ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΥΘ. ΧΑΤΖΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ ΛΕΟΝΤΕΙΩ ΛΥΚΕΙΩ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1947

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΕΥΘ. ΧΑΤΖΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ ΛΕΟΝΤΕΙΩ ΛΥΚΕΙΩ

Χατζή (Γεωρ Ευθ.)

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1947
Τύποις: Α. ΜΑΚΡΟΠΟΔΑΡΑ Φρ. Ρούζβελτ 71

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΤΗι ΙΕΡΑι ΣΚΙΑι

ΤΩΝ ΠΡΟΣΦΙΛΕΣΤΑΤΩΝ ΜΟΙ ΚΑΙ ΑΕΙΜΝΗΣΤΩΝ ΓΟΝΕΩΝ ΜΟΥ

ΕΥΘΥΜΙΟΥ ΚΑΙ ΧΡΥΣΟΥΛΑΣ

ΕΙΣ ΜΝΗΜΟΣΥΝΟΝ ΕΥΛΑΒΩΣ ΑΦΙΕΡΩ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 148) Ἔστω εὐθεῖά τις A________________B καὶ μονὰς μήκους τῶν εὐθειῶν Γ__Δ. Ὅταν συγκρίνομεν τὴν AB, πρὸς τὴν μονάδα ΓΔ, εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψωσι τὰ ἀκόλουθα:

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ θὰ συμβῇ τοῦτο, ὅταν ἡ AB περιέχει ἀκριβῶς πολλὰς φορὰς ἢ καὶ μίαν φορὰν τὴν ΓΔ.

2) Δεκαδικὸς ἀριθμὸς (ἢ καὶ περιοδικὸς) καὶ θὰ συμβῇ τοῦτο, ὅταν ἡ AB περιέχει ὑποπολλαπλάσιον τῆς ΓΔ ἢ ὅταν ἡ AB περιέχει πολλὰς φορὰς τὴν ΓΔ καὶ ὑποπολλαπλάσιον αὐτῆς.

3) Δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ καὶ θὰ συμβῇ τοῦτο, ὅταν ἡ AB, δὲν περιέχει ἀκριβῶς οὐδὲν ὑποπολλαπλάσιον τῆς ΓΔ.

Εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις καλοῦμεν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συγκρίσεως ἀριθμὸν ***σύμμετρον***, εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν καλοῦμεν τὸ ἀποτέλεσμα ἀριθμὸν ***ἀσύμμετρον***. ***Ἤτοι***:

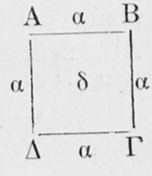
Ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καλεῖται ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

§ 149) Ἐπειδὴ πᾶς μὲν σύμμετρος ἀριθμός, εἴτε ἀκέραιος εἴτε δεκαδικός, ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν π. χ. $4=\frac{24}{6}$, $4=\frac{80}{20}$, $2{,}75=\frac{275}{100}=\frac{11}{4}$, $0{,}999....=1$ $0{,}2323...=\frac{23}{99}$, $3{,}2323.....=\frac{323-3}{99}=\frac{320}{99}$ κ. ο. κ. ***πᾶς δὲ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς*** ἰσοῦται μὲ τὸ κατὰ προσέγγισιν πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὴν ἔννοιαν τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν καὶ οὕτω:

Ἀσύμμετρος ἀριθμὸς καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος δὲν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Πρὸς διάκρισιν λοιπὸν τοὺς ἀκεραίους καὶ κλασματικοὺς καλοῦμεν συμμέτρους.

§ 150) Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται τὰ καθιερωθέντα ἐπὶ τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν. Πρὸς ἐπέκτασιν τῶν πράξεων τῶν συμμέτρων καὶ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων παραλείπομεν τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία ἀπὸ τινος καὶ ἐκεῖθεν καὶ οὕτω μετατρέπομεν τοὺς ἀσυμμέτρους εἰς συμμέτρους. Τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ λαμβάνομεν προσεγγίζουσι πρὸς τὰ ἀληθῆ τόσον περισσότερον, ὅσον περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία διατηροῦμεν. Ὅτι ὑπάρχουσι τοιαῦτα ποσὰ ἀσύμμετρα πρὸς ἄλληλα, τὸ γνωρίζομεν ἐκ τῆς γεωμετρίας. π. χ. ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ· ἤτοι ἐὰν καλέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, διὰ τοῦ α καὶ τὴν διαγώνιον διὰ τοῦ δ εἶναι:



$$(\text{ΒΔ})^2 = (\text{ΔΓ})^2 + (\text{ΒΓ})^2 \text{ ἢ } \delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2, \ \delta^2 = 2\alpha^2$$

καὶ $\dfrac{\delta^2}{\alpha^2} = 2$ καὶ $\dfrac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}$, ἀλλὰ ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος ἐπειδὴ $1^2 = 1$ καὶ $2^2 = 4$, ὅθεν ἡ $\sqrt{2}$ ὀφείλει νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2, ἤτοι θὰ εἶναι 1 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· πρὸς εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους λαμβάνομεν τὰ τετράγωνα τῶν 1,1 – 1,2 – 1,3 – 1,4 – 1 , 5 , κ.ο.κ. καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0,1 εἶναι 1,4. Καθ' ὅμοιον τρόπον λαμβάνομεν τὰ τετράγωνα τῶν 1,41 – 1, 42 – 1,43 – 1,44 κ. ο. κ. παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 εἶναι 1,42. Ὅταν συνεχίσωμεν τὴν ἐργασίαν ταύτην θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι $\sqrt{2}$ δὲν προκύπτει ἀριθμός τις κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος ἢ μορφῆς δεκαδικοῦ περιοδικοῦ κλάσματος. Ὅθεν συνάγομεν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (ἐφ' ὅσον ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

§ 151) Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς, εἶναι γνωστόν, ὅτι τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ καλεῖται ἄλλος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν δίδει τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

π. χ. $\sqrt{25}$ εἶναι ὁ 5 ἐπειδὴ $5^2=25$.

Ἐπίσης καλοῦμεν τρίτην, τετάρτην, πέμπτην....γενικῶς νιοστὴν ρίζαν ἀλγεβρικοῦ τινὸς ἀριθμοῦ, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν τρίτην, τετάρτην, πέμπτην..... νιοστὴν δύναμιν, δίδει τὸν δοθέντα ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν π.χ.

$\sqrt[3]{\alpha}=\gamma$ ἐὰν $\gamma^3=\alpha$

$\sqrt[5]{\alpha}=\delta$ » $\delta^5=\alpha$ καὶ γενικῶς

$\sqrt[\nu]{\alpha}=\beta$ » $\beta^\nu=\alpha$

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ καλεῖται ***ριζικὸν*** καὶ ὁ μὲν ἄνω τιθέμενος ἀριθμὸς καλεῖται δείκτης τῆς ρίζης, ἡ δὲ ὑπ' αὐτὸν παράστασις καλεῖται ***ὑπόρριζον***.

Παράστασις ἔχουσα ριζικὸν καλεῖται ***ἄρρητος*** π.χ. αἱ

$\sqrt{\beta}$, $\alpha+\sqrt{\beta^2}$, $\alpha\sqrt{\gamma}$, κ. ο. κ. εἶναι ἄρρητοι παραστάσεις

Ἡ ρίζα τῆς δευτέρας τάξεως καλεῖται καὶ τετραγωνικὴ ρίζα, αὕτη γράφεται ἄνευ τοῦ δείκτου 2, ἤτοι $\sqrt[2]{\alpha}=\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[2]{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$,

Ἡ ρίζα τρίτης τάξεως καλεῖται καὶ κυβικὴ ρίζα. Μία ρίζα καλεῖται μὲν ἀρτίας τάξεως, ἐὰν ὁ δείκτης εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος, περιττῆς δὲ τάξεως, ἐὰν ὁ δείκτης εἶναι ἀριθμὸς περιττός. Δύο ἢ καὶ περισσότεραι ρίζαι λέγονται ἰσοβάθμιοι ἐὰν ἔχουσι τὸν αὐτὸν δείκτην, ἐὰν ὅμως ἔχουσι διάφορον δείκτην τότε λέγονται ἑτεροβάθμιοι.

ΡΙΖΑΙ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 152) ***Θετικῶν ἀριθμῶν.***

Α΄) Ἐπειδὴ πᾶς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν (§ 26 Τόμος Αος) δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν εἶναι:

$\sqrt{25} = \pm 5$, ἐπειδὴ $(\pm 5)^2 = 25$

$\sqrt[4]{16} = \pm 2$, » $(\pm 2)^4 = 16$ κ. ο. κ. Ἤτοι:

Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ρίζας (ἀντιθέτους) ἑκάστης ἀρτίας τάξεως.

Β΄.) Ἐπειδὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς δύναμιν περιττῆς τάξεως δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν (§ 26 τόμ. Αος) εἶναι:

$\sqrt[3]{27} = 3$ (μόνον $+3$ καὶ οὐχὶ -3, ἐπειδὴ $(-3)^3 = -27$)

$\sqrt[5]{32} = 2$ (» $+2$ » » -2, » $(-2)^5 = -32$).

Ἤτοι: ***Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν μόνον ρίζαν (τὴν θετικὴν) ἑκάστης περιττῆς τάξεως.***

§ 153) ***Ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.***

Α΄.) Ἐπειδὴ θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς δύναμιν ἀρτίας τάξεως δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν εἶναι:

$\sqrt{-25} =$ οὐδεὶς ἀριθμός, ἐπειδὴ $(\pm 5)^2 = 25$ καὶ οὐχὶ -25

$\sqrt[4]{-16} =$ » » » $(\pm 2)^4 = 16$ καὶ » -16

Ἤτοι: ***Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει ρίζαν ἀρτίας τάξεως.***

Β΄) Ἐπειδὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς δύναμιν περιττῆς τάξεως δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν εἶναι:

$\sqrt[3]{-27} = -3$, ἐπειδὴ $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[5]{-32} = -2$, » $(-2)^5 = -32$. Ἤτοι:

Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν (τὴν ἀρνητικὴν) ἑκάστης περιττῆς τάξεως).

Σημείωσις: Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω εἶναι $\sqrt[3]{-27} = -3$ (1)

ἀλλὰ καί $-\sqrt[3]{27} = -3$ (2)

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) βλέπομεν ὅτι τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα· ἄρα καὶ τὰ πρῶτα εἶναι ἴσα

ἤτοι : $\boxed{\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27}}$

Ὁμοίως $\sqrt[5]{-32} = -2$

ἀλλὰ καὶ $-\sqrt[5]{32} = -2$ Ὥστε

$\boxed{\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32}}$ Ἤτοι:

Πᾶσα θετικὴ ρίζα περιττῆς τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν τοῦ θετικοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ φέρουσα τὸν αὐτὸν δείκτην.

§ 154) *Φανταστικοὶ ἀριθμοί.*

Εἴδομεν (§ 153) ὅτι ρίζαι ἀρτίας τάξεως ἀρνητικῶν ἀριθμῶν δὲν ὑπάρχωσι, ἵνα καὶ αὐτῶν θελήσωμεν νὰ ἔχωμεν ρίζας ἀνάγκη εἶναι νὰ παραδεχθῶμεν νέον σύστημα ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν φανταστικούς, βάσις αὐτῶν εἶναι ἡ φανταστικὴ μονὰς ἡ ὁποία συμβολίζεται διὰ τοῦ λατινικοῦ γράμματος (i) καὶ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον δεχόμεθα ὅτι ἰσοῦται μὲ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα ἤτοι $i^2=-1$, συγχρόνως μὲ τὴν i, εἰσάγομεν καὶ τὴν $-i$ ἤτοι $(-i)^2=-1$

ἐπειδὴ $(-i)^2=[(-1)\,.\,i]^2=(-1)^2.i^2=(+1).(-1)=-1.$

Ἐκ τῶν πολλαπλασίων καὶ τῶν ὑποπολλαπλασίων τῶν i καὶ $-i$ σχηματίζονται οἱ νέοι φανταστικοὶ ἀριθμοὶ π. χ.

$$i+i+i=3i,\ (-i)+(-i)+(-i)=-3i,$$

$$\frac{i}{5}+\frac{i}{5}=\frac{2i}{5},\ \frac{5i}{4}-\frac{2i}{4}=\frac{3i}{4}, \text{ κ. ο. κ.}$$

Πρὸς διάκρισιν τῶν νέων ἀνωτέρω ἀριθμῶν (τῶν φανταστικῶν) οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοὶ καλοῦνται πραγματικοὶ καὶ εἶναι οἱ γνωστοὶ ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς $+1$ καὶ -1 (θετικῆς καὶ ἀρνητικῆς μονάδος).

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀποτελούμενοι ἐκ πραγματικῶν καὶ ἐκ φαν-

ταστικῶν μερῶν καλοῦνται μιγάδες π.χ. $2+3i$, $-5-6i$, $-7+8i$ κ.ο.κ. Δύο μιγάδες ἀριθμοί, ἐὰν διαφέρουσι κατὰ τὸ σημεῖον μόνον τοῦ φανταστικοῦ μέρους λέγονται ***συζυγεῖς μιγάδες ἀριθμοὶ*** π. χ. α) $5-3i$, $5+3i$ εἶναι μιγάδες συζυγεῖς
β) $4+5i$, $4-5i$ » » »
γ) $α+δi$, $α-δi$ » » »

Ἴσοι εἶναι οἱ μιγάδες ἀριθμοί, ὅταν καὶ τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἴσα π.χ, $4+5i$ καὶ $4+5i$.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ συστήματος τῶν νέων ἀριθμῶν (φανταστικῶν) εἰς οὐδὲν μεταβάλλονται οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων.

§ 155) *Πράξεις ἐπὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.*

Α) ***Πρόσθεσις—Ἀφαίρεσις.*** Τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως φανταστικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε φανταστικὸν ἢ καὶ 0 π.χ.

$3i+6i=9i$, $7i-4i=3i$, $2i+5i-7i=0$, $2i-7i=-5i$

Β) ***Πολλαπλασιασμός.*** Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν εἶναι φανταστικὸν πλὴν τῆς περιπτώσεως κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ γινόμενον, τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος, ὁπότε τὸ ἐξαγόμενον εἶναι πραγματικὸν π.χ. $(-3i).(4i).=(-12).(-1).=12$, $(3i).(4i)=12.(-1)=-12$.

Σημείωσις

$$(-i)^2=i^2=-1$$
$$i^3=i^2i=(-1).i=-i$$
$$i^4=i^3.i=-i.i=-(-1)=1$$
$$i^5=i^4.i=1.i=i$$
$$i^6=i^4.i^2=1.(-1)=-1$$
$$i^7=i^6.i=(-1)i=-i \text{ κ.ο.κ. Ἤτοι}$$

Αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τῆς φανταστικῆς μονάδος δίδουν ἐξαγόμενα τὰς μονάδος $i, -1, -i, 1, i, -1$ κλπ. Κατ' αὐτὰς αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ i δίδουν πραγματικὰς μονάδας, ἐνῷ αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ i δίδουν φανταστικὰς μονάδας.

Γ) *Διαίρεσις*. $5i : 3i = \frac{5i}{3i} = \frac{5}{3}$ ἤτοι καὶ ἐνταῦθα ἡ διαίρεσις ὁρίζεται ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

§ 156) *Πράξεις ἐπὶ τῶν μιγάδων συζυγῶν.*

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μιγάδων συζυγῶν εἶναι πραγματικὰ καὶ μάλιστα τῆς μὲν προσθέσεως τὸ ἐξαγόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ πραγματικοῦ μέρους τοῦ δὲ γινομένου ἰσοῦται με τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν μερῶν π. χ.

α) $(5+3i)+(5-3i)=10$

β) $(5+3i)\,.\,(5-3i)=25+9=34$ καὶ γενικῶς

1) $(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha$

2) $(\alpha+\beta i)\,.\,(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$

Ἀσκήσεις

476) Νὰ εὑρεθῶσι αἱ ῥίζαι τῶν κάτωθι:

$\sqrt{16},\ \sqrt{49},\ \sqrt{-36},\ \sqrt{-49},\ (\sqrt{-8})^2,\ (\sqrt{-\alpha})^2,\ \sqrt{-\beta^2}),\ \sqrt{\alpha^6}$

$\sqrt[3]{8},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[5]{32},\ \sqrt[5]{1},\ \sqrt[5]{-1},\ (\sqrt[5]{32})^5,\ \sqrt[\tau]{\alpha^\tau},\ (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu\ .$

477) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

$(-3i)\,.\,(-5i),\ 6.\sqrt{-4},\ i\,.\,\sqrt{-16},\ 3i\sqrt{-25},\ 4^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{8}$
$2(4-10i)+(9-5i)+3(1-5i),\ (3-7i)\,(5+3i),\ (5i+3)\,(5i-3)$
$i^7,\ i^{11},\ (1+i)^2,\ (1+i)^3,\ (-0{,}7i)-(5+2i),\ (2+5i)\,(2-5i),$
$(2+5i)+(2-5i).$

478) Νὰ τραπῶσι εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις αἱ κάτωθι:

$\alpha\chi^{\frac{1}{2}}+\beta\chi^{\frac{1}{2}}-\gamma\chi^{\frac{1}{2}},\ \ \alpha\sqrt[3]{\gamma}+\alpha\sqrt[3]{\delta}-\beta\sqrt[3]{\gamma}-\beta\sqrt[3]{\delta},$

$\alpha\chi^{\frac{1}{\lambda}}+\alpha\psi^{\frac{1}{\nu}}+\gamma\sqrt[\lambda]{\chi}+\gamma\sqrt[\nu]{y}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΝ ΕΚΘΕΤΗΝ

§ 157) Ὅπως εἰς τὴν (§ 27 Τόμος Αος) δόσαμε τὸν ὁρισμὸν δυνάμεων ἐπὶ ἀρνητικῶν ἐκθετῶν ἀφοῦ ἐστηρίχθημεν ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων· οὕτω καὶ ἐνταῦθα, ἀφοῦ θέσομεν ὡς ὅρον τὴν διατήρησιν τῆς ἀρχικῆς ἰδιότητος τῶν δυνάμεων $\alpha^\rho \cdot \alpha^\kappa = \alpha^{\rho+\kappa}$ (1) θὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ ἐπὶ κλασματικῶν ἐκθετῶν. Ἄν λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) ὑποθέσωμεν $\rho = \kappa = \frac{1}{2}$, λαμβάνομεν:

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{2}{2}} = \alpha^1 = \alpha, \text{ ἤτοι } \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha$$

Ἄρα τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α, ἐφ' ὅσον ἐπὶ ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν δίδει τὸ α, γενικῶς $\alpha^{\frac{1}{\rho}}$ δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ρὸ ῥίζα τοῦ α, ἐφ' ὅσον $\left(\alpha^{\frac{1}{\rho}}\right)^\rho = \alpha$. Κατὰ ταῦτα εἶναι $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$ καὶ $\alpha^{\frac{1}{\rho}} = \sqrt[\rho]{\alpha}$. ***Ἤτοι Δύναμις μὲ ἐκθέτην κλασματικὴν μονάδα ἰσοῦται μὲ ῥίζαν ἡ ὁποία φέρει μὲν ὑπόρριζον ποσότητα τὴν βάσιν τῆς δυνάμεως δείκτην δὲ τὸν παρανομαστὴν τῆς κλασματικῆς μονάδος.***

Ἐφαρμογαί.

Εἶναι $\beta^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\beta}$, $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = \pm 5$, $6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$ καὶ ἀντιστρόφως: ἀπὸ ῥίζαν εἰς δύναμιν εἶναι $\sqrt[\kappa]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\kappa}}$, $\sqrt[3]{37} = 37^{\frac{1}{3}}$.

Γενικώτερον ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{\rho}{\kappa}}$ (ἔνθα ρ καὶ κ, ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ) δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ κ, ῥίζα τοῦ α^ρ, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον κ, παραγόντων ἴσων πρὸς τὸ $\alpha^{\frac{\rho}{\kappa}}$ εἶναι ἴσον πρὸς α^ρ ἤτοι:

$$\underbrace{\alpha^{\frac{\rho}{\kappa}} \cdot \alpha^{\frac{\rho}{\kappa}} \cdot \alpha^{\frac{\rho}{\kappa}} \ldots\ldots \alpha^{\frac{\rho}{\kappa}}}_{\text{τὸ πλῆθος κ, παραγόντων}} = \left(\alpha^{\frac{\rho}{\kappa}}\right)^{\kappa} = \alpha^{\frac{\rho\kappa}{\kappa}} = \alpha^{\rho}$$

ἄρα $\alpha^{\frac{\rho}{\kappa}} = \sqrt[\kappa]{\alpha^{\rho}}$ ***Ἤτοι πᾶσα δύναμις τῆς ὁποὶας ὁ ἐκθέτης εἶναι κλάσμα, δύναται νὰ γραφῇ ὡς ρίζα μὲ ὑπόρριζον ποσότητα δύναμιν, τῆς ὁποὶας βάσις εἶναι ἡ βασις τῆς δοθείσης δυνάμεως καὶ ἐκθέτης ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου τῆς ἀρχικῆς δυνάμεως, δείκτης δέ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου, καὶ τανάπαλιν. Πᾶσα ρίζα δυνάμεως μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον δύναται νὰ γραφῇ ὡς δύναμις μέ κλασματικὸν ἐκθέτην φέρουσα βάσιν, τὴν βάσιν τῆς ὑπορρίζου δυνάμεως ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος, παρανομαστὴν δὲ τὸν δείκτην τῆς ρίζης.***

Ἐφαρμογαί :

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}} = \alpha^{\frac{\rho}{\nu}}, \quad \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}},$$

§ 158) Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἔχομεν

$$\alpha^{\frac{\rho}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}}. \quad (1)$$

ἀλλὰ καὶ $\alpha^{\frac{\rho}{\nu}} = \alpha^{\frac{1}{\nu}\varrho} = \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\varrho} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\varrho}$ (2)

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα ἕπεται ὅτι καὶ τὰ δεύτερα εἶναι ἴσα, ἤτοι :

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\rho} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}} \quad (3)$$

Δηλαδή, διὰ νὰ ὑψώσωμεν ρίζαν εἰς δύναμιν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἐπὶ τὴν δύναμιν ταύτην.

Ἐφαρμογαὶ :

$$(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = 8, \ (\sqrt{\alpha^{\rho}})^{\nu} = \sqrt{\alpha^{\rho\cdot\nu}}.$$

Παρατήρησις : Ἡ σχέσις (3) δὲν εἶναι πάντοτε ἀληθὴς. Παραδείγματα τινα διὰ τῶν ὁποίων φαίνεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις (3) δὲ ἔχει ἔννοιαν.

$$(\sqrt[4]{16})^2 = \sqrt[4]{16^2} \qquad (\sqrt{-4})^2 = \sqrt{(-4)^2}$$
$$(\pm 2)^2 = \pm 4 \qquad (+2i)^2 = \sqrt{16}$$
$$+4 = \pm 4 \qquad -4 = \pm 4$$

Ἤτοι τοῦ μὲν πρώτου μέλους ἔχομεν μίαν ρίζαν, τοῦ δὲ δευτέρου δύο ἀντιθέτους.

Εἰς τὰ ἑπόμενα καὶ γενικῶς ἐπὶ τῶν ἐφαρμογῶν, ἡ τιμὴ ἑκάστης ρίζης ἀρτίας τάξεως θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸ τοῦ ριζικοῦ π. χ.

$$3+\sqrt{25}=3+5=8 \text{ καὶ } 3-\sqrt{25}=3-5=-2$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 159) Αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἰσχύουσι καὶ μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἤτοι:

1ον) $\alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha$ καὶ

γενικῶς $\alpha^{\frac{\rho}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\rho}{\nu}+\frac{\kappa}{\lambda}}$

2ον) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{\alpha^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}}$, γενικῶς $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\rho}{\nu}} = \dfrac{\alpha^{\frac{\rho}{\nu}}}{\beta^{\frac{\rho}{\nu}}}$

3ον) $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = \alpha^{\frac{8}{15}}$ γενικῶς $\left(\alpha^{\frac{\rho}{\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\tau}} = \alpha^{\frac{\rho.\mu}{\nu.\tau}}$

4ον) $\alpha^{\frac{3}{4}} : \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{4}}$ γενικῶς

$$\alpha^{\frac{\rho}{\nu}} : \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\rho}{\nu}-\frac{\kappa}{\lambda}}$$

5ον) $\left(\alpha \cdot \beta\right)^{\frac{3}{4}} = \alpha^{\frac{3}{4}} \cdot \alpha^{\frac{3}{4}}$ γενικῶς

$$\left(\alpha \cdot \beta\right)^{\frac{\rho}{\nu}} = \alpha^{\frac{\rho}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\rho}{\nu}}$$

§ 160) ***Ἁπλοποίησις.*** **Ἐκ** τῆς ἰσότητος $\alpha^{\frac{\rho}{\nu}} = \alpha^{\frac{\rho \cdot \mu}{\nu \cdot \mu}}$ λαμβάνομεν τὴν ἰσοτητα $\sqrt[\nu]{\alpha^\rho} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\rho\mu}}$.

Ἤτοι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν

δείκτην ρίζης καὶ ἐκθέτην ὑπορρίζου ποσότητος τῆς αὐτῆς ρίζης ἐπὶ τὸν αὐτὸν (ἢ διὰ τοῦ αὐτοῦ) ἀριθμόν.

Παρατήρησις : 1) Ἡ ἀνωτέρω σχέσις $\sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\rho\mu}}$, δὲν εἶναι πάντοτε ἀληθής.

Παραδείγματα τινά, διὰ τῶν ὁποίων φαίνεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις δὲν ἔχει ἔννοιαν.

$\sqrt[3]{8}$ =	$\sqrt[3.2]{8^2}$	$\sqrt[3]{-8}$ =	$\sqrt[3.2]{(-8)^2}$	$\sqrt{-8}$ =	$\sqrt[2.2]{(-8)^2}$
$+2$	± 2	-2	± 2	;	$= 2\sqrt{2}$

ΤΡΟΠΗ ΡΙΖΩΝ ΕΤΕΡΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΙΣ ΙΣΟΒΑΘΜΙΟΥΣ

§ 161) Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγ. § 160, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν ρίζας μὲ διαφόρους δείκτας εἰς ἰσοβαθμίους ρίζας π. χ. τὰς ρίζας διαφόρων δεικτῶν $\sqrt{\alpha^3}$, $\sqrt[3]{\beta^3}$ $\sqrt[4]{\gamma}$ μετατρέπομεν ἀντιστοίχως εἰς ἰσοβαθμίους $\sqrt[2.6]{\alpha^{3.6}}$, $\sqrt[3.4]{\beta^{2.4}}$, $\sqrt[4.3]{\gamma^3}$.

Διὰ τὴν τροπὴν τῶν ἑτεροβαθμίων ριζῶν εἰς ἰσοβαθμίους ἐργαζόμεθα οὕτω.

Εὑρίσκομεν τὸ ε.κ.π. τῶν δεικτῶν, κατόπιν διαιροῦμεν τὸ ε.κ.π. τῶν δεικτῶν, δι᾽ ἑνὸς ἑκάστου δείκτου καὶ μὲ τὰ πηλίκα τὰ ὁποῖα προκύπτουσι πολλαπλασιάζομεν ἀντιστοίχως δείκτην ρίζης καὶ ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἑκάστης ρίζης (δηλαδὴ εἶναι εἷς παράλληλος τρόπος τῆς τροπῆς ἑτερονύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα).

Ἐφαρμογαὶ 1) π. χ. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{120}$, $\sqrt[12]{100}$ ἐ.κ.π. τῶν δεικτῶν=12 ἄρα προκύπτουν αἱ ἰσοβάθμιοι $\sqrt[3.4]{5^4}$, $\sqrt[4.3]{120^3}$, $\sqrt[12]{100}$

ἢ $\sqrt[12]{5^4}$, $\sqrt[12]{120^3}$, $\sqrt[12]{120}$

2) $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt[6]{\gamma^2}$ ἐ.κ.π. =6 ἄρα προκύπτουν ἐκ τούτων αἱ ἰσοβάθμιοι $\sqrt[3.2]{\alpha^2}$, $\sqrt[2.3]{\beta^3}$, $\sqrt[6]{\gamma^2}$

ἢ $\sqrt[6]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\beta^3}$, $\sqrt[6]{\gamma^2}$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΑΡΝΗΤΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§ 162) Ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων μὲ ἀρνητικοὺς ἀκεραίους ἐκθέτας ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν· κατὰ ταῦτα εἶναι $\alpha^{-\frac{\rho}{\nu}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{\rho}{\nu}}}$

ἤτοι $\alpha^{-\frac{\rho}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{-\rho}}$ ἢ $\alpha^{-\frac{\rho}{\nu}} = \dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}}}$

Ἐφαρμογαὶ

$$8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$$

καὶ $$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}$$

§ 163 ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

1ον) ***Πρόσθεσις ριζῶν.***

Αἱ περιέχουσαι ριζικὰ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις προστίθενται ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, δηλαδὴ ἀφοῦ γράψωμεν τοὺς ὅρους τοὺς ἀποτελοῦντας αὐτὰς σὲ μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν καὶ μὲ τὰ ἴδια αὐτῶν σημεῖα. π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν παραστάσεων $2\alpha^3\sqrt{5\beta}$, $(4\alpha^3+3\beta^3)\sqrt{\alpha}$, $3\alpha^2\beta\sqrt{\alpha}$, $-8\sqrt{3\alpha\beta\gamma}$ $+8\alpha\beta^2\sqrt{5\beta}$, εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις:

$2\alpha^3\sqrt{5\beta} + (4\alpha^3+3\beta^3)\sqrt{\alpha} + 3\alpha^2\beta\sqrt{\alpha} - 8\sqrt{3\alpha\beta\gamma} + 8\alpha\beta^2\sqrt{5\beta}$

Τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καθίσταται: $(4\alpha^3+3\beta^3+3\alpha^2\beta)\sqrt{\alpha} + (2\alpha^3+8\alpha\beta^2)\sqrt{5\beta} - 8\sqrt{3\alpha\beta\gamma}$.

2ον) ***Ἀφαίρεσις ριζῶν.***

Αἱ περιέχουσαι ριζικὰ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἀφαιροῦνται ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι, ἀφ' οὗ γραφῶσι δηλαδὴ ἕνας ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς ἀφαιρετέας παραστάσεως κατόπιν τῶν ὅρων τῆς μειωτέας παραστάσεως μὲ ἀντίθετα σημεῖα. π. χ. ἐκ τῆς παραστάσεως $3\alpha\sqrt{5\beta}-4\beta\sqrt{2\alpha}$ ν' ἀφαιρεθῇ ἡ παράστασις $(5\alpha-3\beta)\sqrt{2\alpha}+7\beta\sqrt{3\alpha}-(6\beta+2\alpha)\sqrt{5\beta}$ ἡ διαφορὰ αὐτῶν δίδεται ὑπὸ τῆς παραστάσεως $3\alpha\sqrt{5\beta}-4\beta\sqrt{2\alpha}-(5\alpha-3\beta)\sqrt{2\alpha}-7\beta\sqrt{3\alpha}+(6\beta+2\alpha)\sqrt{5\beta}$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων λαμβάνομεν: $(6\beta+5\alpha)\sqrt{5\beta}-(\beta+5\alpha)\sqrt{2\alpha}-7\beta\sqrt{3\alpha}$.

3ον) *Πολλαπλασιασμὸς ῥιζῶν.*

α΄) ***ἰσοβαθμίων ῥιζῶν.***

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha^{\frac{1}{2}}.\beta^{\frac{1}{2}}.\gamma^{\frac{1}{2}}=(\alpha.\beta.\gamma)^{\frac{1}{2}}$

λαμβάνομεν $\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}.\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha\beta\gamma}$

συνάγομεν: ***Τὸ γινόμενον δύο ἢ καὶ περισσοτέρων ἰσοβαθμίων ῥιζῶν ἰσοῦται μὲ ἰσοβάθμιον ῥίζαν ἡ ὁποῖα φέρει ὡς ὑπόρριζαν ποσότητα τὸ γινόμενον τῶν ὑπορρίζων ποτοτήτων.***

Ἐφαρμογαὶ

$$\sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{27.8}=\sqrt[3]{216}=6$$
$$\sqrt{4}.\sqrt{9}=\sqrt{4.9}=\sqrt{36}=\pm 6$$
$$\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta^{\nu}}=\sqrt{\alpha\beta^{\nu}}$$

β΄) ***Ἑτεροβαθμίων ῥιζῶν.***

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ῥίζας μὲ διαφόρους δείκτας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς ἰσοβαθμίους καὶ κατόπιν ἔχομεν πολλαπλασιασμὸν ἰσοβαθμίων ῥιζῶν

π. χ. $\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[4]{\beta}.\sqrt[6]{\gamma^2}=\sqrt[12]{\alpha^4}.\sqrt[12]{\beta^3}.\sqrt[12]{\gamma^4}.=\sqrt[12]{\alpha^4\beta^3\gamma^4}$

Σημείωσις

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἰσότητος $\left(\alpha^{\rho}.\beta\right)^{\frac{1}{\rho}}=\alpha.\beta^{\frac{1}{\rho}}$

λαμβάνομεν $\sqrt[\rho]{\alpha^{\rho}.\beta}=\alpha\sqrt[\rho]{\beta}$ (1) συνάγομεν:

Δυνάμεθα νὰ ἐξάγωμεν ἐκτὸς ῥιζικοῦ παράγοντα τινὰ ἢ τινάς, ὅταν προηγουμένως ἐξάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν ἢ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὁρμώμενοι ἐκ τοῦ β΄ μέλους τῆς (1) πρὸς τὸ πρῶτον.

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐντὸς ῥιζικοῦ παράγοντα τινὰ θετικόν, ἐὰν προηγουμένως ὑψώσωμεν αὐτὸν εἰς τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν.

'Εφαρμογαὶ 1) $\sqrt[3]{8.4} = \sqrt[3]{2^3\,2^2} = 2\sqrt[3]{2^2}$

2) $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4.2} = \sqrt[4]{625.2} = \sqrt[4]{1250}$

4) ***Διαίρεσις ῥιζῶν***

α΄) ***ἰσοβαθμίων ῥιζῶν***. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{\rho}}}{\beta^{\frac{1}{\rho}}} \quad \text{λαμβάνομεν} \quad \sqrt[\rho]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\rho]{\alpha}}{\sqrt[\rho]{\beta}} \quad (1)$$

συνάγομεν : ***Ρίζα κλάσματος ἐξάγεται, ἐὰν ἐξαχθῇ χωριστὰ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωριστὰ τοῦ παρανομαστοῦ*** ἢ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὁρμώμενοι ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους πρὸς τὸ πρῶτον τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (1). ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἰσοβαθμίους ῥίζας ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἰσοβάθμιον ῥίζαν μὲ ὑπόρριζον ποσότητα τὸ πηλίκον τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων***

'Εφαρμογαὶ 1) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

2) $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2$

β΄) ***ἑτεροβαθμίων ῥιζῶν.***

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἑτεροβαθμίους ῥίζας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς ἰσοβαθμίους καὶ κατόπιν ἔχομεν διαίρεσιν ἰσοβαθμίων ῥιζῶν π. χ.

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[2.3]{\alpha^3} : \sqrt[3:2]{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} =$$

$$\sqrt[6]{\alpha^3 : \frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \sqrt[6]{\alpha^3\frac{\beta^2}{\alpha^2}} = \sqrt[6]{\alpha\beta^2}$$

Σημείωσις

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἰσότητος $\left(\frac{\alpha}{\beta^\rho}\right)^\varrho = \frac{\alpha^{\frac{1}{\rho}}}{\beta}$ λαμβάνομεν

$$\sqrt[\rho]{\frac{\alpha}{\beta^\rho}} = \frac{\sqrt[\rho]{\alpha}}{\beta} \quad (1) \text{ συνάγομεν:}$$

Δυνάμεθα νὰ ἐξάγωμεν θετικὸν διαιρέτην ὑπορρίζου ποσότητος ἐκτὸς ῥιζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον αὐτοῦ ῥίζαν. Ἢ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὁρμώμενοι ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους πρὸς τὸ πρῶτον τῆς ἀνωτέρου σχέσεως (1). ***Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν διαιρέτην τινὰ θετικὸν (ἢ τινὰς) ἐντὸς ῥιζικοῦ ῥίζης τινὸς ἐὰν προηγουμένως ὑψώσωμεν αὐτὸν (αὐτοὺς) εἰς τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν.***

Ἐφαρμογαί :

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha}{8}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\sqrt[5]{\alpha}}{\beta} = \sqrt[5]{\frac{\alpha}{\beta^5}}$$

Παρατήρησις : Πολλάκις τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτον κλάσμα, τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων εἶναι ἐπιδεκτικὸν ἁπλοποιήσεων, ἐπειδὴ διὰ τῶν ἁπλοποιήσεων αὐτῶν καθίσταται ἐνίοτε καὶ τέλειον τετράγωνον π. χ.

$$1)\quad \frac{\sqrt{21\,\alpha^3\,\beta^5\,\chi^2}}{\sqrt{6\,\alpha^4\,\beta^3\,\chi^3}} = \sqrt{\frac{21\,\alpha^3\,\beta^5\,\chi^2}{6\,\alpha^4\,\beta^3\,\chi^3}} = \sqrt{\frac{7\,\beta^2}{2\,\alpha\chi}} = \beta\sqrt{\frac{7}{2\,\alpha\chi}},$$

$$2)\quad \frac{\sqrt{75\,\alpha^3\,\beta^3\,\gamma}}{\sqrt{27\,\alpha\;\beta\;\gamma^3}} = \sqrt{\frac{75\,\alpha^3\,\beta^3\,\gamma}{27\,\alpha\;\beta\;\gamma^3}} = \sqrt{\frac{25\,\alpha^2\,\beta^2}{9\,\gamma^2}} = \frac{5\,\alpha\,\beta}{3\,\gamma} \quad \text{ἤτοι}$$

Βλέπομεν ὅτι ἡ μὲν πρώτη ἐπαισθητῶς ἡπλοποιήθη, ἡ δὲ δευτέρα ἔγινε τέλειον τετράγωνον διὰ τῶν δυνατῶν ἁπλοποιήσεων.

§ 164) *Τροπὴ ἀρρήτων παρονομαστῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἰς ῥητούς.*

Εἶναι πολλάκις ὠφέλιμον νὰ μετατρέπωμεν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ῥιζικὰ εἰς τὸν παρανομαστήν, εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ οὗτο καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ παρανομαστὴν ῥητόν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καταλλήλως, ἅπαξ ἢ ἐνίοτε καὶ πολλάκις τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα π. χ. Ὁ παρανομαστὴς τοῦ κλάσματος $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ καθίσταται ῥητός, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ $\sqrt{5}$. ἤτοι

$$\frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2} = \frac{7\sqrt{5}}{10}.$$

Ὁμοίως ὁ παρανομαστὴς τοῦ κλάσματος $\dfrac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$ καθίσταται ῥητός, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ $3\sqrt{5}+4\sqrt{2}$. ἤτοι

$$\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{7}(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{(3\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2} = \frac{6\sqrt{35}+8\sqrt{14}}{13}$$

Ὁμοίως ὁ παρανομαστὴς τοῦ κλάσματος $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha}-\sqrt{\gamma}}$ καθίσταται ῥητός, ἐὰν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος τούτου πολλαπλασιασθῶσι πρῶτον ἐπὶ τὴν παράστασιν $\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha}+\sqrt{\gamma}$ καὶ κατόπιν οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος ποὺ θὰ προκύψῃ ἐπὶ τὴν παράστασιν $\beta+2\alpha-\gamma-2\sqrt{2\alpha\beta}$ ἤτοι:

$$\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha}-\sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha\sqrt{\beta}\,[(\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha})+\sqrt{\gamma}]}{[(\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha})-\sqrt{\gamma}]\,[(\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha})+\sqrt{\gamma}]}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{2\alpha})^2-(\sqrt{\gamma})^2} = \frac{\alpha\beta+\alpha\sqrt{2\alpha\beta}+\alpha\sqrt{\beta\gamma}}{\beta+2\alpha+2\sqrt{2\alpha\beta}-\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha\beta+\alpha\sqrt{2\alpha\beta}+\alpha\sqrt{\beta\gamma}}{\beta+2\alpha-\gamma+2\sqrt{2\alpha\beta}} = \frac{(\alpha\beta+\alpha\sqrt{2\alpha\beta}+\alpha\sqrt{\beta\gamma})}{[(\beta+2\alpha-\gamma)+2\sqrt{2\alpha\beta}]}.$$

$$\frac{(\beta+2\alpha-\gamma-2\sqrt{2\alpha\beta})}{[(\beta+2\alpha-\gamma)-2\sqrt{2\alpha\beta}]} = \frac{(\alpha\beta+\alpha\sqrt{2\alpha\beta}+\alpha\sqrt{\beta\gamma})(\beta+2\alpha-\gamma-2\sqrt{\alpha\beta})}{4\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\alpha\beta-4\alpha\gamma-2\beta\gamma}$$

Ἀσκήσεις.

479) Νὰ γραφῶσι ὡς ῥίζαι αἱ κάτωθι δυνάμεις:

$$\alpha^{\frac{1}{3}},\ \beta^{\frac{3}{4}},\ \gamma^{\frac{2}{3}},\ \alpha^{\frac{2}{5}},\ \beta^{\frac{1}{4}},\ \gamma^{2\frac{3}{\rho}},\ \alpha^{-\frac{1}{2}},\ \beta^{-\frac{\rho}{3}},\ \gamma^{-\frac{3}{4}}.$$

480) Νὰ γραφῶσι ὡς δυνάμεις αἱ κάτωθι ῥίζαι:

$$\sqrt[\rho]{\alpha^{\nu}},\ \sqrt{\beta^{\nu}},\ \sqrt[5]{\gamma},\ \sqrt[4]{\gamma^{2\rho}},\ \sqrt[5]{\beta^{5\nu}},\ \sqrt[6]{48},\ \sqrt[\tau\rho]{\alpha^{\rho}}.$$

481) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι:

$$100^{\frac{1}{2}},\ 49^{\frac{1}{2}},\ (-8)^{-\frac{2}{3}},\ 4^{-\frac{1}{2}},\ 8^{-\frac{1}{3}},\ (-16)^{-\frac{1}{4}},\ (\alpha^4)^{-\frac{1}{2}},$$

$$4^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}},\ 4\alpha^{-2} - 5\alpha^{-\frac{1}{3}}.$$

482) Νὰ τραπῶσι εἰς ἰσοβαθμίους μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην αἱ κάτωθι ῥίζαι:

$$\sqrt[3]{\alpha},\ \sqrt[4]{\beta^2},\ \sqrt[6]{\gamma^2},\ \sqrt[8]{\alpha^4},\ \sqrt[4]{\alpha^2},\ \sqrt{\beta}\,.$$

483) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμεναι τῶν κάτωθι:

$$\sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{\alpha^2}\ \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta^3}},\ \sqrt{5}\ \sqrt{20},\ \sqrt{5\gamma^2}\ \sqrt[3]{5\gamma^2}\ \sqrt[3]{25\gamma},\ \sqrt{\alpha}\ \sqrt[3]{\beta},$$

$$\sqrt[3]{4}\,.\sqrt{2}\,.\sqrt[4]{30},\quad \alpha^{\frac{1}{3}}\,.\,\sqrt[5]{2\alpha^2}\,.\ \sqrt{2\alpha},$$

484) Ὁμοίως

$$\sqrt[3]{\alpha^6} : \sqrt[3]{\alpha^2},\ \sqrt[3]{\alpha^4} : \sqrt[3]{\beta},\ \sqrt{72} : \sqrt{2},\ \sqrt{54} : \sqrt{3},$$

$$\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{8},\ \sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[8]{\alpha},\ \sqrt{\alpha} : \sqrt[5]{\alpha},\ \sqrt[4]{\chi^3} : \sqrt[3]{\chi^2},$$

485) Ὁμοίως

$$2\sqrt{\frac{4}{3}},\ 3\sqrt{5}\,.\,2\sqrt{20},\ \alpha^{\frac{2}{3}}\,.\sqrt[3]{\alpha},\ \sqrt[3]{72} : 2,\ 5\sqrt{4},\ 5\sqrt[3]{\alpha},\ 3^2\sqrt{3^4},$$

486) Νὰ τραπῶσι εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα μὲ ῥητοὺς παρανομαστάς:

$$\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{2}{2-3\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}},\ \frac{1}{3+\sqrt{2}},\ \frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}},$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\,.\sqrt{\beta}},\ \frac{1}{2+\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}-1},\ \frac{2}{\sqrt{5}+1},\ \frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}},$$

$$\frac{1}{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})},\ \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}},$$

487) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι:

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}}$, $\sqrt{8} : \sqrt{50}$, $\sqrt{\alpha\beta} : \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\sqrt{108} : \sqrt{27}$,

$2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$, $(\alpha^2+\beta^2) : (\alpha - \beta\sqrt{-1})$,
$(1+\sqrt{2}) : (2-\sqrt{2})$.

488) Νὰ τραπῶσι οἱ παρανομασταὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων εἰς πραγματικούς:

$\frac{5-3i}{3+5i}$, $\frac{1-i}{3-2i}$, $\frac{3+5i}{-2-3i}$, $\frac{5-3i}{2i}$, $\frac{-21+1}{2i^3}$,

§ 165 *Μετασχηματισμὸς παραστάσεων μὲ ριζικά.*

Δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν παράστασιν μὲ ἁπλᾶ ριζικὰ εἰς παράστασιν μὲ διπλᾶ ριζικὰ καὶ τανάπαλιν π. χ. τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$, ἐὰν τὴν καλέσωμεν διὰ τοῦ χ, γράφεται $\chi = \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ (1). Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν $\chi^2 = (\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^2$ ἢ $\chi^2 = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}$ ἐξ ἧς ἔχομεν $\chi = \sqrt{\alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}}$ (2) Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα.

$$\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}}$$

Σημείωσις: Ἐάν, τὸ αβ εἶναι τέλειον τετράγωνον τότε ἡ $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ καταλήγει εἰς παράστασιν μὲ ἁπλᾶ ριζικὰ ἢ καὶ εἰς ἄνευ ριζικῶν.

Ἐφαρμογαί.

α′) $\sqrt{6} + \sqrt{4} = \sqrt{6 + 4 + 2\sqrt{24}}$

β′) $\sqrt{5 + 6 + 2\sqrt{30}} = \sqrt{5} + \sqrt{6}$

γ′) $\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2+18+2\sqrt{36}} = \sqrt{2 + 18 + 2.6} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

δ′) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4 + 9 + 2\sqrt{36}} = \sqrt{4+9+2.6} = \sqrt{25} = \pm 5$

'Ασκήσεις.

§ 489) Νὰ μετασχηματισθῶσι οἱ κάτωθι παραστάσεις.

$\sqrt{3}+\sqrt{12}$, $\sqrt{6}-\sqrt{4}$, $\sqrt{25}+\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

$\sqrt{2\chi+2\,(\chi^2-y^2)}$, $\sqrt{\chi^2+y+2\chi\sqrt{y}}$, $\sqrt{\alpha+\alpha\beta-2\alpha\sqrt{\beta}}$, $\sqrt{5+\sqrt{24}}$

$\sqrt{12+3+2\sqrt{36}}$, $\sqrt{11-2\sqrt{15}}$, $\sqrt{7+2+2\sqrt{14}}$

§ 166) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένων ἔχομεν:

ἀφ' ἑνὸς

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\frac{1}{\rho}}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha}} \qquad (1)$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου.

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\frac{1}{\rho}}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\frac{1}{\rho}}=\left(\alpha^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\frac{1}{\nu}}\ \alpha^{\frac{1}{\nu.\rho}}=\sqrt[\nu,\rho]{\alpha} \qquad (2)$$

Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι:

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha}}=\sqrt[\nu\rho.]{\alpha} \qquad (3)$$

Ἤτοι Ρίζα ἄλλης ρίζης ποσότητος τινὸς ἰσοῦται καὶ μὲ ρίζαν φέρουσα ὑπόρριζον ποσότητα τὴν ἰδίαν καὶ δείκτην τὸ γινόμενον τῶν δεικτῶν τῶν ἰδίων ριζῶν,

'Εφαρμογαί.

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{4096}}}=\sqrt[12]{4096}$$

πράγματι, ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{4096}}}=\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2,$$ ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2.$$

Ἀσκήσεις. 490) Νὰ γραφῶσι παραδείγματα τινὰ τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς μὲ δύο, μὲ τρία καὶ μὲ τέσσσαρα ῥιζικά.

§ 167) ***Τετραγωνικὴ ῥίζα μονωνύμων.***

Τετραγωνικὴ ῥίζα δοθείσης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καλεῖται κατ' ἐπέκτασιν τῆς § 151, ἄλλη τις παράστασις τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον δίδει τὴν δοθεῖσαν. Τοιουτοτρόπως τὸ μονώνυμον $5\alpha^2\beta\gamma^3$ εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $25\alpha^4\beta^2\gamma^6$, ἤτοι $\sqrt{25\alpha^4\beta^2\gamma^6} = \pm 5\alpha^2\beta\gamma^3$, ἐπειδὴ $(\pm 5\alpha^2\beta\gamma^3)^2 = 25\alpha^4\beta^2\gamma^6$.

Ὁμοίως τὸ κλάσμα $\frac{2\alpha\beta^2}{3\gamma^2\delta}$ εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{4\alpha^2\beta^4}{9\gamma^4\delta^2}$,

ἤτοι $\sqrt{\frac{4\alpha^2\beta^4}{9\gamma^4\delta^2}} = \pm\frac{2\alpha\beta^2}{3\gamma^2\delta}$, ἐπειδὴ $\left(\pm\frac{2\alpha\beta^2}{3\gamma^2\delta}\right)^2 = \frac{4\alpha^2\beta^4}{9\gamma^4\delta^2}$.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν εὐκόλως ὅτι:

1ο) Ἵνα ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν μονωνύμου τίνος πρέπει νὰ ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ, νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν διαφόρων γραμμάτων διὰ 2 καὶ νὰ θέσωμεν πρὸ τοῦ ἐξαγομένου τὰ σημεῖα + καὶ —.

2ον) Ἵνα ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἀναγώγου τινὸς κλάσματος, ἀλγεβρικοῦ, πρέπει νὰ ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς ἑκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ νὰ θέσωμεν πρὸ τοῦ ἐξαγομένου τὰ σημεῖα + καὶ —.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι:

1ον) Ἵνα μονώνυμόν τι εἶναι τέλειον τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ μὲν συντελεστὴς αὐτοῦ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, οἱ δὲ ἐκθέται τῶν διαφόρων γραμμάτων αὐτοῦ νὰ εἶναι ἄρτιοι. καὶ

2ον) Ἵνα ἀνάγωγον ἀλγεβρικὸν κλάσμα εἶναι τέλειον τετράγωνον ἄλλου κλάσματος ἀλγεβρικοῦ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ νὰ εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Παρατήρησις σπουδαία.

Ἐὰν μονώνυμον δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε ἢ ἀφήνομεν σημειωμένην τὴν πρᾶξιν ἐπ' αὐτοῦ π.χ. τῆς αβ, τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι $\sqrt{\alpha\beta}$, ἢ ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἀποσυνθέτωμεν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν πρῶτος νὰ εἶναι τὸ γινόμενον πάννων τῶν εἰς αὐτὴν τελείων τετραγώνων παραγόντων ὁ δὲ δεύτερος τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν καὶ ἀκολούθως ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου θέτοντες αὐτὴν ὡς συντελεστὴν πρὸ τοῦ ριζικοῦ τοῦ δευτέρου. π. χ.

$$\sqrt{5\alpha^4\beta^7.\gamma^8.\delta''} = \sqrt{\alpha^4.\beta^6.\gamma^8.\delta^{10}.5\beta\delta}. = \alpha^2\beta^3\gamma^4\delta^5\sqrt{5\beta\delta},$$

$$\sqrt{\frac{25\alpha^4\beta^2\gamma}{\delta}} = \frac{5\alpha^2\beta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}} = 5\alpha^2\beta\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}},$$

Ἡ τοιαύτη ἐπὶ τῶν ριζικῶν ἐργασία εἶναι ἀπαραίτητος, ὅταν ἐκτελῶμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν εὑρισκομένων ὁμοίων ριζικῶν εἰς ἀλγεβρικήν τινα παράστασιν, διότι πολλάκις ριζικὰ φαίνονται ἀνόμοια, ἐνῷ μετὰ τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν καθίστανται ὅμοια.π.χ.

Τὰ ριζικὰ $\sqrt{45\alpha^5\beta^2\gamma}$ καὶ $\sqrt{80\alpha^3\beta^4\gamma}$ φαίνονται ἀνόμοια ἐνῷ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας γίνονται ὅμοιοι $3\alpha^2\beta\sqrt{5\alpha\gamma}$ καὶ $4\alpha\beta^2\sqrt{5\alpha\gamma}$.

Ἐφαρμογαί:

$$\sqrt{25\alpha^4\beta^{12}\gamma^8} = \pm\, i\alpha^2\beta^6\gamma^4, \quad \sqrt{-16\alpha^8\beta^2\gamma^{10}} = \pm\, 4i\alpha^2\beta\gamma^5$$

$$\sqrt{\frac{9\alpha^4\beta^6}{16\gamma^2}} = \pm\frac{3\alpha^2\beta^3}{4\gamma}, \quad \sqrt{\frac{-9\alpha^6\beta^4}{\gamma^2\delta^8}} = \pm\frac{3i\alpha\beta^3}{\gamma\delta^4}$$

$$\sqrt{-25\alpha^2\beta^7\gamma^3} = \pm\, 5i\alpha\beta^3\gamma\sqrt{\beta\gamma}$$

Ἀσκήσεις.

491) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι:

$$\sqrt{\frac{-\alpha^2\beta^2\gamma^6}{16\delta^4}}, \quad \sqrt{121\alpha^2\beta^4\gamma^6}, \quad \sqrt{\frac{16}{49}\alpha^2\beta^6}, \quad \sqrt{\frac{-25\alpha^6}{9\gamma^8\delta^2}},$$

$$\sqrt{-6\alpha^3\gamma^2}, \quad \sqrt{\frac{4}{16}\alpha\beta^3\gamma^4}, \quad \sqrt{\alpha^3\beta\gamma^5}, \quad \sqrt{-16\alpha\beta^3\gamma}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

§ 168) *Πᾶσα ἐξίσωσις, πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἡ ὁποία μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων πράξεων, τὴν μεταφορὰν ὅλων τῶν ὅρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων λαμβάνει μίαν τῶν κάτωθι τεσσάρων μορφῶν*
$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, $\alpha\chi^2=0$, $\alpha\chi^2+\gamma=0$, $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, ***καλεῖται ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ.***

Διὰ τοῦ α παριστῶμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ χ^2, διὰ τοῦ β τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ χ, διὰ τοῦ γ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν γνωστῶν ὅρων. Τὰ α,β,γ, εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ καὶ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί.

Δέον νὰ εἶναι $\alpha\neq 0$, διότι ἂν $\alpha=0$, ἡ ἐξίσωσις καθίσταται πρωτοβάθμιος.

Ἡ μορφὴ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ καλεῖται ***γενικὴ μορφὴ*** τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. Αἱ λοιπαὶ τρεῖς καλοῦνται ***μερικαὶ μορφαί.***

§ 169) ***Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.***

Α΄.) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha=\beta$ (1) τῆς ὁποίας χάριν συντομίας παριστῶμεν ἕκαστον τῶν μελῶν αὐτῆς δι᾿ ἑνὸς γράμματος.

Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς περιττήν τινα δύναμιν, λαμβάνομεν τὴν $\alpha^{2\nu+1}=\beta^{2\nu+1}$ (2).

Πᾶσα λύσις τῆς (1) θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς (2), ἐπειδὴ ἀριθμῶν, ἴσων, αἱ ἰσοβάθμιοι δυνάμεις εἶναι ἴσαι καὶ τανάπαλιν πᾶσα λύσις τῆς (2) θὰ εἶναι λύσις τῆς (1) ἐπειδὴ ὅταν καταστῶσιν αἱ παραστάσεις $\alpha^{2\nu+1}$ καὶ $\beta^{2\nu+1}$ ἀριθμοὶ ἴσοι, αἱ ῥίζαι, τῆς αὐτῆς περιττῆς τάξεως $2\nu+1$, τῶν ἴσων αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ εἶναι ἴσαι. Αἱ ἐξισώσεις ἄρα (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἤτοι: ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν περιττῆς τάξεως ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς ἀρχικῆς.***

Β΄.) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha=\beta$ (1). Ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς ἀρτίαν τινὰ δύναμιν λαμβάνομεν $\alpha^{2\nu}=\beta^{2\nu}$ (2). Πᾶσα λύσις τῆς (1) θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς (2), ἐπειδὴ ἀριθμῶν ἴσων αἱ ἰσοβάθμιοι δυνάμεις εἶναι ἴσαι. Ἐν ᾧ πᾶσα λύσις τῆς

(2) ***δὲν*** εἶναι καὶ λύσις τῆς (1), ἐπειδὴ καθιστομένων τῶν παραστάσεων $α^{2ν}$ καὶ $β^{2ν}$, διὰ λύσεως τινὸς τῆς (2), ἀριθμῶν ἴσων, τούτων ἕκαστος ἔχει δύο ρίζας ἀρτίας τινὸς τάξεως.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\left.\begin{array}{l} α = β \\ ἢ\ α = -β \end{array}\right|$ (3). Ὅθεν ἡ λύσις τῆς (2) εἶναι λύσις μιᾶς τῶν ἐξισώσεως τῆς (3). Ἤτοι: ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν ἀρτίας τάξεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῆς ἀρχικῶς δοθείσης ἀλλὰ καὶ τῆς προκυπτούσης ἐξ αὐτῆς, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς.***

Σημειώσεις: 1) αἱ $α=β$ καὶ $α=-β$ καλοῦνται συζυγεῖς.

2) Τὰ ἀνωτέρω ἀληθεύουν μόνον διὰ τὰς πραγματικὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τὰς φανταστικὰς πχ. ἡ ἐξίσωσις $χ^4=1$, πλὴν τῶν λύσεων $+1$ καὶ -1 ἔχει καὶ τὰς φανταστικὰς ρίζας $\pm\sqrt{-1}$,

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $α=β$, λαμβάνομεν τὴν $α^2=β^2$, ἡ ὁποῖα ἔχει δύο ρίζας τὰς $α=β$ καὶ $α=-β$. Ἤτοι: ***Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθῶσι εἰς τὸ τετράγωνον ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποῖα θὰ προκύψῃ θὰ περιέχῃ ὄχι μόνον τὰς ρίζας τῆς ἀρχικῶς δοθείσης, ἀλλὰ καὶ τὰς ρίζας τῆς συζυγοῦς αὐτῆς.***

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἐγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν δοθείσης ἐξισώσεως ἡ προκύπτουσα καὶ ἡ συζυγὴς πρὸς αὐτὴν ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικῶς δοθεῖσαν.

§ 170) ***Λύσις τῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.***

Λύσις τῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν αὐτῆς.

Α΄) ***Μερικαὶ μορφαί.***

1ον) Τῆς $αχ^2=0$, ἡ λύσις εἶναι $χ^2=\dfrac{0}{α}$ καὶ $\boxed{χ=0}$

ἤτοι αἱ ρίζαι εἶναι $χ=0$ καὶ εἶναι διπλῆ.

2ον) Τῆς $\alpha\chi^2+\gamma=0$, ἡ λύσις εἶναι $\alpha\chi^2=-\gamma$ καὶ $\chi^2=-\frac{\gamma}{\alpha}$

καὶ $\boxed{\chi=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}}$ ἤτοι αἱ ῥίζαι εἶναι

δύο: $\boxed{\chi_1=+\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \text{ καὶ } \chi_2=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}.}$

Σημείωσις. Ἐὰν $-\frac{\gamma}{\alpha}>0$ αἱ ῥίζαι εἶναι πραγματικαί.

Ἐὰν $-\frac{\gamma}{\alpha}<0$ αἱ ῥίζαι εἶναι φανταστικαί.

3ον) Ἡ $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, γράφεται $\chi(\alpha\chi+\beta)=0$ καὶ ἵνα γινόμενον δύο παραγόντων ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἀρκεῖ εἷς τῶν παραγόντων νὰ εἶναι μηδέν, ἕπεται ὅθεν ὅτι ἢ $\boxed{\chi=0}$ ἢ ὅτι

$\alpha\chi+\beta=0$ καὶ $\alpha\chi=-\beta$, καὶ $\boxed{\chi=-\frac{\beta}{\alpha}}$

ἤτοι αἱ ῥίζαι εἶναι δύο : $\boxed{\chi_1=0 \text{ καὶ } \chi_2=-\frac{\beta}{\alpha}.}$

Ἐφαρμογαί: Ἔστω πρὸς λύσιν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1ον)

$3\chi^2=0$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $\chi^2=\frac{0}{3}$ καὶ $\boxed{\chi=0.}$

2ον)

α'.) $2\chi^2-162=0$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς $2\chi^2=162$, $\chi^2=81$, $\chi=\pm\sqrt{81}$, καὶ $\chi=\pm9$,

ἤτοι αἱ ῥίζαι εἶναι δύο $\boxed{\chi_1=9 \text{ καὶ } \chi_2=-9.}$

β'.) $\frac{5\psi}{9} = \frac{125}{\psi}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς $5\psi^2 = 1125$, $\psi^2 = 225$, $\psi = \pm\sqrt{225}$, καὶ $\psi = \pm 15$,

ἤτοι αἱ ρίζαι εἶναι δύο $\boxed{\psi_1 = 15 \text{ καὶ } \psi_2 = -15.}$

3ον)

α'.) $\chi^2 - 4\chi = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς $\chi(\chi - 4) = 0$, ὅθεν ἢ $\chi = 0$ ἢ $\chi - 4 = 0$, ὅτε $\chi = 4$

ἤτοι αἱ ρίζαι εἶναι δύο $\boxed{\chi_1 = 0,\ \chi_2 = 4}$

β'.) $7\psi^2 + 21\psi = 0$. ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς $\psi^2 + 3\psi = 0$, $\psi(\psi + 3) = 0$, ὅθεν ἢ $\psi = 0$ ἢ $\psi + 3 = 0$, ὅτε $\psi = -3$, ἤτοι αἱ ρίζαι εἶναι δύο $\boxed{\psi_1 = 0,\ \psi_2 = -3}$

Ἀσκήσεις,

492) Νὰ λυθῶσι καὶ ἐπαληθευθῶσι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: $\chi^2 + 32 = 81$, $2\chi^2 = 338$, $4\chi^2 - 3 = 2\chi^2 + 239$, $4\chi^2 = 4$.

493) $\frac{\psi^2 - 9}{3} = \frac{\psi^2 - 1}{2}$, $45\chi^2 - 1 = 15\chi^2 + 75$, $\frac{3\chi}{2} = \frac{216}{\chi}$, $3\chi^2 = 3\chi$

494) $(\chi - 3)(\chi + 2) = 2\chi - 6$, $0{,}75\chi^2 = 2\frac{1}{3}\chi - \frac{\chi}{2}$ $(4\chi - 2)(3\chi + 4) = 15\chi - 8$,

494) $\frac{\psi^2}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = \frac{\psi^2 + \alpha\psi}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\psi - 1} - \frac{1}{\psi + 1} = \frac{1}{3}$,

Β'.) ***Γενικὴ μορφή.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ (1)

Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος λαμβάνομεν: $\alpha\chi^2 + \beta\chi = -\gamma$ (2)

Ἤδη προσπαθοῦμεν νὰ τακτοποιήσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) τέλειον τετράγωνον, πρὸς τὸν σκοπὸν δὲ αὐτὸν πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ 4α, ὅτε λαμβάνομεν

$$4\alpha^2\chi^2+4\alpha\beta\chi=-4\alpha\gamma \text{ ἢ } (2\alpha\chi)^2+2.2\alpha\beta\chi=-4\alpha\gamma \quad (3)$$

Εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) βλέπομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(2\alpha\chi+\beta)^2$· ἄρα προσθέτοντες τὸ β^2 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\underbrace{(2\alpha\chi)^2+4\alpha\beta\chi+\beta^2}_{(2\alpha\chi+\beta)^2}=-4\alpha\gamma+\beta^2 \text{ ἢ } (2\alpha\chi+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma \quad (4)$$

Ἐὰν ἐξάγωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (4) λαμβάνομεν $2\alpha\chi+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ (5)

Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ β τῆς (5) εἰς τὸ δεύτερον μέλος λαμβάνομεν $2\alpha\chi=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ (6)

Ἤδη διαιροῦντος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου 2α, ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (6) λαμβάνομεν τὰς ῥίζας $\chi=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ (7)

ἤτοι $$\boxed{\chi_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\ \chi_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Ἐπειδὴ ὅμως οἱ α, β, γ, εἶναι ὡρισμένοι γενικοὶ ἀριθμοὶ ἤτοι:
ὁ α εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου
ὁ β εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου
ὁ γ γνωστὴ παράστασις. Ἕπεται ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου, ἤτοι αἱ ῥίζαι ἀριθμητικῆς τινὸς ἐξιώσεως τῆς γενικῆς μορφῆς δίδονται διὰ τοῦ τύπου (7) καὶ εὑρίσκονται ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν, χωρὶς πλέον νὰ ἐπαναλαμβάνωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν ἐργασίαν.

Παρατηρήσεις. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ χ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2, ἡ ἐξίσωσις τῆς γενικῆς μορφῆς λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma=0$ καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῆς, ὡς εἶναι ἑπόμενον δίδονται ὑπὸ οὗ τύπου $\chi = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} =$

$$= \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \quad \text{ἤτοι} \quad \boxed{\chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}} \quad (8)$$

Οὗτος ὁ τύπος (καλούμενος τοῦ ἡμίσεως) δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ, ὅταν ὁ συντελεστὴς τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ χ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2, ὁπότε ὡς β, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ χ. π.χ. αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 4\chi + 3 = 0$, δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου (8)

$$\text{ἤτοι } \chi = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{1} = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{1} = \frac{2 \pm 1}{1} = 2 \pm 1 = \boxed{\begin{matrix} \chi_1 = 3 \\ \chi_2 = 1 \end{matrix}}$$

Ἔστω πρὸς λύσιν αἱ ἐξισώσεις:

1) $6\chi^2 - \chi - 2 = 0$, ἔνθα $\alpha = 6$, $\begin{matrix} \beta = -1 \\ -\beta = 1 \end{matrix}$, $\gamma = -2$

$$\text{ὅτε } \chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.6.(-2)}}{2.6} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} =$$

$$= \frac{1 \pm 7}{12} \quad \text{ἤτοι αἱ ρίζαι εἶναι δύο} \quad \begin{matrix} \chi_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \chi_2 = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

2) $2\chi^2 + 14\chi + 20 = 0$, ἔνθα $\alpha = 2$, $\begin{matrix} \beta = 14 \\ -\beta = -14 \end{matrix}$, $\gamma = 20$

$$\text{ὅτε } \chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4.2.20}}{2.2} =$$

$$= \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{-14 \pm 6}{4}$$

$$\text{ἤτοι αἱ ρίζαι εἶναι δύο} \quad \begin{matrix} \chi_1 = \frac{-14+6}{4} = -2 \\ \chi_2 = \frac{-14-6}{4} = -5 \end{matrix}$$

3) $\psi^2 - 4\psi + 13 = 0$, $\boxed{\text{ἔνθα } \alpha=1, \ \begin{matrix}\beta=-4 \\ -\beta=4\end{matrix}, \ \gamma=13}$

ὅτε $\psi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4.1.13}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} =$

$= \frac{4 \pm 6\,i}{2} = 2 \pm 3i$ ἤτοι αἱ ῥίζαι εἶναι δύο $\boxed{\begin{matrix}\chi_1 = 2+3i \\ \chi_2 = 2-3i\end{matrix}}$

4) $\chi^2 - 4\chi + 4 = 0$ $\boxed{\alpha=1, \ \begin{matrix}\beta=-4 \\ -\beta=4\end{matrix} \ \gamma=4}$

ὅτε $\chi = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$, ἤτοι αἱ ῥίζαι εἶναι μία

διπλῆ $\boxed{\chi_1 = 2, \ \chi_2 = 2}$

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθῶσι καὶ ἐπαληθευθῶσι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις,

496) $\chi^2 - 6\chi + 8 = 0$, $\chi^2 - 4\chi - 21 = 0$, $\chi^2 + 8\chi + 12 = 0$.

497) $2\chi^2 - 16\chi + 30 = 0$, $4\chi^2 - 8\chi - 12 = 0$, $2\chi^2 + 8\chi + 6 = 0$.

498) $2\chi^2 + 10\chi + 12 = 0$, $2\chi^2 - 12\chi - 14 = 0$,

499) $\chi^2 - 10\chi + 25 = 0$, $\chi^2 + 6\chi + 9 = 0$, $\chi + \frac{1}{\chi - 3} = 5$,

$\frac{2\chi}{\chi+2} + \frac{\chi+2}{2\chi} = 2$. $3\chi^2 + 24\chi + 21 = 0$.

500) $\chi^2 - 9\chi + 18 = 0$, $\chi^2 - 7\chi - 18 = 0$, $3\chi^2 + 15\chi + 18 = 0$.

501) $(\chi - 15)(\chi + 15) = 400$, $4(\chi^2 - 1) = 4\chi - 1$,

$(2\chi - 3)^2 = 8\chi$

502) $\frac{9}{\chi} - \frac{\chi}{3} = 2$, $\frac{\chi}{7} + \frac{21}{\chi+5} = \frac{47}{7}$, $\frac{\chi}{\chi+1} + \frac{\chi}{\chi+4} = 1$,

503) $\frac{15}{\chi} - \frac{72 - 6\chi}{2\chi^2} = 2$, $3\chi^2 = \frac{2}{5}\left(\chi + \frac{4}{5}\right) + 2\chi^2$,

$\frac{\chi+1}{\chi+2} - \frac{\chi-1}{\chi-2} = \frac{2\chi+1}{\chi+1}$,

504) $\dfrac{7}{2\psi - 3} + \dfrac{5}{\psi + 1} = 24$, $\dfrac{\psi + 1}{\psi - 3} = \dfrac{4(\psi + 1)}{2(\psi + 3)}$,

$(\chi - 3)(\chi - 1) = 50$

505) $(5\psi - 7)(2\psi - 3) = 9(\psi - 1)(2\psi - 3) - 125$,

$\dfrac{3\chi}{2} + \dfrac{4\chi - 5}{3} = \dfrac{2}{\chi} + \chi - 2$,

506) $\chi^2 + 11\chi = 30$, $25\chi^2 = 6\chi^2 - 2$,

$2\psi(\psi - 1) + 3\psi - 5(\chi + 2) = -6$, $\chi^2 + 19 = 9\chi$

507) $6\chi^2 - 12{,}5\chi + 6{,}25 = 0$, $5\chi^2 + 13\chi + 6 = 0$,

$2\chi^2 + 12\chi + 18 = 0$

508) $\dfrac{9 + \chi}{2\chi - 8} + \dfrac{3\chi - 4}{2\chi + 8} = \dfrac{4\chi^2 - 3\chi + 9}{\chi^2 - 16} + 1.$

$\dfrac{2\chi + 5}{3\chi - 6} + \dfrac{2\chi - 1}{3\chi + 6} = 3 - \dfrac{4\chi + 2}{\chi^2 - 4}$,

509) $\dfrac{\alpha + \chi}{\beta - \alpha} = 2 - \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha + \chi}$, $\dfrac{\alpha}{\chi - \alpha}\,\alpha = -\dfrac{\chi - \beta}{\beta}$,

$\dfrac{3\chi^2}{4} = \dfrac{3}{2\alpha^2} - \dfrac{\chi}{2\alpha}$, $\dfrac{\alpha}{\chi} + \dfrac{\alpha - 1}{\chi - 1} = 2$,

510) $\chi^2 + 2\chi(\alpha - \beta) = 4\alpha\beta$, $y^2 - 3\alpha y + 2\alpha^2 = 0$,

511) Νὰ εὑρεθῶσι αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων (493, 494, 495) διὰ τοῦ τύπου τοῦ ἡμίσεως.

§ 171) ***Περὶ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$.***

Ἐὰν καλέσωμεν διὰ τῶν ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς δύο ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ καὶ διὰ τοῦ δ(*) τὴν ὑπόρριζον ποσότητα, ἤτοι $\delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, ἐκ τῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων τῆς προηγουμένης παραγράφου 170. συνάγομεν περὶ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τὴν ἑπομένην διερεύνησιν.

Ἐὰν	$\delta > 0$	αἱ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι
»	$\delta = 0$	» » » » » » ἴσαι
»	$\delta < 0$	» » » » » φαν)καὶ (μιγάδες συζυγεῖς)

Ἐὰν $\delta > 0$ καὶ εἶναι συγχρόνως καὶ τέλειον τετράγωνον αἱ, ρ καὶ ρ_2 εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι ἀλλέως εἶναι ἀσύμμετροι.

(*) Τὸ δ καλοῦμεν καὶ διακρίνουσαν.

Ἀσκήσεις.

512) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθῶσι αὗται.

$\chi^2+8\chi+12=0,\quad \chi^2-2\chi+1=0,\quad 9\chi^2+12\chi+4=0,$

$\chi^2-3\chi-10=0,\quad 3\chi^2-6\chi+12=0,\quad 4\chi^2-5\chi+1=0,$

513) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ γ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-6\chi+2\gamma=0$ ἔχει ρίζας.

α.') πραγματικὰς καὶ ἀνίσας, β.') ἴσας καί, γ.') φανταστικάς.

514) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις $9\chi^2+3\chi+\lambda=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν.

515) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ μ, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi+\mu=0$, ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

516) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ν, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις $2\nu\chi^2+(5\nu+2)\chi+4\nu+1=0$ ἔχει διπλῆν ρίζαν.

§ 172) ***Σχέσεις μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.***

Ἐφ' ὅσον καλέσαμε διὰ τοῦ ϱ_1 καὶ ϱ_2 τὰς ρίζας τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς ἔναντι ἰσότητας

$$\varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (1)$$

$$\varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (2)$$

Ἤδη ἐάν:

1) προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\varrho_1+\varrho_2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^3-4\alpha\gamma}-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

ἤτοι $\boxed{\varrho_1+\varrho_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}}$ καὶ ἐὰν

2) πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητος (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\varrho_1\cdot\varrho_2=\dfrac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})\cdot(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}=$

$$=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha},$$ ἤτοι $\boxed{\varrho_1\cdot\varrho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν.

1ον) ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν τῆς*** $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ***ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ χ, διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ χ, μὲ ἀντίθετον σημεῖον· καὶ***

2ον) ***Τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς*** $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ***ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ γνωστοῦ ὅρου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ χ.***

Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2\chi^2+6\chi+5=0$ εἶναι:

$$\varrho_1+\varrho_2=-\frac{6}{2}=-3 \text{ καὶ } \varrho_1 \cdot \varrho_2=\frac{5}{2},$$

Ὁμοίως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $3\chi^2+6\chi-7=0$, εἶναι:

$$\varrho_1+\varrho_2=-2 \text{ καὶ } \varrho_1 \cdot \varrho_2=-\frac{7}{3}.$$

Σημείωσις: Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἔχουσι ἔννοιαν καὶ εἰς ἐξίσωσιν μὲ διπλῆν ῥίζαν π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+6\chi+9=0$, ἔχει ῥίζας $\varrho_1=\varrho_2=-3$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὗται ἀληθεύουσι τὰς σχέσεις $\varrho_1+\varrho_2=-6$ καὶ $\varrho_1 \cdot \varrho_2=9$.

Ἐφαρμογαί. Διὰ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα:

Πρόβλημα 1ον) ***Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα καὶ γινόμενον γνωστά.***

Πρὸς τοῦτο, ἐὰν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θεωρηθῶσι ῥίζαι δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εὑρίσκονται οὗτοι ὡς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Τὸν συντελεστὴν α, λαμβάνομεν ἴσον μὲ τὴν μονάδα. π. χ. ***Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 8 καὶ γινόμενον 15.*** Οὗτοι εὑρίσκονται ὡς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-8\chi+15=0$.

Πράγματι $$\chi=\frac{8\mp\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\mp2}{2}=<\begin{matrix}\varrho_1=5\\ \varrho_2=3\end{matrix}$$

Ἤτοι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 5 καὶ 3.

Πρόβλημα 2ον) ***Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 3.***

Ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=8$ καὶ $\varrho_1 \cdot \varrho_2=15$, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι $\chi^2-8\chi+15=0$.

Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{5}{2}$, καὶ 7

Ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=\frac{5}{2}+7=7\frac{5}{2}=\frac{19}{2}$ καὶ $\varrho_1 \cdot \varrho_2=\frac{5}{2} . 7=\frac{35}{2}$

ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι $\chi^2-\frac{19}{2}\chi+\frac{35}{2}=0$ ἢ

$$2\chi-19\chi+35=0$$

Ἀσκήσεις.

517) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουσι:

ἄθροισμα	16	καὶ	γινόμενον	63
»	3	»	»	−10
»	4	»	»	−12
»	−8	»	»	15
»	14	»	»	40

518) Νὰ εὑρεθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς 7 καὶ −3, 3 καὶ $\frac{1}{2}$, −10 καὶ 2

5 καὶ 2, 5 καὶ −5, $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$

$\frac{1}{\alpha+\beta}$ καὶ $\frac{1}{\alpha-\beta}$, $3+\sqrt{2}$ καὶ $3-\sqrt{2}$, $\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$.

519) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῶν ἐξισώσεων $2\chi^2-7\chi+10=0$, $\chi^2-3\chi-28=0$, $4\chi^2-13\chi-3=0$, $2\chi^2-2\alpha\chi-5\alpha^2=0$, $2\chi^2-8\alpha\chi+6\alpha^2=0$, $2\chi^2+6\chi-1=0$.

520) Νὰ εὑρθῇ ἡ ἄλλη ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $4\chi^2-8\chi-12=0$, ἐὰν ἡ μία εἶναι − 1, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

521) Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+8\chi+12=0$, ἐὰν ἡ μία εἶναι − 2.

522) Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-10\chi+25=0$, ἐὰν ἡ μία εἶναι 5.

523) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γ, εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+8\chi+\gamma=0$ ὅταν ἡ μία ῥίζα εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

524) Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-9\chi+\gamma=0$, ὅταν ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

525) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γ, εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\gamma\chi^2-2\chi+3\gamma=0$ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν,

526) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἤτοι νὰ εὑρεθῇ τὸ $\varrho_1^2+\varrho_2^2$.

Λύσις. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ταυτότητα.

$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = (\varrho_1 + \varrho_2)^2 - 2\varrho_1 \cdot \varrho_2$ (§ 61 Τόμος α΄.)

τὰ $\varrho_1 + \varrho_2$ καὶ $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ διὰ τῶν ἴσων ἀντιστοίχως $-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$

λαμβάνομεν $\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{2\gamma}{\alpha^2} =$

$= \frac{\beta^2 - 2\gamma}{\alpha^2}$ ἤτοι $\boxed{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \frac{\beta^2 - 2\gamma}{\alpha^2}}$

527) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων $\chi + \frac{24}{\chi+1} = 3\chi - 4$, $(2\chi - 3)^2 = 8\chi$, $(\chi + 2)(\chi + 3) = 6$,

528) Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2\chi(4\chi - \mu) = 4$ νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{5}{4}$

§ 173) *Περὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς αὐτῶν (ἤτοι ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$).*

Α΄.) Ὅταν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι θετικὸν ἤτοι $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$, αἱ δύο ρίζαι τῆς $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ εἶναι ὁμόσημοι, ἐπειδὴ ἡ τετραγ. ρίζα τῆς διακρινούσης (δ) εἶναι ποσότης μικροτέρα τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ $-\beta$, συνεπῶς αἱ δύο ρίζαι θὰ ἔχωσι τὸ σημεῖον τοῦ $-\beta$ καὶ θὰ εἶναι μὲν θετικαὶ ἐφ᾽ ὅσον

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} > 0,$$

θὰ εἶναι δὲ ἀρνητικαὶ ἐφ᾽ ὅσον $\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

Ἐφαρμογαί.

1) π.χ. τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 7\chi + 6 = 0$. τῆς ὁποίας $\frac{\gamma}{\alpha} = 6 > 0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} = 7 > 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι θετικαὶ

καὶ πράγματι

$$\chi = \frac{7 \mp \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = < \begin{matrix} \varrho_1 = 6 \\ \varrho_2 = 1 \end{matrix}$$

2) Τῆς ἐξισώσεως π. χ. $\chi^2 + 7\chi + 6 = 0$, τῆς ὁποίας $\frac{\gamma}{\alpha} = 6 > 0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} = -7 < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι ἀρνητικαί.

Β′.) Ὅταν $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} < 0$, αἱ δύο ρίζαι τῆς $\alpha\chi^2 + \beta\chi \times \gamma = 0$, εἶναι ἑτερώσημοι, ἐπειδὴ ἡ τετραγ. ρίζα τῆς διακρινούσης δ εἶναι ποσότης ἀπολύτως μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ — β, συνεπῶς αἱ δύο ρίζαι θὰ διατηροῦσι τὰ σημεῖα τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς διακρινούσης ἤτοι ἡ μία εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητικὴ καὶ μάλιστα ἀπολύτως μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ σημφωνοῦσα μὲ τὸ σημεῖον τῆς — β. ἄρα ἐὰν $\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ἀπολύτως μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ θετικὴ καὶ

ἐὰν $\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ἀπολύτως μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀρνητική.

Ἐφαρμογαί.

1ον) π. χ. τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 7\chi - 18 = 0$, τῆς ὁποίας $\frac{\gamma}{\alpha} = -18 < 0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} = 7 > 0$, αἱ δύο ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι καὶ ἀπολύτως μεγαλυτέρα εἶναι ἡ θετικὴ ὄντως,

$$\chi_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} = < \begin{matrix} \varrho_1 = 9 \\ \varrho_2 = -2 \end{matrix}$$

2ον) Τῆς ἐξισώσεως π. χ. $\chi^2 + 7\chi - 18 = 0$, τῆς ὁποίας $\frac{\gamma}{\alpha} = -18 < 0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} = -7 < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι καὶ καὶ ἀπολύτως μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀρνητικὴ ὄντως,

$$\chi_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{2} = \frac{-7 \pm 11}{2} = < \begin{matrix} \varrho_1 = -9 \\ \varrho_2 = 2 \end{matrix}$$

Γ) Ὅταν $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ (μερικὴ περίπτωσις $\alpha\chi^2 + \beta\chi = 0$), ἡ μὲν μία ρίζα εἶναι 0, ἡ δὲ ἄλλη ἰσοῦται μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀσκήσεις.

529) Νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθῶσι αὗται:

$\chi^2-4\chi-21=0$, $\chi^2-2\chi-15=0$, $\chi-\chi-1=0$,

$6\chi^2+\chi-1=0$, $\chi^2+\chi=4\chi+1$, $20\chi^2-7\chi=3$,

$\chi^2-5\chi-15=0$ $\chi^2+14\chi+40=0$.

§ 174) *Τροπὴ τοῦ τριωνύμου τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\gamma+\gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων.*

Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, μὲ $\alpha\neq 0$ γράφεται:

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \quad (1)$$

ἀλλὰ ὡς γνωστὸν

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha:) & (\varrho_1+\varrho_2)=-\dfrac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \dfrac{\beta}{\alpha}=-(\varrho_1+\varrho_2) \\ \beta:) & \varrho_1\cdot\varrho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}. \end{array}\right\} (2)$$

Ἄρα ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) τὰ $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ διὰ τῶν ἴσων τῆς σχέσεως (2) λαμβάνομεν

$$\boldsymbol{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}=\alpha\left(\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha[\chi^2-(\varrho_1+\varrho_2)\chi+\varrho_1.\varrho_2]=$$

$$=\alpha(\chi^2-\varrho_1\chi-\varrho_2\chi+\varrho_1\cdot\varrho_2)=\alpha[\chi(\chi-\varrho_1)-\varrho_2(\chi-\varrho_1)]=$$

$$=\boldsymbol{\alpha(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)}.$$

Ἤτοι: ***Πᾶν τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, τρέπεται εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου, οἱ δὲ δύο ἄλλοι εὑρίσκονται ἂν ἀπὸ τοῦ ἀγνώστου ἀφαιρεθῶσι αἱ ρίζαι διὰ τῶν ὁποίων τὸ τριώνυμον μηδενίζεται.***

Ἐφαρμογαί.

Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον τὸ τριώνυμον $4\chi^2-11\chi+6$.

Λύσις. Πρῶτον ἐξισώνομεν τὸ τριώνυμον μὲ μηδὲν ἤτοι $4\chi^2-11\chi+6=0$ καὶ εὑρίσκομεν τὰς ρίζας αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι εἶναι

$$\boxed{\varrho_1 = 2,\ \varrho_2 = \frac{3}{4}}$$

καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι:

$$4\chi^2 - 11\chi + 6 = 4\left(\chi - \varrho_1\right)\left(\chi - \varrho_2\right)$$
$$= 4\left(\chi - 2\right)\left(\chi - \frac{3}{4}\right).$$

Σημείωσις:

Ἂν $\alpha=1$ καὶ $\varrho_1 \neq \varrho_2$ τὸ τριών. $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ τρέπεται εἰς $(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)$

» $\alpha \neq 0$ » $\varrho_1=\varrho_2$ » » » » $\alpha(\chi-\varrho_1)^2$

» $\alpha=1$ » $\varrho_1=\varrho_2$ » » » » $(\chi-\varrho_1)^2$

» $\alpha \neq 0$ » $\varrho_1=\delta+\kappa i$ $\varrho_2=\delta-\kappa i$, τὸ τριώνυμον τρέπεται εἰς $\alpha\,[\,(\chi-\delta)^2+\kappa^2\,]$.

Ἀνάλυσις τῆς τελευταίας περιπτώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma= \alpha(\chi-\delta-\kappa i)\,(\chi-\delta+\kappa i)=\alpha\,[\,(\chi-\delta)^2-(\kappa i)^2\,]=\alpha.\ [\,(\chi-\delta)^2+\kappa^2\,]$.

Παρατήρησις.

Ἡ ἐφαρμογὴ Πρόβλημα 2) τῆς § 172 δίδεται καὶ ὅταν γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ μορφὴν γινομένου τριῶν παραγόντων π. χ.

Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας 2 καὶ -3. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις ἰσοῦται μὲ $\alpha\,(\chi-2)(\chi+3)=0$, καὶ μὲ α, οἱονδήποτε σταθερὸν ἀριθμόν, ἔστω καὶ μὲ μονάδα, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσης εἶναι ἡ $(\chi-2)\,(\chi+3)=0$ ἢ $\chi^2-\chi-6=0$.

Ὁμοίως νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ $\frac{3}{4}$. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\left(\chi-2\right)\left(\chi-\frac{3}{4}\right)=0$

$$\text{ἢ}\ 4\chi^2 - 11\chi + 6 = 0.$$

Ἀσκήσεις.

530) Νὰ τραπῶσι εἰς γινόμενα τὰ κάτωθι τριώνυμα:

$\chi^2-9\chi+18$, $\chi^2+3\chi-28$, $3\chi^2-21\chi+36$,

$2\chi^2-12\chi+18$, $2\chi^2-3\chi-2$ $12\chi^2+5\chi-3$.

531) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κάτωθι κλάσματα:

$\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-7\chi+10}$, $\frac{\chi^2+4\chi+3}{\chi^2-4\chi-5}$, $\frac{\chi^2+10\chi+21}{2\chi^2+12\chi+18}$,

$\frac{2\chi^2-2\chi-12}{\chi^2+\chi-12}$, $\frac{\chi^2-6\chi\times 5}{3\chi^2+6\chi-9}$, $\frac{2\chi^2+5\chi+3}{3\chi^2+7\chi-6}$,

532) Νὰ εὑρεθῶσι ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχωσι ρίζας: α΄.) $4, -7$, β΄.) $6, \frac{3}{4}$, γ΄.) $3, -\sqrt{2}$, δ΄) $2\beta+\gamma, 2\beta-\gamma$, ε΄.) $\alpha+\beta, \alpha-\beta$, στ΄.) $\alpha+\sqrt{\gamma}, \alpha-\sqrt{\gamma}$.

§ 175) ***Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς διαφόρους τῶν ριζῶν.***

Α΄.) Ὅταν $\delta > 0$, αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ ἔστω $\rho_1 > \rho_2$. Ἐπειδὴ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)$ ἕπεται.

1) Ὅταν ὁ χ, λάβῃ τιμὰς μεγαλυτέρας τῆς μεγαλυτέρας ρίζης θὰ εἶναι $(\chi-\rho_1)>0$ καὶ $(\chi-\rho_2)>0$ καὶ τὸ γινόμενον $(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)$ θὰ εἶναι θετικόν, ὡς γινόμενον ὁμοσήμων παραγόντων (δύο θετικῶν). Ὅταν ὁ χ λάβῃ τιμὰς μικροτέρας τῆς μικροτέρας ρίζης θὰ εἶναι $(\chi-\rho_2)<0$ καὶ $(\chi-\rho_1)<0$ καὶ τὸ γινόμενον $(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)$ θὰ εἶναι θετικόν, ὡς γινόμενον ὁμοσήμων παραγόντων (δύο ἀρνητικῶν)· ἄρα εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἤτοι, ὅταν ὁ χ, λαμβάνῃ τιμὰς ἐκτὸς τῶν ριζῶν, τὸ σημεῖον τοῦ α διατηρεῖται ὡς σημεῖον τοῦ τριωνύμου.

2) Ὅταν ὁ χ, λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν, ἤτοι ὅταν εἶναι $\rho_2<\chi<\rho_1$ τότε εἶναι $\chi-\rho_1<0$ καὶ $\chi-\rho_2>0$ καὶ τὸ γινόμενον $(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)$ εἶναι ἀρνητικόν, ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμων παραγόντων (ἑνὸς θετικοῦ καὶ ἑνὸς ἀρνητικοῦ). Κατὰ συνέπειαν τὸ $\alpha(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)$ λαμβάνῃ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, ἐπειδὴ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Ἤτοι.

Διὰ τὰς πραγματικὰς μὲν τιμὰς τοῦ χ τὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ α, διὰ δὲ τὰς τιμὰς τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν, λαμβάνει τὸ ἀντίθετον σημεῖον τοῦ α. Π. χ. Τὸ τριώνυμον $\chi^2-5\chi+4$ τοῦ ὁποίου εἶναι $\delta>0$, $\rho_1=4$ καὶ $\rho_2=1$ λαμβάνει μὲν τιμὰς θετικὰς (τὸ $\alpha=1>0$) διὰ τὰς τιμὰς χ τὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν ἤτοι διὰ $\chi>4$ καὶ $\chi<1$, ἀρνητικὰς δὲ τιμὰς (ἀντιθέτως τοῦ α) διὰ τὰς τιμὰς τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ἤτοι διὰ $1<\chi<4$.

Β΄.) Ὅταν $\delta=0$, τότε $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\rho_1)^2$ (§ 174 Σημ.) καὶ τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, λαμβάνει σημεῖον ὅμοιον τοῦ α, δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ καθ᾽ ὅσον τὸ $(\chi-\rho_1)^2$ εἶναι πάντοτε θετικόν.

Γ΄.) Ὅταν $\delta<0$, τότε $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha[(\chi-\delta)^2+\kappa^2]$ (§ 174 Σημ.) καὶ τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, λαμβάνει σημεῖον ὅμοιον τοῦ α, δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ, καθ᾽ ὅσον τὸ ἄθροισμα τετραγώνων $(\chi-\delta)^2+\kappa^2$ εἶναι πάντοτε θετικόν. Ἤτοι:

Ὅταν αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου (ἐξισωμένου μὲ Ο) εἶναι ἴσαι ἢ μιγάδες συζυγεῖς τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ δι᾽ οἱασδήποτε τιμὰς τοῦ χ, λαμβάνει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Σημείωσις: Διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς ἴσας τῶν ῥιζῶν τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, γίνεται ἴσον μὲ μηδὲν ἐπειδὴ εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου πρὸς ὃ τρέπεται τοῦτο εἶναι μηδέν.

Ἀσκήσεις.

533) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ τὰ κάτωθι τριώνυμα λαμβάνουσι τιμὰς α) θετικάς, β) ἀρνητικὰς καὶ γ) μηδέν:

$\chi^2+6\chi+9$, $\chi^2+2\chi+1$, $2\chi^2-4\chi+2$, $-2\chi^2+16\chi-24$, $-2\chi^2-16\chi-32$, $\chi^2-9\chi+18$, $2\chi^2+16\chi+40$ $2\chi^2-12\chi+18$

534) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\chi^2+\mu\chi+\mu^2$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ, ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς μ.

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 176.) ***Πᾶσα ἀνισότης πρὸς ἕνα ἄγνωστον ἡ ὁποία μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρανομαστῶν, τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειωμένων πράξεων, τὴν μεταφορὰν ὅλων τῶν ὅρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$ ἢ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma<0$, καλεῖται ἀνισότης δευτέρου βαθμοῦ.*** (Ἡ δευτέρα μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην δι᾽ ἀλλαγῆς τῶν σημείων τῶν ὅρων αὐτῆς).

§ 177.) ***Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$.***

Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$, λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουσι αὐτήν. Κατὰ ταῦτα:

Α) ***Μὲ α>0.***

1ον) Ὅταν $\delta>0$ ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἀπὸ τὰς ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν εὑρισκομένας.

2ον) Ὅταν $\delta=0$, ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἐκτὸς διὰ $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

3ον) Ὅταν $\delta<0$, ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.

Β′) ***Μὲ α<0.***

1ον) Ὅταν $\delta>0$, ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἀπὸ τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν.

2ον) Ὅταν $\delta=0$, ἡ ἀνισότης οὐδέποτε ἀληθεύει.

3ον) » $\delta<0$, ἡ » » »

Ἐφαρμογαί.

α) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\chi^2+3\chi-4>0$. (Αἱ ῥίζαι τῆς $\chi^2+3\chi-4=0$ εἶναι $\varrho_1=-4$ καὶ $\varrho_2=1$). Ἄρα ἀληθεύει ἡ ἀνισότης διὰ $\chi<-4$ καὶ $\chi>1$.

β) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $2\chi^2-7\chi+6<0$ ἢ $-2\chi^2+7\chi-6>0$ (αἱ ῥίζαι εἶναι $\varrho_1=\frac{3}{2}$ καὶ $\varrho_2=2$). Ἄρα ἀληθεύει διὰ $2>\chi>\frac{3}{2}$.

γ) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\chi^2-4\chi+13>0$ (αἱ ῥίζαι εἶναι $\varrho_1=2+3i$ καὶ $\varrho_2=2-3i$. Ἄρα ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.

δ) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\chi^2+\chi+1<0$ ἢ $-\chi^2-\chi-1>0$ (αἱ ῥίζαι εἶναι μιγάδες συζυγεῖς). Ἄρα ἡ ἀνισότης οὐδέποτε ἀληθεύει. (ἀδύνατος).

Σημείωσις.

Ὅταν εἰς ἀνισότητα ὑπάρχουν κλασματικοὶ ὅροι, τρέπομεν τὸ πρῶτον μέλος ὁλόκληρον εἰς κλάσμα, ὁπότε λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{\alpha}{\beta}>0$, καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν ἢ $\alpha>0$ ἢ $\alpha<0$. π. χ.

1) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{\chi^2}{2}-\frac{3\chi}{4}<-2$.

$\frac{\chi^2}{2}-\frac{3\chi}{4}<-2$, $2\chi^2-3\chi<-8$, $2\chi^2-3\chi+8<0$ καὶ

$-2\chi^2+3\chi-8>0$ (αἱ ῥίζαι εἶναι μιγάδες συζυγεῖς). Ἄρα ἀδύνατος

2ον) $\frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi^2+3\chi+3}>0$, ἐπειδὴ ὅμως $\chi^2+3\chi+3>0$, ἐφ' ὅσον

$\delta=-3<0$, ἐκ τῆς $\frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi^2+3\chi+3}>0$ λαμβάνομεν $\chi^2-3\chi+2>0$,

ἀνισότης ἀληθεύουσα διὰ $\chi>2$ καὶ $\chi<1$.

Ἀσκήσεις.

535) Νὰ λυθῶσι αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

$\chi^2-2\chi+1>0$, $4\chi^2+5\chi+1<0$, $\chi^2-2\chi<15$, $\chi-1<\chi^2$

$\chi^2+3\chi<6$, $\frac{\chi^2}{2}+\chi<8$, $\frac{(\chi-1)(\chi-2)}{(\chi-3)(\chi-4)}>1$, $\frac{\chi+13}{12+\chi-\chi^2}>1$

$\frac{5}{\chi+2}+\frac{1}{\chi+3}>\frac{7}{6}$, $\frac{1}{\chi-1}-\frac{2}{3\chi+1}>0$, $\frac{1+\chi}{(1+\chi)^2}-1>0$.

536) Νὰ εὑρεθῶσι αἱ τιμαὶ τοῦ χ, αἱ συναληθεύουσαι τὰς κάτωθι ἀνισότητας.

$$\chi^2+6+7\chi>0 \text{ καὶ } -6\chi-\chi^2-8>0$$

$$\frac{\chi}{2}+6\chi-17{,}5>0 \text{ καὶ } \frac{\chi^2}{3}+5\chi+18>0$$

$$\chi^2-12\chi+32>0 \text{ καὶ } \chi^2+22>13\chi.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 178) Ἐξίσωσις ἀνωτέρου βαθμοῦ καλεῖται πᾶσα ἐξίσωσις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου.

Ἀμέσως δὲ ἀκολούθως θὰ ἐξετάσωμεν τὴν λύσιν ὡρισμένων ἐξισώσεων ἀνωτέρου βαθμοῦ τῶν ὁποίων ὁ βαθμὸς ὑποβιβάζεται καὶ ἀνάγονται εἰς δευτέρου ἢ καὶ πρωτοβαθμοῦ.

ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 179) Ἐξίσωσις διτετράγωνος καλεῖται ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία μὲ τὴν ἀναγωγήν της εἰς τὴν ἁπλουστάτην αὐτῆς μορφήν, λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$.

Ἡ μορφὴ ὅμως $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$ δύναται νὰ γραφῇ $\alpha(\chi^2)^2+\beta(\chi^2)+\gamma=0$, ὁπότε καθίσταται ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ^2 καὶ ἡ ὁποία λυομένη ὡς πρὸς χ^2 δίδει

$\chi^2=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ ἐκ τῆς ὁποίας πλέον λαμβάνομεν τὰς τιμὰς

τοῦ $\chi_{\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3,\varrho_4}=\pm\sqrt{\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$

Ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$ εἶναι

$$\varrho_1=+\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}},\quad \varrho_2=-\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$$\varrho_3=+\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}},\quad \varrho_4=-\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}.$$

Ἐφαρμογαί.

Νὰ λυθῇ ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $\chi^4-5\chi^2-36=0$,

$$\chi^2=\frac{5\pm\sqrt{25+4.36}}{2}\text{ καὶ}$$

$$\chi=+\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{169}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{5\pm 13}{2}}$$

ὁπότε

$$\left|\begin{array}{l}\varrho_1=\sqrt{\dfrac{5+13}{2}}=\sqrt{9}=3\\[2ex] \varrho_2=-\sqrt{\dfrac{5+13}{2}}=-\sqrt{9}=-3\end{array}\right.$$

$$\varrho_3 = \sqrt{\frac{5-13}{2}} = \sqrt{-4} = 2i$$

$$\varrho_4 = -\sqrt{\frac{5-13}{2}} = -\sqrt{-4} = -2i$$

Σημείωσις. Αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0$ εἶναι:

1) πραγματικαί, ὅταν αἱ δύο ῥίζαι τῆς

$(\alpha\chi^2)^2 + \beta(\chi^2) + \gamma = 0$ ἤτοι

αἱ $\chi^2_{\varrho_1 . \varrho_2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha.}$ εἶναι θετικαί

2) φανταστικαί, ὅταν αἱ δύο ῥίζαι της

$\alpha(\chi^2)^2 + \beta(\chi^2) + \gamma=0$ ἤτοι

αἱ $\chi^2_{\varrho_1, \varrho_2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εἶναι ἀρνητικαί

καὶ 3) Αἱ δύο μὲν εἶναι πραγματικαὶ καὶ αἱ ἄλλαι δύο φανταστικαί, ὅταν ἐκ τῶν δύο ῥιζῶν τῆς $\alpha(\chi^2)^2+\beta(\chi^2)+\gamma=0$,

ἤτοι τῶν $\chi^2_{\varrho_2, \varrho_3} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εἶναι ἡ μιὰ μὲν θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητική.

§ 180) *Ἀνάλυσις Τριωνύμου τῆς μορφῆς* $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$ *εἰς γινόμενον παραγόντων.*

Τὸ τριώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων καθ' ὃν τρόπον καὶ τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἤτοι $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma = \alpha(\chi^2)^2+\beta(\chi^2)+\gamma = \alpha(\chi^2-\varkappa)(\chi^2-\lambda)^* =$ $=\alpha(\chi-\sqrt{\varkappa})(\chi+\sqrt{\varkappa})(\chi-\sqrt{\lambda})(\chi+\sqrt{\lambda})$ ἤτοι $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=\alpha(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)(\chi-\varrho_3)(\chi-\varrho_4)$ ἔνθα $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου πλέον $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$.

Ἀσκήσεις.

537) Νὰ λυθῶσι καὶ ἐπαληθευθῶσι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α) $\chi^4-5\chi^2+4=0$, $\chi^4-10\chi^2+9=0$, $\chi^4-26\chi^2+25=0$,

* $\varkappa$ καὶ λ εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha(\chi^2)^2+\beta(\chi^2)+\gamma$.

β) $\chi^4-8\chi^2-9=0$, $\chi^4-24\chi^2-25=0$, $\chi^2-5\chi^2-36=0$,

γ) $\chi^4-18\chi^2+81=0$ $\chi^4-2\chi^2-3=0$, $4\chi^4-17\chi^2+4=0$

δ) $4\chi^4-37\chi^2+9=0$ $3\chi^4-26\chi^2-9=0$, $\chi^4-13\chi^2+36=0$

538) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται:

$\chi^4-5\chi^2+4=0$, $4\chi^4-101\chi^2+25=0$, $2\chi^4-4\chi^2+3=0$

$15\chi^4+13\chi^2+2=0$, $\chi^4-3\chi^2+2=0$, $3\chi^4-14\chi^2-5=0$

539) Νὰ τραπῶσι εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ κάτωθι τριώνυμα:

$\chi^4-3\chi^2+2$, $4\chi^4-17\chi^2+1$, $\chi^4-13\chi^2+36$, $3\chi^4-26\chi^2-9$,

540) Νὰ εὑρεθῶσι αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχωσι ρίζας

$\pm2, \pm5 \ * \ \pm5, \ \pm\sqrt{2} \ * \ \pm\sqrt{3}, \ \pm i \ * \ \pm2, \ \pm\frac{1}{2}$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 181) ***Ἀντίστροφος ἐξίσωσις καλεῖται μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποία ὅταν ἔχει τὴν ρίζαν ρ, θὰ ἔχῃ κατ᾿ ἀνάγκην καὶ τὴν ρίζαν $\frac{1}{\rho}$.***

Ἐὰν καλέσωμεν διὰ Α, τὸ πολυώνυμον ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς (διατασσόμενον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου) ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν $A=0$.

Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἀντίστροφος, πρέπει, οἱ συντελεσταὶ τῶν ἴσων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἀπεχόντων ὅρων τοῦ πολυωνύμου Α, νὰ εἶναι ἴσοι καὶ ἀντίθετοι (ὅταν δὲν ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος).

Α) Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$, αἱ ρίζαι τῆς ὁποίας ἔχουν γινόμενον $\frac{\alpha}{\alpha}=1$, ἤτοι εἶναι ἀντίθετοι.

Β) Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις 3ου βαθμοῦ.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$

ἢ $\alpha\chi^3+\beta\chi^2-\beta\chi-\alpha=0$

Λύσις μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἔστω τῆς πρώτης.

Ἐπειδὴ εἶναι

$$\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\beta\chi+\alpha=\alpha\chi^3+\alpha+\beta\chi^2+\beta\chi=\alpha(\chi^3+1)+\beta\chi(\chi+1)$$

ἡ πρώτη ἐξίσωσις γράφεται $\underline{\alpha(\chi^3+1)}+\beta\chi(\chi+1)=0$ ἢ

$$\alpha\underline{(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)}+\beta\chi(\chi+1)=0 \quad ἢ$$

$$(\chi+1).[\alpha(\chi^2-\chi+1)+\beta\chi]=0.$$ Ἡ ὁποία ἔχει ρίζας, τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων $\chi+1=0$ καὶ τῆς δευτεροβαθμίου $\alpha(\chi^2-\chi+1)+\beta\chi=0$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις.

Γ) Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις 4ου βαθμοῦ.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ἢ τῆς μορφῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^3\pm\beta\chi\pm\alpha=0$, (Τὸ πολυώνυμον εἶναι μὴ πλῆρες) ἢ $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$ (Τὸ πολυώνυμον εἶναι πλῆρες).

Λύσις.

α) τῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^3-\beta\chi-\alpha=0$. Αὕτη γράφεται

$$\alpha(\chi^4-1)+\beta\chi(\chi^2-1)=0 \quad ἢ$$

$$\alpha(\chi^2+1)(\chi^2-1)+\beta\chi(\chi^2-1)=0 \quad ἢ$$

$(\chi^2-1).[\alpha(\chi^2+1)+\beta\chi]=0$. Ἡ ὁποία ἔχει ρίζας, τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων $\chi^2-1=0$ καὶ $\alpha(\chi^2+1)+\beta\chi=0$.

β) $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$. Διὰ διαιρέσεως διὰ τοῦ χ^2, ἔχομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma+\dfrac{\beta}{\chi}+\dfrac{\alpha}{\chi^2}=0$ ἢ $\alpha\left(\chi^2+\dfrac{1}{\chi^2}\right)+\beta\left(\chi+\dfrac{1}{\chi}\right)+\gamma=0$ καὶ διὰ $\chi+\dfrac{1}{\chi}=\lambda$ λαμβάνομεν

$$\alpha\left(\lambda^2-2\right)+\beta\lambda+\gamma=0 \quad ἢ$$

$$\alpha\lambda^2-2\alpha+\beta\lambda+\gamma=0 \quad ἢ$$

$$\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\underbrace{\gamma-2\alpha}=0,$$ ἡ ὁποῖα πλέον εἶναι ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ, ὡς πρὸς λ.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον λύονται καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\beta\chi+\alpha=0$.

Σημείωσις.

Αἱ μὲν ρίζαι τῆς πλήρους μορφῆς εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι πραγματικαὶ ἢ φανταστικαί, αἱ δὲ τῆς μὴ πλήρους μορφῆς αἱ δύο ρίζαι θὰ εἶναι πάντα πραγματικαί.

Ἐφαρμογαί.

Α΄.) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $2\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi - 2 = 0$.

Λύσις.

$2\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi - 2 = 0$ ἢ $2(\chi^3 - 1) - 7\chi(\chi - 1) = 0$ ἢ
$2(\chi - 1)(\chi^2 + \chi + 1) - 7\chi(\chi - 1) = 0$ ἢ $(\chi - 1).[2(\chi^2 + \chi + 1) - 7\chi] = 0$

Ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων πρῶτον

$\chi - 1 = 0$ ἤτοι $\boxed{\chi = 1}$ καὶ δεύτερον

$2(\chi^2 + \chi + 1) - 7\chi = 0$ ἢ $2\chi^2 + 2\chi + 2 - 7\chi = 0$ ἢ $2\chi^2 - 5\chi + 2 = 0$

ἤτοι $\chi_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = < \begin{matrix} 2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{matrix}$

Β΄.) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\chi^4 + 3\chi^3 - 3\chi - 3 = 0$

Λύσις.

$3\chi^4 + 3\chi^3 - 3\chi - 3 = 0$
$3(\chi^4 - 1) + 3\chi(\chi^2 - 1) = 0$
$3(\chi^2 - 1)(\chi^2 + 1 + 3\chi(\chi^2 - 1) = 0$
$(\chi^2 - 1).[3(\chi^2 + 1) + 3\chi] = 0$ ἡ ὁποία ἔχει ρίζας, τὰς

ρίζας τῶν ἐξισώσεων α.΄) $\chi^2 - 1 = 0$, ἤτοι $\boxed{\chi = \pm 1}$

καὶ β΄.) $3(\chi^2 + 1) + 3\chi = 0$, $3\chi^2 + 3 + 3\chi = 0$, $3\chi^2 + 3\chi + 3 = 0$, ἤτοι

$$\boxed{\chi = \frac{-5 \pm 5i}{6}}$$

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\chi^4 + 3\chi^3 + 4\chi^2 + 3\chi + 1 = 0$

Λύσις.

$\chi^4 + 3\chi^3 + 4\chi^2 + 3\chi + 1 = 0$, ἢ $\chi^2 + 3\chi + 4 + \frac{3}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} = 0$,

ἢ $\left(\chi^2 + \frac{1}{\chi^2}\right) + 3\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) + 4 = 0$, (1) ἐὰν λάβωμεν

$\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) = \lambda$, ἡ (1) καθίσταται

$(\lambda^2-2)+3\lambda+4=0$ ἢ $\lambda^2+3\lambda+2=0$ ἤτοι

$$\lambda=\frac{-3\pm 1}{2}=<\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς θέτοντες εἰς ἀντικατάστασιν τοῦ λ εἰς τὴν $\chi+\frac{1}{\chi}=\lambda$ λαμβάνομεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως αἱ ὁποῖαι εἶναι:

$$\boxed{\chi=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}} \text{ καὶ } \boxed{\chi=-1}$$

ΔΥΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 182) ***Μία ἐξίσωσις καλεῖται δυώνυμος ἂν δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\alpha\chi^{\mu}+\beta\chi^{\nu}=0$, ἔνθα ἔστω $\mu>\nu$.***

Λύσις δυωνύμου ἐξισώσεως καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν ρίζῶν αὐτῆς.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις $\alpha\chi^{\mu}+\beta\chi^{\nu}=0$ γράφεται καὶ οὕτω $\chi^{\nu}(\alpha\chi^{\mu-\nu}+\beta)=0$ καὶ ἵνα ἕνα γινόμενον δύο παραγόντων ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἀρκεῖ εἷς τούτων νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, ἕπεται ὅθεν ἢ $\chi^{\nu}=0$, ὅτε $\chi=0$.

ἢ $\alpha\chi^{\mu-\nu}+\beta=0$, ὅτε $\chi^{\mu-\nu}=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ δι' ἐξαγωγῆς τῆς $(\mu-\nu)$, ρίζης ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ.

π. χ. 1) $\chi^4-\chi^2=0$ ἢ $\chi^2(\chi^2-1)=0$, ἐκ τῆς ὁποίας ἢ $\chi^2=0$ ὅτε $\boxed{\chi=0}$, ἢ $\chi^2-1=0$ ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $\chi^2=1$, ὅτε $\boxed{\chi=\pm 1}$

ὥστε αἱ ρίζαι εἶναι $\rho_1=0$, $\rho_2=1$, $\rho_3=-1$.

2) $\chi^4-\chi=0$ ἢ $\chi(\chi^3-1)=0$ ἢ
$\chi.(\chi-1)(\chi^2+\chi-1)=0$ (α) . (§ 85. Γ Τόμος α'.).

Ἐκ τῆς (α) λαμβάνομεν ἢ $\boxed{\chi=0}$ ἢ $\chi-1=0$, ὅτε ἔχομεν $\boxed{\chi=1}$ ἢ $\chi^2+\chi+1=0$, ὅτε ἔχομεν $\chi=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=$

$=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ἤτοι $\boxed{\chi=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}}$ ὥστε αἱ ρίζαι εἶναι:

$\varrho_1=0,\ \varrho_2=1,\ \varrho_3=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \varrho_4=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$

Ἀσκήσεις. 541) Νὰ λυθῶσι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$4\chi^3+13\chi^2=13\chi+4,\quad 7\chi^2+7\chi=3\chi^3+3,\quad \chi^3+\chi^2-\chi-1=0$
$3\chi^4+10\chi^3-10\chi=3,\qquad 4\chi^4-4\chi^3+5\chi^2=4\chi-4,$
$3\chi^3-13\chi^2+13\chi-3=0$

Ὁμοίως

542) $3\chi^3=3\chi,\ 4\chi^4-16\chi^2=0,\ 2\chi^6=2\chi,$

543) Νὰ εὑρεθῶσι αἱ φανταστικαὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4+1=0$.

544) Νὰ λυθῶσι αἱ ἐξισώσεις $\chi^5-1=0$ καὶ $\chi^5+1=0$.

$$\chi^4+27=0,\quad \chi^3-64=0,\quad \chi^5\pm32=0$$

ΤΡΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 183) Τριώνυμος ἐξίσωσις καλεῖται ἡ ἀκεραία ἐξίσωσις ἂν δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\alpha\chi^\lambda+\beta\chi^\mu+\gamma\chi^\nu=0$.

Ἡ τριώνυμος ἐξίσωσις δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς δευτεροβάθμιον μόνον, ἐὰν μεταξὺ τῶν ἐκθετῶν ὑπάρχει ἡ σχέσις $\lambda-\mu=\mu-\nu$.

π. χ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

$\chi^7-35\chi^4+216\chi=0$

$$\begin{array}{|c|}\lambda-\mu=\mu-\nu\\ 7-4=4-1\\ \hline\end{array}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται $\chi(\chi^6-35\chi^3+216)=0$ ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ἢ $\boxed{\chi=0}$ ἢ $\chi^6-35\chi^3+216=0$ (1)

Ἐὰν θέσωμεν $\chi^3=\psi$ ἡ (1) γράφεται $\psi^2-35\psi+216=0$, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι $\psi=8$ καὶ $\psi=27$ | ὁπότε εἶναι $\chi^3=8$ καὶ $\chi^3=27$ | καὶ $\chi=\pm2$, $\chi=\pm3$

Ἀσκήσεις.

545) Νὰ λυθῶσι αἱ ἐξισώσεις.

$\chi^8-15\chi^4-16=0,\quad \psi^6-19\psi^3-216=0,\quad 8\chi^6+65\chi^3+8=0$
$\chi^6-35\chi^3+216=0,\quad \chi^8-15\chi^4-16=0,\quad \psi^7-28\psi^4+27\psi=0$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

§ 184) ***Ἐξίσωσις λέγεται ἔχουσα ριζικόν, ὅταν ἔχει τὸν ἄγνωστον ὑπὸ ριζικὸν π. χ.***

αἱ ἐξισώσεις $\sqrt{\chi}=166$, $\sqrt[3]{\chi+5}=\chi+1$, $\sqrt{16+\chi}=2+\sqrt{\chi}$, λέγονται ἐξισώσεις μὲ ριζικά.

Λύσις ἐξισώσεως.

185) Ὅταν εἷς ὅρος ἔχει ρίζαν, ἀπομονώνομεν αὐτὸν εἰς τὸ ἓν μλέος τῆς ἐξισώσεως, κατόπιν ὑψώνομεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὴν δύναμιν τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν δείκτην τοῦ ριζικοῦ καὶ τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον ἄνευ ριζικοῦ, τὴν ὁποίαν καὶ λύομεν. Ἐκ τῶν ριζῶν αὐτῆς, δοκιμάζομεν ποῖαι ἀληθεύουν τὴν ἀρχικὴν αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι καὶ αἱ ζητούμεναι. Αἱ μὴ ἀληθεύουσαι τὴν ἀρχικὴν θὰ ἀληθεύωσι τὴν συζυγῆ, καθ' ὅσον ὑψοῦντες ἐξίσωσιν εἰς δύναμιν τινα εἰσέρχονται ἐντὸς τῶν ριζῶν αὐτῆς καὶ ρίζαι τῆς συζυγοῦς αὐτῆς ἢ καὶ νέαι ρίζαι ἀναλόγως τοῦ περιττοῦ ἢ ἀρτίου ἐκθέτου τῆς ρίζης.

Ὅταν ἐξίσωσις περιέχει δύο ὅρους μὲ ριζικὰ ἀπομονώνομεν αὐτὰς εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ κατόπιν ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον, τοιουτοτρόπως καταλήγομεν εἰς τὴν περίπτωσιν τὴν ἀνωτέρω μὲ ἕναν ὅρον ἔχοντα ριζικόν.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν αἱ ἐξισώσεις.

1ον) ***Παράδειγμα*** $\chi+\sqrt{5\chi+10}-8=0$.

ἢ $\sqrt{5\chi+10}=8-\chi$

ἢ $(\sqrt{5\chi+10})^2=(8-\chi)^2$

ἢ $5\chi+10=64+\chi^2-16\chi$

ἢ $\chi^2-21\chi+54=0$ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι $\varrho_1=3$ καὶ $\varrho_2=18$, ἀμφότεραι δὲν ἀληθεύουν τὴν ἀρχικῶς δοθεῖσαν, ἀλλὰ ἐνῷ ἡ μὲν $\varrho_1=3$ ἀληθεύει τὴν ἀρχικήν, ἡ $\varrho_2=18$ ἀληθεύει τὴν συζυγῆ αὐτῆς, $\chi-\sqrt{5\chi+10}-8=0$.

2ον) ***Παράδειγμα.*** $5+\sqrt{y^2+5}=y$

ἢ $\sqrt{y^2+5}=y-5$

ἢ $y^2+5=y^2+25-10y$

ἢ $10y=20$

ἢ $y=2$ τῆς ὁποίας ἡ ρίζα δὲν ἀληθεύει

τὴν ἀρχικῶς δοθεῖσαν ἀλλὰ τὴν συζυγῆ αὐτῆς $5-\sqrt{y^2+5}=y$.

3ον) ***Παράδειγμα.*** $\sqrt{1+\sqrt{\chi^4-\chi^2}}=\chi-1$

ἢ $1+\sqrt{\chi^4-\chi^2}=\chi^2+1-2\chi$

ἢ $\sqrt{\chi^4-\chi^2}=\chi^2-2\chi$

ἢ $\chi^4-\chi^2=\chi^4+4\chi^2-4\chi^3$

ἢ $4\chi^3-5\chi^2=0$

ἢ $4\chi^2-5\chi=0$

ἢ $\chi(4\chi-5)=0$ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι $\varrho_1=0$ καὶ $\varrho_2=\frac{5}{4}$, ἀμφότεραι δὲν ἀληθεύουν τὴν ἀρχικῶς δοθεῖσαν.

4ον) ***Παράδειγμα.*** $\sqrt{(y-1)(y-2)}+\sqrt{(y-3)(y-4)}=\sqrt{2}$

ἢ $(y-1)(y-2)+(y-3)(y-4)+2.\sqrt{(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)}=2$

ἢ $\sqrt{(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)}=5y-y^2-6$

ἢ . . . .

ἢ . . . .

$y^2-5y+6=0$ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι $\psi_1=2$ καὶ $\psi_2=3$, ἀμφότεραι ἀληθεύουσαι τὴν ἀρχικῶς δοθεῖσαν.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθῶσι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

546) $\sqrt{\chi+4}=7$, $\chi-\sqrt{25-\chi^2}=1$, $6\chi-2=7\chi-3\sqrt{\chi}$

547) $\sqrt{9+\chi}=2\sqrt{\chi}$, $1+\sqrt{\chi}=10$, $\chi+2=\sqrt{\chi-4}$,

548) $\sqrt{y+7-5\sqrt{y-2}}=3$, $\sqrt{\chi^2+9}=21-\chi^2$,

549) $\sqrt{\frac{\chi}{\alpha+\chi}}=\sqrt{\frac{\chi+\alpha}{\chi}}+2$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 186) ***Σύστημα δευτέρου βαθμοῦ καλεῖται πᾶν σύστημα τοῦ ὁποίου ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.***

Εἰς τὰ συστήματα αὐτὰ ὑπαγάγομεν καὶ τὰ ἀναγόμενα εἰς τὴν λύσιν διτετραγώνου ἢ διωνύμου ἢ ἀντιστρόφου ἐξισώσεως. π. χ.

$$\left.\begin{array}{r} \chi+\psi=9 \\ \chi\psi=20 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{r} \chi+\psi=7 \\ \chi^2+\psi^2=25 \end{array}\right] \quad \left.\begin{array}{r} \chi^3+\psi^2+\omega^2=29 \\ \chi y=6 \\ \chi+\psi=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \chi^2+\psi^2=25 \\ \chi^2-\psi^2=-7 \end{array}\right\}$$

§ 187. *Λύσις συστημάτων.*

Α) ***Λύσις συστημάτων δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων δευτέρου βαθμοῦ.***

1) ***Ὅταν εἰς τὸ σύστημα ἡ μία τῶν ἐξισώσεων εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ ἡ ἄλλη πρώτου.***

1ον) ***Παράδειγμα.*** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r} \chi^2+\psi^2=74 \\ \chi+\psi=12 \end{array}\right|$$

Τὴν λύσιν τοῦ συστήματος ἐκτελοῦμεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως ἤτοι :

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & \chi^2+\psi^2=74 \\ (2) & \chi+\psi=12 \end{array}\right\} \quad \text{ἐκ τῆς (2) ἔχομεν } \chi=12-\psi \qquad 3)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ $\chi=12-\psi$ ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν

$$(12-\psi)^2+\psi^2=74$$
$$\text{ἢ } 144+\psi^2-24\psi+\psi^2=74$$
$$\text{ἢ } 2\psi^2-24\psi+70=0$$
$$\text{ἢ } \psi^2-12\psi+35=0$$

$$\psi_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-140}}{2}=\frac{12\pm2}{2}=<\begin{array}{l}\psi_1=7\\ \psi_2=5\end{array}$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (3) λαμβάνομεν $\chi_1=5$, καὶ $\chi_2=7$.

Ἄρα τὸ σύστημα ἐπαληθεύει δι' ἑκάστου τῶν ζευγῶν τῶν ριζῶν :

$\chi_1=5$,	$\psi_1=7$
$\chi_2=7$,	$\psi_2=5$

2ον) *Παράδειγμα*. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα:

$$\begin{array}{ll|} (1) & \chi+\psi=9 \\ (2) & \chi\psi=20 \end{array}$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\chi=9-\psi$, (α)
Τὴν τιμὴν $\chi=9-\psi$ ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔχομεν

$$(9-\psi).\psi=20$$

$$\text{ἢ} \quad 9\psi-\psi^2=20$$

$$\text{ἢ} \quad \psi^2-9\psi+20=0 \qquad \text{καὶ}$$

$$\psi_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm1}{2}=<\begin{matrix}\psi_1=5\\ \psi_2=4\end{matrix}$$

Τὰς τιμὰς $\psi_1=5$ καὶ $\psi_2=4$ ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (α) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$\chi_1=4$$
$$\chi_2=5$$

Ἤτοι λαμβάνομεν τὰ ζεύγη τῶν ριζῶν

$\chi_1=4$,	$\psi_1=5$
$\chi_2=5$,	$\psi_2=4$

Σημείωσις.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς ἀγνώστους χ καὶ ψ τοῦ συστήματος, ὡς ρίζας δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν § 172 Πρόβλημα 1ον), ὁπότε λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν $\chi^2-9\chi+20=0$. Ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν $\chi=4$ καὶ $\psi=5$ ἢ $\psi=4$ καὶ $\chi=5$.

3ον) ***Παράδειγμα.*** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\left.\begin{array}{r}\chi^2-\psi^2=24\\ \chi-\psi=\ 2\end{array}\right\}$

Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\chi=2+\psi$ (1) τὴν τιμὴν $\chi=2+\psi$ ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος λαμβάνομεν $(2+\psi)^2-\psi^2=24$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι $\psi=5$ (μία), καὶ ἀκολούθως ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\chi=7$.

Σημείωσις.

Τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ἠδυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς τεχνάσματος.

Ἐκ τοῦ συστήματος $\left.\begin{array}{l}\chi^2-\psi^2=24\\ \chi-\psi=2\end{array}\right\}$ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & (\chi+\psi)\,(\chi-\psi)=24\\ (2) & \chi-\psi=2\end{array}\right\}$$ Ἤδη ἀφοῦ θέσωμεν

εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), τὸ $\chi-\psi$ διὰ τοῦ 2, λαμβάνομεν $(\chi+\psi).2=24$ ἢ $\chi+\psi=12$.

Ἤδη διὰ τῶν $\chi-\psi=2$ καὶ $\chi+\psi=12$ ἔχομεν τὸ πρωτοβάθμιον

σύστημα $\left.\begin{array}{l}\chi-\psi=2\\ \chi+\psi=12\end{array}\right|$ ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν, $\chi=7$ καὶ $\psi=5$.

4ον) Παράδειγμα. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύτημα $\left.\begin{array}{r}\chi+2\psi=11\\ \chi\psi=15\end{array}\right\}$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔχομεν $\chi=11-2\psi$ (1). Τὴν τιμὴν $\chi=11-2\psi$ ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος λαμβάνομεν $(11-2\psi)\,\psi.=15$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι

εἶναι $\left.\begin{array}{l}\psi_1=3\\ \psi_2=2{,}5\end{array}\right|$ τὰς τιμὰς $\psi_1=3$ καὶ $\psi_2=2{,}5$ ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν

σχέσιν (1) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\begin{array}{l}\chi_1=5\\ \chi_2=6\end{array}$

Σημείωσις : Τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἠδυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ διὰ τοῦ ἑξῆς τεχνάσματος :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \chi+2\psi=11\\ (2) & \chi\psi=15\end{array}\right|(\alpha)$$

Ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ δύο καὶ τοιουτοτρόπως λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστη-

μα $\left.\begin{array}{r}\chi+2\psi=11\\ 2\chi\psi=30\end{array}\right|(\beta)$ Εἰς τὸ σύστημα (β) διακρίνομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ ἔχουσι ἄθροισμα 11 καὶ γινόμενον 30. Ἄρα εἶναι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\chi^2-11\chi+30=0$ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι :

$$\begin{array}{l}\chi_1=5\\ \chi_2=6\end{array}$$

Ἤδη ἀφοῦ θέσωμεν εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (β) τὸν χ διὰ τῶν τιμῶν $\chi_1=5$ καὶ $\chi_2=6$, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\begin{array}{l}\psi_1=3\\ \psi_2=2{,}5\end{array}$

2ον) ***Ὅταν εἰς τὸ σύστημα καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕκαστον ἄγνωστον ἢ καὶ πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους.***

Ἐκ τῆς κατηγορίας αὐτῆς κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰς βασικὰς μορφὰς αὐτῶν.

1ον) ***Παράδειγμα.*** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα.

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \chi^2+\psi^2=65 \\ (2) & \chi\psi=28\end{array}\right|$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν $\chi=\frac{28}{\psi}$. (3)

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ χ, ἐκ τῆς (3) ἀφοῦ θέσωμενεἰς τὴν (1) ἐξίσωσιν λαμβάνομεν $\left(\frac{28}{\psi}\right)^2+\psi^2=65$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι,

$$\psi_1=7,\ \psi_2=-7,\ \psi_3=4,\ \psi_4=-4$$

Ἤδη ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν (3) τὸν ψ, διὰ τῶν τιμῶν $\psi_1=7$, $\psi_2=-7$, $\psi_3=4$, $\psi_4=-4$, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\chi_1=4$, $\chi_2=-4$, $\chi_3=7$, $\chi_4=-7$.

Σημείωσις. Τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἠδυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ διὰ τοῦ ἑπομένου τεχνάσματος:
Ἐπειδὴ $\chi^2+\psi^2=(\chi+\psi)^2-2\chi\psi$ (§ 71, 4ον Τόμος Α΄).

Ἐκ τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r}\chi^2+\psi^2=65 \\ \chi\psi=28\end{array}\right\}\ (\alpha)$$ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον

σύστημα $$\left.\begin{array}{r}(\chi+\psi)^2-2\chi\psi=65 \\ 2\chi\psi=56\end{array}\right|\ (\beta)$$

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (β) λαμβάνομεν $(\chi+\psi)^2=121$ ἢ $\chi+\psi=\pm\sqrt{121}$, ἢ $\chi+\psi=\pm 11$.

Ἄρα διὰ τῶν $\chi+\psi=\pm 11$ καὶ $\chi\psi=28$ λαμβάνομεν τὰ ἀκόλουθα συστήματα (γ) καὶ (δ)

$$\left.\begin{array}{r}\chi+\psi=11 \\ \chi\psi=28\end{array}\right\}\ (\gamma) \qquad \left.\begin{array}{l}\chi+\psi=-11 \\ \chi\psi=28\end{array}\right|\ (\delta)$$

Ἤδη ἐκ τῶν (γ) καὶ (δ), ἐφ᾽ ὅσον εἶναι γνωστὰ 1) τὸ ἄθροισμα καὶ 2) τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτοὺς ὡς ρίζας τῶν κάτωθι ἀντιστοίχων δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων

$$\chi^2-11\chi+28=0 \qquad \text{καὶ} \qquad \chi^2+11\chi+28=0$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεων ἔχομεν

$$\chi=\frac{11\mp\sqrt{11^2-4.28}}{2}=<\begin{matrix}\chi=7\\ \chi=4\end{matrix}$$

$$\text{καὶ } \chi=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4.28}}{2}-<\begin{matrix}\chi=-7\\ \chi=-4\end{matrix}$$

ἤτοι $\chi_1=7,\quad \chi_2=-7,\quad \chi_3=4,\quad \chi_4=-4$

Ἤδη ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi\psi=28$ τῶν ἀνωτέρω συστημάτων (γ) καὶ (δ) τὸν χ διὰ
$\chi=7$, $\chi=-7$, $\chi=4$, $\chi=-4$, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως
$\psi_1=4$, $\psi_2=-4$, $4_3=7$, $\psi_4=-7$.

Παρατήρησις. Ἠδυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν καὶ τὴν ἑπομένην σειρὰν κατὰ τὴν λύσιν διὰ τοῦ τεχνάσματος.

Ἐκ τοῦ $\left.\begin{matrix}\chi^2+\psi^2=65\\ \chi\psi=28\end{matrix}\right|$ (α) λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα.

$\left.\begin{matrix}\chi^2+\psi^2=65\\ 2\chi\psi=56\end{matrix}\right|$ (β) καὶ διὰ προσθέσεως, κατὰ μέλη, τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (β) λαμβάνομεν.

$\underbrace{\chi^2+\psi^2+2\chi\psi}=121$

ἢ $(\chi+\psi)^2=121$

ἢ $\chi+\psi=\pm 11$ . . . ἡ συνέχεια ὡς ἐκτίθεται εἰς τὸ τέχνασμα τῆς ἀνωτέρω σημειώσεως.

2ον) ***Παράδειγμα.*** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\left.\begin{matrix}\chi^2+\psi^2=65\\ \chi+\psi=11\end{matrix}\right\}$

Ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν $\chi=11-\psi$ (1). Τὴν τιμὴν ταύτην ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$(11-\psi)^2+\psi^2=65$

ἢ $121+\psi^2-22\psi+\psi^2=65$

ἢ $2\psi^2-22\psi+56=0$

ἢ $\psi^2-11\psi+28=0$ τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι $\begin{matrix}\psi_1=7\\ \psi_2=4\end{matrix}$

καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\begin{matrix}\chi_1=4\\ \chi_2=7\end{matrix}$

Σημείωσις. Τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω συστήματος δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ διὰ τεχνάσματος.

ἤτοι ἐκ τοῦ συστήματος $\left.\begin{aligned} \chi^2+\psi^2&=65 \\ \chi+\psi&=11 \end{aligned}\right|$

λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον $\left.\begin{aligned} (\chi+\psi)^2-2\chi\psi&=65 \\ \chi+\psi&=11 \end{aligned}\right|$

Ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον

$\left.\begin{aligned} 11^2-2\chi\psi&=65 \\ \chi+\psi&=11 \end{aligned}\right|$ ἢ $\left.\begin{aligned} (1)\quad \chi\psi&=28 \\ (2)\quad \chi+\psi&=11 \end{aligned}\right| (\alpha)$ Ἐκ τοῦ ὁποίου

οἱ ἄγνωστοι χ καὶ ψ, ἐφ' ὅσον ἔχουσι ἄθροισμα 11 καὶ γινόμενον 28, εἶναι ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, $\chi^2-11\chi+28=0$, ἤτοι: $\chi_1=7$ καὶ $\chi_2=4$. Τὰς τιμὰς αὐτὰς ἀφοῦ θέσωμεν εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (α) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς τοῦ ψ, ἤτοι $\psi_1=4$ καὶ $\psi_2=7$.

3ον) ***Παράδειγμα.*** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\left.\begin{aligned} \chi^2+3\psi^2&=37 \\ 4\chi^2-\psi^2&=96 \end{aligned}\right| (\alpha)$

διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν (ἢ προσθέσεως) λαμβάνομεν

$\left.\begin{aligned} \chi^2+3\psi^2&=37 \\ 4\chi^2-\psi^2&=96 \end{aligned}\right| \begin{aligned} 1 \\ 3 \end{aligned} \Big|$ ἢ $\begin{aligned} \chi^2+3\psi^2&=37 \\ \underline{12\chi^2-3\psi^2}&\underline{=288} \\ 13\chi^2&=325 \end{aligned}$ καὶ $\chi^2=25$ ὅτε $\chi=\pm5$

Τὰς τιμὰς τοῦ χ, ἀφοῦ θέσωμεν εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (α) λαμβάνομεν

$$(\pm5)^2+3\psi^2=37$$

ἢ $25+3\psi^2=37$

ἢ $3\psi^2=12$

ἢ $\psi^2=4$

ἢ $\psi=\pm2$ ἤτοι αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι $\chi=\pm5$ καὶ $\psi=\pm2$.

Σημείωσις. Τὸ σύστημα τοῦτο ἠδυνάμεθα καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως νὰ λύσωμεν· ἤτοι ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ (α) λαμβάνομεν $\chi^2=37-3\psi^2$. Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ χ, ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν $4(37-3\psi^2)-\psi^2=96$, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι $\psi=\pm2$, ἄρα καὶ $\chi=\pm5$.

4ον) Παράδειγμα. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\left.\begin{array}{r}\chi^2+\psi^2=576\\ \chi+\psi=12\end{array}\right|$

ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\left.\begin{array}{lr}(1) & (\chi+\psi)^2-3\chi\psi\,(\chi+\psi)=576\\ (2) & \chi+\psi=12\end{array}\right| \quad (\S\ 65,\ (1)\ \text{Τόμος Α΄.})$$

Ἤδη ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ τῆς (1) διὰ τοῦ ἴσου πρὸς αὐτὸ 12, ὡς ὁρίζει ἡ (2) λαμβάνομεν

$12^2 - 3\chi\psi.12 = 576$ ἢ $\chi\psi = \dfrac{576-12^2}{36} = 32$. Ἤτοι ἔχομεν τὸ

σύστημα $\left.\begin{array}{r}\chi\psi=32\\ \chi+\psi=12\end{array}\right|$ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\chi^2-12\chi+32=0$, τῆς ὁποίας

$\begin{array}{l}\chi_1=8\\ \chi_2=4\end{array}$ ὁπότε καὶ $\begin{array}{l}\psi_1=4\\ \psi_2=8\end{array}$

Β΄. ***Λύσις συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἀγνώστους καὶ ἐξισώσεις περισσοτέρας τῶν δύο.***

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα μὲ περισσοτέρας ἐξισώσεις καὶ ἀγνώστους τῶν δύο, ἐκ τῶν ὁποίων μία μόνον νὰ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, συναρτήσει μιᾶς μόνον τιμῆς ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὰς νὰ τὰς ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 2\chi^2+\psi^2-4\chi\omega-2\psi\omega+3\chi-4\psi=13\\ (2) & 7\chi-3\psi+\omega+6=0\\ (3) & 5\chi-\psi-\omega-2=0\end{array}\right|$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως, $\psi=3\chi+1$ (4) καὶ $\omega=2\chi-3$ (5). Τὰς τιμὰς αὐτὰς ἀφοῦ θέσωμεν εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν

$\chi_1=2,\ \chi_2=\dfrac{5}{9}$ καὶ ἐκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ χ, τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω, ἤτοι :

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1=7\\ \psi_2=2\dfrac{2}{3}\end{array}\right| \quad \text{καὶ} \quad \left.\begin{array}{l}\omega_1=1\\ \omega_2=-1\,\dfrac{8}{9}\end{array}\right|$$

Γενικὴ παρατήρησις. Ἡ λύσις τῶν συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν ἡ μία τούτων εἶναι πρωτοβάθμιος δίδεται συντομώτερον βεβαίως διὰ τεχνασμάτων· πάντως πάντοτε δίδεται διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἀσκήσεις. 550) Νὰ λυθῶσι τὰ κάτωθι προβλήματα:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} \chi+\psi=20 & \chi-\psi=9 & \chi^2+\psi^2=625 & \chi^2+\psi^2=164 & \chi^2-\psi^2=85 \\ \chi\psi=64 & \chi\psi=90 & \chi+\psi=35 & \chi-\psi=2 & \chi-\psi=5 \end{array}$$

551)

$$\begin{array}{l|l|l|l} \chi^3+\psi^2=208 & \chi^2-\psi^2=55 & \chi^2+\psi^2=20 & \chi+\psi=2,5 \\ \chi\psi=96 & \chi\psi=24 & \dfrac{\chi}{\psi}=2 & \dfrac{\chi}{\psi}+\dfrac{\psi}{\chi}=4,25 \end{array}$$

552)

$$\begin{array}{l|l|l} \chi^2+\psi^2+\chi+\psi=62 & (7+\chi)(6+\psi)=80 & \chi_2+\psi^2=4 \\ \chi^2-\psi^2+\chi-\psi=50 & \chi+\psi=5 & \psi+2\chi=7 \end{array}$$

553)

$$\begin{array}{l|l|l|l} 2\psi^2-3\chi^2=6 & \dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{\psi^2}=13 & 5\chi^2+2\psi^2=22 & 2\chi^2+3\psi=23 \\ 3\psi^2-2\chi^2=19 & \dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=5 & 3\chi^2-3\psi^2=7 & 3\chi^2-3\psi=-3 \end{array}$$

554)

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} \chi^2+\psi^2=74 & \psi=9\chi^2 & \chi+\psi=\alpha & \chi^2+\psi^2=\alpha & \chi^2+\psi^2=\alpha \\ \chi+\psi=12 & 2\chi+\psi=6 & \chi\psi=\beta & \chi\psi=\beta & \chi+\psi=\beta \end{array}$$

§ 180) ***Χρῆσις τῶν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ καὶ συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ, εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.***

Α') ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Πρόβλημα 1ον). ***Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ μᾶς δίδει τὸν ἀριθμὸν 108.***

Λύσις. Ἔστω ὅτι ὁ ζητούμενος εἶναι χ, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ εἶναι $\chi.\frac{3}{4}\chi=108$ ἢ $\frac{3\chi^2}{4}=108$, ἡ ὁποία λυομένη μᾶς δίδει $\chi_1=12$ καὶ $\chi_2=-12$.

Ἀπάντησις. Ἀμφότεραι αἱ ρίζαι εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 2ον) Βιβλιοπώλης ἐπώλησεν βιβλίον ἀντὶ 39 δραχ. καὶ ἐκέρδισεν τόσον τοῖς $^0/_0$, ὅσον τὸ ἠγόρασε τὸ βιβλίον· ποῖα εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ βιβλίου;

Λύσις. Ἔστω ἡ ζητουμένη ἀξία τοῦ βιβλίου ὅτι εἶναι χ. Ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\chi+\frac{\chi^2}{100}=39$, ἡ ὁποῖα λυομένη δίδει $\chi_1=-130$ καὶ $\chi_2=30$.

Ἀπάντησις. Ἡ πρώτη ρίζα ὡς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἀπορρίπτεται· ἄρα ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ δευτέρα ρίζα.

Πρόβλημα 3ον. 30 ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, προσέφερον ἐν ὅλῳ 144 χιλιάδες δραχμὰς ὑπὲρ ἑνὸς φιλανθρωπικοῦ σκοποῦ· ἕκαστος ἀνὴρ προσέφερεν 2 χιλ. δρχ. περισσότερον ἑκάστης γυναικός προσέφερον δὲ οἱ ἄνδρες ὅσας καὶ αἱ γυναῖκες δραχμάς· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Ἐὰν χ εἶναι οἱ ἄνδρες τότε αἱ γυναῖκες εἶναι $30-\chi$, κατὰ τὴν ἀκφώνησιν προκύπτει πρῶτον ὅτι ἕκαστος ἀνὴρ ἐπλήρωσε $\frac{72}{\chi}$ καὶ ἑκάστη γυνὴ $\frac{72}{30-\chi}$, καὶ δεύτερον προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\frac{72}{\chi}-\frac{72}{30-\chi}=2$, ἡ ὁποῖα λυομένη δίδει $\chi_1=90$ καὶ $\chi_2=12$

Ἀπάντησις. Ἡ πρώτη ρίζα $\chi=90$, ὡς ὑπερβαίνουσα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀτόμων ἀπορρίπτεται, ἡ δευτέρα $\chi_2=12$, εἶναι παραδεκτὴ καὶ δεικνύει ὅτι οἱ ἄνδρες εἶναι 12, ἄρα αἱ γυναῖκες εἶναι $30-12=18$.

Πρόβλημα 4ον. Ἐμπόρευμά τι ἠγοράσθη ἀντὶ 600 χιλ. δρχ. Ἐὰν μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα ἐλάμβανε 5 ὀκ. περισ-

σότερον, ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς θὰ ἦτο κατὰ 10 χιλ. μικροτέρα· πόσας ὀκάδας ἠγόρασε;

Λύσις. Ἔστω χ, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων, Ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\frac{600}{\chi}-\frac{600}{\chi+5}=10$, ἡ ὁποία λυομένη δίδει $\chi_1=20$ καὶ $\chi_2=-15$.

Ἀπάντησις. Ἡ πρώτη ρίζα εἶναι παραδεκτή, ἐνῷ ἡ δευτέρα ἀπορρίπτεται, ἐπειδὴ τὸ ἀποτέλεσμα πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

Β΄) ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Πρόβλημα 1ον) ***Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου νὰ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν 1620.***

Λύσις. Ἔστωσαν χ καὶ ψ τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθη· κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος προκύπτει τὸ σύστημα:

$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi=27\\ 4\chi^2+5\psi^2=1620\end{array}\right\}$ μὲ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τοῦ συστήματος $\chi=12$ καὶ $\psi=15$.

Ἀπάντησις. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ζητούμενοι εἶναι 12 καὶ 15.

(Σημείωσις: τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ καὶ διὰ μιᾶς μόνον ἐξισώσεως, ἡ ὁποῖα καὶ εἶναι $4\chi^2+5(27-\chi)^2=1620$.

Πρόβλημα 2ον). ***Ἐὰν εἰς διψήφιον ἀριθμὸν προσθέσωμεν τὸν 9, εὑρίσκομεν τὸν ἀντεστραμμένον αὐτοῦ ἀριθμόν. Ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ λαμβάνομεν πηλίκον 6. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;***

Λύσις. Ἐὰν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ὁ ἀριθμὸς εἶναι $10\chi+\psi$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος προκύπτει τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}10\chi+\psi+9=10\psi+\chi \\ \dfrac{10\chi+\psi}{\chi\psi}=6\end{array}\right|$$ μὲ τὴν λύσιν

τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=1$ καὶ $\psi=2$.

Ἀπάντησις. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 12.

Πρόβλημα 3ον. ***Δύο ἄτομα κατέθεσαν εἰς ταμιευτήριον τὰς οἰκονομίας των ἐκ 2000 Λ. Α., ὁ εἷς ἄφησε τὸ μερίδιόν του ἐπὶ 2 μῆνας καὶ ὁ δεύτερος τὸ ἰδικόν του ἐπὶ 8 μῆνας· ὁ πρῶτος ἔλαβεν 1800 Λ. Α. διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον, ἐνῷ ὁ δεύτερος ἔλαβεν 900 Λ. Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος ἑνὸς ἑκάστου.***

Λύσις. Ἔσω χ, ἡ κατάθεσις τοῦ ἑνὸς καὶ ψ, τοῦ δευτέρου. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν προκύπτει τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi=2000 \\ \dfrac{1800-\chi}{900-\psi}=\dfrac{2\chi}{8\psi}\end{array}\right|$$ Μὲ τὴν λύσιν τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=1500$ καὶ $\psi=500$.

Ἀπάντησις. Ἡ κατάθεσις τοῦ πρώτου εἶναι 1500 καὶ συνεπῶς ὁ τόκος του 300, ἡ κατάθεσις τοῦ δευτέρου εἶναι 500 καὶ συνεπῶς ὁ τόκος του 400.

Πρόβλημα 4ον) ***Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμου εἶναι 60 τ. μ. ὁ δὲ λόγος τῶν διαστάσεων αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{5}$ Νὰ εὑρεθῶσι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.***

Λύσις. Ἔστωσαν χ καὶ ψ, αἱ διαστάσεις αὐτοῦ. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν προκύπτει τὸ σύστημα: $\left.\begin{array}{r}\chi\psi=60 \\ \dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{3}{5}\end{array}\right\}$ μὲ τὴν λύσιν

τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $\psi=10$ καὶ $\chi=6$.

Ἀπάντησις. Αἱ ζητούμεναι διαστάσεις εἶναι 10 μ. καὶ 6 μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

555) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον, ὅταν πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὰ 0,4 αὐτοῦ, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 18

556) Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ τινὸς καὶ τοῦ ἀντιστρόφου αὐτοῦ εἶναι 226. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

557) Ἐὰν ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 1, ὁ κύβος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 91. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

558) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ διαδοχικοὶ περιττοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 195.

559) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοιοῦτος, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης αὐτοῦ νὰ ἰσοῦται μὲ 26.

560) Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 15 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μέρους ἐλαττούμενον κατὰ 25, νὰ δίδῃ τὸ τριπλάσιον τετράγωνον τοῦ μικροτέρου.

561) Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀκέροιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 135.

562) Εἷς ἐπώλησεν 10 πήχ. ὑφάσματος τινὸς πρὸς χ, δραχμάς. Ἂν ἐπώλη χ, πήχεις ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος θὰ ἐλάμβανεν 4840 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς.

563) Αὐγοπώλης ἠγόρασεν αὐγὰ μὲ δραχ. 12500· ἐξ αὐτῶν ἔσπασαν κατὰ τὴν μεταφορὰν τὰ 5, τὰ ὑπόλοιπα, ἂν καὶ τὰ ἐπώλησε κατὰ 100 δραχ. ἀκριβώτερον, ἐν τούτοις ἐζημιώθη δραχ. 500 Πόσα αὐγὰ ἠγόρασεν;

564) Ποῖα εἶναι ἡ ἡλικία μου, ὅταν αὐτη ἦτο πρὸ τριῶν ἐτῶν ἴση πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἡλικίας τὴν ὁποίαν θὰ ἔχω μετὰ τρία ἔτη;

565) 300 χιλιάδες δραχμαὶ ἐπρόκειτο νὰ διανεμηθῶσι ἐξ ἴσου μεταξὺ βραβευθέντων μαθητῶν. Κατὰ τὴν ἡμέραν ὅμως τῆς διανομῆς ἀπουσίαζον 5 μαθηταὶ καὶ οὕτω ἕκαστος τῶν παρόντων ἔλαβεν 5 χιλ. περισσοτερας· πόσοι ἦσαν οἱ βραβευθέντες μαθηταί;

566) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα ἀντὶ 240 χιλιάδων δραχμῶν. Ἂν μὲ τὰ αὐτὰ χρήματα ἠγόραζε 3 πήχ. περισσότερον, ο πῆχυς θὰ ἤξιζε 4 χιλιάδες δραχ. ὀλιγώτερον· Πόση ἦτο ἡ τιμὴ ἑκάστου;

567) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $3\frac{1}{3}$ δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ ἔνατον τοῦ τετραγώνου του πλέον 25.

568) 400 χιλιάδες δραχμαὶ πρέπει νὰ διανεμηθῶσι εἰς ἴσα μέρη

μεταξὺ τῶν ἐργατῶν μιᾶς ὁμάδος, ἀλλὰ καθ' ἣν στιγμὴν ἐγένετο ἡ διανομὴ 4, ἐργάται ἀπεσπάσθησαν αὐτῆς καὶ ἕνεκα τούτου ηὐξήθη τὸ μερίδιον τῶν παραμεινάντων κατὰ 5· πόσοι ἦσαν οἱ ἐργάται

569) Τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων κλάσματος τινὸς εἶναι 120. Οἱ δύο ὅροι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἂν ὁ 1 ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ προστεθῇ εἰς τὸν ἀθιθμητήν. Ποῖον εἶναι τὸ κλάσμα ;

570) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ μὲν διαφορὰ αὐτῶν νὰ εἶναι 3, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κύβων εἶναι 117.

571) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί τοιοῦτοι, ὥστε τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι 800 τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι 80·

572) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὰ ψηφία αὐτοῦ νὰ ἄχωσι γινόμενον 6. Ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ γινομένου κατὰ 26.

573) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ τὸ πηλῖκον αὐτῶν νὰ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

574) Μαθηταὶ μιᾶς τάξεως προσφέρουν βραβεῖον ἐπιμελείας καὶ χρηστότητος ὑπὲρ τοῦ α΄ μαθητοῦ τῆς τάξεώς των. Ἐὰν μὲν οἱ μαθηταὶ ἦσαν 5 ὀλιγώτεροι καὶ ἔδιδον ἕκαστος τούτων 100 δρχ. περισσοτέρας τὸ βραβεῖον θὰ ἦτο 115.500 δρχ. Ἐὰν δὲ οἱ μαθηταὶ ἦσαν 10 ὀλιγώτεροι καὶ ἔειδον ἕκαστος 50 δρχ ὀλιγώτερον τὸ βραβεῖον θὰ ἦτο 78.000. Νὰ εὑρεθοῦν ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως καὶ ἡ εἰσφορὰ ἑκάστου τούτων.

575) Δύο ἐργάτριαι ὅταν ἐργάζονται χωριστὰ χρειάζονται διὰ νὰ πλέξουν ἕνα ὕφασμα 30 ὥρας. Ἂν ὅμως ἐργασθοῦν συγχρόνως χρειάζονται 7,5 ὥρας διὰ τὸ αὐτὸ ὕφασμα. Πόσας ὥρας χρειάζεται ἑκάστη διὰ τὸ αὐτὸ ὕφασμα ;

576) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφείων αὐτοῦ δίδει πηλίκον 2,25. Ὅταν δὲ ἀντιστραφῶσι τὰ ψηφία αὐτοῦ προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 9 μεγαλύτερος.

577) Νὰ χωρισθοῦν ὁ ἀριθμὸς 70 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, τοιούτους ὥστε ὁ μεσαῖος κατὰ μέγεθος νὰ εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων, ὁ δὴ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου.

578) Εἰς 60 ὑπαλλήλους, ἄνδρας καὶ γυναῖκας, ἔδωκαν 12000000 δρχ. ἔλαβεν δὲ ἕκαστος ἀνὴρ τόσας χιλιάδας δρχ, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες καὶ ἑκέστη γυνὴ τόσας, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες.

579) Ἡ δαπάνες ἑνὸς γεύματος ἀνῆλθον εἰς δραχ. 300.000. Ἐκ τῶν συνδαιτημόνων ἐξηρέθησαν κανὰ τὴν πληρωμὴν 5 ἄτομα. Τοιουτοτρόπως δὲ ὑποχρεώθησαν οἱ λοιποὶ νὰ καταβάλουν 2000 δραχ. ἐπὶ πλέον ἕκαστος. Πόσοι ἦσαν οἱ συνδεμημόνες ;

580) Δύο πόλεις ἀπέχουσι ἀλλήλων ὁδικῶς δι' αὐτοκινήτου μὲν 150 χιλιόμετρα, σιδηροδρομικῶς δὲ 180 χιλιόμετρα. Τὸ αὐτο-

κίνητο διατρέχει τὴν μεταξὺ τῶν πόλεων ἀπόστασιν κατὰ 30′ τῆς ὥρας ὀλιγώτερον τοῦ σιδηροδρόμου· ὁ δὲ σιδηρόδρομος ἔχει ταχύτητα 10 χιλ. ὀλιγοτέραν τοῦ αὐτοκινήτου καθ' ὥραν. Νὰ εὑρεθῶσι αἱ ταχύτητες αὐτοκινήτου καὶ σιδηροδρόμου.

581) Δύο κρουνοὶ πληροῦν δεξαμενή, ὅταν συγχρόνως ρέουσι εἰς 3 ὥρας 22′, 30′′ ὥρας· Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος κρουνὸς δύναται νὰ γεμίσῃ τὴν δεξαμενήν, ἂν ὁ εἷς ἐξ' αὐτῶν μόνος του χρειάζεται 4 ὥρας ἐπὶ πλέον τοῦ ἄλλου ;

582) Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν πρὸς διάφορα ἐπιτόκια. Τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων εἶναι 60000 Λ. Α. χάρτιναι τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τόκων 12000 Λ. Α. χάρτιναι. Τὸ ἓν κεφάλαιον δίδει ἐτησίως 1520 Λ. Α. χαρτίνας καὶ τὸ ἄλλο 2320 Λ. Α. χαρτίνας. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ δύο αὐτὰ κεφάλαια.

583) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ διαδοχικοὶ περιττοί, τοιοῦτοι ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι 8000.

584) Νὰ εὑρεθῶσι δὺο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε τὸ γινόμενόν των νὰ εἶναι 35 καὶ ἡ δαφορὰ τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν νὰ εἶναι $\frac{2}{35}$.

585) Ἐτόκησέ τις κεφάλαιον 70.000.000 δραχ. Μετὰ ἓν ἔτος ἐτόκισε τὸ κεφάλαιον αὐτὸ μετὰ τῶν τόκων του καὶ πρὸς τὸ ἴδιον ἐπιτόκιον. Ἐὰν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ἔλαβεν διὰ τόκους καὶ κεφάλαιον δραχ. 83.167.000 Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη ;

586) Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχουν λόγον $\sqrt{3}$, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 6 μ, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογ. εἶναι 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις

587) Νὰ εὑρεθῶσι αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ 14 καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ 10.

588) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι α, μέτρα.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

§ 189) Ἔστωσαν αἱ σειραὶ τῶν ἀριθμῶν:

3, 7, 11, 15, 19,....

50, 45, 40, 35. 30,.... Εἰς αὐτὰς διακρίνομεν ὅτι ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ, ὅταν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς (εἰς τὴν πρώτην μὲν ὁ 4, εἰς τὴν δευτέραν δὲ ὁ — 5,) ἢ ὅτι ἕκαστος διαφέρει τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ κατὰ σταθερὸν ἀριθμὸν (κατὰ 4 εἰς τὴν πρώτην σειρὰν καὶ κατὰ —5, εἰς τὴν δευτέραν). Τὰς σειρὰς αὐτὰς καλοῦμεν προόδους ἀριθμητικὰς ἢ κατὰ διαφοράν. Ἤτοι:

Ἀριθμητικὴ πρόοδος ἢ κατὰδιαφορὰν καλεῖται ἡ σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου, ὅταν προστεθῇ ἡ αὐτὴ σταθερὰ ποσότης ἢ ἕκαστος τῶν ὁποίων διαφὲρει τοῦ προηγουμὲνου αὐτοῦ κατὰ σταθεράν τινα ποσότητα. Ἡ σταθερὰ ποσότης, ἡ ὁποῖα παριστᾶ τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων, καλεῖται ***λόγος τῆς προόδου*** καὶ ὅταν μὲν ὁ λόγος εἶναι θετικός οἱ ἀριθμοὶ τῆς προόδου βαίνουσι αὐξανόμενοι καὶ ἡ τοιαύτη πρόοδος καλεῖται ***αὔξουσα***, ὅταν δὲ ὁ λόγος εἶναι ἀρνητικός. οἱ ἀριθμοὶ τῆς προόδου βαίνουσι ἐλαττούμενοι καὶ ἡ τοιαύτη πρόοδος καλεῖται ***φθίνουσα.*** Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὴν πρόοδον καλοῦνται ***ὅροι τῆς προόδου.***

§ 190) ***Εὕρεσις ὅρου κατέχοντος ὁρισμένην θέσιν εἰς τὴν πρόοδον.***

Ἔστω ὡς πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς τινὸς προόδου ὁ α, καὶ λόγος αὐτῆς ὁ λ. Κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω εἶναι:

πρῶτος ὅρος	$=$	α
δεύτερος »	$=$	$\alpha+\lambda$
τρίτος »		$=\alpha+\lambda+\lambda=\alpha+2\lambda$
τέταρτος »		$=\alpha+2\lambda+\lambda=\alpha+3\lambda$
πέμπτος »		$=\alpha+3\lambda+\lambda=\alpha+4\lambda$ κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι :

Ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος προκύπτει, ὅταν εἰς τὸν πρῶτον προσθέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων ὅρων.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ, ὅρον τινὰ κατέχοντα τὴν νιοστὴν θέσιν, διὰ τοῦ α, τὸν πρῶτον ὅρον καὶ διὰ τοῦ λ, τὸν λόγον, λαμβάνομεν τὸν τῦπον

$$\boxed{\tau=\alpha+(\nu-1).\lambda} \quad (1)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν τῶν τεσσάρων ποσοτήτων, ὅταν μᾶς δίδωνται αἱ τρεῖς ἄλλαι.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ ὁ δέκατος ὅρος τῆς προόδου 6, 11, 16, ...

Λύσις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου τύπου (1) ἤτοι

$$\tau=\alpha+(\nu-1).\lambda.$$

ἔχομεν. ὁ δέκατος $=6+9.5=51$

§ 191) *Περὶ παρεμβολῆς ἀριθμητικῶν μέσων.*

Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου 190, ἤτοι τοῦ $\tau=\alpha+(\nu-1).\lambda$, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα :

Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ τ, νὰ παρεμβληθῶσι μ, ἀριθμητικὰ μέσα, ἤτοι νὰ παρεμβληθῶσι μ, τὸ πλῆθος ὅροι, ὥστε μετὰ τῶν δύο δεδομένων α καὶ β, νὰ ἀποτελέσωσι ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Λύσις. Ἄγνωστον τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ λόγος, ἐπειδὴ $\nu=\mu+2$, ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha+(\nu-1).\lambda$, λαμβάνομεν

$\tau = \alpha + (\mu + 2 - 1).\lambda$ ἢ $\tau = \alpha + (\mu+1).\lambda$ καὶ λύοντες ὡς

πρὸς λ, ἔχομεν $\boxed{\lambda = \dfrac{\tau - \alpha}{\mu+1.}}$ (2)

Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι

$$\underbrace{\alpha, \quad \alpha + \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}, \alpha + 2\,\frac{\tau - \alpha}{\mu - 1}, \ldots, \beta}_{\text{ὅροι } \mu, \text{ τὸ πλῆθος μεταξὺ τῶν } \alpha \text{ καὶ } \beta}$$

Ἐφαρμογή*: *Μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3 νὰ παρεμβληθῶσι 4 ἀριθμητικὰ μέσα :

Λύσις. Κατὰ τ' ἀνωτέρω εἶναι $\lambda = \dfrac{3 - 2}{4 + 1} = \dfrac{1}{5}$ καὶ συνεπῶς

ἡ πρόοδος εἶναι: $2,\ 2 + \dfrac{1}{5},\ 2 + \dfrac{2}{5},\ 2 + \dfrac{3}{5},\ 2 + \dfrac{4}{5},\ 3$

Ἀσκήσεις. 589) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 10ος ὅρος καθὼς καὶ ὁ 25ος τῶν κάτωθι προόδων:

α΄.) 7, 10, 13, 16,... β΄.) $1, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots$ γ΄.) 4, —1, —6,...

δ΄.) 10, 6, 2,... ε΄.) $9,\ 8\dfrac{1}{2},\ 8, \ldots$

590) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου, ὅταν $\tau = 41$, $\nu = 14$, $\lambda = 3$,

591) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ 3ος ὅρος εἶναι ὁ 10 καὶ ὁ 8ος εἶναι ὁ (—10).

592) Τῆς ἀριθ. προόδου 19, 15, 11,... ὁ φ, ὅρος αὐτῆς — 44, ποῖαν θέσιν κατέχει οὗτος;

593) Νὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3, 10 ἀριθμ. μέσα

594) Ὁμοίως μεταξὺ τῶν 1 καὶ 11 νὰ παρεμβληθῶσι 4 » »

595) » » » 11 » 21 » » 4 » »

596) » » » 21 » 31 » » 4 » »

597) Τί παρατηρεῖται μὲ τὰ ἀποτελέσματα τῶν προηγουμένων τριῶν ἀσκήσεων.

598) Μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμ. προόδου 1, 1,03, 1,06,... νὰ παρεμβληθῶσι 6 ἀριθμητικὰ μέσα.

§ 192) ***Ἰδιότης ἐπὶ τῶν ὅρων τῶν ἴσων ἀπεχόντων τῶν ἄκρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου.***

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος α, β, γ,... ρ, σ, τ. (τοὺς α, καὶ τ, καλοῦμεν ἄκρους ὅρους τῆς προόδου).

Δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀριθμ. προόδου λαμβάνομεν τὰς ἰσότητας $\begin{matrix} \beta=\alpha+\lambda\,, \\ \sigma=\tau-\lambda\,, \end{matrix}$ (1) $\begin{matrix} \gamma=\beta+\lambda \\ \rho=\sigma-\lambda \end{matrix}$ (2) Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἀντιστοίχως λαμβάνομεν $\beta+\sigma=\alpha+\tau$ (3) $\gamma+\rho=\beta+\sigma$ (4) Ἐὰν συγκρίνομεν τὰς (3) καὶ (4) λαμβάνομεν $\alpha+\tau=\beta+\sigma=\gamma+\rho$ (5).
Ἐκ τῆς σχέσεως (5) συνάγομεν:

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἴσον ἀπεχοντων τῶν ἀκρων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων.

§ 193) ***Περὶ τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ὅρων ἀριθμητικῆς τινὸς προόδου.***

Ἔστω ἡ πρόοδος α, β. γ,......, ρ, σ, λ. (ν, ὅρων)
Ἐὰν καλέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς διὰ Σ, ἔχομεν:
$\Sigma=\alpha+\beta+\gamma+......+\rho+\sigma+\tau$ (1) ἢ
$\Sigma=\tau+\sigma+\rho+......+\gamma+\beta+\alpha$, (2) Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$2\,\Sigma=(\alpha+\tau)+(\beta+\sigma)+(\gamma+\rho)+.......+(\gamma+\rho)+(\beta+\sigma)+(\alpha+\tau)$$

(ν, προσθετέων) ἢ $2\,\Sigma=(\alpha+2).\nu$ καὶ $\boxed{\Sigma=\frac{(\alpha+\tau)}{2}\,\nu}$ (3)

Ἐκ τοῦ τύπου (3) συνάγομεν:

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 12 πρώτων ὅρων τῆς προόδου, 5, 12, 19,....

Πινάκιον γνωστῶν καὶ ἀγνώστων

$\alpha=5$
$\lambda=7$
$\nu=12$
$\tau=;$
$\Sigma=;$

Κατὰ πρῶτον προσδιορίζομεν τὸν τ, ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\tau=\alpha+(\nu-1).\lambda$ ἤτοι $\tau=5+11.7=5+77=82$.

Κατόπιν ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἀθροίσματος, ἤτοι τοῦ $\Sigma=\frac{(\alpha+\tau)}{2}.\nu$ λαμβάνομεν

$$\Sigma=\frac{5+82}{2}.12=\frac{87}{2}.12=\frac{87.12}{2}=87.6=522.$$

Σημείωσις. Εἰς τὸν τύπον τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma=\frac{\alpha+\tau}{2}.\nu$, ἐὰν θέσωμεν ὅπου τ, τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ $\alpha+(\nu-1).\lambda$ λαμβάνομεν

$$\boxed{\Sigma=\frac{2\alpha+(\nu-1).\lambda}{2}.\nu} \qquad (4)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (4) ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς χωρὶς νὰ ἀναζητήσωμεν προηγουμένως τὸν τ ἤτοι:

$$\Sigma=\frac{2.5+11.7}{2}.12=\frac{10+77}{2}.12=\frac{87.12}{2}=87.6=522.$$

Ἀσκήσεις 599) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 196 μέχρι τοῦ 2269.

600) Νὰ Εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 40 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ 3.

601) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ 5 ποῦ ἕπονται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 35.

602) Ἀριθμητικῆς προόδου ἐξ 11 ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς εἶναι 176 καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων εἶναι 30· ποία εἶναι ἡ πρόοδος;

603) Ὁ 2ος ὅρος καὶ ὁ 7ος μιᾶς ἀριθμ. προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92, ὁ 4ος καὶ ὁ 11ος ἔχουν ἄθροισμα 71. Νὰ εὑρεθῶσι οἱ τέσσαρες ὅροι.

604) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμ. προόδου εἶναι 33, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι 1287. Νὰ εὑρεθῶσι οἱ τρεῖς ὅροι.

605) Νὰ εὑρεθῶσιν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμη-

τικὴν πρόοδον καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων νὰ ἰσοῦται μὲ 166.

606) Εἷς συνταγματάρχης ἔχει 3003 στρατιώτας καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ τριγωνικὴν παράταξιν ὡς ἑξῆς, ἡ πρώτη σειρὰ νὰ ἔχῃ 1 στρατιώτην, ἡ δευτέρα σειρὰ 2 κ.ο.κ. πόσας σειρὰς θὰ σχηματίσῃ;

607) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ 11 ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου τῆς ὁποίας τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 176, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι 30.

608) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, ἡ ὁποῖα ἔχει πρῶτον ὅρον 12, λόγον 3 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 882.

609) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν 1, 2, 3, ... ν.

610) Ράπτης ἀγοράσας ραπτομηχανὴν συμφωνεῖ νὰ ἐξοφλήσῃ τὴν ἀξίαν αὐτῆς εἰς 12 μηνιαίας δόσεις, τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι 100 ἡ δευτέρα 150, ἡ τρίτη 200 κ.ο.κ. Πόσον τιμᾶται ἡ μηχανή;

611) Σῶμα πῖπτον ἐλευθέρως εἰς τὸ κενὸν διανύει 4,9044 μέτρα εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον καθ᾽ ἕκαστον δὲ τῶν ἑπομένων διανύει κατὰ 9,8088 μ. περισσότερον ἢ κατὰ τὸ ἀμέσως προηγούμενον. Ζητεῖται πόσον μέτρων διάστημα θὰ διατρέξῃ εἰς τὰ 10 πρῶτα δευτερόλεπτα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 194) Ἔστωσαν αἱ σειραὶ τῶν ἀριθμῶν:

3, 12, 48, 192,....

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$$

Εἰς αὐτὰς διακρίνομεν ὅτι ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (εἰς τὴν πρώτην ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4, εἰς τὴν δευτέραν ἐπὶ τὸν $\frac{1}{2}$.)

Τὰς σειρὰς αὐτὰς καλοῦμεν γεωμετρικὰς προόδους. ***Ἤτοι:***

Καλεῖται γεωμετρικὴ πρόοδος, ἡ σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Οἱ μὲν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὴν γεωμ. πρόοδον καλοῦνται ὅροι αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιάζων ἕκαστον ὅρον δίδει τόν ἑπόμενον, καλεῖται λόγος.

Ἐπειδή, ὅταν διαιρεθῶσι δύο διαδοχικοὶ ὅροι (ὁ ἑπόμενος διὰ τοῦ προηγουμένου) προκύπτει πάντοτε ὁ λόγος, ἕνεκεν τούτου αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι καλοῦνται καὶ ***πρόοδοι κατὰ πηλῖκον.***

Αἱ πρόοδοι ὅταν μὲν ἔχουσι λόγον ἀπολύτως ἀριθμὸν μεγαλύτερον τῆς μονάδος εἶναι ***αὔξουσαι***, ὅταν δὲ ἔχουσι λόγον ἀπολύτως ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος εἶναι ***φθίνουσαι.***

§ 195) ***Εὕρεσις ὅρου κατέχοντος ὡρισμένην θέσιν εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον.***

Ἔστω ὡς πρῶτος ὅρος τῆς προόδου ὁ α, καὶ λ, ὁ λόγος.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω εἶναι:

πρῶτος	ὅρος		$=α$
δεύτερος	»		$=α.λ$
τρίτος	»	$α.λ.λ$	$=αλ^2$
τέταρτος	»	$α.λ^2.λ$	$=αλ^3$
πέμπτος	»	$α.λ^3λ$	$=α.λ^4$ κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι:

Ἕκαστος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου ἡ ὁποία φέρει ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων ὅρων.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ, ὅρον τινὰ ὁ ὁποῖος κατέχει τὴν νιοστὴν θέσιν διὰ τοῦ α, τὸν πρῶτον ὅρον καὶ διὰ τοῦ λ, τὸν λόγον, λαμβάνομεν τὸν τύπον.

$$\boxed{τ=α.λ^{(ν-1)}} \qquad (5)$$

Διὰ τοῦ τύπου (5) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν τῶν τεσσάρων ποσοτήτων, ὅταν μᾶς δοθοῦν αἱ τρεῖς ἄλλαι.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 5ος ὅρος τῆς προόδου 3, 12,48...

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $τ=αλ^{(ν-1)}$ ἔχομεν

$$5ος=3.4^4=3.256=768$$

§ 196) ***Περὶ παρεμβολῆς γεωμετρικῶν μέσων.***

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου τῆς προηγουμένης παραγράφου δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα: ***Μεταξὺ τῶν α καὶ τ νὰ παρεμβληθῶσι μ, γεωμετρικὰ μέσα.***

Λύσις. Ἄγνωστος τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ λόγος. Ἐπειδὴ $\nu=\mu+2$ ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha\lambda^{(\nu-2)}$ λαμβάνομεν

$\tau=\alpha\lambda^{\mu+2-1}$ ἢ $\tau=\alpha.\lambda^{\mu+1}$ καὶ λύοντες ὡς πρὸς λ ἔχομεν

$$\boxed{\lambda=\sqrt[\mu+1]{\frac{\tau}{\alpha}}} \qquad (6)$$

ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι:

$$\alpha,\ \alpha.\sqrt[\mu+1]{\frac{\tau}{\alpha}},\quad \alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\tau}{\alpha}}\right)^2, \ldots\ldots, \beta.$$

Ἐφαρμογή. Μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3 νὰ παρεμβληθῶσι 4 γεωμετρικὰ μέσα.

Λύσις Κατὰ τ' ἀνωτέρω ἔχομεν $\lambda=\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ καὶ ἡ πρόοδος

εἶναι $2,\ 2.\sqrt[5]{\frac{3}{2}},\quad 2.\left(\sqrt[5]{\frac{3}{2}}\right)^2,\ 2.\left(\sqrt[5]{\frac{3}{2}}\right)^3,\ 2.\left(\sqrt[5]{\frac{3}{2}}\right)^4,\ 3$

Ἀσκήσεις. 612) Νὰ εὑρεθῶσι οἱ 5ος καὶ 7ος, ὅροι τῶν κάτωθι γεωμετρικῶν προόδων.

α΄,) 3, 12, 48,... β΄,) $\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{10},\ldots$ γ΄.) $\frac{1}{24},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{6},\ldots$

δ΄.) 5, 20, 80,... ε..)

613) Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 32 νὰ παρεμβληθῶσι 4 μεωμετρικὰ μέσα, ὁμοίως μεταξὺ 1 καὶ 2.

614) Μεταξὺ τῶν τριῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου 3, 12, 48... νὰ παρεμβληθῶσι ἀνὰ 2 γεωμετρικὰ μέσα.

§197) ***Περὶ τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ὅρων γεωμετρικῆς τινὸς προόδου.***

Ἔστω ἡ πρόοδος α, β, γ,..., ρ, σ, τ.

(Ἐὰν καλέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῶν διὰ Σ, ἔχομεν $\Sigma = \alpha+\beta+\gamma+...+\rho+\sigma+\tau$ (1)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ λ, λαμβάνομεν $\Sigma.\lambda = \alpha.\lambda+\beta.\lambda+\gamma.\lambda+...+\rho\lambda+\sigma\lambda+\tau.\lambda$ (2).

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν (1) ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν

$$\Sigma\lambda - \Sigma = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + ...+ \rho\lambda + \sigma.\lambda + \tau.\lambda -$$
$$- \alpha - \beta - \gamma - ..... - \rho - \sigma - \tau \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $\alpha.\lambda = \beta$, $\beta.\lambda = \gamma$ κλπ.

μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἡ (3) καθίσταται

$$\Sigma\lambda - \Sigma = \tau.\lambda - \alpha$$
$$\text{ἢ} \quad \Sigma(\lambda-1) = \tau.\lambda - \alpha$$

καὶ $\boxed{\Sigma = \frac{\tau.\lambda - \alpha}{\lambda - 1}}$ (7) Ἐκ τοῦ τύπου (7) συνάγομεν: ***Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἰσοῦται μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφορὰν, ἀφαιρουμένου τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ τελευταίου ὅρου ἐπὶ τὸν λόγον παρανομαστὴν δὲ τὸν λόγον ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα.***

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 7 πρώτων ὅρων τῆς γεωμ. προόδου 1, 2, 4, 8,...

Πινάκιον γνωστῶν καὶ ἀγνώστων

$\alpha = 1$ $\lambda = 2$ $\nu = 7$ $\tau = ;$ $\Sigma + ;$	Κατὰ πρῶτον προσδιορίζομεν τὸν τ, ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\tau = \alpha.\lambda^{\nu-1}$ ἤτοι $\tau = 1.2^6 = 1.64 = 64$.

Κατόπιν ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἀθροίσματος, ἤτοι τοῦ $\Sigma = \frac{\tau.\lambda - \alpha}{\lambda - 1}$ ἔχομεν

$$\Sigma = \frac{\tau.\lambda - \alpha}{\lambda - 1} = \frac{64.2 - 1}{2-1} = \frac{128 - 1}{1} = 127$$

Σημείωσις. Εἰς τὸν τύπον τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma = \frac{\tau.\lambda - \alpha}{\lambda - 1}$, ἐὰν θέσωμεν ὅπου τ, τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ $\alpha.\lambda^{\nu-1}$ λαμβάνομεν: $\Sigma = \frac{\alpha.\lambda^{\nu-1}\lambda - \alpha}{\lambda - 1} = \frac{\alpha\lambda^{\nu} - \alpha}{\lambda - 1}$

ἢ $$\boxed{\Sigma = \frac{\alpha\lambda^{\nu} - \alpha}{\lambda - 1}} \quad (8)$$

Βάσει τοῦ τύπου (8) ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς, χωρὶς νὰ εὕρωμεν προηγουγένως τὸν τ, ἤτοι $\Sigma = \frac{\alpha\lambda^{\nu} - \alpha}{\lambda - 1} = \frac{1.2^{7} - 1}{2 - 1} = 128 - 1 = 127.$

Ἀσκήσεις. 615) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 9 πρώτων ὅρων τῶν κάτωθι γεωμετρικῶν προόδων.

α΄.) 4, 16, 64,... β) 1, 10, 100,... γ΄.) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots$

δ΄.) 729, 81; 9.... ε΄.) 3, $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

616) Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι 6, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι $4\frac{1}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

617) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν προόδων

α΄.) 1, 3, 3^2, 3^3,... 3^{15}, β΄.) 1, $\frac{1}{5}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{5^3}, \ldots \frac{1}{5^{11}}$

618) Νὰ δεχθῇ ὅτι εἰς πᾶσαν γεωμ. πρόοδον, τὸ γινόμενον δύο ὅρων ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων, ἰσοῦταιμὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

619) Νὰ δεχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ὅρων πάσης γεωμ. προόδου ἰσοῦται μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δυνάμεως τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἐχούσης ἐκθέτην τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

620) Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀπὸ δέκα ὅρους ἀποτελουμένης γεωμετρ. προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτον ὅρον 10 καὶ τελευταῖον 100;

621) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμ. πρόοδος, τῆς ὁποίας τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων εἶναι 40, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἑπομένων εἶναι 3240.

622) Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμ. πρόοδον, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι νὰ ἔχωσι ἄθροισμα 28 καὶ οἱ δύο τελευταῖοι 175.

§ 198) ***Περὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.***

Ἐκ τοῦ τύπου (§ 8) ἤτοι $\Sigma = \frac{\alpha\lambda^{\nu} - \alpha}{\lambda - 1}$ ἔχομεν

$$\Sigma = \frac{\alpha\lambda^{\nu} - \alpha}{\lambda - 1} = \frac{\alpha - \alpha\lambda^{\nu}}{1 - \lambda} = \frac{\alpha}{1-\lambda} - \frac{\alpha\lambda^{\nu}}{1-\lambda} = \frac{\alpha}{1-\lambda}.$$

φ᾽ ὅσον $\lambda < 1$ καὶ $\nu = \infty$. ἤτοι $\boxed{\Sigma = \frac{\alpha}{1-\lambda}}$ (9)

Ἐκ τοῦ τύπου (9) συνάγομεν : ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμέτρ. προόδου ἰσοῦται μὲ κλάσμα, τό ὁποῖον φέρει ἀριθμητὴν μὲν τὸν πρῶτον ὅρον παρανομαστὴν δὲ τὴν διαφοράν, ἂν ἀπὸ τοῦ 1 ἀφαιρέσωμεν τὸν λόγον.***

Ἐφαμοργή. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς γεωμετρ. προόδου $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου (9) ἤτοι $\Sigma = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ λαμβάνομεν

$$\Sigma = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Ἀσκήσεις. 623) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν κάτωθι φθινουσῶν γεωμ. προόδων.

α΄.) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ β΄,) $8, 4, 2, \ldots$ γ΄.) $\frac{37}{100}, \frac{37}{100^2}, \frac{37}{100^3}, \ldots$

624) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθρ. $\frac{3}{10} + \frac{56}{1000} + \frac{56}{100000} + \frac{56}{10000000} + \ldots$

625) Ποῖος εἶναι ὁ λόγος γεωμετρικῆς προόδου ἐκ 32 ὅρων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι ὁ 5 καὶ τελευταῖος ὁ 80;

626) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισαα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$

627 Νὰ εὑρεθῶσι αἱ τέσσαρες γωνίαι τετραπλεύρου, ὅταν

γνωρίζομεν ὅτι αὗται ἀποτελοῦσι γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὅτι ἡ τετάρτη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐνεαπλασία τῆς δευτέρας.

628) Εἷς διέθεσεν τὴν περιουσίαν του εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Εἰς τὸν πρῶτον ἔδωκε τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς, εἰς τὸν δεύτερον τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς, εἰς τὸν τρίτον τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς. Δὲν ἐσυλλογίσθη ὅμως ὅτι τὰ τρία αὐτὰ μερίδια δὲν ἀποτελοῦσι ὅλην τὴν περιουσίαν, ἀλλὰ τὰ $\frac{7}{8}$ αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ γίνῃ ἡ διανομή, οὕτως ὥστε κατὰ τὸ δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθῇ ἡ θέλησίς του.

629) Τὸ ἄθροισμα ὅρων ἀρτίας τάξεως γεωμετρικῆς προόδου ἀποτελουμένης ἐκ τεσσάρων ὅρων εἶναι α, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τῆς περιττῆς τάξεως β, ποία εἶναι ἡ πρόοδος;

630) Νὰ εὑρεθῶσι οἱ τέσσαρες ὅροι γεωμετρικῆς προόδου τῆς ὁποίας ὁ δεύτερος ὅρος ὑπερβαίνει τὸν πρῶτον κατὰ 4, ὁ δὲ τέταρτος ὅρος ὑπερβαίνει τὸν τρίτον κατὰ 36, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων εἶναι 3280.

(Πᾶν δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἄθροισμα ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου π.χ. 0,353535...=

$$=\frac{35}{100}+\frac{35}{10000}+\frac{35}{1000000}+$$

καὶ οἱ προσθετέοι οὗτοι εἶναι ὅροι φθηνούσης γεωμ. προόδου.

ἄρα $\frac{35}{100}+\frac{35}{10000}+\ldots\ldots=\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}=0{,}353535\ldots$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

§ 199 Εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha = 10^{\nu}$, καλοῦμεν τὸν ν, λογάριθμον τοῦ α, ὡς πρὸς βάσιν 10. Ἤτοι:

Λογάριθμον δοθέντος ἀριθμοῦ μὲ βάσιν 10, καλοῦμεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10 πρὸς τὴν ὁποίαν ἰσοῦται ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς π. χ. τοῦ 100 λογάριθμος εἶναι ὁ 2, ἐπειδὴ $100 = 10^2$, ὁμοίως τοῦ 1000 λογάριθμος εἶναι ὁ 3, ἐπειδὴ $1000 = 10^3$ κ. ο. κ.

Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἤτοι:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$10^{0} = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$10^{1} = 10$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$10^{2} = 100$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$10^{3} = 1000$$ κ.λ.π. **εἶναι πάντοτε**

θετικαὶ ἔπεται ὅτι μόνον θετικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν λογάριθμοι (ἀρνητικῶν δὲν ὑπάρχουν, ἐπειδὴ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ οὐδεμία δύναμις τοῦ 10, εἶναι ἀρνητική).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι:

λογ. 0,001 = —3
⋮ ⋮
» 0,01 = —2
⋮ ⋮
» 0,01 = —1
⋮ ⋮
» 1 = 0
⋮ ⋮
» 10 = 1
⋮ ⋮
» 100 = 2
⋮ ⋮
» 1000 = 3 κ.ο.κ. Ἤτοι:

1) Πᾶς μὲν ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος ἔχει λογάριθμον ἀρνητικὸν ἀριθμόν, πᾶς δὲ μεγαλύτερος τῆς μονάδος ἔχει λογάριθμον θετικὸν ἀριθμόν.

2) Οἱ λογάριθμοι δύο ἀριθμῶν ἀντιστρόφων εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοὶ π. χ. λογ. $10=1$ καὶ λογ. $\frac{1}{10}=-1$.

3) Αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἐλαττωμένου, ἀντιστοίχως αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται ὁ λογάριθμος ἀναλογικῶς καὶ ἀντιστρόφως.

4) Ἕκαστος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἕκαστον λογάριθμον ἀντιστοιχεῖ εἷς θετικὸς ἀριθμός.

5) Οἱ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ 10 περιεχόμενοι ἀριθμοὶ ἔχουσι λογάριθμον ἀριθμὸν δεκαδικόν, μὲ ἀκέραιον μέρος τὸν λογάριθμον τῆς μικροτέρας δυνάμεως τοῦ 10, π.χ. ὁ λογ. τοῦ 0,08, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ 0,01 καὶ 0,001, εἶναι —2,... Ὁμοίως ὁ λογ 75 εἶναι 1,.... Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου καλεῖται ***χαρακτηριστικόν***.

§ 200) ***Εὕρεσις τοῦ χαρακτηριστικοῦ λογαρίθμου τινός.***

Ἐκ τῆς προηγουμένης παραγράφου 199 συνάγομεν ὅτι:

1ον) ***Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἢ ἴσου μὲ τὴν μονάδα εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἂν ἐλαττώσωμεν κατὰ μονάδα τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκεραίων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ***, καὶ

2ον) ***Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ μηδενικοῦ τοῦ ἀκεραίου μέρους.***

π. χ. Τὸ	χαρακτηριστικὸν	τοῦ	λογαρίθμου	τοῦ	ἀριθ.	15	εἶναι	1
»	»	»	»	»	»	974	»	2
»	»	»	»	»	»	0,12	»	—1
»	»	»	»	»	»	0,8	»	—1
»	»	»	»	»	»	7225,6	»	3
»	»	»	»	»	»	0,002	»	—3

κ. ο. κ.

Σημ. Τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑρίσκεται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν καλουμένων λογαριθμικῶν πινάκων, ὅπως εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ μάθωμεν

§ 201) ***Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.***

Α΄.) ***Ὁ λογάριθμὸς γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων.***

π. χ. λογ. (α.β.γ.)=λογ. α+λογ. β+λογ. γ

Ἀπόδειξις.

Ἔστωσαν $\left.\begin{array}{l} \text{λογ. } \alpha=\chi \\ \text{λογ. } \beta=\psi \\ \text{λογ. } \gamma=\omega \end{array}\right|$ (1) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=10^{\chi} \\ \beta=10^{\psi} \\ \gamma=10^{\Omega} \end{array}\right| \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας τῆς (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν: $\alpha.\beta.\gamma.=10^{\chi+\psi+\Omega}$ (3).

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει: λογ. (α.β.γ)=χ+ψ+ω (4)

Εἰς τὴν (4) ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὰ χ,ψ,ω, διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν τῆς σχέσεως (1), λαμβάνομεν λογ. (α.β.γ)=λογ. α+λογ.β+γολ.γ.

Β΄.) ***Ὁ λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρεταίου.***

$$\text{π. χ. λογ.} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \text{λογ. } \alpha - \text{λογ. } \beta.$$

Ἀπόδειξις.

ἔστω $\left.\begin{array}{l}\text{λογ. } \alpha = \chi \\ \text{λογ. } \beta = \psi\end{array}\right\}$ (1) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τῆς (1) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως. $\left.\begin{array}{l}\alpha = 10^{\chi} \\ \beta = 10^{\psi}\end{array}\right\}$ (2)

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας τῆς (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 10^{\chi-\psi} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει: $\text{λογ.} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \chi - \psi \qquad (4).$

Εἰς τὴν (4) ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὰ χ καὶ ψ διὰ τῶν ἴσων τῆς (1) λαμβάνομεν $\text{λογ.} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \text{λογ. } \alpha - \text{λογ. } \beta.$

Γ΄.) ***Ὁ λογάριθμος δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως.*** ἤτοι

$$\alpha^{\nu} = \nu.\text{λογ.}\alpha.$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω λογ. $\alpha = \chi$ (1) (2) ὁπότε $\alpha = 10^{\chi}$

Ὅταν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν λαμβάνομεν $\alpha^{\nu} = 10^{\nu\chi}$ (3)

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν λογ. $\alpha^{\nu} = \nu.\chi$ (4) ἀντικαθιστῶντες τὸ χ εἰς τὴν (4) διὰ τοῦ ἴσου τῆς (1) λαμβάνομεν

$$\text{λογ. } \alpha^{\nu} = \nu. \text{ λογ. } \alpha,$$

Δ΄.) ***Ὁ λογάριθμος ῥίζης ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ λογαρίθμου τῆς ὑπορρίζου ποσότητος διὰ τοῦ δείκτου.*** ἤτοι

$$\text{λογ. } \sqrt[\nu]{\alpha} = \frac{\text{λγ}\alpha}{\nu}$$

Ἀπόδειξις. $\text{λογ } \sqrt[\nu]{\alpha} = \text{λογ. } \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}.\text{ λογ.}\alpha = \frac{\text{λογ.}\alpha}{\nu},$

Σημείωσις. Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων, ἀνάγομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς ἄθροισμα, τὸ πηλίκον εἰς διαφοράν, τὴν δύναμιν εἰς γινόμενον καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς πηλίκον.

Ἀσκήσεις. 631) Νὰ εὑρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τῶν κάτωθι ἀριθμῶν: α) 45, β) 0,75, γ) 0,00750, δ) 456,72 ε) 40,42, στ) 35672, ζ) 0,001010,

632) Νὰ ἀναπτυχθῶσι οἱ κάτωθι λογάριθμοι: γογ. (7.6.5), λογ. (5.α.γ), λογ. $3\alpha^5$, λογ. $5\alpha^2\beta\gamma$, λογ $5\sqrt[5]{75}$, λογ. $2^3\sqrt{7}$,

λογ. $\dfrac{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{7}}{\sqrt[3]{2}}$,

633) Νὰ ἀποδειχθῇ

α) λογ.120=λογ.6+λογ.4+λογ.5,

β΄.) λογ.$\dfrac{8}{15}$= λογ. $\dfrac{2}{3}$— λογ. $\dfrac{5}{4}$

γ΄.) λογ. 10+2 λογ. +λογ. 5=2,

δ΄.) λογ. $\left(\dfrac{8}{10}\right)$— λογ. $\left(\dfrac{4}{5}\right)$= 0

ε΄.) λογ. 10^3=3,

στ΄.) λογ. $\sqrt[\rho]{\kappa^{\pi}} = \dfrac{\pi.\lambda\gamma\ \kappa}{\varrho.}$

§ 202) ***Τροπὴ λογαρίθμου ὅλως ἀρνητικοῦ εἰς ἡμιαρνητικόν.***

Ἔστω ὅτι ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ τινὸς μικροτέρου τῆς 1, εἶναι —4,45637 (τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τὸ λαμβάνομεν μὲ 5 δέκαδικὰ ψηφία, ἐπειδὴ οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες τοὺς ὁποίους θὰ χρησιμοποιήσωμεν φέρουσι πέντε δεκαδικὰ ψηφία ἤτοι εἶναι μὲ προσέγγισιν 0,00001). Οὗτος δύναται νὰ γραφῇ

$-4{,}45637=(-4)+(-0{,}45637)=(-4)+(-0{,}45637)+$

$+(-1)+(+1)=(-5)+(+0{,}54363)=\overline{5}{,}54363.$ ἤτοι

$-4{,}45637=\overline{5}{,}54363$ (1), διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ἀρνητικὸν τὸ δὲ δεκαδικὸν εἶναι θετικὸν γράφομεν τὰ σημεῖα ἄνω τῶν μερῶν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Συγκρίνοντες τὰ δύο μέρη τῆς σχέσως (1) συνάγομεν:

Ἵνα τρέψωμεν ἕνα ἀρνητικὸν λογάριθμον εἰς ἡμιαρνητικόν, αὐξάνομεν τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ κατὰ μονάδα καὶ ἄνωθεν αὐτοῦ γράφομεν τὸ σημεῖον—, τὰ δὲ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀφαιροῦμεν πάντα ἀπὸ τὸν 9, πλὴν τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ σημαντικοῦ ψηφίου τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10. π. χ.

$-2,62735=\overline{3},37265$ $\qquad$ $-0,57620=\overline{1},42380$

§ 203) ***Ἰδιότης τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου.*** ***Ὅταν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 10, 100, 1000 κ. λ. π. ἢ διαιρεθῇ διὰ 10, 100, 1000 κ. λ. π. τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου μεταβάλλεται*** (αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ 1, 2, 3 κλπ. μονάδας) ***τὸ δὲ δεκαδικὸν παραμένει τὸ ἴδιον.***

π. χ. Ὅταν λογ. α=2,47625 θὰ εἶναι καὶ λογ. (α.10)= λογ. α+λογ. 10=2,47625+1=3,47625.

$$\text{καὶ λογ.}\left(\frac{\alpha}{10}\right)=\text{λογ.}\,\alpha-\text{λογ.}10=2,47625-1=1,47625.$$

Ὁμοίως ἐὰν λογ. α=5,67251

λογ. (α.100)=λογ. α+λογ. 100=5,67251+2=7,67251 καὶ

$$\text{λογ.}\left(\frac{\alpha}{100}\right)=\text{λογ.}\,\alpha-\text{λογ.}\,100=5,67251-2=3,67251.$$

§ 204) ***Πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων.***

Α′) ***Πρόσθεσις.*** Ἡ πρόσθεσις γίνεται ὅπως καὶ τῶν συνήθη δεκαδικῶν ἀριθμῶν (προσοχὴ χρειάζεται εἰς τὸ ὅτι τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν μέρος εἶναι ἄλλοτε θετικὸν καὶ ἄλλοτε ἀρνητικόν, ἐνῷ τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι πάντοτε θετικὸν καὶ ἑπομένως ἂν περιέχει ἀκεραίας μονάδας αὗται εἶναι θετικαὶ καὶ ὡς τοιαῦται θὰ προστίθενται εἰ τὸ χαρακτηριστικὸν μέρος). π. χ.

$\overline{3},56781+0,37642+1,37651.$

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} \overline{3},56781 \\ 0,37642 \\ 1,37651 \\ \hline \overline{1},32074 \end{array}$$

Β΄) ***Ἀφαίρεσις.*** Καὶ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ὅπως καὶ τῶν συνήθη δεκαδικῶν (μὲ τὴν αὐτὴν ὡς ἀνωτέρω παρατήρησιν) π. χ. ἔστωσαν αἱ ἀφαιρέσεις.

Μειωτέος	$\overline{1}, 35763,$	$4,35672,$	$\overline{1}\ 35602$
Ἀφαιρετέος	$\overline{2}, 56327,$	$\overline{3}, 13562,$	$4,62574$
Διαφορὰ	$0,79436,$	$7,22110,$	$\overline{6}, 73028$

Γ΄) ***Πολλαπλασιασμός.*** Πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν καὶ κατόπιν ἀθροίζομεν τὰ μερικὰ γινόμενα. π. χ. $\overline{2}, 34564 \, . \, 3$

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r} \overline{2}, 34564 \\ 3 \\ \hline \end{array} \quad ἢ \quad \begin{array}{r} \overline{2} + 0,34564 \\ 3 \\ \hline \overline{6} + 1,03692 = \overline{5},\ 03692 \end{array}$$

β) ***Παράδειγμα***

$$\begin{array}{r} \overline{2}, 34564 \\ 12 \end{array} \quad ἢ \quad \begin{array}{r} \overline{2} + 0,34564 \\ 12 \\ \hline 69128 \\ 34564 \\ \hline \overline{24} + 4,14768 = \overline{20},14768 \end{array}$$

Δ΄) ***Διαίρεσις.*** Ἂν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἡμιαρνητικοῦ λογαρίθμου διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου ἡ διαίρεσις γίνεται ὡς νὰ εἶναι ἄθροισμα ἀριθμοῦ δι᾿ ἀριθμοῦ ἂν ὅμως τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μετασχηματίζομεν τὸν ἡμιαρνητικὸν λογάριθμον, ὥστε τὸ χαρακτηριστικὸν νὰ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου. π. χ.

α) ***Παράδειγμα Διάταξις τῆς πράξεως***

$\overline{2},35678:2$ ἢ $\overline{2}+0,35678 \,|\, 2$

$\overline{1},+0,17839=\overline{1},17839$

Δοκιμὴ 2

$\overline{2},35678$

β) ***Παράδειγμα***

$\overline{2},35678:5$ ἢ $\overline{2},+0,35678$ ἢ

$\overline{5},+3,35678 \,|\, 5$

35

6

17

28

3

$\overline{1},+0,67135=\overline{1},67135$

Δοκιμὴ 5

$\overline{2},35675$

Ὑπόλοιπον 3

$\overline{2},35678$

Ἀσκήσεις. 634) Νὰ τραπῶσι οἱ κάτωθι ἀρνητικοὶ λογάριθμοι εἰς ἡμιαρνητικοί —2,45676, —0,35672, —1,30570, —2,60700.

635) Νὰ ἐκτελεσθῶσι αἱ ἑπόμεναι πράξεις.

α) $\overline{1},67562+\overline{2},35672+\overline{5},07524+5,62450$

β) $\overline{2},91705-\overline{3},35675_*$ $\overline{1},54187-\overline{3},52675$

γ) $\overline{1},62594 \cdot 2_*$ $\overline{2},91506 \cdot 3_*$ $\overline{1},62594 \cdot 15$

δ) $\overline{3},65268:3_*$ $\overline{3},65268:2_*$ $\overline{3},75913:5$

ε) $\overline{5},62506:(-3)$.

636) Δοθέντος ὅτι λογ. 84=1,92428 νὰ εὑρεθῶσι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν 8400_* $8,4_*$ $0,84_*$ 84000.

637) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα

λογ 6,7 — λογ $0,67_*$ λογ 0,75 — λογ $7,5_*$ λογ 10,6 — λογ 1,06.

§ 205) ***Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.***

Οἱ ἐν χρήσει πίνακες μὲ προσέγγισιν 0,00001 περιέχουσι τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 - 10000. Ἡ πρώτη σελὶς αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸν πίνακα I καὶ περιέχει τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, ἀπὸ 1 - 99 καὶ ἀντιστοίχως τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων αὐτῶν. Οἱ ἀριθοὶ 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 δὲν ἀναγράφονται ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν ἔχουσι τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Αἱ ἑπόμεναι σελίδες ἀποτελοῦν τὸν πίνακα II, ὁ ὁποῖος περιέχει τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 100 - 10000 καὶ ἀντιστοίχως αὐτῶν τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων αὐτῶν. Ἡ πρώτη στήλη αὐτῶν περιέχει τὰς δεκάδας τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν, αἱ λοιπαὶ στῆλαι φέρουσι ὡς ἐπικεφαλίδας τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦσι τὰς μονάδας τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν. Τὰ δεκαδικὰ ψηφία τῶν λογαρίθμων τῶν τετραψηφίων αὐτῶν ἀριθμῶν εὑρίσκονται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν γραμμῶν ὀριζοντίας καὶ καθέτου, τῶν φερομένων ἐκ τῶν δεκάδων ὀριζοντίως καὶ μονάδων καθέτως.

Ὁ ἀστερῖσκος, ὅστις ἀπαντᾶται σημαίνει, ὅτι ὡς δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου δέον νὰ λαμβάνωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα ψηφία τῆς ἑπομένης στήλης

π. χ. λογ. 1908 = 3,28058

Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως, ἕνα γινόμενον πολυψηφίων ἀριθμῶν, ἓν πηλίκον ὁμοίως πολυψηφίων, δύναμιν μὲ μεγάλον ἐκθέτην καὶ ρίζαν ἀριθμοῦ, ὅπως ἐπίσης καὶ συνθέτους παραστάσεις.

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν τοιούτων παραστάσεων εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Πρῶτον εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τῆς δεδομένης παραστάσεως καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς παραστάσεως αὐτῆς.

Ἄρα τίθενται πρὸ ἡμῶν δύο προβλήματα 1) πῶς νὰ εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς γνωστοῦ ἀριθμοῦ μαὶ 2) πῶς νὰ εὑρίσκομεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν γνωστοῦ λογαρίθμου.

§ 206) ***1ον πρόβλημα***

Τὸ πρῶτον πρόβλημα δυνάμεθα νὰ ἀποσυνθέσωμεν εἰς τὰ ἑξῆς δύο: α΄.) Ὅταν ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος καὶ ἔχει **μέχρι** καὶ τέσσαρα ψηφία ἤτοι εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν πινάκων. **β΄.)** Ὅταν ὁ γνωστὸς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι μὲ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων ἤτοι δὲν περιέχεται ἐντὸς τῶν πινάκων.

(Σημ. Ὅταν ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς τὸν λαμβάνομεν ἄνευ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἤτοι σὰν ἀκέραιον). π. χ.

α΄.) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τῶν κάτωθι ἀριθμῶν. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κατωτέρω παρατειθεμένου ἀποσπάσματος ἐκ τῶν πινάκων εἶναι·

λογ 1984 = 3,29754

λογ. 191 = 2,28103, λογ. 0,1937 = $\overline{1}$, 28713

» 19,1 = 1,28103, » 0,01909 = $\overline{2}$, 28081

» 195600 = 5,29137, » 0,0019 = $\overline{3}$, 27875

Ἀπόσπασμα ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
190	27875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
1	28103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
2	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
3	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
4	783	803	825	847	870	892	914	937	959	981
5	29006	026	048	070	092	115	137	157	181	203
6	228	248	270	292	314	336	358	380	403	425
7	449	469	491	513	535	557	579	601	623	645
8	668	688	710	732	754	776	798	820	842	863
9	085	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081

β΄.) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 48256.

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι 4. Ἤδη ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 48256 διὰ τοῦ 10 τὸ δεκοδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου μένει ἀμετάβλητον, ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 4825,6.

Ἐπειδὴ εἶναι 4025 < 4825,6 < 4826 ἕπεται ὅτι

λογ 4825 < λογ 4825,6 < λογ 4826.

Ὁ λογ 4825 = 3,68350

» » 4826 = 3,68359 ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων εἶναι 9 μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως.

Παραδεχόμενοι ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν ἔχομεν:

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς 4825 αὐξηθῇ κατὰ 1 (εἰς 4826) ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνει κατὰ 9 μονάδας τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως, ὅταν ὁ ἀριθμὸς 4825 αὐξηθῇ κατὰ 0,6 (εἰς 4825,6) ὁ λογάριθμος αὐξάνει ἀναλογικῶς ἤτοι 9.0,6=5,4 ἄρα δέον νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 3,68350 τὸν 0,000054 ἤτοι νὰ γίνῃ ὁ λογάριθμος 3,68355. (ὅταν ἡ ἕκτη δεκαδ. τάξις εἶναι μικρότερος τοῦ 5 ἀριθμός, τὸν παραλείπομεν, ἐνῷ ὅταν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5 ἢ καὶ 5 τότε τὸν ἀριθμὸν τῆς 5ης δεκαδικῆς τάξεως τὸν αὐξάνομεν κατὰ μονάδα).

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως

$$\left.\begin{array}{l}\text{λογ. } 4825=3{,}68350\\ \text{» } 4826=3{,}68359\end{array}\right\}\text{ διαφορὰ λογ. } 0{,}00009$$

Ὥστε εἰς διάφ. ἀριθ. 1 ἔχομεν διαφ. λογ. 0,00009

» » » 0,6 » » » χ;

χ=0,00009 . 0,6=0,000054 καὶ λαμβάνομεν 0,00005

Ἄρα λογ 4825,6=3,68350+0,00005=3,68355

§ 207) ***2ον Πρόβλημα.***

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο τὸ διακρίνομεν εἰς δύο περιπτώσεις. 1ον) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας, ὁπότε ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Πρῶτον θὰ εὕρωμεν τὰ τρία πρῶτα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἰς τὴν στήλην N, καὶ κατόπιν τὸ τέταρτον θὰ τὸ εὕρωμεν ὑπὸ ἢ ὑπὲρ τὴν στήλην τὴν περιέχουσαν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ λογαρίθμου π. χ.

Εἰς τοὺς λογαρίθμους	2,70286	$\overline{1},75082$	0,69223
ἀντιστοιχουν οἱ ἀριθμοὶ	504,5	0,5634	4,923

2ον) Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας ὅτε ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: λαμβάνομεν τὸ μᾶλλον προσεγγίζον κατ' ἔλλειψιν, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς καὶ προχωροῦμεν ὡς ἐπὶ παραδείγματι..

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι 2,74300.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος 74300 δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας, ἀλλὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν μερῶν τοῦ λογαρίθμου 74296 καὶ 74304 ἔναντι τῶν ὁποίων ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 5533 καὶ 5534. Δεχόμενοι ἐπίσης ὅτι οἱ ἀριθμοὶ καὶ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν συγκρίνονται ἀναλόγως ἔχομεν

ἤτοι $\chi = \dfrac{0,00004}{0,00008} = 0,5,$

ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς εἶναι 55335 καὶ ἐφ' ὅσον χαρακτηριστικὸν ὁ λογάαιθμος ἔχει 2, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος εἶναι ὁ 553,35 ἤτοι

ὅταν λογ. $\alpha = 2,74300$

ὁ $\alpha = 553,35.$

§208) ***Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων εἰς τοὺς ὑπολογισμούς·***

Α'.) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις

$\dfrac{8,563}{35}$ Ἐὰν καλέσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ χ ἔχομεν $\chi = \dfrac{8,563}{35}$ καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης λαμβάνομεν:

$$\text{λογ}.\ \chi = \text{λογ}.\left(\frac{8,563}{35}\right) = \text{λογ}\ 8,563 - \text{λογ}\ 35 = 0,93263 - 1,54407$$

$$= \overline{1},38856 \quad \text{ἤτοι} \quad \text{λογ}\ \chi = \overline{1},38856$$

$$\text{καὶ}\ \ \chi = 0,244658....$$

Ἄρα $\dfrac{8,563}{35} = 0,244658.....$

Β'.) Νὰ ὑπολογισθῇ λογαριθμικῶς ἡ παράστασις $\chi = \dfrac{\sqrt[5]{35}}{2^9}$

Εἰς αὔξ, ἀριθμ. 1 ἔχομεν αὔξησιν λογαριθ. 0,00008

χ; » » ὅταν « » » 0,00004

Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$λογ\ χ = λογ\left(\frac{\sqrt[5]{35}}{2^9}\right) = λογ\ \sqrt[5]{35} - λογ\ 2^9 = \frac{λογ\ 35}{5} - 9.\ λογ.\ 2$$

$$= \frac{1{,}54407}{5} - 9.\,0{,}30103 = 0{,}30882 - 2{,}70927 = \overline{3},\ 59955$$

ἤτοι λογ. $χ = \overline{3},\ 59955$ καὶ $χ = 0{,}003977$.

Ἄρα $\frac{\sqrt[5]{35}}{2^9} = 0{,}003977$

Γ΄.) Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις.

$\sqrt[5]{\frac{35}{2^9}} = χ$. Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἔχομεν:

$$λογ.\ χ = λογ.\ \sqrt[5]{\frac{35}{2^9}} = \frac{λογ.\ \frac{35}{2^9}}{5} = \frac{λογ\ 35 - 9.λογ.2}{5} =$$

$$= \frac{1{,}54407 - 2{,}70927}{5} = \frac{\overline{2},\ 83480}{5} = \overline{1},\ 76696$$

ἤτοι λογ. $χ = \overline{1},\ 76696$

καὶ $χ = 0{,}5847\ldots$ Ἄρα $\sqrt[5]{\frac{35}{2^9}} = 0{,}5847\ldots$

Ἀσκήσεις. 638) Διὰ τῶν λογαρίθμων νὰ εὑρεθῶσιν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι παραστάσεων.

α΄.) $23675 . 476905 . 527$, β΄.) 675.2^{25}, γ΄.) $\sqrt[3]{29^{15}}$

δ΄.) $\sqrt[19]{6795.35^{15}}$, ε΄.) $\frac{35\ \sqrt[6]{25}}{69}$, στ΄.) $\frac{6922 . 36769 . 37{,}5^{22}}{6{,}973^5}$

ζ'.) $\sqrt[3]{7}$, η'.) $\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{17}}$, ϑ'.) $9^{22}\cdot 7^{15}$

639) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 84ος ὅρος τῆς γεωμ. προόδου 4, 20, 100,.....

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 209) ***Πᾶσα ἐξίσωσις ἡ ὁποῖα περιέχει τὸν λογάριθμον τοῦ ἀγνώστου ἢ τὸν λογάριθμον τυχούσης συναρτήσεως αὐτοῦ καλεῖται λογαριθμικὴ ἐξίσωσις μὲ ἕναν ἄγνωστον*** π.χ. ἡ ἐξίσωσις λογχ + λυγ2 = λογ25 εἶναι λογαριθμική.

Διὰ νὰ λύσωμεν λογαριθμικὴν τινὰ ἐξίσωσιν, ἐκ τῶν ἀνωτέρω, προσπαθῶμεν νὰ δόσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν. λογ χ = λογ.α, ὁπότε ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ

Παράδειγμα 1ον). Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

$$\text{λογ}\,\chi + \text{λογ}2 = \text{λογ}25$$
ἢ
$$\text{λογ}2\chi = \text{λογ}25$$
καὶ
$$2\chi = 25, \quad \text{ἔνθα} \quad \boxed{\chi = 12{,}5}$$

Σημείωσις.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λύεται, τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων οὕτω:

$$\text{λογ}\,\chi + \text{λογ}2 = \text{λογ}25$$
ἢ
$$\text{λογ}\,\chi + 0{,}30103 = 1{,}39794$$
ἢ
$$\text{γογ}\,\chi = 1{,}39794 - 0{,}30103 = 1{,}09691 \text{ καὶ } \boxed{\chi = 12{,}5}$$

Παράδειγμα. 2ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$2.\ \text{λογ}\,\frac{\chi}{2} - \text{λογ}\,\chi = \text{λογ}\,5 - \text{λογ}.\,4$$

ἢ
$$\text{λογ}\left(\frac{\chi}{2}\right)^2 + \text{λοχ}\,4 = \text{λογ}\,5 + \text{λογ}\,\chi$$

ἢ
$$\text{λογ}\left(\frac{\chi}{2}\right)^2\!.\,4 = \text{λογ}\,5\chi$$

$$\text{καὶ } 4\left(\frac{\chi}{2}\right)^2 = 5\chi \text{ ἢ } \chi^2 = 5\chi \text{ ἢ } \boxed{\chi = 5}$$

Σημείωσις.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λύεται, τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων οὕτω:

$$2 \text{ λογ } \frac{\chi}{2} - \text{λογ } \chi = \text{λογ } 5 - \text{λογ } 4$$

ἢ $2(\text{λογ } \chi - \text{λογ. } 2) - \text{λογ } \chi = \text{λογ } 5 - \text{λογ } 4$

ἢ $2(\text{λογ } \chi - 0{,}30103) - \text{λογ } \chi = 0{,}69897 - 0{,}60206.$

ἢ $2 \text{ λογ } \chi - 0{,}60206 - \text{λογ } \chi = 0{,}09691$

ἢ $\text{λογ } \chi = 0{,}09691 + 0{,}60206$

ἢ $\text{λογ } \chi = 0{,}69897$ ὅτε $\boxed{\chi = 5}$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\text{λογ } \chi = 2.$

Ἐπειδὴ $\text{λογ } 100 = 2$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται

$$\text{λογ } \chi = \text{λογ } 100 \text{ ὅτε } \boxed{\chi = 100}$$

Ἀσκήσεις 640) Νὰ λυθῶσι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α′.) $\text{λογ }(7\chi - 14) = 2$, β′.) $\text{λογ } 1838 - \text{λογ }(31^{\chi} - 42) = \text{λογ } 2$,

ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 210) ***Πᾶσα ἐξίσωσις ἡ ὁποῖα περιέχει τουλάχιστον μίαν δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν ἄγνωστον ἢ συνάρτησιν τινὰ τοῦ ἀγνώστου καλεῖται ἐκθετικὴ ἐξίσωσις*** π. χ.

αἱ ἐξισώσεις $3^{\chi} = 27$, $5^{5\chi - 3} = 25$ εἶναι ἐκθετικαί.

Αἱ συνηθέστεραι μορφαὶ τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

Α′. Μορφή. $\alpha^{\chi} = 1$ ἢ $\alpha^{\sigma(\chi)} = 1$, ἔνθα σ(χ) ἀλγεβρική τις παράστασις.

Λύσις. Ἡ $\alpha^{\chi}=1$ γράφεται $\alpha^{\chi}=\alpha^{0}$ (ἐπειδὴ $\alpha^{0}=1$) ὅθεν $\boxed{\chi=0}$

ἢ $\alpha^{\sigma(\chi)}=1$ » $\alpha^{\sigma(\chi)}=\alpha^{0}$ (» $\alpha^{0}=1$) » $\boxed{\sigma(\chi)=0}$

Ἐφαρμογαί.

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{\chi}=1$

Λύσις $5^{\chi}=1$ ἢ $5^{\chi}=5^{0}$ καὶ $\boxed{\chi=0}$

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{(3-\chi)(2-\chi)}=1$

Λύσις. $5^{(3-\chi)(2-\chi)}=1$ ἢ $5^{\chi^2-5\chi+6}=5^{0}$

καὶ $\chi^2-5\chi+6=0$ καὶ $\boxed{\chi=\frac{5\pm1}{2}=<^{3}_{2}}$

Βα Μορφή. $\alpha^{\chi}=\beta$ (ἔνθα α καὶ β, γνωστοὶ ἀριθμοί)

Λύσις $\alpha^{\chi}=\beta$ ἢ $\chi.\,\text{λογ}\,\alpha=\text{λογ}\,\beta$ καὶ $\boxed{\chi=\frac{\text{λογ}\,\beta}{\text{λογ}\,\alpha}}$

Ἐφαρμογαί. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{2\chi}=15625$

Λύσις.

$5^{2\chi}=15625$ ἢ $2\chi.\,\text{λογ}\,5=\text{λογ}\,15625$ ἢ $2\chi.\,0{,}69897=4{,}19382$ ἢ

$\chi\,.\,1{,}39794=4{,}19382$ καὶ $\chi=\frac{4{,}19382}{1{,}39794}=3$ ἢ $\boxed{\chi=3}$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $15625=5^{6}$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λύεται ὡς ἑξῆς:

$5^{2\chi}=15625$ ἢ $5^{2\chi}=5^{6}$, ἔνθα $2\chi=6$ καὶ $\boxed{\chi=3}$

Γ΄. Μορφή. $\alpha^{\sigma(\chi)}=\beta$, ἔνθα $\sigma(\chi)$ συνάρτησις τοῦ ἀγνώστου χ καὶ α καὶ β δοθέντες ἀριθμοί.

Λύσις. $\alpha^{\sigma(\chi)}=\beta$ ἢ $\sigma(\chi)\,\text{λογ}\,\alpha=\text{λογ}\,\beta$ ἢ $\boxed{\sigma(\chi)=\frac{\text{λογ}\,\beta}{\text{λογ}\,\alpha}}$

Ἐφαρμογαί. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{2\chi-1}=125$

Λύσις. $5^{2\chi-1}=125$ ἢ $(2\chi-1).\,\lambda o\gamma\,5=\lambda o\gamma\,125$

$$\text{ἢ}\quad 2\chi-1=\frac{\lambda o\gamma\,125}{\lambda o\gamma\,5}$$

$$\text{ἢ}\quad 2\chi-1=\frac{2{,}09691}{0{,}69897}=3\quad\text{ἢ}\quad 2\chi-1=3,\ \text{ὅτε}\ \boxed{\chi=2}$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $125=5^3$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λύεται ὡς ἑξῆς:

$$5^{2\chi-1}=125\quad\text{ἢ}\quad 5^{2\chi-1}=5^3\quad\text{ἢ}\quad 2\chi-1=3,\ \text{ὅτε}\ \boxed{\chi=2}$$

Ἀσκήσεις. 641) Νὰ λυθῶσι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις.

α′) $7^{\chi}=243$, $\quad 3^{5\chi-8}=9$, $\quad 31^{\chi}=961$, $\quad 4^{\chi}-18^{\chi}+8=0$

β′) $4^{\chi}-9.2^{\chi}+8=0$, $\quad \chi^{\chi^2-7\chi+12}=1$, $\quad 6^{\chi^4-18\chi^2+86}=7776$,

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

§ 211) ***Ἀνατοκισμὸς καλεῖται ἡ κεφαλοποίησις τοῦ τόκου τοκιζομένου κεφαλαίου, εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα.***

Τὸ κεφάλαιον λέγεται ἀνατοκιζόμενον καὶ ὁ τόκος, ὅστις προκύπτει καλεῖται ***σύνθετος.***

§ 212) ***Πρόβλημα γενικόν.— Εἰς ποῖον ποσὸν θὰ ἀνέλθῃ κεφάλαιον α, δρχ. μετὰ ν, ἴσα χρονικὰ διαστήματα ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον;***

Λύσις.

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς τὸ ἓν τῶν ἴσων χρονικῶν διαστημάτων καὶ ἔστω ὅτι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς τὸ διάστημα τοῦτο εἶναι τ, δραχμαί. Ὥστε αἱ α, δραχ. εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου χρονικοῦ διαστήματος θὰ δώσωσι τόκον α.τ δραχμάς, καὶ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α, δραχμῶν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου διαστήματος θὰ ἀνέλθῃ εἰς $\alpha + \alpha\tau = \alpha(1+\tau)$ δραχ. Τὸ κεφάλαιον τὸ ὁποῖον τοκίζεται διὰ τὸ δεύτερον χρονικὸν διάστημα εἶναι τὸ $\alpha(1+\tau)$ δρχ. καὶ ὡς εἶναι ἑπόμενον ὁ τόκος τούτου εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρονικοῦ διαστήματος εἶναι $\alpha.(1+\tau).\tau$ καὶ συνεπῶς τὸ κεφάλαιον μετὰ τῶν τόκων θὰ ἀνέλθῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου χρονικοῦ διαστήματος εἰς δραχ. $\alpha.(1+\tau)+\alpha.(1+\tau).\tau = \alpha.(1+\tau)(1+\tau) = \alpha(1+\tau)^2$, ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου χρονικοῦ διαστήματος τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον μετὰ τόκων νὰ ἀνέλθῃ εἰς $\alpha(1+\tau)^3$, εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου χρονικοῦ διαστήματος θὰ ἀνέλθῃ εἰς $\alpha(1+\tau)^4$ καὶ γενικῶς εἰς τὸ τέλος τοῦ ν/στοῦ χρονικοῦ νὰ ἀνέλθῃ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον εἰς $\alpha(1+\tau)^\nu$.

Ἐὰν καλέσωμεν διὰ Σ τὸ τελικὸν κεφάλαιον τῶν α δραχμῶν μετὰ τῶν τόκων ἐπ ἀνατοκισμῷ εἰς τὸ τέλος τῶν ἴσων χρονικῶν διαστημάτων λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\Sigma = \alpha(1+\tau)^\nu$ (1)

Τὴν ἐξίσωσιν (1) καλοῦμεν ***τύπον ἀνατοκισμοῦ*** καὶ ἐκφράζομεν διὰ τοῦ α, τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, διὰ τοῦ ν, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων χρονικῶν διαστημάτων, διὰ τοῦ τ, τὸν τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς τὸ ἕν τῶν καθορισθέντων ἴσων χρονικῶν διαστημάτων καὶ διὰ τοῦ Σ τὸ τελικὸν κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἴσων χρονικῶν διαστημάτων.

Ἐπειδὴ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) ἔχομεν τέσσαρα ἄγνωστα, ἕπεται ὅτι διακρίνομεν καὶ τεσσάρων εἰδῶν προβλήματα.

Πρόβλημα 1ον) ***Κεφάλαιον 10000 δρχ. τοκιζόμενον μὲ ἀνατοκισμὸν ἐτησίως πρὸς 9%₀ ἐπὶ 10 ἔτη εἰς τὶ ποσὸν θὰ ἀνέλθῃ;***

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου (1) λαμβάνομεν

$\Sigma = 10000.(1+0{,}09)^{10}$

ἢ $\Sigma = 10000 \,.\, 1{,}09^{10}$ ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν.

Λογ. Σ=Λογ. 10000+10 λογ. 1,09

ἢ λογ. Σ=4,00000+10 . 0,03743

ἢ λογ. Σ=4,00000+0,37430

ἢ λογ. Σ=4,37430

καὶ Σ=23675,55

Ἀπάντησις. Τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν 10.000 δρχ. θὰ ἀνέλθῃ εἰς δρχ. 23675,55.

Πρόβλημα 2ον) ***Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ δανείσῃ τις, ἐπ' ἀνατοκισμῷ ἐτησίως, ὥστε μετὰ 10 ἔτη πρὸς 9%₀ νὰ λάβῃ 23675,55 δραχμάς;***

Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu}$ ἔχομεν

$$23675{,}55 = \alpha \,.\, 1{,}09^{10}$$

ἢ $\alpha = \dfrac{23675{,}55}{1{,}09^{10}}$ ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

λογ α=λογ 23675,55—10 λογ 1,09

ἢ λογ α=4,37430—10. 0,03743

ἢ λογ α=4,37430—0,37430

ἢ λογ α=4,00000 καὶ α=10000.

Πρόβλημα 3ον) ***Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ ἐτησίως κεφάλαιον 10000 δραχμῶν πρὸς 9%₀, ὥστε νὰ γίνῃ 23675, 55;***

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu}$ λαμβάνομεν

$$23675{,}55 = 10000,\ 1{,}09^{\nu}$$

ἢ $1{,}09^{\nu} = \dfrac{23675{,}55}{10000}$ ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$\nu.\ \lambda o\gamma.\ 1{,}09 = \lambda o\gamma.\ 23675{,}55 - \lambda o\gamma.\ 10000$$

ἢ $\nu.\ \lambda o\gamma.\ 1{,}09 = 4{,}37430 - 4{,}00000$

ἢ $\nu.\ \lambda o\gamma.\ 1{,}09 = 0{,}37430$

ἢ $\nu.\ 0{,}03743 = 0{,}37430$

ἢ $\nu = \dfrac{0{,}37430}{0{,}03743} = 10$ καὶ $\nu = 10$ ἔτη

Πρόβλημα 4ον) ***Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῇ, ἐπ' ἀνατοκισμῷ, ἐτησίως κεφάλαιον 10000 δρχ. ὥστε μετὰ 10 ἔτη νὰ γίνῃ 23675,55 δρχ.***

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu}$ λαμβάνομεν

$$23675{,}55 = 10000\,.\,(1+\tau)^{10}$$

ἢ $(1+\tau)^{10} = \dfrac{23675{,}55}{10000}$ ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν.

$$10.\lambda o\gamma.(1+\tau) = \lambda o\gamma.\ 23675{,}55 - \lambda o\gamma.\ 10000$$

ἢ $10.\lambda o\gamma.(1+\tau) = 4{,}37430 - 4{,}00000$

ἢ $10.\lambda o\gamma.(1+\tau) = 0{,}37430$

ἢ $\lambda o\gamma.(1+\tau) = \dfrac{0{,}37430}{10}$

ἢ $\lambda o\gamma.(1+\tau) = 0{,}03743$

καὶ $1+\tau = 1{,}09$ ἢ $\tau = 0{,}09$

καὶ $100.\tau = 9$ ἤτοι πρὸς 9 %.

Σημείωσις. α'.) Ὅταν ὁ ἀνατοκισμός, γίνεται κατ' ἴσα διάφορα τοῦ ἔτους χρονικὰ διαστήματα, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ αὐτὸς τύπος προκύπτει. Τότε τ, εἶναι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς διὰ χρόνον ἴσον πρὸς τὸ ἕν τῶν ἴσων χρονικῶν διαστημάτων, καὶ ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἴσων χρονικῶν διαστημάτων.

β) Ὅταν ἡ διάρκεια τοῦ ἀνατοκισμοῦ εἶναι εἰς ν, ἔτη καὶ η, ἡμέρας. Ἐπειδὴ ὁ τύπος $\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu}$ δίδει διὰ τοῦ Σ, ὡς γνωστόν, τὴν ἀξίαν τοῦ κεφαλαίου α, δρχ. εἰς τὸ τέλος τῶν ν, ἐτῶν πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον, εἶναι ἀνάγκη ὅπως προσδιορίσωμεν καὶ τὴν ἀξίαν τὴν ὁποίαν θὰ λάβῃ τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)^{\nu}$ διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα τῶν (η) ἡμερῶν μὲ τὸ ἴδιον ἐπιτόκιον ἤτοι μᾶς χρειάζεται ὁ τόκος τοῦ κεφαλ. $\alpha(1+\tau)^{\nu}$ δρχ. διὰ η ἡμέρας τὸν ὁποῖον θὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)^\nu$ ὁπότε διὰ τοῦ Σ πλέον θὰ ἔχωμεν τὸ τελικὸν κεφάλαιον μετὰ ν ἔτη καὶ η, ἡμέρας, ἤτοι θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu+\alpha(1+\tau).^\nu\frac{\eta\tau}{365} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\Sigma=\alpha(1+\tau).^\nu\left(1+\frac{\eta\tau}{365}\right)} \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (2) λογαριθμικῶς προσδιορίζομεν τὴν παράστασιν $1+\dfrac{\eta\tau}{365}$ ἐκ τῆς ὁποίας μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν τὸν η.

Ἀσκήσεις 642) Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις ἐὰν ἀνατοκίσῃ ἑξαμηνιαίως πρὸς 5 % 9600, δραχμὰς ἐπὶ 10 ἔτη;

643) Εἷς κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ υἱοῦ του κατέθεσεν εἰς Τράπεζαν τινὰ 675.000 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4 % ἑξαμηνιαίως. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ υἱός του κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του; (20 ἐτῶν).

644) Ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ὅταν μετὰ 17 ἔτη πρὸς ἐτήσιον ἀνατοκισμὸν καὶ πρὸς 6% ἔγινε 252600 δραχ.;

645) Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ διαθέσωμεν σήμερον ἐπ' ἀνατοκισμῷ, ἑξαμηνιαίως πρὸς 4% ὥστε μετὰ 10 ἔτη νὰ ἔχωμεν 200.000;

646) Πρὸς πόσον τοῦ % ἐτοκίσθη, ἐπ' ἀνατοκισμῷ, ἐτησίως κεφάλαιον 1625 Λ. Α τὸ ὁποῖον μετὰ 10 ἔτη ἔγινε 3000 Λ. Α.

647) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη ὁ τόκος, ἐὰν 100 Λ. Α. κεφάλαιον εἰς 22 ἔτη ἔγινε 22247,70 Λ. Α. ἀνατοκιζόμεναι ἐτησίως;

648) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὀφείλει νὰ τοκισθῇ ἐπ' ἀνατοκισμῷ ἐτησίως κεφάλαιόν τι ὥστε μετὰ 31 ἔτη νὰ τετραπλασιασθῇ

649) Μετὰ πόσον χρόνον ἓν κεφάλαιον ἀνατοκιζόμενον πρὸς 6% ἐτησίως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται;

650) Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαια 3600 Λ.Α. ἀνατοκισθὲν πρὸς 5% ἐτησίως, δίδει κέρδος 2400 Λ. Α.;

651) Νὰ εὑρεθῇ τὶ εἶναι προτιμώτερον διὰ τὸν δανείζοντα νὰ ἀνατοκίσῃ 1000 Λ. Α. ἐπὶ 4 ἔτη πρὸς 6% ἢ νὰ δανείσῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν μὲ ἁπλοῦν τόκον εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα πρὸς 10%.

652) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως κατ' ἔτος αὔξάνει μὲν κατὰ τὸ $\frac{1}{40}$ αὐτοῦ (ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γεννήσεων), ἐλαττοῦται δὲ κατὰ τὸ $\frac{1}{45}$ (ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν θανάτων). Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως αὐτῆς.

Λύσις. Ἐὰν εἶναι Π, ὁ πληθυσμὸς ὃν ἔχει σήμερον ἡ πόλις· οὗτος μετὰ ἓν ἔτος θὰ γίνῃ $\Pi + \frac{\Pi}{40} - \frac{\Pi}{45}$ ἢ $\Pi . \left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right) = \Pi'$.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου ἔτους θὰ γίνῃ

$$\Pi' + \frac{\Pi'}{40} = \frac{\Pi'}{45} \text{ ἢ } \Pi'\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right) =$$

$$= \Pi\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right) . \left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right) = \Pi\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right)^2$$

ὁμοίως ἐργαζόμενοι εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἔτους θὰ γίνῃ

$\Pi\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right)^3$ καὶ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν θὰ γίνῃ

$\Pi\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right)^\nu$ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ἡ ἐξίσωσις, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος $2\Pi = \Pi\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right)^\nu$ ἢ

$$\left(1 + \frac{1}{40} - \frac{1}{45}\right)^\nu = 2$$

ἥτις λυομένη δίδει 249 ἔτη.

§ 213) *Προβλήματα ἴσων καταθέσεων*

Α΄.) *Ὅταν ἡ πρώτη κατάθεσις σημειωθῇ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου χρονικοῦ διαστήματος.*

Πρόβλημα γενικόν. — Ὅταν τις καταθέτει κατ' ἔτος τὸ αὐτὸ ποσὸν τῶν (α) δραχμ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ εἰς μίαν Τράπεζαν, πόσας θὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη; ὅταν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς τὸ ἓν ἔτος εἶναι τ δραχμαί.

Λύσις. Αἱ α, δραχμαὶ τῆς πρώτης καταθέσεως μετὰ ν, ἔτη θὰ ἀνέλθωσι μετὰ τῶν τόκων των εἰς $\alpha(1+\tau)^{\nu}$

αἱ α δραχμαὶ τῆς δευτέρας καταθέσεως μετὰ (ν—1) ἔτη θὰ ἀνέλθωοι μετὰ τῶν τόκων των εἰς $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$

αἱ α δραχμαὶ τῆς τρίτης καταθέσεως μετὰ (ν—2) ἔτη θὰ ἀνέλθῶσι μετὰ τῶν τόκων των εἰς $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ κ. ο. κ.

αἱ α δραχμαὶ τῆς τελευταίας καταθέσεως (μετὰ 1 ἔτος) θὰ ἀνέλθωσι μετὰ τῶν τόκων εἰς $\alpha(1+\tau)$

Ἤδη ἐὰν καλέσωμεν διὰ τοῦ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων ἐξ α δραχμῶν κατατεθημένων ποσῶν μετὰ τῶν τόκων αὐτῶν θὰ εἶναι:

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu} + \alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \alpha(1+\tau)^{\nu-2} + \ldots + \alpha(1+\tau)$$

ἢ $$\Sigma = \alpha(1+\tau) + \ldots + \alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \alpha(1+\tau)^{\nu} \qquad (1)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς σχέσεως (1) εἶναι ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι (1+τ)· ἄρα λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1) τὴν ἀκόλουθον σχέσιν.

$$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}.(1+\tau) - \alpha(1+\tau)}{(1+\tau)-1} = \frac{\alpha(1+\tau)\,[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$$

ἢ $$\boxed{\Sigma = \alpha(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}} \quad (3)$$

Ἵνα ὑπολογήσωμεν τὸ Σ εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (3) δέον νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὴν δύναμιν $(1+\tau)^{\nu}$ καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὴν τὸ 1 καὶ τὸ ὑπόλοιπον νὰ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ $(1+\tau)^{\nu}-1$.

Ἐφαρμογαί.

Πρόβλημα. Πόσα θὰ λάβῃ τις μετὰ 20 ἔτη, ὅταν κατ' ἔτος καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ πρώτου ἔτους καταθέτει 1000 δραχμάς, ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 6% εἰς Τράπεζαν τινά;

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου (3) ἤτοι: $\Sigma = \alpha(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$ λαμβάνομεν

Ὑπολογισμὸς τῆς $1,06^{20}-1$

$\lambda o\gamma.\ 1,06^{20} = 20\ \lambda o\gamma.\ 1,06$

$\lambda o\gamma.\ 1,06^{20} = 20 \,.\, 0,02531$

$\lambda o\gamma.\ 1,06^{20} = 0,50620$ καὶ

$1,06^{20} = 3,207$ ὁπότε

$1,06^{20} - 1 = 2,207$

$$\Sigma = 1000.1,06.\frac{1,06^{20}-1}{0,06}$$

ἢ $\Sigma = 1000.1,6\frac{2,207}{0,06}$

ἢ $\lambda o\gamma.\ \Sigma = \lambda o\gamma.\ 1000 + \lambda o\gamma.\ 1,06 + \lambda o\gamma.\ 2,207 - \lambda o\gamma. 0,06$

ἢ $\lambda o\gamma.\ \Sigma = 3,00000 + 0,02531 + 0,34380 - \overline{2},77815$

ἢ $\lambda o\gamma.\ \Sigma = 3,36911 - \overline{2},77815 = 4,59096$

καὶ $\Sigma = 38,990,90$

Β΄.) ***Ὅταν ἡ πρώτη κατάθεσις σημειωθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου χρονικοῦ διαστήματος.***

Πρόβλημα γενικόν. Ὅταν τις καταθέτει τὸ αὐτὸ ποσὸν α, δραχμ. κατ᾽ ἔτος ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ μετὰ ν ἔτη πόσα θὰ λάβῃ; ὅταν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς τὸ ἓν ἔτος εἶναι τ, δραχμαί.

Ἐφ᾽ ὅσον ἡ κατάθεσις γίνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ἕπεται ὅτι ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ παραμείνῃ ἀνατοκιζομένη (ν—1) ἔτη καὶ συνεπῶς θὰ ἀνέλθῃ εἰς $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, ἡ δευτέρα διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ ἀνέλθῃ εἰς $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ ἡ τελευταῖα θὰ μείνῃ α (διότι μὲ τὴν κατάθεσίν της συγχρόνως θὰ ἀναληφθῇ). Ὥστε ἐὰν καλέσωμεν διὰ τοῦ Σ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων καταθέσεων μετὰ τῶν τόκων λαμβάνομεν.

$$\Sigma = \alpha + \alpha(1+\tau) + \dots \qquad + \alpha(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἢ $$\Sigma = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu-1}(1+\tau)-\alpha}{(1+\tau)-1} = \frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}-\alpha}{\tau},$$

ἢ $$\boxed{\Sigma = \alpha\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}} \quad (4)$$

Ἐφαρμογαί.

Πρόβλημα. Καταθέτει τις πρὸς 6% ἐτησίως 5000 δραχ. ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ εἰς Τράπεζαν τινὰ καὶ εἰς τὸ τέλος

ἑκάστου ἔτους, μετὰ 10 ἔτη ἀπὸ σήμερον πόσα χρήματα θὰ ἔχει εἰς πίστωσίν του;

Λύσις.

Ἐκ τοῦ τύπου (4) ἤτοι: $\Sigma = \alpha \frac{(1+\tau)^{\nu} - 1}{\tau}$

λαμβάνομεν $\Sigma = 5000 . \frac{1,06^{10} - 1}{0,06}$

Ὑπολογισμὸς τῆς $1,06^{10}$

$\lambda o\gamma 1.06^{10} = 10 . \lambda o\gamma 1,06$ ἢ

$\lambda o\gamma 1,06^{10} = 10 . 0,02531$ ἢ

$\lambda o\gamma 1,06^{10} = 0,25310$ καὶ

$1,06^{10} = 1,791$

ἄρα $1,06^{10} - 1 = 0,791$

ἢ $\Sigma = 5000 . \frac{0,791}{0,06}$

ἢ $\lambda o\gamma\, \Sigma = \lambda o\gamma\, 5000 + \lambda o\gamma \left(\frac{0,791}{0,06} \right)$

ἢ $\lambda o\gamma\, \Sigma = \lambda o\gamma\, 5000 + \lambda o\gamma\, 0,791 - \lambda o\gamma\, 0,06$

ἢ $\lambda o\gamma\, \Sigma = 3,69897 + \overline{1},89818 - \overline{2},77815$

ἢ $\lambda o\gamma\, \Sigma = 3,59715 - \overline{2},77815$

ἢ $\lambda o\gamma\, \Sigma = 4,81900$ καὶ $\boxed{\Sigma = 65917}$

Προβλήματα.

653) Μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς γεννησεως τοῦ υἱοῦ του καταθέτει τις ὑπὲρ αὐτοῦ ἐτησίως 12000 δραχμὰς εἰς Τράπεζαν τινὰ πρὸς 4°/₀ ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ· πόσα θὰ λάβῃ κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του ; (20 ἔτη)

654) Ἐργάτης τις καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους δρ. 75.000 εἰς τὸ ταμιευτήριον ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ ἐτησίως πρὸς 9°/₀. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 25 ἔτη ;

655) Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ καταθέσῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους πρὸς 6°/₀ ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ 750.000 δρχ.

656) Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους 20.000 δρ. ἐπ᾽ ἀνατοκισμῷ πρὸς 7,5°/₀ ἐτησίως. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ 700.000 δρχ.

ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

§ 214) ***Χρεωλυσίαν καλοῦμεν τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ἐξωφλοῦμεν δάνειον δι' ἴσων δόσεων εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα.***

Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον καταβάλλεται εἰς τὸ τέλος τῶν ἴσων χρονικῶν διαστημάτων καλεῖται ***χρεωλύσιον.*** (τὸ χρεωλύσιον παριστῶμεν διὰ τοῦ χ). Μέρος μὲν τοῦ χρεωλυσίου χρησιμεύει πρὸς πληρωμὴν τῶν τόκων, τὸ ὑπόλοιπον δὲ χρησιμεύει πρὸς ἐξόφλησιν μέρους τοῦ δανείου).

Τόσον τὸ δανειζόμενον ποσόν, ὅσον καὶ αἱ δόσεις, αἱ καταβαλλόμεναι πρὸς ἐξώφλησιν αὐτοῦ λογίζονται ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ

Ἵνα ἐξωφληθῇ δάνειον τι ὀφείλει τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων δόσεων ἐπ' ἀνατοκισμῷ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ποσὸν εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ τὸ δανεισθὲν ποσὸν ἐπ' ἀνατοκισμῷ.

Πρόβλημα. Δάνειον α δραχμῶν δέον νὰ ἐξοφληθῇ χρεωλυτικῶς διὰ ν ἐτησίων δόσεων. Ποῖον θὰ εἶναι τό χρεωλύσιον;

Α΄.) Ἐὰν τὸ πόσὸν τῶν α δραχμῶν (δάνειον) πρόκειται νὰ πληρωθῇ εἰς τὸ τέλος τὸ ν ἐτῶν τὸ ποσὸν τοῦτο μετὰ τῶν τόκων θὰ ἀνέλθῃ εἰς $\alpha(1+\tau)^\nu$ δραχμάς.

Β΄.) Τὸ πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ δανείου τούτου τῶν α δραχμῶν καταβαλλόμενον ἐτησίως χρεωλύσιον (χ) μετὰ τῶν τόκων ὀφείλει νὰ ἀνέλθῃ μετὰ ν ἔτη εἰς

$\chi.\dfrac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}$ (Ἡ πρώτη δόσις καταβάλλεται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους.)

Γ΄.) Ἄρα ἵνα πραγματοποιηθῇ ἡ ἐξώφλησις τοῦ δανείου τῶν α δραχμῶν διὰ τῶν ἴσων δόσεων ὀφείλει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\alpha(1+\tau)^\nu=\chi\,\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau} \qquad (5)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν ἐκ τῶν τριῶν ποσοτήτων α, ν, χ, ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς λοιπαί. Ἄρα διακρίνομεν τριῶν εἰδῶν προβλήματα, ἤτοι τοῦ χρεωλυσίου (χ), τοῦ κεφαλαίου (α), τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἴσων καταθέσεων (ν). Τὸ ἐπιτόκιον (100.τ) δὲν προσδιορίζεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου, παρουσιάζων οὕτω ὁ τύπος οὗτος ἀδυναμίαν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ τ.

Ἐφαρμογαί.

1) *Πρόβλημα.* ***Εἰς τί ποσὸν ἀνέρχεται τὸ χρεωλύσιον δανείου 56000 δρχ. τοκιζόμενον πρὸς 8 %, καὶ τὸ ὁποῖον ἐξωφλεῖται δι᾽ ἑξαμηνιαίων δόσεων ἐντὸς 5 ἐτῶν;***

$$\alpha=56000,\quad \tau=0{,}04,\quad \nu=10,\quad \chi=;$$

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha(1+\tau)^\nu=\chi\dfrac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}$ λαμβάνομεν

$$56000\,.\,1{,}04^{10}=\chi.\frac{1{,}04^{10}-1}{0{,}04}$$

ἢ $$56000.1{,}48=\chi.\frac{0{,}48}{0{,}04}$$

ἢ $$56000.1{,}48.0{,}04=0{,}48\chi$$

ἢ $$\chi=\frac{56000.1{,}48.0{,}04}{0{,}48}=6906{,}60$$

Ὑπολογισμὸς τῆς 1,04¹⁰

$$\lambda o\gamma.\ 1{,}04^{10}=10.\lambda o\gamma.\ 1{,}04$$

$$\text{»}\quad =10.0{,}01703$$

$$\text{»}\quad =0{,}17030 \text{ καὶ}$$

$$1{,}04^{10}=1{,}48$$

ἄρα $1{,}04^{10}-1=0{,}48$

Σημείωσις. α΄.) Πρὸς ἐξόφλησιν τοῦ ἀνωτέρω δανείου ἐκ δρχ. 56000 δέον νὰ καταβληθῶσι δρχ. 6906,60 . 10=69066 ἤτοι ὁ τόκος εἶναι 69066—56000=13066

Τὸ αὐτὸ ποσὸν (δανείου) εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον θὰ δόσῃ ἁπλοῦν τόκον τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου $T=\dfrac{K.X.E}{100}$ (πρακτικὴ ἀριθμητικὴ) ἤτοι:

$$T=\frac{K.X.E}{100}=\frac{56000.5.8}{100}=22400,\text{—}$$

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερόν, ὅτι ἡ ἐξόφλησις τῶν δανείων διὰ χρεωλυσίου εἶναι προτιμωτέρα.

Ἄσκησις 657). Ἐὰν τὰ χρονικὰ διαστήματα τῆς καταβολῆς τῶν χρεωλυσίων εἶναι μικρότερα λ. χ. ἀντὶ ἐτησίων, εἶναι ἑξαμηνιαῖα, τριμηνιαῖα ἢ καὶ μηνιαῖα τὸ χρεωλύσιον εἶναι ἐξυπηἐξυπηρετικώτερον καὶ διατί;

2ον) *Πρόβλημα.* ***Τί ποσὸν ἐδανείσθημεν (εἰς δραχμὰς) πρὸς 8 %, ὅταν τοῦτο ἐξοφλήθη διὰ ἑξαμηνιαίου χρεωλυσίου ἐκ δραχ. 6906,60 ἐντὸς 5 ἐτῶν;***

$$\alpha=;\quad ,\quad \tau=0{,}04\ ,\ \nu=10\quad ,\quad \chi=6906{,}60$$

Λύσις Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha(1+\tau)^\nu = \chi \frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}$ λαμβάνομεν

Ὑπολογισμὸς τῆς $1,04^{10}$

$\lambda o\gamma.\ 1,04^{10} = 10.\lambda o\gamma.1,04$
$\lambda o\gamma.\ 1,04 = 10.0,01703$
$\lambda o\gamma.\ 1,04^{10} = 0,17030$ καὶ
$1,04^{10} = 1,48$
ἄρα $1,04^{10} - 1 = 0,48$

$$\alpha.1,04^{10} = 6906,60.\frac{1,04^{10}-1}{0,04}$$

καὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ὑπολογισθεισῶν, ὡς παραπλεύρως παραστάσεων $1,04^{10}$ καὶ $1,04^{10} - 1$ λαμβάνομεν.

$$\alpha.1,48 = 6906,60.\frac{0,48}{0,04} \quad \text{καὶ}$$

$$\alpha = \frac{6906,60.0,48}{0,04.1,48} = 56000$$

3ον Πρόβλημα. Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον ἐκ δραχμῶν 20000 διὰ χρεωλυσίου 1300 δρχ. ἐτησίως καὶ πρὸς 3%;

$\alpha = 20000, \quad \tau = 0,03, \quad \nu = ;\ , \quad \chi = 1300$

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha(1+\tau)^\nu = \chi.\frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}$ λαμβάνομεν

$$\alpha.\tau(1+\tau)^\nu = \chi(1+\tau)^\nu - \chi \quad \text{ἢ} \quad -\chi(1+\tau)^\nu + \alpha\tau(1+\tau)^\nu = -\chi$$

$$\text{ἢ} \ \chi(1+\tau)^\nu - \alpha\tau(1+\tau)^\nu = \chi \quad \text{ἢ} \quad (1+\tau)^\nu.(\chi - \alpha\tau) = \chi$$

ἢ $(1+\tau)^\nu = \frac{\chi}{\chi - \alpha.\tau}$ καὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν ἔχομεν

$$1,03^\nu = \frac{1300}{1300 - 20000.0,03}$$

$$\text{καὶ} \quad \lambda o\gamma.(1,03)^\nu = \lambda o\gamma.1300 - \lambda o\gamma.700$$

$$\text{ἢ} \quad \nu.\lambda o\gamma.1,03 = \lambda o\gamma.1300 - \lambda o\gamma.\ 700$$

$$\text{καὶ} \quad \nu = \frac{\lambda o\gamma.\ 1300 - \lambda o\gamma.\ 700}{\lambda o\gamma.\ 1,03} = 20,943$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει ὅτι αἱ 20 δόσεις δὲν εἶναι ἱκαναὶ νὰ ἐξοφλήσωσι τὸ δάνειον, ὅπως καὶ αἱ 21 δόσεις εἶναι περισσότεραι, ἄρα ἕπεται ὅτι τὴν 20ὴν δόσιν ὀφείλει νὰ ἀκολουθήσῃ καὶ συμπληρωματικὴ 21η δόσις, ἥτις, θὰ ἀποτελῆται ἐκ ποσοῦ μικροτέρου τοῦ χρεωλυσίου καὶ ἴσον πρὸς τὸ 0,943 περίπου τοῦ χρεωλυσίου ἤτοι δραχμὰς 1.226 περίπου. Ἡ δόσις αὕτη εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς: Πρῶτον εὑρίσκομεν εἰς τὶ ποσὸν θὰ ἀνέλθῃ τὸ ποσὸν τῶν α, δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ μετὰ 21 ἔτη. Δεύτερον εἰς τὶ ποσὸν θὰ ἀνέλθωσι αἱ 20 δόσεις εἰς τὸ τέλος τῶν 21 ἐτῶν (ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου τῶν ἴσων καταθέσεων εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης περιόδου). Καὶ κατόπιν ἀπὸ τοῦ πρώτου ποσοῦ θὰ ἀφαιρέσωμε τὸ δεύτερον ποσὸν ἤτοι.

$K = \alpha(1+\tau)^{\nu} = 20000.1{,}03^{21} = 20000.1{,}86 =$ δρχ. 37200 περίπου.

$K_1 = \alpha(1+\tau).\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau} = 1300.1{,}03.26{,}86 =$ δρ. 35965

Ὑπόλοιπον » 1235

Ἄρα ἡ 21 δόσις εἶναι 1235 δραχμαὶ περίπου.

658) Ποῖον εἶναι τὸ χρεωλύσιον δανείου 100.000.000, δρχ. συνομολογηθέντος ὑπὸ τοῦ Δήμου Ἀθηναίων πρὸς 4% δι' ἐτησίων χρεωλυσίων 50 ἐτῶν;

659) Ποῖον εἶναι τὸ δανειζόμενον ποσόν, ὅταν τοῦτο ἐξοφλήθη ἐντὸς 30 ἐτῶν δι' ἐτησίων χρεωλυσίων ἐκ δραχ. 3180 καὶ πρὸς 4,5%;

660) Μετὰ πόσα ἔτη κεφάλαιον κατατεθειμένον ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 4,5% τετραπλασιάζεται;

661) Εἰς πόσον χρόνον θὰ ἐξοφλήσῃ Κοινότης δάνειον ἐκ δρχ. 100.000 χρεωλυτικῶς ἐτησίως πρὸς 4% ὅταν τὸ χρεωλύσιον ὑπελογίσθη εἰς 13679,25;

662) Δῆμος δύναται νὰ διαθέσῃ καθ' ἕκαστον ἔτος καὶ ἐπὶ 40 ἔτη χρεωλύσιον ἐκ δραχ. 50.000. Ποῖον ποσὸν δανείου δύναται νὰ ζητήσῃ τὴν συνομολόγησιν, τοῦ τόκου αὐτοῦ ὑπολογιζομένου πρὸς 5%;

663) Ποῖον εἶναι τὸ χρεωλύσιον δανείου 900.000 δρχ. ἐξοφλουμένου πρὸς 6,5% ἐντὸς 24 ἐτῶν ἐτησίως;

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Αἱ ἀσκήσεις τῆ σελίδος 153 νὰ δοθῶσι πρὸς ἄσκησιν συγχρόνως μετὰ τῶν ἀσκήσεων 479 κ.λ.π.

Σελ. 155 σειρὰ 8 ἐκ τῶν κάτω: Ἀντὶ «Δηλαδή, διὰ νὰ ὑψώσωμεν ρίζαν εἰς δύναμιν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσσότητος ἐπὶ τὴν δύναμιν ταύτην» νὰ τεθῇ: «διὰ νὰ ὑψώσωμεν ρίζαν εἰς δύναμιν ἀρκεῖ τὰ ὑψώσωμεν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα εἰς τὴν δύναμιν ταύτην».

» 156 σειρὰ 2 ἐκ τῶν ἄνω: Ἀντὶ $(+2i)^2 = \sqrt{16}$ νὰ τεθῇ $(\pm 2i)^2 = \sqrt{16}$.

» 157 σειρὰ 13 ἐκ τῶν ἄνω: Ἀντὶ $\sqrt[3.4]{\beta^{2.4}}$ νὰ τεθῇ $\sqrt[3.4]{\beta^{3.4}}$.

» 160 » 2 ἐκ τῶν κάτω: ἀντὶ $\left(\frac{\alpha}{\beta^\rho}\right)^\rho = \frac{\alpha^{\frac{1}{\rho}}}{\beta}$

νὰ τεθῇ $\left(\frac{\alpha}{\beta^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{\rho}}}{\beta}$

» 175 Ἄσκησις 511 ἀντί «Νὰ εὑρεθῶσι αἱ ρίζαι τῶν ἀσκήσεων 493, 494, 495», νὰ τεθῇ τῶν ἀσκήσεων 496, 397, 498.

» 176 σειρὰ 6 ἐκ τῶν κάτω:

Ἀντὶ $\varrho + \varrho_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^3 - 4\alpha\gamma} - \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

νὰ τεθῇ $\varrho_1 + \varrho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta} - \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}$

» 189 σειρὰ 6 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ νὰ εἶναι ἴσοι καί... νὰ τεθῇ νὰ εἶναι ἴσοι ἤ...

» 189 σειρὰ 2 ἐκ τῶν κάτω: Ἀντὶ ἤτοι εἶναι ἀντίθετοι νὰ τεθῇ ἤτοι εἶναι ἀντίστροφοι.

» 198 σειρὰ 8 ἐκ τῶν κάτω: Ἀντὶ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ τεθῇ ἀριθμοὶ χ καὶ 2ψ.

Σελ. 200 σειρὰ 8 ἐκ τῶν ἄνω: Ἀντὶ $\psi_1 = 4,\ \psi_2 = -4,\ 4_3 = 7$
νὰ τεθῃ $\psi_1 = 4,\ \psi_2 = -4,\ \psi_3 = 7$

» 202 σειρὰ 1 ἐκ τῶν ἄνω: Ἀντὶ $\chi^2 + \psi^2 = 576$, νὰ τεθῇ
$\chi^3 + \psi^3 = 576$.

» 202 σειρὰ 3 ἐκ τῶν ἄνω: Ἀντὶ (1) $(\chi + \psi)^2 - 3\chi\psi(\chi+\psi) = 576$, νὰ τεθῇ (1) $(\chi + \psi)^3 - 3\chi\psi(\chi+\psi) = 576$

» 202 σειρὰ 7 ἐκ τῶν ἄνω: Ἀντὶ

$$12^2 - 3\chi\psi.12 = 576 \quad \text{ἢ} \quad \chi\psi = \frac{576-12^2}{36} = 32 \text{ νὰ τεθῇ}$$

$$12^3 - 3\chi\psi.12 = 576 \quad \text{ἢ} \quad \chi\psi = \frac{12^3 - 575}{36} = 32.$$

» 218 σειρὰ 6 ἐκ τῶν κάτω: Ἀντὶ $\Sigma +$; Νὰ τεθῇ $\Sigma =$;

» 226· Ἄσκησις γ′.) Ἀντὶ λογ 10+2 λογ+λογ 5=2
Νὰ τεθῇ λογ 10+λογ 2+λογ 5=2.

» 233. Αἱ δύο τελευταῖαι σειραὶ ν' ἀναγνωσθοῦν μετὰ τὴν 8ην σειρὰν ἤτοι μετὰ τὸ ἔχομεν ὡς 9η σειρὰ ἡ προτελευταῖα καὶ ὡς 10η σειρὰ ἡ τελευταῖα.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

1) **ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ**, ἔκδοσις 1945, ἡ ὁποία περιέχει ἅπασαν τὴν ὑπὸ τοῦ νέου ἀναλυτικοῦ προγράμματος διαλαμβανομένην ὕλην, τῆς θεωρίας τῶν ἀπολύτων σφαλμάτων καὶ τῶν θεωρημάτων τῶν FERMAT, EULER καὶ WILSON, τὸ πρῶτον ἐκτιθεμένην εἰς τὴν Ἑλληνικήν.

2) **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ**, λελυμέναι

3) **ΑΛΓΕΒΡΑ**, Τόμος πρῶτος Ἔκδοσις 1946