ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΥΘ. ΧΑΤΖΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑ ΤΩι ΛΕΟΝΤΕΙΩι ΛΥΚΕΙΩι

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤ. ΣΧΟΛΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΙΣ: Ι. ΑΛΕΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
1945

Δ 2 ΜΜΣ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΥΘ. ΧΑΤΖΗ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΡΑ ΤΩι ΛΕΟΝΤΕΙΩι ΛΥΚΕΙΩι ΤΩΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χατζή (Γ.)

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΑΘΗΝΑΙ

ΤΥΠΟΙΣ: Ι. ΑΛΕΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

1945

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἀπεφασίσαμεν νὰ γράψωμεν τὸ βιβλίον τοῦτο, μὲ τὸν σκοπὸν νὰ φανῶμεν χρήσιμοι, ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ πρακτικῶν Λυκείων, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἰς τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτ. Σχολῶν.

Θὰ ἦτο, κατὰ τὴν γνώμην μας, εὐχῆς ἔργον, ἐὰν ἡ Ἄλγεβρα περιεῖχεν παραλλήλως πρὸς τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἀπαραίτητα θέματά τινα τῆς θεωρητικῆς ἀριθμητικῆς, διότι οὕτω θὰ διηυκόλυνε τὰ μέγιστα τὴν μαθητιῶσαν νεολαίαν εἰς τὴν κατανόησιν, μετὰ σαφηνείας καὶ ἀκριβείας, τῆς θεωρίας τῆς Ἀλγέβρας, μαθήματος θεωρουμένου ὡς βάσεως τῆς ἀναλύσεως εἰς τὰ μαθηματικά. Εἰς τὸ Α΄ κεφάλαιον περιλαμβάνομεν, εἰς σύντομον ἔκθεσιν, ἅπασαν τὴν ὕλην τὴν ἀπαραίτητον διὰ τὰ κλασσικὰ γυμνάσια, εἰς γλῶσσαν ἁπλῆν καὶ εὔληπτον, μετὰ καταλλήλων ἀσκήσεων, διὰ τὴν πλήρη ἐμπέδωσιν τῆς θεωρίας. Οὕτω δὲ φρονοῦμεν, ὅτι συμπληροῦμεν, ἐὰν προηγηθῇ τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀλγέβρας ἡ ὕλη τοῦ Α΄ κεφαλαίου τοῦ παρόντος βιβλίου, τὸ κενὸν τῆς ἀπ' εὐθείας μεταβάσεως ἀπὸ τὴν πρακτικὴν ἀριθμητικὴν εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

Εἰς τὰ ἑπόμενα τέσσαρα κεφάλαια διερχόμεθα τὴν ὕλην τῆς θεωρητικῆς ἀριθμητικῆς, διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν πρακτικῶν Λυκείων εἰς σύντομον ἐν τῷ συνόλῳ ἔκθεσιν, περισσότερον δὲ ἀναλυτικῶς τῶν κυρίως θεμάτων, μετ' ἀρκετῶν καὶ καταλλήλων ἀσκήσεων, περιλαμβάνοντες εἰς τὸ Ε΄ κεφάλαιον ἅπασαν τὴν ὑπὸ τοῦ νέου ἀναλυτικοῦ προγράμματος διαλαμβανομένην ὕλην, τῆς θεωρίας τῶν ἀπολύτων σφαλμάτων καὶ τῶν θεωρημάτων τῶν Fermat, Euler καὶ Wilson, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς ἐν τῇ Γαλλικῇ ἐκδόσεις Θεωρ. Ἀριθμητικῆς. Ἐὰν τὸ ἔργον τοῦτο συντελέσῃ, ἔστω καὶ κατ' ἐλάχιστον πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτο, θὰ ἦτο δι' ἡμᾶς ἡ καλλιτέρα ἀνταμοιβή.

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΕΥΘ. ΧΑΤΖΗΣ

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιον Α΄.

Κεφάλαιον Β΄

Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

Κεφάλαιον Γ΄

Κλάσματα

Κεφάλαιον Δ΄

Κεφάλαιον Ε΄

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

1) Ἰδιότητες ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

§ 1) Ἡ ἰσότης δύο ἀριθμῶν ἐκφράζεται διὰ τοῦ σημείου = καὶ τίθεται μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν καὶ ἀπαγγέλλεται ἴσον.

§ 2) Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν ὅλαι αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου π. χ. $4=4$. Αὕτη εἶναι ἰσότης καὶ ἀναγιγνώσκεται τέσσαρα ἴσον τέσσαρα. Εἶναι δὲ ἴσοι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, διότι ὅλαι αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς μονάδας τοῦ ἄλλου, ἤτοι αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς $4=1+1+1+1$ εὑρίσκουν ἀντιστοίχως μονάδας εἰς τὸν ἄλλον $4=1+1+1+1$. Ἤδη ἀντὶ νὰ ἔχωμεν ἀριθμούς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν γράμματα π. χ. $\alpha=\alpha$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸν **α** καλοῦμεν ***γενικὸν ἀριθμόν***. Ὥστε γενικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι τὰ γράμματα καὶ καλοῦνται γενικοί, διότι εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἀκέραιον ἢ κλασματικόν. Εἰς τὴν ἰσότητα διακρίνομεν, ὡς εἴδομεν, τὸ σημεῖον ἴσον (=) καὶ ἑκατέρωθεν δύο ἀριθμοὺς ἢ γράμματα. Τὸ ἔμπροσθεν τοῦ ἴσον καλεῖτοι πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος καὶ τὸ κατόπιν τοῦ ἴσον καλεῖται δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος καὶ οἱ δύο ὁμοῦ καλοῦνται ὅροι τῆς ἰσότητος.

§ 3) Εἰς τὰς ἰσότητας $5+3$(*)$=8$ καὶ $6+2=8$ παρατη·

(*) Ἀριθμὸς καλεῖται ἡ τὸ πλῆθος ὁρίζουσα ἔννοια. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὄχι μόνον ὡς ἄθροισμα μονάδων. ἀλλὰ καὶ ὡς ἄθροισμα διαφόρων ἄλλων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ἑνοῦντες τινὰς τῶν μονάδων του, ἔπειτα ἄλλας τινὰς κ. ο. κ. μέχρις ὅτου ληφθῶσι πᾶσαι, εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς ἐντελῶς γνωστός, ὅταν εἶναι γνωστοὶ οἱ συναποτελοῦντες αὐτὸν ἀριθμοί.

ροῦμεν, ὅτι τούτων τὰ πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 8, συνάγεται ὅθεν ὅτι καὶ μεταξύ των εἶναι ἴσα, γενικῶς ἐὰν $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\beta$, θὰ εἶναι $\alpha=\gamma$. Ἡ σχέσις αὕτη διατυποῦται: ***Τὰ πρὸς τρίτον ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα.*** Οἱ δὲ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστοῦν τὴν ἰσότητα $\alpha=\beta=\gamma$ τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***διπλῆν ἰσότητα*** Ἐὰν μία ἰσότης συνίσταται ἀπὸ τρία ἴσον λέγεται τριπλῆ π. χ. $\alpha=\beta=\gamma=\delta$, ἐὰν συνίσταται ἀπὸ τέσσαρα τετραπλῆ καὶ ἐὰν περιέχει πολλὰ καλεῖται πολλαπλῆ π. χ. $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\eta$ καὶ τότε, ὡς εὐνόητον, δύο ὁποιαδήποτε μέλη συνιστοῦν ἰσότητα. Εἰς τὴν ἀνωτέρω πολλαπλῆν εἶναι $\alpha=\varepsilon$, $\alpha=\eta$, $\beta=\delta$ κ. λ. π.

§ 4) Ἔστω ἡ ἰσότης $\alpha=\alpha$. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω τὸν 2, θὰ λάβωμεν νέαν ἰσότητα $\alpha+2=\alpha+2$ καὶ τοῦτο, διότι τόσον εἰς τὸ πρῶτον μέλος, ὅσον καὶ εἰς τό δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἐθέσαμεν δύο μονάδας, ἤτοι πάλιν τὰ δύο μέλη $\alpha+2$ καὶ $\alpha+2$ ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μονάδων· ἄρα εἶναι ἴσα. Ὅθεν προκύπτει ἡ ἰδιότης: ***Ὅταν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς προκύπτει νέα ἰσότης.*** Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἄθροισμα δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη

ἤτοι
$$\begin{array}{l} \alpha=\alpha \\ 2=2 \\ \hline \alpha+2=\alpha+2 \end{array}$$
καὶ

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐφαρμόζεται προκειμένου καὶ περὶ περισσοτέρων τῶν δύο ἰσοτήτων. Ἄρα: ***Ἐὰν προσθέσωμεν δύο ἢ καὶ περισσοτέρας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν νέαν ἰσότητα.***

§ 5) Ἔστω ἡ ἰσότης $\alpha=\alpha$. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω τὸν 2, θὰ λάβωμεν νέαν ἰσότητα $\alpha-2=\alpha-2$ καὶ τοῦτο, διότι τόσον ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος, ὅσον καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος ἀφαιρέσαμεν δύο μονάδας· ἤτοι πάλιν τὰ δύο μέλη $\alpha-2$ καὶ $\alpha-2$, ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μονάδων, ἄρα εἶναι ἴσα. Ὅθεν προκύπτει ἡ ἰδιότης: ***Ὅταν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν μιᾶς ἰσότητος ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς προκύπτει νέα ἰσότης.*** Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς διαφορὰν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη, ἤτοι

$$\begin{array}{c} \alpha=\alpha \\ 2=2 \\ \hline \alpha-2=\alpha-2 \end{array}$$

καὶ $\alpha-2=\alpha-2$. Ἄρα: ***Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν δύο ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν νέαν ἰσότητα.***

§ 6) Ἔστω ἡ ἰσότης $\alpha=\alpha$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω τόν 2, θὰ λάβωμεν νέαν ἰσότητα $\alpha\,.\,2=\alpha\,.\,2$ καὶ τοῦτο διότι ἐλάβομεν 2 φορὰς τὰς μονάδας ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, ἤτοι πάλιν τὰ δύο μέλη $\alpha\,.\,2$ καὶ $\alpha\,.\,2$ ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μονάδων, ἄρα εἶναι ἴσα. Ὅθεν προκύπτει ἡ ἰδιότης: ***Ὅταν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει νέα ἰσότης.*** Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς γινόμενον δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη, ἤτοι

$$\begin{array}{c} \alpha=\alpha \\ 2=2 \\ \hline \alpha\,.\,2=\alpha\,.\,2 \end{array}$$

καὶ $\alpha\,.\,2=\alpha\,.\,2$. Ἡ σχέσις αὕτη ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ περισσοτέρων τῶν δύο ἰσοτήτων. Ἄρα: ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ καὶ περισσοτέρας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν νέαν ἰσότητα.***

§ 7) Ἔστω ἡ ἰσότης $\alpha=\alpha$. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ 2, θὰ λάβωμεν νέαν ἰσότητα τὴν $\alpha:2=\alpha:2$. Ἡ ἐξήγησις δίδεται κατ' ἀνάλογον τρόπον τοῦ προηγουμένου, ὥστε ἡ ἰδιότης: ***Ὅταν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει νέα ἰσότης.*** Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν καὶ ὡς πηλίκον δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη, ἤτοι

$$\begin{array}{c} \alpha=\alpha \\ 2=2 \\ \hline \alpha:2=\alpha:2 \end{array}$$

καὶ $\alpha:2=\alpha:2$. Ἄρα: ***Τὰ πηλίκα ἴσων ἀριθμῶν δι' ἴσων εἶναι ἴσα.***

§ 8) Ἄνισοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν δὲν ἔχωσι τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων· τότε ὁ ἔχων περισσοτέρας μονάδας καλεῖται μεγαλύτερος, ὁ δ' ἄλλος μικρότερος.

§ 9) Ἵνα σημειώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $<$ οὕτως, ὥστε ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς νὰ τίθεται εἰς τὸ ἄνοιγμα π. χ. $9>5$.

§ 10) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀνισότητος δύο ἀριθμῶν γίνονται φανεραὶ αἱ ἑπόμεναι ἰδιότητες, αἱ ὁποῖαι ἀποδεικύονται κατὰ παρόμοιον τρόπον τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος: *1) Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν ἴσους, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ μένουν ὁμοίως ἄνισοι καὶ μάλιστα ἐκ τοῦ μεγαλυτέρου προκύπτει ὁ μεγαλύτερος·* π. χ. ἐκ τῆς ἀνισότητος $9>5$ λαμβάνομεν $11>7$ καὶ $6>2$.

2) *Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους, ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον εἰς τὸν μεγαλύτερον, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι καὶ μάλιστα ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μεγαλυτέρων προκύπτει ὁ μεγαλύτερος·* π. χ. ἐκ τῶν ἀνισοτήτων $9>5$ καὶ $11>10$ λαμβάνομεν $20>15$.

3) Τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι ὁμοίως ἀριθμοὶ ἄνισοι· π, χ. ἐκ τῆς ἀνισότητος $7>4$ λαμβάνομεν $7 \cdot 3>4 \cdot 3$ ἢ $21>12$.

4) Τὰ πηλίκα ἀνίσων ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁμοίως ἀριθμοὶ ἄνισοι· π.χ. εἰς τὴν ἀνισότητα $40>10$ λαμβάνομεν $40:5>10:5$ ἢ $8>2$.

2) Ἰδιότητες προσθέσεως.

§ 11) ***Θεώρημα*** καλεῖται μία πρότασις τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια καθίσταται φανερὰ δι' ἀποδείξεως. (Εἰς τὸ θεώρημα ὀφείλει νὰ δίδωνται στοιχεῖα ἱκανὰ πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων. Τὰ δεδομένα καλοῦμεν καὶ ***ὑπόθεσιν*** καὶ τὰ ζητούμενα καλοῦμεν ***συμπέρασμα***.

Ἀπόδειξις εἶναι, συλλογισμὸς ἢ σειρὰ συλλογισμῶν, ἐκ γνωστῶν προτάσεων ἢ δεδομένων τινῶν δι' ὧν πειθόμεθα πέρὶ τῆς ἀληθείας ἢ τοῦ ψεύδους μιᾶς προτάσεως.

Ἀξίωμα καλεῖται ἡ πρότασις τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά, ἤτοι ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως καὶ λογικῶς ἐξηγεῖται καὶ ἐμπειρικῶς π. χ. παντὸς εὐθυγράμμου τμήματος ὑπάρχει ἓν μέσον. Τὸ ὅτι ὑπάρχει ἓν μέσον ἐξηγεῖται λογικῶς μέν, διότι κάποιο σημεῖον, ἓν δὲ καὶ μόνον θὰ ἀπέχῃ ἴσον τῶν ἄκρων τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, ἐμπειρικῶς δέ, διότι ὅταν τὸ διπλώσωμεν θὰ ἴδωμεν ὅτι ἓν σημεῖον (τοῦ τσακίσματος) ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα.

§ 12) ***Πρόσθεσις*** εἶναι ἡ πρᾶξις εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ καὶ εὑρίσκεται ἄλλος, ὅστις περιέχει ὅλας τάς μονάδας τῶν δοθέντων. Ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς δύο πρώτους (τοῦτο κατωρθοῦται, ἐὰν εἰς τὰς μονάδας τοῦ πρώτου προσθέσωμεν ἀνὰ μίαν τάς μονάδας τοῦ δευτέρου) εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέσωμεν τὸν τρίτον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα τὸν τέταρτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν πάντας τοὺς προσθετέους π. χ. $4+3+7+6+2=7+7+6+2=14+6+2=20+2=22$ καὶ γενικῶς $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+\gamma+\delta=[(\alpha+\beta)+\gamma]+\delta=[\,[(\alpha+\beta)+\gamma]+\delta]$.

Σημείωσις. Εἰς τοὺς γενικούς ἀριθμοὺς δηλοῦμεν τὸ ἐξαγόμενον μιᾶς πράξεως, ὅταν κλείσωμεν αὐτοὺς εἰς μίαν παρένθεσιν π. χ. τὸ $(\alpha+\beta)$ δηλοῖ τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως $\alpha+\beta$ καὶ τὸ $[(\alpha+\beta)+\gamma]$ δηλοῖ τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως πρῶτον τοῦ $\alpha+\beta$ καὶ κατόπιν τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ μὲ τὸ γ.

§ 13) ***Νόμος ἀντιμεταθέσεως.***

τὸ 3 π.χ. εἶναι $3=1+1+1$

ὁμοίως $2=1+1$

» $5=1+1+1+1+1$ καὶ κατὰ (§ 4) θὰ εἶναι

$3+2+5=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ (1)

Ἤδη λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 3, 2 καὶ 5 κατ' ἄλλην σειρὰν ἤτοι $5=1+1+1+1+1$

$3=1+1+1$

$2=1+1$

καὶ $5+3+2=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ (2) Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) βλέπομεν, ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἶναι ἴσα ἄρα (§ 3) καὶ τὰ πρῶτα εἶναι ἴσα ἤτοι $3+2+5=5+3+2$, γενικῶς ἔχομεν τὴν ἰσότητα $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\gamma+\alpha+\delta+\beta$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν προσθετέων ἑνὸς ἀθροίσματος, χωρὶς τὸ ἄθροισμα νὰ μεταβληθῇ.***

§ 14) ***Μέθοδος συνθετική.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα α') $8+4+5+6$. Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι $8+4+5+6=12+5+6$ (1) (ὡς ἐκτελέσαντες μέρος τῆς πράξεώς μας) β'.) $5+6+4+3=6+3+5+4=9+5+4$ ἤτοι $5+6+4+3=9+5+4$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ ἰδιότης: ***Εἰς ἄθροισμα δυ-***

νάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν προσθετέους τινὰς διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ γενικῶς α+β+γ+δ=α+Κ+δ, ἔνθα Κ=β+γ.

§ 15) ***Μέθοδος ἀναλυτική.*** Ἔστω τὸ ἄθροισμα 4+7+6. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον τινά, ἔστω τὸ 7 μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἢ καὶ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ἔστω 5+2, θὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος 4+7+6 τὸ ἄθροισμα 4+5+2+6, ἀλλὰ τὸ δεύτερον ἄθροισμα 4+5+2+6 ἰσοῦται μὲ τὸ πρῶτον 4+7+6 δυνάμει τῆς συνθετικῆς μεθόδου. Ἄρα εἶναι: 4+7+6=4+5+2+6. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Εἰς ἄθροισμα δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον τινὰ δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ὡς ἄθροισμα.***

§ 16) ***Πῶς προστίθεται ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα (8+3+4)+2. Δυνάμει τῶν, ἀναλυτικῆς καὶ συνθετικῆς λαμβάνομεν (8+3+4)+2=8+3+4+2=8+3+(4+2). Ἤτοι (8+3+4)+2=8+3+(4+2). Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς προκύπτει ἡ ἰδιότης: ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα (οἱονδήποτε) τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.***

§ 17) ***Τὸ μηδὲν ὡς προσθετέος ἀριθμός.*** Διότι τὸ 0 ὡς ἀριθμὸς σημαίνει ἔλλειψιν μονάδων εἶναι π. χ. 3+0+4=3+4=7, 8+0=8, 0+0=0. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Ὁ μηδὲν ὡς προσθετέος ἀριθμὸς οὐδαμῶς μεταβάλλει τὸ ἄθροισμα.***

Ἀσκήσεις

1) Ἐὰν ὁ Πέτρος εἶχε 5 πέννας ὀλιγώτερον, θὰ εἶχε διπλασίας τοῦ Παύλου ὁ ὁποῖος ἔχει 20. Πόσας πέννας ἔχει ὁ Πέτρος;

2) Φιλάνθρωπός τις ἐδώρισεν δραχ. 60760 πρὸς ἵδρυσιν σχολείου, δραχ. 53240 πρὸς διανομὴν εἰς ἀπόρους παῖδας καὶ δραχ. 28920 πρὸς κατασκευὴν ὑδραγωγείου. Ἔμειναν δὲ ἀκόμη ἀδιάθετοι δραχ. 269200. Πόσον ἦτο τὸ δωρηθὲν ποσόν;

3) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (6+10+17)+(5+15+7)=40+20.

4) Νὰ μετασχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα 4+14+26+16 εἰς ἄλλο ἄθροισμα, ἴσον μὲ αὐτὸ καὶ νά ἔχῃ δύο μόνον προσθετέους, οἱ ὁποῖοι νὰ λήγουν καὶ οἱ δύο εἰς μηδέν.

5) Ἀπὸ τὸ δοθὲν ἄθροισμα $14+24+6+15$ νὰ σχηματισθῇ ἄλλο ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸ δοθὲν καὶ νὰ ἔχῃ δύο προσθετέους διψηφίους ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας νὰ λήγῃ εἰς μηδέν.

6) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(46+10+24)+(26+14)=60+60$.

7) Νὰ δικαιολογηθῇ ὁ κανὼν τῆς προσθέσεως εἰς τὸ ἄθροισμα $543+648+35$.

3) Ἰδιότητες ἀφαιρέσεως

§ 18) ***Ἀφαίρεσις*** εἶναι ἡ πρᾶξις εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον μᾶς δίδει τὸν πρῶτον, ὁ πρῶτος καλεῖται μειωτέος, ὁ δεύτερος ἀφαιρετέος καὶ ὁ τρίτος διαφορά. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι μία παῦλα (—) καὶ ἀπαγγέλλεται πλήν, π. χ. $14-9=5$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ἡ σχέσις $14=9+5$ καὶ γενικῶς ἐπὶ $\alpha-\beta=\gamma$ εἶναι $\alpha=\beta+\gamma$ (ἄλλος ὁρισμός. Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντα ἀριθμόν, ἐλαττοῦμεν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας περιέχει δεύτερος δοθεὶς ἀριθμός).

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν μειωτέον ἡ διαφορὰ εἶναι μηδὲν π. χ. $6-6=0$, ὅθεν $6=6+0$ καὶ $6-0=6$. Ἐνδεικτικὸν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις τοῦ μηδενὸς ἀπὸ ἀριθμοῦ οὐδόλως μεταβάλλει αὐτόν.

§ 19) ***Πῶς ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπὸ ἄθροισμα.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $(7+4+3)-5$. Ἐὰν τὸ 5 ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ 7 θὰ λάβωμεν $(7-5)+4+3$ ἢ $2+4+3$. Τοῦτο τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ διαφορά, διότι, ἐὰν εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον 5, θὰ λάβωμεν τὸν μειωτέον, ἤτοι $(2+4+3)+5=7+4+3$ (§ 16), γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma$.

(***Σημείωσις*** : διὰ νὰ ἔχῃ ἐφαρμογὴν ἡ ἰδιότης αὕτη ἀπαραιτήτως πρέπει εἷς τοὐλάχιστον τῶν προσθετέων, τοῦ μειωτέου, νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ ἀφαιρετέου ἀριθμοῦ, εἰς τό γενικὸν ἀνωτέρω, παράδειγμα δέον νὰ εἶναι $\beta>\delta$). Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης : ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἐξ ἑνὸς τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.***

Πόρισμα : Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν προσθετέον τινὰ ἀθροίσματος ἀρκεῖ νὰ διαγράψωμεν αὐτὸν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος.

§ 20) ***Πῶς προστίθενται αἱ διαφοραί.*** Ἔστωσαν αἱ διαφοραὶ 8—5 καὶ 7—3. Τούτων αἱ διαφοραὶ εἶναι

$\left.\begin{array}{r} 8-5=3 \\ \text{καὶ} \quad 7-3=4 \end{array}\right\}$ (1) ἐκ τούτων προκύπτουσι: $\begin{array}{r} 8=5+3 \\ \text{καὶ}\ 7=3+4 \end{array}$ (2)

Τὰς ἰσότητας τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) προσθέτομεν κατὰ μέλη, ὁπότε λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $(8-5)+(7-3)=3+4$ (3) καὶ $(8+7)=(5+3)+(3+4)$ (4]. Τὴν σχέσιν (4) σημειοῦντες ὡς διαφορὰν λαμβάνομεν τὴν ἑπομένην σχέσιν $(8+7)-(5+3)=3+4$ (5). Συγκρίνοντες ἤδη τὰς σχέσεις (3) καὶ (5) παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τούτων εἶναι ἴσα, ἄρα καὶ τὰ πρῶτα εἶναι ἴσα· ἑπομένως $(8-5)+(7-3)=(8+7)-(5+3)$ (6). Τὴν σχέσιν (6) λαμβάνομεν προκειμένου καὶ περὶ προσθέσεως περισσοτέρων τῶν δύο διαφορῶν (ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτή)· γενικῶς $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)+(\varepsilon-\kappa)=(\alpha+\gamma+\varepsilon)-(\beta+\delta+\kappa)$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν διαφοράς, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν μειωτέων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρετέων.***

Πόρισμα: Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς διαφορὰν ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς.

§ 21) ***Πῶς ἀφαιρεῖται ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $24-(5+6+7)$. Ἐὰν πρὸς στιγμὴν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου. τό ὁποῖον εἶναι 18, ἔχομεν $24-18=6$ ἢ $24-(5+6+7)=6$ (1) καὶ δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ εἶναι $24=(5+6+7)+6$ ἢ $24=5+6+7+6$ (2) (§ 15). Εἰς τὴν σχέσιν (2) ἐνεργοῦντες ἀλλεπαλλήλους ἀφαιρέσεις μὲ ἀφαιρετέους τοὺς 5, 6, 7 λαμβάνομεν $[(24-5)-6]-7=6$ (3). (εἰς τὸ β'. μέλος ἐφσρμόσαμεν τὸ πόρισμα § 19). Ἤδη ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (3) προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν πρώτων μελῶν αὐτῶν ἤτοι $24-(5+6+7)=[(24-5)-6]-7$, γενικῶς $\alpha-(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=[[(\alpha-\beta)-\gamma]-\delta]-\varepsilon$. Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἕνα τῶν προσθετέων, κατόπιν ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου***

ἄλλον κ.ο.κ. ἕως ὅτου ληφθοῦν πάντες οἱ προσθετέοι.

§ 22) ***Ἀλλάσσει ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἰς ἀμφοτέρους (μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον) προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν;*** Ἔστω ἡ ἀφαίρεσις $\alpha-\beta$ τῆς ὁποίας ἡ διαφορά, ἔστω δ, ἤτοι $\alpha-\beta=\delta$ (1). Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι $\alpha=\beta+\delta$ (2). Εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προσθέτομεν, τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω γ ὅτε λαμβάνομεν $\alpha+\gamma=(\beta+\delta)+\gamma$ ἢ $\alpha+\gamma=(\beta+\gamma)+\delta$ (3) (§ 16). Ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (3) ἀφαιροῦμεν τὸ $(\beta+\gamma)$ ὁπότε ἔχομεν $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\delta$ (4).(Εἰς τὸ β΄. μέλος ἐφαρμόσαμεν τὸ πόρισμα § 19). Ἤδη ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (4) προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν πρώτων μελῶν αὐτῶν ἤτοι $\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης. ***Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν εἰς ἀμφοτέρους (μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον) προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

§ 23) ***Πῶς ἀφαιρεῖται διαφορὰ ἀπὸ ἀριθμόν.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $\alpha-(\beta-\gamma)$ ἔνθα $\beta>\gamma$, καὶ $(\beta-\gamma)<\alpha$. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ διαφορὰ εἶναι δ. Τότε $\alpha-(\beta-\gamma)=\delta$ (1) καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως ἡ (1) γίνεται $\alpha=(\beta-\gamma)+\delta$ (2) καὶ ἡ (2) κατὰ τὸ πόρισμα τῆς § 20 γίνεται $\alpha=(\beta+\delta)-\gamma$ (3). Ἤδη εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) προσθέτομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (τὸν. γ), ὁπότε τὸ μὲν πρῶτον αὐτῆς μέλος θὰ γίνῃ $(\alpha+\gamma)$ τὸ δὲ δεύτερον μέλος αὐτῆς θὰ μείνῃ$(\beta+\delta)$. «Σημείωσις §18, $\gamma-\gamma=0$» ἤτοι $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ (4) ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $(\alpha+\gamma)-\beta=\delta$ (5). Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (1) καὶ (5) λαμβάνομεν $\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Διαφορὰ ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀριθμόν, ὅταν εἰς αὐτὸν προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρεθῇ κατόπιν ὁ μειωτέος τῆς διαφορᾶς.***

Ἀσκήσεις

8) Ποῖον ἀριθμὸν ἔχει τις κατὰ νοῦν ἂν αὐξήσῃ αὐτὸν κατὰ 24 καὶ εὕρῃ τὸν 42;

9) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 152. Ἐὰν ὁ μεγαλύτερος εἶναι 345. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ μικρότερος;

10) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις $45-(50-18-15+4)$, $35-20-(12-10)+3$.

11) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $408-48=400-40$.

12) Πῶς ἀφαιρεῖται ἀριθμὸς ἀπὸ διαφορὰν χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτήν.

13) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha-(\beta+\gamma+\delta)=[(\alpha-\beta)-\gamma]-\delta$.

14) Νὰ μετασχηματισθῇ ἡ παράστασις $\alpha+(\beta+\gamma)-(\eta-\theta)$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον ἄνευ παρενθέσεων.

15) διατὶ κάμνομεν τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν;

16) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 44· ἐὰν αὐξηθῇ ἑκάτερος τούτων κατὰ 22, ὁ πρῶτος γίνεται διπλάσιος τοῦ δευτέρου. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοὶ οὗτοι;

4) Ἰδιότητες πολλαπλασιασμοῦ

§ 24) ***Πολλαπλασιασμὸς*** εἶναι ἡ πρᾶξις εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄθροισμα τόσων προσθετέων ἴσων τῷ πρώτῳ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος. Ὁ πρῶτος καλεῖται πολλαπλασιαστέος, ὁ δεύτερος καλεῖται πολλαπλασιαστής, ἀμφότεροι καλοῦνται παράγοντες καὶ τὸ ἐξαγόμενον καλεῖται γινόμενον. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι μία τελεία ἢ τὸ σύμβολον $\times$, τίθεται μεταξὺ τῶν παραγόντων καὶ ἀπαγγέλεται *ἐπὶ* π. χ. $4.3=4+4+4=12$ ἢ $4\times3=4+4+4=12$. Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἀριθμῶν εἶναι μετασχηματισμὸς ἀθροίσματος ἴσων προσθετέων καὶ ὁ εἷς τούτων εἶναι εἷς τῶν ἴσων προσθετέων, ὁ δὲ ἕτερος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις διὰ τῶν μονάδων αὐτοῦ δεικνύει ποσάκις εὑρίσκεται ὁ προσθετέος εἰς τὸ ἄθροισμα.

§ 25) ***Ἡ θέσις τῶν παραγόντων.*** Ἔστω τὸ γενόμενον 2.3. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ κατὰ τὴν § 24 σημαίνει ὅτι ὁ 2 δέον νὰ ἐπαναληφθῇ τρεῖς φοράς. Ἐὰν τὰς μονάδας παραστήσωμεν διὰ στιγμῶν θὰ εἶναι 2= . . ἄρα 2.3= : : : Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν τρεῖς σειρὰς ἐκ δύο στιγμῶν ἑκάστην, ἢ δύο στήλας ἐκ τριῶν στιγμῶν ἤτοι $2.3=3.2$ τὸ σύνολον 6 στιγμὰς καὶ γενικῶς $\alpha.\beta=\beta.\alpha$ Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης : ***Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλε-***

ται, ὅταν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων.

Πόρισμα α΄.) Τὸ Ο ὡς παράγων. Ἔστω τὸ παράδειγμα $6 \cdot 0 = 0 \cdot 6 = 0+0+0+0+0+0 = 0$ ἕπεται ὅτι: ***Ὅταν εἷς τῶν παραγόντων δύο ἀριθμῶν εἶναι Ο τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ Ο*** γενικῶς $\alpha \cdot 0 = 0$.

Πόρισμα β΄.) Ἡ μονὰς ὡς παράγων. Ἔστω τὸ παράδειγμα $4 \cdot 1$, διότι $4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 1+1+1+1 = 4$ ἕπεται ὅτι: ***Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα ἢ ὅτι ἡ μονὰς ὡς παράγων παραλείπεται.***

§ 26) *Πῶς πολλαπλασιάζεται ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν.* Ἔστω τὸ παράδειγμα $(\alpha+\beta+\gamma) \cdot 3$, τὸ $(\alpha+\beta+\gamma) \cdot 3 = (\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma) = \alpha+\beta+\gamma+\alpha+\beta+\gamma+\alpha+\beta+\gamma = \alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\gamma = \alpha \cdot 3+\beta \cdot 3+\gamma \cdot 3$ ἤτοι $(\alpha+\beta+\gamma) \cdot 3 = \alpha.3+\beta.3+\gamma.3$ (§ 3) καὶ γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma+\delta).\nu = \alpha \cdot \nu+\beta \cdot \nu+\gamma \cdot \nu+\delta \cdot \nu$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πάντες οἱ προσθετέοι, ἕνας ἕκαστος, πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ κατόπιν προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.***

§ 27) ***Πῶς πολλαπλασιάζεται ἀριθμὸς ἐπὶ ἄθροισμα.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $\beta \cdot (\alpha+\gamma)$, διότι $\beta \cdot (\alpha+\gamma) = (\alpha+\gamma) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta+\gamma \cdot \beta$ (§ 25 καὶ 26) εἶναι $\beta \cdot (\alpha+\gamma) = \alpha \cdot \beta+\gamma \cdot \beta$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν οὗτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕναν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος καὶ κατόπιν προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.***

§ 28) ***Πῶς πολλαπλασιάζεται διαφορὰ ἐπὶ ἀριθμόν*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $(\alpha-\beta) \cdot 2$, διότι $(\alpha-\beta) \cdot 2 = (\alpha-\beta)+(\alpha-\beta) = (\alpha+\alpha)-(\beta+\beta) = \alpha.2-\beta \cdot 2$ (§24, 20,) εἶναι $(\alpha-\beta) \cdot 2 = \alpha \cdot 2-\beta \cdot 2$ καὶ γενικῶς $(\alpha-\beta) \cdot \nu = \alpha.\nu-\beta \cdot \nu$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μειωτέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον.***

Πόρισμα $\alpha \cdot (\beta-\gamma) = \alpha \cdot \beta-\alpha.\gamma$, διότι $\alpha.(\beta-\gamma) = (\beta-\gamma) \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta-\alpha \cdot \gamma$. Νὰ ἐξαχθῇ ἰδιότης.

§ 29) ***Πῶς πολλαπλασιάζονται δύο ἀθροίσματα.*** Ἔστω τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta+\gamma) \cdot (\delta+\varepsilon)$. Ἐὰν πρὸς στιγμὴν θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον ἄθροισμα ὡς ἕνα ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν (§ 27) $(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)=(\alpha+\beta+\gamma).\delta+(\alpha+\beta+\gamma).\varepsilon$ (1) καὶ κατὰ § 26 τὸ β' μέλος τῆς ἰσότητος (1) εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma).\delta+(\alpha+\beta+\gamma).\varepsilon=\alpha.\delta+\beta.\delta+\gamma.\delta+\alpha.\varepsilon+\beta.\varepsilon+\gamma.\varepsilon$ (2). Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα· ἄρα καὶ τὰ ἄλλα εἶναι ἴσα ἤτοι $(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)=\alpha.\delta+\beta.\delta+\gamma.\delta+\alpha.\varepsilon+\beta.\varepsilon+\gamma.\varepsilon$, ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους (ἕνα ἕκαστον) τοῦ ἑνὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἕναν ἕκαστον προσθετέον τηῦ ἄλλου ἀθροίσματος καὶ κατόπιν νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα.***

§ 30) ***Γινόμενον πολλῶν παραγόντων*** λέγομεν, ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν περισσοτέρους ἀπὸ δύο ἀριθμούς. Ἐπιτυγχάνομεν δὲ τοῦτο, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου· π. χ. $2.3.4.6.5=6.4.6.5=24.6.5=144.5=720$ καὶ γενικῶς $\alpha.\beta.\gamma.\delta=[[(\alpha.\beta).\gamma].\delta]$.

§ 31) ***Ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.*** Ἔστω τὸ γινόμενον $2.3.4.5$. Πρὸς εὕρεσιν τούτου κατὰ τὴν § 30 πρῶτον εὑρίσκομεν τὸ 2.3 ἀλλὰ τοῦτο, ὡς γνωστόν, ἰσοῦται μὲ τὸ 3.2 ἄρα $2.3.4.5=3.2.4.5$ (Α). ***Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τοῦ α' καὶ β' παράγοντος ἑνὸς γινομένου.*** Ἐὰν ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν $2.3.4.5$, περιορισθῶμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν 2.3 (ἐκτέλεσις μέρος τῆς πράξεώς μας) θὰ ἔχωμεν $2.3.4.5=6.4.5$ (1). Τὴν (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ οὕτω $2.3.4.5=4.6.5$ (2) (ἐφαρμογὴ τῆς ἰδιότητος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρω (Α) τῆς § 31). Εἰς τὴν (2) ἀντικαθιστῶντες τὸ 6 διὰ τοῦ ἴσου του 2.3 λαμβάνομεν $2.3.4.5=4.2.3.5$ [ἐξ ἧς εἶναι $2.3.4.5=2.4.3.5$ (Β) [ἐφαρμογὴ ὁμοίως τῆς ἀμέσως ἀνωτέρω ἰδιότητος (Α) τῆς § 31]. Ἐκ τῆς (Β) ἕπεται ὅτι: ***Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τοῦ β' καὶ γ' παράγοντος ἑνὸς γινομένου***
Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραδείγματος $2.3.4.5$, ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν 2.3 λαμβάνομεν $6.4.5$

καὶ κατὰ τὴν ἀμέσως ἀνωτέρω (Β) ἔχομεν 6 . 4 . 5=6 , 5 . 4. Εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὸ 6 διὰ τοῦ 2 . 3, ὁπότε λαμβάνομεν, 2 . 3 . 4 . 5=2 . 3 . 5 . 4 (Γ) ἤτοι ***Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τοῦ γ' καὶ δ' παράγοντος ἑνὸς γινομένου.*** Ἐκ τῶν (Α), (Β), (Γ) ἀνωτέρω σχέσεων καθίσταται φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν οἱανδήποτε θέσιν εἰς ἕνα παράγοντα, εἰς ἕνα γινόμενον, ἐφ' ὅσον ἔχομεν τὴν εὐχέρειαν ν' ἀνταλλάξωμεν αὐτὸν μὲ τὸν προηγούμενόν του ἢ μὲ τὸν ἑπόμενόν του π.χ. εἰς τὸ γινόμενον α . β . γ . δ . ε, θέλομεν νὰ μεταθέσωμεν τὸν δ εἰς τὴν πρώτην θέσιν καὶ τὸν β εἰς τὴν τετάρτην θέσιν. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι α . β . γ . δ . ε=α . β . δ . γ. ε=α . δ . β . γ . ε =δ . α . β . γ . ε=δ . α . γ . β . ε κ.ο.κ. Ὅθεν προκύπτει ἡ ἰδιότης: ***Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλαγῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων.***

§ 32) ***Ἀντικατάστασις παραγόντων τινῶν γινομένου διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*** Ἔστωσαν παράδειγμα 1ον) α . β . γ . δ. Κατὰ § 30 εἶναι α . β . γ . δ=(α . β) . γ . δ ἤτοι γινόμενον ἐκ τεσσάρων παραγόντων (α' μέλους), εἶναι ἴσον μὲ γινόμενον τριῶν παραγόντων β' μέλους) (ἐκτέλεσις μέρους τῆς πράξεώς μας. Παράδειγμα 2ον) α . β . γ . δ. Δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων τῆς § 30, 31 ἔχομεν α . β . γ . δ =β . δ . α . γ=Κ . α.γ (ἔνθα Κ=β . δ) ἤτοι α . β . γ . δ=α . γ . Κ. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Εἰς ἕνα γινόμενον δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.***

§ 33) ***Ἀντικατάστασις παράγοντος δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα α . Κ . β . γ εἰς τὸ ὁποῖον ὁ παράγων Κ=ρ . τ. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν α . Κ . β . γ=α . ρ . τ . β . γ, διότι δυνάμει τῆς προηγουμένης § 32 εἶναι α . ρ . τ . β . γ=α . Κ . β . γ ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Εἰς ἕνα γινόμενον δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν παράγοντα τινὰ γινομένου δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον.***

§ 34) ***Πῶς πολλαπλασιάζεται γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα (α . β . γ) . ρ. Κατὰ § 33, 32 εἶναι (α . β . γ).ρ=α.β . γ . ρ=α .β . (γ . ρ) ἤτοι (α . β . γ) . ρ=α . β . (γ . ρ) ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω-***

μεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τοὺς δὲ ἄλλους νὰ ἀφήσωμεν ὡς ἔχουσι.

§ 35) *Γινόμενον γινομένων.* Ἔστω τὸ παράδειγμα (α . β . γ). (δ . ε). Κατὰ § 33 εἶναι (α . β . γ) . (δ . ε)=α . β . γ . δ . ε (ἤτοι ἀντικατάστασις τοῦ α΄. παράγοντος διὰ τριῶν ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον, ὁμοίως τοῦ β΄. δι᾽ ἄλλων δύο ἐχόντων αὐτὸν ὡς γινόμενον). Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης *Γινόμενον γινομένων ἰσοῦται μὲ γινόμενον τὸ ὁποῖον περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων.*

Σημείωσις. Αἱ προτάσεις τῶν πορισμάτων τῆς § 25 ἤτοι 1) Τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ 0, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 0 καὶ 2) Ἡ μονὰς ὡς παράγων παραλλείπεται, ἔχουσι ἐπέκτασιν καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων. διότι πᾶν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δύναται νὰ περιορισθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις

17) Πῶς μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐὰν προστεθῇ μία μονὰς εἰς ἕνα ἐκ τούτων;

18) Πῶς μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἐὰν ἀπὸ τὸν ἕναν ἀφαιρεθῇ μία μονάς;

19) Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου α . β, τὸν 5, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον αὐξάνει κατὰ 5 . (α+β+5).

20) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 3 . 14 . 33=1400—14.

21) Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ γινόμενον 12 . 27, ἂν ὁ πρῶτος παράγων τούτου αὐξηθῇ κατὰ 5 καὶ ὁ δεύτερος κατὰ 8;

22) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα 3765 . 999 καὶ 4538 . 1001 χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις.

Ἰδιότητες διαιρέσεως.

§ 36) Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις εἰς τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον μᾶς δίδει τὸν πρῶτον, ὁ πρῶτος καλεῖται διαιρετέος, ὁ δεύτερος διαιρέτης καὶ ὁ τρίτος πηλίκον. Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ διὰ (:) καὶ τίθεται μεταξὺ τῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου.

Τὴν διαίρεσιν τὴν διακρίνομεν εἰς τελείαν καὶ ἀτελῆ καὶ «Τ ε λ ε ί α» μὲν καλεῖται μία διαίρεσις ὅταν ὁ διαιρετέος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου π. χ. $8 : 2 = 4$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν τὴν σχέσιν $8 = 2 . 4$ ἤτοι ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον. «Ἀ τ ε λ ή ς» δὲ καλεῖται ἡ διαίρεσις ὅταν ὁ διαιρετέος δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου ἀλλὰ ἀφίνει ὑπόλοιπον π. χ. $23 : 5 = 4$ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον 3, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν $23 = 4 . 5 + 3$ ἤτοι ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.

§ 37) ***Τὸ Ο εἰς τὴν διαίρεσιν*** : ***α) Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι Ο.*** Ἔστω τὸ παράδειγα $0 : α$ [ἔνθα α διάφορος τοῦ μηδενὸς ($α \neq 0$)]. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἔστω π. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως εἶναι $0 = α . π$, διὰ νὰ ἀληθεύῃ, ὅμως ἡ σχέσις αὕτη ἀπαραιτήτως ὁ εἷς τῶν δύο παραγόντων $α . π$ δέον νὰ εἶναι 0, διότι ὅμως εἶναι $α \neq 0$ ἔπεται ὅτι $π = 0$. Ὅθεν ἡ ἰδιότης : ***Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μηδὲν καὶ ὁ διαιρέτης διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ πηλίκον εἶναι πάντοτε μηδὲν (διαίρεσις δυνατή).***

β΄) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι Ο. Ἔστω τὸ παράδειγμα $α : 0$, ἔνθα $α \neq 0$. Τὸ πηλίκον ἔστω π. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως εἶναι $α = 0 . π$. Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δὲν ἀληθεύει, διότι ἐνῷ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς εἶναι μηδέν. Ὅθεν ἔπεται ἡ ἰδιότης : ***Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ ὁ διαιρέτης μηδέν, τότε ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.***

γ΄) Ὅταν ἀμφότεροι (διαιρετέος καὶ διαιρέτης) εἶναι Ο. Ἔστω τὸ παράγειγμα $0 : 0$, ἧς τὸ πηλίκον ἔστω π. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι $0 = 0 . π$. Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι πάντοτε ἀληθής, διότι οἷος δήποτε ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 μηδενίζεται. Ὅθεν ἡ ἰδιότης : ***Ὅταν διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶναι μηδέν, ἡ διαίρεσις εἶναι ἀόριστος (ὡς πη-***

λίκον δύναται νὰ ληφθῇ οἷος δήποτε ἀριθμός).

§ 38) ***Πῶς διαιρεῖται ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ.*** Ἔστω τὸ παράδειγα (8+6+10) : 2 (εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐλήφθησαν οἱ προσθετέοι πάντες ἀκριβῶς διαιρούμενοι διὰ τοῦ διαιρέτου). Ἐὰν διαιρέσωμεν ἕνα ἕκαστον τῶν προσθετέων διὰ τοῦ διαιρέτου προκύπτει πηλίκον 4+3+5. Τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, παρατηροῦμεν ὅτι, μᾶς δίδει γινόμενον ἴσον τῷ διαιρετέῳ, ἤτοι (4+3+5) . 2=8+6+10, ἑπομένως συνάγεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα 4+3+5 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους (ἕνα ἕκαστον) τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ προκύπτοντα μερικὰ πηλίκα.***

§ 39) ***Πῶς διαιρεῖται διαφορὰ δι' ἀριθμοῦ.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα (8--6) : 2. (ἐνταῦθα ἐλήφθησαν οἱ ὅροι τῆς διαφορᾶς διαιρούμενοι ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου). Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ διαιρέτου λαμβάνονεν τὴν διαφορὰν (4—3). Ἡ διαφορὰ αὕτη πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, παρατηροῦμεν ὅτι μᾶς δίδει γινόμενον ἴσον τῷ διαιρετέῳ ἤτοι (4—3) . 2=8—6, ἑπομένως συνάγεται, ὅτι ἡ διαφορὰ (4—3) εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης : ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διαφοράν δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸν ἀφαιρετέον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν δεύτερον.***

§ 40) ***Πῶς διαιρεῖται γινόμενον δι' ἀριθμοῦ.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα (7 . 8 . 5 . 3) : 4 (ἐλήφθη εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διά τοῦ διαιρέτου). Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν διαιρούμενον ἀκριβῶς παράγοντα διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ τοὺς ἄλλους ἀφήσωμεν ὡς ἔχουσι λαμβάνομεν τὸ γινόμενον 7 . 2 . 5 . 3. Τὸ γινόμενον τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην παρατηροῦμεν ὅτι μᾶς δίδει γινόμενον ἴσον τῷ διαιρετέῳ ἤτοι (7 . 2 . 5 . 3) . 4=7 . 8 . 5 . 3 (§ 34). Ἑπομένως συνάγεται ὅτι τὸ γινόμενον 7 . 2 . 5 . 3 εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης : ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινό-***

μενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, τοὺς δὲ λοιποὺς ν' ἀφήσωμεν ὡς ἔχουσι

Πόρισμα. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἢ καὶ διὰ περισσοτέρων, ἀρκεῖ νὰ διαγράψωμεν αὐτὸν ἢ αὐτούς.

§ 41) ***Πῶς διαιρεῖται ἀριθμὸς διὰ γινομένου.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα 120: (2 . 3 . 4). (ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος ἐλήφθη ἀκριβῶς διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου διαιρέτου). Πρὸς στιγμὴν εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον 2 . 3 . 4=24, ὁπότε ἔχομεν τὴν σχέσιν 120 : 24=5, ἢ 120 : (2 . 3 . 4)=5 (1) ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα 120=(2 . 3 . 4) . 5 (§36) ἢ 120=2 . 3 . 4 . 5 (2) (§ 33), Τῆς ἰσότητος αὐτῆς (2) διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ 2, ὅτε λαμβάνομεν 120: 2= (2.3.4 5) : 2 ἢ 120 : 2=3.4 5 (3) (πόρισμα § 40). Τῆς νέας αὐτῆς ἰσότητος (3) διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ 3 ὅτε λαμβάνομεν (120 : 2) : 3=4 . 5 (4). Ὁμοίως διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) διὰ 4 λαμβάνομεν τὴν σχέσιν [(120 : 2) : 3] : 4=5, (5). Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (1) καὶ (5) ἔχομεν 120 : (2 . 3 . 4)=[(120 : 2) : 3] : 4, γενικῶς α : (β . γ . δ . ε)=[[(α : β) : γ] : δ] : ε. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Διὰ νά διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, κατόπιν τὸ προκῦπτον πηλίκον νὰ διαιρέσωμεν δι' ἄλλου παράγοντος κ.ο.κ. ἕως ὅτου ληφθῶσιν πάντες οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου ὡς διαιρέται.***

§ 42) ***Τί παρατηρεῖται ὅταν πολλαπλασιάζηται διαιρετέος καὶ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως ἐπὶ τόν αὐτὸν ἀριθμὸν*** Α'.) ***Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα α : β καὶ πηλίκον ἔστω π, ἄρα α : β=π (1) Κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι α=β . π καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω γ, λαμβάνομεν α . γ=(β.π).γ ἢ α.γ= (β . γ) . π (ἐφαρμογὴ εἰς β'. μέλος τῆς § 34) ἐξ ἧς διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ τοῦ γινομένου β . γ ἔχομεν (α . γ) : (β . γ)=π(2). Συγκρίνοντες ἤδη τὰς σχεσεις (1) καὶ (2) ἔχομεν α : β=(α . γ) : (β . γ). Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης : ***Τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως δὲν ἀλλάσσει ὅταν***

πολλαπλασιασθῶσι διαιρετέος καὶ διαιρέτης αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Β'.) *Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής.* Ἔστω τὸ παράδειγμα τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως α: β τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον, ἔστω π καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἔστω υ. Κατὰ τὸν ὁρισμόν εἶναι $\alpha=(\beta\,.\,\pi)+\upsilon$ (1) τῆς ἰσότητος αὐτῆς (1) πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἔστω γ, ὁπότε λαμβάνομεν $\alpha.\,\gamma=[(\beta\,.\,\pi)+\upsilon]\,.\,\gamma$ ἢ $\alpha\,.\,\gamma=(\beta\,.\,\pi)\,.\,\gamma+\upsilon\,.\,\gamma$ (εἰς τὸ β'. μέλος ἐφαρμ. § 26) καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν $\alpha\,.\,\gamma=(\beta\,.\,\gamma)\,.\,\pi+\upsilon\,.\,\gamma$ (2) (εἰς τὸ β'. μέλος ἐφαρμογὴ § 34) Ἡ ἰσότης ὅμως (2) μᾶς δεικνύει ὅτι τὸ $\beta\,.\,\gamma$ χωρεῖ π φορὰς εἰς τὸ $\alpha\,.\,\gamma$ καὶ ἀφίνει ὑπόλοιπον $\upsilon\,.\,\gamma$, διότι ἐφ' ὅσον εἶναι $\upsilon<\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\upsilon\,.\,\gamma<\beta\,.\,\gamma$. Ἕπεται ὅθεν ἡ ἰδιότης: ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον παραμένει τὸ αὐτό,*** τὸ ***δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

§ 43) ***Χρήσιμοι μετασχηματισμοί.*** 1ον) Εἰς τὴν § 26 ἔχομεν τὴν σχέσιν $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\,.\,\nu=\alpha\,.\,\nu+\beta\,.\,\nu+\gamma\,.\,\nu+\delta\,.\,\nu$ ἢ $\alpha\,.\,\nu+\beta\,.\,\nu+\gamma\,.\,\nu+\delta\,.\,\nu=\nu\,.\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$. Εἰς τὴν ἰσότητα ὅμως αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα, ἔχον κοινὸν παράγοντα εἰς τοὺς προσθετέους ἰσοῦται μὲ τὸ δεύτερον μέλος τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι ὁ κοινὸς οὗτος παράγων, ὁ ἕτερος δὲ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πηλίκων, τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ κοινοῦ τούτου παράγοντος. Ἡ ἐργασία αὕτη τῆς μετατροπῆς ἑνὸς ἀθροίσματος, ὅταν εἰς τοὺς προσθετέους αὐτοῦ ὑπάρχει ***κοινὸς παράγων***, εἰς γινόμενον δύο παραγόντων καλεῖται μετασχηματισμὸς ἀθροίσματος εἰς γινόμενον.

2ον) Εἰς τὴν § 28 Ἔχομεν τὴν σχέσιν $(\alpha-\beta)\,.\,\nu=\alpha\,.\,\nu-\beta\,.\,\nu$ ἢ $\alpha\,.\,\nu-\beta\,.\,\nu=\nu.(\alpha-\beta)$. Εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς τὸ ὁποῖον εἶναι διαφορά, ἔχουσα κοινὸν παράγοντα εἰς τοὺς ὅρους αὐτῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ δεύτερον μέλος, τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι ὁ κοινὸς οὗτος παράγων, ὁ ἕτερος δὲ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μερικῶν πηλίκων, (μειωτέου διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος πλὴν τοῦ ἀφαιρετέου διὰ τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ παράγοντος). Ἡ ἐργασία αὕτη τῆς μετατροπῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἰς τοὺς ὅρους τῆς διαφορᾶς ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων, εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, καλεῖται μετασχηματισμὸς διαφορᾶς εἰς γινόμενον.

Ἀσκήσεις

23) Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρέτης, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 129 διά τινος ἄλλου εἶναι 15 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 9.

24) Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀτελῶν διαιρέσεων, τῆς μὲν πρώτης εἶναι γνωστὸς ὁ διαιρέτης 97, τὸ ὑπόλοιπον 17, τῆς δευτέρας δὲ διαιρέσεως διαιρέτης εἶναι τὸ 91, τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 77.

25) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶσαν διαίρεσιν, ὁ διαιρετέος εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπολοίπου.

26) Ἐὰν ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης μείνει ὁ αὐτὸς ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον ;

27) Τὸ πηλίκπν δύο ἀριθμῶν εἶναι 19, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν 537, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν 12777· Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ;

28) Κρήνη παρέχει εἰς 7 ὥρας 945 ὀκ. ὕδατος, δευτέρα κρήεη εἰς 5 ὥρ. 475 ὀκ. καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρ. 936 ὀκ. Εἰς πόσας ὥρας καὶ αἱ 3 κρίναι ὁμοῦ θὰ γεμίσουν δεξαμενὴν χωροῦσαν 4246 ὀκ. ὕδατος;

29) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ διαιρέσεις 3746 : 5, 7638 : 25. 6739 : 125 διὰ τῆς μετατροπῆς εἰς ἄλλας, τῶν ὁποίων ὁ διαιρέτης νά εἶναι 10, 100, 1000 καὶ νά δηλωθῇ τίνα μεταβολὴν ἔπαθον τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπά των ;

30) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα (6 . 70 . 3) : (4 . 5) καὶ (11. 400 . 18) : (36 . 25) διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῶν διαιρετῶν εἰς ἄλλα γινόμενα, τῶν ὁποίων εἷς τῶν παραγόντων νὰ εἶναι 10 ἢ 100.

6) Δυνάμεις ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§ 44) Ἔστωσαν τὰ γινόμενα Α') 2 . 2, Β') 4 . 4 . 4, Γ') 5 . 5 . 5 . 5, Δ') 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3, Ε') 9 . 9 . 9, ΣΤ') α . α . α, Ζ') 4 . 3 . 9 . 5, Η') 2 . 3 . 5 . 3, Θ') 8 . 3 . 5 . 9, Ι') α . β . γ . δ.

Ἐπὶ τῶν ἄνω παραδειγμάτων παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Ἐπὶ τῶν μὲν πρώτων κατὰ σειρὰν ἓξ παραδειγμάτων ἔχομεν γινόμενα ἴσων παραγόντων, ἐπὶ τῶν δὲ ἑπομένων τεσσάρων ἔχομεν γινόμενα διαφόρων παραγόντων. Ὅταν ἔχομεν γινόμενα ἴσων παραγόντων, ὡς συμβαίνει εἰς τὰ ἓξ πρῶτα παραδείγματα, λέγομεν ὅτι ἔχομεν δυνάμεις. ὥστε: ***Δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*** Ἡ δύναμις ἐκφράζεται διὰ δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς λέγεται βάσις καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ὁ δὲ ἕτερος λέγεται ἐκθέτης καὶ φανερώνει διὰ τῶν μονάδων του ποσάκις ἐπαναλαμβάνεται ἡ βάσις εἰς τὸ γινόμενον. Ἡ βάσις γράφεται εἰς μέγεθος συνήθους ἀριθμοῦ, ὁ δὲ ἐκθέτης, γράφεται, διὰ μικροτέρου μεγέθους τῆς βάσεως καὶ τίθεται εἰς θέσιν ὀλίγον δεξιὰ καὶ ἄνωθεν τῆς βάσεως. Κατὰ ταῦτα, αἱ ἀνωτέρω δυνάμεις παριστῶνται συμβολικῶς ὡς ἑπομένως: Α) $2 \cdot 2 = 2^2$, Β) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, Γ) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$, Δ) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$, Ε) $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$, ΣΤ) $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^4$ καὶ γενικῶς $\beta \cdot \beta \cdot \beta \ldots\ldots \beta = \beta^\nu$ (παράγοντες ν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὸ γινόμενον). Ἡ δύναμις 2^2 καλεῖται, δευτέρα δύναμις τοῦ δύο, ἡ 4^3 καλεῖται τρίτη δύναμις τοῦ 4, ἡ 5^4 καλεῖται τετάρτη δύναμις τοῦ 5 καὶ γενικῶς ἡ β^ν καλεῖται νιοστὴ δύναμις τοῦ β. (ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ τινὸς καλεῖται καὶ τετράγωνον καὶ ἡ τρίτη δύναμις καλεῖται καὶ κύβος ἤτοι αἱ δυνάμεις δευτέρα καὶ τρίτη, ἔχουσι διπλῆν ὀνομασίαν).

§ 45) ***Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $\alpha^3 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^5$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 44) εἶναι:

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$$
$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$$
$$\alpha^5 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$$

καὶ $\alpha^3 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^5 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$

(1) (§ 6) Τὸ β΄. μέλος ὅμως τῆς (1) εἶναι ἡ δεκάτη δύναμις τοῦ α, ἤτοι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δοθεισῶν δυνάμεων. Ἄρα $α^3 . α^2 . α^5 = α^{10}$. Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη παρατηρεῖται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν παραδειγμάτων τῆς κατηγορίας αὐτῆς. Ἕπεται ὅθεν ἡ ἰδιότης: ***Τό γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ, ἀριθμοῦ, ἰσοῦται μὲ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην το ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.***

§ 46) ***Πῶς δύναμις ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $(α^ν)^3$. Κατὰ § 44, 45, 24, εἶναι $(α^ν)^3 = α.^ν α.^ν α.^ν = α^{ν+ν+ν} = α^{3.ν}$. Καὶ (§ 3) $(α^ν)^3 = α^{3.ν}$, ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Δύναμις ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν, ἐὰν ἡ ἀρχικὴ βάσις ὑψωθῇ εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην, τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.***

§ 47) ***Πῶς γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $(α . β . γ)^3$. Κατὰ § 44, 35 εἶναι: $(α . β . γ)^3 = (α . β . γ) . (α . β . γ) . (α . β . γ) = α . β . γ . α . β . γ . α . β . γ = α . α . α . β . β . β . γ . γ . γ = α^3 . β^3 . γ^3$ καὶ (§ 3) $(α . β . γ)^3 = α^3 . β^3 . γ^3$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν εἷς ἕκαστος τῶν παραγόντων αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.***

§ 48) ***Μὲ τί ἰσοῦται τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $α^5 : α^3$. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω εἶναι $α^5 = α . α . α . α . α$

καὶ $α^3 = α . α . α$. Τὰς ἰσότητας αὐτὰς τὰς διαιροῦμεν κατὰ μέλη, ὅτε λαμβάνομεν $α^5 : α^3 = (α . α . α . α . α) : (α . α . α)$ * ἢ $α^5 : α^3 = α . α$ ἢ $α^5 : α^3 = α^2$ (1). Τὸ β΄. μέλος ὅμως τῆς σχέσεως (1) εἶναι ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ α, ἤτοι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν, τῶν δοθεισῶν δυνάμεων ἤτοι $α^5 : α^3 = α^{5-3} = α^2$. Ἡ σχέσις αὕτη ὅμως παρατηρεῖται καὶ ἐπὶ

---

* $(α . α . α . α . α) : (α . α . α)$, θεωροῦμεν τὸν διαιρετέον ὡς ἕνα ἀριθμόν, ὅτε ἔχομεν (§ 41) $(α . α . α . α . α) : (α . α . α) = ([(α . α . α . α . α) : α] : α) : α = ([α . α . α . α] : α) : α = (α . α . α) : α = α . α$.

πάντων τῶν παραδειγμάτων τῆς κατηγορίας αὐτῆς: Ἕπεται ὅθεν ἡ ἰδιότης: ***Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν (ἂν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου).***

§ 49) ***Περὶ τῆς σημασίας τοῦ α^1 καὶ α^0.***

Α΄) Κατὰ τὸν ὁρισμὸν § 44 εἶναι $\alpha^1=\alpha$. Ἤτοι: ***Ἡ πρώτη δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.***

Β΄) Ἐκ τῆς ἑπομένης τριπλῆς ἰσότητος, $\alpha^0=\alpha^{\nu-\nu}=\alpha^\nu:\alpha^\nu=1$ λαμβάνομεν $\alpha^0=1$ (ἔνθα ν ἀκέραιος ἀριθμός). Ἤτοι: ***Ἡ μηδενικὴ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.***

§ 50) ***Πῶς κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$ Κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 44) εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha}{\beta\cdot\beta\cdot\beta}=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ ἤτοι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ καὶ γενικῶς $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρανομαστὴν τοῦ κλάσματος ὑψώσωμεν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.***

§ 51) ***Χρήσιμοι μετασχηματισμοί.*** Α΄) Εἰς τὴν § 45, ἔχομεν τὴν σχέσιν $\alpha^3\cdot\alpha^2\cdot\alpha^5=\alpha^{10}$. Β΄) Εἰς τὴν § 47, ἔχομεν τὴν σχέσιν $\alpha^3\cdot\beta^3\cdot\gamma^3=(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^3$.

Ἐφαρμογαί. α΄) $2^3\cdot2^2\cdot2^4=2^9$ β΄) $2^3\cdot3^3\cdot4^3=(2.3.4)^3$.

Ἤτοι παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν.

Α΄) γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Β΄) Γινόμενον δυνάμεων διαφόρων ἀριθμῶν εἰς δύναμιν γινομένου, τότε ὅταν αἱ δυνάμεις τοῦ γινομένου φέρωσι τὸν αὐτὸν ἐκθέτην.

Σημείωσις. Ἐνίοτε ὁ μετασχηματισμὸς γίνεται ἀφοῦ προηγηθοῦν μερικοὶ μετασχηματισμοί.

π. χ. $4^2\cdot2^3=(2^2)^2\cdot2^3=2^4\cdot2^3=2^7$, ὁμοίως τὸ $2^4\cdot3^2=(2^2)^2\cdot3^2=4^2\cdot3^2=(4\cdot3)^2$.

Τὰ γινόμενα α) $2^3 \cdot 5^7$, β) $3^2 \cdot 7^{11} \cdot 11^5$ δὲν μετασχηματίζονται.

Ἀσκήσεις

31) Νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν 4ην δύναμιν ἡ παράστασις $2^5 \times 3^4 \times 6^3$.

32) Να εὑρεθῇ τὸ γινόμε ον $2^3 \times 3^2 \times 5) \times (2^4 \times 3 \times 5^3 \times 7)$.

33) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμεγον ὁσωνδήποτε ἰσοβαθμίων δυνάμεων ἰσοῦται μὲ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ γινομένου τῶν βάσεων τῶν δυνάμεων.

34) Νὰ συμπτυχθῇ τὸ γινόμενον $2^7 \times 3^7 \times 6^{12}$ εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτοῦ μορφήν.

35) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσα δύναμις τοῦ 100 εἶναι πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 9, 11 ἢ 33 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

36) Νὰ τραπῇ ἡ δύναμις 8^5 εἰς δύναμιν τοῦ 2 καὶ ἡ 27^4 εἰς δύναμιν τοῦ 3.

37) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετραπλάσιον τετραγώνου εἶναι τετράγωνον.

38) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ κύβου εἶναι κύβος.

Γενικαὶ ἀσκήσεις Α΄ κεφαλαίου

39) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ἰσοῦται μὲ 60, τῶν δύο τελευταίων μὲ 76 καὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου μὲ 64.

40) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν γράψωμεν ἀριθμοὺς κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν τῶν προκυπτουσῶν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἑκάστου ἐκ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου του, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἄκρων.

41) Ποῖος ἀριθμὸς προστίθεται εἰς δύο ἀριθμοὺς ἀνίσους, ὥστε νὰ καταστήσῃ τούτους ἴσους χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ;

42) Ὅταν προσθέσωμεν δύο ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὸ ἄ-

θροισμά των προσθέσωμεν τήν διαφοράν των· ποῖον ἀριθμὸν εὑρίσκομεν;

43) Ἀφαιροῦντες τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των, ποῖον ἀριθμὸν εὑρίσκομεν;

44) Τί γίνεται τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἂν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ σταθερὸν ἀριθμόν;

45) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμεν 12345679 ἐπὶ 9, 18, 27, 36, 45, . . ., 81.

46) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ρ κατὰ σειρὰν ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων εἰς τὸν Πυθαγόρειον πίνακα, εἶναι τέλειον τετράγωνον.

47) Νὰ δικαιολογηθῇ διατὶ ἀρχίζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκ τοῦ δεξιοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστέου;

48) Ἠγοράσθησαν δύο πρόβατα, τὸ δεύτερον ἠγοράσθη 120 δραχ. περισσότερον τοῦ πρώτου, ποία εἶναι ἡ τιμὴ ἑνὸς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ τετραπλάσιον τῆς τιμῆς τοῦ πρώτου, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τῆς τιμῆς τοῦ δευτέρου γίνεται 4440 δραχμαί;

49) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 23688, ἐὰν δὲ ἐλαττώσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν κατὰ 4 μονάδας τὸ γινόμενον ἐλαττοῦται κατὰ 1692. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

50) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 30422. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 3 ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ γινόμενον ἐλαττοῦται κατὰ 1723. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

51) Πόσας δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τὸ πολὺ μονάδας εἰς τὸν διαιρετέον, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον; καὶ πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον διὰ νὰ αὐξήσῃ τὸ πηλίκον κατὰ μίαν μονάδα;

52) Πόσον μεταβάλλεται τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως. τῆς ὁποίας πολλαπλασιάζεται μόνον ὁ διαιρετέος, ὁ δὲ διαιρέτης δὲν μεταβάλλεται;

53) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ 1000 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 37 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

53) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.

55) Νὰ μετασχηματισθῶσι τὰ γινόμενα $2^3 \times 4^7$ καὶ $9^3 \times 3^4 \times 9^5 \times 9^7 \times 27^2$ ἕκαστον εἰς μίαν δύναμιν.

56) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $(10^2 \times 10^5) : (2^3 \times 5^3)$ εἶναι δύναμις τοῦ 10.

57) Τί γίνεται τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον ἤ εἰς ἄλλην δύναμιν ;

58) Νὰ ἐκτελεσθῃ ἡ διαίρεσις $(10^5 \times 15^7 \times 77^4) : (6^3 \times 21^4 \times 55^2)$.

59) Ἐὰν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κλπ. ἡ πλευρὰ τετραγώνου, πόσον γίνεται μεγαλύτερον τὸ ἐμβαδόν του ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

1) Διαιρετότης.

§ 52) Ἔστω ἡ τελεῖα διαίρεσις 24 : 6 τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον εἶναι 4. Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν, ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον, λέγεται, ὡς γνωστόν, διαιρέτης καὶ ὁ ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς λέγεται διαιρετέος ἢ διαιρετός. π. χ ὁ 6 εἶναι διαιρέτης τοῦ 24 καὶ ὁ 24 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6. Ὅπως βλέπομεν εἰς ἑκάστην τελείαν διαίρεσιν, ὁ διαιρέτης ἐπαναλαμβανόμενος πολλάκις (τοσάκις ὅσας φορὰς ἐκφράζει διὰ τῶν μονάδων του τὸ πηλίκον) δίδει τὸν διαιρετέον ἢ τὸν διαιρετόν. Ἕνεκα τούτου ὁ διαιρετέος ἢ διαιρετὸς λέγεται καὶ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, ὁ δὲ διαιρέτης καλεῖται καὶ παράγων ἢ ὑποπολλαπλάσιον. Κατὰ ταῦτα

Διαιρετέος ἢ Διαιρετὸς ἢ Πολλαπλάσιον	24	6	Διαιρέτης ἢ παράγων ἢ ὑποπολλαπλάσιον.
	0	4	

§ 53) ***Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν καὶ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος διαιρεῖ ἀκριβῶς αὐτούς.*** Α΄.) Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 20 καὶ 12, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι διαιρετὸς διὰ 4. Κατὰ ταῦτα εἶναι $20=4+4+4+4+4$ καὶ $12=4+4+4$ Ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $20+12=4+4+4+4+4+4+4+4$ (§ 4) ἤτοι τὸ ἄθροισμα $20+12$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 4, ἀφοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ τεσσάρια μόνον. Ἕπεται ὅθεν ἡ ἰδιότης: ***Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεῖ ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.***

Πόρισμα. Ἀριθμὸς διαιρεῖ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ. Ἔστω ὁ 3 διαιρῶν τὸν 12. Θὰ διαιρῇ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ ἔστω $12 . \nu$ (ἔνθα ν ἀκέραιος ἀριθμός). Τὸ $12.\nu=12+12+12+\ldots\ldots+12$ φορὰς ν (1) (§24). Ὁ 3 διαιρεῖ τὸ β΄. μέλος, δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος, ἄρα διαιρεῖ καὶ τὸ πρῶτον ὡς ἴσον αὐτῷ.

Β΄. Ἔστωσαν οἱ αὐτοὶ ὡς ἄνω ἀριθμοὶ 20 καὶ 12. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι $20=4+4+4+4+4$

καὶ $12=4+4+4$ Καὶ κατὰ § 5 ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $20-12=(4+4+4+4+4)-(4+4+4)^{*}=4+4$. Ἤτοι ἡ διαφορά $20-12$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 4 ἀφοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ τεσσάρια μόνον, Ἕπεται ὅθεν ἡ ἰδιότης: ***Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν***

§ 54) ***Ἀλλάσει τὸ ὑπόλοιπον ἀτελοῦς διαιρέσεως, ὅταν εἰς τὸν διαιρετέον προσθαφαιρέσωμεν πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου;*** Ἔστω ἡ ἀτελὴς διαίρεσις 31:7. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως εἶναι $31=7 . 4+3$ (1) Εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) προσφαφαιροῦντες τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, ἔστω τὸ $7 . \nu$ λαμβάνομεν $31\pm7 . \nu=7 . 4+3\pm7 . \nu$ ἢ $31\pm7 . \nu=7 . 4\pm7 . \nu+3$ (2). Εἰς τὸ β΄ μέλος τῆς (2) ἐξάγομεν μεταξὺ τῶν δύο πρώτων προσθετέων ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα 7, ὁπότε λαμβάνομεν $31\pm7 . \nu=7 . (4\pm\nu)+3$ (3). Ἡ σχέσις ὅμως (3) μᾶς παρουσιά-

* Θεωροῦμεν τὸν μειωτέον ὡς ἕνα ἀριθμὸν καὶ ἔχομεν $(4+4+4+4+4)-(4+4+4)=([(4+4+4+4+4)-4\ ]-4)-4=[[4+4+4+4]-4)-4=(4+4+4)-4=4+4$.

ζει ἀτελῆ διαίρεσιν, τῆς ὁποίας διαιρετέος μὲν εἶναι ὁ 31+7 . ν, διαιρέτης ὁ 7, πηλίκον τὸ (4+ν) καὶ ὑπόλοιπον ὁ 3. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Τὸ ὑπόλοιπον ἀτελοῦς διαιρέσεως δὲν ἀλλάσσει, ὅταν προσαφαιρέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.***

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: ***Ἐὰν ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τρίτου τινὸς καὶ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ τρίτου τούτου, δίδουν ἴσα ὑπόλοιπα.*** π. χ. 83 καὶ 53 διαφέρουν κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ 10, διαιρούμενοι διὰ 10, δίδουν ἴσα ὑπόλοιπα, τὸν 3, διότι οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.

§ 55) ***Χαρακτῆρες διαιρετότητος*** καλοῦμεν τὸν τρόπον διὰ τοῦ ὁποίου διακρίνομεν, ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἄλλου δεδομένου.

Α΄.) ***Διαιρέται : 10, 100, 1000, κ. ο. κ.*** Ὡς γνωρίζομεν διὰ τοῦ 10, 100, 1000 κ. λ. π. διαιρεῖται ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος καταλήγει εἰς ἕν, δύο, τρία, τοὐλάχιστον μηδενικά.

Β΄) ***Διαιρέται 2 καὶ 5.*** Ἔστω ὁ τυχὸν ἀριθμὸς 784· οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 780+4. Ὁ 2 ἢ ὁ 5 ὡς διαιρῶν ἕκαστος τῶν 10 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ 780 ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 10 (πόρισμα § 53). Ἐὰν λοιπὸν διαιρῇ καὶ τὸν 4, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (Α΄.§ 53) Ὥστε ἐξαρτᾶται τὸ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς εἷς ἀριθμὸς διὰ 2 ἢ 5 ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ ἀριθμοῦ (τῶν μονάδων) Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης. ***Ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5, ὅταν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5.*** (Ἄρα διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται οἱ ζυγοὶ (ἄρτιοι) ἀριθμοὶ διὰ δὲ τοῦ 5, οἱ λήγοντες εἰς 5 ἢ μηδέν).

Πόρισμα α΄. Τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως διὰ 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 2 ἢ 5.

Σημείωσις. Ἀνωτέρω ἐλέχθη ὅτι οἱ ζυγοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται ἄρτιοι, εἶναι δὲ οὗτοι οἱ λήγοντες εἰς 2, 4, 6, 8, 0. Οἱ μὴ ἄρτιοι καλοῦνται περιττοὶ (εἶναι οἱ μὴ διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2) λήγουν δὲ οὗτοι εἰς 1, 3, 5, 7, 9. Συμβολικῶς παρίσταται πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς διὰ τοῦ 2 . ν καὶ πᾶς περιττός ἀριθμὸς διὰ τοῦ $2 . \nu \pm 1$, ἔνθα ν ἀκέραιος ἀριθμός.

Γ'.) ***Διαιρέται 4 καὶ 25.*** ***Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4 ἢ 25 ὅταν ὁ ἀριθμός, τὸν ὅποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταία ψηφία τοῦ δοθέντος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 ἢ 25 (διὰ τοῦ 25 διαιροῦνται οἱ λήγοντες εἰς 25, 50, 75 καὶ τοὐλάχιστον εἰς δύο μηδενικά) Τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινὸς διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων διὰ τοῦ 4 ἢ 25.*** Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀνωτέρω Β'. ἰδιότητος ($4 . 25 = 100$).

Δ'.) ***Διαιρέιαι 8 καὶ 125*** ***Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 8 ἢ 125 ὅταν ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία, τοῦ δοθέντος εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινὸς διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων διὰ τοῦ 8 ἢ 125.*** Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀνωτέρω Β'. ἰδιότητος ($8 . 125 = 1000$).

Ε') ***Διερέται 3 καὶ 9.*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 7584. Οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἄθροισμα: $7584 = 7000 + 500 + 80 + 4 = 7 . 1000 + 5 . 100 + 8 . 10 + 4 = 7 (999 + 1) + 5 (99 + 1) + 8 . (9 + 1) + 4 = 7 . 999 + 7 + 5 . 99 + 5 + 8 . 9 + 8 + 4 = 7 . 999 + 5 . 99 + 8 . 9 + 7 + 5 + 8 + 4 = 9 (7 . 111 + 5 . 11 + 8 . 1) + (7 + 5 + 8 + 4)$ ἤτοι $7584 = 9 (7 . 111 + 5 . 11 + 8) + (7 + 5 + 8 + 4)$. (1) Εἰς τὴν σχέσιν ὅμως αὐτὴν. τὴν (1), παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο προσθετέων ἐκ τῶν ἀποίων ἀποτελεῖται ὁ ληφθεὶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 (ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ 3 ὡς ὑποπολλαπλασίου τοῦ 9), ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ἄρα, ἐὰν καὶ ὁ ἕτερος προσθετέος διαιρῆται διὰ τοῦ 9 (συνεπῶς καὶ διὰ 3), συνάγεται ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 9 καὶ 3 (Α'. § 53). Παρατηροῦμεν, ὅμως, ὅτι ὁ δεύτερος προσθετέος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ληφθέντος ἀριθμοῦ. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης. ***Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 9 ἢ 3, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἀποτελεῖ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 9 ἢ 3.***

Σημείωσις. Ὅταν τὸ προκύπτον ἄθροισμα δὲν εἶναι μονοψήφιος ἀριθμός, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμώσωμεν ἐπ' αὐτοῦ τ' ἀνωτέρω, ἤτοι νὰ λάβωμεν καὶ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων, π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 6597 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 27, τούτου δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 9 ἐκ τοῦ ὁποίου ὁδηγούμεθα.

***Πόρισμα** Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 9 ἢ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, διὰ 9 ἢ 3.*

2. Μέγιστος Κοινὸς Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)

§ 56) Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 8, 16, 24. Ὁ ἀριθμὸς 2 παρατηροῦμεν, διαιρεῖ πάντας τοὺς ἀνωτέρω δοθέντας, ὥστε ὁ 2 εἶναι κοινὸς διαιρέτης (κοινὸς διαιρέτης) τῶν δοθέντων. Ἐκτὸς ὅμως τοῦ 2, οἱ ἀριθμοὶ 4, 8 εἶναι ὁμοίως κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ὁ 8, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος μεταξὺ τῶν κοινῶν διαιρετῶν καλεῖται μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (μ. κ. δ.). Ὥστε. ***Κοινὸς διαιρέτης μὲν δύο ἢ καὶ περισσοτέρων ἀριθμῶν καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος διαιρεῖ αὐτοὺς ἀκριβῶς. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δὲ ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν.***

§ 57) ***Ὅταν ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διαιρῇ τοὺς ἄλλους δοθέντας.*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 10, 60, 80, τῶν ὁποίων ὁ 10 (ὁ μικρότερος) διαιρεῖ πάντας, ὁ 10 θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ., διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 10 θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα. ***Ἐὰν ὁ μικρότερος δοθέντων ἀριθμῶν διαιρῇ πάντας (τοὺς δοθέντας) εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων.***

§ 58) ***Εἰς δοθέντας ἀριθμούς, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τινά, διὰ τῆς διαφορᾶς, δύο ἐξ αὐτῶν ἀλλάσσει ὁ μ. κ. δ.;*** Ἔστω ἡ σειρὰ τῶν αριθμῶν 12, 20, 64 (1) καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ νέα σειρὰ (ἀντικαθιστῶντες τὸν 64 διὰ τῆς διαφορᾶς 64—12) 12, 20, 52 (2). Πᾶς κ. δ. τῆς σειρᾶς (1) εἶναι κ. δ. τῆς σειρᾶς (2) (Β΄ § 53). Ὡσαύτως πᾶς κ. δ. τῆς (2) θὰ εἶνοι καὶ κ. δ. τῆς (1) (Α΄ § 53). Ὅθεν αἱ δύο σειραὶ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. δ. συνεπῶς καὶ τὸν αὐτὸν μ.κ.δ. Ἄρα ἕπεται τὸ θεώρημα : ***Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀπό τινος ἐξ αὐτῶν ἀφαιρεθῇ ἄλλος τις ἐκ τῶν δοθέντων.***

Πόρισμα. Ὁ μ. κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀντικατασταθῇ τις ἐξ αὐτῶν (ἤ τινὲς) διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ (ἢ αὐτῶν) δι᾿ ἄλλων ἐκ τῶν δοθέντων.

Ἐφαρμογαί.

§ 59) ***Πρόβλημα.*** Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν α΄) 24, 48, 72, β΄) 12, 18, 24, πρὸς τούτοις καὶ δυνάμει τοῦ πορίσματος τῆς προηγουμένης § 58 ἔχομεν

α΄) 24, 48, 72	β΄) 12, 18, 24
24, 0, 0 ἄρα μ.κ.δ=24	12, 6, 0
	0, 6, 0 ἄρα μ.κ.δ.=6

Σημείωσις Ἐπὶ τῶν παραδειγμάτων, τῶν ἀνωτέρω, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ σειραὶ ἑνὸς ἑκάστου τῶν παραδειγμάτων ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ. δ. Ἐπειδὴ ὅμως τὴν τετευταίαν σειρὰν ἀποτελεῖ ὁ μ. κ. δ. ἕπεται ***1) Ὅτι οἱ κ. δ. ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ δ. αὐτῶν καὶ 2) Πᾶς κοινὸς διαιρέτης ἀριθμῶν, εἶναι καὶ διαιρέτης τοῦ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τἀνάπαλιν.***

§ 60) ***Τί θὰ πάθῃ ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι μὲ ἕνα ἀριθμόν;*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 12, 18, 24 τῶν ὁποίων (§ 59) μ. κ. δ. εἶναι ὁ 6 ἤτοι 12, 18, 24

12, 6, 0

0, 6, 0

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ 12, 18, 24, πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 5 καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5, διότι εἶναι οὗτοι ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων 18 : 12 καὶ 24 : 12. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ οἱ τῶν λοιπῶν σειρῶν ἀριθμοὶ θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 5, ἄρα καὶ ὁ 6 τῆς τελευταίας, ἤτοι ὁ μ. κ. δ., θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5, ἡ διάταξις τῆς πράξεως.

12 . 5,	18 . 5	24 . 5
12 . 5,	6 . 5	0
0	6 . 5	0

Ὅθεν τὸ θεώρημα: *Ἐὰν ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἀριθμόν τινα καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.* (Κατὰ παρόμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ὅταν διαιρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ διά τινος καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ).

Πόρισμα α΄. Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, τὰ πηλίκα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. *

Πόρισμα β΄. Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διά τινος κ. δ. αὐτῶν καὶ δώσωσι πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ κοινὸς διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν.

3) Ἐλάχιστον Κοινὸν Πολλαπλάσιον (Ε. Κ. Π.)

§ 61) Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 20 προκύπτει ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ 2, ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον αὐτοῦ, παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὁ 20 προκύπτει καὶ ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῶν 4, 5, 10, ὥστε εἶναι πολλαπλάσιον ἑνὸς ἑκάστου τῶν 4, 5, 10. Ἐφ' ὅσον λοιπὸν εἶναι ὁ ἀριθμὸς 20, πολλαπλάσιον ἑνὸς ἑκάστου τῶν 2, 4, 5, 10, λέγεται κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν. Ἄρα: ***Κοινὸν πολλαπλάσιον (κ. π.) ἀριθμῶν δοθέντων καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐξ αὐτῶν δι' ἐπαναλήψεως, ἢ διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' αὐτῶν.*** Τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν 2, 4, 5, 20, παρατηροῦμεν, ὅτι κοινὸν πολλαπλάσιν δὲν εἶναι μόνον ὁ 20, ἀλλὰ καὶ ἄλλοι, ὡς ὁ 40, 60, 80, κ. λ. π. ὡς διαιρούμενοι δι' αὐτῶν. Ὥστε δοθέντων ἀριθμῶν κοινὰ πολλαπλάσια εἶναι ἄπειρα. Ἐν ᾧ δὲ δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μεγαλύτερον, ὡς εὐκόλως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρου παραδείγματος, ἔνθα τὰ κ. π. εἶναι 60, 80, 100, 120, ... , διότι τὸ πρὸς στιγμὴν μεγαλύτερον (μέγιστον), ἐὰν αὐξήσωμεν κατὰ ἕνα μικρότερον πολλαπλάσιον αὐτῶν, θὰ λάβωμεν, νέον μεγαλύτερον πολλαπλάσιον, ἐν τούτοις ὑπάρχει ἓν πολλαπλάσιον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μικρότερον (ἐλάχιστον) αὐτῶν, τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Τοῦτο τὸ μικρότερον (τὸ ἐλάχιστον)

---

* Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους λέγονται ἀριθμοί, ὅταν μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ἡ μονάς.

καλεῖται ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον. Ἄρα: ***Ἐλάχιστον κοινὸν πολαπλάσιον (Ε.Κ.Π.) καλεῖται τὸ μικρότερον τῶν κοινῶν πολλαπλασίων.***

§ 62) ***Ὅταν ὁ μεγαλύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν δοθέντων.*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 10, 15, 30, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος ὁ 30, εἶναι (διαιρετὸς) πολλαπλάσιον τῶν λοιπῶν (καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του 30=30 . 1). Οὗτος ὁ 30 εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (ἐ. κ. π.), διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 30 θὰ εἶναι κ. π. (ὡς μὴ διαιρῶν τὸν 30). Ἄρα ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ἐὰν ὁ μεγαλύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τῶν λοιπῶν οὗτος εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν δοθέντων.***

§ 63) ***Εὕρεσις του Ε.Κ.Π.*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 10 τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. αὐτῶν. Κατὰ (§62) παρατηροῦμεν, ἐὰν ὁ μεγαλύτερος εἶναι διαιρετὸς ὑπό τῶν λοιπῶν· ἐπειδὴ δέ, δὲν εἶναι διαιρετός, συνάγομεν ὅτι οὗτος δὲν εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἐ. κ. π. τῶν δοθέντων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. ὀφείλομεν νά ἀνατρέξωμεν εἰς τὰ πολλαπλάσια τοῦ 10, διότι αὐτὰ μόνον εἶναι διαιρετὰ διὰ 10. Πρὸς τούτους λαμβάνομεν τὸ ἀμέσως πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ 10, τὸ 10 . 2=20, τοῦτο δὲν εἶναι ἐ. κ. π. διότι ναὶ μὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 5, δὲν διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 3. Λαμβάνομεν μετὰ ταῦτα, τὸ ἀμέσως μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ 10, τὸ 10 . 3=30. Τοῦτο διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 5 καί διὰ τοῦ 3 ἄρα εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν δοθέντων. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ π. δοθέντων ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ πάντων τῶν ἄλλων (ἑνὸς ἑκάστου), ἂν διαιρεῖται οὗτος εἶναι τὸ ἐ. κ. π. ἂν δὲν διαιρεῖται διπλασιάζομεν τοῦτον (τὸν μεγαλύτερον τῶν δοθέντων), τριπλασιάζομεν κ. ο. κ. Τὸ δὲ πρῶτον πολλαπλάσιον τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν διαιροῦμενον διὰ πάντων τῶν δοθέντων εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ. κ. π..***

4) Ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους

§ 64) Ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα. α΄.) 9, 25, β΄.) 2, 5, 9. Κατὰ τὴν § 59 μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων εἶναι ἡ μονάς. Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (παραπομπὴ § 60). Ὅθεν: ***Δύο ἢ καὶ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὅταν μ.κ.δ. αὐτῶν εἶναι ἡ μονάς.*** «Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο λέγονται ἀριθμοὶ ὅταν λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους» π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 7, 5, 13 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, 5 καὶ 7, 5 καὶ 13, 7 καὶ 13. Ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 9 μολονότι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, διότι οἱ 3 καὶ 9 ἔχωσι μ. κ. δ. τὸν 3 ἤτοι ἀριθμὸν διάφορον τῆς μονάδος.

§ 65) ***Ἀριθμὸς διαιρῶν γινόμενον δύο ἀριθμῶν καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον;*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τὸ γινόμενον 9 . Α καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν ἤτοι τὸν 9. Οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 9, ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν 1. Οἱ ἀριθμοὶ 5 . Α καὶ 9 . Α ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 1 . Α = Α (§ 60). Ὁ 5, διαιρεῖ τὸν 5 . Α, ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ καὶ τὸν 9 . Α ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα θὰ διαιρεθῇ καὶ τὸν μ κ.δ. αὐτῶν, ἤτοι τὸν Α (2α σημείωσις τῆς § 59). Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα (Εὐκλείδου). ***Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἄλλον.***

§ 66) ***Ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν;*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται διὰ τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7, πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Διότι Α : 3 = π (π ἔστω τὸ πηλίκον Α : 3), θὰ εἶναι Α = 3 . π (1). Ὁ 5 διαιρῇ ἐξ ὑποθέσεως τὸν Α, ἄρα καὶ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸν 3 . π καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν 3, θὰ διαιρῇ τὸν π (§ 65), ἑπομένως π = 5 . π΄. Ἀντικαθεστῶντες εἰς τὴν (1) τὸν π, λαμβάνομεν Α = 3 . 5 . π΄ (2). Ὁ 7 διαιρῇ τὸν Α, ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ 3 . π καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν 3, διαιρῇ τὸν π. Ὁμοίως διαιρῶν τὸν π θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον τῷ π, τὸ 5π΄, ὢν δὲ πρῶτος πρὸς τὸν 5 θὰ διαιρῇ τὸν π΄, ἤτοι π΄ = 7 . π΄΄. ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὸ π΄, λαμβάνομεν Α = 3 . 5 . 7 . π΄΄ ἢ Α = (3 . 5 . 7) . π΄΄. Ὥστε ὁ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ γινομένου 3 . 5 . 7

Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν***. (ἤτοι: Ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 3 διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 6).

§ 67) ***Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 25 καὶ 31 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ 5 διαιρέτης τοῦ 25, θὰ ἐξετάσωμεν, ἐὰν ὁ 5 εἶναι πρῶτος ἢ μὴ πρὸς τὸν 31***. Ἐὰν ὁ 5 καὶ ὁ 31 εἶχον κ. δ. διάφορον τῆς 1, ἤτοι δὲν ἦσαν πρῶτοι μεταξύ των, οὗτος ὡς διαιρῶν τὸν 5 θὰ διῄρει καὶ τὸν 25 (πολλαπλάσιον τοῦ 5), ἑπομένως θὰ ἦτο κ. δ. τῶν 25 καὶ 31 ὅπερ ὅμως ἄτοπον, καθ' ὅσον οἱ 25 καὶ 31 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα εἶναι πρῶτοι μεταξύ των. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα. ***Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιρέτης τις τοῦ ἑνός, εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἄλλον.***

§ 68) ***Ἀριθμὸς διαιρεῖ γινόμενον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς οὗτος, εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου;*** Ἔστω ὁ ἀριθμός 6, ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου 17 . 23 . 37. Κατὰ τὴν § 67 πᾶς διαιρέτης τοῦ 6 ἔστω ὁ 2, ἢ καὶ ὁ ἴδιος ὁ 6 θὰ εἶναι πρῶτος πρὸς τοὺς παράγοντας 17, 23, 37 Ἄρα ἤδη ἔχομεν τὸν 6 πρῶτον πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου 17.23 . 37 καὶ θὰ ἐξετάσωμεν τίνα ἰδιότητα ἔχει οὗτος ὁ 6 πρὸς τὸ γινόμενον, τουτέστι διαιρεῖ αὐτὸ ἢ δὲν τὸ διαιρεῖ. Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι διαιρῇ τὸ γινόμενον 17 . 23 . 37 ἢ τὸ (17 . 23) . 37, ὢν πρῶτος πρὸς τὸ 37 θὰ διαιρῇ τὸ (17 . 23), (§ 65) ὢν δὲ πρῶτος πρὸς τὸν 23 θὰ διαιρῇ τὸν 17, ὅπερ ἄτοπον διότι ὁ 6 καὶ 17 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους—Ἄρα δὲν τὸν διαιρεῖ. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον παράγοντα γινομένου εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτό.***

Πόρισμα α'. Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἄλλον εἶναι πρῶτος καί, πρὸς οἱανδήποτε δύναμιν αὐτοῦ ἤτοι ἂν α καὶ β εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὁ α θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὴν $β^ν$, ἔνθα ν, ἀκέραιος ἀριθμός;

Πόρισμα β'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμοίως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

5) Πρῶτοι ἀριθμοί

§ 69) Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, κ. λ. π. Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 5, 7, 11, 17..... παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι διαιρετὸς μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ καλοῦνται πρῶτοι, ὥστε: ***Πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας παρὰ μόνον τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα. Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμός καλεῖται σύνθετος.*** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σύνθετοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 8, 9,......, ἕνας ἕκαστος τῶν ὁποίων, πλὴν τῶν διαιρετῶν (μονάδος καὶ τοῦ ἰδίου) ἔχει καὶ ἄλλους. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 9 καὶ 25 τῶν ὁποίων μ. κ. δ. εἶναι ἡ μονάς. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ἐν ᾧ ἕνας ἕκαστος εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος (μὴ πρῶτος), μεταξύ των εἶναι ἀριθμοί πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἄρα: «***Ἄλλο εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, καθ' ἑαυτούς καὶ ἄλλο πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους***».

Ὁ ἀμέσως μετὰ τὴν μονάδα διαιρέτης ἀριθμοῦ τινὸς λέγεται ***δεύτερος διαιρέτης***. Παντὸς πρώτου ἀριθμοῦ, δεύτερος διαιρέτης εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

§ 70) ***Δεύτερος διαιρέτης ἀριθμοῦ τινός.*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 15. Ἀπὸ τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὁ 3, καλεῖται δεύτερος διαιρέτης,

§ 71) ***Ὁ δεύτερος διαιρέτης εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος;*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Κ. τοῦ ὁποίου, τὸν δεύτερον διαιρέτην αὐτοῦ καλοῦμεν διὰ τοῦ δ. Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις τοῦ δ. ἐπὶ τοῦ ἐρωτήματος εἶναι δύο: ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι πρῶτος (σύνθετος). Λαμβάνομεν τὴν μίαν τῶν περιπτώσεων, ἔστω ὅτι δὲν εἶναι πρῶτος, τότε θὰ πρέπῃ νὰ διαιρῆται διὰ τινος ἀριθμοῦ, ὅστις θὰ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος καὶ μικρότερος αὐτοῦ, ἔστω τοῦ ρ. Ἀλλὰ τότε ὁ ρ. ὡς διαιρῶν τὸν δ θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Κ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ δ. Ἄρα ὁ Κ. διαιρεῖται καὶ διὰ μικροτέρου τοῦ δ ἀριθμοῦ (ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος). Συνεπῶς ὁ δ δὲν εἶναι δεύτερος διαιρέτης τοῦ Κ. ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸν ἐδέχθημεν πρῶτον διαιρέτην τοῦ Κ. Ἐφ' ὅσον λοιπὸν καταλήξαμεν εἰς ἄτοπον συνάγεται, ὅτι ἡ περίπτωσις τὴν ὁποίαν ἐδέχθημεν, πρὸς στιγμήν, δὲν εἶναι ὀρθή. Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ὁ δεύτερος διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.***

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς ἀποδείξεως, ὃν καὶ προηγουμένως ἐφηρμόσαμεν π. χ. § 67, καλεῖται «***Μέθοδος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς***» συνίσταται δὲ οὗτος εἰς τὸ νὰ ἀποκλείωνται πᾶσαι αἱ δυναταὶ νὰ συμβῶσι περιπτώσεις, ἐπὶ ἑνός ζητήματος, πλὴν μιᾶς, ἡ ὁποία κατ' ἀνάγκην εἶναι ἡ ἀληθής.

§ 72) ***Σχέσις συνθέτου τινὸς πρὸς πρώτους ἀριθμούς.*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Κ. και ὁ δεύτερος διαιρέτης αὐτοῦ δ. Κατὰ § 36 εἶναι $Κ=δ.π$ (1). Ὁ δ. εἶναι πρῶτος, ὡς δεύτερος διαιρέτης, ὁ π. εἶναι μικρότερος τοῦ Κ. ἐὰν ὁ π εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος θὰ εἶναι $π=δ'.π'$ ἄρα ἡ σχέσις (1) γίνεται $Κ=δ.δ'.π'$ (ὁ δ' εἶναι καὶ αὐτὸς πρῶτος ἀριθμὸς καὶ δύναται νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δ ἢ καὶ διάφορος τοῦ δ, πάντως εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος). Τὸ π' εἶναι μικρότερος τοῦ π. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως θὰ καταλήξωμεν εἰς $Α=δ.δ'.δ''$ ...... καθισταμένου τοῦ π μὲ τὴν μονάδα.

Ἐφαρμογαί. Ἔστω $Κ=60$, ὁπότε θὰ εἶναι $δ=2$ καὶ συνεπῶς $60=2.30$ (1) ἀλλὰ ἐν ᾧ εἰς τὸ β'. μέλος ὁ 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὁ 30 εἶναι σύνθετος καὶ ὁ ὁποῖος κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εἶναι $30=2.15$· ἄρα ἡ σχέσις (1) γίνεται $60=2.2.15$ (2). Τῆς σχέσεως αὐτῆς οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες εἰς τὸ β'. μέλος εἶναι ἀριθμοὶ (ἑκάτερος) πρῶτοι, ὁ δὲ τρίτος ὡς σύνθετος εἶναι $15=3.5$ ἄρα ἡ σχέσις (2) γίνεται $60=2.2.3.5$, τῆς ὁποίας παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀριθμοὺς πρώτους. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον πρώτων παραγόντων.***

§ 73) ***Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἀριθμοῦ πρώτου καὶ ἑτέρου τὸν ὁποῖον δὲν διαιρεῖ;*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 26, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ 7 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος καὶ δὲν διαιρεῖ τὸν ἕτερον, τὸν 26. Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι διαιροῦσι τὸν 7 εἶναι ἡ 1 καὶ ὁ 7 (διότι ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἀριθμός), διότι δὲ ὁ 7 δὲν διαιρεῖ τὸν 26 (ἐξ ὑποθέσεως) ἕπεται ὅτι ὁ μόνος κ. δ. τῶν 7 καὶ 26 εἶναι ἡ μονάς. Ὅθεν τὸ θεώρημα. ***Πᾶς πρῶτος ἀριθμος εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς πάντα ἄλλον τὸν ὁποῖον δὲν διαιρεῖ.***

§ 74) ***Ἀριθμός πρῶτος, ἄν διαιρῇ γινόμενον ὁσωσδήποτε παραγόντων, τίνα σχέσιν ἔχει πρός τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου;*** Ἔστω ὁ ἀριθμός Κ, ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος καὶ ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων α . β . γ . δ. Θὰ ἐξετάσωμεν ἤδη ἂν ὁ Κ διαιρῇ παράγοντα τινὰ τοῦ γινομένου ἢ ἄν δὲν διαιρῇ. Ἂν μὲν δεχθῶμεν ὅτι διαιρεῖ, τὸ θεώρημα εἶναι ἀποδεδειγμένον. Ἂν ὅμως δεχθῶμεν ὅτι δὲν διαιρεῖ παράγοντα τινά τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 73) θὰ ἦτο πρῶτος πρὸς παντας καὶ κατὰ τὴν (§ 68) θὰ ἦτο πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτό, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐξ ὑποθέσεως τὸ διαιρεῖ. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ἀριθμός πρῶτος, ἐὰν διαιρῇ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα ἐξ αὐτῶν.***

Πόρισμα α΄. Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν δύναμιν ἀριθμοῦ διαιρεῖ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

Πόρισμα β΄. Ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῶν τὸ γινόμενον παραγόντων πρώτων εἶναι ἴσος μὲ ἕνα ἐξ αὐτῶν.

Σημείωσις. Ἀριθμὸς μὴ πρῶτος (σύνθετος) δύναται νὰ διαιρῇ γινόμενόν τι, χωρὶς νὰ διαιρῇ οὐδένα τῶν παραγόντων π. χ. ὁ 15 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 4 , 6 . 10=240 χωρὶς νὰ διαιρῇ οὐδένα τῶν παραγόντων.

§ 75) ***Πῶς περιέχονται οἱ πρῶτοι παράγοντες εἰς γινόμενα ἴσα ἀποτελούμενα ἐκ πρώτων παραγόντων.*** Ἔστω τὸ παράδειγμα τῶν ἴσων γινομένων ἐκ πρώτων παραγόντων 3 . 5 . 7 . 13 . 17=α . β . γ . δ . ε. Ὁ τυχὼν 3, διαιρῶν τὸ γινόμενον 3 . 5 . 7 . 13 . 17, ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ γινόμενον α . β . γ . δ . ε καὶ κατὰ τὸ β΄. πόρισμα τῆς § 74 θὰ εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν ἤτοι· 3=α, ἑπομένως εἰς τὸ β΄. γινόμενον περιέχεται ὁ παράγων 3. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν ἄν εἰς ἀμφότερα τὰ γινόμενα περιέχεται ἰσάκις. Ἔστω ὁ παράγων 3 ὅτι περιέχεται εἰς τὸ β΄. γινόμενον δύο φορὰς καὶ εἰς τὸ α΄. μίαν φοράν. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα γινόμενα διὰ 3, ὀφείλει νὰ εὕρωμεν ἴσα πηλίκα, ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν δύο γινόμενα ἴσα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕν θὰ περιέχῃ τὸν παράγοντα 3 ἐν ᾧ τὸ ἄλλο δὲν θὰ τὸν περιέχῃ, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὅσας φορὰς περιέχει τὸν παράγοντα 3 τὸ ἕν γινόμεεον, τόσας φορὰς θὰ τὸν περιέχῃ καὶ τὸ ἕτερον. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ἐὰν δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων εἶναι ἴσα, πᾶς πρῶτος παράγων περιεχόμενος εἰς τὸ ἕν, θὰ περιέχηται καὶ εἰς τὸ ἄλλο καὶ εἰς ἀμφότερα ἰσάκις.***

§ 76) ***Εὕρεσις πρώτων ἀριθμῶν (Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους).*** Ἔστω ὅτι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1—100. Πρὸς τούτοις γράφομεν αὐτοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν σειρὰν καὶ κατόπιν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὁ δύο 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὄχι ὅμως καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα διαγράφομεν, ὡς συνθέτους ἀριθμούς. Μετὰ τὸν 2 ἔρχεται ὁ 3, πρῶτος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον δὲν διαγράφομεν, διαγράφομεν ὅμως τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3. Τὸ πρῶτον ὅμως πολλαπλάσιον τοῦ 3, τὸ μὴ διαγραφὲν μέχρι τοῦδε εἶναι τὸ 3^2 ἤτοι 3.3 διότι τὸ 3.2 διεγράφει ὡς πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ μικροτέρου αὐτοῦ. Ὁ 4 καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ἔχουσι διαγραφῆ. Μετὰ ταῦτα, πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 5, τοῦ ὁποίου τὰ πολλαπλάσια θὰ διαγράψωμεν. Ὅπως καὶ ἀνωτέρω ἐλέχθη διὰ τὸν 3, τὸ πρῶτον μὴ διαγραφὲν πολλαπλάσιον τοῦ 5 εἶναι τὸ 5^2 ἤτοι 5 . 5, διότι τὰ μικρότερα διεγράφησαν, ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων ὡς τὰ 5 . 2, 5 . 3, 5 . 4. Κατόπιν διαγράφομεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7 ἀρχόμενοι ἀπὸ $7^2=7 . 7=49$ κ. ο. κ., διακόπτοντες τὴν ἐργασίαν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 11, διότι τὸ πρῶτον μὴ διαγραφὲν αὐτοῦ πολλαπλάσιον εἶναι $11^2=11 . 11 =121$ ἤτοι δίδει ἀριθμὸν ὑπερβαίνοντα τὸν 100. Οἱ παραμείναντες πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1—100, εἶναι οἱ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61. 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

§ 77) ***Πῶς ἀναγνωρίζεται ὅτι ἀριθμός τις εἶναι πρῶτος;*** Εἷς ἀριθμός εἶναι πρῶτος, ὅταν δὲν διαιρῆται δι' οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι μικρότερα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου π. χ. ὁ ἀριθμὸς 163 εἶναι πρῶτος, διότι δὲν διαιρεῖται δι᾽ οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7, 11.

§ 78) ***Ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.*** Ἔστω ὁ σύνθετος ἀριθμὸς 60. Ἐὰν τοῦτον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ δευτέρου διαιρέτου του (ἀριθμὸς πρῶτος) τοῦ 2, θὰ λάβωμεν $60=2\,.\,30$ (1). Οὕτω ἀναλύσαμεν τὸν 60 εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν κατὰ σειρὰν πρῶτος εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ὁ δὲ κατὰ σειρὰν δεύτερος εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος. Ἐὰν τοῦτον τὸν 30 ἀναλύσωμεν ἐπίσης εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἤτοι $30=2\,.\,15$ καὶ τόν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (1) θὰ λάβωμεν $60=2\,.\,2\,.\,15$ (2) Ἐνταῦθα οἱ δύο κατὰ σειρὰν πρῶτοι παράγοντες εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, ἐν ᾧ ὁ τρίτος εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος. (Εἰς ἑκάστην περίπτωσιν μόνον ὁ τελευταῖος εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀριθμός σύνθετος, διότι οἱ προηγούμενοι θὰ εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ ὡς δεύτεροι διαιρέται). Ὁμοίως ἀναλύομεν τὸν $15=3\,.\,5$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν $60=2\,.\,2\,.\,3\,.\,5$ τῆς ὁποίας βλέπομεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος ἀποτελεῖται ἀπὸ γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν (κατ᾽ ἀνάγκην θὰ καταλήξῃ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, διότι ὁ τελευταῖος τῆς ἑκάστοτε σειρᾶς, θὰ γίνεται καὶ μικρότερος τοῦ τελευταίου τῆς προηγουμένης σειρᾶς). Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ἄρα: $60=2\,.\,2\,.\,3\,.\,5$

ἢ $60=2^2\,.\,3\,.\,5$.

6) Ζητήματα τινὰ ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμων

§ 79) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $1+\alpha+\alpha^2+\ldots,+\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu$, τοῦ α, ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω Σ τὸ ἄθροισμα τὸ ζητούμενον ὅτε θὰ ἔχωμεν $\Sigma=1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu$, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ α ἔχομεν : $\Sigma \cdot \alpha = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^\nu + \alpha^{\nu+1}$, καὶ ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην ἰσότητα ἀπὸ τὴν δευτέραν ἔχομεν: $\Sigma \cdot \alpha - \Sigma = \alpha^{\nu+1} - 1$ ἢ $\Sigma \cdot (\alpha - 1) = \alpha^{\nu+1} - 1$ καὶ $\Sigma = \dfrac{\alpha^{\nu+1} - 1}{\alpha - 1}$

Σημείωσις. Ἂν θέσωμεν $\alpha^{\lambda-1}$ εἰς τὴν θέσιν τοῦ α θὰ λάβωμεν:

$$\Sigma = 1 + \alpha^{\lambda-1} + (\alpha^{\lambda-1})^2 + (\alpha^{\lambda-1})^3 + \ldots + (\alpha^{\lambda-1})^\nu = \frac{(\alpha^{\lambda-1})^{\nu+1} - 1}{\alpha^{\lambda-1} - 1}$$

§ 80) ***Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ τινός.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α τὸν ὁποῖον ἀναλύομεν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ἤτοι $A = \alpha^\mu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\rho \ldots \theta^\tau$ Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ Α εἶναι διαιρετὸς ὑπὸ ὅλων τῶν δυνάμεων ἑκάστου πρώτου παράγοντος αὐτοῦ, διὰ τὸν παράγοντα α μέχρι τῆς μ δυνάμεως, διὰ τοῦ β μέχρι τῆς ν, διὰ τοῦ γ μέχρι τῆς ρ, κ.ο.κ. διὰ τὸν θ, μέχρι τῆς τ δυνάμεως, δηλαδὴ ὁ Α εἶναι διαιρετός διὰ $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^\mu$

ὁμοίως » » » » $1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots\ldots \beta^\nu$

» » » » » $1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots\ldots \gamma^\rho$

» » » » » . . . . . .

» » » » » . . . . . .

» » » » » $1, \theta, \theta^2, \theta^3, \ldots\ldots \theta^\tau$

Ἐπίσης, ἐπειδὴ καὶ αἱ δυνάμεις τῶν πρώτων παραγόντων, α, β, γ,...,θ, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὁ ἀριθμὸς Α θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν καὶ ἑπομένως, οἱ διαιρέται τοῦ Α εὑρίσκονται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς, τὰ γινόμενα τούτων μὲ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τῆς τρίτης σειρᾶς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν ***πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ Α, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ ὅροι τοῦ γινομένου*** $(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\mu)\cdot(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^\nu)\cdot(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^\rho)\ldots\cdot(1+\theta+\theta^2+\ldots+\theta^\tau)$.

§ 81) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος πάντων τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α, ὁ ὁποῖος ἀνελύθη εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας : $A = \alpha^\mu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\rho \ldots \theta^\tau$, καὶ Κ τὸ πλῆθος ἢ ὁ ἀριθμὸς πάντων τῶν διαιρετῶν τοῦ Α. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος γνωρίζομεν ὅτι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ Α εἶναι οἱ ὅροι τοῦ γινομένου. $(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots\alpha^\mu)(1+\beta+\beta^2+\ldots\beta^\nu)\ldots(1+\theta+\theta^2+\ldots\theta^\tau)$ καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν προσθετέων ἑκάστου τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἶναι, τοῦ παράγοντος $(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^\mu)$ ὁ $\mu+1$, τοῦ παράγοντος $(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^\nu)$ ὁ $\nu+1,\ldots$ καὶ τοῦ παράγοντος $(1+\theta+\theta^2+\ldots+\theta^\tau)$ εἶναι ὁ $\tau+1$. καθίσταται φανερὸν ὅτι ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ γινομένου εἶναι $(\mu+1).(\nu+1).(\rho+1)\ldots(\tau+1)$ καὶ συνεπῶς καὶ ὁ ἀριθμὸς (ἢ τὸ πλῆθος) πάντων τῶν διαιρετῶν τοῦ Α εἶναι $K=(\mu+1).(\nu+1).(\rho+1)\ldots(\tau+1)$ ἤτοι: ***ὁ ἀριθμός πάντων τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ, ηὐξημένου ἑκάστου ἐκθέτου κατὰ μονάδα*** π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ $1008=2^4.3^2.7$ πάντες οἱ διαιρέται δίδονται ὑπὸ τῶν ὅρων τοῦ γινομένου: $(1+2+2^2+2^3+2^4).(1+3+3^2).(1+7)$. Ἑπομένως ἔχομεν τὰ ἑξῆς μερικὰ γινομενα.

1	2	2^2	2^3	2^4
1.3	2.3	$2^2.3$	$2^3.3$	$2^4.3$
1.3^2	2.3^2	$2^2.3^2$	$2^3.3^2$	$2^4 3^2$
1.7	2.7	$2^2.7$	$2^3.7$	$2^4.7$
$1.3.7$	$2.3.7$	$2^2.3.7$	$2^3.3.7$	$2^4.3.7$
$1.3^2.7$	$2.3^2.7$	$2^2.3^2.7$	$2^3.3^2 7$	$2^4.3^2.7$

Τὸ δὲ πλῆθος των εἶναι $(4+1).(2+1).(1+1)=5.3.2=30$.

§ 82) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος Α***

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $A=\alpha^\mu.\beta^\nu.\gamma^\rho\ldots\theta^\tau$, οἱ διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντες οἱ ὅροι τοῦ γινομένου $(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\mu).(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\ldots+\beta^\nu)\ldots(1+\theta+\theta^2+\ldots+\theta^\tau)$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα ὅλων ἐν γένει τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦτο, ἤτοι:

$\Sigma=(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\mu).(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^\nu)\ldots(1+\theta+\theta^2+\ldots+\theta^\tau)$ ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^\mu=\frac{\alpha^{\mu+1}-1}{\alpha-1}$$

$$1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^\nu=\frac{\beta^{\nu+1}-1}{\beta-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots=\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots=\ldots$$

$$1+\theta+\theta^2+\ldots+\theta^\tau=\frac{\theta^{\tau+1}-1}{\theta-1} \text{ καὶ ἐπομένως}$$

$$\Sigma=\frac{(\alpha^{\mu+1}-1)(\beta^{\nu+1}-1)\ldots(\theta^{\tau+1}-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)\ldots(\theta-1)}$$

π. χ. ἐὰν $A=362880=2^7 . 3^4 . 5 . 7$ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν διαιρετῶν εἶναι:

$\Sigma=(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7).(1+3+3^2+3^3+3^4).(1+5).(1+7)=255 . 121 . 6 . 8=1481040.$

7) Ἐφαρμογαὶ ἀναλύσεων

§ 83) ***Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β, ἀναλελυμένοι ἤτοι $A=2^2 . 3 . 5$, $B=2 . 3^4 . 7$. Τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $A . B=(2^2 . 3 . 5) . (2 . 3^4 . 7)=2^3 . 3^5 . 5 . 7$. Ἄρα: ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς πρώτους παράγοντας αὐτῶν, σχηματίζομεν ἓν γινόμενον ἐκ πάντων τῶν παραγόντων καὶ μὲ ἐκθέτας, εἰς ἕνα ἕκαστον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.***

§ 84) ***Ὕψωσις ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς δύναμιν.*** Ἔστω $A=2^3 . 3^2 . 5$. Ἡ τρίτη, ἔστω, δύναμις αὐτοῦ εἶναι $A^3=(2^3 . 3^2 . 5)^3=2^{3.3} . 3^{2.3} . 5^3$ καὶ γενικῶς $A^\nu=2^{3.\nu} . 3^{2.\nu} 5^\nu$. Ἄρα: ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἀναλελυμένον εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως αὐτῆς.***

§ 85) ***Χαρακτὴρ τετραγώνου, κύβου καὶ γενικῶς δυνάμεως ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου.***

1) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς $A=2^4 . 3^6 . 7^2$ (1) (οἱ ἐκθέται τῶν

πρώτων παραγόντων εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2). Τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς παρατηροῦμεν ὅτι μετασχηματίζεται εἰς $(2^2 . 3^3 . 7)^2$ τετράγωνον γινομένου, διότι πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2. Ἐὰν τὴν βάσιν $2^2 . 3^3 . 7$ καλέσωμεν διὰ τοῦ Β λαμβάνομεν $B=2^2 . 3^3 . 7$. Τὴν ἰσότητα αὐτὴν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν $B^2=2^4 . 3^6 . 7^2$ (2). Ἤδη συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν $A=B^2$ (διότι τὰ β΄ μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα). Ἄρα ὁ Α εἶναι τετράγωνον τοῦ Β καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον $\alpha^{2\mu} . \beta^{3\mu} . \gamma^{5\cdot\mu} . \delta^{\mu}$ εἶναι μυοστὴ δύναμις τοῦ $\alpha^2 . \beta^3 . \gamma^5 . \delta$.

2ον) Ἐὰν $A=2^5 , 3^6$ (1). Οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2 καὶ ὅτι $A=B^2$ ἀναλύοντες τὸν Β ἔχομεν ἔστω, $B=\rho^{\mu} . \lambda^{\nu}$ (ρ καὶ λ = πρῶτοι ἀριθμοί). Τὴν ἰσότητα αὐτὴν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν $B^2=\rho^{2\cdot\mu} . \lambda^{2\cdot\nu}$ ἢ $A=\rho^{2\cdot\mu} . \lambda^{2\cdot\nu}$ (2). Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν $2^5 . 3^6=\rho^{2\cdot\mu} . \lambda^{2\cdot\nu}$ ὅπερ ἄτοπον (§ 75). Ὅθεν ἕπεται : ***Τότε ἕνας ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον, κύβος καὶ γενικῶς νυοστὴ δύναμις ἄλλου, ὅταν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι πολλαπλάσια τῶν 2, 3, γενικῶς τοῦ μ καὶ τότε μόνον.***

§ 86) ***Χαρακτὴρ διαιρετότητος.*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοί, $A= 2^5 . 3^2 . 5^3 . 7$ καὶ $B=2^3 . 3^2 . 5$.

1ον) Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ Β περιέχονται εἰς τοὺς παράγοντας τοῦ Α καὶ μὲ ἐκθέτας μικροτέρους. Ἐὰν δὲ μετασχηματίσωμεν τὸν Α εἰς $A=(2^3 . 3^2 . 5) . (2^2 . 5^2 . 7)$ (1) καὶ διότι $B=2^3 . 3^2 . 5$, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ $2^3 . 3^2 . 5$ διὰ τοῦ Β λαμβάνομεν $A=B . (2^2 . 5^2 . 7)$. Ἤτοι ὁ Α διαιρεῖται διὰ τοῦ Β, ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

2ον) Ἐὰν ὁ Β ἀναλυόμενος εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων περιέχει παράγοντας διαφόρους τῶν παραγόντων τοῦ Α ἢ τοὺς αὐτοὺς ἀλλὰ μὲ ἐκθέτας μεγαλυτέρους, ἤτοι $B=2^3 . 3^4 . 11$, τότε οὐδὲν πολλαπλάσιον τοῦ Β θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Α (§ 75). Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα. ***Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι᾽ ἄλλου, ὅταν περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ ἄλλου καὶ μὲ ἐκθέτας ἴσους ἢ μεγαλυτέρους καὶ τότε μόνον.***

δ) Εὕρεσις μ. κ. δ. καὶ ε. κ. π.

§ 87) *Εὕρεσις μ. κ. δ. καὶ ε. κ. π. ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν.* Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα § 86 καθίσταται φανερὸν ὅτι:

Α'.) *Ἐὰν Σχηματίσωμεν ἕν γινόμενον μόνον μὲ τοὺς κοινοὺς πρώτους παράγοντας καὶ μὲ τοὺς μικροτέρους ἐκθέτας δοθέντων ἀριθμῶν λαμβάνομεν ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν δοθέντων καὶ*

Β'.) *ἐὰν σχηματίσωμεν ἕν γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ μὲ ἐκθέτας τοὺς μεγαλυτέρους λαμβάνομεν ἀριθμὸν ἴσον μέ τὸ ε. κ. π. τῶν δοθέντων* π. χ. διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. καὶ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 36, 84, 360 λαμβάνομεν:

$36=2^2 \cdot 3^2$

$84=2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$

Α'.) μ. κ. δ. αὐτῶν, τῶν 36, 84, 360 εἶναι τὸ $2^2 \cdot 3=12$, διότι κατὰ § 86 εἶναι κ. δ, εἶναι δὲ καὶ ὁ ἐλάχιστος διότι πᾶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $2^2 \cdot 3=12$ ἢ θὰ περιέχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 3 ἢ θὰ περιέχῃ τὸν ἕνα τούτων ἢ καὶ τούς δύο μέ ἐκθέτας μεγαλυτέρους ἢ θὰ συμβαίνωσιν ἀμφότερα, ὅτε οὗτος δὲν θὰ εἶναι κ. δ. καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ μ. κ. δ.

Β'.) ε. κ. π. αὐτῶν, τῶν 36, 84, 360 εἶναι τὸ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 =2520$, διότι σατὰ § 86 εἶναι κ. π., οὐδεὶς δὲ τῶν πρώτων παραγόντων δύναται νὰ λείψῃ, οὔτε νὰ ἔχῃ μικρότερον ἐκθέτην, διότι ἐὰν ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ τὸν παράγοντα 7 δὲν θὰ διαιρεῖται διὰ τοῦ 84, ἐὰν δὲν περιέχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην 3, δὲν θὰ διαιρεῖται διὰ 36, ἄρα πᾶν κ. π. θὰ περιέχῃ τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 2520 ἢ καὶ μετ' ἄλλων. Ὅθεν τὸ 2520 εἶναι τὸ ε. κ. π, ὡς τὸ μικρότερον πολλαπλάσιον.

***Πόρισμα** Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

§ 88) ***Σχέσις μεταξὺ δύο ἀριθμῶν καὶ τῶν μ. κ. δ. καὶ ε. κ. π. αὐτῶν.*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β ὧν Α=

$2^2 . 3 . 7$, $B = 2^3 . 3^2 . 5$. Τούτων μ. κ. δ εἶναι ὁ $2^2 . 3$ καὶ ἐ. κ. π. $2^3 . 3^2 . 5 . 7$· ἤτοι τὸ ε. κ. π. περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας, ἐκτὸς ἐκείνων τοὺς ὁποίους περιλαμβάνει ὁ μ. κ. δ. Τοῦτο παρατηρεῖται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν παραδειγμάτων· ἤτοι οἱ πρῶτοι παράγοντες ἀριθμῶν τινῶν εὑρίσκονται πάντες εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας τῶν μ. κ. δ. καὶ ε. κ. π. καὶ μόνον αὐτοί. Ἄρα ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω εἶναι :

Α. Β=(μ. κ. δ) . (ε. κ. π.). Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μ. κ. δ. ἐπὶ τὸν ε. κ. π. αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

60) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, ὅταν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων τοῦ ἀριθμοῦ, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, εἶναι διαιρετὸς διὰ 11.

61) Νὰ εὑρεθοῦν, ἄνευ διαιρέσεως τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν 4215, 7607, 958, 1329 διὰ τοῦ 2, 3, 4, 5, 9, 11.

62) Τὸ ὑπόλοιπον γινομένου, ὡς πρὸς διαιρέτην τινα ἰσοῦται μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν ὑπολοίπων τῶν παραγόντων διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

63) Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ μὴ διαιρετοῦ διὰ 3, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, ηὐξημένου κατὰ μονάδα.

64) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα ν προσθετέων καὶ τοὺς (ν—1) προσθετέους χωριστά, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἀπομένοντα προσθετέον.

65) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν ἄλλων ψηφίων εἶναι διαιρετὸν διὰ 6.

66) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 6.

67) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 12.

68) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαιρούμενον διὰ τοῦ 3 οὐδέποτε δίδει ὑπόλοιπον ἕν.

69) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 9600, 12000, 6000, 4800, 7200 καθὼς καὶ τῶν 60 . 16, 45 . 12, 105 . 8 διὰ τρόπου συντόμου.

70) Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ὁ μ.κ.δ. εἶναι 8 καὶ τὰ διαδοχικὰ πηλίκα 5, 4, 3, 2.

71) Διὰ ποίου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 300, 120, 216 ὥστε τὰ πηλίκα νὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ;

72) Μᾶς δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 364 καὶ 330 νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος δυνατὸς ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον ἂν διαιρεθοῦν μᾶς δίδουν ὑπόλοιπα 4 καὶ 15.

73) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα 240 καὶ μ κ.δ. 20.

74) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 24 καὶ ἄθροισμα τὸν 168.

75) Νὰ εὑρεθοὺν δύο ἀριθμοί, οἵτινες ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 21 καὶ πηλικον 5 : 8.

76) Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ψηφία α καὶ β, οὕτως ὥστε ὁ ἀριθμὸς 514αβ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 καὶ 8.

77) Δύο ἐφεξῆς ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ;

78) Δύο ἐφεξῆς περιττοὶ ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ;

79) Τρεῖς ἐφεξῆς ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ; Πότε δὲ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο;

80) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τότε καὶ οἱ Β καὶ α . Β+1 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

81) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, α+1 καὶ 2α+1 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο

82) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ διαιρέται αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

83) Ὁ μ.κ.δ. τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α . ρΓ, Β, Γ.

84) Τῶν ἀριθμῶν 5, 6, 15 νὰ εὑρεθοῦν τὰ μικρότερα κ. πολλαπλάσια αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 300.

85) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος τῶν ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος

ἀφίνει ὑπόλοιπον 2 εἴτε διὰ 4, εἴτε διὰ 7 εἴτε διὰ τοῦ 8 διαιρεθῇ.

86) Ποῖος εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 35, 28, 42 νὰ διδῃ ὑπόλοιπον 7.

87) Ἂν τὸ Ε. Κ. Π. δύο ἀριθμῶν διαιρεθῇ δι' ἑκάστου τούτων τὰ πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα;

88) Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε,Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν, 12, 6, 4, 28 ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν 3, 12, 6, 15

89) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 700, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ 6 ἢ 8 ἢ 10 ἢ 12 ἀφίνει ὑπόλοιπον 5 καὶ διὰ 11 μηδέν. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

90) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ἰσοῦται πρὸς τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 6, 7, 8, 9, 10 καὶ γενικῶς τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν, 1, 2, 3, ..., 2ρ ἰσοῦται πρὸς τὸ ε.κ π. τῶν ἀριθμῶν $\rho+1$, $\rho+2$, $\rho+3$,..., 2ρ

91) Τὸ γινόμενον $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 5; Διὰ πρώτων ἀριθμῶν διαιρεῖται;

92) Ἐὰν προσθέσωμεν μίαν μονάδα εἰς πρῶτόν τινα ἀριθμόν, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι πάντοτε πρῶτος ἀριθμός;

93) Ἡ δύναμις 7^9 διαιρεῖται διὰ 9; Διὰ ποίου δὲ ἀριθμοῦ διαιρεῖται;

94) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α τὸ γινόμεν $2 \cdot 3 \cdot \alpha$ ἢ τὸ $2 \cdot 3 \cdot \alpha^5$ διαιρεῖται διὰ 5.

95) Ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ προγράψωμεν εἰς τὸ γινόμενον $2^3 \cdot 5^2$, ἵνα γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ $2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^5$ καὶ διατί;

96) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν Α καὶ Β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορά των εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον Α . Β.

97) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν Α καὶ Β εἶναι πρῶτός τις ἀριθμὸς Κ, οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

98) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πολλαπλασιάζοντες τοὺς 9 μονοψηφίους ἀριθμοὺς 1, 2,...9 ἐπὶ 3 λαμβάνομεν γινόμενα λήγοντα εἰς διάφορα ἀπ' ἀλλήλων ψηφία πλὴν τοῦ 0, ἤτοι εἰς τὰ 9 σημαντικὰ ψηφία.

99) Ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι, ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων $\alpha^2-\beta^2$ δύναται νὰ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος;

100) Ἐάν $α$ καὶ $β$ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους τὰ ἀθροίσματα $α+β$ καὶ $α^2+β^2$ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

101) Τῶν ἀριθμῶν $α$ καὶ $β$ ὄντων ἀκεραίων, ἐὰν $α^2-β^2$ εἶναι πρῶτος ἀριθμός, θὰ ἔχομεν $α^2-β^2=α+β$.

102) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι γινόμενον περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμοίως περιττὸς ἀριθμός;

103) Ὁ ἀριθμὸς 1829 εἶναι πρῶτος;

104) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν οἱ ἀριθμοὶ 56000, 840, 1000, 888.

105) Ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως νὰ εὑρεθῇ τίνες τῶν ἑπομένων διαιρέσεων ἐκτελοῦνται ἀκριβῶς 3300 : 132, 8672 : 224.

106) Τίνες εἶναι οἱ κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 64, 12, 52.

107) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 1040, 240, 1280

108) Εἰς πόσους τὸ δυνατὸν περισσοτέρους ἀπόρους δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν 200 ὀκ. ἔλαιον, 320 ὀκ. ἄλευρον καὶ 420 ὀκ. ὀσπρίων, ὥστε ἕκαστος νὰ λάβῃ ἴσον ποσὸν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

109) Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία βαίνουν ἐλαττούμενα ἐξ ἀριστερῶν κατὰ μονάδα.

110) Πῶς δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἐὰν $A=2 . 3 . 5 . 7+1 < 15^2$, ὅτι ὁ A εἶναι πρῶτος ἀριθμός;

111) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ μικρότεροι τοῦ 29 ἀριθμοὶ οἱ πρῶτοι πρὸς αὐτόν.

112) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα $A. B. Γ.$ καὶ $A^2 . B^5 . Γ^3$ ἀναλελυμένα εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, ἐὰν $A=2^4 . 3^2 . 5^3 . 7^2$, $B=2 . 5^3 . 7^5 . 11^2$ $Γ=2^4 . 3^2 . 5^3 . 7^5$

113) Ποῖοι τῶν ἀριθμων $2^8 . 3^6 . 5^2 . 7^8$, $2^4 . 5^6 . 11^{10} . 13^8$ εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων καὶ ποίων;

114) Ποῖοι τῶν ἀριθμῶν εἶναι τρίται δυνάμεις καὶ ποίων, ἂν $A=2^{12} . 3^6 . 5^{15} . 11^9$, $B=2^6 . 3^{12} . 5^{18} . 7^9$, $E=17^{21} . 15^{27}$.

115) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ 350 γίνεται τετράγωνον καὶ ὁ 1620 γίνεται κύβος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

1) Κοινὰ κλάσματα — Δεκαδικὰ κλάσματα

§ 89) Ὅταν τὴν ἀκεραίαν μονάδα τὴν διαιρέσωμεν εἰς ἴσα μέρη, ἕν τῶν ἴσων μερῶν, ὡς γνωστόν, καλεῖται κλασματικὴ μονάς· κλασματικαὶ μονάδες εἶναι π. χ. αἱ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$,... $\frac{1}{100}$,... Ὁ ἀριθμός, ὁ προκύπτων διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς κλασματικῆς μονάδος καλεῖται κλασματικὸς ἀριθμὸς π. χ. $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{365}{100}$, κ. λ. π. Αἱ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ. λ. π. ἤτοι αἱ ἔχουσαι παρανομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, καλοῦνται, ὡς γνωστόν, δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες καὶ τὰ προκύπτοντα, δι' ἐπαναλήψεως αὐτῶν κλάσματα καλοῦνται δεκαδικὰ κλάσματα π. χ. $\frac{9}{10}$, $\frac{365}{100}$ κ. λ. π. Ἅπασαι αἱ λοιπαὶ κλασματικαὶ μονάδες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{35}$,... καλοῦνται κοιναὶ κλασματικαὶ μονάδες καὶ τὰ προκύπτοντα, δι' ἐπαναλήψεως αὐτῶν καλοῦνται κοινὰ κλάσματα ὡς π. χ. $\frac{15}{25}$, $\frac{40}{22}$, $\frac{10}{7}$,... Κλάσμα τι εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον ἢ μεγαλείτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι μικρότερος, ἢ ἴσος ἢ μεγαλείτερος τοῦ παρανομαστοῦ, εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ κλάσμα καλεῖται γνήσιον, εἰς τὴν τρίτην καλεῖται καταχρηστικόν. Τὸ καταχρηστικὸν κλάσμα συνεπῶς περιέχει ἀκεραίας μονάδας. Δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξάγωμεν τὰς ἀκεραίας αὐτοῦ μονάδας διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρανομαστοῦ. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρανομαστοῦ τότε τὸ κλάσμα ἰσοῦται (τρέπεται) μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν, π. χ. $\frac{24}{6}=4$ ἐὰν ὅμως δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς τότε παριστῶμεν αὐτὸν διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος (τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρανομαστοῦ ἀποτελεῖ τὸ ἀκέραιον μέρος τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως μετὰ τοῦ διαιρέτου ἀποτελοῦν τὸ κλάσμα) π. χ. $\frac{27}{4}=6+\frac{3}{4}$ ἢ $6\frac{3}{4}$. Ὁ κλασματικὸς οὗτος ἀριθμὸς καλεῖται μικτός.

2) Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

§ 90) Α'.) ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρανομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἢ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ) τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

α) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ γίνῃ τετράκις μεγαλύτερος τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{20}{7}$ εἶναι τετράκις μεγαλλείτερον τοῦ $\frac{5}{7}$, διότι ἀμφότερα τὰ κλάσματα ταῦτα συνίσταται ἐξ ἑβδόμων καὶ τὸ μὲν πρῶτον περιέχει 5 ἐξ αὐτῶν, τὸ δὲ δεύτερον 5 . 4 ἤτοι τετραπλάσιον ἀριθμόν. Ὥστε τὸ $\frac{20}{7}$ εἶναι τετράκις μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{7}$ ἢ

β) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{28}$. Ἐὰν ὁ παρανομαστὴς αὐτοῦ γίνῃ τετράκις μικρότερος τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{5}{7}$ εἶναι τετράκις μεγαλείτερον, διότι τόσον τὸ πρῶτον, ὅσον καὶ τὸ δεύτερον κλάσμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἴσον ἀριθμῶν κλασματικῶν μονάδων (ἀπὸ 5) μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ κλασματικὴ μονὰς τοῦ πρώτου $\frac{1}{28}$ εἶναι τετράκις μικροτέρα τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{7}$ τοῦ δευτέρου, ὥστε τὸ δεύτερον $\frac{5}{7}$ εἶναι τετράκις μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{28}$.

Β'.) ***Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρανομαστὴν ἑνὸς κλάσματος δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ (ἢ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν) τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***

Γ'.) ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται*** (αἱ ἀποδείξεις τῶν ἀνωτέρω Β'. καὶ Γ'. παραλείπονται ὡς ἁπλαῖ).

Δ'.) Αἱ ἰδιότητες, ἰσότητος καὶ ἀνισότητος, τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῶν δυνάμεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τοῦ Α'. Κεφαλαίου τοῦ παρόντος βιβλίου ἰσχύουσι καὶ μὲ κλασματικοὺς ἀριθμούς, παραλείπεται δὲ ἡ ἀπόδειξις αὐτῶν, διότι γίνεται σχεδὸν ἀπαραλλάκτως, ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.

3) Ἀνάγωγον κλάσμα

§ 91) ***Ἁπλοποίησις*** καλεῖται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας ἐξ ἑνὸς κλάσματος μεταβαίνομεν εἰς ἕτερον μὲ μικροτέρους ὅρους ἀλλὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀξίαν ἤτοι εἶναι τὰ κλάσματα ταῦτα ἴσα. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Ἐὰν ἡ διαίρεσις τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος γίνῃ διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν οἱ ὅροι τοῦ προκύπτοντος κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ τοιοῦτον αλάσμα καλεῖται ἀνάγωγον, δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει κλάσμα ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους, ὡς ἀποδεικνύεται καὶ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

§ 92) ***Ἀνάγωγον κλάσμα.*** Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{7}{15}$, ἔχον τοὺς ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους καὶ κλάσμα ἴσον αὐτῷ ἔστω τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, Τρέποντες τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα λαμβάνομεν ἀπὸ τὰ ἴσα $\frac{7}{15}=\frac{\alpha}{\beta}$ τὰ ἐπίσης ἴσα $\frac{7.\beta}{15.\beta}=\frac{15.\alpha}{15.\beta}$. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρανομαστήν, κατ' ἀνάγκην ἔχουσι ἴσους ἀριθμητὰς ἤτοι $7.\beta=15.\alpha$ **(1)**. Ἀλλά ὁ 7 διαιρεῖ τὸ γινομενον $7.\beta$ ὡς πολλαπλάσιον του, θὰ διαιρῇ ὅθεν τὸ ἴσον $15.\alpha$ καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν 15 θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον ἤτοι τὸν α, καλοῦντες δέ, π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἔχομεν $\boxed{\alpha = 7.\pi}$ Τὸν α ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν τὴν ἑπομένην σχέσιν $7 . \beta = 15 . 7 . \pi$ (2) διαιροῦντες τὰ ἴσα γινόμενα τῆς σχέσεως (2) διὰ 7 λαμβάνομεν $\boxed{\beta = 15 . \pi,}$ ἤτοι βλέπομεν ὅτι παντὸς κλάσματος π. χ. $\frac{\alpha}{\beta}$ ἴσου πρὸς τὸ $\frac{7}{15}$ οἱ ὅροι α καὶ β εἶναι ἰσοπολλαπλάσιοι τῶν ὅρων τοῦ $\frac{7}{15}$, ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μικρότεροι τῶν ὅρων τοῦ $\frac{7}{15}$ καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν ὑπάρχει κλάσμα μὲ μικροτέρους ὅρους ἴσον πρὸς τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα. ***Κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι ἀνάγωγον, τοὐτέστι δὲν ὑπάρχει ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.***

Πόρισμα α΄. Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς ὅρους αὐτῶν ἴσους, τὸν ἀριθμητὴν μὲ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρανομαστὴν μὲ τὸν παρανομαστήν.

Πόρισμα β΄. Πάντα τὰ ἴσα πρὸς ἄλληλα κλάσματα προέρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀναγώγου κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως εὐκολυνόμεθα πολὺ εἰς τὰς ἐπ᾽ αὐτῶν πράξεις.

4) Σύνθετα κλάσματα

§ 93) Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν οἱασδήποτε σημειοῦται ὄχι μόνον διὰ τοῦ σημείου : ἀλλὰ καὶ διὰ κλάσματος μὲ ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον παρανομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην π. χ. $\frac{2}{3} : 5$ ἢ $\frac{\frac{2}{3}}{5}$, $7 : \frac{4}{5}$ ἢ

$\frac{7}{\frac{4}{5}}$, $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ ἢ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$

Τὰ ἀνωτέρω κλάσματα $\frac{\frac{2}{3}}{5}$, $\frac{7}{\frac{4}{5}}$, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$, κ. λ. π. $\frac{2\frac{3}{4}}{7}$, $\frac{5\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$, λέγονται ***σύνθετα κλάσματα***, πρός διάκρισιν δὲ, τὰ κλάσματα, περὶ τῶν ὁποίων μέχρι τοῦδε ἐκάναμεν λόγον, λέγονται ***ἁπλᾶ κλάσματα***. Ὥστε ***Σύνθετα κλάσματα εἶναι ἐκεῖνα τῶν ὁποίων, ἔστω καὶ εἷς τῶν ὅρων αὐτοῦ δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.***

Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν κλασμάτων ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων, διότι καὶ τὰ σύνθετα κλάσματα παραμένουσι ὡς κλάσματα.

§ 94) ***Τροπὴ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν.*** Ἔστω τό σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$

Διότι $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\dfrac{\alpha}{\beta}:\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\delta}{\gamma}=\dfrac{\alpha\,.\,\delta}{\beta\,.\,\gamma}$ εἶναι $\left|\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}\right|=\dfrac{\alpha\,.\,\delta}{\beta\,.\,\gamma}$ Ἦτο ***Πᾶν σύνθετον κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων καὶ παρανομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν μέσων (ἄκροι εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλασματικοῦ διαιρετέου καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου).***

Ἡ τοιαύτη τροπὴ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν λέγομεν ὅτι γίνεται διὰ τῆς ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρανομαστοῦ αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐκτέλεσις τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων. Εὐκολώτερον εἶναι νὰ τρέπωμεν τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ καὶ ἐπὶ τῶν προκυπτόντων ἁπλῶν νὰ γίνωνται αἱ πράξεις.

5) Περιοδικὰ δεκαδικὰ

§ 95) ***Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν κλάσμα.*** Ἔστω τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{9}{4}$, ὡς γνωστόν, τοῦτο μᾶς δείχνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 9 διὰ τοῦ 4 ἢ 9 : 4

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν λαμβάνομεν $\begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \cline{2-2} 10 & 2{,}25 \\ \ 20 & \\ \ \ 0 & \end{array}$ ἄρα

$\frac{9}{4}=2{,}25$ (1) τῆς ἰσότητος αὐτῆς τὸ μὲν πρῶτον μέλος εἶναι κοινὸν κλάσμα, τὸ δὲ δεύτερον εἶναι δεκαδικὸν κλάσμα [ὡς γνωστὸν πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ μὲ κλάσμα (δεκαδικὸν) ἔχων ὡς ἀριθμητὴν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον (τὸν δεκαδικὸν) χωρὶς τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ π. χ. $2,25=\frac{225}{100}$.] Οὕτω τὸ κοινὸν κλάσμα ἐτράπη εἰς δεκαδικόν. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν, ὅμως τῆς διαιρέσεως δὲν εὑρίσκομεν πάντοτε ὑπόλοιπον μηδὲν π. χ. $\frac{30}{7}=4,2857$ κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ ὁμοίως $\frac{8}{3}=2,66$......κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν παρατηροῦμεν ὅτι ἄλλα μὲν κοινὰ κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά, ὡς τὸ $\frac{9}{4}$ ἄλλα δὲ περιέχουσι πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, ὡς τὸ $\frac{8}{3}$, $\frac{30}{7}$ κ. τ. λ.

§ 96) ***Πότε ἕνα κοινὸν κλάσμα τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν καὶ πότε τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν.*** Α΄.) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{21}{8}$ τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 2. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 21 ἐπὶ τὴν δύναμιν 10^3 ἤτοι $(2 \,.\, 5)^3$ καθίσταται φανερὸν ὅτι τὸ γινόμενον 21000 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 8 καὶ ἡ διαίρεσις 21000 : 8 εἶναι τελεία. Δὲν θὰ συνέβαινε τὸ ἴδιον ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἐπολλαπλασιάζετο ἐπὶ μικροτέραν δύναμιν τοῦ 10 ἤτοι τὴν 10^2, διότι τότε ἐν ᾧ ὁ ἀριθμητὴς ἤθελε περιέχει τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ 2 ὁ παρονομαστὴς περιέχει τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ 2. Ἄρα τὸ κλάσμα τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν καὶ περιέχει τρία δεκαδικὰ ψηφία. (Ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τοῦ 2). Τὸ αὐτὸ ἰσχύει προφανῶς καὶ ὅταν ὁ παρανομαστὴς περιέχῃ τὸν 5 ἢ ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5. Ὅθεν ἕπεται τὸ ***θεώρημα:*** ***Ὅταν ὁ παρανομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κοινὸν τοῦτο κλάσμα τρέπε-***

ται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν μεγαλείτερον τῶν ἐκθετῶν, τῶν ἐν τῷ παρανομαστῇ τοῦ κλάσματος παραγόντων 2 καὶ 5.

Β΄.) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ τοῦ ὁποίου ὁ παρανομαστὴς περιέχει πρώτους παράγοντας διαφόρους τοῦ 2 καὶ 5. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ οἱανδήποτε δύναμιν τοῦ 10, εἰσάγομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο μόνον τοὺς παράγοντας τοῦ 2 καὶ 5, ἑπομένως οὐδὲν τῶν γινομένων αὐτῶν δύναται νὰ διαιρεθῇ ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρανομαστοῦ, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἐξακολουθήσῃ ἡ διαίρεσις ἐπ' ἄπειρον. Τότε λέγομεν ὅτι τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία. π. χ. $\frac{5}{7} = 0,714\,285\,714285\ldots\ldots$ Ὅθεν ἔπεται τὸ θεώρημα: ***Ὅταν ὁ παρανομαστὴς ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ πρῶτον τινὰ παράγοντα διάφορον τοῦ 2 καὶ 5, τὸ κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.***

§ 97) ***Δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα.*** Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα καλεῖται, τὸ ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀποτελεῖται ἀπὸ μερικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται, τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν ἐπ' ἄπειρον—Τὰ ἐπαναλαμβανόμενα ταῦτα ψηφία λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὴν περίοδον. π. χ.
α΄.) 0,657657657... β΄.) 0,84737373... γ΄.) 6,3737..δ) 95,28666...

Τὸ περιοδικὸν κλάσμα τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἄρχεται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καλεῖται ἁπλοῦν [ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἁπλᾶ εἶναι τὸ α΄.) καὶ γ΄.) καὶ τὸ μὲν α΄.) λέγεται ἁπλοῦν ἄνευ ἀκεραίου μέρους τὸ δὲ γ΄. ἁπλοῦν μετ' ἀκεραίου μέρους.]

Τὸ περιοδικὸν κλασμα τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἄρχεται οὐχὶ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καλεῖται μικτόν. ['Εν τῶν ἀνωτέρω μικτὰ εἶναι τὰ β΄.) καὶ δ΄.) καὶ τὸ β΄.) λέγεται μικτὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους τὸ δὲ δ΄.) μικτὸν μετ' ἀκεραίου.]

§ 98) Ὅταν ἔχομεν κοινὸν κλάσμα τὸ ὁποῖον τρέπεται εἰς δεκαδικὸν μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία π. χ. ἔστω τὸ $\frac{5}{7}$ κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ, διότι ὁ διαιρέτης μένει πάντοτε ὁ ἴδιος ὁ 7 τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πάντα μικρότερος ἀθιθμὸς τοῦ 7, οὐδὲν δὲ ἐξ αὐτῶν 0, διότι τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ τότε θὰ ἐτρέπετο εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· ἄρα κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι παρὰ ἕξ τὸ πολὺ διάφορα ὑπόλοιπα ἢ καὶ ὀλιγώτερα π. χ. εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{11}$ ὡς ὑπόλοιπα εὑρίσκομεν δύο μόνον τὰ 5 καὶ 6 ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 50 & 11 \\ \cline{2-2} 60 & 0,4545 \\ 50 & \\ 60 & \\ 5 & \end{array}$$

Ὅθεν προκύπτει ὅτι μετὰ ἑξ τὸ πολὺ δεκαδικὰ ψηφία θὰ εὕρωμεν τὸ ἴδιον ὑπόλοιπον μὲ ἓν ἐκ τῶν προηγουμένως εὑρεθέντων. Διὰ τοῦτο δέ τὰ ὑπόλοιπα ὅσον καὶ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου θὰ ἐπαναλαμβάνωνται περιοδικῶς, τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτήν σειράν. Ὅθεν ἕπεται τό θεώρημα. ***Ἐὰν κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν μὲ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία, τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι περιοδικόν,***

Πόρισμα. ***Τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους, ἂν ὑπάρχῃ, εἶναι μικρότερον τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ κοινοῦ κλάσματος.***

Τροπὴ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ κλάσματος εἰς κοινὸν

§ 99) Α΄.) ***Ἁπλοῦν.***

1) Ἄνευ ἀκεραίου μέρους. Ἔστω τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους, 0,657657657... λαμβάνομεν $A = 0,657657657 \ldots$ καὶ $1000 . A = 657,657657 \ldots$ καὶ $1000 . A - A = 657,657657 \ldots - 0.657657 \ldots$ ἢ $999 . A = 657$ (1) καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) διὰ 999 ἔχομεν $A = \frac{657}{999}$ (2) ἀλλὰ $A = 0,657657 \ldots$ ὅθεν ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $0,657657657 \ldots\ldots = \frac{657}{999}$. Ἐξ αὐτῶν καὶ ἐξ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἐξάγεται τὸ θεώρημα. ***Τὸ ἁπλοῦν περιοδι-***

δικόν δεκαδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους προκύπτει ἀπὸ τὸ κοινον κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον παρανομαστὴν δὲ ἀριθμὸν συγκείμενον ἐκ τόσων ψηφίων 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ περιοδικὸν κλάσμα $0,999 \ldots$ εὑρίσκομεν ὅτι τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{9}{9}$ ἢ $\frac{99}{99}$ ἢ $\frac{999}{999}$ κ. λ. π. Ἀλλά ταῦτα ἰσοῦνται μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ παράγωσι περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα καὶ συνεπῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δοθὲν περιοδικόν, ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται. Ἐν᾽ ᾧ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν τὸ θεώρημα ἔχει ἐφαρμογήν.

2) Μετ᾽ ἀκεραίου μέρους.

Ἐὰν τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι μετ᾽ ἀκεραίου μέρους π. χ. $37,848484 \ldots$ Ἔχομεν $37,8484 \ldots = 37+0,8484 \ldots = 37 + \frac{84}{99} = \frac{37 \cdot 99}{99} + \frac{84}{99} = \frac{37 \cdot 99+84}{99}$

$$= \frac{37 \cdot (100-1)+84}{99} = \frac{3700-37+84}{99} = \frac{3784-37}{99}$$ ἤτοι $37,8484 \ldots =$

$$= \frac{3784-37}{99}$$

Ἐκ τούτων καὶ ἐξ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἐξάγεται τὸ θεώρημα: ***Τὸ ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα μετ᾽ ἀκεραίου μέρους προκύπτει ἀπὸ τὸ κοινὸν κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ὑπὸ τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους καὶ τῶν ψηφίων μιᾶς περιόδου, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἀκέραιον μέρος, παρανομαστὴν δὲ συγκείμενον ἐκ τόσων 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.***

§ 100) Τὸ κοινὸν κλάσμα, κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲν εἶναι ἀνάγωγον. Ὁ παρανομαστὴς αὐτοῦ ὡς λήγων εἰς 9 δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5. Τὸ ἴδιο ἰσχύει προφανῶς καὶ ὅταν τὸ κλάσμα γίνῃ ἀνάγωγον. Ὅθεν ἐξάγεται τὸ θεώρημα: ***Ὁ παρανομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κοινοῦ κλάσματος, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5.***

§ 101) *Β΄) Μικτόν.*

1) Μετ' ἀκεραίου μέρους. Ἔστω τὸ παράδειγμα 7,39672672. . . λαμβάνομεν Α=7,39672672 . . . . καὶ Α . 100

$$= 739,672672 \ldots \text{ καὶ } A = \frac{739,672672\ldots}{100} = \frac{\frac{739672-739}{999}}{\frac{100}{1}} =$$

$$= \frac{739672-739}{99900} \text{ ἤτοι } 7,39672672\ldots \frac{739672-739}{99900}.$$ Ἐκ τούτου καὶ ἐξ ὁμοίων παραδειγμάτων ἐξάγεται τὸ θεώρημα: ***Τὸ μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα μετ' ἀκεραίου μέρους προκύπτει ἀπὸ τὸ κοινὸν κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμὸν ὑπὸ τῶν πρὸ τῆς περιόδου ψηφίων καὶ τῶν ψηφίων μιᾶς περιόδου ἠλαττωμένον κατὰ τὸν ὑπὸ τῶν πρὸ τῆς περιόδου ψηφίων ἀποτελούμενον ἀριθμόν, παρανομαστὴν δὲ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ὑπὸ τοσούτων 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου, ἀκολουθουμένων ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ δεκαδικὰ ψηφία.***

2) Ἄνευ ἀκεραίου μέρους.

Τὸ ἄνευ ἀκεραίου μέρους μικτὸν δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα π.χ. 0,8367272 . . . . προκύπτει ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{83672-836}{99000}$ καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τοῦ μικτοῦ μετ' ἀκεραίου μέρους.

§ 102) Τὸ κοινὸν κλάσμα, κατὰ τ' ἀνωτέρω, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δὲν εἶναι ἀνάγωγον. Ὅταν καταστήσωμεν αὐτὸ ἀνάγωγον ὁ παρανομαστὴς μεταβάλῃ μορφήν· ἀλλὰ καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγήν, ὁ παρανομαστὴς θὰ περιέχῃ τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τόσας φορὰς ὅσας καὶ πρὸ τῆς ἀναγωγῆς. Πράγματι οἱ παράγοντες 2 καὶ 5 δὲν διαιροῦσι συγχρόνως καὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, διότι ἐὰν διῄρῃ αὐτόν, οὗτος θὰ ἔληγεν εἰς μηδὲν καὶ διότι προέρχεται ἐξ ἀφαιρέσεως ἔπρεπε τὸ τελευταῖον ψηφίον τῶν ἀφαιρουμένων ἀριθμῶν, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμ. π. χ. $\frac{83672-836}{99000}$, νὰ εἶναι τὸ αὐτό, τοὐτέστι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος νὰ λήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον εἰς τὸ ὁποῖον καὶ ἡ περίοδος, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν συμβαίνει, διότι τότε ἡ περίοδος ἤθελεν ἀρχίζει ἓν ψηφίον ἐνωρίτερον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς μηδὲν καὶ ὅταν τὸ κλάσμα καταστῇ ἀνάγωγον, ὁ παρανομαστὴς θέλει διατηρήσει τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τόσας φορὰς ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ ἢ ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Ὁ παρανομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος ἐξ οὗ προκύπτει τὸ μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα περιέχει τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοσάκις ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.***

§ 103) ***Συμπέρασμα.*** Ἐκ τῶν θεωρημάτων § 100 καὶ § 102 ἐξάγεται: ***1) Ὅταν ὁ παρανομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα καὶ 2) ὅταν ὁ παρανομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους καὶ ἄλλους πρώτους παράγοντας τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.***

Ἀσκήσεις

116) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$ αὐξανόμενα κατὰ τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ καὶ ἐλαττούμενα κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ μᾶς δίδουν τὸν ἀριθμὸν 43;

117) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 23 ἐλαττοῦται κατὰ τὰ $\frac{7}{11}$ αὐτοῦ;

118) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{\nu.(\nu+1)}$.

119) Πόσα κλάσματα ὑπάρχουν ἰσοδύναμα πρὸς τὸ $\frac{21}{35}$ καὶ ἔχοντα μικροτέρους ὅρους τούτου;

120) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{378}{630}$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 40.

121) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{5}{7}$ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων νὰ εἶναι 12;

122) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι τῶν ὁποίων τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{4}{7}$ καὶ ὁ μ.κ.δ. 25.

123) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{16}{28}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουν μ.κ.δ. 25.

124) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{20}{48}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι ἔχουν ἐ.κ.π. 720.

125) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν γινόμενον 880 καὶ ἐ.κ.π. 220.

126) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ ἀναγώγου κλάσματος τρεπόμενον εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα εἶναι ἐπίσης ἀνάγωγον κλάσμα.

127) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{2\alpha+1}$, $\frac{\alpha}{3\alpha+1}$, $\frac{\alpha}{4\alpha+1}$, $\frac{\alpha}{5\alpha+1}$ κλπ. ὅπου α ἀκέραιος, εἶναι ἀνάγωγα.

128) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{2\nu+1}{3\nu+1}$, $\frac{3\nu+1}{4\nu+1}$, $\frac{4\nu+1}{5\nu+1}$ κλπ. ὅπου ν ἀκέραιος, εἶναι ἀνάγωγα.

129) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον, τότε $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$ εἶναι κλάσματα ἀνάγωγα.

130) Νὰ εὑρεθοῦν τρία κλάσματα κατὰ σειρὰν ἴσα μὲ τὰ $\frac{8}{12}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{21}{33}$ καὶ τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τοὺς ἐλαχίστους ὅρους καὶ τοιαῦτα ὥστε ὁ ἀριθμητὴς ἑκάστου νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν παρανομαστὴν τοῦ προηγουμένου.

131) Ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, τὸ κλάσμα $\frac{\beta-\alpha}{\beta}$ θὰ εἶναι ἐπίσης ἀνάγωγον;

132) Ποία ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα κλάσμα ἀνάγωγον ἰσοῦται πρὸς ἕτερον, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι δύναμις τοῦ 150.

133) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν εἰς κλάσμα προσθέσωμεν τὸ ἀντίστροφόν του εὑρίσκομεν ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ 2.

134) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἀναγώγου κλάσματος καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

135) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ ἀναγώγου κλάσματος καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

136) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἐκτὸς ἐὰν οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν εἶναι ἴσοι.

137) Πότε τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἐπίσης ἀνάγωγον κλάσμα;

138) Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

139) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν προστεθῇ ὁ παρανομαστὴς αὐτοῦ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του νὰ προκύπτῃ κλάσμα διπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ.

140) Πότε τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

141) Πότε τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἐπίσης κλάσμα ἀνάγωγον;

142) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α, $\frac{5}{7}:\frac{8}{\alpha}=\frac{45}{56}$ καὶ $\frac{5}{\beta}:\frac{8}{9}=\frac{45}{56}$

143) Πότε τὸ πηλίκον δύο ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος;

144) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ε. κ. π. τῶν κλασμάτων $\frac{24}{50}$; $\frac{54}{93}$ ἤτοι τὸν ἐλάχιστον ἐκ τῶν ἀκεραίων, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος δι' ἑκατέρου τῶν κλασμάτων τούτων δίδει ὡς πηλίκα ἀκεραίους ἀριθμούς.

145) Ἡ ἀξία συνθέτου κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

146) Ἐὰν κλάσμα τι εἶναι ἀνάγωγον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ πᾶσα δύναμις αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης κλάσμα ἀνάγωγον.

147) Ποῖον μέρος τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἶναι ἡ δευτέρα αὐτοῦ δύναμις καὶ ποῖον ἡ τρίτη;

148) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}<1$ τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ διατί;

149) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α ἔχομεν $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$;

150) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ἁπλῶν περιοδικῶν κλασμάτων εἶναι ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα. Ἐπίσης δέ, ἐὰν τὸ ἓν τῶν κλασμάτων γίνῃ ἀκέραιος.

151) Ἐκ τοῦ γινομένου δύο μικτῶν περιοδικῶν ποίου εἴδους κλάσμα λαμβάνομεν; Ἐπίσης ἐὰν τὸ ἓν τῶν κλασμάτων γίνῃ ἀκέραιος.

152) Εἶναι ἕνα κλάσμα ὡρισμένον ἢ ἀόριστον; Ὅταν μᾶς προτείνουν νὰ εὕρωμεν πολλαπλάσιον τοῦ 13, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία νὰ εἶναι 9.

153) Τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ ὁ παρανομαστὴς εἶναι πρῶτος πρὸς τοὺς 2, 3, 5 νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

1) Περὶ τετραγωνικῆς ρίζης

Προτάσεις τινὲς τετραγώνων τελείων καὶ μὴ

§ 104) ***Τὸ τετράγωνον ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν*** Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι: $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta).(\alpha+\beta) = \alpha.\alpha+\alpha.\beta+\alpha.\beta+\beta.\beta = \alpha^2+\beta^2+\alpha.\beta+\alpha.\beta$ ἤτοι $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+\alpha\beta$ (1) διότι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων ἀριθμῶν αβ καὶ αβ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ αβ ἡ ἀνωτέρω σχέσις (1) γίνεται $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$. ἐξ ἧς ἕπεται τὸ θεώρημα:

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν σὺν τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

Ἐφαρμογή $(5+1)^2 = 5^2+1^2+2.5.1 = 25+1+10 = 36$ ἤτοι τὸ αὐτὸ μὲ $6^2=36$.

§ 105) ***Τὸ τετράγωνον γινομένου ἀριθμῶν.*** Ἔσω τὸ γινόμενον α . β . γ. Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι $(\alpha.\beta.\gamma)^2$

$=(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma)\,(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma)=\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma=\alpha\,.\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\beta\,.\,\gamma\,.\,\gamma$ $=\alpha^2\,.\,\beta^2\,.\,\gamma^2$ ἤτοι $(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma)^2=\alpha^2\,.\,\beta^2\,.\,\gamma^2$. Ἐξ ἧς ἕπεται τὸ θεώρημα: ***Τὸ τετράγωνον τοῦ γινομένου ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γιόμενον τῶν τετραγώνων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.***

Ἐφαρμογὴ $(2\,.\,3\,.\,4)^2=2^2\,.\,3^2\,.\,4^2=4\,.\,9\,.\,16=576$. ἤτοι τὸ αὐτὸ μὲ $(2\,.\,3\,.\,4)^2=24^2=576$.

§ 106) ***Τὸ τετράγωνον δυνάμεως.*** Ἔστω ἡ δύναμις α^ν τῆς ὁποίας θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον. Τοῦτο εἶναι $(\alpha^\nu)^2=\alpha^\nu\,.\,\alpha^\nu=\alpha^{\nu+\nu}=\alpha^{\nu 2}$ ἤτοι $(\alpha^\nu)^2=\alpha^{2\nu}$ ἐξ ἧς ἕπεται τὸ θεώρημα : ***Τὸ τετράγωνον δυνάμεως ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην διπλάσιον.***

Ἐφαρμογὴ $(2^3)^2=2^6=64$, τὸ αὐτό μὲ $(2^3)^2=8^2=64$

§ 107) ***Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ ἀκεραίου.*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 30. Οὗτος οὐδενὸς ἀκεραίου εἶναι τετράγωνον. Ἄς ἐξετάσωμεν, μήπως εἶναι τετράγωνον κλάσματος. Δεχόμεθα πρὸς στιγμὴν ὅτι ὁ 30 εἶναι τετράγωνον ἀναγώγου κλάσματος, ἔστω τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἤτοι $30=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ (β΄ πόρ. § 68) εἶναι ἀνάγωγον. Ὥστε ἡ ἰσότης $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=30$ εἶναι ἀδύνατος, ἐφ' ὅσον ὁ α^2 δὲν διαιρεῖται διὰ β^2. Ἑπομένως προκύπτει τὸ θεώρημα : ***Ἐὰν ἀκέραιος δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου δὲν εἶναι οὔτε κλάσματος.***

§ 108) ***Πότε ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον ἄλλου;*** Ὡς προηγουμένως ἀνεπτύξαμεν, ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον μόνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Παντὸς δὲ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων κατὰ τὰ θεωρήματα § 105 καὶ § 106 τὸ τετράγωνον σχηματίζεται διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων· συνεπῶς οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του δέον νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἄρτιοι.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν οὗτος (τοῦ ὁποίου οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσι ἐκθέτας ἀριθμοὺς ἀρτίους) εἶναι τετράγωνον ἄλλου, διότι διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας διὰ 2 λαμβάνομεν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα· π. χ. $2^4\,.\,3^6\,.\,5^2$. οὗτος εἶναι τετράγωνον τοῦ $2^2.3^3.5$

διότι $(2^2 . 3^3 . 5)^2 = 2^4 . 3^6 . 5^2$. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα : ***Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς τετράγωνον ἄλλου, πρέπει οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἄρτιοι.***

§ 109) *Χαρακτῆρες τετραγώνου.* Τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 εἶναι 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ἤτοι τὰ ψηφία εἰς τὰ ὁποῖα καταλήγουσι τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἶναι 1, 4, 5, 6, 9. Οὐδὲν δὲ λήγει εἰς 2, 3, 7, 8. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον σχηματίζονται τὰ τετράγωνα ἐν γένει τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐξάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ τετράγωνον οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων. Ἐπὶ πλέον, ἐὰν παρατηρήσωμεν θὰ ἴδωμεν ὅτι ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς μηδενικά, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ λήγῃ εἰς διπλάσια τὸν ἀριθμὸν μηδενικὰ π. χ. $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$, $1000^2 = 1000000$ κ. ο. κ. ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: *Ἀκέραιος ἀριθμὸς καταλήγων εἰς ἓν τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8 ἢ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ.*

§ 110) *Πότε ἕνα κλάσμα ἀνάγωγον εἶναι τετράγωνον;*

Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος (§ 107) δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος, διότι παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι ἀκέραιος καὶ οὐχὶ κλάσμα. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον κλάσματος τινός, ἔστω τοῦ $\frac{\rho}{\nu}$ (καθιστώμενον ἀνάγωγον). Ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2 = \frac{\rho^2}{\nu^2}$

Ἤτοι τὸ $\alpha = \rho^2$ καὶ $\beta = \nu^2$. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα: *Διὰ νὰ εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον τέλειον τετράγωνον ἀριθμοῦ τινός, ὀφείλει κάθε ἕνας τῶν ὅρων αὐτοῦ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ.*

§ 111) *Τετραγωνικὴ ῥίζα. Τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν* π. χ. τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 81 εἶναι ὁ 9. διότι $9^2 = 81$ ὁμοίως τοῦ $\frac{4}{25}$ εἶναι ὁ $\frac{2}{5}$ διότι $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$. Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 25 σημειοῦμεν οὕτω $\sqrt{25}$ καὶ τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ καλεῖται ριζικόν. Ἄρα $\sqrt{81}=9$, $\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$ Ἤτοι κατὰ τὸν ὁρισμὸν μόνον τὰ τέλεια τετράγωνα ἔχουσι ἀκριβῶς τετραγωνικὴν ρίζαν. (Ὁ ὑπὸ τὸ ριζικὸν ἀριθμὸς καλεῖται ὑπόρριζον).

§ 112) ***Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος.*** Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 30, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ, ὀφείλει νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 6, διότι $5^2=25$ καὶ $6^2=36$, ἄρα $\sqrt{30}$ θὰ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 5 καὶ μικρότερος τοῦ 6. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι $\sqrt{30}=5$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος· παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν μικροτέρων τοῦ 6 ἀριθμῶν, εἶναι μικρότερα τοῦ 30. Ἄρα ἕπεται : ***Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ, κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, καλεῖται ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι μικρότερα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*** π. χ. $\sqrt{17}=4$, $\sqrt{20}=4$, $\sqrt{47}=6$, κ. ο. κ.. Ὁμοίως τῶν $\frac{30}{5}$ καὶ $\frac{174}{9}$ αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 2 καὶ 4.

§ 113) ***Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν*** $\frac{1}{\nu}$. Ἔνθα ν ἀκέραιος ἀριθμός. Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ τινὸς κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ καλεῖται τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρανομαστὴν ν καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα περιλαμβάνονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ εἶναι τὸ $\frac{\mu}{\nu}$, ὅταν εἶναι τὸ $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \leq A < \left(\frac{\mu+1}{\nu}\right)^2$.

Ἵνα ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ Α εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$ πρέπει νὰ ἀληθεύουσιν αἱ σχέσεις $\mu^2 \leq A \cdot \nu^2 < (\mu+1)^2$ ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ὅτι ὁ μ εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου $A \cdot \nu^2$ π. χ. ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ 7 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ ζητουμένη τετραγ. ῥίζα θὰ εἶναι κλάσμα τὸ $\frac{\mu}{10}$, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἀληθεύουν αἱ σχέσεις $\left(\frac{\mu}{10}\right)^2 \leqq 7 < \left(\frac{\mu+1}{10}\right)^2$ ἢ $\mu^2 \leqq 7 \,.\, 10^2 < (\mu+1)^2$ ἔνθα μ εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετρ. ῥίζα τοῦ 700 ἤτοι $\mu=26$, ἡ ζητουμένη ἄρα τετραγ. ῥίζα τοῦ 7 εἶναι $\frac{26}{10}=2{,}6$. Ὅθεν: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τετρ. ῥίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ Α πολλαπλασιάζομεν τὸν Α ἐπὶ ν^2 καὶ τὴν ἀκριβῆ ἢ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τετραγ. ῥίζαν τοῦ Α . ν^2 διαιροῦμεν διὰ ν.***

§ 114) ***Ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς ῥίζης.*** Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καλεῖται ***ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ.***

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀκριβῶς καὶ ἐφ' ὅσον μὲν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 100 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 10 καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν πάντα τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἕπεται ὅτι τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου εὑρίσκομεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς αὐτὸν ἀπὸ τοῦ ἰδίου καλεῖται. ***Ὑπόλοιπον τῆς πράξεως καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης***, διότι ἐὰν η εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ τινος Α θὰ εἶναι $\eta^2 < A < (\eta+1)^2$, διότι δὲ $(\eta+1)^2 = \eta^2 + 1 + 2 \,.\, \eta$ ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ η^2 ἀπὸ $(\eta+1)^2$ εἶναι ἡ $2\,\eta+1$.

Τὴν εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος μεγαλυτέρου τοῦ 100 στηρίζομεν ἐπὶ τῶν ἑπομένων.

§ 115) Ὡς καὶ εἰς τὴν § 109 ἀναφέρομεν $10^2=100$,

$100^2=10000$, $1000^2=1000000$, κ.ο.κ. ἤτοι $\sqrt{100}=10$, $\sqrt{10000}=100$, $\sqrt{1000000}=1000$ κ. λ. π. Ὅθεν ἕπεται: ***Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀποτελῆται ἀπὸ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα του, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικὰ κατὰ τὸ ἥμισυ τῶν μηδενικῶν τοῦ ἀριθμοῦ.***

§ 116) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5527. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς διψήφιος διότι $100<5527<10000$, ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τοῦ 5527, εἶναι ἴσος μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλυτέρου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκαταντάδων τοῦ 5527, ἤτοι εἰς τὸν 55, ὅτι δηλαδὴ αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5527 εἶναι 7, διότι τὸ τετράγωνον τῶν 7 δεκάδων ἤτοι $70^2=4900$, ἐν ᾧ τὸ $80^2=6400$ ἤτοι τὸ τετράγωνον τῶν 8 δεκάδων ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 5527. Ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 5527 εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 70 καὶ μικρότερος τοῦ 80. Ὅθεν ἕπεται: ***Ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 100 εἶναι ἴσος μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.***

§ 117) Ἐπὶ τοῦ θέματος τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 70 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνομεν $5527-4900=627$. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο διαιροῦντες διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἤτοι τοῦ 14 λαμβάνομεν 4. λέγομεν ὅτι αἱ μονάδες τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης θὰ εἶναι 4 ἢ ὀλιγώτεραι τῶν 4, διότι κατὰ τὸ θεώρημα § 104 ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 5527 θὰ περιέχῃ 1) τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, 2) τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, 3) τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ 4) τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Διότι ὅμως ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ 5527 τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, τὸ ὑπόλοιπον ὀφείλει νὰ περιέχῃ τὰ τρία λοιπά, ἐπειδὴ δὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας εἶναι ἀριθμὸς δεκάδων θὰ περιέχηται εἰς τὰς 62 δεκάδας τοῦ 627, ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων ἤτοι διὰ τοῦ 14, τὸ πηλίκον 4 δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερον, διότι εἰς τὰς 62 δεκάδας εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχωνται πλὴν τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ μερικαὶ δεκάδες προερχόμεναι ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἢ καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πράξεως. Ὅθεν ἕπεται: ***Ὅταν ἀπὸ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτοῦ καὶ μετὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου διαιρεθῇ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τὸ προκύπτον πηλίκον εἶναι ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.***

§ 118) Ἤδη ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ 5527 ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 552765 ὅστις προκύπτει ἂν προσγράψωμεν δύο ψηφία πρὸς τὰ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ. Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ εὑρίσκομεν σκεπτόμενοί οὕτω:

Ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 552765 εἶεαι ἴσος μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλειτέρου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ 552765 ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 5527, ἐπειδὴ ὅμως ἡ τετραγωνική ῥίζα εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ 74 αἱ δεκάδες τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 552765 εἶναι 74. Τὸ τετράγωνον ἤδη τοῦ 74 ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 5527 μᾶς δίδει ὑπόλοιπον 51. Ἐπειδὴ τὸ 74^2 θὰ παριστᾶ ἑκατοντάδας, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τοῦτο ἀπὸ τοῦ 5527 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 552765 καὶ δεξιά τοῦ ὑπολοίπου νὰ γράψωμεν τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ἤτοι εἰς τὸ ὑπόλοιπον $(5527-5476)=51$ γράψωμεν δεξιὰ τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπα 5165.

Ἐὰν τὸν ἀριθμόν τῶν δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου τούτου ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 5165, διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων, τῆς τετρ. ῥίζης ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 148 τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετρ. ῥίξης τοῦ ἀριθμοῦ 552765. Ὥστε ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι **743 καὶ μὲ ὑπόλοιπον 716.**

§ 119) Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν παντὸς ἀριθμοῦ μεγαλειτέρου τοῦ 100. Π. χ. τοῦ 67845296 ἡ τετρ. ρίζα εὑρίσκεται, ἂν εὕρωμεν τοῦ 678452 ἀποκόπτοντες τὰ δύο τελευταία ψηφία αὐτοῦ καὶ τούτου εὑρίσκεται ἂν γνωρίζωμεν τὴν τοῦ 6784 καὶ ἵνα εὕρωμεν τὴν τοῦ 6784 ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τοῦ 67, διότι δὲ ὁ 67 εἶναι μικρότερος τοῦ 100, τούτου ἡ τετρ. ρίζα εὑρίσκεται ἀπὸ μνήμης.

§ 120) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομογ τὸν κανόνα τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγ. ρίζης παντὸς ἀριθμοῦ ἀκεραίου.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετρ. ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγισιν μονάδος, χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τ'ἀριστερὰ τμήματος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ πρῶτο ψηφίον τῆς ρίζης. Τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τούτου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος καὶ δεξιὰ τοῦ προκύπτοντος ὑπολοίπου γράφομεν τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα. Τοῦ προκύπτοτος ἀριθμοῦ χωρίζομεν τὰς μονάδας καὶ τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς τετρ. ρίζης. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ β'. φηφίου τῆς ρίζης, τὸ ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τοῦ διαιρέτου καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ αὐτὸ πηλίκον, καὶ ἄν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τάς δεκάδας διῃρέσαμεν, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης καὶ γράφομεν αὐτό δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ρίζη, εἰ δ' ἄλλως δοκιμάζομεν, ὁμοίως τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ. ο. κ. ἕως ὅτου εὕρωμεν ψηφίον τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ ἀφαιρεῖται. Δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου γράφομεν τὸ ἀκόλουθον διψήφιον τμῆμα καὶ τοῦ σχηματιζομένου ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων, διὰ τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Τὸ πηλίκον τοῦτο γράφομεν δεξιὰ τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν μὲ τὸ πηλίκον καὶ ἐὰν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν τὰς δεκάδας, τότε τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς τετρ. ῥίζης. ἄλλως δοκιμάζομεν μὲ τὸ μικρότερον κατὰ μονάδα κ. ο. κ. ἐξακολουθοῦμεν ἐργαζόμενοι ὁμοίως, ἕως ὅτου καταβιβασθῶσιν ὅλα τὰ διψήφια τμήματα τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Διάταξι- τῆς πράξεως

55'27'65	743	
49	144	1483
=62.7	4	3
576	576	4449
= 516.5		
4449		
=716		

ἄρα $\sqrt{552765}=743$
κατὰ προσέγισιν μονάδος.
Δοκιμὴ $743^2+716=552765$.

21'76	46	
16	87(*)	86
=57.6	7	6
516	609	516
60		

ἄρα $\sqrt{2174}=46$
κατὰ προσέγγισιν μονάδος
Δοκιμὴ $46^2+60=2176$.

Παρατηρήσεις α΄.) Ἐὰν κατά τινα διαίρεσιν πρὸς εὕρεσιν τῶν ψηφίων τῆς τετρ. ῥίζης, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὴν δοκιμὴν ἀπὸ τοῦ 9, β΄.) Ἐάν κατά τινα διαίρεσιν τῶν ψηφίων, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου εἶναι μηδέν, τότε τὸ ἀντιστοιχοῦν ψηφίον τῆς τετραγ. ῥίζης εἶναι μηδέν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὅλος ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἀποκόψαντες τὸ τελευταῖον ψηφίον ἐσχηματίσαμεν τὸν διαιρετέον, καὶ μετὰ ταῦτα καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ, ἐξακολουθοῦντες τὴν πρᾶξιν, γ΄.) ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετραγ. ῥιζης εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ ἀριθμός. Τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον καὶ δ΄,) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς ρίζης.

§ 121) ***Τετραγωνικὴ ῥίζα κλάσματος.*** Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγ. ῥίζα τῶν:

(*) διότι τὸ γινόμενον 87 . 7=609 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 576 καὶ δὲν διαιρεῖται, λαμβάνομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, τὸ 6, ἤτοι 86 . 6=516 τὸ ὁποῖον καὶ ἀφαιρεῖται.

1) $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ διότι $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\sqrt{2\frac{5}{16}}=\sqrt{\frac{37}{16}}=\frac{6}{4}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{4}$ διότι τὸ $\frac{6}{4}$ εἶναι τό μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ κλάσματα μὲ παρανομαστὴν 4 τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα χωροῦν εἰς τὸν $2\frac{5}{16}=\frac{37}{16}$

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ $6\frac{3}{4}$· Αὕτη εἶναι : $\sqrt{6\frac{3}{4}}=2$ ἤτοι τοῦ ἀκεραίου μόνον μέρους.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ $\frac{5}{8}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$. Αὕτη εἶναι

$\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{5.8}{8.8}}=\sqrt{\frac{40}{64}}=\frac{6}{8}$.

§ 122) ***Τετραγωνικὴ ῥίζα δεκαδικῶν.*** Ἡ τετρ. ῥίζα τῶν:

1) $\sqrt{42,35}=6$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

3) $\sqrt{42,35}=6,5$ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

3) $\sqrt{0,019}=\sqrt{0,0190}=0,13$ κατὰ προσέγγισιν 0,01·

Ἤτοι διὰ νὰ ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὡς νὰ εἶναι ἀκέραιος, ἄν δὲ δὲν ἔχῃ ἄρτιον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων γράφομεν εἰς τὸ τέλος ἕν μηδὲν καὶ οὕτω ἐνῷ ὁ μὲν ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ἐν τούτοις ἔχομεν εὐκολίαν κατὰ τὸν χωρισμὸν τῶν διψηφίων τμημάτων· εἰς τὴν εὑρισκομένην τετραγωνικὴν ῥίζαν χωρίζομεν δεκαδικὰ ψηφία ἐκ δεξιῶν δύο φορὰς ὀλιγώτερα ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ ἀκεραίου μόνον μέρους.

2) Λόγοι καὶ ἀναλογίαι

§ 123) ***Λόγος δύο ἀριθμῶν.*** Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β. Τὸ πηλίκον αὐτῶν α : β ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ καλεῖται λόγος. Ὥστε πᾶν κλάσμα εἶναι λόγος τῶν ὅρων αὐτοῦ : Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος (τοῦ λόγου) λέγεται ἡγούμενος καὶ ὁ παρανομαστὴς λέγεται ἑπόμενος, ἀμφότεροι λέγονται ὅροι τοῦ λόγου. Ὁ α καὶ β ὀφείλουν νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

§ 124) ***Ἀναλογία.*** Ἔστωσαν οἱ λόγοι α΄) $\frac{8}{4}$ καὶ $\frac{6}{3}$, β΄) $\frac{15}{5}$ καὶ $\frac{21}{7}$. Παρατυροῦμεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ λόγοι τοῦ α΄) παραδείγματος εἶναι ἴσοι πρὸς 2 καὶ ἀμφότεροι οἱ λόγοι τοῦ β΄) παραδείγματος εἶναι ἴσοι πρὸς 3. Ὅταν ὑπάρχῃ τοιαύτη περίπτωσις, ἤτοι δύο λόγοι νὰ εἶναι ἴσοι, τότε τὴν ἰσότητα αὐτῶν καλοῦμεν ἀναλογίαν. Ἄρα: ***Ἀναλογία καλεῖται ἡ ἰσότης δύο λόγων*** καὶ παρίσταται αὕτη συμβολικῶς ὡς ἀκολούθως $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$ ἢ $8:4=6:3$, $\frac{15}{5}=\frac{21}{7}$ ἢ $15:5=21:7$ καὶ γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$. Ἀπαγγέλλεται δὲ ἡ ἀναλογία οὕτω α πρὸς β ὡς γ πρὸς δ ἢ α διὰ β ὡς γ διὰ δ. Οἱ δύο λόγοι μιᾶς ἀναλογίας καλοῦνται ὅροι αὐτῆς. Ὁ ἡγούμενος τοῦ α΄ λόγου καὶ ὁ ἑπόμε**νος** τοῦ β΄ λόγου ἀποτελοῦν τοὺς ἄκρους ὅρους τῆς ἀναλογίας· ὁ ἑπόμενος τοῦ α΄ λόγου καὶ ὁ ἡγούμενος τοῦ β΄ λόγου ἀποτελοῦν τοὺς μέσους ὅρους τῆς ἀναλογίας. Ὅταν μιᾶς ἀναλογίας οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τότε ἡ ἀναλογία καλεῖται ***συνεχὴς*** π. χ. ἡ ἀναλογία $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$ ἢ $8:4=4:2$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ 4 λέγεται μέσος ἀνάλαγος τῶν δύο ἄκρων, γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\delta}$. Εἰς ἀναλογίαν οἱ ὅροι αὐτῆς, οἱ λόγοι, δυνατὸν νὰ εἶναι ἑτεροειδεῖς· π.χ. ὁ μὲν πρῶτος λόγος δύναται ν' ἀναφέρεται ἐπὶ γραμμῶν, ὁ δὲ δεύτερος λόγος ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

§ 125) ***Πῶς σχηματίζομεν ἀναλογίαν***; Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἀναλογίαν γράφομεν τυχὸν κλάσμα π. χ. $\frac{5}{8}$ καὶ πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τούτου ἐπὶ τυχόντα ἀριθμὸν π. χ. τὸν 3, οὕτω λαμβάνομεν κλάσμα ἴσον μὲ αὐτό, τὸ $\frac{15}{24}$. Τά δύο κλάσματα ἀποτελοῦν ἀναλογίαν ἤτοι $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν συνεχῆ ἀναλογίαν γράφομεν τυχόντα ἀριθμὸν π.χ. τὸν 5, τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τυχόντα ἀριθμὸν π.χ. τὸν 4, ὅτε λαμβάνομεν τὸν 20, τὸν ὁποῖον γράφομεν δὶς ὡς κοινὸν μέσον ὅρον καὶ κατόπιν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τετάρτου ἀρίθμοῦ πολλαπλασιάζομεν τοῦτον τὸν 20 ἐπὶ τὸν· αὐτὸν ἀριθμὸν 4 ἤτοι $\frac{5}{5.4}=\frac{5.4}{5.4.4}$ ἢ $\frac{5}{20}=\frac{20}{80}$.

§ 126) ***Ποῖα σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἄκρων καὶ μέσων ὅρων.*** Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Κατὰ τὴν § 6 λαμβάνομεν $\frac{\alpha}{\beta}.(\beta.\delta)=\frac{\gamma}{\delta}(\beta.\delta)$ ἢ $\alpha.\delta=\beta.\gamma$. Τῆς ἰσότητος αὐτῆς παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτον μὲν μέλος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων, τὸ δεύτερον δὲ μέλος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων. Ἄρα ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων πάσης ἀναλογίας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.***

§ 127) ***Τὶ ἐκφράζουν τέσσαρες ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν γραμμένοι, ὅταν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων;*** Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, τῶν ὁποίων εἶναι : $\alpha.\delta=\beta.\gamma$ (1). Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ $\beta.\delta$ λαμβάναμεν $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ ἑπομένως ἴσα πηλίκα, ἡ δὲ ἰσότης τῶν πηλίκων τούτων ὡς λόγων θεωρουμένων εἶναι ἀναλογία. Ἄρα ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Ἐὰν τεσσάρων ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν γραμμένων τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὡς εἶναι γραμμένοι ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.***

§ 128) ***Μία ἀναλογία τεσσάρων ἀριθμῶν δύναται νὰ γραφῇ κατὰ 8 διαφόρους τρόπους.*** Ἔστω ἡ ἀναλογία 1) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\alpha.\delta=\beta.\gamma$ (A). Ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (A) διαιροῦντες διὰ τοῦ γδ, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν 2) $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$, ὁμοίως διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (A) διὰ τοὺ αβ λαμβάνομεν τὴν ἀνακοδίαν 3) $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$, ὁμοίως διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (A) διὰ τοῦ αγ λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν 4) $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἀντιστρέφοντας τὰ μέλη τῶν ἀναλογιῶν 1, 2, 3 καὶ 4, λαλβάνομεν ἀντιστοίχως τὰς κάτωθι ἀναλογιας

5) $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$, 6) $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}$, 7) $\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ 8) $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν: ***Ὅτι ἐὰν ἀναλογίας μεταθέσωμεν 1) τοὺς μέσους ὅρους, 2) ἄκρους ὅρους, 3) συγχρόνως μέσους καὶ ἄκρους ὅρους καὶ 4) κάμωμεν τοὺς μέσους ἄκρους καὶ τ' ἀνάπαλιν, ἡ ἀναλογία ἐξακολουθεῖ ὑπάρχουσα.***

§ 129) ***Σχέσις μεταξὺ τῶν ἑπομένων δύο ἀναλογιῶν, ὅταν οἱ ἡγούμενοι εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.*** Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ καὶ $\alpha : \eta = \gamma : \kappa$ ἂν μεταθέσωμεν τοὺς μέσους ἀμφοτέρων τῶν δοθεισῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ καὶ $\alpha : \gamma = \eta : \kappa$, ὧν τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα, διότι τὰ πρῶτα εἶναι τὰ αὐτά· ἤτοι $\beta : \delta = \eta : \kappa$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Ὅταν οἱ ἡγούμενοι δύο ἀναλογιῶν εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, οἱ ἑπόμενοι ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.***

§ 130) ***Πρόβλημα. Δοθέντων τριῶν ὅρων ἀναλογίας νὰ εὑρεθῇ ὁ τέταρτος.*** Ὡς γνωστὸν εἰς τὴν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, ἐφ' ὅσον οἱ τρεῖς ἐκ τῶν τεσσάρων ὅρων θὰ εἶναι γνωστοὶ ὁ ἄγνωστος θὰ εἶναι ἢ εἷς τῶν μέσων ἢ εἷς τῶν ἄκρων ὅρων καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ποῦ θὰ εἶναι εἷς τῶν ἄκρων τότε τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ γνωστὸν ἄκρον θὰ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν γνωστῶν μέσων. Ὅθεν: ***Ὁ ἄγνωστος ἄκρος θὰ ἰσοῦται τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.*** π. χ. ὁ ἄγνωστος διὰ τοῦ κ σημειούμενος ἄκρος τῆς ἀναλογίας — $\frac{6}{9}=\frac{8}{\kappa}$ δίδεται διὰ $\kappa=\frac{8 . 9}{6}=12$ (ἀνάλυσις $\frac{6}{9}=\frac{8}{\kappa}$, $6 . \kappa = 8 . 9$, $\frac{6 . \kappa}{6}=\frac{8 . 9}{6}$, $\kappa=\frac{8 . 9}{6}$).

Ἐὰν δὲ ὁ ἄγνωστος εἶναι εἷς τῶν μέσων ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτος εὑρίσκεται ἂν ***διαιρέσωμεν τὸ γινόμενων τῶν γνωστῶν ἄκρων διὰ τοῦ ἑτέρου γνωστοῦ μέσου*** π. χ. τῆς ἀναλογίας $\frac{6}{\chi}=\frac{12}{8}$ ἧς ὁ ἄγνωστος εἶναι ὁ μέσος εὑρίσκεται $\chi=\frac{6 . 8}{12}=4$ (ἀνάλυσις $\frac{6}{\chi}=\frac{12}{8}$, $6 . 8 = \chi . 12$, $\frac{6 . 8}{12}=\frac{\chi . 12}{12}$, $\chi=\frac{6 . 8}{12}$)

§ 131) Ἔστωσαν οἱ ἴσοι λόγοι $\alpha : \beta = \gamma : \delta = \kappa : \mu = \nu : \rho$ ὧν τὸ πηλίκον σημειοῦμεν διὰ τοῦ π. Ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$\left.\begin{aligned} \alpha : \beta &= \pi \\ \gamma : \delta &= \pi \\ \kappa : \mu &= \pi \\ \nu : \rho &= \pi \end{aligned}\right\} \text{ ἢ } \begin{aligned} \alpha &= \beta \,.\, \pi \\ \gamma &= \delta \,.\, \pi \\ \kappa &= \mu \,.\, \pi \\ \nu &= \rho \,.\, \pi \end{aligned} \quad \text{καὶ}$$

$$\alpha+\gamma+\kappa+\nu = \pi\,(\beta+\delta+\mu+\rho)$$ ἐξ ἧς

εἶναι $\frac{\alpha+\gamma+\kappa+\nu}{\beta+\delta+\mu+\rho} = \pi$ ἀλλὰ $\pi = \frac{\alpha}{\beta}$, ὅθεν $\frac{\alpha+\gamma+\kappa+\nu}{\beta+\delta+\mu+\rho} = \frac{\alpha}{\beta}$

Ὅθεν ἔπεται ἡ ἰδιότης: ***Εἰς ἴσους λόγους τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, τὸν λόγον τὸν ὁποῖον ἔχει οἱοσδήποτε τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἑπόμενον αὐτοῦ.***

Πόρισμα. Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.

§ 132) Ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Καλοῦντες μὲ π ἑκάτερον τῶν ἴσων λόγων ἤτοι

$\frac{\alpha}{\beta} = \pi$ λαμβάνομεν τὰς ἰσότητας $\alpha = \beta \,.\, \pi$

καὶ $\frac{\gamma}{\delta} = \pi$ καὶ $\gamma = \delta \,.\, \pi$. Αὐτὰς ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη ὅτε λαμβάνομεν: $\alpha - \gamma = \pi\,(\beta - \delta)$ καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς σχέσεως. λαμβάνομεν τὸν λόγον $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}$ ἴσον μὲ π ἤτοι $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta} = \pi = \frac{\alpha}{\beta}$ Ἐκ τῆς διπλῆς αὐτῆς ἰσότητος ἔχομεν $\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$. Ὅθεν ἔπεται τὸ θεώρημα.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει καὶ ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ.

§ 133) Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Ἐὰν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς λόγους αὐτῆς προσθαφαιρέσωμεν τὴν μονάδα λαμβάνομεν.

1) $\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\gamma}{\delta} + 1$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\delta}{\delta}$ ἢ $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ (A)

2) $\frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\gamma}{\delta}-1$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\delta}{\delta}$ ἢ $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$ (B)

Ἐκ τῶν (A) καὶ (B) ἕπεται τὸ θεώρημα. ***Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἡγουμένων προσθαφαιρέσωμεν τοὺς ἑπομένους λαμβάνομεν νέας ἀναλογίας.***

§ 134) ***Σχέσεις μεταξὺ τοῦ γινομένου τῶν ὁμοταγῶν ὅρων ἀναλογιῶν.*** (Χωριστὰ λαμβανόμενοι οἱ ἡγούμενοι ἢ οἱ ἑπόμενοι λέγονται ὁμοταγεῖς ὅροι). Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι.

$\alpha:\beta=\gamma:\delta$

$\varepsilon:\zeta=\eta:\theta$

$\tau:\kappa=\lambda:\mu$ καλοῦντες μὲ ν, ρ, σ τοὺς λόγους ἀντιστοίχως τῶν ἀνωτέρω ἀναλογιῶν λαμβάνομεν

$\alpha=\beta\,.\,\nu$ καὶ $\gamma=\delta\,.\,\nu$

$\varepsilon=\zeta\,.\,\rho$ $\quad\eta=\theta\,.\,\rho$

$\tau=\kappa\,.\,\sigma$ $\quad\lambda=\mu\,.\,\sigma$

ἄρα $\alpha.\varepsilon.\tau=\beta.\zeta.\kappa.\nu.\rho.\sigma$ καὶ $\gamma.\eta.\lambda=\delta.\theta.\mu.\nu.\rho.\sigma$

ἤτοι $(\alpha.\varepsilon.\tau)=(\beta.\zeta.\kappa).(\nu.\rho.\sigma)$ » $(\gamma.\eta.\lambda)=(\delta.\theta.\mu).(\nu.\rho.\sigma)$

ἐξ ὧν ἔχομεν $\frac{\alpha.\varepsilon.\tau}{\beta.\zeta.\kappa}=\nu.\rho.\sigma$ (1) καὶ $\frac{\gamma.\eta.\lambda}{\delta.\theta.\mu}=\nu.\rho.\sigma$ (2). Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha.\varepsilon.\tau}{\beta.\zeta.\kappa}=\frac{\gamma.\eta.\lambda}{\delta.\theta.\mu}$. Ὅθεν ἕπεται τὸ θεώρημα. ***Τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.***

Πόρισμα. *Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἀναλογίαν, τὰ τετράγωνα, οἱ κύβοι καὶ γενικῶς οἱαιδήποτε δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ συνιστῶσιν ἀναλογίαν* (διότι ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, δίς, τρὶς καὶ γενικῶς μ φορὰς καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ προηγούμενον θεώρημα καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα).

3) Διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως

§ 135) ***Δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως.*** Διὰ νὰ γράψωμεν ἀριθμόν τινα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, συνεφωνήσαμεν, ὅπως δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελῶσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἕκαστον δὲ ψηφίον γραφόμενον ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου δηλώνει μονάδας ἀνωτέρας κατὰ δέκα φορὰς τοῦ ἀμέσως δεξιὰ ψηφίου. Ὥστε κάθε ψηφίον ἔχει δύο τιμάς, μίαν ἀπόλυτον καὶ μίαν σχετικήν. Ἀπόλυτος εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία δηλώνει ἡ μορφή του, σχετικὴ δὲ ἐκείνη τὴν ὁποίαν δηλώνει ἡ θέσις τὴν ὁποίαν κατέχει εἰς τὸν ἀριθμόν. Εἰς τό δεκαδικόν σύστημα, μὲ τὸ ὁποῖον γράφομεν τοὺς ἀριθμούς, ὑπάρχει συμφωνία, διὰ τῆς ὁποίας δέκα μονάδες μιᾶς τάξεωςσχηματίζουν μίαν μονάδα ἀνωτέρας τάξεως π. χ. 1 ἁπλῆ μονάς,

10 ἁπλαῖ μονάδες σχηματίζουν μίαν μονάδα β′ τάξεως
10 μονάδες β′ τάξεως σχηματίζουν μίαν μονάδα γ′ τάξ.
10 μονάδες γ′ τάξεως σχηματίζουν μίαν μονάδα δ′ τάξεως κ.ο.κ. $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 \ldots\ldots$

§ 136) ***Πενταδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως.*** Θεωροῦμεν ἤδη τοὺς μονοψηφίους ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . , καὶ συμφωνοῦμεν, ὥστε πέντε ἁπλαῖ μονάδες νὰ ἀποτελοῦν μίαν μονάδα β′ τάξεως, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν πεντάδα, καὶ πάλιν πέντε πεντάδες ν' ἀποτελοῦν μίαν μονάδα γ′ τάξεως καὶ πάλιν πέντε πεντάδες τῆς γ′ τάξεως νὰ ἀποτελοῦν μίαν μονάδα δ′ τάξεως καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἡ συμφωνία αὕτη φανερώνει τὰ ἑπόμενα. Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 324 σημαίνει 4 ἁπλᾶς μονάδας καὶ 2 πεντάδας ἢ μονάδος β′ τάξεως (ἤτοι $2 \cdot 5 = 10$ ἁπλαῖ μονάδες) καὶ 3 μονάδας τῆς γ′ τάξδως (ἤτοι $3 \cdot 25 = 75$ ἁπλαῖ μονάδες) δηλαδὴ ἐν ὅλῳ $4 + 10 + 75 = 89$ ἁπλαῖ μονάδες εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Ἔχομεν τοιουτοτρόπως νέον σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν τὸ πέντε καὶ τὸ καλοῦμεν τοῦτο, ***σύστημα πενταδικόν.***

§ 137) ***Δωδεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως.*** Διὰ νὰ σχηματίσωμεν σύστημα ἀριθμήσεως μὲ βάσιν 12, παριστῶμεν δι' ἁπλῶν ψηφίων τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος προηγεῖται τοῦ **12.** π. χ. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β μεταχειριζόμεθα διὰ τοῦ 10 τὸ α καὶ διὰ τοῦ 11 τὸ β, δύο δηλαδὴ νέα σύμβολα. Συμφωνοῦμεν δέ, ὅπως δώδεκα ἁπλαῖ μονάδες ἀποτελοῦν μίαν μονάδα δευτέρας τάξεως, δώδεκα μονάδας β′ τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα γ′ τάξεως κ.ο.κ. Μεταχειριζόμεθα καὶ τὸ μηδέν, ὅπως καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα τοιουτοτρόπως, ἔχομεν διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως, δεκαδικόν, πενταδικόν, δωδεκαδικόν, τριαδικόν, δεκαπενταδικόν κλπ.

§ 138) Διάταξις μονάδων τῶν διαφόρων συστημάτων π.χ.

	Δεκαδικὸν	*Τριαδικὸν*	*Ὀκταδικὸν*
α΄ τάξ. (ἁπλαῖ μονάδες)	1	1	1
β΄ »	10	3	8
γ΄ »	$10^2=100$	$3^2=9$	$8^2=64$
δ΄ »	$10^3=1000$	$3^3=27$	$8^3=512$ κ.ο.κ.

Εἰς πᾶν δὲ σύστημα ἀριθμήσεως, πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τόσων ψηφίων (συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ μηδενὸς) ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τῆς βάσεως.

§ 139) ***Πρόβλημα Α΄. Ὁ ἀριθμὸς 674 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ.*** Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ 674 ἁπλαῖ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ (δεκαδικοῦ στατήματος) ἀπαρτίζουν τόσας μονάδας τῆς β΄. τάξεως, τοῦ πενταδικοῦ συστήματος, ἤτοι πεντάδες, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸ 5 εἰς τὸν ἀριθμὸν 674, διότι 5 μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀπαρτίζουν μίαν μονάδα τῆς ἑπομένης. Διαιροῦμεν τὸν 674 διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἀπαρτίζονται 134 μονάδες τῆς β΄. τάξεως καὶ μένουν 4 ἁπλαῖ μονάδες. Αἱ 134 μονάδες τῆς β΄. τάξεως, διαιρούμεναι διὰ 5 θὰ δώσωσι τὰς μονάδας τῆς γ΄. τάξεως, ὥστε τὸ πρῶτον πηλίκον διὰ 5 μᾶς δίδει τὰς μονάδας τῆς β΄. τάξεως, τὸ δεύτερον πηλίκον διὰ 5 μᾶς δίδει τὰς μονάδας τῆς γ΄. τάξεως, τὸ τρίτον πηλίκον διὰ 5, τὰς μονάδας τῆς δ΄. τάξεως κ. ο. κ. Τὸ τελευταῖον πηλίκον δίδει τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως, τὰ δὲ ἀμέσως διαδοχικὰ ὑπόλοιπα δίδουν τὰ διαδοχικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα καὶ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, δίδει τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως

674	5			
17	134 β΄τάξ.	5		
24	34	26 γ΄ τάξ.	5	
4	4 » »	1 » »	5 δ΄ τάξ.	5
ἁπλαῖ μονάδες			0 » »	1 ε΄ τάξ.

Οὕτω ὁ ἀριθμὸς 674 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος γράφεται ὡς 10144 εἰς το πενταδικὸν σύστημα.

§) 140) ***Πρόβλημα Β΄. Νὰ τραπῇ ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος 674 εἰς ἀριθμὸν τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος 674 εἰς ἀριθμὸν τοῦ δωδεκαδικοῦ.***

	674	12	
	74	56 β΄. τάξ.	12
ἁπλ. μον.	2	8 » »	4 γ΄. τάξ.

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 674 τοῦ δεκαδικοῦ εἰς τὸ δωδεκαδικὸν γράφεται 482.

§ 141) ***Πρόβλημα Γ΄. Ὁ ἀριθμὸς 534 τοῦ ἑξαδικοῦ συστήματος νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος. 1ος τρόπος.*** Ἀναλύομεν τὸν 534 εἰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχει:

4 μονάδας ἁπλᾶς ἢ τῆς α΄. τάξεως ἄρα . . . . 4 ἁπλαῖ
3 μονάδας τῆς β΄. τάξεως, ἐξ ὧν ἑκάστη περιέχει 6 ἁπλᾶς μονάδας, ἄρα 3 . 6 = ... 18 ἁπλαῖ
5 μονάδας τῆς γ΄. τάξεως, ἐξ ὧν ἑκάστη περιέχει 36 ἁπλᾶς μονάδας, ἄρα 5 . 36 = . . . 180 ἁπλαῖ
ἐν ὅλῳ 202 ἁπλαῖ

Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τοῦ ἑξαδικοῦ 534 εἰς τὸ δεκαδικὸν γράφεται 202.

2ος Τρόπος. Ἑκάστη μονὰς τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ἑξαδικοῦ συστήματος ἰσοδυναμεῖ πρὸς 6 μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως· ἑπομένως αἱ 5 μονάδες τῆς γ΄ τάξεως, ἰσοδυναμοῦν πρὸς 5 . 6=30 μονάδας τῆς β΄. τάξεως, αἱ ὁποῖαι μετὰ τῶν 3 τῆς β΄ τάξεως γίνονται 33. Αὗται δὲ ἰσοδυναμοῦν πρὸς 33 . 6=198 τῆς α΄. τάξεως, αἱ ὁποῖαι μὲ τὰς 4 τῆς α΄. τάξεως γίνονται 202 ἁπλαῖ μονάδες.

§ 142) ***Πρόβλημα Δ΄. Ὁ ἀριθμος 1022 τοῦ τριαδικοῦ νὰ γραφῇ εἰς ἀριθμὸν τοῦ πενταδικοῦ συστήματος.*** Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐρωτήματος πρῶτον τρέπομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ τριαδικοῦ εἰς τὸ δεκαδικὸν καὶ δεύτερον τὸν προκύπτοντα τὸν τρέπομεν ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα ἤτοι:

Πρῶτον	ἁπλαῖ		2
	β'. τάξ.	3 . 2	6
	γ'. »	9 . 0	0
	δ'. »	27 . 1	27

ἤτοι τοῦ τριαδικοῦ 1022 εἰς 35 τοῦ δεκαδικοῦ καὶ

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

ἤτοι ὁ 35 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος γράφεται ὡς 120 τοῦ πενταδικοῦ. Ὥστε ὁ 1022 τοῦ τριαδικοῦ εἰς 120 τοῦ πενταδικοῦ.

Ἀσκήσεις

154) Ποῖον κλάσμα διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του ἔδωσε πηλίκον $\frac{841}{1369}$;

155) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{17}{41}$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων νὰ εἶναι 25092.

156) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν εἶναι 196, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι 48 τίνες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

157) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς τὸ ἄθροισμα 20^2+20, ἵνα λάβωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ $20\frac{1}{2}$

158) Τὰ δύο πρῶτα μέρη τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 36 καὶ 120. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί;

159) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του γίνεται ἴσον μὲ τὸ $\frac{32}{98}$

160) Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμὸς Α τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι $(\rho+1)^2=A+5$ καὶ $\rho^2=A-20$ (τοῦ ρ ὄντος ἀκεραίου).

161 Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς ἀκέραιος διαιρούμενος διὰ τοῦ ἀντιστρόφου δίδει πηλίκον τὸ τετράγωνόν του.

162) Εὑρεῖν ἀριθμὸν ἀκέραιον ὅστις διαιρούμενος

διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του γίνεται 3721.

163) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν εἶναι 325 ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των 125. Ποῖοι οἱ ἀριθμοί;

164) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου του εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2.

165) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς πολ. 8+1.

166) Νὰ δειχθῇ ὅτι παντὸς ἀκεραίου τετραγώνου λήγοντος εἰς 5 τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι 2, τὸ δὲ τῶν ἑκατοντάδων εἶναι 0 ἢ 3 ἢ 6.

167) Νὰ εὑρεθῇ ποῖα ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{16}{25}, \frac{7}{28}, \frac{16}{31}, \frac{4}{49}, \frac{12}{75}, \frac{98}{128}, \frac{137}{200}, \frac{243}{363}$ εἶναι τέλεια τετράγωνα καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι.

168) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ μὴ διαιρετοῦ διὰ 5 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 ηὐξημένου ἢ ἐλαττωμένου κατὰ μονάδα.

169) Ἂν δύο ἀριθμοὶ δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ 5, νὰ δειχῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετάρτων αὐτῶν δυνάμεων θὰ εἶναι διαιρετὴ διὰ 5.

170) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης του καὶ αὐτοῦ εἶναι ἀριθμὸς 1332.

171) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.

172) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 59 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{9}$

173) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίξα τοῦ 43 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$,

174) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις κατὰ προσέγγισι 0,001 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

175) Νὰ ἀποδειθθῇ, ὅτι οἱ ἡγούμενοι ἀποτελοῦν ἀναλογίαν, ὅταν οἱ ἑπόμενοι εἶναι οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ δύο ἀναλογιῶν.

176) Δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος αὐτῶν.

177) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτει $\alpha+\gamma:\beta+\delta=\alpha-\gamma:\beta-\delta$.

178) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κ διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύουν αἱ ἀναλογίαι α) $\frac{2}{\kappa}=\frac{\kappa}{8}$ β) $36:\kappa=\kappa:4$ γ) $\frac{25}{\kappa}=\frac{4}{8}$

179) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ τότε προκύπτουν αἱ ἀναλογίαι $\frac{4\alpha+\beta}{\beta}=\frac{4\gamma+\delta}{\delta}$ ἐπίσης $\frac{2\alpha+7\beta}{\beta}=\frac{2\gamma+8\delta}{\delta}$ καὶ $\frac{4\alpha+\beta}{2\alpha+7\beta}=\frac{4\gamma+\delta}{2\gamma+7\delta}$

180) Ἐὰν εἰς δύο ἀναλογίας οἱ ἄκροι εἶναι ἴσοι, οἱ μέσοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι.

181) Ἂν οἱ τέσσαρες ὅροι μιᾶς ἀναλογίας γραφοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων.

182) Ἂν γραφοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$ Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)$

183) Ἂν δύο ἀναλογίαι ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ἄκρους νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ μέσοι ἀποτελοῦν ἀναλογίαν τῆς ὁποίας οἱ μέσοι τῆς μιᾶς εἶναι ἄκροι καὶ οἱ μέσοι τῆς ἑτέρας εἶναι οἱ μέσοι τῆς νέας.

184) Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι προκύπτουν αἱ ἀναλογίαι $\frac{5\alpha+3\gamma}{5\beta+3\delta}=\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{7\alpha+\beta}{\beta}=\frac{7\gamma+\delta}{\delta}$

185) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ πηλίκα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων δύο ἀναλογιῶν συνιστοῦν πάλιν ἀναλογίαν.

186) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς (μέσος ὅρος) δύο ἀνίσων ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ.

187) Ὁ μ. κ. δ, τὸ ε. κ. π. τῶν ἄκρων καὶ ὁ μ. κ. δ καὶ τὸ ε. κ. π τῶν μέσων πάσης ἀναλογίας συνιστοῦν ἀναλογίαν;

188) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτει ὅτι καὶ $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\delta)^2}$.

189) Νὰ ἀποδειχθῇ ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῶν δύο λόγων $N=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ καὶ $M=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

190) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἀκέραιοι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 7, γνωρίζοντες ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ ε. κ. π καὶ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς 21504.

191) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτη ἡ ἀναλογία $\frac{(\alpha-\beta)^4}{(\gamma-\delta)^4}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\gamma^4+\delta^4}$

192) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

193) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ θά προκύψῃ ἐκ τούτων $\sqrt{\alpha\alpha'}+\sqrt{\beta\beta'}+\sqrt{\gamma\gamma'}=\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha'+\beta'+\gamma')}$

194) Ἐὰν ὁ β εἶναι ὁ μέσος ἁρμονικὸς μεταξὺ α καὶ γ δηλαδὴ ἄν ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$

195) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν γ εἶναι ὁ μέσος ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, τότε προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}$.

196) Ἐὰν $\frac{6}{9}=\frac{10}{15}=\frac{8}{12}$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{6}{9}=\frac{10}{15}=\frac{8}{12}=\frac{6\,.\,4+10\,.\,13+8\,.\,5}{9\,.\,4+15\,.\,13+12\,.\,5}$

197) Νὰ τραποῦν οἱ ἀριθμοὶ 15, 23, 50 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ ὀκταδικόν.

198) Νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς 100 εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα.

199) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 101010 τοῦ δεκαδικοῦ εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα.

200) Νὰ τραποῦν οἱ ἀριθμοὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος 202, 101, 210 εἰς τὸ ἑξαδικόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

1) Προτάσεις τινὲς ἐπὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν

§ 143) *Πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ N καὶ πρῶτοι πρός αὐτόν;* [οὗτος ὁ ἀριθμὸς παρίσταται διὰ φ(N)].

Ἔστωσαν κατὰ τὴν φυσικὴν σειρὰν των οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., N. Ἐὰν ὁ N εἶναι πρῶτος ἀριθμός, πάντες οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τοῦ N, εἶναι πρῶτοι πρὸς αὐτόν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶναι N—1.

Ἐὰν ὁ N δέν εἶναι πρῶτος, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας ἔστω $N=\alpha^{\mu}.\beta^{\rho}.\gamma^{\nu}\,....\,\theta^{\tau}$, ἐπειδὴ ὁ N περιέχει τὰ α. β, γ, . . . θ, διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις πρῶτος πρὸς αὐτόν, πρέπει μεταξύ τῶν παραγόντων του νὰ μὴ ἔχῃ οὔτε τὸν α, οὔτε τὸν β, οὔτε τὸν γ, κλπ. οὔτε τὰ πολλαπλάσιά των.

Οἱ ἀπομένοντες ἀριθμοί τότε εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν N καὶ μικρότεροι αὐτοῦ. Εἰς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, ..., N, διότι ὁ N, εἶναι τὸ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ α, εἰς τὴν σειρὰν τὰ περιεχόμενα πολλαπλάσια τοῦ α, θὰ ἀνέρχωνται τότε εἰς τὸν ἀριθμὸν $\frac{N}{\alpha}$ ἤτοι α, α.2, α.3, α.4 . . . , N. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν αὐτὰ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς εἶναι $\frac{N}{\alpha}$ θὰ μείνωσι $N-\frac{N}{\alpha}=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ ἀριθμοὶ ἀκέραιοι περιεχόμενοι εἰς τὴν σειρὰν 1, 2, 3, 4 . . . N, καὶ πρῶτοι πρὸς τὸν α. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον σκεπτόμενοι τὰ περιεχόμενα εἰς τὴν σειρὰν 1, 2, 3, 4, ... , N πολλαπλάσια τοῦ β, εἶναι β, β.2, β.3..., N, ἀλλά μεταξὺ τούτων εὑρίσκονται καὶ τὰ διαγραφέντα καὶ μὴ πρῶτα πρὸς τὸν α. Τὰ πρῶτα πρὸς τὸν α πολλαπλάσια τοῦ β εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ β, εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκεραίων πρώτων πρὸς τὸν α, τῶν περιεχομένων εἰς τὴν σειρὰν 1, 2, 3, 4, ..., $\frac{N}{\beta}$ τῶν πολλαπλασίων τοῦ β, ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι τὸ $\frac{1}{\beta}$ τοῦ ἀριθμοῦ $N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ ἤτοι $\frac{N}{\beta}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$. Διαγράφοντες τότε καὶ αὐτὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ β, τὰ μὴ διαγραφέντα, θὰ μείνουν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς τὸν α καὶ β καὶ μικρότεροι τοῦ Ν ἐν ὅλῳ $N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{N}{\beta}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$. Ἄς διαγράψωμεν ἤδη τὰ πολλαπλάσια τοῦ γ εἰς τὴν ἀρχικὴν σειρὰν 1, 2, 3, 4, ..., Ν. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ γ, τὰ περιεχόμενα εἶναι $\frac{N}{\gamma}$. Μερικὰ ἐξ αὐτῶν διεγράφησαν ὡς παλλαπλάσια τοῦ α καὶ β. Ἐκ τῶν πολλαπλασίων, ὅμως τούτων τοῦ γ, τὰ πρῶτα πρὸς τὸν α καὶ β, εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ γ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α καὶ β, ὁ δὲ ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκεραίων. πρώτων πρὸς α καὶ β, τῆς σειρᾶς 1, 2, 3, 4, . . . , $\frac{N}{\gamma}$, οἱ ὁποῖοι εἶναι πολλαπλάσια τοῦ γ καί ὅστις ἀριθμός, εἶναι τὸ $\frac{1}{\gamma}$, τοῦ ἀριθμοῦ $N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$ ἤτοι $\frac{N}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$ καὶ μετὰ τὴν διάγραφὴν μένουν ἀριθμοὶ ἀκέραιοι μικρότεροι τοῦ Ν καὶ πρῶτοι πρὸς τούς α, β, γ, οἱ $N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)-\frac{N}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)$ ἐξακολουθοῦντες κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν πάντας τοὺς ἀκεραίους τοὺς μικροτέρους τοῦ Ν καὶ πρώτους πρὸς αὐτόν, οἱ ὁποῖοι εἶναι $N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)....\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ τοῦ φ(Ν) τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τῶν ἀκεραίων τῶν μικροτέρων τοῦ Ν καὶ πρῶτον πρὸς αὐτὸν θὰ ἔχωμεν $\varphi(N)=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)....\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$, ἀλλὰ $N=\alpha^{\mu}\,.\,\beta^{\nu}\,.\,\gamma^{\rho}\,.\,.\,.\,.\,\theta^{\tau}$ καὶ τότε εἶναι $\varphi(N)=\alpha^{\mu}\,.\,\beta^{\nu}\,.\,\gamma^{\rho}\,.\,.\,.\,.\,\theta^{\tau}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$.

$\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$ ἢ τὸν ἀριθμὸν $\varphi(N)=\alpha^{\mu-1}.\ \beta^{\nu-1}\ldots\ \theta^{\tau-1}$ $(\alpha-1)(\beta-1)\ldots(\theta-1)$.

Ἐφαρμογαί. *1) **Πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ 20 καὶ πρῶτοι πρὸς αὐτόν.***

Λύσις. $20=2^2.5$ ἄρα οἱ ζητούμενοι εἶναι $20\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=20\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{80}{10}=8$, εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

*2) **Πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ 504 καὶ πρῶτοι πρὸς αὐτόν.***

Λύσις. $504=2^3.3^2.7$ ἄρα οἱ ζητούμενοι εἶναι $504.\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=504\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=\frac{504.12}{42}=$ $=\frac{6048}{42}=144$ ἢ $2^2.3\,(2-1)\,(3-1)\,(7-1)=12.1.2.6=144$.

§ 144) ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν φ ὅλων τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ N, ἰσοῦται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν N.***

1) ***Μερικῶς***· ἔστω $N=1000=2^3.5^3$, ἀναλυθεὶς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1000 δίδονται ὑπὸ τῶν ὅρων τοῦ γινομένου (§ 80) $(1+2+2^2+2^3)\,(1+5+5^2+5^3)$ (1). Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς ἕκαστον ὅρον τοῦ ἐξαγομένου τὸν τύπον τῆς εὑρέσεως τοῦ φ(N), θὰ ἔχωμεν χωριστὰ τὰ φ ἑκάστου διαιρέτου, τὰ ὁποῖα ἀθροίζομεν. Ἐπειδὴ ἕκαστος ὅρος τοῦ ἐξαγομένου τοῦ γινομένου (1) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο παράγοντας πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ φ, εἰς ἑκάστην παρένθεσιν, θὰ ἔχωμεν οὕτω·

$$[\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(2^2)+\varphi(2^3)]\,.\,[\varphi(1)+\varphi(5)+\varphi(5^2)+\varphi(5^3)]$$

ἀλλὰ $\varphi(1)=1$,

$$\varphi(2)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=2-1$$

$$\varphi(2^2)=2^2\left(1-\frac{1}{2}\right)=2^2-2$$

$$\varphi(2^3)=2^3\left(1-\frac{1}{2}\right)=2^3-2^2$$ καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν.

$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(2^2)+\varphi(2^3)=2^3$ ὁμοίως σκεπτόμενοι διὰ τὰ φ τοῦ δευτέρου γινομένου ἔχομεν:

$\varphi(1)+\varphi(5)+\varphi(5^2)+\varphi(5^3)=5^3$ καὶ

$[\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(2^2)+\varphi(2^3)]\,.\,[\varphi(1)+\varphi(5)+\varphi(5^2)+\varphi(5^3)]=2^3\,.\,5^3=1000.$ Ἀπεδείχθη ὅθεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν φ ὅλων τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 1000 ἰσοῦται μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν 1000.

2) Γενικῶς ἐὰν $N=\alpha^\mu\,.\,\beta^\nu\,.\,\gamma^\rho\,.\,.\,.\,.\,\theta^\tau$ πάντες οἱ διαιρέται τοῦ Ν δίδονται ὑπὸ τῶν ὅρων τοῦ γινομένου $(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^\mu)(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\ldots+\beta^\nu)\ldots(1+\theta+\theta^2+\theta^3\ldots+\theta^\tau)$. Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς ἕκαστον ὅρον τοῦ ἐξαγομένου τὸν εὑρεθέντα τύπον φ(Ν) θὰ ἔχωμεν χωριστὰ τὰ φ ἑκάστου διαιρέτου, τὰ ὁποῖα ἀθριζόμενα δίδουσι:

$$[\varphi(1)+\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha^2)+\ldots+\varphi(\alpha^\mu)].[\varphi(1)+\varphi(\beta)+\varphi(\beta^2)+\ldots+\varphi(\beta^\nu)]\ldots[\varphi(1)+\varphi(\theta)+\varphi(\theta^2)+\ldots+(\theta^\tau)]$$

ἀλλὰ $\varphi(1)=1$

$$\varphi(\alpha)=\alpha\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha-1$$

$$\varphi(\alpha^2)=\alpha^2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2-\alpha$$

. . . .

. . . .

$$\varphi(\alpha^\mu)=\alpha^\mu\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^\mu-\alpha^{\mu-1}$$

ὁμοίως $\varphi(1)=1$

$$\varphi(\beta)=\beta\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=\beta-1$$

$$\varphi(\beta^2)=\beta^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=\beta^2-\beta$$

. . . .

. . . .

$$\varphi(\beta^\nu)=\beta^\nu\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=\beta^\nu-\beta^{\nu-1}$$

ὁμοίως $\varphi(1)=1$

$$\varphi(\theta)=\theta\left(1-\frac{1}{\theta}\right)=\theta-1$$

$$\varphi(\theta^2)=\theta^2\left(1-\frac{1}{\theta}\right)=\theta^2-\theta$$

. . . .

. . . .

$$\varphi(\theta^\tau)=\theta^\tau\left(1-\frac{1}{\theta}\right)=\theta^\tau-\theta^{\tau-1}$$

ἀθροιζόμενα τὰ φ τῆς πρώτης παρενθέσεως δίδουσι

$$\varphi(1)+\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha^2)+\ldots+\varphi(\alpha^\mu)=\alpha^\mu$$

ἀθροιζόμενα τὰ φ τῆς δευτέρας παρενθέσεως δίδουσι

$$\varphi(1)+\varphi(\beta)+\varphi(\beta^2)+\ldots+\varphi(\beta^\nu)=\beta^\nu$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(1)+\varphi(\theta)+\varphi(\theta^2)+\ldots+\varphi(\theta^\tau)=\theta^\tau$$

ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν φ ὅλων τῶν διαιρετῶν εἶναι $[\varphi(1)+\varphi(\alpha)+\varphi\alpha^2)+\ldots+\varphi(\alpha^\mu)].[\varphi(1)+\varphi(\beta)+\varphi(\beta^2)+\ldots+\varphi(\beta^\nu)]\ldots [\varphi(1)+\varphi(\theta)+\varphi(\theta^2)+\ldots+\varphi(\theta^\tau)]=\alpha^\mu.\beta^\nu\ldots\theta^\tau=N$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν φ (N) ὅλων τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ N. ἰσοῦται μὲ αὐτόν τὸν ἀριθμὸν N.***

2) Θεώρημα τοῦ Fermat.

§ 145) ***Λῆμμα. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ (λ—1) πρῶτα πολλαπλάσια ἀριθμοῦ τινὸς α, διά τινος λ, ὁποῖος εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, τὰ εὑρισκόμενα ἐκ τῶν διαιρέσεων ὑπόλοιπα ἀποτελοῦσι τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4,. . ., (λ—1) καθ' οἱανδήποτε τάξιν λαμβανόμενα.***

Ἀπόδειξις: Τὰ (λ—1) πολλαπλάσια τοῦ α, κατὰ σειρὰν εἶναι 1.α, 2.α, 3.α, 4.α, . . ., (λ—1).α. Ἄς λάβωμεν δύο ὅποια δήποτε ἐξ αὐτῶν τὰ ρ.α καὶ ρ΄.α, ἔχομεν προφανῶς $\rho<\lambda$ καὶ $\rho'<\lambda$.

1ον) Παρατηροῦμεν ὅτι οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ α, καὶ ἂν λάβωμεν, ἔστω τὸ ρ.α, δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ λ, διότι ἂν ὁ λ διήρει τὸ ρ.α, ἐπειδὴ εἶναι πρῶτος πρός τὸν α, θὰ διήρει τὸν ρ, ὅπερ ἄτοπον διότι $\rho<\lambda$

2ον) Πάντα τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τῶν πολλαπλασίων τούτων τοῦ α, διὰ τοῦ λ, εἶναι διάφορα ἀλλήλων, διότι ἂν $\begin{array}{c|l} \mu.\alpha & \lambda \\ \hline \upsilon & \tau \end{array}$ καὶ $\begin{array}{c|l} \mu'.\alpha & \lambda \\ \hline \upsilon & \tau' \end{array}$ ἔδιδον τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα, τότε $\mu.\alpha=\tau.\lambda+\upsilon$

$$\mu'.\alpha=\tau'.\lambda+\upsilon$$

καὶ $(\mu-\mu')\alpha=(\tau-\tau').\lambda$, οὕτω δὲ ἡ διαφορὰ $(\mu-\mu').\alpha$, θὰ ἦτο διαιρετὴ διὰ τοῦ λ καὶ ἐπειδὴ ὁ λ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, θὰ διαιρῇ τὸ ($\mu-\mu'$) ὅπερ ἄτοπον, διότι τὰ $\mu<\lambda$ καὶ $\mu'<\lambda$ καὶ συνεπῶς $\mu-\mu'<\lambda$ κατὰ μείζονα λόγον. Οὕτω λοιπὸν διαιροῦντες τὰ ($\lambda-1$) πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ α, διὰ λ, πρώτου πρὸς τὸν α, εὑρίσκομεν ὅλα τὰ ὑπόλοιπα διάφορα ἀλλήλων.καὶ ἐπειδὴ ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι μικρότερα τοῦ λ καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ($\lambda-1$), ἔπεται, ὅτι ταῦτα εἶναι οἱ ($\lambda-1$) ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, . . . , ($\lambda-1$) καθ' οἱονδήποτε τάξιν λαμβανόμενοι.

§ 146) *Θεώρημα.* ***Ἐὰν λ. εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος μὴ διαιρῶν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν α, τότε ἡ διαφορὰ $\left(\alpha^{\lambda-1}-1\right)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ λ.***

Ἀπόδειξις. Ἄς σχηματίσωμεν τὰ ($\lambda-1$) διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ α, ἤτοι $1.\alpha, 2.\alpha, 3.\alpha, 4.\alpha, \ldots, (\lambda-1).\alpha$, καὶ διαιρέσωμεν αὐτὰ διὰ τοῦ λ καὶ ἄς παραστήσωμεν τὰ ὑπόλοιπα διὰ τῶν $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4, \ldots, \upsilon_{\lambda-1}$ ὁπότε ἔχομεν

$$\alpha = \text{πολλαπλ. } \lambda + \upsilon_1$$
$$2\alpha = \text{πολλαπλ. } \lambda + \upsilon_2$$
$$3\alpha = \text{πολλαπλ. } \lambda + \upsilon_3$$
. . . .
. . . .

$(\lambda-1).\alpha = \text{πολλαπλ. } \lambda + \upsilon_{\lambda-1}$ καὶ πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\alpha.2\alpha.3\alpha \ldots (\lambda-1).\alpha = \text{πολλαπλ. } \lambda + (\upsilon_1.\upsilon_2.\upsilon_3 \ldots \upsilon_{\lambda-1})$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὑπόλοιπα $\upsilon_1.\upsilon_2.\upsilon_3 \ldots \upsilon_{\lambda-1}$ παριστῶσι κατὰ τὸ λῆμμα, τοὺς ($\lambda-1$) κατὰ σειρὰν ἀκεραίους ἀριθμοὺς θὰ ἔχωμεν:
$1.2.3 \ldots (\lambda-1).\alpha^{\lambda-1} = \text{πολλαπλ. } \lambda + 1.2.3 \ldots (\lambda-1)$
καὶ $1.2.3 \ldots (\lambda-1).\alpha^{\lambda-1} - 1.2.3 \ldots (\lambda-1) = \text{πολλαπλ. } \lambda$,
ἢ $1.2.3 \ldots (\lambda-1).(\alpha^{\lambda-1}-1) = \text{πολλαπλ. } \lambda$, ἀλλὰ λ, εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς καὶ πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου $1.2.3 \ldots (\lambda-1)$ καὶ συνεπῶς καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν, συνεπῶς, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν $\alpha^{\lambda-1}-1$, οὕτω ἔχωμεν $\alpha^{\lambda-1}-1 = \text{πολλαπλ. } \lambda$, ἤτοι ὁ λ διαιρεῖ τὴν ($\alpha^{\lambda-1}-1$)

Σημείωσις Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ἐγένετο ἀνάγκη νὰ γνωρίσωμεν προηγουμένως βοηθητικήν τινα πρότασιν, μία τοιαύτη πρότασις χρησιμεύουσα εἰς τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, τοῦ ὁποίου προτάσσεται, καλεῖται λῆμμα.

3) **Θεώρημα** Euler.

Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Fermat ὑπὸ τοῦ Euler.

§ 147) *Λῆμμα*. ***Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ α, β, γ . . . , (Β – 1) παριστῶσι πάντας τοὺς μικροτέρους τοῦ Β ἀριθμοὺς καὶ πρώτους πρὸς αὐτὸν καὶ διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς Αα, Αβ, Αγ, ... Α(Β—1), διὰ Β εὑρίσκομεν ὡς ὑπόλοιπα, καθ' οἱονδήποτε τάξιν τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ, . . . , (Β – 1).***

Ἀπόδειξις. 1) Συμφώνως μέ τὸ προηγούμενον λῆμμα, ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδὲν τῶν ὑπολοίπων, εἶναι μηδέν καὶ ὅτι πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι διάφορα ἀλλήλων, 2) Τὰ ὑπόλοιπα εἶναι πρῶτα πρὸς τὸν Β. Ἔστω οἱοςδήποτε διαιρετέος καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ Β, θὰ ἔχωμεν Α . μ=πολλαπλ. Β+υ.

Ἐὰν Β καὶ υ δέν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε θὰ ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην πρῶτον, ὁ ὁποῖος διαιρῶν τὸ δεύτερον μέλος, διαιρεῖ ἐπίσης καί τὸ πρῶτον μέλος Α . μ καὶ συνεπῶς διαιρεῖ ἤ τὸν Α ἤ τὸν μ. Ἀλλὰ τότε ὁ Β δὲν εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Α ἢ πρὸς τὸν μ, ὅπερ ἄτοπον, ὡς ἀντιβαῖνον εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, . . . , (Β—1) πρῶτοι πρὸς τὸν Β.

§ 148) ***Θεώρημα. Ἐὰν Α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν Β, ἡ διαφορὰ $(A^{\varkappa} - 1)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ Β, τοῦ κ παριστῶντος τὸ πλῆθος τῶν μικροτέρων τοῦ Β, ἀκεραίων καὶ πρώτων πρὸς αὐτόν.***

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν

$$
\begin{aligned}
A\,.\,\alpha &= \text{πολλ. } B+\upsilon_1\\
A\,.\,\beta &= \text{πολλ. } B+\upsilon_2\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
A(B-1) &= \text{πολλ. } B+\upsilon_{\varkappa}
\end{aligned}
$$

πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη ἔχομεν $\alpha\,.\,\beta \,....\, (B-1).A^{\varkappa} =$ πολλ. $B+\upsilon_1 .\ \upsilon_2 .\ \upsilon_3 \,....\, \upsilon_{\varkappa}$, ἐπειδὴ τὰ γινόμενα $\alpha\,.\,\beta\ ...\ (B-1)$ καὶ $\upsilon_1 .\ \upsilon_2 \,....\, \upsilon^{\varkappa}$ εἶναι ἴσα σημειοῦντες διὰ Μ τὴν κοινὴν τιμὴν αὐτῶν ἔχομεν: $M\,.\,A^{\varkappa} =$ πολλ. $B+M$, ἤ $M\,.\,(A^{\varkappa}-1) =$ πολλ. Β. Ὁ Β εἶναι πρῶτος πρὸς ὅλους τούς παράγοντας τοῦ Μ καὶ συνεπῶς εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν Μ, ἄρα διαιρεῖ τὸν $A^{\kappa}-1$ ἤτοι θὰ ἔχωμεν $A^{\kappa}-1=$πολλ. Β.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ Β εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον καλοῦμεν λ, τότε $\kappa=\lambda\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)=\lambda-1$ καὶ συνεπῶς ὁ τύπος $A^{\kappa}-1=A^{\lambda-1}-1=$πολ. λ, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγεται τὸ θεώρημα τοῦ Fermat, τὸ ὁποῖον εἶναι μερικὴ περίπτωσις, περιλαμβανομένη εἰς τὸ γενικὸν θεώρημα τοῦ Euler.

4) Θεώρημα Wilson

§ 149) ***Λῆμμα.*** ***Ἐὰν λ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ γινόμενον 2 . 3 . 4 . 5.,. (λ—3) (λ—2) εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ λ, ηὐξημένον κατὰ μονάδα.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω α, οἱοσδήποτε παράγων τοῦ γινομένου 2 . 3 . 4 . 5...(λ—2) ἀποδεικνύομεν ὅτι ὑπάρχει εἷς ἄλλος παράγων α΄, τοῦ αὐτοῦ γινομένου καὶ εἷς μόνον τοιοῦτος ὥστε: α . α΄=πολλ. λ+1.

Πράγματι, ἐὰν διαιρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α.1, α.2, α.3,...,α.(λ—1) διαδοχικῶς διὰ λ, εὑρίσκονται ὡς ὑπόλοιπα καθ' οἱανδήποτε τάξιν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3,...(λ—1). διότι ὁ λ ὡς πρῶτος, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν α (κατὰ τὸ θεώρημα Fermat). Ἑπομένως, ἕνα ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα αὐτὰ καὶ ἕνα μόνον θὰ εἶναι ἡ μονάς. Ἀλλὰ τὸ πολλαπλάσιον τοῦ α, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε τὸ α . 1, οὔτε τὸ α . α, οὔτε τὸ α(λ—1), διότι πρῶτον τὸ α . 1, διαιρούμενον διὰ λ, δίδει ἀναγκαστικῶς α ὡς ὑπόλοιπον, ἐπειδὴ ὁ λ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α καὶ α<λ. Δεύτερον τὸ α . α, διαιρούμενον διὰ λ δὲν δύναται νὰ δώσῃ ὡς ὑπόλοιπον 1. Ἐπειδὴ θὰ ἔχομεν τότε α . α=α^2=πολλαπλ. λ+1 ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει α^2-1=πολλαπλ. λ ἢ (α+1) (α—1)=πολλαπλ. λ καὶ ἑπομένως τὸ λ θὰ διῄρει τὸ γινόμενον (α+1) (α—1) καὶ συνεπῶς ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων, ὅπερ ἀδύνατον, διότι οἱ δύο ἀριθμοὶ (α+1) καὶ (α—1) εἶναι μικρότεροι τοῦ λ καὶ πρῶτοι πρὸς αὐτόν. Τέλος τὸ γινόμελον α (λ—1) τὸ ὁποῖον ἰσοῦται: α (λ—1)=αλ— α=(α—1) . λ+(λ—α) δίδει καθὼς φαίνεται ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης, διαιρούμενον διὰ λ, ὑπόλοιπον (λ—α), διάφορον τῆς μονάδος, διότι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ α εἶναι λ—2 καὶ συνεπῶς ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ (λ—α) εἶναι 2. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ὑπάρχει ἕνας ἀριθμὸς α', καὶ ἕνας μόνον, διάφορος τοῦ α, εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 2 . 3 . 4 . 5.. (λ—2) τοιοῦτος ὥστε α . α'=πολλ. λ+1.

Ἐπειδὴ α εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμός, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκλεγόμενος μεταξὺ τῶν 2 καὶ (λ—2) θὰ δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν ἐντὸς τῶν ὁρίων αὐτῶν ἕνα παράγοντα καὶ μόνον ἕνα, τοιοῦτον ὥστε τὸ γινόμενόν των νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ λ σὺν 1. Ἄρα δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ γινόμενον 2 . 3 . 4 . 5... (λ—2), τὸ ὁποῖον ἔχει ἄρτιον ἀριθμὸν παραγόντων (διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων εἶναι (λ—3) καὶ ἐπειδὴ λ, εἶναι περιττός, ὡς πρῶτος, (λ—3) εἶναι ἄρτιος) εἰς σειρὰν γινομένων ἐκ δύο παραγόντων, ὥστε ὅλα τὰ ἐκ δύο παραγόντων γινόμενα νὰ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ λ σὺν 1. Ἄρα καὶ τὸ ἐξετασθὲν γινόμενον θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ λ σὺν 1.

§ 150 ***Θεώρημα*** ***Ἐὰν λ εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τὸ ἄθροισμα 1 . 2 . 3 . 4... (λ—2) . (λ—1)+1 εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ λ.***

Ἀπόδειξις. Τὸ λῆμμα τὸ προηγούμενον μᾶς δίδει 2 . 3 . 4 ... (λ—2)=πολλ. λ+1 πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ (λ—1) θὰ λάβωμεν 1 . 2 . 3 . 4 . . . (λ—2) . (λ—1=(πολλ. λ+1) . (λ—1) ἢ 1 . 2 . 3 . 4.. (λ—2) . (λ—1)= πολλ. λ—1 καὶ 1 . 2 . 3 . 4 ... (λ—2) . (λ—1)+1=πολλ. λ (ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θέλαμε νὰ ἀποδείξωμεν). ***Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὁ λ διαιρῇ τὸ ἄθροισμα 1 . 2 . 3 . 4 ... (λ—2) . (λ—1) +1 ὁ ἀριθμὸς οὗτος λ εἶναι πρῶτος.***

Ἀπόδειξις. Διότι ἂν ὁ λ εἶχε διαιρέτην οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, πλὴν τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος, ὁ διαιρέτης οὗτος θὰ ἦτο ἕνας ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, ἑπομένως διαιρῶν τὸ γινόμενον 1 . 2 . 3 . 4 . . . (λ—1) καὶ τὸ ἄθροισμα 1 . 2 . 3 . 4 . . . (λ—1) +1 ἔπρεπε νὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἤτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἀδύνατον, διότι $\lambda > 1$. *Σημείωσις.* Τὸ θεώρημα τοῦτο, δίδει τὴν μόνην ἀποκλειστικὴν ἰδιότητα τῶν πρώτων ἀριθμῶν, διότι ἀληθεύει καὶ τὸ ἀντίστροφον. ***Μὲ ὅλα ταῦτα δὲν εἶναι εὔχρηστον διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ ἐὰν εἶναι πρῶτος ἢ ὄχι.***

5) Περὶ τῶν ἀπολύτων σφαλμάτων.

Α) Γενικά

Σκοπὸς τῶν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμῶν.

§ 151) Εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς, συχνὰ λαμβάνομεν ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι γνωστοὶ ἐπακριβῶς, εἴτε διότι δὲν εἶναι ἐπαρκῶς καθορισμένοι (ἀσύμμετροι), εἴτε διότι προέρχονται ἀπὸ ὑπολογισμοὺς λαμβανομένους μὲ ὄργανα ἀτελῆ. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ καθορίσωμεν τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν σφαλμάτων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν καὶ τῶν σφαλμάτων ποὺ προκύπτουν ***μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.*** Αὐτὸς εἶναι ὁ σκοπὸς τῶν κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμῶν, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ λύωμεν εἰς κάθε ἀριθμητικὴν πρᾶξιν τὰ δύο ἑπόμενα ζητήματα.

1ον) Μὲ δεδομένα, τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὰ μέχρι ἑνὸς βαθμοῦ ἀκριβείας, νὰ δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὸν βαθμὸν περίπου ἀκριβείας τὸν ὁποῖον θὰ ἔχῃ τὸ ἀποτέλεσμα.

2ον) Ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ ἀποτέλεσμα, μέχρι ὡρισμένου βαθμοῦ ἀκριβείας νὰ δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν περίπου τὴν ἀκρίβειαν μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ δεδομένα.

§ 152 ***Ἀπόλυτον σφάλμα.*** Ἀπόλυτον σφάλμα ἑνὸς ἀριθμοῦ καλοῦμεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ καὶ τῆς κατὰ προσέγγισιν τιμῆς αὐτοῦ. Ἐὰν π. χ. ἀντὶ τοῦ ἀριθμοῦ 4,5142 λάβωμεν τὸν 4,51 ἢ 4,52, τὸ ἀπόλυτον σφάλμα θὰ εἶναι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν 0,0042, καὶ τὸ σφάλμα τοῦτο καλεῖται ἐπὶ ἔλαττον, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ σφάλμα ἰσοδυναμεῖ μὲ

0,0058, καὶ τό σφάλμα καλεῖται καθ' ὑπεροχήν· γενικῶς ἐὰν καλέσωμεν Α τὸν ἀριθμόν, Α′ τὴν κατὰ προσέγγισιν ἀξίαν αὐτοῦ καὶ Ε τὴν 'Αλγεβρικὴν διαφορὰν (ἀπόλυτον σφάλμα) θὰ ἔχωμεν $E = A - A'$ ἢ $A = A' + E$. Κατὰ τὴν ἐφαρμογήν, δὲν εἶναι δυνατὸν γενικῶς νὰ γνωρίζωμεν τὸ ἀπόλυτον σφάλμα Ε, ἀλλὰ εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ σφάλμα τοῦτο δὲν ὑπερβαίνει ἕνα ὡρισμένον ἀριθμὸν α, τόν ὁποῖον ὀνομάζομεν, ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἔχωμεν ἀπόλυτον σφάλμα ὀλιγώτερον τοῦ 0,01 εἴτε ἐπὶ ἔλαττον, εἴτε καθ' ὑπεροχὴν ἄρα· εἶναι $|E| < \alpha$.

§ 153 ***Ὅρια τοῦ ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ.*** Ἔστωσαν, ἀριθμὸς Α καὶ μία τιμὴ αὐτοῦ ἐπὶ ἔλαττον ἡ Α′. Ὅτε ἔχομεν $A' < A < A' + \alpha$. Ἐὰν ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμή, Α′., εἶναι καθ' ὑπεροχὴν ἔχομεν $A' - \alpha < A < A'$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἔνθα ἀγνοοῦμεν τὴν ἔννοιαν τῆς προσεγγίσεως, δηλαδὴ τὴν ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχὴν προσέγγισιν, δυνάμεθα νὰ γνάψωμεν $A' - \alpha < A < A' + \alpha$. Τὰ πρῶτα κοινὰ ψηφία τῶν ἄκρων μελῶν τῆς διπλῆς ἀνισότητος εἶναι τὰ πρῶτα ἀκριβῆ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ Α.

§ 154 ***Σχετικὸν σφάλμα.*** Σχετικὸν σφάλμα καλοῦμεν, ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸν λόγον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος πρὸς τὸν ἀκριβῆ ἀριθμόν. Εἰς τὸ ἀριθμητικὸν παράδειγμα τῆς § 152 τὸ σχετικὸν σφάλμα εἶναι $\frac{0,0042}{4,5142}$ ἢ $\frac{0,0058}{4,5142}$ τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ ὡς $\frac{42}{45142}$ καὶ $\frac{58}{45142}$

Ἐὰν καλέσωμεν διά τοῦ ε, τὸ σχετικὸν σφάλμα, ἔχομεν: $\varepsilon = \frac{E}{A}$ καὶ $E = \varepsilon \,.\, A$. Ὁ βαθμὸς τῆς ἀκριβείας ἑνὸς μέτρου ἐκτιμᾶται ἀπὸ τὸ σχετικὸν σφάλμα καὶ οὐχὶ ἐκ τοῦ ἀπολύτου π. χ. Ἐάν, μετροῦντες δύο μήκη, τὸ ἕν δέκα μέτρων καὶ τὸ ἄλλο 10 χιλιομέτρων, σφάλλωμεν περίπου 1 μέτρον κατὰ τὴν μέτρησιν ἑκάστου μήκους. Τά δύο ἀπόλυτα σφάλματα εἶναι ἴσα, ἐνῷ τὰ σχετικὰ σφάλματα εἶναι προφανῶς $\frac{1}{10}$ καὶ $\frac{1}{10000}$. Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐγένετο σφάλμα περίπου

$\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου εἰς ἕκαστον μέτρον, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἐσφάλαμεν περίπου $\frac{1}{10000}$ εἰς ἕκαστον μέτρον. Ἄρα καθίσταται φανερόν, ὅτι τὸ δεύτερον ἀποτέλεσμα εἶναι κατὰ πολὺ ἀκριβέστερον τοῦ πρώτου. Ὅθεν ἕπεται ὅτι: ***Τὸ σχετικὸν σφάλμα εἶναι ὁ καταμερισμὸς τοῦ ἀπολύτου σφάλματος μεταξὺ ὅλων τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ.*** Ἤτοι ἀποδεικνύει μὲ ποῖον κλάσμα τῆς πραγματικῆς του ἀξίας, ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἐσφαλμένος. Κατὰ τὰς ἐφαρμογάς, δέν γνωρίζομεν, γενικῶς, τὰ σχετικὰ σφάλματα, τὰ ὁποῖα καὶ ***ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν ἀνωτάτων ὁρίων τῶν σφαλμάτων αὐτῶν.***

Ὅταν ἔχομεν ἀνώτατον ὅριον α, τοῦ ἀπολύτου σφάλματος ἑνὸς ἀριθμοῦ Α, λαμβάνομεν ἀνώτατον ὅριον β, τοῦ σχετικοῦ σφάλματος, διαιροῦντες α, διὰ μιᾶς κατὰ προσέγγισιν ἐπὶ ἔλαττον τιμῆς τοῦ ἀριθμοῦ Α. Ἀντιστρόφως, ὅταν ἔχωμεν ἀνώτατον ὅριον β, τοῦ σχετικοῦ σφάλματος λαμβάνομεν τὸ ἀνώτατον ὅριον α τοῦ ἀπολύτου σφάλματος πολλαπλασιάζοντες τὸ β, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν προσεγγίσεως καθ' ὑπεροχὴν τοῦ ἀριθμοῦ Α.

§ 155 ***Ἐκτίμησις τῶν ἀνωτάτων ὁρίων τῶν ἀπολύτων σφαλμάτων.*** Πρακτικῶς ὑπολογίζομεν, τὰ ἀνώτατα ὅρια τῶν ἀπολύτων σφαλμάτων, μὲ κλάσματα ἔχοντα παρανομαστὰς τὰς δυνάμεις τοῦ 10 π. χ. ἀριθμός τις Α, γεγραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν παραλείψη τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τινος ψηφίου ὡρισμένης δεκαδικῆς τάξεως, τὸ διαπραττόμενον σφάλμα εἶναι:

1ον) Μικρότερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν ὡς ἀριθμητὴν τὸ πρῶτον παραλειπόμενον ψηφίον ηὐξημένον κατὰ 1 καὶ ὡς παρανομαστὴν τὴν δύναμιν τοῦ 10 ἡ ὁποῖα ἔχει ἐκθέτην τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει τὴν σειρὰν τοῦ πρώτου παραλειφθέντος ψηφίου: π.χ. ἐὰν $A=7{,}3482$ καὶ ἂν λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν τιμὴν $A'=7{,}34$ τὸ διαπραττόμενον σφάλμα εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{9}{1000}$

2ον) Ἐὰν ὑπερβῶμεν τὸ τελευταῖον, διατηρούμενον, δεκαδικὸν ψηφίον, ὅταν τὸ πρῶτον παραλειπόμενον δεκαδικὸν εἶναι 5 ἢ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 5, τὸ διαπραττόμενον σφάλμα εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεως μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος τῆς τελευταίας διατηρηθείσης τάξεως. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα λαμβάνοντες Α΄=7,35 τὸ διαπραττόμενον σφάλμα εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2.100}=\frac{1}{200}$.

Β΄.) Ἀπόλυτα σφάλματα κατὰ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις

§ 156 ***Πρόσθεσις***. Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ πραγματικαὶ ἀξίαι τῶν ἀριθμῶν, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ προσθέσωμεν καὶ Α΄, Β΄, Γ΄ οἱ κατὰ προσέγγισιν ἀξίαι αὐτῶν (καθ' ὑπεροχὴν ἢ ἐπὶ ἔλαττον), α, β, γ, δὲ τὰ ἀνώτατα ὅρια τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀντιστοίχων σφαλμάτων. Ἐφ' ὅσον δὲν γνωρίζομεν τὴν ἔννοιαν (ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχὴν) τῆς προσεγγίσεως τῶν ἀριθμῶν λαμβάνομεν κατὰ § 153.
$A'-\alpha<A<A'+\alpha$
$B'-\beta<B<B'+\beta$
$\Gamma'-\gamma<\Gamma<\Gamma'+\gamma$ προσθέτοντες κατὰ μέλη ἔχομεν $A'+B'+\Gamma'-(\alpha+\beta+\gamma)<A+B+\Gamma<A'+B'+\Gamma'+\alpha+\beta+\gamma$. Ἡ διπλὴ αὕτη ἀνισότης ἀποδεικνύει ὅτι ἂν λάβωμεν $A'+B'+\Gamma'$ ὡς κατὰ προσέγγισιν τιμὴν τοῦ $A+B+\Gamma$ κάμνομεν ἕνα σφάλμα μικρότερον ἀπὸ τὸ $\alpha+\beta+\gamma$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἰδιότης: ***Ἐὰν τὰς πραγματικὰς τιμὰς πολλῶν ἀριθμῶν ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὰς κατὰ προσέγγισιν τιμάς, τὸ διαπραττόμενον σφάλμα ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κατὰ προσέγγισιν τούτων ἀριθμῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀνωτάτων ὁρίων τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν σφαλμάτων διὰ τῶν ὁποίων σημειοῦνται οἱ διάφοροι ὅροι τοῦ ἀθροίσματος.***

§ 157 ***Παρατήρησις***. Δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν, ὡς ἀνώτατον ὅριον τοῦ σφάλματος ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ἕνα ἀριθμὸν μικότερον ἀπὸ τοῦ $\alpha+\beta+\gamma$. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ ἀντίστοιχοι προσεγγίσεις τῶν Α΄, Β΄, Γ΄ δὲν εἶναι ὅλαι ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχὴν, καὶ ὅτι ἑκάστη προσέγγισις τῶν Α΄, Β΄, Γ΄ εἶναι γνωστή. Ὑποθέτομεν π. χ. ὅτι Α΄ καὶ Β΄ εἶναι προσεγγίσεις ἐπὶ ἔλαττον καὶ Γ΄ καθ' ὑπεροχήν. Ἔχομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, κατὰ τὰ γνωστά, $A' < A < A' + \alpha$

$B' < B < B' + \beta$

$\Gamma' - \gamma < \Gamma < \Gamma'$ τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει $A' + B' + \Gamma' - \gamma < A + B + \Gamma < A' + B' + \Gamma' + \alpha + \beta$. Τὸ ὅριον τοῦ σφάλματος ἐπὶ τῆς προσθέσεως εἶναι τότε ὁ μέγιστος τῶν ἀριθμῶν γ καὶ $(\alpha + \beta)$.

§ 158 ***Ἐφαρμογαί.*** 1) Νὰ ὑπολογίσωμεν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν $\pi = 3,141592...$ καὶ $\sqrt{3} = 1,732050...$ μὲ τρία δεκαδικὰ ψηφία μὲ σφάλμα ἐπὶ ἔλαττον· ποῖον σφάλμα θὰ κάμωμεν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀριθμῶν ;

Γνωστὸν εἶναι ὅτι $\pi = 3,1415926535...$ καὶ $\sqrt{3} = 1,732050080..$

Ἐὰν λάβωμεν $\pi' = 3,141$ ἔχομεν $\alpha = \frac{6}{10000}$ σφάλμα ἐπὶ ἔλαττον

καὶ $\sqrt{3}' = 1,732$ » $\beta = \frac{1}{10000}$ » » »

ἐξ ὧν λαμβάνομεν $3,141 + 1,732 < \pi + \sqrt{3} < 3,141 + 1,732 + \frac{1+6}{10000}$ ἢ $4,873 < \pi + \sqrt{3} < 4,873 + \frac{7}{10000}$

Τὸ σφάλμα ὅθεν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος εἶναι μικότερον κατὰ $\frac{7}{10000}$.

§ 159 ***Ἀφαίρεσις.*** Ἔστω νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ B ἀπὸ τοῦ A $(B < A)$

1ον) Ἐὰν δὲν γνωρίζωμεν τὰ ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχὴν σφάλματα, εἰς τὰς κατὰ προσέγγισιν τιμὰς τῶν A' καὶ B' δέον νὰ ἔχωμεν $A' - \alpha < A < A' + \alpha$

$B' - \beta < B < B' + \beta$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως σταυροειδοῦς ἔχομεν $A' - B' - (\alpha + \beta) < A - B < A' - B' + \alpha + \beta$ ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ γενόμενον σφάλμα λαμβάνοντες $A' - B'$ ὡς κατὰ προσέγγεσιν τιμὴν τοῦ $A - B$ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\alpha + \beta$ ἤτοι: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνωτάτων ὁρίων τῶν ἀπολύτων σφαλμάτων τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἕνα ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος, τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπει ἡ διαφορὰ τῶν κατὰ προσέγγισιν τιμῶν τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.***

2ον) Ἐάν A' καὶ B' προσεγγίζουν κατὰ ἀντίστροφον τάξιν, τότε ἕνα ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος ἐπὶ τῆς διαφορᾶς εἶναι ἐπίσης ἴσον πρὸς $\alpha + \beta$. Ἐάν τὸ Α′ λαμβάνεται καθ' ὑπεροχὴν καὶ Β′ ἐπὶ ἔλαττον δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς Α′—Β′ εἶναι καθ' ὑπεροχήν. Ἐὰν Α′ λαμβάνεται ἐπὶ ἔλαττον καὶ τὸ Β′ καθ' ὑπεροχὴν τότε ἡ τιμὴ τῆς διαφορᾶς Α′—Β′ εἶναι ἐπὶ ἔλαττον.

3ον) Καταστρώνομεν συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον παρόμοιαν ὑπολογισμὸν ὅτι ἂν αἱ τιμαὶ Α′ καὶ Β′ προσεγγίζουν ἐπὶ ἔλαττον ἢ καὶ αἱ δύο καθ' ὑπεροχήν, τὸ σφάλμα ἐπὶ τῆς διαφορᾶς Α′—Β′ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, Ἐν τούτοις δὲν γνωρίζομεν τὴν κατεύθυνσιν τοῦ σφάλματος ἐπὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς. Ἐὰν θέλωμεν νὰ καθορίσωμεν τὴν κατεύθυνσιν ταύτην δέον νὰ λάβωμεν τήν σχέσιν $A'-B'-\alpha < A-B < A'-B'+\alpha$, λαμβάνοντες διὰ τὸ Α′ καὶ Β′ ἐπαρκῆ ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφιων, ὥστε νὰ εἶναι κοινὰ τὰ πρῶτα ψηφία τῶν ἄκρων μελῶν, διὰ νὰ δύναται νὰ παρουσιάζονται ὅλαι αἱ ζητούμεναι τάξεις εἰς τήν διαφορὰν ἡ ὁποῖα θὰ ὑπολογισθῇ ἐπὶ ἔλαττον.

§ 160 ***Ἐφαρμογή.*** Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς χιλιοστὰ καὶ μὲ σφάλμα, μικρότερον κατὰ $\frac{1}{1000}$ ἡ διαφορὰ $\delta = \pi - \sqrt{3}$. Λαμβάνοντες τὰς δύο τιμὰς π′ τοῦ π καὶ $\sqrt{3}'$ τοῦ $\sqrt{3}$ ἐπὶ ἔλαττον καὶ ἐπειδὴ τὸ σφάλμα ἐπὶ τῆς διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$, εἶναι ἀρκετὸν νὰ λάβωμεν π′ καὶ $\sqrt{3}'$ μὲ σφάλμα μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$ ἤτοι $\pi' = 3{,}141$

$$\sqrt{3}' = 1{,}732$$

ὅτε ἡ διαφορὰ $\delta = 1{,}409$

Αὕτη ἡ διαφορὰ εἶναι καλῶς ὑπολογισμένη περίπου εἰς $\frac{1}{1000}$. Τὸ ἀπόλυτον σφάλμα εἶναι καὶ αὐτὸ μικρότερον τοῦ $\frac{6}{10000}$, ὅπερ εἶναι τὸ ἀνώτατον ὅριον σφάλματος π′. Ἀλλὰ ἀγνοοῦμεν ὅμως ἂν ἡ διαφορὰ δ, προσεγγίζει ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχήν. Γνωρίζομεν, (§153) $1{,}409-0{,}0006 < \delta < 1{,}409+0{,}0006$ ἤ, $1{,}4084 < \delta < 1{,}4096$ ἤτοι δὲν γνωρίζομεν παρὰ μόνον τὰ πρῶτα τρία ψηφία τοῦ δ, διὰ νὰ μάθωμεν τὴν ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ'ὑπεροχὴν προέγγισιν τοῦ τετάρτου ψηφίου λαμβάνομεν $\pi'=3{,}1415$ καὶ $\sqrt{3}'=1{,}7320$, ἡ διαφορὰ εἶναι $\delta=\pi'-\sqrt{3}'=1{,}4095$ καὶ τὸ σφάλμα ἐπὶ τῆς διαφορᾶς τότε αὐτῆς εἶναι ὀλιγώτερον κατὰ $\frac{1}{10000}$ ὅπερ ἀποτελεῖ τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ σφάλματος ἐπὶ τοῦ π', ἔχομεν λοιπὸν $1{,}4095-0{,}0001<\delta<1{,}4095+0{,}0001$ ἢ $1{,}4094<\delta<1{,}4096$. Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ διαφορὰ $\delta=1{,}409$ εἶναι ἐπὶ ἔλαττον·

§ 161 ***Πολλαπλασιασμός.*** Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάζωμεν Α ἐπὶ Β.

1) Οἱ παράγοντες προσεγγίζουν ἀμφότεροι κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἢ ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχὴν ἢ καλλίτερα ἀγνοεῖται ἡ ἔννοια τῆς προσεγγίσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ γινόμενον Α. Β. περιέχεται μεταξὺ $A'.B'$ καὶ $(A'+\alpha)(B'+\beta)$ ἢ μεταξὺ $(A'-\alpha)(B'-\beta)$ καὶ $(A'+\alpha).(B'+\beta)$ τουτέστι μεταξὺ $A'B'-[A'\beta+(B'-\beta)\alpha]$ καὶ $A'.B'+A'.\beta+(B'+\beta)\alpha$. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν $A'.B'$ ἀντὶ $A.B$, τὸ προκύπτον σφάλμα εἶναι μικρότερον τοῦ $A'\beta+(B'+\beta)\alpha$ καὶ πολλῷ μᾶλλον μικρότερον τοῦ $(A'+\alpha)\beta+(B'+\beta)\alpha$. ***Ἤτοι ἐπιτυγχάνομεν ἕνα ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ γινομένου δύο παραγόντων πολλαπλασιάζοντες ἕνα ἀνώτατον ὅριον ἑκάστου παράγοντος δι' ἑνὸς ἀνωτάτου ὁρίου τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ ἄλλου παράγοντος καὶ προσθέτοντες τὰ οὕτω προκύπτοντα δύο γινόμενα.***

2ον) Διαπιστοῦμεν ὁμοίως, ἐὰν ὁ εἷς τῶν παραγόντων προσεγγίζει καθ' ὑπεροχὴν καὶ ὁ ἕτερος ἐπὶ ἔλαττον, ἐπιτυγχάνομεν ἀνώτατον ὅριον τοῦ σφάλματος ἐπὶ τοῦ γινομένου λαμβάνοντες τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν τοὺς ὁποίους θὰ εὕρωμεν πολλαπλασιάζοντες ἓν ἀνώτατον ὅριον ἑκάστου παράγοντος ἐπὶ ἓν ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ ἄλλου παράγοντος καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰ δύο γινόμενα.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ἐπιτυγχάνομεν ἓν ἀνώτατον ὅριον ἑνὸς παράγοντος Α' αὐξάνοντες κατὰ μίαν μονάδα τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ Α' καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ ἄλλα ψηφία διὰ μηδενικῶν π. χ. ἓν ἀνώτατον ὅριον $A'=43{,}56\ldots$ θὰ εἶναι $A''=50$.

§ 162 **Ἐφαρμογή**. Νὰ ὑπολογίσωμεν εἰς $\frac{1}{100}$ περίπου καὶ εἰς ἑκατοστὰ τὸ γινόμενον $\pi . e$, γνωρίζοντες ὅτι $e = 2,7182818....$ Ἔστω α, τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ διαπραχθέντος ἀπολύτου σφάλματος ἐπὶ ἑκάστου τῶν παραγόντων. Τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος ἐπὶ τοῦ γινομένου θὰ εἶναι συμφώνως τῶν προηγουμένων $4\alpha+3\alpha = 7\alpha$.

Ἀλλὰ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ ἀφαιρέσωμεν, ὅλα τὰ ψηφία, ἅτινα ἀκολουθοῦν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν (αὐξάνοντες, ἐν ἀνάγκη, τό τελευταῖον τοῦτο)· θὰ διαπράξωμεν οὕτω νέον σφάλμα μὴ ὑπερβαῖνον $\frac{1}{200}$ (§ 155). Τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ ὁλικοῦ σφάλματος $7\alpha+\frac{1}{200}$ δέον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{200}$· ἐξ οὗ $7\alpha+\frac{1}{200}<\frac{1}{100}$ ἔχομεν $\alpha<\frac{1}{1.400}$, $\left(\frac{1}{1400}=0,00071\right)$ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\alpha<\frac{7}{10000}$, δηλαδὴ $\pi'= 3,141$ (μικρότερον σφάλμα τοῦ $\frac{6}{10000}$) $e'=2,718$ (μικρότερον σφάλμα τοῦ $\frac{3}{10000}$) ·

Τὸ γινόμενον εἶναι $\pi' . e'=8,537238$
καὶ λαμβάνομεν 8,54

Παρατήρησις. Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἐὰν 8,54 εἶναι καθ' ὑπεροχὴν ἢ ἐπὶ ἔλαττον σχηματίζομεν τὸ γινόμενον

$\pi' . e'=3,1415 . 2,7182$ καὶ εὑρίσκομεν

$\pi' . e'=8,5392253$. Τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ σφάλματος τοῦ γινομένου τούτου εἶναι $\frac{3.10}{100000}+\frac{4.9}{100000}=\frac{66}{100000}$. δυνάμεθα ὅθεν νὰ γράψωμεν $8,5392253-0,00066<\pi . e<8,5392253+0,00066$ ἢ $8,5385653<\pi . e<8,5398853$ ὅπερ δικνεύει ὅτι 8,53 εἶναι τὸ ἐπὶ ἔλαττον γινόμενον μὲ κατώτερον σφάλμα $\frac{1}{100}$. Ἄρα τὸ 8,54 εἶναι τὸ καθ' ὑπεροχὴν γινόμενον. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαφέρει ὀλιγώτερον παρὰ τὸ 8,53 τοῦ ἀκριβοῦς γινομένου. Τὸ ἀπόλυτον σφάλμα του εἶναι κατώτερον τῶν $\frac{3}{1000}$,

§ 163 **Διαίρεσις**. Ἔστωσαν Α ὁ διαιρετέος, Β ὁ διαιρέτης. Α′ καὶ Β′ αἱ τιμαὶ προσεγγίσεως αὐτῶν, α καὶ β τὰ ἀνώτατα ὅρια τῶν ἀντιστοίχων ἀπολύτων σφαλμάτων.

1ον) Δὲν γνωρίζομεν τὴν ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχὴν προσέγγισιν τοῦ Α′ καὶ Β′. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν.

$\frac{A'-\alpha}{B'+\beta}<\frac{A'}{B'}<\frac{A'+\alpha}{B'-\beta}$. Τὸ ἀπόλυτον σφάλμα ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κατὰ προσέγγισιν· θὰ ἔχωμεν τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ πηλίκου $\frac{A'}{B'}$ λαμβάνοντες τὸ μέγιστον μεταξὺ τῶν δύο διαφορῶν.

$\frac{A'+\alpha}{B'-\beta}-\frac{A'}{B'}$ (ἀνώτατος ἀριθμὸς τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ἐλαττομένου διὰ τοῦ ἐπὶ ἔλαττον κατὰ προσέγγισιν πηλίκου), καὶ $\frac{A'}{B'}-\frac{A'-\alpha}{B'+\beta}$ (τὸ κατὰ προσέγγισιν καθ' ὑπεροχὴν πηλίκον ἠλαττωμένον κατὰ ἕνα ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου) ἢ $\frac{A'.\beta+B'\alpha}{B'\,(B'-\beta)}$ καὶ $\frac{A'\beta+B'\alpha}{B'\,(B'+\beta)}$

Ἀμφότεραι εἶναι μικρότεραι πρὸς τὸ $\frac{A'\beta+B'\alpha}{(B'-\beta)^2}$· χρησιμοποιοῦμεν τὴν τελευταῖαν αὐτὴν παράστασιν ὡς ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος ἐπὶ τοῦ πηλίκου.

Διαιροῦντες ὅθεν διὰ τοῦ τετραγώνου ἑνὸς μικροτέρου ἀριθμοῦ τοῦ διαιρετου τό ἄθροισμα τῶν εὑρισκομένων γινομένων πολλαπλασιάζοντες τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τοῦ ἀνωτάτου ὁρίου τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ διαιρέτου σὺν τῷ γινομένῳ ἑνὸς ἀνωτάτου ὁρίου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἕνα ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ διαιρέτου.

2ον) ***Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης προσεγγίζουν πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν (ἐπὶ ἔλαττον ἢ καθ' ὑπεροχὴν) μὲ τὴν αὐτὴν ὡς ἄνω σκέψιν ἐπιτυγχάνομεν ἕνα ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ πηλίκου διαιροῦντες διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ διαιρέτου, τὸ μεγαλείτερον τῶν εὑρισκομένων γινομένων πολλαπλασιάζοντες ἕνα ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἑνὸς τῶν ὅρων ἐπὶ τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ ἀπολύτου σφάλματος τοῦ ἄλλου ὅρου π. χ.***

Ἐὰν Α΄ καὶ Β΄ προσεγγίζουσιν ἐπὶ ἔλαττον, τὸ ἀπόλυτον σφάλμα τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον τῶν δύο ἀριθμῶν.

$\frac{(A'+\alpha)\beta}{B'^2}$ καὶ $\frac{(B'+\beta)\alpha}{B'^2}$ [Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ἕνα ἀνώτατον ὅριον Α΄. καὶ Β΄. (§ 161)]. Ἐὰν ὁ διαιρετέος προσεγγίζει ἐπὶ ἔλαττον καὶ ὁ διαιρέτης καθ' ὑπεροχὴν τὸ πηλίκον προσεγγίζει ἐπὶ ἔλαττον· ἐὰν ὁ διαιρετέος προσεγγίζει καθ' ὑπεροχὴν καὶ ὁ διαιρέτης ἐπὶ ἔλαττον τὸ πηλίκον προσεγγίζει καθ' ὑπεροχήν. Εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις δὲν γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων τὴν προσέγγισιν τοῦ πηλίκου. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν προσέγγισιν δέον νὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὰς προηγουμένας πράξεις

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ καὶ εἰς ἑκατοστὰ τὸ πηλίκον $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$. λαμβάνομεν $\sqrt{3}'$ καὶ π΄ κατ' ἔλειψιν. Ἔστω α, τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ σφάλματος ἐπὶ ἑκάστου τῶν ὅρων τούτων. Ἀνώτατον ὅριον σφάλματος ἐπὶ τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι $\frac{4\,.\,\alpha}{3^2}$. Ἀλλὰ εἰς τὸ πηλίκον τοῦτο, θὰ παραλείψωμεν ὅλα τὰ ψηφία τὰ ἀκολουθοῦντα τὸ πηλίκον τῶν ἑκατοστῶν, οὕτω δὲ θὰ διαπράξωμεν νέον σφάλμα μὴ ὑπερβαῖνον $\frac{1}{200}$

Τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ ὁλικοῦ σφάλματος $\frac{4\alpha}{9}+\frac{1}{200}$ ἐπειδὴ ὀφείλει νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{100}$ ἔχομεν : $\frac{4\alpha}{9}+\frac{1}{200}<\frac{1}{100}$ ἐξοῦ $\alpha<\frac{9}{800}$ Εἶναι ἀρκετὸν νὰ λάβωμεν $\alpha<\frac{1}{100}$ ἤτοι $\sqrt{3}'=1{,}73$ καὶ $\pi'=3{,}14$ διαιροῦντες ὅθεν 1,73 διὰ 3,14 τὸ πηλίκον εἰς ἑκατοστὰ εἶναι 0,55.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ μάθωμεν ἐὰν τὸ πηλίκον τοῦτο προσεγγίζει καθ' ὑπεροχὴν ἢ ἐπὶ ἔλαττον, διαιροῦμεν 1,732 διὰ 3,141 τὸ πηλίκον εἶναι 0,5514...καὶ τὸ ἀπόλυτον σφάλμα ἐπὶ τοῦ πηλίκου τούτου εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{2\,.\,6}{10000}\cdot\frac{1}{3^2}=\frac{12}{90000}$ ἢ μικρότερον τοῦ 0,0002. Συνεπῶς εὑρίσκομεν $0{,}5514-0{,}0002<\frac{\sqrt{3}}{\pi}<0{,}5514+0{,}0002$ ἢ $0{,}5512<\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

$<0,5516$ ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ πηλίκον 0,55 προσεγγίζει ἐπὶ ἔλαττον.

201) Εἰς τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 6,78485, ἐὰν λάβωμεν τὰ τέσσαρα πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία του· νὰ εὑρεθῇ 1) ποῖον εἶναι τὸ ἀπόλυτον σφάλμα, 2) ποῖον εἶναι τὸ σχετικὸν σφάλμα.

202) Νὰ ληφθῇ ὁ ἀριθμὸς 3,14159 κατὰ προσέγγισιν 0,001 πρῶτον ἐπὶ ἔλαττον καὶ δεύτερον καθ' ὑπεροχήν.

203) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τὸ ἄθροισμα $5,43271+2,71828+1,732$.

204) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,001 ἡ διαφορὰ $2,236067-1,414213$.

205) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τὸ γινόμενον $546,487542 \cdot 4,93247$.

206) Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν 0,01 τὸ πηλίκον $96,622585 : 28,76531$.

Γενικαὶ Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν Β' Γ' καὶ Δ' Κεφαλαίων

207) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, διαιρεθέντες διὰ δ, ἔδωκαν ὑπόλοιπα υ, υ', υ'', νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ διαιρούμενον διὰ δ, θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ καὶ τὸ ἄθροισμα $\upsilon+\upsilon'+\upsilon''$ διὰ δ.

208) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν ἔχωμεν δύο ἀριθμοὺς καὶ αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν τὸν ἕνα κατὰ μονάδα, ὥστε ὁ προκύπτων ἐκ τῆς μεταβολῆς νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου τότε οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

209) Χωρικὴ ἐρωτηθεῖσα πόσας ὄρνιθας ἔχει, ἀπεκρίθη «ἔχω περισσοτέρας τῶν 100 καὶ ὀλιγωτέρας τῶν 150. Ὅταν δὲ ἀριθμήσω ταύτας ἀνὰ 5 ἢ ἀνὰ 10 ἢ ἀνὰ 15 ἢ ἀνὰ 20, πάντοτε περισσεύουν τρεῖς» πόσας ὄρνιθας εἶχεν;

210) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 13, ἐὰν ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν δεκάδων του αὐξανόμενος κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του δίδει ἄθροισμα διαιρετὸν διὰ 13.

211) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν $2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 11^4$, $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3$,

7^4, $2^2 . 3^4 . 5 . 7^8 . 11^7$ εἶναι διαιρετοὶ ὑπὸ τοῦ $2^2 . 3^4 . 11^3$ καὶ ποῖα τὰ πηλίκα των;

212) Ἐὰν ἀριθμός τις ν, δὲν διαιρεῖ οὔτε τὸν ρ, οὔτε τὸν σ, τὶ πρέπει νὰ συμβαίνῃ μεταξύ τῶν παραγόντων των, ἵνα δύναται ὁ ν, νὰ διαίρῃ τὸ γινόμενον ρ . σ.

213) Γράφοντες τοὺς διαιρέτας ἀριθμοῦ τινος κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων τῶν ἄκρων, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

214) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν γινόμενον 24 καὶ ἄθροισμα 11.

215) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀρίθμοὶ οἵτινες ἔχουν μ. κ. δ τὸν 5 καὶ ἄθροισμα τὸν 90.

216) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν ὁ μ. κ. δ τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθοῦν τὸ προκύπτον γινόμενον εἶναι ὁ μ. κ. δ τῶν ἀριθμῶν Α . Γ, Β . Γ, Α . Δ, Β . Δ.

217) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ διαιρέται αὐτῶν εἶναι ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

218) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἄν ἀριθμός τις εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α καὶ εἶναι συγχρόνως κ. δ. τῶν ἀριθμῶν αδ—βγ καὶ α—γ, τότε θὰ διαιρῇ καὶ τὸν δ—β.

219) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 5 . ρ, 7 . ρ, 9 . ρ ἔχουν μ. κ. δ τὸν ρ.

220) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἄν ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι᾽ ἑνὸς ἑκάστου ἐξ ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο θὰ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὴ τοῦ ε. κ. π.

221) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἄν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἄθροισμά των καὶ ἡ διαφορά των ἔχουσι μ. κ. δ. τόν 1 ἤ τὸν 2.

222) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων ὁ μ. κ. δ εἶναι 20 καὶ τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ $\frac{3}{17}$

223) Εἰς τὴν διαδοχικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν νὰ εὑρεθοῦν ρ, τὸ πλῆθος ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ μὴ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

224) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μ. κ. δ 20 καὶ ε. κ. π 420.

225) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἵτινες ἔχουσι πηλίκον $\frac{7}{15}$ καὶ ε. κ. π. 1260

226) Ποῖος ἀριθμὸς διαιρούμενος κατὰ σειρὰν διὰ τῶν 6, 8, 10 καὶ 12 παρέχει ὑπόλοιπον 5, διὰ δὲ τοῦ 11 διαιρεῖται ἀκριβῶς;

227) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο περιττῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν ηὐξημένον κατὰ μονάδα εἶναι τέλειον τετράγωνον.

228) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἀναγώγου κλάσματος καὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης κλάσμα ἀνάγωγον.

229) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν προστεθοῦν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι ἀνίσων κλασμάτων προκύπτει κλάσμα περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν.

230) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{35}{47}, \frac{3535}{4747}, \frac{353535}{474747}$ εἶναι ἴσα.

231) Τί γίνεται κλάσμα τι, ἐὰν προστεθῇ ἑκάτερος τῶν ὅρων αὐτοῦ εἰς ἑαυτόν;

232) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἐκτὸς ἂν ὁ παρανομαστὴς ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν, διαιρεῖ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου.

233) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\,(2\alpha+1)}{\alpha+1}$ εἶναι ἀνάγωγον τοῦ α, ὄντος ἀκεραίου.

234) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀναγώγου κλάσματος, τὸ κλάσμα τοῦ προκύπτοντος μικτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀνάγωγον.

235) Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ ἢ τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον δύο δεκαδικῶν κλασμάτων, τρεπομένων ἀκριβῶς εἰς δεκαδικούς, τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν.

236) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἁπλῶν περιοδικῶν μικροτέρων τῆς μονάδος εἶναι ἁπλοῦν περιοδικόν. Ἐπίσης δέ, ἐὰν τὸ ἓν τῶν κλασμάτων γίνῃ ἀκέραιος.

237) Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν πολλαπλάσιον παντὸς ἀριθμοῦ Α μὴ περιέχοντος τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 ἰσοῦται μὲ $10^{\nu}-1$.

238) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν κοινὸν κλάσμα ἀνάγωγον $\frac{\alpha}{\beta}$ παράγῃ ἁπλοῦν περιοδικόν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς περιόδου ἰσοῦται πρὸς τὸν ἐκθέτην τῆς ἐλαχίστης δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία διαιρουμένη διὰ β, δίδει ὑπόλοιπον 1.

239) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν τρέψωμεν εἰς δεκαδικὰ τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{7}$ καὶ $\frac{\alpha}{13}$ θὰ ἔχωμεν $\frac{K'}{K}=\frac{7}{13}$·(καλοῦντες Κ καὶ Κ′ τὰς δύο περιόδους).

240) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

241) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι ἄθροισμα δύο ἀκεραίων τετραγώνων, τό διπλάσιόν του εἶναι ὡσαύτως ἄθροισμα δύο ἀκεραίων τετραγώνων.

242) Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς (ἐκτὸς τῆς μονάδος) εἶναι διαφορὰ δύο ἀκεραίων τετραγώνων.

243) Νὰ δειχθῇ ὅτι δύο ἀριθμῶν τελείων τετραγώνων ὁ μ. κ. δ. καθὼς καὶ τὸ ε. κ. π. εἶναι ὁμοίως τέλεια τετράγωνα.

244) Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν ἀκέραιον τετράγωνον τὸ ὁποῖον λήγει εἰς 1 ἢ 4 ἢ 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἄρτιον.

245) Ἂν τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ ἐλαττωθῇ κατὰ 13 εἶναι διαιρετὸν διὰ 9, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρούμενος διὰ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 2 ἢ 7.

246) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις. $\dfrac{2.\sqrt{1+\frac{1}{3}}:\sqrt{1-\frac{1}{5}}}{5.\sqrt{1+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{5}}}$

247) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 17, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν εἶναι 731. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

248) Ἐὰν προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι πολλῶν ἀνίσων κλασμάτων, τὸ προκύπτον κλάσμα περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μικροτέρου καὶ τοῦ μεγαλυτέρου π. χ. $\frac{\alpha}{A}<\frac{\beta}{B}<\frac{\gamma}{\Gamma}<\frac{\delta}{\Delta}$ προκύπτει $\frac{\alpha}{A}<\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}<\frac{\delta}{\Delta}$