ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ Φ. ΠΑΛΛΑ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
Διευθυντοῦ Φροντιστηρίων — 34 Χαρ. Τρικούπη 34

ΘΕΜΑΤΑ

ΔΟΘΕΝΤΑ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΤΟ ΕΤΟΣ 1948 ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΑΥΤΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ 270

37

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΡΟΥΖΒΕΛΤ (ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ) 56, ΑΘΗΝΑΙ
1948

Πάλλα (Αριστ. Φ.)

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α. ΠΑΛΛΑ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ — ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ Φ. ΠΑΛΛΑ

Ἀριστούχου Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν—Διδάκτορος τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου—Συνεργάτου καὶ Συντάκτου τῶν ἐν Ἑλλάδι ἐκδιδομένων μαθηματικῶν περιοδικῶν—Συγγραφέως μέσης καὶ ἀνωτάτης Ἐκπαιδεύσεως.

Ἐγκεγκριμένα ὑπὸ τοῦ Κράτους—Ἔτος ἱδρύσεως 1925

34—Χαριλάου Τρικούπη—Τηλ. 29 222

133 1969

Τὰ Φροντιστήρια *Α. Φ. ΠΑΛΛΑ*, ἐγκεκριμένα ὑπὸ τοῦ Κράτους καὶ λειτουργοῦντα ἀπὸ τοῦ ἔτους 1925, ἔχουν ἀναγνωρισθῆ ἀπὸ ὅλον τὸν ἐπιστημονικὸν κόσμον διὰ τὴν λίαν εὐδόκιμον λειτουργίαν αὐτῶν. Τὰ ἐν λόγῳ Φροντιστήρια ἔχουν, ὡς εἶναι γνωστόν, κατ' ἔτος ἐπιτυχίας, εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις ὡς καὶ εἰς τὰς τμηματικὰς καὶ πτυχιακὰς τῶν ἀνωτάτων τοῦ ***Κράτους Σχολῶν***, αἱ ὁποῖαι ὑπερβαίνουν τὰ 90 %. Τὰ θέματα τὰ ὁποῖα διδουν κατ' ἔτος εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις αἱ ἀνώτεραι τοῦ Κράτους Σχολαί, ὄχι μόνον διδάσκονται εἰς τὰ διάφορα, εἰδικὰ δι' ἑκάστην σχολήν, τμήματα τῶν Φροντιστηρίων, ἀλλὰ καὶ εὑρίσκονται ἀκριβῶς τὰ ἴδια εἰς τὰ ***κλασικὰ*** διὰ τὴν Ἑλλάδα συγγράμματα τοῦ διευθυντοῦ τῶν Φροντιστηρίων κ. ***Α. Φ. ΠΑΛΛΑ.*** Εἰς τὸν πίνακα, τῆς σελίδος 2, δημοσιευθέντα εἰς τὸν ἡμερήσιον τύπον, ἀναφέρονται αἱ παράγραφοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ ὑπὸ τοὺς ὁποίους εὑρίσκονται εἰς τὰ συγγράμματα τοῦ κ. ***Α. ΠΑΛΛΑ*** ὅλα τὰ θέματα (ἀσκήσεις) τὰ ὁποῖα ἔδωσαν εἰς τὰς εἰσαγωγικάς των ἐξετάσεις τοῦ τρέχοντος ἔτους 1948 ὡς καὶ τῶν δύο προηγουμένων ἐτῶν 1947 καὶ 1946 ὅλαι αἱ ἀνώταται τοῦ Κράτους Σχολαί :

ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1) ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ. Τόμοι, δύο. Σελ. 1500. Τιμὴ τόμου 50.000 δραχ.
2) ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Τόμοι δύο. Σελ. 870. Τιμὴ Α' τόμ. 60.000. Β' τόμ. 40.000 δραχ.
3) Μ. Σ. Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ λελυμέναι. Τιμὴ 15.000.
4) Μ. Σ. Α. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ἐξηντλήθη.
5) ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚ. ΜΕΓ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. Ἐξεθόδη τὸ Α. τεῦχος. Τιμὴ 15.000. Προσεχῶς ἡ ἔκδοσις τῶν ἄλλων τευχῶν.
6) ΦΥΣΙΚΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ. Τιμὴ 63.000. Περιέχει ἐκτὸς τῶν ἀλύτων ἀσκήσεων καὶ 300 ἀσκήσεις λελυμένας.
7) ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ. Τιμὴ 15.000.

ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

1) ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. Τιμὴ 30.000.
2) ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. Τιμὴ 20.000.
3) ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ἐξηντλήθη.
4) ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Τιμὴ 20.000.

	Μεγάλη Ἄλγεβρα	Μεγάλη Γεωμετρία	Μ. Σ. Α. Τριγωνομ.	Μ.Σ.Α. Γεωμετρίας	Μ.Σ.Α. Ἀλγέβρας
Πολυτεχνεῖον 1946	1329, 2913	581, 1220	365, 380	1021	
Πολυτεχνεῖον 1947 καὶ 1948 Πολιτ. Μηχ. Χημ. Ἀρχιτεκτ.	978, 979, 1349 2581, § 642 τόμ. Β΄ § 493 τόμ. Β΄	439, 470, 652, 1108, 1557, 2002, 2125, 2306, 2570 § 864 τόμ. Β΄ 259, § 909, 434, 2402	158, 159 362, 367	1032	
Γεωπονικὴ 1946	1053			1055	
Γεωπονικὴ 1947 καὶ 1948	§ 514 τόμ. Β΄ 1922	234, 2174, 2031, 2034, § 903		82	46 σελ. 75
Εὐελπίδων 1946	2 σελ. 91, 488 τόμ. Α΄ 6 σελ. 338 τόμ. Β΄	962, 1116	329, 311		
Εὐελπίδων 1947	2 σ. 91 τόμ. Β΄	655, 791, 824, § 777, § 80 τ. Β΄	142		
Ἰκάρων 1947 καὶ 1948	1175, 1434 καὶ § 503, 504 τόμ. Β΄ 1133	1521, 957			
Δοκίμων 1947 καὶ 1948	1178, 2486 § 518, § 291 § 88	2329		82	
Πανεπιστημίου 1947 καὶ 1948	1000	§ 506, 2031 § 346		349	
Ἀνωτάτη Ἐμπορικὴ 1947 καὶ 1948	797, 941				
Σχολὴ Ὕδρας 1947 καὶ 1948		1520			
Μικρὸ Πολυτεχνεῖο 1947 καὶ 1948		§ 270			

5) ΑΝΩΤΕΡΑ ΑΛΓΕΒΡΑ ἐξηντλήθη.
6) ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ. Τιμὴ 40.000.
7) ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΧΩΡΟΥ ν. ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ Τιμ. 10.000.
8) ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ (διδακτορικὴ διατριβή).

ΑΛΛΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ (εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων)

1) ΧΗΜΕΙΑ Ἀνόργανος καὶ Ὀργανική. Τιμὴ 30.000.
2) ΕΚΘΕΣΙΣ ΙΔΕΩΝ ὑπὸ Σ. ΚΟΡΡΕ. Τιμὴ 15.000.
3) ΒΙΟΛΟΓΙΑ ὑπὸ ΤΖΕΛΕΠΗ. Τιμὴ 20.000.
4) ΑΝΘΡΩΠΟΛΟΓΙΑ ὑπὸ ΤΖΕΛΕΠΗ. Τιμὴ 20.000.
5) ΖΩΟΛΟΓΙ[illegible] ΤΖΕΛΕΠΗ. Τιμὴ 20.000.

6) ΒΟΤΑΝΙΚΗ ὑπὸ ΤΖΕΛΕΠΗ. Τιμὴ 20.000.

ΛΕΙΤΡΟΥΡΓΟΥΝΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους λειτουργοῦν τὰ κάτωθι τμήματα ὑπὸ τὴν γενικὴν διεύθυνσιν τοῦ κ. Α. ΠΑΛΛΑ.

Α' ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1) ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ. Πολιτικῶν, Μηχανολόγων, Χημικῶν, 'Αρχιτεκτόνων. Διδασκαλία μαθηματικῶν ὑπὸ Α. ΠΑΛΛΑ καὶ φυσικῆς ὑπὸ Μ. ΤΣΑΤΣΑΚΗ.
2) ΓΕΩΠΟΝΙΚΗΣ. Διδασκαλία μαθηματικῶν ὑπὸ Α. ΠΑΛΛΑ καὶ φυσικῆς ὑπὸ Μ. ΤΣΑΤΣΑΚΗ
3) ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ. 'Ιατρικῆς, 'Οδοντοϊατρικῆς, Μαθηματικῆς, Χημικῆς, Φαρμακευτικῆς, Φυσιογνωστῶν, Φυσικῶν, Νομικῆς, Φιλοσοφικῆς, Θεολογικῆς.
4) ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ
5) ΠΑΝΤΕΙΟΥ
6) ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΙΩΝ
7) ΜΙΚΡΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ
8) ΣΧΟΛΗΣ ΕΜΠΟΡΟΠΛΟΙΑΡΧΩΝ
9) ΔΑΣΟΛΟΓΙΚΗΣ
10) ΩΣ ΚΑΙ ΔΙ' ΟΛΑΣ ΤΑΣ ΑΛΛΑΣ ΣΧΟΛΑΣ.

Β' ΤΜΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΤΥΧΙΑΚΩΝ

1) ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ.
2) ΙΑΤΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΟΔΟΝΤΟΪΑΤΡΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ.
3) ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ.
4) ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ.

ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

Οἱ διδάσκοντες Καθηγηταὶ εἰς τὰ Φροντιστήρια Α. ΠΑΛΛΑ εἶναι ἀνεγνωρισμένης ***ἐπιστημονικῆς ἱκανότητος*** καὶ μακρᾶς ***φροντιστηριακῆς πείρας***. Οἱ σπουδασταὶ ἔχουν δικαίωμα νὰ λέγουν ὅλας τὰς ἀπορίας των εἰς τοὺς κ. κ. Καθηγητάς. Πολλοὶ τῶν Καθηγητῶν μας εἶναι καὶ ***διδάκτορες***. Εἰς τὰ τμήματα ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ—ΓΕΩΠΟΝΙΚΗΣ διδάσκει μαθηματικὰ ὁ Διευθυντὴς Α. ΠΑΛΛΑΣ εἰς δὲ τὰ ἄλλα ὁ κ. ΠΑΛΛΑΣ μὲ τρεῖς βοηθοὺς ἀριστούχους μαθηματικούς.

ΚΡΙΤΙΚΗ ΕΠΙ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΤΟΥ κ. Α. ΠΑΛΛΑ

Σωρεία συγχαρητηρίων ἐπιστολῶν Συναδέλφων ἔχομεν εἰς χεῖρας μας διὰ τὰ βιβλία τοῦ κ. Α. ΠΑΛΛΑ. Εἰς ὅλας τὰς ἐπιστολὰς ἀναφέρεται ὅτι τὰ ἔργα « ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ » καὶ « ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ » εἶναι μνημειώδη διὰ τὴν 'Ελλάδα. 'Ο χῶρος δυστυχῶς δὲν μᾶς ἐπιτρέπει τὴν δημοσίευσιν τῶν ἐπιστολῶν αὐτῶν. Περιοριζόμεθα μόνον εἰς τὴν δημοσίευσιν τῆς κριτικῆς τοῦ ***Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου*** Θεσσαλονίκης κ. ***Θ. Βαροπούλου*** δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ περιοδικὸν « ***Αἰὼν τοῦ ἀτόμου*** », ἀριθ. 7, 'Ιούλιος 1948. 'Ιδοῦ τί γράφει ὁ κ. Βαρόπουλος.

ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, 2 τόμοι ὑπὸ ***'Αρ. Πάλλα*** Καθηγητοῦ.

Τὸ σύγγραμμα « ***Μεγάλη Γεωμετρία*** » τόμοι 2 'Αθῆναι 1948 τοῦ κ. Πάλλα, εἶναι ***ἐνδιαφέρον*** καὶ ***ὠφέλιμον***. Θὰ προσφέρῃ ὑπηρεσίας εἰς πάντα ὅστις ἐπιθυμεῖ νὰ ***μυηθῇ*** εἰς τὴν Γεωμετρίαν, νὰ γνωρίσῃ ***τὴν ἀπόδειξιν τῶν μαθηματικῶν προτάσεων*** ν' ἀποκτήσῃ τὰς ἰδέας ἐν συνόλῳ ***τῶν ρυθμωδῶν σημείων*** τῆς ἐπιστήμης τῆς

Γεωμετρίας, ὑπὸ τὴν σημερινὴν αὐτῆς κατάστασιν. Ὁ συγγραφεὺς ἔχων τάσεις πρὸς τὰς γενικεύσεις, φαίνεται ταυτοχρόνως φερόμενος πρὸς τὴν ***σαφήνειαν***, τὴν ***ἀκρίβειαν*** διὰ τῶν ἀφθόνων καὶ ἐκλεκτῶν ἐφαρμογῶν, θεωρητικῶν τε καὶ ἀριθμητικῶν, δι' ὧν κατορθοῖ ν' ἀποτυπώσῃ εἰς τὸ πνεῦμα τοῦ ἀναγνώστου τὴν « ***ἔννοιαν τῆς προτάσεως*** καὶ « ***τὰς θεωρίας*** » ἃς ἀναπτύσσει.

Τὸ βιβλίον τοῦ κ. Πάλλα ***διδάσκει*** τὴν Γεωμετρίαν.

Ὁ συγγραφεὺς μεταξὺ τῶν ἀπαραιτήτων κλάδων αὐτῆς, παραθέτει τὴν ***ἐνάργειαν*** καὶ τὴν ***ἀκρίβειαν***, ἐν τῷ συνόλῳ τῶν ἀποδείξεων.

Ὅτι τοὐτέστιν διὰ τοὺς ***Καθηγητὰς*** καὶ ***μαθητάς***, εἰς οὓς ἀπευθύνεται ***δὲν εἶναι ἴσως ἀνωφελές.***

Ἡ Γεωμετρία τοῦ κ. Πάλλα ἔχει ***ἀναντιρρήτως*** τὴν σφραγῖδα τῶν ἐγνωσμένων ***διδακτικῶν*** καὶ ***δημιουργικῶν*** ἰδιοτήτων τοῦ συγγραφέως αὐτῆς.

Θ. Βαρόπουλος

ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

Τὰ Φροντιστήρια Α. Φ. ΠΑΛΛΑ ἔχουν μίαν ἱστορίαν 24 ἐτῶν. Ἀπόφοιτοι τῶν Φροντιστηρίων μας κατέχουν σήμερον ἀνωτάτας θέσεις εἰς τὴν κοινωνίαν ὡς ἐπιστήμονες καὶ ὡς ὑπάλληλοι.

Μαθητὴς ἐγγραφόμενος εἰς τὰ Φροντιστήρια Α. ΠΑΛΛΑ πρέπει νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψιν του ὅτι τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν Φροντιστηρίων μας εἶναι :

Στρατιωτικὴ πειθαρχία — Ἐργατικότης — Κοσμιότης.

Μαθηταὶ οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν τὰ τρία αὐτὰ προσόντα δὲν γίνονται δεκτοὶ εἰς τὰ Φροντιστήρια, τὰ ὁποία ἀδιαφοροῦν διὰ τοὺς πολλοὺς μαθητάς, ἐνδιαφερόμενα μόνον διὰ τοὺς ἐργατικοὺς τοιούτους.

Τὰ ***Φροντιστήρια*** Α. ΠΑΛΛΑ ***διδάσκουν καὶ καταρτίζουν*** χωρὶς νὰ ὑπόσχωνται. Δὲν κολακεύουν τοὺς μαθητάς. Ἡ ὥρα τῆς διδασκαλίας εἶναι ***ἱερὰ*** καὶ τιμωρεῖται αὐστηρότατα καὶ ἡ ἐλαχίστη ἀταξία. Οἱ μαθηταὶ ἔχουν ὅλο τὸ δικαίωμα νὰ ἐρωτοῦν δι' ὅλας τὰς ἀπορίας των.

Τὰ ***Φροντιστήρια*** Α. ΠΑΛΛΑ εἶναι ***Σχολὴ*** καὶ ὄχι ἐπιχείρησις ἐπαγγελματικὴ ἐνδιαφερομένη μόνον διὰ τὰς εἰσπράξεις.

ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΙ ΣΧΟΛΩΝ

Τὰ ἐξεταζόμενα μαθήματα ὑπὸ ἑκάστης ΣΧΟΛΗΣ εἰς τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις εἶναι τὰ κάτωθι :

1) ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΝ. Ἄλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Φυσικὴ πειραματική, Χημεία, Ἔκθεσις. Ἡ Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων θέλει ἐπὶ πλέον καὶ σχέδιον.

2) ΓΕΩΠΟΝΙΚΗ. Ἄλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Ἀριθμητική, Φυσική-Χημεία, Ἔκθεσις, Βοτανική, Ζωολογία.

3) ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ. α) ΙΑΤΡΙΚΗ - ΟΔΟΝΤΟΙΑΤΡΙΚΗ. Φυσική, Χημεία, Ἔκθεσις, Ἀνθρωπολογία, Βιολογία. β) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ - ΧΗΜΙΚΗ - ΦΥΣΙΚΩΝ - ΦΥΣΙΟΓΝΩΣΤΩΝ - ΦΑΡΜΑΚΟΠΟΙΩΝ. Ἄλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Φυσική, Χημεία, Ἔκθεσις. γ) ΝΟΜΙΚΗ - ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ - ΘΕΟΛΟΓΙΚΗ. Ἔκθεσις, Ἀρχαία ἑλληνικά, Λατινικά, Ἱστορία.

4) ΑΝΩΤΑΤΗ - ΕΜΠΟΡΙΚΗ. Ἄλγεβρα, Ἀριθμητική, Γεωγραφία παγκόσμιος, Ἔκθεσις.

5) ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ. Ἄλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία, Φυσική, Ἔκθεσις, Ἱστορία παγκόσμιος, Γεωγραφία παγκόσμιος, Γαλλικά.

6) ΙΚΑΡΩΝ. Τὰ αὐτὰ μὲ τὴν Εὐελπίδων.

7) ΔΟΚΙΜΩΝ. Ἄλγεβρα, Γεωμετρία, Θεωρητικὴ ἀριθμητική, Ἔκθεσις ἰδεῶν, Ἀρχαία ἑλληνικὰ (μόνον ὀρθογραφία), Γεωγραφία, Γαλλικά, Ἀγγλικά.

8) ΜΙΚΡΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ. Ἄλγεβρα μέχρι δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, Θεωρητικὴ καὶ Πρακτικὴ ἀριθμητική, Πρακτικὴ γεωμετρία καὶ Θεωρητικὴ Γεωμετρία 1ον καὶ 2ον βιβλίον, Ἔκθεσις, Ἑλληνικὰ (κείμενον ὀρθογραφικόν).

9) ΣΧΟΛΗ ΕΜΠΟΡΟΠΛΟΙΑΡΧΩΝ. Πρακτικὴ ἀριθμητική, Ἑλληνικὰ (Γραμματικὴ καὶ ἀρχαῖο ἑλληνικὸ κείμενο). Ἀρχαῖα ἐκ τοῦ ἀναγνωστικοῦ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς γλώσσης. Ἔκθεσις, Γεωμετρία, Φυσική, Γεωγραφία.

10) ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗ - ΙΑΤΡΙΚΗ. Ἔκθεσις, Φυσικὴ πειραματικὴ μὲ ἀσκήσεις, Χημεία (ὀργανική, ἀνόργανος) μὲ ἀσκήσεις, Γεωγραφία, Ἱστορία, Γαλλικά.

ΠΡΟΣΟΧΗ. Ὅλαι αἱ Σχολαὶ δίδουν εἰς τὴν Φυσικὴν καὶ Χημείαν θεωρία καὶ ἀσκήσεις, εἰς τὰ μαθηματικὰ μόνον ἀσκήσεις ἐκτὸς τῆς Δοκίμων ἡ ὁποία δίδει ἀσκήσεις καὶ θεωρία.

ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ Α. ΠΑΛΛΑ

Τὸ Γραφεῖον Πληροφοριῶν τῶν Φροντιστηρίων δίδει πᾶσαν πληροφορίαν σχετικῶς μὲ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν διαφόρων σχολῶν. Ἵνα εἷς ὑποψήφιος λάβει ἀπάντησιν πρέπει νὰ ἐσωκλείσῃ εἰς τὴν ἐπιστολὴν τὸ ***γραμματόσημον*** ἀπαντήσεως ὡς καὶ γραμματόσημον ἀντίστοιχον τῆς ἀξίας ἑνὸς χαρτοφακέλλου.

ΣΚΟΠΟΣ ΤΟΥ ΕΤΗΣΙΟΥ ΔΕΛΤΙΟΥ

Τὸ «***Ἐτήσιον Δελτίον***» ἤρχισεν ἐκδιδόμενον ἀπὸ τοῦ ἔτος 1947 ὑπὸ τοῦ ***Διευθυντοῦ*** τῶν Φροντιστηρίων κ. Α. ΠΑΛΛΑ. Σκοπὸς τῆς ἐκδόσεώς του εἶναι α) νὰ ἐνημερώσῃ τοὺς ὑποψηφίους εἰς τὰ ζητήματα τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων, β) νὰ κατατοπίσῃ τοὺς νέους κ. κ. ἐξεταστὰς Καθηγητὰς εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν θεμάτων, ἵνα μὴ παρουσιασθῇ ἐκ νέου ἡ περίπτωσις τοῦ νὰ δίδωνται θέματα ἐντελῶς ἀκατάλληπτα, ἐνίοτε γρίφοι καὶ κάποτε λανθασμένα, καὶ γ) νὰ δώσῃ μίαν εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεως τῶν ἀνωτέρων Σχολῶν ἐν Ἑλλάδι.

Εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ «***Ἐτησίου Δελτίου***» ἐβοήθησαν τὸν κ. Α. Πάλλαν οἱ δύο βοηθοί του ***διακεκριμμένοι*** Καθηγηταὶ Μαθηματικῶν ***Μιλτιάδης Τσατσάκης*** καὶ ***Ποθητὸς Σταυρόπουλος***, ὡς καὶ οἱ Καθηγηταὶ τῶν Φροντιστηρίων κ. κ. ***Ν. Σηφάκης*** καὶ ***Ι. Πετρόχειλος***.

ΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Αἱ εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις εἰς τὰς ἀνωτέρας Σχολὰς ὅπως διενεργοῦνται σήμερον νομίζομεν ὅτι δὲν ἐκπληροῦν τὸν σκοπόν των. Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς ἕνα μεγάλο ποσοστὸν εἰσάγονται διὰ τῶν ἐξετάσεων αὐτῶν μαθηταὶ ἀνίκανοι ἐνῷ ἀποκλείονται μαθηταὶ ἱκανοί. Ἀρκεῖ διὰ νὰ πιστοποιήσωμεν τοῦτο νὰ ἀναφέρωμεν τὸ ἑξῆς: «Εἰσάγεταί τις εἰς τὴν Μαθηματικὴν Σχολὴν λαμβάνων μαθηματικὰ 2 καὶ ἔκθεσιν 8 καὶ ἀποτυγχάνει λαμβάνων μαθηματικὰ 6 καὶ ἔκθεσιν 3, ἢ μαθηματικὰ 8 καὶ ἔκθεσιν 1». Εἶναι ἐπίσης γνωστὸν ὅτι πολλοὶ ἐξετασταὶ κ. κ. Καθηγηταὶ ἐπὶ ἓν ἔτος προσπαθοῦν νὰ ἐξεύρουν πρόβλημα γριφῶδες καὶ ἐνίοτε ἐντελῶς ἀκατάλληπτον διὰ νὰ τὸ δώσουν εἰς τὰς εἰσαγωγικὸς ἐξετάσεις. Ἐπὶ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ὡμίλησε πέρυσι ἐνώπιον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας ὁ Διευθυντὴς τῶν Φροντιστηρίων κ. Α. Πάλλας, μὲ θέμα: «Κριτικὴ ἐπὶ τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων». Εἰς τὴν ὁμιλίαν του αὐτὴν ἀνέφερε θέματα δοθέντα εἰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις, ἄλλα «γριφώδη», ἄλλα «ἀκατάλληπτα» καὶ ἄλλα κατὰ τὴν ἔκφρασιν Καθηγητοῦ Ἀνωτάτου Ἱδρύματος, «μυθιστορήματα». Πολλὰ εἶναι τὰ τρωτὰ τὰ ὁποῖα δύναταί τις νὰ ἐκθέσῃ ἐνταῦθα.

Ὁ κ. Πάλλας, πρόεδρος τῆς «*Ἐθνικῆς Ἐκπαιδευτικῆς Ἑταιρείας*», εἰς λόγον του ἐκφωνηθέντα εἰς τὸ ἀμφιθέατρον τῆς φιλοσοφικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου παρουσίᾳ Καθηγητῶν, Δικαστικῶν, Ἀξιωματικῶν, τῶν Ἐπαγγελματικῶν Ὀργανώσεων κ.α., ἐτάχθη ἐναντίον τοῦ θεσμοῦ τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι τόσον τὰ Γυμνάσια τοῦ Κράτους, ὅσον καὶ τὰ ἀνώτατα ἐκπαιδευτικὰ ἱδρύματα θὰ ἀρχίσουν νὰ λειτουργοῦν κανονικῶς καὶ μὲ πᾶσαν αὐστηρότητα. Ἐπειδὴ δυστυχῶς τοῦτο δὲν συμβαίνει ὁ θεσμὸς εἶναι ἀναγκαῖος ἀλλὰ αἱ ἐξετάσεις δὲν θὰ πρέπῃ νὰ γίνωνται ὅπως τώρα. Νομίζομεν ὅτι ἡ προφορικὴ ἐξέτασις ἀπὸ ἐπιτροπὴν 5 καὶ ἄνω Καθηγητῶν καὶ ἡ ἐπὶ τόπου βαθμολογία θὰ ἦτο ὁ καλλίτερος τρόπος κρίσεως τῆς ἱκανότητος τοῦ ὑποψηφίου. Τὸ Ὑπουργεῖον Παιδείας δύναται νὰ συστήσῃ μίαν ἐπιτροπὴν μεγάλην εἰς τὴν ὁποίαν νὰ λάβουν μέρος ὅλαι αἱ κοινωνικαὶ τάξεις καὶ ὀργανώσεις μὲ τὴν ἐντολὴν θὰ ἐξετάσῃ κατὰ ποῖον τρόπον πρέπει νὰ διενεργοῦνται αἱ εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις ὥστε τὰ ἀποτελέσματα νὰ εἶναι δίκαια.

Εἶναι ἀναγκαῖον ὁ ἐκ τῆς ἐπαρχίας ἐρχόμενος μαθητὴς νὰ ἔχῃ τὴν βεβαιώτητα ὅτι θά κριθῇ δικαίως. Δυστυχῶς τοῦτο σήμερον δὲν συμβαίνει. Πολλὰ λέγονται τὰ ὁποῖα καὶ ἐὰν δὲν ἔχουν ἀληθείας δικαίως λέγονται.

Εἶναι ἀντεθνικὸν νὰ πικραίνομεν τοὺς νέους εἰς τὰ πρῶτα αὐτῶν βήματα.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΣΑΣΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 1948 ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΑΥΤΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΙΚΑΡΩΝ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ ΙΔΕΩΝ. Σκέψεις μετὰ τὴν ἐνσωμάτωσιν τῆς Δωδεκαννήσου μετὰ τῆς Μητρὸς Ἑλλάδος.

***ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.** Ἄσκησις 1η. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Δ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, π.χ. τῆς ΒΓ, ἄγεται κάθετος ΔΕ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἀντικειμένης κορυφῆς Α ἀγομένης διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου. **Νὰ δειχθῇ** ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΕ τοῦ ποδὸς Ε τῆς καθέτου ἀπὸ τῆς ῥηθείσης κορυφῆς Α. (Σχ. 1).*

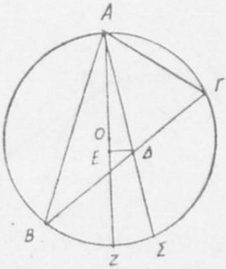
Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων ἔχομεν $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2\left(ΑΔ^2 + \frac{ΒΓ^2}{4}\right)$ (1). ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΣΖ λαμβάνομεν $ΑΔ \,.\, ΑΣ = 2R \,.\, ΑΕ$ ἢ $ΑΔ\,(ΑΔ + ΔΣ) = 2R \,.\, ΕΑ$, ἢ $ΑΔ^2 + ΑΔ \,.\, ΔΣ = 2R \,.\, ΑΕ$ ἢ (ἐπειδὴ εἶναι

ΑΔ . ΔΣ = ΒΔ . ΔΓ = $\frac{ΒΓ^2}{4}$) ἢ $ΑΔ^2 + \frac{ΒΓ^2}{4} = 2R$. ΑΕ. Λόγῳ ταύτης ἡ (1) γίνεται $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2 . 2R$. ΑΕ.

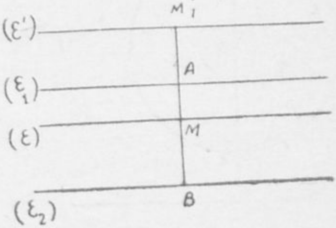
Ἄσκησις 2α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ τόπος τῶν σημείων Μ τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δεδομένων παραλλήλων εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) εἶναι μ : ν.

Λύσις. Ἔστω (Σχ. 2) υ ἡ ἀπόστασις τῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$). Ἔχομεν $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{μ}{ν}$ ἢ $\frac{ΜΑ}{ΜΒ + ΜΑ} = \frac{μ}{ν + μ}$ ἢ $\frac{ΜΑ}{υ} = \frac{μ}{ν + μ}$ ἢ $ΑΜ = \frac{υμ}{ν + μ}$. Ἄρα ὁ γ τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε) ἡ παράλληλος πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ἀπέχουσα τῆς ($ε_1$) ἀπόστασιν $\frac{υμ}{ν + μ}$. Ἐὰν τὸ Μ κεῖται ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν θὰ ἔχωμεν $\frac{Μ_1Α}{Μ_1Β} = \frac{μ}{ν}$ ἢ $\frac{Μ_1Α}{Μ_1Β - Μ_1Α} = \frac{μ}{ν - μ}$ ἢ $\frac{Μ_1Α}{υ} = \frac{μ}{ν - μ}$ ἢ $Μ_1Α = \frac{υμ}{ν - μ}$ καὶ συνεπῶς ὁ γ. τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα ($ε^1$) παράλληλος πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ἀπέχουσα τῆς ($ε_1$) ἀπόστασιν $\frac{υμ}{ν - μ}$.

Ἄσκησις. 3η. Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ εὐθεῖα ΧΨ ἐκτὸς αὐτῆς κάθετος ἐπὶ τυχοῦσαν διάμετρον ΑΒ τῆς Κ. Φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΒΓΔ ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς διαμέτρου τοῦ ἀντικειμένου πρὸς τὴν ΧΨ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Γ καὶ τὴν εἰθεῖαν εἰς τὸ Δ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ΒΔ . ΒΓ εἶναι σταθερόν. (Σχ. 3).



Σχ. 1



Σχ. 2

Λύσις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ λαμβάνομεν ΑΔ : ΑΒ = = ΒΕ : ΒΓ ἢ ΑΔ . ΒΓ = ΑΒ , ΒΕ.

Ἄσκησις 4η. Κύλινδρος καὶ κόλουρος κῶνος ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τοῦ κολούρου κώνου, ὅταν οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν ἔχουν λόγον $\frac{1}{2}$.

Λύσις. Ἐὰν R_1 εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς κοινῆς βάσεως, υ τὸ κοινὸν ὕψος καὶ R_2 ἡ ἀκτὶς τῆς μικροτέρας βάσεως τοῦ κολούρου κώνου, θὰ ἔχωμεν διὰ τοὺς ὄγκους ν καὶ $ν_1$ κυλίνδρου καὶ κολούρου.

$$ν = πR_1^2υ \ , \ ν_1 = \frac{1}{3} π (R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) υ$$

Ἐξ αὐτῶν ἐπειδὴ εἶναι $\nu : \nu_1 = \dfrac{1}{2}$ λαμβάνομεν

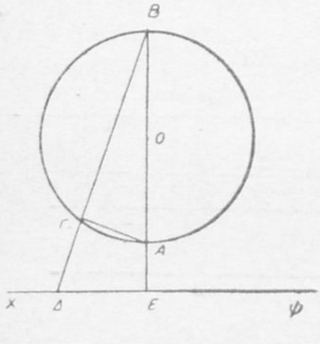
$$\frac{3R_1^2}{R_1^2+R_1R_2+R_2^2}=\frac{1}{2} \text{ ἢ } 6R_1^2=R_1^2+R_1R_2+R_2^2 \text{ ἢ } 5\frac{R_1^2}{R_2^2}-\frac{R_1}{R_2}-1=0.$$

Λυομένη αὕτη ὡς πρὸς $\dfrac{R_1}{R_2}$ δίδει $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$ τῆς ἀρνητικῆς λύσεως ἀπορριπτομένης.

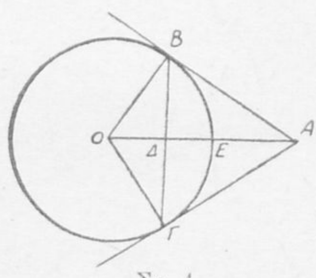
Ἄσκησις 5η. Δίδεται σφαῖρα O καὶ φωτεινὴ πηγὴ A ἐκτὸς αὐτῆς. Ὅταν ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου αὐτῆς, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία προσπτώσεως τοῦ κώνου τοῦ φωτίζοντος τὴν σφαίραν. (Σχ. 4).

Λύσις. Ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια ΒΕΓ τῆς σφαίρας εἶναι μία σφαιρικὴ ζώνη ὕψους ΔΕ καὶ συνεπῶς ἐμβαδοῦ $2\Pi R.(\Delta E)$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς $2\,\Pi R.\,\Delta E=\Pi R^2$ ἢ $\Delta E=\dfrac{R}{2}$ ἢ $R-O\Delta=\dfrac{R}{2}$ (1). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΑ λαμβάνομεν $R^2=(O\Delta)\,(OA)$ ἢ $O\Delta=\dfrac{R^2}{OA}$ ὅτε ἡ (1) γίνεται $R-\dfrac{R^2}{OA}=\dfrac{R}{2}$. Ἐκ ταύτης προκύπτει $OA=2R$, ὅτε ἡ γωνία $\widehat{BAO}$ εἶναι 30° καὶ συνεπῶς ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ τῆς προσπώσεως εἶναι 60°.



Σχ. 3



Σχ. 4

ΑΛΓΕΒΡΑ. Ἄσκησις 1η. Ἐὰν οἱ x, y. ω εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθ. προόδου καὶ οἱ x, y − 1, ω − 1 εἶναι ὅροι γ. προόδου καὶ ἀληθεύει ἡ ἰσότης $y-x=\dfrac{y-1}{x}$ εὑρεῖν τοὺς x, y, ω.

Λύσις. Τὸ πρὸς λύσιν σύστημα εἶναι $2y=x+\omega$ (1), $(y-1)^2=x\,(\omega-1)$ (2), $y-x=\dfrac{y-1}{x}$ (3). Ἡ (3) γράφεται $xy-x^2=y-1$ ἢ $y(x-1)=(x-1)\,(x+1)$ ἢ $(x-1).(y-x-1)=0$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι ἢ $x=1$ ἢ $y=x+1$.

α) Διὰ $x=1$ αἱ (1) καὶ (2) δίδουν $2y=\omega+1$, $(y-1)^2=\omega-1$. Ἐξ αὐτῶν δι' ἀφαιρέσεως προκύπτει $(y-1)^2-2y=-2$ ἢ $y^2-4y+3=0$ ἢ $y_1=3$, $y_2=1$ ὅτε θὰ ἔχωμεν $\omega_1=5$, $\omega_2=1$. Ἄρα εἶναι $x=1$, $y=3$, $\omega=5$ ἢ $x=1$, $y=1$ $\omega=1$.

α) Διὰ $y=x+1$ ἡ (1) γίνεται $2x+2=x+\omega$ ἢ $x+2=\omega$ ἢ $x-\omega=-2$ (α), ἡ δὲ (2) δίδει $x^2=x\omega-x$ ἢ $x(x-\omega)=-x$ ἤ, λόγῳ τῆς (α), $-2x=-x$ ἢ $x=0$ ὅτε θὰ εἶναι $y=1$ καὶ $\omega=2$. Ἄρα εἶναι $x=0$, $y=1$, $\omega=2$.

Ἄσκησις 2α. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $100^{1+\frac{1}{2}\lambda o\gamma x}+1000^{\frac{1}{3}\lambda o\gamma(x-1)-1}=1.$

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $100=10^2$ καὶ $1000=10^3$ αὕτη γράφεται $10^{2+\lambda o\gamma x}+$ $+10^{\lambda o\gamma(x-1)-3}=1$ ἢ $10^2.\ 10^{\lambda o\gamma x}+\dfrac{10^{\lambda o\gamma(x-1)}}{10^3}=1$. Ἀλλὰ $10^{\lambda o\gamma x}=x$ καὶ $10^{\lambda o\gamma(x-1)}=x-1$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $10^2.\ x=\dfrac{x-1}{10^3}=1$ ἢ $10^5x+x-1=10^3$ ἢ $(10^5+1)\ x=10^3+\ x=1$ ἢ $1001:100001$.

Ἄσκησις 3η. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x^4+y^4=\alpha(x+y)^2$ *(1)*, $xy(x-y)^2=$ $=\beta(x+y)^2$ *(2)*.

Λύσις. Θέτομεν $y=\varrho x$ ὅτε αἱ ἐξισώσεις γίνονται $x^4(1+\varrho^4)=\alpha x^2(1+\varrho)^2$ (3), $x^4\varrho(1-\varrho)^2=\beta x^2(1+\varrho)^2$ (4). Διὰ $\varrho=-1$ ἔχομεν $x=0$ καὶ συνεπῶς καὶ $y=0$ ἤτοι τὴν μηδενικὴν λύσιν τοῦ συστήματος. Διὰ $\varrho\neq-1$, διαιρούμεναι αἱ (3) καὶ (4) κατὰ μέλη, δίδουν $\dfrac{1+\varrho^4}{\varrho(1-\varrho)^2}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\beta+\beta\varrho^4=\alpha\varrho-2\alpha\varrho^2+\alpha\varrho^3$ ἢ $\beta\varrho^4-\alpha\varrho^3+2\alpha\varrho^2-\alpha\varrho+$ $+\beta=0$ ἢ $\beta\left(\varrho^2+\dfrac{1}{\varrho^2}\right)-\alpha\left(\varrho+\dfrac{1}{\varrho}\right)+2\alpha=0$. Αὕτη, ἐὰν τεθῇ $\varrho+\dfrac{1}{\varrho}=\omega$ (5), γίνεται $\beta(\omega^2-2)-\alpha\omega+2\alpha=0$ ἢ $\beta\omega^2-\alpha\omega+2\alpha\ \ 2\beta=0$ καὶ συνεπῶς (6) $\omega=$ $=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-8\alpha\beta+8\beta^2}}{2\beta}$, ἔνθα πρέπει $\alpha^2-8\alpha\beta+8\beta^2\geqslant0$ (7). Ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς $\alpha^2-8\omega\beta+8\beta^2=0$ εἶναι αἱ $\alpha=2\beta(2+\sqrt{2})$, $\alpha=2\beta(2-\sqrt{2})$ θὰ πρέπῃ διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ (7) νὰ ἔχωμεν:

$$-\infty<\alpha\leqslant2\beta(2-\sqrt{2})\ \text{ ἢ }\ 2\beta(2+\sqrt{2})\leqslant\alpha<+\infty \text{ ὅταν } \beta>0 \text{ καὶ}$$
$$-\infty<\alpha\leqslant2\beta(2+\sqrt{2})\ \text{ ἢ }\ 2\beta(2-\sqrt{2})\leqslant\alpha<+\infty \text{ ὅταν } \beta>0.$$

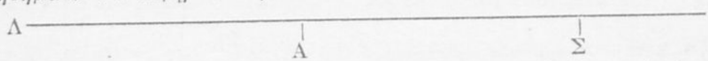
Ἡ (5) γράφεται $\varrho^2-\varrho\omega+1=0$ ἤ, λόγῳ τῆς (6), $2\beta\varrho^2-[\alpha\pm\sqrt{\alpha^2\ \ 8\alpha\beta+\beta^2}\,]\varrho+$ $+2\beta=0$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν διὰ τὸ ϱ τέσσαρας τιμὰς ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4. Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $x=\pm(1+\varrho)\sqrt{\dfrac{\alpha}{1+\varrho^4}}$ ὅτε θὰ εἶναι $y=\varrho x=\pm\varrho(1+\varrho)\sqrt{\dfrac{\alpha}{1+\varrho^4}}$. Ἐξ αὐτῶν θετοντες τὰς τιμὰς ϱ_1, ϱ_2 ϱ_3, ϱ_4 τοῦ ϱ λαμβάνομεν ὀκτὼ λύσεις διὰ τὸ σύστημα.

Ἄσκησις 4η. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ ***ὥστε τὸ κλάσμα*** $\dfrac{x^2-6x+\mu}{x^2-5x+\mu-1}$ ***νὰ εἶναι ἀπλοποιήσιμον ἤτοι νὰ ἰσοῦται πρὸς κλάσμα τῆς μορφῆς*** $\dfrac{x+\eta}{x+\lambda}$.

Λύσις. Τὰ δύο τριώνυμα ἀναλύονται ἕκαστον εἰς τὰ γινόμενα $(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ τὸ πρῶτον καὶ $(x-x_1)(x-x_2)$ τὸ δεύτερον καὶ συνεπῶς, ἵνα συμβαίνῃ τὸ ζητούμενον θὰ πρέπῃ μία τῶν ῥιζῶν ϱ_1, ϱ_2 τοῦ πρώτου νὰ ἰσοῦται πρὸς μίαν τῶν ῥιζῶν x_1, x_2 τοῦ δευτέρου. Ἀλλ' ὡς γνωστὸν τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ ἀπαλοίφουσα $R=(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)$ εἶναι μηδὲν καὶ τὸ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Ἐνταῦθα ἡ ἀπαλοίφουσα εἶναι $R=(\mu-1-\mu)^2-(-5+6)[-6(\mu-1)+15\mu]=$ $=1-(6-\mu)=\mu-5$, ὅτε, ἐπειδὴ πρέπει $R=0$, θὰ ἔχωμεν $\mu=5$. Ἀφ' ἑτέρου εἶναι $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-5+6=1\neq0$. Ἄρα τὸ ζητούμενον συμβαίνει διὰ $\mu=5$. Τότε ἔχομεν

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+4}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-4)}=\frac{x-5}{x-4}.$$

Ἄσκησις 5η. Ἀλώπηξ ἔχει κάμῃ 60 πηδήματα ὅταν λαγωνικὸν ἤρχισε νὰ καταδιώκῃ αὐτήν. Κάμνει ἡ ἀλώπηξ 6 πηδήματα καθ' ὃν χρόνον τὸ λαγωνικὸν κάμνει 4, ἀλλὰ 7 πηδήματα τῆς ἀλώπεκος ἰσοδυναμοῦν πρὸς 4 τοῦ λαγωνικοῦ. Πόσα πηδήματα θὰ κάμῃ τὸ λαγωνικὸν ἕως ὅτου φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα ;



Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ λαγωνικὸν Λ θὰ συναντήσῃ τὴν ἀλώπεκα Α εἰς τὴν θέσιν Σ μετὰ x πηδήματα. Ἐπειδὴ ὅταν τὸ λαγωνικὸν κάμνει 4 πηδήματα ἡ ἀλώπηξ κάμει 6, ἕπεται ὅτι ὅταν τὸ λαγωνικὸν κάμνει x πηδήματα ἡ ἀλώπηξ θὰ κάμνῃ $\frac{6x}{4}$ ἢ $\frac{3x}{2}$. Ἄρα ἡ ἀπόστασις ΛΣ εἶναι $60+\frac{3x}{2}$ πηδήματα ἀλώπεκος ἢ x πηδήματα λαγωνικοῦ. Ἐπειδὴ τὰ 7 πηδήματα ἀλώπεκος ἰσοδυναμοῦν πρὸς 4 λαγωνικοῦ, ἕπεται ὅτι τὰ $60+\frac{3x}{2}$ πηδήματα ἀλώπεκος θὰ ἰσοδυναμοῦν πρὸς $\frac{4}{7}\left(60+\frac{3x}{2}\right)$ λαγωνικοῦ. Ἄρα θὰ ἔχωμεν $\frac{4}{7}\left(60+\frac{3x}{2}\right)=x$. Λυομένη αὕτη δίδει $x=240$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. *Ἄσκησις 1η. Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης $A\equiv$ συν x + συν (120+x)+συν(240+x)=0.*

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $συν(120+x)=συν120\,συν x-ημ120\,ημ x=-\frac{συν x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ημ x$ καὶ $συν(240+x)=συν240συν x-ημ240ημ.x=-\frac{συν x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ημ x$ θὰ ἔχωμεν $A\equiv συν x-\frac{συν x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ημ x-\frac{συν x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ημ x$ ἢ $A\equiv συν x-συν x=0$.

Ἄσκησις 2α. Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις $A=ημ x+ημ 3x+ημ 7x+ημ 9x$.

Λύσις. Ἔχομεν $ημ x+ημ 9x=2ημ 5x συν 4x$ καὶ $ημ 3x+ημ 7x=2ημ 5x συν 2x$ καὶ συνεπῶς $A\equiv2ημ 5x συν 4x+2ημ 5x.συν 2x=2ημ 5x.(συν 4x+συν 2x)$. Ἀλλὰ $συν 4x+συν 2x=2συν 3x.συν x$ ὅτε θὰ ἔχωμεν τελικῶς $A=4ημ 5x.συν 3x.συν x$.

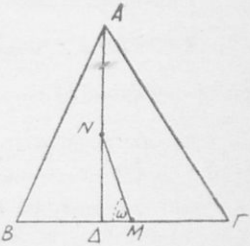
Ἄσκησις 3. Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $ΕφB+ΕφΓ=\frac{\alpha^2}{2E}$ τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $ΕφB+ΕφΓ=\frac{ημ(B+Γ)}{συν B συν Γ}=\frac{ημ A}{συν B συν Γ}$ καὶ $\frac{\alpha^2}{2E}=\frac{\alpha^2.2R}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\alpha.2R}{\beta\gamma}=\frac{2R ημ A.2R}{2R ημ B.2R ημ Γ}=\frac{ημ A}{ημ B.ημ Γ}$ ἡ δοθεῖσα ἰσότης γράφεται $\frac{ημ A}{συν B συν Γ}=\frac{ημ A}{ημ B ημ Γ}$ ἢ ημ A (συν B συν Γ —ημ Βημ

$=0$ ἢ ημ Α . συν (Β+Γ)=0. 'Επειδὴ εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι ημ Α $\neq 0$ θὰ ἔχωμεν συν (Β+Γ)=0 ἤτοι Β+Γ=90. Ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἄσκησις 4. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ $= v_\alpha$. Ἐὰν εὐθεῖα ΜΝ συνδέῃ ἀντιστοίχως τὰ μέσα Ν καὶ Μ τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τῆς ΒΓ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης σφ $\widehat{NMB}$ = σφ Γ – σφ Β.

Λύσις Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ καὶ ΔΜΝ λαμβάνομεν (1) ΒΔ = ΑΔ . σφ Β, ΓΔ= = ΑΔ . σφ Γ, ΔΜ = ΔΝ σφω = $\frac{ΑΔ}{2}$ σφω. Ἔχομεν ΒΜ = ΓΜ ἢ ΒΔ + ΔΜ = ΔΓ – ΔΜ ἢ 2 ΔΜ = ΔΓ – ΒΔ. Αὕτη, λόγῳ τῶν (1), γίνεται ΑΔ σφω = ΑΔ σφ Γ – – ΑΔ σφΒ ἢ σφω = σφ Γ – σφ Β.



Σχ. 5.

ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ 1η. Νόμοι τῆς ἐλευθέρας πτώσεως τῶν σωμάτων καὶ τύποι αὐτῆς. ΘΕΩΡΙΑ 2α. Τῆξις καὶ πῆξις τῶν σωμάτων καὶ νόμοι αὐτῶν. Θερμότης τῆς τήξεως—Θερμότης τήξεως πάγου.

ΑΣΚΗΣΙΣ 1η. Ἔμπροσθεν φακοῦ τίθεται ἀντικείμενον μήκους 4cm. εἰς ἀπόστασιν 156 cm. ἀπ' αὐτοῦ Σχηματίζεται δὲ πραγματικὸν εἴδωλον αὐτοῦ εἰς ἀπόστασιν 4cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Εὕρετε τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν τοῦ φακοῦ καὶ τόν λόγον εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου.

Λύσις Κατὰ τὸν τύπον $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi}$ θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{156}+\frac{1}{4}=\frac{1}{\varphi}$ ἢ $\frac{1}{156}+\frac{39}{156}=\frac{1}{\varphi}$ ἢ $\frac{1}{\varphi}=\frac{40}{156}$ καὶ φ=156 : 40 ἢ 3,9cm.
Ὁ λόγος τῶν μηκῶν εἰδώλου Ε καὶ ἀντικειμένου Α, εἶναι Ε:Α=Π':Π=4:156=1:39.

ΑΣΚΗΣΙΣ 2α. Σῶμα ζυγιζόμενον ἐντὸς ὑγροῦ πυκνότητος $d_1=1,2$ ἔχει βάρος 50gr. Ζυγιζόμενον δὲ ἐντὸς ἑτέρου ὑγροῦ πυκνότητος $d_2=1,5$ ἔχει βάρος 41gr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ὁ ὄγκος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ σώματος.*

Λύσις. Ἐὰν Β εἶναι τὸ βάρος του καὶ ν ὁ ὄγκος του, ἐντὸς τοῦ πρώτου ὑγροῦ θὰ ὑφίσταται ἄνωσιν $A_1=1,2v$. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν Β—1,2v=50 (1). Ἐντὸς τοῦ δευτέρου ὑγροῦ ὑφίσταται ἄνωσιν $A_2=1,5v$, ἄρα Β–1,5v=41 (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $v=30cm^3$ καὶ Β=86τgr*. Ἡ πυκνότης τοῦ σώματος εἶναι d = 86 : 30 ἢ d=2,867 περίπου.

ΑΣΚΗΣΙΣ 3. Δύο δυνάμεις ἴσαι ἐνεργοῦσι ἐπὶ σημείου. Εὕρετε τὴν συνισταμένην αὐτῶν, ἐὰν σχηματίζουν γωνίαν α) 0° β) 60° γ) 120° δ) 180°.

Ἐὰν F εἶναι ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν δυνάμεων, ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι

α) $\Sigma_1=F+F=2F$ β) $\Sigma_2=\sqrt{F^2+F^2+2F.F.\sigma\upsilon\nu 60}=F\sqrt{3}$

γ) $\Sigma_3=\sqrt{F^2+F^2+FF\sigma\upsilon\nu 120}=F$ δ) $\Sigma_4=F_1-F_2=0$

ΣΧΟΛΗ ΔΟΚΙΜΩΝ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ ΙΔΕΩΝ. 'Ο Κόδρος καὶ ἡ αὐτοθυσία του.

ΑΛΓΕΒΡΑ. ***"Ασκησις 1.*** *Προσδιορίσατε τὰ α καὶ β ὥστε ἡ ἐξίσωσις* $x^3-24x-72=0$ *(1) νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν* $\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3=\frac{\alpha}{\beta}$. *(2)*

Λύσις. 'Η (2) γράφεται $\beta(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3)=\alpha(x^3-3\beta x^2+3\beta^2x-\beta^3)$ ἢ $(\beta-\alpha)x^3-3\alpha\beta(\beta-\alpha)x-\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=0$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\alpha\neq\beta$, διότι διὰ $\alpha=\beta$ ἡ (2) γίνεται ταυτότης, θὰ ἔχωμεν $x^3-3\alpha\beta x+\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$. (3) 'Επειδὴ αἱ (1) καὶ (3) πρέπει νὰ ταυτίζωνται θὰ ἔχωμεν $3\alpha\beta=24$ καὶ $\alpha\beta(\alpha+\beta)=-72$ ἢ $\alpha\beta=8$ καὶ $\alpha+\beta=-9$. "Αρα τὰ α καὶ β θὰ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $z^2+9z+8=0$ ἡ ὁποία λυομένη δίδει $z_1=-1, z_2=-8$. Θὰ εἶναι συνεπῶς $\alpha=-1$, $\beta=-8$ ἢ $\alpha=-8, \beta=-1$.

"Ασκησις 2α. *'Εὰν οἱ ἀριθμοὶ α,β,γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι καὶ ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρικῆς προόδου, νὰ δειχθῇ ὅτι οὗτοι εἶναι ἴσοι.*

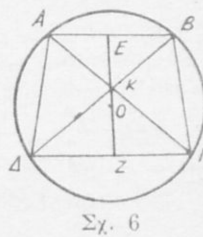
Λύσις. 'Επειδὴ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθ. προόδου θὰ ἔχωμεν $2\beta=\alpha+\gamma$ (1), ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ γεωμ. προόδου θὰ ἔχωμεν ἀκόμη $\beta^2=\alpha\,.\,\gamma$ (2) 'Η (2) λόγῳ τῆς (1) γίνεται $\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4}=\alpha\gamma$ ἢ $(\alpha-\gamma)^2=0$ ἢ $\alpha=\gamma$ ὅτε ἐκ τῆς (1) προκύπτει $\beta=\alpha$.

Θεωρία 1η. Σπουδὴ τοῦ δευτεροβαθμίου τριωνύμου καὶ σημεῖον αὐτοῦ (ἰδὲ Μ. ΑΛΓΕΒΡΑ Α. ΠΑΛΛΑ Τόμος Β').

Θεωρία 2α. Περὶ δυνάμεων καὶ ῥιζῶν καὶ ἰδιότητες αὐτῶν (ἰδὲ Μ. ΑΛΓΕΒΡΑ Α. ΠΑΛΛΑ Τόμος Α'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. ***"Ασκησις 1η.*** ***"Εστωσαν ἔν τινι κύκλῳ δύο χορδαὶ παράλληλοι κείμεναι ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου καὶ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον αὐτόν. Θεωροῦμεν τὸ τραπέζιον τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσεις τὰς πλευρὰς ταύτας. Ζητοῦνται ἐν τῷ τραπεζίῳ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί, τὸ ὕψος ἡ γωνία τῶν διαγωνίων καὶ αἱ διαγώνιοι.***

Λύσις. "Εστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ ἐν λόγῳ παράλληλοι χορδαί. 'Επειδὴ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι πλευραὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἕπεται ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἀντίστοιχως 60^0 καὶ 120^0. Συνεπῶς τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΓΔ θὰ ἔχουν ἄθροισμα $360-(120^0+60^0)$ ἤτοι 180^0 καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσα ἕκαστον θὰ εἶναι 90^0. 'Επομένως αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ ὡς χορδαὶ τόξων 90^0 ἰσοῦνται μὲ τὴν πλευρὰν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο ἤτοι μὲ $\sqrt{2}$ R.



Σχ. 6

Φέρομεν τὴν ΟΖ κάθετον τῆς ΓΔ συνεπῶς κάθετον καὶ τῆς ΑΒ ἥτις τέμνει ταύτην εἰς τὸ Ε 'Η ΕΖ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου. 'Αλλὰ $EZ=OZ+OE$. Τὸ ΟΖ ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2}R$ ὡς ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ τὸ ΟΕ εἶναι $\frac{\sqrt{3}}{2}R$, ὡς ἀπόστημα κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. "Αρα $EZ=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})R$.

'Η γωνία τῶν διαγωνίων $\Gamma\widehat{K}\Delta = \frac{1}{2}(\text{τοξ } \Gamma\Delta + \text{τοξ } AB) = \frac{1}{2}(60^0+120^0)$ $=90^0$ ἤτοι εἶναι ὀρθή.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΚΔ εἶναι ἰσοσκελές, συνεπῶς $2(\Gamma K)^2=(\Gamma\Delta)^2$ ἢ $2(\Gamma K)^2=3R^2$ ἢ $\Gamma K=\frac{\sqrt{6}R}{2}$, ὁμοίως ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου ΑΚΒ ἔχομεν $2(AK)^2$ $=(AB)^2$ ἢ $2(AK)^2=R^2$ ἢ $AK=\frac{\sqrt{2}R}{2}$. 'Επομένως $A\Gamma=AK+K\Gamma=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}R$,

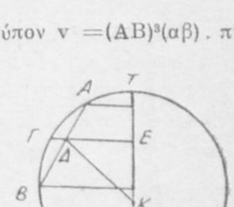
"Ασκησις 2α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τρίτων τοῦ ὕψους του, ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς του ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους του

Λύσις. "Εστω τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓΒ καὶ ΣΤ ἡ διάμετρος περὶ τὴν ὁποίαν τοῦτο στρέφεται καὶ παράγει τὸν σφαιρικὸν δακτύλιον καὶ α καὶ β αἱ προβολαὶ τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὴν ΤΣ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου δίδεται τοῦ τύπου $v=\frac{1}{6}\pi(AB)^2.(\alpha\beta)$. 'Εὰν εἰς τὸ μέσον Ε τοῦ αβ φέρομεν τὸ κάθετον ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τμήσῃ τὴν σφαίραν κατὰ περιφέρειαν ἀκτῖνος ΕΓ καὶ τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν τὴν γραφομένην ὑπὸ τῆς ΑΒ πάλι κατὰ περιφέρειαν ἀκτῖνος ΕΔ. 'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΕΔ ἔχομεν : $K\Delta^2=KE^2+E\Delta^2(1)$ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΚΕΓ ἔχομεν $K\Gamma^2=KE^2+E\Gamma^2(2)$. "Οτε λόγω τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν: $K\Gamma^2-K\Delta^2=E\Gamma^2-E\Delta^2(3)$.

'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΔΑ ἔχομεν $KA^2-K\Delta^2=K\Gamma^2-K\Delta^2=A\Delta^2$ ἢ $K\Gamma^2-K\Delta^2=\frac{(AB)^2}{4}$ ὅτε ἡ (3) γίνεται $(AB)^2=4(E\Gamma^2-E\Delta^2)$.

'Αντικαθιστῶντες τὸ $(AB)^2$ διὰ τοῦ ἴσου του εἰς τὸν τύπον $v=(AB)^2(\alpha\beta).\pi:6$ ἔχομεν $v=2(\alpha\beta)$. Π . $(E\Gamma^2-E\Delta^2):3$ $v=2.(\alpha\beta).$ $\pi(E\Gamma^2-E\Delta^2):3$.

ΘΕΩΡΙΑ 1η. 'Εὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὑπάρχει κοινὴ κάθετος αὐτῶν καὶ μία μόνον. τὸ δὲ μεταξὺ αὐτῶν τμῆμα αὐτῆς εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου εὐθυγράμμου τμήματος περιεχομένου μεταξὺ τούτων. (Εὑρίσκεται εἰς τὴν Μ. Γεωμετρίαν Α. ΠΑΛΛΑ Τόμος Β')



Σχ. 7

ΘΕΩΡΙΑ 2α. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένης διαμέσου ηὐξημένου κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεως τῆς τρίτης πλευρᾶς. (Εὑρίσκεται εἰς τὴν Μ. Γεωμετρίαν Α. ΠΑΛΛΑ ΤΟΜ. Α΄).

ΘΕΩΡ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ. ΑΣΚΗΣΙΣ 1η. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων μὲ διαφορετικοὺς παρονομαστὰς δὲν εἶναι ποτὲ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός.

Λύσις. Ἔστωσαν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἔνθα Κ τὸ ἄθροισμα των.

Ὅτε $K=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $K=\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta}$ ἢ $\alpha\delta+\gamma\beta=\kappa.\beta\delta$ (1).

Ἐὰν τὸ Κ ἦτο ἀκέραιος τὸ β ὡς διαιρῶν τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) θὰ διαιροῦσε καὶ τὸ πρῶτον ἤτοι τὸ αδ+βγ. Ἐφ' ὅσον ὅμως τὸ β διαιρεῖ τὸ ἄθροισμα αδ+βγ καὶ τὸν ἕνα τῶν προσθετέων του, τὸν βγ, κατ' ἀνάγκην θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἄλλον αδ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ β εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α, θὰ διαιρῇ τὸν δ. Συνεπῶς δ= πολ β ἢ δ= μβ(2) ἔνθα μ ἀκέραιος. Ὁμοίως σκεπτόμενοι θὰ ἔχωμεν καὶ β=πολ δ ἤτοι β=νδ (3). Διὰ πολ]σμοῦ τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν βδ=μνβδ ἢ μν=1. Ἐπειδὴ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι καὶ ἔχουν γινόμενον τὴν μονάδα ἕπεται ὅτι μ=ν=1. Ὁπότε ἐκ τῆς (2) ἔχομεν β=δ ὅπερ ἄτοπον διότι τὰ β καὶ δ ὑπετέθησαν διάφορα μεταξύ των.

ΑΣΚΗΣΙΣ 2α. Νὰ ὑπολογισθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις

$$317{,}20\sqrt[5]{\frac{(23{,}41)^3}{2\sqrt{3}}-\sqrt[5]{\frac{3729\times(1{,}032)^{10}\times(0{,}6485)^3}{0{,}0021\times\sqrt[4]{7863}}}}$$

ΘΕΩΡΙΑ 1η. Περὶ Μ.Κ.Δ καὶ Ε.Κ.Π δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας. Ἐφαρμόζοντες ὅσα θὰ ἐκθέσητε εὕρετε τὸν Μ.Κ.Δ τῶν ἀριθμῶν 360, 900, 672.

ΘΕΩΡΙΑ 2α. Ἐξαγωγὴ τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίων κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ὅπου ν τυχὼν ἀκέραιος. Ἐφαρμόσατε ὅσα θὰ ἐκθέσητε, εἰς ἕνα παράδειγμα τῆς ἐκλογῆς σας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ 1948

1) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ. 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Τὸ νὰ γεννηθῇ τις Ἕλλην εἶναι θεῖον δῶρον.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Ἄσκησις 1η. Μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ *(1) ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα* $x^2-x-2<0$ *(2). Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ὁ* γ *ἐὰν εἶναι (3)* $\alpha+\gamma=8$ *καὶ τὸ* $\frac{\beta}{\alpha}$ *ὡς καὶ ἡ ἐν λόγῳ ρίζα x εἶναι λύσις τοῦ συστήματος* $25\frac{\beta}{\alpha}x^2=10^{x+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-1}$, $\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=1$ *(4).*

Λύσις. Θέτομεν $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\omega$, ὅτε τὸ (4) γίνεται $25\omega^2=10^{x+\omega-1}$, $\frac{x}{3}$

$+\frac{\omega}{3}=1$ ἢ $25\omega^2x^2=10^2$, $x+\omega=3$. Ἄρα $5x\omega=\pm 10$, $x+\omega=3$. Οὕτω ἔχομεν τὰ συστήματα $\begin{matrix}\omega x=2\\ x+\omega=3\end{matrix}$ (5) καὶ $\begin{matrix}\omega x=-2\\ x+\omega=3\end{matrix}$ (6). Ἐκ τοῦ (5) ἔχομεν τὰς λύσεις ($x_1=1$, $\omega_1=2$) (7), ($x_2=2$, $\omega_2=1$) (8), ἐκ δὲ τοῦ (6) τὰς λύσεις

$$\left(x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{2},\ \omega_3=\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\ (9),\quad \left(x_4=\frac{3-\sqrt{17}}{2},\ \omega_4=\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\ (10).$$

Ἡ ἀνισότης (2), ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου x^2-x-2 εἶναι -1 καὶ 2 ἐπαληθεύεται διὰ $-1<x<2$. Αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἐπαληθεύουσαι μετὰ τῶν τιμῶν τοῦ ω τὸ σύστημα (4) πρέπει κατὰ τὸ πρόβλημα νὰ ἐπαληθεύουν τὴν (2) ἤτοι πρέπει νὰ κεῖνται μεταξὺ -1 καὶ 2. Ἐκ τῶν λύσεων (7), (8), (9) καὶ (10) μόνον αἱ (7) καὶ (10) ὑπόκεινται εἰς τὸν περιορισμὸν αὐτόν. Ἄρα θὰ ἔχωμεν ὡς δεκτὰς λύσεις τὰς

$$x=1,\ \omega=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=2 \text{ καὶ } x=\frac{3-\sqrt{17}}{2},\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\omega=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \text{ ἢ}$$

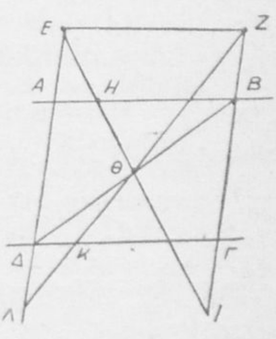
$$x=1\ \omega^2=\frac{\beta}{\alpha}=4\ (11) \text{ καὶ } x=\frac{3-\sqrt{17}}{2},\ \frac{\beta}{\alpha}=\omega^2=\frac{13+3\sqrt{17}}{2}\ (12)$$

Διά τὴν λύσιν (11), ἐπειδὴ τὸ $x=1$ εἶναι ρίζα τῆς (1), θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta+\gamma=11$. Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\beta}{\alpha}=4$ ἢ $\beta=4\alpha$, προκύπτει $5\alpha+\gamma=11$ ἢ $\alpha=-\frac{\gamma}{5}$. Λόγῳ ταύτης ἡ (3) δίδει $\gamma=10$.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως διὰ τὴν λύσιν (12) εὑρίσκομεν $\gamma=8(7+2\sqrt{17}):(5+2\sqrt{17})$.

Ἄσκησις 2α. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ προεκτείνομεν τὰς ΔΑ καὶ ΓΒ κατὰ μήκη ΑΕ = ΒΖ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν σημεῖον Η. Φέρομεν τὴν ΕΗ ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Ι καὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὸ Θ. Φέρομεν κατόπιν τὴν ΖΘ ἥτις τέμνει τήν ΓΔ εἰς τὸ Κ καὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ Λ. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ΔΚ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ ὅταν τὸ μῆκος τοῦ ΑΗ εἶναι ἴσον μὲ $\sqrt{3}+\frac{1}{2}$ μέτρα. Προσέτι δὲ ἂν ληφθῇ ΑΗ=ΔΚ νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Κ, Θ, καὶ Ζ κεῖνται ἀπ' εὐθείας.

Λύσις. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΕΗ καὶ ΕΖΙ ἔχομεν: ΑΗ: ΕΖ=ΑΕ: ΖΙ (1), Τὰ τρίγωνα ΔΚΛ καὶ ΛΕΖ εἶναι ὅμοια, διότι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ συνεπῶς καὶ πρὸς τὴν ΔΓ. Ἄρα ἔχομεν ΔΚ : ΕΖ=ΔΛ: ΛΕ (2). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΘΛ καὶ ΖΘΙ ἔχομεν ΖΙ : ΛΕ=ΘΖ: ΘΛ (3). Τὰ τρίγωνα ΘΔΛ καὶ ΘΒΖ εἶναι ὅμοια ὁπότε ἔχομεν : ΘΖ : ΘΛ=ΒΚ : ΔΛ (4). Συγκρίνοντες τὰ (3) καὶ (4) λαμβάνομεν ΖΙ : ΛΕ=ΒΖ : ΔΛ ἢ ΒΖ : ΖΙ=ΔΛ : ΛΕ (5). Ἐκ τῶν (2) καὶ (5) ἔχομεν ΔΚ : ΕΖ = ΒΖ : ΖΙ ἢ (ἐπειδὴ ΒΖ = ΑΕ) ΔΚ : ΕΖ=ΑΕ : ΖΙ ἢ λόγῳ τῆς (1) ΔΚ : ΕΖ=ΑΗ : ΕΖ ἤτοι ΔΚ=ΑΗ. Ἄρα ΔΚ $=\sqrt{3}+\frac{1}{2}=2{,}232$.



Σχ. 8

Ἐὰν ληφθῇ ΔΚ=ΑΗ θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Θ, Κ κεῖνται ἀπ' εὐθείας· Διότι ἐὰν δὲν ἔκειντο ἐπ' εὐθείας τότε ἡ ΖΘ θὰ ἔτεμνε τὴν ΔΓ εἰς ἄλλο σημεῖον K_1 ὁπότε συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον ζήτημα τὸ $ΔK_1$ θὰ ἦτο ἴσον πρὸς τὸ ΑΗ ἤτοι $ΔK_1=AH$ καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΑΗ=ΔΚ θὰ ἔχωμεν $ΔK_1=ΔK$ ἤτοι τὸ K_1 πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Κ.

***Ἄσκησις 3η.** Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ δίδονται ἐκ τῶν στοιχείων $A=x+\frac{x}{2}$, $Γ=2x+\frac{x}{2}$ ἔνθα x εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $συν2x=συν^2\left(x+\frac{x}{2}\right)$ (1). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ ὡς καὶ τὰ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ὅταν $α=10\sqrt{2}$. μ.*

Λύσις. Ἐπειδὴ $συν^2\left(x+\frac{x}{2}\right)=συν^2\frac{3x}{2}=\frac{1+συν3x}{2}$ ἡ (1) γίνεται $συν2x=(1+συν3x):2$ ἢ $2συν2x=1+συν3x$ (2). Ἀλλὰ $συν2x=2συν^2x-1$ καὶ $συν3x=4συν^3x-3συνx$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰ συν2x καὶ συν3x διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν: $4συν^2x-2=1+4συν^3x-3συνx$. Αὕτη τακτοποιουμένη γίνεται $4συν^3x-4συν^2x-3συνx+3=0$. Αὕτη γράφεται $4συν^2x\cdot(συνx-1)-3(συνx-1)=0$ ἢ $(συνx-1)(4συν^2x-3)=0$ ὁπότε ἔχομεν $συνx=1$ (3) καὶ $συνx=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4). Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν x=o ἥτις ἀπορίπτεται διότι διὰ x=o αἱ Α καὶ Γ γίνονται μηδὲν ὁπότε δὲν ὑπάρχει τρίγωνον. Ἐκ τῶν (4) ἔχομεν $x=150^0$ καὶ $x=30^0$. Ἀλλὰ ἡ $x=150^0$ δίδει Α καὶ Γ μεγαλυτέρας τῶν 180^0 καὶ συνεπῶς ἀπορρίπτεται. Ἐκ τῆς x=30 εὑρίσκομεν Α=45 καὶ Γ=75 ὁπότε $B=180^0-(A+Γ)=60^0$.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας $α:ημA=β:ημB=γ:ημΓ$ διὰ ἀντικαταστάσεως τῶν Α, Β, Γ καὶ α διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν: $10\sqrt{2}:ημ45=β:ημ60=γ:ημ75$. Ἄρα $β=10\sqrt{3}$ καὶ $γ=10\sqrt{2}\,ημ75^0:ημ45$ (5). Ἀλλ' ἐπειδὴ $ημ75^0=συν15^0=$

$$\sqrt{\frac{1+συν30^0}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$, ἔχομεν $γ=10\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $E=\frac{1}{2}βγημA$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τοῦτον τὰ β, γ καὶ Α διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν:

$$E=\frac{1}{2}(10\sqrt{3})(10\sqrt{2+\sqrt{3}})\,ημ45 \text{ ἢ } E=25\sqrt{12+6\sqrt{3}}.$$

ΦΥΣΙΚΗ ΖΗΤΗΜΑ 1ον. Κῦμα καὶ Συμβολή.

ΖΗΤΗΜΑ 2ον. Ὑλικὸν σημεῖον βάρους 10 γραμμαρίων κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 2,5 μ. μὲ σταθερὰν ταχύτητα 2 μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ποία ἡ φυγόκεντρος δύναμις.

Λύσις. Κατὰ τὸν τύπον $F=mv^2:R$ ἔχομεν $F=10.200^2:250$ ἢ F=1600 δύναι.

***ΖΗΤΗΜΑ 3ον.** Τί καλεῖται ἡλιακὸν φάσμα καὶ ποῖαι αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ*

***ΖΗΤΗΜΑ 4ον.** Κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι 10 ἐκ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ πρέπει νὰ θέσωμεν ἀντικείμενον ἵνα σχηματισθῇ εἴδωλον διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου.*

Λύσις. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εἰδώλου καὶ Α τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου θὰ ἔχωμεν Ε:Α=2. Ἀλλὰ Π':Π=Ε:Α. Ἄρα Π'=2Π. (1) Ἐπίσης ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῶν κατόπτρων ἔχομεν . $\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{\Pi'}=\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{\Pi}+\frac{1}{2\Pi}=\frac{1}{10}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\Pi=15$ ἑκ.

*Ζήτημα 5ον. **Ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος 100 γραμμάρια ὕδατος βυθίζομεν σύρμα διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 1 ampère, ἐπὶ 2 πρῶτα λεπτά. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται ἀπὸ** $\Theta_\alpha=17{,}8^0$ **εἰς** $\Theta_t=18{,}8^0$**. Ζητεῖται ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος, ἐὰν τὸ ἰσοδύναμον εἰς ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι 30 γραμμάρια.***

Λύσις. Ἡ ὑπὸ τοῦ θερμιδομέτρου ἀπορροφηθεῖσα θερμότης εἶναι $Q=30$ μικραὶ θερμίδες, ἡ δὲ ὑπὸ τοῦ ὕδατος ἀπορροφηθεῖσα, εἶναι $Q'=100$ μικραὶ θερμίδες· Συνεπῶς ὕδωρ καὶ θερμιδόμετρον ἀπερόφησαν ἐν ὅλῳ θερμότητα ἴσην πρὸς 130 μικρὰς θερμίδας.

Ἡ θερμότης αὕτη παρεχωρήθη ὑπὸ τοῦ σύρματος. Ἀλλ' ἡ ἐπὶ τοῦ σύρματος ἐμφανιζομένη θερμότης, λόγῳ τῆς διόδου τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος δίδεται εἰς μικρὰς θερμίδας, ὑπὸ τοῦ τύπου $Q_1=R\,.\,I^2.\,t:4{,}18$ ὅπου ἡ R ἐκφράζεται εἰς Ὦμ, ἡ I εἰς Ἀμπὲρ καὶ ὁ χρόνος t εἰς δευτερόλεπτα.

Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὴν ἐξίσωσιν $R\,.\,I^2.\,120{:}4{,}18=130$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $R=4{,}528$ ὢμ περίπου.

ΧΗΜΕΙΑ. Ζήτημα 1ον. Σύστασις τῆς ὕλης. Ἄτομα μόρια ἀτομικὰ καὶ μοριακὰ βάρη.

Ζήτημα 2ον. Ὑδρόγονον. Παρασκευή, ἰδιότητες καὶ χρῆσις.

Ζήτημα 3ον. Οὐδέτερον ἀνθρακικὸν νάτριον (σόδα). Παρασκευή, ἰδιότητες, χρῆσις.

Ζήτημα 4ον. Μεθάνιον. Παρασκευή, ἰδιότητες, χρῆσις.

Ζήτημα 5ον. Πόσον ζυγίζει ἓν λίτρον διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος ὑπὸ πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας καὶ θερμοκρασίαν O⁰.

Λύσις. Ἡ σχετικὴ εἰδ. πυκνότης τοῦ Διοξειδίου τοῦ Ἄνθρακος εἶναι 1,5. Ἡ ἀπόλυτος εἶναι 1,5 . 0,013, ἑπομένως τὸ 1 λίτρον θὰ ζυγίζῃ 1 . 1,5 . 0,013 kg.

2. **ΧΗΜΙΚΗ ΣΧΟΛΗ.** ΕΚΘΕΣΙΣ. Ὑπὸ ποίους ὅρους εἶναι δυνατὸν νὰ ὠφελήσῃ τὴν ἀνθρωπότητα ἡ πρόοδος τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Ἄσκησις 1η. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x)\equiv(M-1)x^2-6\,(M-1)x+M+3=0$ ***(α). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι εἰς ἃς δέον νὰ ὑπόκειται τὸ Μ ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (α) εὑρίσκονται μεταξὺ 2 καὶ 7.***

Λύσις. Ἐὰν ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶναι αἱ ρίζαι ζητοῦμεν νὰ εἶναι $2<\varrho_1<\varrho_2<7$ (1). Πρέπει διὰ νὰ εἶναι αἱ ϱ_1 καὶ ϱ_2 πραγματικαὶ νὰ ἔχωμεν διακρίνουσα

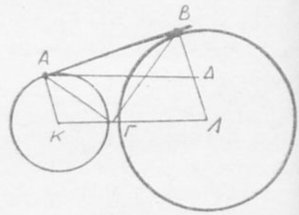
$\Delta\equiv 8(M-1)\left(M-\frac{3}{2}\right)>0$ (2). Ἐπίσης πρέπει νὰ εἶναι $(M-1)\,\varphi\,(2)>0$ $(M-1)\,\varphi\,(7)>o$ ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $\varphi\,(2)=-7\,M+11$ καὶ $\varphi\,(7)=4\,(2\,M-1)$ θὰ ἔχωμεν (3) $(M-1)\,(-7\,M+11)>o$ καὶ (4) $4\,(M-1)\,(2\,M-1)>o$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $2<\varrho_1<\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}<\varrho_2<7$ ἢ $2<\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}<7$ ἢ $2<\frac{3(M-1)}{M-1}<7$ ἢ

$2<3<7$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀληθές. Ἄρα ἀρκεῖ νὰ λυθῇ τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων (2), (3), (4). Λυόμενον τοῦτο (ἰδὲ Μ. Ἄλγεβρα Α. ΠΑΛΛΑ τόμος Β') δίδει $\frac{3}{2}< \mathrm{M} <\frac{11}{7}$.

Ἄσκησις 2α. Δίδονται δύο κύκλοι ἀκτίνων ρ καὶ 2ρ ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς εἰς τό Γ καὶ κέντρων Κ καὶ Λ. Φέρομεν τὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΑΒ ἔνθα Α καὶ Β τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ζητοῦνται α) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ κύκλου τοῦ περιγγεραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ β) ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ γραφομένου ὑπὸ τοῦ Τραπεζίου ΒΛΚΑ στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ.

Λύσις. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΚΛ ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ. Ἡ $\Lambda\Delta=\mathrm{K}\mathrm{A}$, λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΛΚΑ. Συνεπῶς $\Delta\Lambda=\rho$ καὶ $\Delta\mathrm{B}=\Lambda\mathrm{B}-\Lambda\Delta=2\rho-\rho=\rho$. Ἡ δὲ $\mathrm{K}\Lambda=\mathrm{A}\Delta=2\rho+\rho=3\rho$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν $(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{A}\Delta)^2-(\mathrm{B}\Delta)^2$ ἢ $(\mathrm{AB})^2=9\rho^2-\rho^2=8\rho^2$ ἢ $\mathrm{AB}=2\sqrt{2}\,\rho$.

Τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὀρθὴν γωνίαν Γ, συνεπῶς ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἡ ΑΒ. Ἄρα $\mathrm{E}=\pi \cdot \frac{(\mathrm{AB})^2}{4}$. Καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΑΒ διὰ τοῦ ἴσου της ἔχομεν $\mathrm{E}=2\pi\rho^2$ β) Τὸ στερεὸν τὸ παράγομεν ὑπὸ τοῦ τραπεζίου ΛΒΑΚ στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ εἶναι κόλουρος κῶνος μὲ ἀκτίνας βάσεων ρ καὶ 2 ρ καὶ ὕψος τὴν $\mathrm{AB}=2\sqrt{2}\,\rho$, ἄρα ὁ ὄγκος του εἶναι $v=\frac{\pi \cdot 2\sqrt{2}\rho}{3}(\rho^2+2\rho^2+4\rho^2)$ ἤτοι $v=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi\rho^3$.



Σχ. 9

Ἄσκησις 3η. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις· εφx+εφ2x+εφ3x=0 (1).

Λύσις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\text{εφ}\,\alpha+\text{εφ}\beta=\text{ημ}(\alpha+\beta):\text{συν}\,\alpha\,.\,\text{συν}\,\beta$. Βάσει αὐτοῦ ἔχομεν $\text{εφ}x+\text{εφ}2x=\text{ημ}3x:\text{συν}x\,\text{συν}2x$ ὅτε ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{\text{ημ}\,3x}{\text{συν}x\,\text{συν}2x}+\frac{\text{ημ}\,3x}{\text{συν}\,3x}=0 \ (\alpha)$$ ἢ $\text{ημ}3x(\text{συν}3x+\text{συν}x\,\text{συν}2x)=0$ (2). Ἐπειδὴ $\text{συν}3x=4\text{συν}^3x-3\text{συν}x$ καὶ $\text{συν}2x=2\text{συν}^2x-1$ ἡ (2) γίνεται: $\text{ημ}3x(4\text{συν}^3x-3\text{συν}x+2\text{συν}^3x-\text{συν}x)=0$ ἢ $\text{ημ}3x\,\text{συν}x(6\text{συν}^2x-4)=0$ ἢ $\text{ημ}3x\,\text{συν}x(3\text{συν}x-2)=0$ ὁπότε ἔχομεν $\text{ημ}3x=0$ (3) $\text{συν}x=0$ (4) καὶ $\text{συν}x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ (5). Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $3x=\mathrm{K}\pi$ καὶ $x=\mathrm{K}\frac{\pi}{3}$. Αἱ λύσεις τῆς (5) δίδονται διὰ τῶν λογαρίθμων. Αἱ λύσεις τῆς (4) ἀπορρίπτονται διότι μηδενίζουν τὸ Ε.Κ.Π. τῆς (α).

ΦΥΣΙΚΗ. Ζήτημα 1ον. Πῶς μετρᾶται τὸ g καὶ εἰς ποία φαινόμενα γίνεται αἰσθητὴ ἡ μεταβολή του.

Ζήτημα 2ον. Φάσματα ἀπορροφήσεως.

Ζήτημα 3ον. Συνδέσατε ν τό πλῆθος στοιχεῖα κατὰ σειράν, ποσότητα καὶ μικτῶς. Ἡ σύνθεσις δὲ αὕτη νὰ παρασταθῇ γραφικῶς.

Ζήτημα 4ον. Δύο σφαῖραι μεταλλικαὶ μὲ πυκνότητας 5 καὶ 10 ἔχουσαι βάρος Β εἰς τὸ κενόν, ἐξαρτῶνται ἀπὸ τῶν ἄκρων μοχλοῦ καὶ βυθίζονται ἐντός τοῦ ὕδατος. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ, ἵνα ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ.

Λύσις. Ὁ ὄγκος τῆς πρώτης σφαίρας εἶναι $v_1 = B{:}5$ τῆς δὲ δευτέρας $v_2 = B{:}10$. Συνεπῶς ἡ ἄνωσις τοῦ ὕδατος ἐπὶ τῆς πρώτης σφαίρας εἶναι $A_1 = \frac{B}{5}$ ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας εἶναι $A_2 = \frac{B}{10}$ Τὰ φαινόμενα βάρη τῶν δύο σφαιρῶν ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι $B - \frac{B}{5} = \frac{4B}{5}$ τῆς πρώτης καὶ $B - \frac{B}{10} = \frac{9B}{10}$ τῆς δευτέρας. Ἐὰν δὲ οἱ βραχίονες τοῦ μοχλοῦ εἶναι λ καὶ λ′ ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ εἶναι ἡ ἑξῆς: $\frac{4B}{5} . \lambda = \frac{9B}{10} . \lambda'$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\lambda{:}\lambda' = 9{:}8$.

ΧΗΜΕΙΑ. Ζήτημα 1ον. Φωσφόρον. Παρασκευή, προέλευσις, χρῆσις, ἀλλοτροπικαὶ μορφαί, πυρεῖα.

Ζήτημα 2ον. Οξείδιον μολύβδου, ἐπιτεταρτοξείδιον καὶ ἀνθρακικὸς μόλυβδος.

Ζήτημα 3ον. Λίπη, ἔλαια. Σύστασις, φυσικαὶ ἰδιότητες. καὶ φυσικὴ κατάστασις. Σαπωνοποίησις.

Ζήτημα 4ον. Σθένος καὶ ρίζαι μετὰ παραδειγμάτων.

Ζήτημα 5ον. Δίδεται ἕνωσις περιέχουσα α=2,8% ἄνθρακα, β=2,1% ὑδρογόνον καὶ γ=85,1% βρώμιον εἰς θερμοκρασίαν θ=140° c καὶ πίεσιν 76 ἑκατοστομέτρων στήλης ὑδραργύρου. Τὸ ἓν γραμμάριον τῆς ἑνώσεως αὐτῆς ἔχει ὄγκον v=180 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χημικὸς τύπος.

Λύσις. Πρῶτον θὰ διαιρεθοῦν αἱ δοθεῖσαι ἑκατοστιαῖαι ἀναλογίαι διὰ τῶν ἀτομικῶν βαρῶν τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων καὶ θὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ πηλίκα διὰ τοῦ μικροτέρου τοιούτου διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐμπειρικὸς τύπος τῆς ἑνώσεως.

Δεύτερον θὰ εὑρεθῇ πόσον ὄγκον καταλαμβάνουν εἰς 0°C τὰ v κ.ε τῆς ἑνώσεως διὰ τοῦ τύπου $v_0 = \frac{v\vartheta}{1 + \frac{\vartheta}{273}}$ καὶ ἐκ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ, ὅστις ἔχει βάρος 1 γραμμ. θὰ εὑρεθῇ τὶ βάρος θὰ ἔχουν τὰ 22414 κ.ε. τῆς ἑνώσεως, ὅπερ βάρος θὰ παριστᾷ τὸ Μοριακὸν βάρος τῆς ἑνώσεως.

Τρίτον θὰ εὑρεθῇ τὸ Μόρ. βάρος τοῦ εὑρεθέντος ἤδη ἐμπειρικοῦ τύπου.

Τέταρτον θὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ Μοριακοῦ βάρους τῆς ἑνώσεως πρὸς τὸ Μορ. βάρος τοῦ ἐμπειρικοῦ τύπου καὶ

πέμπτον θὰ γραφῇ ὁ Μοριακὸς τύπος τῆς ἑνώσεως λαμβάνοντες ἀριθμὸν ἀτόμων ἑκάστου στοιχείου τὸν ἀναφερόμενον εἰς τὸν ἐμπειρικὸν τύπον πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντα λόγον τοῦ Μοριακοῦ βάρους τῆς ἑνώσεως διὰ τοῦ Μορ. βάρους τοῦ ἐμπειρικοῦ τύπου.

3. **ΦΥΣΙΚΩΝ - ΦΥΣΙΟΓΝΩΣΤΩΝ.** ΕΚΘΕΣΙΣ. Τί ὠφελεῖ τὸν ἄνθρωπον ἡ μετὰ τῆς φύσεως ἐπικοινωνία.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. *"Ασκησις 1η. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :*

$(x+\psi)(x+Z)=\alpha$, $(x+Z)(Z+y)=\beta)$, $(x+y)(Z+y)=\gamma$ (1) ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha=2$ $\beta=4$ $\gamma=8$. «Εὑρίσκεται εἰς τὴν ΜΕΓΑΛΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α. ΠΑΛΛΑ. Τόμος Ι ὑπ' ἀριθ. 1000».

Λύσις. Διὰ πολ)σμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) ἔχομεν :
$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=\alpha\beta\gamma$ ἐξ ἧς ἔχομεν : $(x+y)(y+z)(z+x)=\pm\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ (2).

Διὰ δεαιρέσεως τῆς (2) δι' ἑκάστης τῶν (1) ἔχομεν :

$y+z=\pm\sqrt{\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}}$, $x+y=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}}$, $x+z=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}}$ (3). Διὰ προσθέσεως, κατὰ μέλη, τῶν (3) ἔχομεν: $2x+2y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}}\pm\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}}\pm\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}}$ ἢ $x+y+z=$

$$=\pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}+\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}\right] \quad (4).$$

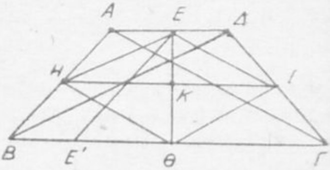
Καὶ ἀφαιροῦντες ἑκάστην τῶν (3) διαδοχικῶς ἀπὸ τὴν (4) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν x, y, z.

'Εφαρμογή. Διὰ $\alpha=2$, $\beta=4$, $\gamma=8$ εὑρίσκομεν τὰς λύσεις :

$$\left(x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{5}{2},\ z=\frac{3}{2}\right),\ \left(x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{5}{2},\ z=-\frac{3}{2}\right).$$

ΑΣΚΗΣΙΣ 1η. Δίδεται ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ΒΓ=α καὶ ΑΔ=β, αἱ δὲ ἴσαι πλευραὶ εἶναι ΑΒ=ΓΔ=γ. 'Εστω Η,Θ,Ι καὶ Ε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου. Νὰ εὑρεθοῦν α) τὰ μήκη ΗΘ,ΘΙ,ΙΕ,ΕΗ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΗΘΙΕ καὶ β) τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραπλεύρων ΑΒ ΓΔ καὶ ΗΘΙΕ.

Λύσις. α) 'Επειδὴ αἱ ΗΘ,ΘΙ,ΙΕ,ΕΝ συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΔΑΓ, καὶ ΔΑΒ ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 10

$ΗΘ=ΕΙ=\dfrac{ΑΓ}{2}$ καὶ $ΕΗ=ΙΘ=\dfrac{ΒΔ}{2}$. 'Αλλὰ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ἔχομεν ΑΓ=ΒΔ. Συνεπῶς $ΗΘ=ΕΙ=ΕΗ=ΙΘ=\dfrac{ΑΓ}{2}$. (1) 'Επειδὴ ὅμως τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον, δυνάμει τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου, θὰ ἔχωμεν :

(ΑΔ)(ΒΓ)+(ΑΒ)(ΔΓ)=(ΑΓ)(ΒΔ). (2) 'Αλλὰ (ΑΔ)=β, (ΒΓ)=α, (ΑΒ)=(ΓΔ)=γ καὶ (ΑΓ)=(ΒΔ). "Οτε διὰ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) ἔχομεν : $\alpha\beta+\gamma^2=(ΑΓ)^2$ ἢ $(ΑΓ)=\sqrt{\alpha\beta+\gamma^2}$ "Αρα $ΗΘ=ΕΙ=ΕΗ=ΙΘ=\dfrac{(ΑΓ)}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta+\gamma^2}$. β) Τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ΕΘ. 'Εκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΕ' παράλληλον τῇ ΑΒ, ὅτε ΕΕ'=ΑΒ=γ καὶ

$E'\Theta = B\Theta - BE' = B\Theta - AE = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $EE'\Theta$ ἔχομεν

$E\Theta^2 = EE'^2 - E'\Theta^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4} = \frac{4\gamma^2-(\alpha-\beta)^2}{4}$ ἤτοι $E\Theta = \frac{1}{2}\sqrt{(2\gamma-\alpha+\beta)(2\gamma+\alpha-\beta)}$

Συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι : $E=(\alpha+\beta) \,.\, E\Theta : 2 = (\alpha+\beta)\sqrt{(2\gamma-\alpha+\beta)(2\gamma+\alpha-\beta)} : 4$, τοῦ δὲ $HEI\Theta$ εἶναι $E_1=(E\Theta) \,.\, (IH) : 2$. Ἀλλὰ $IH=(\alpha+\beta) : 2$ ἄρα $E_1=(\alpha+\beta)\sqrt{(2\gamma-\alpha+\beta)(2\gamma+\alpha-\beta)} : 8$.

Ἄσκησις 3η. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι 250 μ. ἡ δὲ γωνία x τὴν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΓ συνδέεται μετὰ τῆς γωνίας Γ διὰ τῆς σχέσεως ημ2x=ημΓ. (1) Ἐπίσης εἶναι $2\gamma=\sqrt{2}$ β. (2) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A\Delta\Gamma$ ἔχομεν $x=90-\Gamma$ ἢ $2x=180-2\Gamma$. Ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\eta\mu(180-2\Gamma)=\eta\mu\Gamma$ ἢ $\eta\mu 2\Gamma=\eta\mu\Gamma$ ἢ $2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu\Gamma=0$ ἢ $\eta\mu\Gamma(2\sigma\upsilon\nu\Gamma-1)=0$ ἢ $2\sigma\upsilon\nu\Gamma=1$ ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{1}{2}$ καὶ $\Gamma=60^0$. (30) Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $\beta:\gamma=\sqrt{2}$ (4). Καὶ ἐπειδὴ $\beta:\gamma=\eta\mu B:\eta\mu\Gamma$ ἡ (4) γίνεται $\eta\mu B:\eta\mu\Gamma=\sqrt{2}$ ἢ λόγῳ τῆς (3) $\eta\mu B=\sqrt{2}\ \eta\mu\, 60$ ἢ $\eta\mu B=\sqrt{6} : 2$ ἐξ ἧς ὑπολογίζεται ἡ γωνία Β διὰ τῶν λογαρίθμων καὶ ἔστω Θ ἡ τιμή της.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A\Delta\Gamma$ ἔχομεν $A\Gamma=A\Delta : \eta\mu\Gamma$ ἢ $\gamma=250:\eta\mu 60=500\sqrt{3} : 3$ ὁπότε ἐκ τῆς (4) ἔχομεν $\beta=500\sqrt{6} : 3$. Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ ἔχομεν $\alpha:\eta\mu(B+\Gamma)=\gamma:\eta\mu\Gamma$ ἤτοι $\alpha:\eta\mu(60+\Theta)=250:\eta\mu^2 60$ ἢ $\alpha=1000 \,.\, \eta\mu(60+\Theta) : 3$ καὶ ὑπολογίζεται διὰ τῶν λογαρίθμων.

Τὸ $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}\beta\gamma\ \eta\mu\,(B+\Gamma)$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν β,γ,Β,Γ διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν $E=125000\sqrt{2}\ \eta\mu(60+\Theta) : 3$.

ΧΗΜΕΙΑ. Ζήτημα 1ον. Αἰθήρ, παρασκευή, ἰδιότητες καὶ χρῆσις.

Ζήτημα 2ον. Ὑδρόθειον, προέλευσις, παρασκευή, ἰδιότητες καὶ χρῆσις.

Ζήτημα 3ον. Νάτριον, προέλευσις, παρασκευή, ἰδιότητες, χρῆσις.

Ζήτημα 4ον. Στοιχεῖα, μίγματα, χημικαὶ ἑνώσεις καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.

Ζήτημα 5ον. Τρία γραμμάρια ἀνθρακικοῦ νατρίου καὶ ὀξίνου ἀνθρακικοῦ νατρίου θερμαινόμενα ὑφίστανται ἀπώλειαν 0,348 γραμμάρια. Να εὑρεθῇ ἡ ἀναλογία τοῦ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀνύδρου ἀνθρακικοῦ νατρίου εἰς τὸ μῖγμα τοῦτο.

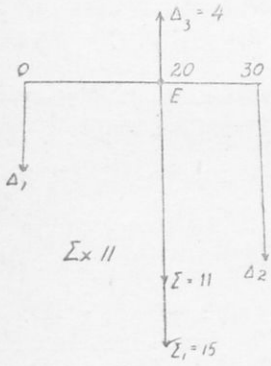
Λύσις. Τὸ ἀνθρακικὸν νάτριον Na_2CO_3 μετὰ τὴν θέρμανσιν ἔχει τὸ αὐτὸ βάρος. Τὸ ὄξυνον μεταβάλλεται εἰς οὐδέτερον κατὰ τὴν ἀντίδρασιν $2NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + CO_2 + H_2O$. Ἑπομένως ἀπώλεια 62 γρ. εἰς CO_2 καὶ H_2O γίνεται κατόπιν θερμάνσεως 145 γρ. $NaHCO_3$· ἀπώλεια 0,348 γρ. θὰ γίνεται ἀπὸ $145 \,.\, \frac{0,348}{62}$ γρ. $= 0,813$ περίπου τὰ ὁποῖα ἦσαν μεμειγμένα μετὰ τῶν 3 γρ. Na_2CO_3. Οὕτω ἡ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἀναλογία τοῦ Na_2CO_3 εἶναι : $3 \,.\, 100 : (3+0,813)$.

ΦΥΣΙΚΗ. Ζήτημα 1ον. Ταχύτης τοῦ φωτός. Ζήτημα 2ον. Συμβολὴ καὶ μῆκος κύματος. Ζήτημα 3ον. Ἰδιότητες τῶν σωλεινοειδῶν.

Ζήτημα 4ον. Δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ἐνεργοῦν ἡ μὲν εἰς τὸ μηδὲν μιᾶς κλίμακος, ἡ δὲ εἰς τὸ 30, ἔχουσαι ἀντιστοίχως ἐντάσεις 4 χιλιογράμμων καὶ 10 χιλιογράμμων.

Εἰς τὸ 20 τῆς κλίμακος ἐνεργεῖ ἑτέρα δύναμις ἀντίρροπος τῶν προηγουμένων ἐντάσεως 4 χιλιογράμμων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων.

Λύσις. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις $\Delta_1=5$ χιλ. καὶ $\Delta_2=10$ χιλ. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν Σ_1 ἐντάσεως 15 χιλ., ἔχει σημεῖον ἐφαρμογῆς Ε τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ Ο ἀπόστασιν x ὑπολογιζομένην ἐκ τῆς σχέσεως $5:10=(30-x):x$ ἐξ ἧς $x=20$. Δηλαδὴ αἱ δυνάμεις Σ_1 καὶ Δ_3 ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ε καὶ ἑπομένως ἡ συνισταμένη αὐτῶν, ἄρα καὶ τῶν δυνάμεων Δ_1, Δ_2 καὶ Δ_3 εἶναι ἡ $\Sigma=11$ χιλ.



Σχ. 11

ΖΗΤΗΜΑ 5ον. Τὸ ἔργον μηχανῆς, ἰσχύος 5 ἀτμοΐππων, ἀπορροφᾶται ἐξ ὁλοκλήρου διὰ τὴν κίνησιν ἄξονος ἀναδεύοντος ὕδωρ μάζης 100 χιλιογράμμων. Τὸ ὕδωρ περιέχεται εἰς δοχεῖον μετάλλινον τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα μετὰ τοῦ ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου ἀναδευτῆρος εἶναι 50 χιλιόγραμμα. Ἂν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου εἶναι 0,1 τὸ δὲ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος 427, νὰ εὑρεθῇ ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ θερμιδομέτρου εἰς 30 πρῶτα λεπτά.

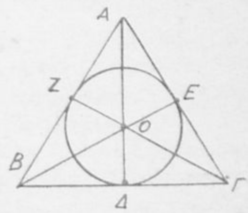
Λύσις. Τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῇ μηχανῆς ἔργον εἰς 30 πρῶτα λεπτὰ εἶναι $E=5\ .\ 75\ .\ 1800=675000$ χιλιογραμμόμετρα. Τὸ ἔργον τοῦτο ἰσοδυναμεῖ πρὸς $675000:427=1580$ μεγάλαι θερμίδες περίπου.

Ἐὰν συνεπῶς ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου ἀνῆλθεν κατὰ x βαθμούς, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν· $100\ .\ x+50\ .\ 0{,}1\ x\ .=1580$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=15{,}05^{\circ}C$ περίπου.

4. ***ΦΑΡΜΑΚΕΥΤΙΚΗ.*** ΕΚΘΕΣΙΣ. Διατὶ προτιμῶνται τὰ συμφέροντα τῆς πολιτείας ἀπὸ τὰ ἰδιωτικά.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ἄσκησις 1η. Διὰ νὰ εἶναι ἓν τρίγωνον ἰσόπλευρον ποῖα ζεύγη ἐκ τῶν ἑξῆς σημείων ἀρκεῖ νὰ συμπίπτουν καὶ διατὶ α) κέντρον περιγεγραμμένης περιφερείας του β) κέντρον ἐγγεγραμμένης περιφερείας του γ) τομὴ τῶν διαμέσων του δ) τομὴ τῶν ὑψῶν του.

Λύσις. α) Ἐὰν συμπίπτουν τὰ κέντρα, ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης περιφερείος εἰς τὸ Ο. Τότε (Σχ. 12) ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ εἶναι ἰσοσκελῆ διότι αἱ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ ὡς ἀκτῖνες τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, καὶ ἐπὶ πλέον αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ καθ' ὅτι τὸ Ο εἶναι κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΒΓ, ΟΒΑ, ΟΓΒ, ΟΓΑ εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς αἱ γωνίαι Α, Β, Γ εἶναι 60^0 ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. β) Ἐὰν τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας συμπίπτῃ μὲ τὴν τομὴν τῶν διαμέσων, τότε εἶναι $ΟΑ=\frac{2}{3}ΑΔ$, $ΟΒ=\frac{2}{3}ΒΕ$, $ΟΓ=\frac{2}{3}ΓΖ$ καὶ ἐπειδὴ $ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ$ ἕπεται $ΒΕ=ΓΖ=ΑΔ$ ἤτοι αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι ἄρα εἶναι ἰσόπλευρον. γ) Ἐὰν ἡ τομὴ τῶν ὑψῶν συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης. Τότε ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΟΓ ἔχομεν γων ΟΓΒ=γων $\widehat{ΟΒΓ}$ (1) Ἀλλὰ γων$\widehat{ΟΓ}$Β$=90^0-$Β καὶ γωνΟΒΓ$=90-$Γ συνεπῶς λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν $90-Β=90-Γ$ ἢ $Β=Γ$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $Α=Γ$ ἤτοι $Α=Β=Γ$. Ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. δ) Ἐὰν συμπίπτουν τὸ κέντρον Ο τῆς ἐγγεγραμμένης μὲ τὴν τομὴν τῶν διαμέσων. Τότε ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι διχότομος τῆς Α καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς ἤτοι $ΑΒ=ΑΓ$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $ΑΓ=ΒΓ$. Ἄρα τὸ ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον. ε) Ἐὰν τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης Ο συμπίπτῃ μὲ τὴν τομὴν τῶν ὑψῶν, τότε τὸ ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον διότι αἱ ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ εἶναι διχοτόμοι καὶ προεκτεινόμεναι εἶναι καὶ ὕψη. στ) Ἐὰν συμπίπτῃ ἡ τομὴ τῶν ὑψῶν Ο μετὰ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τότε αἱ διάμεσοι θὰ εἶναι καὶ ὕψη ὁπότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.



Σχ. 12.

Ἑπομένως ἐὰν δύο ἐκ τῶν ἐν λόγῳ σημείων συμπίπτουν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

***Ἄσκησις 2α** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ημφ, συνφ, εφφ, σφφ ὅταν δοθῇ ὅτι εἶναι* $2εφ\frac{φ}{2}=2-\sqrt{3}$.

Λύσις Εἶναι γνωστὸν ὅτι $ημφ=\dfrac{2εφ\frac{φ}{2}}{1+εφ^2\frac{φ}{2}}$, $συνφ=\dfrac{1-εφ^2\frac{φ}{2}}{1+εφ^2\frac{φ}{2}}$,

$$εφφ=\frac{2εφ\frac{φ}{2}}{1-εφ^2\frac{φ}{2}} \text{ καὶ } σφφ=\frac{1-εφ^2\frac{φ}{2}}{2εφ\frac{φ}{2}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς ἄνω τύπους τὴν $εφ\frac{φ}{2}$ διὰ τοῦ ἴσου της ἔχομεν

$$ημφ=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})^2}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}}=\frac{1}{2},\ συνφ=\frac{1-(7-4\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}}=\frac{-3+2\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{(2\sqrt{3}-3)(2-\sqrt{3})}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad εφφ=\frac{1}{\sqrt{3}},\ σφφ=\sqrt{3}.$$

***Ἄσκησις 3η.** Φαρμακοποιὸς ἠγόρασε ἀριθμὸν τινὰ φυλλιδίων φαρμάκων*

καὶ ἐπλήρωσε τὸ ὅλον 150.000 δραχ. Ἐκ τῶν φυαλλιδίων τούτων τὰ 10 κατεστράφησαν λόγῳ θραύσεως. Ἕκαστον δὲ τῶν ὑπολοίπων ἐπώλησεν κατὰ 200 δρχ. ἀκριβότερον ἀπὸ ὅσον τὰ ἠγόρασεν. Τελικῶς δὲ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως τῶν φυαλλιδίων ἐκέρδισεν 50000 δραχ. Πόσα φυαλλίδια ἠγόρασε καὶ πόσον ἠγόρασεν ἕκαστον φυαλλίδιον.

Λύσις. Ἐὰν x εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν φυαλλιδίων καὶ ψ ἡ τιμὴ ἑκάστου τούτων, τότε θὰ ἐπλήρωσε xy. Ἐπομένως σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα $x\psi=150000$ (1). Λόγῳ τοῦ ὅτι τοῦ ἐθραύσθησαν 10, τοῦ ἔμειναν $x-10$, τὰ ὁποῖα ἐπώλησε κατὰ 2000 δραχ. ἀκριβώτερον ἤτοι πρὸς $\psi+2000$ ἕκαστον ἤτοι εἰσέπραξε $(x-10)(\psi+2000)$ τὰ ὁποῖα ἰσοῦνται μὲ 200.000 δηλαδὴ τὰς 150.000 ποὺ τὰ ἠγόρασε καὶ τὰς 50.000 ποὺ ἐκέρδισε. Συνεπῶς $(x-10)(\psi+2000)=200.000$ (2).

Οὕτω ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} x\psi&=150.000 \\ (x-10)(\psi+2000)&=200.000 \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \begin{aligned} x\psi&=150.000 \\ x\psi-10\psi+2000x-20000&=200.000 \end{aligned}$$

ἢ λόγῳ τῆς πρώτης $x\psi=150.000$, $200x-y=7000$ (3)

Λύοντες τὴν δευτέραν τῶν (3) ὡς πρὸς ψ ἔχομεν $\psi=-7000+200x$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην ἔχομεν : $(-7000+200x)x=150.000$ ἢ $(-70+2x)x=1500$ ἢ $2x^2-70x-1500=0$ ἢ $x^2-35x-750=0$ ἐξ ἧς ἔχομεν $x_1=50$ καὶ $x_2=-15$. Ἡ $x_2=-15$ ἀπορρίπτεται διότι εἶναι ἀρνητική. Συνεπῶς $x=50$. Θέτοντες τὴν τιμὴν $x=50$ εἰς τὴν δευτέραν τῶν (3) ἔχομεν $\psi=3000$. Ἄρα τὰ φυαλλίδια ἦσαν 50 καὶ ἡ τιμὴ ἑκάστου 3000.

ΦΥΣΙΚΗ. Ζήτημα 1ον. Νόμοι τοῦ Βρασμοῦ. Ζήτημα 2ον. Ζυγὸς καὶ εὐπάθεια αὐτοῦ. Ζήτημα 3ον. Θερμομετρικαὶ κλίμακες. Ζήτημα 4ον. Πυκνότης καὶ μέτρησις αὐτῆς. Πυκνότης τῶν ὑγρῶν.

Ζήτημα 5ον. Δοχεῖον περιεκτικότητος 80 κυβ. παλαμμῶν, περιέχει 81,3 χιλιόγραμμα γάλακτος. Νὰ εὑρεθῇ ἐὰν ἔχῃ νοθευθῇ μεθ' ὕδατος καὶ ἐὰν ναὶ πόσον ὕδωρ περιέχει. Εἰδικὸν βάρος τοῦ γάλακτος 1,03.

Λύσις. Ἡ πυκνότης τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ δοχείου γάλακτος εἶναι $d'=\frac{81,3}{80}=1.01625$ δηλαδὴ μικροτέρα τῆς πυκνότητος $d=1,03$ τοῦ καθαροῦ γάλακτος. Συνεπῶς τὸ γάλα εἶναι νοθευμένον.

Ἔστω τώρα, ὅτι x κυβ. παλάμαι καθαροῦ γάλακτος περιέχονται ἐντὸς τοῦ μίγματος. ὁπότε $(80-x)$ κυβ. παλάμαι εἶναι τὸ περιεχόμενον ὕδωρ. Θὰ ἔχωμεν δὲ $1,03x+(80-x)\cdot 1=81,3$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=43\frac{1}{3}$ κυβ. παλάμαι. Συνεπῶς τὸ περιεχόμενον ὕδωρ εἶναι $80-43\frac{1}{3}=36\frac{2}{3}$ κυβ. παλάμαι ἢ $36\frac{2}{3}$ χιλιόγραμμα.

ΧΗΜΕΙΑ. Ζήτημα 1ον. Σθένος τῶν στοιχείων, Ρίζαι. Μετὰ παραδειγμάτων. Ζήτημα 2ον. Ἰώδιον. Προέλευσις καὶ παρασκευή. Ζήτημα 3ον Ὑδράρ-

γυρος. 'Ιδιότητες καὶ χρῆσις. Ζήτημα 4ον. Αἰθήρ. Παρασκευὴ καὶ χρῆσις. Ζήτημα 5ον. Πόσον ὀξείδιον τοῦ ἀσβεστίου καὶ πόσον ἄνθρακα περιέχουν 100 χιλιόγραμμα ἀνθρακασβεστίου.

Λύσις, Τὰ 64kg $C_a\ C_2$ περιέχουν $56C_a\ O$ καὶ 24C. Τὰ 100 θὰ περιέχουν $56\frac{100}{64}C_a\ O$ καὶ $24\frac{100}{64}C$.

ΙΑΤΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Ποία τὰ ἠθικὰ ἐφόδια τοῦ ἐπιστήμονος διὰ τὴν ἐν τῇ κοινωνίᾳ δρᾶσιν του.

ΦΥΣΙΚΗ. Ζήτημα 1ον. Δίδεται κυλινδρικὸν δοχεῖον περιέχον ὕδωρ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 50 cm^2 τὸ δὲ ὕψος 20 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ ὁλικὴ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος.

Λύσις 'Η ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἐξασκουμένη πίεσις εἶναι P=20 γραμμάρια κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον ἢ $P=20\cdot981=19620$ δύνες κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον.

Ἡ ὁλικὴ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ πυθμένος, ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος, τὸ ὁποῖον εἶναι $B=50\ .\ 20=1000$ γραμμάρια ἢ 981000 δύνες.

Ζήτημα 2ον. 'Ακτῖνες* Röntgen *καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.

Ζήτημα 3ον. Εἰς ἀστρονομικὴν διόπτραν ὁ προσοφθάλμιος καὶ ὁ ἀντικειμενικὸς εἶναι φακοὶ ἀμφίκυρτοι, μὲ ἀκτῖνας καμπυλότητος $A_1=A_2=20$cm τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ $\alpha_1=\alpha_2=5$cm τοῦ προσοφθαλμίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγέθυνσις καὶ τὸ μῆκος τῆς διόπτρας. Δείκτης διαθλάσεως ἀμφοτέρων τῶν φακῶν 1,5.

Λύσις. Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου $\frac{1}{\varphi_1}=(\eta-1)\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)$. Ἑπομένως $\frac{1}{\varphi_1}=(1,5-1)\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)$ ἢ $\frac{1}{\varphi_1}=\frac{1}{20}$, ἄρα $\varphi_1=20$cm. Τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι $\frac{1}{\varphi_2}=(\eta-1)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=(1,5-1)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=$ $=\frac{1}{5}$, ἄρα $\varphi_2=5$cm.

Ἡ μεγέθυνσις τῆς διόπτρας εἶναι $M=\varphi_1:\varphi_2$ ἢ $M=4$.

Τὸ μῆκος τῆς διόπτρας ἰσοῦται κατὰ μεγάλην προσέγγισιν μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων τῶν δύο φακῶν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\varphi_1+\varphi_2=20+$ $+5=25$ cm,

Ζήτημα 4ον. Δίδεται δοχεῖον ἀνοικτόν, περιέχον τρίματα πάγου θερμοκρασίας κάτω τοῦ μηδενὸς καὶ μηχανικὸς ἀναδευτήρ. Θερμαίνομεν τὸ δοχεῖον διὰ λυχνίας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μετατροπὴ τῆς θερμοκρασίας καὶ εἰ δυνατὸν νὰ παρασταθῇ αὕτη γραφικῶς.

Λύσις. Κατ' ἀρχὰς ὁ πάγος θερμαίνεται καὶ ἡ θερμοκρασία του ἀνέρχεται μέχρι τοῦ μηδενός. Ἀκολούθως ἄρχεται ἡ πῆξις τοῦ πάγου καὶ ἡ θερμοκρασία παραμένει στάσιμος εἰς 0°C, ἕως ὅτου ὁ πάγος τακῇ ἐξ ὁλοκλήρου, Ἡ θερμοκρασία ἀνέρχεται κατόπιν μέχρι 100°C· ὁπότε ἄρχεται ὁ βρασμὸς καὶ ἡ θερμοκρασία παραμένει σταθερὰ ἔκτοτε μέχρι τελείας ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἐκ τῆς τήξεως τοῦ πάγου.

Γραφικὴ παράστασις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα Ot ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν χρόνων ἡ δὲ εὐθεῖα ΟΘ ὡς ἄξων τῶν θερμοκρασιῶν καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ πάγου εἶναι —Θ°, ἡ ἐξέλιξις τοῦ φαινομένου, παρίσταται ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΚΑΒΓΔ. (Σχ. 13).

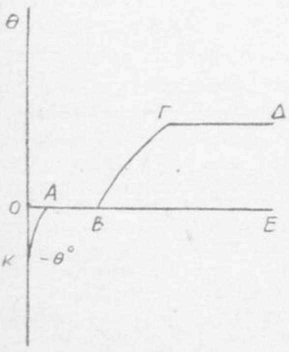
Ζήτημα 5ον. Τὶ εἶναι χωριτικότης πυκνωτοῦ. Τὶ εἶναι εἰδικὴ ἠλεκτρικὴ ἀντίστασις καὶ ποῖαι αἱ μονάδες αὐτῶν.

ΧΗΜΕΙΑ. Ζήτημα 1ον. Νιτρικὸν ὀξύ. Ἐξαγωγή, ἰδιότητες, παρασκευή.

Ζήτημα 2ον. Νόμοι τοῦ *Gay—Lussac.* ***Ζήτημαα 3ον Βενζόλιον. Χρῆσις, παρασκευή, ἰδιότητες. Ζήτημα 4ον. Ψευδάργυρος. Μεταλλουργία, κράμματα, ὀξείδιον ψευδαργύρου, θειϊκὸς ψευδάργυρος.***

Ζήτημα 5ον. Μῖγμα χλωρικοῦ καὶ χλωριοὺχου καλίου εἶναι 5 γραμμάρια. Ἀποσυντιθέμενον δίδει 600 κυβ. ἐκ. ὀξυγόνου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑκατοστιαία σὺνθεσις τοῦ μίγματος.

Λύσις. 600 cm^3 ὀξυγόνου ἔχουν βάρος 0,8 γραμμ. Τὰ 0,8 γρ. ὀξυγόνου παράγονται ἐξ $106,5\frac{0,8}{48}=1,7$ γρ. περίπου $KClO_3$, τὸ ὁποῖον εὑρίσκετο ἐν τῷ μείγματι. Ἑπομένως τὸ μεῖγμα περιέχει $5-1,7=3,3$ γρ. KCl. Οὕτω ἡ ἑκατοστιαία σύνθεσις τοῦ μείγματος θὰ εἶναι:



Σχ. 13

α) εἰς ἄλατα $3,3 \, . \, \frac{100}{5}$ % εἰς KCl καὶ

$1,7 \, . \, \frac{100}{5}$ % εἰς $KClO_3$ καὶ β) εἰς στοιχεῖα

$$K, \left(23\,\frac{1,7}{106,5}+23\,\frac{3,3}{58,5}\right) . \frac{100}{5} \%$$

$$Cl, \left(35,5 \, . \frac{1,7}{106,5}+35,5\,\frac{3,3}{58,5}\right)\frac{100}{5} \% \quad \text{καὶ}$$

$O, \; 48\frac{1,7}{106,5} \, . \, \frac{100}{5}$ % ὅπου 23 εἶναι τὸ ποσὸν Κ τὸ εὑρισκόμενον εἰς ἕκαστον μόριον τοῦ KCE ὡς καί τοῦ $KClO_3$, 35,5 τὸ ποσὸν Cl τὸ εὑρισκόμενον εἰς ἕκαστον μόριον τοῦ KCl ὡς καὶ τοῦ $KClO_3$, 48 τὸ ποσὸν Ο, τὸ εὑρισκόμενον εἰς ἕκαστον μόριον τοῦ $KClO_3$, 106,5 τὸ Μοριακὸν βάρος τοῦ $KClO_3$ καὶ 58,5 τὸ Μοριακὸν βάρος τοῦ KCl.

Σχετικαὶ ἀσκήσεις πρὸς τὴν ἀνωτέρω εἶναι αἱ εἰς τὴν Χημεῖαν Ι. Πετροχείλου Ἐκδ. τῶν Φροντιστηρίων Πάλλα ἀναφερόμεναι εἰς σελ. 202 μὲ ἀρ. 77 καὶ σελ. 194 ἀρ. 10 ἐδιδάχθη δὲ ὅμοια καὶ εἰς τὸ Φροντιστήριόν μας.

ΒΙΟΛΟΓΙΑ. Ζήτημα 1ον. Ποία τὰ κοινὰ γνωρίσματα τῶν ὀργανισμῶν.

Ζήτημα 2ον. Τὶ εἶναι ἐρεθιστικότης καὶ τὶ ἐννοοῦμεν μὲ τὸν ὅρον ἀνώτερα ψυχικὰ φαινόμενα.

Ζήτημα 3ον. Ποῖαι θεωρεῖαι προσπαθοῦν νὰ ἐξηγήσουν τὴν ἐξέλιξιν τῶν ὀργανισμῶν.

Ζήτημα 4ον. Περιγαφὴ τοῦ λάρυγγος. Πῶς παράγεται ἡ φωνή.

Ζήτημα 5ον. Ποῖα ὄργανα ὑπάρχουν ἐντὸς τῆς κοιλιακῆς κοιλότητος καὶ ποία ἡ κυριωτέρα λειτουργία ἑκάστου.

Ζήτημα 6ον. Ποῖαι φυλαὶ κατοικοῦν εἰς τὰ Εὐρωπαϊκὰ κράτη.

Ζήτημα 7ον. Ποία ἡ λειτουργία τοῦ ὠτός.

ΟΔΟΝΤΟΙΑΤΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Διὰ ποίους λόγους τὸ ἡμέτερον Ἔθνος ἀξίζει καὶ πρέπει νὰ ζῇ ἐλεύθερον.

ΦΥΣΙΚΗ. Ζήτημα 1ον. Τί καλεῖται γωνιώδης ἢ γωνιακὴ ταχύτης.

Ζήτημα 2ον. Τροχὸς ἐκτελεῖ 5 στροφὰς κατὰ πρῶτον λεπτόν. Ποία ἡ γωνιώδης ταχύτης αὐτοῦ.

Λύσις. Εἰς 60 sec. ὁ τροχὸς ἐκτελεῖ 5 στροφάς· συνεπῶς ἡ περίοδος εἶναι T=60 : 5=12. Ἡ γωνιώδης ταχύτης συνεπῶς θὰ εἶναι ω=2Π : Τ ἢ ω=Π : 6.

Ζήτημα 3ον. Περιγράψατε τὴν λειτουργίαν τῶν θερμικῶν μηχανῶν δι' ἐκρήξεων. (Βενζινοκινητῆρες). Ζήτημα 4ον. Ἠλεκτρονικὴ λυχνία μὲ δύο ἠλεκτρόδια. Πῶς λειτουργεῖ μὲ συνεχὲς καὶ μὲ ἐναλλασσόμενον ῥεῦμα. Ζήτημα 5ον. Πῶς ἐξηγοῦνται αἱ ῥαβδώσεις τοῦ ἡλιακοῦ φάσματος.

Πρόβλημα 5ον Ροὴ ὕδατος παρέχει 150 κυβικὰ μέτρα ὕδατος κατὰ πρῶτον λεπτὸν καὶ ἐνεργεῖ ἐπὶ ὑδρομύλου ἀπὸ ὕψους 2 μ. Ποῖον τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς 10 ὥρας.

Λύσις. Τὸ πίπτον ὕδωρ εἰς 10 ὥρας εἶναι 600 · 150=90.000 κυβικὰ μέτρα καὶ ἔχει βάρος 90.000.000 χιλιογράμμων. Ἑπομένως τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι 90.000.000 · 2=18 . 10^7 χιλιογραμμόμετρα.

ΧΗΜΕΙΑ. Ζήτημα 1ον. Νόμος τοῦ Dalton. *Ζήτημα 2ον. Ὑδροχλώριον. Προέλευσις, παρασκευή, ἰδιότητες, χρῆσις. Ζήτημα 3ον. Ἀργίλιον. Προέλευσις, παρασκευή, ἰδιότητες, χρῆσις. Κράματα καὶ ὀρυκτά. Ζήτημα 4ον. Γλυκερίνη, Νιτρογλυκερίνη. Ζήτημα 5ον. Πόσον ὀξυγόνον παράγεται ἀπὸ 100 γραμμάρια χλωρικοῦ καλίου. Ἀτομικὸν βάρος καλίου 39, χλωρίου 35,5..*

Λύσις. Ἀπὸ 122, 5 γρ $KClO_3$ παράγονται 48 γρ ἢ 33,6 λίτρα ὀξυγόνου καὶ συνεπῶς ἀπὸ 100 θὰ παραχθοῦν $48\frac{100}{122,5}$ γραμμάρια ἢ $33,6\frac{100}{122,5}$ λίτρα ὀξυγόνου.

***ΒΙΟΛΟΓΙΣ.** Ζήτημα 1ον Χαρακτῆρες τῆς ζωῆς. Ζήτημα 2ον. Ποία τὰ κυριώτερα στάδια τῆς ἀναπτύξεως τοῦ ὀργανισμοῦ. Ζήτημα 3ον. Ποία τὰ κυριώτερα συστατικὰ τοῦ κυτάρου. Ζήτημα 4ον. Κατασκευὴ τῆς καρδίας καὶ λειτουργία αὐτῆς. Ζήτημα 5ον. Κατασκευὴ τοῦ ὀδόντος. Ζήτημα 6ον. 'Αρθρώσεις καὶ εἴδη αὐτῶν. Ζήτημα 7ον. Σιαλογόνοι ἀδένες.*

ΝΟΜΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ «Ἡ παγκόσμιος εἰρήνη καὶ τὰ ἐκ ταύτης ἀγαθά».

β) 'Αρχαῖα 'Ελληνικά. 'Εκ τῶν Ξενοφῶντος 'Ελληνικῶν. (βιβ. Γ, Κεφ. 4 § 25) "Οτε δ' αὕτη ἡ μάχη ἐγένετο, Τισσαφέρνης ἐν Σάρδεσιν ἔτυχεν ὤν, ὥστε ᾐτιῶντο οἱ Πέρσαι προδεδόσθαι ὑπ' αὐτοῦ. γνοὺς δὲ καὶ αὐτὸς ὁ Πέρσων βασιλεὺς Τισσαφέρνην αἴτιον εἶναι τοῦ κακῶς φέρεσθαι τὰ ἑαυτοῦ, Τιθραύστην καταπέμψας ἀποτέμνει αὐτοῦ τὴν κεφαλήν· τοῦτο δὲ ποιήσας ὁ Τιθραύστης, πέμπει πρὸς τὸν 'Αγησίλαον πρέσβεις λέγοντας. Ὦ 'Αγησίλαε ὁ μὲν αἴτιος τῶν πραγμάτων καὶ ὑμῖν καὶ ἡμῖν ἔχει τὴν δίκην· βασιλεὺς δὲ ἀξιοῖ σὲ μὲν ἀποπλεῖν οἴκαδε, τὰς δ' ἐν τῇ 'Ασίᾳ πόλεις αὐτονόμους οὔσας τὸν ἀρχαῖον δασμὸν αὐτῷ ἀποφέρειν· ἀποκρινομένου δὲ τοῦ 'Αγησιλάου ὅτι οὐκ ἂν ποιήσειε ταῦτα ἄνευ τῶν οἴκοι τελῶν, Σὺ δ' ἀλλά, ἕως ἂν πύθῃ τὰ παρὰ τῆς πόλεως, μεταχώρησον, ἔφη, εἰς τὴν Φαρναβάζου, ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ τὸν σὸν ἐχθρὸν τετιμώρημαι.

Παρατηρήσεις. 1) 'Αποτέμνει : Νὰ γραφῶσι τὰ γ'. ἑνικὰ πρόσωπα τῆς ὁριστικῆς ὅλων τῶν χρόνων. ***2) ἀποφέρειν*** : Νὰ γραφῶσι τὰ ἀπαρέμφατα πάντων τῶν χρόνων. 3) Νὰ εὑρεθῇ ἐν τῷ κειμένῳ εἶδος κατηγορηματικῆς μετοχῆς καὶ νὰ γραφῇ ποῖα ῥήματα συντάσσονται μετὰ κατηγορηματικῶν μετοχῶν.

Μετάφρασις. "Οτε ἐγένετο ἡ μάχη αὕτη ὁ Τισσαφέρνης ἔτυχεν νὰ εὑρίσκεται εἰς τὰς Σάρδεις. Διὰ τοῦτο οἱ Πέρσαι τὸν κατηγόρησαν ὅτι εἶχον προδοθῇ ὑπ' αὐτοῦ. Θεωρήσας δὲ καὶ αὐτὸς ὁ βασιλεὺς τῶν Περσῶν τὸν Τισσαφέρνην ὡς αἴτιον τῆς κακῆς τῶν πραγμάτων καταστάσεως του, ἀπέστειλε τὸν Τιθραύστην καὶ τοῦ ἀπέκοψε τὴν κεφαλήν. 'Αφοῦ δὲ ἔπραξε τοῦτο ὁ Τιθραύστης ἀπέστειλε πρὸς τὸν 'Αγησίλαον πρέσβεις, οἵτινες εἶπον εἰς αὐτόν· «'Αγησίλαε ὁ αἴτιος τῶν μεταξὺ ἡμῶν καὶ ὑμῶν δυσχερειῶν ὑπέστη τὴν δέουσαν τιμωρίαν. Ὁ δὲ βασιλεὺς ἀπαιτεῖ σὺ μὲν νὰ ἐπιστρέψῃς εἰς τὴν πατρίδα σου, αἱ δὲ πόλεις ἐν 'Ασίᾳ αἱ διατελοῦσαι αὐτόνομοι νὰ καταβάλλωσιν εἰς αὐτὸν τὸν παλαιὸν φόρον». 'Επειδὴ εἰς αὐτὸν ἀπεκρίθη ὁ 'Αγησίλαος· ὅτι δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ πράξῃ αὐτὸ ἄνευ τῆς συγκαταθέσεως τῶν ἀρχόντων τοῦ τόπου του, «'Αλλὰ σύ, εἶπε, ἕως ὅτου λάβῃς τὰς ὁδηγίας τῆς πατρίδος σου ἀποχώρησον εἰς τὴν χώραν τοῦ Φαρναβάζου, ἀφοῦ καὶ ἐγὼ ἔχω τιμωρήσει τὸν ἐχθρόν σου.

γ) 'Ιστορία. 1) Τίς ἡ διαφορὰ τῆς ἀγωγῆς τῶν 'Αθηναίων καὶ τῶν Σπαρτιατῶν 2) Ποῖον ἀρχαῖον γραπτὸν κείμενον χαρακτηρίζει τὰ ἰδεώδη τῆς 'Αθηναϊκῆς πολιτείας. 3) Τίς ἡ σημασία τῶν Περσικῶν πολέμων. 4) Σπουδαιότης διατάγματος Μεδιολάνου. 5) Κατὰ τί ἐκαινοτόμησαν εἰς τὴν νομοθεσίαν των οἱ Ἴσαυροι. 6) Περὶ τοῦ ἐκχριστιανισμοῦ τῶν Ῥώσων. 7) Ποῖοι ἦσαν οἱ ἁρματολοὶ καὶ εἰς τινας ἐπαρχίας ἐπεκράτησαν. 8) Πῶς ἐπέτυχον οἱ Βούλγαροι τὴν ἵδρυσιν αὐτονόμου ἐκκλησίας· πῶς ὠνομάσθη αὕτη καὶ ποῖος ὁ σκοπὸς ταύτης. 9) Πότε ἐγκατεστάθησαν οἱ Ἄγγλοι εἰς τὴν Κύπρον. 10) Ποῖος ὁ Ῥισελιὲ καὶ ποία ἡ δρᾶσίς του.

δ) Λατινικά. Τὸ θέμα ἐκ λατινικοῦ εἶναι ἀγνώστου ἀναγνωστικοῦ.

Παρατηρήσεις : *1)* **bellare** καὶ **ire** : Νὰ γραφῶσι τὰ γ'. ἑνικὰ πρόσωπα τῆς ὁριστικῆς. 2) **cum populo Romano bellavit** : Νὰ συνταχθῇ ἡ φράσις ἀντὶ τῆς προθ. cum διὰ τῆς προθ. contra.

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. «Πῶς φαντάζεσθε τὸν τέλειον ἄνθρωπον».

β) Ἀρχαῖα Ἑλληνικά. Ἐκ τῆς Ξενοφῶντος Ἀπολογίας τοῦ Σωκράτους. (Κεφ. 22). Ἐρρήθη μὲν δῆλον ὅτι τούτων πλείονα ὑπό τε αὐτοῦ καὶ τῶν συναγορευόντων φίλων αὐτῷ. Ἀλλ' ἐγὼ οὐ τὰ πάντα εἰπεῖν τὰ ἐκ τῆς δίκης ἐσπούδασα, ἀλλ' ἤρκεσέ μοι δηλῶσαι ὅτι Σωκράτης τὸ μὲν μήτε περὶ θεοὺς ἀσεβὴς μήτε περὶ ἀνθρώπους ἄδικος φανῆναι περὶ παντὸς ἐποιεῖτο· τὸ δὲ μὴ ἀποθανεῖν οὐκ ᾤετο λιπαρητέον εἶναι, ἀλλὰ καὶ καιρὸν ἤδη ἐνόμιζεν ἑαυτῷ τελευτᾶν. Ὅτι δὲ οὕτως ἐγίγνωσκε καταδηλότερον ἐγένετο ἐπειδὴ ἡ δίκη διεψηφίσθη. Πρῶτον μὲν γὰρ κελευόμενος ὑποτιμᾶσθαι, οὔτε αὐτὸς ὑπετιμήσατο οὔτε τοὺς φίλους εἴασεν, ἀλλὰ καὶ ἔλεγεν ὅτι τὸ ὑποτιμᾶσθαι ὁμολογοῦντος εἴη ἀδικεῖν. Ἔπειτα τῶν ἑταίρων ἐκκλέψαι βουλομένων αὐτὸν οὐκ ἐφέσπετο, ἀλλὰ καὶ ἐπισκῶψαι ἐδόκει, ἐρόμενος εἴ που εἰδεῖέν τι χωρίον ἔξω τῆς Ἀττικῆς ἔνθα οὐ προσβατὸν θανάτῳ.

Παρατηρήσεις 1) φανῆναι, 2) ἐρόμενος, 3) εἰδεῖεν. Ἀναγνώρισις γραμματικὴ καὶ ἀντικατάστασις.

Μετάφρασις Ἐλέχθησαν σαφῶς περισσότερα ἀπὸ αὐτὰ καὶ ὑπ' αὐτοῦ καὶ ὑπ'τῶν συνηγόρων φίλων του. Ἀλλ' ἐγὼ δὲν ἠσχολήθην ἐπιμελῶς νὰ εἴπω ἐν λεπτομερείᾳ πάντα τὰ ἐκ τῆς δίκης, ἀλλὰ ἐθεώρησα ἀρκετὸν νὰ καταστήσω φανερὸν ὅτι ὁ Σωκράτης τὸ πᾶν μετήρχετο εἰς τὸ νὰ μὴ φανῇ οὔτε πρὸς τοὺς θεοὺς ἀσεβής, οὔτε πρὸς τοὺς ἀνθρώπους ἄδικος· δὲν ἐνόμιζεν ὅτι ἔπρεπε ἐπιμόνως νὰ ἱκετεύσῃ, ἵνα μὴ ἀποθάνῃ, ἀλλὰ καὶ μάλιστα ἐθεώρει ὅτι καιρὸς ἦτο πλέον εἰς αὐτὸν νὰ δώσῃ τέρμα εἰς τὴν ζωήν του. Ὅτι δὲ τοιαύτην ἀπόφασιν εἶχε λάβει κατέστη καταφανέστερον, ὅτε ἡ δίκη ἐκρίθη διὰ ψηφοφορίας. Διότι κατὰ πρῶτον μὲν ὅτε ὑπεδείχθη εἰς αὐτὸν νὰ ἀντιπροτείνῃ ἄλλην ποινὴν (ἣν ἐθεώρει δικαιοτέραν τῆς προταθείσης ὑπὸ τοῦ κατηγόρου), οὔτε αὐτὸς ἀντιπροέτεινε οὔτε τοὺς φίλους του ἀφῆκε νὰ ἀντιπροτείνωσι, ἀλλὰ καὶ ἔλεγεν ὅτι ἡ ἀντιπρότασις εἶναι ἴδιον τοῦ παραδεχομένου ὅτι ἀδικεῖ. Ἔπειτα ἐπιθυμούντων τῶν φίλων νὰ τὸν ἀπαγάγωσι κρυφίως ἐκ τῆς φυλακῆς δὲν συνεφώνησε μὲ τὴν γνώμην των, ἀλλὰ καὶ ἐφαίνετο ἀστεϊζόμενος, ἐρωτήσας ἐὰν γνωρίζωσι κάπου ἔξωθι τῆς Ἀττικῆς νὰ ὑπάρχῃ τόπος τις, ὅπου δὲν ἠδύνατο νὰ φθάσῃ ὁ θάνατος.

γ) Ἱστορία. 1) Γράψατε τοὺς κυριωτέρους ἥρωας τῆς Ὁμηρικῆς ἐποποιΐας

2) 'Αναφέρετε τὰς σπουδαιοτέρας μάχας τοῦ Μεγάλου 'Αλεξάνδρου εἰς 'Ασίαν. 3) Γράψατε τοὺς σπουδαιοτέρους ποιητάς, ῥήτορας καὶ ἱστορικοὺς τῆς Ρώμης. 4) Φραγκικὰ κράτη εἰς 'Ανατολήν. 5) Κρίνετε τὸν Θεμιστοκλέα ἐκ τῶν πράξεών του, 6) Ποῖα τὰ αἴτια τοῦ σχίσματος, πότε ἤρχισε τοῦτο, πότε συνετελέσθη καὶ ποῖα τὰ πρωτοστατήσαντα πρόσωπα. 7) Ποῖα τὰ σπουδαιότερα ναυτικὰ γεγονότα τῆς ἐπαναστάσεως τοῦ 1821. 8) Ποῖαι αἱ σπουδαιότεραι βαλκανικαὶ συμμαχίαι τοῦ 1912. 9) Πότε καὶ ὑπὸ ποίων ἐπολιορκήθη ἡ Κωνσταντινούπολις καὶ πότε κατελήφθη. 10) Ποῖα τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Πελοποννησιακοῦ πολέμου.

δ) Λατινικά. Τὸ θέμα ἐκ συνερραμμένων φράσεων λατινικοῦ ἀγνώστου ἀναγνωστικοῦ.

Παρατηρήσεις 1) *Natus est· mortuus est· obiit* : Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀρχικοὶ χρόνοι καὶ νὰ γραφῇ τὸ πρῶτον πρόσωπον τοῦ Μέλλοντος. 2) *Efesi* : Τί δηλοῖ συντακτικῶς καὶ διὰ τίνος ἄλλης πτώσεως δηλοῦται ;

ΘΕΟΛΟΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. «Ἡ κοινωνικὴ ἀκαταστασία εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς διαταράξεως τῶν ἠθικῶν νόμων».

β) 'Αρχαῖα ἑλληνικά. ('Εκ τοῦ Συμμαχικοῦ ἢ Περὶ Εἰρήνης τοῦ 'Ισοκράτους (ιβ΄. c). Εἰς τοῦτο γάρ τινες ἀνοίας ἐληλύθασιν, ὥσθ' ὑπειλήφασι τὴν μὲν ἀδικίαν ἐπονείδιστον μὲν εἶναι, κερδαλέαν δὲ καὶ πρὸς τὸν βίον τὸν καθ' ἡμέραν συμφέρουσαν, τὴν δὲ δικαιοσύνην εὐδόκιμον μέν, ἀλυσιτελῆ δὲ καὶ μᾶλλον δυναμένην τοὺς ἄλλους ὠφελεῖν ἢ τοὺς ἔχοντας αὐτήν, κακῶς εἰδότες, ὡς οὔτε πρὸς χρηματισμὸν οὔτε πρὸς δόξαν οὔτε πρὸς ἃ δεῖ πράττειν οὔθ' ὅλως πρὸς εὐδαιμονίαν οὐδὲν ἂν συμβάλοιτο τηλικαύτην δύναμιν, ὅσην περ ἀρετὴ καὶ τὰ μέρη ταύτης τοῖς γὰρ ἀγαθοῖς οἷς ἔχομεν ἐν τῇ ψυχῇ, τούτοις κτώμεθα καὶ τὰς ἄλλας ὠφελείας, ὧν δεόμενοι τυγχάνομεν· ὥσθ' οἱ τῆς αὑτῶν διανοίας ἀμελοῦντες λελήθασι σφᾶς αὐτοὺς ἅμα τοῦ τε φρονεῖν ἄμεινον καὶ τοῦ πράττειν βέλτιον ὀλιγωροῦντες.

Παρατηρήσεις.— 1) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ μετοχαὶ καὶ νὰ δειχθῇ ἡ σημασία τῶν λέξεων τῶν ἐξαρτωμένων ἀπ' αὐτάς. 2) Πῶς συντάσσεται τὸ λανθάνω. 3) Νὰ σχηματισθῇ τὸ γ΄ πληθ. πρόσωπον τοῦ ρημ. ὑπολαμβάνω εἰς τὴν ὁριστικὴν πάντων τῶν χρόνων.

Μετάφρασις. Διότι μερικοὶ ἔχουσι φθάσει εἰς τοῦτο τὸ σημεῖον τῆς μωρίας ὥστε ἔχουσι παραδεχθῆ ὅτι εἶναι μὲν ἡ ἀδικία ἀξιοκατάκριτος, ἀλλὰ ἐπικερδὴς καὶ συμφέρουσα πρὸς τὸν καθημερινὸν βίον, ἡ δὲ δικαιοσύνη ἔντιμος μέν, ἀλλὰ ἀνωφελὴς καὶ μᾶλλον ἱκανὴ τοὺς ἄλλους νὰ ὠφελῇ παρὰ ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι τὴν μετέρχονται, ἔχοντες κακὴν ἀντίληψιν, ὅτι οὔτε πρὸς κέρδος οὔτε πρὸς καλὴν ὑπόληψιν οὔτε πρὸς ὅσα πρέπει νὰ πράττωνται οὔτε καθόλου πρὸς τελείαν εὐτυχίαν οὐδόλως ἤθελε συμβάλει τόσην μεγάλην δύναμιν, ὅσην βεβαίως ἔχει ἡ ἀρετὴ καὶ τὰ μέρη αὐτῆς (δηλ. ἡ σωφροσύνη, ἡ δικαιοσύνη καὶ ἡ εὐσέβεια). Διότι διὰ τῶν προτερημάτων, τὰ ὁποῖα κοσμοῦσι τὴν ψυχήν μας, διὰ τούτων ἀποκτῶμεν καὶ τὰς ἄλλας ὠφελείας, τῶν ὁποίων ἔτυχε νὰ στερώμεθα· ὥστε οἱ μὴ φροντίζοντες διὰ τὸν λογισμόν τῶν ἀπροδοκήτως αὐτοὶ ὀλίγον μεριμνῶσι ἐν ταὐτῷ καὶ περὶ τοῦ νὰ σκέπτωνται καλλίτερον καὶ νὰ πράττωσι συμφερώτερον.

Ἱστορία. 1) Ὀνόματα καὶ χρονολογίαι τῶν Μηδικῶν πολέμων. 2) Τί ὀφείλει ἡ Ἀκρόπολις εἰς τὸν Περικλέα. 3) Ὀνόματα καὶ χρονολογίαι τῶν μαχῶν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου. Ποῖα κράτη ἱδρύθησαν ἐπὶ τῶν διαδόχων τοῦ Μ. Ἀλεξάνδρου καὶ αἱ πρωτεύουσαι αὐτῶν. 5) Τί ὀφείλει ἡ Ἐκκλησία εἰς τὸν Μέγαν Κωνσταντῖνον. 6) Κτίσματα καὶ ἀρχιτέκτονες ἐπὶ τοῦ Ἰουστινιανοῦ. 7) Κωνσταντῖνος ὁ 11ος Παλαιολόγος. 8) Κοραῆς καὶ Καποδίστριας. 9) Σημασία τοῦ Θ. Κολοκοτρώνη διὰ τὸν Ἑλληνικὸν ἀγῶνα. 10) Κωνσταντῖνος Κανάρης.

Λατινικά. Τὸ Λατινικὸν θέμα ἐκ φράσεων συνερραμμένων.

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΝ 1948

ΧΗΜΙΚΟΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΕΣ—ΜΕΤΑΛΛΙΟΛΟΓΟΙ—ΤΟΠΟΓΡΑΦΟΙ 1948

ΑΛΓΕΒΡΑ. *Ἄσκησις 1η. Εἰς τὰς ἐξισώσεις : $(\alpha-\gamma)z-(\beta-\alpha)y=3\alpha$ $(\beta-\alpha)x-(\gamma-\beta)z=3\beta$, $(\gamma-\beta)y-(\alpha-\gamma)x=3\gamma$ (1), οἱ ἀριθμοὶ α,β,γ δὲν εἶναι ὅλοι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ x,y,z ἀκεραίους καὶ θετικοὺς οὐδεμία ἄλλη λύσις δύναται νὰ ὑπάρχῃ πλὴν τῆς $x=1$, $y=1$, $z=1$ αὕτη δὲ ὑπάρχει μόνον, ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$.*

Λύσις. Λύομεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν τῶν (1) ὡς πρὸς y καὶ x ἀντιστοίχως ὅτε ἔχομεν $y=[(\alpha-\gamma)z-3\alpha]:(\beta-\alpha)$, $x=[(\gamma-\beta)z+3\beta]:(\beta-\alpha)$ (2). Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν x, καὶ y ἐπαληθεύουν τὴν τρίτην τῶν (1). Συνεπῶς τὸ σύστημα (1) εἶναι ἀόριστον ἤτοι ἔχει ἀπείρους λύσεις, διὰ τὰς ἀπείρους τιμὰς τοῦ z. Ἤδη θὰ ζητήσωμεν τάς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις. Προσθέτοντες τὰς (2) λαμβάνομεν $x+\psi=-z+3$ ἢ $x+y+z=3$ (3). Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὰ x,y,z θέλομεν νὰ εἶναι ἀκέραιοι θετικοί, οἱ μόνοι οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν (3) εἶναι $x=\psi=z=1$. Ἄρα ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκεραία θετικὴ λύσις τοῦ (1) αὕτη θὰ εἶναι $x=1$, $\psi=1$ καὶ $z=1$ (3) καὶ οὐδεμία ἄλλη, διότι οὐδεμία τριάδα ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἄθροισμα 3 ἐκτὸς τῶν τριῶν μονάδων, Ἵνα αἱ (3) ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος (1) πρέπει νὰ τὸ ἐπαληθεύουν ἤτοι νὰ ἔχωμεν $(\alpha-\gamma)-(\beta-\alpha)=3\alpha$ καὶ $(\beta-\alpha)-(\gamma-\beta)=3\beta$. Ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων ἔχομεν $\alpha+\beta+\gamma=0$. Ἄρα αἱ (3) θὰ εἶναι λύσις τοῦ (1) ἐφ' ὅσον $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Ἄσκησις 2α. *Οἱ ἀριθμοὶ l_2, m_2, n_2 ὁρίζονται ἐκ τῶν l_1, m_1, n_1 διὰ τῶν σχέσεων* : $l_2=l_1\dfrac{B+\Gamma}{2}$, $m_2=m_1\dfrac{B-\Gamma}{2}-\eta_1\gamma\Delta$, $n_2=n_1\dfrac{\Gamma-B}{2}=m_1\beta\Delta$ (1) *ἔνθα* $B\Gamma=\Delta^2\beta\gamma$ (2) *καὶ* $B+\Gamma\neq 0$. (3). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἢ ἀμφότεραι αἱ ἰσότητες : $\alpha l^2_1+\beta m^2_1+\gamma n^2_1=0$ (4), $\alpha l^2_2+\beta m^2_2+\gamma n^2_2=0$ (5) ἀληθεύουν ἢ οὐδεμία ἐξ αὐτῶν·

Λύσις. Ἀντικαθιστῶντες τὰ l_2, m_2, n_2 διὰ τῶν ἴσων των εἰς τὴν παράστασιν $\alpha l^2_2+\beta m^2_2+\gamma n^2_2$ ἔχομεν : $\alpha l^2_2+\beta m^2_2+\gamma n^2_2=\alpha l^2_1\dfrac{(B+\Gamma)^2}{4}+\beta\left[\dfrac{(B-\Gamma)^2}{4}m_{12}+\right.$

$\left.+n^2_1\gamma^2\Delta^2-2m_1n_1\gamma\Delta\dfrac{B-\Gamma}{2}\right]+\gamma\left[n^2_1\dfrac{(\Gamma-B)^2}{4}+m^2_1\beta^2\Delta^2-2m_1n_1\beta\Delta\dfrac{(\Gamma-B)}{2}\right]$ ἢ

$\alpha l^2_2+\beta m^2_2+\gamma n^2_2=\alpha l^2_1 \frac{(B+\Gamma)^2}{4}+\beta m^2_1\left[\frac{(B-\Gamma)^2}{4}+\gamma\beta\Delta^2\right]+\gamma n^2_1\left[\frac{(\Gamma-B)^2}{4}+\beta\gamma\Delta^2\right]$

(6). Λόγω τῆς (2) ἡ (6) γίνεται $\alpha l^2_2+\beta m^2_2+\gamma n^2_2=\alpha l^2_1 \frac{(B+\Gamma)^2}{4}+\beta m^2_1\left[\frac{(B-\Gamma)^2}{4}+\right.$

$\left.+B\Gamma\right]+\gamma n^2_1\left[\frac{(B-\Gamma)^2}{4}+B\Gamma\right]$ (7) Ἀλλὰ $\frac{(B-\Gamma)^2}{4}+B\Gamma=\frac{(B-\Gamma)^2+4B\Gamma}{4}=\frac{(B+\Gamma)^2}{4}$

ὁπότε ἡ (7) γίνεται $\alpha l^2_2+\beta m^2_2+\gamma n^2_2=\alpha l^2_1\frac{(B+\Gamma)^2}{4}+\beta m^2_1\frac{(B+\Gamma)^2}{4}+\gamma n^2_1\frac{(B+\Gamma)^2}{4}$

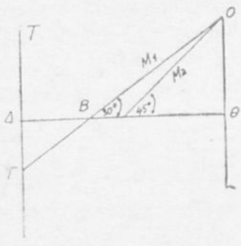
ἢ $\alpha l^2_2+\beta m^2_2+\gamma n^2_2=\frac{(B+\Gamma)^2}{4}(\alpha l^2_1+\beta m^2_1+\gamma n^2_1)$.(8)

Συνεπῶς, ἐφ' ὅσον $B+\Gamma\neq O$, ἰσχυούσης τῆς (4) λόγῳ τῆς (8) ἰσχύει καὶ ἡ (5) καὶ ἀντιστρόφως.

Ἄσκησις 3η. Ἀπὸ τῆς θέσεως O ἀφίνονται συγχρόνως δύο ὑλικὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους των κινοῦνται ἐν τῷ αὐτῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ ἀλλὰ κατὰ διαφόρους τροχιάς. Τὸ M_1 ὀλισθαίνει ἐλευθέρως ἐπὶ εὐθείας ὑπὸ κλίσιν 30^0 πρὸς τὸν ὁρίζοντα, ἐνῷ τὸ M_2 κατ' ἀρχὰς μὲν ὀλισθαίνει ἐπὶ εὐθείας ὑπὸ κλίσιν 45^0, μετὰ 4'' ὅμως συνεχίζει τὴν κίνησίν του ἰσοταχῶς μὲ τὴν ἀποκτηθεῖσαν ταχύτητα ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου Θ. Ἔπειτα τὰ δύο ὑλικὰ σημεῖα διέρχονται συγχρόνως ἀπὸ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον T. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς T ἀπὸ τοῦ O (ἔνθα g=9,81 μ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος, β=gημφ ἡ ἐπιτάχυνσις ἐπὶ ἐπιπέδου κατακορύφου ὑπὸ γωνίαν φ πρὸς τὸν ὁρίζοντα. Μετὰ χρόνον t ἡ ταχύτης ἶσοῦται πρὸς βt καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα πρὸς $\beta t^2:2$. Ὡς γνωστόν: $\eta\mu 45^0=\sigma\upsilon\nu 45^0=\sqrt{2}:2$, $\eta\mu 30^0=1:2$, $\sigma\upsilon\nu 30^0=\sqrt{3}:2$.

Λύσις. Ἡ (Σχ. 14) ἐπιτάχυνσις τοῦ M_2 εἶναι $\beta_2=g\eta\mu 45=g\sqrt{2}:2$ καὶ τοῦ M_1 εἶναι $\beta_1=g\eta\mu 30=g:2$. Τὸ M_2 μετὰ χρόνον 4'' διήνυσε τὸ διάστημα $OA=\beta_2 4^2:2=$ $=4g\sqrt{2}$. Ὁπότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAΘ ἔχομεν $A\Theta=AO\ \eta\mu 45^0=$ $=4g\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}:2=4g$.

Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν ἀπόστασιν ΘΔ τῶν κατακορύφων OΘ καὶ T, τότε τὸ



Σχ. 14

$A\Delta=x-A\Theta=x-4g$. Ἡ ταχύτης ὅμως τοῦ M_2 εἰς τὸ A ἤτοι μετὰ πάροδον 4'' εἶναι $\beta_2\cdot 4$ ἤτοι $v=2\sqrt{2}\,g$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ M_2 διήνυσε τὸ διάστημα AΔ ἰσοταχῶς, χρόνος t ὃν ἐχρειάσθη τὸ M_2 νὰ διανύση τὸ ΑΔ θὰ εἶναι $t=(\text{ΑΔ}):v$ ἢ $t=(x-4g)$: $2\sqrt{2}\cdot g$. Τὸ M_1 διήνυσε τὸ διάστημα ΟΓ εἰς χρόνον $t+4$ ἤτοι $\frac{x-4g}{2\sqrt{2}\,g}+4$ ἢ

$\frac{x+4g(2\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}.g}$. Συνεπῶς $(\text{ΟΓ})=\frac{1}{2}\beta_1\left[\frac{x+4g(2\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}g}\right]^2$ ἢ $(\text{ΟΓ})=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{2}\cdot\left[\frac{x+4g(2\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}g}\right]^2.$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ΔΘ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ ΟΓ ἔχομεν: $(\text{ΔΘ})=(\text{ΟΓ})$ συν 30^0 ἢ $x=(\text{ΟΓ})\sqrt{3}:2$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς ταύτην τὸ ΟΓ διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν

$x=\frac{\sqrt{3}}{8}g\,\frac{[x+4g(2\sqrt{2}-1)]^2}{8g^2}$. Λυομένη αὕτη δίδει τὸ x.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. ***Ἄσκησις 1η. 1) Δίδονται τρία εὐθύγραμμα τμήματα. Εὑρεῖν τὴν συνθήκην ἵνα ταῦτα α) εἶναι πλευραὶ τριγώνου οἱουδήποτε β) ὀρθογωνίου τριγώνου γ) ὀξυγωνίου καὶ δ) Ἀμβλειγωνίου.***

1) Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ καὶ σημεῖον ἐπ' αὐτῆς Σ διάφορον τοῦ κέντρου. Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῆς διαμέτρου εἰς τὸ Σ καὶ τοιοῦτος ὥστε αἱ ἐκ τῶν Α καὶ Β ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι νὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας.

Λύσις. 1) Ὁ συνθήκη ἵνα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα α,β,γ εἶναι α) πλευραὶ τριγώνου εἶναι $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$ 2) ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ ἐὰν α τὸ μεγαλύτερον 3) $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$ ἵνα εἶναι ὀξυγώνιον καὶ 4) $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ ἵνα εἶναι ἀμβλειγώνιον. Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἄνω εὑρίσκεται εἰς τὸν Α΄ τόμ. τῆς Γεωμετρ. Α. Πάλλα.

2) Ἀνάλυσις. Ἔστω Κ (Σχ. 15) τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Φέρω τὰς ΑΚ καὶ ΚΒ. Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια Κ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $\text{ΑΚΒ}=135^0$. Ἄρα τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΑΒ καὶ δεχομένου γωνίαν 135^0.

Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια Κ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς σταθερὸν σημεῖον αὐτῆς Σ τὸ Κ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Σ. Οὕτω τὸ Κ εἶναι ὡρισμένον ὡς τομὴ τοῦ τόξου καὶ τῆς καθέτου.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τόξον δεχόμενον γωνία 135^0. Ἐκ τοῦ Σ ὑψώνομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΣΚ ἥτις τέμνει τὸ τόξον ΑΚΒ εἰς τὸ Κ. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΣ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

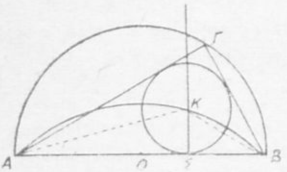
Ἀπόδειξις. Αἱ ἐκ τῶν Β καὶ Α ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι ἔστω ὅτι τέμνονται εἰς τὸ Γ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία $\widehat{\text{ΑΚΒ}}$ ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον ΑΚΒ ἰσοῦται μὲ 135^0 καὶ εἶναι γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἕπετα ὅτι ἡ γωνία $\frac{\Gamma}{2}=135^0-90$ ἤτοι $\Gamma=90$. Ἄρα τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ἐφάπτεται δὲ καὶ τῆς ΑΒ εἰς τὸ Σ, διότι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος τῇ ΚΣ. Συνεπῶς εἶναι ὁ ζητούμενος κύκλος.

Ἄσκησις 2α. Τί καλεῖται γ. τόπος. Ἀναφέρατε παραδείγματα ἐκ τῆς στερεομετρίας. Ποία ἡ χρησιμότης τῶν τόπων εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν καὶ στερεομετρίαν. Ἀναφέρατε σχετικὸν παράδειγμα. 2) Δίδεται παραλληλόγραμμμον ἀρθρωτὸν ΑΒΓΔ οὗ ἡ πλευρὰ ΑΒ σταθερά. Εὑρεῖν τὸν γ. τόπον τοῦ σημείου τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ τῆς εὐθείας ΒΕ ἔνθα Ε τὸ μέσον τῆς ΓΔ.

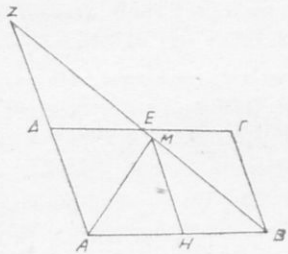
Λύσις 1) ἰδὲ Μ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α. ΠΑΛΛΑ. 2) Ἔστω *(Σχ. 16)* Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς Α καὶ τῆς ΒΕ. Προεκτείναμεν τὴν ΑΔ καὶ τὴν ΒΕ αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν παράλληλον τῇ ΑΔ τὴν ΜΗ.

Θέτομεν ΑΔ=ΒΓ=α καὶ ΑΒ=ΓΔ=β ὅπου α καὶ β σταθερὰ διότι τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἀρθρωτόν.

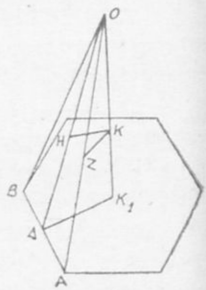
Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΖΒ ἔχομεν (1) ΑΖ : ΑΒ=ΖΜ : ΒΜ. Ἀλλὰ λόγῳ τῆς ἰσό-



(Σχ. 15)



(Σχ. 16)



(Σχ. 17)

τητος τῶν τριγώνων ΔΕΖ καὶ ΒΕΓ ἔχομεν ΔΖ=ΒΓ=α. Οὕτω ἡ (1) γίνεται 2α : β= =ΖΜ : ΒΜ ἢ ΒΜ : (ΒΜ+ΖΜ)=β : (β+2α) ἢ ΒΜ : ΒΖ=β : (β+2α) (2).

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΜΗ καὶ ΒΑΖ ἔχομεν ΒΜ : ΒΖ=ΒΗ : ΑΒ= =ΗΜ : ΑΖ (3). Ἀλλὰ ἐπειδὴ ΑΒ=β, ΑΖ=2α καὶ ΒΜ : ΒΖ=β : (β+2α), ἡ (3) γίνεται : β : (β+2α)=ΒΗ : β=ΗΜ : 2α.

Ἄρα (ΒΗ)=β² : (β+2α) καὶ (ΗΜ)=2βα : (β+2α). Συνεπῶς τὸ Η εἶναι σταθερὸν καὶ ἡ ΗΜ σταθερά. Ἄρα ὁ γ. τόπος εἶναι περιφέρεια κέντρου Η καὶ ἀκτῖνος (ΗΜ)=2αβ : (β+2α). Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Ἄσκησις 3η. 1) Τί καλεῖται σφαιρικὸν τμῆμα, τί σφαιρικὴ ζώνη, τί κανονικὴ πυραμίς. 2) Κανονικῆς πυραμίδος τὸ ὕψος εἶναι 2α ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι α. Εὑρεῖν α) τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης τῆς ἐχούσης βάσιν τὴν τομὴν τῆς σφαίρας ὑπὸ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ μὴ περιεχούσης τὴν πυραμίδα ὡς καὶ τὸν ὄγκον τοῦ ἀντιστοίχου, πρὸς τὴν σφαιρικὴν ταύτην ζώνην σφαιρικοῦ τμήματος.

Λύσις 1) ἰδὲ Μ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α. ΠΑΛΛΑ. Τόμ. Β'). 2) Τὸ κέντρον (Σχ. 17) τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ὕψους ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς ἔστω τῆς ΟΑ. Ἔστω Ζ τὸ μέσον τῆς ΟΑ καὶ Κ τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ Ζ ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ τοῦ ὕψους $ΟΚ_1$. Τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΚΖ καὶ $ΟΚ_1Α$ ἔχομεν $ΟΖ : ΟΚ_1 = ΟΚ : ΟΑ$ ἢ $(ΟΖ)(ΟΑ)=(ΟΚ)(ΟΚ_1)$ (1). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ΟΚ_1Α$ ἔχομεν $(ΟΑ)^2=(ΟΚ_1)^2+(Κ_1Α)^2$ καὶ ἐπειδὴ $ΟΚ_1=2α$, $Κ_1Α=α$ εἶναι $ΟΑ^2=5α^2$ ἢ $ΟΑ=\sqrt{5}\,α$ καὶ $ΟΖ=\sqrt{5}.α : 2$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ ΟΓ, ΟΑ. $ΟΚ_1$ εἰς τὴν (1) διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν $5α^2 : 2=(ΟΚ) . 2α$ ἢ $(ΟΚ)=5α : 4$.

Ἄρα ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι $ΟΚ=5α : 4$ β) Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας ἀχθῇ ἡ ΚΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΑΒ αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου Η τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καθ' ὃν τέμνεται ἡ σφαῖρα Κ ὑπὸ τῆς ἐν λόγῳ ἕδρας. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελὲς τὸ Η ὡς κέντρον περιγεγραμμένης περιφερείας εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΟΔ. Τὸ $ΟΔ^2=ΟΚ_1^2+Κ_1Δ^2$ λόγῳ τοῦ ὀρθογ. τριγ. $ΟΚ_1Δ$. Ἀντικαθιστῶντες τὰ $ΟΚ_1=2α$ καὶ $Κ_1Δ=\dfrac{\sqrt{3}\,α : 2}{2}$ ἔχομεν $ΟΔ^2=\dfrac{3α^2}{4}+4α^2$ ἢ $ΟΔ^2=19α^2 : 4$ ἢ $ΟΔ=\sqrt{19}α : 2$.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΟΚΗ καὶ $ΟΚ_1Δ$ ἔχομεν $ΟΗ : ΟΚ_1=ΟΚ : ΟΔ= =ΚΗ : Κ_1Δ$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ $ΟΚ_1$, ΟΔ, ΟΚ, $Κ_1Δ$, διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν $ΟΗ : 2α=5α : 2\sqrt{19}=2.ΚΗ : α\sqrt{3}$. Ἐξ ὧν $ΟΗ=5α ; \sqrt{19}$, $ΚΗ=5\sqrt{3} . α : 4\sqrt{19}$. Ἐὰν υ καλέσω τὸ ὕψος τῆς ζώνης ποῦ ζητᾷ τὸ πρόβλημα τότε $υ=ΟΚ-ΚΗ$ καὶ συνεπῶς $υ=5α(19-\sqrt{57}) : 76$

Ἑπομένως ἐμβαδὸν σφαιρ. ζώνης $=25πα^2(19-\sqrt{57}) : 152$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον $V=πυ[3(ΟΗ)^2+υ^2] : 6$ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τὰ ΟΗ καὶ υ εὑρίσκομεν τὸ V.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. ***Ἄσκησις 1η. Δοθέντος τριγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου, ἄγομεν τρεῖς ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύκλον τοῦτον παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Τοιουτοτρόπως σχηματίζονται τρία νέα τρίγωνα ἐντὸς τοῦ δοθέντος. Νὰ ἀποδειχθῇ α'.) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρία νέα τρίγωνα ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ β) ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὴν ὀγδόην δύναμιν τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον.***

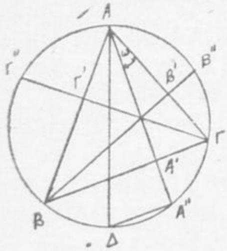
Λύσις. α) Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν (Σχ. 18) τρίγωνον καὶ Ο ὁ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένος κύκλος ἀκτῖνος ρ. Παριστῶμεν διὰ $Ε_1$, $ρ_1$, $τ_1$, $Ε_2$, $ρ_2$, $τ_2$, $Ε_3$, $ρ_3$, $τ_3$ τὰ ἐμβαδά, τὰς ἀκτίνας τῶνἐγγεγραμμένων κύκλων, καὶ τὰς ἡμιπερίμετρους τῶν τριγώνων ΑΔΕ, ΒΘΙ, ΓΖΗ ἀντιστοίχως. Λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ἔχομεν ὅτι $Ε_1 : Ε=(Α'Σ)^2 : (ΑΣ)^2$. (1). Ἀλλὰ $Α'Σ=ΑΣ-2ρ=υ_α-2ρ$. Ὅτε ἡ (1) γίνεται $Ε_1 : Ε= =(υ_α-2ρ)^2 : υ_α{}^2$ (2) Ἔχομεν ὅμως $υ_α\,α=2Ε=2τρ$ ἐξ ἧς $υ_α=2τρ : α$ καὶ $υ_α-2ρ= =2ρ(τ-α) : α$. Καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν $Ε_1 : Ε=4ρ^2(τ-α)^2 : υ^2_α\,α^2$ ἢ $τ_1ρ_1 : τρ=4ρ^2(τ-α)^2 : 4τ^2ρ^2$ ἢ $τ_1ρ_1 : ρ=(τ-α)^2 : τ$ (3) Ἐπειδὴ ὅμως ὁ κύκλος Ο εἶναι παρεγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ τὸ $τ_1=ΑΜ$. Ἀλλὰ $ΑΜ=τ-α$ ὁπότε

$\tau_1 = \tau - \alpha$. 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) τὸ τ_1 διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν $(\tau-\alpha)\varrho_1 : \varrho = (\tau-\alpha)^2 : \tau$ ἢ $\varrho_1 : \varrho = (\tau-\alpha) : \tau$ (4) Κατ' ἀναλογίαν θὰ ἔχωμεν $\varrho_2 : \varrho = (\tau-\beta) : \tau$ (5) καὶ $\varrho_3 : \varrho = (\tau-\gamma) : \tau$ (6). Ὁπότε διὰ προσθέσεως τῶν (4), (5) καὶ (6) ἔχομεν:

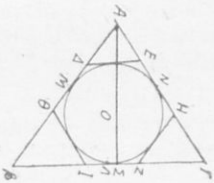
$$(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3) : \varrho = (3\tau-\alpha-\beta-\gamma) : \tau = 1 \quad \text{ἤτοι} \quad \varrho_1+\varrho_2+\varrho_3 = \varrho$$

β) Ἡ σχέσις $E_1 : E = 4\varrho^2(\tau-\alpha)^2 : \upsilon_\alpha{}^2\alpha^2$ γίνεται, ἐὰν θέσωμεν $\upsilon_\alpha{}^2\alpha^2 = 4E^2$, $E_1 : E = 4\varrho^2(\tau-\alpha)^2 : 4E^2$ ἢ $E_1 = \varrho^2(\tau-\alpha)^2 : E$. Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν $E_2 = \varrho^2(\tau-\beta)^2 : E$ $E_3 = \varrho^2(\tau-\gamma)^2 : E$ ὅτε διὰ πολ)σμοῦ ἔχομεν $E_1E_2E_3 = \varrho^6(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)^2(\tau-\gamma)^2 : E^3$ (7) 'Αλλὰ $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ἢ $\tau^4\varrho^4 = \tau^2(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)^2(\tau-\gamma)^2$ ἢ $(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)^2(\tau-\gamma)^2 = \tau^2\varrho^4$. 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν (7) ἔχομεν: $E\, E_1E_2E_3 = \varrho^{10}\tau^2 : E^2 = \varrho^8E^2 : E^2 = \varrho^8$ (διότι $E^2 = \tau^2\varrho^2$). Ἤτοι $E \,.\, E_1E_2E_3 = \varrho^8$ ὅ. ἐ. δ.

Ἄσκησις 2α. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α'', Β'', Γ''. Ζητεῖται α) Νὰ ἐκφρασθοῦν τὰ μήκη τῶν $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{\Gamma\Gamma'}$, $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$, $\overline{\Gamma\Gamma''}$ συναρτή-



Σχ. 18



Σχ. 19

σει τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος R ***τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου β) νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα*** $\dfrac{\overline{AA''}}{\overline{AA'}} + \dfrac{\overline{BB''}}{\overline{BB'}} + \dfrac{\overline{\Gamma\Gamma''}}{\overline{\Gamma\Gamma'}}$ ***εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα τὰ τρίγωνα.***

Λύσις α) 'Εκ τοῦ (Σχ.19) ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΑ'Β ἔχομεν $\overline{AA'} = (AB)$ ημ Β. (1) 'Αλλὰ ἐπειδὴ $(AB) = 2R$ ημ Γ ἡ (1) γίνεται $\overline{AA'} = 2R$ ημ Β ημ Γ. (2) Κατ' ἀναλογίαν εὑρίσκομεν $\overline{BB'} = 2R$ ημ Α ημ Γ (3) καὶ $\overline{\Gamma\Gamma'} = 2R$ημΑημΒ. (4)

'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνοο ΑΔΑ'' (ὅπου ΑΔ διάμετρος τοῦ κύκλουΟ) ἔχομεν $\overline{AA''} = 2R$ ημ$(\widehat{A\Delta A''})$ (5). 'Αλλὰ $\widehat{A\Delta A''} = \widehat{A\Delta\Gamma} + \widehat{A''A\Gamma} = B + \omega$. 'Αλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΑ'Γ ἔχομεν $\omega = 90 - \Gamma$ ὅτε $A\Delta A'' = 90 + B - \Gamma$ καὶ συνεπῶς ημ $(A\Delta A'') =$ συν $(B-\Gamma)$. 'Αντικαθιστῶντες τὸ ημ$(\widehat{A\Delta A''})$ διὰ τοῦ ἴσου του εἰς τὴν (5) ἔχομεν $\overline{AA''} = 2R$συν$(B-\Gamma)$ (6) 'Εργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν: $\overline{BB''} = 2R$συν$(A-\Gamma)$ (7) καὶ

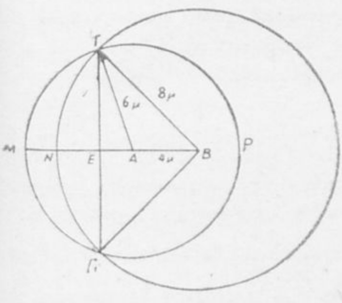
$\overline{\Gamma\Gamma''}=2R\sigma\upsilon\nu(A-B)$ (8). β) Εἰς τὸ $\frac{\overline{AA''}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{BB''}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{\Gamma\Gamma''}}{\overline{\Gamma\Gamma'}}=K$ ἀντικαθιστῶντες τὰ AA', BB', $\Gamma\Gamma'$, AA'', BB'', $\Gamma\Gamma''$ διὰ τῶν ἴσων των ἐκ τῶν (2), (3), (4), (6), (7) καὶ (8) ἔχομεν: $K=\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu(A-\Gamma)}{\eta\mu A\eta\mu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu(A-B)}{\eta\mu A\eta\mu B}$ ἢ

$$K=\frac{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu A\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\eta\mu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu A\eta\mu B}{\eta\mu A\eta\mu B}$$

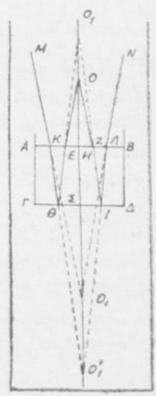
ἢ $K=\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A+3$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ $A+B+\Gamma=180^0$ τὸ $\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A=1$ καὶ ἑπομένως $K=4$.

Ἄσκησις 3η. *Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ μὲ ἀκτίνας 6 μ καὶ 8 μ καὶ μὲ ἀπόστασιν κέντρων 4 μ χαράσσομεν δύο περιφερείας κύκλων. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν: α) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ποῦ ἔχει βάσιν τὴν διάκεντρον καὶ κορυφὴν τὸ ἕτερον τῶν σημειων τομῆς τῶν περιφερειῶν β) τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς γ) τὰ μέτρα τῶν τόξων ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν κοινὴν χορδὴν καὶ δ) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν δύο κύκλων.*

Λύσις. Ἔστωσαν Α καὶ Β οἱ δύο κύκλοι ἀκτίνων 6μ καὶ 8μ ἀντιστοίχως καὶ (Σχ. 20) διακέντρου ΑΒ=4μ καὶ $\Gamma\Gamma_1$ ἡ κοινὴ χορδή. α) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνοτ ΑΒΓ ἐκ τοῦ τύπου $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ὅπου $\tau=9, \tau-\alpha=1, \tau-\beta=3, \tau-\gamma=5$ εἶναι $E=\sqrt{9\cdot3\cdot5}=$



Σχ. 20



Σχ. 21

$=3\sqrt{15}$. β) Ἐπειδὴ ἡ διάκεντρος ΑΒ εἶναι κάθετος τῇ κοινῇ χορδῇ $\Gamma\Gamma_1$, τὸ ΓΕ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ εἶναι $E=\frac{1}{2}(AB)\cdot(\Gamma E)$ ἢ $E=2\cdot(\Gamma E)$ ἢ $E=(\Gamma\Gamma_1)$ καὶ διότι $E=3\sqrt{15}$, ἔχομεν $\Gamma\Gamma_1=3\sqrt{15}$.

γ) Τὰ μέτρα τῶν τόξων ποῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν κοινὴν χορδὴν ἤτοι τῶν τόξ $\Gamma M\Gamma_1$ καὶ τοξ $\Gamma N\Gamma_1$ εἶναι αἱ γωνίαι $\widehat{\Gamma A\Gamma_1}$ καὶ $\widehat{\Gamma B\Gamma_1}$. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν

$\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}}$, $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$. 'Εξ ὧν δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τ, (τ—α), (τ—β), (τ—γ) διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν : $\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$,

$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$ ἐκ τούτων διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Α.

'Οπότε τόξον $\Gamma M \Gamma_1 = 2(M\widehat{A}\Gamma) = 2(180-A) =$ καὶ τόξον $\Gamma N \Gamma_1 = 2(M\widehat{B}\Gamma_1) = 2B$.

δ) Τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο κύκλων ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ κυκλικὰ τμήματα $\Gamma N \Gamma_1 \Gamma$ τοῦ κύκλου Β καὶ τὸ $\Gamma P \Gamma_1 \Gamma$ τοῦ κύκλου Α.

Ἔχομεν τμῆμα$(\Gamma N \Gamma_1 \Gamma)$=τομεὺς$(\Gamma_1 B \Gamma N \Gamma)-2(AB\Gamma)-2(A\Gamma E)$ καὶ τμῆμα$(\Gamma P \Gamma_1 \Gamma)$= τομεὺς$(\Gamma A \Gamma_1 P \Gamma)+2(A\Gamma E)$. Συνεπῶς Κ=τομεὺς $(\Gamma_1 B \Gamma N \Gamma)$+τομεὺς$(\Gamma A \Gamma_1 P \Gamma)-2(AB\Gamma)$(1) ἔνθα Κ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο κύκλων. 'Αλλὰ τομεὺς $(\Gamma_1 B \Gamma N \Gamma)$= $\pi(B\Gamma)^2 . (\Gamma B \Gamma_1) : 360^0 = \pi . 8^2 . 2B^0 : 360^0 = \pi . 64 . B^0 : 180 = \pi . 16 . B^0 : 45$ καὶ τομεὺς $(\Gamma A \Gamma_1 P \Gamma) = \pi(A\Gamma)^2 . (\Gamma A \Gamma_1) : 360 = \pi 6^2 . 2A^0 : 360^0 = \pi A^0 : 5$. 'Οπότε $K = \frac{16\pi B^0}{45} + \frac{\pi A^0}{5} - 2(3\sqrt{15}) = \frac{\pi(16B^0+9A^0)}{55} - 6\sqrt{15}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ Β καὶ Α διὰ τῶν ἴσων των εὑρίσκομεν τὸ Κ.

ΦΥΣΙΚΗ. Πρόβλημα 1ον. 'Οριζόντιος δίσκος δὺναται νὰ περιστραφῇ πέριξ τοῦ κατακορύφου του ἄξονος. Θέτομεν ἐπὶ τοῦ δἵσκου καὶ εἰς ἀπόστασιν 0,15 μέτρα ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ἀντικείμενόν τι καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο τίθεται εἰς κίνησιν ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν περισταοφῶν τοῦ δίσκου ὑπερβαίνει τὰς 40 στροφὰς ἀνὰ πρῶτον λεπτόν. Ζητεῖται τὸ ὅριον τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς μεταξὺ τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ δίσκου. 'Επιτάχυνσις βαρύτητος $=9{,}8 \frac{m.}{sec^2}$.

Λύσις. Ὅταν ὁ δίσκος ἐκτελεῖ 40 στροφὰς ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν, ἡ συχνότης αὐτοῦ εἶναι $N=40 : 60=2 : 3$. 'Επομένως κατὰ τὸν τύπον τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως $F=4m\Pi^2 RN^2$, ἡ ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου ἀναφαινομένη φυγόκεντρος δύναμις εἶναι $F=4m . \Pi^2 . 15 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 240m\Pi^2 9$. 'Υπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης ἄρχεται κινούμενον τὸ ἀντικείμενον. 'Επειδὴ δὲ ἡ πιέζουσα τὸ ἀντικείμενον δύναμις ἐπὶ τοῦ δίσκου, ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος αὐτοῦ Β, τὸ ὅριον τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς θὰ εἶναι

$F : B = 240m\Pi^2 : 9mg$ ἢ $F : B = 240\Pi^2 : 9 . 980 = 0{,}268$ περίπου

Πρόβλημα 2ον. Λεκάνη βάθους 0,5 μέτρων, ἐφωδιασμένη μὲ κάτοπτρον ἐπὶ τοῦ πυθμένος αὐτῆς, πληροῦται μὲ ὑγρὸν δείκτου διαθλάσεως 1,15. Εἰς ὕψος 1,0 μέτρου ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, πειραματιστής τις παρατηρεῖ τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του εἰς τὸ κάτοπτρον τοῦ πυθμένος. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ὀφθαλμοῦ καὶ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ.

Λύσις. Αἱ ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ πειραματιστοῦ ἐκπεμπόμεναι φωτειναὶ ἀκτῖνες εἰσερχόμεναι εἰς τὸ ὑγρόν, διαθλῶνται καὶ ὑφιστάμεναι ἀκολούθως ἀνάκλασιν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου, ἐξέρχονται τοῦ ὑγροῦ διαθλώμεναι. Αἱ τελευταῖαι αὗται διαθλώμεναι ἀκτῖνες προσπίπτουσαι ἐκ νέου ἐπὶ τοῦ ὀφθαλμοῦ δημιουργοῦν τὴν εἰκόνα τοῦ εἰδώλου. Λόγῳ ὅμως τῶν ἀπείρως μικρῶν γωνιῶν προσπτώσεως καὶ διαθλάσεσως, ὁ πειραματιστὴς βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του ὡς ἐὰν ἔμπροσθεν αὐτοῦ δὲν εὑρίσκετο ὑγρόν, ἀλλὰ μόνον ἐπίπεδον κάτοπτρον κατέχον τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν φαίνεται καταλαμβάνον τὸ εἰς τὸν πυθμένα εὑρισκόμενον κάτοπτρον λόγῳ τῆς φαινομένης ἀνυψώσεως ἐκ τῆς ὑπάρξεως τοῦ ὑγροῦ.

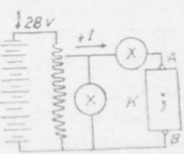
Τὸ φαινόμενον ὅμως βάθος x τὴς λεκάνης εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως $x=\alpha : \eta$ ὅπου α εἶναι τὸ πραγματικὸν βάθος καὶ η ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑγροῦ. Ἄρα $x=0,5 : 1,15=10 : 23$ μέτρα. Ἡ ἀπόστασις συνεπῶς τοῦ ὀφθαλμοῦ, ἀπὸ τῆς φαινομένης θέσεως τοὺ κατόπτρου εἶναι $1+x=33 : 23$ μέτρα. Τὸ εἴδωλον σχηματιζόμενον εἰς ἀπόστασιν συμμετρικὴν ἀπέχει τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς $66 : 23$ μέτρ.

Ἑτέρα λύσις. Ἔστω (Σχ. 21) ΑΒ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος καὶ ΓΔ τὸ κάτοπτρον. Φωτειναὶ ἀκτῖνες προερχόμεναι ἐκ τοῦ ὀφθαλμοῦ Ο καὶ πολὺ πλησίον τῆς καθέτου ΟΗ εὑρισκόμεναι ὡς ΗΕ καὶ ΗΖ π. χ. διαθλῶνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος προσπίπτουσαι ἀκολούθως ἐπὶ τοῦ κατόπτρου ΓΔ. Ἀνακλῶνται ἐπ' αὐτοῦ κατὰ τὰς ΘΚ καὶ ΙΛ ἀναδυνμεναι ἔπειτα κατα τὰς ΚΜ καὶ ΛΝ. Τὰς ἀναδυομένας ταύτας ἀκτίνας δέχεται ὁ ὀφθαλμὸς σχηματιζομένης οὕτω τῆς εἰκόνος τοῦ εἰδώλου. (Ὑποτίθεται ὅτι εὑρίσκονται ἀπείρως πλησίον τῆς καθέτου καὶ εἰσέρχονται ἐκ νέου εἰς τὸν ὀφθολμόν):

Λόγῳ τῆς σμικρότητος τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι $HO_1=HO \,.\, 1,15$ ἢ $HO_1=1 \,.\, 1,15=$ $=1,15$. Ἐπὶ τοῦ κατόπτρου συνεπῶς προσπίπτουν ἀκτῖνες ὡς ἐὰν προήρχοντο ἐκ τοῦ O_1. Εἶναι δὲ τότε $O_1H+H\Sigma=1,65m$. Ἄρα τὸ κάτοπτρον θὰ δώσῃ εἴδωλον O'_1 ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma O'_1=1,65m$.

Αἱ τελικῶς δὲ ἀναδυόμεναι ἀκτῖνες ΚΜ καὶ ΛΝ φαίνεται ὡς νὰ προέρχωνται ἐκ τοῦ O_1, δηλαδὴ ὁ παρατηρητὴς βλέπει τὸ εἴδωλον τοῦ ὀφθαλμοῦ του εἰς O_1 λόγῳ δὲ τῆς σμικρότητος τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι $O_1H=O'_1H : 1,15=2,15 : 1,15=43 : 23$ καὶ ἐπειδὴ $HO=1m$ θὰ ἔχωμεν $OO_1=66 : 23$.

Πρόβλημα 3ον. Ἐπὶ ἐσφραγισμένου κιβωτίου Κ, οὗτινος (Σχ.22) ἀγνοεῖται τὸ περιεχόμενον, εὑρίσκονται δύο ἀκροδέκται Α καὶ Β. Ἵνα ἐξακριβωθῇ τὸ περιεχόμεννν τοῦ κιβωτίου, ἐφηρμόσθησαν διαδοχικῶς διάφοροι τάσεις Ε ἐπὶ τῶν ἀκροδεκτὼν (βλ. σχῆμα) καὶ ἐμετρήθησαν αἱ ἑκάστοτε προκύπτουσαι ἐντάσεις ρεύματος Ι, ὡς ἀναγράφονται αὗται εἰς τὸν ἑξῆς πίνακα.



Σχ. 22

Ε Βόλτ	28	24	20	16	12	8	4	0
Ι Ἀμπ.	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3

Ζητεῖται: Ἡ ἁπλουστέρα δυνατὴ ἐσωτερικὴ συνδεσμολογία ἐντὸς τοῦ κιβωτίου Κ, ὁμοῦ μετὰ τῶν σχετικῶν τιμῶν.

Λύσις. Ἐκ τοῦ πίνακος βέπομεν ὅτι ὅταν εἰς τοὺς ἀκροδέκτας Α καὶ Β ἐφαρμόσωμεν τάσιν Ο Βόλτ κυκλοφορεῖ ρεῦμα ἐντάσεως —3 'Αμπ. Ἐκ τοῦ γεγονότος τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ὑπάρχει πηγὴ ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας.

Ἐπειδὴ δὲ πάλιν, ὡς ἐκ τοῦ πίνακος φαίνεται, ὅταν ἐφαρμόσωμεν τάσιν 12 Βόλτ ἡ ἔντασις τοῦ κυκλοφοροῦντος ρεύματος μηδενίζεται, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ τάσις τῆς ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ἠλεκτρικῆς πηγῆς εἶναι 12 Βόλτ, Ἀλλὰ ἡ σύνδεσις τῆς πηγῆς ταύτης μὲ τοὺς ἀκροδέκτας Α καὶ Β ἔχει γίνει κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ θετικὸς πόλος τῆς ἐξωτερικῆς πηγῆς νὰ συνδέεται μὲ τὸν θετικὸν πόλον τῆς πηγῆς τοῦ κιβωτίου Κ. Τὸ αὐτὸ διὰ τοὺς ἀρνητικοὺς πόλους μὲ τὸν ἀκροδέκτην Β.

Ὡς φαίνεται ὅμως ἐκ τοῦ πίνακος, ἐφαρμόζοντες εἰς τοὺς ἀκροδέκτας Α καὶ Β τάσιν 28 Βόλτ, ἡ τάσις ἡ προκαλοῦσα τὸ ρεῦμα εἶναι μόνον 16 Βόλτ διότι ἡ πηγὴ τοῦ κιβωτίου Κ θεωρεῖται τότε —12 Βόλτ. καὶ ἐπειδὴ ἡ ἔντασις τοῦ κυκλοφοροῦντος ρεύματος εἶναι 4 'Αμπ. συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις τῆς πηγῆς τοῦ κιβωτίου Κ εἶναι 4 ὤμ.

Ὡς ἁπλουστέρα δυνατὴ συνδεσμολογία θὰ θεωρηθῇ ἡ ἀντίθετος τῆς προηγουμένης, δηλαδὴ νὰ συνδεθῇ ὁ θετικὸς πόλος τῆς πηγῆς τοῦ κιβωτίου Κ μὲ τὸν ἀκροδέκτην ὁ ὁποῖος συνδέεται μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ πόλου τῆς ἐξωτερικῆς πηγῆς. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ δύο πηγαὶ θὰ εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σειρᾷ:

Ζήτημα 4ον. Συσσωρευτὴς τάσεως 4 Βόλτ συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ βολτάμετρον Α περιέχον διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καὶ μὲ ἕτερον τοιοῦτον Β, περιέχον, ὀξυνισμένον ὕδωρ. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις πολώσεως τῆς συσκευῆς Β εἶναι 1,7 Βόλτ, τῆς δὲ Α εἶναι μηδέν. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἐντὸς χρόνου εἴκοσι τεσσάρων ὡρῶν ἡ μᾶζα τῆς ἐκ χαλκοῦ καθόδου τῆς συσκευῆς Α ηὐξήθη κατὰ 1 χιλιόγραμμον, ζητοῦνται. α) Ἡ ἔντασις Ι τοῦ ρεύματος β) ἡ μᾶζα Μ τοῦ ἀποσυντιθεμένου ὕδατος ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου Β καὶ γ) ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις R τοῦ κυκλώματος.

Ἀτομικὰ βάρη Cu=64, Η=1 καὶ Α=16.

Λύσις. Διὰ τὸν χαλκὸν τοῦ βολταμέτρου Α ἔχομεν $1000=32 \,.\, I \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60 : 96500$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $I=34{,}9$ 'Αμπ.

Κατὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα τὸ ἐλευθερούμενον ὑδρογόνον εἰς τὸ βολτάμετρον Β ἔχει μᾶζαν $M'=34{,}9 \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60 : 96500$ ἢ $M'=3015360 : 96500=31{,}25$ γραμμάρια. Ἡ μᾶζα τοῦ ἀποσυντεθέντος συνεπῶς ὕδατος εἶναι

$$M=(31{,}25) \,.\, 100 : (11{,}19)=279{,}27 \text{ γραμμάρια.}$$

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις Κ τοῦ κυκλώματος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $I=(E-E') : R$ ὅπου Ι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, Ε ἡ τάσις τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ Ε΄ ἡ ἠλγ. δύναμις πολώσεως τοῦ βαλταμέτρου Β. Ἄρα $R=2{,}3 : 34{,}9=0{,}066$ ὤμ.

Πρόβλημα 5ον. Σιδηροδρομικὸς ὑπάλληλος ἵσταται εἰς τὸ μέσον μιᾶς λίαν στενῆς γεφύρας μήκους 1000 μέτρων, ὅταν ἀνακαλύπτει εἰς ἀπόστασιν ἀκριβῶς 1500 μέτρων ἐρχόμενον ἕναν συρμόν. Ὑποτίθεται ὅτι ὁ ὑπάλληλος εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἐκτιμήσῃ ἐπακριβῶς τὴν συχνότητα τοῦ ἀκουομένου ἤχου τῆς σφυρίκτρας τῆς ἐν κινήσει ἀτμομηχανῆς, 360 Hertz (παλμοὶ ἀνὰ δευτερόλεπτον), ἐνῷ οὗτος γνωρίζει ὅτι ἡ ἀτμομηχανὴ ἐκπέμπει εἰς τὴν πραγματικότητα, ἦχον συχνότητος μόνον 340 Hertz. Ἀναγιαζόμενος νὰ ἐξέλθῃ ἐγκαίρως ἐκ τῆς γεφύρας ὁ ὑπάλληλος ῥυθμίζει τὴν ταχύτητα πορείας αὐτοῦ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀκούῃ σφυρίγματα σταθερᾶς συχνότητος 355 Hertz. Ζητεῖται ἡ διαφορὰ χρόνου μεταξὺ τῆς ἀφίξεως τοῦ ὑπαλλήλου καὶ τῆς ἁμαξοστοιχίας εἰς τὸ τέρμα τῆς γεφύρας. Ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου =340 μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν ἠχητικὴ πηγὴ συχνότητος N, κινεῖται πλησιάζουσα ἀκίνητον παρατηρητὴν μὲ ταχύτητα V_1, ὁ παρατηρητὴς οὗτος ἀκούει ἦχον συχνότητος $N'=N \cdot V:(V-V_1)$ ὅπου V ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $360=340 \cdot 340:(340-V_1)$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $V_1=170:9 \cdot \frac{m}{sec}$. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς τώρα ποὺ ἄρχισεν ὰ κινεῖται ὁ ὑπάλληλος, οὗτος ἀκούει ἦχον συχνότητος $N''=N \cdot (V-V_2):(V-V_1)$ ὅπου V_2 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ὑπαλλήλου. Ἄρα θὰ ἔχωμεν $355=340 \cdot [340-V_2]:\left[340-\frac{170}{9}\right]$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $V_2=\frac{1445}{306}\ \frac{m}{sec}$.

Διὰ νὰ διανύσῃ ἡ ἁμαξοστοιχία τὴν ἀπόστασιν $1500+500=2000$ μέτρων χρειάζεται $9 \cdot 2000:170=1800:17$ δευτερόλεπτα. Ὁ ὑπάλληλος διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν 500 μέτρων μέχρι τοῦ ἄκρου τῆς γεφύρας, χρειάζεται $500:\frac{1445}{306}=30600:289$ δευτερόλεπτα.

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη διαφορὰ χρόνου εἶναι $(30600:289)-(1800:17)=0$.

Πρόβλημα 6ον. Ἔστω μεταλλικὸν ἀντικείμενον, ἀνηρτημένον ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς φάλαγγος ἑνὸς ζυγοῦ μέσῳ λεπτοῦ σύρματος παραμελητέας μάζης. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀντικειμένου εἶναι 40°C. καὶ ἡ μάζα αὐτοῦ 800 γραμμάρια. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο τίθεται καταλλήλως ἐντὸς ῥεύματος ὑδρατμοῦ θερμοκρασίας 100°C. ὑπὸ ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν 760 m . m . Hg.

Μετὰ παρέλευσιν ὡρισμένου χρόνου ὁ ζυγὸς δεικνύει τὸ νέον βάρος τοῦ ἀντικειμένου 810 γραμμάρια, τὸ ὁποῖον καὶ παραμένει ἔκτοτε σταθερόν. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι ὁλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ ὑγροποιηθέντος ἀτμοῦ παρέμεινεν ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου ὑπὸ μορφὴν ὕδατος νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος $=500\frac{cal}{gr.}$.

Λύσις. Ἡ μᾶζα τοῦ ὑγροποιηθέντος ὑδρατμοῦ εἶναι 10 γραμμάρια. Ἐφ' ὅσον δὲ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον ἐπεκάθησεν ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου παραμένει πλέον σταθερόν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἀνῆλθεν ἀπὸ 40°C εἰς 100°C. δηλαδὴ ηὐξήθη κατὰ 60°C.

Ἐὰν λοιπὸν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ἀντικειμένου εἶναι x τοῦτο ἀπερόφησεν θερμότητα $Q_1=800 \cdot x \cdot 60=48000x$. Τὴν θερμότητα ταύτην παρεχώρησεν εἰς τὸ τὸ ἀντικείμενον ὁ ὑγροποιηθεὶς ὑδρατμός. Οὗτος ὅμως ἀπέβαλεν θερμότητα $Q_2=10 \cdot 540=5400$ μικρὲς θερμίδες. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς τὴν ἐξίσωσι $48000x=5400$ ἄρα $x=0{,}15\frac{cal}{gr.}$.

Πρόβλημα 7ον. 'Εξ ἑνὸς ὑποβρυχίου θαλάμου ἐσωτερικοῦ ὄγκου 1000 κυβικῶν μέτρων, ἔκτοπίζεται ὁλόκληρον τὸ ἐντὸς αὐτοῦ εὑρισκόμενον ὕδωρ, δι' εἰσαγωγῆς πεπιεσμένου ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, ἀρχικῆς θερμοκρασίας 25°C, ἡ ὁποία ὅμως σταθεροποιεῖται τελικῶς εἰς 10°C. ἐντὸς τοῦ θαλάμου. Ζητεῖται ὁ ἀναγκαῖος ὄγκος ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν 760 m . m . Hg,

'Η ὀπὴ ἐκροῆς τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ θαλάμου, εὑρίσκεται 20 μέτρα ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Εἰδικὸν βάρρος θαλασσίου ὕδατος =1030 χιλιόγραμμα ἀνὰ κυβικὸν μέτρον τοῦ δὲ ὑδραργύρου $13600\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$.

Λύσις. Κατὰ τὴν εἰσαγωγήν του ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ, πρέπει νὰ ἐξουδετερώνῃ τὴν πίεσιν τοῦ ὕδατος, ἡ ὁποία εἶναι $P_1=1030 . 2000 : 1000=2060\frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^2}$. Ἄρα ὁ εἰσαχθεὶς ἀὴρ εὑρίσκεται ὑπὸ στοιχεῖα $P_1=2060\frac{\text{gr}^*}{\text{Cm}}$, $V_1=1000\text{m}^3$ καὶ $\Theta_1=10^0\text{C}$. 'Ο ἀὴρ οὗτος ὑπὸ πίεσιν $P=760 . \text{m} . \text{m} . \text{Hg}=1033,6\frac{\text{gr}^*}{\text{Cm}^2}$ καὶ θερμοκρασίαν $\Theta=25^0\text{C}$, ἔστω ὅτι κατελάμβανεν ὄγκον Vm^3. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων θὰ ἔχωμεν $P_1V_1=P_0V_0\left(1+\frac{\Theta_1}{273}\right)$ καὶ $P . V . =P_0V_0\left(1+\frac{\Theta}{273}\right)$ ὅπου P_0 καὶ V_0 εἶναι ἀντιστοίχως ἡ πίεσις καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος τούτου εἰς θερμοκρασίαν O°C. Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρῳ ἰσότητας ἔχομεν

$$\frac{P_1V_1}{PV}=\left(1+\frac{\Theta_1}{273}\right):\left(1+\frac{\Theta}{273}\right) \text{ ἢ } \frac{2060 . 1000}{1033,6 . V}=\frac{283}{298}$$

$$\text{ἢ } V=\frac{2060 . 1000 . 298}{283 . 1033,6}=2099\text{m}^3.$$

ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΙ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Ρευσταὶ καὶ καύσιμαι ὕλαι.

ΑΛΓΕΒΡΑ. *Ἄσκησις 1η. 'Υποτίθεται ἰσχύουσα ἡ σχέσις (1)* $2\alpha x^2+\beta x+(\gamma-\alpha)\geqslant o$ *διὰ* $-1\leqslant x\leqslant+1$ *ὅπου οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ πληροῦν τὰς σχέσεις* $o<\alpha$, $o<\gamma<\beta$. *Δείξατε, ὅτι τότε ἔχομεν* $(2\beta+\alpha):(\beta-\gamma)\geqslant 8$. *'Ημπορεῖ νὰ εἶναι* $\alpha=o$, $o<\gamma<\beta$ *καὶ* $2\alpha x^2+\beta x+(\gamma-\alpha)\geqslant o$ *διὰ* $-1\leqslant x\leqslant+1$.

Λύσις. 'Η διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι $\Delta=\beta^2-8\alpha(\gamma-\alpha)$. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις 1) *νὰ εἶναι* $\Delta>o$ ὅτε ἐὰν ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου θὰ ἔχωμεν, ἐπειδὴ $\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}=-\frac{\beta}{4\alpha}$, $-1<1\leqslant\varrho_1<\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}=-\frac{\beta}{4\alpha}<\varrho_2$ ἢ $\varrho_1<\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}=-\frac{\beta}{4\alpha}<\varrho_2\leqslant-1<1$. Τὸ πρῶτον δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ διότι ὁ $-\frac{\beta}{4\alpha}$ ὡς ἀρνητικὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 1. Ἄρα θὰ ἔχωμεν $\varrho_1<-\frac{\beta}{4\alpha}<\varrho_2\leqslant-1<1$.

κ ταύτης προκύπτει $\beta>4\alpha$ (2). 'Επειδὴ ὁ -1 ἐπαληθεύει τὴν (1) θὰ ἔχωμεν $-\beta+\gamma\geqslant 0$ ἢ $\alpha\geqslant\beta-\gamma$ (3). 'Εκ τῶν (2) καὶ (3) διὰ προσθέσεως προκύπτει $\gamma>3\alpha$ καὶ νεπῶς θὰ εἶναι $\gamma>\alpha$ (4) καὶ $\gamma-\alpha>2\alpha>2(\beta-\gamma)$ (5). 'Η $\Delta>0$ γράφεται $\beta^2>8\alpha(\gamma-\alpha)$ ἢ $:\alpha(\gamma-\alpha)>8$. Αὔτη λόγῳ τῶν (3) και(5) ἐνισχυομένη γίνεται $\beta^2:2(\beta-\gamma)^3>8$ ἢ $\beta:(\beta-\gamma)>4$ $0>3\beta-4\gamma$ ἢ $0>6\beta-8\gamma$. 'Εκ ταύτης καὶ τῆς $\alpha>0$ προκύπτει $\alpha>6\gamma-8\gamma$ ἢ $>8\beta-8\gamma-2\beta$ ἢ $\alpha+2\beta>8(\beta-\gamma)$ ἢ $(\alpha+2\beta):(\beta-\gamma)>8$. 2) ***νὰ εἶναι*** $\Delta=0$, τότε πάλιν ὰ εἶναι $\varrho_1=-\dfrac{\beta}{4\alpha}=\varrho_2\leqslant-1<1$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\beta\geqslant4\alpha$ (6). 'Επειδὴ εἶναι $=0$ θὰ ἔχωμεν $\beta^2=8\alpha(\gamma-\alpha)$ (7). 'Εκ τῶν (6), (7), (3) καὶ (5) εὑρίσκομεν δι' ὁμοίας ργασίας $(2\beta+\alpha):(\beta-\gamma)\geqslant8$. 3) 'Ομοίως ἐξετάζεται καὶ ἡ περίπτωσις $\Delta<0$. 4) Διὰ $=0$ ἔχομεν $\beta x+(\gamma-\alpha)\geqslant0$ καὶ συνεπῶς $x\geqslant(\alpha-\gamma):\beta$. Πρέπει νά εἶναι $-1\leqslant(\alpha-\gamma):\beta\leqslant1$ $-\beta\leqslant\alpha-\gamma\leqslant\beta$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha=0$ αὕτη γίνεται $-\beta\leqslant-\gamma\leqslant\beta$ ἢ $\beta\geqslant\gamma\geqslant-\beta$. 'Επειδὴ εἶναι $<\gamma<\beta$ τὸ ἴσον δὲν ἰσχύει. Πρέπει συνεπῶς νὰ εἶναι $\beta>\gamma>-\beta$ τὸ ὁποῖον συμβαίει λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $0<\gamma<\beta$.

Ἄσκησις 2α. *Ἔστωσαν $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots\ldots \gamma_\nu$ οἱ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου μὲ ϑετικοὺς ὅρους καὶ λόγον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τῆς μονάδος. Δείξατε τότε ὅτι οἱ ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_\nu$, τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς ἀντιστοίχους των τῆς γεωμετρικῆς προόδου, δηλαδὴ $\alpha_1=\gamma_1$, $\alpha_2=\gamma_2$, εἶναι ἀπὸ τοῦ τρίτου ὅρου καὶ ἔπειτα μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου δηλ. $\alpha_3<\gamma_3, \ldots, \alpha_\nu<\gamma_\nu$. Ὑποτίϑεται φυσικὰ $\geqslant 3$. Πρὸς τοῦτο στηριχϑεῖτε εἰς τὴν πρότασιν, τὴν ὁποίαν ἀποδείξατε, ὅτι «ἂν εἰς τὴν ἀναλογίαν εἷς ὅρος εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν ἄλλων, τότε τὸ ἄϑροισμα τοῦ μεγαλυτέρου καὶ μικροτέρου ὅρου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀϑροίσματος τῶν δύο ἄλλων».*

Λύσις. α) 'Απόδειξις τῆς βοηθητικῆς προτάσεως. Ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ (1) καὶ ἔστω ὁ α μεγαλύτερος τῶν β, γ, δ, ὅτε $\alpha:\beta>1$, συνεπῶς καὶ $\gamma:\delta>1$ ἤτοι $\gamma>\delta$. 'Η (1) γράφεται $\alpha:\gamma=\beta:\delta$, ὅτε, ἐπειδὴ $\alpha:\gamma>1$, ἕπεται καὶ $\beta:\delta>1$ ἤτοι $\beta>\delta$. Ἄρα ὁ δ εἶναι ὁ μικρότερος τῶν ἄλλων. 'Εὰν $\alpha:\beta=\gamma:\delta=\omega$ (ὅπου $\omega>1$) θὰ ἔχωμεν $\alpha=\beta\omega$ (2) καὶ $\gamma=\delta\omega$ (3) καὶ διὰ ἀφαιρέσεως τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν $(\alpha-\gamma)=(\beta-\delta)\omega$. 'Αλλὰ ἐπειδὴ $\omega>1$ ἔχομεν $(\beta-\delta)\omega>\beta-\delta$ ἢ $\alpha-\gamma>\beta-\delta$ ἢ $\alpha+\delta>\beta+\gamma$ ὅ. ἔ. δ.

β) 'Επειδὴ οἱ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_\nu$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον θὰ ἔχωμεν $\gamma_2:\gamma_1=\gamma_3:\gamma_2=\ldots\ldots=\gamma_\nu:\gamma_{\nu-1}$ (4). 'Αλλὰ εἴτε αὔξουσα εἶναι ἡ πρόοδος $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots \ldots \gamma_\nu$ εἴτε φθίνουσα, οἱ μέσοι ὅροι τῶν ἀναλογιῶν $\gamma_2:\gamma_1=\gamma_3:\gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu-1}:\gamma_{\nu-2}=$ $=\gamma_\nu:\gamma_{\nu-1}$ εἶναι μικρότεροι τῶν ἄλλων, ὅτε λόγῳ τῆς προαποδειχθείσης προτάσεως ἔχομεν: $\gamma_1+\gamma_3>2\gamma_2$ $\gamma_2+\gamma_4>2\gamma_3$, $\gamma_3+\gamma_5>2\gamma_4, \ldots, \gamma_{\nu-2}+\gamma_\nu>2\gamma_{\nu-1}$ (5). 'Εκ τῆς πρώτης τῶν (5) ἔχομεν $\gamma_3>2\gamma_2-\gamma_1$ (6). 'Αλλά, ἐπειδὴ $\alpha_3=\alpha_2+(\alpha_2-\alpha_1)=\gamma_2+(\gamma_2-\gamma_1)=2\gamma_2-\gamma_1$, ἡ (6) γίνεναι $\gamma_3>\alpha_3$. Ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu=3$.

'Εὰν παραδεχθῶμεν τὴν πρότασιν ὡς ἀληθὴν διὰ ν' ἴσον μὲ $\nu-1$ θὰ δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ ν ἤτοι κατὰ ἕνα περισσότερον. Ὄντως προσθέτοντες τὰς (5) ἔχομεν $\gamma_1+\gamma_\nu>\gamma_{\nu-1}+\gamma_2$ ἢ $\gamma_\nu>\gamma_{\nu-1}+\gamma_2-\gamma_1$ (7) καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη $\gamma_{\nu-1}>\alpha_{\nu-1}$ ἕπεται ὅτι $\gamma_{\nu-1}+\gamma_2-\gamma_1>\alpha_{\nu-1}+\gamma_2-\gamma_1$, ὁπότε λόγῳ τῆς (7) ἔχομεν: $\gamma_\nu>\alpha_{\nu-1}+\gamma_2-\gamma_1$ (8). 'Αλλὰ $\alpha_{\nu-1}+\gamma_2-\gamma_1=\alpha_{\nu-1}+(\alpha_2-\alpha_1)=\alpha_\nu$. Ἄρα ἐκ τῆς (8) ἔχομεν $\gamma_\nu>\alpha_\nu$. Συνεπῶς ἐφ' ὅσον ἀληθεύει διὰ $\nu=3$ θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $\nu=4$, $\nu=5$.....ἤτοι ἡ πρότασις εἶναι γενική.

Ἄσκησις 3η. Δείξατε διὰ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α, β ὅτι ἀπὸ τὴν σχέσιν $2\beta(1+|\alpha|)=1+\alpha+|\alpha|$ (1) ἕπονται αἱ σχέσεις $|2\beta-1|<1$ (2), $\alpha(1-|2\beta-1|)=2\beta-1$ (3) καὶ ἀντιστρόφως ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις ἕπεται ἡ πρώτη. Ποίας τιμὰς πληρούσας τὰς ἄνω σχέσεις ἠμποροῦν νὰ λάβουν τὰ α, β;

'Επίσης δείξατε ὅτι ἂν θέσωμεν $\gamma_\nu=\dfrac{\delta_1\sqrt{3}}{2\nu}+\dfrac{\delta_2\sqrt{3}}{2(\nu-1)}$, *ὅπου* δ_1, δ_2, *εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι* $\nu\geqslant 5$, $\delta_1\delta_2=-1$, *ὅτι πρέπει νὰ ἔχωμεν* $40|\gamma_\nu|\leqslant\sqrt{3}$.

Λύσις α) 'Εκ τῆς σχέσεως(1)ἔχομεν $2\beta[1+|\alpha|]-[1+|\alpha|]=\alpha$ ἢ $2\beta-1=\alpha:[1+|\alpha|]$ (4) ὅτε $|2\beta-1|=|\alpha|:[1+|\alpha|]$ (5). 'Επειδὴ ὅμως $|\alpha|:[1+|\alpha|]<1$ ἔχομεν ἐκ τῆς (5) $|2\beta-1|<1$. 'Εκ τῆς (5) ἔχομεν ἐπίσης $1-|2\beta-1|=1:[1+|\alpha|]$ ἢ $\alpha[1-|2\beta-1|]=\alpha:[1+|\alpha|]$ ἢ λόγῳ τῆς (4) $\alpha(1-|2\beta-1|)=(2\beta-1)$ ὅ. ἔ. δ.

'Αντιστρόφως 'Εκ τῆς (3) ἔχομεν $(2\beta-1):[1-|2\beta-1|]=\alpha$ (6) ἢ $|\alpha|=|2\beta-1|:|1-|2\beta-1|$ (7) ἐπειδὴ $|2\beta-1|<1$ ἢ $1-|2\beta-1|>0$, ἕπεται $[1-|2\beta-1|]=1-|2\beta-1|$. Συνεπῶς λόγῳ τῆς (7) ἔχομεν $|\alpha|=|2\beta-1|:[1-|2\beta-1|]$ (8). Λόγῳ τῶν (6) καὶ (8) ἔχομεν $1+\alpha+|\alpha|=\dfrac{2\beta-1}{1-|2\beta-1|}+\dfrac{|2\beta-1|}{1-|2\beta-1|}+1=\dfrac{2\beta}{1-|2\beta-1|}$ (9). 'Αλλὰ ἐκ τῆς (8) ἔχομεν $|2\beta-1|=|\alpha|;[1+|\alpha|]$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (9) ἔχομεν $1+\alpha+|\alpha|=2\beta(1+|\alpha|)$ ὅ. ἔ. δ, β) 'Εκ τῆς σχέσεως $\delta_1\cdot\delta_2=-1$ ἐπειδὴ τὰ δ_1 καὶ δ_2 εἶναι ἀκέραιοι ἕπεται ὅτι ἢ $\delta_1=1$ καὶ $\delta_2=-1$ ἢ $\delta_1=-1$ καὶ $\delta_2=1$ ἑπομένως $\delta_2:\delta_1=-1$ (10). 'Η δοθεῖσα παράστασις γράφεται $\gamma_\nu=\delta_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\nu}+\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\;\dfrac{\sqrt{3}}{2(\nu-1)}\right)$

ἢ λόγῳ τῆς (10) $\gamma_\nu=\sqrt{3}\,\delta_1\left(\dfrac{1}{2\nu}-\dfrac{1}{2(\nu-1)}\right)$, ἢ $\gamma_\nu=\sqrt{3}\,\delta_1\left(\dfrac{-2}{4\nu(\nu-1)}\right)$ ἢ

$\gamma_\nu=-\delta_1\dfrac{2\sqrt{3}}{4\nu(\nu-1)}$. Συνεπῶς, ἐπειδὴ $\delta_1=\pm1$, $|\gamma_\nu|=\sqrt{3}:2\nu(\nu-1)$ (11). 'Αλλὰ ἐπειδὴ $\nu\geqslant5$ ἕπεται ὅτι $\nu(\nu-1)\geqslant20$ ἢ $2\nu(\nu-1)\geqslant40$ ὅτε $\sqrt{3}:2\nu(\nu-1)\leqslant\sqrt{3}:40$ ἤτοι $|\gamma_\nu|\leqslant\sqrt{3}:40$ ἢ $40|\gamma_\nu|\leqslant\sqrt{3}$ ὅ, ἔ. δ.

ΤΡΙΓΟΝΟΜΕΤΡΙΑ *Ἄσκησις 1η. Δίδεται* (Σχ. 23) *ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2ρ καὶ ἀκτὶς ΟΓ κάθετος τῆς ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ τοιοῦτον ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΜΓ νὰ εἶναι* λ^2. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων.*

Λύσις. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ ἀρκεῖ νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία $B\widehat{A}M=x$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $(AM\Gamma)=\dfrac{1}{2}(A\Gamma)(AB)\eta\mu(45-x)$ (1) διότι ἡ γωνία $\Gamma\widehat{A}M=\Gamma\widehat{A}B-M\widehat{A}B=45-x$. 'Αλλὰ $A\Gamma=\rho\sqrt{2}$ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΜΒ

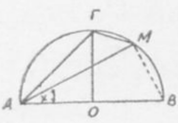
(ΑΜ)=(ΑΒ)συνx ἢ (ΑΜ)=2ρσυνx. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ (ΑΓ) καὶ (ΑΜ) ὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εμβαδ(ΑΜΓ)$=\lambda^2$, λαμβάνομεν $=\sqrt{2}.\rho^2$συνxημ$(45-x)$ ἢ $\lambda^2=\sqrt{2}.\rho^2$συνx(ημ45συνx−συν45ημx) ἢ $\lambda^2=\rho^2$συνx(συνx−ημx) ἢ $\lambda^2=\rho^2[$συν^{2}x−συνxημx$]$. (2). Ἐπειδὴ συν^{2}x$=1:(1+$εφ^{2}x$)$ καὶ ημxσυνx= εφx : (1+εφ^{2}x), ἡ (2) γίνεται $\rho^2(1-$εφx$)$: $(1+$εφ^{2}x$)=\lambda^2$ ἢ λ^2εφ^{2}x$+\rho^2$εφx$+\lambda^2-$ $=$ο (3) ἐξ ἧς προσδιορίζεται ἡ γωνία x.

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εὑ-σκεται ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία x πρέπει νὰ μεταβάλλεται μεταξὺ ο ὶ 45^0 ἤτοι $0<x<45$. Ἄρα $0<$εφx<1. Ἄρα αἱ ῥίζαι τῆς (3) ὡς πρὸς εφx πρέπει κεῖνται μεταξὺ ο καὶ 1.

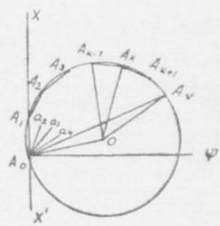
Ἐὰν φ(εφx) καλέσω τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) ἵνα τότε τὸ πρόβλημα ἔχῃ μίαν σιν πρέπει φ(ο)φ(1)<0 ἤτοι $(\lambda^2-\rho^2)\ 2\rho^2<$ο ἢ $\lambda^2-\rho^2<$ο ἢ $\rho<\lambda<\rho$.

Ἵνα ἔχῃ δύο λύσεις πρέπει $\Delta>$ο , αφ(ο)$>$ο, α. φ(1)$>$ο καὶ ο$<-\frac{\beta}{2\alpha}<1$ ἤτοι

$-4\lambda^4+4\lambda^2\rho^2>$ο(α), $\lambda^2(\lambda^2-\rho^2)>$ο (β), $\lambda^2\ .\ 2\lambda^2>$ο (γ) καὶ ο$<-\frac{\rho^2}{\lambda^2}<1$. (δ) Ἀλλὰ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων (α), (β), (γ) καὶ (δ) εἶναι ἀδύνατον διότι δὲν ἀληθεύει (δ). Συνεπῶς τὸ πρόβλημα δὲν δύναται νὰ ἔχῃ δύο λύσεις.



Σχ. 23



Σχ. 24

Ἄσκησις 2α. Τεθλασμένης γραμμῆς $A_0A_1.....A_\nu$ κάθε πλευρά της $A_{\kappa-1}A_\kappa$ (διὰ κ=1,2,.....ν) εἶναι λ καὶ κάθε γωνία της $A_{\kappa-1}\widehat{A_\kappa}A_{\kappa+1}$(διὰ κ=1, ...ν) εἶναι π−Θ ἔνθα Θ σταθερόν.

α) Δείξατε ὅτι τὸ μῆκος τῆς A_0A_ν εἶναι $\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2} : \eta\mu\frac{\vartheta}{2}$(β), $1+\sigma\upsilon\nu\Theta+\sigma\upsilon\nu 2\Theta$

$\ldots\ldots +\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\Theta=\eta\mu\frac{\nu\Theta}{2}\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\frac{\Theta}{2} : \eta\mu\frac{\Theta}{2}$(A), $\eta\mu\Theta+\eta\mu 2\Theta+\ldots\ldots$

$\eta\mu(\nu-1)\Theta=\eta\mu\frac{\nu\Theta}{2}\ \eta\mu(\nu-1)\frac{\Theta}{2} : \eta\mu\frac{\Theta}{2}$. ***(B). Νὰ γίνῃ ἐφαρμογή καὶ νὰ εὑθοῦν αἱ μεταξὺ O καὶ 2π λύσεις τῆς ἐξισώσεως*** $1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 3x=0$***(Γ)***

Λύσις. Ἐπειδὴ (Σχ. 24) ἡ τεθλασμένη $A_0A_1...A_\nu$ ἔχει τὰς πλευράς της καὶ τὰς γωνίας ἴσας εἶναι κανονικὴ ἄρα εἶναι ἐγγράψιμος εἰς κύκλον. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ ριγεγραμμένου κύκλου. Ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι Θ. Ἄρα ἡ $A_0\widehat{O}A_\nu=\nu\Theta$. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου A_0OA_ν ἔχομεν $A_0A_\nu = 2\varrho\eta\mu\frac{\nu\Theta}{2}$. (1) 'Αλλὰ ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $A_{\varkappa-1}OA_\varkappa$ ἔχομεν $A_{\varkappa-1}A_\varkappa = 2\varrho\ \eta\mu\frac{\Theta}{2}$ ἢ $\lambda = 2\varrho\ \eta\mu\ \frac{\Theta}{2}$ ἢ $\varrho = \lambda : 2\eta\mu\frac{\Theta}{2}$ (3)

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν : $A_0A_\nu = \lambda\ \eta\mu\ \frac{\nu\Theta}{2} : \eta\mu\ \frac{\Theta}{2}$.

β) 'Εκ τοῦ A_0 φέρομεν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς τεθλασμένης γραμμῆς τὰς $A_0\alpha_2$, $A_0\alpha_3$,....

'Επειδὴ ὅμως αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι τῆς κονονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς $A_0A_1A_2 \ldots A_\nu$ εἶναι $\pi - \Theta$, αἱ ἐξωτερικαὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς Θ. Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι $A_1A_0\alpha_2$, $\alpha_2\widehat{A_0}\alpha_3$, $\alpha_3A_0A_4$, ὡς ἴσαι πρὸς τὰς ἐξωτερικὰς εἶναι ἴσαι πρὸς Θ.

Θεωροῦμεν τὰς πλευρὰς τῆς τεθλασμένης ὡς διαδοχικὰ διανύσματα ὅτε ἔχομεν

$\overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{\nu-1}A_\nu} = \overline{A_0A_\nu}$

'Εὰν τὰ προβάλω ἐπὶ τὸ στήριγμα x'x τοῦ διανύσματος $\overline{A_0A_1}$ τότε, ἐπειδὴ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν προβολῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων ἰσοῦται μὲ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος, θὰ ἔχωμεν :

$(\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta}\ \overline{A_0A_1}) + (\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta}\ \overline{A_1A_2}) + \ldots + (\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta o\lambda}\ \overline{A_{\nu-1}A_\nu}) = (\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta}\ \overline{A_0A_\nu})$. (1)

'Αλλὰ ὡς εἶναι γνωστὸν τὸ μέτρον τῆς προβολῆς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τοῦ διανύσματος μετὰ τοῦ ἄξονος.

Συνεπῶς $\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta}\ \overline{A_0A_1} = (A_0A_1) = \lambda$, $\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta o\lambda}(\overline{A_1A_2}) = (\overline{A_1A_2})\sigma\upsilon\nu(A_1A_2, x'x)$ $\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta}\overline{A_2A_3}$ $(\overline{A_2A_3})$ συν $(\overline{A_2A_3}, x'x)$,..., $\pi\varrho o\beta\overline{A_{\nu-1}A_\nu} = (\overline{A_{\nu-1}A})$. $\sigma\upsilon\nu(\overline{A_{\nu-1}A_\nu}, x'x)$ καὶ προβολ $\overline{A_0A_\nu} = (\overline{O_0A_\nu})$ συν $(\overline{A_0A_\nu}, x'x)$. (2) 'Αλλὰ γων$(A_1A_2, x'x) =$ γων $A_1A_0\alpha_2 = \Theta$ γων $(\overline{A_2A_3}x'x) =$ γων $A_1\widehat{A_0}\alpha_3 = 2\Theta$,..., γων$(\overline{A_{\nu-1}A_\nu}, x'x) =$ γων $A_1\widehat{A_0}\alpha_\nu = (\nu-1)\Theta$.

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὰς (2) τὰς γωνίας διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $(A_0A_1) = (A_1A_2) = \ldots = (A_{\nu-1}A_\nu) = \lambda$ ἔχομεν :

$\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta}\overline{A_0A_1} = \lambda$, $\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta}\overline{A_1A_2} = \lambda\sigma\upsilon\nu\Theta$, $\underset{x'x}{\pi\varrho o\beta o\lambda}\overline{A_2A_3} = \lambda\sigma\upsilon\nu2\Theta$,..,$\pi\varrho o\beta\overline{A_{\nu-1}A_\nu} = \lambda\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\Theta$ (3)

Οὕτω ἡ (1) λόγῳ τῶν (3) γίνεται ; $\lambda + \lambda\sigma\upsilon\nu\Theta + \lambda\sigma\upsilon\nu2\Theta + \ldots + \lambda\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\Theta = (\overline{A_0A_\nu})\sigma\upsilon\nu(\overline{A_0A_\nu}\ x'x)$ (4). Τὸ$(\overline{A_0A_\nu}) = \lambda\ \eta\mu\ \frac{\nu\Theta}{2} : \eta\mu\ \frac{\Theta}{2}$ (5). Ἡ γων$(\overline{A_0A_\nu}, x'x)$ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $A_2A_3 \ldots A_\nu$ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $(\nu-1)\Theta$, διότι ἕκαστον τῶν τόξων $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$.. .... ἰσοῦται πρὸς Θ.

Ἄρα γων $(A_0A\nu, x'x) = \frac{(\nu-1)\Theta}{2}$. Οὕτωσυν$(\overline{A_0A_\nu}, x'x) = \sigma\upsilon\nu\frac{(\nu-1)\Theta}{2}$ (6) 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) τὰ $(\overline{A_0A_\nu})$ καὶ συν$(\overline{A_0A_\nu}, x'x)$ ἐκ τῶν (5) καὶ (6) ἔχομεν

$$+λσυνΘ+λσυν2Θ+λσυν3Θ+...+λσυν(ν-1)Θ=\frac{λημ\frac{νΘ}{2}}{ημ\frac{Θ}{2}}.\ συν\frac{(ν-1)Θ}{2}$$ ὁπότε διαι-

ροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ λ ἔχομεν

$$1+συνΘ+συν2Θ+....+συν(ν-1)Θ=\frac{ημ\frac{νΘ}{2}}{ημ\frac{Θ}{2}}\ συν\frac{(ν-1)Θ}{2}\quad (A)$$ ἥτις εἶναι ἡ πρώτη ζη-

τουμένη σχέσις.

Ἄν προβάλλωμεν τὰ διανύσματα $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$.....$A_{ν-1}A_ν$ καὶ $\overline{A_0A_ν}$ ἐπὶ τὸν $A_0ψ$ κάθετον ἐπὶ τὸν x΄x τότε θὰ ἔχωμεν : $προβ_{A_0ψ}\overline{A_0A}+προβ_{A_0ψ}\overline{A_1A_2}+......+προβ_{A_0ψ}A_{ν-1}A_ν=προβ_{A_0ψ}\overline{A_0A_ν}$ (7).

Αἱ γωνίαι ἄς σχηματίζουν τὰ $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$,..μετὰ τοῦ ἄξονος $A_0ψ$ θὰ εἶναι συμπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν ποῦ σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα x΄x. Ἤτοι αὗται εἶναι κατὰ σειρὰν 90^0, $90^0-Θ$, $90^0-2Θ$,.....$90-(ν-1)Θ$, $90-\frac{(ν-1)Θ}{2}$.

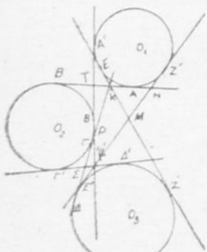
Συνεπῶς $προβλ_{A_0ψ}\overline{A_0A_1}=ο$, $προβ_{A_0ψ}λ\overline{A_1A_2}=(\overline{A_1A_2})συν(90-Θ)=λημΘ$, $προβ_{A_0ψ}\overline{A_2A_3}=(\overline{A_2A_3})\ συν(90-2Θ)=λημ2Θ$,......, $προβ_{A_0ψ}\overline{A_{ν-1}A_ν}=(\overline{A_{ν-1}A_ν})συν[90-(ν-1)Θ]=λσυν(ν-1)Θ$ καὶ $προβ_{A_0ψ}\overline{A_0A_ν}=(\overline{A_0A_ν})συν\left[90-\frac{(ν-1)}{2}Θ\right]=(\overline{A_0A_ν})\ ημ\frac{(ν-1)Θ}{2}=λ\frac{ημ\frac{νΘ}{2}}{ημ\frac{Θ}{2}}\ ημ\frac{(ν-1)Θ}{2}$ (8) Ὁπότε ἡ (7) λόγῳ τῶν (8) γίνεται :

$λημΘ+λημ2Θ+.....+λημ(ν-1)Θ=λημ\frac{νΘ}{2}.\ ημ\frac{(ν-1)Θ}{2} : ημ\frac{Θ}{2}$ ἢ $ημΘ+ημ2Θ+...$ $...+ημ(ν-1)Θ=ημ\frac{νΘ}{2}.\ ημ\frac{(ν-1)Θ}{2} : ημ\frac{Θ}{2}$ (B) ἥτις εἶναι ἡ δευτέρα ζητουμένη σχέσις.

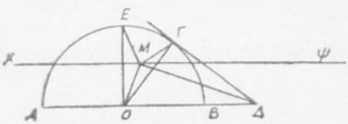
Ἡ παράστασις $1+συνx+συν2x+συν3x$ βάσει τῆς σχέσεως (A) ἰσοῦται μὲ $ημ\frac{4x}{2}.\ συν\frac{3x}{2} : ημ\frac{x}{2}$. Συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις (Γ) γίνεται $ημ2xσυν\frac{3x}{2} : ημ\frac{x}{2}=ο$ ἢ $ημ2xσυν\frac{3x}{2}=ο$ ἄρα $ημ2x=ο$ καὶ $συν\frac{3x}{2}=ο$ ἐξ ὧν ἔχω $2x=Kπ$ καὶ $\frac{3x}{2}=K\frac{π}{2}$ ἢ $x=K\frac{π}{2}$ καὶ $x=K\frac{π}{3}$ (9). Ἐκ τῶν λύσεων τούτων μεταξὺ τοῦ ο καὶ 2π εἶναι αἱ $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{3}$.

"Ασκησις 3η. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς γωνίας Α καὶ τοῦ λόγου λ τῶν ὑψῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν Β καὶ Γ.

Λύσις "Εστω υ_β, υ_γ τὰ ἐν λόγῳ ὕψη. Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\beta\upsilon_\beta=\gamma\upsilon_\gamma$ ἢ $\upsilon_\beta:\upsilon_\gamma=\gamma:\beta$. Καὶ ἐπειδὴ $\upsilon_\beta:\upsilon_\gamma=\lambda$ ἕπεται ὅτι $\lambda=\gamma:\beta$ ἢ $\lambda=\eta\mu\Gamma:\eta\mu B$ (1) διότι $\gamma:\beta=\eta\mu\Gamma:\eta\mu B$. 'Εκ τῆς (1) ἔχομεν $(\lambda+1):(\lambda-1)=(\eta\mu\Gamma+\eta\mu B):(\eta\mu\Gamma-\eta\mu B)$ ἢ $(\lambda+1):(\lambda-1)=2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,.\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-B}{2}:2\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Gamma-B}{2}$ ἢ $\epsilon\varphi\frac{\Gamma-B}{2}=$ $=(\lambda-1)\,\epsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{2}:(\lambda+1)=(\lambda-1)\,.\,\sigma\varphi\frac{A}{2}:(\lambda+1)$ (2). 'Εκ τῆς *(2)* εὑρίσκομεν λογαριθμικῶς ἔστω $\frac{\Gamma-B}{2}=\Theta$ ὅτε $\Gamma-B=2\Theta$ καὶ $B+\Gamma=180^0-A$. 'Εξ αὐτῶν εὑρίσκομεν $\Gamma=90^0-\frac{A}{2}+\Theta$ καὶ $B=90^0-\frac{A}{2}-\Theta$.



Σχ. 25



Σχ. 26

Διερεύνησις. "Ινα αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου πρέπει αὗται νὰ εἶναι θετικαὶ καὶ μικρότεραι τῶν 180^0. Ὑποθέτομεν ὅτι $\lambda>1$ ὁπότε $\Theta>o$. "Ινα δὲ εἶναι $B>o$ ἤτοι $90-\frac{A}{2}-\Theta>o$ πρέπει $90-\frac{A}{2}>\Theta>o$ *(3)*. 'Οπότε ἰσχυούσης τῆς *(3)* αἱ Β καὶ Γ εἶναι θετικαὶ καὶ μικρότεραι τῶν 180^0. 'Εφ' ὅσον ἰσχύει ἡ *(3)* ἔχομεν $\sigma\varphi\frac{A}{2}>\epsilon\varphi\Theta>o$ ἢ $o<\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\sigma\varphi\frac{A}{2}<\sigma\varphi\frac{A}{2}$ ἢ $o<\lambda-1<\lambda+1$ ἥτις πάντοτε ἰσχύει ἐφ' ὅσον ὑπετέθη $\lambda>1$. 'Εὰν $\lambda<1$ τότε πάλι ἔχομεν λύσιν ἀλλὰ τότε εἶναι $B>\Gamma$ καὶ ἂν $\lambda=1$ ἔχομεν $B-\Gamma=90-\frac{A}{2}$. —:

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ "Ασκησις 1η. Δίδονται τρεῖς κύκλοι (Σχ.25) κείμενοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. 'Εὰν αἱ τρεῖς κοιναὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων αὐτῶν, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, νὰ δειχθῇ, ὅτι καὶ αἱ *ἄλλαι τρεῖς κοιναὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. [ΙΔΕ ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Α. Φ. ΠΑΛΛΑ ἄσκησις 259].*

Λύσις. Ἔστωσαν οἱ κύκλοι o_1, o_2, o_3 τῶν ὁποίων αἱ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ΑΒ. ΓΔ, ΕΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ. Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς Α΄Β΄, Γ΄Δ΄, Ε΄Ζ΄ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐκ τοῦ σημείου τομῆς Κ΄ τῶν Γ΄Δ΄ καὶ Ε΄Ζ΄ φέρομεν τὴν Κ΄Α΄ ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν O_1. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν O_2. Ἤτοι νὰ δείξωμεν ὅτι τετράπλευρον ΤΚΣΚ΄ *(μὴ κυρτὸ)* εἶναι παρεγγράψιμον εἰς τὸν κύκλον O_2.

Τὰ τετράπλευρα ΤΚ΄ΜΚ (κυρτὸν) καὶ ΚΣΚ΄Μ (κυρτὸν) εἶναι παρεγγράψιμα εἰς τοὺς κύκλους O_1 καὶ O_3. Ὅτε ἔχομεν Κ΄Τ—ΚΜ - Κ΄Μ=ΚΤ *(1)* καί ΚΜ—Κ΄Σ=ΚΣ—Κ΄Μ.*(2)* Προστιθέμεναι αἱ *(1)* καὶ *(2)*δίδουν Κ΄Τ—Κ΄Σ=ΚΣ—ΚΤ ἢ Κ΄Τ—ΚΣ=Κ΄Σ—ΚΤ *(3)*. Οὕτω λόγῳ τῆς *(3)* τὸ τετράπλευρογ ΤΚΣΚ΄ εἶναι παρεγγράψιμον Ἐπομένως ἐφ' ὅσον αἱ προεκτάσεις τῶν τριῶν πλευρῶν του ἐφάπτονται τοῦ O_2 καὶ ἡ ΚΑ΄ θὰ ἐφάπτεται τούτου ὅ. ἔ. δ.

Ἄσκησις 2α. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ. Ἐκ σημείου Δ κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ, φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ. Ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Ο τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{ΟΔΓ}$. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς καθέτου καὶ τῆς διχοτόμου.*

Λύσις. Ἔστω Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς καθέτου ΟΜ καὶ τῆς διχοτόμου ΔΜ. Τὸ τετράπλευραν ΟΜΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον διότι ἡ ΟΔ φαίνεται ἀπὸ τὰ Μ καὶ Γ ὑπὸ ὀρθὰς γωνίας. Συνεπῶς $Μ\widehat{Ο}Γ=Μ\widehat{Δ}Γ$ καὶ $Μ\widehat{Γ}Ο=Μ\widehat{Δ}Ο$ ἄρα $Μ\widehat{Ο}Γ=Μ\widehat{Γ}Ο$ ἤτοι τὸ τρίγωνον ΜΟΓ εἶναι ἰσοσκελές. Φέρομεν τὴν ΟΕ κάθετον τῇ ΑΒ ὅτε γων. ΕΟΜ=$Ο\widehat{Δ}Μ$ διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρός μίαν. Ἄρα γων ΕΟΜ=$Μ\widehat{Δ}Ο=Μ\widehat{Γ}Ο=Μ\widehat{Ο}Γ$ ἤτοι $Ε\widehat{Ο}Μ=Μ\widehat{Ο}Γ$.

Τὰ τρίγωνα ΕΟΜ καὶ ΜΟΓ εἶναι ἴσα διότι ΕΟ=ΟΓ, ΟΜ κοινή καὶ $Ε\widehat{Ο}Μ=Μ\widehat{Ο}Γ$ ἄρα ἐφ' ὅσον τὸ ΜΟΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ΕΜΟ εἶναι ἰσοσκελὲς ἤτοι ΜΕ=ΜΟ. Τὸ σημεῖον Μ συνεπῶς ἀπέχει ἰσάκις τῶν σταθερῶν σημείων Ο καὶ Ε. Ἄρα ὁ γ. τ. τούτου εἶναι ἡ κάθετος χψ εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΟ. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον.

Ἄσκησις 3η. Ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $V=\frac{1}{6}υ\ (Β+β+4β')$: 6 *ἔνθα Β καὶ β εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών της καὶ β΄ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἰσαπεχούσης τῶν δύο βάσεων τομῆς καὶ υ τὸ ὕψος. «βλέπε ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ § 909 Τόμος Β΄.*

Ἔστωσαν (Σχ. 28) ΑΒΓΔ=Β, Α΄Β΄Γ΄Δ΄=β αἱ βάσεις καὶ *(*αβγδ*)*=β΄ ἡ ἰσαπέχουσα τῶν βάσεων τομή. Θέτομεν ΑΒ=x. Α΄Β΄=y καὶ αβ=ω ὅτε, λόγῳ τοῦ τραπεζίου ΑΒΒ΄Α΄ εἰς ὃ ἡ αβ εἶναι διάμεσος, ἔχομεν 2ω=x+y *(1)*.

Λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριῶν πολυγώνων ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ καὶ αβγδ ἔχομεν

Ὅλα τὰ θέματα εὑρίσκονται εἰς τὴν Μ. Γεωμετρίαν Α. ΠΑΛΛΑ.

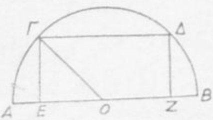
$\beta' : B=\omega^2 : x^2$, $\beta' : \beta=\omega^2 : y^2$, ὅτε $\beta'^2 : B\beta=\omega^4 : x^2y^2$ ἢ $\beta' : \sqrt{B\beta}=\omega^2 : xy$ ἢ λόγῳ τῆς (1) $\dfrac{\beta'}{\sqrt{B\beta}}=\dfrac{(x+y)^2}{4xy}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\right)$ (2)

Λόγῳ τῆς ὁμοιότητος ὅμως τῶν βάσεων ἔχομεν $x : y=\sqrt{B} : \sqrt{\beta}$, ὅτε ἡ (2) γίνεται $\dfrac{\beta'}{\sqrt{B\beta}}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\sqrt{B}}{\sqrt{\beta}}+\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{B}}+2\right]=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{B+\beta+2\sqrt{B\beta}}{\sqrt{B\beta}}\right]$

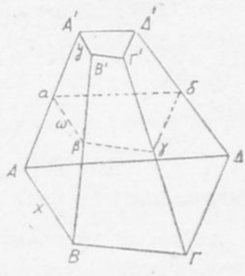
ἐκ ταύτης ἔχομεν $4\beta'=B+\beta+2\sqrt{B\beta}$ ἢ $\sqrt{\beta B}=(4\beta'-B-\beta) : 2$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον $V=\upsilon(B+\beta+\sqrt{B\beta})$ ὅστις μᾶς δίδει τὸν ὄγκον τῆς κολούρου πυραμίδος ἔχομεν $V=\upsilon(B+4\beta'+\beta) : 6$.

Ἄσκησις 4η. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB=2R$. Φέρομεν χορδὴν $\Gamma\Delta=2\lambda$ παράλληλον τῇ ΑΒ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ μικτογράμμου χωρίου ΑΒΔΓΑ στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ καὶ β) ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν R καὶ λ ἵνα ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΓΜΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ἡμικυκλίου στρεφομένων ἀμοτέρων περὶ τὴν ΑΒ. (Εὑρίσκεται ΜΕΓΑΛΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ ὑπ' ἀριθ. 2402).

Λύσις. Ὁ ὄγκος (Σχ. 27) τὸ ὁποῖον παράγει τὸ μικτόγραμμον χωρίον ΑΒΔΓΑ στρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἰσοδύναμα μονοβασικὰ σφαιρικὰ τμήματα μὲ ἀκτίνας βάσεων ΕΓ καὶ ΖΔ ἀντιστοίχως καὶ ὕψη ΑΕ καὶ ΒΖ καὶ ἀπὸ τὸν κύλινδρον μὲ γενέτειραν τὴν ΓΔ.



Σχ. 27



Σχ. 28

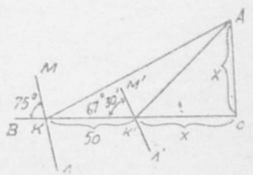
Ἐὰν V καλέσω τὸν ὄγκον τοῦ χωρίου ΑΒΔΓΑ καὶ V_1 τοῦ ἑνὸς τῶν σφαιρικῶν τμημάτων καὶ V_2 τοῦ κυλίνδρου τότε ἔχομεν $V=2V_1+V_2$ (1). Ἀλλὰ $V_1=\pi(AE)[3(E\Gamma)^2+(AE)^2] : 6$ καὶ $V_2=\pi(E\Gamma)^2 \cdot (EZ)$ (2). Ἀλλὰ $AE=OA-OE=R-\lambda$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΕΟ ἔχομεν $(\Gamma E)^2=(O\Gamma)^2-(OE)^2=R^2-\lambda^2$ ἤτοι $(\Gamma E)^2=R^2-\lambda^2$ καὶ $EZ=\Gamma\Delta=2\lambda$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς (2) τὰ ΑΕ, ΓΕ καὶ ΕΖ διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν: $V_1=\dfrac{1}{6}\pi(R-\lambda)[3(R^2-\lambda^2)+(R-\lambda)^2]=\dfrac{1}{3}\pi\ (2R-\lambda)^2(2R+$

$+\lambda):3$, $V_2=2\pi(R^2-\lambda^2)\lambda=2\pi(R+\lambda)(R-\lambda)\lambda$. Ἄρα $V=\frac{2}{3}\pi(R-\lambda)^2(2R+\lambda)+$ $+2\pi(R+\lambda)(R-\lambda)\lambda$ ἤτοι $V=2\,.\,\pi(R-\lambda)(4R^2+R\lambda+\lambda^2):3$. β) Ἐὰν V_3 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΓΜΔ θὰ ἔχωμεν $V_3=\pi(\Gamma\Delta)^2\,.\,(EZ):6$ ἤτοι $V_3=\pi(4\lambda^2)(2\lambda):6=4\,.\,\pi\lambda^3:3$. Ὁ ὄγκος V_5 τοῦ ἡμικυκλίου ἰσοῦται $V_5=4\pi R^3:3$. Ἄρα ἐπειδὴ $V_3=V_5:2$ ἔχομεν $4\pi\lambda^3=4\pi R^3:6$ ἤτοι $\lambda^3=R^3:2$ ἢ $R=\sqrt[3]{2}\,\lambda$ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

ΦΥΣΙΚΗ. *Ἄσκησις 1η. Παρατηρητὴς εὑρισκόμενος ἐντὸς λέμβου κρατεῖ ἐπίπεδον κάτοπτρον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, κατὰ τρόπον τοιοῦτον ὥστε, τὸ φῶς τοῦ ἔναντι τῆς λέμβου φάρου ἀνακλώμενον νὰ προσπίπτῃ ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ. Τὸ κάτοπτρον σχηματίζει τότε γωνίαν 75° μετὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ἡ λέμβος προχωρεῖ μετὰ τὴν παρατήρησιν κατὰ 50 μ. πρὸς τὸν φάρον καὶ γενομένης δευτέρας παρατηρήσεως, διαπιστοῦται ὅτι διὰ νὰ προσπέσῃ τὸ φῶς ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς βάσεως τοῦ φάρου πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ κλίσις τοῦ κατόπτρου κατὰ γωνίαν* $7\frac{1}{2}^{0}$. *Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς λέμβου ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ φάρου κατὰ τὰς δύο παρατηρήσεις καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ φωτὸς ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ φάρου ἤτοι ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.*

Λύσις. Ἔστω ΒΟ (Σχ. 29) ἡ ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης, (ΟΑ)=x τὸ ὕψος τοῦ φάρου, ΜΛ τὸ κάτοπτρον κατὰ τὴν πρώτην παρατήρησιν καὶ Μ΄Λ΄ κατὰ τὴν δευτέραν. Τότε γωνΒΚΜ=γωνΜΚΑ=γωνΟΚΛ. Ἑκάστη δὲ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι 75°, Συνεπῶς ἡ γωνία ΑΚΟ εἶναι 30°.

Ἐπίσης γωνΒΚ΄Μ΄=γωνΜ΄Κ΄Α=γωνΟ΄Κ΄Λ ἑκάστη δὲ εἶναι 67°30΄. Ἐπομένως ἡ γωνία ΑΚ΄Ο εἶναι 45° ὁπότε (Κ΄Ο)=(ΟΑ)=x καὶ (ΚΟ)=50+x. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΟ ἔχομεν 50+x=xσφ30 ἢ $50+x=x\sqrt{3}$. Ἄρα x=68,2 μ. Ἐπομένως τὸ ὕψος τοῦ φάρου εἶναι 68,2 μ. ἡ δὲ ἀρχικὴ ἀπόστασις τῆς λέμβου ἀπὸ τοῦ φάρου εἶναι $50+25(1+\sqrt{3})=118{,}3$ μ.



Σχ. 29

Πρόβλημα 2ον. Χορδὴ μήκους 50 ἑκ. τείνεται ὑπὸ δυνάμεως 81 . 10⁸ δυνῶν καὶ δίδει θεμελειώδη φθόγγον ὡρισμένης συχνότητος V. Ἑτέρα χορδὴ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ, ἀλλὰ διπλασίας διαμέτρου μήκους 100 ἑκ. τεινομένη ὑπὸ δυνάμεως 56,25 . 10⁸ δυνῶν δίδει φθόγγον συχνότητος 50, ὅταν τὸ μῆκος τοῦ στασίμου κύματος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τοῦ στασίμου κύματος τῆς πρώτης χορδῆς. Ζητεῖται ἡ συχνότης τοῦ θεμελειώδους φθόγγου τῶν δύο χορδῶν.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι, τὸ μῆκος κύματος τοῦ θεμελειώδους ἤχου μιᾶς χορδῆς ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μήκους τῆς χορδῆς. Ἐπομένως τὸ μῆκος κύματος, τοῦ θεμελειώδους τῆς πρώτης χορδῆς. εἶναι λ=100 ἑκ καὶ τὸ μῆκος κύματος τοῦ φθόγγου τῆς δευτέρας χορδῆς θὰ εἶναι τότε λ΄=50 ἑκ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ δευτέρα δίδει θεμελειώδη φθόγγον μὲ μῆκος κύματος $\lambda'=2\,.\,100=200$cm βλέπομεν ὅτι ὁ ὑπὸ τῆς δευτέρας χορδῆς παραγόμενος φθόγγος ἔχει μῆκος κύματος τὸ τέταρτον τοῦ θεμελειώδους αὐτῆς καὶ συνεπῶς ὁ φθόγγος οὗτος εἶναι ὁ τέταρτος ἁρμονικός.

'Εκ τοῦ τύπου $V=\frac{N}{2l\tau}\cdot\sqrt{\frac{F}{\pi.d}}$ εὑρίσκομεν τώρα. διὰ μὲν τὴν πρώτην χορδὴν $V=\frac{1}{2\,.\,50\,.\,\tau}\cdot\sqrt{\frac{81.10^8}{\pi.d}}$ (1) διὰ δὲ τὴν δευτέραν

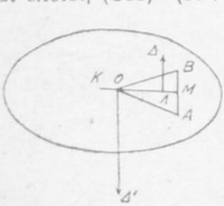
$50=\frac{1}{2.100.2\tau}\cdot\sqrt{\frac{56,25\,.\,10^8}{\pi\,.\,d}}$ *(2)*. Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς *(1)* καὶ *(2)* εὑρίσκομε $V=60$ Ὥστε ἡ πρώτη χορδὴ δίδει θεμελειώδη φθόγγον συχνότητος 60.

Ἡ δευτέρα χορδὴ δίδει τέταρτον ἁρμονικὸν συχνότητος 50, ἐπομένως θὰ δίδη θεμελειώδη ἦχον συχνότητος $50:4=12,5$ ἄρα μὴ ἀκουστόν.

Πρόβλημα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους κυκλικοῦ δίσκου διαμέτρου 200 cm., ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφηρέθη ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς $10\sqrt{3}$ cm., ἔχουν μίαν τῶν κορυφῶν του εἰς τὸ κέντρον τοῦ δίσκου.

Λύσις. Ἂς θεωρήσωμεν τὸν δίσκον πλήρη. Οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἀφαιρεθὲν τρίγωνον καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα.

Τὸ κέντρον βάρους τοῦ πλήρους δίσκου εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ Ο, τὸ δὲ βάρος του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τοῦ ἀφαιρεθέντος τριγώνου καὶ τοῦ ὑπολοίπου τμήματος. 'Εὰν ΟΑΒ (Σχ. 30) εἶναι τὸ ἀφαιρεθὲν τρίγωνον τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Λ, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $(ΟΛ)=\frac{2}{3}$ (ΟΜ) καὶ ἐπειδὴ $(ΟΜ)=(10\,.\,\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}\,.\,2)=15$ θὰ ἔχωμεν $(ΟΛ)=10$cm. Ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει τό βάρος τοῦ πλήρους δίσκου εἶναι συνισταμένη τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΟΑΒ καὶ τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τοῦ δίσκου. Ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα τοῦ δίσκου θὰ ἔχῃ κέντρον βάρους Κ κείμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΛΟ.



Σχ. 30

'Επειδὴ δὲ τὰ βάρη εἶναι ἀνάλογα τῶν ἐπιφανειῶν θὰ ἔχωμεν $(ΚΟ+ΟΛ):(ΟΚ)=[3,14\,.\,100^2-(10\sqrt{3})^2.\sqrt{3}:4]:[(10\sqrt{3})^2.\sqrt{3}:4]$ καὶ ἐπειδὴ $ΟΛ=10$ εὑρίσκομεν $ΚΟ==0,0041$cm περίπου.

Πρόβλημα 4ον. 'Εντὸς ὑαλίνου ποτηρίου βάρους 100 γραμμαρίων εὑρίσκονται 580 γραμμάρια ὕδατος θερμοκρασίας 20°C. 'Εντὸς τοῦ ὕδατος εἰσάγονται 20 γραμμάρια ἀτμοῦ θερμοκρασίας 100°C καὶ κατόπιν τούτου παρατηρεῖται ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἐν τῷ ποτηρίῳ ὕδατος 40°C. Ζητεῖται ἡ θερμότης ὑγροποιήσεως τοῦ ἀτμοῦ. Εἰδικὴ θερμότης τῆς ὑάλου, 0,2.

Λύσις. Διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τὸ ὕδωρ ἀπερόφησεν θερμότητα $Q_1=580\,.\,20=11\,.\,600$ μικρὲς θερμίδες. Ὁμοίως τὸ ποτήριον ἀπερόφησεν θερμότητα

Q_2=100 . 0,2 . 20=400 μικρὲς θερμίδες. Ἐὰν x εἶναι ἡ θερμότης ὑγροποιήσεως τοῦ ἀτμοῦ, οὗτος ἀπώλεσεν θερμότητα Q_3=20x μικρὲς θερμίδες διὰ νὰ ὑγροποιηθῇ εἰς 100°C. Κατόπιν ἀπώλεσεν θερμότητα Q_4=20 . 1 . 60=1200 μικρὲς θερμίδες διὰ νὰ φθάσῃ εἰς 40°C. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $Q_1+Q_2=Q_3+Q_4$ ἢ 20x+1200= =11600+400 ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=540\ \frac{cal}{gr}$.

Πρόβλημα 5ον. *Εἴκοσι πέντε ἠλεκτρικοὶ λαμπτῆρες ἕκαστος ἀντιστάσεως 250 Ω εἶναι διατεταγμένοι ἐν παραλλήλῳ. Ἡ διαφορὰ τάσεως εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου λαμπτῆρος εἶναι 220 βόλτ. (Ἡ ἀντίστασις τῶν ἠλεκτροφόρων συρμάτων δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν εἰς ὁλόκληρον τὸ πρόβλημα). Ἐὰν ἀντὶ 25 ληφθῶσιν 50 λαμπτῆρες ἐν παραλλήλῳ, ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου λαμπτῆρος πίπτει κατὰ 5 βολτ. Ζητεῖται ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς χορηγούσης τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα συστοιχίας. ὡς καὶ ἡ ὡριαία κατανάλωσις ἐνεργείας εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.*

Λύσις. Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις R τῶν λυχνιῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου 1 : R=(1 : 250)+(1 : 250)+...,.+(1 : 250)=25 : 250 ἢ R=10Ω. Καὶ κατὰ τὸν τύπον I=V : R ἔχομεν I=22 ampére.

Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις R' τῶν λαμπτήρων ὑπολογίζεται πάλιν ἐκ τοῦ τύπου 1 : R'=(1 : 250)+(1 : 250)+ ......(1 : 250)=50 : 250 ἢ R'=5Ω. Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου I=V : R ἔχομεν I=43 ampère. Ἐὰν τώρα ὑπολογίσωμεν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς ὁλόκληρον τὸ κύκλωμα, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν 22=E : (10+τ) (1) καὶ 43=E : (5+τ) (2) ὅπου E ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις καὶ τ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς συστοιχίας,

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τ=5 : 21 Ω. καὶ E=4730 : 21 Βόλτ. Ἡ ὡριαία κατανάλωσις κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι ἔργον W=V . I . t=220 . 22 . 3600=17424000 Joules. Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι ἔργον W=215 . 43 . 3600=322820000 Joules.

Πρόβλημα 6ον. *Τηλεβόλον ἐστραμμένον πρὸς νότον βάλλει σφαῖραν ὑπὸ γωνίαν 60° καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 $\frac{m}{sec.}$. Μετὰ t δευτερόλεπτα, ἕτερον τηλεβόλον εἰς ἀπόστασιν 25 χιλιομέτρων ἀπὸ τοῦ πρώτου, ἐστραμμένον πρὸς βορρᾶν βάλλει σφαῖραν ὑπὸ γωνίαν 36°52' καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα 312,5 $\frac{m.}{sec.}$. Αἱ δύο σφαῖραι συναντῶνται εἰς σημεῖον ἀπέχον α μέτρα ἀπὸ τοῦ πρώτου τηλεβόλου καὶ ψ ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ζητοῦνται αἱ τιμαὶ t, α καὶ ψ. Διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς λάβετε $g=9.8\frac{m.}{sec.^2}$, ημ60°=0, 866, συν60°=0,5 ημ36°52'=0,6, συν36°52'=0,8.*

Λύσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς ἐξισώσεως τῆς τροχιᾶς βλήματος y=xεφω−[gx² : 2V₀²συν²ω] εὑρίσκομεν. Διὰ τὸ πρῶτον βλῆμα

$$y=x\varepsilon\varphi 60^0-[9{,}8x^2 : 2\ .\ 500^2\ .\ \sigma\upsilon\nu^2 60]=1{,}732x-[4{,}9x^2 : 62500] \quad (1)$$

Διὰ τὸ δεύτερον βλῆμα εὑρίσκομεν $y'=x'$. εφ36°52′ – [9,8x'^2 : 2 . (312,5)^2 . συν^2(36°52′)] ἢ $y'=(3x' : 4)-[4{,}9x'^2 : 62500]$.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν συιγμὴν τῆς συναντήσεως τῶν βλημάτων θὰ εἶναι $y=y'$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $(3x' : 4)-[4{,}9x'^2 : 62500]=1{,}732x-[4{,}9x^2 : 62500]$ (2) καὶ ἐπειδὴ (3) $x+x'=25000$ ἢ $x'=25000-x$, θὰ ἔχωμεν, λύοντος τὸ σύστημα τῶν (2) καὶ (3), $x=21006$. Αὕτη εἶναι ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις α τοῦ σημείου συναντήσεως τῶν δύο βλημάτων ἀπὸ τῆς θέσεως τοῦ πρώτου πυροβόλου. Ἡ (1) διὰ $x=21006$ δίδει $y=1797{,}12$ μέτρα. Πρὸς εὕρεσιν τώρα τοῦ χρόνου t ὑπολογίζομεν τὸν χρόνον t_1 τὸν ὁποῖον χρειάζεμαι τὸ βλῆμα τοῦ πρώτου πυροβόλου διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἀπόστασιν 21006 μ. Ὁ χρόνος οὗτος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $x=V_0 t$συνω. Ἄρα $21006=500t_1 . 0{,}5$ ἢ $t_1=84{,}03$ δευτερόλεπτα.

Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα τοῦ δευτέρου πυροβόλου εἰς ἀπόστασιν 25000—21006= =3994 μ. χρειάζεται χρόνον t_2 ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου. Δηλαδὴ $3994=312{,}5 . t_2 . 0{,}8$ ἢ $t_2=15{,}98$ δευτερόλεπτα. Ὁ μεσολαβήσας συνεπῶς χρόνος εἶναι $t=t_1-t_2=68{,}05$ δλ.

ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Κατὰ ποῖον τρόπον συντελεῖ εἰς τὴν προαγωγὴν τοῦ πολιτισμοῦ μιᾶς χώρας ὁ μηχανικὸς ἐξοπλισμός.

ΑΛΓΕΒΡΑ. ***Ἄσκησις 1η. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τῶν x καὶ ψ αἵτινες ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος:***

$$\left.\begin{aligned} λογψ &= 4λογ(-1-i\sqrt{3})^3-10^{λογ(2λογ x)}+4λογ\frac{5}{4} \\ 1 : λογ\sqrt{10}^{\,-x} &= λογ\sqrt{x\sqrt{ψ}}+\sqrt[4]{ψ}\sqrt[3]{\frac{ψ}{\sqrt[4]{ψ}}}-26 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Λύσις. Θέτω τὸ $10^{λογ(2λογx)}=ω$. ὁπότε $λογ(2λογx)=λογω$ ἐξ οὗ $ω=2λογx$ ἄρα $10^{λογ(2λογx)}=2λογx$ (2) Ἐπίσης τὸ $-(1+i\sqrt{3})^3=-(1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3})=8$ (3) καὶ ἡ $\sqrt[4]{ψ}\sqrt[3]{\frac{ψ}{\sqrt[4]{ψ}}}=\sqrt[12]{ψ^3 . \frac{ψ4}{ψ}}=\sqrt[12]{ψ^6}=\sqrt{ψ}$ (4). Οὕτω λόγῳ τῶν (2), (3) καὶ (4) τὸ σύστημα (1) γίνεται: $λογψ=4λογ8-2λογx+4λογ\frac{5}{4}, -x=λογ\sqrt[4]{x^2ψ}+\sqrt{ψ}-26$ (5) ἢ $λογψ+2λογx=4(λογ8+λογ\frac{5}{4}), -x=λογ\sqrt[4]{x^2ψ}+\sqrt{ψ}-26$ (6)

$$ἢ \quad \left.\begin{aligned} λογψ . x^2 &= 4λογ10 \\ -x &= λογ\sqrt[4]{x^2ψ}+\sqrt{ψ}-26 \end{aligned}\right\} \quad ἢ \quad \left.\begin{aligned} x^2ψ &= 10^4 \\ -x &= λογ\sqrt[4]{x^2ψ}+\sqrt{ψ}-26 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $x^2ψ$ διὰ τοῦ ἴσου του εἰς τὴν δευτέραν τῶν (7) ἔχ μεν $-x=\lambda o\gamma 10+\sqrt{\psi}-26$ ἢ $-x=\sqrt{\psi}-25$· ἢ $x+\sqrt{\psi}=25$. Οὕτω ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2\psi=10^4 \\ x+\sqrt{\psi}=25 \end{cases}$ ἢ $\begin{cases} x\sqrt{\psi}=10^2 \\ x+\sqrt{\psi}=25 \end{cases}$ (8). Ἄρα τὰ x καὶ $\sqrt{\psi}$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $z^2-25z+100=0$. Ἐξ ἧς ἔχομεν $z_1=20, z_2=5$.

Ἄρα $x=20, \sqrt{y}=5$ ἢ $x=5, \sqrt{y}=20$ ἐξ ὧν $x=20,\ y=25$ καὶ $x=5,\ y=400$.

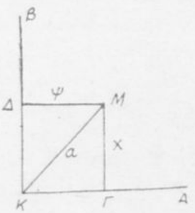
Ἄσκησις 2α. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς πραγματικαὶ τιμαὶ ἑκάστου τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος:

$$x+\psi+z=1\ ,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{z}=1\ ,\quad \alpha x+\beta\psi+\gamma z=1 \quad (1)$$

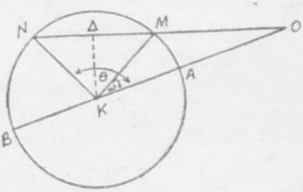
Λύσις. Τοῦτο γράφεται $x+\psi+z=1$, $x\psi+\psi z+zx-x\psi z=0$, $\alpha x+\beta\psi+\gamma z=1$ (2) ἢ $x+\psi=1-z$, $(1-z)(x\psi+z)=0$, $\alpha x+\beta\psi+\gamma z=1$ (3). Τοῦτο δίδει

$\begin{cases} x+\psi=1-z \\ 1-z=0 \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma z=1 \end{cases}$ (4) καὶ $\begin{cases} x+\psi=1-z \\ x\psi+z=0 \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma z=1 \end{cases}$ (5). Ἐκ τοῦ (4) ἔχομεν $z=1$ καὶ $x+\psi=0$, $\alpha x+\beta\psi=1-\gamma$ ἐξ οὗ $x=(\gamma-1):(\beta-\alpha)$, $\psi=(1-\gamma):(\beta-\alpha)$

Ἡ πρώτη τῶν (5) γράφεται $(x-1)(\psi-1)=0$ ὅτε τὸ (5) δίδει $x=1$, $x\psi+z=0$,



Σχ. 31



Σχ. 32

$\alpha x+\beta\psi+\gamma z=1$ (6) καὶ $\psi=1$, $x\psi+z=0$, $\alpha x+\beta\psi+\gamma z=1$ (7). Ἐκ τοῦ (6) ἔχομεν $x=1$ καὶ $\psi+z=0$, $\beta\psi+\gamma z=1-\alpha$ ἐξ οὗ $\psi=(1-\alpha):(\beta-\gamma)$, $z=(\alpha-1):(\beta-\gamma)$. Ἐκ τοῦ (7) ἔχομεν $\psi=1$ καὶ $x+z=0$, $\alpha x+\gamma z=1-\beta$, ἐξ οὗ $x=(1-\beta):(\alpha-\gamma)$ καὶ $\psi=(\beta-1):(\alpha-\gamma)$.

Διευρεύνησις. Ἵνα ὑπάρχῃ λύσις πρέπει $\alpha\neq\gamma\neq\beta\neq\alpha$

*Ἄσκησις 3η. Ἐπὶ τεταρτοκυκλίου **AKB** ἀκτῖνος α, ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ σημεῖον **M**, τοιοῦτον ὥστε, αἱ ἀγόμεναι ἐξ αὐτοῦ κάθετοι **MΓ** καὶ **MΔ** ἐπὶ τὰς ἀκτίνας **KA** καὶ **KB**, νὰ ἔχωσι ἄθροισμα **(MΓ)+(MΔ)**=αλ ἔνθα λ πραγματικὸς ἀριθμός. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ λ δι' ἃς τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν.*

Λύσις. Θέτομεν (Σχ. 31) τὸ $M\Gamma=x$ καὶ $M\Delta=\psi$. Ὁπότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΓΜ ἔχομεν $x^2+\psi^2=\alpha^2$ (1). Ἐπίσης ἐκ τῆς $(M\Gamma)+(M\Delta)=\alpha\lambda$ ἔχομεν $x+\psi=\alpha\lambda$. Οὕτω ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $x^2+\psi^2=\alpha^2$, $x+\psi=\alpha\lambda$ (2). Τὸ (2) γράφεται $(x+\psi)^2-2x\psi=\alpha^2$, $x+\psi=\alpha\lambda$ ἢ $2x\psi=\alpha\lambda^2-\alpha^2$, $x+\psi=\alpha\lambda$ ἢ $x\psi=\alpha^2(\lambda^2-1):2$, $x+\psi=\alpha\lambda$

ὅτε τὰ x καὶ ψ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2z^2-2\alpha\lambda z+\alpha^2(\lambda^2-1)=0$ (3) ἐξ ἧς ἔχομεν $z_1=\alpha(\lambda+\sqrt{2-\lambda^2})$ καὶ $z_2=\alpha(\lambda-\sqrt{2-\lambda^2})$

$$\text{ἤτοι} \quad \begin{matrix} x=\alpha(\lambda+\sqrt{2-\lambda^2}) \\ \psi=\alpha(\lambda-\sqrt{2-\lambda^2}) \end{matrix} \quad \text{ἤ} \quad \begin{matrix} x=\alpha(\lambda-\sqrt{2-\lambda^2}) \\ \psi=\alpha(\lambda+\sqrt{2-\lambda^2}) \end{matrix}$$

Ὁρισθέντων τῶν x καὶ ψ ὁρίζεται τὸ σημεῖον Μ. Τὸ πρόβλημα ἐν γένει ἔχει δύο λύσεις.

Διερεύνησις. Ἵνα ὑπάρχη σημεῖον Μ πληροῦν τὸ ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος πρέπει τὰ x καὶ ψ νὰ εἶναι πραγματικοὶ καὶ θετικοί. Ἵνα συμβαίνη τοῦτο πρέπει αἱ ρίζαι τῆς (3) νὰ εἶναι πραγματικαὶ θετικαί. Ἤτοι $2-\lambda^2\geqslant 0$ (4) $\alpha\lambda>0$ (5) καὶ $\alpha^2(\lambda^2-1)>0$ (6). Ἐκ τῆς (4) ἔχομεν $-\sqrt{2}\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2}$ ἐκ τῆς (5) $\lambda>0$ καὶ ἐκ τῆς (6) $\lambda<-1$ καὶ $\lambda>1$. Ἄρα ἵνα συναληθεύουν αἱ (4), (5) καὶ (6) πρέπει $1<\lambda\leqslant\sqrt{2}$.

Ἐὰν $1<\lambda<\sqrt{2}$ ἔχει δύο λύσεις τὸ πρόβλημα καὶ ἐὰν $\lambda=\sqrt{2}$ ἔχει μία καὶ τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΛΒ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τῶν Μηχανολόγων (ἰδὲ σελὶς 48).

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Ἄσκησις 1η. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\sigma\upsilon\nu\psi : \sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2},\ 2|\eta\mu x|+\eta\mu|\psi|=1. \quad (1)$$

Λύσις. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) ἔχομεν, ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\psi=\sigma\upsilon\nu|\psi|$, $\sigma\upsilon\nu|\psi|=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x$ ἢ $\sigma\upsilon\nu^2|\psi|=2\sigma\upsilon\nu^2 x$ ἢ $\sigma\upsilon\nu^2|\psi|=2-2|\eta\mu x|^2$ (2). Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (1) ἔχομεν $\eta\mu|\psi|=1-2|\eta\mu x|$ ἢ $\eta\mu^2|\psi|=1+4|\eta\mu x|^2-4|\eta\mu x|$ (3). Διὰ προσθέσεως τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν $1=3-4|\eta\mu x|+2|\eta\mu x|^2$ ἢ $|\eta\mu x|^2-2|\eta\mu x|+1=0$ ἢ $[|\eta\mu x|-1]^2=0$ ἐξ ἧς ἔχομεν $|\eta\mu x|=1$ ἢ $\eta\mu x=\pm 1$ καὶ $x=2K\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$. Ἐπειδὴ $|\eta\mu x|=1$ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (1) ἔχομεν $\eta\mu|\psi|=-1$ ἐξ ἧς $|\psi|=2K\pi-\dfrac{\pi}{2}$ καὶ $\psi=\pm\left(2K\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ἄσκησις 2α. Δίδεται περιφέρεια κύκλου Κ καὶ σημεῖον Ο κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐκ τοῦ Ο ἄγεται τέμνουσα ΟΜΝ σχηματίζουσα γωνίας, $\widehat{OKM}=\omega$ καὶ $\widehat{OKN}=\Theta$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $\varepsilon\varphi\dfrac{\Theta}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2}=$ σταθερόν.

Λύσις. Καλοῦμεν (Σχ.32) x τὴν γωνίαν ΚΟΝ. Φέρομεν τὴν κάθετον ΚΔ ἐπὶ τὴν ΟΜΝ. Ἡ γωνία $\widehat{MK\Delta}=(\Theta-\omega):2$ καὶ $\widehat{OK\Delta}=(\Theta+\omega):2$. Ὁπότε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΚΔΜ καὶ ΚΔΟ ἔχομεν $(K\Delta)=(KM)\sigma\upsilon\nu(\widehat{MK\Delta})$, $(K\Delta)=(KO)\sigma\upsilon\nu(\widehat{OK\Delta})$

$$\text{ἢ} \quad \left.\begin{matrix} (K\Delta)=\rho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Theta-\omega}{2} \\ (K\Delta)=\delta\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Theta+\omega}{2} \end{matrix}\right\} \quad \text{ἔνθα } KM=\rho \text{ καὶ } KO=\delta$$

ὁπότε $\rho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Theta-\omega}{2}=\delta\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Theta+\omega}{2}$ ἢ $\rho:\delta=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Theta+\omega}{2}:\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Theta-\omega}{2}$ ἢ $(\rho-\delta):(\rho+\delta)=$

$$=\left[\ \sigma\upsilon\nu\frac{\Theta+\omega}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\Theta-\omega}{2}\right]:\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\Theta+\omega}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\Theta-\omega}{2}\right]=$$

$$-\eta\mu\frac{\Theta}{2}\eta\mu\frac{\omega}{2}:\sigma\upsilon\nu\frac{\Theta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\ \text{ἢ}\ (\delta-\varrho):(\varrho+\delta)=\varepsilon\varphi\frac{\Theta}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}\ \text{ἤτοι}\ \varepsilon\varphi\frac{\Theta}{2}\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}$$

$=(\delta-\varrho):(\varrho+\delta)=$σταθερόν.

Ἄσκησις 3η. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς ἀκτίνια τὰ τόξα τὰ συναληθεύοντα τὰς ἀνισότητας $(4x^2-9):[2\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1]<o, -2\pi\leqslant x<\pi$ (1).

Λύσις. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) ἔχομεν : $(4x^2-9):[2-3\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x]<o$ ἢ $(4x^2-9)(3\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x-2)>o$· ἢ $(2x+3)(2x-3)(3\sigma\upsilon\nu x-2)(\sigma\upsilon\nu x+1)>o$ (2).

Ἀλλά, ἐπειδὴ $-2\pi\leqslant x<\pi$ τὸ $\sigma\upsilon\nu x+1$ εἶναι πάντοτε θετικόν, ἐξαιρέσει τῆς τιμῆς $-\pi$ δι' ἣν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) γίνεται μηδέν. Ἔχομεν ἐκ τῆς (2) $(2x+3)(2x-3)(3\sigma\upsilon\nu x-2)>0$. (3) Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $3\sigma\upsilon\nu x-2=0$ ἔχομεν $x=2K\pi\pm\Theta$ (4) ἔνθα $\Theta=\pi(48^o 11'20''):180$. Ἐκ τῶν λύσεων τοῦ τύπου (4 μόνον αἱ $x_1=\Theta$, $x_2=-\Theta$ καὶ $x_3=-2\pi+\Theta$ εὑρίσκονται εἰς τὸ διάστημα -2π ἕως π

Αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι κατὰ τάξιν μεγέθους $-2\pi+\Theta$, $-\frac{3}{2}$, $-\Theta$, Θ, $^3/_2$. Οὕτω τὸ διάστημα -2π ἕως π, χωρίζεται εἰς τὰ διαστήματα : $-2\pi\frown(-2\pi+\Theta)$ (1) $(-2\pi+\Theta)\frown-\frac{3}{2}$ (2), $-\frac{3}{2}\frown-\Theta$ (3), $-\Theta\frown\Theta$ (4), $\Theta\frown\frac{3}{2}$ (5) καὶ $^3/_2$ ἕως π (6). Τὸ $2x+3$ εἶναι θετικὸς εἰς τὰ διαστήματα (3), (4), (5) καὶ (6) καὶ ἀρνητικὸς στὰ ἄλλα. Τὸ $2x-3$ θετικὸς μόνον στὸ διάστημα (6) καὶ ἀρνητικὸς στὰ ἄλλα. Καὶ τὸ $3\ \sigma\upsilon\nu x-2$ εἶναι θετικὸς στὰ (1) καὶ (4) καὶ ἀρνητικὸς στὰ ἄλλα. Συνεπῶς ἡ (3) ἀληθεύει εἰς τὰ διαστήματα (1), (3) καὶ (5) ἤτοι $-2\pi\leqslant x<-2\pi+\Theta$, $-^3/_2<x<-\Theta$ καὶ $\Theta<x<{}^3/_2$.

ΦΥΣΙΚΗ. Εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τῶν Μηχανολόγων (ἰδὲ σελ. 51).

ΓΕΩΠΟΝΙΚΗ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ Καθήκοντα καὶ δικαιώματα τοῦ ἐπιστήμονος ἔναντι τῆς Ἑλληνικῆς κοινωνίας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ἄσκησις 1η. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τετραγώνου κατασκευάζομεν τρίγωνα ἰσόπλευρα (πρὸς τὰ ἔξω). Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τετράγωνον καὶ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του, ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου εἶναι 10 μ. (Εὑρίσκεται Μ. Σ. Α. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ ὑπ' ἀρ. 82).

Λύσις. Ἔστω (Σχ. 33) τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τούτου. Τὰ τρίγωνα ΕΒΖ, ΖΓΗ, ΗΔΘ, ΘΑΕ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα διότι αἱ γωνίαι τῶν κυρυφῶν των εἶναι ἴσαι πρὸς 150^o ἑκάστη καὶ τὰ σκέλη των εἶναι ἴσα ὡς ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Συνεπῶς αἱ πλευραὶ ΕΖ ΖΗ, ΗΘ καὶ ΘΕ εἶναι ἴσαι. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς.

τριγώνου ΕΒΖ ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{EBZ}=150^0$ ἕπεται ὅτι ἡ $\widehat{BEZ}=15^0$. Ὁμοίως καὶ καὶ ἡ $AE\Theta=15^0$. Ἡ $AEB=60^0$. Ἄρα ἡ γωνία $\Theta\widehat{E}Z=A\widehat{E}\Theta+A\widehat{E}B+\widehat{B}EZ=90^0$.

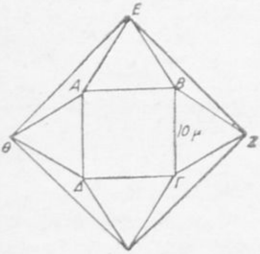
Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ὡς ἔχον τὰς πλευράς του ἴσας καὶ μίαν γωνίαν ὀρθήν, ὁπότε θὰ ἔχη καὶ τὰς ἄλλας ὀρθάς, εἶναι τετράγωνον.

Προεκτείνω τὴν πλευρὰ ΖΓ τοῦ τριγώνου ΖΓΗ ἥτις τέμνει τὴν ΔΗ εἰς τὸ Μ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία $M\widehat{\Gamma}H=30^0$ ὡς παραπληρωματικὴ τῆς $H\widehat{\Gamma}Z$, ἡ ΓΜ εἶναι διχοτόμος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΔΓΗ, ἄρα καὶ ὕψος τούτου. Συνεπῶς $\Gamma M=10\sqrt{3}:2=5\sqrt{3}$.

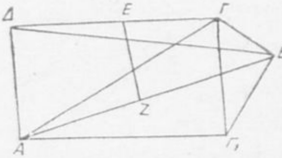
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΜΗ ἔχομεν $(ZH)^2=(Z\Gamma+\Gamma M)^2+(MH)^2$ (1)

Ἀλλὰ $Z\Gamma=10$, $\Gamma M=5\sqrt{3}$ καὶ $MH=5$ ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $(ZH)^2=(10+5\sqrt{3})^2+5^2$ ἢ $ZH=10\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Ἄσκησις 2α. α) Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι,



Σχ. 33



Σχ. 34

νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἐπὶ τὴν ἐλάχιστην ἀπόστασιν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

(Εὑρίσκεται λελυμένη εἰς τὴν ΜΕΓ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ Α. Φ ΠΑΛΛΑ § 903).

β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς 10 μ. (Εὑρίσκεται εἰς τὴν ΜΕΓ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ ὑπ' ἀριθ. 2031).

Λύσις. α) Ἔστω (Σχ. 34) τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ὀρθογώνιοι. Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ φέρομεν τὴν $\Gamma\Gamma_1$ ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ΑΔ ὅτε καὶ τὸ τετράπλευρον $A\Delta\Gamma\Gamma_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὅτε ἡ $A\Gamma_1$ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση τῇ ΔΓ. Τὰ τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ $AB\Gamma_1\Delta$ εἶναι ἰσοδύναμα διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΔ καὶ αἱ κορυφαὶ των Γ καὶ Γ_1 κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ κοινῇ βάσει. Ἐὰν ΕΖ εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ΔΓ καὶ ΑΒ αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν $A\Gamma$ συνεπῶς καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $BA\Gamma_1$ ἤτοι ὕψος τοῦ τετραέδρου $\Delta AB\Gamma_1$.

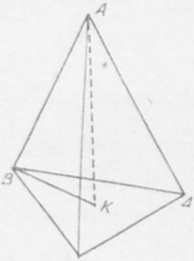
Συνεπῶς $V(AB\Gamma\Delta)=V(\Delta AB\Gamma_1)=(AB\Gamma_1)(EZ):3$. Ἀλλά, ἐπειδὴ αἱ ΔΓ καὶ ΑΒ

Ἀργία μήτηρ πάσης κακίας. Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἐννοήσουν ὅτι μόνον διὰ τῆς μελέτης θὰ σταδιοδρομήσουν. Οὐδεὶς μαθητὴς μὴ ἐργατικὸς γίν[...] ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ Α. ΠΑΛΛΑ.

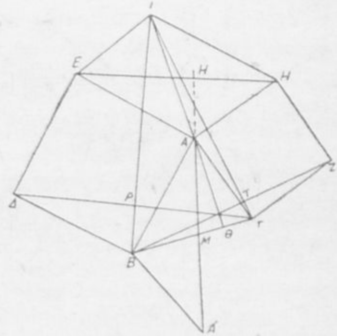
εἶναι κάθετοι, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ_1$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς $(ΑΒΓ_1)=$
$=\frac{1}{2}(ΑΒ)(ΑΓ_1)=(ΑΒ)(ΔΓ):2$, ὅτε $V(ΑΒΓΔ)=(ΑΒ)(ΔΓ)(ΕΖ):6$
ἢ $(ΑΒ)(ΔΓ)(ΕΖ)=6V(ΑΒΓΔ)$ ὅ. ἔ. δ.

β) Φέρομεν (Σχ. 35) τὸ ὕψος ΑΚ. Ἐπειδὴ τὸ τετράεδρον εἶναι κανονικόν, τὸ Κ εἶναι κέντρον τῆς βάσεως ΒΓΔ. Φέρομεν τὴν ΚΒ ἥτις εἶναι ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ ΒΓΔ καὶ συνεπῶς $ΚΒ=α:\sqrt{3}$ *ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκμή. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ ἔχομεν* $(ΑΒ)^2=(ΚΒ)^2+(ΑΚ)^2$ *ἢ* $(ΑΚ)^2=(ΑΒ)^2-(ΚΒ)^2=6α^2:9$ *Ἄρα* $ΑΚ=α\sqrt{6}:3$. *(1) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ* $(ΒΓΔ)=$ $=α^2\sqrt{3}:4$. *Ἐπομένως ὁ ὄγκος v τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι* $v=α^3\sqrt{2}:12=$ $=250\sqrt{2}:3$.

Ἄσκησις 3η. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τετράγωνα ΑΓΖΗ καὶ ΑΒΔΕ. Νὰ δειχθῇ ὅτι α) ἡ διάμεσος ἡ ἐκ τοῦ Α



Σχ. 35



Σχ. 36

ἠγμένη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος τῇ ΕΗ. β) Τὸ ἐκ τοῦ Α ἠγμένον ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Ι τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου αἱ ἄλλαι κορυφαὶ εἶναι τὰ Ε,Α,Η καὶ γ) Αἱ εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΒΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΙ καὶ ΓΙ καὶ ὅτι αἱ ΔΓ καὶ ΒΖ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ἐκ τοῦ Α ἠγμένου ὕψους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Λύσις. α) Ἔστω (Σχ. 36) ΑΜ ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Προεκτείνομεν ταύτην καὶ λαμβάνομεν ΜΑ′=ΑΜ. Ὅτε τὰ τρίγωνα ΑΒΑ′ καὶ ΕΑΗ ἔχουν ΑΒ=ΑΕ, Α′Β=ΓΑ=ΑΗ καὶ γωΑΒΑ′=γωνΕΑΗ, διότι ἡ Α′Β εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ, ἄρα ἡ γωνία ΑΒΑ′ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΒΑΓ, συνεπῶς εἶναι ἴσα. Ὁπότε γων ΒΑΑ′= γωνΑΕΗ καὶ ἐπειδὴ τὸ ἓν ζεῦγος τῶν πλευρῶν των εἶναι κάθετοι ἤτοι $ΑΒ\perp ΑΕ$ ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἄλλο ζεῦγος τῶν πλευρῶν των εἶναι κάθετοι ἤτοι $ΑΜ\perp ΕΗ$.

β) Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΘ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὴν διαγώνιον ΑΙ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΑΗΙ. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αὗται ἀποτελοῦν εὐθεῖαν. Τὰ τρίγωνα ΙΑΗ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν ΙΗ=ΑΕ=ΑΒ καὶ ΑΗ=ΑΓ καὶ γων $\widehat{\text{ΒΑΓ}}=\widehat{\text{ΙΗΑ}}$ ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς γωνίας ΕΑΗ. Συνεπῶς γων ΙΑΗ=γωνΑΓΒ.(1) Ἀλλὰ λόγῳ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΘΓ ἔχομεν $\widehat{\text{ΘΑΓ}}+\widehat{\text{ΑΓΘ}}=90^0$ ἢ λόγῳ τῆς (1) $\widehat{\text{ΘΑΓ}}+\widehat{\text{ΙΑΗ}}=90^0$. Ὅτε $\widehat{\text{ΘΑΓ}}+\widehat{\text{ΓΑΗ}}+\widehat{\text{ΙΑΗ}}=180^0$. Συνεπῶς αἱ ΑΘ καὶ ΑΙ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν.

γ) Τὰ τρίγωνα ΔΒΓ καὶ ΙΑΒ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ΑΙ=ΒΓ, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΙΑΗ, ΑΒ=ΒΔ καὶ γων ΓΒΔ=γωνία ΒΑΙ, διότι γων ΓΒΔ= $=90^0+\widehat{\text{ΑΒΓ}}$, ἡ δὲ γων $\widehat{\text{ΒΑΙ}}=90^0+\text{ΕΑΙ}=90^0+\widehat{\text{ΑΙΗ}}=90^0+\widehat{\text{ΑΒΓ}}$. Συνεπῶς ΒΙ=ΓΔ καὶ γωνία $\widehat{\text{ΒΓΔ}}$=γωνΒΙΑ ἢ γωνία $\widehat{\text{ΒΓΔ}}$=γων$\widehat{\text{ΒΙΘ}}$. Τῶν γωνιῶν ὅμως αὐτῶν αἱ πλευραὶ ΙΘ καὶ ΒΓ εἶναι κάθετοι ἄρα καὶ αἱ πλευραὶ ΙΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετοι. Ἄρα αἱ ΒΙ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται διὰ τὰς ΒΖ καὶ ΓΙ. Ἐπειδὴ αἱ ΓΡ καὶ ΒΤ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΙΒΓ θὰ τέμνωνται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΙΘ ἤτοι ἐπὶ τοῦ ΑΘ.

ΑΛΓΕΒΡΑ. ***Ἄσκησις 1η. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :***

$$x+y+z=\frac{7}{2},\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{2},\quad xyz=1 \quad (1)$$

(εὑρίσκεται εἰς τὴν Μ. ΑΛΓΕΒΡΑΝ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ ὑπ' ἀριθ. 1922).

Λύσις. Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (1) ἔχομεν: $xy+yz+zx=7 \,.\, xyz : 2$ ἢ λόγῳ (τῆς τρίτης τῶν (1) $xy+yz+zx=7:2$ (2). Ὁπότε ἐκ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν (1) ἔχομεν $y+z=\frac{7}{2}-x_{(3)}$ καὶ $yz=1:x$ (4). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰ $y+z$ καὶ yz διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν: $x\left(\frac{7}{2}-x\right)+\frac{1}{x}=\frac{7}{2}$ ἢ μετὰ τὰν πράξεις: $2x^3-7x^2+7x-2=0$ Αὕτη γράφεται $2(x^3-1)-7x(x-1)=0$ ἢ $2(x-1)(x^2+x+1)-7x(x-1)=0$ ἢ $(x-1)[2x^2-5x+2]=0$ ἐξ ἧς ἔχομεν $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1:2$. Διὰ $x=1$ ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν $y+z=5:2$, $yz=1$ ὁπότε ἔχομεν τὰγ καὶ z ὡς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $4\omega^2-5\omega+2=0$ Ἄρα $y=2$ καὶ $z=1:2$ ἢ $y=1:2$ καὶ $z=2$. Ἄρα ἀπὸ τὴν $x=1$ ἔχομεν τὰς λύσεις $x=1$, $y=2$, $z=1:2$ καὶ $x=1$, $y=1:2$, $z=2$ ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἄλλας λύσεις τοῦ συστήματος *(1)* διὰ τὰς τιμὰς $x=2$ καὶ $x=1:2$. Αἱ λύσεις αὗται εἶναι:

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=1:2\\z=1\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=2\\y=1\\z=1:2\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=1:2\\y=2\\z=1\end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix}x=1:2\\y=1\\x=2\end{matrix}$$

Ἄσκησις 2α. Νὰ ὁρισθῇ τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$ ***γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ*** $x=1$ ***μηδενίζεται, διαιρούμενον διὰ*** $x-1$ ***ἀφίνει ὑπόλοιπον 18 καὶ διαιρούμενον διὰ*** $x+2$ ***ἀφίνει ὑπόλοιπον 6.***

Λύσις. Τὰ ὑπόλοιπα τοῦ $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$ διὰ $x-1$, $x-2$, $x+2$ εἶναι κατὰ σειρὰν $1+\alpha+\beta+\gamma$, $16+8\alpha+4\beta+2\gamma$, $16-8\alpha+4\beta-2\gamma$. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς:

$$\begin{array}{lclcl} 1+\alpha+\beta+\gamma=0 & & \alpha+\beta+\gamma=-1 & & \alpha+\beta+\gamma=-1 \\ 16+8\alpha+4\beta+2\gamma=18 & \text{ἢ} & 8\alpha+4\beta+2\gamma=2 & \text{ἢ} & 4\alpha+2\beta+\gamma=1 \quad (1) \\ 16-8\alpha+4\beta-2\gamma=6 & & -8\alpha+4\beta-2\gamma=-10 & & -4\alpha+2\beta-\gamma=-5 \end{array}$$

διὰ προσθέσεως τῶν δύο τελευταίων τῶν (1) ἔχομεν $4\beta=-4$ ὁπότε $\beta=-1$ καὶ διὰ ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς δύο τοῦ (1) ἔχομεν: $\alpha+\gamma=0$, $4\alpha+\gamma=3$ ὅτε $\alpha=1$ καὶ $\gamma=-1$. Ἄρα τὸ ζητούμενον πολυώνυμον εἶναι $x^4+x^3-x^2-x$.

Ἄσκησις 3η. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα ἀληθεύῃ ἡ ἀνισσότης $(\chi^2+1)(\lambda+1)>2\lambda x$ *(1) διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ* x *καὶ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος* $\dfrac{x^2+\lambda x+1}{x^2-2\lambda x+1}$ *(2) ἔχουν σημεῖον ἀνεξάρτητον τῶν τιμῶν τοῦ* x.

Λύσις. Ἡ (1) γράφεται: $(\lambda+1)x^2-2\lambda x+(\lambda+1)>0$. Ἵνα αὕτη ἀληθεύῃ διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι $\lambda+1>0$ καὶ ἡ διακρίνουσα $\lambda^2-(\lambda+1)^2<0$. Ἐξ αὐτῶν ἔχομεν $\lambda+1>0$ (3) καὶ $2\lambda+1>0$ (4). Αὗται δίδουν $\lambda>-1$ καὶ $\lambda>-1:2$. Ἵνα ὅμως οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος (2) ἔχουν σημεῖον ἀνεξάρτητον τῶν τιμῶν τοῦ x πρέπει αἱ διακρίνουσαι τούτων νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ μηδενὸς ἤτοι $\lambda^2-4<0$ (5) καὶ $\lambda^2-1<0$ (6). Ἀπὸ τὴν (5) ἔχομεν $-2<\lambda<2$ καὶ ἀπὸ τὴν (6) $-1<\lambda<1$. Ἄρα αἱ (3), (4), (5) καὶ (6) συναληθεύουν διὰ $-1:2<\lambda<1$.

ΦΥΣΙΚΗ. *Ζήτημα 1ον. Ἠλεκτρικὸν ἔργον. Ἠλεκτρικὴ Ἰσχὺς καὶ αἱ μονάδες αὐτῶν.*

Πρόβλημα. Διὰ τὴν ἄρδευσιν ἑνὸς κτήματος ἐκτάσεως 100000 m^2 *ἐγκαθιστῶμεν ἠλεκτρικὴν ἀντλίαν πρὸς ἄντλησιν ὕδατος εἰς μίαν συλλεκτήριον δεξαμενὴν κειμένην 20 μέτρα ἄνωθεν τῆς στάθμης ὑδροληψίας. Ἡ ὑδραντλία λειτουργεῖ 8 ὥρες ἡμερησίως ἐπὶ 4 ἡμέρας ἑβδομαδιαίως. Τὸ κτῆμα ἀρδεύεται ἐκ τῆς δεξαμενῆς ἐπὶ 16 ὥρες ἡμερησίως πλὴν τῆς Κυριακῆς μὲ παροχήν, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς 8 λίτρας ὕδατος ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον τῆς ἀρδευομένης ἐκτάσεως ἡμερησίως, δηλαδὴ κατὰ τὰς 16 ὥρας τῆς ἀρδεύσεως.*

Ζητεῖται ἡ ὡριαία δαπάνη διὰ τὸ ἠλεκτρικὸν ῥεῦμα κινήσεως τῆς ἀντλίας ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τιμῆς ῥεύματος 10 δραχμῶν ἀνὰ ὡριαῖον χιλιοβάττ καὶ γενικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως τῆς ἐγκαταστάσεως 40%₀ συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν ἀπωλειῶν ὕδατος ἐντὸς τῶν ἀρδευτικῶν αὐλάκων.

Λύσις. Διὰ τὴν ἄρδευσιν τοῦ κτήματος, χρειάζονται 100000 . 8=80000 λίτραι ὕδατος ἡμερησίως. Κατὰ τὰς 6 δὲ ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος χρειάζονται 80000 . 6 = 480000 λίτραι ὕδατος. Ἡ ἀνύψωσις διὰ τῆς ἀντλίας τοῦ ὕδατος τούτου, ἀπαιτεῖ δαπάνην ἔργου ἴσου πρὸς 480000 . 20=9600000 χιλιογραμμόμετρα . =94080000 goule.

Ἡ ἀντλία ὅμως ἀποδίδει τὰ 40%₀ τοῦ ἔργου τὸ ὁποῖον δαπανᾷ. Ἑπομένως αὕτη ἐδαπάνησεν ἔργον E=94080000 . 100 : 40=235200000 goules ἢ 235200000 : 3600000=196 : 3 ὡριαία χιλιοβάττ.

Ἡ δαπάνη συνεπῶς εἶναι 1960 : 3 δραχμὰς καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀντλία λειτουργεῖ 4 . 8=32 ὧρες, διὰ νὰ ἀναροφήση τὸ ἀπαιτούμενον ὕδωρ, ἡ ὡριαία δαπάνη διὰ τὸ ἠλεκτρικὸν ῥεῦμα εἶναι (1960 : 3) : 32=121 : 6 δραχμάς.

Ζήτημα 2ον. Μέθοδοι προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν θερμικῆς διαστολῆς στερεῶν σωμάτων.

Πρόβλημα. Ἐντὸς ὑαλίνου κατακορύφου κυλίνδρου ἐσωτερικῆς διαμέτρου 82,5 χιλιοστῶν, εἰσάγομεν τεμάχιον βολφραμίου καὶ ποσότητα τινα ὕδατος καὶ σημειοῦμεν τὴν στάθμην τοῦ ὕδατος ἐπὶ τῆς παρειᾶς τοῦ ὑαλίνου κυλίνδρου.

Εἶτα θερμαίνομεν ἢ ψύχωμεν τὸν κύλινδρον μετὰ τοῦ περιεχομένου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου τὸ σύνολον ἀποκτήσει νέαν σταθερὰν θερμοκρασίαν κατά τι μεγαλυτέραν ἢ μικροτέραν τῆς ἀρχικῆς τοιαύτης.

Ζητοῦνται : α) Ἡ ἀναλογία μαζῶν βολφραμίου καὶ ὕδατος ἵνα, ἡ ἀρχικὴ στάθμη τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου παραμείνη ἀμετάβλητος παρὰ τὰς προκληθείσας αὐξομειώσεις τῆς θερμοκραοίας.

β) Ὑπόδειξις καταλλήλου σχήματος μετὰ τῶν σχετικῶν διαστάσεων τοῦ ὡς ἄνω τεμαχίου βολφραμίου ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ βάρος αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 1000 γραμμάρια.

Δίδονται. Γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς βολφραμίου 4,3 . 10⁻⁶. Γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς ὑάλου 8 . 10⁻⁶. Κυβικὸς συντελεστὴς διαστολῆς ὕδατος 1,8 . 10⁻⁴ καὶ εἰδικὸν βάρος βολφραμίου =19,3 γραμμ. ἀνὰ κυβικὸν ἑκατοστόν.

Λύσις. Ἐὰν m_1 εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος καὶ m_2 ἡ μάζα τοῦ βολφραμίου, οἱ ὄγκοι αὐτῶν θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $\frac{m_1}{1}$ καὶ $\frac{m_2}{19,3}$ ἄρα ὁ ὁλικὸς ὄγκος εἶναι

$m_1+\frac{m_2}{19,3}$, τόσος εἶναι ὅμως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου, ὁ καταλαμβανόμενος ὑπὸ τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ Βολφραμίου. Ἐὰν τώρα ἡ θερμοκρασία ὑψωθῇ κατὰ Θ^0, ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος γίνεται, $m_1(1+1,8 . 10^{-4} . \Theta)$, τοῦ βολφραμίου $\frac{m_2}{19,3}(1+ 3 . 4,3 . 10^{-6} . \Theta)$

καὶ τοῦ δοχείου $\left(m_1+\frac{m_2}{19,3}\right) . (1+3 . 8 . 10^{-6} . \Theta)$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος, ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου, παρέμεινεν ἡ αὐτή, ὁ καταλαμβανόμενος ὑπὸ τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ βολβφραμίου ὄγκος, θὰ ἰσοῦται πάλιν μὲ τὸν νέον ὄγκον τοῦ δοχείου. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$m_1(1+1,8 . 10^{-4} . \Theta)+\frac{m_2}{19,3}(1+3 . 4,3 . 10^{-6} . \Theta)=$$

$$=\left(m_1+\frac{m_2}{19,3}\right)(1+3 . 8 . 10^{-6} . \Theta)$$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $m_1 : m_2=111:30108$

Ὡς κατάλληλον σχῆμα τοῦ τεμαχίου τοῦ βολφραμίου, θὰ ἦτο τὸ σχῆμα κυλίνδρου στηριζομένου διὰ τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ ἐπὶ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου καὶ ἔχον-τος ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνήρχετο τὸ ὕδωρ ἐντὸς τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου. Τότε θὰ ἔχωμεν: $m_1 : m_2 = 111 : 30108$ καὶ ἐπειδὴ $m_2 = 1000$ θὰ εἶναι $m_1 = 111000 : 30108$. Αὕτη εἶναι ἡ μάζα τοῦ ὕδατος εἰς γραμμάρια, ἄρα τόσος θὰ εἶναι καὶ ὁ ὄγκος του εἰς cm^3.

Ἐὰν δὲ ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλινδρικοῦ τεμαχίου τὸ βολφραμίον θὰ ἔχωμεν $3{,}14 \cdot \rho^2 \upsilon = 1000 : 13{,}9$ καὶ $3{,}14 \cdot \frac{8{,}25^2 \cdot \upsilon}{4} = \frac{111000}{30108} + \frac{1000}{13{,}9}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\upsilon = 142$ cm περίπου. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $3{,}14 \cdot \rho^2 \cdot \upsilon = 1000 : 13{,}9$ διὰ $\upsilon = 142$ cm. εὑρίσκομεν $\rho = 0{,}4$ cm περίπου.

Ζήτημα 3ον. Στάσιμα κύματα ἐν τῇ Ἀκουστικῇ, Παραγωγὴ καὶ ἰδιότητες.

Πρόβλημα. Δίσκος σειρῆνος φέρων 50 ὀπὰς περιστρέφεται μὲ ταχύτητα η στροφῶν ἀνὰ πρῶτον λεπτόν, ὁ δὲ ἦχος τῆς σειρῆνος προσπίπτει καὶ ἀνακλᾶται ἐπὶ ἑνὸ. ἐπιπέδου καθέτου τοίχου σχηματίζων στάσιμα κύματα, ἔμπροσθεν αὐτοῦ.

α) Ποία ἡ ταχύτης περιστροφῆς η τοῦ δίσκου ἂν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς πρώτης κοιλίας K_1 καὶ τοῦ πέμπτου δεσμοῦ Δ_5 ἐμετρήθη εἰς 100 ἑκατ.

β) Ποία ἡ τότε ἀπόστασις α μεταξὺ τοῦ πρώτου δεσμοῦ Δ_1 καὶ τοῦ τοίχου

Ταχύτης τοῦ ἤχου $340 \frac{m}{sle.}$

Λύσις. Ἡ σειρὴν ἐκπέμπει ἐκπέμπει ἦχον συχνότητος $N = 50 \cdot n : 60$ ἀνὰ δευτερόλεπτον. Ἐπειδὴ δέ, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς πρώτης κοιλίας καὶ τοῦ πέμπτου δεσμοῦ ἰσοῦται πρὸς $7\lambda : 4$, ὅπου λ τὸ μῆκος κύματος διαδόσεως τοῦ ἤχου, θὰ ἔχωμεν $7\lambda : 4 = 100$ ἢ $\lambda = 400 : 7$ cm.

Ἀλλὰ $V = N \cdot \lambda$ ὅπου v ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου. Ἄρα θὰ ἔχωμεν: $340 = 50n \cdot 400 : 60 \cdot 7$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\eta = 7{,}14$ στροφὰς ἀνὰ δευτερόλεπτον ἢ $\eta = 428{,}4$ ἀνὰ πρῶτον λεπτόν.

Κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν στασίμων κυμάτων, ἐπὶ τοῦ τοίχου σχηματίζεται δεσμός, διότι τὰ μόρια τοῦ ἀέρος τὰ εἰς ἐπαφὴν πρὸς τὸ τοίχωμα εὑρισκόμενα, δὲν δύνανται νὰ πάλλωνται ἐμποδιζόμενα ὑπὸ τοῦ τοίχου.

Συνεπῶς ὁ πρῶτος δεσμὸς σχηματίζεται ἐπὶ τοῦ τοίχου καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ τοίχου εἶναι μηδεν.

ΧΗΜΕΙΑ. Ζήτημα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑκατοστιαία σύνθεσις τοῦ ἐνύδρου θειϊκοῦ χάλκου.

Ὁ τύπος τοῦ ἐνύδρου θειικοῦ χάλκου εἶναι $CuSO_4 + SH_2Q$. *Τὸ δὲ Μοριακὸν βάρος του 249,6 εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχουν 63,6 μέρη χαλκοῦ, 32 μέρη θείου, 144 μέρη ὀξυγόνου καὶ 10 μέρη ὑδρογόνου· Εἰς τὰ 100 μέρη θὰ ὑπάρχουν συνεπῶς* $63{,}6 \frac{100}{249{,}6}$ *χαλκοῦ,* $32 \frac{100}{249{,}6}$ *Θείου,* $144 \frac{100}{249{,}6}$ *Ὀξυγόνου καὶ* $10 \frac{100}{249.6}$ *ὑδρογόνου.*

Ζήτημα 2ον. Περὶ χαλκοῦ γενικῶς καὶ εἰδικώτερον περὶ θειϊκοῦ χαλκοῦ. Ζήτημα 3ον. Περὶ φωσφόρου. Προέλευσις, παρασκευή, χρῆσις, Ζήτημα 4ον. Αἰθιλικὴ ἀλκόλη καὶ γενικῶς περὶ ἀλκοολῶν.

ΑΝΩΤΑΤΗ ΕΜΠΟΡΙΚΗ 1948

ΤΜΗΜΑ 1ον. ΕΚΘΕΣΙΣ. Ἡ ἀρετὴ ὡς συντελεστὴς ἐπιτυχίας εἰς τὴν ζωήν

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Ζήτημα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{\beta}{x}+\frac{\beta^2}{x^2}=1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Λύσις. Ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν $\alpha x^3+\alpha^2\beta x+\alpha^2\beta^2=\alpha^2x^2+\alpha\beta x^2+\beta^2x^2$ ἢ $\alpha x^3-\alpha^2x^2+\alpha^2\beta x-\alpha\beta x^2+\alpha^2\beta^2-\beta^2x^2=0$ ἢ $\alpha x^2(x-\alpha)-\alpha\beta x(x-\alpha)-\beta^2(x+\alpha)(x-\alpha)=0$ ἢ $(x-\alpha)[\alpha x^2-\alpha\beta x-\beta^2x-\beta^2\alpha]=0$. Ἄρα $x-\alpha=0$ καὶ $x=\alpha$. Ἐπίσης $\alpha x^2-(\alpha\beta+\beta^2)x-\alpha\beta^2=0$

ἄρα $x=[\alpha\beta+\beta^2\pm\sqrt{(\alpha\beta+\beta^2)^2+4\alpha\alpha\beta^2}\,]:2\alpha$ ἢ $x=[\alpha\beta+\beta^2\pm\beta\sqrt{(\alpha+\beta)^2+4\alpha^2}\,]:2\alpha$.

Ζήτημα 2ον. Ἐπὶ κυκλικῆς ὁδοῦ, ἐκ σημείου Α ἀναχωρεῖ τὴν πρώτην πρωϊνὴν κινητὸν βαῖνον κατὰ φορὰν δεξιόστροφον. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ὥραν 8ην πρωϊνὴν ἀναχωρεῖ ἕτερον κινητὸν βαῖνον κατὰ φορὰν ἀριστερόστροφον ἤτοι ἀντίθετον τοῦ πρώτου. Τὰ δύο κινητὰ κινούμενα πάντοτε κανονικῶς (μετὰ τῆς ἰδίας αὐτοῦ ἕκαστον ταχύτητος καὶ διευθύνσεως) συναντῶνται τὴν 5ην μεταμεσημβρινὴν καὶ συνεχίζοντα τοὺς δρόμους των φθάνουσι ἀμφότερα τὴν αὐτὴν στιγμὴν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐκκινήσεως Α. Ζητεῖται ἡ ὥρα ἐπιστροφῆς των εἰς Α.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ α κινητὸν χρειάζεται x ὥρες διὰ μίαν περιστροφήν. Τὸ β θὰ χριάζεται τότε προφανῶς, $x-7$ ὥρες διὰ μίαν περιστροφήν.

Ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ α κινητοῦ, μέχρι τῆς συναντήσεως των τὴν 5ην μεταμεσημβρινήν, παρῆλθον 16 ὧρες. Κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα τὸ α κινητὸν διέγραψε τὰ $16:x$ της περιφερείας. Ἐνῷ τὸ κινητὸν β, διήνυσεν τὰ $9:(x-7)$ τῆς περιφερείας. Τὰ δύο ταῦτα μέρη ἀποτελοῦν μίαν περιφέρειαν. ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν. $(16:x)+[9:(x-7)]=1$ ἢ $16x-112+9x=x^2-7x$ ἢ $x^2-32x+112=0$ ἥτις δίδει $x_1=28$ καὶ $x_2=4$. Ἐξ αὐτῶν ἡ δευτέρα ἀπορίπτεται διότι συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν τοῦ προβλήματος ἡ πρώτη συνάντησις αὐτῶν ἐγένετο 16 ὧρες μετὰ τὴν ἀναχώρησιν τοῦ α.

Ἡ ὥρα ἐπιστροφῆς συνεπῶς τοῦ α ἄρα καὶ τοῦ β κινητοῦ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐκκινήσεως Α εἶναι ἡ 5 πρωϊνὴ τῆς ἐπομένης.

Ζήτημα 3ον. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις

$$A\equiv\frac{\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}}{\gamma}:\left[\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\gamma^{\frac{1}{2}}}{\beta}:\left(\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma}{\beta^3}\right):\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\,\beta^{\frac{1}{2}}}{\gamma}:\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]$$

καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου διὰ $\alpha=0,027$, $\beta=1$, $\gamma=0,04$.

Λύσις. Ἔχομεν $\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}{\gamma}=\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta}$ ἐπίσης $\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\gamma}{\beta^2}=\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma^3}}{\alpha\beta^2}$ ἄρα

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}{\beta}:\left(\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\gamma}{\beta^2}\right)=\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\beta}:\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma^3}}{\alpha\beta^2}=\frac{\sqrt{\alpha\gamma}\cdot\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha\beta\gamma^3}\cdot\beta}=\sqrt{\frac{\alpha\gamma\alpha^2\beta^4}{\alpha\beta\gamma^3\beta^2}}=$$

$\sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\gamma^2}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\gamma}$. Ἐπίσης $\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{1/2}}{\gamma}:\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta\gamma}}=\sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\beta\gamma^3}}=$

$=\frac{\alpha}{\gamma\sqrt{\gamma}}$ καὶ ἑπομένως $A=\frac{1}{\gamma}\cdot\sqrt[6]{\frac{\alpha^2}{\beta\gamma^3}}$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως ταύτης εἶναι $=37,5$.

*4ον) **Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης***

$$\left(x^2+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\psi^2+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Λύσις. $\left(x^2+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\psi^2+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x^{\frac{6}{3}}+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+$

$+\left(\psi^{\frac{6}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+$

$+\left[y^{\frac{4}{3}}\left(\psi^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{2}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$=\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{2}}=$

$=\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$

ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ. Ζήτημα 1ον. Ἰνδοκίνα. Ζήτημα 2ον. Ζῶναι τῆς γῆς. Ζήτημα 3ον. Ἐλβετία. Ζήτημα 4ον. Εὐρώπη. Ὅρια, θάλασσαι αἱ ὁποῖαι περιβρέχουν αὐτὴν (πελάγη, κόλποι).

ΤΜΗΜΑ 2ον.—ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ—Ζήτημα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

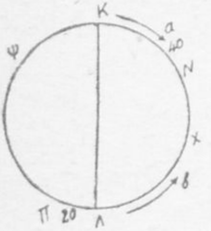
$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}.$$

Λύσις. Θέτομεν $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=y$ καὶ ἔχομεν $6y^2-13y+6=0$. Ἄρα $y_1=3:2$ καὶ $y_2=2:3$

Ἐπομένως $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=\frac{3}{2}$ ἢ $(x+3):(5x+2)=27:8$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=-30:127$. Ἐκ τῆς $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}=\frac{2}{3}$ εὑρίσκομεν $x=5$.

Ζήτημα 2ον. Δύο δρομεῖς τρέχουν ἐπὶ περιφερείας ἀναχωροῦντες ἐκ δύο ἀντιθέτων σημείων K καὶ Λ ἄκρων τῆς αὐτῆς διαμέτρου καὶ βαίνοντες ἀντιθέτως. Διασταυροῦνται τὴν πρώτην φορὰν εἰς τὸ σημεῖον N ἀπέχον 40 μ. τοῦ K καὶ εἶτα δευτέραν φορὰν εἰς Π ἀπέχον 20 μ. τοῦ Λ. Ζητεῖται: 1) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας. 2) Δεδομένου ὅτι παρῆλθον 29 δευτερόλεπτα μεταξὺ τῶν δύο συναντήσεων ζητεῖται ἡ εἰς μέτρα ταχύτης ἑκάστου δρομέως κατὰ δευτερόλεπτον.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τόξKN=40 μ., τόξΛN=xμ., τόξKΠ= yμ. καὶ τόξΠΛ=20 μ. (Σχ. 37). Ἐὰν T_1 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ δρομέως α καὶ T_2 τοῦ δρομέως β, θὰ ἔχωμεν $40:T_1=x:T_2$ (1) Ἐπίσης $(20+x):T_1=(40+\psi):T_2$ ἢ $T_1:(20+x)=T_2:(40+\psi)$. (2)



Σχ. 37

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $40:(20+x)=x:40+\psi)$ ἢ $1600+40y=20x+x^2$ (3) καὶ ἐπειδὴ $40+x=20+y$ ὡς ἡμιπεριφέρειαι, ἔχομεν $y=x+20$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν (3) εὑρίσκομεν τὴν $x^2-20x-2400=0$ ἡ ὁποία ἔχει λύσεις $x_1=60$ καὶ $x_2=-40$ Ἐξ αὐτῶν ἡ δευτέρα ἀπορρίπτεται. Ἄρα τόξΛN=x=60μ. Ἐπίσης y=x+20 ἢ y=80μ. Συνεπῶς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι $20+40+60+80=200$μ.

Ἡ ταχύτης τοῦ δρομέως α εἶναι $(x+20):29=80:29$ μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον, ἡ δὲ τοῦ β εἶναι $(\psi+40):29=120:29$ μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον.

Ζήτημα 3ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\left[x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}-x\psi^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\psi\right]:\left[x^{\frac{5}{3}}-2xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{4}{3}}\right]$$

Λύσις. $$\left[x^{5/3}-x^{4/3}y^{1/3}-x\psi^{2/3}+x^{2/3}y\right]:\left[x^{\frac{5}{3}}-2xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right]=$$

$$=\left[\left(x^{1/3}-y^{1/3}\right)\left(x^{4/3}-x^{2/3}y^{2/3}\right)\right]:x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^2=x^{\frac{1}{3}}:\left(x^{\frac{1}{3}}+\psi^{\frac{1}{3}}\right).$$

Ζήτημα 4ον. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις :

$(4\alpha^2-17\alpha\beta+15\beta^2)\sqrt[12]{\alpha}:\left(\alpha^{1/3}-\dfrac{3\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}\right)$ (1) *καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου διὰ $\alpha=0,0001$ καὶ $\beta=1:5$.*

Λύσις. Ἡ παράστασις $4\alpha^2-17\alpha\beta+15\beta^2$ ἀναλυομένη εἰς γινόμενον γίνεται $(4\alpha-5\beta)(\alpha-3\beta)=4\alpha^2-17\alpha\beta+15\beta^2$. (2) Ἡ $\alpha^{1/3}-\dfrac{3\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}=\dfrac{\alpha-3\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$. (3) Λόγῳ τῶν (2) καὶ (3) ἡ (1) γίνεται $(4\alpha-5\beta)(\alpha-3\beta)\sqrt[12]{\alpha}:\dfrac{\alpha-3\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$ ἢ

$(4\alpha-5\beta)(\alpha-3\beta)\sqrt[12]{\alpha}\sqrt[3]{\alpha^2}:(\alpha-3\beta)=(4\alpha-5\beta)\sqrt[12]{\alpha^9}=(4\alpha-5\beta)\sqrt[4]{\alpha^3}$. Ἤτοι τὸ πηλίκον εἶναι $(4\alpha-5\beta)\sqrt[4]{\alpha^3}$. Ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου εἶναι $\left(4.0,0001-5.\dfrac{1}{5}\right).\left(\sqrt[4]{0,0001}\right)^3=$ $(0,0004-1).(0,1)^3=-0,0009996$.

ΤΜΗΜΑ 3ον. ΕΚΘΕΣΙΣ. Αἱ ὑποχρεώσεις τοῦ ἀτόμου ἔναντι τῆς κοινωνίας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Ζήτημα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις

$$\sqrt[4]{16.\sqrt{256}}-81^{-0,25}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{24.3\sqrt[4]{54}}-\left(9^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}+27^{-\frac{4}{3}}-36^{\frac{3}{2}}.$$

Λύσις. $\sqrt{256}=16$, ἄρα $\sqrt[4]{16.\sqrt{256}}=4$. Ἐπίσης $-81^{-0,25}=-1:3$ καὶ $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{24.3\sqrt[4]{54}}=12$ Ἐπίσης $-\left(9^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}=-3$, $27^{-\frac{4}{3}}=1:81$ καὶ $-36^{\frac{3}{2}}=$ $=-216$. Ἄρα ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μέ: $5278:81$.

Ζήτημα 2ον. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου περιφερείας καὶ κινοῦνται ἰσοταχῶς κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Τὸ Α χρειάζεται 42 ὥρας διὰ νὰ διανύσῃ τὴν περιφέρειαν καὶ τὸ Β 105 ὥρας. Παύουσι κινούμενα ὅταν συναντηθῶσι διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως των.

Ζητεῖται : 1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν μεθ' ἃς θὰ γίνῃ ἡ πρώτη συνάντησις 2) Ὁ ἀριθμὸς τῶν συναντήσεων. 3) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν καθ' ἃς θὰ εἶναι ἀμφότερα ἐν κινήσει καὶ 4) Ὁ ἀριθμὸς τῶν γύρων τοὺς ὁποίους ἕκαστον θὰ ἐκτελέσῃ.

Λύσις. Τὸ Α ἐκτελεῖ εἰς μίαν ὥραν τὸ $1:42$ τῆς στροφῆς τὸ δὲ Β τὸ **1:105.**
Ἐὰν συνεπῶς συναντηθοῦν μετὰ x ὥρες διὰ πρώτην φορὰν τὸ Α θὰ ἔχῃ διανύσῃ τόξον μήκους $x:42$ τὸ δὲ Β, $x:105$. Ἡ διαφορὰ τῶν τόξων αὐτῶν πρέπει νὰ

εἶναι μία περιφέρεια, διότι τὸ ταχύτερον κινητὸν ἐξετέλεσεν ἕνα γῦρον περισσότερον καὶ οὕτω ἔφθασεν τὸ βραδύτερον $(x : 42)-(x : 105)=1$. ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=70$ ὥρες.

Διὰ νὰ συναντηθοῦν τώρα διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ σημεῖον Α πρέπει ἕκαστον νὰ ἐκτελέσῃ ἀκέραιον ἀριθμὸν στροφῶν καὶ ἑπομένως ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος θὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 42 καὶ τοῦ 105. Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν νὰ συναντηθοῦν διὰ πρώτην φορὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τοῦ 42 καὶ τοῦ 105 δηλαδὴ μὲ τὸ 210. Ἄρα τὰ κινητὰ θὰ εἶναι 210 ὥρες ἐν κινήσει. Κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα τὸ Α ἐξετέλεσεν $210 : 42=5$ γύρους τὸ δὲ Β $210 : 105=2$ γύρους.

Καὶ τέλος, ἐπειδὴ συναντῶνται ἀνὰ 70 ὥρες εἰς 210 ὥρες θὰ πραγματοποιηθοῦν 3 συναντήσεις.

Ζήτημα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{x+\alpha}{x+\beta}+\frac{x+\beta}{x+\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Λύσις. Θέτομεν $(x+\alpha) : (x+\beta)=y$ καὶ $(\alpha^2+\beta^2) : \alpha\beta=K$ ὁπότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $Ky^2+K=K^2y+y$ ἢ $Ky(y-K)-(y-K)=o$ ἢ $(y-K)(Ky-1)=o$. Ἑπομένως θὰ εἶναι $y=K$ καὶ $Ky-1=0$ ἢ $y=1 : K$. Ἄρα

$\dfrac{x+\alpha}{x+\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ ἢ $\alpha\beta x+\alpha^2\beta=\alpha^2x+\beta^2x+\alpha^2\beta+\beta^3$ ἢ $x(\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2)=\beta^3$ καὶ $x=\beta^3 : (\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2)$. Ἐπίσης ἐκ τῆς $y=1 : x$ ἔχομεν $(x+\alpha) : (x+\beta)=\alpha\beta : (\alpha^2+\beta^2)$ ἢ $\alpha^2x+\beta^2x+\alpha^3+\alpha\beta^2=\alpha\beta x+\alpha\beta^2$ ἢ $x(\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2)=\alpha^3$ καὶ $x=\alpha^3 : (\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2)$

Ζήτημα 4ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\left[\alpha^2-\alpha^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}\right] : (\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}).$$

Λύσις. Ἔχομεν $\left[\alpha^2-\alpha^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}\right] : (\sqrt{\alpha}-\sqrt{x})=$

$$=\left[\alpha^{\frac{4}{2}}-\alpha^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}\right] : (\sqrt{\alpha}-\sqrt{x})=$$

$$=\left[\alpha^{\frac{3}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)-2x^{\frac{1}{4}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\right] : (\sqrt{\alpha}-\sqrt{x})=$$

$$=(\sqrt{\alpha}-\sqrt{x})\left(\alpha^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}\right) : (\sqrt{\alpha}-\sqrt{x})=\alpha^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}.$$

ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ. Ζήτημα 1ον. Ἰνδικὸς ὠκεανός. Θέσις. Ἔκτασις, χῶραι τὰς ὁποίας διαβρέχει, κυριώτεροι λιμένες. Ζήτημα 2ον. Καναδᾶς. Θέσις, ὅρια, ἔκτα-

σις, πληθυσμός, κυριώτεροι ποταμοί, κυριώτεραι πόλεις. Ζήτημα 3ον. Βέλγιον. Θέσις, ὅρια, ἔκτασις, πληθυσμὸς κυριώτεραι πόλεις. Ζήτημα 4ον. Νῆσοι τῆς Εὐρώπης. Προσδιορίσατε τὴν θέσιν των.

ΣΧΟΛΑΙ ΥΠΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Οὐδὲν καλὸν ὡς ἡ τάξις.

ΤΜΗΜΑ Α΄. ΑΛΓΕΒΡΑ—ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ. Ζήτημα 1ον. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως***

$$\left[z\psi^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}.y^{\frac{1}{3}}\right]:\left[xy-y\sqrt{x}+\frac{xz^2}{y}\right]$$

Ὅταν $x=0{,}0001$, $y=-0{,}008$ καὶ $z=-1:2$.

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται καὶ οὕτω.

$$\left(z.\sqrt[3]{\psi}\;.\;\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt[4]{x}\;.\;\sqrt[3]{\psi}\right):\left(xy-y\sqrt{x}+\frac{xz^2}{y}\right)$$ καὶ οὕτω θέτοντας τὰς τιμὰς τῶν x, y, z εὑρίσκομεν

$$\left[-\frac{1}{2}.\sqrt[3]{-0{,}008}\;.\;\frac{1}{\sqrt{0{,}0001}}-\sqrt[4]{0{,}0001}\;.\;\sqrt[3]{-0{,}008}\right]:\left[0{,}0001.(-0{,}008)-\right.$$

$$\left.-(-0{,}008)\;.\;\sqrt{0{,}0001}\;+\;\frac{0{,}0001\;.\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-0{,}008}\right]=\left[\left(-\frac{1}{2}\right).(-0.2)\;.\;\frac{1}{0{,}01}-\right.$$

$$\left.-0{,}1.(-0{,}2)\right]:\left[0{,}0001.(-0{,}008)-(-0{,}008).0{,}01+\frac{0{,}0001\;.\;\frac{1}{4}}{-0{,}008}\right]=$$

$$=\left(\frac{0{,}2}{0{,}02}+0{,}02\right):\left(-0{,}0000008+0{,}00008-\frac{0{,}0001}{0{,}032}\right)=$$

$$=(10+0{,}02):(0{,}0000792-0{,}003125)=-5010000:15229.$$

Ζήτημα 2ον. α) Δύο βαρέλια Α καὶ Β περιέχουν ἀντιστοίχως 650 καὶ 550 ὀκάδες οἴνου συνολικῆς ἀξίας 8300 δρ. Ἐὰν μεταγγίσωμεν 125 ὀκ. ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β καὶ 125 ὀκ. ἐκ τοῦ Β εἰς τὸ Α ἐξισοῦται ἡ ἀξία τοῦ οἴνου τῶν δύο βαρελίων. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ οἴνου ἑκάστου τῶν δύο βαρελίων.

Λύσις. Μετὰ τὴν μετάγγισιν τὸ πρῶτον περιέχει 525 ὀκ. ἐκ τοῦ Α καὶ 125 ὀκ. ἐκ τοῦ Β, ἐνῷ τὸ δεύτερον περιέχει 125 ὀκ. ἐκ τοῦ Α καὶ 425 ὀκάδες ἐκ τοῦ Β. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀξίαι τοῦ οἴνου τῶν δύο βαρελίων ἐξισοῦνται, θὰ ἔχωμεν ὅτι :

525 ὀκάδες τοῦ Α καὶ 125 τοῦ Β ἀξίζουν 4150 δρ.
καὶ 125 » » » » 425 » » » 4150 δρ.

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν 17 βαρέλια ὡς τὸ Α μετὰ τὴν μετάγγισιν, ταῦτα θὰ

περιέχουν $525 \times 17 = 8925$ ὀκ. Α καὶ $125 \times 17 = 2125$ ὀκάδες Β, συνολικῆς ἀξίας $4150 \times 17 = 70550$ δρ.

Ἐπίσης ἐὰν θερήσωμεν 5 βαρέλια ὡς τὸ Β μετὰ τὴν μετάγγισιν, ταῦτα θὰ περιέχουν $125 \times 5 = 625$ ὀκ. οἴνου Α καὶ $425 \times 5 = 2125$ ὀκ. οἴνου Β συνολικῆς ἀξίας $4150 \times 5 = 20750$ δρ. Ἄρα

8925 ὀκ. οἴνου Α καὶ 2125 ὀκ. οἴνου Β ἀξίζουν 70550 δρ.
καὶ 625 » » » » 2125 » » » » 20750 δρ.

Ἑπομένως αἱ ἐπὶ πλέον $8925 - 625 = 8300$ ὀκάδες οἴνου Α, ἀξίζουν τὰς ἐπὶ πλέον $70550 - 20750 = 49800$ δραχμάς. Ἄρα ἡ μία ὀκᾶ οἴνου Α ἀξίζει $49800 : 8300 = 6$ δραχ. Τώρα, αἱ 650 ὀκάδες τοῦ δοχείου Α ἀξίζουν $650 \times 6 = 3900$ ἄρα αἱ 550 ὀκ. τοῦ Β ἀξίζουν $8300 - 3900 = 4400$ καὶ ἑπομένως ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει $4400 : 550 = 8$ δραχ.

β) Ἤθελέ τις νὰ διαιρέσῃ τὸ α διὰ β καὶ ἀντ' αὐτοῦ διήρεσεν τὸ β διὰ α. Εὗρῆκεν δὲ πηλῖκον 203131...Νὰ εὑρεθῇ τὸ πραγματικὸν πηλῖκον.

Λύσις. Ἀφοῦ $\beta : \alpha = 2,03131....$ θὰ εἶναι $\alpha : \beta = 1 : 2,03131....$ Ἀλλὰ τὸ $2,03131.... = 2011 : 990$. Ἄρα $\alpha : \beta = 990 : 2011$.

Ζήτημα 3ον. α) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Ἀπόδειξις. Ἔστω α ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ Α καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον. Ἔστω ἀκόμη ὅτι τὸ υ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2α, δηλαδὴ $\upsilon = 2\alpha + \mu$. Ἐπειδὴ $A = \alpha^2 + \upsilon$ θὰ ἔχωμεν $A = \alpha^2 + 2\alpha + \mu$ ἢ $A = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \mu - 1$ ἢ $A = (\alpha + 1)^2 + (\mu - 1)$. Παρατηροῦμεν ὅμως τότε, ὅτι ὁ Α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $(\alpha + 1)^2$ πρᾶγμα ἄτοπον, διότι ὁ α εἶνα τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καὶ ἑπομένως τὸ $(\alpha + 1)^2$ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Α.

β) Ποία ἡ διαφορὰ μεταξὺ ποσοστῶν καὶ τόκου. Καθὼς ἐπίσης μεταξὺ ἁπλοῦ καὶ συνθέτου τόκου.

Ἀπάντησις. Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τόκου λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὁ χρόνος τοῦ δανεισμοῦ, ἐνῷ εἰς τὰ ποσοστὰ δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μας χρόνον:

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἁπλοῦ καὶ συνθέτου τόκου, εἶναι ὅτι εἰς μὲν τὸν ἁπλοῦν τόκον, τὸ κεφάλαιον παραμένει σταθερὸν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανεισμοῦ, εἰς δὲ τὸν σύνθετον τὸ κεφάλαιον αὐξάνει κατ' ἔτος, προστιθεμένου τοῦ τόκου.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Ζήτημα 1ον. Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, μὲ ὑποτείνουσαν 10 μ. Γράφομεν περιφέρειαν ἀκτῖνος 1 μ. τέμνουσαν τὴν ὑποτείνουσαν ὄχι ὅμως καὶ τὰς καθέτους πλευράς. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ τῆς περιφερείας, ἐὰν αἱ ἀκτῖνες αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων τομῆς περιφερείας καὶ ὑποτεινούσης, σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸν τρίγωνον (Σχ. 38) καὶ α ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν του, Κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα, ἔχομεν $\alpha^2 + \alpha^2 = 10^2$ ἢ $\alpha^2 = 50$ καὶ $\alpha = 5\sqrt{2}$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι τότε $E = 5 . \sqrt{2} . \sqrt{2} : 2 = 25$ τ. μ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι $E' = \Pi \,.\, 1^2 = \Pi$ τ. μ. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΔΕ εἶναι $\varepsilon = \frac{\Pi}{4}$.

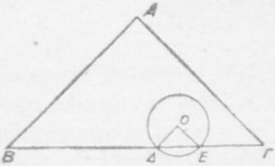
Ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΔΕ εἶναι $\varepsilon' = 1.1:2 = 1:2$ τετρ. μέτρα καὶ συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῆς χορδῆς καὶ τοῦ τόξου ΔΕ, ἰσοῦται μὲ $(\Pi : 4) - (1 : 2) = (\Pi - 2) : 4$ τ. μ. Τὸ τμῆμα τοῦ κύκλου τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχει ἑπομένως ἐμβαδὸν $\Pi - \frac{\Pi - 2}{4} = \frac{3\Pi + 2}{4}$ καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν τοῦτο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν. Τοῦτο ἑπομένως θὰ ἰσοῦται πρὸς $25 - \frac{3\Pi + 2}{4} = \frac{98 - 3\,\Pi}{4} =$

$$= \frac{98 - 3 \,.\, 3{,}14}{4} = 22{,}145 \text{ τ. μ.}$$

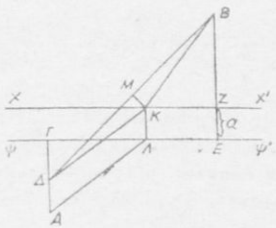
Ζήτημα 2ον. Ἑκατέρωθεν ποταμοῦ εὑρίσκονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν γέφυραν, ἵνα τὰ ἄκρα αὐτῆς ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν δύο σημείων.

Ἀριθμητικὴ ἐφαρμογή. Πλάτος τοῦ ποταμοῦ 8 μ.' ἀποστάσεις τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπὸ τοῦ ποταμοῦ 10 μ. καὶ 25 μ. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν καθέτων αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ εἶναι 50 μ.

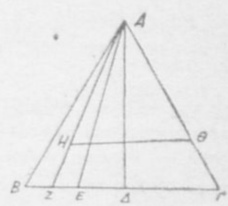
Κατασκευή. Ἔστωσαν (Σχ. 39) xx' καὶ ψψ' αἱ δύο ὄχθαι τοῦ ποταμοῦ καὶ



Σχ. 38



Σχ. 39



Σχ. 40

α τὸ πλάτος αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὰς ὄχθας καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα (ΑΔ)=α. Ἑνοῦμεν τὸ Δ μετὰ τοῦ Β καὶ ὑψοῦμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΔΒ τέμνουσαν τὴν xx' εἰς τὸ Κ. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν κατόπιν τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὐτὴ εἶναι ἡ θέσις τῆς γεφύρας. Πράγματι τὸ τετράπλευρον ΔΚΛΑ εἶναι παραλληλόγραμμον διότι αἱ ΑΔ καὶ ΚΛ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἄρα ΑΛ=ΔΚ. Ἀλλὰ ΔΚ=ΚΒ διότι ἡ ΜΚ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΔΒ ἄρα ΚΒ=ΑΛ.

Ἐὰν θέσωμεν ΑΓ=10 μ., ΒΖ=25 μ., ΓΕ=50 μ. καὶ ΓΛ=x, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΖΒΚ καὶ ΓΑΛ θὰ ἔχωμεν' $(KB)^2 = 25^2 + (50 - x)^2$ καὶ $(A\Lambda)^2 = 10^2 + x^2$. Ἀλλὰ ΑΛ=ΚΒ ἄρα $25^2 + (50 - x)^2 = 10^2 + x^2$ ἢ $625 + 2500 - 100x + x^2 = 100 + x^2$ ἢ $100x = 3025$

καὶ $x=30,25$ μ. Δηλαδὴ ἡ γέφυρα μήκους 8 μ. θὰ ἀπέχη ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ σημείου Γ ἀπόστασιν 30,25 μέτρων.

Ζήτημα 3ον. Να κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν εἶνοι 5 μ. καὶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς 52° 30'.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν (Σχ. 40) ἰσόπλευρον τρίγωνον, μὲ τυχοῦσαν πλευράν, μεγαλυτέραν π. χ. τῶν 5 μέτρων' ἔστω τοῦτο τὸ ΑΒΓ. Τοῦ τριγώνου τούτου φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ ὁπότε γων. ΒΑΔ=30°. Τῆς γωνίας ταύτης φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΕ καὶ κατόπιν φέρομεν τὴν ΑΖ διχοτόμον τῆς γωνίας ΒΑΕ. Ὁπότε γων. ΒΑΖ=7° 30', ἄρα γων. ΖΑΓ=52° 30'. Μὲ κέντρον τώρα Α καὶ ἀκτῖνα 5 μ. γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὰς ΑΖ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Τὸ τρίγωνον ΑΗΘ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ζήτημα 4ον. Σφαῖρα ἀκτῖνος 3 μ. εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύλινδρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Λύσις. 'Αφοῦ ἡ σφαῖρα εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύλινδρον, αὕτη ἐφάπτεται τῶν δύο του βάσεων, καθὼς καὶ τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας. Ἑπομένως ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶναι 3 μ. τὸ δὲ ὕψος του εἶναι 6 μ.

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι $E=2\pi\rho(\rho+\upsilon)$ ἢ $E=2\pi \cdot 3(3+6)= =54 \cdot \pi$. Τῆς σφαίρας εἶναι $E'=4\pi\rho^2$ ἢ $E'=4\pi \cdot 9=36\pi$ καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ εἶναι $54\pi-36\pi=18\pi$.

ΤΜΗΜΑ Β' ΑΛΓΕΒΡΑ — ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ζήτημα 1ον. α) Πατὴρ ἐκέρδισεν εἰς λαχεῖον 900.000 δρ. Ταῦτα διένειμεν εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ μερίδια τοκιζόμενα πρὸς 5 % νὰ γίνωνται ἴσα, ὅταν ἕκαστος υἱὸς συμπληρώνει τὸ 21ον ἔτος τῆς ἡλικίας του. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου, ἂν αἱ ἡλικίαι αὐτῶν εἶναι 9, 16 καὶ 21 ἐτῶν.

Λύσις. Τὸ μερίδιον τοῦ μικροτέρου θὰ παραμείνη τοκιζόμενον ἐπὶ 12 ἔτη. Ἄρα πρὸ 5% θὰ φέρῃ τόκον τὰ 60 : 100 αὐτοῦ. Ἑπομένως ὁ μικρότερος υἱὸς θὰ ἔχη κατὰ τὸ 21ον ἔτος τῆς ἡλικίας του, τὰ 160 : 100=8 : 5 τοῦ μεριδίου ποὺ ἔλαβεν ἀπὸ τὸν πατέρα του. Ὁ δεύτερος υἱὸς θὰ τοκίση τὰ χρήματά του ἐπὶ 5 ἔτη, ἄρα θὰ λάβη ὡς τόκον τὰ 25 : 100 τοῦ μεριδίου του. Ἑπομένως κατὰ τὸ 21ον ἔτος τῆς ἡλικίας του οὗτος θὰ ἔχη τὰ 125 ; 100=5 : 4 τοῦ μεριδίου ποὺ τοῦ ἄφισε ὁ πατέρας του. Τοῦ μεγαλυτέρου υἱοῦ δὲν θὰ ὑπολογίσωμεν τόκον, διότι οὗτος εἶναι ἤδη 21 ἔτους,

Ἐπειδὴ δὲ τὰ χρήματα καὶ τῶν τριῶν εἶναι τότε ἴσα, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ 8 : 5 τῶν χρημάτων τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσα πρὸς τὰ χρήματα τοῦ μεγαλυτέρου' ἢ ὅτι τὰ χρήματα τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσα πρὸς τὰ 5 : 8 τῶν χρημάτων τοῦ μεγαλυτέρου. Ἐπίσης τὰ 5 : 4 τῶν χρημάτων τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσα πρὸς τὰ χρήματα τοῦ μεγαλυτέρου, ἢ ὅτι τὰ χρήματα τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσα πρὸς τὰ 4 : 5 τῶν χρημάτων τοῦ μεγαλυτέρου. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ μερίδια τῶν τριῶν εἶναι 900.000 δρ. συμπεραίνομεν ὅτι τὰ $\frac{8}{8}+\frac{5}{8}+\frac{4}{5}=\frac{97}{40}$ τῶν χρημάτων τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι 900.000 δρ.

Τὸ 1 : 40 θὰ εἶναι τότε 900.000 : 97 καὶ τὰ 40 : 40 θὰ εἶναι 900000.40 : 97=371134 $\frac{2}{97}$

Τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι $\frac{900000\,.\,40}{97}\cdot\frac{4}{5}=296907\frac{21}{97}$. Τέλος τοῦ μικροτέρου θὰ εἶναι $\frac{900000\,.\,40}{97}\cdot\frac{5}{8}=231958\frac{74}{97}$.

Ζήτημα 2ον. α) Νὰ δειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ λήγῃ εἰς 3.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἰσοῦται μὲ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ τετραγώνου τοῦ τελευταίου του ψηφίου. Συνεπῶς.

Ἐὰν	ἀριθμὸς	λήγῃ	εἰς	0	τὸ	τετράγωνόν	του	λήγῃ	εἰς	0
»	»	»	»	1	»	»	»	»	»	1
»	»	»	»	2	»	»	»	»	»	4
»	»	»	»	3	»	»	»	»	»	9
»	»	»	»	4	»	»	»	»	»	6
»	»	»	»	5	»	»	»	»	»	5
»	»	»	»	6	»	»	»	»	»	6
»	»	»	»	7	»	»	»	»	»	9
»	»	»	»	8	»	»	»	»	»	4
»	»	»	»	9	»	»	»	»	»	1

Ἄρα οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον λήγει εἰς 3.

β) Τί λέγεται συνεχὲς ποσόν, τί μέτρησις καὶ τί ἀριθμός, Ποσόν τι λέγεται *συνεχές*, ὅταν τὰ μέρη ἐξ ὧν συνίσταται διαδέχονται ἄλληλα χωρὶς διακοπήν.

Μέτρησις. Καλεῖται ἡ σύγκρισις ἑνὸς ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδές, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς.

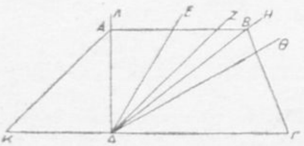
Ἀριθμός. Καλεῖται ἡ ἔννοια τὴν ὁποίαν σχηματίζομεν ἐκ τῆς συγκρίσεως πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Ζήτημα 1ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἔχον δύο γωνίας ὀρθὰς καὶ τοῦ ὁποίου, ἡ μία βάσις νὰ εἶναι 8 μ, ἡ ἄλλη 10 μ. καὶ ἡ διαγώνιος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς, τῆς παρὰ τὴν μεγάλην βάσιν ὀρθῆς γωνίας νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς μεγάλης βάσεως γωνίαν 37°30΄. Ἡ κατασκευὴ νὰ γίνῃ ὑπὸ κλίμακα 1 : 200.***

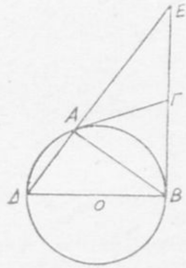
Κατασκευή. Μὲ πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ κορυφὴν (Σχ.41) τὸ Δ σχηματίζομεν γωνίαν ΕΔΓ=60° καὶ φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς ΔΘ ὁπότε γων ΕΔΘ=30°. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΔΖ διχοτόμον τῆς γωνίας **ΕΔΘ** καὶ τέλος τὴν ΔΗ διχοτόμον τῆς γωνίας ΖΔΘ ὁπότε γωνΗΔΘ=7°30′ καὶ ἐπομένως γων ΗΔΓ=37°30. Λαμβάνομεν κατόπιν τμῆμα ΔΓ=10 : 200 μ =5 ἑκατοστόμετρα καὶ ΔΚ=8 : 200=4 ἑκ. διὰ νὰ γίνῃ ἡ κατασκευὴ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{200}$ καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ Κ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΗ τέμνουσαν τὴν κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ Δ, εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν (ε) τέμνουσαν τὴν ΔΗ εἰς τὸ Β καὶ ἑνοῦμεν τὸ Β μετὰ τοῦ Γ. Οὕτω σχηματίζειαι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ζήτημα 2ον. Δίδεται κύκλος Ο καὶ δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Γ. Προεκτείνομεν τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν ΒΓ=ΓΕ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν διάμετρον ΒΟΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρία σημεῖα Ε, Α καὶ Δ κεῖνται ἀπ' εὐθείας.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν (Σχ.42) ΑΓ καὶ ΒΓ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ ΒΓ=ΓΕ. Ἑνοῦμεν τὸ Α μετὰ τῶν Δ, Ε καὶ Β. Ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι τότε ὀρθή, ὡς βαίνουσα εἰς ἡμιπεριφέρειαν. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἡ ΑΓ εἶναι διάμεσος. Ἀλλὰ ΑΓ=ΓΒ ὡς ἐφαπτόμεναι. Εἰς τὸ τρίγωνον λοιπὸν τοῦτο ἡ διάμεσος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ, καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τρίγωνον



Σχ. 41



Σχ. 42

εἶναι ὀρθογώνιον. Δηλ. γων ΕΑΒ=90°. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΔΑ καὶ ΕΑ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ζήτημα 3ον. α) Δίδεται περιφέρεια Ο ἀκτῖνος 10 μ. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Ο' αὐτῆς καὶ μὲ ἀκτῖνα 10 μ. γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Μὲ κέντρον κατόπιν σημεῖον Ο'' τῆς περιφερείας Ο ἀπέχον τοῦ Β ἀπόστασιν 10 μ γράφομεν περιφέρειαν ἀκτῖνος 10 μ, Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν καὶ κειμένου ἐκτὸς τῶν περιφερειῶν Ο' καὶ Ο''. Καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν περιφερειῶν Ο' καὶ Ο''.

Λύσις Ἔστω (Σχ.43) ὅτι ἡ περιφέρεια Ο'' τέμνει τὴν Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἡ περιφέρεια Ο' θὰ διέρχεται τότε συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν διὰ τοῦ σημείου Β καὶ θὰ τέμνῃ τὴν Ο εἰς τὸ σημεῖον Γ. Αἱ εὐθεῖαι ΑΟ, ΟΟ'', ΟΓ, ΟΟ', Ο''Α καὶ

Ο'Γ εἶναι τότε ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν καὶ ἑπομένως ἑκάστη ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι 10μ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΟΟ''Α καὶ ΟΟ'Γ εἶναι ἰσόπλευρα καὶ ἑπομένως ἑκάστη τῶν γωνιῶν των εἶναι 60^0. Τὸ τετράπλευρον ΟΟ''ΒΟ' εἶναι ρόμβος καὶ ἐπειδὴ γων ΟΟ''Β$=60^0$ ἡ γων Ο'ΟΟ''$=120^0$ καί γων ΑΟΟ''$=60^0$ ἄρα ἡ Ο'Ο καὶ ἡ ΟΑ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπίσης δὲ καὶ ἡ ΓΟΟ'' εἶναι εὐθεῖα. Ἡ γωνία ΓΟΑ εἶναι τότε 120^0 καὶ ἑπομένως ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΓΟΑ ἔχει ἐμβαδὸν τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου Ο, δηλαδὴ ἴσον πρὸς $3.14 \,.\, 10^2 : 3=314 : 3$ τ. μ. Ἀν ἐξ αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ κυκλικὰ τμήματα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν χορδῶν ΟΑ καὶ ΟΓ καὶ τῶν ἀντιστοίχων τὸξον, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟ''Ο εἶναι ἴσον πρὸς $3,14 \,.\, 10^2 : 6=314 : 6$ τοῦ δέ τριγώνου ΑΟΟ'' εἶναι $10^2\sqrt{3} : 4 = 100\sqrt{3} : 4$. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς $(314 : 6)-(100\sqrt{3} : 4)=109 : 12$ τ. μ. Ἄρα τῶν δυο κυκλικῶν τμημάτων εἶναι $109 : 6$ τ. μ. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 86,5 τ. μ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο περιφερειῶν Ο' καὶ Ο'' ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς χορδῆς καὶ τοῦ τόξου ΟΑ Τοῦτο ὅμως ἔχει ὑπολογισθῇ προηγουμένως καὶ ἰσοῦται πρός $109 : 6=18,166$ τ. μ.

β) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα τὸ ὁποῖον παραμένει ἰσοδύναμον πρὸς ἑαυτό, ὅταν προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμητήν του 6 καὶ εἰς τὸν παρονομαστήν του 7.

Λύσισ : Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{x}{y}$ τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{x}{y}=\frac{x+6}{(y+7}$ ἢ μετὰ τὴν ἀπαλειφὴν τῶν παρονομαστῶν $xy+7x=xy+6\psi$ ἢ $7x=6\psi$. Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ 7ψ εὑρίσκομεν $x : y=6 : 7$.

Ζήτημα 4ον. Σφαῖρα ἀκτῖνος 3μ. εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύλινδρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων των.

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ σφαῖρα εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύλινδρον, τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι 6μ. ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ θὰ εἶναι 3μ.

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι ἑπομένως $V=\pi\rho^2 \,.\, \upsilon$ ἢ $V=\pi \,.\, 3^2 \,.\, 6=54.\pi$. Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι $V'=4\pi\rho^3:3$ ἢ $V'=4\pi.3^3:3=36\pi$. Ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων των θὰ εἶναι ἑπομένως $54\pi-36\pi=18\pi$.

ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Ἡ δύναμις τοῦ παραδείγματος.

ΑΛΓΕΒΡΑ. Ἄσκησις 1η. Πατὴρ τις εἶναι 40 ἐτῶν καὶ ἡ θυγάτηρ του 16 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τῆς θυγατρός. (Ἰδὲ Μ. Ἄλγεβρα Α. Πάλλα).

Λύσις. Ἔστω ὅτι μετὰ x ἔτη θὰ συμβῇ τοῦτο. Ὅτε ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $40+x$ καὶ ἡ θυγάτηρ του $16+x$ ἐτῶν. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $40+x=3(16+x)$, ἢ $x=-4$. Ἄρα πρὸ τεσσάρων ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τῆς θυγατρός του.

Ἄσκησις 2α. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

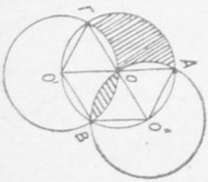
$$\psi+z-x=\alpha,\ z+x-\psi=\beta,\ x+\psi-z=\gamma \ (1)$$

Λύσις. Διὰ προσθέσεως τῶν (1) ἔχομεν:
$x+\psi+z=\alpha+\beta+\gamma$. (2) Ἀφαιροῦντες ἑκάστην τῶν (1) ἀπὸ τὴν (2) εὑρίσκομεν:
$x=(\beta+\gamma):2,\ \psi=(\alpha+\gamma):2,\ z=(\alpha+\beta):2$.

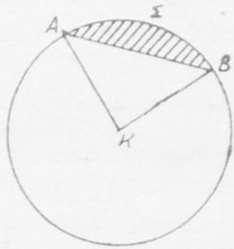
Ἄσκησις 3η. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ὅταν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 36 καὶ τὸ γινόμενον των 1428.

Λύσις. Ἐὰν x εἶναι ὁ μεσαῖος καὶ ω ὁ λόγος τῆς προόδου, τότε οἱ τρεῖς ὅροι τῆς προόδου εἶναι $x-\omega$, x καὶ $x+\omega$. Συμφώνως μὲ τὸ πρόβλημα ἔχομεν: $(x-\omega)+$ $+x+(x+\omega)=36$ (1) καὶ $(x-\omega).x.(x+\omega)=1428$. (2) Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $x=12$ ὅτε ἡ (2) γίνεται $12(12-\omega)(12+\omega)=1428$ ἢ $144-\omega^2=119$ ἢ $\omega^2=25$ ἢ $\omega=\pm 5$ ἤτοι $\omega_1=5$ καὶ $\omega_2=-5$. Ἐὰν λάβωμεν $\omega=5$ τότε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 7,12,17. Ἐὰν δὲ $\omega=-5$ εὑρίσκομεν 17,12,7.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Ἄσκησις 1η. Ἐὰν $A+B+\Gamma=90^0$ νὰ δειχθῇ ὅτι εφAεφB+εφBεφΓ+εφΓεφA=1. (Ἰδὲ ἄσκ. Τριγωνομ. Α. Πάλλα).



Σχ. 43



Σχ. 44

Λύσις. Ἐπειδὴ $A+B+\Gamma=90^0$ ἕπεται ὅτι: εφ(A+B)=σφΓ=1 : εφΓ. Ἐκ ταύτης ἔχομεν (εφA+εφB): (1−εφBεφA)=1 : εφΓ ἢ εφAεφΓ+εφBεφΓ+εφAεφB=1 ὅ.ἔ.δ.

Ἄσκησις 2α. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον δίδονται $\alpha=154,15$ καὶ $\beta-\gamma=87,42$. (1) Ζητεῖται νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

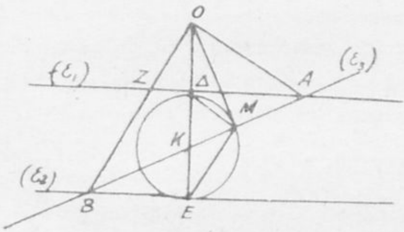
Λύσις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι: β=αημB γ=ασυνB, (2) Ὁπότε διὰ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν α(ημB−συνB)=87,42 ἢ $\sqrt{2}$ αημ(B−45)=87,42 ἢ ημ(45^0−B) =87,42 : $\sqrt{2}$. 154,15 ἐξ ἧς ὑπολογίζεται διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ γωνία 45−B συνεπῶς καὶ ἡ B. Γνωστῶν τῶν α, β, ὑπολογίζεται ἡ Γ ἐκ τῆς σχέσεως Γ+B=90^0 καὶ ἐκ τῶν (2) αἱ πλευραὶ β καὶ γ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἐμβαδὸν E.

Ἄσκησις 3η. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος κύκλου K ἀκτῖνος 20,38 ἀντιστοιχοῦντος εἰς ἐπίκεντρον γωνίαν 71° 37′, κατὰ προσέγγισιν 1:100.

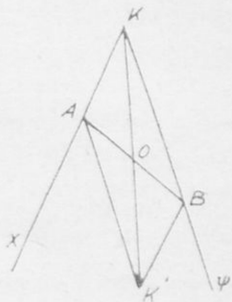
Λύσις. Τὸ ἐμβαδὸν (Σχ.44) τοῦ κυκλικοῦ τμήματος AMB ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ κυκλικοῦ τομέως AKB μεῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου AKB. Ἀλλὰ ἐμ τομ.AKB $=\pi\rho^2\mu^0:180$ ἢ ἐμ. τομ. AKB=3,14 . $(20,38)^2(71,60+37):360^0.60=3,14.(20,38)^2$ 0,198 τοῦ δὲ τριγώνου (AKB)$=\frac{1}{2}\ 20,38^2$ ημ($71^037'$) ὅπερ ὑπολογίζεται διά τῶν λογαρίθμων. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἐμβαδῶν εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. *Ἄσκησις 1η. Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ σημεῖον Ο σταθερὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτων καὶ ἐκτὸς αὐτῶν. Τρίτη εὐθεῖα (ε_3) κινητὴ συναντᾷ τὰς δύο παραλλήλους εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε τὸ τμῆμα ΑΒ νὰ φαίνεται ἀπὸ τὸ Ο ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ Γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν (ε_3).*

Λύσις. Ἐκ τοῦ Ο(Σχ.45) φέρομεν τὴν κάθετον ΟΔΕ ἐπὶ τὰς παραλλήλους (ε_1), (ε_2) καὶ τὴν ΟΜ κάθετον ἐπὶ τὴν (ε_3). Τὸ τετράπλευρον ΟΜΕΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον διότι ἡ πλευρὰ ΟΒ φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ἀπὸ τὰς κορυφὰς Ε καὶ Μ Συνεπῶς γωνΒΜΕ=γωνΒΟΕ (1).



Σχ. 45



Σχ. 46

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τετράπλευρον ΑΜΔΟ εἶναι ἐγγράψιμον. Ἄρα γων. ΔΜΟ=γων. ΔΑΟ (2). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΟΑ ἔχομεν γων. ΖΟΔ=γων. ΔΑΟ (3). Οὕτω ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) ἔχομεν:γων ΒΜΕ=γωνΔΜΟ. Ἀλλὰ γωνΒΜΔ+ +γων ΔΜΟ=1 ορ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν $\widehat{\Delta M O}$ διὰ τῆς ἴσης της εἰς τὴν ἄνω σχέσιν ἔχομεν : γων ΒΜΔ+γων ΒΜΕ=γων ΔΜΕ=1 ορ. Συνεπῶς τὸ σταθερὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ΔΕ φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου διαμέτρου ΔΕ. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον. Συνεπῶς ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΔΕ.

Ἄσκησις 2α. Δοθείσης γωνίας σταθερᾶς καὶ σημείου Ο ἐντὸς αὐτῆς, ζητεῖται διὰ τοῦ Ο νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β οὕτως ὥστε τὸ Ο νὰ εἶναι μέσον τοῦ ΑΒ. (Ἰδὲ Μ. Γεωμ. Α. Πάλλα).

Λύσις. Ἔστω (Σχ. 46) ἡ δοθεῖσα γωνία ΧΚΨ. Φέρομεν τὴν ΚΟ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης λαμβάνομεν ΟΚ'=ΟΚ. Ἐκ τοῦ Κ' φέρομεν τὰς παραλλήλους Κ'Α καὶ Κ'Β ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΧΚΨ ἀντιστοίχως. Ὅτε τὸ τετράπλευρον ΚΑΚ'Β εἶναι παραλληλόγραμμον. Συνεπῶς τὸ ΑΒ ὡς διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου διέρχεται διὰ τοῦ Ο μέσου τῆς ΚΚ' καὶ ἔχει μέσον τὸ Ο.

"Ασκησις 3η. 'Ορθογωνίου παραλληγογράμμου δίδεται τὸ ἐμβαδόν του K^2 καὶ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του λ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ διαγώνιός του.

Λύσις. 'Εὰν α καὶ β εἶναι αἱ δύο διαδοχικαὶ πλευραί του καὶ x ἡ διαγώνιός του, σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν $\alpha-\beta=\lambda$ (1), $\alpha\beta=K^2$ (2) καὶ $x^2=\alpha^2+\beta^2$. (3) Διὰ τετραγωνισμοῦ τῆς (1) ἔχομεν ; $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=\lambda^2$. (4) "Οτε λόγῳ τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν $x^2-2K^2=\lambda^2$ ἢ $x^2=\lambda^2+2K^2$ ἤτοι $x=\sqrt{\lambda^2+2K^2}$.

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΡΑΛΕΙΟΣ 1948

ΕΚΘΕΣΙΣ. Πειθαρχία ὡς ἀρετὴ εἰς τὰ ἄτομα καὶ εἰς τὰ κράτη.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. *"Ασκησις 1η. Κῶνος τέμνει ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονός του κατὰ ἰσόπλευρον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 18 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.*

Λύσις. "Εστω ὁ κῶνος ΒΑΓ ὅστις τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου κατὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΑΓ. Τότε ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου θὰ εἶναι $18:3=6$. Τὸ δὲ ὕψος του $AO=\dfrac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $E=\pi\rho(\lambda+\upsilon)$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ $\lambda=6$ τὸ $\upsilon=3\sqrt{3}$ καὶ $\rho=\dfrac{B\Gamma}{2}=3$ ἔχομεν $E=\pi\,.\,3(6+3\sqrt{3})=9\pi(2+\sqrt{3})$. 'Ο ὄγκος του εἶναι $V=\pi\rho^2\upsilon:3=27\pi\sqrt{3}:3=$ $=9\pi\sqrt{3}$.

"Ασκησις 2α. Πρίσματος ὀρθοῦ μὲ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 165μ καὶ ἡ διαγώνιος μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν του εἶναι 75μ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

Λύσις. "Εστω τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' τοῦ, ὁποίου ἡ βάσις ΑΒΓ ἔχει περίμετρον 165 μ. καὶ συνεπῶς πλευρὰν ΑΒ=55μ. 'Η διαγώνιος Α'Β τῆς ἕδρας ΑΒΒ'Α' εἶναι ἴση μὲ 75μ. 'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΑ' ἔχομεν $(A'A)^2=(A'B)^2-(AB)^2$ ἤτοι $(A'A)^2=75^2-55^2$ ἢ $A'A=10\sqrt{26}$. "Αρα τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος εἶναι $E=(AB+B\Gamma+\Gamma A)(AA')+2(AB\Gamma)=1103$ κατὰ προσέγγισιν.

"Ασκησις 3η. Κύβος ἀκμῆς 2μ τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ κανονικὸν ἑξάγωνον νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἑξαγώνου τούτου.

Λύσις. "Εστω ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' ὁ ἐν λόγῳ κύβος (Σχ.47) ὅστις ἔχει ἀκμὴν 2μ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ κύβος τέμνεται κατὰ κανονικὸν ἑξάγωνον μόνον ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ μίαν διαγωνίου του καὶ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύβου. Τὰ δὲ μέσα τῶν τὰ ἀκμῶν τῶν μὴ διερχομένων διὰ τῶν ἄκρων τῆς ἐν λόγῳ διαμέτρου εἶναι κορυφαὶ τοῦ κανονικοῦ ἐξαγώνου. Ἔστω ΚΕΖΗΘΙ τὸ ἑξάγωνον καθ' ὃ τέμνεται ὁ κῦβος ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΓ' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ο. Ἡ πλευρὰ ΘΗ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ Β'Δ' : 2. Ἀλλὰ $Β'Δ'=2\sqrt{2}$. Συνεπῶς $ΘΗ=\sqrt{2}$. Ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\sqrt{2}$ ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ὅστις εἶναι $Ε=3α^2 . \sqrt{3} :2$ ἔχομεν $Ε=3\sqrt{3}$.

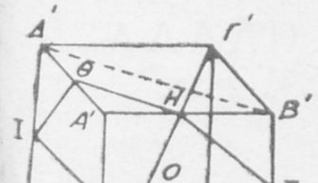
Ἄσκησις 4η. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $Κ=ημ\ 45\ συν(α+β)$ (1) ὅταν $ημα=7 : 9$ καὶ $συνβ=1 : 3$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β λήγουν εἰς τὸ α' τεταρτημόριον.

Λύσις. Τὸ $συν(α+β)=συν\ α\ συνβ-ημ\ α\ ημβ$. (2) Ἀλλὰ $συν\ α=4\sqrt{2} : 9$. Ὁμοίως $ημβ=2\sqrt{2} : 3$. Διὰ ἀντικαταστάσεως τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν τόξων α καὶ β, εἰς τὴν (2) διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν: $συν(α+β)=-10\sqrt{2} : 27$. Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ συν(α+β) εἰς τὴν (1) ἔχομεν: $Κ=47\sqrt{2} : 54$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 1948

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Ἄσκησις 1η. Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας x εὑρεῖν σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε ἡ διαφορὰ $|\overline{ΜΑ}-\overline{ΜΒ}|$ νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρα ἔνθα Α,Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῆς x μὴ ἐπ' αὐτῆς κείμενα. (Εὑρίσκεται εἰς τὴν ΜΕΓΑΛΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ ΤΟΜΟΣ Ι § 86 Α. Φ. ΠΑΛΛΑ).

Λύσις. Ἔστω (Σχ48) κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας x. Ἐὰν $Μ_1$ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς x τότε ἐκ τοῦ τριγώνου $ΑΒΜ_1$ θὰ ἔχωμεν $|\overline{Μ_1Α}-\overline{Μ_1Β}|<\overline{ΑΒ}$. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν $|\overline{Μ_1Α}-\overline{Μ_1Β}|$ θὰ εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς $\overline{ΑΒ}$, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν τὸ $Μ_1$ συμπίπτει μετὰ τοῦ Μ, ὅπερ



Σχ. 47

Σχ. 48

εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς x μετὰ τῆς ΑΒ, ὁπότε ἡ ἐν λόγῳ διαφορὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ $\overline{ΑΒ}$. Συνεπῶς ἡ $|\overline{Μ_1Α}-\overline{Μ_1Β}|$ γίνεται μεγίστη ὅταν τὸ $Μ_1$ λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ Μ. Ἄρα τὸ Μ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἐὰν τὰ σημεῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς x καὶ ἔστω ταῦτα τὰ A_1 καὶ B_1, τότε λαμβάνομεν τὸ συμμερικὸν τοῦ A_1 τὸ A'_1. Ὁπότε ἡ $|\overline{MA_1}-\overline{MB_1}|=|\overline{MA'_1}-\overline{MB_1}|$, διότι $\overline{MA'_1}=\overline{MA_1}$. Οὕτω ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν σημεῖον M τοιοῦτον οὕτως ἡ διαφορὰ $|\overline{MA_1}-\overline{MB_1}|$ νὰ εἶναι μεγίστη, ζητοῦμεν σημεῖον τοιοῦτον ὥστε ἡ $|\overline{MA'_1}-\overline{MB_1}|$ νὰ εἶναι μεγίστη, ὅτε ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Ἄσκησις 2α. Ἂν α,β,γ θετικοὶ καὶ ἀποτελοῦν πλευρὰς τριγώνου τὸ σύστημα : $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, $(\alpha : x)+(\beta : y)+\gamma=0$ (1) δὲν ἔχει πραγματικὰς λύσεις.

Λύσις. Τὸ σύστημα (1) τακτοποιούμενον γίνεται $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, $\alpha y+\beta x+\gamma xy=0$. (2) Λύομεν τὴν πρώτην τῶν (2) ὡς πρὸς y ἔχομεν $y=-(\alpha x+\gamma):\beta$ καὶ διὰ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δευτέραν τῶν (2) λαμβάνομεν $\alpha\gamma x^2+(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)x+\alpha\gamma=0$. (3) Ἡ διακρίνουσα Δ τῆς (3) εἶναι : $\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\gamma-\beta)$. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ α,β,γ εἶναι θετικοὶ καὶ ἀποτελοῦν πλευρὰς τριγώνου, οἱ παράγοντες τῆς Δ εἶναι θετικοὶ ἐκτὸς τοῦ $\alpha-\gamma-\beta$ συνεπῶς ἡ Δ εἶναι ἀρνητική. καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ (3) ἔχει ῥίζας φανταστικάς. Ἑπομένως τὸ σύστημα (1) δὲν ἔχει λύσεις πραγματικάς

Ἄσκησις 3η. Νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις : $\left(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\right):\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}\right)=$

$=\sigma\varphi\frac{x}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{3x}{2}$.(1

Λύσις. Ἔστω K τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ὅτε ἔχομεν $K=(2\sigma\upsilon\nu x+1):(2\sigma\upsilon\nu x-1$, Πολ]ζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ ημx ἔχομεν : $K=(\eta\mu 2x+\eta\mu x):(\eta\mu 2x-\eta\mu x)$ ἢ $K=\varepsilon\varphi\frac{3x}{2}\sigma\varphi\frac{x}{2}$.