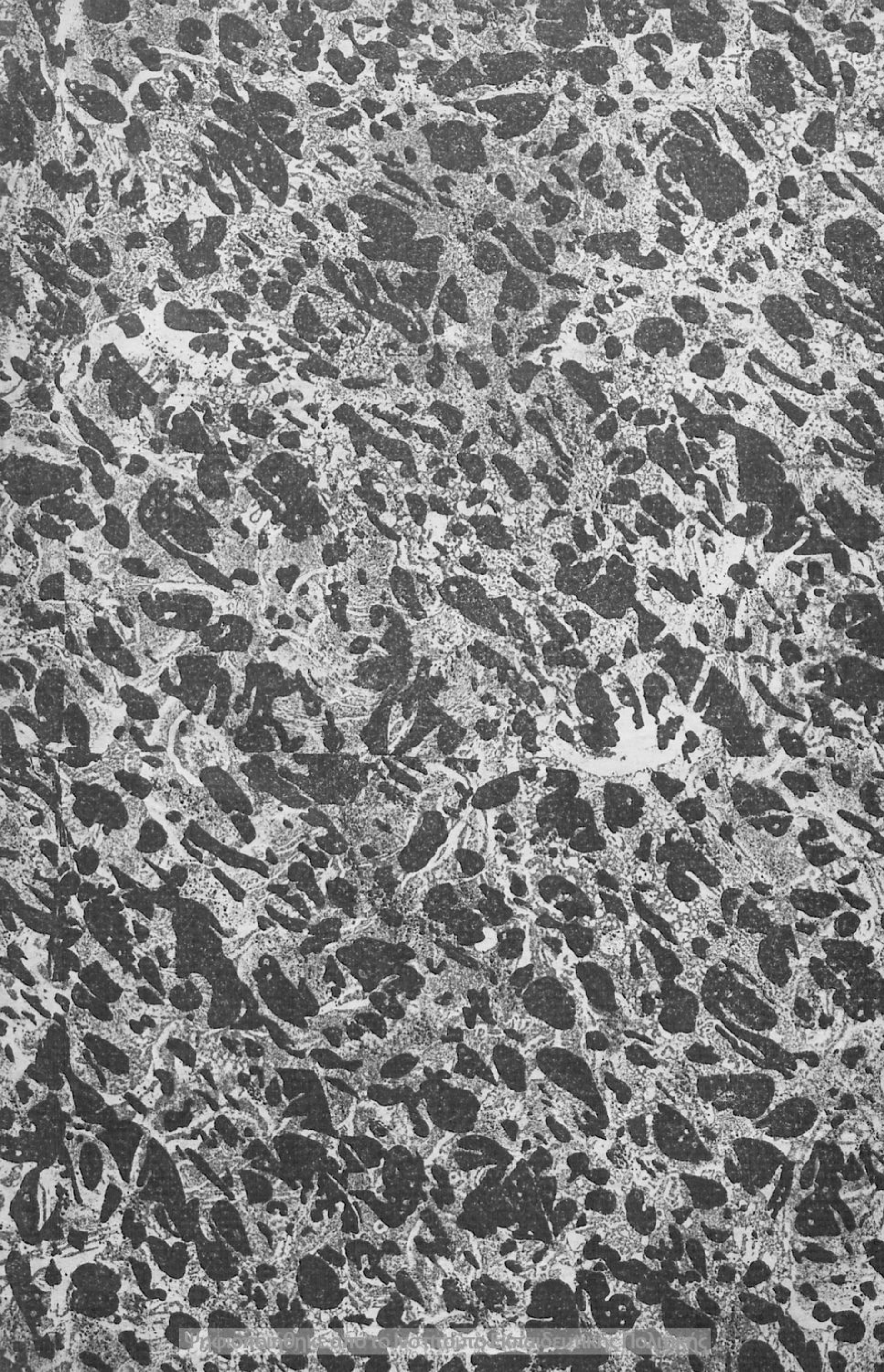


ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ τέως καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ πειραματ.
Βαρβακείῳ σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

ΜΕΓΑΛΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΑΣ

Νικολάου (Ν.Δ.)

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

"... ἓν οὐδὲν οὕτω δύναμιν ἔχει παίδειον μάθημα, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή. Τὸ δὲ μέγιστον, ὅτι τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζεται,,.
(Πλάτων, Νόμος ε΄.)

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & Σ^{ΙΑ}
81 ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81 ΑΘΗΝΑΙ
1932

Τύποις «ΕΛΛΑΣ» Ἀθῆναι
Ὁδὸς Μακεδονίας 10

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐπιθυμοῦντες νὰ πλουτίσωμεν τὴν Ἑλληνικὴν μαθηματικὴν βιβλιοθήκην διὰ βιβλίου «Στοιχειώδους Ἀλγέβρας» κατὰ πάντα πλήρους, συντεταγμένου δὲ κατὰ τὰς ὑποδείξεις τῆς διδακτικῆς καὶ ἐνθαρρυνόμενοι ὑπὸ τῆς εὐμενοῦς ὑποδοχῆς, ἧς ἔτυχον ἐκ μέρους τῶν ἀξιοτίμων κ. κ. συναδέλφων τὰ ἄλλα ἡμῶν μαθηματικὰ διδακτικὰ βιβλία προέβημεν εἰς τὴν σύνταξιν τῆς παρούσης «Μεγάλης Στοιχειώδους Ἀλγέβρας» πρὸς χρῆσιν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ κράτους σχολάς, τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ ὡς βοηθητικὴν τῶν περὶ τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὴν διδακτικὴν αὐτῶν ἀσχολουμένων.

Κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ βιβλίου τούτου ἠκολουθήσαμεν εἰς ὅλα σχεδὸν τὰ θέματα τὴν διδακτικὴν ἀρχὴν «ἀπὸ τῶν παραδειγμάτων εἰς τὴν θεωρίαν, ἀπὸ τῶν συγκεκριμένων εἰς τὰ ἀφῃρημένα». Οὕτω ἀπὸ τῆς πρώτης ἔτι σελίδος διὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ σκοποῦ τῆς Ἀλγέβρας ἀναχωροῦμεν ἀπὸ ἁπλοῦ τινος προβλήματος, ὅπερ λύομεν ἀριθμητικῶς καὶ ἀλγεβρικῶς χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἄγνωστον ἔτι ἔννοιαν τῶν ἰσοδυνάμων ἐξισώσεων, ἀλλὰ στηριζόμενοι εἰς τὰς ἐκ τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἴσων ἀριθμῶν. Διὰ τῆς συγκρίσεως δὲ τῶν δύο τούτων μεθόδων κατανοοῦσιν οἱ μαθηταὶ εὐχερέστατα ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ εἶναι ἁπλουστέρα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐπιτυγχάνομεν οὕτω νὰ προκαλέσωμεν τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν ὑπὲρ τοῦ νέου τούτου κλάδου τῶν μαθηματικῶν· ἐπαυξάνομεν δὲ τὸ ἐνδιαφέρον τοῦτο διὰ τῆς γενικεύσεως τοῦ προβλήματος τούτου καὶ τῆς ὑποδείξεως τῆς χρησιμότητος τοῦ ἐκ τῆς λύσεως αὐτοῦ προκύψαντος τύπου. Ἐπίσης τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς εἰσάγομεν οὐχὶ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἀδυνάτων ἄνευ αὐτῶν ἀφαιρέσεων, ἀλλὰ δεικνύομεν εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς διὰ διαφόρων παραδειγμάτων τὴν χρησιμότητα αὐτῶν εἰς τὴν παράστασιν τῶν ποσῶν δι' ἀριθμῶν· οὕτω δὲ ταχύτερον καὶ ἀκοπώτερον ὑπὸ τῶν πραγμάτων βοηθούμενοι οἱ μαθηταὶ κατανοοῦσιν αὐτούς. Καὶ τοὺς κανόνας δέ, καθ' οὓς γίνεται ἡ πρόσθεσις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον τοιοῦτον ἐξάγομεν διὰ καταλλήλων προβλημάτων ὡς ἀναγκαίας ἀκολουθίας ἀπαραιτήτου πρὸς τὰ πράγματα συμφωνίας. Οὕτω δὲ τὸ μὲν ἀκοπώτερον κατανοοῦνται, τὸ δὲ καὶ μονιμώτερον διατηροῦνται οὗτοι, διότι εἰς πᾶσαν στιγμὴν προβάλλει ἀσφαλὴς ὁδηγὸς τὸ παράδειγμα. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τῇ βοηθείᾳ καταλλήλων ἑκάστοτε προβλημάτων διδάσκομεν τὴν ἔννοιαν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, τῆς συναρτήσεως, τῶν ἐξισώσεων, συστημάτων, ἀνισοτήτων, τὰς μεθόδους τῆς λύσεως αὐτῶν κ.τ.λ.

Καὶ ἐν τοῖς καθ' ἕκαστα δὲ ζητήμασι πολλαχῶς ἐκαινοτομήσαμεν. Οὕτως ἀναφέρομεν τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τῶν ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, δι' ὧν εὐκολύνεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλ. κ.π. ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, τὴν ἁπλοποίησιν τῆς θεωρίας τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἄλλου τοιούτου, τὴν πρόταξιν τῶν ἀνισοτήτων α΄ βαθμοῦ τῆς ἐννοίας καὶ λύσεως τῶν γενικῶν προβλημάτων, διότι ἡ γνῶσις ἐκείνων εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν διερεύνησιν τούτων, τὴν ἀρχῆθεν ὑπόδειξιν τῆς ὁριζούσης Βας τάξεως καὶ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Cramer εἰς τὴν λύσιν συστημάτων 2 πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ 2 ἀγνώστους, διότι οὕτω ταχύτερον λύονται ταῦτα, τὴν στοιχειώδη ἀνάπτυξιν τῆς συνεχείας τῶν συναρτήσεων καὶ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῶν εἰς τὰς συναρτήσεις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ καὶ 10^x, ὧν οὕτω αἱ μεταβολαὶ σπουδάζονται πληρέστερον, τὴν ἁπλοποίησιν τῆς ἀποδείξεως τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος κ.τ.λ. Χάριν δὲ ἰδία τῶν μαθητῶν τῶν πρακτικῶν Λυκείων ἐκθέτομεν τὴν λύσιν τῶν διωνύμων, τριωνύμων καὶ ἀντιστρόφων ἐξισώσεων, τὰς ἀλλεπαλλήλους ῥίζας, τὴν ἁπλοποίησιν παραστάσεων τῆς μορφῆς $\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$, τὴν ἐπέκτασιν τῆς τροπῆς ἀρρήτων παρονομαστῶν εἰς ῥητοὺς καὶ εἰς παρονομαστὰς τῆς μορφῆς $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}\pm\sqrt[3]{\beta}$, τὴν ἔννοιαν τῶν συνηθεστέρων ἀορίστων μορφῶν καὶ τὰς μεθόδους τῆς ἄρσεως αὐτῶν, τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ὑπὸ συνθήκας, τὴν ἔννοιαν τῶν διαφόρων λογαριθμικῶν συστημάτων καὶ τὰς στοιχειωδεστέρας ἰδιότητας τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων μετ᾽ ἀναλόγων ἐφαρμογῶν αὐτῶν.

Ἵνα δὲ τὸ βιβλίον τοῦτο ἀποβῇ πληρέστερον, κατ᾽ ἀκολουθίαν δὲ καὶ ὠφελιμώτερον ἔγνωμεν νὰ περιλάβωμεν καὶ τὰ ἑξῆς ἔτι:

Α΄) Θεωρίαν τῶν ὁριζουσῶν, καθ᾽ ὃν στοιχειώδη τρόπον φρονοῦμεν ὅτι εἶναι προσιτὴ καὶ πρέπει νὰ διδάσκηται αὕτη εἰς τὰ Πρακτικὰ Λύκεια, μετ᾽ ἐφαρμογῶν αὐτῶν εἰς τὴν λύσιν πρωτοβαθμίων συστημάτων.

Β΄) Θεωρίαν τῆς παραγώγου συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς, ἐφαρμογὴν αὐτῶν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων καὶ τὴν γραφικὴν τῶν μεταβολῶν τούτων παράστασιν.

Μεθ᾽ ἕκαστον δὲ θέμα παραθέτομεν ἀρκετὸν ἀριθμὸν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν μεμαθημένων καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς αὐτενεργείας τῶν μαθητῶν. Εἰς δὲ τὸ τέλος ἑκάστου βιβλίου παραθέτομεν πολυαρίθμους καὶ ποικιλωτάτας ἀσκήσεις καὶ προβλήματα δυσκολώτερά πως τῶν ἄλλων χάριν ἰδίᾳ τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ κράτους σχολάς.

Οὕτω συντεταγμένον τὸ βιβλίον τοῦτο εὐελπιστοῦμεν ὅτι θέλει ἀνταποκριθῇ τελείως εἰς τὸν σκοπὸν καὶ δικαιώσει πλήρως τὰς προσδοκίας ἐκείνων, οἵτινες μετὰ συγκινούσης ἡμᾶς ἀνυπομονησίας ἀναμένουσι τὴν ἔκδοσιν αὐτοῦ.

Ὁ Συγγραφεὺς
Ν. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. **Πρόβλημα.**—***Πατὴρ εἶναι 40 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 10 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;***

Λύσις. Α΄ τρόπος. Σήμερον ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ κατὰ $40-2\times10=20$ ἔτη. Μετὰ πάροδον ἑνὸς ἔτους ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ κατὰ $41-2\times11=19$ ἔτη,μετὰ πάροδον 2 ἐτῶν κατὰ $42-2\times12=18$ ἔτη κτλ.Παρατηροῦντες ὅτι ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα κατὰ 1, συμπεραίνομεν ὅτι διὰ νὰ μηδενισθῇ αὕτη πρέπει νὰ παρέλθωσιν 20 ἔτη. Πράγματι δὲ μετὰ 20 ἔτη ἡ μὲν ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε 60 ἔτη ἡ δὲ τοῦ υἱοῦ 30 ἔτη, ἤτοι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Β΄ τρόπος. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον γίνεται μετὰ x ἔτη. Ἐπειδὴ μετὰ παρέλευσιν x ἐτῶν ὁ μὲν πατὴρ θὰ εἶνε $40+x$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $10+x$, πρέπει ὁ ἀριθμὸς $40+x$ νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ $10+x$, ἤτοι $40+x=(10+x).2$ ἢ $40+x=10+x+10+x$ ἢ $40+x=20+x+x$. Ἐὰν ἀπὸ τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν x, εὑρίσκομεν ὅτι $40=20+x$, ὅθεν ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $20=x$, ἤτοι τὸ ζητούμενον γίνεται μετὰ 20 ἔτη.

Κατὰ τὴν Α΄ μέθοδον ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἐπετεύχθη δι᾽ ἐπανειλημμένων δοκιμῶν, δι᾽ ὧν ἐπείσθημεν ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ διπλασίου τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ βαίνει ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος ἐλαττουμένη κατὰ μονάδα· ἐκ τούτου δὲ εἶτα ἐξήχθη τὸ συμπέρασμα ὅτι, ἵνα μηδενισθῇ ἡ διαφορὰ αὕτη, πρέπει νὰ παρέλθωσιν 20 ἔτη. Ἐπειδὴ δὲ παρὰ ταῦτα ἔμεινεν εἰς τὸ βάθος τῆς ψυχῆς μας ἀμφιβολία τις περὶ τῆς ὀρθότητος τῆς λύσεως, ἐδοκιμάσαμεν τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν καὶ ἐβεβαιώθημεν ὅτι πράγματι μετὰ 20 ἔτη συμβαίνει τὸ ζητούμενον.

Κατὰ τὴν Β΄ μέθοδον παραστήσαντες διὰ τοῦ γράμματος x τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν καὶ ἐκτελέσαντες ὅ,τι προηγουμένως κατὰ τὴν δοκιμὴν τῆς εὑρεθείσης λύσεως εὕρομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $40+x$ καὶ $(10+x).2$ ἢ $40+x$ καὶ $20+x+x$ ὀφείλουσι νὰ εἶναι ἴσοι. Ἀναγράψαντες δὲ μεταξὺ αὐτῶν τὸ $=$ καὶ ἐφαρμόσαντες εἰς τὴν οὕτω προκύψασαν ἰσότητα γνωστὴν τῶν ἴσων ἀριθμῶν ἰδιότητα εὕρομεν ὅτι $20=x$, ἤτοι ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα. Ἁπλῆ τῶν δύο τούτων μεθόδων σύγκρισις πείθει ἡμᾶς ὅτι ἡ δευτέρα μέθοδος εἶνε φυσικωτέρα καὶ ἁπλουστέρα τῆς πρώτης.

Γενίκευσις. Ἐὰν ποικίλλωμεν τὸ πρόβλημα ἀλλάσσοντες τὰς ἡλικίας τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ, πρέπει ἑκάστοτε νὰ κάμνωμεν τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς καὶ πράξεις, ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα. Τὴν ἐπανάληψιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν ὡς ἀκολούθως. Διατυποῦμεν τὸ πρόβλημα ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν γραμμάτων α καὶ β τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες παριστῶσι τὰς ἡλικίας τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ, οὕτως: «Πατὴρ εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ ;» Τὸ οὕτω προκύψαν γενικώτερον πρόβλημα λύομεν ὡς ἀκολούθως :

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον γίνεται μετὰ x ἔτη. Ἐπειδὴ τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι $\alpha+x$, ἡ δὲ τοῦ υἱοῦ $\beta+x$, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha+x=(\beta+x).2$ ἢ $\alpha+x=\beta+x+\beta+x$. Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $\alpha+x$ καὶ $\beta+x+\beta+x$ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν x, εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha=\beta+\beta+x$ ἢ $\alpha=\beta.2+x$. Ἐὰν δὲ πάλιν ἀφαιρέσωμεν τὸν $\beta.2$ ἀπὸ τοὺς δύο ἴσους ἀριθμούς, προκύπτει ὅτι $\alpha-\beta.2=x$. Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ μετὰ $(\alpha-\beta.2)$ ἔτη, ἤτοι εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον, ἐὰν ἀπὸ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς ἀφαιρεθῇ τὸ διπλάσιον τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ. Οὕτως, ἂν $\alpha=45$ καὶ $\beta=15$, εὑρίσκομεν ὅτι $x=45-(15.2)=45-30=15$. Ἂν $\alpha=50$ καὶ $\beta=18$, εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=50-18.2=50-36=14$ κ.τ.λ.

Ἡ ἰσότης $\alpha-\beta.2=x$ λέγεται ***τύπος***. Τῇ βοηθείᾳ αὐτοῦ λύομεν πᾶν πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ προταθὲν μὲ διαφόρους ὅμως ἡλικίας τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ, ἀρκεῖ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ $\beta.2$ ἀπὸ τοῦ α, ἤτοι ἂν $\alpha>\beta.2$. Καὶ ὅταν εἶναι $\alpha<\beta.2$ εἶναι δυνατὴ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου· ἀλλὰ πρὸς τοῦτο χρειάζονται καὶ νέοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους θὰ μάθωμεν εἰς τὰ ἀκόλουθα μαθήματα.

§ 2. **Ἀντικείμενον τῆς Ἀλγέβρας.** Ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς δεύτερος τρόπος τῆς λύσεως τοῦ προηγουμένου προβλήματος καλεῖται ***ἀλγεβρικός***. Διδάσκει δὲ αὐτὸν ὁ κλάδος τῶν Μαθηματικῶν, ὁ ὁποῖος καλεῖται ***Ἄλγεβρα***.

Ὥστε ὅπως ἡ Ἀριθμητική, οὕτω καὶ ἡ Ἄλγεβρα ἀσχολεῖται περὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὴν λύσιν τῶν διαφόρων ἐπ' αὐτῶν ζητημάτων καὶ προβλημάτων. Εἶναι ὅμως τὸ ἔργον τῆς Ἀλγέβρας εὐρύτερον καὶ γενικώτερον ἀπὸ τὸ ἔργον τῆς Ἀριθμητικῆς, διότι καὶ νέους ἀριθμοὺς διαφόρους τῶν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς γνωστῶν εἰσάγει καὶ προβλήματα δυσκολώτερα λύει αὕτη καὶ αἱ μέθοδοι αὐτῆς εἶναι γενικώτεραι. Διὰ τοὺς λόγους τούτους δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι: ***Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι γενικὴ Ἀριθμητική.***

Χάριν τῆς γενικότητος παριστῶμεν πολλάκις ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ τοὺς ἀριθμοὺς διὰ γραμμάτων. Καὶ τοὺς μὲν ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι θεωροῦνται ἔν τινι προβλήματι γνωστοί, παριστῶμεν συνήθως διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων α, β, γ, δ,... τοὺς δὲ ἀγνώστους διὰ τῶν τελευταίων φ, χ, ψ, ω. Οὕτως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα κατὰ τὴν γενίκευσιν αὐτοῦ παρεστήσαμεν τὴν μὲν ἡλικίαν τοῦ πατρὸς διὰ τοῦ α, καὶ τοῦ υἱοῦ διὰ τοῦ β, τὸν δὲ ἄγνωστον ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν διὰ τοῦ x.

Σημειοῦνται δὲ αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πράξεις διὰ τῶν αὐτῶν καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ συμβόλων. Οὕτω $40+x$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν προσθέτοντες εἰς τὸν ἀριθμὸν 40 τὸν x, $\beta \cdot 2$ σημαίνει τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν β ἐπὶ τὸν 2.

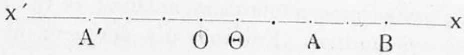
ΣΗΜ. Ὅταν εἷς τοὐλάχιστον τῶν δύο παραγόντων γινομένου εἶναι γράμμα, τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραλείπεται. Οὕτω τὸ γινόμενον $\beta.2$ γράφεται συνήθως 2β, τὸ $\alpha.\beta$ γράφεται $\alpha\beta$ κ.τ.λ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΟΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ **3. Ἔννοια τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.**— Ἔστω x΄x ἀπέραντος εὐθεῖα, Ο ὡρισμένον τι σημεῖον καὶ ΟΘ ἡ μονὰς τοῦ μήκους. Πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας x΄x ἀπέχει τοῦ Ο ἀπόστασιν, τῆς



(Σχ. 1)

ὁποίας τὸ μῆκος εὑρίσκομεν, ἂν μετρήσωμεν αὐτὴν διὰ τῆς ὁρισθείσης μονάδος ΟΘ.

Οὕτω π. χ. τὸ σημεῖον Α ἀπέχει τοῦ Ο ἀπόστασιν ΟΑ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 3 μονάδες μήκους, τὸ Β ἀπέχει 5μ, τὸ Α΄ 3 μονάδας κ.τ.λ. Τὸ σημεῖον Ο εἰς οὐδεμίαν κεῖται ἀπὸ τοῦ Ο ἀπόστασιν· τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι τὸ Ο ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἑαυτοῦ του μηδὲν μονάδας μήκους.

Ὥστε ***ἕκαστον ὡρισμένον σημεῖον τῆς*** x΄x ***ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Ο ὡρισμένην ἀπόστασιν.***

Εἰς ὡρισμένην ὅμως ἀπὸ τοῦ Ο ἀπόστασιν διάφορον τοῦ μηδενὸς ἀντιστοιχοῦσι δύο σημεῖα τῆς εὐθείας ταύτης, ἤτοι ὑπάρχουσι δύο σημεῖα τῆς εὐθείας ταύτης ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ Ο ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ὁρισθεῖσαν τοιαύτην. Οὕτω π.χ. ἑκάτερον τῶν σημείων Α καὶ Α΄ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Ο ἀπόστασιν 3 μονάδων μήκους.

Ἐὰν ἑπομένως ἐρωτηθῶμεν, ποῖον σημεῖον τῆς x΄x ἀπέχει τοῦ Ο τρεῖς μονάδας, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἀπαντήσωμεν ὅτι ὑπάρχουσι δύο τοιαῦτα σημεῖα τὸ Α καὶ τὸ Α΄. Ἐὰν ὅμως ἐρωτηθῶμεν ποῖον σημεῖον τῆς x΄x ἀπέχει τοῦ Ο ἀπόστασιν 3 μονάδων καὶ κεῖται, πρὸς ὃ μέρος τοῦ Ο κεῖται καὶ τὸ Θ, θὰ ἀπαντήσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ Α. Μόνη ὅθεν ἡ ἀπόστασις σημείου τινὸς τῆς x΄x ἀπὸ τοῦ Ο δὲν ἀρκεῖ νὰ ὁρίσῃ τὴν θέσιν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς x΄x, διότι χρειάζεται πλὴν ταύτης νὰ δηλωθῇ καὶ πρὸς ποῖον μέρος τοῦ Ο κεῖται τοῦτο.

Καὶ εἰς ἄλλας περιστάσεις παρουσιάζεται τοιαύτη ἀνάγκη καθορισμοῦ τῆς θέσεως σημείου ἐπὶ εὐθείας οὐ μόνον διὰ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ ὡρισμένου σημείου αὐτῆς ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ καθορισμοῦ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας, εἰς ὃ τοῦτο κεῖται. Οὕτω π. χ. λέγομεν ὅτι τὸ θερμόμετρον δεικνύει θερμοκρασίαν 10° ὑπὲρ τὸ μηδὲν ἢ ὑπὸ τὸ μηδέν, καθ' ὅσον τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 10 διαιρέσεων ὑπὲρ ἢ ὑπὸ τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι ἀναγεγραμμένον τὸ μηδέν. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ ἀποφύγωμεν τὴν φράσιν «ὑπὲρ τὸ μηδὲν» ἢ «ὑπὸ τὸ μηδέν», ἂν συμφωνήσωμεν νὰ ἀναγράφωμεν πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῆς διαιρέσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, σημεῖόν τι δηλωτικὸν τῆς ὑπὲρ τὸ μηδὲν καὶ ἄλλο διὰ τὴν ὑπὸ τὸ μηδὲν θερμοκρασίαν. Τοιαῦτα δὲ σημεῖα καθωρίσθησαν τὸ + (σὺν) διὰ τὴν ὑπὲρ τὸ μηδὲν καὶ τὸ — (πλὴν) διὰ τὴν ὑπὸ τὸ μηδὲν θερμοκρασίαν. Οὕτως, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι 17° ὑπὲρ τὸ μηδέν, λέγομεν ὅτι αὕτη εἶναι + 17°· ἀντὶ δὲ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι 5° ὑπὸ τὸ μηδέν, λέγομεν ὅτι αὕτη εἶναι — 5°.

Τῶν αὐτῶν σημείων γίνεται χρῆσις καὶ διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς θέσεως σημείου ἐπὶ τυχούσης ἄλλης εὐθείας x'x (Σχ.1). Πρὸς τοῦτο συνεφωνήθη ὅτι, ὁρισθείσης τῆς μονάδος ΟΘ θὰ προτάσσηται πάσης ἀποστάσεως μετρουμένης κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Θ φορὰν τὸ σημεῖον +, πάσης δὲ μετρουμένης κατὰ τὴν ἀντίθετον ταύτης φορὰν τὸ —. Οὕτω τὸ μὲν Α ἀπέχει τοῦ Ο ἀπόστασιν (+ 3), τὸ Β ἀπέχει (+ 5), τὸ Α' ἀπέχει (—3)· ὁμοίως ἡ ἀπόστασις ΑΒ παρίσταται ὑπὸ τοῦ (+ 2), ἐν ᾧ ἡ ΒΑ ὑπὸ τοῦ (—2). Κατὰ ταῦτα ἀντὶ νὰ εἴπωμεν τὸ σημεῖον Α ἀπέχει τοῦ Ο τρεῖς μονάδος μήκους καὶ κεῖται, πρὸς ὃ μέρος τοῦ Ο κεῖται καὶ τὸ Θ, ἀρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ Α ἀπέχει τοῦ Ο κατὰ (+ 3) μονάδας μήκους.

Ἡ χρῆσις τῶν σημείων + καὶ — δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς ἀριθμοὺς παριστῶντας ποσὰ διάφορα τῶν προηγουμένων. Οὕτω π.χ. πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος παριστᾷ τὸ κέρδος ἐμπόρου θέτομεν τὸ +, πρὸ δὲ τοῦ παριστῶντος ζημίαν θέτομεν τὸ — καὶ καλοῦμεν ἀμφότερα τὰ ἐμπορικὰ ταῦτα ἀποτελέσματα διὰ τῆς αὐτῆς λέξεως. Ἀντὶ π. χ. νὰ εἴπωμεν ὅτι ἔμπορός τις ἐζημιώθη 15,60 δραχμὰς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἐκέρδισεν (— 15, 60) δραχμάς.

Ὁμοίως πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος παριστᾷ περιουσίαν θέτομεν τὸ +. πρὸ δὲ τοῦ παριστῶντος χρέος τὸ — καὶ ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι χρεωστεῖ τις 2000 δραχμὰς λέγομεν ὅτι ἔχει περιουσίαν (—2000) δραχμῶν. Πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος μέλλοντα χρόνον θέτομεν τὸ +, πρὸ δὲ τοῦ δηλοῦντος παρελθόντα τὸ — καὶ λέγομεν π. χ. ὅτι γεγονός τι θὰ γείνῃ μετὰ (—2) ἔτη ἀπὸ σήμερον, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι τοῦτο ἔγεινε πρὸ 2 ἐτῶν.

Οὕτω παρουσιάζονται ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ τὰ αὐτὰ καὶ οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοὶ ἀριθμοὶ ψηφία, φέρει ὅμως ἕκαστος τούτων ὡς μέρος αὐτοῦ ἀναπόσπαστον ἓν τῶν σημείων + ἢ —.

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ καλοῦνται ***ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί***.

Ἐκ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ὅσοι μὲν ἔχουσι, τὸ + καλοῦνται ***θετικοὶ*** ἀριθμοί, ὅσοι δὲ ἔχουσι τὸ — καλοῦνται ***ἀρνητικοὶ*** ἀριθμοί. Ἰδιαιτέρως ὁ ἀριθμὸς (—1) καλεῖται ἀρνητικὴ ἀκεραία μονάς, ὁ δὲ (+1) θετικὴ ἀκεραία μονάς. Αἱ $\left(-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{4}\right), \ldots$ καλοῦνται ***ἀρνητικαὶ κλασματικαὶ μονάδες***, αἱ δὲ $\left(+\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{3}\right), \ldots$ ***θετικαὶ κλασματικαὶ μονάδες***.

Ἐπὶ τοῦ παρόντος ἕκαστον ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν θὰ κλείωμεν εἰς παρένθεσιν, ἵνα τὸ μὲν μὴ γίνηται σύγχυσις τῶν σημείων + καὶ — πρὸς τὰ τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ὅμοια σημεῖα, τὸ δὲ ὅπως ἐξοικειωθῶμεν πρὸς τὴν ἀληθῆ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἔννοιαν, καθ' ἣν τὰ σημεῖα εἶναι ἀναποσπάστως μετ' αὐτῶν συνδεδεμένα καὶ ἀποτελοῦσι μέρος αὐτῶν.

ΣΗΜ. Παρατηροῦντες ὅτι περιουσία (+160) δραχμῶν εἶναι πράγματι περιουσία 160 δραχμῶν, κέρδος (+70) δραχμῶν εἶναι πραγματικὸν κέρδος 70 δραχμῶν κ.τ.λ κατανοοῦμεν ὅτι θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι κατ' οὐσίαν αὐτοὶ οἱ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς γνωστοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι οὐδὲν φέρουσι πρὸ αὐτῶν σημεῖον Διὰ τοῦτο πολλάκις τὸ πρὸ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν σημεῖον + παραλείπεται, ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει οὗτοι δὲν τίθενται ἐντὸς παρενθέσεως. Οὕτως ὁ (+5) γράφεται καὶ ἁπλῶς 5, ὁ $\left(+\frac{3}{4}\right)$ καὶ $\frac{3}{4}$ κ.τ.λ.—

§ 4. **Ὁμόσημοι καὶ ἑτερόσημοι ἀριθμοί.—Ἀπόλυτος τιμὴ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.—Ἀντίθετοι καὶ ἴσοι ἀριθμοί.** Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ὁμόσημοι*** ἢ ***ἑτερόσημοι***, καθ' ὅσον ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἢ διάφορα σημεῖα. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ (—3), $\left(-\frac{5}{8}\right)$ εἶναι ὁμόσημοι, οἱ δὲ (+5,15), (—0,75), εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἀπόλυτος τιμὴ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἐξ αὐτοῦ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ σημείου προκύπτων ἀριθμός. Οὕτως ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ (+5) εἶναι ὁ 5, τοῦ δὲ $\left(-\frac{5}{6}\right)$ ὁ $\frac{5}{6}$.

Τὴν ἀπόλῦτον τιμὴν ἀριθμοῦ α σημειοῦμεν οὕτω $|\alpha|$. Π. χ. $|-3|$ σημαίνει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ (-3), ἤτοι $|-3|=3$· Ὁμοίως $|+5|=5$, $|-0{,}25|=0{,}25$ κ.τ.λ.

Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀντίθετοι***, ἐὰν εἶναι ἑτερόσημοι καὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν. Τοιοῦτοι π. χ. εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $(+7)$ καὶ (-7), $\left(+\frac{9}{10}\right)$ καὶ $\left(-\frac{9}{10}\right)$ κ. τ. λ.

Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἴσοι***, ἐὰν ἔχωσι τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ $\left(-\frac{1}{2}\right)$ καὶ $\left(-\frac{2}{4}\right)$ εἶναι ἴσοι, διότ' ἀμφότεροι εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ ἔχουσι καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν $\left(\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\right)$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ἀμέσως ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς ἡ ἀκόλουθος ἰδιότης.

«Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι».

§ 5. **Ἄνισοι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί.**—***Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ἂν δὲν εἶναι ἴσοι***· Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ $(+7)$ καὶ (-8), οἱ $\left(+\frac{2}{6}\right)$ καὶ (-6), οἱ (-5) καὶ (-9) κ.τ.λ. εἶναι ἄνισοι.

Παρατηροῦντες ὅτι περιουσία $(+17)$ δραχμῶν εἶναι ἀνωτέρα περιουσίας $(+10)$ δραχμῶν, κέρδος $(+25)$ δραχμῶν εἶναι ἀνώτερον κέρδους $(+8)$ δραχμῶν, κ.τ.λ. συμπεραίνομεν ὅτι

$$(+17)>(+10),\ (+25)>(+8),$$ ἤτοι:

α΄) ***Ἐὰν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

Ὁμοίως παρατηροῦντες ὅτι ὁ ἔχων περιουσίαν $(+24)$ δραχμῶν εἶναι εἰς καλυτέραν οἰκονομικὴν κατάστασιν ἐκείνου, ὅστις οὐδεμίαν ἔχει περιουσίαν καὶ μηδὲν ὀφείλει, σῶμα θερμοκρασίας $(+10^{0})$ εἶναι θερμότερον σώματος ἔχοντος θερμοκρασίαν 0^{0} κ.τ.λ. συμπεραίνομεν ὅτι $(+24)>0$, $(+10)>0$ κ.τ.λ., ἤτοι:

β΄) ***Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενός.***

Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς εἶναι προτιμότερον νὰ μὴ κερδίσῃ τίποτε παρὰ νὰ κερδίσῃ (-7) δραχμάς, σῶμα ἔχον θερμοκρασίαν $(-8{,}5^{0})$ εἶναι ψυχρότερον σώματος ἔχοντος θερμοκρασίαν 0^{0} κ.τ.λ. συμπεραίνομεν ὅτι $0>(-7)$, $0>(-8,5)$ κ.τ.λ., ἤτοι:

γ΄. *Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός.*

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον συμπεραίνομεν ὅτι

$(-3) > (-9), \left(-\frac{5}{8}\right) > (-10{,}7), (-106{,}5) > (-300)$ κ.τ.λ., ἤτοι:

δ΄) ***Ἐὰν δύο ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἔχει τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

Κατὰ ταῦτα οἱ ἀρνητικοὶ καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ χωριζόμενοι ὑπὸ τοῦ μηδενὸς ἀποτελοῦσιν ἀπέραντον σειράν, ἐν τῇ ὁποίᾳ οἱ ἀριθμοὶ βαίνουσιν αὐξανόμενοι κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μηδενὸς πρὸς τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς φορὰν καὶ ἐλαττούμενοι κατὰ τὴν ἀντίθετον ταύτης φοράν, ὡς εὐκόλως φαίνεται ἐν τῇ ἀκολούθῳ σειρᾷ.

$$\ldots\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 \ldots\ldots$$

εἰς τὴν ὁποίαν χάριν εὐκολίας ἀκέραιοι μόνον ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ἀνεγράφησαν.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α΄ Πρόσθεσις.

Πρόσθεσις ὁμοσήμων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

§ **6. Πρόβλημα Ι.** *Ὁδοιπόρος ἀναχωρήσας ἀπὸ ὡρισμένου σημείου Ο εὐθείας* x΄x *(Σχ 1) διήνυσεν ἐπὶ ταύτης τὴν μὲν πρώτην ἡμέραν (+ 30) χιλ. τὴν δευτέραν (+ 25) χιλ τὴν τρίτην (+ 18) χιλ. καὶ τὴν τετάρτην (+ 15) χιλ.* ***Εἰς πόσην ἀπόστασιν εὑρίσκεται ἤδη ἀπὸ τοῦ Ο;***

Λύσις Ἡ ἀπόστασις αὕτη ἐκφράζεται εἰς χιλιόμετρα διὰ τοῦ ἀθροίσματος $(+30)+(+25)+(+18)+(+15)$. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν α΄ ἡμέραν ἀπεμακρύνθη τοῦ Ο κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Θ φορὰν κατὰ 30 χιλ. τὴν δευτέραν κατ' ἄλλα 25, τὴν τρίτην κατ' ἄλλα 18 καὶ τὴν δ΄ κατ' ἄλλα 15 χιλιόμετρα ἄρα ἀπεμακρύνθη ἐκ τοῦ Ο κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν φορὰν κατὰ $30+25+18+15=88$ χιλ., ἤτοι ἀπέχει ἤδη τοῦ Ο κατὰ $(+88)$ χιλιόμετρα. Ὥστε $(30)+(+25)+(+18)+(+15)=(+88)$

§ **7. Πρόβλημα ΙΙ.** *Ἔμπορός τις ἐκέρδισεν ἡμέραν τινὰ (−150) δραχμάς, τὴν ἑπομένην ἐκέρδισεν ἄλλας (−120) δραχμὰς καὶ τὴν τρίτην ἄλλας (−80) δραχμάς.* ***Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε καὶ τὰς τρεῖς ταύτας ἡμέρας ;***

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰ τρία ταῦτα κέρδη, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $(-150)+(-120)+(-80)$. Πρὸς εὕρεσιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι κέρδος (-150) δραχμῶν εἶναι κυρίως ζημία 150 δραχμῶν κ.τ.λ. Ὁ ἔμπορος οὗτος ἄρα ἐζημιώθη 150+120+80=350 δραχμάς. Ἐπειδὴ δὲ ζημία 350 δραχμῶν εἶναι κέρδος (—350) δραχμῶν συμπεραίνομεν ὅτι

$$(-150)+(-120)+(-80)=(-350).$$

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων ἐξάγεται εὐκόλως ὁ ἀκόλουθος κανών·

Κανών. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμοσήμους ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους αὐτῶν τιμὰς καὶ πρὸ τοῦ ἀθροίσματος θέτομεν τὸ σημεῖον τῶν προσθετέων.***

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον $(+1)+(+1)+(+1)=(+3)$,

$(-1)+(-1)=(-2)$, $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)$, ἤτοι:

Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα θετικῶν μονάδων, πᾶς δὲ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα ἀρνητικῶν μονάδων.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα.

1) $(+7)+(+3)+(+5)$,

2) $(-5)+(-8)+(-6)+(-1)$.

3) $(-12)+(-23+(-146)$.

4) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$.

5) $\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{4}{8}\right)$.

6) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$.

7) $(-5,35)+(-1,65)+(-2,40)$,

8) $\left(+3\frac{1}{5}\right)+(+7)\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(6\frac{2}{5}\right)$.

9) $\left(-2\frac{1}{8}\right)+\left(-6\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{12}\right)$.

10) $\left(-\frac{3}{4}\right)+(-2,75)+\left(-1\frac{4}{5}\right)+(-8,35)+\left(-\frac{5}{8}\right)$.

Πρόσθεσις δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν.

§ **8. Πρόβλημα I.**—*Ἐκέρδισέ τις (+8) δραχμὰς καὶ ἔπειτα ἄλλας (—8) δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε τὸ ὅλον ;*

Λύσις. Τὸ ὁλικὸν κέρδος εἶναι προφανῶς $(+8)+(-8)$δραχμαί. Ἐπειδὴ δὲ κέρδος (—8) δραχμῶν εἶναι πραγματικῶς ζημία 8 δραχμῶν, ἕπεται ὅτι αἱ κερδιθεῖσαι 8 δραχμαὶ ἐχάθησαν βραδύτερον, ἤτοι ὁ ἔμπορος οὔτε ἐκέρδισεν, οὔτε ἔχασέ τι· εἶναι ἄρα $(+8)+(-8)=0$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $(+15)+(-15)=0$, $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=0$, $(+5{,}45)+(-5{,}45)=0$ κ.τ.λ.

Ἄρα: ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν.***

§ **9. Πρόβλημα ΙΙ.** ***Ἔχει τις κτηματικὴν περιουσίαν ἀξίας (+3492) δραχμῶν καὶ ἄλλην περιουσίαν (— 1947) δραχμῶν. Πόσην περιουσίαν ἔχει τὸ ὅλον;***

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ὁλικὴ αὐτοῦ περιουσία ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἀθροίσματος $(+3492)+(-1947)$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι περιουσία (—1947) δραχμῶν εἶναι χρέος 1947 δραχμῶν, ἄρα οὗτος ἔχει πραγματικὴν περιουσίαν $3492-1947 =1545$ δραχμῶν ἢ (+1545) δραχμῶν.

Ἄρα $(+3492)+(-1947)=(+1545)$.

§ **10. Πρόβλημα ΙΙΙ.** ***Ταμίας εἰσέπραξε μέχρι τῆς μεσημβρίας ἡμέρας τινὸς (+15647) δραχμάς, μετὰ μεσημβρίαν δὲ ἑτέρας (—17965). Πόσον ηὐξήθη τὸ εἰς τὸ ταμεῖόν του ἀρχικὸν ποσόν ;***

Λύσις. Προφανῶς τὸ ζητούμενον παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος $(+15647)+(-17965)$. Πρὸς εὕρεσιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι εἴσπραξις (—17965) δραχμῶν σημαίνει πληρωμὴν 17965 δραχμῶν· ἐπειδὴ δὲ τὸ κατὰ τὴν ἡμέραν ἐκείνην εἰσπραχθὲν ποσὸν τῶν 15647 δραχμῶν δὲν ἐπαρκεῖ διὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ ῥηθέντος ποσοῦ, ἕπεται ὅτι ὁ ταμίας ἐπλήρωσε καὶ ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ $17965-15647=2318$ δραχμάς. Ἠλαττώθη ἄρα τὸ ἀρχικὸν ποσὸν κατὰ 2318 δραχμάς. Ἐπειδὴ δὲ ἐλάττωσις κατὰ 2318 δραχμὰς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς αὔξησις κατὰ (-2318) δραχμάς, ἕπεται ὅτι

$$(+15647)+(-17965=(-2318).$$

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων ἐξάγεται ὁ ἀκόλουθος κανών.

Κανών. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἑτεροσήμους ἀριθμοὺς ἔχοντας διάφορον ἀπόλυτον τιμήν, ἀφαιροῦμεν τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμὴν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν καὶ πρὸ τοῦ ἐξαγομένου θέτομεν τὸ σημεῖον τοῦ προσθετέου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.***

Ἀσκήσεις Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα. 11) $(-5)+(+4)$.
12) $(+12)+(-7)$.
13) $(+467)+(-571)$.

14) $\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)$.

15) $\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$.

16) $\left(+1\frac{1}{8}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)$.

17) $(-10{,}75)+(+12{,}25)$.

18) $(-9{,}35)+(+0{,}75)$.

19) $\left(+6{,}35\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

20) $\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(+0{,}35\right)$.

21) $\left(-2\frac{1}{5}\right)+\left(+3{,}75\right)$.

22) $\left(+6\frac{3}{4}\right)+\left(-3{,}16\right)$.

23) $\left(-0{,}618\right)+\left(+2\frac{1}{8}\right)$.

24) Ἔχων τις περιουσίαν (—2465) δραχμῶν ἐκληρονόμησεν ἄλλας (+3465) δραχμάς. Πόση περιουσίαν ἔχει ἤδη ;

25) Ὁδοιπόρος ἀναχωρήσας ἀπὸ σημείου Α ὁδοῦ διήνυσε τὴν πρώτην ἡμέραν (+8,35) χιλιόμετρα, τὴν δὲ δευτέραν (—3,75) χιλιόμ. Πόσον ἀπέχει ἤδη ἀπὸ τοῦ Α ;

Πρόσθεσις οἱωνδήποτε καὶ ὁσωνδήποτε ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 11. Πρόβλημα I.—*Ἔμπορός τις ἐκέρδισε μίαν ἡμέραν (+1450) δραχμάς, τὴν ἄλλην (—890) δραχμάς, τὴν ἐπομένην (+500) δραχμ. καὶ τὴν μεθεπομένην (—675) δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε τὸ ὅλον ;*

Λύσις. Προφανῶς τὸ ὁλικὸν αὐτοῦ κέρδος παρίσταται διὰ τοῦ ἀθροίσματος (+1450)+(—890)+(+500)+(—675). Τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ τοὺς ἀκολούθους δύο τρόπους.

Α΄. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰς δύο πρώτας ἡμέρας ἐκέρδισε

$$(+1450)+(-890)=(+560) \text{ δραχμάς.}$$

Εἰς τὸ κέρδος δὲ τοῦτο πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ τὸ κέρδος τῆς γ΄ ἡμέρας· οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὰς τρεῖς ἡμέρας ἐκέρδισεν (+560) + (+500) = (+1060) δραχμάς. Ἐὰν ἤδη εἰς τὸ κέρδος τοῦτο προστεθῇ τὸ κέρδος τῆς τετάρτης ἡμέρας, θὰ εὑρεθῇ τὸ ζητούμενον ὁλικὸν κέρδος, ἤτοι τοῦτο εἶναι

$$(+1060)+(-675)=(+385) \text{ δραχμάς.}$$

Β΄. Κατὰ τὴν πρώτην καὶ τρίτην ἡμέραν ἐκέρδισε πράγματι

1450+500=1950 δραχμάς· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν καὶ τὴν τετάρτην ἔχασεν 890+675=1565 δραχμάς.

Ἄρα κατὰ τὰς 4 ἡμέρας ἐκέρδισε 1950—1565=385 δραχμάς. Εἶναι λοιπὸν (+1450)+(—890)+(+500)+(—675)=(+385).

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἀκόλουθος κανών.

Κανών. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε καὶ οἱουσδήποτε ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους, εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὸν τρίτον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ προσθετέοι. Ἢ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικοὺς προσθετέους καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.***

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα.

26) (—12) + (+7) + (+4) + (—15).

27) (+37) + (—142) + (+165) + (—39) + (—200).

28) $\left(+\frac{3}{12}\right)+\left(-\frac{1}{12}\right)+\left(+\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{7}{12}\right)$.

29) $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{7}{20}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

30) (—1,50) + (—0,7) + (+2,1).

31) $\left(-5\frac{1}{4}\right)+\left(-0{,}35\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-2\frac{1}{8}\right)$.

32) $\left(-1\frac{2}{3}\right)+\left(-2\frac{1}{6}\right)+\left(-4\frac{7}{12}\right)+\left(+5\frac{1}{4}\right)+\left(-7\frac{5}{24}\right)$.

33) $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(+1\frac{1}{4}\right)+\left(-0{,}50\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)+\left(-2{,}35\right)$.

34) Ἡ θερμοκρασία ἀσθενοῦς ἦτο τὴν 8ην ὥραν π.μ. (+37°,8)°. Μετὰ 2 ὥρας ηὐξήθη κατὰ (+0,6)°, μετὰ ἄλλας 4 ὥρας ηὐξήθη κατὰ (—0,8)° καὶ μετὰ 2 ἄλλας ὥρας ηὐξήθη κατὰ (+1,2)°. Πόση ἦτο ἡ θερμοκρασία κατὰ τὸ τέλος τῶν 2 τελευταίων ὡρῶν;

§ **12. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.**—Παρατηροῦντες ὅτι:

α΄) (—7)+(—10)+(—18)+(—45)=—(7+10+18+45)

(—18)+(—7)+(—45)+(—10)=—(18+7+45+10) καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι 7+10+18+45=18+7+45+10 συμπεραίνομεν ὅτι

(—7)+(—10)+(—18)+(—45)=(—18)+(—7)+(—45)+(—10).

β΄) (—72) + (+30) = —(72 — 30) = —42 καὶ

(+30)+(—72)=—(72—30) = —42 ἕπεται ὅτι

(—72)+(+30)=(+30)+(—72).

γ΄. (+10) + (—23) + (—60) + (+40) + (+75) =

[(+10) + (+40) + (+75)] + [(—23) + (—60)] καὶ

$(-60)+(+40)+(+10)+(+75)+(-23)=[(+40)+(+10)+75)]+$
$[(-60)+(-23)]$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα, συμπεραίνομεν ὅτι

$$(+10)+(-23)+(-60)+(+40)+(+75)=$$
$$(-60)+(+40)+(+10)+(75)+(-23).$$

Ἄρα: ***Τὸ ἄθροισμα ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.***

Ἀληθευούσης τῆς ἰδιότητος ταύτης καὶ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, αἱ ὁποῖαι ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσιν, ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται, ὡς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ.

Οὕτω π. χ. $(+7)+(-3)+(-12)+(+9)=(+7+(+6)+(-12)$.

$[(-13)+(+40)+(35)]+(-7)=(-20)+(+40)+(-35)$.

$[(-2)+(+7)]+[(+15)+(-12)+(-19)]$
$=(-2)+(+7)+(+15)+(-12)+(-19)$.

Ἀσκήσεις. 35) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(-3)+(+7)+(-4)=0$.

36) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $[(+20)+(-15)+(-35)]+(+15)=(-15)$.

37) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $[(-8)+(+12)]+[(+8)+(-12)]=0$.

38) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι
$[(+15)+(-7)+(-3)]+[(+25)+(+7)+(-2)]=(+35)$.

Β'. Ἀφαίρεσις.

§ 13. Ἀφαίρεσις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $(+35)-(+40)$. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν x τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $x+(+40)=(+35)$.

Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης προστεθῇ ὁ (-40), προκύπτει ἡ ἰσότης $[x+(+40)]+(-40)=(+35)+(-40)$ ἢ

$$x=(+35)+(-40).$$

Ὥστε: $(+35)-(+40)=(+35)+(-40)$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(-25)-(-10)=(-25)+(+10)$ καὶ γενικῶς $\alpha-6=\alpha+(-6)$.

Ἄρα: ***Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.***

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι διαφοραί:

39) $(+15)-(+32)$.

40) $(-47)-(+20)$.

41) $(-53)-(-10)$.

42) $\left(+\frac{5}{8}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)$

43) $\left(+\frac{9}{16}\right)-\left(+\frac{12}{16}\right)$

44) $\left(-\frac{17}{20}\right)-\left(-\frac{9}{10}\right)$.

45) $(+6{,}15)-(-3{,}45)$.

46) $(0{,}60)-(+1{,}75)$.

47) $\left(+5\frac{1}{4}\right)-\left(+8\frac{2}{5}\right)$.

48) $\left(+6{,}35\right)-\left(+7\frac{3}{4}\right)$.

§ **14. Συγχώνευσις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως.**—Ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ συνάγεται ὅτι ἡ ἀφαίρεσις τοῦ β ἀπὸ τοῦ α καὶ ἡ πρόσθεσις τοῦ $(-\beta)$ εἰς τὸν α ἄγουσιν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ἡ πρόσθεσις ἄρα καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι κυρίως μία πρᾶξις, ἡ δὲ παράστασις $\alpha-\beta$ δύναται ἀδιαφόρως νὰ θεωρῆται εἴτε ὡς διαφορά, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν β ἀπὸ τοῦ α, εἴτε ὡς ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α καὶ $(-\beta)$. Κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην ἐκδοχὴν νοεῖται χάριν συντομίας παραλειφθὲν τὸ μεταξὺ τῶν προσθετέων α καὶ $(-\beta)$ τιθέμενον σημεῖον $+$ τῆς προσθέσεως, ὁ δὲ προσθετέος $(-\beta)$ γράφεται ἄνευ παρενθέσεων. Οὕτω προῆλθεν ὁ ἀκόλουθος σύντομος τρόπος παραστάσεως τοῦ ἀθροίσματος ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Γράφομεν πάντας τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα δεξιὰ τοῦ ἄλλου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, ἕκαστον δὲ μετὰ τοῦ σημείου του καὶ ἄνευ παρενθέσεως. Οὕτω $-3-9+8-12$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $(-3),(-6),(+8),(-12)$· ὁμοίως $+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{12}-6$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

$$\left(+\frac{3}{4}\right),\ \left(-\frac{5}{8}\right),\ \left(+\frac{7}{12}\right),\ (-6).$$

ΣΗΜ. Τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου προσθετέου παραλείπεται συνήθως, ἂν οὗτος εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Οὕτω τὸ β´ τῶν προηγουμένων ἀθροισμάτων γράφεται συνήθως οὕτω $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{12}-6$.

§ **15. Ἀντίθετα ἀθροίσματα.— Ἀφαίρεσις ἀθροίσματος.**— Ἐμάθομεν (§ 8) ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ἔχουσιν ἄθροισμα μηδέν, ἤτοι ὅτι $\alpha+\beta=0$. Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης προστεθῇ ὁ $(-\beta)$, προκύπτει ἡ ἰσότης $\alpha=(-\beta)$, ἐξ ἧς καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ α εἶναι ἀντίθετος τοῦ β.

Ἄρα : ***Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι μηδέν, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἀντίθετοι.***

Ἔστω ἤδη τὸ ἄθροισμα $\alpha-\beta+\gamma-\delta$· ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν προσθετέων αὐτῶν προκύπτει τὸ ἄθροισμα $-\alpha+\beta-\gamma+\delta$.

Ἐπειδὴ δὲ $(\alpha-\beta+\gamma-\delta)+(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)=$
$\alpha-\beta+\gamma-\delta-\alpha+\beta-\gamma+\delta=(\alpha-\alpha)+(\beta-\beta)+(\gamma-\gamma)+(\delta-\delta)=0$,
ἕπεται ὅτι τὰ ῥηθέντα ἀθροίσματα εἶναι ἀντίθετα.

Ἄρα : ***Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἀντίθετον ἀθροίσματος, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν προσθετέων αὐτοῦ.***

Ἔχοντες ἤδη ὑπ' ὄψιν τὸν κανόνα (§ 13), καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου καὶ τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως κατανοοῦμεν ὅτι

$160-(-5-9+7-6)=160+(+5+9-7+6)=160+5+9-7+6$,
$(2-3+7)-(-12+9+20-1)=(2-3+7)+(12-9-20+1)=$
$2-3+7+12-9-20+1$ καὶ γενικῶς :
$A-(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A+(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)=A-\alpha+\beta-\gamma+\delta$.

Ἄρα: *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ μειωτέου ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος καὶ ἕκαστον μὲ ἀντίθετον σημεῖον.*

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις.

49) $(7-3)-(12-5)$.

50) $(12-9)-(-5+23)+(29-4)-(65-83)$.

51) $\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{9}-\frac{7}{18}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{2}{3}\right)$.

52) $(-45+40-67)-(-36+27-13)+(8-20)$.

53) $\left(\frac{7}{15}+\frac{1}{5}-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{3}{5}-\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\right)$.

54) $(0{,}65-3{,}15)-(2{,}35-4{,}25-7{,}50)+(1{,}15-9{,}40)-\left(0{,}45+5\frac{1}{4}-3\frac{3}{8}\right)$.

55) $\left(5-\frac{2}{5}\right)-\left(-3+\frac{1}{10}-\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right)$.

§ 16. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.— Αἱ ὑπὸ τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς διδασκόμεναι ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως ἰσχύουσι καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς. Οὕτως, ἂν α, β, γ, δ εἶναι τυχόντες ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος $\gamma-\gamma=0$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\alpha-\beta=\alpha-\beta+\gamma-\gamma$· ἐπειδὴ δὲ καὶ

$(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha+\gamma-\beta-\gamma=\alpha-\beta+\gamma-\gamma$ ἕπεται ὅτι

$\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$.

Ὁμοίως $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma$, διότι ὁ ἀριθμὸς $(-\delta)$ προστίθεται εἰς τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta+\gamma)$, ἂν προστεθῇ εἰς ἕνα τῶν προσθετέων.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως (ὅρα Θ. Ἀριθμητικήν μου Σελ. 25).

Ἀσκήσεις. 56) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $43-(64-12)=(43+12)-64$.

57) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(-67+47-12)-(-12)=(-67+47)$.

58) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $-60-(17-23)=(-60+23)-(+17)$.

59) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(-40+23-95)-(-56+23)=(-40-95)-(-56)$.

Γ΄. Πολλαπλασιασμός.

§ **17. Πρόβλημα Ι.**—*Ἐάν τις κερδίζῃ καθ' ἑκάστην (—8) δραχμάς, πόσον κέρδος θὰ ἔχῃ μετὰ 3 ἡμέρας;*

Λύσις. Προφανῶς τὸ ζητούμενον κέρδος θὰ εἶναι $(-8)\times 3$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

1ον) Ἐπειδὴ κέρδος (—8) δραχμῶν εἶναι πράγματι ζημία 8 δραχμῶν, ἕπεται ὅτι μετὰ 3 ἡμέρας θὰ ζημιωθῇ $8\times 3=24$ δραχμάς· ἐπειδὴ δὲ ζημία 24 δραχμῶν δύναται νὰ ὀνομασθῇ καὶ κέρδος (—24) δραχμῶν, ἕπεται ὅτι $(-8)\times 3=-24$.

2ον) Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$(-8)\times 3=-8-8-8=-(8+8+8)=-24.$$

§ **18. Πρόβλημα ΙΙ.**—*Ἐάν τις κερδίζῃ καθ' ἑκάστην ἡμέραν (—20) δραχμάς, πόσα χρήματα θὰ ἔχῃ μετὰ 5 ἡμέρας περισσότερα τῶν ὅσων ἔχει σήμερον καὶ πόσα μετὰ (—3) ἡμέρας;*

Λύσις. α΄) Τὸ ζητούμενον ποσὸν θὰ εἶναι προφανῶς $(-20)\times 5$. Ἐπειδὴ τὸ κέρδος — 20 δραχμῶν, εἶναι ζημία 20 δραχμῶν ἕπεται ὅτι μετὰ 5 ἡμέρας θὰ ζημιωθῇ κατὰ $20\times 5=100$ δραχμὰς, ἤτοι θὰ κερδίσῃ (—100) δραχμάς· ἄρα $(-20)\times 5=-100$.

β΄) Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ ζητούμενον παριστῶμεν διὰ τοῦ γινομένου $(-20)\times(-3)$. Πρὸς εὕρεσιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ζητούμενον ποσὸν εἶναι ἐκεῖνο, καθ' ὃ πρὸ τριῶν ἡμερῶν τὰ χρήματά του ὑπερέβαινον τὰ σημερινά του χρήματα. Ἐπειδὴ δὲ καθ' ἑκάστην τῶν τριῶν τούτων προηγηθεισῶν ἡμερῶν ἐζημιοῦτο κατὰ 20 δραχμάς, εἰς τὰς 3 ἡμέρας ἐζημιώθη κατὰ $20\times 3=60$ δραχμὰς, τὰς ὁποίας πρὸ τριῶν ἡμερῶν εἶχε μετὰ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα σήμερον ἔχει. Ὥστε πρὸ τριῶν ἡμερῶν εἶχε ἢ μετὰ (—3) ἡμέρας θὰ ἔχῃ περισσό τερα τῶν σημερινῶν χρημάτων του κατὰ 60 δραχμάς. Ἄρα $(-20)\times(-3)=+60$. Ἐὰν τὸ ἡμερήσιον κέρδος ἦτο $(+20)$ δραχμαί, ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι πρὸ τριῶν ἡμερῶν εἶχε, ἢ μετὰ (-3) ἡμέρας θὰ ἔχῃ περισσότερα τῶν ὅσων σήμερον ἔχει κατὰ (-60) δραχμάς, ἤτοι $(+20)\times(-3)=-60$. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τούτων ἐξάγεται ὁ ἀκόλουθος κανών.

Κανών: ***Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων αὐτῶν τιμῶν, καὶ πρὸ αὐτοῦ νὰ θέσωμεν τὸ $+$ μὲν, ἂν οὗτοι εἶναι ὁμόσημοι, τὸ $-$ δὲ ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.***

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι:

α') ***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἀντιθέτου του ἐπὶ -1.***

Π.χ. $-27=(+27)\times(-1)$, $\left(-\frac{5}{8}\right)=\left(+\frac{5}{8}\right)\times(-1)$.

β') ***Τὸ γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος ἐφ' ἑαυτὴν ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι,*** ἤτοι $(-1).(-1)=+1$.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα:

60) $4.(-3)$.

61) $(-6).(-15)$.

62) $42.(-5)$.

63) $\left(-\frac{2}{9}\right).\frac{3}{2}$.

64) $\left(+\frac{2}{5}\right).\left(-\frac{3}{7}\right)$.

65) $6,25.(-3,40)$.

66) $(-7,8).\frac{3}{4}$.

67) $(-9).\left(-\frac{4}{9}\right)$.

68) $5\frac{3}{4}.\left(-\frac{4}{5}\right)$.

69) $\left(-\frac{9}{7}\right).\left(-\frac{14}{27}\right)$.

70) $(-0,85).(-3,15)$.

71) $\left(-\frac{2}{7}\right).\left(-3\frac{1}{14}\right)$.

72) $\left(-4\frac{1}{2}\right).\left(-1\frac{2}{9}\right)$.

§ **19. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.** Ἐπειδὴ $(-5).(-7)=+(5.7)$ καὶ $(-7).(-5)=+(7.5)$ παρατηροῦντες ὅτι $5.7=7.5$ συμπεραίνομεν ὅτι $(-5).(-7)=(-7).(-5)$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $\left(-\frac{3}{4}\right)(+7)=(+7).\left(-\frac{3}{4}\right)$ καὶ γενικῶς α. β=β. α, ἔνθα α καὶβ εἶναι τυχόντες ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί. Ἰσχύει λοιπὸν καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἰσχύουσι καὶ αἱ ἄλλαι ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαι ἰδιότητες αὐτοῦ. Οὕτως

$(6-9+12).(+3)=(+6).(+3)+(-9).(+3)+(+12).(+3)=18-27+36,$

$-5).(7-3+6)=(-5).7+(-5).(-3)+(-5).(+6)=-35+15-30$

κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 73). $\left(-4+12+\frac{4}{5}\right).5=\left(-20+60+4\right)$.

74) $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)\left(-20\right)=\left(-8+15\right)$.

75) $\left(-9+12\right).\left(-\frac{1}{9}+\frac{5}{3}\right)=6-\frac{4}{3}$

§ **20. Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.** ***Γινόμενον πολλῶν παραγόντων καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ παράγοντες.***

Οὕτω π. χ. τὸ γινόμενον (—5). (+3). (—2) εὑρίσκεται, ἂν το γινόμενον (— 5). (+3) = —15 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ (— 2), ἤτοι (—5). (+3). (—2)=+30. Τὸ δὲ γινόμενον 2. (—3). (—10).4.(—7) εὑρίσκεται, ἂν τὸ γινόμενον 2.(—3)= —6 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ (—10) καὶ τὸ γινόμενον (—6).(—10)=60 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, καὶ τὸ γινόμενον 4×60=240 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ (—7). Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι 2. (—3). (—10). 4. (—7)= —1680.

Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ὁ ἀκόλουθος κανών.

Κανών. ***Ἵνα σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν δεδομένων παραγόντων, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων αὐτῶν τιμῶν καὶ θέτομεν πρὸ τοῦ γινομένου τὸ + μέν, ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον, τὸ — δέ, ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι περιττόν.***

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα : 76) α') (+6). (—2). (—4) β') (+2) (—3). (+10).

77) α') (—5). (—4). (+3). (—6). β') (—12). (—10). (+3). (—1).

78) α') $\left(+\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{5}{6}\right).\left(+\frac{9}{10}\right)$, β' $\left(-\frac{1}{4}\right).\left(+\frac{5}{6}\right)$.

79) $\left(-\frac{3}{5}\right).\left(+5\right).\left(-\frac{1}{3}\right)$

80) $\left(-6\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{1}{2}\right)$.

81) $(-35).(-3).(+1{,}65)$.

82) $(-3{,}15).(+1{,}25).(0{,}65)$. β') $\left(-3\frac{1}{4}\right).(+2{,}15).\left(-\frac{3}{8}\right)$

§ 21. Ἰδιότητες γινομένου πολλῶν παραγόντων.

Ἐπειδὴ ἡ εὕρεσις γινομένου πολλῶν παραγόντων γίνεται κυρίως διὰ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀπολύτων αὐτῶν τιμῶν, ἕπεται εὐκόλως ὅτι :

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν.

Οὕτω $(-5).(+2).\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)(-5).(+2)$.

Κατ' ἀκολουθίαν καὶ αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν γινομένων αἱ ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσαι ἰσχύουσι καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς.

Οὕτω : $(-4).\left(+\frac{7}{9}\right).\left(-\frac{2}{3}\right)=\left[(-4).\left(-\frac{2}{3}\right)\right].\left(+\frac{7}{9}\right)$,

$\left(+\frac{1}{5}\right).(-8).\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(+\frac{1}{5}\right).(-2).(+4).\left(-\frac{3}{4}\right)$,

$\left[\left(+\frac{5}{8}\right).\left(-\frac{3}{4}\right).(-6)\right].\left(+\frac{4}{3}\right)=\left(+\frac{5}{8}\right).(-1).(-6)$

$\left[(-5).(+2).\left(-\frac{1}{5}\right)\right].\left[\left(-\frac{4}{7}\right).\left(+\frac{1}{2}\right)\right]=$

$(-5).(+2).\left(-\frac{1}{5}\right).\left(-\frac{4}{7}\right).\left(+\frac{1}{2}\right)$.

Ἀσκήσεις. 83) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\left(-\frac{2}{7}\right).(+3).\left(-\frac{7}{2}\right).\left(+\frac{1}{3}\right)=+1$.

84) Ὁμοίως ὅτι

$\left[(-2).\left(-\frac{4}{9}\right).\left(+\frac{1}{3}\right)\right]\left[\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{9}{4}\right).(+3)\right]=1.$

85) $\left[(+5).\left(-\frac{1}{12}\right).\left(-\frac{3}{5}\right)\right].(-12)=-3.$

ΣΗΜ. Γνωρίζομεν ὅτι $0.3=0$, $5.0=0$, $0.\frac{3}{4}=0$. Λέγω ὅτι $0.(-5)=0$.

Τῷ ὄντι· ἂν $0.(-5)=\gamma$, θὰ ἦτο καὶ $0.(-5).(-1)=-\gamma$ ἢ $0.5=-\gamma$ ἢ $0=-\gamma$, ὅπερ ἄτοπον, διότι τοῦ γ ὄντος διαφόρου τοῦ μηδενὸς καὶ ὁ $-\gamma$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ὁμοίως $5.(-3).0.(-7)=\left[5.(-3).(-7)\right].0=105.0=0$,

$\frac{3}{4}.0.(-6).0.(+1)=\left[\frac{3}{4}.(-6).(+1).0\right].0=\left(-\frac{18}{4}.0\right).0=0.0=0.$

καὶ γενικῶς $\alpha.0.\beta.\gamma=0$.

Ἤτοι : *Ἂν εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι μηδὲν καὶ τὸ γινόμενον εἶναι μηδέν.*

Δ'. Διαίρεσις.

§ **22. Διαίρεσις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ δι' ἄλλου.**— Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $(-20):(-4)$. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν x τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(-4).\,x=(-20)$. Ἂν δὲ πολ]σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ $\left(-\frac{1}{4}\right)$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$[(-4).\,x].\left(-\frac{1}{4}\right)=(-20).\left(-\frac{1}{4}\right)$, ὅθεν ἕπεται ὅτι

$$x=(-20)\left(-\frac{1}{4}\right)=+20\cdot\frac{1}{4}=+(20:4)=+5.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(-30):(+5)=-(30:5)=-6$,

$$+(24):\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(24:\frac{1}{3}\right)=(-72) \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἀκόλ υθος κανών.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν δι᾿ ἄλλου τοιούτου, διαιροῦμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου καὶ πρὸ τοῦ πηλίκου θέτομεν τὸ + ἢ — καθ᾿ ὅσον ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα πηλίκα.

86) $(+28):(+4)$.

87) $(-39):(-3)$.

88) $(+100):(-5)$.

89) $(+60):(-12)$, $(-45):(+3)$.

90) $(-32):(+8)$.

91) $\left(+\frac{2}{5}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)$.

92) $\left(-\frac{5}{8}\right):\left(-\frac{6}{9}\right)$.

93) $\left(+\frac{7}{9}\right):\left(-\frac{1}{9}\right)$.

94) $\left(-\frac{2}{5}\right):\left(+\frac{1}{2}\right)$.

95) $(-5):\left(-\frac{3}{6}\right)$, $(-8):\left(+\frac{8}{9}\right)$

96) $\left(-\frac{1}{2}\right):(+3)$.

97) $(-6):\left(+2\frac{1}{3}\right)$.

98) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-3\frac{1}{4}\right)$

99) $\left(-60\right):\left(+0{,}5\right)$

100) $\left(+0{,}35\right):\left(-0{,}7\right)$

101) $\left(-8\right):\left(\frac{8}{9}\right)$

102) $\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-4\right)$.

103) $\left(-5\right):\left(-5\frac{1}{2}\right)$.

104) $\left(-24\right):\left(-3{,}5\right)$

105) $\left(-105\frac{1}{2}\right):\left(-0{,}5\right)$.

§ **23. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.**— Ἐπειδὴ αἱ ὑπὸ τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς διδασκόμεναι ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως πηγάζουσιν ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, αἱ δὲ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰσχύουσι καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ἔπεται ὅτι καὶ αἱ τῆς διαιρέσεως ἰδιότητες ἰσχύουσι καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς. Οὕτω $(-6+8-12):(-2)=3-4+6$,

$$[(+15).(-12).(-4)]:(-6)=(+15).(+2).(-4) \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἀσκήσεις. 106) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $[(-3).(+7).(-8)]:(+7)=+24$.

107) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(-60):[(-5).(+4).]=(+12):(+4)$.

108) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left[\left(-\frac{2}{5}\right).\left(-\frac{3}{8}\right).\left(+\frac{7}{9}\right)\right]:\left[\left(+\frac{2}{5}\right)\left(+\frac{7}{9}\right)\right]=+\frac{3}{8}.$$

§ **24. Ἡ διὰ τοῦ μηδενὸς διαίρεσις.**— Ἐὰν εἶναι $\alpha\neq0$, οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ 0. Τῷ ὄντι· ἂν ἦτο $\alpha:0=\lambda$, θὰ ἠλήθευον κατὰ σειρὰν αἱ ἰσότητες $\alpha=0.\lambda$, $\alpha.3=(0.3).\lambda=0.\lambda$, ὅθεν $\alpha=\alpha.3$ καὶ $1=3$, ὅπερ ἄτοπον. Ὥστε: *Ἡ διὰ τοῦ μηδενὸς διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος, ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι $\neq0$.*

Τὸ πηλίκον $0:0$ εἶναι ἀόριστον, ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης, διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 δίδει τὸν διαιρετέον 0 αὐτῆς. Διὰ τοῦτο $0:0$ ἢ $\frac{0}{0}$ χρησιμεύει ὡς σύμβολον τοῦ ἀορίστου.

Περὶ δυνάμεων.

§ **25. Δυνάμεις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.** ***Καλεῖται δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ πᾶν γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.***

Οὕτω τὸ γινόμενον $(-3).(-3)$ εἶναι ἡ δευτέρα δύναμις ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ (-3) καὶ γράφεται συντόμως οὕτω $(-3)^2$, τὸ γινόμενον $(-2).(-2).(-2)$ εἶναι ἡ τρίτη δύναμις ἢ ὁ κύβος τοῦ (-2) καὶ γράφεται συντόμως οὕτω $(-2)^3$.

Ὁ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων δηλῶν ἀριθμὸς καλεῖται ***ἐκθέτης*** τῆς δυνάμεως, ἕκαστος δὲ τῶν ἴσων παραγόντων καλεῖται ***βάσις*** αὐτῆς.

Δύναμίς τις καλεῖται ***ἀρτία*** ἢ ***περιττή***, καθ' ὅσον ὁ ἐκθέτης αὐτῆς εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός. Οὕτως αἱ δυνάμεις $(-3)^2$, $(-5)^4$, $\left(+\frac{1}{3}\right)^6$ εἶναι ἄρτιαι δυνάμεις, αἱ δὲ $(-2)^3$, $\left(-\frac{5}{8}\right)^5$, $(+6)^7$ εἶναι περιτταὶ δυνάμεις.

Ἴδωμεν ἤδη πῶς ὑπολογίζονται αἱ δυνάμεις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Α'. Ἄρτιαι δυνάμεις. Ἔστω π. χ. ἡ δύναμις $(-4)^6$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων εἶναι

$$(-4)^6=(-4).(-4).(-4).(-4).(-4).(-4)=+(4.4.4.4.4.4)$$
$$=+(4^6)=+4096.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(-3)^4=+(3^4)=+81$, $(+5)^2=+(5^2)=+25$,

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4=+\left(\frac{2}{3}\right)^4=+\frac{16}{81}$$

Ἄρα: ***Πᾶσα ἀρτία δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς θετικός· ἡ δὲ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν δύναμιν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς βάσεως αὐτῆς ἥτις ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην***

Β'. **Περιτταὶ δυνάμεις.** α') Ἔστω ἡ δύναμις $(+3)^5$. Ἐπειδὴ $(+3)^5=(+3).(+3).(+3).(+3).(+3)=+(3.3.3.3.3)$, ἕπεται ὅτι $(+3)^5=+(3^5)=+243$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι :

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^3=+\left(\frac{2}{3}\right)^3=+\frac{8}{27}.$$

β') Ἔστω ἤδη ἡ δύναμις $(-2)^5$. Ἐπειδὴ $(-2)^5=(-2).(-2)(-2)(-2).(-2)=-(2.2.2.2.2.)$, ἕπεται ὅτι

$$(-2)^5=-(2^5)=-32.$$

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $(-5)^3=-(5^3)=-125$ κτλ. Ἄρα.

Πᾶσα περιττὴ δύναμις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς, ἡ δὲ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν δύναμιν, τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς βάσεως ἥτις ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην

Κατὰ ταῦτα εἶναι $(-1)^2=+1$, $(-1)^4=+1$, $(-1)^3=-1$, $(-1)^5=-1$ κτλ. Ἄρα :

Τῆς ἀρνητικῆς μονάδος πᾶσα ἀρτία δύναμις ἰσοῦται πρὸς $+1$, πᾶσα δὲ περιττὴ πρὸς -1.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις

109) $(-2)^4$, $(-3)^2$, $(-5)^3$, $(-7)^2$, $(+9)^3$, $(-10)^3$, $(+100)^4$,

110) $\left(+\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ $\left(-\frac{1}{7}\right)^3$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$.

111) $(-0{,}5)^2$, $(-1{,}3)^3$, $(+2{,}5)^2$ $(-4{,}6)^4$, $\left(-10\frac{1}{2}\right)^4$.

112) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

$(-4)^3 . (-1)^2$, $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 . (-1)^3$, $(-8{,}3)^2 . (-1)^5$, $\left(-3\frac{1}{4}\right)^2 . (-1)^6$.

§ **26. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.** Αἱ δυνάμεις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἔχουσιν ἁπάσας τὰς ὑπὸ τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς διδασκομένας ἰδιότητας τῶν δυνάμεων, ἀποδεικνύονται δὲ αὗται ὁμοίως. Οὕτω: $(-3)^{\mu} . (-3)^{\nu} . (-3)^{\rho} = (-3)^{\mu+\nu+\rho}$.

$[(-2) . (-3) . (+5)]^{\nu} = (-2)^{\nu} . (-3)^{\nu} (+5)^{\nu}$, $[(-5)^{\mu}]^{\nu} = (-5)^{\mu\nu}$

$(-7)^{\mu} : (-7)^{\nu} = (-7)^{\mu-\nu}$ ἂν $\mu > \nu$, $(-7)^1 = -7$, $(+3)^0 = +1$,

$\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = +1$.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

113) $(-2)^2 . (-2)^3 . (-2)^5 = [(-2)^5]^2$.

114) $(-3)^3 . (-3)^3 = [(+3)^2]^3$,

115) $(-2)^3 . (-5)^3 = 10^3$,

116) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον

$$(-5)^2 . (-5)^3 . (-1)^0 \text{ καὶ τὸ } \left(-\frac{2}{5}\right)^3 . \left(-\frac{2}{5}\right)^2 . (-5)^1$$

117) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $(-7)^3 . (-5)^1 : (-7)^2 . (-7)^0$.

§ **27. Δυνάμεις μὲ ἀρνητικοὺς ἐκθέτας.** Ἔστω α τυχὸν ἀλγεβρικὸς ἀριθμός· ἂς ζητήσωμεν δὲ τὸ πηλίκον $\alpha^5 : \alpha^8$. Τοῦτο προφανῶς ἰσοῦται πρὸς $\dfrac{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.} = \dfrac{1}{\alpha.\alpha.\alpha.} = \dfrac{1}{\alpha^3}$. Ἀφ᾽ ἑτέρου δέ, ἂν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὴν γνωστὴν ἰδιότητα περὶ τοῦ πηλίκου δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον α^{-3}. Πρέπει ἄρα νὰ δεχθῶμεν ὅτι $\alpha^{-3} = \dfrac{1}{\alpha^3}$.

Γενικῶς : Ἂν θέλωμεν ἐπὶ τυχούσης δυνάμεως $\alpha^{-\nu}$ (ἔνθα α τυχὸν ἀλγεβρικὸς καὶ $-\nu$ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς) νὰ ἰσχύωσιν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι $\alpha^{-\nu} . \alpha^{\nu} = \alpha^0 = 1$, ὅθεν $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$. Ἄρα : ***Πᾶσα δύναμις ἔχουσα ἀρνητικὸν ἐκθέτην εἶναι***

ἀντίστροφος τῆς δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἥτις ἔχει ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ ἐκθέτου ἐκείνης.

'Ασκήσεις. 118) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ δυνάμεις 2^{-2}, 3^{-2}, 5^{-3}, $(-3)^{-2}$.

119) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(-2)^{-2} . (-5)^{-2} = \frac{1}{100}$, $(-3)^{-2} . (+5)^{-2} = \frac{+1}{225}$
$(-10)^{-3} . (-2)^{-2} . \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = -\frac{1}{1000}$.

120) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις
$(-5)^2 . (-3)^1 . -\left(\frac{25}{3}\right)^{-1} . \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} : \left(-\frac{4}{5}\right)^{6}\right]$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ.—ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

§ **28. Πρόβλημα I.** ***Τίς ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τοῦ α κατὰ 3;***

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν α ἐπὶ 2 καὶ εἰς τὸ γινόμενον νὰ προσθέσωμεν τὸν 3. Ἐπειδὴ ὅμως ἀγνοοῦμεν τὸν α, αἱ πράξεις αὗται δὲν δύνανται νὰ ἐκτελεσθῶσιν· δι' ὃ ἀρκούμεθα νὰ σημειώσωμεν αὐτάς. Οὕτω τὸ διπλάσιον τοῦ α σημειοῦται α. 2 ἢ συνηθέστερον 2α, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ 2α καὶ τοῦ 3 σημειοῦται οὕτω 2α+3. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 2α+3. Τὸ οὕτως ἐξ ἀριθμῶν, ἑνὸς γράμματος καὶ συμβόλων σχηματισθὲν σύνολον 2α+3 καλεῖται ***ἀλγεβρικὴ παράστασις***.

§ **29. Πρόβλημα II.** ***Ἔμπορος ἔχων ἀρχικῶς α δραχμὰς ἐκέρδιζεν ἐπὶ 7 ἡμέρας συνεχῶς ἀνὰ β δραχμὰς καθ' ἑκάστην, τὴν δὲ 8ην ἡμέραν ἔχασε γ δραχμάς. Πόσας δραχμὰς εἶχε μετὰ ταῦτα;***

Λύσις. Προφανῶς πρέπει εἰς τὰς α δραχμὰς νὰ προστεθῇ τὸ κέρδος β.7 ἢ 7β καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος νὰ ἀφαιρεθῶσιν αἱ γ δραχμαί, τὰς ὁποίας ἔχασεν. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι εἶχε μετὰ ταῦτα α+7β—γ δραχμάς. Καὶ τὸ οὕτως ἐκ γραμμάτων, ἀριθμῶν καὶ συμβόλων ἀποτελεσθὲν σύνολον α+7β—γ εἶναι ἀλγεβρικὴ παράστασις.

Ὁμοίως $\alpha+\beta\gamma-\frac{\delta}{\alpha}$ εἶναι ἀλγεβρικὴ παράστασις.

Γενικῶς: ***Ἀλγεβρικὴ παράστασις καλεῖται πᾶν σύνολον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν σημειώνωμεν τὰς ἐκτελεστέας πράξεις ἐπὶ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τινὲς ἢ πάντες παρίστανται διὰ γραμμάτων.***

Πᾶσα ἀλγεβρικὴ παράστασις, εἰς τὴν ὁποίαν ἢ οὐδόλως σημειοῦται ἐξαγωγὴ ρίζης ἢ σημειοῦται ἐξαγωγὴ ρίζης ὡρισμένου ἀριθμοῦ, καλεῖται *ρητὴ* παράστασις. Π. χ. αἱ παραστάσεις $3\alpha-\beta^2$, $\frac{7\alpha x}{3\beta}$, $\alpha\sqrt{3}$ εἶναι ρηταὶ παραστάσεις.

Πᾶσα δὲ ἀλγεβρικὴ παράστασις, εἰς τὴν ὁποίαν σημειοῦται ἐξαγωγὴ ρίζης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἢ ἀριθμοῦ παριστωμένου διὰ γράμματος, καλεῖται *ἄρρητος* παράστασις. Π. χ. αἱ παραστάσεις $3-\sqrt{x}$, $\frac{7\sqrt{\alpha+5\beta}}{2}$, $9x^2-\sqrt{3\alpha-\beta}$ εἶναι ἄρρητοι παραστάσεις.

ΣΗΜ. Ἐπὶ τοῦ παρόντος θὰ γίνηται λόγος περὶ ρητῶν παραστάσεων.

Ἀσκήσεις. 121) Νὰ παρασταθῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις ὑπερβαίνει τὸν α κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ β.

122) Νὰ παρασταθῇ ἡ πρὸ 20 ἐτῶν ἡλικία ἀνθρώπου, ὅστις ἔχει σήμερον ἡλικίαν α ἐτῶν. Νὰ παρασταθῇ δὲ ἡ μετὰ β ἔτη ἡλικία τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου.

123) Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι α μέτρα καὶ τὸ ὕψος εἶναι κατὰ β μέτρα μικρότερον τῆς βάσεως.

124) Εἶχέ τις α τέκνα καὶ ἔδωκεν εἰς καθὲν ἀπὸ 3 μῆλα. Οὕτω δὲ ἐπερίσσευσαν β μῆλα. Πόσα μῆλα εἶχε τὸ ὅλον; Ἐὰν δὲ ἤθελε νὰ δώσῃ ἀπὸ 3 πάλιν μῆλα ἀλλ' ἔλειπον γ μῆλα, πόσα μῆλα εἶχεν;

125) Πόσας ἁπλᾶς μονάδας ἔχει τὸ ὅλον ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει x δεκάδας καὶ y ἁπλᾶς μονάδας;

126) Πόσας ἁπλᾶς μονάδας ἔχει τὸ ὅλον ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει x ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ z ἁπλᾶς μονάδας;

§ 30. Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Ἔστω $5\alpha^2$ τυχοῦσα ἀλγεβρικὴ παράστασις περιέχουσα ἓν μόνον γράμμα τὸ α· ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ γράμμα α ὑπὸ ὡρισμένου ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 3, ἡ παράστασις αὕτη γίνεται 5.3^2. Ἐὰν δὲ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 45. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται ***ἀριθμητικὴ τιμὴ*** ἢ ἁπλῶς ***τιμὴ*** τῆς παραστάσεως $5\alpha^2$ διὰ $\alpha=3$. Ὁμοίως, ἂν ἐν τῇ ἀλγεβρικῇ παραστάσει $\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2$ θέσωμεν ἀντὶ α τὸν ἀριθμὸν -4 καὶ ἀντὶ β τὸν 2, εὑρίσκομεν $(-4)^2-3.(-4).2+2.2^2=16+24+8=48$· οὗτος λέγεται ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2$ διὰ $\alpha=-4$ καὶ $\beta=2$.

Γενικῶς: ***Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ ἁπλῶς τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν τὰ ἐν αὐτῇ περιεχόμενα γράμματα ἀντικατασταθῶσι δι' ὡρισμένων ἑκάστοτε ἀριθμῶν καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις.***

Συνήθως ἡ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἀλλάσσει, ὅταν ἀλλάξωσιν οἱ ἀριθμοί, δι' ὧν ἀντικαθίστανται τὰ γράμματα αὐτῆς. Οὕτω τῆς παραστάσεως $\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2$ τιμὴ διὰ $\alpha=1$ καὶ $\beta=5$ εἶναι

$1^2-3.1.5+2.5^2=36$, ἐν ᾧ προηγουμένως εὕρομεν τιμὴν αὐτῆς 48 διὰ $\alpha=-4$ καὶ $\beta=2$.

Ἡ τιμὴ λοιπὸν ἑκάστης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰ γράμματα αὐτῆς.

ΣΗΜ. Ὑπάρχουσι καὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀλλάσσῃ ἡ τιμὴ τῶν γραμμάτων αὐτῶν. Π. χ. ἡ παράστασις $(\alpha-2)^2-\alpha^2+4\alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 4 διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ α.

Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ***ἰσοδύναμοι***, ἂν ἀμφότεραι λαμβάνωσι τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων αὐτῶν. Π. χ. αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις $\alpha+2\beta-\gamma$ καὶ $2\beta-\gamma+\alpha$ εἶναι ἰσοδύναμοι· ὁμοίως αἱ παραστάσεις $(\alpha+\beta).3$ καὶ $3\alpha+3\beta$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἡ ἰσότης δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καλεῖται ταὐτότης Οὕτως αἱ ἰσότητες $\alpha+2\beta-\gamma=2\beta-\gamma+\alpha$, $(\alpha+\beta).3=3\alpha+3\beta$ εἶναι ταὐτότητες.

Ἀσκήσεις: Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑκάστης τῶν ἀκολούθων παραστάσεων.

127) $7\alpha^2-3\alpha+1$ διὰ $\alpha=-1$.

128) $(\alpha-3)^2+(2\alpha-1)^2-7$ διὰ $\alpha=3$.

129) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x-1}{5-x}-1$ διὰ $x=4$.

130) $x^2-(x-\alpha)^2+1$ διὰ $x=-3$ καὶ $\alpha=2$.

131) $(\alpha\beta-\alpha)^2-\dfrac{3\beta^2}{5\alpha}+\dfrac{\alpha}{2}$ διὰ $\alpha=4$ καὶ $\beta=3$.

132) $\left(\dfrac{\alpha-2\beta}{3x}-\dfrac{x}{5\alpha}\right).\dfrac{5\alpha\beta x-1}{4x^2}$ διὰ $\alpha=7$, $\beta=2$ καὶ $x=-1$.

133) $(\alpha-3)^2+7\alpha x-6x^2$ διὰ $\alpha=\dfrac{2}{3}$ καὶ $x=-\dfrac{1}{6}$.

134) $(5x^2-3\alpha)-(7\alpha x+1)+(3\alpha^2-x^3)-5x^4$ διὰ $\alpha=-3$ καὶ $x=-2$.

135) $(\alpha^2-\beta^2)^2-(\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2$ διὰ $\alpha=4$ καὶ $\beta=-3$.

136) $\dfrac{\alpha^2-x^2}{\alpha+x}+1$ διὰ $\alpha=5$ καὶ $x=-2$.

137) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ διὰ $\alpha=1$ καὶ $\beta=3$.

138) $\left(\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}\right).\left(\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{x}\right)$ διὰ $x=-5$ καὶ $\alpha=2$.

139) Αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις $\alpha+2\beta$ καὶ $2\beta+\alpha$ εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ διατί; Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς παραστάσεις αβ καὶ βα.

§ **31. Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.** Ἔστω τυχοῦσα ἀλγεβρικὴ παράστασις $5x^3-7x^2+3$.

Αὕτη διὰ $x=2$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $5.(2)^3-7.2^2+3=15$, διὰ $x=-1$ τὴν τιμὴν $5.(-1)^3-7.(-1)^2+3=-9$ κ.τ.λ. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς παραστάσεως ταύτης ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν δίδομεν εἰς τὸ γράμμα x. Τοῦτο ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες ὅτι ἡ παράστασις $5x^3-7x^2+3$ εἶναι ***συνάρτησις*** τοῦ x· τὸ δὲ γράμμα x, εἰς τὸ ὁποῖον δίδομεν αὐθαιρέτως οἱασδήποτε τιμάς, καλεῖται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***. Ὑπάρχουσι δὲ καὶ συναρτήσεις δύο ἢ περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβολῶν. Οὕτω ἡ παράστασις $x^2-2xy+y^2$ εἶναι συνάρτησις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ y.

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως ἀπαντᾶται συχνότατα εἰς τὴν Γεωμετρίαν, τὴν Φυσικήν, τὴν Μηχανικὴν καὶ εἰς αὐτὸν ἔτι τὸν καθ' ἡμέραν βίον. Οὕτως ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι συναρτήσεις τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἀνεξάρτητος μεταβλητή· ἡ διαστολὴ μεταλλικῆς ῥάβδου εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας αὐτῆς, τὸ ὑπὸ κινητοῦ ὁμαλῶς κινουμένου διανυόμενον διάστημα εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διαρκεῖ ἡ κίνησις. Τὸ ὑπὸ λυχνίας καταναλισκόμενον πετρέλαιον εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου, καθ' ὃν αὕτη φωτίζει κ.τ.λ.

Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Τὸ ποσόν, ὅπερ πληρώνει τις διὰ τὴν ἀγορὰν κρέατος, ἄρτου κ.λ.π. εἶναι συνάρτησις τοῦ βάρους αὐτοῦ καὶ τῆς τιμῆς, εἰς ἣν πωλεῖται ἡ μονὰς τοῦ βάρους. Τὸ ὑπὸ μηχανῆς παραγόμενον ἔργον εἶναι συνάρτησις τῆς ἰσχύος τῆς μηχανῆς ταύτης, τοῦ χρόνου καθ' ὃν αὕτη λειτουργεῖ καὶ τῶν ἀντιστάσεων, τὰς ὁποίας ἔχει νὰ ὑπερνικήσῃ αὕτη.

§ **32. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν συναρτήσεως.**—Ἔστω $2x+3$ τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ x· αὕτη διὰ

$x = 1, 2, 3\ldots\ 0, -1, -2, -3\ldots$ γίνεται ἀντιστοίχως

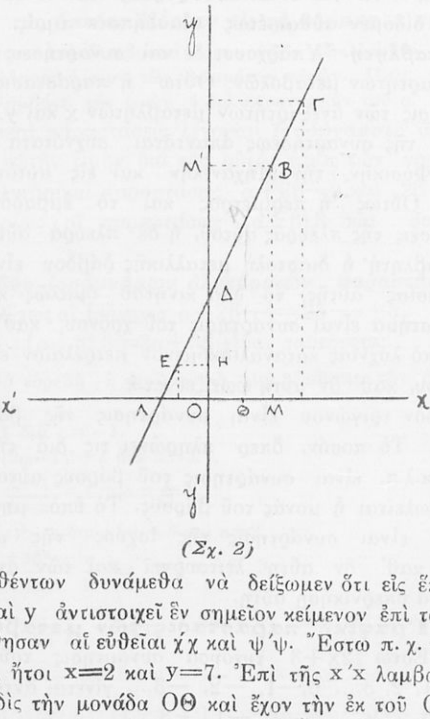
$5, 7, 9\ldots\ 3,\ 1, -1, -3\ldots$

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας καλέσωμεν τὴν συνάρτησιν ταύτην ψ, ἤτοι ἂν θέσωμεν $\psi=2x+3$, ὅταν

$x = 1, 2, 3\ldots\ 0, -1, -2, -3,\ldots$

θὰ εἶναι $y = 5, 7\ 9\ldots\ 3,\ 1, -1, -3,\ldots$

Τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ψ μετὰ τοῦ x αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἀκολούθως. Γράφομεν δύο εὐθείας $x'x$ καὶ $\psi'\psi$ καθέτως τεμνομένας εἰς τὸ Ο καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῶν ἴσα τμήματα ΟΘ καὶ ΟΗ, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ὡς μονάδας μήκους. Καθ' ἃ ἐμάθομεν ἤδη (§ 3) τὰ μήκη τῶν τμημάτων τῆς $x'x$ θὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ μέν, ἂν τὰ τμήματα μετρῶνται κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Θ φοράν, ἀρνητικοὶ δέ, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετον ταύτης φοράν· ὁμοίως τὰ μήκη τῶν τμημάτων τῆς ψ΄ψ θὰ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἂν τὰ τμήματα ταῦτα ἔχωσι τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Η φορὰν ἢ τὴν ἀντίθετον ταύτης·



(Σχ. 2)

Τούτων τεθέντων δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι εἰς ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τοῦ x καὶ y ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ἐχαράχθησαν αἱ εὐθεῖαι χ΄χ καὶ ψ΄ψ. Ἔστω π. χ. τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 2 καὶ 7, ἤτοι $x=2$ καὶ $y=7$. Ἐπὶ τῆς x΄x λαμβάνομεν τμῆμα ΟΜ περιέχον δὶς τὴν μονάδα ΟΘ καὶ ἔχον τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Θ φοράν, ἐπὶ δὲ τῆς ψ΄ψ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΜ΄ περιέχον ἑπτάκις τὴν μονάδα ΟΗ καὶ φερόμενον ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Η. Ἐὰν ἤδη ἐκ μὲν τοῦ Μ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ψ΄ψ, ἐκ δὲ τοῦ Μ΄ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν χ΄χ, αὗται τέμνονται εἰς τὸ Β, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς ῥηθείσας τιμὰς τῶν x καὶ y. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ ζεῦγος $x=3$ καὶ $y=9$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Γ, εἰς τὸ ζεῦγος $x=-1$, $y=1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ Ε κ.τ.λ. Τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰ διάφορα ζεύγη τιμῶν τῶν x καὶ y ἀποτελοῦσι γραμμήν τινα ΕΒΓ, ἥτις λέγομεν ὅτι παριστάνει τὴν συνάρτησιν y ἢ $2x+3$. Ἐὰν κατασκευάσωμεν, ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα τῆς γραμμῆς ταύτης, πειθόμεθα ὅτι αὕτη εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν μὲν εὐθεῖαν ψψ΄ εἰς τὸ σημεῖον Δ, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ζεῦγος 0 καὶ 3 ἤτοι εἰς x=0 καὶ y=3· ἐπίσης ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΑΒ (1) τέμνει τὴν εὐθεῖαν xx′ εἰς τὸ σημεῖον Λ, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ζεῦγος $-\frac{3}{2}$ καὶ 0 ἤτοι εἰς

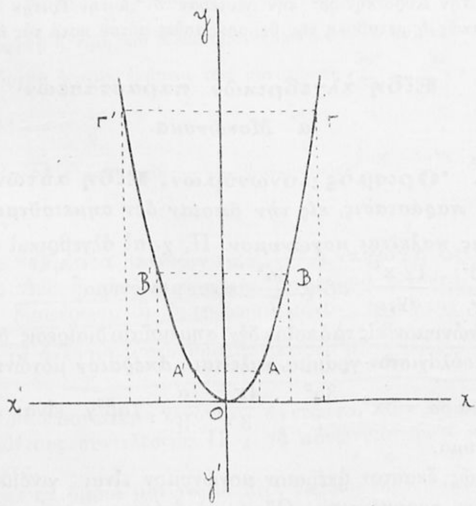
$$x=-\frac{3}{2} \text{ καὶ } y=0.$$

Παρατηροῦντες ὅτι τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΘΑ, ΜΒ, κτλ. εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ y αἱ ἀντιστοιχοῦσαι κατὰ σειρὰν εἰς τὰς τιμὰς (ΟΘ), (ΟΜ), κτλ. τοῦ x, κατανοοῦμεν ἀμέσως ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνωσιν ἀπαύστως αὐξανόμεναι καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ y βαίνουσιν ἀπαύστως αὐξανόμεναι· ὁμοίως, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνωσιν ἀπαύστως ἐλαττούμεναι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y βαίνουσιν ἐλαττούμεναι.

Ἔστω ἀκόμη ἡ συνάρτησις x^2· θέτοντες $y=x^2$ παρατηροῦμεν

ὅτι διὰ $x=-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\ldots$

εἶναι $y=\ \ 9,\ \ 4,\ \ 1,\ 0,\ 1,\ \ 4,\ \ 9\ldots$



(Σχ. 3)

Ἐὰν δὲν κατασκευάσωμεν, ὡς ἀνωτέρω, διάφορα σημεῖα ὧν ἕκαστον ἀντιστοιχεῖ εἰς ὡρισμένον ζεῦγος τιμῶν τοῦ x καὶ y, καὶ

(1) Εἰς τὴν τομὴν τῆς εὐθείας ΕΓ καὶ τῆς ἐκ τοῦ Θ παραλλήλου πρὸς τὴν ψ′ψ νὰ γραφῇ τὸ γράμμα Α.

ἑνώσωμεν διὰ συνεχοῦς γραμμῆς τὰ σημεῖα ταῦτα, προκύπτει ἡ καμπύλη Γ΄Β΄Α΄ΟΑΒΓ, δι' ἧς αἰσθητοποιεῖται ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως μετὰ τοῦ x. Παρατηροῦντες τὴν καμπύλην ταύτην ἐννοοῦμεν ἀμέσως ὅτι, ὅταν x ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχόμενος αὐξάνηται ἢ ἐλαττοῦται ἀπαύστως ἡ συνάρτησις x^2 ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχομένη βαίνει ἀπαύστως αὐξανομένη.

Ἀσκήσεις. 140) Ποίας τιμὰς λαμβάνει ἡ συνάρτησις $4-x$ διὰ

$$x=-2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2\ ;$$

Νὰ κατασκευασθῶσι δὲ τὰ εἰς ἕκαστον ζεῦγος τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τοῦ x καὶ τῆς συναρτήσεως ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα.

141) Ποίας τιμὰς λαμβάνει ἡ συνάρτησις $1-2x$ διὰ $x=0,\ +\frac{1}{2},+1,2$;

Νὰ κατασκευασθῶσι δὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα καὶ νὰ ἀχθῇ ἡ ὑπὸ τῶν δύο ἄκρων σημείων ὁριζομένη εὐθεῖα γραμμή.

142) Νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων $3x$ καὶ $3x+5$.

143) Ἡ θερμοκρασία ἀσθενοῦς τινὸς κατὰ τὴν 9 π. μ. ὥραν ἑκάστης τῶν ἀκολούθων ἡμερῶν ἦτο : τὴν Κυριακὴν 38°, τὴν Δευτέραν 38°,3, τὴν Τρίτην 38°,7, τὴν Τετάρτην 38°,9 τὴν Πέμπτην 39°, τὴν Παρασκευὴν 39°2, τὸ Σάββατον 38°6, τὴν Κυριακὴν 38° τὴν Δευτέραν 37°,4 τὴν Τρίτην 37°. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας αὐτοῦ κατὰ τὰς ἡμέρας ταύτας.

Εἴδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

α΄. Μονώνυμα.

§ **33. Ὁρισμὸς μονωνύμων. Εἴδη αὐτῶν.** — ***Πᾶσα ἀλγεβρικὴ παράστασις, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν σημειοῦται πρόσθεσις ἢ ἀφαίρεσις καλεῖται μονώνυμον.*** Π. χ. αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις $-5x^2,\ \frac{7\alpha\beta^2}{3\gamma},\ \frac{12\,x^2}{\alpha y},\ \alpha\beta^2\gamma,\ \frac{3\alpha^2}{7}$ εἶναι μονώνυμα.

Πᾶν μονώνυμον, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν σημειοῦται διαίρεσις διὰ διαιρέτου ἔχοντος ἓν τοὐλάχιστον γράμμα, καλεῖται ***ἀκέραιον*** μονώνυμον. Π. χ. Τὰ μονώνυμα $3\alpha, -5x^2, \frac{3\alpha^2}{7}, \frac{4x}{3}, \frac{\alpha}{3}, 7\alpha\beta^2\gamma$ εἶναι πάντα ἀκέραια μονώνυμα.

Προφανῶς ἕκαστον ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων. Οὕτω τὸ ἀκέραιον μονώνυμον 5α εἶναι γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ α, τὸ $-5\beta^2$ εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων (—5), β, β, τὸ δὲ $\frac{3y^2}{4}$ εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων $\frac{3}{4}$, y, y.

Ἐὰν ἀκέραιον μονώνυμον ἔχῃ ἀριθμητικὸν παράγοντα, οὗτος γράφεται συνήθως πρῶτος καὶ καλεῖται ***συντελεστὴς*** τοῦ ἀκεραίου τούτου μονωνύμου. Οὕτω τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $3x^2, -7\alpha, \frac{5\psi^2}{6}$ συντελεσταὶ εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ $3, (-7), \frac{5}{6}$.

Ἐὰν ἀκέραιον μονώνυμον οὐδένα ἔχῃ ἀριθμητικὸν παράγοντα, νοεῖται τοιοῦτος ὁ $+1$ μέν, ἂν πρὸ αὐτοῦ οὐδὲν ὑπάρχῃ σημεῖον ἢ ὑπάρχῃ τὸ $+$, ὁ -1 δέ, ἂν πρὸ αὐτοῦ ὑπάρχῃ τὸ $-$. Οὕτω τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου $\alpha^2\beta$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $+1$, τοῦ δὲ $-\alpha\beta^3x$ ὁ -1.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἀκέραιον μονώνυμον περιέχῃ πλείονας τοῦ ἑνὸς ἀριθμητικοὺς παράγοντας, ἀντικαθίστανται οὗτοι διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν, ὅπερ εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτοῦ. Οὕτω τὸ μονώνυμον $2\alpha^2 3\beta$ γράφεται συνήθως οὕτω $6\alpha^2\beta$ καὶ ἔχει ἑπομένως συντελεστὴν 6.

Πᾶν μὴ ἀκέραιον μονώνυμον καλεῖται ***κλασματικὸν*** μονώνυμον. Π. χ. τὰ μονώνυμα $\frac{5\alpha}{\beta}, \frac{7\alpha x^2}{3\beta\gamma}, \frac{9x^2}{\alpha^2}$ εἶναι κλασματικὰ μονώνυμα.

Ἀσκήσεις. 144) Νὰ γραφῶσι τρία ἀκέραια μονώνυμα καὶ τρία κλασματικά.

145) Νὰ ὁρισθῇ ὁ συντελεστὴς ἑκάστου τῶν ἀκολούθων ἀκεραίων μονωνύμων $2\alpha x, \frac{3\alpha^2\beta}{2}, 9\alpha^2 y, \frac{5\alpha}{3}, -\alpha^2\beta\psi^5, 3\alpha^2 5x, 6\alpha^3 4\beta x, -5\alpha^2 x$.

146) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μονωνύμου $7\alpha x^2$ διὰ $\alpha=3$ καὶ $x=-2$.

147) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστου τῶν μονονύμων $\frac{5\alpha^2}{3\beta}, \frac{2x}{3\alpha^5}, \frac{5\alpha\beta}{2x}$ διὰ $\alpha=-1, \beta=+1, x=-\frac{1}{2}$.

148) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστου τῶν μονωνύμων $\frac{7\alpha x}{x^2}, \frac{3\alpha^2 x}{5}$ διὰ $\alpha=\frac{3}{4}$ καὶ $x=-\frac{1}{4}$.

§ 34. Ὅμοια μονώνυμα.—Ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων.

Δύο ἢ πλείονα ἀκέραια μονώνυμα λέγονται ***ὅμοια***, ἐὰν ἢ οὐδόλως διαφέρωσι, ἢ διαφέρωσι μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν αὐτῶν. Π χ. τὰ ἀκέραια μονώνυμα $3\alpha^2\beta, -7\alpha^2\beta, \frac{3}{4}\alpha^2\beta, \frac{3}{4}\alpha^2\beta$ εἶναι ὅμοια.

Δύο ἀκέραια μονώνυμα λέγονται **ἀντίθετα**, ἐὰν εἶναι ὅμοια καὶ ἔχωσιν ἀντιθέτους συντελεστάς. Π. χ. τὰ μονώνυμα $5\alpha^2 x$ καὶ $-5\alpha^2 x$ εἶναι ἀντίθετα.

Ἔστωσαν τὰ ὅμοια μονώνυμα $3\alpha^2, 7\alpha^2$ καὶ $8\alpha^2$. τούτων τὸ ἄθροισμα σημειοῦται ὧδε: $3\alpha^2+7\alpha^2+8\alpha^2$. Ἐπειδὴ δὲ $(3+7+8)\alpha^2= 3\alpha^2+7\alpha^2+8\alpha^2$, ἕπεται ὅτι ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων μονωνύμων εἶναι $(3+7+8)\alpha^2$ ἢ $18\alpha^2$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι τῶν ὁμοίων μονωνύμων $5\alpha x^2, -7\alpha x^2, 4\alpha x^2, -12\alpha x^2$, τὸ ἄθροισμα $5\alpha x^2-7\alpha x^2+4\alpha x^2-12\alpha x^2$ εἶναι ἴσον πρὸς $(5-7+4-12)\alpha x^2=-10\alpha x^2$.

Ἄρα. *Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχει δὲ συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν αὐτῶν.*

Ἡ πρόσθεσις ὁμοίων μονωνύμων καλεῖται συνήθως **ἀναγωγὴ** αὐτῶν.

Ἀσκήσεις. 149) Νὰ γραφῶσι τρία ὅμοια μονώνυμα καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

150) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $3\alpha^2, 7\alpha^2, -4\alpha^2, \alpha^2$ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ $\alpha=2$. Νὰ συγκριθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν αὐτῶν.

151) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $\frac{3\alpha\beta}{5}, \frac{2\alpha\beta}{5}, \frac{4\alpha\beta}{5}, \frac{\alpha\beta}{5}$, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν $\frac{2\alpha x^2}{3}, \frac{\alpha x^2}{3}, \frac{4\alpha x^2}{18}$.

152) Νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν μονωνύμων $2x^2, \frac{3}{5}x^2, -4x^2, -9x^2$ καὶ τῶν $5\alpha^2\beta, -\frac{2}{3}\alpha^2\beta, \frac{4}{9}\alpha^2\beta, -\alpha^2\beta$.

153) Νὰ χωρισθῶσι τὰ ὅμοια ἐκ τῶν μονωνύμων $3\alpha, 5\alpha^2, -7\alpha, -3\alpha^2, 4\alpha x, 8\alpha^2, 5\alpha x, 6\alpha, -\alpha^2$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων ἑκάστης ὁμάδος.

154) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $7\alpha^2\beta, -9\alpha^2\beta, -2{,}3\alpha^2\beta, 4{,}2\alpha^2\beta$.

β΄. *Πολυώνυμα.*

§ 35. Ὁρισμὸς πολυωνύμων, στοιχεῖα καὶ εἴδη αὐτῶν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τα ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $5\alpha^3, 2\alpha^2, -7\alpha$ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, 3 ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς μονώνυμον διότι $3=3\alpha^0$. Ἐπειδὴ τὰ μονώνυμα δὲν εἶναι ὅμοια, δὲν ἰσχύει ὁ προηγούμενος κανών, ἤτοι ταῦτα δὲν ἀνάγονται εἰς ἓν μονώνυμον· ἀρκούμεθα λοιπὸν εἰς τὸ νὰ σημειώσωμεν τὴν πρὸς ἐκτέλεσιν πρόσθεσιν. Οὕτω προκύπτει τὸ ἄθροισμα $5\alpha^3+2\alpha^2-7\alpha+3$, ὅπερ καλεῖται ***πολυώνυμον***. Ὁμοίως ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $\alpha x^3, -3\alpha^2, 5\alpha^3x, 9\alpha^4$, εἶναι τὸ πολυώνυμον $\alpha x^3-3\alpha^2+5\alpha^3x+9\alpha^4$.

Γενικῶς: ***Πολυώνυμον καλεῖται ἄθροισμα μονωνύμων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι πάντα ὅμοια.***

Τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἕκαστον πολυώνυμον, καλοῦνται ***ὅροι*** αὐτοῦ.

Ἐάν ἔν τινι πολυωνύμῳ περιέχωνται καὶ ὅροι τινὲς ὅμοιοι, οὗτοι ἀντικαθίστανται διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, ἤτοι γίνεται ἡ ἀναγωγὴ αὐτῶν. Οὕτω το πολυώνυμον $5x^3-4x-3x^2+6x+1$ γράφεται συντομώτερον οὕτω $5x^3-3x^2+2x+1$, διότι $-4x+6x=2x$.

Ἡ ἐργασία αὐτη καλεῖται ***ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων*** τοῦ πολυωνύμου.

Πᾶν δὲ ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ ἔχον ὁμοίους ὅρους καλεῖται ***ἀνηγμένον*** πολυώνυμον.

Ἐὰν πολυώνυμόν τι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων αὐτοῦ ἔχῃ δύο ὅρους καλεῖται ἰδιαιτέρως ***δυώνυμον***, ἐὰν δὲ ἔχῃ τρεῖς, καλεῖται ***τριώνυμον***. Οὕτως αἱ παραστάσεις $5\alpha-3\beta, \alpha^2-\beta^2, x^2-\frac{\alpha}{3}$ εἶναι δυώνυμα, αἱ δὲ $x^3-3\alpha x+\alpha^2, \alpha^2-5\alpha\beta+\frac{\beta^2}{2x}, 5\alpha+3\beta-\gamma$ εἶναι τριώνυμα.

Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι πολυωνύμου εἶναι ἀκέραια μονώνυμα, τὸ πολυώνυμον καλεῖται ***ἀκέραιον*** πολυώνυμον. Τοιαῦτα π. χ. εἶναι τὰ πολυώνυμα $\alpha^2-3\alpha x+x^2, 2x^3-6x+4, 5y^3-\frac{2}{3}y^2+7y-\frac{1}{2}$.

Πᾶν μὴ ἀκέραιον πολυώνυμον καλεῖται ***κλασματικόν***. Τοιαῦτα π.χ. εἶναι τὰ πολυώνυμα $7\alpha^2-\frac{3\alpha}{2x}+1, \frac{5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2}{2x}+5x^2, \frac{3x^2}{2\alpha}-\frac{5x}{3\alpha^2}+\frac{7}{\alpha^3}$.

Ἀκέραιόν τι πολυώνυμον λέγεται ***διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας*** δυνάμεις γράμματός τινος, ἐὰν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου βαίνωσιν ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον ἐλαττούμενοι ἢ αὐξανόμενοι. Π. χ. τὸ πολυώνυμον $7x^3-5x^2+9x+3$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, τὸ δὲ $2-3y+6y^2-5y^4$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ y.

Ἀσκήσεις. 155) Νὰ διαταχθῶσι τὰ πολυώνυμα $3x^2-4+7x-x^3, 9\alpha^2-5-7\alpha$ καὶ $\omega-3\omega^2+1+\omega^3$ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἐν ἑκάστῳ περιεχομένου γράμματος.

156) Νὰ διαταχθῶσι τὰ αὐτὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ ἐν ἑκάστῳ περιεχομένου γράμματος.

157) Νὰ διαταχθῇ τὸ πολυώνυμον $-3\alpha^2\beta-\beta^3+\alpha^3+3\alpha\beta^2$ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α. Πῶς θὰ εἶναι τότε διατεταγμένον πρὸς τὸ β;

158) Νὰ ἀναχθῶσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι καὶ νὰ διαταχθῇ εἶτα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τὸ πολυώνυμον $x^2-3x^3+7x^2-6x^4+x^5-x^3+4$. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ πολυώνυμον $5-9x^2+1-2x^3+3x+x^2+7x-1$.

159) Νὰ ἀναχθῶσιν οἱ ὅμοιοι ὅροι καὶ νὰ διαταχθῇ εἶτα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ ψ τὸ πολυώνυμον $3\psi^3-12\psi^2+7\psi-5\psi^3-6+4\psi-8\psi^2+10$.

160) Νὰ γείνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ πολυωνύμου $\alpha^5-7\alpha^3\beta+9\alpha\beta^2-3\alpha^5+\alpha^3\beta-\alpha\beta^2+\beta^5$ καὶ νὰ διαταχθῇ εἶτα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ β. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ πολυώνυμον

$$\beta^2-\frac{5}{6}\beta+7\beta^2-\frac{2}{3}\beta+1-\beta^2-\frac{\beta}{12}.$$

§ 36. Βαθμὸς ἀκεραίων μονωνύμων καὶ πολυωνύ-

μων.—Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου πρός τι γράμμα καλεῖται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου ἐν τῷ μονωνύμῳ.

Τὸ μονώνυμον π. χ. $5\alpha^2\beta$ εἶναι 2ου βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα α, πρώτου δὲ πρὸς τὸ β.

Ἐπειδὴ $\gamma^0=1$, τὸ $5\alpha^2\beta$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ $5\alpha^2\beta\gamma^0$, ἤτοι εἶναι μηδενὸς βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα γ.

Γενικῶς: ***Πᾶν ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι μηδενὸς βαθμοῦ πρὸς πᾶν γράμμα μὴ περιεχόμενον εἰς αὐτό.***

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου πρὸς δύο ἢ πλείονα γράμματα ὁμοῦ καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν ἐν τῷ μονωνύμῳ τούτῳ τὰ γράμματα ταῦτα.

Τὸ μονώνυμον π.χ. $7\alpha^2\beta\gamma^3x$ εἶναι 7ου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα α,β,γ,x, τρίτου δὲ βαθμοῦ πρὸς τὰ α καὶ β, πέμπτου βαθμοῦ πρὸς τὰ α καὶ γ, κ.τ.λ.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς ἓν ἢ πλείονα γράμματα ὁμοῦ καλεῖται ὁ μέγιστος βαθμὸς τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα ταῦτα.

Τὸ τριώνυμον π. χ. x^2-5x+4 εἶναι 2ου βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα x, τὸ πολυώνυμον $\alpha\beta^2-3\alpha^2\beta^3+9\alpha^3\beta^4-8x^3\beta$ εἶναι 7ου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β.

Ἀκέραιόν τι πολυώνυμον λέγεται ὁμογενὲς πρὸς δύο ἢ πλείονα γράμματα, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.

Τὸ τριώνυμον π. χ. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ εἶναι ὁμογενὲς καὶ τοῦ 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β, τὸ δὲ πολυώνυμον $x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3$ εἶναι ὁμογενὲς καὶ τοῦ 3ου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα α καὶ x.

Ἐὰν ὁμογενὲς πολυώνυμον πρὸς δύο γράμματα εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἑνὸς τῶν γραμμάτων τούτων, θὰ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας τοῦ ἄλλου. Διότι, ἐὰν ὁ ἐκθέτης τοῦ ἑνὸς τῶν γραμμάτων τούτων ἐλαττωθῇ κατά τινα ἀριθμόν, ὁ ἐκθέτης τοῦ ἄλλου πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου) διατηρηθῇ σταθερόν.

Ἀκέραιόν τι πολυώνυμον λέγεται πλῆρες πρός τι γράμμα, ἐὰν περιέχῃ πάσας τὰς δυνάμεις τοῦ γράμματος τούτου ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης ἐν αὐτῷ περιεχομένης μέχρι τῆς μηδενικῆς συμπεριλαμβανομένης.

Τὸ πολυώνυμον π. χ. $3x^2-5x+1$ εἶναι πλῆρες πρὸς τὸ x, ἐν ᾧ ανηγμένον τό πολυώνυμον ...

Πλήρες π.χ. $3x^5+5x^4-2x^3+x^2-x+2$ περιέχον όλους τούς όρους διατεταγμένους

από του ανωτέρου μέχρι και του ...

ομογενές τό πολυώνυμον πού τό άθροισμα των δυνάμεων ... είναι τό αυτό.

όρου του

Συμμετρικόν τό πολυώνυμον πού δέν μεταβάλλεται διά της κυκλικής μεταθέσεως των γραμμάτων του

τὸ $7x^3-2x+5$ δὲν εἶναι πλῆρες, διότι λείπει ἀπ' αὐτοῦ ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ x.

Ἕκαστον ἀκέραιον καὶ πλῆρες πολυώνυμον βαθμοῦ ν πρός τι γράμμα μὴ περιέχον ὁμοίους ὅρους ἔχει τὸ ὅλον $(\nu+1)$ ὅρους.

Ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται ***συμμετρικὸν*** πρὸς τὰ ἐν αὐτῷ περιεχόμενα γράμματα, ἂν δὲν μεταβάλληται διὰ κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων τούτων. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς x,y,z, διότι, ἂν ταῦτα μετατεθῶσι κυκλικῶς, προκύπτει τὸ πολυώνυμον $y^2+z^2+x^2+2yz+2zx+2yx$, ὅπερ εἶναι προφανῶς τὸ ἀρχικόν.

Εἶναι δυνατὸν ἀκέραιον πολυώνυμον νὰ εἶναι συμμετρικὸν πρός τινα τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων γραμμάτων. Οὕτω τὸ πολυώνυμον x^2+y^2-2z+5 εἶναι συμμετρικὸν μόνον πρὸς τὰ γράμματα x καὶ y.

Ἀσκήσεις. 161). Τίνος βαθμοῦ εἶναι ἕκαστον τῶν μονωνύμων $7\alpha^2, -3x^5, \frac{2}{5}\psi^2$ καὶ $-\frac{1}{2}\omega^5$ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ περιεχόμενον γράμμα ;

162) Τίνος βαθμοῦ εἶναι ἕκαστον τῶν πολυωνύμων $2x^5-5x^4+7x-1$, $9\alpha^2-7\alpha+2$, $3\psi+7$, καὶ $5\omega^5-9\omega^4+7\omega^5-2$ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ περιεχόμενον γράμμα ; Τίνα τούτων εἶναι πλήρη ;

163) Νὰ ὁρισθῇ ὁ βαθμὸς ἑκάστου τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων πρὸς τὰ ἐν ἑκάστῳ περιεχόμενα γράμματα. α') $x^2-3x\psi+\psi^3$, β') $\alpha^5-7\alpha x^3+4\alpha^2x^5-6\alpha x^4$. γ') $\alpha^5-2\alpha\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ καὶ δ') $\frac{2}{5}\alpha^2-3\alpha x^3+x^4$. Τίνα τούτων εἶναι ὁμογενῆ;

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

α'. *Πρόσθεσις ἀφαίρεσις·*

§ **37. Πρόσθεσις ἀκεραίων πολυωνύμων.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$(3x^3-5x^2+7x+3)+(x^3+3x^2-9x-1)+(2x^3+7x^2-x+5),$$

ἤτοι νὰ εὕρωμεν ἀλγεβρικὴν παράστασιν ἰσοδύναμιν (§ 30) πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦτο.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν εἰς ἕκαστον τῶν πολυωνύμων τούτων τεθῇ ἀντὶ τοῦ x ἀριθμός τις π. χ. ὁ 2 τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἀνάγεται εἰς τὸ $(24-20+14+3)+(8+12-18-1)+(16+28-2+5)$ ὅπερ ἰσοῦται πρὸς $24-20+14+3+8+12-18-1+16+28-2+5$ τοῦτο δὲ εἶναι προφανῶς ἡ τιμὴ διὰ x=2 τοῦ πολυωνύμου.

$$3x^3-5x^2+7x+3+x^3+3x^2-9x-1+2x^3+7x^2-x+5 \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἂν θέσωμεν ἀντὶ x ἄλλον ἀριθμὸν π. χ. τὸν -5, εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως ἐξαγόμενον, ὅπερ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου (1) διὰ $x=-5$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἕπεται ὅτι τὸ πολυώνυμον (1) εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ἤτοι:

$$(3x^3-5x^2+7x+3)+(x^3+3x^2-9x-1)+(2x^3+7x^2-x+5)$$
$$=3x^3-5x^2+7x+3+x^3+3x^2-9x-1+2x^3+7x^2-x+5,$$

ἢ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$(3x^3-5x^2+7x+3)+(x^3+3x^2-9x-1)+(2x^3+7x^2-x+5)$$
$$=6x^3+5x^2-3x+7.$$

Ἄρα: ***Ἵνα προσθέσωμεν δοθέντα πολυώνυμα, σχηματίζομεν ἓν πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλους τοὺς ὅρους αὐτῶν καὶ μόνον αὐτούς· ἐκτελοῦμεν δὲ ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι.***

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἀκολούθως τιθεμένων τῶν πολυωνύμων (μετὰ τὴν ἐν ἑκάστῳ ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων) τοῦ ἑνὸς ὑπὸ τὸ ἄλλο, οὕτως ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην

$$\begin{array}{r}
3x^3-5x^2+7x+3\\
x^3+3x^2-9x-1\\
2x^3+7x^2-\ x+5\\
\hline
6x^3+5x^2-3x+7
\end{array}$$

ΣΗΜ. α'). Ἐὰν τὰ πολυώνυμα δὲν εἶναι πλήρη, ἀφήνομεν κενὸν εἰς τὴν θέσιν ἑκάστου ἐλλείποντος ὅρου, ὅπως τὴν ὑποκάτω θέσιν καταλάβῃ ὁ ἀντίστοιχος, τὸν ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλο πολυώνυμον. Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $(x^4-5x^2+x-1)+(2x^2-3)+x^5-3x^4+2x^3+6)$ διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^4 & & -5x^2 & +x & -1\\
 & & & 2x^2 & & -3\\
x^5 & -3x^4 & +2x^3 & & & +6\\
\hline
x^5 & -2x^4 & +2x^3 & -3x^2 & +x & +2
\end{array}$$

ΣΗΜ. β') Ὁ προηγούμενος κανὼν ἰσχύει προφανῶς καὶ ὅταν τινὲς τῶν προσθετέων εἶναι ἀκέραια μονώνυμα.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

164) $(2\alpha^2+3\alpha-5)+(\alpha^2-5\alpha+1)+(7\alpha^2+4\alpha-6)$.

165) $(\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)+(3\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2)+(\alpha^2+6\alpha\beta-3\beta^2)+(3\alpha^2-5\beta^2)$.

166) $(\frac{2}{3}x^3-4x^2-5x+1)+(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^2+x-2)+(-\frac{3}{5}x^2-3x+1)$.

167) $(9\alpha^3-5\alpha+7)+(2\alpha^2-4\alpha-2)+(\alpha^3-\alpha+1)+(4\alpha^2-3)$

168) $(x^4-3x^3y+7x^2y^2-y^3)+(2x^4+4x^3y-2x^2y^2-5yx+4y^3)+$
$(5x^3y-3x^2y^2+y^3)$.

169) $(3x^2-0{,}6\alpha x+2{,}3)+(x^3-1{,}5x^2+0{,}4\alpha x-0{,}5)+(2x^3+0{,}7x^2-2{,}3\alpha x+0{,}4)$
$+(0{,}3\alpha x-3x^3-2{,}2x^2-2{,}2)$.

§ 38. Ἀφαίρεσις ἀκεραίου μονωνύμου καὶ πολυωνύμου ἀπὸ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

α') Ἔστω ὅτι θέλομεν ἀπὸ τυχούσης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Π νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $+3\alpha^2x$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν παράστασιν y, ἥτις προστιθεμένη εἰς τὸ μονώνυμον $3\alpha^2x$ νὰ δίδη ἄθροισμα Π. Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι $\Pi=y+3\alpha^2x$· ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης προσθέσωμεν τὸ μονώνυμον $-3\alpha^2x$, εὑρίσκομεν ὅτι $y=\Pi+(-3\alpha^2x)$, ἤτοι $\Pi-(+3\alpha^2x)=\Pi+(-3\alpha^2x)=\Pi-3\alpha^2x$. Πράγματι δὲ $(\Pi-3\alpha^2x)+3\alpha^2x=\Pi+(-3\alpha x^2+3\alpha^2x)=\Pi$.

Ἄρα: ***Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἀκέραιον μονώνυμον, προσθέτομεν εἰς αὐτὴν τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος μονωνύμου.***

Οὕτω $(7\alpha^3+5\alpha^2x-x^2)-3\alpha^2x=7\alpha^3+5\alpha^2x-x^2+(-3\alpha^2x)=$
$$7\alpha^3+5\alpha^2x-x^2-3\alpha^2x=7\alpha^3+2\alpha^2x-x^2.$$

β′). Κατ' ἀνάλογον τρόπον σκεπτόμενοι κατανοοῦμεν ὅτι
$$\Pi-(\alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon)=\Pi-\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon.$$

Πράγματι δέ: $(\Pi-\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)+(\alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon)=\Pi$, ὡς κάτωθι φαίνεται
$$\begin{array}{r} \Pi-\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon \\ \alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon \\ \hline \Pi\qquad\qquad\qquad \end{array}$$

Ἄρα: ***Ἵνα ἀπὸ τυχούσης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον, προσθέτομεν εἰς τὴν παράστασιν ταύτην ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου καὶ ἕκαστον μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ἐκτελοῦμεν δὲ εἶτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἂν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι.***

Οὕτω: $(5x^2-7x-4)-(3x^2+3x-5)=5x^2-7x-4-3x^2-3x+5$
$=2x^2-10x+1$, $(12\alpha^2-3\beta^2)-(8\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2)=12\alpha^2-3\beta^2$
$-8\alpha^2+3\alpha\beta-4\beta^2=4\alpha^2+3\alpha\beta-7\beta^2$

Διάταξις τῶν πράξεων: $\begin{array}{r} 5x^2-7x-4 \\ -3x^2-3x+5 \\ \hline 2x^2-10x+1 \end{array}$ $\qquad\begin{array}{r} 12\alpha^2\qquad\quad-3\beta^2 \\ -8\alpha^2+3\alpha\beta-4\beta^2 \\ \hline 4\alpha^2+3\alpha\beta-7\beta^2 \end{array}$

Ἀσκήσεις: Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις.

170) $(5\alpha^3-3\alpha^2-7\alpha+2)-(\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-1)$.

171) $(x^4-7x^3+5x-3)-(3x^4+2x^3-x^2+7x-2)$.

172) $(2x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3)-(-x^3-5\alpha x^2+3\alpha^2x-2\alpha^3)$.

173) $(\alpha-\beta+2\gamma)-(-\alpha-\beta+\gamma)$.

174) $(\alpha-\beta+\gamma-\delta)-(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$.

175) $(2x^2+5x-2)-(3x^2-7x+6)$

176) $(\psi^4-5\psi^3\chi+x^2y^2-7\chi^3\psi-x^4)-(7\chi\psi^3-9x^2\psi^2+4x^3\psi-x^4+1)$.

177) $\left(\alpha^2+\frac{3}{4}\alpha\chi-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{5}{8}\alpha\chi+\frac{3}{4}\right)$.

178) $\left(x^3-7\alpha x^2+\frac{3}{4}\alpha^2x+\frac{\alpha^3}{2}\right)-\left(2x^3+\frac{\alpha x^2}{2}-\frac{1}{8}\alpha^2x+\frac{\alpha^3}{4}\right)$.

179) $\left(\frac{x^3}{5}-\frac{2\alpha^2x}{5}+\frac{5}{12}\alpha x^2-\alpha^3\right)-\left(x^3+\frac{\alpha^2x}{6}-\frac{7}{12}\alpha x^2+2\alpha^3\right)$.

180) $\left(3,4\alpha^3x-5\alpha^2x^2+\frac{1}{2}\alpha x^5-\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{2}{5}\alpha^3x-2,3\alpha^2x^2-0,5\alpha x^5+\frac{1}{4}\right)$.

181) $(x-y+2\omega+\varphi)-(x-2y+\omega-\varphi)$.

§ 39. Ἐκτέλεσις ἀλλεπαλλήλων προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων. Ἡ παράστασις $(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\alpha-\gamma)$ δηλοῖ ὅτι ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου $\alpha+\beta+\gamma$ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $\alpha-\beta+\gamma$ καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον νὰ προστεθῇ τὸ πολυώνυμον $\beta-\alpha-\gamma$. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\alpha-\gamma)=\alpha+\beta+\gamma-\alpha+\beta-\gamma+\beta-\alpha-\gamma$$
$$=-\alpha+3\beta-\gamma$$

Ὁμοίως $(9x^2-3x+1)-(5x-3)-(4x^2-2x-7)+(x^2-4x+9)=$
$9x^2-3x+1-5x+3-4x^2+2x+7+x^2-4x+9=6x^2-10x+20$.

Ἄρα: α) *Ὅταν πρὸ πολυωνύμου προσθετέου ἐγκεκλεισμένου ἐντὸς παρενθέσεως ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον + ἐξαλείφομεν τὴν παρένθεσιν καὶ γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου ὡς ἔχουσιν.*

β). *Ὅταν δὲ πρὸ πολυωνύμου προσθετέου ἐγκεκλεισμένου ἐντὸς παρενθέσεως ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον —, ἐξαλείφομεν τὴν παρένθεσιν καὶ ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον ἑκάστου ὅρου αὐτοῦ.*

Κατὰ ταῦτα $\alpha-[\beta-(\gamma-\alpha+\beta)]=\alpha-\beta+(\gamma-\alpha+\beta)$
$=\alpha-\beta+\gamma-\alpha+\beta=\gamma$ ἢ $\alpha-[\beta-(\gamma-\alpha+\beta)]=\alpha-(\beta-\gamma+\alpha-\beta)=$
$\alpha-\beta+\gamma-\alpha+\beta=\gamma$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται εὐκόλως ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὅρους τινὰς πολυωνύμου ἐντὸς παρενθέσεως καὶ ἂν μὲν πρὸ αὐτῆς θέσωμεν τὸ +, οἱ ὅροι οὗτοι γράφονται, ὡς ἔχουσιν ἐν τῷ πολυωνύμῳ, ἂν δὲ πρὸ τῆς παρενθέσεως τεθῇ τὸ —, ἕκαστος τῶν ὅρων τίθεται μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Οὕτω $\alpha-\beta+\gamma-\delta=\alpha-\beta+(\gamma-\delta)$ ἢ $\alpha-\beta+\gamma-\delta=\alpha-(\beta-\gamma+\delta)$ ἢ $\alpha-\beta+\gamma-\delta=\alpha+\gamma-(\beta+\delta)$ κτλ.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις

182) $(2x+3)-(7x-5)+(-3x-2)$.

183) $(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)-(2\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2)+(\alpha^2-\alpha\beta)$.

184) $\alpha-[\beta-(\alpha+\gamma)]$.

185) $(\alpha+\beta+\gamma)-[\alpha-(\beta-\alpha+\gamma)]$.

186) $(\alpha+\beta-\gamma)+(\alpha-\beta+2\gamma)-(-\alpha-\beta+\gamma)$.

187) $(x+y+\omega)-(x-y+\omega)+(x+y-\omega)-(-x+y-\omega)$.

188) $(7x^2-\left[(5x+3)-[(x^2-3x+1)-(2x^2+x-1)]\right]$.

189) $[2x^2-(x-3x^2)-7x^3]-[(x^3-5x)-9x^2]$.

190) $(x-y)-\left[[x-(y-\omega)]-[(x-\omega)-y]\right]$.

191) $\left[22\alpha+[24\beta-(3\omega+2\beta-4\alpha)+2\omega]\right]-[2\omega-(\alpha+\beta)]$.

192) $(\alpha+2\beta-3\gamma+4\delta)-[(2\alpha-\beta)-(4\gamma-3\delta)]-\left[-[5\delta-2\alpha-(3\beta+\gamma)]\right]$

γ΄. Πολλαπλασιασμός.

§ 40. Α΄. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων. Ἐπειδὴ ἕκαστον ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων, τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι γινόμενον γινομένων καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἰσοῦται πρὸς γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας αὐτῶν καὶ μόνον αὐτούς. Οὕτω

$$(3\alpha^2\beta)\,(7\alpha\beta^2x)=3\alpha^2\beta\cdot 7\alpha\beta^2x.$$

Ἐπειδὴ δὲ $3\alpha^2\beta\cdot 7\alpha\beta^2x=21\,\alpha^3\beta^3x$, διότι εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν, ἕπεται ὅτι $(3\alpha^2\beta)\cdot(7\alpha\beta^2x)=21\alpha^3\beta^3x$. Ὁμοίως

$$(2\alpha\chi^2\psi)\cdot(3\alpha\chi\psi)=6\alpha^2\chi^3\psi^2,\ (5\alpha\chi^2)\cdot(3\alpha\beta\chi)\cdot(4\alpha\beta^2\chi\psi)=60\alpha^3\beta^3\chi^4\psi,$$

$$(-3\alpha\beta^2\gamma)\cdot(2\alpha\beta\gamma)\cdot(\alpha^2\beta\gamma^2)=-6\alpha^4\beta^4\gamma^4$$

Ἄρα : ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραια μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν πάντα τὰ ἐν τοῖς μονωνύμοις ὑπάρχοντα γράμματα ἕκαστον δὲ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὰ μονώνυμα.***

ΣΗΜ. Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων προκύπτει ὅτι : *Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου ἀκεραίων μονωνύμων πρὸς ἓν ἢ πλείονα γράμματα εἶναι ἄθροισμα τῶν βαθμῶν αὐτῶν πρὸς τό γράμμα ἢ τὰ γράμματα ταῦτα.*

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα.

193) $(2\alpha^2)\cdot(\alpha\beta)\cdot(\alpha^2\beta^3)$. 194) $(3\alpha x)\,(-5\alpha^2x)$.

195) $\left(\frac{2}{5}\right)(5\alpha\beta x)$. 196) $(-3\alpha^2x^3y^3)\cdot(-4\alpha xy)$.

197) $(9\alpha^2\chi\psi)\cdot\left(\frac{1}{3}\alpha\chi^2\right)\cdot(-2\alpha\chi\psi)$. 198) $\left(\frac{3}{4}\alpha x^2y\right)\left(-\frac{2}{3}\alpha^2\beta\chi\psi\right)\cdot(-2\alpha\beta^2\chi\psi^3)$

199) $\left(\frac{1}{5}\alpha^2\chi\right)(3\alpha\chi\psi)\cdot(-2\alpha^2\chi^2\psi)$. 200) $(0{,}5\alpha^2\chi)\cdot(0{,}03\alpha^3\psi^2)\left(\frac{1}{15}\alpha\beta\chi\psi\right)$

201) $(-3{,}5\alpha^2\chi^5y)\left(-\frac{1}{4}\alpha\chi y^5\right)\left(-\frac{4}{7}\alpha x^2y^4\right)(-10\alpha x^3y^2)$.

202) $\left(-\frac{4}{3}\alpha xy\omega\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\alpha^2xy\omega\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\alpha x^2y\omega\right)\cdot(-8\alpha^2y\omega)$.

§ 41. Δυνάμεις ἀκεραίων μονωνύμων.—*Δύναμις ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καλεῖται πᾶν γινόμενον παραγόντων ἴσων πρὸς αὐτήν.* Κατὰ ταῦτα $(2\alpha\beta^3)^2=(2\alpha\beta^3)\cdot(2\alpha\beta^3)=4\alpha^2\beta^6$,

$$(3\alpha^2\chi\psi^4)^3=(3\alpha^2\chi\psi^4)\cdot(3\alpha^2\chi\psi^4)\,(3\alpha^2\chi\psi^4)=27\alpha^6\chi^3\psi^{12},$$

$$(\alpha\chi\psi^\tau)^\lambda=(\alpha\chi\psi^\tau)\,(\alpha\chi\psi^\tau)\ldots\ldots(\alpha\chi\psi^\tau)=\alpha^\lambda\chi^\lambda\psi^{\tau\lambda}.$$

Ἄρα : ***Ἵνα ὑψώσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν συντελεστὴν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας πάντων τῶν γραμμάτων ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.***

Ἐργαζόμενοι ὡς καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς βεβαιούμεθα ὅτι αἱ δυνάμεις τῶν ἀκεραίωνμονωνύμων καὶ γενικώτερον τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἔχουσιν ἁπάσας τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι διὰ πᾶσαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν Π εἶναι $\Pi^1=\Pi, \Pi^0=1$ $\Pi^{-\nu}=\frac{1}{\Pi^\nu}$.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις :

203) $(2\alpha)^2$, $(3\alpha^2)^3$, $(5\alpha^2\beta)^3$.

204) $\left(-3\alpha^2\beta^2\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\alpha\beta\chi^3\right)^5$.

205) $(-2\alpha^2xy^3)^4$, $\left(\frac{1}{3}\alpha\beta^5x^2y^5\right)^3$, $\left(-\frac{2}{5}x^2y^5\omega^4\right)^4$

206) $\left[(-3\alpha^2\beta)^2\right]^3$, $\left[\left(\frac{1}{2}\chi y^5\omega^4\right)^5\right]^2$, $\left[(-2\alpha^3\gamma^3)^2\right]^4$

207) $(5\alpha^3x)^{-3}$, $(x^5y^2)^{-2}$, $\left(\frac{2}{5}\alpha^5x^5y\right)^{-4}$, $(0{,}03\alpha^4xy^5)^{-2}$.

208) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $(3\alpha x^2).(5\alpha^2y)^0$ καὶ τὸ $(x^5).(\alpha xy)^0.(\alpha^2\beta)^0.(-\alpha\beta^2)^3$.

§ 42. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(2\chi^2-3\chi+1).(5\chi^2)$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν παράστασιν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦτο. Ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ χ ὡρισμένον ἀριθμὸν π.χ. τὸν 3, ὁ μὲν πολλαπλασιαστέος γίνεται $(18-9+1)$, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς γίνεται $5.9=45$· τὸ ζητούμενον ἄρα γινόμενον ἀνάγεται εἰς τὸ $(18-9+1).45$, ὅπερ ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ $18.45-9.45+1.45$.

Τοῦτο δὲ εἶναι προφανῶς ἡ τιμὴ τοῦ $(2\chi^2).(5\chi^2)-(3\chi).(5\chi^2)+1\,(5\chi^2)$. (1) διὰ $\chi=3$. Ὁμοίως, ἂν ἀντὶ χ θέσωμεν ἄλλον ἀριθμὸν π. χ. τὸν (-5), εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον, ὅπερ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου (1) διὰ $\chi=-5$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἕπεται ὅτι :

$$(2\chi^2-3\chi+1).(5\chi^2)=(2\chi^2).(5\chi^2)-(3\chi)(5\chi^2)+1.(5\chi^2)=10\chi^4-15\chi^3+5\chi^2.$$

Ὁμοίως $(\alpha^3-5\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3)(-3\alpha\beta)$

$$=\alpha^3(-3\alpha\beta)+(-5\alpha^2\beta)(-3\alpha\beta)+(3\alpha\beta^2)(-3\alpha\beta)+(-\beta^3)(-3\alpha\beta)$$
$$=-3\alpha^4\beta+15\alpha^3\beta^2-9\alpha^2\beta^3+3\alpha\beta^4.$$

Γενικῶς : $(\alpha+\beta+..+\tau).\lambda=\alpha\lambda+\beta\lambda+...+\tau\lambda$· ἔνθα α.β... καὶ λ εἶναι ἀκέραια μονώνυμα.

Ἄρα : ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.***

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα.

209) $(x^2-3x+2).(2x)$, $(3x^3-5x^2+7x-2).(2x)$, $(\alpha^5-5\alpha+10.(-2\alpha)$

210) $(-\chi^3+2\alpha\chi^2-3\alpha\chi+\alpha^3).(-2\alpha\chi^2)$, $\left(\frac{3}{4}\chi^2-7\chi-3\right).\left(-\frac{4}{7}\chi\right)$.

211) $(2\psi^2-\chi\psi+\chi^2)\left(\frac{1}{2}\chi\psi\right)$,

$$\left(-3\chi\psi+\frac{1}{2}x^3\psi^2-\frac{3}{8}\chi^4y^3+\frac{3}{8}\chi^5\right)\left(-\frac{40}{7}\chi^3\psi^2\right);$$

$$\left(0{,}6\alpha^2-3{,}5\alpha\beta+7\beta\right).\left(2{,}3\alpha\beta\right).$$

212) $\left(\frac{1}{4}\alpha\chi y^3-\frac{5}{6}\alpha^2\chi y^2+\frac{7}{12}\alpha^3y\right).\left(-12\alpha^3\chi^2y\right)$.

§ **43. Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον πολυώνυμον.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(3\chi^2-5\chi+3).(2\chi+1)$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν παράστασιν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦτο. Παρατηροῦντες ὅτι ἕκαστον τῶν πολυωνύμων τούτων δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ γίνεται ἄθροισμα ἀριθμῶν συμπεραίνομεν ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου γινομένου πρέπει, ***νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα. Ἐκτελοῦμεν δὲ ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἂν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι.***

Κατὰ ταῦτα $(3\chi^2-5\chi+4)\,(2\chi+1)=6\chi^3-10\chi^2+8\chi+3\chi^2-5\chi+4=$ $6\chi^3-7\chi^2+3\chi+4$. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω

$$\begin{array}{r}
3\chi^2-5\chi+4 \\
2\chi+1 \\
\hline
6\chi^3-10\chi^2+8\chi \\
3x^2-5x+4 \\
\hline
6\chi^3-7\chi^2+3\chi+4
\end{array}$$

Ὁμοίως τὸ γινόμενον $(2\alpha^4-3\alpha^2+7\alpha-1).(3\alpha^3-5\alpha^2+2\alpha-2)$ εὑρίσκεται ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{array}{l}
2\alpha^4-3\alpha^2+7\alpha-1 \\
3\alpha^3-5\alpha^2+2\alpha-2 \\
\hline
6\alpha^7\quad-9\alpha^5+21\alpha^4-3\alpha^3 \\
\quad-10\alpha^6\quad+15\alpha^4-35\alpha^3+5\alpha^2 \\
\qquad 4\alpha^5\quad-6\alpha^3+14\alpha^2-2\alpha \\
\qquad\quad-4\alpha^4\quad+6\alpha^2-14\alpha+2 \\
\hline
6\alpha^7-10\alpha^6-5\alpha^5+32\alpha^4-44\alpha^3+25\alpha^2-16\alpha+2
\end{array}$$

Ἤτοι: ***Διατάσσομεν ὁμοίως τὰ δύο πολυώνυμα, γράφομεν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ σύρομεν ὑπ' αὐτὸν ὁριζόντιον γραμμήν. Πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὸν α', β', γ', κτλ. ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, οὕτως ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Σύρομεν τέλος ὑπὸ τὸ τελευταῖον μερικὸν γινόμενον*** *ὁριζόντιον γραμμὴν καὶ γράφομεν ὑπ' αὐτὴν τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους πάντων τῶν μερικῶν γινομένων.*

Παρατηρήσεις. Ἐὰν τὰ δύο πολυώνυμα εἶναι ἀνηγμένα καὶ διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος x, ὁ α' ὅρος ἑκατέρου ἔχει δύναμιν τοῦ x μεγαλυτέραν ἢ οἱ ἄλλοι ὅροι αὐτοῦ, ὁ δὲ τελευταῖος μικροτέραν. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ γινόμενον τῶν μὲν πρώτων ὅρων ἔχει δύναμιν τοῦ x μεγαλυτέραν, τῶν δὲ τελευταίων μικροτέραν ἢ τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα αὐτῶν. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

α'.) ***Τὸ πρῶτον καὶ τὸ τελευταῖον μερικὸν γινόμενον δύο ἀνηγμένων καὶ ὁμοίως διατεταγμένων ἀκεραίων πολυωνύμων πρὸς οὐδένα ἄλλο μερικὸν γινόμενον εἶναι ὅμοιον.***

β') ***Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὅρους ὀλιγωτέρους τῶν δύο.*** Ὅτι δὲ δύναται τὸ γινόμενον να ἔχῃ δύο μόνον ὅρους φαίνεται ἐκ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων,

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ x-1 \\ \hline x^3+x^2+x \\ -x^2-x-1 \\ \hline x^3-1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \chi^3-\alpha\chi^2+\alpha^2\chi-\alpha^3 \\ \chi+\alpha \\ \hline \chi^4-\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2-\alpha^3\chi \\ \alpha\chi^3-\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi-\alpha^4 \\ \hline \chi^4-\alpha^4 \end{array}$$

γ'.) ***Ὁ βαθμὸς γινομένου ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι ἄθροισμα τῶν βαθμῶν αὐτῶν πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα.***

δ.') Ἐὰν τὰ πολυώνυμα εἶναι ὁμογενῆ, ἤτοι ἂν ὅλοι οἱ ὅροι ἑκάστου εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς δύο ἢ πλείονα γράμματα, ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα, αὐτῶν θὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς τὰ αὐτὰ γράμματα. Κατ' ἀκολουθίαν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερικῶν τούτων γινομένων εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.

Ἄρα: ***Τὸ γινόμενον ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον.***

Οὕτω τῶν ὁμογενῶν πολυώνυμον $\chi^3-\alpha\chi^2+\alpha^2\chi-\alpha^3$ καὶ $\chi+\alpha$ τὸ γινόμενον, ὅπερ προηγουμένως εὑρέθη, εἶναι $\chi^4-\alpha^4$, ἤτοι ὁμογενὲς πρὸς τὰ αὐτὰ γράμματα.

Ὁμοίως ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὁμογενῶν πολυωνύμων $\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-4\beta^3$ καὶ $\alpha^2-\alpha\beta+2\beta^2$ εὑρίσκομεν γινόμενον $\alpha^5-3\alpha^4\beta+7\alpha^3\beta^2-11\alpha^2\beta^3+10\alpha\beta^4-8\beta^5$, τὸν ὁποῖον εἶναι ἐπίσης ὁμογενὲς πολυώνυμον.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα:

213) $(3x^2-5x+1).(7x+2)$, $(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha-1).(2\alpha^2-\alpha+3)$.

214) $(6x^2-7x\psi+\psi^2)(2x+3\psi)$, $(\alpha^3+2\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3).(2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)$.

215) $(\omega^4-3\omega^3x+2\omega x^2-x^3).(\omega^3-2\omega x+x)$, $(x^5-3x^2+2x-1).(x^4-2x^3+5x)$.

216) $\left(\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha + 8\right) . \left(\alpha - \frac{3}{4}\right)$.

217) $\left(2x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) . \left(\frac{1}{20}x^2 + \frac{5}{20}x + \frac{3}{40}\right)$.

218) $\left(5x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}\right) . \left(\frac{12}{5}x^2 - 12x + \frac{24}{5}\right)$.

219) $(2\chi^5 - 3\chi + 4) . \left(\frac{7}{2}\chi + 2\right)$

220) $(x^4 - 3\alpha^2 x^3 + 7\alpha^5 x^2 - \alpha^4) . (2x^3 + 5\alpha x^2 - 2\alpha^3)$.

221) $(10x^2 + 2\alpha\chi + 4\alpha^2) . (\chi - 2\alpha)$.

222) $(\chi^5 + \alpha\chi^4 + \alpha^2\chi^2) . (\alpha^3 x^5 + \alpha^4 x^2 + \alpha^5)$.

Ἀξιοσημείωτοι ταὐτότητες.

§ 44. **Α΄. Τετράγωνον δυωνύμου.** Παρατηροῦντες ὅτι $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta) . (\alpha+\beta)$ καὶ $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta) . (\alpha-\beta)$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\begin{array}{rr} & \alpha+\beta \\ & \alpha+\beta \\ \hline \alpha^2+\alpha\beta & \\ & \alpha\beta+\beta^2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \alpha-\beta \\ & \alpha-\beta \\ \hline \alpha^2-\alpha\beta & \\ & -\alpha\beta+\beta^2 \\ \hline \end{array}$$

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, \quad (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $-2\alpha\beta = 2\alpha(-\beta)$, αἱ ταὐτότητες αὗται ἐκφράζουσιν ὅτι: ***Τὸ τετράγωνον δυωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ὅρων τούτων.*** Οὕτω: $(\chi+\psi)^2 = \chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2$, $(\chi+2)^2 = \chi^2 + 4\chi + 4$, $(2\alpha+1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1$, $(3\alpha^2 - 2\beta)^2 = 9\alpha^4 - 12\alpha^2\beta + 4\beta^2$, $(\chi^2 - 3\psi^2)^2 = \chi^4 - 6\chi^2\psi^2 + 9\psi^4$.

Ἐὰν τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας (1) ἀναγνώσωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἤτοι: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2$ καὶ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2$ (2), βλέπομεν ὅτι: ***Ἐὰν δύο ὅροι τριωνύμου εἶναι τέλεια τετράγωνα, ὁ δὲ ἄλλος εἶναι διπλάσιον γινόμενον τῶν βάσεων τῶν τετραγώνων τούτων, τὸ τριώνυμον εἶναι τετράγωνον τοῦ δυωνύμου, ὅπερ ἀποτελοῦσιν αἱ βάσεις τῶν τετραγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχει τὸ τριώνυμον. Οὕτω:*** $\chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2 = (\chi+\psi)^2$, $\omega^2 - 2\omega\varphi + \varphi^2 = (\omega-\varphi)^2$, $4\chi^2 + 4\chi\psi + \psi^2 = (2\chi+\psi)^2$, $9\alpha^2 - 12\alpha\beta + 4\beta^2 = (3\alpha - 2\beta)^2$, $\chi^4 - 2\chi^2 + 1 = (\chi^2 - 1)^2$.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ παραστάσεις.

223) $(2\chi-\psi)^2$, $(3\chi-\psi^2)^2$, $(\chi-3\psi)^2$, $(7\chi-2\psi)^2$.

224) $(\alpha^2+2\chi)^2$, $(3\alpha^2+5\psi^2)^2$, $(\alpha^2\chi+\beta^2\psi)^2$, $(4\alpha^2-3\beta^2)^2$, $(\alpha\chi^2-3\beta\psi^2)^2$.

225) $(\alpha^2+\beta^2)^2$, $(\alpha^5\chi^2-\beta^2\psi^3)^2$, $(1+\chi^2)^2$, $(1-\chi^3)^2$.

226) Ποῖα ἐκ τῶν τριωνύμων $\omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha^2$, $\chi + \chi\psi + \psi^2$, $\alpha^2 + \chi^2 + 3$, $\chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2$ εἶναι καὶ ποῖα δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα; Νὰ συμπτυχθῇ ἕκαστον τῶν τελείων τετραγώνων.

227) Τὸ αὐτὸ διὰ τριώνυμα $\chi^2 - 4\beta\chi + 4\beta^2$, $\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2$, $9\psi^2 - 12\chi\psi + \chi^2$, $\alpha^2\chi^2 + 4\alpha\beta\chi\psi + 4\beta^2\psi^2$.

Ποῖον ὅρον πρέπει νὰ προσλάβῃ ἕκαστον τῶν ἀκολούθων δυωνύμων, ὅπως καταστῇ τέλειον τετράγωνον;

228) $\alpha^2+2\alpha\beta$, $x^2+\psi^2$, $4\alpha\beta+\beta^2$.

229) $9x^2-12x\psi$, $4x^2+9y^2$, $4x^2+9$, $1-2\chi$.

230) $x^2+\beta\chi$, $4x^2\psi^4-8\chi\psi^3\omega$, $1-2\alpha x^2\psi$, $x^2+\alpha\beta x$.

231) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκατέρα τῶν παραστάσεων $(4+\beta^2)(1+x^2)-(\beta+2\chi)^2$ καὶ $(\alpha^2+9)(x^2+4)-(\alpha\chi+6)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

232) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου ταὐτότητος (τοῦ Lagrange)

$$(\alpha^2+\beta^2).(x^2+\psi^2)-(\alpha\chi+\beta\psi)^2=(\alpha\psi-\beta\chi)^2.$$

233) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\alpha^2+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2-2\alpha\beta$.

334) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ δυνάμεις $(\alpha^\lambda+\beta^\nu)^2$, $(\alpha^\lambda-\beta^\nu)^2$, $(\chi^{2\lambda}-y^{3\nu})^2$,

235) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2$.

236) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ δυνάμεις

$$\left(\frac{2}{3}\alpha\beta+3\alpha\right)^2, \left(\alpha^2\chi-\frac{1}{2}\alpha\chi^2\right)^2, \left(5\alpha^5y-\frac{3}{5}\alpha y^2\right)^2, \left(\frac{1}{4}\alpha^2\beta-\frac{5}{8}\alpha\beta^2\chi\right)^2$$

237) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

§ 45. ΙΒ'. Γινόμενον ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν παραστάσεων.

Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν $(\alpha+\beta)$ ἐπὶ $(\alpha-\beta)$, ὡς κάτωθι φαίνεται,

$$\begin{array}{r} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \\ \hline \alpha^2+\alpha\beta \qquad \\ -\alpha\beta-\beta^2 \\ \hline \alpha^2-\beta^2 \qquad \end{array}$$

εὑρίσκομεν ὅτι: $\boxed{(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2.}$ (3)

Ἄρα: ***Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο παραστάσεων ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίστοιχον διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.***

Οὕτω: $(\chi+\psi).(\chi-\psi)=\chi^2-\psi^2$, $(2\chi+\alpha)\ (2\chi-\alpha)=4\chi^2-\alpha^2$, $(3\alpha^2+2\psi).(3\alpha^2-2\psi)=9\alpha^4-4\psi^2$, $(5\alpha^2\chi+3\alpha\chi^2).(5\alpha^2\chi-3\alpha\chi^2)$ $=25\alpha^4\chi^2-9\alpha^2\chi^4$

Ἐὰν τὴν ἰσότητα (3) ἀναγνώσωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἤτοι $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)$, (4)

συμπεραίνομεν ὅτι: ***Διαφορὰ δύο τετραγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων τῶν τετραγώνων τούτων.***

Οὕτω: $\omega^2-\varphi^2=(\omega+\varphi)(\omega-\varphi)$, $4\chi^2-\psi^2=(2\chi+\psi).(2\chi-\psi)$,

$9\alpha^4-4\beta^2=(3\alpha^2-2\beta).(3\alpha^2+2\beta)$, $\dfrac{\chi^2}{4}-\dfrac{\psi^2}{9}=\left(\dfrac{\chi}{2}+\dfrac{\psi}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{\chi}{2}-\dfrac{\psi}{3}\right)$.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα.

238) $(\chi+2\psi).(\chi-2\psi),(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2),(3\alpha^2+\chi^2).(3\alpha^2-\chi^2),$
$(\chi^2+5\psi^2)(\chi^2-5\psi^2).$

239) $(\alpha\chi^2+\beta\psi^2)(\alpha\chi^2-\beta\psi^2),\ (\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{3}).\ (\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{3}).$

240) $(5\alpha^2\chi+3\beta\chi^2).(5\alpha^2\chi-3\beta\chi^2),\ (\frac{2}{5}\alpha\chi^3y+\frac{1}{2}\beta^2xy^3).\left(\frac{2}{5}\alpha\chi^3y-\frac{1}{2}\beta^2\chi y^3\right).$
$\left(\frac{5}{8}\alpha^3\chi^2\omega-7\beta^2\gamma^3\chi\omega\right).(\frac{5}{8}\alpha^3\chi^2\omega+7\beta^2\gamma^5\chi\omega).$

241) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ ἀκόλουθα δυώνυμα.
$(\alpha^2-4),\ (\chi^2-\alpha^2),(4\alpha^2-9),\ (4\chi^2-16\psi^2).$

242) $(\alpha^2\chi^2-\beta^2\psi^2),(9\alpha^2\chi^2-\beta^4),(25\chi^2\psi^4\omega^2-9\alpha^2\beta^2),\ (\frac{\chi^2}{16}-\frac{\psi^2}{25}),$

243) $\left(\frac{9\gamma^2}{4}-\frac{4\beta^2}{9}\right),\ \left(\frac{\alpha^2\psi^4\omega^6}{9}\right)-\left(\frac{\beta^4x^2\omega^2}{4}\right).$

244) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια ἑκάστης τῶν ἀκολούθων ταὐτοτήτων.

245) $(\alpha-3\beta)^2-(3\beta-\alpha)^2=0,\ (7x^2-3\psi^2)^2-(3\psi^2-7x^2)^2=0,$

246) $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\gamma-\alpha-\beta)^2=0$ καὶ $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta.$

247) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\alpha+2\beta)^2-(\alpha+2\beta).(\alpha-2\beta)-4\alpha\beta.$

248) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα
$(x^\alpha+y^\beta).(x^\alpha-y^\beta),\ (\alpha^{2\lambda}+\beta^{3\nu}).(\alpha^{2\lambda}-\beta^{3\nu}).$

249) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma),(x^2-y^2+\omega^2)(x^2+y^2-\omega^2),(\alpha\beta^2+\alpha^2-\alpha^3)(\alpha^2-\alpha\beta^2+\alpha^5)$

§ **46. Γ΄. Κύβος δυωνύμου.** Ἐπειδὴ ὡς γνωστόν, εἶναι

$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta)$

$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

ὡς παραπλεύρως φαίνεται,

$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\ \alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \end{array}$$

ἕπεται ὅτι $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3.$ (4)

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι $-3\alpha^2\beta=3\alpha^2(-\beta), 3\alpha\beta^2=3\alpha(-\beta)^2$ καὶ $-\beta^3=(-\beta)^3$, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ταὐτότητες (4) ἐκφράζουσιν ὅτι ; ***Ὁ κύβος δυωνύμου ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κύβους τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὸ τριπλάσιον γινόμενον ἑκατέρου τῶν ὅρων τούτων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου.***

Διὰ νὰ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα διατεταγμένον γράφομεν κατὰ σειράν, τὸν κύβον τοῦ πρώτου ὅρου, τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου ***τοῦ α΄ ἐπὶ τὸν β΄, τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ*** τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ τέλος τὸν κύβον τοῦ β΄ ὅρου. Κατὰ τὴν σειρὰν ταύτην, ἐὰν ὁ α΄ ὅρος τοῦ δυωνύμου ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ + ὁ δὲ β΄ τὸ — οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος θὰ ἔχωσι τὰ σημεῖα + καὶ — ἐναλλάξ. Οὕτω

$$(\chi+\psi)^3=\chi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2+\psi^3, \quad (\omega-\varphi)^3=\omega^3-3\omega^2\varphi+3\omega\varphi^2-\varphi^3$$

$$(\alpha+2\chi)^3=\alpha^3+3\alpha^2(2\chi)+3\alpha(2\chi)^2+(2\chi)^3=\alpha^3+6\alpha^2\chi+12\alpha\chi^2+8\chi^3.$$

$$(2\alpha+3\chi)^3=(2\alpha)^3+3(2\alpha)^2.(3\chi)+3(2\alpha).(3\chi)^2+(3\chi)^3$$
$$=8\alpha^3+36\alpha^2\chi+54\alpha\chi^2+27\chi^3,$$

$$(\psi-3\alpha)^3=\psi^3+3\psi^2.(-3\alpha)+3\psi(-3\alpha)^2+(-3\alpha)^3$$
$$=\psi^3-9\alpha\psi^2+27\alpha^2\psi-27\alpha^3.$$

$$(2\chi-4\psi)^3=(2\chi)^3+3(2\chi)^2.(-4\psi)+3(2\chi)(-4\psi)^2+(-4\psi)^3$$
$$=8\chi^3-48\chi^2\psi+96\chi\psi^2-64\psi^3.$$

Ἐὰν τὰς ταυτότητας (4) ἀναγνώσωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἤτοι:

$$\begin{aligned} \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3 \\ \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3&=(\alpha-\beta)^3 \end{aligned} \qquad (5)$$

συμπεραίνομεν ὅτι: ***Ἐὰν πολυώνυμον ἐκ τεσσάρων ὅρων ἀποτελούμενον περιέχῃ δύο κύβους καὶ τὸ τριπλάσιον γινόμενον τῆς βάσεως ἑκατέρου τῶν κύβων τούτων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης, τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι κύβος τοῦ δυωνύμου, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ βάσεις τῶν κύβων, οὕς περιέχει τὸ πολυώνυμον.***

Οὕτω $\chi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2+\psi^3=(\chi+\psi)^3$, $\omega^3-3\omega^2\varphi+3\omega\varphi^2-\varphi^3=(\omega-\varphi)^3$,

$$8\alpha^3+12\alpha^2\chi+6\alpha\chi^2+\chi^3=(2\alpha)^3+3(2\alpha)^2.\chi+3(2\alpha)\chi^2+\chi^3=(2\alpha+\chi)^3,$$

$$\psi^3-9\beta\psi^2+27\beta^2\psi-27\beta^3=\psi^3+3\psi^2(-3\beta)+3\psi(-3\beta)^2+(-3\beta)^3$$
$$=(\psi-3\beta)^3.$$

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ παραστάσεις

250) $(2\chi+\psi)^3$, $(2\chi-\psi)^3$, $(\alpha^2+\chi^2)^3$, $(\alpha^2-\chi^2)^3$.

251) $(3\alpha^2+\psi^2)^3$, $(3\alpha^2-\psi^2)^3$, $(3\alpha^2-2\psi^2)^3$, $(\chi+1)^3$, $(\chi-1)^3$.

252) $(\alpha^2\chi+\alpha\chi^2)^3$, $(4\chi^2-3\psi^3)^3$.

253). Ποῖον ὅρον πρέπει νὰ προσλάβῃ τὸ τριώνυμον $\alpha^3+6\alpha^2\beta+8\beta^3$ διὰ νὰ γείνῃ κύβος δυωνύμου; Ποῖον δὲ τὸ $\alpha^3\chi^3+12\alpha\beta^2\chi-8\beta^3$.

254). Ποίους ὅρους πρέπει νὰ προσλάβῃ τὸ δυώνυμον $27\chi^3+\psi^3$ καὶ ποίους τὸ $8\alpha^3-36\alpha^2\beta$, ὅπως ἑκάτερον καταστῇ κύβος δυωνύμου;

255) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

256) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\chi+\psi)^3-(\chi-\psi)^3-2\psi^3$.

257) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις: $(2\alpha+\beta)^3+(2\alpha-\beta)^3-4\alpha(4\alpha^2+3\beta^2)$.

258) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(\chi^2+y^2)^3-(\chi^2-y^2)^3-2y^2(3\chi^4+y^4)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χ καὶ y.

259) Νὰ καταστῇ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις $(1+\alpha^2)^3-3\alpha^2(1+\alpha^2)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ αὐτῆς διὰ $\alpha=-1$.

§ **47. Δ΄ Τετράγωνον πολυωνύμου.** Ἐπειδὴ $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$, ἕπεται ὅτι $(\alpha+\beta+\gamma)^2=[(\alpha+\beta)+\gamma]^2$. Ἐπειδὴ δὲ $[(\alpha+\beta)+\gamma]^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$, ἕπεται ὅτι $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma.}$

Ομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta. \quad (6)$$

Ἄρα: ***Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ὅρων αὐτοῦ λαμβανομένων ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.*** Οὕτω:

$$(2\chi^2+3\chi+1)^2=4\chi^4+9\chi^2+1+12\chi^3+4\chi^2+6\chi=4\chi^4+12\chi^3+13\chi^2+6\chi+1,$$

$$(3\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)^2=9\alpha^4+9\alpha^2\beta^2+\beta^4-18\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3$$
$$=9\alpha^4-18\alpha^3\beta+15\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3+\beta^4.$$

$$(4+2\alpha+\alpha^2+3\alpha^3)^2=16+4\alpha^2+\alpha^4+9\alpha^6+16\alpha+8\alpha^2+24\alpha^3+4\alpha^3$$
$$+12\alpha^4+6\alpha^5=16+16\alpha+12\alpha^2+28\alpha^3+13\alpha^4+6\alpha^5+9\alpha^6.$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Ἐὰν πολυώνυμον περιέχῃ μόνον τετράγωνά τινα καὶ τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν βάσεων τῶν τετραγώνων τούτων λαμβανομένων ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ βάσεις τῶν τετραγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχει τὸ δοθὲν πολυώνυμον. Οὕτως·

$$\chi^2+\psi^2+\omega^2+2\chi\psi+2\chi\omega+2\psi\omega=(\chi+\psi+\omega)^2$$
$$\chi^2+\psi^2+\omega^2-2\chi\psi+2\chi\omega-2\psi\omega=(\chi-\psi+\omega)^2$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\alpha\delta-2\beta\gamma+2\beta\delta-2\gamma\delta=(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2.$$

Ἀσκήσεις. 260) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ παραστάσεις $(\alpha+\beta-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta-\gamma)^2$, $(2\alpha-3\beta-\gamma)^2$, $(\chi^2+2\chi-1)^2$.

261) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ παραστάσεις $(\psi^3-2\psi^2+3\psi-4)^2$ καὶ $(\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi-\alpha^4)^2$.

262) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\alpha+\beta-\gamma+\delta)^2-(\gamma-\alpha-\beta-\delta)^2$ καὶ ἡ $(\chi^2-3\chi+7)^2-(3\chi-\chi^2-7)^2$.

263) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταὐτότητος.
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\alpha(\beta+\gamma)-2\beta\gamma.$$

264) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\alpha^3-\beta^3+\gamma^3-\delta^3)^2+(\beta^3-\alpha^3+\delta^3-\gamma^3)^2+4\alpha^3(\beta^3-\gamma^3+\delta^3)+4\beta^3(\gamma^3-\delta^3)+4\gamma^3\delta^3$.

§ 48. Ε'. Γινόμενον δύο δυωνύμων ἐχόντων κοινὸν ὅρον. Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ δυωνύμου $(\chi+\alpha)$ ἐπὶ τὸ $(\chi+\beta)$, ὡς παραπλεύρως φαίνεται, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\begin{array}{r} \chi+\alpha \\ \chi+\beta \\ \hline \chi^2+\alpha\chi \qquad \\ \beta\chi+\alpha\beta \\ \hline \end{array}$$

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta \quad (7)$$

Ἄρα : *Τὸ γινόμενον δύο δυωνύμων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὸν ὅρον, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τετράγωνον τοῦ κοινοῦ ὅρου, ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ κοινοῦ ὅρου ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ κοινῶν ὅρων καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν μὴ κοινῶν ὅρων.*

Οὕτω : $\boxed{(\chi+3\alpha)\,(\chi+\alpha)=\chi^2+4\alpha\chi+3\alpha^2,}$

$(2\alpha+\beta)(2\alpha+2\gamma)=4\alpha^2+2\alpha\,(2\gamma+\beta)+2\beta\gamma=4\alpha^2+2\alpha\beta+4\alpha\gamma+2\beta\gamma.$

$(\chi+\alpha).(\chi-\beta)=\chi^2+(\alpha-\beta)\,\chi-\alpha\beta=\chi^2+\alpha\chi-\beta\chi-\alpha\beta,$

$(7\alpha-3\chi)\,(7\alpha+5\chi)=49\alpha^2+2\chi.7\alpha-15\chi^2=49\alpha^2+14\alpha\chi-15\chi^2.$

Ἀντιστρόφως : *Πᾶν πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἢ δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$, ἰσοῦται πρὸς γινόμενον τῆς μορφῆς $(\chi+\alpha).(\chi+\beta)$.*

Οὕτως : $\chi^2+7\chi+12=\chi^2+(3+4)\chi+3.\ 4=(\chi+3).(\chi+4).$

$\alpha^4-4\alpha^2+3=\alpha^4+(-3-1)\alpha^2+(-3).(-1)=(\alpha^2-3)\,(\alpha^2-1)$

$\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\alpha^2+(\beta+\gamma).\alpha+\beta\gamma=(\alpha+\beta).(\alpha+\gamma).$

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα

✓265) $(3\psi+5).(3\psi+1)$, $(\chi^2+3\alpha).(\chi^2-\alpha)$.

✓266) $(8\chi^3+3\chi).(8\chi^3-5\chi)$, $(\alpha^4+\beta^2).\ (\alpha^4-3\beta^2)$.

✓267) $(1+5\chi).(1-3\chi)$, $(2+3\chi^2).(2-3y^2)$.

✓268) $(3\chi^2+5y).(3\chi^2-2y)$, $(7+3\alpha^2).(7-\alpha^2)$, $(\chi^3+5\alpha).(\chi^3+3\alpha)$.

✓269) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ πολυώνυμα $\chi^2+\chi\psi+\chi\omega+\omega\psi$, $\alpha^2+5\alpha+5\beta+\alpha\beta$, $\alpha^4+\alpha^2\beta+8\alpha^2+8\beta$.

✓270) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $(\chi+\alpha).(\chi-2\alpha)-(\chi-3\alpha)\,(\chi+2\alpha)$.

✓271) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\alpha+\beta).(\alpha+\gamma)-(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma)-2\alpha.(\beta+\gamma)=0$.

δ΄. Διαίρεσις.

§ **49. Διαίρεσις ἀκεραίου μονωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $12\alpha^3\chi^2$ διὰ τοῦ $3\alpha\chi$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν παράστασιν, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $3\alpha\chi$ νὰ δίδῃ γινόμενον $12\alpha^3\chi^2$.

Προφανῶς ἡ ζητουμένη παράστασις δὲν δύναται νὰ εἶναι πολυώνυμον ἀνηγμένον, διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $3\alpha\chi$ θὰ ἦτο πολυώνυμον καὶ οὐχὶ τὸ μονώνυμον $12\alpha^3\chi^2$. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον μονώνυμον. Ἐπειδὴ τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $3\alpha\chi$ ὀφείλει νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον $12\alpha^3\chi^2$, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχῃ συντελεστὴν μὲν $12{:}3=4$, τὸ γράμμα α μὲ ἐκθέτην $3-1=2$ καὶ τὸ χ μὲ ἐκθέτην $2-1=1$. Εἶναι ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον $4\alpha^2\chi$· πράγματι δὲ $(4\alpha^2\chi).\ (3\alpha\chi)=12\alpha^3\chi^2$. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $15\alpha^5\chi^3\psi^4{:}\ 5\alpha\chi^2\psi^2=3\alpha^4\chi\psi^2$, $-14\alpha^2\chi^3\psi{:}7\alpha\chi^2=-2\alpha\chi\psi$, $(-40\alpha^2\chi^3\psi^4):(-8\alpha\chi\psi^3)=5\alpha\chi^2\psi$,

$9\alpha^2\chi\psi^3{:}3\alpha^2\chi\psi^3=3\alpha^0\chi^0\psi^0=3,\ 2\alpha\chi^3:3\alpha\chi=\dfrac{2}{3}\,\chi^2.$

Ἄρα. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον δι' ἄλλου ἀκεραίου μονωνύμου, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου γράφομεν πάντα τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν ἐκθέτην, ἣν ἔχει τοῦτο εἰς τὸν διαιρέτην, ἀπὸ τὸν ἐκθέτην, ὃν ἔχει εἰς τὸν διαιρετέον.*

Ἐκ τούτου κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι: α') ***Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον διαιρετὸν δι' ἄλλου ἀκεραίου μονωνύμου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ διαιρετέος νὰ ἔχῃ ὅλα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου καὶ οὐδὲν μὲ μικρότερον ἐκθέτην.***

β') ***Ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου πρὸς γράμμα ἢ γράμματά τινα ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα ἢ γράμματα.***

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ὡρισμένος ἀριθμός, θεωρεῖται ἔχον τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην μηδὲν (§ 36). Οὕτως

$$6\alpha\chi : 2 = 6\alpha\chi : 2\alpha^0\chi^0 = 3\alpha\chi.$$

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι διαιρέσεις.

272) $6\alpha^2\chi^2 : 2\alpha$, $8\chi^3 : 4\chi$, $12\alpha\chi : 3\alpha$, $(-15\,\alpha^2\chi) : 3\alpha\chi$.

273) $(-18\alpha^2\chi^2) : (-9\alpha\chi^2)$, $6\alpha\chi^5 : 3$, $(-4\alpha^2\chi^5) : (-2)$, $\alpha^4\chi^3 : \alpha^2\chi$.

274) $15\alpha^3\beta^2\chi : 5\alpha^2\beta\chi$, $(-24\alpha^3\chi^4\psi) : (-8\alpha\chi\psi)$, $9\alpha\chi^3\psi : \alpha\chi\psi$.

275) $12\alpha\chi^2\psi^3\omega^4 : (-3\alpha\chi\psi\omega^3)$, $\alpha^2\beta^3\gamma\chi\psi^2 : \alpha\beta^2\gamma\chi\psi$, $7\alpha^3\beta^4\chi^2y : 3\alpha\beta^2\chi$.

276) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι διαιρέσεις: α') $7\alpha\chi : 7$, $-3\alpha^2\chi^5 : (-3)$, $4\alpha^2\chi^2\psi : 2\alpha^2\chi^2\psi$, $-\alpha^5\chi^2\psi^4 : (-1)$, $9\alpha\chi^3\psi : (-\alpha\chi^3\psi)$.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι διαιρέσεις

277) $3\alpha^2\chi : 2\alpha\chi$, $5\alpha\chi\psi^2 : 2\alpha\chi\psi$, $(-4\alpha^2\chi^5\psi^2) : (-3\alpha^2\chi\psi)$, $2\alpha^3\chi^2y : \frac{2}{3}\alpha\chi y$

$5\chi^5\psi^2\omega : \frac{5}{2}\chi^3\psi$, $\frac{2}{3}\chi\psi^3\omega^4 : \frac{1}{5}\psi^2\omega^2$, $(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma^5\chi\psi^2) : (-\frac{2}{3}\beta\gamma^2\psi)$.

278) $0{,}35\,\alpha^2\chi : 7\alpha\chi$, $3\alpha^3\chi\psi\omega^3 : 0{,}5\alpha^2\omega$, $0{,}45\,\chi^3\varphi^2\omega^4 : 0{,}05\chi^2\omega^2$.

279) $5\alpha\chi y^2 : 2\alpha\chi y$, $(-4\alpha^2\chi^3y^2) : (-3\alpha^2\chi y)$, $(\frac{2}{3}\alpha^3\chi^2y) : 2\alpha^2y$.

§ **50. Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $4\chi^3-8\chi^2+10\chi$ διὰ τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου 2χ, ἤτοι νὰ εὕρωμεν πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον παλλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 2χ νὰ δίδῃ τὸ πολυώνυμον $4\chi^3-8\chi^2+10\chi$. Ἐνθυμούμενοι τὸν τρόπον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον κατανοοῦμεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ζητουμένου πολυωνύμου ὀφείλει πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 2χ νὰ δίδῃ γινόμενον $4\chi^3$, εἶναι ἄρα ὁ πρῶτος οὗτος ὅρος $4\chi^3 : 2\chi = 2\chi^2$. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ζητουμένου πηλίκου εἶναι $(-8\chi^2) : 2\chi = -4\chi$ καὶ ὁ τρίτος

$10\chi : 2\chi = 5$. Τὸ ζητούμενον ἄρα πηλίκον εἶναι $2\chi^2 - 4\chi + 5$. Καὶ πράγματι $(2\chi^2 - 4\chi + 5) . 2\chi = 4\chi^3 - 8\chi^2 + 10\chi$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι

$$(9\alpha^3 - 12\alpha^2 + 3\alpha) : 3\alpha = 3\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$(7\chi^4\psi^3 - 21\chi^3\psi^4 - 14\chi^2\psi^5 + 35\chi\psi^6) : 7\chi\psi^3 = \chi^3 - 3\chi^2\psi - 2\chi\psi^2 + 5\psi^3.$$

Ἄρα· ***Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον δι᾽ ἀκεραίου μονωνύμου, διαιροῦμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μονώνυμα·***

Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ὅτι: α΄.) Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρετὸν δι᾽ ἀκεραίου μονωνύμου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου νὰ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μονωνύμου·

β΄.) Ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου πρὸς γράμμα ἢ γράμματα ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου πρὸς τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα ταῦτα·

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι διαιρέσεις :

280) $(4\alpha^2 + 6\alpha) : 2\alpha$, $(9\chi^3 - 12\chi^2 + 6\chi) : 3\chi$, $(2\chi^4 + 8\chi^3 - 12\chi^2 + 6\chi) : 2\chi$

281) $(6\chi^3 - 10\chi^2 + 14\chi - 2) : (+2)$, $(10 - 15\chi + 20\chi^2 - 30\chi^3) : 5$, $(8\psi^4 - 12\psi^3 - 20\psi^2) : 4\psi^2$.

282) $(3\chi^2 - 9\chi\psi) : 3\chi$, $(12\chi^3\psi - 9\chi^2\psi^2 + 21\chi\psi^3) : 3\chi\psi$, $(12\alpha^4\chi^3 + 30\alpha^3\chi^4 - 18\alpha^2\chi^5 + 6\alpha\chi^6) : 6\alpha\chi^3$.

283) $(\omega^3\chi - 2\omega^2\chi^2 + 3\omega\chi^3) : \omega\chi$, $(10\alpha^5\beta^3\chi^2 + 35\alpha^4\beta^4\chi^4 - 15\alpha^3\beta^5\chi^5 + 45\alpha^2\beta^6\chi^6) : (5\alpha^2\beta^3\chi^2)$.

284) $(2\chi^3 - 6\chi^4 + 7\chi^5 - 12\chi^3) : 3\chi^2$, $(\chi^2\psi - \chi\psi^2 + 3\psi^3) : \psi$.

285) $7\alpha^3\chi^5 - 9\alpha^4\chi^4 - 10\alpha^5\chi^3 + 3\alpha^6\chi^2) : (-2\alpha^2\chi^2)$, $(12\alpha^2\beta^3\chi^4 - 15\alpha^3\beta^2\chi^5 - 9\alpha^4\beta\chi^6 + 21\alpha^5\chi^7) : (3\alpha\chi^2)$.

286) $\left(\frac{3}{5}\chi^3 - \frac{2}{5}\chi^2 + \frac{1}{6}\chi\right) : 3\chi$, $(\alpha^3\beta^2 - 2\alpha^2\beta^3 + 3\alpha\beta^4) : \left(-\frac{2}{3}\alpha\beta^2\right)$

§ 31. Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως. Ἐκ τῆς ἰσότητος $(9\alpha^3 - 12\alpha^2 + 3\alpha) : 3\alpha = 3\alpha^2 - 4\alpha + 1$ ἕπεται ὅτι

$$9\alpha^3 - 12\alpha^2 + 3\alpha = 3\alpha\,(3\alpha^2 - 4\alpha + 1).$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς $6\chi^4 - 10\chi^3 + 14\chi^2) : 2\chi^2 = 3\chi^2 - 5\chi + 7$, ἕπεται ὅτι

$$6\chi^4 - 10\chi^3 + 14^2 = 2\chi^2 . (3\chi^2 - 5\chi + 7).$$

Ἄρα : ***Ἐὰν οἱ ὅροι πολυωνύμου ἔχωσι πάντες κοινὸν διαιρέτην (παράγοντα), τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ κοινοῦ τούτου παράγοντος ἐπὶ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες αὐτὸ διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος·***

Ἡ τοιαύτη ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον καλεῖται ***ἐξαγωγὴ τοῦ κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως·***

Δύναται δὲ ὁ κοινὸς οὗτος παράγων νὰ ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ + ἢ — ἢ νὰ εἶναι καὶ πολυώνυμον. Οὕτω

$-\chi+\alpha\chi^2-5\chi=-\chi\,(1-\alpha\chi+5)$, $(\chi^2-1).(\chi^3-3)+(\chi^2-1)\,(7\chi-4)=$
$(\chi^2-1)\,(\chi^2-3+7\chi-4)=(\chi^2-1)\,(\chi^2+7\chi-7)$.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα δι' ἐξαγωγῆς τῶν κοινῶν παραγόντων ἐκτὸς παρενθέσεως τὸ ἀκόλουθα πολυώνυμα

√ 287) $2\chi^3+4\chi-6$, $3\chi^3-5\chi^2+6\chi$, $5\psi^3-10\psi^2+15\psi$.

√ 288) $\chi\psi^2-3\chi^2\psi^3+5\chi^3\psi^4-\chi^4\psi^5$, $9\chi^2-3\chi\psi+12\chi^2\psi^2$, $12\alpha^2\beta-8\alpha^3\beta^2-16\alpha^4\beta^3+4\alpha^5\beta^4$.

√ 289) $\chi^5\psi^4-\chi^4\psi^5$, $7\alpha^3\beta-14\alpha^2\beta^2$, $5\alpha^2\chi^3-15\alpha^4\chi$.

√ 290) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη τῶν παραστάσεων $\alpha^2\chi^2+6\alpha\chi^2+9\chi^2$, $4\alpha^2+8\alpha\beta+4\beta^2$, $\alpha^4\beta^2-2\alpha^2\beta^4+\beta^6$ εἶναι γινόμενον δύο τετραγώνων.

√ 291) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\alpha^4\beta^2-2\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4$ εἶναι γινόμενον τριῶν τετραγώνων.

√ 292) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $8\alpha^2\chi^3+16\alpha\chi^4+8\chi^5$ εἶναι γινόμενον κύβου ἐπὶ τετράγωνον.

§ **32. Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου πολυωνύμου.** Ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$ ἐπὶ τὸ $3\chi^2+6\chi-3$, εὑρίσκομεν, ὡς κάτωθι φαίνεται, γινόμενον τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον

$6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+33\chi^2-24\chi+6$,

τὸ ὁποῖον εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ.

$$\begin{array}{lr}
 & 2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2 \\
 & 3\chi^2+6\chi-3 \\
\hline
(\alpha) & 6\chi^5-15\chi^4+12\chi^3-6\chi^2 \qquad\qquad\qquad \\
(\beta) & 12\chi^4-30\chi^3+24\chi^2-12\chi \qquad \\
(\gamma) & -6\chi^3+15\chi^2-12\chi+6 \\
\hline
 & 6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+33\chi^2-24\chi+6 \quad (1)
\end{array}$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον

$6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+33\chi^2-24\chi+6$

διὰ τοῦ $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν παράστασιν, ἐφ' ἣν πολλαπλασιαζόμενος ὁ διαιρέτης $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$, νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον $6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+33\chi^2-24\chi+6$. Προφανῶς ἡ ζητουμένη παράστασις εἶναι $3\chi^2+6\chi-3$, ὡς ἐκ τοῦ ἐκτελεσθέντος ἀνωτέρω πολλαπλασιασμοῦ καθίσταται φανερόν.

Παρατηροῦντες ὅτι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁ α΄ ὅρος $2\chi^3$ τοῦ πολλαπλασιαστέου πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν α΄ ὅρον $3\chi^2$ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὸν πρῶτον ὅρον $6\chi^5$ τοῦ γινομένου, συμπεραίνομεν ὅτι $6\chi^5 : 2\chi^3=3\chi^2$, ἤτοι :

Ὁ α΄ ὅρος τοῦ πηλίκου εὑρίσκεται, ἂν διαιρεθῇ ὁ α΄ ὅρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἀνωτέρω εὑρέθη τὸ πολυώνυμον $6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+33\chi^2-24\chi+6$ φαίνεται ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία πολυώνυμα (α), (β), (γ), ὧν τὸ πρῶτον $6\chi^5-15\chi^4+12\chi^3-6\chi^2$ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$ ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον

$3\chi^2$ τοῦ πηλίκου. Ἐὰν ὅθεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου (1) ἀφαιρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦτο, ὑπολείπονται τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα (β :αὶ (γ), τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι προφανῶς γινόμενον τοῦ $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$ ἐπὶ $(6\chi-3)$. Ἐὰν ἄρα τὸ ἄθροισμα τοῦτο τῶν πολυωνύμον (β) καὶ (γ) διαιρεθῇ τοῦ $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$, ὀφείλει νὰ δώσῃ πηλίκον $6\chi-3$.

Τούτου δὲ ὁ α′ ὅρος 6χ εἶναι, κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα, πηλίκον τοῦ α′ ὅρου $12\chi^4$ τοῦ ῥηθέντος ἀθροίσματος διὰ τοῦ $2\chi^3$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ νέος οὗτος διαιρετέος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ πολυώνυμα (β) καὶ (γ), ὧν τὸ (β) εὑρέθη διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$ ἐπὶ 6χ, ἂν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τούτου ἀφαιρεθῇ τὸ ῥηθέν γινόμενον, μένει τὸ πολυώνυμον (γ) ἤτοι $-6\chi^3+15\chi^2-12\chi+6$, τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον τοῦ $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$ ἐπὶ -3· ἄρα· $(-6\chi^3+15\chi^2-12\chi+6):(2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2)=-3$ καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω $-6\chi^3:2\chi^3=-3$.

Ἐὰν μετὰ τῶν ἀνωτέρω τριῶν μερικῶν γινομένων (α), (β), (γ) προστεθῇ καὶ τὸ πολυώνυμον $2\chi^2+\chi-3$ προκύπτει τὸ πολυώνυμον $6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+35\chi^2-23\chi+3$. Ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρέσωμεν ὡς ἀνωτέρω διαδοχικῶς τὰ (α), (β), (γ), ἤτοι τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$ κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοὺς ὅρους $3\chi^2$, 6χ, -3 τοῦ πηλίκου, μένει τὸ $2\chi^2+\chi-3$, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ προέλθῃ ἀπὸ τὸν διαιρέτην $2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον, διότι εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου. Τὸ πολυώνυμον τοῦτο $2\chi^2+\chi-3$ καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ἥτις καλεῖται ἀτελὴς διαίρεσις.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον δι' ἄλλου ἀκεραίου πολυωνύμου, διατάσσομεν πρῶτον ἀμφότερα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις γράμματός τινος καὶ διαιροῦντες τὸν α′ ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α′ ὅρου τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸν α′ ὅρον τοῦ πηλίκου. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν εὑρεθένται πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· οὕτως εὑρίσκομεν ὑπόλοιπόν τι, ὅπερ καλοῦμεν α′ ὑπόλοιπον. Διαιροῦντες εἶτα τὸν α′ ὅρον τοῦ πρώτου τούτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ α′ ὅρου τοῦ διαιρέτου εὑρίσκομεν τὸν β′ ὅρον τοῦ πηλίκου, ὃν ἀναγράφομεν δεξιὰ τοῦ α′. Ἀφαιροῦντες ἔπειτα ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν β′ ὅρον τοῦ πηλίκου εὑρίσκομεν β′ ὑπόλοιπον, οὗ τὸν πρῶτον ὅρον διαιροῦμεν διὰ τοῦ α′ ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸν γ′ ὅρον τοῦ πηλίκου, ὃν ἀναγράφομεν δεξιὰ τοῦ β′ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἐξα-

κολουθοῦμεν, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ πολυώνυμον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἀκολούθως·

$$\begin{array}{l|l} 6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+33\chi^2-24\chi+6 & 2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2 \\ \hline -6\chi^5+15\chi^4-12\chi^3+6\chi^2 & 3\chi^2+6\chi-3 \\ \hline \text{α΄ ὑπόλοιπον } 12\chi^4-36\chi^3+39\chi^2-24\chi+6 & \\ \quad -12\chi^4+30\chi^3-24\chi^2+12\chi & \\ \hline \text{β΄ ὑπόλοιπον } \quad -6\chi^3+15\chi^2-12\chi+6 & \\ \quad 6\chi^3-15\chi^2+12\chi-6 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6\chi^5-3\chi^4-24\chi^3+35\chi^2-23\chi+3 & 2\chi^3-5\chi^2+4\chi-2 \\ -6\chi^5+15\chi^4-12\chi^3+6\chi^2 & 3\chi^2+6\chi-3 \\ \hline 12\chi^4-36\chi^3+41\chi^2-23\chi+3 & \\ -12\chi^4+30\chi^3-24\chi^2+12\chi & \\ \hline -6\chi^3+17\chi^2-11\chi+3 & \\ 6\chi^3-15\chi^2+12\chi-6 & \\ \hline \text{ὑπόλοιπον τῆς πράξεως} \quad 2\chi^2+\chi-3 & \end{array}$$

Ὅταν ὁ διαιρετέος δὲν εἶναι πλῆρες πολυώνυμον, προσέχομεν νὰ ἀφήνωμεν κενὸν εἰς τὴν θέσιν παντὸς ὅρου, ὅστις λείπει ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ὡς κάτωθι φαίνεται.

$$\begin{array}{l|l} 2\chi^4 \qquad -3\chi^2+2\chi+3 & \chi^2+2\chi+1 \\ \cline{2-2} -2\chi^4-4\chi^3-2\chi^2 & 2\chi^2-4\chi+3 \\ \hline -4\chi^3-5\chi^2+2\chi+3 & \\ 4\chi^3+8\chi^2+4\chi & \\ \hline 3\chi^2+6\chi+3 & \\ -3\chi^2-6\chi-3. & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Παρατηρήσεις. Ἐκ τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ διαίρεσις ἀκεραίου καὶ ἀνηγμένου πολυωνύμου δι' ἄλλου τοιούτου, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι :

α΄.) ***Ἐὰν μετὰ τὴν διάταξιν τῶν πολυωνύμων, ὁ α΄ ὅρος τοῦ***

διαιρετέου ἢ ὁ α΄ ὅρος ὑπολοίπου τινὸς δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι τελεία.

β΄.) ***Ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, ὁ διαιρετέος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.*** Πράγματι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως καταλήγομεν εἰς ὑπόλοιπον μηδὲν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸν διαιρετέον Δ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου δ ἐπὶ τὸν α΄ ὅρον α τοῦ πηλίκου, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου Δ—αδ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον βδ, ἀπὸ τοῦ νέου ὑπολοίπου (Δ—αδ)—βδ ἀφαιροῦμεν τὸ γδ καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον δτ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τελευταῖον ὅρον τ τοῦ πηλίκου.

Εἶναι ἄρα $Δ-αδ-βδ-γδ-...-τδ=0$, ὅθεν $Δ=αδ+βδ+..+τδ$, ἄρα $Δ=(α+β+γ+..+τ)δ$.

Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελὴς ὁ διαιρετέος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν προσθέτοντες τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπι τὸ πηλίκον. Τῷ ὄντι κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην καταλήγομεν εἰς ὑπόλοιπον υ διὰ τῶν ἀφαιρέσεων, περὶ ὧν προηγουμένως εἴπομεν, ἤτοι

$Δ-(α+β+γ+....+τ).δ=υ$ ὅθεν $Δ=(α+β+γ+....+τ).δ+υ$.

γ΄.) Κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαίρεσιν τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν α΄ ὅρον τοῦ πηλίκου ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου ἐξαλείφεται, οἱ δὲ ὑπολειπόμενοι ὅροι εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ ἐξαλειφθέντος ὅρου ὡς πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις. Ὁμοίως κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τοῦ α΄ ὑπολοίπου τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, ὁ α΄ ὅρος τοῦ πρώτου ὑπολοίπου ἐξαλείφεται καὶ καθεξῆς οὕτω Ἄρα : ***Ὁ βαθμὸς τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις βαίνει ἀπαύστως ἐλαττούμενος, μέχρις οὗ τὸ ὑπόλοιπον γείνῃ μηδὲν ἢ παράστασις βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου.***

Ἐκ τούτου ἕπεται εὐκόλως ὅτι :

δ΄) ***Τὸ πηλίκον εὑρίσκεται διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος τῆς ὁμοίας διατάξεως διαιρετέου καὶ διαιρέτου.***

ε΄). ***Ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου πρός τι γράμμα ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν βαθμὸν τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.***

Τῷ ὄντι ἂν μ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ διαιρετέου Δ, ν ὁ τοῦ διαιρέτου δ καὶ ρ ὁ τοῦ πηλίκου $(α+β+γ+....+τ)$ πρός τι καὶ τὸ αὐτὸ γράμμα, νοήσωμεν δὲ τὰ πολυώνυμα Δ καὶ δ διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος τούτου, καὶ τὸ πηλίκον $\alpha+\beta+\gamma+\dots+\tau$ θὰ εἶναι ὁμοίως διατεταγμένον καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁ πρῶτος ὅρος α αὐτοῦ θὰ εἶναι βαθμοῦ ρ πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος $\Delta = (\alpha+\beta+\gamma+\dots+\tau).\ \delta+\upsilon$ προκύπτει εὐκόλως ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ Δ εἶναι βαθμὸς τοῦ αδ, βαθμὸς δὲ τοῦ αδ εἶναι $\nu+\rho$ (§ 40) ἕπεται ὅτι $\mu=\nu+\rho$, ὅθεν $\rho=\mu-\nu$.

Εἶναι εὔκολον δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς κανὼν τῆς διαιρέσεως ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις γράμματός τινος. Τότε ὅμως ὁ βαθμὸς τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως βαίνει ἀπαύστως αὐξανόμενος, ὁ δὲ α´ ὅρος ἑκάστου ὑπολοίπου εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α´ ὅρου τοῦ διαιρέτου. Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής, δυνάμεθα νὰ παρατείνωμεν τὴν διαίρεσιν, ὅσον θέλομεν, χωρὶς ποτὲ νὰ εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Τοῦτο φαίνεται εἰς τὴν ἀκόλουθον διαίρεσιν.

$$
\begin{array}{r|l}
2+5\chi+3\chi^2 & 1+3\chi \\ \cline{2-2}
-2-6\chi & 2-\chi+6\chi^2-\dots \\ \hline
-\chi+3\chi^2 & \\
+\chi+3\chi^2 & \\ \cline{1-1}
6\chi^2 & \\
-6\chi^2-18\chi^3 & \\ \cline{1-1}
-18\chi^3 & \\
\end{array}
$$

. . . .

Παρατηροῦντες ὅτι, ἂν ἡ διαίρεσις ἦτο τελεία, ἔπρεπε ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου νὰ εἶναι $3\chi^2 : 3\chi=\chi$, κατανοοῦμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀτελής, εὐθὺς ὡς ἀναγράψωμεν εἰς τὸ πηλίκον τὸν ὅρον $-\chi$.

Ἀσκήσεις. **Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι διαιρέσεις :**

293) $(10\chi^2+11\chi-6) : (2\chi+3)$, β´.) $(6\chi^3+13\chi^2+4\chi-3) : (2\chi+3)$, $(3\alpha^3+11\alpha^2-26\alpha+8) : (\alpha^2+5\alpha-2)$,

294) α´.) $(14\chi^2-6\chi-8) : (2\chi-1)$, β´) $(6\chi^3-17\chi^2+17\chi-22) : (3\chi^2-\chi+5)$,
γ´.) $(30\omega^5+11\omega^4-31\omega^3-4\omega^2+10\omega+4) : (3\omega^2+2\omega-1)$,

295) α´.) $(\chi^3+2) : (\chi+1)$, β´.) $(8\chi^6-27) : (2\chi^2-3)$, γ´) $(243\alpha^5+32) : (3\alpha+2)$.

296) α´.) $(15\chi^2-2\chi\psi-8\psi^2) : (3\chi+2\psi)$,
β´.) $(2\psi^4+\psi^3\chi-3\psi^2\chi^2+2\psi\chi^3-14\chi^4) : (\psi^2+2\psi\chi-2\chi^2)$.
γ´.) $(64\alpha^8-4\beta^4) : (4\alpha^2-2\beta)$, δ´.) $(81\chi^8-16\psi^8) : (3\chi^2-2\psi^2)$.

297) α´) $\left(\chi^3-\frac{109}{30}\chi^2+\frac{23}{2}\chi-35\right) : \left(\frac{3}{2}\chi-5\right)$;

β´) $\left(\frac{2}{5}\chi^3+\frac{3}{2}\chi^2\psi-\frac{33}{10}\chi\psi^2+\psi^3\right) : \left(\frac{2}{5}\chi-\frac{1}{2}\psi\right)$.

γ.) $\left(\alpha^4 - \frac{5}{2}\alpha^3\beta + \frac{93}{28}\alpha^2\beta^2 - \frac{113}{56}\alpha\beta^3 + \beta^4\right) : \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right)$

Χαρακτὴρ διαιρετότητος ἀκεραίου πολυωνύμου.

§ **53. Θεώρημα I.** *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου ἐξαρτωμένου ἐκ τοῦ χ διὰ πρωτοβαθμίου πρὸς χ ἀκεραίου διωνύμου ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ πολυώνυμον τοῦτο, ὅταν τεθῇ ἐν αὐτῷ ἀντὶ χ ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην.*

Ἄς παραστήσωμεν χάριν συντομίας καὶ γενικότητος διὰ τοῦ συμβόλου $\Pi_{(\chi)}$ τυχὸν ἀκέραιον πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χ· τὴν τιμὴν δέ, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τοῦτο διὰ $\chi=\alpha$ θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\Pi_{(\alpha)}$.

Ἔστω δὲ $\alpha\chi+\beta$ δυώνυμον πρωτοβάθμιον πρὸς χ, ἐν ᾧ α καὶ β εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί· ἐὰν ἐν αὐτῷ θέσωμεν ἀντὶ χ τὸν ἀριθμὸν $-\frac{\beta}{\alpha}$, τὸ δυώνυμον γίνεται

$$\alpha\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \beta = -\beta+\beta=0.$$

Θὰ ἀποδείξωμεν λοιπὸν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\Pi_{(\chi)} : (\alpha\chi + \beta)$ ἰσοῦται πρὸς $\Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ἤτοι πρὸς τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ διαιρετέος $\Pi_{(\chi)}$, ὅταν ἐν αὐτῷ ἀντὶ χ τεθῇ ἡ τιμὴ $-\frac{\beta}{\alpha}$ αὐτοῦ, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην $\alpha\chi+\beta$.

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις $\Pi_{(\chi)}$ διὰ $\alpha\chi+\beta$ καὶ ἔστω $P_{(\chi)}$ τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον υ δὲν περιέχει τὸ γράμμα χ, διότι ἂν περιεῖχε τοῦτο, ἔστω καὶ εἰς τὴν α΄ δύναμιν, ἡ διαίρεσις θὰ ἐξηκολούθει. Ἐὰν ἤδη ἐνθυμηθῶμεν (§ 52 παρ. β΄) ὅτι ὁ διαιρετέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, συμπεραίνομεν ὅτι :

$$\Pi_{(\chi)} = P_{(\chi)}(\alpha\chi + \beta)+\upsilon.$$

Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $\chi = -\frac{\beta}{\alpha}$· ἀλλὰ δι᾽ αὐτὴν γίνεται $\Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = P_{(\chi)}\,0+\upsilon$,

$$\text{ὅθεν}\quad \Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \upsilon. \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(2\chi^2+3\chi-1):(2\chi+4)$ εἶναι $2(-2)^2+3(-2)-1=2.4-3.2-1=8-6-1=1$, τὸ ὁποῖον εὕρομεν θέσαντες εἰς τὸν διαιρετέον ἀντὶ χ τὴν τιμὴν -2 αὐτοῦ, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην $2\chi+4$.

Ὁμοίως τῆς διαιρέσεως $(7\chi^3-3\chi+6):(3\chi-1)$ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι

$$7.\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\left(\frac{1}{3}\right)+6=7.\frac{1}{27}-\frac{3}{3}+6=\frac{7}{27}-1+6=\frac{7}{27}+5=$$
$$\frac{7+135}{27}=\frac{142}{27}.$$

Πόρισμα I. ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου ἐξαρτωμένου ἐκ τοῦ χ διὰ χ—α ἰσοῦται μὲ τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ διαιρετέος διὰ χ=α.***

Διότι ὁ πρὸς χ πρωτοβάθμιος διαιρέτης $\chi-\alpha$ μηδενίζεται διὰ $\chi=\alpha$.

Π. χ. τῆς διαιρέσεως $(\chi^2-5\chi+7):(\chi-2)$ ὑπόλοιπον εἶναι $2^2-5.2+7=4-10+7=1$, τῆς δὲ $(\chi^2-6\chi+9):(\chi-3)$ ὑπόλοιπον εἶναι $3^2-6.3+9=0$, ἤτοι ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία.

Πόρισμα II.—***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου ἐξαρτωμένου ἐκ τοῦ χ διὰ χ+α ἰσοῦται μὲ τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ διαιρετέος διὰ χ=—α.***

Διότι ὁ πρὸς χ πρωτοβάθμιος διαιρέτης $\chi+\alpha$ μηδενίζεται διὰ $\chi=-\alpha$. Π. χ. τῆς διαιρέσεως $(\chi^3-9\chi-15):(\chi+2)$ ὑπόλοιπον εἶναι $(-2)^3-9(-2)-15=-8+18-15=-5$, τῆς δὲ $(2\chi^2+\chi-15):(\chi+3)$ ὑπόλοιπον εἶναι $2.(-3)^2+(-3)-15=18-3-15=0$, ἤτοι ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία.

Πόρισμα III. ***Ἵνα ἀκέραιον πολυώνυμον ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ χ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ πρωτοβαθμίου πρὸς χ δυωνύμου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ πολυώνυμον τοῦτο νὰ μηδενίζηται διὰ τὴν τιμὴν του χ, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην.***

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αὗται :

298) α΄) $(\chi^2-5\chi+1):(3\chi-6)$, β΄) $(5\chi^3-4\chi^2+3\chi-2):(\chi+1)$, γ΄) $(9\chi^3-6\chi+3):(\chi+3)$.

299) α΄) $(\chi^3-5\chi^2+2\chi-1):(2\chi-4)$, β΄) $(9\chi^2-\chi-1):(2\chi+4)$, γ΄) $(\chi^3-\chi^2+\chi-1):(2\chi+1)$, δ΄) $(\chi^3+\chi^2+\chi+1):(3\chi+1)$.

300) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $2\chi^3-\chi^2-15\chi+18$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $(\chi-2)$, διὰ $(\chi+3)$ καὶ διὰ $(2\chi-3)$.

301) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ τὸ πολυώνυμον $\chi^3+\chi^2-7\chi+\mu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\chi+2$;

302) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ τὸ τριώνυμον $2\chi^3+\mu\chi+6$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $(2\chi-6)$;

303) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ πολυώνυμον $\chi^3-4\alpha\chi^2+10\alpha^2\chi+\lambda\alpha^3$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\chi-\alpha$; Καὶ διὰ ποίαν διαιρεῖται διὰ $\chi+\alpha$;

304) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, τὸ γινόμενον $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)$ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\chi-\alpha-\beta$.

§ **54. Ἀξιοσημείωτα πηλίκα**: Α΄. Τῆς διαιρέσεως

$$(\chi^\mu-\alpha^\mu):(\chi-\alpha)$$

τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\alpha^\mu-\alpha^\mu=0$, ἤτοι ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον

$$\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots\ldots+\alpha^{\mu-1},$$

ὅπερ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ βαθμοῦ $(\mu-1)$ πρὸς α καὶ χ καὶ ἔχει μ ὅρους.

Ἄξιον ἰδιατέρας παρατηρήσεως εἶναι ὅτι

α΄) Ὅλοι οἱ ὅροι τούτου ἔχουσι πρὸ αὐτῶν τὸ $+$.

β΄) Οἱ μὲν ἐκθέται τοῦ χ βαίνουσιν ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα, οἱ δὲ ἐκθέται τοῦ α αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα, ἐν ᾧ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι πάντοτε $(\mu-1)$. Τούτου ἕνεκα εἰς τὸν τελευταῖον ὅρον ὁ χ θὰ ἔχῃ ἐκθέτην μηδέν, ὁ δὲ α κατ᾽ ἀκολουθίαν $\mu-1$, ἤτοι ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι $\alpha^{\mu-1}\chi^0$ ἢ $\alpha^{\mu-1}$. Τοῦτο κατανοοῦμεν ἐπίσης παρατηροῦντες ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου ὀφείλει πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν τελευταῖον ὅρον α τοῦ διαιρέτου νὰ δίδῃ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ διαιρετέου, ἄρα θὰ εἶναι $\alpha^\mu:\alpha=\alpha^{\mu-1}$.

Π. χ. $(\chi^3-\alpha^3):(\chi-\alpha)=\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2$, $(\chi^4-\alpha^4):(\chi-\alpha)=\chi^3+\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3$

$$(\psi^3-1):(\psi-1)=(\psi^3-1^3):(\psi-1)=\psi^2+\psi+1.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος $(\chi^\mu-\alpha^\mu):(\chi-\alpha)=\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1}$ ἕπεται ὅτι $\chi^\mu-\alpha^\mu=(\chi-\alpha)(\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1})$.

οὕτω $\chi^3-\alpha^3=(\chi-\alpha).(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2)$, $\chi^3-1=(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)$

Β΄. Τῆς διαιρέσεως $(\chi^\mu-\alpha^\mu):(\chi+\alpha)$ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^\mu-\alpha^\mu$. Καὶ ἂν μὲν ὁ μ εἶναι περιττός, τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο γίνεται $-\alpha^\mu-\alpha^\mu=-2\alpha^\mu$. Ἂν δὲ ὁ μ εἶναι ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον γίνεται

$$\alpha^\mu-\alpha^\mu=0.$$

Ἡ διαίρεσις ἄρα $(\chi^\mu-\alpha^\mu):(\chi+\alpha)$ εἶναι τελεία, ὅταν ὁ μ εἶναι ἄρτιος.

Ἐκτελοῦντες εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον

$\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\alpha^3\chi^{\mu-4}+\ldots\ldots-\alpha^{\mu-1}$, οὗ οἱ ὅροι ἔχουσιν ἐναλλὰξ τὸ $+$ καὶ $-$ καὶ δι᾽ ὃ ἰσχύουσιν αἱ ἄλλαι περὶ τοῦ προηγουμένου πηλίκου γενόμεναι παρατηρήσεις.

Π.χ. $(\chi^4-\alpha^4):(\chi+\alpha)=\chi^3-\alpha\chi^2+\alpha^2\chi-\alpha^3$, $(\chi^4-1):(\chi+1)=\chi^3-\chi^2+\chi-1$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος

$(\chi^\mu-\alpha^\mu):(\chi+\alpha)=\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\ldots-\alpha^{\mu-1}$ ἕπεται ὅτι:

$\chi^\mu-\alpha^\mu=(\chi+\alpha)(\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\ldots-\alpha^{\mu-1})$, ἂν $\mu=2\rho$.

Οὕτω $\chi^4-\alpha^4=(\chi+\alpha)(\chi^3-\alpha\chi^2+\alpha^2\chi-\alpha^3)$,

$$(\chi^6-\alpha^6)=(\chi+\alpha)(\chi^5-\alpha\chi^4+\alpha^2\chi^3-\alpha^3\chi^2+\alpha^4\chi-\alpha^5)$$

$$\chi^4-1=(\chi+1).(\chi^3-\chi^2+\chi+1).$$

Γ΄. Τῆς διαιρέσεως $(\chi^{\mu}+\alpha^{\mu}):(\chi+\alpha)$ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^{\mu}+\alpha^{\mu}$, ὅπερ καθίσταται μηδὲν μόνον, ὅταν ὁ μ εἶναι περιττός.

Ἐκτελοῦντες εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον

$\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\ldots\ldots+\alpha^{\mu-1}$, περὶ οὗ ἰσχύουσιν αἱ περὶ τῶν προηγουμένων γενόμεναι παρατηρήσεις.

Π.χ. $(\chi^3+\alpha^3):(\chi+\alpha)=\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2$,

$(\psi^5+\beta^5):(\psi+\beta)=\psi^4-\beta\psi^3+\beta^2\psi^2-\beta^3\psi+\beta^4$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $(\chi^{\mu}+\alpha^{\mu}):(\chi+\alpha)=\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\ldots\ldots+\alpha^{\mu-1}$ ἕπεται ὅτι $\chi^{\mu}+\alpha^{\mu}=(\chi+\alpha)\cdot(\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\ldots\ldots+\alpha^{\mu-1})$, ἂν μ περιττός.

Οὕτω $\chi^3+\alpha^3=(\chi+\alpha)\cdot(\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2)$, $\chi^3+1=(\chi+1)\cdot(\chi^2-\chi+1)$, $\chi^5+\alpha^5=(\chi+\alpha)\cdot(\chi^4-\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2-\alpha^3\chi+\alpha^4)$.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀναγραφῶσιν ἀμέσως τὰ πηλίκα τῶν ἀκολούθων διαιρέσεων. 305) α΄) $(\chi^5-\alpha^5):(\chi-\alpha)$, β΄) $(\chi^4-1):(\chi-1)$, γ΄) $(\chi^2-\alpha^2):(\chi-\alpha)$, δ΄) $(\psi^6-\beta^6):(\psi-\beta)$, ε΄) $(\alpha^3-\beta^3):(\alpha-\beta)$.

306) α΄) $(\chi^2-\alpha^2):(\chi+\alpha)$, β΄) $(\chi^6-\alpha^6):(\chi+\alpha)$, γ΄) $(\chi^6-1):(\chi+1)$, δ΄) $(\alpha^4-\beta^4):(\alpha+\beta)$, ε΄) $(\alpha^8-\beta^8):(\alpha+\beta)$.

307) α΄) $(\alpha^3+\beta^3):(\alpha+\beta)$, β΄) $(\chi^5+\alpha^5):(\chi+\alpha)$, γ΄) $(\alpha^5+\psi^5):(\alpha+\psi)$, δ΄) $(\chi^3+1):(\chi+1)$, ε΄) $(\psi^5+1):(\psi+1)$.

308) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἑκάστη τῶν παραστάσεων $\psi^3-\beta^3$, $\alpha^3+\beta^3$, χ^3+8, $\alpha^5-\beta^5$, α^5-32.

309) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις $27x^3+8$, $125\alpha^3-27$, $64x^3-1$, $2\alpha^3-16$, $3x^3+24$, $7y^3-7$.

§ **33. Ἀνάλυσις πολυωνύμων εἰς γινόμενα.** Ἐμάθομεν μέχρι τοῦδε διαφόρους περιπτώσεις ἀναλύσεως πολυωνύμων εἰς γινόμενα, τὰς ὁποίας ἀνακεφαλαιοῦμεν ὧδε :

α΄) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

β΄) $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}=(\chi-\alpha)(\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1})$

γ΄) $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}=(\chi+\alpha)(\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots-\alpha^{\mu-1})$, ἂν $\mu=2\nu$

δ΄) $\chi^{\mu}+\alpha^{\mu}=(\chi+\alpha)(\chi^{\mu-1}-\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-1})$, ἂν $\mu=2\nu+1$.

ε΄) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

στ΄) $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$

ζ΄) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$

η΄) $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta=(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$

θ΄) Διὰ τῆς ἐξαγωγῆς κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως.

Πλὴν τούτων ἀναφέρομεν καὶ τὰς ἀκολούθους ἔτι περιπτώσεις.

ι΄) Πολλάκις συνάπτοντες τοὺς ὅρους πολυωνύμου καταλλήλως κατὰ ὁμάδας καὶ ἀναλύοντες ἀμφότερα ἢ τὸ ἓν τῶν οὕτως ἀποτελουμένων πολυωνύμων κατά τινα τῶν προηγουμένων μεθόδων, δίδομεν εἰς τὸ πολυώνυμον τοιαύτην μορφήν, ὥστε ἢ ν' ἀναφαίνηται νέος κοινὸς παράγων, ὃν ἐξάγομεν ἐκτὸς παρενθέσεως ἢ ἐφαρμόζεται πάλιν εἷς τῶν προηγουμένων τύπων.

Οὕτω: $3\alpha-3\beta+\alpha\chi-\beta\chi=3(\alpha-\beta)+\chi(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta).(3+\chi)$.

$$\alpha\chi+\beta\psi+\beta\chi+\alpha\psi=(\alpha\chi+\alpha\psi)+(\beta\psi+\beta\chi)=$$
$$\alpha(\chi+\psi)+\beta(\chi+\psi)=(\chi+\psi).(\alpha+\beta).$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\chi^2=(\alpha-\beta)^2-\chi^2=(\alpha-\beta+\chi).(\alpha-\beta-\chi)$$
$$\alpha^2+\beta^2-\chi^2-\psi^2+2\alpha\beta+2\chi\psi=(\alpha+\beta)^2-(\chi-\psi)^2=$$
$$(\alpha+\beta+\chi-\psi).(\alpha+\beta-\chi+\psi)$$
$$\chi^3+\chi^2-4\chi-4=\chi^2(\chi+1)-4.(\chi+1)=(\chi+1)(\chi^2-4)=$$
$$(\chi+1).(\chi+2).(\chi-2).$$

ια') Ἐνίοτε διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον τοῦ αὐτοῦ ὅρου ἐπιτυγχάνομεν πολυώνυμον, εἰς ὃ ἐφαρμόζεται ἡ προηγουμένη μέθοδος.

Οὕτως $\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta)^2=$

$$(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta).(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta).$$
$$\chi^4+4\psi^4=\chi^4+4\psi^4+4\chi^2\psi^2-4\chi^2\psi^2=(\chi^2+2\psi^2)^2-4\chi^2\psi^2=$$
$$(\chi^2+2\psi^2+2\chi\psi).(\chi^2+2\psi^2-2\chi\psi)$$

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ δυώνυμα.

310) α') $(\alpha^2-16\beta^2)$, β') $9\chi^2-36\psi^2$, γ') $\alpha^4-\beta^2$, δ') $25\chi^2-4\psi^2$, ε') $(\alpha^2\chi^4-9\alpha^4\chi^2)$.

311) α') $5\chi^2-45\psi^2$, β') $3\alpha^2\beta^4-12\alpha^4\beta^2$, γ') $(\chi^3\psi-\chi\psi^3)$.

312) α') $8\alpha^3\beta^2\omega^4\chi-18\alpha^5\beta^4\omega^2\chi$, β') $3\alpha^5\chi-12\alpha\chi^5$, γ') $\alpha^4-\beta^4$.

313) α') $16\chi^4-81\psi^4$, β') $\alpha^6-\beta^6$, γ') $3\alpha^7\beta-3\alpha\beta^7$.

314) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα τὰ ἀκόλουθα πολυώνυμα.

α') $5\alpha\chi^2+10\alpha\chi\psi+5\alpha\psi^2$ β') $2\alpha^3-4\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2$, γ') $\alpha^5\chi^2+6\alpha^3\chi+9\alpha$.
δ') $(\alpha-\beta).(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta).(\alpha^2-\gamma^2)$.

315) α') $2\alpha^4+6\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3$, β') $2\alpha^3\chi^2\psi+4\alpha^2\beta\chi^2\psi+2\alpha\beta^2\chi^2\psi-2\alpha\gamma^2\chi^2\psi$.

316) α') $\chi^2-\chi\psi-\psi-1$, β') $4\chi^2\psi^2-(\chi^2+\psi^2-z^2)^2$, γ') $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2-\delta^2-\gamma^2+\beta^2)^2$.

317) α') χ^8-1, β') χ^4+4, γ') $\alpha^5+\alpha^3\beta-\alpha\beta^2-\alpha\beta^5$, δ') $\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3-\alpha\beta^4-\beta^5$.

318) $x^2+\alpha^2-y^2+2\alpha x$, $x^4+\alpha x^2-\beta x^2-\alpha\beta$.

319) $\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\alpha\beta(\alpha-\beta)-\beta\gamma(\beta+\gamma)$, $1+\alpha\beta+(\alpha+\beta)x-(\alpha+\beta)-(1+\alpha\beta)x$.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

§ 56. Ἁπλαῖ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.—***Πᾶσα ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἡ ὁποία δὲν ἀναλύεται εἰς γινόμενον περιέχον δύο τοὐλάχιστον παράγοντας μὲ γράμματα, καλεῖται ἁπλῆ ἀλγεβρικὴ παράστασις.***

Π. χ. αἱ παραστάσεις $3χ+1$, $α^3+β^2$, $χ^2-χ+1$ εἶναι ἁπλαῖ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις· ὁμοίως αἱ παραστάσεις $7χ+7$, $15α^2+5$ εἶναι ἁπλαῖ, ἂν καὶ ἀναλύωνται εἰς γινόμενα, διότι εἷς μόνον παράγων ἑκάστης περιέχει γράμματα. Καὶ τὸ μονώνυμα $5α$, $3χ$, $-7ψ$, $\frac{2ω}{5}$ εἶναι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἁπλαῖ παραστάσεις.

Πᾶσα ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις μὴ ἁπλῆ καλεῖται σύνθετος ἀλγεβρικὴ παράστασις. Τοιαῦται π. χ. εἶναι αἱ παραστάσεις $α^2-β^2$, $α^2+2αβ+β^2$, $χ^3-α^3$, $2χ^μ-2α^μ$.

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων καθίσταται φανερὸν ὅτι :

α΄. ***Πᾶσα σύνθετος ἀλγεβρικὴ παράστασις ἀναλύεται εἰς γινόμενον οὗ οἱ μὴ ἀριθμητικοὶ παράγοντες εἶναι ἁπλαῖ παραστάσεις.***

Π. χ. $α^2-β^2=(α+β).(α-β)$ $3χ^3-3α^3=3.(χ-α)(χ^2+αχ+α^2)$.

β΄) ***Πᾶσα ἁπλῆ ἀλγεβρικὴ παράστασις διαιρεῖται μόνον ὑπὸ τοῦ ἑαυτοῦ της καὶ ὑπὸ τοῦ γινομένου αὐτῆς ἐπὶ τυχόντας ἀριθμητικοὺς παράγοντας.***

Οὕτως ἡ ἁπλῆ ἀλγεβρικὴ παράστασις $2α+3$ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς $2(2α+3)$ καὶ δίδει πηλίκον $\frac{1}{2}$ τῷ ὄντι $2.(2α+3)\frac{1}{2}=2α+3$.

Δὲν διαιρεῖται ὅμως ὑπὸ τῆς $(2α+3).3α$, διότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ ἦτο $(2α+3)=(2α+3)\,3α.Π$ καὶ θὰ ἦτο ἡ $2α+3$ σύνθετος παράστασις.

§ 57. Κοινὰ πολλαπλάσια ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.—***Πολλαπλάσιον ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καλεῖται πᾶσα ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἡ ὁποία διαιρεῖται ὑπ᾽ ἐκείνης.*** Οὕτω τὸ τριώνυμον $2α^3+3αβ^2-6α$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $2α$, τὸ δὲ διώνυμον $α^2-β^2$ εἶναι πολλαπλάσιον ἑκατέρου τῶν διωνύμων $α+β$ καὶ $α-β$.

Κοινὸν πολλαπλάσιον ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καλεῖται πᾶσα ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἥτις διαιρεῖται ὑπ᾽ αὐτῶν.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καλεῖται τὸ κοινὸν αὐτῶν πολλαπλάσιον, ὅπερ περιέχει μόνον τὰ γράμματα τῶν παραστάσεων τούτων καὶ εἶναι μικροτέρου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.

Οὕτω τῶν παραστάσεων $α$, $β^2$, $βγ$ κοινὰ πολ. εἶναι αἱ παραστάσεις $αβ^2γ$, $αβ^3γ^2$, $α^3β^3γ^3$ κτλ. ἐλάχιστον δὲ κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι ἡ παράστασις $αβ^2γ$.

ΣΗΜ. Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων τοῦ ἐλ. κ. πολ. ἀλγεβρικῶν παραστάσεων δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός. Συνήθως ὅμως θέτομεν ὡς τοιοῦτον τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμητικῶν παραγόντων τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλ. κ. πολ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

ΣΗΜ. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις λέγοντες πρώτους παράγοντας θέλομεν νοῆ ἁπλᾶς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις

§ **58. Θεώρημα I.** ***Ἵνα ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις Π διαιρῆται ὑπὸ ἄλλης τοιαύτης Ρ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ Π νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τῆς Ρ καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην.***

Ἀπόδειξις. α΄) Ἔστω ὅτι ἡ παράστασις Π διαιρεῖται ὑπὸ τῆς $Ρ=Α^{α}.Β^{β}.Γ^{γ}$ καὶ δίδει πηλίκον $Μ=Α^{α'}.Β^{β'}.Δ^{δ}$, ἔνθα, Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἁπλαῖ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις. Λέγω ὅτι ἡ Π περιέχει τὰς ἁπλᾶς παραστάσεις Α, Β, Γ τῆς Ρ καὶ οὐδεμίαν τούτων μὲ μικρότερον ἐκθέτην.

Πράγματι. ἐκ τῆς ἰσότητος $Π:Ρ=Μ$, ἕπεται ὅτι $Π=Ρ.Μ$.

Ἐπειδὴ δὲ $Ρ=Α^{α}.Β^{β}.Γ^{γ}$ καὶ $Μ=Α^{α'}.Β^{β'}.Δ^{δ}$,

ἕπεται ὅτι $Π=Α^{α+α'}.Β^{β+β'}.Γ^{γ}.Δ^{δ}$. ὅ. ἔ. δ.

β΄) Ἀντιστρόφως. Ἂν $Π=Α^{α+α'}.Β^{β+β'}.Γ^{γ}.Δ^{δ}$, ἐπειδὴ $Α^{α+α'}=Α^{α}.Α^{α'}$, $Β^{β+β'}=Β^{β}.Β^{β'}$, ἕπεται ὅτι

$Π=Α^{α}Α^{α'}.Β^{β'}.Β^{β}.Γ^{γ}Δ^{δ}$, ὅθεν $Π=Ρ.Α^{α'}.Β^{β'}.Δ^{δ}$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι ἡ Π εἶναι διαιρετὴ ὑπὸ τῆς Ρ. ὅ.ἔ.δ.

§ **59. Θεώρημα I.**—***Τὸ ἐλ. κ. πολ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἶναι γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην.***

Ἔστω ὅτι $Ρ=Α^{2}.Β^{5}.Γ^{3}$, $Σ=Α^{3}.Β^{5}.Γ^{2}.Δ^{2}$ καὶ $Τ=Α^{4}.Β^{3}.Δ^{3}.Ε$, ἔνθα Α, Β, Γ, Δ, Ε εἶναι ἁπλαῖ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις. Λέγω ὅτι ἐλ. κ. πολ. τῶν παραστάσεων Ρ, Σ, Τ εἶναι $Α^{4}.Β^{5}.Γ^{3}.Δ^{3}.Ε$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα πᾶν κ. πολ. τῶν παραστάσεων Ρ, Σ, Τ ὀφείλῃ νὰ περιέχῃ τὰς ἁπλᾶς παραστάσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ οὐδεμίαν μὲ ἐκθέτην μικρότερον τῶν εἰς τὰς Ρ, Σ, Τ ἀντιστοίχων ἐκθετῶν αὐτῶν· θὰ εἶναι ἄρα τῆς μορφῆς $Α^{μ}.Β^{ν}.Γ^{ρ}.Δ^{λ}.Ε^{τ}.Κ$ ἔνθα $μ\geqq4$, $ν\geqq5$, $ρ\geqq3$, $λ\geqq3$, $τ\geqq1$ καὶ Κ τυχοῦσα ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀριθμός. Ἐκ τῶν κοινῶν τούτων πολλαπλασίων ἐλάχιστον εἶναι ἐκεῖνο, εἰς ὃ $Κ=1$, ἕκαστος δὲ τῶν ἐκθετῶν μ, ν, ρ, λ, τ ἔχει τὴν ἐλαχίστην ἐπιτρεπομένην τιμὴν ἤτοι $μ=4$, $ν=5$, $ρ=3$, $λ=3$ καὶ $τ=1$.

Εἰς τὰς τιμὰς ὅμως ταύτας ἀντιστοιχεῖ τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον $Α^{4}.Β^{5}.Γ^{3}.Δ^{3}.Ε$ ὅπερ εἶναι κατὰ ταῦτα τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Ρ,Σ, Τ. ὅ.ἔ.δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἦτο $Ρ=α.Α^{2}.Β^{5}.Γ^{3}$, $Σ=β.Α^{3}.Β^{4}.Γ^{2}.Δ^{2}$ καὶ $Τ=γ.Α^{4}.Β^{3}.Δ^{3}.Ε$ ἔνθα α, β, γ εἶναι ἀριθμητικοὶ παράγοντες ἔχοντες ἐλ. κ. πολ. λ, τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν Ρ, Σ, Τ θὰ εἶναι $λ.Α^{4}Β^{5}Γ^{3}Δ^{3}Ε$ ἢ $ν.Α^{4}Β^{5}Γ^{3}Δ^{3}Ε$, ἔνθα ν εἶναι τυχὼν ἀριθμός.

§ 60. Εὕρεσις τοῦ ἐλ. κ. πολ. ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.—Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὁ ἀκόλουθος κανὼν εὑρέσεως τοῦ ἐλ. κ. πολ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ κ. πολ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἀναλύομεν ταύτας εἰς γινόμενον ἁπλῶν παραστάσεων καὶ σχηματίζομεν γινόμενον, ὅπερ περιέχει πάσας τὰς ἁπλᾶς ταύτας παραστάσεις κοινὰς καὶ μὴ κοινὰς καὶ ἑκάστην μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην, ἀριθμητικὸν δὲ παράγοντα τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμητικῶν παραγόντων τῶν δεδομένων παραστάσεων ἢ οἱονδήποτε ἀριθμόν.

Παραδείγματα. 1ον) Τῶν παραστάσεων $\alpha\chi^2\psi$, $\alpha^3\chi\psi^2$, $\alpha^4\chi^3\psi^4\omega$ ἐλ. πολλαπλάσιον εἶναι $\alpha^4\chi^3\psi^4\omega$.

2ον) Τῶν παραστάσεων $2\alpha\chi^3$, $4\alpha^2\chi$, $6\alpha^3\chi^2$, ἐλ. κ. πολ. εἶναι $12\alpha^3\chi^3$.

3ον) Τῶν παραστάσεων $3(\alpha+\beta)$, $5(\alpha-\beta)$, $15(\alpha^2-\beta^2)$, $30(\alpha^4-\beta^4)$ ἐλ. κ. πολλαπλάσιον εἶναι $30(\alpha^4-\beta^4)$. Τῷ ὄντι αἱ δύο πρῶται παστάσεις εἶναι ἁπλαῖ, ἡ δὲ $15(\alpha^2-\beta^2)=15(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ καὶ $30(\alpha^4-\beta^4)=30(\alpha^2+\beta^2).(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$. Κατὰ δὲ τὸν κανόνα τὸ ἐλ. κ. πολ. ὀφείλει νὰ περιέχῃ ὅλας τὰς ἁπλᾶς παραστήσεις $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$, $(\alpha^2+\beta^2)$ καὶ ἀριθμητικὸν παράγοντα τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 15, 30 ἤτοι εἶναι $30(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=30(\alpha^4-\beta^4)$.

4ον) Τῶν παραστάσεων $4(\alpha+\beta)^2$, $8(\alpha-\beta)^3$ καὶ $12(\alpha^2-\beta^2)$ ἐλ. κ. πολ. εἶναι $24(\alpha+\beta)^2.(\alpha-\beta)^3$.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ πολ. τῶν παραστάσεων.

320) α'.) $\alpha\chi$, $\alpha\beta\chi$ καὶ β') $\alpha^2\chi$, $\alpha^3\beta^2\chi^4$, $\alpha^3\beta^3\chi^3$.

321) α'.) $3\alpha^2$, $5\alpha^3$, 15α καὶ β') $\alpha\chi^2$, $4\alpha^2\chi$, $6\alpha\chi^3$, $8\alpha^3\chi^4$.

322) α'.) $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha^2-\beta^2$, β') $3.(\alpha+\beta)$, $5(\alpha-\beta)$, $10(\alpha^2-\beta^2)$,
γ'.) $(\chi+\psi)$, $(\chi-\psi)$, $(\chi^2-\psi^2)$, $(\chi^4-\psi^4)$.

323) α'.) $(\alpha-\alpha\beta)$, $(\alpha^2+\alpha\beta)$, $(\alpha^2-\beta^2)$, β'.) $(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)$, $(\alpha^3-\alpha^2\beta)$, $(\alpha^2\beta-\beta^3)$
γ'.) (χ^2-9), $(\chi^2+5\chi+6)$.

324) α'.) $(5\alpha+3\chi)$, $(5\alpha-3\chi)$, $(25\alpha^2-9\chi^2)$. β'.) $(\alpha+2\chi)$, $5(\alpha-2\chi)$,
$3(\alpha^2-4\chi)$, $(4\alpha^4-16^2\chi)$, γ') $(\alpha+\beta)$, $(\beta-\alpha)$, $(\alpha^2-\beta^2)$.

325) α'.) $3\chi\psi(\chi-\psi)$, $6\chi\psi^2\omega,(\psi-\chi)$, $9\chi^2\psi^2\omega^2(\chi^2-\psi^2)$, $12(\chi^4-\psi^4)$,
$18(\chi+\psi)\chi^3\psi^3\omega^3$.

326) α') $(2\chi+2)$, $(2\chi-2)$, $3(\chi^2-1)$, $5(\chi^4-1)$.
β') $(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma)$, $(\beta-\alpha).(\beta+\gamma)$, $(\gamma-\alpha).(\gamma-\beta)$.

327) α') $3(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma)$, $5(\beta-\alpha).(\beta-\gamma)$, $7(\alpha-\beta).(\gamma-\beta).(\gamma-\alpha)^2$
β') $(\alpha-\beta)^2-\gamma^2$ καὶ $(\alpha+\gamma)^2-\beta^2$.

Ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

§ 61. Ἔννοια ἀλγεβρικοῦ κλάσματος. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι τὸ πηλίκον ἀριθμοῦ δι' ἄλλου γράφεται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Οὕτω $3:5=\frac{3}{5}$, $17:8=\frac{17}{8}$, $2{,}5:6=\frac{2{,}5}{6}$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον παριστῶμεν καὶ τὸ πηλίκον ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, δι' ἄλλης, ὁσάκις ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελὴς ἢ ἀδύνατος.

Οὕτω $3\alpha\chi:5\psi=\frac{3\alpha\chi}{5\psi}$, $\alpha^2:3\beta\chi=\frac{\alpha^2}{3\beta\chi}$, $(\alpha^2-\beta^2):3(\alpha^2+\beta^2)=\frac{\alpha^2-\beta^2}{3(\alpha^2+\beta^2)}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἐπίσης τρόπον παριστῶμεν τὸ πηλίκον καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀριθμός. Οὕτω $3:\alpha^2+\beta^2=\frac{3}{\alpha^2+\beta^2}$,

$$(3\chi+2):7=\frac{3\chi+2}{7} \text{ κ. τ. λ.}$$

Αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις $\frac{3\alpha\chi}{5\psi}$, $\frac{\alpha^2}{3\beta\chi}$, $\frac{\alpha^2-\beta^2}{3(\alpha^2+\beta^2)}$, $\frac{3}{\alpha^3+\chi^3}$ κ. τ. λ. λέγονται ***ἀλγεβρικὰ κλάσματα***.

Ὥστε: ***Ἀλγεβρικὸν κλάσμα καλεῖται πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου εἷς τοὐλάχιστον ὅρος εἶναι ἀλγεβρικὴ παράστασις.***

Παριστᾷ δὲ ἕκαστον ἀλγεβρικὸν κλάσμα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Πᾶσα ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν ἀλγεβρικοῦ κλάσματος ἀρκεῖ νὰ τεθῇ ὑπ' αὐτὴν ὡς παρονομαστὴς ἡ 1.

§ 62. Ἰδιότητες ἀλγεβρικῶν κλασμάτων. Α΄. Ἔστωσαν τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα $\frac{3\alpha^2}{7\beta}$ καὶ $\frac{3\alpha^2(2\alpha+3)}{7\beta\,(2\alpha+3)}$, ὧν τὸ β΄ προῆλθεν ἐκ τοῦ πρώτου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων ἐπὶ τὴν παράστασιν $2\alpha+3$.

Τὸ $\frac{3\alpha^2}{7\beta}$ διὰ $\alpha=1$ καὶ $\beta=2$ γίνεται $\frac{3}{14}$, τὸ δὲ $\frac{3\alpha^2(2\alpha+3)}{7\beta(2\alpha+3)}$ γίνεται $\frac{3.5}{14.5}$, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{14}$. Ὁμοίως διὰ $\alpha=3$ καὶ $\beta=-2$ τὸ μὲν α΄ γίνεται $\frac{27}{-14}=-\frac{27}{14}$, τὸ δὲ β΄ γίνεται $\frac{27.9}{-14.9}=-\frac{27}{14}$.

Τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα $\frac{3\alpha^2}{7\beta}$ καὶ $\frac{3\alpha^2(2\alpha+3)}{7\beta\,(2\alpha+3)}$ λαμβάνουσι τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐτοῖς περιεχομένων γραμμάτων, ἤτοι εἶναι κλάσματα ἰσοδύναμα.

Ἄρα : ***Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἀλγεβρικοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς παραστάσεως (ἢ ἀριθμοῦ), προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον.***

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον βεβαιούμεθα περὶ τῆς ἀληθείας τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

Β'. ***Πᾶν ἀλγεβρικὸν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.***

Οὕτω $\frac{3\alpha^2\beta}{5\psi} \cdot 5\psi = 3\alpha^2\beta$, $\frac{\alpha^2+\chi^2}{\alpha^2-\beta^2} \cdot (\alpha^2-\beta^2) = \alpha^2+\chi^2$.

ΣΗΜ. Περὶ τῆς ἀληθείας ταύτης βεβαιούμεθα ἀμέσως ἐνθυμούμενοι ὅτι πρέπει τὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαρέτην νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Γ'. ***Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δι' ἀλγεβρικῆς παραστάσεως (ἢ ἀριθμοῦ) καὶ τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τῆς αὐτῆς παραστάσεως (ἢ ἀριθμοῦ).***

Δ'. ***Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δι' ἀλγεβρικῆς παραστάσεως (ἢ ἀριθμοῦ), τὸ κλάσμα διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν αὐτὴν παράστασιν (ἢ ἀριθμόν).***

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

§ 63. Α' Ἁπλοποίησις ἀλγεβρικοῦ κλάσματος.

Ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{3\alpha^2\beta}{5\alpha\chi}$, οὗ ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραια μονώνυμα περιέχοντα ἀμφότερα τὸν παράγοντα α. Διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ α εὑρίσκομεν κλάσμα $\frac{3\alpha\beta}{5\chi}$, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸ τὸ $\frac{3\alpha^2\beta}{5\alpha\chi}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{5\alpha\beta^3\chi}{15\beta^2\psi} = \frac{\alpha\beta\chi}{3\psi}, \quad \frac{12\chi^3\psi^4\omega}{4\alpha\chi^3\psi^8\omega^3} = \frac{3\psi}{\alpha\omega^2}, \quad \frac{7\alpha^2}{14\beta^2} = \frac{\alpha^2}{2\beta^2}.$$

Ἔστω ἔτι τὸ κλάσμα $\frac{3\alpha\beta+7\alpha}{5\alpha}$. Ἐπειδὴ $3\alpha\beta+7\alpha = \alpha.(3\beta+7)$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{3\alpha\beta+7\alpha}{5\alpha} = \frac{\alpha(3\beta+7)}{5\alpha} = \frac{3\beta+7}{5}.$$

Ὁμοίως $\frac{3\alpha^2-3\beta^2}{3\alpha^2+6\alpha\beta+3\beta^2} = \frac{3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{3(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

Ἄρα. ***Ἵνα ἁπλοποιήσωμεν ἀλγεβρικόν τι κλάσμα, ἀναλύομεν εἰς γινόμενα τοὺς ὅρους αὐτοῦ, (ἐὰν δὲν εἶναι μονώνυμα), καὶ διαιροῦμεν εἶτα ἀμφοτέρους διὰ τῶν κοινῶν αὐτῶν παραγόντων.***

Ἀσκήσεις. Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα :

328) $\frac{3\alpha}{\alpha\beta}$, $\frac{2\alpha^2\beta}{6\alpha^2\chi^2}$, $\frac{9\alpha\beta\chi}{3\alpha^2\chi^2}$, $\frac{25\alpha^2\beta^3\chi^4}{5\alpha\beta^2\chi^2}$.

329) $\frac{\chi+\chi^2}{\alpha+\alpha\chi}$, $\frac{\alpha^2+3\alpha}{5\alpha}$, $\frac{\chi^2+2\chi}{\alpha\chi+2\alpha}$, $\frac{3\alpha^2\chi-3\alpha^2\psi}{3\alpha^2\chi+3\alpha^2\psi}$, $\frac{35\beta\chi^3\psi+15\alpha\beta^3\chi}{21\alpha\chi^3\psi+9\alpha^2\beta^2\chi}$,

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}$, $\frac{\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2+4\alpha+4}$.

330) $\frac{3\chi^2-6\chi+3}{6\chi-6}$, $\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha\chi+\beta\chi}$, $\frac{\chi^2+2\chi\psi+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}$, $\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{\alpha\delta+\gamma\delta}$,

$\frac{\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2}{\alpha^2-4\beta^2}$

331) $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}$, $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma}$,

332) $\frac{\chi^3-\alpha^3}{3\,(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2)}$, $\frac{(\chi+\psi)^2(\chi^3-\psi^3)}{(\chi^2-\psi^2)^2}$, $\frac{(\chi^3-\psi^3)\,(\chi+\psi)}{(\chi^3+\psi^3)\,(\chi-\psi)}$,

333) $\frac{\chi^3+\psi^3}{\chi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2+\psi^3}$, $\frac{\alpha^3\chi^2+\beta^3\chi^2}{4\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2}$, $\frac{3\chi^2\psi^3-6\chi^2\psi^2\omega}{\psi^4-4\psi^2\omega^2}$,

334) $\frac{3\alpha^3\psi^2-3\beta^3\psi^2}{3\alpha^2\psi+3\alpha\beta\psi+3\beta^2\psi}$, $\frac{(\chi+2\alpha)^3}{\chi^3+8\alpha^3}$,

§ 64. Β΄. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα. — Ἐπειδὴ πολλαπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων ἀλγεβρικοῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν αὐτὴν παράστασιν ἢ ἀριθμὸν προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον, εἶναι δυνατὸν ἐκλέγοντες καταλλήλους πολλαπλασιαστὰς νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ ἑτερώνυμα ἀλγεβρικὰ κλάσματα $\frac{3\alpha}{\alpha+\beta}$, $\frac{5\alpha\beta}{\alpha-\beta}$, $\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα.

Κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀρχὴν ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἀποκτήσωσι ταῦτα, πρέπει νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν. Οὕτως ἡ παράστασις $\alpha^2-\beta^2$, ἥτις εἶναι κοινὸν πολ. τῶν παρονομαστῶν, δύναται νὰ γείνῃ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστής. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ μὲν α΄ κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον $(\alpha^2-\beta^2):(\alpha+\beta)=\alpha-\beta$, οἱ ὅροι τοῦ β΄ ἐπὶ $(\alpha^2-\beta^2):(\alpha-\beta)=\alpha+\beta$ καὶ οἱ ὅροι τοῦ γ΄

$$\text{ἐπὶ } (\alpha^2-\beta^2):(\alpha^2-\beta^2)=1.$$

Οὕτω προκύπτουσι τὰ ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα αὐτοῖς κλάσματα

$$\frac{3\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{5\alpha\beta\,(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Ἄρα : ***Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν κοινόν τι τῶν παρονομαστῶν πολλαπλάσιον (συνήθως τὸ ἐ.κ.π). διαιροῦμεν αὐτὸ δι᾽ ἑκάστου παρονομαστοῦ***

καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν καὶ ὅτι γινόμενον διαιρεῖται δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἂν ἐξαλειφθῇ οὗτος, συνάγομεν εὐκόλως τοὺς ἀκολούθους ἔτι κανόνας.

α'). ***Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.*** Οὕτω τὰ κλάσματα $\frac{5\alpha^2}{7\beta}$ καὶ $\frac{3\beta}{4\alpha}$ γίνονται

$$\frac{20\alpha^3}{28\alpha\beta}, \ \frac{21\beta^2}{28\alpha\beta}, \text{ ἤτοι ὁμώνυμα.}$$

β'). ***Διὰ νὰ τρέψωμεν πλείονα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.*** Οὕτω τὰ κλάσματα $\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$, $\frac{2\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$, $\frac{5\gamma}{\alpha\beta}$ τρέπονται εἰς τὰ $\frac{\alpha^4\beta(\alpha-\beta)}{\alpha^2\beta^2\gamma(\alpha-\beta)}$, $\frac{2\alpha\beta^3\gamma}{\alpha^2\beta^2\gamma(\alpha-\beta)}$, $\frac{5\alpha\beta\gamma^2(\alpha-\beta)}{\alpha^2\beta^2\gamma(\alpha-\beta)}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα.

Ἀσκήσεις. Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα.

335) α') $\frac{\alpha}{2\chi}, \frac{3\beta}{5\psi}, \frac{9\gamma}{10\chi\psi}$, β') $\frac{2\alpha^2}{\chi}, \frac{3\beta^2}{\psi^2}, \frac{\gamma^2}{\chi^2\psi^2}$, γ') $\frac{3\alpha}{5\beta\gamma}, \frac{\beta^2}{10\alpha^2\gamma}, \frac{7\gamma}{\alpha^2\beta^2}$.

336) α') $\frac{5\alpha+3}{2\alpha}, \frac{6\alpha}{5\alpha-3}$, β') $\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{3\alpha}{\alpha-\beta}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

γ') $\frac{\alpha+\chi}{3\chi}, \frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}, \frac{1}{\alpha^2-\chi^2}$.

337) α') $\frac{10\alpha^2}{\chi+\psi}, \frac{3\chi}{\chi-\psi}, \frac{5\alpha\chi}{\chi^2-\psi^2}, \frac{1}{\chi^4-\psi^4}$, β') $\frac{\chi+1}{\chi-1}, \frac{\chi-1}{\chi+1}, \frac{\chi^2+1}{\chi^2-1}, \frac{\chi^2-1}{\chi^2+1}$,

γ') $\frac{\chi+2}{5\chi}, \frac{\chi-2}{\chi+2}, \frac{7\chi}{\chi^2-4}, \frac{\alpha}{\chi^4-16}$,

338) α') $\frac{\chi+1}{2\chi-2}, \frac{\chi-1}{2\chi+2}, \frac{8\chi}{4\chi^2-4}, \frac{3\chi^2+3}{8\chi^2-8}$, β') $\frac{1}{\alpha+\chi}, \frac{9\alpha}{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2}, \frac{3\beta}{\alpha^3+\chi^3}$,

γ') $\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta).(\beta-\gamma)}, \frac{\beta^3}{(\beta-\alpha).\beta-\gamma)}, \frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha).(\gamma-\beta)}$,

δ') $\frac{3\alpha}{\alpha^2-4\alpha\chi+4\chi^2}, \frac{2\alpha+\chi}{(\alpha+\chi)\ (\alpha-2\chi)}, \frac{5}{\alpha+\chi}$

§ 65. Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\psi}{\alpha} + \frac{\omega}{\alpha}$. Τοῦτο διὰ α=2, χ=3, ψ=5, ω=11 γίνεται $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{11}{2}$ ἢ

$\frac{3+5+11}{2}=\frac{19}{2}$. Ἀλλὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν λαμβάνει προφανῶς καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\chi+\psi+\omega}{\alpha}$ διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν $\alpha, \chi, \psi, \omega$· ὁμοίως διὰ $\alpha=5$, $\chi=1$, $\psi=2$, $\omega=3$ τὸ ἄθροισμα $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\alpha}+\frac{\omega}{\alpha}$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\chi+\psi+\omega}{\alpha}$ γίνονται $\frac{1+2+3}{5}=\frac{6}{5}$.

Ὥστε αἱ παραστάσεις $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\alpha}+\frac{\omega}{\alpha}$ καὶ $\frac{\chi+\psi+\omega}{\alpha}$ εἶναι ἰσοδύναμοι ἤτοι $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\alpha}+\frac{\omega}{\alpha}=\frac{\chi+\psi+\omega}{\alpha}$.

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $\frac{\chi}{\alpha}-\frac{\psi}{\alpha}=\frac{\chi-\psi}{\alpha}$, $\frac{\chi}{\alpha}\cdot\frac{\psi}{\beta}=\frac{\chi\psi}{\alpha\beta}$, $\frac{\chi}{\alpha}\cdot\frac{\psi}{\beta}\cdot\frac{\omega}{\gamma}=\frac{\chi\psi\omega}{\alpha\beta\gamma}$, $\Pi:\frac{\psi}{\beta}=\Pi.\frac{\beta}{\psi}$.

Ἄρα: α΄) ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα ἀλγεβρικὰ κλάσματα ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ γράψωμεν τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν.***

β΄) ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν.***

Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον ταῦτα εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα καὶ ἐφαρμόζομεν τοὺς προηγουμένους κανόνας.

γ΄) ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀλγεβρικὰ κλάσματα, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ χωριστὰ τοὺς παρονομαστὰς καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν θέτομεν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.***

Ἐκ τοῦ κανόνος τούτου ἕπεται ἀμέσως ὅτι: ***Ἀλγεβρικὸν κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην***

δ΄) ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱανδήποτε παράστασιν ἢ ἀριθμὸν δι' ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, πολ)ζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀντεστραμμένον.***

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις.

339) α΄) $\frac{2\alpha+1}{3\alpha}+\frac{5\alpha+1}{3\alpha}+\frac{2\alpha-2}{3\alpha}$, β΄) $\frac{\chi-1}{\chi^2}+\frac{3\chi-3}{\chi^2}+\frac{2\chi^2-3\chi+4}{\chi^2}$,

γ΄) $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^4-\beta^4}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha^4-\beta^4}$.

340) α΄) $\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}-\frac{\alpha-\beta}{4\alpha}$, β΄) $\frac{2\chi}{3\psi}+\frac{5\chi}{4\psi}+\frac{7\chi}{6\psi}+\frac{\chi}{12\psi}$,

γ') $\frac{2\alpha}{\chi^2}+\frac{2\beta}{\psi^2}+\frac{3}{\chi\psi}$ δ') $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$.

341) α') $\chi+\frac{1-\chi}{1+\chi}$, β') $2\chi+\frac{3-2\chi}{5}$, γ') $1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

342) α') $\frac{\chi^2}{\alpha\chi}-\frac{2\chi}{\alpha\chi}$, β') $\frac{\alpha-\beta}{3\beta^2}-\frac{\alpha+\beta}{3\beta^2}$, γ') $\frac{7\chi^2-2\psi}{\chi^2-\psi^2}-\frac{6\chi-2\psi}{\chi^2-\psi^2}$.

343) α') $\frac{1+2\chi}{1-2\chi}-\frac{1-2\chi}{1+2\chi}$, β') $\frac{\alpha\beta-\alpha}{\beta+1}-\frac{\alpha\beta-\alpha}{\beta-1}$, γ') $\frac{\chi-\psi}{2(\chi+\psi)}-\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}$

δ') $\chi-\frac{\chi}{\chi-1}$, ε') $(\alpha+\chi)-\frac{2\alpha\chi+\chi^2}{\alpha+\chi}$.

344) α') $\frac{1}{1+\chi}+\frac{1}{1-\chi}-\frac{2\chi}{1-\chi^2}$, β') $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{\alpha+1}{\alpha-1}+\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$,

γ') $\frac{\alpha^3}{(\alpha+\beta)^3}+\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}$

345) α') $\frac{\chi}{\chi-\psi}+\frac{\chi}{\chi+\psi}+\frac{2\chi^2}{\chi^2-\psi^2}+\frac{4\chi^2\psi^2}{\chi^4-\psi^4}$, β') $\frac{\chi-\alpha}{\chi+\alpha}-\frac{\chi+\alpha}{\chi-\alpha}-\frac{2\alpha\chi}{\chi^2-\alpha^2}$,

γ') $\frac{\chi+1}{\chi-\alpha}-\frac{5\alpha+3\chi}{\alpha^2-\chi^2}+\frac{\chi+1}{\alpha+\chi}+\frac{3}{\chi+\alpha}$.

346) α') $1-\alpha+\alpha^2-\frac{\alpha^3}{1+\alpha}$, β') $1+\alpha+\frac{\alpha^3}{1+\alpha}$, γ') $1-\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$.

347) α') $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\chi}$. β') $\frac{\alpha}{\chi-1}\cdot\frac{\chi^2-1}{\beta}$, γ') $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{3\alpha}$,

δ') $\frac{\chi^2-1}{4}\cdot\frac{8}{\chi-1}$.

348 α') $\frac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}$, β') $\frac{\chi}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\chi(\alpha+1)}$.

349) α') $(\alpha^2-\beta^2)\cdot\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$, β') $(\chi+\psi)^3\cdot\frac{3\chi}{(\chi+\psi)^2}\cdot\frac{5\chi}{\alpha(\chi+\psi)}$,

γ') $\left(\frac{\alpha\chi}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{4\alpha}{2}\right)^2$.

350) α') $\frac{\alpha^2\omega^2}{\psi^2}\cdot\frac{\omega\psi}{\alpha(\omega+\psi)}\cdot\frac{\omega^2-\psi^2}{\alpha\omega\psi}$, β') $\frac{\omega^3+\alpha^3}{(\omega-\alpha)^2}\cdot\frac{\omega^2-\alpha^2}{\omega^2-\alpha\omega+\alpha^2}\cdot\frac{1}{\omega+\alpha}$,

351) α') $\frac{\alpha^3-\chi^3}{\alpha^3+\chi^3}\cdot\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}\cdot\frac{(\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2)^2}{\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2}$, β') $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^3\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)$.

352) α') $\frac{\chi+\alpha}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\chi-\alpha}-\frac{1}{\chi+\alpha}\right)$, β') $\frac{1-\chi}{5}\cdot\left(\frac{2}{\chi+1}-\frac{3}{\chi-1}\right)$.

353) α') $\frac{\alpha^2-\chi^2}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\chi+\chi^2}\left(\alpha+\frac{\alpha\chi}{\alpha-\chi}\right)$, β') $\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$.

354) α') $\left(\chi^2-\psi+\frac{2\psi^2}{\chi^2+\psi}\right)(\chi^2+\psi)$, β') $(\omega^2-1)\left(\frac{\omega}{\omega+1}+\frac{\omega}{\omega-1}-1\right)$.

355) α') $\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)$,

β') $\frac{1-\alpha^2}{1+2\beta+\beta^2}\cdot\frac{1-\beta^2}{\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{\beta}{1-\beta}\right)$.

356) α′) $\chi : \frac{2\chi}{\alpha}$ β′) $12\chi : \frac{5\chi}{3\alpha}$ γ′) $24\alpha^2 : \frac{3\alpha}{\chi}$, δ′) $\frac{5\chi^2\psi}{7\alpha\beta} : \frac{5\chi^2\psi^2}{14\alpha^2\beta^2}$.

357) α′) $\frac{9\alpha^2\beta\chi^3\psi}{5\gamma\delta} : \frac{18\alpha\beta\chi\psi}{25\gamma^2\delta^2}$, β′) $12\alpha\chi^3\psi\omega : \frac{4\psi\omega}{5\alpha^2}$.

358) α′) $\frac{\alpha\beta+\beta^2}{(\alpha-\beta)^2} : \frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$, β′) $\frac{2\chi-2\psi}{5\chi+5\psi} : \frac{4\chi-4\psi}{15\chi+15\psi}$, γ′) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} : \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}$.

359) α′) $\frac{3\alpha\psi-3\alpha}{2\gamma\delta+2\gamma} : \frac{\psi+1}{\delta+1}$, β′) $\frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha-3} : \frac{\alpha^2-5\alpha}{\alpha-3}$, γ′) $\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-2\alpha\beta+\alpha^2} : \frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

360) α′) $\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right) : \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$, β′) $\left(\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\alpha}{\chi}\right) : \frac{\chi^4-\alpha^4}{\alpha\chi}$,

γ′) $\left(1-\frac{2\alpha\chi}{\alpha^2+\chi^2}\right) : \frac{\alpha-\chi}{\alpha^2+\chi^2}$.

361) α′) $\frac{\alpha^3}{\alpha+\beta} : \left(\alpha-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$, β′) $\frac{\chi^2-\alpha^2}{\chi^2+\alpha^2} : \left(\chi^2+\alpha^2-\frac{4\alpha^2\chi^2}{\chi^2+\alpha^2}\right)$.

362) α′) $\left(1+\frac{\alpha^3}{\beta^3}\right) : \left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{\alpha}{\beta^3}\right)$, β′) $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right) : \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)$,

γ′) $\left(1-\frac{\chi-\psi}{\chi+\psi}\right) : \left(\frac{\chi+\psi}{\chi-\psi}-1\right)$.

363) α′) $\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right).\left(2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right) : \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right).\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}-1\right)$,

β′) $\left(\frac{\alpha+\chi}{\beta-\chi}-\frac{\alpha-\chi}{\beta+\chi}\right) : \left(\frac{\alpha+\chi}{\beta-\chi}+\frac{\alpha-\chi}{\beta+\chi}\right)$.

364) α′) $\left(\frac{\alpha}{\chi+\alpha}+\frac{2\alpha}{\chi-\alpha}-\frac{\alpha^2}{\chi^2-\alpha^2}\right) : \left(\frac{\chi-\alpha}{\chi+\alpha}-\frac{\chi+\alpha}{\chi-\alpha}+\frac{\chi^2-4\alpha^2}{\chi^2-\alpha^2}\right)$,

β′) $\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right).\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+1\right) : \left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{2\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\alpha\beta(\beta+2\alpha)}{\beta^3}+\frac{\alpha^4}{\beta^4}\right)$.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ.

365) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $(\alpha^2+9\beta^2)(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta).(\alpha^4+81\beta^4)$.

366) » » » » $(\alpha+\beta+\gamma+\delta).(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$.

367) » » » » $(\alpha+\beta+\gamma+\delta).(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$.

368) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta-\gamma)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2.$$

369) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον

$$(\alpha+2\beta+3\gamma).(\alpha+2\beta-3\gamma).(\alpha-2\beta+3\gamma).(2\beta-\alpha+3\gamma).$$

370) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).(\chi^2+\psi^2+z^2)-(\alpha\chi+\beta\psi+\gamma z)^2=(\beta z-\gamma\psi)^2+(\gamma\chi-\alpha z)^2+(\alpha\psi-\beta\chi)^2.$$

371) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4=(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha).(\gamma+\alpha-\beta).(\alpha+\beta-\gamma).$$

372) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\chi^2+\beta^2).(\gamma^2+\delta^2)=(\gamma\chi+\beta\delta)^2+(\delta\chi-\beta\gamma)^2$.

373) » » »

$$(\alpha+\beta+\gamma).(\alpha\chi^2+\beta\psi^2+\gamma z^2)-\beta\gamma.(\psi-z)^2-\gamma\alpha.(z-\chi)^2-\alpha\beta.(\chi-\psi)^2=(\alpha\chi+\beta\psi+\gamma z)^2.$$

374) Ἂν $\alpha^2-\beta\gamma=\chi$, $\beta^2-\alpha\gamma=\psi$, $\gamma^2-\alpha\beta=z$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma z=(\chi+\psi+z).(\alpha+\beta+\gamma).$$

375) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^4+\alpha^2+1=(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)$.

376) Ἂν $\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\chi\psi=\beta$ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\chi^3+\psi^3$ συναρτήσει τοῦ α καὶ β.

377) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἑκάτερον τῶν δυωνύμων $\alpha^8-\beta^8$ καὶ $\alpha^{16}-\alpha^{16}$.

378) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2$.

379) » » » » » » $4\chi^2\psi^2-(\chi^2+\psi^2-z^2)^2$.

380) » » » » » » $\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2$.

381) » » » » » » $4(\alpha\beta+\beta\gamma)^2-(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)^2$.

382) » » » » » » $\alpha^8+\alpha^4\beta^4+\beta^8$.

383) » » » » » » $250.(\alpha-\beta)^3+2$.

384) » » » » » » $(\chi+\psi+z)^3-\chi^3-\psi^3-z^3$.

385) » » » « » » $(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)^2-\chi^2\psi^2-\chi^2z^2-\psi^2z^2$.

386) Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ παράστασις $(\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2)^3$.

387 Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
$2(\psi-z)^2+2.(z-\chi)^2+2(\chi-\psi)^2+6(\psi z+z\chi+\chi\psi)-3(\chi^2+\psi^2+z^2)$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

388) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
$(\chi-\alpha)^2.(\beta-\gamma)+(\chi-\beta)^2.(\gamma-\alpha)+(\chi-\gamma)^2.(\alpha-\beta)=(\beta-\gamma).(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma)$.

389) Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $(\chi^6-64\alpha^6):(\chi-2\alpha)$.

390) » » » » $(\chi^3+\psi^3+z^3-3\chi\psi z):(\chi+\psi+z)$.

391) » » » »

$$(\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\alpha^3\gamma^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2):(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma).$$

392) Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $(2\chi^4+17\chi^3-68\chi-3):(\chi+\dfrac{1}{2})$.

393) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha^5+\alpha^2\beta^3-\alpha^4\beta-\alpha\beta^4}{\alpha^4-\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta-\alpha\beta^3}$.

394) » » » » $\dfrac{(\chi^2-4).(\chi^2-2\chi+1)}{\chi^3-2\chi^2-\chi+2}$.

395) » » » » $\dfrac{4\chi^3-12\chi^2\psi+12\chi\psi^2-4\psi^2}{6\chi^2-12\chi\psi+6\psi^2}$.

396) » » » » $\dfrac{\alpha\beta(\chi^2+\psi^2)+\chi\psi(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(\chi^2-\psi^2)+\chi\psi(\alpha^2-\beta^2)}$.

397) « » » » $\dfrac{\chi^2\psi+\chi^2z+\psi^2\chi+\psi^2z+z^2\chi+z^2\psi+2\chi\psi z}{(\chi+\psi+z)^3-\chi^3-\psi^3-z^3}$.

398) » » » » $\dfrac{\alpha^2-3\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2}$.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀκόλουθοι πράξεις.

399) α′) $\dfrac{1}{\chi-3}+\dfrac{1}{\chi+3}-\dfrac{6}{\chi^2-9}$, β′) $\dfrac{1}{(\chi+1)\chi(\chi-1)}-\dfrac{1}{(\chi-1)\chi}+\dfrac{2}{\chi^2-1}$.

400) α′) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$, β′) $\dfrac{\alpha\chi}{\alpha^2-\chi^2}+\dfrac{\chi-\alpha}{\alpha+\chi}+\dfrac{3\alpha\chi-\alpha^2-\chi^2}{\chi^2-\alpha^2}$.

401) α′) $\dfrac{6}{\chi^2-4}-\dfrac{6}{\chi^2+2\chi}+\dfrac{1}{\chi}$, β′) $\dfrac{\chi^3}{\chi-1}-\dfrac{\chi^2}{\chi+1}-\dfrac{1}{\chi-1}+\dfrac{1}{\chi+1}$.

√ 402) α′) $\frac{(\chi+1)^3}{\chi} - \frac{(\chi+1)^2}{\chi+2} - \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi+2}$, β′) 3 $\frac{\chi^6-1}{\chi^2-1} - \frac{\chi^6-3\chi^3+1}{\chi^2-2\chi+1}$.

√ 403) α′) $\frac{\alpha^2\chi-\alpha\chi^2}{\alpha^2-\chi^2} + \frac{\alpha^3+\alpha^2\chi}{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2} + \frac{\alpha^2-2\alpha\chi}{\alpha-\chi}$,

β′) $\frac{2\chi+1}{\chi^2+\chi+1} + \frac{2\chi}{\chi^2-1} - \frac{3\chi}{\chi^3-1}$.

√ 404) α′) $\frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\beta(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)}$

β′) $\frac{(\alpha-\beta)}{\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2} + 1$.

√ 405) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\frac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma} + \frac{\alpha\gamma(\gamma+\alpha)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$.

√ 406) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄρθοισμα

$$\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{2}{(\alpha+\beta)^3} + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right).$$

√ 407) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{2\mu x^2y^2-4\mu x^4-\mu x^3y+3\mu xy^3}{3\nu x^2y^2-2\nu xy^3+\nu x^3y-2\nu y^4}$.

√ 408) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}.$$

√ 409) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right),\ \text{ὅταν } \alpha+\beta+\gamma=0.$$

√ 410) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3}$.

√ 411) Νὰ καταστῇ τὸ κλάσμα

$$\frac{1-\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}$$ ἁπλοῦν λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$.

√ 412) Νὰ καταστῇ ἁπλοῦν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}}{1-\alpha\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}}$.

√ 413) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}\left(1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right).$$

√ 414) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

√ 415) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{\beta^2\gamma^2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\sigma)}.$$

√ 416) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

417) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha^2(\beta-\gamma)^3+\beta^2(\gamma-\alpha)^3+\gamma^2(\alpha-\beta)^3}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}$

418) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον

$$(\chi+y+z)(\chi^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

419) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{x}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+\chi):\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{2}{\alpha\beta}-\frac{x^2}{\alpha^2\beta^2}\right).$$

420) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)$ εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων.

421) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $(x+y)^4+x^4+y^4-2(x^2+y^2+xy)^2$.

422) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $8(x-1)^3+4(x-1)^2+(x^2-4x+2)^2-(x^4-x^2+1)$.

423) Νὰ καταστῇ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις

$$(x+y+z)^3-3(x+y+z)(yz+zx+xy)+3xyz.$$

424) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $x^4+y^4+z^4+y^2z^2+y^2x^2+x^2z^2-2xyz(x+y+z)$ εἶναι ἀδύνατον νὰ γείνῃ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Εἰς ποίαν περίπτωσιν γίνεται τοῦτο μηδέν ;

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ.

§ **66. Πρόβλημα I.** ***Ἠγόρασέ τις μῆλα πρὸς 10 δραχμὲς τὴν ὀκᾶν· ἐὰν τὰ μῆλα ἐτιμῶντο 1 δραχμὴν ὀλιγώτερον κατ᾽ ὀκᾶν, θὰ ἠγόραζε μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα μίαν ὀκᾶν περισσότερον. Πόσας ὀκάδας μῆλα ἠγόρασεν;***

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἠγόρασε χ ὀκάδας μήλων· ἐπειδὴ ἑκάστη ὀκᾶ τιμᾶται 10 δραχμάς, αἱ χ ὀκάδες τιμῶνται 10χ δραχμάς. Ἐὰν ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 9 δραχμάς, θὰ ἐλάμβανε (χ+1) ὀκάδας καὶ θὰ ἔδιδεν 9 (χ+1) δραχμάς. Τὰ χρήματα ὅμως ταῦτα εἶναι τὰ ἴδια μὲ τὰ προηγούμενα, ἤτοι πρέπει ὁ χ νὰ ὁρισθῇ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι

$$10\chi = 9(\chi+1) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $9(\chi+1)=9\chi+9$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $10\chi=9\chi+9$. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους 10χ καὶ 9χ+9 ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 9χ, εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=9$, ἤτοι ἠγόρασεν 9 ὀκάδας. Πράγματι, διὰ τὰς 9 ὀκ. ἔδωκεν $10.9=90$ δραχμάς· ἐὰν δὲ ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 9 δραχμάς, μὲ τὰς 90 δραχμὰς θὰ ἐλάμβανεν $90:9=10$ ὀκ. ἤτοι μίαν ὀκᾶν ἐπὶ πλέον.

Ἡ ἰσότης (1) περιέχει τὸ γράμμα χ καὶ ἀληθεύει μόνον, ὅταν ὁ χ λάβῃ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν 9. Καλεῖται δὲ αὕτη ***ἐξίσωσις***. ***Γενικῶς: Ἐξίσωσις καλεῖται πᾶσα ἰσότης, ἡ ὁποία περιέχει γράμματα καὶ ἀληθεύει δι᾽ ὡρισμένας τιμὰς τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων γραμμάτων.***

ΣΗΜ. Πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὰς ἐξισώσεις ἀπὸ τὰς ταυτότητας (§ 30), αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουσι δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων γραμμάτων.

Τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβωσι ὡρισμένας τιμάς, διὰ νὰ ἀληθεύσῃ μία ἐξίσωσις, λέγονται ***ἄγνωστοι*** τῆς ἐξισώσεως. Εἰς τὴν προηγουμένην π. χ. ἐξίσωσιν (1) ἄγνωστος ἦτο ὁ χ.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύει μία ἐξίσωσις καλοῦνται ***ῥίζαι*** τῆς ἐξισώσεως ταύτης. Τῆς ἐξισώσεως π. χ. (1) ῥίζα εἶναι ὁ 9.

Ἡ εὕρεσις τῶν ῥιζῶν ἐξισώσεως καλεῖται λύσις αὐτῆς.

Ὑπάρχουσιν ἐξισώσεις, τῶν ὁποίων αἱ ῥίζαι εἶναι προφανεῖς. Οὕτω τῆς ἐξισώσεως $\chi=2$, ῥίζα εἶναι προφανῶς ὁ 2.

Ἡ γνῶσις τῶν μεθόδων, κατὰ τὰς ὁποίας λύονται αἱ ἐξισώσεις εἶναι σπουδαιοτάτη, διότι εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων ἀνάγεται καὶ ἡ λύσις τῶν προβλημάτων. Οὕτω π. χ. τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἡ λύσις ἀνήχθη εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1)

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

§ **67. Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις.** ***Δύο ἢ πλείονες ἐξισώσεις λέγονται ἰσοδύναμοι, ἐὰν ἔχωσι τὰς αὐτὰς ῥίζας.***

Κατὰ τὴν λύσιν ἐξισώσεως προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι νὰ εἶναι προφανεῖς. Διὰ τοῦτο εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν τὰς μεθόδους, δι᾽ ὧν εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Τὰς μεθόδους ταύτας μανθάνομεν ἐκ τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

§ **68. Θεώρημα I.** ***Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς ἐκείνην.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (1)

ἐν τῇ ὁποίᾳ χάριν συντομίας ἑκάτερον τῶν μελῶν παρίσταται δι᾽ ἑνὸς γράμματος. Ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς λ, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A+\lambda=B+\lambda$ (2)

Λέγω ὅτι αἱ ἐξισώσεις $A=B$ καὶ $A+\lambda=B+\lambda$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ παραστάσεις A καὶ B λαμβάνουσιν ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς α καὶ β, ὅταν ἀντὶ τῶν ἐν αὐταῖς περιεχομένων ἀγνώστων τεθῶσιν αἱ ρίζαι τῆς (1). Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ παραστάσεις $A+\lambda$ καὶ $B+\lambda$ γίνονται ἀντιστοίχως $\alpha+\lambda$ καὶ $\beta+\lambda$ διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Εἶναι δὲ καθ᾽ ὑπόθεσιν $\alpha=\beta$· ἐπειδή, δέ, ἂν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ἴσοι, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\lambda=\beta+\lambda$. Διὰ τὰς ρίζας ἄρα τῆς (1) ἀληθεύει καὶ ἡ (2)· ἑπομένως καὶ αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς (1).

β΄) Ἂν αἱ παραστάσεις A καὶ B γίνωνται ἀντιστοίχως α καὶ β, ὅταν οἱ ἄγνωστοι ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν ριζῶν τῆς (2), αἱ παραστάσεις $A+\lambda$ καὶ $B+\lambda$ γίνονται ἀντιστοίχως $\alpha+\lambda$ καὶ $\beta+\lambda$ διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ἐπειδὴ δὲ καθ᾽ ὑπόθεσιν εἶναι $\alpha+\lambda=\beta+\lambda$ καὶ ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι καὶ $\alpha=\beta$, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ (1) ἀληθεύει διὰ τὰς ρίζας τῆς (2). Ἔχει ἄρα ἡ (1) τὰς ῥίζας τῆς (2).

Ἔχουσι λοιπὸν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τὰς αὐτὰς ῥίζας, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμοι. ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει καὶ ὅταν λ εἶναι παράστασις περιέχουσα τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως. Τῷ ὄντι ἂν ἡ παράστασις λ λαμβάνῃ τιμὴν λ΄, ὅταν αἱ Α καὶ Β γίνωνται α κα β, ἐκ τῆς $\alpha=\beta$ προκύπτει ἡ $\alpha+\lambda'=\beta+\lambda'$ καὶ ἀντιστρόφως. Ὥστε δι᾽ ἃς τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἀληθεύει ἡ (1) ἀληθεύει καὶ ἡ (2) καὶ τἀνάπαλιν. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $10\chi=9\chi+9$ (§ 66) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $10\chi-9\chi=9$, ἥτις προέκυψεν ἐξ ἐκείνης διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ μονωνύμου -9χ.

Πόρισμα Ι. *Ἐὰν ὅρος ἢ ὅροι ἐξισώσεως μεταφερθῶσιν ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς εἰς τὸ ἕτερον καὶ ἕκαστος μὲ ἀντίθετον σημεῖον προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς ἐκείνην.*

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $3\chi+7=\chi+5$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $3\chi=\chi+5-7$, διότι προκύπτει ἐξ αὐτῆς διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ ἀριθμοῦ -7. Ἡ ἐξίσωσις $5\chi-17=3\chi+21$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $5\chi-3\chi=21+17$, διότι προκύπτει ἐξ ἐκείνης διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς παραστάσεως $17-3\chi$ ἢ πρῶτον τοῦ 17 καὶ εἶτα τοῦ -3χ.

§ **69. Θεώρημα ΙΙ.** *Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ μηδενός), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς ἐκείνην.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (1)

καὶ λ ἀριθμός τις διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ λ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις.

$$A.\lambda=B.\lambda \qquad (2)$$

Λέγω ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις. α΄) Κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα, ἡ ἐξίσωσις $A=B$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $A-B=0$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\lambda\neq0$, διὰ τὰς ῥίζας μόνον τῶν ἰσοδυνάμων τούτων ἐξισώσεων εἶναι καὶ $\lambda\,(A-B)=0$ ἢ $\lambda A-\lambda B=0$. Ἔχει δηλ. ἡ ἐξίσωσις $\lambda A-\lambda B=0$ μόνον τὰς ῥίζας τῆς $A=B$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις $\lambda A-\lambda B=0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\lambda A=\lambda B$, ἕπεται ὅτι καὶ αὕτη ἔχει τὰς ῥίζας τῆς $A=B$. καὶ μόνον αὐτάς.

Ὥστε αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔχουσι τὰς αὐτὰς ῥίζας. Εἶναι ἄρα αὗται ἰσοδύναμοι. ὅ.ἔ.δ.

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς λ εἶναι συνάρτησις τῶν ἀγνώστων ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν. Οὕτως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $2\chi-3=\chi+2$ ἐπὶ $(\chi-3)$ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $(\chi-3).(2\chi-3)=(\chi+2).(\chi-3)$. Αὕτη ἔχῃ τὴν ῥίζαν 5 τῆς πρώτης, διότι ἑκάτερον τῶν μελῶν αὐτῆς διὰ $\chi=5$ γίνεται 14· ἔχει ὅμως καὶ τὴν ῥίζαν 3, τὴν ὁποίαν δὲν ἔχει ἡ α΄. Ἄρα αὗται δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πόρισμα I. *Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ μηδενὸς), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς ἐκείνην.*

Διότι διαίρεσις π.χ. διὰ μ εἶναι πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ $\frac{1}{\mu}$.

Πόρισμα II. *Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων ἐξισώσεως, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς ἐκείνην.*

Διότι ἡ ἀλλαγὴ αὕτη τῶν σημείων ὅλων τῶν ὅρων εἶναι πολ)σμὸς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα.

Πόρισμα III. *Ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ παρονομαστὰς δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτούς.*

Ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῆς. Οὕτω δεδομένης τῆς ἐξισώσεως $\chi + \frac{3}{7} = \frac{5\chi+2}{3}$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐλ. κ. π. 21 τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 3, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $21\chi + 9 = 7\ (5\chi + 2)$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει παρονομαστὰς καὶ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

ΣΗΜ. Ἐὰν πρὸς ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν παραστῇ ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ συνάρτησιν τῶν ἀγνώστων, ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχει ἐκείνας μόνον ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς νέας ἐξισώσεως, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουσι τὸν πολλαπλασιαστήν. Οὕτως, ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $1+\frac{6}{\chi-1}=5\chi-11$ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\chi-1$ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\chi-1+6= (5\chi-11)(\chi-1)$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $\chi=3$ καὶ διὰ $\chi=\frac{2}{5}$, ὡς εὐκόλως διὰ δοκιμῆς πειθόμεθα. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς $(\chi-1)$ δι' οὐδεμίαν τῶν τιμῶν τούτων τοῦ χ μηδενίζεται, αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι καὶ ῥίζαι τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν ὅμως ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $1-\frac{\chi^2}{\chi-1}=\frac{1}{1-\chi}-6$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi-1-\chi^2=-1+6-6\chi$, ἥτις ἔχει ῥίζας 6 καὶ 1. Ἐκ τούτων ἡ 6 δὲν μηδενίζει τὸν πολλαπλασιαστὴν $\chi-1$, ἄρα εἶναι καὶ ῥίζα τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως, ἐν ᾧ ἡ 1 μηδενίζουσα τὸν πολλαπλασιαστὴν $\chi-1$ δὲν εἶναι ῥίζα τῆς ἀρχικῆς.

Πόρισμα. IV. *Πᾶσα ἐξίσωσις δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν Π=Ο, ἔνθα Π εἶναι ἀκέραιον ἀνηγμένον πολυώνυμον.*

Ἀρκεῖ νὰ ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταί, ἂν ἔχῃ, νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις, νὰ μεταφερθῶσιν ὅλοι οἱ ὅροι εἰς τὸ α΄ μέλος καὶ νὰ γείνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi-2}{\chi+1}+\frac{3}{5}=\frac{\chi}{4}$ γίνεται διαδοχικῶς ἰσοδύναμος πρὸς τὰς

$20(\chi-2)+12(\chi+1)=5\chi.(\chi+1)$, $20\chi-40+12\chi+12=5\chi^2+5\chi$, $20\chi-40+12\chi+12-5\chi^2-5\chi=0$, $27\chi-5\chi^2-28=0$, $5\chi^2-27\chi+28=0$.

§ **70. Βαθμὸς ἐξισώσεως.** *Ἐὰν ἐξίσωσις λάβῃ τὴν μορφὴν Π=0, ἔνθα Π εἶναι ἀκέραιον καὶ ἀνηγμένον πολυώνυμον, καλεῖται βαθμὸς αὐτῆς ὁ πρὸς τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου Π.*

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi-2}{\chi+1}+\frac{3}{5}=\frac{\chi}{4}$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $5\chi^2-27\chi+28=0$, εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, διότι τὸ πολυώνυμον $5\chi^2-27\chi+28$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, ἡ δὲ $\chi^3-5\chi^2+7\chi-3=0$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ.

ΣΗΜ. Εὐνόητον ὅτι δὲν πρέπει νὰ σπεύδωμεν νὰ χαρακτηρίζωμεν τὸν βαθμὸν ἐξισώσεως, πρὶν δώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν Π=0.

Λύσεις ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

§ **71. Πρόβλημα. 1.**—*Ἀποθανών τις ἀφῆκε περιουσίαν 100000 δραχμῶν καὶ παρήγγειλε νὰ διανεμηθῇ αὕτη ὡς ἑξῆς· Ἡ κόρη του νὰ λάβῃ 20000 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ υἱοῦ του, ἡ δὲ σύζυγός του νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τῆς θυγατρός. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος;*

Λύσις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ υἱός του ἔλαβε χ δραχμάς, ἡ θυγάτηρ του θὰ ἔλαβε $(\chi+20000)$ δραχμὰς καὶ ἡ σύζυγός του $\frac{\chi+20000}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρία ταῦτα μερίδια πρέπει προστιθέμενα νὰ ἀποτελῶσι τὰς 100000 δραχμάς, πρέπει ὁ χ νὰ εἶναι τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι

$$\chi+(\chi+20000)+\frac{\chi+20000}{2}=100000 \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ 2 εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $2\chi+2(\chi+20000)+(\chi+20000)=200000$, ἥτις δὲν ἔχει παρονομαστήν· ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $2\chi+2\chi+40000+\chi+20000=200000$. Ἐὰν εἶτα χωρίσωμεν τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους ὅρους μεταφέροντες τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ β΄ μέλος, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $2\chi+2\chi+\chi=200000-40000-20000$, ἥτις μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων γίνεται $5\chi=140000$. Διαιροῦντες ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ 5 εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\chi=28000$, ἥτις ἔχει προφανῶς τὴν ῥίζαν 28000. Ἑκάστη ἄρα τῶν προηγουμένων καὶ ἰσοδυνάμων πρὸς ταύτην ἐξισώσεων, ἑπομένως καὶ ἡ (1) ἔχει τὴν ῥίζαν 28000. Ὥστε ὁ μὲν υἱὸς ἔλαβεν 28000 δραχμάς, ἡ θυγάτηρ

$28000+20000=48000$ δραχμὰς καὶ ἡ σύζυγος. $48000:2=24000$ δραχμάς.

§ **72. Πρόβλημα ΙΙ.** *Εἶχέ τις ποσὸν χρημάτων, ἐξ ὧν διέθεσε 5000 δραχ. πρὸς ἀγορὰν ἐπίπλων· τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου ἐτόκισε πρὸς 6 % ἐτησίως καὶ τὸ τέταρτον τοῦ αὐτοῦ ὑπολοίπου πρὸς 8 %. Οὕτω δὲ λαμβάνει ἐτησίως τόκον 1750 δραχμάς. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς;*

Λύσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἀρχικῶς εἶχε χ δραχμάς, μετὰ τὴν ἀγορὰν τῶν ἐπίπλων ἔμειναν εἰς αὐτὸν (χ—5000) δραχμαί· τὰ δὲ πρὸς 6 % δανεισθέντα χρήματα ἦσαν $\frac{\chi-5000}{2}$ δραχμαὶ καὶ τὰ πρὸς 8 % ἦσαν $\frac{\chi-5000}{4}$ δραχμαί. Τὸ κεφάλαιον $\frac{\chi-5000}{2}$ τοκιζόμενον πρὸς 6 % ἐτησίως φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον $6\,\frac{\chi-5000}{2.100}$ ἢ $\frac{(\chi-5000)6}{200}$, τὸ δὲ κεφάλαιον $\frac{\chi-5000}{4}$ πρὸς 8 % φέρει ἐτήσιον τόκον $\frac{(\chi-5000)8}{400}$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο οὗτοι τόκοι ὁμοῦ ἀποτελοῦσι 1750 δραχμάς, πρέπει ὁ χ νὰ εἶναι τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{(\chi-5000)6}{200}+\frac{(\chi-5000).8}{400}=1750 \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ 400 εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $12(\chi-5000)+8(\chi-5000)=1750.400$· ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $12\chi-60000+8\chi-40000=700000$. Χωρίζοντες ἔπειτα τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους ὅρους εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $12\chi+8\chi=700000+60000+40000$, ἐξ ἧς μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $20\chi=800000$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ 20 εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\chi=40000$, ἥτις ἔχει προφανῶς τὴν ῥίζαν 40000· καὶ ἡ ἀρχικὴ ἄρα ἐξίσωσις (2) ἔχει τὴν αὐτὴν ῥίζαν. Ὥστε εἶχεν ἀρχικῶς 40000 δραχμάς.

Ἐκ τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐλύθησαν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τῶν προηγουμένων προβλημάτων, προκύπτει ὁ ἀκόλουθος κανών.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. α΄) Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς (ἐὰν ἔχῃ) πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τούτων. β΄) Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις, (ἂν ὑπάρχωσι τοιαῦται). γ΄) Χωρίζομεν τοὺς γνω-

στοὺς ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους ὅρους μεταφέροντες συνήθως τοὺς μὲν ἀγνώστους ὅρους εἰς τὸ α΄ μέλος, τοὺς δὲ γνωστοὺς εἰς τὸ β΄. δ΄) Ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ε΄) Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου.

§ **73. Διερεύνησις τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως.**— Κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα πᾶσα ἐξίσωσις α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον χ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha\chi=\beta$. Ἤδη διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

α΄) Ἐὰν εἶναι $\alpha\neq0$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ α καὶ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\beta}{\alpha}$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν ἔχει τὴν ῥίζαν $\frac{\beta}{\alpha}$, ἥτις εἶναι 0 ἢ διάφορος τοῦ μηδενός, καθ᾽ ὅσον $\beta=0$ ἢ $\beta\neq0$.

β΄) Ἐὰν $\alpha=0$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi=\beta$ γίνεται μηδέν, ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται $0=\beta$. Καὶ ἂν μὲν εἶναι καὶ β μηδέν, αὕτη γίνεται $0=0$, ἥτις προφανῶς εἶναι ἀληθὴς οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ. Ἡ ἐξίσωσις ἄρα $\alpha\chi=\beta$ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἤτοι εἶναι ταὐτότης· καὶ ἡ ἀρχικὴ ἄρα ἐξίσωσις, ἀπὸ τὴν ὁποίαν προῆλθεν ἡ $\alpha\chi=\beta$, ὡς ἰσοδύναμος πρὸς ταύτην, εἶναι ταὐτότης.

Ἂν δὲ ὁ β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς π.χ. 3, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0=3$, ἥτις προφανῶς εἶναι ψευδής, ἤτοι οὐδέποτε ἀληθεύει. Καὶ ἡ ἀρχικὴ ἄρα ἐξίσωσις οὐδέποτε ἀληθεύει.

Ὥστε: ***Ἐὰν ἐξίσωσις εἶναι α΄ βαθμοῦ καὶ ἔχῃ ἕνα ἄγνωστον, ἔχει μίαν ὡρισμένην λύσιν ἢ ἀπείρους*** (ταὐτότης) ***ἢ οὐδεμίαν*** (ἀδύνατος).

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις.

425) α΄) $2\chi+3=\chi+6$, β΄) $5\chi+1=\chi+3$, γ΄) $\chi+6=2\chi-11$, δ΄) $5\chi-3=\chi-9$.

426) α΄) $3(\chi+1)=7\chi-1$, β΄) $5(\chi-4)=2(\chi-7)+27$; γ΄) $17+(\chi-1)^2=\chi^2+2.(\chi-3)$.

427) α΄) $\frac{7y}{2}+1=8$, β΄) $\frac{3\psi}{4}-1=\frac{\psi}{4}+1$,

γ΄) $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}-\frac{3\chi}{8}=24$ δ΄) $\frac{3\omega}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\omega}{10}=3\omega-\frac{\omega}{5}-\frac{97}{4}$.

428) α΄) $\frac{2\psi-1}{3}=1+\frac{2\psi}{5}$, β΄) $\omega-\frac{\omega-1}{4}=\frac{3\omega+1}{4}$,

γ΄) $2\psi+1-\frac{3\psi-5}{16}=\frac{\psi+1}{8}+\frac{5\psi-1}{2}-4$.

429) α′) $3\chi - \frac{\chi-5}{8} = \frac{\chi+12}{15} - \frac{\chi-1}{12} + 38,$

β′) $\frac{7-\omega}{3} - \frac{9\omega-5}{9} + 1 = \frac{\omega}{2} - \frac{5-13\omega-213}{18}.$

430) α′) $\frac{27-2\psi}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7\psi-54}{10},$ β′) $\frac{5\varphi-1}{7} - \frac{9\varphi-7}{5} = \frac{5-9\varphi}{11},$

γ′) $\frac{\chi-3}{8} + \frac{\chi+9}{12} = \frac{3\chi+7}{20} + 3.$

431) α′) $\frac{\chi-4}{2\chi+4} = \frac{1}{4},$ β′) $\frac{3(2\chi+30}{5(1-\chi)} = \frac{18}{65},$

γ′) $\frac{\chi-1}{\chi} + \frac{\chi-2}{2\chi} - \frac{3}{4\chi} = \frac{55}{44}.$

432) α′) $\frac{3\chi-1}{\chi+2} = \frac{3\chi+1}{\chi+3},$ β′) $\frac{\chi}{\chi-1} = \frac{\chi-1}{\chi-3},$

γ′) $\frac{5\psi+3}{\psi-1} = \frac{5(\psi+3)}{\psi} + \frac{1}{\psi},$ δ′) $\frac{5(\omega-2)}{\omega+2} - \frac{2(\omega-3)}{\omega+3} = 3.$

433) α′) $\frac{4}{\chi+2} + \frac{7}{\chi+3} = \frac{37}{\chi^2+5\chi+6},$ β′) $\frac{3}{\chi-3} + \frac{5}{\chi-5} = \frac{34}{\chi^2-8\chi+15}.$

434) α′) $\alpha\chi+\beta=\beta\chi+\alpha,$ β′) $5(\chi+\alpha)-3\chi=3(\chi-\alpha)+5\alpha.$

435) α′) $3(\alpha-\beta\chi)=5(\beta-\alpha\chi),$ β′) $(\chi-\alpha)^2-5\alpha\chi=2\alpha^2+\chi^2.$

436) α′) $7\left(\frac{\chi}{\alpha}-3\right)+17=0,$ β′) $\frac{\psi}{\alpha} - \frac{2\psi}{\beta} = \beta-2\alpha,$

γ′) $\frac{\alpha+\beta\omega}{\beta} = \frac{\beta-\alpha\omega}{\alpha}.$

437) α′.) $\frac{\alpha(\psi-\alpha)}{\beta} + \frac{\beta(\psi-\beta)}{\alpha} = \psi,$ β′) $\frac{\beta.(\beta-\varphi)}{\alpha} - \frac{\alpha(\alpha+\varphi)}{\beta} =$ φ

338) α′.) $\frac{\alpha}{\beta-\chi} = \frac{\beta}{\alpha-\chi},$ β′.) $\frac{\omega-\alpha}{\omega-\beta} = \frac{\omega-\gamma}{\omega-\delta},$ γ′.) $\frac{\chi+\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\chi-\alpha}{\alpha-\beta} = 1.$

439) α′) $\frac{\varphi+\alpha}{\varphi-\beta} - \frac{\varphi-\alpha}{\varphi+\beta} = \frac{2.(\alpha+\beta)^2}{\varphi^2-\beta^2},$ β′.) $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}.$

440) α′) $\frac{\alpha\chi+\beta}{\beta+\alpha} + \frac{\alpha\chi-\beta}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2},$ β′) $\frac{1}{\psi-\beta} - \frac{1}{\psi-\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{\psi^2-\alpha\beta}.$

441) α′) $\frac{\omega-\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\omega-\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2-\beta^2},$ β′) $\frac{2}{\varphi-\alpha} + \frac{1}{\varphi+2\alpha} = \frac{3}{\varphi}.$

442) α′) $\frac{\chi-\alpha}{\chi-2\alpha-\beta} = \frac{\chi+\beta}{\chi+\alpha+2\beta},$ β′) $\frac{2x-\alpha}{x+\beta} = \frac{\alpha+2x}{x+2\alpha+3\beta}.$

Περὶ προβλημάτων ἐν γένει.

§ **74. Στοιχεῖα προβλήματος.** Εἰς ἕκαστον πρόβλημα διακρίνονται δεδομένα καὶ ζητούμενα, ἤτοι γνωστὰ καὶ ἄγνωστα. Ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ τὰ γνωστὰ καὶ τὰ ἄγνωστα εἶναι ἀριθμοί· ἂν δὲ εἴς τι πρόβλημα εἰσέρχωνται καὶ ποσά, ταῦτα θεωροῦνται μετρημένα μὲ κατάλληλον ἕκαστον μονάδα καὶ ἀντικαθίστανται ταῦτα μὲ τὰ μέτρα αὐτῶν, ἤτοι μὲ ἀριθμούς·

Μεταξὺ τῶν γνωστῶν καὶ τῶν ἀγνώστων προβλήματος ὑφίστανται σχέσεις τινές, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται διὰ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος καὶ καλοῦνται ἐπιτάγματα. Τὰ ***ἐπιτάγματα*** ταῦτα πρέπει νὰ ἐκπληρῶσιν οἱ ἄγνωστοι, ἵνα λύωσι τὸ πρόβλημα·

Ἐνίοτε ὅμως ἡ φύσις τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα παριστῶσιν οἱ ἄγνωστοι εἶναι τοιαύτη, ὥστε πρέπει οὗτοι νὰ ἐκπληρῶσι καὶ ἄλλους τινὰς ὅρους, ὅπως λύωσι τὸ πρόβλημα. Οἱ ὅροι οὗτοι, οἱ ὁποῖοι ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικῶς ἐκ τῆς φύσεως τῶν ποσῶν, ἅτινα παριστῶσιν οἱ ἄγνωστοι, καλοῦνται ***περιορισμοί***. Οὕτω π. χ. ὁ ἄγνωστος χ τοῦ προβλήματος I (§ 71) παριστῶν τὸ χρηματικὸν μερίδιον, ὅπερ ἔλαβεν ἐκ τῆς πατρικῆς περιουσίας τῶν 100000 δραχμῶν ὁ υἱός, ὀφείλει νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μικρότερος τῶν 100000. Ἐπίσης ὁ ἄγνωστος χ τοῦ προβλήματος II (§ 72) ὀφείλει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ μεγαλύτερος τοῦ 5000.

Ἐὰν ὁ ἄγνωστος προβλήματος παριστᾷ ζῶντα ὄντα π.χ. ἀνθρώπους, εἶναι εὐνόητον ὅτι ὀφείλει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος.

Ἐὰν ὁ ἄγνωστος παριστᾷ ἀφῃρημένον ἀριθμόν, εἰς οὐδένα προφανῶς ὑπόκειται περιορισμόν.

§ **75. Λύσις προβλημάτων.** Εἰς τὰ προηγούμενα ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ λύσις τῶν προβλημάτων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων·

Ὥστε ἡ λύσις προβλήματος περιλαμβάνει τὰ ἑξῆς μέρη : α΄) ***Τὴν κατάστρωσιν τῆς ἐξισώσεως (ἢ τῶν ἐξισώσεων) τοῦ προβλήματος καὶ τὴν διατύπωσιν τῶν περιορισμῶν, εἰς τοὺς ὁποίους τυχὸν ὑπόκεινται οἱ ἄγνωστοι.***

β΄) ***Τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (ἢ τῶν ἐξισώσεων) τοῦ προβλήματος καὶ***

γ΄) ***Τὴν ἐξέτασιν, ἂν αἱ εὑρεθεῖσαι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ἐκπληρῶσι καὶ τοὺς διατυπωθέντας περιορισμούς, ὅτε μόνον αὗται ἀποτελοῦσι λύσιν τοῦ προβλήματος.***

§ **76. Κατάστρωσις τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων.** Ἡ ποικιλία τῶν προβλημάτων εἶναι ἄπειρος· διὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ ὡρισμένος ἢ ὡρισμένοι κανόνες διὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν ἐξισώσεων τῶν προβλημάτων. Ὡς βάσις γενικὴ διὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὁ ἑξῆς κανών.

Σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν γραμμάτων, δι᾿ ὧν παρίστανται οἱ ἄγνωστοι, καὶ τῶν δεδομέ-

ἀριθμῶν, τὰς ὁποίας θὰ ἐκάμνομεν, ἂν γνωρίζοντες τοὺς ἀγνώστους ἠθέλομεν νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ἐκπληρῶσιν οὗτοι τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἑξῆς δύο κυριωτέρας περιπτώσεις.

α΄) ***Ἐνίοτε ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος δεικνύει σαφῶς τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν, ὅπως βεβαιωθῶμεν ἂν ἐκπληρῶνται τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος. Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν ἀρκεῖ νὰ σημειωθῶσιν ἁπλῶς διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων αἱ πράξεις αὗται.***

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 10 γίνεται ἴσον πρὸς τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ ἠλαττωμένα κατὰ 20.

Λύσις. Ἂν εἶναι χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, πρέπει $\frac{\chi}{3} + 10$ νὰ εἶνε ἴσον πρὸς $\frac{5\chi}{6} - 20$· ἡ ἐξίσωσις ἄρα τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\chi}{3} + 10 = \frac{5\chi}{6} - 20$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $\chi = 60$.

β΄) ***Ἄλλοτε ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἐπιταγμάτων τοῦ προβλήματος γίνεται τῇ βοηθείᾳ ἐνδιαμέσων βοηθητικῶν στοιχείων. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην πρέπει νὰ ἐκφράζωνται διὰ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καὶ τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα παριστῶσι τοὺς ἀγνώστους, τὰ στοιχεῖα ταῦτα καὶ νὰ ἀναγράφηται ἔπειτα ἡ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσα σχέσις.***

Οὕτως ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος ΙΙ (§ 72) συνάγεται ὅτι: ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν $\frac{\chi - 500}{2}$ δραχ. πρὸς 6 0/0 καὶ ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν $\frac{\chi - 5000}{4}$ δραχμῶν πρὸς 8 0/0 πρέπει μαζὺ νὰ ἀποτελῶσι 1750 δραχμάς. Διὰ τοῦτο πρὸς ἔκφρασιν τῆς τοιαύτης τῶν τόκων τούτων σχέσεως πρὸς τὰς 1750 δραχμάς, ὡρίσαμεν πρῶτον συναρτήσει τοῦ χ καὶ τῶν δεδομένων τοὺς τόκους τούτους καὶ ἐγράψαμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων τούτων εἶναι 1750. Οὕτως εὕρομεν τὴν ἐξίσωσιν (2) τοῦ ῥηθέντος προβλήματος.

Διάφορα προβλήματα.

§ **77. Πρόβλημα Ι.** *Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ αὐξηθὲν κατὰ 3 γίνεται ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ ἠλαττωμένα κατὰ 3.*

Λύσις. Ἂν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, πρέπει $\frac{\chi}{2}+3$ νὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{3\chi}{4}-3$, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\chi}{2}+3=\frac{3\chi}{4}-3 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄγνωστος εἶναι ἀφῃρημένος ἀριθμός, ἕπεται ὅτι εἰς οὐδένα ὑπόκειται οὗτος περιορισμόν.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν $\chi=24$, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 24.

§ **78. Πρόβλημα ΙΙ.** *Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, οὗ τὸ ἥμισυ, τὸ πέμπτον καὶ τὸ ὄγδοον ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ καὶ ἀκόμη 9.*

Λύσις. Ἂν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, πρέπει $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{5}+\frac{\chi}{8}$ νὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{3\chi}{4}+9$, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{5}+\frac{\chi}{8}=\frac{3\chi}{4}+9.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄγνωστος εἶναι ἀφῃρημένος ἀριθμός, εἰς οὐδένα ὑπόκειται περιορισμόν.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν $\chi=120$, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 120.

§ **79. Πρόβλημα ΙΙΙ.**—*Ἂν ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 3, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ αὐξάνει κατὰ $4\frac{1}{2}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;*

Λύσις. Ἂν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τὸ τετράγωνόν του εἶναι χ^2. Ἂν δὲ αὐξηθῇ κατὰ 3, θὰ γείνῃ $\chi+3$ καὶ τὸ τετράγωνόν του γίνεται $(\chi+3)^2$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὁ ἀριθμὸς $(\chi+3)^2$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ χ^2 κατὰ $4\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{9}{2}$. Εἶναι ἄρα $(\chi+3)^2-\chi^2=\frac{9}{2}$

Ὁ ἄγνωστος ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς εἰς οὐδένα ὑπόκειται περιορισμόν. Λύοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν $\chi = -\frac{3}{4}$, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $-\frac{3}{4}$.

§ **80. Πρόβλημα IV.** ***Ἐργάτης δαπανᾷ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμερομισθίου του διὰ τροφήν του καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου διὰ τὰς ἄλλας ἀνάγκας αὐτοῦ. Οὕτω δὲ ἔχει περίσσευμα 15 δραχμῶν καθ᾽ ἑκάστην ἐργάσιμον ἡμέραν. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιόν του;***

Λύσις. Ἂν τὸ ἡμερομίσθιόν του εἶναι χ δραχμαί, δαπανᾷ διὰ τὴν τροφὴν $\frac{\chi}{2}$ δραχμὰς καὶ μένουσιν ἄλλαι $\frac{\chi}{2}$ δραχμαί. Ἐκ τούτων δαπανᾷ διὰ τὰς ἄλλας του ἀνάγκας τὸ ἥμισυ, ἤτοι $\frac{\chi}{4}$ δραχμάς.

Ἐπειδὴ δὲ πρέπει τὰ δαπανώμενα ποσὰ καὶ αἱ 15 δραχμαί, αἱ ὁποῖαι περισσεύουσι νὰ ἀποτελῶσιν ὅλον τὸ ἡμερομίσθιον, ἔπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + 15 = \chi$. (1).

Περιορισμός. Ὁ ἄγνωστος χ ὡς παριστῶν χρηματικὴν ἀμοιβὴν τοῦ ἐργάτου διὰ τὴν ἐργασίαν του πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=60$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 60 ἐκπληροῖ καὶ τὸν τεθέντα περιορισμόν, ἤτοι εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ἔπεται ὅτι αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος· τὸ ἡμερομίσθιον λοιπὸν τοῦ ἐργάτου εἶναι 60 δραχμαί.

ΣΗΜ. Ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι μετὰ τὴν δαπάνην τοῦ ἡμίσεος τῶν $\frac{\chi}{2}$ δραχμῶν, εἰς αὐτὸν μένει τὸ ἄλλο ἥμισυ τῶν $\frac{\chi}{2}$ ἤτοι $\frac{\chi}{4}$ δραχμαί, ὀφείλομεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι $\frac{\chi}{4}$ ἰσοῦται πρὸς 15, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\chi}{4} = 15$.

Αὕτη εἶναι ἁπλουστέρα τῆς (1) ἀλλὰ ἰσοδύναμος πρὸς αὐτήν.

81. Πρόβλημα V.—***Θέλων τις νὰ ἐκτελέσῃ ἔργον τι εἰς 10 ἡμέρας ἐμίσθωσεν ἀριθμόν τινα ἐργατῶν, οἱ ὁποῖοι εἰς 8 ἡμέρας ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου. Οὕτω δὲ ἠναγκάσθη νὰ προσθέσῃ δύο ἀκόμη ἐργάτας, ὅπως τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς τὴν ὁρισθεῖσαν προθεσμίαν. Πόσους ἐργάτας εἶχεν ἀρχικῶς;***

Λύσις. Ἂν εἶχε χ ἐργάτας, ἕκαστος ἐξετέλεσεν εἰς τὰς 8 ἡμέρας τὰ $\frac{3}{4} : \chi = \frac{3}{4\chi}$ τοῦ ὅλου ἔργου καὶ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ

$\frac{3}{4\chi} : 8 = \frac{3}{32\chi}$ τοῦ ἔργου· Μετὰ τὴν προσθήκην τῶν δύο νέων ἐργατῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν ἔγεινε $(\chi+2)$· οὗτοι εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦσι $\frac{3}{32\chi} \cdot (\chi+2) = \frac{3(\chi+2)}{32\chi}$ τοῦ ὅλου ἔργου καὶ εἰς 2 ἡμέρας ἐκτελοῦσι διπλάσιον ἔργον, ἤτοι $\frac{3(\chi+2)}{16\chi}$ τοῦ ὅλου ἔργου. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος εἰς τὰς 2 τελευταίας ἡμέρας ἐξετελέσθη τὸ ὑπολειφθὲν $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔργου, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{3(\chi+2)}{16\chi} = \frac{1}{4}$.

Περιορισμοί. Ἐπειδὴ ὁ χ παριστᾷ ἐργάτας, ἤτοι ζῶντα ὄντα, πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν $\chi=6$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ χ ἐκπληροῖ καὶ τοὺς τεθέντας περιορισμοὺς ἤτοι εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, ἕπεται ὅτι αὐτὸς εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Εἶχε λοιπὸν ὁ ἄνθρωπος οὗτος ἀρχικῶς διαθέσει 6 ἐργάτας·

§ **82. Πρόβλημα VI.**—***Ἐρωτηθείς τις πόσα τέκνα εἶχεν ἀπήντησεν. Ἀγοράσας μῆλα ἠθέλησα νὰ δώσω 8 εἰς ἕκαστον ἀλλὰ μοῦ ἔλειπον 3 μῆλα· ἔδωκα τότε 5 εἰς ἕκαστον καὶ μοῦ ἐπερίσσευσε καὶ ἕν. Πόσα τέκνα εἶχεν ;***

Λύσις. Ἂν εἶχε χ τέκνα, κατὰ τὴν πρώτην διανομὴν θὰ ἐλάμβανον ὅλα ὁμοῦ 8χ μῆλα· ἐπειδὴ δὲ ἔλειψαν 3, ἕπεται ὅτι τὰ μῆλα ἦσαν $8\chi-3$. Κατὰ τὴν δευτέραν διανομὴν τὰ τέκνα θὰ ἐλάμβανον ὅλα ὁμοῦ 5χ μῆλα· ἐπειδὴ δὲ ἐπερίσευσεν ἓν μῆλον, ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ μῆλα ἦσαν $5\chi+1$. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως τῶν μήλων καὶ κατὰ τὴν α´ καὶ κατὰ τὴν β´ διανομὴν ἦτο ὁ αὐτός, ἄρα ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $8\chi-3=5\chi+1$.

Περιορισμοί. Ἐπειδὴ ὁ χ παριστᾷ ἀριθμὸν τέκνων, ἤτοι ζῶντα ὄντα, πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ $1\frac{1}{3}$ δὲν ἐκπληροῖ τὸν ἕνα τῶν τεθέντων περιοσμῶν, διότι δὲν εἶναι ἀκέραιος, ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀπαράδεκτος. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον.

§ **83. Πρόβλημα VII.** *Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζονται 60* *ἐργάται, ἄνδρες καὶ γυναῖκες· καὶ ἕκαστος μὲν ἀνὴρ λαμβάνει 80 δραχμάς, ἑκάστη δὲ γυνὴ 70 δραχμὰς καὶ ὅλοι ὁμοῦ λαμβάνουσι 4850 δραχμὰς καθ' ἑκάστην. Πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;*

Λύσις. Ἂν οἱ ἄνδρες εἶναι χ, αἱ γυναῖκες θὰ εἶναι 60—χ. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος ἀνὴρ λαμβάνει 80 δραχμὰς καθ' ἑκάστην, οἱ χ ἄνδρες λαμβάνουσι καθ' ἑκάστην 80χ δραχμάς. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ (60—χ) γυναῖκες λαμβάνουσι καθ' ἑκάστην 70(60—χ) δραχμάς. Ἐπειδὴ δὲ ὅλοι ὁμοῦ λαμβάνουσι 4850 δραχμάς, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$80\chi+70.(60-\chi)=4850$$

Περιορισμοί. Ὁ χ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ὡς παριστῶν ἄνδρας καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν 60, διότι ὅλοι οἱ ἐργάται ἦσαν τὸ ὅλον 60.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν ὅτι χ=65· ἐπειδὴ δὲ ὁ 65 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 60, ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀπαράδεκτος. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν δὲν ἔχει λύσιν.

§ **84. Πρόβλημα VIII.** ***Πατὴρ εἶναι 50 ἐτῶν καὶ ὁ υἱὸς αὐτοῦ 22. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;***

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γείνῃ μετὰ χ ἔτη ἀπὸ σήμερον. Ἐπειδὴ ὁ πατὴρ εἶναι σήμερον 50 ἐτῶν, μετὰ παρέλευσιν ἄλλων χ ἐτῶν ἡ ἡλικία του θὰ εἶναι 50+χ· ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ μετὰ χ ἔτη θὰ γείνῃ 22+χ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ νέα ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς νέας ἡλικίας τοῦ υἱοῦ, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$50+\chi=3(22+\chi).$$

Περιορισμοί. Ὁ χ ὡς παριστῶν μέλλοντα χρόνον ὀφείλει νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς (§ 3).

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν χ = —8. Ἐπειδὴ ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς —8 δὲν ἐκπληροῖ τὸν τεθέντα περιορισμὸν ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀπαράδεκτος· τὸ πρόβλημα ἄρα εἶναι ἀδύνατον, ἤτοι ἀδύνατον εἰς τὸ μέλλον ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς νὰ γείνῃ τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

ΣΗΜ. Ἐνθυμούμενοι (§ 3) ὅτι ὁ παρελθὼν χρόνος παρίσταται δι' ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, κατανοοῦμεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἔγεινε πρὸ 8 ἐτῶν. Τῷ ὄντι· πρὸς 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ ἦτο 22—8=14 ἐτῶν, ἡ δὲ ἡλικία τοῦ πατρὸς 50—8=42 ἐτῶν· εἶναι δὲ 42=14.3, ἤτοι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

Προβλήματα πρὸς λύσιν

443) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 3 γίνεται ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον ἐλαττωθὲν κατὰ 7 ;

444) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τριπλάσιον καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 56;

445) Ἐδάνεισέ τις τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον καὶ τὸ ἕκτον τῶν χρημάτων του καὶ τῷ ἔμειναν 50 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχεν;

446) Γυνὴ ἔφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν ᾠά, τὰ ὁποῖα ἐσκόπει νὰ πωλήσῃ πρὸς 1,60 δραχ. ἕκαστον. Ἐπειδὴ δὲ καθ' ὁδὸν ἔσπασαν 20 ᾠά, ἐπώλησε τὰ ὑπολειφθέντα πρὸς 2 δραχ. ἕκαστον καὶ οὕτως ἔλαβε τὰ ἴδια χρήματα. Πόσα ᾠὰ ἐπώλησεν;

447) Ἠγόρασέ τις 8 ὀκάδας μῆλα καὶ κυδώνια πρὸς 12 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν τὰ μῆλα καὶ πρὸς 5 δραχμὰς τὰ κυδώνια· οὕτω δὲ ἔδωκε τὸ ὅλον 61 δραχμάς. Πόσαι ὀκάδες ἦσαν τὰ μῆλα καὶ πόσαι τὰ κυδώνια ;

448) Νὰ μερισθῶσιν 1200 δραχμαὶ εἰς τρεῖς ἀνθρώπους, οὕτως ὥστε τὸ δεύτερον μερίδιον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ α' καὶ μεγαλύτερον τοῦ γ' κατὰ 100 δραχμάς.

449) Ἐτόκισέ τις τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων του πρὸς 8% καὶ τὸ ἕτερον ἥμισυ πρὸς 6% ἐτησίως καὶ ἀπολαμβάνει οὕτως ἐτήσιον τόκον 14000 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐδάνεισεν ;

450) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ 635 δραχμὰς μὲ δίδραχμα καὶ πεντόδραχμα, ἀλλὰ νὰ εἶναι 62 δίδραχμα περισσότερα ἀπὸ τὰ πεντόδραχμα. Πόσα θὰ πληρώσῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ;

451) Πατὴρ ἀποθανὼν παρήγγειλε διὰ τῆς διαθήκης του νὰ μοιρασθῇ ἡ ἐκ 440000 δραχμῶν ἀποτελουμένη περιουσία του ὡς ἑξῆς. Ἡ κόρη του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τῆς συζύγου του καὶ ὁ υἱός του τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μεριδίου τῆς κόρης. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

452) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζονται 12 ἄνδρες, 25 γυναῖκες καὶ 18 παιδία καὶ λαμβάνουσι καθ' ἑβδομάδα 14352 δραχμάς. Τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἀνδρὸς εἶναι διπλάσιον τοῦ ἡμερομισθίου ἑκάστης γυναικός· τὸ δὲ ἡμερομίσθιον ἑκάστου παιδίου εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἡμερομισθίου τῆς γυναικός. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου;

453) Ἔχων τις ποσὸν χρημάτων ἐδαπάνησε τὸ ἥμισυ μεῖον 5 δραχμὰς καὶ ἔπειτα τὸ $\frac{1}{11}$ τοῦ ὑπολοίπου. Οὕτω δὲ ἔμειναν εἰς αὐτὸν 50 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχεν ;

454) Ἐτόκισέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 6 ο/ο ἐτησίως ἐπὶ 8 μῆνας, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῶν πρὸς 8 ο/ο καὶ ἐπὶ 9 μῆνας, τὰ δὲ ὑπόλοιπα πρὸς 7 ο/ο ἐπὶ ἓν ἔτος. Ἔλαβε δὲ τόκον 8700 δραχμάς. Πόσα ἦσαν τὰ χρήματά του καὶ πόσα τὰ πρὸς 6 ο/ο, 8 ο/ο καὶ 7 ο/ο δανεισθέντα χρήματα ;

455) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως γραμμα-

ματίου προεξοφλουμένου 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 o|o εἶναι 0,74 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ αὐτοῦ ἀξία.

456) Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου προεξοφλουμένου πρὸς 6 o|o ἐτησίως ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν πρὸς 6 1/2 o|o ἐτησίως. Πόσος εἶναι ὁ κοινὸς χρόνος προεξοφλήσεως;

457) Νὰ μερισθῶσιν 900 δραχμαὶ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5.

458) Τρεῖς ἑταῖροι διαλύσαντες τὴν ἑταιρίαν αὐτῶν ἐμοίρασαν τὸ ἐκ 15599 δραχμῶν κέρδος. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ β′ κατέβαλε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου τοῦ α′ καὶ ὁ γ′ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου τοῦ δευτέρου;

459) Οἰνέμπορος ἠγόρασεν οἶνον, ὅστις ἐκόστισεν 6 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Τὸ ἥμισυ τούτου ἐπώλησε πρὸς 8 δρχ. τὴν ὀκᾶν, τὸ $\frac{1}{3}$ πρὸς 9 δραχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 δραχμάς. Οὕτω δὲ ἐκέρδισεν 2200 δραχμάς. Πόσος ἦτο ὁ ἀγορασθεὶς οἶνος;

460) Ἀνέμιξέ τις 500 ὀκ. οἴνου τῶν 6 δραχμῶν κατ' ὀκᾶν μὲ οἶνον τῶν 8 δραχμῶν. Οὕτω δὲ πωλῶν τὸ μίγμα πρὸς 9 δραχμὰς κατ' ὀκᾶν ἐκέρδισε 3600 δραχμάς. Ἐκ πόσων ὀκάδων ἀπετελεῖτο τὸ μίγμα;

461) Ἱππεὺς διανύων 12 $^1/_2$ χιλιόμετρα καθ' ὥραν καταδιώκει πεζόν, ὅστις ἀνεχώρησεν 6 ὥρας πρὸ αὐτοῦ καὶ διανύει 5 χιλιόμετρα καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ τὸν πεζὸν καὶ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως;

462) Αὐτοκίνητον ἔχον νὰ διανύσῃ ὡρισμένην ἀπόστασιν ΑΒ ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ Α 4 ὥρας βραδύτερον πεζοῦ, ὅστις τὴν αὐτὴν ἐβάδιζεν ὁδὸν καὶ διήνυεν 6 χιλιόμετρα καθ' ὥραν. Τὸ αὐτοκίνητον διανύων 30 χιλ. τὴν ὥραν ἔφθασεν εἰς τὸ τέρμα Β καὶ μετὰ παραμονὴν ἡμισείας ὥρας ἐπιστρέφον μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα συνήντησε τὸν πεζὸν εἰς ἀπόστασιν 30 χιλιομέτρων ἀπὸ τοῦ τέρματος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

463) Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦσι τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ποδηλατοδρομίου μήκους 1 χιλιομέτρου τρέχοντες κατ' ἀντίθετον φοράν. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθῶσιν, ἂν ὁ μὲν α′ ἔχῃ ταχύτητα 16 χιλιομέτρων, ὁ β′ 12 χιλιομέτρων τὴν ὥραν;

464) Ἐὰν οἱ ποδηλάται τοῦ προηγουμένου προβλήματος κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθῶσι;

465) Δεξαμενή τις πληροῦται ὑπὸ κρουνοῦ Α εἰς 6 ὥρας, ὑπὸ ἄλλου Β εἰς 8 ὥρας καὶ ὑπὸ τρίτου Γ εἰς 12 ὥρας. Ἐὰν τῆς δεξαμενῆς οὔσης κενῆς ἀνοιχθῶσι συγχρόνως καὶ οἱ τρεῖς κρουνοί, μετὰ πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ αὕτη;

466) Πατὴρ καὶ υἱὸς σκάπτουσιν ἄμπελον εἰς 12 ἡμέρας, ἐν ᾧ ὁ πατὴρ μόνος σκάπτει αὐτὴν εἰς 18 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας σκάπτει αὐτὴν ὁ υἱὸς μόνος;

467) Κρουνὸς Α ἀποδίδει εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τετραπλασίαν ποσότητα ὕδατος ἑτέρου κρουνοῦ Β, ὅστις πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 15 ὥρας. Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ κρουνοὶ ἀνοιχθῶσιν ἐπὶ 2 ὥρας, ἡ δεξαμενή, εἰς ἣν χύνεται τὸ ὕδωρ αὐτῶν, χρειάζεται ἀκόμη 200 ὀκάδας, ἵνα πληρωθῇ. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἡ δεξαμενὴ καὶ εἰς πόσον χρόνον πληροῖ αὐτὴν μόνος ὁ κρουνὸς Α;

√468) Εἰς 40 χιλιόγραμμα θαλασσίου ὕδατος περιέχονται 3,4 χιλιόγραμμα ἅλατος. Πόσον γλυκὺ ὕδωρ πρέπει ν' ἀναμιχθῇ μετ' αὐτῶν, ὥστε 40 χιλιόγραμμα τοῦ μίγματος νὰ περιέχωσι 2 χιλιόγραμμα ἅλατος;

√ 469) Κύριος ἔλαβεν ὑπηρέτην μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ δίδῃ εἰς αὐτὸν ἐτήσιον μισθὸν 3120 δραχμὰς καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Μετὰ 9 μῆνας ἀνεχώρησεν οὗτος καὶ ἔλαβε τὴν ἐνδυμασίαν καὶ 2160 δραχμάς. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας;

√ 470) Διόφαντος ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἀρχαιοτάτου σῳζομένου βιβλίου 'Αλγέβρας ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παῖς καὶ τὸ δωδέκατον ὡς νεανίας· ἔπειτα νυμφευθεὶς ἔζησε τὸ ἕβδομον καὶ 5 ἔτη πρὶν ἀποκτήσῃ υἱόν, ὅστις ἀπέθανεν 4 ἔτη πρὸ τοῦ πατρός του ζήσας τό ἥμισυ τῆς ζωῆς αὐτοῦ. Πόσον ἔζησεν ὁ Διόφαντος;

√ 471) Ἡ χωρητικότης πίθου Α ἔχει λόγον πρὸς τὴν χωρητικότητα ἄλλου πίθου Β ἴσον πρὸς $\frac{10}{7}$. Ἐὰν οἱ πίθοι οὗτοι εἶναι πλήρεις οἴνου καὶ ἀφαιρέσωμεν 40 ὀκάδας ἐκ τοῦ Α καὶ 60 ἐκ τοῦ Β μένουσιν εἰς τὸν Α ἑξαπλάσιαι ὀκάδες ἢ εἰς τὸν Β. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἕκαστος;

√472) Σκοπευτὴς ἀνέλαβε νὰ ῥίψῃ εἰς τὸ σκοπευτήριον 12 βολὰς μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώνῃ 60 λεπτὰ δι' ἑκάστην ἀποτυγχάνουσαν βολὴν καὶ νὰ λαμβάνῃ 1 δραχμὴν δι' ἑκάστην ἐπιτυγχάνουσαν. 'Αφ' οὗ ἔρριψε καὶ τὰς 12 βολὰς εὑρέθη ὅτι ἔπρεπε νὰ λάβῃ 4 δραχμάς. Πόσαι βολαὶ ἐπέτυχον καὶ πόσαι ἀπέτυχον;

'Ανισότητες α' βαθμοῦ.

§ 85. Γενικὸς ὁρισμὸς τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν. — Γνωρίζομεν ἐκ τῆς 'Αριθμητικῆς ὅτι:

Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ἂν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τὸν ἄλλον. Τούτων ὁ ἔχων τὰς περισσοτέρας μονάδας καλεῖται μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου, ὁ ὁποῖος λέγεται μικρότερος ἐκείνου.

Δύο δὲ τυχόντες ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ἂν ἰσάκις λαμβανόμενοι δίδωσιν ἀκεραίους ἀνίσους· μεγαλύτερος δὲ καλεῖται ὁ δίδων μεγαλύτερον ἀκέραιον.

Κατὰ ταῦτα ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀνισότητος οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς ὁρισμὸν ἀνισότητος ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τῶν ἀνίσων ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν ἰσχύει διὰ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Οὕτω γνωρίζομεν (§ 5) ὅτι $-4 > -8$, ἐν ᾧ ὁ -8 ἔχει περισσοτέρας ἀρνητικὰς μονάδας· ὁμοίως εἶναι $-3 < 0$, ἂν καὶ ὁ -3 ἔχει περισσοτέρας μονάδας τοῦ 0 καὶ $7 > -12$, ἂν καὶ ὁ -12 ἔχει περισσοτέρας μονάδας τοῦ 7.

Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ δώσωμεν γενικώτερον ὁρισμὸν τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν, ὅστις νὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἀναγράψωμεν τυχόντας ἀνίσους ἀριθμοὺς π.χ. $12 > 8$, $-5 > -8$, $0 > -6$, $7 > -12$ καὶ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον, προκύπτει διαφορὰ θετική. Καὶ ὄντως εἶναι:

$12-8=4>0, (-5)-(-8)=-5+8=3>0, 0-(-6)=0+6=6>0,$
$7-(-12)=7+12=19>0.$

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $\alpha>\beta$· διότι, ἂν ἦτο $\alpha=\beta$, θὰ ἦτο $\alpha-\beta=0$. Ἂν δὲ ἦτο $\beta>\alpha$, ἡ διαφορὰ $\beta-\alpha$ θὰ ἦτο θετικὸς ἀριθμὸς καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ $\alpha-\beta$ ὡς ἀντίθετός της θὰ ἦτο ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ταῦτα δὲ ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἐκ τούτων ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον γενικὸν ὁρισμόν.

Ἀριθμός τις α λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου β, ἂν ἡ διαφορὰ α—β εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι, ἂν $\alpha-\beta$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁ ἀντίθετος $\beta-\alpha$ θὰ εἶναι θετικὸς καὶ ὁ $\beta>\alpha$ καὶ ἀντιστρόφως. Ἂν δὲ $\alpha-\beta=0$, θὰ εἶναι $\alpha=\beta$.

Δύο ἀνισότητες λέγονται ***ὁμοιόστροφοι*** ἢ ***ἑτερόστροφοι***, καθ᾽ ὅσον αἱ πλευραὶ τοῦ σημείου τῆς ἀνισότητος φέρονται εἰς ἀμφοτέρας πρὸς τὸ αὐτὸ ἢ πρὸς διάφορα μέρη. Οὕτως αἱ ἀνισότητες $-3>-8$ καὶ $5>3$ εἶναι ὁμοιόστροφοι, αἱ δὲ $7>5$ καὶ $-4<1$ εἶναι ἑτερόστροφοι.

Γενικαὶ ἰδιότητες ἀνίσων ἀριθμῶν.

§ **86. Θεώρημα I.** ***Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι.***

Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha>\beta$. Λέγω ὅτι καὶ $\alpha+\mu>\beta+\mu$ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ μ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ καθ᾽ ὑπόθεσιν εἶναι $\alpha>\beta$, ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ἤτοι $\alpha-\beta>0$. Ἐπειδὴ δὲ $\mu-\mu=0$, ἕπεται ὅτι καὶ $(\alpha-\beta)+(\mu-\mu)>0$ ἢ $(\alpha+\mu)-(\beta+\mu)>0$. Ἄρα (§85) εἶναι καὶ $\alpha+\mu>\beta+\mu$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. ***Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἀνισότητος ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο ἀλλάσσοντες τὸ σημεῖον αὐτοῦ.***

Οὕτω π. χ. ἐκ τῆς ἀνισότητος $\alpha+3>\beta$ προκύπτει ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta-3$, διότι προσετέθη εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ ἀριθμὸς -3.

§ **87. Θεώρημα II.** ***Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἄνισοι, ἀλλ᾽ ὁ μεγαλύτερος εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, προκύπτουσιν ἀριθμοὶ ὁμοίως ἄνισοι.***

Ἔστω ὅτι $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$. Λέγω ὅτι $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, ἕπεται ὅτι αἱ διαφοραὶ $\alpha-\beta$ καὶ $\gamma-\delta$ εἶναι ἀμφότεραι θετικαί· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα αὐτῶν θὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς, ἤτοι $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)>0$ ἢ $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)>0$, ὅθεν $\alpha+\gamma>\beta+\delta$. ὅ. ἔ. δ.

§ **88. Θεώρημα III.** *Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν,* $(\neq 0)$, *προκύπτει ἀνισότης ὁμοιόστροφος πρὸς ταύτην, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι θετικός, ἑτερόστροφος δέ, ἄν εἶναι ἀρνητικός.*

Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha>\beta$. Λέγω ὅτι θὰ εἶναι $\alpha\mu>\beta\mu$, ἂν ὁ μ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, καὶ $\alpha\mu<\beta\mu$, ἂν ὁ μ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha>\beta$, ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετικός. Καὶ ἂν μὲν ὁ μ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\mu$ εἶναι προφανῶς θετικόν, ἤτοι $(\alpha-\beta)\mu>0$ ἢ $\alpha\mu-\beta\mu>0$, ὅθεν $\alpha\mu>\beta\mu$. Ἂν δὲ ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\mu$ εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι $(\alpha-\beta)\mu<0$ ἢ $\alpha\mu-\beta\mu<0$, ὅθεν $\alpha\mu<\beta\mu$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα I. *Ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἑτερόστροφος.*

Οὕτως ἐκ τῆς $5>3$ προκύπτει $-5<-3$, διότι ἡ ἀλλαγὴ τῶν σημείων τῶν μελῶν ἀνισότητος εἶναι πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἐπὶ -1.

Πόρισμα II. *Ἐὰν ἀνισότης ἔχῃ παρονομαστάς, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτούς.*

Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παρονομαστῶν, ἐὰν οὗτοι εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοὶ ἢ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, τῶν ὁποίων τὸ ἐλ. κ. π. εἶναι πάντοτε θετικόν· ἐπὶ τὸ τετράγωνον δὲ τοῦ ἐλ. κ.π. εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν. Οὕτως ἐκ τῆς ἀ. ισότητος $\frac{2\chi}{3}-\frac{1}{5}>\frac{\chi}{5}+\frac{2}{3}$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 15 προκύπτει ἡ ἀνισότης $10\chi-3>3\chi+10$.

Ἐκ τῆς $\frac{\chi}{\alpha^2+2}+4>\frac{3\chi}{\alpha^2+2}-1$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ (α^2+2) (ἥτις εἶναι πάντοτε θετική) προκύπτει ἡ ἀνισότης $\chi+4(\alpha^2+2)>3\chi-(\alpha^2+2)$. Ἐκ δὲ τῆς $\frac{5\chi}{\alpha+2}-1<\frac{7\chi}{\alpha-2}+3$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ $(\alpha^2-4)^2$ προκύπτει ἡ ἀνισότης

$$5\chi\,(\alpha+2)\,(\alpha-2)^2-(\alpha^2-4)^2<7\chi\,(\alpha-2)\,(\alpha+2)^2+3\,(\alpha^2-4)^2.$$

ΣΗΜ. Εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα δὲν ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. α^2-4 τῶν παρανομαστῶν, διότι ἡ παράστασις αὕτη δι' ἄλλας τιμὰς τοῦ α εἶναι θετικὴ καὶ διὰ ταύτας ἔπρεπε νὰ προκύψῃ ὁμοιόστροφος ἀνισότης, δι' ἄλλας δὲ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ διὰ ταύτας ἔπρεπε νὰ προκύψῃ ἀνισότης ἑτερόστροφος. Ἐν ᾧ ἡ παράστασις $(\alpha^2-4)^2$ εἶναι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ α θετική· ἐπομένως πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ $(\alpha^2-4)^2$ εὑρίσκομεν ἀσφαλῶς ὁμοιόστροφον ἀνισότητα.

Ἀσκήσεις. 473) Ἂν $\alpha \neq \beta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$.

474) Ἂν α καὶ β εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ ὁμόσημοι, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>2$.

475) Ἐὰν α καὶ β εἶναι θετικοὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^2<\alpha\beta<\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

476) Ἐὰν α, β, γ, δ,.....τ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τῆς 1, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(1-\alpha).(1-\beta)(1-\gamma).....(1-\tau)>1-(\alpha+\beta+\gamma+.....+\tau)$.

477) Ἂν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τῆς 1, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<\frac{2}{\alpha\beta}$.

478) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\geqq\frac{2}{\alpha\beta}$

479) Ἐὰν α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι καὶ $\alpha>\beta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$.

480) Ἐὰν α, β, γ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

Ἀνισότητες ἔχουσαι ἀγνώστους.

§ **89. Βαθμὸς ἀνισότητος.** Ἐὰν γράμματα ἢ γράμμα ἀνισότητος θεωρῆται ὡς ἄγνωστον καὶ ἀντικατασταθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος διὰ τοῦ σημείου ἰσότητος, προκύπτει ἐξίσωσις, ἥτις καλεῖται ***ἀντίστοιχος*** πρὸς τὴν ἀνισότητα ἐξίσωσις.

Βαθμὸς ἀνισότητος πρὸς ἄγνωστον γράμμα ἢ γράμματα καλεῖται ὁ βαθμὸς τῆς ἀντιστοίχου ἐξισώσεως πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα ἢ γράμματα. Οὕτως ἡ ἀνισότης $5\chi-3>0$ εἶναι α΄ βαθμοῦ πρὸς χ, διότι καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις $5\chi-3=0$ εἶναι α΄ βαθμοῦ. Ἡ δὲ ἀνισότης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$ εἶναι β΄ βαθμοῦ, διότι καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι β΄ βαθμοῦ.

Λύσις ἀνισότητος περιεχούσης ἄγνωστον ἢ ἀγνώστους καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, δι᾿ ἃς ἀληθεύει ἡ ἀνισότης.

§ **90. Λύσις ἀνισοτήτων α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.** Γνωρίζομεν ὅτι ἡ λύσις δοθείσης ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων (§ 68—70) δι᾿ ὧν εὑρίσκομεν διαδοχικῶς ἐξισώσεις ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἐπειδὴ δὲ ἀντίστοιχοι ἰδιότητες ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰς ἀνισότητας (§ 86—89), κατανοοῦμεν ἀμέσως ὅτι αἱ ἀνισότητες τοῦ α΄βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον λύονται, ὅπως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις. Πρὸς πλήρη κατανόησιν τῆς μεθόδου ταύτης, θέλομεν λύσει συγχρόνως π.χ. τὴν ἀνισότητα $\frac{5\chi}{2}-3>\frac{3(\chi+1)}{4}-\frac{1}{6}$ καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐξίσωσιν ὡς κάτωθι φαίνεται.

$\frac{5\chi}{2}-3=\frac{3(\chi+1)}{4}-\frac{1}{6}$	$\frac{5\chi}{2}-3>\frac{3(\chi+1)}{4}-\frac{1}{6}$
$30\chi-36=9(\chi+1)-2$	$30\chi-36>9(\chi+1)-2$
$30\chi-36=9\chi+9-2$	$30\chi-36>9\chi+9-2$
$30\chi-9\chi=36+9-2$	$30\chi-9\chi>36+9-2$ ὅθεν
ὅθεν $21\chi=43$	$21\chi>43$ ἄρα
ἄρα $\chi=\frac{43}{21}$	$\chi>\frac{43}{21}$, ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης

ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν του χ μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{43}{21}$.

Ἔστω ἔτι πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $\frac{\chi}{2}-\frac{1}{5}>\frac{3\chi}{2}+1$. Ἐργαζόμενοι, ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰς ἀνισότητας·

$5\chi-2>15\chi+10$, $5\chi-15\chi>10+2$, $-10\chi>12$,

Ἤδη πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ -10 ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν $-\frac{1}{10}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 88) θὰ προκύψῃ ἑτερόστροφος ἀνισότης, ἤτοι $\chi<-\frac{12}{10}$.

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀνισότητος $3\chi-\frac{5}{\alpha}<7\chi+\frac{1}{\alpha}$, ἐν ᾗ ἄγνωστος εἶναι ὁ χ, ἐξαλείφομεν τὸν παρονομαστὴν α πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ α^2 καὶ εὑρίσκομεν $3\alpha^2\chi-5\alpha<7\alpha^2\chi+\alpha$, ὅθεν κατὰ σειρὰν $3\alpha^2\chi-7\alpha^2\chi<5\alpha+\alpha$, $-4\alpha^2\chi<6\alpha$ καὶ $\chi>-\frac{6\alpha}{4\alpha^2}$, ὅθεν $\chi>-\frac{3}{2\alpha}$

Ἄρα : ***Ἵνα λύσωμεν ἀνισότητα α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἐξαλείφομεν τοὺς παρανομαστάς, ἐὰν ἔχῃ, χωρίζομεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους, ἐκτελοῦμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου. Προσέχομεν δὲ μετὰ τὴν διαίρεσιν ταύτην νὰ ἀναγράφωμεν ὁμοιόστροφον μὲν ἀνισότητα, ἂν ὁ συντελεστὴς οὗτος εἶναι θετικὸς ἑτερόστροφον δὲ ἀνισότητα, ἂν ὁ συντελεστὴς οὗτος εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.***

ΣΗΜ Ἂν ὁ συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου εἶναι μηδέν, ἡ ἀνισότης λαμβάνει τελικῶς τὴν μορφὴν $0>\beta$ ἢ $0<\beta$. Κατὰ τὴν α΄ περίπτωσιν ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἂν ὁ β εἶναι ἀρνητικός· δι' οὐδεμίαν δέ, ἂν ὁ β εἶναι θετικός. Κατὰ δὲ τὴν β′ περίπτωσιν ὁμοίως ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμήν, ἂν β εἶναι θετικὸς καὶ δι' οὐδεμίαν, ἂν β εἶναι ἀρνητικός.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες.

481) α′) $5(\chi+1)>3\chi+7$, β′) $5(\chi-1)+3>7\chi-3\,(\chi+1)$

482) α′) $(\chi-1)^2+3<\chi^2-3\,(\chi+1)$, β′) $3x-(x-1)^2>12-(x-5)^2+2x$.

483) α′) $\frac{\chi}{2}+1>\frac{3\chi}{2}-3$ β′) $\frac{5\chi}{3}-\frac{1}{9}>(\chi-3)\frac{5}{9}$

484) α′) $\frac{\chi}{2}-\frac{\chi}{4}>\frac{\chi}{4}-\frac{\chi}{8}$

485) α′) $\frac{3\chi}{5}-\frac{5\chi}{3}<\frac{7\chi}{9}-\frac{9\chi}{5}$, β′) $\left(\frac{\chi}{4}+12\right)>\left(\frac{\chi}{8}-1\right)4+\chi$

486) α′) $\frac{2\chi}{\alpha^2+4}-1>\frac{5\chi}{\alpha^2+4}-2$, β′) $\frac{x}{\alpha+1}+2>\frac{2x}{\alpha+1}-1$.

Συναληθεύουσαι ἀνισότητες α′ βαθμοῦ με ἕνα ἄγνωστον.

§ **91. Πρόβλημα I.** ***Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ πρόβατα, ὧν ἕκαστον τιμᾶται 250 δραχμάς, καὶ θέλει νὰ διαθέσῃ πρὸς τοῦτο ποσὸν χρημάτων μεγαλύτερον τῶν 8000 δραχμῶν καὶ μικρότερον τῶν 10000 δραχμῶν. Μεταξὺ τίνων ὁρίων περιέχεται ὁ ἀριθμὸς τῶν προβάτων, τὰ ὁποῖα δύναται νὰ ἀγοράσῃ;***

Λύσις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἀγοράζει χ πρόβατα, ἡ ἀξία αὐτῶν θὰ εἶναι 250χ δραχμαί· τὸ ποσὸν τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 8000 δραχμῶν καὶ μικρότερον τῶν 10000 δραχμῶν. Πρέπει ἄρα ὁ χ νὰ εἶναι τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι

$$250\chi>8000 \text{ καὶ } 250\chi<10000 \qquad (1)$$

Περιορισμοί. Ὁ χ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς ὡς παριστῶν ζῶντα ὄντα.

Λύοντες τὴν α′ τῶν ἀνισοτήτων (1) εὑρίσκομεν ὅτι $\chi>32$, ἐκ δὲ τῆς β′ εὑρίσκομεν $\chi<40$. Θὰ ζητήσωμην ἤδη νὰ ἴδωμεν διὰ τίνας τιμὰς τοῦ χ ἀληθεύουσιν ἀμφότεραι αἱ ἀνισότητες $\chi>32$ καὶ $\chi<40$. Πρὸς τοῦτο ἐπὶ εὐθείας καὶ ὁριζοντίου γραμμῆς νοοῦμεν γεγραμμένους τοὺς ἀπείρους ἀριθμοὺς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ παρεμβάλλοντες καὶ τοὺς 32 καὶ 40 κατὰ τὴν τάξιν τοῦ μεγέθους αὐτῶν καὶ ὑπογραμμίζομεν τὰς τιμάς, δι' ἃς ἀληθεύει ἑκατέρα τῶν ἀνισοτήτων τούτων. Οἱ δὶς ὑπογραμμισθέντες εἶναι οἱ ζητούμενοι.

$-\infty$ .... 29, 30, 31, 32, 33 ...... 39, 40, 41 ...... $+\infty$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἀνισότητες (1) συναληθεύουσι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ περιεχομένην μεταξὺ 32 καὶ 40 μὴ συμπεριλαμβανομένων, ἤτοι $32<\chi<40$. Ὁ ζητούμενος δὲ ἀριθμὸς τῶν προβάτων ὡς ἀκέραιος δύναται νὰ εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν 33,34,35,36,37,38,39.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες $\frac{\chi+1}{3}-1>\frac{4\chi-1}{5}-2$, $\frac{2\chi}{3}-\frac{1}{6}<\chi-1$ καὶ $\frac{1}{4}-\chi<\frac{3\chi+1}{2}$. Λύοντες ἑκάστην χωριστὰ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ α΄ ἀληθεύει, διὰ $\chi<\frac{23}{7}$, ἡ β΄ διὰ $\chi>\frac{5}{2}$ καὶ ἡ γ΄ διὰ $\chi>-\frac{1}{10}$.

Ἀναγράφοντες τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{23}{7}$, $\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{10}$ κατὰ τάξιν μεγέθους μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$ καὶ ὑπογραμμίζοντες τοὺς ἀριθμοὺς δι᾽ οὓς ἀληθεύει ἑκάστη τῶν δοθεισῶν ἀνισοτήτων, ὡς κάτωθι φαίνεται,

$$-\infty \ldots\ldots -\frac{1}{10} \ldots\ldots \frac{5}{2} \ldots\ldots \frac{23}{7} \ldots\ldots +\infty$$

βλέπομεν ὅτι τρὶς ὑπεγραμμίσθησαν οἱ μεταξὺ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{23}{7}$ περιεχόμενοι ἀριθμοί· Ἄρα αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουσι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{5}{2}$ καὶ μικροτέραν τοῦ $\frac{23}{7}$

$$\text{ἤτοι}\quad \frac{5}{2}<\chi<\frac{23}{7}.$$

Οὕτως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ πλείονας ἀνισότητας α΄ βαθμοῦ μὲ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον.

§ 92. Ἀνισότητες τῆς μορφῆς $A.B \gtrless 0$ καὶ $\frac{A}{B} \gtrless 0$.

Α΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $AB>0$, ἔνθα Α καὶ Β εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις α΄ βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ἐπειδὴ ἡ ἀνισότης $A.B>0$ ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον Α.Β θετικόν, ἕπεται ὅτι οἱ παράγοντες αὐτοῦ πρέπει νὰ εἶναι ὁμόσημοι. Ἀληθεύει ἄρα ἡ ἀνισότης αὕτη, δι᾽ ἃς τιμὰς τοῦ ἀγνώστου συναληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες $A>0$ καὶ $B>0$ καὶ δι᾽ ἃς συναληθεύουσιν αἱ $A<0$ καὶ $B<0$. Οὕτως ἡ λύσις τοῦ ζητήματος ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $(5\chi-3)(7\chi+\frac{1}{3})>0$.

Κατὰ τὰ λεχθέντα αὕτη ἀληθεύει, δι᾽ ἃς τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουσιν α΄) αἱ ἀνισότητες $5\chi - 3 > 0$, $7\chi + \frac{1}{3} > 0$ καὶ β΄) δι᾽ ἃς τιμὰς συναληθεύουσιν αἱ $5\chi - 3 < 0$ καὶ $7\chi + \frac{1}{3} < 0$.

Ἐπειδὴ ἡ ἀνισότης $5\chi - 3 > 0$ ἀληθεύει διὰ $\chi > \frac{3}{5}$, ἡ δὲ $7\chi + \frac{1}{3} > 0$ ἀληθεύει, διὰ $\chi > -\frac{1}{21}$ ἕπεται ὅτι ἀμφότεραι συναληθεύουσι διὰ τιμὰς τοῦ χ μεγαλυτέρας τοῦ $\frac{3}{5}$, ὡς κάτωθι φαίνεται,

$$-\infty \ldots\ldots -\frac{1}{21} \ldots\ldots\ldots \frac{3}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots +\infty$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ $5\chi - 3 < 0$ ἀληθεύει διὰ $\chi < \frac{3}{5}$, ἡ δὲ $7\chi + \frac{1}{3} < 0$ ἀληθεύει, διὰ $\chi < -\frac{1}{21}$, ἕπεται ὅτι ἀμφότεραι συναληθεύουσι διὰ τιμὰς τοῦ χ μικροτέρας τοῦ $-\frac{1}{21}$, ὡς κάτωθι φαίνεται

$$-\infty \ldots\ldots -\frac{1}{12} \ldots\ldots\ldots \frac{3}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots +8.$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης $(5\chi - 3)(7\chi + \frac{1}{3} > 0$ ἀληθεύει α΄) διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{3}{5}$ καὶ β΄) διὰ πᾶσαν τοῦ τιμὴν τοῦ χ μικροτέραν τοῦ $-\frac{1}{21}$.

Εἰς τὰ συμπεράσματα ταῦτα φθάνομεν καὶ διὰ τοῦ ἀκολούθου πίνακος, ἐν ᾧ ἀναγράφεται τὸ σημεῖον ἑκάστου τῶν παραγόντων τοῦ α΄ μέλους τῆς ἀνισότητος διὰ τιμὰς τοῦ χ κειμένας μεταξὺ τῶν διαστημάτων.

$-\infty \ldots\ldots -\frac{1}{21}, -\frac{1}{21} \ldots\ldots\ldots \frac{3}{5}, \frac{3}{5} \ldots\ldots\ldots +\infty$, συνάγεται δὲ εἶτα εὐκόλως τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τοῦ γινομένου τῶν παραγόντων τούτων.

χ	$5\chi-3$	$7\chi+\frac{1}{3}$	$(5\chi-3)\,(7\chi+\frac{1}{3})$	Συμπέρασμα
$-\infty$ ... $-\frac{1}{21}$	$-$	$-$	$+$	ἡ ἀνισότης ἀληθεύει α′) διὰ $\chi < -\frac{1}{21}$
$-\frac{1}{21}$ ... $\frac{3}{5}$	$-$	$+$	$-$	καὶ
$\frac{3}{5}$ ... $+\infty$	$+$	$+$	$+$	β′) διὰ $\chi > \frac{3}{5}$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$(5\chi-3)\,(7\chi+\frac{1}{3})<0.$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος προκύπτει ἀμέσως ὅτι ἡ ἀνισότης αὕτη ἀληθεύει, διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἵτινες περιέχονται μεταξὺ $-\frac{1}{21}$ καὶ $\frac{3}{5}$ ἤτοι διὰ $-\frac{1}{21}<\chi<\frac{3}{5}$.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ πᾶσαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς ΑΒΓ... Μ $\gtrless$ 0, ἔνθα Α,Β,Γ, . . . Μ εἶναι πρωτοβάθμιοι παραστάσεως πρὸς τὸν ἄγνωστον ἢ δύνανται νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τοιαύτας.

Β′. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\frac{A}{B}>0$, ἔνθα Α καὶ Β εἶναι πρωτοβάθμιοι πρὸς τὸν ἄγνωστον παραστάσεις ἢ δύνανται νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τοιαύτας. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ B^2 ἀνάγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν λύσιν τῆς ἀνισότητος $AB>0$, ἥτις ἔχει τὴν προηγουμένως σπουδασθεῖσαν μορφήν.

Παράδειγμα** 1ον*. ***Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{5\chi-3}{7\chi+\frac{1}{3}}>0$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\left(7\chi+\frac{1}{3}\right)^2$ ἀνάγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν λύσιν τῆς $(5\chi-3)\left(7\chi+\frac{1}{3}\right)>0$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $\chi<-\frac{1}{21}$ καὶ διὰ $\chi>\frac{3}{5}$. Καὶ ἡ δοθεῖσα ἄρα ἀληθεύει διὰ τὰς αὐτὰς τιμάς.

Ἀσκήσεις. 487) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες $2\chi+5<5\chi-4$ καὶ $\frac{5\chi}{2}-3<2\chi-1$;

488) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ ψ συναληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{3(\psi-1)}{2}+\frac{1}{7}>\frac{4\psi-5}{3}-1 \text{ καὶ } \frac{(\psi-1)^2}{4}+2\psi<\frac{\psi^2}{4}-\frac{3\psi}{2}+3 \;;$$

489) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες $\left(\frac{7\omega}{3}-2\right)\left(\frac{\omega}{2}-3\right)\gtrless 0$.

490) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες $\frac{3\chi-4}{\chi^2-4}\gtrless 0$.

491) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{\chi-3}{4}-2<2\chi-22 \text{ καὶ } \frac{5\chi-1}{3}<\frac{7\chi-1}{4}.$$

492) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες $7(\chi^2-1)\gtrless 0$.

493) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνισότητες $\frac{5\chi-3}{(\chi-1)(\chi-2)}\gtrless 0$

494) Ἁμαξοστοιχία ἔχει νὰ διατρέξῃ 100 χιλιόμετρα μὲ ταχύτητα κυμαινομένην μεταξὺ 12 χιλ. καὶ 20 χιλιομέτρων καθ' ὥραν. Μεταξὺ τίνων ὁρίων περιέχεται ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον θὰ χρειασθῇ πρὸς τοῦτο ;

495) Θέλει τις νὰ ἀγοράσῃ ᾠά, ὧν ἕκαστον τιμᾶται 2,20 δραχ, τὰ δὲ χρήματα, τὰ ὁποῖα θέλει νὰ διαθέσῃ περιέχονται μεταξὺ 20 καὶ 30 δραχμῶν. Πόσα ᾠὰ δύναται νὰ ἀγοράσῃ ;

496) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχουσι θετικαὶ τιμαὶ τοῦ χ, δι' ἃς εἶναι

$$\frac{\chi-3}{\chi+3}>2.$$

497) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ χ, δι' ἃς εἶναι

$$\frac{\chi+1}{3}<\frac{\chi-3}{2}<\frac{2\chi+1}{5}.$$

Γενικὰ Προβλήματα.

§ **93. Γενίκευσις προβλήματος καὶ χρησιμότης αὐτῆς.** Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν (§ 1) ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ γενικεύσωμεν πρόβλημά τι ἀντικαθιστῶντες διὰ γραμμάτων α,β,γ... τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς καὶ διατηροῦντες κατὰ τὰ ἄλλα ἀμετάβλητον τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος. Οὕτω τὸ πρόβλημα Ι (§ 1) ἐγενικεύσαμεν οὕτω : «Πατὴρ εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;»

Τὸ οὕτω διατυπωθὲν πρόβλημα καλεῖται ***γενικὸν*** πρόβλημα. Παριστῶντες διὰ χ τὸ ζητούμενον εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\chi=\alpha-2\beta$. Ἡ ἰσότης αὕτη ἀποτελεῖ τύπον, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου λύομεν πᾶν ὅμοιον πρόβλημα, χωρὶς νὰ ἐπαναλαμβάνωμεν τοὺς συλλογισμοὺς καὶ πράξεις, τὰς ὁποίας πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ μετεχειρίσθημεν· ἀρκεῖ μόνον νὰ εὑρίσκωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\alpha-2\beta$, ὅταν τὰ γράμματα α καὶ β ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν ὡρισμένων τοῦ πρὸς λύσιν προβλήματος ἀντιστοίχων ἀριθμῶν. Οὕτως, ἂν ὁ πατὴρ εἶναι 60 ἐτῶν καὶ ὁ υἱὸς 24, τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ μετὰ $60-2.24=12$ ἔτη.

Ὥστε: ***Γενικὸν πρόβλημα καλεῖται πᾶν πρόβλημα ἐν τῷ ὁποίῳ καὶ τὰ γνωστὰ παρίστανται διὰ γραμμάτων.***

Διὰ τῆς λύσεως γενικοῦ προβλήματος προκύπτει τύπος, ἐν τῷ ὁποίῳ σημειοῦνται ὅλαι αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἵνα εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύομεν πᾶν πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ λυθὲν καὶ ἐν ᾧ τὰ δεδομένα παρίστανται δι' ἀριθμῶν, καθίσταται δὲ σαφεστέρα ἡ μεταξὺ γνωστῶν καὶ ἀγνώστων σχέσις.

§ 94. Διερεύνησις γενικοῦ προβλήματος. Ἐμάθομεν (§ 74) ὅτι, ὅταν οἱ ἄγνωστοι προβλήματος παριστῶσι ποσὰ συγκεκριμένα, ὀφείλουσι πλὴν τῶν ἐπιταγμάτων, τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται διὰ τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος, νὰ πληρῶσι καὶ περιορισμούς τινας.

Ἐὰν τὸ πρόβλημα εἶναι γενικόν, ἐκφράζοντες ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις πληροῖ τοὺς περιορισμοὺς εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχωσι μεταξὺ τῶν δεδομένων σχέσεις τινές, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν. Ἐν συναφείᾳ δὲ ἀνευρίσκομεν καὶ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑπάρχωσιν, ὅπως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ἢ ἀόριστον, ὁσάκις τοῦτο εἶναι δυνατόν.

Ἡ ἀναζήτησις τῶν σχέσεων τούτων καλεῖται ***διερεύνησις*** τοῦ προβλήματος.

Ὥστε: ***Διερεύνησις προβλήματος καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑπάρχωσι μεταξὺ τῶν δεδομένων αὐτοῦ, ὅπως τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχῃ λύσιν, εἶναι ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.***

Οὕτως, ἵνα τὸ ὑπὸ τοῦ προηγουμένως (§ 93) διατυπωθέντος γενικοῦ προβλήματος ζητούμενον συμβαίνῃ εἰς τὸ μέλλον, πρέπει ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός· τοῦτο δὲ ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι ὁ α μεγαλύτερος τοῦ 2β. Ἂν τοῦτο συμβαίνῃ, αἱ ἡλικίαι μετὰ $(\alpha-2\beta)$ ἔτη θὰ εἶναι τοῦ μὲν πατρὸς $\alpha+\alpha-2\beta$ ἢ $2(\alpha-\beta)$, τοῦ δὲ υἱοῦ $\beta+\alpha-2\beta$ ἢ $\alpha-\beta$, ἤτοι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ. Ὥστε ἡ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτή, ἂν ἡ ἡλικία $2(\alpha-\beta)$ τοῦ πατρὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Ἂν εἶναι $\alpha < 2\beta$, ἡ τιμὴ $\alpha-2\beta$ τοῦ χ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ τὸ ζητούμενον συνέβη εἰς τὸ *παρελθόν*, ἤτοι πρὸ $(2\beta-\alpha)$ ἐτῶν. Ὄντως, τότε ὁ μὲν πατὴρ ἦτο $\alpha-(2\beta-\alpha)=2(\alpha-\beta)$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $\beta-(2\beta-\alpha)=\alpha-\beta$ ἐτῶν, ἤτοι ὁ πατὴρ εἶχεν ἡλικίαν διπλασίαν τοῦ υἱοῦ· ἡ λύσις αὕτη εἶναι λοιπὸν δεκτή, ἂν εἶχε τότε γεννηθῇ ὁ υἱός, ἤτοι ἂν $\alpha-\beta>0$ ἢ $\alpha>\beta$, ὅπερ καὶ ἡ φύσις τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ.

Ἂν τέλος εἶναι $\alpha=2\beta$, ὁ $\chi=0$, ἤτοι τὸ ζητούμενον συμβαίνει τὴν παροῦσαν στιγμήν, ὡς καὶ ἡ σχέσις $\alpha=2\beta$ δηλοῖ.

Ὥστε : Ἂν α′) $\alpha>2\beta$, τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον ἀρκεῖ αἱ μέλλουσαι ἡλικίαι αὐτῶν νὰ εἶναι δυναταί.

β′) $\alpha<2\beta$ τὸ ζητούμενον ἔγεινεν εἰς τὸ παρελθόν,

γ′) $\alpha=2\beta$ » » γίνεται τὴν παροῦσαν στιγμήν.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τούτων ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα γενικὰ προβλήματα :

§ **93. Πρόβλημα I.** ***Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον εἰς α ὥρας, ἕτερος ἐκτελεῖ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς β ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον τοῦτο οἱ δύο ἐργάται ὁμοῦ ἐργαζόμενοι ;***

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α, β καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ τῶν ὡρῶν πρέπει νὰ εἶναι θετικοί, διότι προφανῶς τὸ ἔργον πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς τὸ μέλλον.

Λύσις. Ἀφ᾽ οὗ ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰς α ὥρας ἐκτελεῖ 1 ἔργον, εἰς 1 ὥραν θὰ ἐκτελῇ τὸ $\frac{1}{\alpha}$ μέρος τοῦ ἔργου καὶ εἰς χ ὥρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{\chi}{\alpha}$ τοῦ ἔργου. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ δεύτερος ἐργάτης ἐκτελεῖ εἰς χ ὥρας τὰ $\frac{\chi}{\beta}$ τοῦ ἔργου.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα μέρη τοῦ ἔργου πρέπει ὁμοῦ λαμβανόμενα νὰ ἀποτελῶσιν ὅλον τὸ ἔργον, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=1.$$

Ἐκ ταύτης δι᾽ ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\chi=\alpha\beta$ ἢ $(\alpha+\beta)\chi=\alpha\beta$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, ὡς ἄθροισμα ὁμοσήμων ἀριθμῶν, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ $(\alpha+\beta)$ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. (1).

Διερεύνησις. Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι δεκτή, διότι τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ὄντων θετικῶν, ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ εἶναι θετικοί, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ φύσις τοῦ ἀγνώστου.

Διὰ τοῦ τύπου (1) λύομεν πᾶν πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ λυθὲν καὶ ἐν ᾧ τὰ δεδομένα παρίστανται δι' ἀριθμῶν. Οὕτως, ἂν ὁ α΄ ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον εἰς 12 ὥρας καὶ ὁ β΄ εἰς 6 ὥρας, οἱ δύο ὁμοῦ ἐκτελοῦσιν τοῦτο εἰς $\frac{12.6}{12+6}=\frac{72}{18}=4$ ὥρας.

§ **96. Πρόβλημα II.** ***Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀντιστρόφου του.***

Λύσις. Ἐὰν ὁ ἄγνωστος εἶναι χ, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β πρέπει νὰ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, διότι ἑκάτερος εἶναι παρονομαστὴς κλάσματος, ὁ δὲ χ νὰ καθιστᾷ τὸν παρονομαστὴν β+χ διάφορον τοῦ μηδενός, ἢ ὁ χ πρέπει νὰ εἶναι διάφορος τοῦ —β.

Ἐκ τῆς (1) δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$\alpha^3+\alpha^2\chi=\beta^3+\beta^2\chi$, ἐξ ἧς $(\alpha^2-\beta^2)\chi=-(\alpha^3-\beta^3)$. (2)

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι $\alpha^2-\beta^2\neq 0$ καὶ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ $(\alpha^2-\beta^2)$ εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$ ἢ μετὰ τὴν διὰ (α—β) ἁπλοποίησιν $\chi=-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}$. (3)

Διερεύνησις. Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις ἁρμόζει, ἂν εἶναι $\alpha^2-\beta^2\neq 0$, δηλαδὴ α^2 καὶ β^2 ἄνισοι. Τοῦτο δὲ συμβαίνει, ἂν ὁ α δὲν ἰσοῦται οὔτε πρὸς τὸν β οὔτε πρὸς τὸν —β· καὶ ὄντως ἡ ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις ταύτας εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ χ εἶναι διάφορος τοῦ —β, ἤτοι ἐκπληροῖ τὸν τεθέντα διὰ τὸν χ περιορισμόν.

Ἂν α=β, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^2=\beta^2$ καὶ $\alpha^3=\beta^3$, ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται 0=0, ἤτοι ταυτότης. Τοῦτο δὲ καὶ ἀμέσως φαίνεται, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ δοθὲν κλάσμα εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha}$ τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\alpha+\chi}{\alpha+\chi}$ εἶναι 1, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ χ· ἀλλὰ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀντιστρόφου του είναι $\frac{\alpha^2}{\alpha^2}$ δηλ. 1, ἤτοι εἶναι $\frac{\alpha+\chi}{\alpha+\chi}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. Ἂν $\alpha=-\beta$ θὰ εἶναι $\alpha^2=\beta^2$ καὶ $\alpha^3=-\beta^3$, ἡ δὲ ἐξίσωσις (2) γίνεται $0=2\beta^3$, ἥτις εἶναι ψευδής, διότι ὁ β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός· τὸ πρόβλημα ἄρα εἶναι ἀδύνατον.

Τὴν ἐξαιρεθεῖσαν ῥίζαν $-\beta$ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (3) μόνον, ὅταν $\alpha=0$, ὡς ἐκ τῆς $-\beta=-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}$ εὐκόλως προκύπτει· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον.

Διὰ τοῦ τύπου (3) λύομεν πᾶν πρόβλημα ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν. Οὕτως, ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{5}$, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ εἶναι

$$-\frac{4+10+25}{7}=-\frac{39}{7}.$$

§ 97. Πρόβλημα III. ***Ἔχει τις οἶνον τῶν α καὶ τῶν β δραχμῶν τὴν ὀκᾶν καὶ θέλει νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα ν ὀκάδων τῶν γ δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;***

Λύσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τοῦ α′ εἴδους λαμβάνει χ ὀκάδας, ἐκ τοῦ β′ ὀφείλει νὰ λάβῃ $(\nu-\chi)$ ὀκάδας. Ἐπειδὴ ἡ ἀξία τῶν χ ὀκάδων τοῦ α′ εἴδους εἶναι αχ δραχμαί, ἡ δὲ ἀξία τῶν $(\nu-\chi)$ ὀκάδων τοῦ β′ εἴδους εἶναι $\beta(\nu-\chi)$ δραχμαί, ἕπεται ὅτι ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι $[\alpha\chi+\beta(\nu-\chi)]$ δραχμαί. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ τὸ μῖγμα ἀποτελεῖται ἐκ ν ὀκάδων τῶν γ δραχμῶν, ἡ ἀξία του εἶναι γν δραχμαί.

Ἡ ἐξίσωσις ἄρα τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\alpha\chi+\beta(\nu-\chi)=\gamma\nu. \qquad (1).$$

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ὡς παριστῶντες ἀξίαν οἴνου πρέπει νὰ εἶναι θετικοί, οἱ δὲ α καὶ β παριστῶντες τὴν τιμὴν τῆς μονάδος διαφόρων εἰδῶν οἴνου πρέπει νὰ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ χ ὡς παριστῶντες ἀριθμὸν ὀκάδων οἴνου πρέπει νὰ εἶναι θετικοί, ὁ δὲ χ ἀκόμη πρέπει νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν ν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.

$$(\alpha-\beta)\chi=\nu(\gamma-\beta) \qquad (2)$$

Καὶ ἐὰν $\alpha-\beta\neq0$, ἤτοι $\alpha\neq\beta$, διαιροῦντες διὰ $\alpha-\beta$ ἀμφότερα τὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\nu(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta}$. (3)

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι ἡ λύσις αὕτη δεκτή, πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ χ νὰ εἶναι θετικὴ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν ν, ἤτοι πρέπει νὰ ἀληθεύωσιν αἱ σχέσεις

$$\frac{\nu(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta}>0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\nu(\gamma-\beta)}{\alpha-\beta}<\nu \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ὁ ν εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἡ τῶν α΄σχέσεων τούτων ἀνάγεται εἰς τὴν $\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}>0$, ἥτις πραγματοποιεῖται μόνον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ $\gamma-\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ εἶναι ὁμόσημοι, ἤτοι ὅταν

$$\begin{array}{lcl} \gamma-\beta>0 & & \gamma-\beta<0 \\ \alpha-\beta>0 & \text{καὶ} & \alpha-\beta<0, \text{ ὅθεν} \\ \gamma>\beta,\ \alpha>\beta \text{ ἢ καὶ} & & \gamma<\beta \quad ,\ \alpha<\beta \qquad (5) \end{array}$$

Ἡ β΄ τῶν σχέσεων (4) πραγματοποιεῖται, ὅταν $\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}<1$ ὅθεν, ἐὰν μὲν $\alpha-\beta>0$, προκύπτει ὅτι $\gamma<\alpha$· ἐὰν δὲ $\alpha-\beta<0$, προκύπτει $\gamma>\alpha$. Συνδυάζοντες ἑκατέραν τῶν σχέσεων $\gamma<\alpha$, $\gamma>\alpha$ μετὰ τῆς ἀντιστοίχου ὁμάδος τῶν (5) εὑρίσκομεν ὅτι: α΄.) $\beta<\gamma<\alpha$ ἢ β΄) $\alpha<\gamma<\beta$ ἤτοι : ***Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει ἡ τιμὴ γ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν τιμῶν α καὶ β τῆς μονάδος τῶν ἀναμικτέων ποσοτήτων.***

Ἂν $\gamma=\alpha$, ὁ τύπος (3) δίδῃ $\chi=\nu$, ἤτοι πρέπει ὅλος ὁ οἶνος νὰ ληφθῇ ἐκ τοῦ α΄ εἴδους, ὅτε κατ᾽ οὐσίαν δὲν γίνεται μίγμα.

Εἰς τὰ συμπεράσματα ταῦτα κατελήξαμεν ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι εἶναι $\alpha\neq\beta$ ὡς ἀπαιτεῖ τὸ ζήτημα. Ἂν $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $0=\nu(\gamma-\beta)$. Καὶ ἂν μὲν εἶναι καὶ $\gamma=\beta$, αὕτη γίνεται $0=0$, ἤτοι ταὐτότης καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον· ἂν δὲ εἶναι $\gamma\neq\beta$, ὅτε ἡ ἰσότης $0=\nu(\gamma-\beta)$ εἶναι ψευδής, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν καὶ διερευνηθῶσι τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

√ 498) Ἐργάτης ἐκτελεῖ ἔργον εἰς α ὥρας, ἕτερος εἰς β ὥρας· καὶ τρίτος εἰς γ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐκτελοῦσι τὸ αὐτὸ ἔργον ; Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=8$, $\beta=10$, $\gamma=14$.

√ 499) Πατὴρ εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο ἢ θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡληκίας τοῦ υἱοῦ ; Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=40$, $\beta=12$.

√ 500) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀντιστρόφου του Ἐφαρμογὴ διὰ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{4}$.

√ 501) Οἰνέμπορος ἠγόρασε ν ὀκάδας οἴνου, ὅστις ἐκόστισεν αὐτῷ α δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετ᾽ αὐτοῦ, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ κοστίζῃ β δραχμάς ; Ἐφαρμογὴ διὰ ν=560, α=7, β=6, 50.

502) Δύο γαιανθρακωρυχεῖα Α καὶ Β συνδέονται διὰ σιδηροδρομικῆς γραμμῆς μήκους μ χιλιομέτρων. Ἡ ἐξαγωγὴ τοῦ ἄνθρακος κοστίζει α δραχμὰς κατὰ τόνον εἰς τὸ Α καὶ β εἰς τὸ Β, ἡ δὲ μεταφορὰ κοστίζει γ δραχμὰς κατὰ χιλιόμετρον. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὁδοῦ ΑΒ σημεῖον, εἰς ὃ ὁ γαιάνθραξ κοστίζει ἴσον εἴτε ἐκ τοῦ Α εἴτε ἐκ τοῦ Β προέρχεται. Ἐφαρμογὴ διὰ μ=80 χιλ, α=375 δραχ. γ=2 δραχ. καὶ β=420 δραχμαί.

503) Ἡ διαφορὰ δύο κεφαλαίων εἶναι δ δραχμαί. Ἐὰν τὸ μεγαλύτερον τοκισθῇ πρὸς ε % τὸ δὲ μικρότερον πρὸς ε′% ἐτησίως, δίδουσιν ἀμφότερα τὸν αὐτὸν ἐτήσιον τόκον. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κεφάλαι ταῦτα. Ἐφαρμογὴ διὰ δ=250 δραχ., ε=5, 5 καὶ ε′=8.

504) Δύο καλάθια ἔχουσιν α μῆλα. Ἐὰν λάβωμεν β μῆλα ἐκ τοῦ α′ καὶ θέσωμεν αὐτὰ εἰς τὸ β′, ἀμφότερα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μήλων. Πόσα μῆλα ἔχει τὸ καθέν ; Ἐφαρμογὴ διὰ α=60, β=23.

505) Ἁμαξοστοιχία διανύει α χιλιόμετρα εἰς β ὥρας. Μετὰ γ ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς της ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ ἀτμάμαξα διανύουσα α′ χιλιόμετρα εἰς β′ ὥρας. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ τὴν ἁμαξοστοιχίαν ; Ἐφαρμογὴ διὰ α=60 χιλ. β=3 ὥρ. α′=100 χιλ., β′=4 ὥρ. γ=2 ὥρ.

506) Αἱ ἡλικίαι δύο ἀνθρώπων εἶναι ἀντιστοίχως α καὶ β ἐτῶν. Μετὰ πόσον χρόνον ὁ λόγος τῆς ἡλικίας τοῦ πρώτου πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι μ : ν ;

507) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς α εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον μ : ν.

508) Δοχεῖον περιέχει α ὀκάδας οἴνου καὶ ἕτερον περιέχει β ὀκάδας ὕδατος. Πόσας ὀκάδας ὑγροῦ πρέπει νὰ μεταφέρωμεν ἐξ ἑκατέρου εἰς τὸ ἄλλο, ὅπως ἑκάτερον περιέχῃ τὸν αὐτὸν καὶ πρὶν ἀριθμὸν ὀκάδων ὑγροῦ, τὰ δὲ εἰς ἀμφότερα περιεχόμενα μίγματα ὦσι τελείως ὅμοια ;

509) Ἐὰν ἔμπορος πωλήσῃ ἐμπόρευμα ἀντὶ α δραχμῶν, κερδίζει μ%. Πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν θὰ ἐκέρδιζεν, ἐὰν ἐπώλει αὐτὸ ἀντὶ β δραχμῶν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′.

Σύστημα ἐξισώσεων α′ βαθμοῦ.

§ **98. Πρόβλημα.** ***Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες διαφορὰν 2 καὶ πηλίκον 2.***

Λύσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μεγαλύτερος τούτων εἶναι χ καὶ ὁ μικρότερος ψ, πρέπει νὰ εἶναι $\chi - \psi = 2$ καὶ $\frac{\chi}{\psi} = 2$. (1)

Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τιμὰς τοῦ χ καὶ ψ διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύουσιν ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις (1).

Ἐξαλείφοντες τὸν παρονομαστὴν τῆς $\frac{\chi}{\psi} = 2$ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὴν ἐξίσωσιν $\chi = 2\psi$. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi - \psi = 2$ θέσωμεν ἀντὶ χ τὸ ἴσον τοῦ 2ψ, αὕτη γίνεται $2\psi - \psi = 2$, ὅθεν $\psi = 2$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐκ τῆς $\chi = 2\psi$ προκύπτει ὅτι $\chi = 4$.

Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 4 καὶ 2. Πράγματι δὲ εἶναι $4 - 2 = 2$ καὶ $\frac{4}{2} = 2$. Αἱ ἐξισώσεις (1), αἱ ὁποῖαι ὀφείλουσι νὰ ἀληθεύωσι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων χ καὶ ψ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦσι *σύστημα* ἐξισώσεων.

Γενικῶς: ***Σύστημα ἐξισώσεων καλεῖται πᾶν σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουσι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.***

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, δι' ἃς ἀληθεύουσιν αἱ ἐξισώσεις συστήματος καλοῦνται ***ῥίζαι*** τοῦ συστήματος τούτου. Οὕτω τοῦ συστήματος (1) ῥίζαι εἶναι ἡ τιμὴ 4 τοῦ χ καὶ ἡ τιμὴ 2 τοῦ ψ.

Δύο ἢ πλείονα συστήματα καλοῦνται ἰσοδύναμα, ἐὰν ἔχωσι τὰς αὐτὰς ῥίζας.

Λύσις συστήματος ἐξισώσεων καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν ῥιζῶν αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν λύσιν συστήματος προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἄλλο ἰσοδύναμον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ ῥίζαι νὰ εἶναι προφανεῖς.

Βαθμὸς συστήματος καλεῖται ὁ μεγαλύτερος βαθμὸς τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

§ **99. Θεώρημα. I.** ***Ἐὰν πᾶσαι ἢ τινὲς τῶν ἐξισώσεων δοθέντος συστήματος ἀντικατασταθῶσι δι' ἄλλων ἰσοδυνάμων, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.***

Ἔστω τὸ σύστημα $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$. (1)

Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα

$$A\mu=A'\mu,\ B\nu=B'\nu,\ \Gamma+\lambda=\Gamma'+\lambda. \qquad (2),$$

ὅπερ προέκυψεν ἐκ τοῦ (1) δι' ἀντικαταστάσεως ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δι' ἄλλης ἰσοδυνάμου.

Ἀπόδειξις. α') Αἱ ῥίζαι τοῦ (1) ταὐτοποιοῦσαι τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, ταὐτοποιοῦσι καὶ τὰς ἰσοδυνάμους πρὸς αὐτὰς ἐξισώσεις τοῦ (2), ἤτοι εἶναι ῥίζαι καὶ τοῦ (2).

β') Αἱ ῥίζαι τοῦ (2) ταὐτοποιοῦσαι τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, ταὐτοποιοῦσι καὶ τὰς ἰσοδυνάμους πρὸς αὐτὰς ἐξισώσεις τοῦ (1), ἤτοι εἶναι ῥίζαι καὶ τοῦ (1).

Ἔχουσι λοιπὸν τὰ συστήματα (1) καὶ (2) τὰς αὐτὰς ῥίζας, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. ***Ἑκάστη ἐξίσωσις συστήματος δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\Pi=\alpha$, ἔνθα Π εἶναι ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις ἐξαρτωμένη ἐκ τῶν ἀγνώστων καὶ α ὡρισμένος ἀριθμὸς ἢ παράστασις μὴ περιέχουσα τοὺς ἀγνώστους.***

Οὕτω τὸ σύστημα $\frac{\chi}{2}=8-\frac{\psi}{3}$, $5\chi-31=\frac{3\psi}{4}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $3\chi+2\psi=48$, $20\chi-3\psi=124$, οὗ αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς ἐξισώσεις ἐκείνου.

§ **100. Θεώρημα. II.** ***Ἐὰν πάσας ἢ τινὰς τῶν ἐξισώσεων δοθέντος συστήματος προσθέσωμεν κατὰ μέλη καὶ μίαν τούτων ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῆς οὕτω προκυπτούσης, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.***

Ἔστω τὸ σύστημα $\quad A=A',\ B=B',\ \Gamma=\Gamma' \qquad (1).$

Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$A=A',\ B=B',\quad B+\Gamma=B'+\Gamma' \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις. α΄) Αἱ ῥίζαι τοῦ (1) ταὐτοποιοῦσαι πάσας τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ ταὐτοποιοῦσι προφανῶς καὶ τὰς δύο πρώτας τοῦ (2)· ταὐτοποιοῦσι δὲ καὶ τὴν $B+\Gamma=B'+\Gamma'$. Διότι, ἂν διὰ τὰς ῥίζας τοῦ (1) αἱ παραστάσεις B, B', Γ, Γ' λάβωσι ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ αἱ $B+\Gamma$ καὶ $B'+\Gamma'$ θὰ λάβωσι προφανῶς τὰς τιμὰς $\beta+\gamma$ ἡ πρώτη καὶ $\beta'+\gamma'$ ἡ δευτέρα. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\beta=\beta'$ καὶ $\gamma=\gamma'$, ἕπεται ὅτι καὶ $\beta+\gamma=\beta'+\gamma'$.

β΄) Αἱ ῥίζαι τοῦ (2) ταὐτοποιοῦσι προφανῶς τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ (1) ταὐτοποιοῦσι δὲ καὶ τὴν $\Gamma=\Gamma'$. Διότι, ἂν διὰ τὰς ῥίζας τοῦ (2) αἱ παραστάσεις B, B', Γ, Γ' λάβωσι τὰς τιμὰς β, β', γ, γ', αἱ $B+\Gamma$ καὶ $B'+\Gamma'$ θὰ λάβωσι τὰς $\beta+\gamma$ καὶ $\beta'+\gamma'$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καθ' ὑπόθεσιν $\beta+\gamma=\beta'+\gamma'$ καὶ $\beta=\beta'$, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ $\gamma=\gamma'$.

Ἔχουσι λοιπὸν τὰ συστήματα (1) καὶ (2) τὰς αὐτὰς ῥίζας, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα. ὅ.ἔ.δ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ συστήματα $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$ καὶ $\quad A=A',\ B=B',\ A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'$.
εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. ***Σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἑκάστης ἢ τινῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος ἐπὶ τὸν αὐτὸν δι' ἑκάστην ἐξίσωσιν καὶ διάφορον τοῦ μηδενὸς ἀριθμόν. Προσθέτομεν ἔπειτα κατὰ μέλη τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις καὶ διὰ τῆς οὕτω εὑρισκομένης ἐξισώσεις ἀντικαθιστῶμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων ἐκείνων τοῦ δοθέντος συστήματος.***

Τὸ σύστημα $A=A'$, $B=B$, $\Gamma=\Gamma'$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $A\mu=A'\mu$, $B\nu=B'\nu$, $\Gamma\varrho=\Gamma'\varrho$ (§ 99Θ, Ι΄)· τοῦτο δὲ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $A\mu=A'\mu$, $B\nu=B'\nu$, $A\mu+B\nu+\Gamma\varrho=A'\mu+B'\nu+\Gamma'\varrho$ (§100,ΙΙ) καὶ τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$A=A',\quad B=B',\quad A\mu+B\nu+\Gamma\varrho=A'\mu+B'\nu+\Gamma'\varrho \ (\S\ 99,\mathrm{I}).$$

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι τὸ σύστημα $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\quad A\mu+B\nu=A'\mu+B'\nu$, $B=B$, $\Gamma=\Gamma'$.

§ **101. Θεώρημα III.** *Ἐὰν ἐξίσωσις δοθέντος συστήματος εἶναι λελυμένη πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς πάσας τὰς ἄλλας ἢ τινὰς τούτων τὸν ἄγνωστον τοῦτον διὰ τῆς τιμῆς του, ἣν ἡ λελυμένη αὕτη ἐξίσωσις παρέχει.*

Ἔστω τὸ σύστημα $\chi=A$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$, ἔνθα A, B, B', Γ, Γ' εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, ὧν ἡ A δὲν περιέχει τὸν χ. Ἄς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι αἱ παραστάσεις B, B', Γ, Γ' γίνονται ἀντιστοίχως B_1, B_1', Γ_1, Γ_1', ὅταν ἐν αὐταῖς ἀντὶ χ τεθῇ ἡ παράστασις A. Λέγω ὅτι τὰ συστήματα

$$\chi=A,\ B=B',\ \Gamma=\Gamma'. \qquad (1)$$

$$\chi=A,\ B_1=B'_1,\ \Gamma_1=\Gamma_1' \qquad (2)$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις. Τὰ συστήματα (1) καὶ (2) εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τὰ

$$\chi=A,\ B-B'=0,\ \Gamma-\Gamma'=0 \qquad (3)$$

$$\chi=A,\ B_1-B_1'=0,\ \Gamma_1-\Gamma_1'=0 \qquad (4)$$

Ἀρκεῖ ὅθεν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ τελευταῖα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ ἡ παράστασις $B-B'$ λαμβάνει διὰ $\chi=A$ τὴν τιμὴν B_1-B_1', ἕπεται ὅτι (§ 53) τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(B-B'):(\chi-A)$ εἶναι B_1-B_1'. Ἐὰν δὲ κληθῇ Π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι

$$B-B'=\Pi(\chi-A)+(B_1-B'_1). \qquad (5)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma-\Gamma'=P\,(\chi-A)+(\Gamma_1-\Gamma'_1)$. (6)

Ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· Διὰ τὰς ῥίζας τοῦ (3) ἡ (5) γίνεται $0=B_1-B_1'$, ἡ δὲ (6) γίνεται $0=\Gamma_1-\Gamma_1$, ἤτοι ἀληθεύουσιν δι' αὐτὰς καὶ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (4).

Ἀντιστρόφως. Διὰ τὰς ῥίζας τοῦ (4) αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) γίνονται ἀντιστοίχως $B-B'=0$, $\Gamma-\Gamma'=0$, ἤτοι ἀληθεύουσι δι' αὐτὰς καὶ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (3).

Ἔχουσι λοιπὸν τὰ συστήματα (3) καὶ (4) τὰς αὐτὰς ῥίζας κατ' ἀκολουθίαν ταῦτα καὶ τὰ (1), (2) εἶναι ἰσοδύναμα. ὅ.ἔ.δ.

Μέθοδοι Ἀπαλοιφῆς.

§ **102. Ἀπαλοιφὴ ἀγνώστου μεταξὺ ἐξισώσεων.** ***Ἀπαλοιφὴ ἀγνώστου μεταξὺ μ ἐξισώσεων δοθέντος συστήματος καλεῖται ἡ εὕρεσις συστήματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ μ—1 ἐξισώσεις δὲν περιέχουσι τὸν ἄγνωστον τοῦτον.***

Ἡ ἐργασία αὕτη γίνεται κατὰ τὰς ἀκολούθους μεθόδους·

Α΄. ***Ἀπαλοιφὴ δι' ἀντικαταστάσεως.*** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἄγνωστον ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος

$$5\chi+\psi-2\omega=1,\ \chi+\psi+\omega=6,\ 2\chi+3\psi-\omega=5 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ α´ τούτων εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\psi=1-5\chi+2\omega$, τὸ σύστημα (1) εἶναι (99,I) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\psi=1-5\chi+2\omega,\quad \chi+\psi+\omega=6,\quad 2\chi+3\psi-\omega=5 \qquad (2)$$

Τοῦτο δὲ κατὰ τὸ θεώρημα III (§ 101) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\psi=1-5\chi+2\omega,\ \chi+(1-5\chi+2\omega)+\omega=6,\ 2\chi+3(1-5\chi+2\omega)-\omega=5. \ (3)$$

Εἶναι ἄρα τὰ συστήματα (1) καὶ (3) ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ δὲ δύο τῶν ἐξισώσεων τοῦ (3) δὲν ἔχουσι τὸν ἄγνωστον ψ, ἐπετεύχθη ἡ ἀπαλοιφὴ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1).

Ἄρα: ***Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ἕνα ἄγνωστον λύομεν πρὸς τὸν ἄγνωστον τοῦτον μίαν τῶν ἐξισώσεων καὶ θέτομεν εἰς τὰς ἄλλας ἐξισώσεις ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου τούτου τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του συναρτήσει ἢ μὴ τῶν ἄλλων ἀγνώστων.***

Β΄. **Ἀπαλοιφὴ διὰ συγκρίσεως.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἄγνωστον ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος

$$2\chi+3\omega=5,\quad 5\chi-\omega=3. \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ἡ μὲν α´ τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\omega=\frac{5-2\chi}{3}$, ἡ δὲ β´ πρὸς τὴν $\omega=5\chi-3$, ἕπεται ὅτι τὸ σύστημα (4) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\omega=\frac{5-2\chi}{3},\ \omega=5\chi-3$ (5)

Τοῦτο δὲ κατὰ τὸ Θεώρημα III (§ 101) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\omega=\frac{5-2\chi}{3},\quad \frac{5-2\chi}{3}=5\chi-3, \qquad (6)$$

ὅπερ εἶναι (99,I) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$2\chi+3\omega=5,\ \frac{5-2\chi}{3}=5\chi-3. \qquad (7)$$

Εἶναι ἄρα τὰ συστήματα (4) καὶ (7) ἰσοδύναμα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῦ (7) δὲν ἔχει τὸν ἄγνωστον ω, ἕπεται ὅτι ἐπετεύχθη ἡ ἀπαλοιφὴ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν δυο ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (4).

Ὁμοίως τὸ σύστημα

$$3\chi-\psi+4\omega=11,\ \chi+2\psi-2\omega=3,\ 4\chi-3\psi+\omega=-5 \qquad (8)$$

εἶναι κατὰ σειρὰν ἰσοδύναμον πρὸς τὰ

$$\psi=3\chi+4\omega-11,\psi=\frac{2\omega-\chi+3}{2},\ \psi=\frac{4\chi+\omega+5}{3} \qquad (9)$$

$$\psi=3\chi+4\omega-11,\ 3\chi+4\omega-11=\frac{2\omega-\chi+3}{2},$$

$$3\chi+4\omega-11=\frac{4\chi+\omega+5}{3}, \qquad (10)$$

$$3\chi-\psi+4\omega=11,\ 3\chi+4\omega-11=\frac{2\omega-\chi+3}{2},\ 3\chi+4\omega-11=\frac{4\chi+\omega+5}{3}$$

Ἐπειδὴ δὲ τούτου δύο ἐξισώσεις δὲν ἔχουσι τὸν ψ, ἔπεται ὅτι ἐπετεύχθη ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος.

Ἄρα: ***Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον διὰ συγκρίσεως, λύομεν πάσας τὰς ἐξισώσεις πρὸς τὸν ἄγνωστον τοῦτον, ἐξισοῦμεν μίαν τῶν τιμῶν τούτων πρὸς ἑκάστην τῶν ἄλλων καὶ διὰ τῶν οὕτως εὑρισκομένων ἐξισώσεων ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος πλὴν μιᾶς, ἥτις ἀναγράφεται λελυμένη πρὸς τὸν ρηθέντα ἄγνωστον (ἢ ὡς ἀρχικῶς ἔχει).***

Γ′. ***Ἀπαλοιφὴ διὰ προσθέσεως.*** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἄγνωστον ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος

$$3\chi+5\psi=31,\quad 5\chi-3\psi=-5 \qquad (12)$$

Παρατηροῦντες ὅτι ἐλ. κ.π. τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν συντελεστῶν τοῦ ψ εἶναι 15 καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν α′ ἐπὶ $15:5=3$, τῆς δὲ β′ ἐπὶ $15:3=5$ εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$9\chi+15\psi=93,\quad 25\chi-15\psi=-25.$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη καὶ διὰ τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως $34\chi=68$ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δοθεισῶν, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$3\chi+5\psi=31,\quad 34\chi=68$$

τὸ ὁποῖον εἶναι (§ 100,Π.) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἐν ᾧ μία ἐξίσωσις δὲν ἔχει τὸν ψ. Ἔγεινε λοιπὸν ἀπαλοιφὴ τοῦ ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (12).

Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου εἶναι ὁμόσημοι, ἀντὶ τοῦ ἑνὸς τῶν πολλαπλασιαστῶν, μὲ τοὺς ὁποίους πολλαπλασιάζονται τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων καὶ οἵτινες εὑρίσκονται, ὡς προηγουμένως εἴπομεν, λαμβάνομεν τὸν ἀντίθετόν του. Οὕτω π. χ. πρὸς ἀπαλοιφὴν τοῦ χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ (12) πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς α′ ἐπὶ 5 τῆς δὲ β′ ἐπὶ -3 καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$15\chi+25\psi=155,\quad -15\chi+9\psi=15$$

εἰς τὰς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ τοῦ χ εἶναι ἀντίθετοι. Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $34\psi=170$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$3\chi+5\psi=31,\quad 34\psi=170.$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως πρὸς ἀπαλοιφὴν τοῦ ω μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος

$$2\chi+3y-4\omega=11,\quad 3\chi-y+4\omega=-3,\quad \chi+y+2\omega=1 \qquad (13)$$

εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$2x+3y-4\omega=11,\quad 5x+2y=8,\quad x+y+2\omega=1 \qquad (14).$$

Ἐὰν δὲ ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῆς α′ καὶ τῆς γ′ τῶν ἐξισώσεων τούτων τὸν αὐτὸν ἄγνωστον ω, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$2\chi+3\psi-4\omega=11,\ 5\chi+2\psi=18,\ 4\chi+5\psi=13 \qquad (15)$$

ἐν ᾧ δύο ἐξισώσεις δὲν ἔχουσι τὸν ω. Συνετελέσθη ἄρα μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (13) ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ω.

Ἄρα: ***Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσθέσεως ἄγνωστον μεταξὺ δύο ἐξισώσεων καθιστῶμεν τοὺς συντελεστὰς τούτου εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις ἀντιθέτους· προσθέτομεν εἶτα τὰς οὕτω προκυπτούσας ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διὰ τῆς ἐξισώσεως, ἣν οὕτως εὑρίσκομεν, ἀντικαθιστῶμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων. Ἐὰν τὸ σύστημα ἔχῃ ἐξισώσεις περισσοτέρας τῶν δύο, ἀπαλείφομεν ὁμοίως τὸν αὐτὸν ἄγνωστον καὶ μεταξὺ ἑτέρου ζεύγους ἐξισώσεων καὶ καθ᾽ ἑξῆς οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν σύστημα, ἐν τῷ ὁποίῳ μία μόνον νὰ περιέχῃ τὸν ἄγνωστον τοῦτον.***

ΣΗΜ. Κατὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην πρέπει νὰ προσέχωμεν, ὅπως μὴ δὶς ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων. Δὲν ἀποκλείεται ὅμως μία νὰ μετέχῃ καὶ δευτέρου, τρίτου, κτλ. ζεύγους. Οὕτω δύναται νὰ γίνῃ ἀπαλοιφὴ μεταξὺ α' καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων.

Τὴν μέθοδον τῆς προσθέσεως ἐφαρμόζομεν συνηθέστερον τῶν ἄλλων μεθόδων, διότι ἔχει τὸ πλεονέκτημα νὰ μὴ εἰσάγωνται δι' αὐτῆς παρονομασταὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις. Συνήθως δὲ πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς θέτομεν ἑκάστην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος ὑπὸ τὴν μορφὴν $\Pi=\alpha$ (§ 99. Πόρ.).

Ἀσκήσεις. 510) Νὰ ἀπαλειφθῇ διὰ προσθέσεως ὁ ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος $2\chi+3\psi=4,\ -3\chi+9\psi=0$.

511) Νὰ ἀπαλειφθῇ δι' ἀντικαταστάσεως ὁ ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\omega-\psi=3,\ \omega+2\psi=9.$$

512) Νὰ ἀπαλειφθῇ δι' ἀντικαταστάσεως ὁ χ μεταξὺ τῶν

$$2\chi+8\psi=10,\ \chi+\psi=0.$$

513) Νὰ ἀπαλειφθῇ διὰ συγκρίσεως ὁ φ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων

$$\varphi=3\chi+1,\ \chi+\varphi=5.$$

514) Νὰ ἀπαλειφθῇ καθ' οἱανδήποτε μέθοδον ὁ χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος $\chi+3\psi-2\omega=11,\ \chi+2\psi+\omega=0,\ 5\psi-2\omega=14$.

515) Νὰ ἀπαλειφθῇ διὰ προσθέσεως ὁ ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος $2\chi-3\psi+\omega=2,\ 4\chi+\psi-7\omega=16,\ \chi+\psi+\omega=10$.

516) Νὰ ἀπαλειφθῇ διὰ προσθέσεως ὁ φ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος

$$\chi+\psi+\varphi-\omega=2,\ 2\chi+\psi-\varphi+\omega=3,\ \chi+2\psi-\omega+3\varphi=5,\ \chi-2\psi-3\omega=1.$$

Λύσις συστήματος δύο ἐξισώσων α΄ βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

§ **103. Πρόβλημα Ι.** *Ἠγόρασέ τις 3 ὀκάδας ἐλαίου καὶ 5 ὀκάδας σάπωνος καὶ ἔδωκεν 195 δραχμάς. Ἐὰν ἠγόραζε 5*

ὀκάδας ἐλαίου καὶ 3 ὀκάδας σάπωνος θὰ ἔδιδε 245 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ ἐλαίου καὶ σάπωνος.

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἑκάστη ὀκᾶ ἐλαίου τιμᾶται χ δραχμάς, ἑκάστη δὲ ὀκᾶ σάπωνος τιμᾶται ψ δραχμάς. Αἱ 3 ὀκάδες τοῦ ἐλαίου θὰ τιμῶνται 3χ δραχ. καὶ αἱ 5 ὀκάδες τοῦ σάπωνος θὰ τιμῶνται 5ψ δραχμάς· ἐπειδὴ δὲ ἔδωκε δι' αὐτὰς 195 δραχμάς, ἕπεται ὅτι

$$3\chi+5\psi=195.$$

Ἐὰν ἠγόραζε 5 ὀκ. ἐλαίου, θὰ ἔδιδε 5χ δραχμάς, διὰ δὲ τὰς 3 ὀκ. σάπωνος θὰ ἔδιδεν ἄλλας 3ψ δραχμάς. Ἐπειδὴ δὲ τότε θὰ ἔδιδεν 245 δραχμάς, ἕπεται ὅτι $5\chi+3\psi=245$. Τὸ ζήτημα ὅθεν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος

$$3\chi+5\psi=195,\ 5\chi+3\psi=245 \qquad (1)$$

Περιορισμοί. Οἱ ἄγνωστοι χ καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἀπαλείφοντες τὸν ἄγνωστον ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (1) σύστημα

$$3\chi+5\psi=195,\ 16\chi=640, \qquad (2)$$

ὅπερ εἶναι (§ 99, I) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$3\chi+5\psi=195, \quad \chi=40 \qquad (3)$$

Ἐὰν ἤδη ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων τὸν χ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$120+5\psi=195, \quad \chi=40 \qquad (4),$$

ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (3), ἑπομένως καὶ πρὸς τὰ (2) καὶ (1).

Λύοντες ἤδη τὴν α΄ ἐξίσωσιν τοῦ (4) εὑρίσκομεν ὅτι $\psi=15$. Τὸ σύστημα ἄρα (4) κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ δοθὲν (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\psi=15$ καὶ $\chi=40$, οὗ αἱ ῥίζαι εἶναι προφανεῖς. Εὑρέθη ἄρα ὅτι ὁ μὲν σάπων τιμᾶται 15 δραχμάς, τὸ δὲ ἔλαιον 40 δραχμ. κατ' ὀκᾶν.

Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι δεκτή, διότι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐκπληροῦσι καὶ τοὺς τεθέντας περιορισμούς.

Ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν ἐλύθη τὸ προηγούμενον σύστημα (1) συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα δύο ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, ἀπαλείφομεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων τούτων καὶ λύομεν τὴν μὴ περιέχουσαν τὸν ἄγνωστον τοῦτον ἐξίσωσιν πρὸς τὸν ἄλλον ἄγνωστον. Τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου τούτου θέτομεν ἀντ' αὐτοῦ εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, καὶ λύομεν τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν.

Ἀσκήσεις. √ 517) Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα τῶν ἀσκήσεων 510 καὶ 511.

√ 518) Νὰ λυθῶσι τὰ συστήματα τῶν ἀσκήσεων 512 καὶ 513.

519) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $5\chi+3\psi=11$, $\frac{\psi}{2}=\chi$.

520) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi-2\psi=-9$, $\frac{\chi}{5}+\frac{\psi}{7}=2$.

521) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{\chi}{3}-\psi=-7$, $\chi+\frac{\psi}{3}=9$.

522) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{2\chi}{3}+\frac{3\psi}{2}=5$, $\frac{3\chi}{2}+\frac{2\psi}{3}=\frac{35}{6}$.

523) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{\chi-1}{4}+\psi=\frac{\psi+1}{3}-\chi$, $2\chi+\psi=10$

524) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{\chi-1}{\psi-1}+1=2$, $\frac{\chi-2}{3}+\frac{\psi-3}{2}=-\frac{1}{6}$.

525) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{\chi}{3}+\frac{y}{4}-\frac{1}{4}=0$, $\frac{20\chi-6y}{15}=\frac{30\chi+19y}{40}$

526) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{\chi+y}{4}+\frac{\chi-y}{2}=3$, $12\chi-7y=39$.

527) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{7\chi+6}{11}+y-16=\frac{5\chi-13}{2}-\frac{8y-\chi}{5}$,

$$3(3\chi+4)=10\psi-15$$

528) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $2\chi+\frac{y-2}{5}=21$, $4y+\frac{\chi-4}{6}=29$.

529) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\frac{\chi-2}{7}+\frac{y-\chi}{4}=2\chi-8$, $\frac{2y-3\chi}{3}+2y=3\chi+84$

530) Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματος αὐξηθῶσι κατὰ μονάδα, τὸ κλάσμα γίνεται ἴσον πρὸς $\frac{2}{3}$ · ἐὰν δὲ οὗτοι ἐλαττωθῶσι κατὰ 1, γίνεται ἴσον πρὸς $\frac{4}{7}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα τοῦτο.

531) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 4, τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων.

532) Ὁ Δημήτριος λέγει πρὸς τὸν φίλον του Γεώργιον. «Ἐὰν μοῦ δόσῃς ἕνα ἀπὸ τοὺς βόλους σου, θὰ ἔχωμεν ἴσους βόλους». Ἐκεῖνος ἀπαντᾷ. «Ἐὰν μοῦ δόσῃς 2 ἀπὸ τοὺς ἰδικούς σου θὰ ἔχω 6 βόλους περισσοτέρους ἀπὸ σέ». Πόσους βόλους εἶχεν ὁ καθείς;

533) Ὁ Α λέγει πρὸς τὸν Β. «Ἔχω τὴν ἡλικίαν, τὴν ὁποίαν εἶχες πρὸ 2 ἐτῶν· ὅταν δὲ θὰ ἔχω τὴν ἡλικίαν, τὴν ὁποίαν ἔχεις, οἱ ἡλικίαι μας θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 66 ἔτη. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία ἑκατέρου;

534) Δανείσας τι ποσὸν χρημάτων πρὸς 5% καὶ ἕτερον πρὸς 6% ἐτησίως λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 560 δραχμάς. Ἐὰν ἐδάνειζεν ἀμφότερα τὰ ποσὰ ταῦτα ὁμοῦ πρὸς 11% θὰ ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 1100 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐδάνεισε πρὸς 5% καὶ πόσα πρὸς 6%;

535) Ἡμίονος καὶ ὄνος ἔβαινον φέρουσαι φορτία οἴνου. Πρὸς τὴν διαρκῶς στενάζουσαν ὑπὸ τὸ βαρὺ φορτίον ὄνον εἶπεν ἡ ἡμίονος. «Μῆτερ, διατί παραπονεῖσαι; Ἐὰν μοὶ δόσῃς ἓν μέτρον ἐκ τοῦ φορτίου σου, θὰ ἔχω διπλάσιον ἀπὸ σὲ φορτίον, ἐὰν δὲ σὺ λάβῃς ἀπ' ἐμοῦ ἕν, θὰ ἔχωμεν τὸ αὐτὸ φορτίον». Πόσον φορτίον ἔφερεν ἡ ὄνος καὶ πόσον ἡ ἡμίονος; (Ἐκ τῆς Ἑλλ. ἀνθολογίας).

536) Χρυσοχόος ἔχει δύο κράμματα, ὧν τὸ α΄ περιέχει 270 γραμμάρια χρυ-

σοῦ καὶ 60 γραμμάρια χαλκοῦ, τὸ δὲ β΄περιέχει 200 γραμμάρια χρυσοῦ καὶ 50 γραμμάρια χαλκοῦ. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους διὰ νὰ ἀποτελέσῃ κράμμα 160 γραμμαρίων βαθμοῦ καθαρότητος 0,835;

537) Δύο ἄνθρωποι ἀνεχώρησαν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νὰ κάμωσι περίπατον 3 χιλιομέτρων. Ὁ α΄ διανύει 2 1/2 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ὁ δὲ β΄ 4 χιλιόμετρα. Ὁ β΄ φθάσας εἰς τὸ τέρμα ἐπέστρεφε διὰ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ καὶ συνήντησε τὸν α΄.Πόσα χιλιόμετρα διήνυσεν ἑκάτερος μέχρι τῆς συναντήσεώς των.

538) Ἐὰν ἡ ταχύτης ἁμαξοστοιχίας αὐξηθῇ κατὰ 5 χιλμ. τὴν ὥραν, αὕτη φθάνει εἰς τὸ τέρμα 37,5 λεπτὰ τῆς ὥρας ἐνωρίτερον. Ἐὰν δὲ ἐλαττωθῇ αὕτη κατὰ τὸ αὐτὸ ποσόν, ἡ ἁμαξοστοιχία φθάνει 50 λεπτὰ βραδύτερον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας καὶ τὸ διάστημα, ὅπερ πρόκειται νὰ διανύσῃ.

539) Ἱέρων ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν παρήγγειλεν εἰς χρυσοχόον τὴν κατασκευὴν στεφάνου ἐκ χρυσοῦ βάρους 7645 γραμμαρίων. Ὑποπτευθεὶς δὲ μήπως ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε μέρος τοῦ χρυσοῦ δι' ἀργύρου ἀνέθηκεν εἰς τὸν Ἀρχιμήδην τὸν ἔλεγχον. Οὗτος γνωρίζων ὅτι ὁ μὲν χρυσὸς ὑφίσταται ἐν τῷ ὕδατι ἄνωσιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{52}{1000}$ τοῦ βάρους του, ὁ δὲ ἄργυρος πρὸς τὰ $\frac{95}{1000}$ τοῦ βάρους του ἐζύγισε τὸν στέφανον ἐν τῷ ὕδατι καὶ εὗρεν αὐτὸν ἐλαφρότερον κατὰ 467 γραμμάρια. Πόσον χρυσὸν καὶ πόσον ἄργυρον περιεῖχεν ὁ στέφανος ;

540) Δύο οἰνέμποροι εἰσήρχοντο εἰς πόλιν τινὰ φέροντες ὁ μὲν 64 ὁ δὲ 20 βυτία πλήρη οἴνου τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ μεγέθους. Ἐπειδὴ δὲ δὲν εἶχον ἀρκετὰ χρήματα νὰ πληρώσωσι τὰ διαπύλια τέλη, ὁ α΄ ἐπλήρωσε ταῦτα μὲ 5 βυτία καὶ ἀκόμη 40 δραχμάς, ὁ ἄλλος μὲ 2 βυτία, ἀλλ' ἔλαβεν ὀπίσω 40 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία καὶ ὁ φόρος ἑκάστου βυτίου.

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐκλήθη ὑπὸ τοῦ Le Verrier πρόβλημα τῆς ***παγίδος***, διὰ λόγον, ὅστις ἐκ τῆς λύσεως θὰ γείνῃ ἀντιληπτός).

541) Δύο ἀδελφοὶ χρεωστοῦσιν ὁμοῦ 1800 δραχμάς. Ὁ εἷς δύναται μὲ τὰ χρήματά του καὶ μὲ τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ ἄλλου νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος των. Ὁ ἄλλος δύναται ἐπίσης μὲ τὰ χρήματά του καὶ μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων τοῦ α΄ νὰ πληρώσῃ τὸ χρέος τοῦτο. Πόσα χρήματα εἶχεν ὁ καθείς ;

542) Ἀνέλαβέ τις νὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν ἔργον ἀντὶ συμπεφωνημένου ποσοῦ. Πληρώσας τοὺς χρησιμοποιηθέντας ἐργάτας πρὸς 80 δραχμὰς ἕκαστον ἐκέρδισεν 600 δραχμάς. Ἐὰν δὲ ἐπλήρωνεν αὐτοὺς πρὸς 102 δραχμάς, θὰ ἐζημιοῦτο 60 δραχμάς. Πόσους ἐργάτας ἐχρησιμοποίησε καὶ πόσον τὸ συμφωνηθὲν χρηματικὸν ποσὸν διὰ τὸ ἔργον τοῦτο ;

543) Ὁ λόγος τῶν ἡλικιῶν δύο ἀνθρώπων εἶναι 5:11, ἐν ᾧ πρὸ 4 ἐτῶν ἦτο 2: 5. Πόσην ἡλικίαν ἔχει ἑκάτερος τούτων ;

§ 104. Λύσις καὶ διερεύνησις τοῦ γενικοῦ συστήματος $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma, \quad \alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$.

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ β΄, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ —β εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις $\alpha\beta'\chi+\beta\beta'\psi=\beta'\gamma$, $-\alpha'\beta\chi-\beta\beta'\psi=-\beta\gamma'$, ἐξ ὧν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,\chi=\beta'\gamma-\beta\gamma'. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ $-\alpha'$, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ α εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις $-\alpha\alpha'\chi-\alpha'\beta\psi=-\alpha'\gamma$, $\alpha\alpha'\chi+\alpha\beta'\psi=\alpha\gamma'$, ἐξ ὧν ὁμοίως προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,\psi=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \qquad (2).$$

Ἐὰν ἤδη ὑποτεθῇ $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ὅτι

$$\chi=\frac{\beta'\gamma-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\quad \psi=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}. \qquad (3)$$

Διερεύνησις. Αἱ ῥίζαι (3) εὑρέθησαν ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ παράστασις $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἤτοι ὅταν

$$\alpha\beta'\neq\alpha'\beta \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}.$$

Ἂν $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$, ἤτοι $\alpha\beta'=\alpha'\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=\beta'\gamma-\beta\gamma'$. Καὶ ἂν μὲν εἶναι $\beta'\gamma=\beta\gamma'$, ἤτοι $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, αὕτη γίνεται $0=0$ ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ προκύπτει καὶ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ ἢ $\alpha\gamma'=\alpha'\gamma$, ὅθεν $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$ καὶ ἡ (2) γίνεται $0=0$.

Τὸ σύστημα ἄρα εἶναι τότε ἀόριστον.

Ἐὰν δὲ $\beta'\gamma\neq\beta\gamma'$ ἤτοι $\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ἰσότης $0=\beta'\gamma-\beta\gamma'$ εἶναι ψευδὴς καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἤτοι αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ εἶναι ἀσυμβίβαστοι.

Ὥστε: α') ***Ἂν οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι διάφοροι ἀλλήλων*** $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}\right)$, ***τὸ σύστημα ἔχει μίαν ὡρισμένην λύσιν.*** Ταύτην παρέχουσιν οἱ τύποι (3)

β') ***Ἐὰν οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους καὶ πρὸς τὸν λόγον τῶν γνωστῶν ὅρων*** $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}\right)$, ***τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.***

γ') ***Ἂν οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι ἴσοι μὲν πρὸς ἀλλήλους, διάφοροι δὲ τοῦ λόγου τῶν γνωστῶν ὅρων*** $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma'}{\gamma}\right)$, ***τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.***

§ 108. Πρώτη ἔννοια ὁριζούσης. Ἐὰν ἔχωμεν τέσσαρας ἀριθμοὺς γεγραμμένους εἰς δύο ὁριζοντίους γραμμὰς καὶ δύο στήλας, ὡς κάτωθι φαίνεται,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

καλοῦμεν ὁρίζουσαν αὐτῶν τὴν διαφορὰν τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὴν ἐξ ἀριστερῶν καὶ κάτω πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἄνω διαγώνιον ἀπὸ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν τῆς διαγωνίου, ἥτις φέρεται ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἄνω πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κάτω. Οὕτω τῶν ἄνω ἀριθμῶν ὁρίζουσα εἶναι ἡ διαφορὰ $2.7-3.4= \quad 14-12=2$.

Ὁμοίως εἶναι $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7-(-3).8=35+24=59.$

$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta'-\alpha'\beta, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \beta'\gamma-\beta\gamma', \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma'-\alpha'\gamma$ κ.τ.λ

§ 106. Κανὼν τοῦ Cramer. Οἱ τύποι (3), οἱ ὁποῖοι παρέχουσι τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ταὐτοποιοῦσι τὸ σύστημα $\left.\begin{array}{l} \alpha\chi+\beta\psi=\gamma \\ \alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma' \end{array}\right|$ ὅταν $\alpha\beta'-\alpha'\beta \neq 0$, δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ ὡς ἀκολούθως

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

Ἄρα: ***Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος*** $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$ ***εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἡ τὸ σύστημα ἐπαληθεύουσα τιμὴ ἑκατέρου τῶν ἀγνώστων εὑρίσκεται, ἂν διὰ τῆς ὁριζούσης ταύτης διαιρεθῇ ἡ ὁρίζουσα, ἥτις προκύπτει ἐξ αὐτῆς δι' ἀντικαταστάσεως τῶν συντελεστῶν τοῦ προσδιοριστέου ἀγνώστου διὰ τῶν ἀντιστοίχων γνωστῶν ὅρων.***

Π. χ. τὸ σύστημα $\begin{array}{l} 3\chi+2\psi=12 \\ \chi+3\psi=11 \end{array}$ ἀληθεύει διὰ

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{56-22}{9-2} = \frac{14}{7} = 2, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{33-12}{9-2} = \frac{21}{7} = 3.$$

Ἀσκήσεις √ 544) Νὰ γραφῇ ἓν σύστημα μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς ἔχον μίαν ὡρισμένην λύσιν, ἓν ἀόριστον καὶ ἓν ἀδύνατον.

√ 545) Νὰ λυθῇ δι' ἀμέσου ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τοῦ Cramer ἕκαστον τῶν συστημάτων $\begin{array}{l} 2\chi+3\psi=0 \\ 3\chi-2\psi=5 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} \chi-3\psi=0 \\ 2\chi+5\psi=11 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} 3\chi+7\psi=100 \\ 2\chi-3\psi=-10 \end{array}$

√ 546) Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε τὸ σύστημα $\lambda\chi=\psi-2$, $\chi-3\psi=4$ νὰ εἶναι ἀδύνατον.

✓ 547) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ σύστημα $\lambda\chi+(\lambda+1)\psi=3, 2\lambda\chi+8\psi=6$ γίνεται ἀόριστον; καὶ διὰ ποίας ἔχει μίαν ὡρισμένην λύσιν;

✓ 548) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ σύστημα $\chi+2\psi=\lambda+1$, $\lambda\chi+(\lambda+1)\psi=2$ εἶναι ἀόριστον; Τί συμβαίνει διὰ τὰς ἄλλας τιμὰς τοῦ λ;

✓ 549) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi+\alpha\psi=2$, $\alpha\chi-\psi=\alpha$

✓ 550) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, $\alpha\chi-\beta\psi=\delta$

✓ 551) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, $\beta\chi-\alpha\psi=\delta$

✓ 552) » » » » » » $\alpha\chi-\beta\psi=\gamma$, $\alpha^2\chi-\beta^2\psi=\gamma^2$

Λύσεις συστήματος περισσοτέρων ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

§ **107. Παράδειγμα 1ον.** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα
$2\chi+\psi+3\omega=23$, $\chi+2\psi-3\omega=-5$, $4\chi-2\psi-3\omega=-15$ (1)

Ἀπαλείφοντες μεταξὺ αὐτῶν τὸν ἄγνωστον ω εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$2\chi+\psi+3\omega=23,\ 3\chi+3\psi=18,\ 6\chi-\psi=8, \qquad (2)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (1)

Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις τοῦ (2) ἀποτελοῦσι τὸ σύστημα $3\chi+3\psi=18$, $6\chi-\psi=8$, τὸ ὁποῖον λύομεν κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἀληθεύει διὰ $\chi=2$ καὶ $\psi=4$. Θέτοντες ἤδη ἐν τῇ α΄ ἐξισώσει τοῦ (2) ἀντὶ χ καὶ ψ τὰς εὑρεθείσας ταύτας τιμὰς αὐτῶν εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $3\omega+8=23$, ἥτις ἔχει μόνον τὸν ἄγνωστον ω καὶ ἀληθεύει διὰ $\omega=5$. Τὸ σύστημα ἄρα (2) καὶ τὸ πρὸς αὐτὸ ἰσοδύναμον (1) ἀληθεύουσιν, ὅταν $\chi=2$, $\psi=4$, $\omega=5$.

§ **108. Παράδειγμα 2ον.** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi+\omega+\varphi=15,\quad \chi+2\psi+3\omega-\varphi=16,\\ 2\chi+\psi-2\omega-\varphi=-11,\ 3\chi+\psi+\omega-\varphi=5\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ἀπαλείφοντες μεταξὺ αὐτῶν τὸν φ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi+\omega+\varphi=15,\ 2\chi+3\psi+4\omega=31,\\ 3\chi+2\psi-\omega=4,\ 4\chi+2\psi+2\omega=20\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Τούτου αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦσι τὸ σύστημα
$2\chi+3\psi+4\omega=31$, $3\chi+2\psi-\omega=4$, $4\chi+2\psi+2\omega=20$ (3)

Ἀπαλείφοντες μεταξὺ τούτων τὸν ω εὑρίσκομεν τὸ πρὸς τὸ (3) ἰσοδύναμον σύστημα $14\chi+11\psi=47$, $5\chi+3\psi=14$, $2\chi+\psi+\omega=10$. (4)
Τούτων αἱ δύο πρῶται ἀποτελοῦσι τὸ σύστημα.

$14\chi+11\psi=47$, $5\chi+3\psi=14$, τὸ ὁποῖον ἀληθεύει διὰ

$$χ=\frac{\begin{vmatrix}47 & 11\\14 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}14 & 11\\5 & 3\end{vmatrix}}=\frac{141-154}{42-55}=\frac{-13}{-13}=1, ψ=\frac{\begin{vmatrix}14 & 47\\5 & 14\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}14 & 11\\5 & 3\end{vmatrix}}=\frac{196-235}{-13}=\frac{-39}{-13}=3.$$

Θέτοντες ἐν τῇ γ΄ τῶν ἐξισώσεων τοῦ (3) τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ χ καὶ ψ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $2+3+ω=10$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $ω=5$. Ὥστε τὸ σύστημα (3) ἀληθεύει διὰ $χ=1$, $ψ=3$, $ω=5$.

Ἐὰν ἤδη ἐν τῇ α΄ τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2) θέσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $1+3+5+φ=15$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $φ=6$. Τὸ σύστημα λοιπὸν ἀληθεύει διὰ $χ=1$, $ψ=3$, $ω=5$ καὶ $φ=6$.

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, ἀπαλείφομεν μεταξὺ αὐτῶν ἕνα ἄγνωστον καὶ ἀνάγομεν τὴν λύσιν αὐτοῦ εἰς σύστημα (ν—1) ἐξισώσεων μὲ (ν—1) ἀγνώστους. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἐπ᾽ αὐτοῦ ἀνάγομεν τὴν λύσιν του εἰς σύστημα ν—2 ἐξισώσεων μὲ ν—2 ἀγνώστους καὶ καθ᾽ ἑξῆς οὕτω, μέχρις οὗ καταλήξωμεν εἰς σύστημα 2 ἐξισώσεων μὲ 2 ἀγνώστους.

Λύομεν εἶτα τοῦτο καὶ μετ᾽ αὐτὸ πάντα τὰ προηγούμενα αὐτῷ καὶ τὸ δοθὲν κατὰ σειρὰν ἀντίστροφον τῆς εὑρέσεώς των.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἐξισώσεις τινὲς δὲν ἔχωσιν ὅλους τοὺς ἀγνώστους, ἡ λύσις τοῦ συστήματος καθίσταται ἁπλουστέρα, ἀρκεῖ νὰ ἀρχίζωμεν τὴν ἀπαλοιφὴν ἀπὸ τὸν ἄγνωστον, τὸν ὁποῖον περιέχουσιν ὀλιγώτεραι ἐξισώσεις.

Οὕτως ἐν τῷ συστήματι

$$χ+2ψ+ω=0,\ 3χ-3ψ+2ω=25,\ χ+ψ=1 \qquad (1)$$

ἀπαλείφοντες τὸν ω μεταξὺ τῶν δύο πρώτων εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $χ+2ψ+ω=0$, $χ-7ψ=25$, $χ+ψ=1$ (2)

Λύοντες τὸ σύστημα $χ-7ψ=25$, $χ+ψ=1$ εὑρίσκομεν $χ=4$, $ψ=-3$, κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ α΄ τοῦ (2) γίνεται $4-6+ω=0$, ὅθεν $ω=2$.

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα (1) ἀληθεύει διὰ $χ=4$, $ψ=-3$, $ω=2$.

Ἐνίοτε ἐπιτυγχάνεται ταὐτοχρόνως ἀπαλοιφὴ περισσοτέρων ἀγνώστων. Οὕτως ἐν τῷ συστήματι $χ+2ψ+ω=0$, $2χ-3ψ+2ω=21$, $χ+ψ=1$ πολλαπλασιάζοντες τὴν α΄ ἐπὶ -2 καὶ προσθέτοντες τὰ μέλη τῆς προκυπτούσης $-2χ-4ψ-2ω=0$ μετὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς $2χ-3ψ+2ω=21$ εὑρίσκομεν $-7ψ=21$ καὶ ἑπομένως τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$χ+2ψ+ω=0, \qquad χ+ψ=1, \qquad -7ψ=21,$$

ὅπερ λύεται εὐχερέστατα, διότι ἐκ τῆς γ΄ εὑρίσκομεν $ψ=-3$, εἶτα ἡ β' γίνεται $\chi-3=1$, ὅθεν $\chi=4$ καὶ ἡ α' τέλος γίνεται $4-6+\omega=0$, ὅθεν $\omega=2$.

§ **109. Εἰδικὰ τεχνάσματα.** Ἐνίοτε ἡ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων συστήματος εἶναι τοιαύτη, ὥστε διὰ καταλλήλου συνδυασμοῦ αὐτῶν ἐπιτυγχάνομεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος ταχύτερον ἢ διὰ τῆς γενικῆς μεθόδου.

Ἔστωσαν ὡς παραδείγματα τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

1ον) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi+\psi=\alpha$, $\psi+\omega=2\alpha$, $\omega+\chi=3\alpha$. (1)

Παρατηροῦντες ὅτι ἕκαστος τῶν ἀγνώστων εἰσέρχεται δὶς ἐν τῷ συστήματι καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$$2(\chi+\psi+\omega)=6\alpha, \text{ ὅθεν } \chi+y+\omega=3\alpha \qquad (2)$$

Ἤδη θέτοντες ἐν τῇ (2) ἀντὶ $\chi+\psi$ τὴν τιμὴν αὐτοῦ α, εὑρίσκομεν $\alpha+\omega=3\alpha$, ὅθεν $\omega=2\alpha$. Ὁμοίως ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως (2) ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\psi+\omega=2\alpha$, εὑρίσκομεν $\chi+2\alpha=3\alpha$, ὅθεν $\chi=\alpha$· λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\omega+\chi=3\alpha$ εὑρίσκομεν $\psi+3\alpha=3\alpha$, ὅθεν $\psi=0$.

2ον) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\dfrac{\chi}{2}=\dfrac{\psi}{3}=\dfrac{\omega}{5}$, $\chi+\psi+\omega=20$. (1)

Καλοῦντες ἕκαστον τῶν ἴσων λόγων $\dfrac{\chi}{2}$, $\dfrac{\psi}{3}$, $\dfrac{\omega}{5}$ διὰ τοῦ βοηθητικοῦ ἀγνώστου λ εὑρίσκομεν $\chi=2\lambda$, $\psi=3\lambda$, $\omega=5\lambda$ (2)

Ἐὰν δὲ θέσωμεν ἐν τῇ $\chi+\psi+\omega=20$ τὰς τιμὰς ταύτας τῶν χ, ψ, ω, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $2\lambda+3\lambda+5\lambda=20$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $\lambda=2$. Αἱ δὲ ἐξισώσεις (2) δίδουσιν $\chi=4$, $\psi=6$, $\omega=10$.

3ον) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=\dfrac{3}{20}$, $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{2}{15}$,

$$\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{12}$$

Λαμβάνοντες πρὸς στιγμὴν ὡς ἀγνώστους $\dfrac{1}{\chi}$, $\dfrac{1}{\psi}$, $\dfrac{1}{\omega}$ καὶ θέτοντες $\dfrac{1}{\chi}=\chi'$, $\dfrac{1}{\psi}=\psi'$, $\dfrac{1}{\omega}=\omega'$ ἀναγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος

$$\chi'+\psi'=\frac{3}{20}=\frac{9}{60},\ \chi'+\omega'=\frac{2}{15}=\frac{8}{60},\ \psi'+\omega'=\frac{1}{12}=\frac{5}{60},$$ ὅπερ

λύομεν κατὰ τὸ 1ον παράδειγμα καὶ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$2(\chi'+\psi'+\omega')=\frac{22}{60},\ \chi'+\psi'+\omega'=\frac{11}{60} \text{ ὅθεν } \omega'+\frac{9}{60}=\frac{11}{60},$$

$$\omega'=\frac{2}{60}=\frac{1}{30},\ \psi'+\frac{8}{60}=\frac{11}{60},\ \psi'=\frac{3}{60}=\frac{1}{20} \text{ καὶ}$$

$$\chi' + \frac{5}{60} = \frac{11}{60}, \quad \chi' = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

Ἄρα $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{\psi} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{30}$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν

$$\chi = 10, \ \psi = 20, \ \omega = 30.$$

ΣΗΜ. Δὲν πρέπει νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος τούτου, διότι οὕτω λαμβάνομεν ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ.

4ον ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*** $\frac{\chi\psi}{\chi+\psi} = \frac{35}{12}$, $\frac{\chi\omega}{\chi+\omega} = \frac{21}{10}$, $\frac{\psi\omega}{\psi+\omega} = \frac{15}{8}$.

Ἀντιστρέφοντες τὰ κλάσματα ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων καὶ ἐκτελοῦντες τὰς εἰς τὰ πρῶτα μέλη σημειωμένας διαιρέσεις εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} = \frac{12}{35} = \frac{36}{105}, \quad \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\omega} = \frac{10}{21} = \frac{50}{105}, \quad \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{8}{15} = \frac{56}{105},$$

ὅπερ λύομεν κατὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα καὶ εὑρίσκομεν $\chi=7$, $\psi=5$, $\omega=3$.

5ον) ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα***

$$\begin{aligned} 5(2\chi+3\psi)+3\,(\chi-2\psi) &= 8 \\ 2(2\chi+3\psi)-(\chi-2\psi) &= -10. \end{aligned}$$

Παρατηροῦντες ὅτι ἐν τῷ συστήματι τούτῳ εἰσέρχονται δύο ὡρισμέναι μόνον συναρτήσεις τῶν ἀγνώστων αἱ $2\chi+3\psi$ καὶ $\chi-2\psi$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ταύτας ὡς βοηθητικοὺς ἀγνώστους. Πρὸς τοῦτο θέτομεν $\quad 2\chi+3\psi=\omega$, καὶ $\chi-2\psi=\varphi$, (1)
ὅτε ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα $5\varphi+3\varphi=8$, $2\omega-\varphi=-10$
Λύοντες τοῦτο εὑρίσκωμεν $\omega=-2$ καὶ $\varphi=6$. Αἱ δὲ ἐξισώσεις (1) γίνονται τότε $2\chi+3\psi=-2$, $\chi-2\psi=6$, ἐξ ὧν προκύπτει ὅτι

$$\chi=2, \ \psi=-2.$$

6ον) ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*** $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\beta x+\alpha y=\delta$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ συντελεστὴς ἑκατέρου τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἰς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων εἶναι συντελεστὴς τοῦ ἑτέρου ἀγνώστου εἰς τὴν ἄλλην.

Προσθέτοντες κατὰ μέλη ταύτας εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta)(x+y)=\gamma+\delta$,

$$\text{ὅθεν} \quad x+y = \frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}. \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς α´ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς β´, εὑρίσκομεν $(\alpha-\beta)(x-y)=\gamma-\delta$, ὅθεν

$$x-y = \frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$2x=\frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}+\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta}=\frac{2(\alpha\gamma-\beta\delta)}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$2y=\frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta}-\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta}=\frac{2(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha^2-\beta^2},\quad \text{ὅθεν}$$

$$x=\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\alpha^2-\beta^2}\ \text{καὶ}\ y=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ τὸ σύστημα $\alpha x-\beta y=\gamma$, $\beta x-\alpha y=\delta$, ἐν ᾧ ὁ συντελεστὴς ἑκατέρου τῶν ἀγνώστων ἐν μιᾷ ἐξισώσει εἶναι ἀντίθετος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἑτέρου ἐν τῇ ἄλλῃ.

§ 110. Μέθοδος τοῦ Bézout. ***Παράδειγμα Α΄.*** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $2x-3y=1$, $5x+2y=31$.

Πολ)ζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν α΄ ἐπὶ λ τῆς δὲ β΄ ἐπὶ μ ($\lambda\neq0,\mu\neq0$) καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(2\lambda+5\mu)x+(2\mu-3\lambda)y=\lambda+31\mu$, (1) ἥτις μετὰ μιᾶς τῶν ἐξισώσεως τοῦ δοθέντος συστήματος ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἵνα ἡ ἐξίσωσις (1) περιέχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον π. χ. τὸν x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὁρισθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ λ καὶ μ, οὕτως ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ y νὰ εἶναι μηδέν, ἤτοι νὰ εἶναι $2\mu-3\lambda=0$. (2)

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχουσα δύο ἀγνώστους ἔχει ἀπείρους λύσεις, τὰς ὁποίας ἐκφράζομεν συναρτήσει βοηθητικοῦ ἀγνώστου, ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τῆς ἐξιώσεως (2) μεταφέροντες τὸν δεύτερον ὅρον εἰς τὸ β΄ μέλος καὶ διαιροῦντες εἶτα ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 3.2 εὑρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\mu}{3}=\frac{\lambda}{2}$.

Ἐὰν δὲ κληθῇ ρ ἕκαστος τῶν λόγων ταύτης, ἕπεται εὐκόλως ὅτι

$$\mu=3\rho,\ \lambda=2\rho. \qquad (3)$$

Αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων τούτων παρεχόμεναι τιμαὶ τῶν μ καὶ λ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2), οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν λαμβάνῃ ὁ ρ.

Διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τῶν μ καὶ λ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $(4\rho+15\rho)x=2\rho+93\rho$, ὅθεν $19x=95$ καὶ ἑπομένως $\chi=5$.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ μὴ περιέχῃ ἡ (1) τὸν x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τοὺς λ καὶ μ, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $2\lambda+5\mu=0$, ὅθεν ὁμοίως εὑρίσκομεν $\frac{\mu}{2}=-\frac{\lambda}{5}$. Ἐὰν δὲ καλέσωμεν ρ΄ ἕκαστον τῶν λόγων τούτων, εὑρίσκομεν ὅτι $\mu=2\rho'$ καὶ $\lambda=-5\rho'$, ἡ δὲ (1) γίνεται τότε $19y=57$, ὅθεν $y=3$.

Παράδειγμα Β'. Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$2x-5y+4z=4,\ x+3y-z=4,\ 5x-y+2z=9. \qquad (1)$$

Πολ)ζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν α' ἐπὶ λ, τῆς β' ἐπὶ μ καὶ γ' ἐπὶ ν ($\lambda, \mu, \nu \neq 0$) καὶ προσθέτοντες εἶτα κατὰ μέλη τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(2\lambda+\mu+5\nu)x+(3\mu-5\lambda-\nu)y+(4\lambda-\mu+2\nu)z=4\lambda+4\mu+9\nu, \qquad (2)$$

ἥτις μετὰ δύο οἱωνδήποτε ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1) ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (1).

Ἵνα δὲ ἡ ἐξίσωσις (2) περιέχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον, π. χ. τὸν χ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὁρισθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ λ, μ, ν οὕτως ὥστε οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων y, z νὰ εἶναι μηδέν, ἤτοι νὰ εἶναι

$$3\mu-5\lambda-\nu=0, \quad 4\lambda-\mu+2\nu=0. \qquad (3)$$

Τὸ ὑπὸ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων ἀποτελούμενον σύστημα ὡς περιέχον τρεῖς ἀγνώστους εἶναι ἀόριστον, ἤτοι ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ταύτας ἐκφράζομεν συναρτήσει βοηθητικοῦ ἀγνώστου ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως $\nu \neq 0$, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἑκατέρας τῶν ἐξισώσεων (3) διὰ ν εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$3.\frac{\mu}{\nu}-5.\frac{\lambda}{\nu}=1, \quad -\frac{\mu}{\nu}+4.\frac{\lambda}{\nu}=-2 \qquad (4)$$

Λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -5\\ -2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -5\\ -1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{4-10}{12-5}=\frac{-6}{7}, \quad \frac{\lambda}{\nu}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -5\\ -1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-6+1}{12-5}=\frac{-5}{7},$$

ἐξ ὧν ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\frac{\mu}{6}=\frac{\lambda}{5}=-\frac{\nu}{7}$. Ἐὰν δὲ κληθῇ ρ ἕκαστος τῶν λόγων τούτων, ἕπεται ὅτι :

$$\mu=6\rho,\ \lambda=5\rho,\ \nu=-7\rho. \qquad (5)$$

Αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων τούτων (5) παρεχόμεναι τιμαὶ τῶν μ, λ, ν εἶναι ῥίζαι τοῦ συστήματος (3) διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ρ.

Ἤδη ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $(10+6-35)\rho\chi=(20+24-63)\rho$ ἢ $-19\rho\chi=-19\rho$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\rho\neq 0$ (διότι ἄλλως θὰ ἦτο $\mu=\nu=\lambda=0$), ἕπεται ὅτι $-19\chi=-19$ καὶ $\chi=1$.

Ἐξισοῦντες ἤδη πρὸς τὸν μηδὲν τοὺς συντελεστὰς τοῦ χ καὶ z ἐν τῇ ἐξισώσει (2) καὶ ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι $y=2$ καὶ κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι $z=3$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον ταύτην καὶ διὰ τὴν λύσιν συστημάτων μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους καὶ ἐξισώσεις.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

553) $\chi+\psi-\omega=0,\ 2\chi-\psi+\omega=9,\ 5\chi-2\psi-\omega=-6.$

554) $4\chi+\psi+\omega=\frac{13}{2},\ \chi+\psi-\omega=\frac{5}{2},\ 2\chi-\psi-\omega=-\frac{1}{2}.$

555) $\chi+2\psi-3\omega+\varphi=20\frac{1}{5},\ 2\chi-\psi+\omega-\varphi=5,\ \chi+\psi=5\frac{1}{5},$

$\chi-\psi=4+4/5.$

556) $2\chi-\psi+\omega=16,\ 3\chi+2\psi-\omega=5,\ \chi-4\psi+2\omega=25,\ \chi+\psi+\omega+2\varphi=5.$

557) $\chi+2\psi=5,\ \chi+\omega=4,\ \omega+\varphi=7,\ \chi+\varphi=5,\ \psi+2z=10.$

558) $\chi+\psi+\omega=16,\ \psi+\omega+\varphi=29,\ \omega+\varphi+\chi=27,\ \varphi+\chi+\psi=24.$

559) $\frac{\chi}{3}=\frac{3\psi}{15}=\frac{4\omega}{28},\ \chi+3\psi+4\omega=46.$

560) $\psi+\omega-\chi=\alpha,\ \omega+\chi-\psi=\beta,\ \chi+\psi-\omega=\gamma.$

561) $\frac{\chi\psi}{\chi+\psi}=\frac{1}{5},\ \frac{\chi\omega}{\chi+\omega}=\frac{1}{6},\ \frac{\psi\omega}{\psi+\omega}=\frac{1}{7}.$

562) $\chi=2\psi=3\omega,\ \chi+2\psi+3\omega=4.$

563) $\chi=3\psi=4\omega,\ \chi+6\psi+8\omega=5.$

564) $2\chi-7\psi-\omega=1,\ 5\chi+\psi+3\omega=10,\ 3\chi+6\psi-2\omega=9.$

565) $\chi+\psi+2\omega=\alpha,\ \chi+2\psi+\omega=\beta,\ 2\chi+\psi+\omega=\gamma$

566) $\chi+\varphi=\alpha,\ \varphi+\omega=\beta,\ \chi+\omega=\gamma.$

567) $\frac{\chi}{\alpha+\beta}+\frac{\psi}{\alpha-\beta}=2\alpha,\ \frac{\chi-\psi}{2\alpha\beta}=\frac{\chi+\psi}{\alpha^2+\beta^2}$

568) $\chi+y+\omega=1,\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0,\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=0,\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha).$

569) $\frac{\chi+y-1}{\chi-y+2}=3,\ \frac{y-\chi+1}{\chi-y+1}=1,\ 2\chi-3\omega=\frac{3}{2}$

570) $\chi+y+z+\omega=1,\ \alpha\chi+\beta y+\gamma z+\delta\omega=k,\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2z+\delta^2\omega=k^2$

$\alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3z+\delta^3\omega=k^3.$

571) $y+z-\chi=\alpha,\ z+\chi-y=\beta,\ \chi+y-z=\gamma.$

572) $\frac{\chi}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ \lambda\chi+\mu y+\nu z=\delta.$

573) $\chi+2y-3z=-8,\ \chi+2z-y=18,\ 2y+2z-\chi=30.$

574) $\chi+y+2z=\alpha,\ \chi+2y+z=\beta,\ 2\chi+y+z=\gamma.$

575) $\chi+y-z=\alpha-1,\ y+z-\omega=2\alpha-8,\ z+\omega-\varphi=\alpha+4,$

$\omega+\varphi-\chi=6\alpha+2,\ \varphi+x-y=5\alpha+3.$

576) $2x+3y=970,\ x-y+2z=355,\ 2y-3z+\varphi=-50,\ z-\varphi=60.$

577) $4(x-y)+2(2\chi+3y)=3,\ 2(x-y)-2(3\chi+2y)+2=0.$

578) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ὅστις ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας. α') Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 6, β') τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄλλων καὶ γ') τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων.

579) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ὅστις ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας. α') Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 11. β') Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων. γ') Ἐὰν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 297.

580) Τρία καλάθια ἔχουσιν 75 μῆλα. Τὸ α' καὶ τὸ γ' ἔχουσιν ὁμοῦ διπλάσια

τοῦ β΄. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ β΄, ἀφαιρέσωμεν 5, μένουσιν εἰς αὐτὸ μῆλα, ὅσα εἰς τὸ α΄. Πόσα μῆλα ἔχει ἕκαστον ;

581) Θεῖος ἐδώρησεν εἰς ἀνεψιούς του 12400 δραχμὰς ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ μοιράσωσιν αὐτὰς ὡς ἑξῆς. Τὸ μερίδιον τοῦ α΄ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ β΄, τὸ δὲ τοῦ β΄ νὰ εἶναι πρὸς τὸ τοῦ γ΄ ὡς ὁ 15 πρὸς τὸν 17. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

582) Τέσσαρες ἀριθμοὶ γεγραμμένοι κατά τινα φορὰν ἐπὶ περιφερείας εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε ἕκαστος μετὰ τῶν δύο ἑπομένων ἔχει ἄθροισμα κατὰ σειρὰν 30, 34, 36, 32. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ;

583) Δεξαμενή τις πληροῦται ὑπὸ τῶν κρουνῶν Α καὶ Β εἰς $7\,^1/_2$ ὥρας, ὑπὸ τῶν Β καὶ Γ εἰς $10\,^2/_7$ ὥρας καὶ ὑπὸ τῶν Α καὶ Γ εἰς 8 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος κρουνὸς μόνος γεμίζει τὴν δεξαμενήν; Καὶ εἰς πόσας οἱ τρεῖς ὁμοῦ ;

584) Τρεῖς ἀδελφοὶ εἶχον κοινὸν χρέος ἐκ 1000 δραχμῶν. Ὁ α΄ λέγει εἰς τὸν β΄· ἐὰν μοὶ ἔδιδες τὸ τέταρτον τῶν χρημάτων σου θὰ ἐπλήρωνον ὅλον τὸ χρέος μας. Ὁ β΄ λέγει εἰς τὸν γ΄· ἐὰν μοῦ ἔδιδες τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων σου, θὰ ἠδυνάμην καὶ ἐγὼ νὰ πληρώσω τὸ χρέος μας. Τέλος ὁ γ΄ λέγει εἰς τὸν α΄· ἐὰν μοὶ ἔδιδες τὸ τρίτον τῶν χρημάτων σου καὶ ἐγὼ θὰ ἠδυνάμην νὰ πληρώσω τὸ χρέος μας. Πόσα χρήματα εἶχεν ἕκαστος ;

585) Τὸ ἔτος τῆς ἀνακαλύψεως τῆς τυπογραφίας εἶναι ἀριθμὸς τετραψήφιος, ὅστις ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας α΄) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 14. β΄) Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων. γ΄) Τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων ἰσοῦται πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ὑπὲρ τὸ τῶν δεκάδων, δ΄) Ἐὰν γράψωμεν τὰ ψηφία κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 4905. Κατὰ ποῖον ἔτος ἀνεκαλύφθη ἡ τυπογραφία ;

586) Τρεῖς φίλοι ἐπέστρεφον ἐκ κυνηγετικῆς ἐκδρομῆς φέροντες ἀριθμόν τινα ὀρτυκίων ἕκαστος. Καθ' ὁδὸν ἐρίσαντες περὶ τῆς σκοπευτικῆς ἱκανότητός των προέτεινον τὸ ἑξῆς διαγώνισμα. Θὰ βάλῃ ἕκαστος ἅπαξ διὰ τοῦ ὅπλου του κατὰ τῆς κορυφῆς παρακειμένου δένδρου, καὶ ἂν μὲν ἐπιτύχῃ θὰ λάβῃ παρ' ἑκάστου τῶν ἄλλων τὸ ἥμισυ τῶν ὀρτυκίων αὐτοῦ, ἐὰν δὲ ἀποτύχῃ θὰ διπλασιάζῃ τὰ ὀρτύκια, τὰ ὁποῖα ἕκαστος τῶν ἄλλων θὰ ἔχῃ τότε. Ἐκτελεσθέντων τῶν συμπεφωνημένων ἀπέτυχον καὶ οἱ τρεῖς τοῦ στόχου καὶ ἐπανῆλθον ἔχοντες ἀνὰ 8 ὀρτύκια. Πόσα ὀρτύκια εἶχεν ἀρχικῶς ἕκαστος ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις α΄ βαθμοῦ.

§ 111. Πρόβλημα I.—***Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ὅστις ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα Τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ἔχουσιν ἄθροισμα 37.***

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ~~χ~~ ψ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων καὶ διὰ ~~ψ~~ χ τὸ τῶν δεκάδων ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$2\chi + 3\psi = 37. \qquad (1)$$

Περιορισμοί. Οἱ ἄγνωστοι χ καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι, θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχουσα δύο ἀγνώστους ἔχει ἀπείρους ῥίζας, διότι, ἂν ὁρίσωμεν αὐτοβούλως τὸν ἕνα ἄγνωστον π. χ. τὸν ψ, ὁ ἄλλος ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως. Ἕνεκα ὅμως τῶν τεθέντων περιορισμῶν ἐκ τῶν ἀπείρων τούτων ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως δεκταὶ εἶναι μόνον αἱ ἀκέραιαι, θετικαὶ καὶ μικρότεραι τοῦ 10.

Λύοντες τὴν (1) πρὸς χ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $χ=\frac{37-3ψ}{2}$ (2).

Ἵνα ἐκ ταύτης προκύπτῃ ἀκεραία τιμὴ τοῦ χ, πρέπει ἡ διαφορὰ $37-3ψ$ νὰ εἶναι ἀρτία, ὅπερ συμβαίνει διὰ τιμὰς τοῦ ψ περιττάς. Ἵνα δὲ προκύπτῃ τιμὴ τοῦ χ μικροτέρα τοῦ 10, πρέπει ἡ διαφορὰ $37-3ψ$ νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 20, ὅπερ συμβαίνει διὰ τιμὰς τοῦ ψ μεγαλυτέρας τοῦ $5\frac{2}{3}$. Δίδοντες ὅθεν εἰς τὸν ψ τὰς περιττὰς τιμὰς 7 καὶ 9 εὑρίσκομεν διὰ $ψ=7$, $χ=\frac{37-21}{2}=\frac{16}{2}=8$ καὶ διὰ $ψ=9$, $χ=\frac{37-27}{2}=\frac{10}{2}=5$, ἤτοι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 87 καὶ 59.

§ **112.** ***Πρόβλημα ΙΙ. Θέλει τις μὲ 8200 δραχμὰς νὰ ἀγοράσῃ ἀρνία, πρόβατα καὶ κριοὺς τὸ ὅλον 27. Ἐὰν ἕκαστον ἀρνίον τιμᾶται 250 δραχμάς, ἕκαστον πρόβατον 300 δραχμὰς καὶ ἕκαστος κριὸς 400 δραχμάς, πόσα δύναται νὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;***

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρνίων, διὰ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν προβάτων καὶ διὰ ω τὸν ἀριθμὸν τῶν κριῶν, ἐπειδὴ ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι 27, ἕπεται ὅτι $χ+ψ+ω=27$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ζῷα ταῦτα τιμῶνται κατὰ σειρὰν 250χ, 300ψ, καὶ 400ω, δι' ὅλα δὲ θέλει νὰ δώσῃ 8200 δραχμάς, πρέπει νὰ εἶναι $250χ+300ψ+400ω=8200$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $5χ+6ψ+8ω=164$, αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$χ+ψ+ω=27,\quad 5χ+6ψ+8ω=164. \qquad (2)$$

Περιορισμοί. Οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι, θετικοὶ καὶ οὐδεὶς τούτων μεγαλύτερος τοῦ 27.

Τὸ σύστημα (2) ἔχει ἀπείρους ῥίζας, διότι ἐὰν ὁρίσωμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων αὐτοβούλως, οἱ ἄλλοι ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ συστήματος. Ἐκ τούτων ὅμως δεκταὶ εἶναι αἱ πληροῦσαι τοὺς τεθέντας περιορισμούς.

Λαμβάνοντες ἐκ τῆς α΄ $ω=27-χ-ψ$ καὶ θέτοντες ταύτην εἰς τὴν ἄλλην εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $3χ+2ψ=52$, ὅθεν $ψ=\frac{52-3χ}{2}$. Ἐκ ταύτης ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι, ἵνα ὁ ψ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός, πρέπει ὁ χ νὰ εἶναι ἄρτιος καὶ οὐχὶ μεῖζον τοῦ $17\,^1/_3$, ἤτοι ὁ χ δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 καὶ 16, αἱ δὲ εἰς αὐτὰς ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2 εὑρισκόμεναι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $ψ=\frac{52-3χ}{2}$. Ἐκ δὲ τῆς $ω=27-χ-ψ$ εὑρίσκονται αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ω. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ἐκ τῶν ἀπείρων ριζῶν τοῦ συστήματος (2) πληροῦσι τοὺς περιορισμοὺς αἱ ἀκόλουθοι.

$χ=$ 2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16
$y=$23,	20,	17,	14,	11,	8,	5,	2
$ω=$ 2,	3,	4,	5,	6,	7	8,	9.

Ὥστε δύναται νὰ ἀγοράσῃ 2 ἀρνία, 23 πρόβατα καὶ 2 κριούς, ἢ 4 ἀρνία, 20 πρόβατα καὶ 3 κριοὺς κ.τ.λ. Τὸ πρόβλημα ἔχει 8 λύσεις.

Τὸ μέρος τῆς Ἀλγέβρας, τὸ ὁποῖον διδάσκει τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τῶν ἀκεραίων ῥιζῶν ἐξισώσεως, ἥτις ἔχει ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἢ καὶ συστήματος, ὅπερ ἔχει ἀγνώστους περισσοτέρους τῶν ἐξισώσεων καλεῖται ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις.

Ἐνταῦθα θέλομεν θεωρήσει μόνον ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $αχ+βψ=γ$ καὶ συστήματα τῆς μορφῆς $αχ+βψ+γω=δ$, $α'χ+β'ψ+γ'ω=δ'$, ἔνθα οἱ συντελεσταὶ α, β, γ, δ, κ.τ.λ. θεωροῦνται ἀκέραιοι, διότι ἂν δὲν εἶναι τοιοῦτοι, ἐξαλείφονται οἱ παρονομασταὶ καὶ καθίστανται τοιοῦτοι. Ἐπίσης αἱ ἀπόλυται τιμαὶ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἐν ἑκάστῃ ἐξισώσει καὶ τοῦ ἀντιστοίχου γνωστοῦ ὅρου δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι ἂν εἶχον μ. κ. δ. διάφορον τῆς μονάδος, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ μεγίστου τούτου κ. δ. καθιστῶμεν τὰς ῥηθείσας ἀπολύτους τιμὰς πρώτας πρὸς ἀλλήλας.

Ἀκέραιαι λύσεις τῆς $αχ+βψ=γ$.

§ **113. Θεώρημα I.** *Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως $αχ+βψ=γ$ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην, ἡ ἐξίσωσις αὕτη οὐδεμίαν ἔχει ἀκεραίαν λύσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω δ κοινὸς διαιρέτης τῶν α καὶ β. Ἐπειδὴ τὰ μονώνυμα αχ, βψ εἶναι δι᾽ ἀκεραίας τιμὰς τῶν χ καὶ ψ ἀντιστοίχως πολλαπλάσια τῶν α καὶ β, ἕπεται ὅτι ὁ δ διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς αχ, βψ· ἀλλὰ τότε ὀφείλει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν γ. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, καθ᾽ ἣν α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε ἀδύνατον νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἐξίσωσις δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

§ **114. Θεώρημα II.** *Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἀκεραίαν λύσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ α εἶναι θετικὸς (ἂν δὲν εἶναι τοιοῦτος, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ καθίσταται θετικός). Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν πρὸς τὸν χ, ὅστις ἔχει θετικὸν συντελεστὴν εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν
$$\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \qquad (1)$$

Αἱ ἐκ ταύτης προκύπτουσαι τιμαὶ τοῦ χ θὰ εἶναι ἀκέραιαι ἢ οὔ, καθ' ὅσον ἡ διαίρεσις $\gamma-\beta\psi$ διὰ α εἶναι τελεία ἢ οὔ. Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ διαίρεσις ἀφίνει ὑπόλοιπον, ὅπερ θὰ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον ὁ διαιρετέος $\gamma-\beta\psi$ θὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός. Οὕτως ἡ διαίρεσις $18:4$ ἀφίνει ὑπόλοιπον τὸν θετικὸν ἀριθμὸν 2, ἐν ᾧ ἡ διαίρεσις $-18:4$ δίδει πηλίκον -4 καὶ ὑπόλοιπον -2. Ἂν ὅμως λάβωμεν ὡς πηλίκον 5, ἐπειδὴ $4.(-5)=-20$ καὶ $-18-(-20)=-18+20=2$, τὸ ὑπόλοιπον καθίσταται 2 ἤτοι θετικόν.

Δυνάμεθα ἄρα νὰ θεωρῶμεν πάντοτε θετικὸν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\gamma-\beta\psi$ διὰ α.

Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι δίδομεν εἰς τὸν ψ δύο διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς λ, λ' ἐκ τῶν $0, 1, 2, 3 \ldots (\alpha-1)$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\gamma-\beta\lambda$, $\gamma-\beta\lambda'$ διαιρούμενοι διὰ α δίδουσιν ἀντιστοίχως πηλίκα μὲν π καὶ π', ὑπόλοιπον δὲ θετικὸν τὸ αὐτὸ υ. Τότε θὰ εἶναι προφανῶς $\gamma-\beta\lambda=\alpha\pi+\upsilon$ καὶ $\gamma-\beta\lambda'=\alpha\pi'+\upsilon$.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν
$$\beta(\lambda'-\lambda)=\alpha(\pi-\pi'),$$
ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι ὁ α διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\beta(\lambda'-\lambda)$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ α εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πρῶτος πρὸς τὸν β, ἕπεται ὅτι ὀφείλει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα $(\lambda'-\lambda)$, Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον, διότι εἶναι $\lambda<\alpha$, $\lambda'<\alpha$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον $\lambda'-\lambda<\alpha$.

Ἀδύνατον ἄρα οἱ ἀριθμοὶ $\gamma-\beta\lambda$, $\gamma-\beta\lambda'$ νὰ δίδωσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον διαιρούμεναι διὰ α, ἤτοι εἰς ἑκάστην τῶν τιμῶν $0, 1, 2, \ldots (\alpha-1)$ τοῦ ψ ἀντιστοιχεῖ ἴδιον ὑπόλοιπον.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ διαιρέσεις εἶναι α καὶ τὰ διάφορα ὑπόλοιπα θὰ εἶναι α· ἀλλὰ τοῦ α ὄντος διαιρέτου ὑπόλοιπα μόνον οἱ α ἀριθμοὶ $0, 1, 2 .. (\alpha-1)$ δύνανται νὰ εἶναι. Ἓν ἄρα τῶν ὑπολοίπων τούτων εἶναι 0, ἤτοι ὑπάρχει ἀκεραία τιμὴ τοῦ ψ ἐκ τῶν $0,1,2 \ldots (\alpha-1)$, εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία τιμὴ τοῦ χ. ὅ.ἔ.δ.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $2\chi+5\psi=19$ λυομένη πρὸς χ γίνεται $\chi=\frac{19-5\psi}{2}$.

Αὕτη διὰ $\psi=1$ δίδει $\chi=\frac{19-5}{2}=\frac{14}{2}=7$.

§ 115. **Θεώρημα III.** *Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta y=\gamma$ ἔχῃ μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ἔχει καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος.*

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ η καὶ ϑ τιθέμενοι ὁ μὲν η ἀντὶ τοῦ χ ὁ δὲ ϑ ἀντὶ τοῦ ψ ταὐτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ἤτοι ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha\eta+\beta\vartheta=\gamma$.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$$\alpha(\chi-\eta)+\beta(\psi-\vartheta)=0, \text{ ὅθεν } \alpha(\chi-\eta)=\beta(\vartheta-\psi) \qquad (1).$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι, ἂν ὁ χ καὶ ψ ὦσιν ἀκέραιοι, ὁ α διαιρῶν τὸ γινόμενον $\beta(\vartheta-\psi)$ καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν β ὀφείλει νὰ διαιρῇ τὸν $\vartheta-\psi$ ἤτοι $\vartheta-\psi=\alpha\lambda$, ἔνθα λ ἀκέραιος, ἄρα καὶ $\psi=\vartheta-\alpha\lambda$.

Θέτοντες ἐν τῇ (1) ἀντὶ $\vartheta-\psi$ τὸ ἴσον $\alpha\lambda$ εὑρίσκομεν $\alpha(\chi-\eta)=\alpha\beta\lambda$, ὅθεν $\chi-\eta=\beta\lambda$. Ὥστε αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ

$$\left.\begin{aligned}\chi&=\eta+\beta\lambda\\ \psi&=\vartheta-\alpha\lambda\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου λ ταὐτοποιοῦσι τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$. Τῷ ὄντι τὸ α΄ μέλος αὐτῆς γίνεται δι᾽ αὐτὰς $\alpha(\eta+\beta\lambda)+\beta(\vartheta-\alpha\lambda)$ ἢ $\alpha\eta+\beta\vartheta$, ὅπερ ἐξ ὑποθέσεως ἰσοῦται πρὸς γ.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸν ἀκέραιον λ δυνάμεθα νὰ δόσωμεν ἀπείρους τιμάς, ἕπεται ὅτι αἱ ἰσότητες (3) παρέχουσιν ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$. ὅ. ἔ. δ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) ἕπεται ὅτι :

Ἵνα ἔκ τινος ἀκεραίας λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ εὕρωμεν τοὺς τύπους, οἱ ὁποῖοι παρέχουσι πάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις αὐτῆς, αὐξάνομεν τὴν γνωστὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ χ κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ ἀόριστον ἀκέραιον ἀριθμὸν λ, τὴν δὲ γνωστὴν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ψ αὐξάνομεν κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ χ πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν $-\lambda$.

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ ἀντὶ λ δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ὁ $-\lambda$, εἶναι ἀδιάφορον ποῖος ἐκ τῶν συντελεστῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ λ καὶ ποῖος ἐπὶ $-\lambda$.

Οὕτως ἐπειδή, ὡς προηγουμένως εὕρομεν, ἡ ἐξίσωσις $2\chi+5\psi=19$ ἔχει τὴν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=7$ καὶ $\psi=1$ οἱ τύποι δι᾽ ὧν εὑρίσκομεν τὰς ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις αὐτῆς εἶναι $\chi=7+5\lambda$, $\psi=1-2\lambda$. Ἐκ τούτων διὰ $\lambda=0, 1, 2\ldots$

εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\chi=7, 12, 17\ldots$

$\psi=1, -1, -3, \ldots$

καὶ διὰ $\lambda=-1, -2, -3\ldots$

εὑρίσκομεν $\chi=2, -3, -8, \ldots$

$\psi=3, \quad 5, \quad 7\ldots$

αἵτινες εἶναι πᾶσαι ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $2\chi+5\psi=19$.

Ἀσκήσεις. 587) Νὰ εὑρεθῇ ἁπλοῦν κλάσμα τοιοῦτον ὥστε, ἂν ὁ ἀριθμητὴς αὐξηθῇ κατὰ 3, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἐλαττωθῇ κατὰ 3, νὰ γίνηται ὁ ἀριθμητὴς διπλάσιος τοῦ παρονομαστοῦ.

588) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ 119 δραχμὰς μὲ δίδραχμα καὶ πεντόδραχμα. Πόσα θὰ πληρώσῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

589) Εἰς ἑορτὴν ἐδαπάνησαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες 5650 δραχμάς· ἐδαπάνησε δὲ ἑκάστη γυνὴ 350 δραχμὰς καὶ ἕκαστος ἀνὴρ 400 δραχμάς. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

590) Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ 5 νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου κατὰ 2.

591) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ὅστις καθίσταται κατὰ 9 μικρότερος, ἂν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

592) Δενδροστοιχία ἔχει δένδρα ὀλιγώτερα τῶν 100. Ἐὰν μετρῶμεν πάντα ἀνὰ 11 περισσεύουσι 5, ἐὰν δὲ τὰ μετρῶμεν ἀνὰ 9 περισσεύουσι 2. Πόσα εἶναι τὰ δένδρα;

§ 116. Ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος.

$$\begin{aligned} \alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega&=\delta \\ \alpha'\chi+\beta'\psi+\gamma'\omega&=\delta' \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἀπαλείφοντες τὸν ἄγνωστον ω εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ σύστημα $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=\delta$, $(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)\chi+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\psi=\gamma'\delta-\delta'\gamma$. (2)

Ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος τούτου ἔχει δύο ἀγνώστους χ καὶ ψ, ὧν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $\chi=\chi_0$, $\psi=\psi_0$ (ἐὰν ὑπάρχῃ) γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν· ὁ δὲ γενικὸς τύπος, ὅστις θὰ δίδῃ τότε ὅλας τὰς ἀκεραίας λύσεις αὐτῆς εἶναι

$$\chi=\chi_0+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\lambda,\ \psi=\psi_0-(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)\lambda, \qquad (3)$$

ἔνθα λ τυχὼν ἀκέραιος.

Ἐὰν τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ χ καὶ ψ θέσωμεν ἐν τῇ α' τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (2), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\gamma(\alpha'\beta-\alpha\beta')\lambda+\gamma\omega=\delta-\alpha\chi_0-\beta\psi_0, \qquad (4)$$

ἡ ὁποία ἔχει δύο ἀγνώστους λ καὶ ω. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ γ, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$(\alpha'\beta-\alpha\beta')\lambda+\omega=\frac{\delta-\alpha x_0-\beta y_0}{\gamma}.$$

Ἐὰν δὲ ὑποθέσαμεν ὅτι αὕτη ἔχει ἀκεραίας λύσεις, ἡ εἰς τὸ β' μέλος αὐτῆς σημειουμένη διαίρεσις θὰ εἶναι τελεία καὶ ἂν k εἶναι τὸ πηλίκον αὐτῆς, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$(\alpha'\beta-\alpha\beta')\lambda+\omega=k \qquad (5)$$

Ἐὰν δὲ λ_0, ω_0, εἶναι ἀκέραιαι ῥίζαι αὐτῆς, αἱ ἄπειροι ἀκέραιαι ῥίζαι αὐτῆς παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\lambda=\lambda_0+\mu,\ \omega=\omega_0-(\alpha'\beta-\alpha\beta')\mu, \qquad (6)$$

ἔνθα μ δηλοῖ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἐὰν ἤδη εἰς τὰς ἰσότητας (3) θέσωμεν ἀντὶ λ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $\lambda_0+\mu$ εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} \chi &= x_0 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(\lambda_0 + \mu) \\ y &= y_0 - (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)(\lambda_0 + \mu) \\ \omega &= \omega_0 - (\alpha'\beta - \alpha\beta')\mu \end{aligned} \quad (7).$$ Αὗται μετὰ τῆς

παρέχουσι τὰς ἀπείρους ἀκεραίας ῥίζας τοῦ συστήματος (1), ἐφ' ὅσον ἔχει τοιαύτας, ἤτοι, ἂν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (2) καὶ ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχωσιν ἀμφότεραι ἀκεραίας ῥίζας.

Παράδειγμα. Ἔστω τὸ σύστημα

$$2\chi + \psi - 2\omega = 2, \ \chi + 2\psi + 3\omega = 8 \qquad (1)$$

Ἀπαλείφοντες τὸν ω εὑρίσκομεν $2\chi + \psi - 2\omega = 2$, $8\chi + 7\psi = 22$ (2).

Ἡ β΄ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἔχει ἀκεραίας λύσεις παρεχομένας ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων

$$\chi = 1 + 7\lambda, \ \psi = 2 - 8\lambda \qquad (3)$$

ἔνθα λ ἀκέραιος τυχών. Ἕνεκα τούτων ἡ α΄ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (2) γίνεται $3\lambda - \omega = -1$, ἥτις ἔχει ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις παρεχομένας ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων

$$\lambda = \mu, \ \omega = 1 + 3\mu \qquad (4)$$

Ἐὰν εἰς τὰς ἰσότητας (3) ἀντὶ λ θέσωμεν μ εὑρίσκομεν $\chi = 1 + 7\mu$, $\psi = 2 - 8\mu$· αὗται μετὰ τῆς $\omega = 1 + 3\mu$ παρέχουσι τὰς ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος (1).

Ἀσκήσεις. 593) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος $\chi + 2\psi - \omega = 3$, $2\chi - \psi + \omega = 4$.

594) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 18, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ἑκατοντάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων.

595) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 7 καὶ ὅστις δὲν ἀλλάσσει, ἂν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

596) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ 62 δραχμὰς μὲ δίδραχμα, πεντόδραχμα καὶ πεντηκοντάλεπτα τὸ ὅλον 34. Πόσα θὰ δόσῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;

597) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 100 δραχμῶν 100 ἀντικείμενα τριῶν εἰδῶν· ἕκαστον ἀντικείμενον τοῦ α' εἴδους τιμᾶται 5 δραχ., ἕκαστον τοῦ β΄ τιμᾶται 1 δραχμὴ καὶ ἕκαστον τοῦ γ' εἴδους τιμᾶται 0,05 τῆς δραχμῆς. Πόσα ἀντικείμενα ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

* ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Β΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις.

598) $\dfrac{\chi-1}{\chi-3} - \dfrac{\chi-3}{\chi-5} = \dfrac{\chi-5}{\chi-7} - \dfrac{\chi-7}{\chi-9}$.

599) $\dfrac{1}{\chi-1} + \dfrac{1}{\chi-2} = \dfrac{2}{\chi-3}$.

600) $\left(\dfrac{\chi+1}{\chi-1} - \dfrac{\chi-1}{\chi+1}\right) : \left(1 + \dfrac{\chi+1}{\chi-1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

601) $\dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - \dfrac{\alpha}{\chi}\right) + \dfrac{\beta}{\alpha}\left(1 + \dfrac{\beta}{\chi}\right) = 1$

602) $\dfrac{1}{\chi-2} + \dfrac{1}{\chi-5} = \dfrac{2}{\chi-3}$,

603) $\frac{4\chi}{\chi^2+1}=\frac{\chi+1}{\chi-1}-\frac{\chi-1}{\chi+1}$,

604) $\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}-\frac{1-\chi}{1+\chi}\right)\cdot\left(\frac{3}{4\chi}+\frac{\chi}{4}-\chi\right)=\frac{\left(\chi-3+\frac{5\chi}{2\chi-6}\right)\frac{3\chi}{2}}{2\chi-1+\frac{15}{\chi-3}}$.

605) $\frac{\alpha\chi^{\mu+1}-\chi^{\mu}}{\chi-1}+\frac{\beta\chi^{\mu}}{\chi+1}=\frac{\alpha\chi^{\mu}(\chi^2+1)}{\chi^2-1}$.

606) $\frac{1}{\chi-\alpha}+\frac{1}{\chi-\beta}+\frac{1}{\chi+\alpha+\beta}=\frac{3}{\beta}$,

607) $\frac{1}{\chi-\alpha}+\frac{1}{\chi-\beta}+\frac{1}{\chi+\alpha+\beta}=\frac{3}{\chi}$.

608) $\frac{\chi+\alpha}{\chi-\alpha}-2\,\frac{\chi+\beta}{\chi-\beta}+1=0$

609) $\frac{2+5\chi-\alpha}{\chi+\alpha}=7-6\sigma$.

610) $(2\chi-\alpha-\beta)\,[(\chi-\alpha)^3-(\chi-\beta)^3]=3\,(\beta-\alpha)\,[(\chi-\alpha)^3+(\chi-\beta)^3]$.

611) $\frac{\chi-\alpha}{\beta}-\frac{\chi-\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$,

612) $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha}{\beta+\alpha}$

613) $\frac{\chi-\alpha}{\beta}+\frac{\chi-\beta}{\gamma}+\frac{\chi-\gamma}{\alpha}=\frac{\chi-(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$.

614) $(1-\chi)\,(\alpha-\chi)=(\alpha-\chi)\,(1-\beta)-(1+\chi)\,(\beta-\chi)$.

615) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi+\psi+\omega=5,\quad \psi-\chi=\frac{21}{\psi+\chi},\quad 2\chi+\omega=12.$$

Νὰ λυθῶσι καὶ διερευνηθῶσι τὰ συστήματα

616) $3\chi+5\psi+\alpha\omega=12,\ 5\chi+3\psi+\alpha\omega=12,\ \alpha\chi+5\psi+3\omega=12$.

617) $(\alpha-1)^2\chi+(\alpha^2-1)\psi=(\alpha+1)^2,\ (2\alpha-1)\chi+(\alpha+1)\psi=\alpha^2-1$

618) $\chi+\psi+\omega=5,\ \chi-\psi+\omega=-1,\ \alpha^2\chi+\alpha\psi+\omega=\alpha^5$

619) $(\mu^2-1)\chi+(\mu^2+1)\psi=\mu^2,\ (\mu^3-1)\chi+(\mu^3+1)\ \psi=1$

620) $\chi+\alpha\psi=\beta,\ \psi+\alpha\omega=\gamma,\ \omega+\alpha\chi=\delta$.

621) $\lambda\chi+(\lambda+\alpha)\psi=\lambda+2\alpha\quad (\lambda+3\alpha)\chi+(\lambda+4\alpha)\psi=\lambda+5\alpha$

622) $\alpha^3\chi+\sigma\psi+\omega=\alpha^2,\ \chi+\psi+\omega=1,\ 8\chi+2\psi+\omega=4$.

623) $\alpha\chi+\psi+\varphi=1,\ \chi+\alpha\psi+\varphi=\alpha,\ \chi+\psi+\alpha\varphi=\alpha^2$

624) $\alpha^3\chi+\alpha\psi+\omega=\beta+\gamma,\ \beta^3\chi+\beta\psi+\omega=\gamma+\alpha,\ \gamma^3\chi+\gamma\psi+\omega=\alpha+\beta$.

625) $\alpha\chi+5\psi+4\omega=46,\ 5\chi+\alpha\psi+3\omega=38,\ \chi+\psi+\omega=12$.

626) $\alpha\chi+\psi+2\varphi=\beta,\ \chi+\alpha\psi+2\varphi=\beta,\ 2\chi+\psi+\alpha\varphi=\beta$.

627) $\chi+\mu\psi=\alpha,\ \mu\psi+(\mu+1)\omega=\beta,\ (\mu+1)\ \omega+(\mu+2)\ \chi=\gamma$.

628) $\frac{\chi}{\alpha+\beta}+\frac{\psi}{\alpha-\beta}=2\alpha,\ \frac{\chi-\psi}{2\alpha\beta}=\frac{\chi+\psi}{\alpha^2+\beta^2}$.

629) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ ἀμφότεραι αἱ παραστάσεις $\frac{6\chi-1}{5}$, $\frac{8\chi+2}{15}$ γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοί ;

630) Ἐπώλησέ τις τὸ ἥμισυ τῶν ᾠῶν του καὶ ἥμισυ ᾠόν, ἔπειτα τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολειφθέντων καὶ ἥμισυ ᾠὸν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐκ τρίτου καὶ τετάρτου. Οὕτω δὲ οὐδὲν ἔμεινεν αὐτῷ. Πόσα ᾠὰ εἶχεν ἐξ ἀρχῆς ;

631) Ἐδάνεισέ τις τὰ $\frac{5}{6}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 3% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5%. Ἐὰν ἐκράτει 2800 δραχμάς, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐδάνειζε πρὸς 4%, θὰ ἐλάμβανεν ἐτησίως τόκον κατὰ 208 δραχμὰς περισσότερον. Πόσα χρήματα ἐδάνεισεν;

632) Κράμμα χαλκοῦ καὶ ἀργύρου περιέχει 1845 γραμ. ἀργύρου περισσότερον ἀπὸ τὸν χαλκόν. Ἐὰν συντήξωμεν μετ' αὐτοῦ καθαρὸν ἄργυρον βάρους ἴσου πρὸ τὸ τρίτον τοῦ ἤδη ὑπάρχοντος καθαροῦ ἀργύρου, τὸ κράμμα ἀποκτᾷ βαθμὸν καθαρότητος 0,835. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος καὶ ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ ἀρχικοῦ κράμματος.

633) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο κρουνῶν, ὧν ὁ β′ παρέχει ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ τετραπλασίαν ποσότητα ὕδατος τοῦ α′. Ἀνοίγεται ὁ α′ ἐπὶ χρόνον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ χρόνου, ὃν χρειάζεται ὁ β′ ἵνα πληρώσῃ τὴν δεξαμενήν· εἶτα κλειομένου τούτου ἀνοίγεται ὁ β′ καὶ πληροῦται ἡ δεξαμενὴ εἰς χρόνον κατὰ δύο ὥρας καὶ 48π περισσότερον ἐκείνου, ὃν θὰ ἐχρειάζοντο οἱ δύο κρουνοὶ διὰ νὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν, ἐὰν ἀμφότεροι ἠνοίγοντο ἐξ ἀρχῆς ὁμοῦ. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἕκαστος μόνος του, ἵνα πληρώσῃ τὴν δεξαμενήν;

634) Ἱππεὺς ἀναχωρεῖ ἐκ σημείου Α κατευθυνόμενος εἰς ἄλλο Β, καθ' ἣν στιγμὴν ἀναχωροῦσιν ἐκ τοῦ Β δύο πεζοὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ καὶ ἀντιθέτως ὁδεύοντες. Ὁ ἱππεὺς συναντᾷ τὸν ἕνα εἴς τι σημεῖον Γ καὶ τὸν ἄλλον κατόπιν εἰς ἄλλο σημεῖον Δ. Ἐὰν ἀπόστασις ΓΔ εἶναι 6 χιλ. ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἱππέως εἶναι τριπλασία τῆς ταχύτητος ἑκατέρου πεζοῦ, πόση θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΑΒ;

635) Τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ ἐργαζόμενοι ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς 72 ὥρας. Ὁ β′ μόνος του χρειάζεται ὅσον χρόνον ὁ α′ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, ὁ δὲ γ′ μόνος χρειάζεται, ὅσον ὁ β′ καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ χρόνου τούτου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, εἰς ὃν ἕκαστος μόνος ἐκτελεῖ ὅλον τὸ ἔργον.

636) Ἁμαξοστοιχία Α ἔχουσα ταχύτητα υ ἀναχωρεῖ ἐκ σημείου, ἐξ οὗ ἀνεχώρησε πρότερον ἁμαξοστοιχία Β μὲ ταχύτητα υ′. Ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν ἀναχωρήσεων αὐτῶν χρόνος ὥστε ἀμφότεραι νὰ φθάσωσι συγχρόνως εἰς τὸ τέρμα. Ἀλλ' ἡ ἁμαξοστοιχία Β, ἀφ' οὗ διήνυσε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὁδοῦ, ἠλάττωσε τὴν ταχύτητα εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς, οὕτω δὲ ἡ συνάντησις ἔγεινε δ χιλιόμετρα πρὸ τοῦ τέρματος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς τροχιᾶς. Ἐφαρμογή. $υ = 100$ χιλιόμ. $υ' = 50$ χιλιόμ. καὶ $δ = 20$ χιλιόμ.

637) Ἀλώπηξ εἶχε κάμει 50 βήματα, μέχρι τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἤρχισε νὰ διώκῃ αὐτὴν λαγωνικόν. Ἡ ἀλώπηξ κάμνει 4 πηδήματα, καθ' ὃν χρόνον τὸ λαγωνικὸν κάμνει 3· ἀλλὰ δύο πηδήματα τοῦ λαγωνικοῦ ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 3 τῆς ἀλώπεκος. Πόσα πηδήματα πρέπει νὰ κάμῃ τὸ λαγωνικὸν διὰ νὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα;

638) Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν. Κατὰ ποίαν ὥραν ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν θὰ συναντήσῃ ἐκ νέου τὸ πρῶτον τὸν δείκτην τῶν ὡρῶν;

639) Ὡρολόγιον ἔχον τρεῖς δείκτας πάντας στρεφομένους περὶ τὸ κέντρον δεικνύει μεσημβρίαν. Κατὰ ποίαν ὥραν α′) ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θὰ συναντήσῃ τὸν δείκτην τῶν ὡρῶν; β′) ὁ αὐτὸς δείκτης θὰ συναντήσῃ τὸν δείκτην τῶν πρώτων λεπτῶν; καὶ γ′) ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων;

640) Ὡρολόγιον δεικνύει 6ην ὥραν. Ποία εἶναι ἡ πρώτη ὥρα, καθ' ἣν ὁ δείκτης τῶν ὡρῶν σχηματίζει μετὰ τῆς γραμμῆς κέντρον—VI γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν μὲ τὴν γραμμὴν κέντρον—XII;

641) Ἀντικείμενον ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου ἔχει βάρος 592 γραμμαρίων καὶ ὄγκον 41 κυβικῶν δακτύλων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου χρυσοῦ καὶ ἀργύρου γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἷς κυβ. δάκτυλος χρυσοῦ ἔχει βάρος 19 γραμ. καὶ εἷς κυβ. δάκτυλος ἀργύρου 10, 5 γραμ.

642) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ὅστις ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας. 1ον) Τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων 2ον) Ἐὰν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 99 καὶ γ') Τὸ ἄθροισμα τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ἐξ αὐτοῦ προκύπτοντος διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων του εἶναι 1575.

643) Ἐτόκισέ τις 6000 δραχμὰς καὶ 4000 δραχ. μὲ διάφορα ἐπιτόκια καὶ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 345 δραχμάς. Ἐὰν ἐτόκιζε τὸ α΄ κεφάλαιον μὲ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ β΄ καὶ τἀνάπαλιν, θὰ ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 355 δραχ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ δύο ἐπιτόκια.

644) Χωρικὸς ἐπώλησε κῆπον, ἄμπελον καὶ ἀγρόν. Ἡ τιμὴ ἑκάστου τετραγωνικοῦ μέτρου τῆς ἀμπέλου εἶναι κατὰ 20 δραχ. μεγαλυτέρα τοῦ ἀγροῦ καὶ κατὰ 20 δραχμὰς μικροτέρα τοῦ κήπου· ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς ἀμπέλου εἶναι κατὰ 300 τετραγ. μέτρα μεγαλυτέρα τοῦ κήπου καὶ κατὰ 20 τετραγ. μέτρα μικροτέρα τοῦ ἀγροῦ. Ἔλαβε δὲ ἀπὸ τὴν ἄμπελον 16800 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν κῆπον καὶ 2800 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν ἀγρόν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου κτήματος καὶ ἡ τιμὴ ἑκάστου κατὰ τετραγ. μέτρον.

645) Χρυσοχόος ἔχει δύο κράμματα βαθμοῦ καθαρότητος κ καὶ κ΄. Ἐὰν συντήξῃ χ γραμμάρια τοῦ α΄ μὲ ψ γράμ. τοῦ β΄ σχηματίζει κράμμα βάρους β καὶ βαθμοῦ καθαρότητος διπλασίου τοῦ βαθμοῦ τῆς καθαρότητος κράμματος ἀποτελουμένου ἐκ ψ γραμμαρίων τοῦ α΄ καὶ χ τοῦ β΄. Νὰ εὑρεθῶσι χ καὶ ψ συναρτήσει κ, κ΄ καὶ β.

646) Τρεῖς ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦσι τὴν μεσημβρίαν ἐκ τῶν σταθμῶν Α, Β, Γ, ὧν ὁ Β κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ καὶ οὕτως ὥστε ΑΒ=140 χιλ. καὶ ΒΓ=944 χιλ. Αἱ ἐκ τῶν Α καὶ Β ἀναχωρήσασαι διευθύνονται πρὸς τὸ Γ ἡ δὲ τρίτη ἀντιθέτως καὶ αἱ ταχύτητες αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 32 χιλ. 40 χιλ. 48 χιλ. τὴν ὥραν. Κατὰ ποίαν ὥραν ἡ ἐκ τοῦ Β ἀναχωρήσασα θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἐξ ἑκατέρας τῶν ἄλλων καὶ πόσον θὰ ἀπέχῃ ἀπ' αὐτῶν;

647) Λεμβοῦχος κατερχόμενος κωπηλατῶν διήνυσεν δ χιλιόμετρα εἰς α ὥρας μένων διαρκῶς εἰς τὸ μέσον τοῦ ῥοῦ τοῦ ποταμοῦ.

Ἐὰν ἀνήρχετο ἀκολουθῶν τὴν ὄχθην, ὅπου τὸ ῥεῦμα ἔχει ταχύτητα τὸ $\frac{\mu}{\mu+\nu}$ μέρος τῆς ἐν τῷ μέσῳ ταχύτητος, θὰ ἐχρειάζετο β ὥρας διὰ τὸ αὐτὸ διάστημα. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ῥεύματος εἰς τὸ μέσον τοῦ ποταμοῦ;

Ἐφαρμογὴ διὰ $\delta=18$ χιλ. $\alpha=\frac{3}{2}$ ὥρ. $\mu=3$, $\nu=2$, $\beta=2\frac{1}{4}$ ὧραι.

648) Δεξαμενὴ δύναται νὰ κενωθῇ ὑπὸ δύο ἀντλιῶν ὁμοῦ ἢ κεχωρισμένως λειτουργουσῶν. Ἐὰν λειτουργήσωσιν αἱ δύο ἀντλίαι ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην καὶ

ἑκάστη ἐκτελέσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, ἡ δεξαμενὴ κενοῦται εἰς 12 ὥρας καὶ 30π. Ἐὰν δὲ ἀμφότεραι λειτουργήσωσιν ὁμοῦ ἀπ' ἀρχῆς, ἡ δεξαμενὴ κενοῦται εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἑκατέρα μόνη θὰ ἐξεκένου τὴν δεξαμενήν;

649) Ἠγόρασέ τις μὲ 725 δραχμὰς σῖτον, κριθὴν καὶ ἀραβόσιτον τὸ ὅλον 165 ὀκάδας. Καὶ τὸν μὲν σῖτον ἠγόρασε πρὸς 6 δραχμάς, τὴν κριθὴν πρὸς 3,5 δραχ. καὶ τὸν ἀραβόσιτον πρὸς 4 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωκεν διὰ κριθὴν καὶ τὸν ἀραβόσιτον 125 δραχ. περισσότερον ἢ διὰ τὸν σῖτον. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

650) Τρεῖς ἀδελφοὶ ἔχουσιν ὁμοῦ 450 λίρας. Ἐὰν ὁ α' δόσῃ τὸ $^1/_{18}$ τῶν λιρῶν του εἰς τὸν β' καὶ διπλάσια εἰς τὸν γ', οἱ τρεῖς θὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ ποσόν. Πόσας λίρας ἔχει ἕκαστος;

651) Ἔμπορος ἔχει τρία εἴδη καφέ, ὧν ἡ ὀκᾶ κοστίζει ἀντιστοίχως α,β,γ δραχμάς. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα ν ὀκάδων, οὗ ἑκάστη ὀκᾶ νὰ κοστίζῃ δ δραχμὰς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τοῦ γ' εἴδους νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκάδων τῶν ἄλλων εἰδῶν;

652) Τὰ εἰδικὰ βάρη δύο μετάλλων εἶναι ἀντιστοίχως ε καὶ ε'. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσωμεν κράμμα α γραμμαρίων εἰδικοῦ βάρους ε'';

653) Μὲ 80 δολλάρια ἀγοράζομεν 20 κοσμήματα τριῶν εἰδῶν. Ἕκαστον κόσμημα τοῦ α' εἴδους τιμᾶται ἓν δολλάριον, ἕκαστον τοῦ β' εἴδους τιμᾶται 2 δολλάρια καὶ ἕκαστον τοῦ γ' εἴδους τιμᾶται 20 δολλάρια. Τὰ κοσμήματα τοῦ α' εἴδους εἶναι διπλάσια τῶν κοσμημάτων τοῦ β' εἴδους. Πόσα ἀγοράζομεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

654) Ποιμὴν ἐρωτηθεὶς περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προβάτων του ἀπήντησεν. «Τὰ πρόβατά μου εἶναι περισσότερα τῶν 250 καὶ ὀλιγώτερα τῶν 300· ὅταν μετρῶ αὐτὰ ἀνὰ 12, μένουσιν 7, ὅταν δὲ μετρῶ αὐτὰ ἀνὰ 16, μένουσιν 15». Πόσα πρόβατα εἶχεν οὗτος;

655) Θέλει τις μὲ 400 δραχμὰς νὰ ἀγοράσῃ, 200 παιδικὰ ἀθύρματα τριῶν εἰδῶν. Τιμᾶται δὲ ἕκαστον ἄθυρμα τοῦ α' εἴδους 1, 20 δραχμάς ἕκαστον τοῦ β' εἴδους τιμᾶται 1,40 δραχμ. καὶ ἕκαστον τοῦ γ' εἴδους 4 δραχμάς. Πόσα θὰ ἀγοράσῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

656) Ἔχει τις 520 φράγκα εἰς ἀργυρᾶ νομίσματα τῶν 5 φράγκων τῶν 2 φράγκων καὶ 1 φρ. Ἐὰν ταῦτα τεθῶσι τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο, οὕτως ὥστε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ τὰ κέντρα νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀποτελοῦσι μῆκος 5,486μ. Ἐὰν δὲ συντήξωμεν πάντα, ἀποτελοῦμεν κράμμα ἔχον βαθμὸν καθαρότητος 0,875.
Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ διάμετροι αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν 0,037μ, 0,027μ καὶ 0,023μ, ὁ δὲ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,900 διὰ τὰ πεντόφραγκα, 0,835 διὰ τὰ ἄλλα καὶ τὸ βάρος εἶναι 5 γραμμάρια κατὰ φράγκον, νὰ εὑρεθῇ πόσα ἐξ ἑκάστου εἴδους ἔχει.

657) Ἐὰν τὰ δένδρα δενδροστοιχίας μετρῶμεν ἀνὰ 4 ἢ ἀνὰ 6 ἢ ἀνὰ 9 μένουσι πάντοτε 3· ἐὰν δὲ μετρῶμεν αὐτὰ ἀνὰ 7 ἢ ἀνὰ 13 μένει πάντοτε ἕν. Ἂν τέλος μετρῶμεν αὐτὰ ἀνὰ 11 μένουσιν 7. Πόσα εἶναι τὰ δένδρα τῆς δενδροστοιχίας ταύτης;

658) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον δὲν μεταβάλλεται, ἂν προστεθῇ 6 εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ 15 εἰς τὸν παρονομαστήν.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ.

§ 117. **Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα $\nu^{\eta\varsigma}$ ῥίζης.** — Ὁ ἀριθμὸς 5 ἔχων τετράγωνον τὸν 25 καλεῖται ***τετραγωνικὴ ῥίζα*** τοῦ 25. Ὁ 2 ἔχων κύβον ἢ τρίτην δύναμιν τὸν 8 καλεῖται ***τρίτη ῥίζα*** ἢ ***κυβικὴ ῥίζα*** τοῦ 8.

Ἂν $\alpha^\nu = \beta$, ὁ α ἔχων νυοστὴν δύναμιν τὸν β καλεῖται ***νυοστὴ ῥίζα*** τοῦ β.

Ὥστε : ***Νυοστὴ ῥίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός,*** ὅστις ***ἔχει αὐτὸν ὡς νυοστὴν δύναμιν***.

Ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ β σημειοῦται οὕτω $\sqrt[\nu]{\beta}$. Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ καλεῖται ***ῥιζικὸν***· ὁ ἀριθμὸς ν καλεῖται ***δείκτης*** τῆς ῥίζης καὶ ὁ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τιθέμενος ἀριθμὸς καλεῖται ***ὑπόρριζον***.

Ὁ δείκτης 2 συνήθως παραλείπεται· οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ α σημειοῦται οὕτω $\sqrt{\alpha}$ καὶ οὐχὶ $\sqrt[2]{\alpha}$.

Ἡ νυοστὴ ῥίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ***ἀρτίας*** ἢ ***περιττῆς*** τάξεως, καθ' ὅσον ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός.

Δύο ῥίζαι ἔχουσαι τὸν αὐτὸν δείκτην καλοῦνται ***ἰσοβάθμιοι***· ἐὰν δὲ ἔχωσι διαφόρους δείκτας καλοῦνται ***ἑτεροβάθμιοι***.

Οὕτω $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ εἶναι ἰσοβάθμιοι, ἐν ᾧ αἱ $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[5]{\gamma}$ εἶναι ἑτεροβάθμιοι ῥίζαι.

Ἂν $\alpha^\nu = \beta$, κατὰ τὸν τεθέντα ὁρισμὸν θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \sqrt[\nu]{\beta}$ καὶ τἀνάπαλιν.

Ἂν ἐν τῇ α΄ τῶν ἰσοτήτων τούτων τεθῇ $\sqrt[\nu]{\beta}$ ἀντὶ α, αὕτη γίνεται $\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \beta}$, ἥτις οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ μαθηματικὴ ἔκφρασις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς νυοστῆς ῥίζης ἀριθμοῦ β.

Ἀσκήσεις. 659) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον ἑκάστης τῶν παραστάσεων $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\alpha\sqrt{\alpha}$, $\beta\sqrt{\beta}$, $\gamma\sqrt{\gamma}$.

660) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη δύναμις ἑκάστης τῶν παραστάσεων $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$, $\sqrt[4]{\chi^2}$, $\alpha\sqrt[4]{\alpha^3}$, $\frac{1}{2}\sqrt[4]{16}$.

661) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη δύναμις ἑκάστης τῶν παραστάσεων $2\alpha\sqrt[5]{\beta}$, $3x^2y\sqrt[5]{xy}$, $\frac{\alpha^2\beta^3}{2}\sqrt[5]{\frac{\beta}{\alpha}}$

662) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ κύβου ἑκάστης τῶν παραστάσεων $\sqrt[3]{\alpha^2}$, $2\sqrt[3]{2x}$, $3\alpha\sqrt[3]{\beta}$.

663) Νὰ εὑρεθῇ τὸ τετράγωνον ἑκάστης τῶν παραστάσεων $\sqrt{2x}$, $\alpha\sqrt{\alpha\beta^3}$, $\alpha\beta^2\sqrt{xy^5}$.

§ **118. Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.**—Γνωρίζομεν ἐκ τῆς θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀκεραίου π. χ. 2, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, δὲν εἶναι ἀκέραιος οὐδὲ κλάσμα. Ἐὰν ὅμως ὑπολογίσωμεν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000} \text{ κ. τ. λ.}$$

εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142 κ. τ. λ.

Βλέπομεν οὕτως ὅτι τοῦ παρονομαστοῦ τῆς προσεγγίσεως ἀπαύστως καὶ διαδοχικῶς πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 10, τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τῆς οὕτως ὑπολογιζομένης τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2 βαίνει ἐπ' ἄπειρον αὐξανόμενον· προκύπτει ἄρα ἀπειρομερές τι πλῆθος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

α') ***Τὰ μέρη αὐτοῦ διαδέχονται ἄλληλα καθ' ὡρισμένον νόμον*** (Εἶναι ὁ κανών, καθ' ὃν εὑρίσκονται ταῦτα)

β') ***Λαμβάνοντες*** ὁσαδήποτε (εἰς πεπερασμένον πλῆθος) ***ἐκ τούτων ἀποτελοῦμεν ἀριθμόν, οὗ ὑπάρχει μεγαλύτερος.*** Οὕτως ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω ἀναγραφέντων ἀριθμῶν εἶναι μικρότερος τοῦ 2. Διὰ τοὺς λόγους τούτους τὸ ἀπειρομερὲς πλῆθος 1,4142... δεχόμεθα ὡς ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν $\sqrt{2}$, ἤτοι $\sqrt{2} = 1,4142......$

Καὶ τὸ ἀπειρομερὲς πλῆθος 3,102100210002100002..... ἔχων τὰς ἀνωτέρω ῥηθείσας ἰδιότητας θεωρεῖται ἀριθμός.

Ἀμφότεροι οἱ θεωρηθέντες ἀριθμοὶ 1,4142.....,3,1021002..... ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι περιοδικά. Διότι, ἂν τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ 1,4142 . . . ἦσαν περιοδικά, οὗτος θὰ ἦτο ἴσος πρός τι κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅτε θὰ ἦτο $2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$, ὅπερ ἄτοπον. Ὅτι δὲ καὶ τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ 3,1021002......τὰ ψηφία δὲν εἶναι περιοδικὰ εἶναι προφανές.

Ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων καλεῖται ***ἀσύμμετρος ἀριθμός.***

Γενικῶς: ***Ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.***

Κατ' ἀντίθεσιν οἱ ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται ***σύμμετροι*** ἀριθμοί.

Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν συμμέτρων.

§ **119.** ***Γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.*** Κατὰ τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν πᾶς ἀσύμμετρος ἀριθμὸς εἶναι σύνολον ἀπείρου πλήθους μονάδων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος

$$\left(\ldots\ldots\frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10}\,1,10,100,1000\ldots\ldots\right)$$

Ἀλλὰ καὶ πᾶς ἀκέραιος ἢ κλάσμα εἶναι σύνολον τοιούτων μονάδων. Οὕτω $213=100+100+10+1+1+1$, $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{5}{18}=0{,}2777\ldots$ Ὥστε:

Ἀριθμὸς καλεῖται ἄπειρον ἢ πεπερασμένον πλῆθος μονάδων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

ΣΗΜ. Ὅταν τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι ἄπειρα, πρέπει νὰ διαδέχωνται ἄλληλα κατὰ ὡρισμένον καὶ γνωστὸν νόμον, ὅπως δυνάμεθα νὰ γράφωμεν, ὅσα ἐξ αὐτῶν θέλομεν.

§ **120.** **Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.**—Μετὰ τὴν γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, οἱ ὁρισμοὶ τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν τροποποιοῦνται ὡς ἑξῆς.

α') ***Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἂν πᾶν μέρος ἑκατέρου εἶναι μέρος καὶ τοῦ ἄλλου.***

Οὕτω πᾶν μέρος τοῦ 1,999... π. χ. ὁ ἀριθμὸς 1,99 εἶναι προφανῶς μέρος καὶ τοῦ 2. Πᾶν δὲ μέρος τοῦ 2 π. χ. ὁ ἀριθμὸς $1\frac{73}{95}$ εἶναι μέρος καὶ τοῦ 1,999... Τῷ ὄντι: Εἶναι προφανὲς ὅτι $\frac{73}{95}<\frac{94}{95}$. Ἐὰν δὲ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{94}{95}$ καὶ $\frac{99}{100}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{94}{95}=\frac{94(95+5)}{95.100}=\frac{94.95+94.5}{95.100} \text{ καὶ } \frac{99}{100}=\frac{95.(94+5)}{95.100}=\frac{95.94+95.5}{95.100}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\frac{94}{95}<\frac{99}{100}$. Εἶναι ἄρα καὶ

$1\frac{73}{95}<1\frac{94}{95}<1\frac{99}{100}$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον $1\frac{73}{94}<1{,}999\ldots\ldots$

Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν 1,999.... καὶ 2 εἶναι ἴσοι. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $1=0{,}999\ldots\ldots$, $0{,}1=0{,}0999\ldots$, κ.τ.λ.

β') ***Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ἂν ὁ εἷς ἔχῃ πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου, πλὴν δὲ τούτων ἔχῃ καὶ ἄλλας ἀκόμη.*** Οὕτως εἶναι $3{,}9<3{,}99$, $5{,}99<5{,}999\ldots$, $2{,}1010010001\ldots<2{,}1313313331\ldots$

κ.τ.λ. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ 2,487 . . . καὶ 2,489 . . . δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσοι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν. Διότι ὁ μὲν α΄ τούτων δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν 2,487999...=2,487 +0,000999 . . . =2,487+0,001=2,488˙ ὁ δὲ β΄ δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 2,4890000 . . . =2,489.

Οἱ ἀριθμοὶ ὅμως 3,46999 . . . καὶ 3,47000 . . . εἶναι ἴσοι. Τῷ ὄντι˙

3,46999 . . . =3,46+0,01=3,47=3,47000 . . .

Ἄρα: ***Ἵνα δύο ἀριθμοὶ ὦσιν ἴσοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἢ νὰ συμφωνῶσι κατὰ πάντα τὰ ὁμοταγῆ αὐτῶν ψηφία ἢ τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία, καθ' ἃ διαφέρουσι, νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1 καὶ τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον πάντα τὰ ἑπόμενα νὰ εἶναι 9 καὶ ἄπειρα τοῦ δὲ ἄλλου τὰ ἑπόμενα νὰ εἶναι πάντα*** 0.

Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ὅτι τυχὼν ἀσύμμετρος ἀριθμὸς π. χ. ὁ 17,248163264 . . . πρὸς οὐδένα ἀριθμὸν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος ἰσοῦται. Τῷ ὄντι˙ πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς τιθέμενος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ἢ περιέχει ὡρισμένον πλῆθος μονάδων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἢ γίνεται δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα. Οὐδεὶς ὅμως τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν 17,248163264. . .

§ **121. Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν.** Αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πράξεις καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ὁρίζονται, ὡς καὶ πρότερον. Ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι εἶναι πᾶσαι δυναταί, ἤτοι ὑπάρχει ἄθροισμα, γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπίσης διαφορὰ καὶ πηλίκον δύο ἀριθμῶν˙ ἀποδεικνύεται δὲ ἐπίσης ὅτι διατηροῦνται πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τούτων.

Ὅσον ἀφορᾷ δὲν τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν παρατηροῦμεν ὅτι συνήθως παραλείπομεν τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς, ἤτοι ἀντικαθιστῶμεν ἕκαστον ἀσύμμετρον διὰ συμμέτρου ἀριθμοῦ. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι τὰ οὕτως εὑρισκόμενα ἐξαγόμενα τῶν πράξεων δὲ εἶναι ἀκριβῆ, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν, ἥτις αὐξάνει μετὰ τοῦ πλήθους τῶν διατηρουμένων ψηφίων τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Οὕτω δεχόμενοι τὸ ἄθροισμα

(1) 2,316293124157....+1,57157257357...ἴσον πρὸς τὸ 2,316293 + 1, 571572=3,887865 κάμνομεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{2}{10^6}$ ἤτοι εὕρομεν τὸ ἄθροισμα (1) μὲ προσέγγισιν $\frac{2}{16^6}$

Βραδύτερον ὅμως θὰ μάθωμεν μεθόδους τινάς, δι' ὧν συντομώτερον ἐνίοτε δὲ καὶ ἀκριβῶς γίνονται αἱ πράξεις ἐπί τινων ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ α ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμὸς β τοιοῦτος ὥστε $\beta^\nu = \alpha$. Ἂν ὁ α εἶναι ἀκέραιος, οὗ οἱ πρῶτοι παράγοντες δὲν ἔχουσι πάντες ἐκθέτας διαιρετοὺς διὰ ν, ὁ β εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Τῷ ὄντι ἂν ὁ β ἦτο ἴσος πρὸς ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$, θὰ ἦτο $\frac{\kappa^\nu}{\lambda^\nu} = \alpha$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ψευδής, διότι τὸ κλάσμα $\frac{\kappa^\nu}{\lambda^\nu}$ εἶναι καὶ αὐτὸ ἀνάγωγον, εἶναι δὲ ἀδύνατον νὰ διαιρῆται ὁ κ^ν διὰ τοῦ λ^ν.

ΣΗΜ. Καὶ ἡ μέτρησις τῶν συνεχῶν ποσῶν καθίσταται ἤδη πάντοτε δυνατή, τὸ δὲ μέτρον τῶν μὲν συμμέτρων πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως ποσῶν εἶναι σύμμετρος ἀριθμός, τῶν δὲ ἀσυμμέτρων ἀσύμμετρος ἀριθμὸς (Βλέπε Γεωμετρίαν μου § 168, 169, 170). Ἐντεῦθεν δὲ προῆλθον καὶ τὰ ὀνόματα σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

§ 122. Ῥίζαι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν. Ἔστω ὁ θετικὸς ἀριθμὸς 25· ἐπειδὴ $(\pm 5)^2 = 25$, ἕπεται ὅτι $\sqrt{25} = \pm 5$. Ὁμοίως ἐπειδὴ $(\pm 3)^4 = 81$, ἕπεται ὅτι $\sqrt[4]{81} = \pm 3$.

Ἐπειδὴ δὲ $(+3)^3 = 27$, ἕπεται $\sqrt[3]{27} = +3$. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $(+2)^5 = 32$, ἕπεται $\sqrt[5]{32} = +2$.

Ἄρα: ***Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας*** (ἀντιθέτους) ***ἐξ ἑκάστης ἀρτίας τάξεως καὶ μίαν ἑκάστην περιττῆς τάξεως.***

123. Ῥίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ $(-3)^3 = -27$, $(-2)^5 = -32$, ἕπεται ὅτι $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Ἐὰν δὲ ζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ -9, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει τοιαύτη, διότι οὐδενὸς ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸν -9. Ὁμοίως δὲν ὑπάρχει $\sqrt[4]{-16}$, διότι οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἡ τετάρτη δύναμις ἰσοῦται πρὸς -16.

Ἄρα: ***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ῥίζαν*** (ἀρνητικὴν) ***ἐξ ἑκάστης περιττῆς τάξεως καὶ οὐδεμίαν ἐξ ἑκάστης ἀρτίας τάξεως.***

Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας.

§ 124. Ὁρισμὸς τῆς δυνάμεως $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$. Ἡ παράστασις $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, ἔνθα ν ἀκέραιος, ἔχει μορφὴν δυνάμεως, οὐδεμίαν ὅμως ἔννοιαν ἀπορρέουσιν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (§ 25) τῆς δυνάμεως. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ φροντίσωμεν νὰ δόσωμεν εἰς ταύτην μαθηματικὴν ἔννοιαν, καὶ τοιαύτην ὥστε νὰ ἰσχύωσιν ἐπ' αὐτῆς πᾶσαι αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεως χάριν τῆς γενικότητος αὐτῶν καὶ τοῦ ὁμοιομόρφου τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ν παράγοντας περιέχον γινόμενον $\alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdots \alpha^{\frac{1}{\nu}}$ ὀφείλομεν νὰ δεχθῶμεν ἴσον πρὸς $\alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\cdots+\frac{1}{\nu}}$, ἔνθα ὁ ἐκθέτης ἔχει ν προσθετέους, ἵνα ἰσχύῃ ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων, ἤτοι

$$\alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdots \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\cdots+\frac{1}{\nu}}. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdots \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}$ καὶ $\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\cdots+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\nu}\cdot\nu=1$

ἡ ἰσότης (1) γίνεται $$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha^1 = \alpha. \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \alpha$ ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι

$$\boxed{\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}.} \tag{3}$$

Ἤτοι : ***Δύναμις ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\nu}$ καλεῖται ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου·***

Οὕτως $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$, $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$.

§ **125. Ὁρισμὸς τῆς δυνάμεως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$.** Α΄. Τὸ ν παράγοντας ἔχον γινόμενον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdots \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ὀφείλομεν νὰ δεχθῶμεν ἴσον πρὸς $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu}{\nu}+\cdots+\frac{\mu}{\nu}}$, ἔνθα ὁ ἐκθέτης ἔχει ν προσθετέους, ἵνα ἀληθεύῃ ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων, ἤτοι :

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdots \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu}{\nu}+\cdots+\frac{\mu}{\nu}}. \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν α΄ μέλος εἶναι προφανῶς $(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}})^{\nu}$, τὸ δὲ ἄθροισμα $\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu}{\nu}+\cdots+\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu}{\nu}\cdot\nu=\mu$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu}. \tag{3}$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu}$ ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.} \tag{4}$$

Ἄρα : ***Δύναμις ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ καλεῖται ἡ νυοστὴ ῥίζα τῆς μυοστῆς δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.***

Οὕτως $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{16.16.16} = \sqrt[4]{2^{12}}$ $= 2^3 = 8$. (ὅρα Θεωρ. Ἀριθ § 118. Θ).

Β΄. Παρατηροῦντες ὅτι ὀφείλομεν νὰ δεχθῶμεν $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ ὅτι $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$, συμπεραίνομεν ὅτι $\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu}}$.

Ἄρα: ***Δύναμις ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ κλάσμα*** $\frac{\mu}{\nu}$ ***καλεῖται ἡ μυοστὴ δύναμις τῆς νυοστῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.***

Ἀσκήσεις. 664) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν ἀκολούθων δυνάμεων:

$$4^{\frac{1}{2}},\quad 27^{\frac{1}{3}},\quad 9^{\frac{3}{2}},\quad 25^{\frac{5}{2}},\quad 8^{\frac{4}{3}},\quad 125^{\frac{2}{3}}.$$

665) Νὰ γραφῇ ὡς δύναμις ἑκάστη τῶν ῥιζῶν: $\sqrt{5^5}$, $\sqrt[3]{3^2}$, $\sqrt[7]{\alpha^5}$, $\sqrt[4]{\alpha^2}$.

666) Νὰ καταστῇ ἁπλουστέρα ἑκάστη τῶν παραστάσεων

$$(4.\alpha^4)^{\frac{1}{2}},\quad (27\chi^5)^{\frac{1}{3}},\quad (9\alpha^2)^{\frac{3}{2}},\quad (16\alpha^4\beta^8)^{\frac{3}{4}}.$$

Ἰδιότητες τῶν ῥιζῶν.

§ **126. Θεώρημα I.** *Ῥίζα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν τὸ ὑπόρριζον ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ τοῦ ἐξαγομένου ἐξαχθῇ ἡ ἰσοβάθμιος ῥίζα.*

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ καὶ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu}$,

ἕπεται ὅτι $\boxed{(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$ ὅ ἔ. δ.

Κατὰ ταῦτα $(\sqrt{\alpha})^3 = \sqrt{\alpha^3}$, $(\sqrt[3]{\alpha^2})^2 = \sqrt[3]{\alpha^4}$ κ.τ.λ.

ΣΗΜ. Ἡ ἰσότης $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ δὲν εἶναι πάντοτε πλήρης. Διότι, ἂν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν ἀμφότεροι ἄρτιοι, ἡ μὲν παράστασις $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu}$ ἔχει μίαν μόνην τιμὴν θετικήν, ἐνῷ ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ ἔχει δύο τιμάς, μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικήν. Τούτων ἡ θετικὴ μόνον ἰσοῦται πρὸς $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu}$. Οὕτω $(\sqrt{4})^4 = (\pm 2)^4 = 16$, ἐν ᾧ $\sqrt{4^4} = \sqrt{4.4.4.4} = \sqrt{16.16} = \pm 16$.

§ **127. Θεώρημα II.** *Ἡ ἀξία ῥίζης δὲν βλάπτεται, ἂν ὁ δείκτης τῆς ῥίζης καὶ ὁ ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Λέγω δηλαδὴ ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$. Ἐπειδὴ δὲ

$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu\rho}{\nu\rho}$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}}=\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. ***Ἡ ἀξία ῥίζης δὲν βλάπτεται, ἂν ὁ δείκτης αὐτῆς καὶ ὁ ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.***

ΣΗΜ. Ἂν ὁ ν εἶναι ἀριθμὸς περιττός, ὁ ρ ἄρτιος καὶ ὁ α^{μ} θετικός, ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ ἔχει μίαν τιμήν, ἐν ᾧ ἡ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ ἔχει δύο τιμάς, ἤτοι ἡ ἰσότης $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ δὲν εἶναι τότε πλήρης, ἀλλὰ ἡ μία μόνον τιμὴ τῆς $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ ἰσοῦται πρὸς τὴν $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Ἀσκήσεις. 667) Νὰ τραπῇ εἰς ῥίζαν ἑκάστη τῶν δυνάμεων

$$(\sqrt{2})^3,\quad \left(\sqrt[3]{4}\right)^2,\quad (\sqrt{2})^2,\quad (\sqrt{\alpha^2})^3.$$

668) Νὰ τραπῇ εἰς ῥίζαν ἑκάστη τῶν δυνάμεων $(\sqrt{\alpha^3})^3$, $(\sqrt[3]{\alpha^2})^5$, $(\sqrt[4]{\alpha\beta})^2$

669) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt[4]{\alpha^2}=\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[9]{8}=\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[10]{\alpha^5}=\sqrt{\alpha}$.

670) Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς δύναμιν ῥίζης ἑκάστη τῶν ῥιζῶν

$$\sqrt{5^3},\quad \sqrt[3]{3^2},\quad \sqrt[7]{\alpha^5},\quad \sqrt[4]{\alpha^2}$$

671) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt[15]{32}=\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{8}=\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[12]{16}=\sqrt[3]{2}$.

672) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt[12]{\alpha^{16}}=\sqrt[3]{\alpha^4}$, $\sqrt[15]{\alpha^5}=\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[5]{\alpha^{20}}=\alpha^4$.

673) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἡ κυβ. ῥίζα ἰσοῦται πρὸς $\sqrt[6]{4}$ ἢ πρὸς $\sqrt[9]{27}$ ἢ πρὸς $\sqrt[12]{\alpha^4}$.

§ 128. Τροπὴ ἑτεροβαθμίων ῥιζῶν εἰς ἰσοβαθμίους.

Ἔστωσαν αἱ ἑτεροβάθμιοι ῥίζαι $\sqrt{\alpha^3}$, $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha^3}$.

Οἱ δεῖκται αὐτῶν ἔχουσιν ἐλ. κ. πολ. τὸν 12, ὅστις διαιρούμενος δι' ἑκάστου τῶν δεικτῶν δίδει πηλίκα

$$12:2=6,\quad 12:4=3,\quad 12:6=2.$$

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς ῥίζας ταύτας τὴν γνωστὴν (§ 127) ἰδιότητα εὑρίσκομεν ὅτι $\sqrt{\alpha^3}=\sqrt[12]{\alpha^{18}}$, $\sqrt[4]{\alpha}=\sqrt[12]{\alpha^3}$, $\sqrt[6]{\alpha^3}=\sqrt[12]{\alpha^6}$, ἤτοι αἱ δοθεῖσαι ῥίζαι ἐτράπησαν εἰς ἰσοβαθμίους χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ῥίζαι $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[8]{5}$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἰσοβαθμίους ῥίζας $\sqrt[24]{2^8}$, $\sqrt[24]{3^6}$, $\sqrt[24]{5^3}$.

Ἄρα: ***Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτεροβαθμίους ῥίζας εἰς ἰσοβαθμίους,***

διαιροῦμεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν δεικτῶν αὐτῶν δι' ἑκάστου δείκτου καὶ εἶτα πολλαπλασιάζομεν τὸν δείκτην ἑκάστης ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

ΣΗΜ. Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἐντελῶς ὁμοία πρὸς τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα· οἱ δεῖκται τῶν ῥιζῶν ἐπέχουσι τὴν θέσιν τῶν παρονομαστῶν, οἱ δὲ ἐκθέται τῶν ὑπορρίζων τὴν θέσιν τῶν ἀριθμητῶν. Ὅπως δὲ πολλάκις εἶναι δυνατὸν δι' ἁπλοποιήσεως κλασμάτων τινῶν νὰ τραπῶσι δοθέντα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, οὕτως εἶναι δυνατὸν ῥίζαι ἑτεροβάθμιοι νὰ γίνωσιν ἰσοβάθμιοι καὶ διὰ διαιρέσεως δεικτῶν καὶ ἐκθετῶν τοῦ ὑπορρίζου διὰ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Οὕτω $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta^2}$, $\sqrt[6]{\gamma^3}$, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ῥίζας $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$.

Ἀσκήσεις : 674) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοβαθμίους αἱ κάτωθι ῥίζαι.

α') $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{5}$. β') $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha}$, γ') $\sqrt[4]{\alpha^2}$, $\sqrt[8]{\alpha}$.

675) α'.) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$, β') $\sqrt{3}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[12]{6}$, γ') $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\alpha^3}$, $\sqrt[8]{\alpha}$.

676) α') $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\lambda]{\gamma}$, β') $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[2\mu]{\alpha^2}$, $\sqrt[3\mu]{\alpha^3}$, γ') $\sqrt[3\nu]{\alpha^2}$, $\sqrt[9\nu]{\alpha^3}$, $\sqrt[18\nu]{\alpha^6}$.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ῥιζῶν.

§ **129. Πρόσθεσις ῥιζῶν.** Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι ῥίζαι ὅμοιαι, δηλαδὴ ἔχουσαι τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ὑπόρριζον, προσθέτομεν τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν· οὕτω

$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2},\quad \sqrt{3}+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Ἄλλως περιοριζόμεθα εἰς τὸ νὰ σημειώσωμεν τὴν πρᾶξιν. Οὕτω

$$\sqrt{2}+5\sqrt{3}.$$

Ἀσκήσεις : Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις.

677) α'.) $\sqrt{7}+3.\sqrt{7}+5.\sqrt{7}+2.\sqrt{7}$.

β') $3.\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6.\sqrt{3}-\frac{1}{5}\sqrt{3}$.

γ') $\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{2}{3}.\sqrt{5}-\frac{1}{8}\sqrt{5}$.

Πολλαπλασιασμὸς ῥιζῶν.

§ **130. Α'. Γινόμενον ἰσοβαθμίων ῥιζῶν.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}$.

Παρατηροῦντες (§ 124) ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, $\sqrt[\nu]{\beta}=\beta^{\frac{1}{\nu}}$, $\sqrt[\nu]{\gamma}=\gamma^{\frac{1}{\nu}}$, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}}.\gamma^{\frac{1}{\nu}}$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}}.\gamma^{\frac{1}{\nu}}=(\alpha.\beta.\gamma)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}$, ἕπεται ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}$. (1)

Ἄρα: ***Τὸ γινόμενον ἰσοβαθμίων ῥιζῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν ὑπορρίζων.***

Οὕτω $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{8}=\sqrt{16}=4,\ \sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2.$

§ **131. Β΄. Γινόμενον ἑτεροβαθμίων ῥιζῶν.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[4]{4}$.

Ἐπειδὴ (§ 128) $\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6},\ \sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[4]{4}=\sqrt[12]{4^3}$, ἕπεται ὅτι

$\sqrt{2}\ \sqrt[3]{3}.\sqrt[4]{4}=\sqrt[12]{2^6}.\sqrt[12]{3^4}.\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{2^6.3^4.4^3}.$

Ἄρα: ***Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἑτεροβαθμίων ῥιζῶν, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς ἰσοβαθμίους καὶ ἐξάγομεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν ὑπορρίζων τῶν ἰσοβαθμίων τούτων ῥιζῶν.***

§ **132. Γ΄. Γινόμενον ῥίζης ἐπὶ ἀριθμόν.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\alpha$ ἢ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$. Παρατηροῦντες, ὅτι $\sqrt[\nu]{\beta}=\beta^{\frac{1}{\nu}}$ συμπεραίνομεν ὅτι $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\alpha\beta^{\frac{1}{\nu}}$. Ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι $\alpha=\alpha^1=\alpha^{\frac{\nu}{\nu}}=(\alpha^\nu)^{\frac{1}{\nu}}$, ἕπεται ὅτι $(\alpha\beta^{\frac{1}{\nu}})=(\alpha^\nu)^{\frac{1}{\nu}}\cdot\beta^{\frac{1}{\nu}}=(\alpha^\nu.\beta)^{\frac{1}{\nu}}$, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=(\alpha^\nu\beta)^{\frac{1}{\nu}}$ ἀλλ' ἐπειδὴ $(\alpha^\nu.\beta)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$, ἕπεται ὅτι $\boxed{\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}}$ (2)

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι: $\alpha^\mu\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\nu}.\beta}$

Ἄρα: ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ῥίζαν ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν τὸ ὑπόρριζον ἐπὶ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν.***

Οὕτω $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2.3}=\sqrt{12},\ 3\sqrt{2}=\sqrt{18},\ 5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{250}.$

$2^3\sqrt{5}=\sqrt{2^6.5},\ 3^2\sqrt{2}=\sqrt{3^4.2}.$

β΄.) ***Ἐὰν παράγων τοῦ ὑπορρίζου ἔχῃ ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης, ἐξάγεται οὗτος ὡς παράγων ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἀφοῦ ὁ ἐκθέτης του διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.***

Οὕτως $\sqrt{3^2.2}=3\sqrt{2},\ \sqrt{\alpha^4\beta}=\alpha^2\sqrt{\beta},\ \sqrt[3]{27.2}=3\sqrt[3]{2},$

$\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16.3}=\sqrt[4]{2^4.3}=2\sqrt[4]{3}.$

Ἀσκήσεις : Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀκόλουθα γινόμενα.

678) α΄) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{12}$, β΄.) $\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{27}$, γ΄) $\sqrt[4]{2}\,.\,\sqrt[4]{8}$.

679) α′) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$, β′.) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{27}$.

680) α′) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}$, β′) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{2}$, γ′) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}$.

681) α′) $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$, β′) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, γ′) $4\sqrt[1]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$.

682) Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ ρίζαν ἑκάστη τῶν ῥιζῶν

$$\sqrt{12},\ \sqrt[3]{32}\cdot\ \sqrt[4]{48},\ \sqrt[5]{3\alpha^{10}}\cdot\ \sqrt{16\alpha^{3}},\ \sqrt[3]{8\beta^{4}},\ \sqrt[5]{224}.$$

683) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

α′.) $\sqrt{\alpha^2\chi-2\alpha\beta\chi+\beta^2\chi}=(\alpha-\beta)\sqrt{\chi}$, β′.) $\sqrt[3]{\alpha^4\chi+3\alpha^3\beta\chi+3\alpha^2\beta^2\chi+\alpha\beta^3\chi}$
$=(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\chi}$.

684) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\cdot(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$.

685) Ἐὰν α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) > 8\alpha\beta\gamma$.

686) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α) $\sqrt[3]{8\alpha^3\beta^6\chi-8\alpha^4\beta^6}=2\alpha\beta^2\sqrt[3]{\chi-\alpha}$.

β′) $\sqrt{(\alpha+\beta)^2\chi-4\alpha\beta\chi}=(\alpha-\beta)\sqrt{\chi}$.

687) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt[3]{\alpha^5y^2-3\alpha^4\beta y^2+3\alpha^3\beta^2y^2-\alpha^2\beta^3y^2}=(\alpha-\beta)\sqrt[3]{\alpha^2y^2}$,

Διαιρέσεις ῥιζῶν.

§ 133. Α′. Πηλίκον ῥίζης δι᾽ ἄλλης ἰσοβαθμίου.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\sqrt[\nu]{\alpha}:\sqrt[\nu]{\beta}$ ἢ $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$.

Παρατηροῦντες ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, $\sqrt[\nu]{\beta}=\beta^{\frac{1}{\nu}}$, συμπεραίνομεν ὅτι

$$\sqrt[\nu]{\alpha}:\sqrt[\nu]{\beta}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}:\beta^{\frac{1}{\nu}}=\frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}}$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}}=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}}$ ἕπεται ὅτι $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ ἢ

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad (1)$$

Ἄρα : ***Τὸ πηλίκον ῥίζης δι᾽ ἄλλης ἰσοβαθμίου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν τοῦ πηλίκου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ ὑπόρριζον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ὑπορρίζου τοῦ διαιρέτου.***

Οὕτω $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27} = 3$ κ.τ.λ.

Πόρισμα. ***Ἵνα ἐξαγάγωμεν ῥίζαν κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν χωριστὰ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωριστὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν α΄ διὰ τῆς β΄.***

§ **134. Β΄. Πηλίκον ῥίζης δι' ἄλλης ἑτεροβαθμίου.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\sqrt{6} : \sqrt[4]{3}$. Ἐπειδὴ $\sqrt{6} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt[4]{36}$, ἕπεται ὅτι

$$\sqrt{6} : \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{36} : \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{36:3} = \sqrt[4]{12}.$$

Ὁμοίως $\sqrt[3]{4} : \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{16} : \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{8}$.

Ἄρα: ***Ἵνα διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἄλλης ἑτεροβαθμίου, τρέπομεν ταύτας εἰς ἰσοβαθμίους καὶ ἐξάγομεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν τοῦ πηλίκου τῶν ἀντιστοίχων ὑπορρίζων τῶν ἰσοβαθμίων τούτων ῥιζῶν.***

§ **135. Γ΄. Διαίρεσις ῥίζης δι' ἀριθμοῦ.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\sqrt[\nu]{\beta} : \alpha$ ἢ $\frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha}$.

Παρατηροῦντες ὅτι $\sqrt[\nu]{\beta} = \beta^{\frac{1}{\nu}}$, συμπεραίνομεν ὅτι

$$\frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha} = \frac{\beta^{\frac{1}{\nu}}}{\alpha} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha = \alpha^1 = \alpha^{\frac{\nu}{\nu}} = \alpha^{\nu \cdot \frac{1}{\nu}} = (\alpha^\nu)^{\frac{1}{\nu}}$ ἕπεται ὅτι

$\frac{\beta^{\frac{1}{\nu}}}{\alpha} = \frac{\beta^{\frac{1}{\nu}}}{{\alpha^\nu}^{\frac{1}{\nu}}} = \left(\frac{\beta}{\alpha^\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $\frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha^\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, ἀλλ'

ἐπειδὴ $\left(\frac{\beta}{\alpha^\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha^\nu}}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha} = \sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha^\nu}}$ (1).

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha^{\mu\nu}}}$.

Ἄρα: α΄) ***Ἵνα διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν τὸ ὑπόρριζον διὰ τῆς ἰσοβαθμίου δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ ἐξάγομεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν τοῦ πηλίκου.***

Οὕτω $\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt[3]{32}}{2}=\sqrt[3]{\frac{32}{8}}=\sqrt[3]{4}$.

β′) ***Ἐὰν ὁ διαιρέτης ὑπορρίζου ἔχῃ ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης, ἐξάγεται οὗτος ὡς διαιρέτης ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἀφ᾽ οὗ ὁ ἐκθέτης του διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης·***

Οὕτω $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$, $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta^6}}=\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\beta^2}$, $\sqrt{\frac{2}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις.

688) α′) $\sqrt{6}:\sqrt{3}$, β′) $\sqrt[3]{8}:\sqrt[3]{2}$, γ′) $\sqrt[4]{10}:\sqrt[4]{2}$.

689) α′) $\sqrt[4]{4}:\sqrt[6]{8}$ β′) $\sqrt[12]{125}:\sqrt[8]{25}$, γ′) $2\sqrt[6]{27}:\sqrt[4]{9}$

690) α′) $\sqrt{12}:2$, β′) $\sqrt[3]{135}:3$, γ′) $\sqrt[5]{288}:2$.

691) Νὰ τραπῇ εἰς πηλίκον ῥίζης δι᾽ ἀριθμοῦ ἑκάστη τῶν ῥιζῶν.

$$\sqrt{\frac{2}{25}},\quad \sqrt[3]{\frac{3}{8}},\quad \sqrt[5]{\frac{2\alpha}{\beta^5}},\quad \sqrt[5]{\frac{27}{32}},\quad \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta^3}}.$$

692) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{\alpha}=2\sqrt{\frac{\alpha}{4}}$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[\nu]{5}=\alpha\sqrt[\nu]{\frac{5}{\alpha^\nu}}$.

693) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{\frac{\alpha^2\chi\psi-2\alpha\beta\chi\psi+\beta^2\chi\psi}{\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2}}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}\sqrt{\chi\psi}$ καὶ

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha^3\chi-\alpha^3\beta}{\beta^3\gamma^3\delta^3}}=\frac{\alpha}{\beta\gamma\delta}\sqrt[3]{\chi-\beta}.$$

694) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt[3]{\frac{8\alpha^3\beta^6\chi-8\alpha^4\beta^6}{\lambda^3\mu^3}}=\frac{2\alpha\beta^2\sqrt[3]{\chi-\alpha}}{\lambda\mu}$,

695) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $\sqrt{\alpha x^2}:\sqrt[4]{\alpha x}$ καὶ τὸ $\sqrt[4]{\alpha x^5}:\sqrt[6]{\alpha x^2}$.

696) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{9\alpha^2-18\alpha\beta+9\beta^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}}$

Ἀλλεπάλληλοι ῥίζαι ἀριθμοῦ.

§ 136. Α′) Ῥίζα ἄλλης ῥίζης ἀριθμοῦ. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν νυοστὴν ῥίζαν τῆς μυοστῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος α, ἤτοι τὴν $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$.

Ἐπειδὴ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\mu}}$ ἕπεται ὅτι :

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \left(\alpha^{\frac{1}{\mu}}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{1}{\mu\nu}}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $\sqrt[\mu\nu]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\mu\nu}}$ συμπεραίνομενα ὅτι

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \qquad (1).$$

Β΄. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt[\varrho]{\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}}$, παρατηροῦντες ὅτι $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$, συμπεραίνομεν ὅτι :

$\sqrt[\varrho]{\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}} = \sqrt[\varrho]{\sqrt[\mu\nu]{\alpha}}$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν τύπον (1) εἶναι

$$\sqrt[\varrho]{\sqrt[\mu\nu]{\alpha}} = \sqrt[\varrho\mu\nu]{\alpha} \quad \text{ἕπεται ὅτι}$$

$$\sqrt[\varrho]{\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}} = \sqrt[\varrho\nu\mu]{\alpha} \qquad (2)$$

Ἄρα : ***Ρίζα ἀλλεπαλλήλων ριζῶν ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἡ ὁποία ἔχει δείκτην τὸ γινόμενον τῶν δεικτῶν ὅλων τούτων τῶν ριζῶν.***

Οὕτω $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$, $\sqrt[5]{\sqrt{\alpha^{10}}} = \sqrt[10]{\alpha^{10}} = \alpha$.

Ἀσκήσεις. 697) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha}}$,

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\sqrt[\varrho]{\alpha}}} = \sqrt[\varrho]{\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}}.$$

698) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}}\right)^5 = 2$, $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3 = 4$, $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{27\alpha^3}}\right)^7 = 3\alpha$.

699) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\sqrt{\sqrt[4]{\alpha^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^3}}$.

700) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^{16}}} : \sqrt[3]{\sqrt[5]{\alpha^{8}}}$.

701) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\sqrt[2\mu]{\sqrt[3\nu]{\alpha^{5}}} \cdot \sqrt[6\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha^{5}}} \cdot \sqrt[\mu]{\sqrt[6\nu]{\alpha^{9}}} \cdot \sqrt[6\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$.

702) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3}$ καὶ $\sqrt[\nu-1]{\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\alpha}}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$.

§ 137. Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων. $\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}}$.

Ὑψοῦντες τὸ ἄθροισμα $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν ὅτι $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$, ὅθεν

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι (2).

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}$$

Τῶν ἰσοτήτων τούτων γίνεται διπλῆ χρῆσις: α΄.) Ἐὰν τὸ γινόμενον αβ εἶναι **τέλειον τετράγωνον**, ἡ εὕρεσις ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἀνάγεται εἰς εὕρεσιν μιᾶς ῥίζης. Οὕτω

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2+8+2\sqrt{2.8}} = \sqrt{2+8+2.4} = \sqrt{18}.$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3+12+2\sqrt{3.12}} = \sqrt{3+12+2.6} = \sqrt{27}.$$

$$\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{32+2-2\sqrt{32.2}} = \sqrt{32+2-2.8} = \sqrt{18}$$

Τὰ οὕτως ὑπολογιζόμενα ἀθροίσματα ἢ διαφοραὶ δύο ῥιζῶν οὐ μόνον ταχύτερον ἀλλὰ καὶ ἀκριβέστερον ὑπολογίζονται.

β΄.) Ἐὰν ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν α ἢ β εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὁ ὑπολογισμὸς παραστάσεων τῆς μορφῆς $\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}}$ ἀνάγεται εἰς ἐξαγωγὴν μιᾶς μόνον ῥίζης καὶ εἰς μίαν πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν.

Οὕτω : $\boxed{\sqrt{7+4\pm2\sqrt{4.7}}} = \sqrt{7} \pm \sqrt{4} = \sqrt{7} \pm 2.$

$$\sqrt{7\pm\sqrt{48}} = \sqrt{4+3\pm2\sqrt{4.3}} = \sqrt{4} \pm \sqrt{3} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Ἀσκήσεις 703) Νὰ καταστῇ ἁπλούστερον ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων $\sqrt{8} \pm \sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{20} \pm \sqrt{5}$.

704) Νὰ ἁπλοποιηθῶσιν αἱ παραστάσεις $\sqrt{14+2\sqrt{45}}$, $\sqrt{\chi+\chi\psi-2\chi\sqrt{\psi}}$.

705) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\dfrac{(\sqrt{\chi}+\sqrt{\alpha})^2}{\sqrt{\chi+\alpha+2\sqrt{\alpha\chi}}}$.

706) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{8+\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{15})$.

707) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{9+\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$

708) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{20+\sqrt{336}} = \sqrt{2}\,(\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

709) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$.

§ 138. Τροπὴ ἀρρήτων παρονομαστῶν εἰς ῥητούς. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος περιέχῃ ἓν ἢ πλείονα ῥιζικά, εἶναι ὠφέλιμον ἀπὸ ἀπόψεως ἀκριβεστέρου ὑπολογισμοῦ αὐτῆς, νὰ ἐξαλείφωμεν ταῦτα ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, ἤτοι ***νὰ καθιστῶμεν αὐτὸν ῥητὸν ἢ σύμμετρον.***

Ἡ ἐργασία αὕτη γίνεται ὡς ἀκολούθως:

Α'. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{A}{\sqrt{\alpha}}$ ἔνθα Α, καὶ α εἶναι τυχοῦσαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἢ ἀριθμοί. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὴν $\sqrt{\alpha}$ δὲν βλάπτομεν τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{A}{\sqrt{\alpha}} = \frac{A\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\alpha}} = \frac{A\sqrt{\alpha}}{\alpha}$.

Οὕτω $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\alpha} = \sqrt{\alpha}$ κ.λ.π.

ΣΗΜ. Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\sqrt{2}}$ εἶναι ῥητός· κατ' ἀκολουθίαν ἀκριβολογοῦντες ἔπρεπε νὰ διατυπώσωμεν δι' αὐτὸν τὸ σχετικὸν ζήτημα οὕτω:

«Νὰ καταστῇ σύμμετρος ὁ παρονομαστὴς τοῦ $\frac{1}{\sqrt{2}}$». Χάριν ὅμως τῆς γενικότητος ἐπεκράτησε καὶ διὰ τοὺς τοιούτους παρονομαστὰς ἡ διατύπωσις «νὰ καταστῇ ὁ παρονομαστὴς ῥητός», ἥτις ἁρμόζει μόνον, ὅταν εἰς τοὺς παρονομαστὰς σημειοῦνται ῥίζαι ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Β'. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{A}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους ἐπὶ $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{A}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \frac{A(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{A}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$.

Οὕτω $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$.

Γ'. Ἔστω ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{A}{\alpha+\sqrt{\beta}}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\dfrac{A}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\dfrac{A(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$.

Οὕτω $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{3}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{3(3+\sqrt{2})}{9-2}=\dfrac{3(3+\sqrt{2})}{7}$.

Δ΄. Ἔστω τὸ κλάσμα $\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}$, εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\frac{A\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}}=\frac{A\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}}=\frac{A\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}}{\alpha}.$$

Οὕτω: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\dfrac{A}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}$. Ἐὰν χάριν συντομίας θέσωμεν $\sqrt[3]{\alpha}=K$ καὶ $\sqrt[3]{\beta}=\Lambda$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\alpha=K^3$, $\beta=\Lambda^3$ καὶ $\alpha+\beta=K^3+\Lambda^3$. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστὸν (§ 54) εἶναι $K^3+\Lambda^3=(K+\Lambda).(K^2-K\Lambda+\Lambda^2)$, ἕπεται ὅτι

$$\alpha+\beta=(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}).$$

Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2})$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{A}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}=\frac{A(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2})}{\alpha+\beta}.$$ Οὕτως

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{5}.$$ Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=\frac{A(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2})}{\alpha-\beta}.$$

Ἀσκήσεις. Νὰ καταστῶσι ῥητοὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν ἀκολούθων κλασμάτων

710) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}$.

711) $\dfrac{7}{1-\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$, $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$, $\dfrac{3}{3-\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{5+\sqrt{3}}$.

712) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$, $\dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$, $\dfrac{\chi\sqrt{\psi}+\psi\sqrt{\chi}}{\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}}$.

713) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $\dfrac{5}{\sqrt[3]{5}}$.

714) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$, $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$, $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$.

§ **139. Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίων πολυωνύμων.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν ἀκεραίου πολυωνύμου Π διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας π. χ. δυνάμεις γράμματός τινος αὐτοῦ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη εἶναι $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, θὰ εἶναι

$$\Pi=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+2\alpha\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2 \qquad (1)$$

Τοῦ ἀναπτύγματος τούτου οἱ ὅροι α^2, $2\alpha\beta$, $2\gamma\delta$, δ^2 πρὸς οὐδένα ὄντες ὅμοιοι, ὡς εὐκόλως βεβαιούμεθα, μένουσιν ἀμετάβλητοι καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ὁ πρῶτος ἄρα ὅρος τοῦ Π εἶναι α^2, ἤτοι εἶναι τετράγωνον τοῦ α΄ ὅρου τῆς ζητουμένης τετρ. ῥίζης. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ***πρῶτος ὅρος τῆς ζητουμένης τετρ. ῥίζας εἶναι ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ α΄ ὅρου τοῦ δοθέντος πολυωνύμου.***

Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (1) ἀφαιρέσωμεν τὸν α^2 καὶ θέσωμεν $\Pi-\alpha^2=\Pi'$, εὑρίσκομεν

$$\Pi'=2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+2\alpha\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2. \qquad (2)$$

Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι $2\alpha\beta : 2\alpha=\beta$ συμπεραίνομεν ὅτι ***ὁ β΄ ὅρος τῆς ζητουμένης τετρ. ῥίζης εἶναι πηλίκον τοῦ α΄ ὅρου τοῦ ὑπολοίπου Π΄ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α΄ ὅρου τῆς ζητουμένης τετρ. ῥίζης.***

Ἐὰν ἤδη ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (2) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $2\alpha\beta+\beta^2$ ἢ τὸ γινόμενον $(2\alpha+\beta)\beta$, καὶ θέσωμεν $\Pi'-(2\alpha+\beta)\beta=\Pi''$, εὑρίσκομεν

$$\Pi''=2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+2\alpha\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\Pi''=\Pi'-(2\alpha+\beta)\beta$, $\Pi'=\Pi-\alpha^2$ ἕπεται ὅτι

$$\Pi''=\Pi-\alpha^2-(2\alpha+\beta)\beta=\Pi-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=\Pi-(\alpha+\beta)^2,$$

ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον Π΄΄ εὑρέθη ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ Π τοῦ $(\alpha+\beta)^2$. Ἐκ δὲ τῶν ὅρων τοῦ Π΄΄ ὁ $2\alpha\gamma$ εἶναι ἀνωτέρου βαθμοῦ ὅλων τῶν ἄλλων καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν εἶναι ὁ α΄ ὅρος τοῦ Π΄΄. Ἐπειδὴ δὲ $2\alpha\gamma : 2\alpha=\gamma$, ἕπεται ὅτι ***ὁ γ΄ ὅρος τῆς τετρ. ῥίζας εἶναι πηλίκον τοῦ α΄ ὅρου τοῦ ὑπολοίπου Π΄΄ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α΄ ὅρου τῆς τετρ. ῥίζης.***

Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (3) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$ ἢ $(2\alpha+2\beta+\gamma)\gamma$ καὶ θέσωμεν $\Pi'''=\Pi''-(2\alpha+2\beta+\gamma)\gamma$, εὑρίσκομεν $\Pi'''=2\alpha\delta+2\beta\delta+2\gamma\delta+\delta^2 \qquad (4)$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $Π''' = Π'' - (2αγ + 2βγ + γ^2)$ καὶ $Π'' = Π - (α + β)^2$ προκύπτει εὐκόλως ὅτι $Π''' = Π - (α + β + γ)^2$. Ἐκ δὲ τῶν ὅρων τοῦ $Π'''$ ὁ $2αδ$ εἶναι μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἢ οἱ ἄλλοι ὅροι αὐτοῦ· εἶναι ἄρα ὁ $2αδ$ ὁ α' ὅρος τοῦ $Π'''$. Ἐπειδὴ δὲ $2αδ : 2α = δ$, ἕπεται ὅτι ***ὁ δ' ὅρος τῆς τετρ. ῥίζης εἶναι πηλίκον τοῦ α' ὅρου τοῦ ὑπολοίπου $Π'''$ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α' ὅρου τῆς τετρ. ῥίζης.***

Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι τὸ β' μέλος τῆς (4) εἶναι $(2α + 2β + 2γ + δ).δ$ εὑρίσκομεν ὅτι $Π''' - (2α + 2β + 2γ + δ)\,δ = 0$.

Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἀκόλουθος κανών. ***Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν ἀκεραίου πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον εἶναι τέλειον τετράγωνον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :***

Α'. Διατάσσομεν τὸ πολυώνυμον κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις γράμματός τινος αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ α' ὅρου αὐτοῦ· αὕτη εἶναι ὁ α' ὅρος τῆς ζητουμένης τετρ. ῥίζης.

Β'. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸν α' ὅρον αὐτοῦ καὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος α' ὅρου τῆς τετρ. ῥίζας. Τὸ πηλίκον εἶναι ὁ β' ὅρος τῆς τετρ. ῥίζης καὶ γράφεται δεξιὰ τοῦ α' ὅρου αὐτῆς.

Γ'. Εἰς τὸ διπλάσιν τοῦ α' ὅρου τῆς τετρ. ῥίζης προσθέτομεν τὸν β' ὅρον αὐτῆς καὶ τὸ ἄθροισμα πολ)ζομεν ἐπὶ τὸν β' ὅρον τῆς τετρ. ῥίζης. Τὸ γινόμενον δέ, τὸ ὁποῖον οὕτως εὑρίσκομεν, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ προηγούμενον ὑπόλοιπον καὶ εὑρίσκομεν οὕτω δεύτερον ὑπόλυπον.

Δ'. Διαιροῦμεν τὸν α' ὅρον τοῦ νέου τούτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α' ὅρου τῆς τετρ. ῥίζης, τὸ δὲ πηλίκον εἶναι ὁ γ' ὅρος τῆς τετρ. ῥίζης, ἀναγράφεται δὲ δεξιὰ τοῦ β' ὅρου αὐτῆς.

Ε'. Διπλασιάζομεν τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς τετρ. ῥίζης ἀποτελούμενον ἄθροισμα καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέτομεν καὶ τὸν γ' ὅρον τῆς τετρ. ῥίζης, τὸ δὲ προκύπτον ἄθροισμα πολ)ζομεν ἐπὶ τὸν γ' ὅρον τῆς τετρ. ῥίζης. Ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον οὕτως εὑρίσκομεν, ἀπὸ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τρίτον ὑπόλοιπον.

Στ'. Διαιροῦμεν τὸν α' ὅρον τοῦ τρίτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α' ὅρου τῆς τετρ. ῥίζης· τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ δ' τῆς ῥίζης καὶ ἀναγράφεται δεξιὰ τοῦ γ' ὅρου. Οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν.

Τὴν πρᾶξιν διατάσσομεν ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

$$\begin{array}{r|l}
4\chi^6-20\chi^5+41\chi^4-52\chi^3+46\chi^2-24\chi+9 & 2\chi^3-5\chi^2+4\chi-3 \\
-4\chi^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-20\chi^5+41\chi^4-52\chi^3+46\chi^2-24\chi+9 & \\
20\chi^5-25\chi^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
16\chi^4-52\chi^3+46\chi^2-24\chi+9 & \\
-16\chi^4+40\chi^3-16\chi^2 \qquad\quad & \\
\hline
-12\chi^3+30\chi^2-24\chi+9 & \\
12\chi^3-30\chi^2+24\chi-9 & \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r}
4\chi^3-5\chi^2 & 4\chi^3-10\chi^2+4\chi & 4\chi^3-10\chi^2+8\chi-3 \\
-5\chi^2 & 4\chi & -3 \\
\hline
-20\chi^5+25\chi^4 & 16\chi^4-40\chi^3+16\chi^2 & -12\chi^3+30\chi^2-24\chi+9
\end{array}$$

Κατὰ ταῦτα $(2\chi^3-5\chi^2+4\chi-3)^2=4\chi^6-20\chi^5+41\chi^4-52\chi^3+46\chi^2-24\chi+9$. Ἐπειδὴ καὶ $[-(2\chi^3-5\chi^2+4\chi-3)]^2=(2\chi^3-5\chi^2+4\chi-5)^2$, ἕπεται ὅτι

$$\sqrt{4\chi^6-20\chi^5+41\chi^4-52\chi^3+46\chi^2-24\chi+9}=\pm(2\chi^3-5\chi^2+4\chi-3).$$

Τὸ ἐξαγόμενον $-(2\chi^3-5\chi^2+4\chi-3)$ ἢ $-2\chi^3+5\chi^2-4\chi+3$ θὰ εὑρίσκομεν διὰ τῆς ἀνωτέρω πράξεως, ἂν ἐλαμβάνομεν ὡς τετρ. ῥίζαν τοῦ $4\chi^6$ τὸ μονώνυμον $-2\chi^3$ ἀντὶ τοῦ $2\chi^3$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται εὐκόλως ὅτι ἀκέραιον πολυώνυμον δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

Α΄. Ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον ὅρους. Διότι τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου μονωνύμου εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον, παντὸς δὲ δυωνύμου εἶναι τριώνυμον.

Β΄. Ἐὰν μετὰ τὴν διάταξιν ὁ α΄ καὶ τελευταῖος ὅρος δὲν εἶναι ἀμφότεροι τέλεια τετράγωνα.

Γ΄. Ἂν ὁ α΄ ὅρος ὑπολοίπου τινὸς δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ α΄ ὅρου αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα ἑκάστου τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων.

715) $9x^4-24x^3+52x^2-48x+36$

716) $x^4+4x^3-6x^2-20x+25$

717) $4x^6-12x^5+29x^4-34x^3+31x^2-10x+1$

718) $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^3}{4}+\dfrac{41x^2}{16}-3x+4.$

719) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{(x^2-1)\sqrt{x^4-6x^3+19x^2-30x+25}}{7(x+1)(x^2-3x+5)}$

720) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{3(x^3-5)}{4\sqrt{\chi^6-10\chi^3+25}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Φανταστικοὶ καὶ μιγάδες ἀριθμοί.

§ **140. Φανταστικαὶ μονάδες καὶ φανταστικοὶ ἀριθμοί.** Ἐμάθομεν (§ 123) ὅτι ὁ ἀριθμὸς -4 δὲν ἔχει τετρ. ῥίζαν, ἤτοι οὐδεὶς ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς ἔχει τετράγωνον τὸν -4. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐπινοήσωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ τετράγωνον τὸ -4, πρέπει νὰ ὀνομάζωμεν αὐτὸν τετρ. ῥίζαν τοῦ -4 καὶ ἑπομένως θὰ παριστάνωμεν οὕτω $\sqrt{-4}$. Πρέπει δὲ ὁ νέος οὗτος ἀριθμὸς νὰ ἔχῃ τὰς ἰδιότητας τῶν ἄλλων ἀριθμῶν χάριν τῆς γενικότητος τῶν ἰδιοτήτων τούτων καὶ τοῦ ὁμοιομόρφου τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος. Πρέπει λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = \pm 2\sqrt{-1}$. Οὕτω βλέπομεν ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀριθμὸν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ -1. Τὸν νέον τοῦτον ἀριθμὸν γράφομεν συντόμως οὕτω i (ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως imaginaire=φανταστικός), ἤτοι θέτομεν $\boxed{\sqrt{-1} = i \text{ καὶ ἑπομένως } i^2 = -1.}$

Ὁμοίως δεχόμεθα ὡς ἀριθμὸν καὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ προηγουμένου ἤτοι τὸν $-i$ ἢ $-\sqrt{-1}$ καὶ ἑπομένως εἶναι καὶ $(-i)^2 = +i^2 = -1$.

Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς i καὶ $-i$ καὶ τὰ μέρη αὐτῶν $\frac{i}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{i}{3}, \frac{-i}{3}$ κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα δεχόμεθα ὡς ἀριθμούς, καλοῦμεν ***φανταστικὰς μονάδας***, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς μέχρι τοῦδε γνωστὰς μονάδας, τὰς ὁποίας καλοῦμεν ***πραγματικὰς*** μονάδας. Κατὰ ταῦτα εἶναι $\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$, ἤτοι ὁ -4 ἔχει δύο τετρ. ῥίζας ἀντιθέτους. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $\sqrt{-9} = \pm 3i$, $\sqrt{-2} = \pm i.\ 1{,}414...$

Οἱ νέοι ἀριθμοὶ $2i, -2i, 3i, -3i, i.1{,}414...., -i.1{,}414...$ γίνονται ἀπὸ τὰς φανταστικὰς μονάδας καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῶν. Λέγονται δὲ οὗτοι ***φανταστικοὶ*** ἀριθμοί, ἐν ᾧ οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***πραγματικοὶ*** ἀριθμοί.

Ὥστε: ***Φανταστικὸς ἀριθμὸς λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ μίαν φανταστικὴν μονάδα ἢ καὶ ἀπὸ μέρη αὐτῆς.***

Διὰ τῆς ἐπινοήσεως τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν πᾶς πραγματικὸς καὶ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο τετρ. ῥίζας ἀντιθέτους καὶ φανταστικάς.

§ **141. Μιγάδες ἀριθμοί.** Ἕκαστος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $2+3i, 5-2i, \frac{1}{2}+\frac{3i}{4}, \frac{5}{8}-\frac{2i}{5}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα πραγματικὸν καὶ ἕνα φανταστικὸν ἀριθμόν· καλεῖται δὲ ἕκαστος τούτων ***μιγὰς*** ἀριθμός.

Γενικῶς: Μιγὰς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄθροισμα ἑνὸς πραγματικοῦ καὶ ἑνὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ ταῦτα πᾶς μιγὰς ἀριθμὸς ἔχει τὴν μορφὴν $\alpha+\beta i$, ἔνθα α καὶ β εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν $\alpha=0$, ὁ $\alpha+\beta i$ γίνεται βi, ἤτοι φανταστικὸς ἀριθμός. Διὰ τοῦτο εἰς τὰ ἀκόλουθα θὰ θεωρῶμεν πάντα φανταστικὸν ἀριθμὸν ὡς μιγάδα, οὗ τὸ πραγματικὸν μέρος εἶναι μηδέν.

Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ πραγματικὸν μέρος καὶ ἀντίθετα φανταστικὰ μέρη, λέγονται ***συζυγεῖς***.

§ **142. Ἰσότης μιγάδων ἀριθμῶν.** Ἡ ἰσότης τῶν νέων ἀριθμῶν πρέπει νὰ ὁρισθῇ οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύωσιν καὶ ἐπ᾿ αὐτῶν αἱ ἰδιότητες τῶν ἴσων πραγματικῶν ἀριθμῶν, χάριν τῆς γενικότητος αὐτῶν καὶ τοῦ ὁμοιομόρφου τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος. Οὕτως, ἂν εἶναι $\beta=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\beta i=\delta i$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἂν δὲ εἶναι καὶ $\alpha=\gamma$, πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$. Ἀντιστρόφως. Ἂν εἶναι $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$. Διότι, ἀφ᾿ οὗ θέλομεν νὰ διατηρῶνται αἱ ἰδιότητες τῶν ἴσων ἀριθμῶν, πρέπει ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$ νὰ ἕπωνται κατὰ σειρὰν αἱ ἰσότητες $\alpha-\gamma=(\delta-\beta)i$, $(\alpha-\gamma)^2=(\delta-\beta)^2 i^2=-(\delta-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)^2+(\delta-\beta)^2=0$. Ἡ τελευταία δὲ αὕτη ἰσότης ἀληθεύει μόνον, ἂν εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\delta=\beta$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι: ***Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, μόνον ἂν τὰ πραγματικὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ οἱ συντελεσταὶ τοῦ i εἶναι ἐπίσης ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.***

Πράξεις ἐπὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν.

§ **143. Α΄ Πρόσθεσις.** Ἐπειδὴ ἕκαστος μιγὰς εἶναι ἄθροισμα, ἡ πρόσθεσις μιγάδων ἀριθμῶν πρέπει νὰ γίνηται, ὅπως ἡ πρόσθεσις ἀθροισμάτων.

Ὥστε:
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)+(\varepsilon+\zeta i)+\ldots+(\varrho+\sigma i)&=\\ \alpha+\beta i+\gamma+\delta i+\varepsilon+\zeta i+\ldots+\varrho+\sigma i&\\ =(\alpha+\gamma+\varepsilon+\ldots+\varrho)+(\beta+\delta+\zeta+\ldots+\sigma)i& \quad (1)\end{aligned}$$

Ἄρα: ***Τὸ ἄθροισμα μιγάδων εἶναι μιγάς, οὗ τὸ μὲν πραγματικὸν μέρος εἶναι ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν μερῶν αὐτῶν, ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ i εἶναι ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ i εἰς τοὺς προσθετέους.***

Ἂν $\alpha=\gamma=\ldots=\varrho=0$, ἡ προηγουμένη ἰσότης (1) γίνεται
$$\beta i+\delta i+\zeta i+\ldots+\sigma i=(\beta+\delta+\zeta+\ldots+\sigma)i$$

Ἂν δὲ $\alpha=\gamma=0$, ἡ αὐτὴ ἰσότης (1) γίνεται
$$\beta i+\delta i+(\varepsilon+\zeta i)+\ldots+(\varrho+\sigma i)=(\varepsilon+\ldots+\varrho)+(\beta+\delta+\ldots+\sigma)i.$$

§ **144. Β΄. Ἀφαίρεσις.** Ἔστω ὅτι $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=x+yi$. (1)

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, τὸν ὁποῖον ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τοὺς νέους ἀριθμούς, πρέπει νὰ εἶναι

$$\alpha+\beta i=(\gamma+\delta i)+(x+yi)=(\gamma+x)+(\delta+y)i.$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται (§ 142) ὅτι $\alpha=\gamma+x$ καὶ $\beta=\delta+y$,

ὅθεν $$x=\alpha-\gamma,\ y=\beta-\delta.$$

Ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται $\boxed{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i.}$ (2)

Ἄρα: ***Ἡ διαφορὰ μιγάδος ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου τοιούτου εἶναι μιγὰς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει πραγματικὸν μὲν μέρος τὴν ἀντίστοιχον διαφορὰν τῶν πραγματικῶν μερῶν τῶν ἀριθμῶν τούτων, συντελεστὴν δὲ τοῦ i τὴν ἀντίστοιχον διαφορὰν τῶν συντελεστῶν τοῦ i εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.***

Οὕτω $(5+6i)-(3+2i)=2+4i$, $(3+4i)-(5+2i)=-2+2i$.

Ἂν $\alpha=\gamma=0$ ἡ προηγουμένη ἰσότης (2) γίνεται $\beta i-\delta i=(\beta-\delta)i$.

Ἂν εἶναι $\gamma=0$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται $(\alpha+\beta i)-\delta i=\alpha+(\beta-\delta)i$.

Ἂν δὲ εἶναι $\alpha=0$, γίνεται $\beta i-(\gamma+\delta i)=-\gamma+(\beta-\delta)i$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος (2) προκύπτουσιν καὶ αἱ ἰσότητες

$$\alpha-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)-\delta i,\ (\alpha+\beta i)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta i.$$

§ **145. Γ΄. Πολλαπλασιασμός.** Ἐπειδὴ ἕκαστος μιγὰς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα, τὸ γινόμενον μιγάδων ἀριθμῶν πρέπει νὰ εὑρίσκηται, ὅπως εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ἀθροισμάτων.

Οὕτω $$\boxed{\begin{aligned}(\alpha+\beta i).(\gamma+\delta i)&=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i\\(\alpha+\beta i).(\gamma-\delta i)&=\alpha\gamma+\beta\gamma i-\alpha\delta i-\beta\delta i^2=(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i\end{aligned}}\quad(3)$$

Ἂν $\alpha=\gamma=0$ ἡ α΄ τῶν ἰσοτήτων τούτων γίνεται $(\beta i)(\delta i)=-\beta\delta$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha+\beta i)\delta i=-\beta\delta+\alpha\delta i$, $(\beta i).(-\delta i)=\beta\delta$ κτλ.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\boxed{(\alpha+\beta i).(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2,}$ ἤτοι ***τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ πραγματικοῦ αὐτῶν μέρους ηὐξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ i ἐν οἱῳδήποτε τῶν συζυγῶν τούτων ἀριθμῶν.***

§ **146. Δ΄. Διαίρεσις.** Ἔστω ὅτι $(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)=x+yi$. (4)

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, τὸν ὁποῖον ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τοὺς νέους ἀριθμούς, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha+\beta i=(\gamma+\delta i).(x+yi)$ ἢ $\alpha+\beta i=(\gamma x-\delta y)+(\gamma y+\delta x)i$. Ἐκ ταύτης δὲ προκύπτουσιν (§ 142) αἱ ἰσότητες $\alpha=\gamma x-\delta y$ καὶ $\beta=\gamma y+\delta x$, ὅθεν

$$x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2},\ y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}.$$

Ἡ ἰσότης ἄρα (4) γίνεται

$$\boxed{(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.}\quad(5)$$ τύπ

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἐξάγονται εὐκόλως αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες

$$\beta i : \delta i = \frac{\beta}{\delta}, \quad (\alpha+\beta i) : \delta i = \frac{\beta}{\delta} - \frac{\alpha}{\delta} i,$$

$$\alpha : (\gamma+\delta i) = \frac{\alpha\gamma}{\gamma^2+\delta^2} - \frac{\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} i = \frac{\alpha(\gamma-\delta i)}{\gamma^2+\delta^2}.$$

τύποι

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν προηγουμένων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων ἐπὶ μιγάδων ἀριθμῶν γίνεται κυρίως διὰ πράξεων ἐπὶ πραγματικῶν ἀριθμῶν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἰσχύουσιν ἐπ' αὐτῶν αἱ ἀντίστοιχοι ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις.

721) $5i+2i+7i$, $\quad \frac{2}{3}i - \frac{5}{6}i + 2i$.

722) $(5+4i)+7i-(2+3i)$, $\quad (5+3i)+(7-2i)$, $(1+i)+(-2-3i)$.

723) $(5+8i)+(3-5i)+(4+2i)$, $\quad (12-3i)+(5+6i)+4i$.

724) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(\frac{1}{3}+2i\right)$, $\left(\frac{3}{4}-\frac{5i}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2i}{3}\right)$
$+\left(1+\frac{5i}{12}\right)$.

725) $(8+5i)-(4+3i)$, $\quad (4+3i)-(5+4i)$.

726) $\left(\frac{2}{3}-4i\right)-\left(\frac{1}{6}+2i\right)$, $\left(\frac{5}{6}+3i\right)-\left(\frac{1}{6}+3i\right)$.

727) $(2i).(-3i)$, $\quad (7+2i).(3i)$, $\quad (2-5i).(-2i)$

728) $(3+2i).(5+3i)$, $\quad (10+8i).\left(\frac{1}{2}+2i\right)$

729) $(5+3i).(5-3i)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right).\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i\right)$

730) $(2+3i).(1+2i).(3+4i)$, $\quad (4-2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right).\left(1-\frac{5}{3}i\right)$

731) $(2+3i)^2$, $\quad (5-2i)^2$, $\quad (1+i)^2$.

732) $8i : 4i$, $\quad 6i : (-3i)$, $\quad 5 : (2+3i)$, $\quad (6+8i) : (-4i)$.

733) $(6+8i) : (2+4i)$, $(4-2i) : (2+3i)$, $\quad \left(3+\frac{3i}{4}\right) : \left(\frac{1}{5}-\frac{2i}{3}\right)$.

734) $(5{,}35+0{,}5i) : (2-0{,}6i)$, $\quad (8-0{,}03i) : (4+0{,}03i)$.

735) Ποῖος ἀριθμὸς πολ)ζόμενος ἐπὶ $2+3i$ δίδει γινόμενον 8 ;

736) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τέταρτον αὐξηθὲν κατὰ τὸν ἀριθμὸν $2-5i$ δίδει τὸν $3+i$;

737) Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 10, ὅπως εὕρωμεν πηλίκον $10+10i$;

738) Νὰ καταστῇ πραγματικὸς ἀριθμὸς ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου τῶν κλασμάτων $\frac{2+3i}{3+4i}$, $\frac{1}{1-i}$, $\frac{3i}{7+3i}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ.

§ **147. Μορφαὶ δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.** Πᾶσα ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἐὰν ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταὶ (ἐὰν ἔχῃ), ἐκτελεσθῶσιν αἱ σημειωμέναι πράξεις, μεταφερθῶσιν ὅλοι οἱ ὅροι εἰς τὸ α΄ μέλος καὶ γείνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, λαμβάνει μίαν τῶν ἀκολούθων μορφῶν: $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ (1).

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=0 \quad (2), \quad \alpha\chi^2+\gamma=0 \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad \alpha\chi^2=0 \quad (4),$$

ἔνθα α εἶναι πάντοτε διάφορος τοῦ μηδενὸς ἀριθμός.

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ γενικὴ μορφή, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουσιν αἱ ἄλλαι, ἐὰν μηδενισθῇ ὁ εἷς ἢ ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ β καὶ γ. Οὕτως ἂν $\gamma=0$ καὶ $\beta\neq0$, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις (2)· ἂν $\beta=0$ καὶ $\gamma\neq0$, προκύπτει ἡ (3) καὶ ἂν $\beta=0$, $\gamma=0$, προκύπτει ἡ (4).

Λύσεις ἐξισώσεων 2ου βαθμοῦ.

§ **148. Α΄. Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2=0$.** Αὕτη προφανῶς γράφεται καὶ οὕτω $\alpha\chi\chi=0$. Ταὐτοποιεῖται ἄρα μόνον, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων τοῦ α΄ μέλους μηδενισθῇ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ α εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν $\chi=0$.

§ **149. Β΄. Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$.** Ἐξάγοντες εἰς τὸ α΄ μέλος τὸν κοινὸν παράγοντα χ ἐκτὸς παρενθέσεως θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi\,(\alpha\chi+\beta)=0$.

Αὕτη δὲ προφανῶς ἀληθεύῃ: α΄) διὰ $\chi=0$ καὶ β΄) διὰ τὴν τιμὴν τοῦ χ, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\alpha\chi+\beta=0$. Λύοντες τὴν πρωτοβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἀληθεύῃ διὰ $\chi=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$ ἔχει δύο ῥίζας 0 καὶ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $2\chi^2-6\chi=0$ ἢ $\chi\,(2\chi-6)=0$ ἀληθεύει α΄) ὅταν $\chi=0$ καὶ β΄) ὅταν $2\chi-6=0$ ἢ $\chi=3$.

§ **150. Γ΄. Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\gamma=0$.** Μεταφέροντες τὸν γνωστὸν ὅρον γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\alpha\chi^2=-\gamma$, ἥτις εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi^2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$. Ἐκ ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ χ ἔχει τετράγωνον τὸν $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$. Εἶναι ἄρα οὗτος τετρ. ῥίζα τοῦ $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$, ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $\chi=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$. Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ χ εἶναι πραγματικαὶ μέν, ἂν ὁ $-\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός· φανταστικαὶ δέ, ἂν ὁ $-\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $2x^2-8=0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $2x^2=8$, $x^2=4$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x=\pm2$. Ἡ δὲ ἐξίσωσις $2x^2+18=0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $2x^2=-18$, $x^2=-9$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x=\pm 3i$.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς $-\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, καθ᾽ ὅσον οἱ α καὶ γ εἶναι εἶναι ἑτερόσημοι ἢ ὁμόσημοι, ἔπεται ὅτι:

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\gamma=0$ ἔχει δύο ῥίζας πραγματικὰς μέν, ὅταν α καὶ γ εἶναι ἀριθμοὶ ἑτερόσημοι, φανταστικὰς δέ, ἂν α καὶ γ εἶναι ὁμόσημοι.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις.

✓ 739) α΄.) $3\chi^2=0$, β΄) $-5\chi^2=0$, γ΄) $2\chi^2-8\chi=0$, δ΄) $\chi^2-8\chi=0$, ε΄) $5\chi^2-\frac{3\chi}{4}=0$.

✓ 740) α΄) $\frac{\chi+2}{1+2\chi}=\frac{3\chi+4}{3+4\chi}$, β΄) $\frac{\chi}{\chi-1}+\frac{\chi}{\chi-9}=1$.

✓ 741) α΄.) $\chi-\frac{1}{5\chi}=\frac{19}{5\chi}$, β΄.) $\frac{3}{2\chi}+\chi=\frac{21}{2\chi}$, γ΄.) $\frac{\alpha}{\chi}+\frac{\chi}{\alpha}=\frac{2\alpha}{\chi}$.

✓ 742) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι διπλάσιον ἢ τριπλάσιον αὐτοῦ.

✓ 743) Τίς ἀριθμὸς ἐπὶ 32 πολλαπλασιαζόμενος γίνεται ἴσος πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου του;

✓ 744) Τὸ τετράγωνον τῆς ἡλικίας παιδίου ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ διπλάσιόν της καθίσταται ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον αὐτῆς. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία αὕτη;

§ **131. Δ΄. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.** Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ α καὶ χωρίσωμεν ἔπειτα τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τὸν ἄγνωστον ὅρον, εὑρίσκομεν τὴν πρὸς αὐτὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha}$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=\chi^2+2\frac{\beta}{2\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$,

ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$. Ἐξάγοντος δὲ τὴν τετρ. ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι

$$\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \text{ ὅθεν } \chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος οὗτος παρέχει δύο τιμὰς τοῦ χ ταὐτοποιούσας τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Συνήθως καλοῦμεν χ′ τὴν μίαν καὶ χ′′ τὸν ἄλλην· οὕτως εἶναι

$$\chi'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\ \chi''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (3)$$

ΣΗΜ. Ὁ τύπος (2) εἶναι γενικὸς ἐφαρμοζόμενος καὶ εἰς τὰς μερικὰς μορφὰς τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ὧν τὰς ῥίζας εὕρομεν προηγουμένως δι' εἰδικῶν μεθόδων. Οὕτω π. χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$ δίδει

$$\chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\beta}{2\alpha}, \text{ ὅθεν } \chi'=0 \text{ καὶ } \chi''=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Διερεύνησις. Α′). Ἐὰν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, αἱ ῥίζαι χ′ καὶ χ′′, τὰς ὁποίας παρέχει ὁ τύπος (2) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Β′). Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, αἱ ῥίζαι χ′ καὶ χ′′ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι· κατ' οὐσίαν δηληδὴ ἡ ἐξίσωσις ἔχει τότε μίαν ῥίζαν.

Ταύτην χάριν τῆς γενικότητος καλοῦμεν διπλῆν ῥίζαν.

Γ′). Ἐὰν τέλος εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ θὰ εἶναι φανταστικός, αἱ δὲ ῥίζαι χ′ καὶ χ′′ θὰ εἶναι ἀριθμοὶ ***μιγάδες***.

Κατὰ ταῦτα ἐκ τοῦ εἴδους τοῦ ὑπορρίζου $\beta^2-4\alpha\gamma$ διακρίνομεν τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως· τούτου ἕνεκα τὴν παράστασιν $\beta^2-4\alpha\gamma$ καλοῦμεν ***διακρίνουσαν*** τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, θέλομεν δὲ χάριν συντομίας παριστᾷ διὰ τοῦ Δ ἢ δ.

Παραδείγματα

1ον) ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $3\chi^2-9\chi+6=0$. Ἐπειδὴ $\alpha=3$, $\beta=-9$ καὶ $\gamma=6$, ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι $(-9)^2-4.3.6=81-72=9$, ὁ δὲ τύπος (2) γίνεται $\chi=\frac{9\pm\sqrt{9}}{2.3}$, ὅθεν $\chi=\frac{9\pm3}{6}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\chi'=\frac{9+3}{6}=2$ καὶ $\chi''=\frac{9-3}{6}=1$.

2ον) ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*** $\chi^2-2\chi-15=0$. Ἐπειδὴ $\alpha=1$, $\beta=-2$ καὶ $\gamma=-15$, θὰ εἶναι $\Delta=(-2)^2-4.1.(-15)=4+60=64$ καὶ ὁ τύπος (2) γίνεται $\chi=\frac{2\pm8}{2}$, ὅθεν $\chi'=\frac{2+8}{2}=5$ καὶ

$$\chi''=\frac{2-8}{2}=-3.$$

3ον) ***Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - 6\chi + 13 = 0$.*** Ἐπειδὴ $\alpha=1$, $\beta=-6$ καὶ $\gamma=13$, θὰ εἶναι $\Delta=(-6)^2-4.\ 1.\ 13=36-52=-16$, ὁ δὲ τύπος (2) γίνεται $\chi=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2}$ ἢ $\chi=\dfrac{6\pm 4i}{2}$, ὅθεν $\chi'=\dfrac{6+4i}{2}=3+2i$ καὶ $\chi''=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i$, ἤτοι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-6\chi+13=0$ εἶναι μιγάδες ἀριθμοί.

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ β εἶναι ἄρτιος καὶ θέσωμεν $\beta : 2=\beta'$, προκύπτει ὅτι $\beta=2.\beta'$, ὁ δὲ τύπος (2) γίνεται κατὰ σειράν.

$$\chi=\frac{-2\beta'\pm\sqrt{4\beta'^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, =\frac{-2\beta'\pm 2\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{-\beta'\pm\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3) εἶναι προτιμητέος τοῦ (2), ὅταν ὁ β εἶναι ἄρτιος, διότι αἱ ἐν αὐτῷ σημειούμεναι πράξεις γίνονται ταχύτερον.

Οὕτω διὰ τὴν ἀνωτέρω λυθεῖσαν ἐξίσωσιν $\chi^2-2\chi-15=0$, ἡ κατὰ τὸν τύπον (3) διακρίνουσα εἶναι $1^2-(-15)=1+15=16$ καὶ ὁ τύπος (3) γίνεται $\chi=1\pm 4$, ὅθεν $\chi'=5$ καὶ $\chi''=-3$.

Ἀσκήσεις: Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις.

√ 745) α'.) $4\chi^2-12\chi+8=0$ β'.) $2\chi^2+2\chi-4=0$, γ'.) $\chi^2+4\chi+3=0$.

√ 746) α'.) $(\chi-1)^2+(\chi+2)^2=29$, β'.) $5(\chi^2-2\chi)-3(\chi-2)^2=28$, γ'.) $3\chi(\chi-1)-90=0$.

√ 747) α'.) $\dfrac{\chi}{2}+\dfrac{2}{\chi}=\dfrac{5}{2}$, β'.) $\dfrac{\chi}{3}-\dfrac{3}{2\chi}=\dfrac{3}{2}$, γ'.) $\chi+\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{50}{7}$, δ'.) $\dfrac{9}{\chi}-\dfrac{\chi}{3}=2$

√ 748) α') $\chi+\dfrac{1}{\chi-3}=5$, β') $\dfrac{\chi}{3}+\dfrac{12}{\chi}=4$, γ') $\dfrac{5\chi+1}{5\chi-1}-\dfrac{5\chi-1}{5\chi+1}=\dfrac{5}{6}$,

δ') $1-\dfrac{\chi^2}{\chi-1}=\dfrac{1}{1-\chi}-6$.

√ 749) α') $\dfrac{2\chi-1}{\chi+1}=\dfrac{\chi+1}{\chi-2}$, β') $\dfrac{\chi+1}{\chi}-\dfrac{\chi}{\chi-1}=1$, γ') $\dfrac{2\chi}{3+\chi}-\dfrac{3+\chi}{2\chi}=6$.

√ 750) α') $\dfrac{5\chi+3}{\chi-1}+\dfrac{2\chi-3}{\chi-2}=9$, β') $\dfrac{\chi+8}{\chi-8}-2=\dfrac{24}{\chi-4}$, γ') $\dfrac{\chi+1}{\chi-1}-\dfrac{\chi-2}{\chi+2}=\dfrac{9}{5}$.

√ 751) α') $\dfrac{\chi+1}{\chi+2}+\dfrac{\chi-1}{\chi-2}=\dfrac{2\chi-1}{\chi-1}$, β') $\dfrac{\chi-2}{2\chi+4}+\dfrac{\chi+2}{2\chi-4}=\dfrac{\chi+3}{\chi-3}$,

γ') $\dfrac{1}{\chi-1}+\dfrac{1}{\chi-2}=\dfrac{1}{\chi-3}$.

√ 752) α') $\chi^2-3\alpha\chi+2\alpha^2=0$, β') $\chi^2+4\alpha\chi+3\alpha^2=0$, γ') $\chi^2-\alpha\chi+6=0$.

√ 753) α') $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-\beta^2=0$, β') $\chi^2+2(\alpha-\beta)\chi-4\alpha\beta=0$, γ') $2\chi^2-3\alpha\chi+\alpha^2=0$.

√ 754) α') $\alpha^3\chi^2-\alpha(\alpha+1)\chi+1=0$, β') $\chi^2-(2\alpha+3\alpha^2)\chi+6\alpha^3=0$, γ') $\alpha(3-\alpha^2)\chi^2-3\chi+\alpha=0$.

755) α') $\frac{\alpha}{\chi}+\frac{\chi}{\alpha}=\frac{5}{2}$, β') $\frac{\chi}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\chi}+\frac{7}{2}=0$,

γ') $\alpha^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\chi+1=0$.

756) α') $\frac{\alpha}{\chi}+\frac{\alpha-1}{\chi-1}=2$ β') $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\alpha-1}{\chi-1}=2$, γ') $\frac{\chi^2-\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\chi^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=0$.

757) α') $\frac{\chi^2+\alpha\chi+\beta}{\chi^2+\beta\chi+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}$, β') $\frac{1}{\alpha+\chi}+\frac{1}{\beta+\chi}+\frac{1}{\alpha-\chi}+\frac{1}{\beta-\chi}=0$,

γ') $\frac{\alpha}{\chi-\beta}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}=2$.

758 α') $\chi^2+(7\alpha-4\beta)\chi+\frac{49\alpha^2-56\alpha\beta}{4}=0$,

β') $\chi^2-(3\alpha+5\beta)\chi+\frac{25\beta^2+30\alpha\beta}{4}=0$.

759) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 15 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἐλαττούμενον κατὰ 41 καθίσταται ἴσον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου

760) Ἐὰν ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 1, ὁ κύβος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 169. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

761) Ἔμπορος πωλῶν ὕφασμα πρὸς 84,48 δραχμὰς τὸν πῆχυν κερδίζει ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν τὸ ἥμισυ τοῦ κόστους ἑκάστου πήχεως. Πόσον κοστίζει ὁ πῆχυς;

762) Φιλάνθρωπος εἶχε νὰ διανείμῃ 300 δραχμὰς εἰς τινας πτωχούς. Ἐπειδὴ δὲ δὲν προσῆλθεν εἷς πτωχός, ἕκαστος τῶν ἄλλων ἔλαβε 10 δραχμὰς περισσότερον. Πόσοι ἦσαν οἱ προσελθόντες πτωχοί;

763) Ἠγόρασέ τις μὲ 400 δραχ. ὕφασμα. Ἐὰν μὲ τὸ αὐτὸ χρηματικὸν ποσὸν ἠγόραζε τρεῖς πήχεις περισσοτέρους, τὸ ὕφασμα θὰ ἦτο κατὰ 30 δραχμὰς τὸν πῆχυν εὐθηνότερον. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;

764) Εἰς 90 ἐργάτας ἄνδρας καὶ γυναῖκας ἐπληρώθησαν 4000 δραχμαί. Ἔλαβε δὲ ἕκαστος ἀνὴρ τόσας δραχμάς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες καὶ ἑκάστη γυνὴ τόσας δραχμάς, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

765) Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 180, ἵνα τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου κατὰ 3;

766) Χωρικὸς ἠγόρασε πρόβατα ἀντὶ 10500 δραχμῶν. Ἐκ τούτων ἀπέθανον 5, τὰ δὲ ἄλλα ἐπώλησε 60 δραχμὰς ἀκριβώτερον ἕκαστον καὶ ἐκέρδισεν οὕτω 300 δραχμάς. Πόσα πρόβατα ἠγόρασεν;

767) Πατὴρ καὶ υἱὸς εἰργάζοντο εἰς τὸ αὐτὸ ἐργοστάσιον καὶ ἔλαβε ὁ μὲν πατὴρ 1400 δραχμάς, ὁ δὲ υἱὸς ἐργασθεὶς 5 ἡμέρας ὀλιγώτερον 750 δραχμάς. Ἐὰν ὁ πατὴρ εἰργάζετο 5 ἡμέρας ὀλιγώτερον ὁ δὲ υἱὸς 6 ἡμέρας περισσότερον, θὰ ἐλάμβανον τὸ αὐτὸ ποσόν. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ἕκαστος;

768) Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμὸς 264 γράφεται οὕτω 325;

Σχέσεις τῶν ῥιζῶν πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

§ 152. Α'. Ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν 2ου ἐξισώσεως.

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς γνωστὰς ἰσότητας

$\chi' = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $\chi'' = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi'+\chi'' = -\frac{2\beta}{2\alpha}$

ἢ $\chi'+\chi'' = -\frac{\beta}{\alpha}$ (1).

Ἄρα : ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀντίθετον πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ πρωτοβαθμίου ὅρου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου.***

Οὕτω τῆς ἐξισώσεως $2\chi^2+4\chi-6=0$ αἱ ῥίζαι ἔχουσιν ἄθροισμα—

$$-\frac{4}{2}=-2.$$

§ **153. Β΄. Γινόμενον τῶν ῥιζῶν 2ου ἐξισώσεως.** Ἐὰν τὰς ἰσότητας $\chi' = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $\chi'' = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι :

$\chi'\chi'' = \frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}$, ὅθεν προκύπτει

ὅτι $\chi'\chi'' = \frac{\gamma}{\alpha}$ (2)

Ἄρα : ***Τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν γνωστὸν ὅρον διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου.*** Οὕτως αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $2\chi^2+4\chi-6=0$ ἔχουσι γινόμενον $-\frac{6}{2}=-3$.

Ἐφαρμογαὶ τῶν σχέσεων ῥιζῶν καὶ συντελεστῶν.

§ **154. Πρόβλημα Ι.** ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη :***

Λύσις. Σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον τὴν διακρίνουσαν αὐτῆς, ὅπως διακρίνωμεν, ἂν αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικαὶ ἢ οὔ.

Ἔστω ὅτι $\Delta \geqq 0$, ἤτοι αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' τῆς ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαί. Ἤδη διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

Α΄. Ἂν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, ἐπειδὴ $\chi'\chi'' = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\chi'\chi'' > 0$· ἄρα αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' εἶναι ὁμόσημοι.

Ἂν δὲ εἶναι α΄) $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, θὰ εἶναι καὶ $\chi'+\chi'' > 0$, ἤτοι αἱ ὁμόσημοι ῥίζαι χ' καὶ χ'' ἔχουσιν ἄθροισμα θετικόν. Εἶναι ἄρα ἀμφότεραι θετικαί.

Ἂν δὲ εἶναι β΄) $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$, θὰ εἶναι καὶ $\chi' + \chi'' < 0$, ἤτοι αἱ ὁμόσημοι ῥίζαι ἔχουσιν ἄθροισμα ἀρνητικόν. Εἶναι ἄρα ἀμφότεραι ἀρνητικαί. Ὥστε :

Ἂν αἱ ῥίζαι ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἔχωσι γινόμενον θετικόν, αἱ ρίζαι θὰ εἶναι ἀμφότεραι θετικαὶ μέν, ἐὰν ἔχωσι καὶ ἄθροισμα θετικόν, ἀρνητικαὶ δέ, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα ἀρνητικόν.

Οὕτω τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$ αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ διότι $\Delta = 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0$. Ἔχουσι δὲ γινόμενον 6 καὶ ἄθροισμα 5, εἶναι ἄρα ἀμφότεραι θετικαί. Τῆς δὲ $2\chi^2 + 6\chi + 4 = 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἐπίσης πραγματικαί διότι $\Delta = 6^2 - 4.\ 2.\ 4 = 4 > 0$. Ἔχουσι δὲ αὗται γινόμενον $\frac{4}{2} = 2$ καὶ ἄθροισμα $-\frac{6}{2} = -3$· εἶναι ἄρα ἀμφότεραι ἀρνητικαί.

Β΄. Ἂν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, θὰ εἶναι καὶ $\chi'\,\chi'' < 0$, αἱ ρίζαι ἄρα εἶναι ἑτερόσημοι, ἤτοι ἡ μία εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ἡ δὲ ἄλλη ἀρνητικός.

Ἂν δὲ εἶναι α΄) $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, θὰ εἶναι καὶ $\chi' + \chi'' > 0$, ἤτοι αἱ ἑτερόσημοι ῥίζαι θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα θετικόν, κατὰ τὴν πρόσθεσιν ὅθεν αὐτῶν ἐπικρατεῖ τὸ σημεῖον +. Ἡ θετικὴ ἄρα ῥίζα ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

Ἂν δὲ εἶναι β΄) $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$, θὰ εἶναι καὶ $\chi' + \chi'' < 0$, ἤτοι αἱ ἑτερόσημοι ῥίζαι θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἀρνητικόν· κατὰ τὴν πρόσθεσιν ὅθεν ἐπικρατεῖ τὸ σημεῖον —. Ἡ ἀρνητικὴ ἄρα ῥίζα ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

Ὥστε: ***Ἂν αἱ ῥίζαι ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἔχωσιν ἀρνητικὸν γινόμενον, αἱ ῥίζαι εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν ἔχει ἡ θετικὴ μὲν ῥίζα, ἂν αὗται ἔχωσιν ἄθροισμα θετικόν, ἡ ἀρνητικὴ δὲ, ἄν ἔχωσιν ἄθροισμα ἀρνητικόν.***

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2 - 3\chi - 18 = 0$ ἔχει ῥίζας πραγματικάς, διότι $\Delta = 3^2 - 4\ 3.\ (-18) = 9 + 216 = 225 > 0$. Ἔχουσι δὲ αὗται γινόμενον μὲν $\frac{-18}{3} = -6$ καὶ ἄθροισμα $\frac{3}{3} = 1$. Εἶναι ἄρα αὗται ἑτερόσημοι καὶ ἡ θετικὴ ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν. Τῆς δὲ ἐξισώσεως $χ^2+χ-6=0$ αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι ($Δ=25$) ἔχουσι γινόμενον -6 καὶ ἄθροισμα -1· εἶναι ἄρα αὗται ἑτερόσημοι καὶ ἡ ἀρνητικὴ ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

Γ'. Ἂν $\frac{γ}{α}=0$, θὰ εἶναι $χ'χ''=0$ καὶ ἑπομένως μία τοὐλάχιστον τῶν ριζῶν θὰ εἶναι 0, ἡ δὲ ἄλλη θὰ εἶναι $-\frac{β}{α}$ (§ 152).

Ἂν $Δ<0$, αἱ ῥίζαι εἶναι ὡς γνωστὸν ἀριθμοὶ μιγάδες ἢ φανταστικοί, καθ' ὅσον β εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἢ μηδέν.

§ **155. Πρόβλημα II.** ***Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα π καὶ γινόμενον κ.***

Λύσις. Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν

$$αχ^2+βχ+γ=0. \tag{1}$$

Ἂν δὲ $χ'$ καὶ $χ''$ εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς, θὰ εἶναι κατὰ τὴν ἀπαίτησιν τοῦ προβλήματος $χ'+χ''=π$ καὶ $χ'χ''=κ$. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι

$$χ'+χ''=-\frac{β}{α} \text{ καὶ } χ'\cdot χ''=\frac{γ}{α}.$$ Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $-\frac{β}{α}=π$ καὶ $\frac{γ}{α}=κ$, ἄρα $β=-απ$ καὶ $γ=ακ$.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἐξίσωσις προκύπτει ἐκ τῆς (1), ἂν β καὶ γ ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν τιμῶν τούτων, ἤτοι εἶναι $αχ^2-απχ+ακ=0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $χ^2-πχ+κ=0$.

Ἄρα: ***Ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι ἔχουσι δεδομένον ἄθροισμα καὶ γινόμενον ἔχει συντελεστὴν τοῦ μὲν 2ου ὅρου τὴν θετικὴν μονάδα, τοῦ δὲ πρωτοβαθμίου ὅρου τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος καὶ γνωστὸν ὅρον τὸ δοθὲν γινόμενον.*** Οὕτω ἄθροισμα 5 καὶ γινόμενον 6 ἔχουσιν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $χ^2-5χ+6=0$.

§ **156. Πρόβλημα III.** ***Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ.***

Λύσις. Ἂν ὁ εἷς τούτων κληθῇ χ, ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $(α-χ)$. Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι ἔχουσι γινόμενον γ, πρέπει νὰ εἶναι $(α-χ)\cdot χ=γ$, ὅθεν $χ^2-αχ+γ=0$. Ὁ εἷς λοιπὸν τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἶναι ἡ μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $χ^2-αχ+γ=0$, ὁ δὲ ἄλλος θὰ εἶναι ἡ ἄλλη ῥίζα αὐτῆς, διότι αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχουσιν ἄθροισμα α.

Ἄρα: ***Δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθὲν ἄθροισμα καὶ γινόμενον εἶναι ρίζαι δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἥτις ἔχει συντελεστὴν*** *τοῦ μὲν πρωτοβαθμίου ὅρου τὴν $+1$, τοῦ δὲ δευτεροβαθμίου ὅρου τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος καὶ γνωστὸν ὅρον τὸ δοθὲν γινόμενον.*

§ **157. Πρόβλημα IV.** *Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα δοθείσας ῥίζας κ καὶ λ.*

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ δοθεῖσαι ῥίζαι ἔχουσιν ἄθροισμα $\kappa+\lambda$ καὶ γινόμενον $\kappa\lambda$, ἕπεται (§ 155) ὅτι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι

$$\chi^2-(\kappa+\lambda)\chi+\kappa\lambda=0.$$

Ἀσκήσεις 769) Νὰ διακριθῇ τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν ἑκάστης τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθῶσιν αὗται.

α′) $\chi^2+6\chi-8=0$, β′) $2\chi^2-10\chi+12=0$, γ′) $\chi^2-\chi-20=0$, δ′) $\chi^2+3\chi-28=0$.

770) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἑτεροσήμους.

771) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες α′) ἄθροισμα 7 καὶ γινόμενον 12, β′) ἄθροισμα 2 καὶ γινόμενον -15, γ′) ἄθροισμα 1 καὶ γινόμενον $\frac{3}{16}$ καὶ δ′) ἄθροισμα 2α καὶ γινόμενον $\alpha^2-\beta^2$.

772) Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας α′) τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 5, β′) τοὺς -3 καὶ 7, γ′) τοὺς $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{1}{5}$, δ′) τοὺς α καὶ $-\alpha$, ε′) τοὺς $\alpha+2\beta$ καὶ $\alpha-2\beta$, στ′) $2+\sqrt{3}$ καὶ $2-\sqrt{3}$, ζ′) τοὺς 5 καὶ $\frac{1}{5}$ η′) $\frac{2}{3}$ καὶ $-\frac{2}{3}$,

θ′) $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha}$, ι′) $\alpha+\beta$ καὶ $\frac{1}{\alpha+\beta}$.

773) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ γ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-\chi+\gamma=0$ ἔχει διπλῆν ῥίζαν; Διὰ ποίαν ἡ μία ῥίζα αὐτῆς εἶναι 1 καὶ διὰ ποίαν -1;

774) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\lambda\chi-4=$ ἔχει διπλῆν ῥίζαν καὶ διὰ ποίαν ῥίζας ἀντιθέτους;

775) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ ἡ ἐξίσωσι $2x^2+7x+\lambda=0$ ἔχει διπλῆν ρίζαν καὶ διὰ ποίαν ἔχει ρίζας ἀντιστρόφους;

776) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2+(3\lambda+2)x+\lambda^2-\lambda-5=0$ εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης;

777) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν π καὶ κ ἡ ἐξίσωσι $x^2+\pi x+\kappa=0$ ἔχει ρίζας π καὶ κ;

§ **158. Ἄθροισμα ὁμοίων δυνάμεων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.** Ἔστωσαν χ', χ'' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ καὶ $\Sigma_\mu=\chi'^\mu+\chi''^\mu$, $\Sigma_{\mu-1}=\chi'^{\mu-1}+\chi''^{\mu-1}$,...... $\Sigma_3=\chi'^3+\chi''^3$, $\Sigma_2=\chi'^2+\chi''^2$, $\Sigma=\chi'+\chi''$, $\Sigma_0=\chi'^0+\chi''^0=2$. Ἐπειδὴ χ', χ'' εἶναι ρίζαι τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, θὰ εἶναι

$$\alpha\chi'^2+\beta\chi'+\gamma=0,\quad \alpha\chi''^2+\beta\chi''+\gamma=0.$$

Ἐὰν πολ)σωμεν τὰ μέλη τῆς α′ ἐπὶ $\chi'^{\mu-2}$, τῆς δὲ β′ ἐπὶ $\chi''^{\mu-2}$, εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας

$$\alpha\chi'^\mu+\beta\chi'^{\mu-1}+\gamma\chi'^{\mu-2}=0,\quad \alpha\chi''^\mu+\beta\chi''^{\mu-1}+\gamma\chi''^{\mu-2}=0.$$

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν κατὰ τὰ μέλη ταύτας εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\alpha(\chi'^{\mu}+\chi''^{\mu})+\beta(\chi'^{\mu-1}+\chi''^{\mu-1})+\gamma(\chi'^{\mu-2}+\chi''^{\mu-2})$ ἢ

$$\alpha\Sigma_{\mu}+\beta\Sigma_{\mu-1}+\gamma\Sigma_{\mu-2}=0. \qquad (1)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα Σ_{μ}, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ μ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν προηγουμένως τὰ ἀθροίσματα $\Sigma_{\mu-1}$ καὶ $\Sigma_{\mu-2}$.

Οὕτως ἐπειδὴ $\Sigma_0=2, \Sigma_1=x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\alpha\Sigma_2-\frac{\beta^2}{\alpha}+2\gamma=0, \text{ ὅθεν } \Sigma_2=\chi'^2+\chi''^2=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha\Sigma_3+\frac{\beta^3-2\alpha\beta\gamma}{\alpha^2}-\frac{\beta\gamma}{\alpha}=0$, ὅθεν

$$\Sigma_3=\frac{\alpha\beta\gamma-\beta^3+2\alpha\beta\gamma}{\alpha^3} \text{ ἢ } \chi'^3+\chi''^3=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3} \text{ κ. τ. λ.}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\chi'^{-\mu}=\frac{1}{\chi'^{\mu}}, \chi''^{-\mu}=\frac{1}{\chi''^{\mu}}$ ἕπεται ὅτι

$$\Sigma_{(-\mu)}=\chi'^{-\mu}+\chi''^{-\mu}=\frac{1}{\chi'^{\mu}}+\frac{1}{\chi''^{\mu}}=\frac{\chi'^{\mu}+\chi''^{\mu}}{\chi'^{\mu}\chi''^{\mu}}$$

$$\text{ἢ } \Sigma_{(-\mu)}=\frac{\Sigma_{\mu}}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\mu}}, \text{ ὅθεν } \Sigma_{(-\mu)}=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\mu}\Sigma_{\mu} \qquad (2)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα ὁμοίων δυνάμεων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὧν οἱ ἐκθέται εἶναι ἀκέραιοι καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

$$\text{Οὕτω } \Sigma_{(-2)}=\chi'^{-2}+\chi''^{-2}=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2\Sigma_2=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2\cdot\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\gamma^2}$$

$$\Sigma_{(-3)}=\chi'^{-3}+\chi''^{-3}=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3\cdot\Sigma_3=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^3\cdot\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\gamma^3} \text{ κ.λ.}$$

Ἀσκήσεις. 778) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$.

779) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$.

780) Ἂν χ΄, χ΄΄ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\chi'^{-2}+\chi''^{-2}$.

781) Ἂν χ΄, χ΄΄ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\chi'^{-3}+\chi''^{-3}$.

782) Ἂν x΄, x΄΄ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $x'^4+x''^4$ καὶ τὸ $\chi'^{-4}+\chi''^{-4}$.

783) Ἂν χ΄, χ΄΄ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x+\kappa=0$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\chi'^4+\chi''^4$ καὶ τὸ $\chi'^{-4}+\chi''^{-4}$.

784) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $3x^2+3\pi x+\pi^2=0$.

§ 159. Μετασχηματισμοὶ τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Μετασχηματισμὸς δοθείσης ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καλεῖται ἡ εὕρεσις ἑτέρας δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι συνδέονται πρὸς τὰς ρίζας τῆς δοθείσης διὰ ὡρισμένης σχέσεως.

Πρὸς ἐκτέλεσιν παντὸς τοιούτου μετασχηματισμοῦ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως καὶ εἶτα ἀναγράφομεν τὴν ἐξίσωσιν κατὰ τὰ ἐν (§ 155) λεχθέντα. Ὡς παραδείγματα μετασχηματισμῶν ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

§ 160. Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἧς αἱ ρίζαι ὑπερβαίνουσι κατὰ λ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Λύσις. Ἂν κληθῶσι χ_1, χ_2 αἱ ρίζαι τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως, θὰ εἶναι $\chi_1=\chi'+\lambda$, $\chi_2=\chi''+\lambda$ καὶ ἑπομένως $\chi_1+\chi_2=\chi'+\chi''+2\lambda$

$$=-\frac{\beta}{\alpha}+2\lambda=\frac{2\alpha\lambda-\beta}{\alpha},\quad \chi_1\cdot\chi_2=(\chi'+\lambda).(\chi''+\lambda)$$

$$=\chi'\chi''+(\chi'+\chi'').\lambda+\lambda^2=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta\lambda}{\alpha}+\lambda^2=\frac{\alpha\lambda^2-\beta\lambda+\gamma}{\alpha}$$

Ἡ ζητουμένη ἄρα ἐξίσωσις εἶναι $\chi^2-\frac{2\alpha\lambda-\beta}{\alpha}\chi+\frac{\alpha\lambda^2-\beta\lambda+\gamma}{\alpha}=0$ ἢ

$$\alpha\chi^2-(2\alpha\lambda-\beta)\chi+\alpha\lambda^2-\beta\lambda+\gamma=0$$

§ 161. Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας ἀντιστρόφους τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Λύσις. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $x_1=\frac{1}{x'}$, $x_2=\frac{1}{x''}$, εὑρίσκομεν εὐκόλως

ὅτι $x_1+x_2=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{\frac{-\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{-\beta}{\gamma}$ καὶ $x_1x_2=\frac{1}{x'x''}=\frac{\alpha}{\gamma}$

Ἡ ζητουμένης ἄρα ἐξίσωσις εἶναι

$$x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha}{\gamma}=0 \text{ ἢ } \gamma x^2+\beta x+\alpha=0.$$

§ 162. Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰ γινόμενα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἐπὶ λ.

Λύσις. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $x_1=\lambda x'$, $x_2=\lambda x''$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $x_1+x_2=\lambda(x'+x'')=-\frac{\lambda\beta}{\alpha}$ καὶ $x_1x_2=\lambda^2x'x''=\frac{\lambda^2\gamma}{\alpha}$. Ἡ ζητουμένη ἄρα ἐξίσωσις εἶναι $x^2+\frac{\lambda\beta}{\alpha}x+\frac{\lambda^2\gamma}{\alpha}=0$ ἢ $\alpha x^2+\lambda\beta x+\lambda^2\gamma=0$.

§ **163. Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἐπὶ λ.**

Λύσις. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $x_1=\frac{\lambda}{x'}$, $x_2=\frac{\lambda}{x''}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$x_1+x_2=\lambda\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)=\lambda\cdot\frac{x'+x''}{x'x''}=\lambda\cdot\frac{\frac{-\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{-\lambda\beta}{\gamma} \quad \text{καὶ}$$

$$x_1x_2=\frac{\lambda^2}{x'x''}=\frac{\lambda^2\alpha}{\gamma}.$$ Ἡ ζητουμένη ἄρα ἐξίσωσις εἶναι

$$x^2+\frac{\lambda\beta}{\gamma}x+\frac{\lambda^2\alpha}{\gamma}=0 \text{ ἢ } \gamma x^2+\lambda\beta x+\alpha\lambda^2=0.$$

Ἀσκήσεις. 785) Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας ἀντιθέτους τῶν ῥιζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

786) Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $x^2+\pi x+\kappa=0$.

787) Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

788) Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τοὺς ἀντιστρόφους τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς $x^2+\pi x+\kappa=0$.

789) Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσς ἔχουσα ρίζας τοὺς ἀντιστρόφους τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

790) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι ὑπερβαίνουσι κατὰ γ τὰς ρίζας τὰς ἐξισώσεως $x^2+3x-\gamma=0$.

791) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι γινόμενα τῶν ριζῶν τῆς $x^2+\pi x-5=0$ ἐπὶ π.

792) Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς $x^2+\pi x+\kappa=0$.

793) Ἐὰν x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας $x'+2x''$ καὶ $x''+2x'$.

794) Ἐὰν x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\pi x+\kappa=0$, νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας $1-\frac{2}{x'}$ καὶ $1-\frac{2}{x''}$.

§ **164. Ἀνάλυσις τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς γινόμενον.** Ἔστωσαν x' καὶ x'' αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου τούτου, ἤτοι αἱ τιμαὶ τοῦ χ, δι' ἃς τὸ τριώνυμον μηδενίζεται. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην x' καὶ x'' εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ἕπεται ὅτι (§ 152, 153) $x'+x''=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x'x''=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι $\beta=-\alpha x'-\alpha x''$ καὶ $\gamma=\alpha x'x''$. Ἐὰν δὲ ἐν τῷ τριωνύμῳ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θέσωμεν ἀντὶ β καὶ γ τὰς εὑρεθείσας ταύτας τιμὰς αὐτῶν, ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου δὲν μεταβάλλεται, ἤτοι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha x^2+(-\alpha x'-\alpha x'')x+\alpha x'x''$. Ἐὰν δὲ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha x^2-\alpha x'x-\alpha x''x+\alpha x'x''.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha x^2-\alpha x'x=\alpha x(x-x')$ καὶ $-\alpha x''x+\alpha x'x''=-\alpha x''(x-x')$, ἕπεται ὅτι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha x(x-x')-\alpha x''(x-x')$. Ἐὰν δὲ ἐξαγάγωμεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν εἰς τὸ β΄ μέλος κοινὸν παράγοντα $\alpha(x-x')$, αὕτη γίνεται

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x')(x-x''). \qquad (1)$$

Ἄρα: ***Πᾶν τριώνυμον τοῦ 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἀναλύεται εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων, ὧν εἷς μὲν ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου τοῦ τριωνύμου, ὁ ἄλλος εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τοῦ ἀγνώστου τοῦ τριωνύμου ἀφαιρεθῇ ἡ μία ῥίζα τοῦ τριωνύμου καὶ ὁ γ΄, ἂν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου ἀφαιρεθῇ ἡ ἄλλη ῥίζα τοῦ τριωνύμου.***

Οὕτω τὸ τριώνυμον $3x^2-15x+18$ ἔχει ῥίζας 3 καὶ 2, τὰς ὁποίας ὁρίζομεν λύοντες τὴν ἐξίσωσιν $3x^2-15x+18=0$. Ἑπομένως κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι $3x^2-15x+18=3(x-3)(x-2)$.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $2x^2-2x-4=0$ ἔχει ῥίζας -1 καὶ 2, θὰ εἶναι $2x^2-2\chi-4=2(\chi+1)(\chi-2)$.

ΣΗΜ. Διὰ τοῦ τύπου (1) δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀμέσως ἐξίσωσιν ἔχουσαν δεδομένας ῥίζας κ καὶ λ (§ 157, IV). Τῷ ὄντι, τὸ α΄ μέλος αὐτῆς θὰ εἶναι τριώνυμον, ὅπερ θὰ ἔχῃ ῥίζας κ καὶ λ, τοῦ β΄ μέλους ὄντος μηδέν. Θὰ ἔχῃ ἄρα τοῦτο τὴν μορφὴν $\alpha(\chi-\varkappa)(\chi-\lambda)$, ἡ δὲ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι $\alpha(\chi-\varkappa)(\chi-\lambda)=0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $(\chi-\varkappa)(\chi-\lambda)=0$, ἢ $\chi^2-(\varkappa+\lambda)\chi+\varkappa\lambda=0$.

Ἀσκήσεις: 795) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἕκαστον τῶν τριωνύμων α΄) $2x^2-14x+24$, β΄) $3x^2+6x-9$, γ΄) x^2+x-2.

796) Νὰ ἀπλοποιηθῶσι τὰ ἀκόλουθα κλάσματα.

α΄) $\dfrac{2x^2-10x+12}{x^2-3x+2}$, β΄) $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+4x+2}$, γ΄) $\dfrac{3x^2+21x+30}{3x^2-12}$.

797) Νὰ ἀπλοποιηθῶσι τὰ ἀκόλουθα κλάσματα.

$\dfrac{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta}$ β΄) $\dfrac{x^2-3\alpha x+2\alpha^2}{x^2-4\alpha^2}$, γ΄) $\dfrac{x^2-\alpha x+x-\alpha}{x^2-\alpha x-x+\alpha}$.

798) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ τριώνυμον $x^2+x+\lambda$ ἰσοῦται πρὸς $(x-2)(x+3)$;

799) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ τριώνυμον $x^2+\lambda x+12$ ἰσοῦται πρὸς $(x-3)(x-4)$;

800) Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε ἕκαστον τῶν τριωνύμων $x^2+4x+\lambda$ καὶ $9x^2+\lambda x+225$ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

801) Διὰ ποίαν τιμὴν τῶν π καὶ κ εἶναι $\dfrac{x^2+\pi x+\varkappa}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+2}{x-2}$;

802) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{(x^2+3x-4)(x^2-4x-5)}{(x^2-1)(x^2-x-20)}$.

803) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $x^2+\frac{\alpha x}{\beta}+\frac{\beta x}{\alpha}+1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

Ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ ὑποβιβαζόμεναι.

§ **165. Α΄. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$, ἔνθα y εἶναι δευτεροβάθμιος συνάρτησις τοῦ x.** Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $(x^2-9x)^2+34(x^2-9x)+280=0$. Ἐὰν θέσωμεν $x^2-9x=y$ αὕτη γίνεται $y^2+34y+280=0$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἀληθεύει διὰ $y=-14$ καὶ $y=-20$, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων $x^2-9x=-14$ καὶ $x^2-9x=-20$.

Λύοντες ταύτας εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ῥίζας 7,2,5,4.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις

804) $(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=0$.

805) $(2x^2+3x)^2-3(2x^2+3x)-65=0$.

806) $(3x^2-x-1)^2-5(3x^2-x-1)-36=0$.

807) $x^4+2x^3-x^2-2x-360=0$.

808) $x^4-16x^3+11x^2+424x+660=0$.

§ **166. Β΄. Διώνυμοι ἐξισώσεις.** Ἡ γενικὴ μορφὴ τούτων εἶναι $Ax^\mu+Bx^\nu=0$, ἔνθα A, B εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενὸς οἱ δὲ μ καὶ ν ἀκέραιοι, θετικοί, διάφοροι ἀλλήλων καὶ οὐχὶ ἀμφότεροι μηδέν. Αὗται λύονται ὡς ἀκολούθως.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $\mu>\nu$, ἐξάγοντες τὸν x^ν ἐκτὸς παρενθέσεως εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $x^\nu(Ax^{\mu-\nu}+B)=0$.

Αὕτη ἀληθεύει ὅταν $x^\nu=0$ καὶ ὅταν $Ax^{\mu-\nu}+B=0$. Ἡ α΄ τούτων ἀληθεύει διὰ $x=0$, ἡ δὲ δευτέρα εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^{\mu-\nu}=-\frac{B}{A}.$$

Πρὸς λύσιν ταύτης διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

α΄) ***Ἐὰν ὁ ἐκθέτης μ—ν εἶναι ἄρτιος***. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂν μὲν εἶναι $-\frac{B}{A}>0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς ῥίζας τὰς $\pm\sqrt[\mu-\nu]{-\frac{B}{A}}$. Ἂν δὲ $-\frac{B}{A}<0$, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει πραγματικὰς ῥίζας.

β΄) ***Ἐὰν ὁ ἐκθέτης μ—ν εἶναι περιττός***. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν ῥίζαν $\sqrt[\mu-\nu]{-\frac{B}{A}}$, ἂν εἶναι $-\frac{B}{A}>0$, καὶ τὴν

$-\sqrt[\mu-\nu]{-\frac{B}{A}}$, ἂν εἶναι $-\frac{B}{A}<0$.

Εἴς τινας περιπτώσεις δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὰς φανταστικὰς ῥίζας τῶν τοιούτων ἐξισώσεων, ὡς εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα θὰ ἴδωμεν.

Παράδ. 1ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^3=1$. Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ $\chi=\sqrt[3]{1}=1$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $x^3-1=0$, ἕπεται ὅτι τὸ δυώνυμον χ^3-1 ὡς μηδενιζόμενον διὰ $x=1$ διαιρεῖται (§ 53 Πόρ III) διὰ $\chi-1$ καὶ ὡς γνωστὸν εἶναι $(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1$, ὅθεν $x^3-1=(x-1).(x^2+x+1)$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $(x-1)(x^2+x+1)=0$, ἥτις προφανῶς ἀληθεύει, ὅταν $\chi-1=0$ καὶ ὅταν $x^2+x+1=0$.

Ἡ α′ τούτων δίδει τὴν γνωστὴν ῥίζαν 1, ἡ δὲ ἄλλη παρέχει τὰς φανταστικὰς ῥίζας $\chi=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\chi^3=1$ ἔχει τὰς τρεῖς ῥίζας 1, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Παράδ. 2ον). Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\chi^4=32$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 2 εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4=16$. Αὕτη προφανῶς ἀληθεύει διὰ $\chi=\pm\sqrt[4]{16}=\pm\sqrt[4]{2^4}=\pm2$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $x^4-16=0$, εἶναι δὲ $x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)$, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν $(x^2-4)(\chi^2+4)=0$, ἥτις προφανῶς ἀληθεύει, ὅταν $x^2-4=0$ καὶ ὅταν $x^2+4=0$.

Ἡ α′ τούτων παρέχει τὰς γνωστὰς ἤδη ῥίζας ±2, ἡ δὲ ἄλλη παρέχει δύο ἄλλας ῥίζας $\pm2i$. Ὥστε ἡ $2x^4=32$ ἔχει τέσσαρας ῥίζας $-2, +2, -2i, +2i$.

Παράδ. 3ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3=-27$. Αὕτη προφανῶς ἔχει τὴν ῥίζαν -3· ἄρα τὸ δυώνυμον x^3+27 διαιρεῖται διὰ $x+3$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον x^2-3x+9, ἄρα $(x^3+27)=(\chi+3)(x^2-3x+9)$, ἡ δὲ ἐξίσωσις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $(x+3).(x^2-3x+9)=0$. Αὕτη ἀληθεύει, ὅταν $x+3=0$ καὶ ὅταν $x^2-3x+9=0$, ὧν ἡ α′ παρέχει τὴν γνωστὴν ῥίζαν -3 ἡ δὲ β′ δίδει

$x=\frac{3\pm\sqrt{-27}}{2}=\frac{3\pm3i\sqrt{3}}{2}$. Ἔχει λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις $x^3=-27$ ρίζας

$$-3,\ \frac{3+3i\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-3i\sqrt{3}}{2}.$$

Παραδ. 5ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5x^4+2x^3=0$. Αὕτη τίθεται προφανῶς ὑπὸ τὴν μορφὴν $x^3(5x+2)=0$ καὶ ἀληθεύει, ὅταν $x^3=0$ καὶ ὅταν $5x+2=0$, ὅθεν ἔχει ρίζας 0 καὶ $-\frac{2}{5}$.

Παράδ. 6ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\chi^5+24\chi^2=0$. *Αὕτη* τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $3\chi^2(\chi^3+8)=0$ καὶ ἀληθεύει, ὅταν $x^2=0$ καὶ $x^3+8=0$. Ἡ α΄ ἔχει τὴν ρίζαν $\chi=0$, ἡ δὲ β΄ ἔχει ρίζας $-2,\ 1+i\sqrt{3},\ 1-i\sqrt{3}$.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις.

809) $x^5+1=0$, $x^5-8=0$,

810) $x^8+8=0$, $2x^6-2=0$,

811) $5x^4-20x^2=0$, $x^3-x=0$,

812) $x^4-x^8=0$, $2x^5+16x^2=0$.

§ 167 Γ΄. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις. ***Διτετράγωνοι ἐξισώσεις καλοῦνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ 4ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὰς ἀρτίας μόνον δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου.***

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων εἶναι

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0.$$

Λύεται δὲ αὕτη ὡς ἀκολούθως· Θέτομεν χάριν συντομίας $x^2=\psi$, ὅτε θὰ εἶναι $x^4=\psi^2$ καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0$, ἤτοι ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις ὑποβιβάζεται εἰς δευτεροβάθμιον. Ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος αὕτη ἐξίσωσις ἀληθεύῃ διὰ $\psi=\psi'$ καὶ $\psi=\psi''$, ἐπειδὴ $\psi=x^2$, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $x^2=y'$ καὶ $x^2=y''$.

Ἄρα $x=\pm\sqrt{\psi'}$ καὶ $x=\pm\sqrt{\psi''}$.

Ἔχει λοιπὸν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις τὰς ρίζας $+\sqrt{\psi'}$, $-\sqrt{\psi'}$, $+\sqrt{\psi''}$ καὶ $-\sqrt{\psi''}$.

Εὐνόητον ὅτι ἂν $\psi'>0$ καὶ $\psi''>0$, αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαί. Ἂν $\psi'>0$ καὶ $\psi''<0$ αἱ μὲν ρίζαι $\pm\sqrt{\psi'}$ εἶναι πραγματικαί, αἱ δὲ ἄλλαι φανταστικαί. Τέλος, ἂν $\psi'<0$ καὶ $\psi''<0$, πᾶσαι εἶναι φανταστικαί.

Παράδ. 1ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4-13x^2+36=0$. Θέτοντες $\chi^2=\psi$ εὑρίσκομεν ὅτι $x^4=\psi^2$ καὶ ἀνάγομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὴν $\psi^2-13\psi+36=0$. Αὕτη ἔχει ρίζας $\psi'=9$ καὶ $\psi''=4$. Ἐπειδὴ δὲ ψ ἐκλήθη ἡ παράστασις x^2, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, δι᾿

ἃς τιμὰς τοῦ x εἶναι $x^2=9$ καὶ δι' ἃς εἶναι $x^2=4$ Λύοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ὅτι $x=\pm 3$ καὶ $\chi=\pm 2$.

Παράδ. 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^4+9x^2-12=0$. Ἂν τεθῇ $\chi^2=\psi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $3\psi^2+9\psi-12=0$, ἥτις ἔχει ῥίζας $\psi'=1, \psi''=-4$· ἄρα $x^2=1$ καὶ $x^2=-4$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $x=\pm 1$ καὶ $x=\pm 2i$.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις.

813) $x^4-5x^2+4=0$, $x^4-13x^2+36=0$, $4x^4-101x^2+25=0$.

814) $\frac{x^2+1}{5}+\frac{7}{x^2+1}=\frac{39}{10}$, $\frac{2x^2+7}{2}+\frac{1}{3x^2-5}=\frac{107}{14}$.

815) $x^4-5\alpha^2x^2+4\alpha^4=0$, $4x^4-47\alpha^2x^2+9\alpha^4=0$, $36\alpha x^4-13\alpha^3x^2+\alpha^5=0$.

816) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{x^2-\alpha^2}-\alpha^2=0$.

817) $\frac{\alpha^2+x^2}{x^2-\alpha^2}-\frac{13}{6}=\frac{\alpha^2-x^2}{\alpha^2+x^2}$, $x^4-\frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2+1=0$,

$$\frac{\gamma^2x^4}{\alpha^2-\beta^2}+x^2-\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^2}=0.$$

818) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $x^4+(4+\lambda)x^3+(4\lambda-9)x^2-36\lambda=0$ γίνεται διτετράγωνος;

819) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οὐδέποτε ἡ ἐξίσωσις $\lambda x^4+(2\lambda-1)x^3-(\lambda+1)x^2+(\lambda-1)x-2=0$ γίνεται διτετράγωνος.

§ 168. Ἀνάλυσις τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων. Ἐὰν $x^2=y$, θὰ εἶναι

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha y^2+\beta y+\gamma. \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ y' καὶ y'' εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha y^2+\beta y+\gamma$, θὰ εἶναι (§ 164) $\alpha y^2+\beta y+\gamma=\alpha(y-y')(y-y'')$, καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(y-y')(y-y''). \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ x_1, x_2 εἶναι δύο ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$, αἱ ἄλλαι ῥίζαι αὐτοῦ θὰ εἶναι $-x_1$, $-x_2$, καὶ $x_1^2=y', x_2^2=y''$. Ἡ ἰσότης ἄρα (2) γίνεται $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)$, ὅθεν ἕπεται ὅτι

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x-x_1)(x+x_1)(x-x_2)(x+x_2).$$

Βλέπομεν οὕτω ὅτι πᾶν διτετράγωνον τριώνυμον ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων, ὅπως (§164) καὶ τὰ τριώνυμα τοῦ 2ου βαθμοῦ.

Ἀσκήσεις. 820) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων τὸ τριώνυμον x^4-5x^2+4.

821) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων τὸ τριώνυμον $2x^4-20x^2+18$.

822) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων τὸ διτετράγωνον τριώνυμον x^4-12x^2+64.

823) Νὰ σχηματισθῇ διτετράγωνον τριώνυμον ἔχον ῥίζας ± 5 καὶ ± 2.

824) Νὰ σχηματισθῇ διτετράγωνον τριώνυμον, τοῦ ὁποίου δύο ῥίζαι εἶναι $1+\sqrt{5}$ καὶ $1-\sqrt{5}$.

825) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{x^4-\alpha^2x^2+\beta^2x^2-\alpha^2\beta^2}{x^4-\alpha^2x^2-\gamma^2x^2+\alpha^2\gamma^2}$.

169. Δ΄ Τριώνυμοι ἐξισώσεις. Αἱ διτετράγωνοι ἐξισώσεις εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$A\chi^\lambda+B\chi^\mu+\Gamma\chi^\nu=0,$$

αἵτινες καλοῦνται ***τριώνυμοι ἐξισώσεις***. Ἡ λύσις τούτων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων καὶ δυωνύμων ἐξισώσεων, εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν $\lambda-\mu=\mu-\nu$. Τῷ ὄντι ἂν εἶναι $\lambda-\mu=\mu-\nu$ καὶ τεθῇ $\lambda-\mu=\mu-\nu=\varrho$ θὰ εἶναι $\mu=\nu+\varrho$ καὶ $\lambda=\mu+\varrho=\nu+2\varrho$, ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται $A\chi^{\nu+2\varrho}+B\chi^{\nu+\varrho}+\Gamma\chi^\nu=0$. Ἐὰν δὲ ἐξαχθῇ ὁ κοινὸς παράγων χ^ν ἐκτὸς παρενθέσεως, αὕτη γίνεται

$$\chi^\nu\,(A\chi^{2\varrho}+B\chi^\varrho+\Gamma)=0 \qquad (1).$$

Αὕτη ἀληθεύει, ὅταν $\chi^\nu=0$, ὅθεν $\chi=0$ καὶ ὅταν $A\chi^{2\varrho}+B\chi^\varrho+\Gamma=0$. (2) Ἐὰν ἤδη θέσωμεν $x^\varrho=\psi$, θὰ εἶναι $\chi^{2\varrho}=\psi^2$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $A\psi^2+B\psi+\Gamma=0$, ἤτοι δευτεροβάθμιος. Ἂν ψ' καὶ ψ'' εἶναι αἱ ῥίζαι αὐτῆς, ἡ ἐξίσωσις (2) ἀληθεύει, δι᾽ ἃς τιμὰς τοῦ χ εἶναι $\chi^\varrho=\psi'$ καὶ δι᾽ ἃς εἶναι $\chi^\varrho=\psi''$.

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει λοιπὸν πλὴν τῆς ῥίζης 0 καὶ τὰς ῥίζας τῶν δυωνύμων ἐξισώσεων $\chi^\varrho=\psi'$ καὶ $\chi^\varrho=\psi''$, εἰς ἃς ἤχθημεν διὰ τῆς λύσεως τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $A\psi^2+B\psi+\Gamma=0$.

Παράδειγμα.* *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\chi^7-\chi^4-120\chi=0$.

Ἂν τεθῇ ὁ χ ἐκτὸς παρενθέσεως, αὕτη γίνεται $\chi\,(2\chi^6-\chi^3-120)=0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει διὰ $\chi=0$ καὶ ὅταν $2\chi^6-\chi^3-120=0$. Πρὸς λύσιν τῆς δευτέρας ταύτης ἐξισώσεως θέτομεν $\chi^3=\psi$, ὅτε $\chi^6=\psi^2$, ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται $2\psi^2-\psi-120=0$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἔχει ῥίζας 8 καὶ $-\frac{30}{4}$, ἕπεται ὅτι ἡ $2\chi^6-\chi^3-120=0$ ἀληθεύει, δι᾽ ἃς τιμὰς τοῦ χ ἀληθεύουσιν αἱ ἐξισώσεις $\chi^3=8$ καὶ $\chi^3=-\frac{30}{4}$. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^3=8$ ἔχει ῥίζας 2, $-1+i\sqrt{3}$ καὶ $-1-i\sqrt{3}$, ἡ δὲ $\chi^3=-\frac{30}{4}$ ἔχει ῥίζας τὰς $-\sqrt[3]{\frac{30}{4}}$,

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{30}{4}}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\sqrt[3]{\left(\frac{30}{4}\right)^2}},\quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{30}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\sqrt[3]{\left(\frac{30}{4}\right)^2}}.$$

Αὗται δὲ πᾶσαι μετὰ τῆς ῥίζης 0 ἀποτελοῦσι τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις: 826) $\chi^7-28\chi^4+27\chi=0$. 827) $\chi^2-\frac{19}{\chi}-\frac{216}{\chi^4}=0$.

828) $8\chi^8+65\chi^5+8\chi^2=0$.

829) $\chi^5-\frac{270}{\chi^5}-17=0$.

830) $\chi^{10}-242\chi^5-243=0$.

§ **170. Ε΄. Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις.** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$, ἧς ἔστωσαν χ' καὶ χ'' αἱ δύο ῥίζαι.

Ἐπειδὴ (§ 153) εἶναι $\chi'\chi''=\frac{\alpha}{\alpha}=1$, ἕπεται ὅτι $\chi''=\frac{1}{\chi'}$, ἤτοι, ἂν αὕτη ἔχῃ ῥίζαν χ', ἔχει καὶ τὴν ῥίζαν $\frac{1}{\chi'}$, ἥτις εἶναι ἀντίστροφος τῆς χ'. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ ἐξίσωσις αὕτη καλεῖται ***ἀντίστροφος ἐξίσωσις***.

Γενικῶς : ***Ἀντίστροφος καλεῖται πᾶσα ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον ἥτις, ἐὰν ἔχῃ ῥίζαν τινά, ἔχει καὶ τὴν ἀντίστροφόν της.***

Τὰς ἀντιστρόφους ἐξισώσεις διακρίνομεν ἀμέσως ἐκ τοῦ ὅτι, ἂν τεθῇ ἑκάστη ὑπὸ τὴν μορφὴν Π=0, ἔνθα Π εἶναι ἀκέραιον καὶ ἀνηγμένον πολυώνυμον, οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀπεχόντων ὅρων τοῦ πολυωνύμου Π εἶναι ἴσοι, ἢ καὶ (ὅταν δὲν ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος) ἀντίθετοι.

Αἱ ἀντίστροφοι ἐξισώσεις, ὧν ὁ βαθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 6ου δύνανται νὰ ὑποβιβασθῶσιν εἰς δευτεροβαθμίους ὡς ἀκολούθως.

1ον) ***Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις 3ου βαθμοῦ.***

α΄) $\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$.

Ἐπειδὴ $\alpha\chi^3+\alpha=\alpha(\chi^3+1)$ καὶ $\beta\chi^2+\beta\chi=\beta\chi(\chi+1)$, ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha(\chi^3+1)+\beta\chi(\chi+1)=0$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν τὸν $\chi+1$ ἐκτὸς παρενθέσεως, αὕτη γίνεται (§ 54) $(\chi+1)[\alpha(\chi^2-\chi+1)+\beta\chi]=0$ ἢ $(\chi+1)[\alpha\chi^2+(\beta-\alpha)\chi+\alpha]=0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ὅταν $\chi+1=0$ καὶ ὅταν $\alpha\chi^2+(\beta-\alpha)\chi+\alpha=0$, ἤτοι ἔχει τὴν ῥίζαν -1 καὶ τὰς ῥίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+(\beta-\alpha)\chi+\alpha=0$.

β΄) $\alpha\chi^3+\beta\chi^2-\beta\chi-\alpha=0$.

Ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$(\chi-1)[\alpha\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha]=0$ ἥτις ἔχει τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων

$$\chi-1=0 \text{ καὶ } \alpha\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha=0.$$

2ον) ***Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις 4ου βαθμοῦ.*** α΄) $\alpha\chi^4+\beta\chi^3-\beta\chi-\alpha=0$.

Ἐπειδὴ $\alpha\chi^4-\alpha=\alpha(\chi^4-1)=\alpha(\chi^2-1)(\chi^2+1)$ καὶ $\beta\chi^3-\beta\chi=\beta\chi(\chi^2-1)$, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha(\chi^2-1)(\chi^2+1)+\beta\chi(\chi^2-1)=0$, ἢ $(\chi^2-1)(\alpha\chi^2+\beta\chi+\alpha)=0$, ἥτις ἔχει τὰς ῥίζας τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων $\chi^2-1=0$ καὶ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$.

β΄) $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$.

Ἐπειδὴ αὕτη δὲν ἀληθεύει διὰ $\chi=0$, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν, ἥτις προκύπτει ἐξ αὐτῆς, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ χ^2, ἤτοι πρὸς τὴν

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma+\frac{\beta}{\chi}+\frac{\alpha}{\chi^2}=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\chi^2+\frac{\alpha}{\chi^2}=\alpha\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)$

καὶ $\beta\chi+\frac{\beta}{\chi}=\beta\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)$, αὕτη λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\alpha\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\beta\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+\gamma=0 \qquad (1)$$

Καὶ ἂν θέσωμεν $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi$, εὑρίσκομεν δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς ὅτι $\chi^2+\frac{1}{\chi^2}+2=\psi^2$, ὅθεν $\chi^2+\frac{1}{\chi^2}=\psi^2-2$. Ἡ ἐξίσωσις ἄρα (1) γίνεται $\alpha(\psi^2-2)+\beta\psi+\gamma=0$, ἧς αἱ ρίζαι ἔστωσαν ψ' καὶ ψ''. Οὕτω τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi'$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi''$, ὧν αἱ ρίζαι εἶναι καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ρίζαι.

γ') $\quad \alpha\chi^4+\beta\chi^3+\beta\chi+\alpha=0.$

Αὕτη λύεται, ὡς ἡ προηγουμένη.

Σημ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύονται καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta\lambda x+\alpha\lambda^2=0$, αἵτινες δὲν εἶναι ἀντίστροφοι, ἀλλ' ἔχουσι τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα. Ἐὰν τοιαύτη ἐξίσωσις ἔχῃ τὴν ρίζαν x', θὰ ἔχῃ καὶ τὴν $\frac{\lambda}{x'}$.

3ον) Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις 5ου βαθμοῦ.

α') $\quad \alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0.$

Παρατηροῦντες ὅτι: $\alpha x^5+\alpha=\alpha(x^5+1)=\alpha(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$,
$\beta x^4+\beta x=\beta x(x^3+1)=\beta x(x+1)(x^2-x+1)$
$\gamma x^3+\gamma x^2=\gamma x^2(x+1)$ θέτομεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(x+1)\left|\alpha(x^4-x^3+x^2-x+1)+\beta x(x^2-x+1)+\gamma x^2\right|=0 \text{ ἢ}$$
$$(x+1)\left|\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha\right|=0.$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει ὅταν $x+1=0$ καὶ ὅταν $\alpha\chi^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$. Τούτων ἡ μὲν α' ἔχει τὴν ρίζαν -1, ἡ δὲ β' εἶναι ἀντίστροφος 4ου βαθμοῦ μὲ μεσαῖον ὅρον καὶ λύεται, καθ' ὃν προηγουμένως εἴπομεν τρόπον.

β'. $\quad \alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0.$

Ἐργαζόμενοι κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν προηγούμενον θέτομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(x-1)[\alpha\chi^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha]=0.$$

Αὕτη δὲ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $\chi-1=0$ καὶ τῆς ἀντιστρόφου τοῦ 4ου βαθμοῦ ἐξισώσεως $\alpha x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha=0$, ἣν λύομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον.

Ασκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις.

831) $2x^3-7x^2+7x-2=0$, $3x^3+13x^2+13x+3=0$, $4x^3+13x^2-13x-4=0$.

832) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$, $3x^4+10x^3-10x-3=0$,

$3x^4-3x^2-3x+3=0$.

833) $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$, $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$.

834) $x^4+4x^2+1-\alpha x(x^2-1)=0$,

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+x+1}{x},\quad x^2+\frac{\alpha}{x^2}=\alpha x+\frac{1}{x}.$$

835) $x^4-x^3+\frac{5}{4}x^2-x+1=0$,

$$\frac{1+\chi^4}{(1+\chi)^4}=\frac{1}{2},\quad x^5-\frac{2x^4}{3}-\frac{15x^3}{4}+\frac{45x^2}{12}+\frac{4x}{6}-1=0.$$

836) $x^4-3x^3+4x^2-6\chi+4=0$, $2x^4+9x^3+16x^2+27x+18=0$. (§ 170. Σημ.)

Ἄρρητοι ἐξισώσεις

§ **171. Ὁρισμὸς ἀρρήτων ἐξισώσεων**. Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων $2+\sqrt{\chi}=3\chi$, $\chi+\sqrt{\chi^2+8}=4$, $\sqrt[3]{\chi+3}=2$, $\sqrt{3\chi y}=7$ περιέχει ῥίζαν τοῦ ἀγνώστου ἢ συναρτήσεώς τινος ἀγνώστου ἢ ἀγνώστων. Αἱ ἐξισώσεις αὗται λέγονται ***ἄρρητοι ἐξισώσεις***.

Ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι ἑκάστης τούτων μεταφερθῶσιν εἰς τὸ α΄ μέλος, ἑκάστη λαμβάνει τὴν μορφὴν $\Pi=0$, ἔνθα Π εἶναι ἄρρητος πρὸς τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους συνάρτησις.

Γενικῶς: ***Ἐξίσωσίς τις λέγεται ἄρρητος, ἂν ἔχῃ ἢ δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\Pi=0$, ἔνθα Π εἶναι ἄρρητος πρὸς τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους συνάρτησις***.

Ἡ λύσις τῶν ἀρρήτων ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον στηρίζεται εἰς τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα.

§ **172. Θεώρημα I.** ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, προκύπτει ἐξίσωσις, ἥτις ἔχει τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης καὶ ἄλλας ἀκόμη.***

Οὕτως, ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $A=B$ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A^\nu=B^\nu$. Λέγω ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ῥίζας τῆς $A=B$ καὶ ἄλλας διαφόρους τούτων.

Ἀπόδειξις. Ἡ ἐξίσωσις $A^\nu=B^\nu$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$A^\nu-B^\nu=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 54) εἶναι $A^\nu-B^\nu=(A-B).(A^{\nu-1}+BA^{\nu-2}\dots+B^{\nu-1})$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται $(A-B)(A^{\nu-1}+BA^{\nu-2}+\dots+B^{\nu-1})=0$. Αὕτη δὲ ἔχει προφανῶς τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων

$$A=B,\quad A^{\nu-1}+BA^{\nu-2}+\dots+B^{\nu-1}=0. \qquad (1)$$

Καὶ ἡ ἐξίσωσις $A^{\nu}=B^{\nu}$ ὡς ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $A^{\nu}-B^{\nu}=0$ ἔχει τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων (1), ὧν μία ἡ δοθεῖσα. ὅ. ἔ. δ.

Μερικαὶ περιπτώσεις. Ἂν $\nu=2$, ἡ ἐξίσωσις $A^{\nu}=B^{\nu}$ γίνεται $A^2=B^2$. Αὕτη δὲ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $A^2-B^2=0$ ἢ $(A-B)(A+B)=0$. Ἔχει ἄρα ἡ ἐξίσωσις $A^2=B^2$ τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων $A=B$, $A=-B$. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $\chi+2=7$ ἔχει τὴν ῥίζαν 5. Ἡ δὲ ἐξίσωσις $(\chi+2)^2=49$ ἢ $\chi^2+4\chi-45=0$ ἔχει τὰς ῥίζας 5 καὶ -9, ὧν ἡ δευτέρα εἶναι ρίζα καὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi+2=-7$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $A^4=B^4$ ἔχει τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων $A=B$, $A=-B$, $A^2+B^2=0$.

Γενικῶς: Ἂν $\nu=2\lambda$, ἡ ἐξίσωσις $A^{\nu}=B^{\nu}$ γίνεται $A^{2\lambda}=B^{2\lambda}$. Αὕτη δὲ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $(A^2)^{\lambda}-(B^2)^{\lambda}=0$, ἥτις εὐκόλως τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $(A^2-B^2)[A^{2(\lambda-1)}+B^2A^{2(\lambda-2)}+\dots+B^{2(\lambda-1)}]=0$

$$\text{ἢ } (A-B)(A+B)\left[A^{2(\lambda-1)}+B^2A^{2(\lambda-2)}+\dots+B^{2(\lambda-1)}\right]=0$$

Ἔχει ἄρα ἡ ἐξίσωσις $A^{2\lambda}=B^{2\lambda}$ τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων

$$A=B,\quad A=-B,\quad A^{2(\lambda-1)}+B^2A^{2(\lambda-1)}+\dots+B^{2(\lambda-1)}=0. \qquad (2)$$

Ἂν $\nu=2\lambda+1$, ἡ ἐξίσωσις $A^{\nu}=B^{\nu}$ γίνεται $A^{2\lambda+1}=B^{2\lambda+1}$. Αὕτη δὲ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $A^{2\lambda+1}-B^{2\lambda+1}=0$, ἥτις εὐκόλως τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(A-B)\left[A^{2\lambda}+BA^{2\lambda-1}+\dots+B^{2\lambda}\right]=0.$$

Ἔχει ἄρα ἡ ἐξίσωσις $A^{2\lambda+1}=B^{2\lambda+1}$ τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων

$$A=B,\quad A^{2\lambda}+BA^{2\lambda-1}+\dots+B^{2\lambda}=0 \qquad (3)$$

Ἐὰν αἱ παραστάσεις A καὶ B λαμβάνωσι μόνον πραγματικὰς τιμάς, αἱ τελευταῖαι τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) δὲν ἔχουσι πραγματικὰς ῥίζας, διότι τὸ πρῶτον μέλος ἑκατέρας τούτων εἶναι ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν.

Ἐὰν ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θεωρῶμεν μόνον πραγματικὰς ῥίζας, δυνάμεθα νὰ συνοψίσωμεν τὰ ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως $A=B$ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν ἀρτίαν δύναμιν, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς ῥίζας μόνον τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων $A=B$ καὶ $A=-B$. Ἐὰν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $A=B$ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν περιττὴν δύναμιν, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς ῥίζας μόνον τὰς ῥίζας τῆς $A=B$.

§ **173. Λύσις ἀρρήτων ἐξισώσεων.** *Παράδ. 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3x+4}=4$.*

Λύσις. Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $3x+4=16$ ἥτις ἔχει ρίζαν 4. Αὕτη κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, δύναται ὅμως νὰ εἶναι ρίζα καὶ τῆς $-\sqrt{3x+4}=4$.

Παρατηροῦντες ὅτι τὸ β΄ μέλος ταύτης εἶναι θετικόν, ἐννοοῦμεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν ἡ ρίζα 4 νὰ εἶναι ρίζα τῆς $-\sqrt{3x+4}=4$. Εἶναι ἄρα κατ᾽ ἀνάγκην αὕτη ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ὡς καὶ διὰ ἀμέσου δοκιμῆς πειθόμεθα.

Αἱ ἐξισώσεις $\sqrt{3x+4}=4$ καὶ $-\sqrt{3x+4}=4$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουσι μόνον κατὰ τὸ πρὸ τοῦ ριζικοῦ σημεῖον καλοῦνται ***συζυγεῖς ἀλλήλων.***

Παράδ. 2ον Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi+\sqrt{5\chi+1}=7$.

Λύσις. Ἀπομονοῦμεν τὸ ριζικὸν μεταφέροντες τὸν ρητὸν ὅρον χ εἰς τὸ β΄ μέλος καὶ εὑρίσκομεν τὴν πρὸς ταύτην ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\sqrt{5\chi+1}=7-\chi$. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $5\chi+1=49-14\chi+\chi^2$, ἥτις ἔχει ρίζας 3 καὶ 16. Δοκιμάζοντες βλέπομεν ὅτι ἡ ρίζα 3 ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν, ἡ δὲ 16 εἰς τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\chi-\sqrt{5\chi+1}=7$.

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς $\chi+\sqrt{5\chi+1}=7$ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ρίζα αὐτῆς πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 7, τῆς δὲ $x-\sqrt{5x+1}=7$ μεγαλυτέρα τοῦ 7. Ἄνευ λοιπὸν δοκιμῆς πειθόμεθα οὕτω ὅτι ἡ 3 ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἡ δὲ 16 εἰς τὴν συζυγῆ αὐτῆς.

Παραδ. 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4\chi+2\sqrt{5-4\chi}=5$.

Λύσις. Ἀπομονοῦντες τὸ ῥιζικὸν καὶ ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $4(5-4\chi)=25-40\chi+16\chi^2$, ἥτις ἔχει ῥίζας $\frac{5}{4}$ καὶ $\frac{1}{4}$. Ἀμφότεραι αὗται ἁρμόζουσιν εἰς τὴν δοθεῖσαν, ὡς διὰ δοκιμῆς πειθόμεθα.

Παράδ. 4ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{\chi^2+3}+\sqrt{\chi^2+8}=5$.

Λύσις. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2+3+\chi^2+8+2\sqrt{(\chi^2+3)(\chi^2+8)}=25 \qquad (1)$$

ἥτις ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων:

$$\sqrt{\chi^2+3}+\sqrt{\chi^2+8}=5 \text{ καὶ } -\sqrt{\chi^2+3}-\sqrt{\chi^2+8}=5. \qquad (2)$$

Ἀπομονοῦντες τὸ ριζικὸν τῆς (1) καὶ ἐκτελοῦντες τὰς ἀναγκαίας ἀναγωγὰς εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt{(\chi^2+3)(\chi^2+8)}=7-\chi^2$. (3).

Ἐὰν δὲ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(\chi^2+3)(\chi^2+8)=49-14\chi^2+\chi^4$ (4).

ἥτις ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων

$$\sqrt{(\chi^2+3)(\chi^2+8)}=7-\chi^2 \text{ καὶ } -\sqrt{(\chi^2+3)(\chi^2+8)}=7-\chi^2.$$

Τούτων ἡ α΄ ὡς ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1) ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων (2), ἡ δὲ β΄ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν συζυγῆ τῆς (1) ἐξίσωσιν $2\chi^2+11-2\sqrt{(\chi^2+3)(\chi^2+8)}=5$, ἥτις προφανῶς δύναται νὰ προέλθῃ δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς $\sqrt{\chi^2+3}-\sqrt{\chi^2+8}=5$. Ἔχει ἄρα τὰς ῥίζας ταύτης καὶ τῆς $-\sqrt{\chi^2+3}+\sqrt{\chi^2+8}=5$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχει τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{array}{ll}\sqrt{\chi^2+3}+\sqrt{\chi^2+8}=5, & -\sqrt{\chi^2+3}-\sqrt{\chi^2+8}=5,\\ \sqrt{\chi^2+3}-\sqrt{\chi^2+8}=5, & -\sqrt{\chi^2+3}+\sqrt{\chi^2+8}=5.\end{array}\right\} \quad (7)$$

Λύοντες τὴν (4) εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη ἔχει ῥίζας ± 1, αἵτινες ἁρμόζουσιν ἀμφότεραι εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

ΣΗΜ. Αἱ ἐξισώσεις (7) ἔχουσι πρὸ τῶν ῥιζικῶν τὰ σημεῖα + καὶ — καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους συνδυασμένα, ἤτοι + μὲ +, — μὲ —, + μὲ — καὶ — μὲ +.

Παράδ 5ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi+\sqrt[3]{35-\chi^3}=5$.

Λύσις. Ἀπομονοῦντες τὸ ῥιζικὸν εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\sqrt[3]{35-\chi^3}=5-\chi$. Ἐὰν δὲ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸν κύβον, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $35-\chi^3=125-75\chi+15\chi^2-\chi^3$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi^2-5\chi+6=0$. Αὕτη δὲ ἔχει τὰς ῥίζας 2 καὶ 3, αἵτινες ἀμφότεροι ῥίζαι τῆς δοθείσης.

§ 174. Μέθοδος τῶν βοηθητικῶν ἀγνώστων. Αἱ ἐξισώσεις μὲ ῥιζικὰ λύονται ἐνίοτε εὐκολώτερον διὰ τῆς χρήσεως βοηθητικοῦ ἀγνώστου ὡς ἐκ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων γίνεται φανερόν.

Παράδ. 1ον Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\chi^2+3\chi+4+\sqrt{2\chi^2+3\chi+4}=12$.

Λύσις. Ἐὰν θέσωμεν $\sqrt{2\chi^2+3\chi+4}=\psi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\psi^2+\psi=12$. Ἔχει δὲ αὕτη ῥίζας 3 καὶ -4. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, δι' ἃς τιμὰς τοῦ χ εἶναι $2\chi^2+3\chi+4=9$ ἤτοι διὰ $\chi=1$ καὶ $\chi=-\frac{5}{2}$. Αἱ τιμαὶ τοῦ χ, δι' ἃς εἶναι $2\chi^2+3\chi+4=16$ ἁρμόζουσι προφανῶς εἰς τὴν συζυγῆ $2\chi^2+3\chi+4-\sqrt{2\chi^2+3\chi+4}=12$.

Παράδ. 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$(2\chi+\sqrt{\chi})^2-10\,(2\chi+\sqrt{\chi})=231.$$

Λύσις Ἂν θέσωμεν $2\chi+\sqrt{\chi}=\psi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\psi^2-10\psi=231$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἔχει ῥίζας 21 καὶ -11, ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν $2\chi+\sqrt{\chi}=21$ καὶ $2\chi+\sqrt{\chi}=-11$. Ἐὰν πάλιν θέσωμεν $\sqrt{\chi}=\omega$, ἡ α' τούτων γίνεται $2\omega^2+\omega=21$, ὅθεν $\omega=3$ καὶ $\omega=-\frac{7}{2}$ ὧν μόνον ἡ $\omega=3$ ἁρμόζει εἰς τὴν $\sqrt{\chi}=\omega$, ἤτοι $\sqrt{\chi}=3$ καὶ $\chi=9$. Ἡ ἐξίσωσις $2\omega^2+\omega=-11$ ἔχει φανταστικὰς ῥίζας.

Παράδ. 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2+\chi+\sqrt[3]{\chi}}=\chi+\sqrt[3]{\chi}$.

Λύσις. Ἂν θέσωμεν $\chi+\sqrt[3]{\chi}=\omega$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\sqrt{2+\omega}=\omega$. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\omega+2=\omega^2$, ἥτις ἔχει ῥίζας 2 καὶ -1, ὧν ἡ β' δὲν ταὐτοποιοῖ τὴν $\sqrt{2+\omega}=\omega$. Εἶναι ἄρα $\omega=2$ καὶ ἑπομένως $\chi+\sqrt[3]{\chi}=2$. Ἐὰν ἀπομονώσωμεν τὸ ῥιζικὸν καὶ ὑψώσωμεν ἔπειτα ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸν κύβον, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν $\chi^3-6\chi^2+13\chi-8=0$, ἥτις εἶναι τρίτου βαθμοῦ. Ἐπειδὴ δὲ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων αὐτῆς καὶ ὁ γνωστὸς ὅρος ἔχουσιν ἄθροισμα μηδέν, ἐννοοῦμεν ὅτι αὕτη ἔχει τὴν ῥίζαν 1. Τὸ α΄ ἄρα μέλος αὐτῆς διαιρεῖται διὰ $(\chi-1)$ καὶ δίδει πηλίκον $\chi^2-5\chi+8$. Ἡ ἐξίσωσις ἄρα αὕτη γράφεται καὶ οὕτω $(\chi-1)(\chi^2-5\chi+8)=0$ καὶ οὕτω γίνεται φανερὸν ὅτι πλὴν τῆς ῥίζης 1 ἔχει καὶ τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-5\chi+8=0$, αἵτινες εἶναι φανταστικαί. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $\chi=1$.

Ἀσκήσεις: Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις.

837) $\sqrt{\chi+3}=2$, $3\sqrt{2\chi+1}-9=0$, $\sqrt{2\chi^2-7}=5$.

838) $\chi+\sqrt{2\chi+2}=11$, $2\chi-\sqrt{\chi+5}=26$, $\chi+\sqrt{4\chi+1}=11$.

839) $\sqrt{\chi-3}+\sqrt{\chi+2}=5$, $\sqrt{3\chi-2}-\sqrt{\chi+3}=1$, $\sqrt{5(\chi+1)}-\chi=1$.

840) $\sqrt{\chi-9}+\sqrt{\chi-18}=1$, $\sqrt{\chi-1}-\sqrt{\chi-4}=\sqrt{2\chi-5}$,

$\sqrt{\chi+4}+\sqrt{\chi+20}=2\sqrt{\chi+1}$.

841) $\chi+\sqrt{\chi^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{\chi^2+16}}$, $\sqrt{\chi^2-3\chi+4}+\sqrt{\chi^2-3\chi+1}=3$,

$\chi^2+3\chi+5\sqrt{\chi^2-3\chi+76}=260$.

842) $\chi+\sqrt{\chi^2-\alpha^2}=\beta$, $\sqrt{\chi^2+\alpha\chi}=\chi-\alpha$, $\sqrt{\chi-\alpha}+\sqrt{\chi-\beta}=\sqrt{2\chi-\alpha-\beta}$.

843) $\sqrt[3]{1-3\chi}=\sqrt{1+\chi}$,

844) $\sqrt[3]{2-\chi}=1-\sqrt{\chi-1}$.

845) $\sqrt[4]{7\chi+\sqrt{2\chi}}=2$.

846) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις αὐξανόμενος κατὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν του γίνεται 20.

847) Τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ καὶ τῆς τετραγ. ῥίζης αὐτοῦ διαιρούμενον διὰ τῆς τετρ. ῥίζης αὐτοῦ δίδει πηλίκον 13. Τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

848) Ἡ ἡλικία παιδίου πρὸ τριῶν ἐτῶν ἦτο ἴση πρὸς τὴν τετρ. ῥίζαν τῆς μετὰ 3 ἔτη ἡλικίας του. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία αὐτοῦ;

849) Κύκνοι ἔπαιζον εἰς τὰ διαυγῆ ὕδατα ποταμοῦ, ὅτε παρετήρησαν ἀπειλητικὴν συσσώρευσιν νεφῶν. Τότε τὸ δεκαπλάσιον τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν ἐπέταξεν πρὸς γειτονικὴν λίμνην, τὸ ὄγδοον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν ἐτράπη πρὸς τοὺς εὐώδεις λωτοὺς καὶ τρία ζεύγη ἔμειναν παίζοντα εἰς τὰ ὕδατα τοῦ ποταμοῦ. Πόσοι ἦσαν ὅλοι οἱ κύκνοι; (Πρόβλημα ἰνδικόν).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Συστήματα 2ου Βαθμοῦ.

Α΄. Συστήματα δύο ἐξισώσεων 2ου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

§ **175. Σύστημα 2ου βαθμοῦ.** ***Καλεῖται σύστημα 2ου βαθμοῦ πᾶν σύστημα ἔχον μίαν τοὐλάχιστον δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν καὶ οὐδεμίαν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου·***

Οὕτω τὰ συστήματα $\begin{array}{r|l} \chi^2+2\chi\psi^2=9 & \chi^2+y^2=10. \\ \chi\psi+\psi^2=6 & \chi+\psi=4. \end{array}$

εἶναι ἀμφότερα συστήματα 2ου βαθμοῦ.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον σύστημα 2ου βαθμοῦ μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις ἢ ἀπὸ μίαν δευτεροβάθμιον καὶ μίαν πρωτοβάθμιον. Ἐν τοῖς ἀκολούθοις ἐκθέτομεν τὰς μεθόδους τῆς λύσεως ἑκατέρου εἴδους τῶν συστημάτων τούτων.

§ **176. Α΄. Συστήματα 2ου βαθμοῦ μὲ μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν.** Πρὸς λύσιν τοιούτου συστήματος ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὴν ἀκόλουθον πορείαν.

Λύομεν τὴν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτεροβάθμιον τὸν ἄγνωστον τοῦτον ὑπὸ τῆς τιμῆς, ἣν οὕτω συναρτήσει τοῦ ἄλλου ἀγνώστου εὕρομεν, καταλήγομεν εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον. Λύοντες ταύτην προσδιορίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ ἀγνώστου, ὃν αὕτη περιέχει καὶ ἐξ αὐτῶν εἶτα εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ἄλλου, τῇ βοηθείᾳ τῆς λελυμένης πρὸς αὐτὸν πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἐνίοτε ὅμως δι᾽ εἰδικῶν τεχνασμάτων ἐξαρτωμένων ἐκ τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἐπιτυγχάνομεν εὐκολώτερον τὴν λύσιν τοῦ συστήματος, ὡς ἐκ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων φαίνεται.

Παράδ. 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi+\psi=8$, $\chi\psi=15$.

Α΄. Κατὰ τὸν γενικὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἐκ τῆς α΄ $\psi=8-\chi$, ὅτε ἡ β΄ γίνεται $(8-\chi)\chi=15$ ἢ $\chi^2-8\chi+15=0$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $\chi'=5$ καὶ $\chi''=3$. Ἐκ δὲ τῆς $\psi=8-\chi$ εὑρίσκομεν ὅτι

ὅταν $\chi=5$, θὰ εἶναι $y=3$

καὶ ὅταν $\chi=3$, θὰ εἶναι $y=5$.

Ἔχει λοιπὸν τὸ δοθὲν σύστημα δύο λύσεις $\chi=5, \psi=3$ καὶ $\chi=3, \psi=5$.

Β΄. Παρατηροῦντες ὅτι τῶν ἀγνώστων γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον συμπεραίνομεν (§ 155) ὅτι οὗτοι εἶναι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\omega^2-8\omega+15=0$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἔχει ρίζας 5 καὶ 3, ἕπεται ὅτι ὁ εἷς τῶν ἀγνώστων θὰ εἶναι 5 ὁ δὲ ἄλλος 3. Ἄρα θὰ εἶναι $\chi=5$ καὶ $\psi=3$ ἢ $\chi=3$ καὶ $\psi=5$.

Παράδ. 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=40$, $\chi-\psi=4$.

Α΄. Κατὰ τὴν γενικὴν μέθοδον λαμβάνομεν ἐκ τῆς β΄ $\chi=\psi+4$, ὅτε ἡ α΄ γίνεται $(\psi+4)^2+\psi^2=40$, ὅθεν $2\psi^2+8\psi-24=0$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $\psi'=2$ καὶ $\psi''=-6$. Ἐκ δὲ τῆς $\chi=\psi+4$ εὑρίσκομεν ἤδη ὅτι: ὅταν $\psi=2$, θὰ εἶναι $\chi=6$, καὶ ὅταν $\psi=-6$, θὰ εἶναι $\chi=-2$.

Β΄. Θέτοντες $\chi+\psi=\lambda$ εὑρίσκομεν ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\chi-\psi=4$, ὅτι $\chi=\dfrac{\lambda+4}{2}$ καὶ $\psi=\dfrac{\lambda-4}{2}$, ὅτε ἡ α΄ γίνεται $\dfrac{(\lambda+4^2)}{4}+\dfrac{(\lambda-4)^2}{4}=40$.

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $\lambda=\pm 8$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν.

ὅταν $\lambda=8$, εἶναι $\chi=\dfrac{8+4}{2}=6$, $\psi=\dfrac{8-4}{2}=2$

καὶ » $\lambda=-8$ » $\chi=\dfrac{-8+4}{2}=-2$, $\psi=\dfrac{-8-4}{2}=-6$.

Παράδ. 3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x^2-\psi^2=95$, $x-\psi=5$.

Ἐπειδὴ $x^2-\psi^2=(x+\psi)(x-\psi)$, ἡ α΄ ἐξίσωσις γίνεται $(x+\psi)(x-\psi)=95$ ἢ (λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς β΄) $5(x+\psi)=95$, ὅθεν $x+\psi=19$. Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα $x+\psi=19$, $x-\psi=5$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $x=12$ καὶ $\psi=7$.

Παράδ. 4ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2+\chi\psi=97$, $\psi-\chi=5$.

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ μέλη τῆς β΄ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2+\chi^2-2\chi\psi=25$ καὶ ἀφαιροῦντες τὰ μέλη ταύτης ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς α΄ εὑρίσκομεν $3\chi\psi=72$, ὅθεν $\chi\psi=24$.

Ἐὰν ἤδη προσθέσωμεν τὰ μέλη ταύτης μετὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς $\chi^2+\psi^2+\chi\psi=97$ εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=121$ ἢ $(\chi+\psi)^2=121$, ὅθεν $\chi+\psi=\pm 11$. Οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων

$$\begin{aligned}\chi+\psi&=11\\ \psi-\chi&=5\end{aligned} \qquad \text{καὶ} \qquad \begin{aligned}\chi+\psi&=-11\\ \psi-\chi&=5\end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ α΄ τούτων εὑρίσκομεν $\psi=8$, $\chi=3$ ἐκ δὲ τοῦ β΄ εὑρίσκομεν $\psi=-3$, $\chi=-8$.

Β΄. Ἀφ' οὗ εὕρωμεν, ὡς προηγουμένως, τὴν ἐξίσωσιν $\chi\psi=24$ ἀνάγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $\psi-\chi=5$, $\chi\psi=24$ ἢ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὸ συστήματος $\psi+(-\chi)=5$, $y(-\chi)=-24$. Τούτου δὲ οἱ ἄγνωστοι ψ καὶ $(-\chi)$ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $K^2-5K-24=0$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη ἔχει ρίζας 8 καὶ -3, ἕπεται ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα ἀληθεύει διὰ $\chi=-8$, $\psi=-3$ καὶ διὰ $\chi=+3$, $\psi=+8$.

Τοὺς ἄλλους τρόπους λύσεως ἑκάστου τῶν προηγουμένων συστημάτων ἀφίνομεν νὰ ἀνεύρωσι μόνοι οἱ μαθηταί.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

850) α′) $\chi+\psi=20$, $\chi y=51$, β′) $\chi^2-\psi^2=256$, $\chi+\psi=32$,
γ′) $\chi-\psi=20$, $\chi y=525$.

851) α′) $\chi^2+\psi^2=225$, $\chi-y=3$, β′) $\chi^2+\psi^2+\chi\psi=3$, $\chi+\psi=2$.
γ′) $2\chi^2+\psi^2=17$, $\frac{4\psi}{\chi}=6$.

852) α′) $2\chi(\psi+\chi)=56$, $\frac{3\chi}{\psi}=-7$. β′) $\chi\psi-5\psi=24$, $\chi-2\psi=7$,

853) α′) $\frac{y}{\chi}=\frac{3}{4}$, $\chi y=\alpha(\chi+y)$, β′) $\chi+y=2{,}2\chi-\chi y=1$

854) α′) $\chi+y=3\alpha$, $3\chi-\chi y=\alpha(3-2\alpha)$, β′) $\chi+y=5$, $\chi y-3\chi-5y+15=0$.

177. Β′). Συστήματα 2ου βαθμοῦ μὲ 2 ἀγνώστους καὶ 2 δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις. Ἡ γενικὴ πορεία πρὸς λύσιν τοιούτου συστήματος εἶναι ἡ ἀκόλουθος.

Ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, (ἐὰν ἀμφότεραι περιέχωσι τὰ τετράγωνα καὶ τῶν δύο ἀγνώστων) καὶ λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὴν α′ δύναμιν τοῦ ἀγνώστου τούτου. Θέτομεν εἶτα τὴν οὕτως εὑρισκομένην τιμὴν τοῦ ἀγνώστου τούτου εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καὶ εὑρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν, ἥτις ἔχει μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον. Τούτου δὲ ὁριζομένου εὑρίσκεται καὶ ὁ ἄλλος εὐκόλως.

Ἡ ἐξίσωσις ὅμως, εἰς τὴν ὁποίαν οὕτω καταλήγομεν εἶναι 4ου βαθμοῦ καὶ δὲν δυνάμεθα εἰς τὰς πλείστας περιπτώσεις νὰ τὴν λύσωμεν διὰ τῶν γνώσεων τῆς στοιχειώδους Ἀλγέβρας. Διὰ τοῦτο πολλάκις πρὸς λύσιν τοιούτου συστήματος καταφεύγομεν, ὁσάκις εἶναι δυνατόν, εἰς εἰδικὰ τεχνάσματα.

Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

Παράδ. 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x^2+\psi^2+x\psi=19$, $3x^2-\psi^2=3$.

Α′. (Μέθοδος γενική). Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $4x^2+x\psi=22$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν ὅτι

$$\psi=\frac{(22-4x^2)}{x} \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ θέσωμεν εἰς τὴν α′ ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+\frac{(22-4x^2)^2}{x^2}+22-4x^2=19$

ὅθεν $13x^4-173x^2+484=0$, ἥτις ἔχει ῥίζας ± 2 καὶ $\pm\frac{11\sqrt{13}}{13}$.

Ἤδη ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) εὑρίσκομεν τὰς εἰς ταύτας ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ψ, ἤτοι

ὅταν $x=2$, εἶναι $\psi=3$	ὅταν $x=\frac{11\sqrt{13}}{13}$, εἶναι $\psi=-\frac{18\sqrt{13}}{13}$
» $x=-2$, » $\psi=-3$	» $x=-\frac{11\sqrt{13}}{13}$ » $\psi=\frac{18\sqrt{13}}{13}$

Β΄. Θέτοντες $\psi=\lambda x$ εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $x^2(1+\lambda+\lambda^2)=19$ καὶ $x^2(3-\lambda^2)=3$, ἐξ ὧν διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3-\lambda^2}=\frac{19}{3}$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $\lambda=\frac{3}{2}$ καὶ $\lambda=-\frac{18}{11}$, κατ' ἀκολουθίαν ἡ $\psi=\lambda x$ γίνεται

$$\psi=\frac{3x}{2} \text{ καὶ } \psi=-\frac{18x}{11} \quad (1).$$

Ἐὰν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2(3-\lambda^2)=3$ τεθῇ $\frac{3}{2}$ ἀντὶ τοῦ λ, προκύπτει $x=\pm 2$. Εἶτα δὲ ἐκ τῆς $y=\frac{3x}{2}$ εὑρίσκονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y. Ἐὰν δὲ εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν $x^2(3-\lambda)^2=3$ τεθῇ ἡ ἑτέρα τιμὴ $-\frac{18}{11}$ τοῦ λ, προκύπτει $x=\pm\frac{11\sqrt{13}}{13}$. Τὰς δὲ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τοῦ y εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y=-\frac{18\chi}{11}$.

ΣΗΜ. Ὁ μετασχηματισμὸς διὰ τῆς σχέσεως $\psi=\lambda x$ εἶναι ἐφαρμόσιμος εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ ἐκ τῶν ἀγνώστων ὅρων ἀποτελούμενα πολυώνυμα εἶναι εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις ὁμογενῆ καὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ.

Παράδ. 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=61$, $\chi\psi=30$.

Α΄ (Μέθοδος γενική). Ἐπειδὴ ἡ β΄ ἔχει μόνον τὴν α΄ δύναμιν τοῦ ψ λύοντες πρὸς αὐτὸν εὑρίσκομεν $\psi=\frac{30}{\chi}$, ὅτε ἡ α΄ γίνεται $\chi^2+\frac{900}{\chi^2}=61$, ὅθεν $\chi^4-61\chi^2+900=0$, ἥτις ἔχει ῥίζας ±5 καὶ ±6. Ἤδη ἐκ τῆς $\psi=\frac{30}{\chi}$ εὑρίσκομεν ὅτι :

ὅταν $\chi=5$, εἶναι $\psi=6$· ὅταν $\chi=-6$, εἶναι $\psi=-5$
ὅταν $\chi=-5$ εἶναι $\psi=-6$· ὅταν $\chi=-6$ εἶναι $\psi=-5$.

Β΄. Διπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς β΄ εὑρίσκομεν $2\chi\psi=60$. Ἐὰν δὲ τὰ μέλη ταύτης προσθέσωμεν καὶ εἶτα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς α΄ εὑρίσκομεν $(\chi+\psi)^2=121$ καὶ $(\chi-\psi)^2=1$, ὅθεν $\chi+\psi=\pm 11$ καὶ $\chi-\psi=\pm 1$. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων συστημάτων·

$$\begin{array}{l|l|l|l} \chi+\psi=11 & \chi+\psi=11 & \chi+\psi=-11 & \chi+\psi=-11 \\ \chi-\psi=1 & \chi-\psi=-1 & \chi-\psi=1 & \chi-\psi=-1, \end{array}$$

ἅτινα λύομεν κατὰ τὰ γνωστά·

ΣΗΜ. Καὶ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἐνδείκνυται ὁ μετασχηματισμὸς διὰ τῆς $\psi=\lambda x$, ὃν ἀφήνομεν νὰ ἐφαρμόσωσι μόνοι οἱ μαθηταί.

Παράδ. 3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα,

$$\chi^2+\psi^2+3\chi\psi=44,\ 2\chi^2+2\psi^2-\chi\psi=32.$$

Α΄ (Μέθοδος γενική). Ἀπαλείφοντες μεταξὺ αὐτῶν τοὺς ψ^2 καὶ χ^2 εὑρίσκομεν $\chi\psi=8$, ὅθεν $\psi=\frac{8}{\chi}$ καὶ προχωροῦμεν εἶτα κατὰ τὰ γνωστά.

Β΄. Θέτοντες ἐν τῇ α΄ ἀντὶ $\chi\psi$ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν 8 εὑρίσκομεν ὅτι $\chi^2+\psi^2=20$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $2\chi\psi=16$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\chi+\psi=\pm 6$ καὶ $\chi-\psi=\pm 2$. Οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων

$$\begin{array}{l|l|l|l} \chi+\psi=6 & \chi+\psi=6 & \chi+\psi=-6 & \chi+\psi=-6 \\ \chi-\psi=2 & \chi-\psi=-2 & \chi-\psi=2, & \chi-\psi=-2 \end{array}$$

ΣΗΜ. Δύναται νὰ λυθῇ τοῦτο καὶ τῇ βοηθείᾳ τοῦ μετασχηματισμοῦ διὰ τῆς $\psi=\lambda\chi$.

Παράδ. 4ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi^2+\psi^2=106,\ \chi\psi+3(\chi+\psi)=87.$$

Α΄. Ἐπειδὴ $\chi^2+\psi^2=(\chi+\psi)^2-2\chi\psi$, ἡ α΄ γίνεται $(\chi+\psi)^2-2\chi\psi=106$.

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν $\chi+\psi=\omega$ καὶ $\chi\psi=\varphi$ ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $\omega^2-2\varphi=106,\ \varphi+3\omega=87$

Λύοντες τοῦτο εὑρίσκομεν $\omega=14$ καὶ $\varphi=45$
ἢ $\omega=-20$ » $\varphi=147$

Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων

$$\begin{array}{lcl} \chi+\psi=14 & \text{καὶ} & \chi+\psi=-20 \\ \chi\psi=45 & & \chi\psi=147 \end{array}$$

Ἐκ τοῦ α΄ εὑρίσκομεν $x=9,\ \psi=5$
καὶ $x=5,\ \psi=9$,

τὸ δὲ β΄ ἔχει φανταστικὰς ῥίζας.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς λύσεως ἐθεωρήσαμεν ὡς βοηθητικοὺς ἀγνώστους τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀγνώστων. Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται ἐπιτυχῶς, ὅταν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι συμμετρικαί, ἤτοι δὲν μεταβάλλονται αὗται, ἂν οἱ δύο ἄγνωστοι ἐναλλαχθῶσιν.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

855) α΄) $\chi^2+\psi^2=58,\ \chi\psi=21$, β΄) $\chi^2-\psi^2=40,\ \chi\psi=99$,

γ΄) $\chi^2+\psi^2=\frac{65}{4}\ \chi^2-\psi^2=\frac{63}{4}$.

856) α') $\chi^2+\psi^2+\chi+\psi=8$, $\chi^2-\psi^2+\chi+\psi=4$, β') $\chi^2-\psi^2=24$, $\frac{\chi^2}{7\psi^2}=\frac{7}{25}$,
γ') $\chi\psi+\chi^2=180$, $\chi\psi+\psi^2=220$.

857) α') $\chi^2+\psi^2+\chi\psi=7$, $\chi^2-\psi^2+2\chi\psi=17$, β') $\frac{\chi}{\psi}+\frac{\psi}{\chi}=\frac{5}{2}$, $\chi^2-\psi^2=12$,
γ') $\chi-\psi=2\chi\psi$, $\chi+\psi=10\chi\psi$.

858) α') $\chi^2-y^2=21$, $\chi y=35$, β') $\chi+\frac{1}{y}=4$, $y+\frac{1}{\chi}=1$.

859) $\chi(\chi+y)=\chi^2-\chi y+y^2=3$,

860) α') $\chi+\frac{1}{y}=\alpha$, $y+\frac{1}{y}=-\frac{4}{3\alpha}$, β') $\chi(\chi+y)=\alpha^2$, $y(\chi+y)=\beta^2$.

Συστήματα 2ου βαθμοῦ μὲ ἐξισώσεις καὶ ἀγνώστους περισσοτέρους τῶν δύο.

§ **178. Γενικὴ Μέθοδος.** Ἵνα λύσωμεν σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους, δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν μεταξὺ αὐτῶν ἕνα ἄγνωστον καὶ νὰ ἀναγάγωμεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος εἰς λύσιν συστήματος (ν—1) ἐξισώσεων μὲ (ν—1) ἀγνώστους καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω, ὡς ἐργαζόμεθα καὶ διὰ πρωτοβάθμια συστήματα (§ 107).

Εἰς πολλὰς ὅμως περιπτώσεις ἡ ἐφαρμογὴ τῆς γενικῆς ταύτης μεθόδου εἰς συστήματα 2ου βαθμοῦ ἄγει εἰς ἐξίσωσιν 4ου βαθμοῦ μὴ δυναμένην νὰ ὑποβιβασθῇ εἰς δευτεροβάθμιον. Τὰ τοιαῦτα ὅθεν συστήματα δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διὰ τῶν μεθόδων τῆς στοιχειώδους Ἀλγέβρας, ἐκτὸς ἂν μὲ εἰδικὰ τεχνάσματα εἶναι δυνατὸς ὁ ὑποβιβασμὸς τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν.

Ὡς παράδειγμα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

Παράδ. 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi^2+\psi^2+\omega^2=14,\quad \omega^2-\chi^2=8,\quad \psi^2-\chi^2=3.$$

Λύσις. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ μέλη τῆς β' τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς γ' εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\omega^2-\psi^2=5$. Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὰς δύο πρώτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $2\omega^2+\psi^2=22$. Οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $\omega^2-\psi^2=5$, $2\omega^2+\psi^2=22$, ὅπερ δὲν ἔχει τὸν χ.

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $3\omega^2=27$, ὅθεν $\omega^2=9$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\psi^2=4$ καὶ $\chi^2=1$. Ἄρα $\omega=\pm3$, $\psi=\pm2$, $\chi=\pm1$.

Τὸ σύστημα ἑπομένως ἔχει τὰς ἀκολούθους ὀκτὼ λύσεις:

$\chi=1,\ \psi=2,\ \omega=3$	$\chi=-1,\ \psi=2,\ \omega=3$
$\chi=1,\ \psi=2,\ \omega=-3$	$\chi=-1,\ \psi=2,\ \omega=-3$
$\chi=1,\ \psi=-2,\ \omega=3$	$\chi=-1,\ \psi=-2,\ \omega=3$
$\chi=1,\ \psi=-2,\ \omega=-3$	$\chi=-1,\ \psi=-2,\ \omega=-3$.

Παράδ. 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi^2+\psi^2+\omega^2=56,\ \chi\psi=8,\ \chi+\psi=\omega.$$

Α΄. (Μέθοδος γενική). Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{8}{\psi},\ \omega=\psi+\frac{8}{\psi}=\frac{\psi^2+8}{\psi} \qquad (1)$$

ἡ δὲ α΄ γίνεται

$$\frac{64}{\psi^2}+\psi^2+\frac{(\psi^2+8)^2}{\psi^2}=56, \text{ ὅθεν } \psi^4-20\psi^2+64=0,$$

ἐξ ἧς $\psi=\pm2$ καὶ $\psi=\pm4$.

Εἶτα ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν ὅτι:

ὅταν $\psi=2$, θὰ εἶναι $\chi=4$ καὶ $\omega=6$
» $\psi=-2$, » » $\chi=-4$ » $\omega=-6$
» $\psi=4$ » » $\chi=2$ » $\omega=6$
» $\psi=-4$ » » $\chi=-2$ » $\omega=-6$

Β΄. Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς γ΄ εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν ὅτι $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\omega^2$. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν ἄλλων εὑρίσκομεν ὅτι $\chi^2+\psi^2=56-\omega^2$, καὶ $2\chi\psi=16$, αὕτη γίνεται $56-\omega^2+16=\omega^2$, ὅθεν $2\omega^2=72$ καὶ $\omega=\pm6$. Ἐπειδὴ $\chi+\psi=\omega=\pm6$, ἕπεται ὅτι ἤχθημεν εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων

$$\chi+\psi=6 \qquad \chi+\psi=-6$$
$$\chi\psi=8 \qquad \chi\psi=8$$

Ὁ τρόπος τῆς λύσεως τούτων εἶναι γνωστὸς (§ 176 Παράδ. 1ον).

Παράδ. 3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=\frac{1}{\omega},\ \chi+\omega=\frac{1}{\psi},\ \psi+\omega=\frac{1}{\chi}.$$

Α΄ (Μέθοδος γενική). Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς θέτομεν τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi\omega+\psi\omega=1$, $\chi\psi+\omega\psi=1$, $\chi\psi+\omega\chi=1$. (1)

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὰς δύο πρώτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi\omega-\chi\psi=0$ ἢ $\chi(\omega-\psi)=0$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἄγνωστοι χ,ψ,ω, εἰσερχόμενοι ὡς παρονομασταὶ εἰς τὸ δοθὲν σύστημα δὲν εἶναι μηδέν, ἕπεται ὅτι $\omega-\psi=0$, ὅθεν $\omega=\psi$. Ὥστε τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\chi\omega+\psi\omega=1,\ \omega=\psi,\ \psi\chi+\omega\chi=1 \qquad (2)$$

Πρὸς ἀπαλοιφὴν τοῦ χ μεταξὺ τῆς α΄ καὶ τρίτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λύομεν ἀμφοτέρας πρὸς χ καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς α΄ $\chi=\frac{1-\psi^2}{\psi}$ ἐκ δὲ τῆς γ΄ $\chi=\frac{1}{2\psi}$. Ἐκ τούτων δὲ $\frac{1-\psi^2}{\psi}=\frac{1}{2\psi}$, ὅθεν $1-\psi^2=\frac{1}{2}$. Τὸ σύστημα λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\chi=\frac{1-\psi^2}{\psi},\ \omega=\psi,\ 1-\psi^2=\frac{1}{2} \qquad (3).$$

Λύοντες τὴν γ΄ εὑρίσκομεν $\psi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἄρα καὶ $\omega = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. ἐκ δὲ τῆς α΄ εὑρίσκομεν $\chi = \frac{1-\frac{1}{2}}{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ὥστε τὸ σύστημα ἔχει τὰς λύσεις

$\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\chi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\psi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Β΄. Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) εὑρίσκομεν $2(\chi\omega+\psi\omega+\chi\psi)=3$, ὅθεν $\chi\omega+\psi\omega+\chi\psi=\frac{3}{2}$. Ἐκ ταύτης λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν καὶ τὰς ἐξισώσεις (1) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$\chi\psi = \frac{1}{2},\quad \psi\omega = \frac{1}{2},\quad \chi\psi = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi^2\psi^2\omega^2 = \frac{1}{8}$, ὅθεν $\chi\psi\omega = \frac{1}{\pm 2\sqrt{2}}$. Ἐὰν τὰ μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων (4) εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\psi = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \chi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \omega = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται εὑρεθεῖσαι ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων ἔπρεπε νὰ συνδυασθῶσι καθ᾽ ὅλους δυνατοὺς τρόπους. Ἡ μορφὴ ὅμως τῶν ἐξισώσεων (4) δεικνύει ὅτι οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ὁμόσημοι· κατ᾽ ἀκολουθίαν δεκταὶ εἶναι μόνον αἱ ἑξῆς $\chi = y = \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\chi = y = \omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

861) $\chi^2+\chi\psi+\chi\omega=4$, $\chi\psi+\psi^2+\psi\omega=9$, $\chi\omega+\psi\omega+\omega^2=36$.

862) $\chi^2+\psi^2+\omega^2=14$, $\chi\psi+\chi\omega-\psi\omega=7$, $\chi+\psi+\omega=6$.

863) $\chi+\psi+z=14$, $(\chi-\psi)^2=2z$, $\chi\psi+z=13$.

864) $\chi^2-\psi^2=35$, $\chi\psi=6$, $\chi+\psi=z$.

865) $\chi+\psi+z=6$, $\chi^2+\psi^2+z^2=14$, $\chi\psi=2$.

866) $y+z=\psi z$, $2(z+\chi)=z\chi$, $3(\chi+\psi)=\chi\psi$.

867) $\chi+y+z=5$, $\chi^2+y^2+z^2=23$, $\chi y+\chi z-yz=11$.

868) $\chi+y+z=5$, $y-\chi=\frac{21}{y+\chi}$, $2\chi+z=12$.

869) $\chi+y+z=\alpha$, $\frac{2}{\chi}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, $16yz=25\chi^2$.

870) $yz-2z+1=0$, $z\chi-3\chi+1=0$, $2\chi y-3y+1=0$.

871) $yz-y-z=15$, $z\chi-z-\chi=8$, $\chi y-\chi-y=3$.

872) $\frac{y+z}{\chi}=\frac{z+\chi}{y}=\frac{\chi+y}{z}$, $\chi^2+y^2+z^2=3\alpha^2$.

§ **179. Συστήματα ἀνωτέρου βαθμοῦ.** Ἐνίοτε διὰ τῆς γενικῆς μεθόδου τῆς ἀπαλοιφῆς ἢ καὶ διὰ εἰδικῶν τεχνασμάτων εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν λύσιν καὶ συστημάτων ἀνωτέρου βαθμοῦ τοῦ 2ου, ὡς ἐκ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων φαίνεται.

Παράδ. 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi^3+\psi^3=133$, $\chi+\psi=7$.

Α'. (Μέθοδος γενική). Ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν $\psi=7-\chi$, ὅτε ἡ α' γίνεται $\chi^3+(7-\chi)^3=133$ ἢ $\chi^2-7\chi+10=0$, ὅθεν $\chi=5$ ἢ $\chi=2$.

Ὅταν δὲ $\chi=5$, θὰ εἶναι $\psi=7-5=2$

καὶ » » $\chi=2$ » » $\psi=7-2=5$.

Β'. Θέτοντες $\chi-\psi=\lambda$ εὑρίσκομεν ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\chi+\psi=7$, ὅτι

$$\chi=\frac{7+\lambda}{2},\quad \psi=\frac{7-\lambda}{2} \qquad (1),$$

ὅτε ἡ α' γίνεται $\left(\frac{7+\lambda}{2}\right)^3+\left(\frac{7-\lambda}{2}\right)^3=133$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\lambda=\pm 3$.

Ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν εἶτα ὅτι

$$\text{διὰ } \lambda=3,\ \chi=\frac{7+3}{2}=5,\ \psi=\frac{7-3}{2}=2.$$

$$\text{» } \lambda=-3,\ \chi=\frac{7-3}{2}=2,\ \psi=\frac{7+3}{2}=5.$$

Γ'. Ἐπειδὴ $\chi^3+\psi^3=(\chi+\psi)^3-3\chi\psi(\chi+\psi)$, ἡ α' ἐξίσωσις γίνεται

$$7^3-21\chi\psi=133, \text{ ὅθεν } \chi\psi=10.$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\chi+\psi=7$, ἕπεται ὅτι οἱ ἄγνωστοι εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-7\omega+10=0$, ἣν λύομεν κατὰ τὰ γνωστά.

Παράδ. 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$(\chi^2+\psi^2)\chi=26,$$
$$(\chi+\psi)\chi\psi=30.$$

Α'. (Μέθοδος γενική). Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ μέλη τῆς α' τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β' εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3-\chi^2\psi=-4$, ἐξ ἧς $\psi=\frac{\chi^3+4}{\chi^2}$ (1).

Ἐὰν ἤδη ἐν τῇ β' ἐξισώσει τοῦ δοθέντος συστήματος θέσωμεν ἀντὶ ψ τὴν τιμήν του ταύτην, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων κτλ. τὴν τριώνυμον ἐξίσωσιν $2\chi^6-18\chi^3+16=0$, ἥτις ἔχει πραγματικὰς ῥίζας 2 καὶ 1. Ἐκ δὲ τῆς (1) εὑρίσκομεν ὅτι:

Ὅταν $\chi=2$, θὰ εἶναι $\psi=3$ καὶ

» $\chi=1$, » » $\psi=5$

Β'. Θέτομεν $\psi=\lambda\chi$ καὶ προχωροῦμεν κατὰ τὰ γνωστά.

ΣΗΜ. Χάριν συντομίας παραλείπομεν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν φανταστικῶν ῥιζῶν.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

873) $\chi-\psi=3,\quad \chi^3-\psi^3=279.$

874) $\chi-\psi=7,\quad \chi^3+\psi^3=1027.$

875) $\chi+\psi=3,\quad \chi^4+\psi^4=17.$

876) $\chi-\psi=1,\quad \chi^4-\psi^4=65.$

877) $\dfrac{\psi+z-\chi}{7}=\dfrac{z+\chi-\psi}{11}=\dfrac{\chi+\psi-z}{5}=\dfrac{\chi\psi z}{3}.$

878) $\chi^2+\psi^2+\chi+\psi=18,\quad \chi\psi.(\chi+1).(\psi+1)=72.$

879) $8\chi^3=125\psi^3=27\omega^3,\quad \dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=\alpha.$

880) $\chi+\psi=7,\quad \dfrac{\chi^3+\psi^3}{\chi^2+\psi^2}=\dfrac{283}{25}.$

881) $\chi^2+\psi^2=34,\quad \chi\psi.(\chi+\psi)^2=960.$

882) $\chi+\dfrac{1}{\chi}=y+\dfrac{1}{y},\quad x^3+y^3=16.$

883) $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2},\quad xyz=1.$

884) $\dfrac{xyz}{xy+yz}=\dfrac{1}{\alpha},\quad \dfrac{xyz}{xy+zx}=\dfrac{1}{\beta},\quad \dfrac{xyz}{zx+zy}=\dfrac{1}{\gamma}.$

Προβλήματα λυόμενα διὰ συστημάτων 2ου ἢ καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ.

885) Κεφάλαιόν τι φέρει ἐτήσιον τόκον 30 δραχμάς. Ἕτερον κεφάλαιον μεγαλύτερον κατὰ 150 δραχμὰς τοκιζόμενον μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 °/₀ μικρότερον φέρει ἐτήσιον τόκον 28 δραχ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κεφάλαια ταῦτα καὶ τὰ ἐπιτόκια.

886) Δύο ἐργάται ὁμοῦ ἐργαζόμενοι τελειώνουσιν ἔργον τι εἰς $\frac{24}{5}$ ὥρας. Ἐὰν ὁ α΄ ἐργαζόμενος μόνος τελειώσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου καὶ εἶτα ἀμέσως συνεχίσῃ ὁ β΄, τὸ ἔργον τελειώνει εἰς 10 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ὁ καθεὶς δύναται νὰ τελειώσῃ μόνος του τὸ ἔργον;

887) Εἰς ἐργοστάσιον ἐργάζονται 180 ἄνδρες καὶ γυναῖκες καὶ λαμβάνει ἕκαστος ἀνὴρ τόσας δραχμὰς ἡμερησίως, ὅσαι εἶναι αἱ γυναῖκες, ἑκάστη δὲ γυνή, ὅσοι εἶναι οἱ ἄνδρες. Ἐὰν ὅλοι ὁμοῦ λαμβάνωσι 16000 δραχμὰς καθ' ἑκάστην, πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

888) Ὁμὰς φίλων ἔκαμον ἐκδρομήν τινα. Ἐὰν ἦσαν δύο ἀκόμη καὶ ἐδαπάνα ἕκαστος 5 δραχ. περισσότερον, ἡ ὁλικὴ δαπάνη θὰ ἦτο 560 δραχμάς. Ἐὰν δὲ ἦσαν 2 ὀλιγώτεροι καὶ ἐδαπάνα ἕκαστος 6 δραχμ. ὀλιγώτερον, ἡ ὁλικὴ δαπάνη θὰ ἦτο 210 δραχ. Πόσοι ἦσαν οἱ φίλοι οὗτοι καὶ πόσα ἐδαπάνησεν ἕκαστος;

889) Ἁμάξης διανυσάσης 120 μέτρα ἕκαστος τῶν ἐμπροσθίων τροχῶν ἔκαμεν 6 περιστροφὰς περισσοτέρας ἑκάστου ὀπισθίου. Ἐὰν ἡ περιφέρεια ἑκάστου ἐμπροσθίου τροχοῦ ἦτο κατὰ τὸ 1/4 αὐτῆς μεγαλυτέρα, ἡ δὲ τῶν ὀπισθίων κατὰ τὸ 1/5 αὐτῆς, ἕκαστος ἐμπρόσθιος τροχὸς θὰ ἔκαμνε μόνον 4 στροφὰς περισσοτέρας. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν τροχῶν.

890) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὧν ὁ α΄ ἔχει λόγον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ

β′ ἴσον πρὸς $\frac{1}{4}$, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ β′ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ α′ κατὰ 3.

891) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες γινόμενον—40 καὶ ὁ α′ ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τοῦ β′ κατὰ 18.

892) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία ἔχουσι γινόμενον 35, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ γινομένου αὐτῶν κατὰ 40.

893) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἑξῆς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 16, 18, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο ἄλλα ψηφία, ὅπως εἶναι γεγραμμένα.

894) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 14 εἰς τρία μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ ἓν νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἄλλων, ἕνα δὲ τούτων νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἄλλου.

895) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου εἶναι ὅλα ἴσα.

896) Νὰ σχηματισθῇ ἀναλογία, ἧς οἱ ἡγούμενοι ἔχουσιν ἄθροισμα 9, οἱ ἑπόμενοι 12 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ὅρων εἶναι 125.

897) Τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων δύο ἀριθμῶν εἶναι 72, ὁ δὲ λόγος τοῦ κύβου τοῦ ἡμίσεος τοῦ α′ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ β′ ἰσοῦται πρὸς τὸν δεύτερον. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοι οὗτοι ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ′.

Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. Ἀνισότητες 2ου βαθμοῦ.

§ 180. Διάφοροι τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ μορφαί. Πολλαπλασιάζοντες τὸ τριώνυμον ἐπὶ α καὶ διαιροῦντες ὅλους τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ α δὲν βλάπτομεν προφανῶς τοῦτο, ἤτοι

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \qquad (1).$$

Ἐὰν τὸν ὅρον $\frac{\beta}{\alpha}\chi$ πολλαπλασιάσωμεν καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2, προσθέσωμεν δὲ $\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ καὶ $-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ εἰς τὸ $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}$, δὲν βλάπτεται τὸ τριώνυμον, ἤτοι εἶναι :

$$\alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(\chi^2+2\frac{\beta}{2\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι $\chi^2+2\frac{\beta}{2\alpha}\chi+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ καὶ

$\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἰσότης (1) γίνεται: $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left[(\chi+\frac{\beta}{2\alpha})^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$ (2)

Ἡ παράστασις $\alpha\left[(\chi+\frac{\beta}{2\alpha})^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$ λαμβάνει διαφόρους μορφὰς ἐξαρτωμένας ἐκ τοῦ εἴδους τῆς διακρινούσης, ἤτοι ἐκ τοῦ εἴδους τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου.

Α΄ περίπτωσις. $\Delta<O$. Ἂν ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ τοῦ τριωνύμου εἶναι ἀρνητικὴ ὅτε, ὡς γνωστὸν (§ 151) τὸ τριώνυμον ἔχει φανταστικὰς ρίζας, ἡ παράστασις $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$ ὡς πηλίκον θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετική· κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν τῆς ἰσότητος (2) ἄθροισμα εἶναι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ θετικόν, ἔστω ϑ. Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας θέσωμεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=T(\chi)$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται $T(\chi)=\alpha\vartheta$. (3).

Β΄ περίπτωσις $\Delta=O$. Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ὅτε τὸ τριώνυμον ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν $(-\frac{\beta}{2\alpha})$, ἡ παράστασις $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}$ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ ἰσότης (2) γίνεται $T_{(\chi)}=\alpha(\chi+\frac{\beta}{2\alpha})^2$ (4).

Γ΄ Περίπτωσις $\Delta>O$. Ἐὰν ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι θετική, ὅτε, ὡς γνωρίζομεν, τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ῥίζας πραγματικὰς (χ' καὶ χ''), θὰ εἶναι $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται:

$T_{(\chi)}=\alpha\left[(\chi+\frac{\beta}{2\alpha})^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2$

ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $T_{(\chi)}=\alpha\left[(\chi+\frac{\beta}{2\alpha})^2-\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2\right]$

$$=\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$$

$$=\left(\chi-\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(\chi-\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$$

ἡ δὲ ἰσότης (5) γίνεται:

$$T_{(\chi)}=\alpha\left(\chi-\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(\chi-\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$$

Καὶ ἂν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\chi'$, $\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\chi''$

συμπεραίνομεν ὅτι $T_{(\chi)}=\alpha(\chi-\chi').(\chi-\chi'')$. (6)

Κατελήξαμεν οὕτω εἰς τὴν ταὐτότητα (6), ἣν καὶ προηγουμένως (§164) κατ' ἄλλον τρόπον εὕρομεν.

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν ὅτι:

Α'). Ἂν ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι ἀρνητική, τὸ τριώνυμον εἶναι γινόμενον τοῦ α ἐπὶ θετικόν τινα ἀριθμόν. (3)

Β'). Ἂν ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι μηδέν, τὸ τριώνυμον εἶναι γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ τέλειον τετράγωνον $\left(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

Γ'). Ἂν ἡ διακρίνουσα εἶναι θετική, τὸ τριώνυμον εἶναι γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν διωνύμων $(\chi-\chi')$ *καὶ* $(\chi-\chi'')$, *ἔνθα* χ' *καὶ* χ'' *εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου.*

Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ.

§ **181. Θεώρημα I.** *Ἐὰν ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου* $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ *εἶναι ἀρνητική, τὸ τριώνυμον εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ.*

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι $T_{(\chi)}=\alpha\theta$, ἔνθα θ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ. Κατ' ἀκολουθίαν, ἂν α εἶναι θετικὸς ἀριθμός, καὶ τὸ γινόμενον αθ ἢ $T_{(\chi)}$ εἶναι θετικόν· ἂν δὲ α εἶναι ἀρνητικός, τὸ $T_{(\chi)}$ θὰ εἶναι ἀρνητικόν. Εἶναι λοιπὸν τὸ $T_{(\chi)}$ ὁμόσημον πρὸς τὸν α. ὅ. ἔ. δ.

§ **182. Θεώρημα II.** *Ἐὰν ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου* $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ *εἶναι μηδέν, τὸ τριώνυμον εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ πλὴν τῆς* $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν (§ 180 Β') εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι $T(\chi)=\alpha\left(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $\left(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ ἀριθμὸς θετικός, πλὴν τῆς τιμῆς $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, δι' ἣν μηδενίζεται, ἕπεται πάλιν ὅτι $T_{[\chi]}$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α, ἐκτὸς διὰ

$$\chi=-\frac{\beta}{2\alpha},\ \text{ὅτε}\ T_{[\chi]}=0.\ \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ **183. Θεώρημα III.** *Ἐὰν ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου* $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ *εἶναι θετική, τὸ τριώνυμον εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ κειμένην ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν, ἑτερόσημον δὲ πρὸς τὸν α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ κειμένην ἐντὸς τῶν ῥιζῶν αὐτοῦ.*

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 180Γ') εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι $T_{[\chi]}=\alpha\,(\chi-\chi')\,(\chi-\chi'')$, ἔνθα χ' καὶ χ'' εἶναι δύο ἄνισοι ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $T_{(\chi)}$, ἔστω δὲ $\chi' < \chi''$. Ἐὰν νοήσωμεν ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς καὶ κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν σειρὰν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, ὡς κάτωθι φαίνεται:

$$-\infty \ldots\ldots\ldots \lambda \ldots\ldots \chi' \ldots\ldots \mu \ldots\ldots \chi'' \ldots\ldots \rho \ldots\ldots\ldots +\infty,$$

χωρίζονται οὗτοι ὑπὸ τῶν ῥιζῶν χ' καὶ χ'' εἰς τρία διαστήματα.

Περὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα διαστήματα $-\infty \ldots \chi'$ καὶ $\chi'' \ldots +\infty$, λέγομεν ὅτι κεῖνται ***ἐκτὸς*** τῶν ῥιζῶν, περὶ δὲ τῶν κειμένων εἰς τὸ μεσαῖον διάστημα $\chi' \ldots \chi''$ λέγομεν ὅτι κεῖνται ***ἐντὸς*** τῶν ῥιζῶν.

Ἔστω ἤδη ἀριθμός τις λ κείμενος εἰς τὸ πρῶτον διάστημα· δι' αὐτὸν τὸ τριώνυμον γίνεται $\alpha(\lambda-\chi')(\lambda-\chi'')$,

ἤτοι $$T_{(\lambda)} = \alpha(\lambda-\chi')(\lambda-\chi''). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\lambda < \chi'$ καὶ $\lambda < \chi''$, οἱ παράγοντες $(\lambda-\chi')$ καὶ $(\lambda-\chi'')$ εἶναι ἀμφότεροι ἀρνητικοί, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν εἶναι θετικὸν καὶ ἔστω Θ· ἡ ἰσότης τότε (1) γίνεται $T_{(\lambda)} = \alpha\Theta$, ὅθεν γίνεται εὐκόλως φανερὸν ὅτι ἡ τιμὴ $T_{(\lambda)}$ τοῦ τριωνύμου ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἂν θέσωμεν εἰς τὸ τριώνυμον ἀντὶ χ ἀριθμόν τινα ρ κείμενον εἰς τὸ τρίτον διάστημα, τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν τιμὴν $\alpha(\rho-\chi')(\rho-\chi'')$, ἤτοι $T(\rho) = \alpha(\rho-\chi')(\rho-\chi'')$. 2)

Ἐπειδὴ εἶναι $\rho > \chi'$ καὶ $\rho > \chi''$, οἱ παράγοντες $(\rho-\chi')$ καὶ $(\rho-\chi'')$ εἶναι ἀμφότεροι θετικοὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι θετικός τις ἀριθμὸς Θ, ἄρα $T_{(\rho)} = \alpha\theta$. Ἐκ τούτων φαίνεται πάλιν ὅτι $T_{(\rho)}$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἐὰν τέλος δόσωμεν εἰς τὸ χ τιμὴν μ κειμένην μεταξὺ τῶν ῥιζῶν, ἡ τιμὴ $T_{(\mu)}$ τοῦ τριωνύμου ἰσοῦται πρὸς $\alpha(\mu-\chi')(\mu-\chi'')$ ἤτοι

$$T_{(\mu)} = \alpha(\mu-\chi')(\mu-\chi'').$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\mu > \chi'$ καὶ $\mu < \chi''$, ὁ μὲν παράγων $(\mu-\chi')$ εἶναι θετικός, ὁ δὲ $(\mu-\chi'')$ ἀρνητικός· τὸ γινόμενον ἄρα $(\mu-\chi')(\mu-\chi'')$ εἶναι ἀρνητικός τις ἀριθμός Α, ἄρα $T_{(\mu)} = \alpha A$. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι, ἐὰν $\alpha > 0$, θὰ εἶναι $T_{(\mu)} < 0$ ἐὰν δὲ $\alpha < 0$, θὰ εἶναι $T_{(\mu)} > 0$, ἤτοι ἡ τιμὴ $T_{(\mu)}$ εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τὸν α.

Ὥστε: ***Ἡ τιμή, ἣν λαμβάνει τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta+\gamma$ εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸν α διὰ τὰς ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ· ἑτερόσημος δὲ πρὸς τὸν α διὰ τὰς ἐντὸς τῶν ῥιζῶν τιμὰς τοῦ*** χ. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. Νὰ ὁρισθῶσι διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ τὰ σημεῖα τῶν ἀκολούθων τριωνύμων.

√ 898) $5\chi^2+3\chi+2$, $2\chi^2-12\chi+18$, $3\chi^2-9\chi+6$.

899) $-3\chi^2+2\chi-7$, $-\chi^2+\chi+2$, $-3\chi^2-3\chi+6$, $-2\chi^2+8\chi-8$.

900) Νὰ ὁρισθῶσιν ἐπίσης τὰ σημεῖα τῶν ἀκολούθων ἀτελῶν τριωνύμων: χ^2-1, $2\chi^2+3$, $-5\chi^2-10$, $2\chi^2-4\chi$, $-3\chi^2+12$, $-7\chi^2+14\chi$.

901) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\chi^2+\lambda\chi+\lambda^2$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ, οἷος δήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς λ.

902) Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ ἀμφότερα τὰ τριώνυμα $\chi^2-2\chi-3$ καὶ $-\chi^2+6\chi-8$ εἶναι θετικά; Διὰ ποίας δὲ καὶ τὰ δύο ἀρνητικά;

Σύγκρισις ἀριθμοῦ πρὸς τὰς ῥίζας τριωνύμου.

§ **184. Θεώρημα Ι.** ***Ἐὰν τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ καθίσταται ἑτερόσημον πρὸς τὸν α διά τινα πραγματικὴν τιμὴν λ τοῦ χ, τὸ τριώνυμον ἔχει πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ῥίζας, ἡ δὲ τιμὴ λ κεῖται ἐντὸς τῶν ῥιζῶν τούτων.***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ $\chi=\lambda$, τὸ τριώνυμον λαμβάνει τιμὴν $T_{(\lambda)}$ ἑτερόσημον πρὸς τὸν α, ἤτοι ὅτι $\alpha . T_{(\lambda)}<0$. Λέγω ὅτι τὸ τριώνυμον ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ὅτι ὁ λ κεῖται μεταξὺ αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ τριώνυμον εἶχε ῥίζας φανταστικὰς ἢ πραγματικὰς καὶ ἴσας, θὰ ἦτο διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν λ τοῦ χ ὁμόσημον πρὸς τὸν α ἢ θὰ ἦτο μηδὲν διὰ $\chi=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Ταῦτα δὲ ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα τὸ τριώνυμον ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Κεῖται δὲ ὁ λ μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τούτων, διότι ἄλλως $T_{(\lambda)}$ θὰ ἦτο ὁμόσημος πρὸς τὸν α, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

§ **185. Θεώρημα ΙΙ.** ***Ἐὰν τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἔχον ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καθίσταται ὁμόσημον πρὸς τὸν α διά τινα τιμὴν τοῦ χ, ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα ἀμφοτέρων τῶν ῥιζῶν τούτων, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τοῦ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.***

Ἔστωσαν χ' καὶ χ'' δύο πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, ὧν ἡ χ' ἔστω μικροτέρα τῆς χ''· ἔστω δὲ καὶ λ τιμή τις τοῦ χ τοιαύτη ὥστε $\alpha . T_{(\lambda)}>0$. Λέγω ὅτι:

α'). Ἐὰν $\lambda<-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, θὰ εἶναι $\lambda<\chi'<\chi''$ καὶ

β'). Ἐὰν $\lambda>-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, θὰ εἶναι $\lambda>\chi''>\chi'$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\alpha . T_{(\lambda)}>0$, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν· διότι, ἂν ἔκειτο ἐντὸς αὐτῶν θὰ ἦτο $\alpha . T_{(\lambda)}<0$.

Ὥστε ὁ λ θὰ ἔχῃ μίαν τῶν ἀκολούθων θέσεων :

$$-\infty \ldots\ldots \lambda \ldots \chi' \ldots\ldots \chi'' \ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$$

ἢ

$$-\infty \ldots\ldots\ldots\ldots \chi' \ldots\ldots \chi'' \ldots \lambda \ldots + \infty .$$

Πρὸς ἀκριβῆ καθορισμὸν τῆς θέσεως αὐτοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Καθ' ὑπόθεσιν εἶναι $\chi' < \chi''$ ἐὰν δὲ προσθέσωμεν χ'' εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\chi' + \chi'' < 2\chi''$. Ἐπειδὴ δὲ (§152) εἶναι $\chi'+\chi''=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται $-\dfrac{\beta}{\alpha}<2\chi''$, ὅθεν $-\dfrac{\beta}{2\alpha}<\chi''$.

Ἐὰν δὲ εἰς τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\chi' < \chi''$ προσθέσωμεν χ', εὑρίσκομεν $2\chi' < \chi' + \chi''$, ὅθεν $\chi' < -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Περιέχεται ἄρα ὁ ἀριθμὸς $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ μεταξὺ τῶν ῥιζῶν χ' καὶ χ'', ὡς κάτωθεν φαίνεται :

$$-\infty \ldots\ldots \chi' \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots\ldots \chi'' \ldots\ldots + \infty .$$

Ἐὰν ἤδη εἶναι $\lambda < -\dfrac{\beta}{2\alpha}$, ὁ λ δὲν δύναται νὰ κεῖται εἰς τὸ γ' διάστημα $\chi'' \ldots + \infty$ διότι τότε θὰ ἦτο μεγαλύτερος τοῦ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Ἐπειδὴ δὲ οὐδὲ εἰς τὸ μεσαῖον διάστημα κεῖται, ἕπεται κατ' ἀνάγκην ὅτι κεῖται εἰς τὸ α' διάστημα $-\infty \ldots \chi'$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $\lambda < \chi' < \chi''$.

Ἐὰν δὲ εἶναι $\lambda > -\dfrac{\beta}{2\alpha}$, ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ κεῖται εἰς εἰς τὸ γ' διάστημα $\chi'' \ldots + \infty$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $\lambda > \chi'' > \chi'$ ὅ. ἔ. δ.

Χωρισμὸς τῶν ῥιζῶν τριωνύμου.

§ **186. Θεώρημα I.** *Ἐὰν τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους διὰ δύο πραγματικὰς τιμὰς λ καὶ μ τοῦ χ, τὸ τριώνυμον ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, μία δὲ τούτων μόνον περιέχεται μεταξὺ λ καὶ μ.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως Τ(λ) καὶ Τ(μ) εἶναι ἀριθμοὶ ἑτερόσημοι, εἷς τούτων εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τὸν α. Τὸ τριώνυμον ἄρα (§ 184) ἔχει ῥίζας χ' καὶ χ'' πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Ἐὰν ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι αὗται περιείχοντο μεταξὺ λ καὶ μ, ὡς κάτωθι φαίνεται :

$-\infty \;.\;.\;.\;.\; \lambda \;.\;.\;.\;.\; \chi'' \;.\;.\; \chi \;.\; \mu \;.\;.\;.\; +\infty.$

αἱ τιμαὶ $T_{[\lambda]}$ καὶ $T_{[\mu]}$ θὰ ἦσαν ἀμφότεραι ὁμόσημοι πρὸς τὸν α, ἄρα καὶ πρὸς ἀλλήλας ὁμόσημοι, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν δὲ οὐδεμία τούτων ἔκειτο μεταξὺ λ καὶ μ, ὡς κάτωθι φαίνεται :

$-\infty \ldots\ldots \chi' \ldots \lambda \ldots \mu \ldots \chi'' \ldots +\infty$ (α)

$-\infty \ldots\ldots \chi' \ldots \chi'' \ldots \lambda \ldots \mu \ldots +\infty$ (β)

$-\infty \ldots\ldots\ldots \lambda \ldots \mu \ldots \chi' \ldots \chi'' \ldots +\infty$ (γ)

αἱ τιμαὶ $T_{[\lambda]}$ καὶ $T_{[\mu]}$ θὰ ἦσαν ἢ ἀμφότεραι ἑτερόσημοι πρὸς τὸν α (περ. α) ἢ ἀμφότεραι ὁμόσημοι πρὸς τὸν α (περ. β καὶ γ). Θὰ ἦσαν ἄρα πάντοτε ὁμόσημοι πρὸς ἀλλήλας, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι λοιπὸν δυνατὸν αἱ ῥίζαι νὰ κεῖνται ἀμφότεραι μεταξὺ λ καὶ μ οὐδὲ ἀμφότεραι ἐκτὸς αὐτῶν. Κατ' ἀνάγκην ἄρα μία μόνον τούτων περιέχει μεταξὺ λ καὶ μ. ὅ. ἔ. δ.

Ὅταν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν περιέχηται μία μόνον ῥίζα τριωνύμου, λέγομεν ὅτι οὗτοι ***χωρίζουσι*** μίαν ῥίζαν τοῦ τριωνύμου.

Ἀσκήσεις. √ 903. Τίνα θέσιν ἔχει ὁ ἀριμὸς 3 πρὸς τὰς ῥίζας ἑκάστου τῶν τριωνύμων $\chi^2-7\chi+10$, $2\chi^2-6\chi+4$ καὶ $-\chi^2+9\chi-20$;

√ 904) Τίνα θέσιν ἔχει ὁ $-\dfrac{1}{2}$ πρὸς τὰς ῥίζας τοῦ ἀτελοῦς τριωνύμου χ^2-1 καὶ τίνα πρὸς τὰς ῥίζας τοῦ $-\chi^2-6\chi-4$;

√ 905) Μεταξὺ τίνων ἐκ τῶν ἀριθμῶν $-4, -3, 0, 2, 4, 5$ περιέχονται αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $5\chi^2-5\chi-30$;

√ 906) Νὰ ἀποδειχθῇ χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\chi-1)(\chi+2)+(\chi+1)(\chi-2)=(\chi-1)(\chi-2)$, ὅτι αὕτη ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ὧν μόνον μία μόνον περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2.

√ 907) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\alpha^2}{\chi-\lambda}+\dfrac{\beta^2}{\chi-\mu}=1$ ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ὧν μία περιέχεται μεταξὺ λ καὶ μ, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

§ 187. Λύσις ἀνισοτήτων 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἡ γενικὴ μορφὴ πάσης ἀνισότητος 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον εἶναι $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma > 0$, ἔνθα α εἶναι ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενός.

ΣΗΜ. Ἂν ἀνισότης ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma < 0$, ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τοῦ α' μέλους δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν προηγουμένην μορφήν.

Πρὸς λύσιν τοιαύτης ἀνισότητος ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Α' περίπτωσις $\Delta < 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ. Κατ' ἀκολουθίαν, ἂν $\alpha > 0$, τὸ τριώνυμον εἶναι πάντοτε θετικόν, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνισότης. Ἀληθεύει ἄρα ἡ ἀνισότης διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ.

Ἂν δὲ εἶναι $α<0$, τὸ τριώνυμον θὰ εἶναι πάντοτε ἀρνητικὸν ἐν ᾧ ἡ ἀνισότης ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι θετικόν. Οὐδέποτε ἄρα ἀληθεύει ἡ ἀνισότης.

Οὕτως ἡ ἀνισότης $5χ^2+3χ+2>0$ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $χ$· διότι τῆς διακρινούσης οὔσης ἀρνητικῆς ($3^2-4.2.5=-31$) τὸ τριώνυμον εἶναι πάντοτε ὁμόσημον πρὸς τὸν 5, ἤτοι πάντοτε θετικόν, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνισότης. Ἡ δὲ ἀνισότης $-3χ^2+2χ-1>0$ οὐδέποτε ἀληθεύει: Διότι τῆς διακρινούσης οὔσης ἀρνητικῆς [$4-4(-3)(-1)=-8$], τὸ τριώνυμον $-3χ^2+2χ-1$ εἶναι πάντοτε ὁμόσημον πρὸς τὸν -3 ἤτοι ἀρνητικὸν καὶ κατ' ἀκολουθίαν οὐδέποτε γίνεται θετικόν, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνισότης.

Β' περίπτωσις $Δ=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τριώνυμον εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν $α$ διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ $χ$ ἐκτὸς τῆς $-\frac{β}{2α}$, διὰ τὴν ὁποίαν τοῦτο μηδενίζεται. Κατ' ἀκολουθίαν, ἂν $α>0$, τὸ τριώνυμον εἶναι πάντοτε θετικὸν (ἐκτὸς διὰ $χ=-\frac{β}{2α}$) ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνισότης. Ἀληθεύει ἄρα ἡ ἀνισότης διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ $χ$, πλὴν τῆς $-\frac{β}{2α}$.

Ἂν δὲ $α<0$, τὸ τριώνυμον εἶναι πάντοτε ἀρνητικὸν καὶ διὰ $χ=-\frac{β}{2α}$ γίνεται μηδέν. Οὐδέποτε κατ' ἀκολουθίαν εἶναι θετικόν, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνισότης.

Ἡ ἀνισότης ἄρα οὐδέποτε ἀληθεύει.

Οὕτως ἡ ἀνισότης $χ^2-6χ+9>0$, ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $χ$ πλὴν τῆς

$-\frac{β}{2α}=\frac{6}{2}=3$, δι' ἣν τὸ α' μέλος μηδενίζεται.

Διότι, τῆς $Δ$ οὔσης μηδέν, τὸ τριώνυμον $χ^2-6χ+9$ εἶναι πάντοτε (ἐκτὸς διὰ $χ=3$) ὁμόσημον πρὸς τὴν $+1$, ἤτοι θετικόν, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνισότης. Ἡ δὲ ἀνισότης $-χ^2+4χ-4>0$ οὐδέποτε ἀληθεύει διότι, τῆς $Δ$ οὔσης μηδέν, τὸ τριώνυμον $-χ^2+4χ-4$ εἶναι πάντοτε ἀρνητικόν, πλὴν τῆς τιμῆς 2 δι' ἣν μηδενίζεται. Οὐδέποτε ἄρα εἶναι θετικόν, ὡς ἀπαιτεῖ ἡ ἀνισότης.

Γ' περίπτωσις $Δ>0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τριώνυμον $αχ^2+βχ+γ$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους $χ'$ καὶ $χ''$, ὧν ἡ $χ'$ ἔστω μικροτέρα. Τὸ δὲ τριώνυμον εἶναι ὁμόσημον μὲν πρὸς τὸν $α$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $χ$ κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν, ἑτερόσημον δὲ πρὸς τὸν $α$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $χ$ κειμένην μεταξὺ τῶν ριζῶν τούτων.

Κατ' ἀκολουθίαν, ἂν $\alpha>0$, ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τὰς ἐκτὸς τῶν ριζῶν τιμὰς τοῦ χ, ἤτοι διὰ τὰς μικροτέρος τοῦ χ' καὶ διὰ τὰς μεγαλυτέρας τοῦ χ''.

Ἂν δὲ $\alpha<0$, ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τὰς μεταξὺ χ' καὶ χ'' τιμὰς τοῦ χ, ἤτοι διὰ τὰς μεγαλυτέρας τοῦ χ' καὶ μικροτέρας τοῦ χ'' τιμὰς τοῦ χ.

Ἐὰν π. χ. θέλωμεν νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\chi^2-6\chi+8>0$, σχηματίζομεν τὴν διακρίνουσαν τοῦ τριωνύμου $\chi^2-6\chi+8$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\Delta=36-8.4=4>0.$$

Ἔχει ἄρα τὸ τριώνυμον τοῦτο δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους· εἶναι δὲ αὗται 2 καὶ 4. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\alpha>0$, ἡ δὲ ἀνισότης ἀπαιτεῖ νὰ εἶναι τὸ τριώνυμον $\chi^2-6\chi+8$ θετικόν, ἤτοι ὁμόσημον πρὸς τὸν α. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει διὰ τὰς ἐκτὸς τῶν ριζῶν τιμὰς τοῦ χ, ἕπεται ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μικροτέραν τοῦ 2 καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ 4, ἤτοι διὰ $\chi<2$, καὶ διὰ $\chi>4$.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀνισότης $-\chi^2+\chi+2>0$ ἀληθεύει διὰ τὰς μεταξὺ τῶν ριζῶν -1 καὶ 2 τοῦ τριωνύμου $-\chi^2+\chi+2$ τιμὰς τοῦ χ, ἤτοι διὰ $-1<\chi<2$.

Περιληπτικὸς πίναξ λύσεως τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$.

Δ	$\alpha>0$	$\alpha<0$
$\beta^2-4\alpha\gamma<0$	Πάντοτε ἀληθεύει ἡ ἀνισότης	Οὐδέποτε ἀληθεύει ἡ ἀνισότης
$\beta^2-4\alpha\gamma=0$	Ἡ ἀνισότης ἀληθεύει πάντοτε πλὴν διὰ $\chi=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$	Οὐδέποτε ἀληθεύει
$\beta^2-4\alpha\gamma>0$	Ἡ ἀνισότης ἀληθεύει α') διὰ $\chi<\chi'$. καὶ β') διὰ $\chi>\chi''$.	Ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\chi'<\chi<\chi''$

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἀνισότητες:

908) $6\chi^2-7\chi+3>0$, $\quad -6\chi^2+7\chi-3<0$, $\quad -6\chi^2-7\chi-3>0$.

909) $\chi^2-2\chi+1>0$, $\chi^2-2\chi+1<0$, $-\chi^2+2\chi+1>0$,

910) $\chi^2-\chi-6>0$, $2\chi^2+4\chi-6>0$, $\chi^2+2\chi-3<0$.

911) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες $1-\chi^2>0$ καὶ $\chi^2-3\chi>-2\chi$;

912) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες $\chi>0$, καὶ $\chi^2-3\chi+5>0$, καὶ διὰ ποίας αἱ $\chi<0$ καὶ $\chi^2+\chi-2>0$;

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἀνισότητες.

913) $\chi^4+\chi^3-2\chi^2>0$, $2\chi^3+2\chi^2-24\chi>0$, $\chi^3-\chi<0$, $\chi^4-16<0$.

914) $\dfrac{\chi}{\chi^2+1}>\dfrac{2}{5}$, $\quad \dfrac{\chi-6}{\chi-1}>\dfrac{\chi}{24}$, $\quad \dfrac{\chi-1}{\chi-2}>\dfrac{\chi-3}{\chi-4}$.

915) $\dfrac{1}{\chi^2+3\chi+3}>1$, $\dfrac{1+\chi}{(1+\chi)^2}>1$.

916) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\mu\chi+\mu-1=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ μ.

917) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\lambda\chi^2+(\lambda-1)\chi+\lambda=0$ ἔχει πραγματικὰς ρίζας;

918) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $(\chi-3)^2+(\chi-1)^2-(\chi-\mu)^2=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς;

Σημεῖα τῶν ῥιζῶν 2ου ἐξισώσεως κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς παραμέτρου.

§ **188 Παράδ. 1ον.** ***Νὰ ὁρισθῶσι τὰ σημεῖα τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $(\mu-1)\chi^2-2\mu\chi+\mu-2=0$ κατὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ μ.***

Λύσις. Ἐπειδὴ $\Delta=\mu^2-(\mu-1)(\mu-2)=3\mu-2$, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς διὰ τὰς τιμὰς τοῦ μ, δι' ἃς εἶναι $3\mu-2 \geqq 0$ ἢ $\mu \geqq \dfrac{2}{3}$.

Τὸ γινόμενον Γ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι $\dfrac{(\mu-2)}{\mu-1}$. Εἶναι δὲ τοῦτο θετικὸν μέν, δι' ἃς τιμὰς τοῦ μ εἶναι $(\mu-2)(\mu-1)>0$, ἤτοι διὰ $\mu>2$ καὶ $\mu<1$, ἀρνητικὸν δὲ διὰ $1<\mu<2$.

Τὸ ἄθροισμα Α τῶν ριζῶν εἶναι $\dfrac{2\mu}{\mu-1}$ καὶ εἶναι θετικὸν μὲν, δι' ἃς τιμὰς τοῦ μ εἶναι $2\mu(\mu-1)>0$, ἤτοι διὰ $\mu>1$ καὶ $\mu<0$, ἀρνητικὸν δὲ διὰ $0<\mu<1$.

Παρεμβάλλοντες ἤδη μεταξὺ τοῦ $-\infty$ καὶ $+\infty$ τὰς τιμὰς $0, \dfrac{2}{3}$, 1, 2 τοῦ μ κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν σειρὰν καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

μ	Δ	Γ	Α	Σημεῖα ῥιζῶν
$-\infty$				
	$-$		φανταστικαὶ ῥίζαι	
0				
	$-$			
$\frac{2}{3}$	0			$\chi'=\chi''=-2$
	$+$	$+$	$-$	$\chi'<0,\ \chi''<0$
1				ἐξίσωσις α΄βαθμοῦ, $\chi'=-\frac{1}{2}$.
	$+$	$-$	$+$	$\chi'<0,\ \chi''>0,\ \lvert\chi''\rvert>\lvert\chi'\rvert$
2		0		$\chi'=0,\ \chi''=4$
	$+$	$+$	$+$	$\chi'>0,\ \chi''>0.$
$+\infty$				

ΣΗΜ. Διὰ $\mu=\frac{2}{3}$ εἶναι $\Delta=0$, ἡ δὲ ἐξίσωσις ἔχει διπλῆν ῥίζαν, ἥτις ἰσοῦται πρὸς $\frac{A}{2}$ ἢ πρὸς τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\frac{\mu}{\mu-1}$ διὰ $\mu=\frac{2}{3}$, ἤτοι

$$\chi'=\chi''=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{2-3}=-2.$$

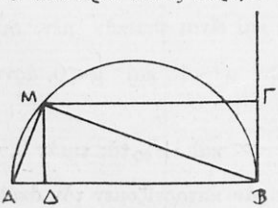
Διὰ $\mu=1$, ὁ δευτεροβάθμισς ὅρος μηδενίζεται, ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται

$2\chi=-1$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\chi=-\frac{1}{2}$.

Διὰ $\mu=2$ εἶναι $\Gamma=0$ καὶ ἑπομένως μία ῥίζα π.χ. ἡ χ' εἶναι 0, ἡ δὲ χ'' ἰσοῦται μὲ τὴν τιμήν, ἣν λαμβάνει τὸ ἄθροισμα $\frac{2\mu}{\mu-1}$ τῶν ῥιζῶν διὰ $\mu=2$,

ἤτοι $$\chi''=\frac{4}{2-1}=4.$$

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ παρέχει τὴν λύσιν τοῦ τεθέντος ζητήματος.



(Σχ. 4)

§ **189. Παράδ. 2ον.** ***Ἐπὶ ἡμιπεριφερείας διαμέτρου (ΑΒ)=2ρ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Β νὰ ἔχωσι δοθὲν ἄθροισμα α.***

Λύσις. Θέτοντες $(\text{ΑΜ})=\chi$ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΜΒ ὅτι $\chi^2=(\text{ΑΔ}).2\rho=2\rho\,(2\rho-\text{ΜΓ})$, ὅθεν $(\text{ΜΓ})=\dfrac{4\rho^2-\chi^2}{2\rho}$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν τοῦ προβλήματος εἶναι $\chi+\dfrac{4\rho^2-\chi^2}{2\rho}=\alpha$, ὅθεν

$$\chi^2-2\rho\chi+2\alpha\rho-4\rho^2=0. \tag{1}$$

Ἄρα
$$\chi=\rho\pm\sqrt{5\rho^2-2\alpha\rho}.$$

Ἵνα δὲ αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων τούτων παρεχόμεναι τιμαὶ τοῦ χ εἶναι δεκταί, πρέπει νὰ εἶναι πραγματικαί, νὰ μὴ εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνωσι τὸν 2ρ.

Διὰ νὰ εἶναι πραγματικαί, πρέπει νὰ εἶναι $5\rho^2-2\alpha\rho\geqq 0$ ἢ $\alpha\leqq\dfrac{5\rho}{2}$. Τὸ γινόμενον $2\alpha\rho-4\rho^2$ τῶν ῥιζῶν εἶναι θετικόν, ὅταν $\alpha>2\rho$, ἀρνητικόν, ὅταν $\alpha<2\rho$ καὶ 0, ὅταν $\alpha=2\rho$.

Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν τούτων εἶναι 2ρ, ἤτοι πάντοτε θετικόν. Καταρτίζομεν ἤδη τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ἐν ᾧ δὲν θεωροῦμεν ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ α, διότι οὗτος ὀφείλει εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

α	Δ	Γ	Α	Σημεῖα ῥιζῶν	Συμπέρασμα
$-\infty$					
0					οὐδεμία λύσις δεκτή
	$+$	$-$	$+$	$\chi'<0,\ \chi''>0,\ \lvert\chi''\rvert>\lvert\chi'\rvert$	
2ρ	…	0	…	$\chi'=0,\ \chi''=2\rho$	Τὸ Μ εἰς τὸ Α ἢ εἰς τὸ Β, ἤτοι 2 λύσεις
	$+$	$+$	$+$	$\chi'>0,\ \chi''>0$	ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ δεκταί, ἤτοι 2 λύσεις
$\dfrac{5\rho}{2}$	0	$+$	$+$	$\chi'=\chi''=\rho$	μία λύσις
	$-$				φανταστικαὶ ῥίζαι
$+\infty$					

Κατὰ ταῦτα, ἂν $0<\alpha<2\rho$ αἱ ῥίζαι εἶναι ἑτερόσημοι καὶ ἡ θετικὴ χ'' ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν. Ἐπειδὴ δὲ $\text{Α}=2\rho$, ἕπεται ὅτι $\chi''>2\rho$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ αὐτὴ ἀπαράδεκτος.

Ὅταν $\alpha=2\rho$, εἶναι $\Gamma=0$ καὶ $\chi=0$, $\chi''=2\rho$. Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι ἀμφότεραι δεκταὶ καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ Α καὶ τὸ Β.

Ὅταν $2\rho < \alpha < \frac{5\rho}{2}$, αἱ ῥίζαι ἔχουσαι γινόμενον θετικὸν καὶ ἄθροισμα θετικὸν εἶναι ἀμφότεραι θετικαί. Ἐπειδὴ δὲ $A=2\rho$, ἕπεται ὅτι ἑκατέρα τούτων εἶναι μικροτέρα τοῦ 2ρ καὶ ἑπομένως ἀμφότεραι δεκταί.

Διὰ $\alpha=\frac{5\rho}{2}$ εἶναι $\Delta=0$ καὶ ἑπομένως $\chi'=\chi''=\rho$, ἤτοι τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Διὰ $\alpha>\frac{5\rho}{2}$ αἱ ῥίζαι εἶναι φανταστικαί, ἤτοι τὸ πρόβλαμα δὲν ἔχει λύσιν.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσι καὶ διερευνηθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

√ 919) $\alpha\chi^2-(2\alpha+1)\chi+3\alpha-1=0$.

√ 920) $(\lambda-2)\chi^2+(\lambda-3)\chi+\lambda-4=0$.

√ 921) $(\lambda-5)\chi^2-4\lambda\chi+\lambda-2=0$.

√ 922) $(\lambda^2-4)\chi^2+4(\lambda-1)\chi+4=0$.

√ 923) $\chi^2-2(\alpha-5)\chi+\alpha^2-1=0$.

√ 924) $(\lambda-2)\chi^2-2\lambda\chi+\lambda-3=0$.

√ 925) $(2\mu-3)\chi^2+2(6\mu-5)\chi+18\mu+25=0$.

√ 926) $(\mu-2)^2\chi^2-2(\mu^2-1)\chi+\mu^2=0$.

927) Ἐπὶ δοθείσης ἡμιπεριφερείας διαμέτρου $(AB)=2\rho$ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, οὗ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἀπὸ τῆς ΑΒ νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα λ. Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα.

928) Ἐπὶ δοθείσης διαμέτρου ΑΒ μήκους 2ρ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε, ἂν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῇ κάθετος ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ εἶτα χορδὴ ΓΔ παράλληλος τῇ ΑΒ, νὰ εἶναι $(A\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta B)^2=4\lambda^2$. Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα.

929) Ἐπὶ δοθείσης διαμέτρου ΑΒ μήκους 2ρ ἡμικυκλίου Ο νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ τοιοῦτον ὥστε, ἂν γραφῶσιν ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου τούτου ἡμιπεριφέρειαι ἔχουσαι διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ, ἡ μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν περιεχομένη ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς κύκλον ἀκτῖνος α. Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα.

930) Δι' ὡρισμένου σημείου Α διαμέτρου ΒΓ δοθέντος κύκλου Ο ἄγεται χορδὴ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τῶν καθέτων εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ. Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Περὶ ὁρίων.

§ 190. Μεταβλητὰ καὶ σταθερὰ ποσά. ***Μεταβλητὸν ποσὸν καλεῖται πᾶν ποσόν, ὅπερ λαμβάνει διαφόρους τιμάς.*** Π.χ. τὸ τριώνυμον $2\chi^2-5\chi+4$ εἶναι μεταβλητὸν ποσόν, διότι μεταβαλλομένου τοῦ χ λαμβάνει διαφόρους τιμάς. Ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον εὐθ. σχημάτων εἶναι μεταβλητὰ ποσά, διότι λαμβάνουσι διαφόρους τιμάς, ὅταν μεταβάλληται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

Σταθερὸν ποσὸν καλεῖται πᾶν ποσόν, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τὴν τιμὴν καὶ ὅταν ἄλλα ποσά, μεθ' ὧν συνδέεται, μεταβάλλωνται. Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου, ἡ εἰς δεδομένον τόξον ἐγγεγραμμένη γωνία, ὁ λόγος τῆς διαγωνίου τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εἶναι ποσὰ σταθερά.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων καθίσταται εὐνόητον ὅτι τὸ μέτρον ποσοῦ διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος μεμετρημένου μεταβάλλεται ὁμοίως μετὰ τοῦ ποσοῦ τούτου ἢ μένει ἀμετάβλητον, ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι σταθερόν. Διὰ τοῦτο ἐν τῷ κεφαλαίῳ τούτῳ θὰ κάμωμεν ἀδιαφόρως χρῆσιν τῶν ποσῶν ἢ τῶν μέτρων αὐτῶν.

§ **191. Ὅρια μεταβλητῶν ποσῶν.**— ***Α΄. Μεταβλητὸν ποσὸν ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν ἢ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ βαίνῃ ἀπαύστως ἐλαττουμένη καὶ δύναται νὰ γείνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὅσον μικρὸς καὶ ἂν εἶναι οὗτος.***

Οὕτως ἡ παράστασις $\frac{1}{\chi}$ διὰ τὰς τιμὰς 1,10,1000,.... τοῦ χ λαμβάνει τὰς τιμὰς $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$..., αἵτινες βαίνουσιν ἀπαύστως ἐλαττούμεναι. Δύναται δὲ ἡ παράστασις αὕτη νὰ γείνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ π.χ. τοῦ $\frac{1}{1\,000\,000}$. ἀρκεῖ τῷ ὄντι νὰ λαμβάνῃ ὁ χ τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ 1 000 000. Ὁμοίως διὰ τὰς τιμὰς —1, —10, —100,... τοῦ χ ἡ αὐτὴ παράστασις λαμβάνει τιμὰς $-1, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{100}$......., ὧν ἀπόλυτοι τιμαὶ εἶναι αἱ προηγούμεναι. Ὥστε ἡ παράστασις $\frac{1}{\chi}$ διὰ τὰς ῥηθείσας τιμὰς τοῦ χ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Β΄. Μεταβλητόν τι ποσὸν ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον, ἂν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ βαίνῃ ἀπαύστως αὐξανομένη καὶ δύναται νὰ γείνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλυτέρα παντὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι οὗτος.

Ἂν τοιοῦτον μεταβλητὸν ποσὸν λαμβάνῃ ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς τιμὰς θετικάς, τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον, ἂν δὲ λαμβάνῃ ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ἀρνητικὰς τιμάς, τείνει πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον. Οὕτω διὰ τὰς τιμὰς 0,1,2,3,...... τοῦ χ ἡ παράστασις 10^{χ} ἔχει ὅριον τὸ $+\infty$, ἡ δὲ -10^{χ} τὸ $-\infty$, διότι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκατέρας λαμβάνει τὰς τιμὰς 1,10,100,1000........ αἵτινες βαίνουσιν αὐξανόμεναι· δύναται δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκατέρας νὰ γείνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλυτέρα παντὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὅσον μέγας καὶ ἂν εἶναι οὗτος, π. χ. τοῦ 1 000 000· ἀρκεῖ τῷ ὄντι νὰ λαμβάνῃ ὁ χ τιμάς, ὧν αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 6.

Γ'. ***Μεταβλητόν τι ποσὸν ἔχει ὅριον σταθερὸν ποσόν, ἐὰν ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἔχῃ ὅριον μηδέν.*** Ἔστω π. χ. ἡ συνάρτησις $5+\frac{1}{\chi}$. Ἡ διαφορὰ $(5+\frac{1}{\chi})-5$ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{\chi}$. Ἐὰν ὁ χ λαμβάνῃ τὰς τιμὰς 1,2,3,.... ἡ διαφορὰ $\frac{1}{\chi}$ τείνει, ὡς προηγουμένως (§ 191 Α') εἴδομεν, πρὸς τὸ μηδέν. Ἡ συνάρτησις ἄρα $5+\frac{1}{\chi}$ τείνει πρὸς τὸν 5, ἤτοι ἔχει ὅριον τὸν 5. Εἰς τὸ αὐτὸ ὅριον τείνει ἡ συνάρτησις αὕτη καὶ ὅταν ὁ χ λαμβάνῃ τὰς τιμὰς —1,—2,—3,...

Κατὰ ταῦτα, ἂν α εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς ἢ ποσὸν καὶ ὅρ χ=α, θὰ εἶναι ὅρ(χ—α)=0 καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ὅρ(χ—α)=0, θὰ εἶναι ὅρχ = α.

Ἰδιότητες τῶν ὁρίων.

§ **192. Θεώρημα Ι.** ***Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου μεταβλητοῦ ποσοῦ χ ἐπὶ σταθερὸν λ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ σταθεροῦ ἐπὶ τὸ ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ.***

Ἀπόδειξις. α') Ἂν ὅρ χ=0 καὶ ε ὅσον δήποτε μικρὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι (§ 191 Α') $\chi<\frac{\varepsilon}{\lambda}$, ὅθεν λχ <ε καὶ ἑπομένως ὅρ λχ=0 =λ. 0=λ.ὅρχ. ὅ.ἔ.δ.

β') Ἂν ὅρχ=α, θὰ εἶναι (§151 Γ') ὅρ(χ—α) =0.
Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν θὰ εἶναι καὶ ὅρλ.(χ—α)=0, ὅθεν ὅρ (λχ—λα)=0 καὶ ἑπομένως ὅρ λχ=λα=λ. ὅρ χ. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. α' Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν ὅρχ=∞ θὰ εἶναι καὶ ὅρλχ=∞.

ΣΗΜ' Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τῶν ἀκολούθων τοῦ κεφαλαίου τούτου γίνεται χάριν εὐκολίας μὲ θετικὰ ποσά. Ἰσχύουσι δὲ ταῦτα καὶ δι' ἀρνητικὰ ποσά, ὡς εὐκόλως ἐννοοῦμεν, ἂν ταῦτα ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῶν ἀπολύτων αὐτῶν τιμῶν, δι' ὧν καὶ τὰ ὅρια αὐτῶν ὁρίζονται.

Πόρισμα Ι. ***Ἂν ἕκαστος τῶν παραγόντων (πεπερασμένου πλήθους) γινομένου ἔχῃ ὅριον μηδέν, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο ἔχει ὅριον μηδέν.***

Ἂν π. χ. ὅρ χ=0 καὶ ὅρ y=0, θὰ εἶναι καὶ ὅρ χy=0. Διότι τὸ ποσὸν χ ἔχον ὅριον μηδὲν γίνεται καὶ μένει ἀπό τινος τιμῆς καὶ ἐφεξῆς μικρότερον σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ ϑ, ἤτοι $\chi < \vartheta$. Ἀπὸ τῆς τιμῆς δὲ ταύτης καὶ ἑξῆς θὰ εἶναι καὶ $\chi y < \vartheta y$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (§192,Θ) ὅρϑy=ϑ. ὅρy=0 ἕπεται ὅτι $\vartheta y < \varepsilon$ (ὅσον μικρὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ ε) κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι $\chi y < \varepsilon$ καὶ ἑπομένως ὅρ xy=0.

Παρατηροῦντες ὅτι xyz=x(yz) ἀποδεικνύομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῆς ἰδιότητος ταύτης καὶ διὰ τρεῖς παράγοντας καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω δι' ὁσουσδήποτε παράγοντας πεπερασμένου πλήθους.

§ **193. Θεώρημα ΙΙ.** ***Τὸ ὅριον ἀθροίσματος μεταβλητῶν ποσῶν πεπερασμένου πλήθους ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων αὐτῶν.***

Ἂν ὅρχ=α, ὅρψ=β, ὅρz=γ, λέγω ὅτι

ὅρ (χ+ψ+z)=(α+β+γ)=ὅρχ+ὅρψ+ὅρψz.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ὅρχ=α, ὅρψ=β, ὅρz=γ, ἕπεται

ὅτι ὅρ (χ—α)=0, ὅρ(y—β) καὶ ὅρ(z—γ)=0.

Δύναται ἄρα (§191. Α΄) νὰ γείνῃ

$\chi-\alpha<\frac{\varepsilon}{3}, \psi-\beta<\frac{\varepsilon}{3}, z-\gamma<\frac{\varepsilon}{3}$, ὅσον δήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ ε.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $(\chi+y+z)-(\alpha+\beta+\gamma)<\varepsilon$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅρ $[(\chi+\psi+z)-(\alpha+\beta+\gamma)]=0$ Ἄρα ὅρ $(\chi+\psi+z)=\alpha+\beta+\gamma=$ ὅρχ+ὅρψ+ὅρ.z ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Τὸ θεώρημαα ἰσχύει μόνον διὰ πεπερασμένον πλῆθος προσθετέων. Τοῦτο ἐννοοῦμεν ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα. Ἕκαστος τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots\ldots+\frac{1}{\mu}$, τὸ ὁποῖον ἔχει μ προσθετέους, ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν ὅρ μ=∞. Ἂν λοιπὸν ἴσχυεν ἡ ἰδιότης αὕτη διὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, θὰ ἦτο ὅρ $\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots+\frac{1}{\mu}\right)=0$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ψευδές, διότι $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu}\times\mu=1$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ μ.

Πόρισμα Ι.—***Τὸ ὅριον ἀθροίσματος σταθεροῦ καὶ μεταβλητοῦ ποσοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ σταθεροῦ καὶ τοῦ ὁρίου τοῦ μεταβλητοῦ.***

§ **194. Θεώρημα ΙΙΙ.**—***Τὸ ὅριον γινομένου μεταβλητῶν ποσῶν πεπερασμένου πλήθους ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.***

Α΄. Ἔστω ὅτι ὅρχ=α καὶ ὅρψ=β. Λέγω ὅτι ὅρ χψ=αβ=ὅρχ·ὅρψ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ὅρχ=α, ὅρψ=β, ἕπεται ὅτι ὅρ(χ—α)=0 καὶ ὅρ (ψ—β)=0.

Ἐὰν δὲ τεθῇ χ—α=ε καὶ ψ—β=ϑ, θὰ εἶναι ὅρε=0, ὅρϑ=0 καὶ $\chi=\alpha+\varepsilon$, $\psi=\beta+\vartheta$. Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι $\chi\psi=\alpha\beta+\beta\varepsilon+\alpha\vartheta+\varepsilon\vartheta$, ὅθεν ἕπεται ὅτι ὅρ $\chi\psi=\alpha\beta+$ὅρ$(\beta\varepsilon+\alpha\vartheta+\varepsilon\vartheta)$.

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $(\beta\varepsilon+\alpha\vartheta+\varepsilon\vartheta)=$ ὅρ$\beta\varepsilon+$ὅρ $\alpha\vartheta+$ὅρ $\varepsilon\vartheta=0$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται ὅρ $\chi\psi=\alpha\beta=$ὅρ $\chi\cdot$ ὅρ ψ. ὅ. ἔ. δ.

Β′. Ἔστω ἤδη τὸ γινόμενον $\chi\psi z$. Ἐπειδὴ $\chi\psi z=(\chi\psi)z$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι ὅρ $(\chi\psi z)=$ὅρ$(\chi\psi)$. ὅρ$z=$ὅρ $\chi\cdot$ ὅρ ψ. ὅρ z. ὅ. ἔ. δ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας πεπερασμένου πλήθους.

ΣΗΜ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει διὰ πεπερασμένον πλῆθος παραγόντων, ὡς ἐκ τοῦ ἀκολούθου παραδείγματος φαίνεται.

Ἕκαστος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$, τὸ ὁποῖον ἔχει μ παράγοντας ἔχει ὅριον 1, ὅταν ὅρ $\mu=\infty$. Ἂν λοιπὸν ἴσχυε τὸ θεώρημα καὶ διὰ τὸ γινόμενον τοῦτο, θὰ ἦτο

ὅρ $\left[\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right]=1$. Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρα Ἄλγεβρα ἀποδεικνύει ὅτι τὸ γινόμενων τοῦτο ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν 2,7182818... ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 3. Τοῦτον οἱ μαθηματικοὶ σημειοῦσι διὰ τοῦ γράμματος e.

195. Θεώρημα IV. ***Τὸ ὅριον τοῦ λόγου σταθεροῦ πρὸς μεταβλητὸν ποσὸν εἶναι ἄπειρον ἢ μηδέν, καθ' ὅσον τὸ ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ εἶναι μηδὲν ἢ ἄπειρον.***

Ἔστω λ σταθερὸν καὶ χ μεταβλητὸν ποσόν. Λέγω ὅτι

α′) ὅρ $\frac{\lambda}{\chi}=\infty$, ἂν ὅρ $\chi=0$ καὶ β′) ὅρ $\frac{\lambda}{\chi}=0$, ἂν ὅρ $\chi=\infty$.

Ἀπόδειξις. α′) Ἐπειδὴ ὅρ $\chi=0$, ἕπεται ὅτι $\chi<\frac{\lambda}{M}$ (ὅσον μέγας καὶ ἂν εἶναι ὁ M), ἄρα $M\chi<\lambda$ καὶ $M<\frac{\lambda}{\chi}$. Γίνεται ἄρα ὁ $\frac{\lambda}{\chi}$ μεγαλύτερος παντὸς ἀριθμοῦ M καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ὅρ $\frac{\lambda}{\chi}=\infty$. ὅ.ἔ.δ.

β′) Ἐπειδὴ ὅρ$\chi=\infty$, ἕπεται ὅτι $\chi>\frac{\lambda}{\varepsilon}$, ὅσον μικρὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ ε. Ἐκ τῆς ἀνισότητος δὲ ταύτης ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\varepsilon\chi>\lambda$, $\varepsilon>\frac{\lambda}{\chi}$ καὶ ἑπομένως ὅρ $\frac{\lambda}{\chi}=0$. ὅ.ἔ.δ.

§ **196. Θεώρημα V.** ***Ἐὰν μεταβλητὸν ποσὸν χ ἔχῃ ὅριον α, τὸ ποσὸν $\frac{1}{\chi}$ ἔχει ὅριον $\frac{1}{\alpha}$, ἂν α εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.***

Απόδειξις. Ἐπειδὴ ὅρ $\chi=\alpha$, ἕπεται ὅτι ὅρ$(\chi-\alpha)=0$· ἂν δὲ τεθῇ $\chi-\alpha=\varepsilon$, θὰ εἶναι ὅρ $\varepsilon=0$ καὶ $\chi=\varepsilon+\alpha$. Ἐπειδὴ δὲ

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\chi}=\frac{\chi-\alpha}{\alpha\chi}=\frac{\varepsilon}{\alpha(\alpha+\varepsilon)}=\frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)},$$ ἕπεται ὅτι

$$\text{ὅρ}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\chi}\right)=\text{ὅρ}\,\frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ$\varepsilon=0$, ἕπεται ὅτι ὅρ $\frac{\alpha}{\varepsilon}=\infty$ καὶ ὅρ $\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)=\infty$.

Τὸ ποσὸν ἄρα $\frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)}$ ἔχει (§ 195 β΄) ὅριον μηδὲν καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται ὅρ $\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\chi}\right)=0$, ὅθεν ὅρ $\frac{1}{\chi}=\frac{1}{\alpha}$. ὅ. ἔ. δ.

§ **197. Θεώρημα VI.** ***Τὸ ὅριον τοῦ λόγου μεταβλητοῦ πρὸς ἄλλο ἔχον ὅριον διάφορον τοῦ μηδενὸς ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστοιχον λόγον τῶν ὁρίων αὐτῶν.*** ποσοῦ

Ἔστω ὅτι ὅρ $\chi=\alpha$ καὶ ὅρ $\psi=\beta\neq0$. Λέγω ὅτι ὅρ $\frac{\chi}{\psi}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\text{ὅρ}\,\chi}{\text{ὅρ}\,\psi}$.

Απόδειξις. Ἐπειδὴ $\frac{\chi}{\psi}=\chi\cdot\frac{1}{\psi}$, ἕπεται ὅτι ὅρ $\frac{\chi}{\psi}=$ ὅρ $\chi\cdot$ ὅρ $\frac{1}{\psi}=$ $\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$. ὅ. ἔ. δ.

§ **198. Θεώρημα VII.** ***Ἐὰν μεταβλητὸν ποσὸν χ ἀπαύστως αὐξανόμενον μένῃ πάντοτε μικρότερον σταθεροῦ ποσοῦ Α, ἔχει ὅριον· εἶναι δὲ τὸ ὅριον τοῦτο ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ Α.***

Απόδειξις. Ἐὰν $\chi_1, \chi_2, \chi_3\ldots$ εἶναι διάφοροι τοῦ χ τιμαί, ὧν ἑκάστη εἶναι μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης, αἱ ἀντίστοιχοι τῆς διαφορᾶς $A-\chi$ τιμαὶ $A-\chi_1$, $A-\chi_2$, $A-\chi_3\ldots$ εἶναι θετικαὶ καὶ ἑκάστη μικροτέρα τῆς προηγουμένης. Τοῦ χ ἄρα αὐξάνοντος ἡ διαφορὰ $A-\chi$ βαίνει ἀπαύστως ἐλαττουμένη· καὶ ἂν μὲν αὕτη δύναται νὰ γείνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς ποσοῦ, θὰ εἶναι ὅρ $(A-\chi)=0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅρ $\chi=A$. Ἂν δὲ ὑπάρχωσι τιμαὶ μικρότεραι τῆς διαφορᾶς $A-\chi$ καὶ κληθῇ ε΄ ἡ μεγαλυτέρα τούτων, ἡ διαφορὰ $A-\chi$ γίνεται καὶ μένει μικροτέρα παντὸς ποσοῦ $\varepsilon'+\varepsilon$, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν εἶναι τὸ ε, ἤτοι εἶναι $A-\chi<\varepsilon'+\varepsilon$. Ἂν δὲ τεθῇ $A-\varepsilon'=\rho$, θὰ εἶναι $\varepsilon'=A-\rho$ καὶ ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται $A-\chi<A-\rho+\varepsilon$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $\rho-\chi<\varepsilon$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅρ $(\rho-\chi)=0$ καὶ ὅρ $\chi=\rho$. Εἶναι δὲ $\rho<A$,

διότι $\varrho = A - \varepsilon'$. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι τὸ ποσὸν χ ἔχει ὅριον A ἢ ἕτερον $\varrho < A$. ὅ. ἔ. δ.

§ **199. Θεώρημα. VIII.** *Ἐὰν μεταβλητὸν ποσὸν χ ἀπαύστως ἐλαττούμενον μένῃ πάντοτε μεγαλύτερον σταθεροῦ ποσοῦ A, ἔχει ὅριον· εἶναι δὲ τὸ ὅριον τοῦτο ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ A.*

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$. Ἂν ἄρα χ', χ'', χ''',...... εἶναι διάφοροι τοῦ χ τιμαί, ὧν ἑκάστη εἶναι μικροτέρα τῆς προηγουμένης, αἱ ἀντίστοιχοι τοῦ $\frac{1}{\chi}$ τιμαὶ $\frac{1}{\chi'}$, $\frac{1}{\chi''}$, $\frac{1}{\chi'''}$, ... βαίνουσιν αὐξανόμεναι. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πάντοτε $\chi > A$, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε $\frac{1}{\chi} < \frac{1}{A}$. Τὸ $\frac{1}{\chi}$ ἄρα ἔχει ὅριον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ $\frac{1}{A}$. Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι $\chi = \frac{1}{\frac{1}{\chi}}$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ παρανομαστὴς τοῦ β΄ μέλους ἔχει ὅριον, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ τὸ χ ἔχει ὅριον. Καὶ ἂν μὲν ὅρ $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{A}$, θὰ εἶναι

$$\text{ὅρ}\,\chi = \frac{1}{\text{ὅρ}\frac{1}{\chi}} = \frac{1}{\frac{1}{A}} = A\cdot \quad \text{ἂν δὲ ὅρ}\,\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{A},\ \text{θὰ εἶναι}$$

$$\text{ὅρ}\,\chi = \frac{1}{\frac{1}{\varrho}} = \varrho > A.\ \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἀσκήσεις. 931) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅρ $(7\chi+3)$, ὅταν ὅρ$\chi = 0$ καὶ ὅταν ὅρ$\chi = 5$.

932) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τοῦ τριωνύμου $2\chi^2+3\chi+1$, ὅταν ὅρ$\chi = \pm\infty$ καὶ ὅταν ὅρ $\chi = 0$.

933) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅρ $\frac{2\chi-3}{\chi^2+\chi-1}$, ὅταν ὅρ$\chi = 1$ καὶ ὅταν ὅρ $\chi = 0$.

Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ὁρίων.

§ **200. Ἀπροσδιόριστοι μορφαί.** Τὸ κλάσμα $\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-7\chi+10}$ διὰ $\chi = 2$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$, ἥτις, ὡς ἐμάθομεν (§ 24) δύναται νὰ παραστήσῃ πάντα ἀριθμόν, ἤτοι εἶναι μορφὴ ἀόριστος.

Τὸ κλάσμα $\dfrac{1+\frac{\chi+1}{\chi-1}}{2+\frac{3}{\chi-1}}$ διὰ $\chi = 1$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$, τὴν ὁποίαν ἐπίσης καλοῦμεν ἀόριστον μορφήν.

Ἡ παράστασις $2\chi - \sqrt{3\chi^2+\chi-1}$ διὰ $\chi=\infty$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\infty-\infty$, ἥτις ἐπίσης καλεῖται ἀόριστος μορφή.

Ἀληθὴς τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἐξαρτωμένης ἐκ μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ καὶ ἥτις διὰ χ=α λαμβάνει ἀόριστον μορφήν, καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ταύτης, ὅταν χ τείνῃ πρὸς τὴν τιμὴν α.

Ἡ εὕρεσις τῆς ἀληθοῦς τιμῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καλεῖται ἄρσις τῆς ἀοριστίας αὐτῆς.

Ἡ ἄρσις τῆς ἀοριστίας γίνεται ὡς ἑξῆς:

Α'. Ἄρσις ἀοριστίας τῆς μορφῆς $\frac{0}{0}$. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-7\chi+10}$ ὅπερ, ὡς προείπομεν, καθίσταται $\frac{0}{0}$ διὰ $\chi=2$.

Τὰ τριώνυμα $\chi^2-5\chi+6$ καὶ $\chi^2-7\chi+10$ μηδενιζόμενα διὰ $\chi=2$ διαιροῦνται διὰ $\chi-2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $(\chi^2-5\chi+6):(\chi-2)=(\chi-3)$ καὶ $(\chi^2-7\chi+10):(\chi-2)=(\chi-5)$, ἕπεται ὅτι $(\chi^2-5\chi+6)=(\chi-2)(\chi-3)$ καὶ $(\chi^2-7\chi+10)=(\chi-2)(\chi-5)$. Κατ' ἀκολουθίαν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ διάφορον τοῦ 2 εἶναι

$\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-7\chi+10}=\frac{(\chi-2)(\chi-3)}{(\chi-2)(\chi-5)}=\frac{\chi-3}{\chi-5}$. Ὅταν ἄρα ὅρ $\chi=2$, θὰ εἶναι

$$\text{ὅρ.}\ \frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-7\chi+10}=\text{ὅρ}\frac{\chi-3}{\chi-5}=\frac{\text{ὅρ}(\chi-3)}{\text{ὅρ}(\chi-5)}=\frac{2-3}{2-5}=\frac{1}{3}.$$

Ὅταν λοιπὸν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸν 2, ἀλλὰ δὲν γίνεταί ποτε 2, ἡ παράστασις $\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-7\chi+10}$ τείνει πρὸς τὸν $\frac{1}{3}$, ἤτοι διὰ ὅρ $\chi=2$ εἶναι

$$\text{ὅρ}\ \frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-7\chi+10}=\frac{1}{3}.$$

Β'). ***Ἄρσις ἀοριστίας τῆς μορφῆς*** $\frac{\infty}{\infty}$.

α'). Τὸ κλάσμα $\dfrac{1+\dfrac{\chi+1}{\chi-1}}{2+\dfrac{3}{\chi-1}}$ διὰ $\chi=1$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$.

Ἐὰν χάριν συντομίας καλέσωμεν αὐτὸ Κ καὶ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἁπλοῦν, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ διάφορον τῆς 1, θὰ εἶναι $K=\frac{2\chi}{2\chi+1}$.

Ὅταν ἄρα ὅρ $\chi=1$ θὰ εἶναι ὅρ $K=\text{ὅρ}\,\frac{2\chi}{2\chi+1}=\frac{\text{ὅρ}2\chi}{\text{ὅρ}(2\chi+1)}=\frac{2}{3}$.

β'). Τὸ κλάσμα $\frac{\chi^2+1}{2\chi-1}$ διὰ $\chi=\infty$ γίνεται $\frac{\infty}{\infty}$. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ χ^2, εὑρίσκομεν

$$\frac{\chi^2+1}{2\chi-1}=\frac{1+\frac{1}{\chi^2}}{\frac{2}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}}. \text{ Ἄρα ὅρ } \frac{\chi^2+1}{2\chi-1}=\frac{\text{ὅρ}\left(1+\frac{1}{\chi^2}\right)}{\text{ὅρ}\left(\frac{2}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}\right)}=\frac{1}{0}=\infty,$$

ὅταν ὅρ$\chi=\infty$.

Ἤτοι τοῦ χ τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα τείνει εἰς τὸ ἄπειρον.

γ'). Τὸ κλάσμα $\frac{3\chi^3-2\chi+1}{5\chi^4+2}$ διὰ $\chi=\infty$ γίνεται $\frac{\infty}{\infty}$. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ χ^4 καὶ λάβωμεν τὰ ὅρια, εὑρίσκομεν, διὰ ὅρ$\chi=\infty$, ὅτι :

$$\text{ὅρ } \frac{3\chi^3-2\chi+1}{5\chi^4+2}=\frac{\text{ὅρ}\left(\frac{3}{\chi}-\frac{2}{\chi^3}+\frac{1}{\chi^4}\right)}{\text{ὅρ }\left(5+\frac{2}{\chi^4}\right)}=\frac{0}{5}=0.$$

Γ'. Ἄρσις ἀοριστίας τῆς μορφῆς $\infty-\infty$. α'). Ἡ παράστασις $\Pi=\frac{\chi^2+1}{\chi-1}-\frac{\chi+1}{\chi^2-1}$ διὰ $\chi=1$ γίνεται $\infty-\infty$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, εὑρίσκομεν ὅτι $\Pi=\frac{\chi^2}{\chi-1}$. Ἄρα διὰ ὅρ$\chi=1$, εἶναι

$$\text{ὅρ } \Pi=\text{ὅρ } \frac{\chi^2}{\chi-1}=\text{ὅρ}\frac{1}{\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

β') Ἡ παράστασις $\Lambda=\frac{2\chi+1}{\chi^2-5\chi+6}-\frac{15}{\chi^2-7\chi+10}$ διὰ $\chi=2$ γίνεται $\infty-\infty$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν εὑρίσκομεν ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ διάφορον τοῦ 2 εἶναι $\Lambda=\frac{2(\chi-10)}{(\chi-3)(\chi-5)}$. Ἄρα, ὅταν ὅρ$\chi=2$, θὰ εἶναι ὅρ$\Lambda=\frac{\text{ὅρ}2(\chi-10)}{\text{ὅρ}(\chi-3)(\chi-5)}=-\frac{16}{3}$.

γ'). Ἡ παράστασις $M=\chi-\sqrt{\chi+1}$ διὰ $\chi=\infty$ γίνεται $\infty-\infty$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ διαιρέσωμεν ταύτην διὰ $\chi+\sqrt{\chi+1}$, εὑρίσκομεν ὅτι $M=\frac{\chi^2-\chi-1}{\chi+\sqrt{\chi+1}}$, ὅθεν, ὅταν ὅρ $\chi=\infty$, προκύπτει ὅτι

$$\text{ὅρ } M = \text{ὅρ } \frac{1-\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}}{\frac{1}{\chi}+\sqrt{\frac{1}{\chi^3}+\frac{1}{\chi^4}}} = \frac{1}{0} = \infty.$$ Ὥστε τοῦ χ τείνοντες εἰς τὸ ∞

ἡ παράστασις M τείνει εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ ἑκάστης τῶν ἀκολούθων παραστάσεων.

934) $\frac{\chi^2-9\chi+20}{\chi^2-3\chi-4}$ διὰ $\chi=4$, $\frac{3\chi^2-9\chi+6}{5\chi^2-5}$ διὰ $\chi=1$.

935) $\frac{5\chi^3+2\chi^2+\chi-6}{\chi^2+\chi-7}$ διὰ $\chi=\infty$, $\frac{\chi-1}{\chi^2+\chi-1}$ διὰ $\chi=\infty$.

936) $\frac{1}{\chi-2}-\frac{1}{\chi^2-4}$ διὰ $\chi=\infty$, $\sqrt{1-\chi}-\sqrt{\chi^2-1}$ διὰ $\chi=\infty$.

937) $\left[\frac{8}{5(\chi+2)}-\frac{4}{\chi}+\frac{17\chi+6}{5(\chi^2+1)}\right]\cdot\frac{\chi+3}{\chi^2+3\chi-10}$ διὰ $\chi=2$

938) $\frac{2\chi^2-5+\sqrt{\chi^4-3\chi+1}}{\chi-1+\sqrt{4\chi^6+3\chi-2}}$ διὰ $\chi=\infty$.

§ 201. Ὅρια τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν ὅρ $\alpha=0$. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ ῥίζαι χ' καὶ χ'' τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρέχονται ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων

$\chi'=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $\chi''=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. Ἂν εἰς ταύτας θέσωμεν 0 ἀντὶ α καὶ ὑποθέσωμεν $\beta>0$, εὑρίσκομεν $\chi'=\frac{-2\beta}{0}$ καὶ $\chi''=\frac{0}{0}$, ἤτοι ἡ μὲν ῥίζα χ' τείνει πρὸς τὸ $+\infty$ μέν, ὅταν ὅρ$\alpha=0$ ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων τοῦ 0, εἰς τὸ $-\infty$ δέ, ὅταν ὅρ$\alpha=0$ ἐκ τιμῶν μειζόνων τοῦ 0.

Ἡ δὲ ῥίζα χ'' λαμβάνει ἀόριστον μορφήν. Πρὸς ἄρσιν τῆς ἀοριστίας πολ)ζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ ἐπὶ τὴν παράστασιν $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ (διάφορον τοῦ μηδενὸς διὰ $\alpha=0$) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi''=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{2\alpha(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}=\frac{2\gamma}{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}$.

Ἑπομένως διὰ ὅρ $\alpha=0$ εἶναι ὅρ $\chi''=\frac{2\gamma}{-2\beta}=-\frac{\gamma}{\beta}$.

Ὥστε τοῦ α τείνοντος πρὸς τὸ μηδέν, ἡ μὲν μία ῥίζα τείνει πρὸς τὸ $\pm\infty$ ἡ δὲ ἄλλη πρὸς τὸν $-\frac{\gamma}{\beta}$, ὅστις εἶναι ἡ ῥίζα τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως, $\beta\chi+\gamma=0$, εἰς ἣν ἀνάγεται ἡ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ διὰ $\alpha=0$.

Ἐὰν $\beta<0$, ἡ ῥίζα χ' ἔχει ὅριον τὴν ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως $\beta\chi+\gamma=0$, ἡ δὲ χ'' ἔχει ὅριον $\pm\infty$, καθ' ὅσον ὅρ $\alpha=0$ ἐκ τιμῶν μειζόνων ἢ ἐλασσόνων τοῦ 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

Σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα.

§ **202. Αὔξουσαι καὶ φθίνουσαι συναρτήσεις.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μεταβλητὸν ποσὸν χ λαμβάνει πρώτην τινὰ τιμὴν α καὶ εἶτα δευτέραν τινὰ τιμὴν β. Ἡ διαφορὰ $\beta-\alpha$, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην τιμὴν ἀπὸ τῆς δευτέρας καλεῖται ***αὔξησις*** τοῦ ποσοῦ χ.

Ἂν θέσωμεν $\beta-\alpha=\vartheta$, εἶναι εὐνόητον ὅτι $\beta=\alpha+\vartheta$, ἤτοι ***ἡ νέα τιμὴ εἶναι ἄθροισμα τῆς πρώτης τιμῆς καὶ τῆς αὐξήσεως***. Ἐὰν $\beta>\alpha$, ἡ αὔξησις εἶναι θετική, ἂν δὲ $\beta<\alpha$, ἡ αὔξησις εἶναι ἀρνητική.

Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $3\chi+5$ τοῦ χ, τὴν ὁποίαν χάριν συντομίας ἂς καλέσωμεν ψ, ἤτοι ἂς θέσωμεν $\psi=3\chi+5$. Ἂν καλέσωμεν χ_0 τιμήν τινα τοῦ χ, ἡ συνάρτησις ψ λαμβάνει ἀντίστοιχον τιμήν, ἔστω ψ_0, θὰ εἶναι δηλ. $\psi_0=3\chi_0+5$ (1).

Ἐὰν δὲ δώσωμεν εἰς τὴν τιμὴν χ_0 αὔξησίν τινα ε, ἡ τιμὴ ψ θὰ λάβῃ μίαν αὔξησιν η, ἡ δὲ νέα τιμὴ $\psi_0+\eta$ τῆς ψ θὰ εἶναι ἀντίστοιχος πρὸς τὴν τιμὴν $\chi_0+\varepsilon$ τοῦ χ· θὰ εἶναι ἄρα

$$\psi_0+\eta=3(\chi_0+\varepsilon)+5 \text{ ἢ } \psi_0+\eta=3\chi_0+3\varepsilon+5. \quad (2).$$

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῶν μελῶν τῆς (2) τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς (1) εὑρίσκομεν ὅτι $\eta=3\varepsilon$ (3)

ἤτοι: εἰς τὴν αὔξησιν ε τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις 3ε τῆς συναρτήσεως $3\chi+5$. Ἐκ τῆς ἰσότητος (3) φαίνεται ὅτι ἂν $\varepsilon>0$, θὰ εἶναι καὶ $\eta>0$, ἂν δὲ $\varepsilon<0$, θὰ εἶναι καὶ $\eta<0$.

Ἤτοι: Ἂν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ χ πραγματικῶς αὐξάνῃ καὶ ἡ συνάρτησις αὐξάνει· ἂν δὲ ἡ χ ἐλαττοῦται καὶ ἡ ψ ἐλαττοῦται.

Ταῦτα ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες ὅτι: ***ἡ συνάρτησις ψ μεταβάλλεται ὁμοίως μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ.***

Πᾶσα συνάρτησις, ἡ ὁποία μεταβάλλεται ὁμοίως μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, καλεῖται αὔξουσα συνάρτησις. Ἡ συνάρτησις λοιπὸν $5\chi+3$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ χ.

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως ἐπὶ τῆς συναρτήσεως $-7\chi+1$, ἣν καλοῦμεν ψ, εὑρίσκομεν ὅτι $\eta=-7\varepsilon$ (4).

Ἐκ ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι, ἂν $\varepsilon>0$, θὰ εἶναι $\eta<0$· ἂν δὲ $\varepsilon<0$, θὰ εἶναι $\eta>0$.

Ἤτοι: Ἂν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ χ πραγματικῶς αὐξάνῃ, ἡ συνάρτησις ἐλαττοῦται· ἂν δὲ ἡ χ ἐλαττοῦται ἡ συνάρτησις αὐξάνει. Ταῦτα ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες ὅτι: ***ἡ συνάρτησις ψ μεταβάλλεται ἀνομοίως μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβολῆς.***

Πᾶσα συνάρτησις, ἡ ὁποία μεταβάλλεται ἀνομοίως μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, καλεῖται φθίνουσα συνάρτησις.

§ **203. Συνεχεῖς συναρτήσεις.** Ἐὰν ἡ αὔξησις ε θεωρηθῇ μεταβλητὴ ἔχουσα ὅριον καὶ λάβωμεν τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (3), εὑρίσκομεν ὅτι $\text{ὅρ}\,\eta=3.\text{ὅρ}.\varepsilon$. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι $\text{ὅρ}\varepsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ $\text{ὅρ}\,\eta=3.0=0$. Ἡ συνάρτησις ἄρα $3\chi+5$ εἶναι τοιαύτη ὥστε, ἂν ἡ ἀπὸ ὡρισμένης τινὸς τιμῆς χ_0 τῆς χ αὔξησις αὐτῆς ε ἔχῃ ὅριον μηδὲν καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς συναρτήσεως ἔχει ὅριον μηδέν. Εὐνόητον δὲ ὅτι διὰ τὴν συνάρτησιν ταύτην συμβαίνει τοῦτο, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ὡρισμένη τιμὴ χ_0. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι: ***ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.***

Γενικῶς: ***Συνάρτησίς τις τοῦ χ λέγεται συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἐὰν τῆς αὐξήσεως τοῦ χ*** (ἀπὸ τυχούσης τιμῆς αὐτοῦ) ***ἐχούσης ὅριον μηδὲν καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς συναρτήσεως ἔχῃ ὅριον μηδέν.***

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τοῦ χ λαμβάνοντος διαδοχικῶς πάσας τὰς μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν χ_0 καὶ χ_1 τιμάς, ἡ συνάρτησις δὲν δύναται νὰ πηδήσῃ ἀποτόμως ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν ψ_0 εἰς τὴν ἄλλην ψ_1, ἀλλὰ λαμβάνει διαδοχικῶς ὅλας τὰς μεταξὺ ψ_0 καὶ ψ_1 τιμάς.

ΣΗΜ. Ὑπάρχουσι καὶ συναρτήσεις μὴ συνεχεῖς διὰ πάσας τὰς τιμὰς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Οὕτως ἡ συνάρτησις $\frac{1}{\chi}$, ὅταν ὁ χ αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐλαττοῦται καὶ τείνει πρὸς τὸ $-\infty$. Ἐὰν δὲ ὁ χ ὑπερβῇ κατ' ἐλάχιστον τὴν τιμὴν 0, ἡ συνάρτησις $\frac{1}{\chi}$ καθίσταται θετική, καὶ ἀπείρως μεγάλη. Εἰς ἐλαχίστην λοιπὸν αὔξησιν τοῦ χ ἐν τῇ περιοχῇ τῆς τιμῆς μηδὲν ἀντιστοιχεῖ ἀπότομος μεταπήδησις τῆς συναρτήσεως ἀπὸ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$.

§ **204. Θεώρημα I.** ***Τὸ τριώνυμον*** $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ***εἶναι συνάρτησις συνεχὴς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω χ_0 τυχοῦσα τιμὴ τοῦ χ καὶ ψ_0 ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ τριωνύμου, ἤτοι ἔστω $\psi_0=\alpha\chi_0^2+\beta\chi_0+\gamma$ (1)

Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν τιμὴν χ_0 κατά τινα ἀριθμὸν ε, ἡ τιμὴ ψ_0 τοῦ τριωνύμου θὰ λάβῃ αὔξησίν τινα η καὶ θὰ εἶναι ἡ τιμὴ $\psi_0+\eta$

τοῦ τριωνύμου ἀντίστοιχος πρὸς τὴν τιμὴν $\chi_0+\varepsilon$ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ, ἤτοι: $\psi_0+\eta=\alpha(\chi_0+\varepsilon)^2+\beta(\chi_0+\varepsilon)+\gamma$ ἢ

$$\psi_0+\eta=\alpha\chi_0^2+2\alpha\chi_0\varepsilon+\alpha\varepsilon^2+\beta\chi_0+\beta\varepsilon+\gamma \qquad (2).$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (2) ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς (1) εὑρίσκομεν ὅτι: $\eta=2\alpha\chi_0\varepsilon+\alpha\varepsilon^2+\beta\varepsilon$ (2)

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τὸ ε ὡς μεταβλητὸν ἔχον ὅριον καὶ λάβωμεν τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης, εὑρίσκομεν ὅτι: ὅρ η $=2\alpha\chi_0$. ὅρ. ε$+\alpha\cdot$ ὅρ. $\varepsilon^2+\beta\cdot$ ὅρ. ε. Αὕτη δὲ ὅταν ὅρ. ε$=0$, γίνεται ὅρ η$=0$. Ὥστε, ὅταν ἡ ἀπὸ τυχούσης τιμῆς τοῦ χ αὔξησις αὐτοῦ ἔχῃ ὅριον μηδέν, καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τοῦ τριωνύμου ἔχει ὅριον μηδέν. Εἶναι ἄρα τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. ὅ. ἔ. δ.

§ **205. Μεταβολὴ τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.** Γνωρίζομεν (§ 180) ὅτι:

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$. Ἐὰν χάριν συντομίας καλέσωμεν ψ τὸ τριώνυμον, προκύπτει ἐκ ταύτης ὅτι:

$$\psi=\alpha\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς μορφῆς ταύτης τοῦ τριωνύμου γίνεται φανερὸν ὅτι, ἐπειδὴ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καὶ α εἶναι ποσότητες σταθεραί, ἡ μεταβολὴ τοῦ τριωνύμου προκαλεῖται ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\chi+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ χ μηδενιζομένη διὰ $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τείνουσα προφανῶς πρὸς τὸ $\pm\infty$, ὅταν καὶ ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ $\pm\infty$. Τὸ δὲ τετράγωνον αὐτῆς, ἤτοι ἡ συνάρτησις $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ βαίνει ὁμοίως μὲν μετὰ τῆς βάσεως $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ μεταβαλλομένη, ἂν ἡ βάσις αὕτη εἶναι θετική, ἀνομοίως δέ, ἂν αὕτη εἶναι ἀρνητική.

Ὥστε: Ἂν χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$,

$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0, ἡ δὲ συνάρτησις

$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως 0.

Ἂν δὲ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ἕως $+\infty$.

$(\chi+\dfrac{\alpha}{2\alpha})$ αὐξάνει ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$, ἡ δὲ συνάρτησις

$(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2$ αὐξάνει ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$.

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ συνάρτησις $\alpha\,(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2$, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἡ ψ μεταβάλλεται ὁμοίως ἢ ἀνομοίως μετὰ τῆς $(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2$, καθ' ὅσον εἶναι $\alpha>0$ ἢ $\alpha<0$, καταρτίζομεν εὐκόλως τοὺς ἀκολούθους πίνακας τῶν μεταβολῶν τοῦ τριωνύμου.

1ον. $\alpha > 0$

χ	$-\infty$....αὐξ...... $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ....αὐξ.......... $+\infty$.
$(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2$	$+\infty$....ἐλατ......... 0 ....αὐξ. .... $+\infty$.
ψ	$+\infty$....ἐλατ........ $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ......αὐξ. .... $+\infty$.

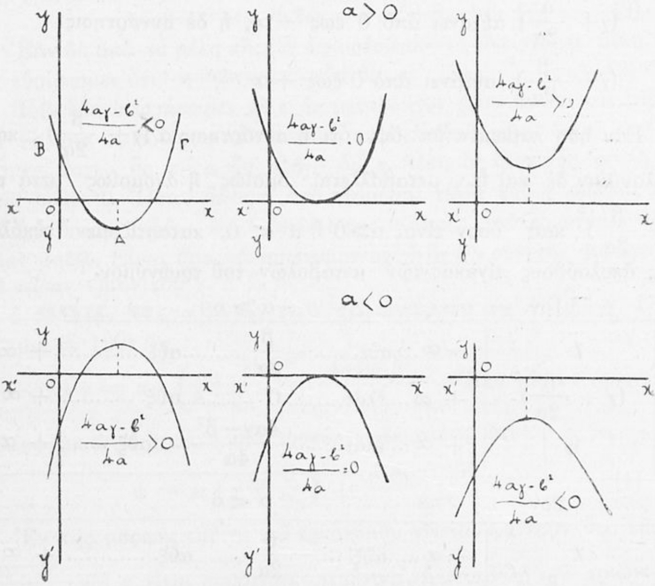
2ον. $\alpha < 0$

χ	$-\infty$.....αὐξ. ....$-\dfrac{\beta}{2\alpha}$..........αὐξ. .... $+\infty$.
$(\chi+\dfrac{\beta}{2\alpha})^2$	$+\infty$....ἐλατ. .... 0 ....αὐξ .... $+\infty$.
ψ	$-\infty$....αὐξ. .... $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$... ...ἐλατ. ... $-\infty$.

Ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ πρὸς τὴν τιμὴν $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ τοῦ χ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ $\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τοῦ τριωνύμου εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν ἄλλων τιμῶν αὐτοῦ, ὅταν $\alpha>0$ καὶ μεγαλυτέρα ὅλων τῶν ἄλλων, ὅταν $\alpha<0$. Ταῦτα ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι:

Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ γίνεται διὰ $\chi=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ἐλάχιστον μέν, ἂν $\alpha>0$, μέγιστον δέ, ἂν $\alpha<0$.

§ **206**. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.*** Ἂς χαράξωμεν δύο εὐθείας χ΄χ καὶ ψ΄ψ τεμνομένας καθέτως εἰς τὸ Ο καὶ ἂς ὁρίσωμεν ἐπ' αὐτῶν δύο τμήματα ΟΘ, ΟΗ, ὧν ἑκάτερον ἔχει μῆκος $+1$. Ἂν θέσωμεν $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, εἰς ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν (§ 32) νὰ κατασκευάζωμεν. Ἂν δὲ κατασκευάσωμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς



(Σχ. 4)

ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ, βλέπομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν τοιούτων σημείων ἀποτελεῖ καμπύλην τινὰ ΒΑΓ, διὰ τῆς ὁποίας αἰσθητοποιοῦνται αἱ ἀνωτέρω σπουδασθεῖσαι μεταβολαὶ τοῦ τριωνύμου. Ἡ καμπύλη αὕτη στρέφει τὸ κοῖλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΟΗ, ἂν $\alpha > 0$, πρὸς τὴν Οψ΄ δέ, ἂν $\alpha < 0$ τέμνει δὲ τὸν ἄξονα χ΄χ εἰς δύο σημεῖα ἢ ἐφάπτεται αὐτοῦ ἢ οὐδὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον, καθ᾽ ὅσον τὸ τριώνυμον ἔχει 2 ἢ 1 ἢ οὐδεμίαν πραγματικὴν ῥίζαν.

§ **207. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συναρτήσεων.** Νοήσωμεν ὅτι συνάρτησίς τις τοῦ χ εἶναι αὔξουσα ἔν τινι διαστήματι α. . . . . β αὐξανομένων τιμῶν τοῦ χ καὶ φθίνουσα ἐν ἑτέρῳ ὁμοίῳ β. . . . . γ. Εὐνόητον ἐκ τούτων ὅτι τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ α ἕως β, ἡ συνάρτησις βαίνει αὐξανομένη, ἐν ᾧ τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ β ἕως γ ἡ συνάρτησις βαίνει ἐλαττουμένη. Ὥστε ἐκ τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας οὕτω λαμβάνει ἡ συνάρτησις, ἐκείνη, τὴν ὁποίαν λαμβάνει διὰ $\chi = \beta$ εἶναι μεγαλυτέρα. Λέγομεν λοιπὸν διὰ τοῦτο ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη γίνεται ***μεγίστη*** ἐν τῷ διαστήματι α. . . . γ διὰ χ=β, ἥτις τιμὴ β περιέχεται ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι α. . . . β καὶ αὔξουσα ἐν τῷ β. . . . γ, ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει διὰ χ=β, εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν ἄλλων τιμῶν, ἃς λαμβάνει διὰ τὰς ἀπὸ α ἕως γ τιμὰς τοῦ χ. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη γίνεται ***ἐλαχίστη*** ἐν τῷ διαστήματι α. . . . γ διὰ χ=β.

Ὥστε: ***Ἡ τιμή, ἣν λαμβάνει συνάρτησίς τις τοῦ χ διά τινα τιμὴν β αὐτοῦ κειμένην ἔν τινι διαστήματι α. . . . γ, καλεῖται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη, ἐὰν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας αὕτη λαμβάνει διὰ τὰς μεταξὺ α καὶ γ τιμὰς τοῦ χ.***

Ἐὰν ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν λαμβάνῃ διὰ τιμὰς τοῦ χ ἐκτὸς τοῦ διαστήματος α. . . . γ κειμένας, τιμὴν μεγαλυτέραν ἢ μικροτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν λαμβάνει διὰ χ=β, τὸ ὁρισθὲν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον αὐτῆς καλεῖται ***ἀπόλυτον***· ἄλλως καλεῖται ***σχετικόν***. Οὕτω τὸ μέγιστον $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$, (ἂν $\alpha<0$) τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι ἀπόλυτον· ὁμοίως καὶ τὸ ἐλάχιστον $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ αὐτοῦ, (ἂν $\alpha>0$) εἶναι ἀπόλυτον.

§ **208. Μέθοδοι εὑρέσεως τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τῶν συναρτήσεων.** Φυσικωτέρα μέθοδος προσδιορισμοῦ τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου συναρτήσεως εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως, ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ λαμβάνῃ διαδοχικῶς ὅλας τὰς δυνατὰς τιμὰς ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης μέχρι τῆς μεγίστης. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται ***ἄμεσος*** μέθοδος. Κατ' αὐτὴν ὡρίσαμεν τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

Πολλάκις μεταχειριζόμεθα ἄλλην τινὰ μέθοδον, ἥτις καλεῖται ***ἔμμεσος*** μέθοδος. Κατ' αὐτὴν παριστῶμεν τὴν συνάρτησιν διὰ τοῦ ψ καὶ λύομεν τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν πρὸς χ. Εἶτα δὲ διερευνῶμεν τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν ἢ λύσεις ἀναζητοῦντες τὰ ὅρια, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὀφείλει νὰ περιέχηται ἡ συνάρτησις ψ, ὅπως αἱ τιμαὶ τοῦ χ ὦσι παραδεκταί. Οὕτω δὲ ἀνευρίσκομεν εἰς τὰ ὅρια ταῦτα τὰ μέγιστα ἢ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως ψ. Τὴν μέθοδον ταύτην θὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ ἀκόλουθα δύο παραδείγματα.

Παράδ. 1ον. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως. $\frac{\chi^2-2\chi+1}{2\chi^2+2\chi+1}$.

Λύσις. Θέτοντες $\psi=\frac{\chi^2-2\chi+1}{2\chi^2+2\chi+1}$ καὶ διατάσσοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $(2\psi-1)\chi^2+2(\psi+1)\chi+(\psi-1)=0$. (1).

Λύοντες ταύτην πρὸς χ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{-(\psi+1)\pm\sqrt{-\psi^2+5\psi}}{2\psi-1}$ (2).

Ἵνα δὲ αἱ ὑπὸ τῶν τύπων τούτων παρεχόμεναι τιμαὶ τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $-\psi^2+5\psi\geqq 0$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων ἡ μὲν ἐξίσωσις $-\psi^2+5\psi=0$ ἀληθεύει διὰ $\psi=0$ $\psi=5$, ἡ δὲ ἀνισότης $-\psi^2+5\psi>0$, διὰ τὰς μεταξὺ 0 καὶ 5 τιμὰς τοῦ ψ. Ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι πραγματικαί, δι᾿ ἃς τιμὰς τοῦ ψ ἀληθεύουσιν αἱ σχέσεις $0\leqq\psi\leqq 5$. Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ψ μεγαλυτέρα τοῦ 0 ἢ τοὐλάχιστον ἴση πρὸς 0, ἤτοι ἡ τιμὴ 0 τῆς συναρτήσεως ψ εἶναι ἐλαχίστη· πρέπει δὲ ἀκόμη νὰ εἶναι ψ μικροτέρα τοῦ 5 ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς 5, ἤτοι ἡ τιμὴ 5 τῆς συναρτήσεως ψ εἶναι μεγίστη.

Ἔχει λοιπὸν ἡ συνάρτησις αὕτη ἐλάχιστον 0 καὶ μέγιστον 5. Ἐπειδὴ δέ, ὅταν $\psi=0$ ἢ $\psi=5$, τὸ ὑπόρριζον τῆς ἰσότητος (2) γίνεται 0, αὕτη γίνεται $\chi=-\frac{\psi+1}{2\psi-1}$ (3).

Ἂν ἐν ταύτῃ θέσωμεν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 0 καὶ 5 τοῦ ψ, εὑρίσκομεν ἀντιστοίχους τιμὰς 1 καὶ $-\frac{2}{3}$ τοῦ χ. Ἄρα ἡ συνάρτησις ψ γίνεται ἐλαχίστη μέν, ὅταν $\chi=1$, μεγίστη δέ, ὅταν $\chi=-\frac{2}{3}$.

Παράδ. 2ον Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως $\frac{4\chi^2+1}{\chi^2-2\chi+1}$.

Λύσις. Παριστῶντες ταύτην διὰ ψ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi=\frac{4\chi^2+1}{\chi^2-2\chi+1}$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$(\psi-4)\chi^2-2\psi\chi+\psi-1.=0$ (1).

Λύοντες δὲ ταύτην πρὸς χ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=\frac{\psi\pm\sqrt{5\psi-4}}{\psi-4}$ (2).

Ἵνα αἱ ὑπὸ τούτων περεχόμεναι τιμαὶ τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει νὰ εἶναι $5\psi\geqq 4$, ὅθεν $\psi\geqq\frac{4}{5}$. Πρέπει δηλαδὴ ἡ συνάρτησις ψ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ $\frac{4}{5}$ ἢ τοὐλάχιστον ἴση πρὸς $\frac{4}{5}$.

Ὥστε ἡ τιμὴ $\frac{4}{5}$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως ψ. Ἐπειδὴ δὲ ψ δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{4}{5}$, ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ ψ, ἀφ' ἧς ψ ἐλαττοῦται, ἤτοι ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν ἔχει μέγιστον. Τὴν ἐλαχίστην δὲ τιμὴν $\frac{4}{5}$ λαμβάνει αὕτη, ὅταν $\chi = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-4} = \dfrac{4}{4-20} = -\dfrac{1}{4}$.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων.

939) $\dfrac{\chi^2+21}{\chi-2}$, $\dfrac{\chi^2-10\chi+21}{2\chi-15}$, $\dfrac{\chi^2+4\chi-36}{2\chi-10}$.

940) $\dfrac{2\chi-3}{\chi^2-2\chi+3}$, $\dfrac{\chi^2+14\chi+9}{\chi^2+2\chi+3}$, $\dfrac{\chi^2-\chi-2}{\chi^2-6\chi-9}$.

941) $\dfrac{\chi^2-6\chi+8}{2\chi-8}$, $\dfrac{\chi^2+\chi-1}{\chi^2-\chi-1}$, $\dfrac{\chi^2-4}{\chi^2+2\chi-3}$.

942) $\chi+2\sqrt{4-\chi^2}$, $\chi-\sqrt{2\chi-\chi^2}$.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ὑπὸ συνθήκας.

§ **209. Θεώρημα Ι.** ***Ἐὰν τὸ ἄθροισμα θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον αὐτῶν γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες αὐτοῦ γίνωσιν ἴσοι***, (ἐὰν δύνανται).

Α΄. Ἔστωσαν δύο μεταβλητοὶ καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ χ, ψ ἔχοντες ἄθροισμα σταθερὸν α. Λέγω ὅτι χψ γίνεται μέγιστον, ὅταν χ=ψ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν κληθῇ λ ἡ διαφορὰ χ—ψ, ἐκ τῶν ἰσοτήτων χ+ψ=α καὶ χ—ψ=λ προκύπτουσιν εὐκόλως αἱ ἰσότητες $\chi=\dfrac{\alpha+\lambda}{2}$, $\psi=\dfrac{\alpha-\lambda}{2}$, ἐξ ὧν $\chi\psi=\dfrac{\alpha^2-\lambda^2}{4}$. Ἐκ ταύτης καθίσταται φανερὸν ὅτι χψ εἶναι μέγιστον, ὅταν λ=0, ἤτοι χ—ψ=0 καὶ κατ' ἀκολουθίαν χ=ψ. ὅ. ἔ. δ.

Β΄. Ἔστωσαν χ,ψ,z,...ω θετικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε χ+ψ+..+ω ἰσοῦται πρὸς σταθερὸν α. Λέγω ὅτι τὸ γινόμενον χψ....ω γίνεται μέγιστον, ὅταν χ=ψ=z=...... = ω.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ πάντες οἱ προσθετέοι εἶναι μικρότεροι τοῦ α, τὸ γινόμενον χψz.....ω εἶναι μικρότερον τοῦ α^ν, ἂν ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων. Δὲν δύναται λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ ὑπερβῇ πάντα ἀριθμόν· ἄρα ἔχει μέγιστον. Ἐὰν δὲ δύο παράγοντες π. χ. οἱ

χ, ψ τοῦ ῥηθέντος γινομένου εἶναι ἄνισοι, καὶ κληθῇ β τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, θὰ εἶναι κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν $\chi\psi < \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\beta}{2}$.

Ἐὰν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸ γινόμενον $z \ldots \omega$ τῶν ἄλλων παραγόντων, προκύπτει ὅτι·

$\chi\psi z \ldots \omega < \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\beta}{2}\cdot z \ldots \omega$, ἤτοι ὑπάρχει ἄλλο γινόμενον μεγαλύτερον τοῦ $\chi\psi z \ldots \omega$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα. Ἐφ᾽ ὅσον λοιπὸν ὑπάρχουσιν ἔστω καὶ δύο παράγοντες ἄνισοι, ὑπάρχει γινόμενον μεγαλύτερον αὐτοῦ, ἤτοι τοῦτο δὲν εἶναι μέγιστον. Ἵνα ἄρα τὸ γινόμενον τοῦτο γίνῃ μέγιστον, ἀφοῦ ἀπεδείχθη ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατόν, πρέπει ὅλοι οἱ παράγοντες αὐτοῦ νὰ γείνωσιν ἴσοι. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 943) Ποία τιμὴ τοῦ χ καθιστᾷ τὸ γινόμενον $(2\alpha-\chi)\cdot(2\beta+\chi)$ μέγιστον, ἂν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ σταθεροί;

944) Ποία τιμὴ τοῦ χ καθιστᾷ τὸ γινόμενον $(4\chi-\alpha)\cdot(\beta-3\chi)$ μέγιστον, ἂν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ σταθεροί;

945) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον.

946) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον.

947) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον.

948) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ὀρθ. παραλληλεπιπέδων, ὧν αἱ διαστάσεις ἔχουσιν ἄθροισμα σταθερόν.

§ 210. Θεώρημα II. ***Ἐὰν τὸ ἄθροισμα θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον δυνάμεων αὐτῶν μὲ θετικοὺς ἐκθέτας γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γείνωσιν (ἂν δύνανται) ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων τούτων.***

Ἔστωσαν χ, ψ, ω τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοί, οἵτινες μεταβάλλονται, ἀλλ᾽ οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διατηρεῖ τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμὴν α. Λέγω ὅτι τὸ γινόμενον $\chi^{\mu}\psi^{\nu}\omega^{\rho}$, ἔνθα μ,ν,ρ εἶναι θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι μέγιστον, δι᾽ ἃς τιμὰς τῶν χ,ψ,ω εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}$.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦντες ὅτι

$$\chi^{\mu}\psi^{\nu}\omega^{\rho}=\mu^{\mu}\nu^{\nu}\rho^{\rho}\left(\frac{\chi}{\mu}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{\psi}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\left(\frac{\omega}{\rho}\right)^{\rho}$$

καὶ $\mu^\mu \nu^\nu \rho^\rho$ εἶναι σταθερόν, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ γινόμενον $\chi^\mu \psi^\nu \omega^\rho$ γίνεται μέγιστον ὅταν καὶ τὸ $\left(\frac{\chi}{\mu}\right)^\mu \cdot \left(\frac{\psi}{\nu}\right)^\nu \cdot \left(\frac{\omega}{\rho}\right)^\rho$ γείνῃ μέγιστον.

Ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο γινόμενον ἔχει $\mu+\nu+\rho$ παράγοντας, ὧν τὸ ἄθροισμα

$$\frac{\chi}{\mu}+\frac{\chi}{\mu}+\ldots\ldots+\frac{\chi}{\mu}+\frac{\psi}{\nu}+\frac{\psi}{\nu}+\ldots+\frac{\psi}{\nu}+\frac{\omega}{\rho}+\frac{\omega}{\rho}+\ldots+\frac{\omega}{\rho}$$

ἰσοῦται πρὸς $\frac{\chi}{\mu}\cdot\mu+\frac{\psi}{\nu}\cdot\nu+\frac{\omega}{\rho}\cdot\rho=\chi+\psi+\omega=\alpha$, ἤτοι εἶναι σταθερόν.

Τὸ γινόμενον ἄρα τοῦτο γίνεται μέγιστον, δι' ἃς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν χ,ψ,ω εἶναι δυνατὸν νὰ γίνωσιν ὅλοι οἱ παράγοντες ἴσοι (§ 209), ἤτοι $\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}$. ὅ.ἔ.δ.

Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑπετέθησαν οἱ ἐκθέται μ,ν,ρ, ἀκέραιοι.

Ἐὰν εἶναι κλάσματα π.χ. $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\eta}$, τὸ θεωρούμενον γινόμενον εἶναι $\chi^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\psi^{\frac{\gamma}{\delta}}\cdot\omega^{\frac{\varepsilon}{\eta}}$, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸ

$\chi^{\frac{\alpha\delta\eta}{\beta\delta\eta}}\cdot\psi^{\frac{\beta\gamma\eta}{\beta\delta\eta}}\cdot\omega^{\frac{\beta\delta\varepsilon}{\beta\delta\eta}}$. Τοῦτο δὲ γίνεται μέγιστον, ὅταν καὶ ἡ $(\beta\delta\eta)^{\eta}$ δύναμις αὐτοῦ $\chi^{\alpha\delta\eta}\cdot\psi^{\beta\gamma\eta}\cdot\omega^{\beta\delta\varepsilon}$ γείνῃ μεγίστη, ἤτοι δι' ἃς τιμὰς τοῦ χ,ψ,ω δύναται νὰ εἶναι $\frac{\chi}{\alpha\delta\eta}=\frac{\psi}{\beta\gamma\eta}=\frac{\omega}{\beta\delta\varepsilon}$ ἢ $\frac{\chi}{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\psi}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\omega}{\frac{\varepsilon}{\eta}}$. ὅ.ἔ.δ.

Ἀσκήσεις. 949) Δεδομένου τετραγώνου ΑΒΓΔ ἐκ φύλλου χάρτου ὁρίζομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΗ, ΓΘ, ΓΙ, ΔΚ, ΔΛ, ΑΜ πάντα ἴσα καὶ ἄγομεν ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῶν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου. Ἐὰν ἤδη ἀποκόψωμεν τὰ οὕτω περὶ τὰς κορυφὰς σχηματισθέντα τετράγωνα καὶ ἀνεγείρωμεν τὰ μένοντα πέριξ 4 ὀρθογώνια, οὕτως ὥστε νὰ καταστῶσι κάθετα ἐπὶ τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον, σχηματίζεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστου τῶν τμημάτων ΑΕ, ΒΖ, κτλ. ὅπως τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον;

950) Ἐὰν εἶναι $\chi^2+\chi\psi=\alpha^2$, ἔνθα α σταθερὸς ἀριθμός, διὰ ποίας τιμὰς τῶν μεταβλητῶν χ, ψ τὸ γινόμενον $\chi^2\psi$ γίνεται μέγιστον;

951) Ποῖος ἐκ τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν εἶναι μέγιστος;

952) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ χ τὸ γινόμενον $\chi^2.(\alpha-\beta\chi)$ γίνεται μέγιστον; (α καὶ β σταθεροί),

§ **211. Θεώρημα III.** ***Ἐὰν τὸ γινόμενον θετικῶν μετα-***

βλητῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οὗτοι γίνωσι πάντες ἴσοι, (ἂν δύνανται).

Α΄. Ἔστωσαν χ καὶ $\frac{\alpha}{\chi}$ δύο μεταβλητοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι γινόμενον τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν α. Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα $\chi+\frac{\alpha}{\chi}$ γίνεται ἐλάχιστον, δι' ἃς τιμὰς τοῦ χ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\chi=\frac{\alpha}{\chi}$

Ἀπόδειξις. Ἂς θέσωμεν $\psi=\chi+\frac{\alpha}{\chi}$ (1) καὶ ἂς λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρὸς χ. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\chi=\frac{\psi\pm\sqrt{\psi^2-4\alpha}}{2} \qquad (3)$$

Ἐκ τούτων καθίσταται φανερὸν ὅτι, ἵνα αἱ τιμαὶ τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\psi^2-4\alpha\geqq0$, ἄρα $\psi\leqq-2\sqrt{\alpha}$ καὶ $\psi\geqq2\sqrt{\alpha}$. Ἡ τιμὴ ὅθεν $2\sqrt{\alpha}$ εἶναι σχετικὸν ἐλάχιστον τοῦ ψ.

Ἡ δὲ ἰσότης (3) γίνεται διὰ ταύτην $\chi=\frac{\psi}{2}=\sqrt{\alpha}$. Ὁ ἕτερα προσθετέος $\frac{\alpha}{\chi}$ γίνεται $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\alpha}$, ἤτοι καὶ αὐτὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν χ. Ἵνα λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $\chi+\frac{\alpha}{\chi}$ γείνῃ ἐλάχιστον, πρέπει οἱ προσθετέοι αὐτοῦ νὰ γείνωσιν ἴσοι καὶ ἕκαστος ἴσος προς $\sqrt{\alpha}$. Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ, διότι τότε $\psi=2\sqrt{\alpha}$, ἥτις εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ ψ.

Β΄. Ἔστωσαν ἤδη ν θετικοὶ καὶ μεταβλητοὶ χ, ψ, z...ω, τοιοῦτοι ὥστε $\chi\psi z......\omega=\alpha$, (ἔνθα σταθερὸς ἀριθμός.)

Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi+z+....+\omega$ γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν

$$\chi=\psi=z=\cdots=\omega=\sqrt[\nu]{\alpha}.$$

Ἀπόδειξις. Τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi+z+\cdots+\omega$, ὅταν $\chi=\psi=\cdots=\omega=\sqrt[\nu]{\alpha}$ γίνεται $\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}+\cdots+\sqrt[\nu]{\alpha}$ (1). Τούτου δὲ δύο προσθετέοι ἔχουσι γινόμενον $(\sqrt[\nu]{\alpha})^2$. Ἂν δὲ ἐν τῷ ἀθροίσματι τούτῳ ἀντικαταστήσωμεν δύο προσθετέους δι' ἄλλων χ, ψ ἀνίσων καὶ τοιούτων ὥστε νὰ εἶναι $\chi\psi=(\sqrt[\nu]{\alpha})^2$, προκύπτει τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi+\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}+...+\sqrt[\nu]{\alpha}$, οὗ οἱ προσθετέοι ἔχουσι γινόμενον $(\sqrt[\nu]{\alpha})^2.(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu-2}=(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}=\alpha$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι $\chi+\psi>\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}$, ἕπεται ὅτι $\chi+\psi+\sqrt[\nu]{\alpha}+\ldots+\sqrt[\nu]{\alpha}>\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}+\ldots+\sqrt[\nu]{\alpha}$. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν (1) εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου ἀθροίσματος οὗ οἱ προσθετέοι ἔχουσι τὸ αὐτὸ γινόμενον α. Εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα (1) ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος $\chi+\psi+z+\ldots+\omega$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις: 953) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν χ, ψ, z τὸ ἄθροισμα $\chi\psi+\psi z+z\chi$ γίνεται ἐλάχιστον, ἂν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\chi\psi z=\alpha^{3}$, τοῦ α ὄντος σταθεροῦ;

954) Ποῖον ἐκ τῶν ὀρθ. παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ὄγκον ἔχει τὴν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν;

955) Ἑκατέρωθεν δεδομένης εὐθείας ΑΒ δίδονται δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ γραφῇ, δι' αὐτῶν περιφέρεια ἀποκόπτουσα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐλαχίστην χορδήν.

956) Ποῖον ἐκ τῶν περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένων ἰσοσκελῶν τραπεζίων εἶναι ἐλάχιστον;

§ **212. Θεώρημα IV.** ***Τὸ ἄθροισμα θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ὧν τυχοῦσαι δυνάμεις μὲ ἐκθέτας θετικοὺς ἔχουσιν γινόμενον σταθερόν, καθίσταται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γείνωσιν (ἂν δύνανται) ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας.***

Ἔστωσαν χ, ψ, z τρεῖς μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε $\chi^{\alpha}\psi^{\beta}z^{\gamma}=\sigma$, ἔνθα α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ ὡρισμένοι, ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ὁ δὲ σ σταθερός. Λέγω ὅτι $\chi+\psi+z$ γίνεται ἐλάχιστον, δι' ἃς τιμὰς τῶν χ, ψ, z εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\chi=\frac{\chi}{\alpha}.\alpha$, $\psi=\frac{\psi}{\beta}.\beta$, $z=\frac{z}{\gamma}.\gamma$, ἕπεται ὅτι

$$\chi+\psi+z=\frac{\chi}{\alpha}.\alpha+\frac{\psi}{\beta}.\beta+\frac{z}{\gamma}.\gamma=\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\alpha}+\ldots+\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}+\frac{\psi}{\beta}+\ldots+\frac{\psi}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+\frac{z}{\gamma}+\ldots+\frac{z}{\gamma},$$

ὧν τὸ τελευταῖον ἄθροισμα ἔχει $\alpha+\beta+\gamma$ προσθετέους, ἤτοι α ἴσους πρὸς $\frac{\chi}{\alpha}$, β ἴσους πρὸς $\frac{\psi}{\beta}$ καὶ γ ἴσους πρὸς $\frac{z}{\gamma}$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν προσθετέων τούτων εἶναι $\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{\psi}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}$, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\chi^{\alpha}\psi^{\beta}z^{\gamma}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}}=\frac{\sigma}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}}$, ἤτοι εἶναι σταθερόν. Τὸ ἄθροισμα ἄρα (§ 211) εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν ὅλοι οἱ προσθετέοι αὐτοῦ γείνωσιν ἴσοι, ἤτοι ὅταν $\frac{\chi}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$. ὅ. ἔ. δ.

Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑπετέθησαν οἱ ἐκθέται α, β, γ ἀκέραιοι.

Ἂν οὗτοι εἶναι κλασματικοί, ἤτοι ἂν $\frac{\mu}{\chi^{\nu}} \cdot \frac{\lambda}{\psi^{\varrho}} \cdot \frac{\tau}{z^{\eta}} = \sigma$, θὰ εἶναι καὶ $\chi^{\mu\varrho\eta} \cdot y^{\nu\lambda\eta}\, z^{\nu\varrho\tau} = \sigma^{\nu\varrho\eta}$, ἤτοι ὑπάρχουσι δυνάμεις τῶν χ, ψ, z μὲ ἀκεραίους ἐκθέτας, οἵτινες ἔχουσι γινόμενον σταθερόν. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi+z$ γίνεται ἐλάχιστον, δι' ἃς τιμὰς αὐτῶν ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες $\frac{\chi}{\mu\varrho\eta} = \frac{\psi}{\nu\lambda\eta} = \frac{z}{\nu\varrho\tau}$, ὅθεν $\frac{\chi}{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\psi}{\frac{\lambda}{\varrho}} = \frac{z}{\frac{\tau}{\eta}}$ ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 957) Ἐὰν $\chi^2\psi = \alpha^3$ (α σταθ.), ποῖαι τιμαὶ τοῦ χ καὶ ψ καθιστῶσι τὸ ἄθροισμα $\chi^2+\chi\psi$ ἐλάχιστον;

958) Ποῖος ἐκ τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὸν αὐτὸν ὄγκον $\pi\alpha^3$, ἔχει τὴν ἐλαχίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν;

959) Ποῖος ἐκ τῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι τὸν αὐτὸν ὄγκον $\frac{\pi\alpha^3}{3}$, ἔχει τὴν ἐλαχίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

960) Ποῖον ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος καὶ τὸ ἓν τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης ἔχουσι γινόμενον σταθερόν, ἔχει (τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν;) ~~τὴν ἐλαχίστην ὑποτείνουσαν~~

§ 213. Σπουδὴ τῶν μεταβολῶν ρητῶν συναρτήσεων τοῦ χ καὶ γραφικὴ παράστασις αὐτῶν.

Παράδ. 1ον. Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\frac{\chi^2-\chi+1}{2\chi^2+\chi-1}$ ***καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.***

Λύσις. Διὰ τὴν σπουδὴν ταύτην ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς πορείαν.

Α'. Εὑρίσκομεν τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ταύτης, (ἂν ἔχῃ). Πρὸς τοῦτο θέτομεν $\frac{\chi^2-\chi+1}{2\chi^2+\chi-1} = y$ καὶ λύοντες πρὸς χ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην

εὑρίσκομεν $$\chi = \frac{1+y \pm \sqrt{9y^2+6y-3}}{2(1-2y)}. \qquad (1)$$

Ἵνα αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων τούτων παρεχόμεναι τιμαὶ τοῦ χ ὦσι πραγματικαί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $9y^2+6y-3 \geqq 0$, ὅθεν εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $y \leqq -1$ καὶ $y \geqq \frac{1}{3}$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ -1 τοῦ y εἶναι μεγίστη, ἡ δὲ $\frac{1}{3}$ ἐλαχίστη. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων (1) εὑρίσκομεν ὅτι $y=-1$ διὰ $\chi=0$ καὶ $y = \frac{1}{3}$ διὰ $\chi=2$.

Β'. Εὑρίσκομεν διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ μηδενίζεται ἡ συνάρτησις y, ἤτοι τίνες εἶναι αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τοῦ ἀριθμητοῦ. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ διακρίνουσα αὐτοῦ εἶναι $1-4=-3<0$, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχει πραγματικὰς ῥίζας καὶ ὅτι οὗτος εἶναι θετικὸς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ. Ἡ συνάρτησις y λοιπὸν οὐδέποτε μηδενίζεται.

Γ'. Εὑρίσκομεν τὰς πραγματικὰς ῥίζας τοῦ παρονομαστοῦ (ἂν ἔχῃ). Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ διακρίνουσα αὐτοῦ εἶναι $1+8=9>0$, συμπεραίνομεν ὅτι ἔχει ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους: Εἶναι δὲ αὗται -1 καὶ $\frac{1}{2}$. Ἤδη ἐξετάζομεν εἰς ποῖον ὅριον τείνει ἡ συνάρτησις ψ, ὅταν ὅρ $\chi=-1$ καὶ ὅταν ὅρ $\chi=\frac{1}{2}$.

α'.) Ὅταν ὅρ $\chi=-1$ ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων, ἤτοι, ὅταν ὁ χ πλησιάζῃ ἀπαύστως πρὸς τὸν -1 λαμβάνων τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ καὶ βαθμηδὸν πρὸς τὸν -1 τεινούσας, ὁ παρονομαστὴς τείνει πρὸς τὸν 0 ἐκ θετικῶν τιμῶν· διότι αἱ ῥηθεῖσαι τιμαί, ἃς λαμβάνει ὁ χ κεῖνται ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν -1 καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ $\chi^2+\chi-1$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι, ὡς εἴπομεν προηγουμένως, θετικός, ἕπεται ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y εἶναι θετικαὶ καὶ βαίνουσιν ἀπαύστως αὐξανόμεναι. Εἶναι ἄρα ὅρ $y=+\infty$.

Ἐὰν δὲ ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸν -1 ἐκ τιμῶν μειζόνων, ἐπειδὴ αὗται περιέχονται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τοῦ παρονομαστοῦ, δι' ἑκάστην τούτων ὁ παρονομαστὴς καθίσταται ἀρνητικός. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι θετικός, ἕπεται ὅτι δι' ἑκάστην τοιαύτην τιμήν, ἡ συνάρτησις y καθίσταται ἀρνητική· καὶ ἐπειδὴ τοῦ χ ἀπαύστως ἐλαττουμένου καὶ πρὸς τὸ -1 τείνοντος, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς συναρτήσεως αὐξάνει ἐπ' ἄπειρον, ἕπεται ὅτι ὅρ$y=-\infty$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν ὁ χ λαμβάνων τιμὰς μικροτέρας του -1 καὶ πρὸς αὐτὸν τεινούσας, αἴφνης λάβῃ τιμὰς μείζονας τοῦ -1, ἀλλ' ἐλάχιστα αὐτοῦ διαφερούσας, ἡ συνάρτησις y μεταπηδᾷ ἐκ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$.

β') Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν ὅρ $\chi=\frac{1}{2}$ ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων τοῦ $\frac{1}{2}$, ἡ συνάρτησις y τείνει πρὸς τὸ $-\infty$. Ἂν δὲ ὁ χ λάβῃ τιμὰς ἐλάχιστα μεγαλυτέρας τοῦ $\frac{1}{2}$, ἡ συνάρτησις y μεταπηδᾷ εἰς τὸ $+\infty$.

Δ'. Εὑρίσκομεν ποίαν τιμὴν λαμβάνει ἡ συνάρτησις y διὰ $\chi=0$. Πρὸς τοῦτο θέτομεν ἐν τῇ συναρτήσει ἀντὶ χ τὴν τιμὴν 0 καὶ εὑρίσκομεν $y=-1$.

ΣΗΜ. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο εὕρομεν καὶ προηγουμένως (Α΄), διότι κατὰ σύμπτωσιν εἰς τὴν τιμὴν $\chi=0$ ἀντιστοιχεῖ τὸ μέγιστον -1 τῆς συναρτήσεως.

Ε΄. Ζητοῦμεν τὸ ὅριον, εἰς ὃ τείνει ἡ συνάρτησις ψ, ὅταν ὅρ. $\chi=\pm\infty$. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ χ^2 καὶ εὑρίσκομεν·

$$y=\frac{1-\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}{2+\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}}.$$

Ἤδη λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ὅρ.}\,\psi=\frac{\text{ὅρ.}\left(1-\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}\right)}{\text{ὅρ.}\left(2+\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}\right)}=\frac{1-\text{ὅρ}\frac{1}{\chi}+\text{ὅρ}\frac{1}{\chi^2}}{2+\text{ὅρ}\frac{1}{\chi}-\text{ὅρ}\frac{1}{\chi^2}}$$

Ἐπειδὴ δὲ διὰ ὅρ $\chi=\pm\infty$ εἶναι ὅρ $\frac{1}{\chi}=0$ καὶ ὅρ $\frac{1}{\chi^2}=0$ ἕπεται ὅτι διὰ

$$\text{ὅρ}\ \chi=\pm\infty\ \text{εἶναι ὅρ}\ y=\frac{1}{2}.$$

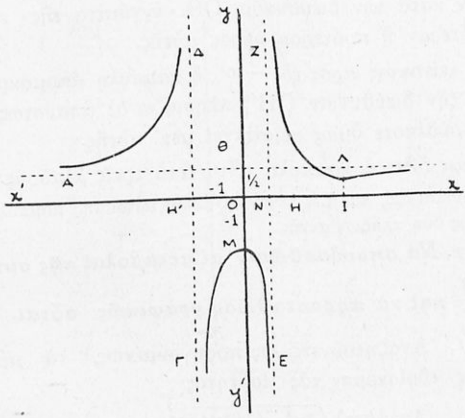
Ἤδη καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως y μετὰ τοῦ χ·

$$\begin{array}{c|l}
\chi & -\infty \ldots \text{αὔξ} \ldots -1 \ldots \text{αὔξ} \ldots 0 \ldots \text{αὔξ} \ldots \frac{1}{2} \ldots\ldots \text{αὔξ} \ldots 2 \ldots \text{αὔξ} \ldots +\infty \\
y & \frac{1}{2} \ldots \text{αὔξ} \ldots \pm\infty \ldots \text{αὔξ} \ldots \underset{\mathrm{M}}{-1} \ldots \text{ἐλατ} \ldots \mp\infty \ldots \text{ἐλατ} \ldots \underset{\mathrm{E}}{\frac{1}{3}} \ldots \text{αὔξ} \ldots +\frac{1}{2}
\end{array}$$

Τὰς μεταβολὰς ταύτας αἰσθητοποιοῦμεν γραφικῶς ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ δύο καθέτως τεμνομένων ἀξόνων x΄x, y΄y ὁρίζομεν διευθύνοντα ἀνύσματα ΟΘ καὶ ΟΗ καὶ καθορίζομεν διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων τούτων, ὧν ἕκαστον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χ καὶ τῆς συναρτήσεως y. Οὕτως εἰς τὸ ζεῦγος $\chi=0$, $y=-1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος ψ΄ψ, εἰς τὸ ζεῦγος $\chi=2$, $y=\frac{1}{3}$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Λ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὸ σύνολον τῶν οὕτως ὁριζομένων σημείων ἀποτελεῖ καμπύλην, ἧς τὸ σχῆμα καθορίζομεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ὁ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχομένας καὶ πρὸς τὸν $\frac{1}{2}$ τεινούσας, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y ἀπὸ -1 ἀρχόμεναι ἐλαττοῦνται ἀπαύστως καὶ τείνουσι πρὸς τὸ $-\infty$. Τὰ σημεῖα ἄρα τῆς καμπύλης ἀπομακρύνονται τοῦ ἄξονος y΄y χωρὶς νὰ ἐξέλθωσι τοῦ χώρου, ὃν ὁρίζει ὁ ἄξων y΄y καὶ ἡ παράλληλος πρὸς αὐτὴν εὐθεῖα EZ, ἥτις τέμνει τὸν x΄x εἰς σημεῖον N, δι' ὃ εἶναι $(\mathrm{ON})=\frac{1}{2}$. Συγχρόνως δὲ καὶ ταχύτατα ἀπομακρύνονται καὶ τοῦ ἄξονος χ΄χ κατὰ τὴν διεύθυνσιν OM. Οὕτω δὲ ἡ καμπύλη ἀπαύστως πλησιάζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν EZ, οὐδέποτε ὅμως συμπίπτει μετ' αὐτῆς. Μόλις αἱ τιμαὶ τοῦ χ ὑπερβῶσι κατ' ἐλάχιστον τὸν $\frac{1}{2}$, τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς καμπύλης ἐμφανίζονται εἰς ἄπειρον πάλιν ἀπὸ τοῦ χ΄χ ἀπόστασιν, ἀλλὰ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΘ, ἐγγύτατα τῆς εὐθείας EZ καὶ πρὸς τὸ ἕτερον ἢ πρότερον μέρος αὐτῆς. Ἐφ' ὅσον αἱ τιμαὶ τοῦ χ πλησιάζουσι πρὸς τὸν 2, ἡ καμπύλη ἀπομακρυνομένη τῆς EZ πλησιάζει συγχρόνως πρὸς τὸν χ΄χ. Ὅταν δὲ γείνῃ χ=2, τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς καμπύλης Λ ἀπέχει τοῦ χ΄χ ἀπόστασιν $(\mathrm{I}\Lambda)=\frac{1}{3}$. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως, ἀπὸ τοῦ Λ ἡ καμπύλη ἄρχεται τοῦ χ τείνοντος πρὸς τὸ $+\infty$ ἀπομακρυνομένη τοῦ ἄξονος χ΄χ καὶ ἀπαύστως πλησιάζουσα, πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB, ἥτις ἀπέχει τοῦ ἄξονος χ΄χ ἀπόστασιν $\frac{1}{2}$ καὶ οὐδέποτε ὅμως τέμνει τὴν εὐθεῖαν ταύτην.



(Σχ. 5)

Ὅταν ὁ χ λαμβάνῃ τιμὰς ἀπὸ τοῦ 0 πρὸς τὸ −1 τεινούσας, ἡ συνάρτησις ἐλαττουμένη τείνει πρὸς τὸ $-\infty$ καὶ ἑπομένως τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς καμπύλης ἀπομακρύνονται τοῦ ἄξονος ψ΄ψ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΗ΄ οὐδέποτε ὅμως συμπίπτουσι μὲ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις τέμνει τὴν χ΄χ εἰς τὸ Η΄, δι' ὃ εἶναι (ΟΗ΄)$=-1$. Συγχρόνως δὲ καὶ ταχύτατα ἀπομακρύνονται τοῦ ἄξονος χ΄χ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΜ. Οὕτω δὲ ἡ καμπύλη ἀπαύστως πλησιάζει πρὸς τὴν ΓΔ οὐδέποτε ὅμως συμπίπτει μετ' αὐτῆς.

Μόλις αἱ τιμαὶ τοῦ χ ὑπερβῶσι κατ' ἐλάχιστον τὸν -1, τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς καμπύλης ἐμφανίζονται εἰς ἄπειρον πάλιν ἀπὸ τοῦ χ΄χ ἀπόστασιν κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΘ, ἐγγύτατα τῆς εὐθείας ΓΔ καὶ πρὸς τὸ ἕτερον ἢ πρότερον μέρος αὐτῆς.

Τοῦ χ δὲ τείνοντος πρὸς τὸ $-\infty$, ἡ καμπύλη ἀπομακρύνεται μὲν τοῦ yy΄ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΗ΄, πλησιάζει δὲ ἀπαύστως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, οὐδέποτε ὅμως συμπίπτει μετ' αὐτῆς.

Ἀποτελεῖται ὅθεν ἡ καμπύλη αὕτη ἀπὸ τρεῖς κλάδους.

ΣΗΜ. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, καὶ ΓΔ λέγονται ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι ἀσύμπτωτος δύο κλάδων αὐτῆς.

Παράδ. 2ον. Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\frac{3\chi^2-3\chi-6}{\chi^2-4\chi+3}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

Λύσις. Α΄. Ἀναζητοῦντες, ὡς προηγουμένως, τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα αὐτῆς εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας

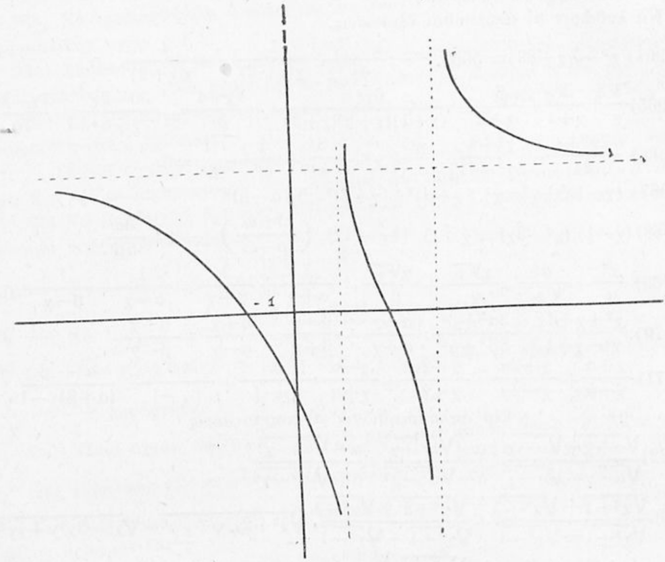
$$\chi=\frac{3-4y\pm\sqrt{4y^2-12y+81}}{2(3-y)}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ὑπορρίζου $4y^2-12y+81$ ἡ διακρίνουσα εἶναι $36-4.81=-288<0$, ἕπεται ὅτι τὸ ὑπόρριζον τοῦτο εἶναι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ y θετικὸν καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (1) παρεχόμεναι τιμαὶ τοῦ χ εἶναι πραγματικαὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ y. Δύναται δηλ. ὁ y νὰ λαμβάνῃ οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ κατ' ἀκολουθίαν δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

Β΄. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς τῆς δοθείσης συναρτήσεως ἔχει ῥίζας -1 καὶ 2 ἕπεται ὅτι διὰ ταύτας εἶναι $y=0$.

Γ΄. Ὁ παρονομαστὴς ἔχει ῥίζας 1 καὶ 3. Ὅταν ὅρ $\chi=1$ ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων, ὁ ἀριθμητὴς γίνεται ἀρνητικός, ὁ δὲ παρονομαστὴς θετικός. Εἶναι ἄρα ὅρ$y=-\infty$. Διὰ τιμὰς του χ μεγαλυτέρας τοῦ 1 ἀλλ' ἐλάχιστα αὐτοῦ διαφερούσας, ἡ τιμὴ τοῦ y εἶναι θετικὴ καὶ ἀπολύ-

τως πολὺ μεγάλη. Μεταπηδᾷ ἄρα ἡ συνάρτησις ἀπὸ $-\infty$, εἰς $+\infty$.
Ὅταν ὅρ$\chi=3$ ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι ὅρ$y=-\infty$,



(Σχ, 6)

εὐθὺς δὲ ὡς ὁ χ ὑπερβῇ κατ' ἐλάχιστον τὸν 3, ἡ συνάρτησις μεταπηδᾷ εἰς τὸ $+\infty$.

Δ'. Διὰ $\chi=0$, εἶναι $y=-2$.

Ε'. Διὰ ὅρ $\chi=\pm\infty$, εὑρίσκομεν ὅτι ὅρ$y=3$.

Ἤδη καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τοῦ y μετὰ τοῦ χ.

χ	$-\infty$..αὔξ..-1..αὔξ.....0..αὔξ....1.......αὔξ.....2....αὔξ.........3....αὔξ... $+\infty$
y	3...ἐλατ......0...ἐλατ...-2..ἐλατ..$\mp\infty$...ἐλατ...0....ἐλατ...$\mp\infty$..ἐλατ..$+3$

Τὰς μεταβολὰς ταύτας αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς ἀνωτέρω καμπύλης, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς κλάδους.

Ἀσκήσεις: **961) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ αὗται.**

962) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\frac{\chi^2+x+2}{x^2+2\chi+1}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ αὗται.

963) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\frac{2\chi}{\chi^2+2\chi-1}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις.

964) $\chi^2-5(\chi+89)=5555$, $\frac{\chi}{\chi^2-4}-\frac{1}{\chi(\chi-2)}-\frac{4}{\chi(\chi+2)}=0$.

965) $\frac{1}{\chi}+\frac{2}{\chi+1}+\frac{3}{\chi+2}=\frac{6\chi^2}{(\chi+1)(\chi+2)(\chi+3)}$, $\frac{3\chi+4}{5}-\frac{30-2\chi}{\chi-6}=\frac{7\chi-14}{10}$

966) $\frac{7\chi^2+8}{21}-\frac{\chi^2+4}{8\chi^2-41}=\frac{\chi^2}{3}$, $\chi^2-\frac{2x}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^6}-\frac{1}{\beta^6}=0$.

967) $(\chi-1)^3+\chi^2=\chi^3$, $(\chi+\alpha)^2+(\chi+\beta)^2=5\,(\alpha-\beta)^2$.

968) $(\chi-1)\,(\chi^2-3\chi)=(\chi-1).\,(4\chi-12)$, $\left(\frac{\beta+\omega}{\beta-\omega}\right)^2=1+\frac{\delta\omega}{\alpha\beta}$.

969) $\frac{\chi^2}{\alpha}+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta\gamma}}=\frac{\chi\sqrt{\beta}}{\gamma}+\frac{\chi\sqrt{\gamma}}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha+\chi}+\frac{1}{\beta+\chi}+\frac{1}{\sigma-\chi}+\frac{1}{\beta-\chi}=0$.

970) $\frac{\chi^2+\chi+1}{\chi^2-\chi+1}=\frac{3\alpha^2+\beta^2}{3\beta^2+\alpha^2}$, $\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}+\frac{\beta-\chi}{\beta+\chi}=\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}+\frac{\beta+\chi}{\beta-\chi}$.

971) $\frac{\chi+\alpha}{\chi-\alpha}+\frac{\chi+2\alpha}{\chi-2\alpha}=\frac{\chi-2\alpha}{\chi+2\alpha}+\frac{\chi-\alpha}{\chi+\alpha}$, $\frac{\alpha}{\alpha\chi-1}+\frac{\beta}{\beta\chi-1}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)\chi-1}$.

Νὰ ἁπλοποιηθῶσιν αἱ παραστάσεις

972) $\frac{\sqrt{\alpha+\chi}+\sqrt{\alpha-\chi}}{\sqrt{\alpha+\chi}-\sqrt{\alpha-\chi}}$, $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\chi^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\chi^2}}+\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\chi^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\chi^2}}$.

973) $\frac{\sqrt{\chi^2+1}+\sqrt{\chi^2-1}}{\sqrt{\chi^2+1}-\sqrt{\chi^2-1}}+\frac{\sqrt{\chi^2+1}-\sqrt{\chi^2-1}}{\sqrt{\chi^2+1}+\sqrt{\chi^2-1}}$, $\sqrt{\chi^3+2\chi^2\psi+\chi\psi^2}-\sqrt{\chi^3-2\chi^2y+\chi y^2}$.

974) $\frac{(\chi+1)^2-(\chi^2-1)+2\sqrt{\chi^2-1}}{(\chi^2-1)-(\chi-1)^2+2\sqrt{\chi^2-1}}$.

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\beta}+1}+\frac{\sqrt{\beta}-1}{\sqrt{\alpha}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\beta}-1}-\frac{\sqrt{\beta}+1}{\sqrt{\alpha}-1}\right)-\frac{\alpha-1}{\beta-1}-\frac{\beta-1}{\alpha-1}.$$

975) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\frac{1+2\chi}{1+\sqrt{1+2\chi}}+\frac{1-2\chi}{1-\sqrt{1-2\chi}}$

διὰ $\chi=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

976) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

977) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $9\chi^2-(2-\mu)\,\chi-6+\mu=0$ ἔχει α΄.) ῥίζας ἴσας, β΄) ἀντιθέτους ῥίζας ;

978) Ποία συνθήκη πρέπει νὰ ἐκπληροῦται, ὅπως ἡ παράστασις $(\alpha+3\chi)^2+(\beta+4\chi)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ;

979) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\lambda\chi^2-(\lambda+3)\chi+2\lambda+1=0$ ἔχει α΄) ρίζας διαφερούσας κατὰ 2, β΄) μίαν ρίζαν 5 ; Ποία ἐν τῇ τελευταίᾳ ταύτῃ περιπτώσει εἶναι ἡ ἄλλη ρίζα ;

980) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-2\,(\mu+1)\,\chi+\mu^2-9=0$ ἔχει μίαν ρίζαν διπλασίαν τῆς ἄλλης ;

981) Ἐὰν χ΄ καὶ χ΄΄ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\frac{2\alpha\chi+\beta}{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}=\frac{1}{\chi-\chi'}+\frac{1}{\chi-\chi''}.$$

982) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\mu-1)\chi^2-2(\mu-1)\chi+2\mu-1=0$.

983) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀνισότης $2\alpha(\alpha-3) > -5$ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ α.

984) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)-\gamma^2=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Τίνα θέσιν ἔχουσι πρὸς ταύτας οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β;

985) Ἐὰν δοθέντες ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε $\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$(\beta+\gamma)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)+(\gamma+\alpha)(\chi-\gamma)(\chi-\alpha)+(\alpha+\beta)(\chi-\alpha)(\chi-\beta)=0$$

ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ὧν μία περιέχεται μεταξὺ α καὶ β.

986) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $3(1+\lambda^2+\lambda^4) > (1+\lambda+\lambda^2)^2$ διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ διάφορον τοῦ 1.

987) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{(\chi+1)^3-1}{(\chi-1)^3+1} > 1$

988) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{\chi+1}{\chi-1} > \frac{\chi-1}{\chi+1}$ καὶ ἡ $\frac{\chi^2-1}{\chi^2+1} < \frac{\chi^3-1}{\chi^3+1}$

989) Ἐὰν χ΄, χ΄΄ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\frac{\chi'}{\chi''}+\frac{\chi''}{\chi'}$ συναρτήσει τοῦ π καὶ κ.

990) Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ π καὶ κ, ὅπως αἱ ρίζαι χ΄ καὶ χ΄΄ τῆς ἐξισώσως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ ταὐτοποιῶσι τὴν σχέσιν $\frac{\chi'+2\chi''}{2\chi'+\chi''}=\frac{1}{3}$;

991) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $(\chi-3)^2+(\chi-1)^2-(\chi-\mu)^2=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς;

992) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^3+3\alpha\chi^2+3\alpha^2\chi=\beta^3$.

Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

993) $\alpha(\chi^2+\psi^2)-\beta(\chi^2-\psi^2)=2\alpha,\ (\alpha^2-\beta^2).(\chi^2-\psi^2)=4\alpha\beta.$

994) $\chi-\psi+\sqrt{\frac{\chi-\psi}{\chi+\psi}}=\frac{20}{\chi+\psi},\ \chi^2+\psi^2=34.$

995) $\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}=\alpha,\ \frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\psi^2}=\beta^2.$

996) $\frac{\psi+z}{\chi}=\frac{z+\chi}{\psi}=\frac{\chi+\psi}{z},\ \chi^2+\psi^2+z^2=3\alpha^2.$

997) $\chi+\psi=2\alpha,\ \chi\psi(\chi^2+\psi^2)=2(\alpha^4-1).$

998) $\alpha(\psi+z)=2\psi z,\ \beta(z+\chi)=2z\chi,\ \gamma.(\chi+\psi)=2\chi\psi.$

999) $\chi+\psi=\sqrt{2\alpha^2-\chi^2}+\sqrt{2\alpha^2-\psi^2}=\alpha\sqrt{3}.$

1000) $\chi+\psi+z=2(\alpha+\beta),\ (\chi-\psi)^2=2z,\ \chi\psi+z=\alpha^2+\beta.$

1001) $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=37,\ \chi^2+\chi z+z^2=28,\ \psi^2+\psi z+z^2=19.$

1002) $\alpha\chi^3=\beta\psi^3=\gamma\omega^3,\ \frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\delta}.$

1003) $\chi^3+\psi^3=35,\ \chi+\psi=5.$

1004) $\chi^4+\psi^4=34,\ \chi+\psi=2.$

1005) $\chi^5+\psi^5=33,\ \chi+\psi=3.$

1006) $\chi+\psi+\omega=\alpha,\ \chi^2+\psi^2+\omega^2=\alpha^2,\ \chi^3+\psi^3+\omega^3=\alpha^3.$

1007) $\chi^2\psi^4-7\chi\psi^2=1710,\ \chi\psi-\psi=12,$

1008) $\sqrt{\dfrac{\psi\omega}{\chi}}=\alpha,\ \sqrt{\dfrac{\omega\chi}{\psi}}=\beta,\ \sqrt{\dfrac{\chi\psi}{\omega}}=\gamma.$

1009) $\chi\psi(\chi+\psi)-3(\chi\sqrt{\psi}+\psi\sqrt{\chi})=378,\ \chi\psi\sqrt{\chi\psi}=216.$

1010) Κεφάλαιόν τι τοκισθὲν ἐπὶ 15 μῆνας ἔφερε τόκον 900 δραχμάς. Ἕτερον κεφάλαιον μικρότερον τοῦ α΄ κατὰ 6000 δραχμὰς τοκισθὲν πρὸς $\frac{1}{2}$ $^0/_0$ περισσότερον τοῦ α΄ ἔφερεν εἰς 18 μῆνας τόκον 915 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κεφάλαια ταῦτα καὶ τὰ ἐπιτόκια, μὲ τὰ ὁποῖα ἐτοκίσθησαν.

1011) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

α΄) Τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων ψηφίων ηὐξημένον κατὰ 4. β΄) Τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων διαφέρει τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων κατὰ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων. γ΄) Ἐὰν τὰ ψηφία γραφῶσι κατ᾽ ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων καὶ τοῦ 391.

1012) Νὰ εὑρεθῇ συνεχὴς ἀναλογία, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας: α΄) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων καὶ τοῦ μέσου ἀναλόγου εἶναι 28 καὶ β΄) ὁ α΄ ὅρος ὑπερβαίνει τὸν β΄ κατὰ 8.

1013) Νὰ εὑρεθῇ ἀναλογία, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

α΄) Οἱ ἡγούμενοι ἔχουσιν ἄθροισμα 12 καὶ οἱ ἑπόμενοι 9.

β΄) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πρώτων ὅρων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ τετάρτου κατὰ 107.

1014) Δύο ἐργάται σκάπτουσιν ἄμπελον εἰς θ ὥρας. Ὁ α΄ μόνος του σκάπτει αὐτὴν εἰς α ὥρας ὀλιγωτέρας τοῦ β΄. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος μόνος σκάπτει αὐτήν; Ἐφαρμογὴ διὰ $\theta=12$ ὥρας καὶ $\alpha=10$ ὥρας.

1015) Δύο ἀμπελουργοὶ εἰσέπραξαν ἐκ τῆς πωλήσεως οἴνου 6850 δραχμάς. Ὁ β΄ ἐπώλησεν 50 ὀκάδας περισσοτέρας τοῦ πρώτου· ἐὰν δὲ ἑκάτερος ἐπώλει, ὅσας ὀκάδας ἐπώλησεν ὁ ἄλλος, ὁ μὲν α΄ θὰ ἐλάμβανεν 3900 δραχμάς, ὁ δὲ β΄ 3000 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας ἐπώλησεν ἕκαστος καὶ πρὸς πόσον τὴν ὀκᾶν;

1016) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας. α΄) Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν. β΄) Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{18}{17}$ τοῦ τρίτου καὶ γ΄). Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων εἶναι δεκαεπταπλάσιον τοῦ πρώτου.

1017) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου γνωστοῦ ὄντος ὅτι ταῦτα ἐκφράζονται δι᾽ ἀριθμῶν ἀκεραίων καὶ διαδοχικῶν.

1018) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ὅπερ ἔχει διαγώνιον 15 μέτρων καὶ ἐμβαδὸν 108 τετραγ. μέτρων.

1019) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 50 μέτρα καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου 10μ.

1020) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου, οὗ ἡ μὲν περίμετρος εἶναι 60 μέτρα, τὸ δὲ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος 12 μ.

1021) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου γνωστοῦ ὄντος ὅτι ταῦτα ἔχουσιν ἄθροισμα 12 καὶ οἱ κύβοι αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 216.

1022) Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ὀρθαί, ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι $2\sqrt{2}$, ἡ $ΒΔ = \sqrt{13}$ καὶ ἡ πλευρὰ $ΒΓ=\sqrt{5}$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

1023) Ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ ἡ περίμετρος εἶναι 12 μ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ φέρωμεν καθέτους ἀπ' αὐτήν, τὰς $ΒΒ'=ΑΒ$ καὶ $ΓΓ'=ΑΓ$, τὸ τραπέζιον ΒΓΓ'Β' ἔχει ἐμβαδὸν 17,5 τετρ. μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1024) Τὸ ἄθροισμα τῶν μὲν διαμέτρων δύο σφαιρῶν εἶναι 8μ. τῶν δὲ ὄγκων αὐτῶν εἶναι $\frac{152\pi}{6}$ κυβ. μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.

1025) Ἠγόρασέ τις ἀγρὸν ὀρθογώνιον πρὸς 2 δραχμὰς κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ ἔδωκε 6400 δραχμάς. Ἐὰν τὸ μῆκός του ἦτο κατὰ 10 μέτρα μεγαλύτερον, τὸ δὲ πλάτος του κατὰ 5 μέτρα μικρότερον, ἠγόραζε δὲ αὐτὸν ἀκριβώτερον 50 λεπτὰ κατὰ τετρ. μέτρον, θὰ ἔδιδεν 7875 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

1026) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{\chi^2+2\chi-15}{\chi^2-9}$ διὰ $ὅρ\chi=3$.

1027) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς παραστάσεως $\chi+2-\sqrt{\chi^2-5\chi+1}$, ὅταν $ὅρ\chi=\infty$.

1028) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς παρατάσεως $\sqrt{\chi+3}-\sqrt{\chi+2}$, ὅταν $ὅρ\chi=\infty$.

1029) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ ἑκάστου τῶν κλασμάτων.

$$\frac{\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta}{\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'},\quad \frac{\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta}{\alpha'\chi^3+\beta'\chi^2+\gamma'\chi+\delta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha'\chi^3+\beta'\chi^2+\gamma'\chi+\delta}$$

διὰ $ὅρ\chi=\infty$.

1030) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ πολυώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma+\lambda(\chi^2+1)$ εἶναι τέλειον τετράγωνον;

1031) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας τὰς τετάρτας δυνάμεις τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$.

1032) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{4\chi^2-5\chi-1}{2\chi^2-5\chi+3}>1$.

1033) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $\frac{4\chi^2+3\chi+3}{\chi^2+\chi+1}>\lambda$ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ;

1034) Ποία συνθήκη πρέπει νὰ ἐκπληροῦται, ὅπως αἱ ἐξισώσεις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ καὶ $\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'=0$ ἔχωσι μίαν ῥίζαν κοινήν;

1035) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος ξηροῦ φρέατος γνωστοῦ ὄντος ὅτι παρῆλθον θ δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ ἀφέθη λίθος, μέχρι τῆς στιγμῆς, καθ' ἣν ἠκούσθη ὁ κρότος αὐτοῦ κτυπήσαντος τὸν πυθμένα·

1036) Νὰ εὑρεθῶσι 4 ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 10 καὶ γινόμενον 24. Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μὲν δύο πρώτων εἶναι $\frac{3}{2}$ τῶν δὲ ἄλλων $\frac{7}{12}$.

Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων.

1037) $\sqrt{-\chi^2+3\chi-2}$, $\frac{1}{2\chi^2-3\chi+5}$, $\frac{\chi^2-4\chi+4}{\chi^2-5\chi+4}$, $\frac{2\chi^2-\chi-3}{\chi^2+\chi-2}$.

1038) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 48 εἰς τρία μέρη χ,ψ,ω τοιαῦτα ὥστε τὸ γινόμενον $\chi\psi^2\omega^3$ νὰ εἶναι μέγιστον.

1039) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $\chi^2\psi$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\chi^2+\psi^2=\alpha^2$, ἔνθα α σταθερός.

1040) Τίς ὁ μέγιστος τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων ;

1041) Τίς ὁ μέγιστος τῶν κώνων, οἵτινες ἔχουσι κορυφὴν τὸ κέντρον δεδομένης σφαίρας καὶ βάσεις κύκλους τῆς αὐτῆς σφαίρας ;

1042) Ποῖον τὸ μέγιστον τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ;

1043) Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΕΖ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, εἰς ποίαν θέσιν τῆς ΕΖ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ γίνεται μέγιστον ;

1044) Περὶ ποίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πρέπει νὰ περιστραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον σταθερὰν περίμετρον 2τ καὶ πόσον πρέπει νὰ εἶναι τῆς μῆκος ἑκάστης τῶν διαστάσεων αὐτοῦ, ὅπως τὸ παραγόμενον στερεὸν ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον ;

1045) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ χ ἡ παράστασις $\frac{\alpha^4+\chi^4}{\chi^2}$ γίνεται ἐλαχίστη ;

1046) Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, μία κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα ΒΓ καὶ ἓν σημεῖον Δ τῆς μιᾶς τούτων. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον ὥστε, ἂν ἡ ΔΕ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Α, τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΓΕΔ νὰ εἶναι ἐλάχιστον (Προβλ. Viviani).

1047) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{\alpha+\chi}-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha+\chi}}=\sqrt{2\alpha+\chi}$.

Νὰ λυθῶσι τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

1048) $7\sqrt{3\chi+\psi}-2\sqrt{8\chi+3\psi}=6,\ 5\sqrt{3\chi+\psi}+2\sqrt{8\chi+3\psi}=25$.

1049) $\chi+\psi+\omega=7,\ \chi^2+\psi^2-\omega^2=13,\ \chi^3+\psi^3+\omega^3=181$.

1050) $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=3,\ 2\chi^2+3\chi\psi+4\psi^2=12$.

1051) $\chi:\psi:z=\mu:\nu:\lambda,\ \chi\psi z=\alpha^3$.

1052) $\sqrt{\alpha\chi}-\frac{\beta}{\sqrt{\psi}}=\alpha,\ \sqrt{\beta\chi}-\frac{\alpha}{\sqrt{\psi}}=\frac{\beta^2}{\alpha}$.

1053) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\chi+\frac{7\alpha^3}{2}}-\sqrt[3]{\chi-\frac{7\alpha^3}{2}}=\alpha$.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ ἑκάστης τῶν ἀκολούθων παραστάσεων.

1054) $\frac{2\chi^5-21\chi^4+68\chi^3-84\chi^2+32\chi}{2\chi^5-14\chi^3+31\chi^3-24\chi^2+12\chi-16}$ διὰ ὅρχ $=2$.

1055) $\sqrt{\chi^2-2\chi-1}-\sqrt{\chi^2-7\chi+3}$ διὰ ὅρ $\chi=+\infty$ ἢ ὅρ $\chi=-\infty$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Α΄. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ **214. Ὁρισμός, στοιχεῖα καὶ εἴδη ἀριθμητικῶν προόδων.** Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 1, 2, 3, 4, 5. . . . (1) γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον διὰ τῆς προσθέσεως εἰς αὐτὸν τοῦ ἀριθμοῦ 1· ἕκαστος δὲ τῶν ἀριθμῶν 7, 4, 1, — 2, — 5, —8. . . .(2) γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ἀριθμοῦ — 3. Αἱ σειραὶ αὗται λέγονται ***ἀριθμητικαὶ πρόοδοι***.

Γενικῶς: ***Ἀριθμητικὴ πρόοδος καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου διὰ τῆς προσθέσεως εἰς αὐτὸν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ***.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, καλοῦνται ὅροι αὐτῆς.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον προσθέτομεν εἰς ἕκαστον ὅρον, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν ἑπόμενον, καλεῖται λόγος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Ἡ πρόοδος (1) ἔχει λόγον 1, ἡ δὲ (2) ἔχει λόγον —3.

Ἐὰν ὁ λόγος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι θετικός, οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνουσιν αὐξανόμενοι, ἡ δὲ πρόοδος καλεῖται ***αὔξουσα***· Ἐὰν δὲ ὁ λόγος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἀρνητικός, οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἡ δὲ πρόοδος καλεῖται φθίνουσα. Ἡ πρόοδος π. χ. (1) εἶναι αὔξουσα ἡ δὲ (2) φθίνουσα.

Ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

§ **215. Θεώρημα I.** ***Ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται πρὸς τὸν πρῶτον ηὐξημένον κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δηλοῖ τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων ὅρων***.

Ἀπόδειξις. Ἔστω α ὁ πρῶτος καὶ ω ὁ λόγος ἀριθμητικῆς προόδου,

ὁ 2ος ὅρος θὰ εἶναι $\alpha+\omega=\alpha+1.\omega$

ὁ 3ος » » » $\alpha+\omega+\omega=\alpha+2\omega$

ὁ 4ος » » » $\alpha+2\omega+\omega=\alpha+3\omega$

ὁ 5ος » » » $\alpha+3\omega+\omega=\alpha+4\omega$, ἤτοι διὰ τοὺς ὅρους τούτους ἀληθεύει τὸ θεώρημα. Λέγω ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ τὸν ὅρον τὸν κατέχοντα τὴν $\nu^{\eta\nu}$ τάξιν, ἂν ν εἶναι τυχὼν ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀληθεύει τὸ θεώρημα διὰ τὸν $(\nu-1)^{\text{ον}}$ ὅρον, ἤτοι οὗτος εἶναι $\alpha+(\nu-2)\omega$. Ὁ ἑπόμενος ὅρος, δηλ. ὁ $\nu^{\text{ος}}$ θὰ εἶναι $\alpha+(\nu-2)\omega+\omega$, ἤτοι $\alpha+(\nu-1)\omega$. Ὥστε, ὅταν ἀληθεύῃ τὸ θεώρημα διά τινα τιμὴν τοῦ ν, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὴν κατὰ μονάδα μεγαλυτέραν τιμὴν αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἀληθεύει, ὥς εἴδομεν ἀρχικῶς διὰ $\nu=2$, 3, 4, 5, ἕπεται ὅτι θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $\nu=6$· ἀλλὰ τότε θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $\nu=7$, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν καὶ θετικὴν τιμὴν τοῦ ν. ὅ. ἔ. δ.

Ἐὰν χάριν συντομίας παραστήσωμεν διὰ τ τὸν $\nu^{\text{ον}}$ ὅρον, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\tau = \alpha+(\nu-1)\omega \qquad (1)$$

δι' οὗ εὑρίσκομεν πάντα ὅρον ἀριθμητικῆς προόδου, ἐκ τοῦ α' ὅρου, τοῦ λόγου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὴν τάξιν τοῦ ὅρου τούτου. Τῆς προόδου π. χ. (2) (§ 214) ὁ 20ος ὅρος εἶναι

$$7+19(-3)=7-57=-50.$$

§ **216. Θεώρημα II.** ***Τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου, οἵτινες ἀπέχουσιν ἴσον τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς.***

Ἔστω $\alpha, \beta, \ldots\ldots \eta \ldots\ldots \mu, \lambda \ldots\ldots \sigma, \tau$ τυχοῦσα ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχουσα λόγον ω· ἔστω δὲ η ὅρος τις ἔχων ν ὅρους πρὸς αὐτοῦ καὶ μ ἄλλος ὅρος αὐτῆς ἔχων ν ὅρους μετ' αὐτόν. Λέγω ὅτι $\eta+\mu=\alpha+\tau$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι

$$\eta = \alpha + \nu\omega \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ νοήσωμεν τὴν πρόοδον, ἥτις ἀρχίζει ἀπὸ τὸν ὅρον μ, αὕτη θὰ ἔχῃ τοὺς καθ' ὑπόθεσιν ν ὅρους $\lambda, \ldots \sigma, \tau$ καὶ τὸν μ, ἤτοι τὸ ὅλον $\nu+1$· ἄρα οἱ πρὸ τοῦ τ ὑπάρχοντες ὅροι $\mu, \lambda, \ldots\ldots \sigma$ εἶναι ν τὸ πλῆθος καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι $\tau=\mu+\nu\omega$, ὅθεν

$$\mu = \tau - \nu\omega. \qquad (2)$$

Προσθέτοντες κατὰ μελη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι

$$\eta+\mu=\alpha+\tau. \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

§ **217. Θεώρημα III.** ***Τὸ ἄθροισμα ὡρισμένων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἄκρων ὅρων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προστιθεμένων ὅρων αὐτῆς.***

Ἔστω $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \rho, \sigma, \tau$ τυχοῦσα ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχουσα ν ὅρους. Λέγω, ὅτι ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Κ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτων, θὰ εἶναι

$$K=\frac{\alpha+\tau}{2}\cdot\nu$$

Ἀπόδειξις· Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $Κ = α+β+γ+\dots\dots+ρ+σ+τ$.

Ἐὰν δὲ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν προσθετέων τοῦ β΄ μέλους, θὰ εἶναι

$$Κ=τ+σ+ρ+\dots\dots+γ+β+α \tag{1}$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας εὑρίσκομεν ὅτι

$$2Κ=(α+τ)+(β+σ)+(γ+ρ)+\dots\dots+(γ+ρ)+(β+σ)+(α+τ)\cdot \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι $α+τ=β+σ=\dots\dots=α+τ$ καὶ εἶναι ν τὰ ἀθροίσματα ταῦτα, ἡ ἰσότης (2) γράφεται συντόμως οὕτω $2Κ=(α+τ).ν$, ὅθεν ἕπεται ὅτι

$$Κ=\frac{α+τ}{2}.ν. \quad \text{ὅ. ἔ. δ.} \tag{3}$$

Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι (3) **θέσωμεν ἀντὶ τ τὴν τιμὴν αὐτοῦ** $α+(ν-ν)ω$ (§ 215, I), εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$Κ=\frac{2α+(ν-1)ω}{2}.ν \tag{4}$$

δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα ὡρισμένων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου, τοῦ λόγου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προστιθεμένων ὅρων αὐτῆς.

Παραδ. 1ον· Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $5+7+9+11+13+15$.

Κατὰ τὸν τύπον (3) τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $\frac{5+15}{2}.6=60$.

Παράδ. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 12 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 1, 4, 7,...... Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν 12ον ὅρον τ κατὰ τὸν τύπον (1, § 215), ἤτοι $τ=1+11\cdot 3=34$ καὶ εἶτα τὸ ἄθροισμα

$$Κ=\frac{1+34}{2}\cdot 12=35.6=210.$$

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως ἐφαρμόζοντες τὸ τύπον (4) χωρὶς νὰ εὕρωμεν προηγουμένως τὸν 12ον ὅρον, οὕτω:

$$Κ=\frac{2.1+11.3}{2}\cdot 12=35\cdot 6=210.$$

§ 218. Πρόβλημα I. ***(Τῆς παρεμβολῆς) Μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθῶσι ν ἄλλοι ἀποτελοῦντες μετ' αὐτῶν ἀριθμητικὴν πρόοδον***·

Λύσις· Ἡ πρόοδος αὕτη θὰ ἔχῃ προφανῶς $ν+2$ ὅρους, ὧν πρῶτος ὁ α καὶ ὁ β τελευταῖος. Ἂν ἄρα κληθῇ ω ὁ λόγος αὐτῆς, θὰ εἶναι $β=α+(ν+1)ω$, ὅθεν $ω=\frac{β-α}{ν+1}$.

Ἄρα: ***Ὁ λόγος τῆς ζητουμένης προόδου εὑρίσκεται, ἂν ἡ διαφορὰ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρεμβληθησομένων ὅρων ηὐξημένου κατὰ 1.***

Οὕτως, ἂν θέλωμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 30 νὰ παρεμβάλωμεν 5 ἄλλους ἀποτελοῦντας ἀριθμητικὴν πρόοδον, ὁ λόγος αὐτῆς θὰ εἶναι $\frac{30-6}{6}=\frac{24}{6}=4$. Κατ᾽ ἀκολουθίαν οἱ παρεμβληθησόμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 10, 14, 18, 22, 26.

Ἀσκήσεις. 1056). Νὰ εὑρεθῇ ὁ 14ος ὅρος ἀριθμ. προόδου, ἥτις ἔχει πρῶτον ὅρον 2 καὶ λόγον —2.

1057) Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ α΄ ὅρος εἶναι 4 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 5 πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι 40. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ 5ος ὅρος αὐτῆς.

1058) Ἀριθμ. προόδου ὁ λόγος εἶναι—2 καὶ ὁ 7ος ὅρος εἶναι —9. Νὰ εὑρεθῇ ὁ α΄ ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπτὰ πρώτων ὅρων αὐτῆς.

1059) Ἀριθμ. προόδου εἶναι α=6, τ = 22 καὶ Κ =126. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων αὐτῆς.

1060) Ἀριθμ. πρόδου εἶναι ν=5, τ = 35 καὶ Κ=145. Νὰ εὑρεθῇ ὁ α΄ ὅρος καὶ ὁ λόγος αὐτῆς.

1061) Νὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ 3 καὶ 38 ἄλλοι 6 ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες μετ᾽ αὐτῶν ἀριθμητικὴν πρόδον.

1062) Νὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ—3 καὶ 17 τρεῖς ἄλλοι ἀποτελοῦντες μετ᾽ αὐτῶν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

1063) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

1064) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν.

1065) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀρτίων ἀριθμῶν.

1066) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ 5.

1067) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 12 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ 7 ἀπὸ τοῦ 21 καὶ ἑξῆς συμπεριλαμβανομένου.

1068) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθ. προόδου ἔχοντες ἄθροισμα 36 καὶ γινόμενον 1428.

1069) Αὐξούσης ἀριθμητικῆς προόδου 10 διαδοχικοὶ ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα 270, οἱ δὲ ἄκροι διαφέρουσι κατὰ 36. Νὰ εὑρεθῇ αὐτή.

1070) Τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου ἔχουσιν ἄθροισμα 12, τὰ δὲ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 50. Νὰ εὑρεθῶσιν οὗτοι.

1071) Νὰ εὑρεθῶσιν εἰς μοίρας τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ὀρθ. τριγώνου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ταῦτα ἀποτελοῦσιν ἀριθ. πρόοδον.

1072) Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας. Πόσους κτύπους θὰ κάμῃ εἰς 24 ὥρας ;

1073) Θέλων τις νὰ ἀνοίξῃ φρέαρ συνεφώνησε μὲ τοὺς ἐργάτας νὰ πληρώσῃ 25 δραχμὰς διὰ τὸ πρῶτον μέτρον, 37 διὰ τὸ δεύτερον, 49 διὰ τὸ τρίτον, καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς. Τὸ ὕδωρ εὑρέθη εἰς βάθος 8 μέτρων. Πόσα χρήματα ἔδωκεν εἰς τοὺς ἐργάτας ;

1074) Ἠγόρασέ τις ἔπιπλα μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ ἀρχικῶς 600 δραχμάς, μετὰ ἕνα μῆνα 700 δραχ. μετ᾽ ἄλλον 800 δραχ. καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς ἐπὶ 5 μῆνας. Πόσα χρήματα θὰ δώσῃ τὸ ὅλον ;

1075) Δενδροστοιχία περιέχει 30 δένδρα ἀπέχοντα ἀλλήλων 6 μέτρα. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ 10 μέτρα πρὸ τοῦ α΄ δένδρου εὑρίσκεται σωρὸς λιπάσματος. Πόσα μέτρα θὰ διανύσῃ ἐργάτης, ὅπως ῥίψῃ ἀνὰ μίαν χειράμαξαν λιπάσματας εἰς ἕκαστον δένδρον καὶ ἐπαναφέρῃ τὴν χειράμαξαν ἐπὶ τοῦ σωροῦ τοῦ λιπάσματος;

1076) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ὁ δεύτερος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων καὶ ἀντιστρόφως.

Β΄. Γεωμετρικαὶ πρόοδοι.

§ **219. Ὁρισμός, στοιχεῖα καὶ εἴδη γεωμετρικῶν προόδων.** Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς 3, 6, 12, 24..... (1) γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 2. Ἕκαστος δὲ τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}......$ (2)

γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{3}$.

Αἱ σειραὶ αὗται καλοῦνται *γεωμετρικαὶ πρόοδοι*.

Γενικῶς: ***Γεωμετρικὴ πρόοδος καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον, διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον, καλοῦνται ὅροι αὐτῆς.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον γεωμετρικῆς προόδου, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν ἑπόμενον, καλεῖται λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Οὕτω τῆς προόδου (1) ὁ λόγος εἶναι 2, τῆς δὲ (2) ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{3}$. Τῆς γεωμ. προόδου 1, —2, 4, —8, 16, —32.... ὁ λόγος εἶναι —2, οἱ δὲ ὅροι αὐτῆς εἶναι ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί.

Οἱ θετικοὶ ὅροι 1, 4, 16,...... καὶ οἱ ἀρνητικοὶ —2, —8, —32.... χωριστὰ λαμβανόμενοι ἀποτελοῦσιν ἰδίας γεωμετρικὰς προόδους, ὧν ἑκατέρα ἔχει λόγον θετικόν, τὸν 4. Δύναται λοιπὸν αὕτη νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο γεωμετρικὰς προόδους μὲ λόγον θετικόν. Ἕνεκα τούτου ἐν τοῖς ἀκολούθοις θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ γεωμετρικὰς προόδους, αἵτινες ἔχουσιν λόγον θετικόν.

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ θετικοῦ ἐπὶ ἄλλον θετικὸν εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ᾽ ὅσον ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος, ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι: Ἐὰν ὁ α΄ ὅρος γεωμ. προόδου εἶναι θετικὸς καὶ ὁ λόγος μεγαλύτερος τῆς μονάδος, οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνουσιν αὐξανόμενοι, ἡ δὲ πρόοδος καλεῖται ***αὔξουσα***. Τοιαύτη π. χ. εἶναι ἡ πρόοδος (1). Ἐὰν ὁ α΄ ὅρος γεωμετρικῆς προόδου εἶναι θετικὸς καὶ ὁ λόγος θετικὸς καὶ τῆς μονάδος μικρότερος, οἱ ὅροι βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἡ δὲ πρόοδος καλεῖται **φθίνουσα**. Τοιαύτη π. χ. εἶναι ἡ πρόοδος (2).

Ἐὰν ὁ α΄ ὅρος εἶναι ἀρνητικός, ὁ δὲ λόγος μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἡ πρόοδος εἶναι φθίνουσα. Ἐὰν δὲ ὁ α΄ ὅρος εἶναι ἀρνητικός, ὁ δὲ λόγος θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος, ἡ πρόοδος εἶναι αὔξουσα. Οὕτως ἡ πρόοδος $-3, -6, -12, \ldots$ εἶναι φθίνουσα ἡ δὲ

$$-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8} \ldots$$ εἶναι αὔξουσα.

Ἰδιότητες τῶν γεωμετρικῶν προόδων.

§ **220. Θεώρημα I.** ***Ἕκαστος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου εἶναι γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων ὅρων.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω α ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ω ὁ λόγος. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ὁ β΄ ὅρος θὰ εἶναι αω,

ὁ γ΄ » » » $\alpha.\omega.\omega.=\alpha\omega^2$

ὁ δ΄ » » » $\alpha.\omega^2.\omega=\alpha\omega^3$,

ἤτοι διὰ τοὺς ὅρους τούτους ἀληθεύει τὸ θεώρημα. Ἂν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἀληθεύει διὰ τὸν ὅρον, ὅστις κατέχει τὴν $(\nu-1)^{\eta\nu}$ τάξιν, οὗτος θὰ εἶναι $\alpha\omega^{\nu-2}$, κατ᾿ ἀκολουθίαν ὁ $\nu^{o\varsigma}$ ὅρος θὰ εἶναι $\alpha\omega^{\nu-2}.\,\omega$ ἢ $\alpha\omega^{\nu-1}$, ἤτοι θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὸν ἑπόμενον ὅρον. Ἐπειδὴ δὲ ἀληθεύει διὰ $\nu=2$ καὶ 3, ὡς ἀρχικῶς εἴδομεν, ἕπεται ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu=4$· ἀλλὰ τότε θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $\nu=5$ καὶ οὕτω καθ᾿ ἑξῆς διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν καὶ θετικὴν τιμὴν τοῦ ν.

Ἐὰν χάριν συντομίας παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ τὸν $\nu^{o\nu}$ ὅρον θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον $\qquad \tau=\alpha\omega^{\nu-1} \qquad$ (1)

δι᾿ οὗ εὑρίσκομεν οἱονδήποτε ὅρον γεωμετρικῆς προόδου ἐκ τοῦ α΄, ὅρου, τοῦ λόγου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὴν τάξιν τοῦ ὅρου τούτου. Π. Χ. τῆς προόδου 3, 6, 12, 24 ὁ 6ος ὅρος εἶναι $3.2^5=3{\cdot}32=96$. Τῆς δὲ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ ὁ 8ος ὅρος εἶναι $1.\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$.

§ **221. Θεώρημα II.** ***Τὸ ἄθροισμα ὡρισμένων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκομεν, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ τελευταίου ὅρου ἐπὶ τὸν λόγον καὶ τὴν***

διαφορὰν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ λόγου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.

Ἔστωσαν α, β, γ,... ρ, σ, τ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, ἥτις ἔχει λόγον ω. Λέγω ὅτι, ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ Κ, θὰ εἶναι $K = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἰσότητος

$$K = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \rho + \sigma + \tau. \quad (1)$$

πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ω, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $K\omega = \alpha\omega + \beta\omega + \cdots + \rho\omega + \sigma\omega + \tau\omega$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι $\alpha\omega = \beta$, $\beta\omega = \gamma, \ldots \rho\omega = \sigma$, $\sigma\omega = \tau$, αὕτη γίνεται $K\omega = \beta + \gamma + \ldots \sigma + \tau + \tau\omega$. Ἀφαιροῦντες δὲ ἀπ᾽ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς (1) εὑρίσκομεν

$$K\omega - K = \tau\omega - \alpha, \text{ ὅθεν } K(\omega - 1) = \tau\omega - \alpha.$$

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι $\omega \neq 1$, προκύπτει ἐκ ταύτης διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ $(\omega - 1)$ ἡ ἰσότης $K = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}$. ὅ ἔ. δ. (2)

ΣΗΜ. Ἂν $\omega = 1$, τὸ θεώρημα δὲν ἰσχύει. Ἐπειδὴ ὅμως ὅλοι οἱ ὅροι θὰ εἶναι ἴσοι πρὸς τὸν πρῶτον, τὸ ἄθροισμα ν τοιούτων ὅρων θὰ εἶναι αν.

Τὸ ἄθροισμα π.χ. $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = \frac{96.2 - 3}{2 - 1} = 189$.

Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (2) θέσωμεν ἀντὶ τ τὴν τιμὴν $\alpha\omega^{\nu-1}$ αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸν τύπον $K = \frac{\alpha(\omega^{\nu} - 1)}{\omega - 1}$ (3)

δι᾽ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου, τοῦ λόγου καὶ τοῦ πλήθους ν τῶν προστιθεμένων ὅρων.

Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου 1,2,4......... εἶναι $\frac{1.(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$.

§ **222. Θεώρημα III.** ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμ. προόδου ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν α′ ὅρον διὰ τῆς μονάδος ἠλαττωμένης κατὰ τὸν λόγον.***

Ἔστω ὅτι α εἶναι ὁ α′ ὅρος φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ω ὁ λογος αὐτῆς καὶ Σ τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς, ὅταν ὁ τὸ πλῆθος αὐτῶν ἐκφράζων ἀριθμὸς αὐξάνῃ ἐπ᾽ ἄπειρον. Λέγω ὅτι $\Sigma = \frac{\alpha}{1 - \omega}$.

Ἀπόδειξις Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ἄθροισμα Κ ὡρισμένων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς πρόδου παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $K=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}$. Ἐὰν δὲ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $K=\frac{\alpha-\tau\omega}{1-\omega}$, ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι

$$K=\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\tau\omega}{1-\omega}.$$

Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν προστιθεμένων ὅρων ἀπαύστως αὐξανόμενον, ὁ ἑκάστοτε τελευταῖος ὅρος τ βαίνει ἐλαττούμενος καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ $\tau=0$. Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $\frac{\tau\omega}{1-\omega}=\frac{\omega}{1-\omega}$ ὅρ τ, ἕπεται ὅτι ὅρ $\frac{\tau\omega}{1-\omega}=0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅρ$K=\frac{\alpha}{1-\omega}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὅρ K ἐκλήθη Σ, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\Sigma=\frac{\alpha}{1-\omega}$. ὅ. ἔ. δ. (4)

Οὕτω τὸ ἄθροισμα $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots$ εἶναι $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$.

§ **223. Πρόβλημα I.** ***(Τῆς παρεμβολῆς). Μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν*** α καὶ β νὰ παρεμβληθῶσι ν ἄλλοι ἀποτελοῦντες μετ' αὐτῶν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Λύσις. Ἡ πρόοδος αὕτη θὰ ἔχῃ προφανῶς ν+2 ὅρους, ὧν πρῶτος ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β. Ἂν ἄρα κληθῇ ω ὁ λόγος αὐτῆς, θὰ εἶναι

$$\beta=\alpha\omega^{\nu+1},\ \text{ὅθεν}\ \omega=\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \qquad (1)$$

ἤτοι : ***ὁ λόγος τῆς ζητουμένης γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἂν ἐξαγάγωμεν τοῦ πηλίκου τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ πρώτου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν τὴν ῥίζαν, ἧς ὁ δείκτης εἶναι μεγαλύτερος κατὰ 1 τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρεμβληθησομένων ὅρων.***

Οὕτως, ἂν θέλωμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 486 νὰ παρεμβάλωμεν 4 ἄλλους ἀποτελοῦντας μετ' αὐτῶν γεωμετρικὴν πρόοδον, ὁ λόγος αὐτῆς θὰ εἶναι $\sqrt[5]{\frac{486}{2}}=\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{3^5}=3$, οἱ δὲ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι 6, 18, 54, 162, οἵτινες πράγματι μετὰ τῶν δοθέντων ἀποτελοῦσι τὴν γεωμετρ. πρόοδον 2, 6, 18, 54, 162, 486.

Ἀσκήσεις : **1077)** Νὰ εὑρεθῇ ὁ 5ος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, ἥτις ἔχει ***α'*** ὅρον 2 καὶ λόγον 3.

1078) Γεωμ. προόδου ὁ 6ος ὅρος εἶναι 64 καὶ ὁ λόγος 2. Νὰ σχηματισθῇ αὕτη.

1079) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ἥτις ἔχει $\alpha=4$ καὶ $\omega=2$ ἢ $\alpha=1$ καὶ $\omega=\frac{1}{2}$

1080) Γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης 7 ὅρους ὁ α΄ εἶναι 5 καὶ ὁ τελευταῖος 3645. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 7 τούτων ὅρων αὐτῆς.

1081) Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 128 νὰ παρεμβληθῶσι 5 ἄλλοι ἀποτελοῦντες μετ' αὐτῶν γεωμ. πρόοδον

1082) Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ $\frac{1}{256}$ νὰ παρεμβληθῶσι τρεῖς ἄλλοι ἀποτελοῦντες μετ' αὐτῶν γεωμ. πρόοδον.

1083) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου ἔχοντες γινόμενον 1728 καὶ ὁ γ΄ νὰ εἶναι δεκαεξαπλάσιος τοῦ πρώτου.

1084) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ὅρων αὐξούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 248 ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι 192. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὅροι οὗτοι.

1085) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμ. προόδου, ὁ δεύτερος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων. Καὶ ἀντιστρόφως.

1086) Ποῖος ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 15, 27 καὶ 45, ὅπως προκύψωσι τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου;

1087) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $4+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$

καὶ τὸ ἄθροισμα $2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\dots$

1088) Γεωμετρικῆς προόδου εἶναι $\omega=\frac{1}{4}$, $\nu=6$ καὶ $K=2730$. Νὰ σχηματισθῇ αὕτη.

1089) Φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ὁ α΄ ὅρος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον, τὸ δὲ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων αὐτῆς εἶναι $\frac{2}{3}$. Νὰ σχηματισθῇ αὕτη.

1090) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 4, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι 1. Νὰ σχηματισθῇ αὕτη.

1091) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 91 εἰς τρία μέρη ἀποτελοῦντα γεωμ. πρόοδον, τῆς ὁποίας οἱ ἄκροι ὅροι διαφέρουσι κατὰ 56.

1092) Εἰς δεδομένον τετράγωνον πλευρᾶς α ἐγγράφομεν ἄλλο ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς τοῦτο ὁμοίως ἄλλο καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τετραγώνων τούτων συναρτήσει τοῦ α.

1093) Τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου εἰς μοίρας ἐκπεφρασμένα ἀποτελοῦσι γεωμ. πρόοδον, ἡ δὲ τετάρτη γωνία εἶναι ἐνneαπλασία τῆς δευτέρας. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τούτων.

1094) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\dots$ ἂν $\alpha>\beta>0$.

1095) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχουσι τρεῖς ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων καὶ ἀποτελοῦντες διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρικῆς προόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Στοιχειώδης σπουδὴ τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως 10^{χ}.

§ **224. Θεώρημα I.** ***Αἱ δυνάμεις ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς 1, ὧν οἱ ἐκθέται εἶναι θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι καὶ βαίνουσιν ἀπαύστως αὐξανόμενοι, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς 1, βαίνουσιν ἀπαύστως αὐξανόμεναι καὶ ἔχουσιν ὅριον τὸ $+\infty$.***

Ἔστω α ἀριθμός τις μεγαλύτερος τῆς 1. Λέγω ὅτι

α') $\alpha^{\mu}>1$, β') $\alpha^{\mu+1}>\alpha^{\mu}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου μ καὶ γ') $\text{ὅρ}\ \alpha^{\chi}=+\infty$, ἐὰν ὁ χ εἶναι ἀκέραιος καὶ ἔχῃ ὅριον τὸ θετικὸν ἄπειρον.

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ὁ α ὡς μεγαλύτερος τῆς 1 εἶναι καὶ θετικός, ἤτοι $\alpha>0$· ἐὰν δὲ πολλαπλασιαθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν α, προκύπτει $\alpha^2>0$, ἐξ ἧς ὁμοίως $\alpha^3>0$ κ. τ. λ. Εἶναι ἄρα θετικαὶ πᾶσαι αἱ δυνάμεις αὗται.

Γνωρίζομεν (§ 54) ὅτι $\alpha^{\mu}-1=(\alpha-1)(\alpha^{\mu-1}+\alpha^{\mu-2}+\cdots\cdots+\alpha+1)$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι θετικοί, ἕπεται ὅτι $\alpha^{\mu}-1>0$, ὅθεν $\alpha^{\mu}>1$, ὅ. ἔ. δ.

β') Γνωρίζομεν ὅτι $\alpha^{\mu+1}=\alpha^{\mu}\cdot\alpha$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\alpha^{\mu+1}-\alpha^{\mu}=\alpha^{\mu}(\alpha-1)$. Καὶ ἐπειδὴ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου $\alpha^{\mu}(\alpha-1)$ εἶναι θετικοί, ἕπεται ὅτι $\alpha^{\mu+1}-\alpha^{\mu}>0$, ὅθεν $\alpha^{\mu+1}>\alpha^{\mu}$. ὅ. ἔ. δ.

γ') Ἐὰν εἰς τὴν γνωστὴν ἰσότητα $\alpha^{\chi}-1=(\alpha-1)(\alpha^{\chi-1}+\alpha^{\chi-2}+\ldots+\alpha+1)$ ἀντὶ τοῦ παράγοντος $(\alpha^{\chi-1}+\alpha^{\chi-2}+\cdots\cdots+\alpha+1)$, ὅστις ἔχει χ ὅρους, θέσωμεν τὸ μικρότερόν του ἄθροισμα $1+1+1+\ldots\ldots+1=\chi$, προκύπτει ἡ ἀνισότης

$$\alpha^{\chi}-1>(\alpha-1)\chi.$$

Ἐπειδὴ $\text{ὅρ.}\ \chi=+\infty$, γίνεται $\chi>\dfrac{M-1}{\alpha-1}$, ὅσον δήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι ὁ Μ· κατ' ἀκολουθίαν γίνεται $(\alpha-1)\chi>M-1$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον $\alpha^{\chi}-1>M-1$, ἄρα καὶ $\alpha^{\chi}>M$. Εἶναι ὅθεν

$$\text{ὅρ}\ \alpha^{\chi}=+\infty \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

§ **225. Θεώρημα II.** Αἱ δυνάμεις ἀριθμοῦ θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῆς μονάδος, ὧν οἱ ἐκθέται εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι ἀπαύστως αὐξανόμενοι, εἶναι μικρότεραι τῆς 1, βαίνουσιν ἀπαύστως ἐλαττούμεναι καὶ ἔχουσιν ὅριον μηδέν.

Ἔστω β ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς 1.

Ἐνθυμούμεθα πρῶτον ὅτι ὅλαι αἱ δυνάμεις ἀριθμοῦ θετικοῦ εἶναι θετικαί.

α′) Ἐπειδὴ $\beta<1$, ἕπεται ὅτι $\frac{1}{\beta}>1$ καὶ ἀκολουθίαν (§ 224, Θ.) εἶναι $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\mu}>1$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $\beta^{\mu}<1$. ὅ. ἔ. δ.

β′) Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{\beta}>1$ ἕπεται (§ 224 Θ.) ὅτι $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\mu+1}>\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\mu}$ ἢ $\frac{1}{\beta^{\mu+1}}>\frac{1}{\beta^{\mu}}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον $\beta^{\mu}\cdot\beta^{\mu+1}$, προκύπτει ὅτι $\beta^{\mu}>\beta^{\mu+1}$. ὅ. ἔ. δ.

γ′) Ἐπειδὴ $\frac{1}{\beta}>1$, ἕπεται (§ 224, Θ.) ὅτι ὅρ. $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\chi}=+\infty$, ἢ ὅρ $\frac{1}{\beta^{\chi}}=+\infty$, ἄρα ὅρ $\beta^{\chi}=0$. ὅ. ἔ. δ.

§ **226. Θεώρημα III.** ***Αἱ ῥίζαι ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς 1 εἶναι μεγαλύτεραι τῆς 1, βαίνουσι δὲ ἐλαττούμεναι καὶ τείνουσι πρὸς τὴν 1, ὅταν ὁ δείκτης αὐξάνῃ καὶ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$.***

Ἔστω α ἀριθμός τις μεγαλύτερος τῆς μονάδος Λέγω ὅτι α′) $\sqrt[\mu]{\alpha}>1$, β′) $\sqrt[\mu]{\alpha}>\sqrt[\mu+1]{\alpha}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου καὶ θετικοῦ μ, καὶ γ′) ὅρ $\sqrt[\chi]{\alpha}=1$, ἂν χ εἶναι ἀκέραιος, θετικὸς καὶ ἔχῃ ὅριον τὸ $+\infty$.

Ἀπόδειξις. α′) Ἂν ἦτο $\sqrt[\mu]{\alpha}\leq 1$, θὰ ἦτο καὶ $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu}\leq 1^{\mu}$ ἢ $\alpha\leq 1$, ἅτινα ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα $\sqrt[\mu]{\alpha}>1$.

β′) Γνωρίζοντες ὅτι $\sqrt[\mu]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\mu}}$ καὶ $\sqrt[\mu+1]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$, συμπεραίνομεν ὅτι

$$\sqrt[\mu]{\alpha}-\sqrt[\mu+1]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\mu}}-\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}=\alpha^{\frac{1}{\mu}}\left(1-\alpha^{\frac{1}{\mu+1}-\frac{1}{\mu}}\right)$$

ἢ

$$\sqrt[\mu]{\alpha}-\sqrt[\mu+1]{\alpha}=\sqrt[\mu]{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha^{\mu(\mu+1)}}\right) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 224, Θ) εἶναι $\alpha^{\mu(\mu+1)}>1$, ἕπεται ὅτι $\frac{1}{\alpha^{\mu(\mu+1)}}<1$.

καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $1 - \dfrac{1}{\alpha^{\mu(\mu+1)}} > 0$. Ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha} > 0$, διότι ἀπεδείχθη $\sqrt[\mu]{\alpha} > 1$. Οἱ παράγοντες ἄρα τοῦ β' μέλους τῆς ἰσότητος (1) εἶναι θετικοὶ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι

$$\sqrt[\mu]{\alpha} - \sqrt[\mu+1]{\alpha} > 0,$$

$$\text{ὅθεν } \sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\mu+1]{\alpha}.$$

γ') Ἐπειδὴ $\left(\sqrt[\chi]{\alpha}\right)^{\chi} = \alpha$, ἕπεται ὅτι $\alpha - 1 = \left(\sqrt[\chi]{\alpha}\right)^{\chi} - 1$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\sqrt[\chi]{\alpha} = \beta$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\alpha - 1 = \beta^{\chi} - 1 = (\beta - 1)(\beta^{\chi-1} + \beta^{\chi-2} + \ldots + \beta + 1).$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $\beta - 1 = \dfrac{\alpha - 1}{\beta^{\chi-1} + \beta^{\chi-2} + \ldots + 1}$

$$\text{ἢ } \sqrt[\chi]{\alpha} - 1 = \frac{\alpha - 1}{\left(\sqrt[\chi]{\alpha}\right)^{\chi-1} + \left(\sqrt[\chi]{\alpha}\right)^{\chi-2} + \ldots + 1}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt[\chi]{\alpha} > 1$ οἱ προσθετέοι τοῦ παρανομαστοῦ εἶναι (§224Θ) ὅλοι, πλὴν τοῦ τελευταίου, μεγαλύτεροι τῆς μονάδος· ὁ παρονομαστὴς ἄρα εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀθροίσματος $1 + 1 + \ldots + 1 = \chi$ καὶ ἐπομένως

$$\sqrt[\chi]{\alpha} - 1 < \frac{\alpha - 1}{\chi}$$

Ὅταν δὲ ὅρ $\chi = \infty$, εἶναι ὅρ $\dfrac{\alpha - 1}{\chi} = 0$ καὶ ἐπομένως $\dfrac{\alpha - 1}{\chi} < \varepsilon$, ὅσον δήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ ε. Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων δὲ $\sqrt[\chi]{\alpha} - 1 < \dfrac{\alpha - 1}{\chi}$ καὶ $\dfrac{\alpha - 1}{\chi} < \varepsilon$ ἕπεται ὅτι $\sqrt[\chi]{\alpha} - 1 < \varepsilon$ καὶ

$$\text{ὅρ}\left(\sqrt[\chi]{\alpha} - 1\right) = 0, \text{ ὅθεν ὅρ} \sqrt[\chi]{\alpha} = 1. \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

§ 227. Θεώρημα IV. ***Ἡ συνάρτης 10^{χ} εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ·***

Ἀπόδειξις. Ἔστω χ_0 τυχοῦσα πραγματικὴ τιμὴ τοῦ χ, ψ_0 ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρήσεως, $\dfrac{1}{\nu}$ ὁσονδήποτε μικρὰ αὔξησις τῆς τιμῆς χ, ($\nu > 1$) καὶ η ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς συναρτήσεως· Οὕτω θὰ εἶναι $\psi_0 = 10^{\chi_0}$ καὶ $\psi_0 + \eta = 10^{\chi_0 + \frac{1}{\nu}}$. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἰσότητος τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς πρώτης, προκύπτει ἡ ἰσότης $\eta = 10^{\chi_0 + \frac{1}{\nu}} - 10^{\chi_0}$, ὅθεν

$$\eta = 10^{\chi_0}\ (\sqrt[\nu]{10} - 1).$$

Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν ὅτι ὁ ν ἀπαύστως βαίνει αὐξανόμενος, ἡ ποσότης η μεταβάλλεται, θὰ εἶναι δὲ $\text{ὅρ}\,\eta = 10^{\chi_0} . \text{ὅρ}(\sqrt[\nu]{10} - 1)$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅταν ὅρ $\nu = +\infty$, εἶναι ὅρ $\sqrt[\nu]{10} = 1$, ἕπεται ὅτι ὅρ $(\sqrt[\nu]{10} - 1) = 0$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται ὅρ $\eta = 0$.

Ὥστε, ὅταν ἡ αὔξησις $\frac{1}{\nu}$ τοῦ χ ἀπὸ οἱασδήποτε πραγματικῆς τιμῆς χ_0 αὐτοῦ ἔχῃ ὅριον μηδέν, ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς συναρτήσεως ἔχει καὶ αὐτὴ ὅριον μηδέν. Ἡ συνάρτησις ἄρα (§ 203) 10^χ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ. ὅ. ἔ. δ.

§ **228. Θεώρημα V.** ***Ἐὰν ὁ ἐκθέτης χ λαμβάνῃ συνεχῶς τὰς ἀπὸ Ο ἕως $+\infty$ τιμάς, ἡ συνάρτησις 10^χ αὐξάνεται ἀπὸ 1 καὶ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$. Ἐὰν δὲ χ ὁ λαμβάνῃ συνεχῶς τὰς ἀπὸ 0 ἕως $-\infty$ τιμάς, ἡ συνάρτησις 10^χ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ 1 καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.***

Ἀπόδειξις. α') Ὅταν $\chi = 0$, ἡ συνάρτησις 10^χ γίνεται $10^0 = 1$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $10 > 1$, τοῦ χ λαμβάνοντος τὰς ἀκεραίας τιμὰς 1,2,3... ἡ συνάρτησις (§ 224 Θ.) αὐξάνει λαμβάνουσα τὰς τιμὰς 10, 100,1000... καὶ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$. Ἕνεκα δὲ τῆς συνεχείας ἡ συνάρτησις διέρχεται καὶ δι' ὅλων τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10, 10 καὶ 100 κτλ. τιμῶν, συνεχῶς αὐξανομένη, ὅταν ὁ χ λαμβάνῃ ἀντιστοίχως τὰς μεταξὺ 0 καὶ 1, 1 καὶ 2 κ.τ.λ. τιμάς.

β') Διὰ τὰς μεταξὺ 0 καὶ $-\infty$ τιμὰς τοῦ χ ἡ συνάρτησις 10^χ εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος. Τῷ ὄντι· ἂν $\chi = -\nu$ $(\nu > 0)$, ἡ συνάρτησις γίνεται $10^{-\nu}$ ἢ $\frac{1}{10^\nu}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ν εἶναι θετικός, 10^ν εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς 1 κατ' ἀκολουθίαν $\frac{1}{10^\nu} < 1$. Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν τὸν $-\nu$ τείνοντα πρὸς τὸ $-\infty$, προφανῶς ὁ ν τείνει πρὸς τὸ $+\infty$ καὶ ἑπομένως ὅρ$10^\nu = +\infty$. Ἄρα ὅρ$\frac{1}{10^\nu} = 0$, ἤτοι ὅρ$10^{-\nu} = 0$. ὅ. ἔ. δ.

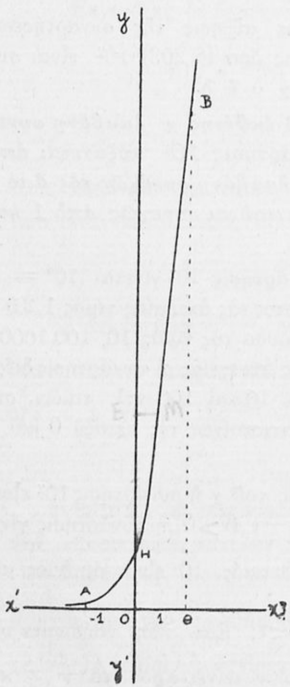
Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ὁ χ διατρέχῃ συνεχῶς τὰς μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$ τιμάς, ἡ συνάρτησις 10^χ ἀπὸ ἐγγυτάτων πρὸς τὸ μηδὲν τιμῶν ἀναχωροῦσα βαίνει συνεχῶς αὐξανομένη, καθίσταται 1 διὰ $\chi=0$ καὶ τείνει πρὸς τὸ $+\infty$.

Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ταύτης συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

χ	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2		$+\infty$
10^χ	0	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100		$+\infty$

Ἄξιον ἰδιαιτέρας παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ἡ συνάρτησις 10^χ οὐδέποτε γίνεται ἀρνητικὸς ἀριθμός.

§ **229. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς 10^χ.** Ἔστωσαν δύο ἄξονες $\chi'\chi$ καὶ $\psi'\psi$ τεμνόμενοι καθέτως εἰς τὸ Ο καὶ ΟΘ,ΟΗ τμήματα αὐτῶν ἔχοντα μῆκος $+1$ ἑκάτερον. Ἐὰν θέσωμεν $\psi=10^\chi$, εἰς ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον, ὅπερ γνωρίζομεν (§ 32) νὰ ὁρίζωμεν. Οὕτως εἰς τὰς τιμὰς $\chi=0$, $\psi=1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Η, εἰς τὰς $\chi=-1$, $\psi=\frac{1}{10}$ ἀντιστοιχεῖ τὸ Α, εἰς τὰς τιμὰς $\chi=1$, $\psi=10$ ἀντιστοιχεῖ τὸ Β καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω. Ἐὰν κατασκευάσωμεν πολλὰ τοιαῦτα σημεῖα καὶ ἑνώσωμεν αὐτά, σχηματίζεται ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΗΒ, δι' ἧς αἰσθητοποιοῦνται αἱ ἀνωτέρω σπουδασθεῖσαι μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως 10^χ μεταβαλλομένου τοῦ χ.



(Σχ. 7)

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις 10^χ εἶναι πάντοτε συνεχὴς καὶ αὔξουσα λαμβάνουσα διὰ $\chi=0,\ldots\ldots+\infty$ τιμὰς ἀπὸ 1 καὶ βαθμηδὸν αὐξανομένας καὶ εἰς τὸ $+\infty$ τεινούσας, ἡ καμπύλη ἀπὸ τοῦ Η συνεχῶς ἀπομακρύνεται τοῦ αὔξονος ψ΄ψ καὶ κατὰ τὴν φορὰν ΟΘ. Συγχρόνως δὲ καὶ ταχύτατα ἀπομακρύνεται τοῦ ἄξονος χ΄χ κατὰ τὴν φορὰν ΟΗ.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ $\chi = 0 \cdots -\infty$, ἡ συνάρτησις ἀπὸ τῆς τιμῆς 1 βαίνει συνεχῶς ἐλαττουμένη καὶ τείνει εἰς τὸ μηδέν, ἡ καμπύλη ἀπομακρύνεται τοῦ ἄξονος y΄y κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς ΟΘ, συγχρόνως δὲ ἀπαύστως πλησιάζει πρὸς τὸν x΄x χωρὶς νὰ τμήσῃ αὐτὸν ποτέ.

ΣΗΜ. Διὰ τὸν τελευταῖον τοῦτον λόγον ὁ ἡμιάξων Οχ΄ καλεῖται *ἀσύμπτωτος* τῆς καμπύλης ΑΗΒ.

§ **230. Δεκαδικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ.** ***Καλεῖται δεκαδικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.***

Οὕτως ἐπειδὴ $100 = 10^2$, δεκαδικὸς λογάριθμος τοῦ 100 εἶναι ὁ 2·

ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, δεκαδικὸς λογάριθμος τοῦ $\frac{1}{10}$ εἶναι ὁ -1.

Γενικῶς: Ἂν $A = 10^{\alpha}$, θὰ εἶναι $\lambda o\gamma A = \alpha$ καὶ ἀντιστρόφως.

ΣΗΜ. Χάριν συντομίας τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ θέλομεν τοῦ λοιποῦ καλῇ ἁπλῶς λογάριθμον.

Ἔχοντες ὑπὸ ὄψιν τὸν ἀνωτέρω (§ 228) πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως 10^{χ} καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ κατανοοῦμεν ὅτι:

$$\text{ὁ ἀριθμὸς} \cdots\cdots \frac{1}{10000},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100\cdots$$

$$\text{ἔχει λογάριθμον}\cdots\quad -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\cdots$$

Καὶ πᾶς δὲ ἐνδιάμεσος ἀριθμὸς π. χ. ὁ 3 ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον, ἤτοι ὑπάρχει μία μόνον δύναμις τοῦ 10 ἴση πρὸς τὸν 3. Τοῦτο στοιχειωδῶς κατανοοῦμεν ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος ψ΄ψ (Σχ. 7) λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Ο ἀρχόμενοι τμῆμα ΟΕ ἔχον μῆκος 3 μονάδων $[(OH) = +1]$ καὶ ἐκ τοῦ Ε ἄγομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα χ΄χ. Αὕτη τέμνει τὴν καμπύλην ΑΗΒ εἰς ἓν μόνον σημεῖον Μ κείμενον εἰς τὸν ἐν τῇ γωνίᾳ ΘΟΗ κείμενον κλάδον αὐτῆς. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Μ φέρωμεν τὴν ΜΓ κάθετον ἐπὶ τὸν χ΄χ, ὁρίζεται ἐπ' αὐτοῦ τμῆμα ΟΓ (1), ὅπερ ἔχει μῆκός τι, ἔστω α.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ προφανῶς εἰς τὸ ζεῦγος α καὶ 3 τῶν τιμῶν τοῦ χ καὶ τῆς 10^{x}, ἕπεται ὅτι $10^{\alpha} = 3$, ὅθεν $\lambda o\gamma 3 = \alpha$.

Παρατηροῦντες ὅτι $0 < (O\Gamma) < (O\Theta)$ ἢ $0 < \alpha < 1$ συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λογ 3 περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1. Εἶναι δὲ ὁ λογ 3 ἀριθμὸς ἀσύμ-

---

(1) Ὁ ἀναγνώστης παρακαλεῖται νὰ θέσῃ τὸ γράμμα Ε ἐπὶ τοῦ Oy, εἰς ἀπόστασιν ΟΕ ἴσην πρὸς 3(ΟΗ) καὶ νὰ φέρῃ τὰς εὐθείας ΕΜ καὶ ΜΓ.

μετρος· Διότι, ἂν ἦτο λογ $3=\frac{\mu}{\nu}$, θὰ ἦτο $10^{\frac{\mu}{\nu}}=3$, ὅθεν $10^{\mu}=3^{\nu}$ ἢ $2^{\mu}\cdot 5^{\mu}=3^{\nu}$, ὅπερ ἄτοπον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 10 καὶ 100 ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον, ὅστις εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 1 καὶ 2 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὸν ἀνωτέρω πίνακα τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων λογαρίθμων, κατανοοῦμεν ὅτι:

α΄) Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον καὶ μόνον ἕνα.

β΄) Δύο ἄνισοι ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἀνίσους λογαρίθμους καὶ ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἔχει μεγαλύτερον λογάριθμον.

γ΄) Ἡ μονὰς ἔχει λογάριθμον 0· οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουσι θετικοὺς λογαρίθμους, οἱ δὲ μικρότεροι τῆς μονάδος θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους.

δ΄) Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λογαρίθμους. Διότι 10^{x} οὐδέποτε γίνεται ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

§ **231. Θεώρημα I.** ***Ὁ λογάριθμος γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.***

Λέγω δηλ. ὅτι λογ(ΑΒΓ)=λογ Α + λογ Β + λογ. Γ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι λογΑ=α, λογΒ=β καὶ λογΓ=γ. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων ἕπεται ὅτι $A=10^{\alpha}$, $B=10^{\beta}$ καὶ $\Gamma=10^{\gamma}$.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι $AB\Gamma=10^{\alpha+\beta+\gamma+}$, ὅθεν ἕπεται (§ 230) ὅτι

λογ(ΑΒΓ)=α+β+γ ἢ λογ(ΑΒΓ)=λογΑ+λογΒ+λογΓ. ὅ.ἔ.δ.

§ **232. Θεώρημα II.** ***Ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται πρὸς τὸν ἐκθέτην ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι λογΑ=α. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων ἕπεται ὅτι $A=10^{\alpha}$. Ἐὰν δὲ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὴν μ^ην^ δύναμιν εὑρίσκομεν ὅτι $A^{\mu}=(10^{\alpha})^{\mu}$, ἢ $A^{\mu}=10^{\alpha\mu}$, ὅθεν λογA^{μ}=μα ἢ λογA^{μ}=μ·λογΑ. ὅ.ἔ.δ.

§ **233. Θεώρημα III.** ***Ὁ λογάριθμος ῥίζης εὑρίσκεται, ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.*** Λέγω δηλ. ὅτι λογ $\sqrt[\nu]{A}=\frac{\lambda o\gamma A}{\nu}$.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι $\sqrt[\nu]{A}=A^{\frac{1}{\nu}}$, ἄρα λογ $\sqrt[\nu]{A}=$ λογ $A^{\frac{1}{\nu}}$, ὅθεν $\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{A}=\frac{1}{\nu}\cdot\lambda o\gamma\, A$ ἢ $\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{A}=\frac{\lambda o\gamma A}{\nu}$. ὅ.ἔ.δ.

§ **234. Θεώρημα IV.** ***Ὁ λογάριθμος πηλίκου εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ διαιρέτου.***

Λέγω δηλ. ὅτι $\lambda o\gamma\frac{A}{B}=\lambda o\gamma\, A-\lambda o\gamma\, B$.

Ἀπόδειξις. α') Ἔστω ὅτι $\lambda o\gamma\, A=\alpha$ καὶ $\lambda o\gamma\, B=\beta$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἕπεται ἐκ τούτων ὅτι $A=10^{\alpha}$ καὶ $B=10^{\beta}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{A}{B}=10^{\alpha-\beta}$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma\frac{A}{B}=\alpha-\beta$ ἢ $\lambda o\gamma\frac{A}{B}=\lambda o\gamma\, A-\lambda o\gamma\, B$. ὅ.ἔ.δ.

β') Παρατηροῦντες ὅτι $\frac{A}{B}\cdot B=A$ καὶ λαμβάνοντες τοὺ λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\frac{A}{B}+\lambda o\gamma\, B=\lambda o\gamma\, A$, ὅθεν εὐκόλως προκύπτει ὅτι $\lambda o\gamma\frac{A}{B}=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma\, B$. ὅ ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 1096) Νὰ ἀναπτυχθῇ ὁ $\lambda o\gamma\,(3.7.4)$ καὶ ὁ $\lambda o\gamma\,(2\alpha\beta)$.

1097) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\lambda o\gamma\, 4+\lambda o\gamma\, 25=2$.

1098) Νὰ ἀναπτυχθῇ ὁ $\lambda o\gamma\, 5\alpha^2$ καὶ ὁ $\lambda o\gamma\, 9\alpha^2\beta^3$.

1099) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $3\,\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma\, 125=3$.

1100) Νὰ ἀναπτυχθῇ ὁ $\lambda o\gamma\, 5\sqrt{3}$ καὶ ὁ $\lambda o\gamma\, 2^3\sqrt[4]{3}$.

1101) Νὰ ἀναπτυχθῇ ὁ $\lambda o\gamma\frac{2^3}{5}$ καὶ ὁ $\lambda o\gamma\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

1102) Νὰ ἀποδειθχῇ ὅτι $\lambda o\gamma\, 20-\lambda o\gamma\, 2=1$ καὶ ὅτι $2\lambda o\gamma\, 4+4\lambda o\gamma\, 5=4$.

1103) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\lambda o\gamma 2}{2}+\frac{\lambda o\gamma 8}{2}-2\lambda o\gamma\, 2=0$.

1104) Νὰ ἀναπτυχθῇ ὁ $\lambda o\gamma\frac{3^2\sqrt{7}}{2\sqrt[3]{5}}$ καὶ ὁ $\lambda o\gamma.\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}}{2.3.4\sqrt[5]{5}}$.

Χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων.

§ **235. Χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν μὴ μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν.** Καθ' ἃ ἐμάθομεν ἤδη (§ 230) οἱ λογάριθμοι τῶν μὲν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10 εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι (οἱ ἐκθέται αὐτῶν), οἱ δὲ ἄλλοι ἀριθμοὶ ἔχουσι λογαρίθμους ἀσυμμέτρους, ἤτοι δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Καὶ οἱ σύμμετροι ὅμως λογάριθμοι δύνανται νὰ λάβωσι δεκαδικὴν μορφήν· ἄρα πᾶς λογάριθμος εἶναι ἢ δύναται νὰ γείνῃ δεκαδικὸς ἀριθμός.

Τὸ ἀκέραιον μέρος παντὸς λογαρίθμου καλεῖται χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τούτου. Οὕτως, ἂν λογα=2,37163, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ α εἶναι 2.

Θέμα ἀριθμοῦ μὴ μικροτέρου τῆς μονάδος καὶ ἔχοντος ἀκεραίαν ἢ δεκαδικὴν μορφὴν καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων αὐτοῦ ψηφίων ἠλαττωμένος κατὰ 1.

Οὕτω τοῦ ἀριθμοῦ 3 θέμα εἶναι 0, τοῦ 12,35 θέμα εἶναι 1, τοῦ 147,8 θέμα εἶναι 2 κ.τ.λ.

Ἔστω ἤδη τυχὼν ἀριθμὸς μὴ μικρότερος τῆς μονάδος π.χ. ὁ 7 ὅστις ἔχει θέμα 0. Ἂς ζητήσωμεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ. Ἐπειδὴ $1 < 7 < 10$

ἕπεται ὅτι $\text{λογ}\,1 < \text{λογ}\,7 < \text{λογ}\,10$

ἢ $0 < \text{λογ}\,7 < 1$, ἤτοι ὁ λογ 7 περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1· κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἔχῃ ἀκέραιον 0, ὅσον δηλαδὴ εἶναι καὶ τὸ θέμα τοῦ ἀριθμοῦ 7.

Ὁμοίως ἐκ τῶν σχέσεων $10 < 45{,}7 < 100$ προκύπτουσιν αἱ σχέσεις

$\text{λογ}\,10 < \text{λογ}\,45{,}7 < \text{λογ}\,100$ ἢ

$1 < \text{λογ}\,45{,}7 < 2$, ὅθεν ἕπεται ὅτι

ὁ λογ 45,7 ἔχει ἀκέραιον μέρος 1, ὅσον δηλ. εἶναι καὶ τὸ θέμα τοῦ 45,7.

Ἄρα: ***Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου παντὸς ἀριθμοῦ μὴ μικροτέρου τῆς μονάδος ἰσοῦται πρὸς τὸ θέμα αὐτοῦ.***

§ **236.** ***Λογάριθμοι ἔχοντες χαρακτηριστικὸν μόνον ἀρνητικόν.*** Γνωρίζομεν ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς

$\dfrac{1}{\sqrt[5]{100}}$ ἢ $10^{-\frac{2}{5}}$ ἔχει λογάριθμον τὸν $-\dfrac{2}{5}$ ἢ $-0{,}4$. Τοὺς τοιούτους λογαρίθμους τρέπομεν εἰς ἄλλους ἴσους καὶ ἔχοντας μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος ἀρνητικόν. Οὕτως εἶναι $-1{,}45964 = 2 - 1{,}45964 - 2$.

Ἐπειδὴ δὲ $2 - 1{,}45964 = 0{,}54036$

ἕπεται ὅτι $-1{,}45964 = 0{,}54036 - 2$

Ἀντὶ νὰ γράφωμεν τὸν -2 μετὰ τὸν θετικὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,54036 κατὰ συνθήκην γράφομεν αὐτὸν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἀλλὰ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω αὐτοῦ πρὸς δήλωσιν ὅτι τοῦτο ἀνήκει μόνον εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ οὐχὶ εἰς τὸ δεκαδικόν, ὅπερ εἶναι θετικόν.

Οὕτως $-1{,}45964=\bar{2}{,}54036$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$-3{,}71643=4-3{,}71643-4=0{,}28357-4=\bar{4}{,}28357$$

$$-2{,}68150=3-2{,}68150-3=0{,}31850-3=\bar{3}{,}31850.$$

Ἄρα: ***Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀρνητικὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς ἄλλον ἔχοντα μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος ἀρνητικόν, προσθέτομεν εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος μίαν ἀκόμη ἀρνητικὴν μονάδα καὶ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ ἀθροίσματος, τὰ δὲ δεκαδικὰ ψηφία ἀφαιροῦμεν πάντα ἀπὸ τοῦ 9 πλὴν τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ ψηφίου, ὅπερ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10.***

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον εἶναι 0 δύναται νὰ παραλειφθῇ ἑπομένως δὲν πρέπει νὰ λαμβάνηται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω κανόνος. Οὕτω $-2{,}68150=-2{,}6815=\bar{3}{,}3185$. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ἔχῃ ὁ νέος ἀριθμὸς 5 δεκαδικὰ ψηφία, γράφομεν εἰς τὸ τέλος ἓν 0 καὶ ἑπομένως $-2{,}68150=\bar{3}{,}31850$

§ 237. Πράξεις ἐπὶ λογαρίθμων ἐχόντων χαρακτηριστικὸν μόνον ἀρνητικόν.

Α'. ***Πρόσθεσις***. Γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, ὡς συνήθως, τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου καὶ προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη καὶ ἔπειτα τοὺς ἀκεραίους προσέχοντες ὅπως, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, προσθέτωμεν αὐτὰς μὲ τοὺς ἀρνητικοὺς προσθετέους μὴ λησμονοῦντες ὅτι ἐκεῖναι εἶναι θετικαὶ μονάδες.

Β'. ***Ἀφαίρεσις***. Γράφομεν ὡς συνήθως τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ καὶ τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὸν ἀκέραιον, μὴ λησμονοῦντες νὰ ἀλλάζωμεν τὸ ψηφίον τοῦ ἀκεραίου τοῦ ἀφαιρετέου καὶ νὰ προσθέτωμεν εἶτα εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου.

Ἐὰν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ δεκαδικοῦ μέρους προκύψῃ τελικῶς κρατούμενον, προσθέτομεν αὐτὸ εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου καὶ εἶτα ἀλλάζομεν τὸ σημεῖον τοῦ ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα δι' ἀμφοτέρας τὰς πράξεις.

$$+\begin{array}{r}\bar{2}{,}35167\\ \bar{1}{,}83648\\ \bar{3}{,}91456\\ \hline \bar{4}{,}10271\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\bar{3}{,}76923\\ \bar{2}{,}37168\\ \hline \bar{1}{,}39755\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\bar{2}{,}45947\\ \bar{4}{,}56408\\ \hline 1{,}89539\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\bar{3}{,}56108\\ \bar{2}{,}78201\\ \hline \bar{2}{,}77907\end{array}$$

Γ'. **Πολλαπλασιασμός**. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον π. χ. $\bar{3}{,}67942\times4$, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος ἐπὶ 4 καὶ γράφομεν μόνον τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου τὸ δὲ ἀκέραιον

μέρος αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι θετικόν, προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον $\overline{3}\times 4$.
Οὕτως εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r}\overline{3},67942\\ 4\\ \hline \overline{10},71768\end{array}$$

ὅτι $\overline{3},67942\times 4=\overline{10},71768$

Δ΄. ***Διαίρεσις.*** Ἵνα εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\overline{2},26984:2$, διαιροῦμεν διὰ 2 χωριστὰ τὸ ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος καὶ προσθέτομεν τὰ δύο πηλίκα. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:
$\overline{2},26984:2=\overline{1}+0,13492=\overline{1},13492$.

Ἔστω ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\overline{1},36784:3$.

Παρατηροῦντες ὅτι $\overline{1},36784=\overline{3}+2,36784$, συμπεραίνομεν ὅτι:
$\overline{1},36784:3=(\overline{3}+2,36784):3=\overline{1}+0,78928=\overline{1},78928$.

Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἀκέραιον μέρος δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσαι χρειάζονται, ὅπως προκύψῃ ἄθροισμα διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου· προσθέτομεν δὲ καὶ εἰς τὸ θετικὸν μέρος ἰσαρίθμους θετικὰς μονάδας. Τοῦτο γίνεται ἀμέσως διὰ τροπῆς τῶν μονάδων τούτων εἰς δέκατα καὶ διὰ προσθήκης αὐτῶν εἰς τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων.

Τὴν πρᾶξιν διατάσσομεν ὡς παραπλεύρως φαίνεται

$$\begin{array}{r|l}\overline{1},36784 & 3\\ \cline{2-2} \overline{3}+2,3 & \overline{1},78928\\ 26 & \\ 27 & \\ 8 & \\ 24 & \\ 0 & \end{array}$$

Ἀσκήσεις. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις

1105) α΄) $\overline{1},67471+\overline{2},23142+\overline{4},09178$, β΄) $\overline{1},35167-\overline{3},12974$.

1106) α΄) $\overline{2},91430-\overline{2},87465$ β΄) $\overline{1},45187-\overline{3},67218$.

1107) α΄) $\overline{1},10106\times 2$, β΄) $\overline{2},91407\times 3$, γ΄) $\overline{3},26915\times 4$

1108) α΄) $\overline{3},72405:3$ β΄) $\overline{1},67142:2$ γ΄) $\overline{3},41864:4$

1109) α΄) $\overline{1},68259\times\frac{3}{4}$, β΄) $\overline{2},09043:\frac{5}{6}$ γ΄) $\overline{3},42872:3\frac{2}{3}$

§ 238. Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος.

Ἂς ζητήσωμεν π.χ. τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 0,635, ὅστις εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος καὶ ἔχει δεκαδικὴν μορφήν.
Ἐπειδὴ $0,635=\frac{635}{1000}$, ἕπεται ὅτι λογ 0,635=λογ 635—λογ 1000.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 635 εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς 1 ἔχων θέμα 2, ὁ λογ 635 ἔχει χαρακτηριστικὸν 2 καὶ δεκαδικόν τι μέρος αβγδε, ἤτοι εἶναι λογ 635=2,αβγδε. Ἐπειδὴ δὲ καὶ λογ 1000=3, ἕπεται ὅτι λογ 0,635= 2, αβγδε—3=$\overline{1}$, αβγδε. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογ}0,07653=\text{λογ}\frac{7653}{100000}=\text{λογ } 7653-\text{λογ } 100000=3,\text{ηθικλ}-5$$

$=\overline{2}$, ηθικλ.

Ἄρα : *Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου δεκαδικοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσα εἶναι τὰ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ μηδενικά, συνυπολογιζομένου καὶ τοῦ μηδενὸς τοῦ ἀκεραίου μέρους·*

Γενικὴ ἰδιότης τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαρίθμων.

§ **239. Θεώρημα Ι.** *Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ δυνάμεως τοῦ 10 μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ μένει ἀμετάβλητον.*

Ἔστω ὅτι λογΑ=3, 24163. Λέγω ὅτι καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ

($\text{Α}.\ 10^{\nu}$) ἢ τοῦ $\frac{\text{Α}}{10^{\nu}}$ ἔχει τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος (ν ἀκέραιος).

Ἀπόδειξις. α΄) Γνωρίζομεν ὅτι λογ ($\text{Α}\cdot 10^{\nu}$)=λογΑ+ν λογ10 =3,24163+ν ἤτοι λογ($\text{Α}.10^{\nu}$) = (3+ν),24163. ὅ, ἔ. δ.

β΄) Ἐπειδὴ $\text{λογ}\frac{\text{Α}}{10^{\nu}}=\text{λογΑ}-\nu\,\text{λογ } 10=\text{λογΑ}-\nu$, ἕπεται ὅτι

$$\text{λογ}\frac{\text{Α}}{10^{\nu}}=3,24163-\nu \text{ ἢ } \text{λογ}\frac{\text{Α}}{10^{\nu}}=(3-\nu),\ 24163. \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ λογ2=0, 30130 (ὡς εἰς τοὺς λογ. πίνακας θὰ ἴδωμεν) ἕπεται ὅτι λογ 20=1,30130, λὸγ 200 = 2,30130, κτλ.
λογ 0, 2=$\overline{1}$,30130, λογ 0,02=$\overline{2}$,30130 κτλ.

Ὥστε γνωρίζοντες τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον ἀπείρων ἄλλων ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος εἶναι γινόμενον ἢ πηλίκον ἐκείνου διὰ δυνάμεως τινος του 10 μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην.

§ **240 Συλλογάριθμος ἀριθμοῦ.— Χρῆσις αὐτοῦ.** *Καλεῖται συλλογάριθμος ἀριθμοῦ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.* Οὕτω συλλογάριθμος τοῦ 2 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ $\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{λογ}\ \frac{1}{2}=\text{λογ } 1-\text{λογ } 2=-0,30103=\overline{1},69897$ ἕπεται ὅτι συλλογ 2=$\overline{1}$,69897.

Ὁμοίως $\text{συλλογ}200=\text{λογ}\ \frac{1}{200}=-\text{λογ}200=-2,30103=\overline{3},69897.$

Ἄρα : ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συλλογάριθμον ἀριθμοῦ αὐξάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ κατὰ 1 καὶ λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα (ἂν εἶναι ≠0) μὲ ἀντίθετον σημεῖον· ἀφαιροῦμεν δὲ τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 9 πλὴν τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ ψηφίου, ὅπερ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10***

Διὰ τῆς χρήσεως τῶν συλλογαρίθμων μετατρέπομεν ἀφαίρεσιν λογαρίθμου ἀριθμοῦ εἰς πρόσθεσιν τοῦ συλλογαρίθμου του. Ἐὰν π. χ. θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ γνωρίζοντες ὅτι λογ α=2,28163, λογ β=3,06783 καὶ λογ γ=1, 65982, θέτομεν $\chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ καὶ εἶτα ἐργαζόμεθα κατά τινα τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

α') Ἐπειδὴ $\chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ ἕπεται ὅτι

λογ χ=(λογ α+λογ β)—λογ γ, ἤτοι

$$\begin{array}{r} \text{λογ } \alpha = 2{,}27163 \\ \text{λογ } \beta = 3{,}06783 \\ \hline \text{ἄθροισμα } = 5{,}33946 \\ \text{λογ } \gamma = 1{,}65982 \\ \hline \text{λογ } \chi = 3{,}67964 \end{array}$$

β') Ἐκ τῆς ἰσότητος $\chi=\frac{\alpha\beta}{\gamma}=\alpha\beta.\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ προκύπτει ὅτι

λογ χ= λογ α+λογ β+λογ $\left(\frac{1}{\gamma}\right)$=λογ α+λογ β+συλλογ γ, ἤτοι

$$\begin{array}{r} \text{λογ } \alpha = 2{,}27163 \\ \text{λογ } \beta = 3{,}06783 \\ \text{συλλογ } \gamma = \overline{2}{,}34018 \\ \hline \text{λογ } \chi = 3{,}67964 \end{array}$$

Λογαριθμικοὶ πίνακες.

§ 241. Περιγραφὴ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων J. Dupuis. Οἱ πίνακες οὗτοι περιέχουσι τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10000 μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία. Ὁ πίναξ I (σελὶς 1) περιέχει τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 99. Διαιρεῖται δὲ οὗτος εἰς διαφόρους στήλας, ὧν αἱ μὲν φέρουσιν ὡς ἐπικεφαλίδα τὸ γράμμα N ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως Nombre (ἀριθμὸς) καὶ περιέχουσι τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν σειράν, αἱ δὲ ἄλλαι ἔχουσιν ὡς ἐπικεφαλίδα Log καὶ περιέχει ἑκάστη τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ταύτης στήλην τῶν ἀριθμῶν (N). Οἱ ἀριθμοὶ 10, 20, 30, ... 90 δὲν ἀναγράφονται διότι οἱ λογάριθμοι αὐτῶν ἔχουσι τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος μὲ τοὺς λογαρίθμους τῶν 1, 2, 3. . . . 9

Χάριν εὐκολίας τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἑκάστου διψηφίου ἀριθμοῦ γράφεται ἅπαξ.

Οὕτω τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος τούτου εὑρίσκομεν ὅτι.

$$λογ35=1,54407,\ λογ7=0,84510,\ λογ30=1,47712.$$

$$λογ\ 6,5=0,81291,\quad λογ\ 0,09=\overline{2},95424,\quad λογ\ 0,84=\overline{1},92428.$$

Αἱ ἀκόλουθοι σελίδες ἀπὸ 2 ἕως 31 περιέχουσι τὸν πίνακα II, ὅστις περιέχει τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν τριψηφίων καὶ τετραψηφίων ἀριθμῶν.

Ἑκάστη σελὶς τοῦ πίνακος τούτου διαιρεῖται εἰς 11 στήλας. Τούτων ἡ α´ ἐξ ἀριστερῶν φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα τὸ γράμμα N καὶ περιέχει τὰς ἑκατοντάδας τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν σειράν, ἀλλὰ τὰ δύο πρῶτα κοινὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων τούτων ἀναγράφονται ἅπαξ χάριν εὐκολίας. Αἱ ἄλλαι δὲ στῆλαι ἔχουσιν ὡς ἐπικεφαλίδας ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, οἵτινες παριστῶσι τὰς μονάδας τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν. Εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν ἑκατοντάδων δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τῆς στήλης τῶν μονάδων αὐτοῦ εὑρίσκονται ἀναγεγραμμένα μόνον τὰ τρία τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου· τὰ δὲ 2 πρῶτα εὑρίσκονται προηγουμένως ἀναγεγραμμένα ἅπαξ εἰς τὴν στήλην 0 νοοῦνται δὲ ἐπαναλαμβανόμενα καὶ διὰ τοὺς ἀκολούθους ἀριθμούς, μέχρις οὗ ἀλλάξωσιν.

Ὁσάκις προτάσσεται τῶν τριῶν τελευταίων δεκαδικῶν ψηφίων ἀστερῖσκος, δέον νὰ λαμβάνωμεν τὰ ἑπόμενα δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία.

Πρὸς πλήρη κατανόησιν τούτων παραθέτομεν τὸ κάτωθι μέρος τοῦ πίνακος II.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
310	49136	150	164	178	192	206	220	234	248	262	14	
1	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402	1	1,4
2	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541	2	2,8
3	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679	3	4,2
4	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817	4	5,6
5	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955	5	7,0
6	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092	6	8,4
7	50106	120	133	147	161	174	188	202	215	229	7	9,8
8	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365	8	11,2
9	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501	9	12,6

§ **242. Χρήσεις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.** Στηριζόμενοι εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως ἓν γινόμενον, ἓν πηλίκον, δύναμιν ἢ ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν πολυπλοκωτέρας ἀριθμητικὰς παραστάσεις.

Πρὸς τοῦτο, ἀφ᾽ οὗ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν σχετικῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τῆς ζητουμένης ποσότητος, ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν εἰς τοὺς πίνακας τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν, ὅστις θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους μόνον τῶν ἀπὸ 1 ἕως 10000 ἀριθμῶν, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν πῶς τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων τούτων εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τυχόντος ἀριθμοῦ καὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει δοθέντα λογάριθμον. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων προβλημάτων.

§ **243. Πρόβλημα I.** ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ.***

Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ᾽ ὅσον τὰ ψηφία αὐτοῦ (πλὴν τοῦ ἀκεραίου, ἂν τοῦτο εἶναι 0) δὲν εἶναι ἢ εἶναι πλείονα τῶν τεσσάρων.

Α΄ περίπτωσις. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 31,76. Ἐπειδὴ τὸ θέμα αὐτοῦ εἶναι 1, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 1.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 100, ὅπως γίνῃ τετραψήφιος, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου μένει (§ 239) ἀμετάβλητον. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸ δεκαδικὸν μέρος 50188 τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 31,6 εἰς τὴν διαστάυρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς 317 καὶ τῆς στήλης 6. Ἄρα. λογ 31,76=1,50188.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι λογ 3,163=0,50010, λογ 0,3179=$\overline{1}$,50229, λογ 3124=3,49471 κ.τ.λ.

Β′ περίπτωσις. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 312865. Τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ εἶναι προφανῶς 5. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 100, ὅπως καταστήσωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ τετραψήφιον, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου μένει ἀμετάβλητον, ἤτοι ὁ λογ 312865 καὶ ὁ λογ 3128,65 ἔχουσι τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 3128,65. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι 3128<3128,65<3129 ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ

λογ 3128<λογ3128,65<λογ3129

ἤτοι 3,49527<λογ 3128,65<3,49541

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τοῦ ἀριθμοῦ αὐξάνοντος κατὰ μίαν ἀκεραίαν μονάδα ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνει κατὰ 14 μονάδας τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως (3,49541—3,49527=0,00014). Παρατηροῦντες δὲ ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 2 ἀκεραίας μονάδας (3129—3127 ἢ 3130—3128) ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 28 ἢ 27 μ.τ.δ.τ. ἤτοι σχεδὸν διπλασία, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ὡς ἔγγιστα ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν ἀριθμῶν. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου, ἥτις ὀφείλεται εἰς τὴν κατὰ 0,65 αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἑξῆς:

Εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1 ἀντιστοιχεῖ 14μ.τ.δ.τ. αὔξησις λογαρίθμου.

Εἰς αὔξησιν » » » 0,65 » χ

χ=14×0,65=9,10 ἢ 9 περίπου μ.τ.δ.τ.

Εἶναι λοιπὸν λογ 3128, 65=3, 49527+0, 00009=3, 49536.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

	λογ 3128	=3,49527
εἰς αὔξησιν τοῦ ***ἀριθμοῦ***	***0, 65 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις***	9
ἄρα	λογ 3128,65	=3,49536
καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν λογ	312865	=5,49536
Ὁμοίως εὑρίσκομεν	ὅτι λογ 31,2826	=1,49536
	λογ 0, 312865	= $\overline{1}$,49536 κ.τ λ.

ΣΗΜ. Εἰς τὰς σελίδας 2—11 ὑπάρχουσιν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου καὶ πινακίδιά τινα, ὧν ἕκαστον φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι διαφορῶν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ἕκαστον πινακίδιον διαιρεῖται δι᾽ εὐθείας γραμμῆς εἰς δύο στήλας, ὧν ἡ μὲν α′ φέρει τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 1,2,....9, οἵτινες παριστῶσι δέκατα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων αὐξήσεις εἰς μονάδας τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Τῇ βοηθείᾳ τούτων ὑπολογίζομεν ἀμέσως τὰς αὐξήσεις τῶν λογαρίθμων, αἵτινες ὀφείλονται εἰς δοθείσας αὐξήσεις τῶν ἀριθμῶν. Οὕτω τὴν ἀνωτέρω αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου, ἥτις ὀφείλεται εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ 3128 κατὰ 0,65 ὑπολογίζομεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ πινακιδίου, ὅπερ φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν διαφορὰν 14 τῶν λογαρίθμων τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν 3128 καὶ 3129 ὡς ἑξῆς. Εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 6 δέκατα ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 8,4 μ.τ.δ.τ. ὡς δεικνύει τὸ πινακίδιον. Εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 5 δέκατα ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 7 μ.τ.δ.τ, ἄρα εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 5 ἑκατοστὰ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίμθου κατὰ 0, 7 μ.τ.δ.τ.

Ὥστε εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 0,65 ἀντιστοιχεῖ αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου κατὰ 8,3+0,7=9,1.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

	λογ 3128		=	3,49527
Εἰς αὔξησιν	0,6	αὔξησις λογ.	=	8,4
» »	0,05	» »	=	0,7
ἄρα λογ 3128,65			=	3,49536

καὶ κατ' ἀκολουθίαν λογ 312865 = 5,49536.

Τὰ εἰς διαφορὰς μικροτέρας τοῦ 11 ἀντιστοιχοῦντα πινακίδια δὲν ἀναγράφονται. Δυνάμεθα ὅμως καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας νὰ χρησιμοποιήσωμεν, ἂν θέλωμεν, τὰ ὑπάρχοντα πινακίδια. Οὕτως, ἂν ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι 6μ.τ.δ.τ. καὶ θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν αὔξησιν λογαρίθμου ὀφειλομένην εἰς αὔξησιν ἀριθμοῦ κατὰ 0,48 ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω μὲ τὸ πινακίδιον 12· πρέπει ὅμως τὴν αὔξησιν 5,76, ἣν οὕτως εὑρίσκομεν, νὰ διαιρέσωμεν διὰ 2.

Ὥστε ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι 5,76 : 2=2, 88μ. τ.δ.τ.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ λογάριθμοι ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν.

1110) 3167, 316,5 4762, 47,62, 0,4873.

1111) 948, 9,75, 0,467, 0,003645, 0,0892.

1112) 4,7896, 0,56941, 0,0682947, 60,9448, 1,146897.

1113) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{41}$, $5\,\frac{1}{6}$.

§ 244. Πρόβλημα ΙΙ. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει δοθέντα λογάριθμον.*

Λύσις. Ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ἕνεκα τούτου διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος ἀναγράφεται ἢ μὴ εἰς τοὺς λογ. πίνακας.

Α΄ περίπτωσις. Ἔστω ὅτι λογ χ=2,49610 καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν χ.

Πρὸς τοῦτο ἀνευρίσκομεν πρῶτον εἰς τὴν στήλην 0 τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὰ δύο πρῶτα ψηφία 49 τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, εἶτα δὲ ἀναζητοῦμεν καὶ τὰ ἄλλα τρία 610. Οὕτω βλέπομεν ὅτι ταῦτα κεῖνται εἰς τὴν 313ὴν ὁρίζοντίαν γραμμὴν καὶ στήλην 4· τὰ ψηφία, λοιπόν, μὲ τὰ ὁποῖα γράφεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ ἡ σειρὰ αὐτῶν εἶναι ἡ ἀκόλουθος 3134. Ἡ ἀξία δὲ τούτων θὰ χαρακτηρισθῇ ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λοχ χ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶνα 2, ἕπεται ὅτι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ χ ὀφείλει νὰ ἔχῃ τρία ψηφία· ἄρα χ=313,4.

Β′ περίπτωσις. Ἔστω ὅτι λογ ψ = 1,49745 καὶ ζητεῖται ὁ ψ. Ἀναζητοῦντες ὡς προηγουμένως εἰς τοὺς πίνακας τὸ δεκαδικὸν μέρος 49745 βλέπομεν ὅτι δὲν εἶναι ἀναγεγραμμένον εἰς τοὺς πίνακας, περιέχεται δὲ μεταξὺ τῶν 49734 καὶ 49748, ὧν ἡ διαφορὰ εἶναι 14 μ. τ. δ. τ. καὶ ὧν ὁ μικρότερος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀριθμόν, οὗ τὰ ψηφία καὶ ἡ σειρά των εἶναι ἡ ἀκόλουθος 3143.

Ἤδη παρατηροῦντες ὅτι 49745—49734 =11 σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Εἰς αὔξησιν τοῦ λογ. κατὰ 14 μ.τ.δ.τ. ἀντιστοιχεῖ αὔξ. τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1

» » » » » 11 » » » » χ

$$χ=1\times\frac{11}{14}=\frac{11}{14}=0,7857$$

Ὥστε εἰς τὸν 3143 πρέπει νὰ προσθέσωμεν 0,7857, ὅπως εὕρωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ψ καὶ τὴν σειρὰν αὐτῶν ἥτις εἶναι

$$\begin{array}{r} 3143 \\ 0,7857 \\ \hline 31437857 \end{array}$$

ἡ ἀκόλουθος·

Ἡ θέσις τῆς ὑποδιαστολῆς θὰ κανονισθῇ ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶναι 1, ἕπεται τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ψ θὰ ἔχῃ 2 ψηφία· εἶναι ἄρα

$$ψ=31,437857.$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω:

$$δ=11 \left\langle \begin{array}{l} 49748 \\ 49745 \\ 49734 \end{array} \right\rangle Δ=14$$

	. . . . ἀντιστοιχεῖ	3143
δ : Δ=0,7857	εἰς αὔξησιν 14 ἀντιστοιχεῖ αὔξ.	0,7857
	Ἄρα εἰς 49745 ἀντιστοιχεῖ	31437857
	καὶ εἰς λογ ψ=1,49645 »	ψ=31,437857

ΣΗΜ. Ἡ διαφορὰ Δ τῶν ἄκρων λογαρίθμων μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ δοθεὶς λογάριθμος, καλεῖται *μεγάλη διοφορά*, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ μικροτέρου τούτων ἀπὸ τοῦ δοθέντος καλεῖται *μικρὰ διαφορά*. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται ὁ ἀκόλουθος κανών·

Ἐὰν ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν ἀναγράφηται εἰς τοὺς πίνακας,

σημειοῦμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν μικρότερον τῶν λογαρίθμων τοῦ πίνακος, μεταξὺ τῶν ὁποίων οὗτος περιέχεται καὶ παραθέτομεν δεξιὰ αὐτοῦ πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου τῆς μικρᾶς διαφορᾶς διὰ τῆς μεγάλης διαφορᾶς. Τὴν θέσιν δὲ εἶτα τῆς ὑποδιαστολῆς κανονίζομεν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου.

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν λογ $\chi=3{,}49745$, θὰ εἶναι $\chi=3143{,}7857$

ἂν λογ $\omega=5{,}49745$, θὰ εἶναι $\omega=314378{,}57$

ἂν λογ $\varphi=0{,}49745$ θὰ εἶναι $\varphi=3{,}1437857$

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουσι λογαρίθμους τούς

1114) $3{,}84714$, $2{,}82020$, $1{,}70018$, $0{,}66745$

1115) $2{,}69002$, $\overline{1}{,}56301$, $\overline{2}{,}44467$, $\overline{3}{,}4689$

1116) $4{,}73106$, $2{,}16891$, $1{,}07348$, $0{,}01880$

1117) $\overline{1}{,}11198$, $\overline{2}{,}91647$, $\overline{3}{,}77906$, $\overline{4}{,}37592$

Ἐφαρμογαί.

§ **245. I. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις** $\dfrac{7\sqrt[3]{5}}{11}$.

Λύσις. Θέτοντες $\chi=\dfrac{7\sqrt[3]{5}}{11}$ καὶ λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{λογ}\,\chi=\text{λογ}\,7+\frac{\text{λογ}5}{3}-\text{λογ}\,11.$$

Ἐπειδὴ δὲ λογ $7 = 0{,}84510$

$\dfrac{\text{λογ}\,5}{3} = 0{,}23299$

$-$λογ $11=$συλλογ $11 = \overline{2}{,}95861$

ἕπεται ὅτι λογ $\chi = 0{,}03670$

ἄρα $\chi = 1{,}088175$

§ **246. II. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις** $\dfrac{0{,}65\sqrt{0{,}8}}{2^{\frac{3}{5}}}$

Λύσις. Θέτοντες $\psi=\dfrac{0{,}65\sqrt{0{,}8}}{2^{\frac{3}{5}}}$ εὑρίσκομεν

$$\text{λογ}\,\psi=\text{λογ}\,0{,}65+\frac{\text{λογ}\,0{,}8}{2}-\frac{3}{5}\,\text{λογ}2.$$

$$\text{'Επειδὴ δὲ λογ } 0{,}65 = \overline{1}{,}81291$$

$$\frac{\text{λογ } 0{,}8}{2} = \overline{1}{,}95154$$

$$-\frac{3}{5}\ \text{λογ}2 = +\frac{3}{5}\text{συλλογ}2 = \overline{1}{,}81938$$

$$\text{ἔπεται ὅτι λογ}\psi = \overline{1}{,}58383$$

$$\text{ἄρα} \quad \psi = 0{,}3835545$$

'Ασκήσεις. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις.

1118) 2^{17}, $\sqrt{0{,}2}$, $\sqrt[3]{7}$, $2^5\sqrt[4]{3}$, $3^{\frac{1}{3}} : 2$

1119) $\dfrac{3^9}{\sqrt{17}}$, $\dfrac{2^5\sqrt{5}}{8^5}$, $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}}$, $\dfrac{(0{,}4)^4\sqrt{0{,}7}}{5}$

1120) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{7}}$, $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}17^4\cdot 3{,}073}}{0{,}78}$, $\dfrac{28{,}5\cdot(671{,}6)^5}{478}$

Λογαριθμικαὶ καὶ ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

§ **247. Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις.**—Ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων $2\text{λογ}\chi+5=\text{λογ}\chi+15$, $\text{λογ}\chi+\text{λογ}\psi=12$ περιέχουσα τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων αὐτῆς καλεῖται ***λογαριθμικὴ ἐξίσωσις***. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\text{λογ}\,(2\chi^2-100)-2=0$ περιέχουσα τὸν λογάριθμον συναρτήσεως τοῦ ἀγνώστου εἶναι λογαριθμική· Γενικῶς: ***Λογαριθμικὴ ἐξίσωσις καλεῖται πᾶσα ἐξίσωσις, ἡ ὁποία περιέχει τὸν λογάριθμον ἀγνώστου ἢ ἀγνώστων αὐτῆς ἢ καὶ συναρτήσεων αὐτῶν.***

Διὰ νὰ λύσωμεν λογαριθμικὴν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον προσπαθοῦμεν νὰ δόσωμεν εἰς αὐτὴν μίαν τῶν μορφῶν $\text{λογ}\ \chi=\text{λογ}\alpha$, $\text{λογ}\sigma(\chi)=\text{λογ}\alpha$, $\text{λογ}\sigma(\chi)=\text{λογ}\varphi(\chi)$, ἔνθα α εἶναι γνωστὸς θετικὸς ἀριθμός, $\sigma(\chi)$ δὲ καὶ $\varphi(\chi)$ γνωσταὶ συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου χ. Κατὰ τὴν α΄ περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $\chi=\alpha$, κατὰ δὲ τὰς ἄλλας ἔχει πάσας ἢ τινὰς τῶν ῥιζῶν τῆς $\sigma(\chi)=\alpha$ ἢ τῆς $\sigma(\chi)=\varphi(\chi)$. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα.

1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\text{λογ}\,\dfrac{\chi}{2}+\text{λογ}\ 4=\text{λογ}\chi+\text{λογ}\ 5.$

'Επειδὴ $2\text{λογ}\left(\dfrac{\chi}{2}\right)=\text{λογ}\left(\dfrac{\chi}{2}\right)^2$, $\text{λογ}\chi+\text{λογ}5=\text{λογ}5\chi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\text{λογ}\left(\dfrac{\chi}{2}\right)^2+\text{λογ}4=\text{λογ}5\chi$ ἢ $\text{λογ}4\left(\dfrac{\chi}{2}\right)^2=\text{λογ}5\chi$, ὅθεν $4\left(\dfrac{\chi}{2}\right)^2=5\chi$. Αὕτη ἔχει ῥίζας 0 καὶ 5, ὧν ἡ α΄ δὲν εἶναι ῥίζα τῆς δοθείσης.

2ον Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{λογ(7+2χ^2)}{2}=λογ(2+χ)$.

Αὕτη εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $λογ(7+2χ^2)=2λογ(2+χ)$ ἢ $λογ(7+2χ^2)=λογ(2+χ)^2$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $7+2χ^2=(2+χ)^2$. Λύοντες δὲ ταύτην εὑρίσκομεν $χ'=3$ καὶ $χ''=1$, αἵτινες εἶναι ῥίζαι καὶ τῆς δοθείσης.

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν οὕτως εὑρισκομένων ῥιζῶν πρέπει νὰ ἀπορρίπτωνται αἱ τυχὸν μηδενίζουσαι ἢ καθιστῶσαι ἀρνητικὴν συνάρτησιν τοῦ ἀγνώστου, ἧς εἰσέρχεται ὁ λογάριθμος ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1121) $λογ2+λογχ=λογ5+λογ3$.

1122) $λογ6-λογχ=λογ3$.

1123) $2λογ6-λογ2=λογχ+λογ9$.

1124) $λογ9+2\,λογχ-λογ3=λογ\,12$.

1125) $λογ2+λογ\,(χ+3)=λογ2χ+1$

1126) $2λογ(χ-1)-λογχ=λογ(3χ+1)-λογ5$.

1127) $\dfrac{λογχ}{2}-λογ2+1=λογ2+λογ(χ+1)$.

1128) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $χ+ψ=11$, $λογχ+λογψ=1$.

1129) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $λογχ-λογψ=λογ5-λογ2$, $λογχ+λογψ=1$.

1130) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $χ^2+ψ^2=200$ $λογχ+λογψ=2$.

1131) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2λογχ+2λογβ=3λογα$.

1132) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $λογχ+λογy=λογ\,14$, $3χ-y=1$.

1133) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4λογ\,\dfrac{χ}{2}+3λογ\,\dfrac{χ}{3}=5λογχ-λογ27$.

1134) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ, οὗ ὁ λογάριθμος τετραπλασιαζόμενος γίνεται κατὰ 1 μεγαλύτερος τοῦ $λογ(χ^2-\dfrac{9}{10})$.

1135) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $χ^2-\sqrt{2}\cdot χ+λογ\,μ=0$ ἔχει πραγματικὰς ῥίζας ;

1136) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $2λογχ+2λογy=λογ\,36$, $χ^4+y^4=1297$.

1137) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $χ^2-2χ+λογ\,μ=0$ ἔχει διπλῆν ῥίζαν ;

1138) Διὰ ποίας τιμάς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $χ^2+χ\,λογμ+1=0$ ἔχει διπλῆν ῥίζαν;

§ **248. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.** Εἰς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων $2^χ=4$, $3^χ+9^χ=90$, $3^{3χ-4}=5$, $3^{χ^2-3χ+2}=1$ περιέχονται δυνάμεις ἔχουσαι ἐκθέτην τὸν ἄγνωστον ἢ συνάρτησίν τινα τοῦ ἀγνώστου. Αἱ ἐξισώσεις αὗται λέγονται ***ἐκθετικαὶ*** ἐξισώσεις.

Γενικῶς : ***Πᾶσα ἐξίσωσις περιέχουσα μίαν τοὐλάχιστον δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν ἄγνωστον ἢ συνάρτησίν τινα τοῦ ἀγνώστου καλεῖται ἐκθετικὴ ἐξίσωσις.***

Αἱ συνηθέστεραι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις ἔχουσιν ἢ δύνανται νὰ λάβωσι μίαν τῶν ἀκολούθων μορφῶν.

Α΄) $\alpha^{\chi}=\beta$, ἔνθα α καὶ β εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί. Αὕτη λύεται γενικῶς οὕτω. Ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εὑρίσκομεν $\chi.\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma\beta$, ὅθεν $\chi=\frac{\lambda o\gamma\beta}{\lambda o\gamma\alpha}$. Ἂν ὅμως ὁ β εἶναι γνωστὴ δύναμις τοῦ α π. χ. α^{ϱ}, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha^{\chi}=\alpha^{\varrho}$ ὅθεν, $\chi=\varrho$, ἤτοι λύεται ἡ ἐξίσωσις ἄνευ τῆς χρήσεως λογαριθμικῶν πινάκων.

Εὐνόητον ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι, ὁσάκις ἐφαρμόζεται, προτιμητέα τῆς πρώτης, οὐ μόνον διότι δὲν ἀπαιτεῖ τὴν χρῆσιν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων, ἀλλὰ καὶ διότι παρέχει τὴν ἀκριβῆ τιμὴν τοῦ ἀγνώστου. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $2^{\chi}=4$, γίνεται $2^{\chi}=2^{2}$, ὅθεν $\chi=2$, Ἡ δὲ ἐξίσωσις $3^{\chi}=2$ λύεται μόνον διὰ τῶν λογαρίθμων· ἤτοι εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\chi\lambda o\gamma 3=\lambda o\gamma 2,\ \chi=\frac{\lambda o\gamma 2}{\lambda o\gamma 3}=\frac{0{,}30103}{0{,}47712}=\frac{30103}{47712}.$$

Β΄) $\alpha^{\chi}+(\alpha^{2})^{\chi}=\beta$, ἔνθα α καὶ β εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί. Αὕτη λύεται οὕτω. Παρατηροῦντες ὅτι $(\alpha^{2})^{\chi}=\alpha^{2\chi}=(\alpha^{\chi})^{2}$ καὶ θέτοντες $\alpha^{\chi}=\psi$ δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν $\psi+\psi^{2}=\beta$. Ἂν δὲ ψ' καὶ ψ'' εἶναι αἱ ῥίζαι αὐτῆς, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων $\alpha^{\chi}=\psi'$ καὶ $\alpha^{\chi}=\psi''$, αἵτινες ἔχουσι τὴν προηγουμένην μορφὴν καὶ λύονται κατὰ τὰ γνωστά.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $3^{\chi}+9^{\chi}=90$ γίνεται κατὰ σειρὰν $3^{\chi}+(3^{2})^{\chi}=90$, $3^{\chi}+3^{2\chi}-90=0$, $3^{\chi}+(3^{\chi})^{2}-90=0$. Ἂν δὲ τεθῇ $\psi=3^{\chi}$ αὕτη γίνεται $\psi^{2}+\psi-90=0$, ἥτις ἔχει ῥίζας 9 καὶ -10. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς λύσιν τῶν ἐξισώσεων $3^{\chi}=9$ καὶ $3^{\chi}=-10$. Ἡ α΄ τούτων γίνεται $3^{\chi}=3^{2}$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\chi=2$, ἡ δὲ β΄ οὐδέποτε ἀληθεύει, διότι οὐδεμία δύναμις τοῦ 3 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Γ΄) $\alpha^{\sigma(\chi)}=\beta$, ἔνθα σ(χ) εἶναι δεδομένη συνάρτησις τοῦ ἀγνώστου καὶ α, β δοθέντες ἀριθμοί. Αὕτη λύεται γενικῶς οὕτω.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἀνάγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\sigma(\chi)\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma\beta$. Οὕτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $5^{2\chi+1}=9$, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $(2\chi+1)\,\lambda o\gamma 5=\lambda o\gamma 9$,

$$2\chi+1=\frac{\lambda o\gamma 9}{\lambda o\gamma 5},\ 2\chi=\frac{\lambda o\gamma 9-\lambda o\gamma 5}{\lambda o\gamma 5},\ \text{καὶ}$$

$$\chi=\frac{\lambda o\gamma 9-\lambda o\gamma 5}{\lambda o\gamma 25}=\frac{0{,}25527}{1{,}39794}=\frac{25527}{139794}$$

Ἂν ὁ β εἶναι γνωστὴ δύναμις τοῦ α π.χ. α^{ϱ}, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha^{\sigma(\chi)}=\alpha^{\varrho}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ λύσις αὐτῆς ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\sigma(\chi)=\varrho$. Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $3^{\chi^{2}-3\chi+2}=1$, ἐπειδὴ $3^{0}=1$

γίνεται $3^{\chi^2-3\chi+2}=3^0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἔχει τὰς ῥίζας τῆς $\chi^2-3\chi+2=0$ ἤτοι 1 καὶ 2.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις

1139) α΄) $3^\chi=27$, β΄) $2.4^\chi=32$, γ΄) $(2^\chi)^2=8$

1140) α΄) $(\alpha^\chi)^5=(\alpha^\chi)^\chi$, β΄) $(\alpha^{\beta-\chi})^\chi=\alpha^\chi$, γ΄) $5^{(3-\chi)(2-\chi)}=1$.

1141) α΄) $5^{2\chi-6}=1$, β΄) $2^{\chi^2-1}=8$, γ΄) $5^{\chi^2-3\chi}=5$.

1142) α΄) $7^{\chi^2-3\chi+3}=7$ β΄) $2^{\chi^4-5\chi^2+4}=0$, γ΄) $\chi^{\chi^2-7\chi+12}=1$.

1143) α΄) $2^{\chi+1}+4^\chi=8$, β΄) $3^{\chi-1}+9^\chi=84$, γ΄) $2^{\chi+2}+4^{\chi+1}=80$.

1144) α΄) $2^{\chi+1}+\frac{16}{2^\chi}=12$ β΄) $3^{\chi-1}-\frac{54}{3\chi}=7$, γ΄) $\frac{1}{2^\chi}+2^\chi=\frac{26}{5}$

1145) α΄) $2.5^\chi-\frac{30625}{5^\chi}=5$, β΄) $3^{\chi-1}-\frac{15}{3^{\chi+1}}+3^\chi-\frac{21}{3^{\chi+1}}=0$

1146) α΄) $2^{2\chi}-2.2^\chi.3^\chi+3^{2\chi}=0$, β΄) $2^{\chi-1}-2^{\chi-3}=3^{\chi-3}+3^{\chi-4}$

Διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα.

§ **249. Λογάριθμοι πρὸς βάσιν α.** Ὁ ἀριθμὸς 10, ὅστις ὑψούμενος εἰς δύναμιν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος παράγει τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, καλεῖται ***βάσις*** τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος λογαριθμικοῦ συστήματος· τοῦτο δὲ καλεῖται ***δεκαδικὸν*** λογαριθμικὸν σύστημα.

Ἡ βάσις λογαριθμικοῦ συστήματος δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὑπάρχουσιν ἄπειρα λογαριθμικὰ συστήματα διαφέροντα ἀλλήλων κατὰ τὴν βάσιν. Οὕτως, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις λογαριθμικοῦ συστήματος ὁ 2, θὰ καλῶμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος Α τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 2, ἥτις ἰσοῦται πρὸς Α. Οὕτως, ἐπειδὴ $2^3=8$, ἕπεται ὅτι ὁ 8 ἔχει πρὸς βάσιν 2 λογάριθμον τὸν 3.

Γενικῶς: ***Καλεῖται λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ πρὸς βάσιν α, ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ α, ἥτις ἰσοῦται πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.***

Τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ Α πρὸς βάσιν α σημειοῦμεν οὕτω λογ_α Α. Ἀποδεικνύεται δὲ κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον διὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα μετεχειρίσθημεν, ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον πρὸς βάσιν α ($\alpha>0$) καὶ ὅτι ἰσχύουσι διὰ τοὺς λογαρίθμους τούτους πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

§ **250. Ἀλλαγὴ βάσεως λογαρίθμων.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος Α πρὸς βάσιν α καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ πρὸς ἄλλην βάσιν β. Ἐὰν κληθῇ χ ὁ ζητούμενος λογάριθμος, θὰ εἶναι $\beta^\chi = A$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τοὺς πρὸς βάσιν α λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\chi \lambda o\gamma_\alpha \beta = \lambda o\gamma_\alpha A, \text{ ὅθεν } \chi = \lambda o\gamma_\alpha A \cdot \frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha \beta} \quad (1)$$

Ἄρα: ***Ἵνα γνωρίζοντες τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ πρός τινα βάσιν εὕρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ πρὸς νέαν βάσιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν γνωστὸν λογάριθμον ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ πρὸς τὴν παλαιὰν βάσιν λαγαρίθμου τῆς νέας βάσεως.***

Ἂν $\alpha = 10$ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται $\chi = \lambda o\gamma A \cdot \frac{1}{\lambda o\gamma \beta}$

Ἀσκήσεις. 1147) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 512 πρὸς βάσιν 8.

1148) Εἰς ποῖον λογαριθμικὸν σύστημα ὁ 243 ἔχει λογάριθμον 5;

1149) Εἰς ποῖον λογαριθμικὸν σύστημα ὁ 4 ἔχει λογάριθμον $\frac{2}{5}$;

1150) Ποῖος εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 3125 πρὸς βάσιν 5;

1151) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν πρὸς δύο δεδομένας βάσεις λογαρίθμων ἀριθμοῦ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλους τοὺς ἀριθμούς.

1152) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς κοινῆς βάσεως τῶν λογαρίθμων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Ἀνατοκισμὸς καὶ Χρεωλυσία.

§ 251. Τόκος καὶ εἴδη αὐτοῦ. ***Ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τόκος καλεῖται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.***

Ὁ τόκος διακρίνεται εἰς ἁπλοῦν καὶ σύνθετον. Ὁ τόκος λέγεται ἁπλοῦς, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρειαν τοῦ δανείου.

Ὁ τόκος λέγεται σύνθετος, ὅταν ὁ τόκος μετὰ παρέλευσιν συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ κατ' ἀκολουθίαν φέρῃ καὶ αὐτὸς τόκον κατὰ τὰς ἑπομένας χρονικὰς μονάδας.

Οὕτω 500 δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 6% ἐπὶ 2 ἔτη φέρουσιν ἁπλοῦν τόκον 60 δραχμὰς καὶ γίνονται τὸ ὅλον 560 δραχ. Ἂ ὅμως τὸ δάνειον γίνῃ μὲ σύνθετον τόκον, μετὰ παρέλευσιν ἑνὸς ἔτους ὁ τόκος 30 δραχμαὶ προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, ὅπερ οὕτω γίνεται 530 δραχμαί. Ὁ δὲ τόκος αὐτοῦ κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος εἶναι $\frac{530 \cdot 6}{100} = 31,80$· γίνεται ἄρα τὸ χρέος εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου ἔτους 561,80 δραχμαί.

Ὁ σύνθετος τόκος λέγεται καὶ **ἀνατοκισμός**, τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον κεφάλαιον λέγομεν ὅτι **ἀνατοκίζεται**.

Τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ λύομεν διὰ δύο τύπων, οὓς εὑρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολούθου γενικοῦ προβλήματος.

§ **252. Πρόβλημα I.** ***Ἀνατοκίζει τις α δραχμὰς μὲ τὴν συμφωνίαν ἑκάστη δραχμὴ νὰ φέρῃ εἰς ἑκάστην συμφωνηθεῖσαν χρονικὴν μονάδα τόκον τ δραχμάς. Πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ ν τοιαύτας χρονικὰς μονάδας;***

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ 1 δραχμὴ φέρει εἰς τὴν συμφωνηθεῖσαν χρονικὴν μονάδα τόκον τ δραχμάς, αἱ α δραχμαὶ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον θὰ φέρωσι τόκον ατ δραχμάς. Κατ' ἀκολουθίαν μετὰ πάροδον μιᾶς χρονικῆς μονάδος δικαιοῦται νὰ λάβῃ $\alpha+\alpha\tau$ ἢ $\alpha(1+\tau)$ δραχμάς. Αἱ $\alpha(1+\tau)$ δραχμαὶ φέρουσι κατὰ τὴν δευτέραν χρονικὴν μονάδα τόκον $\alpha(1+\tau)\tau$ δραχμὰς καὶ ἑπομένως εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος δικαιοῦται νὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)\tau=\alpha(1+\tau).(1+\tau)$ ἢ $\alpha(1+\tau)^2$ δραχ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς τρίτης χρονικῆς μονάδος δικαιοῦται νὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau)^3$ καὶ καθεξῆς οὕτω. Ἄρα εἰς τὸ τέλος τῆς νυοστῆς χρονικῆς μονάδος δικαιοῦται νὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἐὰν δὲ καλέσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο διὰ τοῦ Μ, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$M=\alpha(1+\tau)^\nu. \qquad (1)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν ἓν τῶν ποσῶν Μ,α,τ,ν, ὅταν τὰ ἄλλα τρία δοθῶσιν.

Συνήθως ἡ χρονικὴ μονάς, μετὰ παρέλευσιν τῆς ὁποίας ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον, εἶναι τὸ ἔτος. Δύναται ὅμως νὰ εἶναι καὶ τὸ ἑξάμηνον ἢ καὶ τὸ τρίμηνον κ. τ. λ.

Ἂν ἡ συμφωνηθεῖσα χρονικὴ μονὰς εἶναι τὸ ἔτος, διαρκέσῃ δὲ τὸ δάνειον ν ἔτη καὶ η ἡμέρας, τὸ τελικὸν κεφάλαιον Μ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

Μετὰ παρέλευσιν ν ἐτῶν γίνεται $\alpha(1+\tau)^\nu$, ὡς ἐμάθομεν. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ μείνῃ δανεισμένον ἀκόμη η ἡμέρας, φέρει δὲ κατ' αὐτὰς τόκον(ἁπλοῦν) $\dfrac{\alpha(1+\tau)^\nu\cdot\tau.\eta,}{360}$, ἑπομένως γίνεται τὸ ὅλον κεφάλαιον καὶ τόκος $\alpha(1+\tau)^\nu+\dfrac{\alpha(1+\tau)^\nu\,\tau\,\eta}{360}$ ἢ $\alpha(1+\tau)^\nu\left[1+\dfrac{\eta\tau}{360}\right]$.

Ὥστε εἶναι
$$M=\alpha\,(1+\tau)^\nu\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right) \qquad (2)$$

Παραδείγματα

§ **253. Παράδειγμα I.** (ἄγνωστον Μ) ***Ἀνατοκίζει τις 5000 δραχμὰς πρὸς 6 %, ἐτησίως. Πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ 8 ἔτη ;***

Λύσις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι α=5000, ν=8. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ τ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφ' οὗ αἱ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς ἓν ἔτος τόκον 6 δραχμάς, ἡ 1 θὰ φέρῃ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον $\frac{6}{100}$ ἢ 0,06 τῆς δραχμῆς. Εἶναι λοιπὸν τ=0,06. Ὁ τύπος λοιπὸν (1) γίνεται

$$M = 5000\,(1{,}06)^8,$$

ὅθεν προκύπτει ὅτι $\lambda o\gamma M = \lambda o\gamma 5000 + 8\lambda o\gamma\, 1{,}06.$

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma\ 5000 = 3{,}\ 69897$, $\lambda o\gamma 1{,}06 = 0{,}02531$

$$8\ \lambda o\gamma 1{,}\ 06 = 0{,}20248$$

ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma M = 3{,}90145$

ἄρα $M = 7969{,}83$ δραχμαὶ

§ **254. Παράδειγμα II.** (ἄγνωστον Μ). ***Ἀνατοκίζει τις 8560 δραχμὰς πρὸς 8 %, ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη καὶ 3 μῆνας ;***

Λύσις. Ἐπειδὴ α=8560, τ=0,08, ν=10 καὶ η=90, ὁ τύπος (2) γίνεται $M = 8560.\,(1{,}08)^{10}\left(1 + \frac{0{,}08.90}{360}\right)$

$$\text{ἢ}\ M = 8560.(1{,}08)^{10}.\frac{367{,}2}{360}.$$

Ὅθεν $\lambda o\gamma\ M = \lambda o\gamma 8560 + 10\ \lambda o\gamma 1{,}08 + \lambda o\gamma 367{,}2 - \lambda o\gamma 360.$

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma 8560 = 3{,}93247$ $\qquad \lambda o\gamma 1{,}08 = 0{,}03342$

$$10\lambda o\gamma 1{,}08 = 0{,}33420$$

$$\lambda o\gamma 367{,}2 = 2{,}56490$$

$$-\lambda o\gamma 360 = \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\ 360 = \bar{3}{,}44370$$

ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma M \quad = 4{,}27527$

ἄρα $M \quad = 18848{,}26$ δραχμαί.

§ **255. Παράδειγμα III.** (ἄγνωστον α). ***Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ ἀνατοκίσῃ τις κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς γεννήσεως τῆς θυγατρός του πρὸς 6 %, ἐτησίως ὅπως ἔχῃ ἅμα τῇ συμπληρώσει τοῦ 20ου ἔτους αὐτῆς προῖκα δι' αὐτὴν 50000 δραχμάς ;***

Λύσις. Ἐπειδὴ M=50000, ν=20, τ=0,06, ὁ τύπος (1) γίνεται $50000 = \alpha.\,(1{,}06)^{20}$, ὅθεν $\lambda o\gamma 50000 = \lambda o\gamma\alpha + 20\ \lambda o\gamma 1{,}06.$

Λύοντες ταύτην πρὸς τὸν λογα εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma 50000 - 20\lambda o\gamma 1{,}06$$

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma 50000 = 4{,}69897 \quad \lambda o\gamma 1{,}06 = 0{,}02531$

$20\lambda o\gamma 1{,}06 = 0{,}50620$

ἕπετα ὅτι $\lambda o\gamma\alpha = 4{,}19277$

ἄρα $\alpha = 15587{,}15$ δραχμαί.

§ **256. Παράδειγμα IV.** (ἄγνωστον τ). ***Πρὸς πόσον ἐπὶ τοῖς °/₀ πρέπει νὰ ἀνατοκίσῃ τις 8000 δραχμάς, ὅπως μετὰ 12 ἔτη λάβῃ 12860 δραχμάς.***

Λύσις. Ἐπειδὴ Μ=12680, α=8000 καὶ ν=12, ὁ τύπος (1) γίνεται $12860=8000(1+\tau)^{12}$, ὅθεν $\lambda o\gamma 12860=\lambda o\gamma 8000+12\lambda o\gamma(1+\tau)$.

Λύοντες ταύτην πρὸς τὸν $\lambda o\gamma(1+\tau)$ εὑρίσκομεν

ὅτι $\lambda o\gamma(1+\tau) = \dfrac{\lambda o\gamma 12860 - \lambda o\gamma 8000}{12}$

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma 12860 = 4{,}10924$

$\lambda o\gamma\ 8000 = 3{,}90309$

διαφορὰ $= 0{,}20615 \quad 0{,}20615 : 12 = 0{,}01718$

ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma(1+\tau) = 0{,}01718$

ἄρα $1+\tau = 1{,}040357$ καὶ

$\tau = 0{,}040357$ ὅθεν προκύπτει ὅτι

τὸ ἐπιτόκιον ε εἶναι $\varepsilon = 4{,}0357$.

§ **257. Παράδειγμα V.** (ἄγνωστον ν). ***Ἐπὶ πόσα ἔτη πρέπει νὰ ἀνατοκισθῶσι 15637 δραχμαὶ πρὸς*** 5°/₀ ***διὰ νὰ γείνωσι 25000 δραχμαί;***

Λύσις. Ἐπειδὴ Μ=25000, α = 15637 τ=0,05, ὁ τύπος (1) γίνεται $25000=15637(1{,}05)^{\nu}$, ὅθεν

$$\lambda o\gamma 25000=\lambda o\gamma 15637+\nu\ \lambda o\gamma 1{,}05.$$

Λύοντες ταύτην πρὸς ν εὑρίσκομεν $\nu = \dfrac{\lambda o\gamma 25000 - \lambda o\gamma 15637}{\lambda o\gamma 1{,}05}$

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma\ 25000 = 4{,}39794$

$\lambda o\gamma\ 15637 = 4{,}19416$

διαφορὰ $= 0{,}20378$

$\lambda o\gamma\ 1{,}05 = 0{,}02119$

ἕπεται ὅτι $\nu = \dfrac{0{,}20378}{0{,}02119}$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 0,01307. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον, πρέπει τὸ δάνειον νὰ διαρκέσῃ 9 ἔτη καὶ ἡμέρας τινὰς η. Πρὸς εὕρεσιν τούτων ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ἐφαρμόμεν τὸν τύπον (2), εὑρίσκομεν $25000=15637(1{,}05)^{9}\left(1+\dfrac{\eta 0{,}05}{360}\right)$, ὅθεν

$$\lambda o\gamma.\ 25000 - \lambda o\gamma\ 15637 - 9\ \lambda o\gamma\ 1{,}05 = \lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta 0{,}05}{360}\right)$$

Ἐπειδὴ δὲ τῆς διαιρέσεως (λογ25000—λογ15637) διὰ λογ1,05· τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 9, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0,01307, ἕπεται ὅτι: λογ 25000—λογ15637—9λογ1,05=0, 01307. Παραβάλλοντες ταύτην πρὸς τὴν προηγουμένην εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma(1+\frac{\eta 0{,}05}{360})=0{,}01307$ ἢ

$\lambda o\gamma(1+\frac{\eta}{7200})=0{,}01307$, ὅθεν εὑρίσκομεν διαδοχικῶς

$1+\frac{\eta}{7200}=1{,}03055$, $\frac{\eta}{7200}=0{,}03055$ καὶ $\eta=219{,}96$ ἢ 220 ἡμέραι περίπου.

Ἀσκήσεις. 1153) Εἰς πόσον χρηματικὸν ποσὸν θὰ ἀνέλθωσι 1000 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 7°/₀ ἐτησίως μετὰ 15 ἔτη;

1154) Ἐὰν καταθέσῃ τις εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης 2360 δραχμὰς ἀνατοκιζομένας καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4°/₀ ἐτησίως, πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ 5 ἔτη;

1155) Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις μετὰ 6 ἔτη καὶ δύο μῆνας, ἐὰν ἀνατοκίσῃ σήμερον πρὸς 8°/₀ ἐτησίως 5000 δραχμάς;

1156) Πόσα χρήματα πρέπει νὰ ἀνατοκίσῃ τις πρὸς 6°/₀ ἐτησίως, ὥστε μετὰ 10 ἔτη νὰ λάβῃ 17500 δραχμάς;

1157) Πόσα χρήματα πρέπει νὰ καταθέσῃ τις εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης πρὸς 4°/₀ ἐτησίως, ἵνα μετὰ 8 ἔτη λάβῃ 6000 δραχμάς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ ἑξαμηνίαν;

1158) Πρὸς πόσον τοῖς °/₀ πρέπει νὰ ἀνατοκισθῶσι 35695 δραχμαὶ ὅπως μετὰ 12 ἔτη ἀνέλθωσιν εἰς 50000 δραχμάς;

1159) Πρὸς πόσον °/₀ κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον διπλασιάζεται μετὰ 8 ἔτη;

1160) Μετὰ πόσον χρόνον 75460 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 4°/₀ ἐτησίως γίνονται 100000 δραχμαί;

1161) Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον πρὸς 6 °/₀ ἐτησίως τριπλασιάζεται;

1162) Εἰς πόσον χρόνον 3600 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 5°/₀ ἐτησίως, δίδουσι κέρδος, ὅσον αἱ 5000 δραχμαὶ τοκιζόμεναι ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ πρὸς 4°/₀ ἐπὶ 12 ἔτη;

1163) Ἀνατόκισέ τις 6000 δραχμὰς πρὸς 8°/₀ ἐτησίως. Μετὰ πάροδον δύο ἐτῶν ἀπέσυρεν 2998,2857 δραχμάς. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 4 ἔτη ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης;

§ 258. Πρόβλημα I. (Τῶν ἴσων καταθέων). ***Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν ἡ 1 δραχμὴ νὰ***

φέρῃ εἰς ἑκάστην τοιαύτην χρονικὴν μονάδα τ δραχμὰς τόκον. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ ν τοιαύτας χρονικὰς μονάδας ;

Λύσις. Αἱ α δραχμαὶ τῆς 1ης δόσεως παραμένουσιν εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν ν χρονικὰς μονάδας, αἱ τῆς 2ας δόσεως παραμένουσιν (ν—1) χρονικὰς μονάδας, αἱ τῆς 3ης δόσεως ν—2 χρονικὰς μονάδας καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω, αἱ τῆς προτελευταίας δόσεως θὰ μείνωσι 2 χρονικὰς μονάδας καὶ αἱ τῆς τελευταίας μίαν τοιαύτην χρονικὴν μονάδα.

Θὰ γείνωσι λοιπὸν αἱ μὲν τῆς α'. δόσεως $\alpha(1+\tau)^{\nu}$

» β' » $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$

» γ' » $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$

. . . .

. . . .

αἱ τῆς προτελευταίας $\alpha(1+\tau)^2$

αἱ τῆς τελευταίας $\alpha(1+\tau)$

Δικαιοῦται ἄρα ὁ καταθέτης νὰ λάβῃ τὸ ὅλον

$\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+ \dots\dots\dots +\alpha(1+\tau)^{\nu}$ ἢ (§ 221)

$$\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}\ (1+\tau)-\alpha(1+\tau)}{(1+\tau)-1}=\frac{\alpha(1+\tau)\left[\ (1+\tau)^{\nu}\ -1\ \right]}{\tau}$$

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον ποσὸν διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)\left[(1+\tau)^{\nu}\ -1\right]}{\tau} \quad (3)$$

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου τούτου πρέπει πρὸ πάσης ἄλλης ἐργασίας νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν $(1+\tau)^{\nu}-1$, ἥτις δὲν εἶναι λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων.

Οὕτως, ἂν $\alpha=850$, $\tau=0{,}05$ καὶ $\nu=15$, ὁ τύπος (3) γίνεται

$$\Sigma=\frac{850(1{,}05)\ [1{,}05)^{15}\ -1\ ]}{0{,}05}$$

Ἐπειδὴ δὲ (Dubuis σελὶς 134) εἶναι $1{,}05^{15}=2{,}078928$ ἕπεται

$$\text{ὅτι } \Sigma=\frac{850.1{,}05.1{,}078928}{0{,}05}, \text{ ὅθεν}$$

$$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 850+\lambda o\gamma 1{,}05+\lambda o\gamma 1{,}078928-\lambda o\gamma 0{,}05$$

Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma 850=2{,}92942$

$\lambda o\gamma 1{,}05=0{,}02119$

$\lambda o\gamma 1{,}078628=0{,}03299$

$-\lambda o\gamma 0{,}05=\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\ 0{,}05=1{,}30103$

ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma\ \Sigma=4{,}28463$

ἄρα $\Sigma=19258{,}69$ δραχ.

Ἀσκήσεις. 1164) Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 600 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %₀ ἐτησίως. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη;

1165) Ἐργάτης καταθέτει εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης ἑξαμηνίας 800 δραχμὰς ἀνατοκιζομένας καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4 % ἐτησίως. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ 7 ἔτη;

1166) Πατὴρ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεως τῆς κόρης του καταθέτει εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης καθ' ἑξαμηνίαν 1000 δραχμὰς ἀνατοκιζομένας καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4 % ἐτησίως. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ ὅταν ἡ κόρη του γείνῃ 20 ἐτῶν;

1167) Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ καταθέτῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 7 % ἐτησίως ἵνα μετὰ 12 ἔτη λάβῃ 46880,35 δραχμάς;

1168) Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 2000 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4,5 % ἐτησίως. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ 65566,25 δραχμάς;

§ **259. Χρεωλυσία.** Τὰ μεγάλα δάνεια τῶν κρατῶν, δήμων, κοινοτήτων, ἅτινα συνήθως συνάπτονται δι' ἐκτέλεσιν κοινωφελῶν ἔργων, δὲν ἐξοφλοῦνται διὰ μιᾶς, ἀλλ' ἐντὸς ὡρισμένης καὶ μακρᾶς συνήθως προθεσμίας καὶ κατ' ἴσας δόσεις, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται ἀνὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα (συνήθως κατ' ἔτος). Οὕτω δὲ καὶ αἱ μέλλουσαι γενεαὶ καρπούμεναι τῶν ἀγαθῶν τῶν ἐκτελεσθέντων κοινωφελῶν ἔργων ἐπιβαρύνονται διὰ τὴν ἐξόφλησιν αὐτῶν διὰ πληρωμῆς εἰδικῶν φόρων. Καὶ ἑταιρεῖαι ὅμως καὶ μεμονωμένα ἄτομα δύνανται νὰ ἐξοφλῶσι κατὰ τὸν ῥηθέντα τρόπον δάνεια αὐτῶν. Ὁ τοιοῦτος τρόπος ἀποσβέσεως χρέους καλεῖται ***χρεωλυσία.*** Τὸ δὲ σταθερὸν ποσόν, ἐξ οὗ ἀποτελεῖται ἑκάστη δόσις καλεῖται ***χρεωλύσιον.***

Ὥστε: ***Χρεωλυσία καλεῖται ἡ ἀπόσβεσις χρέους ἐντὸς ὡρισμένης προθεσμίας γινομένη δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται ἀνὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα.***

Χρεωλύσιον καλεῖται τὸ ποσόν, ἐξ οὗ ἀποτελεῖται ἑκάστη δόσις.

Εὐνόητον ὅτι μέρος τοῦ χρεωλυσίου καλύπτει τοὺς δεδουλευμένους τόκους, τὸ δὲ ἄλλο συντελεῖ εἰς τὴν μείωσιν τοῦ κεφαλαίου. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ χρεωλύσιον πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν τόκον τοῦ ἀρχικοῦ χρέους διὰ μίαν χρονικὴν μονάδα, μετὰ τὴν πάροδον τῆς ὁποίας ἄρχεται ἡ πληρωμὴ τοῦ χρεωλυσίου.

Ἐὰν π. χ. δανεισθῇ τις 150000 δραχμὰς πρὸς 4 % ἐτησίως, ἐπειδὴ ὁ ἐτήσιος αὐτῶν τόκος εἶναι 6000 δραχμαί, τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 6000 δραχμῶν.

Διότι, ἂν μὲν τὸ χρεωλύσιον εἶναι 6000 δραχμαί, εἰς τὸ τέλος τοῦ α' ἔτους θὰ πληρωθῇ μόνον ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ δανείου, τὸ δὲ κεφάλαιον θὰ μείνῃ ἄθικτον· τοῦτο δὲ θὰ γίνηται καὶ κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη. Κατὰ τὸν τρόπον ἄρα τοῦτον οὐδέποτε ἐξοφλεῖται τὸ δάνειον.

Ἂν δὲ τὸ χρεωλύσιον εἶναι μικρότερον τῶν 6000 δραχμῶν, π. χ. 4000 δραχ. εἰς τὸ τέλος τοῦ α΄ ἔτους πληρώνεται δι᾽ αὐτοῦ μέρος τοῦ δεδουλευμένου τόκου, το δὲ ἄλλο μέρος αὐτοῦ προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον· τοῦτο δὲ θὰ γίνηται προφανῶς καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη. Ὥστε τὸ χρέος οὐ μόνον δὲν ἐξοφλεῖται, ἀλλὰ καθίσταται μεγαλύτερον ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος.

Τὰ συνηθέστερα προβλήματα τῆς χρεωλυσίας λύομεν διὰ τύπου, ὃν θὰ εὕρωμεν διὰ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολούθου γενικοῦ προβλήματος.

§ **260. Πρόβλημα I.** ***Ἐδανείσθη τις α δραχμὰς μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφληθῇ τὸ δάνειον τοῦτο διὰ ν ἴσων ἐτησίων δόσεων. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ἂν ἑκάστη δραχμὴ φέρῃ εἰς ἓν ἔτος τόκον τ δραχμάς;***

Λύσις. Μετὰ πάροδον ἑνὸς ἔτους θὰ ὀφείλῃ $\alpha(1+\tau)$ δραχμάς.

Ἐὰν δὲ πληρώσῃ τὸν 1ον χρεωλύσιον χ θὰ ὀφείλῃ $\alpha(1+\tau)-\chi$ δραχ. Εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου ἔτους θὰ ὀφείλῃ $\alpha(1+\tau)^2-\chi(1+\tau)$ δραχ. καὶ μετὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ 2ου χρεωλυσίου θὰ ὀφείλῃ $\alpha(1-\tau)^2-\chi\,(1+\tau)-\chi$. Μετὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ 3ου χρεωλυσίου θὰ ὀφείλῃ $\quad \alpha(1+\tau)^3-\chi(1+\tau)^2-\chi(1+\tau)-\chi$.

Οὕτως ἐξακολουθοῦντες κατανοοῦμεν ὅτι μετὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ νυοστοῦ χρεωλυσίου θὰ ὀφείλει $\alpha(1+\tau)^\nu-\chi(1+\tau)^{\nu-1}-\ldots-\chi(1+\tau)-\chi$.

Ἐπειδὴ δὲ τότε οὐδὲν πρέπει νὰ ὀφείλῃ, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι:

$$\alpha(1+\tau)^\nu-\chi(1+\tau)^{\nu-1}-\chi(1+\tau)^{\nu-2}-\ldots\ldots-\chi\,(1+\tau)-\chi=0.$$

Χωρίζοντες γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους ὅρους ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\alpha(1+\tau)^\nu=\chi\,(1+\tau)^{\nu-1}+\chi(1+\tau)^{\nu-2}+\ldots\ldots\ldots+\chi(1+\tau)+\chi.$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 221) τὸ β΄ μέλος αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς $\dfrac{\chi(1+\tau)^\nu-\chi}{1+\tau-1}$

ἢ $\chi\dfrac{[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}$, αὕτη γίνεται $\chi\dfrac{\alpha[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}=\alpha(1+\tau)^\nu \quad (1).$

ὅθεν εὑρίσκομεν $\quad \chi=\dfrac{\alpha\tau(1+\tau)^\nu}{(1+\tau)^\nu-1} \quad (2)$

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (1) λυθῇ πρὸς α ἢ ν, προκύπτουσι τύποι, δι᾽ ὧν ὁρίζομεν ἀντιστοίχως τὰ ποσὰ α καὶ ν, ὅταν τὰ ἄλλα δοθῶσιν. Πρὸς ἐφαρμογὴν τούτων ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

§ **261. Παράδειγμα I.** ***Δῆμος ἐδανείσθη 300000 δραχμὰς πρὸς 5% καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι᾽ ἐτησίων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐντὸς 50 ἐτῶν. Πόσον ἐτήσιον χρεωλύσιον θὰ πληρώνῃ;***

Λύσις. Ἐπειδὴ $\alpha=300000$, $\tau=0{,}05$, $\nu=50$, τύπος (2) γίνεται

$$\chi = \frac{300000(1,05)^{50}.0,05}{1,05^{50}-1}.$$ Ἐπειδὴ δὲ $1,05^{50} = 11,4674$,

αὕτη γίνεται $\chi = \frac{300000.1,05^{50}.0,05}{10,4674}$, ὅθεν ἕπεται ὅτι

$\lambda o\gamma\chi = \lambda o\gamma 300000 + 50\lambda o\gamma\, 1,05 + \lambda o\gamma 0,05 - \lambda o\gamma\, 10,4674.$

Καὶ ἐπειδὴ λογ300000 = 5,47712 λογ1,05 = 0,02119

50 λογ 1,05 = 1,05950

λογ 0,05 = $\overline{2}$,69897

συλλογ 10,4674 = $\overline{2}$,98016

ἕπεται ὅτι λογ χ = 4,21575

ἄρα χ = 16434,23 δραχμῶν

§ **262. Παράδειγμα II.** ***Ἐπιχειρηματίας ὑπολογίζτι ὅτι δύναται νὰ διαθέτῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 8650 δραχμῶν ἐπὶ 20 ἔτη. Πόσον δάνειον δύναται νὰ συνάψῃ πρὸς προαγωγὴν τῶν ἐπιχειρήσεών του πρὸς 6 %₀ ἐτησίως.***

Λύσις. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς α εὑρίσκομεν

$$\alpha = \frac{\chi\,[(1+\tau)^{\nu} - 1]}{\tau(1+\tau)^{\nu}}$$

Ἐπειδὴ δὲ χ = 8650, τ = 0,06 καὶ ν = 20, αὕτη γίνεται

$$\alpha = \frac{8650\;[\;(1,06)^{20} - 1)\;]}{0,06(1,06)^{20}}$$

ἐπειδὴ δὲ $(1,06)^{20} = 3,207135$, αὕτη γίνεται

$$\alpha = \frac{8650\;2,207135}{0,06.3,207135}$$

ὅθεν λογ α = λογ 8650 + λογ 2,207135 — λογ 0,06 — λογ 3,207135

Καὶ ἐπειδὴ λογ 8650 = 3,93702

λογ 2,207133 = 0,34383

συλλογ. 0,06 = 1,22185

συλλογ. 3,207135 = $\overline{1}$,49388

ἕπεται ὅτι λογ. α = 4,99658

ἄρα α = 99215 δραχμαί.

§ **263. Παράδειγμα III.** ***Εἰς πόσον χρόνον ἐξοφλεῖται δάνειον 25000 δραχμῶν πρὸς 6 %₀ δι᾽ ἐτησίου χρεωλυσίου 3000 δραχμῶν.***

Λύσις. Ἐπειδὴ ζητεῖται ὁ ν, θὰ λύσωμεν πρὸς αὐτὸν τὴν ἐξίσωσιν (1). Πρὸς τοῦτο ἐξαλείφομεν τὸν παρονομαστήν, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις καὶ εὑρίσκομεν $\chi(1+\tau)^\nu - \chi = \alpha\tau(1+\tau)_\nu$.

Ἐὰν δὲ χωρίσωμεν τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους, εὑρίσκομεν $\chi(1+\tau)^\nu - \alpha\tau(1+\tau)^\nu = \chi$, ὅθεν δι' ἐξαγωγῆς τοῦ κοινοῦ παράγοντος $(1+\tau)^\nu$ ἐκτὸς παρενθέσεως προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $(1+\tau)^\nu(\chi-\alpha\tau)=\chi$, ὅθεν κατὰ σειρὰν $(1+\tau)^\nu = \frac{\chi}{\chi-\alpha\tau}$

$\nu\lambda o\gamma(1+\tau) = \lambda o\gamma\,\chi - \lambda o\gamma\,(\chi-\alpha\tau)$ καὶ $\nu = \frac{\lambda o\gamma\,\chi - \lambda o\gamma(\chi-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}$. Ἐπειδὴ δὲ $\chi=3000$, $\alpha=25000$, $\tau=0{,}06$ ἕπεται ὅτι $\chi-\alpha\tau=3000-1500=1500$ καὶ $\nu = \frac{\lambda o\gamma 3000 - \lambda o\gamma 1500}{\lambda o\gamma\, 1{,}06} = 11$ ἔτη....

Ἐπειδὴ ἡ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ν διαίρεσις εἶναι ἀτελὴς ἕπεται ὅτι 11 δόσεις δὲν ἀρκοῦσι πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ χρέους τούτου, ἀφ' ἑτέρου διὰ 12 πλήρων δόσεων θὰ πληρωθῇ περισσότερον τοῦ δέοντος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν διττῶς:

α') Ὑπολογίζομεν ἐκ πόσων δραχμῶν θὰ ἀποτελεῖται μία ἔτι συμπληρωματικὴ δόσις πληρωνομένη εἰς τὸ τέλος τοῦ 12 ἔτους. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πόσον θὰ εἶναι ὅλον τὸ χρέος εἰς τὸ τέλος τοῦ 12ου ἔτους καὶ πόσον γίνονται αἱ 11 δόσεις εἰς τὸ τέλος τοῦ 12 ἔτους καὶ ἀπὸ τοῦ α' ποσοῦ ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δόσις αὕτη ἀνέρχεται εἰς 2701,20 δραχ.

β') Δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν ὀλίγον τὸ χρεωλύσιον. ὥστε ἡ ἀπόσβεσις νὰ γίνηται ἐντὸς 11 ἐτῶν. Πρὸς τοῦτο ζητοῦμεν διὰ πόσου χρεωλυσίου ἐξωφλεῖται ἐντὸς 11 ἐτῶν δάνειον 25000 δραχμῶν πρὸς 6%.

Ἀσκήσεις 1169) Κοινότης ἐδανείσθη δι' ἀνέγερσιν σχολικοῦ κτιρίου 50000 δραχμὰς πρὸς 6 % ἐξοφλητέας χρεωλυτικῶς εἰς 20 ἐτησίας δόσεις. Πόσον χρεωλύσιον θὰ πληρώνῃ ἐτησίως ;

1170) Ἐάν τις δύναται ἐπὶ 10 ἔτη νὰ διαθέτῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 8000 δραχμῶν, πόσον δάνειον δύναται νὰ συνάψῃ πρὸς 6 % ἐτησίως ;

1171) Διὰ πόσων ἐτησίων δόσεων ἐξ 7000 δραχμῶν ἐξοφλεῖται δάνειον 80000 δραχμῶν πρὸς 6 % ἐτησίως ;

1172) Ὑποχρεοῦταί τις νὰ πληρώνῃ ἀπὸ σήμερον καὶ ἐπὶ 5 ἔτη 6000 δραχμὰς εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους. Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ πληρώσῃ σήμερον ἐφ' ἅπαξ, ὅπως ἀπαλλαγῇ τῆς ὑποχρεώσεως ταύτης τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 % ;

1173) Ἐδανείσθη τις 7940 δραχμὰς καὶ ἐπλήρωσε τὸ χρέος του εἰς δύο ἐτησίας δόσεις ἐκ 4330, 7 δραχμῶν ἑκάστη. Πρὸς πόσον ἐπιτόκιον ἔγεινε τὸ δάνειον ;

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Δ' Βιβλίου

V 1174) Ἀριθμητικῆς προόδου, ἥτις ἔχει 6 ὅρους, οἱ μὲν ἄκροι ὅροι ἔχουσι γινόμενον —26, οἱ δὲ τέσσαρες μεσαῖοι ἔχουσιν ἄθροισμα 22. Νὰ καταρτισθῇ αὕτη.

√1175) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειροι ἀριθμητικαὶ πρόοδοι ἓξ ὅρων, ὧν οἱ μὲν δύο ἄκροι ἔχουσιν ἄθροισμα 4, οἱ δὲ τέσσαρες μεσαῖοι 8. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τύποι, δι' ὧν ὁρίζονται ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ λόγου καὶ τοῦ α΄ ὅρου τοιούτων προόδων.

√1176) Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἄθροισμα 20, τὰ δὲ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 120.

√1177) Ἀριθμητικῆς προόδου, ἥτις ἔχει λόγον 1, τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα καὶ γινόμενον ἴσα. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὅροι οὗτοι.

√1178) Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ὧν οἱ μὲν ἄκροι ἔχουσι γινόμενον 36, οἱ δὲ μέσοι 54.

√1179) Οἱ ἄκροι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 1 καὶ 24. Νὰ εὑρεθῶσι δύο ὅροι αὐτῆς ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τῶν ἄκρων καὶ ἔχοντες γινόμενον 117.

√1180) Τρεῖς ἀριθμητικαὶ πρόοδοι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 1 καὶ ἔχουσι λόγον ἀντιστοίχως 1,2,3. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως $K, K'K''$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $K+K''=2K'$.

√1181) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ παραστάσεις $(\chi^2-2\chi+1)^2$, $(\chi^2+1)^2$, $(\chi^2+2\chi-1)^2$, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

√1182) Ἐὰν χ, ψ, ω, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ αἱ παραστάσεις $\chi^2+\chi\psi+\psi^2$, $\chi^2+\chi\omega+\omega^2$, $\psi^2+\psi\omega+\omega^2$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς β΄ πρὸς τὸν λόγον τῆς α΄ ἀριθμητικῆς προόδου ;

√1183) Νὰ εὑρεθῇ ὁ νος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων ἑκάστης τῶν ἀκολούθων σειρῶν α΄) $\frac{\nu-1}{\nu}, \frac{\nu-2}{\nu}, \frac{\nu-3}{\nu}, \ldots.$

β΄) $\frac{\nu^2-1}{\nu}, \nu, \frac{\nu^2+1}{\nu}, \frac{\nu^2+2}{\nu}, \ldots$ γ΄) $\frac{\nu-8}{4}, \frac{\nu}{4}, \frac{\nu+8}{4}, \frac{\nu+16}{4}, \ldots.$

√1184) Φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα $\frac{4}{5}$, ὅλοι δὲ οἱ ὅροι αὐτῆς ἔχουσιν ἄθροισμα 0,9. Νὰ εὑρεθῇ αὕτη.

√1185) Γεωμετρικῆς προόδου τέσσαρες διαδοχικοὶ ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα 45, ὁ δὲ πρῶτος ὅρος εἶναι 3. Νὰ σχηματισθῇ αὕτη.

√1186) Τρεῖς ἀριθμοὶ ἀκέραιοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου. Ἐὰν ὁ δεύτερος αὐξηθῇ κατὰ 8, ἡ πρόοδος γίνεται ἀριθμητική· ἐὰν δὲ ὁ τελευταῖς ὅρος ταύτης αὐξηθῇ κατὰ 64, ἡ πρόοδος γίνεται πάλιν γεωμετρική. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

√1187) Τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον. Ἐὰν ὁ τρίτος ἐλαττωθῇ κατὰ 16, ἡ πρόοδος καθίσταται ἀριθμητική· ἐὰν δὲ ταύτης ὁ δεύτερος ἐλαττωθῇ κατὰ 2, ἡ πρόοδος γίνεται πάλιν γεωμετρική. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

√1188) Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3,4...... διαιρέσωμεν εἰς ὁμάδας, ὧν ἑκάστη λήγει εἰς τέλειον τετράγωνον, πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς νιοστῆς ὁμάδος;

ἀριθμητική

√1189) Νὰ εὑρεθῇ ~~γεωμετρικὴ~~ πρόοδος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ 4ου καὶ 12ου ὅρου εἶναι 1170 καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ 7ου καὶ 15ου εἶναι 60.

1190) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $2+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}+\dots\dots+\frac{\alpha^\nu+\beta^\nu}{\alpha^\nu\beta^\nu}$ καὶ τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τοῦτο, ὅταν $\nu=\infty$.

1191) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄρθοισμα $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{(\alpha-\beta)\chi}{\beta}+\frac{(\alpha-\beta)\chi^2}{\beta^2}-\frac{(\alpha-\beta)\chi^3}{\beta^3}+\frac{(\alpha-\beta)\chi^4}{\beta^4}-\dots$ ἂν εἶναι $\chi<\beta$.

1192) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς α εἰς τρία μέρη ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον, ἧς οἱ ἄκροι ὅροι διαφέρουσι κατὰ β.—Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=195$, $\beta=120$.

1193) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{\alpha+\gamma}$, $\frac{1}{\beta+\gamma}$ ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$, ἀποτελοῦσι τοιαύτην. Καὶ ἀντιστρόφως.

1194) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου καὶ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

1195) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

1196) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν Κ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ Λ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, θὰ εἶναι $K^3>\Lambda^2$.

1197) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν οἱ ἀριθμοὶ α.β,γ,δ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, θὰ εἶναι $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)=(\beta-\gamma)^2$.

1198) Δύο κινητὰ ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο σημείων Α, Β καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς ΑΒ κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α φοράν. Τὸ πρῶτον διανύει εἰς τὸ πρῶτον λεπτὸν τῆς κινήσεώς του 1 μέτρον, εἰς τὸ δεύτερον 2 μέτρα, εἰς τὸ τρίτον 3 μέτρα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὸ ἕτερον διανύει 3 μέτρα εἰς τὸ πρῶτον λεπτόν, 4 μ. εἰς τὸ δεύτερον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Μετὰ πόσον χρόνον τὸ δεύτερον κινητὸν θὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον, ἐὰν τὸ μῆκος τῆς (ΑΒ) εἶναι 76 μέτρα ;

1199) Τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου ἔχουσιν ἄθροισμα 35, τὰ δὲ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 525. Νὰ εὑρεθῶσιν οὗτοι.

1200) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ, οὗ ὁ λογάριθμος τετραπλασιαζόμενος ὑπερβαίνει κατὰ μονάδα τὸν λογάριθμον τοῦ $\left(\chi^2-\frac{9}{10}\right)$

1201) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-4\chi+\lambda o\gamma\,\mu=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς ;

1202) Ἐλαστικὴ σφαῖρα πίπτουσα ἐξ ὕψους ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ πίπτει. Ἀφεθεῖσα ἀρχικῶς ἐξ ὕψους 8,10μ κατὰ ποίαν ἀναπήδησιν θὰ ὑψωθῇ εἰς ὕψος 1,60 μέτρα ;

1203) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{3^\chi}+3^\chi=\frac{6562}{81}$.

1204) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\lambda o\gamma\,\chi+\lambda o\gamma\,\psi=1$, $\chi^2+\psi^2=101$.

1205) » » » » $\chi^\psi=\psi^\chi$, $\chi^\alpha=\psi^\beta$.

1206) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma\,(3^\chi-6)-\chi\lambda o\gamma 3=0,10914$.

1207) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσς $\frac{10(3^{\chi}+100)}{3^{\chi}} = 15.3^{\chi}+2.$

1208) » » τὸ σύστημα $\chi\psi = 500$, $\chi^{\lambda o\gamma \psi} = 25.$

1209) » » » » $\sqrt[\chi]{y} = 1{,}0473$, $\psi^{\chi} = 32768.$

1210) Ὁ δεύτερος καὶ 7ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουσι γινόμενον 189, οἱ δὲ μεταξὺ αὐτῶν ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα 68. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος αὕτη.

1211) Ὁ πέμπτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ὑπερβαίνει τὸν μὲν τρίτον κατὰ 225, τὸν δὲ τέταρτον κατὰ 125. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος αὕτη.

1212) Ἂν 3000 δραχμαὶ ἀνατοκισθῶσι πρὸς 3,5% ἐτησίως ἐπὶ χρόνον τινὰ καὶ 2703,44 δραχ. πρὸς 4% ἐτησίως εἰς διπλάσιον χρόνον, γίνονται ἴσα ποσά· Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια ἑκάστου δανείου

1213) Ὁ τέταρτος καὶ ὄγδοος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουσιν ἄθροισμα 18, οἱ δὲ κύβοι αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα 3402. Νὰ σχηματισθῇ ἡ πρόοδος αὕτη.

1214) Τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 216, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κύβων αὐτῶν 6056. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς.

1215) Δύο πρόοδοι, ἡ μία ἀριθμητικὴ καὶ ἡ ἄλλη γεωμετρική, ἔχουσι κοινοὺς τοὺς δύο πρώτους ὅρους. Ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετάρτου ὅρου ὑπὲρ τὸν δεύτερον εἶναι 32 διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ 60 διὰ τὴν γεωμετρικήν. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πρόοδοι αὗται.

1216) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\sqrt[4]{\alpha^{\chi}} \,.\, \sqrt{\alpha^{\psi}} = \alpha^{3}\sqrt{\alpha}$,

$$\sqrt{\alpha^{\chi-2}} \,.\, \sqrt[3]{\alpha^{\psi+1}} = \alpha^{4}\sqrt[3]{\alpha}.$$

1217) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $3^{\chi}+5^{\psi} = 52$, $3^{2\chi}+5^{2\psi} = 1354$

1218) » » » » $3^{2\chi-5\psi} = 4125$, $6^{\chi+\psi} = 1349$

1219) » » ἡ ἐξίσωσις $4\,\lambda o\gamma\frac{\chi}{2} + 3\,\lambda o\gamma\frac{\chi}{3} = 5\lambda o\gamma\,\chi - \lambda o\gamma\,27$

1220) Ποία συνθήκη πρέπει νὰ ἐκπληροῦται, ὅπως αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^{4}+\pi\chi^{2}+\kappa=0$, ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον ;

1221) Ἀγοράσας τις κτῆμα ἀνέλαβεν ὑποχρέωσιν νὰ πληρώνῃ ἐπὶ 12 ἔτη εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους 3000 δραχμάς. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ πληρώσῃ ἐφ' ἅπαξ εἰς τὸ τέλος τοῦ 4ου ἔτους, ὅπως ἀπαλλαγῇ τῆς ὑποχρεώσεως ταύτης, τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου πρὸς 4 % ;

1222) Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 % ἐπὶ 10 ἔτη εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους 1000 δραχμάς. Εἰς τὸ τέλος δὲ ἑκάστου τῶν ἀκολούθων 10 ἐτῶν ἀναλαμβάνει 1000 δραχμάς. Πόσα θὰ ἔχῃ ἀκόμη νὰ λάβῃ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς τελευταίας ἀναλήψεως ;

1223) Βαρέλιον περιέχει 228 ὀκάδας οἴνου. Καθ' ἑκάστην ἡμέραν ἀφαιροῦμεν μίαν ὀκᾶν καὶ ἀντικαθιστῶμεν αὐτὴν δι' ὕδατος. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ περιέχῃ τὴν αὐτὴν ποσότητα ὕδατος καὶ οἴνου ;

1224) Ἐδανείσθη τις 34356 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4% καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο ὡς ἑξῆς. Εἰς τὸ τέλος τοῦ α' ἔτους θὰ πληρώσῃ ποσόν τι, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους διπλάσιον καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους τριπλάσιον τοῦ προηγουμένου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν ἑκάστης δόσεως.

1225) Μετὰ πόσα ἔτη 39334 δραχ. ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 3, 5°/₀ γίνονται ἴσαι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν, εἰς ἃ ἀνέρχονται 21637 δραχ. ἀνατοκιζόμεναι πρὸς 3,25°/₀ ἐπὶ 15 ἔτη καὶ 15449 δραχμαὶ πρὸς 3,75°/₀ ἐπὶ 28 ἔτη;

1226) Θεῖος κληροδοτεῖ 20000 δραχμὰς εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του, οἵτινες ἔχουσιν ἡλικίαν 8, 12 καὶ 16 ἐτῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ ἀνατοκισθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου πρὸς 5°/₀ ἐτησίως μέχρι τῆς συμπληρώσεως τοῦ 21ου ἔτους τῆς ἡλικίας. Νὰ κανονισθῇ δὲ τὸ μερίδιον ἑκάστου οὕτως ὥστε, ὅλοι νὰ λαμβάνωσι τὸ αὐτὸ ποσὸν κατὰ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ 21ου ἔτους τῆς ἡλικίας των. Πόσον εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνεψιοῦ;

1227) Ἀνετόκισέ τις 10800 δραχμὰς ἐπί τινα χρόνον. Ἐὰν ὁ χρόνος ἦτο κατὰ ἓν ἔτος ὀλιγώτερος, τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο μικρότερον κατὰ 525,63 δραχμάς· ἐὰν δὲ ἦτο κατὰ ἓν ἔτος μεγαλύτερος, τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο μεγαλύτερον κατὰ 546,67 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

1228) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma\sqrt{7\chi+5}+\lambda o\gamma\sqrt{2\chi+3}=1+\lambda o\gamma\ 4{,}5.$

1229) » » » » $\dfrac{\lambda o\gamma\ (35-\chi^3)}{\lambda o\gamma\ (5-\chi)}=3.$

1230) Ἐδανείσθη τις 7000 δραχμὰς πρὸς 5 °/₀ ἐτησίως. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον, ὥστε μετὰ παρέλευσιν 5 ἐτῶν νὰ ὀφείλῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀρχικοῦ χρέους;

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ—ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ—ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

§ **264. Μεταθέσεις.** Ἐὰν ἔχωμεν δύο διάφορα ἀντικείμενα π. χ. τὰ γράμματα α καὶ β, παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο οὕτω αβ ἢ καὶ οὕτω βα.

Τὰ δύο ταῦτα συμπλέγματα α β, β α τὰ ἐκ τῆς τοιαύτης αὐτῶν παραθέσεως προελθόντα καλοῦνται ***μεταθέσεις*** τῶν α καὶ β.

Ἂν εἰς ἑκατέραν τῶν μεταθέσεων τούτων καὶ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις (ἀρχήν, μέσον, τέλος) θέσωμεν τρίτον ἀντικείμενον γ, εὑρίσκομεν τὰ συμπλέγματα

γαβ, αγβ, αβγ, γβα, βγα, βαγ,

τὰ ὁποῖα καλοῦνται ὁμοίως μεταθέσεις τῶν τριῶν ἀντικειμένων α,β,γ.

Γενικῶς : ***Καλοῦνται μεταθέσεις ν διαφόρων ἀντικειμένων τὰ διάφορα συμπλέγματα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν παραθέτοντες ταῦτα ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς καὶ καθ᾿ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἑκάστη μετάθεσις ν ἀντικειμένων ἔχει ὅλα ταῦτα τὰ ἀντικείμενα. Διαφέρουσι δὲ ἀλλήλων αἱ μεταθέσεις αὗται κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἀντικειμένων.

Τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων ν ἀντικειμένων παριστῶμεν χάριν συντομίας διὰ τοῦ συμβόλου M_ν ἢ διὰ τοῦ ν΄. Εὑρίσκομεν δὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς ἑξῆς.

Προφανῶς ἀπὸ ἓν ἀντικείμενον α μία μόνον μετάθεσις σχηματίζεται. Ὥστε $M_1 = 1$. Νοήσωμεν ἤδη ὅτι ἐσχηματίσαμεν τὰς μεταθέσεις (ν—1) ἀντικειμένων α,β,γ,......π,ρ,σ,τ. Εἰς ἑκάστην τοιαύτην μετάθεσιν ὑπάρχουσιν ν θέσεις, εἰς τὰς ὁποίας δύναται νὰ τεθῇ ἕτερον ἀντικείμενον υ. Εἶναι δὲ αὗται μία μεθ᾿ ἕκαστον ἀντικείμενον τῆς μεταθέσεως καὶ μία εἰς τὴν ἀρχήν.

Ἐὰν λοιπὸν εἰς ἑκάστην μετάθεσιν τῶν ν—1 ἀντικειμένων καὶ εἰς τὰς ν δυνατὰς θέσεις αὐτῆς θέσωμεν ἕτερον ἀντικείμενον υ, θὰ σχηματισθῶσιν ὅλαι αἱ μεταθέσεις τῶν ν ἀντικειμένων α, β, γ, ... π, ρ, σ, τ, υ καὶ ἑκάστη ἅπαξ. Τῷ ὄντι θὰ σχηματισθῇ π. χ. ἡ τυχοῦσα μετάθεσις αγβ . . . πυρστ, διότι ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπ᾿ αὐτῆς τὸ ἀντικείμενον υ, προκύπτει ἡ αβγ . . . πρστ, ἥτις εἶναι μία μετάθεσις τῶν ν—1 ἀντικειμένων ἐχρησιποιήθη ἄρα καὶ αὕτη τεθέντος τοῦ ν εἰς ὅλας τὰς ἐν αὐτῇ δυνατὰς θέσεις, ἄρα καὶ μεταξὺ π καὶ ρ. Οὐδεμία δὲ μετάθεσις τῶν ν ἀντικειμένων σχηματίζεται δίς, διότι ὅσαι μὲν προέρχονται ἐκ τῆς αὐτῆς μεταθέσεως τῶν(ν—1)ἀντικειμένων διαφέρουσι κατὰ τὴν θέσιν τοῦ ἀντικειμένου υ, ὅσαι δὲ προέρχονται ἀπὸ διαφόρους μεταθέσεις παρουσιάζουσι τοὐλάχιστον τὴν διαφορὰν τῶν μεταθέσεων τῶν (ν—1) ἀντικειμένων, ἐξ ὧν προῆλθον.

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστης μεταθέσεως τῶν (ν—1) ἀντικειμένων προῆλθον ν μεταθέσεις τῶν ν ἀντικειμένων, ἕπεται ὅτι ἐσχηματίσθησαν τὸ ὅλον $\nu \cdot M_{\nu-1}$ μεταθέσεις ν ἀντικειμένων, ἤτοι

$$M_\nu = \nu \cdot M_{\nu-1}.$$

Ἐὰν δὲ ν=2, 3, 4 . . . ν εὑρίσκομεν $M_2=2M_1$, $M_3=3.M_2$ $M_4=4M_3$ . . . . . . $M_\nu = \nu.\ M_{\nu-1}$, ὅθεν διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη προκύπτει ὅτι $M_\nu = 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ \nu.M_1$ ἢ ἐπειδὴ $M_1=1$,

$$M_\nu = 1.\ 2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ \nu \qquad (1)$$

Ἄρα: ***Ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων ν ἀντικειμένων εἶναι γινόμενον τῶν ν ἀκεραίων καὶ διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἑξῆς.***

Οὕτω 10 στρατιῶται δύνανται νὰ τεθῶσιν ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς κατὰ

$M_{10}=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10=3628800$ τρόπους.

Ἀσκήσεις. 1231) Πόσαι εἶναι αἱ μεταθέσεις 5 ἀντικειμένων;

1232) Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ παραθέσωμεν 7 βόλους 7 διαφόρων χρωμάτων;

1233) Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου τρεῖς κυλίνδρους ἀνισοϋψεῖς καὶ ἴσης βάσεως;

1234) Πόσους καὶ ποίους τριψηφίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μὲ τὰ ψηφία 1,2,3;

§ **265. Διατάξεις.** Ἔστωσαν τρία ἀντικείμενα διάφορα ἀλλήλων α,β,γ. Ἐὰν παραπλεύρως ἑκάστου θέσωμεν ἕκαστον τῶν ἄλλων σχηματίζονται τὰ συμπλέγματα.

$$\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\alpha,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \gamma\beta \qquad (1)$$

Ταῦτα καλοῦνται ***διατάξεις*** τῶν τριῶν ἀντικειμένων α,β,γ ἀνὰ δύο, ἐν ᾧ α, β, γ εἶναι διατάξεις αὐτῶν ἀνὰ ἕν.

Γενικῶς: ***Διατάξεις μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν (μ>ν) καλοῦμεν τὰ διάφορα συμπλέγματα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν, παραθέτοντες ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ν τυχόντα ἐκ τῶν μ δοθέντων ἀντικειμένων.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἕκαστον ἀντικείμενον εὑρίσκεται ἅπαξ εἰς ἑκάστην διάταξιν. Δύο διατάξεις μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν διαφέρουσιν ἀλλήλων ἢ κατὰ ἓν τοὐλάχιστον ἀντικείμενον ἢ μόνον κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἀντικειμένων αὐτῶν.

§ 266. Ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν. Τὸν ἀριθμὸν τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν παριστῶμεν χάριν συντομίας διὰ τοῦ συμβόλου Δ^{ν}_{μ}, εὑρίσκομεν δὲ ὡς ἑξῆς.

Προφανῶς ἕκαστον τῶν μ διαφόρων ἀντικειμένων α, β, γ, δ,..... π, ρ, σ, τ ἀποτελεῖ μίαν διάταξιν αὐτῶν ἀνὰ ἕν· ἄρα εἶναι $\Delta^{1}_{\mu}=\mu$

Νοήσωμεν ἤδη ὅτι ἔχομεν ἀναγράψει ὅλας τὰς ἀνὰ (ν—1) διατάξεις τῶν μ ἀντικειμένων α, β, γ, δ... π, ρ, σ, τ.

Προφανῶς, ἀφ' οὗ ἑκάστη διάταξις ἔχει ν—1 ἀντικείμενα, λείπουσιν ἀπὸ αὐτὴν μ—(ν—1) ἤτοι (μ—ν+1) ἄλλα ἀντικείμενα ἀπὸ τὰ μ. Ἐὰν λοιπὸν εἰς ἑκάστην τῶν διατάξεων τούτων παραθέσωμεν ἕκαστον τῶν ἀπ' αὐτῆς ἐλλειπόντων (μ—ν+1) ἀντικειμένων, θὰ σχηματισθῶσιν ἐξ ἑκάστης (μ—ν+1) διατάξεις τῶν αὐτῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν· θὰ γείνωσιν ἄρα τὸ ὅλον $(\mu-\nu+1).\Delta^{\nu-1}_{\mu}$ διατάξεις τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν.

Λέγω δὲ ὅτι αἱ σχηματισθεῖσαι διατάξεις αὗται εἶναι ὅλαι αἱ διατάξεις τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν καὶ ἑκάστη ἐσχηματίσθη ἅπαξ. Τῷ ὄντι ἂν ἀπὸ μίαν διάταξιν τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν π.χ. αβγ.....κθ ἀφαιρέσωμεν τὸ τελευταῖον ἀντικείμενον θ, θὰ μείνῃ σύμπλεγμα αβγ.....κ, ὅπερ εἶναι μία διάταξις τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ (ν—1)· ἐχρησιμοποιήθη ἄρα καὶ αὕτη προηγουμένως, τεθέντων ὅλων τῶν ἐλλειπόντων ἀντικειμένων καὶ τοῦ θ ἑπομένως εἰς τὸ τέλος αὐτῆς. Προέκυψε λοιπὸν κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἡ διάταξις αβγ...κθ· ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι καὶ πᾶσα ἄλλη διάταξις τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν προκύπτει κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον.

Οὐδεμία δὲ τοιαύτη διάταξις προέρχεται δίς· διότι ὅσαι μὲν προέρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν ἀνὰ (ν—1) διάταξιν διαφέρουσι κατὰ τὸ τελευταῖον ἀντικείμενον, ὅσαι δὲ προέρχονται ἀπὸ διαφόρους ἀνὰ (ν—1) διατάξεις, παρουσιάζουσι τοὐλάχιστον τὴν διαφορὰν τῶν διατάξεων, ἐξ ὧν προέρχονται.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\Delta^{\nu}_{\mu}=(\mu-\nu+1).\,\Delta^{\nu-1}_{\mu}$. Ἐὰν δὲ ν=2,3,4,......ν εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta^{2}_{\mu}=(\mu-1)\Delta^{1}_{\mu}$, $\Delta^{3}_{\mu}=(\mu-2).\Delta^{2}_{\mu}$, $\Delta^{4}_{\mu}=(\mu-3)\,\Delta^{3}_{\mu}$.......... $\Delta^{\nu}_{\mu}=(\mu-\nu+1).\,\Delta^{\nu-1}_{\mu}$, ἐξ ὧν διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἰσότης

$$\Delta^{\nu}_{\mu}=\Delta^{1}_{\mu}.(\mu-1)\,(\mu-2)\;.\;.\;.\;.\;(\mu-\nu+1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta^{1}_{\mu}=\mu$, αὕτη γίνεται

$$\Delta^{\nu}_{\mu}=\mu\,(\mu-1).(\mu-2)\;.\;.\;.\;.\;(\mu-\nu+1) \qquad (1)$$

Παρατηροῦντες ὅτι μ—ν+1=μ—(ν—1) συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι οἱ παράγοντες (μ—1, (μ—2), . . . [μ—(ν—1)] εἶναι (ν—1) τὸ πλῆθος· ἐὰν δὲ προστεθῇ καὶ εἷς ἀκόμη, ὁ μ, γίνονται τὸ ὅλον ν.

Ἄρα: ***Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον ν ἀκεραίων καὶ κατὰ μονάδα ἐλαττουμένων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ μ καὶ ἑξῆς.*** Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων 5 ἀντικειμένων ἀνὰ 3 εἶναι 5. 4. 3 = 60, ἐν ᾧ ἀνὰ 2 εἶναι 5.4=20.

ΣΗΜ. Ἐὰν ν=μ, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\Delta_{\mu}^{\mu}=\mu\,(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\mu+1)$ ἢ $\Delta_{\mu}^{\mu}=1, 2, 3\ldots\mu$. Παραβάλλοντες ταύτην πρὸς τὴν $M_{\mu}=1.2.3.\ldots.\mu$ συμπεραίνομεν ὅτι: ***τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ μ ἰσοῦ. πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν μ ἀντικειμένων.***

Πράγματι δὲ οὕτω πρέπει νὰ συμβαίνῃ, διότι αἱ διατάξεις μ ἀντικειμένων ἀνὰ μ διαφέρουσιν ἀλλήλων μόνον κατὰ τὴν θέσιν τῶν μ ἀντικειμένων ἅτινα ἑκάστη περιέχει· εἶναι ἄρα μεταθέσεις τῶν μ ἀντικειμένων.

Ἀσκήσεις. 1235) Πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι καὶ πόσοι οἱ τριψήφιοι ἀριθμοί, ὧν τὰ ψηφία εἶναι σημαντικὰ καὶ πάντα διάφορα ἀλλήλων;

1236) Πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι ἀριθμοὶ οἱ μὴ λήγοντες εἰς 0;

1237) Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ 4 εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ 3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

1238) Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ 3 ἰσοῦται πρὸς 30. μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

1239) Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων 8 ἀντικειμένων ἀνὰ ν εἶναι 336. Νὰ ὁρισθῇ ὁ ν.

§ 267. Συνδυασμοί. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἴς τι δοχεῖον ἔχομεν τρία διάφορα ἀντικείμενα α,β,γ. Ἐὰν ἀνασύρωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, ταῦτα δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ τὰ α β ἢ τὰ α γ ἢ τὰ β γ. Τὰ συμπλέγματα α β,α γ,β γ, ὧν ἕκαστον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο οἱαδήποτε τῶν τριῶν ἀντικειμένων α,β,γ, χωρὶς νὰ δίδηται προσοχὴ εἰς τὴν ἀμοιβαίαν αὐτῶν θέσιν, καλοῦνται ***συνδυασμοὶ*** τῶν ἀντικειμένων α, β, γ, ***ἀνὰ δύο.***

Γενικῶς: ***Συνδυασμοὶ μ διαφόρων ἀντικειμένων ἀνὰ ν καλοῦνται τὰ διάφορα συμπλέγματα, τὰ ὁποῖα σχηματίζομεν λαμβάνοντες καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ν ἐκ τῶν ἀντικειμένων.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἕκαστον ἀντικείμενον περιέχεται ἅπαξ εἰς ἕκαστον συνδυασμόν. Δύο δὲ συνδυασμοὶ τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν θὰ διαφέρωσι κατὰ τὸ ἓν τοὐλάχιστον ἀντικείμενον.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τοὺς προηγουμένως σχηματισθέντας συνδυασμούς, αβ,αγ,βγ τῶν α,β,γ ἀνὰ 2 πρὸς τὰς διατάξεις (§ 265) τῶν αὐτῶν ἀντικειμένων ἀνὰ 2 βλέπομεν ὅτι τρεῖς διατάξεις ταὐτίζονται μὲ τρεῖς συνδυασμούς, αἱ δὲ λοιπαὶ διατάξεις γίνονται ἀπὸ τοὺς συνδυασμοὺς (μία διάταξις ἀπὸ ἕνα συνδυασμὸν) διὰ μεταθέσεως τῶν ἐν αὐτῷ περιεχομένων ἀντικειμένων. Οὕτως ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ αβ γίνεται ἡ διάταξις βα, ἐκ τοῦ αγ ἡ γα καὶ ἐκ τοῦ βγ ἡ γβ.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν τοὺς συνδυασμοὺς 4 ἀντικειμένων α,β,γ,δ ἀνὰ τρεῖς καὶ κάμωμεν εἰς τὰ ἀντικείμενα ἑκάστου ὅλας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις, θὰ σχηματίσωμεν ὅλας τὰς διατάξεις τῶν 4 ἀντικειμένων ἀνὰ 3 καὶ ἑκάστην ἅπαξ. Διότι τυχοῦσα διάταξις π. χ. ἡ γαβ, προέρχεται ἀπὸ τὸν συνδυασμὸν αβγ, ὅστις ἔχει τὰ αὐτὰ ἀντικείμενα, διὰ καταλλήλου τοποθετήσεως τῶν ἀντικειμένων, ἑπομένως δὲν παρελήφθη αὕτη, ἀφ' οὗ εἰς τὰ ἀντικείμενα ὅλων τῶν συνδυασμῶν ἔγειναν ὅλαι αἱ δυναταὶ μεταθέσεις. Οὐδεμία δὲ διάταξις σχηματίζεται δίς, διότι ὅσαι μὲν προέρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διαφέρουσι κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἀντικειμένων, ὅσαι δὲ προέρχονται ἐκ διαφόρων συνδυασμῶν παρουσιάζουσι τοὐλάχιστον τὴν διαφορὰν τῶν συνδυασμῶν, ἐξ ὧν προῆλθον.

Γενικῶς: ***Ὅλαι αἱ μεταθέσεις τῶν ν ἀντικειμένων ἑκάστου τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν ἀποτελοῦσιν ὅλας τὰς διατάξεις τῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν καὶ μόνον αὐτάς.***

§ 268. Ἀριθμὸς συνδυασμῶν.—Τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν εὑρίσκομεν ὡς ἀκολούθως. Νοήσωμεν ὅτι ἔχομεν ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν, ὧν τὸ πλῆθος ἔστω Σ_μ^ν. Ἐὰν εἰς τὰ ν ἀντικείμενα ἑκάστου τούτων κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις, θὰ σχηματίσωμεν, ὡς προηγουμένως εἴπομεν, ὅλας τὰς διατάξεις μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν καὶ μόνον αὐτάς. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστου συνδυασμοῦ θὰ σχηματισθῶσι τόσαι διατάξεις, ὅσαι εἶναι αἱ μεταθέσεις τῶν ν ἀντικειμένων αὐτοῦ, ἤτοι M_ν, ἐκ τῶν Σ_μ^ν συνδυασμῶν θὰ σχηματισθῶσι $M_\nu . \Sigma_\mu^\nu$ διατάξεις.

Θὰ εἶναι ἄρα $M_\nu . \Sigma_\mu^\nu = \Delta_\mu^\nu$. ὅθεν

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\Delta_\mu^\nu}{M_\nu}$$

ἢ

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1).(\mu-2)........(\mu-\nu+1)}{1.2.3.......\nu} \qquad (1)$$

Ἄρα: ***Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διατάξεων μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταθέσεων ν ἀντικειμένων.***

Ἢ: Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου ν ἀκεραίων καὶ ἀπὸ τοῦ μ κατὰ μονάδα ἐλαττουμένων ἀριθμῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἑξῆς μέχρι τοῦ ν.

Οὕτως $\Sigma_4^2 = \frac{4.3}{1.2} = 6$, $\Sigma_5^3 = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$, $\Sigma_7^4 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 35$ κ.τ.λ.

Ἰδιότητες τῶν συνδυασμῶν.

§ **269. Θεώρημα I.** ***Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ μ—ν.***

Ἀπόδειξις Γνωρίζομεν ὅτι $\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\ldots\nu}$ καὶ $\Sigma_\mu^{\mu-\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\nu+1)}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-\nu)}$. Ἐὰν δὲ τρέψωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)(\mu-\nu)\ldots3.2.1.}{1.2.3\ldots\ldots\nu.1.2.3\ldots\ldots(\mu-\nu)} = \frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu.1.2.3\ldots(\mu-\nu)}$$

$$= \frac{M\mu}{M\nu.M\mu-\nu}$$

$$\Sigma_\mu^{\mu-\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\nu+1)\nu\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots(\mu-\nu).1.2.3\ldots\ldots\nu} = \frac{1.2.3\ldots\ldots\mu}{1.2.3\ldots\ldots\nu.12.3\ldots(\mu-\nu)}$$

$$= \frac{M\mu}{M\nu M\mu-\nu}$$

ὅθεν $\Sigma_\mu^\nu = \Sigma_\mu^{\mu-\nu}$. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Παρατηροῦντες ὅτι εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ μ, ἀντιστοιχεῖ εἷς συνδυασμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ ὑπολειπόμενα (μ—ν) ἀντικείμενα καὶ τἀνάπαλιν, συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος τούτου.

§ **270. Θεώρημα II.** ***Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδυασμῶν (μ—1) ἀντικειμένων ἀνὰ ν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδυασμῶν (μ—1) ἀντικειμένων ἀνὰ (ν—1).***

Ἀπόδειξις. Νοήσωμεν ὅτι ἔχομεν σχηματίσει τοὺς συνδυασμοὺς μ ἀντικειμένων α,β,γ...... π,ρ,σ,τ ἀνὰ ν, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι Σ_μ^ν. Φαντασθῶμεν ὅτι χωρίζομεν τοὺς μὴ περιέχοντας τὸ ἀντικείμενον α ἀπὸ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι περιέχουσιν αὐτό.

Οἱ πρῶτοι τούτων εἶναι προφανῶς συνδυασμοὶ τῶν (μ—1) ἀντικειμένων β, γ, δ, ... π, ρ, σ, τ ἀνὰ ν καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $\Sigma_{\mu-1}^\nu$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πλήθους τῶν ἄλλων συνδυασμῶν σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ἕκαστος τούτων ἔχει τὸ ἀντικείμενον α καὶ (ν—1) ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀντικείμενα β, γ, δ, ... π ρ, σ, τ. Ἐὰν ἑπομένως ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ὅλους τούτους τὸ α, θὰ μείνωσιν οἱ συνδυασμοὶ τῶν (μ—1) ἀντικειμένων β, γ, δ, . . . π, ρ, σ, τ ἀνὰ (ν—1), ὧν τὸ πλῆθος εἶναι $\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πλῆθος τοῦτο δὲν βλάπτεται, ἂν εἰς ἕκαστον θέσωμεν πάλιν τὸ α, ἕπεται ὅτι οἱ περιέχοντες τὸ α συνδυασμοὶ εἶναι $\Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}$. Κατ᾽ ἀκολουθίαν εἶναι

$$\Sigma^{\nu}_{\mu} = \Sigma^{\nu}_{\mu-1} + \Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}.$$

Ἀσκήσεις. 1240) Εἰς μίαν ἐκλογὴν εἶναι 6 ὑποψήφιοι, ἕκαστος δὲ ἐκλογεὺς ὀφείλει νὰ ἀναγράψῃ 4 μόνον ὑποψηφίους εἰς τὸ ψηφοδέλτιόν του. Κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ καταρτίσῃ τὸ ψηφοδέλτιόν του;

1241) Πόσας διαγωνίους ἔχει εὐθ. σχῆμα μ πλευρῶν;

1242) Πόσας πλευρὰς ἔχει εὐθ. σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει 54 διαγωνίους;

1243) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι γινόμενον ν ἀκεραίων καὶ διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου 1. 2. 3. . . . . ν.

1244) Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ 4 εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδυασμῶν μ ἀντικειμένων ἀνὰ 3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

1245) Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν ν ἀντικειμένων ἀνὰ 4 ἔχει λόγον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν (ν—2) ἀντικειμένων ἀνὰ 2 ἴσον πρὸς $\frac{15}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

§ **271. Στοιχειώδης ἔννοια πιθανοτήτων.** Ἐὰν ῥίψωμεν εἰς τὸν ἀέρα νόμισμα, τοῦτο πίπτον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι ἐξ ἴσου δυνατὸν νὰ παρουσιάσῃ τὸ πρόσωπον ἢ τὰ γράμματα. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν ἐνδεχομένων εἶναι δύο. Ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ εἶναι μία εὐνοϊκὴ περίπτωσις νὰ παρουσιάσῃ πρόσωπον, ἤτοι αἱ εὐνοϊκαὶ διὰ τὸ πρόσωπον περιπτώσεις, εἶναι ὡς ὁ 1 πρὸς τὸν 2. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ ***πιθανότης*** νὰ παρουσιασθῇ πρόσωπον εἶναι $\frac{1}{2}$.

Ὁμοίως ἂν εἰς δοχεῖον ὑπάρχωσι 11 μικραὶ σφαῖραι, καθ᾽ ὅλα τὰ ἄλλα ἐντελῶς ὅμοιαι, ἀλλ᾽ αἱ μὲν 7 εἶναι λευκαὶ καὶ αἱ 4 μέλαιναι, πρόκειται δὲ νὰ ἐξαχθῇ κατὰ τύχην μία, εἶναι ἐξ ἴσου δυνατὸν νὰ ἐξαχθῇ οἱαδήποτε ἐξ αὐτῶν. Ἄρα αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι 11. Ἐπειδὴ δὲ αἱ λευκαὶ εἶναι 7, αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις νὰ ἐξαχθῇ λευκὴ εἶναι 7. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ***πιθανότης*** νὰ ἐξαχθῇ λευκὴ εἶναι $\frac{7}{11}$.

Γενικῶς: ***Καλεῖται πιθανότης πραγματοποιήσεως ἐνδεχομένου τινὸς ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἂν ἡ πραγματοποίησις ὅλων εἶναι ἐξ ἴσου δυνατή.***

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Παράδ. 1ον. ***Ἐὰν ἔχῃ τις μίαν λαχειοφόρον ὁμολογίαν, ποίαν πιθανότητα ἔχει νὰ κερδίσῃ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ κληρωτὶς ἔχει μ ἀριθμοὺς ὁμολογιῶν, θὰ ἐξαχθῶσι δὲ ν κερδίζοντες ἀριθμοί;***

Ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ ἀριθμῶν ἀνὰ ν, διότι οἱ ἐξαχθησόμενοι ν ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσιν ἕνα τοιοῦτον συνδυασμόν, ἐξ ἴσου δὲ δυνατὴ εἶναι καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ἄλλου τινὸς συνδυασμοῦ ἀριθμῶν. Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχουσι τὸν ἀριθμὸν τῆς ὁμολογίας, ἤτοι $\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}$ (§ 270). Ἡ πιθανότης ἄρα νὰ κερδίσῃ εἶναι

$\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1} : \Sigma_{\mu}^{\nu} = \frac{\nu}{\mu}$.

Ἀσκήσεις. 1246) Λαχεῖον ἀποτελεῖται ἐκ 200 ἀριθμῶν, ἐξ ὧν εἷς θὰ κερδίσῃ ἓν ὡρολόγιον. Ποίαν πιθανότητα κέρδους ἔχει ὁ ἔχων τὸν ἀριθμὸν 25; Ποίαν δὲ ὁ ἔχων τοὺς ἀριθμοὺς 43 καὶ 176;

1247) Ἂν ῥίψῃ τις δύο κύβους ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους, ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ ἔλθωσιν ἄνω ἕδραι, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 8;

1248) Εἰς δοχεῖον περιέχονται 3 λευκαὶ σφαῖραι, 4 ἐρυθραὶ καὶ 8 πράσιναι, ἐξάγεται δὲ κατὰ τύχην μία. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ λευκή, πρασίνη ἢ ἐρυθρά;

1249) Εἰς τὸ προηγούμενον ζήτημα ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ μὴ ἐξαχθῇ λευκὴ σφαῖρα;

1250) Ἐὰν ῥίψωμεν εἰς τὸν ἀέρα δύο φορὰς νόμισμα, ποία ἡ πιθανότης νὰ παρουσιάσῃ καὶ τὰς δύο φορὰς πρόσωπον;

1251) Ἐὰν ῥίψωμεν εἰς τὸν ἀέρα τρεῖς φορὰς νόμισμα, ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ παρουσιάσῃ καὶ τὰς τρεῖς φορὰς πρόσωπον; Ποία δὲ ἡ πιθανότης νὰ παρουσιάσῃ δύο φορὰς πρόσωπον καὶ μίαν γράμματα;

1252) Ἔχει τις μίαν λαχειοφόρον ὁμολογίαν δανείου ὅπερ κατενεμήθη εἰς 600000 ὁμολογίας. Ἐὰν κατὰ τὴν πρώτην κλήρωσιν ἐξαχθῶσι 1000 ἀριθμοὶ κερδίζοντες διάφορα ποσά, ποία ἡ πιθανότης νὰ κερδίσῃ ἓν τῶν ποσῶν τούτων; Καὶ ποία ἡ πιθανότης ὁ ἀριθμὸς τῆς ὁμολογίας του νὰ ἐξαχθῇ πρῶτος;

Τύπος διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.

§ 272. Πρόβλημα I. ***Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ παράστασις $(\chi+\alpha)^{\mu}$ ἔνθα μ*** εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι $(\chi+\alpha)^2 = \chi^2 + 2\alpha\chi + \alpha^2$ καὶ

$$(\chi+\alpha)^3 = \chi^3 + 3\alpha\chi^2 + 3\alpha^2\chi + \alpha^3.$$

Ἐπειδὴ δὲ $1 = \Sigma_2^2 = \Sigma_3^3$, $2 = \Sigma_2^1$, $3 = \Sigma_3^1 = \Sigma_3^2$, αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(\chi+\alpha)^2 = \chi^2 + \Sigma_2^1\, \alpha\chi + \Sigma_2^2\, \chi^2$$

$$(\chi+\alpha)^3 = \chi^3 + \Sigma_3^1\, \alpha\chi^2 + \Sigma_3^2\, \alpha^2\chi + \Sigma_3^3\, \alpha^3,$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἀνάλογος ἰσότης ἰσχύει, ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι $(\mu-1)$, ἤτοι ὅτι:

$$(\chi+\alpha)^{\mu-1} = \chi^{\mu-1} + \Sigma^1_{\mu-1}\,\alpha\chi^{\mu-2} + \Sigma^2_{\mu-1}\,\alpha^2\chi^{\mu-3} + \Sigma^3_{\mu-1}\,\alpha^3\chi^{\mu-4} + \dots\dots$$
$$+ \Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}\alpha^{\nu-1}\chi^{\mu-\nu} + \Sigma^{\nu}_{\mu-1}\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu-1} + \dots\dots + \Sigma^{\mu-2}_{\mu-1}\alpha^{\mu-2}\chi + \Sigma^{\mu-1}_{\mu-1}\alpha^{\mu-1}. \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ $(\chi+\alpha)$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\chi+\alpha)^{\mu} = \chi^{\mu} + \Sigma^1_{\mu-1}\,\alpha\chi^{\mu-1} + \Sigma^2_{\mu-1}\,\alpha^2\chi^{\mu-2} + \Sigma^3_{\mu-1}\alpha^3\chi^{\mu-3} + \dots\dots$$
$$+ \Sigma^{\nu}_{\mu-1}\,\alpha^{\nu}\,\chi^{\mu-\nu} + \dots\dots + \Sigma^{\mu-1}_{\mu-1}\,\alpha^{\mu-1}\chi.$$
$$\alpha\chi^{\mu-1} + \Sigma^1_{\mu-1}\,\alpha^2\chi^{\mu-2} + \Sigma^2_{\mu-1}\alpha^3\chi^{\mu-3} + \dots + \Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}\,\alpha^{\nu}\,\chi^{\mu-\nu} + \dots\dots$$
$$+ \Sigma^{\mu-2}_{\mu-1}\,\alpha^{\mu-1}\chi. + \Sigma^{\mu-1}_{\mu-1}\,\alpha^{\mu}.$$

$$\text{καὶ } (\chi+\alpha)^{\mu} = \chi^{\mu} + (\Sigma^1_{\mu-1}+1)\,\alpha\chi^{\mu-1} + (\Sigma^2_{\mu-1}+\Sigma^1_{\mu-1})\,\alpha^2\chi^{\mu-2} +$$
$$(\Sigma^3_{\mu-1} + \Sigma^2_{\mu-1})\,\alpha^3\,\chi^{\mu-3} + \dots\dots + (\Sigma^{\nu}_{\mu-1} + \Sigma^{\nu-1}_{\mu-1})\,\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu} + \dots\dots$$
$$+ (\Sigma^{\mu-1}_{\mu-1} + \Sigma^{\mu-2}_{\mu-1})\,\alpha^{\mu-1}\chi + \Sigma^{\mu-1}_{\mu-1}\,\alpha^{\mu}.$$

Ἐπειδὴ (§ 270) $\Sigma^1_{\mu-1}+1=\mu-1+1=\mu=\Sigma^1_{\mu}$,
$(\Sigma^2_{\mu-1} + \Sigma^1_{\mu-1}) = \Sigma^2_{\mu}, \dots (\Sigma^{\nu}_{\mu-1} + \Sigma^{\nu-1}_{\mu-1}) = \Sigma^{\nu}_{\mu}, \dots, \Sigma^{\mu-1}_{\mu-1} = \Sigma^{\mu}_{\mu}$, αὕτη γίνεται

$$(\chi+\alpha)^{\mu} = \chi^{\mu} + \Sigma^1_{\mu}\,\alpha\chi^{\mu-1} + \Sigma^2_{\mu}\,\alpha^2\,\chi^{\mu-2} + \dots + \Sigma^{\nu}_{\mu}\,\alpha^{\nu}\,\chi^{\mu-\nu} + \dots\dots +$$
$$\Sigma^{\mu-1}_{\mu}\,\alpha^{\mu-1}\chi + \Sigma^{\mu}_{\mu}\,\alpha^{\mu}. \quad (2)$$

Ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι αὐτὴ ἡ (1), ἀλλὰ ἐκθέτης τοῦ διωνύμου εἶναι εἰς ταύτην μ.

Ἀπεδείχθη δηλ. ὅτι, ἂν ἰσχύῃ ὁ τύπος οὗτος (2) δι᾿ ἐκθέτην τινά, θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μεγαλύτερον. Ἐπειδὴ δὲ ἰσχύει δι᾿ ἐκθέτην 3, ἕπεται ὅτι θὰ ἰσχύῃ καὶ δι᾿ ἐκθέτην 4, ἀλλὰ τότε θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὸν 5 καὶ καθ᾿ ἑξῆς οὕτω διὰ πάντα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἐκθέτην.

Ὁ τύπος (2) καλεῖται ***τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος***, τὸ δὲ δεύτερον μέλος αὐτοῦ καλεῖται ***ἀνάπτυγμα*** τῆς μυοστῆς δυνάμενος τοῦ διωνύμου $(\chi+\alpha)$.

Ἂν ἀντὶ τῶν συντελεστῶν $\Sigma^1_{\mu}, \Sigma^2_{\mu} \dots\dots \Sigma^{\nu}_{\mu}$ θέσωμεν τὰς γνωστὰς (§ 268) αὐτῶν τιμάς, ὁ τύπος τοῦ Νεύτωνος γίνεται

$$(\chi+\alpha)^{\mu} = \chi^{\mu} + \alpha\chi^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2\chi^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3.}\alpha^3\chi^{\mu-3} + \dots$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\dots\dots\nu}\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu} + \dots\dots + \mu\alpha^{\mu-1}\chi + \alpha^{\mu}.$$

Ἂν ἐν τῷ τύπῳ (2) θέσωμεν $-\alpha$ ἀντὶ α, οἱ ἀρτίας τάξεως ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος θὰ λάβωσι τό $-$, διότι ἕκαστος τούτων περιέχει περιττὴν δύναμιν τοῦ $(-\alpha)$. Οὕτως ὁ τύπος γίνεται

$$(\chi-\alpha)^{\mu} = \chi^{\mu} - \Sigma^1_{\mu}\,\alpha\chi^{\mu-1} + \Sigma^2_{\mu}\,\alpha^2\,\chi^{\mu-2} - \Sigma^3_{\mu}\,\alpha^3\,\chi^{\mu-3} + \dots\dots$$
$$\pm \Sigma^{\nu}_{\mu}\,\alpha^{\nu}\,\chi^{\mu-\nu} \mp \dots\dots \pm \alpha^{\mu} \quad (3)$$

Ἰδιότητες τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωντος

§ **273.** Α΄. Παρατηροῦντες ὅτι ἐν τῷ ἀναπτύγματι τοῦ δυωνύμου περιέχονται πᾶσαι αἱ δυνάμεις τοῦ χ ἀπὸ τῆς μ μέχρι τῆς μηδενικῆς συμπεραίνομεν ὅτι :

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος τῆς $\mu^{\eta\varsigma}$ δυνάμεως τοῦ δυωνύμου εἶναι $\mu+1$.

Β΄. Ἐπειδὴ $\Sigma^1_\mu = \Sigma^{\mu-1}_\mu, \Sigma^2_\mu = \Sigma^{\mu-2}_\mu$ κτλ (§ 269) συμπεραίνομεν ὅτι:

Οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀπεχόντων ὅρων εἶναι ἴσοι.

Γ΄. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ μὲν χ βαίνουσιν ἐλαττούμενοι κατὰ 1 ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, οἱ δὲ τοῦ α αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα· τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ἐκθετῶν τοῦ χ καὶ α εἰς ἕκαστον ὅρον εἶναι μ, ἤτοι τὸ ἀνάπτυγμα εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ βαθμοῦ μ πρὸς α καὶ χ.

Δ΄. Σημειοῦντες διὰ O_ν τὸν νυοστὸν ὅρον τοῦ ἀναπτύγματος καὶ διὰ $O_{\nu+1}$ τὸν ἑπόμενον τοῦ νυοστοῦ ὅρον, θὰ ἔχωμεν

$O_\nu = \Sigma^{\nu-1}_\mu \; \alpha^{\nu-1} \chi^{\mu-\nu+1}$ καὶ $O_{\nu+1} = \Sigma^\nu_\mu \alpha^\nu \chi^{\mu-\nu}$, ὅθεν διὰ διαιρέσεως τῶν μελῶν τῆς δευτέρας ἰσότητος διὰ τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῆς πρώτης, προκύπτει ἡ ἰσότης $\dfrac{O_{\nu+1}}{O_\nu} = \dfrac{\Sigma^\nu_\mu}{\Sigma^{\nu-1}_\mu} \cdot \dfrac{\alpha}{\chi}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\Sigma^\nu_\mu}{\Sigma^{\nu-1}_\mu} = \dfrac{\mu-\nu+1}{\nu}$, ἕπεται ὅτι

$$\Sigma^\nu_\mu = \frac{\mu-\nu+1}{\nu}\, \Sigma^{\nu-1}_\mu \quad \text{καὶ} \quad O_{\nu+1} = \frac{\mu-\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha}{\chi} \cdot O_\nu.$$

Ἄρα· ***Ἵνα ἔκ τινος ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος σχηματίσωμεν τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ γνωστοῦ ὅρου ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ χ ἐν τῷ ὅρῳ τούτῳ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α ηὐξημένου κατὰ 1 Παρὰ τὸ οὕτως δὲ εὑρισκόμενον πηλίκον γράφομεν τὸ α μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μεγαλύτερον καὶ τὸ χ μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μικρότερον.***

Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι $(\chi+\alpha)^4 = \chi^4 + 4\alpha\chi^3 + 6\alpha^2\chi^2 + 4\alpha^3\chi + \alpha^4$,

$$(\chi+\alpha)^5 = \chi^5 + 5\alpha\chi^4 + 10\alpha^2\chi^3 + 10\alpha^3\chi^2 + 5\alpha^4\chi + \alpha^5 \quad \kappa.\ \tau.\ \lambda.$$

Διὰ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi-\alpha)^\mu$ ἰσχύει ὁ αὐτὸς κανών, μόνον πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα νὰ θέτωμεν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ πρὸ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος.

Οὕτω $(\chi-\alpha)^4 = \chi^4 - 4\alpha\chi^3 + 6\alpha^2\chi^2 - 4\alpha^3\chi + \alpha^4$

$(\chi-\alpha)^5 = \chi^5 - 5\alpha\chi^4 + 10\alpha^2\chi^3 - 10\alpha^3\chi^2 + 5\alpha^4\chi - \alpha^5$ κ.τ.λ.

Ε΄. Ἐκ τῆς προηγουμένως ἀποδειχθείσης ἰσότητος

$\Sigma^{\nu}_{\mu} = \frac{\mu-\nu+1}{\nu} \Sigma^{\nu-1}_{\mu}$ ἕπεται ὅτι ὁ συντελεστὴς Σ^{ν}_{μ} θὰ εἶναι μεγαλύτερος, ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ $\Sigma^{\nu-1}_{\mu}$ καθ' ὅσον εἶναι $\frac{\mu-\nu+1}{\nu} > 1$, $\frac{\mu-\nu+1}{\nu} = 1$ καὶ $\frac{\mu-\nu+1}{\nu} < 1$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τούτων προκύπτουσιν ἀντιστοίχως $\frac{\mu+1}{2} > \nu$, $\frac{\mu+1}{2} = \nu$ καὶ $\frac{\mu+1}{2} < \nu$, ἕπεται ὅτι:

α΄) Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων βαίνουσιν αὐξανόμενοι μέχρι τοῦ μεσαίου ὅρου, μεθ' ὃν ἄρχονται ἐλαττούμενοι, ἂν ὁ μ εἶναι ἄρτιος·

β΄) Ἂν ὁ μ εἶναι περιττός, ὁ ὅρος τῆς τάξεως $\frac{\mu+1}{2}$ δηλ. ὁ νυοστὸς ἔχει συντελεστὴν ἴσον πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀκολούθου ὅρου, μεθ' ὃν οἱ συντελεσταὶ βαίνουσιν ἐλαττούμενοι. Ὑπάρχουσιν ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δύο ὅροι ἴσον τῶν ἄκρων ἀπέχοντες καὶ ἔχοντες τὸν αὐτὸν συντελεστήν. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν εἰς τὰ ἀνωτέρω ἀναγραφέντα ἀναπτύγματα τοῦ $(\chi+\alpha)^5$ καὶ $(\chi-\alpha)^5$.

Ἀσκήσεις. 1253) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ δυνάμεις $(\chi\pm\alpha)^6$.

1254) » » » » $(\chi\pm\alpha)^7$ καὶ $(\chi\pm\alpha)^8$

1255) » » » » $(1\pm\alpha)^{\mu}$

1256) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $2^{\mu} = 1+\Sigma^1_{\mu}+\Sigma^2_{\mu}+\ldots+\Sigma^{\mu}_{\mu}$. (Θέττομεν ἐν τῷ (2) χ=1 καὶ α=1).

1257) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\Sigma^1_{\mu}+\Sigma^3_{\mu}+\Sigma^5_{\mu}+\ldots = 1+\Sigma^2_{\mu}+\Sigma^4_{\mu}+\ldots$

1258) » » » $\Sigma^1_{\mu}+\Sigma^3_{\mu}+\Sigma^5_{\mu}\ldots\ldots = 2^{\mu-1}$

1259) » » » $\Sigma^2_{\mu}+\Sigma^4_{\mu}+\Sigma^6_{\mu}+\ldots\ldots = 2^{\mu-1}-1$.

1260) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ δυνάμεις $(\alpha\pm\beta)^7$ καὶ $(\alpha^2\pm\beta^2)^5$.

1261) Νὰ ἀναπτυχθῇ τὸ ἄθροισμα $(\chi+\alpha)^5+(\chi-\alpha)^5$ καὶ τὸ $(1+\alpha)^4-(1-\alpha)^4$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ **274. Θεώρημα Ι.** *Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν δι' ἑκάστης τῶν παραστάσεων $(\chi-\alpha),(\chi-\beta),(\chi-\gamma),\ldots(\chi-\tau)$, εἶναι δὲ $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\cdots\cdots\neq\tau$, τὸ πολυώνυμον τοῦτο διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\cdots\cdots(\chi-\tau)$. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\Pi(\chi)$ διαιρεῖται διὰ

$$(\chi-\alpha),(\chi-\beta),(\chi-\gamma),\ldots(\chi-\tau),$$

ἕπεται (§ 53 Πόρ. III) ὅτι $\Pi(\alpha)=0,\ \Pi(\beta)=0,\ \Pi(\gamma)=0,\ldots,\Pi(\tau)=0$.

Ἐὰν δὲ κληθῇ $P(\chi)$ τὸ πηλίκον $\Pi(\chi):(\chi-\alpha)$, θὰ εἶναι

$$\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)P(\chi) \qquad (1)$$

Ἡ ταὐτότης αὕτη διὰ $\chi=\beta$ γίνεται $\Pi(\beta)=(\beta-\alpha)P(\beta)$ ἢ $0=(\beta-\alpha)P(\beta)$.

Ἐπειδὴ δὲ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι $\alpha\neq\beta$, ἕπεται ὅτι $\beta-\alpha\neq0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $P(\beta)=0$. Τὸ πολυώνυμον ἄρα (§ 53) $P(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Καὶ ἂν τεθῇ $P(\chi):(\chi-\beta)=\Sigma(\chi)$, θὰ εἶναι $P(\chi)=(\chi-\beta)\Sigma(\chi)$, ἡ δὲ ταὐτότης (1) γίνεται $\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)\Sigma(\chi)$ (2)

Αὕτη διὰ $\chi=\gamma$ γίνεται $\Pi(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\Sigma(\gamma)$ ἢ

$$0=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\Sigma(\gamma).$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\gamma-\alpha\neq0,\gamma-\beta\neq0$, ἕπεται ὅτι $\Sigma(\gamma)=0$ καὶ ἐπομένως $\Sigma(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\gamma$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\Sigma(\chi):(\chi-\gamma)=K(\chi)$, θὰ εἶναι $\Sigma(\chi)=(\chi-\gamma)K(\chi)$, ἡ δὲ ταὐτότης (2) γίνεται

$$\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)K(\chi).$$

Οὕτως ἐξακολουθοῦντες εὑρίσκομεν ὅτι

$$\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots\ldots(\chi-\tau)T(\chi).$$

$$\text{ἢ } \Pi(\chi)=[(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots(\chi-\tau)]\ T(\chi), \qquad (3)$$

ὅθεν καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ διαίρεσις $\Pi(\chi):[(\chi-\alpha)(\chi-\beta)\ldots(\chi-\tau)]$ εἶναι τελεία. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως Ἐὰν $\Pi(\chi)$ διαιρεῖται διὰ $[(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots(\chi-\tau)]$ καὶ κληθῇ $T(\chi)$ τὸ πηλίκον, θὰ εἶναι

$$\Pi(\chi)=[\ (\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots(\chi-\tau)\ ].T(\chi) \text{ ἢ}$$

$\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots(\chi-\tau).T(\chi)$. Ἐκ ταύτης εἶναι φανερὸν ὅτι $\Pi(\chi)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν παραγόντων

$$(\chi-\alpha),(\chi-\beta),\ldots(\chi-\tau).$$

§ **275. Θεώρημα ΙΙ.** *Ἐὰν πολυώνυμον*

$$A\chi^{\mu}+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}\chi+A_{\mu}$$

μηδενίζηται διὰ μ διαφόρους ἀλλήλων τιμὰς $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\tau$ τοῦ χ, τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $A(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots(\chi-\tau)$.

Ἀπόδειξις. Τὸ πολυώνυμον ὡς μηδενιζόμενον διὰ τὰς τιμὰς $\alpha,\ \beta,\ldots\tau$ τοῦ χ διαιρεῖται δι' ἑκάστου τῶν δυωνύμων $(\chi-\alpha)$,

$(\chi-\beta),.....(\chi-\tau)$, κατ' ἀκολουθίαν δὲ (§ 274) καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha)\,(\chi-\beta).....(\chi-\tau)$.

Ἐὰν δὲ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, ὁ α΄ ὅρος αὐτοῦ εἶναι χ^μ. Εἶναι ἄρα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ μὲ τὸν διαιρετέον καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶναι μηδενὸς βαθμοῦ πρὸς χ, ἤτοι εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ χ. Περιέχει ἄρα τὸ πηλίκον τοῦτο ἕνα μόνον ὅρον, ὅστις εὑρίσκεται (§ 52) διὰ διαιρέσεως τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἤτοι εἶναι $A\chi^\mu : \chi^\mu = A$. Κατ' ἀκολουθίαν εἶναι

$$A\chi^\mu + A_1\chi^{\mu-1} + A_2\,\chi^{\mu-2} + \cdots + A_\mu = A(\chi-\alpha)\,(\chi-\beta)\,(\chi-\gamma)\cdots(\chi-\tau).$$

ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. *Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα βαθμοῦ μ ἔχωσι τὸν αὐτὸν ὅρον τοῦ μ βαθμοῦ καὶ μ τοὐλάχιστον κοινὰς ῥίζας διαφόρους ἀλλήλων, ταῦτα εἶναι ἐκ ταὐτότητος ἴσα.*

Διότι, ἂν $\alpha,\beta,\gamma,.....\tau$ εἶναι μ κοιναὶ αὐτῶν ῥίζαι διάφοροι ἀλλήλοις· ἑκάτερον τῶν πολυωνύμων τούτων ἰσοῦται πρὸς

$$A(\chi-\alpha)\,(\chi-\beta).....(\chi-\tau).$$

Οὕτω παρατηροῦντες ὅτι ἑκάτερον τῶν πολυωνύμων $(\chi+\beta)(\chi+\beta+1)(\chi+\beta+2)\,(\chi+\beta+3)$ καὶ $[(\chi+\beta)^2+3(\chi+\beta)+1]^2-1$ εἶναι 4ου βαθμοῦ, ἔχει τὸν αὐτὸν ὅρον χ^4 τοῦ 4ου βαθμοῦ καὶ μηδενίζεται διὰ τὰς τιμὰς $-\beta$, $-(\beta+1)$, $-(\beta+2)$, $-(\beta+3)$ τοῦ χ, συμπεραίνομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν α τοῦ χ. Ἤτοι $(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta+2)\,(\alpha+\beta+3)=[(\alpha+\beta)^2+3(\alpha+\beta)+1]^2-1$.

§ **276. Θεώρημα III.** *Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιον πρὸς χ πολυώνυμον ἐκ ταὐτότητο μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ ὅλων τῶν δυνάμεων τοῦ χ νὰ εἶναι μηδέν.*

Ἔστω ἀκέραιον πρὸς χ πολυώνυμον

$$\Pi_{(\chi)} = A\chi^\mu + A_1\chi^{\mu-1} + A_2\chi^{\mu-2} + \cdots + A_\mu,$$

ὅπερ εἶναι ἐκ ταὐτότητος μηδέν, ἤτοι μηδενίζεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. Λέγω ὅτι $A=0,\ A_1=0,\ A_2=0,......A_\mu=0$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $\alpha,\beta,\gamma,....\tau$ εἶναι μ τιμαὶ τοῦ χ διάφοροι ἀλλήλων, ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν τὸ $\Pi_{(\chi)}$ μηδενίζεται καὶ δι' αὐτάς, θὰ εἶναι

$$\Pi_{(\chi)} = A(\chi-\alpha)\,(\chi-\beta)...(\chi-\tau).$$

Ἐὰν δὲ ρ εἶναι τιμὴ τοῦ χ διάφορος τῶν $\alpha,\beta,\gamma,....\tau$, θὰ εἶναι

$$\Pi_{(\rho)} = A(\rho-\alpha)\,(\rho-\beta)\,(\rho-\gamma)......(\rho-\tau).$$

Καὶ ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι καὶ $\Pi_{(\rho)}=0$, ἕπεται ὅτι $A(\rho-\alpha)\,(\rho-\beta)\,(\rho-\gamma).....(\rho-\tau)=0$. Ἐὰν ἤδη παρατηρήσωμεν ὅτι οὐδεὶς τῶν παραγόντων $(\rho-\alpha)$, $(\rho-\beta)....(\rho-\gamma)$ εἶναι μηδέν, συμπεραίνομεν ὅτι $A=0$, τὸ δὲ $\Pi_{(\chi)}$ γίνεται $A_1\chi^{\mu-1} + A_2\chi^{\mu-2} + \cdots + A_\mu$. Ἐργαζόμενοι δὲ ἐπ' αὐτοῦ ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $A_1=0$, εἶτα $A_2=0$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ ἀποδείξωμεν ὅτι $A_{\mu-1}=0$.

Ἀλλὰ τότε τὸ $\Pi_{(\chi)}$ περιέχει μόνον τὸν ὅρον A_μ, ὅστις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χ καὶ ὅστις ὀφείλει νὰ εἶναι μηδέν, ὅπως τὸ $\Pi_{(\chi)}$ εἶναι μηδὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι ἐὰν

$$A\chi^\mu + A_1\chi^{\mu-1} + A_2\chi^{\mu-2} + \ldots + A_\mu = 0, \text{ θὰ εἶναι}$$

$$A=0,\ A_1=0,\ A_2=0, \ldots A_\mu = 0. \text{ ὅ. ἔ. δ.}$$

Ὅτι τοῦτο ἀρκεῖ εἶναι προφανές, διότι διὰ $A=0$, $A_1=0, \ldots$ $A\mu=0$ τὸ $\Pi_{(\chi)}$ γίνεται μηδέν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ χ.

§ **277. Θεώρημα IV.** ***Ἐὰν ἀκέραιον πρὸς χ πολυώνυμον βαθμοῦ μ μηδενίζηται διὰ τιμὰς τοῦ χ πλείονας τοῦ μ καὶ διαφόρους ἀλλήλων, τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.***

Ἔστω $A\chi^\mu + A_1\chi^{\mu-1} + A_2\chi^{\mu-2} + \ldots + A_{\mu-1}\chi + A_\mu$ ἀκέραιον πρὸς χ πολυώνυμον, ὅπερ μηδενίζεται διὰ τὰς διαφόρους ἀλλήλων τιμὰς α, β, γ, ... τ, ρ τοῦ χ. ὧν τὸ πλῆθος εἶναι $\mu+1$. Λέγω ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον τοῦτο μηδενίζεται διὰ τὰς μ διαφόρους ἀλλήλων τιμὰς α, β, γ,.. τ χ. ἐὰν χάριν συντομίας κληθῇ $\Pi_{(\chi)}$, θὰ εἶναι (§ 275) $\Pi_{(\chi)} = A(\chi-\alpha)(\chi-\beta)\ldots(\chi-\tau)$.

Ἐὰν θέσωμεν ἐν ταύτῃ ρ ἀντὶ χ εὑρίσκομεν

$$\Pi_{(\rho)} = A(\rho-\alpha)(\rho-\beta)\ldots(\rho-\tau).$$

Ἐπειδὴ δὲ καθ' ὑπόθεσιν εἶναι καὶ $\Pi_{(\rho)}=0$, αὕτη γίνεται

$$0 = A(\rho-\alpha)(\rho-\beta)\ldots(\rho-\tau)$$

Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι οὐδεὶς τῶν παραγόντων $(\rho-\alpha), (\rho-\beta), (\rho-\gamma), \ldots (\rho-\tau)$ εἶναι μηδὲν συμπεραίνομεν ὅτι $A=0$ καὶ $\Pi_{(\chi)} = A_1\chi^{\mu-1} + A_2\chi^{\mu-2} + \ldots + A_\mu$. Ἐξακολουθοῦντες, καθ' ὃν καὶ εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα τρόπον, ἀποδεικνύομεν ὅτι

$$A_1=0,\ A_2=0, \ldots A_\mu = 0.$$

Ἄρα $\Pi_{[\chi]} = 0$. ὅ. ἔ. δ.

Οὕτω παρατηροῦντες ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$(\alpha-\beta)(\chi-\alpha)(\chi-\beta) + (\beta-\gamma)(\chi-\beta)(\chi-\gamma) +$$
$$(\gamma-\alpha)(\chi-\gamma)(\chi-\alpha) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

εἶναι 2ου βαθμοῦ πρὸς χ καὶ μηδενίζεται διὰ τὰς τιμὰς α, β, γ τοῦ χ συμπεραίνομεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδὲν ἤτοι

$$(\alpha-\beta)(\chi-\alpha)(\chi-\beta) + (\beta-\gamma)(\chi-\beta)(\chi-\gamma) +$$
$$+ (\gamma-\alpha)(\chi-\gamma)(\chi-\alpha) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = 0.$$

§ **278. Θεώρημα V.** ***Ἵνα δύο ἀκέραια καὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς χ πολυώνυμα ὦσιν ἐκ ταυτότητος ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσοι.***

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $A\chi^\mu + A_1\chi^{\mu-1} + A_2\chi^{\mu-2} + \ldots + A^\mu =$

$$B\chi^\mu + B_1\chi^{\mu-1} + B_2\chi^{\mu-2} + \ldots + B_\mu, \text{ θὰ εἶναι καὶ}$$

$$(A-B)\chi^{\mu}+(A_1-B_1)\chi^{\mu-1}+(A_2-B_2)\chi^{\mu-2}+\ldots+(A_\mu-B_\mu)\equiv 0.$$

Κατὰ δὲ τὸ Θεώρημα (§ 276) εἶναι $A-B=0, A_1-B_1=0, A_2-B_2=0, \ldots$ $A_\mu-B_\mu=0$, ὅθεν $A=B, A_1=B_1, A_2=B_2, \ldots A_\mu=B_\mu$ ὅ. ἔ. δ.

Ὅτι δὲ τοῦτο ἀρκεῖ εἶναι προφανές.

§ **279. Θεώρημα VI.** ***Ἐὰν δύο ἀκέραια πρὸς χ πολυώνυμα βαθμοῦ μ μηδενίζωνται διὰ μ διαφόρους ἀλλήλων τιμὰς τοῦ χ, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων ἑκατέρου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων τοῦ ἑτέρου.***

Ἔστωσαν $A\chi^{\mu}+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ldots+A_\mu=\Pi_{(\chi)}$ καὶ $B\chi^{\mu}+B_1\chi^{\mu-1}+B_2\chi^{\mu-2}+\ldots+B_\mu=P_{(\chi)}$ δύο ἀκέραια καὶ μ βαθμοῦ πρὸς χ πολυώνυμα, ἅτινα μηδενίζονται διὰ τὰς μ διαφόρους ἀλλήλων τιμὰς α, β, γ, . . τ τοῦ χ. Λέγω ὅτι

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\ldots=\frac{A_\mu}{B_\mu}$$

Ἀπόδειξις. Πολ)ζοντες τὸ α΄ πολυώνυμον ἐπὶ Β καὶ τὸ β΄ ἐπὶ Α καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ α΄ γινόμενον τὸ β΄ εὑρίσκομεν ὅτι

$$(A_1B-B_1A)\chi^{\mu-1}+(A_2B-B_2A)\chi^{\mu-2}+\ldots+(A_\mu B-B_\mu A)= B.\Pi_{(\chi)}-A.P_{(\chi)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $B.\Pi_{(\chi)}-A\,P_{(\chi)}$ μηδενίζεται διὰ τὰς τιμὰς α, β, γ, . . . τ τοῦ χ, ἕπεται ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$(A_1B-B_1A)\chi^{\mu-1}+(A_2B-B_2A)\chi^{\mu-2}+\ldots+(A_\mu B-B_\mu A)$$

μηδενίζεται διὰ τὰς αὐτὰς μ διαφόρους τιμὰς τοῦ χ. Καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι βαθμοῦ (μ—1), ἕπεται (§ 277) ὅτι εἶναι ἐκ ταὐτότητος μηδέν· κατ᾽ ἀκολουθίαν (§ 276) εἶναι $A_1B-B_1A=0$, $A_2B-B_2A=0$, . . . $A_\mu B-B_\mu A=0$, ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\ldots\ldots=\frac{A_\mu}{B_\mu}.$$ ὅ. ἔ. δ.

§ **280. Μέθοδος τῶν ἀορίστων συντελεστῶν.** Τὴν ἀνωτέρω (Θεώρ. V) ἰδιότητα τῶν ἐκ ταὐτότητος ἴσων ἀκεραίων πολυωνύμων ἐφαρμόζομεν εἰς τὴν μέθοδον τῶν ***ἀορίστων*** ἢ ***προσδιοριστέων συντελεστῶν***, ὡς εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα γίνεται φανερόν.

Παράδ. 1ον. ***Νὰ ὁρισθῶσιν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β οὕτως ὥστε τὸ πολυώνυμον $\chi^4+8\chi^3+12\chi^2+\alpha\chi+\beta$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου $\chi^2+3\chi-2$***

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι 4ου, ὁ δὲ διαιρέτης 2ου βαθμοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι 2ου βαθμοῦ, πρῶτος δὲ ὅρος αὐτοῦ θὰ εἶναι $\chi^4:\chi^2=\chi^2$. Θὰ ἔχῃ ἄρα τὸ πηλίκον τὴν μορφὴν $\chi^2+\lambda\chi+\mu$.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαίρεσις θέλομεν νὰ εἶναι τελεία, πρέπει νὰ ὁρισθῶσιν οἱ συντελεσταὶ α,β,λ,μ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι

$$(\chi^2+3\chi-2)(\chi^2+\lambda\chi+\mu)\equiv\chi^4+8\chi^3+12\chi^2+\alpha\chi+\beta$$

ἢ $\chi^4+(3+\lambda)\chi^3+(3\lambda+\mu-2)\chi^2+(3\mu-2\lambda)\chi-2\mu\equiv\chi^4+8\chi^3+12\chi^2+\alpha\chi+\beta$.

Ἔχοντες ἤδη ὑπ' ὄψιν τὸ Θεώρ. V (§ 278) συμπεραίνομεν ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $3+\lambda=8, 3\lambda+\mu-2=12, 3\mu-2\lambda=\alpha, -2\mu=\beta$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν $\lambda=5$, $\mu=-1$, $\alpha=-13$, $\beta=2$.

Εὑρέθησαν οὕτως οὐ μόνον αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν α καὶ β, ἀλλὰ καὶ οἱ συντελεσταὶ λ καὶ μ τοῦ πηλίκου. Τὸ πολυώνυμον λοιπὸν γίνεται $\chi^4+8\chi^3+12\chi^2-13\chi+2$, τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ διὰ

$\chi^2+3\chi-2$ εἶναι $\chi^2+5\chi-1$.

Παράδ. 2ον. ***Νὰ ὁρισθῶσιν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β οὕτως ὥστε τὸ πολυώνυμον $4\chi^4+12\chi^3+5\chi^2+\alpha\chi+\beta$ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.***

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $4\chi^4+12\chi^3+5\chi^2+\alpha\chi+\beta$ ἔχει τὴν μορφὴν $\pm(\lambda\chi^2+\mu\chi+\nu)$, πρέπει νὰ εἶναι

$$(\lambda\chi^2+\mu\chi+\nu)^2\equiv4\chi^4+12\chi^3+5\chi^2+\alpha\chi+\beta,$$

ἢ $\lambda^2\chi^4+2\lambda\mu\chi^3+(\mu^2+2\lambda\nu)\chi^2+2\mu\nu\chi+\nu^2\equiv4\chi^4+12\chi^3+5\chi^2+\alpha\chi+\beta$

Ἄρα (§ 278 V) $\lambda^2=4$, $2\lambda\mu=12$, $\mu^2+2\lambda\nu=5$, $2\mu\nu=\alpha$, $\nu^2=\beta$,

ὅθεν $\lambda=2$, $\mu=3$, $\nu=-1$, $\alpha=-6$, $\beta=1$

καὶ $\lambda=-2$, $\mu=-3$, $\nu=1$, $\alpha=-6$, $\beta=1$.

Αἱ ζητούμεναι λοιπὸν τιμαὶ εἶναι $\alpha=-6$, $\beta=1$, δι' ἃς τὸ πολυώνυμον γίνεται $4\chi^4+12\chi^3+5\chi^2-6\chi+1$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι $2\chi^2+3\chi-1$, καὶ $-2\chi^2-3\chi+1$.

Παράδ. 3ον. ***Νὰ τεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{3\chi-1}{\chi^2-1}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha}{\chi-1}+\frac{\beta}{\chi+1}$.***

Λύσις. Ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{3\chi-1}{\chi^2-1}\equiv\frac{\alpha}{\chi-1}+\frac{\beta}{\chi+1}$ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $3\chi-1\equiv\alpha(\chi+1)+\beta(\chi-1)$ ἢ $3\chi-1\equiv(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)$, ἄρα $\alpha+\beta=3$ καὶ $\alpha-\beta=-1$, ὅθεν $\alpha=1$ καὶ $\beta=2$. Κατ' ἀκολουθίαν εἶναι

$$\frac{3\chi-1}{\chi^2-1}\equiv\frac{1}{\chi-1}+\frac{2}{\chi+1}.$$

Παράδ. 4ον. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ἡ παράστασις $\frac{\alpha\chi+\beta}{\alpha'\chi+\beta'}$ ἀνεξάρτητος τοῦ χ.***

Λύσις. Ἐὰν τεθῇ $\frac{\alpha\chi+\beta}{\alpha'\chi+\beta'}=K$, ἡ τιμὴ K θὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χ, ἤτοι ἡ προηγουμένη ἰσότης θὰ ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{\alpha\chi+\beta}{\alpha'\chi+\beta'}=\mathrm{K}$, ὅθεν κατὰ σειρὰν

$\alpha\chi+\beta=\mathrm{K}(\alpha'\chi+\beta')$, $\alpha\chi+\beta=\mathrm{K}\alpha'\chi+\mathrm{K}\beta'$ καὶ ἐπομένως $\alpha=\mathrm{K}\alpha'$,

$\beta=\mathrm{K}\beta'$. Ἐκ τῆς α´ τούτων εὑρίσκομεν $\mathrm{K}=\frac{\alpha}{\alpha'}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$\mathrm{K}=\frac{\beta}{\beta'}$. Ἄρα $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$. Αὕτη ἡ συνθήκη πρέπει νὰ ἐκπληροῦται, ὅπως τὸ δοθὲν κλάσμα ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν Κ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. Ὅτι δὲ αὕτη ἐπαρκεῖ φαίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἂν τεθῇ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\mathrm{K}$, θὰ εἶναι $\alpha=\mathrm{K}\alpha'$, $\beta=\mathrm{K}\beta'$ καὶ ἐπομένως

$\frac{\alpha\chi+\beta}{\alpha'\chi+\beta'}=\frac{\mathrm{K}\alpha'\chi+\mathrm{K}\beta'}{\alpha'\chi+\beta'}=\frac{\mathrm{K}(\alpha'\chi+\beta')}{\alpha'\chi+\beta'}=\mathrm{K}$, ἤτοι τὸ δοθὲν κλάσμα ἔχει τιμὴν Κ ἀνεξάρτητον τοῦ χ.

Ἀσκήσεις. 1262) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ τριώνυμον $6\chi^2+3\chi+\lambda$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $2\chi-3$;

1263) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β τὸ τριώνυμον $\chi^4+\alpha\chi+\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi^2-\chi+2$;

1264) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ πολυωνύμου $4\chi^4-4\chi^3+13\chi^2-6\chi+9$ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀορίστων συντελεστῶν.

1265) Νὰ ἐξαχθῇ διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου ἡ κυβ. ῥίζα τοῦ πολυωνύμου

$$\chi^6-9\chi^5+30\chi^4-45\chi^3+30\chi^2-9\chi+1.$$

1266) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ἡ παράστασις $\frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'}$ ἀνεξάρτητος τοῦ χ.

1267) Νὰ σχηματισθῇ ἀριθ. πρόοδος, ἧς ὁ νος ὅρος εἶναι γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν.

1268) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμ. πρόοδος, ἧς ὁ νος ὅρος εἶναι γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ ν^2, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν.

1269) Νὰ σχηματισθῇ ἀριθμ. πρόοδος, ἧς οἱ ν πρῶτοι ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ α´ ἐπὶ ν^2, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν.

1270) Νὰ σχηματισθῇ ἀριθ. πρόοδος, ἧς οἱ ν πρῶτοι ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα $\nu(3\nu+1)$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν.

1271) Ἐὰν α, β, γ, εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων καὶ τοιοῦτοι ὥστε νὰ εἶναι $\alpha^3+\alpha\pi+u=0$, $\beta^3+\beta\pi+u=0$, $\gamma^3+\gamma\pi+u=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

1272) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\alpha^3+\alpha^2\chi+\alpha y+z=0$, $\beta^3+\beta^2\chi+\beta y+z=0$,

$$\gamma^3+\gamma^2\chi+\gamma y+z=0.$$

1273) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἵνα $\chi^\mu-\alpha^\mu$ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ $\chi^\pi-\alpha^\pi$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\mu=$πολ.π.

1274) Νὰ τεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{3\chi-1}{\chi^2-5\chi+6}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha}{\chi-2}+\frac{\beta}{\chi-3}$.

1275) Νὰ τεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{-13\chi-34}{\chi^3+3\chi^2-4\chi-12}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\alpha}{\chi+2}+\frac{\beta}{\chi-2}+\frac{\gamma}{\chi+3}.$$

1276) Νὰ τεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{4\chi^3-10\chi}{\chi(\chi^2-1)\,(\chi^2-4)}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\alpha}{\chi(\chi-1)}+\frac{\beta}{\chi(\chi+1)}+\frac{\gamma}{\chi(\chi-2)}+\frac{\delta}{\chi(\chi+2)}.$$

1277) Νὰ τεθῇ τὸ κλάσμα $\frac{5+6\chi-2\chi^2}{(3+2\chi)^3}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\alpha}{3+2\chi}+\frac{\beta}{(3+2\chi)^2}+\frac{\gamma}{(3+2\chi)^3}.$$

1278) ἀποδειχθῇ ὅτι

$$(\chi-\alpha)\,(\beta-\gamma)+(\chi-\beta)\,(\gamma-\alpha)+(\chi-\gamma)\,(\alpha-\beta)\equiv 0.$$

1279) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\chi-\alpha)^2\,(\beta-\gamma)+(\chi-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(\chi-\gamma)^2\,(\alpha-\beta)+$

$$(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)\,(\gamma-\alpha)\equiv 0.$$

1280) Πολυώνυμον ἀκέραιον πρὸς χ διαιρούμενον διὰ $\chi-1$ ἀφήνει ὑπόλοιπον 6, διαιρούμενον δὲ διὰ $\chi-2$ ἀφήνει ὑπόλοιπον 18. Ποῖον ὑπόλοιπον ἀφήνει τοῦτο, ἂν διαιρεθῇ διὰ $(\chi-1)(\chi-2)$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΠΕΡΙ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

§ **281. Ἔννοια ὁριζούσης 3ου βαθμοῦ.** Ἐμάθομεν ἤδη (§ 105) ὅτι τὸ σύμβολον $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ καλεῖται ὁρίζουσα τῶν ἀριθμῶν α,α΄,β,β΄, οἱ ὁποῖοι λέγονται στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης καὶ εἶναι τεταγμένοι εἰς δύο ὁριζοντίους γραμμὰς καὶ δύο στήλας. Εἶναι δὲ τοῦτο συμβολικὴ παράστασις τῆς διαφορᾶς

$\alpha\beta'-\alpha'\beta$, ἤτοι εἶναι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\alpha\beta'-\alpha'\beta$. Ἡ διαφορὰ $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ λέγεται ἀνάπτυγμα τῆς ῥηθείσης ὁριζούσης. Ἐπειδὴ δὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης ταύτης εἶναι τεταγμένα εἰς δύο ὁριζοντίους γραμμὰς καὶ 2 στήλας, ἡ ὁρίζουσα αὕτη λέγεται 2ου βαθμοῦ ἢ 2ας τάξεως.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$\alpha\chi+\beta y+\gamma z=\delta,\ \alpha'\chi+\beta' y+\gamma' z=\delta',\ \alpha''\chi+\beta'' y+\gamma'' z=\delta''.$$

Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦντες τὴν μέθοδον τοῦ Bézout (§ 110) Παρ. Β΄) πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τούτων ἀντιστοίχως ἐπὶ λ,μ,ν καὶ προσθέτομεν εἶτα κατὰ μέλη τὰς οὕτω προκυπτούσας ἐξισώσεις. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$(\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\nu)\chi+(\beta\lambda+\beta'\mu+\beta''\nu)y+(\gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''\nu)z=\delta\lambda+\delta'\mu+\delta''\nu.$ (1)

Ἐὰν θέλωμεν νὰ μὴ περιέχῃ αὕτη τοὺς ἀγνώστους y καὶ z, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τοὺς ἀορίστους συντελεστὰς λ,μ,ν οὕτως ὥστε νὰ

$$\beta\lambda+\beta'\mu+\beta''\nu=0,\quad \gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''\nu=0.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$\frac{\lambda}{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}=\frac{\mu}{\gamma\beta''-\beta\gamma''}=\frac{\nu}{\beta\gamma'-\beta'\gamma}.$$

Ἐὰν δὲ κληθῇ K ἕκαστος τῶν λόγων τούτων, εὑρίσκομεν ἐκ τούτων, ὅτι $\lambda=(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')K$, $\mu=(\gamma\beta''-\beta\gamma'')K$, $\nu=(\beta\gamma'-\beta'\gamma)K$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται

$$\left[\alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')-\alpha'(\beta\gamma''-\beta''\gamma)+\alpha''(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\right]\chi$$
$$=\delta(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')-\delta'(\beta\gamma''-\beta''\gamma)+\delta''(\beta\gamma'-\beta'\gamma).$$

Ἐὰν δὲ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, προκύπτει ὅτι

$$\chi=\frac{\delta(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')-\delta'(\beta\gamma''-\beta''\gamma)+\delta''(\beta\gamma'-\beta'\gamma)}{\alpha(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')-\alpha'(\beta\gamma''-\beta''\gamma)+\alpha''(\beta\gamma'-\beta'\gamma)}. \tag{2}$$

Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}$, $\beta\gamma''-\beta''\gamma=\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}$ καὶ $\beta\gamma'-\beta'\gamma=\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν προηγουμένην ἰσότητα καὶ ὡς ἑξῆς.

$$\chi=\frac{\delta\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}-\delta'\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}+\delta''\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}}{\alpha\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}-\alpha'\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}+\alpha''\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}}. \tag{3}$$

Τὸν παρονομαστὴν τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ χ γράφομεν κατὰ συνθήκην συμβολικῶς οὕτω $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}$. Τὸ σύμβολον τοῦτο καλοῦμεν ὁρίζουσαν τῶν ἀριθμῶν α,β,γ,α′,β′,γ′,α″,β″,γ″, οἱ ὁποῖοι εἶναι εἰς τὸ σύμβολον τοῦτο τεταγμένοι εἰς τρεῖς ὁριζοντίους γραμμὰς καὶ εἰς τρεῖς στήλας. Τὸ δὲ ἄθροισμα $\alpha\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}-\alpha'\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}+\alpha''\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}$ καλοῦμεν ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης ταύτης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α′ στήλης.

Ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ χ διαφέρει τοῦ παρανομαστοῦ κατὰ τοῦτο μόνον ὅτι ἀντὶ α, α′, α″ ἔχει ἀντιστοίχως δ,δ′,δ″. Κατ’ ἀκολουθίαν καὶ οὗτος γράφεται οὕτω $\begin{vmatrix} \delta & \beta & \gamma \\ \delta' & \beta' & \gamma' \\ \delta'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$. Τὸ σύμβολον τοῦτο λέγεται ἐπίσης ὁρίζουσα τῶν ἀριθμῶν $\delta, \delta', \delta'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ καὶ ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἰσότητος (3) εἶναι ἀνάπτυγμα αὐτῆς κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ στήλης. Κατὰ ταῦτα ἡ ἰσότης (3) γράφεται οὕτω

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \delta & \beta & \gamma \\ \delta' & \beta' & \gamma' \\ \delta'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}.$$

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \alpha' & \delta' & \gamma' \\ \alpha'' & \delta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \alpha' & \beta' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \delta'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}} \qquad (4)$$

Βλέπομεν οὕτω ὅτι διὰ σύστημα τριῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μετ᾿ ἰσαρίθμων ἀγνώστου ἰσχύει ὁ κανὼν τοῦ Gramer (§ 106), ἀρκεῖ ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Τὴν ὁρίζουσαν, ἡ ὁποία εἶναι κοινὸς παρονομαστὴς εἰς τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν x, y, z, παριστῶμεν χάριν συντομίας διὰ τοῦ Δ. Καλεῖται δὲ αὕτη ὁρίζουσα 3ου βαθμοῦ ἢ 3ης τάξεως.

Κατὰ ταῦτα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} - \alpha' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \alpha'' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Παρατηροῦντες ὅτι $(-1)^{1+1} = 1$, $(-1)^{2+1} = -1$, $(-1)^{1+3} = 1$ γράφομεν τὴν ἰσότητα (5) καὶ οὕτω

$$\Delta = (-1)^{1+1}\alpha \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\alpha' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\alpha'' \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \qquad (6)$$

ἔνθα οἱ προσθετέοι τῶν ἐκθετῶν τοῦ (-1) δηλοῦσι τὴν τάξιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς καὶ στήλης, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον $\alpha, \alpha', \alpha''$.

Αἱ ὁρίζουσαι 2ας τάξεως, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος (6), λέγονται ***ἐλάσσονες*** ὁρίζουσαι, ἤτοι ὁρίζουσαι κατωτέρας τάξεως ἢ ἡ Δ. Γίνεται δὲ ἑκάστη ἀπὸ τὴν Δ, ἂν παραλειφθῇ ἡ ὁριζόντιος γραμμὴ καὶ στήλη, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον $\alpha, \alpha', \alpha''$.

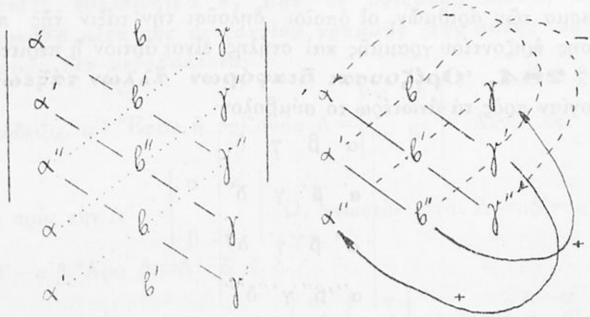
Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὰς ὁριζούσας 2ας τάξεως, τὰς ὁποίας περιέχει τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος (5) ἢ (6) εὑρίσκομεν ὅτι

$$\Delta=\alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'-\alpha'\beta\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma \qquad (7)$$

Τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης καλεῖται **ἀνάπτυγμα** τῆς ὁριζούσης Δ.

Οὕτω $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8-3-20+15+36-72=-36$

§ **282. Κανὼν τοῦ** Sarrus. Τὸ ἀνωτέρω ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης 3ης τάξεως ἐπιτυγχάνομεν ταχύτερον διὰ τοῦ ἀκολούθου κανόνος.



Ὑπὸ τὴν τελευταίαν ὁριζόντιον γραμμὴν τῆς ὁριζούσης ἐπαναλαμβάνομεν τὰς δύο πρώτας γραμμὰς αὐτῆς τὴν α΄ ὑπὸ τὴν β΄. Σχηματίζομεν ἔπειτα τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων τῶν διαγωνίων, αἱ ὁποῖαι φέρονται ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἄνω πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κάτω· προτάσσομεν δὲ ἑκάστου τούτων τὸ +. Ἔπειτα σχηματίζομεν τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων τῶν διαγωνίων, αἱ ὁποῖαι φέρονται ἐξ ἀριστερῶν καὶ κάτω πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἄνω· προτάσσομεν δὲ ἑκάστου τούτων τὸ —. Τέλος δὲ προσθέτομεν τὰ ἐξ ταῦτα γινόμενα.

ΣΗΜ. Τὸ ἄνω δεξιὰ σχῆμα δεικνύει ἕτερον τρόπον εὑρέσεως τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος ὁριζούσης 3ης τάξεως. Εἰς ὅσους τούτων εἶναι γινόμενα στοιχείων συνδεομένων διὰ συνεχοῦς γραμμῆς προτάσσομεν τὸ +, εἰς δὲ τοὺς λοιποὺς προτάσσομεν τὸ —.

§ **283. Ἀνάπτυξις ὁριζούσης 3ης τάξεως κατὰ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς.** Τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν τελικὸν ἀνάπτυγμα τῆς Δ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$-\beta(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')+\beta'(\alpha\gamma''-\alpha''\gamma)-\beta''(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma).$$ Ἄρα

$$\Delta=(-1)^{1+2}\beta\begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\beta'\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\beta''\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\Delta=(-1)^{1+3}\gamma\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta''\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\gamma'\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha'' & \beta''\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\gamma''\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(-1)^{1+1}\alpha\begin{vmatrix}\beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\beta\begin{vmatrix}\alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma''\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\gamma\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta''\end{vmatrix} \text{ κ. τ. λ.}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀναπτύσσωμεν ὁρίζουσαν 3ης τάξεως κατὰ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς αὐτῆς, ἀρκεῖ ἕκαστον τούτων νὰ πολ)ζωμεν ἐπὶ τὴν ἐλάσσονα ὁρίζουσαν, ἡ ὁποία προκύπτει παραλειπομένης τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς καὶ στήλης τοῦ στοιχείου τούτου· νὰ προτάσσωμεν δὲ τοῦ γινομένου τὸ + ἢ —, καθ' ὅσον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι δηλοῦσι τὴν τάξιν τῆς παραλειφθείσης ὁριζοντίου γραμμῆς καὶ στήλης, εἶναι ἄρτιον ἢ περιττόν.

§ **284. Ὁρίζουσαι διαφόρων ἄλλων τάξεων.** Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω τὸ σύμβολον

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta'''\end{vmatrix}$$

καλοῦμεν ὁρίζουσαν 4ης τάξεως τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων 16 ἀριθμῶν. Εἶναι δὲ τὸ σύμβολον τοῦτο συμβολικὴ καὶ σύντομος παράστασις τοῦ ἀκολούθου ἀναπτύγματος

$$(-1)^{1+1}\alpha\begin{vmatrix}\beta' & \gamma' & \delta' \\ \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \beta''' & \gamma''' & \delta'''\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\alpha'\begin{vmatrix}\beta & \gamma & \delta \\ \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \beta''' & \gamma''' & \delta'''\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\alpha''\begin{vmatrix}\beta & \gamma & \delta \\ \beta' & \gamma' & \delta' \\ \beta''' & \gamma''' & \delta'''\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}\alpha'''\begin{vmatrix}\beta & \gamma & \delta \\ \beta' & \gamma' & \delta' \\ \beta'' & \gamma'' & \delta''\end{vmatrix}$$

Ἐργαζόμενοι, ὅπως καὶ διὰ τὴν ὁρίζουσαν 3ης τάξεως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ αὕτη δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς αὐτῆς. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν καὶ τὴν ὁρίζουσαν 5ης, 6ης κ.τ.λ. τάξεως.

Ἀσκήσεις, 1281) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ὁρίζουσαι

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}-1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & 3\alpha \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

1282) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\begin{vmatrix}1 & \alpha & 1 \\ \theta & x & 2 \\ \alpha & o & 2\alpha\end{vmatrix}=0$ καὶ ἡ $\begin{vmatrix}3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & x & 2\end{vmatrix}=0$

1288) Νὰ ἀναπτυχθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ὀρίζουσαι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & 0 & 0 \\ 2\alpha & 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ἰδιότητες τῶν ὀριζουσῶν.

§ **285. Θεώρημα I.** ***Ἐὰν ἐν ὀριζούσῃ ἑκάστη στήλη ἀντιμετατεθῇ μετὰ τῆς ὀριζοντίου γραμμῆς τῆς αὐτῆς τάξεως, ἡ ὀρίζουσα δὲν μεταβάλλεται.***

Ἀπόδειξις. α΄) Ἔστω ἡ ὀρίζουσα $\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$. Λέγω ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὴν $\Delta'=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$. Ὡς γνωστὸν εἶναι $\Delta=\alpha\beta'-\alpha'\beta$ καὶ $\Delta'=\alpha\beta'-\alpha'\beta$. Ἄρα $\Delta=\Delta'$. ὅ. ἔ. δ.

β΄) Ἔστωσαν ἤδη αἱ ὀρίζουσαι $\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$ καὶ $\Delta'=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$

Λέγω ὅτι $\Delta=\Delta'$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν μὲν Δ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ στήλης, τὴν δὲ Δ' κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ ὀριζοντίου γραμμῆς, εὑρίσκομεν ὅτι: $\Delta=\alpha\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}-\alpha'\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\alpha''\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$ καὶ

$$\Delta'=\alpha\begin{vmatrix} \beta' & \beta'' \\ \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}-\alpha'\begin{vmatrix} \beta & \beta'' \\ \gamma & \gamma'' \end{vmatrix}+\alpha''\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$$

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένως ἀποδειχθεῖσαν α΄ περίπτωσιν, βλέπομεν ὅτι αἱ ἐλάσσονες ὀρίζουσαι τῶν δευτέρων μελῶν εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων τούτων ὀριζουσῶν εἶναι οἱ αὐτοί, ἕπεται ὅτι $\Delta=\Delta'$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ δι' ὀριζούσας 4ης κ.τ.λ. τάξεως.

§ **286. Θεώρημα II.** ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα δύο παραλλήλων γραμμῶν ὀριζούσης εἶναι ἀνάλογα, ἡ ὀρίζουσα ἰσοῦται πρὸς μηδέν.***

α΄) Ἔστω ἡ ὀρίζουσα $\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha\lambda & \beta\lambda \end{vmatrix}$. Τὸ ἀνάπτυγμα αὐτῆς εἶναι $\alpha\beta\lambda-\alpha\beta\lambda=0$, ἄρα $\Delta=0$.

β΄) Τῆς ὁριζούσης $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'\lambda & \beta'\lambda & \gamma'\lambda \end{vmatrix}$ τὸ ἀνάπτυγμα κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ ὁριζοντίου γραμμῆς εἶναι

$$\alpha \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'\lambda & \gamma'\lambda \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'\lambda & \gamma'\lambda \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'\lambda & \beta'\lambda \end{vmatrix}.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τοῦ ἀναπτύγματος τούτου εἶναι μηδέν, ἕπεται ὅτι $\Delta=0$. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ δι' ὁριζούσας 4ης 5ης κ.τ.λ. τάξεως.

Πόρισμα I. ***Ἐὰν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα δύο παραλλήλων γραμμῶν ὁριζούσης εἶναι τὰ αὐτά, ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται πρὸς μηδέν.***

§ **287. Θεώρημα III.** ***Ἐὰν τὰ στοιχεῖα γραμμῆς ὁριζούσης πολ)σθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν, ἡ ὁρίζουσα πολ)ζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.***

Ἔστωσαν αἱ ὁρίζουσαι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \text{ καὶ } \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha\mu & \beta\mu & \gamma\mu \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

ὧν ἡ Δ΄ προῆλθεν ἐκ τῆς Δ διὰ πολ)σμοῦ τῶν στοιχείων τῆς α΄ ὁριζοντίου γραμμῆς ἐπὶ μ. Λέγω ὅτι $\Delta'=\Delta\mu$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν Δ΄ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ ὁριζοντίου γραμμῆς, εὑρίσκομεν

$$\Delta' = \alpha\mu \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} - \beta\mu \begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \gamma\mu \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \text{ ἢ}$$

$$\Delta' = \mu \left[\alpha \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \right].$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παράγων εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς Δ κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ ὁριζοντίου γραμμῆς, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $\Delta'=\Delta\mu$. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. ***Δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὰ στοιχεῖα γραμμῆς ὁριζούσης πάντα ἴσα πρὸς 1.***

$$\text{Οὕτω} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \beta' & \gamma' \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & 1 & \gamma \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} & \gamma' \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} & \frac{\gamma'}{\gamma} \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} & \frac{\gamma''}{\gamma} \end{vmatrix}$$

§ **288. Θεώρημα IV.** ***Ἐὰν ὁρίζουσαι τῆς αὐτῆς τάξεως διαφέρωσι μόνον κατὰ τὰ στοιχεῖα ὁριζοντίου γραμμῆς ἢ στήλης***

τῆς αὐτῆς τάξεως, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς ὁρίζουσαν τῆς αὐτῆς τάξεως. Αὕτη ἔχει τὰς αὐτὰς μὲ τοὺς προσθετέους κοινὰς ὁριζοντίους γραμμὰς ἢ στήλας, τὰ δὲ στοιχεῖα τῆς ὑπολοίπου ὁριζοντίου γραμμῆς ἢ στήλης εἶναι ἀντιστοίχως ἀθροίσματα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν προσθετέων.

Οὕτως $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta & \vartheta & \varkappa \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\delta+\eta & \beta+\varepsilon+\vartheta & \gamma+\zeta+\varkappa \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἀναπτύξωμεν πάσας τὰς ὁριζούσας ταύτας κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α΄ ὁριζοντίου γραμμῆς, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παρουσιαζόμεναι εἰς πάντα τὰ ἀναπτύγματα ἐλάσσονες ὁρίζουσαι εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν. Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας παραστήσωμεν ταύτας διὰ τῶν Α,Β,Γ, τὸ α΄ μέλος τῆς ἄνω ἰσότητος γίνεται

$$\alpha A-\beta B+\gamma \Gamma+\delta A-\varepsilon B+\zeta \Gamma+\eta A-\vartheta B+\varkappa \Gamma \text{ ἢ}$$
$$(\alpha+\delta+\eta)A-(\beta+\varepsilon+\vartheta)B+(\gamma+\zeta+\varkappa)\Gamma.$$

Παρατηροῦντες δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ β΄ μέλους, συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος.

Πόρισμα Ι. ***Ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα γραμμῆς τινος ὁριζούσης προστεθῶσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα παραλλήλου πρὸς ταύτην γραμμῆς τῆς αὐτῆς ὁριζούσης, ἡ ὁρίζουσα δὲν μεταβάλλεται.***

Ἔστω
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \text{ καὶ } \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha+\lambda\alpha' & \beta+\lambda\beta' & \gamma+\lambda\gamma' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

Λέγω ὅτι $\Delta=\Delta'$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\alpha' & \lambda\beta' & \lambda\gamma' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \Delta'.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ β΄ ὁρίζουσα τοῦ α΄ μέλους εἶναι μηδὲν (§ 286) ἕπεται ὅτι $\Delta=\Delta'$. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. ΙΙ. ***Δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὰ στοιχεῖα γραμμῆς ὁριζούσης ἴσα πρὸς μηδὲν πλὴν ἑνός***

Οὕτω, καθ' ἃ ἤδη (§ 287 Πόρ. Ι) ἐμάθομεν, εἶναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} & \frac{\gamma'}{\gamma} \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} & \frac{\gamma''}{\gamma} \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \cdot \Delta'. \quad (1)$$

Ἐὰν ἤδη εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γ΄ στήλης τῆς ὁριζούσης Δ΄ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς α΄ στήλης ἐπὶ -1, ἡ Δ΄ δὲν μεταβάλλεται.

Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι
$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} & \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} & \frac{\gamma''}{\gamma} - \frac{\alpha''}{\alpha} \end{vmatrix}$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς β΄ στήλης προσθέσωμεν τὰ αὐτὰ γινόμενα, εὑρίσκομεν ὅτι
$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} - \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} - \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\gamma''}{\gamma} - \frac{\alpha''}{\alpha} \end{vmatrix}$$ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (1)

γίνεται
$$\Delta = \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\beta'}{\beta} - \frac{\alpha'}{\alpha} & \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} \\ \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\beta''}{\beta} - \frac{\alpha''}{\alpha} & \frac{\gamma''}{\gamma} - \frac{\alpha''}{\alpha} \end{vmatrix}$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη εὐκολύνει μεγάλως τὴν ἀνάπτυξιν ὁριζούσης, διότι ἀνάγει αὐτὴν εἰς ἀνάπτυξιν μιᾶς ὁριζούσης ἀμέσως κατωτέρας τάξεως.

Οὕτω $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 9 & 20 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12.$

§ **289. Θεώρημα V.** ***Ἐὰν ἀντιμεταθέσωμεν δύο παραλλήλους γραμμὰς ὁριζούσης, αὕτη ἀλλάσσει σημεῖον.***

Ἔστω ἡ ὁρίζουσα
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$
καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς δι᾿ ἀντιμεταθέσεως τῆς α΄ καὶ γ΄ ὁριζοντίου γραμμῆς προκύπτουσα ὁρίζουσα.
$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$ Λέγω ὅτι $\Delta = -\Delta'$.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 288 Πόρ. I) εἶναι
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha+\alpha'' & \beta+\beta'' & \gamma+\gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \text{ καὶ } \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha+\alpha'' & \beta+\beta'' & \gamma+\gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὁρίζουσαι αὗται διαφέρουσιν ἤδη μόνον κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς γ' ὁριζοντίου γραμμῆς, ἔπεται (§ 288) ὅτι

$$\Delta+\Delta'=\begin{vmatrix} \alpha+\alpha'' & \beta+\beta'' & \gamma+\gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha+\alpha'' & \beta+\beta'' & \gamma+\gamma'' \end{vmatrix}=0, \text{ (§ 286 Πόρ. I)}$$

ὅθεν $\Delta=-\Delta'$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀσκήσεις. 1284) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 14 \end{vmatrix}=0$

1285) Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

1286) Ἐὰν α, β, γ, Α, Β, Γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \eta\mu A & \eta\mu B & \eta\mu \Gamma \end{vmatrix}$$

1287) Νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 3\,\eta\mu\,\omega & -\,\sigma\upsilon\nu\,\omega \\ 3\sigma\upsilon\nu\,\omega & \eta\mu\,\omega \end{vmatrix}$

1288) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$

1289) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$ ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

1290) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\begin{vmatrix} \alpha+\chi & \alpha & 1 \\ \beta+\chi & \beta & 1 \\ \gamma+\chi & \gamma & 1 \end{vmatrix}=0$

1291) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}=(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)$

1292) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\begin{vmatrix} \chi & 1 & 0 \\ 1 & \chi & 1 \\ 0 & 1 & \chi \end{vmatrix}=0$

1293) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \delta \end{vmatrix}=\beta\,(\delta-\alpha)\,(\gamma-\delta)$

1294) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & \alpha & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & \alpha & \eta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^4$

Ἐφαρμογαὶ τῶν ὁριζουσῶν.

§ **290. Α΄. Λύσις συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων.** — Ἐμάθομεν ἤδη ὅτι διὰ συστήματα δύο ἢ τριῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους ἰσχύει ὁ κανὼν τοῦ Gramer (§ 106, 281), ἀρκεῖ ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐργαζόμενοι κατ' ἀνάλογον τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ συστήματα ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους, ἂν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Οὕτω τὸ σύστημα

$$\chi+y+z+\omega=0,\quad 2\chi+3y+z-2\omega=5,\quad \chi-y+3z+2\omega=4,$$
$$3\chi+y-z+\omega=-2,$$

ἀληθεύει διὰ

$$\chi=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 5 & 5 & 3 & -2\\ 4 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -4 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix} 5 & 5 & 3\\ 4 & 3 & 1\\ -2 & 0 & -2\end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}}=\frac{42}{42}=1$$

$$y=-1,\ z=2,\ \omega=-2.$$

Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τί συμβαίνει, ὅταν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδέν.

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\alpha\chi+\beta y+\gamma z+\delta\omega=\varepsilon,\quad \alpha'\chi+\beta'y+\gamma'z+\delta'\omega=\varepsilon' \qquad (1)$$
$$\alpha''\chi+\beta''y+\gamma''z+\delta''\omega=\varepsilon'',\quad \alpha'''\chi+\beta'''y+\gamma'''z+\delta'''\omega=\varepsilon'''$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta''\\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta'''\end{vmatrix}=0$$

Αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι 3ης τάξεως αἱ ἐκ τῆς Δ προκύπτουσαι δυνατὸν νὰ εἶναι πᾶσαι μηδὲν ἢ εἶναι μία τοὐλάχιστον διάφορος τοῦ μηδενός.

Ἄς ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι ἡ ἐλάσσων ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ταύτην καλοῦμεν κυρίαν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων.

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τὸν ω ὡς γνωστόν, αἱ τρεῖς πρῶται ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) ἀποτελοῦσιν ἰδιαίτερον σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡρισμένην λύσιν, ἣν παρέχουσιν οἱ τύποι

$$\chi=\frac{\begin{vmatrix} \varepsilon-\delta\omega & \beta & \gamma \\ \varepsilon'-\delta'\omega & \beta' & \gamma' \\ \varepsilon''-\delta''\omega & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon-\delta\omega & \gamma \\ \alpha' & \varepsilon'-\delta'\omega & \gamma' \\ \alpha'' & \varepsilon''-\delta''\omega & \gamma'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}},\ z=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \varepsilon-\delta\omega \\ \alpha' & \beta' & \varepsilon'-\delta'\omega \\ \alpha'' & \beta'' & \varepsilon''-\delta''\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}}. \quad (2)$$

Ἵνα δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τῶν ἀγνώστων εἶναι ῥίζαι καὶ τῆς δ´ ἐξισώσεως $\alpha'''\chi+\beta'''y+\gamma'''z+\delta'''\omega=\varepsilon'''$ ἢ $\alpha'''\chi+\beta'''y+\gamma'''z=\varepsilon'''-\delta'''\omega$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\alpha'''\begin{vmatrix} \varepsilon-\delta\omega & \beta & \gamma \\ \varepsilon'-\delta'\omega & \beta' & \gamma' \\ \varepsilon''-\delta''\omega & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\beta'''\begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon-\delta\omega & \gamma \\ \alpha' & \varepsilon'-\delta'\omega & \gamma' \\ \alpha'' & \varepsilon''-\delta''\omega & \gamma'' \end{vmatrix}+\gamma'''\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \varepsilon-\delta\omega \\ \alpha' & \beta' & \varepsilon'-\delta'\omega \\ \alpha'' & \beta'' & \varepsilon''-\delta''\omega \end{vmatrix}=$$

$$(\varepsilon'''-\delta'''\omega)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη τῶν ὁριζουσῶν τοῦ α´ μέλους εἶναι ἄθροισμα δύο ἄλλων ὁριζουσῶν, ἡ ἰσότης αὕτη γράφεται καὶ οὕτω

$$\alpha'''\begin{vmatrix} \varepsilon & \beta & \gamma \\ \varepsilon' & \beta' & \gamma' \\ \varepsilon'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\beta'''\begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon & \gamma \\ \alpha' & \varepsilon' & \gamma' \\ \alpha'' & \varepsilon'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\gamma'''\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \varepsilon \\ \alpha' & \beta' & \varepsilon' \\ \alpha'' & \beta'' & \varepsilon'' \end{vmatrix}-\varepsilon'''\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}=$$

$$\alpha'''\omega\begin{vmatrix} \delta & \beta & \gamma \\ \delta' & \beta' & \gamma' \\ \delta'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\beta'''\omega\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \alpha' & \delta' & \gamma' \\ \alpha'' & \delta'' & \gamma'' \end{vmatrix}+\gamma'''\omega\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \alpha' & \beta' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \delta'' \end{vmatrix}-\delta'''\omega\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Ἐὰν δὲ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ α´ μέλος θὰ εἶναι ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης Δ´ ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς Δ, ἂν οἱ συντελεσταὶ δ, δ´, δ´´, δ´´´ τοῦ ω ἀντικατασταθῶσι διὰ τῶν γνωστῶν ὅρων ε, ε´ ε´´ ε´´´. Τὸ δὲ β´ μέλος θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ ω ἐπὶ Δ. Ὥστε ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \varepsilon' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \varepsilon'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \varepsilon''' \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta''' \end{vmatrix} = \omega\, \Delta = 0, \text{ ἢ } \Delta' = 0.$$

Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\Delta'=0$ αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (2) παρεχόμεναι τιμαὶ τῶν x, y, z ταὐτοποιοῦσι καὶ τὰς 4 ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος (1), διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ω. Εἶναι ἄρα τὸ σύστημα ἀόριστον διότι εἷς ἄγνωστος ὁρίζεται αὐθαιρέτως· οἱ δὲ ἄλλοι ἄγνωστοι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (2).

Ἐὰν δὲ εἶναι $\Delta'\neq 0$, αἱ ῥίζαι τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων δὲν ταὐτοποιοῦσι τὴν δ΄ ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος (1) καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ ὁρίζουσα Δ' καλεῖται ***χαρακτηριστικὴ*** ὁρίζουσα. Προκύπτει δὲ ἀπὸ τὴν κυρίαν ὁρίζουσαν, ἐὰν αὕτη περικλεισθῇ ὁριζοντίως μὲν ἀπὸ τοὺς μὴ χρησιμοποιηθέντας συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων, καθέτως δὲ ἀπὸ τοὺς ἀντιστοίχους γνωστοὺς ὅρους.

Ἐὰν πᾶσαι αἱ ἐλάσσονες τῆς Δ ὁρίζουσαι 3ης τάξεως εἶναι μηδέν, θεωροῦμεν τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας 2ας τάξεως καὶ ἔστω μία τούτων π. χ. ἡ $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ διάφορος τοῦ μηδενός, ἥτις θὰ εἶναι ἤδη ἡ κυρία ὁρίζουσα.

Ἐὰν τοὺς ἀγνώστους z καὶ ω θεωρήσωμεν ὡς γνωστούς, τὸ σύστημα $\alpha\chi+\beta y=\varepsilon-\gamma z-\delta\omega$, $\alpha'\chi+\beta' y=\varepsilon'-\gamma' z-\delta'\omega$ ἀληθεύει διὰ

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon-\gamma z-\delta\omega & \beta \\ \varepsilon'-\gamma' z-\delta'\omega & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon-\gamma z-\delta\omega \\ \alpha' & \varepsilon'-\gamma' z-\delta'\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}. \qquad (1)$$

Ἵνα δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τῶν χ καὶ y ταὐτοποιῶσι καὶ τὴν γ΄ ἐξίσωσιν $\alpha''\chi+\beta''y+\gamma''z+\delta''\omega=\varepsilon''$ ἢ $\alpha''\chi+\beta''y=\varepsilon''-\gamma''z-\delta''\omega$, καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\alpha''\begin{vmatrix} \varepsilon-\gamma' z-\delta\omega & \beta \\ \varepsilon'-\gamma z'-\delta'\omega & \beta' \end{vmatrix} + \beta''\begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon-\gamma\zeta-\delta\omega \\ \alpha' & \varepsilon'-\gamma' z-\delta'\omega \end{vmatrix} = (\varepsilon''-\gamma'' z-\delta''\omega)\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \text{ ἢ}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \varepsilon \\ \alpha' & \beta' & \varepsilon' \\ \alpha'' & \beta'' & \varepsilon'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \alpha' & \beta' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & \delta'' \end{vmatrix} \omega$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὁρίζουσαι τοῦ β´ μέλους εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μηδέν, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\Delta''=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \varepsilon\\ \alpha' & \beta' & \varepsilon'\\ \alpha'' & \beta'' & \varepsilon''\end{vmatrix}=0.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ἵνα αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (1 σελ. 320 παρεχόμεναι τιμαὶ τῶν χ, y ταὐτοποιῶσι καὶ τὴν δ´ ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\Delta'''=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \varepsilon\\ \alpha' & \beta' & \varepsilon'\\ \alpha''' & \beta''' & \varepsilon'''\end{vmatrix}=0.$$

Κατὰ ταῦτα, ἂν εἶναι $\Delta''=0$ καὶ $\Delta'''=0$, αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (1 σελ. 320) παρεχόμεναι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων χ,y ταὐτοποιοῦσι πάσας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1), οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν λαμβάνῃ ἑκάτερος τῶν ἀγνώστων z καὶ ω. Εἶναι λοιπὸν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σύστημα (1) ἀόριστον. Εἶναι δὲ ἡ ἔκτασις τῆς ἀοριστίας του μείζων ἢ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, διότι ἤδη δύνανται νὰ ὁρισθῶσιν αὐθαιρέτως δύο ἄγνωστοι.

Ἐὰν δὲ μία τῶν ἰσοτήτων $\Delta''=0$, $\Delta'''=0$ ἢ καὶ ἀμφότεραι δὲν ἀληθεύωσι, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Διότι αἱ ῥίζαι τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος δὲν ταὐτοποιοῦσι πάσας τὰς ἄλλας ἐξισώσεις αὐτοῦ.

Αἱ ὁρίζουσαι Δ'' καὶ Δ''' λέγονται χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι ἀντιστοιχοῦσαι ἡ μὲν Δ'' εἰς τὴν γ´, ἡ δὲ Δ''' εἰς τὴν δ´ ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος.

Ἐὰν πᾶσαι αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι 2ας τάξεως εἶναι μηδέν, ἡ κυρία ὁρίζουσα ἀνάγεται εἰς ἓν στοιχεῖον διάφορον τοῦ μηδενὸς π.χ. τὸ α.

Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τοὺς προηγουμένους, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμὴ $\chi=\dfrac{\varepsilon-\beta\psi-\gamma z-\delta\omega}{\alpha}$, ἥτις ταὐτοποιεῖ τὴν α´ ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1), ταὐτοποιεῖ καὶ τὰς ἄλλας, ἂν πᾶσαι αἱ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι

$$\begin{vmatrix}\alpha & \varepsilon\\ \alpha' & \varepsilon'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\alpha & \varepsilon\\ \alpha'' & \varepsilon''\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\alpha & \varepsilon\\ \alpha''' & \varepsilon'''\end{vmatrix}$$ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον· εἶναι δὲ ἡ ἔκτασις τῆς ἀοριστίας αὐτοῦ μείζων ἢ εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις, διότι ἤδη τρεῖς ἄγνωστοι δύνανται νὰ ὁρισθῶσιν αὐθαιρέτως.

Ἐὰν δὲ μία τοὐλάχιστον τῶν χαρακτηριστικῶν τούτων ὁριζουσῶν εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Δυνάμεθα ἤδη νὰ συνοψίσωμεν τὰ ἀνωτέρω οὕτω.

Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων συστήματος ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μετ᾽ ἰσαρίθμων ἀγνώστων εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα ἔχει ὡρισμένην λύσιν, ἤτοι ἀληθεύει δι᾽ ὡρισμένην τιμὴν ἑκάστου τῶν ἀγνώστων· Ταύτην εὑρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Gramer.

Ἐὰν δὲ ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδέν, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον ἢ ἀδύνατον· Κατ᾽ ἀόριστον μὲν εἶναι, ἂν πᾶσαι αἱ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι εἶναι μηδέν. Ἀδύνατον δέ, ἂν μία τοὐλάχιστον χαρακτηριστικὴ ὁρίζουσα εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

§ **291. Ιβ΄. Λύσες συστήματος ὁμογενῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μετ' ἰσαρίθμων ἀγνώστων.** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma z=0,\ \alpha'\chi+\beta'\psi+\gamma' z=0,\ \alpha''\chi+\beta''\psi+\gamma'' z=0, \qquad (1)$$

οὗ αἱ ἐξισώσεις εἶναι πᾶσαι α΄ βαθμοῦ, ὁμογενεῖς καὶ ἰσάριθμοι πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Πρὸς λύσιν τούτου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Πολ)ζομεν τὰ μέλη τῆς α΄ ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν $\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}$, τὰ μέλη τῆς β΄ ἐπὶ $-\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}$ καὶ τὰ μέλη τῆς γ΄ ἐπὶ $\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}$ καὶ προσθέτομεν τὰς οὕτω προκυπτούσας ἐξισώσεις κατὰ μέλη. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left[\alpha\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}-\alpha'\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}+\alpha''\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}\right]\chi+\left[\beta\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}-\beta'\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}+\beta''\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}\right]\psi+$$
$$\left[\gamma\begin{vmatrix}\beta' & \gamma'\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}-\gamma'\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}+\gamma''\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}\right]z=0$$

ἢ
$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}\chi+\begin{vmatrix}\beta & \beta & \gamma\\ \beta' & \beta' & \gamma'\\ \beta'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}\psi+\begin{vmatrix}\gamma & \beta & \gamma\\ \gamma' & \beta' & \gamma'\\ \gamma'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}z=0.$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν Δ τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, ἐπειδὴ ἡ β΄ καὶ γ΄ ὁρίζουσα τοῦ α΄ μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης εἶναι (§ 286 Πόρ.) μηδέν, αὕτη γίνεται $\Delta\chi=0$. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις $\Delta\psi=0$, $\Delta z=0$. Ὥστε τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα $\Delta\chi=0,\ \Delta\psi=0,\ \Delta z=0.$ (2)

Ἐὰν εἶναι $\Lambda\neq 0$, τοῦτο ἀληθεύει μόνον διὰ $\chi=0$, $\psi=0$, $z=0$. Καὶ τὸ δοθὲν ἄρα σύστημα ἀληθεύει διὰ ταύτας μόνον τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ἐὰν δὲ εἶναι $\Delta=0$, τὸ σύστημα (2), ἑπομένως καὶ τὸ (1) εἶναι ἀόριστον.

Ἡ ἔκτασις δὲ τῆς ἀοριστίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τάξιν τῆς κυρίας ὁριζούσης αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ συστήματος

$$\chi+2y+3z=0,\ 4\chi+5y+6z=0,\ 7\chi+8y+9z=0$$

ἡ Δ εἶναι μηδέν, κυρία δὲ ὁρίζουσα αὐτοῦ εἶναι ἡ $\Delta'=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3.$

Ἐὰν ἄρα ὁ z μεταφερθῇ εἰς τὸ β′ μέλος, προκύπτει τὸ σύστημα

$$\chi+2y=-3z,\ 4\chi+5y=-6z,\ \text{ὅπερ}$$

ἀληθεύει διὰ $\chi=\dfrac{\begin{vmatrix}-3z & 2\\ -6z & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}}=z,\ y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -3z\\ 4 & -6z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}}=-2z.$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρὸς τὴν γ′ ἐξίσωσιν ἀντίστοιχος χαρακτηριστικὴ ὁρίζουσα εἶναι μηδέν, ἕπεται ὅτι, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ z ἀληθεύει καὶ ἡ γ′ ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος συστήματος. Ἀληθεύει ἄρα τὸ σύστημα τοῦτο δι᾽ ἀπείρους τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἃς παρέχουσιν οἱ τύποι $\chi=z$, $y=-2z$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ z. Εἷς λοιπὸν ἄγνωστος δύναται νὰ ὁρισθῇ αὐθαιρέτως.

Τοῦ δὲ συστήματος $2\chi-3y+z=0,\ 4\chi-6y+2z=0,\ 6\chi-9y+3z=0$ κυρία ὁρίζουσα εἶναι εἷς οἱοσδήποτε συντελεστὴς π. χ. ὁ 2. Ἑπομένως τὸ σύστημα ἀληθεύει διὰ $\chi=\dfrac{3y-z}{2}$, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἑκάτερος τῶν ψ καὶ z. Δύνανται λοιπὸν νὰ ὁρισθῶσιν αὐθαιρέτως δύο ἄγνωστοι τοῦ συστήματος.

§ 292. Ἀπαλοιφὴ (ν—1) ἀγνώστων μεταξὺ ν ἐξισώσεων α′ βαθμοῦ.—***Καλοῦμεν ἀπαλοιφὴν (ν—1) ἀγνώστων μεταξὺ ν ἐξισώσεων α′ βαθμοῦ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀναγκαίας καὶ ἐπαρκοῦς συνθήκης**, ὅπως **αἱ ν αὗται ἐξισώσεις ταὐτοποιῶνται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων***.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{gathered}\alpha\chi+\beta y+\gamma z=\delta,\ \ \alpha'\chi+\beta' y+\gamma' z=\delta'\\ \alpha''\chi+\beta'' y+\gamma'' z=\delta'',\ \ \alpha'''\chi+\beta''' y+\gamma''' z=\delta'''\end{gathered}\qquad(1)$$

αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τρεῖς ἀγνώστους χ,y,z καὶ ὧν μία τοὐλάχιστον δὲν εἶναι ὁμογενεῖς. Αἱ ἐξισώσεις αὗται προφανῶς δὲν ἔχουσι τὴν λύσιν $\chi=y=z=0$, διότι ἄλλως ἔπρεπε νὰ εἶναι ὅλαι ὁμογενεῖς.

Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι συμβιβασταί, ἤτοι ὅτι πᾶσαι ταὐτοποιοῦνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς χ_0, y_0, z_0 τῶν ἀγνώστων. Ἐὰν θέσωμεν $\chi=\frac{X}{\lambda}$, $y=\frac{\Psi}{\lambda}$, $z=\frac{Z}{\lambda}$, τὸ σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned}&\alpha X+\beta\Psi+\gamma Z-\lambda\delta=0,\ \alpha' X+\beta'\Psi+\gamma' Z-\lambda\delta'=0\\&\alpha'' X+\beta''\Psi+\gamma'' Z-\lambda\delta''=0,\alpha''' X+\beta'''\Psi+\gamma''' Z-\lambda\delta'''=0.\end{aligned}\qquad(2)$$

Ἐπειδὴ τὸ σύστημα (1) ἀληθεύει ἐξ ὑποθέσεως διὰ $\chi=\chi_0, y=y_0, z=z_0$, τὸ (2) θὰ ἀληθεύῃ διὰ $X=\lambda\chi_0$, $\Psi=\lambda y_0$, $Z=\lambda z_0$, ἤτοι ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἀφ' οὗ ὁ λ εἶναι ἀόριστος. Ἀλλὰ τὸ σύστημα (2) εἶναι ὁμογενὲς πρὸς τοὺς ἀγνώστους X, Ψ, Z, λ· ἐπειδὴ δὲ ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἕπεται (§ 291) ὅτι ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma & -\delta\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & -\delta'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & -\delta''\\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & -\delta'''\end{vmatrix} \text{ ἢ ἡ } \begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta''\\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \delta'''\end{vmatrix}=\Delta \qquad (3)$$

δὲν δύναται νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Διότι ἄλλως τὸ σύστημα (2) θὰ εἶχε μόνον τὴν λύσιν $X=\Psi=Z=\lambda=0$ καὶ οὐχὶ ἀπείρους, ὡς ἀπεδείχθη. Ὥστε, ἂν αἱ ἐξισώσεις (1) εἶναι συμβιβασταί, θὰ εἶναι $\Delta=0$.

Ἀντιστρόφως: Ἂν εἶναι $\Delta=0$, τὸ σύστημα (2) ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ἐὰν μία τούτων εἶναι $X=\chi_0$, $\Psi=\psi_0$, $Z=z_0$, $\lambda=\lambda_0\neq0$, θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}&\alpha X_0+\beta\Psi_0+\gamma Z_0-\lambda_0\delta=0,\ \alpha' X_0+\beta'\Psi_0+\gamma' Z_0-\lambda_0\delta'=0,\\&\alpha'' X_0+\beta''\Psi_0+\gamma'' Z_0-\lambda_0\delta''=0,\ \alpha''' X_0+\beta'''\Psi_0+\gamma''' Z_0-\lambda_0\delta'''=0.\end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ τὰ μέλη ἑκάστης τούτων διαιρέσωμεν διὰ λ_0, εὑρίσκομεν τὰς ἰσότητας

$$\alpha\frac{X_0}{\lambda_0}+\beta\frac{\Psi_0}{\lambda_0}+\gamma\frac{Z_0}{\lambda_0}-\delta=0,\ \alpha'\frac{X_0}{\lambda_0}+\beta'\frac{\Psi_0}{\lambda_0}+\gamma'\frac{Z_0}{\lambda_0}-\delta'=0,$$

$$\alpha''\frac{X_0}{\lambda_0}+\beta''\frac{\Psi_0}{\lambda_0}+\gamma''\frac{Z_0}{\lambda_0}-\delta''=0,\ \alpha'''\frac{X_0}{\lambda_0}+\beta'''\frac{\Psi_0}{\lambda_0}+\gamma'''\frac{Z_0}{\lambda_0}-\delta'''=0.$$

Ἐκ τούτων καθίσταται φανερὸν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) ἔχουσι κοινὴν λύσιν. Εἶναι λοιπὸν ἡ συνθήκη $\Delta=0$ καὶ ἐπαρκής.

Ἄρα: ***Ἵνα αἱ ἐξισώσεις (1) ἔχωσι κοινὴν λύσιν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ὁρίζουσα Δ νὰ εἶναι μηδέν.***

Ἀσκήσεις. 1295) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi+2y-3z=-8,\quad \chi+2z-y=18,\quad 2y+2z-\chi=30.$$

1296) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi+3y+5z+3\omega=34$, $\chi+y+2z+\omega=13$
$\chi+2y+5z+4\omega=36$, $\chi+3y+8z+5\omega=51$.

1297) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $10\chi+5y+4z=46$, $5\chi+10y+3z=38$, $\chi+y+z=12$

1298) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $2\chi+5y+4z=46$, $5\chi+2y+3z=38$, $\chi+y+z=12$

1299) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $5\chi+5y+4z=46$, $5\chi+5y+3z=38$, $\chi+y+z=12$

1300) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα

$$-2\chi+y+z=4,\quad \chi-2y+z=-6,\quad \chi+y-2z=2$$

εἶναι ἀόριστον, νὰ καθορισθῇ ἡ ἔκτασις τῆς ἀοριστίας καὶ νὰ ὁρισθῶσιν οἱ τύποι, ὑφ' ὧν αἱ ῥίζαι αὐτοῦ παρέχονται.

1301) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα

$-2\chi+y+z=1,\ \chi-2y+z=-2,\ \chi+y-2z=4$ εἶναι ἀδύνατον.

1302) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $2\chi+y+2z=10,\ \chi+2y+2z=10,\ 2\chi+y+2z=10.$

1303) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $-3\chi+y+2z=0,\ \chi-3y+2z=0,\ 2\chi+y-3z=0.$

1304) Νὰ ἀπαλειφθῶσιν οἱ ἄγνωστοι χ, y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων.

$$3\chi-4y=2,\ 4\chi+y=9,\ \alpha\chi+\beta y=\gamma.$$

1305) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ αἱ ἐξισώσεις

$$3\chi+5y+4z=12,\ 5\chi+3y+4z=12,\ 4\chi+5y+3z=12,\ \chi+y+\lambda z=12$$

εἶναι συμβιβασταί ;

1306) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi+y+2z=\alpha,\ \chi+2y+z=\beta,\ 2\chi+y+z=\gamma.$

1307) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $-\chi+6y+3z=17,\ 6\chi-y+2z=13,\ \chi+y+z=6.$

1308) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ αἱ ἐξισώσεις

$2\chi+6y+3z=17,\ 6\chi+2y+2z=13,\ \chi+y+z=6,\ \lambda(\chi+y)+5z=30$ εἶναι συμβιβασταί ;

1309) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ αἱ ἐξισώσεις

$$\chi+y-z=4,\ y+z-\omega=2,\ z+\omega-\varphi=9,\ \omega+\varphi-\chi=32,$$
$$\varphi+\chi-y=28,\ 2\chi+3y+4z-\lambda(\varphi-\omega)=74$$

εἶναι συμβιβασταί ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

§ 293. Ὁρισμὸς τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς. Ἔστω $2\chi^2+3$ τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ χ, ἣν χάριν συντομίας ἂς καλέσωμεν ψ, ἤτοι ἔστω $\psi=2\chi^2+3$.

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς πᾶσαν τιμὴν χ_0 τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τιμὴ ψ_0 τοῦ ψ παρεχομένη ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\psi_0=2\chi_0^2+3$. (1)

Ἐὰν εἰς τὴν τιμὴν χ_0 δόσωμεν αὔξησίν τινα ε, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ψ θὰ λάβῃ αὔξησίν τινα η (§ 202), ἤτοι θὰ εἶναι

$$\psi_0+\eta=2(\chi_0+\varepsilon)^2+3=2\chi_0^2+4\varepsilon\chi_0+2\varepsilon^2+3.$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$\eta=4\varepsilon\chi_0+2\varepsilon^2,\ \text{ὅθεν}\ \frac{\eta}{\varepsilon}=4\chi_0+2\varepsilon \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ ἡ αὔξησις ε νοηθῇ μεταβαλλομένη, διὰ ὅρ $\varepsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ ὅρ $\eta=4\chi_0\cdot$ ὅρ $\varepsilon+2$ὅρ $\varepsilon^2=0$. Εἶναι ἄρα ἡ συνάρτησις y συνεχὴς (§ 203) διὰ τὴν τιμὴν χ_0 τοῦ χ.

Ἐὰν ἤδη λάβωμεν τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (2), εὑρίσκομεν ὅτι ὅρ $\dfrac{\eta}{\varepsilon}=$ ὅρ $(4\chi_0+\varepsilon)=4\chi_0+$ ὅρ ε.

Αὕτη διὰ ὅρ $\varepsilon=0$ γίνεται ὅρ $\dfrac{\eta}{\varepsilon}=4\chi_0$.

Τὴν τιμὴν ταύτην $4\chi_0$ τοῦ $\text{ὅρ}\,\frac{\eta}{\varepsilon}$ καλοῦμεν ***παράγωγον*** τῆς συναρτήσεως ψ διὰ $\chi=\chi_0$ καὶ σημειοῦμεν οὕτω ψ'.

Ἐὰν τὴν αὔξησιν ε δόσωμεν εἰς οἱανδήποτε τιμὴν χ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὅτι $\text{ὅρ}\,\frac{\eta}{\varepsilon}=4\chi$ διὰ ὅρ $\varepsilon=0$.

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $2\chi^2+3$ διὰ τυχοῦσαν τιμὴν χ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἶναι 4χ, ἤτοι

$$(2\chi^2+3)'=4\chi.$$

Γενικῶς: ***Παράγωγος συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς διά τινα τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου ταύτης μεταβλητῆς καλεῖται τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ὅριον τῆς αὐξήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἶναι τὸ μηδέν.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον δοθείσης συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς πορείαν·

Δίδομεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν χ μίαν αὔξησιν, ἣν ἐν τοῖς ἑξῆς θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\Delta\chi$. Ὑπολογίζομεν ἔπειτα τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς συναρτήσεως ψ, ἣν αὔξησιν θὰ παριστάνωμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\Delta\psi$. Εὑρίσκομεν μετὰ ταῦτα τὸν λόγον $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$ καὶ τὸ ὅριον τοῦ λόνου τούτου διὰ ὅρ $\Delta\chi=0$.

Ἵνα συνάρτησίς τις ψ ἔχῃ παράγωγον διά τινα τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, πρέπει νὰ εἶναι ὅρ $\Delta\psi=0$, ὅταν ὅρ $\Delta\chi=0$, ἤτοι (§ 203) πρέπει ἡ ψ νὰ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ. Διότι, ἂν διὰ ὅρ $\Delta\chi=0$ τὸ ὅρ Δy ἦτο σταθερὸς ἀριθμὸς σ, θὰ ἦτο

$$\text{ὅρ}\,\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\frac{\sigma}{0}=\infty.$$

Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς:

1ον) Ἐὰν $y=\lambda\chi+\mu$ ἔνθα λ καὶ μ σταθερὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι καὶ $y+\Delta y=\lambda\chi+\lambda\Delta\chi+\mu$, ὅθεν $\Delta y=\lambda\Delta\chi$ καὶ $\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\lambda$. Κατ' ἀκολουθίαν ὅρ $\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\lambda$ ἤτοι $y'=\lambda$. Διὰ $\lambda=1$ εἶναι $y=\chi$ καὶ $y'=\chi'=1$.

2ον) Ἐὰν y εἶναι σταθερά, ἡ εἰς αὔξησιν κατὰ $\Delta\chi$ τοῦ χ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις Δy εἶναι μηδέν. Κατ' ἀκολουθίαν $\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=0$ καὶ ἑπομένως ὅρ $\frac{\Delta y}{\Delta \chi}=y'=0$. Ἤτοι *ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδέν.*

3ον) Ἐὰν $y=\sqrt{\chi}$, θὰ εἶναι $y+\Delta y=\sqrt{\chi+\Delta\chi}$ καὶ ἐπομένως

$$\Delta y=\sqrt{\chi+\Delta\chi}-\sqrt{\chi}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\frac{\sqrt{\chi+\Delta\chi}-\sqrt{\chi}}{\Delta\chi}$$

Ἐὰν ἤδη εἰς τὸ β′ μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος θέσωμεν 0 ἀντὶ Δχ, τὸ β′ τοῦτο μέλος γίνεται $\frac{0}{0}$, ἤτοι λαμβάνει ἀόριστον μορφήν. Πρὸ ἄρσιν τῆς ἀοριστίας πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρανομαστὴν ἐπὶ $\sqrt{\chi+\Delta\chi}+\sqrt{\chi}$. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\frac{1}{\sqrt{\chi+\Delta\chi}+\sqrt{\chi}} \text{ καὶ ἐπομένως ὅρ } \frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\frac{1}{2\sqrt{\chi}}, \text{ ἢ } y'=\frac{1}{2\sqrt{\chi}}.$$

Ἄρα : Ἡ παράγωγος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζας τοῦ χ εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ταύτης ῥίζας.

§ 294. Παράγωγος ἀθροίσματος συναρτήσεων τοῦ χ. Ἔστωσαν φ, ω, z συνεχεῖς συναρτήσεως τοῦ χ ἔχουσαι ἀντιστοίχως παράγωγον φ′, ω′, z′. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\varphi+\omega+z$ εἶναι προφανῶς νέα συνάρτησις y τῆς αὐτῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ. Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ἡ y ἔχῃ παράγωγον καὶ πῶς εὑρίσκεται αὕτη.

Ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ἀπό τινος τιμῆς χ λαμβάνῃ αὔξησιν Δχ, αἱ φ, ω, z λαμβάνουσιν ἀντιστοίχους αὐξήσεις Δφ, Δω, Δz, ὧν ἑκάστη ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν ὅρ $\Delta\chi=0$, ἕνεκα τῆς συνεχείας τῶν συναρτήσεων φ, ω, z. Καὶ ἡ συνάρτησις δὲ y, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $\varphi+\omega+z$, θὰ λάβῃ αὔξησι Δy, τοιαύτην ὥστε εἶναι

$$y+\Delta y=\varphi+\Delta\varphi+\omega+\Delta\omega+z+\Delta z.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς $y=\varphi+\omega+z$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\Delta\psi=\Delta\varphi+\Delta\omega+\Delta z$ (1)

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι ὅρ$\Delta y=$ὅρ$\Delta\varphi+$ὅρ$\Delta\omega+$ὅρΔz. Ἐπειδὴ δὲ διὰ ὅρ$\Delta\chi=0$, εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὅρ$\Delta\varphi=$ὅρ$\Delta\omega=$ὅρ$\Delta z=0$, ἕπεται ὅρ$\Delta y=0$. Ἡ συνάρτησις ἄρα y εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ.

Ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ Δχ, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}+\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}+\frac{\Delta z}{\Delta\chi}$.

Ἐπειδὴ δέ, ἐξ ὑποθέσως ὅρ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}=\varphi'$, ὅρ $\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}=\omega'$, ὅρ $\frac{\Delta z}{\Delta\chi}=z'$, ἕπεται ὅτι τὸ β′ μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἔχει ὅριον

$\varphi'+\omega'+z'$. Καὶ τὸ α΄ ὅρα μέλος $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$ ἔχει τὸ αὐτὸ ὅριον ἤτοι

$$y'=\varphi'+\omega'+z'.$$

Ἄρα: ***Ἡ παράγωγος ἀθροίσματος συναρτήσεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων τούτων.***

Οὕτως ἂν $y=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ (α, β, γ σταθεροὶ ἀριθμοί), θὰ εἶναι

$$y'=(\alpha\chi^2)'+(\beta\chi)'+\gamma'=2\alpha\chi+\beta.$$

§ **295. Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων τοῦ χ.** Ἔστωσαν φ καὶ ω δύο συναρτήσεις τοῦ χ συνεχεῖς καὶ ἔχουσαι παραγώγους φ' καὶ ω' πρὸς χ.

Ἄς καλέσωμεν δὲ y τὸ γινόμενον $\varphi\omega$ αὐτῶν καὶ ἄς ἐξετάσωμεν ἂν ἡ συνάρτησις y ἔχῃ παράγωγον καὶ ποία εἶναι αὕτη.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $y=\omega$ καὶ $y+\Delta y=(\varphi+\Delta\varphi)(\omega+\Delta\omega)$ ἕπεται

$$\text{ὅτι } \Delta y=\omega\Delta\varphi+\varphi\Delta\omega+\Delta\varphi\cdot\Delta\omega.$$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ $\Delta\chi$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\omega\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}+\varphi\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}+\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}.\ \Delta\omega \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$\text{ὅρ}\frac{\Delta y}{\Delta\chi}=\omega\ \text{ὅρ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}+\varphi\ \text{ὅρ}\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}+\text{ὅρ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}\cdot\text{ὅρ}\ \Delta\omega.$$

Ἐὰν δὲ ὅρ $\Delta\chi=0$, εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὅρ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}=\varphi'$, ὅρ$\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}=\omega'$ καὶ ὅρ $\Delta\omega=0$, τὸ δὲ β΄ μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος εἶναι $\omega\,\varphi'+\varphi\omega'$.

Κατ' ἀκολουθίαν ὑπάρχει ὅρ$\frac{\Delta y}{\Delta\chi}$ καὶ εἶναι ἴσον πρὸς $\omega\varphi'+\varphi\omega'$,

ἤτοι $$y'=\omega\varphi'+\varphi\omega'. \qquad (1)$$

Ἔστω ἤδη γινόμενον $\omega\varphi z$ τριῶν συναρτήσεων ω, φ, z τοῦ χ, αἳ ὁποῖαι ὑποτίθενται συνεχεῖς καὶ ἔχουσι παραγώγους ω', φ', z'. Ἔστω δὲ y το γινόμενον τοῦτο, ἤτοι ἔστω $y=\omega\varphi z$.

Ἐπειδὴ $\omega\varphi z=(\omega\varphi)z$, ἕπεται ὅτι $y=(\omega\varphi)z$. Ἐπειδὴ δὲ ἑκατέρα τῶν συναρτήσεων ω καὶ φ ἔχει παράγωγον, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει παράγωγον. Ἂν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις z ἔχει παράγωγον, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ y ἔχει παράγωγον, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (1).

Οὕτως εἶναι

$$y'=(\omega\varphi)z'+(\omega\varphi)'.z=\omega\varphi z'+(\omega'\varphi+\omega\varphi')z=\omega\varphi z'+\omega'\varphi z+\omega\varphi' z.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι

$$(\omega\varphi zt)'=\omega'\varphi zt+\omega\varphi' zt+\omega\varphi z't+\omega\varphi zt' \text{ κ.τ.λ.}$$

Ἄρα: ***Ἡ παράγωγος γινομένου συναρτήσεων εἶναι ἄθροισμα***

τῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐξ αὐτοῦ, ἂν διαδοχικῶς ἕκαστος παράγων ἀντικατασταθῇ διὰ τῆς παραγώγου του, οἱ δὲ ἄλλοι μένουσιν ἑκάστοτε ἀμετάβλητοι.

Ἐφαρμογαί. I. Ἔστω ω συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ ἔχουσα παράγωγον ω′ καὶ λ ἀνεξάρτητος τοῦ χ. Ἂν θέσωμεν $y=\lambda\omega$, θὰ εἶναι $y'=\lambda\omega'+\omega\lambda'$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 293 παράδ. 2ον) εἶναι $\lambda'=0$, αὕτη γίνεται $y'=\lambda\omega'$, ἤτοι:

Ἡ παράγωγος γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν τοῦ χ εἶναι γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

II. Ἔστω ω συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ ἔχουσα παράγωγον ω′ καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Ἐὰν τεθῇ $y=\omega^\mu$ ἢ $y=\omega.\omega.\omega....\omega$, θὰ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα

$$y'=\omega'.\omega\omega....\omega+\omega.\omega'.\omega...\omega+....+\omega.\omega.....\omega\omega'. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος τῶν προσθετέων τοῦ β′ μέλους ἔχει ἕνα παράγοντα ἴσον πρὸς ω′ καὶ (μ—1) ἄλλους ἴσους πρὸς ω, ἕκαστος τῶν προσθετέων τούτων ἰσοῦται πρὸς $\omega^{\mu-1}.\omega'$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ προσθετέοι οὗτοι εἶναι μ, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $y'=\mu\omega^{\mu-1}.\omega'$, ἤτοι:

Ἡ παράγωγος δυνάμεως συναρτήσεως μὲ ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἐκθέτην εἶναι γινόμενον τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως ταύτης ἐπὶ τὴν δύναμιν τῆς συναρτήσεως, ἥτις ἔχει ἐκθέτην κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

Ἂν $\omega=\chi$, θὰ εἶναι $(\chi^\mu)'=\mu\chi^{\mu-1}\,.\,\chi'=\mu\chi^{\mu-1}$.

Οὕτως ἂν $y=(3\chi^2+1)^4$, θὰ εἶναι

$$y'=4(3\chi^2+1)^3.(3\chi^2+1)'=4(3\chi^2+1)^3.3(\chi^2)'=12(3\chi^2+1)^3.2\chi=$$
$$24(3\chi^2+3)^3\chi.$$

III. Ἂν $y=\alpha\chi^\mu+\beta\chi^{\mu-1}+\gamma\chi^{\mu-2}+....+\lambda\chi+\mu$, θὰ εἶναι

$$y'=\mu\alpha\chi^{\mu-1}+(\mu-1)\beta\chi^{\mu-2}+....+\lambda.$$

Οὕτω $(5\chi^3-2\chi^2+7\chi+2)'=15\chi^2-4\chi+7$.

§ 296. Παράγωγος πηλίκου συναρτήσεως δι' ἄλλης τοιαύτης. Ἔστωσαν ω καὶ φ, ὧν $\varphi\neq 0$, δύο συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ χ, ἔχουσαι παραγώγους ω′ καὶ φ′. Ἔστω δὲ $\psi=\dfrac{\omega}{\varphi}$.

Ἐὰν νοήσωμεν ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ χ λαμβάνῃ αὔξησίν τινα Δχ, αἱ συναρτήσεις ω,φ,ψ λαμβάνουσιν ἀντιστοίχους αὐξήσεις Δω,Δφ,Δψ, δι' ἃς εἶναι $\psi+\Delta\psi=\dfrac{\omega+\Delta\omega}{\varphi+\Delta\varphi}$. Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς $\psi=\dfrac{\omega}{\varphi}$, εὑρίσκομεν ὅτι

$\Delta\psi = \frac{\omega+\Delta\omega}{\varphi+\Delta\varphi} - \frac{\omega}{\varphi}$, ὅθεν $\Delta\psi = \frac{\varphi\Delta\omega - \omega\Delta\varphi}{(\varphi+\Delta\varphi)\varphi}$. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης $\Delta\chi$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi} = \frac{\varphi\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi} - \omega\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}}{(\varphi+\Delta\varphi)\varphi}.$$

Ὅταν ὅρ $\Delta\chi=0$, εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὅρ $\Delta\omega=0$, ὅρ $\Delta\varphi=0$ καὶ ἑπομένως ὅρ $\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}=\omega'$, ὅρ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}=\varphi'$ καὶ ὅρ $(\varphi+\Delta\varphi)=\varphi+$ὅρ $\Delta\varphi=\varphi$.

Τὸ β΄ μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἔχει ὅριον $\frac{\varphi\omega'-\omega\varphi'}{\varphi^2}$. καὶ τὸ α΄ ἄρα μέλος ἔχει τὸ αὐτὸ ὅριον, ἤτοι $\psi' = \frac{\varphi\omega'-\omega\varphi'}{\varphi^2}$.

Ἄρα: ***Ἡ παράγωγος πηλίκου συναρτήσεως δι᾽ ἄλλης εἶναι κλάσμα, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ ἀριθμητοῦ μεῖον τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ παρονομαστοῦ, παρονομαστὴν δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ.***

Ἐφαρμογαί. I. Ἔστω φ συνάρτησις τοῦ χ ἔχουσα παράγωγον φ΄ καὶ λ ἀνεξάρτητος τοῦ χ. Ἐὰν θέσωμεν $\psi=\frac{\lambda}{\varphi}$, θὰ εἶναι

$\psi' = \frac{\varphi\lambda'-\lambda\varphi'}{\varphi^2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\lambda'=0$, αὕτη γίνεται

$$\psi' = -\frac{\lambda\varphi'}{\varphi^2}.$$ ἤτοι:

Ἡ παράγωγος τοῦ πηλίκου σταθερᾶς διὰ συναρτήσεως τοῦ χ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀντίθετον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως διὰ τοῦ τετραγώνου τῆς συναρτήσεως.

Οὕτω $\left(\frac{3}{\chi^2}\right)' = -\frac{3(\chi^2)'}{\chi^4} = -\frac{6\chi}{\chi^4} = -\frac{6}{\chi^3}$.

II. Ἔστω ω συνάρτησις τοῦ χ καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Ἐὰν θέσωμεν $\psi=\omega^{-\mu}$ ἢ $\psi=\frac{1}{\omega^\mu}$, θὰ εἶναι

$$\psi' = -\frac{1.(\omega^\mu)'}{\omega^{2\mu}} = -\frac{\mu\omega^{\mu-1}\omega'}{\omega^{2\mu}} = -\mu\omega^{-\mu-1}.\omega'.$$

$$\text{ἢ } \left(\omega^{-\mu}\right)' = -\mu\omega^{-\mu-1}.\omega'.$$

Βλέπομεν οὕτω ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης συναρτήσεως τοῦ χ εἶναι ἀκέραιος, ἡ παράγωγος εὑρίσκεται κατὰ τὸν αὐτὸν (§ 295, II) τρόπον εἴτε ὁ ἐκθέτης οὗτος εἶναι θετικός, εἴτε ἀρνητικός.

§ **297. Παράγωγος τετραγ. ῥίζης συναρτήσεως τοῦ χ.** Ἔστω ω συνάρτησις τοῦ χ ἔχουσα παράγωγον ω'. Ἂν θέσωμεν $\psi=\sqrt{\omega}$ καὶ νοήσωμεν ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ χ λαμβάνει αὔξησιν Δχ, αἱ συναρτήσεις ω,ψ λαμβάνουσιν αὐξήσεις ἀντιστοίχως Δω,Δψ, αἱ ὁποῖαι τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ Δχ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\psi+\Delta\psi=\sqrt{\omega+\Delta\omega}$, $\psi=\sqrt{\omega}$ εὐκόλως ὅτι

$$\Delta\psi=\sqrt{\omega+\Delta\omega}-\sqrt{\omega}=\frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}},$$

ὅθεν $\dfrac{\Delta y}{\Delta\chi}=\dfrac{\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}}{\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}}$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι

$$y'=\frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}.$$

Ἄρα: ***Ἡ παράγωγος τετρ. ῥίζης συναρτήσεως εἶναι πηλίκον τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως ταύτης διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ταύτης ῥίζης.***

ΣΗΜ. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἱ ὁποῖοι δὲν μηδενίζουσι τὴν συνάρτησιν ω.

§ **298. Παράγωγοι διαφόρων τάξεων.** Ὅταν συνάρτησις τοῦ χ ἔχῃ παράγωγον y' διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, εἶναι δὲ ἡ παράγωγος αὕτη y' συνάρτησις τοῦ χ, εἶναι δυνατὸν καὶ αὕτη νὰ ἔχῃ παράγωγον. Ἡ παράγωγος αὕτη τῆς παραγώγου δοθείσης συναρτήσεως καλεῖται ***δευτέρα παράγωγος*** τῆς συναρτήσεως, σημειοῦται δὲ οὕτω y''.

Οὕτως, ἂν $y=5\chi^4-7\chi^3+12\chi-1$, εἶναι $y'=20\chi^3-21\chi^2+12$ καὶ $y''=60\chi^2-42\chi$.

Ἡ παράγωγος τῆς δευτέρας παραγώγου συναρτήσεως y καλεῖται ***τρίτη*** παράγωγος τῆς y καὶ σημειοῦται οὕτω y''' καὶ οὕτω καθεξῆς ὁρίζονται αἱ παράγωγοι 4ης, 5ης, 6ης, 7ης κ.τ.λ. τάξεως, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουσι. Πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν παραγώγων τούτων ἡ ἀρχικὴ παράγωγος καλεῖται καὶ πρώτη παράγωγος.

Ἀσκήσεις. 1310) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων 12χ, $7\chi-3$, χ^2+6 $5\chi^3+2\chi^2-7\chi+1$.

1311) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων $\frac{2}{5}\chi^6-\frac{1}{4}\chi^4-\frac{5}{3}\chi^3+\frac{1}{2}\chi^2-8\chi+17$, $3\chi^{-5}$, $7\chi^{-11}$, $\chi^7+6\chi^{-6}-4\chi^3-2\chi+1$.

1312) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων $(\chi^2-3)(2\chi^3+5\chi-1)$, $7(\chi^3+\chi^2-1)(2\chi^2-1)(\chi+1)$

1313) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων

$$\frac{2\chi-3}{\chi+3},\quad \frac{\chi+1}{\chi^5+1},\quad \frac{4\chi}{7\chi-3},\quad \frac{\lambda\chi+\beta}{\lambda\chi-\beta},\quad \frac{\chi^2-3\chi+1}{\chi^2+3\chi-1}.$$

1314) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων

$$\frac{1}{(\chi+2)(\chi-3)},\quad \frac{2\chi(\chi^2+1)}{(3\chi^2+1)(\chi^2-1)},\quad \frac{(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)}{5\chi}.$$

1315) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων

$$5\sqrt{\chi+1},\quad 8\sqrt{\chi^2-1},\quad \frac{2}{\sqrt{\chi+3}},\quad \frac{-3\sqrt{\chi-1}}{5\sqrt{\chi+1}}.$$

1316) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\dfrac{5\chi^2}{\sqrt{\chi^5}}+30\sqrt{\chi}$.

1317) Νὰ εὑρεθῇ ἡ β′ παράγωγος ἑκάστης τῶν συναρτήσεων

$$5\chi^2-3\chi+6,\quad -7\chi^5+4\chi^2-3\chi+1,\quad \frac{1}{2}\chi^5-\frac{1}{5}\chi^2+\frac{1}{4}\chi-6.$$

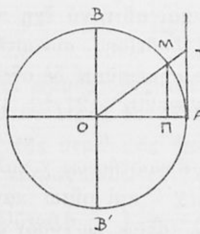
1318)) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γ′ παράγωγος ἑκάστης τῶν δύο τελευταίων συναρτήσεων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

1319) Νὰ εὑρεθῇ ἡ β′ παράγωγος ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων

$$\sqrt{\chi},\quad \sqrt{\chi^2-1},\quad \sqrt{3\chi^2+7}.$$

Παράγωγοι τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων.

§ 299. Θεώρημα I. ***Τὸ ὅριον τοῦ λόγου τοῦ ἡμιτόνου τόξου πρὸς τὸ τόξον τοῦτο εἶναι 1, ὅταν τὸ τόξον ἔχῃ ὅριον μηδέν.***



(Σχ. 8)

Ἔστω τόξον ΑΜ, οὗ τὸ μέτρον εἶναι χ, (ΠΜ) τὸ ἡμ χ καὶ (ΑΤ) ἡ ἐφχ. Προφανῶς εἶναι

$$(\mathrm{OMA}) < \text{κυκλ τομ}\cdot(\mathrm{AOM}) < (\mathrm{OAT}) \text{ ἢ}$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OA}).(\Pi\mathrm{M}) < \frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\widehat{\mathrm{AM}}) < \frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\mathrm{AT})$$

ὅθεν $\Pi\mathrm{M} < \chi < \mathrm{AT}$ ἢ $\text{ἡμ}\,\chi < \chi < \text{ἐφ}\chi$

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}\chi > 0$, ἕπεται ὅτι $1 < \dfrac{\chi}{\text{ἡμ}\chi} < \dfrac{\text{ἐφ}\chi}{\text{ἡμ}\chi}$

ἢ $$1 < \frac{\chi}{\text{ημ}\chi} < \frac{1}{\text{συν}\chi}.$$

Ἐὰν δὲ ὅρχ=0, θὰ εἶναι ὅρ συνχ= 1. Περιέχεται λοιπὸν ὁ λόγος

$\frac{\chi}{ἡμ\chi}$ μεταξὺ τῆς 1 καὶ μιᾶς ποσότητος, ἡ ὁποία ἔχει ὅριον 1. Θὰ εἶναι ἄρα ὅρ $\frac{\chi}{ἡμ\chi} = 1$ καὶ ἑπομένως καὶ ὅρ $\frac{ἡμ\chi}{\chi} = 1$.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν χ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν. Τῷ ὄντι ἂν χ εἶναι ἀρνητικὸν τόξον καὶ θέσωμεν $\chi = -\chi'$, τὸ χ' θὰ εἶναι θετικὸν τόξον. Διὰ τιμὰς δὲ τοῦ χ ἐγγὺς τοῦ μηδενὸς κειμένας εἶναι $\frac{ἡμ\chi}{\chi} > 0$ καὶ $\frac{ἡμ\chi}{\chi} = \frac{-ἡμ\chi'}{-\chi'} = \frac{ἡμ\chi'}{\chi'}$.

Ἄρα ὅρ $\frac{ἡμ\chi}{\chi} =$ ὅρ $\frac{ἡμ\chi'}{\chi'} = 1$.

§ **300. Παράγωγος τοῦ ἡμιτόνου τόξου.** Ἐὰν θέσωμεν $y = ἡμ\chi$, θὰ εἶναι καὶ $y + \Delta y = ἡμ(\chi + \Delta\chi)$, ὅθεν

$$\Delta y = ἡμ(\chi + \Delta\chi) - ἡμ\chi \quad ἢ \quad \Delta y = 2ἡμ\frac{\Delta\chi}{2}\,συν\left(\chi + \frac{\Delta\chi}{2}\right).$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $\frac{\Delta y}{\Delta\chi} = \frac{ἡμ\frac{\Delta\chi}{2}}{\frac{\Delta\chi}{2}}\,συν\left(\chi + \frac{\Delta\chi}{2}\right)$. Ἐὰν δὲ ὅρ $\Delta\chi = 0$, θὰ εἶναι καὶ ὅρ $\frac{\Delta\chi}{2} = 0$, ὅρ $\frac{ἡμ\frac{\Delta\chi}{2}}{\frac{\Delta\chi}{2}} = 1$,

ὅρ συν $\left(\chi + \frac{\Delta\chi}{2}\right) = συν\chi$ καὶ ἑπομένως ὅρ $\frac{\Delta y}{\Delta\chi} = συν\chi$ ἢ $y' = συν\chi$, ἤτοι:

Ἡ παράγωγος τοῦ ἡμχ ἰσοῦται πρὸς τὸ συνχ.

§ **301. Παράγωγος τοῦ συνημιτόνου τόξου.** Ἐὰν $y = συν\chi$, θὰ εἶναι $y + \Delta y = συν(\chi + \Delta\chi)$ καὶ ἑπομένως

$$\Delta y = συν(\chi + \Delta\chi) - συν\chi, \quad ὅθεν \quad \Delta y = -2ἡμ\left(\chi + \frac{\Delta\chi}{2}\right) ἡμ\frac{\Delta\chi}{2} \quad καὶ$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta\chi} = -\frac{ἡμ\frac{\Delta\chi}{2}}{\frac{\Delta\chi}{2}}\,ἡμ\left(\chi + \frac{\Delta\chi}{2}\right).$$ Ἐκ ταύτης εὐκόλως προκύπτει ὅτι $y' = -ἡμ\chi$, ἤτοι

Ἡ παράγωγος τοῦ συνχ εἶναι ἀντίθετος τοῦ ἡμχ.

§ **302. Παράγωγος τῆς ἐφχ.** Ἐπειδὴ $ἐφχ = \frac{ἡμχ}{συνχ}$, ἕπεται (§ 296) ὅτι

$$(ἐφχ)' = \frac{συνχ(ἡμχ)' - ἡμχ(συνχ)'}{συν^2χ} = \frac{συν^2χ + ἡμ^2χ}{συν^2χ} = \frac{1}{συν^2χ}.$$

Ἄρα: *Ἡ παράγωγος τῆς ἐφχ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $συν^2χ$.*

§ **303. Παράγωγος σφχ.** Ἐπειδὴ $σφχ = \frac{συνχ}{ἡμχ}$ ἕπεται ὅτι

$$(σφχ)' = \frac{ἡμχ(συνχ)' - συνχ(ἡμχ)'}{ἡμ^2χ} = \frac{-ἡμ^2χ - συν^2χ}{ἡμ^2χ} = -\frac{1}{ἡμ^2χ}.$$

Ἄρα: *Ἡ παράγωγος τῆς σφχ εἶναι ἀντίθετος τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ $ἡμ^2χ$*

§ **304. Παράγωγος τῆς τεμχ καὶ στεμχ.** Ἐκ τῆς ἰσότητος $τεμχ = \frac{1}{συνχ}$ εὑρίσκομεν ὅτι $(τεμχ)' = \frac{ἡμχ}{συν^2χ} = \frac{εφχ}{συνχ}$. Ἐκ δὲ τῆς $στεμ\,χ = \frac{1}{ἡμχ}$ εὑρίσκομεν $(στεμ\,χ)' = \frac{-συνχ}{ἡμ^2χ} = -\frac{σφχ}{ἡμχ}$.

Χρήσεις τῆς παραγώγου εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων.

§ **305. Θεώρημα I.**— *Ἐὰν συνάρτησις ψ τοῦ χ εἶναι αὔξουσα ἔν τινι διαστήματι α.....β τιμῶν τοῦ χ, ἡ παράγωγος δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ χ περιεχομένην ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ εἶναι ἀρνητική.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις y εἶναι ἐξ ὑποθέσεως αὔξουσα, αἱ ἀντίστοιχοι αὐξήσεις Δx καὶ Δy εἶναι ὁμόσημοι (§ 202). Ὁ λόγος ἄρα $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι θετικός, ἐφ' ὅσον αἱ τιμαὶ τοῦ x περιέχονται εἰς τὸ θεωρηθὲν διάστημα α.....β, ὅσον δήποτε μικρὰ καὶ ἂν εἶναι ἡ αὔξησις Δx. Τὸ ὅριον ἑπομένως τοῦ λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ἤτοι ἡ παράγωγος y' ἀδύνατον νὰ εἶναι ἀρνητική. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜ. Δὲν πρέπει ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ παράγωγος εἶναι πάντοτε θετική, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ μηδὲν διά τινας τιμὰς τοῦ x.

§ **306. Θεώρημα II.** ***Ἐὰν συνάρτησις y τοῦ x εἶναι φθίνουσα ἔν τινι διαστήματι τιμῶν τοῦ x, ἡ παράγωγος δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x περιεχομένην ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ εἶναι θετική.***

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ y εἶναι φθίνουσα, αἱ ἀντίστοιχοι αὐξήσεις

$\Delta\chi$ καὶ $\Delta\psi$ εἶναι ἑτερόσημοι (§ 202). Ὁ λόγος ἄρα $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$ εἶναι ἀρνητικός, καὶ ἑπομένως τὸ ὅρ $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$ ἢ ψ' ἀδύνατον νὰ εἶναι θετική. ὅ.ἔ.δ.

§ 307. Θεώρημα III. ***Ἐὰν ἡ παράγωγος συναρτήσεως τοῦ χ εἶναι θετικὴ διὰ τιμὰς τοῦ χ περιεχομένας εἰς ὡρισμένον διάστημα α..... β, ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι αὔξουσα ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ.***

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ συνάρτησις ἦτο σταθερὰ δι' ὅλας τὰς ἐν τῷ διαστήματι α..... β τιμὰς τοῦ χ ἢ διά τινας τούτων, ἡ παράγωγος αὐτῆς θὰ ἦτο (§ 293, παράδ. 2ον) μηδὲν διὰ τὰς τιμὰς ταύτας. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἡ συνάρτησις ἄρα διαρκῶς μεταβάλλεται. Ἐὰν δὲ ἡ συνάρτησις ἦτο ἔστω καὶ διά τινας τῶν θεωρουμένων τιμῶν τοῦ χ φθίνουσα, ἡ παράγωγος αὐτῆς δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἶναι δι' αὐτὰς θετικὴ (§ 306), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἡ συνάρτησις λοιπὸν διαρκῶς μεταβάλλεται μὴ οὖσα φθίνουσα· εἶναι ἄρα αὔξουσα. ὅ. ἔ. δ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

§ 308. Θεώρημα IV. ***Ἐὰν ἡ παράγωγος συναρτήσεως τοῦ χ εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τιμὰς τοῦ χ περιεχομένας εἰς ὡρισμένον διάστημα α..... β, ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι φθίνουσα ἐν τῷ διαστήμαιι τούτῳ.***

§ 309. Θεώρημα V. ***Ἐὰν διὰ μίαν μόνον τιμὴν χ_0 τοῦ χ περιεχομένην εἰς ὡρισμένον διάστημα α.... β ἡ παράγωγος συναρτήσεως σ(χ) μηδενίζηται, ἡ τιμὴ σ(χ_0) εἶναι μεγίστη ἢ ἐλαχίστη, καθ' ὅσον ἡ παράγωγος μηδενίζεται μεταβαίνουσα ἐκ θετικῶν εἰς ἀρνητικὰς ἢ ἐξ ἀρνητικῶν εἰς θετικὰς τιμάς.***

Ἀπόδειξις. α') Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν διὰ τὰς εἰς τὸ διάστημα α..... χ_0 περιεχομένας τιμὰς (πλὴν τῆς χ_0) τοῦ χ ἡ παράγωγός εἶναι θετική, ἄρα ἡ συνάρτησις εἶναι διαρκῶς αὔξουσα. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ σ(χ_0) εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν τιμῶν, ἃς λαμβάνει ἡ συνάρτησις διὰ τὰς ῥηθείσας τιμὰς τοῦ χ. Διὰ τὰς τιμὰς δὲ τοῦ χ τὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα χ_0..... β ἡ παράγωγος εἶναι ἀρνητικὴ (ἐκτὸς διὰ τὴν χ_0), ἄρα ἡ συνάρτησις εἶναι διαρκῶς φθίνουσα. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ τιμὴ σ(χ_0) εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις διὰ τὰς ῥηθείσας τιμὰς τῶν χ. Ἡ συνάρτησις λοιπὸν ἀπὸ τῆς σ(α) βαίνει αὐξανομένη διαρκῶς μέχρι τῆς σ(χ_0) καὶ εἶτα ἄρχεται ἐλαττουμένη μέχρι τῆς σ(β). Ἡ τιμὴ ἄρα σ (χ_0) εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ αὐτῆς ἐν τῷ θεωρουμένῳ διαστήματι α..... β.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι, ἂν ἡ παράγωγος μηδενίζηται διὰ μόνην τὴν τιμὴν χ_0 τοῦ χ μεταβαίνουσα ἐξ ἀρνητικῶν εἰς θετικὰς τιμάς, ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι α.....χ_0 καὶ αὔξουσα ἐν τῷ χ_0..... β. Εἶναι ἄρα ἡ σ(χ_0) ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ διαστήματι α..... β.

§ **310. Θεώρημα VI.** ***Ἐὰν συνάρτησις σ(χ) γίνηται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη διὰ τὴν τιμὴν χ_0 τοῦ χ περιεχομένην εἰς δοθὲν διάστημα α..... β, ἡ παράγωγος αὐτῆς μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν χ_0 τοῦ χ. Μεταβαίνει δὲ ἐκ θετικῶν εἰς ἀρνητικὰς τιμάς, ἂν σ(χ_0) εἶναι μέγιστον καὶ ἐξ ἀρνητικῶν εἰς θετικὰς τιμάς, ἂν σ(χ_0) εἶναι ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως.***

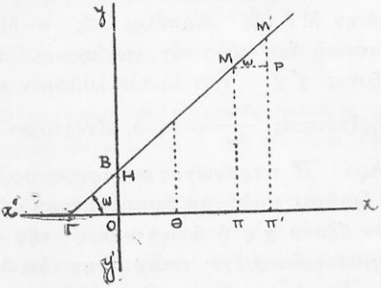
Ἀπόδειξις. α΄) Ἂν ἡ τιμὴ σ(χ_0) εἶναι μεγίστη, ἡ συνάρτησις σ(χ) εἶναι αὔξουσα μὲν ἐν τῷ διαστήματι α.....χ_0, φθίνουσα δὲ ἐν τῷ χ_0.....β. Κατ᾿ ἀκολουθίαν ἡ παράγωγος εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι ἀρνητικὴ εἰς τὸ α΄ τῶν διαστημάτων τούτων καὶ θετικὴ εἰς τὸ β΄.

Ἐπειδὴ δὲ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ διαρκῶς καὶ τὴν τιμὴν 0, διότι τότε ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο σταθερά, ἕπεται ὅτι εἶναι θετικὴ μὲν εἰς τὸ α΄ διάστημα α.....χ_0 ἀρνητικὴ δὲ εἰς τὸ χ_0... β. Ὥστε ἡ παράγωγος ἐκ θετικῶν τιμῶν μεταβαίνει εἰς ἀρνητικάς. Ἐπειδὴ δὲ ὑποτίθεται καὶ αὕτη συνεχὴς συνάρτησις, ἡ μετάβασις αὕτη δὲν δύναται νὰ γείνῃ ἀποτόμως, ἤτοι ὀφείλει αὕτη νὰ μηδενισθῇ πρῶτον καὶ εἶτα νὰ γείνῃ ἀρνητική. Ἐπειδὴ δὲ οὐδεμίαν τῶν ἐγγὺς τῆς χ_0 τιμῶν τοῦ χ μηδενίζεται, ἕπεται ὅτι τοῦτο γίνεται διὰ $\chi = \chi_0$.

β΄) Ἂν ἡ τιμὴ σ(χ_0) εἶναι ἐλαχίστη, ἡ συνάρτησις σ(χ) εἶναι φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι α...χ_0 καὶ αὔξουσα ἐν τῷ χ_0... β. Κατ᾿ ἀκολουθίαν ἡ παράγωγος αὐτῆς ἀδύνατον νὰ εἶναι θετικὴ εἰς τὸ α΄ διάστημα καὶ ἀρνητικὴ εἰς τὸ β΄. Ἐπειδὴ δὲ οὐδὲ μηδὲν δύναται νὰ εἶναι συνεχῶς, ἕπεται ὅτι εἶναι ἀρνητικὴ εἰς τὸ α΄ διάστημα καὶ θετικὴ εἰς τὸ δεύτερον. Μεταβαίνει λοιπὸν ἐξ ἀρνητικῶν εἰς θετικὰς τιμὰς καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν μηδενίζεται διὰ $\chi = \chi_0$, διότι ἕνεκα τῆς συνεχείας εἶναι ἀδύνατος ἡ ἀπότομος αὐτῆς μεταπήδησις ἀπὸ τὰς ἀρνητικὰς εἰς τὰς θετικὰς τιμάς.

ΣΗΜ. Ἐν τῇ ἀποδείξει τὸ διάστημα α... β ὑποτίθεται ἐπὶ τοσοῦτον περιωρισμένον ὥστε διὰ μίαν μόνον τιμὴν χ_0 αὐτοῦ νὰ μηδενίζηται ἡ παράγωγος.

§ **311. Γεωμετρικὴ σημασία τῆς παραγώγου.**— Ἔστωσαν χ΄χ, ψ΄ψ δύο ὀρθογώνιοι ἄξονες καὶ ΟΘ, ΟΗ τὰ διευθύνοντα αὐτῶν ἀνύσματα. Ἔστω δὲ εὐθεῖα ΓΒ σχηματίζουσα μὲ τὸν ἄξονα χ΄χ γωνίαν ω. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ αὐτῆς φέρομεν τὴν κάθετον ΜΠ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ. Ὁ ποὺς Π καὶ ἡ τομὴ Ο τῶν ἀξόνων ὁρίζουσι τὸ ἄνυσμα ΟΠ. Ἀντιστρόφως ἐὰν ὁρισθῇ τὸ ἄνυσμα ΟΠ καὶ ἐκ τοῦ Π ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸν χ΄χ, αὕτη τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΓΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον οὕτως ὁρίζεται.



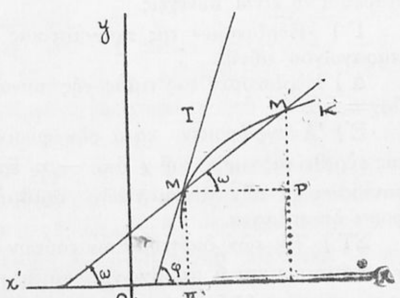
(Σχ. 9)

Τὰ μήκη τῶν ἀνυσμάτων ΟΠ καὶ ΠΜ λέγονται ***συντεταγμέναι*** τοῦ σημείου Μ· ἰδιαιτέρως δὲ τὸ μὲν (ΟΠ) λέγεται ***τετμημένη***, τὸ δὲ (ΠΜ) ***τεταγμένη*** τοῦ σημείου Μ. Ἡ τετμημένη σημείου παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ χ, ἡ δὲ τεταγμένη διὰ τοῦ y.

Ἐὰν ἤδη εἰς τὴν τετμημένην (ΟΠ) ἢ χ τοῦ Μ δόσωμεν μικρὰν αὔξησιν (ΠΠ΄) ἢ Δχ, ἡ τεταγμένη γίνεται (Π΄Μ΄) Ἐπειδὴ δὲ (Π΄Μ΄)=(Π΄Ρ)+(ΡΜ΄)=(ΠΜ)+(ΡΜ΄) ἕπεται ὅτι ἡ τεταγμένη αὐξάνεται κατὰ (ΡΜ΄) ἢ Δy. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΜΡΜ΄ ἕπεται ὅτι

$$\frac{(\text{ΡΜ}')}{(\text{ΜΡ})} = \text{ἐφ}\,\omega \text{ ἢ } \frac{\Delta y}{\Delta \chi} = \text{ἐφ}\,\omega$$

Ἔστω ἤδη $\Sigma_{(\chi)}$ τυχοῦσα συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ καὶ ἂς θέσωμεν $y=\Sigma_{(\chi)}$. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὰ εἰς διάφορα ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χ καὶ ψ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα, ὁρίζομεν καμπύλην τινα Κ.



(Σχ. 10)

Ἔστω δὲ τυχὸν σημμεῖον Μ τῆς καμπύλης ταύτης, ἔχον τετμημένην (ΟΠ) =χ καὶ τεταγμένην (ΠΜ)=ψ, Ἂν δόσωμεν εἰς τὴν τετμημένην χ αὔξησιν (ΠΠ΄) = Δχ, ἡ τεταγμένη λαμβάνει αὔξησιν ΡΜ΄ = Δψ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΜΜ΄ καὶ κληθῇ ω ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ τοῦ ἄξονος χ΄χ, θὰ εἶναι, κατὰ τὰ προηγούμενα $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$ = ἐφω, ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν εἶναι ἡ αὔξησις Δχ. Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν ὅτι ἡ αὔξησις Δχ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις Δψ θὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, ἡ δὲ χορδὴ ΜΜ′ τείνει πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΜΤ τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ. Ἡ γωνία ἄρα ω τείνει νὰ κατασταθῇ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν φ, ἣν σχηματίζει ἡ ΜΤ μετὰ τοῦ ἄξονος χ′χ. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi} =$ ἐφ ω, εὑρίσκομεν ὅρ $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi} =$ ὅρ ἐφ ω ἢ $\psi' =$ ἐφ φ.

Ἄρα: ***Ἡ παράγωγος συναρτήσεως διά τινα ὡρισμένην τιμὴν τοῦ χ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, ἣν σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα χ′χ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει τετμημένην τὴν ὡρισμένην ἐκείνην τιμὴν τοῦ χ.***

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι: ***Ἐὰν ἡ παράγωγος συναρτήσεως διά τινα τιμὴν τοῦ χ εἶναι μηδέν, ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει τετμημένην τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα χ′χ. Καὶ ἀντιστρόφως***

§ 312. Σπουδὴ τῶν μεταβολῶν συναρτήσεως τῇ βοηθείᾳ τῆς παραγώγου αὐτῆς. Διὰ τὴν σπουδὴν τῶν μεταβολῶν συναρτήσεως y ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς πορείαν.

Α′) Ὁρίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ χ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς λαμβάνουσι πραγματικὰς τιμάς.

Β′) Εὑρίσκομεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ ἡ συνάρτησις ψ ἢ καὶ ἡ ψ′ παύουσι νὰ εἶναι συνεχεῖς.

Γ′) Εὑρίσκομεν τὰς πραγματικὰς ῥίζας τῆς συναρτήσεως καὶ τῆς παραγώγου αὐτῆς.

Δ′) Εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ $\chi=0$ καὶ διὰ ὅρ$\chi=\pm\infty$.

Ε′) Ἀναγράφομεν κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν σειρὰν ἐπὶ εὐθείας τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ χ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. Οὕτω χωρίζεται ἡ ἀπέραντος σειρὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ εἰς διάφορα διαστήματα.

ΣΤ′) Ἐκ τῶν διαστημάτων τούτων θεωροῦμεν μόνον ἐκεῖνα, εἰς ἃ ἡ συνάρτησις καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι πραγματικαὶ καὶ συνεχεῖς. Ἀναγράφομεν δὲ ὑποκάτω ἑκάστου τούτων τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου. Ὑποκάτω δὲ ἑκάστου τῶν σημείων + τῆς παραγώγου σημειοῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὐξάνει, ὑποκάτω δὲ τοῦ − ὅτι ἡ συνάρτησις ἐλαττοῦται. Οὕτω δὲ καθορίζονται καὶ τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τούτων θὰ σπουδάσωμεν τὰς μεταβολὰς τῆς συναρτήσεως $\frac{\chi^2-\chi}{\chi^2+1}$, ἣν καλοῦμεν ψ, ἤτοι θέτομεν $\psi=\frac{\chi^2-\chi}{\chi^2+1}$. (1)

Α΄) Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι

$$\psi' = \frac{(\chi^2+1)(2\chi-1)-(\chi^2-\chi)2\chi}{(\chi^2+1)^2} = \frac{\chi^2+2\chi-1}{(\chi^2+1)^2}. \qquad (2)$$

Ἡ συνάρτησις καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι πραγματικαὶ διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ.

Β΄) Παρατηροῦντες ὅτι ὁ παρονομαστὴς τῆς συναρτήσεως ψ καὶ τῆς ψ΄ οὐδέποτε μηδενίζεται, συμπεραίνομεν ὅτι ψ καὶ ψ΄ εἶναι συνεχεῖς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ.

Γ΄) Ἡ συνάρτησις μηδενίζεται διὰ $\chi=0$ καὶ διὰ $\chi=1$, ἡ δὲ παράγωγος μηδενίζεται διὰ $\chi=-1-\sqrt{2}$ καὶ διὰ $\chi=-1+\sqrt{2}$.

Δ΄) Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=0$ καὶ διὰ ὅρ $\chi=\pm\infty$ εἶναι ὅρ $\psi=1$.

Ε΄) καὶ ΣΤ΄) Ὁ παρονομαστὴς τῆς παραγώγου εἶναι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ θετικός. Ἡ παράγωγος ἄρα εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸν ἀριθμητὴν αὐτῆς, ἤτοι εἶναι θετικὴ μὲν διὰ $\chi<-1-\sqrt{2}$ καὶ διὰ $\chi>-1+\sqrt{2}$, ἀρνητικὴ δὲ διὰ $-1-\sqrt{2}<\chi<-1+\sqrt{2}$.

Καταρτίζομεν ἤδη τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

χ	$-\infty$	....	$-1-\sqrt{2}$	......	0	......	$-1+\sqrt{2}$	....	1	....	$+\infty$
ψ΄		+	0	—		—	0	+		+	
ψ΄	+1	....αὔξ....	$\sqrt{2}$	.... ἐλ....	0	ἐλ.	$-\sqrt{2}$	.... αὔξ....	0	.... αὔξ....	+1.
			Μ				Ε				

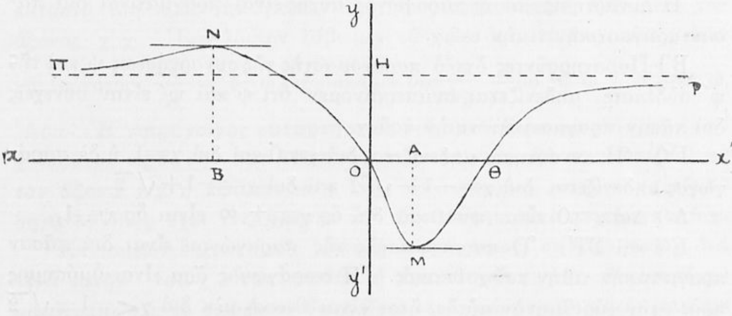
Ἐκ τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι τοῦ χ αὐξάνοντος ἀπὸ τιμῶν ἐγγυτάτων πρὸς τὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $-1-\sqrt{2}$, ἡ συνάρτησις ἀρχομένη ἀπὸ τιμῶν ἐγγυτάτων πρὸς τὴν $+1$ βαίνει αὐξανομένη καὶ διὰ $\chi=-1-\sqrt{2}$ γίνεται $\sqrt{2}$. Εἶτα τοῦ χ αὐξάνοντος ἀπὸ $-1-\sqrt{2}$ μέχρι τοῦ 0 ἡ συνάρτησις ἄρχεται ἐλαττουμένη ἀπὸ $\sqrt{2}$ μέχρι τοῦ 0.

Ἔπειτα τοῦ χ αὐξάνοντος ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $-1+\sqrt{2}$, ἡ συνάρτησις ἐξακολουθεῖ ἐλαττουμένη μέχρι τοῦ $-\sqrt{2}$. Μεθ᾽ ὃ τοῦ χ αὐξάνοντος ἀπὸ τοῦ $-1+\sqrt{2}$ μέχρι τοῦ 1 ἡ συνάρτησις ἄρχεται αὐξανομένη ἀπὸ $-\sqrt{2}$ μέχρι τοῦ 0 καὶ τέλος τοῦ χ αὐξάνοντος ἀπὸ 1 μέχρι $+\infty$, ἡ συνάρτησις ἐξακολουθεῖ αὐξανομένη ἀπὸ τοῦ 0 καὶ τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $+1$, οὐδέποτε ὅμως γίνεται $+1$.

Οὕτως βλέπομεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει μέγιστον $\sqrt{2}$ διὰ $\chi=-1-\sqrt{2}$ καὶ ἐλάχιστον $-\sqrt{2}$ διὰ $\chi=-1+\sqrt{2}$.

Τὰς μεταβολὰς ταύτας αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΠΝΟΜΘΡ, ἣν κατασκευάζομεν ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὸν ἀνωτέρω πίνακα τῶν μεταβολῶν τοῦ ψ μετὰ τοῦ χ.

Ἐπειδὴ διὰ $\chi=-1+\sqrt{2}$ καὶ $\chi=-1-\sqrt{2}$ εἶναι $\psi'=0$, ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὰ ἀντίστοιχα σηδεῖα Μ καὶ Ν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα χ′χ. Ἔχει δὲ ἡ μὲν εἰς τὸ Μ ἐφαπτομένη τὴν καμπύλην ὅλην πρὸς τὴν φορὰν Οψ, διότι ἡ τιμὴ (ΑΜ)=$-\sqrt{2}$ εἶναι ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως· ἡ δὲ εἰς τὸ Ν ἐφαπτο-



(Σχ. 11)

μένη ἔχει ὅλην τὴν καμπύλην πρὸς τὴν φορὰν Οψ′ διότι ἡ τιμὴ (ΒΝ) $=\sqrt{2}$ εἶναι μέγιστον τῆς συναρτήσεως.

Ἀσκήσεις. 1320) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $2\chi^4-26\chi^2+72$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

1321) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{2\chi-3}{1-\chi}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

1322) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{4\chi^2-1}{2(\chi-1)^2}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

1323) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{3\chi-\chi^2}{3(\chi^2-3\chi+2)}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

1324) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{2\chi^2-4\chi+6}{(\chi-1)^2}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

1325) Νὰ σπουδασθῶσιν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{2\chi^2+4\chi-1}{\chi^2+1}$ καὶ νὰ παρασταθῶσι γραφικῶς αὗται.

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Ἐν στίχῳ 12 σελ. 25 ἀντὶ $\left(+\frac{}{9}\right)$ νὰ γραφῇ $\left(+\frac{7}{9}\right)$.

» » 28 » 29 » α^{3} » » α^{-3}.

» » 5 » 36 » αὐξανομέη νὰ γραφῇ αὐξανομένη.

» τῇ ἀσκήσει 222 σελ. 49 Τὸ μεταξὺ τῶν δύο πολυωνύμων $+$ νὰ γείνῃ $\times$.

» » » 227 » 49 ἀντὶ διὰ τριώνυμα νὰ γραφῇ διὰ τὰ τριώνυμα.

» στίχῳ 6 σελ. 54 τὸ τελευταῖον πολυώνυμον εἶναι $4\alpha^2+2\alpha\beta+4\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

» » 27 » 56 ἀντὶ $\alpha^3\beta$ νὰ γραφῇ $\alpha^3\beta^2$.

» » 32 » 56 » 14^2 » » $14\chi^2$.

» τῃ ἀσκήσει 296 β′ ἀντὶ ψ2 νὰ γραφῇ ψ^2.

» στίχῳ 24 σελ. 64 » $\alpha^2\chi$ » » $\alpha^2\chi^{\mu-3}$.

» » 39 » 64 » αμ » » α^{μ}.

» τῇ ἀσκήσει 335 ὁ παρονομαστὴς τοῦ α′ κλάσματος ἀντὶ αχ νὰ γείνῃ 2χ.

» » » 860 σελ. 195 τὸ πλάσμα $\frac{1}{y}$ τῆς β′ ἐξισώσεως » » $\frac{1}{\chi}$.

Εἰς τὸ ἄνω μεσαῖον σχῆμα τῆς σελίδος 226 ἀντὶ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. 0 νὰ γραφῇ

$$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=0.$$

Μετὰ τὴν ἄσκησιν 963 σελ. 240 νὰ γραφῇ:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Γ′ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ἐν § 227 σελ. 256 ἀντὶ Ἡ συνάρτησις 10 νὰ γραφῇ: Ἡ συνάρτησις 10^{χ}.

» » 229 » 258 » τῆς 10 νὰ γραφῇ: τῆς 10^{χ}.

» στίχῳ 1 σελ. 259 ἀντὶ αὔξονος νὰ γραφῇ ἄξονος.

» τῇ ἀσκήσει 1206 » 0,10914 » » $-0,10914$.

» στίχῳ 5 σελ. 301 μεταξὺ $\frac{\mu+1}{2}>\nu$ καὶ τοῦ $\frac{\mu+1}{2}$ νὰ τεθῇ κόμμα.

» » 16 » 303 ἀντὶ ἀλλήλοις νὰ γραφῇ ἀλλήλων.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ προτελευταίου στίχου σελ. 304 ἀντὶ A^{μ} νὰ γραφῇ A_{μ}.

Εἰς τὰς ἰσότητας (1) τῆς σελίδος 320 ἀντὶ χ— νὰ γραφῇ χ=.

Τῆς α′ ὁριζούσης τῆς σελίδος 324 τὸ $-\delta'$ τῆς τρίτης ὁριζοντίου γραμμῆς νὰ γείνῃ $-\delta''$.

Εἰς τὴν τομὴν τῆς χ′χ καὶ ΡΜ′ τοῦ Σχ. 10 σελ. 337 νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Π′.