ΣΠΥΡΟΥ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Πρός χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Δ΄. Ε΄. & ΣΤ΄. τάξεως Γυμνασίων πρακτικῆς κατευθύνσεως.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΤΗΛ. 612.412

ΣΠΥΡΟΥ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ
ΤΗΣ Δ΄. Ε΄. & ΣΤ΄. ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ„
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 — ΤΗΛ. 612 - 412
ΑΘΗΝΑΙ 1964

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ Τριγωνομετρία εἶναι ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν ὁ ὁποῖος ἐπιτελεῖ διπλοῦν προορισμόν:

1ον. Ἀναπτύσσει μεθόδους ὑπολογισμοῦ γωνιῶν καὶ ἀποστάσεων βάσει ἀριθμητικῶν δεδομένων.

2ον. Εἰσάγει τὰς κυκλικὰς συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πολύτιμον ὄργανον τῶν Μαθηματικῶν γενικῶς καὶ ἀναπτύσσει τὰς ἰδιότητας τῶν συναρτήσεων τούτων.

Τὸ 1ον ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποτελεῖ, οὕτως εἰπεῖν τὸν πρακτικὸν σκοπὸν τῆς Τριγωνομετρίας. Εἰς τὸ παρὸν βιβλίον ἀναπτύσσεται οὗτος κατὰ τὰς θεμελιώδεις γραμμάς του, εἰς τὸ Α' μέρος (κεφ. I–V).

Τὸ 2ον ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τὸν θεωρητικὸν σκοπὸν τῆς Τριγωνομετρίας καὶ συνεπάγεται ἐπέκτασιν τῶν ἐφαρμογῶν της. Ταῦτα ἀναπτύσσονται εἰς τὸ Β' μέρος τοῦ παρόντος βιβλίου (κεφ. VI–XVI).

Ἀθῆναι, Ἰανουάριος 1964.

Σ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΣ

Η ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΗ ΥΛΗ

Τὸ παρὸν ἐγράφη συμφώνως πρὸς τὸ ἰσχῦον ἀναλυτικὸν πρόγραμμα τῶν Γυμνασίων πρακτικῆς κατευθύνσεως καὶ προορίζεται διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Δ', Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τῶν Γυμνασίων τούτων.

Ἡ ὕλη Τριγωνομετρίας διὰ τὴν Δ' τάξιν, περιέχεται εἰς τὰ κεφάλαια I ἕως V ἡ δὲ ἐπανάληψις τῆς ὕλης τῆς Δ' τάξεως δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῶν εἰς τὰς σελ. 59–62 παρατιθεμένων ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων ἐπαναλήψεως.

Ἡ ὕλη τῆς Ε' τάξεως περιέχεται εἰς τὰ κεφάλαια VI ἕως XI ἡ δὲ ἐπανάληψις τῆς ὕλης τῆς Ε' τάξεως δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῶν εἰς τὰς σελίδας 164–169 παρατιθεμένων ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων ἐπαναλήψεως.

Ἡ ὕλη τῆς ΣΤ' τάξεως περιέχεται εἰς τὰ κεφάλαια XII ἕως XV.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου δίδεται ἱκανὸς ἀριθμὸς συνθετωτέρων, γενικῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων ἐφ' ὅλης τῆς ὕλης τῆς Τριγωνομετρίας.

Τέλος, αἱ ἀπαντήσεις (ἀποτελέσματα) ὅλων τῶν προτεινομένων ἀσκήσεων ἀναγράφονται εἰς τὰς σελίδας 251–259. Διὰ τῶν ἀπαντήσεων αὐτῶν ὁ μαθητὴς δύναται νὰ ἐλέγξῃ τὴν ὀρθότητα τῆς ἐργασίας του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς ὀξείας γωνίας

Σελὶς

§ 1. Μονάδες μετρήσεως τόξων καὶ γωνιῶν 1
2. Τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας 4
3. Τὸ συνημίτονον ὀξείας γωνίας 7
4. Ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας 8
5. Ἡ συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας 9
6. Τὰ ἕξ κύρια στοιχεῖα παντὸς τριγώνου 10
7. Σχέσις μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου . . . 10
8. Σχέσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς ὀξείας γωνίας 11
9. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν 12
10. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἰδιαιτέρων τινων γωνιῶν 13
11. Παραδείγματα 15
12. Οἱ πίνακες τῶν Φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν . 17
13. Παραδείγματα ὑπολογισμῶν βάσει πινάκων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Χρῆσις λογαριθμικῶν πινάκων καὶ δι' αὐτῶν, ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων

§14. Πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν 23
15. Ἐπίλυσις τριγώνου 28
16. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίου τριγώνου βάσει κυρίων στοιχείων 28

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Σχέσεις μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων τυχόντος τριγώνου

§17. Τὸ ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας 32
18. Νόμος τῶν ἡμιτόνων 32
19. Τύποι τοῦ Mollweide 34
20. Κανὼν τῶν ἐφαπτομένων 36
21. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τριγώνου . . 37
22. Τὸ συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας 40
23. Ἐφαπτομένη κατ συνεφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας 40
24. Κανὼν τοῦ συνημιτόνου 41
25. Αἱ θεμελιώδεις σχέσεις μεταξὺ τῶν 6 κυρίων στοιχείων παντὸς τριγώνου 42

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ἐπίλυσις οἱουδήποτε τριγώνου ὅταν δίδονται ἐπαρκῆ κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ

§26. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν . . . . Σελὶς 43
27. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας 45
28. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν 47
29. Ἔλεγχος μιᾶς ἐπιλύσεως 48
30. Προσδιορισμὸς γωνίας τριγώνου ἐκ τοῦ ἡμιτόνου της 48
31. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν καὶ μιᾶς, ἀντικειμένης, γωνίας. (ἀμφίβολος περίπτωσις) 49

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου — Μετάβασις ἀπὸ ἑνὸς συστήματος μετρήσεως γωνιῶν, εἰς ἄλλο—Μῆκος τόξου καὶ ἐμβαδὸν τομέως.

§32. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου 53
33. Σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων μονάδων μετρήσεως γωνιῶν . . . 55
34. Μῆκος τόξου καὶ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 58

Β' ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Γενικευμένα τόξα καὶ γωνίαι

§35. Ἡ ἐπεκτεταμένη ἔννοια τοῦ τόξου 63
36. Ἡ ἐπεκτεταμένη ἔννοια τῆς γωνίας 69

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γενικευμένων τόξων καὶ γωνιῶν.

§37. Προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα 73
38. Τριγωνομετρικὸς κύκλος 76
39. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τυχόντος τόξου 77
40. Μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου 79
41. Μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου 82
42. Ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τυχόντος τόξου 83
43. Συνεφαπτομένη, τέμνουσα καὶ συντέμνουσα τυχόντος τόξου . . 86
44. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τυχούσης γωνίας 88
45. Αἱ κυκλικαὶ συναρτήσεις. Περιοδικότης 90
46. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου ἢ γωνίας 91
47. Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες 94

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ πρῶτον ὀγδοημόριον. Τόξα ἔχοντα ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τὸν αὐτόν.

§48. Τόξα ἀντίθετα ἢ συναποτελοῦντα περιφέρειαν 97
49. Τόξα διαφέροντα κατὰ ἡμιπεριφέρειαν 99
50. Τόξα παραπληρωματικά. 100
51. Τόξα συμπληρωματικὰ 101
52. Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ πρῶτον ὀγδοημόριον 104
53. Λογαριθμικοὶ λογισμοὶ διὰ τυχοῦσαν γωνίαν 106
54. Τόξα ἔχοντα ἴσα συνημίτονα 107
55. Τόξα ἔχοντα ἴσα ἡμίτονα 108
56. Τὸξα ἔχοντα ἴσας ἐφαπτομένας 110

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ συνθέτων γωνιῶν

§57. Γωνία διανύσματος καὶ ἄξονος. Ὑπολογισμὸς τῆς προβολῆς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα 111
58. Τριγωμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος καὶ διαφορᾶς νωνιῶν . . . 115
59. Τύποι τοῦ διπλασίου τόξου 121
60. Τύποι τοῦ τριπλασίου τόξου 127
61. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὑποπολλαπλασίων ἑνὸς τόξου 129

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

Μετατροπαὶ ἀθροισμάτων εἰς γινόμενα καὶ γινομένων εἰς ἀθροίσματα.

§62. Μετασχηματισμὸς ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς μονώνυμον 133
63. Χρῆσις βοηθητικῆς γωνίας 137
64. Μετασχηματισμοὶ γινομένων εἰς ἀθροίσματα 143
65. Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τριῶν γωνιῶν ἐχουσῶν ἄθροισμα 180°. 147
66. Διάφοροι ἐφαρμογαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν εἰς τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου 149

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

Αἱ ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις

§67. Τὸ τοξ ημx 154
68. Τὸ τοξ συνx 157
69. Τὸ τοξ εφx 158
70. Αἱ λοιπαὶ ἀντίστροφοι συναρτήσεις 160

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις καὶ συστήματα. Τριγωνομετρικὴ ἀπαλοιφὴ

§71. Αἱ θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις 171
72. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς τὰς θεμελιώδεις . . . 175
73. Εἰδικαὶ μορφαὶ τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων 178
74. Διερεύνησις ὡς πρὸς παραμέτρους 183
75. Συστήματα δύο τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἄγνωστα τόξα 185
76. Εἰδικά τινα συστήματα 191
77. Τριγωνομετρικὴ ἀπαλοιφὴ 194

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

Δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου

§78. Τύποι τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου . . . 199
79. Τύποι τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου . 200
80. Ὕψη τοῦ τριγώνου 201
81. Περαιτέρω τύποι διὰ τὰ στοιχεῖα τ, ρ, Ε. 202
82. Τύποι τῶν διχοτόμων τριγώνου 203
83. Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων 205

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ δευτερευόντων στοιχείων

§84. Ὁ γενικὸς τρόπος ἐργασιας 208
85. Παραδείγματα ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων βάσει δευτερευόντων στοιχείων 208
86. Παραδείγματα ἐπιλύσεως ὅταν δίδονται δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου καὶ μία γωνία αὐτοῦ 210
87. Ἄλλα παραδείγματα ἐπιλύσεως τριγώνου ἐκ δευτερευόντων στοιχείων. 214
88. Ἡ ἔννοια τῆς διερευνήσεως—Βασικοὶ τινὲς περιορισμοί 219

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

Ἐπιλύσεις τετραπλεύρων

§89. Τὰ στοιχεῖα κυρτοῦ τετραπλεύρου 223
90. Τὰ μερικὰ τρίγωνα τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου 223
91. Μέθοδοι τινὲς ἐπιλύσεως κυρτῶν τετραπλύρων 224
92. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου 227
93. Ἐπίλυσις τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου 229

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

Γραφικαὶ παραστάσεις τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. Γραφικὴ ἐπίλυσις ἐξισώσεων μὴ ἀλγεβρικῆς μορφῆς.

§94. Γραφικαὶ παραστάσεις (καὶ ἐφαρμογαὶ) 233

ΜΕΡΟΣ Α΄.

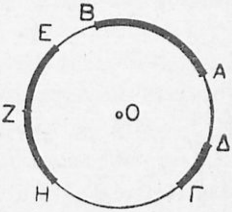
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς ὀξείας γωνίας

1. Μονάδες μετρήσεως τόξων καὶ γωνιῶν

α΄) **Τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου.** Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι, διὰ νὰ μετρήσωμεν ἕνα κυκλικὸν τόξον $\widehat{AB}$ (σχ. 1) πρέπει νὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἕνα ἄλλο τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$ *τῆς αὐτῆς περιφερείας* τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς *μονάδα*. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως (μετρήσεως) ταύτης εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος δεικνύει πῶς γίνεται τὸ $\widehat{AB}$ δι' ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος $\widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς καὶ ὁ ὁποῖος λέγεται **μέτρον** τοῦ τόξου $\widehat{AB}$. Τὸ μέτρον εἶναι δηλαδὴ ὁ *λόγος* τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ πρὸς τὴν μονάδα $\widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ ἐκφράζει τὸ μέγεθος τοῦ $\widehat{AB}$ ἐν σχέσει μὲ τὴν ἐκλεγεῖσαν μονάδα.



Σχ. 1

Ὅλα τὰ τόξα τῆς θεωρουμένης περιφερείας Ο δέον νὰ μετρῶνται μὲ τὴν ἐκλεγεῖσαν μονάδα $\widehat{\Gamma\Delta}$. Ἔτσι τὸ *κάθε* τόξον τῆς περιφερείας θὰ ἔχῃ ἕνα ὡρισμένον μέτρον. Ὅταν μᾶς ἐνδιαφέρει μόνον τὸ μέγεθος τοῦ τόξου καὶ ὄχι ἡ θέσις αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, τότε ἠμποροῦμεν νὰ παριστάνωμεν τὸ τόξον, ἁπλῶς διὰ τοῦ μέτρου του.

Ἐὰν ἕνα τόξον εἶναι ἄθροισμα δύο ἄλλων (π.χ. $\widehat{EH}=\widehat{EZ}+\widehat{ZH}$, (σχ. 1) τότε ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δύο προσθετέων καὶ ἂν εἶναι διαφορά, (π.χ. $\widehat{EZ}=\widehat{EH}-\widehat{ZH}$) ἔχει μέτρον τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων τοῦ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου.

Ὡς κύριαι μονάδες μετρήσεως τῶν τόξων χρησιμοποιοῦνται αἱ ἑξῆς τρεῖς: ἡ **μοῖρα**, τὸ **ἀκτίνιον** καὶ ὁ **βαθμός**.

β') **Ἡ μοῖρα καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς.** *Ἡ μοῖρα εἶναι τὸ 1/360 τῆς ὅλης περιφερείας.* Τόξον μιᾶς μοίρας παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου 1^0 καὶ τόξον μ μοιρῶν παρίσταται μὲ μ^0. Ἡ περιφέρεια μετρηθεῖσα μὲ τὴν μονάδα ταύτην θὰ παρίσταται μὲ 360^0.

Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται **πρῶτον λεπτὸν** (τῆς μοίρας) καὶ παρίσταται μὲ $1'$. Τὸ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 **δευτερόλεπτα** (τῆς μοίρας): $1' = 60''$. Τέλος τὸ δευτερόλεπτον διαιρεῖται εἰς δέκατα, ἑκατοστά, ... Ἔτσι π.χ., τόξον ἀπαρτιζόμενον ἀπὸ 63 μοίρας, 17 πρῶτα λεπτά, 24 δευτερόλεπτα καὶ 6/10 τοῦ δευτερολέπτου θὰ παρίσταται μὲ $63^0 17' 24'',6$.

Σημείωσις. Ἡ ὑποδιαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς 360 μοίρας καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ ὑποδιαίρεσις τῆς μοίρας κατὰ τὸ **ἑξηκονταδικὸν σύστημα**, ἔχει ἀρχαιοτάτην προέλευσιν, ἀναγομένη εἰς τὴν Προελληνικὴν ἐποχήν, ὀφείλεται δὲ εἰς τοὺς Βαβυλωνίους. Ἐπίσης ἡ ὑποδιαίρεσις τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς 24 ὥρας καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ ὑποδιαίρεσις τῆς ὥρας κατὰ τὸ ἑξηκονταδικὸν σύστημα εἶναι Βαβυλωνιακῆς προελεύσεως. (Βλέπε **Ε. Σταμάτη**, «Τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικά», 1956).

γ') **Τὸ ἀκτίνιον (radian).** *Τὸ ἀκτίνιον εἶναι ἕνα τόξον τῆς περιφερείας τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος (ἀνάπτυγμα) ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα της.* Τὸ τόξον τοῦτο λαμβάνεται συχνὰ ὡς μονὰς μετρήσεως ὅλων τῶν τόξων τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς ἰδίας περιφερείας εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο ἀνήκει, παρίσταται δὲ μὲ 1 ἀκτ. ἢ 1 rad. Διὰ νὰ λάβωμεν ἰδέαν τοῦ ἀκτινίου ἂς φαντασθῶμεν ἕνα νῆμα ἔχον τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος καὶ ἂς τὸ νοήσωμεν καμπυλούμενον καὶ ἐφαρμοζόμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας· τὸ ὑπὸ τοῦ νήματος καλυπτόμενον τόξον θὰ εἶναι ἕνα ἀκτίνιον (=1 rad.). Ἐὰν ἕνα τόξον ἔχῃ μῆκος 2 ἀκτίνων, τότε θὰ εἶναι 2 ἀκτινίων, ἐὰν ἔχῃ μῆκος τριῶν ἀκτίνων θὰ εἶναι τριῶν ἀκτινίων κ.ο.κ.

Τὸ ἀκτίνιον διαιρεῖται εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ κλπ. Ἔτσι π.χ. ἐὰν τόξον ἔχῃ μῆκος 2 ἀκτίνων σὺν 3/10 τῆς ἀκτῖνος, σὺν 4/100 αὐτῆς, θὰ παρίσταται μέ: 2,34 ἀκτ. ἢ 2,34 rad. Ἤ, ἐὰν μία περιφέρεια ἔχῃ ἀκτῖνα μήκους ἑνὸς μέτρου, κινούμενοι δὲ ἐπ' αὐτῆς διανύσωμεν δρόμον (καμπύλον) μήκους ἑνὸς μέτρου, θὰ ἔχωμεν διαγράψει τόξον 1ακτ. Ἐὰν διανύσωμεν δρόμον α μέτρων θὰ ἔχωμεν διάγράψῃ τόξον α ἀκτινίων.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἰσοῦται μὲ $2\pi\rho$ ὅπου ρ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος καὶ $\pi = 3,14159\ldots$. Μὲ ἄλλας λέξεις, ἡ ὅλη περιφέρεια ἔχει μῆκος 2π ἀκτίνων καὶ συνεπῶς περιέχει 2π ἀκτίνια. Ὥστε:

360^0 ἰσοδυναμοῦν μὲ 2π ἀκτίνια,

ἑπομένως, **180^0 » » π ἀκτίνια.**

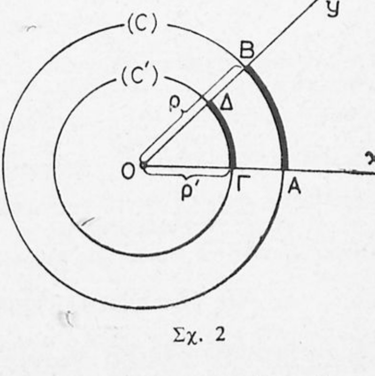
Τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, μετρηθὲν εἰς ἀκτίνια, παρίσταται μὲ π/2 κ.ο.κ.

δ') **Ὁ βαθμός (grade)** εἶναι τὸ 1/400 τῆς ὅλης περιφερείας. Τόξον ἑνὸς βαθμοῦ παρίσταται μὲ 1^β ἢ 1^g. Ἡ ὅλη περιφέρεια περιέχουσα 400 βαθμοὺς παρίσταται μὲ 400^β, τὸ δὲ τεταρτημόριον μὲ 100^β. Ὁ βαθμὸς ὑποδιαιρεῖται κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ κλπ. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι 360^0 ἰσοδυναμοῦν μὲ 400^β, (grades) καὶ ὅτι 2π ἀκτ.$=400^\beta$.

Π.χ., τόξον 67 βαθμῶν, 45 ἑκατοστῶν τοῦ βαθμοῦ καὶ 83 δεκάκις χιλιοστῶν τοῦ βαθμοῦ, παρίσταται μὲ $67^\beta\ 45^{\backprime}\ 83^{\backprime\backprime}$ **(ἑκατονταδικὸν σύστημα)** ἢ κατ' ἄλλους μὲ: 67^β, 4583.

Σημείωσις. Ἡ μονὰς αὐτὴ ἐδημιουργήθη κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Γαλλικῆς ἐπαναστάσεως πρὸς ἀντικατάστασιν τῆς Βαβυλωνιακῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 360^0 ἡ δὲ χρῆσις τῆς μονάδος αὐτῆς εἰς τὰ Μαθηματικά, εἶναι πρὸς τὸ παρὸν περιωρισμένη. Ἰδιαιτέρως ὅμως εἰς τὴν Τοπογραφίαν καὶ Γεωδαισίαν ἔχει γίνει σήμερον, σχεδὸν Διεθνῶςἀπο δεκτὴ τὰ δὲ σύγχρονα τοπογραφικὰ ὄργανα μεγάλης ἀκριβείας εἶναι ὑποδιῃρημένα εἰς βαθμοὺς καὶ δέκατα, ἑκατοστά,.. τοῦ βαθμοῦ.

ε') **Μονάδες μετρήσεως γωνιῶν.** Ὅπως γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, *τυχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον της ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον*, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ἐπίκεντρος ἡ βαίνουσα ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων.



Σχ. 2

Ἐὰν π.χ. ἡ γωνία xOy (σχ. 2) καθισταμένη ἐπίκεντρος εἰς τὴν περιφέρειαν (c) βαίνῃ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, τότε τὸ μέτρον τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ ὡς μέτρον τῆς γωνίας xOy. Ἤτοι, ἂν τὸ τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι μ^0, λέγομεν ὅτι καὶ ἡ γωνία xOy εἶναι μ^0, ἢ ἂν τὸ τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι a rad καὶ ἡ $x\widehat{O}y$ εἶναι a rad. Μὲ ἄλλας λέξεις, διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ τὴν καταστήσωμεν ἐπίκεντρον καὶ νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον της. Συνεπῶς αἱ μονάδες μοῖρα, ἀκτίνιον, βαθμός, χρησιμεύουν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ $\widehat{xOy}$ (σχ. 2) καταστῇ ἐπίκεντρος εἰς ἄλλην περιφέρειαν (c′) τότε τὸ νέον ἀντίστοιχον τόξον της $\overset{\frown}{ΓΔ}$ ἔχει βεβαίως τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ παλαιὸν $\overset{\frown}{AB}$. Διότι εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{ΓΔ}$ τὰ εἰς τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ἀντιστοιχοῦντα ἔχουν μήκη ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων των, δηλ. :

$$\frac{\text{μῆκος τόξου } \overset{\frown}{AB}}{\text{μῆκος τόξου } \overset{\frown}{ΓΔ}} = \frac{ρ}{ρ'} = \frac{2πρ}{2πρ'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{μῆκος τόξου } \overset{\frown}{AB}}{2πρ} = \frac{\text{μῆκος τόξου } \overset{\frown}{ΓΔ}}{2πρ'}$$

Ἀλλὰ $2πρ$ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας (c) καὶ $2πρ'$ τὸ τῆς (c′). Ὥστε, ὃν λόγον ἔχει τὸ $\overset{\frown}{AB}$ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν (c) ἔχει καὶ τὸ $\overset{\frown}{ΓΔ}$ πρὸς τὴν (c′). Συνεπῶς ἂν τὸ $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι $μ^0$ καὶ τὸ $\overset{\frown}{ΓΔ}$ θὰ εἶναι ἐπίσης $μ^0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Τριγώνου ΑΒΓ αἱ δύο γωνίαι εἶναι $A=47^0 12' 49''$ καὶ $B=107^0 59' 20''$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη γωνία Γ καθὼς καὶ τὸ 1/3 τῆς διαφορᾶς τῶν Β καὶ Α.**

Λύσις.

$A=\ 47^0\ 12'\ 49''$	
$B=107^0\ 59'\ 20''$	$180^0=179^0\ 59'\ 60''$
$A+B=154^0\ 71'\ 69''$	$(A+B)=155^0\ 12'\ 9''$
$A+B=154^0\ 72'\ \ 9''$	$180-(A+B)=\ 24^0\ 47'\ 51''=Γ$
$A+B=155'\ 12'\ \ 9''$	

Ἐπίσης, $B-A=(107^0 59' 20'')-(47^0 12' 49'')=(107^0 58' 80'')-(47^0 12' 49'')$ $=60^0 46' 31''$.

$$(B-A) : 3=(60^0 45' 91'') : 3=20^0 15' 30'',3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $B = 68^0 1' 2''$ καὶ $Γ=24^0 17' 45''$ ὑπολογίσατε τὴν τρίτην γωνίαν Α καθὼς καὶ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ὕψος καὶ ἡ διχοτόμος τὰ ἀγόμενα ἐκ τῆς κορυφῆς Α. Ὑπολογίσατε ἐπίσης τὴν γωνίαν $\frac{A}{2}+\frac{B}{3}+\frac{Γ}{4}$.

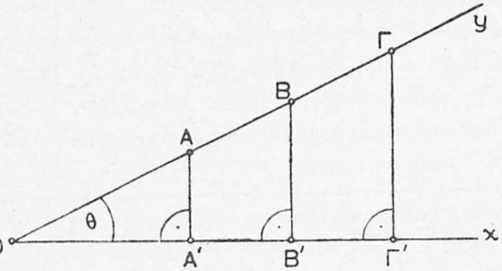
2) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξα $π/2$, $π/3$, $π/4$, $π/5$ ἀκτ. ;

3) Αἱ γωνίαι τριγώνου εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 4 : 5 : 6. Νὰ εὑρεθοῦν αὗται εἰς ἀκτίνια. Ἐπίσης, νὰ εὑρεθοῦν εἰς βαθμούς.

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2. Τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας.

Ἃς θεωρήσωμεν δύο ἡμιευθείας Ox, Oy περικλειούσας μίαν ὀξεῖαν γωνίαν θ (σχ. 3). Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ... τῆς Oy ἂς φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν Ox, ἔστω τὰς ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′,... Τότε τὰ τρίγωνα ΟΑΑ′ καὶ ΟΒΒ′ θὰ εἶναι, προφανῶς, ὅμοια καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν

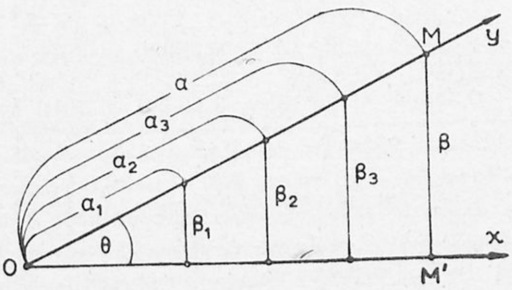


Σχ. 3

τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν : $\dfrac{ΑΑ'}{ΟΑ} = \dfrac{ΒΒ'}{ΟΒ}$. Ὁμοίως δὲ ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΒΒ′ καὶ ΟΓΓ′ θὰ ἔχωμεν : $\dfrac{ΒΒ'}{ΟΒ} = \dfrac{ΓΓ'}{ΟΓ}$, ἐπομένως :

$$\frac{ΑΑ'}{ΟΑ} = \frac{ΒΒ'}{ΟΒ} = \frac{ΓΓ'}{ΟΓ} \quad ἢ \quad (σχ.\ 4): \quad \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \cdots$$

Βλέπομεν δηλ. ὅτι ὁ λόγος β/α, (τῆς ἀπέναντι καθέτου πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν) μένει ἀμετάβλητος ὅταν τὸ σημεῖον Μ (σχ. 4) διατρέχῃ τὴν πλευρὰν Oy τῆς γωνίας θ. Ὁ λόγος λοιπὸν αὐτὸς β/α ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν γωνίαν θ καὶ μόνον ἀπὸ αὐτήν· ἐὰν δὲ ἦτο δυνατὸν διὰ κάθε



Σχ. 4

γωνίαν θ νὰ ἐγνωρίζαμεν μὲ ἱκανὴν ἀκρίβειαν τὴν τιμὴν τοῦ λόγου αὐτοῦ β/α, τότε μία νέα καὶ πρακτικὴ μέθοδος ὑπολογισμοῦ ἀποστάσεων τῇ βοηθείᾳ γωνιῶν θὰ ἠδύνατο νὰ δημιουργηθῇ.

Πράγματι ἐὰν εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ μετρήσωμεν μὲ ἀκρίβειαν τὴν γωνίαν θ καὶ τὸ μῆκος (ΟΜ) = α (σχ. 4) τότε θὰ ἠδυνάμεθα ἀμέσως νὰ συμπεράνωμεν πόσον εἶναι τὸ μῆκος (ΜΜ′)=β. Διότι ἀφοῦ θὰ ἐγνωρίζαμεν τὴν γωνίαν θ θὰ ἐγνωρίζαμεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ λόγου β/α· γνωρίζοντες δὲ τὸ α καὶ τὸν λόγον β/α θὰ ὑπελογίζαμεν τὸ β.

Ὁ ἐκ τῆς γωνίας θ ἐξαρτώμενος λόγος β/α, πολύτιμος διὰ τοὺς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς ἔχει τὴν ὀνομασίαν: *«ἡμίτονον τῆς γωνίας θ»* καὶ γράφεται συντόμως: ημθ. Ὥστε:

1 $$\boxed{\text{ημθ} = \frac{\beta}{\alpha} = \text{μὲ τὴν ἀπέναντι κάθετον/ὑποτεινούσης}}$$

(Τὸ ημθ σχεδὸν διεθνῶς γράφεται: sinθ ἐκ τοῦ sinus=ἡμίτονον).

Ἐὰν καταγράψωμεν πολλὰς τιμὰς τῆς γωνίας θ ἐξ ὧν ἑκάστη, μικρὸν διαφέρει ἀπὸ τὴν ἑπομένην της καὶ παραπλεύρως ἑκάστης τιμῆς τῆς θ γράψωμεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου, τότε ἔχομεν κατασκευάσει ἕνα *«πίνακα ἡμιτόνων»* (ἔχομεν *«πινακοποιήσει»* τὰ ἡμίτονα). Τοιοῦτοι πίνακες εἶχον ἤδη κατασκευασθῆ ὑπὸ τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων Ἀστρονόμων. Ἕνα μικρὸν ἀπόσπασμα πίνακος ἡμιτόνων εἶναι π.χ. τὸ κάτωθι:

γωνία θ	ἡμίτονον θ	γωνία θ	ἡμίτονον θ	γωνία θ	ἡμίτονον θ
30° 0′	0,50000	33° 30′	0,55194	37° 0′	0,60182
30° 30′	0,50754	34° 0′	0,55919	37° 30′	0,60876
31° 0′	0,51504	34° 30′	0,56641	38° 0′	0,61566
31° 30′	0,52250	35° 0′	0,57358	38° 30′	0,62251
32° 0′	0,52992	35° 30′	0,58070	39° 0′	0,62932
32° 30′	0,53730	36° 0′	0,58779	39° 30′	0,63608
33° 0′	0,54464	36° 30′	0,59482	40° 0′	0,64729

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι γνωρίζομεν τὸ ὕψος ΜΜ′ ἑνὸς οἰκοδομήματος καὶ ἔστω ὅτι εἶναι τοῦτο ΜΜ′=β=38,80 μέτρα. Σκοπεύοντες ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους πρὸς τὴν κορυφὴν Μ (σχ. 4) μετροῦμεν διὰ καταλλήλου ὀργάνου τὴν γωνίαν θ καὶ εὑρίσκομεν αὐτὴν ἴσην μὲ 37° 30′. Θέλομεν νὰ μάθωμεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπὸ τὴν κορυφὴν Μ τοῦ οἰκοδομήματος.

Ἔχομεν ὅτι (ΜΜ′) : (ΟΜ) = ημθ = ημ(37° 30′) = 0,60876 (ὅπως βλέπομεν ἀπὸ τὸν πίνακα). Δηλαδὴ 38,80 / ΟΜ = 0,60876, ἄρα

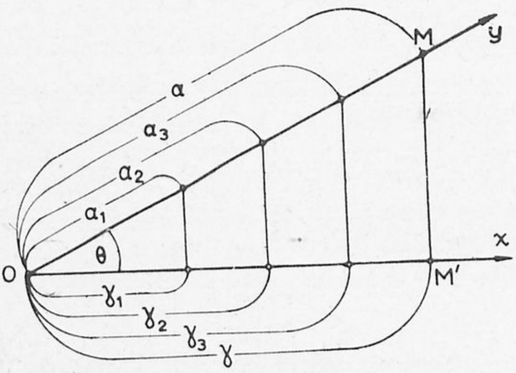
$$\text{ΟΜ} = \frac{38,80}{0,60876} = 63,75 \text{ μέτρα.}$$

3. Τὸ συνημίτονον ὀξείας γωνίας.

Ἐπανερχόμενοι εἰς τὸ σχῆμα 3 τῆς προηγουμένης παραγράφου καὶ θεωροῦντες πάλιν τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΑ', ΟΒΒ', ΟΓΓ' λαμβάνομεν τὰς ἀναλογίας: $\frac{ΟΑ'}{ΟΑ}=\frac{ΟΒ'}{ΟΒ}=\frac{ΟΓ'}{ΟΓ}$ ἢ (σχ. 5)

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}=\frac{\gamma_2}{\alpha_2}=\frac{\gamma_3}{\alpha_3}.$$

Βλέπομεν δηλ. ὅτι ὁ λόγος γ/α (τῆς προσκειμένης καθέτου πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν) μένει ἀμετάβλητος ὅταν τὸ σημεῖον Μ (σχ. 5) διατρέχῃ τὴν πλευρὰν Oy τῆς γωνίας θ.



Σχ. 5

Ὁ λόγος λοιπὸν αὐτὸς γ/α ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν γωνίαν θ καὶ μόνον ἀπὸ αὐτήν. Εἰς αὐτὸν δίδομεν τὴν ὀνομασίαν: *συνημίτονον* τῆς θ γράφομεν δὲ συντόμως: συνθ. Ὥστε:

2 | **συνθ $=\frac{\gamma}{\alpha}=$ μὲ τὴν προσκειμένην κάθετον/ὑποτεινούσης**

(Εἰς τὴν ξένην βιβλιογραφίαν τὸ συνθ σημειοῦται ἐν γένει μὲ cosθ ἐκ τοῦ cosinus = συνημίτονον).

Τὸ συνημίτονον μιᾶς ὁποιασδήποτε γωνίας δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν ἀπὸ εἰδικοὺς πίνακας (βλ. § 2) μὲ ἱκανὴν ἀκρίβειαν. Ἔτσι, εἰς κάθε πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται ἡ θ καὶ τὸ α (σχ. 5) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν, τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων, τὸ γ. Διότι ἐκ τῆς θ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πίνακος τῶν συνημιτόνων τὸ συνθ, δηλ. τὸν λόγον γ/α καὶ γνωρίζοντες τὸ α, ὑπολογίζομεν τὸ γ.

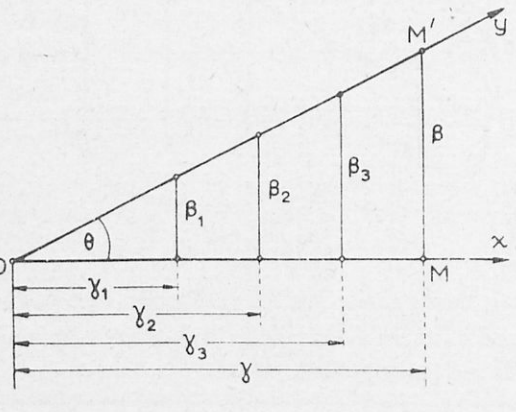
Σημείωσις. Τόσον τὸ ἡμίτονον ὅσον καὶ τὸ συνημίτονον τυχούσης **ὀξείας** γωνίας εἶναι, προφανῶς, ἀριθμοὶ **θετικοὶ καὶ μικρότεροι τῆς μονάδος.**

4. Ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας

Ἐξ ἴσου χρήσιμος πρὸς τοὺς δύο προηγουμένους λόγους: β/α (σχ. 4) καὶ γ/α (σχ. 5), τοὺς ἐκ τῆς γωνίας θ ἐξαρτωμένους, εἶναι καὶ εἷς τρίτος λόγος: ὁ β/γ (σχ. 6)· ἤτοι ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι καθέτου πρὸς τὴν προσκειμένην κάθετον. Καὶ αὐτὸς εἶναι ὡρισμένος, ὅταν δοθῇ ἡ γωνία θ. Πράγματι, ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΑ΄, ΟΒΒ΄, ΟΓΓ΄ (σχ. 3) ἔχομεν:

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{\Gamma\Gamma'}{O\Gamma'} = \ldots = \text{σταθερὸν διὰ τὴν ὡρισμένην γωνίαν } \theta.$$

Ἐὰν ὁ λόγος αὐτὸς ὑπολογισθῇ μετ' ἀκριβείας καὶ ἅπαξ διὰ παντὸς διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς θ, καταρτιζομένου εἰδικοῦ πίνακος,



τότε εἰς κάθε περίπτωσιν καθ' ἣν θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν κάθετον πλευρὰν β (σχ. 6) τοῦ τριγώνου ΟΜΜ΄, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν θ καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΜ = γ. Διότι, γνωρίζοντες τὴν θ καὶ ἀνατρέχοντες εἰς τὸν πίνακα, θὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ λόγου β/γ καὶ γνωρίζοντες τὸ γ, ὑπολογίζομεν τὸ β.

Ἡ ἀντιστοιχία τοῦ λόγου β/γ πρὸς τὴν γωνίαν θ καὶ ἡ χρησιμότης τῆς κατασκευῆς πίνακος τιμῶν αὐτοῦ ὑπεδείχθη ἀπὸ τὸν ἀστρονόμον Ἵππαρχον (100 π.Χ). Ἡ ὀνομασία ἡ ὁποία ἐδόθη εἰς τὸν λόγον τοῦτον εἶναι: *«τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τῆς θ»* ἢ ἁπλῶς *«ἐφαπτομένη τῆς θ»* γράφεται δὲ συντόμως, οὕτος: εφθ. Ὥστε:

3	**εφθ=β/γ=μὲ τὴ ἀπέναντι κάθετον/προσκειμένης καθέτου**

(Εἰς τὰ ξένα βιβλία σημειοῦται ἡ εφθ μὲ tangθ ἢ tanθ ἐκ τοῦ tangente ἢ tangens = ἐφαπτομένη).

Παραθέτομεν κατωτέρω ἕνα μικρὸν ἀπόσπασμα ἑνὸς *«πίνακος ἐφαπτομένων»*:

°	′	εφ	°	′	εφ	°	′	εφ
27	0	0,510	29	0	0,554	31	0	0,601
27	30	0,521	29	30	0,566	31	30	0,613
28	0	0,532	30	0	0,577	32	0	0,625
28	30	0,543	30	30	0,589	32	30	0,637

Πρὸς εὕρεσιν π.χ. τοῦ ὕψους ἑνὸς οἰκοδομήματος ΜΜ′ δυνάμεθα, χρησιμοποιοῦντες γωνιόμετρον καὶ πίνακα ἐφαπτομένων νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Ἀπὸ σημείου Ο τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους σκοπεύομεν πρὸς τὴν κορυφὴν Μ′ καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν θ (σχ. 6) ἔστω δὲ ὅτι θ=32°30′. Μετροῦμεν ἐπίσης τὴν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν ΟΜ καὶ ἔστω ΟΜ=47,30 μέτρα. Θὰ ἔχωμεν: ΜΜ′/ΟΜ=εφθ=εφ(32°30′)=0,637, δηλ.: ΜΜ′/47,3 = 0,637 καὶ ἑπομένως ΜΜ′ = 47,3×0,637 = 30,13 μέτρα.

5. Ἡ συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας

Ἀφοῦ ὁ λόγος β/γ εἶναι σταθερὸς διὰ τὴν γωνίαν θ (σχ. 6) καὶ ὁ ἀντίστροφος λόγος γ/β θὰ εἶναι ἐπίσης σταθερὸς ὅταν τὸ Μ διατρέχῃ τὴν πλευρὰν Οy. Ὁ σταθερὸς αὐτὸς (διὰ τὴν δεδομένην γωνίαν θ) λόγος τῆς προσκειμένης καθέτου ΟΜ πρὸς τὴν ἀπέναντι κάθετον καλεῖται *συνεφαπτομένη τῆς γωνίας θ* παριστώμενος διὰ τοῦ σφθ. Ὥστε:

σφθ=γ/β=μὲ τὴν προσκειμένην κάθετον/ἀπέναντι καθέτου

(Εἰς τὴν ξένην βιβλιογραφίαν: cotθ ἐκ τοῦ cotangente = συνεφαπτομένη).

Προφανῶς ἔχομεν:

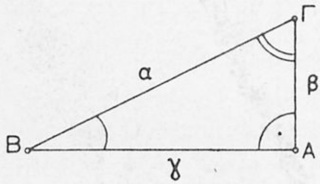
4	**σφθ = 1/εφθ**

ἤτοι **ἡ εφθ καὶ ἡ σφθ εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι.**

6. Τὰ ἕξ κύρια στοιχεῖα παντὸς τριγώνου.

Καλοῦνται κύρια στοιχεῖα παντὸς τριγώνου τὰ μήκη τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ τὰ μεγέθη (μέτρα) τῶν τριῶν γωνιῶν του. Συνήθως, τὰ ἓξ κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ παρίστανται διὰ τῶν γραμμάτων: α, β, γ, Α, Β, Γ, ὅπου διὰ τῶν Α, Β, Γ παριστάνονται αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου καὶ διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν γραμμάτων α, β, γ τὰ μήκη τῶν ἀπέναντι πρὸς τὰς γωνίας ταύτας πλευρῶν. Δηλ. τὸ α παριστᾶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς γωνίας Α κ.ο.κ.

Χάριν ὅμως συντομίας καὶ διὰ τὴν εὐχερῆ διατύπωσιν τῶν θεωρημάτων, θὰ λέγωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα, «*ἡ πλευρά*», ἀντί: «*τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς*» ἢ «*ἡ πλευρὰ α*» ἀντί: «*τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΓ*» καθὼς καὶ «*ἡ γωνία Α*» ἀντί: «*τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α*» κ.ο.κ. Εἰδικῶς, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον παριστάνομεν συνήθως τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν διὰ τοῦ Α τὰς δὲ δύο ὀξείας διὰ τῶν Β καὶ Γ, ὁπότε ἡ μὲν ὑποτείνουσα θὰ παρίσταται διὰ τοῦ α αἱ δὲ κάθετοι πλευραὶ μὲ β καὶ γ (σύμφωνα μὲ τὸν ἀνωτέρω γενικὸν τρόπον παραστάσεως τῶν κυρίων στοιχείων) (βλ. σχ. 7).



Σχ. 7

7. Σχέσεις μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἐὰν Α, Β, Γ, α, β, γ τὰ 6 κύρια στοιχεῖα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου (§ 6) θὰ ἰσχύουν διὰ μὲν τὰς γωνίας αἱ προφανεῖς σχέσεις:

$$A=90^0, \quad B+\Gamma=90^0$$

διὰ δὲ τὰς πλευρὰς ἡ σχέσις:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

ὅπως εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας. Αἱ περαιτέρω σχέσεις μεταξὺ α, β, γ, Β, Γ καθορίζονται ἀπὸ τὰ δύο ἑπόμενα θεωρήματα:

Θεώρημα Ι. «Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης».

Δηλαδή: $\beta=\alpha\,\eta\mu B$ ἢ $\beta=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ὁμοίως: $\gamma=\alpha\,\eta\mu\Gamma$ ἢ $\gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B$, (βλέπε καὶ σχ. 7).

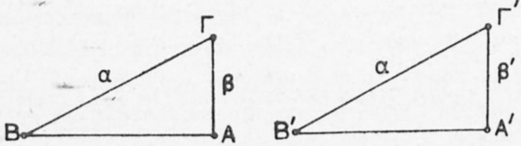
'Απόδειξις. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου (§ 2, τύπος 1) θὰ ἔχωμεν ημΒ$=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (σχ. 7) καὶ συνεπῶς β=αημΒ. 'Επίσης, (§ 3) συνΓ$=\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ συνεπῶς β=ασυνΓ. Ὁμοίως: ημΓ=γ/α, γ=αημΓ κ.τ.λ.

Θεώρημα ΙΙ. «Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἄλλην κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης».

Δηλαδή: *β=γ εφΒ ἢ β=γ σφΓ.* Ὁμοίως: *γ=β εφΓ ἢ γ=β σφΒ.*

'Απόδειξις. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης (§ 4, τύπος 3) θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ σχ. 7: εφΒ$=\dfrac{\beta}{\gamma}$ καὶ συνεπῶς β=γ εφΒ. 'Επίσης, (§ 5), σφΓ$=\dfrac{\beta}{\gamma}$ καὶ συνεπῶς β=γ σφΓ. Ὁμοίως, εφΓ$=\dfrac{\gamma}{\beta}$ γ=β εφΓ κ.τ.λ.

Παρατήρησις. Ἔστωσαν δύο ὀξεῖαι γωνίαι Β καὶ Β′ ἔχουσαι ἴσα ἡμίτονα: ημΒ=ημΒ′. Αὗται δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΓ καὶ Β′Α′Γ′ ἔχοντα ἴσας ὑποτεινούσας: ΒΓ=Β′Γ′=α (σχ. 8). Ἐκ τούτων θὰ ἔχωμεν: β=α ημΒ καὶ β′=α ημΒ′ καὶ ἑπομένως, β=β′, ἄρα τριγ. ΑΒΓ=τριγ. Α′Β′Γ′ καὶ τελικῶς: Β=Β′. Ὥστε ἂν **δύο ὀξεῖαι γωνίαι**



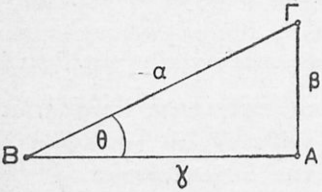
Σχ. 8

ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι **δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἂν ἔχουν ἴσα συνημίτονα ἢ ἴσας ἐφαπτομένας ἢ ἴσας συνεφαπτομένας.**

8. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς ὀξείας γωνίας.

Δοθείσης γωνίας θ, τὰ ποσὰ ημθ, συνθ, εφθ, σφθ, καλοῦνται **τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ** τῆς γωνίας θ. Μεταξὺ τῶν τεσσάρων τούτων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν τρεῖς σχέσεις. Πρὸς εὕρεσιν τῶν σχέσεων αὐτῶν φανταζόμεθα τὴν γωνίαν θ ἀνήκουσαν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 9) μὲ πλευρὰς β, γ, α. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$\beta=\alpha\eta\mu\theta$, $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$ καὶ ἡ σχέσις $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ (Πυθαγόρειον Θεώρημα) γίνεται : $(\alpha\eta\mu\theta)^2+(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)^2=\alpha^2$ ἢ $\alpha^2(\eta\mu\theta)^2+\alpha^2(\sigma\upsilon\nu\theta)^2=\alpha^2$ ἢ $(\eta\mu\theta)^2+(\sigma\upsilon\nu\theta)^2=1$. Ἀντὶ $(\eta\mu\theta)^2$ *γράφομεν χάριν συντομίας :* $\eta\mu^2\theta$ καὶ ἀντὶ $(\sigma\upsilon\nu\theta)^2$ *γράφομεν :* $\sigma\upsilon\nu^2\theta$.



Σχ. 9

Ὥστε : $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$. Ἔχομεν ἐπίσης : $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\alpha\,\eta\mu\theta}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta}=\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

Τέλος ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν $\varepsilon\varphi\theta=1/\sigma\varphi\theta$ (τύπος $\underline{4}$). Ὥστε *μεταξὺ τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ημθ, συνθ, εφθ, σφθ ὑπάρχουν τρεῖς σχέσεις :*

$\underline{5\alpha}$	$\boldsymbol{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1}$	
$\underline{5\beta}$	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}$	$\underline{5}$
$\underline{5\gamma}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi\theta=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\theta}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}}$	

9. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν.

Δύο ὀξεῖαι γωνίαι ω καὶ φ λέγονται συμπληρωματικαὶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ἤτοι ὅταν $\omega+\varphi=90^0$.

Αἱ ω καὶ φ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἀνήκουσαι εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἀποτελοῦν τὰς ὀξείας γωνίας. Ἔστω ὅτι ἡ ω κεῖται ἀπέναντι τῆς καθέτου πλευρᾶς β καὶ ἡ φ ἀπέναντι τῆς καθέτου γ. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu\omega=\frac{\beta}{\alpha},\quad \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\beta}{\alpha},\quad \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \eta\mu\varphi=\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\beta}{\gamma},\quad \sigma\varphi\varphi=\frac{\beta}{\gamma},\quad \sigma\varphi\omega=\frac{\gamma}{\beta},\quad \varepsilon\varphi\varphi=\frac{\gamma}{\beta}.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι :

(1) $\eta\mu\omega=\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\eta\mu\varphi$, $\varepsilon\varphi\omega=\sigma\varphi\varphi$, $\sigma\varphi\omega=\varepsilon\varphi\varphi$.

Δηλαδή : **«Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαὶ τότε τὸ ἡμίτονον τῆς μιᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς, ἰσοῦται πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ἄλλης»**.

Ἐπειδή, $\omega=90-\varphi$ αἱ (1) γράφονται :

$\underline{6}$	$\eta\mu(90^0-\varphi)=\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \sigma\upsilon\nu(90^0-\varphi)=\eta\mu\varphi$ $\varepsilon\varphi(90^0-\varphi)=\sigma\varphi\varphi, \quad \sigma\varphi\,(90^0-\varphi)=\varepsilon\varphi\varphi$

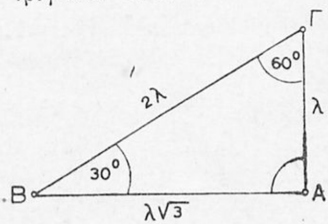
ΑΣΚΗΣΙΣ

4) Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου δείξατε ὅτι:

$$\eta\mu\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2},\ \varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2},\ \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2},\ \sigma\varphi\frac{A+B}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

10. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἰδιαιτέρων τινῶν γωνιῶν.

α΄) Ἄς θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου μία ὀξεῖα γωνία, ἔστω ἡ Β, ἰσοῦται μὲ 30^0 (σχ. 10). Ἔστω λ τὸ μῆκος τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν Β καθέτου ΑΓ· τότε ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ θὰ ἔχῃ μῆκος 2λ. Τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς (ΒΑ) εὑρίσκεται διὰ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος:



Σχ. 10

$$(BA)^2=(2\lambda)^2-\lambda^2=3\lambda^2, \quad BA=\lambda\sqrt{3}.$$

Συμφώνως πρὸς τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα (βλ. τύπους $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$ καὶ $\underline{4}$) θὰ ἔχωμεν:

$$\eta\mu B=\eta\mu 30^0=\frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)}=\frac{\lambda}{2\lambda}=\frac{1}{2}, \qquad \sigma\upsilon\nu 30^0=\frac{(BA)}{(B\Gamma)}=\frac{\lambda\sqrt{3}}{2\lambda}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon\varphi 30^0=\frac{(A\Gamma)}{(BA)}=\frac{\lambda}{\lambda\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sigma\varphi 30^0=\frac{(BA)}{(A\Gamma)}=\frac{\lambda\sqrt{3}}{\lambda}=\sqrt{3}.$$

Ἐκ τοῦ ἰδίου τριγώνου (σχ. 10) εὑρίσκομεν:

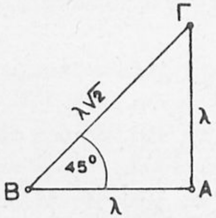
$$\eta\mu\Gamma=\eta\mu 60^0=\frac{(AB)}{(B\Gamma)}=\frac{\lambda\sqrt{3}}{2\lambda}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 60^0=\frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)}=\frac{\lambda}{2\lambda}=\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 60^0=\frac{(BA)}{(A\Gamma)}=\frac{\lambda\sqrt{3}}{\lambda}=\sqrt{3}, \quad \sigma\varphi 60^0=\frac{(\Gamma A)}{(AB)}=\frac{\lambda}{\lambda\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τοὺς τύπους:

7
$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu 30^0 &= \sigma\upsilon\nu 60^0 = \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu 30^0 &= \eta\mu 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varepsilon\varphi 30^0 &= \sigma\varphi 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sigma\varphi 30^0 &= \varepsilon\varphi 60^0 = \sqrt{3} \end{aligned}}$$

β') Ἂς θεωρήσωμεν τώρα, τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ(σχ. 11) τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν ἂς ἔχῃ μῆκος λ. Τότε ἡ ὑποτείνουσα θὰ ἔχῃ (κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα), μῆκος (ΒΓ)$=\lambda\sqrt{2}$. Σύμφωνα μὲ τὰς §§ 2,3,4,5, θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 11

$$\eta\mu B = \eta\mu 45^0 = \frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\mathrm{B\Gamma})} = \frac{\lambda}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{B\Gamma})} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \varepsilon\varphi 45^0 = \frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\mathrm{AB})} = 1,$$

$$\sigma\varphi 45^0 = \frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})} = 1.$$

Ὥστε:

8
$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu 45^0 &= \sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon\varphi 45^0 &= \sigma\varphi 45^0 = 1 \end{aligned}}$$

γ') Ὅταν αἱ δύο ἡμιευθεῖαι Ox, Oy, οἱ περικλείουσαι τὴν γωνίαν, συμπέσουν εἰς μίαν λέγομεν ὅτι αἱ συμπίπτουσαι αὗται ἡμιευθεῖαι σχηματίζουν μηδενικὴν γωνίαν. Αὕτη ἔχει μέτρον 0. Συμβατικῶς δεχόμεθα ὅτι:

9
$$\boxed{\eta\mu 0^0 = 0,\quad \sigma\upsilon\nu 0^0 = 1,\quad \varepsilon\varphi 0^0 = 0}$$

δ') Διὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν λαμβάνεται:

10
$$\boxed{\eta\mu 90^0 = 1,\ \sigma\upsilon\nu 90^0 = 0,\ \sigma\varphi 90^0 = 0}$$

11. Παραδείγματα.

i) Ἐὰν εφθ = 5/7 νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

(3ημθ + 4συνθ) / (11ημθ—4συνθ).

Λύσις. $$\frac{3\,\eta\mu\theta+4\,\sigma\upsilon\nu\theta}{11\,\eta\mu\theta-4\,\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{\frac{3\,\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{4\,\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\frac{11\,\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}-\frac{4\,\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}=\frac{3\,\varepsilon\varphi\theta+4}{11\,\varepsilon\varphi\theta-4}=\frac{3\cdot\frac{5}{7}+4}{11\cdot\frac{5}{7}-4}=$$

$$=\frac{15+28}{55-28}=\frac{43}{27},$$ (ὅπου ἐφηρμόσθη ὁ 5β).

ii) Ποίας ὀξείας γωνίας τὸ ἡμίτονον ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον;

Λύσις. Ἔστω x ἡ ζητουμένη γωνία. Τότε ημx = συνx, ἄρα $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1$, ἤτοι εφx = 1 καὶ ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi 45^0=1$, θὰ ἔχωμεν $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi 45^0$ καὶ $x=45^0$ (§7 παρατηρ.).

iii) Ἐὰν ημθ = 3/5 νὰ εὑρεθοῦν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς θ.

Λύσις. Ἐκ τῆς $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$ εὑρίσκομεν:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1,\quad \sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25},\quad \sigma\upsilon\nu\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}.$$

Ἐπίσης: $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=(3/5):(4/5)=3/4$ καὶ σφθ = 4/3.

iv) Ποίας ὀξείας γωνίας ἡ συνεφαπτομένη εἶναι διπλασία τοῦ συνημιτόνου;

Λύσις. Ἔστω x ἡ ζητουμένη γωνία. Τότε σφx = 2 συνx ἢ $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=2\,\sigma\upsilon\nu x$ ἢ (διαιροῦντες διὰ $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$), $\frac{1}{\eta\mu x}=2$ ἢ $\eta\mu x=\frac{1}{2}$. Ἀλλὰ $\eta\mu 30^0=\frac{1}{2}$ (τύποι 7), ἐπομένως $\eta\mu x=\eta\mu 30^0$ (§ 7 παρατηρ.).

v) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}+\frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

Λύσις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος γράφεται διαδοχικῶς:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta+(1+\eta\mu\theta)^2}{(1+\eta\mu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta+1+\eta\mu^2\theta+2\eta\mu\theta}{(1+\eta\mu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{2+2\eta\mu\theta}{(1+\eta\mu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{2(1+\eta\mu\theta)}{(1+\eta\mu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta}=$$

$=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ ὅπου ἐλήφθη ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5) Κατασκευάσατε διὰ τῶν γεωμ. ὀργάνων γωνίας ἐχούσας ἡμίτονα ἀντιστοίχως: 3/5, 1/2, $\sqrt{2}/2$.

6) Ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἡ μία τῶν πλευρῶν εἶναι 23,5 m ἐνῶ μία διαγώνιός του σχηματίζει μετὰ τῆς ἄλλης πλευρᾶς γωνίαν 35°30′. Βάσει τοῦ πίνακος τῶν ἡμιτόνων τῆς σελ. 6 ὑπολογίσατε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου.

7) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουν μήκη 8 καὶ 6. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ὑπολογίσατε τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του.

8) Σχεδιάσατε δύο ὀξείας γωνίας θ_1 καὶ θ_2 τοιαύτας ὥστε $συν\theta_1=0,6$ καὶ $συν\theta_2=0,7$. Ποία ἐκ τῶν δύο εἶναι μεγαλυτέρα καὶ διατί;

9) Δείξατε ὅτι ἂν $συνω=3/5$ καὶ $ημφ=4/5$ ὅπου ω καὶ φ ὀξεῖαι γωνίαι, τότε $ω=φ$.

10) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ὅπου ΑΒ=ΑΓ) ἡ γωνία τῆς κορυφῆς $Α=55^0$ τὸ δὲ ὕψος ΑΔ=10 μέτρα. Ὑπολογίσατε βάσει τοῦ πίνακος τῆς σελ. 9, τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

11) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι τὰ 0,637 τῆς ἄλλης καθέτου. Εὕρετε διὰ τοῦ πίνακος τῆς σελ. 9 τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου,

12) Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος εἶναι $\left(28\frac{1}{2}\right)^0$ πόσον εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς στύλου ὅστις ρίπτει σκιὰν 30 μέτρων μήκους; (βλέπε πίνακα ἐφαπτομένων τῆς σελ. 9).

13) Σχεδιάσατε γωνίαν ἔχουσαν συνεφαπτομένην 0,25. Ποία ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας αὐτῆς;

14) Εὕρετε τὴν τιμὴν ἑκάστης τῶν παραστάσεων:

$$ημ30^0συν60^0-ημ90^0ημ45^0.ημ60^0+συν90^0συν30^0$$
$$εφ60^0-4ημ30^0.συν30^0+εφ45^0-σφ45^0$$
$$συν0^0+συν30^0+συν60^0-2εφ60^0.$$

15) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\dfrac{ημ45^0-ημ30^0}{συν45^0+συν60^0}=3-2\sqrt{2}.$

16) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα $ΒΓ=α$ καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία $Β=\theta$. Νὰ ὑπολογισθῇ τριγωνομετρικῶς, τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος.

17) Ἐὰν θ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ (τὸ διχοτομοῦν τὴν θ) δείξατε ὅτι ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται μὲ $ρ=υημ\dfrac{\theta}{2}\Big/\left(1+ημ\dfrac{\theta}{2}\right)$.

18) Τοῦ ἀνωτέρου τριγώνου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

19) Ἐὰν $ημ\theta=5/13$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $συν\theta$, $εφ\theta$, $σφ\theta$.

20) Ἐὰν $εφ\theta=0,1$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\frac{ημ^2\theta+3ημ\theta\cdot συν\theta}{10ημ^2\theta+8ημ\theta\cdot συν\theta}.$$

21) Ἐὰν δίδεται ὅτι $ημ^2\theta+2συν^2\theta=7/4$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία θ.

22) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{εφ\theta}{1+εφ^2\theta}=ημ\theta\cdot συν\theta.$

23) Ποίας ὀξείας γωνίας ἡ ἐφαπτομένη εἶναι τριπλασία τῆς συνεφαπτομένης;

24) Ποίας ὀξείας γωνίας ἡ ἐφαπτομένη εἶναι διπλασία τοῦ ἡμιτόνου;

25) Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ παράστασις $ημ^6\theta+4ημ^4\theta συν^2\theta-3ημ^2\theta συν^4\theta+2συν^6\theta$ συναρτήσει τοῦ ημθ, μόνον.

26) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{σφθ - εφθ}{σφθ + εφθ} = 1 - 2ημ^2θ$.

27) Νὰ δειχθῇ ὅτι $ημ^2Aσυν^2B = 1 - συν^2A - ημ^2B + ημ^2Bσυν^2A$, ὅπου A, B τυχοῦσαι ὀξεῖαι γωνίαι.

28) Νὰ δειχθῇ ὅτι $ημ^2αεφα + συν^2ασφα + 2ημασυνα = εφα + σφα$.

29) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ὑφίσταται μία ἐκ τῶν ἰσοτήτων $ημ^2θ \pm ημθ = 1$ τότε θ' ἀληθεύῃ καὶ ἡ ἰσότης $συν^4θ + συν^2θ = 1$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΒΑΣΕΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

12. Οἱ πίνακες τῶν φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Δι' ἑκάστην ἐκ τῶν ποσοτήτων ημθ, συνθ, εφθ, σφθ (τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἢ μᾶλλον, τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων) ἔχουν κατασκευασθῇ *πίνακες* (βλ. σελ. 6 καὶ 9) κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον λεπτομερεῖς. Εἰς αὐτοὺς ἀναγράφονται αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀμιθμῶν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς γωνίας θ, καλοῦνται δὲ συνήθως οἱ πίνακες οὗτοι, *πίνακες τῶν φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν* πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοὺς πίνακας *τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν* οἱ ὁποῖοι κατὰ πρῶτον λόγον χρησιμοποιοῦνται ἐν τῇ πράξει.

Εἰς τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τιμῶν, ἡ γωνία θ αὐξάνεται εἰς τὸ διάστημα $[0, 90^0]$ δηλ. ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0, συνήθως ἀνὰ 10'. Παρέχονται δηλ. οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν 0^0, $0^0 10'$, $0^0 20'$, $0^0 30'$, ..., $89^0 50'$, 90^0. Ἑπομένως, ἡ χρῆσις τῶν τοιούτων πινάκων εἶναι περιωρισμένη εἰς περιπτώσεις μόνον, καθ' ἃς ἡ γωνία μετρᾶται κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ. Δι' ἀκριβεστέρους ὑπολογισμούς, πρέπει νὰ γίνῃ χρῆσις πινάκων εἰς τοὺς ὁποίους ἡ γωνία θ ν' αὐξάνεται ἀνὰ 1' ἢ καλλίτερον λογαριθμικῶν πινάκων.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ μίαν ἁπλῆν ἐπιθεώρησιν τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τιμῶν, αὐξανομένης τῆς γωνίας θ ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0, ἡ εφθ καὶ τὸ ημθ βαίνουν διαρκῶς αὐξανόμενα ἐνῶ ἡ σφθ καὶ τὸ συνθ βαίνουν διαρκῶς ἐλαττούμενα. (Πράγματι, δύναταί τις εὐκόλως ν' ἀποδείξῃ βάσει τῶν ὁρισμῶν, ὅτι ἂν αὐξηθῇ μία ὀξεῖα γωνία θ, ἡ εφθ αὐξάνεται καὶ τὸ συνθ ἐλαττοῦται καὶ ἐκ τούτων κατόπιν ὅτι ἡ σφθ ἐλαττοῦται ἐνῶ τὸ ημθ αὐξάνεται).

13. Παραδείγματα ὑπολογισμῶν βάσει πινάκων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

i) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι (ΑΒ) = 4 m, (ΒΓ) = 6 m καὶ $\widehat{ΓΒΑ} = 38^0$ (Σχ. 16 σελ. 20). **Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου;**

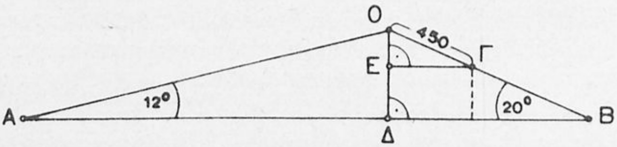
Λύσις. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ (σχ. 16) ὁπότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν: (ΑΔ) = (ΑΒ) · ημΒ = 4 ημ38⁰ = 4 · 0,6156. Ἑπομένως, τὸ ἐμβαδὸν =

$$= \frac{1}{2} \cdot (ΒΓ)(ΑΔ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 0{,}6156 = 12 \cdot 0{,}6156 = 7{,}3872 \text{ m}^2.$$

ii) Ἀνέρχεταί τις ἀνωφέρειαν ΑΟ = 1200 m κλίσεως 12⁰ (σχ. 12) **καὶ κατόπιν διανύει 450 m ἐπὶ τῆς κατωφερείας ΟΒ, κλίσεως 20⁰. Εἰς ποῖον ὕψος εὑρίσκεται τότε ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΑΒ;**

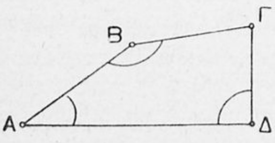
Λύσις. Τὸ ζητούμενον ὕψος x εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ὕψους (ΟΔ) μεῖον τὸ (ΟΕ). Δηλαδὴ $x = (ΟΔ) - (ΟΕ) = (ΟΑ)\,ημ12^0 - (ΟΓ)\,ημ20^0 = 1200 \cdot 0{,}2079 - 450 \cdot 0{,}3420 = 249{,}48 - 153{,}90 = 95{,}58$ m.

iii) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐμετρήθησαν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ καὶ αἱ γωνίαι Δ, Α, Β, εὑρέθησαν δέ: ΑΒ = 50 m, ΒΓ = 30 m, $\widehat{ΓΔΑ} = 90^0$, $\widehat{ΔΑΒ} = 40^0\,30'$, $\widehat{ΑΒΓ} = 162^0\,50'$. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς ΑΔ; (σχ. 13).

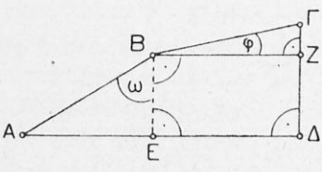


Σχ. 12

Λύσις. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΕ ⊥ ΑΔ (σχ. 14) καὶ τὴν ΒΖ ⊥ ΓΔ σχηματίζομεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ τῶν ὁποίων ὑπολογίζονται τὰ στοιχεῖα.



Σχ. 13



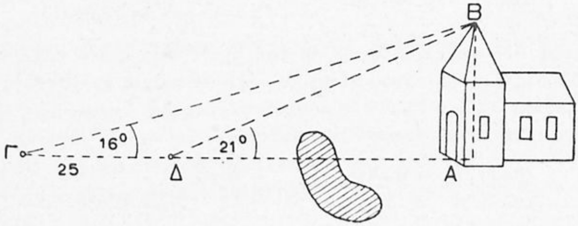
Σχ. 14

Οὕτω: $ω = 90^0 - (40^0\,30') = 49^0\,30'$, $φ = \widehat{ΑΒΓ} - (ω + 90^0) = (162^0\,50') - (139^0\,30') = 23^0\,20'$.

Ἔχομεν λοιπόν: $(ΑΔ) = (ΑΕ) + (ΕΔ) = (ΑΕ) + (ΒΖ) = (ΑΒ)\,ημω + (ΒΓ)\,συνφ = 50\,ημ\,(49^0 30') + 30 \cdot συν(23^0 20') = 50 \cdot 0{,}7604 + 30 \cdot 0{,}9182 = 38{,}020 + 27{,}546 = 65{,}566$ m.

iv) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ οἰκοδομήματος τοῦ εἰκονιζομένου εἰς τὸ σχ. 15, βάσει τῶν δεδομένων τοῦ σχήματος.

Λύσις. Ἡ ΓΔ εἶναι διαφορὰ τῶν ΓΑ καὶ ΔΑ αἱ ὁποῖαι ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΑΒ ὑπολογίζονται συναρτήσει τοῦ ζητουμένου ὕψους



Σχ. 15

(ΑΒ) = x. Δηλ. (ΑΓ) — (ΑΔ) = 25 ἢ $x σφ16^0 - x σφ21^0 = 25$ ἢ $x(3,4874 - 2,6051) = 25$, $x = 25/0,8823 = 28,33$ m.

v) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γνωστὰ τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν του: β = 5,12 m, γ = 7,49 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν 1′ ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν ἐφαπτομένων.

Λύσις. Ἔχομεν : $εφB = β/γ = 5,12/7,49 = 0,6835$. Ἀνατρέχοντες εἰς τὸν πίνακα τῶν ἐφαπτομένων βλέπομεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης εἶναι 0,6830 διὰ γωνίαν 34° 20′ καὶ 0,6872 γιὰ γωνίαν 34° 30′. Ἔχομεν δηλ.

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} εφ34^0\,20' = 0,6830 \\ εφB = 0,6835 \end{array}\right\} \text{αὔξησις } 5 \\ εφ34^0\,30' = 0,6872 \end{array}\right\} \text{αὔξησις } 42$$

Ἀπὸ τὰς (1) συνάγεται ὅτι ἡ ζητουμένη γωνία Β εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 34° 20′ καὶ μικροτέρα τῶν 34° 30′. Βλέπομεν ἐπίσης ὅτι ὅταν ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνῃ κατὰ 42 (δεκάκις χιλιοστά, δηλ. ἀπὸ 0,6830 εἰς 0,6872) ἔχομεν αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 10′ καὶ ζητοῦμεν, δι' αὔξησιν τῆς ἐφαπτομένης κατὰ 5 (δεκάκις χιλιοστὰ δηλ. ἀπὸ 0,6830 εἰς 0,6835) πόσην κατ' ἀναλογίαν αὔξησιν τῆς γωνίας θὰ ἔχωμεν :

αὔξ. ἐφαπτ.	*αὔξ. γωνίας*
42	10′
5	x ;

$$x = \frac{10' \cdot 5}{42} = 1',1 \approx 1'.$$

Λαμβάνομεν λοιπὸν ὡς ἀναλογοῦσαν αὔξησιν x τὸ 1′, ὁπότε Β = 34° 21′ καὶ συνεπῶς Γ = 55° 39′. (Ὁ ἀνωτέρω ὑπολογισμὸς λέγεται *«παρεμβολή»*).

vi) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 57° 8′ βάσει τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τιμῶν.

Λύσις. Ἀπὸ τὸν πίνακα τῶν ἡμιτόνων (§ 2) εὑρίσκομεν :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} ημ57^0\,0' = 0,8386 \\ ημ57^0\,8' = \;; \end{array}\right\} \text{αὔξησις } x \\ ημ57^0\,10' = 0,8402 \end{array}\right\} \text{αὔξησις } 16$$

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\begin{array}{cc|c} \textit{αὔξ. γωνίας} & \textit{αὔξ. ἡμιτόνου} & \\ 10' & 16 & x = \dfrac{16 \cdot 8}{10} = 12{,}8 \approx 13. \\ 8' & x\,; & \end{array}$$

Ἑπομένως ὅταν μεταβαίνωμεν ἐκ τοῦ ημ$57^0\,0'$ εἰς τὸ ημ$57^0\,8'$ ἡ ἀναλογοῦσα αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου εἶναι $x = 13$ (δεκάκις χιλιοστά). Ὥστε: ημ$57^0\,8' = 0{,}8399$.

Διὰ τὸ συνημίτονον ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} συν57^0\,0' = 0{,}5446 \\ συν57^0\,8' = \quad ; \end{array}\right\}\text{ἐλάττωσις } x \\ συν57^0\,10' = 0{,}5422 \end{array}\right\}\text{ἐλάττωσις } 24$$

Ἤτοι, αὐξανομένου τοῦ τόξου κατὰ $10'$ (δηλ. ἀπὸ $57^0\,0'$ εἰς $57^0\,10'$) ἔχομεν ἐλάττωσιν τοῦ συνημιτόνου ἴσην μὲ 24 (δεκάκις χιλιοστὰ δηλ. ἀπὸ 0,5446 εἰς 0,5422). Ζητοῦμεν λοιπὸν ποία θὰ εἶναι ἡ κατ' ἀναλογίαν ἐλάττωσις τοῦ συνημιτόνου, ὅταν τὸ τόξον αὐξηθῇ κατὰ $8'$ (δηλ. ἀπὸ $57^0\,0'$ εἰς $57^0\,8'$).

$$\begin{array}{cc|c} 10' & 24 & x = \dfrac{24 \cdot 8}{10} = 19{,}2 \approx 19. \\ 8' & x; & \end{array}$$

Ὥστε: συν$57^0\,8' = 0{,}5446 - 0{,}0019 = 0{,}5427$.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐφαπτομένης ἐκτελοῦμεν παρεμβολὴν ὁμοίαν πρὸς τὴν τοῦ ἡμιτόνου.

$$\left.\begin{array}{l} εφ57^0\,0' = 1{,}5399 \\ εφ57^0\,8' = \quad ; \\ εφ57^0\,10' = 1{,}5497 \end{array}\right\} 98 \quad \begin{array}{|cc} 10' & 98 \\ 8' & x; \end{array} \quad x = \frac{98 \cdot 8}{10} \approx 78, \qquad \begin{array}{r} 1{,}5399 \\ 78 \\ \hline 1{,}5477 \end{array}$$

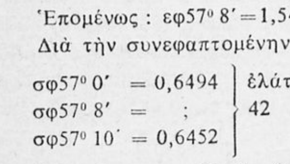
Ἑπομένως: εφ$57^0\,8' = 1{,}5477$.

Διὰ τὴν συνεφαπτομένην, ἡ περίπτωσις εἶναι ὁμοία τῆς τοῦ συνημιτόνου

$$\left.\begin{array}{l} σφ57^0\,0' = 0{,}6494 \\ σφ57^0\,8' = \quad ; \\ σφ57^0\,10' = 0{,}6452 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{ἐλάτ.}\\ 42\end{array} \quad \begin{array}{cc} 10' & 42 \\ 8' & x;\,, \end{array} \quad x = \frac{42 \cdot 8}{10} \approx 34, \qquad \begin{array}{r} 0{,}6494 \\ -34 \\ \hline 0{,}6460 \end{array}$$

Ἑπομένως: σφ$57^0\,6' = 0{,}6460$.

vii) Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον 1 : 3. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ ΑΒΓ.



Σχ. 16

Λύσις. Ἔχομεν: (ΒΔ) : (ΔΓ) = 1 : 3 (σχ. 16) ἢ (1), (ΔΓ)=3(ΒΔ). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν: (ΒΔ)=(ΑΔ) · σφΒ καὶ ἐκ τοῦ ΑΔΓ: (ΔΓ)=(ΑΔ) · εφω=(ΑΔ) · εφΒ. (Θεώρημα ΙΙ § 7). Ἑπομένως **ἡ** (1) γίνεται (ΑΔ)εφΒ=3 · (ΑΔ)σφΒ καὶ δίδει εφΒ=3σφΒ **ἢ** εφΒ=3/εφΒ (τύπος 4) **ἢ** εφ^{2}Β=3 ἢ εφΒ=$\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ εφ$60^0=\sqrt{3}$ (§ 10) ἕπεται: εφΒ = εφ60^0, ἄρα Β = 60^0 καὶ Γ = 30^0 (§ 7, παρατήρησις)·

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

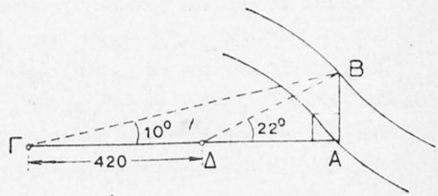
(Νὰ γίνῃ χρῆσις πινάκων τῶν φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν).

30) Ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου αἱ διαστάσεις εἶναι 4,70 m καὶ 7,52 m. Ὑπολογίσατε τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ποὺ σχηματίζουν αἱ δύο διαγώνιοί του.

31) Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι αἱ ἀγόμεναι ἐκ σημείου Ρ πρὸς κύκλον Ο διαμέτρου 5m σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 26^0. Ποία ἡ ἀπόστασις τοῦ Ρ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο;

32) Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶναι $48^0\,37'$ τότε τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς ἑνὸς δένδρου εἶναι 10,50 m. Ποῖον τὸ ὕψος τοῦ δένδρου; Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς ὅταν τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου γίνῃ $12^0\,20'$;

33) Ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εὑρισκομένων εἰς τὰς δύο ἔναντι ὄχθας ἑνὸς ποταμοῦ βάσει τῶν δεδομένων τοῦ σχήματος 17.



Σχ. 17

34) Ἐπὶ τῆς κορυφῆς πύργου ἵσταται κοντὸς σημαίας τοῦ ὁποίου τὸ κάτω καὶ ἄνω ἄκρον φαίνονται ἀπὸ σημείου Ο τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους, ὑπὸ γωνίας $28^0\,30'$ καὶ $31^0 6'$. Τὸ Ο ἀπέχει τῆς βάσεως τοῦ πύργου 126,5 m. Ποῖον τὸ ὕψος τοῦ κοντοῦ;

35) Ἐὰν $5\,\text{ημ}\theta = 8\,\text{συν}\theta$, ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν θ κατὰ προσέγγισιν 1'.

36) Ὑπολογίσατε τὴν περίμετρον κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος 90 πλευρὰς καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1000. Συγκρίνατε τὸ ἐξαγόμενον, μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας.

37) Ἡ διαγώνιος ὀρθογωνίου εἶναι τριπλασία τῆς μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν. Ὑπολογίσατε τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου.

38) Ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχει μῆκος 40,4 ἑκ., ἑκάστη δὲ τῶν ἴσων γωνιῶν του εἶναι 75^0. Ὑπολογίσατε τὴν βάσιν καὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος τοῦ τριγώνου.

39) Ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΑΒ γωνίαι εἶναι 65^0 ἑκάστη τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι 54 cm καὶ ἡ ἄλλη βάσις ΓΔ ἔχει μῆκος 30 cm. Ὑπολογίσατε τὸ μῆκος τῆς ΑΒ.

40) Χορδὴ κύκλου, μήκους 6 cm ὑποτείνει τόξον 134^0. Ποία ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου;

41) Κατασκευάσατε γωνίαν ἔχουσαν συνημίτονον 3/8. Μετρήσατε αὐτὴν διὰ μοιρογνωμονίου καὶ παραβάλλατε τὸ ἐξαγόμενόν σας μὲ τὸ ἐξαγόμενον ἐκ τῶν πινάκων.

42) Ὑπολογίσατε τὴν πλευρὰν κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10 cm. Ἀκολούθως κατασκευάσατε τὸ πεντάγωνον.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Ι

i) *Τί εἶναι τὸ ἀκτίνιον; ὁ βαθμός;*

ii) *Ἐκ τῶν τριῶν μονάδων μετρήσεως γωνιῶν ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα; ἡ μικροτέρα;*

iii) *Τί καλεῖται ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη, συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας;*

iv) *Πῶς ὁρίζονται τὰ ημ, συν, εφ τῆς μηδενικῆς γωνίας;*

v) *Ποῖαι αἱ θεμελιώδεις σχέσεις μεταξὺ τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν;*

vi) *Μὲ τί δύναται νὰ ἐξισωθῇ ἑκάστη τῶν ποσοτήτων:*

$$1-\text{συν}^2 x,\quad 1-\text{ημ}^2 x,\quad \text{ημ}x/\text{συν}x,\quad \text{συν}x/\text{ημ}x\ ;$$

vii) *Μὲ τί ἰσοῦται τὸ* $\text{ημ}30^0, \text{ημ}45^0, \text{ημ}60^0, \text{ημ}90^0, \text{συν}30^0, \text{συν}45^0, \text{συν}60^0, \text{συν}90^0, \text{εφ}30^0, \text{εφ}45^0, \text{εφ}60^0$;

viii) *Τί καλοῦνται κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου;*

ix) *Ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν κυριων στοιχείων, ὀρθογωνίου τριγώνου;*

x) *Ποῖαι αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομ. ἀριθμῶν δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν;*

xi) *Τί εἶναι πίναξ φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομ. ἀριθμῶν;*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Χρῆσις λογαριθμικῶν πινάκων καὶ δι' αὐτῆς, ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων

14. Πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

α΄) Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ὅτι αἱ πράξεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς διαιρέσεως καὶ τῆς ἐξαγωγῆς ρίζης ἐκτελοῦνται μὲ ταχύτητα καὶ ἀκρίβειαν διὰ τῆς χρήσεως λογαρίθμων. Διὰ νὰ χρησιμοποιηθῆ λοιπὸν ὁ λογαριθμικὸς λογισμὸς καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν κατεσκευάσθησαν πίνακες παρέχοντες ὄχι ἀπ' εὐθείας τὴν τιμὴν ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ τὸν λογάριθμον αὐτοῦ. Οἱ πίνακες οὗτοι παρέχουν τὰς τιμὰς τοῦ λογ ἡμθ, λογ συνθ, λογ εφθ, λογ σφθ διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς θ, τὰς μεταξὺ 0 καὶ 90^0· προκειμένου δὲ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν λογαριθμικὸν λογισμὸν προστρέχομεν εἰς αὐτοὺς (και εἰς τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν) καὶ ὄχι εἰς τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω, προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἐκφράσεως,

$$\Pi = 1253 \cdot \eta\mu 42^0\,10' \cdot \sigma\upsilon\nu 12^0\,40'$$

λογαριθμίζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας καὶ ἔχομεν:

λογ1253 $=3,09795$ (ἐκ τοῦ πίνακος λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν)

λογημ$42^0\,10'=\bar{1},82691$ (ἐκ τοῦ πίνακος λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων)

λογ συν$12^0\,40'=\bar{1},98930$ (ἐκ τοῦ πίνακος λογαρίθμων τῶν συνημιτόνων)

λογ Π $=2,91416$ (διὰ προσθέσεως)

Π $=82,066\ldots$ (ἐκ τοῦ πίνακος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν) (ἢ πίνακος ἀντιλογαρίθμων).

Ἔστω ἀκόμη ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{37010 \cdot \eta\mu 11^0\,31' \cdot \varepsilon\varphi 17^0 40'}{3700}$$

καὶ θέλομεν ἐξ αὐτοῦ νὰ εὕρωμεν τὴν Α. Ἔχομεν ἀμέσως, ἐκ τῶν πινάκων

$$\begin{aligned} \text{λογ}\,37010 &= 4{,}56832 \\ \text{λογ ημ}\,11^{0}31' &= \bar{1}{,}30028 \\ \text{λογ εφ}\,17^{0}40' &= \bar{1}{,}50311 \\ -\text{λογ}\,3700 &= \bar{4}{,}43180 \\ \hline \text{λογ συν} A &= \bar{1}{,}80351 \end{aligned}$$

(διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη) καὶ ἀνατρέχοντες εἰς τὸν πίνακα λογαρίθμων τῶν συνημιτόνων εὑρίσκομεν ἀμέσως, $A=50^{0}30'$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων γίνεται καταφανὴς ἡ ὑπεροχὴ τῆς μεθόδου λογισμοῦ μὲ λογαρίθμους ἐν σχέσει μὲ τὸν λογισμὸν μὲ φυσικὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

β΄) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΧΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ. Τὰ ὑπὸ τὸν τίτλον «Πίνακες Λογαρίθμων» βιβλία περιέχουν λεπτομερεῖς περιγραφὰς τῶν διαφόρων πινάκων καὶ τοῦ τρόπου χρήσεως τῶν πινάκων τούτων. Διὰ τοῦτο δὲν θὰ δώσωμεν ἐνταῦθα περιγραφὴν τῆς διατάξεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων, ἀρκούμενοι μόνον εἰς μερικὰ τυπικὰ παραδείγματα ἐκ τῶν ὁποίων δύναταί τις νὰ κατατοπισθῇ εἰς τὴν χρῆσιν τῶν πινάκων,

i) **Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ημ$7^{0}\,28'\,45''$.**

Λύσις. Πρὸς τοῦτο, ἀνευρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 7^{0} εἰς τὰ ἄνω τῆς σελίδος καὶ τὸν 28΄ εἰς τ' ἀριστερὰ (στήλη τῶν λεπτῶν καὶ εἰς τὴν στήλην μὲ ἐπικεφαλίδα ημ (ἢ sin) ἀναγιγνώσκομεν, παραπλεύρως τοῦ 28΄ τὸν $\bar{1}{,}11337$. Οὗτος εἶναι ὁ λογ ημ$7^{0}28'$. Ὁ ἀμέσως ἑπόμενος λογάριθμος (δηλ. ὁ λογ 7^{0} 29΄) εἶναι μεγαλύτερος κατὰ 97 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Δηλαδὴ εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 60΄΄ ἔχομεν αὔξησιν λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου ἴσην μὲ 97 (ἑκανοντάκις χιλιοστά). Λέγομεν συντόμως ὅτι ἡ **διαφορὰ πίνακος** εἶναι $\Delta=97$. Εἰς ἡμᾶς χρειάζεται ἡ αὔξησις ἡ ἀναλογοῦσα εἰς τὰ 45΄΄. Ἀναλύομεν τὸ 45΄΄ εἰς 40΄΄ καὶ εἰς 5΄΄ καὶ ἐκ τοῦ πινακιδίου τοῦ φέροντος ἐπικεφαλίδα 97 (εἰς τὸ περιθώριον τῆς σελίδος) εὑρίσκομεν ὅτι εἰς αὔξησιν 4΄΄ ἀναλογεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 6,47, συνεπῶς εἰς αὔξησιν 40΄΄ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις 64,7 (μονάδων τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως) καὶ διὰ 5΄΄ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις 8,08. Τὰς δύο ταύτας διορθώσεις προσθέτομεν εἰς τὸν εὑρεθέντα λογάριθμον. Ἡ διάταξις τῶν πράξεων γίνεται ὡς ἑξῆς:

	λογ ημ $7^{0}\,28'$		$=\bar{1}{,}11377$
Πινακ. 97 δίδει:		40΄΄	64,7
		5΄΄	8,08

$$\text{λογ ημ}\,7^{0}\,28'\,45'' = \bar{1}{,}1144978 \text{ ἢ } \bar{1}{,}11450$$

Σημείωσις 1η. Ἐπειδὴ μεταχειριζόμεθα πενταψηφίους λογαρίθμους κρατοῦμεν μόνον τὰ 5 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία καὶ παραλείπομεν ἀπὸ τοῦ

6ου καὶ πέραν. Ἐὰν δὲ τὸ πρῶτον παραλειπόμενον ψηφίον εἶναι $\geqq 5$, τότε αὐξάνομεν κατὰ 1 τὸ προηγούμενόν του (5ον) δεκαδ. ψηφίον.

Σημείωσις 2α. Τὴν εἰς 45'' ἀναλογοῦσαν αὔξησιν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς ἁπλῆς ἀναλογίας :

Εἰς 60'' ἔχομεν αὔξησιν 97
Εἰς 45'' » » x ;

$$x = \frac{97 \cdot 45}{60} = 72{,}78.$$

Τὰ πινακίδια μᾶς ἀπαλλάσουν τῶν πράξεων τούτων.

ii) **Νὰ εὑρεθῆ ὁ λογάριθμος τοῦ συν68° 49' 11''.**

Λύσις. Πρὸς τοῦτο ἀνευρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 68° εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς σελίδος (τοῦτο δὲ γίνεται δι' ὅλας τὰς > 45° γωνίας) καὶ τὸν 49' εἰς τὰ δεξιὰ τῆς σελίδος (στήλη τῶν λεπτῶν). Κατόπιν, εἰς τὴν στήλην τῶν συνημιτόνων (συν ἢ cos ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω βαίνοντες) εὑρίσκομεν εἰς τὴν αὐτὴν γραμμὴν μὲ τὸ 49', τὸν ἀριθμὸν $\bar{1}{,}55793$ ὅστις εἶναι ὁ λογ συν68° 49'. Ἡ διαφορὰ πίνακος εἶναι Δ=32, δηλ. εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 60'' ἀντιστοιχεῖ **ἐλάττωσις** τοῦ λογαρίθμου τοῦ συνημιτόνου κατὰ 32 (μονάδας τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως). Μένει λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν ποία ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου ἀναλογεῖ εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 11''. Πρὸς τοῦτο ἀναλύομεν τὸ 11'' εἰς 10 καὶ 1 ἐπιφέρομεν δύο διορθώσεις (ἐλαττώσεις) ἀντιστοιχούσας εἰς 10 καὶ εἰς 1. Πρὸς τοῦτο ἀνευρίσκομεν τὸ πινακίδιον μὲ ἐπικεφαλίδα 32 (εἰς τὸ δεξιὸν ἢ ἀριστερὸν περιθώριον) καὶ ἐξ αὐτοῦ πορίζόμεθα διὰ μὲν τὸ 10 διόρθωσιν 5,3 διὰ δὲ τὸ 1 διόρθωσιν 0,53 :

$$\begin{array}{llll} & \text{λογ συν}68^0\,49' & =\bar{1}{,}55793 & \Delta=32 \\ \text{Πινακιδ. 32 :} & 10'' & -5{,}3 & \\ & 1'' & -0{,}53 & \Big\}\ -5{,}83 \\ \hline & \text{λογ συν}68^0\,49'\,11'' & =\bar{1}{,}5578717 & \text{ἢ } \bar{1}{,}55787 \end{array}$$

iii) **Νὰ εὑρεθῆ ὁ λογάριθμος τῆς εφ48° 12' 22''.**

Λύσις. Διὰ τὴν ἐφαπτομένην (ἥτις αὐξάνει μετὰ τῆς γωνίας) ἀκολουθοῦμεν τὴν ἰδίαν πορείαν ἣν καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον ἠκολουθήσαμεν :

$$\begin{array}{llll} & \text{λογ εφ }48^0\,12' & =0{,}04861\ , & \Delta=26 \\ \text{Πινακιδ. 26 :} & 20'' & 8{,}7 & \\ & 2'' & 0{,}87 & \\ \hline & \text{λογ εφ }48^0\,12'\,22'' & =\ 0{,}04871 & \end{array}$$

iv) **Νὰ εὑρεθῆ ὁ λογ σφ 33° 19' 9''.**

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ σφθ ἐλαττοῦται αὐξανούσης τῆς γωνίας, ἀκολουθοῦμεν τὴν ἰδίαν πορείαν μὲ τὸ συνημίτονον. Ἤτοι ὑπολογίζομεν τὴν *ἐλάττωσιν* τοῦ λογαρίθμου τὴν ἀναλογοῦσαν εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 9'' :

$$\begin{array}{llll} & \text{λογ σφ }33^0\,19' & =0{,}18224, & \Delta=27 \\ \text{Πινακιδ. 27 :} & 9'' & -4{,}05 & \\ \hline & \text{λογ σφ }33^0\,19'\,9'' & =0{,}1821995 & \text{ἢ }0{,}18220 \end{array}$$

v) **Νὰ εὑρεθῆ ἡ ὀξεῖα γωνία θ ὅταν δίδεται ὅτι λογημθ = $\bar{1}$,37524.**

Λύσις. Εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμιτόνων ἀνευρίσκομεν τὸν ἀμέσως μικρότερον τοῦ δοθέντος, ὑπάρχοντα λογάριθμον. Οὗτος εἶναι ὁ $\bar{1}{,}37497$ καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν 13° 43'. Ἡ διαφορὰ πίνακος εἶναι Δ=52 ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου καὶ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του εἶναι $\delta=27$ (μονάδες 5ης δεκαδικῆς τάξεως). Ἐπειδὴ εἰς αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου κατὰ 52 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τῆς γωνίας κατὰ 60″, εἰς αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου κατὰ 27 θ' ἀναλογῇ αὔξησις τῆς γωνίας κατὰ $\frac{27}{52}60''=31''$.

Ὥστε: $\theta=13^0\,43'\,31''$.

(Παραλείπομεν τὰ δέκατα δευτερολέπτου).

vi) **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία θ ὅταν λογ συνθ $=\overline{1},40801$.**

Λύσις. Εἰς τὴν στήλην τῶν συνημιτόνων εὑρίσκομεν τὸν ἀμέσως μικρότερον τοῦ δοθέντος λογαρίθμου: $\overline{1},40778$ εἰς τὸν ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ γωνία $75^0 11'$. Ἡ διαφορὰ πίνακος εἶναι 47 ἐνῷ ἡ διαφορὰ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου καὶ τοῦ ἀμέσως μικροτέρου εἶναι 23. Εἰς αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου κατὰ 47, ἀντιστοιχεῖ *ἐλάττωσις* τῆς γωνίας κατὰ 60″, συνεπῶς εἰς αὔξησιν 23 ἀναλογεῖ ἐλάττωσις $\frac{23}{47}.60''=30''$.

Ὥστε: $\theta=(75^0 11')-30''=75^0\,10'\,30''$.

vii) **Νὰ εὑρεθῇ ἡ θ, ἂν λογ εφθ $=\overline{1},62561$.**

Λύσις. Εἰς τὴν στήλην τῶν ἐφαπτομένων εὑρίσκομεν:

$$\begin{array}{ccc} \overline{1},62539 & < \overline{1},62561 < & \overline{1},62574 \\ 22^0\,53' & & 22^0\,54' \end{array}$$

Διαφορὰ πίνακος $\Delta=35$, διαφορὰ λογαρίθμων $\delta=22$.

αὔξησις	*αὔξησις*	
35	60″	$x=\frac{60''\cdot 22}{35}=37'',7$ ἢ 38″
22	x ;	

$\theta=22^0\,53'\,38''$.

viii) **Νὰ εὑρεθῇ γωνία τῆς ὁποίας ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης εἶναι $\overline{1},03894$.**

Λύσις. Εἰς τὴν στήλην τῶν συνεφαπτομένων εὑρίσκομεν:

$$\begin{array}{ccc|c} \overline{1},03832 & < \overline{1},03894 < & \overline{1},03948 & \Delta=116 \\ 83^0\,46' & & 83^0\,45' & \delta=\ \ 62 \end{array}$$

αὔξησις	*ἐλάττωσις*	
116	60″	$x=\frac{60''\cdot 62}{116}=32''$.
62	x;	

Ἡ ζητουμένη γωνία $\theta=(83^0\,46')-32''=83^0\,45'\,28''$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

43) Νὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῶν πινάκων τά:
λογ ημ $18^0\,25'\,35''$, λογ εφ $64^0\,35'\,18''$.
λογ συν$77^0\,4'\,8''$, λογ σφ $37^0\,12'\,49''$, λογ εφ $29^\beta,08$.

44) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι x, y, ω, φ ἐκ τῶν δεδομένων:
λογ ημx $=\overline{1},81510$, λογ συνy $=\overline{1},27235$
λογ εφω $=0,39669$, λογ σφφ $=0,56300$.

45) Νὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῶν πινάκων αἱ ποσότητες:

$$-\lambda o\gamma\, \eta\mu 56^0\, 17', \qquad -\frac{1}{2}\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi 40^0\, 37'\, 30'', \qquad -\frac{1}{3}\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu 10^0\, 9'\, 10''.$$

γ') ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

i) **Νὰ ὑπολογισθῇ μὲ τὴν προσέγγισιν τῶν πινάκων ἡ παράστασις**

$$x = \frac{15{,}62\ \eta\mu 53^0\, 7'\, 48''}{\sqrt{561{,}66}\cdot \eta\mu 14^0\, 15'\, 10''}.$$

Λύσις. Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma 15{,}62 + \lambda o\gamma\, \eta\mu 53^0\, 7'\, 48'' - \frac{1}{2}\lambda o\gamma 561{,}66 - \lambda o\gamma\, \eta\mu 14^0\, 15'\, 10''.$$

Διάταξις τῶν πράξεων:

ὑπολογισμὸς τοῦ x

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\, 15{,}62 &= 1{,}19368\\
\lambda o\gamma\, \eta\mu 53^0\, 7'\, 48'' &= \overline{1}{,}90309\\
-\frac{1}{2}\lambda o\gamma\, 561{,}66 &= \overline{2}{,}62527\\
-\lambda o\gamma\, \eta\mu 14^0\, 15'\, 10'' &= 0{,}60879\\
\hline
\lambda o\gamma x &= 0{,}33083\\
x &= 2{,}142
\end{aligned}$$

Παρατήρησις. Ἀντὶ ν' ἀφαιρέσωμεν ἕνα λογάριθμον, προσθέτομεν τὸν ἀντίθετόν του τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν σύμφωνα μὲ γνωστὸν κανόνα τῆς Ἀλγέβρας.

ii) **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία x ἐκ τῆς σχέσεως:**

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\varphi}{\sqrt{\beta}}$$

ὅπου $\alpha = 384{,}12$, $\omega = 87^0\, 32'\, 5''$, $\varphi = 38^0\, 21'\, 49''$, $\beta = 1{,}40$.

Λύσις. $\lambda o\gamma\, \eta\mu x = \frac{1}{3}\lambda o\gamma \alpha + \lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\omega + \lambda o\gamma\, \eta\mu\varphi - \frac{1}{2}\lambda o\gamma\beta$

ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας x

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\lambda o\gamma\alpha &= 0{,}86148\\
\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\omega &= \overline{2}{,}63361\\
\lambda o\gamma\, \eta\mu\varphi &= \overline{1}{,}79285\\
-\frac{1}{2}\lambda o\gamma\beta &= \overline{1}{,}89166\\
\hline
\lambda o\gamma\, \eta\mu x &= \overline{1}{,}17960\\
x &= 8^0\, 41'\, 36''
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

46) Ὑπάρχει γωνία θ τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι:

i) λογ ημθ=0,02775 ; ii) λογ ημθ=0 ;

47) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν τριγων. πινάκων ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$y=50.\frac{\eta\mu 64^0\,23'\ \eta\mu 69^0\,24'}{\eta\mu 79^0\,19'\ \eta\mu 9^0\,55'}.$$

48) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν πινάκων ἡ (ὀξεῖα) γωνία x ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\varepsilon\varphi 3x=\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\beta}}$$

ὅπου $\alpha=27^0\,43'\,17''$, $\beta=39^0\,18'\,36''$.

49) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν πινάκων ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}.$$

50) Ἐὰν $\eta\mu^2\theta=\frac{4731}{4900}$ ὑπολογίσατε τὴν θ καὶ τὴν παράστασιν $70\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}$.

51) Ἐὰν $\omega=18^0 4'$, $\varphi=52^0\,6'$ ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως:

$$714\,\eta\mu\frac{\varphi+\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi-\omega}{2}.$$

15. Ἐπίλυσις τριγώνου.

Καλεῖται ἐπίλυσις τριγώνου, ὁ ὑπολογισμὸς ὅλων τῶν κυρίων στοιχείων του (§ 6) **βάσει ἐπαρκῶν δεδομένων.** Τὰ δεδομένα ταῦτα δύνανται νὰ εἶναι τρία κύρια στοιχεῖα ἢ τρία ἄλλα στοιχεῖα σχέσιν ἔχοντα πρὸς τὸ τρίγωνον (ὕψη, διχοτόμοι, ἀκτῖνες ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου κύκλου, ἐμβαδόν, κ.τ.λ. λεγόμενα *«δευτερεύοντα στοιχεῖα»*) ἢ κύρια καὶ δευτερεύοντα μαζὶ ἢ καὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τούτων. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ παρόντος βιβλίου θὰ ἀρκεσθῶμεν εἰς ἁπλᾶς τινας, ἀλλὰ βασικὰς περιπτώσεις ἐπιλύσεως καθ' ἃς δίδονται κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

16. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίου τριγώνου βάσει κυρίων στοιχείων.

α') **Ἐπίλυσις ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ δύο καθέτων πλευρῶν.** Ἐὰν δοθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ β, γ ὀρθογωνίου τριγώνου (βλ. § 6) τότε δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ λοιπὰ κύρια στοιχεῖα, λογαριθμικῶς, βάσει τῶν τύπων τῆς § 7. Ἡ γωνία Β εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως εφΒ=β/γ καὶ ἀκολούθως ἡ ὑποτείνουσα ἐκ τῆς β=α ημ Β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω β=10728,40 m, γ=9875,47 m. Ἐκ τῆς εφΒ= =β/γ, ἔχομεν λογ εφΒ=λογβ−λογγ :

ὑπολογισμὸς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν	
λογβ	= 4,03054
—λογγ	= $\overline{4}$,00544
λογ εφΒ	= 0,03598
Β	= $47^0\ 22'\ 14''$
90^0	= $89^0\ 59'\ 60''$
90^0—Β=Γ	= $42^0\ 37'\ 46''$

Διὰ τὴν ὑποτείνουσαν α ἔχομεν: $\alpha=\beta/\eta\mu B$

λογβ	= 4,03054
—λογ ημΒ	= 0,13325
λογα	= 4,16379
α	= 14589 m

β´) **Ἐπίλυσις ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς.** Τὰ δεδομένα εἶναι τώρα ἡ α καὶ ἡ κάθετος, ἔστω β. Τὰ ζητούμενα εἶναι αἱ Β, Γ, γ.

Ἐκ τῆς σχέσεως ημΒ=β/α δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν Β, τὴν δὲ γ ἀκολούθως ἐκ τῆς γ=α συνΒ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δεδομένα: α=15647 m, β=9851 m.
Ἔχομεν: ημΒ = β/α, λογ ημΒ = λογβ — λογα καὶ γ = ασυνΒ, ἄρα λογγ = λογα + λογ συνΒ. Ἐξ αὐτῶν:

ὑπολογισμὸς τῶν Β καὶ Γ	
λογβ	= 3,99348
—λογα	= $\overline{5}$,80557
λογ ημΒ	= $\overline{1}$,79905
Β	= $39^0\ 1'\ 8''$
90^0	= $89^0\ 59'\ 60''$
90^0—Β=Γ	= $50^0\ 58'\ 52''$

ὑπολογισμὸς τῆς γ	
λογα	= 4,19443
λογ συνΒ	= $\overline{1}$,89039
λογ γ	= 4,08482
γ	= 12157 m

γ´) **Ἐπίλυσις ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας.** Τὰ δεδομένα εἶναι τώρα τὰ α καὶ Β. Ζητούμενα δὲ τὰ Γ, β, γ. Ἡ Γ=90^0—B^0, ἡ β=α ημΒ καὶ ἡ γ=α συνΒ.

Ἔστω π.χ. α=1857 m, Β=$87^0\ 35'\ 30''$. Θὰ ἔχωμεν:

ὑπολογισμὸς τῆς β	
β	$= \alpha\ \eta\mu B$
$\lambda o\gamma\beta$	$= \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\ \eta\mu B$
$\lambda o\gamma\alpha$	$= 3{,}26881$
$\lambda o\gamma\ \eta\mu B$	$= \overline{1}{,}99961$
$\lambda o\gamma\beta$	$= 3{,}26842$
β	$= 1854{,}30$ m

ὑπολογισμὸς τῆς γ	
γ	$= \alpha\ \sigma\upsilon\nu B$
$\lambda o\gamma\gamma$	$= \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu B$
$\lambda o\gamma\alpha$	$= 3{,}26881$
$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu B$	$= \overline{2}{,}62346$
$\lambda o\gamma\gamma$	$= 1{,}89227$
γ	$= 78{,}03$ m

δ') **Ἐπίλυσις ἐκ μιᾶς καθέτου καὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας.** Τὰ δεδομένα εἶναι ἔστω ἡ β καὶ ἡ Β. Τὰ ζητούμενα : Γ, γ, α. Εἶναι $\Gamma = 90^0 - B^0$, $\gamma = \beta\sigma\varphi B$, $\beta = \alpha\eta\mu B$.

Ἔστω π.χ. $\beta = 5734{,}25$ m, $B = 37^0\,29'\,12''$.

ὑπολογισμὸς τῆς γ	
γ	$= \beta\ \sigma\varphi B$
$\lambda o\gamma\gamma$	$= \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\ \sigma\varphi B$
$\lambda o\gamma\beta$	$= 3{,}75848$
$\lambda o\gamma\ \sigma\varphi B$	$= 0{,}11523$
$\lambda o\gamma\gamma$	$= 3{,}87371$
γ	$= 7476{,}62$ m

ὑπολογισμὸς τῆς α	
α	$= \beta / \eta\mu B$
$\lambda o\gamma\alpha$	$= \lambda o\gamma\beta - \lambda o\gamma\ \eta\mu B$
$\lambda o\gamma\beta$	$= 3{,}75848$
$-\lambda o\gamma\ \eta\mu B$	$= 0{,}21568$
$\lambda o\gamma\alpha$	$= 3{,}97416$
α	$= 9422{,}39$ m

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

52) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται :

i) $\beta = 52{,}34$, $\gamma = 28{,}80$. ii) $\beta = 48$, $B = 32^o 37'$,

iii) $\alpha = 176$, $\beta = 160{,}50$, iv) $\alpha = 578{,}25$, $B = 36^o 51' 23''$.

53) Ποῖον τὸ μῆκος χορδῆς κύκλου ἀπεχούσης 20 m ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅταν ἡ χορδὴ ὑποτείνη τόξον 82^0 ;

54) Ἡ διαγώνιος ἑνὸς ρόμβου σχηματίζει γωνίαν 62^0 μὲ τὴν πλευρὰν καὶ ἔχει μῆκος 5 cm. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου ;

55) Αἱ ἔκ τινος σημείου ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς ἕνα κύκλον σχηματίζουν γωνίαν 54^0 καὶ ἔχουν μῆκος 14 cm ἑκάστη. Εὕρετε πόσον ἀπέχει τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

56) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία $A = 46^0 36'$ ἡ δὲ κάθετος ἐκ τοῦ Β πρὸς τὴν ΑΓ τέμνει τὴν ΑΓ εἰς σημεῖον Δ τοιοῦτον ὥστε $A\Delta = 5{,}2$ cm, $\Delta\Gamma = 3{,}8$cm. Ὑπολογίσατε τὴν ΒΔ καὶ κατόπιν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

57) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα χωρίζεται ὑπὸ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους εἰς δύο τμήματα μήκους 3596,32 καὶ 2465,15.

58) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες R καὶ ρ δύο κύκλων γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι 714, ἡ ὑπὸ τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων των σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση πρὸς $36^0 8'$ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ἐσω-

τερικῶν κοινῶν ἐφαπτομένων σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση πρὸς $104^{0}12'$.

59) Πόση εἶναι εἰς ἀκτίνια ἡ ἐπίκεντρος γωνία κύκλου ἀκτῖνος 100 cm ἡ ὁποία ὑποτείνει τόξον μήκους 30 cm;

60) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 m χαράσσεται χορδὴ μήκους 5,6 m. Ποῖα τὰ μήκη τῶν δύο τόξων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ χορδὴ χωρίζει τὴν περιφέρειαν;

61) Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμου ΑΒΓΔ οὗτινος ΑΒ=10 cm, ΑΔ=8 cm καὶ $\widehat{BA\Delta}=38^{0}25'$.

62) Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου ἔχουν μήκη 18,2 cm καὶ 25,8 cm. Ἡ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένη γωνία εἶναι $32^{0}42'$. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

63) Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο κύκλων εἶναι 80 cm αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν κύκλων 40 cm καὶ 30 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο τούτων κύκλων καθὼς καὶ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ κοιναὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι.

64) Ποία ἡ ἀκτὶς κύκλου ὅταν μία χορδή του εἶναι 30 cm ἐνῷ ἡ γωνία τῆς χορδῆς ταύτης μετὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἕνα ἄκρον τῆς χορδῆς εἶναι 42^{0};

65) Εὕρετε πόσοι τὸ πολὺ κύκλοι διαμέτρου 2 cm ἠμποροῦν νὰ τοποθετηθοῦν μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν ἀκτίνων 10 cm καὶ 12 cm χωρὶς ὁ ἕνας νὰ καλύπτῃ τὸν ἄλλον.

66) Κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ κανονικὸν πεντάγωνον ἔχουν τὴν ἰδίαν περίμετρον. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των, κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ, εἶναι 1,05.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Σχέσεις μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων τυχόντος τριγώνου

17. Τὸ ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας.

Ὡς γνωστόν, ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ἀμβλεῖα γωνία καλεῖται ἡ μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς καὶ συγχρόνως, μικροτέρα τῶν 2 ὀρθῶν. Πρὸς τὸ παρόν, θὰ καλοῦμεν ἡμίτονον μιᾶς ἀμβλείας γωνίας, τὸ *ἡμίτονον τῆς παραπληρωματικῆς* της ἥτις εἶναι ὀξεῖα. (Δικαιολογία τοῦ ὁρισμοῦ τούτου δίδεται εἰς τὸ Β′ μέρος). Ἔτσι π.χ. $ημ120^0 = ημ60^0 = \sqrt{3}/2$, $ημ135^0 = ημ45^0 = \sqrt{2}/2$, $ημ150^0 = ημ30^0 = 1/2$ (§ 10). Κατὰ ταῦτα : «**δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι, ἔχουν ἴσα ἡμίτονα**». Ἑπομένως ἂν Α, Β, Γ αἱ γωνίαι τριγώνου καὶ Α′, Β′, Γ′ αἱ *ἐξωτερικαὶ γωνίαι* αὐτοῦ, θὰ εἶναι $Α + Α' = Β + Β' = Γ + Γ' = 180^0$ καὶ συνεπῶς $ημΑ = ημΑ'$, $ημΒ = ημΒ'$, $ημΓ = ημΓ'$.

Γενικῶς, **δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα.**

Εἶναι ἐπίσης προφανὲς ὅτι δύο **ἀμβλεῖαι** γωνίαι ἔχουσαι ἴσα ἡμίτονα, εἶναι ἴσαι. (Διότι αἱ παραπληρωματικαί των, ὡς ὀξεῖαι ἔχουσαι ἴσα ἡμίτονα, εἶναι ἴσαι).

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν τὸ κάτωθι θεμελιῶδες θεώρημα ὅπερ καλεῖται *κανὼν (ἢ νόμος) τῶν ἡμιτόνων.*

18. Νόμος τῶν ἡμιτόνων.

Εἰς πᾶν τρίγωνον αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι (ἐσωτερικῶν ἢ ἐξωτερικῶν) γωνιῶν ὁ δὲ λόγος οἱασδήποτε πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 18) καὶ α, β, γ, Α, Β, Γ τὰ ἓξ κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ (§ 6). Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψος ΑΔ, τὸ τρίγωνον χωρίζεται εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα.

Ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν:

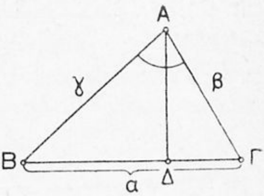
(1) $(ΑΔ)=γ\,ημΒ$ (§ 7, θεώρ. I)

καὶ ἐκ τοῦ ΑΔΓ:

(2) $(ΑΔ)=β\,ημΓ$.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται: $βημΓ=γημΒ$

ἢ ἀκόμη: $\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}$.



Σχ. 18

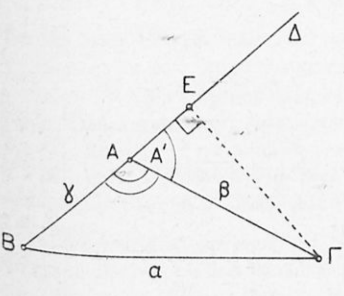
Φέροντες καὶ τὸ ἐκ τοῦ Β ὕψος ἀποδεικνύομεν ὁμοίως ὅτι:

$$\frac{γ}{ημΓ}=\frac{α}{ημΑ}.$$

Ὥστε ἔχομεν: $$\frac{α}{ημΑ}=\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}.$$

δηλ. τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος ἰσχύει.

Ἔστω τώρα ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Α ἡ ἀμβλεῖα γωνία (σχ. 19). Ἄς καλέσωμεν Α′ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς Α γωνίαν ΓΑΔ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΓΕ καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΓΕΒ καὶ ΓΕΑ:



Σχ. 19

$(ΓΕ)=α\,ημ\,Β$, $(ΓΕ)=β\,ημ\,Α'$

δηλ. $α\,ημΒ=β\,ημΑ'$ ἢ $\frac{α}{ημΑ'}=\frac{β}{ημΒ}$

Φέροντες καὶ τὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος λαμβάνομεν (ὅπως προηγουμένως, σχ. 18):

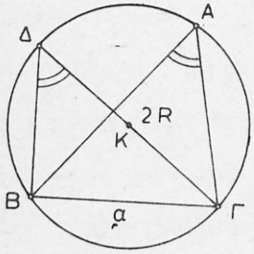
$\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}$. Ὥστε καὶ πάλιν

ἔχομεν: $\frac{α}{ημΑ'}=\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}$.

Ἐπειδὴ ὅμως $ημΑ'=ημΑ$ ὅπως εἴδομεν προηγουμένως (§ 16), ἔχομεν καὶ πάλιν: $$\frac{α}{ημΑ}=\frac{β}{ημΒ}=\frac{γ}{ημΓ}.$$

Τέλος ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, ἐπειδὴ τότε $ημΑ=1$ (§ 10, γ′) αἱ σχέσεις $β=αημΒ$, $γ=αημΓ$ γίνονται $βημΑ=αημΒ$, $γ\,ημΑ=α\,ημΓ$ καὶ δίδουν πάλιν: $α/ημΑ=β/ημΒ=γ/ημΓ$.

Ἔστω τώρα, R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ ΑΒΓ κύκλου (σχ. 20) καὶ Α μία ὀξεῖα γωνία τοῦ τριγώνου.



Σχ. 20

Ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΓΔ=2R καὶ τὴν ΔΒ, τότε ἡ μὲν γωνία ΔΒΓ θὰ εἶναι ὀρθὴ (ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον) ἡ δὲ γωνία ΒΔΓ=Δ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α (διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον). Ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΔΒΓ λαμβάνομεν:

$(\text{ΒΓ})=(\text{ΓΔ})\text{ημ}\Delta$ ἢ $\alpha=2R\,\text{ημ}A$ ἢ

$\dfrac{\alpha}{\text{ημ}A}=2R$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν *πάντοτε*:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\text{ημ}A}=\frac{\beta}{\text{ημ}B}=\frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}=2R} \quad (11) \quad \text{ἢ}$$

$$\boxed{\alpha=2R\,\text{ημ}A,\quad \beta=2R\,\text{ημ}B,\quad \gamma=2R\,\text{ημ}\Gamma} \quad (11\alpha)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

67) Δείξατε ὅτι μεταξὺ τῶν 6 κυρίων στοιχείων παντὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$\alpha(\text{ημ}B-\text{ημ}\Gamma)+\beta(\text{ημ}\Gamma-\text{ημ}A)+\gamma(\text{ημ}A-\text{ημ}B)=0.$$

68) Ἐὰν R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου καὶ υ_α τὸ ἐπὶ τὴν ΒΓ=α ὕψος τοῦ τριγώνου, δείξατε ὅτι: $\upsilon_\alpha=2R\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma$.

69) Ἔστωσαν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οἱ πόδες Δ, Ε, Ζ σχηματίζουν τὸ *ὀρθικὸν τρίγωνον* ΔΕΖ. Δείξατε (γεωμετρικῶς) ὅτι $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{Z}\mathrm{A}}=\Gamma$, $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{E}\mathrm{A}}=B$ καὶ ἐφαρμόζοντες εἰς τὸ τρίγωγον ΑΖΕ τὸν νόμον τῶν ἡμιτόνων ὑπολογίσατε τὴν πλευρὰν ΖΕ τοῦ ὀρθικοῦ. Δείξατε ὅτι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου εἶναι: $\alpha\,\text{συν}A$, $\beta\,\text{συν}B$, $\gamma\,\text{συν}\Gamma$.

70) Ἔστω ΑΒΓ ὀξυγώνιον τρίγωνον, ΑΔ τὸ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψος καὶ Η τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὑψῶν αὐτοῦ. Ἐὰν R ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου δείξατε ὅτι: $(\text{ΗΔ})=2R\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma$, $(\text{ΑΗ})=2R\,\text{συν}A$.

19. Τύποι τοῦ Mollweide.

α΄) Μεταξὺ τῶν 6 κυρίων στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου ΑΒΓ ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$\boxed{\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\frac{A}{2}} \quad (12) \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\,\text{ημ}\frac{A}{2}} \quad (13)$$

(ὑποτίθεται $\beta>\gamma$).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται $\beta > \gamma$ (σχ. 21). Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ τμῆμα ΑΔ=ΑΒ=γ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, τμῆμα ΑΕ=ΑΒ=γ.

Ἂν ἀχθῇ ἡ ΒΕ, τότε ἡ γωνία ΓΒΕ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου. Διότι, τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του θὰ ἰσοῦται μὲ $90^0 - \frac{A}{2}$. Ὥστε:

$$\widehat{\Gamma B E} = \widehat{\Gamma B A} - \widehat{E B A} = B - \left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = B + \frac{A}{2} - 90^0 =$$

$$= B + \frac{A}{2} - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{B}{2} - \frac{\Gamma}{2}.$$

Ἔχομεν λοιπόν: $\widehat{\Gamma B E} = \omega = \frac{B - \Gamma}{2}$. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ΑΕ= =ΑΒ=ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΕΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β (ἐγγράφεται εἰς ἡμικύκλιον διαμέτρου ΕΔ) ἐπομένως $\widehat{E B \Delta} = \widehat{E B H} = 90^0$ καὶ ἐπομένως ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΓΒΗ=φ τοῦ τριγώνου ΓΒΔ ἰσοῦται πρὸς $\widehat{E B H} - \widehat{\Gamma B E}$, δηλ:

(1) $\varphi = 90^0 - \omega$.

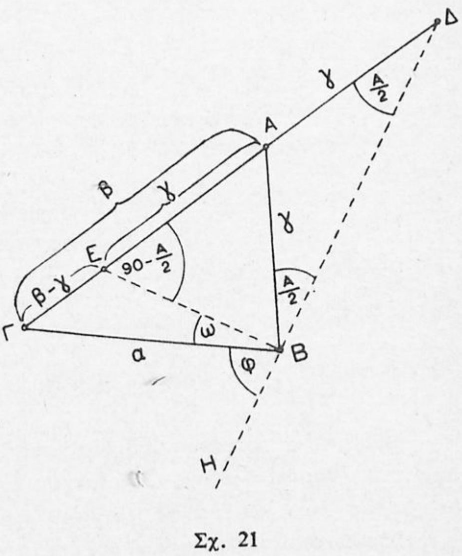
Τέλος, ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΔ ἔχομεν ὅτι ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΓΑΒ= =Α, συνεπῶς:

$$\widehat{\Delta} = \widehat{A}/2.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῶν ἡμιτόνων εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΒ λαμβάνομεν (βλ. § 9).

$$\frac{\Gamma E}{\eta\mu\omega} = \frac{\Gamma B}{\eta\mu\left(90 - \frac{A}{2}\right)} \quad \text{ἤτοι}$$

$$\frac{\beta - \gamma}{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}} = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$$



Σχ. 21

καὶ ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης λαμβάνομεν τὸν ἀποδεικτέον τύπον **12.**

Ἐὰν εἶναι $\beta < \gamma$ ὁ τύπος **12** πρέπει νὰ γραφῇ

$$\eta\mu\frac{\Gamma-B}{2}=\frac{\gamma-\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῶν ἡμιτόνων εἰς τὸ τρίγωνον ΔΓΒ λαμβάνομεν:

$$\frac{\Gamma\Delta}{\eta\mu\varphi}=\frac{\Gamma B}{\eta\mu\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma\Delta}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\Gamma B}{\eta\mu\Delta}$$ (διότι $\eta\mu\varphi=\sigma\upsilon\nu\omega$ λόγῳ τῆς (1)),

ἢ $$\frac{\beta+\gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}=\frac{\alpha}{\eta\mu\frac{A}{2}}$$ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν ἀποδεικτέαν **13**:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}.$$

β') Οἱ ὅμοιοι τύποι πρὸς τοὺς ἀνωτέρω. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\alpha>\gamma$, θὰ ἰσχύῃ προφανῶς ὁ ὅμοιος πρὸς τὸν **12** τύπος:

12α $$\boxed{\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}$$

ὅστις ἐκφράζει τὴν ἰδίαν σχέσιν τὴν ὁποίαν ἐκφράζει καὶ ὁ **12** καὶ ἔχει βεβαίως τὴν ἰδίαν συγκρότησιν. Ὁ **12** παρέχει τὸ ἡμίτονον τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ συναρτήσει τῆς τρίτης γωνίας καὶ τῶν πλευρῶν καὶ ὁ **12α** κάμνει τὸ ἴδιον διὰ τὸ ἡμίτονον τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ.

Ἂν τέλος, ὑποτεθῇ $\beta>\alpha$, θὰ ἰσχύῃ καὶ ὁ ὅμοιος πρὸς τὸν **12** τύπος:

$$\eta\mu\frac{B-A}{2}=\frac{\beta-\alpha}{\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἐντελῶς ἀναλόγως κατασκευάζομεν καὶ τοὺς ὁμοίους τύπους πρὸς τὸν **13**.

20. Κανὼν τῶν ἐφαπτομένων.

«Εἰς πᾶν τρίγωνον, ἡ διαφορὰ δύο πλευρῶν, ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὃν λόγον ἔχει ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν».

Ἀπόδειξις. Διὰ διαιρέσεως τῶν τύπων **12** καὶ **13** (τοῦ Mollweide) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\mathbf{14}\qquad \boxed{\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}}$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$ καὶ $\frac{B+\Gamma}{2}$ εἶναι συμπληρωματικαί, ἡ σφ$\frac{A}{2}$ ἰσοῦται μὲ εφ$\frac{B+\Gamma}{2}$ (§ 9) ὥστε ὁ τύπος **14** γράφεται :

$$\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$\mathbf{15}\qquad \boxed{\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}}}$$

ἥτις ἐκφράζει τὸν κανόνα τῶν ἐφαπτομένων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71) Γράψατε τοὺς δύο ὁμοίους πρὸς τὸν **13** τύπους καθὼς καὶ τοὺς δύο ὁμοίους πρὸς τὸν **15**.

72) Ἀποδείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

i) $(\beta-\gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+(\beta+\gamma)^2\eta\mu^2\frac{A}{2}=\alpha^2$

ii) $(\beta-\gamma)\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}=(\beta+\gamma)\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}$.

73) Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $(\beta+\gamma)/\alpha=\sqrt{2}$ καὶ $B-\Gamma=90^0$. Ὑπολογίσατε, βάσει τοῦ τύπου **13** τὰς γωνίας Α, Β, Γ (ἄνευ πινάκων).

21. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τριγώνου.

α΄) Διὰ νὰ λάβουν ὡρισμένοι τριγωνομετρικοὶ τύποι, ἁπλῆν καὶ κομψὴν μορφήν, παριστάνομεν τὴν *περίμετρον* τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διὰ τοῦ 2τ. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$2\tau=\alpha+\beta+\gamma, \qquad 2\tau-2\alpha=\beta+\gamma-\alpha \quad \text{καὶ συνεπῶς :}$$

$$(1)\qquad \beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha).$$

Ὁμοίως : $\gamma+\alpha-\beta=2(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$.

β΄) Πρὸς εὕρεσιν, τώρα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{\Gamma}{2}$ ἀνατρέχομεν εἰς τοὺς τύπους **12** καὶ **13** τοὺς ὁποίους ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$ (καὶ τάς: $\eta\mu^2\theta=1-\sigma\upsilon\nu^2\theta$, $\sigma\upsilon\nu^2\theta=$ $=1-\eta\mu^2\theta$). Ἔτσι λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$(2)\quad \eta\mu^2\frac{B-\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{(\beta-\gamma)^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha^2}\eta\mu^2\frac{A}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$1=\frac{(\beta-\gamma)^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha^2}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}\right) \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha^2=(\beta-\gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+(\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$\{(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2\}\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=(\beta+\gamma)^2-\alpha^2 \quad \text{ἤ}$$

$$4\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha).$$

Βάσει τῶν (1), ἡ τελευταία αὕτη γίνεται:

$$4\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=2\tau\,.\,2(\tau-\alpha) \quad \text{καὶ δίδει}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

Ἐντελῶς ἀνάλογοι τύποι θὰ ἰσχύουν προφανῶς καὶ διὰ τὰ $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$, προερχόμενοι ἐκ τοῦ τελευταίου διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων (βλέπε καὶ § 19, β'). Ὥστε ἔχομεν τελικῶς:

$$\underline{\mathbf{16}}\quad \boxed{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}},\ \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}}$$

Οἱ τύποι <u>16</u> παρέχουν **τὰ συνημίτονα τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

γ') Ἡ ἰσότης (2) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$1=\frac{(\beta-\gamma)^2}{\alpha^2}\left(1-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha^2}\eta\mu^2\frac{A}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha^2=(\beta-\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2\eta\mu^2\frac{A}{2}+(\beta+\gamma)^2\eta\mu^2\frac{A}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=\{(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2\}\eta\mu^2\frac{A}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)=4\beta\gamma\,\eta\mu^2\frac{A}{2} \quad \text{ἢ (λόγω τῶν (1))}$$

$$2(\tau-\gamma)\,2(\tau-\beta) = 4\beta\gamma \cdot \eta\mu^2\frac{A}{2}$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν:

$$\eta\mu^2\frac{A}{2}=\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma} \text{ ἢ } \eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}.$$

Ἔτσι ἔχομεν τοὺς τύπους:

17

$$\boxed{\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}},\ \eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}},\ \eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}}$$

παρέχοντας **τὰ ἡμίτονα τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν.**

δ') Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τοῦ πρώτου ἐκ τῶν 17 καὶ τοῦ πρώτου ἐκ τῶν 16 λαμβάνομεν:

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

καὶ δι' ὁμοίου τρόπου εὑρίσκομεν τὰς $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$.

Ἔτσι ἔχομεν καὶ τοὺς τύπους:

18

$$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}},\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}},\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}}$$

παρέχοντας **τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, συναρτήσει τῶν πλευρῶν.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

74) Ἐὰν α, β, γ αἱ πλευραί, Α, Β, Γ αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ καὶ τ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτοῦ, νὰ δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

i) $1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\gamma}{\tau}$.

ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}}{\alpha}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}}{\beta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}}{\gamma}=\dfrac{\tau^2}{\alpha\beta\gamma}$.

75) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἡμιπερίμετρος τ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος:

$$\tau=\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{B}{2}\right)+\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

76) Τρεῖς κύκλοι Κ, Λ, Μ μὲ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως α, β, γ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Δείξατε ὅτι:

$$εφ\frac{\widehat{ΛΚΜ}}{2}=\sqrt{\frac{βγ}{α(α+β+γ)}}.$$

77) Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ὅτι (ΑΓ) = β = 34 m, (ΑΒ) = γ = 20 m, καὶ ὅτι ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀγομένη διάμεσος (ΑΔ) = 21 m. Ἐὰν κληθῇ x ἡ γωνία ΒΑΔ καὶ y ἡ γωνία ΔΑΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι $εφ\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ καὶ $εφ\frac{y}{2}=\frac{1}{4}$.

78) Αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν μήκη α = 13, β = 14, γ = 15. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως: $σφ\frac{Α}{2}+σφ\frac{Β}{2}+σφ\frac{Γ}{2}$.

22. Τὸ συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας.

Εἰς τὴν § 17 ὡρίσαμεν τὸ ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας. **Ὡς συνημίτονον μιᾶς ἀμβλείας γωνίας φ ὁρίζομεν** (πρὸς τὸ παρὸν) **τὸ ἀντίθετον τοῦ συνημιτόνου τῆς παραπληρωματικῆς της,** δηλ. τῆς $(180^0-φ)$, ἥτις εἶναι ὀξεῖα. (Εἰς τὸ Β′ μέρος τοῦ παρόντος δικαιολογεῖται ὁ ὁρισμὸς αὐτός). Ἑπομένως, *ἡ ἀμβλεῖα γωνία ἔχει συνημίτονον ἀρνητικόν*. Ἔτσι π.χ. θὰ ἔχωμεν

$συν150^0=-συν30^0=-\sqrt{3}/2$, $\quad συν135^0=-συν45^0=-\sqrt{2}/2$,

$συν120^0=-συν60^0=-1/2$, $\quad συν160^0=-συν20^0=-0,93969$

$συν139^0\,50'=-συν40^0\,10'=-0,76417$.

Ἐπίσης, ἂν Α, Β, Γ εἶναι αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου καὶ Α′, Β′, Γ′ αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$Α+Α'=Β+Β'=Γ+Γ'=180^0 \quad \text{καὶ συνεπῶς:}$$

$$συνΑ'=-συνΑ,\quad συνΒ'=-συνΒ,\quad συνΓ'=-συνΓ.$$

Γενικῶς: **δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι ἔχουν ἀντίθετα συνημίτονα.**

23. Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας.

Ὡς ἐφαπτομένην μιᾶς ἀμβλείας γωνίας ὁρίζομεν τὸ πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου της διὰ τοῦ συνημιτόνου της καὶ ὡς συνεφαπτομένην, τὸ ἀντίστροφον τῆς ἐφαπτομένης:

$$εφθ=ημθ/συνθ,\quad σφθ=1/εφθ=συνθ/ημθ.$$

Ἡ ἀμβλεῖα γωνία, ἔχει ἐφαπτομένην ἀρνητικήν. Ὁμοίως καὶ συνεφαπτομένην ἀρνητικήν.

24. Κανὼν τοῦ συνημιτόνου

Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν μεῖον τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Ἤτοι, ἰσχύουν εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ, οἱ τύποι :

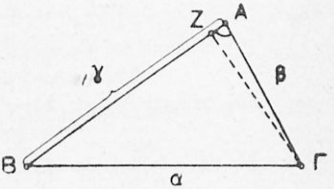
19
$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^2&=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A\\ \beta^2&=\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma\,\text{συν}B\\ \gamma^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma \end{aligned}}$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω πρῶτον, ἡ γωνία Α, ὀξεῖα (σχ. 22). Φέροντες τὸ ὕψος ΓΖ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ γνωστὸν θεώρημα τῆς Γεωμετρίας, περὶ τοῦ τετραγώνου μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου κειμένης ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, λαμβάνομεν :

(1) $(B\Gamma)^2=(A\Gamma)^2+(AB)^2-2(AB)(AZ)$

καὶ ἐπειδὴ $(B\Gamma)=\alpha$, $(A\Gamma)=\beta$, $(AB)=\gamma$, $(AZ)=(A\Gamma)\text{συν}A=\beta\,\text{συν}A$ (ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΖΓ), ἡ (1) γίνεται :

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A.$$

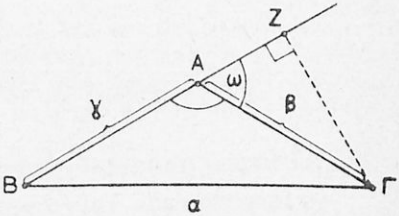


Σχ. 22

Ἔστω τώρα ἡ Α ἀμβλεῖα (σχ. 23). Τὸ θεώρημα περὶ τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς κειμένης ἀμβλείας γωνίας δίδει τώρα :

(2) $(B\Gamma)^2=(A\Gamma)^2+(AB)^2+2(AB)(AZ)$.

Εἶναι ὅμως $(AZ)=(A\Gamma)\text{συν}\omega=\beta\,\text{συν}\omega$ καὶ $\text{συν}A=-\text{συν}\omega$ (§ 22) ἄρα, $(AZ)=-\beta\,\text{συν}A$.



Σχ. 23

Ἑπομένως ἡ (2) γίνεται :

(3) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A$

ἤτοι ἔχομεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Φυσικά, ἰσχύουν καὶ οἱ ὅμοιοι πρὸς τὸν (3) τύποι $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma\,\text{συν}B$, $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma$ οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὸ αὐτὸ θεώρημα (κανόνα τοῦ συνημιτόνου).

Ἐκ τῶν 19 ἕπονται οἱ τύποι :

20
$$\boxed{\text{συν}A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma},\quad \text{συν}B=\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\gamma},\quad \text{συν}\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}}$$

ἐκφράζοντες τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν τοῦ ΑΒΓ συναρτήσει τῶν πλευρῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Ἐὰν μεταξὺ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:**
$\gamma^4-2(\alpha^2+\beta^2)\gamma^2+\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἢ $\Gamma=60^0$ ἢ $\Gamma=120^0$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν λύσωμεν τὴν δοθεῖσαν σχέσιν ὡς πρὸς γ^2 (δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ὡς πρὸς γ^2) εὑρίσκομεν:

(1) $\gamma^2=(\alpha^2+\beta^2)\pm\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4)}=\alpha^2+\beta^2\pm\alpha\beta$.

Ἀλλὰ $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$ σύμφωνα πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου. Ἑπομένως ἡ (1) γίνεται:

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha^2\beta^2\pm\alpha\beta$ ἢ $-2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\pm\alpha\beta$ καὶ δίδει:

$\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{1}{2}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\Gamma=-\frac{1}{2}$, δηλ. $\Gamma=60^0$ ἢ $\Gamma=120^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79) Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει:

$$2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A+2\gamma\alpha\,\sigma\upsilon\nu B+2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

80) Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma\sigma\upsilon\nu B)=\beta^2-\gamma^2.$$

81) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{6}$, $\gamma=1+\sqrt{3}$. Δείξατε ὅτι $\sigma\upsilon\nu A=1/\sqrt{2}$. Πόση εἶναι ἡ Α;

82) Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\varepsilon\varphi A=(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)\varepsilon\varphi B.$$

83) Ἐὰν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι: $2k+3$, k^2+3k+3, k^2+2k, ὅπου k θετικὸς ἀριθμός, δείξατε ὅτι ἡ μεγαλυτέρα γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση μὲ 120^0.

84) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $A=120^0$ δείξατε ὅτι τότε:

$$\gamma(\alpha^2-\gamma^2)=\beta(\alpha^2-\beta^2).$$

85) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:
$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)$ νὰ δειχθῇ ὅτι τότε $\Gamma=45^0$ ἢ $\Gamma=135^0$.

25. Αἱ θεμελιώδεις σχέσεις μεταξὺ τῶν 6 κυρίων στοιχείων παντὸς τριγώνου.

Αἱ τρεῖς σχέσεις:

$$A+B+\Gamma=180^0\,,\qquad \alpha/\eta\mu A=\beta/\eta\mu B\,,\qquad \beta/\eta\mu B=\gamma/\eta\mu\Gamma$$

εἶναι αἱ θεμελιώδεις σχέσεις αἱ συνδέουσαι τὰ 6 μεγέθη Α, Β, Γ, α, β, γ. Αὗται εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων. Ὅλαι αἱ ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν 6 κυρίων στοιχείων αἱ εὑρεθεῖσαι εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον εἶναι **συνέπειαι** τῶν τριῶν θεμελιωδῶν, διότι ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλαι δύνανται νὰ προκύψουν ἀπὸ τὰς τρεῖς ἀνωτέρω θεμελιώδεις διὰ καταλλήλων συνδυασμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ἐπίλυσις οἱουδήποτε τριγώνου ὅταν δίδωνται ἐπαρκῆ κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ

Εἰς τὴν § 15 εἴδομεν, τί καλεῖται ἐπίλυσις τριγώνου καὶ εἰς τὴν § 16 εἴδομεν τὰς τέσσαρας περιπτώσεις ἐπιλύσεως ὀρθογωνίου τριγώνου βάσει κυρίων στοιχείων αὐτοῦ.

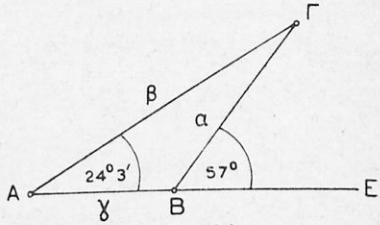
Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις ἐπιλύσεως τυχόντος (πλαγιογωνίου) τριγώνου τοῦ ὁποίου δίδονται τρία κύρια στοιχεῖα (ὄχι ὅλα γωνίαι). Αὗται εἶναι τέσσαρες.

26. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν.

Ἐκ τῶν 6 κυρίων στοιχείων α, β, γ, Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἔστω ὅτι δίδονται τὰ α, Β, Γ. Ζητούμενα εἶναι τότε τὰ Α, β, γ.

Ἐκ τῶν ζητουμένων, ἡ μὲν Α εὑρίσκεται ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως $Α = 180^0 - (Β + Γ)$ (*) αἱ δὲ δύο ὑπολειπόμεναι πλευραὶ β, γ ὑπολογίζονται εὐχερῶς βάσει τοῦ κανόνος τῶν ἡμιτόνων: $β/ημΒ = α/ημΑ$, ἄρα $\boxed{β = α\,ημΒ/ημΑ}$ καὶ $γ/ημΓ = α/ημΑ$, ἄρα $\boxed{γ = α\,ημΓ/ημΑ}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ἀποστάσεως σημείου Α ἀπὸ ἀπροσίτου σημείου Γ, ἐχαράχθη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ μήκους 117,80 m** (σχ. 24) **καὶ ἐμετρήθησαν διὰ γωνιομέτρου (θεοδολίχου) αἱ γωνίαι $\widehat{ΒΑΓ} = Α$ καὶ $\widehat{ΑΒΓ} = Β$ εὑρεθεῖσαι: $Α = 24^0 3'$, $Β = 123^0$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ΑΓ.**



Σχ. 24

Λύσις. Ἡ τρίτη γωνία τοῦ τρι-

(*) Ἐφ' ὅσον εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $180^0 - Β - Γ$ ὁ πρῶτος προσθετέος ἐκφράζει μοίρας, καὶ οἱ ἄλλοι ὅροι $-Β$, $-Γ$ ὑποτίθεται ὅτι ἐκφράζουν μοίρας. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ γράψωμεν $Α = π - (Β + Γ)$ ὁπότε αἱ Β, Γ καὶ Α θὰ ὑπετίθεντο εἰς ἀκτίνια. Ὁ κανὼν αὐτὸς θὰ ἀκολουθῆται πάντοτε ἐν τοῖς ἑπομένοις.

γώνου, $\Gamma = 180^0 - (A+B) = 32^0 57'$. Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία $B' = \widehat{\Gamma B E} = 57^0$ (σχ. 24).
Ὁ νόμος τῶν ἡμιτόνων δίδει:

$$\frac{\beta}{\eta\mu B'} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{καὶ συνεπῶς} \quad \beta = \frac{\gamma\eta\mu B'}{\eta\mu\Gamma}$$

ὅπου $\beta = (A\Gamma)$, $\gamma = 117{,}80$ m, $B' = 57^0$, $\Gamma = 32^0 57'$

ὑπολογισμὸς τῆς (ΑΓ)
$(A\Gamma) = \gamma\ \eta\mu B' / \eta\mu\Gamma$ $\lambda o\gamma\,(A\Gamma) = \lambda o\gamma\gamma + \lambda o\gamma\ \eta\mu B' - \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma$
$\lambda o\gamma\gamma = 2{,}07114$ $\lambda o\gamma\ \eta\mu B' = \bar{1}{,}92359$ $-\lambda o\gamma\ \eta\mu\Gamma = 0{,}26447$
$\lambda o\gamma(A\Gamma) = 2{,}25920$ $(A\Gamma) = 181{,}64$

Ὁμοίως γίνεται καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς $(B\Gamma) = \alpha$ διὰ τοῦ κανόνος τῶν ἡμιτόνων:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}, \qquad \alpha = \frac{\gamma\ \eta\mu A}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\gamma + \lambda o\gamma\ \eta\mu A - \lambda o\gamma\ \eta\mu\Gamma.$$

Εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων:

$$\lambda o\gamma\gamma = 2{,}07114$$
$$\lambda o\gamma\ \eta\mu A = \bar{1}{,}61016$$
$$-\lambda o\gamma\ \eta\mu\Gamma = 0{,}26447$$

Διὰ προσθέσεως: $\lambda o\gamma\alpha = 1{,}94577$

Ἐκ τῶν πινάκων: $\alpha = 88{,}26$ m

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

86) Πῶς δύναται νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ δύο γωνίας του;

87) Ἐπιλύσατε τὰ κάτωθι τρίγωνα προσδιορίζοντες τὰς ἀγνώστους πλευρὰς μὲ δύο δεκαδικὰ ψηφία.

i) Τρίγωνον οὗτινος δίδεται $\alpha = 2{,}4$ m, $B = 23^0$, $\Gamma = 78^0$.

ii) » » » $\beta = 3{,}1$ m, $A = \left(81\frac{1}{2}\right)^0$, $\Gamma = 42^0$.

iii) » » » $\gamma = 4$ m, $B = 48^0$, $A = \left(55\frac{1}{2}\right)^0$.

iv) » » » $\beta = 11{,}41$ m, $\Gamma = 29^0$, $A = 65^0 24'$.

v) » » » $\alpha = 139{,}8$ m, $B = 64^0 54'$, $\Gamma = 42^0 30'$.

vi) » » » $\gamma = 14{,}76$ m, $A = 138^0 31'$, $B = 35^0 17'$.

88) Παρατηρητὴς βλέπει τὰς κορυφὰς δύο ὀρέων εἰς ὕψη $9^0 30'$ καὶ $18^0 10'$ ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος, κεῖται δὲ μετ' αὐτῶν εἰς τὸ αὐτὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον. Ἐὰν ὁ παρατηρητὴς πλησιάσῃ κατὰ 6365 μέτρα κινούμενος ἐπὶ ὁριζοντίας γραμμῆς, βλέπει τότε ἀμφοτέρας τὰς κορυφὰς εἰς ὕψος 37^0 ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα. Ὑπολογίσατε τὰ ὕψη τῶν δύο ὀρέων.

89) Ἀεροπλάνον ἵπταται κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν σχηματίζουσαν γωνίαν $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$ πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, κατευθύνεται δὲ πρὸς τὸ ἔδαφος μὲ ταχύτητα 144 km/h. Κατά τινα στιγμὴν διέρχεται τοῦτο ὑπεράνω παρατηρητοῦ Ο ἐνῶ μετὰ 40 ἀκόμη δλ φαίνεται ἀπὸ τὸ Ο ὑπὸ γωνίαν $\left(24\frac{1}{2}\right)^0$ ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος. Ζητεῖται εἰς ποῖον ὕψος ὑπεράνω τοῦ Ο διῆλθε τὸ ἀεροπλάνον.

90) Ἀεροπλάνον ἵπταται ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα 180 km/h ἡ δὲ τροχιά του διέρχεται ἀκριβῶς ὑπεράνω παρατηρητοῦ Ο. Οὗτος βλέπει κατά τινα στιγμὴν τὸ ἀεροπλάνον ὑπὸ γωνίαν 40^0 ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος ἐνῶ μετὰ ἓν λεπτὸν τῆς ὥρας τὸ ἀεροπλάνον διελθὸν ὑπεράνω τοῦ Ο φαίνεται ἀπὸ τοῦ Ο ὑπὸ γωνίαν 56^0 ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἵπταται τὸ ἀεροπλάνον.

91) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐμετρήθησαν τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

$AB=823{,}7$ m, $\widehat{\Delta AB}=46^0\ 48'$, $\widehat{\Delta B A}=71^0\ 36'$, $\widehat{\Gamma\Delta B}=61^0\ 16'$ $\widehat{\Delta B\Gamma}=53^0\ 28'$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΓΔ.

27. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

α') Ἔστω ὅτι δίδονται τὰ στοιχεῖα β, γ, Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. μένουν τότε πρὸς εὕρεσιν τὰ Β,Γ, α.

β') **Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.** Ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὴν Α, γνωρίζομεν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Β καὶ Γ, διότι $B+\Gamma = =180-A$. Ἄρα γνωρίζομεν καὶ τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν:

$$\frac{B+\Gamma}{2}=90^0-\frac{A}{2}. \tag{1}$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ *τὴν ἡμιδιαφορὰν* τῶν Β καὶ Γ ἐκ τοῦ τύπου <u>14</u>. Διότι ὁ τύπος αὐτὸς (καὶ ὁ κανὼν τῶν ἐφαπτομένων, §20) ἐκφράζει τὴν εφ$\frac{B-\Gamma}{2}$ συναρτήσει τῶν δεδομένων ποσοτήτων β, γ, Α. Γνωρίζοντες ἤδη τὰ $\frac{B+\Gamma}{2}$ καὶ $\frac{B-\Gamma}{2}$ εὑρίσκομεν εὐχερῶς τὰ Β καὶ Γ (διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως αὐτῶν).

γ') **Ὑπολογισμὸς τῆς τρίτης πλευρᾶς α.** Ἔχοντες ὑπολογίσει τὴν Β καὶ γνωρίζοντες τὴν Α καὶ β εὑρίσκομεν εὐχερῶς τὴν α βάσει τοῦ κανόνος τῶν ἡμιτόνων: α/ημΑ=β/ημΒ καὶ $\boxed{\alpha=\beta\ \eta\mu A/\eta\mu B}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δίδονται: β=167, γ=145, Α=54^0 καὶ ζητοῦνται: Β, Γ, α. Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου <u>14</u> χρειαζόμεθα τὰ β+γ, β—γ καὶ Α/2.

Ταῦτα εἶναι : $\beta+\gamma=312$, $\beta-\gamma=22$, $A/2=27^0$.

Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ

Τύπος : $$\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}$$ ἤ

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\lambda o\gamma(\beta-\gamma)+\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\frac{A}{2}-\lambda o\gamma(\beta+\gamma)$$

$$\lambda o\gamma(\beta-\gamma)=1{,}34242$$
$$\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\frac{A}{2}=0{,}29283$$
$$-\lambda o\gamma(\beta+\gamma)=\bar{3}{,}50584$$

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\bar{1}{,}14109$$
$$\frac{B-\Gamma}{2}=7^0 52' 44''$$
$$\frac{B+\Gamma}{2}=63^0$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη : $B=70^0 52' 44''$

Δι' ἀφαιρέσεως » » $\Gamma=55^0\ 7' 16''$

Ὑπολογισμὸς τῆς α

Τύπος : $\alpha=\beta\, \eta\mu A/\eta\mu B$ ἤ

$$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\, \eta\mu A-\lambda o\gamma\, \eta\mu B$$

$$\lambda o\gamma\, \beta=2{,}22272$$
$$\lambda o\gamma\, \eta\mu A=\bar{1}{,}90796$$
$$-\lambda o\gamma\, \eta\mu B=0{,}02467$$

$$\lambda o\gamma\alpha=2{,}15535$$
$$\alpha=143$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

92) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων:

$\alpha=203{,}20$ m, $\beta=215{,}40$ m, $\Gamma=72^0 10'$.

93) Ἑκάστου τῶν κάτωθι τριγώνων νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρά:

i) Ὅταν $\alpha=137$ m, $\gamma=96$ m, $B=63^0$.

ii) » $\alpha=103$ m, $\gamma=45$ m, $B=38^0$.

94) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι τρίγωνα:

i) $A=46^0\ 28'\ 6''$, $\beta=0{,}98765$, $\gamma=0{,}87654$

ii) $B=72^0\ 44' 30''$, $\alpha=8{,}7654$, $\gamma=7{,}6543$

iii) $B=61^0\ 18' 24''$, $\alpha=654{,}32$, $\gamma=543{,}21$.

28. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν.

α΄) Ὅταν δοθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ τοῦ πρὸς ἐπίλυσιν τριγώνου, μένουν πρὸς ὑπολογισμὸν αἱ τρεῖς γωνίαι Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμοσθοῦν οἱ τύποι <u>**16**</u> ἢ <u>**17**</u> ἢ <u>**18**</u> τῆς § 21 οἱ ὁποῖοι περιέχουν τοὺς τριγ. ἀριθμ. τῶν $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$ καὶ συνεπῶς (τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων) παρέχουν καὶ τὰς γωνίας Α, Β, Γ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δίδονται: $\alpha=75$, $\beta=92$, $\gamma=107$. Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν: $2\tau=274$, $\tau=137$, $\tau-\alpha=62$, $\tau-\gamma=45$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α

Τύπος: $$\text{συν}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} \quad \text{ἢ}$$

$$2\,\text{λογ συν}\frac{A}{2}=\text{λογ}\tau+\text{λογ}(\tau-\alpha)-\text{λογ}\beta-\text{λογ}\gamma$$

$$\text{λογ}\tau=2{,}13672$$
$$\text{λογ}(\tau-\alpha)=1{,}79239$$
$$-\text{λογ}\beta=\overline{2}{,}03621$$
$$-\text{λογ}\gamma=\overline{3}{,}97062$$

διὰ προσθέσεως: $$2\,\text{λογ συν}\frac{A}{2}=\overline{1}{,}93594$$

$$\text{λογ συν}\frac{A}{2}=\overline{1}96797$$

$$\frac{A}{2}=21^0 44' 48''$$

$$A=43^0 29' 36''$$

Ἡ Β δέον νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τοῦ τύπου $\text{συν}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\alpha\gamma}}$ ἡ δὲ Γ ἐκ τῆς $\Gamma=180^0-(A+B)$.

Σημ. Εἰς τὴν πρᾶξιν, προτιμῶνται μᾶλλον οἱ τύποι <u>**18**</u> διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν γωνιῶν, διότι [ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς μελέτης τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ὅτι ἐκ τῆς ἐφαπτομένης ὑπολογίζεται ἐν γένει, ἡ γωνία μὲ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν παρὰ ἐκ τοῦ ἡμιτόνου ἢ συνημιτόνου.

29. Ἔλεγχος μιᾶς ἐπιλύσεως.

Ὁ τύπος **12** ἢ **13** τῆς § 19 συνδέει καὶ τὰ 6 στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Διὰ τοῦτο ἕκαστος τῶν τύπων τούτων τοῦ Mollweide δύναται νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὸν *ἔλεγχον* μιᾶς ἐπιλύσεως. Ἐὰν δηλαδὴ θέλωμεν νὰ ἐλέγξωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ὑπολογισμῶν μας ἐξετάζομεν κατὰ πόσον τὰ δοθέντα καὶ τὰ ὑπολογισθέντα στοιχεῖα ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν **12** ἢ **13**. Ἔτσι π.χ. εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 27 ἐδόθησαν: $\beta=167$, $\gamma=145$, $A=54^0$ καὶ ὑπελογίσθησαν $B=70^0 52' 44''$, $\Gamma=54^0 7' 16''$ καὶ $\alpha=143$. Πρὸς ἔλεγχον, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\alpha\,\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}=(\beta-\gamma)\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ α, β, γ, Α, Β, Γ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$143\eta\mu(7^0 52' 44'')=22\sigma\upsilon\nu\,27^0.$$

Ὁ λογάριθμος τοῦ πρώτου μέλους εἶναι:

$$\lambda o\gamma 143+\lambda o\gamma\,\eta\mu 7^0 52' 44''=2,15534+\bar{1},13697=1,29231$$

καὶ τοῦ δευτέρου εἶναι:

$$\lambda o\gamma 22+\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu 27^0=1,34242+\bar{1},94988=1,29230.$$

Ὁ ἔλεγχος δεικνύει ὅτι ἔχομεν ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

95) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδονται: $\alpha=543,9$, $\beta=597,6$, $\gamma=625,9$.

96) Τρεῖς τόποι Α, Β, Γ ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων: ΑΒ=37 km, ΒΓ=52 km καὶ ΓΑ=44 km. Εὕρετε τὴν $\widehat{AB\Gamma}$.

97) Ὑπολογίσατε τὰς γωνίας τραπεζίου οὗτινος αἱ δύο βάσεις ἔχουν μήκη 42,30 καὶ 28,70 αἱ δὲ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουν μήκη 13,10 καὶ 15,20.

98) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ τέσσαρες πλευραὶ ἔχουν μήκη (ΑΒ)=30, (ΒΓ)=32, (ΓΔ)=51, (ΔΑ)=48 καὶ διαγώνιος (ΑΓ)=47. Ὑπολογίσατε τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

30. Προσδιορισμὸς γωνίας τριγώνου ἐκ τοῦ ἡμιτόνου της.

Ἔστω γωνία Α ἀνήκουσα εἰς ἕνα τρίγωνον καὶ ἔστω ὅτι γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu A=1/2$. Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι $1/2=\eta\mu 30^0$ καὶ $1/2=\eta\mu 150^0$. Ἐπομένως συνάγομεν ὅτι $\eta\mu A=\eta\mu 30^0$ καὶ $\eta\mu A=150^0$. Ἄρα, ἢ $A=30^0$ ἢ $A=150^0$. Ἔχομεν δηλ. δύο τιμὰς (παραπληρωματικὰς) τῆς γωνίας Α ἧς δίδεται τὸ ἡμίτονον.

Ἐν γένει, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμίτονον μιᾶς γωνίας τριγώνου, τότε δύο εἶναι αἱ ἐνδεχόμεναι τιμαὶ τῆς γωνίας αὐτῆς. Αἱ δύο αὐταὶ δυναταὶ τιμαὶ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἡ μικροτέρα ἐκ τούτων, ὑπολογίζεται διὰ τῶν πινάκων.

Ἔστω π.χ. ὅτι ημA = 0,67129 ὅπου A, γωνία τριγώνου. Εὑρίσκομεν λογημA=$\bar{1}$,82691 καὶ ἐκ τῶν πινάκων A=$42^0 10'$, ἐφ' ὅσον ὑποτεθῇ ἡ A, ὀξεῖα. Δὲν γνωρίζομεν ὅμως, ἂν ἡ A εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Συνεπῶς ἡ A δύναται νὰ εἶναι, ὄχι ἴση πρὸς $42^0 10'$ ἀλλὰ ἴση πρὸς τὴν παραπληρωματικὴν τῆς $42^0 10'$ (ἥτις ἔχει πάλιν, τὸ ἴδιο ἡμίτονον). Ὥστε: ἂν ημA = 0,67129 τότε ἢ A=$42^0 10'$ ἢ A=$137^0 50'$.

Τουναντίον, μία γωνία τριγώνου ὁρίζεται ἐκ τοῦ συνημιτόνου της ἢ τῆς ἐφαπτομένης της, πλήρως. (Μονοσημάντως).

Ἔστω π.χ. συνA=–1/2 ὅπου A, γωνία τριγώνου. Τότε μία μόνον τιμὴ τῆς A ὑπάρχει: A=120^0. Ἔστω ἐπίσης, εφA=$\sqrt{3}$. Τότε ἡ μόνη λύσις, εἶναι: A = 60^0.

31. Ἐπίλυσις τριγώνου ἐκ δύο πλευρῶν καὶ μιᾶς, ἀντικειμένης, γωνίας. (*Ἀμφίβολος περίπτωσις*).

Ἂς ζητήσωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ στοιχεῖα γ, B, Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει τοιοῦτον τρίγωνον) ὅταν γνωρίζωμεν τὰ στοιχεῖα α, β, A. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν δύο τρίγωνα διαφορετικὰ ἢ ἓν μόνον ἢ οὐδέν, ἔχοντα τὰ στοιχεῖα α, β, A, δηλ. δύο πλευρὰς δοθείσας καὶ μίαν γωνίαν δοθεῖσαν, κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν δοθεισῶν πλευρῶν. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ, βάσει τοῦ νόμου τῶν ἡμιτόνων, ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τῆς γνωστῆς ἀναλογίας: α/ημA=β/ημB λαμβάνομεν:

(1) $$\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}.$$

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει τὸ ἡμίτονον τῆς ἀγνώστου γωνίας B καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ἐν γένει, δύο ἐνδεχομένας τιμὰς αὐτῆς (§ 30).

Λογαριθμίζοντες τὴν (1) λαμβάνομεν:

(2) $$\lambda o\gamma\, \eta\mu B = \lambda o\gamma \beta + \lambda o\gamma\, \eta\mu A - \lambda o\gamma \alpha.$$

i) Ἐὰν εὑρεθῇ ὅτι λογ ημB>0, τότε δὲν ὑφίσταται γωνία B ἄρα, οὔτε καὶ τρίγωνον.

ii) Ἐὰν εἶναι λογ ημB<0, τότε εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων μίαν τιμὴν τῆς γωνίας Β περιεχομένην μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0. Ἐὰν ἡ οὕτω ὑπολογισθεῖσα γωνία Β ἔχῃ μετὰ τῆς Α, ἄθροισμα $<180^0$ τότε γίνεται δεκτὴ ὡς γωνία τοῦ πρὸς ἐπίλυσιν τριγώνου ἡ δὲ τρίτη γωνία Γ προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως $\Gamma = 180^0 - A - B$. Τότε, βεβαίως, ὑπάρχει τρίγωνον μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα καὶ μένει πρὸς ὑπολογισμὸν ἡ τρίτη πλευρὰ γ αὐτοῦ· τοῦτο γίνεται διὰ τῆς σχέσεως: $\gamma/\eta\mu\Gamma = \alpha/\eta\mu A$.

iii) Θεωροῦμεν καὶ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Β΄ τῆς ὡς ἄνω εὑρεθείσης Β διότι καὶ ἡ Β΄, ὡς ἔχουσα τὸ αὐτὸ ἡμίτονον μὲ τὴν Β ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν (1).

Ἐὰν $B' + A < 180^0$ τότε καὶ ἡ Β΄ εἶναι ἐπίσης παραδεκτὴ καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν ἐπίλυσιν *ἑνὸς δευτέρου τριγώνου* ἔχοντος πλευρὰς α, β καὶ γωνίας Α, Β΄ καὶ $\Gamma' = 180 - A - B'$.

Ἐὰν $B' + A > 180^0$ τότε ἡ Β΄ ἀπορρίπτεται ὡς μὴ δυναμένη νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἴδιο τρίγωνον μὲ τὴν Α καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

iv) Ἐὰν ἡ (1) δίδῃ, $\eta\mu B = 1$, τότε, ἐφ' ὅσον $A < 90^0$, τὸ ἐπιλυόμενον τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β (μία λύσις).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) **Δεδομένα :** $\alpha = 105$, $\beta = 110$, $A = 53^0$

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Β.

Τύπος : $\eta\mu B = \beta\,\eta\mu A/\alpha$.

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma \beta &= 2{,}04139 \\ \lambda o\gamma\,\eta\mu A &= \overline{1}{,}92842 \\ -\lambda o\gamma \alpha &= \overline{3}{,}97881 \\ \hline \lambda o\gamma\,\eta\mu B &= \overline{1}{,}94862 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr} B = 62^0\,40' & \text{ἤ} & B' = 117^0\,20' \\ A+B = 120^0\,40' & & A+B' = 175^0\,20' \\ \Gamma = 59^0\,20' & & \Gamma' = 4^0\,40' \end{array}$$

Ὥστε ὑπάρχουν δύο τρίγωνα μὲ τ' ἀνωτέρω δεδομένα :

1η Λύσις | *2α Λύσις*

$$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \qquad\qquad \frac{\gamma'}{\eta\mu\Gamma'} = \frac{\alpha}{\eta\mu A}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma = \alpha\,\eta\mu\Gamma/\eta\mu A & \qquad & \gamma' = \alpha\,\eta\mu\Gamma'/\eta\mu A \\ \lambda o\gamma\alpha = 2{,}02119 & & \lambda o\gamma\alpha = 2{,}02119 \\ \lambda o\gamma\,\eta\mu\Gamma = \overline{1}{,}93457 & & \lambda o\gamma\,\eta\mu\Gamma' = \overline{2}{,}91040 \\ -\lambda o\gamma\,\eta\mu A = 0{,}07158 & & -\lambda o\gamma\,\eta\mu A = 0{,}07158 \\ \hline \lambda o\gamma\gamma = 2{,}02734 & & \lambda o\gamma\gamma' = 1{,}00317 \\ \gamma = 106{,}50 & & \gamma' = 10{,}073. \end{array}$$

Ἔχομεν λοιπὸν δύο τρίγωνα, ἀνταποκρινόμενα πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

ii) **Δεδομένα :** $\beta = 53{,}60$, $\gamma = 35{,}20$, $B = 71^0\,15'$.

Ἔχομεν: $\beta/\eta\mu B = \gamma/\eta\mu\Gamma, \quad \eta\mu\Gamma = \dfrac{\gamma\,\eta\mu B}{\beta}$.

Ὑπολογισμὸς τῆς γωνίας Γ.

Τύπος: $\lambda o\gamma\,\eta\mu\Gamma = \lambda o\gamma\gamma + \lambda o\gamma\,\eta\mu B - \lambda o\gamma\beta$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\gamma &= 1{,}54654 \\ \lambda o\gamma\,\eta\mu B &= \overline{1}{,}97632 \\ -\lambda o\gamma\beta &= \overline{2}{,}27083 \\ \hline \lambda o\gamma\,\eta\mu\Gamma &= \overline{1}{,}79369 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= 30^0\,27'\,8'' & \text{ἢ} \quad \Gamma' &= 141^0\,32'\,52' \\ B+\Gamma &= 109^0\,42'\,8'' & B+\Gamma' &= 212^0\,47'\,52'' > 180^0 \\ A &= 70^0\,17'\,52'' & &\text{ἡ τιμὴ } \Gamma' \text{ ἀπορρίπτεται.} \end{aligned}$$

Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

Ἡ τρίτη πλευρὰ α ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου $\alpha = \gamma\,\eta\mu A/\eta\mu\Gamma$ καὶ εὑρίσκεται: $\alpha = 53{,}29$ μέτρα.

iii) **Δεδομένα: $\alpha = 200$ m, $\beta = 195$ m, $A = 148^0$.**

Ἔχομεν $\beta/\eta\mu B = \alpha/\eta\mu A, \quad \eta\mu B = \beta\eta\mu A/\alpha$ καί:

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\beta &= 2{,}29003 \\ \lambda o\gamma\,\eta\mu A &= \overline{1}{,}73611 \\ -\lambda o\gamma\alpha &= \overline{3}{,}69897 \\ \hline \lambda o\gamma\,\eta\mu B &= \overline{1}{,}72511 \\ B &= 32^0\,4'\,10'' \\ A+B &= 180^0\,4'\,10'' > 180^0. \end{aligned}$$

Ὥστε ἡ τιμὴ τῆς Β εἶναι ἀπαράδεκτος καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχει τρίγωνον ἀνταποκρινόμενον πρὸς τὰ ἀνωτέρω δεδομένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

99) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων:

$\alpha = 65792, \quad \beta = 98045, \quad A = 28^0\,51'\,49''$.

100) i) Ἐὰν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $B = 30^0$, $\gamma = 150$, $\beta = 50\sqrt{3}$ δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἢ ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές. Νὰ εὑρεθῇ δὲ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν δύο τριγώνων. ii) Πόσα τρίγωνα ΑΒΓ ὑπάρχουν ἔχοντα $B = 30^0$, $\gamma = 150$, $\beta = 75$.

101) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 17 μέτρων εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ εἶναι $\alpha = 24{,}5$ m καὶ $\beta = 9{,}8$ m. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ III, IV

i) *Τί καλεῖται ἐπίλυσις ἑνὸς τριγώνου;*

ii) *Ποῖος εἶναι ὁ κανὼν τῶν ἡμιτόνων; Πῶς δύναται νὰ ὑπολογι-*

σθῇ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ὅταν γνωρίζωμεν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν;

iii) *Ποῖοι εἶναι οἱ τύποι τοῦ Mollweide;*

iv) *Μὲ τί ἰσοῦται ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος δύο πλευρῶν τριγώνου πρὸς τὴν διαφοράν των;*

v) *Πῶς ἐπιλύεται τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας;*

vi) *Πῶς ἐκφράζονται τὰ* $ημ\frac{A}{2}$, $συν\frac{A}{2}$, $εφ\frac{A}{2}$ *συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ;*

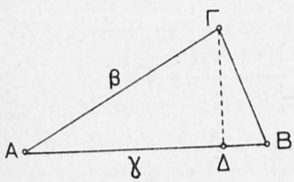
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου. Μετάβασις ἀπὸ ἑνὸς συστήματος μετρήσεως γωνιῶν εἰς ἄλλο-Μῆκος τόξου καὶ ἐμβαδὸν τομέως.

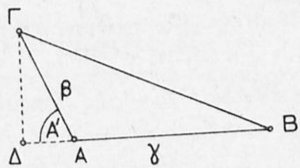
32. Τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

α΄) **Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι



Σχ. 25



Σχ. 26

ὀξεῖα. Ἂν φέρωμεν τὸ ὕψος ΓΔ τοῦ τριγώνου (σχ. 25) θὰ ἔχωμεν: $(\Gamma\Delta)=(\Gamma\mathrm{A})\eta\mu\mathrm{A}=\beta\eta\mu\mathrm{A}$ καὶ $\text{ἐμβ.}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB})\,(\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\gamma.\beta.\eta\mu\mathrm{A}.$

Ἂν ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα (σχ. 26) καὶ καλέσωμεν Α′ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς $\widehat{\Gamma\mathrm{AB}}$ τότε τὸ ὕψος $(\Gamma\Delta)=(\Gamma\mathrm{A})\eta\mu\mathrm{A}'=\beta\eta\mu\mathrm{A}$ (διότι $\eta\mu\mathrm{A}'=\eta\mu\mathrm{A}$), ἑπομένως φθάνομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα: $\text{ἐμβ.}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\gamma.\beta\eta\mu\mathrm{A}.$

Καλοῦντες τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ E ἔχομεν λοιπὸν τοὺς τύπους:

21 $$\boxed{E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu\mathrm{A}=\frac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu\mathrm{B}=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma}$$

β΄) **Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετρά-**

γωνον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν διὰ τοῦ διπλασίου ἡμιτόνου τῆς ἀπέναντι γωνίας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον καὶ ΓΔ τὸ ἐπὶ τὴν ΑΒ ὕψος (σχ. 25). Προφανῶς ἔχομεν $(\Gamma\Delta)=\beta\,\eta\mu A$. Ἐπειδὴ ὅμως, $\beta/\eta\mu B=$ $=\gamma/\eta\mu\Gamma$ ἕπεται:

$$\beta=\gamma\,\eta\mu B/\eta\mu\Gamma \text{ καὶ } (\Gamma\Delta)=\beta\,\eta\mu A=\gamma\,\eta\mu B\,\eta\mu A/\eta\mu\Gamma.$$

Ὥστε $\text{ἐμβ.}(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(AB).(\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\gamma.\frac{\gamma\,\eta\mu B\,\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\gamma^2\eta\mu A\,\eta\mu B}{2\eta\mu\Gamma}=$ $=$μὲ τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν προσκειμένων γωνιῶν κλπ.

Ἑπομένως διὰ τὸ ἐμβαδὸν E ἰσχύουν οἱ τύποι:

$$\underline{22} \qquad \boxed{E=\frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\,\eta\mu A}=\frac{\beta^2\eta\mu\Gamma\eta\mu A}{2\,\eta\mu B}=\frac{\gamma^2\eta\mu\,A\eta\mu B}{2\eta\mu\Gamma}}$$

γ΄) **Τύπος τοῦ Ἥρωνος.** «*Ἐὰν 2τ ἡ περίμετρος καὶ α, β, γ αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:*

$$\underline{23} \qquad \boxed{E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστὸς ὁ τύπος τοῦ Ἥρωνος:

$$E=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\cdot(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Θέτοντες $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$, $\alpha-\beta+\gamma=2(\tau-\beta)$, $-\alpha+\beta+\gamma=2(\tau-\alpha)$ (βλ. § 21, α΄), εὑρίσκομεν τὸν ἀποδεικτέον.

Παρατήρησις. Ἐὰν δοθοῦν δύο πλευραὶ καὶ ἡ περιεχομένη γωνία τότε ὁ κατάλληλος πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τύπος εἶναι ὁ 21, ἐὰν δοθῇ μία πλευρὰ καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι τότε, εἶναι ὁ 22 καὶ ἂν δοθοῦν αἱ τρεῖς πλευραί, ὁ 23.

Περαιτέρω τύποι. Ἐὰν R ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου ἰσχύουν οἱ τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ:

$$\underline{24} \qquad \boxed{E=2R^2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}$$

$$\underline{25} \qquad \boxed{E=\frac{\alpha\beta\gamma}{2R}}$$

Ἀπόδειξις τοῦ **24.** Εἰς τὸν τύπον **22** ἀντικαθιστῶμεν τὸ α διὰ τῆς πρὸς αὐτὸ ἴσης παραστάσεως 2R ημΑ (βλ. τύπον **11α**) καὶ λαμβάνομεν:

$$E=\frac{4R^2\eta\mu^2A.\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu A}=2R^2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma.$$

'Απόδειξις τοῦ **25.** Ἔχομεν $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ καὶ $\alpha=2R\,\eta\mu A$.

Ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν $\eta\mu A=\frac{\alpha}{2R}$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην ἥτις καθίσταται :

$$E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,.\,\frac{\alpha}{2R}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

102) Νὰ δειχθῇ ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ :

$$E=\frac{\alpha\beta\gamma}{\tau}\;\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\;\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\;\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$

103) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις $E=\tau(\tau-\alpha)$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

104) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 1/1000 m, ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τρίγωνον ἔχον πλευρὰς $\alpha=7$, $\beta=8$ καὶ $\gamma=11$ m.

105) Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ ἔχουν μήκη 153,40 m καὶ 212,50 m καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία εἶναι ἴση πρὸς $112^0\,7'$.

106) Ὑπολογίσατε εἰς ἑκτάρια τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος δίδονται :
$\alpha=9756{,}7$ m , $B=36^0\,27'\,48'',3$, $\Gamma=41^0\,35'\,23'',7$.

107) Πῶς δύναται νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον οὗτινος δίδονται αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδόν ;

108) Πῶς δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου οὗτινος γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς ;

109) Κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ν πλευρὰς εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι $\frac{1}{2}\nu R^2\eta\mu\,\frac{360^0}{\nu}$.
Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς ;

Βάσει τῶν δύο ἀνωτέρω ἐμβαδῶν δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμὸς π περιέχεται μεταξὺ

$$\frac{1}{2}\,\nu\,\eta\mu\left(\frac{360^0}{\nu}\right)\quad\text{καὶ}\quad\nu\,\varepsilon\varphi\left(\frac{180^0}{\nu}\right).$$

110) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι $AB=4{,}9$ m, $B\Gamma=5{,}1$ m, $\Gamma\Delta=2{,}8$ m, $\Delta A=6{,}5$ m, $\widehat{\Delta AB}=53^0$, $\widehat{B\Gamma\Delta}=78^0$. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου.

33. Σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων μονάδων μετρήσεως γωνιῶν.

Ἄς θεωρήσωμεν τόξον ὅπερ μετρούμενον εἰς μοίρας εὑρίσκεται ὅτι εἶναι μ^0, μετρούμενον εἰς ἀκτίνια εἶναι α ἀκτ. καὶ εἰς βαθμοὺς εἶναι β βαθμῶν. Ἐπειδὴ αἱ 360^0 ἰσοδυναμοῦν μὲ 2π ἀκτίνια, ἡ 1^0 θὰ ἰσοδυναμῇ πρὸς $\pi/180$ ἀκτίνια καὶ αἱ μ^0 πρὸς $\pi\mu/180$ ἀκτ. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ θεωρούμενον τόξον εἶναι ἴσον πρὸς α ἀκτ. θὰ ἔχωμεν:

$$(1)\qquad \frac{\pi\mu}{180}=\alpha \quad ἢ \quad \frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ 360^0 ἰσοδυναμοῦν πρὸς 400^β, ἡ μία μοῖρα θὰ ἰσοδυναμῇ πρὸς $400/360=200/180$ βαθμοὺς καὶ αἱ μ^0 πρὸς $200\mu/180$ βαθμούς. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἐν λόγῳ τόξον εἶναι β βαθμῶν θὰ ἔχωμεν:

$$(2)\qquad 200\mu/180=\beta \quad ἢ \quad \frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὁ τύπος:

26
$$\boxed{\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{200}}$$

ὅπου μ, α, β παριστάνουν τὸ ἴδιον τόξον εἰς μοίρας, ἀκτίνια καὶ βαθμούς, ἀντιστοίχως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ. **i) Τόξον $37^o48'16''$ νὰ τραπῇ εἰς ἀκτίνια.**

Λύσις. α') Διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ τύπος (1): $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ ἤτοι $\alpha = \mu\frac{\pi}{180}$ πρέπει πρῶτον, νὰ ἐκφρασθῇ τὸ τόξον ἐξ ὁλοκλήρου εἰς μοίρας·

Εἶναι $\mu = 37^o + \frac{48^o}{60} + \frac{16^o}{3600} = 37^o+0^o,8000+0^o,0044 = (37,8044)^o$.

Ὥστε $\alpha = 37,8044 \,.\, \frac{3,1416}{180} = 0,65981$ ἀκτίνια.

(Ἐλήφθη κατὰ προσέγγισιν $\pi=3,1416$).

β') Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ταχέως τὸ ἐξαγόμενον εἰς ἀκτίνια χρησιμοποιοῦντες τοὺς **πίνακας μετατροπῆς μοιρῶν, λεπτῶν καὶ δευτερολέπτων εἰς ἀκτίνια.**

Οὕτω, π.χ. διὰ τὸ ὡς ἄνω τόξον εὑρίσκομεν ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων:

37^0	ἰσοδυναμοῦν	πρὸς	0,645772 ἀκτ.	(Στήλη τῶν μοιρῶν)
$48'$	»	»	0,013963 ἀκτ.	(» » λεπτῶν)
$16''$	»	»	0,000078 ἀκτ.	(» » δ/πτων)
$37^o48'16''$	»	»	0,659813 ἀκτ.	

ii) Τόξον 2,174 ἀκτ. νὰ μετατραπῇ εἰς μοίρας, λεπτὰ καὶ δλ.

Λύσις. α') Ὁ τύπος $\mu/180=\alpha/\pi$ δίδει:

$$\mu=\frac{\alpha.180}{\pi}=\frac{2,174.180}{3,1416}=\frac{391,32}{3,1416}=\frac{3913200}{31416}=\frac{978300}{7854}=\frac{489150}{3927}\text{ μοῖραι.}$$

Τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως, τὸ ἀκέραιον πηλίκον παριστᾷ πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης δέον νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 60 καὶ κατόπιν νὰ διαιρεθῇ διὰ 3927 οὕτως ὥστε νὰ εὑρεθοῦν τὰ πρῶτα λεπτὰ κλπ.:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 489150 & 3927 \\ \cline{3-3}
 & 9645 & 124^{0}33'38'' \\
 & 17910 & \\
\text{ὑπόλοιπον} & 2202 & \\
 & \times 60 & \\ \cline{2-2}
 & 132120' & \\
 & 14310 & \\
\text{ὑπόλοιπον} & 2529 & \\
 & \times 60 & \\ \cline{2-2}
 & 151740'' & \\
 & 33930 & \\
 & 2514 &
\end{array}$$

β′) Προτιμοτέρα εἶναι, βεβαίως ἡ χρῆσις τῶν πινάκων τοὺς ὁποίους ἀνεφέραμεν ἀνωτέρω.

Εἰς αὐτοὺς εὑρίσκομεν ὅτι τὸ δοθὲν τόξον 2,174000 ἀκτ. περιέχεται μεταξὺ 2,164208 ἀκτ. (δηλ. 124⁰) καὶ 2,181662 ἀκτ. (δηλ. 125⁰). Ὥστε τὸ τόξον τοῦτο περιέχει 124⁰ καὶ 2,174000—2,164208=0,009792 ἀκτίνια. Ταῦτα πάλιν περιέχονται μεταξὺ 0,009599 ἀκτ. (δηλ. 33′) καὶ 0,009890 ἀκτ. (δηλ. 34′). Ὥστε τὸ τόξον περιέχει 33′ καὶ 0,009792—0,009599=0,000193 ἀκτ. Ταῦτα πάλιν περιέχονται μεταξὺ 0,000189 ἀκτινίων (δηλ. 39″) καὶ 0,000194 ἀκτ. (δηλ. 40″). Ὥστε τὸ τόξον περιέχει 39″ καὶ 0,000193—0,000189= =0,000004 ἀκτ. Τέλος, ἐπειδὴ τὰ 0,000005 ἀκτ. ἀντιστοιχοῦν εἰς 1″ ἔπεται ὅτι τὰ 0,000004 ἀκτ. ἀντιστοιχοῦν εἰς $(4/5)''=0{,}8''$. Ὥστε 2,174=ἀκτ.= $=124^{0}33'39'',8$.

Σημ. Μὲ τὴν πρώτην μέθοδον εὕρομεν $124^{0}33'38''$. Τοῦτο συμβαίνει διότι ἐλάβομεν ὡς τιμὴν τοῦ π τὴν 3,1416 ἐνῷ διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν πινάκων ἐλήφθη ἡ ἀκριβεστέρα τιμὴ τοῦ π: 3,141592.

iii) Τόξον 36⁰ 10′ νὰ ἐκφρασθῇ εἰς βαθμούς.

Λύσις. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (2): $\beta/200=\mu/180$, ὅπου $\mu=36^{0}+$ $+\dfrac{10^{0}}{60}=\dfrac{217^{0}}{6}$. Ὥστε τὸ δοθὲν τόξον εἶναι:

$$\beta=\frac{200\mu}{180}=\frac{10\mu}{9}=\frac{10.217}{9.6}\text{grad}=\frac{2170}{54}\text{grad}=40{,}185\ \text{grad}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

111) Τόξον 32⁰ 40′53″ νὰ μετατραπῇ εἰς ἀκτίνια α′) διὰ τοῦ τύπου <u>26,</u> μὲ π=3,1416, β′) διὰ τῶν πινάκων.

112) Πόσων μοιρῶν, λεπτῶν, καὶ δευτ/πτων εἶναι τόξον ἑνὸς ἀκτινίου;

113) Τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν εἶναι 35⁰ ἐνῷ ἡ διαφορά των εἶναι 17 grades. Νὰ εὑρεθοῦν αὗται εἰς μοίρας.

114) Γωνία 68⁰ 45′ νὰ μετατραπῇ εἰς βαθμοὺς καὶ εἰς ἀκτίνια

115) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $A=3x^{0}$, $B=x$ grades καὶ $\Gamma=\dfrac{\pi x}{300}$ rad. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι εἰς μοίρας.

34. Μῆκος τόξου καὶ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως.

α΄) **Θεώρημα. «Τὸ μῆκος τυχόντος τόξου εὑρίσκεται ἂν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου γωνίας του μετρηθείσης εἰς ἀκτίνια».**

Ἤτοι ἂν s τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ρ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος καὶ ω rad ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ τόξου τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

<u>27</u> $$\boxed{s = \rho \,.\, \omega}$$

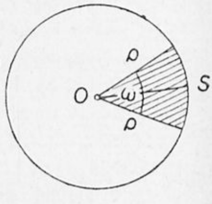
Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ω rad ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον της εἶναι ἐπίσης ω ἀκτινίων καὶ συνεπῶς τὸ μῆκος του s εἶναι ω φορὰς ἡ ἀκτὶς (§ 1, γ΄) ὥστε: $s = \omega \,.\, \rho$.

β΄) Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ κυκλικοῦ τομέως τοῦ περιοριζομένου ὑπὸ τοῦ τόξου s καὶ τῶν δύο ἀκραίων ἀκτίνων του (σχ. 27) εἶναι, ὡς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, ἴσον πρὸς $\frac{1}{2} s \,.\, \rho$.

Ἑπομένως βάσει τοῦ <u>27</u> τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι:

<u>28</u> $$\boxed{E = \frac{1}{2} \rho^2 \omega}$$

ὅπου ω ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ τομέως ἐκπεφρασμένη εἰς ἀκτίνια.



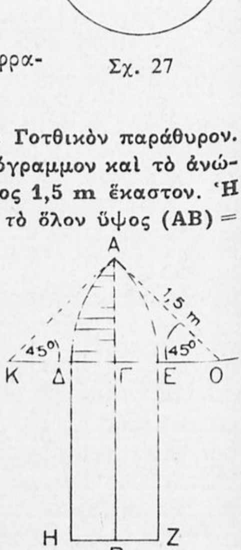
Σχ. 27

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Τὸ σχῆμα 28 εἰκονίζει ἕνα Γοτθικὸν παράθυρον. Τὸ κατώτερον μέρος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ἀνώτερον περικλείεται ἀπὸ δύο κυκλικὰ τόξα ἀκτῖνος 1,5 m ἕκαστον. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἑκάστου τόξου εἶναι 45° καὶ τὸ ὅλον ὕψος (ΑΒ) = = 4,5 m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλάτος τοῦ παραθύρου, ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.**

Λύσις. Διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πλάτος (ΔΕ) ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ (ΔΓ)=(ΔΕ)/2. Τὸ ΔΓ=ΟΔ−ΟΓ. Ἀλλὰ (ΟΔ)=1,5 καὶ (ΟΓ)=(ΟΑ)συν45° (ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΟΑ). Ὥστε (ΔΓ)=1,5−1,5συν45°= =1,5 (1−συν45°)=1,5 . (1−0,7071)=0,44 m καὶ τὸ πλάτος (ΔΕ)=2.0,44=0,88 m.

Τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{ΔΑ}$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἀκτῖνος του καὶ τῆς ἐπικέντρου γωνίας του (τύπος <u>27</u>).

$$(\widehat{ΔΑ}) = 1{,}5 \,.\, \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{40} = \frac{3\pi}{8} = \frac{9{,}42}{8} = 1{,}18 \text{ m.}$$



Σχ. 28

Τὸ μῆκος $(ΑΓ)=(ΓΟ)=1{,}5$ συν$45^0=1{,}5\,.\,0{,}7071=1{,}06$ m, ἑπομένως τὸ μῆκος $(ΓΒ)=4{,}50-1{,}06=3{,}44$ m. Ὥστε ἡ ζητουμένη περίμετρος εἶναι :

$$S=2\,\text{τοξ.}\,\widehat{ΔΑ}+2.(ΓΒ)+(ΔΕ)=2.1{,}18+2.3{,}44+0{,}88=10{,}12 \text{ m.}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραθύρου εἶναι : 2ἐμβ.ΑΔΓ+ἐμβ.ΔΕΖΗ. Τὸ ἐμβ.ΔΑΓ= =ἐμβ. κυκλικοῦ τομέως ΟΔΑ — ἐμβαδὸν τριγώνου ΟΓΑ $=\frac{1}{8}\pi\,.\,(ΟΑ)^2-$ $-\frac{1}{2}(ΓΟ)(ΓΑ)$ (διότι ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΟΔΑ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ὄγδοον τοῦ ὅλου κύκλου). Εὑρίσκομεν :

$$\text{Ἐμβ. }ΑΔΓ=\frac{1}{8}\,.\,1{,}5^2.\pi-\frac{1}{2}\,.\,(ΓΟ)^2=\frac{2{,}25\pi}{8}-\frac{(1{,}06)^2}{2}=\frac{225\pi}{800}-0{,}561=$$

$$=\frac{706{,}85}{800}-0{,}561=0{,}883-0{,}561=0{,}322 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

(Πρὸς εὕρεσιν τοῦ 225π ἔγινε χρῆσις τῶν πινάκων τῶν παρεχόντων τὰ πολλαπλάσια τοῦ π).

Τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν :

$$Ε=2.0{,}322+ΔΕ.ΓΒ=0{,}644+0{,}88.3{,}43=3{,}671' \text{ τετραγ. μέτρα.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

116) Πόση εἶναι εἰς ἀκτίνια καὶ μοίρας ἡ ἐπίκεντρος γωνία κύκλου ἀκτῖνος 100cm ἡ ὁποία ὑποτείνει τόξον μήκους 30 cm ;

117) Ποία ἡ ἀκτὶς κύκλου ὅταν ἐπίκεντρος γωνία $23^0\,10'$ ὑποτείνει τόξον μήκους 6 μέτρων ;

118) Ἐκ δύο τόξων τὸ ἓν ἔχει ἀκτῖνα 10m καὶ εἶναι $57^0\,10'20''$ τὸ δὲ ἄλλο ἔχει ἀκτῖνα 22 m καὶ εἶναι 0,67 ἀκτ. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἐκ τῶν δύο ἔχει μεγαλύτερον μῆκος. (Νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι 1 rad$=57^0\,17'\,44'',8$).

119) Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως εἶναι 17 cm² ἐνῶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 6 cm. Ὑπολογίσατε τὴν γωνίαν τοῦ τομέως κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ.

120) Νῆμα περιβάλλει δύο κύκλους Κ καὶ Λ ἔχοντας ἀκτῖνας 30 cm καὶ 60 cm, χωρὶς νὰ διασταυροῦται. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι 150 cm, ποῖον τὸ μῆκος τοῦ νήματος ;

121) Εἰς ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου ΒΓ, τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς Ε. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κειμένου ἰσοῦται μὲ $\alpha^2(2Α-\text{ημ}2Β-\text{ημ}2Γ)/8$ ὅπου Α,Β,Γ ἐκφράζουν ἀκτίνια. Δείξατε ἐπίσης ὅτι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΔΕ εἶναι : ασυνΑ καὶ ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἐντὸς τοῦ τριγώνου μέρους τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι : $\alpha(\pi-2Α)/2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ Ι—V

122) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\text{σφ}x+\text{εφ}y}{\text{εφ}x+\text{σφ}y}=\text{σφ}x\,\text{εφ}y.$

123) Ἐὰν α, β τυχοῦσαι γωνίαι, δείξατε ὅτι :

$$\frac{1}{2}\,(\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+2\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta)\leqq 1.$$

124) Ὑπολογίσατε ὀξεῖαν γωνίαν θ πληροῦσαν τὴν σχέσιν:

$$2\text{τεμ}\theta - 6\text{συν}\theta = 1.$$

125) Ἐπιλύσατε τὰ κάτωθι τρίγωνα εὑρίσκοντες κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ τὰς γωνίας:

i) $\beta = 33, \quad \gamma = 49, \quad \widehat{A} = 68^0.$

ii) $\gamma = 4{,}7, \quad \alpha = 5{,}9, \quad \widehat{B} = 108^0.$

126) Ἐὰν Κ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΚΒΓ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{4}\alpha^2\text{σφ}A$.

127) Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων:

$$\beta = 1020 \text{ m}, \quad \Gamma = 62^0 18', \quad B = 49^0 42'.$$

128) Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον Δ τοιοῦτον ὥστε $\widehat{BA\Delta} = 34^0$, $\Gamma\Delta = 285$ m, $A\Delta = 237$ m ἐνῶ $AB = 210$ m. Ὑπολογίσατε τὴν $\widehat{B\Gamma A}$ κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ καὶ τὸ μῆκος τῆς ΑΓ.

129) Εὑρίσκεταί τις εἰς ἓν σημεῖον Α, εἰς τοὺς πρόποδας ἑνὸς λόφου καὶ παρατηρεῖ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ Α μὲ τὴν κορυφὴν Β τοῦ λόφου, σχηματίζει γωνίαν 18^0 ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων τῶν παριστώντων τὰ Α καὶ Β ἐπὶ ἑνὸς χάρτου τῆς περιοχῆς εἶναι 8 cm ἐνῶ ἡ κλῖμαξ ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι κατεσκευασμένος ὁ χάρτης εἶναι 2 cm πρὸς ἕνα χιλιόμετρον. Ὑπολογίσατε τὴν διαδρομὴν ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ Β ὑποτιθεμένην εὐθύγραμμον.

130) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ διάμεσος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἑκατέρωθεν αὐτῆς πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Τοῦ αὐτοῦ τριγώνου εἶναι $A = 80^0$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου <u>12</u> (καὶ τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου γνωστοῦ ἐκ τῆς Γεωμετρίας) αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου.

131) Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τοῦ τύπου <u>13</u> δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν βάσιν α, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma = \lambda$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

132) Βάσει τοῦ τύπου <u>12</u> νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν ἑξῆς δεδομένων: $\alpha = 10, \quad \beta - \gamma = 4, \quad A = 80^0.$

133) Ἐὰν α, β, γ αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπου $\alpha > \beta$ καὶ θ ὀξεῖα γωνία τοιαύτη ὥστε $\text{συν}\theta = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$ δείξατε ὅτι τότε θὰ ἰσχύῃ: $\text{εφ}\theta = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha - \beta}\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}$

Πῶς, κατόπιν τούτου δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Γ τοῦ τριγώνου ὅταν δίδωνται τὰ μήκη α,β,γ;

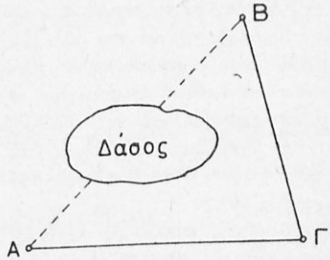
134) Ἐὰν $\beta + \gamma = \lambda\alpha$ ὅπου α,β,γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δείξατε ὅτι:

i) $\text{σφ}\frac{B}{2}\ \text{σφ}\frac{\Gamma}{2} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}.$

ii) $\text{σφ}\frac{B}{2} + \text{σφ}\frac{\Gamma}{2} = \frac{2}{\lambda - 1}\ \text{σφ}\frac{A}{2}.$

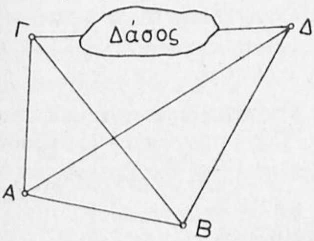
135) Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων Α καὶ Β τὰ ὁποῖα χωρίζονται ὑπὸ ἐμποδίου (σχ. 28) μὴ ἐπιτρέποντος τὴν ἀπ' εὐθεῖαν μέτρησιν, ἐκλέγεται τρίτον σημεῖον Γ τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ Α καὶ Β δύνανται νὰ μετρηθοῦν ἀπ' εὐθείας. Εὑρέθη δὲ

ΓΑ=105 m, ΓΒ=33 m καὶ $\widehat{AΓB}$ = = 63°47'. Ὑπολογίσατε τὴν ΑΒ.

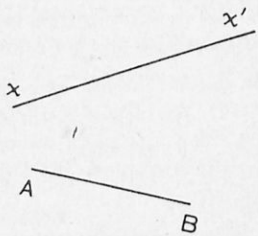


Σχ. 28

136) Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως (ΓΔ) δύο σημείων Γ καὶ Δ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους (σχ. 29) ἐκλέγονται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐν τῷ αὐτῷ ὁριζοντίῳ ἐπιπέδῳ μετὰ τῶν



Σχ. 29



Σχ. 29α

Γ καὶ Δ καὶ μετρᾶται ἡ ΑΒ ἥτις εὑρίσκεται ἴση μὲ 1200 m. Ἀκολούθως διὰ καταλλήλου γωνιομέτρου (Θεοδολίχου) προσδιορίζονται αἱ γωνίαι :

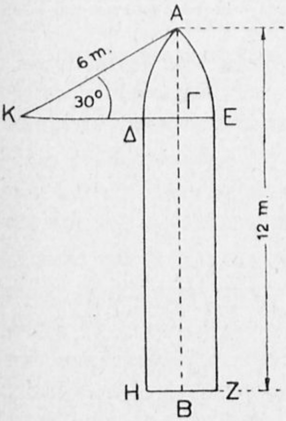
$$\widehat{ΓAB}=100^0,\quad \widehat{ΔAB}=42^0\ 12',\quad \widehat{ΓBA}=37^0,\quad \widehat{ΔBA}=92^0\ 10'.$$

Νὰ ὑπολογισθῇ ἐξ αὐτῶν ἡ ΓΔ.

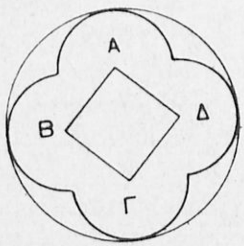
137) Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως δύο ἀπροσίτων σημείων Χ καὶ Χ' λαμβάνεται ὡς βασικὴ γραμμὴ ἡ ΑΒ=802,3 m (σχ. 29α) καὶ μετρῶνται αἱ γωνίαι :

ΧΑΒ=71°15', Χ'ΑΒ=79°30', ΧΑΧ'=23°30', Χ'ΒΑ=83°2', ΧΒΑ=30°21'.

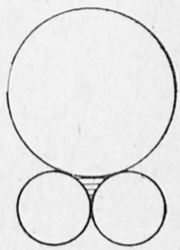
Ἀφοῦ ὑπολογισθοῦν πρῶτον αἱ γωνίαι $\widehat{AXX'}=ω$, $\widehat{AX'X}=φ$ νὰ εὑρεθῇ κατόπιν ἡ ἀπόστασις ΧΧ'. (Τὰ Α, Β, Χ, Χ' δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον).



Σχ. 30



Σχ. 31



Σχ. 32

138) Ὑπολογίσατε τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Γοτθικοῦ παραθύρου τοῦ εἰκονιζομένου εἰς τὸ σχ. 30. Ἡ ἀκτὶς ἑκάστου τῶν τόξων εἶναι 6 m καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία του 30°. Τὸ ὅλον ὕψος, 12 m.

139) Ἕνα τετράφυλλον Γοτθικὸν παράθυρον σχεδιάζεται διὰ τεσσάρων ἴσων κυκλικῶν τόξων γραφομένων μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 31. Αἱ ἀκτῖνες τῶν τόξων πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ὑπολογίσατε τὴν περίμετρον τοῦ τετραφύλλου ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι 15 cm καὶ ἡ ἀκτὶς ἑκάστου τόξου 10 cm.

140) Τρεῖς κύκλοι μὲ ἀκτῖνας α, α καὶ 2α ἐφάπτονται ἀνὰ δύο (σχ. 32). Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τὸ περικλειόμενον μεταξὺ τῶν τριῶν περιφερειῶν.

141) Δύο κύκλοι Κ καὶ Λ ἔχουν ἀκτῖνας 2 καὶ 1 ἀντιστοίχως ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι (ΚΛ)=3. Τρίτος κύκλος ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῶν Κ καὶ Λ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως οὕτως ὥστε ἡ ἀκτὶς ΚΑ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ τρίτου κύκλου καθὼς καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου του $\overset{\frown}{AB}$.

142) Ἂν οἱ κύκλοι τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἐφάπτονται εἰς τὸ Ε καὶ ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν ΓΔ, ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου τριγώνου ΕΓΔ τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῶν τόξων $\overset{\frown}{\Gamma E}$ καὶ $\overset{\frown}{E\Delta}$.

143) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδεται :

$$\alpha=48{,}85, \quad \beta=69{,}22, \quad A=37^\circ 12'$$

ὑπολογιζομένων τῶν γωνιῶν κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ.

144) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία θ πληροῖ τὴν σχέσιν $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ὑπολογίσατε τὸ γινόμενον ημθ συνθ καὶ ἀκολούθως, ὑποθέτοντες ὅτι $\theta > 45^\circ$ ὑπολογίσατε τὰ ημθ καὶ συνθ καὶ τέλος τὴν θ.

145) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ ὀξεῖα γωνία $B=\theta^\circ$. Νὰ ὑπολογισθῇ τριγωνομετρικῶς ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ΑΒΓ καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης.

146) Ἐντὸς γωνίας $B A \Gamma=\theta$ εἶναι ἐγγεγραμμένοι δύο κύκλοι Κ καὶ Λ οἵτινες ἐφάπτονται καὶ μεταξύ των. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου εἶναι ρ νὰ ὑπολογισθῇ τριγωνομετρικῶς (δηλ. μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν) ἡ ἀκτὶς **x** τοῦ μεγαλυτέρου.

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
(ΓΕΝΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Γενικευμένα τόξα καὶ γωνίαι

35. Ἡ ἐπεκτεταμένη ἔννοια τοῦ τόξου.

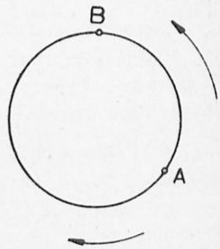
α΄) **Τριγωνομετρικὰ τόξα.** Ἐνῶ εἰς τὴν Στοιχειώδη Γεωμετρίαν, ὡς τόξον θεωρεῖται ἕνα μέρος (τμῆμα) τῆς περιφερείας, εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν, **καλεῖται τόξον, δρόμος διανυόμενος ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ ὡρισμένην φοράν, ἀρχὴν καὶ πέρας.** Ἕνα τριγωνομετρικὸν τόξον θεωρεῖται πλήρως ὡρισμένον ὅταν δοθοῦν τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα αὐτοῦ :

i) Ἡ ἀρχὴ τοῦ τόξου.

ii) Τὸ πέρας τόξου.

iii) Ἡ φορὰ καθ' ἣν διεγράφη τὸ τόξον.

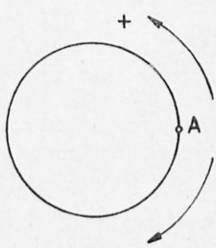
iv) Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς k ὅστις δηλοῖ ποσάκις τὸ κινητὸν σημεῖον τὸ διαγράφον τὸ τόξον διῆλθε διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου πρὶν τερματίσῃ τὴν κίνησίν του εἰς τὸ πέρας τοῦτο (σχ. 33).



Σχ. 33

Τὸ k ἐκφράζει προφανῶς πόσας ὁλοκλήρους περιφερίας περιέχει τὸ τόξον, διὰ δὲ τὰ τόξα τὰ μικρότερα (ἀπολύτως) τῆς περιφερείας εἶναι k=0.

β΄) **Προσανατολισμένη περιφέρεια. Θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ τόξα.** Ἐπὶ ἑκάστης περιφερείας τοῦ ἐπιπέδου διακρίνομεν δύο ἀντιθέτους φορὰς καθ' ἃς δύναται νὰ διαγραφῇ αὕτη (σχ. 34). Τὴν μίαν ἐκ τούτων (σχ. 34) καλοῦμεν θετικὴν τὴν δὲ ἀντιθετόν της ἀρνητικήν. Μετὰ τὴν ἐκλογὴν τῆς θετικῆς καὶ ἀρνητικῆς φορᾶς ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ τελευταία αὕτη λέγεται *προσανατολισμένη* (σχ. 34). Οὕτω θὰ διακρίνωμεν ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης περιφερείας, θετικὰ τόξα καὶ ἀρνητικὰ τόξα ἀναλόγως τῆς φορᾶς καθ' ἣν διεγράφησαν. (Ταῦτα λέγονται καὶ *«προσημασμένα τόξα»*).



προσανατολισμένη περιφέρεια

Σχ. 34

γ΄) **Μέτρον τόξου.** Τὰ θετικὰ τόξα μετρηθέντα διά τινος μονάδος τόξων (βλέπε § 1) παρίστανται μὲ *θετικοὺς ἀριθμούς*, τὰ δὲ ἀρνητικὰ μὲ *ἀρνητικούς*.

Μέτρον τόξου (ἢ ἀκριβέστερον : σχετικὸν μέτρον) καλεῖται ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) **ὅστις προκύπτει ἂν τὸ τόξον μετρηθῇ διὰ τινος μονάδος τόξων καὶ κατόπιν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τεθῇ τὸ πρόσημον + ἢ — καθ' ὅσον τὸ τόξον εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.** (Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ χρησιμοποιῆται χάριν συντομίας ὁ ὅρος «*μέτρον τόξου*» ἀντὶ «*σχετικὸν μέτρον τόξου*»).

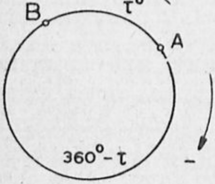
Μηδενικὸν τόξον. Κατὰ σύμβασιν δεχόμεθα καὶ τὸ μηδενικὸν τόξον, ἐκεῖνο δηλαδὴ τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας συμπίπτουν καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον τὸ μηδέν.

Ἐννοεῖται ὅτι ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας δυνατὸν νὰ συμπίπτουν χωρὶς τὸ τόξον νὰ εἶναι τὸ μηδενικὸν τόξον.

Παρατήρησις. Ἐὰν x^0 εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς Γεωμετρίας, τότε ἔχομεν τὸν περιορισμὸν $0 \leqq x \leqq 360^0$. Ἐὰν x^0 εἶναι τὸ μέτρον τυχόντος τόξου τῆς Τριγωνομετρίας τότε ὁ x δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ $-\infty < x < +\infty$.

δ΄) **Ἴσα τόξα.** Δύο τόξα προσανατολισμένης περιφερείας λέγονται **ἴσα** ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ σχετικὸν μέτρον, (ὡς πρὸς τὴν ἰδίαν μονάδα).

ε΄) **Τόξα ἔχοντα τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα.** Ἄς θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β μιᾶς προσανατολισμένης περιφέρειας (σχ. 35) καὶ κινητὸν ὅπερ ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ Α καὶ κινούμενον κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν φθάνει εἰς τὸ Β διὰ πρώτην φοράν. Τὸ οὕτω διαγραφὲν τόξον ἔστω ὅτι ἔχει μέτρον τ^0. Ἐὰν τὸ κινητὸν συνεχίσῃ τὴν κίνησίν του θὰ συναντήσῃ τὸ Β καὶ διὰ δευτέραν φορὰν ἀλλά, τώρα, θὰ ἔχῃ διαγράψῃ, προφανῶς, τόξον ὑπερβαῖνον τὸ προηγούμενον κατὰ 360^0, δηλ. τόξον $\tau^0 + 360^0$. Κατὰ τὴν τρίτην διέλευσιν τοῦ κινητοῦ διὰ τοῦ Β, τὸ διαγραφὲν τόξον θὰ εἶναι $\tau^0 + 2 \cdot 360^0$ κ.ο.κ. Βλέπομεν οὕτω ὅτι *ὑπάρχουν ἄπειρα θετικὰ τόξα μὲ ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β* τὰ δὲ μέτρα τῶν τόξων εἶναι :



Σχ. 35

(1) $\tau^0, \ \tau^0 + 360^0, \ \tau^0 + 2 \cdot 360^0, \ldots, \tau^0 + \rho\ 360^0, \ldots$ (ρ, ἀκέραιος θετικός).

Ἄς φαντασθῶμεν, τώρα, ὅτι τὸ κινητόν, ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ Α καὶ κινούμενον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν φθάνει διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ Β. Προφανῶς, ἔχει διαγράψῃ τόξον, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσον πρὸς $360^0—τ$, ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ διαγραφὲν τώρα τόξον εἶναι ἀρνητικὸν θὰ ἔχῃ μέτρον ἴσον μὲ $-(360^0—τ^0)=τ^0—360^0$.

Ἐὰν τὸ κινητὸν προχωροῦν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν (ἀρνητικὴν) ἐπανέλθῃ ἐκ νέου εἰς τὸ Β, προφανῶς προστίθεται εἰς τὸ προηγούμενον τόξον δρόμος ἀρνητικὸς 360^0 ἄρα τὸ νέον τόξον θὰ ἔχῃ μέτρον $τ^0—360^0—360^0=τ—2\cdot 360^0$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὑπάρχει ἄπειρον πλῆθος ἀρνητικῶν τόξων ἐχόντων ἀρχὴν τὸ *Α* καὶ πέρας τὸ *Β* καὶ τῶν ὁποίων τὰ μέτρα εἶναι :

(2) $τ^0—360^0,\ τ^0—2\cdot 360^0,\dots,τ—λ\cdot 360^0,\dots$, (λ ἀκέραιος θετικός).

Πάντα τὰ τόξα τῆς σειρᾶς (1) καὶ πάντα τῆς σειρᾶς (2) δύνανται νὰ συμπεριληφθοῦν εἰς τὴν ἔκφρασιν : $τ+k\cdot 360^0$

ὅπου $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$ (δηλ. k=τυχὼν ἀκέραιος τῆς Ἀλγέβρας).

Ὥστε: **Ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας τὸ δὲ μέτρον x τοῦ τυχόντος, ἐξ αὐτῶν εἶναι τῆς μορφῆς :**

<u>29</u> $$\boxed{x=τ^0+k\cdot 360^0}$$

ὅπου k ἀκέραιος καὶ $τ^0$ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν ἐξ αὐτῶν.

Ὅταν τὸ k διατρέχῃ ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς $0,\ \pm1,\ \pm2\dots$ ὁ τύπος <u>29</u> παρέχει ὅλα τὰ τόξα τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β.

Ἂν ὡς μονάδα τῶν τόξων λάβωμεν τὸ ἀκτίνιον ὁ τύπος <u>29</u> γράφεται :

<u>29α</u> $$\boxed{x=τ+2kπ,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots}$$

Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν δύο οἱαδήποτε τόξα x^0 καὶ y^0 ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β, θὰ εἶναι :

$x^0=τ^0+λ\cdot 360^0$ καὶ $y^0=τ^0+μ\cdot 360^0$, ὅπου λ, μ ἀκέραιοι καὶ $τ^0$ τὸ ἐλάχιστον θετικόν. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $x^0—y^0=(λ-μ)\,360^0$, δηλ. ἡ διαφορά των εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς περιφερείας (διότι λ—μ= ἀκέραιος). Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ἀκέραιον λ—μ διὰ τοῦ k λαμβάνομεν :

<u>30</u> $$\boxed{x^0=y^0+k\cdot 360^0,\ \ k\ \text{ἀκέραιος}}$$

Ὥστε, ἂν δοθῇ ἓν οἱονδήποτε τόξον y ἔχον ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β, λαμβάνομεν ἐξ αὐτοῦ ὅλα τὰ τόξα x τὰ ἔχοντα τὴν

αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας, προσθέτοντες εἰς τὸ y, ἀκέραια πολλαπλάσια τῶν 360^0, δηλ. χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον 30.

Ἐννοεῖται ὁ τύπος 30 δύναται νὰ γραφῆ καὶ

$$\underline{30_\alpha} \qquad \boxed{\mathbf{x = y + 2k\pi, \quad k = \text{ἀκέραιος}}}$$

ὅταν x καὶ y ἐκφράζουν ἀκτίνια.

Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 30 περιέχει ὡς μερικὴν περίπτωσιν τὸν 29 καὶ ὁ 30_α τὸν 29_α ὅταν συμβῆ τὸ τόξον y νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον θετικόν.

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, τὸ σύμβολον $\overset{\frown}{AB}$ = τόξον μὲ ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β ἔχει ἀπείρους σημασίας (καὶ ἀπείρους τιμάς). Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\{\overset{\frown}{AB}\}$ τὸ *σύνολον τῶν ἀπείρων τόξων* τῶν ἐχόντων ἀρχὴν Α καὶ πέρας Β καὶ διὰ τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ θὰ ἐννοοῦμεν ἕνα ὡρισμένον ἐξ αὐτῶν. Τὸ μέτρον τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ θὰ παριστάνωμεν διὰ τοῦ $(\overset{\frown}{AB})$.

✱στ΄) **Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ τόξων.** i) *Ἄθροισμα δύο τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου καλοῦμεν ἕνα τρίτον τόξον τοῦ αὐτοῦ κύκλου τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν δύο δοθέντων.*

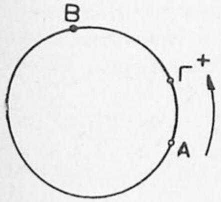
Ἂν τὰ δύο δοθέντα εἶναι τὰ $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τὸ ἄθροισμά των παρίσταται μὲ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καὶ ἔχει μέτρον: $(\overset{\frown}{AB})+(\overset{\frown}{\Gamma\Delta})$.

Γενικῶς δέ, ἂν ν τόξα τοῦ ἰδίου κύκλου μετρηθέντα διά τινος μονάδος ἔχουν μέτρα τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ (θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς), τὸ ἄθροισμα τῶν ν τούτων τόξων θὰ εἶναι ἕνα τόξον τοῦ ἰδίου κύκλου ἔχον μέτρον $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu$. (Διότι, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα, προσθέτομεν τὰ δύο πρῶτα τόξα καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὸ τρίτον κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου).

ii) **Διαδοχικὰ τόξα** καλοῦνται τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας κείμενα, οὕτως ὥστε τὸ πέρας ἑκάστου νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἑπομένου του.

Θεώρημα I. «Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε διαδοχικῶν τόξων ἰσοῦται πρὸς τόξον ἔχον ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου».

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν πρῶτον, δύο διαδοχικὰ τόξα, $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{B\Gamma}$ (σχ. 36) (ὅπου ἐδῶ, τὸ $\overset{\frown}{AB}$ ὑποτίθεται ὅτι παριστάνει ἕνα ὡρισμένον τόξον ἔχον ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β καὶ $\overset{\frown}{B\Gamma}$ ἕνα ὁμοίως, ὡρισμένον τόξον, (βλ. ἀνωτέρω σημείωσιν). Ἄς θεωρήσωμεν κινητὸν ὅπερ ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας *κατὰ τὴν ἰδίαν πάντοτε φοράν*, τοιαύτην ὥστε νὰ συναντήσῃ πρῶτον τὸ Β καὶ κατόπιν τὸ Γ. Τὸ κινητὸν τοῦτο κινούμενον ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ Β θὰ γράψῃ ἕνα τόξον μέτρου α (α θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἕως τὸ Γ ὅπου καὶ θὰ σταματήσῃ, ἕνα ἄλλο τόξον μέτρου β. Προφανῶς, ὅλος ὁ διαγραφόμενος ὑπὸ τοῦ κινητοῦ, δρόμος ἀπὸ Α ἕως Γ θὰ ἔχῃ μέτρον α+β. Ὥστε τὸ τόξον α+β δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχον ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Γ. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι ἕνα ἐκ τῶν τόξων μὲ ἀρχὴν Α καὶ πέρας Β θὰ ἔχωμεν σύμφωνα μὲ τὸν τύπον <u>30</u>:



Σχ. 36

$$(\overset{\frown}{AB}) = \alpha + 2k\pi$$

καὶ ὁμοίως :

$$(\overset{\frown}{B\Gamma}) = \beta + 2k'\pi$$

ἄρα :

$$(\overset{\frown}{AB}) + (\overset{\frown}{B\Gamma}) = (\alpha+\beta) + 2(k+k')\pi$$

Δηλαδή, τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{B\Gamma}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα τόξον μέτρου α+β ὅπερ ὡς εἴδομεν ἔχει ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Γ, πλέον ἀκέραιον πλῆθος περιφερειῶν, αἵτινες ὅμως προστιθέμεναι εἰς τὸ α+β, δὲν μεταβάλλουν τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Ὥστε ἄκρα τοῦ ἀθροίσματος $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}$ παραμένουν τὰ Α καὶ Γ.

Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν τρία διαδοχικὰ τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅπερ ὡς ἐδείξαμεν ἔχει ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Γ, πλέον τὸ τρίτον ὅπερ ἔχει ἀρχὴν τὸ Γ καὶ πέρας τὸ Δ. Οὕτω καταλήγομεν εἰς δύο διαδοχικὰ τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ὧν τὸ ἄθροισμα θὰ ἔχῃ ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Δ. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαδοχικῶν τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ἰσοῦται πρὸς τόξον ἔχον ἀρχὴν τὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ τοῦ τελευταίου.

Ἡ περίπτωσις τεσσάρων διαδοχικῶν τόξων ἀνάγεται εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τριῶν κ.ο.κ. Ἔτσι φθάνομεν εἰς τὸ ἀνωτέρω διατυπωθὲν γενικὸν θεώρημα.

iii) *Τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος Ι.* «**Πᾶν τόξον $\overset{\frown}{AB}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma B}$, ὅπου Γ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ $\overset{\frown}{A\Gamma}$ εἶναι ἓν αὐθαιρέτως ἐκλεγὲν τόξον μὲ ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Γ**».

Ἰσχύει καὶ συνάγεται εὐκόλως ἐκ τῶν προηγουμένων.

iv) «*Διαφορὰ δύο τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου καλεῖται ἕνα τόξον τοῦ ἰδίου κύκλου τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων τοῦ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου τόξου*».

Συνεπῶς ἡ διαφορὰ δύο τόξων τ_1 καὶ τ_2, δηλ. ἡ $\tau_1 - \tau_2$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα $\tau_1 + (-\tau_2)$ Δηλαδὴ *ἡ ἀφαίρεσιν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου.*

Θεώρημα ΙΙ. **«Ἡ διαφορὰ δύο τόξων ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἀρχὴν ἰσοῦται πρὸς τόξον ἔχον ἀρχὴν μὲν τὸ πέρας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ μειωτέου».**

Δηλαδὴ ἡ διαφορὰ $\widehat{AM} - \widehat{AN}$ ἰσοῦται πρὸς κάποιο τόξον $\widehat{NM}$.

Ἀπόδειξις. $\widehat{AM} - \widehat{AN} = \widehat{AM} - \widehat{NA} = \widehat{AM} + \widehat{NM} + \widehat{MA} = \widehat{AM} + \widehat{MA} + \widehat{NM} = \widehat{NM}$

(Ἀνελύσαμεν τὸ τόξον $\widehat{MA}$ εἰς ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν τόξων $\widehat{NM}$ καὶ $\widehat{MA}$ καὶ τελικῶς ἐφηρμόσαμεν τὸ θεώρημα Ι).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Ποῦ λήγουν τὰ μέσα τῶν ἀπείρων τόξων $\{\widehat{AB}\}$;**

Λύσις. Τὸ τυχὸν τόξον $\widehat{AB}$ ἔχει μέτρον : $(\widehat{AB}) = \tau + 2k\pi$ (τύπος 29α) τὸ δὲ ἥμισυ αὐτοῦ τὸ ἔχον ἀρχὴν τὸ Α, ἔχει μέτρον $(\widehat{AB})/2 = \tau/2 + k\pi$, δηλ. ὑπερβαίνει τὸ $\tau/2$ κατὰ k ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν λοιπὸν εἶναι k=ἄρτιος, τὸ $(\widehat{AB})/2$ ὑπερβαίνει τὸ $\tau/2$ κατὰ ἀκεραιον ἀριθμὸν περιφερειῶν, συνεπῶς ἔχει τὸ ἴδιο πέρας Μ μετα τοῦ $\tau/2$, δηλ. ληγει εἰς τὸ μέσον Μ τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ ἐκ τῶν $\{\widehat{AB}\}$. Ἐὰν k=περιττός, τότε τὸ $(\widehat{AB})/2$ ὑπερβαίνει τὸ $\tau/2$ κατὰ περιττὸν ἀριθμὸν ἡμιπεριφερειῶν καὶ συνεπῶς λήγει εἰς τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον πρὸς τὸ Μ σημεῖον. Μ'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

147) Ἂν τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον τὸ συνδέον δύο σημεῖα Α καὶ Β μιᾶς προσανατολισμένης περιφερείας εἶναι $\tau = 80^0$ νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον ἔχον ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β καὶ περιεχόμενον μεταξὺ 700^0 καὶ 800^0.

148) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἄπειρα τόξα τὰ ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ μέτρα ἴσα πρὸς τὸ 1/4 τῶν μέτρων τῶν ἀπείρων τόξων $\{\widehat{AB}\}$, ἔχουν τὰ πέρατα αὐτῶν εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς τετραγώνου.

149) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ δύο τύποι : $\{x = \tau + 2k\pi,\ x' = 2k'\pi + \pi - \tau,\ k, k'$ τυχόντες ἀκέραιοι$\}$ δύνανται νὰ συγχωνευθοῦν εἰς τόν : $y = (-1)^\rho . \tau + \rho\pi$, ὅπου ρ τυχὼν ἀκέραιος.

150) Δοθέντων τῶν σημείων Α καὶ Β μιᾶς προσανατολισμένης περιφερείας, ποῦ κεῖνται τὰ πέρατα τῶν ἀπείρων τόξων τῶν ἐχόντων ἀρχὴν τὸ Α καὶ μέτρα ἴσα πρὸς τὸ 1/3 τῶν μέτρων τῶν ἀπείρων τόξων $\{\widehat{AB}\}$;

151) Ἐὰν x παριστᾷ τὴν γενικὴν ἔκφρασιν τῶν μέτρων τῶν τόξων τῶν ἐχόντων ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β ζητεῖται ποῦ κεῖνται τὰ πέρατα τῶν τόξων μὲ ἀρχὴν Α καὶ ἐχόντων μέτρα : i) 2x, ii) 2x/5.

152) Ποία ἡ σχέσις τῶν μέτρων x καὶ x΄ δύο τόξων μὲ ἀρχὴν Α καὶ πέρατα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διὰ τοῦ Α διερχομένην διάμετρον ;

153) Δύο κινητὰ Μ καὶ Μ′ κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ προσανατολισμένης περιφερείας ἀναχωρήσαντα κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν μηδὲν τὸ Μ ἐκ τοῦ Α καὶ τὸ Μ′ ἐκ τοῦ Β, ὅπου $(\widehat{AB})=\pi/2$ ἀκτίν. Τὸ πρῶτον ἐκτελεῖ 2 στροφὰς κατὰ λεπτὸν καὶ τὸ δεύτερον, 3 στροφ/λεπτόν. Ζητοῦνται νὰ καθορισθοῦν τὰ σημεῖα συναντήσεως καὶ οἱ ἀντίστοιχοι χρόνοι.

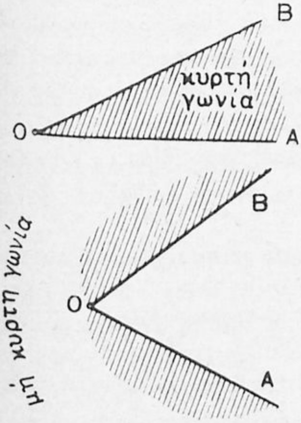
i) ἂν κινοῦνται ἀμφότερα κατὰ τὴν θετικὴν φοράν,

ii) τὸ Μ κατὰ τὴν θετικὴν καὶ τὸ Μ′ κατὰ τὴν ἀρνητικήν.

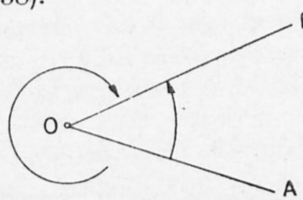
154) Ἔστω Α σταθερὸν σημεῖον δοθείσης προσανατολισμένης περιφερείας (γ). Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν ἀπείρων τόξων $\{\widehat{A\Gamma}\}$ ὅπου κάθε $\widehat{A\Gamma}$ ἔχει ἐλάχιστον θετικὸν τ τοιοῦτον ὥστε $0\leq\tau\leq 90^0$. Καθορίσατε ἐπὶ τῆς (γ) τὰς περιοχὰς εἰς τὰς ὁποίας λήγουν τὰ τόξα: i) $3\,\widehat{A\Gamma}$ καὶ ii) $\widehat{A\Gamma}/3$.

36. Ἡ ἐπεκτεταμένη ἔννοια τῆς γωνίας.

α′) Εἰς τὴν Γεωμετρίαν, γωνία εἶναι τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ εὑρισκόμενον μεταξὺ δύο (ἀπεράντων) ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ (σχ. 37) ἀρχομένων ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν θεωροῦμεν τὴν γωνίαν ὡς περιοχὴν τοῦ ἐπιπέδου διαγραφομένην ὑπὸ ἡμιευθείας *ΟΑ* στρεφομένης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ περὶ τὸ *Ο* καθ' ὡρισμένην φορὰν (σχ. 38).



Σχ. 37



Σχ. 38

Μία γωνία θεωρεῖται δηλαδὴ πλήρως καθωρισμένη ὅταν δίδωνται:

α′) Ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ΟΑ.

β′) Ἡ τελικὴ πλευρὰ ΟΒ.

γ′) Ἡ φορὰ καθ' ἣν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ στρεφομένη περὶ τὴν κορυφὴν Ο, βαίνει πρὸς τὴν τελικὴν πλευρὰν ΟΒ.

δ′) Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς k ὅστις δεικνύει, ποσάκις ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ συνήντησε τὴν τελικήν, πρὶν τερματίσῃ τὴν κίνησίν της. (Ἐὰν $k=0$, σημαίνει ὅτι ἡ διαγράφουσα τὴν γωνίαν πλευρά, ἐσταμάτησε κινουμένη ἅμα τῇ πρώτῃ συμπτώσει αὐτῆς μετὰ τῆς τελικῆς πλευρᾶς).

Ἡ μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ καὶ τελικὴν τὴν ΟΒ, γωνία παρίσταται: $\widehat{OA,OB}$ ἢ $A\widehat{O}B$.

β΄) **Θετικαὶ καὶ ἀρνητικαὶ γωνίαι.** Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διακρίνομεν δύο ἀντιθέτους φορὰς (περιστροφῆς) καθ' ἃς τοῦτο δύναται νὰ διαγραφῆ ὑπὸ στρεφομένης ἡμιευθείας ΟΑ. Τὴν μίαν τούτων καλοῦμεν θετικὴν φορὰν καὶ τὴν ἄλλην (τὴν ἀντίθετον) ἀρνητικήν. Ἔτσι διακρίνομεν ἐπὶ τοῦ *(προσανατολισμένου)* ἐπιπέδου θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς γωνίας, ἀναλόγως τῆς φορᾶς καθ' ἣν διεγράφησαν (αὗται λέγονται καὶ *«προσημασμέναι γωνίαι»*). Δηλαδὴ θετικὴ γωνία θεωρεῖται ἐκείνη τῆς ὁποίας ἡ φορὰ διαγραφῆς συμπίπτει μὲ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐκλεγεῖσαν θετικὴν φορὰν (περιστροφῆς)· ἀναλόγως νοεῖται καὶ ἡ ἀρνητικὴ γωνία.

γ΄) **Μέτρον γωνίας.** Ὅταν ἡ γωνία ΑΟΒ (σχ. 38) (κειμένη ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δηλαδὴ ἔχει ἐκλεγῆ θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ φορὰ περιστροφῆς) καταστῆ ἐπίκεντρος γωνία εἰς μίαν περιφέρειαν, τότε θ' ἀντιστοιχῆ πρὸς τὴν γωνίαν ταύτην ἕνα τελείως ὡρισμένον τόξον. Τοῦτο θὰ ἔχη ἀρχὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς μετὰ τῆς περιφερείας, πέρας τὴν τομὴν τῆς τελικῆς πλευρᾶς μετὰ τῆς περιφερείας, φορὰν διαγραφῆς τὴν ἰδίαν καθ' ἣν διεγράφη καὶ ἡ γωνία καὶ τὸν αὐτὸν χαρακτηριστικὸν ἀριθμὸν k τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ γωνία.

Ἡ γωνία ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ ἀντίστοιχον τόξον της (μεγέθη ἀνάλογα, βλέπε καὶ § 1), δηλ. παρίσταται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ (θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ) δι' οὗ παρίσταται καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον της (§ 35, γ΄). Τὸ μέτρον τῆς $\widehat{OA,\ OB}$ παριστῶμεν μὲ $(\widehat{OA,\ OB})$ ἢ $(A\widehat{O}B)$ ἢ πολλάκις μὲ $A\widehat{O}B$ ἁπλῶς.

δ΄) **Ἴσαι γωνίαι** λέγονται ἐκεῖναι αἵτινες μετρηθεῖσαι διὰ τῆς ἰδίας μονάδος, ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον· ἀντίθετοι δὲ γωνίαι αἱ ἔχουσαι ἀντίθετα μέτρα. Ἡ ἀντίθετος τῆς γωνίας Α παρίσταται μὲ—Α.

Γενικώτερον, ὡς λόγος δύο γωνιῶν θὰ θεωρῆται ὁ λόγος τῶν μέτρων των (μὲ μονάδα τὴν αὐτήν).

ε΄) **Γωνίαι ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευράν.** Ἐὰν δοθοῦν μόνον ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ΟΑ καὶ ἡ τελικὴ πλευρὰ ΟΒ τῆς γωνίας, τότε σκεπτόμενοι ὅπως καὶ εἰς τόξα, εὑρίσκομεν ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος γωνίαι ἔχουσαι ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν ΟΑ καὶ τελικὴν τὴν ΟΒ. Αὗται διαφέρουν ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσια τῶν 360^0 καὶ ἡ τυχοῦσα ἐξ αὐτῶν ἔχει μέτρον x διδόμενον ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$x = y + 2k\pi \quad (k = \text{ἀκέραιος})$$

ὅπου y εἶναι μία ὡρισμένη γωνία ἔχουσα ἀρχικὴν καὶ τελικὴν πλευρὰν τὰς OA καὶ OB.

στ') **Ἄθροισμα γωνιῶν** καλεῖται γωνία ἔχουσα μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων γωνιῶν καὶ συνεπῶς ἀντίστοιχον τόξον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων τόξων τῶν προσθετέων γωνιῶν (ὅταν ὅλαι μεταφερθεῖσαι καταστοῦν ἐπίκεντροι εἰς τὸν ἴδιον κύκλον).

Διαδοχικαὶ γωνίαι καλοῦνται αἱ ἔχουσαι κοινὴν τὴν κορυφὴν καὶ διατεταγμέναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, οὕτως ὥστε ἡ τελικὴ πλευρὰ ἑκάστης νὰ εἶναι ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς ἑπομένης.

Ἐὰν ταύτας καταστήσωμεν ἐπικέντρους εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρ. I τῆς § 35, στ' εὑρίσκομεν ὅτι:

«Τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ἰσοῦται πρὸς γωνίαν ἔχουσαν ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν ἀρχικὴν τῆς πρώτης καὶ τελικήν, τὴν τελικὴν τῆς τελευταίας».

ζ') **Διαφορὰ δύο γωνιῶν A καὶ B** καλεῖται γωνία ἔχουσα μέτρον τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων τῶν A καὶ B. Ἑπομένως, ἡ διαφορὰ A—B ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς A καὶ τῆς ἀντιθέτου τῆς B, δηλ. μὲ A+(—B).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

155) Ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου σχεδιάσατε μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν OA τὰς γωνίας: $\widehat{AOB}$, μέτρου $+30^0$, $\widehat{AO\Gamma}$, μέτρου -90^0 καθὼς καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων.

156) Ἔστωσαν δύο ἴσαι διαδοχικαὶ γωνίαι $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, μέτρου -20^0 ἑκάστη. Ἐὰν ἡ γωνία $\widehat{BO\Delta}$ ἔχῃ μέτρον $+210^0$ εὕρετε τὰς θετικὰς καὶ μικροτέρας τῶν 360^0 γωνίας $\widehat{AO\Delta}$ καὶ $\widehat{\Gamma O\Delta}$.

157) Ἔστωσαν αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OB ἐν προσανατολισμένῳ ἐπιπέδῳ καὶ OB' ἡ ἀντίρροπος τῆς OB ἡμιευθεῖα. Δείξατε ὅτι ἡ τυχοῦσα γωνία AOB, (δηλ. μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν OA καὶ τελικὴν OB) καὶ ἡ τυχοῦσα γωνία AOB', διαφέρουν κατὰ περιττὸν πολλαπλάσιον τῶν 2 ὀρθῶν (θετικὸν ἢ ἀρνητικόν).

158) Δείξατε ὅτι ἂν ἡ ἀρχικὴ καὶ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς γωνίας συμπίπτουν τὸ μέτρον τῆς γωνίας εἶναι $2k\pi$ ἀκτιν., ὅπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

159) Ἐὰν $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ τυχόντα σημεῖα μιᾶς προσανατολισμένης περιφερείας, νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τὰ διαδοχικὰ τόξα $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_\nu A_1}$ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$(\overparen{A_1A_2}) + (\overparen{A_2A_3}) + ... + (\overparen{A_{\nu-1}A_\nu}) + (\overparen{A_\nu A_1}) = 2k\pi$ ὅπου k ἀκέραιος

160) Ἐὰν αἱ ἡμιευθεῖαι $OA_1, OA_2, ..., OA_\nu$ κεῖνται ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου δείξατε ὅτι :

$$(\widehat{OA_1, OA_2}) + (\widehat{OA_2, OA_3}) + ... + (\widehat{OA_\nu, OA_1}) = 2k\pi, \text{ (k ἀκέραιος)}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ VI

i) *Τί καλεῖται «προσανατολισμένη περιφέρεια»; Σχετικὸν μέτρον ἑνὸς τόξου;*

ii) *Πόσα τόξα ὑπάρχουν ἔχοντα ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β, ὅπου Α καὶ Β εἶναι σημεῖα μιᾶς προσανατολισμένης περιφερείας; Τί καλεῖται ἐλάχιστον θετικὸν τόξον ἐκ τῶν* $\{\overparen{AB}\}$*; Ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μέτρων δύο τόξων ἐχόντων ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας τὸ Β;*

iii) *Τί καλεῖται μέτρον γωνίας; Διαδοχικαὶ γωνίαι; Ἄθροισμα γωνιῶν; Διαφορὰ γωνιῶν;*

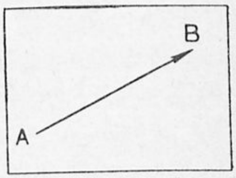
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γενικευμένων τόξων καὶ γωνιῶν

37. Προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα.

α΄) Αἱ ἔννοιαι: τοῦ διανύσματος, τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς διανύσματος εἶναι γνωσταὶ ἀπὸ τὸ μάθημα τῆς Γεωμετρίας ἢ καὶ τῆς Ἀλγέβρας. Τὰς ὑπενθυμίζομεν ἐνταῦθα ἐν συντομίᾳ:

1ον. Διάνυσμα *καλεῖται εὐθύγραμμον τμῆμα θεωρούμενον ὡς διανυθὲν ὑπὸ κινητοῦ σημείου κινουμένου κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φορὰν (ἄνευ παλινδρομήσεως).*



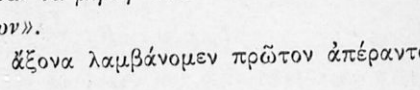
Σχ. 39

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 39) ἔχει **ἀρχὴν** τὸ Α καὶ **πέρας** τὸ Β. Τὸ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι **ἀντίθετον** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ **Μέτρον** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ παρίσταται μὲ $|\overrightarrow{AB}|$ ἢ (ΑΒ). **Ἡ διεύθυνσις** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ κάθε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐφ' ἧς κεῖται τὸ διάνυσμα.

Συμβατικῶς, δεχόμεθα ὅτι ἕνα σημεῖον παριστᾷ ἕνα **μηδενικὸν διάνυσμα,** δηλ. διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας συμπίπτουν. Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ἔχει μέτρον μηδὲν ἀλλὰ ἐν γένει, δὲν ἔχει ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν. Γράφοντες $\overrightarrow{AB}=0$ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι μηδενικὸν διάνυσμα καὶ ὅτι συνεπῶς τὸ Β συμπίπτει μὲ τὸ Α.

2ον. Ἄξων *καλεῖται ἀπέραντος εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ φορὰ καθὼς καὶ ἡ μονὰς τοῦ μήκους διὰ τῆς ὁποίας ὑποχρεωτικῶς μετροῦνται τὰ μήκη ὅλων τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος κειμένων εὐθυγράμμων τμημάτων».*

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἄξονα λαμβάνομεν πρῶτον ἀπέραντον εὐθεῖαν x΄x (σχ. 40). Αὐτὴ δύναται νὰ διανυθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς· τὴν μίαν ἐκ τούτων (συνήθως τὴν ἐξ ἀρι-



Σχ. 40.

στερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ) ὀνομάζομεν **θετικὴν** φορὰν καὶ τὴν ἀντίθετόν της, **ἀρνητικήν**. Τέλος, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (προσανατολισμένης εὐθείας) x΄x τμῆμα ΟΑ ὅπερ θεωροῦμεν ὡς μονάδα μήκους, βάσει δὲ τῆς ἐκλεγείσης ταύτης μονάδος ἐκφράζομεν τὸ μῆκος παντὸς τμήματος ἢ διανύσματος κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας x΄x. Ἔτσι ἔχομεν ἕνα ἄξονα τελείως ὡρισμένον.

Τὸ **διάνυσμα** $\overrightarrow{OA}$ ὅπερ κείμενον **ἐπὶ** τοῦ ἄξονος x΄x ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὴν μονάδα (σχ. 41) καὶ φορὰν τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος, καλεῖται **μοναδιαῖον διάνυσμα** τοῦ ἄξονος καὶ καθορίζει τὸν ἄξονα.

Σχ. 41

3ον. Σχετικὸν μέτρον (ἢ ἀλγεβρικὴ τιμὴ) διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος. Ἂς θεωρήσωμεν τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΓ}$ κείμενον ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x΄x ὅστις ἔχει μοναδιαῖον διάνυσμα τὸ $\overrightarrow{OA}$ (σχ. 42). Ἐάν, τώρα, μετρήσωμεν τὸ τμῆμα ΒΓ μὲ μονάδα τὸ ΟΑ καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως θέσωμεν τὸ πρόσημον + ἂν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΓ}$ εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὸ μοναδιαῖον ἢ τὸ πρόσημον — ἂν τὸ $\overrightarrow{ΒΓ}$ εἶναι ἀντίρροπον πρὸς τὸ μοναδιαῖον, τότε ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον οὕτω λαμβάνομεν καλεῖται **σχετικὸν μέτρον** ἢ **ἀλγεβρικὴ τιμὴ** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{ΒΓ}$. Τὸ σχετικὸν μέτρον τοῦ $\overrightarrow{ΒΓ}$ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\overline{ΒΓ}$.

Σχ. 42

Τὰ μηδενικὰ διανύσματα ἔχουν ἐξ ὁρισμοῦ, ἀλγεβρικὴν τιμήν, μηδέν. Τὰ ἀντίθετα διανύσματα ἔχουν ἀντιθέτους ἀλγεβρικὰς τιμὰς δηλαδὴ $\overline{ΒΓ}+\overline{ΓΒ}=0$.

Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν ἑνὸς διανύσματος, τότε γνωρίζομεν ὄχι μόνον τὸ μέγεθος τοῦ διανύσματος ἀλλὰ καὶ τὴν φορὰν αὐτοῦ. Οὕτω π.χ. ἂν $\overline{ΚΛ}=-3$, ἕπεται ὅτι τὸ $\overrightarrow{ΚΛ}$ φέρεται πρὸς τ' ἀρνητικὰ τοῦ ἄξονος καὶ ἔχει μῆκος τριῶν μονάδων.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ $\overrightarrow{ΒΓ}$ ἔχῃ φορὰν τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος τότε ἡ ἀλγεβρικὴ τίμή του συμπίπτει μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν του (μέτρον του) καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\overline{ΒΓ}=|\overrightarrow{ΒΓ}|=(ΒΓ)=(ΓΒ)$ *ὅπου (ΒΓ) συμβολίζει τὸ ἀπόλυτον (ἢ ἀριθμητικὸν) μῆκος τοῦ τμήματος ΒΓ.* Ἐὰν τὸ $\overrightarrow{ΒΓ}$ φέρεται πρὸς τ' ἀρνητικά, τότε $\overline{ΒΓ}=-|\overrightarrow{ΒΓ}|=-(ΒΓ)$.

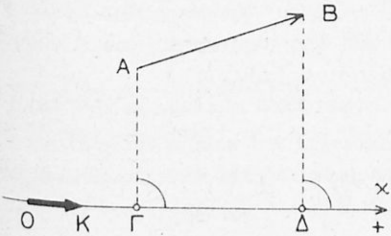
4ον. Θεώρημα τοῦ Châsles. «Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν κεῖνται τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος, ἀληθεύει πάντοτε ἡ ἰσότης:

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}».$$

Γενίκευσις: «Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν κεῖνται ἐπὶ ἄξονος, ν σημεῖα $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$, ἀληθεύει πάντοτε ἡ ἰσότης:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \ldots + \overline{A_{\nu-1}A_\nu} = \overline{A_1A_\nu}».$$

β') Προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα. Καλεῖται προβολὴ ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν τὴν προβολὴν τῆς ἀρχῆς καὶ πέρας τὴν προβολὴν τοῦ πέρατος τοῦ δοθέντος διανύσματος, ἐπὶ τὸν ἄξονα.



Σχ. 43

Ἔτσί π.χ. ἡ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα Ox (σχ. 43) εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ὅπου Γ ἡ (ὀρθὴ) προβολὴ τοῦ Α καὶ Δ ἡ (ὀρθὴ) προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τὸν Ox. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\underset{Ox}{\text{προβ}}\, \overrightarrow{AB} = \overline{\Gamma\Delta}$$

Ὁμοίως, εἶναι:

$$\underset{Ox}{\text{προβ}}\, \overrightarrow{BA} = \overline{\Delta\Gamma}$$

Ὥστε: **Ἡ προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ μηδέν.**

Μηδενικὴν προβολὴν ἔχει πᾶν διάνυσμα κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

161) Ἐὰν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι αἱ διαδοχικαὶ πλευραὶ ἑνὸς πενταγώνου καὶ x'x τυχὼν ἄξων, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\underset{x'x}{\text{προβ}}\, \overrightarrow{AB} + \underset{x'x}{\text{προβ}}\, \overrightarrow{B\Gamma} + \underset{x'x}{\text{προβ}}\, \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \underset{x'x}{\text{προβ}}\, \overrightarrow{\Delta E} + \underset{x'x}{\text{προβ}}\, \overrightarrow{EA} = 0$$

Νὰ γίνῃ γενίκευσις.

162) Τί συνάγομεν δι' ἕνα διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἔχει μηδενικὰς προβολὰς ἐπὶ δύο τεμνομένους ἄξονας, κειμένους ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τοῦ διανύσματος;

163) Ἐὰν Κ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{K\Gamma}$ ἐπὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τῶν Β καὶ Γ ἰσοῦται μὲ τὴν προβολὴν τοῦ $\overrightarrow{KH}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.

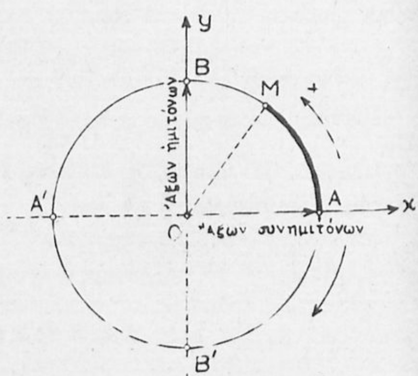
164) Πῶς πρέπει νὰ κεῖται ἕνας ἄξων Οx ὡς πρὸς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν προβολῶν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$ ἐπὶ τὸν Οx νὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν;

38. Τριγωνομετρικὸς κύκλος.

Καλεῖται **τριγωνομετρικὸς κύκλος,** ἕνας κύκλος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς λαμβάνεται ὡς μονὰς μήκους, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι προσανατολισμένη (§ 35, β′) καὶ ἐπὶ τῆς περιφερίας τοῦ ὁποίου ἔχει ὁρισθῆ σημεῖον καλούμενον **ἀρχὴ τῶν τόξων.**

Ἐὰν Ο τὸ κέντρον τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου καὶ Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ εἶναι μοναδιαῖον καὶ καθορίζει ἕνα ἄξονα (§37, α′) Οx ἔχοντα προφανῶς, θετικὴν φορὰν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Α καὶ μονάδα μήκους τὴν ἀκτῖνα ΟΑ. Ὁ ἄξων οὗτος Οx (σχ. 44) καλεῖται **ἄξων τῶν συνημιτόνων.**

Ἐὰν νοήσωμεν τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ στρεφόμενον περὶ τὸ Ο ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περιστροφῆς καὶ κατὰ 90°, ἡ νέα θέσις $\overrightarrow{OB}$ τὴν ὁποίαν θὰ λάβῃ, κάθετος ἐπὶ τὴν παλαιάν, καθορίζει ἕνα δεύτερον ἄξονα Οy ὅστις καλεῖται **ἄξων τῶν ἡμιτόνων.** (Οὗτος ἔχει θετικὴν φορὰν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Β (σχ. 44) καὶ μονάδα μήκους, τὴν ἀκτῖνα). Δηλ. ὁ ἄξων τῶν ἡμιτόνων προκύπτει διὰ στροφῆς τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων, περὶ τὸ κέντρον Ο, κατὰ +90°.



Σχ. 44

Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τότε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **διανυσματικὴ ἀκτὶς** τοῦ σημείου Μ καὶ ἐὰν τὸ Μ εἶναι πέρας τόξου τινος $\widehat{AM}$ ἀρχομένου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Α τότε τὸ $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς** τοῦ τόξου.

ΑΣΚΗΣΙΣ

165) Δοθέντος τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο (σχ. 44) ποῖαι εἶναι αἱ τελικαὶ διανυσματικαὶ ἀκτῖνες τῶν τόξων τῶν ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἐχόντων μέτρα:
i) 0°, ii) 180°, iii) -90°, iv) $+90^\circ$, v) $+270^\circ$, vi) -270°;
Ποῖαι δὲ εἶναι αἱ προβολαὶ (§ 37) τῶν διανυσματικῶν τούτων ἀκτίνων, 1ον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων, 2ον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων;

39. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τυχόντος τόξου.

α΄) Ἄς θεωρήσωμεν τόξον $\widehat{AM}$ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 45) ἔχον ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν Α τῶν τόξων καὶ πέρας τυχὸν σημεῖον Μ. τῆς περιφερείας. *Καλεῖται* **ἡμίτονον** *τοῦ τόξου* $\widehat{AM}$, *ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος του,* $\overrightarrow{OM}$, *ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων,* **συνημίτονον** *δὲ τοῦ τόξου* $\widehat{AM}$ *ἡ προβολὴ τῆς ἰδίας ἀκτῖνος* $\overrightarrow{OM}$ *ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων* (§ 37 καὶ § 38).

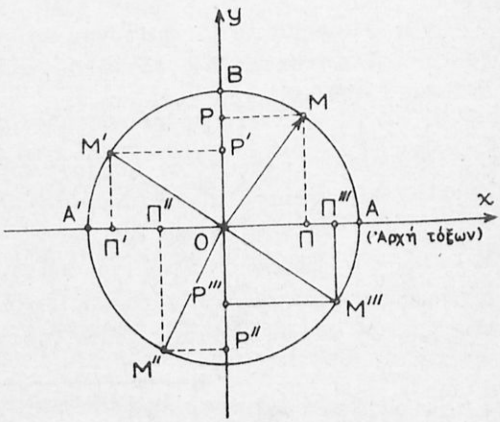
Δηλαδή, συμφώνως πρὸς τὸ σχ. 45, τὸ τόξον $\widehat{AM}$ ἔχει ὡς ἡμίτονον τὸ σχετικὸν μέτρον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ (μετρηθὲν μὲ μονάδα τὴν ΟΒ, § 37, 2ον) καὶ ὡς συνημίτονον τὸ σχετικὸν μέτρον τοῦ $\overrightarrow{O\Pi}$ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων. Γράφομεν δὲ συντόμως:

$$\eta\mu(\widehat{AM}) = \overline{OP}, \quad \sigma\upsilon\nu(\widehat{AM}) = \overline{O\Pi}.$$

(Ὁμοίως: $\eta\mu(\widehat{AM'})=\overline{OP'}$, $\sigma\upsilon\nu(\widehat{AM'})=\overline{O\Pi'}$, $\eta\mu(\widehat{AM''})=\overline{OP''}$ κ.τ.λ.).

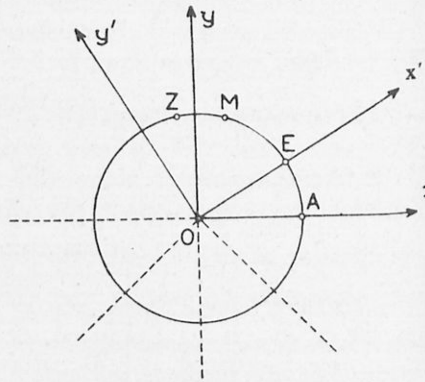
β΄) Προκειμένου νὰ ὁρίσωμεν τὸ συνημίτονον καὶ ἡμίτονον τόξου $\widehat{EZ}$ (σχ. 46) μὴ ἔχοντος ἀρχὴν τὴν ἐκλεγεῖσαν ἀρχὴν Α, λαμβάνομεν ὡς νέαν ἀρχὴν τόξων τὸ Ε, ὁρίζομεν τοὺς ἀντιστοίχους ἄξονας συνημιτόνων καὶ ἡμιτόνων, τοὺς Οx΄ καὶ Οy΄ καὶ προβάλλομεν ἐπ᾽ αὐτοὺς τὴν τελικὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα $\overrightarrow{OZ}$.

Ἐὰν ὅμως στρέψωμεν περὶ τὸ Ο τὴν



Σχ. 45

ὀρθὴν γωνίαν x'Oy' καὶ μετ' αὐτῆς καὶ τὰ Ε καὶ Ζ, ἕως ὅτου τὸ Ε πέσῃ εἰς τὸ Α, τότε ὁ Ox' θὰ συμπέσῃ μὲ τὸν Ox, ὁ Oy' μὲ τὸν Oy καὶ τὸ Ζ θὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν τινὰ Μ οὕτως ὥστε $\widehat{AM} = \widehat{EZ}$. Ἑπομένως, εἴτε εὕρομεν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ $\widehat{EZ}$ χρησιμοποιοῦντες νέαν ἀρχὴν τόξων τὴν Ε ἢ μεταφέρομεν τὸ τόξον $\widehat{EZ}$ εἰς τὴν θέσιν $\widehat{AM}$ ὥστε νὰ ἔχῃ ὡς ἀρχὴν τὴν ἀρχικῶς ἐκλεγεῖσαν ἀρχὴν τῶν τόξων, τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα θὰ ἔχωμεν.



Σχ. 46

Ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν ὅτι τὰ ἴσα τόξα (ὅπως τὰ $\widehat{EZ}$, $\widehat{AM}$) ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καὶ ἴσα συνημίτονα. Ὥστε τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ μέτρον τοῦ τόξου καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Ἑπομένως, ἂν θ εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου $\widehat{EZ}$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ημθ ἢ συνθ ἀντὶ ημ($\widehat{EZ}$) ἢ συν($\widehat{EZ}$) ἀφοῦ μόνον τὸ μέτρον θ ἀρκεῖ νὰ ὁρίσῃ τὴν τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου ἢ τοῦ συνημιτόνου.

γ΄) **Θεώρημα. «Τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου δὲν βλάπτονται ἂν τὸ τόξον αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ ἀκέραιον πλῆθος περιφερειῶν».**

Ἀπόδειξις. Ἔστω τόξον $\widehat{AM}$ (σχ. 45). Ἐὰν εἰς τὸ $\widehat{AM}$ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν, μίαν ἢ ἀκέραιον πλῆθος περιφερειῶν, λαμβάνόμενον νέον τόξον τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α καὶ πέρας, πάλιν τὸ Μ (§ 35, ε΄). Συνεπῶς, ἀφοῦ τὸ πέρας τοῦ τόξου μένει τὸ αὐτό, ἡ τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς μένει ἡ ἰδία ἄρα καὶ αἱ προβολαί της ἐπὶ τοὺς Ox, Oy μένουν αἱ αὐταί. Τοῦτο γράφεται:

$$\underline{31} \qquad \boxed{\begin{aligned} \text{ημ}(\theta+2k\pi) &= \text{ημ}\theta \\ \text{συν}(\theta+2k\pi) &= \text{συν}\theta \end{aligned}} \quad k = \text{ἀκέραιος}$$

ΑΣΚΗΣΙΣ

166) Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τριγων. κύκλου, τόξα ἔχοντα ἡμίτονον: 1/2 ἢ 3/4 ἢ —0,5 ἢ —0,75 καθὼς καὶ τόξα ἔχοντα συνημίτονον 0 ἢ 1/3 ἢ —1 ἢ —0,4.

40. Μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου.

Τὰς μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου καθὼς καὶ τῶν λοιπῶν τριγωνομετρικῶν ποσοτήτων, θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα ἐποπτικῶς, δηλ. βασιζόμενοι εἰς τὴν ἐποπτείαν τοῦ σχήματος καὶ ἐπὶ τῇ βάσει πάντοτε τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Ἄς ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὸ μηδενικὸν τόξον. Τούτου τὸ πέρας θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν Α τῶν τόξων (σχ. 45) καὶ ἡ τελικὴ διανυσματική του ἀκτὶς θὰ εἶναι ἡ $\overrightarrow{OA}$. Ἡ προβολὴ ταύτης ἐπὶ τὸν Oy ἰσοῦται προφανῶς μὲ μηδέν, ἄρα τὸ ἡμίτονον τοῦ 0^0 ἰσοῦται μὲ 0 ($ημ0^0=0$).

Ἐὰν νοήσωμεν τὸ τόξον (μὲ ἀρχὴν πάντοτε τὸ Α) αὐξάνον πρὸς τὰς 90^0, τὸ πέρας Μ θ' ἀνέρχεται πρὸς τὸ Β, ἡ προβολὴ Ρ τοῦ Μ θ' ἀνέρχεται πρὸς τὸ Β καὶ συνεπῶς τὸ ἡμίτονον θ' *αὐξάνῃ*. Ὅταν τὸ τόξον θὰ γίνῃ $+90^0$, ἡ τελικὴ ἀκτίς του $\overrightarrow{OB}$ ἔχει τότε προβολὴν ἐπὶ τοῦ Oy ἴσην μὲ $\overline{OB}=1$. Ὥστε $ημ90^0=1$.

Ἐὰν τὸ τόξον ἐξακολουθήσῃ αὐξάνον ἐκ τῶν 90^0 πρὸς τὰς 180^0, τότε τὸ πέρας Μ′ τοῦ τόξου κατέρχεται πρὸς τὸ Α′, ἡ προβολὴ Ρ′ τοῦ τοῦ Μ′ βαίνει πρὸς τὸ κέντρον Ο καὶ συνεπῶς τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται ἐκ τοῦ 1 πρὸς τὸ μηδέν. Ὅταν δὲ τὸ τόξον γίνῃ 180^0 ἡ τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς αὐτοῦ $\overrightarrow{OA'}$ ἔχει προβολὴν μηδενικὴν ἐπὶ τοῦ Oy, ἄρα $ημ180^0=0$.

Ἐὰν τὸ τόξον συνεχίσῃ τὴν αὔξησίν του ἀπὸ 180^0 πρὸς τὰς 270^0 ἡ προβολὴ Ρ″ τοῦ πέρατος Μ″ κατέρχεται πρὸς τὸ Β′ καὶ τὸ ἡμίτονον ἐξακολουθῇ ἐλαττούμενον (κάτω τοῦ μηδενός), πρὸς τὸ —1. Διότι ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὁ ἔχων τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι μικρότερος· ὅσον δὲ τὸ Μ″ κατέρχεται πρὸς τὸ Β′, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\overline{OP''}$ αὐξάνει, ἄρα ἡ ἀλγεβρικὴ τιμή του $\overline{OP''}$ ἥτις εἶναι ἀρνητική, ἐλαττοῦται. Ἔχομεν δέ: $ημ270^0=-1$.

Τέλος, ἂν τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ 270^0 ἕως 360^0, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἀπὸ —1 ἕως τὸ μηδέν. Διότι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{OP'''}$ ἐλαττοῦται ἀπὸ 1 ἕως 0 ὅταν τὸ Μ‴ βαίνει ἀπὸ τὸ Β′ εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀλγεβρικὴ τιμή του $\overline{OP'''}$ εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τοῦτο αὕτη θὰ αὐξάνη ἀπὸ -1 ἕως 0, (ἐλαττουμένης τῆς ἀπολύτου τιμῆς της). Ἔχομεν δὲ ημ360^0=ημ0^0=0.

Ἐὰν τὸ τόξον αὐξάνη ἀπὸ 360^0 εἰς 720^0, προφανῶς τὸ ἡμίτονόν του διέρχεται διὰ τῶν αὐτῶν τιμῶν δι' ὧν διῆλθε κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 πρὸς 360^0 κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον (βλ. θεώρημα, § 39 γ'). Ἐπίσης, ἂν τὸ τόξον αὐξάνη ἀπὸ -360^0 ἕως 0^0, τὸ ἡμίτονον διατρέχει τὰς ἰδίας τιμὰς ἃς ἐλάμβανεν κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 κ.ο.κ. (βλέπε θεώρημα, § 40, γ').

Τὰς ἀνωτέρω μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου ὅταν τὸ τόξον αὐξάνη ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 περιγράφει ὁ κάτωθι πίναξ:

$$(1)\quad \boxed{\begin{array}{ll} \text{Μεταβολαὶ τοῦ τόξου x:} & 0 \nearrow 90^0 \nearrow 180^0 \nearrow 270^0 \nearrow 360^0 \\ \text{Μεταβολαὶ τοῦ ημx} \quad : & 0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \end{array}}$$

ὅπου τὸ σύμβολον $\nearrow$ σημαίνει αὔξησιν καὶ $\searrow$ ἐλλάττωσιν.

Εὐρύτερον πίνακα μεταβολῆς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὡς κάτωθι:

$$\begin{array}{l} x:\ -2\pi \nearrow -\frac{3\pi}{2} \nearrow -\pi \nearrow -\frac{\pi}{2} \nearrow 0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi \nearrow \frac{5\pi}{2} \nearrow 3\pi \nearrow \frac{7\pi}{2} \nearrow 4\pi \\ \text{ημx}:\ 0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \end{array}$$

ὅπου τὸ τόξον ἀρχίζει ἀπὸ τὴν τιμὴν -2π (rad) καὶ αὐξάνει συνεχῶς μέχρι τῆς τιμῆς 4π τοῦ πέρατός του κινουμένου πάντοτε κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

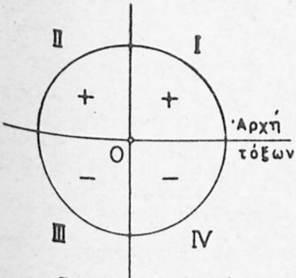
Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐποπτικῆς μελέτης τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου βλέπομεν ὅτι τοῦτο λαμβάνει περιωρισμένας τιμάς, μὴ δυνάμενον νὰ ὑπερβῇ τὴν μονάδα, οὔτε νὰ κατέλθη κάτω τοῦ -1. Ἑπομένως παντὸς τόξου τὸ ἡμίτονον περιλαμβάνεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$ (συμπεριλαμβανομένων). Ὥστε ἔχομεν:

$$\underline{\mathbf{32}} \qquad \boxed{\mathbf{-1 \leqq ημx \leqq 1}}$$

διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ἢ ὅπερ τὸ αὐτό: $|\text{ημx}| \leqq 1$.

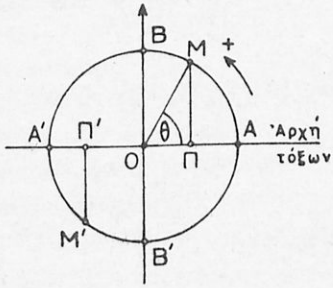
Σημεῖον τοῦ ἡμιτόνου. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονον εἶναι θετικὸν μὲν ὅταν τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ 1ον καὶ 2ον τεταρτημόριον τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 47) ἀρνητικὸν δὲ ὅταν τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ 3ον ἢ 4ον τεταρτημόριον.

Πρακτικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἡμιτόνου. Διὰ τὸν ἀρχάριον δὲν θὰ ἦτο περιττὴ ἡ ἑπομένη ἁπλῆ εἰκὼν τοῦ ἡμιτόνου. Ἔστω $\widehat{AM}$ τόξον τοῦ τριγων. κύκλου Ο (σχ. 48). Καλοῦντες τὴν Α΄Α *ἀρχικὴν διάμετρον* δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡμίτονον τοῦ $\widehat{AM}$ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ **πέρατος** τοῦ τόξου ἀπὸ τὴν



Σημεῖον τοῦ ἡμιτόνου

Σχ. 47



Σχ. 48

ἀρχικὴν διάμετρον, (δηλ. ἡ ΜΠ) θετικῶς λαμβανομένη ἂν τὸ Μ εἶναι ἄνωθεν τῆς ἀρχικῆς διαμέτρου καὶ ἀρνητικῶς λαμβανομένη ἂν τὸ Μ εἶναι κάτωθεν τῆς ΑΑ΄. Λέγοντες ἄνωθεν, ἐννοοῦμεν πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου πρὸς ὃ κεῖται καὶ τὸ Β καὶ κάτωθεν, πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος.

Ἔτσι π.χ. ἡμ $(\widehat{AM}) = (\Pi M)$, ἡμ$(\widehat{AM'}) = -(M'\Pi')$

Παρατήρησις. Τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ $-\dfrac{\pi}{2}$ ἕως $+\dfrac{\pi}{2}$ (ἀκτίν.) τὸ ἡμίτονον αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ -1 ἕως $+1$ τοῦ δὲ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ $\dfrac{\pi}{2}$ ἕως $\dfrac{3\pi}{2}$ τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται συνεχῶς $+1$ ἕως -1. Ἤτοι: **τὸ ἡμx εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ x εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $-\pi/2$ ἕως $+\pi/2$ καὶ φθίνουσα εἰς τὸ διάστημα $\pi/2$ ἕως $3\pi/2$.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

167) Κατασκευάσατε πίνακα μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου ὅμοιον πρὸς τὸν (1) ὅταν τὸ τόξον x αὐξάνεται ἀπὸ -90^0 ἕως $+270^0$. Ἐπίσης ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ $-\dfrac{3\pi}{2}$ ἀκτ. ἕως $+\dfrac{\pi}{2}$ ἀκτ. Τέλος, ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ -30^0 ἕως 330^0.

168) Ἐὰν k ἀκέραιος, μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἡμ$(2k\pi)$, τὸ ἡμ$\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, τὸ ἡμ$(\pi+2k\pi)$; (Τὰ τόξα εἰς ἀκτίνια).

169) Ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὰ τόξα x_1, x_2 περιλαμβάνονται μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0 καὶ ὅτι $x_1 > x_2$, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν σχέσιν τινα ἀνισότητος διὰ τὰ ἡμx_1 καὶ ἡμx_2;

170) Δείξατε ὅτι τόξον ἑνὸς ἀκτινίου ἔχει ἡμίτονον περιεχόμενον μεταξὺ $\sqrt{2}/2$ καὶ $\sqrt{3}/2$.

171) Χαράξατε ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τὴν περιοχὴν εἰς τὴν ὁποίαν λήγουν τὰ τόξα τὰ ἔχοντα ἡμίτονον μικρότερον τοῦ $-1/3$.

Λήγει εἰς τὴν περιοχὴν αὐτήν, τόξον ἔχον ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων καὶ μέτρον ἴσον πρὸς -3264^0;

41. Μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου.

Τοῦ μηδενικοῦ τόξου ἡ τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς εἶναι ὡς εἴπομεν ἤδη (§ 40) ἡ $\overline{OA}$ (σχ. 45) συνεπῶς ἡ προβολή της ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων εἶναι: $\overline{OA}=1$. Ὥστε συν$0^0=1$. Ἐάν, τώρα, νοήσωμεν τὸ τόξον αὐξάνον ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0 καὶ παρακολουθήσωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ συνημιτόνου του καθ' ὃν τρόπον καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον, βλέπομεν ὅτι τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται ἀπὸ 1 ἕως 0 καὶ ὅτι συν$90^0=0$.

Τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 90^0 ἕως 180^0, τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται ἐν συνεχείᾳ, ἀπὸ 0 ἕως -1, εἶναι δὲ συν$180^0=-1$.

Τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 180^0 ἕως 270^0 τὸ συνημίτονον αὐξάνει ἀπὸ -1 ἕως 0 (σχ. 45) καὶ τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 270^0 ἕως 360^0 βλέπομεν ὅτι τὸ συνημίτονον αὐξάνει ἐν συνεχείᾳ, ἀπὸ 0 ἕως 1.

Ἐντεῦθεν ὁ πίναξ μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου:

Μεταβολαὶ τοῦ x :	0	$\nearrow$	90^0	$\nearrow$	180^0	$\nearrow$	270^0	$\nearrow$	360^0
Μεταβολαὶ τοῦ συνx :	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

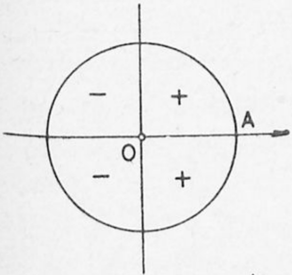
Τοῦ τόξου αὐξάνοντος ἀπὸ 360^0 ἕως 720^0 τὸ συνημίτονον ἐπαναλαμβάνει τὰς ἰδίας τιμὰς τὰς ὁποίας διέτρεχεν κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον (βλέπε θεώρημα, § 39 γ'). Λόγῳ ἐπίσης τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος, τοῦ τόξου x διατρέχοντος τὰς τιμὰς ἀπὸ -360^0 ἕως 0^0 τὸ συνημίτονον διατρέχει τὰς ἰδίας τιμὰς ἃς ἐλάμβανε κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ x ἀπὸ 0 ἕως 360^0, κ.ο.κ.

Ἐκ τῆς μελέτης τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν τοῦ συνx βλέπομεν ἀμέσως ὅτι τὸ συνx (ὅπως καὶ τὸ ημx) κυμαίνεται ἀπὸ -1 ἕως $+1$ καὶ συνεπῶς θὰ ἰσχύῃ:

33 $\boxed{-1 \leqq \text{συνx} \leqq 1}$ x, τυχὼν πραγματικὸς

ἢ ὅπερ τὸ αὐτό: $|\text{συνx}| \leqq 1$.

Σημεῖον τοῦ συνημιτόνου. Εὐκόλως βλέπομεν βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου ὅτι τοῦτο εἶναι θετικὸν ὅταν τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ 1ον ἢ τὸ 4ον τεταρτημόριον διότι τότε ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων εἶναι θετική. Ὅταν δὲ τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ 2ον ἢ 3ον τεταρτημόριον, τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικὸν διότι ἡ τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς προβάλλεται ἐπὶ τῆς Ox ἀντιρρόπως πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν αὐτοῦ ἐπομένως τότε τὸ συνημίτονον εἶναι ἀρνητικόν.



Σημεῖον τοῦ συνημιτόνου

Σχ. 49

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

172) Ἐὰν k, ἀκέραιος εὕρετε μὲ τί ἰσοῦται τὸ συν$(2k\pi)$, συν$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, συν$(\pi+2k\pi)$.

173) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι δύο τόξα x_1 καὶ x_2 περιέχονται μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0 καὶ ὅτι $x_1 > x_2$ νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις ἀνισότητος συνδέει τὰ συνx_1 καὶ συνx_2.

174) Εἰς ποῖον τεταρτημόριον λήγει τόξον ἔχον: i) ἡμίτονον καὶ συνημίτονον, ἀρνητικά; ii) ἡμίτονον θετικόν, συνημίτονον ἀρνητικόν; iii) συνημίτονον θετικὸν καὶ ἡμίτονον ἀρνητικόν;

175) Κατασκευάσατε πίνακα μεταβολῆς τοῦ συνx ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ $\frac{\pi}{6}$ ἕως $\frac{13\pi}{6}$.

42. Ἡ τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη τυχόντος τόξου.

α') Ἔστω O ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος, A ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων, Ox ὁ ἄξων τῶν συνημιτόνων καὶ Oy ὁ ἄξων τῶν ἡμιτόνων (σχ. 50). Καλεῖται **ἄξων τῶν ἐφαπτομένων** ἕνας τρίτος ἄξων AZ ἐφαπτόμενος τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου εἰς τὸ A ἔχων θετικὴν φορὰν τὴν τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων καὶ μονάδα μήκους διὰ τὴν μέτρησιν πάντων τῶν ἐπ' αὐτοῦ τμημάτων, ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. *Καλεῖται δὲ* **τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη** *ἢ ἁπλῶς* **ἐφαπτομένη** *τόξου τινὸς $\overset{\frown}{AM}$ (ἔχοντος ἀρχὴν A τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων), ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ σημεῖον T καθ' ὃ ἡ τελικὴ ἀκτὶς OM τοῦ τόξου, προεκτεινομένη, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων.*

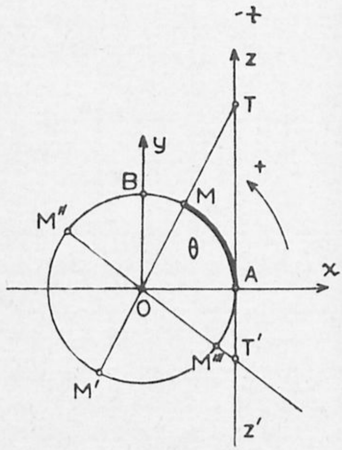
Εἰς τὸ σχ. 50, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\widehat{AM}$ εἶναι ἴση πρὸς $\overline{AT}$. Γράφομεν δὲ συντόμως:

$$\varepsilon\varphi(\widehat{AM}) = \overline{AT} \quad \eta \quad \varepsilon\varphi\theta = \overline{AT}$$

ὅπου θ τὸ μέτρον τοῦ τόξου $\widehat{AM}$.

β') Θεώρημα. «Ἡ ἐφαπτομένη τόξου τινὸς δὲν βλάπτεται ἂν τὸ τόξον αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ ἀκέραιον πλῆθος ἡμιπεριφερειῶν».

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ τόξον $\widehat{AM}$ (σχ. 50) αὐξηθῇ κατὰ 180°, τὸ πέρας αὐτοῦ μετατίθεται εἰς τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημεῖον τοῦ Μ, εἰς τὸ Μ' καὶ συνεπῶς ἡ νέα τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ' συναντᾷ (προεκτεινομένη) τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Τ, ἄρα ἡ ἐφαπτομένη μένει ἡ αὐτή. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ ὅταν τὸ τόξον $\widehat{AM}$ ἐλαττωθῇ κατὰ 180° (ἤτοι προστεθῇ εἰς αὐτὸ μία ἀρνητικὴ ἡμιπεριφέρεια). Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ προσθήκη ἢ ἡ ἀφαίρεσις μιᾶς ἡμιπεριφέρειας, δὲν μεταβάλλει τὴν ἐφαπτομένην καὶ ἡ προσθήκη καὶ ἡ ἀφαίρεσις ὁσωνδήποτε ἡμιπεριφερειῶν δὲν τὴν μεταβάλλει.



Σχ. 50

Τὸ ἀνωτέρω, διατυποῦται μὲ τὴν ἰσότητα:

<u>34</u> $\boxed{\varepsilon\varphi(\theta + k\pi) = \varepsilon\varphi\theta}$, **k** ἀκέραιος τυχών.

γ') **Μεταβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης.** Προφανῶς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ μηδενικοῦ τόξου εἶναι 0 διότι ἡ Τ συμπίπτει τότε μὲ τὸ Α (σχ. 50). Τοῦ τόξου αὐξάνοντος πρὸς τὰς 90°, ἡ ἐφαπτομένη $\overline{AT}$ αὐξάνεται διαρκῶς καὶ ἐπειδὴ ἡ ΟΜ τείνει νὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸν τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων, διὰ τοῦτο ἡ $\overline{AT}$ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν ὅταν τὸ Μ πλησιάσῃ ἐπαρκῶς πρὸς τὸ Β. Ἐξ αὐτοῦ καταφαίνεται ὅτι, ὅταν τὸ τόξον *αὐξάνον*, τείνῃ πρὸς τὰς 90°, ἡ ἐφαπτομένη του τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον $(+\infty)$.

Ὅταν τὸ τόξον εἶναι 90°, *δὲν ἔχει ἐφαπτομένην*, διότι ἡ τελικὴ ἀκτὶς δὲν συναντᾷ τότε οὐδαμοῦ τὸν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων.

Τ' ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς: «*Ὅταν τὸ τό-*

ξον αὐξάνη ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0 (μὴ συμπεριλαμβανομένου τοῦ τελευταίου), ἡ ἐφαπτομένη του αὐξάνεται ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$».

Ὅταν τὸ τόξον ὑπερβῇ τὰς 90^0, ἀμέσως ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ καθίσταται ἀρνητική, διότι τοῦ M'' ὄντος εἰς τὸ 2ον τεταρτημόριον, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AT'}$ ἔχει ἀντίθετον φορὰν πρὸς τὴν θετικὴν τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεπῶς ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AT'}$ εἶναι τότε, ἀρνητική. Ὅταν τὸ M'' εὑρίσκεται ἐν τῷ 2ῳ τεταρτημορίῳ, ἀλλ' ἀρκετὰ πλησίον τοῦ B, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ $\overset{\frown}{AM''}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ κατ' *ἀπόλυτον τιμήν, ὅσον μεγάλη θέλομεν.* Τοῦτο, ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ὅταν τὸ τόξον, *ἐλαττούμενον*, τείνη πρὸς τὰς 90^0, ἡ ἐφαπτομένη του τείνει πρὸς τὸ πλὴν ἄπειρον ($-\infty$).

Τοῦ M'' κινουμένου πρὸς τὸ A', τὸ T' πλησιάζει πρὸς τὸ A, ἄρα ἡ ἐφαπτομένη $\overline{AT'}$ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐλαττοῦται καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀρνητική, διὰ τοῦτο ἀλγεβρικῶς αὐξάνει, τείνουσα «ἐκ τοῦ $-\infty$», πρὸς τὸ μηδέν.

Ἀπὸ τὰς 180^0 καὶ πέραν, αἱ αὐταὶ μεταβολαὶ παρουσιάζονται περιοδικῶς καὶ ἐπ' ἄπειρον. Δηλαδή:

Ὅταν τὸ τόξον αὐξάνη ἀπὸ τὰς 180^0 πρὸς τὰς 270^0, ἡ ἐφαπτομένη του μεταβάλλεται, ὅπως ὅταν τὸ τόξον διέτρεχε τὰς τιμὰς ἀπὸ 0^0 πρὸς τὰς 90^0, δηλ. ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνεται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$ (ἐνῶ, εφ270^0, δὲν ὑπάρχει).

Ὅταν, κατόπιν, τὸ τόξον αὐξάνη ἀπὸ 270^0 ἕως 360^0, ἡ ἐφαπτομένη διατρέχει τὰς τιμὰς ἃς ἔλαβεν ὅταν τὸ τόξον μετεβάλλετο ἀπὸ 90^0 ἕως 180^0, δηλ. ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0 κ.ο.κ.

Ἐξ αὐτοῦ διαμορφοῦμεν τὸν πίνακα:

(1)	Μεταβολαὶ τοῦ τόξου x:	0	$\nearrow$	90^0	$\nearrow$	180^0	$\nearrow$	270^0	$\nearrow$	360^0
	Μεταβολαὶ τῆς εφx :	0	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$	$\nearrow$	0

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβη ἡ ἐφαπτομένη, εἶναι ἀπεριόριστοι. Διότι τοῦ τόξου αὐξανομένου ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0 (μὴ συμπεριλαμβανομένης τῆς τιμῆς 90^0), **ἡ ἐφαπτομένη λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς** ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

Εὐχερέστερον βλέπομεν τοῦτο παρακολουθοῦντες ἐν τῷ σχήματι 50 τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης ὅταν τὸ τόξον αὐξάνη ἀπὸ -90^0 ἕως $+90^0$ (μὴ συμπεριλαμβανομένων τῶν ἄκρων), ὁπότε γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ T διατρέχει τὸν ἀπέραντον ἄξονα Z'Z καὶ ἡ $\overline{AT}$ λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς:

$$-\infty < \text{εφ}x < +\infty .$$

Σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης. Ἡ ἐφαπτομένη εἶναι θετικὴ ὅταν τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ 1ον ἢ 3ον τεταρτημόριον καὶ ἀρνητικὴ ὅταν τὸ τόξον λήγῃ εἰς τὸ 2ον ἢ 4ον.

Παρατήρησις. Ἔστω ε θετικὸς καὶ ὁσονδήποτε μικρὸς ἀριθμὸς (πάντως, $<\pi/2$). Τότε τὸ τόξον $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ἀκτίν. ἔχει ἐφαπτομένην θετικὴν καὶ ὅσον μεγάλην θέλομεν, ἀρκεῖ ὁ ε νὰ εἶναι ἐπαρκῶς μικρός. Συγχρόνως ὅμως, τὸ τόξον $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ ἀκτίν. ἔχει ἐφαπτομένην ἀρνητικὴν καὶ κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἐπίσης ὅσον μεγάλην θέλομεν. Τοῦτο συνήθως ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τιμῆς $x = \frac{\pi}{2}$ ἀκτίν., ἡ εφx μεταπηδᾷ ἀπὸ τὸ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$. (Βλέπε πίνακα (1)). Τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς, συμβαίνει διὰ τὰς τιμὰς $\frac{\pi}{2} + k\pi$, ὅπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

176) Εἰς ποῖον τεταρτημόριον λήγει τόξον ἔχον: i) ἡμίτονον θετικὸν καὶ ἐφαπτομένην ἀρνητικήν; ii) ἡμίτονον ἀρνητικὸν καὶ ἐφαπτομένην θετικήν; iii) συνημίτονον ἀρνητικὸν καὶ ἐφαπτομένην θετικήν;

177) Δύναται ἓν τόξον νὰ ἔχῃ, ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἐφαπτομένην, ἀρνητικά;

178) Δύο τόξα x_1, x_2 λήγοντα εἰς τὸ 1ον τεταρτημόριον πληροῦν τὴν ἀνισότητα ημ$x_1<$ημx_2. Ποίαν ἀνισότητα πληροῦν τὰ συνx_1 καὶ συνx_2 καὶ ποίαν αἱ εφx_1 καὶ εφx_2;

179) Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ὅτι πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τριγωνομετρικὴ ἐφαπτομένη ἑνὸς τόξου περιεχομένου μεταξὺ $-\pi/2$ καὶ $+\pi/2$.

180) Προσδιορίσατε δύο τόξα ἄνισα μεταξύ των, περιεχόμενα μεταξὺ -180° καὶ $+180^\circ$ ἕκαστον, ἔχοντα ἄθροισμα 50° καὶ ἔχοντα ἴσας ἐφαπτομένας.

181) Χαράξατε ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰς περιοχὰς εἰς τὰς ὁποίας λήγουν τὰ τόξα x τὰ πληροῦντα τὴν διπλῆν ἀνισότητα:

$$1 < \text{εφ}x < \sqrt{3}.$$

43. Συνεφαπτομένη, τέμνουσα καὶ συντέμνουσα τυχόντος τόξου.

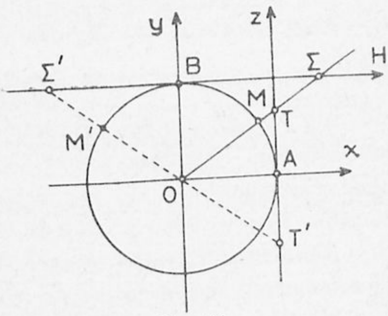
α') Ἐκτὸς τῶν ποσοτήτων εφx, συνx καὶ ημx, χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν καὶ αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν $\frac{1}{\text{εφ}x}$, $\frac{1}{\text{συν}x}$, $\frac{1}{\text{ημ}x}$, καλούμεναι ἀντιστοίχως: συνεφαπτομένη τοῦ x, (=σφx), τέμνουσα τοῦ x (=τεμx) καὶ συντέμνουσα τοῦ x(=στεμx). Εἶναι δηλαδή:

$$(1) \qquad \boxed{\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x}, \quad \tau\varepsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad \sigma\tau\varepsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x}}$$

Ἐκ τῶν τριῶν τούτων, ἡ σφx χρησιμοποιεῖται περισσότερον ἐν τῇ πράξει. Ἡ σφx δὲν ὑφίσταται ὅταν εφx=0, δηλ. διὰ τὰ τόξα 0, π, 2π... καὶ γενικῶς kπ, ὅπου k ἀκέραιος. Ὁμοίως ἡ τεμx δὲν ἔχει ἔννοιαν ἀριθμοῦ ὅταν συνx=0 καὶ ἡ στεμx ὅταν ημx=0.

Ἐπίσης, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ σφx εἶναι θετικὴ ὅταν τὸ τόξον x λήγῃ εἰς τὸ 1ον ἢ 3ον τεταρτημόριον καὶ ἀρνητικὴ ὅταν τὸ x λήγῃ εἰς τὸ 2ον ἢ 4ον.

★β') **Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς συνεφαπτομένης.** Ἔστω Ο τριγωνομετρικὸς κύκλος, Ox ὁ ἄξων τῶν συνημιτόνων, Oy ὁ τῶν ἡμιτόνων, AZ τῶν ἐφαπτομένων (σχ. 51). Θεωροῦμεν καὶ τέταρτον ἄξονα BH, ἐφαπτόμενον τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου εἰς τὸ B, ἔχοντα θετικὴν φορὰν τὴν τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων καὶ μονάδα μήκους ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Οὗτος, ἂς κληθῇ *ἄξων τῶν συνεφαπτομένων*. Ἡ συνεφαπτομένη τυχόντος τόξου $\widehat{AM}$ ἰσοῦται μὲ τὸ σχετικὸν μέτρον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{B\Sigma}$ τοῦ ἔχοντος ἀρχὴν τὸ B καὶ πέρας τὸ σημεῖον Σ καθ' ὃ ἡ τελικὴ ἀκτὶς OM τοῦ τόξου, προεκτεινομένη, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων, δηλ. εἶναι:



Σχ. 51

$$\sigma\varphi(\widehat{AM}) = \overline{B\Sigma}$$

Ἐὰν θ τὸ μέτρον τοῦ $\widehat{AM}$ θὰ δείξωμεν ὅτι πράγματι:

$\overline{B\Sigma} = \sigma\varphi\theta$ ἢ ὅτι $\overline{B\Sigma} = 1/\varepsilon\varphi\theta$ ἢ ὅτι (2) $\quad \overline{B\Sigma} = \dfrac{1}{\overline{AT}}$.

Διὰ ν' ἀληθεύῃ ἡ (2) ἀρκεῖ τὰ δύο μέλη της νὰ ἔχουν τὸ ἴδιο πρόσημον καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμάς. Τὸ πρῶτον ἐλέγχεται ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος, δηλ. ὅταν ἡ $\overline{AT}$ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ $\overline{B\Sigma}$ εἶναι ἐπίσης καὶ ὅταν ἡ $\overline{AT}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἡ $\overline{B\Sigma}$ εἶναι ἐπίσης. Μένει ἀκόμη νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο μελῶν τῆς (2), δηλαδή: $B\Sigma = \dfrac{1}{AT}$. Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΒΣ καὶ ΟΤΑ ἐξ ὧν:

$$B\Sigma : OA = OB : AT \text{ ἢ } B\Sigma : 1 = 1 : AT.$$

★γ΄) **Μεταβολαὶ τῆς σφχ.** Ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ σχήματος 51 βεβαιούμεθα ὅτι ὅταν τὸ τόξον $\overset{\frown}{AM}$ αὐξάνῃ ἀπὸ 0 ἕως 90° ἡ σφχ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως 0 καὶ ὅταν τὸ τόξον $\overset{\frown}{AM'}$ αὐξάνῃ ἀπὸ 90° ἕως 180° ἡ σφχ ἐλαττοῦται ἀπὸ 0 ἕως $-\infty$. Τὰ ἴδια ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ τόξου ἀπὸ 180° ἕως 270° καὶ 270° ἕως 360°. Ἔχομεν ἔτσι τὸν πίνακα:

Μεταβολαὶ τοῦ τόξου x:	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
Μεταβολαὶ τῆς σφχ	$: \infty \searrow 0 \searrow {}^{+\infty}_{-\infty} \searrow 0 \searrow -\infty$

Εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα φθάνομεν μελετῶντες τὴν μεταβολὴν τῆς παραστάσεως 1/εφχ ὅταν τὸ x μεταβάλλεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

182) Νὰ δειχθῇ ὅτι σφ(x+kπ)=σφx ὅταν k ἀκέραιος (τὰ τόξα μετροῦνται εἰς ἀκτίνια).

183) Πῶς μεταβάλλεται ἡ τεμx ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ 0 ἕως π/2;

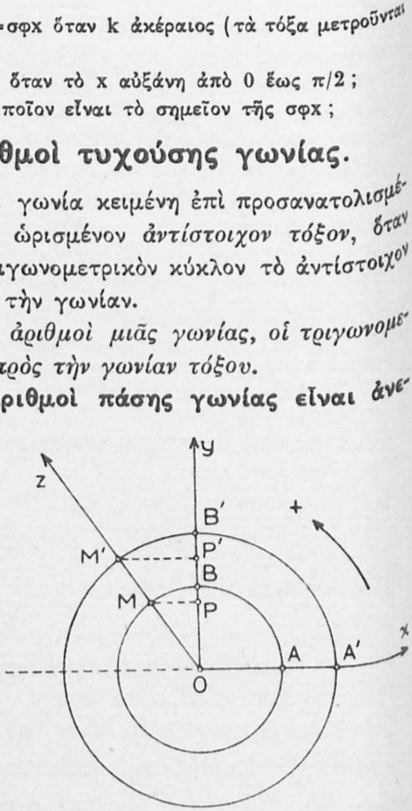
184) Ὅταν τεμx<0, στεμx>0 ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς σφx;

44. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τυχούσης γωνίας.

α΄) Γνωρίζομεν ὅτι τυχοῦσα γωνία κειμένη ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ἔχει ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον *ἀντίστοιχον τόξον*, ὅταν καταστῇ ἐπίκεντρος εἰς ἕνα τριγωνομετρικὸν κύκλον τὸ ἀντίστοιχον δὲ τόξον ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὴν γωνίαν.

Καλοῦνται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς γωνίας, οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς τὴν γωνίαν τόξου.

β΄) **Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ πάσης γωνίας εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς μονάδος μήκους.** Πράγματι, ἔστω XOZ τυχοῦσα γωνία ἔχουσα ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν OX, τελικὴν τὴν OZ, OA ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν μηκῶν καὶ $\overset{\frown}{AM}$ τὸ ἀντίστοιχον τόξον τῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 52). Ἂν λάβωμεν, τώρα, νέαν μονάδα μήκους, τὴν OA΄ ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος θὰ ἀλλάξῃ καὶ ἀντίστοιχον τόξον τῆς γωνίας



Σχ. 52

θὰ γίνῃ τὸ $\widehat{A'M'}$. Οἱ τριγωνομετρικοὶ ὅμως ἀριθμοὶ τοῦ νέου ἀντιστοίχου τόξου $\widehat{A'M'}$ θὰ παραμείνουν οἱ ἴδιοι πρὸς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ παλαιοῦ ἀντιστοίχου τόξου $\widehat{AM}$. Ἂς ἀποδείξωμεν τοῦτο διὰ τὰ ἡμίτονα.

Κατὰ πρῶτον, βλέπομεν ὅτι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{A'M'}$ εἶναι ἴσα. Διότι τὸ $\overline{OP}$ μετρᾶται μὲ μονάδα τὴν $\overline{OB}$ καὶ τὸ $\overline{OP'}$ μὲ μονάδα τὴν $\overline{OB'}$ συνεπῶς ἔχομεν:

$$|\eta\mu(\widehat{AM})| = |\overline{OP}| = \left|\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}\right| = \frac{OP}{OB} = \frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'} = \frac{OP'}{OB'} = |\eta\mu(\widehat{A'M'})|.$$

Ἀλλὰ καὶ κατὰ σημεῖον συμφωνοῦν τὰ ἡμίτονα τῶν $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{A'M'}$ διότι αἱ τελικαὶ διανυσματικαὶ ἀκτῖνες $\overrightarrow{OM}$ καὶ $\overrightarrow{OM'}$ εἶναι ὁμόρροποι, ἄρα καὶ αἱ διανυσματικαὶ προβολαί των $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP'}$ εἶναι ὁμόρροπα διανύσματα καὶ ἔχουν συνεπῶς ἀλγεβρικὰς τιμὰς ὁμοσήμους. Ἄρα, $\eta\mu(\widehat{AM}) = \eta\mu(\widehat{A'M'})$.

Ἐντελῶς ἀναλόγως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας δὲν ἀλλάσσουν ὅταν ἡ μονὰς μήκους, (δηλ. ἡ ἀκτὶς τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου), μεταβληθῇ.

γ') Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι *δυνάμεθα νὰ ταυτίσωμεν τὰς δύο ἐννοίας*:

i) *ἡμίτονον γωνίας θ μοιρῶν*

ij) *ἡμίτονον τόξου θ μοιρῶν*

ἐκφράζοντες αὐτὰς μὲ τὸ ἴδιον σύμβολον: $\eta\mu\theta^0$.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς. Ἡ ταύτισις αὐτὴ θὰ ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἑπόμενα.

δ') **Μερικὴ περίπτωσις.** *Ἐὰν μία γενικευμένη (Τριγωνομετρικὴ) γωνία μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν ΟΑ καὶ τελικὴν ΟΒ, ἔχῃ μέτρον μεταξὺ 0^0 καὶ $+90^0$ τότε οἱ τριγωνομετρικοί της ἀριθμοὶ ταυτίζονται μὲ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς ὀξείας (Γεωμετρικῆς) γωνίας ΑΟΒ τοὺς ὁρισθέντας εἰς τὰς παραγράφους 2, 3, 4 καὶ 5.*

Ἑπομένως, οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τυχούσης γωνίας ἀποτελοῦν *ἐπέκτασιν* τῶν ὁρισμῶν τῶν δοθέντων διὰ τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς ὀξείας γωνίας (περιέχοντες καὶ τοὺς τελευταίους τούτους ὡς μερικὴν περίπτωσιν). **Πάντες λοιπὸν οἱ τύποι τοῦ Α' μέρους τοῦ παρόντος βιβλίου ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ**

Β' μέρος (Γενικὴν Τριγωνομετρίαν), ἀρκεῖ αἱ εἰς τὸ Α' μέρος εἰσερχόμεναι ὀξεῖαι γωνίαι νὰ θεωρηθοῦν ὡς θετικαὶ γωνίαι ἔχουσαι μέτρον μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

185) Ἐὰν ἡ γωνία θ μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 εὕρετε διὰ ποίαν τιμὴν τῆς θ ἡ ποσότης $\sqrt{3}\cdot ημ(30^0+θ)$ λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμήν. Ἐπίσης εὕρετε πότε λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν τιμήν.

186) Ὅμοιον ζήτημα διὰ τὴν ποσότητα: $3+5\,συν(60^0+θ)$.

45. Αἱ κυκλικαὶ συναρτήσεις. Περιοδικότης.

α) Τὸ μέτρον x ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ τόξου δύναται νὰ λάβη οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμήν. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ x ὡς μεταβλητὴν διατρέχουσαν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, τότε, ἐπειδὴ εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x, ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνη τιμὴ τοῦ ημx, ἕπεται ὅτι ἡ μεταβλητὴ ημx εἶναι μία ὡρισμένη συνάρτησις τοῦ x. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ $y=ημx$ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα $-\infty<x<+\infty$ καὶ σύνολον τιμῶν, τὸ διάστημα $-1\leq y\leq 1$.

Ὁμοίως, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν τοῦ x: $y=συνx$. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὰς συναρτήσεις: $y=εφx$ καὶ $y=σφx$. Ἡ $y=εφx$ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ ὁποῖον **λείπουν** αἱ τιμαὶ $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k τυχὼν ἀκέραιος) διὰ τὰς ὁποίας ἡ εφx δὲν ὁρίζεται καὶ σύνολον τιμῶν ἔχει τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ $y=σφx$ ὁμοίως εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλα τὰ πραγματικὰ x, **ἐκτὸς** τῶν τιμῶν $x=k\pi$.

Αἱ τέσσαρες συναρτήσεις τοῦ x:

$$y=ημx,\quad y=συνx,\quad y=εφx,\quad y=σφx$$

λέγονται κυκλικαὶ συναρτήσεις (ἢ ἐνίοτε, τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις). Τὴν ἰδίαν ὀνομασίαν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ εἰς τὰς συναρτήσεις: $y=τεμx$ καὶ $y=στεμx$.

β) Μία συνάρτησις f(x) λέγεται περιοδική, ὅταν ὑπάρχη σταθερὰ $c\neq 0$ τοιαύτη ὥστε διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x (ἀνήκουσαν εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f(x)) ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$(1)\qquad f(x+c)=f(x)$$

Ἡ σταθερὰ c λέγεται περίοδος τῆς f(x).

Μὲ ἄλλας λέξεις, ἡ f(x) ἐπαναλαμβάνει τὴν ἰδίαν τιμήν, ὅταν τὸ x αὐξηθῇ κατὰ c

Παρατηρητέον ὅτι καὶ τὸ 2c εἶναι πάλιν μία περίοδος τῆς f(x), διότι $f(x+2c)=f\{(x+c)+c\}=f(x+c)$ (ἐπειδὴ f(x) ἔχει περίοδον c)$=f(x)$ (λόγῳ τῆς (1)). Ὁμοίως αἱ 3c, 4c,... εἶναι περίοδοι. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ μικροτέρα σταθερὰ τῆς c πληροῦσα τὴν (1), τότε ἡ c εἶναι ἡ *ἐλαχίστη περίοδος* τῆς f(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΜΓΑ. Διὰ τὴν συνάρτησιν ημx δύναται νὰ ληφθῇ ὡς περίοδος καὶ ἡ σταθερὰ 4π ἢ ἡ 6π κλπ. Ἡ 2π εἶναι ἡ «ἐλαχίστη περίοδος» τῆς ημx. Παρόμοια ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἄλλας κυκλικὰς συναρτήσεις.

γ) Πᾶσαι αἱ κυκλικαὶ συναρτήσεις εἶναι περιοδικαί. Διότι: ημ(x+2π)=ημx, συν(x+2π)=συνx, εφ(x+π)=εφx, σφ(x+π)=σφx (διὰ κάθε x). Συνεπῶς αἱ μὲν συναρτήσεις ημx καὶ συνx ἔχουν περίοδον (ἐλαχίστην) τὸ 2π αἱ δὲ εφx καὶ σφx, περίοδον τὸ π (ἐλαχίστην). Τὸ x ὑποτίθεται ἀνωτέρω, εἰς ἀκτίνια. Ἂν τὸ x ἐκφράζῃ μοίρας, τότε ἡ περίοδος τῆς $ημ(x^0)$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $c=360^0$ κλπ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἡ συνάρτησις $f(x)\equiv συν\frac{x}{3}$ εἶναι περιοδική. Διότι ὅταν τὸ x αὐξηθῇ κατὰ 6π ἡ συνάρτησις ἐπαναλαμβάνει τὴν ἰδίαν τιμήν: $συν\frac{x}{3}=συν\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)=συν\frac{x+6\pi}{3}$ ἤτοι $συν\frac{(x+6\pi)}{3}=συν\frac{x}{3}$ ἢ ἀκόμη: $f(x+6\pi)=f(x)$ διὰ πᾶν x. Ὥστε ὁ 6π εἶναι περίοδος τῆς f(x) (καὶ μάλιστα ἡ ἐλαχίστη).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

187) Εἶναι περιοδικὴ ἡ συνάρτησις y=ημ2x; Ἐὰν εἶναι, ποία ἡ περίοδος αὐτῆς; Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς συναρτήσεις: ημ4x, ημ5x, συν3x, $συν\frac{x}{2}$, εφ2x, $εφ\frac{x}{4}$, εφ3x.

188) Εὕρετε τὴν περίοδον τῆς συναρτήσεως: y=ημx+ημ2x.

189) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη περίοδος ἑκάστης τῶν ἑπομένων περιοδικῶν συναρτήσεων: $y=συν^4x$, $y=ημ^3 3x$, $y=εφ^2(αx+β)$, ($α>0$).

46. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου (ἢ γωνίας).

α') Ἔστω $\widehat{AM}$ τόξον τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἔχον μέτρον $(\widehat{AM})=x$ (μοιρῶν ἢ ἀκτινίων κλπ.), $\overline{OΠ}$ τὸ συνημίτονόν του καὶ $\overline{OP}$

τὸ ἡμίτονόν του (σχ. 53). Προφανῶς, ἔχομεν κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα (βλέπε καὶ § 37, παρατήρ.).

(1) $(\text{OP})^2+(\text{OΠ})^2=(\text{ΠM})^2+(\text{OΠ})^2=(\text{OM})^2.$

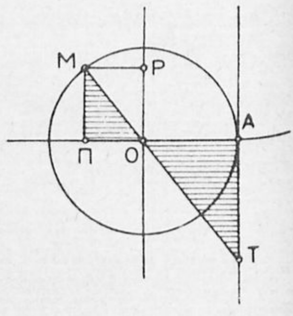
Ἀλλὰ $(\text{OP})^2=(\overline{\text{OP}})^2=(\text{ημ}x)^2=\text{ημ}^2x$, $(\text{OΠ})^2=(\overline{\text{OΠ}})^2=(\text{συν}x)^2=$ $=\text{συν}^2x$ καὶ $(\text{OM})=1$ διότι ὁ κύκλος εἶναι τριγωνομετρικός. Ἑπομένως ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν ὅτι διὰ *τυχὸν τόξον x* ἰσχύουν οἱ τύποι:

35
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=1\\ 1-\text{συν}^2x=\text{ημ}^2x\\ 1-\text{ημ}^2x=\text{συν}^2x\end{array}}$$

Ἔστω τώρα $\overline{\text{AT}}$ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $(\widehat{\text{AM}})=x$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΠΜ καὶ ΟΑΤ λαμβάνομεν:

$$\frac{(\text{AT})}{(\text{OA})}=\frac{(\text{ΠM})}{(\text{OΠ})} \quad \text{ἢ} \quad (2) \quad \frac{(\text{AT})}{1}=\frac{(\text{ΠM})}{(\text{OΠ})}.$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (2) παριστᾷ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς εφx ἐνῶ τὸ δεύτερον τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$. Ὥστε ἡ εφx ἰσοῦται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μὲ τὸ πηλίκον $\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$. Ἀλλὰ καὶ κατὰ τὸ πρόσημον τὰ μεγέθη αὐτὰ συμφωνοῦν, διότι ἂν τὸ Μ κεῖται εἰς τὸν 2ον τεταρτημόριον, εἶναι ἀμφότερα, (δηλ. ἡ εφx καὶ τὸ ημx/συνx) ἀρνητικὰ ἂν εἰς τὸ 3ον εἶναι ἀμφότερα θετικά, εἰς τὸ 4ον εἶναι ἀμφότερα ἀρνητικὰ καὶ εἰς τὸ 1ον ἀμφότερα θετικά. Ἐξ αὐτῶν συνάγεται ἡ σχέσις:



Σχ. 53

$$\text{εφ}x=\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x} \text{ καὶ συνεπῶς: } \frac{1}{\text{εφ}x}=\text{σφ}x=\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}.$$

(Ἐπανευρίσκομεν δηλαδὴ τοὺς τύπους **5β**, **5γ** ἀλλὰ γενικευμένους).

Χρήσιμοι σχέσεις εἶναι ἐπίσης καὶ αἱ ἑξῆς, προκύπτουσαι ἐκ τῶν ἀνωτέρω:

$$1+\text{εφ}^2x=1+\frac{\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}=\text{τεμ}^2x$$

$$1+\text{σφ}^2x=1+\frac{\text{συν}^2x}{\text{ημ}^2x}=\frac{\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x}{\text{ημ}^2x}=\frac{1}{\text{ημ}^2x}=\text{στεμ}^2x.$$

Δηλαδή:

36 $$\boxed{1+\varepsilon\varphi^2 x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\tau\varepsilon\mu^2 x}$$

37 $$\boxed{1+\sigma\varphi^2 x=\frac{1}{\eta\mu^2 x}=\sigma\tau\varepsilon\mu^2 x}$$

β') **Εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου συναρτήσει τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν.** i) *Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ ἡμίτονον* ἑνὸς τόξου x καὶ ζητοῦνται οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ τύπου 35 λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x=1-\eta\mu^2 x,\ \text{ἄρα ἢ}\ \sigma\upsilon\nu x=+\sqrt{1-\eta\mu^2 x}\ \text{ἢ}\ \sigma\upsilon\nu x=-\sqrt{1-\eta\mu^2 x}.$$

Ὥστε τὸ συνx εὑρίσκεται συναρτήσει τοῦ ημx ἀλλ' ὄχι καὶ ἐντελῶς, διότι μένει ἄγνωστον τὸ σημεῖον ὅπερ πρέπει νὰ ἐκλέξωμεν πρὸ τοῦ ριζικοῦ, (δηλ. μόνον κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ὡρισμένον τὸ συνx ὅταν δοθῇ τὸ ημx).

Ἡ ἐκλογὴ τοῦ σημείου δύναται νὰ γίνῃ ὅταν γνωρίζωμεν εἰς ποῖον τεταρτημόριον λήγει τὸ τόξον x τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ συνημίτονον. Π.χ. ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ x λήγει εἰς τὸ 2ον τεταρτημόριον θὰ λάβωμεν πρὸ τοῦ ριζικοῦ τὸ πλὴν κ.ο.κ.

Ἐκ τοῦ ημx καὶ συνx εὑρίσκεται ἡ εφx καὶ σφx:

$$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu x}{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}},\quad \sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}.$$

ii) *Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ συν*x καὶ ζητοῦνται τὰ ημx, εφx, σφx. Ἐκ τοῦ 35 λαμβάνομεν $\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu^2 x$, ἄρα:

$$\eta\mu x=\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Καὶ πάλιν ἔχομεν διπλοῦν σημεῖον πρὸ τοῦ ριζικοῦ. Διὰ νὰ καθορίσωμεν ποῖον ἐκ τῶν δύο σημείων θὰ λάβωμεν πρέπει νὰ γνωσθῇ τὸ τεταρτημόριον εἰς ὃ λήγῃ τὸ τόξον x.

Ἡ εφx καὶ σφx εὑρίσκονται ἀκολούθως ὡς πηλίκα:

$$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\sigma\upsilon\nu x},\quad \sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}.$$

iii) *Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ εφx.* Ἐκ τοῦ 36 ἔχομεν:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1+\varepsilon\varphi^2 x\ \text{ἢ}\ \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\ \text{ἢ}\ \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}.$$

Εὑρεθέντος τοῦ συνx εὑρίσκομεν καὶ τὸ ημx ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\varepsilon\varphi x,\quad \eta\mu x=\varepsilon\varphi x\,.\,\sigma\upsilon\nu x=\varepsilon\varphi x\,.\,\frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}$$

Ἔχομεν λοιπὸν τοὺς τύπους:

$$\underline{38}\qquad \boxed{\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}},\quad \eta\mu x=\frac{\varepsilon\varphi x}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}}$$

ἐκφράζοντας τὸ ημx καὶ συνx συναρτήσει τῆς εφx. Εἰς αὐτοὺς οἱ παρονομασταὶ θὰ ἔχουν ἢ καὶ οἱ δύο τὸ + ἢ καὶ οἱ δύο τὸ – πρὸ τοῦ ριζικοῦ ποῖον δὲ ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων θὰ ἔχουν, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ τεταρτημόριον εἰς ὃ λήγει τὸ τόξον x.

iv) *Ἂν δίδεται ἡ σφx*, τότε εὑρίσκομεν τὴν $\varepsilon\varphi x=\left(=\frac{1}{\sigma\varphi x}\right)$ καὶ ἐργαζόμεθα μὲ τοὺς τύπους <u>38</u>.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

190) Ἐὰν ἡ γωνία Α περιέχεται μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0 καὶ δίδεται ὅτι $\eta\mu A=5/13$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως: $\varepsilon\varphi A+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu A}$.

191) Ἐὰν $\varepsilon\varphi\alpha=3/4$ τὸ δὲ τόξον α περιέχεται μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ α.

192) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς τεμνούσης καὶ τῆς συντεμνούσης τόξου τινός, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τετραγώνων τούτων.

193) Ἐὰν $\tau\varepsilon\mu A=-13/5$ νὰ εὑρεθοῦν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς Α, ὑποτεθιμένης θετικῆς καὶ $<180^0$.

194) Δείξατε ὅτι $\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x=1-2\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x$. Ἐπίσης, ἐκφράσατε τὸ $\eta\mu^4 x$ συναρτήσει τοῦ συνx.

195) Ἐὰν ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\left(\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\eta\mu\gamma}-\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\gamma}\right)^2=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta$, δείξατε ὅτι τότε θὰ ὑφίσταται καὶ ἡ σχέσις: $\sigma\upsilon\nu\gamma=\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha}$.

196) Προσδιορίσατε τοὺς ἀριθμοὺς α,β,γ οὕτως ὥστε ἡ παράστασις: $(1+\eta\mu\theta)(3\eta\mu\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta+5)$ νὰ ταυτίζεται μὲ τήν: $(\alpha\eta\mu\theta+\beta\sigma\upsilon\nu\theta+\gamma)^2$.

47. Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες.

Μία ἰσότης περιέχουσα τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑνὸς ἢ περισσοτέρων τόξων καὶ ἀληθεύουσα διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐτῇ περιεχομένων τόξων (διὰ τὰς ὁποίας ἀμφότερα τὰ μέλη της ἔχουν ἀριθμητικὸν νόημα) καλεῖται **τριγωνομετρικὴ ταυτότης**. Τοιαύτας ταυτότητας εἴδομεν, π.χ. τὰς ἑξῆς:

$$ημ^2x+συν^2x=1, \quad 1+εφ^2x=1/συν^2x, \quad 1+σφ^2x=1/ημ^2x.$$

Διὰ ν' ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν μιᾶς τριγωνομετρικῆς ταυτότητος ἀναχωροῦμεν συνήθως ἀπὸ τὸ ἓν μέλος αὐτῆς καὶ μετασχηματίζοντες αὐτὸ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν γνωστῶν μας σχέσεων, φθάνομεν εἰς τὸ ἄλλο μέλος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) **Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:**

(1) $$συν^4x-ημ^4x=2συν^2x-1.$$

Ἀπόδειξις. Τὸ Α' μέλος, ὡς διαφορὰ τετραγώνων μετασχηματίζεται:

$$συν^4x-ημ^4x=(συν^2x+ημ^2x)(συν^2x-ημ^2x).$$

Ἀλλά, $συν^2x+ημ^2x=1$ καὶ συνεπῶς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) μετατρέπεται εἰς:

$$συν^2x-ημ^2x.$$

Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ Β' μέλος τὸ ὁποῖον *δὲν περιέχει* τὸ ημx, ἀντικαθιστῶμεν ἐν συνεχείᾳ τὸ $ημ^2x$ διὰ τοῦ $1-συν^2x$ ὁπότε λαμβάνομεν:

$$συν^2x-ημ^2x=συν^2x-(1-συν^2x)=2συν^2x-1,$$

δηλ. φθάνομεν εἰς τὸ Β' μέλος.

ii) **Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:**

$$ημ^2α\,συν^2β=1-συν^2α-ημ^2β+ημ^2β\,συν^2α.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ Β' μέλος *δὲν περιέχει* τὸ $ημ^2α$ οὔτε τὸ $συν^2β$, διὰ τοῦτο ἀντικαθιστῶμεν τὰ ποσὰ ταῦτα εἰς τὸ Α' μέλος διὰ τῶν τύπων $ημ^2α=1-συν^2α$, $συν^2β=1-ημ^2β$ καὶ τὸ α' μέλος γίνεται:

$$(1-συν^2α)(1-ημ^2β).$$

Δὲν μένει παρὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ Β' μέλος.

iii) **Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:** $συν^2y-ημ^2y=\dfrac{1-εφ^2y}{1+εφ^2y}.$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ Β' μέλος περιέχει μόνον εφy, διὰ τοῦτο ἀναχωροῦμεν ἐκ τοῦ Α' μέλους ἀντικαθιστῶντες τὸ $συν^2y$ καὶ $ημ^2y$ συναρτήσει τῆς εφy διὰ τῶν τύπων:

$$συν^2y=\frac{1}{1+εφ^2y}, \quad ημ^2y=\frac{εφ^2y}{1+εφ^2y} \qquad (\text{τύποι } \underline{38}).$$

Οὕτω λαβάνομεν:

$$Α' \text{ μέλος}=\frac{1}{1+εφ^2y}-\frac{εφ^2y}{1+εφ^2y}=\frac{1-εφ^2y}{1+εφ^2y}=Β' \text{ μέλος}.$$

iv) **Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:**

$$2(συν^6α+ημ^6α)-3(συν^4α+ημ^4α)+1=0.$$

Ἀποδειξις. Χρησιμοποιοῦντες τὴν Ἀλγεβρικὴν ταυτότητα $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, λαμβάνομεν (θέτοντες ὅπου x τὸ $συν^2α$ καὶ ὅπου y τὸ $ημ^2α$):

(2) $$συν^6α+ημ^6α=(συν^2α+ημ^2α)^3-3συν^2α\,ημ^2α(συν^2α+ημ^2α).$$

Ἐπειδὴ δὲ $συν^2α+ημ^2α=1$ ἡ (2) δίδει:

$$συν^6α+ημ^6α=1-3\,ημ^2α\,συν^2α.$$

Διὰ τῆς ταυτότητος δέ: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, λαμβάνομεν:

$$ημ^4α+συν^4α=(ημ^2α+συν^2α)^2-2ημ^2α\,συν^2α=1-2ημ^2α\,συν^2α.$$

Κατόπιν τούτων, τὸ Α' μέλος τῆς ἀποδεικτέας ταυτότητος γίνεται:

$$2(1-3ημ^2ασυν^2α)-3(1-2ημ^2ασυν^2α)+1=2-6ημ^2ασυν^2α-3+6ημ^2ασυν^2α+1\equiv 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἑπόμεναι τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες:

197) $\dfrac{\text{εφ}A - \text{εφ}B}{\text{σφ}B - \text{σφ}A} = \dfrac{\text{εφ}B}{\text{σφ}A}$, $\quad \text{εφ}\alpha + \text{σφ}\alpha = \dfrac{1}{\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha}$.

198) $(\text{εφ}x + \text{σφ}x)^2 = \text{τεμ}^2 x + \text{στεμ}^2 x$, $\quad \text{σφ}^2 x - \text{συν}^2 x = \text{σφ}^2 x\,\text{συν}^2 x$.

199) $\text{εφ}^2\alpha - 1 = (\text{εφ}^2\alpha + 1)(\text{ημ}^2\alpha - \text{συν}^2\alpha)$, $\quad 2\text{ημ}^4\alpha - 2\text{ημ}^2\alpha = \text{συν}^4\alpha + \text{ημ}^4\alpha - 1$.

200) $(1 + \text{ημ}x + \text{συν}x)^2 = 2(1 + \text{ημ}x)(1 + \text{συν}x)$

$(\text{ημ}\alpha - \text{στεμ}\alpha)^2 + (\text{συν}\alpha - \text{τεμ}\alpha)^2 = \text{σφ}^2\alpha + \text{εφ}^2\alpha - 1$.

101) $3\text{συν}^2\alpha + 2\text{ημ}^2\alpha = \dfrac{3 + 2\text{εφ}^2\alpha}{1 + \text{εφ}^2\alpha}$, $\quad \dfrac{1 + \text{εφ}^2 x}{1 + \text{σφ}^2 x} = \left(\dfrac{1 - \text{εφ}x}{1 - \text{σφ}x}\right)^2$.

202) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\dfrac{1}{\text{τεμ}\theta + \text{εφ}\theta} = \text{τεμ}\theta - \text{εφ}\theta$.

203) Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$(1 + \text{τεμ}\theta + \text{εφ}\theta)(1 + \text{στεμ}\theta + \text{σφ}\theta) = 2(1 + \text{εφ}\theta + \text{σφ}\theta + \text{τεμ}\theta + \text{στεμ}\theta)$.

204) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\dfrac{\text{τεμ}x}{1 + \text{τεμ}x} + \dfrac{\text{τεμ}x}{\text{τεμ}x - 1} = 2\text{στεμ}^2 x$.

205) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\text{τεμ}^4 A + \text{εφ}^4 A = 2\text{τεμ}^2 A\,\text{εφ}^2 A + 1$.

206) Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν θ διὰ τὸ ὁποῖον $\text{συν}\theta \neq 0$ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(3\text{συν}\theta + \text{τεμ}\theta)^2 \geqq 12.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ VII

i) *Τί καλεῖται προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα; Τελικὴ διανυσματικὴ ἀκτὶς ἑνὸς τόξου; Ἄξων τῶν συνημιτόνων; Ἄξων τῶν ἡμιτόνων; Ποῖοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ προκύπτουν ὡς προβολαὶ τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος;*

ii) *Τί καλοῦμεν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μιᾶς προσημασμένης γωνίας;*

iii) *Πότε μία συνάρτησις σ(x) λέγεται περιοδική; Τί καλεῖται τότε, περίοδος;*

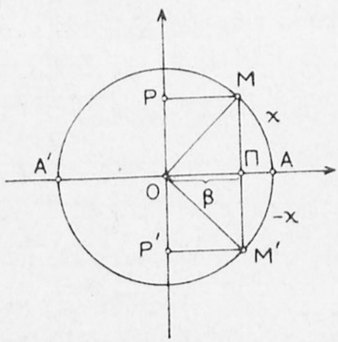
iv) *Ποῖαι αἱ ἰσοδύναμοι παραστάσεις πρὸς τάς: $1 + \text{εφ}^2 x$, $1 + \text{σφ}^2 x$; Πῶς ἐκφράζονται τὸ ημx καὶ συνx, συναρτήσει τῆς εφx;*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ πρῶτον ὀγδοημόριον. Τόξα ἔχοντα ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τὸν αὐτόν.

48 Τόξα ἀντίθετα ἢ συναποτελοῦντα περιφέρειαν.

α′) Ἐὰν νοήσωμεν σημεῖον διαγράφον ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τόξον $\widehat{\mathrm{AM}}$, τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου τούτου ὡς πρὸς τὴν (ἀρχικὴν)διάμετρον ΑΑ′ θὰ διαγράφῃ προφανῶς τὸ ἀντίθετον τόξον· καὶ ὅταν τὸ πρῶτον σημεῖον φθάσῃ εἰς τὸ πέρας Μ τῆς διαδρομῆς του, τὸ δεύτερον θὰ φθάσῃ εἰς τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ, δηλ. εἰς τὸ Μ′, ἔχον διαγράψῃ τὸ ἀντίθετον τόξον $\widehat{\mathrm{AM}'}$. Ὥστε τὰ πέρατα Μ καὶ Μ′ δύο ἀντιθέτων τόξων $(\widehat{\mathrm{AM}})=x$ καὶ $(\widehat{\mathrm{AM}'})=-x$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς Α′Α (σχ. 54).



Σχ. 54

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος ὅτι τὰ ἀντίθετα τόξα $\widehat{\mathrm{AM}}$ καὶ $\widehat{\mathrm{AM}'}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ μὲν συνημίτονον $\overline{\mathrm{O\Pi}}$ ἀντίθετα δὲ ἡμίτονα, διότι $\overline{\mathrm{OP}}=-\overline{\mathrm{OP}'}$. Κατὰ συνέπειαν δὲ θὰ ἔχουν καὶ ἐφαπτομένας ἀντιθέτους. Συνεπῶς ἰσχύουν αἱ ταυτότητες:

$$\boxed{\begin{aligned} \etaμ(-x)&=-\etaμx\\ συν(-x)&=συνx\\ εφ(-x)&=-εφx\\ σφ(-x)&=-σφx \end{aligned}} \qquad (39)$$

Δηλαδή: **Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς τόξου, τὸ συνημίτονον (καὶ ἡ τέμνουσα) δὲν βλάπτεται, οἱ ἄλλοι ὅμως τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί του, ἀλλάζουν σημεῖον.**

β΄) Τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετὰ τοῦ x ἀποτελεῖ μίαν περιφέρειαν θὰ ἔχῃ προφανῶς μέτρον $360^0 - x$ ἢ $-x+360^0$. Δηλαδὴ προκύπτει ἐκ τοῦ ἀντιθέτου τόξου $-x$ ὅταν τοῦτο αὐξηθῇ κατὰ μίαν περιφέρειαν. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι διὰ προσθήκης μιᾶς ἢ περισσοτέρων περιφερειῶν εἰς ἕνα τόξον, οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ δὲν βλάπτονται. Ὥστε τὸ τόξον $-x+360^0$ ἔχει τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὸ $-x$. Συνεπῶς:

40

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu(360^0-x) &= \eta\mu(-x) = -\eta\mu x \\ \sigma\upsilon\nu(360^0-x) &= \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x \\ \varepsilon\varphi(360^0-x) &= \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x \\ \sigma\varphi(360^0-x) &= \sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x \end{aligned}}$$

γ΄) **Ἡ ἰσχὺς τῶν τύπων τοῦ Mollweide.** Ὁ τύπος **12** τῆς § 19 ἀπεδείχθη ἰσχύων ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $\beta > \gamma$. Τώρα ὅμως βλέπομεν ὅτι οὐδεμία παρίσταται ἀνάγκη τοῦ περιορισμοῦ τούτου. Διότι, ἂν $\gamma > \beta$ θὰ ἴσχυεν ὁ ὅμοιος πρὸς τὸν **12** τύπος:

$$(1) \qquad \eta\mu\frac{\Gamma - B}{2} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.$$

Ὁ (1) ὅμως γράφεται:

$$(2) \qquad -\eta\mu\frac{\Gamma - B}{2} = -\frac{\gamma - \beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\frac{\Gamma - B}{2}$ καὶ $\frac{B - \Gamma}{2}$ εἶναι ἀντίθετοι καὶ συνεπῶς ἔχουν ἀντίθετα ἡμίτονα, ὁ (2) γράφεται:

$$\eta\mu\frac{B - \Gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.$$

Ὥστε καὶ ἂν $\gamma > \beta$ πάλιν ὁ **12** ἰσχύει.

Ὁμοίως, ὁ τύπος **13** τῆς § 19 ἰσχύει καὶ ὅταν $\Gamma > B$ διότι, αἱ ἀντίθετοι γωνίαι $\frac{B - \Gamma}{2}$ καὶ $\frac{\Gamma - B}{2}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὸν τύπον **14**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

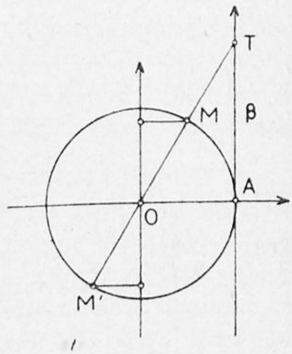
207) Ἐὰν x καὶ y τυχοῦσαι γωνίαι δείξατε ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu(x-y) = \sigma\upsilon\nu(y-x), \qquad \eta\mu(x-y) = -\eta\mu(y-x).$$

208) Ἐὰν Α,Β,Γ,Δ εἶναι αἱ τέσσαρες γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου δείξατε ὅτι: $\eta\mu(A+B) = -\eta\mu(\Gamma+\Delta)$, $\sigma\upsilon\nu(A+B) = \sigma\upsilon\nu(\Gamma+\Delta)$, $\varepsilon\varphi(A+B) = -\varepsilon\varphi(\Gamma+\Delta)$.

49. Τόξα διαφέροντα κατὰ ἡμιπεριφέρειαν.

α΄) Ἐὰν εἰς τόξον $\widehat{AM}$ μέτρου x (θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ) προστεθῇ μία ἡμιπεριφέρεια $\widehat{MM'}$ (σχ. 55) λαμβάνομεν τὸ τόξον $\widehat{AMM'}$ μέτρου $x+180^0$ ὅπερ ἔχει πέρας τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημεῖον τοῦ M. Τῶν τόξων τούτων x καὶ $x+180^0$ αἱ τελικαὶ διανυσματικαὶ ἀκτῖνες $\overrightarrow{OM}$ καὶ $\overrightarrow{OM'}$ εἶναι ἀντίθετοι καὶ ἔχουν προφανῶς ἀντιθέτους προβολὰς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐπὶ τοῦ τῶν συνημιτόνων. Διὰ τοῦτο τὰ δύο τόξα x καὶ $x+180^0$ τὰ διαφέροντα κατὰ ἡμιπεριφέρειαν ἔχουν ἀντίθετα ἡμίτονα καὶ ἀντίθετα συνημίτονα. Λαμβάνομεν λοιπόν:



Σχ. 55

41 $\boxed{\begin{array}{ll} \eta\mu(180+x)=-\eta\mu x, & \varepsilon\varphi(180+x)=\varepsilon\varphi x \\ \sigma\upsilon\nu(180+x)=-\sigma\upsilon\nu x, & \sigma\varphi(180+x)=\sigma\varphi x \end{array}}$

β΄) Ἐὰν δύο τόξα διαφέρουν κατὰ περιττὸν ἀριθμὸν ἡμιπεριφερειῶν, οἱ τριγωνομετρικοί των ἀριθμοὶ σχετίζονται ὅπως καὶ ὅταν διαφέρουν κατὰ μίαν ἡμιπεριφέρειαν. Πράγματι, ἂς θεωρήσωμεν τὰ τόξα x καὶ $x+(2k+1)\cdot 180^0$ ὅπου k ἀκέραιος. Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ $x+(2k+1)\cdot 180^0$ δὲν βλάπτονται (τύπος **31**) ἂν ἀπὸ τὸ τόξον ἀφαιρεθοῦν k περιφέρειαι, δηλ. $2k\cdot 180^0$, ὅτε θὰ μείνῃ τὸ τόξον $x+180^0$. Ὥστε:

$$\eta\mu\{x+(2k+1)180^0\}=\eta\mu(x+180^0)=-\eta\mu x.$$
$$\sigma\upsilon\nu\{x+(2k+1)180^0\}=\sigma\upsilon\nu(x+180^0)=-\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή: **«Ἐὰν τόξον αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ περιττὸν πλῆθος ἡμιπεριφερειῶν, τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον αὐτοῦ ἀλλάζουν σημεῖον»**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

209) Ἐὰν λ ἀκέραιος, νὰ δειχθοῦν αἱ ἰσότητες:

$$\eta\mu(x+\lambda\pi)=(-1)^\lambda\,\eta\mu x, \qquad \sigma\upsilon\nu(x+\lambda\pi)=(-\lambda)^\lambda\,\sigma\upsilon\nu x.$$

210) Ἐὰν α καὶ β τόξα τοιαῦτα ὥστε: $\alpha-\beta=k\pi$, ὅπου k ἀκέραιος καὶ γ καὶ δ τυχόντα τόξα, δείξατε ὅτι: $\eta\mu(\alpha+\gamma)\eta\mu(\alpha+\delta)=\eta\mu(\beta+\gamma)\eta\mu(\beta+\delta)$.

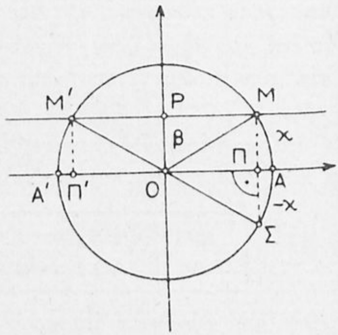
211) Ἐὰν $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$ δείξατε ὅτι τότε:

$$\eta\mu(\alpha+\gamma)\eta\mu(\alpha+\delta)=\eta\mu(\beta+\gamma)\eta\mu(\beta+\delta).$$

50. Τόξα παραπληρωματικά.

α΄) *Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ὅταν τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ ἡμιπεριφέρειαν.* Δηλαδὴ ὅταν τὰ μέτρα αὐτῶν x καὶ y πληροῦν τὴν σχέσιν: $x+y=180^0$. Π.χ. παραπληρωματικὰ εἶναι τὰ τόξα 80^0 καὶ 100^0 ἢ τὰ τόξα 750^0 καὶ -570^0. (Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν παραπληρωματικῶν τόξων λέγονται ἐπίσης, *παραπληρωματικαί).*

Ἔστω $\widehat{AM}$ ἕνα τόξον μέτρου x^0· τότε τὸ παραπληρωματικόν του θὰ ἔχῃ μέτρον $180^0-x=-x+180^0$ καὶ ἑπομένως θὰ προκύπτῃ, ἂν ἀλλάξωμεν πρῶτον τὸ σημεῖον τοῦ x καὶ κατόπιν προσθέσωμεν εἰς τὸ $-x$, ἡμιπεριφέρειαν. Ἐὰν τοῦτο γίνῃ ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, θὰ φθάσωμεν πρῶτον εἰς τὸ συμμετρικὸν τόξον $\widehat{A\Sigma}$ (σχ. 56) ἔχον μέτρον $-x$ καὶ κατόπιν, διὰ προσθέσεως ἡμιπεριφερείας εἰς αὐτό, φθάνομεν εἰς τὸ παραπληρωματικὸν τόξον $\widehat{AM'}$ ἔχον πέρας M', τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημεῖον τοῦ Σ.



Σχ. 56

Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς τὰ M καὶ M′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων, διὰ τοῦτο αἱ τελικαὶ διανυσματικαὶ ἀκτῖνες $\overrightarrow{OM}$ καὶ $\overrightarrow{OM'}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν προβολὴν $\overline{OP}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ἀντιθέτους δὲ προβολὰς $\overline{O\Pi}$ καὶ $\overline{O\Pi'}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων. Ἑπομένως:

«Τὰ παραπληρωματικὰ τόξα ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα (καὶ συντεμνούσας), ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς».

Τοῦτο ἐκφράζεται ἀπὸ τὰς ἰσότητας:

42
$$\begin{array}{|ll|} \hline \eta\mu(180^0-x)=\ \eta\mu x, & \varepsilon\varphi(180^0-x)=-\varepsilon\varphi x \\ \sigma\upsilon\nu(180^0-x)=-\sigma\upsilon\nu x, & \sigma\varphi(180^0-x)=-\sigma\varphi x \\ \hline \end{array}$$

Ἄλλη ἀπόδειξις τῶν τύπων 42 δύναται νὰ γίνῃ βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀντιθέτων καὶ τῶν διαφερόντων κατὰ 180^0 τόξων (χωρὶς βοήθειαν σχήματος), ὡς ἑξῆς:

$$ημ(180^0-x)=ημ(-x+180^0)=-ημ(-x)=-\{-ημx\}=ημx$$

(διότι τὰ $-x+180^0$ καὶ $-x$ διαφέρουν κατὰ 180^0, ἄρα κατὰ τὴν § 49 ἔχουν ἀντίθετα ἡμίτονα. Ἐπίσης κατὰ τὴν § 48, εἶναι $ημ(-x)=-ημx$).

Ὁμοίως: $$συν(180^0-x)=συν(-x+180^0)=-συν(-x)=-συνx$$

$$εφ(180^0-x)=εφ(-x+180^0)=εφ(-x)=-εφx$$

$$σφ(180^0-x)=σφ(-x+180^0)=σφ(-x)=-σφx.$$

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν ἀπὸ μνήμης τοὺς τύπους **42** καλὸν εἶναι νὰ ἐνθυμούμεθα ὅτι: «**Τὰ παραπληρωματικὰ τόξα ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἔχουν πάντοτε τὰ πέρατα αὐτῶν ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ἀρχικὴν διάμετρον**». (Βλέπε καὶ § 40, «Πρακτικὸς ὁρισμὸς ἡμιτόνου»).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. **Ἐὰν εἶναι γνωστοὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου x νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $-x-540^0$.**

Λύσις: $$ημ(-x-540^0)=ημ(-x-540^0+720^0)=ημ(180^0-x)=ημx$$

$$συν(-x-540^0)=συν(-x-540^0+720^0)=συν(180^0-x)=-συνx$$

$$εφ(-x-540^0)=εφ(-x-3\cdot180^0)=εφ(-x)=-εφx.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

212) Ἐὰν Α,Β,Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου δείξατε ὅτι:

$$ημ(Β+Γ)=ημΑ, \quad συν(Β+Γ)=-συνΑ, \quad εφ(Β+Γ)=-εφΑ,$$

213) Ἐὰν Α,Β,Γ,Δ εἶναι γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου, δείξατε ὅτι:

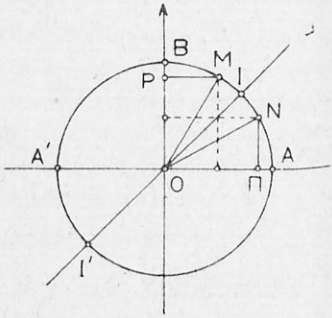
$$ημ\frac{Α+Β}{2}=ημ\frac{Γ+Δ}{2}, \quad εφ\frac{Α+Γ}{2}=-εφ\frac{Β+Δ}{2}, \quad συν\frac{Α+Δ}{2}=-συν\frac{Β+Γ}{2}.$$

51. Τόξα συμπληρωματικά.

α') *Δύο τόξα τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου λέγονται συμπληρωματικὰ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας.* Π.χ. τὰ τόξα 20^0 καὶ 70^0 εἶναι συμπληρωματικά· ὁμοίως τὰ τόξα -40^0 καὶ 130^0 ἢ τὰ -480^0 καὶ 570^0. (Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των λέγονται ἐπίσης, *συμπληρωματικαί*).

Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι ἂν δύο (γενικευμένα) τόξα $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{AN}$

τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, εἶναι συμπληρωματικά, τότε τὰ πέρατα αὐτῶν Μ καὶ Ν εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΙΙ΄ τὴν διχοτομοῦσαν τὸ πρῶτον τεταρτημόριον (σχ. 57). Πράγματι, ἔστω Ι τὸ μέσον τοῦ τεταρτημορίου $\widehat{AB}$. Θὰ ἔχωμεν τότε:



Σχ. 57

(1) $\widehat{AM}+\widehat{AN}=\widehat{AB}$

(ὅπου $(\widehat{AB})=90^0$)

Ἡ (1) γράφεται (δι' ἀναλύσεως τῶν τόξων $\widehat{AM}$, $\widehat{AN}$, $\widehat{AB}$, (§ 35, στ΄, iii): $\widehat{AI}+\widehat{IM}+\widehat{AI}+\widehat{IN}=\widehat{AI}+\widehat{AI}$ ἢ τέλος $\widehat{IM}+\widehat{IN}=0$.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ τόξα $\widehat{IM}$ καὶ $\widehat{IN}$ εἶναι ἀντίθετα, (ὡς ἔχοντα ἄθροισμα μηδέν), ἕπεται ὅτι τὰ πέρατα αὐτῶν Μ καὶ Ν εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΙΙ΄.

Ἐὰν λοιπόν, ἀχθῇ ἡ $N\Pi \perp OA$ καὶ ἡ $MP \perp OB$, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΝΠ καὶ ΟΜΡ θὰ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας $A\widehat{O}N$ καὶ $M\widehat{O}B$ ἴσας, λόγῳ τῆς ἀποδειχθείσης συμμετρίας. Ἑπομένως, ΟΡ=ΟΠ.

Ἐξ ἄλλου τὰ σχετικὰ μέτρα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OP}$ καὶ $\overrightarrow{O\Pi}$ συμφωνοῦν καὶ κατὰ τὸ σημεῖον, δηλ. εἶναι ἢ ἀμφότερα θετικὰ ἢ ἀμφότερα ἀρνητικὰ ὅπως εὐκόλως βλέπομεν ἐξετάζοντες τὰς δυνατὰς θέσεις τῶν Μ καὶ Ν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. (Πράγματι τὰ Μ καὶ Ν ἢ κεῖνται ἀμφότερα εἰς τὸ 1ον τεταρτημόριον ἢ ἀμφότερα εἰς τὸ 3ον ἢ τὸ ἓν εἰς τὸ 2ον καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὸ 4ον). Ἑπομένως τὰ σχετικὰ μέτρα $\overline{OP}$ καὶ $\overline{O\Pi}$ ἔχοντα τὸ ἴδιο πρόσημον καὶ τὴν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν, εἶναι ἴσα, δηλαδή:

$$\overline{OP}=\overline{O\Pi},\quad ημ(\widehat{AM})=συν(\widehat{AN}).$$

Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι $PM=\Pi N$, δηλ. τὸ συνημίτονον τοῦ $\widehat{AM}$ καὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ $\widehat{AN}$ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσα· συμφωνοῦν καὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον, ἄρα: $συν(\widehat{AM})=ημ(\widehat{AN})$.

Ἑπομένως ἰσχύει τὸ θεώρημα:

«Ὅταν δύο τόξα εἶναι συμπληρωματικά, τὸ ἡμίτονον ἑκα-

τέρου ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἑτέρου, ἄρα καὶ ἡ ἐφαπτομένη μὲ τὴν συνεφαπτομένην».

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὸ μέτρον τυχόντος τόξου, τὸ μέτρον τοῦ συμπληρωματικοῦ του θὰ εἶναι 90^0-x καὶ θὰ ἔχωμεν:

43 $$\boxed{\begin{array}{ll} \eta\mu(90^0-x)=\sigma\upsilon\nu x, & \varepsilon\varphi(90^0-x)=\sigma\varphi x \\ \sigma\upsilon\nu(90^0-x)=\eta\mu x, & \sigma\varphi(90^0-x)=\varepsilon\varphi x \end{array}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. **Ἐὰν εἶναι γνωστοὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου x, νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων 90^0+x, 270^0+x καὶ 540^0-x.**

Λύσις. $\eta\mu(90^0+x)=\eta\mu(90^0-(-x))=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$

$$\sigma\upsilon\nu(90^0+x)=\sigma\upsilon\nu(90^0-(-x))=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$$
$$\varepsilon\varphi(90^0+x)=\varepsilon\varphi(90^0-(-x))=\sigma\varphi(-x)=-\sigma\varphi x$$
$$\sigma\varphi(90^0+x)=\sigma\varphi(90^0-(-x))=\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi x$$
$$\eta\mu(270^0+x)=\eta\mu(270^0+x-360^0)=\eta\mu(x-90^0)=-\eta\mu(90^0-x)=-\sigma\upsilon\nu x$$
$$\sigma\upsilon\nu(270^0+x)=\sigma\upsilon\nu(270^0+x-360^0)=\sigma\upsilon\nu(x-90^0)=\sigma\upsilon\nu(90^0-x)=\eta\mu x$$
$$\varepsilon\varphi(270^0+x)=\varepsilon\varphi(270^0+x-360^0)=\varepsilon\varphi(x-90^0)=-\varepsilon\varphi(90^0-x)=-\sigma\varphi x$$
$$\sigma\varphi(270^0+x)=\sigma\varphi(270^0+x-360^0)=\sigma\varphi(x-90^0)=-\sigma\varphi(90^0-x)=-\varepsilon\varphi x$$
$$\eta\mu(-x+540^0)=\eta\mu(-x+540^0-360^0)=\eta\mu(180^0-x)=\eta\mu x \quad \kappa\lambda\pi.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

214) Ἐὰν εἶναι γνωστοὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου x ἀκτινίων, εὕρετε τοὺς κάτωθι τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς:

$$\eta\mu(\pi-x),\quad \sigma\upsilon\nu(\pi+x),\quad \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\quad \sigma\upsilon\nu(\pi-x),$$
$$\eta\mu(\pi+x),\quad \sigma\upsilon\nu(2\pi-x)\quad \eta\mu(x+(2k+1)\pi),\quad \sigma\upsilon\nu(x+(2k-1)\pi)\ (k \text{ ἀκέραιος}).$$

215) Ἂν δύο τόξα διαφέρουν κατὰ $\pi/2$ δείξατε ὅτι τὸ ἡμίτονον τοῦ μεγαλυτέρου ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ μεγαλυτέρου μὲ τὸ μεῖον ἡμίτονον τοῦ μικροτέρου.

216) Εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν: $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ ὅταν δίδωνται οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ x.

217) Ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο γωνιῶν ἐχουσῶν ἄθροισμα 270^0;

218) Ἐὰν εἶναι γνωστοὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ **x** ὑπολογίσατε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστου τῶν τόξων:

$$x+3\pi,\quad \pi+\frac{5\pi}{2},\quad x-\frac{\pi}{2},\quad x-\frac{7\pi}{2},\quad -x+2\pi,\quad -x-3\pi,\quad -x-\frac{5\pi}{2}.$$

219) Νὰ δειχθῇ ἡ τριγωνομετρικὴ ταυτότης:

$$\eta\mu x+\eta\mu(x+90^0)+\eta\mu(x+180^0)+\eta\mu(x+270^0)=0.$$

220) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης: $\sigma\upsilon\nu^2(x+45^0)+\sigma\upsilon\nu^2(x-45^0)=1$.

221) Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ἀληθεύει ἡ ἰσότης: $\sigma\upsilon\nu(|x|)=\sigma\upsilon\nu x$.

222) Δείξατε ὅτι ἂν k, ἀκέραιος, τότε :

$$\etaμx = (-1)^k συν\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} - x\right\}.$$

223) Δείξατε ὅτι :

i) $$\left\{εφ(\pi+\theta)+εφ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2 = τεμ^2(\pi-\theta)+στεμ^2\theta$$

ii) $$εφ\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)+σφ\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -τεμ\theta\ στεμ\theta.$$

52. Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ πρῶτον ὀγδοημόριον.

Οὕτω καλεῖται ἡ ἐργασία δι' ἧς ἡ εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τυχόντος τόξου ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου περιεχομένου μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) **Νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ α' ὀγδοημόριον τὸ τόξον 1052^0.**

Λύσις. Κατ' ἀρχὰς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ τόξον, ὅσας ἀκεραίας περιφερείας περιέχει, ὁπότε, ὡς γνωστὸν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ δὲν βλάπτονται.

Πρὸς τοῦτο ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν $1052^0 : 360^0$ λαμβάνομεν δὲ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 332^0. Ὥστε :

$$1052^0 = 2 \cdot 360^0 + 332^0.$$

Οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὸ τόξον 332^0· τοῦτο συσχετίζομεν μὲ τὸ $360^0 - 332^0 = 28^0$. Τὰ τόξα 332^0 καὶ 28^0 συναποτελοῦν περιφέρειαν καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί των σχετίζονται κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (§ 48, 40). Ἡ σειρὰ τῶν πράξεων ἔχει ὡς ἑξῆς :

$$\etaμ1052^0 = \etaμ(2.360^0+332^0) = \etaμ332^0 = -\etaμ28^0$$
$$συν1052^0 = συν332^0 = συν28^0$$
$$εφ1052^0 = εφ332^0 = -εφ28^0$$
$$σφ1052^0 = -σφ28^0.$$

Ἑπομένως ἀναγόμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 28^0, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ 1ον ὀγδοημόριον.

ii) **Ν' ἀναχθῇ εἰς τὸ 1ον ὀγδοημόριον τὸ τόξον -1210^0.**

Λύσις. Ἔχομεν κατὰ σειράν :

$$\etaμ(-1210^0) = -\etaμ1210^0 = -\etaμ\{3\cdot360^0+130^0\} = -\etaμ130^0 = -\etaμ50^0 = -συν40^0.$$

Διότι τὰ 130^0 καὶ 50^0 εἶναι παραπληρωματικὰ (§ 50) τὰ δὲ 50^0 καὶ 40^0 συμπληρωματικὰ (§ 51).

Ὁμοίως :

$$συν(-1210^0) = συν1210^0 = συν\{3\cdot360^0+130^0\} = συν130^0 = -συν50^0 = -\etaμ40^0.$$
$$εφ(-1210^0) = -εφ1210^0 = -εφ130^0 = εφ50^0 = σφ40^0$$
$$σφ(-1210^0) = -σφ1210^0 = -σφ130^0 = σφ50^0 = εφ40^0.$$

Οὕτως ἀνήχθημεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 50^0 (τοῦ α' τεταρτημορίου) ἢ τοῦ 40^0 ὅπερ ἀνήκει εἰς τὸ 1ον ὀγδοημόριον.

iii) **Ν' ἀναχθῇ εἰς τὸ α' ὀγδοημόριον τὸ τόξον 23π/7 ἀκτινίων.**

Λύσις. Εἶναι $\frac{23\pi}{7}=\left(3+\frac{2}{7}\right)\pi=3\pi+\frac{2\pi}{7}$.

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$\eta\mu\left(3\pi+\frac{2\pi}{7}\right)=\eta\mu\left(\pi+\frac{2\pi}{7}\right).$$ (Τόξα διαφέροντα κατὰ περιφέρειαν)

$$\eta\mu\left(\pi+\frac{2\pi}{7}\right)=-\eta\mu\frac{2\pi}{7}.$$ (Τόξα διαφέροντα κατὰ ἡμιπεριφέρειαν).

Τὸ $\frac{2\pi}{7}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{\pi}{2}$ ἀλλὰ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\pi}{4}$.

Τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ $\frac{2\pi}{7}$, δηλ. τὸ $\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}=\frac{3\pi}{14}$ θὰ εἶναι τόξον τοῦ α'. ὀγδοημορίου καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$-\eta\mu\frac{2\pi}{7}=-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{14}.$$

Ἐπίσης:
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{7}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{2\pi}{7}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{14}=-\eta\mu\frac{3\pi}{14}$$
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{23\pi}{7}\right)=\varepsilon\varphi\left(\pi+\frac{2\pi}{7}\right)=\varepsilon\varphi\frac{2\pi}{7}=\sigma\varphi\frac{3\pi}{14}$$
$$\sigma\varphi\left(\frac{23\pi}{7}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{14}.$$

Οὕτως, ἀνήχθημεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 3π/7 ὅπερ ἀνήκει εἰς τὸ α' ὀγδοημόριον.

Σημείωσις. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, γίνεται καταφανὲς ὅτι οἱ πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν (ἢ τῶν λογαρίθμων των) εἶναι ἀρκετὸν νὰ περιορισθοῦν διὰ τὰ τόξα ἀπὸ 0^0 μέχρι 45^0 μόνον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

224) Ν' ἀναχθοῦν εἰς τὸ α' ὀγδοημόριον τὰ τόξα:

8567^0, -4073^0, $-\frac{22\pi}{3}$ ἀκτιν., $-\frac{37\pi}{9}$ ἀκτιν., 14,75 ἀκτιν.

225) Νὰ εὑρεθοῦν διὰ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν οἱ κάτωθι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί:

$\varepsilon\varphi 2137^0$, $\sigma\varphi 557^0$, $\sigma\upsilon\nu(-893^0)$, $\eta\mu\left(-\frac{305\pi}{6}\text{ ἀκτιν.}\right)$.

226) Δείξατε ὅτι:

i) $$\frac{-\eta\mu(270^0+\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu(90+\theta)}=\frac{\eta\mu(180^0+\theta)-1}{\sigma\upsilon\nu(180^0-\theta)}$$

ii) $$\frac{1+\sigma\upsilon\nu(\theta-90^0)}{1+\sigma\upsilon\nu(270^0-\theta)}-\frac{1+\eta\mu(180^0+\theta)}{1-\sigma\upsilon\nu(90^0+\theta)}=\frac{4\eta\mu(180^0-\theta)}{\eta\mu(90^0+\theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta)}$$

ὅπου ὑποτίθεται ὅτι $\eta\mu\theta\neq\pm1$.

227) Ἐκφράσατε ἑκάστην τῶν κάτωθι ποσοτήτων τῇ βοηθείᾳ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ γωνίας θετικῆς, ὀξείας, μεγαλυτέρας τῶν 45^0:

$\sigma\upsilon\nu 110^0$, $\eta\mu 35^0$, $\sigma\upsilon\nu(-170^0)$, $\sigma\upsilon\nu 487^0$,
$\varepsilon\varphi 147^0$, $\sigma\varphi 804^0$, $\eta\mu(-10^0)$.

53. Λογαριθμικὸς λογισμὸς διὰ τυχοῦσαν γωνίαν.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν γωνίαν θ περιεχομένην μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0 καὶ τοιαύτην ὥστε:

(1) $$ημθ=-\frac{2}{3}.$$

Προκειμένου νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας, ἀποκλείεται νὰ λογαριθμήσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διότι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν λογαρίθμους (πραγματικούς). Ἀνάγομεν λοιπὸν τὴν εὕρεσιν τῆς θ εἰς τὴν εὕρεσιν ἄλλης γωνίας ἀνηκούσης εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον καὶ ἐχούσης συνεπῶς θετικοὺς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

Ἐνταῦθα, ἔχομεν $180^0<θ<270^0$, ἄρα $0<θ-180^0<90^0$, δηλ. ἡ γωνία $θ-180^0$ ἀνήκει εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον.

Εἶναι δὲ $ημ(θ-180^0)=-ημθ=2/3$. Ἔχομεν λοιπὸν ἀντὶ τῆς (1) τήν: (2) $$ημ(θ-180^0)=\frac{2}{3}.$$

Ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν:

$$λογ\,ημ(θ-180^0)=\bar{1},82391, \quad θ-180^0=41^048'38'', \quad θ=221^048'38''.$$

Ἔστω ἀκόμη ὅτι εἶναι:

(3) $$εφA=-\sqrt[3]{2}$$ ὅπου A, γωνία τριγώνου.

Ἡ A θὰ εἶναι προφανῶς, ἀμβλεῖα, ἑπομένως ἡ παραπληρωματική της θὰ εἶναι ὀξεῖα. Ἀντὶ τῆς (3) γράφομεν λοιπόν:

(4) $εφ(180^0-A)=\sqrt[3]{2}$ ὅπου ἡ 180^0-A εἶναι ὀξεῖα

καὶ λογαριθμίζοντες τὴν (4) εὑρίσκομεν

$$λογ\,εφ(180^0-A)=0,10034$$

καὶ ἐξ αὐτῆς: $180^0-A=51^033'39''$ καὶ τέλος: $A=128^026'21''$.

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν x ἐκ τῆς:

(5) $$εφx=-α, \quad α>0, \quad -90<x<0^0$$

γράφομεν τὴν (5) ὑπὸ τὴν μορφήν:

(6) $$εφ(-x)=α \quad (α,\ δοθεὶς\ θετικὸς)$$

καὶ ἐκ τῆς (6) εὑρίσκομεν διὰ λογαριθμήσεως τὴν $-x$ ἥτις ἀνήκει εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον καὶ ἐκ τῆς $-x$, τὴν x.

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις:

(7) $$εφθ=-α, \quad α>0, \quad 270^0<θ<360^0$$

ὅπου α δοθεὶς θετικός. Ἔχομεν ἐνταῦθα: $0<θ-270^0<90^0$, δηλ. ἡ $θ-270^0$ ἀνήκει εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον. Εἶναι ὅμως:

$$σφ(θ-270^0)=σφ(θ-90^0)=-σφ(90^0-θ)=-εφθ=α.$$

Ἀντὶ λοιπὸν τῆς (7) γράφομεν τήν:

$σφ(θ-270^0)=α$ (ὅπου ἡ $θ-270^0$ εἶναι τοῦ α' τεταρτημορίου)

καὶ διὰ λογαριθμήσεως εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων τὴν $θ-270^0$ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν θ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

228) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταξὺ -90^0 καὶ $+90^0$ περιεχόμεναι γωνίαι x καὶ y ὅταν δίδεται ὅτι: $εφx=-\sqrt{3}/5$ καὶ $σφy=-8/9$.

229) Νὰ εὑρεθῇ διὰ τῶν πινάκων ἡ γωνία θ διὰ τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν ὅτι: $270^0<θ<360^0$ καὶ ὅτι $σφθ=-2$.

230) Νὰ εὑρεθῇ γωνία θ μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0 περιεχομένη τοιαύτη ὥστε: $εφθ=-2$ ἐνῶ $ημθ<0$.

ΤΟΞΑ ΕΧΟΝΤΑ ΕΝΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ ΤΟΝ ΑΥΤΟΝ

54. Τόξα ἔχοντα ἴσα συνημίτονα.

Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν ἴσα συνημίτονα, τότε ἢ εἶναι ἴσα ἢ τὸ ἓν ὑπερβαίνει τὸ ἄλλο κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας ἢ εἶναι ἀντίθετα ἢ τὸ ἓν ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ ἄλλου ηὐξημένον κατὰ πολλαπλάσιον περιφερείας.

Δηλαδή: *Ἂν* $συνθ=συνω$ *τότε:* ἢ $θ=ω+k\cdot 360^0$ ἢ $θ=-ω+k\cdot 360^0$, *ὅπου* $k=$ ἢ 0 ἢ ± 1 ἢ $\pm 2\ldots$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω β ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν συνθ καὶ συνω ($-1\leqq β\leqq 1$). Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ληφθῇ σημεῖον Π τοιοῦτον ὥστε $\overline{ΟΠ}=β$ τότε κάθε τόξον ἔχον συνημίτονον ἴσον πρὸς β θὰ ἔχῃ πέρας ἓν ἐκ τῶν δύο συμμετρικῶν σημείων Μ ἢ Μ' τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 54) ἅτινα προβάλλονται εἰς τὸ Π. Ἑπομένως, ἀφοῦ $συνθ=συνω=β$ ἕπεται ὅτι τὸ θ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ εἰς τὸ Μ' καὶ τὸ ω ἐπίσης (Α ἡ κοινὴ ἀρχὴ τῶν τόξων, σχ. 54). Διακρίνομεν λοιπὸν τέσσαρες περιπτώσεις:

i) Καὶ τὸ θ καὶ τὸ ω λήγουν εἰς τὸ Μ. Τότε ὅμως θὰ εἶναι $θ=ω+k\cdot 360^0$ ($k=0,\pm 1\ldots$) (βλ. § 35 ε') τύπος **30.**

ii) Καὶ τὸ θ καὶ τὸ ω λήγουν εἰς τὸ Μ'. Τότε πάλιν θὰ ἰσχύῃ: $θ=ω+k\cdot 360^0$.

iii) Τὸ θ λήγει εἰς τὸ Μ καὶ τὸ ω εἰς τὸ Μ'. Τότε ἂν $(\widehat{ΑΜ})=x$ καὶ $(\widehat{ΑΜ'})=-x$ εἶναι δύο ἀντίθετα τόξα μὲ πέρατα τὸ Μ καὶ τὸ Μ' ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν : $\theta=x+k'\cdot 360^0$ διότι τὰ θ καὶ x ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας καθὼς καὶ $\omega=-x+k''\cdot 360^0$ διότι τὰ ω καὶ $-x$ ἔχουν ἐπίσης τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας. (k′, k″ ἀκέραιοι). Διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν $\theta+\omega=(k'+k'')360^0$ ἢ $\theta+\omega=$ $=k\cdot 360^0$ (ὅπου $k=k'+k''=$ἀκέραιος) ἢ τέλος $\theta=-\omega+k\cdot 360^0$.

iv) Τὸ θ λήγει εἰς τὸ Μ′ καὶ τὸ ω εἰς τὸ Μ. Τότε προφανῶς συμβαίνει ὅτι καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν : $\theta=-\omega+k\cdot 360^0$ ὅ.ἔ.δ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. **Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $A=60^0$ καὶ ὅτι ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$.**

Λύσις. Ἔχομεν $B+\Gamma=120^0$, $\frac{B+\Gamma}{2}=60^0$, $\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}=$ $=\sigma\upsilon\nu 30^0$ καὶ συνεπῶς ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται ὡς *ἰσότης συνημιτόνων*: $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\sigma\upsilon\nu 30^0$. Βάσει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος θὰ ἔχωμεν, ἢ (i) $B-\Gamma=$ $=30^0+k\cdot 360^0$ ἢ (ii) $B-\Gamma=-30^0+k\cdot 360^0$. Ἐὰν συμβαίνῃ τὸ πρῶτον, τότε ἂν $k=0$ λαμβάνομεν : (1) $B-\Gamma=30^0$ ἂν $k=1$, $B-\Gamma=390^0$ (ἀδύνατον) ὁμοίως δὲ ἂν $k=2,3....$καὶ ἂν $k=-1, -2,....$, ἡ (i) δίδει ἀπαραδέκτους τιμὰς διὰ τὴν $B-\Gamma$. Ὁμοίως ἡ (ii) δίδει παραδεκτὴν τιμὴν διὰ τὴν $B-\Gamma$, μόνον ὅταν $k=0$, δηλ. (2) $B-\Gamma=-30^0$. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$\text{ἢ } \{B-\Gamma=30^0,\quad B+\Gamma=120^0\} \text{ ἢ } \{B-\Gamma=-30^0,\quad B+\Gamma=120^0\}.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν : $B=75^0$. $\Gamma=45^0$ καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου: $B=45^0$, $\Gamma=75^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

231) Ἐὰν Α εἶναι γωνία τριγώνου πληροῦσα τὴν σχέσιν $\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu 2A$, εὕρετε τὴν Α.

232) Ἐὰν x καὶ y ἐκφράζουν ἀκτίνια καὶ εἶναι $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu y$, δείξατε ὅτι τότε $x=\pm y+2k\pi$, ὅπου k ἀκέραιος.

233) Ἐὰν δύο γωνίαι Β καὶ Γ πληροῦν τὴν σχέσιν $\sigma\upsilon\nu\frac{B+3\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$ δείξατε ὅτι δὲν δύνανται νὰ εἶναι γωνίαι ἑνὸς τριγώνου.

234) Δύο γωνίαι x καὶ y περιεχόμεναι μεταξὺ $-\pi$ ἀκτιν. καὶ π ἀκτινίω πληροῦν τὰς δύο σχέσεις : $x+y=\frac{2\pi}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{y}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(y+\frac{x}{2}\right)$.

Νὰ ὁρισθοῦν αἱ x καὶ y.

55. Τόξα ἔχοντα ἴσα ἡμίτονα.

«Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν ἴσα ἡμίτονα τότε ἢ εἶναι ἴσα ἢ τὸ ἓν ὑπερβαίνει τὸ ἄλλο κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφε-

ρείας ἢ εἶναι παραπληρωματικά, ἢ τὸ ἓν ὑπερβαίνει τὸ παραπληρωματικὸν τοῦ ἄλλου κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας.

Δηλαδή: *Ἂν ημθ=ημω τότε: ἢ $\theta=\omega+k \cdot 360^0$ ἢ $\theta=(180^0-\omega)+$ $+k \cdot 360^0$. ὅπου $k=0$ ἢ ± 1 ἢ $\pm 2,\dots$*

Ἀπόδειξις. Ἔστω β ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν ημθ καὶ ημω. Τότε ἂν ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ τοιοῦτον ὥστε $\overline{OP}=$ $=\beta$ (σχ. 56) καὶ ἀχθῇ εἰς τὸ P κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων τέμνουσα εἰς M καὶ M′ τὴν περιφέρειαν τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τότε προφανῶς, πᾶν τόξον ἔχον ἡμίτονον ἴσον πρὸς β (καὶ ἀρχὴν τὴν A, σχ. 56) θὰ λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο σημείων M ἢ M′. Ἑπομένως καὶ τὰ τόξα θ καὶ ω ὡς ἔχοντα ἀμφότερα ἡμίτονον ἴσον μὲ β, θὰ λήγουν εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων.

i) Ἂν τὰ θ καὶ ω λήγουν ἀμφότερα εἰς τὸ M τότε θὰ εἶναι: $\theta=\omega+k \cdot 360^0$, ὅπου $k=0$ ἢ $\pm 1\dots$

ii) Ἂν λήγουν ἀμφότερα εἰς τὸ M′, ἡ αὐτὴ σχέσις θὰ ὑπάρχῃ.

iii) Ἂν τὸ θ λήγῃ εἰς τὸ M καὶ τὸ ω εἰς τὸ M′ τότε θεωροῦμεν τὰ παραπληρωματικὰ τόξα $(\widehat{AM})=\tau$, $(\widehat{AM'})=180^0-\tau$, ὁπότε θὰ εἶναι:

$$\theta=(\widehat{AM})+k' \cdot 360^0, \qquad \omega=(\widehat{AM'})+k'' \cdot 360^0 \quad \text{ἢ}$$
$$\theta=\tau+k' \cdot 360^0, \qquad \omega=180^0-\tau+k'' \cdot 360^0 \ (k', k'' \text{ ἀκέραιοι})$$

καὶ διὰ προσθέσεως: $\theta+\omega=180^0+(k'+k'') \cdot 360^0$. Καλοῦντες k τὸν ἀκέραιον $k'+k''$ λαμβάνομεν: $\theta=180^0-\omega+k'' \cdot 360$.

iv) Τὴν ἰδίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ἂν τὸ θ λήγῃ εἰς M′ καὶ τὸ ω εἰς M. Ὥστε ἢ $\theta=\omega+k \cdot 360^0$ ἢ $\theta=180^0-\omega+k \cdot 360^0$ (k ἀκέραιος).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

235) Ποῖα τόξα x ὑπάρχουν μεταξὺ 700° καὶ 900°, τοιαῦτα ὥστε, νὰ εἶναι: $\eta\mu x = \eta\mu 40^0$;

236) Ποῖα τόξα x περιεχόμενα μεταξὺ -850^0 καὶ -400^0 πληροῦν τὴν σχέσιν: $\eta\mu\dfrac{3x+40^0}{2}=\eta\mu(x-20^0)$;

237) Εὕρετε ὅλα τὰ τόξα x διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν συγχρόνως αἱ σχέσεις:

$$\eta\mu x=-1/2 \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu x=-\sqrt{3}/2.$$

238) Ἐὰν α δεδομένον τόξον καὶ ἐὰν ἀληθεύουν αἱ ἰσότητες:

$$\left\{ \eta\mu(2x+y)=\sigma\upsilon\nu\alpha, \qquad \sigma\upsilon\nu(x-2y)=\eta\mu\alpha \right\}$$

ὑπολογίσατε τὰς δυνατὰς τιμὰς τοῦ $\eta\mu(3x-y)$.

56. Τόξα ἔχοντα ἴσας ἐφαπτομένας.

Ἐὰν δύο τόξα ἔχουν ἴσας ἐφαπτομένας, τότε ἢ εἶναι ἴσα ἢ διαφέρουν κατὰ πολλαπλάσιον ἡμιπεριφερείας.

Δηλαδή: *Ἂν εφθ=εφω τότε θ=ω+λ.180°, λ=0, ±1, ±2...*

Ἀπόδειξις. Ἔστω β ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν εφθ καὶ εφω. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων λάβωμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AT}$ τοιοῦτον ὥστε $\overline{AT}=$ $=\beta$ τότε κάθε τόξον ἔχον ἐφαπτομένην ἴσην μὲ β θὰ λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο ἀντιδιαμετρικῶν σημείων Μ καὶ Μ′ (σχ. 55) καθ' ἃ ἡ ΟΤ τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Ἑπομένως, τόσον τὸ θ ὅσον καὶ τὸ ω θὰ λήγουν εἰς ἕνα ἐκ τῶν δύο σημείων Μ ἢ Μ′, ἀφοῦ εφθ=β καὶ εφω=β (τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων παραμενούσης πάντοτε εἰς τὸ Α).

i) Ἂν τὰ θ καὶ ω λήγουν ἀμφότερα εἰς τὸ Μ, τότε ὡς τόξα ἔχοντα τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα θὰ διαφέρουν κατὰ πολλαπλάσιον περιφερείας, δηλ.: $\theta=\omega+k.360^0=\omega+2k.180^0=\omega+\lambda.180^0$, ὅπου λ ἄρτιος ἢ μηδέν. (§ 35, τύπος <u>30</u>).

ii) Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ὅταν λήγουν ἀμφότερα εἰς τὸ Μ′.

iii) Ἐὰν τὸ θ λήγῃ εἰς τὸ Μ καὶ τὸ ω εἰς τὸ Μ′ τότε θεωροῦμεν δύο τόξα $(\widehat{AM})=\tau$ καὶ $(\widehat{AM'})=\tau+180^0$ (σχ. 55) λήγοντα εἰς τὸ Μ καὶ Μ′ ἀντιστοίχως ὁπότε θὰ ἔχωμεν σύμφωνα μὲ τὸν <u>30</u>: $\theta=(\widehat{AM})+$ $+k.360^0$ καὶ $\omega=(\widehat{AM'})+k'.360^0$ ἤτοι $\theta=\tau+k.360^0$, $\omega=(\tau+180^0)+$ $+k'.360^0$ (k, k′ ἀκέραιοι).

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν δύο τελευταίων λαμβάνομεν $\theta-\omega=$ $=(k-k').360^0-180^0=\rho.360^0-180^0=(2\rho-1)180^0=\lambda.180^0$, ὅπου λ ἀκέραιος περιττός. Ὥστε πάλιν: $\theta=\omega+\lambda.180^0$.

iv) Ἐὰν τὸ θ λήγῃ εἰς τὸ Μ′ καὶ τὸ ω εἰς τὸ Μ, τὰ αὐτὰ μὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν. Ὥστε πάντοτε: $\theta=\omega+\lambda.180^0$, ὅπου $\lambda=0, \pm1, \pm2...$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

239) Ἐὰν εφx=σφy ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν τόξων x καὶ y;

240) Δείξατε ὅτι ἂν $\varepsilon\varphi(3x-y+10^0)=\sigma\varphi(x+4y+52^0)$ τότε $4x+3y=28^0+$ $+k.180^0$ ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος.

241) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα x καὶ y γνωστοῦ ὄντος ὅτι:

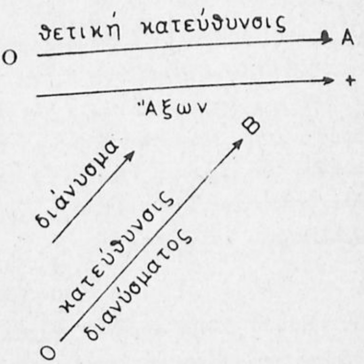
$$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi 5y,\quad 3x+y=19\pi \text{ καὶ } \pi\leqq y<\frac{19}{16}\pi.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ συνθέτων(*) γωνιῶν.

57. Γωνία διανύσματος καὶ ἄξονος. Ὑπολογισμὸς τῆς προβολῆς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα.

α') Ἄς ὀνομάσωμεν **θετικὴν κατεύθυνσιν** ἑνὸς ἄξονος, κάθε ἡμιευθεῖαν ΟΑ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα (ἢ καὶ ἐπ' αὐτοῦ κειμένην) καὶ φερομένην πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν αὐτοῦ ὡς τὸ σχ. 58 δεικνύει καὶ **κατεύθυνσιν διανύσματος** κάθε ἡμιευθεῖαν ΟΒ παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα (ἢ καὶ περιέχουσαν τὸ διάνυσμα) καὶ φερομένην ὁμορρόπως πρὸς αὐτὸ ὡς τὸ (σχ. 58) δεικνύει.



Σχ. 58

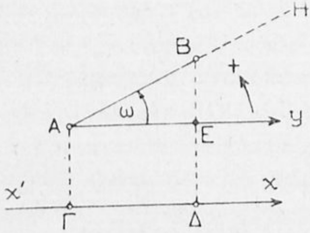
β') **Ὁρισμός.** *Ἐὰν ἄξων καὶ διάνυσμα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτό, προσανατολισμένον, ἐπίπεδον, καλεῖται γωνία τοῦ διανύσματος καὶ τοῦ ἄξονος, κάθε γωνία ἔχουσα ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν θετικὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἄξονος καὶ τελικὴν πλευρὰν τὴν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος.*

Ἔστω π.χ. ὁ ἄξων x'x καὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 59) ἐν τῷ αὐτῷ προσανατολισμένῳ ἐπιπέδῳ κείμενα. Ἐὰν διὰ τῆς ἀρχῆς Α τοῦ διανύσματος φέρομεν ἡμιευθεῖαν Ay παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ ἄξονος τότε μία οἱαδήποτε γωνία yAB μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν Ay καὶ τελικὴν τὴν ABH θεωρεῖται ὡς γωνία τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ τοῦ ἄξονος x'x.

(*) Σύνθετον γωνίαν ἐννοοῦμεν ἐκείνην ἥτις εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ ἄλλων ἢ πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον ἄλλης.

Ἐπειδὴ ὅμως ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος γωνίαι ἔχουσαι ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ay καὶ τελικὴν τὴν AB (36, ε΄) συνάγεται ὅτι **τὸ διάνυσμα καὶ ὁ ἄξων σχηματίζουν ἀπείρους τὸ πλῆθος γωνίας** διαφερούσας ἀπ' ἀλλήλων κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῶν 360^0, ἂν δὲ γνωρίζωμεν τὴν μίαν τούτων, π.χ. τὴν ἐλαχίστην θετικὴν ω, γνωρίζομεν καὶ πάσας τὰς ἄλλας, καθ' ὅσον αὗται θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\omega + k\,360^0$. Παρατηροῦμεν ἐν τέλει ὅτι πᾶσαι αἱ γωνίαι τοῦ διανύσματος καὶ τοῦ ἄξονος ἔχουν τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὴν ἐλαχίστην θετικὴν ω, ὡς διαφέρουσαι ταύτης κατὰ πολλαπλάσιον τῶν 360^0. Εἰς τὰς ἀμέσως ἑπομένας ἀποδείξεις θὰ παριστάνωμεν διὰ τοῦ ω τὴν ἐλαχίστην ταύτην θετικὴν γωνίαν.

γ΄) Ἐὰν ἡ γωνία ω τοῦ διανύσματος καὶ τοῦ ἄξονος εἶναι ὀξεῖα (σχ. 59) τότε εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ προβολὴ $\overline{\Gamma\Delta}$ τοῦ διανύσματος (βλ. (§ 37) ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι θετική,



Σχ. 59

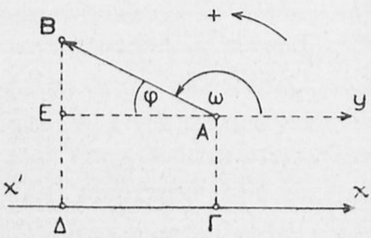
διότι τότε, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἔχει τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ x′x. Ὥστε θὰ εἶναι :

(1) $\overline{\Gamma\Delta} = (\Gamma\Delta)$ (βλ. § 37, 3ον παρατ.).

Ἐξ ἄλλου σύμφωνα πρὸς τὸ σχ. 59 καὶ δεχόμενοι ὡς γενικὴν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν, τὴν μονάδα τοῦ ἄξονος, ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AEB (§ 7) : (AE) = (AB) συνω, ἄρα καὶ (ΓΔ) = = (AB)συνω καὶ λόγῳ τῆς (1),

$$\overline{\mathbf{\Gamma\Delta}} = \mathbf{(AB)}\ \textbf{συνω}.$$

Ἐὰν ἡ γωνία ω εἶναι ἀμβλεῖα, τότε (σχ. 60 ἡ προβολὴ $\overline{\Gamma\Delta}$ τοῦ διανύσματος εἶναι ἀρνητική, δηλ. $\overline{\Gamma\Delta} = -(\Gamma\Delta)$ θὰ ἔχωμεν δὲ τώρα βάσει τοῦ σχ. 60.



Σχ. 60

$$\overline{\Gamma\Delta} = -(\Gamma\Delta) = -(AE) =$$
$$= -(AB)\text{συνφ} = (AB)\{-\text{συνφ}\} =$$
$$= (AB)\text{συνω, διότι } \omega + \varphi = 180^0,$$

συνεπῶς συνω = —συνφ (§ 50).

Ὥστε καὶ πάλιν :

$$\overline{\mathbf{\Gamma\Delta}} = \mathbf{(AB)}\ \textbf{συνω}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι $\overline{\Gamma\Delta} = (AB)$ συνω καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ ω περιέχεται μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0 ἢ μεταξὺ 270^0 καὶ 360^0.

Τέλος ἡ σχέσις $\overline{\Gamma\Delta}=(AB)$συνω ἰσχύει καὶ ὅταν $\omega=0$, $\omega=90^0$, $\omega=180^0$, $\omega=270^0$ ὅπως ἀμέσως ἐλέγχει τίς.

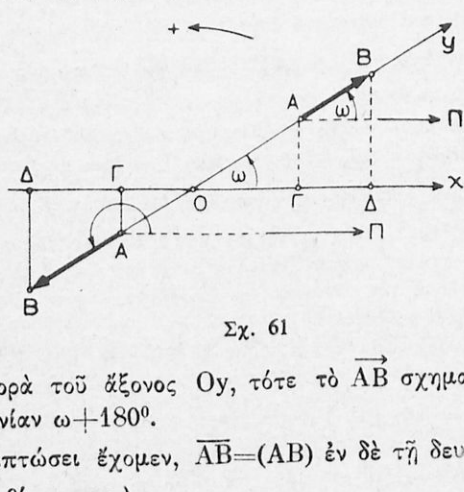
Ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ

Θεώρημα I. «Ἡ προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τοῦ διανύσματος καὶ τοῦ ἄξονος».

Παρατήρησις 1η. Εἰς τὸν τύπον $\overline{\Gamma\Delta}=(AB)$ συνω τὸ ω δύναται νὰ παριστάνῃ οἱανδήποτε ἐκ τῶν ἀπείρων γωνιῶν τοῦ διανύσματος καὶ τοῦ ἄξονος, ἀφοῦ ὅλαι ἔχουν τοὺς ἰδίους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

Παρατήρησις 2α. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ἄξων καὶ διάνυσμα εὑρίσκωνται εἰς τὸν χῶρον, ἐπὶ ἀσυμβάτων εὐθειῶν, τῆς ω θεωρουμένης τότε ὡς Γεωμετρικῆς γωνίας (χωρὶς πρόσημον) σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν δύο κατευθύνσεων (τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ διανύσματος).

δ') Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἄξονας Ox καὶ Oy κειμένους ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, ἔχοντας ἰσομήκη μοναδιαῖα διανύσματα καὶ τεμνομένους ὑπὸ γωνίαν τινὰ ω τυχοῦσαν, (ἀρχικὴ πλευρὰ ἡ θετικὴ κατεύθυνσις Ox καὶ τελικὴ ἡ θετικὴ κατεύθυνσις Oy) καὶ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy (σχ. 61). Τὸ $\overrightarrow{AB}$ ὡς κείμενον ἐπὶ ἄξονος θὰ ἔχῃ τώρα, ἕνα ὡρισμένον σχετικὸν μέτρον ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον, τὸ $\overline{AB}$ (§ 37, 3ον). Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἔχῃ φορὰν τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ Oy τότε σχηματίζει μετὰ τοῦ Ox γωνίαν ω. Ἂν ὅμως ἡ φορὰ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἡ ἀρνητικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος Oy, τότε τὸ $\overrightarrow{AB}$ σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος Ox γωνίαν $\omega+180^0$.



Σχ. 61

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἔχομεν, $\overline{AB}=(AB)$ ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, $\overline{AB}=-(AB)$ (§37, 3ον, β', παρατ.).

Ἡ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὸν Ox, ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει εἶναι:

$$\overline{\Gamma\Delta} = (AB)\sigma\upsilon\nu\omega = (\overline{AB})\sigma\upsilon\nu\omega.$$

Ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ θὰ εἶναι (σχ. 61).

$$\overline{\Gamma\Delta} = (AB)\ \sigma\upsilon\nu(\omega+180^0) = -(AB)\ \sigma\upsilon\nu\omega = \overline{AB}\ \sigma\upsilon\nu\omega.$$

Ὥστε εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, ἀληθεύει τὸ θεώρημα:

Θεώρημα ΙΙ. «Ἡ προβολὴ διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος, ἐπὶ ἄλλον ἄξονα, ἰσοῦται μὲ τὸ σχετικὸν μέτρον τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν θετικῶν κατευθύνσεων τῶν δύο ἀξόνων· τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τῶν δύο ἀξόνων, ὑποτίθενται ἰσομήκη».

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα ΙΙ ἰσχύει καὶ δι' ἄξονας ἀσυμβάτους, ἐν τῷ χώρῳ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

242) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἴσα διανύσματα ἔχουν καὶ ἴσας προβολὰς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.

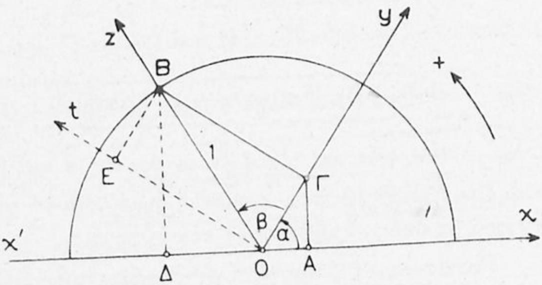
243) Ποία ἡ προβολὴ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, μήκους (=μέτρου) 2 μέτρων, ἐπὶ ἄξονα μεθ' οὗ σχηματίζει γωνίαν $105^0 40'$, ὅταν ὡς μονὰς ἐπὶ τοῦ ἄξονος λαμβάνεται τὸ δεκατόμετρον; (Χρῆσις φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν).

244) Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ ἔχουν μήκη 1, 2, 3 μέτρα ἀντιστοίχως κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίας $\widehat{AOB} = +17^0$ καὶ $\widehat{BO\Gamma} = +35^0 30'$. i) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν των ἐπὶ τὸν ἄξονα Ox ὁμόρροπον πρὸς τὸ $\overrightarrow{OA}$ καὶ φέροντα μονάδα 1 μέτρου. ii) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν των ἐπὶ ἄξονα Oy κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ ἔχοντα μονάδα 1 μέτρον. (Χρῆσις φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, προσέγγισις χιλιοστοῦ). iii) Ἐὰν τὰ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ παριστάνουν δυνάμεις 1kg*, 2kg* καὶ 3kg* ποία ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ αὐτῶν καὶ ποίαν γωνίαν σχηματίζει αὕτη μετὰ τοῦ Ox; (Ἐκ τῆς Φυσικῆς γνωρίζομεν ὅτι ἡ προβολὴ τῆς συνισταμένης ἐπὶ ἄξονα, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν).

245) Ἔστωσαν α, β, γ, Α, Β, Γ τὰ στοιχεῖα τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. i) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ προβολαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$ ἐπὶ ἄξονα ἔχοντα τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν τοῦ $\overrightarrow{B\Gamma}$. ii) Βάσει τῆς ἰσότητος: $(\overline{\Delta B})+(\overline{B\Gamma})+(\overline{\Gamma\Delta}) = 0$ νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις: $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \alpha$.

58. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος καὶ διαφορᾶς δύο γωνιῶν.

α΄) Ἔστωσαν α καὶ β τὰ (σχετικὰ) μέτρα δύο γωνιῶν. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν γωνίαν $\alpha+\beta$ θεωροῦμεν κατ᾽ ἀρχὰς ἐν προσανατολισμένῳ ἐπιπέδῳ ἕνα ἄξονα x΄Ox (σχ. 62). Θεωροῦμεν κατόπιν καὶ δεύτερον ἄξονα Oy προκύπτοντα ἐκ τοῦ Ox διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν α. (Ἡ στροφὴ γίνεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὴν θετικὴν



Σχ. 62

ἢ ἀρνητικὴν φορὰν καθ᾽ ὅσον τὸ μέτρον α τῆς γωνίας εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν). Κατόπιν θεωροῦμεν καὶ τρίτον ἄξονα Oz προκύπτοντα διὰ στροφῆς τοῦ Oy ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ γωνίαν β. Τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α καὶ β θὰ ἔχῃ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ox καὶ τελικὴν τὴν Oz, δηλ. $(x\widehat{O}z)=\alpha+\beta$ (§ 36, στ΄).

Θεωροῦμεν τώρα καὶ τέταρτον ἄξονα Ot προκύπτοντα ἐκ τοῦ Oy διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ $+90^0$ ὁπότε ἡ γωνία τῶν θετικῶν κατευθύνσεων τῶν δύο ἀξόνων Ox, Ot εἶναι $90^0+\alpha$.

Ἔστω $\overrightarrow{OB}$ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ Oz καὶ Γ καὶ E αἱ προβολαὶ τοῦ B ἐπὶ τοὺς Oy καὶ Ot ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν ἀκόμη A καὶ Δ αἱ προβολαὶ τῶν Γ καὶ B ἐπὶ τὸν Ox (σχ. 62).

Θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν:

(1) $\overline{O\Gamma}=\text{συν}\beta$ (ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου)

(2) $\overline{OE}=\text{ημ}\beta$ (ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου)

(3) $\overline{OA}=\overline{O\Gamma}\,\text{συν}\alpha=\text{συν}\beta\,\text{συν}\alpha$ (θεώρ. II, § 57)

(4) $\overline{O\Delta}=\text{συν}(\alpha+\beta)$ (ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου)

Εἶναι ἀκόμη: $\overline{A\Delta}=$ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{\Gamma B}$ ἐπὶ τὸν Ox $=$

$=$ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{OE}$ ἐπὶ τὸν Ox $=$

$=\overline{OE}\,συν(x\widehat{O}t)=ημβ\,συν(90^0+α)=-ημβημα$

(διότι τὰ ἴσα διανύσματα $\overrightarrow{ΓB}$, $\overrightarrow{OE}$ ἔχουν καὶ ἴσας προβολὰς ἐπὶ τὸν Ox καὶ διότι $συν(90^0+α)=-ημα$). Ὥστε ἔχομεν:

(5) $$\overline{AΔ}=-ημβ\,ημα.$$

Τέλος, ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν σημείων (§ 37, 4ον) λαμβάνομεν:

(6) $$\overline{OΔ}=\overline{OA}+\overline{AΔ}.$$

Ἡ (6) γίνεται, λόγῳ τῶν (4), (3) καὶ (5):

<u>44</u> $$\boxed{συν(α+β)=συνα\,συνβ-ημα\,ημβ}$$

β') Ὁ τύπος <u>44</u> ἰσχύει δι' οἱασδήποτε γωνίας α καὶ β, θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς καὶ οἱουδήποτε μέτρου, συνεπῶς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $-β$ εἰς τὴν θέσιν τοῦ β, ὁπότε λαμβάνομεν τὸν τύπον:

(7) $$συν\{α+(-β)\}=συνα\,συν(-β)-ημα\,ημ(-β).$$

Ἐπειδὴ ὅμως $συν(-β)=συνβ$, $ημ(-β)=-ημβ$, ὁ ἀνωτέρω τύπος (7) γίνεται:

<u>44α</u> $$\boxed{συν(α-β)=συνα\,συνβ+ημα\,ημβ}$$

γ') Ἂς γράψωμεν εἰς τὸν τύπον <u>44α</u> ἀντὶ τοῦ α, τὸ $90^0-α$. Θὰ λάβωμεν:

$$συν\{90^0-α-β\}=συν(90^0-α)συνβ+ημ(90^0-α)ημβ \quad ἢ$$
$$συν\{90^0-(α+β)\}=συν(90^0-α)συνβ+ημ(90^0-α)ημβ \quad ἢ \ τέλος$$

<u>45</u> $$\boxed{ημ(α+β)=ημα\,συνβ+συνα\,ημβ}$$

δ') Ἐὰν εἰς τὸν τύπον <u>45</u> γράψωμεν ὅπου β, τὸ $-β$ λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$ημ\{α+(-β)\}=ημα\,συν(-β)+συνα\,ημ(-β) \quad ἤτοι:$$

<u>45α</u> $$\boxed{ημ(α-β)=ημα\,συνβ-συνα\,ημβ}$$

ε') Ἐὰν $συνα\neq 0$ καὶ $συνβ\neq 0$ θὰ ἔχωμεν βάσει τῶν <u>45</u> καὶ <u>44α</u>.

$$εφ(α+β)=\frac{ημ(α+β)}{συν(α+β)}=\frac{ημα\,συνβ+συνα\,ημβ}{συνα\,συνβ-ημα\,ημβ}=$$

$$= \frac{\dfrac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta} - \dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}.$$

Ἔτσι, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

46 $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}}$$

παρέχοντα τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων συναρτήσει τῶν ἐφαπτομένων τῶν προσθετέων.

στ′) Ἐκ τοῦ **46** λαμβάνομεν, θέτοντες ὅπου β τὸ —β, τὸν τύπον:

46α $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}}$$

παρέχοντα τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος συναρτήσει τῶν ἐφαπτομένων τῶν προσθετέων.

ζ′) Ἔχομεν ἀκόμη :

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta}$$

καὶ διαιροῦντες ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ τελευταίου κλάσματος διὰ τοῦ γινομένου ημα ημβ (ὑποτιθεμένου $\neq 0$) λαμβάνομεν τελικῶς

47 $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}}$$

η′) Θέτοντες εἰς τὸν **47** ὅπου β τὸ —β λαμβάνομεν :

47α $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}}$$

θ′) τύποι **44** ἕως **45α** παρέχουν τὸ συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν ὧν γνωρίζομεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν μόνον τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν τούτων, ὅπως δεικνύουν οἱ τύποι **46**, **46α**.

Πάντες οἱ ἀνωτέρω τύποι δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἀποτελοῦν τὸ «ἀθροιστικὸν θεώρημα τῆς Τριγωνομετρίας» τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ θεμελιῶδες θεώρημα αὐτῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) **Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 75^0.**

Λύσις. Κατὰ τὸν τύπον <u>45</u> θὰ ἔχωμεν:

$$ημ75^0 = ημ(45^0+30^0) = ημ45^0 συν30^0 + συν45^0 ημ30^0$$

καὶ κατὰ τοὺς τύπους <u>7</u> καὶ <u>8</u>:

$$ημ75^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ὁμοίως: $συν75^0 = συν(45^0+30^0) = συν45^0 συν30^0 - ημ45^0 ημ30^0 =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ἐπομένως: $εφ75^0 = ημ75^0/συν75^0 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2+\sqrt{3}$,

$$σφ75^0 = 1/εφ75^0 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 2-\sqrt{3}.$$

ii) **Χρήσιμος ταυτότης. Νὰ δειχθῇ ὅτι:**

$$ημ(α+β)ημ(α-β) = ημ^2α - ημ^2β.$$

Λύσις. Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος ἐφαρμόζοντες τοὺς ἀθροιστικοὺς τύπους:

$$ημ(α+β)ημ(α-β) = (ημα\,συνβ + συνα\,ημβ)\,.\,(ημα\,συνβ - συνα\,ημβ) =$$
$$= ημ^2α\,συν^2β - συν^2α\,ημ^2β = ημ^2α(1-ημ^2β) - (1-ημ^2α)ημ^2β =$$
$$= ημ^2α - ημ^2α\,ημ^2β - ημ^2β + ημ^2α\,ημ^2β = ημ^2α - ημ^2β.$$

iii) **Ἐὰν α καὶ β εἶναι ὀξεῖαι γωνίαι τοιαῦται ὥστε: $εφα=1/2$, $εφβ=1/3$ νὰ δειχθῇ ὅτι $α+β=45^0$.**

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $εφ(α+β)=1$· διότι $0<α<90^0$, $0<β<90^0$ ἐπομένως $0<α+β<180^0$, μία δὲ γωνία ὑπάρχη μεταξὺ 0 καὶ 180^0 ἔχουσα ἐφαπτομένην ἴσην μὲ 1 καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ γωνία 45^0. Ἐπομένως ἂν $εφ(α+β)=1$, τότε $α+β=45^0$. Ἐκ τοῦ <u>46</u> λαμβανόμενον:

$$εφ(α+β) = \frac{εφα+εφβ}{1-εφα\,εφβ} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1.$$

iv) **Ἐὰν μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις $ημΒ/ημΑ = 2συν\,Γ$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.**

Ἀπόδειξις. Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $2ημΑ\,συνΓ = ημΒ$ καὶ ἐπειδὴ $ημΒ = ημ(Α+Γ)$ (διότι $(Α+Γ)+Β=180^0$) λαμβάνομεν:
$2ημΑσυνΓ = ημ(Α+Γ)$ ἢ $2ημΑ\,συνΓ = ημΑσυνΓ + συνΑ\,ημΓ$ ἢ $ημΑ\,συνΓ - συνΑημΓ = 0$ ἢ $ημ(Α-Γ)=0$ καὶ ἐξ αὐτοῦ $Α-Γ = k\cdot 360^0$ (k, ἀκέραιος). Ἐπειδὴ Α, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου, ἡ μόνη δυνατὴ τιμὴ τοῦ k εἶναι $k=0$ ἄρα $Α-Γ=0$ ἤτοι $Α=Γ$.

v) **Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξύ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις**

$$\frac{β-2α\,συνΓ}{αημΓ} + \frac{γ-2β\,συνΑ}{βημΑ} + \frac{α-2γ\,συνΒ}{γημ\,Β} = 0.$$

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρία προστιθέμενα κλάσματα προκύπτουν τὸ ἓν ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ Α, Β, Γ. Διὰ τοῦτο ἐξετάζομεν κατ' ἀρχάς, μόνον τὸ πρῶτον. Τοῦτο περιέχει καὶ πλευρὰς καὶ γωνίας, δύναται δὲ νὰ μετατραπῇ εἰς ἴσον κλάσμα περιέχον *μόνον γωνίας* διὰ τῶν τύπων

$$\alpha=2R\,\eta\mu A,\quad \beta=2R\,\eta\mu B,\quad \gamma=2R\,\eta\mu\Gamma.$$

Θὰ ἔχωμεν δὲ κατὰ σειράν:

$$\frac{\beta-2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\eta\mu\Gamma}=\frac{2R\,\eta\mu B-2\cdot 2R\,\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2R\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu B-2\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma}=$$

$$=\frac{\eta\mu(A+\Gamma)-2\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu A\,\eta\mu\Gamma-\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu A\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma}-\frac{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma}=\sigma\varphi A-\sigma\varphi\Gamma.$$

Τὸ δεύτερον κλάσμα θὰ προκύψῃ διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν Α, Β, Γ, ἄρα θὰ εἶναι σφΒ—σφΑ καὶ τὸ τρίτον γίνεται διὰ κυκλικῆς τροπῆς τοῦ δευτέρου, ἄρα θὰ εἶναι ἴσον μὲ σφΓ—σφΒ. Ὥστε τὸ Α' μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος γράφεται:

$(\sigma\varphi A-\sigma\varphi\Gamma)+(\sigma\varphi B-\sigma\varphi A)+(\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi B)$ καὶ εἶναι πράγματι, $=0$.

vi) **Χρήσιμος σχέσις. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν Α, Β, Γ εἶναι αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ, ὑφίσταται ἡ σχέσις:**

$$\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=1.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $A+B=180^0-\Gamma$ θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$ (§ 50) ἢ

$\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu A\,\eta\mu B=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ἢ $\eta\mu A\,\eta\mu B=\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Τετραγωνίζοντες τὴν τελευταίαν ταύτην λαμβάνομεν:

$\eta\mu^2 A\,\eta\mu^2 B=(\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)^2$ ἢ $(1-\sigma\upsilon\nu^2 A)(1-\sigma\upsilon\nu^2 B)=(\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)^2$

καὶ ἐκτελοῦντες πράξεις:

$$1-\sigma\upsilon\nu^2 B-\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 A\,\sigma\upsilon\nu^2 B=\sigma\upsilon\nu^2 A\,\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

ἢ $1=\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

246) Ν' ἁπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις:

i) $\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu\beta$

ii) $\sigma\upsilon\nu\gamma\,\sigma\upsilon\nu(\gamma+\delta)+\eta\mu\gamma\,\eta\mu(\gamma+\delta)$.

247) Ἐὰν $\varepsilon\varphi\alpha=2$, $\varepsilon\varphi\beta=3/4$, ὑπολογίσατε: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$, $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)$.

248) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$.

249) Δείξατε ὅτι: $\eta\mu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)+\eta\mu\gamma\eta\mu(\alpha-\beta)=0$.

250) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\varepsilon\varphi A=2/3$, $\varepsilon\varphi B=11/15$. Εὕρετε τὴν εφΓ.

251) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα:

$$\frac{\eta\mu(\alpha+x)-\eta\mu(\alpha-x)}{\sigma\upsilon\nu(\beta-x)-\sigma\upsilon\nu(\beta+x)}$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x.

Ἀποδείξατε ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x:

252) $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)$.

253) $\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2(120^0+x)+\sigma\upsilon\nu^2(120^0-x)$.

254) $\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)$.

255) Ἐὰν $εφA = \sqrt{3}/(4-\sqrt{3})$ καὶ $εφB = \sqrt{3}/(4+\sqrt{3})$ δείξατε ὅτι: $εφ(A-B) = 0,375$.

256) Δύο γωνίαι ὀξεῖαι ἔχουν ἐφαπτομένας $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ καὶ $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορά των εἶναι 45^0.

257) Ἐὰν $ημα=5/13$, $ημβ=4/5$, $0<α<90^0$, $0<β<90^0$ δείξατε ὅτι:

$$ημ(45^0+α+β)=79\sqrt{2}/130.$$

258) Ἐὰν θ τυχοῦσα γωνία, νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει:

$$ασυνθ=βσυν(θ-Γ)+γ\,συν(θ+B).$$

259) Ἐὰν $x+y=45^0$ δείξατε ὅτι: $(1+εφx)(1+εφy)=2$.

260) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις: $εφB=\frac{βημA}{γ-βσυνA}$.

261) Ἐὰν τὸ x λήγῃ εἰς τὸν $2^{ον}$ τεταρτημόριον καὶ εἶναι $ημx=5/13$ τὸ δὲ y λήγει εἰς τὸ $3^{ον}$ καὶ εἶναι $εφy=15/8$ ὑπολογίσατε τά:

$$συν(x-y),\quad ημ(x+y),\quad εφ(x+y),\quad εφ(x-y).$$

262) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $B=45^0$ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι Α καὶ Γ θὰ πληροῦν τὴν σχέσιν $(1+σφA)(1+σφΓ)=2$.

263) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ παριστοῦν τὰς γωνίας κυρτοῦ τετραπλεύρου νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{εφA+εφB+εφΓ+εφΔ}{σφA+σφB+σφΓ+σφΔ}=εφA\,εφB\,εφΓεφΔ.$$

264) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ δείξατε ὅτι ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$αημ(B-Γ)+βημ(Γ-A)+γημ(A-B)=0.$$

265) Πληρουμένων τῶν σχέσεων: $εφα=\frac{λ\,ημγ}{1-λ\,συνγ}$ καὶ $εφβ=\frac{συνγ-λ}{ημγ}$ νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ πληροῦται καὶ ἡ σχέσις: $α+β+γ=(2k+1)90^0$, ὅπου k ἀκέραιος.

266) Ἐὰν Α καὶ Β γωνίαι μεταξὺ 0 καὶ 180^0 ἑκάστη, ποίαν συνθήκην πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῦν αἱ $εφ\frac{A}{2}$ καὶ $εφ\frac{B}{2}$ ἵνα αἱ Α καὶ Β ἀνήκουν εἰς ἕνα τρίγωνον;

267) Ἐὰν ὑφίσταται ἡ σχέσις $εφx+εφy+εφω=εφx\,εφy\,εφω$ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$x+y+ω=kπ,\quad \text{ὅπου k ἀκέραιος.}$$

268) Ἐὰν ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\frac{εφ(α-β)}{εφα}+\frac{ημ^2γ}{ημ^2α}=1$ νὰ δειχθῇ ὅτι τότε θὰ ὑφίσταται καὶ ἡ: $εφ^2γ=εφα\,εφβ$.

269) Ν' ἁπλουστευθῇ ἑκάστη τῶν ἑπομένων παραστάσεων:

i) $ημ4x\,συνx+συν4x\,ημx$, ii) $συν3x\,συνx-ημ3x\,ημx$, iii) $\frac{εφ5x-εφx}{1+εφ5x\,εφx}$.

270) Ἐὰν $0<x<90^0$, $0<y<90^0$ δείξατε ὅτι: $ημ(x+y)<ημx+ημy$.

271) Ἐὰν αἱ γωνίαι α, β, γ περιέχωνται ἑκάστη μεταξὺ 0 καὶ $\frac{π}{2}$ ἀκτιν. δίδεται δὲ ὅτι:

$$σφα=(x^3+x^2+x)^{1/2},\quad σφβ=(x+x^{-1}+1)^{1/2},\quad εφγ=(x^{-3}+x^{-2}+x^{-1})^{1/2},$$

νὰ δειχθῇ ὅτι: $α+β=γ$, $(x>0)$.

272) Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu(\theta-\alpha)\,\eta\mu(\alpha-\beta)}+\frac{\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu(\theta-\beta)\,\eta\mu(\beta-\alpha)}=\frac{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu(\theta-\alpha)\,\eta\mu(\theta-\beta)}.$$

59. Τύποι τοῦ διπλασίου τόξου.

α') **Τὸ ἡμίτονον τοῦ διπλασίου τόξου.** Ἐὰν α τυχὸν τόξον θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν, (βάσει τοῦ τύπου 45):

$2\alpha=\alpha+\alpha, \quad \eta\mu2\alpha=\eta\mu(\alpha+\alpha)=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\alpha$ ἤτοι:

48 $$\boxed{\eta\mu2\alpha=2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

Ἐὰν εἰς τὸν **48** τεθῇ $2\alpha=\theta,\ \alpha=\frac{\theta}{2}$ λαμβάνομεν:

48α $$\boxed{\eta\mu\theta=2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ **48** προκύπτει, ὁ χρήσιμος διά τινα ζητήματα τύπος:

48β $$\boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\eta\mu2\alpha}{2\eta\mu\alpha}}$$

Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ παράστασις ημx συνx ἡ ὁποία συχνὰ ἀπαντᾶται δύναται ν' ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς παραστάσεως $\frac{1}{2}$ ημ2x.

β') **Τύποι τοῦ συν2Α.** Βάσει τοῦ τύπου **44** λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\alpha=\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-$$
$$-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\boldsymbol{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}=2(1-\eta\mu^2\alpha)-1=\boldsymbol{1-2\eta\mu^2\alpha}.$$

Οὕτω ἔχομεν τοὺς χρησίμους τύπους:

49 $$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$$
49α $$\sigma\upsilon\nu2\alpha=2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$$
49β $$\sigma\upsilon\nu2\alpha=1-2\,\eta\mu^2\alpha$$

Ὁ τύπος **49α** τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

(1) $$1+\sigma\upsilon\nu2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

καὶ ὁ **49β** ὑπὸ τὴν μορφήν:

(2) $$1-\sigma\upsilon\nu2\alpha=2\,\eta\mu^2\alpha.$$

Ἐὰν εἰς τοὺς (1) καὶ (2) τεθῇ $2\alpha=\theta$, $\alpha=\frac{\theta}{2}$ λαμβάνομεν τοὺς χρησιμωτάτους τύπους:

50
$$\boxed{\begin{aligned} 1+\sigma\upsilon\nu\theta &= 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} \\ 1-\sigma\upsilon\nu\theta &= 2\,\eta\mu^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}}$$

Ἐπίσης, χρήσιμοι εἰς πλεῖστα ζητήματα εἶναι οἱ τύποι (1) καὶ (2) ὑπὸ τὴν μορφήν:

51
$$\boxed{\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu^2\alpha &= \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \\ \eta\mu^2\alpha &= \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \end{aligned}}$$

γ′) **Πάντες οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ διπλασίου τόξου ἐκφράζονται ρητῶς, συναρτήσει τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἁπλοῦ τόξου.** Πράγματι:

$$\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\dfrac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}.$$

Ὥστε τὸ ημ2α ἐκφράζεται ρητῶς (ἄνευ ριζικῶν) συναρτήσει τῆς εφα. Ὁμοίως:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

(ὅπου διηρέσαμεν, πάλιν, ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ συν²α).

Τέλος, ἔχομεν $\varepsilon\varphi 2\alpha=\varepsilon\varphi(\alpha+\alpha)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$ (βλ. τύπον **46**) δηλ. καὶ ἡ εφ2α εἶναι ρητὴ συνάρτησις τῆς εφα.

Οὕτω ἐδείξαμεν τοὺς τύπους:

52
52α
52β
$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu 2\alpha &= \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} \\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} \\ \varepsilon\varphi 2\alpha &= \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} \end{aligned}}$$

Θέτοντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους ὅπου 2α τὸ θ καὶ ὅπου α τὸ θ/2 λαμβάνομεν :

53 $$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu\theta &= \frac{2\,\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\theta &= \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}} \\ \varepsilon\varphi\theta &= \frac{2\,\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}} \end{aligned}}$$

53α

53β

Ἐκ τῶν τριῶν τελευταίων ἕπεται ὅτι : *Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ παντὸς τόξου ἐκφράζονται ρητῶς συναρτήσει τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἡμίσεος τόξου.*

Παρατήρησις. Τὸ συν2α ἐκφράζεται ρητῶς συναρτήσει τοῦ συνα (τύπος 49α) ἐπίσης δὲ ρητῶς διὰ τοῦ ημα (τύπος 49β) ἐνῶ τὸ ημ2α δὲν ἐκφράζεται ρητῶς συναρτήσει μόνον τοῦ συνα ἢ μόνον τοῦ ημα (τύπος 48).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. i) **Νὰ ὑπολογισθῇ ἄνευ πινάκων ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου :**

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\;\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}\;\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}\,.$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα παράστασις μετασχηματίζεται βάσει τοῦ τύπου 48β εἰς τὴν ἴσην παράστασιν :

$$\frac{\eta\mu\frac{4\pi}{7}}{2\,\eta\mu\frac{2\pi}{7}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{8\pi}{7}}{2\,\eta\mu\frac{4\pi}{7}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{16\pi}{7}}{2\,\eta\mu\frac{8\pi}{7}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\eta\mu\frac{16\pi}{7}}{\eta\mu\frac{2\pi}{7}}.$$

Ἀλλὰ τὰ τόξα $\frac{16\pi}{7}$ καὶ $\frac{2\pi}{7}$ διαφέρουν κατὰ 2π συνεπῶς ἔχουν ἡμίτονα ἴσα. Ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ $=1/8$.

ii) **Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :**

$$E=\frac{\alpha^2\eta\mu 2B+\beta^2\eta\mu 2A}{4}\,.$$

Ἀπόδειξις. Μετασχηματίζομεν τὸ 2ον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς γνωστὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ. Ἀρχίζοντες μὲ τοὺς τύπους : $\alpha=2R\eta\mu A$, $\beta=2R\eta\mu B$ καὶ κατόπιν μὲ τὸν 48 ἔχομεν κατὰ σειράν:

2ον μέλος $=\frac{4R^2\eta\mu^2A\;\eta\mu 2B+4R^2\eta\mu^2B\;\eta\mu 2A}{4}=R^2\eta\mu^2A\cdot 2\eta\mu B\;\sigma\upsilon\nu B+$

$$+R^2ημ^2B \cdot 2ημA\,συνA = 2R^2ημA\,ημB(ημA\,συνB + ημB\,συνA) =$$

$$= 2R^2ημAημBημ(A+B) = 2R^2ημA\,ημB\,ημΓ = \text{ἐμβαδὸν (τύπος } \underline{24}, \text{ § 32)}.$$

iii) **Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:**

$$(α^2+β^2)\,ημ(A-B) = (α^2-β^2)\,ημ(A+B)$$

τὸ τρίγωνον εἶναι ἢ ἰσοσκελὲς ἢ ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Μεταφέρομεν τοὺς ὅρους μὲ τὸ $α^2$ εἰς τὸ ἕνα μέλος καὶ τοὺς ὅρους μὲ τὸ $β^2$ εἰς τὸ ἄλλο:

$$α^2\{ημ(A+B) - ημ(A-B)\} = β^2\{ημ(A+B) + ημ(A-B)\}$$

καὶ ἀναπτύσσοντες τὰ ημ(Α+Β) καὶ ημ(Α–Β) λαμβάνομεν:

$$(1) \qquad α^2 \cdot 2\,συνA\,ημB = β^2 \cdot 2\,ημA\,συνB.$$

Διὰ νὰ γίνῃ ἡ (1) σχέσις γωνιῶν, θέτομεν: $α = 2R\,ημA$, $β = 2R\,ημB$ καὶ λαμβάνομεν: $4R^2ημ^2A \cdot 2\,συνA\,ημB = 4R^2ημ^2B\,2ημA\,συνB$ ἢ $ημ^2A\,συνA\,ημB - ημ^2B\,ημA\,συνB = 0$ ἢ $ημA\,ημB\,(ημA\,συνA - ημB\,συνB) = 0$ καὶ ἐπειδὴ $ημA\,ημB \neq 0$ (διότι, Α, Β εἶναι γωνίαι τριγώνου), ἔχομεν $ημA\,συνA - ημB\,συνB = 0$ ἢ $2ημA\,συνA = 2\,ημB\,συνB$ ἢ $ημ2A = ημ2B$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως συνάγομεν (βλ. § 55), ὅτι:

ἢ i) $2A = 2B + 2kπ$ ἢ ii) $2A = π - 2B + 2kπ$.

Ἡ (i) δύναται νὰ ἰσχύῃ μόνον διὰ $k = 0$ διότι ἑκάστη ἐκ τῶν Α καὶ Β περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ π. Ἡ (ii) ὁμοίως, ἀληθεύει μόνον διὰ $k = 0$. Ὥστε ἢ θὰ εἶναι:

$2A = 2B$, $A = B$ (ἰσοσκελὲς) ἢ $2A = π - 2B$, δηλ. $A + B = \dfrac{π}{2}$ (ὀρθογ. εἰς τὸ Γ).

Παρατήρησις. Ἡ i) γράφεται $A - B = kπ$, $|A-B| = |k| \cdot π$ καὶ ἐπειδὴ $|A-B| < π$ πρέπει $|k| < 1$ ἑπομένως ἡ μόνη δυνατὴ τιμὴ τοῦ k εἰς τὴν (i) εἶναι $k = 0$. Ἡ ii) γράφεται:

$A + B = \dfrac{π}{2} + kπ$ καὶ ἐπειδὴ $0 < A + B < π$ πρέπει: $0 < \dfrac{π}{2} + kπ < π$ ἢ

$-\dfrac{π}{2} < kπ < \dfrac{π}{2}$ ἢ $-\dfrac{1}{2} < k < \dfrac{1}{2}$ καὶ ἐπειδὴ k, ἀκέραιος ἕπεται $k = 0$.

iv) **Ἀντικατάστασις τοῦ ημ²ω καὶ συν²ω συναρτήσει τοῦ συν2ω.**
«Ἐὰν γωνία θ πληροῖ τὴν σχέσιν:

$$ημθ^{10} + συν^{10}θ = \frac{1}{5},$$

νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συν4θ.»

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $(ημ^2θ)^5 + (συν^2θ)^5 = \dfrac{1}{5}$ καὶ διὰ τὸ $\underline{51}$ λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\left(\frac{1-συν2θ}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+συν2θ}{2}\right)^5 = \frac{1}{5} \quad ἢ \quad (1-συν2θ)^5 + (1+συν2θ)^5 = \frac{32}{2}.$$

Ἀναπτύσσοντες τὰ διώνυμα λαμβάνομεν:

$$\{1 - 5συν2θ + 10συν^2 2θ - 10συν^3 2θ + 5συν^4 2θ - συν^5 2θ\} +$$

$$+ \{1 + 5συν2θ + 10συν^2 2θ + 10συν^3 2θ + 5συν^4 2θ + συν^5 2θ\} = \frac{32}{5} \quad ἢ$$

$$2+20\sigma\upsilon\nu^2 2\theta+10\sigma\upsilon\nu^4 2\theta=\frac{32}{5} \text{ ἢ } 10\sigma\upsilon\nu^4 2\theta+20\sigma\upsilon\nu^2 2\theta=\frac{22}{5} \text{ ἢ}$$

$$\sigma\upsilon\nu^4 2\theta+2\sigma\upsilon\nu^2 2\theta=\frac{22}{50}=\frac{11}{25} \text{ ἢ } \sigma\upsilon\nu^4 2\theta+2\sigma\upsilon\nu^2 2\theta+1=\frac{36}{25} \text{ ἢ}$$

$$\{\sigma\upsilon\nu^2 2\theta+1\}^2=\frac{36}{25} \text{ ἢ } \sigma\upsilon\nu^2 2\theta+1=\frac{6}{5},\ \sigma\upsilon\nu^2 2\theta=\frac{1}{5}.$$

Βάσει, πάλιν τοῦ τύπου $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2}$ ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 4\theta}{2}=\frac{1}{5}$ καὶ ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu 4\theta=-\frac{3}{5}$.

ν) **Ἀντικατάστασις τοῦ 1+συνω καὶ 1—συνω.** «**Νὰ δειχθῇ ὅτι**

$$\frac{1+\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}=\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}.»$$

Ἀπόδειξις. $1-\sigma\upsilon\nu\omega=2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}$ καὶ $1+\sigma\upsilon\nu\omega=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}$ (τύπος <u>50</u>) καθὼς καὶ $\eta\mu\omega=2\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$ τύπος (<u>48α</u>), ὥστε τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας γράφεται διαδοχικῶς :

$$\frac{2\,\eta\mu^2\frac{\omega}{2}+2\,\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}}{2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}+2\,\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}}=\frac{2\,\eta\mu\frac{\omega}{2}\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right)}{2\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}+\eta\mu\frac{\omega}{2}\right)}=\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

273) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης : $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu 2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}$ καὶ ἐκ ταύτης νὰ εὑρεθῇ ἡ $\varepsilon\varphi 15^0$ καὶ $\varepsilon\varphi 75^0$.

274) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\{\eta\mu\theta(1+\eta\mu\theta)+\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\}\cdot\{\eta\mu\theta(1-\eta\mu\theta)+\sigma\upsilon\nu\theta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\}.$$

275) Ἐὰν $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\tau\varepsilon\mu\frac{\theta}{2}=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\,\sigma\upsilon\nu 2\theta}}}$.

276) Ν' ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις.

$$1-\frac{\eta\mu^2\theta}{1+\sigma\varphi\theta}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1+\varepsilon\varphi\theta}.$$

277) Δοθέντος ὅτι $\varepsilon\varphi x=\beta/\alpha$ νὰ δειχθῇ ὅτι : $\alpha\sigma\upsilon\nu 2x+\beta\eta\mu 2x=\alpha$.

278) Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες :

i) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 2\alpha}$, ii) $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$.

279) Ἐὰν $\varepsilon\varphi^2\alpha=1+2\,\varepsilon\varphi^2\beta$ δείξατε ὅτι : $\sigma\upsilon\nu^2\beta=1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

280) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης : $2-2\varepsilon\varphi\alpha\,\sigma\varphi 2\alpha=\tau\varepsilon\mu^2\alpha$.

281) Ἐὰν $\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=4\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ τότε : $\varepsilon\varphi\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{3\,\eta\mu\alpha}{5-3\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

282) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης :

$$2(\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha)\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\left(1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}\right)=\left(1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

283) Ἐὰν $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$ ὑπολογίσατε τά: ημα, συνα, εφα.

284) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $4\eta\mu 2x+3\sigma\upsilon\nu 2x=3$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφx.

285) Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

i) $\varepsilon\varphi 2B=\frac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$, ii) $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$, iii) $\sigma\upsilon\nu 2B=\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}$.

286) Νὰ δειχθοῦν αἱ μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὑφιστάμεναι σχέσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$, ii) $\sigma\upsilon\nu(2B-\Gamma)=\frac{\beta}{\alpha^3}(3\alpha^2-4\beta^2)$.

287) Ἐὰν μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τριγώνου ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\varepsilon\varphi B/\varepsilon\varphi\Gamma=\eta\mu^2 B/\eta\mu^2\Gamma$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἢ ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές.

288) Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

i) $\eta\mu^2 x+\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu^2 x=\sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, ii) $\sigma\varphi\frac{x}{2}-\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=2\sigma\varphi x$.

289) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθευουσῶν τῶν δύο σχέσεων:

$$x\eta\mu\alpha+y\sigma\upsilon\nu\alpha=k\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha, \qquad x\sigma\upsilon\nu\alpha-y\eta\mu\alpha=k\sigma\upsilon\nu 2\alpha$$

θ' ἀληθεύῃ καὶ ἡ σχέσις: $x^{2/3}+y^{2/3}=k^{2/3}$.

290) Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

i) $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

ii) $(\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2=4\eta\mu^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

iii) $\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x=2\,\frac{3+\sigma\upsilon\nu 4x}{1-\sigma\upsilon\nu 4x}$.

291) Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

i) $\varepsilon\varphi 2x+\tau\varepsilon\mu 2x=\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}$, ii) $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=\frac{2}{\eta\mu 2x}$.

iii) $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

292) Νὰ δειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

$\sigma\upsilon\nu 4\theta=8\sigma\upsilon\nu^4\theta-8\sigma\upsilon\nu^2\theta+1=1-8\eta\mu^2\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta$.

293) Νὰ δειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

i) $\sigma\upsilon\nu^4 x-\eta\mu^4 x=\sigma\upsilon\nu 2x$, ii) $\frac{\eta\mu x+\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x}=\varepsilon\varphi x$, $\left(\sigma\upsilon\nu x\neq-\frac{1}{2}\right)$.

294) Ἀφοῦ δειχθῇ ἡ ταυτότης $\sigma\tau\varepsilon\mu 2\alpha=\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi 2\alpha$ νὰ δειχθῇ τῇ βοηθείᾳ ταύτης ἡ ταυτότης:

$$\sigma\tau\varepsilon\mu 2\alpha+\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha+\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha}{2}+\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha}{2^2}+\ldots+\sigma\tau\varepsilon\mu\frac{\alpha}{2^\nu}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}-\sigma\varphi 2\alpha.$$

295) Δείξατε ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2^2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2^3}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2^\nu}=\frac{\eta\mu\alpha}{2^\nu\,\eta\mu\frac{\alpha}{2^\nu}}$$

296) Ἐὰν μεταξὺ τῶν γωνιῶν τριγώνου ὑφίσταται ἡ σχέσις
$$εφB=\frac{συν(Γ-B)}{ημA+ημ(Γ-B)}$$ νὰ δειχθῇ ὅτι τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

297) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως:
$$εφy=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}},$$ ἕπεται ἡ σχέσις: $x^2=ημ2y$.

298) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $συν^4\frac{\pi}{8}+συν^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$.

299) Νὰ εὑρεθῇ ἄνευ πινάκων ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου:
$$συν\frac{\pi}{15}συν\frac{2\pi}{15}συν\frac{3\pi}{15}συν\frac{4\pi}{15}συν\frac{5\pi}{15}συν\frac{6\pi}{15}συν\frac{7\pi}{15}.$$

300) Ἐὰν A καὶ B γωνίαι θετικαὶ $<90^0$, πληροῦσαι τὰς σχέσεις: $3ημ^2A+2ημ^2B=1$ καὶ $3ημ2A-2ημ2B=0$ νὰ δειχθῇ ὅτι, τότε, $A+2B=90^0$.

301) Ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι: $ημx+συνx=\pm\sqrt{1+ημ2x}$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον πρὸ τοῦ ριζικοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὀγδοημορίου εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον x.

302) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:
$$\frac{ημ3B}{ημB}-\frac{συν3B}{συνB}=2.$$

303) Ν' ἁπλουστευθῇ ἡ παράστασις: $3-4συν2x+συν4x$.

304) Ἐὰν $ημx=\frac{α-β}{α+β}$, ὑπολογίσατε συναρτήσει τῶν α καὶ β τὴν παράστασιν: $εφ\left(45^0-\frac{x}{2}\right)$.

60. Τύποι τοῦ τριπλασίου τόξου.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἐκφράσεις τοῦ ημ2α καὶ συν2α λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ:

$ημ3α=ημ(2α+α)=ημ2α\,συνα+συν2α\,ημα=2ημα\,συν^2α+$
$+(1-2ημ^2α)ημα=2ημα(1-ημ^2α)+(1-2ημ^2α)ημα=2ημα-2ημ^3α+$
$+ημα-2ημ^3α=3ημα-4ημ^3α$. Ὥστε:

54 $$\boxed{ημ3α=3ημα-4ημ^3α}$$

Θέτοντες εἰς τὸν **54** ὅπου α τὸ $90^0-α$ λαμβάνομεν:

(1) $$ημ(270^0-3α)=3ημ(90^0-α)-4\,ημ^3(90-α).$$

Ἀλλὰ $ημ(270^0-3α)=-ημ(90^0-3α)$ (τόξα διαφέροντα κατὰ 180^0) καὶ ἡ (1) γίνεται: $-συν3α=3\,συνα-4\,συν^3α$. Ἔχομεν λοιπόν:

55 $$\boxed{συν3α=4συν^3α-3\,συνα}$$

Ἔχομεν ἐπίσης: $εφ3α=εφ(2α+α)=\frac{εφ2α+εφα}{1-εφ2α\,εφα}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν εφ2α διὰ τῆς ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν παραστάσεως: $\frac{2\,εφα}{1-εφ^2α}$ φθάνομεν εἰς τὸν τύπον:

56 $$\boxed{εφ3α=\frac{3\,εφα-εφ^3α}{1-3\,εφ^2α}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ18° καὶ ἀκολούθως τὸ συν36°.**

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ τόξα $2\cdot18^0$ καὶ $3\cdot18^0$ εἶναι συμπληρωματικὰ θὰ ἰσχύῃ:

$$ημ(3\cdot18^0)=συν(2\cdot18^0)$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τοῦ τριπλασίου καὶ διπλασίου τόξου λαμβάνομεν:

$$3\,ημ18^0-4\,ημ^3 18^0=1-2\,ημ^2 18^0 \quad ἢ \quad 4\,ημ^3 18^0-2\,ημ^2 18^0-3\,ημ18^0+1=0.$$

Ἔστω $ημ18^0=x$. Ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται τότε:

(1) $$4x^3-2x^2-3x+1=0.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι πολυώνυμον ἀκριβῶς διαιρετὸν διὰ $x-1$ καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, γράφομεν τὴν (1) ὑπὸ τὴν μορφήν:

(2) $$(x-1)(4x^2+2x-1)=0.$$

Ἡ (2) χωρίζεται εἰς δύο ἐξισώσεις: $x-1=0$ καὶ $4x^2+2x-1=0$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τρεῖς τιμὰς τοῦ x:

(3) $$x=1, \qquad x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \qquad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Τὸ ημ18° θὰ εἶναι μία ἀπὸ τὰς τρεῖς εὑρεθείσας ρίζας (3) τῆς ἐξισώσεως (1), διότι πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν (1). Ἐπειδὴ ἡ 1η καὶ ἡ 2α ρίζα ἐκ τῶν (3) ἀποκλείεται νὰ εἶναι τὸ ημ18°, ἕπεται ὅτι: $ημ18^0=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$συν36^0=συν(2\cdot18^0)=1-2\,ημ^2 18^0=1-2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{8}=$$
$$=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Ἤτοι $συν36^0=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Ἔχομεν λοιπὸν τοὺς τύπους:

57 $$\boxed{\begin{aligned} ημ18^0&=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ συν36^0&=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\end{aligned}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

305) Ἐὰν α καὶ β ὀξεῖαι γωνίαι μὲ $\eta\mu\alpha=\frac{4}{5}$, $\eta\mu\beta=\frac{12}{13}$ ὑπολογίσατε τά:

$\eta\mu3\alpha$, $\sigma\upsilon\nu3\beta$, $\eta\mu(3\alpha-\beta)$, $\sigma\upsilon\nu(3\alpha+2\beta)$.

306) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι: $4\sigma\upsilon\nu3\alpha\eta\mu^3\alpha+4\eta\mu3\alpha\,\sigma\upsilon\nu^3\alpha=3\eta\mu4\alpha$.

307) Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu3A+\sigma\upsilon\nu3B+\sigma\upsilon\nu3\Gamma}.$$

308) Ἐὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ περιφερείας, ὁρίζουν διαδοχικὰ τόξα $\widehat{AB}=108^o$, $\widehat{B\Gamma}=60^o$, $\widehat{\Gamma\Delta}=36^o$, νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν χορδῶν ὑφίσταται ἡ σχέσις $AB=B\Gamma+\Gamma\Delta$.

309) Ἐὰν τὸ τόξον $\mathbf{x}$ πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν: $\varepsilon\varphi\mathbf{x}=(2+\sqrt{3})\varepsilon\varphi\frac{\mathbf{x}}{3}$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\mathbf{x}$.

310) Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ $\sigma\upsilon\nu^3\mathbf{x}$ συναρτήσει τοῦ $\sigma\upsilon\nu\mathbf{x}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu3\mathbf{x}$ καθὼς καὶ τὸ $\eta\mu^3\mathbf{x}$ συναρτήσει τῶν $\eta\mu\mathbf{x}$ καὶ $\eta\mu3\mathbf{x}$.

311) Νὰ δειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

$$\eta\mu5\alpha=5\eta\mu\alpha-20\eta\mu^3\alpha+16\eta\mu^5\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu5\alpha=16\sigma\upsilon\nu^5\alpha-20\sigma\upsilon\nu^3\alpha+5\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

312) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$\varepsilon\varphi3\mathbf{x}=-\varepsilon\varphi\mathbf{x}\,\varepsilon\varphi\left(\mathbf{x}+\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon\varphi\left(\mathbf{x}+\frac{2\pi}{3}\right).$$

313) Ἐὰν δύο ἄνισα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ ἔχουν κοινὰ τὰ στοιχεῖα α, β, Α μία δὲ γωνία τοῦ ἑνὸς εἶναι διπλασία τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ ἄλλου, δείξατε ὅτι θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ἤ}\quad \alpha\sqrt{3}=2\beta\eta\mu A\quad \text{ἤ}\quad 4\beta^3\eta\mu^2A=\alpha^2(\alpha+3\beta).$$

314) Δείξατε ὅτι:

$$\eta\mu^3\alpha+\eta\mu^3(\alpha+120^o)+\eta\mu^3(\alpha+240^o)=-\frac{3}{4}\eta\mu3\alpha.$$

315) Ἐὰν $\mathbf{z}$ μιγαδικὸς ἀριθμός, εἶναι δὲ $2\sigma\upsilon\nu\theta=\mathbf{z}+\frac{1}{\mathbf{z}}$ εὕρετε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως: $2\,\sigma\upsilon\nu(3^\nu\theta)$ ὅπου ν δοθεὶς φυσικὸς ἀριθμός.

61. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὑποπολλαπλασίων ἑνὸς τόξου.

α') Πάντες οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ἡμίσεος ἑνὸς τόξου, δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τοῦ συνημιτόνου τοῦ ὁλοκλήρου τόξου (ἀλλά, ὄχι ρητῶς). Τοῦτο γίνεται καταφανὲς ἐκ τῶν τύπων $1+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$ καὶ $1-\sigma\upsilon\nu\alpha=2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$ ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν:

58

$$\text{συν}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{συν}\alpha}{2}},\quad \text{ημ}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\alpha}{2}}$$
$$\text{εφ}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\alpha}{1+\text{συν}\alpha}}$$

Λόγῳ τοῦ διπλοῦ σημείου τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ρίζης, θὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν τιμὴν τοῦ συνα τέσσαρα ζεύγη τιμῶν διὰ τὰ συν$\frac{\alpha}{2}$ καὶ ημ$\frac{\alpha}{2}$, προκύπτοντα ἂν συνδυάσωμεν τὸ + τοῦ πρώτου ριζικοῦ μὲ τὸ + τοῦ δευτέρου, τὸ + τοῦ πρώτου μὲ τὸ — τοῦ δευτέρου, τὸ — μὲ τὸ + καὶ τὸ — μὲ τὸ —. Ἐὰν ὅμως δοθοῦν ταυτοχρόνως μὲ τὸ συνα καὶ ὡρισμέναι ἄλλαι πληροφορίαι διὰ τὸ τόξον α, τὸ πλῆθος τῶν ἐνδεχομένων τιμῶν τῶν ημ$\frac{\alpha}{2}$ καὶ συν$\frac{\alpha}{2}$ δυνατὸν νὰ περιορισθῇ, ἢ ἀκόμη, δυνατὸν καὶ νὰ ὁρισθοῦν τὰ πρόσημα τῶν ριζικῶν.

Οὕτω π.χ. ἂν ἡ γωνία Α εἶναι γωνία τριγώνου, οἱ τύποι 58 γίνονται :

58α

$$\text{συν}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\text{συν}A}{2}},\ \text{ημ}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{συν}A}{2}},\ \text{εφ}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{συν}A}{1+\text{συν}A}}$$

διότι $0<A<180^0$, $0<\frac{A}{2}<90^0$ καὶ συνεπῶς πάντες οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ $\frac{A}{2}$ εἶναι θετικοί.

Ἢ ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ τόξον α περιέχεται π.χ. μεταξὺ 180^0 καὶ 360^0 τότε τὸ α/2 θὰ λήγῃ εἰς τὸ 2ον τεταρτημόριον καὶ οἱ 58 τότε γίνονται :

$$\text{συν}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\text{συν}\alpha}{2}},\ \text{ημ}\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\text{συν}\alpha}{2}},\ \text{εφ}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\text{συν}\alpha}{1+\text{συν}\alpha}}.$$

β΄) Ἐὰν δοθῇ ἡ τιμὴ τοῦ συνα, ἔστω συνα=λ, τότε ὑπάρχουν τρεῖς ἐνδεχόμεναι τιμαὶ διὰ τὸ συν$\frac{\alpha}{3}$. Διότι ἡ γνωστὴ ἰσότης: συν3ω= $=4\text{συν}^3\omega-3\text{συν}\omega$ δίδει τὴν $\text{συν}\alpha=4\,\text{συν}^3\frac{\alpha}{3}-3\,\text{συν}\frac{\alpha}{3}$ (τιθεμένου 3ω=

$=\alpha$, $\omega=\alpha/3$) ἥτις γράφεται: $4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{3}\right)^3-3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{3}\right)-\lambda=0$ καὶ εἶναι τριτοβάθμιος ἐξίσωσις ὡς πρὸς $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{3}$. Δηλαδὴ τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{3}$ θὰ εἶναι ρίζα τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως $4x^3-3x-\lambda=0$ ἥτις ἔχει ἐν γένει τρεῖς λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

316) Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}$ συναρτήσει τοῦ συνα.

317) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $4x^3-3x-\sigma\upsilon\nu\alpha=0$ ἐπαληθεύεται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν: $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right)$.

318) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ ἔχουν μήκη $AB=2\mu\nu$, $A\Gamma=\mu^2-\nu^2$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$ συναρτήσει τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν, $(\mu>\nu>0)$.

319) Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\mu}{1-\mu\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$, νὰ ἐκφρασθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ συναρτήσει τῶν μ καὶ τῆς $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

320) Ἐὰν δοθῇ τὸ ημα, ἔστω ημα$=\lambda$, νὰ δειχθοῦν πρῶτον αἱ ἰσότητες:

$$\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+\eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\lambda \quad \text{καὶ} \quad \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}-\eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\lambda$$

καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἐξ αὐτῶν τὰ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ συναρτήσει τοῦ λ δηλ. τοῦ ημα.

321) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ν φυσικὸς ἀριθμός, ἰσχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

ὅπου εἰς τὸ 2ον μέλος ὑπάρχουν ν ἐπάλληλα ριζικά.

322) Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμὸς νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu\frac{\pi}{2^{\nu+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{+2\ldots}}}}$$

ὅπου εἰς τὸ 2ον μέλος ὑπάρχουν ν ἐπάλληλα ριζικά.

323) Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\beta}=\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\beta}$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς

$$\varepsilon\varphi\frac{x}{2} \text{ συναρτήσει τῶν } \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2},\ \varepsilon\varphi\frac{\beta}{2},\ (\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\neq-1).$$

324) Ἐὰν δοθῇ τὸ συνα$=\lambda$, χωρὶς νὰ δοθῇ τὸ τόξον α, τότε τέσσαρα δυνατὰ ζεύγη τιμῶν τῶν $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ προκύπτουν ἀπὸ τοὺς τύπους <u>58</u> Νὰ ἐξηγηθῇ τοῦτο τῇ βοηθείᾳ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ IX

1) Τί καλεῖται γωνία ἄξονος καὶ διανύσματος; Πόσας γωνίας σχηματίζει ἕνα διάνυσμα μὲ ἕνα ἄξονα;

2) Πῶς ὑπολογίζεται ἡ προβολὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονα;

3) Ποία ἡ ἁπλουστέρα ἔκφρασις ἑκάστης τῶν ἑπομένων παραστάσεων;

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta,\quad \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta,\quad \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta,$$
$$\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta,\quad (\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta)/(1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta);$$

4) Πῶς ἐκφράζεται τὸ $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ συναρτήσει τοῦ ημα; τοῦ συνα; τῆς εφα;

5) Ποῖαι αἱ ἰσοδύναμοι παραστάσεις πρὸς τάς:

$$1+\sigma\upsilon\nu\theta,\quad \eta\mu^2\alpha,\quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha,\quad 1-\sigma\upsilon\nu\theta;$$

6) Πῶς ἐκφράζονται τὰ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ συναρτήσει τοῦ συνα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

Μετατροπαὶ ἀθροισμάτων εἰς γινόμενα καὶ γινομένων εἰς ἀθροίσματα.

62. Μετασχηματισμὸς ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς μονώνυμον.

α´) Ἐὰν τὰς γνωστὰς ταυτότητας:

$$\eta\mu(A+B)=\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu A\,\eta\mu B$$
$$\eta\mu(A-B)=\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A\,\eta\mu B,$$

προσθέσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα:

$$(1)\qquad \eta\mu(A+B)+\eta\mu(A-B)=2\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B.$$

Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὸ ἄθροισμα A+B καὶ διὰ τοῦ β τὴν διαφορὰν A—B, τότε ἐκ τῶν σχέσεων: $\{A+B=\alpha,\ A-B=\beta\}$ λαμβάνομεν εὐχερῶς:

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad B=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος (1) μετατρέπεται εἰς τόν:

$$\underline{59}\qquad \boxed{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

μετασχηματίζοντα τὸ ἄθροισμα δύο ἡμιτόνων εἰς γινόμενον.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον **59** γραφῇ —β εἰς τὴν θέσιν τοῦ β λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$\underline{59\alpha}\qquad \boxed{\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta=2\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

μετασχηματίζοντα τὴν διαφορὰν δύο ἡμιτόνων εἰς γινόμενον.

β´) ὁμοίως, ἀπὸ τὰς γνωστὰς ταυτότητας:

$$\sigma\upsilon\nu(A+B)=\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu A\,\eta\mu B$$
$$\sigma\upsilon\nu(A-B)=\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu A\,\eta\mu B$$

λαμβάνομεν διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τὰς ταυτότητας:

(2) $$\text{συν}(A+B)+\text{συν}(A-B)=2\text{συν}A\,\text{συν}B$$

(3) $$\text{συ}(A+B)-\text{συν}(A-B)=-2\text{ημ}A\,\text{ημ}B=2\,\text{ημ}A\,\text{ημ}(-B)$$

αἵτινες διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων : $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(αἱ ὁποῖαι καὶ προηγουμένως ἐχρησιμοποιήθησαν) δίδουν τοὺς τύπους:

60 $$\boxed{\text{συν}\alpha+\text{συν}\beta=2\text{συν}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{συν}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

60α $$\boxed{\text{συν}\alpha-\text{συν}\beta=2\text{ημ}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{ημ}\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Οἱ τύποι **60** καὶ **60α** μετατρέπουν εἰς γινόμενον τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν δύο συνημιτόνων.

γ΄) *Τὸ ἄθροισμα δύο ἐφαπτομένων :* εφα+εφβ γράφεται :

$$\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}+\frac{\text{ημ}\beta}{\text{συν}\beta}=\frac{\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}=\frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}$$

Οὕτως ἔχομεν τὸν τύπον:

61 $$\boxed{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta=\frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}}$$

καὶ ἐξ αὐτοῦ τόν:

61α $$\boxed{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta=\frac{\text{ημ}(\alpha-\beta)}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}}$$

προκύπτοντα ἐκ τοῦ προηγουμένου διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ β διὰ τοῦ −β.

Οἱ τύποι **61** καὶ **61α** μετατρέπουν τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο ἐφαπτομένων εἰς μονώνυμον, δηλ. εἰς παράστασιν *λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων.*

δ΄) *Τὸ ἄθροισμα δύο συνεφαπτομένων* μετασχηματίζεται ὁμοίως:

$$\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta=\frac{\text{συν}\alpha}{\text{ημ}\alpha}+\frac{\text{συν}\beta}{\text{ημ}\beta}=\frac{\text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta+\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}=\frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}.$$

Ὥστε ἰσχύει ὁ μετασχηματισμός:

62 $$\boxed{\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta=\frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}}$$

καὶ ὁ ἐξ αὐτοῦ προκύπτων (ἢ καὶ ὁμοίως ἀποδεικνυόμενος) :

62α $$\boxed{\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta = \frac{\eta\mu(\beta-\alpha)}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}}$$

ε΄) Οἱ ἀνωτέρω τύποι παίζουν σπουδαιότατον ρόλον εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν λογισμόν. Δι' αὐτῶν, ὄχι μόνον τριγωνομετρικαὶ παραστάσεις μὴ λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων μετατρέπονται εἰς λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων ἀλλὰ καὶ πολύπλοκοι τριγωνομετρικαὶ παραστάσεις ἁπλουστεύονται καὶ πλεῖσται χρήσιμοι σχέσεις δημιουργοῦνται.

Ἐφαρμογαὶ — ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) **Νὰ γίνουν μονώνυμα αἱ παραστάσεις :**

$$\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta, \qquad \varepsilon\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta, \qquad 1+\eta\mu\alpha, \qquad 1-\eta\mu\alpha.$$

Λύσις. Ἡ πρώτη γράφεται ὡς ἄθροισμα ἡμιτόνων : $\eta\mu\alpha+\eta\mu(90^0-\beta)$ καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου <u>59</u> μετατρέπεται εἰς τήν :

$$2\,\eta\mu\frac{\alpha+90^0-\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-90^0+\beta}{2} = 2\,\eta\mu\left\{\frac{\alpha-\beta}{2}+45^0\right\}\sigma\upsilon\nu\left\{\frac{\alpha+\beta}{2}-45^0\right\}.$$

Ἡ δευτέρα : $\varepsilon\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta=\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi(90^0-\beta)=\dfrac{\eta\mu(\alpha-90^0+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu(90^0-\beta)}$ (τύπος <u>61α</u>).

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα εἰς ὃ ἐφθάσαμεν μετασχηματίζεται ἀκόμη εἰς τά :

$$\frac{-\eta\mu\{90^0-(\alpha+\beta)\}}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta} = -\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta}.$$

Ἡ τρίτη γράφεται : $1+\eta\mu\alpha=1+\sigma\upsilon\nu(90^0-\alpha)=2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, (τύπος <u>50</u>)

καὶ ἡ τετάρτη : $1-\eta\mu\alpha=1-\sigma\upsilon\nu(90^0-\alpha) = 2\,\eta\mu^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, (τύπος <u>50</u>).

ii) **Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :**

$$\eta\mu\alpha+2\,\eta\mu2\alpha+\eta\mu3\alpha.$$

Λύσις. Ὁ πρῶτος καὶ τρίτος ὅρος συμπτύσσονται εἰς τὸ γινόμενον

$$2\,\eta\mu\frac{\alpha+3\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-3\alpha}{2} = 2\,\eta\mu2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

καὶ ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς :

$$2\eta\mu2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha+2\eta\mu2\alpha=2\eta\mu2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)=2\eta\mu2\alpha\,.\,2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}=4\eta\mu2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}.$$

iii) **Νὰ μετατραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :**

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta+\gamma)-2.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ οἱ μετασχηματισμοί μας <u>59</u> καὶ <u>60α</u> δὲν ἀφοροῦν τὰ τετράγωνα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἐπιδιώκομεν τὴν ἀντικατάστασιν τῶν τετραγώνων διὰ πρωτοβαθμίων παραστάσεων. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τῶν τύπων <u>51</u> δυνάμει τῶν ὁποίων ἔχομεν :

$$συν^2α = \frac{1+συν2α}{2}, \quad συν^2β = \frac{1+συν2β}{2}, \quad συν^2γ = \frac{1+συν2γ}{2},$$

$$συν^2(α+β+γ) = \frac{1+συν(2α+2β+2γ)}{2}.$$

Βάσει τῶν σχέσεων τούτων ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\frac{1}{2}\{συν2α+συν2β+συν2γ+συν(2α+2β+2γ)\}.$$

Οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἐντὸς τῆς ἀγκύλης συμπτύσσονται εἰς:

$$2συν\frac{2α+2β}{2}συν\frac{2α-2β}{2} = 2συν(α+β)συν(α-β), \quad (\text{τύπος } \underline{60})$$

καὶ οἱ δύο τελευταῖοι εἰς:

$$2συν\frac{2γ+2α+2β+2γ}{2}συν\frac{2α+2β+2γ-2γ}{2} = 2συν(α+β+2γ)συν(α+β)$$

καὶ οὕτω ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$συν(α+β)συν(α-β)+συν(α+β+2γ)συν(α+β) = συν(α+β)\{συν(α-β)+συν(α+β+2γ)\} = συν(α+β) \cdot 2συν\frac{α-β+α+β+2γ}{2}συν\frac{2γ+α+β-α+β}{2} =$$

$$= 2συν(α+β)συν(α+γ)συν(β+γ).$$

iv) **Ν' ἁπλοποιηθῇ ἡ κλασματικὴ παράστασις:**

$$\mathbf{k = \frac{ημα+ημ3α+ημ5α}{συνα+συν3α+συν5α}}.$$

Λύσις. Πρὸς τοῦτο πρέπει, πρῶτον νὰ μετατραποῦν εἰς γινόμενα ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος. Συνδυάζοντες πρῶτον καὶ τρίτον προσθετέον λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$k = \frac{(ημα+ημ5α)+ημ3α}{(συνα+συν5α)+συν3α} = \frac{2ημ\frac{α+5α}{2}συν\frac{5α-α}{2}+ημ3α}{2συν\frac{α+5α}{2}συν\frac{5α-α}{2}+συν3α} =$$

$$= \frac{2ημ3α\,συν2α+ημ3α}{2συν3α\,συν2α+συν3α} = \frac{ημ3α\{2συν2α+1\}}{συν3α\{2συν2α+1\}} = εφ3α.$$

(ὑποτιθεμένου $2συν2α+1 \neq 0$).

v) **Νὰ γίνουν μονώνυμα αἱ κάτωθι παραστάσεις:**

$$\mathbf{\frac{1}{2}+ημx, \quad 2συνx+1, \quad \sqrt{3}-σφx, \quad \sqrt{2}+2\,ημx.}$$

Λύσις. 1ον. $\frac{1}{2}+ημx = ημ30^0+ημx = 2ημ\frac{30^0+x}{2}συν\frac{30^0-x}{2}$.

2ον. $2συνx+1 = 2\left\{συνx+\frac{1}{2}\right\} = 2\{συνx+συν60^0\} = 4συν\frac{x+60^0}{2}συν\frac{x-60^0}{2}$

3ον. $\sqrt{3}-σφx = σφ30^0-σφx = \frac{ημ(x-30^0)}{ημ30^0ημx} = \frac{2ημ(x-30^0)}{ημx}$, (τύπος $\underline{62α}$).

4ον. $\sqrt{2}+2ημx = 2\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+ημx\right\} = 2(ημ45^0+ημx) = 4ημ\frac{45^0+x}{2}συν\frac{45^0-x}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

325) Νὰ μετατραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)$,

ii) $\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2(\alpha+\beta)$.

iii) $1-\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2y$.

326) Νὰ γίνουν μονώνυμα αἱ παραστάσεις:

i) $\eta\mu(\alpha+\beta-\gamma)+\eta\mu(\beta+\gamma-\alpha)+\eta\mu(\gamma+\alpha-\beta)-\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$.

ii) $1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x$.

iii) $\varepsilon\varphi\alpha\pm2\eta\mu^2\alpha$.

327) Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες:

i) $\eta\mu(90^0-x)+\eta\mu(18^0-x)+\eta\mu(18^0+x)=\eta\mu(54^0+x)+\eta\mu(54^0-x)$.

ii) $\sigma\upsilon\nu10^0+\eta\mu40^0=\sqrt{3}\,\eta\mu70^0$.

328) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

i) $\dfrac{\eta\mu23\alpha-\eta\mu7\alpha}{\eta\mu2\alpha+\eta\mu14\alpha}$ διὰ $\alpha=\dfrac{\pi}{21}$ ἀκτιν.

ii) $\dfrac{\eta\mu23\alpha-\eta\mu3\alpha}{\eta\mu16\alpha+\eta\mu4\alpha}$ διὰ $\alpha=\dfrac{\pi}{19}$ ἀκτιν.

iii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu13\alpha}{\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu5\alpha}$ διὰ $\alpha=\dfrac{\pi}{17}$ ἀκτιν.

329) Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις:

$\{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu\gamma\}\cdot\{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu\gamma\}+\{\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\}\cdot\{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu\gamma\}$.

330) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}}.$$

331) Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$\eta\mu x+\eta\mu2x+\eta\mu7x+\eta\mu8x=4\eta\mu(9x/2)\,\sigma\upsilon\nu3x\ \sigma\upsilon\nu(x/2).$$

332) Ν' ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu3\theta)\,(\eta\mu8\theta+\eta\mu2\theta)}{(\sigma\upsilon\nu5\theta-\sigma\upsilon\nu\theta)\,(\sigma\upsilon\nu4\theta-\sigma\upsilon\nu6\theta)}.$$

333) Νὰ γίνουν μονώνυμα αἱ παραστάσεις:

i) $(\eta\mu A+\eta\mu B)^2+(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B)^2$.

ii) $\dfrac{\eta\mu3\alpha+\sigma\upsilon\nu3\alpha+\eta\mu5\alpha+\sigma\upsilon\nu5\alpha+\eta\mu7\alpha+\sigma\upsilon\nu7\alpha}{\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu5\alpha+\sigma\upsilon\nu7\alpha}$

(ὑποτιθεμένου ὅτι: $(2\sigma\upsilon\nu2\alpha+1)\sigma\upsilon\nu5\alpha\neq0$).

334) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\varepsilon\varphi9^0-\varepsilon\varphi27^0-\varepsilon\varphi63^0+\varepsilon\varphi81^0=4$.

63. Χρῆσις βοηθητικῆς γωνίας.

α΄) Ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ὅπου α καὶ β εἶναι ποσότητες θετικαὶ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν (ἢ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν) τοὺς λογαρίθμους. Ἔστω τώρα ὅτι *θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ* ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ γνωρίζοντες τὸν $\lambda o\gamma\alpha$ καὶ τὸν $\lambda o\gamma\beta$ χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν α καὶ β). Θὰ ἠδυνάμεθα πρὸς τοῦτο νὰ ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν πινάκων τὸ α (ἀφοῦ γνωρίζωμεν τὸν $\lambda o\gamma\alpha$) καὶ κατόπιν τὸ β (ἐκ τοῦ $\lambda o\gamma\beta$) καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ α καὶ β καὶ ἀφοῦ εὕρωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ $\alpha+\beta$ νὰ εὕρωμεν κατόπιν ἐκ τῶν πινάκων, τὸν $\lambda o\gamma(\alpha+\beta)$. Ἀντὶ τούτου ὅμως εἶναι ἐν γένει προτιμώτερον νὰ μετατρέπωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἰς παράστασιν λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων, χρησιμοποιοῦντες μίαν κατάλληλον «*βοηθητικὴν γωνίαν*». Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ διαφόρων μεθόδων.

1η Μέθοδος. Καλοῦντες x τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$, τὸ μετασχηματίζομεν γράφοντες αὐτό: $x=\alpha\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$. Ἐπειδή, πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας κειμένης μεταξὺ $-\dfrac{\pi}{2}$ καὶ $+\dfrac{\pi}{2}$ διὰ τοῦτο θὰ ὑπάρχῃ μία γωνία θ (ὀξεῖα ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει) τοιαύτη ὥστε:

$$\text{(1)} \qquad \varepsilon\varphi\theta=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Διὰ τῆς γωνίας ταύτης ἡ παράστασις $x=\alpha+\beta=\alpha\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ καθίσταται λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων, διότι γράφεται:

$$x=\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha(1+\varepsilon\varphi\theta)=\alpha(\varepsilon\varphi45^0+\varepsilon\varphi\theta)=\alpha\frac{\eta\mu(45^0+\theta)}{\sigma\upsilon\nu45^0\ \sigma\upsilon\nu\theta},$$

δηλαδή:

$$\text{(2)} \qquad x=\alpha\frac{\eta\mu\,(45^0+\theta)}{\sigma\upsilon\nu45^0\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

Ἀλλ' ἡ γωνία θ δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν πινάκων διότι ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$\text{(3)} \qquad \lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\theta=\lambda o\gamma\beta-\lambda o\gamma\alpha.$$

Ὑπολογισθείσης τῆς βοηθητικῆς γωνίας θ, ὑπολογίζεται ἐκ τῆς (2) καὶ ὁ $\lambda o\gamma x$ (δηλ. ὁ $\lambda o\gamma(\alpha+\beta)$):

$$\lambda o\gamma x=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\,\eta\mu(45^0+\theta)-\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu45^0-\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

ὅπου ὁ $\lambda o\gamma\alpha$ εἶναι γνωστὸς ἐξ ἀρχῆς, ἡ γωνία θ γνωστὴ (ἐκ τῆς (3)) καὶ συνεπῶς $\lambda o\gamma\,\eta\mu(\theta+45^0)$ καὶ $\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\theta$, γνωστά.

2α Μέθοδος. Ἐξάγομεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο προσθετέων (δηλ. τὸν ἔχοντα μεγαλύτερον λογάριθμον), ἔστω τὸν α ὁπότε:

$$x=\alpha+\beta=\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ὅπου ὁ $\frac{\beta}{\alpha}$ περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1. Ἄρα θὰ ὑπάρχῃ ὀξεῖα γωνία θ τοιαύτη ὥστε:

$$(4) \qquad \text{συν}\theta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς βοηθητικῆς ταύτης γωνίας τὸ ἄθροισμα γίνεται:

$$(5) \qquad x = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \alpha(1 + \text{συν}\theta) = 2\alpha\, \text{συν}^2 \frac{\theta}{2}$$

ἤτοι μετατρέπεται εἰς παράστασιν λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν θ ἐκ τῆς (4) διὰ τῆς σχέσεως: $\text{λογ συν}\theta = \text{λογ}\beta - \text{λογ}\alpha$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\text{λογ}x = \text{λογ}(\alpha + \beta) = \text{λογ}2 + \text{λογ}\alpha + 2\text{λογ συν}\frac{\theta}{2}.$$

3η Μέθοδος. Ἀφοῦ γράψωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$, θέτομεν: $\frac{\beta}{\alpha} = \text{εφ}^2\theta$ ὁπότε τὸ $\alpha+\beta$ μετασχηματίζεται εἰς: $\alpha+\beta = \alpha(1+\text{εφ}^2\theta) = \alpha/\text{συν}^2\theta$, δηλαδὴ εἰς παράστασιν λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν, $\text{λογ}(\alpha+\beta) = \text{λογ}\alpha - 2\text{λογ συν}\theta$ ὅπου ἡ θ θὰ ἔχῃ προηγουμένως εὑρεθῆ ἐκ τῆς σχέσεως: $2\text{λογ εφ}\theta = \text{λογ}\beta - \text{λογ}\alpha$.

β′) **Μετατροπὴ τῆς διαφορᾶς α—β εἰς λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων.** Γράφομεν: $\alpha-\beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ ὑποτιθεμένων τῶν α καὶ β θετικῶν καὶ ἐὰν $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν γωνίαν θ τοιαύτην ὥστε: $\text{ημ}^2\theta = \beta/\alpha$. Τότε ἡ α—β μετασχηματίζεται εἰς τήν:

$$\alpha - \beta = \alpha(1 - \text{ημ}^2\theta) = \alpha\, \text{συν}^2\theta$$

δηλ. εἰς παράστασιν λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων.

Ἐν τῇ ἰδίᾳ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν βοηθητικὴν γωνίαν τοιαύτην ὥστε $\text{συν}\theta = \beta/\alpha$ ὁπότε: $\alpha - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \alpha(1 - \text{συν}\theta) = 2\alpha\, \text{ημ}^2\frac{\theta}{2}$, ὅπου ἡ θ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως: $\text{λογ συν}\theta = \text{λογ}\beta - \text{λογ}\alpha$.

Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\beta/\alpha = \text{εφ}\theta$ ὁπότε ἡ παράστασις α—β γράφεται:

$$\alpha-\beta=\alpha\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha(1-\text{εφ}\theta)=\alpha(\text{εφ}45^0-\text{εφ}\theta)=\alpha\frac{\text{ημ}(45^0-\theta)}{\text{συν}45^0\text{συν}\theta}$$

καὶ καθίσταται λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων.

γ΄) **Εἰδικαὶ περιπτώσεις:** i) Ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ δύναται νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων διὰ βοηθητικῆς γωνίας θ τοιαύτης ὥστε: εφθ=β/α, διότι:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}=\alpha\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}=\frac{\alpha}{\text{συν}\theta}\quad(\alpha>0,\ \beta>0,\ \theta,\ \text{ὀξεῖα}).$$

ii) Ἡ παράστασις **Α=α ημx+β συνx** γραφομένη: $\alpha\left(\text{ημ}x+\frac{\beta}{\alpha}\text{συν}x\right)$ καθίσταται λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἂν τεθῇ $\frac{\beta}{\alpha}=$ $=\text{εφ}\theta$, ὅπου θ βοηθητικὴ γωνία. Πράγματι:

$$A=\alpha(\text{ημ}x+\text{εφ}\theta\,\text{συν}x)=\alpha\left(\text{ημ}x+\frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}\text{συν}x\right)=$$

$$=\alpha\frac{\text{ημ}x\,\text{συν}\theta+\text{ημ}\theta\,\text{συν}x}{\text{συν}\theta}=\alpha\,.\,\frac{\text{ημ}(x+\theta)}{\text{συν}\theta}.$$

Ἡ θ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως εφθ=β/α, ὑποτιθεμένων τῶν α καὶ β λογιστῶν διὰ τῶν λογαρίθμων.

* iii) **Αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$**, ὑποτιθέμεναι πραγματικαί, δύνανται ἐπίσης νὰ καταστοῦν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων διὰ χρήσεως βοηθητικῆς γωνίας, ἐφ᾽ ὅσον οἱ συντελεσταὶ α, β, γ εἶναι μονώνυμα.

Περίπτωσις 1η. *Τὰ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημα*, δηλ. αγ<0. Αἱ ρίζαι εἶναι:

$$\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\quad\text{ἢ}\quad\frac{-\beta\pm\beta\sqrt{1-\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}}{2\alpha}.$$

Ἐπειδὴ αγ<0 δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$\frac{-4\alpha\gamma}{\beta^2}=\text{εφ}^2\theta,\quad(0<\theta<90^0)\tag{6}$$

ὁπότε αἱ ρίζαι λαμβάνουν τὴν μορφήν:

$$\frac{-\beta\pm\beta\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\pm\frac{\beta}{\text{συν}\theta}}{2\alpha}=\frac{-\beta\,\text{συν}\theta\pm\beta}{2\alpha\text{συν}\theta}.$$

Ἡ μία ρίζα: $\rho_1=\frac{-\beta\,\text{συν}\theta+\beta}{2\alpha\text{συν}\theta}=\frac{\beta(1-\text{συν}\theta)}{2\alpha\text{συν}\theta}=\frac{\beta\text{ημ}^2\frac{\theta}{2}}{\alpha\,\text{συν}\theta}$

καθίσταται λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων.

Ἡ ἄλλη ρίζα : $\rho_2 = \dfrac{-\beta\,\sigma\upsilon\nu\theta - \beta}{2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta} = \dfrac{-\beta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta} = \dfrac{-\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta}{2}}{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}$

καθίσταται ἐπίσης, λογιστή, τῆς βοηθητικῆς γωνίας θ ὑπολογιζομένης ἐκ τῆς (6) διὰ τῶν πινάκων.

Περίπτωσις 2α. *Τὰ α, γ ὁμόσημα, ἀλλὰ* $4\alpha\gamma < \beta^2$ (διὰ νὰ ἔχωμεν πραγματικὰς ρίζας). Τότε $0 < \dfrac{4\alpha\gamma}{\beta^2} < 1$ καὶ συνεπῶς δύναται νὰ τεθῇ:

(7) $$\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \eta\mu^2\theta \qquad (0 < \theta < 90^0).$$

Αἱ ρίζαι γίνονται:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \beta\sqrt{1-(4\alpha\gamma/\beta^2)}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \beta\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \beta\,\sigma\upsilon\nu\theta}{2\alpha}.$$

Ἡ μία ρίζα, $\rho_1 = \dfrac{-\beta+\beta\,\sigma\upsilon\nu\theta}{2\alpha} = \dfrac{-\beta(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{2\alpha} = \dfrac{-\beta\eta\mu^2(\theta/2)}{\alpha}$

καὶ ἡ ἄλλη, $\rho_2 = \dfrac{-\beta-\beta\,\sigma\upsilon\nu\theta}{2\alpha} = \dfrac{-\beta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{2\alpha} = \dfrac{-\beta\,\sigma\upsilon\nu^2(\theta/2)}{\alpha}$

ἤτοι ἀμφότεραι γίνονται λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων, τῆς βοηθητικῆς γωνίας θ ὑπολογιζομένης ἐκ τῆς (7) διὰ τῶν πινάκων (ὑποτιθεμένων γνωστῶν τῶν λογ $|\alpha|$, λογ $|\beta|$, λογ $|\gamma|$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία x ἐκ τῆς ἰσότητος:**

$$\mathbf{103{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu x = 35{,}23\ \eta\mu^2 44^0\,0'\,50'' + 7{,}49\ \sigma\upsilon\nu^2 52^0\,9'.}$$

Λύσις. Ἄς τεθῇ: $\alpha = 35{,}23\ \eta\mu^2 44^0\,0'\,50''$ καὶ $\beta = 7{,}49\ \sigma\upsilon\nu^2 52^0\,9'$. Εὑρίσκομεν πρῶτον τοὺς λογ α καὶ λογ β.

λογ 35,23 = 1,54691	λογ 7,49 = 0,87448
2λογ ημ44° 0′ 50″ = $\bar{1}$,68376	2λογ συν52° 9′ = $\bar{1}$,57576
λογα = 1,23067	λογβ = 0,15024

ὁπότε $103{,}2\,\sigma\upsilon\nu x = \alpha + \beta$ ὅπου $\alpha > \beta$. Συνεπῶς:

$$\alpha+\beta = \alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad \boxed{\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \alpha+\beta = \alpha(1+\sigma\upsilon\nu\omega) = 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}.$$

Ὥστε (1) $103{,}2\ \sigma\upsilon\nu x = 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\omega}{2}$. Αἱ πράξεις διατάσσονται ὡς κάτωθι:

Ὑπολογισμὸς τῆς βοηθητικῆς γωνίας ω.

Τύπος: $\sigma\upsilon\nu\omega = \beta/\alpha$

λογβ = 0,15024
λογα = 1,23067

λογ συνω = $\bar{2}$,91957
ω = 85°14′
$\dfrac{\omega}{2}$ = 42°37′

Ὑπολογισμὸς τῆς x.

$$\textit{Τύπος}: \quad 103{,}2\ \text{συν}x = 2\alpha\ \text{συν}^2\frac{\omega}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{λογ}2 &= 0{,}30103 \\ \text{λογ}\alpha &= 1{,}23067 \\ 2\text{λογ συν}\frac{\omega}{2} &= \bar{1}{,}73364 \\ -\text{λογ}103{,}2 &= \bar{3}{,}99632 \\ \hline \text{λογ συν}x &= 1{,}26166 \end{aligned}$$

Ἡ ζητουμένη γωνία : $\boxed{x = 79^0 28' 30''}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335) Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ κάτωθι παραστάσεις, μὲ χρῆσιν βοηθητικῆς γωνίας :

$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}, \quad 2-\sqrt{3}, \quad 1-\sqrt{3}, \quad \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

336) Ὁμοίως αἱ παραστάσεις :

$$\text{συν}\alpha+\sqrt{3}\,\text{ημ}\alpha, \quad \frac{\sqrt{3}+\text{εφ}\alpha}{1-\sqrt{3}\,\text{εφ}\alpha}.$$

337) Ἐὰν α καὶ β θετικὰ ποσὰ λογιστὰ διὰ τῶν λογαρίθμων καὶ ὑποτιθεμένου, $\alpha>\beta$, ζητεῖται, διὰ καταλλήλου βοηθητικῆς γωνίας νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις :

$$\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}, \quad \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}+\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}, \quad \sqrt{\alpha^2-\beta^2}, \quad \frac{4(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha\beta}}{(\alpha+\beta)^2}.$$

338) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x ἐκ τῆς ἰσότητος :

$$x^3=\alpha^3\text{ημ}A+\beta^3\text{συν}A$$

ὅταν $\alpha=18928$, $\beta=20842$, $A=115^0 45' 27''$.

339) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ βοηθητικῆς γωνίας ἡ παράστασις :

$$x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$$

ὅταν $\alpha=1425$, $\beta=8701$, $\gamma=1175$. (Ὑποδ. $\beta^2-\gamma^2=(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)=9876.7526$)

340) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία x ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\text{εφ}x=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\text{σφ}\frac{\Gamma}{2}$$

δεδομένου ὅτι : $\text{λογ}\alpha=3{,}14235$, $\text{λογ}\beta=3{,}12896$, $\Gamma=98^0 54' 30''$.

341) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0 τιμαὶ τῆς γωνίας x αἱ ἱκανοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν:

$$\text{εφ}2x=\frac{\alpha\text{ημ}B-\beta\text{ημ}A}{\alpha\text{ημ}B+\beta\text{ημ}A}$$

ὅταν $\alpha=4627{,}55$, $\beta=3944{,}68$, $A=51^0 57' 44''$, $B=63^0 18' 27''$.

342) Ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων νὰ μετασχηματισθῆ εἰς τὴν μορφὴν $c\,ημ(x+θ)$ ὅπου c προσδιοριστέα σταθερὰ καὶ $θ$ κατάλληλος γωνία προσδιοριστέα κατὰ προσέγγισιν 1΄. i) $3ημx+4\,συνx$, ii) $2ημx+7συνx$.

343) Ὅμοιον ζήτημα μὲ τὸ προηγούμενον, διὰ τὰς παραστάσεις :

i) $2\,ημx—συνx$. ii) $3\,ημx—7\,συνx$.

344) Νὰ μετατραποῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς τὴν μορφὴν $c\,ημ(x+θ)$ καὶ ἀκολούθως νὰ εὑρεθοῦν αἱ μέγισται τιμαὶ τὰς ὁποίας ἠμποροῦν νὰ λάβουν :

i) $ημx+2\,ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)$, ii) $3\,συνx+4\,ημ\left(x+\frac{π}{6}\right)$

iii) $2\,ημ\left(x+\frac{5}{8}π\right)+5\,συν\left(x+\frac{7}{8}π\right)$.

64. Μετασχηματισμοὶ γινομένων εἰς ἀθροίσματα.

Αἱ προφανεῖς ἰσότητες:

$ημ(α+β)+ημ(α—β)=2ημα\,συνβ$, $συν(α+β)+συν(α—β)=2συνα\,συνβ$, $συν(α—β)—συν(α+β)=2ημα\,ημβ$, (βλέπε καὶ §62, τύποι (1), (2), (3)) γραφόμεναι ὑπὸ τὴν μορφήν :

63 $$ημα\,συνβ=\frac{1}{2}\{ημ(α+β)+ημ(α—β)\}$$

63α $$συνα\,συνβ=\frac{1}{2}\{συν(α+β)+συν(α—β)\}$$

63β $$ημα\,ημβ=\frac{1}{2}\{συν(α—β)—συν(α+β)\}$$

παρέχουν τρεῖς τύπους μετατρέποντας: ὁ πρῶτος, τὸ γινόμενον ἡμιτόνου ἐπὶ συνημίτον εἰς ἡμιάθροισμα ἡμιτόνων, ὁ δεύτερος, τὸ γινόμενον δύο συνημιτόνων εἰς ἡμιάθροισμα συνημιτόνων καὶ ὁ τρίτος, τὸ γινόμενον δύο ἡμιτόνων εἰς ἡμιδιαφορὰν δύο συνημιτόνων.

Οἱ τύποι αὐτοί, εἶναι χρησιμώτατοι εἰς πολλὰ ζητήματα τῆς Τριγωνομετρίας καὶ τοῦ λογισμοῦ, ἐν γένει.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. i) **Νὰ μετατραπῇ ἡ παράστασις $ημ^3x\,συν^2 2x$ εἰς ἄθροισμα τῆς μορφῆς $c_1ημx+c_2ημ2x+c_3ημ3x+\ldots$ ὅπου c_1, c_2, c_3, c_4,... εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί.**

Λύσις. Ἔχομεν: $ημ^2x=\frac{1—συν2x}{2}$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ἐπὶ $ημx$, $ημ^3x=\frac{ημx—ημx\,συν2x}{2}=\frac{1}{2}\left\{ημx—\frac{1}{2}(ημ3x+ημ(—x)\right\}$ (ὅπου ἐφηρμόσθη 63).

Ὥστε : $ημ^3x = \frac{3ημx - ημ3x}{4}$. Ἐπίσης : $συν^2 2x = \frac{1+συν4x}{2}$, ἑπομένως,

$$ημ^3x\, συν^2 2x = \frac{1}{8}(3ημx - ημ3x)(1+συν4x) =$$

$$= \frac{1}{8}\{3ημx - ημ3x + 3ημx\, συν4x - ημ3x\, συν4x\} =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{3ημx - ημ3x + \frac{3}{2}\big(ημ5x + ημ(-3x)\big) - \frac{1}{2}\big(ημ7x + ημ(-x)\big)\right\} =$$

$$= \frac{1}{16}\{6ημx - 2ημ3x + 3ημ5x - 3ημ3x - ημ7x + ημx\} =$$

$$= \frac{7}{16}ημx - \frac{5}{16}ημ3x + \frac{3}{16}ημ5x - \frac{1}{16}ημ7x.$$

(ὅπου ἐφηρμόσθη πάλιν ὁ 63).

ii) **Νὰ δειχθῇ ὅτι : $ημ20^0 ημ40^0 ημ60^0 ημ80^0 = 3/16$.**

Ἀπόδειξις. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ **63β** τὸ πρῶτον μέλος γράφεται :

$$\frac{1}{2}\{συν20^0 - συν60^0\} \cdot \frac{1}{2}\{συν20^0 - συν140^0\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{συν^2 20^0 - συν60^0 συν20^0 - συν20^0 συν140^0 + συν60^0 συν140^0\}$$

καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ **63α** γράφεται ἀκόμη :

$$\frac{1}{8}\{1 + συν40^0 - συν80^0 - συν40^0 - συν160^0 - συν120^0 + συν200^0 + συν80^0\} =$$

$$= \frac{1}{8}\{1 - συν120^0 - συν160^0 + συν200^0\} = \frac{1}{8}\left\{1 + \frac{1}{2} - συν160^0 + συν160^0\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

iii) **Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡμιτόνων ὁσωνδήποτε τόξων ἀποτελούντων ἀριθμητικὴν πρόοδον.**

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν S τὸ ἄθροισμα :

$$ημα + ημ(α+ω) + ημ(α+2ω) + \ldots + ημ\{α + (ν-1)ω\}$$

ὅπου ν, τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐπὶ $2ημ\frac{ω}{2}$ (ὅπου ω ὁ λόγος τῆς προόδου ἣν ἀποτελοῦν τὰ τόξα) λαμβάνομεν :

$$2Sημ\frac{ω}{2} = 2ημα\, ημ\frac{ω}{2} + 2ημ(α+ω)ημ\frac{ω}{2} + \ldots + 2ημ(α+(ν-1)ω)ημ\frac{ω}{2}.$$

Τρέπομεν ὅλα τὰ προκύψαντα γινόμενα ἡμιτόνων εἰς διαφορὰς συνημιτόνων (τύπος **63β**) καὶ λαμβάνομεν :

$$2Sημ\frac{ω}{2} = συν\left(α - \frac{ω}{2}\right) - συν\left(α + \frac{ω}{2}\right) + συν\left(α + \frac{ω}{2}\right) - συν\left(α + \frac{3ω}{2}\right) +$$

$$+ συν\left(α + \frac{3ω}{2}\right) - συν\left(α + \frac{5ω}{2}\right) + \ldots + συν\left(α + (ν-1)ω - \frac{ω}{2}\right) -$$

$$- συν\left(α + (ν-1)ω + \frac{ω}{2}\right).$$

Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι τῶν προκυψασῶν διαφορῶν, ὁ ἀφαιρετέος ἑκάστης ἐξαλείφεται μὲ τὸν μειωτέον τῆς ἑπομένης, συνεπῶς θὰ μείνουν μόνον ὁ πρῶτος ὅρος τῆς πρώτης διαφορᾶς καὶ ὁ δεύτερος τῆς τελευταίας. Ὥστε ἔχομεν :

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+(\nu-1)\omega+\frac{\omega}{2}\right)=$$

$$=2\eta\mu\frac{\alpha-\frac{\omega}{2}+\alpha+(\nu-1)\omega+\frac{\omega}{2}}{2}.\eta\mu\frac{\alpha+(\nu-1)\omega+\frac{\omega}{2}-\alpha+\frac{\omega}{2}}{2}=$$

$$=2\eta\mu\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}\omega\right)\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}.$$

Τελικῶς, λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$\boxed{S=\eta\mu\alpha+\eta\mu(\alpha+\omega)+\ldots+\eta\mu(\alpha+(\nu-1)\omega)=\frac{\eta\mu\left(\alpha+\frac{\nu-1}{2}\omega\right)\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}}$$

iv) Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος :

(1) $$S=\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\omega)+\ldots+\sigma\upsilon\nu(\alpha+(\nu-1)\omega).$$

Ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ τὸ διπλάσιον ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τοῦ λόγου τῆς προόδου ἣν ἀποτελοῦν τὰ τόξα καὶ τρέποντες τὰ προκύπτοντα γινόμενα εἰς ἀθροίσματα, βάσει τοῦ 63).

v) **Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ὑφίστανται αἱ σχέσεις :**

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha+\beta+\gamma}=\gamma^2 \text{ καὶ } \eta\mu A\eta\mu B=\eta\mu^2(A+B)$$

νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

Ἀπόδειξις. Ἡ πρώτη σχέσις γράφεται : $\alpha^3+\beta^3=\gamma^2(\alpha+\beta)$ ἢ $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\gamma^2(\alpha+\beta)$ ἢ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=\gamma^2$ ἢ βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ συνημιτόνου, $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ἢ $-\alpha\beta=-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ καὶ δίδει $\sigma\upsilon\nu\Gamma=1/2$ καὶ $\Gamma=60^0$. Ἡ δευτέρα σχέσις γράφεται :

$$\eta\mu A\ \eta\mu B=\eta\mu^2\Gamma=\eta\mu^2 60^0=\frac{3}{4}$$

καὶ διὰ μετατροπῆς τοῦ ημΑημΒ εἰς ἡμιδιαφορὰν συνημιτόνων :

$$\frac{1}{2}\{\sigma\upsilon\nu(A-B)-\sigma\upsilon\nu(A+B)\}=\frac{3}{4} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu(A-B)+\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{3}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu(A-B)+\sigma\upsilon\nu 60^0=\frac{3}{2} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu(A-B)=\frac{3}{2}-\sigma\upsilon\nu 60^0=1.$$

Ἑπομένως, $A-B=0^0$ ἐνῷ συγχρόνως $A+B=120^0$. Ὥστε $A=B=60^0=\Gamma$, ὅ.ἔ.δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

345) Νὰ μετατραπῇ εἰς ἄθροισμα ἡμιτόνων, τὸ γινόμενον:
$$8\ \eta\mu 25^0 \sigma\upsilon\nu 17^0 \sigma\upsilon\nu 20^0 \sigma\upsilon\nu 40^0.$$

346) Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες:
$$\text{i)}\quad \frac{\eta\mu 9^0}{\eta\mu 48^0} = \frac{\eta\mu 12^0}{\eta\mu 81^0}. \qquad \text{ii)}\quad \sigma\upsilon\nu 20^0 \sigma\upsilon\nu 40^0 \sigma\upsilon\nu 80^0 = \frac{1}{8}.$$

347) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης: $\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu 2\alpha\ \sigma\upsilon\nu 2\beta=1.$

348) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:
$$\frac{\eta\mu 7x}{\eta\mu x} - 2\sigma\upsilon\nu 2x - 2\sigma\upsilon\nu 4x - 2\sigma\upsilon\nu 6x = 1.$$

349) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ x καὶ y ἐκ τοῦ συστήματος:
$$\{\ x\eta\mu\alpha + y\eta\mu 2\alpha = \eta\mu 3\alpha, \qquad x\eta\mu 3\alpha + y\eta\mu 6\alpha = \eta\mu 9\alpha\ \}$$
διὰ τύπων λογιστῶν διὰ τῶν λογαρίθμων. (Δηλαδὴ τὰ x καὶ y νὰ τεθοῦν ὑπὸ μορφὴν μονωνύμων). Ὑποτίθεται ὅτι $\eta\mu\alpha\ \eta\mu 2\alpha\ \eta\mu 3\alpha \neq 0$.

350) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:
$$(1-\eta\mu x)\,(1-\eta\mu y) = \left\{ \eta\mu\frac{x+y}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} \right\}^2.$$

351) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} - \eta\mu\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$ εἶναι συνέπεια τῆς:
$$\eta\mu x + \eta\mu y = \eta\mu x\ \eta\mu y.$$

352) Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ὑφίστανται συγχρόνως αἱ σχέσεις:
$$\frac{\beta^3+\gamma^3-\alpha^3}{\beta+\gamma-\alpha} = \alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma = \frac{3}{4}$$
δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

353) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:
$$\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha+\ldots+\eta\mu\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\ldots+\sigma\upsilon\nu\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\frac{\nu+1}{2}\alpha.$$

354) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\varepsilon\varphi^2\frac{y}{2}$ εἶναι συνέπεια τῆς ἐξισώσεως: $(1+\alpha\ \sigma\upsilon\nu x)\,(1-\alpha\ \sigma\upsilon\nu y) = 1-\alpha^2 \qquad (\alpha\neq 1).$

355) Ν' ἁπλουστευθῇ ἡ παράστασις:
$$\frac{\eta\mu\beta\ \sigma\upsilon\nu\alpha(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta)}{1-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} + \frac{\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\beta\ \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

356) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ἂν $A=60^0$ καὶ ἂν πληροῦται ἡ σχέσις $\frac{\eta\mu(B+\Gamma)}{\eta\mu B\ \eta\mu\Gamma} = 4\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}.$

357) Νὰ γίνῃ μονώνυμον ἡ παράστασις:
$$\frac{\eta\mu\alpha\ \eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha\ \eta\mu 6\alpha+\eta\mu 4\alpha\ \eta\mu 13\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha\ \sigma\upsilon\nu 6\alpha+\eta\mu 4\alpha\ \sigma\upsilon\nu 13\alpha}.$$

358) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:
$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{2\nu+1} + \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{2\nu+1} + \ldots + \sigma\upsilon\nu\frac{2\nu\pi}{2\nu+1}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΧΕΣΕΙΣ

65. Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τριῶν γωνιῶν ἐχουσῶν ἄθροισμα 180^0

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρεῖς γωνίαι συνδεόμεναι διὰ τῆς σχέσεως :

(1) $$Α+Β+Γ = 180^0$$

ὁπότε τὰ ἡμίσει αὐτῶν θὰ πληροῦν τήν :

(2) $$\frac{Α}{2}+\frac{Β}{2}+\frac{Γ}{2}=90^0$$

Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ἢ ὄχι, τοῦ τελευταίου συμβαίνοντος ὅταν δὲν εἶναι ὅλαι θετικαί.

Βάσει τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνιῶν παραπληρωματικῶν ἢ συμπληρωματικῶν, ἕπονται ἐκ τῶν (1) καὶ (2) αἱ ἑξῆς ἄλλαι :

$$ημ(Α+Β)=ημΓ, \qquad συν(Α+Β)=-συνΓ, \qquad εφ(Α+Β)=-εφΓ,$$

$$ημ\frac{Α+Β}{2}=συν\frac{Γ}{2}, \qquad συν\frac{Α+Β}{2}=ημ\frac{Γ}{2}, \qquad εφ\frac{Α+Β}{2}=σφ\frac{Γ}{2}.$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἓξ τούτων ἰσοτήτων καὶ μὲ χρῆσιν τῶν τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν ἀποδεικνύομεν διαφόρους χρησίμους σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ καὶ $\frac{Α}{2}$, $\frac{Β}{2}$, $\frac{Γ}{2}$. Αἱ κυριώτεραι τῶν σχέσεων τούτων διατυποῦνται ὡς κάτωθι :

i) **«Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τῶν συνημιτόνων τῶν ἡμίσεων γωνιῶν».**

Δηλαδή :

<u>64</u> $$\boxed{ημΑ+ημΒ+ημΓ=4\,συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}}$$

Διότι, $ημΑ+ημΒ+ημΓ=2ημ\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2}+2ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2}$ ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ $ημ\frac{Α+Β}{2}$ διὰ τοῦ $συν\frac{Γ}{2}$ καὶ τὸ $ημ\frac{Γ}{2}$ διὰ τοῦ $συν\frac{Α+Β}{2}$ λαμβάνομεν : $ημΑ+ημΒ+ημΓ=2συν\frac{Γ}{2}συν\frac{Α-Β}{2}+2συν\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Γ}{2}=$

$$=2συν\frac{Γ}{2}\left\{συν\frac{Α-Β}{2}+συν\frac{Α+Β}{2}\right\}=2συν\frac{Γ}{2}\cdot 2συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}=$$

$$=4συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}, \qquad ὅ.ἔ.δ.$$

Σημείωσις. Ὁ τύπος <u>64</u> ἰσχύει φυσικὰ καὶ ὅταν αἱ Α, Β, Γ πληροῦν τὴν σχέσιν $A+B+\Gamma=180^0$ χωρὶς νὰ εἶναι ὅλαι θετικαί, δηλ. χωρὶς ν' ἀνήκουν εἰς τρίγωνον. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς ἑπομένους τύπους, μέχρι τοῦ <u>68</u>.

ii) **«Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἐφαπτομένων τούτων»**. Δηλαδή :

<u>65</u> $$\boxed{\mathbf{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\;\varepsilon\varphi B\;\varepsilon\varphi\Gamma}}$$

Διότι, ἐκ τῆς σχέσεως $\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi\Gamma$ λαμβάνομεν διαδοχικῶς :

$$\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\;\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=-\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi A\;\varepsilon\varphi B\;\varepsilon\varphi\Gamma \quad \text{ἢ}$$

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\;\varepsilon\varphi B\;\varepsilon\varphi\Gamma.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς <u>65</u> ἐπὶ $\sigma\varphi A\;\sigma\varphi B\;\sigma\varphi\Gamma$ λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

<u>65α</u> $$\boxed{\mathbf{\sigma\varphi B\;\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\;\sigma\varphi A+\sigma\varphi A\;\sigma\varphi B=1}}$$

iii) **«Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἀνὰ δύο, τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τριγώνου, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα»**. Δηλαδή :

<u>66</u> $$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=1}$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ προκύπτει ἀπὸ τήν : $\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$

ἥτις γράφεται διαδοχικῶς : $$\frac{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}{1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}} \quad \text{ἢ}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2},$$ ἐξ ἧς ἡ <u>66</u>.

iv) **«Τὸ ἄθροισμα τῶν συνεφαπτομένων τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τριγώνου, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν»**. Δηλαδή :

<u>67</u> $$\boxed{\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

Ἡ <u>67</u> προκύπτει ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς <u>66</u> ἐπὶ τὸ γινόμενον $\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$.

v) **«Τὸ ἄθροισμα τῶν συνημιτόνων τῶν γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα σὺν τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν ἡμίσεων γωνιῶν»**. Δηλαδή :

<u>68</u> $$\boxed{\mathbf{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=1+4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}}$$

Πράγματι, ἔχομεν κατὰ σειράν :

$$\text{συν}A+\text{συν}B+\text{συν}\Gamma=2\text{συν}\frac{A+B}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2}+1-2\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2}-2\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}+1=2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\left(\text{συν}\frac{A-B}{2}-\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\right)+1=$$

$$=2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\left(\text{συν}\frac{A-B}{2}-\text{συν}\frac{A+B}{2}\right)+1=1+4\text{ημ}\frac{A}{2}\text{ημ}\frac{B}{2}\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

359) Ἐὰν $A+B+\Gamma=180^\circ$ νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις :
i) $\text{ημ}2A+\text{ημ}2B+\text{ημ}2\Gamma$, ii) $\text{ημ}3A+\text{ημ}3B+\text{ημ}3\Gamma$, iii) $\text{ημ}6A+\text{ημ}6B+\text{ημ}6\Gamma$.

360) Ἐὰν Α, Β, Γ γωνίαι τριγώνου νὰ δειχθοῦν αἱ σχέσεις :

i) $$\frac{\text{συν}A}{\text{ημ}B\text{ημ}\Gamma}+\frac{\text{συν}B}{\text{ημ}\Gamma\,\text{ημ}A}+\frac{\text{συν}\Gamma}{\text{ημ}A\,\text{ημ}B}=2$$

ii) $$1+\frac{\text{ημ}\Gamma\,\text{συν}B}{\text{ημ}A\,\text{ημ}^2B}+\frac{\text{ημ}A\,\text{συν}\Gamma}{\text{ημ}B\,\text{ημ}^2\Gamma}+\frac{\text{ημ}B\,\text{συν}A}{\text{ημ}\Gamma\,\text{ημ}^2A}=(\text{σφ}A+\text{σφ}B+\text{σφ}\Gamma)^2$$

361) Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις :

$$\text{ημ}^2A+\text{ημ}^2B-\text{ημ}^2\Gamma.$$

362) Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $A+B+\Gamma=180^\circ$ δείξατε ὅτι :

$$\text{εφ}(\nu A)+\text{εφ}(\nu B)+\text{εφ}(\nu\Gamma)=\text{εφ}(\nu A)\text{εφ}(\nu B)\text{εφ}(\nu\Gamma).$$

363) Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου, δείξατε ὅτι ἡ ἰσότης εφ^3A+ $+\text{εφ}^3B+\text{εφ}^3\Gamma=0$ εἶναι ἀδύνατος.

364) Ἐὰν αἱ γωνίαι Α, Β, Γ τριγώνου ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν :

$$\text{εφ}\frac{A}{2}+\text{εφ}\frac{B}{2}+\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}+\text{εφ}\frac{A}{2}\text{εφ}\frac{B}{2}\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}=2,$$

δείξατε ὅτι τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

66. Διάφοροι ἐφαρμογαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν εἰς τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου.

α΄) Πᾶσαι αἱ εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια ἀποδειχθεῖσαι σχέσεις μεταξὺ τῶν ἓξ κυρίων στοιχείων τριγώνου εἶναι συνέπειαι τῶν τριῶν θεμελιωδῶν σχέσεων :

(1) $$\frac{\alpha}{\text{ημ}A}=\frac{\beta}{\text{ημ}B}=\frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma},\quad A+B+\Gamma=180^\circ.$$

Ἂς ἀποδείξωμεν τοῦτο διὰ τοὺς τύπους (12), (13), (14).

Ἐκ τῶν (1) λαμβάνομεν, $\alpha=2R\,\text{ημ}A$, $\beta=2R\,\text{ημ}B$, $\gamma=2R\,\text{ημ}\Gamma$ ὅπου 2R ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν τριῶν ἴσων κλασμάτων.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 12 μετασχηματίζομεν τὸ 2ον μέλος του :

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{2R\,\eta\mu B-2R\,\eta\mu\Gamma}{2R\,\eta\mu A}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{(\eta\mu B-\eta\mu\Gamma)}{\eta\mu A}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2\,\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$$

$\left(\delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \frac{B+\Gamma}{2}=90^0-\frac{A}{2}\right)$. Ἐντελῶς ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὁ 13.

Ὁ 14 δύναται ν' ἀποδειχθῇ ἀπ' εὐθείας, ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{2R(\eta\mu B-\eta\mu\Gamma)}{2R(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)}=\frac{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}}=$$

$$=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{B+\Gamma}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\Big/\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}.$$

β') **Ἄλλα παραδείγματα:** i) **Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου ὑφίσταται ἡ σχέσις:**

$$\beta\,\sigma\upsilon\nu B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma).$$

Ἀπόδειξις. Μὲ χρῆσιν τῶν τύπων $\alpha=2R\,\eta\mu A$ κλπ. τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας μετασχηματίζεται διαδοχικῶς:

$$\beta\,\sigma\upsilon\nu B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=2R\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu B+2R\,\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=R\eta\mu 2B+R\eta\mu 2\Gamma=R(\eta\mu 2B+$$
$$+\eta\mu 2\Gamma)=R\,.\,2\eta\mu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=2R\,\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\alpha\,\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma).$$

ii) **Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\sigma\varphi\frac{B}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.**

Ἀπόδειξις. Ἡ δοθεῖσα σχέσις δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς σχέσιν γωνιῶν, ἂν ἀντικατασταθοῦν αἱ πλευραὶ α, β, γ μὲ $2R\,\eta\mu A$, $2R\,\eta\mu B$, $2R\,\eta\mu\Gamma$· θὰ ἔχωμεν τότε:

$$\sigma\varphi\frac{B}{2}=\frac{2R\,\eta\mu A+2R\,\eta\mu\Gamma}{2R\,\eta\mu B}=\frac{\eta\mu A+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}=\frac{2\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}=$$

$$=\frac{2\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}=\sigma\varphi\frac{B}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}.$$ Ὥστε εἶναι:

$$\sigma\varphi\frac{B}{2}=\sigma\varphi\frac{B}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}\quad \text{ἢ}\quad \sigma\varphi\frac{B}{2}\left(1-\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}\right)=0\quad \text{ἢ}$$

$$\sigma\varphi\frac{B}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}\right)=0. \tag{2}$$

Διὰ νὰ μηδενίζεται τὸ γινόμενον τοῦτο πρέπει, ἢ $\sigma\varphi\frac{B}{2}=0$ ἢ

$συν\frac{B}{2} - συν\frac{A-Γ}{2} = 0$. Ἐὰν ἦτο $σφ\frac{B}{2} = 0$ τότε $σφ\frac{B}{2} = σφ90^0$ καὶ συνεπῶς $\frac{B}{2} = 90^0 + k.180^0$ ἢ $B = 180^0 + k.360^0$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἡ B εἶναι γωνία τριγώνου. Ὥστε $σφ\frac{B}{2} \neq 0$, ἄρα θὰ εἶναι μηδὲν ὁ ἄλλος παράγων, δηλ. $συν\frac{B}{2} = συν\frac{A-Γ}{2}$.

Τότε ὅμως (§ 54, θεώρημα) θὰ ἦτο ἢ

1ον) $\frac{B}{2} = \frac{A-Γ}{2}$ ἢ 2ον) $\frac{B}{2} = \frac{Γ-A}{2}$ ἢ 3ον) $\frac{B}{2} = \frac{A-Γ}{2} + k.360^0$

ἢ 4ον) $\frac{B}{2} = \frac{Γ-A}{2} + k.360^0$, ὅπου $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ἀποκλειομένου τοῦ 3ου καὶ 4ου ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\frac{B}{2}$ καὶ $\frac{A-Γ}{2}$ δὲν ὑπερβαίνουν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τὰς 90^0 μένει ὅτι θὰ συμβαίνῃ ἢ τὸ 1ον ἢ τὸ 2ον. Ἐὰν $\frac{B}{2} = \frac{A-Γ}{2}$ τότε $A = B + Γ = 180^0 - A$ καὶ $A = 90^0$. Ἐὰν $\frac{B}{2} = \frac{Γ-A}{2}$ τότε $Γ = A + B = 180^0 - Γ$ καὶ $Γ = 90^0$. Ὥστε, ὁπωσδήποτε τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον ἢ εἰς τὸ A ἢ εἰς τὸ Γ.

iii) **Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:**

$$(α-β)εφ\frac{A+B}{2} + (β-γ)εφ\frac{B+Γ}{2} + (γ-α)εφ\frac{Γ+A}{2} = 0.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς προσθετέοι τοῦ Α΄ μέλους εἶναι κυκλικαὶ παραστάσεις, προερχόμεναι δηλ. ἑκάστη ἐκ τῆς προηγουμένης της διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ A, B, Γ, διὰ τοῦτο μετασχηματίζομεν μόνον τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τριῶν:

$$(α-β)εφ\frac{A+B}{2} = (2R\,ημA - 2R\,ημB)εφ\frac{A+B}{2} = 2R(ημA - ημB)εφ\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2R.2ημ\frac{A-B}{2}συν\frac{A+B}{2} \cdot \frac{ημ\frac{A+B}{2}}{συν\frac{A+B}{2}} = 4R\,ημ\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)ημ\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) =$$

$$= 4R\left(ημ^2\frac{A}{2} - ημ^2\frac{B}{2}\right)$$ (βλ. § 58, παράδειγμα ii).

Διὰ τὸν δεύτερον προσθετέον εὑρίσκομεν ἀμέσως, διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς:

$$(β-γ)εφ\frac{B+Γ}{2} = 4R\left(ημ^2\frac{B}{2} - ημ^2\frac{Γ}{2}\right)$$ καὶ διὰ τὸν τρίτον

$$(γ-α)εφ\frac{A+Γ}{2} = 4R\left(ημ^2\frac{Γ}{2} - ημ^2\frac{A}{2}\right).$$

Συνεπῶς, τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται μέ :

$$4R\left(\eta\mu^2\frac{A}{2}-\eta\mu^2\frac{B}{2}+\eta\mu^2\frac{B}{2}-\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)=4R\,.\,0=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

365) Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις : $(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}+(\beta+\gamma)\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}+(\gamma+\alpha)\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-A}{2}=0.$

366) Ἂν εἰς τρίγωνον ὑφίσταται ἡ σχέσις $E=\frac{\alpha}{4}\sqrt{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}$ (Ε=ἐμβαδὸν) νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

367) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει :

$$\alpha\,\sigma\upsilon\nu A+\beta\,\sigma\upsilon\nu B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{2E}{R}.$$

368) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι : $\frac{\sigma\upsilon\nu A+2\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu A+2\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}$

νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς ἢ ὀρθογώνιον.

369) Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$\sigma\upsilon\nu(2B-\Gamma)=\frac{\beta}{\alpha^3}(3\alpha^2-4\beta^2)$$

εἶναι δὲ καὶ $B=30^0$ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου.

370) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ὑφίστανται αἱ δύο σχέσεις :

$$1+\sigma\varphi(45^0-B)=\frac{2}{1-\sigma\varphi\Gamma}\quad \text{καὶ}\quad 4E=\alpha^2$$

νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Χ

i) *Ἀπὸ ποῖον ἄθροισμα προέρχεται ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων ;* $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}$, $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}$, $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}$, $\frac{\eta\mu(\beta-\alpha)}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}$,

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2},\quad 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\beta-\alpha}{2};$$

ii) *Πῶς γίνεται λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις* $\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x$;

iii) *Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου, εἰς τί μετατρέπεται ἑκάστη τῶν ἑπομένων παραστάσεων :*

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma,\qquad \varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma,$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2},$$

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2},\qquad \sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma;$$

iv) *Τρέψατε τὰ κάτωθι γινόμενα εἰς ἀθροίσματα :*

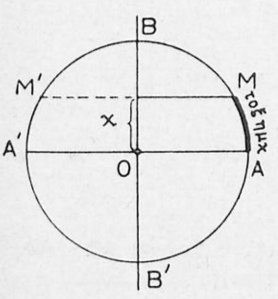
$$\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu y,\qquad \sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y,\qquad \eta\mu x\,\eta\mu y.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

Αἱ ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις.

67. Τὸ τοξ ημx.

Γνωρίζομεν ὅτι ἐὰν $-1 \leqq x \leqq 1$, ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα θ ἱκανοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν ημθ=x. *Κάθε τόξον θ πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν ημθ=x παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου τοξημx (τόξον ἡμιτόνου, x).* Μὲ ἄλλας λέξεις, **τοξ ημx σημαίνει ἕνα (ὁποιοδήποτε) τόξον ἔχον ἡμίτονον ἴσον πρὸς x.** Εἰς τὸ σχ. 63 τὸ τοξημx παρίσταται ἀπὸ κάθε τόξον $(\widehat{AM})$ ἢ $(\widehat{AM'})$.



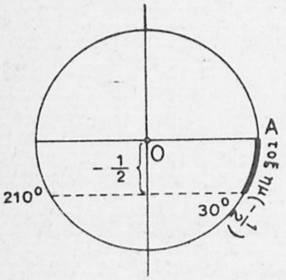
Σχ. 63

Ἔτσι π.χ. τοξ ημ$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ἢ $= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ἀκτίν. ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος.

(Οἱ δύο αὐτοὶ τύποι συμπτύσσονται εἰς τόν: τοξημ$\frac{1}{2} = \nu\pi + (-1)^\nu \frac{\pi}{6}$ ὅπου ν τυχὼν ἀκέραιος).

Δοθέντος τοῦ x, τὸ τοξ ημx ἔχει μίαν μόνην τιμὴν κειμένην εἰς τὸ (κλειστὸν) διάστημα ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $\frac{\pi}{2}$ διότι ὅπως βλέπομεν ἀπὸ τὸ σχ. 63 ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ x μεταβαλλομένου ἀπὸ -1 ἕως $+1$ καὶ τοῦ τόξου $\widehat{AM}$ μεταβαλλομένου ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $+\frac{\pi}{2}$.

Ἐπίσης, τὸ τοξ ημx ἔχει μίαν μόνον τιμὴν μεταξὺ $\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{3\pi}{2}$



Σχ. 64

(σχ. 63, τοξ $\widehat{AM'}$), μίαν μόνον τιμὴν μεταξὺ $\frac{3\pi}{2}$ καὶ $\frac{5\pi}{2}$ καὶ γενικῶς, μίαν μόνον τιμὴν εἰς τὸ διάστημα $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ ἕως $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k ἀκέραιος).

Ἔτσι π.χ., τοξημ $\left(-\frac{1}{2}\right) = -30^0$ (σχ. 64) ἢ τοξ ημ$\left(-\frac{1}{2}\right) = 210^0$ ἢ τοξημ$\left(-\frac{1}{2}\right) = 330^0$ κ.ο.κ.

Ἐκείνη ἡ τιμὴ τοῦ τοξ ημx ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $+\frac{\pi}{2}$ (συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἀκραίων τιμῶν) **καλεῖται πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ τοξημx.** Ἡ πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ τοξημx παρίσταται πολλάκις μέ:

Π.Τ. τοξ ημx ἢ τοξ$_0$ημx.

Ἔτσι π.χ.: Π.Τ. τοξημ $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (ἢ 30^0) καὶ πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ τοξ ημ $(-1/\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$. Ἐπίσης τοξ$_0$ημ $1 = \frac{\pi}{2}$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ τοξ ημx ἕπεται ὅτι:

69 $$\boxed{\text{ημ}\{\text{τοξ ημ}x\} = x}$$

Ἡ ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς τοῦ σημείου τοῦ x. Αἱ πρωτεύουσαι τιμαὶ τοξ$_0$ημx καὶ τοξ$_0$ ημ(—x) παριστάνουν δύο τόξα ἀνήκοντα εἰς τὸ διάστημα$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ καὶ ἔχοντα ἀντίθετα ἡμίτονα, συνεπῶς παριστάνουν ἀντίθετα τόξα δηλαδή:

$$\boxed{\text{τοξ}_0\ \text{ημ}(-x) = -\text{τοξ}_0\ \text{ημ}x}$$

Παρατήρησις. Ἡ συνάρτησις **y=τοξ$_0$ημx** ἔχουσα **πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $-1 \leqq x \leqq 1$ καὶ σύνολον τιμῶν τὸ $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ εἶναι ἡ ἀντίστροφος συν-**

άρτησις (ὡς ὁρίζεται ἡ ἔννοια αὐτὴ εἰς τὴν Ἄλγεβραν) τῆς κυκλικῆς συναρτήσεως $y=\eta\mu x$ (§ 45) τῆς ἐχούσης πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ καὶ σύνολον τιμῶν τὸ $-1\leqq y\leqq+1$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀνάλογον ἰσχύει καὶ διὰ τὰς εἰς τὰς § 68—70 ὁριζομένας συναρτήσεις, διὰ τοῦτο ὅλαι ὁμοῦ λέγονται «ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) **Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι τιμαὶ τῶν :**

$$\text{τοξ ημ}\{\text{ημ}280^\circ\},\quad \text{τοξ ημ}\{\text{ημ}200^\circ\},\quad \text{τοξ ημ}\{\text{ημ}130^\circ\}.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ $\text{ημ}280^\circ=\text{ημ}(-80^\circ)$ διὰ τοῦτο:

$$\text{Π. Τ. τοξ ημ}(\text{ημ}280^\circ)=\text{Π. Τ. τοξ ημ}\{\text{ημ}(-80^\circ)\}=-80^\circ.$$

Ἐπίσης:

$$\text{Π. Τ. τοξ ημ}(\text{ημ}200^\circ)=\text{Π. Τ. τοξ ημ}\{\text{ημ}(-20^\circ)\}=-20^\circ.$$

$$\text{Π. Τ. τοξ ημ}(\text{ημ}130^\circ)=\text{Π. Τ. τοξ ημ}(\text{ημ}50^\circ)=50^\circ.$$

ii) **Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες:**

$$\alpha')\quad \text{τοξ ημ}\frac{15}{17}-\text{τοξ ημ}\frac{4}{5}=\text{τοξ ημ}\frac{13}{85}$$

$$\beta')\quad \text{τοξ ημ}\frac{15}{17}+\text{τοξ ημ}\frac{4}{5}=\pi-\text{τοξ ημ}\frac{77}{85}$$

ὅπου διὰ τὰ τόξα λαμβάνονται αἱ πρωτεύουσαι τιμαί.

Ἀπόδειξις. α') Θέτομεν :

(1) $\qquad \text{τοξημ}\frac{15}{17}=\alpha \qquad \text{τοξημ}\frac{4}{5}=\beta, \qquad \text{τοξημ}\frac{13}{85}=\gamma$

καὶ ἡ ἀποδεικτέα σχέσις γίνεται

(2) $\qquad \alpha-\beta=\gamma$

ὅπου α, β, γ *τόξα τοῦ πρώτου τεταρτημορίου.* Ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) εἶναι τόξα τοῦ πρώτου τεταρτημορίου ($\alpha>\beta$) διὰ νὰ δειχθῇ ἡ (2) ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{ημ}\gamma \quad \text{ἢ} \quad (3)\quad \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta=\text{ημ}\gamma.$$

Ἐκ τῶν (1) ἕπεται (τύπος 69), $\text{ημ}\alpha=\frac{15}{17}$, $\text{ημ}\beta=\frac{4}{5}$, $\text{ημ}\gamma=\frac{13}{85}$ ἄρα καὶ $\text{συν}\alpha=+\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}$, $\text{συν}\beta=\frac{3}{5}$ ἑπομένως τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) ἰσοῦται μὲ

$$\frac{15}{17}\cdot\frac{3}{5}-\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5}=\frac{45}{85}-\frac{32}{85}=\frac{13}{85}=\text{ημ}\gamma=2\text{ον μέλος τῆς (3)}.$$

β') Θέτομεν πάλιν : $\text{τοξ ημ}\frac{15}{17}=\alpha$, $\text{τοξ ημ}\frac{4}{5}=\beta$, $\text{τοξ ημ}\frac{77}{85}=\delta$ καὶ ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης γράφεται :

(4) $\qquad \alpha+\beta=\pi-\delta.$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 2ον μέλος τῆς (4) εἶναι τόξον τοῦ 2ου τεταρτημορίου $\left(\text{διότι } 0<\delta<\frac{\pi}{2}\right)$. Ἀλλὰ καὶ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἐπίσης, διότι $\alpha > \frac{\pi}{4}$ καὶ $\beta > \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{διότι } \eta\mu\alpha = \frac{15}{17} > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ καὶ } \eta\mu\beta = \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Ἐπίσης δὲ $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$.

Ἀφοῦ λοιπὸν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) εἶναι τοῦ 2ου τεταρτημορίου, διὰ νὰ εἶναι ἴσα, ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ἴσα ἡμίτονα. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu(\pi-\delta) \quad \text{ἢ} \quad (5) \ \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta = \eta\mu\delta.$$

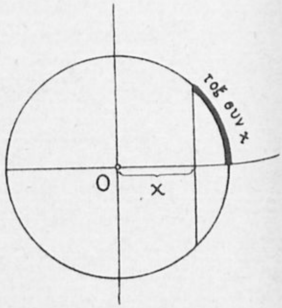
Ἡ (5) ἀποδεικνύεται ὅπως ἡ (3).

68. Τὸ τοξ συνx.

Τὸ σύμβολον τοξ συνx (=τόξον συνημιτόνου x) παριστᾶ κάθε τόξον ἢ γωνίαν ἔχουσαν συνημίτονον ἴσον πρὸς x (σχ. 65). Ἔτσι π.χ.

$$\text{τοξσυν}\,(1/\sqrt{2}) = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \text{ ἀκέραιος}).$$

Δοθέντος τοῦ x, τὸ τοξ συνx ἔχει μίαν καὶ μόνον τιμὴν κειμένην εἰς τὸ διάστημα 0 ἕως π ἀκτιν., διότι ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον εἰς κάθε x (περιεχόμενον μεταξὺ -1 καὶ $+1$) ἕνα καὶ μόνον τόξον ἀντιστοιχεῖ, ἔχον συνημίτονον τὸ x καὶ περιεχόμενον ἀπὸ 0 ἕως π (σχ. 65).



Σχ. 65

Ἐπίσης διὰ τὴν ἰδίαν τιμὴν τοῦ x, τὸ τοξ συνx ἔχει μίαν καὶ μόνην τιμὴν κειμένην μεταξὺ π καὶ 2π (βλέπε σχ. 65), μίαν μεταξὺ 2π καὶ 3π καὶ γενικῶς μίαν τιμὴν κειμένην μεταξὺ kπ καὶ (k+1)π ἀκτιν. ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος.

Ἐκείνη ἡ τιμὴ τοῦ τοξ συνx ἡ ὁποία περιέχεται εἰς τὸ (κλειστὸν) διάστημα [0, π ἀκτ.] καλεῖται πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ τοξ συνx (Π.Τ. τοξ συνx ἢ τοξ_0 συνx).

Ἔτσι π.χ. :

$$\text{Π.Τ. τοξ συν}(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{6} \ (\text{ἢ } 30^0), \quad \text{Π.Τ. τοξ συν}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \ (\text{ἢ } 120^0).$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ τοξ συνx ἕπεται :

69α $\boxed{\text{συν(τοξ συνx)} = x}$

Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς τοῦ σημείου τοῦ x. Αἱ πρωτεύουσαι τιμαί : $\tau o\xi_0 \sigma \upsilon \nu x$ καὶ $\tau o\xi_0 \sigma \upsilon \nu(-x)$ παριστάνουν δύο τόξα ἔχοντα ἀντίθετα συνημίτονα καὶ ἀνήκοντα εἰς τὸ διάστημα $(0, \ldots \pi)$, δηλ. παριστάνουν παραπληρωματικὰ τόξα. Ὥστε :

$$\boxed{\tau o\xi_0 \sigma \upsilon \nu(-x)=\pi-\tau o\xi_0 \sigma \upsilon \nu x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: i) Π. Τ. τοξ συν$\{$συν$340^\circ\}$=Π.Τ. τοξ συν$\{$συν$20^\circ\}=20^\circ$.

ii) **Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης :**

$$\text{τοξ συν}(5/7)+\text{τοξ συν}(7/9)=\text{τοξ συν}\frac{35-16\sqrt{3}}{63}$$

ὅπου τὰ τοξσυν παριστοῦν τὰς πρωτεούσας τιμάς.

Λύσις. Θέτομεν :

(1) $\quad \text{τοξσυν}\frac{5}{7}=\alpha, \quad \text{τοξσυν}\frac{7}{9}=\beta, \quad \text{τοξσυν}\frac{35-16\sqrt{3}}{63}=\gamma$

καὶ ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης λαμβάνει τὴν μορφήν :

(2) $\quad \alpha+\beta=\gamma.$

Καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ π διότι $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ ὡς ἔχοντα θετικὰ συνημίτονα καὶ τὸ γ ἐπίσης ὡς πρωτεύουσα τιμὴ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ π). Ἄρα διὰ νὰ εἶναι ἴσα ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ἴσα συνημίτονα. Δηλαδὴ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ

$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\gamma \quad \text{ἢ} \quad (3) \quad \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta=\text{συν}\gamma.$$

Ἐκ τῶν (1) ἔπεται: $\text{συν}\alpha=\frac{5}{7}$, $\text{συν}\beta=\frac{7}{9}$, $\text{συν}\gamma=\frac{35-16\sqrt{3}}{63}$

καὶ ἑπομένως $\text{ημ}\alpha=+\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{24}}{7}$, $\quad \text{ημ}\beta=\frac{\sqrt{32}}{9}$.

Διὰ τὰς τιμὰς ταύτας ἡ (3) βλέπομεν ὅτι ὄντως ἀληθεύει.

iii) **Νὰ δειχθῇ ὅτι :**

$$\mathbf{2\tau o\xi_0\, \sigma \upsilon \nu(3/4)=\tau o\xi_0\, \sigma \upsilon \nu(1/8)}.$$

Ἀπόδειξις. Θέτομεν $\tau o\xi_0 \sigma \upsilon \nu(3/4)=\alpha$, $\tau o\xi_0 \sigma \upsilon \nu(1/8)=\beta$, ὁπότε συνα$=3/4$, συνβ$=1/8$, $0<\alpha<45^\circ$, $0<\beta<90^\circ$ καὶ ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης γίνεται $2\alpha=\beta$.

Ἀμφότερα τὰ μέλη της εἶναι τόξα μεταξὺ 0° καὶ 90° περιεχόμενα καὶ διὰ ν' ἀληθεύῃ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν :

$$\text{συν}2\alpha=\text{συν}\beta \quad \text{ἢ} \quad 2\text{συν}^2\alpha-1=\text{συν}\beta.$$

Τοῦτο ἀληθεύει: $2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$.

69. Τὸ τοξ εφx.

Τὸ σύμβολον τοξ εφx (=τόξον ἐφαπτομένης, x) παριστᾶ κάθε γωνίαν ἢ τόξον ἔχον ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς x, (δηλ. παριστᾶ κάθε τόξον (ἢ γωνίαν) θ πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν εφθ=x).

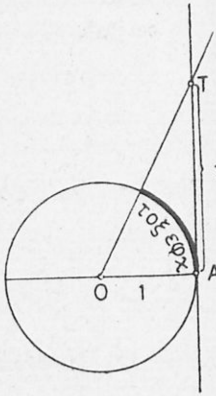
Π.χ. : $\quad$ τοξ εφ1 $= \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\quad$ (k, τυχὼν ἀκέραιος).

Δοθέντος τοῦ x τὸ τοξ εφx ἔχει ἀπειρίαν τιμῶν (αἱ ὁποῖαι διαφέρουν μεταξύ των κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ π).

Ἐκείνη ἡ τιμὴ τοῦ τοξ εφx ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{\pi}{2}$ ἀκτιν. καλεῖται πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ τοξ εφx καὶ παρίσταται :

Π.Τ. τοξ εφx ἢ τοξ$_0$ εφx.

(Πράγματι, εἰς τὸ «ἀνοικτὸν» διάστημα ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $+\frac{\pi}{2}$ ἡ ἐφαπτομένη λαμβάνει ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς καὶ ἑκάστην, ἅπαξ).



Σχ. 66

Π. χ. ἔχομεν, Π.Τ. τοξ εφ(—1) $= -\frac{\pi}{4}$ (ἢ -45^0), τοξ$_0$ εφ$\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ἢ 60^0),

$$\text{Π.Τ. τοξ εφ(εφ}280^0) = \text{Π.Τ. τοξ εφ(εφ}100^0) =$$
$$= \text{Π.Τ. τοξ εφ}\{\text{εφ}(-80^0)\} = -80^0.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ τοξ εφx ἕπεται :

69β $\quad \boxed{\text{εφ(τοξ εφx)} = x}$

Ἐπίδρασις τῆς ἀλλαγῆς τοῦ σημείου τοῦ x. Αἱ πρωτεύουσαι τιμαὶ τοξ$_0$ εφx καὶ τοξ$_0$ εφ(—x) παριστάνουν τόξα περιεχόμενα εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ ἕως } \frac{\pi}{2}\right)$ καὶ ἔχοντα ἀντιθέτους ἐφαπτομένας. Ἄρα παριστάνουν ἀντίθετα τόξα. Δηλ. :

$$\boxed{\text{τοξ}_0\ \text{εφ}(-x) = -\text{τοξ}_0\ \text{εφ}x}$$

Θεώρημα. α') **Ἐὰν $x>0$, $y>0$, $xy<1$ τότε ἰσχύει :**

$$\text{τοξ}_0\ \text{εφ}x + \text{τοξ}_0\ \text{εφ}y = \text{τοξ}_0\ \text{εφ}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

ὅπου τοξ$_0$ εφω παριστᾶ τὴν πρωτεύουσαν τιμὴν τοῦ τοξ εφω.

β') **Γενικώτερον δέ, ἰσχύει πάντοτε ἡ σχέσις :**

$$\text{τοξ εφx} + \text{τοξ εφy} = \text{τοξ εφ} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$$

ὅπου k, κατάλληλος ἀκέραιος.

Ἀπόδειξις. α') Ἐὰν τεθῇ $\text{τοξ}_0 \,\text{εφ}x = \alpha$, $\text{τοξ}_0\, \text{εφ}y = \beta$ καὶ $\text{τοξ}_0\, \text{εφ} \dfrac{x+y}{1-xy} = \gamma$ τότε θὰ εἶναι: εφα$=x$, εφβ$=y$, εφγ$= \dfrac{x+y}{1-xy} > 0$ καθὼς καὶ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ διότι τὰ α, β, γ εἶναι πρωτεύουσαι τιμαὶ καὶ θετικαί. Ἡ ἀποδεικτέα σχέσις τώρα, λαμβάνει τὴν μορφήν:

(1) $$\alpha + \beta = \gamma$$

ὅπου $0 < \alpha + \beta < \pi$ καὶ $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Βλέπομεν ὅτι τὰ δύο μέλη τῆς (1) διαφέρουν ὀλιγώτερον ἡμισείας περιφερείας ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσα, ἂν ἔχουν ἴσας ἐφαπτομένας (βλ. § 56). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δειχθῇ ὅτι:

(2) $$\text{εφ}(\alpha+\beta) = \text{εφ}\gamma.$$

Ἡ (2) προφανῶς ἀληθεύει:

$$\text{εφ}(\alpha+\beta) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1 - \text{εφ}\alpha\ \text{εφ}\beta} = \frac{x+y}{1-xy} = \text{εφ}\gamma.$$

β') Ἡ ἀποδεικτέα γράφεται, ὡς καὶ προηγουμένως εἴδομεν:

$$\alpha + \beta = \gamma + k\pi.$$

Ἐπειδὴ δὲ εφ$(\alpha+\beta)=$εφγ ἕπεται ὅτι τὰ τόξα $\alpha+\beta$ ἀφ' ἑνὸς καὶ γ ἀφ' ἑτέρου θὰ διαφέρουν κατὰ κάποιο ἀκέραιον πολλαπλάσιον ἡμιπεριφερείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:**

$$3\,\text{τοξεφ}x + \text{τοξεφ}3x = \frac{\pi}{2}$$

ὅπου τὰ τοξ εφx καὶ τοξ εφ3x περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

Λύσις. Ἐν πρώτοις, ἐπειδὴ τὰ θετικὰ τόξα: 3 τοξεφx καὶ τοξεφ3x πρέπει νὰ εἶναι συμπληρωματικά, διὰ τοῦτο πρέπει ἐκτὸς τοῦ περιορισμοῦ, $x > 0$, νὰ ἔχωμεν καί:

$$0 < 3\,\text{τοξεφ}x < \frac{\pi}{2}.$$

Ὁ 2ος περιορισμὸς γράφεται: $0 < \text{τοξ εφ}x < \frac{\pi}{6}$ καὶ δίδει:

$\text{εφ}\{\text{τοξ εφ}x\} < \text{εφ}\frac{\pi}{6}$ ἢ $x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ὥστε πρέπει $\boxed{0 < x < 1/\sqrt{3}}$

Ἂν θέσωμεν τώρα τοξ εφx$=\alpha$, τοξ εφ3x$=\beta$, τότε εφα$=x$, εφβ$=3x$.

Ἡ ἐξίσωσις γράφεται : $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ καὶ συνεπῶς δίδει :

$$\varepsilon\varphi 3\alpha=\sigma\varphi\beta \quad \text{ἢ} \quad \frac{3\,\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\,\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\beta} \ (\text{τύπος } \mathbf{56}) \quad \text{ἢ} \quad \frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{1}{3x} \quad \text{ἢ}$$

$$9x^2-3x^4=1-3x^2 \quad \text{ἢ} \quad 3x^4-12x^2+1=0 \quad \text{καὶ}$$

$$x^2=\frac{6\pm\sqrt{33}}{3} \quad \text{ἄρα} \quad x=\pm\sqrt{\frac{6\pm\sqrt{33}}{3}}.$$

Ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων τιμῶν μόνον ἡ $x_1=\sqrt{\frac{6-\sqrt{33}}{3}}$ πληροῖ τοὺς ἀρχικῶς τεθέντας περιορισμοὺς συνεπῶς αἱ λοιπαὶ ἀπορρίπτονται.

Πρέπει ἡ x_1 νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἀρχικήν, ἤτοι :

$$(1) \qquad 3\,\text{τοξ}\,\varepsilon\varphi x_1=\frac{\pi}{2}-\text{τοξ}\,\varepsilon\varphi 3x_1.$$

Τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν ἴσας ἐφαπτομένας, διότι ἔτσι ὡρίσθη τὸ x_1 καὶ ἐπειδὴ ἀμφότερα περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\pi/2$, εἶναι ἴσα.

70. Αἱ λοιπαὶ ἀντίστροφοι συναρτήσεις.

Ὅμοιοι πρὸς τοὺς προηγουμένους ὁρισμοὶ ἰσχύουν διὰ τὰ σύμβολα:

α΄) **τοξ σφx** (=τόξον συνεφαπτομένης x)

β΄) **τοξ τεμx** (=τόξον τεμνούσης x).

γ΄) **τοξ στεμx** (=τόξον συντεμνούσηςx).

Τὸ τοξ σφx παριστᾶ κάθε τόξον ἔχον συνεφαπτομένην ἴσην πρὸς x (δηλ. παριστᾶ κάθε λύσιν τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως σφθ=x) καὶ διὰ δοθὲν x ἔχει ἄπειρους τιμάς. **Ὡς πρωτεύουσα τιμὴ τοῦ τοξ σφx ἂς ὁρισθῇ ἐκείνη, ἥτις περιέχεται εἰς τὸ διάστημα** $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. (Θὰ ἠδύνατο ἐπίσης ἡ Π.Τ. νὰ ληφθῇ εἰς τὸ διάστημα $(0,\pi)$).

Τὸ τοξ τεμx ἐκφράζει κάθε τόξον ἔχον τέμνουσαν ἴσην πρὸς x καὶ **ἔχει πρωτεύουσαν τιμὴν ἐκείνην ἐκ τῶν τιμῶν του, ἥτις περιέχεται εἰς τὸ διάστημα** $(0,\pi)$.

Τὸ τοξ στεμx ἐκφράζει κάθε τόξον ἔχον συντέμνουσαν ἴσην πρὸς x **καὶ ὡς πρωτεύουσα τιμή του λαμβάνεται ἐκείνη ἐκ τῶν τιμῶν του ἥτις περιέχεται εἰς τὸ διάστημα** $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι ἰσχύουν οἱ τύποι :

$$\underline{69_\gamma} \qquad \boxed{\begin{aligned} \sigma\varphi\{\tau o\xi\ \sigma\varphi x\ \} &= x \\ \tau\varepsilon\mu\{\tau o\xi\ \tau\varepsilon\mu x\ \} &= x \\ \sigma\tau\varepsilon\mu\{\tau o\xi\ \sigma\tau\varepsilon\mu x\ \} &= x \end{aligned}}$$

Ἐπίσης ἰσχύουν διὰ τὰς πρωτεύουσας τιμὰς αἱ σχέσεις.

$$\tau o\xi_0\, \sigma\varphi x = \tau o\xi_0 \varepsilon\varphi \frac{1}{x},\ \tau o\xi_0\, \tau\varepsilon\mu x = \tau o\xi_0\, \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x},\ \tau o\xi_0\, \sigma\tau\varepsilon\mu x = \tau o\xi_0\, \eta\mu\, \frac{1}{x}$$

ὅπου $x \neq 0$ καθὼς καὶ αἱ :

$$\tau o\xi_0\, \tau\varepsilon\mu(-x) = \pi - \tau o\xi_0\, \tau\varepsilon\mu x$$
$$\tau o\xi_0\, \sigma\tau\varepsilon\mu(-x) = -\tau o\xi_0\, \sigma\tau\varepsilon\mu x$$
$$\tau o\xi_0\, \sigma\varphi(-x) = -\tau o\xi_0\, \sigma\varphi x.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) **Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :**

$$A \equiv \sigma\upsilon\nu\{\tau o\xi\ \varepsilon\varphi[\eta\mu(\tau o\xi\sigma\varphi x)]\} = \pm\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}\ .$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω πρῶτον $x \neq 0$. Θέτομεν : $\tau o\xi\, \sigma\varphi x = \alpha$ ὁπότε $\sigma\varphi\alpha = x$ καὶ $\varepsilon\varphi\alpha = 1/x$.

Τότε, $\eta\mu(\tau o\xi\sigma\varphi x) = \eta\mu\alpha = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}} = \dfrac{1/x}{\pm\sqrt{1+(1/x)^2}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2+1}}$

καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος καθίσταται :

$$A \equiv \sigma\upsilon\nu\left\{\ \tau o\xi\varepsilon\varphi\ \frac{1}{\pm\sqrt{x^2+1}}\right\} = \pm\,\sigma\upsilon\nu\left\{\ \tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right\}.$$

διότι τὰ $\tau o\xi\varepsilon\varphi\{1/\sqrt{x^2+1}\ \}$ καὶ $\tau o\xi\varepsilon\varphi\{-1/\sqrt{x^2+1}\ \}$ ὡς ἔχοντα ἀντιθέτους ἐφαπτομένας δυνατὸν νὰ ἔχουν ἴσα ἢ ἀντίθετα συνημίτονα.

Θέτομεν $\qquad \tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \beta,\ \varepsilon\varphi\beta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ ὁπότε

$$A \equiv \pm\,\sigma\upsilon\nu\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\beta}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2+1}}} = \pm\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}\ .$$

Ἐνταῦθα τὸ τοξεφ καὶ τοξσφ ἔχουν τυχούσας τιμάς.

Ἐὰν $x=0$ τότε $\tau o\xi\ \sigma\varphi x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad \eta\mu(\tau o\xi\ \sigma\varphi x) = \pm 1,$ $\quad$ καὶ

$$A = \sigma\upsilon\nu\{\,\tau o\xi\ \varepsilon\varphi(\pm 1)\,\} = \sigma\upsilon\nu\left\{\pm\frac{\pi}{4} + k'\pi\right\} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{0^2+1}{0^2+2}}$$

δηλ. ἡ ἰσότης καὶ πάλιν, ἰσχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ii. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:**

$$\tau o\xi\tau\varepsilon\mu\,\frac{x}{\alpha} - \tau o\xi\tau\varepsilon\mu\,\frac{x}{\beta} = \tau o\xi\tau\varepsilon\mu\beta - \tau o\xi\tau\varepsilon\mu\alpha$$

ὅπου τὰ τόξα ἔχουν τὰς πρωτευούσας τιμάς των καὶ α, β δεδομένοι ἀριθμοὶ $\neq 0$.

Λύσις. Θέτομεν: $\text{τοξτεμ}\frac{x}{\alpha}=A$, $\text{τοξτεμ}\frac{x}{\beta}=B$, $\text{τοξτεμ}\beta=\Gamma$,

$\text{τοξτεμ}\alpha=\Delta$, ὁπότε: $\text{τεμ}A=\frac{x}{\alpha}$, $\text{συν}A=\frac{\alpha}{x}$, $\text{ημ}A=\pm\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}$ κ.τ.λ.

Ἡ ἐξίσωσις γράφεται: $A-B=\Gamma-\Delta$ ἢ $A+\Delta=B+\Gamma$ καὶ δίδει διαδοχικῶς: $\text{συν}(A+\Delta)=\text{συν}(B+\Gamma)$, $\text{συν}A\,\text{συν}\Delta-\text{ημ}A\,\text{ημ}\Delta=\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma-\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma$

$$\text{ἢ}\quad \frac{\alpha}{x}\cdot\frac{1}{\alpha}\mp\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}=\frac{\beta}{x}\cdot\frac{1}{\beta}\mp\sqrt{1-\frac{\beta^2}{x^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\beta^2}}$$

$$\text{ἢ}\quad \left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)=\left(1-\frac{\beta^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)\quad \text{ἢ}$$

$$1-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=1-\frac{1}{\beta^2}-\frac{\beta^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\quad \text{ἢ}\quad \frac{1}{x^2}(\beta^2-\alpha^2)=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}$$

καὶ **ὑποθέτοντες** $\alpha^2\neq\beta^2$ εὑρίσκομεν $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$ καὶ $x=\pm\alpha\beta$.

Διὰ $x=\alpha\beta$ ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται.

Διὰ $x=-\alpha\beta$ τὸ πρῶτον μέλος της καθίσταται:

$\text{τοξτεμ}(-\beta)-\text{τοξτεμ}(-\alpha)=\pi-\text{τοξτεμ}\beta-\{\pi-\text{τοξτεμ}\alpha\}=\text{τοξτεμ}\alpha-\text{τοξτεμ}\beta$ ἤτοι, ἀντίθετον τοῦ δευτέρου. Συνεπῶς ἡ τιμὴ $x=-\alpha\beta$ δὲν εἶναι λύσις.

Μερικαὶ περιπτώσεις. Ἐὰν $\alpha=\beta$ ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ κάθε x διὰ τὸ ὁποῖον τὰ τόξα ἔχουν νόημα.

Ἐὰν $\alpha=-\beta$ ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\text{τοξτεμ}\frac{x}{\alpha}-\text{τοξτεμ}\left(-\frac{x}{\alpha}\right)=\text{τοξτεμ}(-\alpha)-\text{τοξτεμ}\alpha\quad \text{ἢ}$$

$$\text{τοξτεμ}\frac{x}{\alpha}-\left\{\pi-\text{τοξτεμ}\frac{x}{\alpha}\right\}=\{\pi-\text{τοξτεμ}\alpha\}-\text{τοξτεμ}\alpha\quad \text{ἢ}$$

$$\text{τοξτεμ}\frac{x}{\alpha}=-\text{τοξτεμ}\alpha+\pi \text{ ἢ ἀκόμη } (1)\ \text{τοξσυν}\frac{\alpha}{x}=-\text{τοξσυν}\frac{1}{\alpha}+\pi.$$

Λαμβάνοντες τὰ συνημίτονα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{x}=-\frac{1}{\alpha}$, $x=-\alpha^2$. Διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει (μὲ $\beta=-\alpha$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

371) **Νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων αἱ πρωτεύουσαι τιμαὶ τῶν:**

$\text{τοξ ημ}(0{,}7)$, $\text{τοξ εφ}(3{,}82)$, $\text{τοξ ημ}(-0{,}376)$, $\text{τοξ συν}(-0{,}955)$.

372) **Δείξατε ὅτι:**

$$\text{ημ}\left(\text{τοξ συν}\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5},\quad \text{συν}\left(\text{τοξ ημ}\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{15}{4}},\quad \text{εφ}\left(\text{τοξ συν}\frac{2}{7}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

ὅπου διὰ τὰ τόξα λαμβάνονται αἱ *πρωτεύουσαι τιμαί*. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν αὐχὴν νὰ δειχθοῦν καὶ αἱ ἑπόμεναι ἰσότητες:

373) 2τοξ συν$(3/4)=$τοξ συν$(1/8)$.

374) τοξ εφ$1/2+$τοξ εφ$1/3=\pi/4$.

375) τοξ εφ$7/8+$τοξ εφ$2=\pi-$τοξ εφ$23/6$.

376) 2τοξ εφ$1/4+$τοξ εφ$1/7+2$τοξ εφ$1/13=\pi/4$.

377) Ἐὰν $x>0$, $y>0$, $xy>1$ τότε:

$$\text{τοξ}_0\ \text{εφ}x+\text{τοξ}_0\ \text{εφ}y=\text{τοξ}_0\ \text{εφ}\frac{x+y}{1-xy}+\pi$$

ὅπου τοξ$_0$ σημαίνει τὴν πρωτεύουσαν τιμὴν τοῦ τόξου.

378) Δείξατε ὅτι:

$$2\nu^2=\text{σφ}\{\text{τοξ}_0\ \text{σφ}(2\nu-1)-\text{τοξ}_0\ \text{σφ}(2\nu+1)\}$$

ὅπου ν φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ τοξ$_0$ σημαίνει πρωτεύουσαν τιμὴν τοῦ τόξου.

Ἀκολούθως, ἀθροίσατε τὴν σειράν:

$$S_\nu=\text{τοξ}_0\ \text{σφ}(2.2^2)+\text{τοξ}\ \text{σφ}(2.3^2)+\text{τοξ}_0\ \text{σφ}(2.4^2)+\ldots+\text{τοξ}_0\ \text{σφ}(2\nu^2).$$

379) Δείξατε ὅτι:

$$2\text{τοξ}_0\ \text{εφ}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cdot\text{εφ}\frac{x}{2}\right)=\pm\ \text{τοξ}_0\text{συν}\frac{\beta+\alpha\ \text{συν}x}{\alpha+\beta\ \text{συν}x}.$$

380) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{τοξ}_0\ \text{εφ}(x-1)+\text{τοξ}_0\ \text{εφ}(2-x)=2\text{τοξ}_0\text{εφ}\sqrt{3x-x^2-2}.$$

381) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{τοξ}\ \text{εφ}\frac{x+1}{x-1}+\text{τοξ}\ \text{εφ}\frac{x-1}{x}=\text{τοξ}\ \text{εφ}(-7)+k\pi$$

ὅπου τὰ τόξα ἔχουν τὰς πρωτευούσας τιμάς των καὶ τὸ k ἔχει κατάλληλον, προσδιοριστέαν τιμήν.

382) Ἐὰν $\alpha\beta>0$ δείξατε ὅτι:

$$\text{τοξ}_0\ \text{εφ}\frac{\alpha}{\beta}-\text{τοξ}_0\ \text{εφ}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\pi}{4}.$$

383) i) Δείξατε ὅτι τοξ$_0$ εφ $\dfrac{2x}{1-x^2}=2$τοξ$_0$ εφ$x+k\pi$ καὶ ὁρίσατε τὸν ἀκέραιον k. ii) Ἐπίσης δώσατε ἁπλουστέραν μορφὴν εἰς τὴν παράστασιν:

$$\text{τοξ}\ \text{εφ}\{(3x-x^3)/(1-3x^2)\}.$$

384) Διὰ τῶν πινάκων δείξατε τὴν κατὰ προσέγγισιν ἰσότητα:

$$\text{τοξ}_0\ \text{εφ}2-\text{τοξ}_0\ \text{εφ}(2/3)=0{,}5191\ \text{rad}.$$

385) Ἐπαληθεύσατε κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ, βάσει τῶν πινάκων, τὴν ἰσότητα:

$$\text{τοξ}_0\ \text{ημ}\frac{4}{5}+\text{τοξ}_0\ \text{ημ}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}.$$

386) Δείξατε τὴν ἰσότητα:

$$4\text{τοξ}\ \text{εφ}\frac{1}{5}-\text{τοξ}\ \text{εφ}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

Ἐπίσης, ἐπαληθεύσατε αὐτήν, κατὰ προσέγγισιν, βάσει τῶν πινάκων. (Τὰ τόξα ἐκφράζουν πρωτεύουσας τιμὰς εἰς ἀκτίνια).

387) Δείξατε ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ (δηλ. ἂν ἔχῃ νόημα) ἡ παράστασις:

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}\,\text{συν}^2\left\{\frac{1}{4}\,\text{τοξσυν}\frac{\beta^2-8\alpha\gamma}{\beta^2}\right\},$$

τότε αὕτη εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

388) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$S_\nu = \text{τοξ}_0\,\text{εφ}\frac{1}{1+1+1^2} + \text{τοξ}_0\,\text{εφ}\frac{1}{1+2+2^2} + \ldots + \text{τοξ}_0\,\text{εφ}\frac{1}{1+\nu+\nu^2}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ XI

i) *Τί παριστάνει τὸ σύμβολον τοξημx καὶ ποία ἡ πρωτεύουσα τιμή του; Ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν* $\text{τοξ}_0\,\text{ημ}x$ *καὶ* $\text{τοξ}_0\,\text{ημ}(-x)$;

ii) *Τί παριστάνει τὸ σύμβολον τοξσυνx καὶ ποία ἡ πρωτεύουσα τιμή του; Ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν* $\text{τοξ}_0\,\text{συν}x$ *καὶ* $\text{τοξ}_0\,\text{συν}(-x)$;

iii) *Τί παριστάνει τὸ σύμβολον τοξεφx καὶ ποία ἡ πρωτεύουσα τιμή του;*

iv) *Ποῖαι αἱ πρωτεύουσαι τιμαὶ τῶν συμβόλων τοξ στεμx, τοξτεμx, τοξ σφx ;*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ VI - XI

389) Δείξατε ὅτι : $5+6\,\text{συν}A+2\,\text{συν}2A>0$.

390) Δείξατε ὅτι : $\dfrac{\text{ημ}3\theta}{1+2\,\text{συν}2\theta}=\text{ημ}\theta$ καὶ ἐξ αὐτοῦ εὕρετε ὅτι: $\text{ημ}15^0=$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $(\text{ημ}^2\theta\neq 3/4)$.

391) Ἐὰν $\text{ημ}2x=3/5$, $\text{συν}2x=-4/5$, ποία εἶναι τότε ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$2\text{ημ}^2x+6\text{ημ}x\,\text{συν}x+3\text{συν}^2x\ ;$$

392) Δείξατε ὅτι : $\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\theta}{2}\right)\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2\,\text{συν}\theta-1}{2\,\text{συν}\theta+1}$.

393) Ἐὰν εφA, εφB εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+px+q=0$, εὕρετε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως :

$$\text{ημ}^2(A+B)+p\,\text{ημ}(A+B)\,\text{συν}(A+B)+q\,\text{συν}^2(A+B)$$

συναρτήσει τῶν p καὶ q.

394) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $A=2B\neq 2\Gamma$ δείξατε ὅτι : $\alpha^2=\beta(\beta+\gamma)$.

395) Δείξατε ὅτι : $\dfrac{\text{συν}\alpha}{2\,\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)-\text{συν}\alpha}=\dfrac{1+\text{ημ}\alpha}{1-\text{ημ}\alpha}$ (ὑποτ. $\text{συν}\alpha\neq 0$).

396) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύει ἡ σχέσις :

$$\gamma^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta\,\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}.$$

397) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$2(\eta\mu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2=\eta\mu^8\alpha+\sigma\upsilon\nu^8\alpha+1.$$

398) Γνωρίζοντες ὅτι : $\left\{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=1{,}2,\quad \frac{\pi}{2}<x<\pi\right\}$ ὑπολογίσατε τὴν εφx.

399) Ἐὰν $\nu>1$ λύσατε ὡς πρὸς x τὴν ἐξίσωσιν :

$$\tau o\xi_0\,\sigma\varphi x+\tau o\xi_0\,\sigma\varphi(\nu^2-x+1)=\tau o\xi_0\,\sigma\varphi(x-1).$$

400) Δείξατε ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)-\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\mu 2\alpha.$$

401) Δείξατε ὅτι :

$$\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{2\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}.$$

402) Δείξατε τὴν ταυτότητα :

$$\sigma\upsilon\nu 4\theta\,\eta\mu\theta+\eta\mu 2\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta=\eta\mu 3\theta\,\sigma\upsilon\nu 2\theta.$$

403) Τρέψατε τὴν παράστασιν 4συνx συνy συνz εἰς ἄθροισμα συνημιτόνων.

404) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης:

$$2\sigma\upsilon\nu\{(\nu+1)\theta\}=2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta).2\sigma\upsilon\nu\theta-2\sigma\upsilon\nu\{(\nu-1)\theta\}$$

καὶ τῇ βοηθείᾳ ταύτης νὰ δειχθῇ ὅτι ἄν :

$$2\sigma\upsilon\nu\theta=\alpha+\frac{1}{\alpha}\quad \text{τότε}\quad 2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)=\alpha^\nu+\frac{1}{\alpha^\nu}$$

ὅπου ν τυχὼν ἀκέραιος (καὶ α μιγαδικὸς ἀριθμός).

405) Ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι $\sigma\upsilon\nu^4\alpha=\dfrac{3+\sigma\upsilon\nu 4\alpha+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{8}$ νὰ δειχθῇ κατόπιν ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu^4\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}.$$

406) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$S_\nu=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2 2\alpha+\dots+\eta\mu^2(\nu\alpha)\qquad (\nu \text{ φυσικὸς ἀριθμός}).$$

407) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\alpha^3\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\beta^3\sigma\upsilon\nu(\Gamma-A)+\gamma^3\sigma\upsilon\nu(A-B)=3\alpha\beta\gamma,$$

408) Ἐὰν $\eta\mu\theta=\dfrac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{1+\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}$ δείξατε ὅτι :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\pm\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right).$$

409) Ἐντὸς κύκλου (Ο,x) ἐγγράφονται τρεῖς κύκλοι : (Κ, α), $\left(M,\frac{\alpha}{2}\right)$, $\left(M',\frac{\alpha}{2}\right)$ ἐφαπτόμενοι καὶ μεταξύ των ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι

$\sigma\upsilon\nu\widehat{MKO} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς x τοῦ πρώτου κύκλου.

410) Ἐὰν α,β,γ, Α γωνίαι μεταξὺ 0^0 καὶ π πληροῦσαι τὴν σχέσιν : $\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu A$ δείξατε ὅτι : $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$.

411) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἰσότης $\eta\mu\beta=\frac{1}{5}\eta\mu(2\alpha+\beta)$ συνεπάγεται τὴν

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\alpha, \quad (\text{ὑποτιθ. } \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\neq 0).$$

412) Ἐὰν τόξου $(\widehat{AB})=\alpha^0$ ἡ χορδὴ διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη $A\Lambda=\Lambda M=$ $=MB$ εἶναι δὲ Ο τὸ κέντρον τοῦ τόξου, νὰ δειχθῇ ὅτι : $\sigma\upsilon\nu\Lambda\widehat{O}M=\frac{4+5\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{5+4\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$

413) Ἐὰν τὸ ημ Α καὶ συνΑ εἶναι σύμμετροι ἀριθμοὶ νὰ δειχθῇ ὅτι καὶ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$ εἶναι ὁμοίως· καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν δὲ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ἐμβαδὸν Ε καὶ αἱ πλευραὶ μετρῶνται ὑπὸ συμμέτρων ἀριθμῶν τότε αἱ $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$ εἶναι ἐπίσης σύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ τέλος, ἂν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$, R εἶναι σύμμετρο τότε καὶ α,β,γ, *E* εἶναι σύμμετροι.

414) Ν' ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\frac{|\eta\mu 2x|}{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|-1}.$$

415) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ δίδονται ὅτι, $\varepsilon\varphi B\widehat{A}\Delta=2\sqrt{2}$, $(B\Delta)=5\sqrt{2}$ καὶ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν διαγώνιον ΒΔ ἰσοῦται μὲ 5m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου.

416) Διὰ σημείου Ρ κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΑΒ κύκλου, ἄγεται εὐθεῖα ΡΓ περατουμένη ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ εἰς τὸ Γ κάθετος ἐπ' αὐτὴν τέμνουσα εἰς Δ τὴν ΑΒ. Ἐὰν $(B\widehat{\Gamma}P)=\alpha$ δείξατε ὅτι :

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{(PA)}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{(PB)}=\frac{1}{(P\Delta)}.$$

417) Ἂν x καὶ y τυχόντα τόξα νὰ δειχθῇ ἡ ἀνισότης : $1+\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2y\geqq\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y$.

418) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν τόξων x,y,ω,φ τὰ ὁποῖα παρέχουν οἱ τύποι :

$$(A)\ \left\{ x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\quad y=\frac{3\pi}{4}+2\lambda\pi,\ \omega=-\frac{3\pi}{4}+2\rho\pi,\quad \varphi=\frac{\pi}{4}+2\mu\pi,\right.$$

ὅπου k, λ, ρ, μ διατρέχουν ἕκαστος, ὅλους τοὺς ἀκεραίους}

εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σύνολον τῶν τόξων t, υ τὰ ὁποῖα παρέχουν οἱ τύποι :

$$(B)\ \left\{ t=\frac{\pi}{4}+k'\pi,\quad \upsilon=-\frac{\pi}{4}+k''\pi,\right.$$ ὅπου k′,k″ διατρέχουν ἕκαστος ὅλους

τοὺς ἀκεραίους}.

419. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν (ἀπείρων) τόξων x καὶ x′ τὰ ὁποῖα παρέχουν οἱ τύποι :

(A) $\{x=30^0.k,\ \ x'=90^0\lambda+45^0,\ \ k,\lambda$ τυχόντες ἀκέραιοι$\}$

εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σύνολον τῶν τόξων y, y', y'', τὰ ὁποῖα παρέχουν οἱ τύποι :

(B) $\{y=45^0+180^0.\mu,\ \ y'=-45^0+180^0\nu,\ \ y''=30^0.\rho$, ὅπου μ, ν, ρ τυχόντες ἀκέραιοι$\}$.

420. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη περίοδος τῆς συναρτήσεως :

$$y=5\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\frac{2x}{5}\right).$$

421) Ὅταν εἶναι δεδομένη ἡ τιμὴ τοῦ ημθ (χωρὶς νὰ δίδεται ἡ θ) εὕρετε πόσας τιμὰς δύναται νὰ ἔχῃ τὸ $\eta\mu\,\frac{\theta}{3}$;

422) Ἐὰν δοθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$, ἔστω $\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{2}=\lambda$ νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν τιμῶν τοῦ $\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{3}$. Κατόπιν νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰς δυνατὰς τιμὰς τοῦ $\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha}{3}$.

423) Μὲ χρῆσιν τοῦ τύπου τοῦ παρέχοντος τὸ συνημίτονον τοῦ πενταπλασίου, τόξου, νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\,\frac{3\pi}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\pi$, $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\,\frac{9\pi}{5}$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $16x^5-20x^3+5x+1=0$.

424) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἄπειρα τόξα τὰ παρεχόμενα ὑπὸ τῶν δύο τύπων :

$$\left\{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad \text{καὶ}\quad x'=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k \text{ τυχὼν ἀκέραιος}\right\}$$

δύναται νὰ παρασταθοῦν ὑπὸ ἑνὸς τύπου : $y=(2\rho+1)\frac{\pi}{2}$, ὅπου ρ, τυχὼν ἀκέραιος.

425) Νὰ εὑρεθῇ ἄνευ πινάκων ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου :

$$\varepsilon\varphi 6^0\ \varepsilon\varphi 42^0\ \varepsilon\varphi 66^0\ \varepsilon\varphi 78^0.$$

426) Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται αἱ διαγώνιοι τετραγώνου ἀπὸ τυχὸν σημεῖον ὁμοκέντρου πρὸς αὐτὸ περιφερείας, εἶναι σταθερόν.

427) Ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ τὴν μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0 περιεχομένην γωνίαν θ τὴν πληροῦσαν τὴν ἐξίσωσιν $8\eta\mu^2\theta+10\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta-3\sigma\upsilon\nu^2\theta=2$, ἀφοῦ προηγουμένως ὑπολογίσετε τὴν εφθ.

428) Ἐκ τῆς σχέσεως : $\sigma\upsilon\nu x=(\sigma\upsilon\nu 60^0-\lambda)/(1-\lambda\sigma\upsilon\nu 60^0)$ ὁρίζεται τὸ λ ὡς συνάρτησις τοῦ x. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πῶς μεταβάλλεται τὸ λ ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0.

429) Δείξατε ὅτι ἡ παράστασις $\alpha\eta\mu^2x+2\beta\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\gamma\sigma\upsilon\nu^2x$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{\alpha+\gamma}{2}-\sqrt{\beta^2+\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2}$ καὶ $\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sqrt{\beta^2+\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2}$ ὅταν τὸ x λαμβάνῃ ὅλας τὰς δυνατὰς τιμάς.

430) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x=2\tau o\xi_0\,\eta\mu x$.

431) Πῶς μεταβάλλεται ἡ Π.Τ. τοξ εφ $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ ὅταν τὸ λ αὐξάνεται ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$;

432) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{τοξ ημ}x - \text{τοξ συν}x = \text{τοξ ημ}(3x-2)$$

ὅπου τὰ τόξα ἔχουν τὰς πρωτευούσας τιμάς των.

433) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

i) $\text{τοξ σφ}\frac{1}{x+1} + \text{τοξ σφ}\frac{1}{x-1} = \text{τοξ εφ}3x - \text{τοξ εφ}x$

ii) $\text{τοξ εφ}\frac{2x}{3} + \text{τοξ σφ}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$

ὅπου τὰ τόξα ἔχουν τὰς πρωτευούσας τιμάς των.

434) Ἐὰν $A+B+\Gamma+\Delta=2\pi$ δείξατε ὅτι:

$\text{συν}2A+\text{συν}2B+\text{συν}2\Gamma+\text{συν}2\Delta=4\text{συν}(A+B)\text{συν}(A+\Gamma)\text{συν}(A+\Delta)$.

435) Ἐὰν A, B, Γ παριστοῦν τὰς γωνίας ἑνὸς τριγώνου καὶ τεθῇ:

$$\text{συν}2A\ \text{συν}2B\ \text{συν}2\Gamma = p, \qquad \text{ημ}2A\ \text{ημ}2B\ \text{ημ}2\Gamma = q$$

δείξατε ὅτι:

$$p - q\ \text{σφ}2A = \text{συν}^2 2A.$$

Ἐὰν δὲ $p=\frac{1}{2}$ καὶ $q=0$ δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἶναι ὡς 1 : 3 : 4.

436) Ἐὰν $\text{συν}x+\text{συν}y=\alpha$ καὶ $\text{ημ}x+\text{ημ}y=\beta$, δείξατε ὅτι:

i) $\text{συν}(x-y)=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2-2)$.

ii) $\text{εφ}\frac{x+y}{2}=\frac{\beta}{\alpha}$.

437) Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\alpha\ \text{εφ}A+\beta\ \text{εφ}B=(\alpha+\beta)\text{εφ}\frac{A+B}{2}.$$

δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

438) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον ἐὰν ὑφίσταται μία τῶν κάτωθι σχέσεων:

i) $\text{ημ}A=\frac{\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma}{\text{συν}B+\text{συν}\Gamma}$.

ii) $\text{ημ}^2A+\text{ημ}^2B+\text{ημ}^2\Gamma=2$.

439) Ἐὰν P σημεῖον κείμενον ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ τοιοῦτον ὥστε:

$$P\widehat{AB}=P\widehat{B\Gamma}=P\widehat{\Gamma A}=\omega \text{ δείξατε ὅτι:}$$

i) $\text{σφ}\omega=\text{σφ}A+\text{σφ}B+\text{σφ}\Gamma$.

ii) $\text{στεμ}^2\omega=\text{στεμ}^2A+\text{στεμ}^2B+\text{στεμ}^2\Gamma$.

440) Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\text{συν}A+\text{συν}B=4\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}$$

ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου βαίνουν κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον.

441) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}=3\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

δείξατε ὅτι τότε : $\sigma\varphi\frac{A}{2}\,\sigma\varphi\frac{B}{2}=4.$

442) Δεδομένου ὅτι τὰ x,y πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν

$$\tau o\xi\sigma\varphi\frac{y}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2\ \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\sqrt{3-4x^2}}{2x}-\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\sqrt{3-4x^2}}{x}$$ ὅπου $y\neq 0$,

$1-x^2-y^2>0$, $3-4x^2>0$, νὰ εὑρεθῇ ἀκεραία ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις, δηλ. ἐξίσωσις $f(x,y)=0$ ὅπου $f(x,y)$ ἀκέραιον πολυώνυμον, τὴν ὁποίαν πληροῦν τὰ x,y.

443) Ν' ἁπλουστευθῇ ἡ παράστασις :

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu 3\theta}{\eta\mu 5\theta-\eta\mu\theta}\cdot\frac{\eta\mu 8\theta+\eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu 4\theta+\sigma\upsilon\nu 6\theta}.$$

444) Ἐὰν $\eta\mu x=\lambda\eta\mu(\alpha-x)$ δείξατε ὅτι τότε :

$$\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

445) Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει :

$$\alpha\sigma\upsilon\nu 2B+2\beta\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B=\gamma\sigma\upsilon\nu B-\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

446) Νὰ δοθῇ εἰς τὴν παράστασιν $\sigma\upsilon\nu^4 x\eta\mu x$ ἡ μορφὴ $c_1\eta\mu x+c_3\eta\mu 3x+$ $+c_5\eta\mu 5x$ ὅπου c_1, c_3, c_5 προσδιοριστέοι σταθεροὶ ἀριθμοί.

Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως ὅταν $x=0{,}173$ ἀκτ. ;

447) Δείξατε ὅτι ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$\eta\mu 4A+\eta\mu 4B+\eta\mu 4\Gamma=0$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

448) Ἐκφράσατε τὰς ρίζας τῆς $x^2-\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}x-\frac{1}{4}=0$ διὰ τύπων λογιστῶν διὰ τῶν λογαρίθμων.

449) Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\tau\varepsilon\mu^2\frac{\pi}{9}+\tau\varepsilon\mu^2\frac{3\pi}{9}+\tau\varepsilon\mu^2\frac{5\pi}{9}+\tau\varepsilon\mu^2\frac{7\pi}{9}=40.$$

450) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι :

$$\beta=4\gamma\sigma\upsilon\nu\left(30^0+\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(30^0-\frac{A}{2}\right)$$

δείξατε ὅτι τότε $A=2\Gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις καὶ συστήματα. Τριγωνομετρικὴ ἀπαλοιφή.

71. Αἱ θεμελιώδεις τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

Καλεῖται τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις πᾶσα ἐξίσωσις τῆς ὁποίας τὰ μέλη συγκροτοῦνται ἀπὸ τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀγνώστων τόξων· αὕτη ἀληθεύει δι' εἰδικὰς τιμὰς τοῦ τόξου ἢ τῶν τόξων τούτων (ἢ καὶ διὰ καμμίαν, ὁπότε λέγεται «ἀδύνατος» τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις).

Π.χ. αἱ ἰσότητες:

(1) $\quad εφx=ημ2x, \quad ημx+ημy=\sqrt{2}/2, \quad ημ3x=1{,}7$

εἶναι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

Ἐὰν ἡ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις περιέχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον τόξον x τότε κάθε τόξον τὸ ὁποῖον τιθέμενον εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀγνώστου τόξου x, τὴν ἐπαληθεύει, λέγεται *λύσις* ἢ καὶ *μερικὴ λύσις* τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως. (Ἔτσι, π.χ. ἡ 1η ἐκ τῶν (1) ἔχει μερικὴν λύσιν, τὸ τόξον $x=0$ καθὼς καὶ τὸ $x=\pi/4$ ἀκτιν. ἐνῷ ἡ 3η ἐκ τῶν (1) δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν, εἶναι ἀδύνατος).

Τὸ σύνολον τῶν μερικῶν λύσεων καλεῖται γενικὴ λύσις τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ἡ δὲ εὕρεσις τῆς γενικῆς λύσεως καλεῖται **ἐπίλυσις** τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως.

Ὁμοίως, ἂν ἡ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις περιέχῃ δύο ἄγνωστα τόξα x καὶ y ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, τότε μερικὴ λύσις αὐτῆς καλεῖται κάθε ζεῦγος τόξων: (x_0, y_0) τοιούτων ὥστε ἂν τὸ πρῶτον τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ x καὶ τὸ δεύτερον εἰς τὴν θέσιν τοῦ y, ἡ ἐξίσωσις νὰ ἐπαληθεύεται. (Π.χ. ἡ 2α ἐκ τῶν (1) ἔχει μίαν μερικὴν λύσιν τὴν

$\left(x=0,\ y=\frac{\pi}{4}\right)$ ἐπίσης δὲ καὶ τὴν $\left(x=\frac{\pi}{4},\ y=0\right)\Big)$. Τὸ σύνολον τῶν μερικῶν λύσεων ἀποτελεῖ τὴν γενικὴν λύσιν.

Τὰ ὅμοια ἰσχύουν καὶ δι' ἐξισώσεις μὲ τρία ἄγνωστα τόξα, κ.ο.κ.

Αἱ ἁπλούσταται (ἢ θεμελιώδεις) τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις εἶναι τῶν ἑπομένων μορφῶν:

i) **ημx=α, ὅπου α δοθεὶς ἀριθμὸς τοιοῦτος ὥστε $-1 \leqq \alpha \leqq 1$.**

Πρὸς ἐπίλυσιν αὐτῆς εὑρίσκομεν διὰ τῶν πινάκων ἓν τόξον τ (μεταξὺ -90^0 καὶ $+90^0$) ἔχον ἡμίτονον ἴσον πρὸς α, δηλ. ημτ=ημα. (Προφανῶς τὸ τ εἶναι μία μερικὴ λύσις). Ἡ ἐξίσωσις, τότε γράφεται:

(2) $$\eta\mu x = \eta\mu\tau.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς (2) πρέπει νὰ εὕρωμεν **ὅλα** τὰ τόξα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ἡμίτονον μὲ τὸ τόξον τ. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 55, ὅλα τὰ τόξα x τὰ πληροῦντα τὴν (2) δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους:

(3) $$x=\tau+k\cdot 360^0 \quad \text{καὶ} \quad x=180^0-\tau+k\cdot 360^0$$
$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$$

Αἱ (3) παρέχουν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς (2). Ἐπειδὴ δὲ τὸ k διατρέχει ὅλους τοὺς ἀκεραίους, δίδει εἰς τὸ x ἄπειρον πλῆθος ἀντιστοίχων τιμῶν. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι: *τὸ πλῆθος τῶν λύσεων τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως ημx=α εἶναι ἄπειρον*. Τοῦτο συμβαίνει δι' ὅλας τὰς τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ ἀποτελεῖ μίαν οὐσιώδη διαφορὰν μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἕναν ἄγνωστον αἱ ὁποῖαι ὡς γνωστὸν ἔχουν ἕνα περιωρισμένον πλῆθος λύσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Λύσις. Ζητοῦμεν ἓν τόξον τ, ἔχον ἡμίτονον ἴσον πρὸς $-1/\sqrt{5}$. Δηλ. νὰ εἶναι:

$\eta\mu\tau=-1/\sqrt{5}$ ἢ $\eta\mu(-\tau)=1/\sqrt{5}$ καὶ ἑπομένως, $\lambda o\gamma\,\eta\mu(-\tau)=-\frac{1}{2}\lambda o\gamma 5 = \bar{1},65052$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν: $(-\tau)=26^0 33'55''$ καὶ $\tau=-(26^0 33'55'')$.

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x=-1/\sqrt{5}$ γράφεται ημx=ημτ πάντα δὲ τὰ τόξα x τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ἡμίτονον μὲ τὸ τ, παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων: $x=\tau+k.360^0$ καὶ $x=180^0-\tau+k'.360^0$ θὰ ἔχωμεν ὡς γενικὴν λύσιν τὸ σύνολον τῶν τόξων:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-(26^0 33'55'')+k.360^0 \\ x=-206^0 33'55''+k'.360^0 \end{array}\right. \qquad (k,\ k'=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$$

Δίδοντες είς τὸ k ἤ εἰς τὸ k′ τυχοῦσαν ἀκεραίαν τιμὴν εὑρίσκομεν μίαν ἀντίστοιχον μερικὴν λύσιν. Π.χ. διὰ k=1 ἔχομεν τὴν μερικὴν λύσιν:
$x=333^0 26'5''$ καὶ διὰ $k'=-1$ τήν: $x=-(153^0 26'5'')$.

ii) $\sigma\upsilon\nu x=\beta$, ὅπου $-1\leqq\beta\leqq1$.

Πρὸς ἐπίλυσιν αὐτῆς εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων, τόξον τ (μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0) ἔχον συνημίτονον τὸ β. Ἡ ἐξίσωσις, τότε γράφεται:

(4) $$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu \tau$$

καὶ ἡ ἐπίλυσις αὐτῆς ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν ὅλων τῶν τόξων x τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ συνημίτονον μὲ τὸ τόξον τ. Κατὰ τ' ἀποδειχθέντα εἰς τὴν § 54, ὅλα τὰ x τὰ πληροῦντα τὴν (4) παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων:

(5) $\{x=\tau+k\cdot 360^0,\ x=-\tau+k'\cdot 360^0$, ὅπου $k, k'=0, \pm1, \pm2,\dots\}$

Οἱ τύποι (5) παρέχουν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ii).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ -30^0 καὶ $+850^0$ λύσεις τῆς ἐξισώσεως: $\sigma\upsilon\nu x=-0{,}513$.**

Λύσις. Ζητοῦμεν τόξον τ τοιοῦτον ὥστε $\sigma\upsilon\nu\tau=-0{,}153$ ἤ $\sigma\upsilon\nu(180^0-\tau)=$ $=0{,}513$.

Ἔχομεν. $\lambda o\gamma\{\sigma\upsilon\nu(180^0-\tau)\}=\overline{1}{,}71012$, $180^0-\tau=59^0 8'8''$ καὶ $\tau=120^0 51'52''$.

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους (5):

α′) $x=120^0 51'52''+k.360^0$
β′) $x=-(120^0 51'52'')+k'.360^0$ (k, k′ ἀκέραιοι).

Ἐκ τῶν ἀπείρων τούτων τόξων ζητοῦνται τὰ μεταξὺ -30^0 καὶ 850^0 περιεχόμενα. Θέτοντες εἰς τὸν τύπον α′), k=0, k=1, k=2, εὑρίσκομεν τόξα x θετικά, μικρότερα τῶν 850^0 ἐνῶ ἀπὸ k=3 καὶ ἄνω εὑρίσκομεν τόξα ὑπερβαίνοντα τὰς 850^0 καὶ συνεπῶς ὄχι δεκτά.
Ἐπίσης, διὰ k=−1, −2,....ὁ τύπος α′), παρέχει τόξα κάτω τῶν -30^0 καὶ συνεπῶς ἀπαράδεκτα. Ὥστε ἐξ ὅλων τῶν τόξων α′), δεκτὰ εἶναι μόνον τὰ προκύπτοντα διὰ k=0, 1, 2.

Θέτοντες, εἰς τὸν τύπον β′), k′=1, k′=2 εὑρίσκομεν τιμὰς τοῦ x θετικὰς καὶ $<850^0$. Διὰ k′=3, 4,... αἱ προκύπτουσαι τιμαὶ τοῦ x ὑπερβαίνουν τὰς 850^0. Ἐπίσης θέτοντες k′=0, −1, −2,... λαμβάνομεν προφανῶς ἐκ τοῦ τύπου β′), τόξα x, μικρότερα τῶν -30^0 καὶ συνεπῶς ἀπαράδεκτα. Ὥστε ὁ τύπος β′), δίδει τόξα μεταξὺ τῶν προκαθωρισμένων ὁρίων, μόνον ὅταν k′=1 καὶ k′=2. Τελικῶς αἱ ζητούμεναι λύσεις εἶναι:

$120^0 51'52'$, $480^0 51'52''$, $840^0 51'52''$ (προκύπτουσαι ἐκ τῶν α′), διὰ k=0,1,2)
καὶ $239^0 8'8''$, $599^0 8'8''$ (προκύπτουσαι ἐκ τῶν β′), διὰ k′=1, 2).

iii) $\varepsilon\varphi x=\gamma$, ὅπου γ τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμός.

Εὑρίσκομεν καὶ πάλιν διὰ τῶν πινάκων, τόξον μεταξὺ -90^0 καὶ $+90^0$ ἔχον ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς γ. Ἔστω τοῦτο τὸ τ. Ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν:

(6) $$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\tau$$

καὶ ἡ ἐπίλυσις αὐτῆς ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν ὅλων τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν μὲ τὸ τ ἐφαπτομένην. Κατὰ τὴν § 56, ὅλα τὰ x τὰ πληροῦντα τὴν (6) δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$x=\tau+k\cdot180^0 \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μεταξὺ —1,2 ἀκτιν. καὶ +4 ἀκτιν. τόξα, τὰ πληροῦντα τὴν ἐξίσωσιν:**

$$\sqrt{2}\ \eta\mu x=-\sqrt{6}\ \sigma\upsilon\nu x.$$

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις γράφεται κατόπιν διαιρέσεως διὰ συνx:

$$\sqrt{2}\ \varepsilon\varphi x=-\sqrt{6} \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi x=-\sqrt{3}.$$

Ἀλλά, $\sqrt{3}=\varepsilon\varphi60^0$ καὶ $-\sqrt{3}=\varepsilon\varphi(-60^0)$, ὥστε ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi(-60^0).$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ γενικὴ λύσις:

$$x=-60^0+k.180^0.$$

Ἐπειδὴ ζητοῦμεν τὰς μεταξὺ —1,2 καὶ 4 ἀκτινίων λύσεις, διὰ τοῦτο γράφομεν τὴν γενικὴν λύσιν εἰς ἀκτίνια.

$$(7) \qquad x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \quad \text{ἢ} \quad x=-1{,}0472+k\cdot3{,}1416$$

(λαμβάνοντες κατὰ προσέγγισιν, π=3,1416). Θέλομεν τὸ x νὰ πληροῖ τὸν περιορισμόν:

$$-1{,}2<x<4, \quad \text{δηλ.:} \quad -1{,}2<-1{,}0472+k\cdot3{,}1416<4 \quad \text{ἢ}$$

$$-0{,}1528<k\cdot3{,}1416<5{,}0472 \quad \text{ἢ}$$

$$-\frac{0{,}1528}{3{,}1416}<k<\frac{5{,}0472}{3{,}1416} \quad \text{ἢ}$$

$$(8) \qquad -0{,}4\ldots\ldots<k<1{,}6\ldots\ldots$$

Αἱ μόναι ἀκέραιοι τιμαὶ τοῦ x αἱ πληροῦσαι τὴν (8) εἶναι k=0 καὶ k=1. Εἰς ταύτας ἀντιστοιχοῦν ἀπὸ τὰς (7), δύο τιμαὶ τοῦ x:

$$x=-1{,}0742 \text{ rad} \quad \text{καὶ} \quad x=2{,}1944 \text{ rad}$$

αἵτινες εἶναι καὶ αἱ ζητούμεναι λύσεις.

iv) σφx=δ, ὅπου δ≠0.

Θέτομεν, δ=σφτ, ὅπου τ, διὰ τῶν πινάκων εὑρισκόμενον τόξον καὶ οὕτω ἡ ἐξίσωσις γράφεται: σφx=σφτ (ἢ εφx=εφτ) καὶ ἔχει γενικὴν λύσιν: $x=\tau+k\cdot360^0$, ὅπου k=0, ±1, ±2,...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

451) Ἐὰν α≠0 καὶ β≠0 ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχουν λύσιν καὶ ποῖαι ὄχι;

i) $(\alpha^2+\beta^2)\sigma\upsilon\nu x=2\alpha\beta$, ii) $(\alpha^2+\beta^2)\sigma\tau\varepsilon\mu x=\alpha^2-\beta^2$, iii) $\tau\varepsilon\mu^2x=\frac{1}{3}$.

452) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γενικὴ λύσις τῆς ημx=0 καθὼς καὶ τῆς εφx=0 εἶναι:

$$x=k\pi, \quad (k=0,\ \pm1,\ldots).$$

453) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γενικὴ λύσις τῆς συνx=0 εἶναι :

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ldots).$$

454) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γενικὴ λύσις τῆς ημx=1 εἶναι :

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ἀκτιν.}$$

455) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γενικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως ημx=ημτ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$x=\nu\pi+(-1)^{\nu}\tau \text{ rad}, \qquad \nu \text{ ἀκέραιος τυχών.}$$

72. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς τὰς θεμελειώδεις.

α') *Ἡ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $f(z)=0$, ὅπου z εἶναι ἕνας τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τοῦ ἀγνώστου τόξου x καὶ $f(z)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ z.* Προφανῶς, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀρκεῖ νὰ λυθῇ ἡ ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις $f(z)=0$ διὰ ν' ἀναχθῶμεν εἰς θεμελιώδεις τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις $z=z_1$, $z=z_2$,… ὅπου z_1, z_2,… αἱ ρίζαι τῆς $f(z)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. **i. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+1=0$.**

Λύσις. Ἐὰν τεθῇ ημx=z ἡ ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν :

$$2z^2-3z+1=0$$

ἡ ὁποία ἔχει ρίζας $\quad z_1=\frac{1}{2} \quad$ καὶ $\quad z_2=1$.

Ἔτσι, ἡ ἀρχικὴ, σχίζεται εἰς δύο ἐξισώσεις :

(1) $$\eta\mu x=\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu x=1$$

αἱ ὁποῖαι εἶναι τοῦ ἁπλουστάτου τύπου. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν (1) δίδει :

$$x=30^0+k\cdot 360^0 \quad \text{καὶ} \quad x=150^0+k'\cdot 360^0$$

καὶ ἡ δευτέρα : $\quad x=90^0+k''\cdot 360^0$, ὅπου k, k', k'' τυχόντες ἀκέραιοι.

ii. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\sigma\upsilon\nu^3 x-2\sigma\upsilon\nu^2 x-8\sigma\upsilon\nu x=0$.

Λύσις. Θέτομεν συνx=z καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῆς δοθείσης, τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν

$$z^3-2z^2-8z=0 \quad \text{ἢ} \quad z(z^2-2z-8)=0$$

ἥτις ἔχει ρίζας : $z_1=0$, $z_2=-2$, $z_3=4$. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰς τρεῖς θεμελιώδεις : $\quad$ συνx=0, συνx=−2, συν+=4.

Ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη ἐκ τούτων δὲν ἔχουν προφανῶς καμμίαν λύσιν (διότι $-1\leqq\sigma\upsilon\nu x\leqq 1$). Ἡ πρώτη μόνον, δίδει διὰ τὸν x τὰς τιμάς :

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (k \text{ ἀκέραιος}) \text{ (βλ. ἀσκ. 453).}$$

β') *Ἡ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς f(ημx, συνx, εφx, σφx)=0, ὅπου f ἀκέραιον πολυώνυμον.*

Δηλαδὴ περιέχει διαφόρους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἰδίου τόξου x.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφράσωμεν πάντας τοὺς ἐν τῇ ἐξισώσει περιεχομένους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς συναρτήσει ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἢ συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ ἢ συναρτήσει τοῦ συν2x (ἂν ὑπάρχουν $\eta\mu^2 x$, $\sigma\upsilon\nu^2 x$ (τύπος <u>51</u>)). Προτιμῶμεν δὲ ἐκείνας τὰς ἀντικαταστάσεις αἵτινες δὲν μᾶς ὁδηγοῦν εἰς ἐξίσωσιν μὲ ριζικὰ ἢ εἰς ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν μεγάλου βαθμοῦ. Τούτου γενομένου φθάνομεν εἰς ἐξίσωσιν περιέχουσαν ἕνα μόνον τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τοῦ x ἢ τοῦ $\frac{x}{2}$ ἢ τοῦ 2x, δηλ. φθάνομεν εἰς ἐξίσωσιν τῆς προηγουμένης μορφῆς.

iii. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0$.

Λύσις: Ἐνδεικνυομένη ἀντικατάστασις εἶναι ἡ: $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$.

Δι' αὐτῆς ἡ ἐξίσωσις γίνεται: $2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$ ἢ $2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$, δηλ. δευτεροβάθμιος ὡς πρὸς συνx. Θέτομεν συνx=z καὶ προχωροῦμεν κατὰ τὰ γνωστά.

iv. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5\varepsilon\varphi^2 x - \tau\varepsilon\mu^2 x = 11$,

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν $\tau\varepsilon\mu^2 x$ συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi^2 x$ ὁπότε ἡ ἐξίσωσις θὰ περιέχῃ ὡς ἄγνωστον, μόνον τὴν $\varepsilon\varphi^2 x$. Διὰ τοῦ τύπου $1+\varepsilon\varphi^2 x = \tau\varepsilon\mu^2 x$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$5\varepsilon\varphi^2 x - (1+\varepsilon\varphi^2 x) = 11 \quad \text{ἢ} \quad 4\varepsilon\varphi^2 x = 12$$

καὶ σχίζεται εἰς δύο ἁπλουστάτας: $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ καὶ $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$.

v. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x = \gamma$ ὅπου α,β,γ δεδομένοι ἀριθμοί.

Λύσις. Ἐδῶ, δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὸ ημx καὶ συνx συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, διὰ τῶν τύπων:

$$\eta\mu x = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}, \qquad \sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις θὰ περιέχῃ ὡς μόνον ἄγνωστον τὴν $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, καθισταμένη:

$$\frac{2\alpha\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} + \beta\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} = \gamma \quad \text{ἢ} \quad (\beta+\gamma)\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2} - 2\alpha\varepsilon\varphi\frac{x}{2} + \gamma - \beta = 0.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας εὑρίσκομεν δύο ἐν γένει τιμὰς τῆς $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \rho_1$ $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \rho_2$. Ἵνα αἱ τιμαὶ ρ_1, ρ_2 εἶναι παραδεκταί, ἀρκεῖ νὰ εἶναι πραγματικαί. Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\alpha^2 - (\beta+\gamma)(\gamma-\beta) \geq 0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \geq 0.$$

γ') *Ἡ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς:*

$$f(\eta\mu x,\ \eta\mu 2x, \cdots\ \sigma\upsilon\nu x,\ \sigma\upsilon\nu 2x, \cdots)=0$$

ὅπου τὸ f σημαίνει ἀκέραιον πολυώνυμον.

Δηλαδὴ περιέχει τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ὄχι μόνον ἑνὸς ἀγνώστου τόξου, ἀλλὰ καὶ ἀκεραίων πολλαπλασίων αὐτοῦ.

Τότε, ἐν γένει, ἐκφράζομεν τοὺς εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἐμπεριεχομένους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ 2x, τοῦ 3x,... συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ x βάσει τῶν γνωστῶν τριγωνομετρικῶν τύπων καὶ φθάνομεν εἰς ἐξίσωσιν περιέχουσαν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μόνον τοῦ x, δηλ. φθάνομεν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν. (Ἐκτὸς ἂν ἄλλοι μετασχηματισμοὶ τῆς ἐξισώσεως τὴν καθιστοῦν ἁπλουστέραν).

vi. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $2\eta\mu x\, \eta\mu 3x=1$.

Λύσις. Δυνάμει τοῦ τύπου $\eta\mu 3x=3\eta\mu x-4\eta\mu^3 x$ ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$2\eta\mu x(3\eta\mu x-4\eta\mu^3 x)=1 \quad \text{ἢ} \quad 8\eta\mu^4 x-6\eta\mu^2 x+1=0.$$

Θέτομεν $\eta\mu x=z$ καὶ φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $8z^4-6z^2+1=0$ ἥτις ἔχει ρίζας:

$$z_1=1/2, \quad z_2=-1/2, \quad z_3=1/\sqrt{2}, \quad z_4=-1/\sqrt{2}.$$

Ἑπομένως ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις σχίζεται εἰς τέσσαρας ἁπλᾶς:

$$\eta\mu x=\frac{1}{2}, \quad \eta\mu x=-\frac{1}{2}, \quad \eta\mu x=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta\mu x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

λυομένας κατὰ τὰ γνωστά. (Θὰ ἔχωμεν ἐδῶ ὀκτὼ σειρὰς λύσεων, ἑκάστης σειρᾶς περιεχούσης ἀπείρους λύσεις).

vii. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu x\, \varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύσις. Ἐὰν ἐκφράσωμεν τὸ ημx καὶ συνx συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ x/2 θὰ ἔχωμεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μόνον τοῦ $\frac{x}{2}$:

$$2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}=1-2\eta\mu^2\frac{x}{2} \quad \text{ἢ} \quad 2\eta\mu^2\frac{x}{2}=1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad 4\eta\mu^2\frac{x}{2}=1 \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{2}.$$

Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις τῆς ἁπλουστάτης μορφῆς:

$$\eta\mu\frac{x}{2}=\frac{1}{2}=\eta\mu 30_0, \qquad \eta\mu\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}=\eta\mu(-30^0).$$

Ἡ πρώτη δίδει: $\frac{x}{2}=30^0+k\cdot 360^0$, καὶ $\frac{x}{2}=150^0+k'\cdot 360^0$

ἡ δὲ δευτέρα: $\frac{x}{2}=-30^0+k''\cdot 360^0$ καὶ $\frac{x}{2}=210^0+k'''\cdot 360^0$.

Ἡ γενικὴ λύσις περιέχει τέσσαρας σειράς:

(1) $x=60^0+2k\cdot 360^0$, (2) $x=300^0+2k'\cdot 360^0$

(3) $x=-60^0+2k''\cdot 360^0$, (4) $x=420^0+2k'''\cdot 360^0$

ὅπου k, k', k'', k''' ἀκέραιοι τυχόντες.

Ἡ ὁμὰς (2) γράφεται $x=-60^0+(2k'+1)360^0$ ὁπότε μὲ τὴν (3) συμπτύσσονται εἰς τήν:

(5) $$x=-60^0+\lambda\cdot 360^0 \qquad (\lambda \text{ ἀκέραιος}).$$

Ἡ ὁμὰς (4) γράφεται $x=60^0+(2k'''+1)360^0$ ὁπότε μὲ τὴν (1) συμπτύσσονται εἰς τήν:

(6) $$x=60^0+\mu\cdot 360^0 \qquad (\mu \text{ ἀκέραιος}).$$

Τέλος αἱ (5) καὶ (6) δύνανται νὰ γραφοῦν ὁμοῦ:

(7) $$x=\pm 60^0+\rho\cdot 360^0 \qquad (\rho \text{ ἀκέραιος}).$$

Ὁ τύπος (7) ἐκφράζει ὅλα τὰ τόξα ποὺ ἐκφράζουν οἱ τύποι (1), (2), (3), (4).

δ') **Τὸ πρῶτον μέλος τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως Α=0 τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων.**

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἀναλύεται εἰς ἁπλουστέρας καὶ ἡ ἐπίλυσις διευκολύνεται.

ε') *Γενικὸς τρόπος ἐργασίας διὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων εἰς τὰς ἁπλουστάτας, εἶναι ὁ ἀκόλουθος: Διὰ τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν καὶ ἐν ἀνάγκῃ δι᾽ ἀλλαγῆς τοῦ ἀγνώστου ἐπιδιώκομεν νὰ μετατρέψωμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην, εὐκόλως ἐπιλυομένην.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

456) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\text{συν}2x=\text{συν}^2x$.

457) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἔχει λύσιν ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{συν}^3x-\frac{3}{4}\text{συν}x+\lambda=0$$ καὶ διὰ ποίας ὄχι;

458) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $$\text{εφ}(x+23^0)=\frac{\text{ημ}2x}{\text{συν}2x-\frac{1}{3}}.$$

459) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$4\{\text{τεμ}x+\text{εφ}x(8\text{ημ}x-9)\}+\text{ημ}2x(9-2\text{ημ}x)=0.$$

460) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{ημ}x+\text{ημ}2x+\text{ημ}3x=4\text{συν}\frac{x}{2}\text{συν}x\text{συν}\frac{3x}{2}.$$

461) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0 λύσεις τῆς ἐξισώσεως:

$$\text{συν}2x=\sqrt{2}\,(\text{συν}^3x+\text{ημ}^3x-\text{ημ}x\text{συν}^2x-\text{συν}x\text{ημ}^2x).$$

462) Διὰ τοῦ ἄκρου Α διαμέτρου ΑΒ ἡμικυκλίου, φέρομεν χορδὴν ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Γ χορδὴν ΓΔ//ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $\widehat{\text{ΒΑΓ}}=x$ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ=2ΓΔ.

463) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu^{10}x+\sigma\upsilon\nu^{10}x=1/5$.

464) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\sigma\upsilon\nu(\mu x)+\sigma\upsilon\nu(2\nu x)-\sigma\upsilon\nu\{(\mu+2\nu)x\}=1$ ὅπου μ καὶ ν δοθέντες ἀριθμοί.

465) Νὰ εὑρεθοῦν πᾶσαι αἱ τιμαὶ τοῦ y γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\sigma\upsilon\nu y=\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$ καὶ ὅτι τὸ x ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν: $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\sigma\tau\varepsilon\mu x-\eta\mu x$.

466) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\varepsilon\varphi(\alpha+x)\varepsilon\varphi(\alpha-x)=\frac{1-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$, ὅπου α δεδομένον τόξον τοιοῦτον ὥστε $1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\neq 0$.

467) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x+\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x=-\frac{13}{8}\sigma\upsilon\nu 4x.$$

468) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\varepsilon\varphi\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sigma\varphi\frac{x}{4}+\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x=1+\sqrt{1-k^2}$$

ὅπου $k=\sigma\upsilon\nu 35^0\eta\mu(12^0 35')$.

469) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ 0 καὶ π λύσεις τῆς ἐξισώσεως:

$$(1+\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x)^2=4\sigma\upsilon\nu^2x(1+\eta\mu 2x)\varepsilon\varphi x.$$

470) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu 4x+\sigma\upsilon\nu 4x=0$.

471) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\sigma\upsilon\nu 3x=2\sigma\upsilon\nu^3x-2\sigma\upsilon\nu x$.

73. Εἰδικαὶ μορφαὶ τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων.

α΄) Ἐξισώσεις ὁμογενεῖς ὡς πρὸς ημx καὶ συνx.

Ἔτσι ὀνομάζονται αἱ ἐξισώσεις τῶν ὁποίων τὸ ἓν μέλος εἶναι *ὁμογενὲς πολυώνυμον* ὡς πρὸς ημx καὶ συνx, (δηλαδὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς ημx καὶ συνx), ἐνῶ τὸ ἄλλο μέλος εἶναι μηδέν. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις:

$$7\eta\mu x-4\sigma\upsilon\nu x=0,\quad 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+4\eta\mu^2x=0,$$
$$4\eta\mu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu^3x+\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu x=0,$$
$$\eta\mu^4x-2\eta\mu^3x\,\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu^2x=0,$$

εἶναι ὁμογενεῖς καὶ μάλιστα κατὰ σειράν, 1ου, 2ου, 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ ὁμογενείας. Δηλ. ἡ 1η περιέχει μόνον πρωτοβάθμια ὡς πρὸς ημx καὶ συνx μονώνυμα, ἡ 2α μόνον δευτεροβάθμια κ.τ.λ.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς 1ης διὰ συνx, τῆς δευτέρας διὰ $\sigma\upsilon\nu^2x$, τῆς τρίτης διὰ $\sigma\upsilon\nu^3x$ καὶ τῆς τετάρτης διὰ $\sigma\upsilon\nu^4x$, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις:

$$7\varepsilon\varphi x-4=0,\qquad 2\varepsilon\varphi x+4\varepsilon\varphi^2x=0,$$
$$4\varepsilon\varphi^3x-3\varepsilon\varphi x+1+\varepsilon\varphi^2x=0,\qquad \varepsilon\varphi^4x-2\varepsilon\varphi^3x+\varepsilon\varphi^2x=0,$$

αἵτινες περιέχουν τὴν εφx ὡς μόνον ἄγνωστον καὶ αἱ ὁποῖαι διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως εφx=z ἀνάγονται εἰς ἀλγεβρικάς.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ὁμογενὴς ἐξίσωσις, κατόπιν διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της διὰ καταλλήλου δυνάμεως τοῦ συνx (ἐχούσης ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸν βαθμὸν ὁμογενείας τῆς ἐξισώσεως), μετατρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, περιέχουσαν ὡς ἄγνωστον μόνον τὴν εφx.

Κρυπτοομογενεῖς. Ἐνίοτε μία τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις μὴ ὁμογενής, δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ὁμογενῆ βάσει τῆς ταυτότητος: $1=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x$.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις:

$5\eta\mu^2x+4\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=1$, $\quad 4\sigma\upsilon\nu^3x-5\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x=0$, $\eta\mu^4x-3\sigma\upsilon\nu^4x+\eta\mu^2x=7$ δὲν εἶναι ὁμογενεῖς, διότι εἰς τὴν πρώτην, ὁ ὅρος 1 καταστρέφει τὴν ὁμογένειαν, ὅπως καὶ εἰς τὴν δευτέραν ὁ ὅρος $2\eta\mu x$ καὶ εἰς τὴν τρίτην οἱ ὅροι $\eta\mu^2x$ καὶ 7. Ἐὰν ὅμως αὐταὶ γραφοῦν ὑπὸ τὰς μορφάς:

$$5\eta\mu^2x+4\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=1\cdot(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)$$
$$4\sigma\upsilon\nu^3x-5\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)=0$$
$$\eta\mu^4x-3\sigma\upsilon\nu^4x+\eta\mu^2x(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)=7(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)^2$$

καθίστανται ὁμογενεῖς.

Διὰ τῶν παραδειγμάτων τούτων καθίσταται φανερὰ ἡ μέθοδος τῆς αὐξήσεως τοῦ βαθμοῦ ἑνὸς ὅρου κατὰ 2 ἢ 4 κ.τ.λ. μονάδας διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ὅρου τούτου ἐπὶ $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x$ ἢ $(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)^2$ κ.τ.λ.

Παρατήρησις. Ἀνωτέρω ὑποτίθεται ὅτι τὸ συνx δὲν εἶναι κοινὸς παράγων εἰς ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως καὶ δι' αὐτὸ εἶναι $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$, (δηλ. ἡ συνx=0 δὲν εἶναι λύσις).

β') **Ἐξισώσεις πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς ημx καὶ συνx.**

Μετὰ τὴν τακτοποίησιν, αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ λαμβάνουν τὴν μορφήν:

$$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma \tag{4}$$

ὅπου α, β, γ δοθέντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ γενικώτερον, ἀριθμητικαὶ παραστάσεις τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς λογαρίθμους.

Ἕνα τρόπον λύσεως τῆς (4) εἴδομεν εἰς τὸ παράδειγμα ν, τῆς § 72. Ὁ τρόπος ἐκεῖνος ὅμως δὲν ὁδηγεῖ εἰς τύπους λογιστοὺς διὰ τῶν λογαρίθμων. Εἰς τὴν πρᾶξιν, ἡ (4) λύεται διὰ τῆς ἑπομένης μεθόδου.

Διαιροῦμεν διὰ α ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) ἥτις τότε λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\eta\mu x+\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Κατόπιν μεταχειριζόμεθα βοηθητικὴν γωνίαν θ θέτοντες:

$$(5) \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \text{εφ}\theta$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\text{ημ}x + \text{εφ}\theta\,\text{συν}x = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \text{ημ}x + \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}\,\text{συν}x = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ἢ}$$

$$\text{ημ}x\,\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta\,\text{συν}x = \frac{\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\theta \quad \text{καὶ τέλος:}$$

$$(6) \qquad \text{ημ}(x+\theta) = \frac{\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\theta.$$

Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὴν βοηθητικὴν γωνίαν θ ἐκ τῆς (5) καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς (6) ὡς πρὸς ἄγνωστον τόξον τὸ $x+\theta$ καὶ ἐκ τοῦ $x+\theta$ εὑρίσκομεν ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x. Ἐννοεῖται ἐκ τῆς (6) ὅτι πρέπει:

$$\left|\frac{\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\theta\right| \leqq 1.$$

γ′) **Ἡ ἐξίσωσις τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν ἰσότητος δύο ἡμιτόνων ἢ δύο συνημιτόνων ἢ δύο ἐφαπτομένων.**

Τότε λύεται βάσει τῶν σχέσεων μεταξὺ τόξων ἐχόντων τὸν αὐτὸν τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν καὶ συνήθως, ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν πινάκων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) $\textbf{ημ}(2x+12^\circ)+\textbf{συν}5x=0$.

Λύσις. Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\text{ημ}(2x+12^\circ) = -\text{συν}5x = \text{συν}(180^\circ-5x) = \text{ημ}(90^\circ-180^\circ+5x)$$

δηλ. ὑπὸ τὴν μορφὴν ἰσότητος ἡμιτόνων: $\text{ημ}(2x+12^\circ)=\text{ημ}(5x-90^\circ)$.

Τὰ τόξα $2x+12^\circ$ καὶ $5x-90^\circ$ ὡς ἔχοντα τὸ αὐτὸ ἡμίτονον θὰ συνδέωνται διὰ μιᾶς ἐκ τῶν δύο σχέσεων:

$$\alpha') \qquad 2x+12^\circ = 5x-90^\circ + k.360^\circ$$
$$\beta') \qquad 2x+12^\circ = 180^\circ-(5x-90^\circ)+k'.360^\circ$$

ὅπου k καὶ k′ τυχόντες ἀκέραιοι (§ 55).

Λύοντες ὡς πρὸς x τὰς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις α′) καὶ β′) λαμβάνομεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (δύο σειρὰς λύσεων ἐξ ὧν ἑκάστη περιέχει ἕνα αὐθαίρετον ἀκέραιον).

ii) $\textbf{εφ}2x+\textbf{σφ}(x+10^\circ)=0$

Λύσις. Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\text{εφ}2x = -\text{σφ}(x+10^\circ) = \text{σφ}(-x-10^\circ) = \text{εφ}(90^\circ+x+10^\circ)$$

δηλ. ὑπὸ τὴν μορφὴν ἰσότητος ἐφαπτομένων: $\text{εφ}2x=\text{εφ}(100^\circ+x)$.

Τὰ τόξα $2x$ καὶ $100^\circ+x$, ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, θὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως (§ 56):

$2x=100^\circ+x+k.180^\circ$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots)$, ἄρα $x=100^\circ+k.180^\circ$ (γενικὴ λύσις).

iii) **$\epsilon\varphi(\alpha x)\epsilon\varphi(\beta x)=1$** (α, β δεδομένα).

Λύσις: Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\epsilon\varphi(\alpha x)=1/\epsilon\varphi(\beta x)=\sigma\varphi(\beta x)=\epsilon\varphi(90^0-\beta x).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\epsilon\varphi(\alpha x)=(90^0-\beta x)$ ἕπεται: $\alpha x=90^0-\beta x+k.180^0$ ἐκ τῆς ὁποίας:

$$x=\frac{90^0}{\alpha+\beta}+k.\frac{180^0}{\alpha+\beta},\quad k=\text{τυχὼν ἀκέραιος (γενικὴ λύσις)}.$$

iv) $\epsilon\varphi(\sigma\varphi x)=\sigma\varphi(\epsilon\varphi x)$, ὅπου τὰ ἐντὸς παρενθέσεων ποσὰ ἐκφράζουν ἀκτίνια.

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις γράφεται $\epsilon\varphi(\sigma\varphi x)=\epsilon\varphi\left\{\frac{\pi}{2}-(\epsilon\varphi x)\right\}$, δηλ. ὡς ἰσότης ἐφαπτομένων καὶ δίδει (§ 56):

$$(7)\qquad \sigma\varphi x=\frac{\pi}{2}-(\epsilon\varphi x)+k\pi \qquad (k \text{ ἀκέραιος}).$$

Ἡ (7) γράφεται $\epsilon\varphi x+\sigma\varphi x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Θέτοντες προσωρινῶς, $\frac{\pi}{2}+k\pi=c$ λαμβάνομεν:

$$\epsilon\varphi x+\sigma\varphi x=c \quad \text{ἢ} \quad \epsilon\varphi x+1/\epsilon\varphi x=c \quad \text{ἢ} \quad \epsilon\varphi^2 x-c\,\epsilon\varphi x+1=0 \quad \text{ἢ}$$

$$(8)\qquad \epsilon\varphi x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4}}{2}.$$

Διὰ νὰ ὑπάρχουν λύσεις, πρέπει $c^2-4\geqq 0$, δηλ. $c\geqq 2$ ἢ $c\leqq -2$.

Ἐκ τῆς $c\geqq 2$ λαμβάνομεν $\frac{\pi}{2}+k\pi\geqq 2$, $k\pi\geqq 2-\frac{\pi}{2}, k>\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}=0,1\ldots$ ἑπομένως $k=1,\ 2,\ 3\ldots.$

Ἐκ τῆς $c\leqq -2$ λαμβάνομεν $\frac{\pi}{2}+k\pi\leqq -2$, $k\pi<-2-\frac{\pi}{2}$,

$$k<-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}=-1,1\ldots.,\ \text{ὥστε}\ k=-2,\ -3,\ldots.$$

Θέτοντες ὅπου c τὸ ἴσον του εἰς τὴν (8), ἔχομεν:

$$(9)\qquad \epsilon\varphi x=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\pm\sqrt{\pi^2\left(\frac{1}{2}+k\right)^2-4}\right\}$$

καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀναλύεται εἰς ἀπείρους ἁπλουστάστας ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (9), διότι τὸ k δύναται νὰ λάβῃ ἀπείρους ἀκεραίας τιμάς: 1, 2, 3,... καὶ −2, −3, −4,... Ἑκάστη πάλιν τῶν ἀπείρων τούτων ἐξισώσεων ἔχει ὡς γνωστόν, ἀπείρους λύσεις διαφερούσας ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιον ἡμιπεριφερείας.

δ') Ἐξισώσεις συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ημx καὶ συνx. Τούτων τὰ μέλη εἶναι συναρτήσεις τῶν δύο ποσοτήτων (ημx+συνx) καὶ ημxσυνx ἐπιλύονται δὲ μὲ χρῆσιν βοηθητικοῦ ἀγνώστου.

Ἔχομεν: $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+\eta\mu(90^0-x)=2\eta\mu 45^0\sigma\upsilon\nu(45^0-x)$ καὶ ἐὰν τεθῇ:

$$(1)\qquad 45^0-x=y \qquad (\text{νέος ἄγνωστος})$$

λαμβάνομεν:

$$(2)\qquad \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu y.$$

Ἐπίσης, $ημx συνx = \frac{1}{2} ημ2x$ ἀλλ' ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$x = 45^0 - y, \quad 2x = 90^0 - 2y, \quad ημ2x = συν2y$ καὶ ἑπομένως :

$$ημx\,συνx = \frac{1}{2}συν2y = \frac{1}{2}(2συν^2y - 1). \tag{3}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν τὰ ποσὰ $ημx + συνx$ καὶ $ημx\,συνx$ βάσει τῶν (2) καὶ (3) φθάνομεν εἰς ἐξίσωσιν περιέχουσαν μόνον τὸ $συνy$ ὡς ἄγνωστον. Ἐκ ταύτης προσδιορίζομεν τὸ $συνy$ καὶ ἀκολούθως τὸ y καὶ τέλος τὸ x ἐκ τῆς (1). (Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅταν ἀντὶ $ημx+ +συνx$ ἔχομεν $ημx - συνx$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

472) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $3συνx + 5ημx = 2$ εὑρισκομένων τῶν λύσεων κατὰ προσέγγισιν 1'.

473) Ὁμοίως διὰ τὰς ἐξισώσεις : i) $ημx + συνx = 1$, ii) $6συνx - 4ημx = 7$.

474) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $2ημ3x = 3συνx + συν3x$.

475) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $σφx - εφx = ημx + συνx$.

476) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $(ημx + συνx)\left(1 + \frac{2}{ημ2x}\right) + εφx + σφx + 2 = 0$.

477) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $συν^2\frac{x-α}{2} + συν^2\frac{x+α}{2} = 1$, ὅπου $α$ δεδομένον τόξον.

478) Δοθείσης ὀρθῆς γωνίας ΕΟΔ καὶ σημείου Α ἐπὶ τῆς ΟΔ τοιούτου ὥστε $(ΟΑ) = α$ φέρομεν διὰ τοῦ Α πρὸς τὴν ΟΕ δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ τοιαύτας ὥστε $\widehat{ΟΑΒ} = \widehat{ΟΓΑ} = x$. Νὰ ὁρισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία x οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΑΒ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος $λ$.

479) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$συν10ω + συν8ω + 3συν4ω + 3συν2ω - 8συνω συν^3 3ω = συν(ω + 45^0).$$

480) Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον $ω > 0$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $ω$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $στεμ2Α$, $στεμ2Β$, $στεμ2Γ$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

481) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $ημ3x + συν3x = ημx + συνx$.

482) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις :

$$f(x) = x^2 - 2xσυνφ + (2 - \sqrt{3})(1 - 4ημ^2φ) = 0$$

ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο τούτων ριζῶν, ἀνεξάρτητος τῆς γωνίας $φ$.

483) Ὑπολογίσατε τὰς πλευρὰς τριγώνου γνωστοῦ ὄντος ὅτι αὗται ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον 1 μέτρον, ἐνῶ ἡ μεγαλυτέρα γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας.

484) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $ημ\{πσυνx\} = συν\{πημ|x|\}$.

485) Ἐὰν $θ_1$, $θ_2$ εἶναι δύο λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$ασυνθ + βημθ + γ = 0$$

μὴ διαφέρουσαι κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ $2π$, ἀποδείξατε ὅτι :

$$εφ\frac{θ_1 + θ_2}{2} = \frac{β}{α},\ ημ(θ_1 + θ_2) = \frac{2αβ}{α^2 + β^2},\ \ συν(θ_1 + θ_2) = \frac{α^2 - β^2}{α^2 + β^2}.$$

74. Διερεύνησις ὡς πρὸς παραμέτρους.

α΄) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις ἀνήχθη εἰς τὴν μορφήν:

(1) $$\alpha\eta\mu^2 x+\beta\eta\mu x+\gamma=0$$

ὅπου α,β,γ παράμετροι. Τότε γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: ποίας συνθήκας πρέπει νὰ πληροῦν οἱ συντελεσταὶ α,β,γ ἵνα αἱ ἐκ τῆς ἀνωτέρω δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως προκύπτουσαι τιμαὶ τοῦ ημx εἶναι ἀμφότεραι παραδεκταὶ ἢ μόνον ἡ μία ἢ καμμία; *Ἡ εὕρεσις τῶν συνθηκῶν τούτων καλεῖται διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως (1).*

Ἂς θέσωμεν, τώρα, $\eta\mu x=y$ καὶ ἂς καλέσωμεν $\varphi(y)$ τὸ τριώνυμον $\alpha y^2+\beta y+\gamma$. Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου τούτου εἶναι αἱ τιμαὶ τοῦ ημx. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει $-1\leqq\eta\mu x\leqq 1$ συνάγομεν τὴν ἀκόλουθον διερεύνησιν.

i) *Ἵνα ἡ μία μόνον τιμὴ τοῦ ημx εἶναι παραδεκτή,* ἀρκεῖ τὸ τριώνυμον $\varphi(y)=\alpha y^2+\beta y+\gamma$ νὰ ἔχῃ μίαν μόνον ρίζαν περιεχομένην μεταξὺ -1 καὶ $+1$ (καὶ μίαν ρίζαν, ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-1,\ 1)$ ἥτις καὶ ἀπορρίπτεται). Πρὸς τοῦτο, γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ὅτι ἀπαιτεῖται μία μόνον συνθήκη:

$$\varphi(-1)\varphi(1)<0.$$

Ἰδιάζουσαι περιπτώσεις: Ἡ μία ρίζα ἰσοῦται μὲ -1 καὶ ἡ ἄλλη (ἡ ὁποία κατ' ἀνάγκην θὰ ἰσοῦται μὲ $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$) κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-1,\ 1)$ ἢ ἡ μία ρίζα εἶναι τὸ $+1$ καὶ ἡ ἄλλη $\left(\text{ἴση μὲ } \dfrac{\gamma}{\alpha}\right)$ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(-1,\ 1)$ ἢ τὸ τριώνυμον ἔχει διπλῆν ρίζαν κειμένην εἰς τὸ (κλειστὸν) διάστημα $(-1,\ 1)$. Καὶ εἰς τὰς τρεῖς αὐτὰς εἰδικὰς περιπτώσεις, πάλιν ἔχομεν μίαν μοναδικὴν τιμὴν διὰ τὸ ημx.

Αἱ συνθῆκαι δι' ἑκάστην τῶν τριῶν εἰδικῶν τούτων περιπτώσεων διατυπώνονται εὔκολα· ($\alpha-\beta+\gamma=0$ καὶ $\gamma^2>\alpha^2$ διὰ τὴν 1ην, $\alpha+\beta+\gamma=0$ $\gamma^2>\alpha^2$ διὰ τὴν 2αν, $\beta^2-4\alpha\gamma=0,\ -1\leqq-\dfrac{\beta}{2\alpha}\leqq+1$ διὰ τὴν 3ην).

ii) *Ἵνα καὶ αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ημx εἶναι παραδεκταί,* ἀρκεῖ τὸ τριώνυμον $\varphi(y)$ νὰ ἔχῃ καὶ τὰς δύο ρίζας του μεταξὺ -1 καὶ $+1$. Πρὸς τοῦτο, γνωρίζομεν ὅτι ἀπαιτοῦνται πέντε (συναληθεύουσαι) συνθῆκαι:

$$\Delta>0 \qquad \alpha\varphi(1)>0 \qquad \alpha\varphi(-1)>0$$

$$-1<\frac{s}{2}$$

$$1>\frac{s}{2}$$

ὅπου Δ ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma$ καὶ s, τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου, δηλ. $s=-\beta/\alpha$.

Ἰδιάζουσαι περιπτώσεις: **Ἡ μία ρίζα ἰσοῦται μὲ -1 καὶ ἡ ἄλλη μὲ $+1$** ἢ ἡ μία ρίζα ἰσοῦται μὲ -1 καὶ ἡ ἄλλη κεῖται **ἐντὸς** τοῦ διαστήματος $(-1,\ 1)$ ἢ ἡ μία ρίζα ἰσοῦται μὲ $+1$ καὶ ἡ ἄλλη κεῖται **ἐντὸς** τοῦ διαστήματος $(-1,$

1). Καὶ εἰς τὰς τρεῖς αὐτὰς ἰδιαζούσας περιπτώσεις ἔχομεν δύο παραδεκτὰς τιμὰς τοῦ ημx. Αἱ συνθῆκαι δι' ἑκάστην τῶν τριῶν τούτων εἰδικῶν περιπτώσεων, διατυποῦνται εὔκολα.

iii) *Ἵνα ἡ ἐξίσωσις μὴ ἔχῃ λύσιν*, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἢ τὸ $\varphi(y)$ νὰ ἔχῃ ρίζας φανταστικάς, δηλ. $\Delta<0$ ἢ νὰ ἔχῃ πραγματικὰς ρίζας κειμένας ἐκτὸς τοῦ διαστήματος ἀπὸ -1 ἕως $+1$. (Δηλαδή, ἢ μίαν ρίζαν <-1 καὶ μίαν $>+1$ ἢ δύο ρίζας μεγαλυτέρας τοῦ 1 ἢ δύο ρίζας μικροτέρας τοῦ -1. Διὰ τὸ 1ον ἀρκεῖ οἱ -1 καὶ $+1$ νὰ κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Διὰ τὸ 2ον ἀρκεῖ ὁ 1 νὰ εἶναι $<$ καὶ τῶν δύο ριζῶν καὶ διὰ τὸ 3ον ἀρκεῖ ὁ -1 νὰ εἶναι $>$ καὶ τῶν δόο ριζῶν). Αἱ ἀπαιτούμεναι συνθῆκαι εἶναι :

$$(1) : \{\alpha\varphi(1)<0,\ \ \alpha\varphi(-1)<0\} \text{ ἢ } (2) : \{\Delta>0,\ \ \alpha\varphi(1)>0,\ \ 1<-\beta/2\alpha\}$$

$$\text{ἢ } (3) : \{\Delta>0,\ \ \alpha\varphi(-1)>0,\ \ -1>-\beta/2\alpha\}.$$

Παρατηρητέον, ὅτι ἂν εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι διὰ τὴν i) καὶ ii) περίπτωσιν, τότε ἡ iii) θὰ συμβαίνῃ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν α, β, γ τὰς *μὴ πληρούσας* τὰς ἐκ τῆς i) καὶ ii) εὑρεθείσας συνθήκας.

Καθ' ὅμοιον ἐντελῶς τρόπον διερευνᾶται ἡ ἐξίσωσις $\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\sigma\upsilon\nu x+$ $+\gamma=0$ διότι τὸ συνx ὑπόκειται εἰς τὸν ἴδιον περιορισμὸν μὲ τὸ ημx, δηλ. $-1\leqq\sigma\upsilon\nu x\leqq 1$.

β') Πολλάκις οἱ συντελεσταὶ α, β, γ εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μόνον ποσότητος (παραμέτρου) ἔστω τῆς λ καὶ ἡ διερεύνησις σκοπεῖ τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τοῦ λ διὰ τὰς ὁποίας ἡ μία μόνον ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ ημx εἶναι δεκτὴ ἢ καὶ αἱ δύο δεκταὶ ἢ καμμία. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται μὲ τὰς ἀνωτέρω γραφείσας ἀνισότητας αἱ ὁποῖαι καθίστανται τότε ἀνισότητες ὡς πρὸς λ (μόνον) καὶ δι' ἐπιλύσεως αὐτῶν εὑρίσκονται αἱ τιμαὶ τοῦ λ διὰ τὰς ὁποίας λαμβάνει χώραν ἑκάστη περίπτωσις.

Ἔτσι π.χ. λύοντες ὡς πρὸς λ τὴν ἀνισότητα $\varphi(1)\varphi(-1)<0$ εὑρίσκομεν τιμὰς τοῦ λ δι' ἃς ἡ ἐξίσωσις παρέχει μίαν μόνον δεκτὴν τιμὴν τοῦ ημx καὶ συμπληροῦμεν αὐτὰς εὑρίσκοντες καὶ ἐνδεχομένας τιμὰς τοῦ λ δι' ἃς ὑφίστανται αἱ συνθῆκαι τῶν ἰδιαζουσῶν περιπτώσεων τῆς i).

Ἐπίσης ἂν λύσωμεν τὴν $\Delta<0$ καὶ κατόπιν τὰ συστήματα τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3) τῆς περιπτώσεως iii) εὑρίσκομεν ὅλας ἐκείνας τὰς τιμὰς τοῦ λ δι' ἃς ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν. Τέλος, *ὅλαι αἱ ἐναπομένουσαι* τιμαὶ τοῦ λ, ἁρμόζουν διὰ τὴν περίπτωσιν ii).

γ') Ἐν ᾗ περιπτώσει μία τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις ἀνάγεται ἐν τέλει εἰς τὴν μορφήν : $\alpha\varepsilon\varphi^2x+\beta\varepsilon\varphi x+\gamma=0$

τότε διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν, ἀρκεῖ ἡ δευτεροβάθμιος αὐτὴ ἐξίσωσις νὰ ἔχῃ ρίζας πραγματικάς. Τοῦτο θὰ συμβαίνῃ ὅταν ἡ διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ πληροῖ τὴν συνθήκην $\Delta\geqq 0$.

Εἰδικώτερον, ἐὰν $\Delta>0$ ἔχομεν δύο δεκτὰς τιμὰς διὰ τὴν εφx καὶ ἂν $\Delta=0$ ἔχομεν μίαν τιμήν.

Ἐὰν τὰ α, β, γ ἐξαρτῶνται ἀπὸ μίαν παράμετρον λ τότε δι' ἐπιλύσεως τῆς ἀνισότητος $\Delta>0$ ὡς πρὸς λ εὑρίσκομεν ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ λ δι' ἃς ἡ ἐξίσωσις παρέχει δύο τιμὰς διὰ τὴν εφx καὶ δι' ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως $\Delta=0$ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ λ δι' ἃς ἡ ἐξίσωσις παρέχει μίαν τιμὴν τῆς εφx.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha\sigma\varphi^2 x+\beta\sigma\varphi x+\gamma=0$$

διότι ἡ σφx ὅπως καὶ ἡ εφx δὲν ὑπόκειται εἰς ἄλλον τινὰ περιορισμόν, εἰμὴ νὰ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

486) Νὰ εὑρεθῆ, διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ τόξου x ἱκανοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν ; $\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x-\lambda\,(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0$;

487) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἔχει λύσεις ὡς πρὸς x ἡ ἐξίσωσις :

$$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x+\tau\varepsilon\mu x+\sigma\tau\varepsilon\mu x=\lambda\ ;$$

488) Νὰ ὁρισθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ μ διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις : $\sqrt{1+\eta\mu^2 x}+\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}=\sqrt{\mu}$ ἔχει λύσιν.

489) Δίδεται ἡ τριγωνομετρικὴ (ὡς πρὸς α) ἐξίσωσις :

$$x\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2y\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\alpha+4=0.$$

Νὰ εὑρεθῆ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχη μεταξὺ τῶν x καὶ y ἵνα ἡ ἐξίσωσις ἔχη δύο μόνον λύσεις περιεχομένας μεταξὺ 0 καὶ 2π.

75. Συστήματα δύο τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἄγνωστα τόξα.

α΄) Δύο τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις, μαζὶ λαμβανόμεναι, ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα. Ἐὰν εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων ἐμφανίζωνται τὰ αὐτὰ ἄγνωστα τόξα x καὶ y τότε κάθε ζεῦγος τιμῶν τῶν x καὶ y, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις, (δηλ. εἶναι κοινὴ λύσις τῶν δύο) λέγεται λύσις (ἢ μερικὴ λύσις) τοῦ συστήματος. Ἡ εὕρεσις τῆς γενικῆς λύσεως καλεῖται ἐπίλυσις τοῦ συστήματος. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα μερικὰς μεθόδους ἐπιλύσεως.

β΄) Ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δύο τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις οὕτως ὥστε ἡ πρώτη νὰ περιέχη δύο μόνον τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἀγνώστων τόξων καὶ ἡ δευτέρα νὰ περιέχη τοὺς **ἰδίους** τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἰδίων ἀγνώστων τόξων τότε ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀλγεβρικοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. **i) Νὰ λυθῆ τὸ σύστημα :**

$$\{\varepsilon\varphi x=\alpha\varepsilon\varphi 2y,\quad \varepsilon\varphi y=2\alpha\varepsilon\varphi 2x\}\qquad (\alpha,\ \text{γνωστόν}).$$

Λύσις. Ἐνταῦθα ἔχομεν τέσσαρας ἀγνώστους (ὄχι βεβαίως ἀνεξαρτήτους): εφx, εφy, εφ2x, εφ2y. Ἐὰν ὅμως ἐκφράσωμεν τὴν εφ2y συναρτήσει τῆς εφy καὶ τὴν εφ2x συναρτήσει τῆς εφx τότε εἰς τὸ σύστημα θὰ περιέχωνται δύο μόνον ἄγνωστοι, ἡ εφx καὶ εφy. Θέτοντες εφx=ω, εφy=t μεταβαίνομεν εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν σύστημα:

$$(1)\qquad \left\{\omega=\frac{2\alpha t}{1-t^2},\quad t=\frac{2\alpha\omega}{1-\omega^2}\right\}.$$

Μία προφανὴς λύσις τοῦ (1) εἶναι $\omega=0$, $t=0$. Πρὸς εὕρεσιν τῶν *μὴ μηδενικῶν λύσεων*, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς (1) (ὑποθέτοντες $\alpha\neq0$) ὁπότε λαμβάνομεν:

$\dfrac{\omega}{t}=\dfrac{t(1-\omega^2)}{\omega(1-t^2)}$ ἢ $\dfrac{\omega^2}{t^2}=\dfrac{1-\omega^2}{1-t^2}$ καὶ ἐξ αὐτῆς $\omega^2=t^2$ ἥτις δίδει: $\omega=t$ καὶ $\omega=-t$.

Συνδυάζοντες τὴν $\omega=t$ μὲ τὴν πρώτην τῶν (1) εὑρίσκομεν:

$$t=\frac{2\alpha t}{1-t^2},\quad 1=\frac{2\alpha}{1-t^2},\quad t^2=1-2\alpha,\quad t=\pm\sqrt{1-2\alpha}=\omega.$$

Συνδυάζοντες τὴν $\omega=-t$ μὲ τὴν πρώτην ἐκ τῶν (1) εὑρίσκομεν:

$$-t=\frac{2\alpha t}{1-t^2},\quad -1=\frac{2\alpha}{1-t^2},\quad t=\pm\sqrt{1+2\alpha}=-\omega.$$

Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (1) εἶναι:

(2) $\{\omega=0, t=0\}$ $\{\omega=\sqrt{1-2\alpha},\ t=\sqrt{1-2\alpha}\}$, $\{\omega=-\sqrt{1-2\alpha},\ t=-\sqrt{1-2\alpha}\}$, $\{\omega=\sqrt{1+2\alpha},\ t=-\sqrt{1+2\alpha}\}$, $\{\omega=-\sqrt{1+2\alpha},\ t=\sqrt{1+2\alpha}\}$.

Ἐὰν $-1/2\leqq\alpha\leqq1/2$ τότε εἶναι πᾶσαι δεκταὶ καὶ δίδουν 5 ἁπλᾶ τριγωνομετρικὰ συστήματα τῆς μορφῆς:

(3) $\{\varepsilon\varphi x=\beta,\ \varepsilon\varphi y=\gamma\}$, ὅπου β, γ δεδομένοι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τοῦ (3) ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἑκάστη δὲ ἐκ τῶν ἀπείρων λύσεων τῆς πρώτης ἐκ τῶν (3) συνδυάζεται μὲ ἑκάστην τῶν ἀπείρων λύσεων τῆς δευτέρας. (Εἰς τὴν γενικὴν λύσιν θὰ ὑπάρχουν δύο αὐθαίρετοι ἀκέραιοι k καὶ k′ ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων).

ii) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\left\{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 y=-\dfrac{3}{4},\quad 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y=1\right\}$.

Λύσις. Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις περιέχει τοὺς δύο ἀγνώστους: ημx, συνy ἡ δὲ πρώτη περιέχει δύο ἄλλους: $\sigma\upsilon\nu^2 x$ καὶ $\eta\mu^2 y$. Βλέπομεν ὅτι ἡ πρώτη δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς ἰδίους ἀγνώστους μὲ τὴν δευτέραν, γραφομένη:

$$1-\eta\mu^2 x-(1-\sigma\upsilon\nu^2 y)-=3/4$$

καὶ φθάνομεν εἰς τὸ σύστημα:

$$\{-\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 y=-3/4,\quad 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y=1\}.$$

Θέτοντες $\eta\mu x=\omega$, $\sigma\upsilon\nu y=t$ ἀγόμεθα εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν σύστημα:

(4) $$\{\omega^2-t^2=3/4,\quad 2\omega t=1\}$$

τὸ ὁποῖον λύεται δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου συναρτήσει τοῦ ἄλλου ($\omega=1/2t$). Τὸ (4) ἔχει πραγματικὰς λύσεις:

$$\left\{\omega=1,\quad t=\frac{1}{2}\right\},\qquad \left\{\omega=-1,\quad t=-\frac{1}{2}\right\}$$

καὶ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὰ ἁπλᾶ συστήματα:

$$\{\eta\mu x=1,\quad \sigma\upsilon\nu y=1/2\}.\qquad \{\eta\mu x=-1,\quad \sigma\upsilon\nu y=-1/2\}.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν τὴν γενικὴν λύσιν, ἀποτελουμένην ἀπὸ ἄπειρα ζεύγη τόξων:

$$\left\{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad y=\frac{\pi}{3}+2\lambda\pi\right\},\qquad \left\{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad y=-\frac{\pi}{3}+2\lambda\pi\right\}$$

$$\left\{x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad y=\frac{2\pi}{3}+2\lambda\pi\right\}, \qquad \left\{x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad y=-\frac{2\pi}{3}+2\lambda\pi\right\}.$$

γ') Ἐὰν διὰ καταλλήλου συνδυασμοῦ τῶν δύο ἐξισώσεων, ὁ ἕνας ἄγνωστος ἐξαλείφεται, τότε φθάνομεν εἰς τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον.

iii) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα : $\{2\eta\mu x=\eta\mu(45^0-y), \quad \eta\mu^2x=2\sigma\upsilon\nu^2y\}$.

Λύσις. Ἐὰν εἰς τὴν δευτέραν ἀντικατατασταθῇ τὸ ημx ληφθὲν ἐκ τῆς πρώτης, λαμβάνομεν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν μὲ ἄγνωστον τὸ τόξον y μόνον.

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν: $\eta\mu x=\frac{1}{2}\eta\mu(45^0-y)$ καὶ ἡ δευτέρα γίνεται:

$$\frac{1}{4}\eta\mu^2(45^0-y)=2\sigma\upsilon\nu^2y \quad \text{ἢ} \quad (\eta\mu45^0\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu45^0\eta\mu y)^2=8\sigma\upsilon\nu^2y \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu^2y+\eta\mu^2y-2\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y)=8\sigma\upsilon\nu^2y.$$

Ἡ τελευταία αὕτη εἶναι ὁμογενὴς καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της διὰ $\sigma\upsilon\nu^2y$ μετατρέπεται εἰς τὴν $\varepsilon\varphi^2y-2\varepsilon\varphi y-15=0$ ἥτις δίδει: $\varepsilon\varphi y=5$ καὶ $\varepsilon\varphi y=-3$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ y. Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ x θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς:

$$\eta\mu x=\frac{1}{2}\eta\mu(45^0-y), \quad \text{ἥτις γράφεται:}$$

(5) $$\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu y)=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\varepsilon\varphi y)\cdot\sigma\upsilon\nu y.$$

Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi y=5$ ἔχομεν: $\sigma\upsilon\nu y=\frac{1}{\pm\sqrt{26}}$ καὶ ἡ (5) γίνεται:

$$\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-5)\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{26}}.$$

Ὥστε ἔχομεν δύο ἁπλᾶ συστήματα:

(6) $$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\varphi y=5\\ \eta\mu x=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}\end{array}\right. \quad \text{καὶ} \quad \left\{\begin{array}{l}\varepsilon\varphi y=5\\ \eta\mu x=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\end{array}\right..$$

Ἄλλα δύο συστήματα λαμβάνομεν ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi y=-3$.

Τὸ πρῶτον ἐκ τῶν (6) γραφόμενον:

$$\{\varepsilon\varphi y=\varepsilon\varphi\tau, \quad \eta\mu x=\eta\mu\tau'\}$$

δίδει δύο σειρᾶς λύσεων:

$$\{y=\tau+k\cdot180^0, \quad x=\tau'+k'\cdot360^0\}, \quad \{y=\tau+k\cdot180^0, \quad x=180^0-\tau'+k'\cdot360^0\}$$

ὅπου k, k′ ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων ἀκέραιοι. Ὁμοίας λύσεις δίδουν καὶ τὰ λοιπὰ τρία συστήματα.

δ') Ἐὰν τὸ σύστημα εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς x καὶ y, δηλαδὴ αἱ ἐξισώσεις μένουν ἀμετάβλητοι δι' ἐναλλαγῆς τῶν x καὶ y, τότε ἐπιδιώκομεν συνήθως νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἀγνώστων τόξων. Πρὸς τοῦτο μετασχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις οὕτως ὥστε νὰ παρουσιασθοῦν εἰς αὐτὰς τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν x+y καὶ x—y μόνον (πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐν γένει, ἐπιτυγχάνεται ὅταν αἱ ἐξισώσεις εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς x καὶ y) λαμβάνομεν δὲ ὡς νέους ἀγνώστους τὰ x+y καὶ x—y.

iv) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{\eta\mu x+\eta\mu y=\alpha\,,\quad \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta\}\qquad (\alpha,\ \beta,\ \text{δοθέντα}).$$

Λύσις. Τὸ σύστημα εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς x καὶ y. Αἱ ἐξισώσεις μετασχηματίζονται διὰ μετατροπῆς τῶν πρώτων μελῶν των εἰς γινόμενα :

$$(7)\qquad \left\{2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\alpha,\qquad 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\beta\right\}.$$

Θεωροῦμεν ὡς ἀγνώστους, τὰ τόξα $\frac{x+y}{2}$ καὶ $\frac{x-y}{2}$. Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη, τῶν (7) λαμβάνομεν :

$$(8)\qquad \varepsilon\varphi\frac{x+y}{2}=\frac{\alpha}{\beta}\qquad (\beta\neq 0)$$

Ἐκ τῆς (8) προσδιορίζομεν τὸ τόξον $\frac{x+y}{2}$ κατὰ τὰ γνωστά :

$$\frac{x+y}{2}=\tau+\cdot 180^0\qquad \left(k\ \text{ἀκέραιος},\ \frac{\alpha}{\beta}=\varepsilon\varphi\tau\right)$$

καὶ ἐκ τῆς πρώτης τῶν (7) προσδιορίζομεν καὶ τὸ τόξον $\frac{x-y}{2}$:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\alpha}{2\eta\mu\frac{x+y}{2}}=\frac{\alpha}{2\eta\mu(\tau+k.180^0)}=\frac{\alpha}{\pm 2\eta\mu\tau}$$

ὅπου τὸ + ἀντιστοιχεῖ εἰς k ἄρτιον καὶ τὸ — εἰς k περιττόν.

Φθάνομεν λοιπὸν εἰς τὰ συστήματα :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=\tau+k\cdot 180^0\\ &\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\alpha}{2\eta\mu\tau}\ (=\sigma\upsilon\nu\tau')\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=\tau+k\cdot 180^0\\ &\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=-\frac{\alpha}{2\eta\mu\tau}\ (=\sigma\upsilon\nu(180^0-\tau')).\end{aligned}\right.$$

Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἑκάστου τῶν συστημάτων (9) ὁρίζεται $\left(\text{ἐφ' ὅσον}\ \left|\frac{\alpha}{2\eta\mu\tau}\right|\leqq 1\right)$ τὸ $\frac{x-y}{2}$ καὶ κατόπιν ὁρίζονται καὶ τὰ x καὶ y. Τὰ (9) μᾶς δίδουν:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=\tau+k\cdot 180^0\\ &\frac{x-y}{2}=\tau'+k'\cdot 180^0\end{aligned}\right.\qquad \text{ἢ}\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=\tau+k.180^0\\ &\frac{x-y}{2}=-\tau'+k'\cdot 180^0\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=\tau+k\cdot 180^0\\ &\frac{x-y}{2}=180^0-\tau'+k'\cdot 360^0\end{aligned}\right.\qquad \text{ἢ}\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{x+y}{2}=\tau+k\cdot 180^0\\ &\frac{x-y}{2}=\tau'-180^0+k'\cdot 360^0\end{aligned}\right.$$

Ἐξ ἑκάστου τῶν τεσσάρων τούτων εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, τὰ x καὶ y συναρτήσει δύο αὐθαιρέτων ἀκεραίων k καὶ k′ ἕκαστον.

ε′) Ἐὰν ἡ μία ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν ἰσότητος δύο ἡμιτόνων ἢ δύο συνημιτόνων ἢ δύο ἐφαπτομένων, τότε εὑρίσκομεν ἀπ' εὐθείας σχέσιν μεταξὺ τῶν τόξων (βλ. § 73, γ′) καὶ ἐκφράζομεν τὸ ἓν συναρτήσει τοῦ ἄλλου ὁπότε ἡ ἄλλη ἐξίσωσις καθίσταται (κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ ἑνὸς τόξου συναρτήσει τοῦ ἄλλου) ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον τόξον.

ν) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{\text{συν}x\,\text{ημ}y=1/2, \quad \text{ημ}x+\text{συν}y=0\}.$$

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἰσότης ἡμιτόνων :

$$\text{ημ}x=-\text{συν}y=\text{συν}(180^\circ-y)=\text{ημ}(90^\circ-180^\circ+y)=\text{ημ}(y-90^\circ)$$

καὶ ἑπομένως δίδει ἄμεσον σχέσιν μεταξὺ τῶν τόξων :

$$(10)\quad x=y-90^\circ+k\cdot360^\circ \quad \text{ἢ} \quad (11)\quad x=180^\circ-y+90^\circ+k'\cdot360^\circ.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην τὸ x συναρτήσει τοῦ y βάσει τῆς (10) λαμβάνομεν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον :

$$\text{συν}\{y-90^\circ+k.360^\circ\}\text{ημ}y=1/2 \text{ ἢ } \text{συν}(y-90^\circ)\text{ημ}y=1/2 \text{ ἢ } \text{ημ}^2y=1/2 \text{ ἢ } \text{ημ}y=\pm1/\sqrt{2}.$$

Ἔχομεν λοιπόν :

$$(12)\quad \begin{cases} x=y-90^\circ+k\cdot360^\circ \\ \text{ημ}y=1/\sqrt{2}=\text{ημ}45^\circ \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases} x=y-90^\circ+k\cdot360^\circ \\ \text{ημ}y=-1/\sqrt{2}=\text{ημ}(-45^\circ). \end{cases}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (12) εὑρίσκομεν τὸ y καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης τὸ x.

Τέλος, βάσει τῆς (11) ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν καθίσταται :

$$\text{συν}(180^\circ-y+90^\circ+k'\cdot360^\circ)\text{ημ}y=1/2 \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}(270^\circ-y)\text{ημ}y=1/2 \quad \text{ἢ} \quad -\text{ημ}^2y=1/2$$

καὶ δὲν ἔχει προφανῶς λύσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

490) Νὰ εὑρεθοῦν πᾶσαι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\{\text{ημ}x\,\text{συν}y=1/2, \quad \text{συν}2x+\text{συν}2y=-1/2\}.$$

491) Ἐὰν τὰ x καὶ y εἶναι γωνίαι ἑνὸς τριγώνου, νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τοῦ συστήματος :

$$\{\text{εφ}x+\text{εφ}y=1, \quad \text{εφ}(x+y)=4/3\}.$$

492) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{x+y=60^\circ, \quad \sqrt{3}\,\text{εφ}x\,\text{εφ}y+6\text{εφ}x+\text{εφ}y+\sqrt{3}=0\}.$$

493) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{\text{ημ}^2x+\text{ημ}^2y=3/4, \quad \text{συν}4x+\text{συν}2y=-1/2\}.$$

494) Ἐὰν x καὶ y εἶναι γωνίαι τριγώνου, δύνανται νὰ πληροῦν τὸ σύστημα:

$$\{\text{ημ}x+\text{ημ}y=1, \quad \text{συν}x\,\text{συν}y=-3/4\};$$

495) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left\{ \text{εφ}x=\frac{1}{2}(\text{εφ}2x+\text{εφ}2y), \qquad \text{εφ}y=\frac{1}{3}(\text{εφ}2y+\text{εφ}2x)\right\}.$$

496) Νὰ εὑρεθοῦν πᾶσαι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\{2\text{ημ}x\text{ημ}6y=1, \qquad \text{εφ}x+\text{εφ}2y=0\}.$$

497) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{\text{εφ}x\ \text{εφ}3y=1, \qquad \text{συν}x+\text{ημ}2y=0\}.$$

498) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{\text{συν}x\text{συν}y=-1/2, \qquad \text{ημ}x+\text{ημ}y=0\}.$$

499) Ἄνευ πινάκων νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{x-y=15^\circ, \qquad \text{εφ}x=\sqrt{3}\ \text{εφ}y\}.$$

500) Νὰ εὑρεθοῦν εἰς ἀκτίνια τὰ x καὶ y ἐκ τῶν σχέσεων :

$$\left\{\text{εφ}x+\text{εφ}y=1, \qquad \text{συν}x\ \text{συν}y=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 4<x<9, \qquad 4<y<9\right\}.$$

501) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα τῶν σχέσεων :

$$\{\text{ημ}^2x+\text{ημ}^2y=2/3, \qquad \text{συν}2x+\text{ημ}2y=0, \qquad 0<x<\pi, \qquad 0<y<\pi\}.$$

502) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα :

$$\{\text{συν}\alpha+\text{συν}(\alpha+x)+\text{συν}(\alpha+y)=0, \qquad \text{ημ}\alpha+\text{ημ}(\alpha+x)+\text{ημ}(\alpha+y)=0\}$$

εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα:

$$\{1+\text{συν}x+\text{συν}y=0, \qquad \text{ημ}x+\text{ημ}y=0\}$$

καὶ ἀκολούθως νὰ ἐπιλυθῇ.

503) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι, A,B ἂν πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$\left\{\text{εφ}2A+\text{σφ}2B=\frac{9}{\text{εφ}(2A-2B)}, \qquad \text{ημ}2A\ \text{συν}2B=0{,}1\right\}$$

504) Νὰ δοθῇ ὁ τρόπος ἐπιλύσεως καὶ ἡ συνθήκη δυνατότητος τοῦ συστήματος :

$$\{\text{εφ}x+\text{σφ}y=\alpha, \qquad \text{σφ}x+\text{εφ}y=\beta\}.$$

505) Ποία ἡ συνθήκη δυνατότητος τοῦ συστήματος :

$$\{\text{ημ}x\ \text{ημ}y=\alpha, \qquad \text{συν}x\ \text{συν}y=\beta\}.$$

506) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα :

$$\{\text{ημ}^2x-\text{ημ}^2y=\alpha, \qquad x+y=A\}.$$

507) Δείξατε ὅτι διὰ κάθε γωνίαν α ὑπάρχουν λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\{\text{ημ}^2x+\text{ημ}^2y=1-\text{συν}\alpha, \qquad x+y=\alpha\}.$$

508) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left\{\text{ημ}x=\text{εφ}\alpha\text{ημ}(y+\alpha), \qquad \text{ημ}(\alpha-x)=2\text{ημ}^2\frac{y}{2}+\text{συν}(y+2\alpha)\right\}$$

καὶ νὰ γίνῃ διερεύνησις ἐπὶ τῆς δυνατότητος.

509) Εἰς ποίας συνθήκας πρέπει νὰ ὑπόκεινται τὰ α καὶ β ἵνα ἔχῃ λύσιν τὸ σύστημα :

$$\{\text{συν}x+\text{συν}y=\alpha, \qquad \text{συν}3x+\text{συν}3y=\beta\}.$$

510) Ὁμοίως διὰ τὸ σύστημα :

$$\{\text{εφ}x=\alpha\text{σφ}y, \qquad \text{εφ}2x=\beta\text{σφ}2y\}. \qquad (\alpha\beta\neq0).$$

511) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν σύστημα :

$$\left\{\frac{x+y}{1-xy}=\alpha, \quad \frac{(1-x^2)(1-y^2)+4xy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\beta\right\}$$

δύναται νὰ λυθῇ τριγωνομετρικῶς, ἂν τεθῇ $x=\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $y=\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$.

512) Νὰ λυθῇ τὸ ἀλγεβρικὸν σύστημα :

$$\frac{2x}{1-x^2}=y, \quad \frac{2y}{1-y^2}=z, \quad \frac{2z}{1-z^2}=x$$

μὲ τὴν βοήθειαν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

513) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left\{x+y+z=\pi, \quad \frac{\eta\mu x}{\alpha}=\frac{\eta\mu y}{\beta}=\frac{\eta\mu z}{\gamma}\right\}.$$

Συνθῆκαι δυνατότητος (ὑποτίθεται $\alpha\beta\gamma\neq0$).

514) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left\{x+y+z=\pi, \quad \frac{\varepsilon\varphi x}{\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi y}{\beta}=\frac{\varepsilon\varphi z}{\gamma}\right\}.$$

Συνθῆκαι δυνατότητος (ὑποτίθεται $\alpha\beta\gamma\neq0$).

76. Εἰδικά τινα συστήματα.

i) $\{\eta\mu x+\eta\mu y=\alpha, \quad x+y=A\}$ (α, A δεδομένα).

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος τούτου *ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $x-y$.*

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις γράφεται : $2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\alpha$ ἢ λόγῳ τῆς δευτέρας :

(1) $$2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\alpha$$ καὶ ἐφ' ὅσον $\eta\mu\frac{A}{2}\neq0$ δίδει :

(1′) $$\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\alpha}{2\eta\mu\frac{A}{2}}.$$

Ἐφ' ὅσον $\left|\frac{\alpha}{2\eta\mu\frac{A}{2}}\right|\leqq1$ ἡ (1′) γράφεται $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\sigma\upsilon\nu\tau$ καὶ δίδει κατὰ τὰ γνωστά : $\frac{x-y}{2}=\pm\tau+k.360^0$. Ἔτσι ἔχομεν :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{x+y}{2}&=\frac{A}{2}\\ \frac{x-y}{2}&=\tau+k.360^0\end{aligned}\right. \quad \text{καὶ} \quad \left\{\begin{aligned}\frac{x+y}{2}&=\frac{A}{2}\\ \frac{x-y}{2}&=-\tau+k'.360^0\end{aligned}\right.$$

ὅπου k, k′ αὐθαίρετοι ἀκέραιοι. Ἀπὸ τὰ δύο ταῦτα συστήματα λαμβάνομεν τὴν γενικὴν λύσιν τοῦ δοθέντος.

Ἐὰν $\eta\mu\frac{A}{2}=0$ καὶ $\alpha\neq0$ ἡ (1) δὲν ἔχει λύσιν ὡς πρὸς $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}$ καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν $\eta\mu\frac{A}{2}=0$ καὶ $\alpha=0$ τότε ἡ (1) καθίσταται ταυτότης ὡς πρὸς x καὶ y καὶ μένει μόνον ἡ $x+y=A$ ἥτις ἔχει ἀπείρους λύσεις.

ii) $\{\boldsymbol{\eta\mu x\, \eta\mu y=\alpha, \quad x+y=A}\}$.

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς τήν:

$$\frac{1}{2}\left\{\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)\right\}=\alpha \qquad (\text{τύπος } \underline{\mathbf{63\beta}})$$

ἤ, λόγῳ τῆς 2ας: $\frac{1}{2}\left\{\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu A\right\}=\alpha$ καὶ ἐξ αὐτῆς:

$$(2) \qquad \sigma\upsilon\nu(x-y)=2\alpha+\sigma\upsilon\nu A.$$

Ἐφ' ὅσον $|2\alpha+\sigma\upsilon\nu A|\leqq 1$ ἡ (2) λύεται ὡς πρὸς $x-y$ καὶ ἔτσι τὰ x καὶ y προσδιορίζονται ἐκ τῶν $\{x+y=A, \quad x-y=\pm\tau+k.360^0\}$ ὅπου $\sigma\upsilon\nu\tau= =2\alpha+\sigma\upsilon\nu A$.

iii) $\left\{\boldsymbol{\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\lambda, \quad x+y=A}\right\}$.

Ἐὰν $\lambda\neq-1$ ἡ πρώτη ἐξίσωσις γράφεται κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν:

$$\frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{\eta\mu x+\eta\mu y}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\eta\mu\frac{x-y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}}{2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

$$\text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\frac{x-y}{2}\sigma\varphi\frac{x+y}{2}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Ἂν ὑποτεθῇ $\sigma\varphi\frac{A}{2}\neq 0$ ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται, λόγῳ τῆς 2ας:

$$(3) \qquad \varepsilon\varphi\frac{x-y}{2}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \quad \text{καὶ δίδει:}$$

$$(4) \qquad \varepsilon\varphi\frac{x-y}{2}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2}.$$

Ὥστε καὶ πάλιν, προσδιορίζεται ἐκ τῆς (4) ἡ διαφορὰ $x-y$ κλπ.

Ἐὰν $\lambda\neq-1$ καὶ $\sigma\varphi\frac{A}{2}=0$ τότε ἂν μὲν $\lambda=1$ ἡ (3) καθίσταται ταυτότης ὡς πρὸς x καὶ y καὶ μένει μόνον ἡ $x+y=A$ ἥτις ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἂν δὲ $\lambda\neq 1$ ἡ (3) εἶναι ἀδύνατος (καμμία λύσις).

Ἐὰν $\lambda=-1$ ἡ πρώτη ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἰσότης ἡμιτόνων: $\eta\mu x= =\eta\mu(-y)$ καὶ δίδει (§ 55): $x=-y+2k\pi$ ἢ $x=\pi+y+2k\pi$ ὁπότε τὸ σύστημα καταλήγει εἰς τὰ δύο συστήματα:

$$\begin{cases} x+y=2k\pi \\ x+y=A \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=\pi+2k\pi \\ x+y=A \end{cases}$$

Τὸ πρῶτον εἶναι ἀδύνατον ἢ ἀόριστον, ἐνῷ τὸ δεύτερον ἔχει ἀπείρους λύσεις ἐξαρτωμένας ἀπὸ τὸν αὐθαίρετον ἀκέραιον k.

iv) $\{\boldsymbol{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=\alpha, \quad x+y=A}\}$.

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις γράφεται: $\frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=\alpha$ (τύπος **61**) καὶ λόγῳ τῆς δευτέρας γίνεται: $\dfrac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=\alpha$. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\alpha\neq 0$ καὶ $\eta\mu A\neq 0$ λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=\frac{\eta\mu A}{\alpha} \;\text{ἢ}\; \frac{1}{2}\{\sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)\}=\frac{\eta\mu A}{\alpha} \qquad (\beta\lambda.\ \underline{\mathbf{63\alpha}})$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{1}{2}\{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(x-y)\}=\frac{\eta\mu A}{\alpha} \;\text{ἢ τέλος}$$

$$(5)\qquad \sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{2\eta\mu A}{\alpha}-\sigma\upsilon\nu A.$$

Ὑπὸ τὰς γνωστὰς προϋποθέσεις, ἡ (5) λύεται ὡς πρὸς $x-y$ καὶ ἡ γενικὴ λύσις τῆς (5) συνδυαζομένη μὲ τὴν $x+y=A$ παρέχει ὅλας τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y.

Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\eta\mu A\neq 0$ ἡ πρώτη ἐξίσωσις, τοῦ συστήματος γίνεται: $\varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi y=\varepsilon\varphi(-y)$ καὶ δίδει (§ 56): $x=-y+k\pi$ ἢ $x+y=k\pi$ ἢ $\eta\mu(x+y)=0$, δηλ. εἶναι ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν 2αν.

Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\eta\mu A=0$ τότε ἡ πρώτη γίνεται ὡς εἴδομεν $x+y=k\pi$ καὶ διά τινα τιμὴν τοῦ k συμπίπτει μὲ τὴν 2αν (ἄπειροι λύσεις).

Ἐὰν $\alpha\neq 0$ καὶ $\eta\mu A=0$ τότε ἡ δευτέρα γράφεται $x+y=\rho\pi$ (ρ ἀκέραιος) καὶ δίδει $x=-y+\rho\pi$, $\varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi y$, $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=0$, δηλ. ἐξαγόμενον ἀσυμβίβαστον πρὸς τὴν πρώτην (καμμία λύσις).

v) $\{\boldsymbol{\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y=\alpha,\quad x+y=A}\}$.

Ἔστω $\alpha\neq 1$. Τότε ἡ πρώτη γράφεται: $\dfrac{\eta\mu x\eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=\dfrac{\alpha}{1}$ καὶ δίδει:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x\eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu x\eta\mu y}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad\text{ἢ}\quad \frac{\sigma\upsilon\nu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu(x+y)}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu A\neq 0$ ἡ τελευταία γίνεται: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu A}=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$ καὶ δίδει:

$$\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\sigma\upsilon\nu A.$$

Επομένως ἡ διαφορὰ $x-y$ προσδιορίζεται $\left(\text{ἐφ' ὅσον}\left|\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\sigma\upsilon\nu A\right|\leqq 1\right)$ ἄρα καὶ τὰ x καὶ y.

Ἔστω $\alpha\neq 1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu A=0$. Ἡ 2α γίνεται τώρα, $\sigma\upsilon\nu(x+y)=0$ ἢ $\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=\eta\mu x\eta\mu y$ ἢ $\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y=1$, δηλ. ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν πρώτην (καμμία λύσις).

Ἐὰν $\alpha=1$ ἡ πρώτη γίνεται $\varepsilon\varphi x=\sigma\varphi y=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$ καὶ δίδει $x+y=$ $=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. Συνεπῶς αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἢ ἀσυμβίβαστοι ἢ συμπίπτουν εἰς τὴν $x+y=A$.

vi) $\left\{\boldsymbol{\dfrac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y}=\lambda,\quad x+y=A}\right\}$.

Ἡ πρώτη γράφεται:

$$\frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x \eta\mu y} = \frac{\lambda}{1} \text{ ἢ } \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu x\eta\mu y}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu y} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \quad (\lambda \neq -1) \text{ ἢ }$$

$$\frac{\eta\mu(x-y)}{\eta\mu(x+y)} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Ἐὰν $\eta\mu A \neq 0$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς τελευταίας:

$$\frac{\eta\mu(x-y)}{\eta\mu A} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \text{ ἢ } \eta\mu(x-y) = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\eta\mu A.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης εὑρίσκεται τὸ $x-y$ $\left(\text{ἐφ' ὅσον } \left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\eta\mu A\right| \leqq 1\right)$.

Ἔστω $\lambda \neq -1$ καὶ $\eta\mu A = 0$. Ἡ 2α γίνεται τότε $\eta\mu(x+y)=0$ ἢ $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y = -\sigma\upsilon\nu x\eta\mu y$ ἢ $\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y} = -1$, δηλ. ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν πρώτην (οὐδεμία λύσις ὑπάρχει).

Ἐὰν $\lambda = -1$ ἡ πρώτη γίνεται $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi y = \varepsilon\varphi(-y)$ ἤτοι $x = -y + k\pi$, $x+y = k\pi$ συνεπῶς καταλήγομεν εἰς τὸ σύστημα: $\{x+y=k\pi,\ x+y=A\}$ τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἐξισώσεις ἢ εἶναι ἀσυμβίβαστοι ἢ συμπίπτουν εἰς τὴν $x+y=A$.

vii) Καθ' ὅμοιον τρόπον λύονται τὰ συστήματα:

$$\{\eta\mu x \pm \eta\mu y = \alpha,\quad x-y=A\} \quad \{\eta\mu x\eta\mu y = \alpha,\quad x-y=A\}$$

$$\{\eta\mu x/\eta\mu y = \lambda,\quad x-y=A\}$$

$$\{\sigma\upsilon\nu x \pm \sigma\upsilon\nu y = \alpha,\quad x\pm y=A\} \quad \{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y = \alpha,\quad x\pm y=A\}$$

$$\{\sigma\upsilon\nu x/\sigma\upsilon\nu y = \lambda,\quad x\pm y=A\}$$

$$\{\varepsilon\varphi x \pm \varepsilon\varphi y = \alpha,\quad x\pm y=A\} \quad \{\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y = \alpha,\quad x-y=A\}$$

$$\{\varepsilon\varphi x/\varepsilon\varphi y = \lambda,\quad x-y=A\}.$$

ΑΣΚΗΣΙΣ

515) Νὰ δοθῇ ὁ τρόπος ἐπιλύσεως τῶν συστημάτων:

i) $\{\eta\mu x/\eta\mu y = \lambda,\ x-y=A\}$, ii) $\{\sigma\upsilon\nu x/\sigma\upsilon\nu y = \lambda,\ x-y=A\}$

iii) $\{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y = \alpha,\ x-y=A\}$, iv) $\{\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y = \alpha,\ x-y=A\}$.

77. Τριγωνομετρικὴ ἀπαλοιφή.

α') Ἵνα δύο τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις ὡς πρὸς x, ὄχι ἰσοδύναμοι, πληροῦνται ἀμφότεραι διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x, δηλαδή, ἵνα συμβαίνη ὥστε νὰ ἔχουν κοινήν τινα λύσιν, *πρέπει* νὰ ὑφίσταται κατάλληλος σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν των (παραμέτρων). Ἔτσι π.χ. ἐὰν δίδεται ὅτι ὑπάρχει τιμή τις τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἐξισώσεις:

(1) $\{3\eta\mu x = \alpha,\quad \beta\sigma\upsilon\nu x = \gamma\}$

συναληθεύουν, τότε οἱ συντελεσταὶ α, β, γ δὲν δύναται νὰ εἶναι τυχόντες ἀλλὰ πρέπει νὰ συναρμόζωνται διὰ καταλλήλου σχέσεως. Πράγματι, ἂν t εἶναι ἡ κοινὴ λύσις τῶν (1) τότε:

$$\etaμt = \frac{α}{3}, \quad συνt = \frac{γ}{β} \text{ καὶ συνεπῶς :}$$

$$ημ^2t + συν^2t = \frac{α^2}{9} + \frac{γ^2}{β^2} = 1.$$

Δηλαδὴ αἱ παράμετροι α, β, γ θὰ συνδέωνται κατ' ἀνάγκην διὰ τῆς σχέσεως :

$$(2) \qquad \frac{α^2}{9} + \frac{γ^2}{β^2} = 1.$$

Ἡ (2) εἶναι λοιπὸν ἡ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ (1) συναληθεύουν διά τινα τιμὴν τοῦ x. Ἡ (2) δὲν περιέχει τὸ ἄγνωστον τόξον x καὶ δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι προῆλθε ἐκ τῶν (1) δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ x.

Γενικῶς, ἡ εὕρεσις τῆς ἀναγκαίας σχέσεως τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν οἱ παράμετροι δύο ἐξισώσεων ἐχουσῶν κοινήν τινα λύσιν ὡς πρὸς x λέγεται *ἀπαλοιφὴ τοῦ x μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων*. Ἡ εὑρισκομένη σχέσις μεταξὺ τῶν παραμέτρων λέγεται *ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ x* ἢ *ἀπαλείφουσα σχέσις* ἢ *συναρμόζουσα σχέσις*.

Τυπικῶς, ἡ ἐργασία τῆς ἀπαλοιφῆς ἔγκειται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν καταλλήλων συνδυασμῶν μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων οὕτως ὥστε τελικῶς τὸ x νὰ ἐξαλειφθῆ καὶ νὰ παραμείνη σχέσις περιέχουσα μόνον τοὺς συντελεστὰς (παραμέτρους) ἢ τῶν δύο ἐξισώσεων. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ τριγωνομετρικὴ ἀπαλοιφὴ βασίζεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους σχέσεως $ημ^2x + συν^2x = 1$.

Πάντως, ἡ ἀπαλοιφὴ δὲν εἶναι πάντοτε πραγματοποιήσιμος ἐν τῇ πράξει.

β') Παραδείγματα ἀπαλοιφῆς ἑνὸς τόξου μεταξὺ δύο τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων.

i) **Ν' ἀπαλειφθῆ τὸ x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :**

$$\{ημx + συνx = α, \quad ημ^3x + συν^3x = β^3\}.$$

Λύσις. Ἐν πρώτοις ὑποθέτομεν ὅτι τὸ γράμμα x ἐκφράζει τὸ ἴδιο τόξον καὶ εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις. (Ἡ βασικὴ προϋπόθεσις τῆς ἀπαλοιφῆς). Ἡ ζητουμένη ἀπαλοιφὴ δύναται νὰ γίνη ἂν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων προσδιορίσωμεν τὸ ημx καὶ συνy συναρτήσει τῶν α καὶ β καὶ ἀκολούθως τετραγωνίσωμεν καὶ προσθέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν $ημ^2x$ καὶ $συν^2x$.

Ἀντὶ τούτου δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν συντομώτερον ὡς ἑξῆς : Ὑψοῦμεν τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰς τὸν κύβον καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς δοθείσας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν: $ημ^3x + συν^3x + 3ημx.συνx(ημx + συνx) = α^3$ ἢ $β^3 + 3ημx\,συνx.α = α^3$ καὶ τέλος :

$$(3) \qquad ημxσυνx = \frac{α^3 - β^3}{3α}.$$

Ἐὰν τετραγωνίσωμεν τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν :

$$ημ^2x + συν^2x + 2ημx\,συνx = α^2 \text{ ἢ } 1 + 2ημx\,συνx = α^2 \text{ καὶ τέλος,}$$

$$(4) \qquad ημx\,συνx = \frac{α^2 - 1}{2}.$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$(5)\qquad \boxed{\frac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}=\frac{\alpha^2-1}{2}}$$

ἥτις προῆλθε διὰ συνδυασμοῦ τῶν δύο ἐξισώσεων ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ x ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν καὶ εἰς τὰς δύο. Ἡ (5) μὴ περιέχουσα πλέον τὸ x, εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπαλοίφουσα (ἢ συναρμόζουσα) σχέσις.

ii) Ἐὰν ἡ ἄγνωστος γωνία θ πληροῖ ἀμφοτέρας τὰς σχέσεις :

$$\{\alpha\eta\mu\theta+\beta\sigma\upsilon\nu\theta=\gamma,\quad \alpha'\eta\mu\theta+\beta'\sigma\upsilon\nu\theta=\gamma'\}$$

νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν α, β, γ, α', β', γ' ὑποτιθεμένου ὅτι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$.

Λύσις : Αἱ δύο δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν πρωτοβάθμιον σύστημα ὡς πρὸς τὰς ἀγνώστους ποσότητας ημθ καὶ συνθ.

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας εὑρίσκομεν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$:

$$(6)\qquad \eta\mu\theta=\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\qquad \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}.$$

Τετραγωνίζοντες καὶ προσθέτοντες τὰς (6) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν (ἀπαλείφουσαν) :

$$1=\frac{(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha'\gamma)^2}{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}$$

iii) Ν' ἀπαλειφθῇ ὁ x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma,\qquad \alpha\sigma\upsilon\nu x-\beta\eta\mu x=\gamma'.$$

Λύσις. Ἀντὶ ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ προηγουμένου παραδείγματος, τετραγωνίζομεν καὶ προσθέτομεν τὰς δύο δοθείσας. Τὸ x, διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τούτου ἀπαλείφεται καὶ λαμβάνομεν :

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2+\gamma'^2.$$

iv) Ν' ἀπαλειφθῇ ἡ γωνία x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$\{\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma\sigma\upsilon\nu^2x=0,\quad \alpha'^2\eta\mu^2x+\beta'\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma'\sigma\upsilon\nu^2x=0\}$$

ὑποτιθεμένου $\alpha\alpha'\neq 0$.

Λύσις : Ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ συν²x τὰ μέλη ἑκάστης ἐξισώσεως καὶ παραστήσωμεν διὰ τοῦ t τὴν εφx λαμβάνομεν :

$$(10)\qquad \{\alpha t^2+\beta t+\gamma=0,\quad \alpha' t^2+\beta' t+\gamma'=0\}$$

Ἐφ' ὅσον αἱ δύο ἐξισώσεις (10) ἔχουν κοινὴν ρίζαν (ἀληθεύουν μὲ τὴν ἰδίαν τιμὴν τοῦ t) θὰ πληροῦται ἡ γνωστὴ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας συνθήκη:

$$(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)=0.$$

γ') **Ἀπαλοιφὴ δύο τόξων x καὶ y μεταξὺ τριῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων.** Ἐπεκτείνοντες τὸ προηγουμένως ἐξετασθὲν πρόβλημα τῆς ἀπαλοιφῆς, δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν τὴν συνθήκην τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν αἱ παράμετροι τριῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς x καὶ y ὅταν καὶ αἱ τρεῖς ἐξισώσεις ἱκανοποιοῦνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ ζεῦγος τιμῶν τῶν x καὶ y (ὅταν δηλ. ἔχουν κοινὴν λύσιν). Ἡ εὕρεσις τῆς συνθήκης αὐτῆς, δηλ. τῆς ἀπαλειφούσης, γίνεται κατὰ κανόνα διὰ καταλλήλων συνδυασμῶν τῶν τριῶν ἐξισώσεων οὕτως ὥστε νὰ ἐξαλειφθοῦν καὶ τὰ δύο τόξα x καὶ y.

ν. Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ τόξα x καί y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$\{\eta\mu x+\eta\mu y=\alpha, \quad \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta, \quad \sigma\upsilon\nu(x-y)=\gamma\}$$

Λύσις. Ὑποθέτομεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ ζεῦγος (x, y) τῶν τόξων εἶναι τὸ ἴδιο καὶ εἰς τὰς τρεῖς ἐξισώσεις.

Ἐὰν τώρα, τετραγωνίσωμεν καὶ προσθέσωμεν τὰς δύο πρώτας λαμβάνομεν :

$$2+2(\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x\,\eta\mu y)=\alpha^2+\beta^2 \qquad \text{ἢ}$$

$$(11) \qquad 2+2\sigma\upsilon\nu(x-y)=\alpha^2+\beta^2,$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (11) τὸ συν(x—y) ἐκ τῆς τρίτης τῶν δοθεισῶν, λαμβάνομεν :

$$2+2\gamma=\alpha^2+\beta^2$$

ἤτοι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς.

δ') **Ἡ χρησιμότης τῆς ἀπαλοιφῆς.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς ἕνα ζήτημα Γεωμετρικῆς φύσεως, μᾶς χρειάζεται νὰ καθορίσωμεν τὴν σχέσιν ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξὺ δύο μεταβλητῶν μεγεθῶν (ἐξαρτωμένων ἀπ' ἀλλήλων. Ἐὰν ἡ ἀπ' εὐθείας εὕρεσις τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y δὲν εἶναι εὔκολος, τότε ζητοῦμεν νὰ συσχετίσωμεν τὸ x μὲ ἓν τρίτον ποσὸν t (λ.χ. νὰ ἐκφράσωμεν τὸ x συναρτήσει γωνίας τινὸς) καὶ τὸ y, πάλιν μὲ τὸ t. Τούτου γενομένου, ἔχομεν δύο ἐξισώσεις περιεχούσας τὸ t καὶ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t μεταξὺ τῶν δύο τούτων, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν τὴν ὑπάρχουσαν μεταξὺ τῶν x καὶ y.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

516) Ν' ἀπαλειφθῇ ἡ γωνία θ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$x=3\eta\mu\theta-\eta\mu3\theta, \quad y=\sigma\upsilon\nu3\theta+3\sigma\upsilon\nu\theta.$$

517) Ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν μ καὶ ν ὅταν αἱ ἐξισώσεις :

$$\sigma\varphi x(1+\eta\mu x)=4\mu, \quad \sigma\varphi x(1-\eta\mu x)=4\nu$$

ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς γωνίας x ;

518) Ν' ἀπαλειφθῇ ἡ x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\alpha, \quad \eta\mu2x+\sigma\upsilon\nu2x=\beta.$$

519) Ν' ἀπαλειφθῇ τὸ t μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$\eta\mu(t+A)=\gamma, \quad \eta\mu(t+B)=\delta.$$

520) Ν' ἀπαλειφθῇ ἡ γωνία α μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$x\eta\mu\alpha-y\sigma\upsilon\nu\alpha=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{k^2}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\lambda^2}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

521) Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι (c_1), (c_2) ἔχουσαι κοινὸν κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνας α καὶ β ἀντιστοίχως ὅπου α>β. Ἔστω ΟΑ τυχοῦσα ἀκτὶς τῆς (c_1) τέμνουσα εἰς Β τὴν (c_2) καὶ ἔστωσαν Γ, Η αἱ προβολαὶ τῶν Α, Β ἐπὶ μίαν κοινὴν διάμετρον τῶν δύο περιφερειῶν. Εὕρετε ποία σχέσις συνδέει τὰ μεταβλητὰ μήκη (ΟΓ)=x, (ΒΗ)=y μὲ τὰ σταθερὰ α, β.

522) Ν' ἀπαλειφθῇ τὸ α μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$x(1+\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)-y\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)=\gamma(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$$

$$x\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-y(1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=-\gamma\eta\mu\alpha$$

ἀφοῦ πρῶτον ὑπολογισθοῦν τὰ x καὶ y συναρτήσει τοῦ α.

523) Ἐὰν τὰ α, β, γ εἶναι διάφορα ἀλλήλων ἀνὰ δύο αἱ δὲ ἐξισώσεις:

$$\{ \alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta\eta\mu x = \gamma, \qquad \alpha\sigma\upsilon\nu^2 x + \beta\eta\mu^2 x = \gamma \}$$

ἔχουν κοινήν τινα λύσιν (ὡς πρὸς x) νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ α, β, γ θὰ πληροῦν τὴν σχέσιν:

$$4\alpha^2\beta^2 + (\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)^2 = 0.$$

524) Ἐὰν ὑπάρχῃ τιμὴ τοῦ t διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύουν ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha\eta\mu\, 2t + \beta\sigma\upsilon\nu 2t = \gamma, \quad \varepsilon\varphi(t+A) = 4\varepsilon\varphi(t-A)$$

νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις συνδέει τότε τὰ ποσὰ α, β, γ, A.

525) Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\{ \rho\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y = \alpha, \quad \rho\eta\mu x\eta\mu y = \beta, \quad \rho\sigma\upsilon\nu x = \gamma \}$$

526) Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\{ \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = \alpha, \quad \sigma\varphi x + \sigma\varphi y = \beta, \quad x + y = \Gamma \}.$$

527) Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\{ \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 x - \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 y = \gamma^2, \quad \alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta\sigma\upsilon\nu y = \delta, \quad \alpha\varepsilon\varphi x = \beta\varepsilon\varphi y \}.$$

528) Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\left\{ \eta\mu x + \eta\mu y = \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \beta, \quad \varepsilon\varphi\frac{x}{2}\varepsilon\varphi\frac{y}{2} = \varepsilon\varphi^2\frac{\Gamma}{2} \right\}$$

(ὑποτιθεμένου $\sigma\upsilon\nu\Gamma \neq 0$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

Δευτερεύοντα στοιχεία τοῦ τριγώνου.

Εἰς τὴν § 6 ὡρίσαμεν ὡς πρωτεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὰς τρεῖς πλευρὰς α,β,γ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας Α,Β,Γ. Τὰ λοιπὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου ὅπως π.χ, αἱ ἀκτῖνες ἐγγεγραμμένου, περιγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων, αἱ διχότομοι, τὰ ὕψη αἱ διάμεσοι, ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν λέγονται **δευτερεύοντα** στοιχεῖα καὶ δύνανται ὅλα νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῶν κυρίων στοιχείων. Τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν ἤδη ὑπολογίσει κατὰ διαφόρους τρόπους εἰς τὴν §32. Μένουν πρὸς ὑπολογισμὸν τὰ λοιπὰ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναγραφομένων.

78. Τύποι τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου.

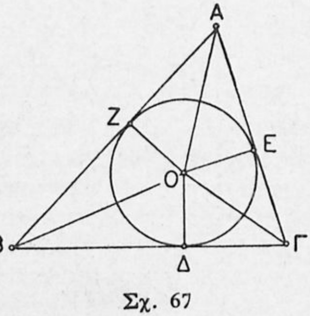
α΄) Ἐὰν ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου, E τὸ ἐμβαδὸν καὶ τ ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τότε ὑφίσταται ἡ σχέσις: **Ε=τρ.** Πράγματι, ἂν Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (σχ. 67), τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ ἔχουν ὅλα, τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Ο ὕψος ἴσον μὲ ρ καὶ ἡ προφανὴς σχέσις τῶν ἐμβαδῶν:

$$(ΑΒΓ)=(ΟΑΒ)+(ΟΑΓ)+(ΟΓΒ) \quad \text{γράφεται :}$$

$$E=\frac{1}{2}(ΑΒ).\rho+\frac{1}{2}(ΒΓ)\cdot\rho+\frac{1}{2}(ΓΑ)\cdot\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\{(ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΓΑ)\}\cdot\rho=\tau\rho.$$

Ἐκ τοῦ βασικοῦ τούτου τύπου: E=τρ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διαφόρους ἐκφράσεις τῆς ρ καθ' ὅσον τὸ E παρέχεται ὡς εἴδομεν ὑπὸ διαφόρων τύπων.



Σχ. 67

$$\underline{70} \qquad \boxed{E=\tau\rho \quad ἢ \quad \rho=\frac{E}{\tau}}$$

Βάσει τῶν τῶν τύπων **23** καὶ **18** λαμβάνομεν ἐκ τοῦ **70**:

$$\rho=\frac{1}{\tau}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=$$

$$=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}=$$

$$= \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} = (\tau-\alpha)\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} = (\tau-\alpha)\epsilon\varphi\,\frac{A}{2}.$$

Κατ' ἀναλογίαν, εὑρίσκομεν: $\rho=(\tau-\beta)\epsilon\varphi\frac{B}{2},\quad \rho=(\tau-\gamma)\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}.$

Ὥστε ἰσχύουν οἱ τύποι:

71 $$\boxed{\rho=(\tau-\alpha)\epsilon\varphi\,\frac{A}{2}=(\tau-\beta)\epsilon\varphi\frac{B}{2}=(\tau-\gamma)\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

γ΄) Ἐκ τῶν **71** λαμβάνομεν:

(1) $$\tau-\alpha=\frac{\rho}{\epsilon\varphi\,\frac{A}{2}},\qquad \tau-\beta=\frac{\rho}{\epsilon\varphi\,\frac{B}{2}},\qquad \tau-\gamma=\frac{\rho}{\epsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}}.$$

Δυνάμει τῶν (1) καὶ τοῦ $E=\tau\rho$, ὁ γνωστὸς τύπος:

$$E^2=\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) \text{ γίνεται:}$$

$$(\tau\rho)^2=\tau.\ \frac{\rho}{\epsilon\varphi\frac{A}{2}}.\ \frac{\rho}{\epsilon\varphi\frac{B}{2}}.\ \frac{\rho}{\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}.$$

Λύοντες τὴν τελευταίαν ταύτην σχέσιν ὡς πρὸς ρ λαμβάνομεν τὸν τύπον:

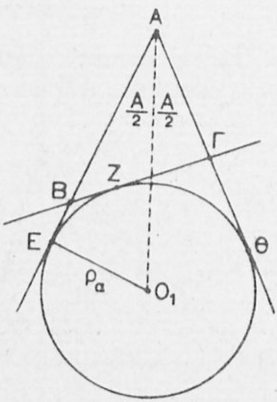
72 $$\boxed{\rho=\tau\,\epsilon\varphi\frac{A}{2}\epsilon\varphi\,\frac{B}{2}\epsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}}$$

79. Τύποι τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου.

α΄) Ἔστω O_1 τὸ κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ=α τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 68). Ἂν Ε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ κύκλου τούτου μετὰ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, (ΑΕ)==τ. Ἄς παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ_α τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τούτου. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AEO_1 ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$(O_1E)=(AE)\epsilon\varphi(EAO_1)$ ἤτοι: $\rho_\alpha=\tau\,\epsilon\varphi\frac{A}{2}$

(διότι ἡ AO_1 εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ). Ἀνάλογοι τύποι θὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἀκτῖνας ρ_β, ρ_γ τῶν δύο ἄλλων παραγγεγραμμένων κύκλων. Δηλ.:



Σχ. 68

73 $$\boxed{\rho_\alpha = \tau \varepsilon\varphi \frac{A}{2}, \quad \rho_\beta = \tau\varepsilon\varphi\frac{B}{2}, \quad \rho_\gamma = \tau\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

β') Εἶναι: $\rho_\alpha = \tau\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \tau\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} =$

$$= \tau\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau^2(\tau-\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau-\alpha} = \frac{E}{\tau-\alpha}$$

ὅπου E, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐντελῶς ὁμοίως λαμβάνομεν $\rho_\beta = E/(\tau-\beta)$, $\rho_\gamma = E/(\tau-\gamma)$. Ἔχομεν λοιπόν:

74 $$\boxed{\rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}, \quad \rho_\beta = \frac{E}{\tau-\beta}, \quad \rho_\gamma = \frac{E}{\tau-\gamma}}$$

80. Ὕψη τοῦ τριγώνου.

α') Ἔστω ΑΔ τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἂς παρασταθῇ μὲ υ_α τὸ μῆκος (ΑΔ) αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν: (ΑΔ)=(ΑΒ)ημΒ=γημΒ καὶ ἐπειδὴ γ=2RημΓ, ἕπεται ὅτι: υ_α = (ΑΔ)=2RημΒημΓ. Ἔτσι ἔχομεν τοὺς τύπους:

75 $$\boxed{\upsilon_\alpha = 2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma, \quad \upsilon_\beta = 2R\eta\mu\Gamma\eta\mu A, \quad \upsilon_\gamma = 2R\eta\mu A\eta\mu B}$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν θεμελιωδῶν τύπων:

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha, \quad E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta, \quad E = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διαφόρους ἄλλας ἐκφράσεις τῶν ὑψῶν ὅταν τὸ ἐμβαδὸν E ἀντικατασταθῇ διὰ τῶν τύπων τῆς § 32 ἢ ἄλλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

529) Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις: $=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$. Κατόπιν δείξατε βάσει τῶν τύπων τῆς § 21 ὅτι $\alpha\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Big/ \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \rho$ καὶ βάσει τούτου ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος α=5, Β=50°, Γ=72°.

530) Εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἕνα δεύτερον τρίγωνον ΔΕΖ. Εὕρετε γεωμετρικῶς, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ ΔΕΖ εἶναι: 180°—2Α, 180°—2Β, 180°—2Γ. Βάσει τοῦ τύπου 72 ὑπολογίσατε τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τριγώνου ΔΕΖ συναρτήσει τῆς R καὶ τῶν γωνιῶν τοῦ ΑΒΓ. Τέλος, δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΔΕΖ εἶναι ἴσον μέ: R^2εφΑ εφΒ εφΓ.

531) Ὑπολογίσατε τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος $\alpha=7$, $\beta=10$, $\gamma=12$.

532) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$E=\sqrt{\rho\cdot\rho_\alpha\cdot\rho_\beta\cdot\rho_\gamma}.$$

533) Δείξατε ὅτι μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀκτίνων ρ, ρ_α, ρ_β, ρ_γ τοῦ ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{\rho_\alpha}+\frac{1}{\rho_\beta}+\frac{1}{\rho_\gamma}=\frac{1}{\rho}.$$

534) Ἐὰν τ ἡ ἡμιπερίμετρος καὶ ρ, ρ_α, ρ_β, ρ_γ αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ δείξατε ὅτι:

$$\text{i)}\quad \rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha=\tau^2,\qquad \text{ii)}\quad \rho_\alpha\rho_\beta-\rho\rho_\gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2}.$$

535) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύουν αἱ σχέσεις:

$$E=\rho_\beta\rho_\gamma\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\rho_\alpha\,\rho_\beta\,\rho_\gamma}{\tau}.$$

536) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ δείξατε ὅτι ἰσχύει:

$$E=\sqrt{\frac{1}{2}R\upsilon_\alpha\upsilon_\beta\upsilon}=\frac{(\alpha+\beta)\rho\rho_\gamma}{\rho+\rho_\gamma}.$$

537) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ δείξατε ὅτι ἰσχύουν:

$$\rho^3=\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}\upsilon_\alpha\upsilon_\beta\upsilon_\gamma,\qquad \frac{\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma}{\rho_\alpha}+\frac{\upsilon+\upsilon_\alpha}{\rho_\beta}+\frac{\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta}{\rho_\gamma}=6.$$

538) Νὰ δειχθοῦν οἱ τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ:

$$E=\rho_\alpha^2\,\sigma\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2},\qquad E=\rho^2\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

ὅπου E, ρ, ρ_α, Α, Β, Γ, στοιχεῖα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

539) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς, ὁπότε σχηματίζονται ἄλλα τρία τρίγωνα ἔχοντα ἡμιπεριμέτρους, ἔστω τὰς τ_1, τ_2, τ_3 καὶ ἐμβαδὰ E_1, E_2. E_3. i) Δείξατε γεωμετρικῶς ὅτι $\tau_1+\tau_2+\tau_3=\tau$ καὶ ἐξ αὐτοῦ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρία ταῦτα τρίγωνα ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ εἰς τὸ ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου. ii) Δείξατε ὅτι $E_1E_2E_3E=\rho^8$. (Χρησιμοποιοῦντες τὴν προηγουμένην ἄσκησιν).

81. Περαιτέρω τύποι διὰ τὰ στοιχεῖα τ, ρ, Ε.

α′) **Τύπος διὰ τὴν ἡμιπερίμετρον τ.** Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\tau=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{1}{2}(2R\eta\mu A+2R\eta\mu B+2R\eta\mu\Gamma)=$$

$$=R(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$ (βλ. § 65, τύπος <u>64</u>).

Ἑπομένως:

76 $$\boxed{\boldsymbol{\tau = 4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}}$$

β') **Δύο ἄλλοι τύποι διὰ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.** Ὁ τύπος 72 τῆς § 78 γίνεται δυνάμει τοῦ 76:

$$\rho=4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἡ ποσότης $4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ ἰσοῦται μέ: $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+$ $+\sigma\upsilon\nu\Gamma-1$ (βλ. § 65, τύπος 68), ἐπομένως ἔχομεν τοὺς τύπους:

77 $$\boxed{\boldsymbol{\rho = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}}$$

78 $$\boxed{\boldsymbol{\rho = R(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma-1)}}$$

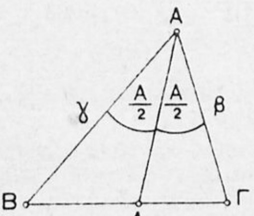
γ') **Εἷς τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ.** Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν **E** παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\beta\gamma\eta\mu A/2$. Συνεπῶς: $\beta\gamma=2\mathbf{E}/\eta\mu A$ καὶ $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=4E\sigma\upsilon\nu A/\eta\mu A$ ἢ $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=4E\sigma\varphi A$. Κατόπιν τούτου τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου δίδει: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=\beta^2+\gamma^2-4E\sigma\varphi A$.

Οὕτω φθάνομεν εἰς τὰς σχέσεις:

79 $$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-4E\sigma\varphi A}\\&\boldsymbol{\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-4E\sigma\varphi B}\\&\boldsymbol{\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-4E\sigma\varphi\Gamma}\end{aligned}}$$

Αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ ἐμβαδὸν E μὲ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν καὶ μὲ τὰς συνεφαπτομένας τῶν γωνιῶν.

82. Τύποι τῶν διχοτόμων τριγώνου.



Σχ. 69

α') Ἔστω ΑΔ ἡ **ἐσωτερικὴ διχοτόμος** τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 69) καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ_A τὸ μῆκος (ΑΔ) αὐτῆς.

Ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως τῶν ἐμβαδῶν:

$$(B A\Delta)+(A\Delta\Gamma)=(AB\Gamma)$$

λαμβάνομεν (βλ. § 32):

$$\frac{1}{2}\gamma\,.\,(A\Delta)\eta\mu\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\beta\,.\,(A\Delta)\eta\mu\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}\beta\gamma\,.\,2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.$$

Ἀφοῦ διαγράψωμεν τὸν παράγοντα $\frac{1}{2}\eta\mu\frac{A}{2}$ λαμβάνομεν:

$$(A\Delta)(\gamma+\beta)=2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \text{ καὶ } (A\Delta)=\delta_A=\frac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\beta+\gamma}.$$

Διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων λαμβάνομεν καὶ τὰ μήκη τῶν δύο ἄλλων διχοτόμων δ_B, δ_Γ. Ἔτσι ἔχομεν τοὺς τύπους:

80 $$\boxed{\delta_A=\frac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\beta+\gamma},\quad \delta_B=\frac{2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\alpha+\gamma},\quad \delta_\Gamma=\frac{2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\alpha+\beta}}$$

Ὁ τύπος $\delta_A=\frac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\beta+\gamma}$ λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς μορφάς:

$$\delta_A=\frac{2\,.\,2R\eta\mu B\,.\,2R\eta\mu\Gamma\,.\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2R(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)}=\frac{4R\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}=$$

$$=\frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\quad\left(\text{διότι } \eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right).$$

Ὥστε ἔχομεν ἐκ παραλλήλου τοὺς τύπους:

81 $$\boxed{\delta_A=\frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}},\quad \delta_B=\frac{2R\eta\mu\Gamma\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}},\quad \delta_\Gamma=\frac{2R\eta\mu A\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}}$$

β') **Τύποι τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων.** Ἔστω ΑΔ΄ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 70) καὶ δ'_A τὸ μῆκος (ΑΔ΄) αὐτῆς.

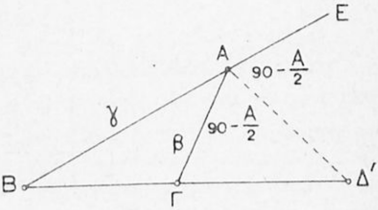
Ὑποτίθεται $B\neq\Gamma$. Ἐπειδὴ $\Gamma\widehat{A}E=180^0-A$, ἔπεται ὅτι $\Gamma\widehat{A}\Delta'=$ $=90^0-\frac{A}{2}$, $B\widehat{A}\Delta'=90^0+\frac{A}{2}$. Ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως τῶν ἐμβαδῶν: $(BA\Delta')-(\Gamma A\Delta')=(AB\Gamma)$ λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{2}(AB)(A\Delta')\eta\mu(B\widehat{A}\Delta')-\frac{1}{2}(A\Gamma)(A\Delta')\eta\mu(\Gamma\widehat{A}\Delta')=\frac{1}{2}(AB)(A\Gamma)\eta\mu A$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{1}{2}\gamma\,.\,\delta'_A\eta\mu\left(90^0+\frac{A}{2}\right)-\frac{1}{2}\beta\,\delta'_A\eta\mu\left(90^0-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{1}{2}\gamma\delta'_A\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\beta\delta'_A\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\beta\gamma\,.\,2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$



Σχ. 70

καὶ ἐξ αὐτῆς μετὰ τὴν διαίρεσιν

$$\text{διὰ}\ \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2},\ \delta'_A=\frac{2\beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}}{\gamma-\beta}$$

ὅπου $\gamma>\beta$. Ἐὰν $\gamma<\beta$ ὁ παρονομαστὴς θὰ εἶναι ὁ $\beta-\gamma$. Ἔτσι ἔχομεν τοὺς τύπους :

82 $$\boldsymbol{\delta'_A=\frac{2\beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}}{|\beta-\gamma|},\quad \delta'_B=\frac{2\gamma\alpha\eta\mu\frac{B}{2}}{|\gamma-\alpha|},\quad \delta'_\Gamma=\frac{2\alpha\beta\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{|\alpha-\beta|}}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους **82** τὰ α, β, γ διὰ τῶν $2R\eta\mu A$, $2R\eta\mu B$, $2R\eta\mu\Gamma$ φθάνομεν εἰς τοὺς τύπους :

83 $$\boldsymbol{\delta'_A=\frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\left|\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\right|},\quad \delta'_B=\frac{2R\eta\mu\Gamma\eta\mu A}{\left|\eta\mu\frac{\Gamma-A}{2}\right|},\quad \delta'_\Gamma=\frac{2R\eta\mu A\eta\mu B}{\left|\eta\mu\frac{A-B}{2}\right|}}$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν τύπων **80** δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς διχοτόμους δ_A, δ_B, δ_Γ συναρτήσει τῶν πλευρῶν. Ὁ πρῶτος τῶν **80** γράφεται :

$$\delta_A=\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}=\frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}\ \text{καὶ κυκλικῶς οἱ ἄλλοι.}$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν **82** εὑρίσκομεν τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους, συναρτήσει τῶν πλευρῶν : $\delta'_A=\dfrac{2}{|\beta-\gamma|}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

83. Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων.

Αἱ διάμεσοι τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ παρίστανται διὰ τῶν μ_α, μ_β, μ_γ ὅπου οἱ δεῖκται α, β, γ δεικνύουν τὰς πλευρὰς πρὸς τὰς ὁποίας αὗται ἄγονται. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστὴ ἡ σχέσις :

$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$ (θεώρημα τῆς διαμέσου) ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν:

$$(1)\qquad \mu_\alpha^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}.$$

Ἡ (1) δύναται νὰ λάβη διαφόρους τριγωνομετρικὰς ἐκφράσεις. Θέτοντες εἰς τὴν (1) ὅπου α^2 τὴν ἴσην ποσότητα: $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\text{συν}A$ (θεώρημα συνημιτόνου) λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$(2)\qquad \mu_\alpha^2=\frac{\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\text{συν}A}{4}.$$

Ἐπίσης, ἡ (2), βάσει τῆς ἰσότητος $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+2\beta\gamma\text{συν}A$ καθίσταται:

$$(3)\qquad \mu_\alpha^2=\frac{\alpha^2+4\beta\gamma\text{συν}A}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

540) Ἐὰν Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης: $\alpha(OA)^2+\beta(OB)^2+\gamma(O\Gamma)^2=\alpha\beta\gamma$.

541) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου κα τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, δείξατε ὅτι τότε: $\text{συν}B+\text{συν}\Gamma=1$.

542) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$2\rho+2R=\alpha\text{σφ}A+\beta\text{σφ}B+\gamma\text{σφ}\Gamma.$$

543) Δείξατε ὅτι μεταξὺ τῶν πέντε ἀκτίνων $R, \rho, \rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\rho_\alpha+\alpha_\beta+\rho_\gamma-\rho=4R.$$

544) Δείξατε ὅτι μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀκτίνων, R, ρ_α, ρ_β, ρ_γ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{(\rho_\alpha+\rho_\beta)(\rho_\beta+\rho_\gamma)(\rho_\gamma+\rho_\alpha)}{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}=4R.$$

545) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ πληροῦται ἡ σχέσις:

$$\left(1-\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}\right)\left(1-\frac{\rho_\alpha}{\rho_\gamma}\right)=2$$

δείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

546) Πῶς δύναται νὰ ἐπιλυθῇ ἕνα τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι καὶ ἡ ρ;

547) Νὰ δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$\rho_\alpha=4R\text{ημ}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2},\qquad \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_\alpha}=\frac{2}{\upsilon_\alpha}$$

ὅπου υ_α τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

548) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$R\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\delta_A\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$$

νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

549) Τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος $\beta>\gamma$ δίδεται ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ΑΔ΄ εἶναι ἴσαι. Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν πλευρῶν του ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\beta^2-\gamma^2=\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma^2}.$$

550) Τριγώνου ΑΒΓ, τὸ γινόμενον τῶν διχοτόμων (ἐσωτερικῶν) ἰσοῦται μὲ k^3 ἐνῷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν διχοτόμων τούτων εἶναι ἴσον πρὸς λ^2. Συναρτήσει τῶν k καὶ λ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ ΑΒΓ.

551) Νὰ δειχθοῦν οἱ τύποι τοῦ ἐμβαδοῦ:

i) $E=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sigma\varphi B-\sigma\varphi A}$, ii) $E=\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma}$.

552) Συναρτήσει τῆς R καὶ τῶν γωνιῶν τριγώνου νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

553) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις $\upsilon_\alpha=4\rho$ δείξατε ὅτι τότε θὰ εἶναι ἐπίσης: $3\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἀντιστρόφως.

554) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ διάμεσος ΑΜ σχηματίζουσα μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως, γωνίας x καὶ y κληθῇ δὲ ω ἡ γωνία $\widehat{BMA}$ νὰ δειχθοῦν αἱ τρεῖς σχέσεις:

i) $\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=\frac{\beta}{\gamma}$, ii) $2\sigma\varphi\omega=\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi B$, iii) $2\sigma\varphi\omega=\sigma\varphi y-\sigma\varphi x$.

555) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ διάμεσος ΑΜ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ τότε:

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$\varepsilon\varphi B=3\varepsilon\varphi\Gamma,\quad \eta\mu A=2\eta\mu(B-\Gamma).$$

ii) Ἐὰν δοθῇ ὅτι $A=170^0$ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ Β καὶ Γ.

556) Ἡ βάσις ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ μένει σταθερὰ ἐνῷ ἡ κορυφή του Α κινεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης h ἀπὸ ταύτης. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν α, h, $\widehat{A}$ ὁρίζεται τὸ συν(Β–Γ) καὶ κατόπιν ὅτι δι' ὅλας τὰς θέσεις τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τῆς παραλλήλου, πληροῦται ἡ σχέσις:

$$-1<\frac{2h}{\alpha}\eta\mu A-\sigma\upsilon\nu A\leqq+1.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

'Επίλυσις τριγώνου ἐκ δευτερευόντων στοιχείων.

84. Προκειμένου νὰ ἐπιλύσωμεν τρίγωνον (βλ. §15) ἔχοντες ὡς δεδομένα καὶ κύρια καὶ δευτερεύοντα στοιχεῖα αὐτοῦ ἢ μόνον δευτερεύοντα, ἐπιζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν βάσει τῶν δεδομένων, ἐπαρκῆ κύρια στοιχεῖα οὕτως ὥστε ν' ἀναχθῶμεν εἰς ἐπίλυσιν τριγώνου ἐκ κυρίων στοιχείων αὐτοῦ (§§26, 27, 28, 29).

Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν τοὺς καταλλήλους τύπους τοὺς ἐκφράζοντας τὰ δοθέντα δευτερεύοντα στοιχεῖα συναρτήσει τῶν κυρίων στοιχείων καὶ δημιουργοῦμεν οὕτω ἐπαρκεῖς ἐξισώσεις περιεχούσας ὡς ἀγνώστους, κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Διὰ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ δημιουργηθέντος συστήματος ἐξισώσεων προσδιορίζομεν τὰ κύρια στοιχεῖα τὰ ὁποῖα μᾶς χρειάζονται. 'Ενίοτε (ἰδίως ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον) χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸ σχῆμα ἵνα, βάσει αὐτοῦ εὕρωμεν σχέσεις μεταξὺ τῶν δευτερευόντων καὶ κυρίων στοιχείων.

Σημείωσις. Ἂς παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\{\Sigma\}$ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων αἵτινες ἐκφράζουν τὰ δεδομένα δευτερεύοντα στοιχεῖα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ συναρτήσει τῶν ἀγνώστων κυρίων στοιχείων, k_1, k_2, k_3 τοῦ τριγώνου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐλύθη τὸ σύστημα $\{\Sigma\}$ καὶ εὑρέθησαν ἐξ αὐτοῦ αἱ τιμαὶ k_1, k_2, k_3 τῶν κυρίων στοιχείων. Ἐὰν τώρα, ὑπάρχῃ τρίγωνον μὲ κύρια στοιχεῖα τὰ εὑρεθέντα: k_1, k_2, k_3, αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὡς δευτερεύοντα τὰ δοθέντα Δ_1, Δ_2, Δ_3 διότι αἱ ἐξισώσεις τοῦ $\{\Sigma\}$ θὰ ἐπαληθεύωνται.

85. Παραδείγματα ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων βάσει δευτερευόντων στοιχείων.

i) **Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.**

'Επίλυσις. Ἔχομεν ὅτι $\rho=(\tau-\alpha)\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\tau-\alpha=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma$:

$$(1)\qquad \beta+\gamma=2\rho+\alpha.$$

'Αλλά, $\beta=\alpha\eta\mu B$ καὶ $\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma$, ἑπομένως ἡ (1) μετατρέπεται εἰς τήν:

$$\alpha\eta\mu B+\alpha\eta\mu\Gamma=\alpha+2\rho \quad \text{ἢ} \quad \alpha(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=\alpha+2\rho \quad \text{ἢ}$$

$$2\alpha\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\alpha+2\rho \quad \text{ἢ} \quad 2\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\alpha+2\rho \quad \text{ἢ τέλος:}$$

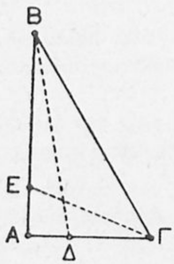
$$(2) \qquad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\alpha+2\rho}{\alpha\sqrt{2}}.$$

Ἐκ τῆς (2) ὑπολογίζομεν τὴν ἡμιδιαφορὰν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ γνωρίζοντες ἀκόμη ὅτι $\frac{B+\Gamma}{2}=45^0$ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ. Γνωρίζοντες δὲ καὶ τὴν α ὑπολογίζομεν καὶ τὰς β καὶ γ.

Τὸ ἀντιστρεπτὸν τῶν πράξεων ὑφίσταται. Δηλ. ἂν ὑπάρχη ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν **α** καὶ ὀξείας γωνίας Β καὶ Γ πληρούσας τὴν (2) τότε θα πληροῦται καὶ ἡ (1), δηλ. τὸ τρίγωνον θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ἐγγεγραμμένου κύκλου τὴν δοθεῖσαν **ρ**.

ii. **Νὰ ἐπιλυθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τοῦ γινομένου k^2 τῶν διχοτόμων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν.**

Ἐπίλυσις. Αἱ διχοτόμοι $\delta_B=(B\Delta)$, $\delta_\Gamma=(\Gamma E)$ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΑΔ καὶ ΓΑΕ (σχ.71). Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν:



Σχ. 71

$$(B\Delta)=\frac{(AB)}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}, \quad (\Gamma E)=\frac{(A\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} \quad \text{καὶ ἑπομένως}$$

$$(B\Delta)(\Gamma E)=\frac{(AB)(A\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$$

$$\text{ἤτοι:} \quad k^2=\frac{\beta\gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\alpha\eta\mu B\,.\,\alpha\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\alpha^2.2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,.\,2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=4\alpha^2\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

Ἔχομεν λοιπὸν ὅτι:

$$k^2=4\alpha^2\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=2\alpha^2\left\{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\right\} \quad \text{ἢ} \quad \frac{k^2}{2\alpha^2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu 45^0$$

καὶ τελικῶς

$$(1) \qquad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{k^2}{2\alpha^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ἐκ τῆς (1) ὑπολογίζεται ἡ ἡμιδιαφορὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου καὶ ἀκολούθως, αἱ ὀξεῖαι γωνίαι. Ἀγόμεθα εἰς ἐπίλυσιν ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῶν γωνιῶν.

Τὸ ἀντιστρεπτὸν τῶν πράξεων, ὑφίσταται. Δηλ. ἡ (1) ὁδηγεῖ διὰ τῶν ἀντιστρόφων πράξεων εἰς τὴν $(B\Delta)(\Gamma E)=k^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

557) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ τὸ ἄθροισμα k τῶν καθέτων πλευρῶν. Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή:

$$\alpha=4765{,}35, \quad k=6642{,}77.$$

558) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα $\alpha=468$ m καὶ τὸ ἐπ' αὐτὴν ὕψος, $h=183$ m.

559) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα $\alpha=1346{,}24$ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων: $\beta-\gamma=824{,}746$.

560) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ὀξείας γωνίας Β καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους: $\alpha+h=k$.

561) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψους h καὶ τῆς περιμέτρου 2τ.

562) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου ὅταν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ὕψος τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.

563) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ διάμεσος ΒΜ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ὑποτεινούσης γωνίαν φ ὑπολογίσατε τὴν εφΒ.

564) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου ὅταν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

565) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου συναρτήσει τῆς ὀξείας γωνίας ω τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ πρὸς τὰς καθέτους πλευρὰς ἀγόμεναι διάμεσοι. Ποία ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τῆς ω;

566) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗτινος τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης εἶναι 44,8 m τὸ δὲ μῆκος τῆς διχοτόμου τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 16,2 m. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου;

567) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης $\beta(\beta+2\gamma)>\gamma^2$ δείξατε ὅτι $B>22^{0}30'$.

568) Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν διαφορῶν: $\beta-\gamma=\delta$ καὶ $\alpha-\upsilon_\alpha=k$.

86. Παραδείγματα ἐπιλύσεων ὅταν δίδωνται δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου καὶ μία γωνία αὐτοῦ.

Ἐὰν μεταξὺ τῶν δεδομένων εἶναι καὶ μία γωνία τοῦ τριγώνου, ἔστω ἡ Α τότε εἶναι γνωστὸν καὶ **τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων** ἀγνώστων γωνιῶν Β καὶ Γ, $B+\Gamma=180^0-A$. Εἰς τὰς πλείστας περιπτώσεις ἐπιζητοῦμεν τότε νὰ προσδιορίσωμεν καὶ **τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.** Τούτου ἐπιτευχθέντος ἡ ἐπίλυσις διευκολύνεται σημαντικῶς, διότι τότε γνωρίζομεν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ πρὸς ἐπίλυσιν τριγώνου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: i) **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων α, Α, $\beta^2-\gamma^2=k^2 (k>0)$.**

Ἐπίλυσις. Γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀγνώστων γωνιῶν :

(1) $$B+\Gamma=180^0-A.$$

Ἐξ ἄλλου ἡ σχέσις $\beta^2-\gamma^2=k^2$ μετατρέπεται εἰς σχέσιν γωνιῶν διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων $\beta=2R\eta\mu B$, $\gamma=2R\eta\mu\Gamma$ (ὅπου $2R=\alpha/\eta\mu A$ = γνωστόν). Λαμβάνομεν ἔτσι :

$4R^2(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma)=k^2$ ἢ $4R^2\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma)=k^2$ ἢ $4R^2\eta\mu A\eta\mu(B-\Gamma)=k^2$ ἢ

(2) $$\eta\mu(B-\Gamma)=\frac{k^2}{4R^2\eta\mu A}.$$

Ἐκ τῆς (2) ὑπολογίζεται ἡ διαφορὰ Β—Γ· γνωρίζοντες δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα Β+Γ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ καὶ ἀγόμεθα εἰς ἐπίλυσιν τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων α, Α, Β, Γ.

Τὸ ἀντιστρεπτὸν τῶν πράξεων ὑφίσταται. Δηλ. ἂν ὑπάρχῃ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὰ δεδομένα στοιχεῖα α καὶ Α καὶ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι Β καὶ Γ νὰ πληροῦν τὴν σχέσιν (2) τότε εἰς τὸ τρίγωνον αὐτὸ θὰ πληροῦται καὶ ἡ σχέσις $\beta^2-\gamma^2=k^2$ ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς (2) διὰ τῶν ἀντιστρόφων πράξεων.

ii) **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων Α, υ_α, ρ.**

Ἐπίλυσις. Γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν (ἀγνώστων) γωνιῶν:

(1) $$B+\Gamma=180^0-A.$$

Ἐξ ἄλλου τὰ δεδομένα στοιχεῖα παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων:

(2) $$\upsilon_\alpha=2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma$$

(3) $$\rho=4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

(βλ. τύπους <u>75</u> καὶ <u>77</u>).

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (2) καὶ (3) ἐξαλείφεται τὸ ἄγνωστον στοιχεῖον R καὶ προκύπτει ἐξίσωσις (τριγωνομετρικὴ) συνδέουσα τὰς ἀγνώστους γωνίας Β καὶ Γ:

$$\frac{\upsilon_\alpha}{\rho}=\frac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,.\,2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=$$

$$=\frac{2\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}$$

Φθάνομεν λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

(4) $$\frac{\upsilon_\alpha}{\rho}=\frac{\eta\mu\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}$$

εἰς τὴν ὁποίαν μόνος ἄγνωστος εἶναι τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$. Λύοντες ὡς πρὸς $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$ λαμβάνομεν:

$$(5) \qquad \text{συν}\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\upsilon_\alpha - \rho}{\rho}\,\text{ημ}\frac{A}{2}.$$

Ἐκ τῆς (5) ὑπολογίζεται ἡ ἡμιδιαφορὰ $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν καὶ τὸ $\frac{B+\Gamma}{2}$ (ἐκ τῆς (1)) εὑρίσκομεν τὰς B καὶ Γ. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (2) τὸν λογ2R καὶ προσδιορίζομεν καὶ τὰς πλευρὰς α, β, γ διὰ τῶν τύπων:

$\text{λογ}\alpha = \text{λογ}2R + \text{λογημ}A, \quad \text{λογ}\beta = \text{λογ}2R + \text{λογημ}B, \quad \text{λογ}\gamma = \text{λογ}2R + \text{λογημ}\Gamma.$

Τὸ ἀντιστρεπτὸν τῶν πράξεων ἀποδεικνύεται εὐκόλως. Ἐὰν δηλ. ὑπάρχῃ τρίγωνον μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν A, μὲ γωνίας B καὶ Γ πληρούσας τὴν (5) καὶ μὲ R τὸ ὑπολογισθὲν ἐκ τῆς (2) τότε τὸ τρίγωνον αὐτὸ θὰ ἔχῃ ὕψος ἐκ τῆς A ἴσον μὲ τὸ δοθὲν υ_α, ὅπως φαίνεται ἐκ τῆς (2). Ἐπειδὴ δὲ πληροῦται ἡ (5) θὰ πληροῦται καὶ ἡ (4) καὶ ἑπομένως καὶ ἡ

$$\frac{\upsilon_\alpha}{\rho} = \frac{2R\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma}{4R\,\text{ημ}\frac{A}{2}\text{ημ}\frac{B}{2}\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}} \quad \text{καὶ ἐπειδὴ } \upsilon_\alpha = 2R\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma$$

θὰ πληροῦται καὶ ἡ $\rho = 4R\,\text{ημ}\frac{A}{2}\text{ημ}\frac{B}{2}\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}$, δηλ. τὸ τρίγωνον θὰ ἔχῃ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου.

iii) **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδεται ἡ α, ἡ Α καὶ ὅτι:**

$$\upsilon_\alpha^2 + (\beta-\gamma)^2 = k^2$$

Ἐπίλυσις. Θὰ ζητήσωμεν καὶ ἐνταῦθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀγνώστων γωνιῶν B καὶ Γ (ὧν γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα). Πρὸς τοῦτο μετασχηματίζομεν τὴν δοθεῖσαν σχέσιν, εἰς τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν ἀντικαθιστῶντες τὸ υ_α μὲ τὸ 2RημBημΓ καὶ τὰ β καὶ γ ἀντιστοίχως μὲ 2RημB, 2RημΓ. Τὸ 2R εἶναι γνωστόν, ἴσον μὲ α/ημA.

Ἡ δοθεῖσα σχέσις $\upsilon_\alpha^2 + (\beta-\gamma)^2 = k^2$ γίνεται:

$$4R^2\text{ημ}^2B\,\text{ημ}^2\Gamma + 4R^2(\text{ημ}B - \text{ημ}\Gamma)^2 = k^2$$

καὶ ἀκολούθως βάσει τῶν μετασχηματισμῶν:

$$2\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma = \text{συν}(B-\Gamma) - \text{συν}(B+\Gamma) = \text{συν}(B-\Gamma) + \text{συν}A \qquad \text{καὶ}$$

$$\text{ημ}B - \text{ημ}\Gamma = 2\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2}\text{συν}\frac{B+\Gamma}{2} = 2\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2}\text{ημ}\frac{A}{2}$$

λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$R^2\left\{\text{συν}(B-\Gamma) + \text{συν}A\right\}^2 + 16R^2\text{ημ}^2\frac{B-\Gamma}{2}\text{ημ}^2\frac{A}{2} = k^2$$

δηλ. γίνεται τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις μὲ ἄγνωστον γωνίαν τὴν B—Γ. Ἐκφράζοντες τὸ συν(B—Γ) συναρτήσει τοῦ $\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2}$ καταλήγομεν εἰς τὴν σχέσιν:

$$R^2\left\{1 - 2\text{ημ}^2\frac{B-\Gamma}{2} + \text{συν}A\right\}^2 + 16R^2\text{ημ}^2\frac{B-\Gamma}{2}\text{ημ}^2\frac{A}{2} = k^2$$

εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μόνος ἄγνωστος εἶναι ὁ $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$. Θέτοντες :

$$(1) \qquad \eta\mu^2\frac{B-\Gamma}{2}=x$$

καὶ παρατηροῦντες ὅτι $1+\sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$ φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$R^2\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-2x\right)^2+16R^2x\eta\mu^2\frac{A}{2}=k^2$$

ἥτις τακτοποιουμένη γίνεται :

$$(2) \qquad f(x)\equiv x^2-2x\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-2\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^4\frac{A}{2}-\frac{k^2}{4R^2}=0.$$

Ἐκ τῆς (2) ὑπολογίζεται ὁ x καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ διαφορὰ Β–Γ καὶ ἀκολούθως αἱ Β καὶ Γ. Ἀναγόμεθα δὲ τελικῶς εἰς ἐπίλυσιν ἐκ τῶν α, Β, Γ, Α.

Ἐπειδὴ ἐτέθη $x=\eta\mu^2\frac{B-\Gamma}{2}$, εἰς κάθε θετικὴν τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχοῦν δύο τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου : $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}=\pm\sqrt{x}$. Καὶ αἱ δύο ὅμως αὗται ἀντίθετοι τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου ὁρίζουν ἴσα τρίγωνα διότι εἴτε εἶναι $\frac{B-\Gamma}{2}=\omega$ εἴτε $\frac{B-\Gamma}{2}=-\omega$ εἰς τὰς ἰδίας γωνίας καταλήγομεν (ἁπλῶς ἐναλλάσσονται αἱ τιμαὶ τῶν Β καὶ Γ). Ἑπομένως διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x παραδεκτήν, ἀντιστοιχεῖ μία λύσις τοῦ προβλήματος.

Τὸ ἀντιστρεπτὸν τῶν πράξεων, ὑφίσταται. Δηλ. πληρουμένης τῆς (2) καὶ τῆς (1) θὰ πληροῦται καὶ ἡ δεδομένη σχέσις $\upsilon_\alpha^2+(\beta-\gamma)^2=k^2$, ὅπως φαίνεται ἂν ἀκολουθήσωμεν τὴν ἀντίστροφον πορείαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

569) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων Α, ρ, R.

570) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ μιᾶς πλευρᾶς α, τῆς ἀπέναντι γωνίας Α καὶ τοῦ ἀθροίσματος k τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

571) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου οὗτινος δίδονται :

$$\beta+\gamma=2{,}7, \qquad A=67^0, \qquad \upsilon_\alpha+\rho_\alpha=2{,}5.$$

572) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον οὗτινος δίδεται ἡ α, ἡ Α καὶ ὁ λόγος $\frac{\beta-\gamma}{\upsilon_\alpha}=\lambda$.

573) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος δίδεται ἡ $A=80^0$ καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις : $\mu_\alpha^2=\beta\gamma$.

574) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος δίδεται ἡ Α καὶ ὅτι τὸ ὕψος ΑΔ διχοτομεῖται ὑπὸ ἑνὸς ἄλλου ὕψους.

575) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος δίδεται ἡ Α καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζει τὴν πλευρὰν ΒΓ.

576) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος δίδεται ἡ Α καὶ

ὅτι πληροῦται ἡ σχέσις $(ΟΑ)^2=(ΟΒ)(ΟΓ)$, ὅπου Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ΑΒΓ κύκλου.

577) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

$$\alpha,\ A,\ \upsilon_\alpha+\beta-\gamma=k$$

578) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

$$\Gamma,\ \alpha+\beta-\gamma=2k,\ E.$$

87. Ἄλλα παραδείγματα ἐπιλύσεως τριγώνου ἐκ δευτερευόντων στοιχείων.

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα καὶ παραδείγματα ἐπιλύσεων εἰς τὰς ὁποίας μεταξὺ τῶν δεδομένων δὲν περιλαμβάνεται καμμία γωνία τοῦ τριγώνου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: i) **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδονται αἱ ἀκτῖνες ρ_α, ρ_β, ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.**

Ἐπίλυσις. Οἱ τύποι οἱ συνδέοντες τὰ δεδομένα δευτερεύοντα στοιχεῖα μὲ τὰ κύρια εἶναι:

$$(1)\qquad \rho_\alpha=\tau\varepsilon\varphi\frac{A}{2},\quad \rho_\beta=\tau\varepsilon\varphi\frac{B}{2},\quad \rho_\gamma=\tau\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\quad (\beta\lambda.\ \text{τύπον } \underline{73}).$$

Ὡς γνωστὸν ὅμως, αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ἡμισειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου πληροῦν τὴν σχέσιν:

$$(2)\qquad \varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=1\qquad (\beta\lambda.\ \text{τύπον } \underline{66}).$$

Ἐκ τῶν (1) ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\rho_\alpha/\tau$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\rho_\beta/\tau$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\rho_\gamma/\tau$, δυνάμει τῶν ὁποίων ἡ (2) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$(3)\qquad \frac{\rho_\alpha\rho_\beta}{\tau^2}+\frac{\rho_\beta\rho_\gamma}{\tau^2}+\frac{\rho_\gamma\rho_\alpha}{\tau^2}=1.$$

Εἰς τὴν (3) μόνος ἄγνωστος εἶναι τὸ τ. Ὑπολογίζομεν λοιπὸν ἐκ τῆς (3) τὸν τ:

$$(4)\qquad \tau=\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}$$

Γνωρίζοντες, τώρα, τὸ τ καὶ τὰ ρ_α, ρ_β, ρ_γ εὑρίσκομεν ἐκ τῶν (1) τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἡμισειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου:

$$(5)\qquad \varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\frac{\rho_\alpha}{\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}},\qquad \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\rho_\beta}{\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\rho_\gamma}{\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}}.$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν πλευρῶν α, β, γ ὑπολογίζομεν πρῶτον τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου:

$$\rho = \tau \varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}{\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}}$$ καὶ κατόπιν ἐκ τῶν τύπων :

$$(6) \qquad \rho = (\tau-\alpha)\varepsilon\varphi\frac{A}{2}, \quad \rho = (\tau-\beta)\varepsilon\varphi\frac{B}{2}, \quad \rho=(\tau-\gamma)\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

προσδιορίζομεν τὰ α, β, γ. Εὑρίσκομεν :

$$\alpha = \tau - \frac{\rho}{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}} = \frac{\rho_\alpha(\rho_\beta+\rho_\gamma)}{\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}}$$

καὶ διὰ κυκλικῆς τροπῆς τῶν γραμμάτων εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

Ἀντιστρόφως, ἂν ὑπάρχῃ τρίγωνον μὲ τὰς ὑπολογισθείσας πλευράς: $\alpha=\rho_\alpha(\rho_\beta+\rho_\gamma)/\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}$ κ.λ.π. τοῦτο θὰ ἔχῃ ἡμιπερίμετρον $\tau=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}$ θὰ εἶναι δὲ τοῦ τριγώνου τούτου :

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} = \frac{\rho_\alpha}{\sqrt{\rho_\alpha\rho_\beta+\rho_\beta\rho_\gamma+\rho_\gamma\rho_\alpha}}$$

καὶ θὰ ἔχῃ ἀκτῖνας παρεγγεγραμμένων κύκλων: $\tau\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\tau\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\tau\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$ ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\alpha<\beta+\gamma, \quad \beta<\gamma+\alpha, \quad \gamma<\alpha+\beta.$$

Ἄς ἐξετάσωμεν τὴν πρώτην ἀνισότητα. Αὕτη μὲ τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν α, β, γ γίνεται :

$$\rho_\alpha(\rho_\beta+\rho_\gamma)<\rho_\beta(\rho_\gamma+\rho_\alpha)+\rho_\gamma(\rho_\alpha+\rho_\beta) \quad \text{ἢ} \quad 0<2\rho_\beta\rho_\gamma.$$

Βλέπομεν ὅτι πληροῦται. Ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι.

Συνεπῶς τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

ii) **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς περιμέτρου 2τ, τοῦ ὕψους υ_α καὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου δ_A.**

Ἐπίλυσις. Τὰ δοθέντα δευτερεύοντα στοιχεῖα τ, υ_α, δ_A συνδέονται μὲ τὰς ἀγνώστους γωνίας Α, Β, Γ διὰ τῶν σχέσεων :

$$(1) \qquad \tau=4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \qquad (\text{τύπος } \underline{76}).$$

$$(2) \qquad \upsilon_\alpha=2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma \qquad (\text{τύπος } \underline{75}).$$

$$(3) \qquad \delta_A=\frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}} \qquad (\text{τύπος } \underline{81}).$$

Ἐκ τοῦ συστήματος τούτου δέον νὰ προσδιορισθοῦν αἱ γωνίαι Α, Β, Γ. Διὰ διαιρέσεως τῶν (2) καὶ (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$(4) \qquad \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\upsilon_\alpha}{\delta_A}.$$

Ἐκ τῆς (4) ὑπολογίζεται ἡ διαφορὰ Β–Γ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑπολογισθῇ καὶ τὸ ἄθροισμα Β+Γ.

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{\upsilon_\alpha}{\tau}=\frac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,.\,2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$$

Χρησιμοποιοῦντες τὴν (4) καὶ γράφοντες υ,δ ἀντὶ υ_α, δ_A φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$(5)\qquad \frac{\upsilon}{\tau}=\frac{\frac{\upsilon}{\delta}-\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon}{\tau}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{\upsilon}{\delta}-\eta\mu\frac{A}{2}.$$

Ἐκ τῆς (5) προσδιορίζεται ἡ γωνία Α καὶ ἐκ τῆς Α τὸ Β+Γ καὶ ἐκ τῶν Β+Γ καὶ Β–Γ αἱ γωνίαι Β, Γ.

Ἐκ τῆς (2) προσδιορίζεται ἀκολούθως ὁ λογ2R καὶ κατόπιν αἱ πλευραὶ διὰ τῶν τύπων:

$$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 2R+\lambda o\gamma\eta\mu A \ \text{κ.λπ.}$$

Ἀντιστρόφως, πληρουμένων τῶν (5), (4) καὶ (2) πληροῦνται καὶ αἱ (3) καὶ (1).

iii) **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς α, τοῦ ἀθροίσματος β+γ=k δεδομένου ἀκόμη ὅτι πληροῦται ἡ σχέσις Γ=2Β.**

Ἐπίλυσις. Ἐκ τῶν σχέσεων Γ=2Β καὶ Α+Β+Γ=180⁰ δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς δύο γωνίας συναρτήσει τῆς τρίτης. Πράγματι, ἡ δευτέρα γίνεται, λόγῳ τῆς πρώτης: Α+Β+2Β=180⁰ καὶ ἔτσι ἔχομεν:

$$(1)\qquad \begin{cases} A=180^0-3B \\ \Gamma=2B \end{cases}$$

Τὰ δεδομένα α καὶ k δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῶν γωνιῶν διὰ τῶν σχέσεων:

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha=2R\eta\mu A \\ k=\beta+\gamma=2R(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma). \end{cases}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (2) ἀπαλείφομεν τὸ R:

$$\frac{\alpha}{k}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}=\frac{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}.$$

Λόγῳ τῶν (1) ἡ ἀνωτέρω σχέσις γίνεται:

$$\frac{\alpha}{k}=\frac{\eta\mu\left(90^0-\frac{3B}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-B}{2}\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{3B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}=\frac{4\sigma\upsilon\nu^3\frac{B}{2}-3\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}-3.$$

Δηλαδή : $\frac{\alpha}{k} = 4\text{συν}^2\frac{B}{2} - 3$. Ἐξ αὐτῆς προσδιορίζομεν τὸ $\text{συν}\frac{B}{2}$:

(3) $$\text{συν}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha+3k}{k}}.$$

Ἐκ τῆς (3) ὑπολογίζεται ἡ B καὶ κατόπιν ἐκ τῶν (1) αἱ A καὶ Γ καὶ ἀναγόμεθα εἰς ἐπίλυσιν τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν α, A, B, Γ.

Ἀντιστρόφως, ἂν ὑπάρχῃ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν ΒΓ=α καὶ εἰς τὸ ὁποῖον πληροῦνται ἡ (3) καὶ αἱ (1), τότε εἰς τὸ τρίγωνον αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{k} = \frac{\text{ημ}A}{\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma}$ εἰς τὴν ὁποίαν φθάνομεν διὰ τῶν ἀντιστρόφων πράξεων. Ἐπειδὴ $\alpha=2R\text{ημ}A$ ἕπεται ὅτι καὶ $k=2R(\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma)$, δηλ. θὰ πληροῦται καὶ ἡ σχέσις $k=\beta+\gamma$.

Διερεύνησις. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) ἕπεται ὅτι διὰ νὰ εἶναι $A>0$ πρέπει:

$3B<180^0$, $B<60^0$, $B/2<30^0$, $\text{συν}(B/2)>\text{συν}30^0$ ἤτοι $\text{συν}\frac{B}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ὥστε ἡ ὑπολογισθεῖσα εἰς τὴν (3) τιμὴ τοῦ $\text{συν}\frac{B}{2}$ ἐκτὸς τοῦ ὅτι πρέπει νὰ εἶναι <1, πρέπει καὶ νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\sqrt{3}}{2}$ διὰ νὰ εἶναι παραδεκτή. Πρέπει λοιπὸν τὰ δεδομένα k καὶ α νὰ πληροῦν τάς :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha+3k}{k}} < 1.$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνομεν :

$3k<\alpha+3k<4k$ ἤτοι $0<\alpha<k$. (Λεγόμεναι «συνθῆκαι δυνατότητος»).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

579) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος ἡ διάμεσος AM ἔχει μῆκος 1 m καὶ σχηματίζει γωνίας 45^0, καὶ 60^0 μετὰ τῶν ἑκατέρωθεν αὐτῆς πλευρῶν.

580) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδονται, ἡ α ἡ μ_α καὶ ἡ διαφορὰ $B-\Gamma=\omega$.

581) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων β, γ καὶ τῆς διχοτόμου δ_A. Διερεύνησις.

Νὰ γίνῃ ἐπίλυσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

582) Ὅταν δίδεται : α, $\beta-\gamma=k$, $B-\Gamma=\omega$, ὅπου $\alpha>0$, $k>0$, $0<\omega<180^0$.

583) » » : α, ρ, $\beta+\gamma=k$.

584) » » : α, ρ, $\beta-\gamma=k$.

585) » » : α, υ_α, $\text{σφ}\frac{B}{2}\text{σφ}\frac{\Gamma}{2}=\lambda$.

586) » » : α, $\alpha+\beta-\gamma=2k$ καὶ ὅτι $\Gamma=2B$.

587) » » : α, R, υ_α.

588) Ὅταν δίδεται : υ_α, υ_β, υ_γ.

589) » » : ρ, 2τ, $A=90^0$.

590) » » : β, A, $\alpha+\gamma=\lambda$.

591) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδεται :

$$\alpha=3, \quad A=32^0, \quad \beta(\beta+\gamma)=36.$$

592) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

$$\alpha-\gamma=9, \quad A-\Gamma=13^0 52' 16'', \quad \rho=6,8.$$

593) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι : $\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}(B\Gamma)$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τότε :

$$\beta^2+\gamma^2=2\beta\gamma(\eta\mu A+\sigma\upsilon\nu A) \quad \text{καὶ ἀντιστρόφως.}$$

594) Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι Α, Β, Γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον ω καὶ εἶναι $A<B<\Gamma$. i) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ἂν δίδεται τὸ ω καὶ ἡ περίμετρος 2τ. ii) Ἐὰν Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου δείξατε ὅτι : $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{\tau^2+E\sqrt{3}}{2(\tau^2-E\sqrt{3})}$. iii) Ποία σχέσις συνδέει τὰ τ καὶ Ε ὅταν δίδεται ἐπὶ πλέον ὅτι τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον εἶναι καὶ ὀρθογώνιον;

595) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος R εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΑΒΓ τοιοῦτον ὥστε $(B\Gamma)=R\sqrt{3}$ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν τόξων τὰ ὁποῖα ὑποτείνει ἡ ΒΓ. Δεδομένου ἀκόμη ὅτι $(AB)-(A\Gamma)=R\sqrt{2}$, νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ χωρὶς τὴν χρῆσιν πινάκων.

596) Κατακόρυφος πύργος ἵσταται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Ἀπό τινος σημείου Κ τοῦ ὁριζοντίου τούτου ἐπιπέδου, κειμένου Νοτιοανατολικῶς τοῦ πύργου (δηλ. 45^0 ΝΑ.) ὁ πύργος φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $18^0 36'$. Ἀπὸ ἄλλου σημείου Λ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, κειμένου ἀκριβῶς πρὸς Νότον τοῦ πύργου, οὗτος φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $12^0 18'$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κατεύθυνσις πρὸς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ Κ ἐν σχέσει πρὸς τὸ Λ.

597) Πόσον τὸ πολὺ δύναται νὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου $\delta_A=12,7$ καὶ $\beta+\gamma=50,8$;

598) Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι πληροῦν τὰς σχέσεις: $\eta\mu B\eta\mu\Gamma=1/\sqrt{10}$, $\varepsilon\varphi A=1|3$. Νὰ εὑρεθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δεχομένη ὡς ρίζας τὰς εφΒ καὶ εφΓ καὶ κατόπιν νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τρία ὕψη τοῦ τριγώνου ἂν R = 1 m.

599) Ὑπολογίσατε τὰς γωνίας τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$\alpha\sigma\varphi\frac{A}{2}+\beta\sigma\varphi\frac{B}{2}-\gamma\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=8R^2.$$

600) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον οὗτινος δίδεται :

$$\alpha=5,3, \qquad \beta-\gamma=3,18, \qquad \upsilon_\beta+\upsilon_\gamma=6,36$$

601) Ἔστω κύκλος ἀκτῖνος R καὶ διάμετρος αὐτοῦ ΑΒ. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Μ διὰ τῆς γωνίας $\widehat{BAM}=\varphi$ $(0<\varphi<\pi/2)$ καὶ λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν Μ′ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν R καὶ φ ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ΑΜΜ′ κύκλου καὶ νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τῆς φ, ἡ ρ εἶναι μεγίστη.

602) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν R καὶ τὸ ἄθροισμα $\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma=S$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

88. Ἡ ἔννοια τῆς διερευνήσεως — Βασικοὶ τινὲς περιορισμοί.

α') Συνθῆκαι δυνατότητος μιᾶς ἐπιλύσεως. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἐκ τῶν δεδομένων δευτερευόντων καὶ μὴ στοιχείων, ὑπολογίζονται ἐπαρκῆ κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ἐνδέχεται ὅμως αἱ ὑπολογιζόμεναι τιμαὶ τῶν τριῶν κυρίων στοιχείων νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε νὰ μὴ συνίσταται ἐξ αὐτῶν τρίγωνον, ὁπότε καὶ ἀπορρίπτονται. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου *εἶναι ἀδύνατον*, δηλ. δὲν ἔχει λύσιν. Δηλαδὴ τὰ δεδομένα εἶναι τοιαῦτα ὥστε νὰ μὴ ἀνταποκρίνωνται εἰς οὐδὲν τρίγωνον. Ἐὰν πάλιν αἱ ὑπολογιζόμεναι τιμαὶ τῶν κυρίων στοιχείων ὁρίζουν πράγματι ἓν τρίγωνον, τότε εἶναι παραδεκταὶ καὶ τὸ πρόβλημα *ἔχει λύσιν* (εἶναι δυνατόν). Δηλαδὴ ὑπάρχει τότε τρίγωνον μὲ τὰ δεδομένα στοιχεῖα.

Ὥστε τὸ ἀδύνατον ἢ δυνατὸν τοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ δεδομένα. **Διερεύνησις δὲ καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν συνθηκῶν εἰς τὰς ὁποίας πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπόκεινται τὰ δεδομένα, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ἢ οὐδεμίαν λύσιν.** Αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ αὐταὶ συνθῆκαι λέγονται **συνθῆκαι δυνατότητος** τοῦ προβλήματος (τῆς ἐπιλύσεως).

β') Συνθῆκαι διὰ τὴν Β — Γ ὅταν δίδεται ἡ Α. *Πολλάκις μεταξὺ τῶν δεδομένων στοιχείων εἶναι μία γωνία, ἔστω ἡ Α ἡ δὲ ἐπίλυσις μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου, δηλ. τῆς Β–Γ.* **Ζητοῦμεν τότε εἰς ποίους περιορισμοὺς πρέπει νὰ ὑπόκειται ἡ Β — Γ διὰ νὰ εἶναι παραδεκτή ;**

Ἔστω ω ἡ προσδιορισθεῖσα τιμὴ τῆς Β—Γ. Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$(1)\qquad \begin{cases} B-\Gamma=\omega \\ B+\Gamma=180^0-A \end{cases} \qquad (0<A<180^0).$$

Λύοντες τὸ σύστημα (1) εὑρίσκομεν :

$$(2)\qquad \left\{ B=90^0+\frac{\omega-A}{2},\quad \Gamma=90^0-\frac{\omega+A}{2} \right\}.$$

Διὰ νὰ εἶναι παραδεκταὶ αἱ προκύπτουσαι τιμαὶ τῶν Β καὶ Γ, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εἶναι θετικαί. Ὥστε πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$90^0+\frac{\omega-A}{2}>0 \quad \text{καὶ} \quad 90^0-\frac{\omega+A}{2}>0.$$

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων τούτων εὑρίσκομεν :

$\omega>A-180^0$ καὶ $\omega<180^0-A$, δηλ. $-(180^0-A)<\omega<180^0-A$ ἤτοι :

$$(3)\qquad \boxed{-(180^0-A)<B-\Gamma<180^0-A}$$

Ἡ διπλῆ ἀνισότης (3) γράφεται ἀκόμη :

$$(4)\qquad \boxed{|B-\Gamma|<180^0-A}$$

Ἡ (4) εἶναι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῖ ἡ Β—Γ ἵνα εἶναι παραδεκτή.

Ἡ (4) καθίσταται εὐμνημόνευτος, ἂν γράψωμεν τὴν προφανῆ διὰ γωνίας τριγώνου σχέσιν:

$$|B-\Gamma|<B+\Gamma \quad \text{ἢ} \quad |B-\Gamma|<180^0-A.$$

Ἐκ τῆς βασικῆς ἀνισότητος (3) **ἀπορρέουν διάφοροι συνθῆκαι, χρήσιμοι διὰ τὰς διερευνήσεις τῶν ἐπιλύσεων.** (Ὅπως αἱ κατωτέρω).

γ΄) Περιορισμοὶ διὰ τὸ $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}$, **ὅταν δίδεται ἡ A.** Δοθείσης τῆς γωνίας A, πρέπει ἡ B—Γ νὰ πληροῖ τὴν (3). Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν:

$$-\left(90^0-\frac{A}{2}\right)<\frac{B-\Gamma}{2}<90^0-\frac{A}{2}$$

καὶ λαμβάνοντες τὰ ἡμίτονα τῶν τριῶν μελῶν (ἅτινα ἐκφράζουν γωνίας μεταξὺ -90^0 καὶ $+90^0$) εὑρίσκομεν:

$$-\eta\mu\left(90^0-\frac{A}{2}\right)<\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}<\eta\mu\left(90^0-\frac{A}{2}\right) \text{ καὶ ἐξ αὐτοῦ:}$$

$$(5) \qquad \boxed{-\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}<\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}<\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \quad \text{ἢ} \quad \left|\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\right|<\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$$

Ἡ (5) εἶναι ἡ συνθήκη ἣν πρέπει νὰ πληροῖ τὸ $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}$ ὅταν τὸ A εἶναι δεδομένον. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}$ πληροῖ τὴν συνθήκην ταύτην, τότε ὁρίζει μίαν καὶ μόνην γωνίαν $\dfrac{B-\Gamma}{2}$ περιεχομένην μεταξὺ -90^0 καὶ $+90^0$ διὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἔχωμεν: $\left|\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}\right|<\eta\mu\left(90^0-\dfrac{A}{2}\right)$, συνεπῶς $\left|\dfrac{B-\Gamma}{2}\right|<90^0-\dfrac{A}{2}$ καὶ τέλος, $|B-\Gamma|<180^0-A$. Ἡ προκύπτουσα λοιπὸν τιμὴ τῆς B—Γ καθορίζει πλήρως τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου (βλ. (4)). (Δηλ. ἡ (5) εἶναι καὶ ἱκανὴ συνθήκη).

δ΄) Περιορισμοὶ διὰ τὸ $\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}$, **ὅταν δίδεται ἡ A.** Λαμβάνοντες τὰ συνημίτονα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς $\left|\dfrac{B-\Gamma}{2}\right|<90^0-\dfrac{A}{2}$ εὑρίσκομεν (ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu|x|=\sigma\upsilon\nu x$)

$$(6) \qquad \boxed{\eta\mu\frac{A}{2}<\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\leqq 1} \qquad (0<A<180^0)$$

ἡ συνθήκη αὐτὴ εἶναι καὶ ἱκανὴ διὰ νὰ ὁρίζωνται αἱ γωνίαι B, Γ τοῦ τριγώνου. Τοῦτο δεικνύεται ὅπως καὶ διὰ τὴν προηγουμένην.

ε΄) Περιορισμοὶ διὰ τὴν $\varepsilon\varphi\dfrac{B-\Gamma}{2}$ **ὅταν δίδεται ἡ A.** Λαμβάνοντες τὰς ἐφαπτομένας τῶν τριῶν μελῶν τῆς:

$$-\left(90^0-\frac{A}{2}\right)<\frac{B-\Gamma}{2}<90^0-\frac{A}{2} \quad \left(\text{ὅπου } 0<\frac{A}{2}<90^0\right) \text{ εὑρίσκομεν τὴν}$$

συνθήκην:

(7) $$\boxed{-\sigma\varphi\frac{A}{2} < \varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2} < \sigma\varphi\frac{A}{2} \quad \text{ἤ} \quad \left|\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\right| < \sigma\varphi\frac{A}{2}}$$

στ') Περιορισμοὶ διὰ τὸ συν(Β—Γ), ὅταν δίδεται ἡ Α. Λαμβάνοντες τὰ συνημίτονα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (4) εὑρίσκομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\,|B-\Gamma| > -\sigma\upsilon\nu A \qquad (0 < A < 180^0)$$

καὶ ἐπειδὴ πρέπει $\sigma\upsilon\nu\,|B-\Gamma| \leqq 1$ λαμβάνομεν τελικῶς:

(8) $$\boxed{-\sigma\upsilon\nu A < \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) \leqq 1} \qquad (0 < A < 180^0).$$

ζ') Πρόβλημα. «Ἐὰν $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \lambda > 0$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \mu > 0$, ποίαν συνθήκην πρέπει νὰ πληροῦν τὰ λ καὶ μ ἵνα αἱ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν σχέσεων καθοριζόμεναι θετικαὶ καὶ $< 180^0$ γωνίαι Β καὶ Γ νὰ δύνανται ν' ἀνήκουν εἰς ἕνα τρίγωνον»;

Λύσις. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ $B+\Gamma < 180^0$ ἢ $\frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} < 90^0$. Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ: $\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2} > 0$. (Πράγματι ἂν $\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2} > 0$, τότε, ἢ $0 < \frac{B+\Gamma}{2} < 90^0$ ἢ $180^0 < \frac{B+\Gamma}{2} < 270^0$, ἢ ..., ἐκτὸς ὅμως τῆς πρώτης διπλῆς ἀνισότητος αἱ λοιπαὶ ἀποκλείονται διὰ $0 < B < 180^0$ καὶ $0 < \Gamma < 180^0$).

Ἡ τελευταία συνθήκη γράφεται: $$\frac{\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}{1 - \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}} > 0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\lambda+\mu}{1-\lambda\mu} > 0$$

καὶ διὰ νὰ πληροῦται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\boxed{\lambda\mu < 1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

603) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $A = 62^0$. Μεταξὺ τίνων ὁρίων θὰ περιέχεται ἡ διαφορὰ Β—Γ; Μεταξὺ τίνων ὁρίων θὰ περιέχεται ἡ γωνία 3Β—Γ;

604) Ὑπάρχει τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος $A = 60^0$ καὶ $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} = -\frac{1}{3}$;

605) Ὑπάρχει τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος $A = 80^0$ καὶ $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} = 0{,}77$;

606) Ὑπάρχει τρίγωνον ΑΒΓ τοιοῦτον ὥστε $f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\right) > 0$ ὅπου

$$f(x) \equiv x^2 - \left(1 + \eta\mu\frac{A}{2}\right)x + \eta\mu\frac{A}{2};$$

607) Ἐὰν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $A = 70^0$, μεταξὺ τίνων ὁρίων περιέχεται ἡ

$$\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2};$$

608) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $Α=60^0$, μεταξὺ ποίων ὁρίων κεῖται τὸ συν(Β–Γ) ;

609) Κύκλος ἀκτῖνος ρ ἐφάπτεται εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς χωρίζει τὸ ΒΓ εἰς δύο τμήματα ἔχοντα μήκη x καὶ y. Ποίαν συνθήκην πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῦν τὰ x, y, ρ ἵνα ἡ ΒΓ εἶναι βάσις τριγώνου ἔχοντος ἐγγεγραμμένον κύκλον τὸν δοθέντα ;

610) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ συνθήκη δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως τοῦ παραδείγματος i τῆς § 85 εἶναι : $\rho/\alpha \leqq (\sqrt{2}-1)/2$.

611) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ συνθήκη δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως τοῦ παραδείγματος ii τῆς §85 εἶναι : $k^2/\alpha^2 \leqq 2-\sqrt{2}$.

612) Νὰ δειχθῆ ὅτι αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως τοῦ παραδείγματος ii τῆς §86 εἶναι: $2<\frac{\upsilon_\alpha}{\rho} \leqq 1+\text{στεμ}\frac{A}{2}$.

613) Νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῆς ἀσκήσεως 560 εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ ὅτι ὑπάρχη μία μόνον λύσις ἀρκεῖ $k>0$, $0<B<90^0$.

614) Εἰς τὴν ἄσκησιν 563 δείξατε ὅτι ἔχομεν δύο λύσεις ὅταν $\text{εφφ}<1/2\sqrt{2}$, μίαν ὅταν $\text{εφφ}=1/2\sqrt{2}$ καὶ καμμίαν ὅταν $\text{εφφ}>1/2\sqrt{2}$.

615) Εἰς τὴν ἄσκησιν 568 δείξατε ὅτι ἡ συνθήκη δυνατότητος εἶναι $k>\delta>0$.

616) Εἰς τὴν ἄσκησιν 570 δείξατε ὅτι αἱ συνθῆκαι δυνατότητος εἶναι $1<k/\alpha<\text{στεμ}(A/2)$.

617) Δείξατε ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῆς ἀσκήσεως 572 εἶναι πάντοτε δυνατὴ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν δεδομένων ($\alpha>0$, $0<A<180^0$).

618) Διὰ νὰ ἔχη λύσιν τὸ πρόβλημα τῆς ἀσκήσεως 574 δείξατε ὅτι πρέπει $\text{συν}A \leqq 1/3$.

619) Δείξατε ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς ἀσκήσεως 577 ἔχει μίαν λύσιν ὅταν $-\frac{\alpha}{2}<k<\frac{\alpha}{2}$ καὶ δύο λύσεις ὅταν $\left\{\frac{\alpha}{2}<k<\frac{\alpha}{2\text{ημ}A} \text{ καὶ } A<90^0\right\}$.

620) Δείξατε ὅτι αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἀσκήσεως 583 εἶναι $4\frac{k+\alpha}{k-\alpha}\rho^2 \leqq \alpha^2<k^2$.

621) Δείξατε ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς ἀσκήσεως 586 ἔχει μίαν λύσιν ταύτην ὅταν $3k<\alpha<4k$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

’Επιλύσεις τετραπλεύρων.

89. Τὰ στοιχεῖα κυρτοῦ τετραπλεύρου.

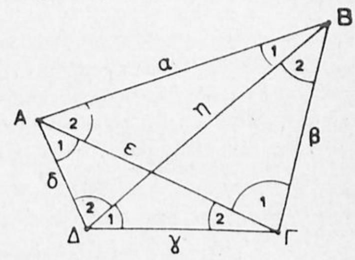
Καλοῦμεν **κύρια στοιχεῖα** ἑνὸς ἐπιπέδου, κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τὰς τέσσαρας πλευράς του καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας του. Θὰ παριστῶμεν δὲ τὰ στοιχεῖα ταῦτα μὲ α, β, γ, δ, Α, Β, Γ, Δ ὅπου:

$$\alpha=(AB), \quad \beta=(B\Gamma), \quad \gamma=(\Gamma\Delta), \quad \delta=(\Delta A),$$

$$A=(\Delta\widehat{A}B), \quad B=(A\widehat{B}\Gamma), \quad \Gamma=(B\widehat{\Gamma}\Delta), \quad \Delta=(\Gamma\widehat{\Delta}A)$$

(σχ. 72) καὶ ὅπου αἱ γωνίαι λαμβάνονται κατ’ ἀπόλυτον τιμὴν (μὴ προσανατολισμέναι).

’Εξ ἄλλου, ἑκάστη γωνία τοῦ τετραπλεύρου χωρίζεται ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου διαγωνίου, εἰς δύο γωνίας: ἡ Α χωρίζεται εἰς τὰς A_1, A_2, ἡ Β εἰς τὰς B_1, B_2, ἡ Γ εἰς τὰς Γ_1, Γ_2 καὶ ἡ Δ εἰς Δ_1, Δ_2 ὡς τὸ σχ. 72 δεικνύει.



Σχ. 72

Τὰ μήκη τῶν δύο διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ΑΒΓΔ θὰ παριστῶμεν ἀντιστοίχως διὰ τῶν ε καὶ η, θέτοντες:

$$(A\Gamma)=\varepsilon, \quad (B\Delta)=\eta.$$

’Επίλυσις τετραπλεύρου καλεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κυρίων στοιχείων του τῇ βοηθείᾳ ἐπαρκῶν δεδομένων.

90. Τὰ μερικὰ τρίγωνα τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου.

α΄) Διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ δημιουργοῦνται τέσσαρα τρίγωνα: ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ καὶ ΔΑΒ ἅτινα καλοῦμεν «*μερικὰ τρίγωνα*» τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 72). ’Εκ τοῦ σχήματος 72 συνάγομεν εὐκόλως τὴν ἑξῆς πρότασιν:

«**Ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ στοιχεῖα δύο μερικῶν τριγώνων τότε γνωρίζομεν ἑκάστου τῶν ἄλλων μερικῶν τριγώνων, δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν· συνεπῶς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου**».

Ἐπειδὴ δὲ δύο μερικὰ τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν διὰ τοῦτο **ἀρκεῖ νὰ δοθοῦν συνολικῶς πέντε ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς δύο ὁποιαδήποτε μερικὰ τρίγωνα** ἵνα γνωρίσωμεν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῶν δύο τούτων μερικῶν τριγώνων καὶ κατόπιν **βαθμηδὸν** νὰ ἐπιλύσωμεν καὶ τὰ λοιπὰ μερικὰ τρίγωνα. Τότε τὸ τετράπλευρον ἔχει ἐπιλυθῆ.

91. Μέθοδοι τινὲς ἐπιλύσεως κυρτῶν τετραπλεύρων.

α΄) Ἡ ἐπίλυσις τοῦ τετραπλεύρου ἐκ πέντε τυχόντων ἀνεξαρτήτων στοιχείων δὲν δύναται νὰ γίνῃ πάντοτε διὰ τῆς βαθμιαίας ἐπιλύσεως τῶν μερικῶν τριγώνων. Ἔτσι π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δίδονται :

$$A_1,\ B_1,\ \beta,\ \gamma,\ \eta$$

δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν μόνον τὸ μερικὸν τρίγωνον ΒΓΔ καὶ οὐδὲν ἄλλο, διότι τῶν ἄλλων γνωρίζομεν μόνον ἀπὸ δύο στοιχεῖα. Ἡ ἐπίλυσις τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ὡς ἑξῆς :

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ΒΓΔ προσδιορίζονται αἱ γωνίαι :

$$B_2,\ \Gamma,\ \Delta_1 \quad \text{ἄρα καὶ ἡ } B.$$

Ἐπίσης ἐκ τῆς σχέσεως $A_2+B+\Gamma_1=180^0$ λαμβάνομεν :

$$A-A_1+B+\Gamma-\Gamma_2=180^0, \qquad A-\Gamma_2=180^0+A_1-B-\Gamma$$

ἤτοι προσδιορίζομεν καὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀγνώστων γωνιῶν Α καὶ Γ_2. Διὰ νὰ προχωρήσωμεν περαιτέρω χρησιμοποιοῦμεν τὸν νόμον τῶν ἡμιτόνων ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος :

$$\frac{(\Delta A)}{(\Delta B)}\cdot\frac{(\Delta B)}{(\Delta\Gamma)}\cdot\frac{(\Delta\Gamma)}{(\Delta A)}=1$$

ἥτις δίδει σχέσιν ἡμιτόνων :

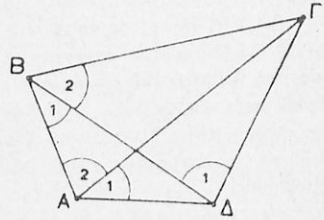
$$\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu A}\cdot\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B_2}\cdot\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu\Gamma_2}=1. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας, ὑπολογίζεται τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν δύο ἀγνώστων γωνιῶν : $\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma_2$, ὧν γνωρίζομεν καὶ τὴν διαφορὰν καὶ συνεπῶς δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν καὶ αἱ Α καὶ Γ_2.

Σχέσεις παρόμοιαι πρὸς τὴν (1) εἶναι χρήσιμοι διὰ τὴν ἐπίλυσιν τετραπλεύρων εἰς διαφόρους περιπτώσεις, ὅπως αἱ κάτωθι :

Ι. Δίδονται: A_1, A_2, B_2, Δ_1 καὶ ζητοῦνται αἱ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔ. (Πρόβλημα τοῦ Pothenot ἢ πρόβλημα τοῦ χάρτου).

Λύσις. Ὑπολογίζομεν πρῶτον, τὰς Α καὶ Γ (σχ. 73). Ἄρα γνωρίζομεν καὶ τὸ ἄθροισμα $B+\Delta=360^0-A-\Gamma$. Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ μίαν ἄλλην σχέσιν μεταξὺ τῶν γωνιῶν Β καὶ Δ, θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα αὗται ἀνήκουν, δηλ. τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα περιέχουν ὡς πλευρὰς τὰ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἐκπορευόμενα τμήματα ΓΒ, ΓΑ, ΓΔ καὶ μάλιστα ὁ λόγος ΓΒ : ΓΔ εἶναι γνωστὸς $=\eta\mu\Delta_1 : \eta\mu B_2$. Γράφομεν λοιπὸν τὴν ἰσότητα :



Σχ. 73

$$\frac{(\Gamma B)}{(\Gamma A)}\cdot\frac{(\Gamma A)}{(\Gamma\Delta)}\cdot\frac{(\Gamma\Delta)}{(\Gamma B)}=1$$

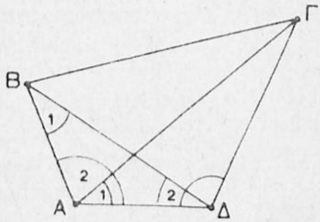
τὴν ὁποίαν μετατρέπομεν εἰς σχέσιν ἡμιτόνων :

$$\frac{\eta\mu A_2}{\eta\mu B}\cdot\frac{\eta\mu\Delta}{\eta\mu A_1}\cdot\frac{\eta\mu B_2}{\eta\mu\Delta_1}=1.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας προσδιορίζεται ὁ λόγος τῶν ἡμιτόνων : ημΔ : ημΒ τῶν γωνιῶν Β καὶ Δ ὧν γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα. Συνεπῶς ὁρίζονται αἱ Β καὶ Δ (βλ. § 76, iii).

ΙΙ. Δίδονται αἱ A_1, Δ, Δ_2, Α καὶ ζητοῦνται αἱ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔ. (Πρόβλημα τοῦ Snellius).

Λύσις. Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὰς B_1, Γ_2 (σχ. 74). Εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἄθροισμα $B+\Gamma_1$ τῶν ἀγνώστων γωνιῶν Β καὶ Γ_1. Αὗται ἀνήκουν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ οἱ λόγοι ΑΒ : ΑΔ καὶ ΑΓ : ΑΔ εἶναι γνωστοὶ (ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ) σχηματίζομεν τὴν ἰσότητα :



Σχ. 74

$$\frac{(AB)}{(A\Gamma)}\cdot\frac{(A\Gamma)}{(A\Delta)}\cdot\frac{(A\Delta)}{(AB)}=1$$

καὶ μετατρέποντες αὐτὴν εἰς σχέσιν ἡμιτόνων λαμβάνομεν :

$$\frac{\eta\mu\Gamma_1}{\eta\mu B}\cdot\frac{\eta\mu\Delta}{\eta\mu\Gamma_2}\cdot\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu\Delta_2}=1$$

ἐκ τῆς ὁποίας ὑπολογίζεται ὁ λόγος τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀγνώστων γωνιῶν Β καὶ Γ_1, ὧν γνωρίζομεν καὶ τὸ ἄθροισμα.

ΙΙΙ. Δίδονται A_1, B_1, Γ_1, Γ_2 καὶ ζητοῦνται αἱ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔ.

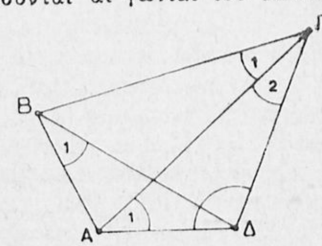
Λύσις. Ἐὰν ἡ ἰσότης :

$$\frac{(AB)}{(A\Gamma)}\cdot\frac{(A\Gamma)}{(A\Delta)}\cdot\frac{(A\Delta)}{(AB)}=1$$

μετατραπῇ εἰς σχέσιν ἡμιτόνων, δίδει :

$$\frac{\eta\mu\Gamma_1}{\eta\mu B}\cdot\frac{\eta\mu\Delta}{\eta\mu\Gamma_2}\cdot\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu\Delta_2}=1$$

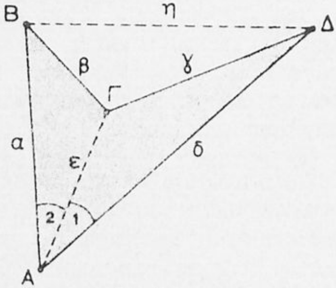
καὶ παρέχει τὸ γινόμενον τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀγνώστων γωνιῶν Β καὶ Δ_2. Μία ἀκόμη σχέσις μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ_2 δύναται νὰ εὑρεθῇ, λ.χ. ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ: $(B-B_1)+\Gamma+\{(180^0-\Gamma_2-A_1)-\Delta_2\}=180^0$.



Σχ. 75

Αὔτη γίνεται $B-\Delta_2=A_1+B_1-\Gamma_1$, δηλαδὴ γνωρίζομεν καὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀγνώστων γωνιῶν Β καὶ Δ_2.

β') Εἰς ἄλλας περιπτώσεις δύναται νὰ βοηθήσῃ τὴν ἐπίλυσιν, ἡ **γεωμετρικὴ κατασκευὴ** τοῦ τετραπλεύρου βάσει τῶν δεδομένων στοιχείων. Ἡ κατασκευὴ αὐτὴ δυνατὸν νὰ ὑποδείξῃ τρόπον ὑπολογισμοῦ τῶν ἀγνώστων στοιχείων.



Σχ. 76

γ') Προκειμένου περὶ μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου, ἔχοντος μίαν γωνίαν *εἰσέχουσαν* ἔστω τὴν Γ (καὶ μὴ ἀναδιπλουμένου) (σχ. 76) ἰσχύουν παρόμοιαι σχέσεις πρὸς τὰς ἐκτεθείσας, μέ τινας τροποποιήσεις. Π.χ. αἱ τρεῖς γωνίαι Β, B_1, B_2 θὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $B=B_1-B_2$ καὶ αἱ Δ, Δ_1, Δ_2 διὰ τῆς $\Delta=\Delta_2-\Delta_1$ διότι :

$$\widehat{AB\Delta}=B_1,\quad \widehat{\Delta B\Gamma}=B_2,\quad \widehat{\Gamma\Delta B}=\Delta_1,\quad \widehat{B\Delta A}=\Delta_2$$

τῶν γωνιῶν λαμβανομένων κατ' ἀπόλυτον τιμὴν (μὴ προσανατολισμένων).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

622) Νὰ δειχθοῦν αἱ μεταξὺ τῶν στοιχείων Α, A_1, A_2, Β, B_1, B_2 Γ, Γ_1, Γ_2 Δ, Δ_1, Δ_2 τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ὑφιστάμεναι σχέσεις :

i) $$\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Delta}=\frac{\eta\mu\Gamma_1\eta\mu B_1}{\eta\mu\Gamma_2\eta\mu\Delta_2}=\frac{\eta\mu A_2\eta\mu B_2}{\eta\mu A_1\eta\mu\Delta_1}$$

ii) $$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu B_1\eta\mu A_1}{\eta\mu B_2\eta\mu\Gamma_2}=\frac{\eta\mu\Delta_2\eta\mu A_2}{\eta\mu\Delta_1\eta\mu\Gamma_1}$$

iii) $$\frac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\Delta\eta\mu A}=\frac{\eta\mu B_2\eta\mu\Gamma_1}{\eta\mu\Delta_2\eta\mu A_1}$$ iv) $$\frac{\eta\mu A\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma\eta\mu\Delta}=\frac{\eta\mu A_2\eta\mu B_1}{\eta\mu\Gamma_2\eta\mu\Delta_1}$$

καὶ νὰ δειχθῇ ἡ χρησιμότης τῶν σχέσεων τούτων εἰς τὰς ἐπιλύσεις I ἕως IV τῆς § 91.

623) Ἐὰν εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $A_2=30^0$, $B_2=40^0$, $\Gamma_2=30^0$, $\Delta_2=50^0$ καὶ τεθῇ $A_1=x$, δείξατε ὅτι: $8\eta\mu^2(100^0-x)\eta\mu(10^0+x)\eta\mu x=\eta\mu 80^0$.

624) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται :

$$\Delta\Gamma=200,\ \Gamma B=170,\ (\widehat{\Delta A\Gamma})=46^0 17',\ \widehat{BA\Gamma}=30^0 9',\ \widehat{\Delta\Gamma B}=114^0 40'.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ λοιπαὶ τρεῖς γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου.

625) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται: (ΑΒ)=6, (ΒΓ)=5, (ΓΔ)=4, $B=150^0$, $\Gamma=120^0$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς συνδεούσης τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καθὼς καὶ τὸ μῆκος τῆς ΑΔ.

626) Νὰ ἐπιλυθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ οὗτινος δίδονται :

(ΑΒ)=10 m, (ΒΓ)=10 m, (ΓΔ)=15 m, $A=30^0$, $\Delta=60^0$ (βλ. § 91).

627) Τετραπλεύρου (κυρτοῦ) ΑΒΓΔ ἡ

$$A=90^0,\quad (AB)=1\ m,\quad (A\Delta)=2/\sqrt{3}\ m,\quad \widehat{B\Gamma A}=\widehat{A\Gamma\Delta}=30^0.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β, Δ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ.

628) Ἀπὸ σημείου Δ παρατηροῦμεν τρεῖς τοποθεσίας Α, Β, Γ κειμένας εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μετὰ τοῦ Δ. Εὑρίσκεται ὅτι:

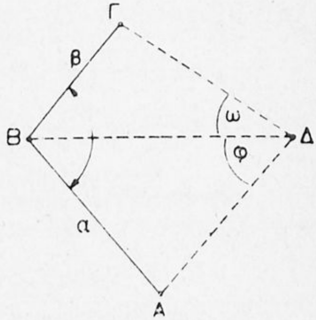
$$\widehat{\Gamma\Delta B}=\omega=48^{o}12', \quad \widehat{B\Delta\Gamma}=\varphi=32^{o}13'.$$

Ἐξ ἑνὸς χάρτου τῆς περιοχῆς συνάγομεν ὅτι:

$$(AB)=\alpha=237{,}2\ m, \quad (B\Gamma)=\beta=453{,}6 \quad \text{καὶ}$$

$$\widehat{AB\Gamma}=\sigma=173^{o}25'.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τοῦ Δ ἀπὸ τοὺς τρεῖς τόπους Α, Β, Γ.



Σχ. 77

629) Τετραπλεύρου κυρτοῦ ΑΒΓΔ δίδονται:

$$(AB)=\alpha, \quad (A\Delta)=\alpha\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad (B\Gamma)=\frac{\alpha}{2},$$

$$\widehat{BA\Delta}=36^{o}, \quad \widehat{AB\Gamma}=108^{o}.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ: $(\Gamma\Delta)$, $(\widehat{B\Gamma\Delta})$, $(\widehat{A\Delta\Gamma})$.

630) Αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔχουν μήκη ἴσα πρὸς α, ἡ δὲ ΑΒ, μῆκος 2α. Δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Β πληροῦν τὴν σχέσιν:

$$4(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B)-2\sigma\upsilon\nu(A+B)=5$$

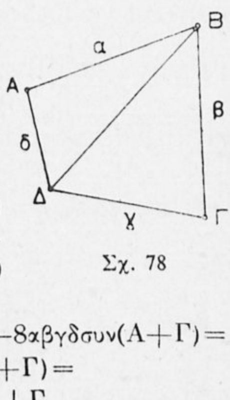
καὶ εὕρετε τὴν Β ὅταν $\eta\mu A=3/5$.

92. Ἐμβαδὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου.

α') Σχέσις ἐμβαδοῦ καὶ πλευρῶν. Τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ. 78) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ, συνεπῶς ἔχομεν:

$$E=\frac{1}{2}\,\alpha\delta\eta\mu A+\frac{1}{2}\,\beta\gamma\eta\mu\Gamma \quad \text{ἢ}$$

$$(1) \quad 4E=2\alpha\delta\eta\mu A+2\beta\gamma\eta\mu\Gamma.$$



Σχ. 78

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν ἰδίων τριγώνων λαμβάνομεν:

$$(\Delta B)^2=\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\sigma\upsilon\nu A=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma \quad \text{ἢ}$$

$$(2) \quad \alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2 \quad 2\alpha\delta\sigma\upsilon\nu A-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

Τετραγωνίζοντες καὶ προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$(4E)^2+(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)^2=4\alpha^2\delta^2+4\beta^2\gamma^2-8\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma)=$$

$$=(2\alpha\delta+2\beta\gamma)^2-8\alpha\beta\gamma\delta-8\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma)=$$

$$=(2\alpha\delta+2\beta\gamma)^2-16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}.$$

Ἑπομένως:

$$(4E)^2=(2\alpha\delta+2\beta\gamma)^2-(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)^2-16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}=$$

$$=(2\alpha\delta+2\beta\gamma+\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)(2\alpha\delta+2\beta\gamma-\alpha^2-\delta^2+\beta^2+\gamma^2)-$$

$$-16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}=\{(\alpha+\delta)^2-(\beta-\gamma)^2\}\cdot\{(\beta+\gamma)^2-(\alpha-\delta)^2\}-$$

$$-16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}=(\alpha+\delta+\beta-\gamma)(\alpha+\delta-\beta+\gamma)(\beta+\gamma+\alpha-\delta)\cdot$$

$$\cdot(\beta+\gamma-\alpha+\delta)-16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}.$$

Ἐὰν τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau$ θὰ εἶναι τότε $\alpha+\delta+\beta-\gamma=2\tau-2\gamma=2(\tau-\gamma)$ καὶ τὰ ὅμοια. Ἔτσι, ἡ σχέσις γίνεται:

$$(4E)^2=2(\tau-\gamma)\cdot2(\tau-\beta)\,2(\tau-\delta)\cdot2(\tau-\alpha)-16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}$$ καὶ τελικῶς:

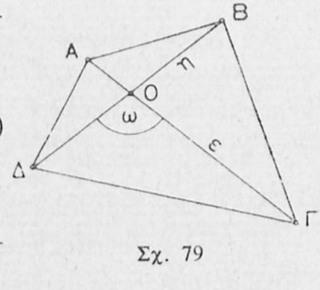
<u>84</u> $$\boxed{E^2=(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)-\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\frac{A+\Gamma}{2}}$$

β') Σχέσις ἐμβαδοῦ καὶ διαγωνίων. Ἐὰν Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων καὶ ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων (ἡ ὀξεῖα ἢ ἡ ἀμβλεῖα, ἀδιάφορον) θὰ ἔχωμεν: (σχ. 79)

$E=$ εμβ·(ΑΒΓΔ) $=$ εμβ.(ΟΑΒ) $+$ $+$ εμβ (ΟΒΓ) $+$ εμβ·(ΟΓΔ) $+$ εμβ·(ΟΔΑ)

ἢ $E=\frac{1}{2}(OA)(OB)\eta\mu\omega+$

$+\frac{1}{2}(OB)(O\Gamma)\eta\mu\omega+\frac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta)\eta\mu\omega+$



Σχ. 79

$+\frac{1}{2}(O\Delta)(OA)\eta\mu\omega=\frac{1}{2}\{(OA)+(O\Gamma)\}\{(OB)+(O\Delta)\}\eta\mu\omega$ καὶ τελικῶς:

<u>85</u> $$\boxed{E=\frac{1}{2}\varepsilon\eta\cdot\eta\mu\omega}$$

Ὁ τύπος <u>85</u> δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς τὸ μὴ κυρτὸν (καὶ μὴ ἀναδιπλούμενον) τετράπλευρον (σχ. 76).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

631) Ἐξ ὅλων τῶν τετραπλεύρων τῶν ἐχόντων τὰς ἰδίας πλευράς, ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν; (βλ. τύπον 84).

632) Ἐὰν ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἡ ἀπέναντι τῆς ΒΓ κειμένη νὰ δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

i) $2\varepsilon\eta\sigma\upsilon\nu\omega=\alpha^2+\gamma^2-(\beta^2+\delta^2)$

ii) $4E=(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)\varepsilon\varphi\omega$

iii) $(4E)^2+(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)^2=(2\varepsilon\eta)^2$

(ὅπου E τὸ ἐμβαδόν, ε, η αἱ διαγώνιοι, α, β, γ, δ αἱ πλευραί).

633) Ποία εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν πλευρῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἵνα αἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας; (βλ. προηγ. ἄσκησιν).

93. Ἐπίλυσις τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.

α') **Ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν συναρτήσει τῶν πλευρῶν.** Ἔστω ΑΒΓΔ κυρτὸν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (σχ. 80). Μεταξὺ τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$A+\Gamma=180^0, \quad B+\Delta=180^0.$$

Ἂν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, λαμβάνομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΒΑΔ, ΒΔΓ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ συνημιτόνου:

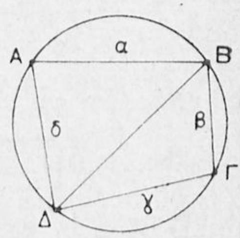
$$(B\Delta)^2=\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\sigma\upsilon\nu A, \quad (B\Delta)^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

Ἑπομένως:

$$\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\sigma\upsilon\nu A=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῆς:}$$

$$(1) \qquad \sigma\upsilon\nu A=\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\delta+2\beta\gamma}.$$

Ὁ τύπος (1) παρέχει τὸ συνΑ συναρτήσει τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ δὲν εἶναι λογιστὸς διὰ τῶν λογαρίθμων. Προσθέτοντες ὅμως τὴν μονάδα εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ (1), λαμβάνομεν:



Σχ. 80

$$1+\sigma\upsilon\nu A=\frac{2\alpha\delta+2\beta\gamma+\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\delta+2\beta\gamma}=$$

$$=\frac{(\alpha+\delta)^2-(\beta-\gamma)^2}{2\alpha\delta+2\beta\gamma}$$

$$\text{ἢ} \quad 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{(\alpha+\delta+\beta-\gamma)(\alpha+\delta-\beta+\gamma)}{2\alpha\delta+2\beta\gamma}$$

καὶ θέτοντες:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\tau, \quad \alpha+\delta+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma), \quad \alpha+\delta-\beta+\gamma=2(\tau-\beta)$$

φθάνομεν εἰς τὸν τύπον:

$$(2) \qquad συν\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(τ-γ)(τ-β)}{αδ+βγ}}\,.$$

Ὁ τύπος (2) ἐφαρμοζόμενος διὰ τὴν γωνίαν Γ, δίδει:

$$(3) \qquad συν\frac{Γ}{2}=\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-δ)}{αδ+βγ}}\,.$$

καὶ ἐπειδὴ $συν\frac{Γ}{2}=ημ\frac{A}{2}\left(\text{διότι } \frac{Γ}{2}+\frac{A}{2}=90^0\right)$ ὁ (3) γίνεται:

$$(4) \qquad ημ\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-δ)}{αδ+βγ}}$$

Τέλος διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (4) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων τύπον:

86
$$\boxed{εφ\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-δ)}{(τ-β)(τ-γ)}}}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται ἡ γωνία A συναρτήσει τῶν πλευρῶν, τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

Διὰ κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων, λαμβάνομεν ὁμοίους τύπους καὶ διὰ τὰς B, Γ, Δ.

β′) **Ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου.** Ἐὰν καλέσωμεν E τὸ εμβ·(ΑΒΔ) καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (4) καὶ (2) θὰ ἔχωμεν κατὰ σειράν:

$$E=εμβ\cdot(ΑΒΔ)+εμβ\cdot(ΒΓΔ)=\frac{1}{2}αδημA+\frac{1}{2}βγημΓ=$$

$$=\frac{1}{2}(αδ+βγ)ημA=\frac{1}{2}(αδ+βγ)\cdot 2ημ\frac{A}{2}συν\frac{A}{2}=$$

$$=(αδ+βγ)\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-δ)}{αδ+βγ}}\cdot\sqrt{\frac{(τ-γ)(τ-β)}{αδ+βγ}} \quad δηλ.$$

87
$$\boxed{E=\sqrt{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)(τ-δ)}}$$

(ὁ 87 προκύπτει ἀμέσως καὶ ἐκ τοῦ 84).

γ′) **Ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.** Ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ περιγεγραμμένου κύκλου (σχ. 80). Ἔχομεν:

$$\frac{(ΒΔ)}{ημA}=2R \quad \text{καὶ} \quad (5)\ \ 4R^2=\frac{(ΒΔ)^2}{ημ^2A}=\frac{α^2+δ^2-2αδσυνA}{ημ^2A}\,.$$

Βάσει τοῦ τύπου (1) ὁ (5) γίνεται:

$$4R^2 = \frac{\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\delta+2\beta\gamma}}{\eta\mu^2 A} = \frac{(\alpha^2+\delta^2)(\alpha\delta+\beta\gamma)-\alpha\delta(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)\,\eta\mu^2 A} =$$

$$= \frac{(\alpha^2+\delta^2)\beta\gamma+(\beta^2+\gamma^2)\alpha\delta}{(\alpha\delta+\beta\gamma)\eta\mu^2 A} = \frac{\alpha^2\beta\gamma+\delta^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\delta+\gamma^2\alpha\delta}{(\alpha\delta+\beta\gamma)\eta\mu^2 A} =$$

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha\gamma+\beta\delta)+\gamma\delta(\beta\delta+\alpha\gamma)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)\cdot 4\eta\mu^2\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}} = \frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)}{(\alpha\delta+\beta\gamma)\cdot 4\cdot\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\delta+\beta\gamma}\cdot\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\beta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}} =$$

$$= \frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{4(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$$ ὅπου ἔγινε χρῆσις τῶν τύπων (4) καὶ (2).

Ἑπομένως:

88 $$\boxed{R = \frac{\sqrt{(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}}{4E}}$$

ὅπου E τὸ ἐμβαδὸν (βλ. τύπον 87).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

634) Τὸ ἐμβαδὸν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι 100 m² αἱ δὲ τέσσαρες πλευραί του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 5, 6, 7, 9. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί του, αἱ γωνίαι του καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

635) Ἐὰν θ ἡ γωνία ἣν σχηματίζουν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, προεκτεινόμεναι, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ, δ ὑποτιθεμένου $\delta>\beta$.

636) Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι καὶ ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον περὶ κύκλον εἶναι δὲ α, β, γ, δ αἱ πλευραί του, δείξατε ὅτι τὸ μὲν ἐμβαδόν του $E=\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$ ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι $\rho=2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}:(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

637) Ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=6 μονάδες, ΒΓ=7, ΓΑ=11 τὸ δὲ Δ εἶναι ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον πρὸς τὸ Β. Ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν λεπτοῦ τὰς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ καὶ $\widehat{B\Delta A}$ καθὼς καὶ τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων.

638) Τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον διαμέτρου (ΑΔ)=2R ἡ δὲ πλευρά του (ΒΓ)=R. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ (ΑΒ)=x, (ΓΔ)=y εἰς τρόπον ὥστε τὸ τετράπλευρον νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν=μ². Ποῖαι αἱ συνθῆκαι δυνατότητος τοῦ προβλήματος;

639) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox, Oy γωνίας xOy ἐχούσης μέτρον θ δίδονται ἀντιστοίχως τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ μήκους λ ἕκαστον. Ἐὰν Μ σημεῖον ἐντὸς

τῆς γωνίας καὶ τεθῇ $\widehat{MAx}=\alpha$, $\widehat{MBy}=\beta$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι α, β, οὕτως ὥστε τὸ μὲν τετράπλευρον ΜΑΟΒ νὰ εἶναι ἐγγράψιμον, ὁ δὲ λόγος ΜΑ : ΜΒ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς δοθέντα ἀριθμὸν k.

Ἐπιλύσεις τραπεζίων.

640) Εἰς ἰσοσκελὲς τραπέζιον ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος 55,62 καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς βάσεως γωνίαν $19^{0}20'53''$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

641) Τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται, ἡ βάσις $(AB)=\alpha=4$ αἱ διαγώνιοι $(A\Gamma)=\varepsilon=3$, $(B\Delta)=\eta=4$ καὶ ἡ γωνία $\theta=90^{0}$ τῶν διαγωνίων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη βάσις $(\Gamma\Delta)=\gamma$.

642) Νὰ ἐπιλυθῇ τραπέζιον οὗτινος δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ αἱ γωνίαι.

643) Εἰς ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ οὗτινος ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα βάσις, δίδεται τὸ μῆκος δ τῆς διαγωνίου (ΑΓ), ἡ γωνία θ τὴν ὁποίαν αὕτη σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ καὶ ἡ περίμετρος 2τ τοῦ τραπεζίου.

i) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, αἱ πλευραί του καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

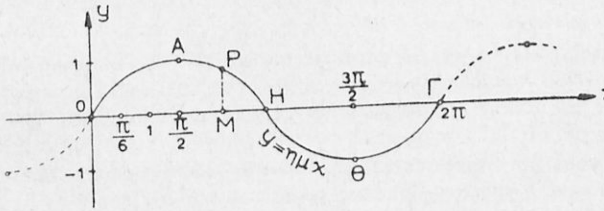
ii) Ποία σχέσις πρέπει νὰ συνδέῃ τὰ δεδομένα ἵνα τὸ τραπέζιον εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον; Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα, ἁπλοποιοῦνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

Γραφικαὶ παραστάσεις τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. Γραφικὴ ἐπίλυσις ἐξισώσεων μὴ ἀλγεβρικῆς μορφῆς.

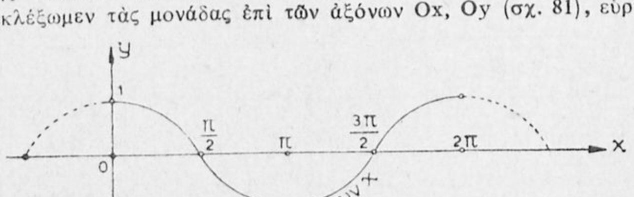
94. Γραφικαὶ παραστάσεις.

α') **Ἡ συνάρτησις y=ημx** ἔχει εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ὡς γραφικὴν παράστασιν, μίαν ἀπέραντον κυματοειδῆ γραμμὴν (βλ. σχ. 81) ἡ ὁποία καλεῖται **ἡμιτονοειδὴς καμπύλη**. Τῆς καμπύλης αὐτῆς ἀρκεῖ νὰ



Σχ. 81

κατασκευασθῆ τὸ μέρος ΟΑΓ τὸ μεταξὺ τῶν θέσεων $x=0$ καὶ $x=2\pi$, τῶν λοιπῶν τμημάτων της προκυπτόντων διὰ μεταφορᾶς τοῦ ΟΑΓ παραλλήλως πρὸς τὸν Ox κατὰ τμῆμα 2π ἢ $4\pi, \ldots$ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερά. Διότι, λόγῳ τῆς περιοδικότητος (§ 45), κάθε τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ διαστήματος Ο ἕως 2π ἐπαναλαμβάνεται εἰς τὰ σημεῖα τὰ ἀπέχοντα τοῦ Μ κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 2π. Αἱ δύο ἁψῖδες ΟΑΗΓ τῆς καμπύλης κατασκευάζονται κατὰ τὸν γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας τρόπον. Ἀφοῦ ἐκλέξωμεν τὰς μονάδας ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox, Oy (σχ. 81), εὑρίσκομεν

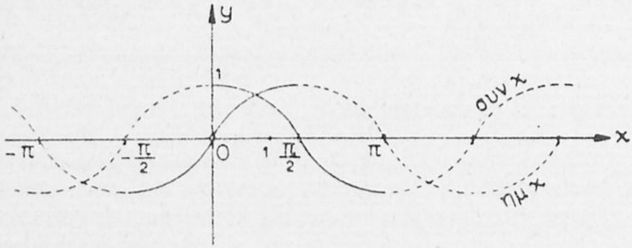


Σχ. 82

ἕνα ὡρισμένον πλῆθος **σημείων ἐχόντων ὡς τετμημένας**, διαφόρους τιμὰς τῆς **x** (δηλ. τοῦ τόξου) **καὶ** τεταγμένας, **τὰς ἀντιστοίχους** τιμὰς τῆς συναρτήσεως (δηλ. τοῦ ἡμιτόνου). Διὰ τῶν σημείων αὐτῶν πρέπει νὰ διέρχεται ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη. Χαρακτηριστικὰ σημεῖα εἶναι τὸ

$$O(0, 0), \quad A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \quad H(\pi, 0), \quad \Theta\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \quad \Gamma(2\pi, 0).$$

Ἡ συνάρτησις y=συνx ἔχει γραφικὴν παράστασιν τὴν εἰς τὸ σχ. 82 κυματοειδῆ καμπύλην, κατασκευαζομένην καθ' ὅμοιον τρόπον μὲ τὴν

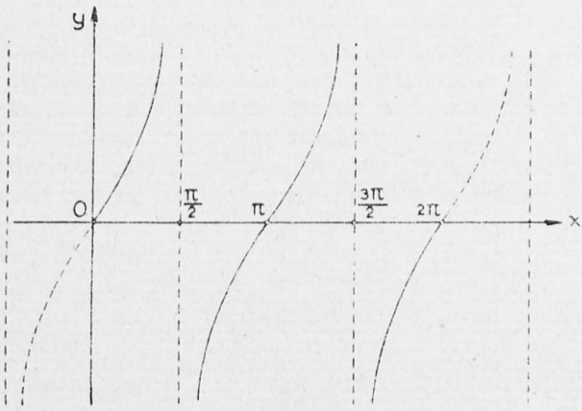


Σχ. 83

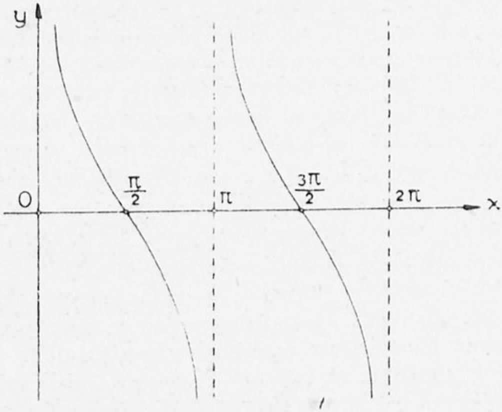
ἡμιτονοειδῆ. Εἰς τὸ σχ. 83 παρίστανται εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα συντεταγμένων καὶ αἱ δύο καμπύλαι, y=ημx καὶ y=συνx. Βλέπομεν δὲ ὅτι ἡ μία προκύπτει ἐκ τῆς ἄλλης μεταφερθείσης παραλλήλως πρὸς τὸν Ox καὶ κατὰ **διάστημα π/2.**

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως y=εφx παρίσταται εἰς τὸ σχ. 84, καὶ ἡ τῆς συναρτήσεως y=σφx εἰς τὸ σχ. 85.

Οἱ πίνακες μεταβολῶν τῆς εφx καὶ σφx οἱ δοθέντες εἰς τὰς §§ 42 καὶ 43 συνάγονται ἀμέσως, ἐποπτικῶς, ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς γραφικὰς παραστάσεις.



Σχ. 84



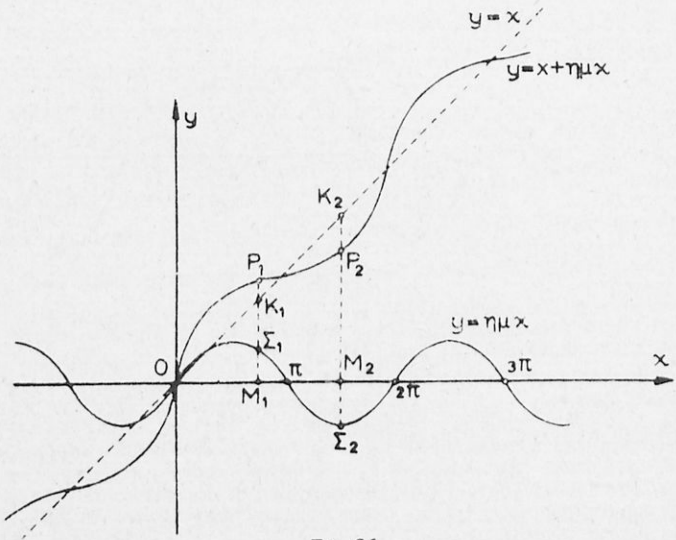
Σχ. 85

Γραφικὴ παράστασις διὰ συνθέσεως τῶν τεταγμένων. Ἐὰν ἔχουν γίνη αἱ γραφικαὶ παραστάσεις δύο συναρτήσεων $y=f(x)$ καὶ $y=\varphi(x)$ εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων (καὶ φυσικά, μὲ τὴν ἰδίαν μονάδα μήκους) τότε ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως :

$$y=f(x)+\varphi(x)$$

δύναται νὰ προκύψη διὰ τῆς *συνθέσεως τῶν τεταγμένων.*

Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως $f(x)+\varphi(x)$, προσδιορίζοντες γραφικῶς τὸ *ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα* τῶν **y**



Σχ. 86

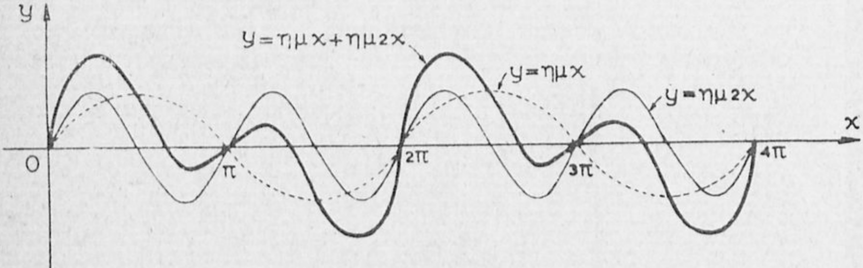
τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς ἐξισώσεις: $y=f(x)$ καὶ $y=\varphi(x)$. Ἔτσι π.χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως: $y=x+\eta\mu x$, κατασκευάζομεν πρῶτον τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν $y=x$ καὶ $y=\eta\mu x$ εἰς τὸ ἴδιο σύστημα ἀξόνων (τοῦ x παριστῶντος ἀκτίνια). Εἰς τυχὸν σημεῖον M_1 τοῦ Ox ἀντιστοιχοῦν αἱ τεταγμέναι $\overline{M_1\Sigma_1}$ καὶ $\overline{M_1K_1}$ τῶν γραμμῶν $y=\eta\mu x$ καὶ $y=x$. Διὰ τοῦ διαβήτου προσθέτομεν τὰ δύο αὐτὰ (θετικὰ) τμήματα (λαμβάνοντες: $\overrightarrow{K_1P_1}=\overrightarrow{M_1\Sigma_1}$), καὶ φθάνομεν εἰς τὸ σημεῖον P_1 τῆς γραμμῆς $y=x+\eta\mu x$ (σχ. 86). Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον P_2 τῆς ζητουμένης γραφικῆς παραστάσεως προσθέτοντες εἰς τὴν θετικὴν τεταγμένην $\overline{M_2K_2}$ τὴν ἀρνητικὴν $\overline{M_2\Sigma_2}$ (λαμβάνοντες $\overrightarrow{K_2P_2}=\overrightarrow{M_2\Sigma_2}$).

Τὸ σχ. 87 δεικνύει τὴν κατασκευὴν τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y=\eta\mu x+\eta\mu 2x$ βάσει τῶν γραμμῶν $y=\eta\mu x$ καὶ $y=\eta\mu 2x$.

β΄) **Ὁ κατὰ προσέγγισιν προσδιορισμὸς μιᾶς ρίζης τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$,** δύναται πολλάκις νὰ ἐπιτευχθῇ γραφικῶς. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν τὴν γραμμὴν ἡ ὁποία παριστᾷ γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $y=f(x)$ καὶ ἀνευρίσκομεν ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἕνα σημεῖον τομῆς τῆς γραμμῆς $y=f(x)$ μὲ τὸν ἄξονα Ox. Ἡ τετμημένη x_0 τοῦ σημείου τούτου εἶναι μία ρίζα τῆς $f(x)=0$ διότι ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο τεταγμένη εἶναι μηδέν. Δηλαδὴ ἡ $y=f(x)$ δίδει: $0=f(x_0)$.

Ἡ ἀκρίβεια τῆς μεθόδου αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τελειότητα τοῦ σχεδίου καὶ τῶν ὀργάνων.

Ἐντελῶς ὁμοίως, διὰ νὰ εὕρωμεν μίαν κατὰ προσέγγισιν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $f(x)=\sigma(x)$ ἀρκεῖ νὰ χαράξωμεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y=f(x)$ καὶ $y=\sigma(x)$ καὶ νὰ εὕρωμεν ἕνα σημεῖον τομῆς τῶν δύο τούτων καμπύλων. Ἡ τετμημένη x_0 τοῦ κοινοῦ τούτου σημείου εἶναι



Σχ. 87

μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x)=\sigma(x)$. Διότι αἱ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἀντιστοιχοῦσαι τεταγμέναι εἶναι ἴσαι: $f(x_0)=\sigma(x_0)$.

Ἔτσι π.χ. προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὴν μικροτέραν θετικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\varepsilon\varphi x=x+5$ (τὸ x εἰς ἀκτίνια) χαράσσομεν εἰς τὴν περιοχὴν $0<x<\pi/2$ τὰς δύο γραμμάς: $y=\varepsilon\varphi x$ (βλ. σχ. 84) καὶ τὴν $y=x+5$ (ἥτις εἶναι εὐθεῖα) καὶ ἀνευρίσκομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τούτων γραφικῶν παραστάσεων. Ἡ τετμημένη x_0 τοῦ κοινοῦ τούτου σημείου εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη λύσις. Ἐὰν ἡ ἐργασία γίνῃ μὲ τὴν ἀπαιτουμένην ἐπιμέλειαν εὑρίσκομεν $x_0=1,416$, τιμὴν συμφωνοῦσαν μὲ τὴν ἀκριβῆ καὶ εἰς τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

644) Εἶναι περιοδικὴ ἡ συνάρτησις $y=ημ2x$; Ἐὰν εἶναι, ποία ἡ περίοδος αὐτῆς; Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς συναρτήσεις: $ημ4x$, $ημ5x$, $συν3x$, $συν\frac{x}{2}$, $εφ2x$, $εφ\frac{x}{4}$, $εφ3x$.

645) Εὕρετε τὴν περίοδον τῆς συναρτήσεως: $y=ημx+ημ2x$.

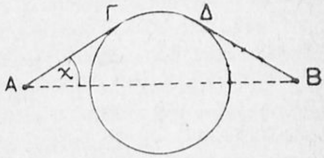
646) Δώσατε πρόχειρον γραφικὴν παράστασιν τῆς τεμx εἰς τὸ διάστημα:

$$-360^0<x<360^0.$$

647) Ὁμοίως διὰ τὴν στεμx.

648) Παραστήσατε γραφικῶς τὰς συναρτήσεις: $y=x-ημx$ καὶ $y=x^2+ημx$ εἰς τὸ διάστημα $0\leqq x\leqq 2\pi$.

649) Τεταμένον νῆμα μήκους 3,60 μέτρων περιβάλλει ἐν μέρει κυκλικὸν τροχὸν ἀκτῖνος 0,60 μέτρων οὗτινος ὁ ἄξων εἶναι ὁριζόντιος. Τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ νήματος εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐφ' οὗ κεῖται ὁ ἄξων τοῦ τροχοῦ (σχ. 88) ἐνῶ ὁλόκληρον τὸ νῆμα εὑρίσκεται ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ. Ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα μέρη τοῦ νήματος σχηματίζουν γωνίαν x ἀκτίν. μὲ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν ΑΒ, δείξατε ὅτι θὰ πληροῦται ὑπὸ τῆς x ἡ ἐξίσωσις: $σφx+x=3$.



Σχ. 88

Χρησιμοποιοῦντες τὴν γραφικὴν μέθοδον προσδιορίσατε κατὰ προσέγγισιν τὴν x καὶ ἀκολούθως τὸ μῆκος (ΑΓΔΒ).

650) Εὕρετε γραφικῶς μὲ ὅσην προσέγγισιν ἐπιτρέπει τὸ σχέδιόν σας τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x=5ημ^2\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ τὰς περιεχομένας μεταξὺ 1 καὶ 3. (Τὸ x εἰς ἀκτίνια).

651) Λάβετε σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ ἐπ' αὐτῶν τὰς μονάδας ὡς ἑξῆς: 2 cm ἐπὶ τοῦ Ox νὰ παριστοῦν 20^0 καὶ 6 cm ἐπὶ τοῦ Oy νὰ παριστοῦν τὴν μονάδα. Κατόπιν παραστήσατε γραφικῶς τὰς συναρτήσεις: $ημ^2x$ καὶ $\frac{x}{360}+συνx$ τοῦ x κυμαινομένου ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0. Εὕρετε κατόπιν γραφικῶς κατὰ προσέγγισιν μοίρας, διὰ ποίαν τιμὴν x τοῦ διαστήματος τούτου, ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις $ημ^2x=\frac{x}{360}+συνx$ καὶ ἐλέγξατε τὴν λύσιν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων.

652) Δύο κύκλοι μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνος 10 cm ἕκαστος τέμνονται εἰς Γ καὶ Δ οὕτως ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους των νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου κύκλου. α') Ἐὰν ἡ γωνία ΓΑΔ εἶναι x^0 δείξατε ὅτι:

$$ημx^0=\frac{\pi}{180^0}(x-90^0),$$

β') Κατασκευάσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς $y=ημx^0$ εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $x=132$ ἕως $x=133$ λαμβάνοντες ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox, 10 cm διὰ νὰ παραστήσετε μίαν μονάδα καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy, 40 cm διὰ νὰ παραστήσετε τὸ 1/10 τῆς μονάδος. Χρησιμοποιήσατε αὐτὴν τὴν γραφικὴν παράστασιν διὰ νὰ ὑπολογίσετε τὴν διάκεντρον ΑΒ.

653) Παραστήσατε γραφικῶς εἰς τὸ ἴδιο σύστημα ἀξόνων ἀφ' ἑνὸς τὴν συνάρτησιν $y=\eta\mu x$ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὴν $y=(x+2)/4$. Ἐξ αὐτῶν εὕρετε (κατὰ προσέγγισιν) τιμὰς τοῦ x πληρούσας τὴν ἐξίσωσιν $4\eta\mu x=x+2$ ὅπου τὸ x ἐκφράζει ἀκτίνια καὶ τελικῶς εὕρετε τὸ x εἰς μοίρας.

654) Τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου κυκλικοῦ τμήματος (τόξου καὶ χορδῆς) ἀνήκοντος εἰς κύκλον ἀκτῖνος 8 cm εἶναι 26 cm. Χρησιμοποιοῦντες γραφικὴν μέθοδον, ὑπολογίσατε τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν τοῦ τόξου καὶ δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἶναι κατὰ προσέγγισιν, 23,68 cm².

655) Χορδὴ κύκλου ὑποτείνουσα τόξον θ ἀκτινίων ($\theta<\pi$) χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ ἔχουν λόγον 1/3. Δείξατε ὅτι τὸ θ πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν : $\eta\mu\theta=\theta-\frac{1}{2}\pi$ καὶ ὁρίσατε κατὰ προσέγγισιν δεκάτου τὸ θ διὰ γραφικῆς μεθόδου.

656) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10 cm, ἕνα κυκλικὸν τμῆμα ἔχει ἐμβαδὸν 75 cm². Ὑπολογίσατε διὰ γραφικῆς μεθόδου τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς μοίρας.

657) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη ἔχει ὡς κέντρον συμμετρίας κάθε σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

658) Δείξατε, ἄνευ χρήσεως πινάκων, ὅτι ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι :
$\varepsilon\varphi B=2,\quad (AB)=1/2,\quad (B\Gamma)=3\sqrt{5}/10,$ τότε θὰ εἶναι: $\Gamma=45^0$.

659) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$x^2\eta\mu2\alpha-2(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)x+2=0,\ \text{ὅταν}\ \alpha=80^042'.$$

660) Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x=2\tau o\xi\varepsilon\varphi\{\sigma\tau\mu(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)-\varepsilon\varphi(\tau o\xi\sigma\varphi x)\}+k\pi$$

ὅπου k ἀκέραιος καὶ $x\neq0$.

661) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδονται τὰ ὕψη :

$$\upsilon_\alpha=30\ \text{m},\quad \upsilon_\beta=24\ \text{m},\quad \upsilon_\gamma=20\ \text{m}.$$

Διερεύνησις τῆς γενικῆς περιπτώσεως

662) Κύκλος ἀκτῖνος α χωρίζεται εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ κυκλικοῦ τόξου ἀκτῖνος 2ασυνθ ἔχοντος τὸ κέντρον του ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ πρώτου κύκλου. Ἐὰν ἡ θ ἐκφράζῃ ἀκτίνια καὶ περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$ δείξατε ὅτι :

$$2\theta\sigma\upsilon\nu2\theta-\eta\mu2\theta+\frac{1}{2}\pi=0.$$

663) Ν' ἀπαλειφθῇ τὸ θ μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων :

$$\{x=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\beta\eta\mu\theta,\qquad y=\alpha\sigma\upsilon\nu2\theta+\beta\eta\mu2\theta\}.$$

Διὰ τὸν ἔλεγχον τοῦ ἐξαγομένου τῆς ἀπαλοιφῆς, θέσατε εἰς αὐτὸ ὅπου x, τὸ ασυνθ+βημθ καὶ ὅπου y τὸ ασυν2θ+βημ2θ καὶ ἐλέγξατε ἂν ἡ εὑρεθεῖσα σχέσις ἀληθεύη.

664) Τετραέδρου ΟΑΒΓ αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ἰσοῦται πρός:

$$\frac{1}{3}\alpha\beta\gamma\sqrt{\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma}$$

ὅπου α, β, γ, Α, Β, Γ τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

665) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$ γωνίαι x, y, z αἱ πληροῦσαι τὸ σύστημα:

$$\left\{x+y+z=\pi, \quad \text{εφ}\frac{x}{2}\text{εφ}\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}, \quad \text{εφ}\frac{y}{2}\text{εφ}\frac{z}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\right\}.$$

666) Νὰ δειχθῇ ὁ τρόπος ἐπιλύσεως κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οὗτινος δίδονται αἱ γωνίαι, μία πλευρὰ καὶ τὸ ἄθροισμα s τῶν τριῶν ἄλλων πλευρῶν, ἀφοῦ προηγουμένως γίνῃ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ τετραπλεύρου.

667) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)180^0$ ὅπου k ἀκέραιος, δείξατε ὅτι τότε:

$$\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\beta+\text{ημ}\gamma=4(-1)^k\text{συν}\frac{\alpha}{2}\text{συν}\frac{\beta}{2}\text{συν}\frac{\gamma}{2}.$$

668) Νὰ ἐπιλυθῇ ὡς πρὸς x ἡ ἐξίσωσις:

$$(1+\text{εφ}\alpha)x^3+3(\text{εφ}\alpha-1)x^2-3(1-\text{εφ}\alpha)x+1+\text{εφ}\alpha=0.$$

669) Δοθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος $B<45^0$, προεκτείνομεν τὴν ΓΑ κατὰ ΑΔ=ΑΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τμήματα ΑΕ=ΑΖ==ΑΓ. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΔΖ, τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς Μ καὶ Ν ζητεῖται: i) Ἡ (ΜΝ) συναρτήσει τῶν στοιχείων α καὶ Β τοῦ ΑΒΓ. ii) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον (ΒΜ)(ΒΝ) εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γωνίας Β. iii) Νὰ ὁρισθῇ ἡ Β, ἂν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΜΝ ἔχῃ λόγον λ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ποὺ γράφει ἡ ΕΖ στρεφομένη περὶ τὴν ΒΓ κατὰ πλήρη περιστροφήν.

670) Προσδιορίσατε ὅλα τὰ τόξα x, τὰ πληροῦντα ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις:

$$\left\{3\text{συν}^2x+2\text{ημ}x-\frac{10}{3}=0, \quad 9\text{ημ}^2x-\text{συν}x-\frac{\sqrt{8}}{3}-1=0\right\}.$$

671) Νὰ ὑπολογισθοῦν ἄνευ πινάκων αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

$$\text{i)}\ \text{συν}^4\frac{\pi}{8}+\text{συν}^4\frac{3\pi}{8}+\text{συν}^4\frac{5\pi}{8}+\text{συν}^4\frac{7\pi}{8}, \quad \text{ii)}\ \text{συν}\frac{2\pi}{7}+\text{συν}\frac{4\pi}{7}+\text{συν}\frac{6\pi}{7}.$$

672) Ἂν Α, Β, Γ γωνίαι τριγώνου, νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:

$$K=\text{ημ}^3A+\text{ημ}^3B+\text{ημ}^3\Gamma-3\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}.$$

673) Ἐὰν α, β, γ εἶναι γωνίαι θετικαί, πληροῦσαι τὴν σχέσιν:

$\text{ημ}^2\alpha+\text{ημ}^2\beta+\text{ημ}^2\gamma=1$, δείξατε ὅτι θὰ εἶναι: $\alpha+\beta+\gamma>90^0$.

674) Εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον πεδιάδα, ὑψοῦνται δύο κατακόρυφοι κεραῖαι ΑΑ′, ΒΒ′ ἐξ ὧν ἡ ΑΑ′ ἔχει ὕψος κατὰ 25% μεγαλύτερον τῆς ΒΒ′. Ἐξ ἑνὸς σημείου Γ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ μεγαλυτέρα κεραία φαίνεται ὑπὸ γωνίαν 60^0. Ἀπὸ ἑνὸς ἄλλου σημείου Δ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τοιούτου ὥστε $ΑΔ \perp ΑΒ$ καὶ (ΔΓ)=30 m, ἡ μικροτέρα κεραία φαίνεται ὑπὸ γωνίαν 30^0 καὶ ἡ μεγαλυτέρα ὑπὸ γωνίαν 45^0. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τῶν δύο κεραιῶν καὶ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις.

675) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μεταξὺ 0 καὶ 2π τόξα τὰ πληροῦντα τὴν ἀνισότητα:

$$\sqrt{2+\frac{5}{2}\text{συν}x}>\text{ημ}x \ .$$

676) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραὶ $(\text{ΑΔ})=160$ m, $(\text{ΓΔ})=\frac{320}{\sqrt{3}}$ m καὶ αἱ γωνίαι $\widehat{\text{ΑΔΓ}}=\frac{\pi}{2}$, $\text{Α}\widehat{\text{ΒΔ}}=\text{Γ}\widehat{\text{ΒΔ}}=\frac{\pi}{6}$.

677) Ἐὰν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ καὶ αἱ μεταξὺ 0 καὶ 180^0 γωνίαι Α, Β, Γ πληροῦν τὰς σχέσεις: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A$, $\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma\,\text{συν}B$, $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma$ δείξατε ὅτι ὑπάρχει τρίγωνον μὲ μήκη πλευρῶν α, β, γ καὶ ἀντιστοίχους γωνίας Α, Β, Γ.

678) Ἐὰν $\text{συν}(\beta-\gamma)+\text{συν}(\gamma-\alpha)+\text{συν}(\alpha-\beta)=-3/2$ καὶ θ τυχοῦσα γωνία, δείξατε ὅτι:

$$\text{συν}^3(\alpha+\theta)+\text{συν}^3(\beta+\theta)+\text{συν}^3(\gamma+\theta)=3\text{συν}(\alpha+\theta)\text{συν}(\beta+\theta)\text{συν}(\gamma+\theta).$$

679) Ὑπάρχει τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $A=60^0$, $R=20$ m, $\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma=29$ m;

680) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεταξὺ -90^0 καὶ $+90^0$ περιεχομένη γωνία x ὅταν:

$$\text{ημ}x=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}}$$

ὅπου $\alpha=301\,\text{ημ}(17^0 0')$, $\beta=502$, $\gamma=809\,\text{ημ}(11^0 54')$, $\delta=295$.

681) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $2(1-3\text{ημ}^2x)\text{εφ}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3\text{ημ}(2x)$.

682) Νὰ ὑπολογισθοῦν ἄνευ πινάκων αἱ γωνίαι Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ὅταν:

$$A=60^0, \quad \beta/\gamma=2+\sqrt{3}\,.$$

683) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύῃ: $\text{συν}A+2\text{συν}B+\text{συν}\Gamma=2$ δείξατε ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

684) Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν σημεῖον Ο καὶ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ μὲ μέτρα ἀντιστοίχως α καὶ β. Γράφομεν περιφέρειαν δοθείσης ἀκτῖνος ρ, ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ο τῆς ΑΒ καὶ ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Ἐὰν x καὶ y εἶναι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν $\widehat{\text{ΟΜΑ}}$, $\widehat{\text{ΟΜΒ}}$, νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν x, y, ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Μ.

685) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha=\upsilon_\alpha$ δείξατε ὅτι:

$$\frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}-1)\leqq\beta\leqq\frac{\gamma}{2}(\sqrt{5}+1).$$

686) Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις $\text{σφ}x-\text{σφ}y=\text{σφ}\alpha-\text{σφ}\beta$ εἶναι συνέπεια τῶν σχέσεων: $\text{ημ}x/\text{ημ}y=\text{ημ}\alpha/\text{ημ}\beta$, $x+y=\pi-(\alpha+\beta)$.

Ὑποτίθεται $\text{ημ}x\,\text{ημ}y\,\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta\neq0$.

687) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

i) $\text{εφ}x+\text{εφ}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\text{εφ}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=3.$

ii) $(1+k)\text{συν}x\,\text{συν}(2x-\alpha)\,\text{τεμ}(x-\alpha)=1+k\,\text{συν}2x.$

688) Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι Α καὶ Β πληροῦν ἀμφότεραι τὴν ἐξίσωσιν:

$$\eta\mu\frac{x}{2} - \eta\mu\frac{3x}{2} + \eta\mu\frac{5x}{2} + \eta\mu\frac{9x}{2} = 0$$

ἐνῶ συγχρόνως εἶναι $A=2B$. Εὕρετε τὰς Α καὶ Β.

689) Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος ρ καὶ σημεῖον Α ἀπέχον τοῦ κέντρου Κ κατὰ 3ρ. Διὰ τοῦ Α ἄγονται δύο τέμνουσαι ἀποκόπτουσαι χορδὰς ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης ἐνῶ ἔχει ἀπόστημα, τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τῶν τεμνουσῶν μετὰ τῆς ΑΚ.

690) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων:

$\{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma = 6, \quad \sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma = 11/6, \quad \beta = 2, \quad \Gamma > B > A\}$.

691) Δείξατε ὅτι: $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} + \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9} + \sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{9} + \sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{2}$.

692) Δείξατε ὅτι, ἐὰν $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu A} - \varepsilon\varphi A = \lambda$ τότε θὰ εἶναι καί: $\frac{1}{\eta\mu A} -$ $- \sigma\varphi A = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$. Νὰ εὑρεθῇ δὲ καὶ τὸ συνΑ συναρτήσει τοῦ λ.

693) Τρίγωνον ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σχηματίζοντος δίεδρον γωνίαν θ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου. Ἡ ΑΒ εἶναι ὁριζοντία, ἡ Γ κεῖται κάτωθεν τῆς ΑΒ καὶ αἱ πλευραὶ ΓΑ, ΓΒ σχηματίζουν γωνίας ω καὶ φ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Δείξατε ὅτι:

i) $\eta\mu\theta = \gamma\eta\mu\varphi/\beta\eta\mu\Gamma$. ii) $\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\Gamma = \eta\mu^2\omega + \eta\mu^2\varphi - 2\eta\mu\omega\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

694) Ποῖαι αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως;

695) Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι $(AB)=5$, $(B\Gamma)=7$, $(\Gamma\Delta)=6$, $(\Delta A)=12$, $\widehat{\Delta A B}=45^0$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

696) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\varepsilon\varphi x/\varepsilon\varphi(3x)$ δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x, (μὴ μηδενίζουσαν τὸν παρονομαστὴν) περιέχεται μεταξὺ 1/3 καὶ 3.

697) Ἐὰν ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 0 \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 0\}$$

δείξατε ὅτι τότε θὰ ἰσχύουν:

i) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\beta + \sigma\upsilon\nu 2\gamma = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma = 3\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)$

iii) $\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 3\beta + \eta\mu 3\gamma = 3\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$.

698) Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων σχηματιζόντων δίεδρον γωνίαν $\theta(<90^0)$ καὶ εἶναι τοιαῦτα ὥστε: $(\Gamma A)=(\Gamma\Delta)=\beta$, $(AB)=(\Delta B)=\gamma$, $(B\Gamma)=\alpha$. Δείξατε ὅτι: i) Ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma\eta\mu\widehat{AB\Gamma}\eta\mu\widehat{B\Gamma A}\eta\mu\theta. \quad \text{ii)} \quad \eta\mu\frac{\widehat{AB\Delta}}{2} = \eta\mu(\widehat{AB\Gamma})\eta\mu\frac{\theta}{2}.$$

iii) Ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ σφαίρας ἰσοῦται πρὸς $R\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\Gamma AB})\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}$ ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου.

699) Εὕρετε τὴν μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως:

$$5\sigma\upsilon\nu^2 x+4\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu x+2\eta\mu^2 x$$

ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 καθὼς καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ x. Σχεδιάσατε προχείρως τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

700) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\{\sigma\upsilon\nu y=\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu x,\quad 2|\eta\mu x|+\eta\mu|y|=1\}.$$

701) Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\beta^3-3\beta\gamma^2+2\gamma^3\sigma\upsilon\nu A=0,$$

ζητεῖται ποία σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ; Νὰ ἐπιλυθῇ δὲ ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον πληροῦται ἡ ἀνωτέρω σχέσις, ἂν δίδεται ἐπὶ πλέον ὅτι, $\alpha=10$, $\beta+\gamma=5(1+\sqrt{5})$.

702) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τρίγωνον ΑΒΓ πληροῦται ἡ ἀνισότης:

$$\alpha^3\eta\mu^3(B-\Gamma)+\beta^3\eta\mu^3(\Gamma-A)+\gamma^3\eta\mu^3(A-B)>0$$

ἐφ' ὅσον συμβαίνει νὰ εἶναι: $\alpha<\beta<\gamma$ ἢ $\beta<\gamma<\alpha$ ἢ $\gamma<\alpha<\beta$.

703) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τριγώνου ΑΒΓ οὗτινος δίδονται αἱ ἀκτῖνες R, ρ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε΄ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διχοτόμων τοῦ ΑΒΓ μετὰ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ ΑΒΓ περιφερείας.

704) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2-\mu\lambda x+\lambda=0$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῦν οἱ συντελεσταὶ μ καὶ λ, ὅταν αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ μία, τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ ἄλλη, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ (ἀγνώστου) τόξου α. Ἀκολούθως, νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τοῦ μ, τὸ ημα καὶ συνα.

705) Ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων δύο κανονικῶν 12-γώνων ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ἰσοῦται μὲ α. Δείξατε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι:

$$\alpha^2/192\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right)^2.$$

706) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\{\eta\mu 2x+\eta\mu 2y=3(\eta\mu x+\eta\mu y),\quad \sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 2y=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y\}.$$

707) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\sigma\upsilon\nu z,\quad \sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 2y=\sigma\upsilon\nu 2z,\quad \sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 3y=\sigma\upsilon\nu 3z\}.$$

708) Ἐὰν Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τριγώνου ΑΒΓ καὶ τεθῇ: $A\widehat{K}B=\omega$, $B\widehat{K}\Gamma=\varphi$, $\Gamma\widehat{K}A=\theta$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\varphi\omega+\sigma\varphi\varphi+\sigma\varphi\theta=-(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma).$$

709) Ἐὰν α, β, γ εἶναι τρεῖς διαφορετικαὶ λύσεις τῆς $\dfrac{K}{\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\Lambda}{\eta\mu x}=M$, περιεχόμεναι μεταξὺ $-\dfrac{\pi}{2}$ καὶ $\dfrac{\pi}{2}$, δείξατε ὅτι τότε:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\beta+\gamma)+\eta\mu(\gamma+\alpha)=0.\quad (\text{Ὑποτίθεται } K.\Lambda.M.\neq 0).$$

710) Ἂν Ι τὸ μέσον τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ὑπολογίσατε τὴν $\sigma\varphi(I\widehat{M}B)$ συναρτήσει τῶν σφΒ, σφΓ.

711) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi 7x=\varepsilon\varphi^2 3x$.

712) Συναρτήσει τῆς R καὶ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἀποστάσεις τοῦ σημείου ὅπερ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος τοῦ συνδέοντος τὸ ὀρθόκεντρον μὲ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ ΑΒΓ κύκλου.

713) Ἐὰν E' τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ, καὶ E εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ, δείξατε ὅτι:

$$2E'/E=2+\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi \Gamma.$$

714) Δείξατε ὅτι εἰς τὸ διάστημα τιμῶν: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, ἡ παράστασις: $4\eta\mu 3\theta-3\eta\mu 4\theta$ μηδενίζεται διὰ $\theta=\tau o\xi_0 \tau\varepsilon\mu(1+\sqrt{7})$.

715) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφx ὅταν ὁ x πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\eta\mu(2x-\theta)+\lambda\sigma\upsilon\nu 2x-(\lambda+4+\eta\mu\theta)=0$$

μὲ λ τὴν μεγίστην τῶν τιμῶν αὐτοῦ διὰ τὰς ὁποίας ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὴν λύσιν ὡς πρὸς x.

716) Κύλινδρος διαμέτρου d, ἔχων τὸν ἄξονά του ὁριζόντιον στηρίζεται ἐπὶ δύο κεκλιμένων ἐπιπέδων, τεμνομένων ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου κατὰ εὐθεῖαν (ε) καὶ σχηματιζόντων μετὰ τῶν ἑκατέρωθεν τῆς (ε) ὁριζοντίων ἡμιεπιπέδων, διέδρους γωνίας α καὶ β. Δείξατε ὅτι τὸ ὑπὲρ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ὕψος τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς

$$d\Big/\left(1-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}\right).$$

717) Ἀπὸ σημείου Μ κειμένου ἐπὶ τοῦ τόξου τεταρτημορίου ΑΟΒ κύκλου ἀκτῖνος ρ, ἄγεται κάθετος ΜΓ ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ ἄγεται ἡ εὐθεῖα ΑΜ. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία $\widehat{AOM}=x$ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε $(AM)+2(M\Gamma)=\lambda$ ὅπου λ δοθὲν μῆκος. Νὰ γίνῃ διερεύνησις.

718) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$\left\{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{70}{9},\quad \sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma=\frac{139}{70}\right\}.$$

719) Δίδεται ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐμβαδοῦ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ ΑΒΓ (ἐκτὸς τῶν πλευρῶν του) εἶναι π—2Α, π—2Β, π—2Γ καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου τούτου τριγώνου εἶναι:

$$E\ (\tau\varepsilon\mu A-1)(\tau\varepsilon\mu B-1)(\tau\varepsilon\mu\Gamma-1).$$

720) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἔχει λύσιν ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{1}{\eta\mu^2x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}+\frac{1}{\sigma\varphi^2x}+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2x}+\frac{1}{\tau\varepsilon\mu^2x}+\frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu^2x}=\lambda;$$

Εὕρετε λύσιν αὐτῆς μεταξὺ π καὶ $\frac{3\pi}{2}$ ὅταν λ=10.

721) Ὁρίσατε τὰς περιοχὰς ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου εἰς τὰς ὁποίας περατοῦνται τὰ τόξα x τὰ πληροῦντα τὴν ἀνισότητα:

$$10\{\sigma\upsilon\nu^2x-(-1)^k\sigma\upsilon\nu(|2x|+k\pi)-1\}+2<\sqrt{2\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x}$$

ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος.

722) Ἐὰν ημαημ$(k\alpha+\beta)=$ημβημ$(k\beta+\alpha)$, ὅπου $0<k<1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<\pi$ δείξατε ὅτι τότε θὰ εἶναι: $\alpha=\beta$.

723) Νὰ ἐπιλυθῇ χωρὶς χρῆσιν πινάκων ἡ ἐξίσωσις:

$$2\text{εφ}x+3\text{τεμ}x=4\text{συν}x.$$

724) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $2\text{ημ}x+\text{ημ}2x=\text{ημ}\frac{x}{2}$.

725) Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου τοῦ ὁποίου τὰ μήκη τῶν πλευρῶν εἶναι 20, 25, 33 καὶ 38 μέτρα, ἐνῶ τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν του εἶναι 120^0;

726) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ αἱ κάθετοι πλευραὶ ΒΑ καὶ ΑΓ ἔχουν μήκη 2ρ καὶ $\lambda\rho$ ὅπου λ δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός. Ἐπὶ τῆς ΒΑ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν πρὸς τὸ μέρος τῆς Γ. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας ταύτης, ποία τριγωνομετρικὴ σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν γωνιῶν $\widehat{\text{ΜΓΑ}}=x$ καὶ $\text{Α}\widehat{\text{Ο}}\text{Μ}=y$, ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Μ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας; Νὰ ὑπολογισθοῦν δὲ καὶ αἱ γωνίαι x καὶ y ὅταν δίδεται ὅτι $x+y=150^0$ καὶ $\lambda=\sqrt{3}$.

727) Ἐὰν $0<\theta<90^0$, διὰ ποίας τιμὰς τῆς θ, ἡ ἐξίσωσις:

$$f(x)\equiv(2\text{συν}\theta-1)x^2-4x+4\text{συν}\theta+2=0$$

ἔχει πραγματικὰς ρίζας; Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ, ποῖα τὰ πρόσημα τῶν ριζῶν;

728) Τρεῖς σφαῖραι μὲ ἀκτῖνας 157, 195 καὶ 309 cm ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο ἐπίπεδα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐφάπτεται καὶ τῶν τριῶν σφαιρῶν.

729) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\text{τοξσυν}\frac{x^2-1}{x^2+1}+\text{τοξσφ}\frac{x^2-1}{2x}=\frac{2\pi}{3}$.

730) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ σύστημα:

$$\{\text{εφ}x\text{συν}y=k,\quad \text{ημ}x\text{ημ}y=\lambda\}$$

ἔχει λύσιν καὶ νὰ δοθοῦν αἱ λύσεις (x, y) αἱ περιλαμβανόμεναι μεταξὺ $-\pi$ καὶ π ὅταν $k=-1/\sqrt{6}$, $\lambda=1/\sqrt{8}$.

731) Ἐντὸς ὀρθῆς γωνίας xOy φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΟΚ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς Ox γωνίαν $xOK=\theta(0<\theta<90^0)$. Μὲ ἀπαρχὴν ἕνα σημεῖον Σ τῆς ΟΚ, ἐγγράφομεν ἐντὸς τῆς γωνίας xOK, ἀπέραντον τεθλασμένην, φέροντες τὴν $\Sigma A\perp Ox$, τὴν $AB\perp OK$, τὴν $B\Gamma\perp Ox$, τὴν $\Gamma\Delta\perp OK$ κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον. Ἔστω S τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μῆκος τῆς σχηματιζομένης τεθλασμένης ΣΑΒΓ... Ἐκ τοῦ Σ, πάλιν σχηματίζομεν μίαν ἄλλην τεθλασμένην γραμμὴν ἐντὸς τῆς γωνίας ΚΟy μὲ καθέτους ἐπὶ τὴν Oy καὶ ΟΚ ἐναλλὰξ ὡς πρότερον. Ἔστω S′ τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μῆκος αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία θ ὅταν ὁ λόγος S'/S ἰσοῦται πρὸς 2/3.

732) Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{(\text{στεμ}^4\alpha-\text{στεμ}^2\alpha+1)^3}{(\text{στεμ}^4\alpha-\text{στεμ}^2\alpha)^2}=\frac{(\text{τεμ}^4\alpha-\text{τεμ}^2\alpha+1)^3}{(\text{τεμ}^4\alpha-\text{τεμ}^2\alpha)^2}=$$

$$=\frac{(\text{ημ}^4\alpha+\text{συν}^2\alpha)^3}{\text{ημ}^4\alpha\text{συν}^4\alpha}=\frac{(\text{συν}^4\alpha+\text{ημ}^2\alpha)^3}{\text{ημ}^4\alpha\text{συν}^4\alpha}.$$

Συναγάγετε ἐκ τούτου ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ημ$^2\alpha$, συν$^2\alpha$, τεμ$^2\alpha$, στεμ$^2\alpha$ εἶναι

ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $ημ^4α συν^4α(x^2-x+1)^3=(ημ^4α+συν^2α)^3(x^2-x)^2$
καὶ εὕρετε τὰς δύο ὑπολοίπους ρίζας.

733) Κυρτὸν πολύγωνον ἀρτίου πλήθους πλευρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ, τὰ δὲ μήκη τῶν πλευρῶν του εἶναι διαδοχικῶς ἴσα πρὸς α καὶ β, ὅπου $β<α$.

i) Δοθέντων, τοῦ πλήθους 2ν τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν α καὶ β, νὰ ὁρισθοῦν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ω καὶ φ τὰς ὁποίας ὑποτείνουν αἱ πλευραὶ α καὶ β τοῦ πολυγώνου, ἡ διάμετρος 2R τοῦ κύκλου καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ πολυγώνου.

ii) Συναρτήσει τῆς περιμέτρου 2τ τοῦ ἀνωτέρου πολυγώνου, τοῦ πλήθους 2ν τῶν πλευρῶν του καὶ τῆς α, νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

734) Κανονικὸν πολύγωνον ἐκ ν πλευρῶν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R). Ἐὰν Σ τυχὸν σημεῖον κείμενον ἐντὸς τοῦ κύκλου, τοιοῦτον ὥστε $(ΟΣ)=α$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ Σ ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ ν–γώνου ἰσοῦται μὲ $ν(α^2+R^2)$.

735) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, ἡ γωνία τῆς κορυφῆς, Α δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $A=4x$ ὅπου ἡ x εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως $εφ2x+σφx=8συν^2x$ εἶναι δὲ $(AB)=(AΓ)=λ$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ παρὰ τὴν ΒΓ παρεγγεγραμμένου.

736) Πῶς δύναται νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τέσσαρες πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν;

737) Δείξατε τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῶν γωνιῶν ἑνὸς τραπεζίου οὗτινος δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.

738) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΔ καὶ ΑΔ′ ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς Α δείξατε ὅτι:

$$(ΔΔ')=2α ημB ημΓ στεμA στεμ(B-Γ).$$

739) Κατασκευάσατε γραφικὰς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $ημx+\frac{1}{2}συνx$ καὶ $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^2$ εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $x=0$ ἕως $x=\frac{π}{2}$ (τὸ x ἐκφράζει ἀκτίνια). Βάσει τούτων εὕρετε κατὰ προσέγγισιν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

$$4ημx+2συνx-2x^2=1.$$

740) Ἀπὸ τρία σημεῖα Α, Β, Γ κείμενα ἐπ' εὐθείας τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ τοιαῦτα ὥστε $(AB)=l$, $(BΓ)=2l$, ἡ κορυφὴ ἑνὸς ὄρους φαίνεται ὑπὸ γωνίας α, β, γ ἀντιστοίχως, ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος. Δείξατε ὅτι τὸ ὕψος τοῦ ὄρους ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐφ' οὗ κεῖται ἡ ΑΒΓ εἶναι:

$$h=l\sqrt{6}\,/\sqrt{2σφ^2α-3σφ^2β+σφ^2γ}.$$

741) Δείξατε τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τραπεζίου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον δοθείσης ἀκτῖνος R, ὅταν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

742) Κατὰ τὴν τοπογραφικὴν ἀποτύπωσιν ἑνὸς ἀγροῦ ΑΒΓΔ μὲ εὐθυγράμμους πλευράς, προσδιωρίσθησαν τὰ ἑξῆς στοιχεῖα: $AB=235$ m,

$$\widehat{ABΓ}=63^0\,40', \quad \widehat{ΓAB}=72^0\,11', \quad \widehat{ΔAΓ}=41^0\,27', \quad \widehat{AΓΔ}=73^0\,25'.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΑΔ καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ.

743) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

i) $\text{τοξημ}\frac{5}{x}+\text{τοξημ}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{x}$. ii) $\text{τοξεφ}\frac{x-1}{x-2}+\text{τοξεφ}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$.

744) Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ οὗτινος δίδεται ἡ R (ἀκτὶς περιγεγραμμένου) καὶ ὅτι αἱ πλευραὶ α, β, γ αὐτοῦ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον ἀριθμητικῶς ἴσον πρὸς ημΒ (τὸ ημΒ, δὲν δίδεται). Διερεύνησις ἐπὶ τῆς δυνατότητος.

745) Ἐὰν Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΑΔ, δείξατε ὅτι ἐὰν ἡ $\widehat{\text{ΒΜΓ}}$ εἶναι ὀρθὴ καὶ συνΑ=3/5, τότε τὸ ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

746) Δείξατε ὅτι αἱ ἐξισώσεις εφ(π·συνx)=σφ(π·ημx) καὶ ημ(π·συνx)= =συν(π·ημx) ἔχουν δύο κοινὰς λύσεις εἰς τὸ διάστημα (−π, π).

747) Προσδιορίσατε τὰ ζεύγη τῶν τόξων (x, y) τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν: συν(x+y)+συν(x−y)=2.

748) Ἔστωσαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ τμῆμα ΓΓ′ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν δίδωνται αἱ γωνίαι:

$$\widehat{\text{ΒΑΓ}}=\alpha=38^{0}17', \qquad \widehat{\text{ΑΒΓ}}=\beta=75^{0}43' \qquad \text{καὶ} \qquad \widehat{\text{ΒΑΓ}'}=\gamma=55^{0}4',$$

νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $\widehat{\text{ΑΓ}'\text{Β}}=x$.

749) Εὕρετε τρόπον ἐπιλύσεως κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγραψίμου καὶ συγχρόνως περιγραψίμου ὅταν γνωρίζωμεν μίαν πλευρὰν αὐτοῦ. ἔστω (ΑΒ)=α καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας Α καὶ Β.

750) Τετραέδρου ΔΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία Δ εἶναι τρισορθογώνιος καὶ (ΔΑ)=1, (ΔΒ)=2, (ΔΓ)=3. Ὑπολογίσατε τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ.

751) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα: {3ημx+4ημy=5, 3συνx+4συνy=0}.

752) Ἡ περίμετρος κυκλικοῦ τομέως εἶναι 2,60 m καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία του 60 βαθμῶν. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως;

753) Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ἐκφράσατε τὸ τμῆμα (ΟΑ) συναρτήσει τῆς πλευρᾶς (ΒΓ)=β καὶ τῶν γωνιῶν:

$$\widehat{\text{ΓΑΔ}}=\varphi, \quad \widehat{\text{ΒΔΓ}}=\sigma, \quad \widehat{\text{ΑΓΒ}}=\theta \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\text{ΓΒΔ}}=\omega.$$

754) Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\text{συνΑ}+\text{συνΒ}+\text{συνΓ}=2 \quad \text{καὶ} \quad \text{ημΑ}+\text{ημΒ}+\text{ημΓ}=1$$

δείξατε ὅτι τότε, $R=\alpha\beta\gamma/(\alpha+\beta+\gamma)^2$, ὅπου R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

755) Κατακόρυφος ράβδος ΟΑ μήκους 1,2 m ρίπτει σκιὰν ΟΒ μήκους 0,9 m ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Εἰς τὸν αὐτὸν τόπον καὶ χρόνον ἡ ράβδος ΟΓ, κεκλιμένη κατὰ 82° ὡς πρὸς τὴν σκιὰν τῆς πρώτης καὶ εἰς τὸ αὐτὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον μετὰ τοῦ ἡλίου εὑρισκομένη, ρίπτει σκιὰν ΟΔ ἐπὶ ἐδάφους παρουσιάζοντος ἀνωφέρειαν 10°. Ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς (ΟΓ) ἵνα (ΟΔ)=0,9 m.

756) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\text{ημ}^3x+\text{συν}^3x=1$.

757) Ποία γωνία μεταξὺ 0° καὶ 90° ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν:

$$\left(\gamma\text{συν}x+\sqrt{\gamma^2\text{συν}^2x-2\gamma\beta+\beta^2}\right)\text{συν}x=\text{ημ}x\left(\gamma\text{ημ}x+\frac{\gamma^2\text{ημ}x\text{συν}x}{\sqrt{\gamma^2\text{συν}^2x-2\gamma\beta+\beta^2}}\right)$$

ὅταν γ καὶ β εἶναι μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες ρ_γ, ρ_β, ρ_α ἀποτελοῦν καθ'ἣν σειρὰν ἐγράφησαν, ἀριθμητικὴν πρόοδον;

Γενικώτερον, νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ὅταν τὰ β καὶ γ εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε $\beta^2 \neq 2\beta\gamma$.

758) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$(\beta^2+\gamma^2)(\text{συν}x-\text{συν}\alpha)^2+\beta^2(\text{ημ}x-\text{ημ}\alpha)^2=\gamma^2(2+\text{συν}x+\text{συν}\alpha)^2$$

ὅπου **x** ὁ ἄγνωστος β, γ, α δεδομένα καὶ $\beta\text{συν}\frac{\alpha}{2} \neq 0$.

759) Νὰ προσδιορισθοῦν πᾶσαι αἱ λύσεις τῆς:

$$\text{ημ}x\text{συν}x-\text{ημ}^3\alpha\text{συν}x-\text{συν}^3\alpha\text{ημ}x=0$$

ὅταν $\alpha=0{,}82$ ἀκτίν.

760) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\text{ημ}\{\pi|\text{εφ}x|\} = \text{συν}\{\pi|\text{σφ}x|\}$.

761) Δείξατε ὅτι ἂν $0<c'<c<1$ τότε τὸ σύστημα:

$$\text{συν}x+|\text{συν}y|=c$$
$$|\text{συν}x|+\text{συν}y=c'$$

ἔχει μίαν μόνην λύσιν (x_0, y_0) τοιαύτην ὥστε: $0<x_0<\pi$ καὶ $0<y_0<\pi$.

762) Ἐὰν O τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, $(\widehat{A}=90^0)$, ποία σχέσις συνδέει μεταξύ των τὰς ἀποστάσεις,

$$(OA)=x, \quad (OB)=y, \quad (O\Gamma)=z\,;$$

763) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{11}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\text{ημ}\frac{\pi+2\pi}{4}\text{συν}\frac{2x-\pi}{4}} = \frac{9}{50}+\frac{7}{4}\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^{1+\text{ημ}x}}$$

764) Ἐὰν αἱ γωνίαι x, y, ω πληροῦν τὰς ἐξισώσεις:

$$\text{ημ}x+\text{ημ}y+\text{ημ}\omega=\sqrt{3}$$
$$\text{συν}x+\text{συν}y+\text{συν}\omega=1$$
$$\text{συν}(x-y)+\text{συν}(\omega-x)+\text{συν}(y-\omega)=\frac{1}{2}\text{συν}(x-y+\omega)$$

δείξατε ὅτι πληροῦν καὶ τάς:

$$\text{εφ}y=4\sqrt{3}, \quad \text{εφ}\frac{x+\omega}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{συν}\frac{x-\omega}{2}=\frac{\pm 3\sqrt{7}}{14}.$$

765) Σχεδιάσατε μὲ τὴν βοήθειαν μοιρογνωμονίου, κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ οὗτινος $(AB)=11$ cm, $A=30^0$, $\Gamma=80^0$, $A\widehat{\Delta}B=65^0$, $B\widehat{\Delta}\Gamma=50^0$. Ὑπολογίσατε τὴν ΑΓ καὶ δοκιμάσατε τὴν ἀκρίβειαν τοῦ σχεδίου σας μετρῶντες ἐπὶ τοῦ σχεδίου τὴν ΑΓ.

766) Ἐὰν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν μένουν σταθερὰ ἐνῶ αἱ γωνίαι του μεταβάλλονται (ἀρθρωτὸν τετράπλευρον) τότε ἂν Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ προεκτεινομένων καὶ Ζ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν, ἡ ποσότης $\alpha\gamma\text{συν}A\widehat{E}\Delta - \beta\delta\text{συν}A\widehat{Z}B$ μένει σταθερά.

767) Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι $(A\Delta)=(B\Gamma)=2{,}8$, $(\Gamma\Delta)=2$, $\widehat{\Delta}=112^0$, $\widehat{\Gamma}=154^0$. Ὑπολογίσατε τὴν (ΑΒ) καὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΒ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΓΔ.

768) Ἐὰν ΑΒΓΔ περιγράψιμον τετράπλευρον δείξατε ὅτι:

i) $E=\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\,\eta\mu\dfrac{A+\Gamma}{2}$, ii) $\sqrt{\alpha\delta}\,\eta\mu\dfrac{A}{2}=\sqrt{\beta\gamma}\,\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}$.

769) Ἐὰν ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων περιγραψίμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δείξατε ὅτι:

$$\varepsilon\varphi^2\omega=\frac{4\alpha\beta\gamma\delta\eta\mu^2\dfrac{A+\Gamma}{2}}{(\alpha\gamma-\beta\delta)^2}.$$

770) Ἐὰν τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον ἀκτῖνος R δείξατε ὅτι:

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}=\frac{\alpha\delta\pm\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta-R^2(\beta+\delta)^2}}{R(\beta+\delta)}.$$

771) Ἐὰν O τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ περιγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ δείξατε ὅτι:

$$\gamma(OA)^2+\alpha(O\Delta)^2=\alpha\gamma\delta.$$

772) Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{\beta}{\delta}=\frac{\eta\mu A_2\eta\mu\Delta_2}{\eta\mu B_1\eta\mu\Gamma_1}\qquad(\beta\lambda.\ \sigma\chi.\ 72).$$

773) Ἔστω ΑΒΓΔ κυρτὸν τετράπλευρον μὲ πλευρὰς α, β, γ, δ καὶ γωνίας Α, Β, Γ, Δ, πάσας θετικάς. Χρησιμοποιοῦντες τὸ θεώρημα καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta A}$ ἐπὶ τυχόντα ἄξονα εἶναι $=0$ καὶ προβάλλοντες, πρῶτον ἐπὶ ἄξοντα ἔχοντα τὴν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ κατόπιν ἐπὶ ἄξονα ἔχοντα τὴν κατεύθυνσιν τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δείξατε τὰς σχέσεις:

$$\alpha-\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)-\delta\sigma\upsilon\nu A=0,\qquad \alpha\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)-\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma-\delta\sigma\upsilon\nu\Delta=0.$$

Κατόπιν τούτων, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ δ ὅταν δίδωνται:

$$\alpha,\ \gamma,\ A,\ B,\ \Gamma,\ \Delta$$

καὶ ὑποτιθεμένου ὅτι τὸ τετράπλευρον δὲν εἶναι τραπέζιον.

774) Δείξατε ὅτι αἱ μεταξὺ 0 καὶ π/2 τιμαὶ τοῦ x αἱ ἱκανοποιοῦσαι τὴν ἐξίσωσιν εφ(σφθ)=σφ(εφθ) εἶναι αἱ:

$$\frac{1}{2}\tau o\xi_0\eta\mu\left\{\frac{4}{(2\nu+1)\pi}\right\}\qquad \text{ὅπου } \nu=1,2,3,\ldots$$

775) Ἰσόπλευρον τρίγωνον ἵσταται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου μὲ τὴν βάσιν του ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους, φωτιζόμενον δὲ ὑπὸ τοῦ ἡλίου ρίπτει σκιὰν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος εἶναι 30^0 τὸ δὲ κατακόρυφον ἐπίπεδον ἐφ' οὗ κεῖται ὁ ἥλιος σχηματίζει μετὰ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου δίεδρον γωνίαν ω τοιαύτην ὥστε συνω=1/3, ὑπολογίσατε τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον σχηματίζει ἡ σκιὰ τοῦ ἰσοπλεύρου ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους.

776) Κατασκευάσατε πρόχειρον γραφικὴν παράστασιν τῶν συναρτήσεων:

$$y=\tau o\xi_0\eta\mu x,\qquad y=\tau o\xi_0\sigma\upsilon\nu x,\qquad y=\tau o\xi_0\varepsilon\varphi x.$$

777) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ πλευρὰς 1,80 m, 1,80 m καὶ 1,20 m ἵσταται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου ἐνῷ ἡ μικροτέρα πλευρά του κεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἔχουσα διεύθυνσιν ἐξ ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς. Ὑπολογίσατε τὸ

ἐμβαδὸν τῆς σκιᾶς τὴν ὁποίαν ρίπτει τὸ τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὴν κατεύθυνσιν νοτιοανατολικὴν σχηματίζουσαν γωνίαν 48^0 μὲ τὴν νοτίαν κατεύθυνσιν **καὶ εἰς ὕψος** 53^0 **ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος.**

778) **Δίδεται** περιφέρεια (O, R), διάμετρος αὐτῆς **AOB** καὶ ἡ εἰς τὸ B ἐφαπτομένη **Bx**. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς **Bx** σημεῖον Γ τοιοῦτον ὥστε ἂν ἀχθῇ εἰς τὸ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν OΓ, τέμνουσα εἰς Δ τὴν προέκτασιν τῆς **AB** καὶ μὲ διάμετρον OΔ γραφῇ περιφέρεια, ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν δύο περιφερειῶν νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν χορδὴν ἣν ἀποκόπτει ἀπὸ τῆς δευτέρας περιφερείας ἡ **Bx**. Τὸ Γ νὰ ὁρισθῇ, προσδιοριζομένης τῆς γωνίας $\widehat{BO\Gamma}=\theta$.

779) **Δύο** περιφέρειαι κείμεναι ἐπὶ δύο καθέτων ἐπιπέδων ἔχουν κοινὴν διάμετρον **AB**. Ἐὰν O τὸ κοινὸν κέντρον καὶ ἀχθοῦν δύο ἀκτῖνες OΓ τῆς μιᾶς καὶ OΔ τῆς ἄλλης τοιαῦται ὥστε ἡ $\widehat{AO\Gamma}$ νὰ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ νὰ ἔχῃ μέτρον α^0 ἡ δὲ $\widehat{AO\Delta}$ νὰ εἶναι ὀξεῖα καὶ νὰ ἔχῃ μέτρον β^0, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $\widehat{\Delta O\Gamma}$ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

780) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^3-px=q$ ὅπου $\frac{q^2}{4}<\frac{p^3}{27}$ καὶ $q>0$. Ἐὰν τεθῇ (1) $x=\lambda y$ ἡ ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς τὴν (2) $4y^3-\frac{4p}{\lambda^2}y=\frac{4q}{\lambda^3}$.

Ἂν δὲ εἶναι : $\frac{4p}{\lambda^2}=3$, δηλ. (3) $\lambda=2\sqrt{\frac{p}{3}}$ ἡ (2) γράφεται,

(4) $4y^3-3y=\dfrac{q}{2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}}<1$. Τέλος ἡ (4) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως (5) $y=\text{συν}\varphi$ γίνεται : (6) $\text{συν}3\varphi=\frac{q}{2}:\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}$. Ἐκ τῆς (6) **ὁρίζεται** ἡ φ, ἐκ τῆς (5) τὸ **y**, ἐκ τῆς (3) τὸ λ καὶ ἐκ (1) τὸ **x**.

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω μέθοδον, λύσατε τὰς ἐξισώσεις :

i) $x^3-10x=7$, ii) $x^3-3x=1$, iii) $x^3-21x=7$.

781) Τριγώνου **ΑΒΓ** δίδεται ὅτι : $A=\frac{1}{2}\,\text{τοξ}_0\text{συν}\left(-\frac{2}{3}\right)$ καὶ ὅτι $\beta^4+\gamma^4=3\alpha^4/2$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι β/α, γ/α **καὶ αἱ γωνίαι** τοῦ τριγώνου. (Ὑποτίθεται $\beta>\gamma$).

782) Πῶς δύναται νὰ ἐπιλυθῇ κυρτὸν τετράπλευρον **ΑΒΓΔ** περιγεγραμμένον περὶ κύκλον ἀκτῖνος ρ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ τετραπλεύρου καὶ ὅτι $\widehat{A}=\widehat{\Gamma}=90^0$;

783) Ν' ἀπαλειφθῇ ἡ γωνία θ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$\frac{\text{συν}(\alpha-3\theta)}{\text{συν}^3\theta}=\frac{\text{ημ}(\alpha-3\theta)}{\text{ημ}^3\theta}=m.$$

784) **Δείξατε** ὅτι ἡ εἰς τρίγωνον **ΑΒΓ** ἐγγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ **ΑΒΓ**, ἐὰν $\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma=4\,\text{ημ}^2\frac{A}{2}\text{ημ}^2\frac{B}{2}\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}$, διέρχεται δὲ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐὰν $\text{συν}A+\text{συν}B+$ $+\text{συν}\Gamma=\sqrt{2}$.

785) Ἀφοῦ γίνη ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $τεμ^2x$ εἰς τὸ διάστημα $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ εὕρετε τῇ βοηθείᾳ ταύτης, κατὰ προσέγγισιν, τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $τεμ^2x=2+\frac{x}{6}$ τὰς περιεχομένας εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα. Ἐλέγξατε τὰ ἐξαγόμενα τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων. (Τὸ x εἰς ἀκτίνια).

786) Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου δείξατε ὅτι $σφ^2Α+σφ^2Β+$ $+σφ^2Γ\geqq 1$ καὶ ὅτι ἡ ἰσότης ὑφίσταται μόνον ὅταν Α=Β=Γ.

787) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{τεμx-συνx}{στεμx-ημx}-ημ^2xεφx-συν^2xσφx-2ημxσυνx+εφx=0.$$

788) Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ R (ἀκτὶς περιγεγραμμένου), ἡ ρ (ἀκτὶς ἐγγεγραμμένου) καὶ τὸ γινόμενον K^3 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ εἰς τὸ ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν δεδομένων τούτων, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ.

789) Συναρτήσει τῆς ρ καὶ τῶν γωνιῶν τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες x, y, z τῶν κύκλων ὧν ἕκαστος ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ ΑΒΓ περιφερείας καὶ δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Νὰ δειχθῇ δὲ ἀκολούθως ἡ σχέσις: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4R+ρ}{2Rρ}$ ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ ΑΒΓ.

790) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν αἱ πλευραὶ τριγώνου παρίστανται ὑπὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν μία δὲ γωνία του εἶναι 120^0, τότε ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου παρίσταται ὑπὸ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ὅστις εἶναι σύνθετος (δηλ. ὄχι πρῶτος).

791) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ τὸ γινόμενον $μ^2$ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. i) Νὰ δειχθῇ ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν Β καὶ Γ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι δυνατότητος. ii) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ εἶναι τὸ τρίγωνον ἰσοσκελές; iii) Ἐὰν Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων δείξατε ὅτι $(ΟΒ)(ΟΓ)=μ^2/2$.

792) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τὸ ἐμβαδὸν K^2 τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ ΑΒΓ καὶ τὰς γωνίας Α, Β, Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος 2τ τοῦ ΑΒΓ διὰ τύπου λογιστοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων.

793) Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ συναρτήσει τῶν σταθερῶν μεγεθῶν σ καὶ α ὅπου $συνσ\neq 0$, $ημσ\neq 0$ καὶ $α\neq 0$ οὕτως ὥστε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, μὴ μηδενίζουσαν τοὺς παρονομαστάς, ἡ παράστασις: $F=\left\{λ-\frac{αημx}{ημ(σ+x)}\right\}\cdot\left\{λ+\frac{αημx}{ημ(σ-x)}\right\}$ νὰ ἔχῃ σταθερὰν τιμήν.

794) Ἐντὸς γωνίας xΟy (ὅπου $0<(\widehat{xOy})<180^0$) δίδεται σημεῖον Σ. Ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ Σ καὶ τέμνουν τὰς ἡμιευθείας Οx, Οy εἰς Α καὶ Β, νὰ ὁρισθῇ ἐκείνη ἥτις ἀποκόπτει τρίγωνον ΟΑΒ ἔχον τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

795) Ἐὰν ΑΒΓΔ κυρτὸν τετράπλευρον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον δείξατε ὅτι:

$$(ΑΒ)ημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Β}{2}=(ΓΔ)ημ\frac{Γ}{2}ημ\frac{Δ}{2}.$$

796) Δείξατε τὰς ἰσότητας: i) $\eta\mu^2\frac{2\pi}{7}+\eta\mu^2\frac{4\pi}{7}+\eta\mu^2\frac{8\pi}{7}=\frac{7}{4}$,

ii) $\eta\mu\frac{2\pi}{7}+\eta\mu\frac{4\pi}{7}+\eta\mu\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. iii) $\eta\mu\frac{2\pi}{7}\eta\mu\frac{4\pi}{7}\eta\mu\frac{8\pi}{7}=-\frac{\sqrt{7}}{8}$ καὶ

iv) Καταστρώσατε ἀκεραίαν τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν ἔχουσαν ρίζας τά:

$$-\eta\mu\frac{\pi}{7},\quad \frac{\eta\mu 2\pi}{7},\quad \eta\mu\frac{4\pi}{2}$$

797) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(x-\alpha)\sigma\upsilon\nu(x-\beta)\sigma\upsilon\nu(x-\gamma)-\eta\mu x\eta\mu(x-\alpha)\eta\mu(x-\beta)\eta\mu(x-\gamma)$ $=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\gamma\neq 0$.

798) Τετραέδρου ΔΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία Δ εἶναι τρισορθογώνιος. Συναρτήσει τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὑπολογίσατε τὴν δίεδρον γωνίαν θ τῶν ἐπιπέδων ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ.

799) Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον καὶ Π, Κ, Ρ σημεῖα ἐντὸς αὐτοῦ τοιαῦτα ὥστε:

$\Pi\widehat{B\Gamma}=\frac{B}{3}$, $\Pi\widehat{\Gamma B}=\frac{\Gamma}{3}$, $K\widehat{\Gamma A}=\frac{\Gamma}{3}$, $K\widehat{A\Gamma}=\frac{A}{3}$, $P\widehat{AB}=\frac{A}{3}$, $P\widehat{BA}=\frac{B}{3}$,

δηλ. τὰ Π, Ρ,Κ εἶναι σημεῖα τομῆς τῶν διαδοχικῶν τριχοτόμων. i) Νὰ δειχθῇ ὅτι: $(\Pi\Gamma)=8R\eta\mu\frac{B}{3}\eta\mu\frac{A}{3}\eta\mu\left(60^0+\frac{A}{3}\right)$. ii) Τὸ μῆκος (ΠΚ) εἶναι συμμετρικὴ παράστασις τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ. iii) Τὸ τρίγωνον ΠΚΡ εἶναι ἰσόπλευρον.

800) Ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ἐλήφθησαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοιαῦτα ὥστε $(\Gamma A)=(\Gamma B)=l$ καὶ $\Gamma A\perp\Gamma B$. Εἰς τὰ Α, Β, Γ ἔγιναν γεωτρήσεις καὶ εἰς βάθη α, β, γ ἀντιστοίχως εὑρέθη βράχος. Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βράχου ὑποτεθῇ ἐπίπεδος, δείξατε ὅτι ἡ κλίσις αὐτῆς θ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως: $l^2\varepsilon\varphi^2\theta=(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\beta)^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $21^0\ 51'\ 38'',5$ καὶ $72^0\ 35'\ 23'',3$ **2.** $90^0, 60^0, 45^0, 36^0$ **3.** $A=\frac{4\pi}{15}$, $B=\frac{\pi}{3}$, $\Gamma=\frac{2\pi}{5}$ καὶ $A=53^\beta, 33$, $B=66^\beta, 66$, $\Gamma=80^\beta$. **6.** 40,46m **7.** 0,8 καὶ 0,6 **8.** Ἡ θ_2 **10.** 10,42m **12.** 16,29m **13.** ἐφαπτομένη =4 **14.** $\frac{1-\sqrt{6}}{4}$, 0, $\frac{3(1-\sqrt{3})}{2}$ **16.** $\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta$ **18.** $R=\upsilon.\frac{\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}}{\eta\mu\theta}$ **19.** $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$ **20.** $\frac{31}{90}$ **21.** $\theta=30^0$ **23.** 60^0 **24.** 60^0 **25.** $-8\eta\mu^6\theta+16\eta\mu^4\theta-9\eta\mu^2\theta+2$ **30.** 64^0, **31.** 22,23m, **32.** 11,85m καὶ 54,50m, **33.** 131m, **34.** 7,6m, **35.** $\theta=58^0$, **36.** 6,282 καὶ 6,283, **37.** $38^0\ 56'$, **38.** 39 καὶ 20,9, **39.** 80,4, **40.** 3,26, **41.** 68^0, **42.** 11,76, **46.** i) ὄχι) ii) $\theta=90^0$ **47.** 249,47, **48.** $x=18^6\ 39'\ 36''$, **49.** 0,125, **50.** 13,016, **51.** 392,41, **52.** i) $B=61^0\ 10'\ 42''$, $\alpha=59,74$ ii) $\alpha=88,250$, $\gamma=74,052$ iii) $\Gamma=24^0$

13′ 36″, $\gamma=72{,}22$, iv) $\beta=362{,}777$, $\gamma=450{,}295$, **53**. $x=34{,}771$, **54**. 6,39 cm, **55**. 15,712 cm, **56**. 24,75 cm², **57**. $\beta=4668{,}94$, $\gamma=3865{,}54$, $B=50^\circ\ 22'\ 40''$, **58**. $R=392{,}418$, $\rho=170{,}988$, **59**. 0,3 rad **60**. 6,20 m καὶ 18,93 m, **61**. 49,7 cm², **62**. 254 cm², **63**. $14^\circ\ 21'\ 20''$, $122^\circ\ 5'\ 26''$, **64**. 22,4 cm, **65**. 34, **73**. $A=60^\circ$, $B=105^\circ$, $\Gamma=15^\circ$ **78**. $\frac{21}{4}$ **81**. $A=45^\circ$ **87**. i) $\beta=0{,}955$, $\gamma=2{,}39$ ii) $\alpha=3{,}68$, $\gamma=2{,}49$, iii) $\alpha=3{,}39$, $\beta=3{,}06$, iv) $\alpha=10{,}40$, $\gamma=5{,}55$, v) $\beta=132{,}7$ $\gamma=99{,}0$, vi) $\beta=56{,}77$, $\alpha=68{,}59$, **88**. 3699,6 m καὶ 1369,2 m **89**. 9318 m **90**. 1607,5 m. **91**. 603,9 m. **92**. $A=51^\circ 37' 35''$. **93**. i) $\beta=126{,}7$, ii) $\beta=73$. **94**. i) $B=74^\circ 40' 12''$, $\Gamma=58^\circ 51' 48''$, $\alpha=0.74243$. ii) $A=58^\circ 52' 48''$, $\Gamma=48^\circ 22' 48''$, $\beta=9{,}7780$. iii) $A=68^\circ 14' 42''$, $\Gamma=50^\circ 26' 54''$, $\beta=618{,}00$. **95**. $A=52^\circ 43' 36''$, $B=60^\circ 57' 53''$. **96**. $56^\circ 16'$. **97**. $53^\circ 45' 48''$ καὶ $69^\circ 22' 18''$. **98**. $A=107^\circ 14' 54''$. $B=98^\circ 32' 16''$, $\Gamma=97^\circ 37' 24''$, $\Delta=56^\circ 35' 26''$. **99**. $B=46^\circ 0' 8''$, $\Gamma=105^\circ 8' 3''$, $\gamma=131567$ ἢ $B'=133^\circ 59' 52''$, $\Gamma'=17^\circ 8' 19''$, $\gamma'=40164$. **100**. $100\sqrt{3}$, ἓν ὀρθογώνιον. **101**. $A=46^\circ 6'$, $B=16^\circ 45'$ ἢ $A_1=133^\circ 54'$, $B_1=16^\circ 45'$. **104**. 8,031 m. **105**. 27517,5 m². **106**. 1919,26 ἑκτάρια. **110**. 19,70 m². **111**. 0,570397, 0,570398. **112**. $57^\circ 14' 44''{,}8$. **113**. $25^\circ 9'$ καὶ $9^\circ 51'$. **114**. 76,39 grad, 1,20 rad. **115**. $A=120^\circ$, $B=36^\circ$, $\Gamma=24^\circ$. **116**. 0,3 rad, $17^\circ 10'$. **117**. 14,8 m. **118**. τὸ δεύτερον. **119**. $54^\circ 9'$. **120**. 588,75 cm. **124**. $\theta=60^\circ$. **125**. i) $B=39^\circ 32'$, $\Gamma=72^\circ 8'$ $\alpha=47{,}73$. ii) $A=40^\circ 42'$, $\Gamma=31^\circ 18'$, $\beta=8{,}604$. **127**. 560.000 m². **128** $27^\circ 45'$ καὶ 448,7 m. **129**. 4,205 km. **130**. $B=82^\circ 47' 38''$, $\Gamma=17^\circ 12' 22''$. **132**. $B=42^\circ 42' 26''$, $\beta=6{,}871$, $\gamma=2{,}871$. **135**. 105 m. **136**. 1430 m. **137**. $\omega=152^\circ 20' 56''$, $\varphi=4^\circ 9' 4''$, $(xx')=2279{,}74$ m. **138**. 24,282 m καὶ 7,2846 m². **139**. 156,4 cm. **140**. $1{,}59\alpha^2$. **141**. 6 καὶ 3,859. **142**. 0,815. **143** $B=58^\circ 57'$, $\Gamma=83^\circ 51'$, $\gamma=80{,}33$ ἢ $B'=121^\circ 3'$, $\Gamma'=21^\circ 45'$, $\gamma'=29{,}94$. **144**. $\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\eta\mu\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$, $\theta=60^\circ$. **145**. $\frac{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{2}$. **146**. $x=\rho\cdot\frac{1+\eta\mu\frac{\theta}{2}}{1-\eta\mu\frac{\theta}{2}}$.

147. 750°. **150**. Εἰς τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου. **151**. i) Εἰς τὸ συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὴν διὰ τοῦ B διερχομένην διάμετρον. ii) Εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου. **152**. $x+x'=k\cdot 360^\circ$, $k=$ἀκέραιος. **153**. i) Χρόνοι: $t=k-\frac{1}{4}$ λεπτὰ τῆς ὥρας, ὅπου $k=1, 2, 3, \ldots$ Σημεῖα συναντήσεως: τὸ A. ii) Χρόνοι: $t=\frac{4k'+1}{20}$ λεπτά, ὅπου $k'=0, 1, 2 \ldots$ Σημεῖα συναντήσεως: τὰ ἄκρα τῶν τόξων $(\widehat{A\Sigma})=(4k'+1)36^\circ$, ὅπου $k'=0, 1, 2, \ldots$ δηλ. εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου. **154**. i) 3ον ἢ 1ον ἢ 2ον τεταρτημόριον. ii) Ἀπὸ 30° ἕως 60° ἢ εἰς τὴν περιοχὴν ἀπὸ 150° ἕως 180° ἢ ἀπὸ 270° ἕως 300°. **156**. 180°, 240°. **162**. Εἶναι μηδενικὸν διάνυσμα. **164**. Καθέτως πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. **168**. 0, 1, 0. **169**. Ὄχι. **171**. Ναί. **172**. 1, 0, –1. **174**. 3ον, 2ον, 4ον. **176**. 2ον, 3ον, 3ον. **177**. Ὄχι. **178**. $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2$, $\varepsilon\varphi x_1<\varepsilon\varphi x_2$. **180**. -65° καὶ 115°. **185**. 60° καὶ 240° **186**. 300° καὶ 120°. **187**. π, $\frac{\pi}{4}$.

$\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{3}$, 4π, $\frac{\pi}{2}$, 4π, $\frac{\pi}{3}$. **188.** 2π. **189.** π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{\alpha}$. **190.** $-\frac{3}{2}$. **191.** $\eta\mu\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sigma\varphi\alpha=\frac{4}{3}$. **193.** $\sigma\upsilon\nu A=-\frac{5}{13}$, $\eta\mu A=+\frac{12}{13}$, $\varepsilon\varphi A=-\frac{12}{5}$. **196.** $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=2$ ἢ -2, -1, -2. **214.** ημx, —συνx, σφx, εφx, —συνx, —ημx, συνx, —ημx, —συνx. **215.** συνx, —ημx. **216.** —συνx, ημx, —εφx. **218.** (—ημx, —συνx), (συνx,—ημx), (—συνx, ημx), (συνx, —ημx), (—ημx, συνx), (ημx, —συνx), (—συνx, —ημx). **224.** Εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ἡμίτονα τῶν δοθέντων τόξων ἰσοῦνται κατὰ σειρὰν μέ : $-\sigma\upsilon\nu 17^0$, $\sigma\upsilon\nu 23^0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$, $-\eta\mu\frac{\pi}{9}$, συν(0,62 rad). **225.** —0,424, 3,271, —0,993, —0,5. **228.** $x=-(19^0 6' 15'')$, $y=-(48^0 21' 57'')$. **229.** $\theta=333^0 26'$. **230.** $\theta=296^0\ 34'$. **231.** $A=120^0$. **234.** $x=y=\frac{\pi}{3}$. **235.** 760^0 καὶ 860^0. **236.** -800^0 καὶ -504^0. **237.** $x=210^0+k\cdot 360^0$ **238.** 0 καὶ ημ2α. **241.** $y=\pi$ καὶ $x=6\pi$. **243.** —5,4 dm. **244.** 4,639, 2,965, 5,506 kg*, $\theta=32^0 35'$. **246.** i) ημα, ii) συνδ. **247.** $-\frac{11}{2}$, $\frac{1}{2}$. **250.** $\varepsilon\varphi\Gamma=-\frac{63}{23}$. **251.** $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta}$. **252.** 0. **253.** $\frac{3}{2}$. **254.** $\sigma\upsilon\nu^2\alpha$. **261.** $\frac{21}{221}$, $\frac{140}{221}$, $\frac{140}{171}$, $-\frac{220}{21}$. **266** $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}<1$. **269.** ημ5x, συν4x, εφ4x. **274.** ημ2θ. **276.** $\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta$. **283.** $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, 1. **284.** 0 ἢ 4/3. **299.** $1/2^7$. **303.** $8\eta\mu^4 x$. **304.** $\pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. **305** $\frac{44}{125}$, $\frac{2035}{2197}$, $\frac{1624}{1525}$, $\frac{8643}{21125}$. **307.** $\frac{1}{12}$. **309.** 0 ἢ 1 ἢ —1. **315.** $z^{3^\nu}+z^{-3^\nu}$. **316.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2+2\sigma\upsilon\nu\alpha}}$. **318.** $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\nu}{\mu}$. **319.** $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$. **320.** $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\lambda}\pm\sqrt{1-\lambda}\right\}$. **323.** $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}=\pm\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}$. **325.** i) $4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$, ii) —2ημαημβσυν(α+β), iii) ημ(x + y)ημ(y — x). **326.** i) 2ημαημβημγ, ii) $4\sigma\upsilon\nu^2\left(45^0-\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$, iii) $2\varepsilon\varphi\alpha\cdot\eta\mu^2(45^0-\alpha)$. **328.** i) —1, ii) —1. iii) $-\frac{1}{2}$. **329.** 4συνασυνβσυνγ. **332.** —σφ3θ. **333.** i) $4\sigma\upsilon\nu^2\frac{A-B}{2}$, ii) $\sqrt{2}\cdot\eta\mu(45^0+5\alpha)/\sigma\upsilon\nu 5\alpha$. **335.** $2\sigma\upsilon\nu^2 22^0 30'$, $2\eta\mu\frac{105^0}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{15^0}{2}$, $4\eta\mu^2 15^0$, $-\eta\mu 15^0/\sigma\upsilon\nu 45^0\cdot\sigma\upsilon\nu 60^0$, $\varepsilon\varphi 75^0$. **336.** $2\sigma\upsilon\nu(60^0-\alpha)$, $\varepsilon\varphi(60^0+\alpha)$. **337.** $2\sqrt{\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(45^0-\frac{\theta}{2}\right)$, 2/ημθ, αημθ, ημ4θ. **338.** 12952,9. **339.** 8738,4. **340.** $45' 20''$. **341.** $x'=4^0 2' 18''$, $x''94^0 2' 18''$. **342.** i) $5\eta\mu(x+53^0 8')$, ii) $\sqrt{53}\,\eta\mu(x+74^0 3')$. **343.** i) $\sqrt{5}\,\eta\mu(x-26^0 34')$, ii) $\sqrt{58}\,\eta\mu(x-66^0 48')$. **344.** Αἱ μέγισται τιμαί : i) $\sqrt{3{,}5+2\sqrt{2}}=2{,}517$, ii) $\sqrt{37}=$

6,083, iii) $\sqrt{29-10\sqrt{2}} = 3,855$. **345.** $\etaμ62^0+ημ22^0+ημ78^0+ημ28^0+ημ68^0-$ $-ημ18^0-ημ12^0-ημ52^0$. **349.** $x=-ημ5α/ημα$, $y=ημ4α/ημα$. **355.** 1. **356.** $\{B=80^0,\ Γ=40^0\}$ ἢ $\{B=100^0,\ Γ=20^0\}$. **357.** εφ9α. **359.** i) 4ημΑημΒημΓ, ii) $-4συν\frac{3A}{2}συν\frac{3B}{2}συν\frac{3Γ}{2}$, iii) 4ημ3Αημ3Βημ3Γ. **361.** 2ημΑημΒσυνΓ. **369.** $A=90^0$, $Γ=60^0$ ἢ $A=45^0$, $Γ=105^0$ ἢ $A=135^0$, $Γ=15^0$. **371.** $44^0 26'$, $75^0 20'$, $-(22^0 5')$, $159^0 14'$. **378.** $S_ν=τοξ_0εφ\frac{3ν+2}{ν-1}$. **380.** $x=3/2$. **381.** $x=2$, $k=1$. **388.** $S_ν=τοξ_0εφ(ν+1)-\frac{π}{4}$. **391.** 3,9. **393.** q. **398.** $\frac{-25-\sqrt{504}}{11}$. **399.** $x=\pm ν$. **403.** $συν(x+y+z)+συν(-x+y+z)+συν(x-y+z)+συν(x+y-z)$. **406.** $\frac{ν}{2}-\frac{ημ(να)συν(ν+1)α}{2ημα}$. **409.** $\frac{6+4\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}α$. **414.** $|ημx|+|συνx|-1$. **415.** 10. **420.** 5π. **421.** τρεῖς. **422.** $4x^3-3x-2λ^2+1=0$. **425.** 1. **427.** $εφθ=0,403$, $θ=201^0 56'$. **428.** Ἐλαττοῦται ἀπὸ 3 ἕως 1/3. **430.** $x=0$. **431.** Αὐξάνει ἀπὸ $-π/4$ ἕως $+π/4$. **432.** $x=1$ ἢ $x=1/2$. **433.** i) 0, 1/2, −1/2. ii) $x=1/2$. **442.** $27y^2=x^2(9-8x^2)^2$. **443.** εφ5θ·εφθ. **446.** $\frac{1}{8}ημx+\frac{3}{10}ημ3x+\frac{1}{16}ημ5x$, 0,173 ἀκτ $= 9^0 54'43'',8$, τιμὴ παραστάσεως : 0,1621. **448.** $\frac{1}{2}σφ\frac{α}{2}, -\frac{1}{2}εφ\frac{α}{2}$. **451.** i) ἔχει, ii) δὲν ἔχει. iii) δὲν ἔχει **456.** $x=kπ$. **457.** ἔχει ὅταν $-1\leqq λ\leqq +1$. **458.** $x=(11^0 58'57'')+k\cdot 180^0$. **459.** $x=-\frac{π}{2}+2kπ$ ἢ $-\frac{π}{6}+2kπ$ ἢ $\frac{7π}{6}+2kπ$. **460.** $x=(2k+1)\frac{π}{2}$ ἢ $(2k+1)π$ ἢ $\frac{2}{3}kπ$. **461.** $x=\frac{π}{12}-2kπ$ ἢ $-\frac{7π}{12}-2kπ$. **462.** $x=53^0 38'$ ἢ $31^0 11'$. **463.** $x=\pm(31^0 13')+k\cdot 90^0$. **464.** $x=\frac{2k+1}{2ν+μ}π$ ἢ $\frac{k}{ν}π$ ἢ $\frac{2k}{μ}π$. **465.** $y=\pm 36^0+k\cdot 360^0$ **466.** i) ἂν $συν2α\neq 0$ τότε $x=\pm 30^0+k.180^0$ ii) ἂν $συν2α=0$ τότε εἶναι ταυτότης. **467.** $x=\pm 30^0+k\cdot 90^0$. **468.** $x=68^0\ 11'+k\cdot 180^0$. **469.** $\frac{π}{2}, \frac{π}{4}, \frac{3π}{4}$. **470.** $x=(2k+1)\frac{π}{2}$ ἢ $-\frac{π}{12}+k\frac{π}{3}$ **471.** $x=(2k+1)\cdot\frac{π}{2}$ ἢ $(2k+1)\frac{π}{4}$. **472.** $εφθ=\frac{3}{5}$, $θ=30^0\ 58'$, $x=-(10^0\ 54')+k\cdot 360^0$ ἢ $128^0 58'$ $+k\cdot 360^0$ **473.** i) $x=2kπ$ ἢ $2kπ+π/2$ ii) $x=-(19^0 47')+k\cdot 360^0$ ἢ $-(47^0 35')+k\cdot 360^0$ **474.** $x=45^0+k.180^0$ ἢ $-(63^0\ 26')+k.180^0$. **475.** $x=-45^0+k.180^0$. **476.** $x=-45^0+k\cdot 180^0$. **477.** ἂν συνα=ο εἶναι ταυτότης, ἂν $συνα\neq 0$ τότε $x=(2k+1)\frac{π}{2}$. **478.** $ημ2x=\frac{2}{β^2}(1+\sqrt{1+β^2})$. **479.** $ω=(2k+1)45^0$. **480.** $ω=52^0\ 14'22'',5$. **481.** $x=kπ$ ἢ $\frac{4k+1}{8}π$. **482.** $x'x''=(2-\sqrt{3})\ \{(x'+x'')^2-3\}$. **483.** 4,5,6. **484.** $x=\pm Ω$ ὅπου Ω οἱαδήποτε θετικὴ λύσις τῆς $συνω+ημω=\frac{1}{2}$ ἢ τῆς συνω−ημω=

$=1/2$. **486.** Ἐὰν $y=45^0-x$, τότε, ἂν$\{\lambda<-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ἢ $\lambda>\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$ μία τιμὴ τοῦ συνy παραδεκτὴ καὶ ἂν $-\frac{1}{2}\sqrt{2}\leqq\lambda\leqq\frac{1}{2}\sqrt{2}$, τότε καὶ αἱ δύο τιμαὶ τοῦ συνy παραδεκταί. **487.** Ἐὰν $\{\lambda\geqq2+3\sqrt{2}$ ἢ $\lambda>2-3\sqrt{2}$ ἢ $\lambda=1-2\sqrt{2}\}$ μία τιμὴ τοῦ συνy δεκτὴ καὶ ἂν $\{2-3\sqrt{2}\leqq\lambda\leqq1-2\sqrt{2}\}$ δύο. Ἐὰν $1-2\sqrt{2}<\lambda<2+3\sqrt{2}$ καμμία λύσις. **488.** $3+2\sqrt{2}\leqq\mu<6$ **489.** $(4+x^2)>8y^2$. **490.** $\{x=(-1)^k.\tau+k\pi,\ y=\pm\theta+2k\pi\}$ καὶ $\{x=k\pi-(-1)^k\cdot\tau,\ y=\pm\theta+(2k+1)\pi\}$ ὅπου τ καὶ θ μετρούμενα εἰς μοίρας: $53^0 8'$ καὶ $59^0\ 19'$. **491.** $x=y=26^0 33' 54''$. **492.** $x=145^0 17'+k\cdot180^0$, $y=85^0 17'+k\cdot180^0$. **493.** $\{\sigma\upsilon\nu2x=0, \sigma\upsilon\nu2y=1/2\}$ ἢ $\{\sigma\upsilon\nu\,2x=1/2,\ \sigma\upsilon\nu2y=0\}$. **494.** ὄχι. **495.** $\{x=\lambda\pi,\ y=\lambda'\pi\}$ ἢ $\{x=\theta_1+\lambda.180^0,\ y=\omega_1+\lambda.180^0\}$ ἢ $\{x=\theta_2+\lambda.180^0,\ y=\omega_2+\lambda'.180^0\}$ὅπου $\varepsilon\varphi\theta_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{105}}{8}}$, $\varepsilon\varphi\omega_1=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3+\sqrt{105}}{8}}$ $\varepsilon\varphi\theta_2=-\varepsilon\varphi\theta_1$, $\varepsilon\varphi\omega_2=-\varepsilon\varphi\omega_1\}$. **496.** $\{x=-2\alpha+k.360^0,\ y=\alpha+k'\cdot180^0\}$ ἢ $\{x=-2\beta+(2k+1)180^0,\ y=\beta+k'\cdot180^0\}$ ὅπου $2\alpha=\pm70^0\,37'$ ἢ $\pm109^0 23'$, $2\beta=\pm45^0$, $\pm135^0$, $\pm30^0$, $\pm150^0$. **497.** $\{x=(-4k+12k'-5)\frac{\pi}{2}.\ y=(k-2k'+1)\pi\}$ ἢ $\{x=\left(2k+6k'+\frac{5}{2}\right)\frac{\pi}{5},\ y=\left(k-2k'\right)\frac{\pi}{5}\}$. **498.** $\{x=\pi+\alpha+2k\pi,\ y=\alpha+2k'\pi\}$ ἢ $\{x=\pi+\beta+2k''\pi,\ y=\beta+2k'''\pi\}$, ὅπου $\alpha=\pm\pi/4$, $\beta=\pm3\pi/4$. **499.** $\{x=60^0+k180^0,\ y=45^0+k'180^0\}$ ἢ $\{x=45^0+k180^0,\ y=30^0+k'180^0\}$. **500.** $\left(2\pi,\frac{9\pi}{4}\right)$. $\left(\frac{5\pi}{2},\ \frac{9\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{9\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{9\pi}{4},\ 2\pi\right)$. **501.** $(x=53^0 26',\ y=8^0 26)$ ἢ $(171^0 34',\ 126^0 34')$ ἢ $(126^0 34,\ 8^0 26')$ ἢ $(8^0 26',\ 126^0 34')$. **503.** $A=2^0 52' 15'$, $B=17' 15''$. **504.** $\alpha\beta\geqq4$ ἢ $\alpha\beta<0$ διὰ νὰ ὑπάρχουν λύσεις. Ἂν $\alpha=\beta=0$, ἀόριστον. **505.** $|\alpha+\beta|\leqq1$, $|\alpha-\beta|\leqq1$. **506.** Ἐὰν $\left|\frac{\alpha}{\eta\mu A}\right|\leqq1$ ἔχει λύσεις. Ἂν $\eta\mu A=0$ καὶ $\alpha\neq0$, ἀδύνατον. Ἂν $\eta\mu A=0$, $\alpha=0$ ἀνάγεται εἰς τὴν $x+y=A$. **508.** $\left\{x=\frac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi,\ \eta\mu\left(y+\alpha\right)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha}\right\}$. Συνθήκη δυνατότητος: $\eta\mu^2\alpha>\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **509.** Ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς $t^2-\alpha t+\frac{\alpha^3-\beta-3\alpha}{3\alpha}=0$ νὰ κεῖνται εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ -1 ἕως $+1$. Ἐὰν $\alpha=\beta=0$, ἀόριστον. **510.** $\frac{4\beta}{\alpha}\leqq(1+\alpha)^2$ καὶ τοῦ $(1-\alpha)^2$. **512.** $\left\{x=\varepsilon\varphi\frac{\upsilon\pi}{7},\ y=\varepsilon\varphi\frac{2\upsilon\pi}{7},\ z=\varepsilon\varphi\frac{4\upsilon\pi}{7}\right\}$, ὅπου $\upsilon=0$ ἢ 1, ἢ 2 ἢ 3, ἢ 4 ἢ 5 ἢ 6. **513.** $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$. Πρέπει $\left|\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right|\leqq1$ κ.τ.λ. **514.** $\varepsilon\varphi x=\lambda\alpha\cdots$, $\lambda=\pm\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}}$. Πρέπει $(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma\geqq0$. **516.** $x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$.

517. $(\mu^2-\nu^2)^2=\mu\nu$. **518.** $(\beta+1)^2+2\alpha^4=4\alpha^2+2\alpha^2\beta$. **519.** $\dfrac{(\gamma+\delta)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A-B}{2}}+\dfrac{(\gamma-\delta)^2}{\eta\mu^2\dfrac{A-B}{2}}=4$.

520. $\dfrac{x^2}{\Lambda^2}+\dfrac{y^2}{K^2}=1$. **521.** $\dfrac{x^2}{R^2}+\dfrac{y^2}{\rho^2}=1$. **522.** $x=\gamma\sigma\varphi^2\dfrac{\alpha}{2}$, $y=\gamma\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$, $y^2=\gamma x$. **524.** $\dfrac{25\eta\mu^2 2A}{9}+\dfrac{(3\gamma-5\eta\mu 2A)^2}{9\beta^2}=1$. **525.** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\rho^2$. **526.** $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\sigma\varphi\Gamma$. **527.** $\alpha^2\left\{\dfrac{4\alpha^2\delta^2}{(\delta^2+\gamma^2)^2}-1\right\}=\beta^2\left\{\dfrac{4\beta^2\delta^2}{(\delta^2-\gamma^2)^2}-1\right\}$. **528.** $2\beta=(\alpha^2+\beta^2)\sigma\upsilon\nu\Gamma$. **529.** $\rho=1{,}420$. **531.** $\rho=1{,}420$, $\rho_\alpha=4{,}192$, $\rho_\beta=3{,}526$, $\rho_\gamma=5{,}494$. **550.** $\tau=k^3/4\lambda^2$. **552.** $R\sqrt{1-8\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}$. **555.** ii) $B=7^0 29'25'',5$, $\Gamma=2^0 30'34'',5$. **556.** $\sigma\upsilon\nu\,(B-\Gamma)=\dfrac{2h\,\eta\mu A}{\alpha}-\sigma\upsilon\nu A$. **557.** $\widehat{B}=54^0 42'17''$, $\beta=3889{,}42$, $\gamma=2753{,}36$. **558.** $B=64^0\,16'\,33''$. **559.** $B=70^0\,40'\,14''$. $\beta=1270{,}35$. **560.** $\alpha=$ $=k/(1+\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu B)$ πάντοτε 1 λύσις. **562.** $B=31^0\,43'\,2'',8$. **563.** $\dfrac{1\pm\sqrt{1-8\varepsilon\varphi^2\varphi}}{2\varepsilon\varphi\varphi}$.

564. $B=38^0\,10'\,15''$. **565.** $\eta\mu 2\Gamma=\dfrac{4\varepsilon\varphi\omega}{3}$, $\omega_{max}=\tau o\xi{\cdot}\varepsilon\varphi(4/3)$. **566.** $B=20^0\,35'\,43''$, $\beta=15{,}76$ m, $\gamma=41{,}94$ m, $E=330{,}446$ m². **568.** $\alpha=k+\sqrt{k^2-\delta^2}$. **569.** $\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}=\left(\rho+2R\eta\mu^2\dfrac{A}{2}\right)\Big/2R\,\eta\mu\dfrac{A}{2}$. **570.** $\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}=k\eta\mu\dfrac{A}{2}\Big/\alpha$. **571.** $E=8{,}328$m². **573.** $B=82^0\,47'\,51''$, $\Gamma=17^0\,12'\,9''$. **579.** $(AB)=1{,}793$. $(A\Gamma)=$ $=1{,}464$, $(B\Gamma)=2{,}591$, $B=33^0\,4'\,37''$. **591.** $B=141^0\,1'\,20''$, $\Gamma=26^0\,58'\,40''$. **592.** $A=40^0\,54'\,55''$, $\Gamma=28^0\,2'\,39''$, $B=111^0\,2'\,26''$, $\alpha=31{,}898$, $\beta=45{,}456$, $\gamma=$ $=22{,}898$. **594.** iii) $3E=\tau^2(2\sqrt{3}-3)$. **595.** $B=15^0$, $\Gamma=105^0$ $A\Gamma=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $AB=R\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2}\right)$. **596.** $40^0\,12'$ BA. **597.** $E_{max}=(12{,}7)^2\sqrt{3}$ m², **598.** $2x^2+x-1=0$, $\upsilon_\alpha=\dfrac{1}{5}\sqrt{10}$, $\upsilon_\beta=\dfrac{1}{5}\sqrt{5}$, $\upsilon_\gamma=\dfrac{2}{5}\sqrt{2}$. **559.** $A=90^0$, $B=30^0$, ἢ $A=30^0$, $B=90^0$. **600.** $B=54^0\,22'\,57''$, $\Gamma=8^0\,11'\,27''$. **601.** $\rho=2R\,\eta\mu\varphi\,(1-\eta\mu\varphi)$ διὰ $\varphi=30^0$ τὸ ρ, μέγιστον. **602.** $(S-3R)/R$. **603.** i) $-118^0<B-\Gamma<118^0$. ii) $-118<3B-\Gamma<354^0$. **604.** ὑπάρχει. **605.** ὄχι. **606.** ὄχι. **607.** $(-1{,}428\ \ldots\ldots+$ $+1{,}428)$. **608.** $-\dfrac{1}{2}<\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)\leqq 1$. **609.** $\rho^2<xy$. **624.** $B=39^0 46'$, $\Delta=$ $=129^0\,8'$. **625.** $8{,}57$, $(A\Delta)=12{,}20$. **626.** $(\widehat{AB\Gamma})=203^0\,7'$, $(\widehat{B\Gamma\Delta})=66^0\,53'$, $(A\Delta)=22{,}16$. **627.** $B=120^0$, $\Delta=90^0$, $(A\Gamma)=4/\sqrt{3}$. **628.** $(\Delta A)=441{,}62$, $(\Delta B)=$ $=402{,}45$, $(\Delta\Gamma)=608{,}46$. **629.** $(\Gamma\Delta)=\dfrac{\alpha}{2}$, $(\widehat{A\Delta\Gamma})=144^0$, $(\widehat{B\Gamma\Delta})=72^0$. **630.** $B=74^0 24'$. **631.** Τὸ ἐγγράψιμον. **633.** $\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+\delta^2$. **634.** $\alpha=7{,}6085$ m, $\beta=$ $=9{,}1302$ m, $\gamma=10{,}6519$ m, $\delta=13{,}6953$ m, $A=83^0 4'4''$, $B=111^0 46'31''$, $\Gamma=$ $=96^0 55'56''$, $\Delta=68^0 13'29''$, $R=7{,}476$. **635.** $\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\delta-\beta}{\delta+\beta}\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{(\tau-\beta)(\tau-\delta)}}$.

637. $35^0 6'$, $29^0 32'$, $84^0 26'$. **638.** Τὰ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς $t^2-t\sqrt{R^2+\dfrac{4\mu^2}{\sqrt{3}}}+$

$+\frac{4\mu^2}{\sqrt{3}}-2R^2=0$, συνθῆκαι δυνατότητος: $\frac{\sqrt{3}}{2}R^2<\mu^2\leqq\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Ἀλλέως: ἂν $\widehat{\Delta A\Gamma}=\omega$, τότε $x=2R\sigma\upsilon\nu(30+\omega)$, $y=2R\eta\mu\omega$, ὅπου $\eta\mu(30^0+2\omega)=\frac{2\mu^2}{R^2\sqrt{3}}-\frac{1}{2}$.

639. $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{1+k}{1-k}\sigma\varphi\frac{\theta}{2}$, $\varepsilon\varphi\beta=\frac{k+1}{k-1}\sigma\varphi\frac{\theta}{2}$. **640.** 967,025 m^2. **641.** $\gamma=1$.

643. $E=\frac{1}{2}\delta^2\eta\mu 2\theta$, $\beta=\tau-\delta\sigma\upsilon\nu\theta$, $\alpha=\delta\sigma\upsilon\nu+\sqrt{(\tau-\delta\sigma\upsilon\nu\theta)^2-\delta^2\eta\mu^2\theta}$, $\gamma=\delta\sigma\upsilon\nu\theta-\sqrt{(\tau-\delta\sigma\upsilon\nu\theta)^2-\delta^2\eta\mu^2\theta}$, $R=(\tau-\delta\sigma\upsilon\nu\theta/2\eta\mu\theta$. Ἡ ζητουμένη σχέσις: $\tau=2\delta\sigma\upsilon\nu\theta$. **644.** $\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, 4\pi, \frac{\pi}{2}, 4\pi, \frac{\pi}{3}$. **645.** 2π. **649.** $x=0,362$ rad $=20^0 46'$, (AB) = 3,384. **650.** 1,615 καὶ 2,5. **651.** $x=57^0$. (AB) = 8,08 cm. **653.** $x=44^0$, $106^0,-167^0$. **655.** $\theta=2,3$ rad. **656.** $129^0 54'$. **659.** 6,188, 1,01334. **660.** $A=41^0 20'30''$, $B=55^0 46'$, $\alpha=24,185$ m, $\beta=30,231$ m, $\gamma=36,277$ m. Συνθῆκαι $\frac{1}{\upsilon_\alpha}<\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}$, $\frac{1}{\upsilon_\beta}<\frac{1}{\upsilon_\gamma}+\frac{1}{\upsilon_\alpha}$, $\frac{1}{\upsilon_\gamma}<\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}$. **663.** $(2x^2-\alpha y-\alpha^2-\beta^2)^2=\beta^2(\alpha^2+\beta^2-y^2)$. **665.** $x=\pi/3$, $y=\pi/4$, $z=5/12$. **668.** -1 καὶ $\frac{2-\varepsilon\varphi\alpha\pm\sqrt{1-2\varepsilon\varphi\alpha}}{1+\varepsilon\varphi\alpha}$. **669.** $(MN)=2\alpha\varepsilon\varphi 2B$, $(BM)(BN)=\alpha^2$, $\sigma\upsilon\nu B=(1+\sqrt{1-8\pi^2\lambda^2})/4\pi\lambda$. **670.** $160^0 31'34''+k360^0$, $k=0, \pm1,\ldots$ **771.** 3/2, $-1/2$. **672.** $\Pi\sigma\upsilon\nu\frac{3A}{2}$. **674.** Ἂν $(\Gamma\Delta)=l$, τότε $(AA')=l\sqrt{\frac{3}{2}}$, $(BB')=\frac{4}{5}l\sqrt{\frac{3}{2}}$, $(AB)=l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{47}}{5}\right)$. **675.** $0\leqq x<\frac{2\pi}{3}$, $2\pi-\tau\leqq x<2\pi$, $\tau=\tau o\xi_0\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{4}{5}\right)$. **676.** 36994,2 m^2. **679.** ὄχι. **680.** $x=-11^0$. **681.** $x=26^0 33'54''+k180^0$ $\left(=\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\right)$. **682.** $B=105^0$. **684.** $\sigma\varphi x+\sigma\varphi y=2\rho\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$. **687.** i) $x=135^0$ ἢ 75^0 ἢ $15^0+k\cdot 360^0$, ii) $x=(-1)^k\cdot\frac{\theta}{2}+\frac{\alpha}{2}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, ὅπου k ἀκέραιος, $\theta=\tau o\xi\eta\mu\{-k\eta\mu\alpha\}$. **688.** $B=45^0$, $A=90^0$. **689.** $8^0 34'23''$, $17^0 20'45''$. **690.** $A=45^0$, $B=63^0 20'$, $\alpha=1,851$, $\gamma=2,121$. **692.** $\sigma\upsilon\nu A=\frac{2\lambda}{(1+\lambda^2)}$. **694.** $A=37^0 12'$, $B=\Gamma=71^0 24'$ ἢ $A=90^0$, $B=\Gamma=45^0$. **695.** $\widehat{\Gamma}=89^0 25'4'',6$. **690.** 6, 1, $26^0 34'$, $116^0 34'$, $206^0 34'$, $296^0 34'$. **700.** $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm1, \pm2,\ldots)$ καὶ $y=\pm\left(2k'\pi-\frac{\pi}{2}\right)(k'=1, 2,\ldots)$. **701.** $B=2\Gamma$ ἢ $2\Gamma-B=180^0$. Ἐπίλυσις ὀξυγωνίου: $\Gamma=36^0$, $B=72^0$, $A=72^0$. **703.** $E=\frac{2\rho E'}{R}$. **704.** $4\mu^3=\lambda(\mu^4-1)$, $\eta\mu\alpha=2\mu/\mu^2+1$, $\sigma\upsilon\nu\alpha=(\mu^2-1)/(\mu^2+1)$. **706.** Αἱ λύσεις παρέχονται ἀπὸ τὰ συστήματα: $\left\{\frac{x+y}{2}=2\rho\pi, \frac{x-y}{2}=2\rho'\pi\right\}$, $\left\{\frac{x+y}{2}=(2\rho+1)\pi, \frac{x-y}{2}=(2\rho'+1)\pi\right\}$, $\left\{\frac{x+y}{2}=\right.$

$=2\rho\pi, \frac{x-y}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\rho'\pi\Big\}$, $\Big\{\frac{x+y}{2}=(2\rho+1)\pi, \frac{x-y}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\rho'\pi\Big\}$, $\Big\{\frac{x+y}{2}$ $=$τοξσυν $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x-y}{2}=$τοξ συν $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}\Big\}$, $\Big\{\frac{x+y}{2}=$τοξ συν $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\frac{x-y}{2}=$τοξ συν $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}\Big\}$. **707.** Ἀνάγεται εἰς τὰ $\Big\{$ συνx$=\frac{1}{2}$, συνy$=-\frac{1}{2}$, συνz$=0\Big\}$, $\Big\{$συνx$=-\frac{1}{2}$, συνy$=\frac{1}{2}$, συνz$=0\Big\}$. **710.** σφ$(I\widehat{M}B)$ σφΓ — σφB. **712.** $\frac{1}{2}$ Rσυν(B—Γ), $\frac{1}{2}$ Rσυν(Γ—A), $\frac{1}{2}$ Rσυν(A–B). **715.** 2(2+ημθ) : συνθ· **716.** $d\Big/\left(1-\text{εφ}\frac{\alpha}{2}\text{εφ}\frac{\beta}{2}\right)$. **717.** $2\text{ημ}^2\frac{x}{2}-\text{ημ}\frac{x}{2}+\left(\frac{\lambda}{2\rho}-1\right)=0$. Δύο λύσεις: $2\rho\leqq\lambda<\frac{9}{4}\rho$. Μία λύσις : $\rho\sqrt{2}<\lambda<2\rho$ ἢ $\lambda=9\rho/4$. **718.** Αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν : 5, 2, 7/9. Αἱ γωνίαι : 78°41′, 63°26′, 37°53′. **720.** $\lambda\geqq7$, 209°15′33″,7, 240°44′26″,3. **721.** συνx $\geqq\frac{\sqrt{3}}{3}$, συνx$\leqq-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **723.** $x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{10}$, $x=$ $=k\pi+(-1)^k\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$. **724.** $(2k+1)\frac{2\pi}{3}$, $4k\pi$. **725.** 608,48. **726.** συν(x+y)+ +λημx—συνx=0, x=55°44′, y=94°20′. **727.** $30^0\leqq\theta<90^0$, διὰ $30^0\leqq\theta<60^0$: θετικαὶ ρίζαι, διὰ $60^0<\theta<90^0$ ἑτερόσημοι. **728.** 43°26′24″. **729.** $x=-\text{σφ}\frac{\pi}{6}$ ἢ σφ$\frac{5\pi}{12}$ ἢ σφ$\frac{\pi}{6}$ ἢ $-$σφ$\frac{\pi}{12}$. **730.** $\lambda^2\leqq1$, $\left(x=\frac{\pi}{6}, y=\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}\right)$. **731.** $\theta=2$τοξεφ$\frac{1}{3}=36^052'11''$. **732.** $-$εφ²α, $-$σφ²α. **733.** i) $\omega=\frac{180^0}{\nu}+2\text{τοξ}_0\text{σφ}\Big\{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\text{σφ}\frac{90^0}{\nu}\Big\}$, $\varphi=\frac{360^0}{\nu}-\omega$, $2R=$ $=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\text{συν}\frac{180^0}{\nu}}\Big/\text{ημ}\frac{180^0}{\nu}$, $E=\frac{\nu}{2}\Big\{(\alpha^2+\beta^2)\text{σφ}\frac{180^0}{\nu}+\alpha\beta\text{εφ}\frac{90^0}{\nu}\Big\}$. ii) $E=\frac{\nu}{2}\Big\{\left(\alpha^2+\left(\frac{2\tau}{\nu}-\alpha\right)^2\right)\text{σφ}\frac{180^0}{\nu}+\alpha\left(\frac{2\tau}{\nu}-\alpha\right)\text{εφ}\frac{90^0}{\nu}\Big\}$. **735.** ημ $\Big(45^0+$ $+\frac{3A}{4}\Big/2\text{συν}\frac{A}{2}\text{ημ}\left(45^0-\frac{A}{4}\right)$ ὅπου $A=30^0$ ἢ 150^0. **739.** 1,3 rad. **742.** 302 m, 319m, 65800 m². **743.** i) $x=\pm13$ ii) $x=\pm\sqrt{2}/2$. **744.** συνB$=\frac{2R^2+1}{4R^2-1}$, $R>1$. **747.** $\{x=\lambda\pi, y=\lambda'\pi\}$ ὅπου λ′, λ′ ἀμφότεροι ἄρτιοι ἢ περιττοί. **748.** εφ(γ+x)=— —εφβ.εφγ.εφα, x=42°55′. **750.** τοξεφ$\frac{3\sqrt{5}}{2}=73^024'$. **751.** Ἐὰν α τόξον τοιοῦτον ὥστε : ημα$=\frac{3}{5}$ καὶ συνα$=\frac{4}{5}$ τότε $\Big\{x=\alpha+2k\pi, y=\alpha+\frac{\pi}{2}+2k'\pi\Big\}$ καὶ $\Big\{-\alpha+(2\lambda+1)\pi, -\alpha+\frac{\pi}{2}+2\lambda'\pi\Big\}$. **752.** 0,36 m². **753.** βημωημ(θ+ω+σ)

$\eta\mu(\theta+\omega-\varphi)/\eta\mu\sigma\ \eta\mu\varphi\ \eta\mu(\theta+\omega)$. **755**. 1,138 m. **756**. $x=k.360^0$ ἢ $x=90^0+k\cdot 360^0$.

757. i) $x=45^0$ ii) $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+(\beta-\gamma)^2}}$ (σημ γ). **758.** $\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}\pm\dfrac{2\gamma}{\beta}$.

759. $x=0,82+2k\pi$ rad ἢ $47^0 16' 45''+k\cdot 180^0$ ἢ $46^0 37' 53''+k180^0$. **760**. $|\varepsilon\varphi x|=$
$=\dfrac{1}{2}\left\{2k+\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)^2-4}\right\}$ ὅπου k φυσικὸς ἀριθμός, ἢ $|\varepsilon\varphi x|=$
$=\dfrac{1}{2}\left\{-2k+\dfrac{1}{2}+\sqrt{\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)^2+4}\right\}$ ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος. **762.** $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{y^2}$
$+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{yz}$. **763**. $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$. **765.** $(\mathrm{A\Gamma})=14,72$. **767.** $(\mathrm{AB})=5,73$, ἀπόστασις τοῦ Ε, 1,91. **773.** $\beta=\dfrac{(-\alpha\eta\mu A+\gamma\eta\mu\Delta)}{\eta\mu(\Gamma+\Delta)}$ $\delta=\dfrac{(-\alpha\eta\mu\beta+\gamma\eta\mu\Gamma)}{\eta\mu(\Gamma+\Delta)}$ **775.** 90^0, 54^0 $44'$, $35^0\ 16'$. **777.** $0,5112\ m^2$. **778.** $\theta\simeq 38^0 10'$. **779.** $\sigma\upsilon\nu\ \Delta\widehat{O}\Gamma=\sigma\upsilon\nu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\beta$. **780.** i) 3,4669, −2,7262, −0,7406. ii) 1,894. −1,5321, −0,3473. iii) 4,7409, −4,4059, −0,3351. **781.** $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{4}\left\{\sqrt{6+2\sqrt{6}}+\sqrt{6+2\sqrt{6}}\right\}=1,09$,

$\dfrac{\gamma}{\alpha}=0,56$, $A=65^0 54'$, $B=84^0 18'$, $\Gamma=29^0 43'$. **783.** $m^2+m\sigma\upsilon\nu\alpha=2$. **785.** $x=$
$=0,8174$ ἢ $46^0 50'$ καὶ $x=-0,7519$ ἢ $-48^0 5'$. **787.** $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. **788.**
$E=k^3\dfrac{R}{2\rho^2}$. **789.** $x=\rho/\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A}{2}$. **791.** i) $\mu^2\leqq\alpha^2(2-\sqrt{2}$ ii) Διὰ $\mu^2=\alpha^2(2-\sqrt{2}$).

792 $\tau=8k.\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}\Big/\sqrt{2\eta\mu 2A\eta\mu 2B\eta\mu 2\Gamma}$. **793.** $\lambda=\alpha/2\sigma\upsilon\nu\sigma$. **794.**
Πρέπει ΣΑ=ΣΒ. **796.** iv) $8x^3-(4x^2+1)\sqrt{7}=0$. **797.** $x=k\pi$ καὶ $x=\tau o\xi\varepsilon\varphi\left\{\dfrac{1}{2}\right.$
$\left.(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma)\right\}+k\pi$. **798.** $\tau o\xi\varepsilon\varphi\sqrt{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu A\ \sigma\upsilon\nu B}}$.