ΝΤΙΝΟΥ Χ. ΜΠΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΥ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ Ο.Ε.Σ.Β.

ΔΙΑ ΤΗΝ Ζ' ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1955

ΝΤΙΝΟΥ Χ. ΜΠΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΥ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ Ο.Ε.Σ.Β.

ΔΙΑ ΤΗΝ Ζ' ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1955

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα εἶναι ἀριθμημένα καὶ φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΜΟΝΑΔΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

1. Εἶναι γνωστὸν (§ 4) * ὅτι τὸ ἑκατοστόμετρον (cm) ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 χιλιοστόμετρα (mm). Συνεπῶς: α) τὰ 7 cm ἀντιστοιχοῦν εἰς $10\times7=70$ mm καὶ β) τὰ 14,2 cm εἰς $10\times14{,}2=142$ mm. Ἐξ ἄλλου τὸ μέτρον (m) ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 mm. Ἑπομένως τὰ 1,07 m ἀντιστοιχοῦν εἰς $1000\times1{,}07=1070$ mm.

2. Ὡς γνωστὸν (§ 4) τὸ m ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 cm καὶ τὸ χιλιόμετρον (km) εἰς 1000 m ἢ $100\times1000=10^5$ cm. Συνεπῶς: α) Τὰ 2,04 m ἰσοδυναμοῦν μὲ $100\times2{,}04=204$ cm, β) τὰ 3,4 km μὲ $10^5\times3{,}4=340\times10^3$ cm καὶ γ) τὰ 300000 km μὲ $10^5\times300000=10^5\times3\times10^5=3\times10^{10}$ cm.

3. Ἀφοῦ τὸ cm^2 ὑποδιαιρεῖται εἰς $10\times10=100$ mm^2 (§ 5), τὸ mm^2 εἶναι τὸ 0,01 τοῦ cm^2. Συνεπῶς τὰ 4 mm^2 ἀντιστοιχοῦν εἰς $0{,}01\times4=0{,}04$ cm^2. Ἐξ ἄλλου τὸ m^2 ὑποδιαιρεῖται εἰς 100^2 ἢ 10^4 cm^2. Ἑπομένως τὰ 1,07 m^2 ἰσοδυναμοῦν μὲ $10^4\times1{,}07=10700$ cm^2.

4. Ἐπειδὴ τὸ cm^3 ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 mm^3 (§ 5), τὸ mm^3 εἶναι τὸ 0,001 τοῦ cm^3. Συνεπῶς τὰ 87 mm^3 ἀντιστοιχοῦν εἰς $0{,}001\times87=0{,}087$ cm^3. Ἐξ ἄλλου τὸ dm^3 ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 cm^3 καὶ τὸ m^3 εἰς $1000\times1000=10^6$ cm^3. Ἑπομένως τὰ 6 dm^3 ἀντιστοιχοῦν εἰς $1000\times6=6000$ cm^3 καὶ τὰ 3,2 m^3 εἰς $3{,}2\times10^6$ cm^3.

5. Αἱ 360° ἰσοδυναμοῦν ὡς γνωστὸν (§ 6) μὲ 2π ἀκτίνια (rad). Συνεπῶς ἡ 1° ἀντιστοιχεῖ εἰς $\frac{2\pi}{360}$ ἢ $\frac{\pi}{180}$ rad, αἱ 18° εἰς $\frac{\pi}{180}\times18=\frac{\pi}{10}$ rad, αἱ 60° εἰς $\frac{\pi}{180}\times60=\frac{\pi}{3}$ rad, αἱ 120° εἰς $\frac{\pi}{180}\times120=\frac{2\pi}{3}$ rad, αἱ 135° εἰς $\frac{\pi}{180}\times135=\frac{3\pi}{4}$ καὶ τὰ 30′ ἢ τὰ 0,5° εἰς $\frac{\pi}{180}\times0{,}5=\frac{\pi}{360}$ rad.

---

* Οἱ ἀριθμοὶ §§ καὶ σχημάτων ἀναφέρονται εἰς τὸ βιβλίον τοῦ ΟΕΣΒ «ΦΥΣΙΚΗ» διὰ τὴν Ζ′ τάξιν τῶν Γυμνασίων.

6. Εἶναι γνωστόν (§ 13) ὅτι ἡ μᾶζα ἑνὸς σώματος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὸ βάρος τοῦ σώματος. Συνεπῶς αἱ μᾶζαι εἶναι ἀντιστοίχως 2,17 kgr καὶ 0,06 kgr ἤ, ἐπειδὴ τὸ kgr ἀντιστοιχεῖ εἰς 1000 gr, θὰ εἶναι: $1000 \times 2,17 = 2170$ gr καὶ $1000 \times 0,6 = 60$ gr.

7. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 16) τὸ gr * ἀντιστοιχεῖ πρὸς 981 dyn καὶ τὸ kgr * εἰς 981000 dyn. Συνεπῶς τὰ βάρη ταῦτα ἰσοδυναμοῦν μὲ $981 \times 600 = 588\,600$ dyn καὶ $981000 \times 1,5 = 1471\,500$ dyn.

8. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ εἰδ βάρος σώματος εἶναι 13,6 gr*/cm^3, ἐννοοῦμεν ὅτι (§ 15 I) κάθε cm^3 ὄγκου αὐτοῦ τοῦ σώματος ζυγίζει 13,6 gr*. Συνεπῶς τὰ 1,4 dm^3, ποὺ ἀντισ οιχοῦν εἰς $1000 \times 1,4 = 1400$ cm^3, θὰ ζυγίζουν $13,6 \times 1400 = 19040$ gr* ἢ 19,040 kgr*.

9. Ἀφοῦ ἡ μᾶζα του εἶναι 6,2 kgr ἤ $1000 \times 6,2 = 6200$ gr, τὸ βάρος τ υ θὰ ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς gr*. Συνεπῶς θὰ εἶναι 6200 gr* ἤ, ἐπειδὴ τὸ gr* ἰσοδυναμεῖ μὲ 981 dyn (§ 13), θὰ εἶναι $981 \times 6200 = 6082200$ dyn.

10. Ἂν τὸν τύπον $d = \frac{m}{V}$, ποὺ δίδει τὴν πυκνότητα (d) συναρτήσει τῆς μάζης (m) καὶ τοῦ ὄγκου (V) τοῦ σώματος (§ 15 II), λύσωμεν ὡς πρὸς m, θὰ ἔχωμεν $m = V.d$. Ἀλλὰ $V = 1$ m^3 ἢ 10^6 cm^3 (§ 5) καὶ $d = 1$ gr/cm^3. Συνεπῶς θὰ εἶναι $m = 1 \times 10^6$ gr. Ἐπειδὴ δὲ τὸ βάρος ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς gr*, τοῦτο θὰ εἶναι 10^6 gr*, ἤ $10^6 : 10^3 = 10^3$ kgr*.

11. Εἶναι γνωστὸν ὅτι (§ 13) 1 tn* ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 kgr*, τὸ 1 kgr* μὲ 1000 gr* καὶ τὸ 1 gr* μὲ 981 dyn Συνεπῶς τὸ βάρος τοῦ σώματος θὰ εἶναι $1000 \times 2,5 = 2500$ kgr* ἢ $1000 \times 2500 = 2500000 = 2,5 \,.\, 10^6$ gr* ἢ $981 \,.\, 2,5 \cdot 10^6 = 2452,5 \,.\, 10^6$ dyn. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ἡ μᾶζα ἐκφράζεται μὲ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς εἰς kgr καὶ gr, αὕτη θὰ εἶναι 2500 kgr ἢ $2,5 \,.\, 10^6$ gr.

12 Ὡς γνωστὸν (§ 15 I) εἶναι $\varrho = \frac{B}{V}$ ὅπου ρ εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σώματος, B τὸ βάρος του εἰς gr* καὶ V ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἰς cm^3. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $\varrho = \frac{88}{10} = 8,8$ gr*/cm^3. Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστὸν (§15 II) ὅτι ἡ πυκνότης καὶ τό εἰδ. βάρος ἑνὸς σώματος ἐκφράζονται μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ὅταν τὸ βάρος μετρῆται εἰς γραμμάρια βάρους. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $d = 8,8$ gr/cm^3.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ι. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

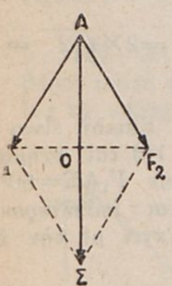
1. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Α΄. Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

13. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἡ συνισταμένη ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς. Ἡ διεύθυνσις, ἡ φορὰ καί ἡ ἔντασις καθορίζονται ὡς ἀκολούθως :

α) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην (§ 29, σχ. 16) ἡ συνισταμένη ἔχει διεύθυνσιν καὶ φορὰν τὴν αὐτήν, ἔντασιν δὲ ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν. Εἶναι δηλ. $\Sigma = F_1 + F_2 = 8 + 8 = 16$ kgr*.

β) Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων (§ 27) εἶναι ρόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ΑΣ ὁρίζει τὴν διεύθυνσιν καί φορὰν τῆς συνισταμένης. Τὸ μῆκος ἐξ ἄλλου τῆς ΑΣ, μὲ τὴν ληφθεῖσαν κλίμακα τῆς γραφικῆς παραστάσεως, δίδει τὴν ἔντασιν τῆς συνισταμένης. Τοῦτο γεωμετρικῶς προσδιορίζεται ὡς ἑξῆς: Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AF_1 F_2$ (σχ. α΄), ἀφοῦ ἔχει τὴν γωνίαν $A = 60°$, εἶναι ἰσόπλευρον.



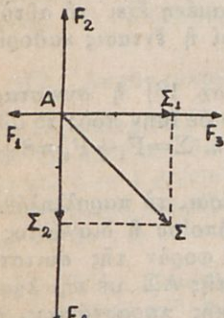
Συνεπῶς θὰ εἶναι $(F_1F_2) = (AF_1) = (AF_2) = 8$ καὶ $(OF_1) = 4$. Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AOF_1, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, εἶναι: $(OA)^2 = (AF_1)^2 - (OF_1)^2$ ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $(OA)^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 = 16 \times 3$ καὶ ἑπομένως $(OA) = \sqrt{16 \times 3} = 4 \times \sqrt{3}$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $(A\Sigma) = (OA) \times 2 = 4 \times \sqrt{3} \times 2 = 8 \times \sqrt{3} = 8 \times 1{,}732 = 13{,}856$ kgr*.

γ) Ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα τῆς §27 (σχ.23) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συνισταμένη ἔχει διεύθυνσιν καὶ φορὰν ὁριζομένην ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ σχηματιζομένου τετραγώνου καὶ ἔντασιν διδομένην ὑπὸ τοῦ τύπου $\Sigma = \sqrt{F_1 + F_2^2}$ (Πυθαγόρειον θεώρημα). Ὥστε εἶναι $\Sigma = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{8^2 \times 2} = 8 \times \sqrt{2} = 8 \times 1{,}414 = 11{,}312$ kgr*

δ) Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων εἶναι ῥόμβος (σχ. 15). Ἡ συνισταμένη ΑΣ σχηματίζει γωνίαν $120{:}2=60^0$ μὲ ἑκάστην τῶν συνιστωσῶν. Ἐκ τούτου εὔκόλως συνάγεται ὅτι ἕκαστον τῶν τριγώνων $AF_1\Sigma$ καὶ $AF_2\Sigma$ εἶναι ἰσόπλευρον. Συνεπῶς θὰ εἶναι $\Sigma = F_1 = F_2 = 8$ kgr*.

ε) Κατὰ τὰ ἐν § 29 ἡ συνισταμένη ἔχει ἔντασιν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν. Εἶναι δηλ. $\Sigma=8-8=0$. Συνεπῶς ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῶν δυνάμεων τούτων τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ (§ 32).

14. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις F_1, F_2, F_3, F_4 (σχ. β΄). Συνισταμένη τῶν F_1 καὶ F_3, ποὺ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἀλλ' ἀντίθετον φοράν, εἶναι ἡ Σ_1 μὲ ἔντασιν $3-1=2$ kgr*. Ἐπίσης συνισταμένη τῶν F_2 καὶ F_4 εἶναι ἡ Σ_2 μὲ ἔντασιν $4-2=2$ kgr*. Συνθέτομεν ἤδη τὰς Σ_1 καὶ Σ_2. Ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων εἶναι τετράγωνον. Τούτου ἡ διαγώνιος ΑΣ δίδει τὴν συνισταμένην κατὰ διεύθυνσιν καὶ φοράν. Ἡ ἔντασις τῆς Σ εὑρίσκεται εὐκόλως κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ εἶναι :

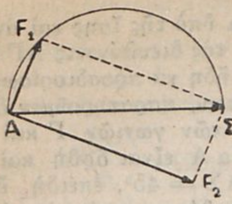


$\Sigma = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2 \times \sqrt{2} = 2 \times 1{,}414 = 2{,}828$ kgr*.

15. Συνθέτομεν ἐν πρώτοις τὰς F_1 καὶ F_3. Ἐπειδὴ εἶναι $F_1 = F_3$, συνισταμένη εἶναι ἡ διαγώνιος ΑΣ (§ 28 σχ. 15) τοῦ σχηματιζομένου ῥόμβου τῶν δυνάμεων. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι γων $F_1A\Sigma = 60^0$, συνάγομεν ὅτι : α) τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AF_1\Sigma$ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς $(A\Sigma)=F_1=5$kgr* καὶ β) ὅτι ἡ ΑΣ συμπίπτει μὲ τὴν δύναμιν F_2.

Ἑπομένως συνισταμένη καὶ τῶν τριῶν δυνάμεων εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν Σ καὶ F_2, ἡ ὁποία ἔχει σημεῖον ἐφαρμογῆς Α, διεύθυνσιν καὶ φορὰν τὴν τῆς F_2 καὶ ἔντασιν $5+5=10$ kgr*.

16. Ἔστω ΑΣ (σχ. γ΄.) ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς F. Μὲ διάμετρον ΑΣ (=13) γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ χορδὴν AF_1 (=5).



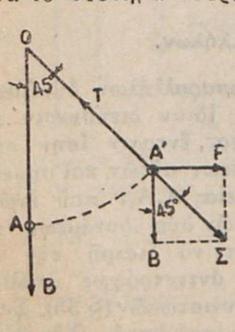
Ἄγομεν τὴν χορδὴν $F_1\Sigma$ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $AF_1\Sigma F_2$. Ἐπειδὴ γων $F_1=90^0$, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον. Συνεπῶς ἡ ζητουμένη συνιστῶσα ὁρίζεται κατὰ διεύθυνσιν καὶ φορὰν ὑπὸ τῆς AF_2. Ἡ ἔντασίς της ἐξ ἄλλου προσδιορίζεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AF_1\Sigma$ καὶ εἶναι, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα: $(F_1\Sigma)^2=(A\Sigma)^2-(AF_1)^2$ ἢ $F_2^2=13^2-5^2=144$ καὶ $F_2=\sqrt{144}=12$ kgr*.

17. Ἔστω ΑΣ (= 6) ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς F (σχ. α΄. προβλ. 13 β΄.). Μὲ κοινὴν πλευρὰν τὴν ΑΣ σχηματίζομεν ἑκατέρωθεν αὐτῆς γωνίας ἴσας πρὸς 30^0 καὶ ἐκ τοῦ Σ σύρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν τούτων. Τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος, ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ΑΣ διχοτομεῖ τὰς ἀπέναντι γωνίας του. Συνεπῶς αἱ AF_1 καὶ AF_2 εἶναι ἴσαι καὶ ὁρίζουν τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν τῶν συνιστωσῶν. Προκειμένου ἤδη νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἔντασιν, τούτων, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον F_1AF_2 εἶναι ἰσόπλευρον, ἐπειδὴ γων $A=60^0$, καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι $(OF_1)=F_1:2$, ἐνῷ ἐξ ἄλλου εἶναι καὶ $(AO)=6:2=3$. Ἑπομένως, ἂν $F_1=\chi$, θὰ εἶναι $(OF_1)=\chi:2$ καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AOF_1 εἶναι :

$$\chi^2-\left(\frac{\chi}{2}\right)^2=3^2 \text{ ἢ } \chi^2-\frac{\chi^2}{4}=9 \text{ ἢ } \frac{3\chi^2}{4}=9 \text{ ἢ } 3\chi^2=36 \text{ ἢ } \chi^2=$$

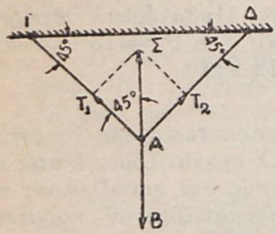
$$12 \text{ καὶ } \chi=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\times\sqrt{3}=2\times1{,}732=3{,}464 \text{ kgr*}.$$

18. Ἂν ΟΑ΄ εἶναι ἡ νέα θέσις τοῦ νήματος (σχ. δ΄.), Α΄Β τὸ βάρος (κατὰ τὴν κατακόρυφον) καὶ Α΄F ἡ δρῶσα ὁριζοντία δύναμις, ἵνα τὸ σύστημα ἰσορροπῇ πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν Β καὶ F νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίρροπος πρὸς τὴν τάσιν Τ τοῦ νήματος. Ἡ συνισταμένη ὅθεν τῶν Β καὶ F πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν ΟΑ΄ καὶ φορὰν κατὰ τὴν προέκτασιν ταύτης. Σχηματίζοντες ἤδη τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων, παρατηροῦμεν ὅτι: α) ἐπειδὴ γων ΒΑ΄Γ=90^0, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον καὶ β) ἐπειδὴ γων ΒΑ΄Σ=γων ΒΟΣ=45^0, τὸ τρίγωνον Α΄ΒΣ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές. Συνεπῶς ἡ ἔντασις τῆς ὁριζοντίας δυνάμεως F θὰ εἶναι: F = (ΒΣ)=(Α΄Β)=4 kgr*, δηλ. ἴση μὲ τὸ βάρος.



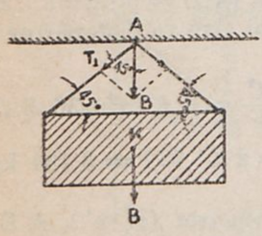
Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Α΄ΒΣ προσδιορίζομεν τὴν ἔντασιν τῆς Α΄Σ, ἑπομένως καὶ τῆς Τ. Πράγματι κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $(Α'Σ)^2 = (Α'Β)^2 + (ΒΣ)^2$ ἢ $Σ^2 = 4^2 + 4^2 = 4^2 \times 2$ καὶ $Σ = \sqrt{4^2 \times 2} = 4 \times \sqrt{2} = 4 \times 1{,}414 = 5{,}656$ kgr*.

19. Τὸ βάρος τοῦ σώματος ἰσορροπεῖται ὑπὸ τῆς ἴσης καὶ ἀντιθέτου δυνάμεως ΑΣ, ἥτις καὶ ἀναλύεται κατὰ τὰς διευθύνσεις ΑΓ καὶ ΑΔ εἰς τὰς δυνάμεις T_1 καὶ T_2. Προκειμένου ἤδη νὰ προσδιορίσωμεν



τὴν ἔντασιν τούτων, παρατηροῦμεν ὅτι: α) ἀφοῦ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Γ καὶ Δ εἶναι 45°, ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ καὶ β) ἀφοῦ ἡ γων $T_1ΑΣ = 45°$, ἐπειδὴ ἔχει τὰς πλευράς της καθέτους πρός τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Δ, τὸ τρίγωνον $ΑT_1Σ$ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές. Συνεπῶς θὰ εἶναι $T_1 = T_2 = χ$. Ἀλλὰ κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $T^2_1 + T_2^2 = Σ^2$ ἢ $χ^2 + χ^2 = 1000^2$ ἢ $2χ^2 = 1000000$ ἢ $χ^2 = 500000$ καὶ $χ = \sqrt{500000} = \sqrt{2 \times 250000} = 500 \times \sqrt{2} = 500 \times 1{,}414 = 707$ kgr*.

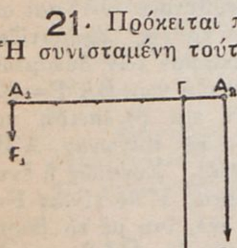
20. Τὸ βάρος Β τοῦ σώματος μεταφερόμενον εἰς τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως Α (σχ. στ') ἀναλύεται κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν νημάτων



εἰς τὰς δυνάμεις T_1 καὶ T_2. Ἀφοῦ εἶναι $Γ = Δ = 45°$, θὰ εἶναι $Α = 90°$ καὶ συνεπῶς τὸ παραλληλόγραμον τῶν δυνάμεων εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ γων $T_1ΑΒ$ = γων $Δ = 45°$ (πλευραὶ κάθετοι μία πρὸς μίαν) τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑT_1Β$ εἶναι ἰσοσκελὲς. Ἑπομένως θὰ εἶναι $T_1 = T_2 = χ$. Ἐφαρμόζοντες ἤδη εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἔχομεν : $χ^2 + χ^2 = 6^2$ ἢ $2χ^2 = 36$ ἢ $χ^2 = 18$ καὶ $χ = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3 \cdot \sqrt{2} = 3 \,.\, 1{,}414 = 4{,}242$ kgr*.

Β' Σύνθεσις δυνάμεων παραλλήλων.

21. Πρόκειται περὶ συνθέσεως δύο ὁμοπαραλλήλων δυνάμεων. Ἡ συνισταμένη τούτων ΓΣ (σχ 5') ἔχει τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν καὶ



φορὰν μὲ τὰς συνιστώσας, ἔντασιν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων αὐτῶν καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας A_1A_2, ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δύο δυνάμεων καὶ εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ διαιρῇ τὴν εὐθεῖαν A_1A_2 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς ἐντάσεις τῶν συνιστωσῶν (§ 33). Συνεπῶς θὰ εἶναι $Σ = 1 + 4 = 5$ krg*. Τὴν θέσιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὡς ἀκολούθως:

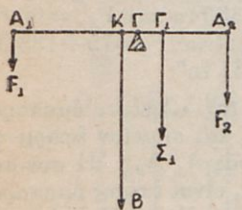
α) (Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῶ ς). Μερίζομεν τὸν ἀριθμὸν 60 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 4, ἢ ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τούτων 1 καὶ $\frac{1}{4}$ ἢ τοὺς $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{1}{4}$ ἢ τοὺς 4 καὶ 1, ὁπότε ἔχομεν ἀντιστοίχους ἀποστάσεις : $(ΓA_1)=\frac{60\times 4}{5}=48$ cm καὶ $(ΓA_2)=\frac{60\times 1}{5}=12$cm.

β) (Ἀ λ γ ε β ρ ι κ ῶ ς) Ἂν καλέσωμεν χ τὴν ἀπόστασιν $ΓA_1$ ἡ $ΓA_2$ θὰ εἶναι $60-\chi$. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀντιστοίχων δυνάμεων, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν : $\frac{\chi}{60-\chi}=\frac{4}{1}$ Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=(ΓA_1)=48$ cm.

γ) (Δ ι ὰ τ ῶ ν ρ ο π ῶ ν). Γνωρίζομεν ὅτι (§ 35), ὅταν ἡ ῥάβδος ἰσορροπεῖ, αἱ ῥοπαὶ τῶν δύο δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης των εἶναι ἴσαι Συνεπῶς θὰ εἶναι :$F_1 \cdot (ΓA_1)=F_2 \cdot (ΓA_2)$ ἢ $1 \cdot \chi=4 \cdot (60-\chi)$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=(ΓA_1)=48$ cm.

22. Πρόκειται περὶ συνθέσεως τριῶν ὁμοπαραλλήλων δυνάμεων F_1,B, καὶ F_2. Ἐπειδὴ ἡ ῥάβδος εἶναι ὁμογενής, τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Κ τοῦ βάρους Β εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς A_1A_2. Σημεῖον στηρίξεως ταύτης θὰ εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης των, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς :

α) (Διὰ τῆς ἀναλογίας). Συνθέτομεν ἐν πρώτοις τὰς F_1 καὶ F_2. Ἂν $Γ_1$ εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης των καὶ καλέσωμεν χ τὴν ἀπόστασιν $Γ_1A_2$, θὰ εἶναι $Γ_1A_1=100-\chi$. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τούτων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν δυνάμεων, θὰ ἔχωμεν : $\frac{\chi}{100-\chi}=\frac{10}{20}$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $\chi=\frac{100}{3}$ cm.

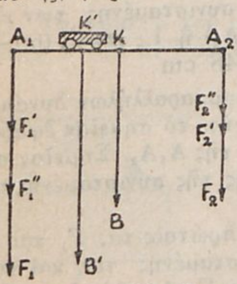


Συνθέτομεν ἤδη τὰς Β καὶ $Σ_1$ Ἂν Γ εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης των καὶ καλέσωμεν ψ τὴν ἀπόστασιν ΓΚ, ἐπειδὴ ἡ $ΚΓ_1$ εἶναι $50-\frac{100}{3}=\frac{50}{3}$ cm, ἡ ἀπόστασις $ΓΓ_1$ θὰ εἶναι $\frac{50}{3}-\psi$. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν: $\frac{\psi}{\frac{50}{3}-\psi}=\frac{30}{50}$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\psi=6{,}25$cm. Ὥστε τὸ σημεῖον στηρίξεως τῆς ράβδου θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς A_1A_2 καὶ εἰς ἀπόστασιν 6,25 cm ἀπὸ τοῦ μέσου της πρὸς τὸ μέρος τῆς F_2.

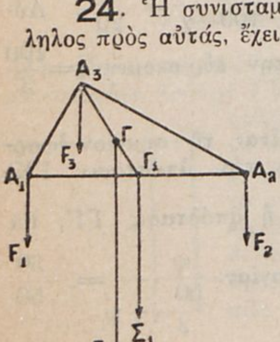
β) Διὰ τῶν ροπῶν). Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης ὁμοεπιπέδων παραλλήλων δυνάμεων ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδόν των, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα (§ 35). Ἂς θεωρήσωμεν λοιπὸν ὡς ἄξονα τῶν ροπῶν τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς Γ τῆς συνισταμένης Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ Γ κεῖται πέραν τοῦ Κ πρὸς τὸ μέρος τῆς F_2 καὶ ὅτι ἡ μὲν ροπὴ τῆς συνισταμένης εἶναι 0, αἱ ροπαὶ τῶν F_1 καὶ Β εἶναι θετικαί, ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις αὗται τείνουν νὰ στρέψουν τὸ σύστημα κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ τῆς F_2 εἶναι ἀρνητική. Ἂν ἤδη καλέσωμεν χ τὴν ἀπόστασιν ΓΚ, θὰ εἶναι $(\Gamma A_1)=50+\chi$ καὶ $(\Gamma A_2)=50-\chi$, αἱ ἀντίστοιχοι ροπαὶ $10(50+\chi)$, $50\ \chi$ καὶ $-20\,.\,(50-\chi)$ καὶ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τῶν ροπῶν θὰ ἔχωμεν: $0=10\,.\,(50+\chi)+50\,.\,\chi-20(50-\chi)$, καὶ ἐκ ταύτης $\chi=6{,}25$ cm

23. Τὸ βάρος Β τῆς γεφύρας, ἐφηρμοσμένον εἰς τὸ μέσον Κ ταύτης, φορτώνει καθένα ἀπὸ τοὺς στύλους μὲ $F_1'=F_2'=150:2=$ 75 tn*. Τὸ βάρος Β′ ἐξ ἄλλου τοῦ σχήματος ἀναλύεται εἰς τὰς δυνάμεις F_1'' καὶ F_2'' διὰ τὰς ὁποίας εἶναι (§ 33) $\frac{F_1''}{F_2''}=\frac{K'A}{K'A}$ ἢ ἂν καλέσωμεν χ τὴν F_1'', ἡ F_2'' θὰ εἶναι $200-\chi$ καί, ἐπειδὴ $(K'A_2)=30$m καὶ $(K'A_1)=15$m, ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται $\frac{\chi}{200-\chi}=\frac{30}{15}$.



Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $\chi=133{,}333$. Συνεπῶς θὰ εἶναι $F_1''=133{,}333$ tn* καὶ $F_2''=66{,}667$ tn*. Ὥστε τὰ συνολικὰ φορτία τῶν δύο στύλων εἶναι: $F_1=75+133{,}333=208{,}333$ tn* καὶ $F_2=75+66{,}667=141{,}667$ tn*.

24. Ἡ συνισταμένη Σ_1 τῶν F_1 καὶ F_2 (σχ. ι′) εἶναι ὁμοπαράλληλος πρὸς αὐτάς, ἔχει ἔντασιν $F_1+F_2=2\,F_1$ καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ μέσον Γ_1 τῆς πλευρᾶς $A_1\,A_2$. Ἡ συνισταμένη ταύτης καὶ τῆς F_3 εἶναι ἐπίσης ὁμοπαράλληλος, ἔχει ἔντασιν $2\,F_1+F_3=3\,F_1$ καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ ἐπὶ τῆς διαμέσου $A_3\,\Gamma_1$ τοῦ τριγώνου τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Gamma A_3}{\Gamma\Gamma_1}=\frac{\Sigma_1}{F_3}$ ἢ $\frac{\Gamma A_3}{\Gamma\Gamma_1}\ \frac{2F_1}{F_1}=2$. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ $(\Gamma A_3)=2\,(\Gamma\Gamma_1)$ εἶναι δηλ. τὸ (ΓA_3) διπλάσιον τοῦ $(\Gamma\Gamma_1)$, ἕπεται ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{2}{3}$

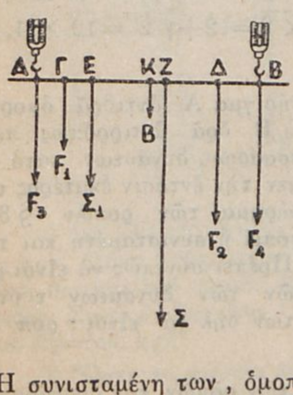


τῆς ὅλης διαμέσου. Συνεπῶς τὸ Γ, σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ τῶν τριῶν δυνάμεων, εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

25. Ἡ συνισταμένη Σ τῶν F_1 καί F_3 (σχ. 25) εἶναι ὁμοπαράλληλος πρὸς αὐτὰς ἔχει ἔντασιν $\Sigma = 2 + 1 = 3$ kgr* καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΟΑ}{ΟΓ} = \frac{F_3}{F_1}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (ΑΓ) $= 40 + 80 = 120$ cm, ἄν (ΟΑ) $= \chi$, θὰ εἶναι (ΟΓ) $= 120 - \chi$ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται $\frac{\chi}{120 - \chi} = \frac{1}{2}$. Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $\chi =$ (ΟΑ) $= 40$ cm. Ἀφοῦ ὅμως εἶναι καὶ (ΑΒ) $= 40$ cm, συνάγομεν ὅτι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῶν F_1 καὶ F_3 συμπίπτει μὲ τὸ Β, δηλ. τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς F_2. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ τῆς αὐτῆς ἐντάσεως μὲ τὴν Σ, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς, ἕπεται ὅτι ἡ συνισταμένη των εἶναι μηδὲν καὶ τὸ σύστημα τῶν τριῶν δυνάμεων ἰσορροπεῖ (§ 32).

26. Ἄν Γ εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δοθείσης δυνάμεως καὶ $Α_1$, $Α_2$ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν F_1 καὶ F_2 θὰ εἶναι (§ 33): $\frac{ΓΑ_2}{ΓΑ_1}\ \frac{F_1}{F_2}$ ἢ ἐπειδὴ $(ΓΑ_1) = 30$ cm, $(ΓΑ_2) = 80 - 30 = 50$ cm καὶ $F_2 = 6 - F_1$, ἡ σχέσις αὕτη γίνεται $\frac{50}{30} = \frac{F_1}{6 - F_1}$.
Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $F_1 = 3{,}750$ kgr*, ὁπότε θά εἶναι καὶ $F_2 = 6 - 3{,}750 = 2{,}250$ kgr*.

27. Πρόκειται περὶ συνθέσεως τῶν δυνάμεων F_1, Β, F_2 καὶ ἀναλύσεως τῆς συνισταμένης των Σ εἰς δύο ἄλλας δυνάμεις F_3 καὶ F_4.



Συνθέτομεν πρῶτον τὰ F_1 καὶ Β. Ἡ συνισταμένη των $Σ_1$, ὁμοπαράλληλος πρὸς αὐτάς, ἔχει ἔντασιν $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ kgr* καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ε τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΕΓ}{ΕΚ} = \frac{Β}{F_1}$. Ἐπειδὴ δὲ (ΓΚ) $= 30$ cm, ἄν καλέσωμεν χ τὴν ἀπόστασιν (ΕΓ), ἡ (ΕΚ) θὰ εἶναι $30 - \chi$ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται $\frac{\chi}{30 - \chi} = \frac{0{,}5}{1}$.
Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκεται $\chi = 10$ cm.

Ἀκολούθως συνθέτομεν τὰς $Σ_1$ καὶ F_2.
Ἡ συνισταμένη των, ὁμοπαράλληλος πρὸς αὐτάς, ἔχει ἔντασιν $1{,}5 + 2$

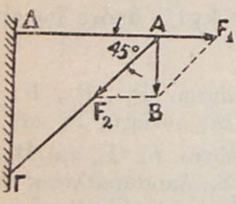
$=3,5$ kgr* καί σημεῖον ἐφαρμογῆς Z, ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως $\frac{ZE}{Z\Delta} = \frac{F_2}{\Sigma_1}$. Ἂν $(ZE) = \chi$, ἐπειδὴ $(E\Delta) = 45$ cm, θὰ εἶναι $(Z\Delta) = 45 - \chi$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται: $\frac{\chi}{45-\chi} = \frac{2}{1,5}$ ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκεται $\chi = 25 \frac{5}{7}$ cm.

Τὴν Σ τέλος ἀναλύ μεν εἰς τὰς δυνάμεις F_3 καὶ F_4. Ἂν $F_3 = \chi$, θὰ εἶναι $F_4 = 3,5 - \chi$. Αἱ ἀποστάσεις ἐξ ἄλλου ZA καὶ ZB εἶναι ἀντιστοίχως $45 \frac{5}{7}$ καὶ $34 \frac{2}{7}$. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{\chi}{3,5-\chi} = \frac{34 \frac{2}{7}}{45 \frac{5}{7}}.$$ Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi = 1,5$.

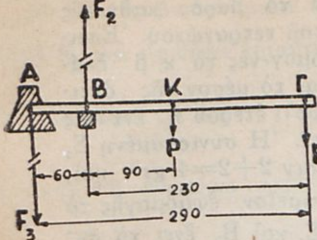
Ὥστε αἱ ἐνδείξεις τῶν δυναμομέτρων A καὶ B θὰ εἶναι 1,5 kgr* καὶ 2 kgr*.

28. Τὸ βάρος B ἀναλύεται εἰς τὰς δυνάμεις F_1 καὶ F_2, τῶν ὁποίων ἡ πρώτη καταπονεῖ τὴν δοκὸν ΔA εἰς ἐφελκυσμόν, ἡ δὲ ἄλλη τὴν δοκὸν AΓ εἰς θλίψιν. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABF_2 εἶναι γων $A = 45^o$ καὶ κατὰ συνέπειαν τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές. Ἑπομένως $BF_2 = AB = 12$. Ὥστε θὰ εἶναι $F_1 = 12$ krg*. Ἡ F_2 ἐξ ἄλλου, ὡς ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι: $F_2^2 = 12^2 + 12^2 = 12^2 \times 2$ καὶ $F_2 = \sqrt{12^2 \times 2} = 12 + \sqrt{2} = 12 \times 1,414 = 16,968$ kgr*.



29. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ μὲν στήριγμα A ἀντιδρᾶ ὁμορρόπως πρός τὰς δυνάμεις P καὶ F_1, ἐνῶ τὸ B δρᾶ ἀντιρρόπως πρὸς αὐτάς. Οὕτω ἔχομεν τὴν διάταξιν τῶν τεσσάρων δυνάμεων κατὰ τὸ σχ. ιγ΄. Προκειμένου ἤδη νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἔντασιν ἑκατέρας τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_3 ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν (§ 35). Γνωρίζομεν ὅτι, ἀφοῦ τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ ἡ συνισταμένη καὶ τῶν τεσσάρων δυνάμεων εἶναι μηδὲν (§ 32). Πρέπει συνεπῶς νὰ εἶναι μηδὲν καὶ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων τούτων ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν των δηλ νὰ εἶναι: ροπ F_1 + ροπ P + ροπ F_2 + ροπ $F_3 = 0$.

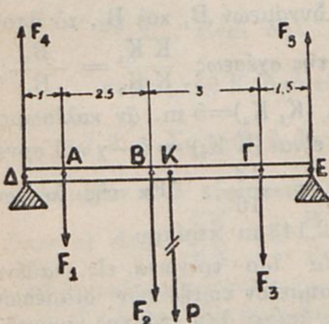
α) Διὰ τὴν F_2. Ἂν λάβωμεν ἄξονα τῶν ροπῶν τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ Α, ἡ μὲν ροπὴ τῆς F_2 εἶναι θετική, ἐπειδὴ ἡ δύναμις αὕτη τείνει νὰ στρέψῃ τὸ σύστημα περὶ τὸ Α κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν (ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου), ἐνῶ αἱ ροπαὶ τῶν F_1 καὶ P εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ τῆς F_3 εἶναι μηδέν. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $-70\times290-50\times150+60\ F_2=0$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $F_2=463.333$ kgr*.



β) Διὰ τὴν F_3. Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν ροπῶν τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ Β, ὁπότε ἔχομεν θετικὴν τὴν ροπὴν τῆς F_3, ἀρνητικὰς τὰς ροπὰς τῶν P καὶ F_1 μηδὲν τὴν ροπὴν τῆς F_2. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν : $-70\ \ 230-50\ .\ 90+60F_3=0$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $F_3=343,333$ kgr*.

30 Τὸ πρόβλημα λύεται διὰ τῆς συνθέσεως τῶν τεσσάρων ὁμοπαραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2 P καὶ F_4 καὶ τῆς ἀναλύσεως τῆς συνισταμένης των εἰς δύο ἀντιρρόπους πρὸς τὰς πρώτας δυνάμεις τὰς F_4 καὶ F_5, ποὺ δίδουν τὰς ἀντιδράσεις τῶν δύο στύλων. Εὐκολώτερον ὅμως ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις διὰ τῶν ροπῶν

α) Τὸ βάρος P τῆς γεφύρας ἐφηρμοσμένον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Κ φορτώνει ἐξ ἴσου τοὺς δύο στύλους μὲ φορτίον 1 tn* ἕκαστον.



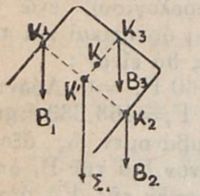
β) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς F_4 ἀφοῦ τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ καὶ συνεπῶς ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν, ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν F_4, F_1, F_2, F_3, καὶ F_5 ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ Ε εἶναι μηδέν. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ροπαὶ τῶν F_1, F_2, F_3 εἶναι θετικαί, ἐνῶ τῆς F_4 εἶναι ἀρνητικὴ καὶ τῆς F_5 εἶναι μηδέν. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $-F_4\ .\ 8+300\ .\ 7+520\ .\ 4{,}5+400\ .\ 1{,}5=0$ καὶ ἐκ ταύτης $F_4=630$ kgr*.

γ) Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς F_5 λαμβάνομεν τὰς ροπὰς τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ Δ. Τώρα μόνον ἡ ροπὴ τῆς F_5 εἶναι θετική, ἐνῶ αἱ τῶν ἄλλων εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ ἡ τῆς F_4 εἶναι μηδέν. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $8\ .\ F_5-300\ .\ 1-520\ .\ 3{,}5-400\ .\ 6{,}5=0$ καὶ $F_5=590$ kgr*

δ) Ὥστε τὰ φορτία τῶν στηριγμάτων Δ καὶ Ε εἶναι ἀντιστοίχως 1630 kgr* καὶ 1590 kgr*.

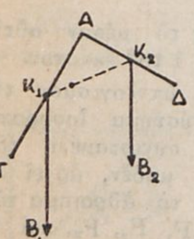
Γ΄. Κέντρον βάρους — Ζυγὸς

31· Τὸ ζητούμενον κ β. εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν τριῶν δυνάμεων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ βάρος καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σύρμα εἶναι ὁμογενὲς τὸ κ. β ἑκάστης τῶν B_1, B_2, B_3 εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, ἐνῶ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἔντασίς της εἶναι $0,2 \times 10 = 2$ gr*. Ἡ συνισταμένη Σ_1 τῶν B_1 καὶ B_2 ἔχει ἔντασιν $2+2=4$ gr* καί, ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, ἔχει σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ



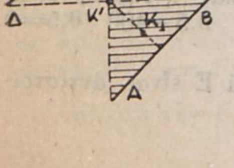
μέσον τῆς $K_1 K_2$. Ἡ συνισταμένη τέλος τῶν Σ_1 καὶ B_3 ἔχει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της, τὸ ζητούμενον κ. β., ἐπὶ τῆς $K' K_3$ καὶ εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $\dfrac{K K'}{K K_3} = \dfrac{B_3}{\Sigma_1}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $(K' K) = 10 : 2 = 5$ cm, ἂν καλέσωμεν χ τὴν ἀπόστασιν $K' K$, θὰ εἶναι $(K K_3) = 5 - \chi$ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται : $\dfrac{\chi}{5-\chi} = \dfrac{2}{4}$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $\chi = 1,7$ cm περίπου.

32· Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $K_1 A K_2$, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, ἔχομεν $(K_1 K_2)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ καὶ συνεπῶς $(K_1 K_2) = 5$ m. Τὸ ζητούμενον κ. β. εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῶν δύο ὁμοπαραλλήλων δυνάμεων B_1 καὶ B_2, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως $\dfrac{K K_1}{K K_2} = \dfrac{B_2}{B_1}$.



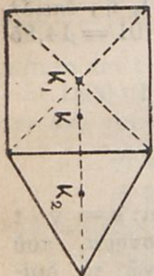
Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $(K_1 K_2) = 5$ m, ἂν καλέσωμεν $(K K_1) = \chi$, θὰ εἶναι $(K K_2) = 5 - \chi$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται : $\dfrac{\chi}{5-\chi} = \dfrac{12}{16}$. Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $\chi = 2,143$ m περίπου.

33· Ἡ πλὰξ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ἴσα τρίγωνα, εἰς καθένα τῶν ὁποίων τὸ κ. β. εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων του καὶ ἑπομένως ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ 2/3 τοῦ μήκους τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. Θὰ εἶναι συνεπῶς



$(K' K_1) = (K' K_2) = (K' K_3 =) \dfrac{10}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{3}$ cm. Προκειμένου ἤδη νὰ εὕρωμεν τὸ κ. β τῆς πλακός, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν ἴσων βαρῶν τῶν τριῶν τριγώνων Οὕτω ἡ συνισταμένη τῶν B_1 καὶ B_2 ἔχει ἔντασιν $2B_1$ καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ K΄. Ἡ ὁλικὴ συνισταμένη καὶ τῶν τριῶν δυνάμεων ἔχει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της K ἐπὶ τῆς $K'K_3$ καὶ εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{KK'}{KK_3} = \frac{B_3}{2B_1}$. Ἂν ἤδη καλέσωμεν $(KK') = \chi$, θὰ εἶναι $(KK_3) = \frac{10}{3} - \chi$ καὶ ἐπειδὴ $B_1 = B_3$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται : $\frac{\chi}{\frac{10}{3}-\chi} = \frac{1}{2}$ ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκεται $\chi = 1{,}1$ cm.

34. Τὸ κ β τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν βαρῶν B_1 καὶ B_2 τῶν δύο πλακῶν. Τὸ B_1 ἔχει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς του εἰς τὸ K_1, κέντρον συμμετρίας τοῦ τετραγώνου, ποὺ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀπόστασιν $6 : 2 = 3$ cm. Τὸ B_2 ἔχει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς του εἰς τὴν τομὴν τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου, ποὺ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ 1/3 τοῦ μήκους τῆς διαμέσου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μῆκος τῆς διαμέσου (ὕψους) τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, εἶναι δηλ $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ K_2 ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι $3\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \sqrt{3}$. Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις $(K_1K_2) = 3 + \sqrt{3}$.



Τὸ ζητούμενον κ. β. εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς K_1K_2 καὶ εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{KK_1}{KK_2} = \frac{B_2}{B_1}$. Ἀλλά, ἀφοῦ αἱ δύο πλάκες εἶναι ὁμογενεῖς καὶ τοῦ αὐτοῦ πάχους, ὁ λόγος τῶν βαρῶν των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν των. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐμβαδὰ τούτων εἶναι α^2 καὶ $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, ἢ 36 καὶ $9\sqrt{3}$ ἕπεται ὅτι : $\frac{B_2}{B_1} = \frac{9\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ἂν ἤδη καλέσωμεν χ τὴν ἀπόστασιν KK_1, θὰ εἶναι $(KK_2) = 3 + \sqrt{3} - \chi$ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται : $\frac{\chi}{3+\sqrt{3}-\chi} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν :

$$\chi = \frac{3+3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{3+9\sqrt{3}}{13} = 1,427 \text{ cm.}$$

35. Ἂν B_1 καὶ B_2 εἶναι τὰ βάρη, ποὺ θέτομεν εἰς τοὺς δίσκους, καὶ l_1 καὶ l_2 τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων βραχιόνων τῆς φάλαγγος, ἵνα ὁ ζυγὸς ἰσορροπῇ πρέπει νὰ εἶναι : $B_1\, l_1 = B_2\, l_2$ Ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν ταύτην μὲ τὰ δεδόμενα τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν $B_1 = 121,4$ gr*.

36. Ἂν B_1 καὶ B_2 εἶναι τὰ βάρη τῶν δύο δίσκων καὶ l_1, l_2 τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων βραχιόνων, ἵνα ἡ φάλαγξ ἰσορροπῇ πρέπει νὰ εἶναι $B_1\, l_1 = B_2\, l_2$. (1)

Ὅταν ἐπὶ τῶν δίσκων τεθοῦν τὰ βάρη 100 gr* καὶ 101 gr* ἀντιστοίχως τότε ἡ συνθήκη ἰσορροπίας θὰ εἶναι : $(B_1 + 100)\, l_1 = (B_2 + 101)\, l_2$ ἢ $B_1\, l_1 + 100\, l_1 = B_2\, l_2 + 101\, l_2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν ταύτην τὸ $B_1\, l_1$ μὲ τὸ $B_2\, l_2$, λόγῳ τῆς (1) , θὰ ἔχωμεν : $B_2\, l_2 + 100\, l_1 = B_2\, l_2 + 101\, l_2$ ἢ $100\, l_1 = 101\, l_2$ ἤ , ἐπειδὴ $l_1 = 15$ cm , θὰ εἶναι $101\, l_2 = 1500$ καὶ $l_2 = 1500 : 101 = 14,85$ cm περίπου .

2. ΚΙΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

37. Ἀφοῦ πρόκειται περὶ κινήσεως ὁμαλῆς, θὰ εἶναι: $s = v \cdot t$ (§ 55). Ἂν λοιπὸν t εἶναι ὁ ζητούμενος χρόνος, τὸ διάστημα, ποὺ θὰ διανύσῃ ἡ α΄. ἁμαξοστοιχία, θά εἶναι : $s_1 = 92 \cdot t$, ἐνῶ τὸ διάστημα τῆς β΄, θὰ εἶναι $s_2 = 78\, t$ Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διαστημάτων εἶναι ἡ συνολικὴ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν : $92 \cdot t + 78\, t = 203$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $t = \frac{203}{170}$ h ἢ t = 1 h 11 min $38\frac{14}{17}$ sec.

Ἡ συνάντησις δὲ θὰ γίνῃ εἰς ἀπόστασιν $s_1 = 92 \times \frac{203}{170} = 109,859$ km περίπου ἀπὸ τὴν πόλιν Α.

38. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ταχύτητος (§ 53) εἶναι $v = \frac{s}{t}$. Ἀλλὰ ὁ χρόνος, καθ᾽ ὃν ἐκινήθη ἡ ἁμαξοστοιχία εἶναι (8h 43 min) — (7 h 5 min) = 1h 38 min ἢ $t = 1\frac{38}{60}$ h, ἐνῶ τὸ διάστημα δίδεται ἴσον μὲ 129,5 km. Συνεπῶς ἡ ζητουμένη ταχύτης θὰ εἶναι :
$v = 129,5 : 1\frac{38}{60} = 79,286$ km/h.

39. Ὁ τύπος τῶν διαστημάτων (§ 61) $s = {}^1/_2\ \gamma t^2$ λυόμενος ὡς πρὸς t γίνεται : $t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}}$. Δίδεται ὅμως $s = 50$ m ἢ $s = 5000$ cm καὶ $\gamma = 4$ cm/sec². Συνεπῶς μὲ τὰς τιμὰς ταύτας ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει $t = \sqrt{\frac{10000}{4}} = \sqrt{2500} = 50$ sec.

Ὁ τύπος ἐξ ἄλλου τῶν ταχυτήτων $v = \gamma t$ μὲ τὰς τιμὰς $\gamma = 4$ καὶ $t = 50$ δίδει $v = 4 \cdot 50 = 200$ cm/sec ἢ 2 m/sec.

40. Λύοντες τὸν τύπον τῶν διαστημάτων $s = {}^1/_2\ \gamma t^2$ ὡς πρὸς γ εὑρίσκομεν $\gamma = \frac{2s}{t^2}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $s = 0{,}8$ km ἢ 800 m καὶ $t = 20$ sec, θὰ εἶναι $\gamma = \frac{2 \cdot 800}{20^2} = \frac{1600}{400} = 4$ m/sec²

41. Ὁ τύπος τῶν ταχυτήτων $v = \gamma t$ λυόμενος ὡς πρὸς γ δίδει $\gamma = \frac{v}{t}$. Ἀλλὰ εἶναι $v = 108$ km/h ἢ $v = 108000 : 60 = 1800$ m/min καὶ $t = 12$ min. Συνεπῶς ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι : $\gamma = 1800 : 12 = 150$ m/min². Μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν ταύτην εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν τύπον τῶν διαστημάτων $s = {}^1/_2 \gamma t^2$:

α) Εἰς 1 min : $s_1 = {}^1/_2 \cdot 150 \cdot 1^2 = 75$ m.

β) Εἰς 2 min : $s_2 = {}^1/_2 \cdot 150 \cdot 2^2 = 300$ m. Συνεπῶς ἐντὸς τοῦ δευτέρου λεπτοῦ διήνυσεν $300 - 75 = 225$ m.

γ) Εἰς 11 min : $s_{11} = {}^1/_2 \cdot 150 \cdot 11^2 = 9075$ m καὶ εἰς 12 min : $s_{12} = {}^1/_2 \cdot 150 \cdot 12^2 = 10800$. Συνεπῶς ἐντὸς τοῦ δωδεκάτου λεπτοῦ διήνυσεν : $10800 - 9075 = 1725$ m.

42. Ἂν γ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις καὶ t ὁ χρόνος, ἀπὸ μὲν τὸν τύπον τῶν ταχυτήτων ἔχομεν : $400 = \gamma \cdot t$ (¹), ἀπὸ δὲ τὸν τύπον τῶν διαστημάτων $2 = {}^1/_2\ \gamma t^2$ ἢ $\gamma t^2 = 4$. Ἡ τελευταία αὕτη σχέσις γράφεται $\gamma t \cdot t = 4$ καί, ἂν ἐκ τῆς (¹) θέσωμεν $\gamma t = 400$, θὰ εἶναι $400\ t = 4$ καὶ $t = 4 : 400 = 0{,}01$ sec.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (¹) τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ t θὰ ἔχωμεν : $0{,}01 \cdot \gamma = 400$ καὶ $\gamma = 400 : 0{,}01 = 40000$ m/sec² ἢ 40 km/sec².

43. Ἂν τὸ ἐκ τοῦ B προερχόμενον ἐκινήθη ἐπὶ t sec, τὸ ἐκ τοῦ A θὰ ἐκινήθη ἐπὶ $t - 2$ sec. Συνεπῶς τὰ διανυθέντα διαστήματα ἦσαν ἀντιστοίχως $s_A = {}^1/_2 \cdot 1 \cdot (t - 2)^2$ (¹) καὶ $s_B = {}^1/_2 \cdot 2 \cdot t^2$. (²) Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι $s_B = 25$ m. Συνεπῶς ἡ σχέσις (²) γίνεται $25 = t^2$ καὶ δίδει $t = 5$ sec, ἐνῶ ἐκ τῆς (¹), διὰ $t = 5$, εὑρίσκεται $s_A = {}^1/_2 \cdot 3^2 = 4{,}5$ m. Ὥστε τὸ μῆκος τῆς AB εἶναι : $s_A + s_B = 4{,}5 + 25 = 29{,}5$ m.

44. Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος καθ' ὃν τοῦτο ἐκινήθη. Ὁ τύπος τῶν διαστημάτων $s = v_0 t + {}^1/_2\, \gamma t^2$ μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος γίνεται : $8 = 10 \cdot t + {}^1/_2 \cdot 2\, t^2$ ἢ $t^2 + 10\, t - 8 = 0$. Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $t = -5 + \sqrt{33}$ sec (ἀπορριπτομένης τῆς ἀρνητικῆς λύσεως).

Ἤδη ἐκ τοῦ τύπου τῶν ταχυτήτων : $v = v_0 + \gamma t$ εἶναι $v = 10 + 2 \cdot (-5 + \sqrt{33}) = 10 - 10 + 2\sqrt{33} = 2\sqrt{33} = 11{,}489$ m/sec περίπου·

45. Εἶναι $v_0 = 10$ m/sec, $\gamma = 3$ m/sec² καὶ $v = v_0 \cdot 2 = 20$ m/sec. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ταχυτήτων εἶναι : $20 = 10 + 3 \cdot t$ ἢ $t = \frac{10}{3}$ sec. Ἂν ἤδη εἰς τὸν τύπον τῶν διαστημάτων θέσομεν τὰς τιμὰς ταύτας εὑρίσκομεν : $s = 10 \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{100}{9} = \frac{100}{3} + \frac{100}{6} = \frac{300}{6} = 50$ m.

46. α) Δίδεται $v_0 = 20$, $v = 20 : 2 = 10$ καὶ $\gamma = -1{,}2$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον τῶν ταχυτήτων : $v = v_0 + \gamma t$ θὰ ἔχωμεν $10 = 20 - 1{,}2\, t$ καὶ ἐκ ταύτης $t = \frac{25}{3}$ sec. Εἰς τὸν χρόνον τοῦτον θὰ εἶναι $s = 20 \cdot \frac{25}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot \frac{625}{9} = 125$ m.

β) Ἵνα τὸ κινητὸν σταματήσῃ πρέπει ἡ ταχύτης του v νὰ γίνῃ μηδέν. Συνεπῶς ὁ τύπος τῶν ταχυτήτων γίνεται τώρα $0 = 20 - 1{,}2\, t$ καὶ δίδει $t = \frac{50}{3}$ sec. Εἰς τὸν χρόνον τοῦτον τὸ διάστημα εἶναι $s = 20 \cdot \frac{50}{3} - \frac{1}{2} 1{,}2 \cdot \frac{2500}{9} = 166{,}66$ m.

47. Ἀπὸ τὸν τύπον τῶν ταχυτήτων $v = gt$ (§ 67) εὑρίσκομεν τοὺς χρόνους, καθ' οὓς τὸ κινητὸν διέτρεξεν τὰ διαστήματα ἀπὸ τῆς ἀφετηρίας του μέχρι τῶν σημείων Α καὶ Β. Εἶναι ἀντιστοίχως : $40 = 1000\, t_A$ καί $150 = 1000 \cdot t_B$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων εὑρίσκομεν : $t_A = 0{,}04$ sec καὶ $t_B = 0{,}15$ sec.

Εὑρίσκομεν ἤδη διὰ τοῦ τύπου $s = {}^1/_2\, gt^2$ τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα τὸ κινητὸν διήνυσεν εἰς τοὺς χρόνους τούτους. Εἶναι : $s_A = {}^1/_2 \cdot 1000 \cdot 0{,}04^2 = 0{,}8$ m καὶ $s_B = {}^1/_2 \cdot 1000 \cdot 0{,}15^2 = 11{,}25$. Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι : $(AB) = 11{,}25 - 0{,}8 = 10{,}45$ m.

48. Ἂν εἰς τὸν τύπον τῶν διαστημάτων (§ 67) $s = \frac{1}{2} g t^2$ ἀντικαταστήσωμεν $s = 180$ m, $g = 10$ m/sec^2, εὑρίσκομεν τὸν χρόνον, ποὺ θὰ χρεισσθῇ τὸ σῶμα Α διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος. Οὕτω εἶναι : $180 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$ ἢ $5\,t^2 = 180$, $t^2 = 36$ καὶ $t = 6$ sec. Τὸ Β, ἀναχωρῆσαν 1 sec ἀργότερον θὰ ἔχῃ κινηθῇ τότε ἐπὶ $6 - 1 = 5$ sec καὶ θὰ ἔχῃ διατρέξει διάστημα $s = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 = 125$ m. Συνεπῶς τοῦτο θὰ εὑρίσκηται $180 - 125 = 55$ m ἄνωθεν τοῦ πυθμένος.

49. α) Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ t sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ Β. Τὸ Α τότε θὰ ἔχῃ κινηθῇ ἐπὶ $t + 6$ sec καὶ θὰ ἔχῃ διανύσει διάστημα $s_A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (t + 6)^2 = 5 \cdot (t + 6)^2$, ἐνῶ τὸ Β θὰ ἔχῃ κινηθῇ μόνον ἐπὶ t sec καὶ θὰ ἔχῃ διατρέξει διάστημα $s_B = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 5\,t^2$. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ διαστήματα ταῦτα διαφέρουν κατὰ 300 m, θὰ εἶναι : $5 \cdot (t + 6)^2 - 5t^2 = 300$ ἢ $(t + 6)^2 - t^2 = 60$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $t = 2$ sec. Συνεπῶς τὸ Α θὰ ἔχῃ κινηθῇ ἐπὶ $6 + 2 = 8$ sec καὶ θὰ ἔχῃ διατρέξει $s_A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8^2 = 320$ m. Ὥστε ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς ἀπόστασιν 320 m ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως τοῦ Α.

β) Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως ἡ κτηθεῖσα ταχύτης τοῦ μὲν Α θὰ εἶναι : $v_A = 10 \cdot 8 = 80$ m/sec, τοῦ δὲ Β : $v_B = 10 \cdot 2 = 20$ m/sec. Ἂν τὰς ταχύτητας ταύτας θεωρήσωμεν ὡς ἀρχικὰς ταχύτητας κατὰ τὴν δευτέραν φάσιν τῆς κινήσεως, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταξύ των ἀπόστασις θὰ γίνῃ πάλιν 300 m μετὰ t sec ἀπὸ τῆς συναντήσεώς των, τότε τὰ διαστήματα ποὺ θὰ ἔχουν διανύσει τὰ κινητὰ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $s'_A = 80\,t + \frac{1}{2} \cdot 10\,t^2 = 80\,t + 5\,t^2$ καὶ $s_B = 20\,t + \frac{1}{2} \cdot 10\,t^2 = 20\,t + 5\,t^2$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι : $(80\,t + 5\,t^2) - (20\,t + 5\,t^2) = 300$ ἢ $60\,t = 300$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $t = 5$ sec. Ὥστε τοῦτο θὰ συμβῇ 5 sec μετὰ τὴν συνάντησίν των.

50. α) Ἂν εἰς τὸν τύπον τῶν διαστημάτων $s = v_0\,t + \frac{1}{2} g\,t^2$ θέσωμεν $s = 300$, $v_0 = 35$ καὶ $g = 9{,}8$, θὰ ἔχωμεν : $300 = 35\,t + 4{,}9\,t^2$ ἢ $49\,t^2 + 350\,t - 3000 = 0$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $t = \dfrac{-350 + 842}{98} = 5$ sec περίπου (ἀπορριπτομένης τῆς ἀρνητικῆς λύσεως). Ὥστε ὁ λίθος θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος μετὰ 5 sec ἀπὸ τῆς ἐκσφενδονίσεώς του.

β) Εἰς τὸν χρόνον τοῦτον τὸ κινητὸν ἀποκτᾷ ταχύτητα διδομένην ὑπὸ τοῦ τύπου : $v = v_0 + g\,t$. Ὥστε θὰ εἶναι : $v = 35 + 9{,}8 \cdot 5 = 84$ m/sec.

51. α) Ἂν v_0 εἶναι ἡ ζητουμένη ἀρχικὴ ταχύτης, ἀπὸ τὸν τύπον τῶν διαστημάτων θὰ ἔχωμεν ; $10 = v_0 \cdot 1 + 1/_2 . 10 . 1^2$ ἤ $10 = v_0 + 5$ καὶ ἐκ ταύτης $v_0 = 5$ m/sec .

β) Ἡ ταχύτης μέ τὴν ὁποίαν θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον τῶν ταχυτήτων $v = v_0 + g\ t$ καὶ μὲ τὰ ἀνωτέρω στοιχεῖα εἶναι : $v = 5 + 10 \cdot 1 = 15$ m/sec .

3. Η ΔΥΝΑΜΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ

Α΄. Ἡ Θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς δυναμικῆς

52. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς δυναμικῆς (§ 74) εἶναι $F = m \cdot \gamma$ ὅπου, ὅταν ἡ μᾶζα ἐκφράζεται εἰς gr καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς cm/sec^2, ἡ F θὰ μετρῆται εἰς dyn (§ 76). Ὥστε, ἀφοῦ εἶναι m = 19,62 kgr ἢ 19620 gr καὶ $\gamma = 1{,}5$ m/sec^2 ἢ 150 cm/sec^2, θὰ εἶναι καὶ $F = 19620 \times 150 = 2943 \times 10^3$ dyn

53. Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις $F = m \cdot \gamma$ λυομένη ὡς πρὸς γ δίδει : $\gamma = \dfrac{F}{m}$. Θὰ εἶναι δὲ τὸ γ εἰς cm/sec^2, ὅταν τὸ F ἐκφράζεται εἰς dyn καί τὸ m εἰς gr (§ 76). Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι F = 1,5 kgr* ἢ 1500 gr* ἤ, ἐπειδὴ τὸ gr* ἰσοδυναμεῖ μὲ 981 dyn (§ 77), εἶναι F = 981 . 1500 dyn καὶ m = 2 kgr ἢ 2000 gr, θὰ εἶναι $\gamma = \dfrac{981 . 1500}{2000} = 735{,}75$ cm/sec^2 ἢ $\gamma = 7{,}3575$ m/sec^2

54. Ἐφ᾿ ὅσον ἐπὶ 4 sec ἐνεργεῖ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ σώματος δύναμις σταθερά, τοῦτο θὰ κινηθῇ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην (§ 71), ἐνῶ κατὰ τὰ ἑπόμενα 2 sec συμφώνως πρός τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας θὰ κινηθῇ μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ μὲ τὴν ταχύτητα, ποὺ θὰ ἔχῃ ἀποκτήσει εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου sec τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως.

Ἵνα ἤδη εὕρωμεν τὸ διάστημα, πού θὰ διανύσῃ εἰς τὰ 4 sec, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν. Ταύτην εὑρίσκομεν ἀπό τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς $F = m . \gamma$, ἂν θέσωμεν F = 981 . 2 = 1962 dyn καὶ m = 10 gr καὶ λύσωμεν ὡς πρὸς γ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\gamma = 1962 : 10 = 196{,}2$ cm/sec^2. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $s_4 = 1/_2 \cdot 196{,}2 \cdot 4^2 = 1569{,}6$ cm, ἐνῶ ἀφ᾿ ἑτέρου εἶναι καὶ $v_4 = 196{,}2 \times 4 = 784{,}8$ cm/sec.

Ἑπομένως μὲ τὴν ταχύτητα ταύτην εἰς τὰ 2 sec τῆς ὁμαλῆς κινήσεως θὰ διανύσῃ $s_2 = 784{,}8 . 2 = 1569{,}6$ cm. Ὥστε εἰς τὰ 6 sec θὰ διατρέξῃ ἐν ὅλῳ $1569{,}6 + 1569{,}6 = 3139{,}2$ cm, ἢ 31,392 m.

55. Ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἐνεργεῖ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ βλήματος ἡ δύναμις (τάσις) τῶν ἀερίων καὶ συνεπῶς τοῦτο κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην (§ 71).

α) Προκειμένου ἤδη νὰ ὑπολογίσωμεν τήν ἐπιτάχυνσιν τῆς κινήσεως ταύτης λαμβάνομεν τοὺς τύπους τῶν ταχυτήτων $v = \gamma t$ καὶ τῶν διαστημάτων $s = {}^1/_2\, \gamma t^2$ καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἀπαλείφομεν τὸν t. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ὡς πρὸς t καὶ λαμβάνομεν $t = \frac{v}{\gamma}$. Τὴν τιμὴν ταύτην του t ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία οὕτω γίνεται : $s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{\gamma^2}$ ἢ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν : $s = \frac{v^2}{2\gamma}$ Λύοντες τὴν τελευταίαν ταύτην ἐξίσωσιν ὡς πρὸς γ λαμβάνομεν $\gamma = \frac{v^2}{2s}$. Ἂν εἰς ταύτην θέσωμεν :
$v = 850 \cdot 100 = 85 \cdot 10^3$ cm καὶ $s = 3 \cdot 10^2$ cm εὑρίσκομεν $\gamma =$
$\frac{85^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 3 \cdot 10^2} = 1204{,}2 \cdot 10^4 = 12042 \cdot 10^3$ cm/sec².

β) Τὴν δύναμιν F ὑπολογίζομεν διὰ τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως $F = m \cdot \gamma$, ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν $m = 1000$ gr καὶ $\gamma = 12042 \cdot 10^3$ cm/sec², ὁπότε εὑρίσκομεν $F = 10^3 \cdot 12042 \cdot 10^3 = 12042 \cdot 10^6$ dyn

56. Εἶναι γνωστὸν ὅτι (§ 71) ὑπὸ τὴν συνεχῆ ἐπενέργειαν τῆς τάσεως τῶν ἀερίων ἡ κίνησις τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς κινήσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$, ἂν εἰς ταύτην θέσωμεν $m = 200$ gr καὶ $F = 25 \cdot 10^6 \cdot 981$ dyn, καὶ λύσωμεν ὡς πρὸς γ, ὁπότε λαμβάνομεν $\gamma = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 981}{200} = 122625 \cdot 10^3$ cm/sec².

Προκειμένου ἤδη νὰ εὕρωμεν τὴν ταχύτητα, μὲ τὴν ὁποίαν τὸ βλῆμα ἐξέρχεται ἀπὸ τὴν κάνην τοῦ ὅπλου, ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις, ἀπὸ τὸν τύπον τῶν διαστημάτων $s = {}^1/_2\, \gamma \cdot t^2$, τὸν χρόνον ποὺ θὰ χρειασθῇ τοῦτο διὰ νὰ διανύσῃ τὸ μῆκος τῆς κάνης. Οὕτω ἔχομεν : $50 = {}^1/_2 \cdot 122625 \cdot 10^3 \cdot t^2$ ἢ $100 = 122625 \cdot 10^3\, t^2$ ἢ $1 = 1226250\, t^2$ καὶ $t = \sqrt{\frac{1}{1226250}} = \frac{\sqrt{1226250}}{1226250}$. Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ t ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον $v = \gamma \cdot t$ καὶ εὑρίσκομεν $v = 122625 \cdot 10^3$.
$\frac{\sqrt{1226250}}{1226250} = 100 \times \sqrt{1226250} = 100 \times 1107{,}36 = 110736$ cm/sec ἢ $v = 1107{,}36$ m/sec.

57. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 57) ἐπιτάχυνσις εἶναι ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Ἀφοῦ λοιπὸν ἐντὸς 8 sec ἡ ταχύτης ηὐξήθη κατὰ $105 - 60 = 45$ cm/sec, ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι : $\gamma = 45 : 8 = 5{,}625$ cm/sec^2.

Ἀφοῦ ἤδη ἔχομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία προσδίδει εἰς τὸ σῶμα τὴν ἐπιτάχυνσιν ταύτην, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν μᾶζαν αὐτοῦ τοῦ σώματος ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$. Οὕτω εἶναι $m = F : \gamma = 4500 : 5{,}625 = 800$ gr.

Β΄. Προβλήματα ἐπὶ τῶν τριβῶν.

58. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργοῦν δύο ὁριζόντιοι δυνάμεις (§ 82), ἡ $F = 10$ kgr* ἢ $10 \cdot 10^3$ gr* ἢ $981 \cdot 10^4$ dyn, καὶ ἡ ἀντιθέτου φορᾶς τριβὴ T (σχ 74). Αὕτη ὅμως προσδιορίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου $T = \eta \cdot F_K$ καὶ εἶναι $T = 0{,}04 \cdot 100 = 4$ kgr* ἢ $4 \cdot 10^3$ gr* ἢ $981 \cdot 4 \cdot 10^3$ dyn. Ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων ὁριζοντίων δυνάμεων εἶναι : $F' = 981 \cdot 10^4 - 981 \cdot 4 \cdot 10^3 = 981 \cdot 10^3 (10 - 4) = 981 \cdot 6 \cdot 10^3$ dyn.

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν ἡ F εἶναι διάφορος τοῦ 0, τὸ σῶμα εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως καὶ συνεπῶς ἔχει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως ταύτης εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς δυναμικῆς $F = m \cdot \gamma$ καί, ἐπειδή $m = 100 \cdot 10^3$ gr (ἐκφράζεται μέ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τοῦ βάρους) καὶ $F = 981 \cdot 6 \cdot 10^3$ dyn, θὰ εἶναι : $\gamma = 981 \cdot 6 \cdot 10^3 : 100 \cdot 10^3 = 58{,}86$ cm/sec^2

59. Διὰ νὰ σταματήσῃ τὸ σῶμα πρέπει ἡ ταχύτης του νὰ γίνῃ μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ πρόκειται περὶ κινήσεως ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης εἶναι $v = v_0 - \gamma t$ (§ 59). Συνεπῶς πρέπει νὰ εἶναι $0 = v_0 - \gamma t$ ἢ $v_0 = \gamma t$.(1) Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης συνάγεται ὅτι ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ τὸν χρόνον καθ' ὅν τὸ κινητὸν διέτρεξε τὴν ἀπόστασιν τῶν 100 m.

α) Προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν παρατηροῦμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ ἡ τριβὴ T, ἥτις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $T = \eta \cdot F_K$ (§ 82) ἢ, ἐπειδὴ $F_K = B = m \cdot g$ (§ 78), εἶναι $T = \eta \cdot m \cdot g$(2). Ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν τῆς T τὸ σῶμα κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιβράδυνσις γ δίδεται ὑπὸ τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς Δυναμικῆς καὶ εἶναι $\gamma = \frac{T}{m}$ ἢ λόγῳ τῆς(2) εἶναι : $\gamma = \frac{\eta \cdot m \cdot g}{m} = \eta \cdot g$, καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμάς: $\gamma = 0{,}01 \cdot 981 = 9{,}81$ cm/sec^2.

β) Ἵνα ἤδη ὑπολογίσωμεν τὸν χρόνον, εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν διαστημάτων τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως $s = v_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2$ (§ 59) ἀντικαθιστῶμεν τὸ v_0 μὲ τὸ ἴσον του γt ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (¹), τὸ γ μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν 9,81 m/sec² καὶ τὸ s μὲ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν $s = 100$ m ἢ $100 \,.\, 100 = 10^4$ cm, ὁπότε λαμβάνομεν : $10^4 = 9{,}81\, t \,.\, t - \frac{1}{2}\, 9{,}81 \,.\, t^2$ ἢ $2 \,.\, 10^4 = 2 \,.\, 9{,}81\, t^2 - 9{,}81\, t^2$ ἢ $9{,}81\, t^2 = 2 \,.\, 10^4$ ἢ $t^2 = \frac{2 \,.\, 10^4}{9{,}81}$, ὁπότε εἶναι $= \sqrt{\frac{2 \,.\, 10^4}{9{,}81}} = \frac{10^2 \,.\, \sqrt{2 \,.\, 9{,}81}}{9{,}81}$

γ) Ἀντικαθιστῶντες τέλος εἰς τὴν σχέσιν (¹) τὰς τιμὰς τῶν γ καί t εὑρίσκομεν : $v_0 = 9{,}81 \,.\, \frac{10^2 \,.\, \sqrt{19{,}62}}{9{,}81} = 10^2 \,.\, 4{,}429 = 442{,}9$ cm/sec.

60. Ἂν F εἶναι ἡ ἀσκουμένη δύναμις καὶ T ἡ δύναμις τῆς τριβῆς, τὸ σῶμα κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ὑπὸ τὴν συνεχῆ ἐπενέργειαν τῆς συνισταμένης F′ τῶν δύο τούτων δυνάμεων, ἡ ὁποία, ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ ἀντιθέτου φορᾶς, ἔχει ἔντασιν $F' = F - T$ μεγαλύτερον τοῦ 0. Ἀπὸ τὴν σχέσιν ταύτην συνάγεται ὅτι $T = F - F'$. Ὥστε διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν T πρέπει νά εὕρωμεν ἐν πρώτοις τὴν F′, ἀφοῦ ἡ F εἶναι ἐξ ἀρχῆς γνωστή.

α) Εὕρεσις τῆς F′ : Ἂν γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν ἡ F′ προσδίδει εἰς τὸ κινητόν, κατὰ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς (§ 74) εἶναι $F' = m \,.\, \gamma$. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν λοιπὸν τῆς F′ πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ γ. Πράγματι ἡ τιμὴ αὐτὴ εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον τῶν διαστημάτων $s = \frac{1}{2} \gamma t^2$ λυόμενον ὡς πρὸς γ, ἀφοῦ εἶναι γνωστὸν ὅτι $s = 200$ cm καὶ $t = 4$ sec. Οὕτω εἶναι $\gamma = \frac{2s}{t^2}$ ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμάς: $\gamma = \frac{400}{16} = 25$ cm/sec². Ὥστε θὰ εἶναι $F' = 20 \,.\, 25 = 500$ dyn.

β) Εὕρεσις τῆς T : Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν $T = F - F'$ τὰς τιμὰς τῶν F καὶ F′ εὑρίσκομεν $T = 800 - 500 = 300$ dyn.

γ) Εὕρεσις τοῦ η : Ὡς γνωστὸν (§ 82) εἶναι $T = \eta \,.\, F\kappa$, ὅπου Fκ εἶναι ἡ δύναμις, ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον ὀλισθήσεως, δηλ. τὸ βάρος του. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $F\kappa =$ 20 gr* ἢ 20 . 981 dyn, θὰ ἔχωμεν : $\eta = \frac{300}{20 \,.\, 981} = 0{,}015$.

61. Ἐπὶ τοῦ ἐλκήθρου ἐπενεργοῦν δύο δυνάμεις, ἡ κινοῦσα δύναμεις F καὶ ἡ τριβὴ T, αἱ ὁποῖαι εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς. Ἐὰν ἡ συνισταμένη τούτων $F' = F - T$ ἦτο διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ταύτης (§ 71) θὰ ἐκινῆτο μὲ κίνησιν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην, ἐνῶ, ἂν αὕτη ἦτο μηδέν, τὸ σῶμα θὰ ἐκινῆτο ὁμαλῶς. Ἑπομένως, ἀφοῦ τὸ ἕλκηθρον κινεῖται ὁμαλῶς, ἕπεται ὅτι ἡ $F' = 0$ ἢ $F - T = 0$ καὶ συνεπῶς $F = T$. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι ἴση μὲ τὴν τριβήν. Ἀλλὰ εἶναι $T = \eta \cdot F\kappa$ (§ 82), ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $T = 0{,}06 \cdot 600 = 36$ kgr*. Ὥστε θὰ εἶναι καὶ $F = 36$ kgr*.

62. Ὅταν ἐνεργήσουν αἱ τροχοπέδαι, τὸ αὐτοκίνητον θὰ ἐξακολουθήσῃ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως τῆς τριβῆς νὰ κινῆται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην μέχρις ὅτου σταματήσῃ. Τὸ ὁλικὸν διάστημα, ποὺ θὰ διανύσῃ τότε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $s = \dfrac{v_0^2}{2\gamma}$ (§ 62), ὅπου v_0 εἶναι ἡ ταχύτης ποὺ εἶχε τοῦτο κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐπιβραδύνσεως καὶ γ ἡ ἐπιβράδυνσις, ποὺ προσδίδει εἰς αὐτὸ ἡ δύναμις τῆς τριβῆς T. Ἀλλ' ἐνῶ δίδεται $v_0 = 108 \cdot 10^5$ cm/h ἢ $v_0 = 108 \cdot 10^5 : 3600 = 3 . 10^3$ cm/sec, εἶναι ἄγνωστος ἡ ἐπιβράδυνσις γ.

α) Εὕρεσις τῆς γ : Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς (§ 74) εἶναι $T = m \cdot \gamma$, (1) ἐνῶ ἀφ' ἑτέρου κατὰ τοὺς νόμους τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως (§ 82) εἶναι $T = \eta \cdot B$ ἢ, ἐπειδὴ $B = m \cdot g$ (§ 78), θὰ εἶναι $T = \eta \cdot m \cdot g$ (2) Ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) ἐξισώνοντες τὰ δεύτερα μέλη των ἔχομεν $m \cdot \gamma = \eta \cdot m \cdot g$ ἢ $\gamma = \eta \cdot g$. Ἂν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $\eta = 0{,}3$ καὶ $g = 981$ cm/sec^2 εὑρίσκομεν $\gamma = 0{,}3 \cdot 981 = 294{,}3$ cm/sec^2.

β) Εὕρεσις τοῦ s : Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὰς τιμὰς τῶν v_0 καὶ γ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $s = \dfrac{v_0^2}{2\gamma}$ ἔχομεν: $s = \dfrac{9 \cdot 10^6}{2 \cdot 294{,}3} = 15290$ cm ἢ 152,9 m.

63. α) Ἡ δύναμις, ποὺ πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν, πρέπει νὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴση μὲ τὴν δύναμιν τριβῆς T. Ἀλλὰ εἶναι (§ 82) $T = \eta \cdot F\kappa$ ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $T = 0{,}4 \cdot 800 = 320$ kgr*. Συνεπῶς πρέπει νὰ εἶναι F μεγαλύτερον τῶν 320 kgr*.

β) Ὅταν ἐπὶ τοῦ σώματος ἐφαρμοσθῇ δύναμις $F = 360$ kgr*, ἐπειδὴ ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἡ δύναμις τριβῆς $T = 320$ kgr*, τοῦτο θὰ εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης F' τῶν δύο τούτων δυνάμεων, ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν $F' = 360 - 320 = 40$ kgr* (ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται δυνάμεις εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἀλλ' ἀντίρροποι). Οὕτω ὅμως τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην μὲ ἐπιβράδυνσιν $\gamma = \frac{F'}{m}$ (κατὰ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς) ἢ $\gamma = \frac{40 \,.\, 10^8 \,.\, 981}{800 \,.\, 10^3} = 49{,}05\ \mathrm{cm/sec^2}$.

Ἵνα ἤδη εὕρωμεν τὸν ἀπαιτούμενον χρόνον, ἵνα τὸ κιβώτιον διανύσῃ διάστημα $s = 10$ m ἢ $s = 10^3$ cm μὲ ἐπιβράδυνσιν $\gamma = 49{,}05$ cm/sec^2, θεωροῦμεν τὸν τύπον τῶν διαστημάτων $s = {}^1/_2\, \gamma t^2$, λύομεν τοῦτον ὡς πρὸς t, ὁπότε λαμβάνομεν $t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}}$, καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὸν τὰς τιμὰς τῶν s καὶ γ. Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$t = \sqrt{\frac{2 \,.\, 10^3}{49{,}05}} = \sqrt{40{,}77} = 6{,}3\ \mathrm{sec.}$$

Γ′ Ἔργον καὶ ἐνέργεια

64. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 84) τὸ παραγόμενον ὑπὸ δυνάμεως F ἔργον μετρεῖται μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως (F) ἐπὶ τὴν μετατόπισιν (s) τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της. Εἶναι δηλ. W=F . s. Κατὰ τὴν τὴν μεταφορὰν ὁ ἐργάτης μετατοπίζει κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω τὸ βάρος τοῦ σάκκου καὶ τὸ ἀτομικόν του βάρος, ἤτοι ἐν συνόλῳ 70+80=150 kgr* m.

Συνεπῶς κατὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον τὸ παραγόμενον ἔργον θὰ εἶναι: W=150 . 12=1800 kgr* m.

65. Κατὰ τὸν τύπον W = F . s εἶναι W = 5 . 4 = 20 kgr*m ἢ ἐπειδὴ 1 kgr* m ἰσοδυναμεῖ μὲ 9,81 J, θὰ εἶναι W=9,81 . 20 = 196,20 J. Ἀλλὰ 1 J ἀντιστοιχεῖ πρὸς 10^7 erg. Συνεπῶς θὰ εἶναι $W = 196{,}20 \,.\, 10^7 = 1962 \,.\, 10^6$ erg.

66. Τὸ ζητούμενον ἔργον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου W = F . s (§ 84), ὅπου F εἶναι ἡ δρῶσα δύναμις καὶ s τὸ διάστημα. Τὸ F ὑπολογίζομεν ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς F = m . γ (§ 74), ἂν θέσωμεν $m = 4 \,.\, 10^3$ gr καὶ $\gamma = 5$ cm/sec^2, ὁπότε εἶναι $F = 4 \,.\, 10^3 \,.\, 5 = 20 \,.\, 10^3$ dyn. Τὸ s ἐξ ἄλλου εἶναι $s = 15 \,.\, 10^2$ cm. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $W = 20 \,.\, 10^3 \,.\, 15 \,.\, 10^2 = 300 \,.\, 10^5 = 3 \,.\, 10^7$ erg (§ 85) ἢ W = 3 Joule.

67. Τὸ ζητούμενον ἔργον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου W = F . s (§ 84), ὅπου F ἡ δύναμις τῆς τριβῆς καὶ s τὸ ὁλικὸν διάστημα ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ κινητὸν κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησίν του ἀπὸ τῆς στιγμῆς, ποὺ θὰ παύσῃ ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς του, μέχρις ὅτου σταματήσῃ. Προκειμένου ὅμως νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ F καὶ s πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἐπιβράδυνσιν γ τῆς κινήσεως.

α) Εὕρεσις τῆς γ: Γνωρίζομεν ὅτι (§ 62) ἡ διάρκεια τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως εἶναι : $t = \frac{v_0}{\gamma}$ καὶ συνεπῶς $\gamma = \frac{v_0}{t}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $v_0 = \frac{72 \, . \, 10^5}{3600} = 2 \, . \, 10^3$ cm/sec καὶ t = 20 sec θὰ εἶναι: $\gamma = \frac{2 \, . \, 10^3}{2 \, . \, 10} = 10^2$ cm/sec^2.

β) Εὕρεσις τοῦ s: Εἶναι ἐπίσης γνωστὸν (§ 62) ὅτι τὸ ὁλικὸν διάστημα, ποὺ θὰ διανύση τὸ κινητὸν κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησίν του, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $s = \frac{v_0^2}{2\gamma}$. Ὥστε θὰ εἶναι: $s = \frac{2^2 \, . \, 10^6}{2 \cdot 10^2} = 2 \, . \, 10^4$ cm.

γ) Εὕρεσις τῆς F: Ἡ F δίδεται ὑπὸ τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς δυναμικῆς $F = m \, . \, \gamma$ (§ 74). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι m = 1,5 tn ἢ $1{,}5 \, . \, 10^6$ gr καὶ $\gamma = 10^2$ cm/sec^2 θὰ εἶναι $F = 1{,}5 \, . \, 10^6 \times 10^2 = 150 \, . \, 10^6$ dyn.

δ) Εὕρεσις τοῦ W: Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον $W = F \, . \, s$ τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν F καὶ s εὑρίσκομεν:

$W = 150 \, . \, 10^6 \, . \, 2 \, . \, 10^4 = 300 \, . \, 10^{10} = 3 \, . \, 10^{12}$ erg ἢ

$W = 3 \, . \, 10^5 \, . \, 10^7$ erg ἢ $W = 3 \, . \, 10^5$ Joule.

68. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια (§ 93) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $W_{KIN} = \frac{1}{2} m \, . \, v^2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι m = 10 gr καὶ v = 800 m/sec, ἢ $v = 8 \, . \, 10^4$ cm/sec, θὰ εἶναι: $W_{KIN} = \frac{1}{2} . \, 10 \, . \, 8^2 \, . \, 10^8 = 32 \times 10^9$ erg ἢ W = 3200 J ἤ, ἐπειδὴ 1 kgr* m ἰσοδυναμεῖ μὲ 9,81 J, θὰ εἶναι W = 3200 : 9,81 = 326 kgr* m.

69. Ἀπὸ τὸν τύπον $W = F \, . \, s$ εὑρίσκομεν τὸ ὁλικὸν ἔργον ποὺ θὰ παραγάγη οὗτος εἰς 4 h ἢ 4×3600 sec. Τοῦτο εἶναι W = 70 . 2040=142800 kgr* m. Συνεπῶς τὸ κατὰ sec παραγόμενον ἔργον θά εἶναι 142800 : 14400 = 9,917 kgr* m.

70. Τὸ πίπτον σῶμα εἰς τὸ σημεῖον τῆς προσκρούσεως θὰ ἔχη κινητικὴν ἐνέργειαν $W = \frac{1}{2} m v^2$, ὅπου v εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἀντίστασις F, τὴν ὁποίαν προβάλλει τὸ ἔδαφος εἰς τὴν εἰσχώρησιν τοῦ βλήματος, θὰ παραγάγη ἔργον $W' = F \, . \, s$, ὅπου s εἶναι τὸ βάθος. Ἐπειδὴ ἡ ἐνέργεια W καταναλίσκεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὴν ὑπερνίκησιν τοῦ ἔργου W′ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐδάφους, θὰ εἶναι W′ = W. ἢ $F \, . \, s = \frac{1}{2} m v^2$ ἢ $F = \frac{m v^2}{2s}$. (1)

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις ἤδη τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως $v = v_0 + gt$ καὶ $h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$ προσδιορίζομεν τὴν v. Εἰς τὴν β΄: ἐξίσωσιν ἀντικαθιστῶμεν $h = 347$ m, $v_0 = 7$ m/sec καὶ $g = 10$ m/sec² καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $5t^2 + 7t - 347 = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν: $t = \frac{-7 + \sqrt{6989}}{10}$. Τὴν τιμὴν τοῦ t ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν α΄. ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία δίδει $v = -7 + 10 . \frac{7 + \sqrt{6989}}{10} = \sqrt{6989}$ m/sec ἢ $v = \sqrt{6989} \,.\, 10^2$ cm/sec.

Οὕτω ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (¹) θέσωμεν $m = 1000$ gr, $v = \sqrt{6989} \,.\, 10^2$ cm/sec καὶ $s = 65$ cm, θὰ ἔχωμεν:

$$F = \frac{10^3 \,.\, 6989 \,.\, 10^4}{2 \,.\, 65} = 537{,}615 \,.\, 10^6 \text{ dyn}$$ ἢ, ἂν 1 gr* ἰσοδυναμεῖ μὲ 10^3 dyn καὶ 1 kgr* μὲ 10^6 dyn, θὰ εἶναι $F = 537{,}615$ kgr*.

71. α) Ἡ σταθερὰ δύναμις (τάσις τῶν ἀερίων) F, ἡ ὁποία κινεῖ τὸ βλῆμα ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, παράγει ἔργον $W = F \,.\, s$. Τὸ ἔργον ὅμως τοῦτο ἀποταμιεύεται εἰς τὸ βλῆμα ὡς ἐνέργεια κινητικὴ $W = \frac{1}{2} m v^2$. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $F \,.\, s = \frac{1}{2} m \,.\, v^2$ καὶ $F = \frac{m v^2}{2s}$. Ἂν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $m = 4 \,.\, 10^3$ gr, $v = 420 \,.\, 10^2$ cm/sec καὶ $s = 80$ cm εὑρίσκομεν $F = 441 \,.\, 10^8$ dyn ἤ, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι 1 gr* ἰσοδυναμεῖ πρὸς 10^3 dyn καὶ 1 kgr* πρὸς 10^6 dyn, θὰ εἶναι $F = 44100$ kgr*.

β) Προκειμένου ἤδη νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν χρόνον λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως $s = \frac{1}{2} \gamma t^2$ καὶ $v = \gamma t$. Ἡ α΄. τούτων γράφεται $s = \frac{1}{2} \gamma t \,.\, t$ ἢ λόγῳ τῆς β΄. εἶναι $s = \frac{1}{2} vt$. Λύοντες τὸν τύπον τοῦτον ὡς πρὸς t ἔχομεν: $t = \frac{2s}{v}$ καὶ μὲ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν s καὶ v λαμβάνομεν $t = \frac{2 \,.\, 0{,}80}{420} = 0{,}0038$ sec.

72. Ἡ ζητουμένη δύναμις δίδεται ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς $F = m \,.\, \gamma$ (§ 74). Ἡ μᾶζα τοῦ ὀχήματος ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τοῦ βάρους καὶ εἶναι $m = 26$ tn ἢ $m = 27 \,.\, 10^6$ gr. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἐξ ἄλλου, κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 57) εἶναι: $\gamma = \frac{v - v_0}{t}$ ἤ, ἐπειδὴ $v_0 = 700$ cm/sec, $v = 700 \,.\, 2$ cm/sec καὶ $t = 4 \,.\, 60$ sec, θὰ εἶναι $\gamma = \frac{700}{240} = \frac{35}{12}$ cm/sec². Συνεπῶς θὰ εἶναι

$F = 27 \cdot 10^6 \cdot \frac{35}{12}$ dyn ἢ $F = 78{,}75 \cdot 10^6$ dyn.

73. Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἡ μηχανὴ ἔχει ἰσχὺν ἑνὸς ἵππου, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς ἓν sec παράγει ἔργον ἴσον μὲ 75 kgr* m (§ 89). Συνεπῶς τὸ ἔργον, ποὺ παράγει ἡ μηχανὴ τῶν 5 CV εἰς 1 sec, εἶναι $75 \cdot 5 = 375$ kgr* m καὶ εἰς 100 min ἢ 6000 sec εἶναι $W = 375 \times 6000 = 2250000$ kgr* m. Ἐπειδὴ δὲ τὸ kgr* m ἀντιστοιχεῖ πρὸς 9,81 Joule, θὰ εἶναι $W = 225 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 = 22072500$ J. Ἀλλὰ 1 J ἰσοδυναμεῖ μὲ 10^7 erg. Συνεπῶς θὰ εἶναι $W = 22072500 \cdot 10^7$ erg.

74. Ἐπὶ τοῦ ἀεροπλάνου ἐνεργοῦν δύο ἀντίρροποι δυνάμεις, ἡ προωστήριος δύναμις F τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἀντίστασις A τοῦ ἀέρος. Ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν ὅμως τῶν δύο τούτων δυνάμεων τὸ ἀεροπλάνον κινεῖται ὁμαλῶς. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων $F' = F - A$ (§ 29), συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας, εἶναι μηδὲν ἤ, ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι ἴσαι. Ὥστε θὰ εἶναι $F = A = 500$ kgr*.

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου (§ 53) ὅτι ταχύτης εἶναι τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον διάστημα Τὸ διάστημα τοῦτο προσδιορίζομεν εὐκόλως ἀπὸ τὸ ἔργον, ποὺ παράγει ὁ κινητὴρ εἰς κάθε sec. Τοῦτο εἶναι 1000 CV ἢ $75 \cdot 1000 = 75000$ kgr* m. Ἐπειδὴ δὲ $W = F \cdot s$, θὰ εἶναι $75000 = 500 \cdot s$ καὶ $s = v = 75000 : 500 = 150$ m/sec.

Ἂν ἤδη εἰς τὸν τύπον τῆς ὁμαλῆς κινήσεως $s = v \cdot t$ (§ 55) θέσωμεν $s = 30000$ m καὶ $v = 150$ m/sec, εὑρίσκομεν $t = 30000 : 150 = 200$ sec.

75. Γνωρίζομεν ὅτι : $P = \frac{W}{t}$ (§ 88). Ἀλλὰ εἶναι $W = 80 \cdot 800 = 64000$ kgr* m καὶ $t = 1{,}5 \cdot 3600 = 5400$ sec. Συνεπῶς θὰ εἶναι $P = 64000 : 5400 = 11{,}85$ kgr* m/sec.

Ἐπειδὴ δὲ 1 CV ἰσοδυναμεῖ μὲ 75 kgr* m/sec θὰ εἶναι $P = 11{,}85 : 75 = 0{,}158$ CV.

Ἀλλὰ 1 CV ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,736 kW. Ἄρα θὰ εἶναι $P = 0{,}158 \cdot 0{,}736 = 0{,}116$ kW.

76. Καλοῦμεν ἀπόδοσιν ἢ συντελεστὴν ἀποδόσεως (η) τὸν λόγον τῆς ὠφελίμου ἰσχύος πρὸς τὴν ἀρχικῶς διατιθεμένην ἰσχύν. Εἶναι δηλ $\eta = \frac{P_{\text{ΩΦΕΛ}}}{P_{\text{ΔΙΑΤ.}}}$. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἰσχύς τοῦ στροβίλου εἶναι : $P_{\text{ΩΦΕΛ}} =$

$10000 \cdot 75 = 750000$ kgr* m/sec καὶ $\eta = 0{,}75$, ἡ ἀρχικῶς διατιθεμένη ἰσχύς, δηλ ἡ τοῦ πίπτοντος ὕδατος, θὰ εἶναι : $P_{\Delta IAT} = 750000 : 0{,}75 = 10^6$ kgr* m/sec.

Ἀλλὰ $P = \dfrac{W}{t}$ (§ 88). Συνεπῶς θὰ εἶναι $W = P \cdot t$ ἢ διὰ $P = 10^6$ kgr* m καὶ $t = 60$ sec θὰ εἶναι $W = 60 \cdot 10^6$ kgr* m. Εἶναι ὅμως $W = F \cdot s$ (§ 84), ὅπου F εἶναι τὸ βάρος τοῦ πίπτοντος ὕδατος, $W = 60 \cdot 10^6$ kgr* m καὶ $s = 80$ m. Ἄρα θὰ εἶναι : $F = 60 \cdot 10^6 : 80 = 0{,}75 \cdot 10^6$ kgr* ἢ $F = 750$ tn*.

77. Ἐπὶ τοῦ αὐτοκινήτου ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος (A) καὶ ἡ τριβὴ (T) ὁμόρροποι καὶ ἡ δύναμις τοῦ κινητῆρος (F) ἀντίρροπος πρὸς τὰς δύο ἄλλας. Ἐπειδὴ τὸ αὐτοκίνητον κινεῖται ὁμαλῶς, ἕπεται ὅτι ἡ συνισταμένη F′ καὶ τῶν τριῶν δυνάμεων εἶναι μηδὲν (ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας). Ἀλλὰ εἶναι $F' = F - (A + T)$ (§ 29). Ἑπομένως θὰ εἶναι : $F = A + T$. Εἶναι ὅμως $T = \eta \cdot B$ (§ 82) ἢ $T = 0{,}02 \cdot 1000 = 20$ kgr* καὶ $A = 10$ kgr*. Συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ $F = 10 + 20 = 30$ kgr*.

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου (§ 88) ὅτι ἰσχὺς εἶναι τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου παραγόμενον ἔργον καὶ ὅτι (§ 84) $W = F \cdot s$. Ἀφοῦ λοιπὸν $F = 30$ kgr* καὶ $s = v = 72000 : 3600 = 20$ m/sec, θὰ εἶναι : $P = W = 30 \cdot 20 = 600$ kgr* m/sec.

78. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Einstein (§ 96)
$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{V}\right)^2}}$, θέσωμεν $m_0 = 1$ kgr καὶ $v = 0{,}9$ V, θὰ ἔχωμεν $m = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{0{,}9^2 V^2}{V^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}81}} = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}19}} = \dfrac{1}{0{,}436}$
$= 2{,}294$ kgr.

79. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας εἶναι : $W = m \cdot V^2$ (§ 97) καὶ $m = \dfrac{W}{V^2}$. Ἀλλὰ δίδεται $W = 19{,}26 \cdot 10^{12}$ J ἢ $W = 19{,}26 \cdot 10^{12} \cdot 10^7$ erg καὶ $V = 3 \cdot 10^5$ km ἢ $V = 3 \cdot 10^5 \cdot 10^5$ cm. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $m = \dfrac{19{,}26 \cdot 10^{19}}{9 \cdot 10^{20}} = 0{,}214$ gr.

80. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας :

$W = m V^2$ (§ 97) θέσωμεν $W = 650 \cdot 10^6$ kWh ἤ, ἐπειδὴ τὸ κιλοβατώριον ἰσοδυναμεῖ μὲ $36 \cdot 10^5$ J (§ 90), $W = 650 \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^5 = 234 \cdot 10^{13}$ J, ἢ $W = 234 \cdot 10^{20}$ erg καὶ $V = 3 \cdot 10^5$ km ἢ $V = 3 \cdot 10^5 \cdot 10^5$ cm, θὰ ἔχωμεν $m = \dfrac{234 \cdot 10^{20}}{9 \cdot 10^{20}} = 26$ gr.

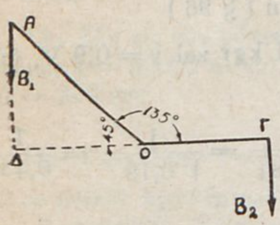
Δ'. Ἁπλαῖ μηχαναί

81. Ἂν εἰς τὴν σχέσιν : $F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta$ (§ 99) θέσωμεν $F_1 = 30$ kgr*, $\alpha = 80$ cm καὶ $\beta = 240 - 80 = 160$ cm, θὰ ἔχωμεν $160 \cdot F_2 = 30 \cdot 80$ ἢ $F_2 = 2400 : 160 = 15$ kgr*.

82. Εἶναι γνωστὸν ὅτι (§ 99) $F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν $F_2 = 10$ kgr*, $\beta = 3$ m καὶ $\alpha = 1$ m, θὰ ἔχωμεν $F_1 \cdot 1 = 10 \cdot 3$ καὶ $F_1 = 30$ kgr*.

83. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἰσορροπίας τῶν μοχλῶν : $F_1 \ \alpha = F_2 \cdot \beta$ (§ 99) ἀντικαθιστῶμεν $F_1 = 25$ kgr*, $\alpha = 240 - 30 = 210$ cm καὶ $\beta = 30$ cm, καὶ λαμβάνομεν : $F_2 \cdot 30 = 210 \cdot 25$ καὶ $F_2 = 175$ kgr*.

84. Ἂν B_1 καὶ B_2 εἶναι τὰ δύο βάρη, μοχλοβραχίονες θὰ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀποστάσεις τούτων ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου Ο, δηλ αἱ (ΟΔ) καὶ (ΟΓ), ἡ ἐξίσωσις ἰσορροπίας εἶναι : $B_2 \cdot (ΟΓ) = B_1 \cdot (ΟΔ)$ καὶ ὁ ζητούμενος λόγος $\dfrac{B_2}{B_1} = \dfrac{(ΟΔ)}{(ΟΓ)}$.

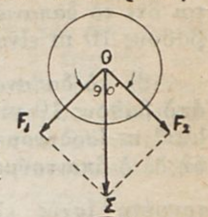


Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΔ, ποὺ ἔχει τὴν μίαν γωνίαν του ἴσην μὲ 45°, εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι : $(ΟΔ)^2 + (ΑΔ)^2 = (ΟΑ)^2$ ἤ, ἐπειδὴ $(ΟΔ) = (ΑΔ)$ καὶ $(ΟΑ) = 2\,(ΟΓ)$, θὰ εἶναι : $2\,(ΟΔ)^2 = 4\,(ΟΓ)^2$ ἢ $(ΟΔ)^2 = 2\,(ΟΓ)^2$ ἢ $\dfrac{(ΟΔ)^2}{(ΟΓ)^2} = 2$ καὶ $\dfrac{(ΟΔ)}{(ΟΓ)} = \sqrt{2}$. Συνεπῶς ὁ ἀνωτέρω λόγος γίνεται:

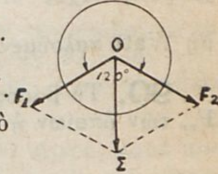
$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{2} = 1{,}414 .$$

85. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 102 α'.) εἰς τὴν ἀκίνητον τροχαλίαν, ὅταν ἰσορροπῇ, ἡ κινητήριος δύναμις εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίστασιν, εἶναι δηλ $F_1 = F_2 = 30$ kgr*.

α) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ F_1 καὶ F_2 εἶναι ὁμοπαράλληλοι, ἡ συνισταμένη των ἐφαρμόζεται εἰς τὸ Ο καὶ ἔχει ἔντασιν $\Sigma = 30 + 30 = 60$ kgr*.



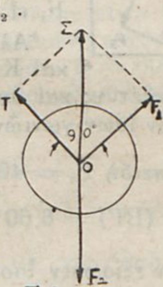
β) Ἂν τὰς F_1 καὶ F_2 μεταφέρωμεν εἰς τὸ Ο καὶ σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων, τοῦτο εἶναι τετράγωνον (ἰδὲ καὶ προβλ 13 γ) καὶ συνεπῶς εἶναι : $\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ ἢ $\Sigma = \sqrt{2 \cdot 30^2} = 30 \cdot \sqrt{2} = 30 \cdot 1{,}414 = 42{,}42$ kgr*.

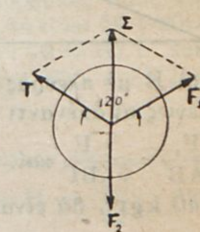


γ) Εἶναι ἡ περίπτωσις τοῦ προβλήματος 13 δ'. Ἡ συνισταμένη συνεπῶς εἶναι ἴση μὲ καθεμίαν ἀπὸ τὰς συνιστώσας, ἤτοι εἶναι $\Sigma = 30$ kgr*.

86. Εἶναι γνωστὸν ὅτι (§ 102 β'.) εἰς τὴν κινητὴν τροχαλίαν, ὅταν ἰσορροπῇ, ἡ κινητήριος δύναμις ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστάσεως, εἶναι δηλ $F_1 = {}^1/_2\, F_2$.

α) Ὅταν ἡ γωνία τῶν δύο σχοινίων εἶναι μηδέν, ὁπότε ταῦτα εἶναι παράλληλα, θὰ εἶναι : $F_1 = {}^1/_2 \cdot 80 = 40$ kgr*.





β) Τὸ βάρος F_2 ἀναλύεται εἰς δύο ἴσας δυνάμεις καθέτους πρὸς ἀλλήλας, τὴν τάσιν τοῦ νήματος T καὶ τὴν κινητήριον δύναμιν F_1. Ἀλλὰ κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι:

$$F_2^2 = F_1^2 + T^2 = 2F_1^2 \text{ ἢ } F_1^2 = \frac{F_2^2}{2} \text{ καὶ } F_1 = \sqrt{\frac{F_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{2F_2^2}{4}} = \frac{F_2 \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ ἢ } F_1 = \frac{80 \cdot 1{,}414}{2} = 56{,}56 \text{ kgr*}.$$

γ) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὅπως καὶ εἰς τὸ πρόβλημα 13 δ'. εἶναι $F_1 = F_2 = 80$ kgr*.

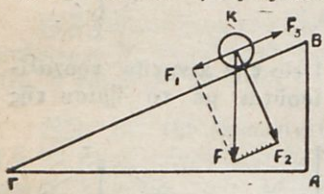
87. Τὸ συνολικὸν βάρος $F_2' = 3 + 45 = 48$ kgr*. Συνεπῶς κατὰ τὸν τύπον $F_1 = \dfrac{F_2'}{2\nu}$ (§ 103) θὰ εἶναι : $F_1 = \dfrac{48}{2 \cdot 3} = 8$ kgr*.

88. Εἰς τὸ δοθὲν βαροῦλκον (§ 101) εἶναι $\alpha = 54$ cm , $\beta = 12 : 2 = 6$ cm καὶ $F_2 = 30$ kgr*. Ἂν τὰς τιμὰς ταύτας θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἰσορροπίας : $F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta$, λαμβάνομεν $54 \cdot F_1 = 30 \cdot 6$ καὶ $F_1 = 3{,}333$ kgr*.

89. α) Ἐπειδὴ τὸ βάρος ἑνὸς λίτρου ὕδατος εἶναι 1 kgr*, ἕπεται ὅτι τὸ δαπανώμενον ἔργον διὰ τὴν ἄντλησιν 100 kgr* ὕδατος ἀπὸ βάθους 10 m εἶναι : $W = 100 . 10 = 10^3$ kgr* m .

β) Τὸ δαπανώμενον ἔργον διὰ τὴν ἄντλησιν 1000 kgr* ὕδατος ἀπὸ βάθους 10 m εἶναι $W = 1000 . 10 = 10^4$ kgr* m ἤ, ἐπειδὴ 1 kgr* m ἰσοδυναμεῖ μὲ 9,81 Joule, θὰ εἶναι $W = 9,81 . 10^4$ J. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀπαιτούμενος πρὸς τοῦτο χρόνος εἶναι t = 3600 sec, ἡ ζητουμένη ἰσχὺς εἶναι : $P = \frac{9,81 . 10^4}{3600} = 27,25$ Joule/sec ἤ, ἐπειδὴ Watt καλοῦμεν τὸ Joule/sec, θὰ εἶναι P = 27,25 Watt .

90. Τὸ βάρος F τοῦ βαρελίου ἀναλύεται εἰς τὰς δυνάμεις F_1 καὶ F_2, τῶν ὁποίων ἡ F_2 ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ ἐπιπέδου, ἐνῶ μένει δρῶσα ἡ F_1. Ἵνα λοιπὸν τὸ βαρέλιον ἰσορροπῇ εἰς ὕψος 1,10 m, πρέπει ἡ δύναμις τοῦ ἐργάτου F_3 νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τιμὴν τῆς F_1 εἰς τὸ ὕψος τοῦτο.



Ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ KF_1F, πού ἔχουν τὰς γωνίας των Γ καὶ Β μὲ πλευρὰς καθέτους καί συνεπῶς ἴσας, εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι. Εἶναι δηλ $\frac{F_1}{AB} = \frac{F}{B\Gamma}$ καί, ἐπειδὴ $F_1 = 40$ kgr*, (AB) = 1,10 m καὶ F = 240 kgr*, θὰ εἶναι : (ΒΓ) = 6,60 m .

91. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἰσορροπίας τοῦ κοχλίου : $F_1 = F_2 . \frac{\beta}{2\pi\alpha}$ (§ 105) θέσωμεν $F_2 = 200$ kgr*, β = 5 cm καὶ α = 50 cm, εὑρίσκομεν : $F_1 = 200 . \frac{5}{2 \ 3,14 . 50} = 3,185$ kgr*.

92. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ πίπτοντος ὕδατος εἶναι $120 . 10^6$ tn* ἢ $120 . 10^9$ kgr*, ἡ δαπανωμένη ἐνέργεια εἶναι $W\delta = 120 . 10^9 . 500 = 6 . 10^{13}$ kgr* m. Ἀφοῦ ὅμως ἡ ἀπόδοσις Α (§ 106) εἶναι 60%, ἕπεται ὅτι ἡ ὠφέλιμος ἐνέργεια θὰ εἶναι : $W\omega = 6 . 10^{13} . 0,6 = 3,6 . 10^{13}$ kgr* m ἤ, ἐπειδὴ 1 kgr* m ἰσοδυναμεῖ μὲ 9,81 Joule, θὰ εἶναι $W\omega = 3,6 . 10^{13} \ 9,81 = 36 . 981 . 10^{10}$ J . Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου τὸ kWh ἰσοδυναμεῖ μὲ $36 . 10^5$ J (§ 90), εὑρίσκομεν ἐτησίαν παραγωγὴν ἐνεργείας $W\omega = 98 . 10^5$ kWh .

Τὸ κόστος τέλος κάθε kWh εἶναι : $19.62 . 10^6 : 981 . 10^5 =$ 0,20 δρχ.

Δ'. Σύνθεσις τῶν κινήσεων

93. Ἂν χ καὶ y εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ταχύτητες τοῦ πλοίου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ καὶ τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὴν ὄχθην, ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου ὡς πρὸς τὴν ὄχθην θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων ταχυτήτων. Καὶ κατὰ μὲν τὴν ἄνοδον, ἐπειδὴ αἱ ταχύτητες αὗται εἶναι ἀντίρροποι, θὰ εἶναι $\chi - y = 2$, κατὰ δὲ τὴν κάθοδον, ὁπότε αὗται εἶναι ὁμόρροποι, θὰ εἶναι $\chi + y = 6$. Λύοντες τὸ σύστημα τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi = 4$ m/sec καὶ $y = 2$ m/sec

94. α) Πρόκειται περὶ κινήσεως ὁμαλῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $s = 12$ km ἢ 12000 m καὶ $v = 50$ m/sec. Συνεπῶς θὰ εἶναι $s = v \cdot t$ (§ 55) ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμάς : $12000 = 50 \cdot t$ καὶ $t = 240$ sec ἢ $t = 4$ min.

β) Ὅταν πνέῃ ἄνεμος δυτικὸς μὲ ταχύτητα 20 m/sec, κατὰ μὲν τὴν μετάβασιν ἡ ταχύτης αὕτη εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὴν τοῦ ἀεροπλάνου καὶ συνεπῶς ἡ συνισταμένη ταχύτης θὰ εἶναι $50 - 20 = 30$ m/sec καὶ ὁ χρόνος τῆς μεταβάσεως $t_1 = 6000 : 30 = 200$ sec, κατὰ δὲ τὴν ἐπιστροφὴν ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου εἶναι ὁμόρροπος πρὸς τὴν τοῦ ἀεροπλάνου καὶ συνεπῶς ἡ συνισταμένη ταχύτης θὰ εἶναι $50 + 20 = 70$ m/sec καὶ ὁ χρόνος τῆς ἐπανόδου $t_2 = 6000 : 70 = 85{,}7$ sec. Ὥστε ὁ συνολικὸς χρόνος τῆς διαδρομῆς θὰ εἶναι : $200 + 85{,}7 = 285{,}7$ sec ἢ 4 mim 45,7 sec.

95. α) Γνωρίζομεν ὅτι (§ 109 α'.) τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ τὸ κινητὸν δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $H = \frac{v_0^2}{2g}$. Ἐκ τούτου εἶναι : $v_0^2 = 2\,g\,H$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμάς : $v_0 = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 3920 \cdot 10^2} = 980 \cdot 20 \cdot \sqrt{2}$ cm/sec ἢ $v_0 = 277{,}144$ m/sec.

β) Ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου, κατά τὸν τύπον $t = \frac{v_0}{g}$, θὰ εἶναι : $t = \frac{980 \cdot 20 \cdot \sqrt{2}}{980} = 20\sqrt{2} = 28{,}28$ sec. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ διάρκεια τῆς καθόδου εἶναι ἡ αὐτή, ἕπεται ὅτι ὁ χρόνος τῆς ὅλης διαδρομῆς θὰ εἶναι $28{,}28 \cdot 2 = 56{,}56$ sec.

96. α) Τὸ βεληνεκὲς τοῦ σώματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $s = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (§ 109 β'.) καί, διὰ $v_0 = 20$ m/sec, $h = 45$ m καὶ $g = 10$ m/sec², εἶναι : $s = 20 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} = 60$ m.

β) Ἡ ταχύτης ἐξ ἄλλου μὲ τὴν ὁποίαν ὁ λίθος θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος εἶναι : $V = \sqrt{v_0^2 + 2\,gh}$ ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $V = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 45} = 36$ m/sec περίπου.

97. Εἰς τὴν πλαγίαν βολὴν (§109 γ΄.) τὸ μέγιστον βεληνεκὲς ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν κλίσεως 45° καὶ εἶναι $s = \dfrac{v_0^2}{g}$ ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $s = \dfrac{30^2}{10} = 90$ m.

98. Ἡ βόμβα συμμετέχουσα εἰς τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἀεροπλάνου, κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφέσεώς της ἔχει ὁριζοντίαν ταχύτητα $v_0 = 40$ m/sec. Πρόκειται συνεπῶς περὶ προβλήματος ὁριζοντίας βολῆς (§ 109 β΄.).

α) Τὸ βεληνεκὲς τῆς βόμβας εἶναι : $s = v_0 \sqrt{\dfrac{2\,h}{g}}$ ἤ, μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς : $s = 40 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot 6000}{10}} = 40 \cdot \sqrt{1200} = 40 \cdot 20 \cdot \sqrt{3} = 800 \cdot 1{,}732 = 1385{,}60$ m.

β) Ἡ ταχύτης ἐξ ἄλλου, μὲ τὴν ὁποίαν φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος εἶναι : $V = \sqrt{v_0^2 + 2\,gh}$ ἢ $V = \sqrt{40^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6000} = \sqrt{121600} = 348{,}71$ m/sec.

Ε΄. Ὁρμὴ καὶ κροῦσις

99. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς Δυναμικῆς εἶναι $F = m \cdot \gamma$ (§ 74). Ἀλλά καὶ $\gamma = \dfrac{v_2 - v_1}{t}$ (§ 57). Συνεπῶς θά εἶναι :

$\gamma = \dfrac{18 - 8}{2} = 5$ m/sec² ἢ $\gamma = 5 \cdot 10^2$ cm/sec² καί, ἐπειδὴ $m = 1$ tn ἢ $m = 10^6$ gr, θὰ εἶναι $F = 10^6 \cdot 5 \cdot 10^2 = 5 \cdot 10^8$ dyn.

100. Εἶναι γνωστὸν ὅτι (§ 112), ἄν v_β εἶναι ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν ἐκσφενδονίζεται βλῆμα μάζης m_β, τοῦτο θὰ ἔχῃ ὁρμὴν $m_\beta \cdot v_\beta$. Ἑπομένως τὸ ὅπλον, μάζης m_0, ἀποκτᾶ ἴσην καὶ ἀντίθετον ὁρμὴν $- m_0 v_0$, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις : $- m_0 \cdot v_0 = m_\beta \cdot v_\beta$.

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτει $v_0 = - \dfrac{m_\beta \cdot v_\beta}{m_0}$. καί, ἄν θέσωμεν $m_\beta = 10$ gr , $v_\beta = 800$ m/sec καὶ $m_0 = 2 \cdot 10^3$ gr , εὑρίσκομεν : $v_0 = - \dfrac{10 \cdot 8 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^3} = - 4$ m/sec.

101. Κατὰ τὴν πρόσκρουσίν της ἐπὶ τῆς πλακὸς ἡ σφαῖρα θὰ ἔχῃ κινητικὴν ἐνέργειαν $W = \frac{1}{2} m v^2$, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα τῆς σφαίρας κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς προσκρούσεως.

Οὕτω, ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν διαστημάτων $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ θέσωμεν $h = 5 . 10^2$ cm, $v_0 = 10^3$ cm/sec καὶ $g = 10^3$ cm/sec^2, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $10^3 t^2 + 2 . 10^3 t - 10^3 = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $t = -1 + \sqrt{2}$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸν τύπον τῶν ταχυτήτων $v = v_0 + g t$ εὑρίσκομεν $v = 10^3 \sqrt{2}$ cm/sec

Ὥστε θὰ εἶναι : $W = \frac{1}{2} . 5 . 10^2 . 10^6 . 2 = 5 . 10^8$ erg καὶ ὠφέλιμος ἐνέργεια κατὰ τὴν ἀνάκλασιν τῆς σφαίρας $W_\omega = 5 . 10^8 . 0{,}8 = 4 . 10^8$ erg.

Ὅταν ἡ ἀνακλωμένη σφαῖρα θὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος h', ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια θὰ ἔχῃ μετατραπῆ εἰς δυναμικήν, ἡ ὁποία, κατά τὸν τύπον $W' = m . g . h'$, θὰ εἶναι $W' = 5 . 10^2 . 10^3 . h' = 5 . 10^5 . h'$ erg.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $W' = W_\omega$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : $5 . 10^5 . h' = 4 . 10^8$ καὶ ἐκ ταύτης $h' = 800$ cm ἢ 8 m.

102. Ἡ ὁρμὴ καὶ τῶν δύο μαζὶ σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως ἦτο $m_1 . v_1 + m_2 . v_2$, μετὰ δὲ τὴν κροῦσιν ἡ ὁρμὴ τῆς ἑνιαίας σφαίρας, ποὺ ἔχει μᾶζαν $m_1 + m_2$ καὶ ταχύτητα v, θὰ εἶναι $(m_1 + m_2) . v$.

Ἀλλά συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς θὰ εἶναι : $(m_1 + m_2) . v = m_1 . v_1 + m_2 . v_2$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς v λαμβάνομεν $v = \dfrac{m_1 . v_1 + m_2 . v_2}{m_1 + m_2}$ ἢ $v = \dfrac{100 . 20 + 25 . 50}{100 + 25} = 26$ cm/sec.

103. Ἂν v_1 καὶ v_2 ἦσαν ἀντιστοίχως αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως καὶ V_1, V_2 μετὰ τὴν κροῦσιν, συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, πρέπει ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος νὰ διατηρῆται σταθερά, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι : $m_1 . v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$ ἢ $m_1 (v_1 - V_1) = m_2 (V_2 - v_2)$. (1)

Ἀφ' ἑτέρου συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, πρέπει ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος νὰ παραμένῃ σταθερά, δηλ πρέπει νὰ εἶναι : $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$ ἢ $m_1 (v_1^2 - V_1^2) = m_2 (V_2^2 - v_2^2)$ (2)

Ἂν τὰς σχέσεις (2) καί (1) διαιρέσωμεν κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν : $v_1 + V_1 = V_2 + v_2$ (3).

Διὰ τάς δοθείσας τιμὰς $m_1 = 3$ gr, $m_2 = 4$ gr, $V_1 = 20$ m/sec καί $V_2 = 10$ m/sec αἱ σχέσεις (1) καὶ (3) γίνονται : $3 v_1 + 4 v_2 = 100$

καὶ $v_1 - v_2 = -10$. Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $v_1 = 8{,}57$ m/sec καὶ $v_2 = 18{,}57$ m/sec.

ΣΤ΄. Κυκλικὴ ὁμαλὴ κίνησις

104. α) Συχνότης εἶναι (§ 114) ὁ ἀριθμὸς τῶν περιφορῶν ἀνὰ μονάδα χρόνου. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $\nu = \dfrac{1800}{60} = 30$ Hz

β) Περίοδος εἶναι ὁ χρόνος μιᾶς πλήρους περιφορᾶς. Ἄρα εἶναι: $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{30}$ sec.

γ) Ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἶναι $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$. Ὥστε θὰ εἶναι: $\omega = 2\pi \,.\, 30 = 60\pi$ rad/sec.

δ) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης εἶναι : $v = \dfrac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu$ Ἄρα θὰ εἶναι : $v = 2\pi \,.\, 50 \,.\, 30 = 3000\,\pi$ cm/sec ἢ $v = 9420$ cm/sec.

105. α) Ἀφοῦ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ εἶναι $2\pi R$ ἢ $2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 30 = 188{,}40$ cm, διὰ νά διανύσῃ οὗτος διάστημα $7536 \,.\, 10^2$ cm, πρέπει νὰ κάμῃ $7536 \,.\, 10^2 : 188{,}4 = 4000$ στροφάς. Ἐπειδὴ δὲ ταύτας θὰ ἐκτελέσῃ εἰς 20 min ἢ 1200 sec, ἕπεται ὅτι ἡ συχνότης θὰ εἶναι $\nu = 4000 : 1200 = \dfrac{10}{3}$ Hz

β) Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὁμαλῆς κινήσεως $s = v \,.\, t$ (§ 55) θὰ εἶναι $v = s : t$ ἢ $v = 7536 : 1200 = 6{,}28$ m/sec.

γ) Ἡ γραμμικὴ ταχύτης εἶναι $V = 2\pi \,.\, R \,.\, \nu$ (§115). Συνεπῶς θὰ εἶναι $V = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 30 \,.\, \dfrac{10}{3} = 628$ cm/sec, ἢ 6,28 m/sec, ὅση δηλ. καὶ ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου.

106 α) Ἡ γωνιακὴ ταχύτης δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως: $\omega = 2\pi.\nu$. (§ 115). Ἐπειδὴ δὲ $\nu = 1200 : 60 = 20$ Hz, θὰ εἶναι : $\omega = 40\pi$ rad/sec

β) Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις εἶναι : $\gamma = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$ (§ 116) ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $\gamma = 40^2 \,.\, \pi^2 \,.\, 120 = 1600 \,.\, 9{,}87 \,.\, 120 = 1895 \,.\, 10^3$ cm/sec^2 ἢ $\gamma = 18950$ m/sec^2

107. Ὡς γνωστὸν εἶναι : $v = \dfrac{2\pi R}{T}$ (§ 115). Ἀλλὰ δίδεται :

$R = 6370$ km καὶ $T = 24$ h. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $v = \frac{2\pi \,.\, 6370}{24}$ $= 1666{,}8$ km/h.

108. α) Εἶναι $v = 2\pi \,.\, R \,.\, \nu$ (§ 115). Ἀλλὰ εἶναι $\nu = \frac{150}{60} = 2{,}5$ Hz. Συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ $v = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 200 \,.\, 2{,}5 =$ 3140 cm/sec.

β) Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\gamma = \frac{v^2}{R}$ (§ 116). Ἄρα θὰ εἶναι $\gamma = \frac{3140^2}{200} = 49298$ cm/sec^2

γ) Ἐπειδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἶναι $g = 980$ cm/sec^2, θὰ εἶναι $\frac{\gamma}{g} = \frac{49298}{980} = 50{,}3$. Ὥστε ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις τοῦ στροβίλου εἶναι 50,3 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος.

109. α) Ἂν εἰς τὸν τύπον $F = \frac{mv^2}{R}$ (§ 116) θέσωμεν $m =$ 150 gr, $v = 200$ cm/sec καὶ $R = 50$ cm, θὰ ἔχωμεν: $F = \frac{150 \,.\, 200^2}{50}$ $= 12 \,.\, 10^4$ dyn.

β) Ἂν εἰς τὸν τύπον $F = \frac{mv^2}{R}$ θέσωμεν $v = \frac{2\pi R}{T}$ (§ 115), θὰ ἔχωμεν : $F = \frac{4\pi^2 \,.\, m \,.\, R}{T^2}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν : $F = \frac{4 \,.\, 9{,}87 \,.\, 150 \,.\, 50}{1{,}5^2} = 131600$ dyn.

110. Ἂν εἰς τὸν τύπον $F = \frac{mv^2}{R}$ (§ 116) θέσωμεν $v =$ $2\pi \,.\, R \,.\, \nu$ (§ 115), θὰ ἔχωμεν : $F = 4\pi^2 \,.\, \nu^2 \,.\, m \,.\, R$. Λύοντες τὸν τύπον τοῦτον ὡς πρὸς ν εὑρίσκομεν : $\nu = \frac{1}{2 \,.\, \pi} \,.\, \sqrt{\frac{F}{m \; R}}$ ἤ, ἐπειδὴ $F = 10 \,.\, 10^3 \,.\, 981$ dyn, $m = 10^3$ gr καὶ $R = 10^2$ cm, θὰ εἶναι

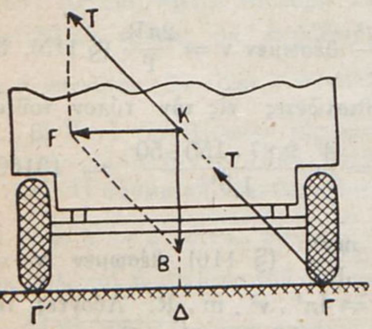
$$\nu = \frac{1}{6{,}28} \sqrt{\frac{981 \,.\, 10^4}{10^3 \,.\, 10^2}} = \frac{9{,}9}{6{,}28} = 1{,}58 \text{ Hz}$$

111. Ἵνα συμβῇ τοῦτο πρέπει τὸ βάρος τοῦ βλήματος, $B = m \,.\, g$, νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν κεντρομόλον δύναμιν $F = \frac{mv^2}{R}$, εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλεται ἡ κυκλικὴ κίνησις. Ἤτοι πρέπει νὰ εἰναι : $\frac{mv^2}{R} = m\,g$ ἢ $\frac{v^2}{R} = g$. Λύοντες τὸν τύπον τοῦτον ὡς πρὸς v λαμβάνομεν : $v = \sqrt{R\,g}$ καὶ διὰ $R = 6370 \cdot 10^3$ m καὶ $g = 10$ m/sec² εὑρίσκομεν $v = 7981$ m/sec.

112. α) Γνωρίζομεν ὅτι (§ 115) $v = 2\pi \cdot R \cdot \nu$ καὶ $\nu = \frac{v}{2\pi \cdot R}$. Συνεπῶς διὰ τὰς δοθείσας τιμὰς εἶναι $\nu = \frac{200}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 40}$ $= 0{,}8$ Hz περίπου.

β) Ἡ δύναμις, ἡ ὁποία θὰ ἀσκηθῇ ἐπὶ τῆς χειρός μας, θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ βάρους τοῦ σώματος καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, ἡ ὁποία θὰ διευθύνηται τότε κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω. Ἀλλὰ εἶναι: $B = m \cdot g$ (§ 78) ἢ $B = 200 \cdot 981 = 196200$ dyn καὶ $F = \frac{mv^2}{R}$ (§ 118) ἢ $F = \frac{200 \cdot 200^2}{40} = 200.000$ dyn. Συνεπῶς ἡ ὁλικὴ δύναμις θὰ εἶναι 396200 dyn ἢ $396200 : 981 = 404$ gr* περίπου.

113. Ἐπὶ τοῦ ὀχήματος καὶ εἰς τὸ κ. β. αὐτοῦ K ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις : τὸ βάρος του, $B = m \cdot g$ (¹), καὶ ἡ ἀντίδρασις T τῆς



ὁδοῦ. Ἡ δύναμις T πρέπει νὰ ἔχῃ τοιαύτην διεύθυνσιν καὶ μέτρον, ὥστε ἡ συνισταμένη F τῶν δύο δυνάμεων B καὶ T νὰ εἶναι ὁριζοντία, νὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον τῆς καμπῆς καὶ νὰ εἶναι $F = \frac{m \cdot v^2}{R}$, (²) πρέπει δηλ νὰ εἶναι κεντρομόλος. Ἵνα λοιπὸν τὸ αὐτοκίνητον διαγράψῃ ἀσφαλῶς τὴν καμπήν, πρέπει ἡ T νὰ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον τῆς ὁδοῦ εἰς σημεῖον κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων στηρίξεως αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Ἔστω Γ T ἡ ὁρικὴ θέσις τῆς ἀντιδράσεως T. Ἂν ταύτην μεταφέρωμεν εἰς τὸ K καὶ σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΓKT καὶ ΔΓT, ποὺ ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους, εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς εἶναι : $\frac{KF}{\Gamma\Delta} = \frac{FT}{K\Delta}$ ἢ, ἐπειδὴ $KF = F$, $(\Gamma\Delta) = 120 : 2 = 60$ cm, $FT = B$ καὶ

ΚΔ $= 100$ cm, θὰ εἶναι $\frac{F}{60} = \frac{B}{100}$ ἢ $\frac{F}{B} = \frac{60}{100}$ ἢ $\frac{F}{B} = \frac{3}{5}$.

Ἂν ἤδη εἰς τὴν σχέσιν ταύτην θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν B καὶ F ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2), θὰ ἔχωμεν $\frac{mv^2 : R}{m \cdot g} = \frac{3}{5}$ ἢ $\frac{v^2}{gR} = \frac{3}{5}$ καὶ $v^2 = \frac{3 \cdot g \cdot R}{5}$ καὶ διὰ $g = 981$ cm/sec^2 καὶ $R = 40 \cdot 10^2$ cm εὑρίσκομεν : $v^2 = 23544 \cdot 10^2$ καὶ $v = 1534$ cm/sec ἢ 15,34 m/sec.

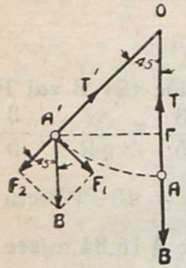
Ζ'. Ἁρμονικὴ ταλάντωσις — Ἐκκρεμὲς

114. Ἡ περίοδος T ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Συνεπῶς διὰ $l=600$ cm καὶ $g=981$ cm/sec^2 θὰ εἶναι : $T=2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{600}{981}} = 4{,}90$ sec. Ἀφοῦ λοιπὸν εἰς 4,90 sec ἐκτελῇ μίαν αἰώρησιν, εἰς 60 sec θὰ ἐκτελέσῃ $60 : 4{,}9 = 12{,}25$ αἰωρήσεις περίπου.

115. Λύοντες ὡς πρὸς l τὸν τύπον τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (§ 122) λαμβάνομεν $l = \frac{g\,T^2}{4\,\pi^2}$. Ἂν λοιπὸν l καὶ l′ εἶναι τὰ μήκη τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τὴν α'. καὶ β'. περίπτωσιν καὶ T καὶ T′ αἱ ἀντίστοιχοι περίοδοι, ἡ διαφορὰ τοῦ μήκους θὰ εἶναι $\chi = l - l' = \frac{g\,T^2}{4\,\pi^2} - \frac{g\,T'^2}{4\,\pi^2} = \frac{g}{4\,\pi^2}(T^2 - T'^2)$. Ἀλλὰ εἰς μὲν τὴν α'. περίπτωσιν εἶναι $T = \frac{60}{60} = 1$ sec, εἰς δὲ τὴν β′ : $T' = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ sec. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $\chi = \frac{981}{4 \cdot 9{,}87} \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{981}{4 \cdot 9{,}87} \cdot \frac{5}{9} = 13{,}8$ cm.

116. α) Ὅταν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου, ἡ τάσις (T) τοῦ νήματος εἶναι ἴση καὶ ἀντίρροπος πρὸς τὴν συνισταμένην τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, $F = \frac{m\,v^2}{l}$, ἡ ὁποία ἀναπιύσσεται λόγῳ τῆς κυκλικῆς κινήσεως, καὶ τοῦ βάρους, $B = mg$, τῆς σφαίρας·

Ἐπειδὴ δὲ αἱ F καὶ B εἶναι ὁμόρροποι, θὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τι-



μὴν $T = \frac{mv^2}{l} + m\,g$ (¹). Ὥστε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς T εἶναι ἀνάγκη νὰ προσδιορίσωμεν τὸ v. Τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς :

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σφαῖρα εἰς τὴν θέσιν A, $W = m \,.\, g \,.\, h$, μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς κινητικήν, $W' = \frac{1}{2}\,mv^2$, ὅταν αὕτη φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν A. Συνεπῶς, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, θὰ εἶναι : $^1/_2\, mv^2 = m\,g\,h$ ἢ $v^2 = 2gh$ (²). Πρέπει ἤδη νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ h.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΓΑ', ἐπειδὴ γων $O = 45^0$, εἶναι ἰσοσκελές. Ἀλλὰ κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $(O\Gamma)^2 + (A'\Gamma)^2 = (OA')^2$ ἢ $2\,(O\Gamma)^2 = 125^2$ καὶ $(O\Gamma) = \frac{125}{\sqrt{2}} = \frac{125\,.\sqrt{2}}{2} = 88{,}375$ cm. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $h = 125 - 88{,}375 = 36{,}625$ cm.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (²) εὑρίσκομεν $v^2 = 2\,.\,981\,.\,36{,}625 = 73{,}25\,.\,981$.

Οὕτω ἡ σχέσις (¹) γίνεται : $T = \frac{500\,.\,73{,}25\ \ 981}{125} + 500\,.\,981 = 793\,.\,981$ dyn ἢ $T = 793$ gr*.

β) Εἰς τὴν θέσιν A' τὸ B ἀναλύεται εἰς τὰς F_1 καὶ F_2. Ἐκ τούτων ἡ F_2 εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴση μὲ T. Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον $A'F_2B$ ἔχομεν $2\,F_2^2 = 500^2$ καὶ $F_2 = \frac{500}{\sqrt{2}} = \frac{500\sqrt{2}}{2}$ $250\,.\sqrt{2} = 250\,.\,1{,}414 = 353{,}5$ gr*.

117. Λύοντες ὡς πρὸς g τὸν τύπον τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, $T = 2\pi\,.\sqrt{\frac{l}{g}}$ (§ 122) λαμβάνομεν : $g = \frac{4\pi^2\,.\,l}{T^2}$ καί μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν $g = 967{,}26$ cm/sec².

118. Ἂν τὸν τύπον τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (§ 122) λύσωμεν ὡς πρὸς l, λαμβάνομεν : $l = \frac{g\,.\,T^2}{4\,.\,\pi^2}$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $g = 980$ cm/sec² καὶ $T = 60$ sec εὑρίσκομεν $l = 89362$ cm ἢ 893,62 m.

119. Ἂν T καὶ T′ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ περίοδοι εἰς τοὺς δύο τόπους, θὰ εἶναι : $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ καὶ $T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$ καί, ἂν διαιρέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς εἶναι: $\frac{T'}{2} = \sqrt{\frac{980}{974}}$ καὶ $T' = 2 . \sqrt{1{,}006} = 2 . 1{,}003 = 2{,}006$ sec.

Ὥστε εἰς τὸν β′ τόπον τὸ ἐκκρεμὲς καθυστερεῖ κατὰ 0,006 sec εἰς ἑκάστην αἰώρησιν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς 24h ἢ 24 . 3600 = 86400 sec, τὸ ἐκκρεμὲς θὰ ἔκαμνε 86400 : 2 = 43200 αἰωρήσεις, ἡ συνολικὴ καθυστέρησις θὰ εἶναι : 0,006 . 43200 = 259,2 sec ἢ 4min 19,2 sec.

120. Εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τούτου πλεονάζει ἓν ἀπὸ τά δεδομένα στοιχεῖα, τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς. Τοῦτο δὲ, διότι μὲ l =100 cm ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς (§ 122) εὑρίσκομεν : $T_{970} = 2{,}00575$ sec, $T_{978} = 2{,}00793$ sec καὶ $T_{983} = 2{,}00275$ sec.

Ἂν ἤδη θεωρήσωμεν γνωστὴν μόνον τὴν περίοδον T = 2 sec τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐν τόπῳ ἔνθα g = 980 cm/sec², δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τὴν περίοδον διά g = 978 cm/sec², ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι ἡ περίοδος ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος. Οὕτω θά εἶναι :

$$\frac{T_{978}}{2} = \frac{\sqrt{980}}{\sqrt{978}} = \frac{\sqrt{980 . 978}}{978}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης εὑρίσκομεν $T_{978} = 2{,}002$ sec. Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ $T_{983} = 1{,}997$ sec.

Η′ Παγκόσμιος ἕλξις — Βαρύτης

121. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Νεύτωνος (§ 126) εἶναι :

$$F = k . \frac{m_1 . m_2}{R^2}, \text{ ὅπου } k = 6{,}68 . 10^{-8} \text{ C.G.S.}$$

Ἐπειδὴ αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα r, θὰ ἔχουν καὶ τὸν αὐτὸν ὄγκον $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ καὶ τὴν αὐτὴν μᾶζαν $m_1 = m_2 = d . \frac{4\pi}{3} r^3$. Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστὸν ὅτι ἡ μᾶζα σφαίρας ὁμογενοῦς θεωρεῖται συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις τῶν δύο εἰς ἐπαφὴν εὑρισκομένων σφαιρῶν θὰ εἶναι R = 2r.

Ὥστε ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται: $F = k \dfrac{\left(d \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^3\right)^2}{(2r)^2} = \dfrac{k \cdot 4\pi^2 \cdot d^2 \cdot r^4}{9}$

Ὁ τύπος οὗτος μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς δίδει:

$F = \dfrac{6{,}68 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 9{,}87 \cdot 121 \cdot 10^8}{9} = 3545{,}65$ dyn [ἤ, ἐπειδὴ 1 gr* ἰσοδυναμεῖ μὲ 981 dyn, θὰ εἶναι: $F = 3545{,}65 : 981 = 3{,}614$ gr*.

122. Ἂν καλέσωμεν χ τὴν ἀπόστασιν τῶν μαζῶν m_1 καὶ m, τότε ἡ ἀπόστασις τῶν m καὶ m_2 θὰ εἶναι $\alpha - \chi$ καὶ αἱ ἀμοιβαῖαι ἕλξεις τῶν μαζῶν τούτων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $F_1 = k \cdot \dfrac{m_1 \cdot m}{\chi^2}$ καὶ $F_2 = k \cdot \dfrac{m \cdot m_2}{(\alpha - \chi)^2}$. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ μᾶζα m ἰσορροπεῖ, ἕπεται ὅτι εἶναι $F_1 = F_2$ ἢ $k \dfrac{m_1 \cdot m}{\chi^2} = k \dfrac{m \cdot m_2}{(\alpha - \chi)^2}$ ἢ $\dfrac{m_1}{\chi^2} = \dfrac{m_2}{(\alpha - \chi)^2}$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν: $\chi = \dfrac{\alpha \cdot m_1 + \alpha \cdot \sqrt{m_1 \cdot m_2}}{m_1 - m_2}$

123. Ἂν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ χ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τῆς Γῆς, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς Σελήνης θὰ εἶναι $60R - \chi$ καὶ αἱ ἀμοιβαῖαι ἕλξεις: $F_1 = k \cdot \dfrac{m_1 \cdot m}{\chi^2}$ καὶ $F_2 = k \cdot \dfrac{m \cdot m_2}{(60R - \chi)^2}$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι: $F_1 = F_2$ ἢ $k \cdot \dfrac{m_1 \cdot m}{\chi^2} = k \cdot \dfrac{m \cdot m_2}{(60R - \chi)^2}$ ἢ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν: $\dfrac{m_1}{\chi^2} = \dfrac{m_2}{(60R - \chi)^2}$ ἢ καὶ $\dfrac{\chi^2}{(60R - \chi)^2} = \dfrac{m_1}{m_2}$. Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως εἶναι $\dfrac{m_1}{m_2} = 81$. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $\dfrac{\chi^2}{(60R - \chi)^2} = 81$ καὶ $\dfrac{\chi}{60R - \chi} = 9$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $\chi = 54$ R.

124. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 127), ἂν M εἶναι ἡ μᾶζα τῆς Σελήνης καὶ R ἡ ἀκτὶς αὐτῆς, ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἰς τὴν Σελήνην θὰ εἶναι: $g = k \dfrac{M}{R^2}$, ὅπου k εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἕλξεως ἴση μὲ $6{,}68 \cdot 10^{-8}$ C.G.S.

Ἀλλὰ δίδεται $M = 0{,}0123 \cdot 6 \cdot 10^{27}$ gr καὶ $R = 1738 \cdot 10^5$ cm.

Συνεπῶς θὰ εἶναι: $g = 6{,}68 \, . \, 10^{-8} \dfrac{0{,}0123 \, . \, 6 \, . \, 10^{27}}{1738^2 \, . \, 10^{10}} = 0{,}16324 \, . \, 10^3 = 163{,}24$ cm/sec².

125. Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἐλευθέρας πτώσεως τῶν σωμάτων εἶναι: $v = g \, . \, t$ καὶ $H = \dfrac{1}{2} g \, . \, t^2$ (§ 67). Ὑψοῦμεν τὴν α΄. τούτων εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν $v^2 = g^2 \, t^2$. Λύομεν τὴν β΄ ὡς πρὸς t^2 καὶ τὴν τιμὴν $t^2 = \dfrac{2H}{g}$ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν α΄, ὁπότε αὕτη γίνεται:
$$v^2 = g^2 \, . \, \frac{2H}{g} = 2 \, . \, g \, . \, H \;\; \text{ἢ} \;\; v = \sqrt{2 \, . \, g \, . \, H}.$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν ταχύτητα συναρτήσει τῆς ἐπιταχύνσεως καὶ τοῦ ὕψους. Ἂν λοιπὸν g καὶ H εἶναι τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἰς τὴν Γῆν καὶ g΄, H΄ τὰ ἀντίστοιχα τούτων εἰς τὴν Σελήνην, θὰ εἶναι: $v = \sqrt{2 \, . \, g \, . \, H}$ καὶ $v' = \sqrt{2 \, . \, g' . \, H'}$. Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι $v = v'$ ἢ $\sqrt{2 \, . \, g \, . \, H} = \sqrt{2 \, . \, g' . \, H'}$ ἢ $2 \, . \, g \, . \, H = 2 \, . \, g' . \, H'$ ἢ $g \, . \, H = g' . \, H'$.

Λύοντες τὸν τύπον τοῦτον ὡς πρὸς H΄ λαμβάνομεν $H' = \dfrac{g \, . \, H}{g'}$. Εἶναι ὅμως γνωστὸν ὅτι $g = 981$ cm/sec², $H = 100$ m $= 10^4$ cm καὶ $g' = 163$ cm/sec². (ὅπως ὑπελογίσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα). Συνεπῶς θὰ εἶναι καί: $H' = \dfrac{981 \, . \, 10^4}{163} = 6 \, . \, 10^4$ cm, ἢ $H' = 600$ m.

126. Ἡ κεντρομόλος δύναμις συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος, τῆς μάζης καὶ τῆς περιόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $F = \dfrac{4\pi^2 \, . \, m \, . \, R}{T^2}$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται $m = 4 \, . \, 10^{10}$ gr, $R = 637 \, . \, 10^6$ cm καὶ $T = 24 \, . \, 3600 = 86400 = 864 \, . \, 10^2$ sec. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $F = \dfrac{4 \, . \, 9{,}87 \, . \, 4 \, . \, 10^{10} \, . \, 637 \, . \, 10^6}{864^2 \, . \, 10^4} = 0{,}135 \, . \, 10^{12}$ dyn ἤ, ἐπειδὴ 1 kgr* $= 10^6$ dyn, θὰ εἶναι F = 135000 kgr* ἢ F = 135 tn*.

Θ΄. Συστήματα μονάδων

127. Γνωρίζομεν ὅτι 1 μονὰς μάζης Τ. Σ ἰσοδυναμεῖ μὲ 9,81 kgr. Συνεπῶς μᾶζα 9,81 tn ἢ $9{,}81 \, . \, 10^3$ kgr* ἰσοδυναμεῖ μὲ 10^3 μονάδες Τ. Σ

128. Ἀφοῦ εἶναι $B = 100$ kgr*, θὰ εἶναι καὶ $m = 100$ kgr ἢ $n = 10^2 . 10^3 = 10^5$ gr. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $h = 20$ m ἢ $h = 2 . 10 . 10^2 = 2 . 10^3$ cm, ἕπεται ὅτι εἰς τὸ σύστημα CGS εἶναι: $W_\Delta = m . g . h$ ἢ $W_\Delta = 10^5 . 981 . 2 . 10^3 = 1962 . 10^8$ erg.

Εἰς τὸ Τ . Σ ἐξ ἄλλου θὰ εἶναι: $W_\Delta = B . h$ ἢ $W_\Delta = 100 . 20 = 2000$ kgr* m.

129. Γενικῶς εἶναι $W = \frac{1}{2} m . v^2$.

α) Εἰς τὸ Τ . Σ θεμελιώδης μονὰς εἶναι τὸ kgr* καί, ἐπειδὴ $B = m . g$, θὰ εἶναι $m = \dfrac{B}{g}$. Συνεπῶς ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται $W = \dfrac{1}{2} . \dfrac{B}{g} . v^2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι: $B = 2$ tn* ἢ $2 . 10^3$ kgr*, $g = 9,81$ m/sec² καὶ $v = 72$ km/h ἢ $v = \dfrac{72 . 10^3}{36 . 10^2} = 20$ m/sec, θὰ εἶναι: $W = \dfrac{2 . 10^3 . 20^2}{2 . 9,81} = 40775$ kgr* m περίπου.

β) Εἰς τὸ σύστημα C.G.S, ἀφοῦ εἶναι $B = 2$ tn* ἢ $2 . 10^6$ gr*, θὰ εἶναι καὶ $m = 2 . 10^6$ gr. Ἐπίσης εἶναι $v = 72$ km/h ἢ $v = \dfrac{72 . 10^5}{36 . 10^2} = 2 . 10^3$ cm/sec. Ἑπομένως θὰ εἶναι: $W = \frac{1}{2} . 2 . 10^6 . 4 . 10^6 = 4 . 10^{12}$ erg.

130. Γενικῶς εἶναι: $F = m . \gamma$. Ἐπειδὴ δὲ μία μονὰς μάζης Τ.Σ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 9,81 kgr, θὰ εἶναι $m = 19,62 : 9,81 = 2$ μονάδες μάζης Τ. Σ. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $F = 2 . 4 = 8$ kgr*.

II. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

1. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

Α΄. Ὑδροστατικὴ πίεσις — Πυκνότης

131. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως εἶναι: $p = h . \varrho$ (§ 133) ὅπου, ὅταν $p =$ gr*/cm³ καὶ $h =$ cm, εἶναι καὶ $p =$ gr*/cm². Ἐπειδὴ δὲ δίδεται $p = 5000$ dyn/cm² καὶ εἶναι γνωστὸν ὅτι 1 gr* ἰσοδυναμεῖ μὲ 981 dyn, θὰ εἶναι $p = 5000 : 981 = 5,097$ gr*/cm². Ἡ ἐξίσωσις αὐτη λυομένη ἤδη ὡς πρὸς h γίνεται: $h = \dfrac{p}{\varrho}$

Οὕτω διὰ τὰς διδομένας τιμὰς θὰ ἔχωμεν :

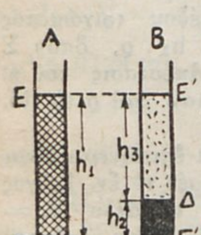
α) $h = \frac{5,097}{13,6} = 0,37$ cm, β) $h = \frac{5,097}{1} = 5,097$ cm καὶ

γ) $h = \frac{5,097}{0,8} = 6,37$ cm.

132. Ἔστω τὸ δοχεῖον τοῦ σχήματος 136 (§ 138). Ἂν h_1 εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραφινελαίου καὶ h_2 τὸ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν διαχωρισμοῦ ὕψος τοῦ ὕδατος, κατὰ τὴν συνθήκην ἰσορροπίας δύο μὴ ἀναμιγνυομένων ὑγρῶν ἐντὸς συγκοινωνούντων δοχείων, θὰ εἶναι :
$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ ἢ $h_2 \cdot \varrho_2 = h_1 \cdot \varrho_1$.

Ἀλλὰ δίδεται $h_1 = 5$ cm, $\varrho_1 = 0,80$ gr*/cm^3 καὶ $\varrho_2 = 1$ gr*/cm^3. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $h_2 \cdot 1 = 5 \cdot 0,8$ ἢ $h_2 = 4$ cm. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος ποὺ κατῆλθεν εἰς τὸν βραχίονα Α εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος, ποὺ ἀνῆλθεν εἰς τὸν βραχίονα Β, καὶ οἱ δύο βραχίονες εἶναι τῆς αὐτῆς τομῆς, συνάγεται ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχα ὕψη εἶναι ἴσα. Δηλ. ὅσα cm κατῆλθε τὸ ὕδωρ εἰς τὸν βραχίονα Α κάτω ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τῆς ἰσορροπίας, τόσα cm ἀνῆλθεν εἰς τὸν Β. Ἑπομένως τὸ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ διαχωρισμοῦ ὕψος τῶν 4 cm εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους, κατὰ τὸ ὁποῖον τὸ ὕδωρ ἀνῆλθεν ὑπεράνω τοῦ μέσου τοῦ βραχίονος Β. Ὥστε εἰς τὸν Β τὸ ὕδωρ ἀνῆλθε κατὰ 2 cm ὑπεράνω τῆς παλαιᾶς ἐλευθέρας ἐπιφανείας.

133. Ἐπειδὴ τὸ σύστημα εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, ἕπεται ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ ΓΓ′ ἀσκοῦνται ἴσαι πιέσεις. Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $p = h \cdot \varrho$ (§ 133). Ἂν λοιπὸν h_1, h_2, h_3 εἶναι τὰ ὑπὲρ τὴν διαχωριστικὴν ἐπιφάνειαν ὕψη τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος, τοῦ ὑδραργύρου καὶ τοῦ ὕδατος καὶ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 τὰ ἀντίστοιχα εἰδ. βάρη, θὰ εἶναι : $h_1 \cdot \varrho_1 = h_2 \cdot \varrho_2 + h_3 \cdot \varrho_3$.



Δίδεται ὅμως $h_1 = 20$ cm, $\varrho_1 = 1,84$ gr*/cm^3, $\varrho_2 = 13,6$ gr*/cm^3 καὶ $\varrho_3 = 1$ gr*/cm^3. Συνεπῶς ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται : $13,6 \cdot h_2 + 1 \cdot h_3 = 1,84 \cdot 20$ ἢ $13,6 \cdot h_2 + h_3 = 36,8$ Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστὸν ὅτι $h_2 + h_3 = h_1 = 20$. Ἑπομένως ἔχομεν πρὸς λύσιν σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν : $h_2 = 1,3$ cm καὶ $h_3 = 18,7$ cm.

134. Κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Pascal, ὁ λόγος τῶν πιέσεων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν (§ 136). Ἂν ἑπομένως σ καὶ σ′ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ μεγάλου καὶ μικροῦ ἐμβόλου καὶ F καὶ F′ αἱ ἀντίστοιχοι πιέσεις, θὰ εἶναι: $\frac{F}{\sigma} = \frac{F'}{\sigma'}$ ἢ $F = F' \cdot \frac{\sigma}{\sigma'}$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰς τιμὰς $F' = 4$ kgr*, $\sigma = 1{,}8$ dm² ἢ 180 cm² καὶ $\sigma' = 3$ cm² εὑρίσκομεν $F = 4 \cdot \frac{180}{3} =$ 240 kgr*.

135. Ὁ ὄγκος καθενὸς ἀπὸ τὰ δύο ὑγρὰ εἶναι 1 dm³ ἢ 1000 cm³. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου εἶναι 100 cm³, ἕπεται ὅτι τὸ ὕψος κάθε ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ δοχείου θὰ εἶναι 1000 : 100 = 10 cm. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως εἶναι $p = h \cdot \varrho$ (§ 133), συνάγομεν ὅτι εἰς κάθε σημεῖον τοῦ πυθμένος ἀσκεῖται πίεσις $p = h_1 \cdot \varrho_1 + h_2 \cdot \varrho_2$.

Ἀλλὰ εἶναι $h_1 = h_2 = 10$ cm, $\varrho_1 = 13{,}6$ gr*/cm³ καὶ $\varrho_2 =$ 1 gr*/cm³. Συνεπῶς θὰ εἶναι $p = 10 \cdot 13{,}6 + 10 \cdot 1 = 136 + 10 =$ 146 gr*/cm².

Ἡ συνολικὴ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος εἶναι $P = 146 \cdot 100 =$ 14600 gr* ἢ 14,600 κgr*.

136. α) Ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ πίεσις δίδεται, ὡς γνωστὸν (§ 140), ὑπὸ τοῦ τύπου: $F = h \cdot \sigma \cdot \varrho$, ὅπου σ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πυθμένος, h ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπό τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καὶ ϱ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι : $\sigma = 10 \times 4 = 40$ m² ἢ $\sigma =$ $40 \cdot 10^4$ cm², $h = 2$ m ἢ $h = 2 \cdot 10^2$ cm καὶ $\varrho = 1$ gr*/cm³. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $F = 2 \cdot 10^2 \cdot 40 \cdot 10^4 \cdot 1 = 80 \cdot 10^6$ gr* ἢ $F = 80$ tn*.

β) Γνωρίζομεν ὅτι (§ 141) ἡ ἐπὶ πλαγίου ἐπιπέδου τοιχώματος ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ πίεσις εἶναι : $F = \Sigma \cdot h_K \cdot \varrho$, ὅπου Σ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας, h_K ἡ ἀπόστασις τοῦ κ. βάρους τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καὶ ϱ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν δεξαμενὴν ἀνὰ δύο ἀπέναντι ἐπιφάνειαι εἶναι ὀρθογώνια ἴσα, τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι διὰ μέν τὸ ἓν ζεῦγος $\Sigma_1 = 10 \times 2 = 20$ m² ἢ $20 \cdot 10^4$ cm², διὰ δὲ τὸ ἄλλο $\Sigma_2 =$ $4 \times 2 = 8$ m² ἢ $8 \cdot 10^4$ cm². Τὸ κ. βάρους ἐξ ἄλλου ἑκάστου τῶν τεσσάρων τοιχωμάτων εἶναι τὸ κέντρον συμμετρίας του καὶ ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἀπόστασιν $h_K = 1$ m ἢ 10^2 cm. Συνεπῶς διὰ μὲν τὸ ἓν ζεῦγος θὰ εἶναι : $F_1 = 20 \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 1 =$ $20 \cdot 10^6$ gr* ἢ 20 tn*, διὰ δὲ τὸ ἄλλο : $F_2 = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^2 =$ $8 \cdot 10^6$ gr* ἢ 8 tn*.

137. α) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι : $F = h \cdot \sigma \cdot \varrho$, ὅπου h εἶναι τὸ ὕψος τοῦ δοχείου, δηλ. 120 cm, σ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, δηλ. $\sigma = 3{,}14 \,.\, 0{,}5^2 = 0{,}7850\ m^2$ ἢ $\sigma = 7850\ cm^2$ καί $\varrho = 0{,}9\ gr^*/cm^3$. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $F = 120 \,.\, 7850 \,.\, 0{,}9 = 847800\ gr^*$ ἢ $F = 847{,}8\ kgr^*$.

β) Ἑκάστη τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι κατακόρυφος καὶ θὰ δέχεται πίεσιν $F = \sigma \,.\, h_K \,.\, \varrho$ ὅπου σ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν της, h_K ἡ ἀπόστασις τοῦ κ. βάρους της ἀπὸ τῆς ἀνωιέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ ϱ τὸ εἰδ. βάρος. Εἶναι ὅμως $\sigma = 3{,}14 \,.\, 0{,}5^2 = 0{,}7850\ m^2$ ἢ $\sigma = 7850\ cm^2$, $h_K = 0{,}5\ m$ ἢ $h_K = 50\ cm$ καὶ $\varrho = 0{,}9\ gr^*/cm^3$. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $F = 7850 \,.\, 50 \,.\, 0{,}9 = 353250\ gr^*$ ἢ $353{,}25\ kgr^*$.

138. Ὡς γνωστὸν ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ πλευρικοῦ τοιχώματος πίεσις εἶναι: $F = \sigma \,.\, h_K \,.\, \varrho$ (§ 141), ὅπου σ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας, h_K ἡ ἀπόστασις τοῦ κ. β. τῆς ἐπιφανείας, ἀπὸ τὴν στάθμην τοῦ ὑγροῦ καὶ ϱ τὸ εἰδ βάρος.

Διὰ τὰς δύο ἐπιφανείας θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως : $\sigma = 6 \,.\, 3 = 18\ m^2$ ἢ $18 \,.\, 10^4\ cm^2$ καὶ $h_K = 1{,}5\ m$ ἢ $150\ cm$ καὶ $\sigma' = 6 \,.\, 2{,}8 = 16{,}8\ m^2$ ἢ $16{,}8 \,.\, 10^4\ cm^2$ καὶ $h'_K = 1{,}4\ m$ ἢ $140\ cm$.

Συνεπῶς θὰ εἶναι : $F = 18 \,.\, 10^4 \,.\, 150 \,.\, 1 = 27 \,.\, 10^6\ gr^*$ ἢ $27\ tn^*$ καὶ $F' = 16{,}8 \,.\, 10^4 \,.\, 140 \,.\, 1 = 23{,}52 \,.\, 10^6\ gr^*$ ἢ $23{,}52\ tn^*$.

139. Τό βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὕδατος μέρος τοῦ πλοίου ἐκτοπίζει ἕνα ὄγκον (V) ὕδατος, ὁ ὁποῖος ἔχει βάρος ἴσον μὲ τό ὁλικὸν βάρος (B) τοῦ πλοίου. Ἐπειδὴ δὲ $B = V \,.\, \varrho$, θὰ εἶναι $V = \dfrac{B}{\varrho}$

α) Καὶ διὰ μὲν τὸ θαλάσσιον ὕδωρ, ἐπειδὴ $\varrho = 1{,}028\ gr^*/cm^3$, θὰ εἶναι $V = \dfrac{10^4 \,.\, 10^6}{1{,}028} = \dfrac{10^{13}}{1028} = 0{,}0009728 \,.\, 10^{13} = 9728 \,.\, 10^6\ cm^3$ ἢ $9728\ m^3$.

β) Διὸ δὲ τὸ γλυκὺ ὕδωρ θὰ εἶναι : $V = \dfrac{10^4 \,.\, 10^6}{1} = 10^4 \,.\, 10^6\ cm^3$ ἢ $10000\ m^3$.

140. α) Ὅταν βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος χάνει $40{,}47 - 34{,}77 = 5{,}7\ gr^*$, ὅση δηλ εἶναι ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι $A = V \,.\, \varrho$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $A = 5{,}7\ gr^*$ καὶ $\varrho = 1\ gr^*/cm^3$, θὰ εἶναι : $V = \dfrac{5{,}7}{1} = 5{,}7\ cm^3$.

β) Εἰς τὸ οἰνόπνευμα ὑφίσταται ἄνωσιν $A = 5{,}7 \,.\, 0{,}79 = 4{,}503\ gr^*$. Συνεπῶς θὰ ζυγίζῃ $40{,}47 - 4{,}503 = 35{,}967\ gr^*$.

141. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ βάρος (B) ἑνὸς σώματος εἶναι γινόμενον τοῦ ὄγκου του (V) ἐπὶ τὸ εἰδ. βάρος (ϱ). Εἶναι δηλ $B = V \,.\, \varrho$ καὶ

$V = \frac{B}{\varrho}$. Ἂν λοιπὸν ἡ σφαῖρα ἦτο πλήρης ὁ ὄγκος της ἦτο : $V = \frac{160}{8} = 20 \text{ cm}^3$.

Ἀφοῦ ὅμως αὕτη βυθιζομένη ἐντὸς τοῦ ὕδατος χάνει 160—100 = 60 gr*, ἕπεται ὅτι ὑφίσταται ἄνωσιν 60 gr*. Ἀλλά, κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι $A = V' \cdot \varrho'$. Συνεπῶς θὰ ἔχῃ ὄγκον $V' = \frac{A}{\varrho'}$ ἢ $V' = \frac{60}{1} = 60 \text{ cm}^3$

Ἐκ τούτων καταφαίνεται ὅτι ἡ σφαῖρα εἶναι κοίλη καὶ ἡ κοιλότης της ἔχει ὄγκον 60 — 20 = 40 cm^3.

142. Ἂν V εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας καὶ V_1 ὁ ὄγκος τοῦ βυθιζομένου ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου μέρους της, τότε ὁ ὄγκος τοῦ μέρους αὐτῆς ποὺ βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι $V - V_1$. Ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα ἰσορροπεῖ ἐντὸς τῶν ὑγρῶν, ἕπεται ὅτι τὸ βάρος της θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνώσεων, ποὺ ὑφίσταται ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου καὶ τοῦ ὕδατος, δηλ θὰ εἶναι $B = A_1 + A_2$.

Ἂν ἤδη καλέσωμεν ϱ, ϱ_1, ϱ_2 τὰ εἰδ. βάρη τοῦ σιδήρου, τοῦ ὑδραργύρου καὶ τοῦ ὕδατος, θὰ εἶναι : $B = V \cdot \varrho$, $A_1 = V_1 \cdot \varrho_1$ καὶ $A_2 = (V - V_1)\,\varrho_2$. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν : $V \cdot \varrho = V_1 \cdot \varrho_1 + (V - V_1)\,\varrho_2$ ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμάς : $7{,}8\ V = 13{,}6\ V_1 + V - V_1$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς V_1 εὑρίσκομεν $V_1 = \frac{6{,}8}{12{,}6} V$ ἢ $V_1 = 0{,}54\ V$ περίπου. Ὥστε ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου εἶναι βυθισμένα τὰ 0,54 τοῦ ὅλου ὄγκου τῆς σφαίρας.

143. Ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου εἶναι $V = 10^3 \text{ cm}^3$. Συνεπῶς τὸ βάρος του θὰ εἶναι $B = V \cdot \varrho$ ἢ $B = 1000 \cdot 0{,}6 = 600$ gr*.

α) Ἀφοῦ τοῦτο ἰσορροπεῖ ἡμιβυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἕπεται ὅτι τὸ βάρος του ἰσοῦται μὲ τὴν ἀσκουμένην ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἄνωσιν. Αὕτη ὅμως, ἂν V' εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ βυθισμένου μέρους τοῦ ξύλου καὶ ϱ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὕδατος, θὰ εἶναι $A = V' \cdot \varrho$ (§ 143). Ὥστε θὰ εἶναι : $V' \cdot 1 = 600$ καὶ $V' = 600 \text{ cm}^3$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως τοῦ κύβου, $\sigma = 100 \text{ cm}^2$, ἐπὶ τὸ ὕψος h τοῦ βυθισμένου μέρους, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι $100 \cdot h = 600$ καὶ $h = 600 : 100 = 6$ cm. Ἑπομένως τὸ ἐκτὸς τοῦ ὕδατος ὕψος θὰ εἶναι 10 — 6 = 4 cm.

β) Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον, ἐπειδὴ τώρα $\varrho = 0{,}8$, εὑρίσκομεν $V' = 600 : 0{,}8 = 750 \text{ cm}^3$, $h = 750 : 100 = 7{,}5$ cm καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ οἰνοπνεύματος ὕψος 10 — 7,5 = 2,5 cm.

144. Ἀφοῦ κατὰ τὴν α! περίπτωσιν ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ, ἕπεται ὅτι τὰ βάρη τῶν σωμάτων Α καὶ Β εἶναι ἴσα, εἶναι δηλ. $B_1 = B_2 = 10$ gr*. Ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν β' περίπτωσιν ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ. Συνεπῶς καὶ τότε τὰ νέα βάρη B'_1 καὶ B'_2 εἶναι ἴσα.

Ἂν καλέσωμεν A_1 καὶ A_2 τὰς ἀνώσεις ποὺ τὰ δύο σώματα ὑφίστανται, θὰ εἶναι : $B'_1 = B_1 - A_1$ καὶ $B'_2 = B_2 - A_2$. Ὥστε θά εἶναι $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$ ἤ, ἐπειδὴ $B_1 = B_2$, θά εἶναι καὶ $A_1 = A_2$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι $A = V \cdot \rho$. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $V_1 \cdot \rho_1 = V_2 \cdot \rho_2$ (1).

Ἀπὸ τὸ βάρος ὅμως καὶ τὸ εἰδ. βάρος εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ Β. Εἶναι $B_2 = V_2 \cdot \rho_2$ ἢ $V_2 = \frac{B_2}{\rho_2}$ ἢ $V_2 = \frac{10}{8} = 1{,}25$ cm³. Ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γίνεται : $V_1 \cdot 1 = 1{,}25 \cdot 0{,}88$ καὶ δίδει $V_1 =$ 110 cm³.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ Α ἔχει βάρος 10 gr* καὶ ὄγκον 1,10 cm³, θὰ ἔχῃ εἰδ. βάρος : $\rho = \frac{10}{1{,}10} = 9{,}09$ gr*/cm³.

145. Ἀφοῦ τὸ σῶμα, βυθιζόμενον εἰς τὸ ὕδωρ, χάνει $40{,}05 - 35{,}55 = 4{,}5$ gr*, ἕπεται ὅτι ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται εἶναι 4,5 gr*.

Τὸ σύνολον ἐξ ἄλλου τοῦ μετάλλου καὶ τῆς παραφίνης, ὑφίσταται ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἄνωσιν $47{,}88 - 34{,}38 = 13{,}5$ gr*. Συνεπῶς ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται μόνη ἡ παραφίνη εἶναι $13{,}5 - 4{,}5 = 9$ gr*. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἄνωσις εἶναι $A = V \cdot \rho$ (§ 143), ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τῆς παραφίνης θὰ εἶναι : $A : \rho$ ἢ $V = 9 : 1 = 9$ cm³, ἐνῷ ἀφ' ἑτέρου τὸ βάρος της εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $47{,}88 - 40{,}05 = 7{,}83$ gr*. Ἑπομένως τὸ εἰδ. βάρος της θὰ εἶναι $7{,}83 : 9 = 0{,}87$ gr*/cm³.

146. α) Ἂν β εἶναι τὸ βάρος τῆς ληκύθου κενῆς καὶ B_1 καὶ B_2 τὰ βάρη τῶν περιεχομένων ὕδατος καὶ ἐλαίου θὰ ἔχωμεν: $B_1 + \beta = 130$ καὶ $B_2 + \beta = 120$, ἤ, ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη, $B_1 - B_2 = 10$ (1).

Ἀλλὰ $B_1 = V \cdot \rho_1$ καὶ $B_2 = V \cdot \rho_2$. Συνεπῶς ἡ (1) γίνεται $V \cdot \rho_1 - V \cdot \rho_2 = 10$ ἢ $V \cdot (\rho_1 - \rho_2) = 10$ ἤ, διὰ $\rho_1 = 1$ καὶ $\rho_2 = 0{,}9$, εἶναι $V \cdot (1 - 0{,}9) = 10$ ἢ $0{,}1 \cdot V = 10$ καὶ $V = 10 : 0{,}1 = 100$ cm³. Αὐτὴ εἶναι ἡ χωρητικότης τῆς λυκήθου. Τὰ βάρη τῶν περιεχομένων ὑγρῶν θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $B_1 = 100 \cdot 1 = 100$ gr* καὶ $B_2 = 100 \cdot 0{,}9 = 90$ gr* καὶ τὸ βάρος τῆς ληκύθου $130 - 100 = 30$ gr*.

β) Ἂν V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ εἰσαχθέντος σιδήρου, ἐπειδὴ ἡ χωρητικότης τῆς ληκύθου εὑρέθη ἴση μὲ 100 cm³, ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι $100 - V$. Τὰ βάρη τούτων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως: $V \cdot 7{,}7$, $(100 - V) \cdot 1$ καὶ τῆς λυκήθου 30. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $7{,}7\,V + 100 - V + 30 = 398$ καὶ ἐκ ταύτης $V = 40$ cm³.

147. Ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι

$A = 270 - 170{,}14 = 99{,}86$ gr*. Ἀλλὰ $A = V \cdot \varrho$ καὶ $V = \dfrac{A}{\varrho}$.

Συνεπῶς θὰ εἶναι $V = \dfrac{99{,}86}{0{,}9986} = 100$ cm³.

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι $B = V \cdot \varrho'$ καὶ $\varrho' = \dfrac{B}{V}$. Ἑπομένως $\varrho' = \dfrac{270}{100} = 2{,}7$ gr*/cm³

148. Ἀφοῦ ὁ ὄγκος τοῦ πάγου εἶναι $V = 3^3 = 27$ cm³ καὶ τὸ εἰδ. βάρος του 0,92 gr*/cm³, τὸ βάρος του θὰ εἶναι $B = 27 \cdot 0{,}92 = 24{,}84$ gr*.

α) Τὸ σύνολον τοῦ πάγου καὶ τοῦ προσθέτου σώματος ἔχουν βάρος $7{,}56 + 24{,}84 = 32{,}4$ gr*. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ ἐντὸς τοῦ διαλύματος, ἕπεται ὅτι τὸ βάρος τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἄνωσιν. Ἀλλὰ $A = V \cdot \varrho$, ὅπου V ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου διαλύματος καὶ ϱ τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ. Ὥστε θὰ εἶναι $32{,}4 = 27 \cdot \varrho$ καὶ $\varrho = 32{,}4 : 27 = 1{,}2$ gr*/cm³.

β) Ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ πρόσθετον βάρος καὶ καλέσωμεν V′ τὸν ὄγκον τοῦ βυθιζομένου τμήματος τοῦ πάγου, ἀπὸ τὸν τύπον $A = V' \cdot \varrho$ θὰ εἶναι τώρα $24{,}84 = V' \cdot 1{,}2$ καὶ $V' = 24{,}84 : 1{,}2 = 20{,}7$ cm³. Ἐπειδὴ δὲ $V' = \sigma \cdot h$, ὅπου σ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κύβου, $\sigma = 3^2 = 9$ cm², καὶ h τὸ ὕψος τοῦ βυθισμένου τμήματος, θὰ ἔχωμεν : $20{,}7 = 9 \cdot h$ καὶ $h = 20{,}7 : 9 = 2{,}3$ cm.

149. Ἂν R καὶ r εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερικὴ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ὁ ὄγκος τοῦ μετάλλου θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν δύο σφαιρῶν, τῆς ἐξωτερικῆς καὶ τῆς κοιλότητος, δηλ. θὰ εἶναι : $V = \dfrac{4\pi}{3} R^3 - \dfrac{4\pi}{3} r^3 = \dfrac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)$ καὶ τὸ βάρος $B = \dfrac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) \cdot \varrho$. Ἐπειδὴ δὲ δίδεται $B = 30$ kgr* ἢ 30000 gr* καὶ $\varrho = 9$ gr*/cm³, θὰ εἶναι : $R^3 - r^3 = 796$ (1)

Ὅταν ἡ σφαῖρα βυθισθῆ κατὰ τὸ ἥμισυ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὑφίσταται ἄνωσιν A ἴσην μὲ τὸ βάρος της. Εἶναι δηλ $A = 30000$ gr*. Ὁ ὄγκος ἐξ ἄλλου τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας, εἶναι δηλ $V' = \dfrac{2\pi}{3} R^3$. Ἐπειδὴ δὲ $A = V' \cdot \varrho$ (§ 143), θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{2\pi}{3} R^3 = 30000$ ἢ

$R^3 = 14331$ καὶ $R = \sqrt[3]{14331} = 24{,}29$ cm περίπου.

Ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν ἤδη $r^3 = R^3 - 796$ ἢ $r^3 = 14331 - 796 = 13535$ καὶ $r = 23,83$ cm περίπου. Συνεπῶς τὸ ζητούμενον πάχος θὰ εἶναι : $\chi = 24,29 - 23,83 = 0,46$ cm.

2. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

150. α) Ἐπειδὴ τὸ dm^3 ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 cm^3, ἕπεται ὅτι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἀέρος εἶναι : $\rho = 1,293 : 1000 = 0,001293$ gr^*/cm^3. Γνωρίζομεν ὅμως (§ 15 II) ὅτι τὸ εἰδ. βάρος καὶ ἡ πυκνότης ἐκφράζονται μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ὅταν τὸ βάρος μετρῆται εἰς gr^*. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $d = 0,001293$ gr/cm^3.

β) Ὡς γνωστὸν τὸ 1 dm^3 ὕδατος ζυγίζει 1000 gr^*. Ἀφοῦ λοιπὸν ἴσος ὄγκος ἀέρος ζυγίζει 1,293 gr^*, ἕπεται ὅτι τὸ ὕδωρ εἶναι κατὰ $1000 : 1,293 = 773$ φορὰς βαρύτερον ἴσου ὄγκου ἀέρος.

151. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι $76 \cdot 13,6 = 1033$ gr^*/cm^2 (§ 153). Ἂν H εἶναι τὸ ὕψος τῆς στήλης γλυκερίνης, ἐπειδὴ ἡ πίεσις, ποὺ θὰ ἀσκεῖ, πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικήν, θὰ ἔχωμεν : $1,25 \cdot H = 1033$ καὶ $H = 1033 : 1,25 = 826,4$ cm.

152. Κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte (§ 156) θὰ εἶναι : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$, ὅπου V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι τοὺς ὁποίους καταλαμβάνει ὡρισμένη μᾶζα ἀερίου καὶ p_1, p_2 αἱ ἀντίστοιχοι πιέσεις τούτου.

Τὸ ἐντὸς τῆς φυσαλίδος ἀέριον εἰς μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Hg, ἐπειδὴ ἰσσορροπεῖ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, θὰ ἔχῃ πίεσιν $p_1 = 75$ cm Hg, εἰς βάθος δὲ 40 cm, ἐπειδὴ ἰσορροπεῖ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν μαζὶ μὲ τὴν πίεσιν στήλης Hg ὕψους 40 cm, θὰ ἔχῃ $p_2 = 40 + 75 = 115$ cm Hg. Δίδεται ἐξ ἄλλου καὶ $V_2 = 0,5$ cm^3. Συνεπῶς ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται : $\frac{V_1}{0,5} = \frac{115}{75}$ καὶ δίδει $V_1 = 0,767$ cm^3 περίπου.

153. Ἔστω p ἡ ζητουμένη ἀτμ. πίεσις. Κατὰ τὴν α΄. περίπτωσιν ἡ πίεσις p_1 τοῦ κλεισμένου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος ἰσορροπεῖ τὴν ἐκ τὴν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἀσκουμένην ἀτμ. πίεσιν ἠλαττωμένην κατὰ τὴν πίεσιν στήλης Hg ὕψους 5 cm. Ἤτοι θὰ εἶναι : $p_1 = (p - 5)$ cm Hg.

Κατὰ τὴν β. περίπτωσιν ἡ πίεσις p_2 τοῦ κλεισμένου ἀέρος ἰσορροπεῖ τὴν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ἀτμ. πίεσιν ηὐξημένην κατὰ τὴν στήλην Hg ὕψους 5 cm. Ἤτοι θὰ εἶναι $p_2 = (p + 5)$ cm Hg.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Marriotte εἶναι $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$.

Εἶναι ὅμως γνωστὸν ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν. Συνεπῶς θὰ εἶναι $\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὰς ὡς ἄνω τιμὰς θὰ ἔχωμεν $\frac{p-5}{p+5} = \frac{22,4}{25,6}$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $p =$ 75 cm Hg.

154. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 158) ὅταν ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀερίου διατηρῆται σταθερά, ἡ πυκνότης αὐτοῦ μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου. Ἂν λοιπὸν d_1 καὶ d_2 αἱ πυκνότητες τοῦ ἀερίου, ὑπὸ ἀντιστοίχους πιέσεις p_1 καὶ p_2, θὰ εἶναι $\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστὸν (§ 15 II) ὅτι τὸ εἰδ. βάρος ἑνὸς σώματος καὶ ἡ πυκνότης του ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅταν τὸ βάρος μετρῆται εἰς gr*. Συνεπῶς θὰ εἶναι $\varrho_1 : \varrho_2 = p_1 : p_2$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν $\varrho_2 = 1,242$ gr*/dm³.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ dm³ ζυγίζει 1,242 gr*, τὰ $2 \times 1000 = 2000$ dm³ θὰ ζυγίζουν $1,242 \times 2000 = 2484$ gr*.

155. Ἡ χωρητικότης τοῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος εἶναι: $2 \times (76 + 8) = 2 \times 84$ cm³. Ἂν ὁ ἀήρ, πρὶν εἰσαχθῇ εἰς τὸν σωλῆνα, εἶχεν ὄγκον V καὶ πίεσιν $p = 76$ cm Hg, ὅταν εἰσήχθη ἐντὸς αὐτοῦ ἀπέκτησεν ὄγκον $V' = 2 \times 84 - 2 \times 40 = 2 \times 44 = 88$ cm³ καὶ πίεσιν $p' = 76 - 40 = 36$ cm Hg.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle — Mariotte θὰ ἔχωμεν : $V : 88 = 36 : 76$ καὶ ἐκ ταύτης $V = 41,684$ cm³.

156. Ὁ ἀήρ, πρὶν νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸν σωλῆνα εἶχεν ὄγκον $V = 4$ cm³ καὶ πίεσιν $p = 75$ cm Hg, μετὰ δὲ τὴν εἴσοδόν του ἀπέκτησεν ὄγκον V′ καὶ πίεσιν p′. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης κατῆλθε κατὰ χ cm, τότε θὰ εἶναι $V' = (9 + \chi) \cdot 2$ cm³ καὶ $p' = \chi$ cm Hg.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{(9+\chi) \cdot 2}{4} = \frac{75}{\chi}$ ἢ $\chi^2 + 9\chi - 150 = 0$ καὶ ἐκ ταύτης $\chi = 8,54$ cm. Συνεπῶς τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης θὰ γίνῃ τώρα $75 - 8,54 = 66,46$ cm.

157. α) Ἔστω χ ἡ ἀτμ. πίεσις κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος. Ἀρχικῶς ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀὴρ θὰ ἔχῃ : $V_1 = 4 \,.\, 12,2$ cm³ καὶ $p_1 = \chi - 74,8$ cm Hg, μετὰ δὲ τὴν ἀνύψωσιν θὰ γίνῃ: $V_2 = 4 . 14,1$ cm³ καὶ $p_2 = \chi - 75$ cm Hg. Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte εἶναι: $\frac{4 \,.\, 12{,}2}{4 \,.\, 14{,}1} = \frac{\chi - 75}{\chi - 74{,}8}$ ἢ $1{,}9\,\chi = 144{,}94$ καὶ $\chi = 76{,}3$ cm Hg.

β) Ἂν V ἦτο ὁ ὄγκος ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg, οὗτος γίνεται $V' = 4 \,.\, 12{,}2 = 48{,}8$ cm³ ὑπὸ πίεσιν $p' = 76{,}3 - 74{,}8 = 1{,}5$ cm Hg. Ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν Boyle—Mariotte θὰ ἔχωμεν: $V : 48{,}8 = 1{,}5 : 76$ ἢ $76 \,.\, V = 73{,}20$ καὶ $V = 0{,}963$ cm³. Συνεπῶς τὸ ζητούμενον βάρος εἶναι $B = 0{,}963 \,.\, 0{,}001293 = 0{,}001245$ gr*

158. Εἰς βάθος 10 cm ὁ ἐντὸς τῆς φυσαλίδος ἀὴρ ἔχει $V = 0{,}02$ cm³ καὶ πίεσιν p. Αὕτη ὅμως εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο ὑδροστατικῆς πιέσεως, $p_1 = 10 \,.\, 1 = 10$ gr*/cm² (§ 133), καὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, $p_2 = 74 \,.\, 13{,}6 = 1006{,}4$ gr*/cm² (§ 153). Εἶναι δηλ. $p = 10 + 1006{,}4 = 1016{,}4$ gr*/cm².

Ἂν ἤδη ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις γίνῃ 77 cm Hg ἢ $77 \times 13{,}6 = 1047{,}2$ gr*/cm², τότε ἡ πίεσις p′ τοῦ ἐντὸς τῆς φυσαλίδος ἀέρος θὰ εἶναι: $p' = 10 + 1047{,}2 = 1057{,}2$ gr*/cm², ἐνῷ ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ γίνῃ V′.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte εἶναι: $V' : 0{,}02 = 1016{,}4 : 1057{,}2$ καί ἐκ ταύτης $V' = 0{,}019$ cm³.

159. Γνωρίζομεν ὅτι (§158) ἡ πυκνότης, συνεπῶς καὶ τὸ εἰδ. βάρος, ἑνὸς ἀερίου μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς τὴν πίεσιν αὐτοῦ. Ἂν λοιπὸν 1,293 gr/dm³ εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας καὶ ρ ὑπὸ πίεσιν 50 Atm. θὰ εἶναι $\rho : 1{,}293 = 50 : 1$ καὶ $\rho = 64{,}65$ gr*/dm³. Αὐτὸ εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς λίτρου ἢ ἑνὸς dm³ ἀέρος.

160. Ἂν ρ εἶναι τὸ εἰδ. βάρος ὑπὸ πίεσιν 85 cm Hg, γνωρίζομεν ὅτι (§ 158) θὰ εἶναι $\rho : 1{,}293 = 85 : 76$ ἢ $\rho = 1{,}446$ gr*/dm³. Ἀλλά εἶναι: $B = V \,.\, \rho$ ἢ $V = B : \rho$. Συνεπῶς θὰ εἶναι $V = 25 : 1{,}446 = 17{,}290$ dm³.

161. Κατ' ἀρχὰς ὁ ὄγκος τοῦ ἀποκεκλεισμένου ἀέρος εἶναι $V_1 = 50 \,.\, \sigma$ (ἂν σ ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος) καὶ ἡ πίεσις αὐτοῦ $p_1 = 76$ cm Hg. Ὅταν ὁ Hg ἀνέλθῃ κατὰ 10 cm, τότε ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος τούτου γίνεται $V_2 = (50 - 10) \,.\, \sigma = 40 \,.\, \sigma$ cm³ καὶ ἡ πίεσις αὐτοῦ p_2. Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte εἶναι: $p_2 : 76 = 50\sigma : 40\sigma$ καὶ $p_2 = 95$ cm Hg. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον αἱ πιέσεις εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι ἡ μετρουμένη πίεσις ὑπὸ τοῦ ὀργάνου θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς πιέσεως τοῦ ἀποκεκλεισμένου ἀέρος καὶ τῆς διαφορᾶς στάθμης τοῦ Hg εἰς τοὺς δύο σωλῆνας. Ὥστε ἡ ἔνδειξις τοῦ ὀργάνου θὰ εἶναι $95 + 20 = 115$ cm Hg.

162. Κατ' ἀρχὰς ὁ ἀποκεκλεισμένος ἀὴρ ἔχει ὄγκον $V_1 = h \,.\, \sigma$

cm^3 (ἄν σ = ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος) καὶ πίεσιν $p_1 = H$ cm Hg. Ὅταν ἐπὶ τοῦ Hg τῆς λεκάνης ἀσκηθῇ πίεσις ν Atm, τότε ὁ Hg τοῦ κλειστοῦ σωλῆνος θὰ ἀνέλθη κατὰ χ cm, ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος θὰ γίνη $V_2 = (h - \chi) \cdot \sigma\ cm^3$ καὶ ἡ πίεσις αὐτοῦ $p_2 = \nu H - \chi$ cm Hg. Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte εἶναι :

$$\frac{(h-\chi)\ \sigma}{h \cdot \sigma} = \frac{H}{\nu H - \chi} \text{ ἢ } \chi^2 - (\nu \cdot H + h)\ \chi + h \cdot H \cdot (\nu - 1) = 0$$

καὶ ἐκ ταύτης : $\chi = \dfrac{\nu H + h - \sqrt{(\nu H - h)^2 + 4 h H}}{2}$, ἀπορριπτομένης τῆς ἄλλης λύσεως, ἀφοῦ τὸ χ πρέπει νά εἶναι μικρότερον τοῦ ὕψους h τοῦ κλειστοῦ βραχίονος.

Ἤδη μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν $\chi = 40{,}85$ cm.

163. Ἂν σ εἶναι ἡ διατομὴ τοῦ σωλῆνος, κατ' ἀρχὰς ὁ ἀποκεκλεισμένος ἀὴρ ἔχει ὄγκον $V_1 = 8 \cdot \sigma\ cm^3$ καὶ πίεσιν $p_1 = 76 + (43 - 17) = 102$ cm Hg. Ὅταν εἰς τὸ ἀνοικτὸν σκέλος τὸ ὕψος τῆς στήλης Hg γίνη 60 cm, εἰς τὸ κλειστὸν σκέλος αὕτη θὰ ἀνέλθη εἰς ὕψος χ καὶ τότε ὁ μὲν ὄγκος τοῦ ἀέρος θὰ γίνη $V_2 = (25 - \chi) \cdot \sigma\ cm^3$, ἡ δὲ πίεσίς του $p_2 = 76 + (60 - \chi) = 136 - \chi$ cm Hg. Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte εἶναι: $\dfrac{8 \cdot \sigma}{(25-\chi) \cdot \sigma} = \dfrac{136 - \chi}{102}$ ἢ $\chi^2 - 161\chi + 2584 = 0$, ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν $\chi = 18$ cm, τῆς ἄλλης λύσεως ἀπορριπτομένης, ἀφοῦ πρέπει τὸ χ νὰ εἶναι μικρότερον τῶν 25 cm.

164. Θεωροῦμεν τό ἔμβολον ἐν ἐπαφῇ μὲ τὸν πυθμένα τοῦ κυλίνδρου καὶ 2r τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ($V = \pi r^2 \cdot h$) εἶναι $V_K = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 10 = 31{,}4 \cdot r^2\ cm^3$, ἐνῶ ὁ ὄγκος τοῦ σωλῆνος εἶναι $V_\Sigma = 4 \cdot 500 = 2000\ cm^3$.

Ὁ ἀήρ, ἐφ' ὅσον μὲν εἶναι ἀποκεκλεισμένος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἔχει ὄγκον $V_\Sigma = 2000\ cm^3$ καὶ πίεσιν $p_\Sigma = 76 \cdot 13{,}6 = 1033{,}6$ gr*/cm², ὅταν δὲ μὲ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἐμβόλου εἰσέλθη εἰς τὸν κύλινδρον τῆς ὑδραντλίας, θὰ ἔχη ὄγκον $V_2 = 31{,}4 \cdot r^2\ cm^3$ καὶ πίεσιν μικροτέραν κατὰ τὴν πίεσιν τῆς στήλης τοῦ ὕδατος, ποὺ ἔχει πληρώσει τώρα τὸν σωλῆνα. Εἶναι δὲ ἡ πίεσις αὕτη τοῦ ὕδατος $500 \cdot 1 = 500$ gr*/cm². Συνεπῶς θὰ εἶναι $p_K = 1033{,}6 - 500 = 533{,}6$ gr*/cm². Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle—Mariotte εἶναι: $\dfrac{31{,}4 \cdot r^2}{2000} = \dfrac{1033{,}6}{533{,}6}$ καὶ $r = 11{,}1$ cm. Ὥστε θὰ εἶναι διάμετρος : $D = 11{,}1 \cdot 2 = 22{,}2$ cm.

165. Ὅταν τὸ ἀνώτατον ἄκρον τοῦ σωλῆνος κλεισθῇ διὰ τοῦ δακτύλου μας, τότε ἀποκλείεται ἐντὸς αὐτοῦ ἀὴρ ὄγκου $V_1 = 10 . \sigma$ cm^3 καὶ πιέσεως $p_1 = 75$ cm Hg. Ἐφ' ὅσον ἀνασύρωμεν ὀλίγον κατ' ὀλίγον τὸν σωλῆνα θὰ ἐκρέῃ Hg, μέχρις ὅτου ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος, ποὺ θὰ ἔχῃ τώρα ὄγκον V_2, μαζὶ μὲ τὴν πίεσιν τῆς στήλης τοῦ Hg, ποὺ θὰ ἀπομείνῃ, γίνει ἴση μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικήν. Ἂν λοιπὸν καλέσωμεν χ τὸ νέον ὕψος τῆς στήλης τοῦ Hg, ὁ μὲν ὄγκος τοῦ ἀέρος θὰ εἶναι $V_2 = (20 - \chi) . \sigma\ cm^3$, ἡ δὲ πίεσις αὐτοῦ $p_2 = 75 - \chi$ cm Hg.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν νόμον Boyle — Mariotte θὰ εἶναι : $\dfrac{10 . \sigma}{(20 - \chi) . \sigma}$

$= \dfrac{75 - \chi}{75}$ ἢ $\chi^2 - 95\chi + 750 = 0$ καὶ $\chi = 8{,}7$ cm.

Ὥστε τὸ ὕψος τῆς στήλης Hg θὰ εἶναι τώρα 8,7 cm καὶ ἡ πίεσις τοῦ ἀποκεκλεισμένου ἀέρος $75 - 8{,}7 = 66{,}3$ cm Hg.

166. Τὸ φαινόμενον βάρος (Βφ) σώματος εἶναι τὸ ἀπόλυτον βάρος (Βα) ἠλαττωμένον κατὰ τὴν ἄνωσιν (Α) ποὺ ὑφίσταται τοῦτο (§ 168).

Ἂν Βα καὶ Βα' εἶναι τὰ ἀπόλυτα βάρη τοῦ σώματος καὶ τῶν σταθμῶν, ϱ καὶ ϱ' τὰ εἰδ. βάρη των, οἱ ὄγκοι των θά εἶναι ἀντιστοίχως $V = \dfrac{B\alpha}{\varrho}$ καὶ $V' = \dfrac{B'\alpha}{\varrho'}$, αἱ ἀνώσεις ποὺ ὑφίστανται εἰς τὸν ἀέρα (εἰδ. βάρος ϱ_1) $A = \dfrac{B\alpha}{\varrho} . \varrho_1$ καὶ $A' = \dfrac{B'\alpha}{\varrho'} . \varrho_1$ καὶ τὰ φαινόμενα βάρη των $B\varphi = B\alpha - \dfrac{B\alpha}{\varrho} . \varrho_1$ καὶ $B'\varphi = B'\alpha - \dfrac{B'\alpha}{\varrho'} . \varrho_1$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σῶμα καὶ τὰ σταθμὰ ἰσορροποῦν θὰ εἶναι : $B\alpha - \dfrac{B\alpha}{\varrho} . \varrho_1 = B'\alpha - \dfrac{B'\alpha}{\varrho'} . \varrho_1$ καὶ ἂν λύσωμεν ὡς πρὸς Βα θὰ ἔχωμεν :

$$B\alpha = B'\alpha\ \frac{\varrho . (\varrho' - \varrho_1)}{\varrho' . (\varrho - \varrho_1)} .$$

Ἂν εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἀντικαταστήσωμεν τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν Βα = 58,664 gr*.

167. Κατὰ τὸν τύπον $F = V . (\varrho - \varrho') - B$ (§ 169) θὰ εἶναι : $F = 7{,}5 . (1{,}293 - 0{,}09) - 5{,}2 = 3{,}823$ gr*.

168. Ὁ ὄγκος τοῦ ἀεροστάτου εἶναι $V = {}^4/_3 . 3{,}14 . 10^3 = 4187\ dm^3$. Τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου Η εἶναι 4187 . 0,09 = 376,83 gr*. Τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ ἀεροστάτου μαζὶ μὲ τὸ περικάλυμμα καὶ τὰ ἐξαρτήματα εἶναι 376,83 + 100 = 476,83 gr*. Ἡ ἄνωσις ἐξ ἄλλου, δηλ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος, εἶναι Α =

$4187 \cdot 1{,}29 = 5401{,}23$. Συνεπῶς ἡ ἀνυψωτικὴ δύναμις θὰ εἶναι : $F = 5401{,}23 - 476{,}83 = 4924{,}4$ gr*.

Γ΄. Μοριακὰ φαινόμενα

169. Ἀφοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦ Loschmidt (§ 177) εἰς κάθε cm^3 ἀερίου περιέχονται $26{,}87 \cdot 10^{18}$ μόρια, διὰ $2{,}5 \cdot 10^9$ μόρια ἀπαιτοῦνται $2{,}5 \cdot 10^9 : 26{,}87 \cdot 10^{18} = 0{,}093 : 10^9 = 93 : 10^{12} = 93 \cdot 10^{-12}$ cm^3.

170. Κατὰ τὸν Loschmidt (§ 177) εἰς κάθε cm^3 ἀερίου περιέχονται $26{,}87 \cdot 10^{18}$ μόρια. Συνεπῶς εἰς 1 m^3 ἢ 10^6 cm^3 θὰ περιέχωνται : $26{,}87 \cdot 10^{18} \cdot 10^6 = 26{,}87 \cdot 10^{24}$ μόρια.

171. Κατὰ τὴν κινητικὴν θεωρίαν τῶν ἀερίων (§ 177) ἡ πίεσις ἀερίου μὲ πυκνότητα d καὶ ταχύτητα τῶν μορίων του v δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $p = {}^1/_3 \cdot d \cdot v^2$. Λύοντες ὡς πρὸς v ἔχομεν : $v = \sqrt{\dfrac{3p}{d}}$ καί, ἐπειδὴ $p = 76 \cdot 13{,}6 \cdot 981 = 1013962$ dyn καὶ $d = 0{,}00129$ gr/cm^3, εἶναι $v = 48559$ cm/sec ἢ $v = 48{,}56$ m/sec.

Δ΄. Ἀντίστασις τοῦ ἀέρος

172. Ὁ τύπος $R = K \cdot \sigma \cdot v^2$ (§ 178) λυόμενος ὡς πρὸς σ γίνεται $\sigma = \dfrac{R}{K \cdot v^2}$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς δίδει : $\sigma = \dfrac{95}{0{,}123 \cdot 3{,}5^2} = 63$ m^2.

173. Ὡς γνωστὸν (§ 179) τὴν ὁρικὴν ταχύτητα v ἀποκτᾶ τὸ πίπτον σῶμα, ὅταν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος γίνῃ ἴση μὲ τὸ βάρος του, ὅταν δηλ. εἶναι $K \cdot \sigma \cdot v^2 = B$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $v = \sqrt{\dfrac{B}{K \cdot \sigma}}$. (1)

Ἀλλὰ εἶναι $B = V \cdot \varrho$ ἤ, ἐπειδὴ $V = {}^4/_3 \cdot \pi \cdot 0{,}002^3 = {}^4/_3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 10^{-9}$ καὶ $\varrho = 10^3$ kgr*/m^3, θὰ εἶναι $B = \dfrac{32 \cdot \pi \quad 10^3}{3 \cdot 10^9} = \dfrac{32 \cdot \pi}{3 \cdot 10^6}$. Ἐπίσης ἡ μετωπικὴ ἐπιφάνεια εἶναι $\sigma = \pi \cdot r^2$ ἢ $\sigma =$

$\pi \cdot 0{,}002^2 = \frac{4 \cdot \pi}{10^6}$. Μένει ὅμως ἄγνωστος ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως K.

Τοῦτον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν τύπον $R = K \cdot \sigma \cdot v^2$ (§ 178), ἂν θέσωμεν $R = 0{,}03$ kgr*, $\sigma = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1\ m^2$ καὶ $v = 1$ m/sec, ὁπότε ἔχομεν $K = 0{,}03$.

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὰς ἀνωτέρω τιμὰς εἰς τὸν τύπον (¹) εὑρίσκομεν: $v = \sqrt{\left(\frac{32 \cdot \pi}{3 \cdot 10^6}\right) : \left(0{,}03 \cdot \frac{4 \cdot \pi}{10^6}\right)} = \sqrt{\frac{8}{0{,}09}} = \sqrt{\frac{800}{9}} = \frac{28{,}28}{3} = 9{,}43$ m/sec.

174. Ἡ σύνθεσις τῶν δύο δυνάμεων ποὺ ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς σφαίρας, δηλ τοῦ βάρους της B καὶ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος R, γίνεται ὅπως εἰς τὸ πρόβλ. 18, ὅπου εὑρίσκεται ὅτι $B = R$. Ἐπειδὴ δέ, ὅταν $B = R$, τότε τὸ πίπτον σῶμα ἀποκτᾶ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα (§ 179), ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη v εἶναι ἡ τοῦ ἀνέμου κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην, εἶναι δηλ $v = 10$ m/sec.

175. Συνισταμένη τῶν δημιουργουμένων ὑποπιέσεων καὶ ὑπερπιέσεων εἰς τὴν ἄνω καὶ κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πτέρυγος εἶναι ἡ ἀεροδύναμις F (§ 180 σχ. 182), ἡ ὁποία ἀναλύεται εἰς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν A καὶ τὴν δυναμικὴν ἀντίστασιν R. Ὅταν δὲ ἡ γωνία προσβολῆς εἶναι πολὺ μικρά, ἡ A δύναται νὰ θεωρηθῆ ἴση πρὸς τὴν F. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων (F) θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν A, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίρροπος τοῦ βάρους B. Ἐπειδὴ δὲ $B = 50000 : 10000 = 5$ gr*/cm², ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 5 gr*/cm².

176. Ἵνα τὸ ἀεροπλάνον ἀπογειωθῆ πρέπει ἡ δυναμικὴ ἄνωσις (A) νὰ γίνη ἴση μὲ τὸ βάρος του (B). Ἀλλὰ διὰ πολὺ μικρὰν γωνίαν προσβολῆς (§ 180 σχ. 182) ἡ A δύναται νὰ θεωρηθῆ ἴση μὲ τὴν ἀεροδύναμιν F. Ὥστε θὰ εἶναι: $0{,}03 \cdot \Sigma \cdot v^2 = B$. Ἐκ ταύτης μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν $v = 59{,}555$ m/sec ἢ $v = 214{,}398$ km/h.

Ε΄. Προβλήματα ἐπὶ τῶν κυμάνσεων

177. Ὡς γνωστὸν (§ 183) εἶναι: $\lambda = v \cdot T$. Ἀλλὰ $v = 3 \cdot 10^4$ cm/sec καὶ $T = 1 : \nu = 1 : 75$ sec. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $\lambda = 3 \cdot 10^4 : 75 = 400$ cm.

178. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 183) εἶναι: $v = \nu \cdot \lambda$. Ἀλλὰ δίδεται

$\nu = 2500\ sec^{-1}$ καὶ $\lambda = 2$ cm. Συνεπῶς θὰ εἶναι: $v = 2500 \cdot 2 = 5000$ cm/sec ἢ $v = 50$ m/sec.

179. Εἰς τὸν τύπον $v = \nu \cdot \lambda$ (§ 183) ἀντικαθιστῶμεν $v = 3 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec καὶ $\lambda = 4 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10^4$ cm καὶ λύοντες ὡς πρὸς ν εὑρίσκομεν $\nu = 0{,}75 \cdot 10^6$ Hz ἤ, ἐπειδὴ 10^6 Hz ἰσοδυναμοῦν μὲ ἓν MHz ἢ Mc (§ 114), θὰ εἶναι $\nu = 0{,}75$ Mc.

180. Ὁ ζητούμενος εἶναι ὁ ἀριθμός, ποὺ φανερώνει πόσας φορὰς τὸ μῆκος κύματος χωρεῖ εἰς τὸ μῆκος τῆς εὐθείας. Εἶναι δηλ. $1000 : 40 = 25$.

181. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 188) δύο συστήματα εὑρίσκονται εἰς συντονισμόν, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν συχνότητα. Ἀλλὰ ἡ περίοδος τοῦ δοθέντος ἐκκρεμοῦς εἶναι (§ 122): $T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{60}{981}} = 6{,}28 \cdot 0{,}25 = 1{,}57$ sec καὶ ἡ συχνότης του $\nu = 1 : 1{,}57 = 0{,}64$ Hz περίπου.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Α΄. Διάδοσις καὶ χαρακτηριστικὰ τοῦ ἤχου

182. Ὡς γνωστὸν (§ 195) εἶναι: $v = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273}}$ ἢ ἂν λύσωμεν ὡς πρὸς θ εἶναι: $\vartheta = \frac{273 \cdot (v^2 - 331^2)}{331^2}$ καὶ διὰ $v = 350$ m/sec εὑρίσκομεν $\vartheta = 32{,}2\ ^oC$.

183. Ἂν v_0 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς 0^oC καί v ἡ ζητουμένη, θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν $v = v_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{10}{273}}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $340 = v_0 \sqrt{1 + \frac{15}{273}}$. Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν : $v : 340 = \sqrt{1 + \frac{10}{273}} : \sqrt{1 + \frac{15}{273}}$ ἢ $\frac{v}{340}$

$= \sqrt{\frac{283}{288}}$ καὶ $v = 336{,}6$ m/sec.

184. α) Εἰς 0,5 sec ὁ ἦχος διέτρεξεν διάστημα 340 . 0,5 = 170 m, ποὺ εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ παρατηρητοῦ Γ ἀπὸ τὸ ὄρος Α. Ὥστε θὰ εἶναι : (ΓΑ) = 170 : 2 = 85 m. Ἐπίσης εἰς 1 sec διέτρεξε 340 . 1 = 340 m, τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως Γ ἀπὸ τὸ ὄρος Β. Ὥστε θά εἶναι (ΓΒ) = 340 : 2 = 170 m. Συνεπῶς θὰ εἶναι ἀπόστασις (ΑΒ) = 85 + 170 = 255 m.

β) Ὁ ἐπὶ τοῦ Α ἀνακλώμενος ἦχος μετὰ τὴν ἐπιστροφὴν του ὡς ἠχὼς εἰς τὸν Γ συνεχίζει τὸν δρόμον του, ἀνακλᾶται ἐπὶ τοῦ ὄρους Β καὶ ἐπιστρέφει εἰς τὸν Γ μετὰ ἓν ἀκόμη sec ὡς τρίτη ἠχώ. Ὥστε ἡ τρίτη αὕτη ἠχὼ θὰ ἀκουσθῇ 1,5 sec μετὰ τόν πυροβολισμόν. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐπὶ τοῦ Β ἀνακλώμενος ἦχος θὰ ἀνακλασθῇ ἐκ νέου ἐπὶ τοῦ Α καὶ θὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸν Γ μετὰ 1,5 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τοῦ πυροβολισμοῦ, δηλ. σύγχρόνως μὲ τὴν ἄλλην τρίτην ἠχώ. Ὥστε θὰ ὑπάρξῃ καὶ τρίτη κοινὴ ἐνισχυμένη ἠχώ.

185. Ἂν χ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπό τῆς ἀκτῆς, ἡ μὲν διὰ τοῦ ἀέρος ἠχὼ θὰ φθάσῃ μετὰ $\frac{2\chi}{340}$ sec, ἡ δὲ διὰ τοῦ ὕδατος μετὰ $\frac{2\chi}{1440}$ sec. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν χρόνων εἶναι 13 sec θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{2\chi}{340} - \frac{2\chi}{1440} = 13$ καὶ ἐκ ταύτης $\chi = 2893$ m.

186. Ὡς γνωστὸν (§ 183) εἶναι $v = \nu . \lambda$ καὶ $\lambda = v : \nu$. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $\lambda_\alpha = 340 : 400 = 0{,}85$ m καὶ $\lambda_\chi = 5000 : 400 = 12{,}5$ m.

187. Κατὰ τὸν τύπον $\nu = \kappa . \mu$ (§ 200 β′) θὰ εἶναι : $\nu = 10 . 26 = 260$ Hz.

188. Ἡ συχνότης τοῦ ἤχου τῆς Α σειρῆνος εἶναι (§ 200 β′): $\nu = 50 . 8 = 400$ Hz. Ὁ β′ ἁρμονικὸς τοῦ ἤχου τούτου (§ 202) θὰ ἔχῃ συχνότητα 400 . 2 = 800 Hz, καὶ διὰ $\nu = 800$ καὶ $\kappa = 80$ ὁ τύπος $\nu = \kappa . \mu$ δίδει $\mu = 800 : 80 = 10$ στροφὰς/sec.

189. Ὡς γνωστόν (§ 204) ἡ συχνότης τοῦ la_3 ὡρίσθη εἰς 410 Hz καὶ ὅτι τὰ διαστήματα, δηλ. ὁ λόγος τῶν συχνοτήτων δύο φθόγγων οἱασδήποτε κλίμακος, εἶναι ὡρισμένα ὡς ἀκολούθως :

$$\frac{re}{do} = 1{,}121, \quad \frac{mi}{re} = 1{,}059, \quad \frac{fa}{mi} = 1{,}121,$$

$$\frac{sol}{fa} = 1{,}121, \quad \frac{si}{la} = 1{,}121, \quad \frac{do}{si} = 1{,}059$$

Συνεπῶς θὰ εἶναι : $si_3 = 440 \cdot 1{,}121 = 493$ Hz. $do_4 = 493 \cdot 1{,}059 = 522$ Hz. Ὁ do_3 εἶναι κατὰ μίαν ὀκτάβαν βαρύτερος τοῦ do_4 ἑπομένως καὶ ἡ συχνότης του εἶναι : $do_3 = 522 : 2 = 261$ Hz. Ἐκ τούτου ἤδη εὑρίσκομεν τὰς συχνότητας : $re_3 = 261 \cdot 1{,}121 = 292$ Hz, $mi_3 = 292 \cdot 1{,}059 = 309$ Hz, $fa_3 = 309 \cdot 1{,}121 = 349$ Hz καὶ $sol_3 = 346 \cdot 1{,}121 = 387$ Hz.

190. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ λόγος τῶν διαστημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν συχνοτήτων. Ἂν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ δίσκος ἐκτελεῖ μ στροφὰς κατὰ sec, ὁ τύπος $\nu = \kappa \cdot \mu$ (§ 200) δίδει διὰ μὲν τὴν ἐξωτερικὴν σειρὰν ὀπῶν $\nu = 40 \cdot \mu$, διὰ δὲ τὴν ἐσωτερικὴν $\nu' = \kappa' \cdot \mu$. Διαιροῦντες κατὰ μέλη ἔχομεν $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\kappa' \cdot \mu}{40 \cdot \mu}$ ἢ, ἐπειδὴ $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{3}{2}$, θὰ εἶναι $\frac{\kappa'}{40} = \frac{3}{2}$ καὶ $\kappa' = 60$.

191. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $v = \nu \cdot \lambda$ (§ 183) εὑρίσκομεν $\lambda = 340 : 440$ m. Συνεπῶς ἡ AB εἶναι $12 : \frac{340}{440} = 13{,}5$ μήκη κύματος.

Β΄. Πηγαὶ μουσικῶν ἤχων

192. Ὁ τύπος $\nu = \frac{1}{2 \cdot l\, r} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}}$ (§ 205) διὰ $l = 100$ cm, $r = 0{,}05$ cm, $F = 50 \cdot 10^3 \cdot 981$ dyn καὶ $d = 8$ gr/cm³ δίδει $\nu = 140$ Hz.

193. Ἂν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον θέσωμεν $l = 60$ cm, $r = 0{,}04$ cm, $F = 10 \cdot 10^3 \cdot 981$ dyn καὶ $d = 6$ gr/cm³ εὑρίσκομεν : $\nu = 150$ Hz περίπου.

194. Ἐπὶ τῆς χορδῆς σχηματίζονται τέσσαρα στάσιμα κύματα (§ 205) καὶ 5 δεσμοὶ ἐκ τῶν ὁποίων οἱ 2 εἶναι τὰ σταθερὰ ἄκρα τῆς χορδῆς. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν εἶναι $80 : 4 = 20$ cm

195. Ἂν τὸν τύπον τοῦ προβλ. 192 λύσωμεν ὡς πρὸς 2r, θὰ ἔχωμεν : $2r = \frac{1}{l \cdot \nu} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}}$. Εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἀντικαθιστῶμεν $l = 36$ cm, $\nu = 440$ Hz (ἡ συχνότης τοῦ la_3), F =

$10 \cdot 10^3 \cdot 981$ dyn καὶ $d = 2{,}88$ gr/cm^3 καὶ εὑρίσκομεν $2 \cdot r =$ 0,066 cm ἢ $2r = 6{,}6$ mm.

196. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον: $\nu = \frac{V}{4 \cdot l}$ (§ 207 α'.) $V = 340 \cdot 10^2$ cm/sec καὶ $l = 68$ cm εὑρίσκομεν $\nu = 125$ Hz.

197. Λύοντες τὸν ἀνωτέρω τύπον ὡς πρὸς l ἔχομεν: $l = \frac{V}{4 \cdot \nu}$ καὶ μὲ τὰς τιμὰς $V = 340 \cdot 10^2$ cm/sec καὶ $\nu = 260$ Hz λαμβάνομεν $l = 32{,}7$ cm.

198. Ἀπὸ τὸν τύπον $l = \frac{V}{4 \cdot \nu}$ διὰ $V = 340 \cdot 10^2$ cm/sec καὶ $\nu = 400$ Hz εὑρίσκομεν μῆκος τοῦ σωλῆνος $l = 21{,}25$ cm. Ἀπὸ τὸν τύπον ἐξ ἄλλου $V = V_0 \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273}}$ (§ 195) εὑρίσκομεν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς θερμοκρασίαν 37^0 C: $V' = 36040$ cm/sec. Τὰς τιμὰς τῶν l καὶ V' ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον $\nu = \frac{V}{4 \cdot l}$ (§ 207 α'.) καὶ εὑρίσκομεν $\nu = 424$ Hz.

199. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς $V = 340 \cdot 10^2$ cm/sec καὶ $l = 62$ cm εἰς τὸν τύπον $\nu = \frac{V}{2 l}$ (§ 207 β') εὑρίσκομεν $\nu =$ 274 Hz.

200. Κατὰ τοὺς τύπους τῆς § 207 α'. καὶ β'. εἶναι $\nu = \frac{V}{4 l}$ καὶ $\nu' = \frac{V}{2 l'}$ ἤ, ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη, $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{2l'}{4 l} = \frac{l'}{2l}$. Δίδεται ὅμως ὅτι τὸ διάστημα, δηλ ὁ λόγος τῶν συχνοτήτων τῶν δύο ἤχων, εἶναι $^3/_2$ καὶ $l = 60$ cm. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν εὑρίσκομεν: $l' = 180$ cm.

201. Γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν βυθίσωμεν τὸν σωλῆνα ἐντὸς τοῦ ὕδατος, σχηματίζομεν κλειστὸν ἠχητικὸν σωλῆνα καὶ ἂν πλησιάσωμεν εἰς τὸ ἄνω ἄκρον του παλλόμενον διαπασῶν, ἀναβιβάζομεν δὲ τὸν σωλῆνα ἐντὸς τοῦ ὕδατος, θὰ εὕρωμεν θέσεις εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἦχος ἀκούεται ἐντονώτατος. Τότε ἡ στήλη τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν σωλῆνα ἀέρος πάλλεται ἐν συντονισμῷ μὲ τὸ διαπασῶν.

Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστὸν (§ 207) ὅτι τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος l θὰ εἶναι περιττὸν πολλαπλάσιον τοῦ τετάρτου τοῦ μήκους κύματος, θὰ εἶναι δηλ κατὰ σειρὰν $l = \frac{\lambda}{4}$, $l' = 3 \cdot \frac{\lambda}{4}$, $l'' = 5 \cdot \frac{\lambda}{4}$ κ.λ π.

Ὥστε πάντοτε ἡ διαφορὰ τοῦ μήκους τοῦ σωλῆνος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἁρμονικῶν θὰ εἶναι $l' - l = l'' - l' = 2 \cdot \frac{\lambda}{4}$.

Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι διὰ τὰς δοθείσας τιμὰς εἶναι: $85 - 51 = \frac{2\lambda}{4}$ καὶ $\lambda = 68$ cm. Ἤδη ἐκ τοῦ τύπου: $V = \nu \cdot \lambda$ (§ 183) διὰ $\nu = 512$ Hz καὶ $\lambda = 68$ cm εὑρίσκομεν $V = 34816$ cm/sec ἢ $V = 348{,}16$ m/sec.

202. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς θερμοκρασίας 5^0 C καὶ ϑ^0 C εἶναι: $V_5 = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{273}}$ καὶ $V_\vartheta = \sqrt{1 + \frac{\vartheta}{273}}$ καὶ ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν: $\frac{V_\vartheta}{V_5} = \sqrt{\frac{273 + \vartheta}{278}}$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\nu_\vartheta = \frac{V_\vartheta}{41}$ και $\nu_5 = \frac{V_5}{4.1}$ (§ 207 α'), θὰ εἶναι καὶ $\frac{\nu_\vartheta}{\nu_5} = \frac{V_\vartheta}{V_5}$. Ἀλλὰ ὁ λόγος τῶν συχνοτήτων εἶναι τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον δι' ἓν ἡμιτόνιον εἶναι 1,056 (§ 204). Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $\sqrt{\frac{273 + \vartheta}{278}} = 1{,}059$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\vartheta = 38{,}63^0$ C. Ὥστε ἡ θερμοκρασία πρέπει νὰ ὑψωθῇ κατὰ $38{,}63^0 - 5^0 = 33{,}63^0$ C.

203. Ἀπὸ τὸν τύπον $\nu = V : 2l$ (§ 207 β'.) εὑρίσκομεν συχνότητα τοῦ α'. σωλῆνος $\nu_{15} = 200$ Hz. Αἱ ταχύτητες ἐξ ἄλλου τοῦ ἤχου εἰς τὰς θερμοκρασίας 18^0 C καὶ 15^0 C εἶναι ἀντιστοίχως $V_{18} = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{18}{273}}$ καὶ $V_{15} = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{15}{273}}$ καὶ ὁ λόγος των $\frac{V_{18}}{V_{15}} = \sqrt{\frac{291}{288}}$ καί, ἐπειδὴ δίδεται $V_{15} = 340$ m/sec, θὰ εἶναι $V_{18} = 341{,}77$ m/sec. Ἤδη ἐκ τοῦ τύπου $\nu = V : 2l$ εὑρίσκεται συχνότης τοῦ β'. σωλῆνος $\nu_{18} = 201$ Hz. Ὁ λόγος τέλος τῶν συχνοτήτων εἶναι $201 : 200 = 1{,}005$.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΘΕΡΜΟΤΗΣ

Α΄. Μέτρησις τῆς θερμοκρασίας

204. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{C}{F-32} = \frac{5}{9}$ (§ 214) εὑρίσκομεν α) $-26{,}11^{\circ}$ C, β) 10° C καὶ γ) $93{,}33^{\circ}$ C.

205. Ἂν τὸν ἀνωτέρω τύπον λύσωμεν ὡς πρὸς F, θὰ ἔχωμεν : $F = \frac{9}{5}C + 32$ καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν : α) $-7{,}6^{\circ}$ F, β) $96{,}8^{\circ}$ F καὶ γ) $188{,}6^{\circ}$ F.

206. Ἔστω ὅτι τοῦτο συμβαίνει εἰς τὴν ἔνδειξιν χ^{0} C. Τότε εἶναι $C = F = \chi^{0}$ C καὶ ἡ σχέσις $\frac{C}{F-32} = \frac{5}{9}$ (§ 214) γίνεται $\frac{\chi}{\chi-32} = \frac{5}{9}$, ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκεται $\chi = -40^{0}$ C ἢ F.

207. α) Μὲ τὸν ἀνωτέρω τύπον εὑρίσκομεν ὅτι οἱ 77^{0} F ἀντιστοιχοῦν εἰς 25^{0} C καὶ ἑπομένως ἡ θερμοκρασία τοῦ Λονδίνου εἶναι κατὰ 5^{0} C ἀνωτέρα τῆς τῶν Ἀθηνῶν.

β) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι οἱ 20^{0} C ἀντιστοιχοῦν εἰς 68^{0} F καὶ ἑπομένως ἡ θερμοκρασία τῶν Ἀθηνῶν εἶναι κατὰ 9^{0} F χαμηλοτέρα.

Β΄. Διαστολὴ τῶν σωμάτων

208. Ἂν διὰ $\Delta\vartheta$ παραστήσωμεν τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας καὶ διὰ Δl τὴν αὔξησιν τοῦ μήκους, θὰ εἶναι: $\Delta l = \lambda \,.\, l \,.\, \Delta\vartheta$, ὅπου λ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς. Συνεπῶς διὰ $\Delta\vartheta = 40 - (-15) = 55^{0}$ C, $l = 20$ m καὶ $\lambda = 12 \,.\, 10^{-6}$ grad^{-1} θὰ εἶναι $\Delta l = 12 \,.\, 10^{-6} \,.\, 20 \,.\, 55^{0} = 0{,}0132$ m ἢ $\Delta l = 1{,}32$ cm.

209. Ἂν τὸν τύπον : $l = l_o(1 + \lambda\vartheta)$ (§ 218) λύσωμεν ὡς πρὸς l_o καὶ θέσωμεν $l = 20$ cm, $\vartheta = 18^{\circ}$C καὶ $\lambda = 13 \,.\, 10^{-6}$ grad^{-1} λαμβάνομεν $l_o = \frac{20}{1+18 \,.\, 13 \,.\, 10^{-6}} = \frac{20}{1+0{,}000234} = \frac{20}{1{,}000234} = 19{,}995$ cm.

210. Ἂν τὸν τύπον: $\Delta l = \lambda . l . \Delta\vartheta$ (προβλ. 208), λύσωμεν ὡς πρὸς λ καὶ θέσωμεν $\Delta l = 0{,}329$ mm, $l = 412{,}5$ mm καὶ $\Delta\vartheta = 98{,}5^{\circ}$ C, λαμβάνομεν: $\lambda = \dfrac{0{,}329}{412{,}5 \,.\, 98{,}5} = 8 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{grad}^{-1}$

211. Ἂν θεωρήσωμεν τὸν κανόνα διηρημένον εἰς cm εἰς θερμοκρασίαν 0° C, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξηθῇ εἰς 20° C, κάθε ὑποδιαίρεσις θὰ γίνῃ: $1 + 19 \,.\, 10^{-6} \,.\, 20 = 1{,}000380$ cm καὶ τὸ συνολικὸν ἀληθὲς μῆκος θὰ εἶναι $80 \,.\, 1{,}00038 = 80{,}0304$ cm.

212. Ἔστω l_0 τὸ μῆκος ἑκατέρας εἰς 0° C. Εἰς 100° C τὰ μήκη των θὰ γίνουν: $l_1 = l_0 .\, (1+100\,\lambda_1)$ καὶ $l_2 = l_0 .\, (1+100\,\lambda_2)$ καὶ ἡ διαφορά των θὰ εἶναι: $l_2 - l_1 = 100 \,.\, l_0 .\, (\lambda_2 - \lambda_1)$.

Λύοντες ὡς πρὸς l_0 λαμβάνομεν: $l_0 = \dfrac{l_2 - l_1}{100.\,(\lambda_2 - \lambda_1)}$ ἢ $l_0 =$

$$\frac{1}{100 \,.\, 4 \,.\, 10^{-6}} = \frac{1}{4 \,.\, 10^{-4}} = \frac{10^{4}}{4} = 2500 \text{ mm ἢ } l_0 = 2{,}5 \text{ m.}$$

213. Εἰς θερμοκρασίαν 5° C αἱ διαστάσεις τῆς πλακὸς θὰ γίνουν $l_5 = 0{,}8 \,.\, (1 + 5 \,.\, \lambda)$ καὶ $l'_5 = 1{,}5\,(1 + 5 \,.\, \lambda)$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν $\Sigma_5 = 1{,}2 \,.\, (1 + 5 \,.\, \lambda)^2$.

Εἰς θερμοκρασίαν ἐξ ἄλλου 45° αἱ διαστάσεις γίνονται: $l_{45} = 0{,}8 \,.\, (1 + 45 \,.\, \lambda)$ καὶ $l'_{45} = 1{,}5 \,.\, (1 + 45 \,.\, \lambda)$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν: $\Sigma_{45} = 1{,}2 \,.\, (1 + 45 \,.\, \lambda)^2$.

Ὥστε ἡ αὔξησις θὰ εἶναι: $\Delta\Sigma = \Sigma_{45} - \Sigma_5 = 1{,}2 \,.\, (1+45 \,.\, \lambda)^2 - 1{,}2 \,.\, (1+5\,\lambda)^2 = 1{,}2 \,.\, (1 + 90\,\lambda + 2025\,\lambda^2 - 1 - 10\lambda - 25\lambda^2) = 1{,}2 \,.\, (80\,\lambda + 2000 \,.\, \lambda^2) = 1{,}2 \,.\, 80 \,.\, \lambda \,.\, (1 + 25 \,.\, \lambda)$ καὶ διὰ $\lambda = 14 \,.\, 10^{-6}$ εἶναι: $\Delta\Sigma = 1{,}2 \,.\, 80 \,.\, 14 \,.\, 10^{-6} \,.\, (1 + 25 \,.\, 14 .\, 10^{-6}) = 0{,}001344 \,.\, 1{,}00035 = 0{,}001344\ \mathrm{m}^2$ ἢ $\Delta\Sigma = 13{,}44\ \mathrm{cm}^2$.

214. α) Ἂν τὴν ἐξίσωσιν: $l = lo \,.\, (1 + \lambda \,.\, \vartheta)$ (§ 218) λύσωμεν ὡς πρὸς θ, θὰ ἔχωμεν: $\vartheta = \dfrac{l - lo}{lo \,.\, \lambda}$, καὶ μὲ τὰς τιμὰς $l - lo = 1$ mm, $lo = 100$ mm καί $\lambda = 14 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{grad}^{-1}$ εὑρίσκομεν $\vartheta = 714{,}3^{\circ}$ C.

β) Ἡ αὔξησις τῆς ἐπιφανείας τοῦ δίσκου θὰ εἶναι: $\Delta\Sigma = 3{,}14 \,.\, 50{,}5^2 - 3{,}14 \,.\, 50^2 = 3{,}14 \,.\, 50{,}25 = 157{,}785\ \mathrm{mm}^2$ ἢ $\Delta\Sigma = 1{,}58\ \mathrm{cm}^2$.

215. α) Ἂν τὴν ἐξίσωσιν τῆς γραμμικῆς διαστολῆς $l = l_0\,(1 + \lambda\,\vartheta)$ (§ 218) λύσωμεν ὡς πρὸς θ καί θέσωμεν $l = 19{,}04$,

$l_0 = 19$ καὶ $\lambda = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, θὰ ἔχωμεν: $\vartheta = \dfrac{19{,}04-19}{19 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} =$

$\dfrac{0{,}04}{0{,}000228} = 175{,}4^0$ C.

β) Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν τῆς κυβικῆς διαστολῆς (§ 219) εἶναι: $\Delta V = \varkappa \cdot V_0 \cdot \vartheta$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν $\varkappa = 3 \cdot \lambda = 36 \cdot 10^{-6}$, $\vartheta = 175{,}4^0$ C καὶ $V_0 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot \left(\dfrac{19}{2}\right)^3 = \dfrac{3{,}14 \; 19^3}{6}$ cm^3, θὰ ἔχωμεν: $\Delta V = 36 \cdot 10^{-6} \cdot \dfrac{3{,}14 \cdot 19^3}{6} \cdot 175{,}4 = 22{,}68$ mm^3.

216. Λύοντες ὡς πρὸς ϑ τὴν ἐξίσωσιν τῆς κυβικῆς διαστολῆς, λαμβάνομεν $\vartheta = \dfrac{\Delta V}{\varkappa \cdot V_0}$ καί, ἂν θέσωμεν $\Delta V = 0{,}001 \cdot V_0$ καὶ $\varkappa = 3 \cdot \lambda = 18 \cdot 10^{-7}$ grad^{-1}, εὑρίσκομεν $\vartheta = 555{,}5^0$ C.

217. Ὡς γνωστὸν εἶναι: $\Delta V = V \cdot \varkappa \cdot \Delta\vartheta$, ὅπου ΔV εἶναι ἡ αὔξησις τοῦ ὄγκου, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν θερμοκρασίας $\Delta\vartheta$. Μὲ τὰς διδομένας τιμὰς θὰ εἶναι: $\Delta V = 100 \cdot 24 \cdot 10^{-6} \cdot 90 = 0{,}216$ cm^3. Συνεπῶς εἰς 100^0 C ἡ φιάλη θὰ ἔχη ὄγκον 100,216 cm^3.

218. α) Λύοντες ὡς πρὸς d_0 τὸν τύπον $d = \dfrac{d_0}{1+\varkappa \cdot \vartheta}$ (§ 219α) λαμβάνομεν $d_0 = d \cdot (1 + \varkappa \cdot \vartheta)$ καί, μὲ τὰς τιμὰς $d = 13{,}551$ gr/cm^3, $\varkappa = 181 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} καὶ $\vartheta = 18^0$ C, εὑρίσκομεν $d_0 =$ 13,595 gr/cm^3.

β) Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω τύπον διὰ $d_0 = 13{,}595$, $\varkappa = 181 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1} καὶ $\vartheta = 100^0$ C εὑρίσκομεν: $d_{100} = 13{,}353$ gr/cm^3.

γ) Ἂν τὸν ἀνωτέρω τύπον λύσωμεν ὡς πρὸς ϑ θὰ ἔχωμεν: $\vartheta = \dfrac{d_0 - d}{d \cdot \varkappa}$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν: $\vartheta = \dfrac{13{,}595 - 13{,}6}{13{,}6 \cdot 181 \cdot 10^{-6}} = - 2{,}03^0$ C.

219 Τὸν τύπον $d = \dfrac{d_0}{1 + \varkappa \cdot \vartheta}$ (§ 219 α) λύομεν ὡς πρὸς $\varkappa$ καὶ λαμβάνομεν: $\varkappa = \dfrac{d_0 - d}{d \cdot \vartheta}$, ὁπότε μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν $\varkappa = 1358 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

220. Εἰς 0^0 C ἡ μὲν χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι: $V_0 = 1 \times 100 = 100$ cm^3, ὁ δὲ ὄγκος τοῦ περιεχομένου Hg: $V'_0 = 1 \times 96 = 96$ cm^3. Εἰς θερμοκρασίαν ϑ^0 C οἱ δύο οὗτοι ὄγκοι γίνονται ἀντιστοίχως: $V_\vartheta = 100 \cdot (1 + \varkappa \cdot \vartheta)$ καὶ $V'_\vartheta = 96 \cdot$

$(1+\gamma\cdot\vartheta)$. Τότε ὅμως οἱ ὄγκοι εἶναι ἴσοι Συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν : $100\cdot(1+\varkappa\cdot\vartheta)=96\cdot(1+\gamma\cdot\vartheta)$, ἐξ ἧς εἶναι $\vartheta=\dfrac{100-96}{96\gamma-100\varkappa}$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν γ καὶ κ εὑρίσκομεν : $\vartheta=268{,}8^\circ$ C.

221. Ὡς γνωστὸν (§ 15) εἶναι $d=m:V$ καὶ $V=m:d$. Εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0° C ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου καὶ ὁ ὄγκος τοῦ Hg εἶναι ἴσα. Εἶναι δέ : $V_0=\dfrac{500}{13{,}6}\ cm^3$.

Εἰς θερμοκρασίαν ϑ° C ὁ Hg ποὺ πληροῖ τὸ δοχεῖον ἔχει μᾶζαν : $m_\vartheta=500-10=490\ gr$, πυκνότητα : $d_\vartheta=\dfrac{d_0}{1+\gamma\vartheta}$ (§ 219 α)

ἢ $d_\vartheta=\dfrac{13{,}6}{1+181\cdot10^{-6}\cdot\vartheta}$ καὶ συνεπῶς ὄγκον : $V_\vartheta=490:\dfrac{13{,}6}{1+181\cdot10^{-6}\cdot\vartheta}=\dfrac{490\cdot(1+181\cdot10^{-6}\cdot\vartheta)}{13{,}6}$.

Ἀλλὰ καὶ ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου ἔγινε τότε : $V_\vartheta=V_0\cdot(1+\varkappa\cdot\vartheta)$ (§ 219) ἢ $V_\vartheta=\dfrac{500\cdot(1+27\cdot10^{-6}\cdot\vartheta)}{13{,}6}\ cm^3$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο οὗτοι ὄγκοι εἶναι ἴσοι θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{490\cdot(1+181\cdot10^{-6}\cdot\vartheta)}{13{,}6}=\frac{500\cdot(1+27\cdot10^{-6}\cdot\vartheta)}{13{,}6}$$ ἢ

$490+0{,}08869\cdot\vartheta=500+0{,}000135\cdot\vartheta$ ἢ $0{,}07519\cdot\vartheta=10$ καὶ $\vartheta=133^\circ$ C.

222. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Gay — Lussac εἶναι : $V=V_0\cdot(1+\alpha\cdot\vartheta)$ (§ 222). Ὁ τύπος οὗτος λυόμενος ὡς πρὸς θ γίνεται $\vartheta=\dfrac{V-V_0}{V_0\cdot\alpha}$ καὶ μὲ τὰς δοθείσας τιμὰς $V_0=200\ cm^3$, $V=400\ cm^3$ καὶ $\alpha=1:273$, δίδει $\vartheta=273^\circ$ C.

223. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Gay—Lussac (§ 222) λυομένην ὡς πρὸς V_0 λαμβάνομεν: $V_0=\dfrac{V}{1+\alpha\cdot\vartheta}$ καὶ μὲ τιμὰς $V=4000\ cm^3$, $\vartheta=17^\circ$ C καὶ $\alpha=1:273$ εὑρίσκομεν: $V_0=\dfrac{4000\cdot273}{290}\ cm^3$.

Ἂν ἤδη εἰς τὸν τύπον $V=V_0\cdot(1+\alpha\cdot\vartheta)$ θέσωμεν : $V_0=\dfrac{4000\cdot273}{290}$, $\alpha=\dfrac{1}{273}$ καὶ $\vartheta=57^\circ$ C εὑρίσκομεν : $V_{57}=4551{,}7\ cm^3$ ἢ $V_{57}=4{,}552\ dm^3$.

224. Ἐργαζόμεθα ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Εὑρίσκομεν : $V_0 = \frac{60 \cdot 273}{260}$ cm³ καὶ ἀκολούθως : $V_{117} =$ 90 cm³.

225. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων (§ 223) $p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$ θέσωμεν $p = 70$ cm Hg, $p_0 = 76$ cm Hg, $V_0 = 40$ cm³, $\vartheta = 30^0$ C καὶ $\alpha = 1 : 273$, λαμβάνομεν : $70 \cdot V = 76 \cdot 40 \cdot \left(1 + \frac{30}{273}\right)$ καὶ εὑρίσκομεν : $V = 48{,}2$ cm³.

226. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 223) δι᾽ ὡρισμένην μᾶζαν ἀερίου τὸ πηλῖκον τοῦ γινομένου τῆς πιέσεως ἐπὶ τὸν ὄγκον διὰ τοῦ διωνύμου τῆς διαστολῆς εἶναι σταθερόν. Θὰ εἶναι συνεπῶς: $\frac{p \cdot V}{1 + \alpha \cdot \vartheta} = \frac{p_1 \cdot V_1}{1 + \alpha \cdot \vartheta_1}$.
Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην θέσωμεν $p = 762$ mm Hg, $V = 35$ cm³, $\vartheta = 27^0$ C, $p_1 = 760$ mm Hg, $V_1 = 38$ cm³ καὶ $\alpha = 1 : 273$, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν τοῦ ϑ_1, ἥτις δίδει $\vartheta_1 = 51{,}9^0$ C.

227. Τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων (§ 223) λύομεν ὡς πρὸς V_0 καὶ λαμβάνομεν : $V_0 = \frac{p \cdot V}{p_0 (1 + \alpha \cdot \vartheta)}$. Εἰς ταύτην ἀντικαθιστῶμεν τὰς δοθείσας τιμὰς $p = 78$ cm Hg, $V = 2$ m³, $p_0 = 76$ cm Hg, $\vartheta = 35^0$ C καὶ $\alpha = 1 : 273$ καὶ εὑρίσκομεν : $V_0 = \frac{39 \cdot 273}{19 \cdot 308} = 1{,}819$ m³.

Γ΄. Θερμιδομετρία

228. Τὰ 200 gr ὕδατος θερμαινόμενα ἀπὸ 10^0 εἰς ϑ^0 προσλαμβάνουν ποσότητα θερμότητος Q_1, ἥτις κατὰ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς θερμιδομετρίας (§ 227) εἶναι : $Q_1 = 200 \cdot 1 \cdot (\vartheta - 10)$ cal.
Ἐξ ἄλλου τὰ 500 gr θερμοῦ ὕδατος ψυχόμενα ἀπὸ 45^0 εἰς ϑ^0 ἀποβάλλουν ποσότητα θερμότητος $Q_2 = 500 \cdot 1 \cdot (45 - \vartheta)$ cal.
Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς θερμιδομετρίας αἱ δύο αὗται ποσότητες εἶναι ἴσαι. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : $200 \cdot (\vartheta - 10) = 500\ (45 - \vartheta)$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν : $\vartheta = 35^0$ C.

229. Δίδεται ὅτι : $m_1 + m_2 = 50$ kgr. (1) Ἀλλὰ ἡ μᾶζα m_1 θερμαινομένη ἀπὸ 17^0 εἰς 35^0 προσλαμβάνει ποσὸν θερμότητος $Q_1 = m_1 \cdot 1 \cdot (35 - 17) = 18 \cdot m_1$ cal (§ 227), ἐνῶ ἡ μᾶζα m_2 ψυχομένη ἀπὸ 80^0 εἰς 35^0 ἀποβάλλει ποσὸν θερμότητος $Q_2 = m_2 \cdot 1\ (80 -$

35) = 45 . m_2 cal. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς θερμιδομετρίας αἱ ποσότητες αὗται εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : 18 . m_1 = 45 . m_2 (2) .

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν m_1 = 35,714 kgr καὶ m_2 = 14,286 kgr.

230. Δίδεται ὅτι : $m_1 + m_2 = 400$ gr. (1) Ἀλλὰ ἡ μᾶζα m_1 τῆς γλυκερίνης προσλαμβάνει ποσότητα θερμότητος : $Q_1 = m_1 . 0,57 . (19,6 - 14,5) = 2,907 . m_1$ cal (§ 227), ἐνῷ ἡ μᾶζα m_2 τοῦ ψευδαργύρου ἀποβάλλει ποσότητα : $Q_2 = m_2 . 0,092 . (98,3-19,6) = 7,2404 . m_2$ cal Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο αὗται ποσότητες εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : $2,907 . m_1 = 7,2404 . m_2$ (2).

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν : m_1 = 285 gr καὶ m_2 = 115 gr.

231. Ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος εἶναι ἐλλειπής, ἀφοῦ δὲν δίδεται ἡ εἰδ. θερμότης τοῦ μολύβδου. Δυνάμεθα ὅμως νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν, ἂν λάβωμεν ταύτην ἐκ τοῦ πίνακος τῆς § 228 ἴσην μὲ 0,031 cal/gr. grad.

Ἂν c εἶναι ἡ ζητουμένη εἰδ. θερμότης τοῦ πετρελαίου, τότε μᾶζα 320 gr τούτου προσλαμβάνει ποσὸν θερμότητος $Q_1 = 300 . c . (20-18,5) = 450 . c$ cal. ἐνῷ ἐξ ἄλλου καὶ ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ θὰ προσλάβῃ : $Q_2 = 200 . 0,092 . (20 - 18,5) = 27,6$ cal.

Τὸ ποσὸν ὅμως τῆς θερμότητος, ποὺ παρέλαβον αἱ δύο αὗται μᾶζαι, παρεχωρήθη ὑπὸ τῆς μάζης τοῦ μολύβδου. Εἶναι δὲ : $Q_3 = 100 . 0,031 . (100 - 20) = 248$ cal. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : $450 . c + 27,6 = 248$ καὶ ἐκ ταύτης c = 0,49 cal/gr . grad.

232. Ὡς γνωστὸν (§ 227) θερμοχωρητικότης σώματος λέγεται τὸ γινόμενον τῆς μάζης του ἐπὶ τὴν εἰδ. θερμότητα αὐτοῦ. Εἶναι δηλ. $K = m . c$.

Ἂν λοιπὸν K εἶναι ἡ ζητουμένη θερμοχωρητικότης τοῦ θερμιδομέτρου, τοῦτο προσέλαβε ποσότητα θερμότητος: $Q_1 = K . (21,7 - 11,3) = 10,4 . K$ cal, ἐνῷ ἐξ ἄλλου ἡ μᾶζα τοῦ περιεχομένου ἐξ ἀρχῆς ὕδατος προσέλαβε : $Q_2 = 210 . 1 . (21,7-11,3) = 2184$ cal. Τὴν θερμότητα ὅμως ταύτην παρεχώρησεν ἡ μᾶζα τοῦ εἰσαχθέντος ὕδατ. καὶ συνεπῶς εἶναι : $Q_3 = 245 . 1 . (31,5 - 21,7) = 2401$ cal. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς θερμιδομετρίας εἶναι: $Q_1 + Q_2 = Q_3$ ἢ $10,4 . K + 2184 = 2401$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν: K = 20,9 cal/grad.

233. Ἔστω ϑ^0 ἡ ζητουμένη ἔνδειξις τοῦ θερμομέτρου, δηλ. ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος. Εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην τὸ θερμόμετρον παρεχώρησε ποσότητα θερμότητος : $Q_1 = 1,84 . (73,6 - \vartheta)$ cal, τὴν ὁποίαν παρέλαβε τὸ θερμιδόμετρον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ θερμότης ποὺ παρέλαβε τοῦτο εἶναι : $Q_2 = 90{,}5 \cdot (\vartheta - 14{,}5)$. ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι : $1{,}84 \cdot (73{,}6 - \vartheta) = 90{,}5 \cdot (\vartheta - 14{,}5)$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $\vartheta = 15{,}68^\circ$ C.

234. Ὡς γνωστὸν (§ 227) θερμοχωρητικότης (Κ) εἶναι τὸ γινόμενον $m \cdot c$ Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι διὰ τὸ ὕδωρ εἶναι : $K = 1000$ cal. Ἂν λοιπὸν m_1, m_2, m_3 εἶναι αἱ μᾶζαι τῶν τριῶν μετάλλων, θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως :

$$m_1 \cdot 0{,}12 = 1000,\ m_2 \cdot 0{,}31 = 1000,\ m_3 \cdot 0{,}22 = 1000.$$

$$\text{ἢ } m_1 = \frac{1000}{0{,}12},\ m_2 = \frac{1000}{0{,}031},\ m_3 = \frac{1000}{0{,}22}.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου (§ 15) εἶναι $d = m : V$ καὶ συνεπῶς $V = m : d$, μὲ τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν m_i καὶ τὰς δοθείσας τῶν d θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως :

$$V_1 - \frac{1000}{0{,}12 \cdot 7{,}5} = 1111 \text{ cm}^3,\ V_2 = \frac{1000}{0{,}031 \cdot 11{,}4} = 2830 \text{ cm}^3,$$

$$V_3 = \frac{1000}{0{,}22 \cdot 2{,}7} = 1683 \text{ cm}^3.$$

Σημ. Ἔγινε διόρθωσις τῆς εἰδ. θερμότητος τοῦ μολύβδου κατὰ τον πίνακα τῆς § 228.

235. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἐλλειπές, διότι δὲν δίδεται τὸ περιεχόμενον τοῦ θερμιδομέτρου. Ἂν δοθῇ καὶ τὸ στοιχεῖον τοῦτο, ἡ λύσις του θὰ γίνῃ εὐκόλως, ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἡ ποσότης τῆς θερμότητος τὴν ὁποίαν θὰ ἀποβάλῃ τὸ θερμανθὲν καὶ εἰσαχθὲν ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου τεμάχιον τοῦ σιδήρου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων θερμότητος ποὺ θὰ παραλάβουν τὸ θερμιδόμετρον καὶ τὸ περιεχόμενον αὐτοῦ.

Δ΄. Μεταβολαὶ τῆς καταστάσεως τῶν σωμάτων

236. Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ περιεχομένου ἀρχικῶς πάγου. Ἐπειδὴ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι 80 cal/gr (§ 235), ἕπεται ὅτι διὰ νὰ μεταβληθοῦν εἰς ὕδωρ τὰ m gr αὐτοῦ πρέπει νὰ δαπανηθῇ ποσότης θερμότητος $80 \cdot m$ Ἵνα ἐξ ἄλλου ἡ συνολικὴ μᾶζα τῶν 400 gr ὕδατος λάβῃ τὴν θερμοκρασίαν τῶν 10° C ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος: $400 \cdot 10 = 4000$ cal. Ὥστε ἐν συνόλῳ θὰ χρειασθῇ ποσότης θερμότητος : $80 \cdot m + 4000$ cal.

Τὴν ποσότητα ὅμως ταύτην θὰ παραχωρήσῃ τὸ ὕδωρ τῶν 80°C, τὸ ὁποῖον ὡς γνωστὸν ἀποβάλλει (§ 227) θερμότητα : $300 \cdot 1 \cdot (80 - 10) = 21000$ cal. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $80 \cdot m + 4000 = 21000$ καὶ ἐκ ταύτης $m = 212{,}5$ gr.

237. Ἔστω m ἡ ζητουμένη μᾶζα πάγου. Αὕτη διὰ νὰ γίνῃ

0° C πρέπει νὰ προσλὰβη ποσότητα θερμότητος : m . 0,58 . 15 = 8,7 . m cal. καὶ διὰ νὰ μετατραπῆ εἰς ὕδωρ θὰ χρειασθῆ ἀκόμη 80 . m cal, ἀφοῦ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι 80 cal/gr (§235), ἤτοι ἐν συνόλῳ 88,7 . m cal.

Τὴν ποσότητα ταύτην θὰ παραχωρήσουν τὰ 1000 gr ὕδατος τῶν 60°, ποὺ θὰ ἀποβάλουν : 1000 . 1 . 60 = 60000 cal. Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν 88,7 . m = 60000 καὶ ἐκ ταύτης m = 676,4 gr.

238. Ἔστω ϑ ἡ ζητουμένη θερμοκρασία. Ἵνα ὁ πάγος γίνη ὕδωρ χρειάζονται 115 . 80 = 9200 cal καὶ ἵνα λαβῃ τὴν θερμοκρασίαν τῶν ϑ° C θὰ χρειασθοῦν ἀκόμη 115 . ϑ cal, ἤτοι ἐν συνόλῳ 9200 + 115 . ϑ cal.

Ἀφ' ἑτέρου τὸ θερμιδόμετρον θὰ παραχωρήσῃ 1000 . 1 . (20—ϑ) cal διὰ τὸ περιεχόμενον ὕδωρ καὶ 350 . 0,1 . (20 — ϑ) cal διὰ τὸ δοχεῖον, ἤτοι ἐν συνόλῳ 1035 . (20 — ϑ) cal.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς θερμιδομετρίας θὰ εἶναι : 9200 + 115 . ϑ = 1035 . (20 — ϑ). ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν ϑ = 10° C.

239. α) Εἰς $11^1/_3$ min εἰσέρευσαν : 50 . $11^1/_3$ = 566,6 gr θερμοῦ ὕδατος. Τοῦτο παραχωρεῖ 566,6 . 80 = 45328 cal, αἵτινες δαπανῶνται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ πάγου καὶ τοῦ δοχείου ἀπὸ —20^0 εἰς 0° C καὶ διά τὴν τῆξιν τοῦ πάγου.

Ἀλλὰ διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ μὲν πάγου ἀπαιτοῦνται 500 . 0,5 . 20=5000 cal, τοῦ δὲ θερμιδομέτρου 500 . 0,1 . 20 = 1000 cal, ἐνῶ διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου, ἄν τ εἶναι ἡ θερμότης τήξεως τούτου, θὰ χρειασθοῦν 500 . τ cal. Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : 6000 + 500 . τ = 45320, ἐξ ἧς τ = 78,64 cal/gr.

β) Ἄν καλέσωμεν ἤδη m τὴν μᾶζαν τοῦ ὕδατος τῶν 80°, ποὺ θὰ χρειασθῆ ὥστε ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου νὰ γίνῃ 20° C ἡ μᾶζα αὕτη θὰ παραχωρήσῃ θερμότητα : m . (80 — 20) = 60 . m cal, ἡ ὁποία θὰ δαπανηθῆ διὰ νὰ ὑψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ δοχείου τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ περιεχομένου ὕδατος, ποὺ μετὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου ἔγινε 500 + 566,6 = 1066,6 gr, ἀπὸ 0° εἰς 20^0 C. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : 60 . m = 500 . 0,1 . 20+ 1066,6 . 1 . 20 ἢ 60 . m = 21732 καὶ ἐκ ταύτης m = 372,2 gr. Ἐπειδὴ δὲ ἡ παροχὴ τοῦ θερμοῦ ὕδατος εἶναι 50 gr/min, ἕπεται ὅτι τοῦτο θὰ συμβῆ μετὰ 372,2 : 50 = 7 min 26,4 sec.

240. Ἄν εἰς τὸν τύπον $c = \dfrac{\tau \, . \, M}{m \, . \, \vartheta}$ (§ 236) θέσωμεν τ = 80 cal/gr, M = 0,72 gr, m = 6,33 gr καὶ ϑ = $98,5^\circ$ C εὑρίσκομεν : c = 0,092 cal/gr. grad.

241. Ἀφοῦ τὸ πάχος τοῦ στρώματος εἶναι 2cm, ὁ ὄγκος κάθε στοιχείου μὲ ἐπιφάνειαν 1 cm^2 θὰ εἶναι V = 1 . 2 = $2cm^3$ καί, ἐπειδὴ $d = 0{,}917\ gr/cm^3$, ἡ μᾶζα αὐτοῦ θὰ εἶναι : $m = 2 \cdot 0{,}917 = 1{,}834$ gr. Ἵνα ὅμως τακῇ ἡ μᾶζα αὕτη ἀπαιτεῖται ποσὸν θερμότητος $80 \cdot 1{,}834 = 146{,}72$ cal, ἐπειδὴ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι 80 cal/gr. Ἀφοῦ δὲ ἡ ἡλιακὴ ἀκτινοβολία μεταφέρει 1,5 cal/min ἀνά cm^2 ἐπιφανείας, ἕπεται ὅτι διὰ τὴν ποσότητα τῶν 146,72 cal θὰ χρειασθοῦν : $146{,}72 : 1{,}5 = 1$ h 37 min 48,8 sec.

242. Ἔστω τ ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου. Ἵνα συμβῇ τοῦτο ἀπαιτοῦνται : α) $50 \cdot \tau \cdot 20 = 1000 \cdot \tau$ cal διὰ νὰ γίνη ὁ πάγος 0^o, β) $50 \cdot 80 = 4000$ cal διὰ νὰ ταχῇ ὁ πάγος, γ) $50 \cdot 1 \cdot 12 = 600$ cal διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἰς τοὺς 12^0 C καὶ δ) $8 \cdot (12 + 20) = 8 \cdot 32 = 256$ cal ἵνα τὸ θερμιδόμετρον λάβη τὴν θερμοκρασίαν τῶν 12^0 C. Ἤτοι ἀπαιτεῖται ἐν συνόλῳ ποσόν: $1000 \cdot \tau + 4000 + 600 + 256 = 1000 \cdot \tau + 4856$ cal.

Τὴν θερμότητα ταύτην θὰ παραχωρήσῃ τὸ ὕδωρ τῶν 32^0, τὸ ὁποῖον θὰ ἀποβάλῃ $267{,}8 \cdot 1 \cdot 20 = 5356$ cal. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς θερμιδομετρίας θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $1000 \cdot \tau + 4856 = 5356$ καὶ ἐκ ταύτης $\tau = 0{,}5$ cal/gr. grad.

243. Ὡς γνωστὸν (§ 238) τὸ μεῖγμα στερεοῦ καὶ ὑγροῦ ἔχει θερμοκρασίαν 0^o C.

Ἔστω m ἡ ζητουμένη μᾶζα τοῦ πάγου. Αὕτη ἵνα γίνη 0^o θὰ ἀπαιτήσῃ ποσὸν θερμότητος: $m \cdot 0{,}5 \cdot 26 = 13 \cdot m$ cal. Τοῦτο θὰ προκύψῃ α) ἐκ τῆς ψύξεως τῶν 1800 gr ὕδατος ἀπὸ 8^o εἰς 0^o C, ὁπότε θὰ ἀποβληθοῦν $1800 \cdot 8 = 14400$ cal καὶ β) ἐκ τῆς μετατροπῆς 85 gr τοῦ ὕδατος τούτου εἰς πάγον, ὁπότε θὰ ἀποβληθοῦν $85 \cdot 80 = 6800$ cal. Συνεπῶς θὰ εἶναι $13 \cdot m = 14400 + 6800$ καὶ $m = 1630{,}8$ gr.

244. Γνωρίζομεν ὅτι (§ 238), ἂν εἰς ὕδωρ εὑρισκόμενον εἰς κατάστασιν ὑπερτήξεως ρίψωμεν τεμάχιον πάγου, τότε ἡ θερμοκρασία ἀνέρχεται εἰς 0^0 C καὶ μέρος τοῦ ὕδατος στερεοποιεῖται. Ἂν λοιπὸν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος, ποὺ θὰ γίνη πάγος, αὕτη θὰ ἀποβάλῃ $80 \cdot m$ cal, αἵτινες δαπανῶνται ὡς ἑξῆς : α) $m \cdot 0{,}5 \cdot 18 = 9 \cdot m$ cal διὰ νὰ ἀχθῇ ὁ παραχθεὶς πάγος εἰς τοὺς 0^o C καὶ β) $(120 - m) \cdot 1 \cdot 18$ cal διὰ νὰ γίνη 0^o C ἡ ὑπόλοιπος μᾶζα τοῦ ὕδατος. Συνεπῶς θὰ εἶναι $80 \cdot m = 9 \cdot m + (120 - m) \cdot 18$ καὶ $m = 24{,}3$ gr.

245. Εἶναι γνωστὸν (§ 242) ὅτι οἱ ἀκόρεστοι ἀτμοὶ ἀκολουθοῦν τοὺς νόμους τῶν ἀερίων καὶ ὅτι ἡ τάσις τῶν ἀκορέστων ἀτμῶν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγίστην τάσιν, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ τάσις εἶναι 12 mm Hg καὶ συνεπῶς μικροτέρα τῆς μεγίστης $F_{30} = 31{,}8$ mm Hg, ἕπεται ὅτι οἱ ἀτμοὶ εἶναι ἀκόρεστοι καὶ ἑπομένως ἰσχύει δι' αὐτοὺς ὁ νόμος Boyle—Mariotte. Ὥστε θὰ εἶναι $10 : 4 = p_2 : 12$ (§ 156) καὶ $p_2 = 30$ mm Hg.

246. Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle—Mariotte εἶναι : $50 : 10 = p_2 : 20$ καὶ συνεπῶς $p_2 = 100$ m m Hg. Ἀφοῦ ὅμως ἡ p_2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς F_{35} ἕπεται ὅτι οἱ ὑδρατμοὶ εἶναι κεκορεσμένοι μὲ τάσιν τὴν μεγίστην, 42,2 m m Hg, ἐνῶ μέρος τούτων ἔχει ὑγροποιηθῆ (§ 242).

247. Τὸ μεῖγμα ὕδατος καὶ πάγου ἔχει θερμοκρασίαν 0° C (§ 238). Ἵνα λοιπὸν τὰ 100 gr ὕδατος ἀποκτήσουν θερμοκρασίαν 18° C πρέπει νὰ προσλάβουν : $100 . 1 . 18 = 1800$ cal, ἐνῶ τὰ 100 gr πάγου χρειάζονται $80 . 100 = 8000$ cal διὰ νὰ γίνουν ὕδωρ 0° C καὶ $100 . 1 . 18 = 1800$ cal διὰ ν' ἀχθοῦν εἰς τοὺς 18° C. Συνεπῶς ἡ ἀπαιτουμένη ὁλικὴ ποσότης θερμότητος εἶναι : $1800 + 8000 + 1800 = 11600$ cal.

Τὴν ποσότητα ταύτην θὰ παραχωρήσουν οἱ ὑδρατμοὶ τῶν 100° C. Ἂν m εἶναι ἡ μᾶζα των, οὗτοι διὰ νὰ γίνουν ὕδωρ τῶν 100° ἀποβάλλουν ποσότητα θερμότητος m . 539 cal, ὅπου 539 cal/gr εἶναι ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος (§ 246), καὶ διὰ ν' ἀχθῆ τοῦτο εἰς 18° C ἀποβάλλουν ἀκόμη : $m . 1 . (100-18) = 82 . m$ cal (§ 227).

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $539 . m + 82 . m = 11600$ καὶ ἐκ ταύτης $m = 18,7$ gr.

248. Διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου εἰς ὕδωρ 0° C ἀπαιτοῦνται : $50 . 80 = 4000$ cal καὶ διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος εἰς 100° C χρειάζονται ἀκόμη : $50 . 1 . 100 = 5000$ cal, ἤτοι ἐν συνόλῳ 9000 cal. Τὸ ποσὸν τοῦτο θερμότητος θὰ παραχωρήση ἓν μέρος m τῆς συνολικῆς μάζης τῶν ὑδρατμῶν. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστόν, ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἶναι 539 cal/gr (§ 246), ἕπεται ὅτι : $539 . m = 9000$ καὶ $m = 16,7$ gr. Ὥστε μόνον 16,7 gr ὑδρατμῶν θὰ τραποῦν εἰς ὕδωρ, ἐνῶ τὰ ὑπόλοιπα 483,3 gr θὰ παραμείνουν εἰς ἀεριώδη κατάστασιν.

249. Ἀφοῦ συνυπάρχει ὕδωρ καὶ πάγος, ἕπεται ὅτι τὸ σύστημα ἔχει θερμοκρασίαν 0° C. Τὰ 80 gr ὑδρατμῶν διὰ νὰ γίνουν ὕδωρ 100° C ἀποβάλλουν ποσὸν θερμότητος $80 . 539 = 43120$ cal καὶ διὰ νὰ ψυχθοῦν εἰς 0° C ἀποβάλλουν ἀκόμη $80 . 100 = 8000$ cal, ἤτοι ἐν συνόλῳ 51120 cal.

Ἀλλὰ διὰ νὰ τακοῦν τὰ 2000 gr πάγου χρειάζονται $2000 . 80 = 160000$ cal, δηλ. περισσότερα τῶν ὅσων παραχωροῦν οἱ ἀναγόμενοι εἰς ὕδωρ 0° C ὑδρατμοί. Συνεπῶς μόνον ἓν μέρος μάζης m πάγου θὰ τακῆ, δι' ὅσον ἐπαρκοῦν αἱ διατιθέμεναι 51120 cal. Ὥστε θὰ εἶναι $80 . m = 51120$ καὶ $m = 639$ gr.

250. Ἵνα τὸ ὕδωρ ἐξαερωθῆ πρέπει ν' ἀχθῆ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 100° C, τὴν ἀπαιτουμένην δὲ πρὸς τοῦτο ποσότητα θερμότητος θὰ δώσουν τὰ 1000 gr ἀργιλλίου ψυχόμενα ἀπὸ τοὺς 180°

εἰς τοὺς 100^0 C. Τὸ ποσὸν ὅμως τοῦτο εἶναι $1000 \,.\, 0{,}21 \,.\, (180 - 100) = 16800$ cal (εἰδ. θερμότης ἀργιλλίου 0,21 κατὰ τὸν πίνακα τῆς § 228).

Ἀλλὰ τὰ 500 gr ὕδατος ἀπαιτοῦν ποσὸν θερμότητος $500 \,.\, 1 \,.\, (100 - 60) = 20000$ cal. Συνεπῶς αἱ διατιθέμεναι 16800 cal δὲν ἐπαρκοῦν διὰ τὴν ἐξαέρωσιν τῆς διδομένης μάζης ὕδατος.

251. Ὡς γνωστὸν (§ 252) ἡ σχετικὴ ὑγρασία δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Delta = \frac{m}{M}$, ὅπου m εἶναι ἡ μᾶζα τῶν ὑδρατμῶν, ποὺ ὑπάρχουν εἰς 1 m^3 ἀέρος καὶ M ἡ μᾶζα τῶν ὑδρατμῶν, πού θὰ ὑπῆρχον ἂν ὁ ἀὴρ ἦτο κεκορεσμένος.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ζητεῖται τὸ m. Ὥστε θὰ εἶναι $m = \Delta \,.\, M$. (1) Ἀλλὰ (§ 15) $M = V \,.\, d$. (2). Ἔχομεν $V = 50 \,.\, 30 \,.\, 10 = 15 \,.\, 10^3$ m^3 καὶ $d = d_0 \,.\, \frac{p}{p_0\,(1 + \alpha \,.\, \vartheta)}$ (3) (§ 224) Εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἀντικαθιστῶμεν: $d_0 = 0{,}806$ gr/dm^3 ἢ $d_0 = 806$ gr/m^3 (ἰδὲ κατωτέρω πρόβλ. 253), $p = 17{,}5$ mm Hg, $p_0 = 760$ mm Hg, $\alpha = 1 : 273$ καὶ $\vartheta = 20^0$ C καὶ λαμβάνομεν $d = 17{,}292$ gr/m^3

Ἤδη ἀπὸ τὸν τύπον (2) λαμβάνομεν: $M = 15 \,.\, 10^3 \,.\, 17{,}292 = 259380$ gr καὶ ἀπὸ τὸν τύπον (1) $m = 0{,}8 \,.\, 259380 = 207404$ gr ἢ 207,404 kgr.

252. α) Ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν ϑ^0 C δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $d = do \,.\, \frac{p}{p_0(1+\alpha \,.\, \vartheta)}$ (§ 224) Εἶναι ὅμως γνωστὸν ὅτι ἡ πυκνόνης τοῦ ἀέρος εἰς 0^0 C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_0 = 760$ mm Hg εἶναι $d_0 = 1{,}293$ gr/dm^3. Συνεπῶς εἰς τοὺς 20^0 C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p = 720$ mm Hg εἶναι: $d = 1{,}293 \,.\, \dfrac{720}{760 \,.\, \left(1 + \dfrac{20}{273}\right)} = 1{,}141$ gr/dm^3.

β) Ὁ ἀὴρ μαζὶ μὲ τοὺς περιεχομένους ὑδρατμοὺς ἔχει πίεσιν $p = 720$ mm Hg, ἐπειδὴ δὲ ἡ πίεσις τῶν ὑδρατμῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν μεγίστην τάσιν $F_{20} = 17{,}5$ mm Hg (§ 242), ἕπεται ὅτι ἡ πίεσις μόνου τοῦ ἀέρος θὰ εἶναι $p_1 = 720 - 17{,}5 = 702{,}5$ mm Hg καὶ ἡ πυκνότης αὐτοῦ, σύμφωνα μὲ τὸν ἀνωτέρω τύπον, $d_1 = 1{,}293 \,.\, \dfrac{702{,}5}{760 \,.\, (1 + 20 \,.\, \alpha)}$ (1) Ἡ πυκνότης ἐξ ἄλλου τῶν ὑδρατμῶν εἰς 0^0 C εἶναι 0,806 (ἰδὲ προβλ. 253), ἐνῶ εἰς 20^0 C καὶ ὑπὸ πίεσιν 17,5 mm Hg θὰ εἶναι $d_2 = 0{,}806 \,.\, \dfrac{17{,}5}{760 \,.\, (1 + 20 \,.\, \alpha)}$ (2).

Συνεπῶς ἡ πυκνότης τοῦ κεκορεσμένου ἀέρος θὰ εἶναι $d =$

$$1{,}293 \cdot \frac{702{,}5}{760 \cdot (1 + 20 \cdot \alpha)} + 0{,}806 \cdot \frac{17{,}5}{760 \cdot (1 + 20 \cdot \alpha)}$$

$$= \frac{922{,}4375}{760 \cdot (1 + 20 \cdot \alpha)} \text{ καὶ διὰ } \alpha = \frac{1}{273},\ d = 1{,}131 gr/dm^3$$

253. Εἶναι (§ 252) $\Delta = \frac{m}{M}$ ἢ $\Delta = \frac{V \cdot d_1}{V \cdot d_2} = \frac{d_1}{d_2}$, ἐπειδὴ δὲ ὡς γνωστὸν (§ 158), ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἡ πυκνότης μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου, θὰ εἶναι $\frac{d_1}{d_2} = \frac{f}{F}$ καὶ $\Delta = \frac{f}{F}$, ὅπου f ἡ μερικὴ πίεσις τῶν ὑδρατμῶν καὶ F ἡ μεγίστη τάσις. Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν f = 1,05 cm Hg. Ὥστε οἱ μὲν ὑδρατμοὶ εὑρίσκονται ὑπὸ πίεσιν 1,05 cm Hg, ὁ δὲ ξηρὸς ἀὴρ ὑπὸ πίεσιν 75 — 1,05 = 73,95 cm Hg.

Ἤδη ἀπὸ τὸν τύπον $d = d_0 \frac{p}{p_0 (1 + \alpha \cdot \vartheta)}$ (§ 224) μὲ τιμὰς $d_0 = 0{,}806$ gr/dm³, p = 1,05 cm Hg καὶ $p_0 = 76$ cm Hg εὑρίσκομεν πυκνότητα ὑδρατμῶν : $d_1 = 0{,}010$ gr/dm³, μὲ τιμὰς δὲ d_0 = 1,293 gr/dm³ καὶ p = 73,95 πυκνότητα ξηροῦ ἀέρος : $d_2 = 1{,}172$ gr/dm³. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι V = 1 dm³ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως m_1 = 0,010 gr καὶ m_2 = 1,172 gr καὶ συνολικὴ μᾶζα m = 1,182 gr.

254. Τὸ μέταλλον ἀποβάλλει ποσὸν θερμότητος : 150 . 0,12 . 100 = 1800 cal (§ 227), τὸ ὁποῖον δαπανᾶται διὰ τὴν τῆξιν m gr πάγου. Ἐπειδὴ δὲ διὰ κάθε gr πάγου ἀπαιτοῦνται 80 cal, ἡ μᾶζα m θὰ εἶναι 1800 : 80 = 22,5 gr.

Ἀλλὰ ἐνῷ τὰ 22,5 gr πάγου εἶχον ὄγκον (V = m : d) V = 22,5 : 0,92 = 24,45 cm³, τηχθέντα πρὸς ὕδωρ ἀπέκτησαν ὄγκον V′ = 22,5 : 1 = 22,5 cm³. Συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ συστήματος ἠλαττώθη κατὰ 24,5 — 22,5 = 2 cm³.

255. Τὸ ὑδρογόνον ἀνερχόμενον διὰ μέσου τοῦ ὕδατος τοῦ βολταμέτρου φθάνει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν κεκορεσμένον ὑδρατμῶν. Συνεπῶς ἡ μᾶζα του θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς μάζης τοῦ ἐκλυομένου ξηροῦ ὑδρογόνου καὶ τῶν παρασυρομένων ὑπ᾿ αὐτοῦ ὑδρατμῶν.

Προκειμένου ἤδη νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς μάζας ταύτας ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα 253. Μὲ τιμὰς d_0 = 0,000089 gr/cm³, p = 76,5 — 1,27 = 75,23 cm Hg, p_0 = 76 cm Hg καὶ ϑ = 15° C εὑρίσκομεν πυκνότητα ξηροῦ ὑδρογόνου εἰς τὸ 15° C : $d_1 = 0{,}0000835$ gr/cm³ καὶ μᾶζαν 1000 cm³ : m_1 = 0,0835 gr. Ὁμοίως μὲ τιμὰς d_0 = 0,000089 . 9 gr/cm³, p = 1,27 cm Hg εὑρίσκομεν πυκνότητα ὑδρατμῶν : d_2 = 0,0000125 gm/cm³ καὶ μᾶζαν m_2 = 0,0125. Συνεπῶς ἡ συνολικὴ μᾶζα εἶναι : m = 0,096 gr.

256. α) Ὡς γνωστὸν ἡ σχετικὴ πυκνότης ἀερίου εἶναι : $\delta = d : D$ (§ 159). Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι $\delta = 0,62$ καὶ $D = 1,3$ gr/dm³, θὰ ἔχωμεν ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας πιέσεως καὶ θερμοκρασίας πυκνότητα ὑδρατμῶν : $d_0 = 1,3 \cdot 0,62 = 0,806$ gr/dm³. Ἵνα ἤδη εὕρωμεν τὴν πυκνότητα τούτων εἰς θερμοκρασίαν 20° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 1,6 cm Hg ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς § 224, ὁπότε λαμβάνομεν : $d_1 = 0,0158$ gr/dm³. Ὥστε ἡ μᾶζα τῶν ὑδρατμῶν εἶναι : $m_1 = 0,0158 \cdot 10 = 0,158$ gr.

β) Διὰ τὸν περιεχόμενον ξηρὸν ἀέρα ἔχομεν πίεσιν : 76 — 1,6 = 74,4 cm Hg καὶ πυκνότητα ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1,3 gr/dm³. Μὲ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τύπον εὑρίσκομεν πυκνότητα εἰς 20° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 74,4 cm Hg : $d_2 = 1,186$ gr/dm³ καὶ συνεπῶς μᾶζαν $m_2 = 1,186 \cdot 10 = 11,86$ gr. Ὥστε ἡ συνολικὴ μᾶζα τοῦ ὑγροῦ ἀέρος εἶναι : $0,158 + 11,86 = 12,018$ gr καὶ ἡ πυκνότης του εἰς θερμοκρασίαν 20° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg : $d = 12,0,8 : 10 = 1,2018$ gr/dm³.

Τὴν πυκνότητα τοῦ ξηροῦ ἀέρος ἀνάγομεν ἤδη εἰς πίεσιν 76 cm Hg. Γνωρίζομεν (§ 158) ὅτι ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἡ πυκνότης μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $d' : 1,186 = 76 : 74,4$ ἢ $d' = 1,2115$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι : $1,2018 : 1,2115 = 0,992$.

Ε'. Μετατροπὴ τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας εἰς θερμότητα.

257. Εἰς ὕψος 106,75 m τό δοθὲν σῶμα ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν: $W = 4 \cdot 106,75 = 427$ kgr*m (§ 92), ἡ ὁποία μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς κινητικήν, ὅταν τὸ σῶμα φθάση εἰς τὸ ἔδαφος. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας θερμότητος καὶ μηχανικῆς ἐνεργείας (§ 254) εἶναι $W = J \cdot Q$, θὰ εἶναι $Q = W : J$, ἤ, ἂν θέσωμεν $W = 427$ kgr*m καὶ $J = 427$ kgr*m/kcal θὰ εἶναι $Q = 1$ kcal.

258. Ὡς γνωστὸν (§ 235) ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι 80 cal/gr. Ἂν λοιπὸν εἶναι m ἡ μᾶζα τούτου, ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν τῆξιν του θερμότης θὰ εἶναι 80 . m cal. Ἂν ἐξ ἄλλου h εἶναι τὸ ὕψος ἀπὸ τὸ ὁποῖον θά πέση οὗτος, ἡ δυναμική του ἐνέργεια (§ 92) θὰ εἶναι $W = m \cdot g \cdot h$ erg ἢ $W = (m \cdot g \cdot h) : 10^7$ Joule (§ 85). Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας θερμότητος καὶ μηχανικῆς ἐνεργείας (§ 254) εἶναι $W = J \cdot Q$ καὶ $Q = W : J$ ἢ $Q = \frac{m \cdot 981 \cdot h}{10^7} : 4,19 = \frac{m \cdot 981 \cdot h}{10^7 \cdot 4,19}$ cal. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{m \,.\, 981 \,.\, h}{10^7 \,.\, 4{,}19} = 80 \,.\, m$ καὶ ἐκ ταύτης $h = 3416922$ cm ἢ $h = 34169$ m.

259. Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ μολύβδου καὶ h τὸ ὕψος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πέσῃ ὥστε νὰ τακῇ. Κατὰ τὴν ἄφιξίν του εἰς τὸ ἔδαφος ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς τὴν δυναμικήν, ποὺ εἶχεν εἰς ὕψος h. Αὕτη (§ 92) εἶναι $W = (m \,.\, g \,.\, h) : 10^7$ Joule καὶ ἰσοδυναμεῖ (§ 254) μὲ $(m \,.\, g \,.\, h) : (10^7 \,.\, 4{,}19)$ cal. Τὸ ποσόν τοῦτο θερμότητος θὰ καταναλωθῇ μέρος μέν $Q_1 = m \,.\, 0{,}03 \,.\, (327 - 20) = 9{,}21 \,.\, m$ cal διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ μολύβδου ἀπὸ 20° εἰς 327° C καὶ τὸ ὑπόλοιπον $Q_2 = 5 \,.\, m$ διὰ τὴν τῆξιν αὐτοῦ. Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{m \,.\, 981 \,.\, h}{10^7 \,.\, 4{,}19} = 9{,}21 \,.\, m + 5 \,.\, m$ καὶ ἐκ ταύτης $h = 606930$ cm ἢ 6069 m.

260. Ὡς γνωστὸν (§ 82) εἶναι $T = \eta \,.\, F_K$ ὅπου $\eta = 0{,}4$ καὶ $F_K = F'$ (§ 104, σχ. 90), ἐπειδὴ δὲ $\alpha = 30^0$ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνιν BKF′ ἡ BF′ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εὑρίσκεται $F_K = F' = KF' = 40 \,.\, \sqrt{3} = 69{,}28$ kgr*. Συνεπῶς θὰ εἶναι : $T = 0{,}4 \,.\, 69{,}28 = 27{,}712$ kgr* καὶ τὸ ὑπὸ ταύτης παραγόμενον ἔργον (§ 87) εἶναι: $W = 27{,}712 \,.\, 10 = 277{,}12$ kgr* m καὶ ἰσοδυναμεῖ (§ 254) μὲ $277{,}12 : 427 = 0{,}649$ k cal .

261. Ἡ κινητικὴ της ἐνέργεια (§ 93) εἶναι : $W = {}^1/_2 \,.\, 250 \,.\, 10^6 \,.\, 2500^2 = 78125 \,.\, 10^{10}$ egr ἢ $W = 78125 \,.\, 10^3$ Joule καὶ ἰσοδυναμεῖ (§ 254) μὲ $(78125 \,.\, 10^3) : 4{,}19 = 18646 \,.\, 10^3$ cal ἢ 18646 kcal.

262. Ἂν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος, ἵνα ἡ θερμοκρασία της ἀνέλθῃ εἰς τοὺς 100° C ἀπαιτεῖται ποσὸν θερμότητος (§ 227) $Q = m \,.\, 1 \,.\, 100 = 100 \,.\, m$ cal. Ὥστε θὰ εἶναι $100 \,.\, m = 18646 \,.\, 10^3$ καὶ $m = 186460$ gr. Ἐπειδὴ δὲ $m = V \,.\, d$ θὰ εἶναι $186460 = V \,.\, 1$ καὶ $V = 186460$ cm³ ἢ 186,460 dm³.

263. Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ πίπτοντος ὕδατος. Ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια, ἴση πρὸς τὴν δυναμικὴν εἰς ὕψος 40 m, θὰ εἶναι : $W = m \,.\, 981 \,.\, 4 \,.\, 10^3$ erg ἢ $W = 0{,}3924 \,.\, m$ Joule, ἐπειδὴ δὲ τὰ 0,35 ταύτης μετατρέπονται εἰς θερμότητα θὰ ἔχωμεν μηχανικὴν ἐνέργειαν $0{,}13734 \,.\, m$ Joule, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ : $(0{,}13734 \,.\, m) : 4{,}19 = 0{,}0328 \,.\, m$ cal.

Ἂν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος θὰ αὐξηθῇ κατὰ θ° C, θὰ ἔχωμεν : $m \,.\, \vartheta = 0{,}0328 \,.\, m$ καὶ $\vartheta = 0{,}0328^0$ C.

264. Κατὰ τὴν πτῶσιν ἡ δυναμική της ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς κινητικὴν καὶ ἐκείνη εἰς θερμότητα παραμένουσαν ἐπὶ τῆς σταγόνος, ἥτις οὕτω θερμαίνεται.

Ἔστω ὅτι m εἶναι ἡ μᾶζα τῆς σταγόνος καὶ h τὸ ὕψος. Διὰ τὴν ἄνοδον τῆς θερμοκρασίας κατὰ 0,1° C ἀπαιτεῖται ποσὸν θερμότητος: $Q = m \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1 \cdot m$ cal, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν (§ 254): $W = 0{,}1 \cdot m \cdot 4{,}19 = 0{,}419 \cdot m$ Joule, ἢ $0{,}419 \cdot m \cdot 10^7$ erg. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἄλλου εἶναι: $W = m \cdot 981 \cdot h$ (§ 92), θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $981 \cdot m \cdot h = 0{,}419 \cdot m \cdot 10^7$ καὶ ἐκ ταύτης: $h = 4271$ cm ἢ 42,71 m.

ΣΤ'. Μετατροπὴ τῆς θερμότητος εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν

265. Ἡ ὡριαία κατανάλωσις καυσίμου εἶναι 20 kgr καὶ ἀνὰ sec: $20 : 3600 = 1 : 180$ kgr μὲ παραγωγὴν θερμότητος $Q = 8000 \cdot \frac{1}{180} = \frac{400}{9}$ kcal, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς (§ 254) ἔργον: $W = \frac{400}{9} \cdot 427 = 18978$ kgr* m. Ὥστε ἡ ἰσχὺς (§ 88) θὰ ἦτο $P = 18978$ kgr* m/sec ἢ $P = 18978 : 75 = 253$ CV.

266. Μὲ μᾶζαν $m = 10^6$ gr καὶ ταχύτητα $v = 6 \cdot 10^4$ cm/sec εὑρίσκομεν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ βλήματος (§ 93): $W = \frac{1}{2} \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^8 = 18 \cdot 10^{14}$ erg ἢ $18 \cdot 10^7$ Joule.

Ἀπὸ τὴν καῦσιν ἐξ ἄλλου 300kgr ἢ $3 \cdot 10^5$ gr ἐκρηκτικῆς ὕλης ἐλευθεροῦται ποσὸν θερμότητος: $Q = 3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^8$ cal. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν W καὶ Q εἰς τὸν τύπον $A_B = \frac{W_{ωφ}}{J \cdot Q}$ (§ 262) εὑρίσκομεν $A_B = \frac{18 \cdot 10^7}{4{,}19 \cdot 6 \cdot 10^8} = 0{,}0716$ ἢ 7,16%

267. Ὡς γνωστὸν (§ 262) εἶναι: $A_B = \frac{W_{ωφ}}{J \cdot Q}$. Ἀλλὰ εἶναι $W_{ωφ} = 303 \cdot 75 \cdot 3600 = 8181 \cdot 10^4$ kgr* m καὶ $Q = 72 \cdot 11 \cdot 10^3 = 792 \cdot 10^3$ kcal καί, ἐπειδὴ (§ 254) εἶναι καὶ $J = 427$ kgr* m/kcal, θὰ εἶναι $A_B = \frac{8181 \cdot 10^4}{427 \cdot 792 \cdot 10_3} = 0{,}242$ ἢ 24,2%.

268. Ἂν λύσωμεν ὡς πρὸς Q τὸν τύπον (§ 262): $A_B = \frac{W_{ωφ}}{J \cdot Q}$ λαμβάνομεν: $Q = \frac{W_{ωφ}}{J \cdot A_B}$. Δίδεται ὅμως $W_{ωφ} = 2000 \cdot 75 \cdot 3600 = 54 \cdot 10^7$ kgr* m, $A_B = 0{,}16$ καὶ $J = 427$ kgr* m/kcal

(§ 254). Συνεπῶς θὰ εἶναι : $Q = \frac{54 \cdot 10^7}{427 \cdot 0,16} = 79 \cdot 10^5$ kcal.

Ἔστω ἤδη m ἡ ὡριαία κατανάλωσις ἄνθρακος, θὰ εἶναι : $79 \cdot 10^5 = m \cdot 7 \cdot 10^3$ καὶ συνεπῶς $m = \frac{79 \cdot 10^5}{7 \cdot 10^3} = 1128,57$ kgr.

Ὥστε δι' 24 h ἀπαιτοῦνται $1128,57 \cdot 24 = 27086$ kgr.

269. Ἄν εἰς τὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντα τύπον $Q = \frac{W_{\omega\varphi}}{J \cdot A_B}$ θέσωμεν $W_{\omega\varphi} = 1000 \cdot 75 \cdot 3600 = 27 \cdot 10^7$ kgr*m, J=427kgr*m/kcal καὶ $A_B = 0,3$, εὑρίσκομεν: $Q = \frac{27 \cdot 10^7}{427 \cdot 0,3} = 2107728$ kcal.

Ἄν λοιπὸν m εἶναι ὡριαία κατανάλωσις βενζίνης θὰ εἶναι : $10 \cdot m = 2107728$ καί $m = 210772,8$ gr. Ἐπειδὴ δὲ $m = V \cdot d$ (§ 15), θὰ εἶναι $V = 210772,8 : 0,72 = 292740$ cm³ ἢ $V = 292,74$ dm³.

270. α) Ὡς γνωστὸν (§ 88) εἶναι $P = \frac{W}{t}$. Δίδεται ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ ὡριαία κατανάλωσις καυσίμου εἶναι 20 kgr καὶ συνεπῶς ἡ ἐκ τούτου παραγομένη ποσότης θερμότητος $Q = 20 \cdot 8000 = 16 \cdot 10^4$ kcal, ἰσοδυναμοῦσα πρὸς μηχανικὸν ἔργον $W = 16 \cdot 10^4 \cdot 427 = 6832 \cdot 10^4$ kgr*m. Ἀφοῦ δὲ εἶναι καὶ t = 1 h ἢ t = 3600 sec, θὰ ἔχωμεν $P = (6832 \cdot 10^4) : 3600 = 18978$ kgr*m/sec ἢ $P = 18978 : 75 = 253$ CV.

β) Εἰς τὴν ἰδανικὴν μηχανὴν (§ 263) ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις εἶνα $A_\Theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Ἀλλὰ (§ 225) ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία τῆς μὲν θερμῆς πηγῆς εἶναι $T_1 = 273 + 180 = 453^0$ K, τῆς δὲ ψυχρᾶς $T_2 = 273 + 40 = 313^0$ K. Συνεπῶς θά εἶναι $A_\Theta = \frac{453 - 313}{453} = 0,3$.

Ὥστε ἡ ἰσχὺς θὰ εἶναι $P_\Theta = 253 \cdot 0,3 = 75,9$ CV.

271. α) Τὸ παραγόμενον ἔργον (§ 84) εἶναι $W = 95 \cdot 1200 = 114 \cdot 10^3$ kgr*m καί, ἐπειδὴ $t = 4 \cdot 3600 = 144 \cdot 10^2$ sec, ἡ ἰσχὺς (§ 88) θὰ εἶναι $P = 7,92$ kgr*m/sec ἢ $P = 7,92 : 75 = 0,106$ CV.

β) Ἄν τὸν ὀρειβάτην θεωρήσωμεν ὡς ἰδανικὴν μηχανήν ἡ μεγίστη ἀπόδοσις ταύτης θὰ ἦτο ἡ θεωρητική της ἀπόδοσις, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $A_\Theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ (§ 263). Ἀλλὰ εἶναι $T_1 = 273 + 37 = 310^0$ K καὶ $T_2 = 273 + 7 = 280^0$ K. Συνεπῶς θὰ εἶναι $A_\Theta = \frac{310 - 280}{310} = \frac{30}{310} = \frac{3}{31}$. Ἀφοῦ λοιπὸν τό παραγόμενον παρ' αὐτοῦ ἔργον εὑρέθη ἴσον μὲ 114000 kgr*m, ἕπεται ὅτι μὲ συντελεστὴν $^{8}/_{31}$ τὸ δαπανώμενον ἔργον θὰ εἶναι $W' = 114000 : {}^{8}/_{31} = 1178000$ kgr*m. Τοῦτο ὅμως (§ 254) ἰσοδυναμεῖ μὲ $1178000 : 427 = 2759$ kcal. Συνεπῶς τόσας θερμίδας πρέπει νὰ προσλάβῃ ὁ ὀργανισμὸς τοῦ ὀρειβάτου διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸ ἔργον τοῦτο.

272. Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος εἶναι : $V = 400000 \,.\, 60 = 24 \,.\, 10^6$ m^3 καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ : $B = 24 \,.\, 10^6 \,.\, 1 = 24 \,.\, 10^6$ tn* ἢ $B = 24 \,.\, 10^6 \,.\, 10^3 = 24 \,.\, 10^9$ kgr*. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο πίπτει ἀπὸ ὕψους 800 m, ἡ δυναμική του ἐνέργεια εἶναι : $W = B \cdot h$ (§ 92) ἢ μὲ τὰς δοθείσας τιμάς : $W = 24 \,.\, 10^9 \,.\, 8 \,.\, 10^2 = 192 \,.\, 10^{11}$ kgr* m.

Ἐπειδὴ δὲ 1 kgr* m ἰσοδυναμεῖ μὲ 9,81 Joule, θὰ εἶναι : $W = 192 \,.\, 10^{11} \,.\, 9{,}81 = 1883{,}52 \,.\, 10^{11}$ Joule καὶ ἐπειδὴ 1 kWh ἰσοδυναμεῖ μὲ $36 \,.\, 10^5$ Joule, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι : $W = (1883{,}52 \,.\, 10^{11}) : (36 \,.\, 10^5) = 52{,}32 \,.\, 10^6$ kWh.

Δίδεται ὅμως ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ ἐργοστασίου $P_\omega = 5000$ kW καὶ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως τὰ 0,80 τῆς διατιθεμένης ἰσχύος. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστόν, εἶναι : $P_\omega : P_\delta = \eta$, θὰ εἶναι καὶ $P_\delta = P_\omega : \eta$ ἢ $P_\delta = 5000 : 0{,}80 = 6250$ kW. Ὥστε ἡ λίμνη δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ τὸ ἐργοστάσιον ἐπί : $(52{,}32 \,.\, 10^6) : 6250 = 8371$ h 12 min.

Εἰς τὸν χρόνον τοῦτον τὸ ἐργοστάσιον παράγει τὰ 0,80 τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ ὕδατος τῆς λίμνης, ἤτοι : $1883{,}52 \,.\, 10^{11} \,.\, 0{,}80 = 1506816 \,.\, 10^8$ Joule. Ἵνα ὅμως λάβωμεν τὴν ποσότητα ταύτην ἀπὸ ἀτμομηχανὴν ἀποδόσεως 14%, πρέπει νὰ διαθέσωμεν ἐνέργειαν: $(1506816 \,.\, 10^8) : 0{,}14 = 1076297{,}1 \,.\, 10^9$ Joule. Ἐπειδὴ δὲ 1 tn* γαιάνθρακος μὲ θερμότητα καύσεως 8000 kcal/kgr παράγει: $8000 \,.\, 1000 = 8 \,.\, 10^6$ kcal ἢ $8 \,.\, 10^6 \,.\, 4{,}19 \,.\, 10^3 = 33{,}52 \,.\, 10^9$ Joule, ἕπεται ὅτι διὰ τὴν ἀνωτέρω ἐνέργειαν θὰ χρειασθοῦν : $(1076297{,}1 \,.\, 10^9) : (33{,}52 \,.\, 10^9) = 32109$ tn* γαιάνθρακος.

ΝΤΙΝΟΥ Χ. ΜΠΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Συλλογὴ 500 προβλημάτων μετὰ τῶν λύσεών των. Πρὸς ἄσκησιν τῶν ὑποψηφίων τῶν Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν, τοῦ Μικροῦ Πολυτεχνείου, τῆς Σχολῆς Ἐμποροπλοιάρχων, τῆς Ἀνωτέρας Βιομηχανικῆς Σχολῆς, τῶν Δοκίμων Μηχανικῶν καὶ Πλοιάρχων Ε. Ν. κ.λ.π. κ.λ.π.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τοὺς σπουδαστὰς τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν. Συμφώνως πρὸς τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα ἐπαγγελματικῆς ἐκπαιδεύσεως τοῦ Ὑπουργείου Βιομηχανίας καὶ ναυτικῆς ἐκπαιδεύσεως τοῦ Ὑπουργείου Ἐμπορικῆς Ναυτιλίας. Περιέχει 267 πρωτοτύπους ἀσκήσεις καὶ τεχνικὰς ἐφαρμογάς, καθὼς καὶ πίνακας τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Πωλοῦνται εἰς ὅλα τὰ Βιβλιοπωλεῖα

ΔΡΧ. 15