴν ἀντίθετη περίπτωση.



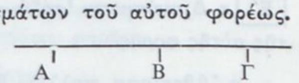
Συμβολίζομε μὲ τὸ σημεῖο —ποὺ τὸ θέτομε πάνω ἀπὸ τὰ γράμματα στὴ θέση τοῦ σημείου $\rightarrow$.

Π.χ. $\overline{AB} = 6$ $\overline{\Gamma B} = -3.$

Εἰδικὴ περίπτωσις. Ἂν τὸ διάνυσμα ἔχῃ ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖο ποὺ ἔχει ἐκλεγῆ ὡς ἀρχὴ γενικὴ ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τότε τὸ ἀλγεβρικὸ μέτρο τοῦ διανύσματος εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ τέλους τοῦ διανύσματος τούτου.

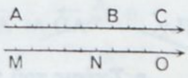
Π.χ. Ἂν O εἶναι ἀρχὴ γενικὴ ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τότε $\overline{OA}$ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ A καὶ $\overline{OB}$ ἡ τετμημένη τοῦ B.

● **Ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν διανυσμάτων τοῦ αὐτοῦ φορέως.** Ἔστω δύο διαδοχικὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$. Τὸ νέο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$, ποὺ ἔχει ὡς ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου διανύσματος καὶ ὡς τέλος τὸ τέλος τοῦ δευτέρου, καλεῖται *ἄθροισμα* ἢ *συνισταμένη* τῶν δύο διανυσμάτων.



Γράφομε: $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

● **Σχέσις τοῦ Chasles . 1η Μορφή.** Τὸ ἀλγεβρικὸ μέτρο τῆς συνισταμένης δύο διανυσμάτων τοῦ αὐτοῦ φορέως ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν μέτρων τῶν δύο διανυσμάτων.



Π.χ. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ $\qquad \overline{NO} = \overline{NM} + \overline{MO}$

$(+9 = (+6) + (+3) \qquad (+4) = (-5) + (+9).$

Παρατηρήσεις. ⋆ Ἡ σχέσις ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε θέσιν τῶν σημείων.

⋆ Τὰ δύο μέλη ἀρχίζουν πάντα μὲ τὸ αὐτὸ γράμμα καὶ λήγουν πάντα μὲ τὸ αὐτὸ γράμμα.

2α Μορφή. Τὸ ἀλγεβρικὸ μέτρο διανύσματος ἰσοῦται μὲ τὴν τετμημένην τοῦ τέλους, μεῖον τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς.

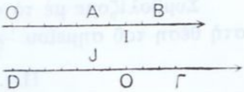
Π.χ. $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$

Ἐπαληθεύομε ὅτι : $\overline{OB} - \overline{OA} = 8 - 5 = 3$ καὶ $\overline{AB} = 3$

$\overline{B\Gamma} = \overline{O\Gamma} - \overline{OB}.$

Ἐπαληθεύομε ὅτι : $\overline{O\Gamma} - \overline{OB} = -5 - 8 = -13$ καὶ $\overline{B\Gamma} = -13.$

Τετμημένη τοῦ μέσου τμήματος. Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου τμήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν δύο τελῶν.



Π.χ. $\overline{OI} = \dfrac{\overline{OA} = \overline{OB}}{2} = \dfrac{5+9}{2} = 7$

$\overline{OJ} = \dfrac{\overline{O\Gamma} + \overline{OD}}{2} = \dfrac{3 + (-7)}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Ε΄ ● **Διανύσματα ἰσοδύναμα.** Εἶναι διανύσματα ἴσα, παράλληλα καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

● **Ἄθροισμα πολλῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων τοῦ αὐτοῦ φορέως.** Εἶναι τὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει ὡς ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου διανύσματος καὶ ὡς τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου. Μποροῦμε νὰ λάβωμε τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων προσθέτοντες τὰ δύο πρῶτα, κατόπιν προσθέτοντες στὸ ἀποτέλεσμα τὸ τρίτο διάνυσμα, στὸ νέο ἀποτέλεσμα τὸ τέταρτο κ.ο.κ.

Π.χ. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma D}$

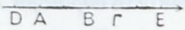
● **Σχέσις τοῦ Chasles γενικευμένη.** Ἂν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma D}$, $\overrightarrow{DE} \ldots \overrightarrow{MN}$ εἶναι διαδοχικὰ διανύσματα τοῦ αὐτοῦ φορέως, τὸ ἀλγεβρικὸ μέτρο τοῦ ἀθροίσματος τῶν διανυσμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν μέτρων τοῦ καθενὸς ἀπ' αὐτά :

$$\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma D} + \cdots \overline{MN}.$$

Παρατηρήσεις. ⁎ Τὰ δύο μέλη ἀρχίζουν καὶ λήγουν μὲ τὸ αὐτὸ γράμμα.

⁎ Κάθε ἐνδιάμεσο γράμμα ποὺ τερματίζει ἕνα διάνυσμα εἶναι καὶ ἀρχὴ τοῦ ἑπομένου διανύσματος.

Π.χ. Συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν τοῦ Chasles :



$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma D} + \overline{DE}.$

Ἐπαληθεύομε ὅτι τὸ δεύτερο μέλος ἰσοῦται :

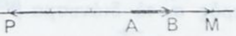
$$2 + 1 + (-4) + 6 = 5$$

καὶ ὅτι τὸ πρῶτο μέλος ἰσοῦται μὲ 5.

● **Γινόμενον διανύσματος ἐπὶ ἀριθμόν.** Εἶναι ἕνα νέο διάνυσμα τοῦ αὐτοῦ φορέως ποὺ ἔχει ὡς μῆκος τὸ γινόμενον τοῦ παλαιοῦ μήκους ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός, ἀντιθέτου δὲ φορᾶς, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.

Π.χ. $\overrightarrow{AB} \times 2 = \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AB} \times (-3) = \overrightarrow{AP}$

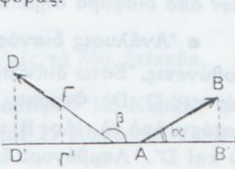


● **Λόγος δύο παραλλήλων διανυσμάτων.** Ἂν δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma D}$ ἔχουν τοὺς φορεῖς τους παραλλήλους, ὁ λόγος τῶν δύο διανυσμάτων εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων, σημεῖον δὲ αὐτοῦ εἶναι :

\+ ἂν τὰ δύο διανύσματα εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς.

— ἂν τὰ δύο διανύσματα εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς.

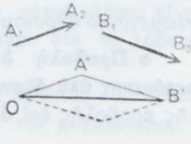
● **Προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα.** Διάνυσμα ποὺ ἔχει ὡς ἀλγεβρικὸν μέτρον τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν διευθύνσεων τοῦ διανύσματος καὶ τοῦ ἄξονος.



$\overline{AB'} = \overline{AB}$ συνα $\overline{\Gamma' D'} = \overline{\Gamma\Delta}$ συνβ

● **Γεωμετρικὸν ἄθροισμα διανυσμάτων.**

Περίπτωσις δύο διανυσμάτων. Ἔστω δύο διανύσματα $\overrightarrow{A_1A_2}$ καὶ $\overrightarrow{B_1B_2}$.

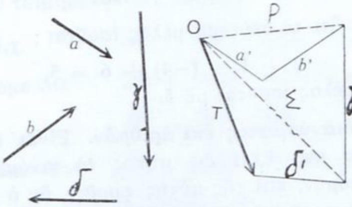


Ξεκινώντας ἀπὸ σημεῖο O, χαράσσομε $\overrightarrow{OA'}$

ἰσοδύναμο πρὸς $\overrightarrow{A_1A_2}$, καὶ ἀπὸ A′, $\overrightarrow{A'B'}$ ἰσοδύναμο πρὸς $\overrightarrow{B_1B_2}$. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OB'}$ εἶναι τὸ γεωμετρικὸ ἄθροισμα τῶν $\overrightarrow{A_1A_2}$ καὶ $\overrightarrow{B_1B_2}$.

Παρατηροῦμε ὅτι $\overrightarrow{OB'}$ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου οἱ πλευρὲς εἶναι ἰσοδύναμες πρὸς $\overrightarrow{A_1A_2}$ καὶ $\overrightarrow{B_1B_2}$.

Περίπτωσις πολλῶν διανυσμάτων. Ἔστω τὰ διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ ... Κατασκευάζομε τὸ γεωμετρικὸ ἄθροισμα $\vec{P}$ τῶν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$, κατόπιν τὸ ἄθροισμα $\vec{\Sigma}$ τῶν $\vec{P}$, καὶ $\vec{\gamma}$, κατόπιν τὸ ἄθροισμα $\vec{T}$ τῶν $\vec{\Sigma}$ καὶ $\vec{\delta}$..

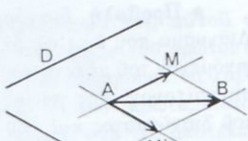


★ Πρακτικά, τέλος νὰ φέρωμε ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ $\vec{\alpha'}$, ἰσοδυνάμου πρὸς $\vec{\alpha}$, τὸ διάνυσμα $\vec{\beta'}$ ἰσοδύναμον πρὸς $\vec{\beta}$, ἀπὸ τὸ τέλος, τοῦ $\vec{\beta'}$ τὸ διάνυσμα $\vec{\gamma'}$ ἰσοδύναμον πρὸς $\vec{\gamma}$ ... Τὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει ὡς ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ $\vec{\alpha'}$, καὶ ὡς τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου διανύσματος, ἰσοδύναμα χαραγμένο, εἶναι τὸ ζητούμενο ἄθροισμα.

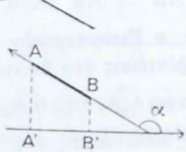
Ἰδιότητες. ★ Τὸ γεωμετρικὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων διανυσμάτων εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴν σειρὰν τῶν διανυσμάτων.

★ Ἂν κατασκευάσωμε τὸ γεωμετρικὸ ἄθροισμα πολλῶν διανυσμάτων ἀπὸ διάφορα σημεῖα, λαμβάνομε διανύσματα ἰσοδύναμα.

● **Ἀνάλυσις διανύσματος πρὸς δύο διευθύνσεις.** Ἔστω διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καὶ δύο διευθύνσεις D, D′. Φέρομε ἀπὸ τὴν ἀρχὴν A, κατόπιν ἀπὸ τὸ τέλος B, τὶς παράλληλες πρὸς D καὶ D′. Λαμβάνομε ἔτσι τὸ παραλληλόγραμμο AMBM′ καὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ γεωμετρικὸ ἄθροισμα τῶν $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM'}$.



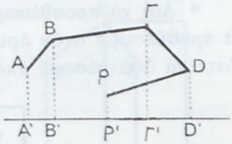
● **Προβολὴ διανυσμάτων. Διάνυσμα φερόμενον ἀπὸ ἄξονα.** Τὸ ἀλγεβρικὸ μέτρο τῆς προβολῆς ἐπὶ ἄξονα διανύσματος φερο-



μένου ἀπὸ ἄλλον ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀλγεβρικοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν διευθύνσεων τῶν δύο ἀξόνων. $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ συνα.

Διανύσματα μὲ φορεῖς παραλλήλους. Ὁ λόγος τῶν προβολῶν ἐπὶ ἄξονα δύο διανυσμάτων μὲ παραλλήλους φορεῖς ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν δύο διανυσμάτων.

Διανύσματα καὶ γεωμετρικὸν ἄθροισμα. Ἡ προβολὴ ἐπὶ ἄξονα τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος πολλῶν διανυσμάτων ἔχει ὡς ἀλγεβρικὸν μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν μέτρων τῶν προβολῶν τῶν διανυσμάτων ἐπὶ τὸν ἄξονα τούτου.



Ἂν $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma D} + \overrightarrow{DP}$

προβάλλοντες τὰ διανύσματα καὶ τὸ γεωμετρικό τους ἄθροισμα ἐπὶ ἄξονα ἔχομε:

$$\overline{A'P'} = \overline{A'B'} + \overline{B'\Gamma'} + \overline{\Gamma'D'} + \overline{D'P'}.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἀληθεύει καὶ ὅταν τὰ διάφορα διανύσματα δὲν περιλαμβάνωνται στὸ αὐτὸ ἐπίπεδο.

| Δ' | **Διάστημα.** Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν ποὺ περιλαμβάνονται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β. Γράφομε: διάστημα (α, β)· οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β μποροῦν νὰ συμπεριλαμβάνωνται εἰς τὸ διάστημα ἢ ἀντιθέτως νὰ μὴ συμπεριλαμβάνωνται. Πρέπει νὰ τὸ διευκρινίζωμε αὐτό.

Διατάσσω ἕνα πολυώνυμο. Βλέπε ***Πολυώνυμον***.

Διατομὴ ἢ τομὴ *δύο γραμμῶν*. Σημεῖο ὅπου οἱ δύο γραμμὲς τέμνονται.

|ΣΤ'| ● **Διατομὴ δύο ἐπιπέδων.** Εὐθεῖα κοινὴ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα.

Διαφέρει. Ὁ ἀριθμὸς 7 διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ 12. Καμμιὰ φορὰ σημαίνει «ἔχει διαφοράν». Οἱ ἀριθμοὶ 30 καὶ 25 διαφέρουν κατὰ 5, δηλαδὴ ἔχουν διαφοράν 5.

| A' | **Διαφορά.** Διαφορὰ μεταξὺ δύο μεγεθῶν τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἶναι τὸ μέγεθος ποὺ πρέπει νὰ προσθέσωμε στὸ μικρότερο διὰ νὰ λάβωμε τὸ μεγαλύτερο.

Διαφορὰ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν εἶναι ἕνας τρίτος ἀριθμὸς ποὺ πρέπει νὰ τὸν προσθέσωμε στὸν μικρότερο διὰ νὰ λάβωμε τὸν μεγαλύτερο.

Π.χ. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ 5 καὶ 3 εἶναι 2, διότι $2+3=5$

Τὰ δύο μεγέθη ἢ οἱ δύο ἀριθμοὶ καλοῦνται *ὅροι* τῆς διαφορᾶς.

Λαμβάνομε τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἰδιότητες. * Μία διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται ἂν προσθέσωμε (ἢ ἀφαιρέσωμε) τὴν αὐτὴν ποσότητα εἰς (ἢ ἀπὸ) τοὺς δύο ὅρους της.

Π.χ. $12-5=7$

Ἂς προσθέσωμε 3 εἰς κάθε ὅρον: $15-8=7$

* Διὰ νὰ προσθέσωμε εἰς ἕνα ἀριθμὸν μίαν διαφοράν, μποροῦμε νὰ προσθέσωμε στὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς διαφορᾶς, κατόπιν νὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τὸν δεύτερον ὅρον.

$$\boxed{\alpha+(\beta-\gamma)=\alpha+\beta-\gamma}$$

Π.χ. $8+(12-5)=8+12-5=20-5=15.$

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν ἄθροισμα πολλῶν ὅρων, μποροῦμε ν' ἀφαιρέσωμε πρῶτα τὸν πρῶτον ὅρον, κατόπιν ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τὸν δεύτερον, κατόπιν ἀπὸ τὸ νέο ἀποτέλεσμα τὸν τρίτον ὅρον κ.ο.κ.

$$\alpha-(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon$$

Π.χ.
$$\begin{aligned}51-(7+12+4)&=\mathbf{51-7}-12-4\\&=\mathbf{44-12}-4\\&=\mathbf{32-4}\\&=28\end{aligned}$$

* Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν μίαν διαφοράν, μποροῦμε νὰ προσθέσωμε στὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τὸν δεύτερον ὅρον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ληφθὲν ἀποτέλεσμα ν' ἀφαιρέσωμε τὸν πρῶτον ὅρον.

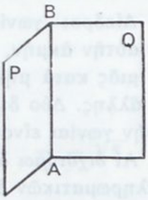
$$\boxed{\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta}$$

Π.χ. $42-(23-15)=42+15-23=57-23=34$

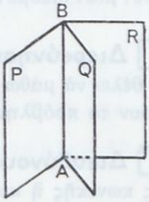
* Γινόμενον διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν. Βλέπε ***Γινόμενον***.

* Γινόμενον διαφορᾶς ἐπὶ ἄθροισμα ἢ ἐπὶ ἄλλην διαφοράν. Βλέπε ***Πολυώνυμον***.

ΣΤ' Δίεδρος γωνία. Μέρος χώρου πού περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἡμιεπιπέδων ἀγομένων ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Τὰ ἡμιεπίπεδα εἶναι αἱ *ἕδραι*, ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ *ἀκμή*. Τὴν δίεδρον γωνίαν τὴν παριστάνομε ἢ μὲ τὰ δύο γράμματα τῆς ἀκμῆς ἢ μὲ τέσσερα, δηλαδὴ τὰ γράμματα τῶν ἑδρῶν καὶ τὰ γράμματα τῆς ἀκμῆς : διέδρος γωνία AB ἢ (P, AB, Q).



● **Δίεδρος ἀποπλατυσμένη.** Δίεδρος τῆς ὁποίας οἱ δύο ἕδρες σχηματίζουν ἕνα ἐπίπεδο.



● **Δίεδροι ἐφεξῆς γωνίαι.** Δίεδροι πού ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, μίαν κοινὴν ἕδραν καὶ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς αὐτῆς ἕδρας:

δίεδροι (P, AB, Q) καὶ (Q, AB, R).

● **Δίεδροι παραπληρωματικαί, συμπληρωματικαί.** Δίεδροι πού ἔχουν ἄθροισμα μίαν ἀποπλατυσμένην δίεδρον γωνίαν, μίαν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν.

● **Ἄθροισμα, διαφορά, ἰσότης δύο διέδρων.** Ὅπως διὰ τὸ ἄθροισμα, διαφοράν, ἰσότητα δύο ἐπιπέδων γωνιῶν· ἐνεργοῦμε δηλ. ὡσὰν αἱ δίεδροι γωνίαι νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, μίαν κοινὴν ἕδραν καὶ ὡσὰν νὰ εἶναι εἴτε ἑκατέρωθεν, εἴτε ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς ἕδρας.

● **Εὐθύγραμμος ἢ ἐπίπεδος γωνία, ἡ εὐθύγραμμος κάθετος τομὴ διέδρου.** Βλέπε ***Τομὴ κάθετος.***

● **Μέτρησις διέδρων.** Κυρία μονάς. Εἶναι ἡ δίεδρος πού ἔχει ὡς κάθετον τομὴν τὴν μονάδα γωνίας: ὀρθὴ δίεδρος.

Δευτερεύουσαι μονάδες. Εἶναι αἱ δίεδροι τῶν 1^0, $1'$, $1''$, 1 βαθ .. πού ἔχουν ὡς κάθετον τομὴν τὰς γωνίας τῶν 1^0, $1'$, $1''$, 1 βαθ...

● **Διχότομον ἐπίπεδον διέδρου.** Βλέπε ***Διχότομον.***

● **Ἀντιστοιχία μεταξὺ διέδρων καὶ ἐπιπέδων γωνιῶν.** Ἀντικαθιστῶντες γωνίαν μὲ δίεδρον, πλευρὰν μὲ ἕδραν, κορυφὴν μὲ ἀκμὴν ἔχομε διὰ τὰς διέδρους γωνίας τὰς αὐτὰς ἰδιότητας καὶ τοὺς αὐτοὺς ὁρισμούς, ὅπως διὰ τὰς ἐπιπέδους γωνίας.

Π.χ. Δίεδροι *κατὰ κορυφήν*.

Δίεδροι γωνίαι ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, καὶ τὶς ἕδρες τῆς μιᾶς κατὰ μῆκος τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης. Δύο διέδροι κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Αἱ *διχοτόμοι* δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν διέδρων σχηματίζουν μίαν δίεδρον ὀρθὴν γωνίαν.

Γωνίαι *κατὰ κορυφήν*.

Γωνίαι ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ τὶς πλευρὲς τῆς μιᾶς κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Αἱ *διχοτόμοι* δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν σχηματίζουν μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

| Δ΄ | **Διερεύνησις.** Διερευνῶ μίαν ἐξίσωσιν ἢ ἕνα πρόβλημα σημαίνει θέλω νὰ μάθω ἂν ὑπάρχουν λύσεις, πόσες ὑπάρχουν καὶ ἂν ἐπαληθεύουν τὸ πρόβλημα. Βλέπε ***Ἐξίσωσις, Σύστημα, Πρόβλημα***.

| ΣΤ΄ | **Διευθύνουσα**. Καμπύλη ποὺ συναντοῦν πάντοτε οἱ γενέτειρες μιᾶς κωνικῆς ἢ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας στὴν μετακίνησή τους διὰ νὰ παραγάγουν αὐτὴν τὴν ἐπιφάνειαν. Εἰς τοὺς κοινοὺς κώνους καὶ κυλίνδρους ἡ διευθύνουσα εἶναι, γενικά, κύκλος.

| Ε΄ | **Διτετράγωνος.** Ἐξίσωσις διτετράγωνος. Εἶναι ἐξίσωσις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ποὺ δὲν ἔχει ὅρον τοῦ τρίτου οὔτε τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Ἡ γενική της μορφὴ εἶναι:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

Θέτοντες $x^2 = X$ ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις γίνεται:

$$\alpha X^2 + \beta X + \gamma = 0 \text{ (ἐπιλύουσα)}$$

Ζητοῦμε τὰς ρίζας τῆς ἐπιλυούσης. Ἂν ὑπάρχουν, λύομε τὰς ἐξισώσεις:

$$x^2 = X' \quad , \quad x^2 = X''$$

ποὺ δὲν ἐπιδέχονται λύσιν παρὰ ἂν τὸ δεύτερο μέλος εἶναι θετικό.

Ἡ ἐξίσωσις ἔχει λοιπόν:

4 ρίζες, ἂν X' καὶ X'' εἶναι θετικά.

2 » ἂν X' ἢ X'' μόνον εἶναι θετικό.

0 » ἂν X' καὶ X'' εἶναι ἀρνητικά.

Ἂν ἡ ἐπιλύουσα ἔχῃ μίαν ρίζαν μηδέν, ἡ διτετράγωνος ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν ἴσην μὲ 0. Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ στὸ $\gamma=0$, καὶ ἡ διτετράγωνος ἀναλύεται τότε εἰς γινόμενον παραγόντων.

1ο Παράδειγμα: $x^4 - 8x^2 + 15 = 0.$

Επιλύουσα: $X^2 - 8X + 15 = 0$

Ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης:

$$X' = 3 \qquad X'' = 5.$$

Ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως:

$$x_1 = -\sqrt{5} \qquad x_2 = -\sqrt{3} \qquad x_3 = \sqrt{3} \qquad x_4 = \sqrt{5}\,.$$

2ο Παράδειγμα: $2x^4 - 5x^2 - 7 = 0$

Ἐπιλύουσα: $2X^2 - 5X - 7 = 0$

Ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης:

$$X' = -1 \qquad X'' = \frac{7}{2}$$

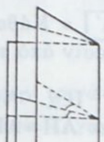
Ρίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{7}{2}} \qquad x_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\text{ἢ} \quad x_1 = -\frac{\sqrt{14}}{2} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

|ΣΤ΄| **Διχότομον.** **Διχότομον ἐπίπεδον διέδρου γωνίας.** Εἶναι ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀγόμενο ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ποὺ διαιρεῖ τὴν δίεδρον εἰς δύο διέδρους γωνίας ἴσας.

Ἰδιότητες. ⋆ Κάθε σημεῖο τοῦ διχοτόμου ἐπιπέδου διέδρου γωνίας κεῖται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου.



⋆ Κάθε σημεῖο ἐντὸς τῆς διέδρου καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς ἕδρας, ἀνήκει εἰς τὸ διχότομον τῆς διέδρου γωνίας.

⋆ Τὸ διχότομον διέδρου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἐσωτερικῶν σημείων καὶ κεῖται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου.

|ΣΤ΄| Εἶναι ἐπίσης ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς δύο ἕδρας σφαιρῶν.

⋆ Τὰ διχότομα ἐπίπεδα δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν ἑδρῶν σχηματίζουν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν.

⋆ Τὰ διχότομα ἐπίπεδα δύο κατὰ κορυφὴν διέδρων γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

⁎ Τὰ διχότομα ἐπίπεδα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου διέρχονται ἀπὸ μίαν ἡμιευθεῖαν ἀγομένην ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς τριέδρου. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς τρεῖς ἕδρας τῆς τριέδρου.

⁎ Τὰ διχότομα ἐπίπεδα τῶν 6 διέδρων γωνιῶν τετραέδρου διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ποὺ εἶναι κέντρον σφαίρας ἐφαπτομένης εἰς τὰς 4 ἕδρας τετραέδρου.

| Γ΄ | **Διχοτόμος** γωνίας. Εἶναι μία ἡμιευθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας ποὺ διαιρεῖ τὴν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας.

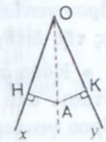
Π.χ. Ox εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$.

Ἰδιότητες. ⁎ Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

⁎ Αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

⁎ Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας σχηματίζουν δύο καθέτους εὐθείας.

| Δ΄ | ⁎ Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου γωνίας εὑρίσκεται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.



Π.χ. Ἂν A κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς $\widehat{xoy}$, τότε AH=AK.

⁎ Κάθε σημεῖο ποὺ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς δύο πλευρὰς μιᾶς γωνίας, ἀνήκει εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας αὐτῆς.

⁎ Ἡ διχοτόμος γωνίας εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ποὺ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

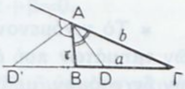
⁎ Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ποὺ ἀπέχουν ἐξ' ἴσου ἀπὸ δύο τεμνόμενες εὐθεῖες, εἶναι τὸ σύνολο δύο καθέτων εὐθειῶν ποὺ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς τεμνόμενες εὐθεῖες.

⁎ Αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖο ποὺ εἶναι κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

⁎ Αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι δύο γωνιῶν τριγώνου καὶ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας τέμνονται στὸ αὐτὸ σημεῖο ποὺ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ παρεγγεγραμμένου στὴν τρίτη γωνία.

⁎ Ἡ διχοτόμος ἐγγεγραμμένης γωνίας ἢ ἐπικέντρου γωνίας διαιρεῖ τὸ ἀντίστοιχο τόξο εἰς δύο ἴσα μέρη.

⁎ Ἡ διχοτόμος ἐσωτερικῆς (ἢ ἐξωτερικῆς) γωνίας τριγώνου ὁρίζει στὴν ἀπέναντι πλευρὰν τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὶς ἐφεξῆς πλευρές.



Ἔχομε:

Διὰ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον: $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{D\Gamma}{A\Gamma}$

» » ἐξωτερικὴν » $\dfrac{D'B}{AB} = \dfrac{D'\Gamma}{A\Gamma}$

Μετρικαὶ σχέσεις. Τιμὲς τῶν τμημάτων: DB, DΓ καὶ D′B, D′Γ.

$$DB = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} \qquad D\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$$

$$D'B = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma} \qquad D'\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$$

(ὑποθέτοντες $\beta > \gamma$).

$\boxed{\text{E}'}$ **Ἄλλαι ἰδιότητες** ⁎ Οἱ εὐθεῖες ποὺ ἑνώνουν μίαν κορυφὴν τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα ποὺ διαιροῦν τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὸν λόγον τῶν δύο ἐφεξῆς πλευρῶν, εἶναι διχοτόμοι τῆς γωνίας αὐτῆς.

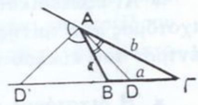
⁎ Οἱ πόδες τῶν διχοτόμων εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ποὺ συναντοῦν.

Ἔχομε: $\dfrac{D\,B}{D\,\Gamma} = \dfrac{D'\,B}{D'\,\Gamma}$

⁎ Οἱ πλευρὲς γωνίας καὶ οἱ διχοτόμες τῆς γωνίας αὐτῆς σχηματίζουν ἁρμονικὴν δέσμην.

⁎ Ἂν δύο συζυγεῖς ἀκτῖνες μιᾶς ἁρμονικῆς δέσμης εἶναι κάθετες, τότε οἱ ἀκτῖνες αὐτές εἶναι οἱ διχοτόμες τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες.

῎Αλλαι μετρικαὶ σχέσεις ✱ Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τους, σύν τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων ποὺ ὁρίζονται ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς ἀπὸ τὴν διχοτόμον αὐτήν.



$$AB \cdot A\Gamma = AD^2 + BD \cdot D\Gamma.$$

✱ Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων ποὺ ὁρίζονται ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον, μεῖον τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου αὐτῆς.

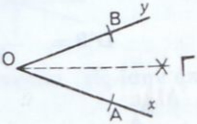
$$AB \cdot A\Gamma = BD' \cdot D'\Gamma - AD'^2.$$

✱ Τὸ μῆκος τῶν διχοτόμων εἶναι :

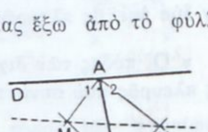
$$AD^2 = \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\,[(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2] = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\,\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}$$

$$AD'^2 = \frac{\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2}\,[\alpha^2 - (\beta-\gamma)^2] = \frac{\alpha^2\,\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2} - \beta\gamma$$

Γ′ • **Κατασκευὴ τῆς διχοτόμου γωνίας xoy.** Χαράσσομε ἕνα τόξο κύκλου μὲ κέντρο O, ποὺ τέμνει Ox στὸ A καὶ Oy στὸ B. ᾿Απὸ A καὶ B ὡς κέντρα, μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, χαράσσομε δύο τόξα κύκλου ποὺ τέμνονται στὸ Γ. OΓ εἶναι ἡ διχοτόμος.



Ε′ **Εἰδικὴ περίπτωσις.** ῾Η κορυφὴ τῆς γωνίας ἔξω ἀπὸ τὸ φύλλο. Λαμβάνομε ἐπὶ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν D καὶ D′ δύο τυχόντα σημεῖα A, B. Φέρομε τὰς διχοτόμους τῶν $\widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{B_1}$ ποὺ τέμνονται στὸ M, κατόπιν τὰς διχοτόμους τῶν $\widehat{A_2}$ καὶ $\widehat{B_2}$ ποὺ τέμνονται στὸ N. ῾Η εὐθεῖα M N εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (D, D′).



Διώνυμον. Πολυώνυμον μὲ δύο ὅρους.

Π.χ. $3\alpha x - 2\beta y^2$ $5x^3 - 2$

$\boxed{Δ'}$ ● **Διώνυμον πρώτου βαθμοῦ μὲ x.** Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῆς μορφῆς:

$$αx + β.$$

x εἶναι μία μεταβλητὴ ποσότης, α καὶ β εἶναι συντελεσταὶ γνωστοί, διάφοροι τοῦ 0.

Ἡ ρίζα διωνύμου εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ποὺ μηδενίζει τὸ διώνυμο. Εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως: $αx+β=0$.

Π.χ. Τὸ διώνυμον $3x - 9$ ἔχει ὡς ρίζαν 3.

● **Πρόσημον τοῦ διωνύμου πρώτου βαθμοῦ.** Τὸ διώνυμον μπορεῖ νὰ εἶναι θετικὸ ἢ ἀρνητικό, ἀνάλογα μὲ τὶς τιμὲς ποὺ δίδονται στὸ x.

Κανὼν ✶ Ἕνα διώνυμο πρώτου βαθμοῦ μὲ x ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ συντελεστοῦ α, ἂν δώσωμε στὸ x τιμὴν μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ρίζαν.

✶ Ἔχει τὸ πρόσημον $-α$, ἂν δώσωμε τιμὴν μικροτέραν ἀπὸ τὴν ρίζαν.

✶ Ἰσοῦται μὲ 0, ἂν x ἰσοῦται μὲ τὴν ρίζαν.

1ο παράδειγμα: $3x - 5$, ρίζα: $\frac{5}{3}$

Διὰ $x > \frac{5}{3}$, τὸ διώνυμο ἔχει τὸ πρόσημο τοῦ συντελεστοῦ 3, δηλ. +.

Διὰ $x < \frac{5}{3}$, ἔχει τὸ ἀντίθετο πρόσημο, δηλ. —.

2ο παράδειγμα: $-2x - 6$, ρίζα: -3.

Διὰ $x > -3$, τὸ διώνυμο ἔχει τὸ πρόσημο τοῦ συντελεστοῦ -2, δηλ. —.

Διὰ $x < -3$, ἔχει τὸ ἀντίθετο πρόσημο, δηλ. +.

● **Πρόσημον γινομένου παραγόντων πρώτου βαθμοῦ.** Τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πρόσημον τῶν διαφόρων παραγόντων. Ἐξετάζομε χωριστὰ τὸ πρόσημον ἑκάστου παράγοντος καὶ συγκεντρώνομε τὰ ἀποτελέσματα εἰς ἕνα πίνακα.

Π.χ. $Γ = (2x - 1)\ (3 - x)\ (x + 2)\ (3x - 5)$.

1ος παράγων, ρίζα: $\frac{1}{2}$. Ὁ παράγων εἶναι θετικὸς διὰ $x > \frac{1}{2}$

2ος παράγων, ρίζα: 3. Ὁ παράγων εἶναι ἀρνητικὸς διὰ $x > 3$

3ος παράγων, ρίζα : -2. Ὁ παράγων εἶναι θετικὸς διὰ $x > -2$

4ος παράγων, ρίζα : $\frac{5}{3}$. Ὁ παράγων εἶναι θετικὸς διὰ $x > \frac{5}{3}$

Ὅταν x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$, τὸ πρόσημο τῶν παραγόντων συνοψίζεται στὸν ἀκόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
1ος παράγων		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
2ος παράγων		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
3ος παράγων		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
4ος παράγων		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Ἀποτέλεσμα		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ γινόμενον ἀλλάζει πρόσημον κάθε φορὰ ποὺ x διασχίζει μίαν ἀπὸ τὰς ρίζας τῶν παραγόντων.

Εἰδικὴ περίπτωσις. Ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου ἔχει ἐκθέτην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομε τὸν κανόνα τοῦ προσήμου δυνάμεως ἀριθμοῦ.

● **Κλάσματα ρητά.** Τὸ πρόσημον κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου α.β. Ἐπαναφερόμεθα τότε εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ προσήμου γινομένου.

| Α΄ | Δοκιμή. Κάνομε τὴν δοκιμὴν μιᾶς πράξεως σημαίνει ἐπαληθεύομε ἂν ἡ πρᾶξις εἶναι σωστή.

● **Πρόσθεσις.** Ἐπαναλαμβάνομε τὴν πρόσθεσιν κατ' ἀντίστροφον φορὰν καὶ πρέπει νὰ εὕρωμε τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

● **Ἀφαίρεσις.** Προσθέτοντες στὸ ἀποτέλεσμα, ποὺ βρήκαμε, τὸν μικρὸν ἀριθμόν, πρέπει νὰ λάβωμε τὸν μεγάλον ἀριθμόν.

● **Πολλαπλασιασμός.** Ἐπαναλαμβάνομε τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐναλλάσοντες τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Τὸ ἀποτέλεσμα πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο.

• **Διαίρεσις.** Πολλαπλασιάζομε τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ προσθέτομε στὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὑπόλοιπον. Πρέπει νὰ εὕρωμε τὸν διαιρετέον.

◆ **Δοκιμὴ τοῦ 9**. Χρησιμοποιοῦμε τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τῶν διαφόρων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ. Ἂν τὸ ἀποτέλεσμα ὑπερβαίνῃ τὸ 9, βρίσκομε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀποτελέσματος. Τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9.

Παρατήρησις. Ἂν ἕνα ἀπὸ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἕνα ἀπὸ τὰ ἐνδιάμεσα ἀποτελέσματα εἶναι 9, μποροῦμε νὰ μὴ τὸ λάβωμε ὑπ' ὄψιν.

Π.χ. 6374

Πρέπει νὰ ὑπολογίσωμε $6+3+7+4$

Ἐπειδὴ $6+3=9$, ὑπολογίζομε μόνον $7+4=11$. Ἐφαρμόζοντες τὸν αὐτὸν ὑπολογισμὸν στὸ 11, $1+1=2$

Τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ 6374 εἶναι 2.

• **Δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 μιᾶς προσθέσεως.** Εὑρίσκομε τὰ ὑπόλοιπα διὰ 9 τῶν διαφόρων ὅρων τοῦ ἀθροίσματος. Τὰ προσθέτομε καὶ βρίσκομε τὸ ὑπόλοιπὸν διὰ 9 τοῦ εὑρεθέντος ἀποτελέσματος. Πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ ἀποτελέσματος τῆς προσθέσεως.

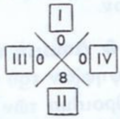
Π.χ.	645	ὑπόλ. διὰ 9	6	Σύνολον : 13
	+ 73	» » »	1	ἢ : $1+3=4$.
	+ 258	» » »	6	
	976	» » »	4	

• **Δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 μιᾶς ἀφαιρέσεως.** Εὑρίσκομε τὰ ὑπόλοιπα διὰ 9 τῶν δύο ὅρων. Ἀφαιροῦμε τὸ δεύτερο ἀπὸ τὸ πρῶτο (ἂν τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, προσθέτομε 9 στὸ πρῶτο). Τὸ ἀποτέλεσμα πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ ἀποτελέσματος τῆς ἀφαιρέσεως.

Π.χ.	742	ὑπόλ. διὰ 9	4	Διαφορά :
	− 357	» » »	6	$9+4-6=7$
	385	» » »	7	

• **Δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.** Εὑρίσκομε τὰ ὑπόλοιπα διὰ 9 τῶν δύο παραγόντων. Πολλαπλασιάζομε τὰ ὑπόλοιπα μεταξύ τους καὶ βρίσκομε τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ ἀποτελέσματος τούτου. Πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Π.χ. 648 ὑπόλ. διὰ 9 0
134 » » » 8
2592
1944
648
86832 ὑπόλ. διὰ 9 0



$\boxed{\text{I}}$ ὑπόλ. διὰ 9 τοῦ πρώτου παράγοντος

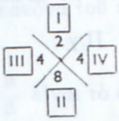
$\boxed{\text{II}}$ » » » τοῦ δευτέρου »

$\boxed{\text{III}}$ » » » τοῦ ἀποτελέσματος

$\boxed{\text{IV}}$ γινόμενον τοῦ $\boxed{\text{I}}$ καὶ $\boxed{\text{II}}$.

● **Δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 μιᾶς διαιρέσεως.** Εὑρίσκομε τὰ ὑπόλοιπα διὰ 9 τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομε τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ μεταξύ τους. Προσθέτομε στὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως. Τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ νέου ἀποτελέσματος πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ διαιρέτου.

Π.χ. 38641 | 542
0701 | 71
159



$\boxed{\text{I}}$ ὑπόλ. διὰ 9 τοῦ διαιρέτου.

$\boxed{\text{II}}$ » » » τοῦ πηλίκου

$\boxed{\text{III}}$ » » » τοῦ διαιρετέου

$\boxed{\text{IV}}$ » » » τοῦ ἀριθμοῦ: $\boxed{\text{I}} \times \boxed{\text{II}}$ + ὑπόλ. διὰ 9 τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως.

Παρατήρησις. Ἂν ἡ δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 δὲν ἐπιτύχῃ, ἡ πρᾶξις εἶναι λανθασμένη. Ἀλλὰ καὶ ἂν ἐπιτύχῃ, δὲν εἶναι βέβαιον ὅτι ἡ πρᾶξις εἶναι σωστή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

᾿Απαραίτητο βοήθημα διὰ τοὺς μαθητὰς ἀπὸ Α΄ μέχρι καὶ ΣΤ΄ Γυμνασίου, ὑποψηφίους ᾿Ανωτ. Σχολῶν, φοιτητάς, ἐπιστήμονας καὶ γονεῖς ποὺ θέλουν νὰ ἀνεβάσουν τὸ ἐπίπεδο τῶν Μαθηματικῶν των γνώσεων.

***

Περιέχει ὅλα τὰ διδασκόμενα Μαθηματικὰ τοῦ προγράμματος· ἐπίσης Σύνολα καὶ Μοντέρνα Μαθηματικὰ τῶν Γυμνασίων καὶ Φροντιστηρίων (θεωρίαν καὶ ἀσκήσεις), κατὰ τὸν πλέον κατανοητὸν καὶ συνοπτικὸν τρόπον, ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΑΙ ΚΑΙ ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

Εὐχαριστοῦμε θερμῶς τὸ πολυπληθέστατο κοινὸ τῶν μαθητῶν, σπουδαστῶν καὶ γονέων διὰ τὸ ζωηρὸν ἐνδιαφέρον μὲ τὸ ὁποῖον ὑπεδέχθη τὰ πρῶτα τεύχη τῆς «Μαθηματικῆς ᾿Εγκυκλοπαιδείας».

᾿Ιδιαιτέρως εὐχαριστοῦμε τοὺς κ.κ. Συναδέλφους, Γυμνασιάρχας καὶ Λυκειάρχας διὰ τὰ ἐγκώμια ποὺ ἔσπευσαν νὰ πλέξουν διὰ τὸ ἔργον μας.

***

᾿Επὶ πλέον ἀνακοινοῦμεν ὅτι :

1. ῾Η «Μαθηματικὴ ᾿Εγκυκλοπαίδεια» θὰ ἔχῃ, ὁπωσδήποτε, ὁλοκληρωθῆ μέχρι τοῦ ᾿Ιουνίου ἐ.ἔ. διὰ τῆς κυκλοφορίας διπλῶν ἑβδομαδιαίων τευχῶν.

2. ῞Οσοι τυχόν, δὲν εὑρίσκουν τὰ τεύχη εἰς τὰ περίπτερα (καὶ κυρίως τὰ προηγούμενα), δύνανται νὰ τὰ ζητοῦν εἰς τὰ Κεντρικὰ Βιβλιοπωλεῖα ᾿Αθηνῶν («Προμηθεὺς» Σταδίου 41, «Βιβλιοχαρτεμπορικὴ» Σταδίου 49, «Σιδέρης» Σταδίου 44, «Α. Καραβία» ᾿Ακαδημίας 58 κ.λ.π.) ἢ παρὰ τοῦ Συγγραφέως—᾿Εκδότου :

Π. Πλούτση—Καθηγ. Μαθηματικῶν
ὁδὸς Πατησίων 112—τηλ. 819.757—ΑΘΗΝΑΙ (801)

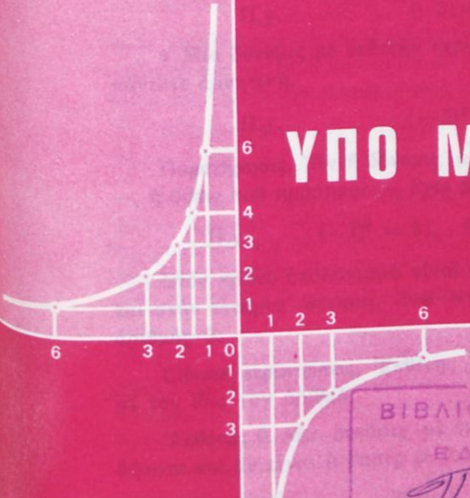
ΠΕΤΡΟΥ ΠΛΟΥΤΣΗ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν (Διπλ. Παρισίων)

ΔΙΑ ΠΡΩΤΗΝ ΦΟΡΑΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ



ΔΡΑΧ. 8
ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΚΑΘΕ ΤΕΤΑΡΤΗ

εἰς ἕνα (1) καὶ μόνον τόμον, ἤτοι:
22 συνολικῶς ἑβδομαδιαῖα τεύχη

ΤΕΥΧΟΣ
5

$\boxed{\text{Β}}$ **Δύναμις.** ◆ **Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ φυσικὸν ἐκθέτην.** Εἶναι τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων ποὺ περιέχονται στὸ γινόμενο εἶναι ὁ *ἐκθέτης*. Σημειώνεται μὲ ψηφία μικρότερα ποὺ γράφονται ἄνω δεξιὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Π.χ. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$.

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ ὁ ἐκθέτης εἶναι 4.

Νὰ μὴ συγχέωμε 5^4, ποὺ ἰσοῦται μὲ 625, μὲ 5×4, ποὺ ἰσοῦται μὲ 20.

$\boxed{\Gamma'}$ ● **Δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.** Ὁρισμὸς ὁ ἴδιος ὅπως στὴν ἀριθμητική.

Π.χ. $(-2)\,(-2)\,(-2) = (-2)^3 = -8$.

Ἰδιότητες. ⋆ Μία τυχοῦσα δύναμις ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε θετική.

Π.χ. $(3)^4 = 81$.

⋆ Μία δύναμις μὲ ἐκθέτην ἄρτιον ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε θετική.

Π.χ. $(-3) = 81$.

⋆ Μία δύναμις μὲ ἐκθέτην περιττὸν ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε ἀρνητική.

Π.χ. $(-3)^5 = -243$.

Παρατήρησις. Ἂν ἡ δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ γράφεται μὲ πρόσημον —, ἡ θέσις τοῦ προσήμου — ἔχει μεγάλην σημασίαν.

Π.χ. $(-3)^4 = 81$, ἀλλὰ $-3^4 = -(3^4) = -81$.

Στὸν πρῶτο ὑπολογισμὸ εἶναι ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς −3 ποὺ ὑψώνεται στὴν τετάρτη δύναμη, ἐνῶ στοὺς ἄλλους ὑπολογισμοὺς εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3.

Εἰδικαὶ περιπτώσεις. Ἐκθέτης 1. Μία δύναμις μὲ ἐκθέτην 1 ἰσοῦται μὲ τὸν ἴδιο τὸν ἀριθμό.

Ἐκθέτης 0. Μία δύναμις μὲ ἐκθέτην 0 ἰσοῦται πάντα μὲ 1, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ βάσις $\neq 0$.

Π.χ. $7^0 = 1 \qquad (-3)^0 = 1$.

Ἐκθέτης ἀρνητικός. Μία δύναμις μὲ ἀρνητικὸν ἐκθέτην εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς δυνάμεως μὲ ἐκθέτην ἀντίθετον (ἢ συμμετρικὸν) πρὸς τὸν προηγούμενον.

Π.χ. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{-1}{125}$.

● **Πράξεις ἐπὶ τῶν δυνάμεων. Πρόσθεσις καὶ Ἀφαίρεσις.** Δὲν ὑπάρχει κανένας εἰδικὸς κανόνας· πρέπει νὰ ὑπολογίζωμε κάθε δύναμιν καὶ νὰ ἐκτελοῦμε κατόπιν τὴν πρᾶξιν ποὺ ὑποδεικνύεται.

Π.χ. $3^4 - 5^2 + (-2)^3 = 81 - 25 + (-8) = 48.$

—**Πολλαπλασιασμὸς δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.** Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι μία νέα δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ποὺ ἔχει ὡς ἐκθέτην τὸ ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν ἐκθετῶν.

Π.χ. $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
$3^{-6} \times 3^2 = 3^{-6+2} = 3^{-4}$.

Παρατήρησις. Ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται μόνον εἰς δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Δι' ἀριθμοὺς διαφόρους πρέπει νὰ ὑπολογίζωμε κάθε δύναμιν χωριστὰ καὶ νὰ ἐκτελοῦμε τὸ γινόμενον.

Π.χ. $2^3 \times 5^3 = 8 \times 25 = 200.$

—**Διαίρεσις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.** Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι μία νέα δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ποὺ ἔχει ὡς ἐκθέτην τὴν ἀλγεβρικὴν διαφορὰν τῶν ἀρχικῶν ἐκθετῶν (τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου).

Π.χ. $6^5 : 6^2 = 6^{5-2} = 6^3$
$(-8)^{-6} : (-8)^3 = (-8)^{-6-3} = (-8)^{-9}$.

Παρατήρησις. Ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται μόνον εἰς δύο δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Δι' ἀριθμοὺς διαφόρους πρέπει νὰ ὑπολογίζωμε κάθε δύναμιν χωριστὰ καὶ νὰ ἐκτελοῦμε κατόπιν τὴν διαίρεσιν.

Π.χ. $6^3 : 2^4 = 216 : 16 = 13{,}5.$

—**Δύναμις δυνάμεως ἀριθμοῦ.** Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι μία νέα δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ποὺ ἔχει ὡς ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

Π.χ. $(5^2)^3 = 5^6$ $[(-3)^2]^{-4} = (-3)^{-8}$.

—**Δύναμις γινομένου παραγόντων.** Ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμε κάθε παράγοντα εἰς τὴν δύναμιν ποὺ ὑποδεικνύεται.

Π.χ. $(2 \times 3 \times 12)^3 = 2^3 \times 3^3 \times 12^3$

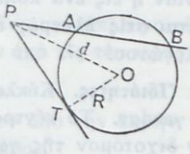
$$(2\,\alpha\beta^2\,x)^4 = 16\,\alpha^4\,\beta^8\,x^4.$$

—Δύναμις λόγου ἢ κλάσματος. Ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμε κάθε ὅρον εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.

Π.χ. $$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$$

$$\left(\frac{-2\alpha}{x^2}\right)^3 = \frac{-8\alpha^3}{x^6}$$

| Ε΄ | ◆ **Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον.** Ἂν ἀπὸ σημεῖον P φέρωμε μίαν τέμνουσαν ποὺ τέμνει τὸν κύκλον O εἰς δύο σημεῖα A, B, τότε τὸ γινόμενον $\gamma = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$ εἶναι σταθερὸν δι᾽οἱανδήποτε τέμνουσαν, καλεῖται δὲ *δύναμις τοῦ σημείου P* ὡς πρὸς τὸν κύκλον, ἂν d εἶναι ἡ ἀπόστασις PO, R ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου, PT ἐφαπτομένη.



$$\gamma = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PT}^2 = d^2 - R^2.$$

Ἰδιότης. Ἡ δύναμις σημείου εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς

— θετικός, ἂν τὸ σημεῖον εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου,

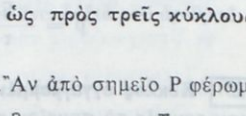
— μηδέν, ἂν τὸ σημεῖον εἶναι ἐπὶ τοῦ κύκλου,

— ἀρνητικός, ἂν τὸ σημεῖον εἶναι ἐντὸς τοῦ κύκλου.

● **Σημεῖον ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς δύο κύκλους.** Βλέπε *Ἄξων* (ριζικός).

● **Σημεῖον ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τρεῖς κύκλους.** Βλέπε *Κέντρον* (ριζικόν).

|ΣΤ΄| ◆ **Δύναμις σημείου ὡς πρὸς σφαῖραν.** Ἂν ἀπὸ σημεῖο P φέρωμε μίαν τέμνουσαν ποὺ τέμνει τὴν σφαῖραν O εἰς δύο σημεῖα A,B, τότε τὸ γινόμενον $\gamma = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$ εἶναι σταθερὸν δι᾽οἱανδήποτε τέμνουσαν, καλεῖται δὲ *δύναμις τοῦ σημείου P* ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν, ἂν d εἶναι ἡ ἀπόστασις PO, R ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας, PT ἐφαπτομένη :

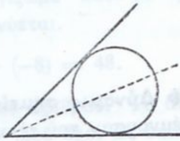


$$\gamma = \overline{PA}\cdot PB = PT^2 = d^2 - R^2.$$

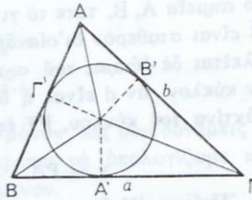
● **Σημεῖον ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς δύο σφαίρας.** Βλέπε *Ἐπίπεδον* (ριζικόν).

| Δ΄ | **Ἐγγεγραμμένη.** ● **Γωνία ἐγγεγραμμένη.** Γωνία ποὺ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐπὶ κύκλου καὶ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι δύο χορδαὶ ἢ χορδὴ καὶ ἐφαπτομένη. Ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ποὺ βαίνει στὸ αὐτὸ τόξο. Ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρο μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.

● **Πολύγωνον ἐγγεγραμμένον.** Ἕνα πολύγωνο εἶναι ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλον, ὅταν αἱ κορυφαὶ του εἶναι ἐπὶ τοῦ κύκλου. Βλέπε ***Πολύγωνον.***



● **Κύκλος ἐγγεγραμμένος.** Ἕνας κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς μίαν γωνίαν ἢ εἰς ἕνα πολύγωνο, ὅταν ἐφάπτεται στὶς πλευρὲς τῆς γωνίας ἢ τοῦ πολυγώνου.



Ἰδιότητες. Κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς γωνίαν. Τὸ κέντρον του εἶναι εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας.

Κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τρίγωνον. Τὸ κέντρον του κεῖται στὸ σημεῖο τομῆς τῶν τριῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

| Ε΄ | **Τμήματα ὁριζόμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.** Ἡ ἡμιπερίμετρος εἶναι τ :

$AB' = A\Gamma' = \tau - \alpha \qquad B\Gamma' = BA' = \tau - \beta \qquad \Gamma B' = \Gamma A' = \tau - \gamma.$

Ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι :

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ \ (\tau-\gamma)}{\tau}}.$$

| Ε΄ | **Κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς ρόμβον, εἰς τετράγωνον.** Ἔχει τὸ κέντρον του εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων.

Διὰ τετράγωνον μὲ πλευρὰν α : $\rho = \frac{\alpha}{2}$.

| Ε΄ | **Κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς κανονικὸν κυρτὸν πολύγωνον.** Κάθε κανονικὸ κυρτὸ πολύγωνο ἔχει ἕνα κύκλον ὁμόκεντρον τοῦ κειμένου ἐντὸς περιγεγραμμένου κύκλου. Ἡ ἀκτίνα του εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου.

| Δ΄ | **Ἐγγράμματος.** ● **Παράστασις, ἐξίσωσις ἐγγράμματος.** Παρά-

στασις ἢ ἐξίσωσις τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ ἀντὶ νὰ εἶναι ἀριθμητικοί, εἶναι ἐγγράμματοι, δηλαδὴ παριστάνονται μὲ γράμματα.

Π.χ. $0x+\beta=0$ εἶναι ἡ ἐγγράμματος μορφὴ τῆς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

● **Ἐγγράμματον μέρος ἑνὸς μονωνύμου.** Μέρος τοῦ μονωνύμου ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ γράμματα, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ ἀριθμητικὸν μέρος ποὺ ἀποτελεῖ τὸν συντελεστήν.

Π.χ. $-3\alpha x^2y$ ἔχει ὡς ἐγγράμματον μέρος $\alpha x^2 y$.

Εἶναι προτιμότερο πάντοτε νὰ γράφωμε τὰ γράμματα κατ' ἀλφαβητικὴν σειράν.

Ἐγγραφὴ τῶν πολυγώνων. Βλέπε ***Πολύγωνον***.

Ἐγγράψιμον. **Τετράπλευρον ἐγγράψιμον.** Ἕνα τετράπλευρο εἶναι ἐγγράψιμο ὅταν μποροῦμε νὰ φέρωμε ἕνα κύκλον ἀπὸ τὶς τέσσερες κορυφές. Βλέπε ***Τετράπλευρον***.

Ἕδρα διέδρου γωνίας. Ἡμιεπίπεδον ἀγόμενον ἀπὸ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου ποὺ περιορίζει τὴν δίεδρον ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος.

Μία δίεδρος ἔχει δύο ἕδρας.

● **Ἕδρα τριέδρου.** Γωνία ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἀκμὲς τῆς τριέδρου.

● **Ἕδρα πολυέδρου.** Εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα πολύγωνα ποὺ περιορίζουν τὸ πολύεδρον.

Ἕνα πολύεδρον ἔχει τοὐλάχιστον τέσσερες ἕδρες.

Γ΄ **Ἐκθέτης.** Ἀριθμὸς ποὺ δείχνει, εἰς μίαν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ α, πόσες φορὲς πρέπει νὰ λάβωμε ἴσους παράγοντας πρὸς α. Ὁ ἐκθέτης σημειώνεται μὲ ἕνα μικρὸ ψηφίο ποὺ γράφεται ἄνω δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ α.

Π.χ. 2^5 α^3

★ **Ἐκθέτης 1.** Ἡ δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην 1 εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός. Ὁ ἐκθέτης 1 δὲν γράφεται.

Δ΄ ★ **Ἐκθέτης 0.** Ἡ δύναμις μὲ ἐκθέτην 0 ἑνὸς τυχόντος ἀριθμοῦ ἰσοῦται πάντοτε μὲ 1.

Π.χ. $3^0 = 1$ $0^0 = 1$.

★ **Ἐκθέτης ἀρνητικός.** Μία δύναμις μὲ ἀρνητικὸν ἐκθέτην εἶναι τὸ ἀντίστροφον τῆς δυνάμεως ποὺ ἔχει ὡς ἐκθέτην τὸν ἐκθέτην ποὺ εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὸν πρῶτον (δηλ. ἕνα ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ θετικόν).

Π.χ. $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $10^{-4} = \frac{1}{10^4}$.

Ἑκτάριον. Μονὰς μετρήσεως μεγάλων ἀγροτικῶν ἐκτάσεων, ἴση μὲ 100 ἄρ ἢ 10.000 m^2. Βλέπε ***Πίναξ τῶν μονάδων μετρήσεως.***

Ἐκτὸς ἐναλλάξ. Βλέπε ***Γωνία.***

| Ε΄ | **Ἐλάχιστον.** Ἡ μικροτέρα τιμὴ ποὺ μπορεῖ νὰ λάβῃ μία συνάρτησις, ὅταν παύσῃ νὰ μειοῦται.

● **Ἐφαρμογὴ εἰς τὸ τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ.** Τὸ τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διέρχεται ἀπὸ ἕνα ἐλάχιστον, ἂν $\alpha > 0$. Τὸ ἐλάχιστον αὐτὸ ἔχει ὡς συντεταγμένας:

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} \qquad y = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

Π.χ. $y = 3x^2 + 6x + 2.$

Ἂν ὁ συντελεστὴς α εἶναι θετικός, τὸ τριώνυμον διέρχεται ἀπὸ ἕνα ἐλάχιστον μὲ συντεταγμένας:

$$x = \frac{-6}{6} = -1 \qquad y = \frac{24 - 36}{12} = -1.$$

| Ε΄ | **Ἐλεύθερον.** Διάνυσμα ἐλεύθερον. Διάνυσμα κινητὸν ποὺ μένει ἰσοδύναμον εἰς ἕνα σταθερὸν διάνυσμα.

Ἐμβαδόν. Εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν τῆς ἐκτάσεως μιᾶς ἐπιφανείας.

Μονάδες. Βλέπε ***Πίναξ τῶν Μονάδων Μετρήσεως.***

◆ **Στοιχειώδεις τύποι ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.**

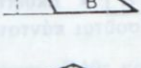
⋆ **Τετράγωνον** (πλευρὰ α). $E = \alpha^2$.

⋆ **Ὀρθογώνιον** (μῆκος α, πλάτος β).

$$E = \alpha \times \beta.$$

⋆ **Τρίγωνον** (βάσις B, ὕψος h).

$$E = \frac{B \times h}{2}.$$

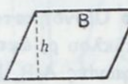


⋆ **Ρόμβος** (διαγώνιες D, d)

$$E = \frac{D \times d}{2}.$$

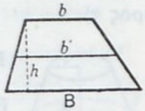
Μποροῦμε ἐπίσης νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸν τύπον ποὺ δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

★ **Παραλληλόγραμμον** (βάσις B, ὕψος h).



$$E = B \times h$$

★ **Τραπέζιον** (βάσις B, b, ὕψος h).



$$E = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$

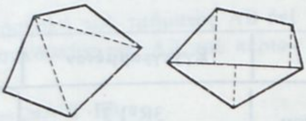
Ἂν χρησιμοποιήσωμε τὴν μέση βάσιν b′,

τότε $E = b' \times h$.

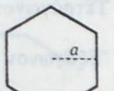
★ **Πολύγωνον τυχόν.** Τὸ ἀναλύομε εἰς ἁπλᾶς ἐπιφανείας. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαφόρων μερῶν:

— Τρίγωνα τυχόντα (διαγώνιες ἀγόμενες ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν).

— Τρίγωνα καὶ ὀρθογώνια τραπέζια (μία διαγώνιος καὶ κάθετες).



★ **Πολύγωνον κανονικόν** (ἀπόστημα α, περίμετρος p).



$$E = \frac{p \times \alpha}{2}.$$

★ **Κύκλος** (ἀκτίνα R, διάμετρος Δ).

$$E = \pi R^2 \quad \text{μὲ } \pi = 3{,}1416$$

$$E = \pi\, \frac{\Delta^2}{4}.$$

| Δ΄ | ★ **Κυκλικὸς τομεὺς** (γωνία α, ἀκτίνα R).

$$E = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad \text{α εἰς μοίρας}$$

$$E = \frac{\pi R^2 \alpha}{400} \quad \text{α εἰς βαθμοὺς}$$

$$E = \frac{R^2 \alpha}{2} \quad \text{α εἰς ἀκτίνια.}$$

★ **Ἰσόπλευρον τρίγωνον** (πλευρὰ α).

$$E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Ε΄ ◆ Ἄλλοι τύποι ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

● **Οἱονδήποτε τρίγωνον** (πλευρὲς α, β, γ, ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ρ, ἀκτῖνες ρ_α . ρ_β . ρ_γ τῶν κύκλων τῶν παρεγγεγραμμένων στὶς γωνίες Α,Β, Γ, ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου R, ἡμιπερίμετρος τ).

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ \ (\tau-\gamma)}$$

$$E = \tau\rho = (\tau-\alpha)\rho_\alpha = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$$

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}.$$

● **Τριγωνομετρικὴ ἔκφρασις τοῦ 'Εμβαδοῦ.** Βλέπε *Τριγονομετρικός*.

● **Κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον ἢ περιγεγραμμένον εἰς κύκλον μὲ ἀκτῖνα R.**

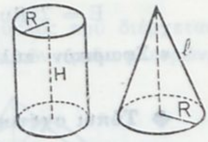
Πολύγωνον	'Εγγεγραμμένον	Περιγεγραμμένον
'Ισόπλευρον τρίγωνον	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$3\ R^2\sqrt{3}$
Τετράγωνον	$2\,R^2$	$4\ R^2$
'Εξάγωνον	$\frac{3\,R^2\sqrt{3}}{2}$	$2\ R^2\sqrt{3}$
'Οκτάγωνον κυρτὸν	$2\,R^2\sqrt{2}$	$8\ R^2(\sqrt{2}-1)$
Πεντάγωνον κυρτὸν	$\frac{5\ R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	
Δεκάγωνον κυρτὸν	$\frac{5\ R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	

◆ **Τύποι σχετικοὶ μὲ καμπύλες ἐπιφανείας.**

⋆ **'Ορθὸς κύλινδρος μὲ κυκλικὴν βάσιν** (ἀκτῖνα βάσεως R, ὕψος υ).

'Εμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας $2\pi R \times \upsilon$

'Εμβαδὸν ὁλικὸν $2\pi R \times (R+\upsilon)$



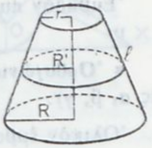
⁎ **Κῶνος ὀρθὸς μὲ κυκλικὴν βάσιν** (ἀκτίνα βάσεως R, γενέτειρα l).

'Εμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $\pi R \times l$

'Εμβαδὸν ὁλικὸν $\pi R \times (R \times l)$

⁎ **Σφαῖρα** (ἀκτίνα R, διάμετρος Δ).

'Εμβαδὸν $4\pi R^2$ ἢ $\pi \Delta^2$



⁎ **Κόλουρος ὀρθὸς κῶνος μὲ κυκλικὴν βάσιν** (ἀκτῖνες βάσεως R, r, γενέτειρα l).

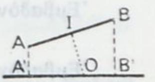
'Εμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $\pi(R+r)\times l$

'Εμβαδὸν ὁλικὸν $\pi R(R+l)+\pi r(r+l)$

Μὲ τὴν μέσην βάσιν μὲ ἀκτῖνα R′ :

'Εμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $2\pi R' l$.

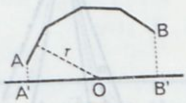
⁎ **'Εμβαδὸν ποὺ παράγεται ἀπὸ εὐθύγραμμον τμῆμα στρεφόμενον περὶ ἄξονα κείμενον εἰς τὸ ἴδιον μὲ αὐτὸ ἐπίπεδον, χωρὶς ὅμως νὰ τό διασχίζῃ.**



Ἔστω A′B′ ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος AB ἐπὶ τοῦ ἄξονος IO ἡ μεσοκάθετος τοῦ AB ποὺ περιορίζεται στὸν ἄξονα:

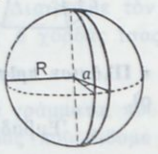
$$E = 2\pi A'B' \cdot IO.$$

⁎ **'Εμβαδὸν παραγόμενον ἀπὸ κανονικὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν στρεφομένην γύρω ἀπὸ διάμετρον ἐγγεγραμμένου κύκλου χωρὶς νὰ τὴν διασχίζῃ.**



Ἔστω A′B′ ἡ προβολὴ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἐπὶ τῆς διαμέτρου, r ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

$$E = 2\pi r \cdot A'B'.$$



⁎ **Σφαιρικὴ ἄτρακτος** (δίεδρος γωνία α, ἀκτίνα τῆς σφαίρας R).

$$E = \frac{\pi R^2 \alpha}{90} \quad \text{α εἰς μοίρας}$$

$$E = \frac{\pi R^2 \alpha}{100} \quad \text{α εἰς βαθμοὺς}$$

$$E = 2R^2\alpha \quad \text{α εἰς ἀκτίνια.}$$

⁎ **Σφαιρικὴ ζώνη** (ὕψος υ, ἀκτίνα τῆς σφαίρας R).

$E = 2\pi R\upsilon$.

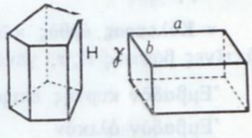
* **Σφαιρικὸν κάλυμμα** (πολικὴ ἀκτίνα ΑΜ = r).

$$E = \pi r^2$$

Τύποι σχετικοὶ μὲ τὰς πολυεδρικὰς ἐπιφανείας.

* **Ὀρθὸν πρῖσμα** (ὕψος υ, περίμετρος βάσεως p).

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας :



$p \times \upsilon$.

* **Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον** (ἀκμὲς α, β, γ).

Ὁλικὸν ἐμβαδόν : $2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$.

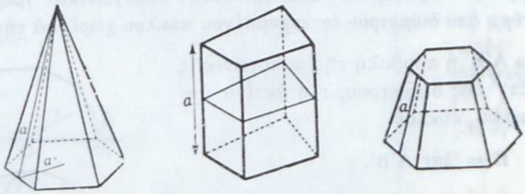
* **Κύβος** (ἀκμὴ α). Ὁλικὸν ἐμβαδόν : $6\alpha^2$.

* **Πυραμὶς τυχοῦσα** (τὸ ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ποὺ ἀποτελοῦν τὶς ἕδρες.

* **Κανονικὴ πυραμὶς** (περίμετρος βάσεως p, ἀποστήματα α, α΄).

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας : $\dfrac{p \times \alpha}{2}$

Ἐμβαδὸν ὁλικόν : $\dfrac{p'\alpha + \alpha')}{2}$.



* **Πλάγιον πρῖσμα** (παράπλευρος ἀκμὴ α, περίμετρος καθέτου τομῆς p).

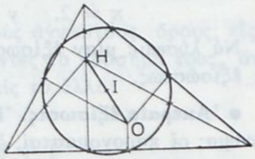
Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας : $p \times \alpha$.

* **Κόλουρος πυραμὶς τυχοῦσα.** Τὸ ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν παραπλεύρων ἐμβαδῶν τῶν πυραμίδων ποὺ ἔχουν ὡς βάσεις τὰς βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος.

* **Κόλουρος πυραμὶς κανονικὴ** (περίμετρος βάσεως p, p΄, ἀπόστημα α).

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας : $\dfrac{\alpha(p + p')}{2}$.

| Δ' | **'Εννέα. • Κύκλος τῶν ἐννέα σημείων.** Κύκλος ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα ἐννέα σημεῖα τριγώνου: τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν, τοὺς πόδας τῶν τριῶν ὑψῶν, τὰ μέσα τῶν τριῶν τμημάτων ποὺ ἑνώνουν τὸ ὀρθόκεντρον Η μὲ τὰς κορυφάς του. Τὸ κέντρον του εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΗ. Ἡ ἀκτίνα του εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου μὲ κέντρον Ο.



• **Δοκιμὴ διὰ τοῦ ἐννέα.** Βλέπε *Δοκιμή*.

'Εντὸς ἐναλλάξ. Βλέπε *Γωνία*.

| Δ' | **'Εξάγωνον.** Πολύγωνον μὲ 6 πλευρὰς καὶ 6 κορυφάς.

Κανονικὸν ἑξάγωνον. Αἱ 6 πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ 6 γωνίαι ἐπίσης ἴσαι.

Γωνία	120^0.
'Επίκεντρος γωνία	60^0.
Πλευρὰ	R (ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου).
'Απόστημα	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$.
'Εμβαδὸν	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Κατασκευὴ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Διαιροῦμε τὸν δοθέντα κύκλον εἰς 6 ἴσα μέρη, φέροντες διαδοχικῶς 6 χορδὰς ἴσας μὲ τὴν ἀκτῖνα.

| Δ' | **'Εξίσωσις.** 'Ισότης περιέχουσα ἕνα ἢ πολλὰ γράμματα, ποὺ δὲν ἐπαληθεύεται ἀριθμητικῶς παρὰ δι' ὡρισμένας τιμὰς ποὺ δίδομε στὰ γράμματα αὐτά. Τὰ γράμματα εἶναι οἱ *ἄγνωστοι*.

Π.χ. $2x - 3 = x + 2$.

Ἡ ἰσότης ἀληθεύει διὰ $x = 5$.

• **Λύσις ἢ ρίζα ἐξισώσεως.** Εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν, ποὺ μετατρέπουν τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἀριθμητικὴν ἰσότητα.

Στὸ προηγούμενο παράδειγμα : λύσις $x = 5$.

῎Αλλο παράδειγμα : $2x - 3 = y + 2$.

$x = 3, \quad y = 1$ εἶναι μία λύσις.

$x = 2, \quad y = -1$ εἶναι ἄλλη λύσις.

Νὰ λύσωμε μίαν ἐξίσωσιν σημαίνει νὰ εὕρωμεν ὅλας τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

● **'Ακεραία ἐξίσωσις.** 'Εξίσωσις τῆς ὁποίας τὰ δύο μέλη εἶναι πολυώνυμα· οἱ παρονομασταί, ἂν ὑπάρχουν, δὲν περιέχουν ἄγνωστον.

● **Βαθμὸς ἀκεραίας ἐξισώσεως.** Εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ ληφθέντος πολυωνύμου, ὅταν μεταθέσωμε ὅλους τοὺς ὅρους εἰς ἕνα μέλος.

Π.χ. $3x(x + 1) + y = 2y + 3x^2 - 4.$

'Ανάγοντες ἔχομε :

$$3x - y + 4 = 0.$$

῾Η ἐξίσωσις εἶναι πρώτου βαθμοῦ.

● **'Εξίσωσις μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους.** Βλέπε *Σύστημα*.

◆ **'Εξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.**

Π.χ. $\dfrac{x + 4}{2} - \dfrac{x + 1}{6} = \dfrac{5}{2} + 2 - x.$

● **Τρόπος ἐπιλύσεως μιᾶς ἐξισώσεως.**

∗ 1. Τρέπομε ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν (ἐδῶ ὁ Κ. Π. εἶναι 6):

$$\frac{3(x + 4)}{6} - \frac{x + 1}{9} = \frac{15}{6} + \frac{6(2 - x)}{6}$$

∗ 2. Διαγράφομε τὸν παρονομαστὴν :

$$3(x + 4) - (x + 1) = 15 + 6(2 - x)$$

Παρατήρησις. ῾Η κλασματικὴ γραμμὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ παρένθεσιν. Διαγράφοντες τοὺς παρονομαστὰς πρέπει νὰ περιβάλλωμε μὲ μίαν παρένθεσιν τοὺς ἀριθμητὰς ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πολλοὺς ὅρους· ἐδῶ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι $x + 1$.

∗ 3. 'Ανάγομε, δηλ. ἐκτελοῦμε ὅλας τὰς δυνατὰς πράξεις : πολλαπλασιασμούς, διαγραφὲς παρενθέσεων, προσθέσεις κλπ.

῎Αν ἕνας καὶ ὁ αὐτὸς ὅρος μὲ τὸ αὐτὸ πρόσημον εὑρίσκεται καὶ εἰς τὰ δύο μέλη, τὸν διαγράφομε ἀπὸ κάθε μέλος :

$$3x \boxed{+12} - x - 1 = 15 \boxed{+12} - 6x$$
$$2x - 1 = 15 - 6x.$$

⁎ Συγκεντρώνομε εἰς τὸ ἕνα μέλος τοὺς ἀγνώστους ὅρους, εἰς τὸ ἄλλο μέλος τοὺς γνωστοὺς ὅρους, ἀλλάζοντες τὸ πρόσημό τους, ἂν ὁ ὅρος αὐτὸς μετατίθεται ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος εἰς τὸ ἄλλο.

'Ανάγομε ἐκ νέου:

$$2x + 6x = 15 + 1$$
$$8x = 16.$$

⁎ Διαιροῦμε τὸν γνωστὸν ὅρον διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου:

$$x = \frac{16}{8} = 2.$$

● **'Επαλήθευσις.** Καλὸν εἶναι νὰ ἐλέγχωμε ἂν ἡ λύσις ποὺ βρίσκομε εἶναι σωστή. Γι' αὐτό, ἀντικαθιστῶμε τὸν ἄγνωστον μὲ τὴν λύσιν εἰς τὴν *ἀρχικὴν ἐξίσωσιν*. Ἔχομε:

$$\frac{2+4}{2} - \frac{2+1}{2} = \frac{5}{2} + 2 - 2$$
$$\frac{6}{2} - \frac{3}{6} = \frac{5}{2}$$
$$3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$\boxed{\Delta'}$ Παρατηρήσεις. ⁎ Συμβαίνει πολλάκις μία ἐξίσωσις νὰ εἶναι *ἀδύνατος*.

Π.χ.
$$4(5 - x) + 2x - 1 = 3 - (2x + 1)$$
$$20 - 4x + 2x - 1 = 3 - 2x - 1$$
$$19 - 2x = 2 - 2x$$
$$19 = 2 \quad \text{(ἀδύνατον)}.$$

⁎ Συμβαίνει καμμιὰ φορὰ μία ἐξίσωσις νὰ εἶναι *ἀόριστος* (ἀπροσδιόριστος).

Π.χ.
$$5x - 3 - 2(x - 4) = 6x - (3x - 5)$$
$$5x - 3 - 2x + 8 = 6x - 3x + 5$$
$$3x + 5 = 3x + 5$$
$$0x = 0 \quad \text{(ἀόριστος)}$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ πράγματι ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ x.

∗ Μποροῦμε καμμιὰ φορὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε μίαν ἐξίσωσιν διαιροῦντες ὅλους τοὺς ὅρους στὰ δύο μέλη μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ μὲ τὴν παράστασιν ἡ ὁποία νὰ μὴ περιέχῃ τὸν ἄγνωστον.

Δ΄ ● 'Εξίσωσις ἀναγομένη εἰς πρῶτον βαθμόν.

Περίπτωσις γινομένου παραγόντων πρώτου βαθμοῦ.

1ο παράδειγμα: $(3x - 5)(x^2 - 4)(2x + 1) = 0$

Ὁ δεύτερος παράγων ἀναλύεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

Ἡ ἐξίσωσις γίνεται: $(3x - 5)(x + 2)(x - 2)(2x + 1) = 0$

Τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι μηδέν, ἂν ἕνας ἐκ τῶν παραγόντων εἶναι 0. Ἡ ἐξίσωσις, λοιπόν, ἀναλύεται εἰς τέσσαρας ἐξισώσεις.

$$3x - 5 = 0 \qquad 3x = 5 \qquad x = \frac{5}{3}$$

$$x + 2 = 0 \qquad x = -2$$

$$x - 2 = 0 \qquad x = 2$$

$$2x + 1 = 0 \qquad 2x = -1 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

2ο παράδειγμα: $(2x - 1)(x + 2) = (x - 5)(x + 2)$.

'Επανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, μεταθέτοντες τὸ δεύτερο γινόμενο στὸ πρῶτο μέλος καὶ λαμβάνοντες $x + 2$ ὡς κοινὸν παράγοντα.

Περίπτωσις ἐξισώσεως ποὺ περιέχει τὸν ἄγνωστον εἰς τὸν παρανομαστήν, ποὺ περιέχει δηλ. κλάσματα ρητά.

Παράδειγμα: $\dfrac{x + 1}{x - 3} - \dfrac{9}{x(x - 3)} = \dfrac{1}{x - 3}$

Πρέπει $x \neq 0$ καὶ $x - 3 \neq 0$, διὰ νὰ ὑπάρχουν τὰ κλάσματα. Τρέποντες εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν:

$$\frac{x(x + 1)}{x(x - 3)} - \frac{9}{x(x - 3)} = \frac{x}{x(x - 3)}$$

$$x(x + 1) - 9 = x$$

$$x^2 + x - 9 = x$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

Εὑρίσκομε τὰς λύσεις :

$x + 3 = 0$ $\boxed{x = -3}$ λύσις δεκτή.

$x - 3 = 0$ $x = 3$ λύσις μὴ ἀποδεκτή,

διότι διὰ $x = 3$ οἱ παρανομασταὶ ἰσοῦνται μὲ μηδέν.

$\boxed{\text{Ε΄}}$ ● **Παραμετρικὴ ἐξίσωσις.** Ἐξίσωσις εἰς τὴν ὁποίαν, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἄγνωστον, ὑπάρχουν ἕνα ἢ περισσότερα γράμματα, ποὺ ἀντιπροσωπεύουν ἀριθμοὺς ὑποτιθεμένους γνωστούς, καὶ εἰς τὰ ὁποῖα μποροῦμε νὰ δώσωμε συμβατικὰς ἀριθμητικὰς τιμάς.

Μία παραμετρικὴ ἐξίσωσις λύεται ὅπως μία ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις, ἀλλὰ πρέπει νὰ διερευνήσωμε τὴν ὕπαρξιν τῶν λύσεων ἀνάλογα μὲ τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων.

Διερεύνησις. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Ἂν } \alpha \neq 0 & \text{μία μοναδικὴ λύσις} \\ \text{Ἂν } \alpha = 0 \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \text{ ἀοριστία} \\ \beta \neq 0 \text{ ἀδύνατον} \end{array} \right. & \end{array}}$$

Παράδειγμα: $\mu(x - 2\alpha) + 2 = 2\alpha(1 - \mu) - (x + 2)$

$$\mu x - 2\alpha\mu + 2 = 2\alpha - 2\alpha\mu - x - 2$$

$$\mu x + x = 2\alpha - 4$$

$$x(\mu + 1) = 2\alpha - 4$$

Ἂν $\mu \neq -1$, μία λύσις: $x = \dfrac{2\alpha - 4}{\mu\alpha + 1}$

Ἂν $\mu = -1$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται : $0x = 2\alpha - 4$

ἀδύνατον ἂν $\alpha \neq 2$

ἀόριστον ἂν $\alpha = 2$.

● **Ἐξίσωσις ἄρρητος.** Ἐξίσωσις ποὺ περιέχει στὸ ὑπόρριζο παραστάσεις στὶς ὁποῖες ὑπάρχει τὸ ἄγνωστον. Ἡ γενικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως συνίσταται στὸ νὰ ὑψώσωμε τὰ δύο μέλη στὸ τετράγωνο (ἐν ἀνάγκη πολλὲς φορὲς συνέχεια), διὰ νὰ ἐξαφανίσωμε τὰ ριζικά: ἐπειδὴ ὅμως κινδυνεύομε νὰ εἰσαγάγωμε λύσεις ξένες πρὸς τὴν ἐξίσωσιν, δι' αὐτὸ οἱ ἐπαληθεύσεις εἶναι ἀναγκαῖες.

1η περίπτωσις. *Ἕνα μόνον ριζικόν.* Ἀπομονώνομε τὸ ριζικὸν εἰς ἕνα μέλος, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν $A = \sqrt{B}$.

Ὑψώνομε εἰς τὸ τετράγωνον: $A^2 = B$, καὶ λύομε. Αἱ λύσεις ποὺ θὰ εὕρωμε πρέπει νὰ δίδουν $A > 0$, διότι $\sqrt{B}$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Παράδειγμα: $3x = 2 + \sqrt{x^2 + 12x + 12}$

Ἀπομονώνομε τὸ ριζικὸν καὶ ὑψώνομε στὸ τετράγωνο:

$$3x - 2 = \sqrt{x^2 - 12x + 12}$$

$$9x^2 - 12x + 4 = x^2 - 12x + 12$$

$$8x^2 - 8 = 0$$

$$8\,(x^2 - 1) = 0$$

$$8\,(x + 1)\,x - 1) = 0$$

Ἡ πρώτη λύσις $x = -1$ δὲν ἐπαληθεύει, διότι θὰ ἔδιδε:

$$-3 = 2 + \sqrt{25}$$

Ἡ δευτέρα λύσις $\boxed{x = 1}$ ἐπαληθεύει: $3 = 2 + \sqrt{1}$.

2α Περίπτωσις. *Ἡ ἐξίσωσις περιέχει μόνον δύο ριζικά.* Ἡ ἐξίσωσις μπορεῖ νὰ ἔχῃ τὴν μορφήν:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad ἤ \quad \sqrt{A} = -\sqrt{B}.$$

Ἡ δευτέρα μορφὴ ἀντιστοιχεῖ, βέβαια, εἰς μίαν ἀδύνατον ἐξίσωσιν. Ἡ πρώτη, ἀντιθέτως, εἶναι δυνατή, ἀλλὰ θὰ πρέπει νὰ ἐπαληθεύσωμε, οὕτως ὥστε, ἡ λύσις νὰ καθιστᾷ τὰς παραστάσεις στὸ ὑπόρριζο θετικάς.

1ο Παράδειγμα: $\sqrt{3x - 2} = \sqrt{5x + 3}$.

Ὑψώνοντες στὸ τετράγωνο: $3x - 2 = 5x + 3$

$$-2x = 5 \qquad x = -\frac{5}{2}.$$

Λύσις ποὺ δὲν γίνεται δεκτή, διότι καθιστᾷ τὰς ποσότητας στὸ ὑπόρριζο ἀρνητικάς.

2ο Παράδειγμα: $\sqrt{13 - 4x} = \sqrt{5x - 5}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

Ἀπαραίτητο βοήθημα διὰ τοὺς μαθητὰς ἀπὸ Α΄ μέχρι καὶ ΣΤ΄ Γυμνασίου, ὑποψηφίους Ἀνωτ. Σχολῶν, φοιτητάς, ἐπιστήμονας καὶ γονεῖς ποὺ θέλουν νὰ ἀνεβάσουν τὸ ἐπίπεδο τῶν Μαθηματικῶν των γνώσεων.

* * *

Περιέχει ὅλα τὰ διδασκόμενα Μαθηματικὰ τοῦ προγράμματος· ἐπίσης Σύνολα καὶ Μοντέρνα Μαθηματικὰ τῶν Γυμνασίων καὶ Φροντιστηρίων (θεωρίαν καὶ ἀσκήσεις), κατὰ τὸν πλέον κατανοητὸν καὶ συνοπτικὸν τρόπον, ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΑΙ ΚΑΙ ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

Εὐχαριστοῦμε θερμῶς τὸ πολυπληθέστατο κοινὸ τῶν μαθητῶν, σπουδαστῶν καὶ γονέων διὰ τὸ ζωηρὸν ἐνδιαφέρον μὲ τὸ ὁποῖον ὑπεδέχθη τὰ πρῶτα τεύχη τῆς «Μαθηματικῆς Ἐγκυκλοπαιδείας».

Ἰδιαιτέρως εὐχαριστοῦμε τοὺς κ.κ. Συναδέλφους, Γυμνασιάρχας καὶ Λυκειάρχας διὰ τὰ ἐγκώμια ποὺ ἔσπευσαν νὰ πλέξουν διὰ τὸ ἔργον μας.

* * *

Ἐπὶ πλέον ἀνακοινοῦμεν ὅτι :

1. Ἡ «Μαθηματικὴ Ἐγκυκλοπαίδεια» θὰ ἔχῃ, ὁπωσδήποτε, ὁλοκληρωθῆ μέχρι τοῦ Ἰουνίου ἐ.ἔ. διὰ τῆς κυκλοφορίας διπλῶν ἑβδομαδιαίων τευχῶν.

2. Ὅσοι τυχόν, δὲν εὑρίσκουν τὰ τεύχη εἰς τὰ περίπτερα (καὶ κυρίως τὰ προηγούμενα), δύνανται νὰ τὰ ζητοῦν εἰς τὰ Κεντρικὰ Βιβλιοπωλεῖα Ἀθηνῶν («Προμηθεὺς» Σταδίου 41, «Βιβλιοχαρτεμπορικὴ» Σταδίου 49, «Σιδέρης» Σταδίου 44, «Α. Καραβία» Ἀκαδημίας 58 κ.λ.π.) ἢ παρὰ τοῦ Συγγραφέως—Ἐκδότου :

Π. Πλούτση—Καθηγ. Μαθηματικῶν
ὁδὸς Πατησίων 112—τηλ. 819.757—ΑΘΗΝΑΙ (801)

ΠΕΤΡΟΥ ΠΛΟΥΤΣΗ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν (Διπλ. Παρισίων)

ΔΙΑ ΠΡΩΤΗΝ ΦΟΡΑΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ-ΑΛΓΕΒΡΑ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΛΕΞΙΚΟΥ

ΔΡΑΧ. 8
ΚΥΚΛΟΦΟΡΕΙ
ΚΑΘΕ ΤΕΤΑΡΤΗ

εἰς ἕνα (1) καὶ μόνον τόμον, ἤτοι:
22 συνολικῶς ἑβδομαδιαῖα τεύχη

ΤΕΥΧΟΣ
6

Ὑψώνοντες στὸ τετράγωνο : $13 - 4x = 5x - 5$

$$18 = 9x \quad \boxed{x = 2}.$$

Λύσις δεκτή, διότι καθιστᾷ τὰς ποσότητας στὸ ὑπόρριζο θετικάς.

3η Περίπτωσις. *Ἡ ἐξίσωσις περιέχει δύο τοὐλάχιστον ριζικὰ καὶ ἄλλους ὅρους.* Θὰ πρέπει ἐδῶ νὰ ὑψώνωμε δύο (ἢ καὶ περισσότερες) φορὲς συνέχεια στὸ τετράγωνο.

Παράδειγμα : $\sqrt{3x + 4} + 3 = \sqrt{5x + 1}$.

Ὑψώνοντες στὸ τετράγωνο :

$$3x + 4 + 6\sqrt{3x + 4} + 9 = 5x + 1.$$

Ἀπομονώνομε τὴν ρίζαν : $6\sqrt{3x + 4} = 2x - 12$.

ἢ $3\sqrt{3x + 4} = x - 6$.

Ὑψώνομε πάλι, στὸ τετράγωνο :

$$9(3x + 4) = x^2 - 12x + 36$$
$$27x + 36 = x^2 - 12x + 36$$
$$x^2 - 39x = 0$$
$$x(x - 39) = 0.$$

Ἡ πρώτη λύσις $x = 0$ δίδει :

$$\sqrt{4} + 3 = \sqrt{1} \quad ἢ \quad \boxed{2 + 3 = 1}.$$

Ἡ λύσις αὐτὴ δὲν ἐπαληθεύει.

Ἡ δευτέρα λύσις $\boxed{x = 39}$ δίδει :

$$\sqrt{121} + 3 = \sqrt{196} \quad ἢ \quad 11 + 3 = 14.$$

Ἡ λύσις αὐτὴ ἐπαληθεύει.

Ε΄ ◆ **Ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.** Ἡ γενική της μορφὴ εἶναι :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐπιδέχεται 2 ρίζας ἢ 1 μόνον ἢ 0. Διὰ νὰ τὰς εὕρωμε, ἐφαρμόζομε, γενικά, τύπους ἐπιλύσεως (βλέπε κατωτέρω).

● **Ἐξισώσεις μὴ πλήρεις.**

⁎ **1η Περίπτωσις** : $\alpha x^2 + \gamma = 0$.

Ἂν α καὶ γ εἶναι { ὁμόσημοι : 0 ρίζα π.χ. $3x^2 + 5 = 0$
ἑτερόσημοι : 2 ρίζαι

$$x' = \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \qquad x'' = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Π.χ. $5x^2 - 12 = 0 \quad x' = \sqrt{\frac{12}{5}} \qquad x'' = -\sqrt{\frac{12}{5}}.$

★ **2α Περίπτωσις :** $\alpha x^2 + \beta x = 0.$

Ἡ ἐξίσωσις γράφεται : $x(\alpha x + \beta) = 0.$

Ἔχει πάντα δύο ρίζας: $x' = 0, \quad x'' = -\frac{\beta}{\alpha}.$

Παράδειγμα :

$$7x^2 + 9x = 0$$
$$x(7x + 9) = 0$$
$$x' = 0 \quad x'' = -\frac{9}{7}.$$

● **'Εξίσωσις πλήρης. Τύποι ἐπιλύσεως.**

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Ἂν α καὶ γ εἶναι { ἑτερόσημοι : εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ὑπάρχουν 2 ρίζαι, ὁμόσημοι : δὲν μποροῦμε νὰ ποῦμε τίποτε χωρὶς νὰ ἐξετάσωμε τὴν *διακρίνουσαν* : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Ἂν $\Delta > 0$	2 ρίζαι		$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{4\alpha}.$
Ἂν $\Delta = 0$	1 ρίζα διπλῆ		$x = -\frac{\beta}{2\alpha}.$
Ἂν $\Delta < 0$	0 ρίζα, ἐξίσωσις ἀδύνατος.		

1ο Παράδειγμα : $3x^2 - 5x + 7 = 0$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 7 = -59.$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζαν.

2ο Παράδειγμα : $3x^2 - 5x - 7 = 0$

α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-7) = 109$$

$$x' = \frac{5 + \sqrt{109}}{6} \qquad x'' = \frac{5 - \sqrt{109}}{6}.$$

3ο Παράδειγμα : $5x^2 - 20x + 20 = 0$

$$\Delta = 20^2 - 4 \times 5 \times 20 = 0 \qquad (1)$$

'Η ἐξίσωσις ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν :

$$x' = x'' = \frac{20}{10} = 2.$$

Παρατήρησις. 'Απλοποιοῦντες, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται :

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{ἢ} \qquad (x-2)^2 = 0.$$

'Από ὅπου ἡ ρίζα : $x = 2$.

Τύπος ἁπλοποιημένος. Ὅταν ὁ συντελεστὴς β εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, οἱ τύποι ἁπλοποιοῦνται ἂν θέσωμε $\beta = 2\beta'$. Λαμβάνομε :

$$\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma \qquad x = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$$

• **'Ανάλυσις εἰς γινόμενον, ἐξίσωσις ποὺ ἐπιδέχεται ὡς ρίζας δύο δοθέντας ἀριθμούς.** Ἂν μία ἐξίσωσις ἔχῃ ὡς ρίζας x', x'', μπορεῖ νὰ γραφῇ :

$$\alpha\,(x - x')\,(x - x'') = 0$$

• **Σχέσεις μεταξὺ συντελεστῶν καὶ ριζῶν.** Ὅταν αἱ ρίζαι ὑπάρχουν, ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις :

$$\boxed{x' + x'' = \frac{-\beta}{\alpha}} \qquad \boxed{x'\,x'' = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

Π.χ. $3x^2 - 5x + 7 = 0 \qquad x' + x'' = \frac{5}{3} \qquad x'\,x'' = \frac{7}{3}.$

'Αντίστροφον. Ἂν δύο ἀριθμοὶ x' καὶ x'' συνδέωνται μὲ τὰς σχέσεις :

$$x' + x'' = \frac{-\beta}{\alpha} \qquad x'\,x'' = \frac{\gamma}{\alpha}$$

εἶναι ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Π.χ. $x' + x'' = 5 = \frac{10}{2} \qquad x'\,x'' = \frac{3}{2}$

Μποροῦμε νὰ θεωρήσωμε ὅτι : $\alpha = 2 \quad \beta = -10 \quad \gamma = 3.$

Οἱ ἀριθμοὶ x'x'' εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$2x^2 - 10x + 3 = 0.$$

'Εφαρμογή. Ὅταν γνωρίζωμε μίαν ἀπὸ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως, βρίσκομε τὴν δεύτερη ρίζα πολὺ εὐκολώτερα, στηριζόμενοι στὶς προηγούμενες σχέσεις διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων.

Παράδειγμα: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ὡς ρίζαν $x' = 1$.

Ἡ δευτέρα ρίζα x'' εἶναι ἔτσι ὥστε:

$$1 \times x' = \frac{2}{3} \quad \text{ἀπὸ ὅπου} \quad x'' = \frac{2}{3}.$$

'Εξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ποὺ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τοὺς συντελεστάς τους ἀναλόγους.

Παράδειγμα: $x^2 - x - 6 = 0$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ὡς ρίζας -2 καὶ $+3$.

$$5x^2 - 5x - 30 = 0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ὡς ρίζας -2 καὶ $+3$ ἐπίσης.

Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ὅταν γνωρίζωμε τὸ ἄθροισμά τους καὶ τὸ γινόμενόν τους. Γνωρίζομε:

$$\Sigma = x + y \qquad \Gamma = xy$$

Οἱ δύο ἀριθμοὶ x, y, εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$X^2 - \Sigma X + \Gamma = 0$$

Ὕπαρξις τῶν δύο ἀριθμῶν. Πρέπει ἡ διακρίνουσα νὰ εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν:

$$\Sigma^2 - 4\,\Gamma \geqslant 0$$

Παράδειγμα: $x + y = 15 \qquad xy = 44$

Ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις εἶναι: $X^2 - 15X + 44 = 0$

Διακρίνουσα: $\Sigma^2 - 4\Gamma = 225 - 176 = 49$

$$X = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} \quad \begin{cases} x = \dfrac{15 + 7}{2} = 11 \\[2ex] y = \dfrac{15 - 7}{2} = 4. \end{cases}$$

• **Πρόσημον τῶν ριζῶν.** Τὸ ἐξετάζομε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν:

$$\Sigma = \frac{-\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

$\frac{\gamma}{\alpha} < 0$	2 ρίζες ἑτερόσημες	$x' < 0 < x''$
$\frac{\gamma}{\alpha} = 0$	2 ρίζες	$x' = 0 \quad x'' = \frac{-\beta}{\alpha}.$

$$\frac{\gamma}{\alpha} > 0 \begin{cases} \Delta > 0 \text{ 2 ρίζες μὲ τὸ αὐτὸ πρόσημον τοῦ } \frac{-\beta}{\alpha} \begin{cases} \text{ἢ } x' < x'' < 0 \\ \text{ἢ } 0 < x' < x''. \end{cases} \\ \Delta = 0 \text{ 1 ρίζα διπλῆ} \qquad x' = x'' = -\frac{\beta}{\alpha} \\ \Delta < 0 \text{ 0 ρίζα} \end{cases}$$

Παράδειγμα: 'Εξετάσατε, ὅταν μ μεταβάλλεται, τὴν ὕπαρξιν καὶ τὸ πρόσημον τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως:

$$\mu x^2 - (2\mu + 1)\, x + \mu - 3 = 0$$

⁎ 'Εξετάζομε τὴν διακρίνουσαν:

$$\Delta = (2\mu + 1)^2 - 4\mu\,(\mu - 3) = 16\,\mu + 1$$

$$\Delta > 0 \quad \text{διὰ } \mu > \frac{-1}{16}.$$

⁎ 'Εξετάζομε τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν:

$$\Gamma = \frac{\mu - 3}{\mu}.$$

Τὸ κλάσμα αὐτὸ ἀλλάζει πρόσημον, ὅταν μ διέρχεται ἀπὸ τὰς τιμὰς 0 καὶ 3.

$$> \quad \text{διὰ } \mu < 0 \quad \text{ἢ } \mu > 3.$$

⁎ 'Εξετάζομε τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν:

$$\Sigma = \frac{2\mu + 1}{\mu}$$

Τὸ κλάσμα αὐτὸ ἀλλάζει πρόσημον, ὅταν μ διέρχεται ἀπὸ τὰς τιμὰς 0 καὶ $\frac{-1}{2}$.

$$\Sigma > 0 \quad \text{διὰ } \mu < -\frac{1}{2} \quad \text{ἢ } \mu > 0.$$

Συνοψίζομε τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ στὸν ἀκόλουθο πίνακα:

μ	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1}{16}$		0		3		$+\infty$
Δ		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Γ		$+$		$+$		$+$		$-$	0	$+$	
Σ		$+$	0	$-$		$-$		$+$		$+$	
Συμπέρασμα		Δὲν ὑπάρχει ρίζα				2 ρίζαι $x' < 0$ $x'' < 0$		2 ρίζαι $x' < 0$ $x'' > 0$		2 ρίζαι $x' > 0$ $x'' > 0$	

⁎ **Εἰδικαὶ τιμαί.**

Διὰ $\mu = -\frac{1}{16}$, μία διπλῆ ρίζα : $x = -7$.

Διὰ $\mu = 0$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται πρώτου βαθμοῦ. Μία ρίζα $x = -3$.

Διὰ $\mu = 3$, δύο ρίζαι : $x' = 0$ $x'' = \frac{7}{3}$.

● **Συναρτήσεις συμμετρικαὶ τῶν ριζῶν.** Εἶναι παραστάσεις μὲ x' καὶ x'' (ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$) ποὺ δὲν ἀλλάζουν ἂν μεταβάλωμε x' καὶ x''

$$x' + x'', \quad x'x'', \quad x'^2 + x''^2, \quad \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}, \quad x'^3 + x'x'' + x''^3$$

εἶναι συμμετρικαὶ συναρτήσεις τῶν x' καὶ x''.

$x' - x''$, $2x' + 5x''$, δὲν εἶναι συμμετρικαὶ συναρτήσεις.

⁎ Κάθε συμμετρικὴ συνάρτησις παριστάνεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀθροίσματος Σ καὶ τοῦ γινομένου Γ τῶν ριζῶν.

⁎ Τιμὴ μερικῶν συμμετρικῶν συναρτήσεων:

$$x'^2 + x''^2 = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2} \qquad \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

$$x'^3 + x''^3 = \frac{3\alpha\beta\gamma - \beta^3}{\alpha^3} \qquad \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\gamma^2}.$$

● **Νὰ προσδιορισθῆ ἡ παράμετρος μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βα-**

θμοῦ κατὰ τρόπον ὥστε αἱ ρίζαι νὰ συνδέωνται μὲ μίαν δοθεῖσαν σχέσιν. Ἂν αἱ ρίζαι εἶναι ρηταί, τὰς ἀντικαθιστῶμε μὲ τὴν τιμήν τους στὴν δοθεῖσαν σχέσιν. Ἀλλὰ γενικά, δὲν εἶναι ρηταί. Χρησιμοποιοῦμε τότε τὰς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν.

⁎ **Συμμετρικὴ σχέσις.**

Παράδειγμα: Ἐξίσωσις $x^2 - 2\mu x + 3\mu - 2 = 0$ (1)

Νὰ εὕρετε μ ἔτσι ὥστε $x'^2 + x'x'' + x''^2 = 3$.

Ἐκφράζομε τὴν σχέσιν αὐτὴν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως (1).

$$x'^2 + x'x'' + x''^2 = (x' + x'')^2 - x'x''$$

ἀπὸ ὅπου $3 = (2\mu)^2 - (3\mu - 2)$

ἢ $4\mu^2 - 3\mu - 1 = 0.$ (2)

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (2), εὑρίσκομε:

$$\mu = -\frac{1}{4} \qquad \mu = 1.$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι:

$$\Delta' = \mu^2 - 3\mu + 2.$$

Διὰ $\mu = \frac{-1}{4}$ $\quad \Delta' = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} + 2$, ἄρα $\Delta' > 0$.

Διὰ $\mu = 1$ $\quad \Delta = 0$.

Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) ὑπάρχουν διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ μ.

⁎ **Σχέσις μὴ συμμετρική.**

Παράδειγμα: Ἐξίσωσις: $3x^2 - 2\mu x + \mu - 1 = 0.$

Νὰ εὕρετε μ, ἔτσι ὥστε $2x' - 3x'' = 1$.

Προσάπτομε στὴ σχέση αὐτὴ ἐκεῖνες ποὺ δίδουν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν:

$$\begin{cases} 2x' - 3x'' = 1 \\ x' + x'' = \frac{2\mu}{3} \\ x'x'' = \frac{\mu-1}{3} \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} 2x' - 3x'' = 1 \\ 3x' + 3x'' = 2\mu \\ 3x'x'' = \mu - 1. \end{cases}$$

Ἐπιλύομε τὸ σύστημα:

Διὰ προσθέσεως, αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις τοῦ συστήματος δίδουν:

$$x' = \frac{2\mu + 1}{1} \quad \text{καὶ} \quad x'' = \frac{4\mu - 3}{15}.$$

Ἡ τρίτη ἐξίσωσις δίδει τότε :

$$3 \times \frac{2\mu + 1}{5} \times \frac{4\mu - 3}{15} = \mu - 1$$

ἢ $$8\mu^2 - 27\mu + 22 = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ὡς ρίζας 2 καὶ $\frac{11}{8}$, ποὺ εἶναι καὶ αἱ ζητούμεναι τιμαί.

• Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀνεξάρτητος σχέσις τῆς παραμέτρου ποὺ ἑνώνει τὰς ρίζας (ὅταν ὑπάρχουν) μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.

Γράφομε τὰς δύο σχέσεις ποὺ δίδουν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν καὶ ἀπαλείφομε τὴν μεταξὺ τῶν δύο σχέσεων παράμετρον.

Παραμένει ἡ ζητουμένη σχέσις.

Παράδειγμα : Ἐξίσωσις : $x^2 - 2\mu x + 3\mu - 2 = 0.$

Αἱ ρίζαι συνδέονται μὲ $\begin{cases} x' + x'' = 2\mu \\ x'x'' = 3\mu - 2. \end{cases}$

Ἡ πρώτη σχέσις δίδει : $\mu = \frac{x' + x''}{2}.$

Ἀντικαθιστῶντες μ εἰς τὴν δευτέραν σχέσιν, εὑρίσκομε :

$$x'x'' = \frac{3(x' + x'')}{2} - 2.$$

Εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

◆ Θέσις ἑνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ρίζας μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$

Ὀνομάζομε $\varphi(x)$ τὸ πρῶτο μέλος, καὶ $\varphi(\lambda)$, τὴν παράστασιν ποὺ λαμβάνομε ἀντικαθιστῶντες x μὲ λ εἰς τὴν ἐξίσωσιν.

⁎ **Κανών.** Ἂν $\alpha \cdot \varphi(\lambda)$ εἶναι ἀρνητικό, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας διαφόρους καὶ λ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ριζῶν αὐτῶν.

⁎ Ἂν $\alpha \cdot \varphi(\lambda)$ εἶναι θετικὸ καὶ ἂν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ ρίζας, τὸ λ εἶναι ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Διὰ νὰ γνωρίζωμε ἂν λ εἶναι μεγαλύτερο ἢ μικρότερο ἀπ' αὐτάς, τὸ συγκρίνομε μὲ ἕνα γνωστὸν ἀριθμὸν κείμενον μεταξὺ τῶν ριζῶν. Ἂν δὲν γνωρίζωμε κάποιον ἰδιαίτερον ἀριθμόν, χρησιμοποιοῦμε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν.

● **Νὰ συγκριθῇ ἕνας ἀριθμὸς πρὸς τὰς ρίζας μιᾶς ἀριθμητικῆς ἐξισώσεως.**

1ο Παράδειγμα: Νὰ συγκριθῇ 1 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

$$\alpha\, \varphi(1) = 3(3 - 7 + 2) = -6.$$

Ἄρα ὑπάρχουν δύο ρίζαι καὶ 1 περιλαμβάνεται μεταξὺ αὐτῶν.

2ο Παράδειγμα: Νὰ συγκριθῇ —2 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 + 8x + 13 = 0.$$

$$\alpha\, \varphi(-2) = 4 + - 16 + 13 = 1.$$

Ἄς δοῦμε ἂν ὑπάρχουν ρίζες: $\Delta' = 16 - 13 = 3$.

Ἐφόσον $\alpha\varphi(-2)$ εἶναι θετικό, —2 εἶναι ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἄς τὸ συγκρίνωμε πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα: $\frac{\Sigma}{2} = -4$.

— 2 εἶναι, λοιπόν, μεγαλύτερο ἀπὸ τὰς δύο ρίζας.

● **Νὰ προσδιορισθῇ ἡ παράμετρος κατὰ τρόπον ὥστε αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως νὰ κατέχουν μίαν δοθεῖσαν θέσιν ὡς πρὸς ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς.**

Μὲ ἕνα δοθέντα ἀριθμὸν λ μποροῦμε νὰ ἔχωμε τὰς τρεῖς ἀκολούθους θέσεις:

$$\lambda,\ x',\ x'' \qquad x',\ \lambda,\ x'' \qquad x',\ x'',\ \lambda.$$

Μὲ δύο δοθέντας ἀριθμοὺς κ, λ ($\kappa < \lambda$) μποροῦμε νὰ ἔχωμε τὰς ἀκολούθους θέσεις:

$$\kappa,\ \lambda,\ x',\ x'' \qquad \kappa,\ x',\ \lambda,\ x'' \qquad \kappa,\ x',\ x'',\ \lambda$$

$$x',\ \kappa,\ \lambda,\ x'' \qquad x',\ \kappa,\ x'',\ \lambda \qquad x',\ x'',\ \kappa,\ \lambda.$$

Ἐφόσον ὁ τρόπος εἶναι ὁ αὐτός, θὰ ἐξετάσωμε ἕνα μόνο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Νὰ προσδιορισθῇ μ κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐξίσωσις

$$2\mu x^2 - 3\mu x + 1 = 0 \text{ νὰ ἔχῃ 2 ρίζας } < 3.$$

Διὰ νὰ ὑπάρχουν αἱ ρίζαι, πρέπει ἡ διακρίνουσα νὰ εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν.

$$\Delta = 9\mu^2 - 8\mu = \mu(9\mu - 8)$$

$$\Delta > 0, \quad \text{ἂν } \mu < 0 \text{ ἢ } \mu > \frac{8}{9}.$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ 3 ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν, πρέπει $\alpha\varphi(3) > 0$.

$$\alpha\, \varphi(3) = 2\mu\ (18\mu - 9\mu + 1) = 2\mu\ \ (9\mu + 1)$$

$$\alpha\varphi\,(3) > 0, \quad \text{ἄν} \quad \mu < -\frac{1}{9} \;\; \text{ἤ} \;\; \mu > 0.$$

Πρέπει τέλος τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν νὰ εἶναι μικρότερο τοῦ 3 ἢ νὰ ἔχωμε: $\frac{\Sigma}{2} - 3 < 0.$

$$\text{Ὅμως}: \; \frac{\Sigma}{2} - 3 = \frac{3\mu}{4\mu} - 3 = \frac{3}{4} - 3 \;\; \text{πάντα ἀρνητικό.}$$

Ἄρα ἀρκεῖ νὰ ἔχωμε συγχρόνως:

$$\Delta > 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha\,\varphi\,(3) > 0$$

$$\text{δηλαδή}: \quad \mu < -\frac{1}{9} \quad \text{ἤ} \quad \mu > -\frac{8}{9}.$$

◆ **Ἐξίσωσις ἀναγόμενη εἰς τὸν δεύτερον βαθμόν.** Διτετράγωνος ἐξίσωσις. Βλέπε *Διτετράγωνος*.

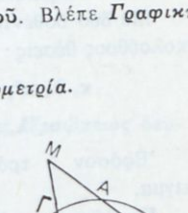
Ἐξισώσεις ἀντίστροφοι. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων των, ποὺ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι, ὅταν ὅμως τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ καὶ ἐπὶ πλέον ἔχῃ μεσαῖον ὅρον, τότε οἱ ἐν λόγῳ συντελεσταὶ πρέπει νὰ εἶναι μόνον ἴσοι. Τοιουτοτρόπως ὑπάρχουν ἐξισώσεις ἀντίστροφοι τοῦ τρίτου, τετάρτου, πέμπτου βαθμοῦ.

◆ **Σύστημα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.** Βλέπε *Σύστημα*.

● **Γραφικὴ λύσις ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.** Βλέπε *Γραφικὴ Παράστασις*.

ΣΤ΄ ● **Ἐξίσωσις τριγωνομετρική.** Βλέπε *Τριγωνομετρία*.

Ε΄ **Ἐξωτερικὴ γωνία πρὸς κύκλον.** Γωνία ποὺ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐκτὸς περιφερείας καὶ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν τὴν περιφέρειαν.



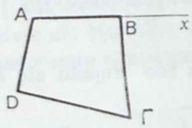
Μία ἐξωτερικὴ γωνία ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀντιστοίχων τόξων.

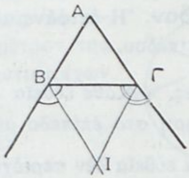
$$\text{μέτρον}\; \widehat{M} = \text{μέτρον}\,\frac{\widehat{BD} - \widehat{A\Gamma}}{2}$$

Δ΄ ● **Ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου, κυρτοῦ πολυγώνου.** Γωνία ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὴν προέκτασιν μιᾶς διαδοχικῆς πλευρᾶς.

Π.χ. $\widehat{\Gamma B x}$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου.

Ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τυχόντος κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς.





• **Ἐξωτερικὴ διχοτόμος** τριγώνου. Εἶναι ἡ διχοτόμος μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνιᾶς τοῦ τριγώνου.

Π.χ. BI. ΓI.

Βλέπε ***Διχοτόμος***.

Ἐπαρκής. Συνθήκη ἀναγκαία καὶ ἐπαρκής. Βλέπε ***Συνθήκη***.

Ἐπίκεντρος *γωνία*. Γωνία ποὺ ἔχει τὴν κορυφήν της στὸ κέντρο ἑνὸς κύκλου.

Τὸ μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου της τόξου ἢ τοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει. Εἶναι τὸ διπλάσιο μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας ποὺ βαίνει στὸ ἴδιο μὲ αὐτὴν τόξο.

Ἐπιλύουσα. Ὄνομα ποὺ φέρει ἡ ἐξίσωσις:

$$\alpha X^2 + \beta X + \gamma = 0$$

ποὺ ἐπιτρέπει τὴν ἐπίλυσιν τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

Λαμβάνομε τὴν ἐπιλύουσαν, ὅταν ἀντικαταστήσωμε εἰς τὴν διτετράγωνον x^2 μὲ X. Βλέπε ***Διτετράγωνος***. Ὁμοίως ὑπάρχει ἐπιλύουσα εἰς τὰς ἀντιστρόφους ἐξισώσεις.

Ἐπίλυσις. Λύω μίαν ἐξίσωσιν, σύστημα, πρόβλημα, Βλέπε ***Ἐξίσωσις***.

• **Γραφικὴ ἐπίλυσις.** Βλέπε ***Γραφικὴ παράστασις***.

Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ κάθε προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμε τὰ γινόμενα:

$$\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.}$$

'Επίπεδον. 'Η ἐπιφάνεια ἑνὸς μαυροπίνακος, ἑνὸς τοίχου δίδει τὴν εἰκόνα ἐπιπέδου.

ΣΤ' 'Ιδιότητες. ⁎ Κάθε εὐθεῖα ποὺ ἔχει δύο σημεῖα εἰς ἕνα ἐπίπεδο, κεῖται ὁλόκληρη στὸ ἐπίπεδο αὐτό.

⁎ "Αν μία εὐθεῖα δὲν περιέχεται εἰς ἕνα ἐπίπεδο, τότε ἔχει, τὸ πολύ, ἕνα κοινὸ σημεῖο μὲ τὸ ἐπίπεδο αὐτό.

⁎ Τὸ ἐπίπεδο εἶναι ἀπεριόριστο πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις.

⁎ Μία εὐθεῖα ὁρίζει εἰς ἕνα ἐπίπεδο δύο ἡμιεπίπεδα.

⁎ Ἕνα ἐπίπεδο ὁρίζεται ἀπό:

— τρία σημεῖα μὴ εὐθυγραμμισμένα

— μίαν εὐθεῖαν καὶ ἕνα σημεῖο ἐκτὸς τῆς εὐθείας

— δύο τεμνόμενες εὐθεῖες

— δύο παράλληλες εὐθεῖες.

⁎ "Αν δύο ἐπίπεδα ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο, ἔχουν ἐπίσης καὶ μίαν κοινὴν εὐθεῖαν πού διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτό.

● **'Επίπεδα παράλληλα. 'Επίπεδα κάθετα.** Βλέπε ***Παράλληλος, Κάθετος***.

'Επιτάχυνσις. ⁎ 'Η ἐπιτάχυνσις εὐθυγράμμου κινήσεως ὁμαλῶς μεταβαλλομένης εἶναι ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος κατὰ μονάδα χρόνου.

"Αν ἡ ταχύτης λαμβάνη τὰς τιμὰς v_1 καὶ v_2 εἰς τοὺς χρόνους t_1 καὶ t_2, ἡ ἐπιτάχυνσις γ ἔχει ὡς τιμήν:

$$\gamma = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

⁎ 'Η ἐπιτάχυνσις εἶναι μηδὲν εἰς μίαν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν.

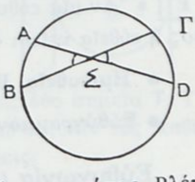
'Επιτόκιον ἑνὸς κεφαλαίου. Εἶναι ὁ τόκος ποὺ δίδει ἕνα ποσὸν τῶν 100 δρχ. εἰς ἕνα ἔτος. Βλέπε ***Τόκος***.

'Επιφάνεια ● Μέτρησις ἐπιφανειῶν. Βλέπε ***'Εμβαδόν***.

● **Ἐπιφάνεια περιστροφῆς.** Βλέπε *Περιστροφή.*

Ἑρμηνεία γραφική. Βλέπε *Γραφικὴ παράστασις.*

| Δ' | **Ἐσωτερικὴ** ● **Γωνία ἐσωτερικὴ εἰς κύκλον.** Γωνία ποὺ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐντὸς μιᾶς περιφερείας. Ἡ γωνία αὐτὴ βαίνει εἰς δύο τόξα καὶ τὸ μέτρον της εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῶν ἀντιστοίχων τόξων.



$$\text{μετ}\ \widehat{\Sigma} = \text{μετ}\ \frac{\widehat{AB} + \widehat{\Gamma D}}{2}$$

● **Γωνίαι ἐντὸς καὶ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης.** Βλέπε *Γωνία.*

● **Ἐσωτερικὴ διχοτόμος τριγώνου.** Διχοτόμος ἐσωτερικῆς γωνίας τριγώνου. Βλέπε *Διχοτόμος.*

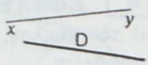
● **Ἐσωτερικὸν κύκλου.** Περιοχὴ περιοριζομένη ἀπὸ τὴν περιφέρειαν καὶ περιέχουσα τὸ κέντρον. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐσωτερικῆς περιοχῆς τοῦ κύκλου εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον μικροτέραν ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα.

Ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί. Οἱ ἀριθμοὶ 3 μῆλα, 8 μῆλα ποὺ ἀναφέρονται εἰς ἀντικείμενα τοῦ αὐτοῦ εἴδους λέγονται *ὁμοειδεῖς ἀριθμοί,* ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ 3 μῆλα, 2 θρανία εἶναι *ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί.*

Ἑτερώνυμα κλάσματα, ὅσα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λ. χ. $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{7}$. Ἐνῶ τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν λέγονται *ὁμώνυμα.*

Ἔτος. Εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τόκου λαμβάνομε ὡς διάρκειαν τοῦ ἔτους 360 ἡμέρας ποὺ διαιροῦνται εἰς 12 μῆνας τῶν 30 ἡμερῶν.

Εὐθεῖα ● **Εὐθεῖα γραμμή.** Γραμμὴ ποὺ εἰκονίζεται μὲ μίαν κλωστὴν τεντωμένην μεταξὺ δύο σημείων ἢ μὲ τὴν ἀκμὴν κανόνος. Συμβολίζομε μίαν εὐθεῖαν μὲ δύο γράμματα τοποθετημένα πλησίον τῆς εὐθείας ἤ, καμμιὰ φορά, μὲ ἕνα μόνο γράμμα. Π.χ. Εὐθεῖα xy, εὐθεῖα D.



| Γ' | **Ἰδιότητες.** ★ Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἀπεριόριστος καὶ πρὸς τὰς δύο κατευθύνσεις.

★ Ἀπὸ δύο σημεῖα μποροῦμε νὰ φέρωμε μίαν εὐθεῖαν καὶ μόνον μίαν. Δύο σημεῖα ἀρκοῦν διὰ νὰ ὁρίσωμε μίαν εὐθεῖαν.

⁎ Δύο εὐθεῖαι δὲν μποροῦν νὰ ἔχουν περισσότερα ἀπὸ ἕνα κοινὰ σημεῖα χωρὶς νὰ ταυτίζωνται.

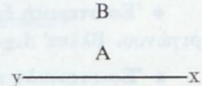
⁎ Μία εὐθεῖα μπορεῖ νὰ ὀλισθαίνη ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ της.

| Ε΄ | ⁎ Ἂν μία εὐθεῖα ἔχη δύο σημεῖα ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, τότε ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

● **Ἡμιευθεῖα.** Βλέπε *Ἡμιευθεῖα.*

● **Εὐθύγραμμον τμῆμα.** Βλέπε *Τμῆμα εὐθύγραμμον.*

Εὐθυγωνία (ἀποπλατυσμένη γωνία). Ἂν οἱ πλευρὲς μιᾶς γωνίας (Ax, Ay) εἶναι ἡμιευθεῖες ἀντίθετες, ἡ γωνία αὐτῶν ὀνομάζεται *εὐθυγωνία* ἢ *ἀποπλατυσμένη* γωνία.



Μία εὐθυγωνία (Ax, Ay) εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα ἀκμῆς xy, καὶ διὰ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν λέγομε «ἡ εὐθυγωνία xAy. ποὺ περιέχει τὸ σημεῖο B».

Ἰδιότητες. ⁎ Μία εὐθυγωνία ἰσοῦται μὲ 180° ἢ μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας.

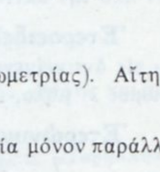
⁎ Αἱ εὐθυγωνίαι εἶναι ἴσαι.

Εὐκλείδης. (Θεμελιωτὴς τῆς Εὐκλειδίου Γεωμετρίας). Αἴτημα Εὐκλείδειον :

«Ἀπὸ σημεῖο κείμενο ἐκτὸς εὐθείας διέρχεται μία μόνον παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην».

| Δ΄ | **Ἐϋλέρ** - Euler. Εὐθεῖα τοῦ Euler. Εὐθεῖα ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ διέρχεται ἐπίσης ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ *κύκλου τῶν 9 σημείων* ποὺ κεῖται στὸ μέσον τοῦ τμήματος ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ πρῶτα σημεῖα.

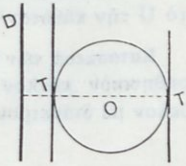
| Δ΄ | **Ἐφαπτομένη κύκλου.** Εὐθεῖα ποὺ ἔχει μόνον ἕνα κοινὸ σημεῖο μὲ τὸν κύκλον. Τὸ σημεῖο αὐτὸ εἶναι τὸ σημεῖο ἐπαφῆς.



Ἰδιότητες ⁎ Ἡ ἐφαπτομένη εἶναι κάθετος στὸ ἄκρο τῆς ἀκτῖνος πού ἄγεται εἰς τὸ σημεῖο ἐπαφῆς.

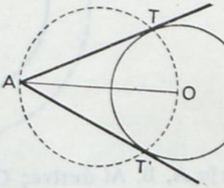
⁎ Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα.

⁎ Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι ποὺ ἄγονται ἀπὸ ἕνα σημεῖο πρὸς κύκλον εἶναι ἴσαι καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας των εἶναι ἡ διάμετρος ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον.



● **Κατασκευὴ ἐφαπτομένης κύκλου. Ἐφαπτομένη παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.** Φέρομε ἀπὸ τὸ κέντρον κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν D. Ἡ κάθετος αὐτὴ τέμνει τὸν κύκλο εἰς δύο σημεῖα T, T΄, ποὺ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ἀπὸ T καὶ T΄ φέρομε κατόπιν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον. Ὑπάρχουν πάντα δύο λύσεις.

Ἐφαπτομένη ἀγομένη ἀπὸ δοθὲν σημεῖον. Ἔστω A, δοθὲν σημεῖον *ἐκτὸς* τοῦ κύκλου. Χαράσσομε τὸν κύκλον μὲ διάμετρον AO ποὺ τέμνει τὸν κύκλον O εἰς δύο σημεῖα T, T΄. Αὐτὰ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς (κορυφαὶ ὀρθῶν γωνιῶν).



Ὑπάρχουν δύο λύσεις.

⁎ Ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφέρειας, ὑπάρχει μία μόνον λύσις.

⁎ Ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας, δὲν ὑπάρχει καμμία λύσις.

● **Ἐφαπτόμεναι κοιναὶ εἰς δύο κύκλους.** Εἶναι δύο εἰδῶν :

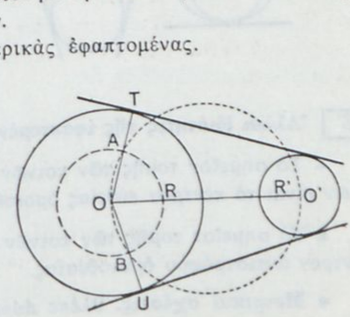
— **ἐσωτερικαί,** ἂν τέμνουν τὴν διάκεντρον μεταξὺ τῶν δύο κέντρων

— **ἐξωτερικαί,** ἂν εἶναι παράλληλες πρὸς τὴν διάκεντρον ἢ τὴν τέμνουν ἐκτὸς τοῦ τμήματος ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ κέντρα.

Ἰδιότητες. Αἱ δύο κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι δύο ἀνίσων κύκλων διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὴν διάκεντρον ποὺ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ποὺ σχηματίζουν.

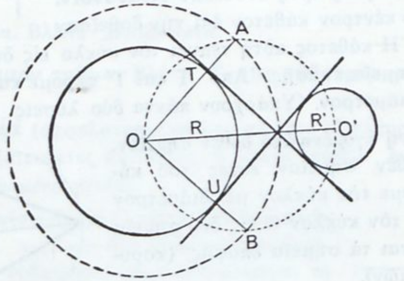
Ὁμοίως διὰ τὰς κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας.

Κατασκευὴ τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων. Χαράσσομε ἕνα βοηθητικὸν κύκλον μὲ κέντρον O, μὲ ἀκτῖνα R – R΄, κατόπιν ἕναν κύκλον μὲ διάμετρον OO΄, ποὺ τέμνει τὸν βοηθητικὸν κύκλον εἰς δύο σημεῖα A, B.



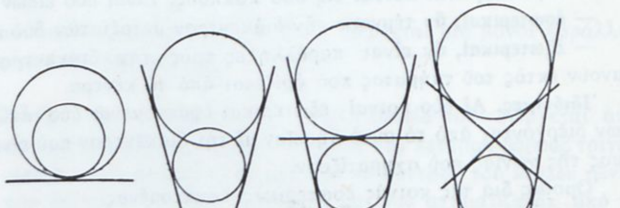
Αἱ ἀκτῖνες OA καὶ OB τέμνουν τὸν κύκλον O στὰ σημεῖα T,U, ποὺ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων. Ὑψώνομε στὸ σημεῖο T τὴν κάθετον ἐπὶ OT, στὸ U τὴν κάθετον ἐπὶ OU.

Κατασκευὴ τῶν κοινῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων. Χαράσσομε ἕνα βοηθητικὸν κύκλον μὲ κέντρον O, μὲ ἀκτῖνα $R + R'$, κατόπιν ἕνα κύκλον μὲ διάμετρον OO', ποὺ τέμνει τὸν βοηθητικὸν κύκλον εἰς δύο



σημεῖα A, B. Αἱ ἀκτῖνες OA, OB τέμνουν τὸν κύκλον O στὰ T, U, ποὺ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων. Ὑψώνομε στὸ σημεῖο T τὴν κάθετον ἐπὶ OT, στὸ U τὴν κάθετον ἐπὶ OU.

Τὰ ἀκόλουθα σχήματα δείχνουν τὴν θέσιν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων στὶς διάφορες δυνατὲς περιπτώσεις.



Ε΄ **Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς ἐφαπτομένης.**

* Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων δύο κύκλων εἶναι τὸ κέντρον εὐθείας ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων.

* Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν κοινῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων εἶναι τὸ κέντρον ἀντιστρόφου ὁμοιοθεσίας.

● **Μετρικαὶ σχέσεις.** Βλέπε *Δύναμις*.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΑΙ ΚΑΙ ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

Εὐχαριστοῦμε θερμῶς τὸ πολυπληθέστατο κοινὸ τῶν μαθητῶν, σπουδαστῶν καὶ γονέων διὰ τὸ ζωηρὸν ἐνδιαφέρον μὲ τὸ ὁποῖον ὑπεδέχθη τὰ πρῶτα τεύχη τῆς «Μαθηματικῆς 'Εγκυκλοπαιδείας».

'Ιδιαιτέρως εὐχαριστοῦμε τοὺς κ.κ. Συναδέλφους, Γυμνασιάρχας καὶ Λυκειάρχας διὰ τὰ ἐγκώμια ποὺ ἔσπευσαν νὰ πλέξουν διὰ τὸ ἔργον μας.

* * *

'Επὶ πλέον ἀνακοινοῦμεν ὅτι :

1. 'Η «Μαθηματικὴ 'Εγκυκλοπαίδεια» θὰ ἔχῃ, ὁπωσδήποτε, ὁλοκληρωθῆ μέχρι τοῦ 'Ιουνίου ἐ.ἔ. διὰ τῆς κυκλοφορίας διπλῶν ἑβδομαδιαίων τευχῶν.

2. Ὅσοι τυχόν, δὲν εὑρίσκουν τὰ τεύχη εἰς τὰ περίπτερα (καὶ κυρίως τὰ προηγούμενα), δύνανται νὰ τὰ ζητοῦν εἰς τὰ Κεντρικὰ Βιβλιοπωλεῖα 'Αθηνῶν («Προμηθεὺς» Σταδίου 41, «Βιβλιοχαρτεμπορικὴ» Σταδίου 49, «Σιδέρης» Σταδίου 44, «Α. Καραβία» 'Ακαδημίας 58 κ.λ.π.) ἢ παρὰ τοῦ Συγγραφέως—'Εκδότου :

Π. Πλούτση—Καθηγ. Μαθηματικῶν
ὁδὸς Πατησίων 112—τηλ. 819.757—ΑΘΗΝΑΙ (801)