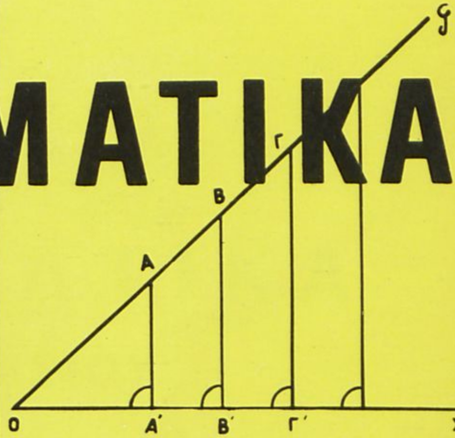
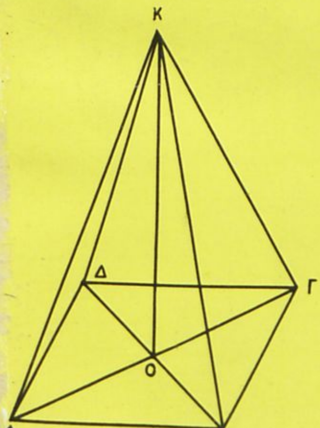
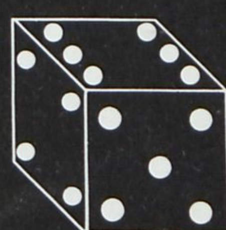
ΣΤ. ΧΡ. ΠΑΧΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ Α. ΚΟΥΡΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Γ.' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ





ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ "ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΙΣ" ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 9 - ΑΘΗΝΑ
ΚΩΝ. ΘΕΟΧΑΡΙΔΗΣ & Σια ΤΗΛ. 614·809 - 1966

ΣΤΕΛΙΟΥ ΧΡ. ΠΑΧΗ - ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ ΑΠ. ΚΟΥΡΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Συμφώνως πρὸς τὸ νέον ἀναλυτικὸν πρόγραμμα
Β. Διάταγμα ἀριθ. 425/16.5.1966, Φ.Ε.Κ. 183, τ. Α΄

Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Γ΄ τάξεως τῶν Γυμνασίων
καὶ διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Λυκείων

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
"ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΙΣ"
ΚΩΝ. ΘΕΟΧΑΡΙΔΗ & ΣΙΑ
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 9 - ΑΘΗΝΑΙ
1966

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὰς ὑπογραφὰς τῶν συγγραφέων.

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ

§ **1.** ***Παράδειγμα 1ον.*** Τὰ σπίτια ἑνὸς δρόμου, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον Α. Σὲ κάθε σπίτι ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον Β. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι σὲ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν σπιτιῶν ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται ***ἀπεικόνισις*** τοῦ συνόλου τῶν σπιτιῶν ***ἐπὶ*** τοῦ συνόλου τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν. Κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν σπιτιῶν λέγεται ***πρότυπον*** στοιχεῖον καὶ κάθε ἀντίστοιχος ἀριθμὸς λέγεται ***εἰκὼν*** τοῦ συνόλου (τοῦ σπιτιοῦ) τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει.

Παράδειγμα 2ον. Ὅλοι γνωρίζομεν ὅτι εἰς κάθε λεξικόν, π.χ. εἰς ἕνα Ἑλληνογαλλικὸν λεξικόν, κάθε λέξις τῆς μιᾶς γλώσσης ἔχει μίαν ἀντίστοιχον λέξιν εἰς τὴν ἄλλην γλῶσσαν. Εἶναι ὅμως δυνατὸν διάφοροι λέξεις τῆς Γαλλικῆς νὰ μὴν ἔχουν ἀντίστοιχον εἰς τὴν Ἑλληνικήν.

Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν λέξεων τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης ***ἐντὸς*** τοῦ συνόλου τῶν ἀντιστοίχων λέξεων τῆς Γαλλικῆς γλώσσης.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι, ὅταν δοθοῦν δύο σύνολα Α καὶ Β διαφορετικὰ μεταξύ των ἢ τὰ ὁποῖα ταυτίζονται καὶ μὴ κενὰ καὶ εἰς κάθε στοιχεῖον $x \in A$ ἀντιστοιχίσωμεν μὲ ἕναν νόμον ἀντιστοιχίας, ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖον $y \in A$, ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ ὁρίζει μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου Α εἰς τὸ σύνολον Β, καὶ παριστάνεται $\mathbf{f : x \in A \rightarrow f(x) \in A}$. δηλ. τὸ $f(x)$ εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ x. Τὸ βέλος διαβάζεται «ἔχει ὡς εἰκόνα».

Ἂν εἰς μίαν ἀπεικόνισιν κάθε $x \in A$ ἔχει μόνον μίαν εἰκόνα $y \in B$ καὶ κάθε $y \in B$ εἶναι εἰκὼν ἑνὸς μόνον στοιχείου $x \in A$, τότε ἡ ἀπεικόνισις λέγεται ***ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις*** (παραδ. 1ον).

Ἂν ὅμως εἰς κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχεῖ $y \in B$, ἀλλὰ κάθε $y \in B$ δὲν εἶναι εἰκὼν στοιχείου $x \in A$, τότε ἡ ἀπεικόνισις λέγεται ***μονοσήμαντος ἀπεικόνισις*** (παράδειγ. 2ον).

Μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις f ἑνὸς συνόλου A εἰς ἕνα σύνολον B λέγεται ***συνάρτησις.***

Τὸ σύνολον A λέγεται ***πεδίον ὁρισμοῦ*** τῆς συναρτήσεως, καὶ τὸ σύνολον B ***σύνολον τιμῶν τῆς f.*** Τὸ στοιχεῖον $x \in A$ λέγεται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή,*** τὸ δὲ στοιχεῖον $y \in B$, ποὺ εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ x λέγεται ***τιμὴ ἢ ἐξηρτημένη μεταβλητή.***

§ **2.** Εἰς μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ $x \in A$ ὅπως καὶ ἡ εἰκών της $y \in B$ μπορεῖ νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἢ ὄχι. Ἂν εἶναι ἀριθμός, τότε ἡ συνάρτησις λέγεται ***ἀριθμοσυνάρτησις.***

§ **3.** Ἔστω A ἕνα σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν ($A \subset \Pi$). Ὅταν εἰς κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχῆ ἕνας ἀριθμὸς $y \in \Pi$, τότε μὲ τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν ὁρίζεται μία συνάρτησις $y=f(x)$ ποὺ λέγεται ***συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς.***

Παράδειγμα 1ον. $f: x \in \Pi \rightarrow y=x+2=f(x) \in \Pi$.

Ἡ μετάβασις ἐκ τοῦ x εἰς τὸ y γίνεται ἂν εἰς τὸ x προσθέσωμεν 2. Διὰ $x=2$ ἔχομεν $y=2+2=4$ ἢ $f(2)=4$. Διὰ $x=3$ ἔχομεν $y=3+2=5$ ἢ $f(3)=5$.

Παράδειγμα 2ον. $f: x \in \Pi \rightarrow y=\frac{4x}{3}-1=f(x) \in \Pi$.

Ἡ μετάβασις ἀπὸ τὸ x εἰς τὸ y γίνεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ x ἐπὶ $\frac{4}{3}$ καὶ ἀπὸ τό γινόμενον ἀφαιρέσωμεν 1. Διὰ $x=2$ ἔχομεν $y=\frac{4}{3}\cdot 2-1=\frac{5}{3}$ ἢ $f(2)=\frac{5}{3}$.

§ **4.** Ὅταν εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος $(x, y) \in \Pi \times \Pi$ ἀντιστοιχῆ ἕνας ἀριθμὸς $z \in \Pi$, τότε μὲ τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν ὁρίζεται μία συνάρτησις $z=f(x, y)$, ποὺ λέγεται ***συνάρτησις δύο μεταβλητῶν*** καὶ γράφομεν $f:(x, y) \in \Pi \times \Pi \rightarrow z=f(x, y) \in \Pi$.

Παράδειγμα 1ον. $f:(x,y) \in \Pi \times \Pi \rightarrow Z=2x^2-3xy+1=f(x,y) \in \Pi$.

Εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (x,y) ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς $2x^2-3xy+1$.

Π.χ. διὰ $x=2$, $y=1$ ἔχομεν $z=2.2^2-3.2+1=3$, καὶ γράφομεν $f(2, 1)=3$.

Παράδειγμα 2ον. $f:(x, y) \in \Pi \times \Pi \rightarrow z=\frac{3x^2-y}{2x-xy+1}=f(x, y) \in \Pi$. Διὰ $x=2$, $y=1$ ἔχομεν $z=\frac{3\cdot 2^2-1}{2\cdot 5-2\cdot 1+1}=\frac{11}{3}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τό πεδίον ὁρισμοῦ A τῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν εἶναι τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $\Pi \times \Pi$ ἢ ἕνα ὑποσύνολόν του, ἐνῷ τὸ σύνολον τῶν τιμῶν B τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ Π ἢ ἕνα ὑποσύνολόν του.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν τριῶν ἢ καὶ περισσοτέρων μεταβλητῶν, ὡς μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος $(x, y, z) \in \Pi \times \Pi \times \Pi \rightarrow \varphi = f(x, y, z) \in \Pi$ κ.ο.κ.

Ὅταν εἰς ἕνα ζήτημα ἕνα γράμμα παριστάνη ἕνα μόνον ἀριθμόν, τότε αὐτὸ λέγεται ***σταθερὰ*** διὰ τὸ ζήτημα αὐτό.

§ **5.** Συναρτήσεις μιᾶς ἢ καὶ περισσοτέρων πραγματικῶν μεταβλητῶν, ποὺ δημιουργοῦνται μὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν τεσσάρων πράξεων ἢ καὶ τήν ἐξαγωγὴν ρίζης μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν των, λέγονται ***ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις***.

Π.χ. Αἱ $f(x)=x^2-3x+2$, $\varphi(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-6}$, $\sigma(x,y) = 3x^2-2xy+7$, $f(x, y, z)=3x+\sqrt{z}-y$ εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως λέγεται ὁ πραγματικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν ἀντικατασταθοῦν αἱ μεταβληταὶ $(x, y, z...)$ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως μὲ ὡρισμένους ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελεσθοῦν αἱ σημειούμεναι πράξεις.

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ διαφόρους τιμὰς τῶν μεταβλητῶν (x, y, z) λαμβάνομεν διαφορετικὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως. Εἰς τὰ παραδείγματα τῶν § 3 καὶ 4 ἔχομεν εὕρει τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως $x+2$ διὰ $x=2$ καὶ $x=3$, τῆς $\dfrac{4}{3}x-1$ διὰ $x=2$, τῆς $2x^2-3xy+1$ διὰ $x=3$, $y=1$ καὶ τῆς $\dfrac{3x^2-y}{2x^2-xy+1}$ διὰ $x=2$ καὶ $y=1$.

§ **6.** ***Εἴδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων***.

Ρητὴ λέγεται μία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ὅταν καμμία μεταβλητή της δὲν εὑρίσκεται ὑπὸ ριζικόν.

Π.χ. αἱ παραστάσεις $\dfrac{x^2+3y}{x+y}$, $xy\sqrt{2}$, $\dfrac{\alpha}{3\sqrt{2}}+y$ εἶναι ρηταὶ παραστάσεις.

Ἄρρητος λέγεται μία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ὅταν σημειώνεται ἐξαγωγὴ ρίζης ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν της. Π.χ. αἱ παραστάσεις $x+\sqrt{y}$, $3\sqrt{x+y}$ εἶναι ἄρρητοι παραστάσεις.

Ἀκεραία λέγεται μία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ὅταν δὲν ἔχη μεταβλητὴν εἰς τὸν παρονομαστήν της. Π.χ. αἱ παραστάσεις $-2\alpha^2\beta$, $\frac{2\alpha\beta+3\gamma}{3}$ εἶναι ἀκέραιαι παραστάσεις.

Κλασματικὴ λέγεται μία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ὅταν ἔχῃ μεταβλητὴν εἰς τὸν παρονομαστήν της. Π.χ. αἱ παραστάσεις $\frac{2x+y}{\omega}$, $\frac{3x^2y}{2\omega}$, $\frac{xy^2}{x+y}$ εἶναι κλασματικαὶ παραστάσεις. Αἱ κλασματικαὶ παραστάσεις λέγονται καὶ ***ἀλγεβρικὰ κλάσματα.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ εὑρεθῇ μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ συνόλου: f $(1,2,3)$ εἰς τὸ σύνολον $B=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Ποῖον εἶναι τὸ $f(2)$ καὶ τὸ $f(3)$.

2) Ἔστω $\varphi(x)=3x(2x+1)$ ὅπου $x\in\Pi\rightarrow\varphi(x)\in\Pi$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(-2)$, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

3) Ἂν $f(x)=2x^2$ νὰ εὑρεθῇ τὸ $[f(2)-f(1)]\ f(3-1)$.

4) Ἂν $\varphi(x)=\frac{x+1}{2x-1}$ νὰ εὑρεθῇ τὸ $\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(1)}{\varphi(\alpha)\varphi(2)-2}$ ἂν $\alpha\neq\frac{1}{2}$.

5) Ἂν $\varphi(x)=2x^2-3x+5$ καὶ $f(x)=x^2+x-2$ νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\varphi(-2)+f(1)$, $\varphi(3).f(-1)$ $2\varphi(1)+3f(-1)$.

6) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\varphi:(x,y)\in\Pi\times\Pi\rightarrow\varphi(x,y)=3x^2+2xy+1\in\Pi$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\varphi(1,2)$, $\varphi\left(\frac{1}{3},2\right)$, $\varphi\left(\frac{2}{3},-\frac{3}{4}\right)$.

7) Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)\in\Pi\times\Pi\rightarrow f(x,y)=2x^3-3x^2y+5xy^2+y^3\in\Pi$, νὰ δειχθῇ ὅτι $f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^3 f(x,y)$ ὅπου $\alpha\in\Pi$.

8) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν παραστάσεων.

α) $-x^3+2x^2+5x+1$ διὰ $x=1$, $x=-2$.

β) $5x^2y+2x^3y-3y^2-4x$ διὰ $x=1$, $y=\frac{1}{5}$ καὶ διὰ $x=2$ $y=-3$.

γ) $2\alpha^2\beta-4\alpha^2-7\beta^2-3\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\beta^2$ διὰ $\alpha=-4$, $\beta=\frac{1}{2}$.

δ) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^3-5x}{x^2-1}$ διὰ $x=-3$ ἢ -2 ἢ 5.

ε) $4\alpha^2(\alpha+\beta-\gamma)-(\beta+\gamma)\ (\gamma-\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)^2\ (\gamma-\beta+\alpha)$ διὰ $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma-3$.

στ) $4\alpha^2\ [(\alpha^2-\beta^2)^2-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)^2]+(\alpha-\beta-\gamma)\ (\alpha+\beta)$ διὰ $\alpha=1$ $\beta=2$, $\gamma=3$.

ζ) $\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)-\frac{2}{x^2-y^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ διὰ $x=-1y=2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΜΟΝΩΝΥΜΑ

§ **7.** Εἰς τὴν (§3) ἔχομεν ὁρίσει τὶ λέγεται συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς. Ἀπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν συνεπάγεται ὁ ἑπόμενος ὁρισμός.

Ἀκέραιον μονώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς x λέγεται κάθε συνάρτησις f, ποὺ ὁρίζεται ἐπὶ τοῦ συνόλου Π διὰ τῆς $x \in \Pi \rightarrow y = f(x) = Kx^{\mu} \in \Pi$: ὅπου K σταθερὸς ἢ παράστασις πραγματικὴ ἀνεξάρτητος τοῦ x καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικός

Π.χ. Αἱ συναρτήσεις $2x^2$, $\frac{3x^2}{4}$, $-x$ εἶναι ἀκέραια μονώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς K λέγεται συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου, ὁ δὲ ἐκθέτης μ λέγεται βαθμὸς τοῦ μονωνύμου.

§ **8.** Κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον, στηριζόμενοι εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν, δίδομεν τὸν ὁρισμόν.

Ἀκέραιον μονώνυμον δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y, ∈Π, ποὺ κάθε μία ὁρίζεται εἰς τὸ σύνολον Π, θὰ λέγωμεν κάθε συνάρτησιν f, ποὺ ὁρίζεται εἰς τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον Π×Π διὰ τῆς $(x, y,) \in \Pi \rightarrow z = (x, y) = Kx^{\nu} y^{\mu} \in \Pi$ $(\nu, \mu \in \Phi)$.

Π.χ. αἱ συναρτήσεις $3xy$, $\frac{-2x^2y}{3}$, $4x^2y^3$ εἶναι ἀκέραια μονώνυμα δύο μεταβλητῶν.

Ἂν $K \neq o$, τότε τὸ μονώνυμον $Kx^{\nu} y^{\mu}$ εἶναι βαθμοῦ ν ὡς πρὸς x, βαθμοῦ μ ὡς πρὸς y καὶ βαθμοῦ ν+μ ὡς πρὸς τὰς δύο μεταβλητὰς $x, y \in \Pi$.

§ **9.** ***Ρητὸν μονώνυμον*** λέγεται κάθε μονώνυμον, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν σημειώνεται ἐξαγωγὴ ρίζης ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του. Π.χ. τὰ μονώνυμα $2\alpha^2\beta$, $\sqrt{3}x^2y$, $\frac{3xy}{4}$ εἶναι ρητὰ μονώνυμα.

Ἄρρητον μονώνυμον λέγεται κάθε μονώνυμον, ποὺ δὲν εἶναι ρητόν. Π.χ. τὰ μονώνυμα $3\sqrt{\alpha\beta}$, $-2\sqrt{xy^3}$ εἶναι ἄρρητα μονώνυμα.

Κύριον ποσὸν ἑνὸς μονωνύμου λέγομεν τὸ ἐγγράμματον μέρος του.

Ὅμοια μονώνυμα λέγονται δύο μονώνυμα, ποὺ ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν. Π.χ. τὰ μονώνυμα $-4\alpha^3\beta$, $\frac{2\alpha^3\beta}{3}$, $\sqrt{2}\alpha^3\beta$ εἶναι ὅμοια.

Ἀντίθετα μονώνυμα λέγονται δύο μονώνυμα, ὅταν ἔχουν ἀντιθέτους συντελεστάς. Π.χ. τὰ μονώνυμα $2x^3y$ καὶ $-2x^3y$ εἶναι ἀντίθετα. Ὅταν ἕνα μονώνυμον δὲν ἔχῃ συντελεστήν, ἐννοοῦμεν πάντοτε ὡς συντελεστήν του τὴν μονάδα. Π.χ. ἐκ τῶν μονωνύμων α^4xy καὶ $-\beta^3x$ τὸ πρῶτον ἔχει συντελεστὴν τό 1, καὶ τὸ δεύτερον τὸ -1.

Συντελεστὴς ἑνὸς μονωνύμου ὡς πρὸς μίαν μεταβλητήν του, λέγεται ὅλο τὸ μονώνυμον ἐκτὸς ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν αὐτήν. Π.χ. Εἰς τὸ μονώνυμον $4\alpha^3\beta x$ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι τό $4\alpha^3\beta$, συντελεστὴς δὲ τοῦ α^3 τὸ $4\beta x$,

§ **10.** ***Πρόσθεσις ὁμοίων μονωνύμων.*** Ἔστω π,χ. τὰ ὅμοια μονώνυμα $A_1 = \frac{2}{3}x^5y^2$, $A_2 = \frac{3}{4}x^5y^2$, $A_3 = -\frac{9}{2}x^5y^2$. Δίδομεν εἰς τὰ x καὶ y τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς x_0, y_0 καὶ προσθέτομεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν.

Κατὰ τὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχομεν :

$$\forall x_0,\ \forall y^0\ \frac{2}{3}x_0^5y_0^2+\frac{3}{4}x_0^5y_0^2-\frac{9}{2}x_0^5y_0^2=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{9}{2}\right)x_0^5y_0^5=$$

$=-\frac{37}{12}x_0^5y_0^2$. Ἄρα : Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ γράψωμεν διὰ τὰ μονώνυμα τῶν μεταβλητῶν x καὶ y, $\frac{2}{3}x^5y^2+\frac{3}{4}x^5y^2-\frac{9}{2}x^5y^2$

$$=-\frac{37}{12}x^5y^2.$$

> **Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμον ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα μὲ συννελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν των.**

Ἡ πρόσθεσις ὁμοίων μονωνύμων εἶναι προφανῶς πρᾶξις προσεταιριστικὴ καὶ ἀντιμεταθετική.

§ **11.** ***Ἀφαίρεσις ὁμοίων μονωνύμων.*** Ἂν σκεφθῶμεν ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων μονωνύμων, συμπεραίνομεν ὅτι :

> **Ἡ διαφορὰ δύο ὁμοίων μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμον ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα μὲ συντελεστὴν τὴν ἀλγεβρικὴν διαφορὰν τῶν συντελεστῶν των.**

Π.χ. $8\alpha^3\beta^2-(-2\alpha^3\beta^2)=8\alpha^3\beta^2+2\alpha^3\beta^2=10\alpha^3\beta^2$.

Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ὁμοίων μονονύμων λέγεται καὶ ***ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.***

§ **12.** ***Πολλαπλασιασμὸς μονωνύμων.*** Ἔστω π.χ. τὰ μονώνυμα $\alpha x^{\mu} y^{\nu}$ καὶ $\beta x^{\rho} y^{\kappa}$ ὅπου $x,y \in \Pi$ καὶ $\mu,\nu,\rho,k \in \Phi$. Ἄς δώσωμεν εἰς τὸ ζεῦγος (x,y) τῶν μεταβλητῶν ἕνα ζεῦγος ἀριθμητικῶν τιμῶν (x_0,y_0). Τὸ πρῶτον μονώνυμον λαμβάνει τὴν ἀριθμ. τιμὴν $\alpha x_o^{\mu} y_o^{\nu}$ καὶ τὸ δεύτερον τὴν ἀριθμ. τιμὴν $\beta x_o^{\rho} y_o^{\kappa}$. Κατὰ τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν δυνάμεων ἔχομεν ὅτι :

$\forall \alpha,\ \forall \beta,\ \forall x_0,\ \forall y_0,\ \forall \mu,\ \forall \nu,\ \forall \rho,\ \forall k : (\alpha x_o^{\mu} y_o^{\nu})\ (\beta x_o^{\rho} y_o^{\kappa}) = \alpha\beta x_o^{\mu+\rho} y_o^{\nu+\rho}$.

Ἄρα διὰ πραγματικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν x καὶ y συμπεραίνομεν ὅτι πρέπει νὰ ἰσχύῃ :

> **Τὸ γινόμενον δύο μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμον, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν γινόμενον τῶν συντελεστῶν των. Κάθε δὲ μεταβλητὴ ἔχει ἐκθέτην ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὰ μονώνυμα.**

Π.χ. $(3x^2y^3)\ (2xy^4) = 6x^3y^7,\quad \left(-\frac{2}{3}xy^3\right)\left(-\frac{1}{2}x^2y\right) = \frac{1}{3}x^3\,y^4$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν μονωνύμων εἶναι πρᾶξις προσεταιριστικὴ καὶ ἀντιμεταθετική.

Ἄν λοιπὸν A_1, A_2, A_3 εἶναι τρία μονώνυμα θὰ ἔχωμεν.

$(A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times (A_2 \times A_3)$ καὶ $A_1 \times A_2 = A_2 \times A_1$.

§ **13.** ***Δύναμις μονωνύμων.*** Ἐπειδὴ τὰ μονώνυμα εἶναι γινόμενα, διὰ νὰ τὰ ὑψώσωμεν εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν γνωστὴν ἰδιότητα ὑψώσεως ἑνὸς γινομένου εἰς δύναμιν.

Π.χ. Ἄν $A = -3x^2y$, τότε $A^3 = (-3)^3(x^2)^3y^3 = -27x^6y^3$.

§ **14.** ***Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἀκεραίων μονωνύμων.*** Μ.Κ.Δ. ἀκεραίων μονωνύμων μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς λέγεται τὸ ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεστὴν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν συντελεστῶν των καὶ κύριον ποσὸν ἀποτελούμενον μόνον ἀπὸ τὰς κοινὰς μεταβλητὰς τῶν μονωνύμων καὶ κάθε μία μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

Π.χ. ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν μονωνύμων $3x^2yz$, $-2xy^3z$, $6x^3y^2z^3$ εἶναι τὸ μονώνυμον xyz.

§ **15.** ***Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον μονωνύμων.*** Κοινὸν πολλαπλάσιον ἀκεραίων μονωνύμων λέγεται κάθε ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὡς παράγοντας τὰ δοθέντα μονώνυμα.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀκεραίων μονωνύμων μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς εἶναι ἕνα μονώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεστὴν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων καὶ περιέχει ὅλας τὰς μεταβλητάς των καὶ κάθε μίαν μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην. Π.χ. τὸ Ε.Κ.Π. τῶν $6x^2y$, $12x^2y^2$, $3x^2y^3$ εἶναι τὸ $12x^2y^3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9) Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν μονωνύμων
$3\alpha^3x^2$, $\frac{2}{3}x^2y$, $\frac{-3}{4}x^2y^3\omega$, $\frac{3\alpha\beta xy}{4}$, $6\frac{1}{2}x^3y^2$.

10) Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν μονωνύμων
$4xy$, $\frac{2x^2y^3}{3}$, $-5x^3y\omega$, $4x^3y^4$, $2\alpha x^5y$ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x καὶ y.

11) Ποίου βαθμοῦ εἶναι τὰ μονώνυμα
$2\alpha^4x$, $6x^2y^2$, $5\beta^2x^3$, $-3\alpha^3x$, $-2\alpha^2x^2$ ὡς πρὸς α, ὡς πρὸς β, ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς x καὶ y.

12) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

α) $-3x^2$, $4x^2$, $-7x^2$, $2x^2$

β) $4xy^2$, $-6xy^2$, $\frac{-7}{4}xy^2$, $\frac{-2}{3}xy^2$.

γ) $2\alpha x^3$, $\frac{-3}{4}\alpha x^3$, $4\alpha x^3$, $\frac{-2}{3}\alpha x^3$.

δ) $\frac{3}{2}x^2y$, $-2x^2y$, $\frac{3}{4}x^2y$, $5x^2y$, $6x^2y$, $-2\frac{1}{2}x^2y$.

ε) $3xy^2z$, $-2xy^2z$, $\frac{2}{3}xy^2z$, $\frac{1}{4}xy^2z$, $-xy^2z$.

στ) $6x^3y^2z$, $\frac{-3}{4}x^3y^2z$, $-2x^2y^2z$, $\frac{1}{2}x^3y^2z$, $-xy^2z$.

13) Νὰ εὑρεθῇ ποῖα ἀπὸ τὰ μονώνυμα εἶναι ὅμοια, καὶ ποῖα εἶναι ἀντίθετα.

α) $2\alpha x^3$, $3\beta^2x^3$, $\frac{-1}{2}\alpha x^3$, $\sqrt{3}\,\beta^2x^3$, $-2\alpha x^3$, $\frac{6}{2}\beta^2x^3$.

β) $3x^2y$, $\frac{-1}{3}xy^3$, $2\frac{1}{5}x^3y^2$, $-3x^2y$, $\frac{-11}{5}x^3y^2$.

14) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α) $2x^2 \,.\, 3xy$, β) $3x^2 \,.\, \frac{3}{5}\, x^2$, γ) $2x^3 y \,.\, 3x y^3$, δ) $-5x^2 y^2\omega \,.\, 3xy$,

ε) $\frac{1}{2}x^2y\omega^3 \,.\, \frac{2}{3}xy^2\omega$, στ) $4x^3y \,.\, 3xy^3\omega$, ζ) $7x^2y \,.\, 3xy\omega \,.\, 2x^2y\omega$,

η) $2x^3y^2 \,.\, \frac{-2}{3}\, xy$, θ) $\frac{-3}{4}\, xy\omega^2 \,.\, \frac{-1}{2}\, xy\omega^2 \,.\, 3xy$, ι) $2x^\mu y^\nu \,.\, \frac{-1}{2}\, x^\mu y^\nu$.

15) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τετράγωνα καὶ οἱ κύβοι τῶν μονωνύμων

$(3\alpha^3\beta)$, $4\alpha^2\gamma^3\beta$, $5x^3y^2z$, $\frac{2}{3}\, xy^3z^4$, $\frac{-1}{2}\, x^2y$.

15) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τέταρται καὶ αἱ πέμπται δυνάμεις τῶν μονωνύμων

$-2xy^3$, $3x^3y^2z$, $\frac{-1}{2}\, x^2yz$, $\frac{-4}{5}\, x^3y^2z^6$.

17) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ κ.δ. καὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν μονωνύμων

α) $2x^3y^2$, $-3x^3y$, $4xy^2z$, $-5xyz^2$.

β) $-4x^3y^2$, $+\,2x^2yz$, $6x^3y^2z^2$, $-8x^4yz^5$.

18) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. καὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν μονωνύμων

α) $24\alpha\beta\gamma^2$, $8\alpha^2\gamma$, $16\alpha\beta$.

β) $48xy^2z^3$, $32x^2yz^2$, $16x^3y^2z^4$, $8x^4y^2z^3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

§ **16.** Ἔστω δύο μονώνυμα ὁριζόμενα ἐπὶ τοῦ Π×Π, $(x,y) \xrightarrow{A_1} \frac{2}{3}x^2y$ καὶ $(x,y) \xrightarrow{A_2} 4x^3$. Ἡ συνάρτησις, ἡ ὁποία διὰ κάθε τιμὴν x_0 καὶ y_0 τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ y λαμβάνει ὡς τιμήν της τὸ ἄθροισμα $\frac{2}{3}x_0^2y_0+4x_0^3$, δηλ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν A_1 καὶ A_2, λέγεται πολυώνυμον τῶν μεταβλητῶν x καὶ y.

Γράφομεν λοιπὸν $(x,y) \xrightarrow{A_1+A_2} \frac{2}{3}x_0^3y_0+4x_0^3=\Pi(x_0,y_0)$. Ἄρα :

|| **Πολυώνυμον εἶναι τὸ ἄθροισμα μὴ ὁμοίων μονωνύμων.**

Τὰ μονώνυμα, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ πολυώνυμον, λέγονται ***ὅροι*** τοῦ πολυωνύμου.

Ἕνα ἀπὸ τὰ μονώνυμα ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς καὶ λέγεται ***σταθερὸς ὅρος*** τοῦ πολυωνύμου.

Ἂν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ δύο ὅρους λέγεται ***διώνυμον,*** ὅπως π.χ. τὸ $3x^2-2x$, ἂν ἔχῃ δὲ τρεῖς ὅρους λέγεται ***τριώνυμον,*** ὅπως π.χ. τὸ $3x^2-2x+7$.

Ἀκέραιον λέγεται ἕνα πολυώνυμον, ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα.

Πλῆρες λέγεται ἕνα πολυώνυμον, ὡς πρὸς μίαν μεταβλητήν του ὅταν περιέχῃ εἰς τοὺς ὅρους του ὅλας τὰς δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας μέχρι καὶ τῆς μικροτέρας, Π.χ. τὸ $4x^3-3x^2+7x+5$.

Ἐλλιπὲς λέγεται ἕνα πολυώνυμον, ὅταν δὲν εἶναι πλῆρες. Π.χ. τὸ $4xy^3-2xy^2$ εἶναι ἐλλιπὲς ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x.

Βαθμὸς ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς εἰς τὸ πολυώνυμον. Π.χ. τὸ πολυώνυμον $4x^3-3x^2y+3y^4-2$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ τετάρτου ὡς πρὸς y, μηδενικοῦ δὲ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς, ποὺ δὲν περιέχει.

Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς δύο ἢ καὶ περισσοτέρας μεταβλητάς του λέγεται ὁ μεγαλύτερος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων του ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς αὐτάς. Π.χ. τὸ πολυώνυμον $2x^2-3xy^3+x^2-2$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς λέγεταί ἕνα πολυώνυμον, ὅταν οἱ ἐκθέται τῆς μεταβλητῆς γράφωνται κατὰ κατιοῦσαν τάξιν.

Διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς λέγεται ἕνα πολυώνυμον, ὅταν οἱ ἐκθέται τῆς μεταβλητῆς γράφωνται κατ' ἀνιοῦσαν τάξιν.

Ὁμογενὲς βαθμοῦ ν, ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς ποὺ περιέχει, λέγεται ἕνα πολυώνυμον, ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ν ὡς πρὸς αὐτάς. Π.χ. τὸ πολυώνυμον $x^4+3x^3y+2x^2y^2-4xy^3+y^4$ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Συμμετρικὸν ὡς πρὸς δύο ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς λέγεται ἕνα πολυώνυμον, ὅταν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικατασταθοῦν κατὰ κυκλικὴν τάξιν αἱ μεταβληταί του. Π.χ. τὸ $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ εἶναί συμμετρικὸν ὡς πρὸς x,y,ω, διότι, ἂν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ y, ἀντὶ y τὸ ω, καὶ ἀντὶ ω τὸ x εὑρίσκομεν τὸ πολυώνυμον $y^3+\omega^3+x^3-3y\omega x$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ἀρχικόν.

Μηδενικὸν πολυώνυμον λέγεται κάθε πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστὴν τῶν ὅρων του τὸ μηδὲν καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος του εἶναι ἐπίσης μηδέν. Π.χ. τὸ $0x^\nu+0x^{\nu-1}+\ldots+0$. Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων του εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀπεριόριστον, καὶ ὁρισμὸς τοῦ βαθμοῦ του δὲν ὑπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19) Ποίου βαθμοῦ εἶναι τὰ κάτωθι πολυώνυμα ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς y, ὡς πρὸς x καὶ y ;

α) $3x^2y-x^3+4xy^2$.

β) $2x^4y-2xy^3+4x^2y-\alpha x^3$.

γ) $5x-4xy^3-7x^4+y$.

δ) $5x^3y-3xy^3+4xy+8$.

ε) $-\frac{2}{3}x^3y^2+\frac{1}{2}xy^3-2xy$.

στ) $2\frac{1}{2}xy^2-3\frac{1}{3}x^2y^2+3xy-2$.

ζ) $5x^4y^3-\frac{7}{2}x^3y^2-\frac{2}{3}xy^3+y^4$.

η) $0{,}5x^3y^5-2{,}3xy^3+4xy^2-6xy$.

20) Ποῖα ἀπὸ τὰ κάτωθι πολυώνυμα εἶναι πλήρη καὶ ποῖα ἐλλιπῆ ;

α) $4x^3-2x^2+7x-6$,

β) $2x^2-3$.

γ) $3x^4-2x^2y+3xy^2+y^3$.

δ) $\frac{2}{3}x^3-\frac{6}{7}x^2y+4$.

ε) $\alpha x^4-2\alpha^3x+4x^2$.

στ) $\alpha x^3y-\beta xy^2+\gamma y^3$.

21) Ποῖα ἀπὸ τά κάτωθι πολυώνυμα εἶναι ὁμογενῆ καὶ ποίου βαθμοῦ εἶναι τὸ καθένα ἀπ' αὐτά ;

α) $x^3-2x^2y+3xy^2-y^3$.
β) $2x^4+3x^3y+y^4$.
γ) $4x^3y-2xy^2+3x-6$.
δ) $5x^2y-3xy^2+2xyz$.
ε) $-x^4+2x^2y^2+3y^3$.
στ) $3x^5-2x^2y^5+3xy^2-6xy$.

22) Ποῖα ἀπὸ τὰ κάτωθι πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα ; Τὰ δὲ μὴ διατεταγμένα νὰ διαταχθοῦν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x ἢ τοῦ y.

α) $3x^3y-2x^2y+3x+3x+2$.
β) $4x^2y^2-2xy^3+4xy^2$.
γ) $x^3-2a^2x+\beta$.
δ) $x^3+y^3-2xy^2+5x^2y$.
ε) $4xyz-3x^3-4y^3+z^3$.
στ) $3x^2y-2xy+5$.

§ 17. *Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις πολυωνύμων.*

Ἔστω τρία πολυώνυμα $A(x,y)=3x^2-2xy+y^2-2x+y-2, B(x,y)=x^2+4xy-2y^2$, $\Gamma(x,y)=y^2+xy-3$ ὅπου $x, y\in\Pi$.

Ἂν δώσωμεν εἰς τὰ x καὶ y ἀριθμητικὰς τιμὰς x_0,y_0 καὶ προσθέσωμεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς, ποὺ εὑρίσκομεν ἀπὸ τὰ τρία πολυώνυμα, τότε κατὰ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων εἰς τὸ σύνολον Π ἔχομεν :

$$\forall x_0,\ \forall y_0\quad A(x_0,y_0)+B(x_0,y_0)+\Gamma(x_0,y_0)=$$
$$3x_0^2-2x_0y_0+y_0^2-2x_0+y_0-2+x_0^2+4x_0y_0-2y_0^2+y_0+x_0y_0^2-3=$$
$$4x_0^2+3x_0y_0-2x_0+y_0-5.$$

Ἄρα διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πολυωνὺμων τῶν μεταβλητῶν x καὶ y ἔχομεν :

$$A+B+\Gamma=4x^2+3xy-2x+y-5.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ συμπεραίνομεν ὅτι :

> **Τὸ ἄθροισμα πολυωνύμων εἶναι ἕνα πολυώνυμον. Εὑρίσκεται δὲ ἂν ἑνώσωμεν εἰς ἕνα μόνον πολυώνυμον τοὺς ὅρους τῶν πολυωνύμων, ποὺ προσθέτομεν, μὲ τὰ πρόσημά των καὶ μετὰ κάμωμεν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων, ἂν ὑπάρχουν.**

Ἡ πρόσθεσις τῶν πολυωνύμων εἶναι πρᾶξις ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.

Ἐπίσης δέχεται ἕνα οὐδέτερον στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πολυώνυμον μηδέν.

Κάθε πολυώνυμον ἔχει εἰς τὴν πρόσθεσιν τὸ ἀντίθετόν του πολυώνυμον, ποὺ εὑρίσκεται, ἂν ἀλλάξωμε τὰ πρόσημα ὅλων τῶν ὅρων του.

Ἡ ἀφαίρεσις τῶν πολυωνύμων ὁρίζεται ὡς ἡ πρόσθεσις τοῦ ἀντιθέτου πολυωνύμου. Π.χ.

$$(3x^2+2x^2y-4xy^2+y^3)-(x^3+3x^2y-xy^2+2y^3)=$$
$$(3x^2+2xy^2-4xy^2+y^3)+(-x^3-3x^2y+xy^2-2y^3)-$$
$$=2x^3-x^2y-3xy^2-y^3.$$

§ **18.** ***Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πολυωνύμων.***

Δίδομεν ἕνα παράδειγμα, ποὺ ἀναφέρεται εἰς πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸν ὑπολογισμόν, διατάσσομεν τὰ πολυώνυμα, ποὺ δίδονται, κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς καὶ γράφομεν τὰ πολυώνυμα τὸ ἕνα κάτω ἀπὸ τὸ ἄλλο, οὕτως ὥστε τὰ ὅμοια μονώνυμα νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν ἰδίαν στήλην. Π.χ. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $A+B-\Gamma$, ὅπου : $A=5x^4-2x^3+y^2-2x+3$, $B=3x^5+4x^4-2x^3+2x^2-x+5$, $\Gamma=x^3-2x^2+6$. Γράφομεν :

$$\begin{array}{rcccccc}
A= & & 5x^4 & -2x^3 & +x^2 & -2x & +3 \\
B= & 3x^5 & +4x^4 & -2x^3 & +2x^2 & -x & +5 \\
\Gamma= & & & -x^3 & +2x^2 & & -6 \\
\hline
\end{array}$$
$$A+B-\Gamma=3x^5+9x^4-5x^3+5x^2-3x-1.$$

Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων γίνεται ἁπλουστέρα εἰς κάθε στήλην. Ἀλλάζομεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου Γ, διότι κάμνομεν ἀφαίρεσιν αὐτοῦ. Ἄρα :

> **Ἂν Α,Β,Γ,Δ εἶναι μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα Α+Β—Γ+Δ εἶναι ἕνα πολυώνυμον, ποὺ εὑρίσκεται, ἂν γράψωμεν εἰς τὴν γραμμὴν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ Α, κατόπιν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ Β, κατόπιν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ Γ (μὲ ἀλλαγμένα πρόσημα), τέλος ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ Δ. Κάμνομεν κατόπιν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν τὸ τελικὸν ἄθροισμα.**

§ **19** ***Ἀγκύλαι καὶ παρενθέσεις.***

Τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο πολυωνύμων παριστάνομεν, ὅπως ἔχομεν εἴπει (§ 17, 18), ἂν κλείσωμεν καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἐντὸς παρενθέσεως ἢ καί ἀγκύλης καὶ τὰ συνδέσωμεν μὲ τὰ σύμβολα + ἢ — τῶν πράξεων. Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων $2x^2+3xy-y^2$ καὶ $-x^2-xy+z$ τὸ γράφομεν : $(2x^2+3xy-y^2)+(-x^2-xy+z)$ καὶ ἰσοῦται μὲ $2x^2+3xy-y^2-x^2-xy+z$.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

> **Ἐὰν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, ἐντὸς τῆς ὁποίας ἔχομεν ὅρους, ὑπάρχη τὸ σύμβολον +, τὴν παραλείπομεν χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων της, ἂν ὅμως ὑπάρχη τὸ σύμβολον —, τὴν παραλείπομεν, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων της.**

Διότι τὸ σύμβολον —, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸ τῆς παρενθέσεως, σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ γίνη ἀφαίρεσις καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν ἀντίθετον παράστασιν.

Ἀντιστρόφως εἶναι δυνατὸν νὰ κλείωμεν ὅρους ἀθροίσματος ἐντὸς παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, ὅταν θέτωμεν τὸ σύμβολον + πρὸ αὐτῆς κάθε ὅρος διατηρεῖ τὸ πρόσημόν του ἐντὸς αὐτῆς· ὅταν δὲ θέτωμεν τὸ σύμβολον —, οἱ ὅροι γράφονται μὲ ἀλλαγμένα πρόσημα ἐντὸς αὐτῆς.

Π.χ. ἔχομεν $x-y-2z=x+(-y-2z)=x-(y+2z)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα πολυωνύμων.

α) x^3+3x^2-2x-1 καὶ $5x^3-6x^2+9x-2$

β) x^4+7x^2-3x+2 καὶ $3x^4-2x^2-3x+7$

γ) $2xy-3xz+5yz$ καὶ $xy-4yz+2xz$.

δ) $3x^2y+2xy^2-y^3$ καὶ $2y^3-3x^2y-5xy^2$.

24) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν πολυωνύμων.

α) $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2$, $-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$, $\alpha^2+\gamma^2+\gamma^2$.

β) $4\alpha x-3\beta y+5\gamma^2$, $7\alpha x+8\beta y-2\gamma z$, $2\alpha x-2\beta y+\gamma z$.

γ) $x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$, $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$, x^3+y^3.

δ) $4x-6x^2-1+2x^3$, $3x^2-4-x^3+5x$, $12-x$.

ε) $x^3-3x^2y+3xy^2$, $-2x^2y-xy^2-y^3$, x^3+4y^3.

στ) $7x^2yz-5xyz^2$, $3xy^2z-4x^2yz$, $-5xy^2z-7xyz^2$, $2x^2yz-4xy^2z+6xyz^2$.

ζ) $x^5-4x^4y-5x^3y^3$, $3x^4y+2x^3y^3-6xy^4$, $3x^3y^3+6xy^4$, $-y^3$.

η) $x^3-4x^2y+6xy^2$, $2x^2y-3xy^2+2y^3$, $y^3+8x^2y+4xy^2$.

25) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν πολυωνύμων :

α) $\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta$, $-\alpha+\frac{2}{3}\beta$, $\frac{3}{4}\alpha-\beta$.

β) $-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{4}\beta,\ -\frac{2}{3}\alpha+\frac{3}{4}\beta,\ -2\alpha-\beta.$

γ) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{4}y^2,\ -x^2-\frac{2}{3}xy+2y^2,\ \frac{2}{3}x^2-xy-\frac{5}{4}y^2.$

δ) $3\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha\beta-\frac{1}{3}\beta^2,-\frac{3}{2}\alpha^2+2\alpha\beta-\frac{2}{3}\beta^2,-\frac{2}{3}\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2.$

ε) $\frac{5}{8}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{3}{10}y^2,-\frac{3}{4}x^2+\frac{14}{15}xy-y^2,\ \frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{5}y^2.$

στ) $-\frac{3}{4}x^3+5\alpha x^2-\frac{5}{8}\alpha^2x,\ x^3-\frac{37}{8}\alpha x^2+\frac{1}{2}\alpha^2x,\ -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}\alpha^2x.$

26) α) Ἀπὸ τὸ $3\alpha\beta+5\beta\delta-4\alpha\gamma-6\beta\delta$ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $3\alpha\beta+6\gamma\delta-3\alpha\gamma-5\beta\delta$.

β) » » $yz-zx+xy$ » » » $-xy+yz-zx$.

γ) » » $8x^2y+15xy^2+10xyz$ » » » $4x^2y-6xy^2-5xyz$.

δ) » » $\frac{1}{2}\alpha-\beta+\frac{1}{3}\gamma$ » » » $\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma$.

ε) » » $-8x^2y^2+15x^3y+13xy^3$ » » $4x^2y^2+7x^3y-8xy^3$.

στ) » » $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy-\frac{2}{3}y^2$ » » $\frac{3}{2}y^2+xy-y^2$.

ζ) » » $\frac{2}{3}\alpha^2-\frac{5}{2}\alpha-1$ » » $-\frac{2}{3}\alpha^2+\alpha-\frac{1}{2}$.

27) Τί πρέπει νὰ προσθέσωμεν.

α) Εἰς τὸ $\beta^3+\gamma^3-2\alpha\beta\gamma$ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ $\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma$.

β) » $7xy^2-y^3-3x^2y+5x^3$ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ $8x^3+7x^2y-3xy^2-y^3$.

γ) » $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$ » » » » $\frac{1}{3}x-1+\frac{1}{2}x^2$.

28) Νὰ προστεθοῦν τὰ πολυώνυμα $3xy^2-3x^2y+x^3-y^3$ καὶ $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $7x^2y-y^3-3x^2y$.

29) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων $3x^2+2y^2-5$, $6x-5x^2+3xy-6y+4y^2-7$, $5x-2+4y-9x^2+8xy-12y^2$ καὶ ἀπὸ αὐτὸ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων $7xy-6y-2x+y^2+4x^2-8$, $3y-2x^2+3xy-7$.

30) Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$A=3x^2+2x^2-3x+1 \qquad B=2x^4-5x^3+6x^2-9x+2$

$\Gamma=x^4-7x^2+3x-1 \qquad \Delta=x^4+12x^3-3x+7.$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πολυώνμα $(A+B)-(\Gamma+\Delta)$, $(A-B)+(\Gamma-\Delta)$ καὶ $(A-B)-(\Gamma-\Delta)$.

31) Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$A=3x^4-5\alpha x^3-4\alpha^2x^2+7\alpha^3x-2\alpha^4$ $\qquad B=2x^3-5\alpha x^2-3\alpha^2x+4\alpha^3$

$\Gamma=4x-5\alpha x^2-7\alpha^2x+2\alpha^3$ $\qquad \Delta=3x^2-2\alpha x+4\alpha^2$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πολυώνυμα $(A+B-\Gamma)$, $(A-B)+(\Gamma+\Delta)$, $(A+\Delta)-(B+\Gamma)$, $(A-\Delta)+(B-\Gamma)$, $(A-\Gamma)-(\Delta-B)$.

32) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$(3x^4y^5z^6-2x^3y^4z^5+8x^2y^3z^4-2xy^2z^3)+(7x^2y^3z^4-2xy^2z^3+5x^3y^4z^5-2x^4y^5z^6)-(2x^4y^5z^6+7x^3y^4z^5-2xy^2z^3-9x^2y^3z^4)-(-3x^3y^4z^5-5xy^2z^3+5x^4y^5z^6-9x^2y^3z^4)+(-4xy^2z^3+2x^4y^5z^6-5x^2y^3z^4-x^3y^4z^5)-(-3x^4y^5z^6-12x^2y^3z^4+x^3y^4z^5-7xy^2z^3).$$

38) Ὁμοίως ἡ παράστασις :

$$-3\alpha x^5+\frac{3}{2}\alpha^2x^4-14\alpha^3x^3+\frac{9}{2}\alpha^4x^2-21\alpha^5x-9x^6-\left(-7\alpha x^5+\frac{4}{3}\alpha^2x^4+\alpha^3x^3\right)+\left(\frac{2}{3}\alpha^4x^2+9\alpha^5x-\alpha^6\right)-\left(-6\alpha x^5-\alpha^2x^4+17\alpha^3x^3+\frac{5}{8}\alpha^4x^3+\alpha^5x\right).$$

34) Νὰ ἀπαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι ἀπὸ τὰς παραστάσεις :

α) $5\alpha^3+\beta^3-(5\alpha^2\beta-7\alpha^3\beta-8\alpha\beta^2)-(4\alpha^2\beta-5\alpha\beta^3)+8\alpha^2\beta$.

β) $x^2-y^2-(3xy-4y^2)+(4xy-2x^2-4y^2)-(3x^2-7y^2)-(xy-2x^2)$.

γ) $12\alpha\beta-(14\gamma\beta+7\alpha\gamma)-(13\beta\gamma-11\alpha\beta-9\alpha\gamma)+(21\beta\gamma-6\alpha\gamma-13\alpha\beta)$.

δ) $3\alpha^3-(\alpha\beta^2-2\alpha\beta^3+2\beta^3)+(4\alpha^3-\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-6\beta^3)$.

ε) $4xz-(xy+2\omega)+[3xz+\omega-(-5\omega+2y)]-[7xz-(2xy-2\omega-xz)]$.

στ) $3x-[3y-(-5z+y)]-[3x-(2y-3z)]-[2y-(3z+2x)]$.

ζ) $x-[3y-(2x-z)]-[-x-(y+2z)-(3y+2z)]$.

η) $x-[2y+[3z-3x-(x+y)]+2x-(y+3z)]$.

θ) $3x-2y-\{5x-[4y-(5z+6y)-(10x-z)\}$.

ι) $4\alpha^2-\{7\alpha^2-[8\beta^2-(3\gamma^2-2\alpha^2)]-[4\beta^2-(\alpha^2+3\gamma^2)]\}$.

§ 20 *Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον.*

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι πρᾶξις ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ἐπειδὴ ἕνα πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων θὰ ἔχωμεν τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον, ἄρα

> **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.**

Π. χ. $(4x^3-2x^2+3x+5)\,.\,2x^2=8x^5-4x^4+6x^3+10x^2$.

$(2x^3y-5x^2y^2+4xy^3)\,(-3xy^2)=-6x^4y^3+15x^3y^4-12x^2y^5$.

§ 21. *Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον.*

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὰ πολυώνυμα $A=2x^2-xy+z^2$ καὶ $B=3x^2-$ $-2yz$ ὡρισμένα $\in \Pi\times\Pi\times\Pi$.

Δίδομεν εἰς τὰ x, y, z τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς x_0, y_0, z_0 κατὰ σειρὰν καὶ σχηματίζομεν τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς $A\,(x_0, y_0, z_0)$ καὶ $B\,(x_0, y_0, z_0)$, τὰς ὁποίας καλοῦμεν A_0 καὶ B_0.

Κατὰ τήν προσεταιριστικήν, τὴν ἀντιμεταθετικὴν καί τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολ/σμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, αἵ ὁποῖαι ἰσχύουν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν, εἶναι δυνατὸν νὰ γράψωμεν ;

$(x_0, y_0, z_0) \in \Pi\times\Pi\times\Pi, \forall, x_0, \forall, y_0, \forall, z_0$

$A_0B_0=(2x_0^2-x_0y_0+z_0^2)\,(3x_0^2-2y_0z_0)=$

$(2x_0^2-x_0y_0+z_0^2)(3x_0^2)-(2x_0^2-x_0y_0+z_0^2)(2y_0z_0)=$

$6x_0^4-3x_0^3y_0+3x_0^2z_0^2-4x_0^2y_0z_0-2x_0y_0^2z_0-2y_0z_0^3=$

$6x_0^4-3x_0^3y_0-4x_0^2y_0z_0+3x_0^2z_0^2+2x_0y_0^2z_0-2y_0z_0^3$.

Τὸ πολυώνυμον $\Pi(x,y,z)=6x^4-3x^3y-4x^2yz+3x^2z^2+2xy^2z-$ $-2yz^3$ λαμβάνει λοιπὸν διὰ κάθε $(x_0, y_0, z_0) \in \Pi\times\Pi\times\Pi$ μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἴσην μὲ τὸ $A_0\,.\,B_0$. Τὸ πολυώνυμον $\Pi\,(x, y, z)$ εἶναι λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων $A\,(x, y, z)$ καὶ $B\,(x, y, z)$. Ἄρα

Τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ἕνα πολυώνυμον, ποὺ εὑρίσκεται, ἂν πολ/σωμεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου πολυωνύμου μὲ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἐκ τῶν προηγουμένων φαίνεται ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν πολυωνύμων εἶναι μία πράξις προσεταιριστική, ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν τῶν πολυωνύμων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς των καὶ μετὰ ἐκτελοῦμεν τὸν πολ/σμόν.

Π.χ. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμεν $(2x^3-4x^2+3x-2)\,(x^2+3x-1)$.

Γράφομεν: πολλαπλασιαστέος $2x^3-4x^2+3x-2.$

πολλαπλασιαστὴς $x^2+3x-1.$

α) μερικὸν γινόμενον	$2x^5-4x^4+3x^3-2x^2$
β) » »	$+6x^4-12x^3+9x^2-6x$
γ) » »	$-2x^3+4x^2-3x+2$
Ὁλικὸν γινόμενον	$2x^5+2x^4-11x^3+11x^2-9x+2.$

§ **22.** Ἐκ τοῦ παραδείγματος φαίνεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ α΄ ὅρου $2x^3$ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν α΄ ὅρον x^2 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ γινομένου. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τό γινόμενον τῶν δύο τελευταίων ὅρων του, -2 καὶ -1, δίδει τὸν τελευταῖον ὅρον $+2$ τοῦ γινομένου. Ἄρα

Ὅταν οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου δύο πολυωνύμων εἶναι διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας (ἢ τὰς ἀνιούσας) δυνάμεις ἑνὸς γράμματός των, τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων ἄκρων ὅρων (τῶν πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν τοὺς ἀντιστοίχους ἄκρους ὅρους τοῦ γινομένου, διατεταγμένου ὁμοίως πρὸς τὴν αὐτὴν μεταβλητήν.

Ἄρα τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ἔχῃ τοὐλάχιστον δύο ὅρους καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μονώνυμον.

§ **23.** ***Βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων.***

Ἔστω ὅτι δίδονται τὰ πολυώνυμα

$A=\alpha_0x^\nu+\alpha_1x^{\nu-1}+\ldots..+\alpha_\nu$, $B=\beta_0x^\mu+\beta_1x^{\mu-1}+\ldots..+\beta_\mu$

διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x. Ἐὰν πολ/σωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ A ἐπὶ β_0x^μ, ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος, ποὺ θὰ εὕρωμεν, εἶναι ὁ $\alpha_0\beta_0x^{\nu+\mu}$. Ἐὰν πολ/σωμεν κατόπιν τοὺς ὅρους τοῦ A ἐπὶ $\beta_1x^{\mu-1}$, ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος, ποὺ θὰ εὕρωμεν, εἶναι $\alpha_0\beta_1x^{\nu+\mu-1}$. Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου αὐτοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ $\nu+\mu$ καὶ θὰ προκύπτῃ τὸ αὐτό, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ὁ ὅρος $\alpha_0\beta_0x^{\nu+\mu}$ εἶναι ὁ μόνος τοῦ βαθμοῦ αὐτοῦ καὶ ὅτι δὲν ὑπάρχει εἰς τό γινόμενον κανένας ἄλλος ὅμοιός του. Ἄρα λοιπὸν

Τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ὡς πρὸς x, βαθμῶν ἀντιστοίχως ν καὶ μ εἶναι ἕνα πολυώνυμον βαθμοῦ $\nu+\mu$. Ὁ δὲ μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ γινομένου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μεγιστοβαθμίων ὅρων τῶν δοθέντων πολυωνύμων.

Σκεπτόμενοι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι :

Ὁ ἐλαχιστοβάθμιος ὅρος τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων ὡς πρὸς x, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἐλαχιστοβαθμιῶν ὅρων τῶν δοθέντων πολυωνύμων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα.

α) $(3\alpha-3\beta+3\gamma)\,2\alpha\beta$ β) $(5\alpha\beta-4\beta\gamma-3\alpha\gamma)\,(-2\alpha\gamma\beta)$.

γ) $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3).5x^3y^3$ γ) $(3x^2y+\frac{4}{5}x^2y^2).10x^2y^2$.

δ) $\left(2xyz+\frac{2}{3}x^2z+\frac{1}{2}yz\right)\cdot\frac{2}{3}x^2$ ε) $\left(\frac{4}{5}x^2z+\frac{1}{3}yz+\frac{5}{4}xyz\right)$. $\frac{6}{7}x^2y^2z$.

35) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

α) $(3x^2-3x+2)\cdot 3-(x^2-2x+6)3$.

β) $(3x-y)2x-(2x+3y).3y+(x-3y)3x$.

γ) $9\alpha^2\beta^2\gamma^2-7\alpha^2\beta(3\beta\gamma^2-9\beta^2\gamma)-2\beta^3\gamma(3\alpha^2-2\gamma^2)$.

δ) $3\alpha^2y^2(8\alpha^5y^7-2\alpha^4y^9)-2\alpha^4y^5(3\alpha^3y^4-2\alpha^2y^6)$

ε) $(2x^3-4x^2y+3xy^2)3x^2y^2-(x^3+5x^2y-xy^2)\,(-2x^2y^2)$.

36) Ἐὰν $A=2x^2+3xy-y^2$, $B=x^2-2xy+3y^2$, $\Gamma=x^2+xy+y^2$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ

α) $2A+3B-5\Gamma$, β) $3(2A-B+3\Gamma)$, γ) $3(2A+B)-5(\Gamma+B)$.

37. Ἀπὸ τὴν παράστασιν $3(4x^3-5x^2y+7y^3)-2(x^3+11x^2y-8y^3)+6$ νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ παράστασις $4(4x^3-5x^2y-2y^3)+9$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου γιὰ $x=-0{,}5$ $y=-2$.

38) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν παραστάσεων $3(9x^4-2\alpha x^3+\alpha^2x^2-\beta^3x+\beta^4)-4x(2x^3-3\beta x^2-5\alpha\beta-\alpha^3)$ καὶ $2x^2(x^2-\alpha x+7\beta^2)+x^2(9x^2-2\alpha x+\alpha^2)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου διὰ $x=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=0{,}5$.

39) Δίδονται τὰ πολυώνυμα $A=-x^3+3x^2-7x+5$, $B=2x^3-3x^2+2x-1$ $\Gamma=-3x^3+5x^2-2$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα $\Delta=2A+2B-\Gamma$, $E=2B+2\Gamma-A$, $Z=2\Gamma+2A-B$ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\Delta+E+Z=3(A+B+\Gamma)$.

40) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α) $(3x-6y)\,(x-3y)$ β) $(2x-5y)\,(3x+2y)$

γ) $(2\alpha-3\beta)\,(\alpha-\beta)$ δ) $(2xy-3z)\,(xy+z)$

ε) $(3xy+2)\,(xy+2)$ στ) $(3x^2-2y^2)\,(3x^2+y^2)$.

41) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων

α) $2xy+(3x+2y)x-(2x-y)\,(x+3y)-(3x-2y)\,(5x+8y)$.

β) $(x+2)\,(y-1)-(3x+y)\,(y+1)+4(x+3y)\,(2x-y)$.

γ) $3(x^2-xy+y^2)-2(x^2-y^2)+3(3x+2y)\,(x-3y)$.

42) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων

α) $(x+1)\ (x^2-x+1)+(4x-3)\ (2x^2-3x+6)$

β) $(x+y-z)\ (x+y)-(x-y+z)\ (x+z)+(y+z-x)\ (y+z)$.

γ) $3x^4+3x^2(y^2-x^2)-(x^2-y^2)\ (y^2-2x^2)-(x^2+2y^2)\ (x^2-2y^2)$.

43) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα τῶν πολυωνύμων

α) $(2x^3+2x^2+8x+16)\ (3x-6)$.

β) $(4x^2+2xy+y^2)\quad (2x-y)$.

γ) $(2xy^2-6x^2y-y^3-5x^3)\ (3xy^2-3y^3+3x^2y)$.

δ) $(x^4-3x^3+2x^2+x-1)\ (2x^4-5x^3-2x^2-2x-1)$

ε) $(2x^3y-3xy^3+3x^4+4x^2y^2-6y^4)\ (3x^3-5x^2y+xy^2-2y^3)$.

στ) $(-x^3+6x^2-7x-9)\ (x^2-3x+3)$.

ζ) $(\beta x^4-2xy^3+7x^2y^2-x^3y+y^4)\ (2x^2-xy-y^2)$.

η) $(x^4-x^3+2x-2)\ (x^2+x+1)$.

θ) $(x^7-2x^6y+xy^6-2y^7)\ (x^2+2xy+4y^2)$.

ι) $\left(\frac{4}{3}x^4-\frac{6}{5}x^2+\frac{7x}{2}+1\right)\left(\frac{8}{3}x^4-\frac{5}{2}x^3+\frac{7x}{5}\right)$.

44) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α) $(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)\ (x+y)$.

β) $(x^2+y^2+\omega^2-y\omega-x\omega-y\omega)\ (x+y+\omega)$.

γ) $(x^{2\mu}+x^{\mu}y^{\nu}+y^{2\nu})\ (x^{\mu}+y^{\nu})$.

δ) $(x^{\mu}y^{\nu-3}+x^{\mu-1}y^{\nu-2}+{}^{\mu-2}y^{\nu-1}+2^{\mu-3}y^{\nu})\ (x^{\mu}-y^{\nu})$.

ε) $(3x^{2\mu+2}+2x^{\mu+1})\ (2x^{2\mu}+3x^{\mu-1})\ (2x^{2\mu+1}-x^{\mu})$.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

§ **24.** Ἔστω π. χ. ἡ ἰσότης $3x\ (x+y)=3x^2+3xy$ (1). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς προκύπτει ἀπὸ τὸ πρῶτον, ἂν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός, ὁ ὁποῖος σημειώνεται εἰς τὸ πρῶτον μέλος. Ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγεται ***ταυτότης***. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τῶν μεταβλητῶν $x, y \in \Pi$, τὰς ὁποίας περιέχει. Π.χ. Διὰ $x=1$ καὶ $y=2$ τότε εὑρίσκομεν $3.1\ (1+2)=3.1^2+3.1.2$ δηλ. $3.3=3+6$. Ἂν $x=2$ καὶ $y=-3$, τότε εὑρίσκομεν $3(-2)\ [(-2)+3]=3\ (-2)^2+3\ (-2).3$ δηλ. $-6=12-18=-6$. Ἄρα συμπεραίνομεν ὅτι

> **Ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καὶ ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τῶν μεταβλητῶν, πού περιέχει.**

Εἰς τὰς ταυτότητας αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις τῶν δύο μελῶν εἶναι *ἰσοδύναμοι*· δηλ. ἡ μία προκύπτει ἀπὸ τήν ἄλλην δι᾽ ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων.

§ **25.** ***Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.*** Ὡρισμένοι πολλαπλασιασμοὶ παρουσιάζονται συχνότατα εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὰ ἀποτελέσματά των ἀπὸ μνήμης. Αἱ ἰσότητες, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων πράξεων εἰς τὸ ἕνα μέλος, διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ ἄλλο, εἶναι ταυτότητες, ἐπειδὴ ἐπαληθεύονται διὰ κάθε τιμὴν $\in \Pi$ τῶν μεταβλητῶν, ποὺ περιέχουν. Εἶναι δὲ αἱ ἑξῆς :

α) Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἢ δύο μονωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των αὐξανόμενον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενόν των. Δηλ.

$$\boxed{\forall, \alpha, \beta \in \Pi : (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}$$

διότι εἶναι $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Π.χ. α) $(3x+2y)^2=(3x)^2+(2y)^2+2.3x.2y=9x^2+4y^2+12xy.$

β) $(4x^2y+3x\omega)^2=(4x^2y)^2+(3x\omega)^2+2.4x^2y.3x\omega=$
$16x^4y^2+9x^2\omega^2+24x^3y\omega.$

β) Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἢ δύο μονωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἐλαττούμενον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενόν των δηλ.

$$\boxed{\forall\ \alpha,\beta\in\Pi.(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta} \quad (2)$$

διότι εἶναι $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta.$

Π.χ. α) $(4x-3y)^2=(4x)^2+(3y)^2-2(4x)(3y)=16x^2+9y^2-24xy.$

β) $(3xy-x^3)^2=(3xy)^2+(x^3)^2-2.(3xy)x^3=9x^2y^2+x^6-6x^4y.$

Ἐὰν εἰς τὰς ταυτότητας (1) καὶ (2) μεταφέρωμεν τὸ $2\alpha\beta$ εἰς τὸ ἄλλο μέλος, εὑρίσκομεν τάς ταυτότητας

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta} \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad \boxed{\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta} \quad (4)$$

αἱ ταυτότητες αὐταὶ μᾶς δίδουν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφοράν των καὶ τὸ γινόμενόν των.

γ) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἢ μονωνύμων ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των, δηλ.

$$\forall\ \alpha,\beta\in\Pi.\ (\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2 \quad (5)$$

διότι εἶναι $(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$.

Π.χ. α) $(3x+2y)\ (3x-2y)=9x^2-4y^2$.

β) $\left(\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{3}\omega^2\right)\left(\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{2}\omega^3\right)=\frac{1}{9}x^4y^2-\frac{1}{4}\omega^6$

γ) $(x+y+\alpha+\beta)\ (x+y-\alpha-\beta)=[(x+y)+(\alpha+\beta)]\ (x+y)-(\alpha+\beta)]=$
$(x+y)^2-(\alpha+\beta)^2=x^2+y^2+2xy-\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta$.

δ) Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του καὶ μὲ τὰ διπλάσια ἀλγεβρικὰ γινόμενα τῶν ὅρων του, ἂν τοὺς λάβωμεν ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Δηλ.

$$\forall\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in\Pi:\ (\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$$

Π.χ. α) $(2x+3y+z)^2=4x^2+9y^2+z^2+12xy+4xz+6yz$.

β) $(x+2y-z-3\omega)^2=\ x^2+4y^2+z^2+9\omega^2+4x\psi-2xz-6x\omega-$
$-2yz+12y\omega+6z\omega$.

Σημείωσις. Ὅταν λέγωμεν ἀλγεβρικὸν γινόμενον, ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας καὶ τὰ πρόσημα τῶν ὅρων, ποὺ πολλαπλασιάζομεν.

ε) Ὁ κύβος διωνύμου. Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος (ἢ τῆς διαφορᾶς) δύο ἀριθμῶν ἢ μονωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸν κύβον τοῦ πρώτου ὅρου σὺν (ἢ πλὴν) τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δευτέρον, σὺν τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου σὺν (ἢ πλὴν) τὸν κύβον τοῦ δευτέρου· δηλ:

$$\forall\ \alpha,\ \beta\in\Pi\ .\ \begin{array}{ll}(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 & (7)\\ (\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 & (8)\end{array}$$

διότι $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)\ (\alpha+\beta)\ (\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\ (\alpha+\beta)=$
$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

Ἂν εἰς τὰς ταυτότητας (7) καὶ (8) μεταφέρομεν τὰ $3\alpha^2\beta$ καὶ $3\alpha\beta^2$ εἰς τὸ ἄλλο μέλος εὑρίσκομεν τὰς ταυτότητας.

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad (9)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta) \quad (10)$$

Ἐκ τῶν (9) καὶ (10) εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \quad (11)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \quad (12)$$

στ) Ὁ κύβος πολυωνύμου. Ὁ κύβος ἑνὸς πολυωνύμου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ὅρων του καὶ μὲ τὰ τριπλάσια ἀλγεβρικὰ γινόμενα τοῦ τετραγώνου ἑκάστου ὅρου του ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων ὅρων, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, καὶ μὲ τὰ ἑξαπλάσια ἀλγεβρικὰ γινόμενα τῶν ὅρων του λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, δηλ.

$$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\Pi:\ (\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma+3\alpha\beta^2+ +3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2+3\beta^2\gamma+6\alpha\beta\gamma \quad (13)$$

Π.χ. α) $(2x+3y+\omega)^3=8x^3+27y^3+\omega^3+36x^2y+12x^2\omega+54xy^2+27y^2\omega+$
$+6x\omega^2+9y\omega^2+36xz\omega.$

β) $(x-y-z+\omega)^3=x^3-y^3-z^3+\omega^3-3x^2y-3x^2z+3x^2\omega+3y^2x-$
$-3y^2z+3y^2\omega+3z^2x-3z^2y+3z^2\omega+3\omega^2x-3\omega^2y-3\omega^2z+6xyz-$
$-6xy\omega-6xz\omega+3yz\omega.$

Σημείωσις. Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως τὸ πρόσημον κάθε ὅρου εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου δὲν εἶναι θετικοί, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας, ὅτι μιὰ μεταβλητὴ ἡ ὁποία ἔχει ἔμπροσθέν της τὸ πρόσημον «—» διατηρεῖ τὸ πρόσημόν της ἂν ὑψωθῇ εἰς περιττὴν δύναμιν τὸ ἀλλάσει δὲ ἂν ὑψωθῇ εἰς ἀρτίαν δύναμιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

45) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀξιοσημείωτα γινόμενα.
α) $(x+2)^2$, β) $(x+3)^2$, γ) $(2x+1)^2$ δ) $(3x+2)^2$ ε) $(2+3x)^2$
στ) $(3x^2+1)^2$ ζ) $(2x^2+3y^2)^2$ η) $(3xy+1)^2$ θ) $(4x^2y^2+\omega)^3$ ι) $(x^3y\omega^2+3xy)^2$

46. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀξιοσημείωτα γινόμενα.
α) $(1-2x)^2$, β) $(3x-8)^2$, γ) $(4x-7)^2$, δ) $(x^2-1)^2$, ε) $(3x-2y)^2$, στ)

$(2-4x)^2$, ζ) $(3x^2-2y^2)^2$, η) $(3x^3-2x^2y)^2$, θ) $(4x^3y^2-3xy^3)^2$, ι) $(2x^4y^3-x^3y^2)^2$.

47) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀξιοσημείωτα γινόμενα.

α) $\left(\frac{1}{3}-x\right)^2$ β) $\left(x-\frac{2}{7}\right)^2$ γ) $\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2$ δ) $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}\right)^2$

ε) $\left(\frac{xy}{3}-\frac{\omega}{2}\right)^2$ στ) $\left(\frac{4x^2y^2}{5}-\frac{1}{3}x\right)^2$ ζ) $\left(\frac{3x^2y^3}{2}-\frac{xy^2\omega}{3}\right)^2$

η) $\left(\frac{x^3y^2\omega}{3}-\frac{xy^2\omega^3}{2}\right)^2$

48) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

α) $(2x+3y)^2-(2x-5y)^2+3(x-y)^2$.

β) $(3x-y)^2-3(x-3y)^2+4(2x-3y)^2-(2x-4)^2$.

γ) $3(3x+4y)^2+2(y-2x)^2-4(x+3y)(x-y)$.

δ) $(2x-3y)^2+(x+2y)(3x-y)-5(4x-y)^2$.

49) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα.

α) $(x+3)(x-3)$, β) $(x+5)(x-5)$, γ) $(1+3x)(1-3x)$, δ) $(4x-1)(4x+1)$, ε) $(x^2-2)(x^2+2)$, στ) $(x^2y+1)(x^2y-1)$, ζ) $(3xy+2)(3xy-2)$, η) $(4xy+x^2)$. $(4xy-x^2)$, θ) $(2\alpha^3\beta^2+1)(2\alpha^3\beta^2-1)$, ι) $(3\alpha^3\beta^2+2\alpha\beta^3)(3\alpha^3\beta^2-2\alpha\beta^3)$,

ια) $\left(\frac{x^2y^2}{4}-\frac{xy}{3}\right)\left(\frac{x^2y^2}{4}+\frac{xy}{3}\right)$ ιβ) $\left(\frac{3x^3y^2\omega}{4}+\frac{2xy\omega^2}{3}\right)\left(\frac{3x^3y^2\omega}{4}-\frac{2xy\omega^2}{3}\right)$

50) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

α) $(3x+2y)(3x-2y)-(y+4x)(y-4x)$.

β) $(4x-1)(4x+1)-3(2x+y)(2x-y)+4(x+1)(x-1)$.

γ) $(3x+y)(3x-y)+2(2y-5x)(2y+5x)-3(x+2y)(x-2y)$.

δ) $(\alpha+3x^2)(\alpha-3x^2)-3(x+3\alpha)(x-3\alpha)-4(3x-\alpha)(3x+\alpha)$.

51) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα.

α) $(x+y+z)(x+y-z)$ β) $(x-y+z)(y+z-x)$

γ) $(2x+y+3)(2x-y+3)$ δ) $(2x+y-5)(2x+y+5)$

ε) $(x^2-3x+1)(x^2+3x+1)$ στ) $(x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2+2xy)$.

ζ) $(3x^2+y+2x)(3x^2+y-2x)$ η) $(x^2-3y+x)(x^2+3y+x)$.

θ) $(x^2+2xy-2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$ ι) $(1+x\sqrt{2}+x^2)(1-x\sqrt{2}+x^2)$

52) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις.

α) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$.

β) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4+y^4)^2$.

γ) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)(16x^4+81y^4)$.

53) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις τῶν πολυωνύμων.

α) $(\alpha+\beta-\gamma)^2$ β) $(2\alpha-\beta+3\gamma)^2$ γ) $(\alpha-2\beta+3)^2$

δ) $(2\alpha+3\beta-\gamma)^2$ ε) $(3x-2y+4\omega)^2$ στ) $(x+3y-2\omega)^2$

54) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις.

α) $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\gamma+\alpha-\beta)^2$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha+\gamma-\beta)^2$.

γ) $(\alpha+\beta+\gamma)^2-\alpha(\beta+\gamma-\alpha)-\beta(\gamma+\alpha-\beta)-\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$.

δ) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2+(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$

55) Νὰ ὑπολισθοῦν τὰ ἀξιοσημείωτα γινόμενα.

α) $(x+2)^3$ β) $(2x+3)^3$ γ) $(y+4)^3$ δ) $(2x+3y)^3$ ε) $(3x+y)^3$

στ) $(4x-1)^3$ ζ) $(2x-y)^3$ η) $(x-3y)^3$ θ) $(3xy-2y)^3$ ι) $(4x-3y^2)^3$

ια) $(3xy+\beta y)^3$ ιβ) $(2xy-3yz)^3$ ιγ) $(4xy^2-3x^2y)^3$

ιδ) $\left(\frac{xy}{3}+\frac{1}{3}\right)^3$ ιε) $\left(\frac{x^2y}{2}-\omega\right)^3$ ιστ) $\left(\frac{3x}{4}-\frac{2xy^2}{3}\right)^2$.

56) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

α) $(2x-y)^3+3x(2x+y)\ (2x-y)+3(x+2y)^3$

β) $(2\alpha x^2-3y)^3+(2\alpha x^2+3y)^3-3(\alpha x-y)^2(\alpha x+y)$.

γ) $(x+1)^3+(x-1)^3-3(x-1)^2(x+1)+3(x+1)^2(x-1)$.

57) Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες.

α) $(\alpha^2-\beta^2)+4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$.

β) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

γ) $(\alpha-\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2=2\alpha^2+2(\beta-\gamma)^2$.

δ) $(\alpha^2+\beta^2)\ (\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$.

ε) $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

στ) $(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2+(\alpha+\beta)^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2$.

ζ) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ (x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=y(\beta z-\gamma y)^2+$
$(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2$.

η) $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2+2(\alpha+\beta)\ (\alpha+\gamma)+2(\beta+\gamma)\ (\beta+\alpha)+$
$+2(\gamma+\alpha)\ (\gamma+\beta)=4(\alpha+\beta+\gamma)^2$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 25. Ὁρισμός. Διαίρεσις δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν μίαν τρίτην παράστασιν, τῆς ὁποίας ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ νά ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν παραστάσεων, ποὺ ἐδόθησαν δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν των.

Ἐκ τῶν παραστάσεων ποὺ δίδονται ἡ μὲν πρώτη λέγεται ***διαιρετέος*** ἡ δὲ δευτέρα ***διαιρέτης***. Ἡ ζητουμένη παράστασις λέγεται ***πηλίκον*** ἢ ***λόγος*** τῶν δοθεισῶν παραστάσεων.

Π.χ. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ $8x^3y$ διὰ τοῦ $2xy$. Ὁ διαιρετέος εἶναι ἡ παράστασις $8x^3y$, ὁ δὲ διαιρέτης ἡ παράστασις $2xy$. Τὸ πηλίκον εἶναι $4x^2$.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν ὅτι, ὅταν δοθοῦν ὁ διαιρετέος (Δ), ὁ διαιρέτης (δ), ἐφ' ὅσον ὑπάρχει τρίτη παράστασις Π ἡ ὁποία εἶναι τὸ πηλίκον των, αἱ παραστάσεις $\Delta : \delta$ καὶ Π εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\Delta : \delta = \Pi$ ἢ $\Delta = \delta \, . \, \Pi$ (1). Ἐκ τῆς (1) συμπεραίνεται ὅτι ***ὁ Διαιρετέος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.***

§ **26.** ***Διαίρεσις δύο ἀκεραίων μονωνύμων.*** Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τό μονώνυμον $4\alpha^5\beta^2\gamma^3$ διὰ τοῦ μονωνύμου $2\alpha^3\beta\gamma$. Τὸ πηλίκον τῶν δύο αὐτῶν μονωνύμων εἶναι :

$$\frac{4\alpha^5\beta^2\gamma^3}{2\alpha^3\beta\gamma} = \frac{4}{2} \cdot \frac{\alpha^5}{\alpha^3} \cdot \frac{\beta^2}{\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{\gamma} = 2\alpha^{5-3}\beta^{2-1}\gamma^{3-1} = 2\alpha^2\beta\gamma^2.$$

Πράγματι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην $2\alpha^3\beta\gamma$ ἐπὶ τό πηλίκον ποὺ εὑρέθη, δηλ. τὸ $2\alpha^2\beta\gamma^2$ εὑρίσκομεν $(2\alpha^3\beta\gamma) \, . \, (2\alpha^2\beta\gamma^2) = 4\alpha^5\beta^2\gamma^3$, δηλ. τόν διαιρετέον. Ἄρα λοιπόν.

> **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀκέραια μονώνυμα. διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου γράφομεν κάθε μεταβλητὴν μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἂν ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου.**

Π.χ. $27x^4yz^3 : -3x^2z^3 = -9x^2y$, $-15\alpha\beta^2\gamma^4 : (-3\alpha\beta\gamma) = 5\beta\gamma^3$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνεται ὅτι :

> **Ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι διαιρετὸν μὲ ἄλλο ἀκέραιον μονώνυμον ἂν κάθε μεταβλητὴ τοῦ διαιρετέου ἔχει ἐκθέτην μεγαλύτερον ἢ τουλάχιστον ἴσον μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς τοῦ διαιρέτου π.χ.**

$$-12x^3y\omega^2 : (-3xy\omega) = 4x^2\omega, \quad 4x^2y^3 : -3xy = -\frac{4}{3}xy^2.$$

Σημείωσις 1. Μία μεταβλητὴ ἡ ὁποία ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην εἰς τὸν διαιρετέον καὶ εἰς τὸν διαιρέτην, παραλείπεται εἰς τὸ πηλίκον:

$$\text{Π.χ.}\ 3x^2y^3z^2 : 2xy^3z = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y^3}{y_3} \cdot \frac{z^2}{z} = \frac{2}{3} x^{2-1}y^{3-3}z^{2-1} =$$

$$= \frac{2}{3} xy^0z = \frac{2}{3} x \cdot 1z = \frac{2}{3} xz$$

Σημείωσις 2. Ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς μεταβλητῆς τοῦ διαιρετέου εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς τοῦ διαιρέτου ἢ ὅταν μία μεταβλητή περιέχεται μόνον εἰς τὸν διαιρέτην χωρὶς νὰ περιέχεται καὶ εἰς τὸν διαιρετέον ***τότε τὸ πηλίκον δὲν εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον.*** Π.χ. α) $8x^3y^2 \cdot 2x^4y^3 = 4x^{3-4}y^{2-4} =$

$$= 4\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{4}{xy^2} \quad \beta)\ 5x^4y : 3xy^3\omega = \frac{5x^3}{3y^2\omega}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πρῶτον μονώνυμον δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ τότε τὸ πηλίκον εἶναι ***μία κλασματικὴ*** παράστασις μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Π.χ. τὸ πηλίκον τοῦ $7\alpha\beta^4 : 3\alpha^5 = \frac{7\beta^4}{3\alpha^4}$.

§ **27.** ***Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ ἀκεραίου μονωνύμου.*** Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $15x^4y-12x^3y^2-9x^3y^3+6x^4y^2$ διὰ τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου $3xy$. Ἐπειδὴ κάθε πολυώνυμον εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μονωνύμων, ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ, δηλ. νὰ διαιροῦμεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $15x^4y-12x^3y^2-9x^3y^3+$ $+6x^4y^2 : 3xy = \frac{15x^4y}{3xy} - \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{9x^3y^3}{3xy} + \frac{6x^4y^2}{3xy} = 5x^3 - 4x^2y -$ $-3x^2y^2+2x^3y$.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι;

> **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον δι' ἑνὸς μονωνύμου διαιροῦμεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ προσθέτομεν τὰ εὑρισκόμενα πηλίκα.**

Τὸ πηλίκον ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου δὲν εἶναι πάντοτε ἀκέραιον πολυώνυμον (ἀλλὰ κλασματικὴ παράστασις) ἐκτὸς ἂν ὅλαι αἱ μερικαὶ διαιρέσεις εἶναι δυναταί.

Ἔστω π.χ. $\Pi=14\alpha^5\beta^2-5\alpha^3\beta^3+15\alpha^3\beta^4$ καὶ $M=5\alpha^3\beta^4$. Τὸ πηλίκον τοῦ Π διὰ Μ εἶναι $\frac{\Pi}{M}=\frac{14\alpha^5\beta^2}{5\alpha^3\beta^4}-\frac{5\alpha^3\beta^3}{5\alpha^3\beta^4}+\frac{15\alpha^3\beta^4}{5\alpha^3\beta^4}=\frac{14\alpha^2}{5\beta^2}-\frac{1}{\beta}+3.$

§ **28.** ***Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.*** Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $10x^4+9x^3+3x^2+12x-9$ διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $2x+3$, τὰ ὁποῖα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατή, δηλ. ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιον πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ὁ διαιρέτης πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἕπεται ὅτι (§23) τὸ πηλίκον θὰ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, καὶ θὰ ἔχῃ τό πολὺ τεσσάρας ὅρους.

Ἔστω $\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4$ τὸ ζητούμενον πηλίκον, πολυώνυμον καὶ αὐτὸ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x, τότε λοιπὸν θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $10x^4+9x^3+3x^2+12x-9=(2x+3)\,(\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4)$ (1).

Ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ βον μέλος τῆς (1) θὰ εὕρωμεν ὡς γινόμενον τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. τὸν διαιρετέον. Ἀλλὰ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου θὰ εὑρεθῇ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς πρώτους ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, δηλ. $10x^4=2x\,.\,\Pi_1$.

Ἄρα θὰ εἶναι $\Pi_1=\frac{10x^4}{2x}=5x^3$.

Δηλαδὴ εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον $5x^3$ τοῦ πηλίκου ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετοῦ. Τότε τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) γίνεται $(2x+3)$. $(5x^3+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4)$ ἢ $(2x+3)\,5x^3+(2x+3)\,(\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4)$. Ἂν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς (1) τὸ $(2x+3)\,5x^3$ δηλ. τὸ $10x^4+15x^3$ εὑρίσκομεν $-6x^3+3x^2+12x-9=(2x+3)\,(\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4)$ (2). Τὸ $-6x^3+3x^2+12x-9$ ὀνομάζεται ***πρῶτον ὑπόλοιπον.***

Ἂν ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ εἰς τὴν (2), εὑρίσκομεν ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι $\Pi_2=-6x^3:2x=-3x^2$. Τότε τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) γίνεται $(2x+3)^2\,(-3x^2+\Pi_3+\Pi_4)$ ἢ $(2x+3)\,(-3x^2)+(2x+3)\,(\Pi_3+\Pi_4)$. Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς (2) τὸ $(2x+3)\,(-3x^2)$ δηλ. τὸ $-6x^3-9x^2$ καὶ εὑρίσκομεν $12x^2+12x-9=(2x+3)\,(\Pi_3+\Pi_4)$ (3). Τὸ $12x^2+12x-9$ λέγεται ***δεύτερον ὑπόλοιπον.***

Ἂν ἐπαναλάβωμεν τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὴν ἰσότητα (2), εὑρίσκομεν ὅτι ὁ τρίτος ὅρος Π_3 τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ $12x^2=2x=6$. Τότε τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) γίνεται $(2x+3)(6x+\Pi_4)$ ἢ $(2x+3)\,6x+(2x+3)\,\Pi_4$. Ἂν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (3) τὸ $(2x+3)6x$ ἢ τὸ $12x^2+18x$, εὑρίσκομεν $-6x-6=(2x+3)\,\Pi_4$ (4) τὸ $6x-6$ λέγεται ***τρίτον ὑπόλοιπον***.

Κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος Π_4 τοῦ πηλίκου εἶναι -3. Ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $5x^3-3x^2+6x-3$.

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ βαθμὸς κάθε ὑπολοίπου (ὁ ὁποῖος μᾶς χρησιμεύει ὡς νέος διαιρετέος) συνεχῶς ἐλαττοῦται μετὰ τὴν εὕρεσιν κάθε ὅρου τοῦ πηλίκου. Διὰ τοῦτο, ἂν εὕρωμεν κάποιο ὑπόλοιπον μὲ βαθμὸν μικρότερον ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ διαιρέτου, τότε διακόπτομεν τὴν διαίρεσιν.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 10x^4+9x^3+3x^2+12x-9 & 2x+3 \\
 & & \overline{5x^3-3x^2+6x-3=} \\
 & -10x^4-15x^3 & \\
\text{Πρῶτον ὑπόλοιπον} & 0-6x^3+3x^2+12x-9 & =\text{ πηλίκον} \\
 & +6x^3+9x^2 & \\
\text{Δεύτερον ὑπόλοιπον} & 0+12x^2+12x-9 & \\
 & -12x^2-18x & \\
\text{Τρίτον ὑπόλοιπον} & 0-6x-9 & \\
 & +6x+9 & \\
\text{Τέταρτον ὑπόλοιπον} & 0 &
\end{array}
$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων πολυωνύμων :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀκὲραιον πολυώνυμον τῆς μεταβλητῆς x δι' ἄλλου ἀκεραίου πολυωνύμου τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, τὰ ὁποῖα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x·

1) Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου.

2) Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον.

3) Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πρώτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετοῦ καὶ τὸ ἐξαγόμενον ποὺ εὑρίσκομεν εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ πηλίκου.

4) Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον. Τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, εἶναι τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον. Συνεχίζομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὴν πρᾶξιν μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἕνα ὑπόλοιπον μηδὲν (τελεία διαίρεσις) ἢ ἕνα ὑπόλοιπον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ διαιρέτου (ἀτελὴς διαίρεσις).

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον

$(6\alpha^6\beta^3-13\alpha^5\beta^4+28\alpha^4\beta^5-23\alpha^3\beta^6+20\alpha^2\beta^7):(2\alpha^2\beta^2-3\alpha\beta^3+4\beta^4)$,

$$
\begin{array}{l|l}
6\alpha^6\beta^3-13\alpha^5\beta^4+28\alpha^4\beta^5-23\alpha^3\beta^6+20\alpha^2\beta^7 & 2\alpha^2\beta^2-3\alpha\beta^3+4\beta^4 \\ \cline{2-2}
-6\alpha^6\beta^3+9\alpha^5\beta^4-12\alpha^4\beta^5 & 3\alpha^4\beta-2\alpha^3\beta^2+5\alpha^2\beta^3= \\ \cline{1-1}
\text{Πρῶτον ὑπόλοιπον}\quad -4\alpha^5\beta^4+16\alpha^4\beta^5-23\alpha^3\beta^6 & =\text{πηλίκον}. \\
\qquad\qquad 4\alpha^5\beta^4-6\alpha^4\beta^5+8\alpha^3\beta^6 & \\ \cline{1-1}
\text{Δεύτερον ὑπόλοιπον}\quad +10\alpha^4\beta^5-15\alpha^3\beta^6+20\alpha^2\beta^7 & \\
\qquad\qquad -10\alpha^4\beta^5+15\alpha^3\beta^6-20\alpha^2\beta^7 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 & \\
\text{ὑπόλοιπον} &
\end{array}
$$

Ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι τελεία. Εἰς τὴν διαίρεσις αὐτὴν παρατηροῦμεν :

α) οἱ ἄκροι ὅροι τοῦ διαιρετέου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι μὲ τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων ὅρων τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου δηλ. εἶναι $6\alpha^4\beta^3=2\alpha^2\beta^2.3\alpha^3\beta$ καὶ $20\alpha^2\beta^7=4\beta^4.5\alpha^2\beta^3$.

β) ὁ πρῶτος ὅρος κάθε ὑπολοίπου ἐξαλείφεται.

γ) ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον

$(3\alpha^4-5\alpha^3+6\alpha^2-7\alpha+1):(\alpha^2-2\alpha+2)$

$$
\begin{array}{l|l}
3\alpha^4-5\alpha^3+6\alpha^2-7\alpha+1 & \alpha^2-2\alpha+2 \\ \cline{2-2}
-3\alpha^4+6\alpha^3-6\alpha^2 & 3\alpha^2+\alpha+2=\text{πηλίκον} \\ \cline{1-1}
\text{Πρῶτον ὑπόλοιπον}\quad 0+\alpha^3\qquad -7\alpha+1 & \\
\qquad -\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha & \\ \cline{1-1}
\text{Δεύτερον ὑπόλοιπον}\quad +2\alpha^2-9\alpha+1 & \\
\qquad -2\alpha^2+4\alpha-4 & \\ \cline{1-1}
\qquad 0-5\alpha-3=\text{ὑπόλοιπον μὲ βαθμὸν μικρότε-} &
\end{array}
$$

ρον τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου.

Ἡ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι ἀτελής. Τὸ πολυώνυμον $2\alpha^2+\alpha+2$ λέγεται ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $(3\alpha^4-5\alpha^3+6\alpha^2-7\alpha+1):(\alpha^2-2\alpha+2)=\dfrac{3\alpha^4-5\alpha^3+6\alpha^2-7\alpha+1}{\alpha^2-2\alpha+2}$ καὶ τὸ τελικὸν ὑπόλοιπον $-5\alpha-3$ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Ἰσχύει ἡ ἰσότης $(3\alpha^4-5\alpha^3+6\alpha^2-7\alpha+1)=(\alpha^2-2\alpha+2)\,(2\alpha^2+\alpha+2)+(-5\alpha-3)$ δηλαδὴ ὅτι

(α) $\boxed{\text{Διαιρετέος}=\text{διαιρέτης}\times\text{ἀκέραιον μέρος πηλίκου}+\text{ὑπόλοιπον}}$

Ἡ ἰσότης (α), ἡ ὁποία εἶναι μία ταυτότης, χρησιμεύει διὰ τὸν ἔλεγχον τοῦ ἀποτελέσματος τῆς διαιρέσεως.

Ὁ ἔλεγχος αὐτὸς γίνεται μὲ ἕνα ἐκ τῶν ἀκολούθων τρόπων:

1ος τρόπος. Ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν πρόσθεσιν, ποὺ σημειώνονται εἰς τὸ δεξιὸν μέλος. Τὸ ἀποτέλεσμα πρέπει νὰ ταυτίζεται μὲ τὸν διαιρετέον.

2ος τρόπος. Δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν α μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀντιστοίχους ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν δύο μελῶν τῆς ταυτότητος (α). Τὰ δύο ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν, πρέπει νὰ εἶναι ἴσα.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον $(\alpha^5x^5+y^5):(\alpha x+y)$.

$$\begin{array}{llllll|l}
\alpha^5x^5 & & & & & +y^5 & \alpha x+y \\ \cline{7-7}
-\alpha^5x^5 & -\alpha^4x^4y & & & & & \alpha^4x^4-\alpha^3x^3y+\alpha^2x^2y^2-\alpha xy^3+y^4 \\ \cline{1-2}
 & -\alpha^4x^4y & & & & +y^5 & \\
 & +\alpha^4x^4y & +\alpha^3x^3y^2 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & +\alpha^3x^3y^2 & & & +y^5 & \\
 & & -\alpha^3x^3y^2 & -\alpha^2x^2y^3 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\alpha^2x^2y^3 & & +y^5 & \\
 & & & +\alpha^2x^2y^3 & +\alpha xy^4 & & \\ \cline{4-5}
 & & & & +\alpha xy^4 & +y^5 & \\
 & & & & -\alpha xy^4 & -y^5 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Παράδειγμα 4ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον

$$(1-3x+3x^2-6x^3+2x^4):(1-3x+x^2)$$

$$\begin{array}{r|l}
1-3x+3x^2-6x^3+2x^4 & 1-3x+x^2 \\ \cline{2-2}
-1+3x-x^2 \qquad\qquad & 1+2x^2 \\ \cline{1-1}
2x^2-6x^3+2x^4 & \\
-2x^2+6x^3-2x^4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

Παράδειγμα 5ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον

$$(2-4x+2x^2-5x^3+3x^4):(1+2x-x^2+x^3)$$

$$\begin{array}{l r|l}
 & 2-4x+2x^2-5x^3+3x^4 & 1+2x-x^2+x^3 \\ \cline{3-3}
 & -2-4x+2x^2-2x^3 \qquad & 2-8x+20x^2-55x^3+\dots \\ \cline{2-2}
\text{Πρῶτον ὑπόλοιπον} & -8x+4x^2-7x^3 \qquad & \\
 & 8x+16x^2-8x^3+8x^4 & \\ \cline{2-2}
\text{Δεύτερον ὑπόλοιπον} & 20x^2-15x^3+11x^4 & \\
 & -20x^2-40x^3+20x^4-20x^5 & \\ \cline{2-2}
\text{Τρίτον ὑπόλοιπον} & -55x^3+31x^4-20x^5 & \\
 & +55x^3+110x^4-55x^5+55x^6 & \\ \cline{2-2}
\text{Τέταρτον ὑπόλοιπον} & +141x^4-75x^5+55x^6 &
\end{array}$$

Ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατὸν νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον. Συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι δὲν εἶναι τελεία, τὰ δὲ πολυώνυμα τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x καὶ ὁ βαθμὸς ἑκάστου ὑπολοίπου αὐξάνει. Συνήθως διακόπτομεν τὴν πρᾶξιν, ὅταν χρησιμοποιηθοῦν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ διαιρετέου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

58) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων.

α) $-4\alpha^3:-2\alpha$ β) $7\alpha^2\beta\gamma:\alpha\beta\gamma$ γ) $24\alpha^2\beta\gamma^2:6\alpha^2\beta\gamma$

δ) $-18x^4y^4:3x^2y$ ε) $-21\alpha\beta^3\gamma^2:7\beta^3$ στ) $28\alpha^4\beta^2\gamma^2:-4\alpha\beta\gamma$.

59) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων

α) $(-20\alpha^4\beta^5y^2):(-4\alpha^2\beta^2y^2)$ β) $(36\alpha^4y^2z^3):(-9\alpha^4z^2)$

γ) $(15x^5y^3z^4)(-3x^2yz^3)$ δ) $24x^{2\alpha}\, y^{2\beta}\, z^{3\alpha} : 8x^{2\alpha}\, z^{2\alpha}$

ε) $0,5\alpha\beta^4:-0,4\beta^3$ στ) $0,25\alpha^4\beta^5\gamma:(0,05\alpha^3\beta^3)$

ζ) $\frac{3}{2}x^2y^4:\left(-\frac{5}{6}xy\right)$ η) $0{,}4\beta^5\gamma^3:\frac{1}{25}\beta^2\gamma^2$

θ) $-\frac{1}{3}\alpha^4\beta^5\gamma:\frac{7}{12}\beta\gamma$ ι) $0{,}35\alpha^5\beta^4:\left(-\frac{7}{8}\alpha^4\beta\right)$.

59α) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων

α) $2\alpha^2-8\alpha\beta+16\alpha\gamma:(-2\alpha)$ β) $\alpha x^4-\alpha^2x^3+\alpha^3x^2:(-\alpha x^2)$

γ) $7\alpha^4\beta^2+35\alpha^3\beta^4-21\alpha^3\beta^3:7\alpha^3\beta^2$ δ) $4x^4y^8-8x^5y^6-28x^6y^4:(-4x^3y^3)$

ε) $27x^4y^5z^6-45x^5y^4z^5+54x^6y^7z^4:9x^3y^3z^2$

στ) $\left(6\alpha^5\beta^2+\frac{2}{9}\alpha^4\beta^3-\frac{6}{7}\alpha^3\beta^4\right):\left(\frac{2}{3}\alpha^3\beta\right)$

ζ) $\left(-\frac{2}{3}\alpha^4\beta x^4y-\frac{3}{4}\alpha^3\beta^2x^3y^2-\frac{3}{5}\alpha^2\beta^3x^2y^3+\alpha\beta^4xy^4\right):\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta xy\right)$.

60) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων

α) $\dfrac{2\alpha^7-4\alpha^6+3\alpha^5+7\alpha^4}{6\alpha^3}$ β) $\dfrac{4x^6y^3-3x^5y^4+5x^3y^3}{-x^2y^3}$

γ) $\dfrac{3\alpha^4+7\alpha^3+4\alpha^2+5\alpha-1}{-3\alpha^2}$ δ) $\dfrac{5x^3y^2z+10x^2y^4z^3-2xy^3z^2+yz^4}{-5x^2yz^2}$.

61) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων

α) $15x^{\mu}-5x^{2\mu}+10x^{3\mu+1}-20x^{4\mu-3}):(-5x^{\mu-1})$.

β) $(115x^{3\mu-1}-46x^{3\mu}+23x^{3\mu+1}-x^{3\mu+2}):23x^{3\mu-\nu}$.

γ) $(24\alpha^{\mu}\beta^{\nu}-12\alpha^{2\mu}\beta^{2\nu}+36\alpha^{\mu+3}\beta^{\nu+4}):12\alpha^{\mu}\beta^{\nu}$

δ) $\left(\frac{1}{4}\alpha^{\mu}\beta^{\nu}+0{,}2\alpha^{2\mu}\beta^{\nu+1}-\frac{3}{4}\alpha^{3\mu}\beta^{\nu+2}+\frac{1}{2}\alpha^{4\mu}\beta^{\nu+3}\right):$

$$:\left(-\frac{1}{2}\alpha^{\mu}\beta^{\nu}\right)$$

61α) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων

α) $6x^3-17x^2+14x-3:2x-3$ β) $x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4:x^5-4$

γ) $3x^4-7x^3-18x^2+28x+24:3x^2+8x+4$.

δ) $14\alpha^4-27\alpha^3\beta-3\alpha\beta^3+21\alpha^2\beta^2-2\beta^4:2\alpha^2-3\alpha\beta-2\beta^2$.

ε) $8\alpha^5-17\alpha^3\beta^2-22\alpha^4\beta-8\beta^5+48\alpha^2\beta^3+26\alpha\beta^4:2\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2$.

στ) $-25\alpha^3x-2\alpha^2x^2+12\alpha^4-10x^4+7\alpha x^3:4\alpha^2-3\alpha x+2x^2$.

ζ) $9x^8-130x^6+497x^4-520x^2+144:x^3-2x^2-9x+18$.

η) $x^5-5x^4y+7x^3y^2-x^2y^3-4xy^4+2y^5:x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

θ) $6x^6+5x^5y-x^4y^2+4x^3y^3-17x^2y^4+8xy^5-y^6:3x^4-2x^3y+4x^3y^2-5xy^2+y^4$

ι) $2x^3-x^2+2x^5-4x^4-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}x:x-\frac{1}{2}$.

ια) $x^4-\frac{5}{4}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4:x-\frac{1}{2}y$.

ιβ) $\frac{1}{2}y^4+\frac{7}{4}xy^3+x^2y^2-\frac{7}{4}x^3y-\frac{3}{2}x^4:y+\frac{3}{2}x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

Διαίρεσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x δι᾽ ἑνὸς διωνύμου τῆς μορφῆς $x \pm \alpha$.

§ 29. ***Συμβολικὴ παράστασις ἑνὸς πολυωνύμου.***

α) Ἕνα πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς x παριστάνεται συνήθως μὲ τὰ σύμβολα Π (x) (τὸ ὁποῖον διαβάζεται Π τοῦ x) ἢ F(x) ἢ f(x)....

β) Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x παριστάνει ἕνα ὡρισμένον ἀριθμὸν δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.

Π. χ. Διὰ $x=1$ τὸ πολυώνυμον $\Pi(x)=3x^3-2x^2+6x-1$ ἰσοῦται μὲ 6. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου Π(x) διὰ $x=1$ παριστάνεται διὰ τοῦ συμβόλου Π(1). Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἔχομεν $\Pi(1)=6$.

Διαιρετότης διὰ $x \pm a$

§ 30. **Θεώρημα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x διὰ τοῦ διωνύμου $x-\alpha$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου διὰ $x=\alpha$.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω Π(x) τό πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου, P(x) τὸ πολυώνυμον τοῦ πηλίκου καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως Π(x) : (x—α). Ἐπειδή ὁ διαιρέτης x—α εἶναι πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τὸ ὑπόλοιπον υ θὰ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἄρα δὲν θὰ περιέχῃ τὴν μεταβλητὴν x. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς κάθε διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τὸ ὑπόλοιπον (§ 28 παρ. 2α), θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\Pi(x)=(x-\alpha)P(x)+\upsilon \quad (1).$$

Ἡ (1) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, ἄρα θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ $x=\alpha$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν, λαμβάνομεν

$$\Pi(\alpha)=(\alpha-\alpha)P(\alpha)+\upsilon,$$

καὶ ἐπειδὴ $(\alpha-\alpha)P(\alpha)=0 \cdot P(\alpha)=0$ ἔχομεν $\Pi(\alpha)=\upsilon$.

Σημείωσις. I. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x διὰ τοῦ διωνύμου $x+\alpha$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου διὰ $x=-\alpha$, διότι ὁ διαιρέτης $x+\alpha$ γράφεται $x-(-\alpha)$.

II. Εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Π(x) διὰ τοῦ διωνύμου τῆς μορφῆς $x \pm \alpha$, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x εἰς τὸ Π(x) μὲ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ διωνύμου μὲ ἀλλαγμένον πρόσημον.

§ 31. **Πόρισμα. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον Π(x) διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$ εἶναι ἡ ἀριθμητική του τιμὴ διὰ $x=\alpha$ νὰ εἶναι μηδέν.**

Ἀναγκαία συνθήκη. Ἐὰν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$, τὸ πολυώνυμον μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$. Πράγματι, ἐὰν τὸ Π(x) εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι μηδέν. Ἀλλὰ ἔχομεν $\upsilon=\Pi(\alpha)$. Ἄρα $\Pi(\alpha)=0$ καὶ τὸ πολυώνυμον μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$.

Ἱκανὴ συνθήκη. Ἐὰν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$, εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$.

Πράγματι, ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως ἔχομεν $\Pi(\alpha)=0$. Ἀλλὰ τὸ Π(α) ἰσοῦται μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι μηδὲν καὶ τὸ Π(x) εἶναι διαιρετὸν διὰ x-α.

Παράδειγμα. 1. Τὸ πολυώνυμον $F(x)=x^3-7x^2+8x+3$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-1$, διότι $F(1)=1-7+8+3=5$.

2. Τὸ πολυώνυμον $F(\alpha)=2\alpha^3-3\alpha^2+\alpha+6$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha+1$, διότι $F(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2+(-1)+6=0$.

3. Τὸ πολυώνυμον $x^3y^3-2x^2y^2+3xy-2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $xy-1$, διότι ἂν θέσωμεν ἀντὶ xy τὸ 1, ἔχομεν $F(1)=0$.

Διαιρετότης διὰ $\alpha x+\beta$

§ 32. **Θεώρημα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x διὰ τοῦ διωνύμου $\alpha x+\beta$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου διὰ $x=\dfrac{-\beta}{\alpha}$.**

Ἀπόδειξις. Τὸ ὑπόλοιπον υ τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου Π(x) διὰ $\alpha x+\beta$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x. Ἄρα ἔχομεν

$$\Pi(x)=(\alpha x+\beta)P(x)+\upsilon \quad (2)$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ x τὸ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ δηλαδὴ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸ $\alpha x+\beta$, εὑρίσκομεν

$$\Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0\,.\,P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\upsilon \text{ ἢ } \Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\upsilon.$$

Π. χ. Τὸ πολυώνυμον $F(x)=6x^3-7x^2-9x-2$ εἶναι διαιρετὸν

$$\text{διὰ } 2x+1, \text{ διότι } F\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις.

α) $(x^3-7x^2+5x+30):(x-3)$

β) $(y^3-4y^2-10y+25):(y-5)$

γ) $(3x^4-5x^3-x^2-x-2):(x-2)$

δ) $(8\alpha^2-16\alpha-9\alpha^3+3\alpha^4-1):(\alpha-1)$

ε) $(x^3-2x^2-15x-5):(x+2)$

στ) $(y^3+4y^2-2y-15):(y+3)$

ζ) $(3x^4+13x^3+5x^2+5x+4):(x+4)$

η) $(2x^4+49x+27x^2+14x^3+70):(x+5)$

θ) $\left(2x^5-4x^3-\frac{5}{8}x+\frac{3}{4}\right):\left(x-\frac{3}{4}\right)$

ι) $\left(2x^3-x^2+2x^5-\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x-4x^4\right):(2x-1)$

ια) $\left(x^4-\frac{5}{4}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4\right):(2x-y)$

ιβ) $(5\alpha^5+3\beta^5+\alpha^4\beta+15\alpha\beta^4)\,.\,(5\alpha+\beta)$

63) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $x^4+8x^3+14x^2+32x+16$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+2$.

64) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $4x^3+4x^2-29x+21$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $2x-3$.

65) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $7^\nu+1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἂν $\nu \in \Phi$ καὶ περιττός.

66) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $(x+y)^\mu - x^\mu - y^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y$, ἂν $\mu \in \Phi$ καὶ περιττός.

67) Νὰ προσδιορισθῇ ὁ k εἰς τὰς διαιρέσεις, ὥστε νὰ εἶναι τέλειαι.

α) $x^2+kx+72 : x-3$

β) $3x^4-kx^3+8x^2-2kx-20 : x-2$

γ) $2x^3+kx^2+3x+1 : 2x+1$

δ) $8x^3-3x+k : 2x-1$

Πηλίκα τῶν διαιρέσεων διὰ $x\pm\alpha$.

§ **33**. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\alpha_0x^3+\alpha_1x^2$ $\alpha_2x+\alpha_3$ διὰ $x-\alpha$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ἔστω ὅτι εἶναι τὸ $\beta_0x^2+\beta_1x+\beta_2$. Τὸ ὑπόλοιπον υ τῆς διαιρέσεως εἶναι ἀνε-ξάρτητον τοῦ x. Τότε ἔχομεν $\alpha_0x^3+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3=(x-\alpha)(\beta_0x^2+$ $\beta_1x+\beta_2)+\upsilon$. Ἂν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ διατάξωμεν τὸ γινόμενον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, εὑρίσκομεν $\alpha_0x^3+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3=\beta_0x^3+(\beta_1-\alpha\beta_0)x^2+(\beta_2-\alpha\beta_1)x+\upsilon-$ $-\alpha\beta_2$. Ἄρα θὰ εἶναι $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1-\alpha\beta_0$, $\alpha_2=\beta_2-\alpha\beta_1$, $\alpha_3=\upsilon-\alpha\beta_2$ ἢ $\beta_0=\alpha_0$, $\beta_1=\alpha\beta_0+\alpha_1$, $\beta_2=\alpha\beta_1+\alpha_2$, $\upsilon=\alpha\beta_2+\alpha_3$.

Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι βαθμοῦ ν ὡς πρὸς x, καταλήγομεν εἰς ἀναλόγους ἰσότητας. Συμπεραίνομεν λοιπὸν τὸν κανόνα.

Κανὼν τοῦ di Ruffini

α) Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς x βαθμοῦ ν διὰ τοῦ διωνύμου x—α εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ ν—1.

β) Ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

γ) Ὁ συντελεστὴς ἑνὸς ἄλλου ὅρου τοῦ πηλίκου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ προηγουμένου ὅρου ἐπὶ α, καὶ προσθέσωμεν κατόπιν εἰς τὸ γινόμενον τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου τοῦ διαιρετέου, ὁ ὁποῖος ἔχει τήν αὐτὴν τάξιν μὲ τὴν τάξιν τοῦ ζητουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου.

δ) Τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου ἐπὶ α καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ διαιρετέου.

Σημείωσις: Ὁ κανὼν τοῦ di Ruffini ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἕνα πολυώνυμον ἐλλειπές. Συμπληρώνομεν τὸ πολυώνυμον, ἂν θέσωμεν τό μηδὲν ὡς συντελεστὴν τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἐλλείπουν.

Παράδειγμα 1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^5—4x^4+x^3—2x^2+x+30 : x—2$.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι κατὰ σειρὰν $1, 1.2—4=-2, (—2).2+1=—3, (—3).2—2=—8, (—8).2+1=—15$ δηλ. τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $x^4—2x^3—3x^2—8x—15$ τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι $(—15).2+30=0$.

Παράδειγμα 2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^5—3x^3+2x^2+5x : x+2$.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι κατὰ σειρὰν $1, 1(—2)+0=—2, (—2)(—2)—3=1, 1(—2)+2=0, 0(—2)+5=5$ δηλ. τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι $x^4-2x^3+x^2+5$ τό δὲ ὑπόλοιπον $5(—2)=—10$

Παράδειγμα 3. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $3x^3—2x+4 : 2x+1$.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου θά εἶναι κατὰ σειρὰν

$$3:2=\frac{3}{2},\ \left[\frac{3}{2}(-1)+0\right]\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{4},\ \left[\left(-\frac{3}{4}\right)(-1)+(-2)\right]\cdot\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$$

δηλ. τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον $\left(-\frac{5}{8}\right)(-1)+4=\frac{37}{8}$.

Σημείωσις. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀνωτέρω διαιρέσεων εὑρίσκονται ὡς καὶ εἰς (§ 30, 32).

§ 34. Ἀξιοσημείωτα πηλίκα.

I. Ἡ διαφορὰ $x^\nu-\alpha^\nu$ εἶναι διαιρετὴ διὰ τῆς διαφορᾶς $x-\alpha$ δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ ν.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x_\nu-\alpha^\nu : x-\alpha$ εἶναι $\alpha^\nu-\alpha^\nu=0$. Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ di Ruffini, εὑρίσκομεν

$$\boxed{x^\nu-\alpha^\nu=(x-\alpha)(x^{\nu-1}+\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}+\ldots\ldots+\alpha^{\nu-2}x+\alpha^{\nu-1})}$$

Π: χ. $x^4-\alpha^4=(x-\alpha)(x^3+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3)$

$x^5-32=(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)$.

II. Ἡ διαφορὰ $x^\nu-\alpha^\nu$ εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ ἀθροίσματος $x+\alpha$ ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^\nu-\alpha^\nu : x-\alpha$ εἶναι $(-\alpha)^\nu-\alpha^\nu$, καὶ ἐπειδὴ ὁ ν εἶναι ἄρτιος θὰ εἶναι $(-\alpha)^\nu=+\alpha^\nu$, ἄρα $\Pi(-\alpha)=\alpha^\nu-\alpha^\nu=0$. Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ di Ruffini, εὑρίσκομεν

$$\boxed{x^\nu-\alpha^\nu=(x+\alpha)(x^{\nu-1}-\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}-\alpha^3x^{\nu-4}+\ldots\ldots-\alpha^{\nu-1})}$$

Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον ἔχει ν ὅρους. Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι ἀρνητικός. Ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός, ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι θετικός.

Ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός, ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελὴς καὶ ἔχει ὑπόλοιπον $\upsilon=-2\alpha^\nu$.

Π.χ. $x^4-\alpha^4=(x+\alpha)(x^3-\alpha x^2+\alpha^2x-\alpha^3)$

$x^5-\alpha^5=(x+\alpha)(x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2-\alpha^3x+\alpha^4)$ καὶ $\upsilon=-2\alpha^5$.

III. Τὸ ἄθροισμα $x^\nu+\alpha^\nu$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^ν + α^ν : x - α$ εἶναι $υ = α^ν + α^ν = 2α^ν$. Ὁμοίως, ὡς καὶ προηγουμένως, εὑρίσκομεν

$$\boxed{x^ν + α^ν = (x - α)(x^{ν-1} + αx^{ν-2} + α^2 x^{ν-3} + \ldots\ldots + α^{ν-1}) + 2α^ν}$$

Π. χ. $x^3 + α^3 : x - α = x^2 + αx + α^2$ καὶ $υ = 2α^3$.

IV. Τὸ ἄθροισμα $x^ν + α^ν$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x + α$ ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^ν + α^ν : x + α$ εἶναι $(-α)^ν + α^ν$ καί, ἐπειδὴ ὁ ν εἶναι περιττός, θὰ εἶναι $(-α)^ν = -α^ν$, ἄρα $Π(-α) = -α^ν + α^ν = 0$.

Ἂν ἐργασθῶμεν ὅπως καὶ προηγουμένως, εὑρίσκομεν

$$\boxed{x^ν + α^ν = (x + α)(x^{ν-1} - αx^{ν-2} + α^2 x^{ν-3} - \ldots\ldots + α^{ν-1})}$$

Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ἔχομεν $(-α)^ν = α^ν$ καὶ τὸ $Π(-α) = 2α^ν$.

Σημείωσις. Τὰ πηλίκα τῶν ἀνωτέρω διαιρέσεων εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ, πλήρη καὶ βαθμοῦ $ν-1$ ὡς πρὸς x καὶ α καὶ μὲ συντελεστὰς τῶν ὅρων των τὸ 1. Ὅλοι οἱ ὅροι τῶν ἀνωτέρω πολυωνύμων εἶναι θετικοί, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ $x - α$, καὶ ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ $x + α$. Εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου ἔχει συντελεστὴν θετικόν, ὅταν ὁ ν εἶναι περιττός, καὶ ἀρνητικὸν ὅταν ὁ ν εἶναι ἄρτιος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

68) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις.

α) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 : x - 1$ β) $2x^3 + 7x^2 - 6x - 5 : x + 1$.

γ) $x^6 - 7x + 6 : x - 1$ δ) $x^4 - 7x^2 - x + 6 : x + 2$.

ε) $x^3 - 40x - 63 : x - 7$ στ) $α^4 + 6α^2x^2 - 4αx^3 - 4α^3x + x^4 : α - x$.

ζ) $2x^6 - 3x^5 - 9x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 4x - 40 : x + 2$.

η) $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 + 68y^5 : x - 2y$:

69) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων.

α) $x^6 - 1 : x - 1$ β) $x^6 - 1 : x + 1$ γ) $x^5 + y^5 : x + y$

δ) $x^7 - y^7 : x - y$ ε) $x^8 - y^8 : x - y$ στ) $64x^6 - 1 : 2x + 1$

ζ) $x^7y^7 + 1 : xy + 1$ η) $x^7 + 2187 : x + 3$ θ) $32x^5 + 243 : 2x + 3$

ι) $x^6-1:x^2-1$ ια) $x^6+y^6:x^2+y^2$ ιβ) $x^8-y^8:x^2+y^2$

ιγ) $x^8-y^8:x^4-y^4$ ιδ) $x^9+1:x^3+1$.

70) Ποίων διαιρέσεων πηλίκα εἶναι αἱ παραστάσεις.

α) $\alpha+\beta$ β) $\alpha-y$ γ) x^2-xy+y^2

δ) $1-x+x^2$ ε) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ στ) $x^3y^3+x^2y^2\alpha\beta-xy\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3$

ζ) $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$ η) $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6$

θ) $8-4x+2x^2-x^3$ ι) $27+9y+3y^2+y^3$

71) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ $7^{2\nu+1}+1$ $(\nu\in\Phi)$ εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

72) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ $10^\nu - 3^\nu$ $(\nu\in\Phi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 7 καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

73) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $(\alpha+2)^\nu - 1$ $(\nu\in\Phi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha+1$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

74) Νὰ προσδιορισθῇ ὁ Κ, ὥστε τὸ $x^3+y^3+z^3+kxyz$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y+z$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 35. Ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων εἶναι ἡ ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολυωνύμων. Διότι, ἐνῷ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, δίδονται οἱ παράγοντες καὶ ζητεῖται τὸ γινόμενον, τώρα δίδεται τὸ γινόμενον καὶ ζητοῦνται οἱ παράγοντες. Ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου εἰς γινόμενον ἄλλων ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σπουδαιότερα προβλήματα τῆς Ἀλγέβρας. Διότι μᾶς διευκολύνει πολὺ εἰς τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καὶ τὴν ἀπόδειξιν διαφόρων προτάσεων, ἀλλὰ τό σπουδαιότερον ἐξ ὅλων εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων καὶ ἀνισόσεων ἀνωτέρου βαθμοῦ. Ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Μερικοὶ στοιχειώδεις τρόποι τῆς ἀναλύσεως ἑνὸς πολυωνύμου εἰς γινόμενον εἶναι οἱ κάτωθι :

§ 36. ***Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος.*** Ἂν ἑνὸς πολυωνύμου οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων του ἔχουν ἕνα ΜΚΔ (μέγιστον κοινὸν διαιρέτην) διάφορον τῆς μονάδος, καὶ συγχρόνως μερικαὶ μεταβληταὶ ὑπάρχουν εἰς ὅλους τοὺς ὅρους, τὸ πολυώνυμον θὰ εἶναι διαιρετὸν μὲ ἕνα μονώνυμον. Τοῦ μονωνύμου αὐτοῦ συντελεστὴς θὰ εἶναι αὐτὸς ὁ ΜΚΔ καὶ τὸ κύριον ποσὸν του θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς κοινὰς μεταβλητὰς τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

Παραδείγματα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις.

1. $8\alpha^3\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^3\gamma^3+2\alpha^2\beta^2\gamma^3=2\alpha^2\beta^2\gamma^2(4\alpha-2\beta\gamma+\gamma)$.
2. $2\alpha^3\beta^2\gamma^4\delta-3\alpha\beta^4\gamma^5+7\alpha^2\beta^2\gamma^4\delta^2=\alpha^2\beta\gamma^4(2\alpha^2\delta-3\beta^2\gamma+7\alpha\delta^2)$.
3. $(2\alpha+1)(3\alpha-2)-(\alpha-4)(2\alpha+1)-(2\alpha+1)^2=$

$$(2\alpha+1)[(3\alpha-2)-(\alpha-4)-(2\alpha+1)]=(2\alpha+1)(3\alpha-2-\alpha+4-$$
$$-2\alpha-1)=2\alpha+1.$$

§ 37. ***Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος καθ' ὁμάδας ὅρων.*** Ἂν δὲν ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων εἰς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου, εἶναι δυνατὸν πολλάκις νὰ χωρίσωμεν τοὺς ὅρους εἰς ὁμάδας, οὕτως ὥστε ἀπὸ κάθε ὁμάδα νὰ ἐξάγεται κοινὸς παράγων ἐκτὸς παρενθέσεως. Τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων πολυώνυμα πρέπει νὰ εἶναι τὰ ἴδια δι' ὅλας τὰς ὁμάδας, ὁπότε ἐξάγεται τὸ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων πολυώνυμον ὡς κοινὸς παράγων.

Παραδείγματα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις.

1. $x^2-4x+xy-4y=(x^2-4x)+(xy-4y)=x(x-4)+y(x-4)=$
$$=(x-4)(x+y).$$
2. $\alpha^2\gamma-\alpha^2\delta-\beta^2\delta+\beta^2\gamma=(\alpha^2\gamma-\alpha^2\delta)+(\beta^2\gamma-\beta^2\delta)=\alpha^2(\gamma-\delta)+$
$$+\beta^2(\gamma-\delta)=(\gamma-\delta)(\alpha^2+\beta^2)$$

§ **38. *Διαφορὰ τετραγώνων.*** Ὅταν ἡ παράστασις εἶναι ἢ εἶναι δυνατὸν νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν διαφορᾶς τετραγώνων δύο ἄλλων παραστάσεων, τότε ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων τῶν τετραγώνων ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων.

Παραδείγματα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις.

1. $\alpha^2\beta^2-49\gamma^2=(\alpha\beta+7\gamma)(\alpha\beta-7\gamma)$.
2. $4x^2-4xy-9x^2y^2+y^2=(4x^2-4xy+y^2)-9x^2y^2=(2x-y)^2-$
$$(3xy)^2=(2x-y+3xy)(2x-y-3xy).$$

§ **39. *Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀναπτυγμάτων*** $(\alpha\pm\beta)^2$, $(\alpha\pm\beta)^3$. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἐφαρμόζομεν τὰς ταυτότητας
$$\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha\pm\beta)^2,\qquad \alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3=(\alpha\pm\beta)^3$$

Παραδείγματα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις.

1. $9\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2=(3\alpha+\beta)^2=(3\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)$.
2. $\alpha^2\beta^4\gamma^6\pm2\alpha\beta^2\gamma^3x^8+x^{16}=(\alpha\beta^2\gamma^3\pm x^8)^2=(\alpha\beta^2\gamma^3\pm x^8)(\alpha\beta^2\gamma^3\pm x^8)$
3. $64x^3-96x^2y+48xy^2-8y^3=(4x-2y)^3=(4x-2y)(4x-2y)\cdot$
$$\cdot(4x-2y)$$

§ **40. *Διὰ προσθαφαιρέσεως ὅρων*** Ὅταν ἡ παράστασις εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν διαφορᾶς τετραγώνων διὰ προσθαφαιρέσεως ἑνὸς μονωνύμου ἢ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ἑνὸς ὅρου τῆς παραστάσεως διὰ δύο ἄλλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα, ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων, ὡς εἰς τὴν (§ 39).

Παραδείγματα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις.

1. $9x^4+26x^2y^2+25y^4 = 9x^4+30x^2y^2+25y^4)-4x^2y^2 =$
$= (3x^2+5y^2)^2-4x^2y^2 = (3x^2+5y^2+2xy)(3x^2+5y^2-2xy)$.
2. $16x^4-17x^2+1 = (16x^4-8x^2+1)-9x^2 = (4x^2-1)^2-9x^2 =$
$= (4x^2-1+3x)(4x^2-1-3x)$.
3. $\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2)-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta\sqrt{2})^2 =$
$- (\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sqrt{2})(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\sqrt{2})$.

§ **41. *Ἄθροισμα ἢ διαφορὰ κύβων.*** Ὅταν ἡ παράστασις εἶναι δυνατὸν νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν ἀθροίσματος ἢ διφορὰς κύβων ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ταυτοτήτων.

$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \text{ καὶ } \alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

Παραδείγματα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις.

1. $x^3y^3-27 = (xy)^3-3^3 = (xy-3)(x^2y^2+3xy+9)$.
2. $125(x+y)^3-1 = [5(x+y)]^3-1 = [5(x+y)-1]$
$[25(x+y)^2+5(x+y)+1]$.
3. $8x^3+27y^3 = (2x)^3+(3y)^3 = (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

§ **42. *Ἀνάλυσις ἑνὸς ὅρου εἰς δύο μέρη.*** Πολλὰς φορὰς ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς πολυωνύμου εἰς γινόμενον, ὅταν τοῦτο ἔχῃ περιττὸν πλῆθος ὅρων, ἐπιτυγχάνεται μὲ κατάλληλον διάσπασιν ἑνὸς ὅρου του εἰς δύο μέρη οὕτως ὥστε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου νὰ γίνῃ ἄρτιον. Τότε οἱ ὅροι εἶναι δυνατὸν ἴσως νὰ σχηματίζουν ζεύγη. τὰ ὁποῖα ἔχουν ὅλα τὸν ἴδιον κοινὸν παράγοντα.

Παραδείγματα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις.

1. $x^2+9x+8 = x^2+x+8x+8 = x(x+1)+8(x+1) = (x+1)(x+8)$.
2. $\alpha^4-11\alpha^2\beta^3+30\beta^6 = \alpha^4-5\alpha^2\beta^3-6\alpha^2\beta^2+30\beta^6 = \alpha^2(\alpha^2-5\beta^3)-$
$-6\beta^2(\alpha^2-5\beta^3) = (\alpha^2-5\beta^3)(\alpha^2-6\beta^3)$.

§ **43. *Ἀνάλυσις τοῦ τριωνύμου*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ἂν $\alpha=1$ ἢ $\alpha \neq 1$.

α ***Ἐὰν τὸ τριώνυμον εἶναι τῆς μορφῆς*** $x^2+\beta x+\gamma$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $x^2+\beta x+\gamma \Longleftrightarrow x^2+2\,.\,\frac{\beta}{2}x+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}\gamma \Longleftrightarrow$

$$\Longrightarrow\left(x^2+2\frac{\beta x}{2}+\frac{\beta^2}{4}\right)+\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)\Longleftrightarrow\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta^2-4\gamma}{4}\right)$$

Διακρίνομεν τώρα πάλιν δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωσις. Ἂν $\beta^2-4\gamma\geqq 0$, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\beta^2-4\gamma}{4}$ εἶναί τότε θετικὸς ἢ μηδὲν καὶ ἑπομένως ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ k, δηλ. $\frac{\beta^2-4\gamma}{4}=k^2$, ὁπότε $k=\frac{\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}$. Ἄρα τὸ τριώνυμον $x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῇ ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων : $x^2+\beta x+\gamma=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2-k^2$ καί κατὰ τὴν (§ 38) ἔχομεν $x^2+\beta x+\gamma=\left(x+\frac{\beta}{2}+k\right)\left(x+\frac{\beta}{2}-k\right)$.

2α περίπτωσις. Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\beta^2-4\gamma}{4}$ εἶναι τότε ἀρνητικὸς καὶ δὲν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον κανενὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ τριώνυμον εἶναι τότε ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ ἡ ἀνάλυσίς του εἰς γινόμενον παραγόντων δὲν εἶναι δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τὸ τριώνυμον x^2+6x+5. Εἰς τὸ τριώνυμον αὐτὸ εἶναι $\beta=6$, $\gamma=5$ καὶ $\beta^2-4\gamma=36-20=16>0$. Ἄρα τὸ τριώνυμον ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων $x^2+6x+5=x^2+2\,.\,3x+5=(x+3)^2-9+5=(x+3)^2-4=(x+3+2)\,(x+3-2)=(x+5)\,(x+1)$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τὸ τριώνυμον x^2+7x+5. Ἔχομεν $\beta=7$, $\gamma=5$ καὶ $\beta^2-4\gamma=49-20=29>0$. Ἄρα

$$x^2+7x+5=\left(x^2+2.\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}\right)-\frac{49}{4}+5=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{29}{4}=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-$$

$$\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2=\left(x+\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)$$

β) ***Ἐὰν τὸ τριώνυμον εἶναι τῆς μορφῆς*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην, διότι

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\,(x^2+\kappa x+\lambda) \text{ ὅπου } x=\frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \lambda=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $k^2-4\lambda=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-4\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\alpha^2}$ εἶναι ὁμόσημος μὲ τὸν $\beta^2-4\alpha\gamma$, διότι $\alpha^2>0$.

Ἄρα, ἄν $\beta^2-4\alpha\gamma\geqslant 0$, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ $3x^2-15x+12$. Ἐδῶ τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma=225-4\,.\,3\,.\,12=81>0$. Ἔχομεν τότε

$$3x^2-15x+12=3\,(x^2-5x+4)=3\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+4\right]=3\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]=3\left(x-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)=3\,(x-1)\,(x-4).$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ $2x^2+7x+3$. Ἐδῶ τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma=49-4\,.\,2\,.\,3=49-24=25>0$. Ἔχομεν

τότε $$2x^2-7x+3=2\left(x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}\right)=2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}+\frac{3}{2}\right]=$$

$$2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=2\left(x+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right)=2\,(x+3)$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+3)\,(2x+1).$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ $3x^2-2x+5$. Ἐδῶ τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma=4-60=-56<0$. Ἔχομεν τότε

$$3x^2-2x+5=3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)=3\left[\left(x-\frac{2}{6}\right)^2+\frac{56}{36}\right]=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{56}}{6}\right)^2\right].$$

Τὸ τριώνυμον λοιπὸν γράφεται ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ δὲν ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

75) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις.

α) $1\theta\alpha\beta^2+5\alpha^2\beta$ β) $12x^2y^3-18xy_5+24x^3y$

γ) $12\alpha^2x^3-30\alpha^3x^2+18\alpha x^4$ δ) $8x^2y^5-16x^4y^3+12x^5y^2+7x^3y^4$

ε) $2\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta-3\alpha\beta^4\gamma^5+7\alpha^2\beta^2\gamma^4\delta^2$ στ) $12\alpha^2\beta^3-30\alpha^3\beta^2+18\alpha\beta_\gamma-42\alpha^4\beta$

ζ) $6\alpha^2x^3-3\alpha x^4+21\alpha^2x^5$ η) $15\alpha^2x^2-30\alpha^2x^3+105\alpha^2x^4-75\alpha^3x^5$

θ) $x^{\mu+1}y^{\nu-1}+x^{\nu-1}y^{\nu+1}+3x^\nu y^\nu$ ι) $x^{\mu+\nu}y^\mu - x^{2\nu}y^{\mu+\nu} - x^\nu y^{2\mu}$

ια) $44\alpha x^\nu - 286\alpha^2x^{\nu+1}+66\alpha^3x^{\nu+2}$ ιβ) $7x^{\mu+3}y^{\nu-2}+14x^\mu y^{\nu+1}+21x^{\mu-3}y^{\nu+4}$

76) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις

α) $(3x-2)(4x-3)-(2-3x)(x-1)-2(3x-2)(x+1)$

β) $(x-3)(x^2+1)+(x-3)(2x-1)+(3-x)(x^2+4)$

γ) $(x+1)(2x-3)-(x+1)(4-x^2)-(x+1)(x^2-2x+1)$

δ) $(1-2x)(2x+3)-(2x-1)(2+3x)-(1-2x)$

ε) $(\alpha-\beta)(x-1)-(\beta-\alpha)(y+2)-(\alpha-\beta)(1+z)$

στ) $(x-y)(x-y+\omega)+(y-x)(x-y+\omega)$.

77) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις.

α) $x^2-3x+xy-3y$ β) $x^2y^2-xyz+x\omega y-\omega z$

γ) $\alpha x^2-x^2-4\alpha+4$ δ) $8y^4-8y^3+y-1$

ε) $\alpha^3-5\alpha^2+2\alpha-10$ στ) $5x^3+x^2-20x-4$

ζ) $\beta y^2-\beta^2-\alpha^2y+\alpha^2$ η) $3x-3y+2y-2x$

θ) x^3-2x^2-x+2 ι) $6xy^2+5x+6y^2+5$

ια) $6x^3y-6x^3-y+1$ ιβ) $\alpha x^\nu+\beta x^\nu+\alpha y^\nu+\beta y^\nu$

ιγ) $\alpha^3x^\nu+\beta^3y^\nu+\alpha^2\beta y^\nu+\alpha\beta^2x^\nu$ ιδ) $x^{\mu+1}+xy^\mu+x^\nu y+y^{\mu+1}$

ιε) $\alpha^{\mu+2}-\beta^{\nu+2}-\alpha^2\beta^\nu+\alpha^\mu\beta^2$ ιστ) $x^{\nu+\mu}-y^{\nu+\mu}-x^\nu y^\nu+x^\mu y^\mu$.

78) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις.

α) x^2-9 β) $9x^2-25$ γ) x^4-16y^2

δ) $4x^2-16\alpha^2$ ε) $\alpha^2x^2-81x^2$ στ) $16x^2y^2-121y^4$

ζ) $\dfrac{x^2}{16}-y^2$ η) $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^4}{\beta^2}$ θ) $\dfrac{x^4}{4}-1$

ι) $\dfrac{x^4y^4}{81}-625$ ια) $\dfrac{4}{9}\alpha^2x^2-\dfrac{9}{16}\beta^2y^2$ ιβ) $x^2y^4-\dfrac{1}{36}x^2\omega^2$

79) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις

α) $(x+1)^2-16$ β) $25-(2-x)^2$ γ) $(\alpha-\beta)^2-x^2$

δ) $(2x-3y)^2-9y^2$ ε) $9(5\alpha-4\beta)^2-64\alpha^2$ στ) $64x^4y^2-(x-3y)^2$

ζ) $(\alpha+\beta)^2-(x-y)^2$ η) $(5\alpha+2\beta)^2-(2\beta-5\alpha)^2$ θ) $(4x-\alpha)^2-(4\alpha-x)^2$

ι) $4(x-\alpha)^2-9(2\alpha+x)^2$ ια) $9(5x-\alpha)^2-36(x-\alpha)^2$

ιβ) $(\alpha+2\beta)^2-4(\alpha+3\beta)^2$ ιγ) $(\alpha^2-2\beta^2-\gamma^2)^2-4(\beta^2-\gamma^2)^2$

ιδ) $\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{1}{9}(2x-3)^2$

80) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις

α) $2(1-x^2)-3(1+x)-(1+x)(3x-2)$ β) $3x(2+3x)-(2+3x)^2-(4-9x)^2$

γ) $(4x+5)(3x+1)-9x^2+1$ δ) $(4x^2-1)(5x+2)-(25x^2-4)(2x+1)$

ε) $(3x-7)(x-1)-36x^2+196$ στ) $(x^2-x+1)^2-(x^2+2x-1)^2$

81) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις

α) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-1$ β) x^2-2x-y^2+1 γ) $3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2-27\omega^2$

δ) $\alpha^2-y^2-2xy-x^2$ ε) $\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2$ στ) x^2-4y^2+4y-1

ζ) $4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2-9\alpha^2\beta^2$ η) $4x^2-y^2+4xy-4y^2$ θ) $4x^2+4x+1-4y^2+4y-1$

ι) $2\alpha\beta xy+1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2$ ια) $x^2-\alpha^2+4y^2-\beta^2+4xy+2\alpha\beta$.

82) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις :

α) x^2+6x+9 β) $4-4x+x^2$ γ) $1+8x+16x^2$

δ) $3x^2+6xy+3y^2$ ε) $1-6\alpha^3+9\alpha^6$ στ) $9+42\beta^3+49\beta^6$

ζ) $36x^8-12x^4+1$ η) $4x^2y^2-20xy+25$ θ) $x^{2\nu}+8x^\nu y+16y^2$.

ι) $4x^{2\alpha}+8x^\alpha y^\beta+4y^{2\beta}$ ια) $x^{2\nu}-2x^\nu y^\nu \omega^\nu+y^{2\nu}\omega^{2\nu}$ ιβ) $x^2-\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$.

83) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις :

α) $\frac{x^2}{16}-\frac{3xy}{2}+9y^2$ β) $4x^4+x^2y+\frac{y^2}{16}$

γ) $24\alpha^6\beta\gamma^3+54\alpha^4\beta^3\gamma^3-72\alpha^5\beta^2\gamma^3$ δ) $49x^2y^8+25\alpha^6\beta^4-70\alpha^3\beta^2xy^4$

ε) $50\alpha^6\beta^2\gamma^2+72\alpha^2\beta^8\gamma^2+120\alpha^4\beta^5\gamma^2$ στ) $\frac{4}{3}\alpha^7x-8\alpha^4x^5+12\alpha x^9$

ζ) $144x^5y+324x^3y^3+432x^4y^2$ η) $\frac{9\alpha^4\beta}{4}-\alpha^3\beta^2+\frac{\alpha^2\beta^3}{9}$.

84) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις :

α) $x^4+14x^2y^2+64y^4$ β) $x^4+3x^2y^2+4y^4$

γ) $16x^4+4x^2y^2+y^4$ δ) $9x^4+26x^2y^2+25y^4$

ε) $x^4+x^2y^2+y^4$ στ) $4x^4+16x^2y^2+25y^4$

ζ) x^4-5x^2+4 η) $25x^4-104x^2y^4+16y^8$.

θ) x^4-29x^2+100 ι) $x^4-8x^2y^2z^2+16y^4z^4$

ια) $9x^6-10\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4$ ιβ) $100x^4-29x^2y^2+z^4$.

85) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις.

α) x^3+27 β) $8x^3-27y^3$ γ) y^3-64

δ) $64x^3-125y^3$ ε) $64+y^3$ στ) $27x^3+\beta^3\gamma^3$

ζ) $1000x^3+1$ η) $8x^3y^3-1$ θ) $216x^3-y^3$

ι) $125x^3+1$ ια) $1+729x^3$ ιβ) $729\alpha^3-8x^3$

86) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις

α) $8\alpha\beta^3\gamma^3-\alpha$ β) $3-81x^3$ γ) $3x^3y^3-3$

δ) $\alpha^3x-125x$ ε) $\alpha^3\beta^3-\frac{1}{8}x^3y^3$ στ) $32\alpha^3\beta^3-4\beta^9$

ζ) $(x-2y\omega)^3-8y^3\omega^3$ η) $(x+y)^3-(\omega+\varphi)^3$ θ) $216x^3y^2-343y^5$

87) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις

α) $x^2-8x+12$ β) $x^2-14x+13$ γ) $x^2-22x+85$

δ) $x^2+10x+16$ ε) $x^2+5x-14$ στ) $x^2+20x+19$

ζ) $x^2-4x-12$ η) $x^2-4x-33$ θ) $2x^2+9x+7$

ι) $2x^2-2x-24$ ια) $6x^2+15x+6$ ιβ) $27x^2-75x+48$

ιγ) $4x^2+x-5$ ιδ) $11x^2+28x-15$ ιε) $45x^2-39xy-6y^2$

88) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις

α) $x^3+y^3-x^2y-xy^2-x-y$ β) $(x+3y)x^2-x^3+(3x+y)y^2-y^3$

γ) $y^3-\alpha^2y+\alpha y^2-\alpha^3+y^2-\alpha^2$ δ) $x^3-xy^2-x^2y+y^3+2x^2-2y^2$

ε) $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$ στ) $\alpha^2+\beta^2-4\alpha+4\beta-2\alpha\beta+3$

ζ) $(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)$

η) $1+\alpha\beta+x(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)-\alpha(1+\alpha\beta)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ **44.** Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο συναρτήσεις $f(x, y)$ καὶ $\varphi(x, y)$, δύο μεταβλητῶν x καὶ y. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν α καὶ εἰς τὴν μεταβλητήν y μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν β, αἱ δύο συναρτήσεις λαμβάνουν ἀντιστοίχως τὰς τιμάς $f(\alpha, \beta)$ καὶ $\varphi(\alpha, \beta)$. Γενικῶς οἱ $f(\alpha, \beta)$ καὶ $\varphi(\alpha, \beta)$ εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των. Θέτομεν τὸ ἐρώτημα :

«Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ζεύγη $(\alpha, \beta) \in \Pi$, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ συναρτήσεις $f(x, y)$ καὶ $\varphi(x, y)$ λαμβάνουν ἴσας τιμάς». Δηλ. νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $f(x, y) = \varphi(x, y)$.

Αἱ $f(x, y)$ καὶ $\varphi(x, y)$ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως, αἱ δὲ μεταβληταὶ x καὶ y εἶναι οἱ ἄγνωστοι. Ἐὰν $\exists$ $(\alpha, \beta), \in \Pi$ τοιοῦτον ὥστε $f(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$, λέγομεν ὅτι τὸ ζεύγος αὐτὸ (α, β) εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως $f(x, y) = \varphi(x, y)$.

Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$(x, y) \in \Pi\times\Pi$, $\exists (x, y)$: $3x^2-2y = 2x+5y+1$.

Ἐδῶ $f(x, y) = 3x^2-2y$ καὶ $\varphi(x, y) = 2x+5y+1$.

Ἀλλά $f(2, 1) = 3.2^2-2.1 = 10$ καὶ $\varphi(x, y) = 2.2+5.1+1=10$.

Ἄρα $f(2, 1) = \varphi(2, 1)$. Ἑπομένως τὸ ζεῦγος $(2, 1)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως. Ὁμοίως τὰ ζεύγη $(1, 0)$, $\left(3, \frac{20}{7}\right)$ εἶναι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις δέχεται μίαν ἀπειρίαν λύσεων. Πράγματι, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ x μίαν τυχοῦσαν τιμὴν π.χ. $x=\lambda$, θὰ ἔχωμεν $3\lambda^2-2y=2\lambda+5y+1$, ὅτε $y=\frac{3\lambda^2-2\lambda-1}{7}$

Τὸ ζεῦγος $\left(\lambda, \frac{3\lambda^2-2\lambda-1}{7}\right)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως δι' οἱανδήποτε τιμήν τοῦ $\lambda \in \Pi$.

§ **45.** ***Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.*** Πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους λέγομεν κάθε ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$(x,y) \in \Pi x \Pi$ $\exists, (x,y)$: $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (1) καὶ $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ καὶ σταθεροί.

Κάθε ζεῦγος τιμῶν (x_0, y_0) τῶν μεταβλητῶν x, y, διὰ τὸ ὁποῖον ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0$, λέγεται λύσις τῆς ἐξισώσεως.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν λύσεων τῆς (1) διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η Περίπτωσις. Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, τότε ἔχομεν $\alpha x+0y+\gamma=0$ $\Leftrightarrow \alpha x+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha x=-\gamma \Leftrightarrow x=-\frac{\gamma}{\alpha}$ Ἄρα τὸ σύνολον τῶν λύσεων (x,y) τῆς $\alpha x+0y+\gamma=0$ εἶναι $\left\{(x,y)/x=-\frac{\gamma}{\alpha},\ y\in\Pi\right\}$.

Ἄρα ἡ $\alpha x+\gamma=0$ δέχεται μίαν ἀπειρίαν λύσεων, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους $x=-\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $y=\lambda$ τυχών.

Π.χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $(x,y)\in\Pi x\Pi \ \exists\, (x,y);\ 3x+0y-5=0$.

Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας $3x+0y-5=0 \Leftrightarrow 3x-5=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

Ἄρα, ἂν δώσωμεν εἰς τὸ x τὴν τιμὴν $\frac{5}{3}$ καὶ εἰς τὸ y μίαν ὁποιαδήποτε τιμὴν y_0, τὸ ζεῦγος $\left(\frac{5}{3},\ y_0\in\Pi\right)$ θὰ εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως $3x+0y-5=0$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη (x,y) τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Τὰ ζεύγη, τὰ ὁποῖα τὴν ἐπαληθεύουν, τὰ εὑρίσκομεν δίδοντες εἰς τὸ x τὴν τιμὴν $\frac{5}{3}$ καὶ συνδυάζοντες μὲ αὐτὴν μίαν τυχοῦσαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς y.

2α περίπτωσις. Ἐὰν $\alpha\neq0$ καὶ $\beta\neq0$. Ἂν δώσωμεν τώρα εἰς τὸ y μίαν τυχοῦσαν τιμὴν λ, ἡ (1) γίνεται $\alpha x+\beta\lambda+\gamma=0$.

Τότε ἔχομεν $\alpha x+\beta\lambda+\gamma \Leftrightarrow \alpha x=-\beta\lambda-\gamma \Leftrightarrow x=\frac{-\beta\lambda-\gamma}{\alpha}$

Ἄρα τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ εἶναι

$$\left\{(x,y)/x=\frac{-\beta\lambda-\gamma}{\alpha},\ y\in\Pi\right\}$$

Ἄρα ἡ (1) δέχεται μίαν ἀπειρίαν λύσεων, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους $x=\frac{-\beta\lambda-\gamma}{\alpha}$ καὶ $y=\lambda$ τυχών.

Π. χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $(x, y) \in \Pi x \Pi \ni (x, y)$; $2x+3y-8=0$. Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας

$$2x+3y-8=0 \Longleftrightarrow 2x=-3y+8 \Longleftrightarrow x=-\frac{3}{2}y+\frac{8}{2} \Longleftrightarrow$$

$$x=-\frac{3}{2}y+4.$$

Ἐὰν τώρα δώσωμεν εἰς τὸ y μίαν τυχοῦσαν τιμήν, π.χ. $y=2$, τότε ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x θὰ εἶναι $x=1$ καὶ τὸ ζεῦγος (1, 2) εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἄρα λοιπὸν ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη (x, y), τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν. Τὰ ζεύγη αὐτὰ τὰ εὑρίσκομεν δίδοντες εἰς τὸ y τὰς τιμὰς τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μὲ κάθε τιμὴν y_0 τοῦ y συνδυάζομεν τὴν τιμὴν $x_0=-\frac{3}{2}y_0+4$ τοῦ x.

Σημείωσις. Ἂν $\alpha=\beta=0$ καὶ $\gamma \neq 0$, ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος, ἐνῷ ἂν $\alpha=\beta=\gamma=0$, ἡ (1) γίνεται ταυτότης, δηλ. ἐπαληθεύεται δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν x καὶ y.

Π.χ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(x,y) \in \Pi \times \Pi \ni (x,y)$; $3x+4y-12=0$

Ἐὰν $x=1$ τότε $y=\frac{9}{4}$, ἄρα $(x, y)=\left(1, \frac{9}{4}\right)$.

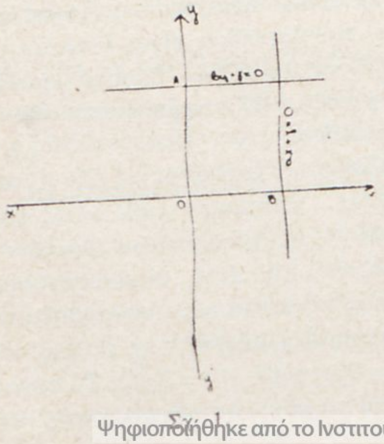
Ἐὰν $x=2$ τότε $y=\frac{3}{2}$, ἄρα $(x, y)=\left(2, \frac{3}{2}\right)$ κ. ο. κ.

§ **46. *Γραφικὴ παράστασις τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως.*** Εἶναι γνωστὸν ὅτι κάθε διατεταγμένον ζεῦγος $(x, y) \in \Pi$ παριστάνει ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς δύο ὀρθογωνίους ἄξονας ox, oy. Ἀντιστρόφως: Κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῇ μὲ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν. Ἔχομεν λοιπὸν μίαν ἀντιστοιχίαν ἕνα πρὸς ἕνα μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου ΠxΠ καὶ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου.

Κάθε λύσις (x, y) μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος. Ἑπομένως κάθε λύσις της θὰ ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα σημεῖον M (x, y) τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σύνολον τῶν λύσεών της θὰ ἀπεικονίζεται ἐπὶ ἑνὸς σημειοσυνόλου τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σημειοσύνολον αὐτὸ εἶναι διὰ κάθε πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ μία εὐθεῖα γραμμή. Πράγματι. α) Ἔστω $\alpha=0$ καὶ $\beta \neq 0$. Τότε ἔχομεν $\alpha x+\beta y+\gamma=0 \Longrightarrow \beta y+\gamma=0$ (1). Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς (1) ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν (x, y), διὰ τὰ ὁποῖα $\left(x \in \Pi,\ y = -\frac{\gamma}{\beta}\right)$. (σχ. 1). Ἐπειδὴ ὅμως τὰ ζεύγη αὐτὰ ἔχουν ὡς πρῶτον στοιχεῖον $x \in \Pi$ καὶ ὡς δεύτερον στοιχεῖον πάντοτε τὸν αὐτὸν σταθερὸν ἀριθμὸν $-\frac{\gamma}{\beta}$, τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα τὰ ἔχουν ὡς συντεταγμένας των, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα οx, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα οy εἰς ἓν σημεῖον Α μὲ συντεταγμένας $\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right)$. Ἀντιστρόφως: Κάθε σημεῖον αὐτῆς τῆς εὐθείας ἔχει συντεταγμένας $\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right)$. Ἄρα τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\beta x+\gamma=0$ ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς εὐθείας αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα αὐτή, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα εἶναι εἰκόνες τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\beta y+\gamma=0$, λέγεται γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 1. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $3y-5=0$(α). Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως (α) εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα οx καὶ τέμνει τὸν ἄξονα οy εἰς τὸ σημεῖον $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ (σχ. 2).

β) Ἔστω $\beta=0.\alpha\neq0$, τότε ἔχομεν $\alpha x+\beta y+\gamma=0 \Longleftrightarrow \alpha x+\gamma=0$ (2). Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς (2) ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν (x,y), διὰ τὰ ὁποῖα $\left(x = -\frac{\gamma}{\alpha},\ y = \in \Pi\right)$. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ ζεύγη αὐτὰ ἔχουν ὡς πρῶτον στοιχεῖον τὸν αὐτὸν σταθερὸν ἀριθμὸν $-\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ ὡς δεύτερον στοιχεῖον $y \in \Pi$, τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. τὰ ὁποῖα θὰ τὰ ἔχουν εἰς συντεταγμένας, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα οy καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα οx εἰς τὸ σημεῖον Β μὲ συντεταγμένας $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$. (Σχ. 1).



Σχ. 1

Ἄρα τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x+\gamma=0$ ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς εὐθείας αὐτῆς.

Παράδειγμα 2. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $4x-7=0$ (β). Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς εὐθείας (β) (σχ. 2) εἶναι ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα οy καὶ τέμνει τὸν ἄξονα οx εἰς τὸ σημεῖον B $\left(\frac{7}{4}, 0\right)$.

γ) Ἐὰν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, τότε ἔχομεν τὰς ἰσοδυνάμας.

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0 \Longleftrightarrow \alpha x=-\beta y-\gamma \Longleftrightarrow x=-\frac{\beta}{\alpha}y-\frac{\gamma}{\alpha} \text{ καὶ}$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0 \Longleftrightarrow \beta y=-\alpha x-\gamma \Longleftrightarrow y=-\frac{\alpha}{\beta}x-\frac{\gamma}{\beta}.$$

Οὕτω τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ εἶναι

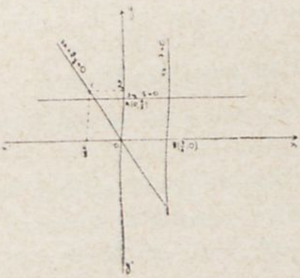
$$\left\{(x,y)\in \Pi x\Pi, \alpha x+\beta y+\gamma=0\right\}=\left\{(x,y)\in \Pi x\Pi,\ x=-\frac{\beta}{\alpha}y-\frac{\gamma}{\alpha}\right\} \text{ ἢ}$$

$$\left\{(x,y)\in \Pi x\Pi, \alpha x+\beta y+\gamma=0\right\}=\left\{(x,y)\in \Pi x\Pi,\ y=-\frac{\alpha}{\beta}x-\frac{\gamma}{\beta}\right\}.$$

Παράδειγμα 3. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $3x+2y=0$ (γ)

Ἔχομεν $3x+2y=0 \Longleftrightarrow$ $3x=-2y \Longleftrightarrow x=-\frac{3y}{3}$.

Ἐὰν $y=0$, εὑρίσκομεν $x=0$. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O(0,0). Διὰ νὰ ὁρισθῇ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀκόμη σημεῖον της.



Σχ. 2

Δίδομεν εἰς τὸ y μίαν τυχοῦσαν τιμήν, ἔστω $y=2$ ὅτε $x=-\frac{4}{3}$.

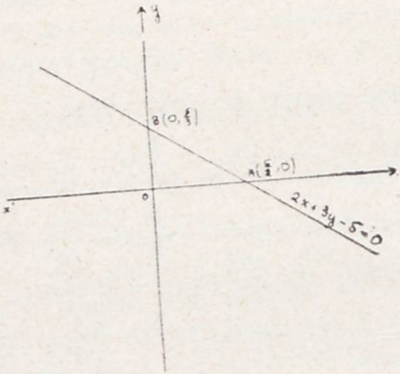
Ἕνα ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας ἐκτὸς τοῦ O(0,0) εἶναι τὸ $\Gamma\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΓ (Σχ. 2) εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως (γ).

Παράδειγμα 4. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $2x+3y-5=0$ (δ).

Ἐὰν $y=0$, τότε $2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ (Σχ. 3)

Ἐὰν $x=0$, τότε $3y-5=0 \Longrightarrow y=\frac{5}{3}$.

Ἄρα ἡ εὐθεῖα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου $B\left(0, \frac{5}{3}\right)$. Ἡ AB εἶναι λοιπὸν ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως (δ).



Σχ. 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

89) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ζεῦγος $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ εἶναι λύσις τῶν ἐξισώσεων $4x-3y=2{,}5$ καὶ $3x+7y=\frac{4}{3}$.

90) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ζεῦγος $(3\alpha-2, 4-6\alpha)$ ἔνθα $\alpha \in \Pi$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $2x-y+4=0$

91) Ἐάν, ὡς μονάδα μήκους ἐπὶ τῶν ἀξόνων, λάβωμεν τὸ 1 cm, νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ ἐξισώσεις

α) $3x-2=0$ β) $2x-3y=0$ γ) $4y+9=0$ δ) $x-y=0$

ε) $2x-4y+7=0$ στ) $3x+2y-1=0$ ζ) $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+1=0$ η) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+2=0$

92) Χρησιμοποιοῦντες τετραγωνισμένον χάρτην, νὰ εὑρεθοῦν 5 λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x-2y=3$.

93) Χρησιμοποιοῦντες τετραγωνισμένον χάρτην νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ ἐξισώσεις $y=x\sqrt{2}+1$ καὶ $y=-x\sqrt{3}+1$.

94) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ζεῦγος $(-3, 2)$ εἶναι μία λύσις τῶν ἐξισώσεων $-3x+2y=13$, $2x+5y=4$.

95) Νὰ εὑρεθοῦν πέντε ζεύγη (x,y), λύσεις τῆς ἐξισώσεως $2x+3y-1=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ **47**. Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x, y π. χ. τὰς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (1) α, β, $\gamma \in \Pi$ καὶ $\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=o$, (2) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \in \Pi$ καὶ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς (1) καὶ (2), τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν σύστημα δύο ἐξισώσεων. Δηλαδὴ

$$\exists;\ (x,\ y) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\gamma=0 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 \end{array}\right\} (\mathrm{I})$$

Ἐὰν καλέσωμεν E_1 τὸ σύνολον τῶν λυσεων τῆς (1), δηλαδὴ $E_1=\{(x, y) \in \Pi x \Pi / \alpha x+\beta y+\gamma=0\}$ καὶ E_2 τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς (2), δηλ. $=\{(x, y) \in \Pi x \Pi / \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0\}$, τότε, ἐὰν τὸ σύνολον $\Sigma=E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, κάθε ζεῦγος τοῦ συνόλου $E_1 \cap E_2$ λέγεται λύσις τοῦ συστήματος (I). Δηλ. λύσις ἑνὸς συστήματος λέγεται κάθε ζεῦγος $(\alpha . \beta) \in \Pi x \Pi$, τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

§ **43**. Δύο συστήματα λέγονται ***ἰσοδύναμα***, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν, τὰς ὁποίας περιέχουν.

§ **49**. ***Παράδειγμα***. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\ ;\ (x, y) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{l} 5x-2y=6\ (1) \\ 8x+3y=53\ (2) \end{array}\right\} (\mathrm{A})$$

Αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας θὰ εὕρωμεν διὰ τὸ $x \in \Pi$ καὶ $y \in \Pi$, πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὰς δύο ἐξισώσεις. Αἱ τιμαὶ x=4 καὶ y=7 εἶναι λύσις τοῦ συστήματος, διότι μετατρέπουν τὰς (1) καὶ (2) εἰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας, δηλ. $5 . 4-2 . 7=6$ καὶ $8 . 4+3 . 7=53$.

Τὸ σύστημα : $\exists\ ;\ (xy) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{l} 2x+3y=29 \\ 3x-2y-2 \end{array}\right\} (\mathrm{B})$

εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ (A), διότι ἔχει τὴν αὐτήν λύσιν x=4, y=7. Πράγματι : $2 . 4+3 . 7=29$ καὶ $3 . 4-2 . 7=-2$.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ἀντικαθιστῶμεν δι' ἑνός ἄλλου συστήματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθέν, καὶ τοῦ ὁποίου μία τῶν ἐξισώσεών του νὰ περιέχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων. Τότε λέγομεν ὅτι ἔγινε ἀπαλοιφὴ τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.

Μέθοδοι λύσεως πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους.

§ **50**. α) ***Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\ ;\ (xy) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} 2x - 3y = 23 \ (1) \\ 5x + 2y = 29 \ (2) \end{matrix}$$

Ἡ πρόσθεσις κατὰ μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἀπαλείφει τὸν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων, ἐὰν οἱ συντελεσταί του εἶς τὰς δύο ἐξισώσεις εἶναι ἀντίθετοι. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2 τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἐπὶ 3 τὰ δύο μέλη τῆς (2) καὶ οὕτω ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας

$$\begin{cases} 2x - 3y = 23 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 46 \\ 15x + 6y = 87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 46 \\ 19x = 133 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 46 \\ x = \dfrac{133}{16} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4.7 - 6y = 46 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 7 \end{cases}$$

Τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) ἔχει μίαν μόνην λύσιν τὴν (7,—3).

Ἡ μέθοδος αὕτη λύσεως ἑνὸς συστήματος λέγεται μέθοδος τοῦ ***γραμμικοῦ συνδυασμοῦ***, διότι γενικῶς εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἡ ἐξίσωσις $k(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) + \lambda(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) = 0$, ὅπου k, λ σταθεροὶ ἀριθμοί, λέγεται γραμμικὸς συνδυασμός τῶν ἐξισώσεων $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ καὶ $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\ ;\ (x,y) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} 3x + 5y = 1 \\ 2x - 7y = -3 \end{matrix}$$

᾿Απαλείφομεν τὸν x καὶ ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας

$$\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 10y = 22 \\ -6x + 21y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 10y = 22 \\ 21y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 10y = 22 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$ Τὸ σύστημα ἔχει λοιπὸν τὴν λύσιν $(x = 2,\ y = 1)$.

§ **52.** ***Παράδειγμα 2ον.*** Ἔστωτὸ σύστημα :

$$\exists\ ;\ (x,\ y) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} 5x + 2y = 77 \\ 3x - 4y = 15 \end{matrix}$$

᾿Απαλείφομεν τὸν y καὶ ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας

$$\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}5x+2y=79\\3x-4y=15\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}20x+8y=316\\6x-8y=-30\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}20x+8y=316\\26y=-286\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}20x+8y=316\\x=11\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}20.11+8y=316\\x=11\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=12\\x=11\end{array}\right.$$

Τὸ σύστημα ἔχει λοιπόν τὴν λύσιν $(x=11,\ y=12)$.

Σημείωσις. Διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ y ἦτο δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.ΚΠ τῶν συντελεστῶν του (τοῦ 2 καὶ 4) καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κάθε μίαν ἐξίσωσιν ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ΕΚΠ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ. Εἰς τὸ δοθὲν σύστημα τὸ ΕΚΠ τῶν συντελεστῶν τοῦ y εἶναι 4, Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ 2 καὶ τήν δευτέραν ἐπὶ 1 καὶ εὑρίσκομεν

$$\left\{\begin{array}{l}10x+4y=158\\3x-4y=-15\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}10x+4y=158\\13x=143\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}10x+4y=158\\x=11\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=12\\x=11\end{array}\right..$$

§ **53**. β) ***Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\ ;\ (x,y)\in \Pi x\Pi \quad \bigwedge \quad \begin{array}{l}5x+2y=36\ (1)\\2x+3y=43\ (2)\end{array}$$

Λύομεν τὴν μίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων, τοὺς ὁποίους περιέχει, π. χ. τὴν (1) ὡς πρὸς τόν y καὶ ἔχομεν $5x+2y=$ $=36 \Longleftrightarrow y=\frac{36}{2}-\frac{5}{2}x$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ y μὲ τὴν ἔκφρασίν του ὡς συνάρτησιν τοῦ x καὶ ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας

$$\left\{\begin{array}{l}5x+2y=36\\2x+3y=43\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=\frac{36}{2}-\frac{5}{2}x\\[2ex] 2x+3\left(\frac{36}{2}-\frac{5}{2}x\right)=43\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=18-\frac{5}{2}x\\[2ex] -\frac{11x}{2}+54=43\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=18-\frac{5}{2}x\\[2ex] -\frac{11x}{2}=-11\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y=18-\frac{5}{2}x \\ x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=13 \\ x=2 \end{cases}$$

Τὸ σύστημα ἔχει λοιπὸν τὴν λύσιν ($x=2$, $y=13$).

§ **54. *Παράδειγμα.*** Ἔστω τὸ σύστημα $\exists\,;\,(xy) \in ΠΧΠ \wedge$

$$2x+3y=4$$
$$4x-y=2x$$

Λύομεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x καὶ ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x-y=22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=4 \\ -y=22-4x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=4 \\ y=4x-22 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3(4x-22)=4 \\ y=4x-22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 14x=70 \\ y=4x-22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4x-22 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4.5-22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

Τὸ σύστημα ἔχει λοιπὸν τὴν λύσιν ($x=5$, $y=-2$).

§ **55. Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\,;\,(xy)\ \text{ΕΠΧΠ} \wedge \begin{matrix} 4x+2y=8 \\ 3x-y=1 \end{matrix}$$

Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας $\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8-2y}{4} \\ \\ x=\dfrac{1+y}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8-2y}{4} \\ \\ \dfrac{8-2y}{4}=\dfrac{1+y}{3} \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τῆς τρίτης μορφῆς τοῦ συστήματος ἔχει ἕνα μόνον ἄγνωστον, τὸν y, ὅτε $\dfrac{8-2y}{4}=\dfrac{1+y}{3} \Longleftrightarrow 3(8-2y)=$ $=4(1+y) \Longleftrightarrow 24-6\mathbf{y}=4+4y \Longleftrightarrow -10y=-20 \Longleftrightarrow y=2$. Δηλ. τὸ σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\begin{cases} x=\dfrac{8-2y}{4} \\ y=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8-2.2}{4} \\ y=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Τὸ σύστημα ἔχει λοιπὸν τὴν λύσιν $(x=1, y=2)$.

§ **56.** Εἰς ὅλα τὰ προηγούμενα παραδείγματα εὕρομεν λύσεις τῶν συστημάτων :

α) Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων εἶναι διάφοροι μεταξύ των. Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι : ***Ἂν οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων εἶναι διάφοροι μεταξύ των, τὸ σύστημα ἔχει λύσιν.***

β) Ἔστω τὸ σύστημα $\exists\, ; (x,y) \in \Pi x \Pi \wedge \begin{matrix} 2x+5y=25 \\ 6x+15y=70 \end{matrix}$

Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας $\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 6x+15y=70 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x=\dfrac{25-5y}{2} \\ x=\dfrac{70-15y}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{25-5y}{2} \\ \dfrac{25-5y}{2}=\dfrac{70-15y}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{25-5y}{2} \\ 0.y=5 \end{cases}$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου συστήματος εἶναι ἀδύνατος. Ἄρα, τὸ σύστημα δὲν ἔχει λύσιν. Δηλ. δὲν ὑπάρχει ζεῦγος τιμῶν (x,y), τὸ ὁποῖον νὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις. Λέγομεν τότε ὅτι τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον***. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι $\dfrac{2}{6}=\dfrac{5}{15}\neq\dfrac{25}{70}$. Ἐκ τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι ἐὰν ***οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι ἴσοι καὶ διάφοροι τοῦ λόγου τῶν γνωστῶν ὅρων, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.***

Ἔστω τὸ σύστημα $\exists\, ; (x,y) \in \Pi x \Pi \wedge \begin{matrix} 2x+5y=25 \\ 6x+15y=75 \end{matrix}$

Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας $\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 6x+15y=75 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25-5y}{2} \\ x = \dfrac{75-15y}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25-5y}{2} \\ \dfrac{25-5y}{2} = \dfrac{75-15y}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25-5y}{2} \\ 0y = 0. \end{cases}$$

'Αλλ' ἡ τελευταία ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου συστήματος εἶναι ἀόριστος. Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει ἀπειρίαν λύσεων. Δηλ. ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη τιμῶν (x,y), τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς δύο ἐξισώσεις. Λέγομεν τότε ὅτι τὸ σύστημα εἶναι ***ἀόριστον***. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι $\dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{25}{75}$. Ἐκ τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι: ***Ἄν οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν σταθερῶν ὅρων εἶναι ἴσοι, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.***

'Ανακεφαλαίωσις τῶν προηγουμένων

Λύσεις τοῦ συστήματος $\begin{matrix} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \end{matrix}$ $(x,y) \in \Pi x \Pi$ καὶ α, β, γ, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ σταθεροί

1) Ἄν $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} \neq \dfrac{\beta}{\beta_1}$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μοναδικὴν λύσιν,

τὴν $x = \dfrac{\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$ $\quad y = \dfrac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$

2) Ἄν $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} \neq \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον

3) Ἄν $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον

Ἐφαρμογαί. Χωρὶς νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα, νὰ εὑρεθῇ, ποῖον ἔχει μίαν λύσιν, ποῖον εἶναι ἀόριστον καὶ ποῖον εἶναι ἀδύνατον,

A) $\begin{matrix} 8x + 15y = 31 \\ 7x - 10y = 4 \end{matrix}$ $\quad$ B) $\begin{matrix} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{matrix}$ $\quad$ Γ) $\begin{matrix} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 10 \end{matrix}$

'Εξετάζομεν τοὺς λόγους τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων.

α) Διὰ τὸ σύστημα (Α) ἔχομεν $\frac{8}{7} \neq \frac{15}{-10} \neq \frac{31}{4}$. Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει μίαν μοναδικὴν λύσιν.

β) Διὰ τὸ σύστημα (Β) ἔχομεν $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{7}{14}$. Ἄρα τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

γ) Διὰ τὸ σύστημα (Γ) ἔχομεν $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{7}{10}$. Ἄρα τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

96) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα : $(x,y) \in \Pi \times \Pi$ $\exists$; (xy) $\wedge$

α) $3x - y = 4$, $5x - 2y = 5$ β) $6x - 5y = 10$, $8x + 3y = 52$ γ) $2x + 3 = 6y$, $5y - 2 = 3x$ δ) $7x + 3y = 1$, $x - 3y = 7$

ε) $2x + 3y = 1$, $x - 7y = 2$ στ) $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 10$, $x - y = 29$ ζ) $\frac{11x}{2} - \frac{y}{3} = 6$, $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 11$ η) $x - \frac{5y}{4} = 20$, $\frac{x}{4} + y = 11$

97) Ὁμοίως τὰ συστήματα :

α) $3x + \frac{7y}{3} = 29$, $\frac{7x}{5} + 3y = 27$ β) $\frac{x}{4} - \frac{y}{15} = 1$, $2x - \frac{2y}{3} = 2$ γ) $2x - 3y = -49$, $-(x-8) - 64 = -5y$

δ) $3(2x-5) + 2y = -41$, $\frac{x-3y}{9} = 5 + y$ ε) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 10$, $\frac{5x}{7} + \frac{2y}{9} = \frac{3x}{14} - \frac{y}{9}$

στ) $3(y-5) + 2(x-3) = 0$, $7(x-4) - 3(x+y-1) = 14$ ζ) $\frac{x+y}{2} = \frac{7x-5y}{6} + \frac{x+y}{4}$, $\frac{x-6y}{2} = \frac{x-2y}{7} + 4$

98) Ὁμοίως τὰ συστήματα :

α) $\frac{5x-6y}{13} - 8 = 4y - 3x$, $\frac{9}{2} + \frac{x-y}{6} = 2y + \frac{3x-4y}{7}$ β) $\frac{x+3}{y-5} = 5$, $\frac{x-1}{y+3} = \frac{1}{9}$ γ) $\frac{2x-y}{x-y} = \frac{8}{5}$, $\frac{2x+y}{x+1} = 4$

δ) $\frac{x-3}{14} = \frac{2y-1}{10}$

$3(x-3) - 8\left(y - \frac{1}{2}\right) = 1$

ε) $\frac{x+y}{5} - (x-y) = \frac{26}{5}$

$\frac{3x}{2} - 3(x+y) = 14\left(1 - \frac{x}{4}\right) + 4x - 1$

στ) $x - y = 45000$

$\frac{60x}{9000} = 3 - \frac{112y}{7200}$

99) Ὁμοίως τὰ συστήματα.

α) $\frac{5(3x-2)}{3} + \frac{7(5y-1)}{5} = \frac{214}{15}$

$2{,}5x + 3{,}5y = 9{,}5$

β) $\frac{3(x-1)}{7} + \frac{2y-x+16}{21} - \frac{1}{3} = -\frac{y}{7}$

$\frac{2x}{3} = \frac{5y-7}{12} + \frac{3}{y}$

γ) $\frac{y-1}{3} + \frac{x}{2} - \frac{2y}{30} = \frac{y-x}{15} + \frac{5x+44}{30}$

$\frac{4x-3y-7}{5} = \frac{3x}{10} - \frac{2y+41}{15}$

δ) $\frac{8}{x-2y+3} = \frac{3}{4x+5y+6}$

$\frac{3}{6x+5y-4} = \frac{4}{3x+2y+1}$

100) Ὁμοίως τὰ συστήματα:

α) $(x+5)(y+7) = (x+1)(y-2) + 12$

$2x + 10 = 3y + 1$

β) $\frac{5x-13}{2} - \frac{8y-x}{5} = \frac{7x+6}{11} + y - 16$

$10y - 15 = 3(3x+4)$

γ) $\frac{4x+7}{5} + 5y - 17 = x - \frac{3x+5y}{17}$

$\frac{8y+5}{16} - \frac{5x-7}{3} = \frac{x+1}{6} - \frac{22-6y}{3}$

δ) $\frac{2(x-3)}{7} - \frac{3(y-x)}{2} = \frac{7(x+y)}{6}$

$\frac{x-y}{4} + \frac{1-x}{3} = \frac{5(x-1)}{3} - \frac{3(2-y)}{2}$

ε) $\frac{y+2}{2} + \frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{2}$

$\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{5}$

στ) $\frac{x+5}{2} = 2x - \frac{x+y}{3}$

$\frac{3x+2y}{2} - y - 2 = \frac{x+4y}{6}$

ζ) $\frac{x-2}{5} - \frac{10-x}{3} = \frac{y-10}{4}$

$\frac{2y+4}{3} - \frac{2x+y}{8} = \frac{x+13}{4}$

$3x = 2y - 4 - \frac{3x-2y}{3}$

η) $2x - 4 = \frac{x+4}{7} - \frac{4-y-1}{4}$

$3x = 2y - 4 - \frac{3x-2y}{3}$

101) Ὁμοίως τὰ συστήματα:

α) $\frac{4}{22x+27y} = \frac{7}{23x-17}$

$\frac{5}{17x-13y} = \frac{4}{14x-9y}$

β) $(x+14)(y+2) - (x-2)(y+3) = 200$

$9x + 10 = 8y + 12$

γ) $(6x-7)(4y-11)-(8x-14)(3y-4)+95=0$

$(9x+2)(6y+5)-(3x+1)(18y+19)+39=0$

δ) $(2x-3)^2-4x+3y-1=(5-2x)^2$

$(2-3y)^2+10y+7(x+1)=(3y+1)^2$

ε) $(3x+4)^2+(3y+8)^2-18xy=9(x-y)^2-40$

$(x+y)^2-(x-2)^2-2=(y+4)^2+2x(5+y)$

στ) $(5x-4)^2-(x+2y)^2=(2x+y)^2+24x(x-1)-5y(y+2)$

$(3x+1)^2-(x+y)^2=(x-y)^2+7x(x+1)-2y^2$

102) Νὰ ἐξετασθῇ, ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι συστημάτων εἶναι ἀόριστα καὶ ποῖα εἶναι ἀδύνατα :

α) $3x=3y+7$ β) $7x-5=6y+3$ γ) $3x+2y=4$ δ) $\dfrac{x-3}{y+2}=\dfrac{2}{3}$

$y-x=0$ $y+7x=7y+12$ $\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{y+2}{y+1}$ $\dfrac{x+3}{y-2}=-\dfrac{2}{3}$

ε) $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{4y}{10}=\dfrac{x-y}{5}$ στ) $\dfrac{1}{5x-3y+7}=\dfrac{3}{7x+5y-9}$

$\dfrac{10(2x+3)}{11}=60+2\left(y-\dfrac{3x-5}{8}\right)$ $\dfrac{13}{3x+4y-33}=\dfrac{2}{4x-5y+3}$

Γραφικὴ λύσις πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους.

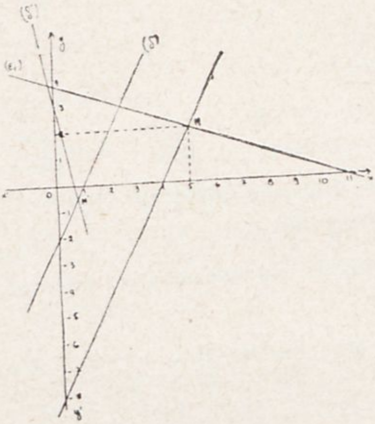
§ **57**. Γνωρίζομεν (§ 46) ὅτι κάθε ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους παριστάνει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαν γραμμήν. Ἄρα αἱ ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους θὰ παριστάνουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθείας γραμμάς. Αἱ λύσεις ἑκάστης ἐξισώσεως θὰ εἶναι τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι συντεταγμέναι τῶν διαφόρων σημείων τῆς εὐθείας. Ἡ κοινὴ λύσις τῶν δύο ἐξισώσεων θὰ δίδεται ἀπὸ τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν γραφικῶς τὰς ἐξισώσεις. Ἀντιστρόφως, ἕνα κοινὸν σημεῖον Μ (x,y) τῶν δύο εὐθειῶν θὰ ἔχῃ συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι μία κοινὴ λύσις τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ ἑπομένως μία λύσις τοῦ συστήματος.

§ **58.** ***Παράδειγμα 1ον.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\,;\,(xy)\in\Pi\times\Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} x+3y=11 \\ 2x-y=8 \end{matrix}$$

Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν γραφικῶς τὰς δύο ἐξισώσεις, εἶναι αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) (Σχ. 4), αἱ ὁποῖαι τέμνονται, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα εἰς τὸ σημεῖον Μ (5,2). Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν (5,2). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων δὲν εἶναι ἀνάλογοι, δηλαδὴ

$$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{-1}.$$



Σχ. 4:

§ **59.** ***Παράδειγμα 2ον.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\,;\ (xy) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} 5x - 3y = 7 \\ 7x + 2y = 5 \end{matrix}$$

Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν γραφικῶς τὰς δύο ἐξισώσεις, εἶναι αἱ (δ) καὶ (δ΄) (Σχ. 4), αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ΄ μὲ συντεταγμένας $x = 0,9$ καὶ $y = -0,8$. Ἂν λυθῇ τὸ σύστημα μὲ ἀριθμητικὴν μέθοδον, θὰ εὕρωμεν $x = \frac{29}{31} = 0,938$ .... καὶ $y = \frac{-24}{31} = -0,774$..... Ἡ γραφικὴ μέθοδος δὲν μᾶς δίδει λύσεις παρὰ μόνον κατὰ προσέγγισιν, διότι ἡ σχεδίασις παρουσιάζει ἀτελείας καὶ διότι γίνονται σφάλματα κατὰ τὴν μέτρησιν ἢ τὴν ἐκτίμησιν τῶν μηκῶν ἐπὶ τοῦ σχεδίου.

§ **60.** ***Παράδειγμα 3ον.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\,;\ (xy) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} 3x - 6y = 10,5 \\ 2x - 4y = 7 \end{matrix}$$

Ἐὰν χαράξωμεν τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, παρατηροῦμεν ὅτι αὐταὶ συμπίπτουν εἰς μίαν εὐθεῖαν (Σχ. 5). Αἱ συντεταγμέναι x καὶ y κάθε σημείου

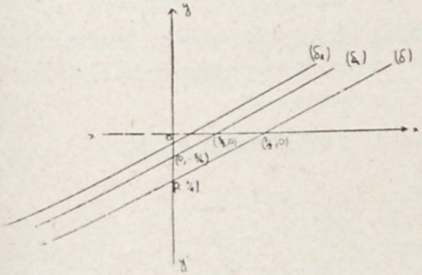
Μ τῆς (δ) ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα. Ἄρα τοῦτο ἔχει ἀπείρους λύσεις (ἀόριστον). Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $\frac{2}{3}=$

$$=\frac{4}{6}=\frac{7}{10,5}.$$

§ **61.** ***Παράδειγμα 4ον.*** Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\ ;\ (x,y) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} 8x-16y=6 \\ 3x-6y=5 \end{matrix}$$

Χαράσσομεν τὰς δύο εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) (Σχ. 5), αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰς δύο ἐξισώσεις, μὲ τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν ἀκρίβειαν. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι μὲ στενὴν σημασίαν. Ἄρα $\{(x,y) \in \Pi x \Pi,\ 3x-6y=5,\ 8x-16y=6\} = \varnothing$ δηλ. τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις



Σχ. 5.

$$\frac{3}{8}=\frac{-6}{-16} \neq \frac{5}{6} \text{ (Σύστημα ἀδύνατον).}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

103) Νὰ λυθοῦν γραφικῶς τὰ συστήματα $(x,y) \in \Pi x \Pi\ \exists\ ;\ (xy)$

α) $x+y=28$, $3x-11y=8y-48$ β) $2x-y=2$, $x+y=19$ γ) $4x-3y=11$, $12x-5y=11$ δ) $3x-5y=7$, $9x-15y=21$

ε) $x-2y=3$, $2x-4y=6$ στ) $2(x+y)=5$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$ ζ) $\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{2}=9$, $x-7y=0$ η) $\frac{1}{x-2}-\frac{3}{y-1}=\frac{3}{4}$, $\frac{3}{x-2}-\frac{5}{y-1}=-\frac{29}{12}$

104) Νὰ δειχθῇ δι' ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ὅτι τὰ κάτωθι συστήματα ἔχουν μίαν μοναδικὴν λύσιν καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ γραφικῶς τὸ ἀποτέλεσμα.

α) $12x+11y=6$, $3y-2x=28$ β) $5y-3(x-1)=68$, $x+3y=1$ γ) $y-4(x-7)=67-3x$, $2x+5y=69$

δ) $\frac{x-y}{3}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{10-2y}{3}\right)=3$ ε) $\frac{x-4}{3}-\frac{3y+4}{10}=x-y$

$\frac{x-5y}{5}+\frac{x+2}{2}=x-4$ $\frac{2x-5}{5}-\frac{2y-4}{4}=x-12$

Συστήματα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους

§ **62.** Κάθε σύστημα πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους λαμβάνει πάντοτε τὴν μορφὴν

$$\exists\ ;\ (x, y, z) \in \Pi x \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \left.\begin{aligned} \alpha x+\beta y+\gamma z &= \delta \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z &= \delta_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z &= \delta_2 \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα τῆς μορφῆς αὐτῆς, χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἰδίας μεθόδους, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ νὰ λύσωμεν καὶ τὰ συστήματα μὲ δύο ἀγνώστους.

§ **63.** ***Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.*** (Gauss).

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\ ;\ (x, y, \omega) \in \Pi x \Pi x \Pi \qquad \begin{aligned} 4y-5y+6\omega &= 9 \quad (\alpha) \\ 8x-7y-3\omega &= 6 \quad (\beta) \\ 7x-8y+9\omega &= 15 \quad (\gamma) \end{aligned}$$

Διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ $1(\alpha)+2(\beta)$ ἀπαλείφομεν τὸν ω μεταξὺ τῶν (α) καὶ (β)

$$\begin{aligned} 1(\alpha) &: 4x-5y+6\omega = 9 \\ 2(\beta) &: 16x-14y+6\omega = 12 \\ \hline 1(\alpha)+2(\beta) &: 20x-19y = 21. \end{aligned}$$

Διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ $3(\beta)+1(\gamma)$ ἀπαλείφομεν τὸν ω μεταξὺ τῶν (β) καὶ (γ)

$$\begin{aligned} 3(\beta) &: 24x-21y-9\omega = 18 \\ 1(\gamma) &: 7x-8y+9\omega = 15 \\ \hline 3(\beta)+1(\gamma) &: 31x-29y = 33 \end{aligned}$$

Ἔχομεν τότε τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} 4x-5y+6\omega &= 9 \quad (\delta) \\ 20x-19y &= 21 \quad (\varepsilon) \\ 31x-29y &= 33 \quad (\zeta). \end{aligned}$$

Διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ $29(\varepsilon)+(-9)(\zeta)$ ἀπαλείφομεν τὸν y μεταξὺ τῶν (ε) καὶ (ζ)

$$\begin{aligned} 29(\varepsilon) &: \quad 580x-551y = 609 \\ -19(\zeta) &: \underline{-589x+551y = -627} \\ 29(\varepsilon)-19(\zeta) &: -9x = -18 \Longrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

καὶ ἔχομεν τότε τὸ ἰσοδύναμον σύστημα.

$$\begin{cases} 4x-5y+6\omega=9 \\ 20x-19y=21 \\ x=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x-5y+6\omega=9 \\ 40-19y=21 \\ x=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x-5y+6\omega=9 \\ y=1 \\ x=2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4.1-5.2+6\omega=9 \\ y=1 \\ x=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega=1 \\ y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Τό σύστημα (I) ἔχει λοιπὸν τὴν μοναδικὴν λύσιν $(x, y, \omega) = (2, 1, 1)$, ἢ συμβολικῶς

$$\left\{ (x, y, \omega) \in \Pi x \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} 4x-5y+6\omega=9 \\ 8x-7y-3\omega=6 \\ 7x-8y+9\omega=15 \end{matrix} \right\} = \{ (2, 1, 1) \}$$

§ **64.** ***Μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως.***

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists; (x, y, y) \in \Pi x \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} x+y+z=1 & (1) \\ 2x-y+z=5 & (2) \\ 3x+2y+z=24 & (3) \end{matrix}$$

Λύομεν μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις, ἔστω τὴν (1), ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων της. Π.χ. τὸν z : $x+y+z=1 \Longrightarrow z=1-x-y$· Ἐκφράζομεν δηλ. τὸν z ὡς συνάρτησιν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις (2) καὶ (3) τὸ z διὰ τῆς τιμῆς του καὶ εὑρίσκομεν τάς ἰσοδυναμίας.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=1-x-y \\ 2x-y+1-x-y=5 \\ 3x+2y+1-x-y=24 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=1-x-y \\ x-2y=4 \\ 2x+y=23 \end{cases}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν, λοιπόν, τὸ δοθὲν σύστημα πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ $\exists; (xy) \in \Pi x \Pi \quad \wedge \quad \begin{matrix} x-2y=4 \\ 2x+y=23 \end{matrix} \quad (A)$

Λύομεν τὸ σύστημα (A) κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ εὑρίσκομεν $x=5$ καὶ $y=\frac{1}{2}$. Ἄρα ἔχομεν

$$\begin{cases} z=1-x-y \\ y=\frac{1}{2} \\ x=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=1-5-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ x=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{9}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ x=5 \end{cases}$$

Τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει λοιπὸν τὴν μοναδικὴν λύσιν (x, y, z)=

$\left(5, \frac{1}{2}, \frac{-9}{2}\right)$ ἢ συμβολικῶς

$$\left\{ (x, y, z) \in \Pi \times \Pi \times \Pi \;\wedge\; \begin{matrix} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{matrix} \right\} = \left\{ \left(5, \frac{1}{2}, \frac{-9}{5} \right) \right\}$$

§ 65. **Γενικῶς κανών.** Ἡ μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ καὶ ἡ μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως ἐφαρμόζονται γενικῶς καὶ ὅταν ἕνα σύστημα ἔχει ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους.

Μὲ τὰς μεθόδους αὐτάς, διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα ν ἐξισώσεως μὲ ν ἀγνώστους, ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὴν ἑξῆς πορείαν.

Ἀπαλείφομεν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον μεταξὺ τῶν ν ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν ἕνα νέον σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους καὶ (ν-1) ἐξισώσεις μὲ (ν—1) ἀγνώστους.

Ἀπαλείφομεν κατόπιν ἕνα δεύτερον ἄγνωστον μεταξὺ τῶν ν—1 ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν ἕνα σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους, μίαν ἄλλην ἐξίσωσιν μὲ (ν—1) ἀγνώστους καὶ (ν—2) ἐξισώσεις μὲ (ν-2) ἀγνώστους.

Συνεχίζομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἕνα σύστημα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ

1 ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους
1 » » ν—1 »
1 » » ν—2 »
. . . .
. . . .
2 ἐξισώσεις μὲ 2 ἀγνώστους.

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μὲ τοὺς δύο ἀγνώστους καὶ τὰς τιμὰς αὐτῶν θέτομεν εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν μὲ τοὺς τρεῖς ἀγνώστους. Εὑρίσκομεν τότε τὴν τιμὴν τοῦ τρίτου ἀγνώστου. Προχωροῦμεν κατόπιν εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν κ. ο.κ., μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὅλας τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

105) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα $\exists$; $(x,y,z) \in \Pi \times \Pi \times \Pi$ $\wedge$.

α) $\begin{cases} x+5y-3z = 36 \\ 2x+y+4z = 39 \\ 5x-y-z = 40 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 5x+2y-z = 10 \\ 2y+3z-2x = 36 \\ 3z-2y-x = 18 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+4y-z = 1 \\ 2x-3y+2z = 21 \\ 2y-x+z = 17 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 3x-y+z = 29 \\ x+3y+30z = 6 \\ x-y+z = 17 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 3x+5y-4z = 2 \\ 2x+3y+4z = 53 \\ 4x+7y-2z = 31 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} x-y+z = 5 \\ x+y+z = 25 \\ x+2z = 2y-10 \end{cases}$

106. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα $\exists$; $(x,y,z) \in \Pi \times \Pi \times \Pi$ $\wedge$.

α) $\begin{cases} 2x+3y-4z = 16 \\ 4x+9y-z = 58 \\ x+6y+2z = 34 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x-3y+2z = 10 \\ 5x+6y-7z = 4 \\ 10x-2y-3z = 7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x-10y+6z = 23 \\ 9x+5y+4z = 13 \\ 6x+3y-5z = 17 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 5x+3y+4y = 7 \\ 3x-9y+16z=5 \\ 4x+9y-8z=5 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} x-\dfrac{4y-3}{3}+\dfrac{z-2}{2} = 2 \\ \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-10}{10} \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{3y}{2}+3z=22 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} x+2y=(z-6) \\ z+2y-3x=-2 \\ 2z+x=2y+20 \end{cases}$

ζ) $\begin{cases} \dfrac{5x-1}{7}+2y=33+z \\ 3(x+2)+4z=\dfrac{x+20y-3z}{3} \\ x-z+\dfrac{2y+7}{5}=3x-7 \end{cases}$ η) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{5}+\dfrac{z}{4}=5\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4x-7}{3}-\dfrac{2(y-2)}{3}=z \\ \dfrac{3x}{7}+\dfrac{2y-1}{7}=1+5z \end{cases}$ θ) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ \dfrac{12x}{5}+4y+2z=264 \\ \dfrac{12x}{5}+2y+4z=276 \end{cases}$

ι) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+z}{3x-y+z}=\dfrac{5}{7} \\ \dfrac{x-3y+z}{y-2z-1}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+y+z}{2x-y+z+1}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ ια) $\begin{cases} \dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{2z}{9}=34 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{5z}{18}=46 \\ \dfrac{4x}{9}+\dfrac{5y}{12}+\dfrac{z}{2}=67 \end{cases}$ ιβ) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{2y}{7}=58 \\ \dfrac{5x}{4}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{3}=76 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{5}+\dfrac{7z}{40}=\dfrac{147}{5} \end{cases}$

Συστήματα λυόμενα μὲ τεχνάσματα

§ 66. Πολλάκις, διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα, ἐκτὸς ἀπὸ τὰς τρεῖς γενικὰς μεθόδους, τὰς ὁποίας ἀναφέραμεν προηγουμένως, χρησιμοποιοῦμεν εἰδικοὺς τρόπους λύσεως (τεχνάσματα). Οἱ τρόποι αὐτοὶ στηρίζονται ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων. Οἱ τρόποι αὐτοὶ δὲν εἶναι ὡρισμένοι καὶ φανεροὶ διὰ κάθε σύστημα, ἀλλὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν συνήθειαν καὶ τὴν ἐπιδεξιότητα τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν.

§ **67.** ***Χρῆσις βοηθητικοῦ ἀγνώστου.***

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\exists\ ;\ (x, y, \omega) \in \Pi X \Pi X \Pi \ \wedge \ \begin{matrix} \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{\omega}{18} & (1) \\ 3x + 2y + \omega = 34 & (2) \end{matrix}$$

Παριστάνομεν τὰ ἴσα κλάσματα τῆς (1) μὲ ἕνα βοηθητικὸν ἄγνωστον π.χ. τὸν k καὶ ἔχομεν $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{\omega}{18} = k$, ὁπότε $x = 6k$, $y = 3k$, $\omega = 18k$ (3).

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὰ x, y, ω μὲ τὰς τιμάς των ἐκ τῆς (3) καὶ ἔχομεν $3.6k + 2.3k + 18k = 34 \Longrightarrow 42k = 34 \Longrightarrow k = \dfrac{17}{21}$.

Τὴν τιμὴν τοῦ k θέτομεν εἰς τὰς (3) καὶ εὑρίσκομεν

$x = \dfrac{34}{7}$, $y = \dfrac{17}{7}$, $\omega = \dfrac{102}{7}$.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$x \in \Pi,\ y \in \Pi,\ \omega \in \Pi,\ \varphi \in \Pi$$

$2x + 3(y + \omega + \varphi) = 16$, $\wedge$ $2y + 3(\omega + \varphi + x) = 18$, $\wedge$ $2\omega + 3(\varphi + x + y) = 24$ $\wedge$ $2y + 3(x + y + \omega) = 30$.

Θέτομεν $x + y + \omega + \varphi = k$ (1), ὁπότε θὰ εἶναι $y + \omega + \varphi = k - x$, $\omega + \varphi + x = k - y$, $\varphi + x + y = k - \omega$, $x + y + \omega = k - \varphi$ καὶ τότε τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x + 3(k - x) = 16 \\ 2y + 3(k - y) = 18 \\ 2\omega + 3(k - \omega) = 24 \\ 2\varphi + 3(k - \varphi) = 30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x = 16 - 3k \\ -y = 18 - 3k \\ -\omega = 24 - 3k \\ -\varphi = 30 - 3k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 16 \\ y = 3k - 18 \\ \omega = 3k - 24 \\ \varphi = 3k - 30 \end{cases} \quad (2)$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x, y, ω, φ θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ εὑρίσκομεν $3k - 16 + 3k - 18 + 3k - 24 + 3k - 30 = k \Longleftrightarrow 12k - 88 = k \Longrightarrow$ $\Longrightarrow 11k = 88 \Longrightarrow k = \dfrac{88}{11} = 8$. Τὴν τιμὴν τοῦ k θέτομεν εἰς τὰς (2) καὶ εὑρίσκομεν $x = 8$, $y = 6$, $\omega = 0$, $\varphi = -6$.

§ 68. Ἀλλαγὴ τῶν ἀγνώστων.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\exists\ ;\ (x, y) \in \Pi\times\Pi \ \wedge \ \begin{matrix} \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} = 23 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 12 \end{matrix}$$

Θέτομεν $\dfrac{1}{x} = x'$, $\dfrac{1}{y} = y'$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα γίνεται

$\left.\begin{matrix} 4x' + 5y' = 23 \\ 3x' + 2y' = 12 \end{matrix}\right\}$ (A). Λύομεν τὸ σύστημα (A) καὶ εὑρίσκομεν

$x' = 2$, $y' = 3$. Τότε ἔχομεν $\dfrac{1}{x} = 2 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{1}{y} = 3 \Longrightarrow y = \frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\exists\ ;\ (x,y,\omega) \in \Pi\times\Pi\times\Pi \ \wedge \ \frac{xy}{5x+4y} = 3,\ \frac{y\omega}{3y+5\omega} = 7,\ \frac{\omega x}{2\omega+3x} = 6.$$

Ἀντιστρέφομεν τὰ κλάσματα, ὁπότε αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος

γράφονται : $\dfrac{5x+4y}{xy} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{3y+5\omega}{y\omega} = \dfrac{1}{7}$, $\dfrac{2\omega+3x}{\omega x} = \dfrac{1}{6}$ ἢ

$$\frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{3} \ (1) \qquad \frac{3}{\omega} + \frac{5}{y} = \frac{1}{7} \ (2) \qquad \frac{2}{x} + \frac{3}{\omega} = \frac{1}{6} \ (3)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν (1), (2), (3). Θέτομεν :

$$\frac{1}{x} = x',\ \frac{1}{y} = y',\ \frac{1}{\omega} = \omega'$$

ὁπότε εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα.

$$\left\{\begin{matrix} 5y' + 4x' = \dfrac{1}{3} \\ 3\omega' + 5y' = \dfrac{1}{7} \\ 2x' + 3\omega' = \dfrac{1}{6} \end{matrix}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} 5y' + 4x' = \dfrac{1}{3} \\ y' = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{7} - 3\omega'\right) \\ x' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6} - 3\omega'\right) \end{matrix}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5\cdot\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{7}-3\omega'\right)+4\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}-3\omega'\right)=\dfrac{1}{3} \\ y'=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{7}-3\omega'\right) \\ x'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}-3\omega'\right) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \omega'=\dfrac{1}{63} \\ y'=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{3}{63}\right) \\ x'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{63}\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega'=\dfrac{1}{63} \\ y'=\dfrac{2}{105} \\ x'=\dfrac{5}{84} \end{cases}$$

Τὰς τιμὰς τῶν x', y', ω' θέτομεν εἰς τὰς (3) καὶ εὑρίσκομεν :

$$x=\frac{84}{5},\quad y=\frac{105}{2},\quad \omega=63.$$

§ 69. Συμμετρικὰ συστήματα.

Ἕνα σύστημα γενικῶς ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους λέγεται συμμετρικόν, ὅταν τὰ πρῶτα μέλη ἑκάστης τῶν ἐξισώσεών του εἶναι συμμετρικὰ πολυώνυμα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, ποὺ περιέχουν, ἐνῶ τὰ δεύτερα μέλη των εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\exists\ ;\ (x,y,\omega)\in\Pi\times\Pi\times\Pi \ \wedge\ 2x+y+\omega=4\ (1)$$
$$2y+\omega+x=4\ (2)\qquad 2\omega+x+y=4\ (3).$$

Εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ κάθε ἐξίσωσις προκύπτει ἐκ τῆς προηγουμένης της διὰ κυκλικῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀγνώστων της. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτό, προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν $4x+4y+4\omega=12 \Longrightarrow x+y+\omega=3$ (4). Ἂν ἀπὸ τὰς (1), (2), (3) ἀφαιρέσωμεν διαδοχικὰ τὴν (4), εὑρίσκομεν $x=1$, $y=1$, $\omega=1$.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\exists\ ;\ (x\in\Pi, y\in\Pi, \omega\in\Pi, \varphi\in\Pi)\ \wedge\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{\varphi}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}.$$

Θέτομεν $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{\omega}=\omega'$ $\frac{1}{\varphi}=\varphi'$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$x'+y'+\omega'=\frac{1}{2}$$
$$y'+\omega'+\varphi'=\frac{1}{3}$$
$$\omega'+\varphi'+x'=\frac{1}{4}$$
$$\varphi'+x'+y'=\frac{1}{5}$$
. Λύομεν τὸ σύστημα ὡς καὶ προηγουμένως

καὶ εὑρίσκομεν $x'=\frac{57}{60}, y'=\frac{62}{60}, \omega'=\frac{65}{60}$, $\varphi'=\frac{47}{60}$ ὅτε

$x=\frac{60}{57}, y=\frac{60}{62}, x=\frac{60}{65}, \varphi=\frac{60}{47}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

107) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα $\exists$; $(x,y,z) \in \Pi x \Pi x \Pi$

α) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, $x+y+z=108$

β) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{5}$, $5x+3y-2z=51$

γ) $3x=2y=4z$, $5x+2y+z=9$

108. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα $\exists$; $(x,y,z) \in \Pi x \Pi x \Pi$

α) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{20}$, $\frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$

β) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2xy$

γ) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=\mu$, $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\nu$

δ) $\frac{1}{3x-2y+1}+\frac{1}{x-2y-3}=\frac{5}{12}$, $\frac{1}{x+2y-3}-\frac{1}{3x-2y+1}=\frac{1}{12}$

ε) $\frac{3}{5x-y}+\frac{4}{4x+y}=-\frac{1}{27}$, $\frac{24}{5x-y}-\frac{15}{4x+y}=1\frac{4}{9}$

109) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα .

α) $3x+2(y+z)=33$, $4y+3(x+z)=50$, $5\varphi+3(x+y)=67$

β) $3x+5(y+\varphi+z)=6$, $3y+5(\varphi+\omega+x)=0$, $3\varphi+5(\omega+x+y)=14$, $3\omega+5(x+y+\varphi)=16$

γ) $2x+3(y+\omega+\varphi)=20$, $2y+3(\omega+\varphi+x)=14$, $2\omega+3(\varphi+x+y)=24$, $2\varphi+3(x+y+\omega)=32$

110) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα Ε : $(x,y,z) \in \Pi x \Pi x \Pi$

α) $\dfrac{xy}{5x+4y} = 3$ β) $\dfrac{xy}{3x+y} = \dfrac{1}{5}$ δ) $\dfrac{xy}{4y-3x} = 20$

$\dfrac{y\omega}{3y+5\omega} = 7$ $\dfrac{xz}{x+5z} = \dfrac{1}{20}$ $\dfrac{xz}{2x-3z} = 15$

$\dfrac{\omega x}{2\omega+3x} = 6$ $\dfrac{yz}{4y+z} = \dfrac{1}{24}$ $\dfrac{yz}{4y-5z} = 12$

111) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

α) $y\omega+x\omega+xy = 12xy\omega$ β) $3x+7y = 23xy$

$3y\omega-4x\omega+5xy = 18xy\omega$ $3\omega+8x = 38x\omega$

$5z\omega-3x\omega+2xy = 13xy\omega$ $5y-6\omega = 2y\omega$

112) Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

α) $x+y-z = 17$ β) $x+y+z = 3$ γ) $x+y = 18$

$x-y+z = 13$ $y+z+\omega = -2$ $z+\varphi = 10$

$y+z-x = 7$ $z+\omega+x = 6$ $y+z = 14$

$\omega+x+y = 2$ $\varphi+\omega = 6$

$\omega+x = 12$

δ) $yz+xz-6xy = 9xyz$ ε) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{12}$

$yz-xz+4xy = 5xyz$ $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z} = \dfrac{7}{6}$

$3xz-2yx-xy = 4xyz$ $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{5}{z} = \dfrac{29}{12}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

§ **70.** Λέγομεν ὅτι ἕνα πρόβλημα εἶναι πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, ἄν ἡ λύσις του μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν λύσιν πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους.

Τὰ προβλήματα αὐτὰ λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον λύονται τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Διὰ νὰ λύσωμεν ἓν τοιοῦτον πρόβλημα, σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις του μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐπιταγμάτων τοῦ προβλήματος. Λύομεν τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται καὶ ἀκολούθως ἐξετάζομεν, ἐὰν ἡ εὑρεθεῖσα λύσις ἱκανοποιεῖ τοὺς περιορισμούς, οἱ ὁποῖοι ἴσως ὑπάρχουν εἰς τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ εἶναι παραδεκτὴ ἡ λύσις.

Πρέπει νὰ προσέχωμεν πάρα πολύ, ὥστε αἱ εὑρισκόμεναι ἐξισώσεις νὰ εἶναι τόσαι, ὅσαι εἶναι καὶ οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος, διότι ἄλλως τὸ εὑρεθὲν σύστημα θὰ εἶναι ἀόριστον.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα μᾶς δεικνύουν, πῶς εὑρίσκονται αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλὴματος καὶ ἡ λύσις αὐτοῦ.

§ **71.** **Π ρ ό β λ η μ α Ι. Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$, ἄν εἰς τοὺς ὅρους του προστεθῇ ὁ 3, καὶ ἴσον μὲ $\frac{1}{6}$, ἄν ἐκ τῶν ὅρων του ἀφαιρεθῇ ὁ 1.**

Λύσις. Ἐὰν x εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ y ὁ παρανομαστὴς τοῦ κλάσματος, τὸ κλάσμα θὰ παρασταθῇ μὲ $\frac{x}{y}$. Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{x+3}{y+3}=\frac{1}{2} \quad (1) \qquad \frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{6} \quad (2).$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $2(x+3)=y+3 \Longrightarrow 2x+6=y+3 \Longrightarrow 2x-y=-3 \; (1')$ Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται $6(x-1)=y-1 \Longrightarrow 6x-6=y-1 \Longrightarrow 6x-y=5 \; (2')$. Λύομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα τῶν (1΄) καὶ (2΄)

καὶ εὑρίσκομεν $x = 2$, $y = 7$. Ἄρα τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{2}{7}$.

§ 72. **Π ρ ό β λ η μ α ΙΙ. Διὰ τὴν ἀγορὰν 5 kg. ζαχάρεως καὶ 3 kg. καφὲ πληρώνει τις 276 δρχ. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ kg. τοῦ καφὲ καὶ τῆς ζαχάρεως, ἂν ὁ λόγος των εἶναι 6·**

Λύσις. Ἔστω x δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ kg. τῆς ζαχάρεως καὶ y τοῦ καφέ. Τὰ 5 kg. ζαχάρεως τιμῶνται 5x δρχ., τὰ δὲ 3 kg. καφὲ τιμῶνται 3y δρχ. Ἐπειδὴ τὰ 5 kg. ζαχάρεως καὶ τὰ 3 kg. καφὲ τιμῶνται 276 δρχ., ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5x+3y = 276 \quad (1).$$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς τιμῆς τοῦ kg. τοῦ καφὲ πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ kg. τῆς ζαχάρεως εἶναι 6, ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{y}{x} = 6 \quad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν $x = 12$ καὶ $y = 72$. Ἄρα ἡ τιμὴ τοῦ kg. τῆς ζαχάρεως εἶναι 12 δρχ., τοῦ δὲ καφὲ 72 δρχ.

§ 73. **Π ρ ό β λ η μ α ΙΙΙ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 11. Ἂν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του, εὑρίσκομεν ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ ἀρχικοῦ κατὰ 9. Ποῖος ὁ ἀριθμός ;**

Λύσις. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς (δηλ. τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ) πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος.

Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Τότε θὰ ἔχωμεν $x+y = 11$ (1).

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει x δεκάδας καὶ y μονάδας, γράφεται $10x+y$. Ἂν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του, ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ θὰ γράφεται $10y+x$. Ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, ὁ νέος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ κατὰ 9, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $10y+x = 10x+y+9$ (2). Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $x=5$, $y=6$. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 56.

§ 74. **Πρόβλημα IV. Μία δεξαμενὴ γεμίζει ἀπὸ δύο κρουνούς. Ἂν ἀφήσωμεν τὸν πρῶτον νὰ τρέξῃ ἐπὶ 12 ὥρας καὶ τὸν δεύτερον ἐπὶ 9 ὥρας, αὐτοὶ θὰ γεμίσουν 4 φορὰς τὴν δεξαμενήν. Ἂν ὅμως ἀφήσωμεν τὸν πρῶτον νὰ τρέχῃ ἐπὶ 5 ὥρας καὶ τὸν δεύτερον ἐπὶ 9 ὥρας, αὐτοὶ θὰ γεμίσουν 3 φορὰς τὴν δεξαμενήν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὥρας χρειάζεται ἕκαστος ἐξ αὐτῶν διὰ νὰ γεμίσῃ τὴν δεξαμενὴν μόνος του.**

Λύσις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί. Ἔστω ὅτι ὁ πρῶτος χρειάζεται x ὥρας καὶ ὁ δεύτερος y ὥρας. Ὁ πρῶτος εἰς μίαν ὥραν γεμίζει τὸ $\frac{1}{x}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{y}$, τότε εἰς 12 ὥρας ὁ πρῶτος θὰ γεμίσῃ τὰ $\frac{12}{x}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς 9 ὥρας ὁ δεύτερος τὰ $\frac{9}{y}$ τῆς δεξαμενῆς. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{12}{x}+\frac{9}{y}=4$ (1). Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν $\frac{5}{x}+\frac{9}{y}=3$ (2). Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $x=7$ καὶ $y=\frac{63}{16}=3$ ὥρ. $56'\ 15''$.

§ 75. **Πρόβλημα V. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὸ πλάτος ἑνὸς ὀρθογωνίου κατὰ 3 μ., τὸ δὲ μῆκος του κατὰ 4 μ., τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνεται κατὰ 88 μ². Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸ πλάτος κατὰ 3 μ. καὶ τὸ μῆκος του κατὰ 2 μ., τὸ ἐμβαδόν του ἐλαττοῦται κατὰ 50 μ². Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.**

Λύσις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί. Ἔστω x μέτρα τὸ πλάτος καί y μέτρα τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου. Ἐὰν αὐξηθῇ τὸ πλάτος του κατὰ 3 μ., γίνεται $x+3$, ἐὰν δὲ αὐξηθῇ τὸ μῆκος του κατὰ 4 μ. γίνεται $y+4$. Ἄρα ἔχομεν $(x+3)\ (y+4)=$ $=xy+88$ (1). Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν $(x-3)\ (y-2)=xy-$ -50 (2). Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) εὑρίσκομεν

$$x=10,\ y=12.$$

Ἄρα τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 10 μέτρα καὶ τὸ μῆκος του 12 μέτρα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν

113) Διὰ 3 μ. ὑφάσματος καὶ 8 μ. φόδρας πληρώνομεν 180 δρχ. Διὰ 10 μ. ὑφάσματος καὶ 11 μ. φόδρας πληρώνομεν 308 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου τοῦ ὑφάσματος καὶ τῆς φόδρας.

114) Ἕνας ἐπλήρωσε δι' ἡμερομίσθια εἰς 2 ἐργάτας καὶ 3 ἐργάτιδας 336 δρχ. ἐν ὅλῳ, ἐνῷ εἰς 3 ἐργάτας καὶ 2 ἐργάτιδας ἐπλήρωσεν 349 δρχ. ἐν ὅλῳ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς ἐργάτου καὶ μιᾶς ἐργάτιδος.

115. Κάποιος μαθητὴς λέγει εἰς τὸν συμμαθητήν του. Δός μου 5 ἐκ τῶν βόλων σου καὶ τότε θὰ ἔχωμεν ἴσον ἀριθμὸν βόλων. Ἐκεῖνος ἀπαντᾶ. Δός μου 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν σου καὶ θὰ ἔχω διπλασίους ἀπὸ ἐκείνους, ποὺ θὰ σοῦ μείνουν. Πόσους βόλους εἶχε ὁ καθένας ;

116. Κάποιος ἐτόκισε δύο κεφάλαια ἀντιστοίχως πρὸς 5 % καὶ 7 % καὶ ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 2580 δρχ Ἐὰν ἐνήλλασε τὰ ἐπιτόκια ὁ τόκος θὰ ηὐξάνετο κατὰ 120 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

117. Πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία ἑνὸς ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ φίλου του καὶ μετὰ 8 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ σημεριναὶ ἡλικίαι ἑκάστου,

118. Ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 3 μ. τὸ πλάτος ἑνὸς ὀρθογωνίου, τὸ δὲ μῆκος του ἐλαττωθῇ κατὰ 2 μ., τὸ ἐμβαδόν του ἐλαττοῦται κατὰ 40 $μ^2$. Ἐὰν ὅμως αὐξηθῇ τὸ πλάτος του κατὰ 2 μ. καὶ ἐλαττωθῇ τὸ μῆκος του κατὰ 3 μ., τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνεται κατὰ 10 $μ^2$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις των.

119) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐὰν δὲ ἀντιστραφοῦν τὰ ψηφία του, ἐλαττοῦται ὁ ἀριθμὸς κατὰ 36 μονάδας.

120) Ἕνα κράμμα περιέχει 270 gr. χρυσοῦ καὶ 60 gr. χαλκοῦ, ἄλλο δὲ περιέχει 200 gr. χρυσοῦ καὶ 50 gr. χαλκοῦ. Πόσα γραμμάρια ἐξ ἑκάστου εἴδους πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ νὰ σχηματίσωμεν κράμμα 160 gr. τίτλου 0,835.

121) Ἔμπορος ἔχει δύο ποιότητας ἐλαίου. Ὅταν τὰς ἀναμείξῃ μὲ ἀναλογίαν 3 πρὸς 2, τὸ kg τοῦ μίγματος τιμᾶται 24 δρχ., ὅταν τὰς ἀναμείξῃ μὲ ἀναλογίαν 4 πρὸς 3, τὸ gr. τοῦ μίγματος τιμᾶται 23,5 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ kr. ἑκάστης ποιότητος.

122) Δύο φίλοι ἀνεχώρησαν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, διὰ νὰ κάμνουν περίπατον 3 km. Ὁ πρῶτος διανύει 2,5 km., ὁ δὲ δεύτερος 3 km τὴν ὥραν, ὁ δεύτερος, ὅταν ἔφθασε εἰς τὸ τέρμα, ἐπέστρεψε διὰ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ καὶ συνήντησε τὸν πρῶτον. Πόσα χιλιόμ. διέτρεξεν ἕκαστος μέχρι τῆς συναντήσεώς των ;

123. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετραπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων νὰ ὑπερβαίνῃ κατὰ 1 τὸ τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν

δεκάδων, ἐὰν δὲ γραφοῦν τὰ ψηφία των κατ' ἀντίστροφον τάξιν, θὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 36.

124) Ἡ περίμετρος παραλληλογράμμου εἶναι 40 μ., ὁ δὲ λόγος μιᾶς πλευρᾶς πρὸς τὴν προσκειμένην εἰς αὐτὴν πλευρὰν εἶναι $\frac{3}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ.

125) Ἔμπορος ἠγόρασε δύο δοχεῖα οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἦτο 3,20 δρχ. κατὰ λίτρον. Τὸ ἕνα δοχεῖον ἀξίζει 144 δρχ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Ὅταν ἀφαιρέσῃ ἐκ τοῦ πρώτου τὰ $\frac{5}{13}$ τῆς περιεκτικότητός του καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς, παραμένουν εἰς τὰ δύο δοχεῖα, αἱ αὐταὶ ποσότητες οἴνου. Ποία ἡ χωρητικότης ἑκάστου δοχείου ;

126) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων ἡ διαφορά, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον, εἶναι ἀντιστοίχως ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2,3,5.

127) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 11, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 297.

128) Μία δεξαμενὴ εἶναι δυνατὸν νὰ γεμίσῃ ὑπὸ τῶν κρουνῶν Α καὶ Β εἰς $1\frac{1}{6}$ ὥρας, ὑπὸ τῶν κρουνῶν Α καὶ Γ εἰς $\frac{4}{5}$ ὥρας καὶ ὑπὸ τῶν Β καὶ Γ εἰς $2\frac{1}{3}$ ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον ἡ δεξαμενὴ δύναται νὰ γεμίσῃ, ὅταν τρέχῃ ὁ καθένας μόνος του καὶ β) ὅταν τρέχουν καὶ οἱ τρεῖς.

129) Ἕνας πατέρας διένειμε τὴν περιουσίαν του ἐξ 118000 δρχ. εἰς τὰ τρία παιδιά του, ἡλικίας 5, 9, 11 ἐτῶν εἰς τρόπον, ὥστε ὁ τόκος πρὸς 6 % κάθε μεριδίου μέχρι τῆς ἐνηλικιώσεως τῶν τέκνων του (21 ἔτους) νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα τὰ μερίδια. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

130) Τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς. Ποῖαι εἶναι αἱ ἀκτῖνες των, ἂν αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των εἶναι 8 cm, 10 cm. καὶ 12 cm.

131) Τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς ἀποστάσεως τὰ διατρέχει κάποιος εἰς 6 ὥρας. Ἐὰν ὅμως ἡ ταχύτης του αὐξηθῇ κατὰ 1 χιλιόμ. τὴν ὥραν, διατρέχει ὁλόκληρον τὴν ἀπόστασιν εἰς 7 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις καὶ ἡ ταχύτης του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΣ ΑΝΙΣΩΣΙΣ ΜΕ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΣ

§ **76.** Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνίσωσιν (1) $(xy) \in \Pi \ \exists \ (xy)$; $y - 2x - 2 > 0$ (1). Ἂν δώσωμεν εἰς τὸ x τὴν τιμὴν 0, ἡ ἀνίσωσις γίνεται $y > 3$. Τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $(x = 0, \ y > 3)$ εἶναι μία λύσις τῆς ἀνισώσεως. Ἂν τὸ x λάβῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots\ldots$$

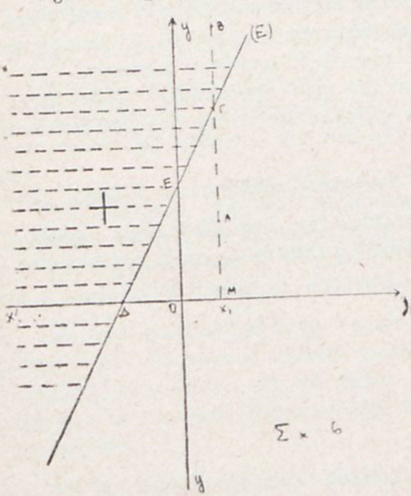
ἡ ἀνίσωσις θὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ τὴν συνθήκην, ἡ ὁποία εἶναι ἀντιστοίχως

$$y > 5, \quad y > 7, \quad y > 9, \quad y > 11 \ \ldots\ldots$$

Ἔχει λοιπὸν αὐτὴ ἀπείρους λύσεις.

Ἡ ἀνίσωσις (1) εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta y + \gamma > 0$ ἢ $\alpha x + \beta y + \gamma < 0$ ὅπου $|\alpha| + |\beta| > 0$. Διὰ κάθε μίαν ἀπὸ αὐτὰς ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη $(x, y) \in \Pi x \Pi$, τὰ ὁποῖα τὰς ἐπαληθεύουν καὶ ἑπομένως καὶ ἄπειρα ἄλλα, τὰ ὁποῖα δὲν τὰς ἐπαληθεύουν. Αἱ ἀνισώσεις αὐταὶ λέγονται ***πρωτοβάθμιοι ἀνισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους*** : Κάθε ζεῦγος $(x,y) \in \Pi x \Pi$, τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει μίαν τοιαύτην ἀνίσωσιν, λέγεται λύσις της. Π.χ. τὸ ζεῦγος $(x = 0, \ y \in \Pi > 3)$ εἶναι λύσις τῆς (1).

§ **77.** ***Γραφικὴ παράστασις.*** Ἔστω ἡ $x, y \in \Pi \ \exists (x,y)$; $y - 2x - 3 > 0$ (1). Κατασκευάζομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς εὐθείας $y = 2x + 3$ (Σχ. 6). Ἔστω (E) ἡ εὐθεῖα αὐτή. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ἄξονος $x'x$ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα yy'. Θεωροῦμεν ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα, π.χ. τὰ A, B, Γ. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν τετμημένην x_1 καὶ διαφορετικὰς τεταγμένας, ἔστω τὰς y_1, y_2, y_3. Δηλ. εἶναι $\Gamma(x_1, y_1)$, $A(x_1, y_2)$, $B(x_1, y_3)$. Ἔχομεν $y_2 < y_1$ καὶ $y_3 > y_1$. Μεταξὺ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων αὐτῶν ἔχομεν τὰς σχέσεις. Διὰ τὸ σημεῖον Γ : $y_1 = 2x_1 + 3$ ἢ



$y_1-2x_1-3=0$ (1). Διὰ τὸ σημεῖον Α: $y_2<2x_1+3$ ἢ $y_2-2x_1-3<0$(2). Διὰ τὸ σημεῖον Β : $y_3>2x_1+3$ ἢ $y_3-2x_1-3>0$ (3). Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ Γ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1), αἱ δὲ συντεταγμέναι τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰς ἀνισώσεις (2) καὶ (3).

Ἐπίσης εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται κάτωθεν τῆς ΑΒ, ὅπως π.χ. τὸ σημεῖον Α, ἔχουν συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἀρνητικόν. Τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ ἐπιπέδου τὸ λέγομεν ***ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου*** ὡς πρός τὴν εὐθεῖαν $y-2x-3=0$, τὸ δὲ ἄλλο μέρος τὸ λέγομεν ***θετικὸν μέρος*** τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

Κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ὅπως ἡ (Ε), μὲ ἐξίσωσιν $y=2x+3$ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη.

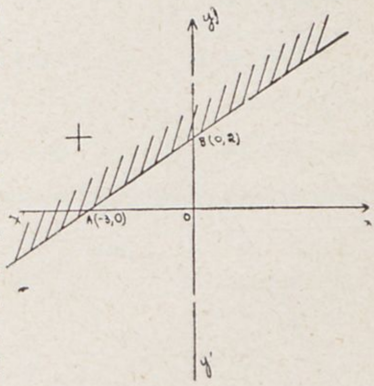
Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων, ποὺ εὑρίσκονται κάτωθεν τῆς (Ε) ἐπαληθεύουν τὴν $y-2x-3>0$.

Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς (Ε) ἐπαληθεύουν τὴν $y-2x-3=0$.

Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων, ποὺ εὑρίσκονται ἄνωθεν τῆς ΑΒ ἐπαληθεύουν τὴν $y-2x-3<0$.

Σημείωσις. Πρακτικῶς εὑρίσκομεν ταχέως τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος ἑνὸς ἐπιπέδου ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, ἂν ἀναζητήσωμεν εἰς ποῖον ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου εὑρίσκεται ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ x καὶ y εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸ μηδέν. Ἂν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀντικαταστάσεως εἶναι θετικόν, δηλ. ἂν $\gamma>0$ τὸ σημεῖόν Ο(0,0) εὑρίσκεται εἰς τὸ θετικόν μέρος καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 7

Παράδειγμα. Ἔστω $(xy)\in\Pi$ $\exists(xy)$; $2x-3y+6>0$(1). Ἡ εὐθεῖα $2x-3y+6=0$ (Σχ. 7) τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον Α$(-3,0)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον B(0,2). Αἱ συντεταγμέναι τοῦ O ἐπαληθεύουν τὴν (1), διότι διὰ $x=0$, $y=0$ ἡ (1) δίδει $6>0$.

§ **78.** ***Σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἀνισώσεων μὲ δύο μεταβλητάς.*** Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἀνισώσεων

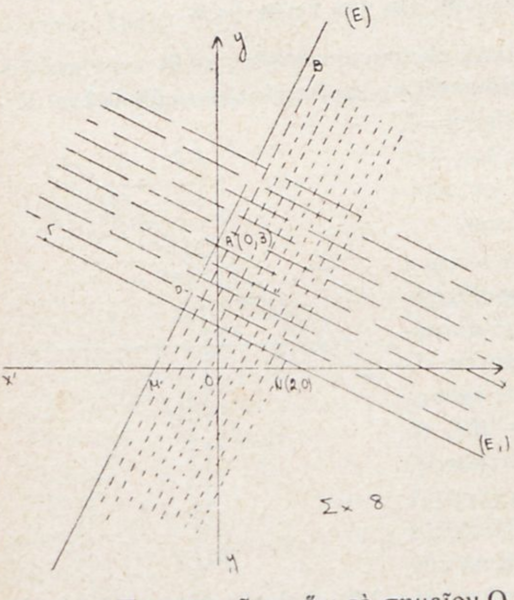
$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1>0 \ (1) \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2>0 \ (2) \end{array}\right\} \ \mathrm{I} \ (x.y)\in \Pi x \Pi$$

Κάθε κοινὴ λύσις τῶν ἀνισώσεων (1) καὶ (2) λέγεται λύσις τοῦ συστήματος.

Διὰ τὸν γραφικὸν προσδιορισμὸν τοῦ συνόλου τῶν λύσεων τοῦ (I) χαράσσομεν τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξισώσεις

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha_2 x+\beta_2 x+\gamma_2=0$$

Ὁρίζομεν κατόπιν τὴν τομὴν τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ δύο σύνολα τῶν λύσεων καθεμιᾶς ἀνισώσεως χωριστά. Ἡ τομή των εἶναι γενικῶς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς κυρτῆς γωνίας, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι τέμνωνται. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τότε τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος ἢ θὰ παριστάνῃ τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κειμένου μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων (δηλ. ταινίαν) ἢ ἕνα ἡμιεπίπεδον ἢ θὰ εἶναι τὸ $\varnothing$.



§ **79.** ***Παράδειγμα 1.***

$(x, y)\in \Pi x \Pi$

$\exists\,(x, y)$ (A)

$$\left\{\begin{array}{l} y-2x-3<0 \ (1) \\ y+\dfrac{x}{2}-1>0 \ (2) \end{array}\right\}$$

Χαράσσομεν τὰς εὐθείας $y-2x-3=0$ (E) καὶ $y+\dfrac{x}{2}-1=0$ (E_1) (Σχ. 8). Θέτομεν $x=0$, $y=0$ εἰς τὰ πρῶτα μέλη τοῦ συστήματος (A) καὶ εὑρίσκομεν -3 καὶ -1. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον O εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὰς δύο εὐθείας. Τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν (1) εὑρίσκονται εἰς τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν (1) (τὸ γραμμοσκιασμένον μὲ παραλλήλους πρὸς τὴν Ε). Τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν (2), εὑρίσκονται εἰς τὸ θετικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν (2) (τὸ γραμμοσκιασμένον μὲ παραλλήλους πρὸς τὴν ΓΔ). Ἡ τομὴ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων εἶναι λοιπὸν τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας BPE_1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

132) Νὰ εὑρεθῇ τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικον μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων, $2x-7y+3=0$, $3x+2y-1=0$.

133) Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ ἀνισώσεις

α) $x-4y+2>0$, β) $3x+4y-2<\theta$, γ) $3x+8y<0$, δ) $x-y>0$

ε) $y-2x<0$. ζ) $2x+y-1>0$, η) $(x-2)+2(y-1)>2x+4$

134) Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς τὰ σύνολα τῶν λύσεων τῶν συστημάτων

α) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-1>0$, $y-2x-6>0$ β) $3x-y+1>0$, $x-2y-3<0$ γ) $x-y+1<0$, $3y+2x-6>0$

δ) $2(x-1)+\frac{y}{2}>4$, $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+1<0$ ε) $3x+2y-5>0$, $3x-2y+5>0$ στ) $4x-3y-2>0$, $-4x+3y-2>0$

ζ) $x+y-1>0$, $x-2<0$, $y-3>0$ η) $3x+2y+1>0$, $2x-y-1>0$, $x-y>0$ θ) $x<y-5$, $-y+5<\frac{x}{3}-1$, $4x-5y<-20$

135) Ποῦ πρέπει νὰ κεῖται τὸ σημεῖον $A(x,y)$ διὰ νὰ ἐπαληθεύεται ἡ σχέσις $(x-y+4)(2x-3y+6)>0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄

Η ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $y=x^2$ ΚΑΙ ΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΤΗΣ

§ 80. Ἡ συνάρτησις $y=x^2 (x \in \Pi)$ λέγεται ***τετραγωνικὴ*** συνάρτησις. Αὐτὴ εἶναι ὡρισμένη διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸ y διὰ κάθε τιμὴν τοῦ $x \in \Pi$.

Δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x διαφόρους τιμὰς αἱ ὁποῖαι βαίνουν αὐξανόμεναι, καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως

x	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	. . .
y	$+9$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$	. . .

(1)

ἐξ αὐτῶν παρατηροῦμεν ὅτι

α) Ἡ τιμή τοῦ y εἶναι πάντοτε θετικὴ ἐκτὸς τῆς $x=0$, διὰ τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ $y=0$.

β) Διὰ τιμὰς ἀντιθέτους τοῦ x, τὸ y λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμήν π.χ. διὰ $x=\pm 3 \Longrightarrow y=9$.

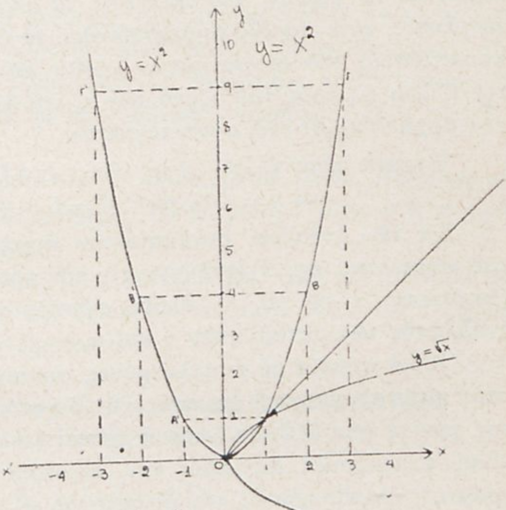
Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἔχει λοιπὸν πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $\Pi \geqq 0$ καὶ τὸ μηδέν. δηλ. αὐτὴ ἀπεικονίζει τὸ σύνολον Π ἐπὶ τοῦ $\Pi \geqq 0$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν τὸ y αὐξάνη ἀπὸ τὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0, τὸ y ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τὸ 0, καὶ ὅταν τὸ x αὐξάνη ἀπὸ τὸ 0 μέχρι τὸ $+\infty$, τὸ y αὐξάνει ἀπὸ τὸ μηδὲν μέχρι τὸ $+\infty$.

Ἂν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y παραστήσωμεν μὲ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα τὰ ἔχουν ὡς συντεταγμένας, τότε λαμβάνομεν ἕνα σημειοσύνολον, τὸ ὁποῖον λέγεται γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=x^2$ ἢ τῆς ἐξισώσεως $y-x^2=0$. Τὸ σημειοσύνολον αὐτὸ εἶναι μία καμπύλη, ἡ ὁποία λέγεται ***παραβολή***.

Διὰ νὰ χαράξωμεν τὴν καμπύλην αὐτὴν (ἓν μέρος της) δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x διαφόρους τιμὰς καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, ὅπως ἔγινε εἰς τὸν πίνακα (1). Ὁρίζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὰ σημεῖα A(1,1), A΄(—1,1) B(2,4) B΄(2.—4), Γ(3,9) Γ΄(—3,+9) καὶ συνδέομεν μετὰ τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ μίαν συνεχῆ καμπύλην. Ἡ καμπύλη αὐτὴ (Σχ. 9) εἶναι τὸ μέρος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y=x^2$, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διάστημα $-3 \leq x \leq 3$ μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς x.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος τῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα εὑρέθησαν εἶναι συμμετρικὰ ἀνὰ δύο ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ. Π.χ. τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄.



Σχ 9

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς κάθε σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ἀντιστοιχεῖ μιὰ τετμημένη $x=\alpha$. Διὰ $x=-\alpha$ θὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Μ΄, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν τεταγμένην καὶ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα οy. Ἄρα ἡ παραβολὴ $y=x^2$ ἔχει ὡς ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα οy. Τὸ σημεῖον Ο ποὺ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας, λέγεται **κορυφὴ** τῆς παραβολῆς.

§ **81**. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὰς συναρτήσεις $y=+\sqrt{x}$ $(x \in \Pi \geq o)$ καὶ $y=-\sqrt{x}$ $(x \in \Pi \geq o)$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν πρώτη ἀπεικονίζει τὸ σύνολον Π^+ καὶ τὸ 0 ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἡ δὲ δευτέρα τὸ σύνολον Π^+ καὶ τὸ 0 ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ 0.

Δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x διαφόρους τιμάς, αἱ ὁποῖαι βαίνουν αὐξανόμεναι, καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν συναρτήσεων.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$x=\sqrt{x}$	0	1	$\sqrt{2}=-1{,}414$	$\sqrt{3}=1{,}732$	2	$\sqrt{5}=2{,}236$	$\sqrt{6}=2{,}449$	$\sqrt{7}=2{,}645$
$y=-\sqrt{x}$	0	-1	$-\sqrt{2}=-1{,}414$	$\sqrt{3}=-1{,}732$	-2	$-\sqrt{5}=-2{,}236$	$-\sqrt{6}=-2{,}449$	$-\sqrt{7}=-2{,}645$

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ θετικὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς μὲν $y=\sqrt{x}$ εἶναι θετικαί, τῆς δὲ $y=-\sqrt{x}$ εἶναι ἀρνητικαί.

Ἂν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y παραστήσωμεν μὲ τα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα τὰ ἔχουν ὡς συντεταγμένας, τότε τὰ δύο σημειοσύνολα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συναρτήσεων αὐτῶν, θὰ εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, καὶ θὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὴν ἀρχὴν O(0,0) τῶν συντεταγμένων.

Ἔχομεν ὅμως $y=\sqrt{x} \implies y^2=x \ (x\in\Pi^{\geqslant 0})$

καὶ $y=-\sqrt{x} \implies y^2=x \ (x\in\Pi^{\geqslant 0})$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνεπαγωγῶν συμπεραίνομεν ὅτι τὰ μέρη τῆς καμπύλης (σχ. 9) ἀνήκουν εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς ἐξισώσεως $x-y^2=0$, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς $y-x^2=0$ δι' ἐναλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν x καὶ y.

Ἀλλὰ σημεῖα μὲ ἐνηλλαγμένας συντεταγμένας, ὡς εἶναι γνωστὸν εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς πρώτης καὶ τρίτης γωνίας τῶν ἀξόνων. Ἄρα ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $x-y^2=0$ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xoy τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς ἐξισώσεως $y-x^2=0$. Ἀλλὰ δύο σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν εἶναι ἴσα. Ἄρα ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $x-y^2=0$ εἶναι γραμμὴ ἴση μὲ τὴν παραλαβὴν $y-x^2=0$, δηλαδὴ εἶναι παραβολή.

Ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{x}$ $(x,y\in\Pi^{\geqslant 0})$ λέγεται ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως $x^2=y$ $(x,y\in\Pi^{\geqslant 0})$, ἡ δὲ $y=-\sqrt{x}$ $(x\in\Pi^{\geqslant 0}, y\in\Pi^{\leqslant 0})$ ἀντίστροφος τῆς $y=x^2$ $(x\in\Pi^{\leqslant 0}, y\in\Pi^{\geqslant 0})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄

ΕΞΙΣΩΣΙΣ Β^{ου} ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ **82**. Λέγομεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, μίαν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία μετὰ τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται εἰς αὐτήν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, λαμβάνει τὴν μορφὴν $x \in \Pi \ \exists x ; \ \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1), ὅπου $\alpha,\beta,\gamma, \in \Pi$ σταθεροὶ καὶ καλοῦνται συντελεσταί, τὸ δέ γ εἰδικῶς σταθερὸς ὅρος τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) οἱ συντελεσταὶ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, αὐτὴ λέγεται ***πλήρης***, ἂν δὲ εἶναι τὸ $\beta=0$ ἢ τὸ $\gamma=0$ τότε λέγεται ***μὴ πλήρης***.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) λέγεται κάθε τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν. Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῆς μεταβλητῆς λέγονται ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

Ἀριθμητικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ Βου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

§ **83.** Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $x \in \Pi, \exists x ; \ \alpha x^2+\beta x=0$.

Παράδειγμα : $x \in \Pi, \ \exists x ; \ 2x^2-8x=0$ (1) $x \in \Pi$.

Ἐξάγομεν κοινόν παράγοντα τὸν x εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x(2x-8)=0$. Ἀλλὰ ἕνα γινόμενον δύο (ἢ καὶ περισσοτέρων) παραγόντων ἰσοῦται μὲ μηδέν, ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων του εἶναι μηδέν. Ἄρα λοιπὸν ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις $x=0$ ἢ $2x-8=0 \Longrightarrow x=\dfrac{8}{2}=4$. Ἡ (1) λοιπὸν ἔχει δύο ρίζας τὰς $x_1=0$ καὶ $x_2=4$.

Γενικῶς : Ἔστω $x \in \Pi, \ \exists \ x ; \ \alpha x^2+\beta x=0$.

Ἔχομεν ὡς καὶ προηγουμένως $x(\alpha x+\beta)=0$, ὁπότε ἢ $x=0$ ἢ $\alpha x+\beta=0 \Longrightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν ἔχει δύο ρίζας τὰς $x_1=0$ καὶ $x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

§ **84. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς** $x \in \Pi, \ \exists \ x ; \ \alpha x^2+\gamma=0$.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $4x^2-16=0 \ x \in \Pi$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ 4 καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $x^2-4=0 \Longrightarrow x^2=4$. (1) Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν δύο μελῶν τῆς (1) καὶ εὑρίσκομεν $x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$.

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἀντιθέτους, τὰς $x_1=+2$ καὶ $x_2=-2$.

Παράδειγμα 2ον. $x\in\Pi$, $\exists\, x : 3x^2+14=0$.

Ἔχομεν $3x^2=-14 \Longrightarrow x^2=-\dfrac{14}{3}$. Τὸ β΄ μέλος εἶναι ἀρνητικόν.

Ἀλλὰ δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς $x\in\Pi$ τὸ τετράγωνόν της δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Γενικῶς. $x\in\Pi\ \exists x\,;\ \alpha x^2+\gamma=0$ (1).

Μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη της διὰ α καὶ εὑρίσκομεν $x^2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Ἐξετάζομεν τώρα δύο περιπτώσεις:

α) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $-\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $x_1=+\sqrt{-\dfrac{\gamma}{\alpha}}$ καὶ $x_2=-\sqrt{-\dfrac{\gamma}{\alpha}}$.

β) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $-\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, διὰ νὰ ἔχῃ δύο ρίζας ἡ ἐξίσωσις, πρέπει τὸ $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$ νὰ εἶναι θετικὸς καὶ συνεπῶς ὁ $\dfrac{\gamma}{\alpha}$ ἀρνητικός, δηλ. οἱ ἀριθμοὶ γ καὶ α νὰ εἶναι ἀντίθετοι.

§ **85**. ***Πλήρης μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τοῦ β*** ***ου*** ***βαθμοῦ.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\neq 0\ x\in\Pi\ \exists x\,;\ \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1)

α) Εἰς τὴν (1) ὁ συντελεστὴς θὰ εἶναι πάντοτε θετικός. Ὅταν εἶναι ἀρνητικός, ἀλλάσωμεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως. Δηλ. ἂν ἔχωμεν $-3x^2+8x-12=0$ γράφομεν $3x^2-8x+12=0$.

β) Κάθε παράστασις, ποὺ περιέχει τὸ x^2 καὶ ἕνα ὅρον ὡς πρὸς x, εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἀρχικὸν μέρος τοῦ τετραγώνου ἑνὸς διωνύμου.

Π.χ. τὸ $x^2+2\alpha x$ εἶναι τὸ ἀρχικὸν μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ διωνύμου $x+\alpha$. Πράγματι $(x+\alpha)^2 = x^2+2\alpha x+\alpha^2$.

Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ $x^2+2\alpha x$

1) Εὑρίσκομεν τὸ διώνυμον $x+\alpha$, ἂν λάβωμεν ὡς πρῶτον ὅρον τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ x^2 καὶ ὡς δεύτερον ὅρον τό ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x εἰς τὸ $2\alpha x$.

2) Λαμβάνομεν τὸ πλῆρες τετράγωνον, ἂν προσθέσωμεν εἰς τό $x^2+2\alpha x$ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ διωνύμου.

Π. χ. ἐὰν τὸ ἀρχικὸν μέρος ἑνὸς διωνύμου εἶναι τὸ

α) x^2+12x τὸ διώνυμον εἶναι $x+6$ καὶ τὸ τετράγωνόν του $x^2+12x+36$

α) $x^2-\frac{1}{3}x$ » » » $x-\frac{1}{6}$ » » » » $x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}$

γ) $x^2-\frac{\beta}{\alpha}x$ » » » $x-\frac{\beta}{2\alpha}$ » » » » $x^2-\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$.

Παραδείγματα ἀριθμητικῶν λύσεων.

§ **86.** ***Παράδειγμα 1ον.*** Ἔστω πρὸς λύσιν $x\in\Pi\exists x$; $2x^2-7x+3=0$(1). Διαιροῦμεν ὅλους τοὺς ὅρους του διὰ 2 καὶ μεταφέρομεν τὸν σταθερὸν ὅρον εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὁπότε ἔχομεν $x^2-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$.(2). Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι τὸ ἀρχικὸν μέρος τοῦ διωνύμου $\left(x-\frac{4}{7}\right)$. Διὰ νὰ συμπληρώσωμεν τὸ τετράγωνον, προσθέτομεν τὸ $\frac{49}{16}$ καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς (2). Θὰ ἔχωμεν τότε

$$x^2-\frac{7x}{2}+\frac{49}{16}=\frac{49}{16}-\frac{3}{2}\Longrightarrow\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}\ (3).$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν του, τότε θὰ ἔχωμεν

$$x-\frac{7}{4}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}\Longrightarrow x=\frac{7}{4}\pm\frac{5}{4}$$

Ἡ (1) λοιπὸν ἔχει ***δύο διαφορετικὰς ρίζας***, τὰς $x_1=\frac{7+5}{4}=3$ καὶ $x_2=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$

§ **87. *Παράδειγμα 2ον.*** Ἔστω $x \in \Pi$ $\exists x$; $9x^2-6x+1=0$ (1).
Εἶναι δυνατὸν νὰ γράψωμεν (§ 85) $x^2-\frac{6x}{9}=-\frac{1}{9} \Longrightarrow x^2-\frac{2x}{3}=$ $-\frac{1}{9} \Longrightarrow x^2-\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}-\frac{1}{9} \Longrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0 \Longrightarrow x-\frac{1}{3}=0 \Longrightarrow x=\frac{1}{3}$

Τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει ***μίαν μόνον ρίζαν***, τὴν $x=\frac{1}{3}$ ἢ ***δύο ρίζας ἴσας*** $x_1=x_2=\frac{1}{3}$.

§ **88. *Παράδειγμα 3ον.*** $x \in \Pi$ $\exists x$; $2x^2-13x+15=0$.

Εἶναι δυνατὸν νὰ γράψωμεν $x^2-\frac{3x}{2}=-\frac{15}{2} \Longrightarrow x^2-\frac{3x}{2}+$ $+\frac{9}{16}=\frac{9}{16}-\frac{15}{2} \Longrightarrow \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{111}{16}$. Τὸ βον μέλος τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἑπομένως δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν: Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν ***δὲν ἔχει ρίζας*** εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Γενικῶς. Ἔστω $x \in \Pi$ Ex ; $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1).

Διαιροῦμεν τοὺς ὅρους της διὰ α καὶ μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὁπότε ἔχομεν $x^2+\frac{\beta x}{\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}$ (2). Συμπληρώνομεν τὸ τετράγωνον προσθέτοντες εἰς τὰ δύο μέλη τῆς (2) τὸ $\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ ὁπότε $x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha} \Longrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha} \Longrightarrow$ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ (3). Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν καὶ τῶν δύο μελῶν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ πρόσημον τοῦ δευτέρου μέλους. Ὁ παρονομαστὴς $4\alpha^2$ εἶναι πάντοτε θετικὸς καὶ ἑπομένως τὸ δεύτερον μέλος ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ ἀριθμητοῦ $\beta^2-4\alpha\gamma$, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ***διακρίνουσα.***

Διακρίνομεν λοιπὸν τρεῖς περιπτώσεις.

α) Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$. (Παραδ. 1 § 86), ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν καί τῶν δύο μελῶν τῆς (3) καὶ εὑρίσκομεν $x+\frac{\beta}{2\alpha}=$

$$\pm\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}} \Longrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \Longrightarrow x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἡ (1) ἔχει λοιπὸν δύο ρίζας ἀνίσους τὰς

$$\boxed{x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad (A)$$

β) Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ (παράδ. 2 § 87). Ἡ (3) γίνεται τότε

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0 \Longrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Ἡ (1) ἔχει τότε μίαν μόνον ρίζαν. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ (1) ἔχει δύο ***ρίζας ἴσας ἢ μίαν ρίζαν διπλῆν.***

γ) Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ (παράδ. 3 § 88). Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) εἶναι τότε ἀρνητικὸν καὶ δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἄρα ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος $\in \Pi$.

Σπουδαία παρατήρησις. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ γ εἶναι ἀντίθετοι, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν προτέρων νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ἑπομένως ὑπάρχουν δύο ρίζες διαφορετικές. Πράγματι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ γινόμενον αγ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ τὸ $-4\alpha\gamma$ θετικόν, ἄρα ὁ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι θετικός.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς πίνακα :

Λύσις τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad x\in\Pi$

Σχηματίζομεν τὴν διακρίνουσαν $\beta^2-4\alpha\gamma$

α) Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, δύο ρίζαι διαφορετικαὶ

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

β) Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, δύο ρίζαι ἴσαι

$$x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

γ) Ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, δὲν ἔχει ρίζας $\in\Pi$.

Ἐφαρμογὴ 1. $x\in\Pi \quad \exists x;\quad 3x^2-5x-8=0$

Οἱ συντελεσταὶ α καὶ γ ἔχουν ἀντίθετα πρόσημα, ἄρα $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

Ἐκ τοῦ τύπου (A) ἔχομεν $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25+96}}{2 \cdot 3} = \frac{+5 \pm 11}{6}$

Ἄρα $x_1 = \frac{5+11}{6} = \frac{8}{3}$, $x_2 = \frac{5-11}{5} = -1$.

Ἐφαρμογὴ 2. $x \in \Pi \ \exists x ; \ 5x^2 - \frac{10x}{7} + \frac{5}{49} = 0$.

Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἔχομεν $245x^2 - 70x + 5 = 0$ $\Longrightarrow 49x^2 - 14x + 1 = 0$. Ἡ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4.49.1 = 196 - 196 = 0$.

Ἑπομένως ἔχομεν δύο ρίζας ἴσας μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἢ $x_1 = x_2 = \frac{-(-14)}{2 \cdot 49} = \frac{1}{7}$.

Ἐφαρμογὴ 3. $x \in \Pi \ \exists x ; \ 5x^2 - 3x + 15 = 0$.

Ἔχομεν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4.5.15 = 9 - 300 = -291 < 0$.

Ἡ διακρίνουσα εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας $\in \Pi$.

§ **89.** ***Ἁπλοποίησις τοῦ τύπου A, ὅταν ὁ β εἶναι ἄρτιος.***

Ὅταν ὁ β εἶναι ἄρτιος, εἶναι δυνατὸν νὰ τόν ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ $2\beta'$, ὅπου β' εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ β.

Ἡ ἀντικατάστασις αὐτὴ μετασχηματίζει τὸν τύπον (A) εἰς τὸν

$$\boxed{x = \frac{-2\beta' \pm \sqrt{4\beta'^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}} \qquad B$$

Ἐφαρμογή. $x \in \Pi \ \exists x ; \ 3x^2 + 4x - 4 = 0$

Ἔχομεν $\beta = 4$ ἄρα $\beta' = \frac{\beta}{2} = 2$. Ἄρα $\beta'^2 - \alpha\gamma = 2^2 - 3(-4) = 16$, ὁπότε

ὁ (B) δίδει $x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{2}$. Ἄρα

$$x_1 = \frac{-2+4}{3} = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{-2-4}{3} = -2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

136. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α) $x^2 - 9 = 0$ β) $3x^2 - 4 = 0$ γ) $5x^2 - 2 = 0$

δ) $5x^2 - 36 = 0$ ε) $4x^2 - 49 = 0$ στ) $\frac{x^2}{9} - \frac{1}{3} = 0$

ζ) $\frac{x^2-9}{3} = \frac{x^2-1}{2}$ η) $\frac{6}{7x^2} - \frac{4}{9x^2} - \frac{4}{25} = 0$ θ) $\frac{3x^2-5}{6} = 7 - \frac{x^2+2}{3}$

137. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α) $7x^2+58x=0$ β) $\frac{3x^2}{4}=\frac{7x}{3}-\frac{x}{3}$ γ) $3\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right)=\frac{5x^2}{3}$

δ) $\frac{5x^2}{3}-\frac{2x}{5}=\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{5}$ ε) $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=2x-\frac{1}{16}$

138. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $x^2+12x-160=0$ β) $4x^2+9x+2=0$ γ) $5x^2+10=27x$

δ) $3x^2-9x+6=0$ ε) $2x^2+\frac{9}{16}=x$ στ) $\frac{3x^2}{4}+2x+\frac{4}{3}=0$

ζ) $\frac{x^2}{3}+\frac{12}{25}=\frac{4x}{5}$ η) $x(x+12)+35=0$ θ) $13x-4(2-x^2)=4$

ι) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2$ ια) $x+\frac{1}{x-3}=5$ ιβ) $2\left(10-\frac{x^2}{3}\right)=(x-31)\frac{x}{3}$

139) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\frac{15}{x}-\frac{72-6x}{2x^2}=2$ β) $3x^2=\frac{2}{5}\left(x+\frac{4}{5}\right)+2x^2$

γ) $5(3x-2)^2-8(x+1)^2=-100$ δ) $\frac{x+1}{x}+1=\frac{x}{x-1}$

ε) $\frac{2x-1}{x-1}-\frac{2x-3}{x-2}+\frac{1}{6}=0$ στ) $\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}$

ζ) $\frac{1+x}{2+x}+\frac{2x+3}{1+x}=\frac{13}{3}$ η) $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}=2$

θ) $\frac{1}{3x^2-27}+\frac{3}{4}=\frac{1}{x-3}+1$ ι) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$

ια) $2x+x\sqrt{2}=(x\sqrt{2}+1)\ (x\sqrt{2}-1)$

ιβ) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{x-4}{x^2-1}$ ιγ) $\frac{3-8x}{7-15x}=\frac{-3-2x}{-14+3x}$

ιδ) $\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-5}+2=0$ ιε) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0$

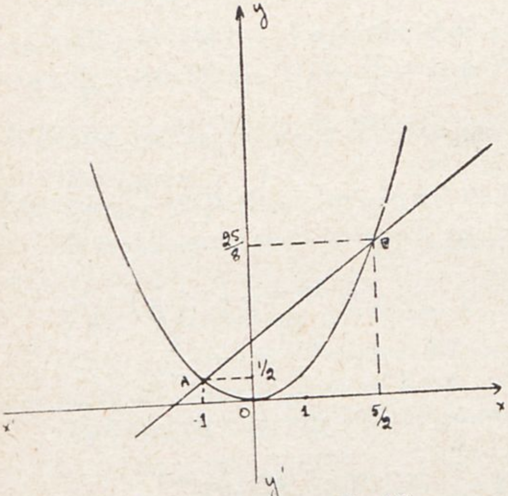
ιστ) $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{13}{2x-1}+\frac{1}{27}$

Γραφικὴ λύσις τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

§ **91.** ***Τομὴ δύο καμπύλων.*** Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν χαράξει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ γραφικοῦ σχεδίου τὰς δύο καμπύλας $y=f(x)$ καὶ $y=\varphi(x)$. Αἱ συντεταγμέναι x καὶ y κάθε κοινοῦ σημείου Α θὰ ἐπαληθεύουν τὰς δύο ἐξισώσεις καὶ θὰ ἀποτελοῦν μίαν λύσιν τοῦ συστήματος τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων. Ἀντιστρόφως : εἰς κάθε λύσιν τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ ἓν κοινὸν σημεῖον τῶν δύο καμπύλων.

§ **95.** ***Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας*** $3x-4y+5=0$ ***καὶ τῆς παραβολῆς*** $y=\frac{x^2}{2}$ (Σχ. 10).

Ἀπαλείφομεν τὸ y μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν $3x-2x^2+5=0$ ἢ $2x^2-3x-5=0$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ὡς πρὸς x εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῶν τετμημένων τῶν σημείων τῆς τομῆς. Αὐτὴ ἔχει δύο ρίζας $x_1=-1$ καὶ $x_2=\frac{5}{2}$, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς $y=\frac{1}{2}$ καὶ $y=\frac{25}{8}$. Οὕτω τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς εἶναι $A\left(-1, +\frac{1}{2}\right)$ καὶ $B\left(\frac{+5}{2}, \frac{+25}{8}\right)$.



Σχ. 10

§ **93.** ***Γραφικὴ λύσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Ἡ γραφικὴ λύσις μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως μᾶς δίδει τὰς λύσεις αὐτῆς κατὰ προσέγγισιν καὶ δὲν ἔχει τὴν ἀξίαν τῆς ἀριθμητικῆς λύσεως, ἡ ὁποία μᾶς παρέχει τὰς λύσεις ἀκριβῶς. Ἡ γραφικὴ ὅμως λύσις μᾶς ἑρμηνεύει κατὰ παραστατικὸν τρόπον τὰς τρεῖς περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν λύσιν. Διὰ νὰ λύσωμεν γραφικῶς τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

1) Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν ἰσοδύναμον μορφὴν $\alpha x^2=-\beta x-\gamma$.

2) Παριστάνομεν μὲ y τὴν κοινὴν τιμήν τῶν δύο μελῶν θέτοντες $y=\alpha x^2$ (1) $y=-\beta x-\gamma$ (2) καὶ οὕτω ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῶν σημείων τομῆς τῆς παραβολῆς (1) καὶ τῆς εὐθείας (2).

§ **94.** ***Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις*** $x^2-x-2=0$.

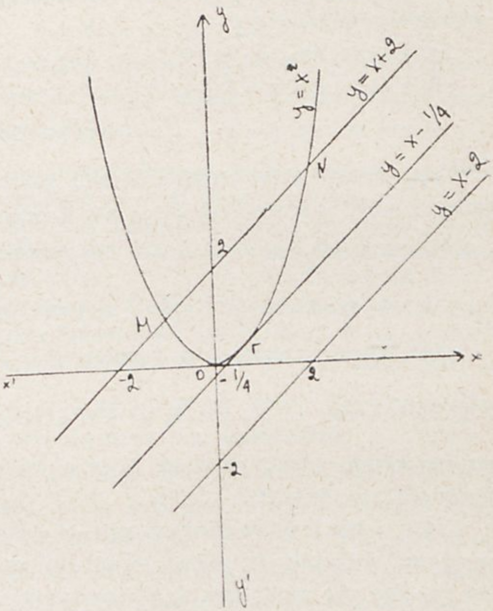
Γράφομεν $y = x^2$, (1) $y = x+2$ (2). Ἡ παραβολὴ μὲ ἐξίσωσιν (1) καὶ ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν (2) τέμνονται εἰς δύο σημεῖα $M(-1, +1)$ καὶ $N(+2, +4)$, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) (Σχ. 11).

Αἱ τετμημέναι -1 καὶ $+2$ τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι λοιπὸν αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 = x+2$ ἢ $x^2 - x - 2 = 0$.

§ **94.** ***Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις*** $x^2 - x + \frac{1}{4}$.

Ἡ παραβολὴ $y = x^2$ καί ἡ εὐθεῖα $y = x - \frac{1}{4}$ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον τὸ $\Delta\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}\right)$.

Ἡ τετμημένη $\frac{1}{2}$ τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι λοιπὸν ἡ μοναδικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως $x^2 = x - \frac{1}{4}$ ἢ $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ (Σχ. 11).



Σχ. 11

§ **95.** ***Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις*** $x^2 - x + 2 = 0$.

Ἡ παραβολὴ $y = x^2$ καὶ ἡ εὐθεῖα $y = x - 2$ δὲν ἔχουν ***κανένα κοινὸν σημεῖον.*** Δὲν ὑπάρχουν λοιπὸν λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 = x - 2$ ἢ τῆς $x^2 - x + 2 = 0$ $\in \Pi$ (Σχ. 11).

Συμπέρασμα. Ἐὰν δίδωνται μία παραβολὴ μὲ ἐξίσωσιν $y = kx^2$ καὶ μία εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $y = \alpha x + \beta$:

α) Ἡ παραβολὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $kx^2 = \alpha x + \beta$ ἔχει δύο ρίζας διαφορετικὰς $\in \Pi$.

β) Ἡ παραβολὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον (ἐφάπτονται), ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $kx^2=\alpha x+\beta$ ἔχῃ μίαν μόνον ρίζαν $\in \Pi$.

γ) Ἡ παραβολὴ καὶ ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $kx^2=\alpha x+\beta$ δὲν ἔχῃ ρίζας $\in \Pi$.

Ἡ ἐξίσωσις $kx^2=\alpha x+\beta$ ὀνομάζεται ἐξίσωσις ***τῶν τετμημένων τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο θεωρουμένων καμπύλων.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

140) Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς αἱ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων τῶν κάτωθι καμπύλων:

α) $y=x^2$ καὶ $y=3x+4$

β) $y=3x^2$ καὶ $y=2x+1$

γ) $y=x^2$ καὶ $y=3x-\frac{9}{4}$

δ) $y=x^2$ καὶ $y=4x-3$

ε) $y=2x^2$ καὶ $y=-3x-1$

στ) $y=2x^2$ καὶ $y=-x-\frac{1}{2}$

141) Χαράξατε ἐπὶ τετραγωνισμένου χάρτου τὴν καμπύλην $y=x^2$ καὶ προσδιορίσατε γραφικῶς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων:

α) $x^2-7=0$

β) $3x^2+4x-2=0$

γ) $2x^2+5x-3=0$

δ) $x^2-3x+1=0$

ε) $x^2-6x+9=0$

στ) $4x^2-12x+9=0$

142) Κατασκευάσατε τὴν καμπύλην $y=\frac{x^2}{4}$ καὶ τὴν εὐθεῖαν $y=+2x+5$ λαμβάνοντες τὸ $\frac{1}{2}$ cm ὡς μονάδα μήκους. Μετρήσατε τὰς τετμημένας τῶν κοινῶν σημείων των καὶ δείξατε ὅτι ἰσοῦνται μὲ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $x^2=8x+20$.

143) 1. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $x+y-4=0$ (δ) $x-2y+2=0$ (δ'). 2. Παραστήσατε γραφικῶς τὰς εὐθείας (δ) καὶ (δ') καὶ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῆς τομῆς των. 3. Κατασκευάσατε ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀξόνων τὴν καμπύλην (Γ), ἡ ὁποία παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $y=\frac{x^2}{2}$. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνει τὴν (δ) εἰς τὰ σημεῖα Ι καὶ Ζ, καὶ τὴν (δ') εἰς τά σημεῖα Ι' καὶ Ζ'. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ **96**. Ἄς θεωρήσωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς 1, 2, 3. ... ν (1) γραμμένους κατ' αὔξουσαν σειρὰν μεγέθους. Βάσει κάποιου νόμου ἀντιστοιχοῦμεν εἰς κάθε ὅρον τῆς (1) ἕνα καὶ μόνον ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν. Θὰ σχηματισθῇ τότε ἕνα ἀπειράριθμον πλῆθος πραγματικῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$ (2),

Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι γραμμένοι κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὡρισμένην τάξιν, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ***ἀριθμοακολουθίαν*** ἢ ἁπλῶς ***ἀκολουθίαν***.

> **Ἀκολουθίαν λέγομεν ἄπειρον πλῆθος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι, χωρὶς ἀναγκαστικῶς νὰ εἶναι ὅλοι διάφοροι μεταξύ των, προκύπτουν κατὰ ἕνα ὡρισμένον νόμον, καὶ εἶναι γραμμένοι ὁ ἕνας κατόπιν τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν ὡρισμένην διάταξιν ἢ ὅτι**
>
> **Ἀκολουθία εἶναι ἡ διαδοχὴ τῶν εἰκόνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐντὸς τοῦ συνόλου Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.**

Οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_\nu$ λέγονται ὅροι τῆς ἀκολουθίας. Ὁ ὅρος x_ν λέγεται καὶ ***γενικὸς*** ὅρος τῆς ἀκολουθίας.

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν γενικὸν ὅρον μιᾶς ἀκολουθίας, εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματίσωμεν αὐτὴν γράφοντες, ὁσουσδήποτε ὅρους θέλομεν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀκολουθία συμβολίζεται διὰ τοῦ γενικοῦ ὅρου της. Θὰ λέγωμεν δηλ. ἀκολουθίαν $\{x_\nu\}_{\nu=1,2,3.\ldots}$ ἐννοοῦντες τὴν ἀκολουθίαν (2).

Π.χ. Ἡ ἀκολουθία $\left\{\frac{1}{2\nu}\right\}$ ὁρίζεται εὐκόλως, ἐὰν εἰς τὸν γενικὸν ὅρον της $\frac{1}{2\nu}$ δώσωμεν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τῆς (1) καὶ εἰς τὴν θέσιν ἑκάστης ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν γράψωμεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως $\frac{1}{2\nu}$. Οὕτω δημιουργεῖται ἡ ἀκολουθία

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{2\nu}.$$

Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\nu(\nu+1)}$ ὁρίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον καὶ εἶναι ἡ $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots\ldots \frac{1}{\nu(\nu+1)}$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ διαδοχὴ τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει μία συνάρτησις, τῆς ὁποίας πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ πεδίον τιμῶν ἕνα ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐκ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων γίνεται φανερὸν ὅτι, ἐὰν ὁ νόμος, βάσει τοῦ ὁποίου δημιουργοῦνται οἱ διαδοχικοὶ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας, δίδεται διὰ τοῦ γενικοῦ ὅρου της, ἡ ἀκολουθία εἶναι τελείως καθωρισμένη. Εἶναι δυνατὸν ὅμως ὁ νόμος νὰ μὴ δίδεται διὰ τοῦ γενικοῦ ὅρου. Τότε ἡ ἀκολουθία δύναται νὰ εἶναι τελείως καθωρισμένη χωρὶς νὰ εἶναι πάντοτε δυνατὸν οὔτε εὔκολον νὰ γνωρίζωμεν τὸν γενικὸν ὅρον της ὡς συνάρτησιν τοῦ φυσικοῦ ν.

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν θὰ λέγωμεν συνήθως ἡ ἀκολουθία $\{x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\}$ ἐννοοῦντες τὴν ἀκολουθίαν (2).

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἐὰν δίδωνται οἱ δύο πρῶτοι ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας καὶ μία σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει τρεῖς τυχόντας διαδοχικοὺς ὅρους της, τότε τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ὅσους ὅρους θέλομεν, καὶ ἑπομένως αὐτὴ εἶναι τελείως ὡρισμένη.

Π. χ. δίδονται $x_1=2$, $x_2=3$ καὶ $x_\nu=2x_{\nu-1}, + 3x_{\nu-2}$. Τότε ἔχομεν

$$x_3=2x_2+3x_1 = 2.3 + 3.2 = 12$$
$$x_4=2x_3+3x_2 = 2.12+3.3 = 33$$
$$x_5=2x_4+3x_3 = 2.33+3.12 = 102.$$

.... καὶ ἡ ζητουμένη ἀκολουθία εἶναι 2, 3, 12. 33, 102, ...

Ἐπίσης εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ μία ἀκολουθία ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου της καὶ ἐκ μιᾶς σχέσεως, ἡ ὁποία συνδέει δύο τυχόντας διαδοχικοὺς ὅρους της. Π.χ. Ἐὰν μιᾶς ἀκολουθίας δίδεται ὁ πρῶτος ὅρος $x_1 = 2$ καὶ ἡ σχέσις $x_1 = \frac{2x_{\nu-1}}{3x_{\nu-1}+5}$, τότε εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι ἡ 2, $\frac{4}{11}, \frac{8}{67}$, . . . χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν ποία συνάρτησις τοῦ ν εἶναι ὁ x_ν.

§ **97.** Μία ἀκολουθία $\{x_\nu\}$ λέγεται

Αὔξουσα ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν, ὅταν οἱ ὅροι της εἶναι διατεταγμένοι κατὰ σειράν, χωρὶς νὰ ἐλαττοῦνται, δηλ. ὅταν ἰσχύη ἡ σχέσις $x_\nu \leqslant x_{\nu+1}$ διὰ πᾶν $\nu \in \Phi$.

Αὔξουσα ὑπὸ στενὴν ἔννοιαν, ὅταν οἱ ὅροι της εἶναι διατεταγμένοι κατ' αὔξουσαν σειράν, δηλ. ὅταν ἰσχύη ἡ σχέσις $x_\nu < x_{\nu+1}$ διὰ πᾶν $\nu \in \Phi$.

Φθίνουσα ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν, ὅταν οἱ ὅροι της εἶναι διατεταγμένοι κατὰ σειρὰν χωρὶς νὰ αὐξάνωνται, δηλ. ὅταν ἰσχύη ἡ σχέσις $x_\nu \geqslant x_{\nu+1}$ διὰ πᾶν $\nu \in \Phi$.

Φθίνουσα ὑπὸ στενὴν ἔννοιαν, ὅταν οἱ ὅροι της εἶναι διατεταγμένοι κατὰ σειράν ἐλαττούμενοι, δηλ. ὅταν ἰσχύη ἡ σχέσις $x_\nu > x_{\nu+1}$ διὰ πᾶν $\nu \in \Phi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

144) Εἰς τὴν ἀκολουθίαν x_1, x_2, x_3 εἶναι δεδομένη ἡ σχέσις $x_\nu = 3x_{\nu-1} + \nu(-1)^\nu$ καὶ ὅτι εἶναι $x_1 = 2$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ x_8, x_9 καὶ x_{12}.

145) Εἰς τὴν ἀκολουθίαν x_1 x_2, x_3 εἶναι δεδομένη ἡ σχέσις $x_\nu = \frac{2+x_{\nu-1}}{3-x_{\nu-1}}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ x_{12}, x_{16}, αἱ $x_1=4$.

§ **98.** ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ : Ἀριθμητικὴ πρόοδος λέγεται μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος ὅρος της γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως εἰς αὐτὸν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς (σταθερός), τὸν ὁποῖον προσθέτομεν εἰς ἕκαστον ὅρον διὰ νὰ δημιουργηθῆ ὁ ἑπόμενός του λέγεται ***λόγος*** τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Ἐὰν ὁ λόγος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι θετικός, οἱ ὅροι της βαίνουν αὐξάνόμενοι καὶ τότε λέγομεν ὅτι ἡ πρόοδος εἶναι μία ἀκολουθία αὔξουσα ὑπὸ στενὴν ἔννοιαν. Ἐὰν ὅμως ὁ λόγος εἶναι ἀρνητικός, οἱ ὅροι τῆς προόδου βαίνουν ἐλαττούμενοι καὶ ἡ πρόοδος εἶναι ἀκολουθία φθίνουσα ὑπὸ στενὴν ἔννοιαν. Π.χ. αἱ ἀκολουθίαι $1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ldots$ καὶ $12, 8, 4, 0, -4 \ldots\ldots$ εἶναι ἀριθμητικαὶ πρόοδοι. Ἐξ αὐτῶν ἡ μὲν πρώτη ἔχει λόγον 2, ἄρα εἶναι αὔξουσα, ἡ δὲ δευτέρα ἔχει λόγον -4, καὶ ἑπομένως εἶναι φθίνουσα.

Ἀπὸ τὸ ἀπειράριθμον πλῆθος τῶν διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἐξετάζομεν συνήθως ἕνα πεπερασμένον πλῆθος ἐξ αὐτῶν. Τότε ἐκτὸς τοῦ πρώτου ὅρου ὑπάρχει καὶ τελευταῖος. Οἱ δύο αὐτοὶ ὅροι λέγονται ***ἄκροι*** ὅροι τῆς προόδου. Μία ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι τελείως ὡρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον της x_1, τὸν λόγον της ω καὶ τὸ πλῆθος ν τῶν ὅρων της. Ἔχομεν τότε τὴν πρόοδον :

x_1,	$x_1+\omega$,	$x_1+2\omega$	$x_1+3\omega$.....
1ος ὅρος	2ος ὅρος	3ος ὅρος	4ος ὅρος.....

καὶ ἑπομένως ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν νυοστὴν τάξιν, τὸν ὁποῖον θὰ λέγωμεν καὶ τελευταῖον, εἶναι : $\boxed{x_\nu = x_1 + (\nu - 1)\omega \quad (1).}$

Ὁ τύπος (1) εἶναι μία πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις συνδέουσα τὰς μεταβλητὰς x_1, ν, ω, x_ν καὶ ἑπομένως εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμεν μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν μεταβλητῶν, ὅταν δοθοῦν αἱ τρεῖς ἄλλαι.

Ἐκ τοῦ (1) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τοὺς ἄκρους ὅρους x_1 καὶ x_ν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν. Ἔχομεν λοιπὸν $x_\nu - x_1 = (\nu-1)\omega$

$$\boxed{\text{ἢ} \quad \omega = \frac{x_\nu - x_1}{\nu - 1}}$$

§ **99.** ***Παρεμβολὴ ὅρων.*** Ὀνομάζομεν ἀριθμητικοὺς μέσους τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν μὲ δύο δοθέντας ἀριθμοὺς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἄκροι ὅροι της.

§ **100.** ***Πρόβλημα 1ον. Μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθῇ ἕνας ἀριθμητικὸς μέσος.***

Λύσις. Ἔστω $x \in \Pi$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Θὰ ἔχωμεν τότε τὴν ἀριθμ. πρόοδον α, x, β, καὶ ἔστω ω ὁ λόγος της. Τότε θὰ εἶναι $x = \alpha + \omega$ (1) καὶ $x = \beta - \omega$ (2). Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $2x = \alpha + \beta \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\alpha+\beta}{2}}$

Ὁ ἀριθμὸς x, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, λέγεται ***ἀριθμητικὸς μέσος*** τῶν α καὶ β. Ἄρα ***ὁ ἀριθμητικὸς μέσος δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι τὸ ἡμιάθροισμά των.***

§ **101**. ***Πρόβλημα 2ον. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθοῦν μ ἀριθμητικοὶ μέσοι.***

Λύσις. Ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον ω τῆς προόδου, ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ.

Ἡ πρόοδος αὐτὴ εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχῃ μ+2 ὅρους δηλ. τοὺς μ μέσους καὶ τοὺς δύο ἄκρους ὅρους α καὶ β.

Ἔχομεν λοιπὸν $\beta=\alpha+(\mu+1)\omega$ (§ 100 τύπος 1) $\Longrightarrow$

$$\boxed{\omega=\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}}$$

§ **102**. ***Παράδειγμα 1ον. Μεταξὺ τῶν 80 καὶ 50 νὰ παρεμβληθοῦν 5 ἀριθμητικοὶ μέσοι.***

Ἔχομεν $\omega=\dfrac{50-80}{5+1}=-5$. Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι 80, 75, 70, 65, 60, 55, 50.

§ **103**. ***Παράδειγμα 2ον. Νὰ παρεμβληθοῦν 3 ἀριθμητικοὶ μέσοι μεταξὺ ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 5, 13, 21, 29. 37......***

Λύσις. Ὁ λόγος τῶν μερικῶν προόδων θὰ εἶναι

$$\frac{13-5}{3+1}=2,\ \frac{21-13}{31+1}=2,\ \frac{29-21}{3+1}=2,\ \frac{37-29}{3+1}=2.$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν διαδοχικῶς :

5, 7, 9, 11, 13
13, 15, 17, 19, 21
21, 23, 25, 27, 29 ...... τὸ ὁποῖον γράφεται
5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 ...... Ἄρα

> **Ἐὰν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου παρεμβάλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέσων, αἱ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματιζόμεναι μερικαὶ πρόοδοι σχηματίζουν μίαν καὶ μόνον μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον.**

§ **104**. **Ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων ἀριθμητ. προόδου.**

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος α, β, γ, δ, ... κ, λ, μ, ρ.

α) Λαμβάνομεν τοὺς ὅρους γ καὶ λ, οἱ ὁποῖοι ἰσαπέχουν τῶν ἄκρων καὶ ὑπολογίζομεν τὸ ἄθροισμά των.

Ἔχομεν $\gamma=\alpha+2\omega$ (1) (ω ὁ λόγος τῆς προόδου) καὶ

$\rho=\lambda+2\omega$ ἢ $\lambda=\rho-2\omega$ (2).

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$$\gamma+\lambda=\alpha+2\omega+\rho-2\omega=\alpha+\rho.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\delta+\kappa=\alpha+\rho$, $\beta+\mu=\alpha+\rho$.....

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

> **Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἰσαπέχουν τῶν ἄκρων ὅρων, εἶναι σταθερὸν καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν ἄκρων.**

Σημείωσις : Ἐὰν τό πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἀριθμὸς περιττός, τότε ὑπάρχει εἰς τὴν πρόοδον αὐτὴν ***μεσαῖος ὅρος***, δηλ. ὅρος ἰσαπέχων τῶν δύο ἄκρων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ διπλάσιον τοῦ μεσαίου ὅρου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων ὅρων.

β) Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἐφαρμόζομεν τὴν κατωτέρω πρότασιν.

Ἔστω Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς προόδου

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots\ x_{\nu-2},\ x_{\nu-1},\ x_\nu\,.$$

Ἔχομεν τότε $\Sigma=x_1+x_2+x_3+\ \ldots\ldots\ +x_{\nu-2}+x_{\nu-1}+x_\nu.$

$$\Sigma=x_\nu+x_{\nu-1}+x_{\nu-2}+\ \ldots\ldots\ +x_3+x_2+x_1.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας αὐτὰς εὑρίσκομεν

$$2\Sigma=(x_1+x_2)+(x_2+x_{\nu-1})+(x_3+x_{\nu-2})+\ldots\ldots+(x_{\nu-2}+x_3)+(x_{\nu-1}+x_\nu)+$$

$$+(x_\nu+x_1)\quad \text{ἤ}\quad 2\Sigma=(x_1+x_\nu)\nu \Longrightarrow \boxed{\Sigma=\frac{(x_1+x_\nu)\nu}{2}}\ (1).$$ Ἄρα :

> **Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της.**

Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας ὅτι $x_\nu=x_1+(\nu-1)\omega$ (2), τότε ὁ (1) γίνεται $\boxed{\Sigma=\left[\frac{2x_1+(\nu-1)\omega}{2}\right]\nu\ \ (3).}$

Ἂν τώρα κάθε ἕνας ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (3) συνδυασθῇ μὲ τὸν (2), σχηματίζονται δύο συστήματα. Ἐκ τῶν συστημάτων αὐτῶν δυνάμεθα γενικῶς νὰ ὁρίσωμεν δύο ἐκ τῶν ὅρων x_1, x_ν, ν, ω καὶ Σ, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς τρεῖς ἄλλους.

§ **105.** ***Παράδειγμα 1ον. Μία ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον τὸν 2 καὶ ὡς τελευταῖον τὸν 242. Ἐὰν ἔχῃ 82***

ὅρους, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῶν καθὼς καὶ ὁ 41ος ὅρος της.

α) Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της εἶναι :

$$\Sigma = \frac{(x_1+x_\nu)\nu}{2} = \frac{(2+242)\,82}{2} = 10004.$$

β) Ὁ 41ος ὅρος της ἔχει 40 ὅρους πρὸ αὐτοῦ καὶ 40 ὅρους μετὰ ἀπ' αὐτόν. Ἄρα ἰσαπέχει τῶν ἄκρων. Ἂν καλέσωμεν αὐτὸν x, θὰ ἔχωμεν $x+x=2+242 \longrightarrow x = \frac{2+242}{2} = 122.$

§ **106.** ***Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.***

Ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 1 καὶ ὁ νυοστὸς $1+2\ (\nu-1)=2\nu-1$.

Ἄρα $\Sigma = \frac{(1+2\nu-1)\,\nu}{2} = \nu^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

146. Νὰ σχηματισθοῦν αἱ ἀριθμ. πρόοδοι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν

α) πρῶτον ὅρον	2	καὶ	λόγον	3
β) »	»	4	»	»	-2
γ) »	»	-7	»	»	$+2$
δ) »	»	$\frac{2}{3}$	»	»	$\frac{1}{2}$

147. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 12ος ὅρος τῆς προόδου $\div$ 12, 17, 22...

148. ὁ 58ος ὅρος τῆς προόδου $\div -5,\ -3\ -1,\ldots$

149) Ὁ 198 ἄρτιος διαδοχικὸς ἀριθμός.

150) Μία ἀριθμ. πρόοδος ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν 15 καὶ λόγον 8. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 12ος ὅρος της·

151) Μία ἀριθμ. πρόοδος ἔχει 12 ὅρους, λόγον 8 καὶ τελευταῖον τὸν 70. Ποῖος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου ;

152) Μία ἀριθμ. πρόοδος ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν 1, τελευταῖον τὸν $-\frac{130}{9}$ καὶ λόγον $-\frac{1}{9}$. Πόσους ὅρους ἔχει ;

153) Μία ἀριθμ. πρόοδος ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον τὸν 11 καὶ τελευταῖον τὸν 95. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της εἶναι 8, ποῖος εἶναι ὁ λόγος της;

154) Μία ἀριθμ. πρόοδος ἔχει πρῶτον ὅρον τὸν 5, καὶ λόγον 2. Ὁ ἀριθμὸς 341 ἀνήκει εἰς τὴν πρόοδον;

155) Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἀριθμ. πρόοδος τῆς ὁποίας

α) ὁ 6ος ὅρος εἶναι 33 καὶ ὁ 10ος ὁ 13

β) ὁ 3ος ὅρος εἶναι 0 καὶ ὁ 29ος ὁ 260.

156) Νὰ εὑρεθοῦν 6 ἀριθμοὶ σχηματίζοντες ἀριθμ. πρόοδον, ἐὰν γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου ὅρου εἶναι 30, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου εἶναι 26.

157) Νὰ παρεμβληθοῦν 3 ἀριθμητικοὶ μέσοι μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 1.

158) Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμητικοὶ μέσοι μεταξὺ τοῦ 3 καὶ τοῦ 30.

159) Μία ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον τὸν 5 καὶ λόγον $-\frac{1}{4}$. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν 18 ὅρων της;

160) Μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ὁ λόγος εἶναι $\frac{2}{5}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν 16 ὅρων της εἶναι 175. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου.

161) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

α) τῶν 15 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 3, 9, 15 ..,...

β) » 27 » » » » 1, 8, 15

γ) » 23 » » » » —17, —15, —13

δ) » 12 » » » » $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\ldots$

162) Μεταξὺ 3 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 9 ὅροι οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος ἐξ 11 ὅρων. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της;

163) Ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 3 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 15 ὅρων της εἶναι 435. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου.

164) Ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 3, ὁ λόγος 7 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της 279. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της.

165) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 15 ἀρτίων ἀριθμῶν, ποὺ ἕπονται τοῦ 99,

166) Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ 3ος ὅρος εἶναι ὁ —14 καὶ ὁ 15ος ὁ 46. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

167) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7 τῶν περιεχομένων μεταξὺ 30 καὶ 300.

168) Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ 3ος ὅρος εἶναι 18 καὶ ὁ 9ος ὁ 48. Νὰ εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν 12 πρώτων ὅρων της.

169) Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 7, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της 12 καὶ τὸ ἄθροισμά των 414. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς προόδου.

170) Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 5, ὁ τελευταῖος 49 καὶ τὸ ἄθροισμα 621. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων καὶ ὁ λόγος.

§ **107.** ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ. Γεωμετρικὴ πρόοδος λέγεται μιὰ ἀκολουθία ἀριθμῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος ὅρος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν (σταθερὸν) ἀριθμόν.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὴν γεωμ. πρόοδον λέγονται ***ὅροι*** της, ὁ δὲ ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν ἑπόμενον, λέγεται ***λόγος*** τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Π.χ. αἱ ἀκολουθίαι $3, 6, 12, 24 \ldots$ (1), $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8} \ldots$ (2)
$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots$ (3)
εἶναι γεωμ. πρόοδοι καὶ ἔχουν λόγον ἡ μὲν (1) τὸν 2, ἡ δὲ (2) τὸ $\frac{1}{2}$. Ἡ (3) ἔχει λόγον $-\frac{1}{3}$ καὶ ἑπομένως οἱ ὅροι της εἶναι ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί. Ἐὰν λάβωμεν χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικοὺς ὅρους της, σχηματίζονται δύο ἄλλαι γεωμ. πρόοδοι, αἱ $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \ldots$ καὶ $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{243}, \ldots$, ποὺ ἡ κάθε μία ἔχει λόγον θετικὸν τὸ $\frac{1}{3}$. Ἕνεκα τούτου θὰ ἐργασθῶμεν κατωτέρω μὲ γεωμ. προόδους, αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγον θετικόν.

Ἐὰν καλέσωμεν x, τὸν πρῶτον ὅρον καὶ ω τὸν λόγον μιᾶς γεωμ. προόδου, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν εἶναι $\omega > 1$, τότε θὰ εἶναι $\alpha\omega > \alpha$ ἂν $\alpha > 0$, καὶ $\alpha\omega < \alpha$, ἂν $\alpha < 0$. Ἂν δὲ $0 < \omega < 1$, τότε θὰ εἶναι $\alpha > \alpha\omega$ ἂν $\alpha > 0$ καὶ $\alpha < \alpha\omega$ ἂν $\alpha < 0$. Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι :

α) Οἱ ὅροι γεωμ. προόδου βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶναι αὔξουσα ἀκολουθία ὑπὸ στενὴν ἔννοιαν, ἂν εἶναι $\omega > 1$ καὶ $\alpha > 0$ ἢ $0 < \omega < 1$ καὶ $\alpha < 0$. Π.χ. ἡ (1) εἶναι αὔξουσα πρόοδος.

β) Οἱ ὅροι γεωμ. προόδου βαίνουν ἐλαττούμενοι καὶ ἡ πρόοδος εἶναι ἀκολουθία φθίνουσα ὑπὸ στενὴν ἔννοιαν, ἐὰν εἶναι $\omega > 1$ καὶ $\alpha < 0$ ἢ $0 < \omega < 1$ καὶ $\alpha > 0$. Π.χ. ἡ (2) εἶναι φθίνουσα πρόοδος.

Ἐὰν ὁ λόγος γεωμ. προόδου εἶναι ἀρνητικός, αὐτὴ θεωρεῖται αὔξουσα ἢ φθίνουσα, καθ' ὅσον οἱ ὅροι της ἀπολύτως λαμβανόμενοι βαίνουν αὐξανόμενοι ἢ ἐλαττούμενοι. Αὐτὸ συμβαίνει, ἐὰν ὁ λόγος της εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ 1.

Μία γεωμ. πρόοδος εἶναι τελείως ὡρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον της x_1, τὸν λόγον ω καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της·

Ἔχομεν τότε τὴν πρόοδον :

x_1	$x_1\omega$	$x_1\omega^2$	$x_1\omega^3$......
1ος ὅρος	2ος ὅρος	3ος ὅρος	4ος ὅρος...

καὶ ἑπομένως ὁ ὅρος ὁ κατέχων τήν νυοστὴν τάξιν, τὸν ὁποῖον θὰ λέγωμεν καὶ τελευταῖον, εἶναι $\boxed{x_\nu = x_1\omega^{\nu-1}}$ (1).

Ὁ τύπος (1) συνδέει τὰς μεταβλητὰς x_1, x_ν, ω, ν καὶ ἑπομένως εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιωρίσωμεν μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν μεταβλητῶν, ὅταν δοθοῦν αἱ τρεῖς ἄλλαι.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ὅταν γνωρίζωμεν τούς ἄκρους ὅρους x_1 καὶ x_ν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν. Ὁ τύπος (1) γράφεται διαδοχικῶς ;

$$\omega^{\nu-1} = \frac{x_\nu}{x_1} \Longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt[\nu-1]{\frac{x_\nu}{x_1}}}$$

§ **108**. ***Παρεμβολὴ ὅρων.*** Ὀνομάζομεν γεωμετρικοὺς μέσους τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν μὲ δύο δοθέντας ἀριθμοὺς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἄκροι ὅροι της.

§ **109**. ***Πρόβλημα Ι. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθῇ ἕνας γεωμετρικὸς μέσος.***

Λύσις. Ἔστω $x \in \Pi$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Θὰ ἔχωμεν τότε τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον α, x, β, τῆς ὁποίας ὁ λόγος ἔστω ω. Τότε θὰ εἶναι $x = \alpha\omega$ (1) καὶ $x = \frac{\beta}{\omega}$ (2). Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $x^2 = \alpha\beta \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt{\alpha\beta}}$

Ὁ ἀριθμὸς x, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, λέγεται ***γεωμετρικὸς μέσος*** τῶν ἀριθμῶν α καὶ β. Ἄρα

Ὁ γεωμετρικὸς μέσος δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β ἰσοῦται μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου των.

§ **110.** ***Πρόβλημα ΙΙ. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθοῦν μ γεωμετρικοὶ μέσοι.***

Λύσις. 'Αρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον ω τῆς προόδου, ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ. Ἡ πρόοδος αὐτὴ εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχῃ $\mu+2$ ὅρους, δηλ. τοὺς μ μέσους καὶ τοὺς δύο ἄκρους ὅρους α καὶ β.

Ἔχομεν λοιπὸν $\beta = \alpha\omega^{\mu+1} \Longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt[\mu+1]{\dfrac{\beta}{\alpha}}}$ (§ 107 τύπ. 1)

Παράδειγμα. Νὰ παρεμβληθοῦν τρεῖς γεωμετρικοὶ μέσοι μεταξὺ ὅλων τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου 2, 32, 512, 8192. . . .

Ὁ λόγος τῶν μερικῶν προόδων εἶναι $\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}} = 2$, $\sqrt[4]{\dfrac{512}{32}} = 2$

$\sqrt[4]{\dfrac{8192}{512}} = 2.$

Ἔχομεν λοιπὸν διαδοχικῶς

2, 4, 8, 16, 32
32, 64, 128, 256. 512
512, 1024, 2048, 4096. 8192 τὸ ὁποῖον γράφεται
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192 . . . Ἄρα

'Εὰν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου παρεμβάλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέσων, αἱ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματιζόμεναι μερικαὶ πρόοδοι σχηματίζουν μίαν καὶ μόνον μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον.

§ **111.** ***Ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.***

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{\nu-2}, x_{\nu-1}, x_\nu$ μὲ λόγον $\omega > 1$. Ἔστω Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της. Ἔχομεν τότε $\Sigma = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_{\nu-2} + x_{\nu-1} + x_\nu$ ἢ

$$\Sigma = x_1 + x_1\omega + x_1\omega^2 + \ldots + x_1\omega^{\nu-3} + x_1\omega^{\nu-2} + x_1\omega^{\nu-1} \quad (\alpha)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς (α) ἐπὶ ω καὶ ἔχομεν

$$\Sigma\omega = x_1\omega + x_1\omega^2 + x_1\omega^3 + \ldots\ldots + x_1\omega^{2\nu-2} + x_1\omega^{\nu-1} + x_1\omega^\nu \quad (\beta)$$

'Αφαιροῦντες ἀπὸ τὴν (β) τὴν (α) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\Sigma\omega - \Sigma = x_1\omega^\nu - x_1 \Longrightarrow \Sigma(\omega-1) = x_1\omega^\nu - x_1 \Longrightarrow \Sigma = \frac{x_1\omega^\nu - x_1}{\omega-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Sigma = \frac{x_1(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}} \quad (1)$$

Ἐὰν $\omega < 1$, ὁ (1) γίνεται $\Sigma - \Sigma\omega = x_1 - x_1\omega^\nu \Longrightarrow \Sigma = \frac{x_1 - x_1\omega^\nu}{1-\omega} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Sigma = \frac{x_1(1 - \omega^\nu)}{1 - \omega}} \quad (2)$$

Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) ἀντικαταστήσωμεν τὸν $x_1\omega^{\nu-1}$ διὰ τοῦ x^ν, εὑρίσκομεν $\boxed{\Sigma = \frac{x_\nu \omega - x_1}{\omega - 1}}$ (3) καὶ $\boxed{\Sigma = \frac{x_1 - x_\nu \omega}{1 - \omega}}$ (4)

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 9 πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου 2, 4, 8, 16 . . . .

Ἔχομεν $x_1 = 2$, $\omega = 2$, $\nu = 9$, ἄρα $\Sigma = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} = 1022$.

Παράδειγμα 2ον Μία γεωμετρικὴ πρόοδος ἐκ 5 ὅρων ἔχει πρῶτον ὅρον 8 καὶ λόγον 6. Νὰ εὑρεθῇ ὁ x^ν καὶ τὸ Σ.

Ἐκ τῶν τύπων $x_\nu = x_1\omega^{\nu-1}$ καὶ $\Sigma = \frac{x^\nu \omega - x_1}{\omega - 1}$ ἔχομεν

$x_\nu = 8 \cdot 6^4 = 10368$ καὶ $\Sigma = \frac{10368 \cdot 6 - 8}{5} = 12440.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

171) Νὰ σχηματισθοῦν αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν

α) $x_1 = 2$ καὶ $\omega = 3$

β) $x_1 = \frac{1}{3}$ καὶ $\omega = \frac{1}{4}$

γ) $x_1 = 3\alpha$ καὶ $\omega = 2\beta$

172) Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ 15ος ὅρος τῆς γεωμετρ. προόδου 1, 3, 9....

β) ὁ 10ος » » » » $1, \frac{5}{4}, \frac{25}{6}\ldots$

γ) ὁ 13ος » » » » $\frac{2}{3}. \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$

δ) ὁ 20ος » » » » $-\frac{8}{25}. \frac{4}{5}, -2\ldots$

173) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἐὰν

α) ὁ $\omega = 3$ καὶ ὁ 8ος ὁ 6541

β) ὁ $\omega = 2$, $\nu = 12$ καὶ ὁ $x_\nu = 4096$

γ) ὁ $\omega = \frac{1}{3}$, $\nu = 5$ καὶ ὁ $x_\nu = \frac{2}{27}$

174) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἐὰν ὁ 4ος ὅρος της εἶναι 13, ὁ 6ος ὅρος 117 καὶ ὁ τελευταῖος 9477.

175) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $15 + x$, $27 + x$, $45 + x$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, νὰ εὑρεθῇ ὁ x.

176) Ὁ δεύτερος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 10 καὶ ὁ 6ος ὅρος εἶναι 160. Ποῖος εἶναι ὁ τέταρτος ὅρος της;

177) Μεταξὺ 2 καὶ 128 νὰ παρεμβληθοῦν 5 ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες μετ' αὐτῶν γεωμετρικὴν πρόοδον.

178) Μεταξὺ τῶν 4375 καὶ 7 νὰ παρεμβληθοῦν 3 γεωμετρικοὶ μέσοι.

179) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 ὅρων τῆς προόδου 81, 27, 9, 3.

180) Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 18 ὅρων τῆς προόδου $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \ldots$

181) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 5, ὁ λόγος 4 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων 7. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων.

182) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἐξ 6 ὅρων, ὁ πρῶτος εἶναι 15 καὶ ὁ λόγος $\frac{1}{5}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων·

183) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 56250, ὁ λόγος $\frac{1}{5}$ καὶ ὁ τελευταῖος 10. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῶν.

184) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἐκ 5 ὅρων ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων $\frac{341}{3}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος.

185) Εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 32 καὶ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν ἕκτον ὅρον της εἶναι 17496. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγδοος ὅρος της.

186) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἂν ὁ πρῶτος εἶναι 9 καὶ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ τρίτου εἶναι 7.

187) Μία γεωμετρικὴ πρόοδος ἔχει 5 ὅρους. Ὁ λόγος της ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι 18. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ 5 ὅροι.

188) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\Sigma = 4 + 44 + 444 + \ldots$ ἐκ ν ὅρων.

189) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐὰν τὸ γινόμενόν των εἶναι 216 καὶ ὁ τρίτος εἶναι 4πλάσιος τοῦ πρώτου.

ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ **112.** Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο αὐξούσας προόδους, μίαν γεωμετρικήν, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸ 1 καὶ μίαν ἀριθμητικήν, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸ μηδέν, καὶ γράφομεν τὴν μίαν κάτωθεν τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε οἱ ὅροι των νὰ ἀντιστοιχοῦν ἕνας πρὸς ἕνα.

Π. χ. $\div\div$ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ... (1)

$\div$ 0, 2, 4, 6. 8, 10, 12 ..... (2)

Ἐξ ὁρισμοῦ, κάθε ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου λέγεται ***λογάριθμος*** τοῦ ἀντιστοίχου του ὅρου τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Π.χ. ὁ 4 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 9.

Ἀντιστρόφως : κάθε ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου λέγεται ***ἀντιλογάριθμος*** τοῦ ἀντιστοίχου του ὅρου τῆς ἀριθμητικῆς.

Π. χ. ὁ 729 εἶναι ὁ ἀντιλογάριθμος τοῦ 12.

Αἱ πρόοδοι 1 καὶ 2 σχηματίζουν ἕνα λογαριθμικὸν σύστημα. Αἱ πρόοδοι αὐταὶ ἔχουν ἀντιστοίχως ὡς λόγους $\omega = 3$ καὶ $\lambda = 2$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι δυνατὸν νὰ δώσωμεν εἰς τὰ ω καὶ λ ὁποιασδήποτε τιμὰς θέλομεν (ἵνα αἱ πρόοδοι εἶναι αὔξουσαι), ὑπάρχει μία ἀπειρία λογαριθμικῶν συστημάτων, τῶν ὁποίων ἡ γενικὴ μορφὴ εἶναι :

$$\div\div\ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5 \ldots\ldots \omega^\nu,$$
$$\div\ 0,\ \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda,\ 4\lambda,\ 5\lambda, \ldots\ldots \nu\lambda.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ τὸ μηδὲν εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 1, τὸ λ τοῦ ω, τὸ 2λ τοῦ ω^2, τὸ 3λ τοῦ ω^3 κ. ο. κ. καὶ τὸ νλ τοῦ ω^ν.

Παρατηροῦμεν ὅτι :

1) Ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος περιέχει ὅλας τὰς δυνάμεις τοῦ λόγου της.

2) Ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος περιέχει ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ λόγου της.

3) Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐκθέτης εἰς ἕνα τυχόντα ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι συντελεστὴς τοῦ ἀντιστοίχου ὅρου τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

§ **113.** ***Λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων τοῦ 1.*** Αἱ χρησιμοποιούμεναι πρόοδοι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν λογαρίθμων εἶναι δυνατὸν νὰ προεκταθοῦν ἐπ' ἄπειρον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά. Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ γράψωμεν

$$\ldots, \frac{1}{\omega^3}, \frac{1}{\omega^2}, \frac{1}{\omega} \;\Big|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} , \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots \\ , \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots \end{matrix}$$

Ὁ ὁρισμός, ὁ ὁποῖος ἐδόθη εἰς τοὺς λογαρίθμους, ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὸ συμπληρωμένον αὐτὸ σύστημα· καὶ λέγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega^2}, \frac{1}{\omega^3}$ οἱ μικρότεροι τοῦ 1 (ἀλλὰ θετικοὶ) ἔχουν ὡς λογαρίθμους τοὺς $-\lambda$, -2λ, $-3\lambda, \ldots$, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

§ **114.** ***Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα λογάριθμον.*** Κατὰ τὸν προηγούμενον ὁρισμόν, φαίνεται ὅτι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον, εἶναι οἱ μόνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν λογαρίθμους. Αὐτὸ ὅμως δὲν εἶναι ὀρθόν. Διότι εἶναι δυνατὸν νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἕνα ἀριθμὸν μέσων, ὁσονδήποτε θέλομεν μεγάλον, ὥστε ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων της νὰ εἶναι ὁσονδήποτε μικρὰ θέλομεν καὶ νὰ παρεμβάλωμεν κατόπιν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν μέσων μεταξὺ τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου. Ἔστω τώρα ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς Ν. Ἐὰν ὁ Ν ἀνήκῃ εἰς τὴν νέαν γεωμετρικὴν πρόοδον, θὰ ὑπάρχῃ εἰς τὴν νέαν ἀριθμητικὴν ὅρος, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι ὁ ἀντίστοιχος λογάριθμος τοῦ Ν. Ἐὰν ὁ Ν δὲν ἀνήκῃ εἰς τὴν νέαν γεωμετρικὴν πρόοδον, αὐτὴ θὰ περιέχῃ ἕνα ὅρον γειτονικὸν τοῦ Ν, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος θὰ εἶναι ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ Ν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον κάθε θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει ἕνα ἀκριβῆ λογάριθμον ἢ ἕνα κατὰ προσέγγισιν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

1) Ὅταν ἕνας ἀριθμὸς αὐξάνῃ καὶ ὁ λογάριθμός του αὐξάνει.

2) Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν λογαρίθμους ∈Π.

3) Ὁ λογάριθμος τοῦ 1 εἶναι τὸ μηδὲν εἰς πᾶν σύστημα λ ρίθμων.

4) Κάθε ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 1 θετικὸς ἔχει λογά ἀριθμὸν ἀρνητικόν.

5) Κάθε ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 1 ἔχει λογάριθμον ἀριθμὸν θετικόν.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων

§ **115.** *1η Ἰδιότης.* ***Ὁ λογάριθμος ἑνὸς γινομένου ἰσοῦται***

μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὰς προόδους.

$$\div\!\div\ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5,\ \omega^6 \ldots \omega^\nu \quad (1)$$

$$\div\ 0\ \ \lambda\ \ 2\lambda,\ 3\lambda,\ 4\lambda,\ 5\lambda,\ 6\lambda \ldots \nu\lambda \quad (2)$$

Λαμβάνομεν δύο τυχόντας ὅρους τῆς (1), ἔστω τοὺς ω^4 καὶ ω^6, τῶν ὁποίων οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀντιστοίχως 4λ καὶ 6λ. Τὸ γινόμενόν τῶν ω^4 καὶ ω^6 εἶναι ω^{10}, ὁ ὁποῖος εἶναι ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου, διότι αὐτὴ περιέχει ὅλας τὰς δυνάμεις τοῦ λόγου της. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο λογαρίθμων εἶναι $4\lambda + 6\lambda = 10\lambda$, καὶ εὑρίσκεται ἐπίσης ὡς ὅρος τῆς ἀρθμητικῆς προόδου, διότι αὐτὴ περιέχει ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ λόγου της. Ἄρα ὁ ὅρος 10λ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸν ω^{10}, τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ λογάριθμος.

Ὁμοίως ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου $\omega^3 . \omega^5 . \omega^8$ θὰ εἶναι ὁ $3\lambda + 5\lambda + 8\lambda$ ἢ ὁ 16λ.

Ἄρα, θὰ ἔχωμεν γενικῶς $\boxed{\text{λογ}(\alpha.\beta.\gamma) = \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \beta + \text{λογ}\ \gamma}$

§ **116.** *2α Ἰδιότης.* ***Ὁ λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.***

Ἔστω τὸ πηλίκον $\Pi = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Θὰ ἔχωμεν $\alpha = \Pi\beta$ καὶ ἕνεκα τῆς πρώτης ἰδιότητος $\text{λογ}\ \alpha = \text{λογ}\ \Pi + \text{λογ}\ \beta$ ἢ

$$\boxed{\text{λογ}\ \Pi = \text{λογ}\ \frac{\alpha}{\beta} = \text{λογ}\ \alpha - \text{λογ}\ \beta}$$

§ **117.** *3η Ἰδιότης.* ***Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως.***

Πράγματι ἔχομεν $\alpha^5 = \alpha . \alpha . \alpha . \alpha . \alpha$ ἢ

$$\boxed{\text{λογ}\ \alpha^5 = \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \alpha + \text{λογ}\ \alpha = 5\ \text{λογ}\ \alpha}$$

§ **118.** *4η Ἰδιότης.* ***Ὁ λογάριθμος ῥίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου, διῃρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης:***

Ἔστω $N = \sqrt[3]{\alpha}$ ἢ $N^3 = \alpha$ καὶ ἕνεκα τῆς 3ης ἰδιότητος

$$3\text{λογ}N = \text{λογ}\ \alpha \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{λογ}N = \frac{\text{λογ}\ \alpha}{3}}$$

Σημείωσις. Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων ἁπλοποιεῖ πολὺ τοὺς ὑπολογισμούς, διότι μᾶς ἐπιτρέπει τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ διαιρέσεως, τῆς διαιρέσεως δι' ἀφαιρέσεως, τῆς ὑψώσεως μιᾶς δυνάμεως διὰ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης διὰ διαιρέσεως.

§ **119**. ***Δεκαδικὸς λογάριθμος.*** Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔχομεν καταλήξει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία λογαριθμικῶν συστημάτων καὶ ὅτι εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ συστήματα ὁ λογάριθμος τοῦ 1 εἶναι τὸ μηδέν. ***Ἡ βάσις ἑνὸς συστήματος λογαρίθμων εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει λογάριθμον τὴν μονάδα.***

§ **120.** ***Δεκαδικὸν σύστημα λογαρίθμων.*** Οἱ δεκαδικοὶ λογάριθμοι ἢ λογάριθμοι τοῦ Briggs ἢ κοινοὶ λογάριθμοι ἔχουν ὡς βάσιν τὸ 10 καὶ ὁρίζονται ἀπὸ τὰς προόδους.

$$\begin{array}{l}
\div\ \dots,\ \dfrac{1}{10^4},\ \dfrac{1}{10^3},\ \dfrac{1}{10^2},\ \dfrac{1}{10}\ \boxed{1}\ \boxed{10}\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \dots \\
\quad\ -4,\ -3,\ -2,\ -1\ \ \boxed{0}\ \ \boxed{1}\ \ 2,\ 3,\ 4,\ \dots
\end{array}$$

Εἰς τὸ σύστημα αὐτό : 1) ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως τοῦ 10 ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως. 2) Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον, εἶναι οἱ μόνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς λογαρίθμους ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ.

Πράγματι, κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 10, ἔχει ὡς λογάριθμόν του ἀριθμὸν μεταξὺ 0 καὶ 1, κάθε ἀριθμὸς μεταξὺ 10 καὶ 100 ἔχει ὡς λογάριθμόν του ἀριθμὸν περιεχόμενον μεταξὺ 1 καὶ 2 κ. ο. κ.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν γενικῶς ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ἀποτελοῦνται ἀπὸ ***ἕνα ἀκέραιον μέρος*** καὶ ἕνα ***δεκαδικὸν μέρος***. Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ ὀνομάζεται ***χαρακτηριστικὸν*** τοῦ λογαρίθμου.

§ **121.** Εἰς τοὺς κοινοὺς λογαρίθμους, ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ, μὲ τὸ 10^{ν}, . . . τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν μεταβάλλεται, ἐνῷ τὸ χαρακτηριστικόν του αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ ν μονάδας.

Π.χ. Ἔστω ὅτι ὁ 2, 67936 εἶναι ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ 10, 100, 1000 φορὲς μεγαλυτέρου του ἢ μικροτέρου του εὑρίσκεται, ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν εἰς τὸν 2,67936 τοὺς λογαρίθμους τοῦ 10, 100, 1000 κτλ. δηλ. 1, 2, 3 . . . ὁπότε ἡ πρᾶξις δὲν ἀλλάσσει παρὰ μόνον τὸ χαρακτηριστικόν, ἐνῷ τὸ δεκαδικὸν μέρος παραμένει ἀμετάβλητον.

Ἕνεκα τούτου, ***οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δὲν διαφέρουν παρὰ μόνον κατὰ τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἔχουν λογαρίθμους, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν, ἐνῷ τὸ δεκαδικὸν μέρος των εἶναι τὸ αὐτό***.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων δίδεται ὑπὸ εἰδικῶν πινάκων, τῶν ὁποίων τὴν χρῆσιν θὰ μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

§ **122.** ***Λογαριθμικὸς κανών.*** Τὰς ἰδιότητας τῶν κοινῶν λογαρίθμων ἐχρησιμοποίησαν οἱ Μαθηματικοὶ διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς χρησιμωτάτου λογιστικοῦ ὀργάνου, ***τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος*** (Σχ. 12).

Ὁ λογαριθμικὸς κανὼν ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία μέρη, δηλ. τὸν κυρίως κανόνα, τὸν σύρτην καὶ τὸν ἀναδρομέα.

Ὁ κανὼν καὶ ὁ σύρτης ἔχουν ὑποδιαιρέσεις, αἱ ὁποῖαι λέγονται κλίμακες. Ὁ ἀναδρομεὺς εἶναι κατασκευασμένος ἀπὸ μίαν διαφανῆ πλάκα, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει χαραχθῆ μία λεπτὴ γραμμὴ κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του καὶ καλύπτει ὅλον τὸ πλάτος τοῦ κανόνος.

§ **123.** ***Λογαριθμικὴ κλίμαξ.*** Ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος οx, (Σχ. 13) ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 0 καὶ πρὸς τὰ δεξιά, λαμβάνομεν τμήματα ἀνάλογα πρὸς τοὺς λογ 1 = 0 = 0 mm, λογ 2 = 0,30103 = 30,1 mm, λογ 3 = 0,47712 = 47,7 mm.... λογ 10 = 1 = 100 mm οὕτως, ὥστε τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα πρὸς τὸν λογ 10 νὰ ἰσοῦται μὲ ἕνα τυχὸν μῆκος π.χ. 100 mm. Τὸ τμῆμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογ 10, ὀνομάζεται μέτρον τοῦ κανόνος. (Σχ. 13). Γράφομεν κατόπιν ἀπέναντι τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων αὐτῶν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, . . . 10. Ἡ ἡμιευθεῖα 0x βαθμολογημένη κατὰ τὸν ἀνομοιόμορφον αὐτὸν τρόπον λέγεται ***λογαριθμικὴ κλίμαξ***, αἱ δὲ χαραγαὶ μὲ τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς λέγονται ***ἀριθμόσημα*** τῆς κλίμακος. Ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι εἰς κάθε σημεῖον Α τῆς 0x ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνα ἀριθμόσημον.

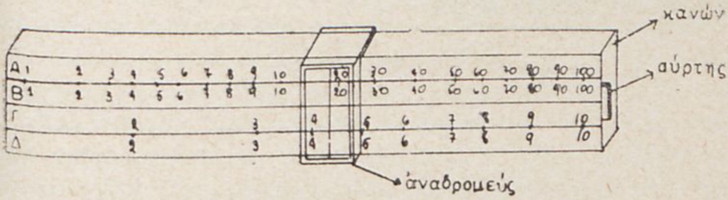
Ἂν θεωρήσωμεν δύο ἴσας λογαριθμικὰς κλίμακας (Σχ. 14) καὶ μετακινήσωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε τὸ ἀριθμόσημον 1 τῆς κάτω κλίμακος νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ἀριθμόσημον 2 τῆς ἐπάνω κλίμακος, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὰ ἀριθμόσημα 2, 3. κτλ. τῆς κάτω κλίμακος θὰ ἔχουν ὡς ἀντίστοιχα ἀριθμόσημα τῆς ἄνω κλίμακος τὰ $4 = 2 . 2$, $6 = 2.3$ κ.ο.κ., δηλ. τὰ ἀριθμόσημα τῆς κάτω κλίμακος θὰ ἔχουν ὡς ἀντίστοιχα εἰς τὴν ἄνω κλίμακα τὰ γινόμενά των ἐπὶ 2.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν μετακινήσωμεν τήν κάτω κλίμακα οὕτως, ὥστε τὸ ἀριθμόσημον 2 νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ἀριθμόσημον 1 τῆς ἄνω κλίμακος, τότε τὰ ἀριθμόσημα τῆς κάτω κλίμακος ἔχουν ὡς ἀντίστοιχά των εἰς τὴν ἄνω κλίμακα τὰ πηλίκα των διὰ 2.

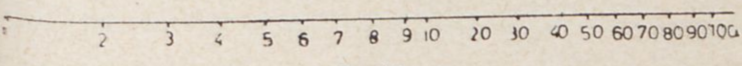
Αἱ παρατηρήσεις αὐταὶ δικαιολογοῦνται ἕνεκα τῆς κατασκευῆς τῆς λογαριθμικῆς κλίμακος καὶ τῶν ἰδιοτήτων 1ης καὶ 2ας τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

Ὁ κανὼν ἔχει δύο παραλλήλους λογαριθμικάς κλίμακας, μίαν ἄνω τὴν Α, μὲ μονάδα μήκους 125 mm. συνήθως διὰ τὸ διάστημα $1 \leq x \leq 100$ καὶ μίαν κάτω, τὴν Δ μὲ μονάδα μήκους διπλασίαν 250 mm. διὰ τὸ διάστημα $1 \leq x \leq 10$.

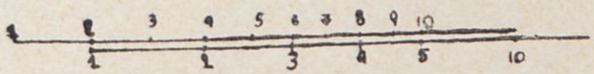
Ὁ σύρτης ἔχει ἐπίσης δύο λογαριθμικὰς κλίμακας, μίαν ἐπάνω, τὴν Β, ἴσην μὲ τὴν κλίμακα Α, καὶ μίαν κάτω τὴν Γ, ἴσην μὲ τὴν κλίμακα Δ. Μετακινοῦντες τὸν σύρτην καταλλήλως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιασμοὺς καὶ διαιρέσεις. Ὁ ἀναδρομεὺς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ὕψωσιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ριζῶν.



Σχ. 12



Σχ. 13



Σχ. 14

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

190) Ἐὰν λόγ$2=0{,}30103$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογ4, λογ8, λογ16, λογ20, λογ40, λογ0,2, λογ0,02, λογ200.

191) Ἐὰν λογ$3=0{,}47712$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογ9, λογ27, λογ$\sqrt{3}$, λογ$\sqrt{27}$.

192) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογ$\sqrt{10}$, λογ$\sqrt[4]{10}$, λογ$\sqrt[8]{10}$, λογ$\sqrt[10]{10}$.

193) Ἐὰν λογ$2=0{,}30103$ νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ$\frac{28}{5}$.

194) Νὰ δειχθῇ ὅτι :

α) $2\ \text{λογ}4+\text{λογ}5=4$, β) $\frac{\text{λογ}2}{2}+\frac{\text{λογ}8}{2}-2\ \text{λογ}2=0$

γ) $\text{λογ}\ \sqrt{647^4}=\frac{4\ \text{λογ}647}{2}$, δ) $\text{λογ}\frac{2}{3}+\text{λογ}\frac{3}{5}+\text{λογ}\frac{5}{2}=0$,

ε) $\frac{1}{2}\ \text{λογ}16+\frac{1}{2}\text{λογ}8+\frac{1}{5}\ \text{λογ}32=4\ \text{λογ}2$,

στ) $\text{λογ}(\alpha^4)+\text{λογ}(\alpha^3)+\text{λογ}\left(\frac{1}{\alpha^5}\right)=2\ \text{λογ}\ \alpha$.

195) Νὰ δειχθῇ ὅτι α) $\text{λογ}\frac{75}{16}-2\ \text{λογ}\frac{5}{9}+\text{λογ}\frac{32}{243}=\text{λογ}2$,

β) $\text{λογ}\frac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}=\frac{1}{4}\ \text{λογ}5-\frac{2}{5}\ \text{λογ}2-\frac{2}{3}\text{λογ}3$.

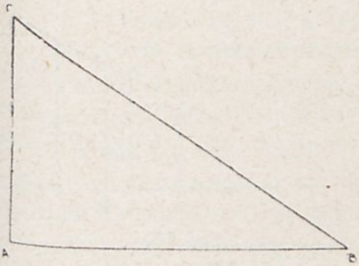
196) Μεταξὺ ποίων διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ 2 περιέχεται ἕκαστος ἐκ τῶν ἀριθμῶν 7, 41, 62, 98 καὶ συνεπῶς, ποῖον εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑκάστου μὲ βάσιν τὸν 2.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄

§ **124**. ***Πρόβλημα : Αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ΑΒ=9 cm. καὶ ΑΓ=6 cm. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.***

Λύσις : Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 15) μὲ τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν ἀκρίβειαν, καὶ μετροῦμεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα του χρησιμοποιοῦντες ἕνα ὑποδεκάμετρον καὶ ἕνα μοιρογνωμόνιον. Εὑρίσκομεν τότε ὅτι ΒΓ=10,8 cm καὶ ΑΒ=33° 30΄.



Σχ. 15.

Ἐὰν ὅμως ὑπολογίσωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, εὑρίσκομεν $ΒΓ=\sqrt{117}=$ $=10,816653......$ Ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν $\widehat{B}$, θὰ εὑρίσκαμεν $\widehat{B}=33^0\,41'\,24''$. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰ ἀποτελέσματα τῆς γραφικῆς λύσεως, καὶ τῆς δι᾽ ὑπολογισμοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραφική λύσις δὲν δίδει ἀκρίβειαν. Αὐτὸ προέρχεται ἀπὸ τήν ἀτέλειαν τῶν ὀργάνων καὶ τὴν ἀδεξίαν χρῆσιν των.

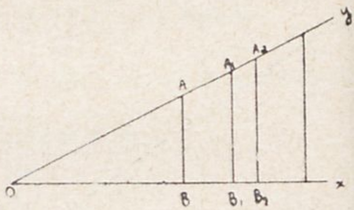
Ἐὰν ἔχωμεν νὰ κατασκευάσωμεν, ἰδίως γωνίας, καὶ γίνη ἕνα ἐλάχιστον σφάλμα, τοῦτο προξενεῖ σημαντικὰ σφάλματα καὶ εἰς τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Τὰ σφάλματα αὐτὰ αὐξάνονται ὅταν χρησιμοποιοῦνται ὅμοια σχήματα, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι σύνηθες. Π.χ. Ἂν τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἰς σχέδιον εὑρεθῇ μὲ σφάλμα 0,001 m, τὸ πραγματικὸν μῆκος θὰ ἔχῃ σφάλμα $0,001\times100.000=100$ m, ἂν ἡ κλίμαξ τοῦ σχεδίου εἶναι $\frac{1}{100.000}$.

§ **125**. Γνωρίζομεν ὅτι μὲ τήν βοήθειαν τῆς Γεωμετρίας ὑπολογίζομεν διάφορα γραμμικὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του.

Δὲν εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του ἢ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας του, ὅταν δοθοῦν αἱ πλευραί του. Θὰ ἦτο βέβαια δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου, ἂν κατεσκευάζαμεν τοῦτο γεωμετρικῶς καὶ ἐμετρούσαμεν αὐτά. Ἀλλὰ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἀνεφέραμεν τὰ μειονεκτήματα τῆς λύσεως αὐτῆς.

Διὰ νὰ ἀποφευχθοῦν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ σφάλματα τῆς γραφικῆς λύσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ νὰ συμπληρωθῇ ἡ Γεωμετρία εἰς πολλὰ ζητήματα, ἐπενοήθη καθαρῶς λογιστικὴ μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας ὁρίζονται ἀκριβῶς ἢ καὶ μὲ προσέγγισιν ἀρκετὰ μεγάλην αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, ὅταν δοθοῦν ἐπαρκῆ στοιχεῖα. Τὰς μεθόδους αὐτὰς διδάσκει ἡ ***Τριγωνομετρία.***

§ **126.** ***Ἰδιότητες τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.*** Ἔστω μία ὀξεῖα $\widehat{xoy}$ (Σχ. 16). Ἂν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς οy λάβωμεν τὰ σημεῖα Α, A_1, A_2 ...... καὶ ἐξ αὐτῶν φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν πλευρὰν οx, τὰς ΑΒ, A_1B_1, A_2B_2, σχηματίζονται ὅμοια τρίγωνα, τὰ ΑΟΒ, A_1OB_1, A_2OB_2, ... Ἐκ τῶν ὁμοίων αὐτῶν τριγώνων λαμβάνομεν τοὺς ἴσους λόγους :



Σχ. 16.

$$\frac{BA}{OB}=\frac{B_1A_1}{OB_1}=\frac{B_2A_2}{OB_2}=\ldots\ldots=k$$

$$\frac{BA}{OA}=\frac{B_1A_1}{OA_1}=\frac{B_2A_2}{OA_2}=\ldots\ldots=\lambda$$

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OB_1}{OA_1}=\frac{OB_2}{OA_2}=\ldots\ldots=\mu.$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἂν καὶ τὰ τρίγωνα αὐτὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ μέγεθος, οἱ λόγοι τῶν καθέτων πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῆς γωνίας Ο ἢ οἱ λόγοι τῶν καθέτων πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται εἰς τὴν Ο, πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ὑποτεινούσας εἶναι σταθεροί. Ἐπίσης οἱ λόγοι τῶν δύο καθέτων πλευρῶν εἶναι σταθεροί. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

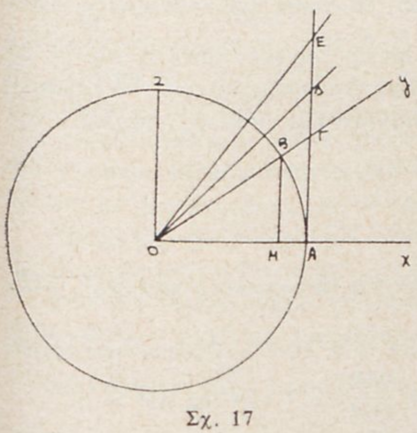
Ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία ὀξεῖα γωνία εἶναι σταθερά, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέτρον τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

§ **127**. ***Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας.*** Εἰς τὴν § 126 διεπιστώσαμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{BA}{OB}$ ἔχει μίαν σταθερὰν τιμὴν $k \geq 0$ ($k \in \Pi \geq 0$), ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$. Τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν k ὀνομάζομεν ***ἐφαπτομένην τῆς γωνίας*** $\widehat{xoy}$ καὶ τὸν σημειώνομεν ὡς ἑξῆς. εφ($\widehat{xoy}$) π.χ. Εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 124εἶναι $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Ἐφαπτομένη λοιπὸν ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν προσκειμένην πλευράν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ ἕνας ὡρισμένος ἀριθμὸς $k \geq 0$, ἡ ***«ἐφαπτομένη της»***. Καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε ἀριθμὸν $k \geq 0$ ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ὀξεῖα γωνία. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ δημιουργεῖ μίαν συνάρτησιν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ μὲ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $\Pi \geq 0$. Ἐὰν τὰς γωνίας τὰς ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὰ μέτρα των εἰς μοίρας, ἡ συνάρτησις γίνεται ἀριθμητικὴ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\{x^0 / 0 \leq x^0 < 90^0\}$ καὶ πεδίον τιμῶν $\{y / y \in \Pi \geq 0\}$ καὶ γράφεται συμβολικῶς $x^0 \rightarrow \varepsilon\varphi x^0$, $0 \leq x < 90^0$.

§ **128.** ***Γεωμετρικὴ σημασία τῆς ἐφαπτομένης.*** Ἂν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Ο μιᾶς ὀξείας γωνίας $\widehat{xoy}$ (Σχ. 17) καὶ μὲ ἀκτῖνα ΟΑ, ἴσην μὲ τὴν μονάδα μήκους, γράψωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου, αὐτὴ τέμνει τὰς πλευρὰς οχ καὶ οy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἂν ἐκ τῶν Β καὶ Α φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν οχ, τεμνούσας τὴν οχ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν οy εἰς τὸ Γ, σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΒ καὶ ΟΑΓ. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια, ἄρα



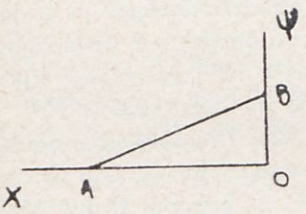
Σχ. 17

$\frac{MB}{OM} = \frac{A\Gamma}{OA}$. Ἀλλὰ $\frac{MB}{OM} = \varepsilon\varphi(\widehat{xoy})$ καὶ ΟΑ = 1. Ἄρα εφ($\widehat{xoy}$) =

$\frac{A\Gamma}{1} = A\Gamma$, Ἄρα ἡ εφ $\widehat{xoy}$ παριστάνει τὸ μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΓ.

§ **129.** ***Μεταβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας μετὰ τῆς γωνίας.*** Ἐκ τοῦ (Σχ. 17) φαίνεται ὅτι, ὅταν αὐξάνῃ ἡ ὀξεῖα γωνία $\widehat{xoy}$, τὰ ἀντίστοιχα μήκη ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ συνεχῶς αὐξάνουν καὶ ὅταν ἡ γωνία πλησιάζῃ πρὸς τὴν ὀρθήν, ἡ αὔξησις εἶναι ταχυτάτη, ὁπότε τὰ μέτρα τῶν μηκῶν αὐτῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερβοῦν πάντα δοθέντα ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μεγάλον. Ὅταν τὸ Β συμπέσῃ μὲ τὸ Ζ, τότε ὁ λόγος $\frac{MB}{OM}$ δὲν ἔχει νόημα, διότι τὸ μέτρον τοῦ ΟΜ γίνεται μηδέν. Ὅταν ὅμως ἡ γωνία ἐλαττοῦται καὶ γίνῃ μηδέν, τότε τὸ ΑΓ γίνεται σημεῖον, τὸ μέτρον τοῦ ΟΜ γίνεται 1 καί ἔχομεν τότε $\varepsilon\varphi 0^0 = 0$.

§ **130.** ***Κατασκευὴ ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς ἐφαπτομένης της.*** Ἔστω ὅτι $\varepsilon\varphi\omega = 2{,}5$. Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{xoy}$ (Σχ.18) καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν της δύο τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον $\frac{25}{10} = 2{,}5$. Δηλ. ἂν λάβωμεν τὴν ΟΑ ἴσην μὲ 25 (ἢ μὲ 5) μονάδας μήκους, θὰ λάβωμεν τὴν ΟΒ ἴσην μὲ 10 (ἢ μὲ 2) ἰδίας μονάδας μήκους. Φέρομεν τὴν ΑΒ, καὶ τότε ἡ $\widehat{B}$ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι $\varepsilon\varphi B = \frac{OA}{OB} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$.



Σχ. 18

§ **131.** ***Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῶν 45⁰, 30⁰, 60⁰.***

α) Ἂν ἡ γωνία $MOB = 45^0$ (Σχ. 17), τότε τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΜΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα $\frac{MB}{OM} = 1 \Longrightarrow \varepsilon\varphi\ 45^0 = 1$.

β) Ἂν ἡ γωνία $MOB = 30^0$, τότε $MB = \frac{OB}{2}$. Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι $(OB)^2 = (OM)^2 + (BM)^2 \Longrightarrow 4(BM)^2$

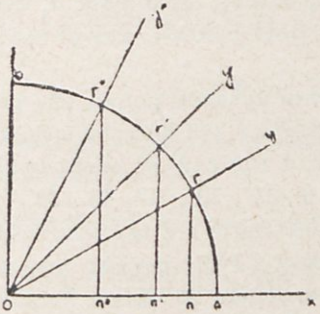
$$= (OM)^2 + (BM)^2 \Longrightarrow 3(BM)^2 = (OM)^2 \text{ ἢ}$$

$$\frac{MB}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \text{εφ}30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

γ) Ἂν ἡ γωνία $\widehat{MOB} = 60^0$, τότε θὰ εἶναι $3(OM)^2 = (BM)^2 \Longrightarrow \frac{MB}{OM} = \sqrt{3} \Longrightarrow$ εφ $60^0 = \sqrt{3}$.

§ **132.** ***Γραφικὴ εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν.*** Τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς ὀξείας γωνίας ἀκεραίου ἀριθμοῦ μοιρῶν εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν ἕ ν α τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ (Σχ. 19) μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ ἴσην μὲ τὴν μονάδα μήκους. Χωρίζομεν τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι 90^0, εἰς ἐννέα ἴσα μέρη διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, ὁπότε καθένα ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ 10^0, καὶ σημειοῦμεν εἰς τὰ ἄκρα τῶν μερῶν κατὰ σειρὰν 10^0, 20^0, 30^0, 40^0... Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τεταρτοκυκλίου εἰς τὸ σημεῖον Α, ἡ ὁποία τέμνεται ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἴσων τόξων εἰς τὰ σημεῖα $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \dots$ Ἐὰν μετρήσωμεν τὰ μήκη $A\Gamma, A\Gamma_1, A\Gamma_2, \dots$ θὰ ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος.

μοῖραι	ἐφαπτ
0	0,00
10	0,18
20	0,36
30	0,58
40	0,84
50	1,19
60	2,73
70	2,75
80	5,67
90	—



Σχ. 19

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας μικροτέρας τῶν 45^0 καὶ μὴ περιεχομένης εἰς τὸν πίνακα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν εφ38^0.

Παρατηροῦμεν ὅτι εφ$30^0 = 0,58$ καὶ εφ$40^0 = 0,84$. Ἄρα εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 10^0, ἔχομεν αὔξησιν ἐφαπτομένης 0,26 $(0,84 - 0,58 = 0,26)$ καὶ εἰς αὔξησιν 8^0 $(38^0 - 30^0 = 8^0)$, θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις κατὰ προσέγγισιν $\frac{0,26 \times 8}{10} = 0,208$ ἢ 0,21 (κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ), δηλ. θὰ εἶναι εφ$38^0 = 0,79$ (δηλ. $0,58 + 0,21$). Προκειμένου ὅμως περὶ τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας μεγαλυτέρας τῶν 45^0 δὲν ἰσχύει ἡ μέθοδος αὐτή, διότι αἱ μεταβολαὶ τῶν ἐφαπτομένων, αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῶν διαφορῶν τῶν γωνιῶν, δὲν εἶναι οὔτε κατὰ προσέγγισιν ἀνάλογοι.

§ **133.** ***Πίναξ τῶν φυσικῶν ἐφαπτομένων.*** Ἡ προηγουμένη μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς ὀξείας γωνίας γραφικῶς δὲν εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὰς περισσοτέρας ἐφαρμογὰς τῆς Τριγωνομετρίας. Μεγαλυτέραν προσέγγισιν μᾶς παρέχουν πίνακες, οἱ ὁποῖοι ἐσχηματίσθησαν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν. Εἰς τοὺς πίνακας αὐτούς, ὡς ὁ πίναξ I, ἀναγράφονται αἱ ἐφαπτόμεναι κατὰ προσέγγισιν 0,00001 καὶ αἱ γωνίαι προχωροῦν ἀνὰ 10′ τῆς μοίρας.

Εἰς τὸν πίνακα αὐτὸν αἱ ἀκέραιαι μοῖραι τῶν γωνιῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν πρώτην στήλην καὶ βαίνουν αὐξανόμεναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Αἱ δεξιά τῆς στήλης αὐτῆς στῆλαι ἔχουν ἐπικεφαλίδας τοὺς ἀριθμοὺς 0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′. Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας π.χ. $23^0\ 20'$ εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τοῦ ἀριθμοῦ 23 τῆς στήλης τῶν μοιρῶν καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ἐπικεφαλίδα 20′. Εἶναι λοιπὸν εφ $23^0\ 30' =$ 2,31826.

Ἐὰν ἡ γωνία δὲν ἀναγράφεται εἰς τούς πίνακας, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Παράδειγμα 1. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἐφαπτομένη τῶν $30^0, 43'$. Παρατηροῦμεν ὅτι $39^0\ 40' < 39^0\ 43' < 39^0\ 50'$ καὶ

$$\text{εφ}\ (39^0\ 40') < \text{εφ}\ (39^0\ 43') < \text{εφ}\ 39^0\ 50' \quad (1).$$

Ἐκ τοῦ πίνακος ἔχομεν εφ $(39^0\ 40') = 0{,}82923$ καὶ εφ $(39^0\ 50') =$ 0,83415, ὁπότε ἡ (1) γράφεται $0{,}82923 <$ εφ $(39^0\ 43') < 0{,}83415$.

Παρατηροῦμεν δηλ. ὅτι: $\Delta = 0{,}83415 - 0{,}82923 = 0{,}00492$ ὁπότε εἰς αὔξησιν γωνίας 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξησιν ἐφαπτομένης 0,00492
» » 3′ » » » x

ἢ $x = \frac{3}{10} \cdot 0{,}00492 = 0{,}00148$ κατὰ προσέγγισιν. Ἄρα εφ$39^0\ 43' =$ εφ $39^0\ 40' + 0{,}00148 = 0{,}82923 + 0{,}00148 = 0{,}83071$.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ εφ $(63^0\ 48'\ 20'')$.
Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{εφ}\ (63^0\ 40') < \text{εφ}(63^0\ 48'\ 20'') < \text{εφ}\ (63^0\ 50) \text{ ἢ}$$

$$2{,}02039 < \text{εφ}\ (63^0\ 48'\ 20'') < 2{,}03526.$$

Οὕτως ἔχομεν $\Delta = 2{,}03526 - 2{,}02039 = 0{,}01487$. Ἡ διαφορὰ

τῶν τόξων εἶναι $63^0\,48'\,20''-63^0\,40'=8'\,20''=8\,\dfrac{1}{3}'=\dfrac{25'}{3}$, ὁπό-
τε ἔχομεν τὴν διάταξιν $10'$ $0{,}01487$

$\dfrac{25'}{3}$ x

ἢ $x=0{,}01487\,.\,\dfrac{25}{30}=0{,}01239$, Ἄρα

εφ $(63^0\,48'\,20'')=2{,}03526+0{,}01239=2{,}04765$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

197) Νὰ εὑρεθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος τῆς σελ. 123 οἱ ἀριθμοὶ εφ 18^0, εφ 43^0, εφ 12^0, εφ 7^0.

198) Νὰ κατασκευασθοῦν ὀξεῖαι γωνίαι, διὰ τὰς ὁποίας εἶναι εφω$=\dfrac{2}{3}$, εφω $=\dfrac{3}{4}$, εφω $=\dfrac{6}{7}$, εφω $=1{,}28$, εφω $=3{,}2$

199) Ἐκ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν ἐφαπτομένων νὰ εὑρεθοῦν αἱ εφ $23^0\,32'$, εφ $28^0\,47'$, εφ $67^0\,31'$, εφ $79^0\,38'$.

200) Αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 8 m. καὶ 12 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστης γωνίας αὐτοῦ.

201) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν του.

202) Νὰ κατασκευάσετε ἐπὶ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $A=90^0$

εφ $\Gamma=\dfrac{3}{5}$ καὶ ΒΓ = 68 mm., εφ Β = 2 καὶ ΑΒ = 58 mm., εφ Β = 1,5 καὶ ΑΒ = 42 mm.

203) Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὰ $\dfrac{2}{3}$ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ὀξειῶν γωνιῶν των.

204) Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 34 m. καὶ 52 m. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ διαγώνιός του μὲ τὰς πλευράς του.

§ **134.** ***Τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας.*** Εἰς τὴν § 126 εἴδομεν ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{BA}{OA}$ ἔχει μίαν σταθερὰν τιμὴν λ, ἡ ὁποία εἶναι $0\leq\lambda<1$, διότι $0\leq BA<OA$ καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$.

Τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν λ ὀνομάζομεν ***ἡμίτονον τῆς γωνίας*** $\widehat{xoy}$ καὶ τὸ σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς : ημ $(\widehat{xoy})$· π. χ, εἰς τὸ παράδειγμα § 124

$$ημB = \frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{6}{\sqrt{117}}.$$

> **Ἡμίτονον, λοιπόν, ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμὸς λ τοιοῦτος, ὥστε $0 \leq λ < 1$, τὸ ***«ἡμίτονόν»*** της· καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε ἀριθμὸν $0 \leq λ < 1$ ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ὀξεῖα γωνία.

Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ δημιουργεῖ μίαν συνάρτησιν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ μὲ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $\{λ/λ \in Π \geqslant 0$ καὶ $< 1\}$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι μία ἀριθμητικὴ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\{x^0/0 \leq x^0 < 90\}$ καί πεδίον τιμῶν τὸ $\{y/y \in Π \geqslant^0$ καὶ $< 1\}$. Καὶ γράφεται συμβολικῶς $x^0 \rightarrow ημx^0 = y$, $0^0 \leq x^0 < 90^0$.

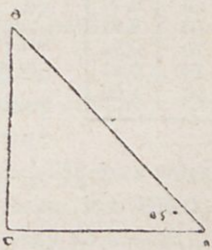
§ **135.** ***Γεωμετρικὴ σημασία τοῦ ἡμιτόνου.*** Ἐὰν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς οy τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$ (Σχ. 16) λάβωμεν μῆκος ΟΑ ἴσον μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὴν οx, τότε θὰ ἔχωμεν $ημ(\widehat{xoy}) = \frac{BA}{OA} = \frac{BA}{1} = BA$. Ἄρα τὸ ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας $\widehat{xoy}$ παριστάνει τὸ μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος, ὅταν τὸ ΟΑ ληφθῇ ὡς μονάς.

§ **136.** ***Μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου.*** Ἔστω ἡ ὀξεῖα γωνία $\widehat{xoy}$ (Σχ. 19). Ἐπὶ τῆς οx λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ ἴσον μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως καὶ γράφομεν τεταρτοκύκλιον ΑΟΒ μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ. Ἐκ τοῦ σημείου Γ τομῆς τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς τῆς πλευρᾶς οy φέρομεν τὴν ΓΠ κάθετον ἐπὶ τὴν οx τότε $ημ(\widehat{xoy}) = (ΠΓ)$. Ἂν ἡ γωνία $\widehat{xoy}$ αὐξηθῇ καὶ γίνῃ $\widehat{xoy'}$, τότε θὰ εἶναι $ημ(\widehat{xoy}) = (Π'Γ')$. Ὅταν τὸ Γ συμπέσῃ μὲ τὸ Β, τότε ὁ λόγος $\frac{ΠΓ}{ΟΓ}$ γίνεται ἴσος μὲ 1. Ἄρα $ημ90^0 = 1$. Ἂν ὅμως ἡ γωνία ἐλαττοῦται, τότε καὶ τὸ ΓΠ ἐλαττοῦται καὶ ὅταν τὸ Γ συμπέσῃ μὲ τὸ Α, δηλ. ἡ γωνία γίνη μηδέν, τότε $\Gamma\Pi = 0$, ἄρα $\eta\mu 0^0 = 0$.

§ **137.** ***Κατασκευὴ γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου της.*** Ἔστω ὅτι $\eta\mu\omega = \frac{5}{8}$. Ἐπειδή, κατὰ τόν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου, πρέπει ἡ γωνία του νὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἀπέναντι πλευρὰν 5 μονάδων μήκους καὶ ὑποτείνουσαν 8 μονάδων μήκους, ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν. Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{xoy}$ (Σχ. 18) καί ὁρίζομεν ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς της, ἔστω τῆς ox τμῆμα OA ἴσον μὲ 5 μονάδας μήκους. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον A καὶ ἀκτῖνα AB, ἴσην μὲ 8 μονάδας μήκους, γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν oy εἰς τὸ B. Φέρομεν τὴν AB καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία ABO εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι $\eta\mu B = \frac{OA}{AB} = \frac{5}{8}$.

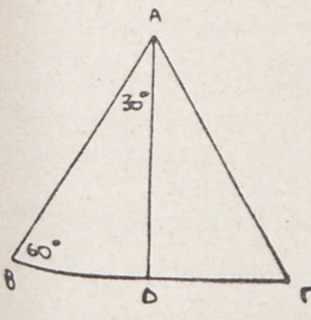
§ **138.** ***Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον τῶν $45^0, 30^0. 60^0$***

α) Κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον AOB (Σχ. 20), τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ OA καὶ OB ἔχουν μῆκος ἴσον μὲ τὴν μονάδα μήκους. Ἡ γωνία $OAB = 45^0$, τότε ἔχομεν $(AB)^2 = (OB)^2 + (OA)^2 = 1 + 1 = 2$, ἄρα $AB = \sqrt{2}$ καὶ συνεπῶς $\eta\mu\, 45^0 = \frac{OA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$



Σχ. 20

β) Κατασκευάζομεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 21) καὶ φέρομεν τὸ ὕψος του ΑΔ. Τότε ἔχομεν $\widehat{AB\Delta} = 60^0$, $\widehat{BA\Delta} = 30^0$, $AB = 2B\Delta$, $A\Delta = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$. Ἄρα $\eta\mu 60^0 = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\eta\mu 30^0 = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{1}{2}$.



Σχ. 21

§ **139.** ***Γραφικὴ εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου τῶν ὀξειῶν γωνιῶν.*** Τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας ἀκεραίου ἀριθμοῦ μοιρῶν εὑρίσκεται κατά προσέγγισιν ὡς ἑξῆς : Κατασκευάζομεν τεταρτοκύκλιον OAB (Σχ. 19) μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα OA ἴσην μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Διαιροῦμεν τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι 90^0 διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου εἰς 9 ἴσα μέρη, ὁπότε τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ εἶναι 10^0, καὶ σημειώνομεν εἰς τὰ ἄκρα τῶν μερῶν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 0^0, 10^0, 20^0, 30^0, ... Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ, $ΟΓ_1$, $ΟΓ_2$, ... Προβάλλομεν τά ἄκρα τῶν ἐννέα αὐτῶν τόξων ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ μετροῦμεν τὰ μήκη τῶν προβαλλουσῶν τὰ ἄκρα τῶν τόξων τούτων χρησιμοποιοῦντες ὡς μονάδα μετρήσεως τὴν ἀκτῖνα τῶν τόξων καὶ ἔχομεν τὰ ἡμίτονα τῶν ἐν λόγῳ γωνιῶν.

μοῖραι	ἡμίτονα
0	0,00
10	0,17
20	0,34
30	0.50
40	0,64
50	0,77
60	0,87
70	0,94
80	0,98
90	1,00

Ὁ πίναξ παραπλεύρως δίδει τὸ ἡμίτονον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ 10^0 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας ἀκεραίου ἀριθμοῦ μοιρῶν, π.χ. ημ37^0, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Παρατηροῦμεν εἰς τὸν πίνακα ὅτι ημ$30^0 = 0{,}50$ καὶ ημ$40^0 = 0{,}64$. Ἄρα εἰς αὔξησιν γωνίας 10^0 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις ἡμιτόνου αὐτῆς κατὰ $0{,}64—0{,}50=0{,}14$ τῆς μονάδος. Εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 1^0, θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις ἡμιτόνου αὐτῆς $0{,}14 : 10 = 0{,}014$ καὶ εἰς αὔξησιν γωνίας κατὰ 7^0 θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου κατὰ $0{,}014 \times 7 = 0{,}098$ καὶ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ. Ἄρα ημ$37^0 = 0{,}50 + 0{,}10 = 0{,}60$ κατὰ προσέγγισιν.

§ **140.** ***Πίνακες τῶν φυσικῶν ἡμιτόνων.*** Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος τῆς εὑρέσεως τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν γραφικῶς δὲν εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὰς ἐφαρμογάς. Ὅπως καὶ διὰ τὴν ἐφαπτομένην, οὕτω καὶ διὰ τὸ ἡμίτονον ὑπάρχουν πίνακες, οἱ ὁποῖοι μᾶς δίδουν τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν μὲ προσέγγισιν 0,00001 καὶ αἱ γωνίαι προχωροῦν ἀνὰ 10′ Ἡ περιγραφὴ καὶ ἡ χρῆσις των εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ Πίνακος Ι διὰ τὰς ἐφαπτομένας. Ἀπὸ τὸν πίνακα ΙΙ εὑρίσκομεν ημ$(18^0\,30') = 0{,}31730$, ημ$\,67^0\,40' = 0{,}92499$.

Ἐὰν ἡ γωνία δὲν ἀναγράφεται εἰς τοὺς πίνακας, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ημ $42^0\,36'$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $42^0\,30' < 42^0\,36' < 42^0\,40'$ καὶ

$$ημ\,42^0\,30' < ημ\,42^0\,36' < 42^0\,40'$$

Ἐκ τοῦ πίνακος ἔχομεν ημ $42^0\ 30' = 0{,}67559$ καὶ

ημ $42^0\ 40' = 0{,}67773$ ($\Delta = 0{,}67773 - 0{,}67559 = 0{,}00214$).

Ἄρα $0{,}67559 <$ ημ $42^0\ 36' < 0{,}67773$. Ἄρα

εἰς αὔξησιν γωνίας 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις ἡμιτόνου 0,00214

» » » 6′ » » » x

ἢ $x = 0{,}01284$. Ἄρα ημ $42^0\ 36' = 0{,}67559 + 0{,}01284 = 0{,}68843$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

205) Νὰ εὑρεθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος τῆς σελ. 139 οἱ ἀριθμοὶ ημ 37^0, ημ 56^0, ημ 82^0, ημ 7^0, ημ 9^0.

206) Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι, διὰ τὰς ὁποίας ημω $= \frac{2}{3}$, ημω $= \frac{4}{7}$, ημω $= 0{,}3$, ημω $= 0{,}28$.

207) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 8m καὶ μία κάθετος πλευρὰ 5 m. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν της.

208) Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του.

209) Νὰ κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικὸν χάρτην ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\widehat{A} = 90^0$ καὶ

ημ $\Gamma = \frac{4}{5}$ καὶ $B\Gamma = 36$ mm, ημ $\Gamma = 0{,}25$ καὶ $A\Gamma = 48$ mm

ημ $B = \frac{2}{3}$ καὶ $AB = 48$ mm.

210) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι 60^0, νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

§ **141.** ***Συνημίτονον ὀξείας γωνίας.*** Εἰς τὴν § 126 εἴδομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{OB}{OA}$ ἔχει μίαν σταθερὰν τιμὴν μ, ἡ ὁποία εἶναι $0 < \mu \leq 1$, διότι $0 < OB \leq OA$ καὶ ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$. Τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν μ ὀνομάζομεν ***συνημίτονον*** τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$, καὶ τὸν σημειώνομεν ὡς ἑξῆς: συν$(\widehat{xoy})$. Π.χ. εἰς τὸ παράδειγμα § 124 εἶναι συνΒ $= \frac{9}{\sqrt{117}}$.

Συνημίτονον λοιπὸν ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς προσκειμένης πρὸς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσάν του.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι εἰς κάθε ὀξεῖαν γωνίαν ἀντιστοιχεῖ ἕνας ὡρισμένος ἀριθμὸς $0 < \mu \leq 1$ τὸ ***«συνημίτονόν»*** του. Καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε ἀριθμὸν $0 < \mu \leq 1$ ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη ὀξεῖα γωνία. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ δημιουργεῖ μίαν συνάρτησιν, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ μὲ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $\{\mu / 0 < \mu \leq 1\}$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι μία ἀριθμητικὴ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\{x^0 / 0^0 \leq x^0 < 90^0\}$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $\{y / y \in \Pi^+ \leq 1\}$. Συμβολικῶς γράφομεν $x^0 \rightarrow$ συν$x^0 = y$ $0^0 \leqslant x^0 < 90^0$.

§ **142**. ***Γεωμετρικὴ σημασία τοῦ συνημιτόνου.*** Ἐὰν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ογ γωνίας $\widehat{xoy}$ (Σχ. 16) λάβωμεν μῆκος ΟΑ, ἴσον μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὴν οχ, τότε θά ἔχωμεν συν $\widehat{xoy} = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$. Ἄρα τὸ συνημίτονον ὀξείας γωνίας $\widehat{xoy}$ παριστάνει τὸ μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος, ὅταν τὸ ΟΑ ληφθῇ ὡς μονάς.

§ **143**. ***Μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου.*** Ἂν γράψωμεν τεταρτημόριον ΟΑΒ μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ = 1 θὰ εἶναι συν $\widehat{xoy} = \frac{O\Pi}{O\Gamma} = \frac{O\Pi}{OA} = (O\Pi)$. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται εὐκόλως ὅτι, ἄν ἡ γωνία $\widehat{xoy}$ αὐξάνῃ καὶ γίνεται ΑΟΓ′, ΑΟΓ″ . . , . τὸ συνημίτονον ΟΠ γίνεται ἀντιστοίχως ΟΠ, ΟΠ′, ΟΠ″, δηλ. συνεχῶς ἐλαττοῦται. Ἄρα, ἂν ἡ ὀξεῖα γωνία αὐξάνῃ, τὸ συνημίτονόν της συνεχῶς ἐλαττοῦται. Ὅταν ἡ γωνία $\widehat{xoy}$ πλησιάζῃ πρὸς τὴν ΑΟΒ, τὸ συνημίτονον αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ὅταν ἡ γωνία γίνῃ 90^0, τότε τὸ διάνυσμα ΟΠ γίνεται μηδὲν καὶ ὁ λόγος $\frac{O\Pi}{OA} = 0$. Ἄρα συν $90^0 = 0$. Ἂν ὅμως ἡ γωνία ἐλαττοῦται καὶ πλησιάζῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ΟΠ γίνεται ΟΑ καὶ ὁ λόγος $\frac{O\Pi}{OA}$ γίνεται 1.

$$\text{Ἄρα συν}0^0 = 1.$$

§ **144**. ***Κατασκευὴ ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ συνημιτόνου.*** Ἔστω π.χ. συν $\omega = \frac{2}{3}$. Ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογ. τρίγωνον ΑΟΒ (Σχ. 18) εἰς τὸ ὁποῖον ΟΑ=2 μονάδες μήκους καὶ ΑΒ ἴσον μὲ 3 μονάδες μήκους. Τότε ἡ γωνία ΟΑΒ=ω εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι συν ω $= \frac{ΟΑ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$.

§ **145**. ***Πρόβλημα: Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνημίτονον γωνίας*** ***45^0, 30^0, 60^0.***

Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν § 138 εὑρίσκομεν συν$45^0 = \frac{ΟΑ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Σχ. 20). Ὁμοίως συν$30^0 = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ}{\frac{2ΑΔ}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Σχ.21)

καὶ συν$60^0 = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{ΒΔ}{2ΒΔ} = \frac{1}{2}$.

§ **146**. ***Γραφικὴ εὕρεσις τοῦ συνημιτόνου.*** Ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἡμιτόνου. Ἐδῶ μετροῦμεν τὰ μήκη τῶν προβολῶν (Σχ. 19) ΟΠ, ΟΠ΄, ΟΠ΄΄, τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων, χρησιμοποιοῦντες ὡς μονάδα μετρήσεως τὴν ἀκτῖνα τοῦ τόξου. Ὁ παραπλεύρως πίναξ δίδει τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, διαφερουσῶν κατὰ 10^0 καὶ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συνημίτονον ὀξείας γωνίας π.χ. 62^0, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς;

μοῖραι	συνημ.
0	1,00
10	0,98
20	0,94
30	0,87
40	0,77
50	0,64
60	0,50
70	0,34
80	0,17
90	0

Ἐκ τοῦ πίνακος ἔχομεν συν$60^0 = 0{,}50$ καὶ συν$70^0 = 0{,}37$. Ἄρα εἰς ἐλάττωσιν τῆς γωνίας κατὰ 10^0 ἔχομεν αὔξησιν συνημιτόνου κατὰ 0,16=(0,50—0,34) καὶ εἰς ἐλάττωσιν τῆς γωνίας 8^0 (διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς 62^0), θὰ ἀντιστοιχῇ αὔξησις κατὰ προσέγγισιν τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς κατὰ $0{,}16 \times \frac{8}{10} = 0{,}128$ ἢ 0,13 περίπου. Ἄρα συν$62^0 = 0{,}34 + 0{,}13 = 0{,}47$ κατὰ προσέγγισιν.

§ **147**. ***Πίνακες τῶν φυσικῶν συνημιτόνων.*** Ὅπως εἰς τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰ ἡμίτονα οὕτω καὶ διὰ τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὑπάρχουν πίνακες, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, μὲ προσέγγισιν 0,00001 καὶ αἱ γωνίαι βαίνουν ἀνὰ 10′. Ἡ περιγραφὴ καὶ ἡ χρῆσις τῶν πινάκων εἶναι ὁμοία πρὸς τοῦ πίνακος II.

Οὕτω εὑρίσκομεν συν($24^0\,30'$)=0,90996.

Ἐὰν ἡ γωνία δὲν ἀναγράφεται εἰς τοὺς πίνακας, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ συν$32^0\,22'$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $32^0\,20' < 32^0\,22' < 32^0\,30'$ καὶ ἐπομένως συν$32^0\,20' >$ συν$32^0\,22' >$ συν$32^0 30'$ ἢ ἐκ τῶν πινάκων 0,84495 > > συν$32^0\,22' >$ 0,84339 (Δ=0,84495−0,84339=0,00156).

Ἄρα εἰς αὔξησιν γωνίας 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις συνημιτόν. 0,00156
» » » 2′ » » » x

ἢ x=0,00031. Ἄρα συν$32^0\,22'$=0,84495−0,00031=0,84464.

§ **148**. ***Γωνίαι συμπληρωματικαί.*** Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ὀρθογ. τριγώνου ΟΒΑ (Σχ. 18), θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν

$$\text{συν}A = \frac{OA}{AB} \qquad \text{ημ}A = \frac{OB}{AB} = \text{συν}B$$

$$\text{ημ}B = \frac{OA}{AB} \qquad \text{ημ}A = \frac{OB}{AB} = \text{συν}B$$

Αἱ γωνίαι ὅμως Α καὶ Β εἶναι συμπληρωματικαί. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ***«Ὅταν δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαὶ τὸ ἡμίτονον τῆς μιᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης».***

§ **149.** Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ἡ ἐφαπτομένη, τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον ὡρίσθησαν ὡς λόγοι εὐθυγράμμων τμημάτων. Τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τοὺς λόγους αὐτούς, τοὺς ὀνομάζομεν ***Τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

211) Νὰ εὑρεθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος τῆς σελ. 131 οἱ ἀριθμοὶ συν19^0, συν37^0, συν67^0, συν9^0, συν18^0.

212) Νὰ κατασκευασθοῦν ὀξεῖαι γωνίαι, διὰ τὰς ὁποίας εἶναι συν φ= $\frac{3}{5}$, συν φ= $\frac{2}{3}$, συν φ=0,68, συν φ=0,34, συν φ= $\frac{8}{9}$.

213) Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ 12 m. καὶ μία

τῶν καθέτων πλευρῶν του 5 m. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του.

214) Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του.

215) Νὰ κατασκευασθοῦν ἐπὶ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $A=90^0$ καὶ $\text{συν}B=\frac{1}{2}$ καὶ $ΑΓ = 32$ m, $\text{συν}B = \frac{3}{5}$ καὶ $AB=28$ m.

216) Ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 7 m. καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἀπὸ τὴν κορυφήν του εἶναι 4,8 m. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ συνημίτονα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του.

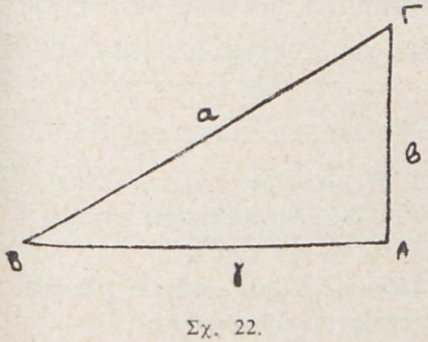
217) Ἐὰν $\text{ημ}\omega=0{,}56401$ καὶ $\text{συν}\omega_1=0{,}56401$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\omega+\omega_1$.

§ **150.** ***Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον.*** Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 22) ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον εἰς τὸ Α, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν μέτρα ἀντιστοίχως $ΒΓ=\alpha$, $ΑΓ=\beta$, $AB=\gamma$. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{εφ}B=\frac{\beta}{\gamma}$, $\text{ημ}B=\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\text{συν}B=\frac{\gamma}{\alpha}$ καθὼς καὶ $\text{εφ}Γ=\frac{\gamma}{\beta}$; $\text{ημ}Γ=\frac{\gamma}{\alpha}$ $\text{συν}Γ=\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν ἕπονται αἱ σχέσεις :

$$\boxed{\beta=\gamma\ \text{εφ}B,\ \beta=\alpha\ \text{ημ}B,\ \gamma=\alpha\ \text{συν}B,\ \gamma=\beta\ \text{εφ}Γ,\ \gamma=\alpha\ \text{ημ}Γ,\ \beta=\alpha\ \text{συν}Γ}$$

§ **151.** ***Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων.*** Εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευάσωμεν γεωμετρικῶς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς δύο πλευράς του, ἢ μίαν πλευράν του καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν του. Ἐὰν ζητήσωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα του, δηλ. γωνίας καὶ πλευράς του, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γνωστῶν στοιχείων, λέγομεν ὅτι κάμνομεν ***ἐπίλυσιν*** τοῦ τριγώνου.



Σχ. 22.

§ **152.** ***Ἐπίλυσις 1η : Δίδονται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία Β. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.***

Οἱ τύποι, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν, εἶναι $\widehat{\Gamma} = 1\text{ὀρ} - \widehat{B}$, $\beta = \alpha\ \text{ημ}B$, $\gamma = \alpha\ \text{συν}B$.

Π.χ. Ἂν $\alpha = 26{,}5$ καὶ $B = 41^0$. Ἔχομεν $\widehat{\Gamma} = 90^0 - 41^0 = 49^0$. Ἐκ τοῦ πίνακος ἔχομεν $\text{ημ}41^0 = 0{,}65606$, $\text{συν}41^0 = 0{,}75471$. Ἄρα $\beta = 26{,}5 \times 0{,}65606 = 17{,}37559$ m, $\gamma = 26{,}5 \times 0{,}75471 = 19{,}99981$ m. Λαμβάνομεν κατὰ προσέγγισιν τὰς τιμὰς $\beta = 17{,}4$ m, $\gamma) = 20$ m.

§ **153** ***Ἐπίλυσις 2α : Δίδονται μία τῶν καθέτων πλευρῶν ἔστω ἡ β καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία Γ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.***

Οἱ τύποι, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν, εἶναι $\widehat{B} = 1\text{ὀρ} - \widehat{\Gamma}$, $\gamma = \beta\ \text{εφ}\Gamma$, $\alpha = \dfrac{\beta}{\text{συν}\,\Gamma}$. Οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ ὡς καὶ εἰς τὴν 1ην. περίπτωσιν

§ **154.** ***Ἐπίλυσις 3η : Δίδονται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ μία τῶν καθέτων πλευρῶν, ἔστω ἡ β. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.***

Οἱ τύποι, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν, εἶναι $\text{ημ}B = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $\widehat{\Gamma} = 1\text{ὀρ}. - \widehat{B}$, $\gamma = \alpha\ \text{συν}B$ ἢ $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ εἶναι δυνατὸς μόνον, ὅταν $\alpha > \beta$. Π.χ. Ἂν $\alpha = 25\mu$ καὶ $\beta = 18{,}4$.

Ἔχομεν $\text{ημ}B = \dfrac{18{,}4}{25} = 0{,}736$. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $\text{ημ}47^0 = 0{,}73135$, $\text{ημ}48^0 = 0{,}74314$ καὶ $0{,}74314 - 0{,}73135 = 0{,}01179$. καὶ $0{,}736 - 0{,}73135 = 0{,}00465$. Εἰς τὰς 47^0 προσθέτομεν λοιπὸν $\dfrac{465}{1179} \times 60 = 23'\ 39''$. Ἄρα $\widehat{B} = 47^0\ 23'\ 39''$, $\widehat{\Gamma} = 42^0\ 36'\ 21''$.

Εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}47^0\ 23'\ 39'' = 0{,}6768$. Ἄρα $\gamma = 25 \times 0{,}6768 = 16{,}92$ m. Ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἔχομεν $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \sqrt{6{,}6 \times 43{,}4} = 16{,}92$ m. περίπου.

§ **155.** ***Ἐπίλυσις 4η : Δίδονται αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ β καὶ γ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.***

Οἱ χρησιμοποιούμενοι τύποι εἶναι $\text{εφ}B = \dfrac{\beta}{\gamma}$, $\widehat{\Gamma} = 1\text{ὀρ} - \widehat{B}$, $\alpha =$

$=\frac{\beta}{\eta\mu B}$ ἢ $\alpha=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$.

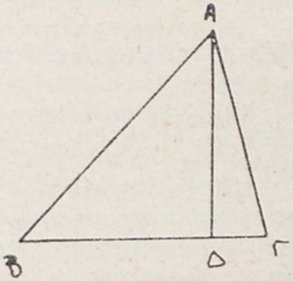
Ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι πάντοτε δυνατός.

§ **156.** ***Ἐμβαδὸν τριγώνου.*** Ἔστω τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 23) καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἐπὶ τήν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι

$E=\frac{1}{2}(B\Gamma)(A\Delta)=\frac{1}{2}\alpha\,(A\Delta)$. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν $A\Delta=A\Gamma\eta\mu\Gamma=\beta\eta\mu\Gamma$. Ἄρα :

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\alpha\beta\;\eta\mu\Gamma}$$

Ἄρα:



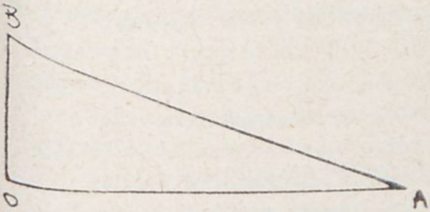
Σχ. 23

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1) ***Ἐξ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν 430 m ἐκ τῆς βάσεως ἑνὸς πύργου εὑρισκομένου ἐπὶ ἑνὸς ὁριζοντίου ἐπιπέδου φαίνεται ἡ κορυφή του ὑπὸ γωνίαν 13^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου.***

Λύσις. Ἔστω ΟΒ (Σχ. 24) τό ὕψος τοῦ πύργου καὶ Α ἡ θέσις τοῦ παρατηρητοῦ. Τότε ΑΟ=430m. καὶ $\widehat{OAB}=13^0$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν $OB=OA\;\varepsilon\varphi 13^0=430.$ $.0{,}23087=99{,}27$m. περίπου.



Σχ. 24.

2) ***Ἡ πλευρὰ ἑνὸς λόφου σχηματίζει γωνίαν 10^0 μετὰ τοῦ ὁρίζοντος. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μέτρα ἡ ἀνύψωσις τοῦ λόφου, ὅταν βαδίσωμεν ἐπ' αὐτοῦ 5280 m.***

Λύσις: Γνωρίζομεν τὴν ΑΒ (Σχ. 24) καὶ τὴν $A=10^0$. Ἄρα $OB=AB$ ημ$10^0=5280 \cdot 0{,}17365=916{,}872=917$ m περίπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

218) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος σκιᾶς δένδρου τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 15 m, ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς ὕψος 37^0 ἄνω τοῦ ὁρίζοντος;

219) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑνός δρόμου, ὅταν αὐτὸς σχηματίζῃ γωνίαν $2^0 30'$ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὅταν ἡ ὁριζοντία προβολή του εἶναι 1664 m.

220) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 188 m. μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του $28^0 12'$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

221) Χορδὴ τόξου ἔχει μῆκος 73,8 m. καὶ ἀπέχει ἀπό τὸ κέντρον 100 m. Νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον.

222) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 400 m. μία δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν του 125 m. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

223) Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΑΒ=25 m., ΒΓ=34 m. καὶ ὕψος ΑΔ=7 m. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου καὶ ἡ τρίτη πλευρά του.

224) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 89 m. ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 18^0. Νὰ εὑρεθοῦντὰ λοιπὰ στοιχεῖα του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

225) Το ὕψος μιᾶς οἰκίας φαίνεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον ὑπὸ γωνίαν 90^0, πού εὑρίσκεται ἀπέναντί της καὶ εἰς ἀπόστασιν 30 m. ἀπ' αὐτῆς. Ἡ κορυφή της σχηματίζει γωνίαν 60^0 μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος της.

226) Αἱ βάσεις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 18 m. καὶ 9 m., ἑκάστη δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν του εἶναι 8 m. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι του.

227) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\eta\mu 30)^2+(\sigma\upsilon\nu 30)^2=1$ καὶ ἀκολούθως νὰ γενικευθῇ ἡ πρότασις, δηλ. νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν $O<x<90^0$, τότε $(\eta\mu\omega)^2+(\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1$ χρησιμοποιοῦντες τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας ὀρθογ. τριγώνου. Ὁμοίως νὰ δειχθῇ ὅτι $\varepsilon\varphi 60^0=\dfrac{\eta\mu 60^0}{\sigma\upsilon\nu 60^0}$ καθὼς καὶ ὅτι $\varepsilon\varphi\omega^0=\dfrac{\eta\mu\,\omega^0}{\sigma\upsilon\nu\,\omega^0}$ ἂν $O<\omega^0<90^0$.

228) Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\eta\mu 30^0)^2+(\eta\mu 45^0)^2+(\eta\mu 60^0)^2=\dfrac{3}{2}$.

229) Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\varepsilon\varphi 30^0)^2+(\varepsilon\varphi\varphi 45^0)^2+(\varepsilon\varphi 60^0)^2=4\dfrac{1}{3}$.

230) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\eta\mu 30^0\ \sigma\upsilon\nu 60^0+\sigma\upsilon\nu 30^0\ \eta\mu 60^0=1$.

231) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\eta\mu 45^0-\eta\mu 30^0}{\sigma\upsilon\nu 45^0+\sigma\upsilon\nu 60^0}=3-2\sqrt{2}$.

232) Ἕνας πεζοπόρος ἀνέρχεται μίαν ἀνωφέρειαν ΑΟ=1200 m. κλίσεως 12^0 καὶ κατόπιν διανύει 450 m. ἐπὶ κατωφερείας ΟΒ κλίσεως 20^0. Εἰς ποῖον ὕψος εὑρίσκεται τότε ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

(ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄

§ **157. Γενικότητες.** Ὁ ἄνθρωπος ἔχει τὴν αἴσθησιν ὅτι τὰ γύρω του ἀντικείμενα, ὁ πλανήτης μας καθὼς καὶ τὰ ἄλλα οὐράνια σώματα εὑρίσκονται μέσα σ' ἕνα ***ἀπέραντον χῶρον***, ὁ ὁποῖος ὀνόμαζεται ***διάστημα***. Μερικὰ ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα τοῦ περιβάλλοντός μας βλέπομεν νὰ κατέχουν ἕνα ὡρισμένον μέρος τοῦ διαστήματος, δηλαδὴ ἔχουν ἕνα ὡρισμένον ***ὄγκον***. Τὰ ἀντικείμενα τοῦ φυσικοῦ κόσμου ἔχουν μίαν ὡρισμένην ἐξωτερικήν μορφὴν, ἡ ὁποία λέγεναι ***σχῆμα***. Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ θὰ τὰ ὀνομάζωμεν, ***Φυσικὰ στερεὰ σώματα*** π.χ. τὸ κτίριον τοῦ σχολείου, ἕνας λίθος κ.ἄ.

Τὸ σχῆμα ἑνὸς φυσικοῦ στερεοῦ γίνεται ἀντιληπτὸν ἀπὸ τὴν ***ἐπιφάνειαν***, ἡ ὁποία μᾶς παρέχει τὰ ὅρια τῆς ἐκτάσεώς του εἰς τὸ διάστημα.

Ἔχομεν τήν αἴσθησιν ὅτι ὁ ὄγκος τῶν σωμάτων ἐκτείνεται, ὅπως λέγομεν, κατὰ ***τρεῖς διαστάσεις*** (μῆκος, πλάτος, ὕψος). Ἡ Γεωμετρία ἐξετάζει τὰ σώματα μόνον ὡς πρὸς τὴν ***ἔκτασιν*** καὶ τὸ ***σχῆμα*** τους καὶ δέχεται ὅτι ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ μὴ μεταβάλλουν αὐτὰ τὰ χαρακτηριστικά των κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τῆς θέσεώς τους μέσα εἰς τὸν χῶρον. Μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἐξεταζόμενα τὰ στερεὰ σώματα ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν ὀνομάζονται πλέον ***Μαθηματικὰ ἢ Γεωμετρικὰ στερεά***.

Ὅταν μελετῶμεν τὰ γεωμετρικὰ στερεά, παραδεχόμεθα ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν ἐκτὸς αὐτῶν μέσα εἰς τὸν χῶρον. Μία ἐπιφάνεια ἔχει μόνον δύο διαστάσεις (μῆκος, πλᾶτος).

Ἰδέαν τῆς ***γραμμῆς*** λαμβάνομεν, ἐὰν φαντασθῶμεν τὰ ἄκρα μιᾶς ἐπιφανείας ἢ τὴν τομὴν δύο ἐπιφανειῶν.

Ἡ ἰδέα τοῦ ***σημείου*** σχηματίζεται εἰς τὴν ἀντίληψίν μας ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς γραμμῆς ἢ τὴν τομὴν δύο γραμμῶν. Ἡ γεωμετρία δέχεται τὰς γραμμὰς νὰ ἔχουν μόνον μῆκος, ἐνῷ τὸ σημεῖον τὸ δέχεται ἄνευ διαστάσεων. Ἡ Γεωμετρία δέχεται ἐπίσης ὅτι αἱ γραμμαὶ καί τὰ σημεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν ἐκτὸς τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν, ὅπως καί αἱ ἐπιφάνειαι.

Γεωμετρικὸν σχῆμα λέγεται ἕνα σύνολον ἀπὸ σημεῖα, γραμμὰς ἐπιφανείας καὶ στερεά. Ἀλλά, ὅπως ἔχομεν μάθει εἰς προηγουμένας τάξεις, καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἀποτελεῖ ἕνα ***σημειοσύνολον***. Τὸ γεωμετρικὸν λοιπὸν σχῆμα εἶναι ἕνα σημειοσύνολον καὶ μὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν θὰ μᾶς εἶναι γνωστόν, ὅταν δίδωνται ὅλα τὰ στοιχεῖα του ἢ ὅταν θὰ μᾶς δίδεται μία συνθήκη, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν, ἂν τὸ ὁποιοδήποτε σημεῖον εἶναι ἢ δὲν εἶναι στοιχεῖον του.

Ἐπίπεδον γεωμετρικὸν σχῆμα λέγεται κάθε σημειοσύνολον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποσύνολον ἑνὸς ἐπιπέδου, π.χ. ἕνα τρίγωνον, ἕνας κύκλος. Κάθε μὴ ἐπίπεδον σχῆμα λέγεται ***στερεὸν*** σχῆμα (ἕνα πρῖσμα, μία σφαῖρα κλπ.). Τὰ ἐπίπεδα γεωμετρικὰ σχήματα τὰ ἐμελετήσαμεν λεπτομερῶς εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν.

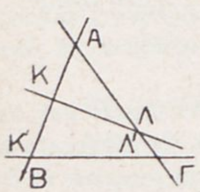
Τὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον λέγεται ***Στερεομετρία***, θὰ ἐξετάσῃ τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ἐπιπέδων καὶ στερεῶν, μέσα εἰς τὸν χῶρον.

§ 158. Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα.

α) ***Καθορισμὸς μιᾶς εὐθείας εἰς τὸν χῶρον.*** Ὅπως μᾶς εἶναι γνωστόν, δύο διαφορετικὰ σημεῖα εἰς τὸν χῶρον ὁρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς καὶ μόνον εὐθείας. Αἱ ἰδιότητες τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ οἱ συμβολισμοί, διὰ τὴν ἀπέραντον εὐθεῖαν, τὴν ἡμιευθεῖαν καὶ καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, οἱ ὁποῖοι ἰσχύουν εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν, θὰ ἰσχύσουν καὶ κατὰ τὴν μελέτην τῆς Στερεομετρίας.

β) ***Καθορισμὸς ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τὸν χῶρον. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια*** ἢ ἁπλῶς ***ἐπίπεδον*** λέγεται μία ἐπιφάνεια, ὅταν ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο τυχαῖα σημεῖα της, εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Κάθε ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἕνα ὑποσύνολον αὐτοῦ. Ἔστω τρία σημεῖα Α, Β, Γ, (Σχ. 25) τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα δὲν εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνονται εἰς τὸ Α καὶ προεκτείνονται ἀπεριόριστα. Ἔστω $K \in AB$ καὶ $\Lambda \in A\Gamma$. Ἐὰν φαντασθῶμεν τὰ Κ καὶ Λ νὰ μετακινοῦνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἀντιστοίχως ἡ εὐθεῖα ΚΛ μετακινουμένη διαγράφει μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β καὶ



Σχ. 25.

Γ, ***Ἀπὸ τρία λοιπὸν σημεῖα τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διέρχεται ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον.***

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἕπονται τὰ ἑξῆς :

Ἕνα ἐπίπεδον ὁρίζεται εἰς τὸν χῶρον.

1) ***Ἀπὸ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.***

2) ***Ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν καὶ ἕνα σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας.***

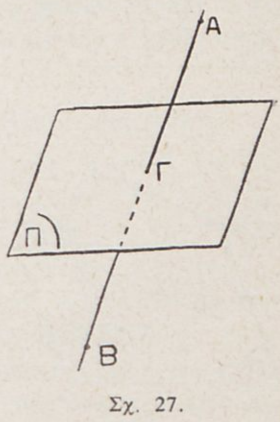
3) ***Ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας.***

4) ***Ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας*** (μὲ τὴν στενὴν ἔννοιαν),

Παρατήρησις. Παραδεχόμεθα ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπεκτείνεται ἀπεριορίστως. Ἐξ αἰτίας τούτου ἡ σχεδίασίς του εἶναι ἀδύνατον νὰ γίνῃ ἐπάνω εἰς τὸ φύλλον τοῦ χαρτιοῦ ἢ εἰς τὸν πίνακα. Συνήθως φανταζόμεθα ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Τὸ μέρος τοῦτο τὸ σχεδιάζομεν ὡς πλάγιον παραλληλόγραμμον καὶ εἰς τὴν μίαν ἐσωτερικήν του γωνίαν βάζομεν ἕνα ἀπὸ τὰ κεφαλαῖα γράμματα Π, Ρ, Σ, Τ.... καὶ λέγομεν τὸ ἐπίπεδον Π, τὸ ἐπίπεδον Ρ κλπ. (Σχ. 26).

Σχ. 26.

§ **159. Σχετικαὶ θέσεις ἐπιπέδων καὶ εὐθειῶν εἰς τὸν χῶρον.** Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον Π (Σχ. 27) ἀπεριορίστως προεκτεινόμενον. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου διαμερίζεται ἀπὸ τὸ Π εἰς τρία ὑποσύνολα. Τὰ δύο εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ Π καὶ τὸ τρίτον εἶναι τὸ ἐπίπεδον Π. Τὰ δύο ὑποσύνολα τοῦ χώρου θὰ τὰ ὀνομάζωμεν ***ἀνοικτοὺς ἡμιχώρους*** μὲ σύνορον τὸ ἐπίπεδον Π. Διὰ τὰ τρία σημειοσύνολα θὰ παραδεχθῶμεν τὰ ἑξῆς :



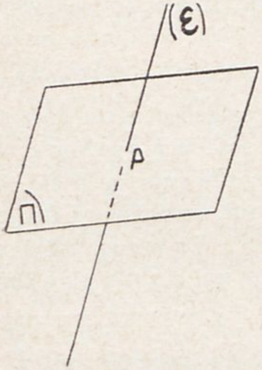
Σχ. 27.

1. ***Τὰ τρία σημειοσύνολα εἶναι κυρτά.*** Δηλαδή, δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Μ καὶ Ν, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἕνα ἐκ τῶν τριῶν σημειοσυνόλων, ὁρίζουν εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ, τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁλόκληρον εἰς τὸ σημειοσύνολον.

II) ***Ἂν δύο σημεῖα Α καὶ Β δὲν ἀνήκουν εἰς τὸν ἴδιον κλειστὸν χῶρον*** τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ φυσικὰ ἡ ἀπέραντος εὐθεῖα ΑΒ θὰ ἔχη μὲ τὸ σύνορον Π ἕνα καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον.

$$\Pi \cap AB = \{\Gamma\}$$

Τὸ σημεῖον Γ λέγεται ***ἴχνος*** τῆς εὐθείας ΑΒ.

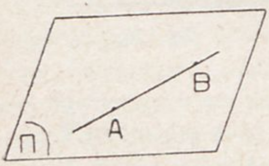


Σχ. 28.

α) ***Αἱ δυναταὶ θέσεις μιᾶς εὐθείας (ε) καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π εἰς τὸν χῶρον εἶναι αἱ ἑξῆς:***

1ον) Ἡ (ε) ἔχει μὲ τὸ Π ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον (Σχ. 28) τὸ Α. Λέγομεν συνήθως ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) διαπερνᾶ τὸ ἐπίπεδον Π ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ εὐθεῖα ε, ***τέμνονται.***

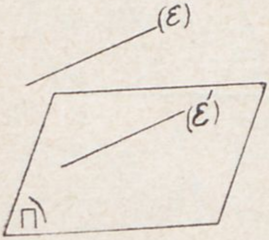
$$(\varepsilon) \cap \Pi = \{A\}$$



Σχ. 29.

2ον) Ἡ (ε) ἔχει μέ τὸ ἐπίπεδον Π δύο σημεῖα κοινὰ τὰ Α καὶ Β. Τότε ὅλα τὰ σημεῖα τῆς (ε) θὰ ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ.29). ***Λέγομεν ὅτι ἡ (ε) εἶναι τότε παράλληλος πρὸς τὸ Π μὲ τὴν εὐρεῖαν σημασίαν.***

$$\Pi \cap (\varepsilon) = (\varepsilon)\ ,\ (\varepsilon) \subset \Pi.$$



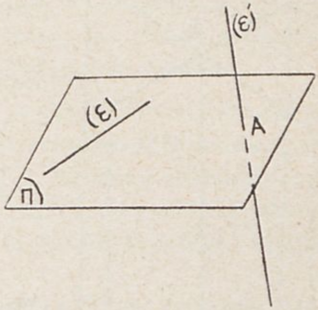
Σχ. 30.

3ον) Ἡ (ε) δὲν ἔχει κανένα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ Π: (Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ (ε) εἶναι παράλληλος μὲ τὴν στενὴν σημασίαν, πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ Π ἔστω τὴν ε΄.) (Σχ, 30). Λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ε εἶναι ***παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π μὲ τὴν στενὴν σημασίαν.***

β) ***Αἱ δυναταὶ θέσεις μεταξὺ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄) εἰς τὸν χῶρον.***

1) Ἡ εὐθεῖα (ε) καὶ τυχὸν σημεῖον Α τῆς (ε΄) ὁρίζουν τὴν

θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου Π (Σχ. 31). Ἔστω ὅτι ἡ (ε′) δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ Π. Ἐφ᾽ ὅσον τὸ σημεῖον $A \notin (\varepsilon)$, αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε′) δέν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον. Αἱ δύο εὐθεῖαι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὀνομάζονται ***ἀσύμβατοι.***



Σχ: 31.

2) Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται μετὰ τῆς εὐθείας (ε′) εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ νὰ ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον. Αἱ δύο εὐθεῖαι ὀνομάζονται τότε ***τεμνόμεναι.***

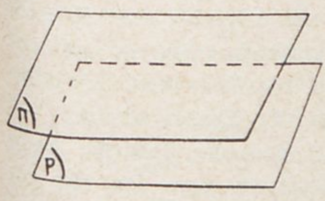
3) Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται μετὰ τῆς εὐθείας (ε′) εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ νὰ μὴ ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον. Τότε αἱ εὐθεῖαι λέγονται ***παράλληλοι*** (μὲ τὴν στενὴν σημασίαν).

4) Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς (ε′), ὁπότε αἱ δύο εὐθεῖαι ***συμπίπτουν*** (παράλληλοι μὲ τὴν εὐρεῖαν σημασίαν).

γ) ***Αἱ δυναταὶ θέσεις μεταξὺ δύο ἐπιπέδων Π καὶ Ρ εἰς τὸν χῶρον.***

1) Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ἐὰν ἔχουν κοινὰ ὅλα των τὰ σημεῖα, συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδον. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἰς τήν περίπτωσιν αὐτὴν λέγονται ***παράλληλα*** μὲ τὴν εὐρεῖαν σημασίαν.

$\Pi \cap P = \Pi = P \Longrightarrow \Pi \parallel P$ (μὲ τὴν εὐρεῖαν σημασίαν).



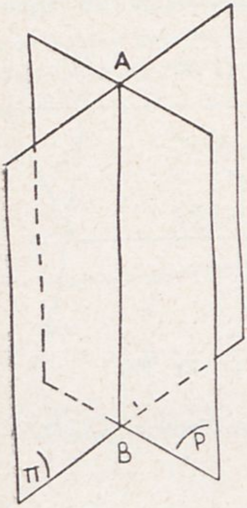
Σχ. 32.

2) Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ἐὰν δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον, λέγονται ***παράλληλα*** μὲ τήν στενὴν σημασίαν (Σχ. 32)

$\Pi \cap P = \varnothing \Longrightarrow \Pi \parallel P$ (μὲ τὴν στενὴν σημασίαν).

3) Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ἐὰν ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον τοὐλάχιστον, χωρὶς νὰ συμπίπτουν, τότε θὰ ἔχουν καὶ ἄλλα κοινὰ σημεῖα, τὰ

ὁποῖα θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείαςκοινῆς τῶν δύο ἐπιπέδων. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ θὰ λέγωνται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν *τεμνόμενα* (Σχ. 33).



Σχ. 33.

Παρατήρησις. Ἡ σχέσις τῆς παραλληλίας μεταξὺ ἐπιπέδων εἶναι :

1) Ἀνακλαστική : $\Pi \parallel \Pi$
2) Συμμετρική : $\Pi \parallel P \Longrightarrow P \parallel \Pi$
4) Μεταβατικὴ : $\Pi \parallel P$ καὶ $P \parallel \Sigma \Longrightarrow \Pi \parallel \Sigma$

§ 160. Αἱ θεμελιώδεις ἀρχαὶ τῶν Μαθηματικῶν. Ἡ ἀφετηρία κάθε Μαθηματικοῦ κλάδου εἶναι ὀλίγαι ἁπλαῖ ἔννοιαι, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθοῦν. Τὰς ἁπλᾶς αὐτὰς ἐννοίας τὰς λέγομεν καὶ ***πρωταρχικὰς ἐννοίας***, διότι δὲν ὑπάρχουν ἁπλούστεραι διὰ νὰ τὰς ὁρίσουν. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἔχομεν ὡς πρωταρχικὰς ἐννοίας τὴν ἔννοιαν τοῦ χώρου, τῆς γραμμῆς, τοῦ σημείου (§ 157). Εἰς τὰς πρωταρχικὰς αὐτὰς ἐννοίας εὑρίσκομεν ἰδιότητας ἐκ τῆς παρατηρήσεως. Αἱ ἰδιότητες αὐταὶ δὲ προκύπτουν διὰ σειρᾶς συλλογισμῶν. Τὰς ἰδιότητας αὐτὰς τῶν πρωταρχικῶν ἐννοιῶν τὰς λέγομεν ***ἀξιώματα***. Μὲ βάσιν τὰς πρωταρχικὰς ἐννοίας καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν δημιουργοῦμεν ἄλλας ἐννοίας πλέον συνθέτους. Προκύπτουν ἔτσι οἱ ***ὁρισμοί***.

Ἡ περαιτέρω θεμελίωσις γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πρωταρχικῶν ἐννοιῶν, τῶν ἀξιωμάτων καὶ τῶν ὁρισμῶν. Ὁ συλλογισμὸς τώρα πλέον καθοδηγεῖται ἀπό τὴν Λογικὴν καὶ εὑρίσκει νέας ἰδιότητας. Δηλαδὴ αἱ νέαι ἰδιότητες ἀποδεικνύονται καὶ ὀνομάζονται ***Θεωρήματα.*** Αἱ ἁπλαῖ ἔννοιαι τῆς Γεωμετρίας ἐξετέθησαν εἰς τὴν (§ 157). Εἰς τὰ μαθήματα τῆς Στερεομετρίας, τοῦ βιβλίου αὐτοῦ θὰ δοθοῦν αἱ ἰδιότητες μερικῶν βασικῶν σχημάτων εἰς τὸν χῶρον κατὰ τρόπον ἐμπειρικόν, δηλ. διὰ τῆς παρατηρήσεως. Δηλαδὴ δὲν θὰ γίνουν ἀποδείξεις προτάσεων (θεωρημάτων) κατὰ τρόπον αὐστηρόν, ὅπως ἀπαιτεῖ ἡ Μαθηματικὴ δομὴ τῆς Γεωμετρίας. Αἱ αὐστηραὶ ἀποδείξεις τῶν προτάσεων θὰ γίνουν εἰς ἀνωτέρας Τάξεις, Ἡ σχεδίασις ὅμως τῶν σχημάτων, ἡ διατύπωσις τῶν προτάσεων μὲ τὸν συμβολικὸν τρόπον γραφῆς καὶ ἡ δικαιολόγησις τῶν ἰδιοτήτων διὰ τῆς παρατηρήσεως, θὰ δημιουργήσουν τὰς ἀπαραιτήτους προϋποθέσεις διὰ πλήρη γνῶσιν τῆς Στερεομετρίας, ὅταν διδαχθῇ εἰς τὰς τάξεις τοῦ Λυκείου.

§ **161. Προτάσεις.** «Νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα κάθε προτάσεως καὶ μὲ τὴν βοήθειαν παρατηρήσεων ἐπὶ ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα ὁμοιάζουν μὲ ἐπίπεδα, εὐθείας, γωνίας κ.λ.π. (θρανία, τραπέζια, τομαὶ τοίχων κ,λ.π.) νὰ δικαιολογήσετε τὸ συμπέρασμα κάθε προτάσεως. Νὰ γίνῃ ἐπίσης χρῆσις συμβολισμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὰς διαφόρους ἰδιότητας».

1) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ ἕνα ἐπίπεδον τέμνῃ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, θὰ τέμνῃ τότε καὶ τὴν ἄλλην.

2) Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

3) Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

4) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἡ τομή των εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

5) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλον.

6) Αἱ τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου εἶναι παράλληλοι.

7) Παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα, περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσα.

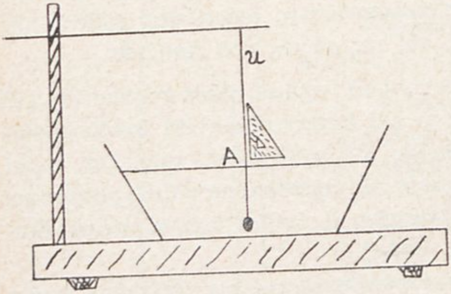
8) Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τοῦ χώρου διέρχεται ἕνα μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

9) Δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τρίτον εἶναι παράλληλα καὶ μεταξύ των.

10) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα καὶ μία εὐθεῖα τέμνῃ τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, τότε αὐτὴ θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο.

11) Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι δέν εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, εἶναι ἴσαι.

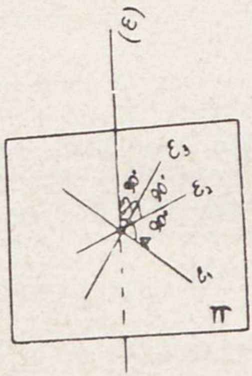
§ **162. Εὐθεῖα κάθετος πρὸς ἐπίπεδον.** α) Τὸ νῆμα τῆς στάθμης ὁρίζει τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου (κ). Ἐὰν τοῦτο συναντήση ἐπιφάνειαν ὑγροῦ εἰς ἠρεμίαν (ὁριζόντιον ἐπιφάνειαν), τότε παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὸ σχηματίζει ὀρθὰς γωνίας μὲ κάθε εὐθεῖαν τῆς ὁριζοντίας ἐπιφανείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ ἴχνος A τῆς κατακορύφου (Σχ. 34).



Σχ. 34.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς τομὰς τῶν τοίχων τῆς αἰθούσης διδασκαλίας, εἶναι κάθετοι εἰς τὸ δάπεδον καὶ τὴν ὀροφήν.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ ὁ ἑξῆς γενικὸς ὁρισμός. ***Μία εὐθεῖα (ε) θὰ λέγεται κάθετος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π (Σχ. 35) ὅταν αὐτὴ τέμνῃ τὸ Π καὶ εἶναι κάθετος πρὸς κάθε εὐθεῖαν τοῦ Π, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς A.***



Σχ. 35.

Συμβολισμὸς $(\varepsilon) \perp \Pi$

$$(\widehat{\varepsilon A \varepsilon_1}) = (\widehat{\varepsilon A \varepsilon_2}) = \ldots = 90^0 \Longleftrightarrow \varepsilon \perp \Pi$$

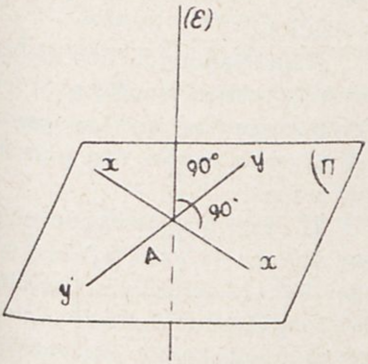
Λέγομεν ὅτι ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον πρὸς μίαν εὐθεῖαν (ε), ὅταν ἡ (ε) εἶναι κάθετος πρὸς τὸ Π. Γράφομεν λοιπὸν

$$(\varepsilon) \perp \Pi \Longleftrightarrow \Pi \perp (\varepsilon)$$

β) Ἔστω μία εὐθεῖα (ε) (Σχ. 36) καὶ ἕνα σημεῖον αὐτῆς A. Ἡ εὐθεῖα x΄x εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ σημεῖον A. Ἐπίσης ἡ yy΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ σημεῖον τῆς A.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι x΄x καὶ y΄y δὲν συμπίπτουν, τότε προφανῶς ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Π. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν (ε) εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴχνος της A. Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θὰ μάθωμεν ὅτι, ὅταν συμβαίνουν τὰ ἀνωτέρω, ἡ (ε) θὰ εἶναι κάθετος πρὸς κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ ἴχνος τῆς A.

Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὸ συμπέρασμα :



Σχ. 36

Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των, τότε αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι.

γ) ***Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον*** λέγεται τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τῆς καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἀπὸ τὸ σημεῖον μέχρι τὸ ἴχνος αὐτῆς.

§ **163. Προτάσεις**. «Διὰ τὴν δικαιολόγησιν τῶν κατωτέρω προτάσεων νὰ ἀκολουθήσετε τὰς ὑποδείξεις, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν διὰ τὰς προτάσεις τῆς § 161».

1) Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς ἢ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου μία μόνον εὐθεῖα κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον διέρχεται.

2) Ἀπὸ ἕνα δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς ἢ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἕνα μόνον ἐπίπεδον κάθετον εἶναι δυνατὸν νὰ φέρωμεν πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

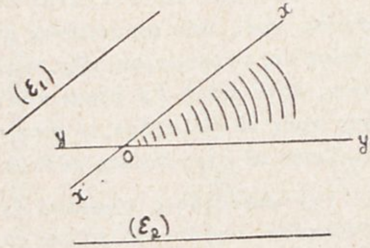
3) Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.

4) Δύο εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.

5) Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

6) Ὑπάρχει κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν;

§ **164. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.** α) Ἐὰν (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι δύο εὐθεῖαι ἀσύμβατοι καὶ ἀπὸ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου Ο φέρωμεν τὰς $x'ox \parallel (\varepsilon_1)$ καὶ $y'oy \parallel (\varepsilon_2)$, θὰ σχηματισθοῦν ἀπὸ τὰς x΄ox, y΄oy, δύο ζεύγη κατὰ κορυφὴν γωνιῶν. Δύο ἀπὸ αὐτὰς τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας θὰ ἔχουν μέτρον $\leq 90^0$. Ἡ γωνία αὐτὴ ἡ $\leq 90^0$ ὁρίζεται ὡς ***γωνία τῶν δύο ἀσυμβάτων.*** (Σχ. 37). Ἡ γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς



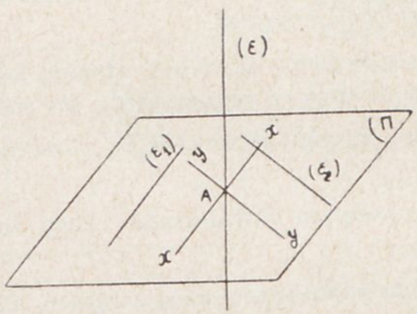
Σχ. 37

τοῦ σημείου Ο, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐφέραμεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ἀσυμβάτους.

Παρατήρησις I. Ἐὰν αἱ (ε_1) καὶ ἡ (ε_2) εἶναι παράλληλοι (μὲ στενὴν σημασίαν), εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ γωνία των θὰ ἔχῃ μηδενικὸν μέτρον.

II. Ἐὰν ἡ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) ἔχῃ μέτρον 90^0, αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι θὰ ὀνομάζωνται ***ὀρθογώνιοι.*** Ὁ συμβολισμὸς διατηρεῖται ὁ ἴδιος μὲ τὸν συμβολισμὸν τῆς καθετότητος : $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

III. Γωνία δύο διευθύνσεων θὰ ὀνομάζωμεν τὴν γωνίαν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιπροσωπεύουν τάς δύο δοθείσας διευθύνσεις. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἂν ἡ γωνία δύο δοθεισῶν διευθύνσεων ἔχῃ μέτρον 90^0, τότε αἱ διευθύνσεις θὰ εἶναι ***ὀρθογώνιοι*** ἢ ***κάθετοι.***



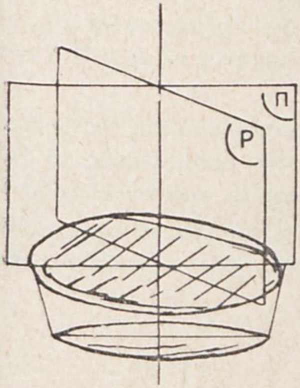
Σχ. 38

β) Ἔστω $(\varepsilon) \perp \Pi$ καὶ $(\varepsilon_1) \subset \Pi$ $(\varepsilon_2) \subset \Pi$ (Σχ. 38) Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἴχνος A φέρω $x'x \parallel (\varepsilon_1)$ καὶ $y'y \parallel (\varepsilon_2)$, αἱ $x'x$, $y'y$ θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ Π. Καὶ ἐπειδὴ $(\varepsilon) \perp \Pi$ ἡ $(\widehat{\varepsilon, x'x}) = 90^0$ καὶ $(\widehat{\varepsilon, y'y}) = 90^0$. Ἄρα ἡ (ε) ὀρθογώνιος πρὸς τὰς (ε_1) καὶ (ε_2). Συνεπῶς: ***Κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.***

Ἀντιστρόφως : Ἔστω ἡ (ε) ὀρθογώνιος πρὸς τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ τέμνουσα τὸ Π εἰς τὸ Α. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἴχνους τῆς Α φέρω τὰς εἰς τὸ Π εὑρισκομένας εὐθείας $x'x \parallel \varepsilon_1$ καὶ $y'y \parallel \varepsilon_2$, τότε $(\widehat{\varepsilon, x'x}) = 90^0$ $(\widehat{\varepsilon, y'y}) = 90^0$, ἄρα ἡ (ε) κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθεῖας $x'x$, $y'y$ τοῦ Π εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Α αὐτῶν. Συνεπῶς ἡ (ε) κάθετος πρὸς τὸ Π. Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὸ συμπέρασμα :

Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου, τότε εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

§ **165. Ἐπίπεδα κάθετα.** Ἂς ἐπαναφέρωμεν εἰς τὴν μνήμην μας τὴν εἰκόνα τοῦ νήματος τῆς στάθμης, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον εἰς τὴν ὁριζόντιον ἐπιφάνειαν ἑνὸς ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν (Σχ. 39). Ἂς φαντασθῶμεν ἕνα λεπτὸν φύλλον χαρτονίου Π (ἐπίπεδον), τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ νῆμα. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ τὸ ὀνομάσωμεν ***κάθετον*** πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἐπίσης καὶ κάθε ἄλλο ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον θὰ διέρχεται διὰ τοῦ νήματος, θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ.



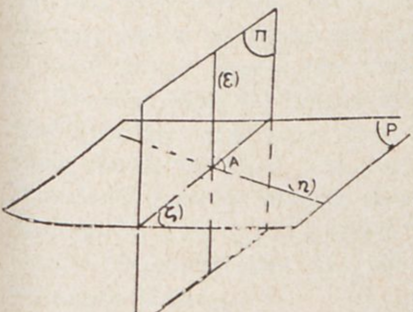
Σχ. 39

Γενικῶς ἕνα ἐπίπεδον Π θὰ ὀνομάζεται κάθετον πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Ρ ($\Pi \perp P$), ***ἐὰν τὸ Π περιέχῃ μίαν τουλάχιστον εὐθεῖαν (ε), κάθετον πρὸς Ρ*** ($\varepsilon \perp P$) (Σχ. 40).

Ἡ κάθετος εὐθεῖα (ε) πρὸς τὸ Ρ ἔχει ἴχνος τὸ σημεῖον Α. Τὸ ἐπίπεδον Π, ἐπειδὴ περιέχει τὴν (ε), θὰ ἔχῃ ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ Ρ. Ἄρα τὰ Π καὶ Ρ τέμνονται καὶ ἔστω (ζ) ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς των. Ἐὰν εἰς τὸ Ρ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν (η) κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ζ), εἰς τὸ σημεῖον Α θὰ ἔχωμεν

$$(\eta) \perp (\zeta),\ (\eta) \perp (\varepsilon) \Longleftrightarrow (\eta) \perp \Pi$$

Συνεπῶς καὶ τὸ Ρ κάθετον εἰς τὸ Π ($P \perp \Pi$), διότι μία εὐθεῖα του (η) εἶναι κάθετος εἰς τὸ Π. Ἰσχύει λοιπὸν ἡ συμμετρικὴ ἰδιότης εἰς τὴν καθετότητα δύο ἐπιπέδων



Σχ. 40

$$\Pi \perp P \Longrightarrow P \perp \Pi.$$

Δὲν ἰσχύει προφανῶς ἡ ἀνακλαστικὴ ἰδιότης, διότι ἕνα ἐπίπεδον δὲν εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἑαυτόν του.

Ἐπίσης δὲν ἰσχύει οὔτε ἡ μεταβατικὴ ἰδιότης. Διότι, ἐὰν Π $\perp$ Ρ, Ρ $\perp$ Σ, δὲν ἕπεται ὅτι καὶ Π $\perp$ Σ. Ἐνδέχεται νὰ εἶναι Π $\perp$ Σ ἀλλὰ ἐνδέχεται Π $\parallel$ Σ ἢ τὰ Π καὶ Σ νὰ τέμνωνται ὄχι καθέτως.

§ **166. Προτάσεις.** 1) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των καὶ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομήν των, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

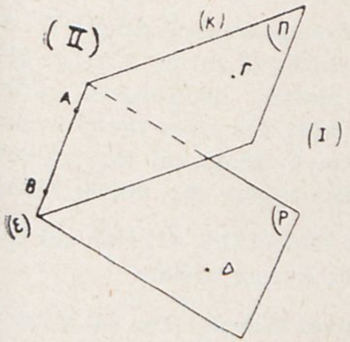
2) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των καὶ ἀπὸ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἑνὸς φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον, αὐτὴ εὑρίσκεται (περιέχεται) εἰς τὸ πρῶτον ἐπίπεδον.

3) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται καὶ εἶναι κάθετα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον, τότε ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς, τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων, εἶναι κάθετος πρὸς τὸ τρίτον ἐπίπεδον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄

ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

§ **167. Δίεδροι γωνίαι.** α) Ἂς φαντασθῶμεν τὸ σχῆμα (K), τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο ἡμιεπίπεδα Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ἀκμὴν τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ τὰ ὁποῖα δὲν συμπίπτουν (Σχ. 41). $K = \Pi \cup P$. Ἕνα βιβλίον ἀνοικτὸν μᾶς δίδει μίαν εἰκόνα, ποὺ ἀποτελεῖ ἕνα μέρος τοῦ σχήματος αὐτοῦ.



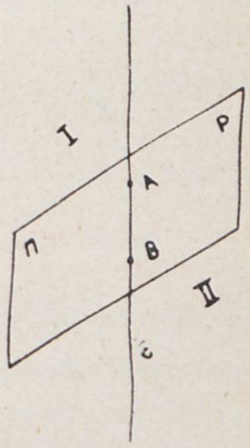
Σχ. 41.

Τὰ σημεῖα τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σχῆμα, (K) κατανέμονται εἰς δύο ξένα μεταξύ των σημειοσύνολα (I) καὶ (II).

Τὰ σημειοσύνολα (I) καὶ (II) ἔχουν κοινὸν σύνορον τὸ σχῆμα (K). Διότι κάθε γραμμή, ποὺ συνδέει ἕνα σημεῖον τοῦ (I) μὲ ἕνα σημεῖον τοῦ (II), σύναντᾶ τὸ σχῆμα (k).

Καθένα ἀπὸ τὰ σημειοσύνολα (I) καὶ (II) μαζὶ μὲ τὸ σύνορόν του K ὀνομάζεται ***Δίεδρος γωνία*** μὲ ἕδρας τὰ ἡμιεπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ μὲ ***ἀκμὴν*** τὴν εὐθεῖαν (ε).

Ὅταν αἱ ἕδραι δὲν συμπίπτουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τότε ἡ μία ἀπὸ τὰς διέδρους γωνίας θὰ εἶναι ἕνα ***κυρτὸν*** σημειοσύνολον καὶ θὰ λέγεται ***κυρτὴ δίεδρος*** γωνία, ἐνῶ ἡ ἄλλη εἶναι ἕνα μὴ κυρτὸν σημειοσύνολον καὶ θὰ λέγεται ***μὴ κυρτὴ δίεδρος.***



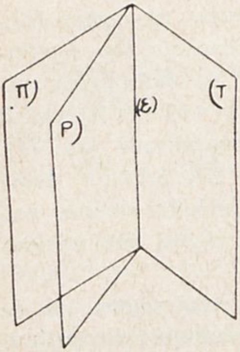
Σχ: 42.

Ὅταν αἱ δύο ἕδραι μιᾶς διέδρου ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδον (Σχ. 42), αἱ δύο δίεδροι εἶναι κυρτὰ σημειοσύνολα καὶ συμπίπτουν μὲ τοὺς δύο ἡμιχώρους, οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται ἀπὸ τὸ ἕνα ἐπίπεδον. Αἱ δίεδροι αὐταὶ γωνίαι λέγονται ***ἀποπλατυσμέναι*** δίεδροι (Σχ. 42).

Μία δίεδρος γωνία μὲ ἀκμὴν τὴν (ε) θὰ συμβολίζεται ὡς ἑξῆς :

$\widehat{\Pi\varepsilon P}$ ἢ $\Pi.\widehat{AB}.P$, ἂν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν τὴν (ε).

Ἐπίσης εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ὁ συμβολισμὸς $\Gamma.\widehat{AB}\Delta$ ἢ $\Gamma.\widehat{\varepsilon\Delta}$, ἐὰν τὰ σημεῖα $\Gamma\in\Pi$ καὶ $\Delta\in P$. (Σχ. 41).

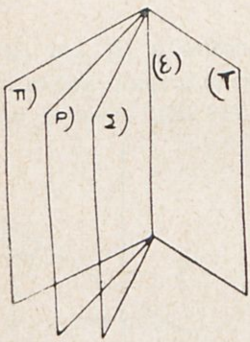


Σχ. 43.

Ἐφεξῆς δίεδροι. Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ***ἐφεξῆς***, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, μίαν κοινὴν ἕδραν καὶ τὰς μὴ κοινὰς ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς ἕδρας.

Π.χ. αἱ δύο δίεδροι (Σχ. 43) $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ καὶ $\widehat{P\varepsilon T}$ εἶναι ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι,

Διαδοχικαὶ δίεδροι (Σχ. 44) εἶναι αἱ $\widehat{\Pi\varepsilon P}$, $\widehat{P\varepsilon\Sigma}$, $\widehat{\Sigma\varepsilon T}$, διότι κάθε μία καὶ ἡ ἑπομένη της εἶναι ἐφεξῆς.



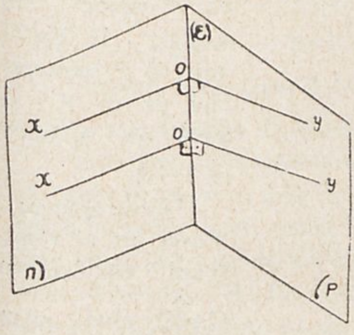
Σχ. 44.

§ **168. Ἐπίπεδος γωνία διέδρου** : Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς (ε) τῆς διέδρου γωνίας $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ (Σχ. 45) φέρομεν μέσα εἰς κάθε ἕδραν της τὰς καθέτους οx, οy ἐπὶ τὴν ἀκμὴν (ε), θὰ σχηματισθῇ τότε ἡ ἐπίπεδος γωνία $\widehat{xoy}$.

Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν ἰδίαν ἀκριβῶς κατασκευὴν λαμβάνοντες ἕνα ἄλλο τυχὸν σημεῖον Ο΄ τῆς ἀκμῆς (ε), θὰ σχηματισθῇ μία ἄλλη ἐπίπεδος γωνία $\widehat{x'o'y'}$, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς $\widehat{xoy}$ ($ox \parallel o'x'$, $oy \parallel o'y'$). Τότε αἱ γωνίαι $\widehat{xoy}$, $\widehat{x'o'y'}$ εἶναι ἴσαι : $\widehat{xoy}=\widehat{x'o'y'}$. Ὁσασδήποτε ἐπιπέδους γωνίας ἂν κατασκευάσωμεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ποὺ κατεσκευάσθησαν αἱ $\widehat{xoy}$, $\widehat{x'o'y'}$, ὅλαι θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Μία, ὁποιαδήποτε ἀπὸ αὐτάς, λέγεται ***ἐπίπεδος γωνία*** τῆς διέδρου.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $(\varepsilon)\perp ox$, $(\varepsilon)\perp oy \Longrightarrow (\varepsilon)\perp \widehat{xoy}$. δηλαδή ἡ ἀκμὴ (ε) τῆς διέδρου γωνίας $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον



Σχ. 45.

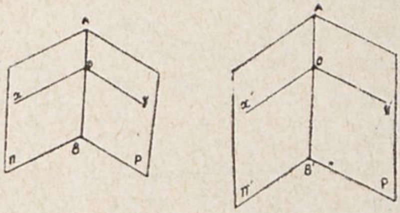
τῆς ἐπιπέδου γωνίας $\widehat{xoy}$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ***ἐπίπεδος*** γωνία μιᾶς διέδρου μπορεῖ νὰ δημιουργηθῇ, ἐὰν ἐπίπεδον τμήσῃ τὴν δίεδρον καθέτως πρὸς τὴν ἀκμήν της.

Ἴσαι δίεδροι: Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ἴσαι, ὅταν μέ κατάλληλον μετακίνησιν τοποθετηθῇ ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ ταυτισθοῦν (συμπέσουν).

Ὅταν δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, προφανῶς καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

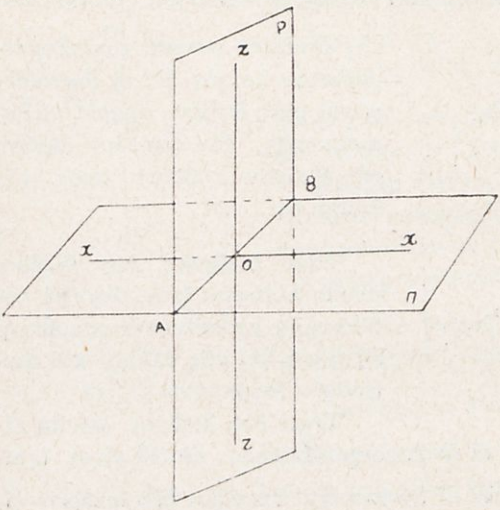
Ἀντιστρόφως: Ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι δύο διέδρων εἶναι ἴσαι καὶ αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι.

Πράγματι ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ $\widehat{xoy}$ καὶ $\widehat{xoy}'$ εἶναι ἴσαι καὶ τοποθετήσωμεν τὴν δίεδρον $\Pi'\widehat{A'B'}P'$ ἐπάνωεἰς τὴν $\Pi\widehat{AB}P$, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι $\widehat{xoy}$ καὶ $x'\widehat{o'}y'$, τότε καὶ αἱ ἀκμαὶ ΑΒ καὶ Α'Β' θὰ συμπέσουν, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν ἐκ τοῦ Ο, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$, νὰ ἀχθοῦν δύο διαφορετικαὶ κάθετοι. Συνεπῶς καὶ αἱ ἕδραι τῶν διέδρων συμπίπτουν.


Σχ. 46.

Ὀρθὴ δίεδρος: Ἔστω $\Pi\widehat{AB}P$ μία δίεδρος γωνία (ΣΧ. 46) καὶ $\widehat{xoz}$ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος αὐτῆς Ἐὰν ὑποθέσσωμεν πὼς ἡ γωνία

$\widehat{xoz}$ εἶναι ὀρθή, τότε τὰ δύο ἡμιεπίπεδα ποὺ ἀποτελοῦν τὰς ἕδρας της εἶναι μέρη δύο καθέτων ἐπιπέδων.



Σχ. 23.

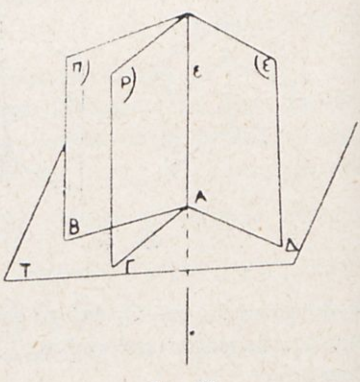
Πράγματι ἔχομεν oz $\perp$ ox, oz $\perp$ AB $\Longrightarrow$ oz $\perp$ Π. Ἐφ' ὅσον τὸ Ρ περιέχει τὴν oz τὸ Ρ $\perp$ Π κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 165.)

Ἀντιστρόφως · Ἔστω ὅτι αἱ ἕδραι Π καὶ Ρ τῆς διέδρου $\widehat{\text{ΠABΡ}}$ εἶναι μέρη δύο καθέτων ἐπιπέδων. Τότε ἡ ἐπίπεδος γωνία αὐτῆς $\widehat{xoz}$ θὰ εἶναι ὀρθή.

Πράγματι: Ἐφ' ὅσον Π $\perp$ Ρ καὶ oz $\perp$ AB $\Longrightarrow$ ox $\perp$ Π $\Longrightarrow$ oz $\perp$ ox. Ἄρα $\widehat{xoz} = 1$ ὀρθ.

Ἐὰν ἡ ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου εἶναι ὀρθή, τότε ἡ δίεεδρος λέγεται ***ὀρθὴ δίεδρος γωνία***. Δύο ἐπίπεδα λοιπόν, γενικῶς, εἶναι κάθετα τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν τεμνόμενα σχηματίζουν τέσσαρας ὀρθὰς διέδρους γωνίας.

(Ἀρκεῖ ἡ μία ἐκ τῶν σχηματιζομένων διέδρων νὰ εἶναι ὀρθή).



Σχ. 48.

§ **169. Μέτρησις διέδρου γωνίας :** Ἔχομεν τὰς ἐφεξῆς διέδρους γωνίας $\widehat{\text{ΠεΡ}}$, $\widehat{\text{ΡεΣ}}$. Ἡ ἕνωσις αὐτῶν τῶν διέδρων ἀποτελεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν $\widehat{\text{ΠεΣ}}$, $\widehat{\text{ΠεΣ}} \cup \widehat{\text{ΡεΣ}} = \widehat{\text{ΠεΣ}}$, ἡ ὁποία λέγεται ***ἄθροισμα*** τῶν διέδρων. $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ καὶ $\widehat{P\varepsilon\Sigma}$.

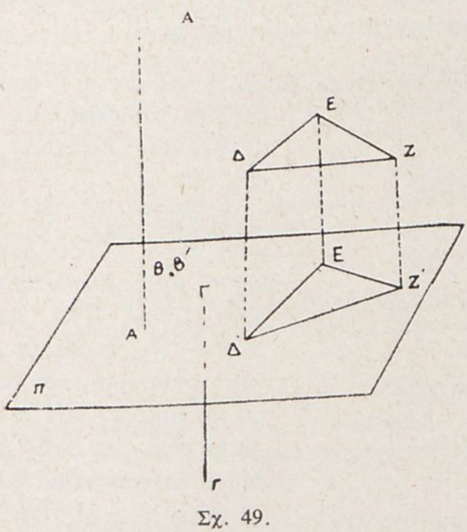
Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Τ κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν ε τῶν ἐφεξῆς διέδρων, σχηματίζονται αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι $\widehat{BA\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma A\Delta}$. Ἔχομεν $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Gamma A\Delta} = \widehat{BA\Delta}$

Ἀλλὰ ἡ $\widehat{BA\Delta}$ εἶναι ἡ ἐπίπεδος τῆς $\widehat{\Pi\varepsilon\Sigma}$, δηλαδὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διέδρων $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ καὶ $\widehat{P\varepsilon\Sigma}$.

Ἐὰν μίαν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν τὴν διαιρέσωμεν μὲ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὴν ἀκμήν της, εἰς 90 ἴσας διέδρους, τότε καὶ ἡ ἐπίπεδος ὀρθὴ γωνία τῆς ὀρθῆς διέδρου θὰ διαιρεθῇ εἰς 90 ἴσας ἐπιπέδους γωνίας καὶ τὸ μέτρον κάθε μιᾶς ἐπιπέδου θὰ εἶναι 1^0 κατὰ τὰ γνωστά. Ἡ κάθε δίεδρος, ἡ ὁποία ἔχει ἐπίπεδον γωνίαν 1^0, λέγεται δίεδρος γωνία μὲ μέτρον 1^0, ἰσοῦται δὲ μὲ τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς διέδρου καὶ μπορεῖ νὰ τὴν λάβωμεν ὡς μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διέδρων γωνιῶν.

Συμπέρασμα : Τὸ μέτρον εἰς μοίρας μιᾶς διέδρου γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ μέτρον εἰς μοίρας τῆς ἐπιπέδου γωνίας της.

§ **170**. ***Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἢ σχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου.***



Σχ. 49.

Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς ἑνὸς ἐπιπέδου Π (Σχ. 49) φέρομεν τὴν κάθετον ΑΑ′ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Τὸ σημεῖον Α′, ὅπου ἡ κάθετος τέμνει τὸ Π, λέγεται ***ὀρθὴ προβολὴ*** τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, Τὸ ἐπίπεδον Π λέγεται ***προβολικὸν ἐπίπεδον***.

Ἐὰν τὸ σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου π.χ. Β, τότε συμπίπτει μὲ τὴν προβολήν του.

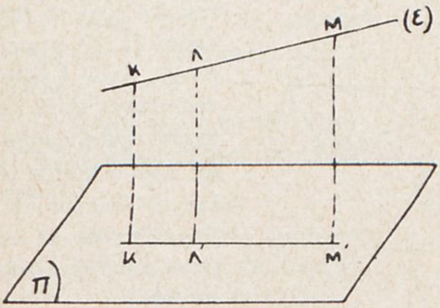
Ἡ προβολὴ ἑνὸς σχήματος π.χ. ἑνὸς τριγώνου ΔΕΖ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι τὸ σχῆμα Δ'Ε'Ζ' (τρίγωνον), τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ ΔΕΖ (Σχ. 49).

Τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΑ' τῆς καθέτου ἐπί τὸ Π λέγεται ***ἀπόστασις*** τοῦ Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἡ ἀπόστασις μπορεῖ νὰ πάρῃ πρόσημον + ἢ—καθόσον τὸ σημείον, τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν τὴν προβολήν, εὑρίσκεται εἰς τὸν ἕνα ἢ εἰς τὸν ἄλλον ἡμίχωρον τοὺς ὁποίους ὁρίζει τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἐὰν τὸ Π εἶναι ἕνα ὁριζόντιον προβολικὸν ἐπίπεδον, τὸ πρόσημον + δίδεται εἰς τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τῶν εὑρισκομένων ἄνωθεν τοῦ Π καὶ τὸ πρόσημον—εἰς τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τῶν εὑρισκομένων κάτωθεν τοῦ Π. Ἡ προσημασμένη αὐτὴ ἀπόστασις λέγεται ***ὑψόμετρον***. Τὰ σημεῖα τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου ἔχουν ὑψόμετρον μηδέν.

Ἡ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου δημιουργεῖ μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π. Δὲν πρόκειται περὶ ἀμφιμονοσημάντου ἀπεικονίσεως, διότι κάθε σημεῖον τοῦ Π εἶναι εἰκὼν ἀπειραρίθμων σημείων τοῦ χώρου (Σχ. 49) π.χ. τὸ Α' εἶναι εἰκὼν ὅλων τῶν ἐπὶ τῆς Α'Α σημείων τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ Π.

§ **171.** ***Ὀρθὴ προβολὴ εὐθείας.*** Ἔστω ἡ εὐθεῖα ε, ἡ ὁποία δὲν εἶναι κάθετος πρὸς τό προβολικὸν ἐπίπεδον Π (Σχ. 50).



Σχ. 50.

Προβάλλομεν τὰ σημεῖα Κ. Λ. Μ . . . αὐτῆς ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Π. Αἱ ΚΚ', ΛΛ'. ΜΜ' . . . ὡς κάθετοι εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπειδὴ συναντοῦν τὴν ε εὑρίσκονται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ Π. Ἡ τομὴ τοῦ Π ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι ἡ εὐθεῖα Κ'Λ'Μ' . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

233) Νά σχεδιάσετε δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα νὰ τέμνωνται κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΑΒ. Εἰς τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα νὰ φέρετε εὐθεῖαν ε ∥ ΑΒ (μὲ στενὴν σημασίαν) καὶ νὰ ἐξετάσετε, ἄν ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνη ἢ ὄχι τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

234) Εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π νὰ σχηματίσετε δύο τεμνομένας εὐθείας ε καὶ ε' καὶ νὰ πάρετε ἕνα σημεῖον Α∈Π. Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπο τὸ Α καὶ τὰς ε καὶ ε' τέμνονται ἢ ὄχι; Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα τέμνωνται, ποῖα ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς αὐτῶν;

235) Νὰ σχεδιάσετε δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα νὰ τέμνωνται κατὰ μίαν εὐθεῖαν ε καὶ νὰ λάβετε Α∈ε καὶ Β∈ε, Γ∈Π, Δ∈Ρ. Νὰ φέρετε τὰς ΑΓ, ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ καὶ νὰ λάβετε τὸ Μ μέσον ΑΓ, τὸ Ν μέσον ΒΓ, τὸ Κ μέσον ΑΔ καὶ τὸ Λ μέσον ΒΔ. Νὰ δείξετε ὅτι ΜΝΚΛ παραλληλόγραμμον.

236) Νὰ φέρετε εἰς δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἕνα ἐπίπεδον Π κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΒ. Νὰ συγκρίνετε τὰς ἀποστάσεις τυχόντος σημείου Μ∈Π ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β. Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς ποίαν ἰδιότητα τοῦ σημειοσυνόλου Π συμπεραίνετε;

237) Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε. Νά ἐξετάσετε, ἐὰν τὸ πρόβλημα ἔχει περισσοτέρας τῆς μιᾶς λύσεως.

238) Ἐὰν δοθοῦν δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε καὶ ε', εἶναι δυνατὸν νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν ἄλλην;

239) Πῶς εἶναι δυνατὸν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς δύο τεμνομένων ἐπιπέδων Π, Ρ, να φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ;

240) Ἂν μία εὐθεῖα ε τέμνει ἕνα ἐπίπεδον Π εἰς ἕνα σημεῖον Α ὄχι καθέτως. Πόσαι εὐθεῖαι τοῦ Π, διερχόμεναι διὰ τοῦ Α, θὰ εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν ε;

241) Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν εἶναι παράλληλα μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ε', εἰς δύο διαφορετικὰ σημεῖα της.

242) Αἱ προβολαὶ παραλλήλων εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα παράλληλα. Ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα τότε αἱ προβολαί των εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα ἴσα καὶ παράλληλα. Νὰ ἐξετάσετε, ἐὰν ἰσχύουν τὰ ἀνωτέρω.

243) Νὰ ἐξετάσετε, ἐὰν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν διέδρου γωνίας, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἕδρας της.

244) Νὰ ἐξετάσετε ἐὰν τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του.

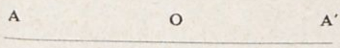
245) Μιᾶς διέδρου γωνίας $\widehat{\Pi AB P}$ νὰ θεωρήσετε τὸ διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδον Σ. Νὰ ἐξετάσετε, ἐὰν ἕνα σημεῖον $M \in \Sigma$ ἰσαπέχει τῶν ἑδρῶν Π καὶ Ρ. Ποίαν ἰδιότητα τοῦ διχοτομοῦντος ἡμιεπιπέδου συμπεραίνετε;

246) Ἀπὸ τὸ κέντρον 0 τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον (ε) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Νὰ λάβετε ἕνα σημεῖον $M \in \varepsilon$ καὶ νὰ ἐξετάσετε, ἐὰν τοῦτο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

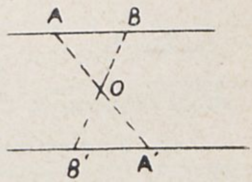
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

§ **172. α) Συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖον (κέντρον).** Ἔστω δύο σημεῖα Α καὶ Α΄ εἰς τὸν χῶρον καὶ ΑΑ΄ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν. Ἐὰν τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΑ΄ (ΟΑ= ΟΑ΄), τότε τὰ σημεῖα Α, Α΄ λέγονται ***συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο (κέντρον)*** (Σχ. 51).



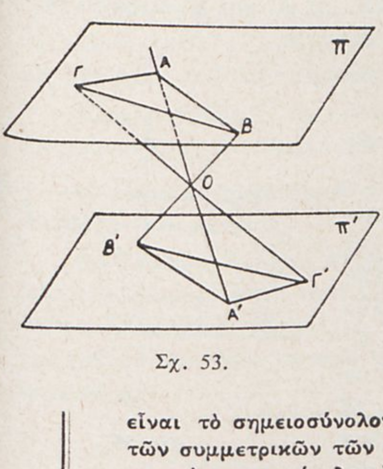
Σχ. 51.

Ι. Τὸ συμμετρικὸν μιᾶς εὐθείας ε ὡς σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς εἶναι, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας, εὐθεῖα ε΄ παράλληλος πρὸς τὴν ε (Σχ. 52).



Σχ. 52.

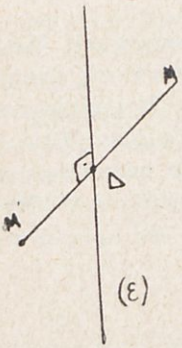
ΙΙ. Ἐὰν μᾶς δοθῇ ἕνα ἐπίπεδον Π (Σχ. 53) καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ Π διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἐπιπέδου Π ὡς πρὸς κέντρον τὸ Ο, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Κατασκευάζομεν τὰ συμμετρικὰ τῶν Α, Β, Γ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο, ἔστω δὲ αὐτὰ τὰ Α΄, Β΄, Γ΄, τὰ ὁποῖα προφανῶς ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Π΄ παράλληλον πρὸς τὸ Π.



Σχ. 53.

Γενικῶς δύο σχήματα Σ καὶ Σ΄ τοῦ χώρου θὰ λέγωνται συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον Ο, ἐὰν τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ Σ, ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο, εἶναι τὸ σημειοσύνολον Σ΄ καὶ ἀντιστρόφως, τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ Σ΄, ὡς πρὸς τὸ Ο, εἶναι τὸ σημειοσύνολον Σ.

§ **173. β) Συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν (ἄξονα).** Ἔστω μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνα σημεῖον Μ ἐκτὸς αὐτῆς εἰς τὸν χῶρον. Ὀνομάζομεν ***συμμετρικὸν τοῦ σημείου Μ., ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ἄξονα) ε,*** ἕνα σημεῖον Μ′ τοιοῦτον, ὥστε εἰς τὸ ἐπίπεδον (ε, Μ) ἡ εὐθεῖα ε νὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΜΜ′ (Σχ. 54). Ἐὰν ἕνα σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος ε, τὸ συμμετρικόν του συμπίπτει μὲ τὸ ἴδιο τὸ σημεῖον.



Σχ. 54.

I. Τὸ συμμετρικὸν μιᾶς εὐθείας δ, ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα ε, ὅταν ἡ δ εἶναι ἀσύμβατος πρὸς τὴν ε, εἶναι μία εὐθεῖα δ′ ἀσύμβατος πρὸς τὴν εὐθεῖαν δ καὶ τὸν ἄξονα ε.

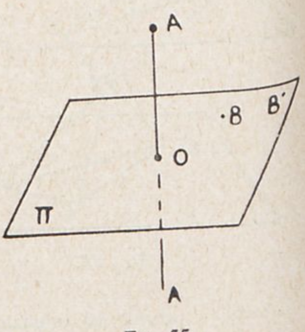
II. Τὸ συμμετρικὸν μιᾶς εὐθείας δ, ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα ε, ὅταν ἡ δ εἶναι παράλληλος ἢ ὀρθογώνιος πρὸς τὸν ἄξονα ε, εἶναι μία εὐθεῖα δ′ παράλληλος πρὸς τὴν δ.

III. Τό συμμετρικὸν ἑνὸς ἐπιπέδου Π, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα ε, εἶναι ἕνα ἐπίπεδον Π′ παράλληλον πρὸς τὸ Π. Ὁ ἄξων ε ἰσαπέχει τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Π′.

IV. Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ε, εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Α′ Β′ τοῦ αὐτοῦ μήκους μὲ τὸ ΑΒ. Τὰ Α′ καὶ Β′ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ε.

V. Δύο σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα, εἶναι σχήματα ἴσα, διότι συμπίπτουν, ἐὰν τὸ ἕνα περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας κατὰ 180^0.

§ 174. Συμμετρία ὡς πρὸς ἐπίπεδον. Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ Π (Σχ. 55). Ὀνομάζομεν ***συμμετρικὸν τοῦ σημείου*** Α, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, ἕνα σημεῖον Α′ τοῦ χώρου, τοιοῦτον ὥστε τὸ Π νὰ διχοτομῇ καθέτως τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΑ′. Ἐὰν ἕνα σημεῖον Β∈Π τὸ συμμετρικόν του



Σχ. 55.

Β′, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, συμπίπτει μὲ τὸ Β.

Ι. Τὸ συμμετρικὸν μιᾶς εὐθείας δ, ὡς πρὸς ἕνα ἐπίπεδος Π, ὅταν ἡ δ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς τὸ Π, εἶναι μία εὐθεῖα δ′, συμμετρικὴ τῆς δ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε, ὅπου ε ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς εὐθείας δ εἰς τὸ ἐπίπεδον Π.

ΙΙ. Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Α′Β′, τοῦ αὐτοῦ μήκους μὲ τὸ ΑΒ. Τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ ὁρίζονται ὡς συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

ΙΙΙ. Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ἐπιπέδου Ρ, παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας Π, εἶναι ἕνα ἐπίπεδον Ρ′ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ. Τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας Π ἰσαπέχει τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Ρ′.

ΙV. Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ἐπιπέδου Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας Π, κατὰ μίαν εὐθεῖαν ε, εἶναι ἕνα ἐπίπεδον Ρ′ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας Π νὰ διχοτομῇ τὴν δίεδρον γωνίαν $\widehat{\mathrm{P}\varepsilon\mathrm{P}'}$.

Τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθεν ἐπιπέδου καθρέπτου, εἶναι συμμετρικόν τοῦ ἀντικειμένου, ὡς πρὸς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸν ἐπίπεδον καθρέπτην.

§ **175. Ἡ συμμετρία ὡς ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις.** Κάθε εἶδος συμμετρίας (ὡς πρὸς σημεῖον, ὡς πρὸς ἄξονα, ὡς πρὸς ἐπίπεδον) ἀπεικονίζει ἕνα σύνολον σημείων τοῦ χώρου (σχῆμα Σ) εἰς ἕνα ἄλλο σύνολον σημείων τοῦ χώρου (σχῆμα Σ′).

Καὶ τὸ σχῆμα Σ′ ἀπεικονίζεται εἰς Σ. Ἔχομεν λοιπὸν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

ε) ***Πότε λέγομεν ὅτι ἕνα σχῆμα Σ ἔχει κέντρον ἢ ἄξονα, ἢ ἐπίπεδον συμμετρίας :***

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἕνα σχῆμα Σ ἔχει κέντρον ἢ ἄξονα ἢ ἐπίπεδον, συμμετρίας, ὅταν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ, ὡς πρὸς κέντρον, ἢ ἄξονα, ἢ ἐπίπεδον συμπίπτει μὲ τὸ ἴδιο τὸ σχῆμα Σ, δηλαδὴ μὲ τὸν ἑαυτόν του. Μία σφαῖρα π.χ. ἔχει κέντρον συμμετρίας τὸ κέντρον της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

247) Τί εἶναι τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ἐπιπέδου Π, ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν $\varepsilon \in \Pi$;

248) Τί εἶναι τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ἐπιπέδου Π, ὡς προς μίαν εὐθεῖαν $\varepsilon \perp \Pi$;

249) Τί εἶναι τὸ συμμετρικὸν μιᾶς γωνίας ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὴν κορυφήν της;

250) Τί εἶναι τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς κύκλου, ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδόν του καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου του;

251) Τί εἶναι τὸ συμμετρικὸν μιᾶς διέδρου γωνίας, ὡς πρὸς ἄξονα τὴν ἀκμήν της, ἢ ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς ἀκμῆς της;

252) Τί εἶναι τὸ συμμετρικὸν μιᾶς διέδρου γωνίας, ὡς πρὸς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ ἐπίπεδον μιᾶς καθέτου τομῆς της.

253) Τί εἶναι τὸ συμμετρικὸν μιᾶς διέδρου γωνίας, ὡς πρὸς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας της;

254) Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ συμμετρικὰ τῶν Π καὶ Ρ, ὡς πρὸς ἐπίπεδον συμμετρίας Σ κάθετον ἐπὶ τὸ Π.

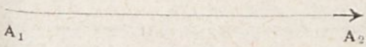
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ΄

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

(ΕΦΑΡΜΟΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΑ)

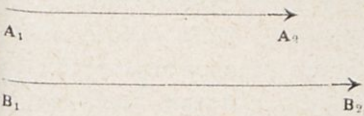
§ 176. Ὁρισμοί.

Ἐφαρμοστὸν διάνυσμα. Ἕνα διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος σημείων τοῦ χώρου (A_1, A_2) μὲ ἀρχὴν τὸ A_1 καὶ πέρας τὸ A_2 λέγεται ἐφαρμοστόν (Σχ.32).



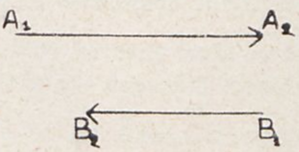
Σχ. 32.

Συγγραμμικὰ ἢ παράλληλα ὀνομάζονται δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{A_1A_2}$ καὶ $\overrightarrow{B_1B_2}$ ($\overrightarrow{A_1A_2} \parallel B_1B_2$), τὰ ὁποῖα ἔχουν φορεῖς (διευθύνσεις) παραλλήλους (μὲ εὐρεῖαν σημασίαν).



Σχ. 33.

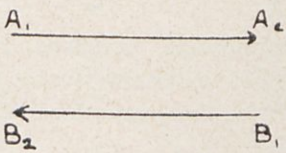
Δύο συγγραμμικὰ ἢ παράλληλα διανύσματα λέγονται ***ὁμόρροπα*** (Σχ. 33), ὅταν ἔχουν τὴν ἰδίαν φοράν.



Σχ. 34.

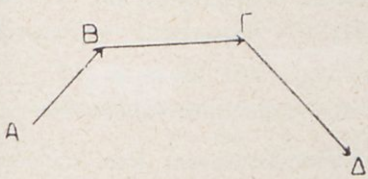
Δύο συγγραμμικὰ ἢ παράλληλα διανύσματα λέγονται ***ἀντίρροπα***, ὅταν ἔχουν ἀντιθέτους φοράς. (Σχ. 34).

Ἀντίθετα ὀνομάζονται δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ὅταν εἶναι συγγραμμικά, ἰσομήκη καὶ ἀντίρροπα (Σχ. 34α).



Σχ. 34α.

Διαδοχικὰ ὀνομάζονται δύο ἢ περισσότερα ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ὅταν ἔχουν ληφθῆ μὲ μίαν ὡρισμένην σειρὰν (διάταξιν) καὶ τὸ πέρας τοῦ πρώτου συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου, τὸ πέρας τοῦ δευτέρου μὲ τὴν ἀρχὴν



Σχ. 34β.

τοῦ τρίτου κ.ο.κ. Π.χ. τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ὅπως ἔχουν ἀναγραφῆ, εἶναι διαδοχικά (Σχ. 34β).

Ἴσα ὀνομάζονται δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ὅταν ἔχουν 1) τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν (ἢ παραλλήλους διευθύνσεις ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν), 2) τὴν ἰδίαν φορὰν (ὁμόρροπα) καὶ 3) τὸ αὐτὸ μῆκος.

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος μεταξὺ τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, δηλ. ἰσχύουν εἰς αὐτὴν αἱ ἰδιότητες, ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου διαμερίζει τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου εἰς ***κλάσεις ἰσοδυναμίας***. Κάθε κλάσις ἰσοδυναμίας ἔχει ὡς στοιχεῖα της ὅλα τὰ ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα τοῦ χώρου. Δηλαδὴ τὰ διανύσματα μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος ($\neq 0$), τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν (φορέα) καὶ τὴν αὐτὴν φοράν, καὶ ὁρίζουν αὐτὸ ἀκριβῶς, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***ἐλεύθερον διάνυσμα***. Κάθε κλάσις ἰσοδυναμίας ὁρίζει ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα. Ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιπροσωπευθῇ ἀπὸ ἕνα, οἱοδήποτε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τῆς κλάσεως, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ $\vec{\alpha}$. Τότε γράφομεν $\vec{\alpha}=\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ σχέδιον τοῦ διανύσματος γίνεται οὕτως : $\underset{A}{}\xrightarrow{\;\;\vec{\alpha}\;\;}\underset{B}{}$.

Διαφορετικαὶ κλάσεις ὁρίζουν διαφορετικὰ ἐλεύθερα διανύσματα. Ὁ συμβολισμὸς τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων γίνεται μὲ τὰ μικρὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου ἐπιγραμμισμένα μὲ ἕνα βέλος : $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

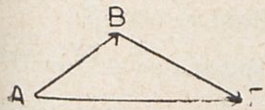
Τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα συμβολίζεται μὲ $\vec{0}$ καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας τῶν ἐφαρμοστῶν μηδενικῶν διανυσμάτων.

Ἴσα ἐλεύθερα διανύσματα : Δύο διανύσματα ἐλεύθερα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ ὀνομάζονται *ἴσα*, ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἢ ἀπὸ δύο ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα. Δηλ. ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ τὴν ἰδίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας : $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta}$.

Ἀντίθετα ἐλεύθερα διανύσματα : Δύο διανύσματα ἐλεύθερα ὀνομάζονται ***ἀντίθετα*** ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπὸ δύο ἀντίθετα ἐφαρμοστὰ διανύσματα. Τό ἀντίθετον τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $\overrightarrow{\alpha}$ συμβολίζεται μὲ τὸ $-\overrightarrow{\alpha}$.

Συγγραμμικὰ ἐλεύθερα διανύσματα : Δύο διανύσματα ἐλεύθερα ὀνομάζονται ***συγγραμμικά,*** ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπὸ δύο συγγραμμικὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα : Συμβολισμὸς $\overrightarrow{\alpha} \parallel \overrightarrow{\beta}$.

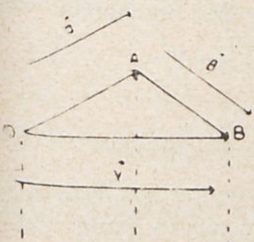
§ **177. Πρόσθεσις δύο διανυσμάτων.** α) ***Πρόσθεσις δύο ἐφαρμοστῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων.*** Ἔστω δύο διαδοχικὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα, τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$. Ὁρίζομεν ὡς ***ἄθροισμα*** αὐτῶν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$. Δηλαδὴ τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ δευτέρου.



Σχ. 35.

Γράφομεν $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$ (Σχ. 35).

β) ***Πρόσθεσις δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων.*** Ἔστω τὰ ἐλεύθερα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{\beta}$ (Σχ. 36).



Σχ. 36.

Ὁρίζομεν ὡς ἄθροισμα $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ αὐτῶν ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\gamma}$, τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\gamma}$. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\gamma}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαρμοστῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{O\Pi} = \overrightarrow{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\beta}$. Ὡς ἀρχὴ διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\beta}$ ἐλήφθη τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου Ο.

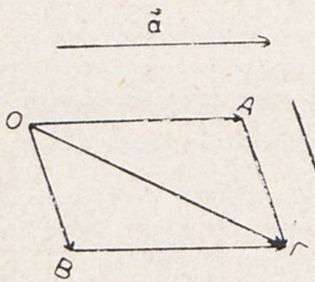
$$\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\gamma}.$$

γ) ***Τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων.*** $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\gamma}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ σημείου Ο τοῦ χώρου. Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν ἕνα ἄλλο σημεῖον Ο′, διαφορετικὸν τοῦ Ο, τότε τὸ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{O'B'}$

Τὰ ΟΑΑ′Ο′ καὶ ΑΒΒ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{AA'} = BB' \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'}.$$ Ἄρα τὸ ΟΒΒ′Ο′ παραλληλόγραμμον. Συνεπῶς $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$.

δ) ***Κανὼν τοῦ παραλληλογράμμου.*** Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ χώρου κατασκευάζομεν τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν τὰ ἐλεύθερα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$.



Εἰκ. 37.

Τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ εὑρίσκεται ἂν κατασκευάσωμεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{OB}$ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{OA}$, ὁπότε :

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}. \quad (I)$$

Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$, τὸ ὁποῖον ἔχει διεύθυνσιν καὶ μῆκος τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰς τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$,

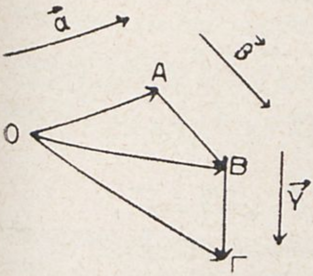
Ἐὰν ἀντιμετατεθοῦν οἱ προσθεταῖοι τοῦ ἀθροίσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} =$ καὶ ἐπαναληφθῇ ἡ αὐτὴ ἐργασία, ὅπως καὶ προηγουμένως, θὰ ἔχωμεν $\vec{\beta} + \vec{\alpha} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$. (II)

Ἐκ τῶν (I) καὶ (II) προκύπτει :

$$\boxed{\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}}$$

Ἰσχύει λοιπὸν ἡ ***ἀντιμεταθετικὴ*** ἰδιότης κατὰ τὴν πρόσθεσιν δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων.

§ **178. Πρόσθεσις τριῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων.** α) Ἔστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ χώρου. Ὀνομάζομεν ἄθροισμα αὐτῶν καὶ συμβολίζομεν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ὡς ἑξῆς :



Σχ. 38.

Λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ καὶ εἰς αὐτὸ προσθέτομεν τὸ $\vec{\gamma}$:

Ἔχομεν δηλαδὴ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$.

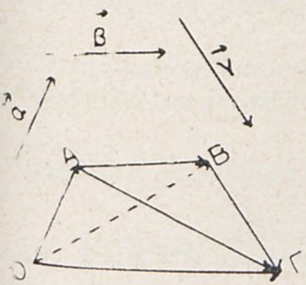
Κατασκευάζομεν (Σχ. 38) τὰ ἐφαρμοστὰ διαδοχικὰ διανύσματα

$$\overrightarrow{OA}, = \vec{\alpha},\ \overrightarrow{AB} = \vec{\beta} \text{ καὶ } \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma}$$

καὶ ἔχομεν

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}.$$



Σχ. 39.

β) Θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων.

Πράγματι, ἂς εἶναι $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ χώρου. Κατ' ἀρχὴν ἔχομεν :

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}.$$

Ἐπίσης ἐὰν

$$\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}.$$

Ἄρα : $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῆς ἀντιμεταθετικῆς καὶ προσεταιριστικῆς ἰδιότητος προκύπτει ὅτι :

Κατὰ τὴν πρόσθεσιν τριῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τὸ ἄθροισμά τους δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γίνῃ ἀλλαγὴ τῆς τάξεως (σειρᾶς) τῶν προσθετέων διανυσμάτων.

Πρόσθεσις περισσοτέρων τῶν τριῶν ἐλευθέρων διανυσμά-

των. Τὸ ἄθροισμά τους εἶναι ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ τῶν δύο πρώτων διανυσμάτων κατὰ τὴν σειρὰν, τὴν ὁποίαν ἐδόθησαν, καὶ εἰς αὐτὸ προσθέτομεν τὸ τρίτον διάνυσμα $[(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}]$. Εἰς τὸ νέον ἄρθροισμα προσθέτομεν τὸ τέταρτον διάνυσμα $[(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta}$ κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου διανύσματος.

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta}$$

Ἡ ἀνωτέρω πρόσθεσις θὰ ἐκτελεσθῇ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀντιπροσωπευτικῶν ἐφαρμοστῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, ἀντιπροσωπευτικὸν τοῦ ἐλευθέρου, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἐλευθέρων.

Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀντιμεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας τοῦ ἀθροίσματος ἐλευθέρων διανυσμάτων.

I. Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν προσθετέων διανυσμάτων, τὸ ἄθροισμά τους δὲν μεταβάλλεται.

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\delta} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\gamma} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} + \vec{\delta}$$

II. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν, δύο ἢ περισσότερα διανύσματα μὲ τὸ ἄθροισμά τους, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἐλευθέρων διανυσμάτων δὲν μεταβάλλεται

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + (\vec{\gamma} + \vec{\delta})$$

III. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἢ περισσότερα διανύσματα μὲ ἄλλα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μὲ αὐτὰ τὸ ἴδιο ἄθροισμα, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἐλευθέρων διανυσμάτων δὲν μεταβάλλεται.

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma_1} + \vec{\gamma_2} + \vec{\delta}$$

$$\text{ὅπου } \vec{\gamma} = \vec{\gamma_1} + \vec{\gamma_2}$$

IV. Δεχόμεθα τὴν ἰσχὺν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς προσθέσεως δύο διανυσμάτων, ὅταν τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ μηδενικὸν $(\vec{0})$.

$$\text{τότε } \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$$

Τὸ ἐλεύθερον μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὴν πρόσθεσιν δύο διανυσμάτων.

V. *Ἰδιότης τῆς διαγραφῆς :*

Ἔστω : $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ (1). Ἐὰν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς διανυσματικῆς ἰσότητος (1) προσθέσωμεν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $-\vec{\gamma}$ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\gamma}$, θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{\alpha} + \vec{\gamma} - \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\gamma} \implies \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

διότι προφανῶς, ἐὰν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\gamma} = \overrightarrow{MN}$, τότε $-\vec{\gamma} = \overrightarrow{NM}$ καὶ $\vec{\gamma} - \vec{\gamma} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε

$\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, διότι, ἐὰν $\vec{\alpha} = \overrightarrow{MN} = \vec{\beta}$

$\vec{\gamma} = \overrightarrow{NP}$,

τότε $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \overrightarrow{MP}$ καὶ $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \overrightarrow{MP}$

Ἑπομένως $\boxed{\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \iff \vec{\alpha} = \vec{\beta}}$

§ **179. Ἀφαίρεσις ἐλευθέρων διανυσμάτων.** Ἔστω $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ χώρου.

Ὀνομάζομεν διαφορὰν τοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}$ (μειωτέον) ἀπὸ τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}$ (ἀφαιρετέον) ἕνα διάνυσμα $\vec{x}$ τοιοῦτον, ὥστε

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}, \quad (1)$$

Ἐὰν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς (1) προσθέσωμεν τὸ $-\vec{\beta}$, ἀντίθετον τοῦ $\vec{\beta}$, θὰ ἔχωμεν :

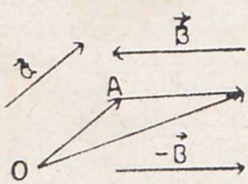
$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \iff (-\vec{\beta}) + \vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \iff \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι : Ἡ διαφορὰ τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\alpha}$ *ἀπὸ τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος* $\vec{\beta}$ εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸ μειωτέον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ προστεθῇ τὸ ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος $\vec{\beta}$.

Ἡ διαφορὰ συμβολίζεται :

$$\vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

Ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀντιπροσωπευτικοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος τῆς διαφορᾶς τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀθροίσματος τοῦ διανύσματος $\vec{\alpha}$ καὶ τοῦ ἀντιθέτου του διανύσματος $\vec{\beta}$, δηλ. τοῦ $-\vec{\beta}$.

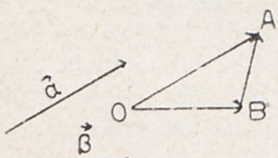


Σχ. 40.

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ χώρου κατασκευάζομεν τὰ ἀντιπροσωπευτικὰ ἐφαρμοστὰ διαδοχικὰ τῶν ἐλευθέρων $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\vec{AB} = -\vec{\beta}$. Ὁπότε ἔχομεν (Σχ, 40)

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

Εἶναι δυνατὸν ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀντιπροσωπευτικοῦ διανύσματος τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ νὰ γίνῃ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ χώρου κατασκευάζομεν τὰ ἐφαρμοστὰ ἀντιπροσωπευτικὰ διανύσματα τῶν ἐλευθέρων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ (Σχ. 41)



Σχ. 41.

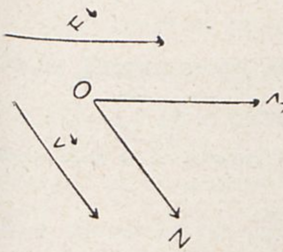
$\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + (-\vec{OB}) = \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BA}.$$

Ἐὰν λοιπὸν δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἔχουν κοινὴν ἀρχήν, ἡ διαφορά τους εἶναι ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα μὲ ἀρχὴν τὸ πέρας τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ μειωτέου διανύσματος.

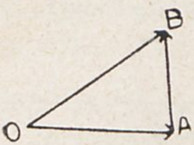
Διανυσματικὴ ἀκτίς : Ὁρίζομεν εἰς τὸν χῶρον ἕνα σημεῖον Ο (Σχ, 42). Εἰς κάθε σημεῖον Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{OM}$, μὲ ἀρχὴν τὸ Ο καὶ πέρας τὸ σημεῖον Μ. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ ὀνομάζεται ***διανυσματικὴ ἀκτὶς τοῦ σημείου M, μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον O.***

Κάθε διανυσματικὴ ἀκτὶς OM εἶναι τὸ ἀντιπροσωπευτικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\overrightarrow{\mu}$.



Σχ. 42.

Ἀντιστρόφως : Κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\nu}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ μίαν ὡρισμένην διανυσματικὴν ἀκτῖνα $\overrightarrow{ON}$ (Σχ. 42). Μὲ τὴν βοήθειαν λοιπὸν τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων, μὲ ἀρχὴν ἕνα ὡρισμένον σημεῖον O, ἔχομεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ χώρου ἐπὶ τῶν σημείων τοῦ χώρου.



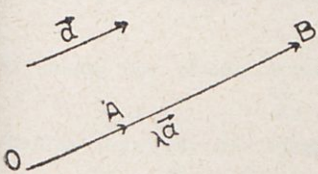
Σχ. 43.

Ἐὰν AB τυχὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ χώρου (Σχ. 43), θὰ ἔχωμεν :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Ὥστε ἕνα τυχὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα εἰς τὸν χῶρον εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ πέρατος ἀπὸ τὴν διανυσματικήν ἀκτῖνα τῆς ἀρχῆς του.

§ **180. Πολλαπλασιασμὸς ἐλευθέρου διανύσματος ἐπὶ σχετικὸν ἀριθμόν.** Ἔστω $\overrightarrow{\alpha}$ ἐλεύθερον διάνυσμα. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}=\overrightarrow{OA}$ τὸ ἀντιπροσωπευτικὸν ἐφαρμοστὸν τοῦ ἐλευθέρου $\overrightarrow{\alpha}$ (Σχ. 44). Ἐὰν $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$ καὶ $\lambda \neq 0$, ὅπου λ = σχετικὸς ἀριθμός. Ὀνομάζομεν γινόμενον τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $\overrightarrow{\alpha}$ ἐπὶ τὸν σχετικὸν ἀριθάριθμὸν λ καὶ τὸ συμβολίζομεν $\overrightarrow{\lambda\alpha}$, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει :



Σχ. 44.

1ον) *Διεύθυνσιν :* Τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\overrightarrow{\alpha}$

2ον) ***Φοράν :*** Τὴν φορὰν τοῦ $\vec{\alpha}$, ἂν ὁ $\lambda > 0$ καὶ ἀντίθετον ἂν ὁ $\lambda < 0$.

3ον) ***Μῆκος :*** Τὸ μῆκος τοῦ $\lambda . \vec{\alpha}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $|\lambda| . |\vec{\alpha}| = |\lambda| . |\overrightarrow{OA}|$.

Παρατήρησις : Τὸ γινόμενον $\lambda \vec{\alpha}$ θὰ κατασκευασθῇ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀντιπροσωπευτικοῦ διανύσματος $\vec{A} = \vec{\alpha}$).

Ἐὰν τὸ $\vec{\alpha}$ εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα $\vec{\alpha} = \vec{0}$ $\lambda =$ τυχὼν σχετικὸς ἀριθμός, τότε

$$\lambda \vec{\alpha} = \lambda . \vec{0} = \vec{0}$$

Ἐὰν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ καὶ $\lambda = 0$, τότε

$$\lambda \vec{\alpha} = 0 . \vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Τὸ γινόμενον διανύσματος ἐπὶ σχετικὸν ἀριθμὸν λ, δηλ. τὸ $\lambda \vec{\alpha}$, ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

1) $\lambda_1 (\lambda_2 \vec{\alpha}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{\alpha}$: (Προσεταιρισμός ὡς πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν παράγοντα).

2) $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{\alpha} = \lambda_1 \vec{\alpha} + \lambda_2 \vec{\alpha}$ (Ἐπιμερισμὸς ὡς πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν παράγοντα).

3) $\lambda (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) = \lambda\vec{\alpha}_1 + \lambda\vec{\alpha}_2$ (Ἐπιμερισμὸς ὡς πρὸς τὸν διανυσματικὸν παράγοντα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

255) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα τυχόντα σημεῖα τοῦ χώρου, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$.

256) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἓξ τυχόντα σημεῖα τοῦ χώρου, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{E\Delta}$.

257) Ἐὰν Α, Β καὶ Γ εἶναι τρία σημεῖα τοῦ χώρου μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ Σ τὸ μέσον τοῦ $\overrightarrow{AB}$, νὰ δειχθῇ $\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B} = 2\overrightarrow{\Gamma\Sigma}$.

258) Ἐὰν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ Ο τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$.

259) Ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα τοῦ χώρου, μὴ κείμενα ἐπ' εὐ-

θείας καὶ Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ δειχθῇ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{0}$.

260) Ἐὰν Μ εἶναι τὸ κ. βάρους τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} = 3\overrightarrow{OM}$.

261) Ἐὰν Μ καὶ Μ′ εἶναι τὰ κ. βάρους δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς διαφορετικὰ ἐπίπεδα, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = 3\overrightarrow{MM'}$ καὶ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 3\overrightarrow{MM'}$.

262) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι αἱ κορυφαὶ ἑνὸς ἐπιπέδου κυρτοῦ τετραπλεύρου καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{O}$.

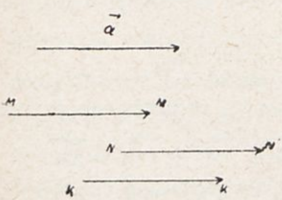
263) Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τέσσαρα σημεῖα τοῦ χώρου, μὴ κείμενα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, Μ δὲ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} - 3\overrightarrow{M\Delta} = 3\overrightarrow{\Delta K}$, ὅπου Κ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

264) Ἐὰν ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ εἶναι ἕνα παρ/πεδον, νὰ δειχθῇ ὅτι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Gamma'}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ΄

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

§ **181. Παράλληλος μετατόπισις** : Ἔστω ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ εἰς τὸν χῶρον καὶ ἕνα σημεῖον Μ (Σχ. 45). Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ τοῦ χώρου ὑφίσταται *παράλληλον μετατόπισιν κατὰ τὸ διάνυσμα* $\vec{\alpha}$, ὅταν ἐκ τῆς θέσεως Μ, ὅπου εὑρίσκεται, κινηθῇ εὐθυγράμμως, ὥστε νὰ γίνῃ πέρας Μ΄ ἑνὸς διανύσματος ΜΜ΄ τοιούτου, ὥστε :



Σχ. 45.

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}.$$

Ἐὰν τὸ $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε τὸ Μ΄ συμπίπτει μὲ τὸ Μ καὶ ἔχομεν μηδενικὴν μετατόπισιν.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε σημεῖον Ν τοῦ χώρου μπορεῖ νὰ ὑποστῇ παράλληλον μετατόπισιν κατὰ ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καὶ νὰ ἔχῃ ὡς ἀντίστοιχόν του ἕνα ἄλλο σημεῖον Ν΄ τοῦ χώρου, ὥστε : $\overrightarrow{NN'} = \vec{\alpha}$. (Σχ. 45).

Ἀντιστρόφως, ἐὰν Κ΄ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου, τότε ὑπάρχει σημεῖον Κ, ὥστε νὰ ἔχωμεν : $\overrightarrow{KK'} = \vec{\alpha}$. (Σχ, 45)

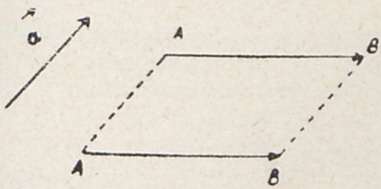
Ἑπομένως, τὸ Κ΄ εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς σημείου Κ τοῦ χώρου κατ᾽ αὐτὴν τὴν παράλληλον μετατόπισιν.

Ἑπομένως ἡ παράλληλος μετατόπισις εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία (ἀπεικόνισις) τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

Τὸ σημεῖον Ν΄ λέγεται *εἰκὼν τοῦ* Ν.

Ἡ παράλληλος μετατόπισις κατὰ διάνυσμα $-\vec{\alpha}$ ἀντίθετου τοῦ $\vec{\alpha}$ ἀπεικονίζει τὸ Ν΄ εἰς τὸ Ν καὶ λέγεται *ἀπεικόνισις ἀντίστροφος* πρὸς τὴν παράλληλον μετατόπισιν κατὰ τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

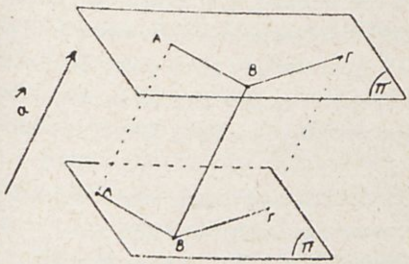
β) Ἕνα ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ χώρου $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 46) εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν κατὰ ἕνα διάνυσμα ἐλεύθερον $\vec{\alpha}$, ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$.



Σχ. 46.

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

Ἔστω τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ χώρου, μὴ εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον Π. Ἡ παράλληλος μετατόπισις κατὰ $\vec{\alpha}$ δίδει ὡς εἰκόνας τῶν σημείων Α, Β, Γ τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ παράλληλον πρὸς αὐτὸ Α′Β′ καὶ ΒΓ ∥ Β′Γ′. Τὸ ἐπίπεδον Π ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐπίπεδον Π′ παράλ/λον πρὸς τὸ Π.



Σχ. 47.

Ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον Π, ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα ἴσον του σχῆμα, εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἐπίπεδον Π′. Π.χ. ἡ γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ ἀπεικονίζεται εἰς τὴν ἴσην της $\widehat{A'B'\Gamma'}$.

Γενικῶς ἡ εἰκὼν ἑνὸς σχήματος ἐπιπέδου ἢ στερεοῦ, εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν, εἶναι ἕνα ἴσον ἐπίπεδον ἢ στερεὸν σχῆμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

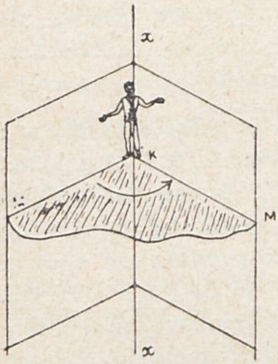
265) Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ μετατοπίζεται παραλλήλως κατὰ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδόν του, καὶ ἔχει μῆκος $|\overrightarrow{AA'}|$ ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Τί στερεὸν θὰ διαγράψῃ τὸ μετακινούμενον τρίγωνον.

266) Δίδεται μία γωνία $\widehat{xoy}$ εἰς τὸν χῶρον καὶ μετατοπίζομεν αὐτὴν

κατὰ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{OO'}$, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας. Εἰς τὴν νέαν της θέσιν ἡ γωνία θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀρχικήν; Τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι παράλληλα ;

267) Μία δίεδρος γωνία μετατοπίζεται κατὰ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν μίαν ἕδραν της. Εἰς τὴν νέαν της θέσιν ἡ γωνία θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀρχικήν ; Ποίαν θέσιν θὰ ἔχουν αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι ;

§ **182.** ***Στροφὴ περὶ ἄξονα :*** α) Ἔστω x΄x ἕνας σταθερὸς ἄξων (προσανατολισμένη εὐθεῖα) εἰς τόν χῶρον.



Σχ. 48

Ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ χώρου, ἐκτὸς τοῦ ἄξονος x΄x ὁρίζει μὲ αὐτὸν ἕνα ἡμιεπίπεδον μὲ σύνορον τὸν x΄x (Σχ. 48) Τὸ ἡμιεπίπεδον αὐτὸ εἶναι δυνατὸν νὰ στραφῇ περὶ τὸν x΄x, ὅπως ἀκριβῶς ἀνοιγοκλείνει μία πόρτα ἢ ἕνα παράθυρον.

Ἡ ἀνωτέρω στροφὴ εἶναι δυνατὸν νὰ προσανατολισθῇ ὡς ἑξῆς :

Φανταζόμεθα ἕνα παρατηρητὴν εἰς θέσιν παράλληλον πρός τὸν ἄξονα x΄x καὶ τοῦ ὁποίου ἡ φορὰ «πόδες-κεφαλὴ» νὰ συμφωνῇ μὲ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος x΄x.

Ὁ παρατηρητὴς θὰ βλέπῃ τὸ ἡμιεπίπεδον Μ xx΄ νὰ στρέφεται εἴτε ἐκ δεξιῶν του πρὸς τὰ ἀριστερά του, εἴτε ἐξ ἀριστερῶν του πρὸς τὰ δεξιά του.

Ἐὰν ἡ ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ παρατηρητοῦ περιστροφὴ τοῦ ἡμιεπιπέδου χαρακτηρισθῇ ὡς ***θετική***, κατὰ συνθήκην, ἡ ἀντίθετος περιστροφὴ αὐτοῦ —ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ— θὰ χαρακτηρισθῇ ὡς ***ἀρνητική***.

β) ***Προσανατολισμένη δίεδρος γωνία :*** Ἐὰν λάβωμεν μίαν ἀρχικὴν θέσιν τοῦ στρεπτοῦ περὶ τὸν x΄x ἡμιεπιπέδου ἔστω τὴν Μ x΄x (Σχ, 48), ***(Ἀρχικὴ ἕδρα)*** καὶ μίαν ἄλλην θέσιν τὴν Μ΄ x΄x ***(τελικὴ ἕδρα),*** τότε δημιουργοῦμεν δίεδρον γωνίαν $M\widehat{x'x}M'$, Ἡ δίεδρος αὐτὴ γωνία ἔχει μέτρον προσημασμένον, ἐφ᾽ ὅσον ἡ περιστροφὴ ἐκ τῆς ἀρχικῆς πρὸς τὴν τελικὴν ἕδραν τοῦ ἡμιεπιπέδου ἔγινε κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν περιστροφήν, καὶ ὀνομάζεται *γωνία στροφῆς*.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Μ φέρωμεν τὴν ΜΚ $\perp$ x΄x, ἡ ἐπίπεδος γωνία $\widehat{MKM'}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου $M\widehat{x\,x}M'$.

Προφανῶς ΜΚ = Μ΄Κ. Τὸ σημεῖον Μ, διὰ τῆς στροφῆς σ, ἔρχεται εἰς τὴν θέσιν Μ΄ ($M \xrightarrow{\sigma} M'$).

Τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος, κατὰ τὴν στροφήν, παραμένουν εἰς τὴν θέσιν τους.

Παρατηρήσεις :

I. Ἡ στροφὴ τοῦ χώρου περὶ ἕνα ἄξονα x΄x εἶναι μία ἀμφιμονοσήματος ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

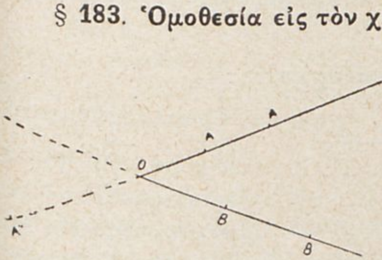
Ἐὰν τὸ μέτρον τῆς γωνίας στροφῆς εἶναι $\pm\, 360^0$, τότε κάθε σημεῖον Μ τοῦ χώρου συμπίπτει μὲ τὸν ἑαυτόν του. Τὸ αὐτό ἐπίσης συμβαίνει, ἐὰν τὸ μέτρον τῆς γωνίας στροφῆς εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 360^0 ($\lambda\,.\,360$ ὅπου $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) (ταυτοτικὴ ἀπεικόνισις).

Ἐὰν τὸ μέτρον τῆς γωνίας στροφῆς εἶναι $\pm 180^0$ τότε ἡ στροφὴ εἶναι συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν.

Τὸ αὐτὸ ἐπίσης συμβαίνει, ἐὰν τὸ μέτρον τῆς γωνίας στροφῆς εἶναι ἕνα περιττὸν πολλαπλάσιον τῶν 180^0 ($(2\lambda + 1)\ 180^0$).

II. Ἕνα σχῆμα Σ, κατὰ τὴν στροφὴν περὶ ἄξονα, ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα σχῆμα Σ΄ ἴσον πρὸς τὸ Σ.

§ **183. Ὁμοθεσία εἰς τὸν χῶρον.** α) Τὰ γνωστὰ περὶ ὁμοθεσίας εἰς τὸ ἐπίπεδον ἐπεκτείνονται εἰς τὸν χῶρον ὡς ἑξῆς :



Σχ. 49.

Ἔστω ἕνα σταθερὸν σημεῖον Ο τοῦ χώρου, λ ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς $\neq 0$ καὶ Α ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι δυνατόν νὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα σημεῖον Α΄, ὥστε νὰ εἶναι $\overrightarrow{OA'} = \lambda . \overrightarrow{OA}$ (Σχ. 49). Εἰς τὸ (Σχ. 49) τὸ $\lambda = 2$.

Τὸ σημεῖον Α΄ τῆς ἡμιευθείας ΟΑ (ἀρχὴ τῆς ἡμιευθείας τὸ

O) λέγεται ***ὁμόθετον*** τοῦ A, μὲ ***κέντρον ὁμοθεσίας τὸ σημεῖον O καὶ λόγον ὁμοθεσίας τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν $\lambda = 2$.***

Παρατηρήσεις :

I) Ἐὰν ζητήσωμεν τὸ ὁμόθετον τοῦ σημείου B′, μὲ κέντρον ὁμοθεσίας τὸ σημεῖον O καὶ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda = \frac{1}{2}$, θὰ ἔχωμεν

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB'}.$$

Ἐπίσης τὸ ὁμόθετον τοῦ B, ὡς πρὸς τὸ O, εἶναι τὸ B′, μὲ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda = 2$. Ἡ ὁμοθεσία μὲ κέντρον O καὶ λόγον $\frac{1}{\lambda}$ λέγεται ***ἀντίστροφος*** τῆς ὁμοθεσίας μὲ κέντρον O καὶ λόγον λ.

Ἑπομένως, ἡ ὁμοθεσὶα μέ κέντρον O καὶ λόγον τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν λ εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

II. Ἐὰν $\lambda = -2$, τὸ σημεῖον A′′ τοῦ χώρου εἶναι τὸ ὁμόθετον τοῦ A, μὲ κέντρον ὁμοθεσίας τὸ σημεῖον O.

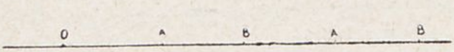
$$\overrightarrow{OA''} = 2\,.\,\overrightarrow{OA}$$

Τὰ σημεῖα A′ καὶ A′′ εἶναι ***συμμετρικά***, ὡς πρὸς τὸ κέντρον ὁμοθεσίας O.

III. Διὰ $\lambda = 1$ τὸ ὁμόθετον τοῦ σημείου A, ὡς πρὸς τὸ κέντρον O, εἶναι τὸ ἴδιον σημεῖον A. Ἡ ὁμοθεσία εἶναι τότε μία ταυτοτικὴ ἀπεικόνισις.

IV. Τὸ ὁμόθετον τοῦ κέντρου O εἰς κάθε ὁμοθεσίαν εἶναι τὸ ἴδιον τὸ O.

β) ***Ὁμόθετον ἐφαρμοστοῦ διανύσματος :***



Σχ. 50.

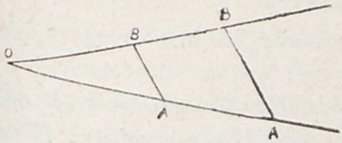
Ἔστω τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καὶ O τυχὸν σημεῖον τοῦ φορέως του (Σχ. 50.) Ἐὰν τὸ O ληφθῇ ὡς κέντρον ὁμοθεσίας μὲ λόγον λ, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\,.\,\overrightarrow{OA} \quad \text{καὶ} \quad \overrightarrow{OB'} = \lambda\,.\,\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

Κατὰ τό θεώρημα τοῦ Chasles θὰ εἶναι :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{A'O} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} \qquad (2)$$

Ἡ (2) δυνάμει τῶν (1) γράφεται :



Σχ. 51.

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda . \overrightarrow{OB} - \lambda . \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \lambda\, (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}) = \lambda\, \overrightarrow{AB}.$$

Ἐὰν τὸ O εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ φορέως τοῦ $\overrightarrow{AB}$, τότε ἐκ τῶν (1) θὰ ἔχωμεν :

$\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \dfrac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \lambda$. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι AB, A′B′ εἶναι παράλληλοι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ.

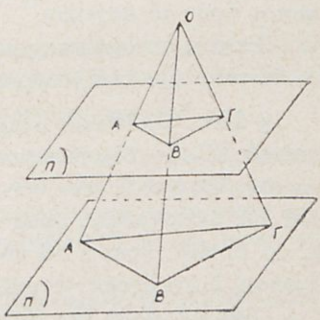
$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \lambda . \overrightarrow{AB}$$

Συνεπῶς : *Τὸ ὁμόθετον ἑνὸς ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, ὡς πρὸς κέντρον O καὶ λόγον ὁμοθεσίας λ εἶναι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ συγγραμικὸν πρὸς τὸ δοθὲν καὶ τοιοῦτον, ὥστε :* $\boldsymbol{\overrightarrow{A'B} = \lambda . \overrightarrow{AB}}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἐὰν μία εὐθεῖα ε διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ὁμοθεσίας O, ἡ ὁμόθετός της ε′ συμπίπτει μὲ τὴν ε.

Ἐὰν ἡ ε δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ὁμοθεσίας O, τότε ἡ ὁμόθετός της εὐθεῖα ε′ εἶναι παράλληλος (μὲ τὴν στενὴν σημασίαν) πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε.



Σχ. 52.

γ) ***Ὁμόθετον ἐπιπέδου.*** Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον Π, O τὸ κέντρον ὁμοθεσίας (ἐκτὸς τοῦ Π), λ ὁ λόγος ὁμοθεσίας καὶ A, B, Γ τρία σημεῖα ∈Π, μὴ εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (Σχ. 52). Ἔχομεν

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\, \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{A'\Gamma'} = \lambda\, \overrightarrow{A\Gamma}$$

Ἄρα AB ∥ A′B′ καί AΓ ∥ A′Γ′. Ἀλλὰ αἱ AB, AΓ ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον Π, αἱ δὲ A′B′, A′Γ′ ὁρίζουν ἕνα ἄλλο ἐπίπεδον Π′, παράλληλον πρὸς τὸ Π,

Ἐὰν τὸ κέντρον ὁμοθεσίας εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ Π, τὸ ὁμοθετόν του Π′ συμπίπτει μὲ τὸ Π.

Συνεπῶς : ***Τὸ ὁμόθετον ἐπιπέδου Π, διερχομένου δι᾽ ἑνὸς σημείου Α, εἶναι ἕνα ἐπίπεδον Π′ παράλληλον πρὸς τὸ Π καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Α′, ὁμοθέτου τοῦ Α*** (μὲ κέντρον τὸ δοθὲν καὶ λόγον ὁμοθεσίας τὸν δοθέντα).

Παρατηρήσεις :

I. Ἐπειδὴ ἰσχύουν :

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda . \overrightarrow{OA}\,, \quad \overrightarrow{OB'} = \lambda . \overrightarrow{OB}\,, \quad \overrightarrow{O\Gamma'} = \lambda . \overrightarrow{O\Gamma}\,,$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda . \overrightarrow{AB}\,, \quad \overrightarrow{B'\Gamma'} = \lambda . \overrightarrow{B\Gamma}\,, \quad \overrightarrow{\Gamma'A'} = \lambda . \overrightarrow{\Gamma A}\,.$$

Ἔχομεν :

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{O\Gamma'}}{\overrightarrow{O\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{\Gamma'A'}}{\overrightarrow{\Gamma A}} = \lambda.$$

Τὸ τρίγωνον A′B′Γ′ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ABΓ, μὲ λόγον ὁμοιότητος λ.

Γενικῶς τὸ ὁμόθετον ἑνὸς πολυγώνου εἶναι ἕνα πολύγωνον, ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικόν,

Ἐπίσης τὸ ὁμόθετον μιᾶς γωνίας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ Π, θὰ εἶναι μία ἴση γωνία εἰς τό Π′.

§ **184.** ***Ὁμόθετον στερεοῦ.*** Τὸ ὁμόθετον ἑνὸς στερεοῦ Σ εἶναι στερεὸν Σ′. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὸν ἑξῆς συλλογισμόν. Ἐὰν τὸ Σ′ δὲν ἦτο στερεόν, τότε θὰ ἦτο ἐπίπεδον σχῆμα· Διὰ τῆς ἀντιστρόφου ὅμως ὁμοθεσίας τὸ ὁμόθετον τοῦ Σ′ εἶναι τὸ Σ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἔχομεν ὑποθέσει ὅτι τό Σ εἶναι στερεόν.

Ἐὰν μᾶς δοθῇ ἕνα πολύεδρον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ . . . , τότε τὸ ὁμόθετόν του εὑρίσκεται, ἐὰν εὑρεθοῦν τὰ A′, B′, Γ′, Δ′ . . . ὁμόθετα τῶν A, B, Γ, Δ . . .

§ **185. Ὁμοιότης εἰς τὸν χῶρον.** Ὁ ὁρισμὸς τῆς ὁμοιότητος εἰς τὸν χῶρον γίνεται κατὰ τρόπον παρόμοιον μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς ὁμοιότητος εἰς τὸ ἐπίπεδον.

Δύο στερεὰ Σ καὶ Σ′ λέγονται ὅμοια, ὅταν εἶναι ὁμόθετα ἢ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν ὁμόθετα μὲ κατάλληλον μετατόπισιν τοῦ ἑνὸς ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἄλλο.

Ὀνομάζομεν ***λόγον ὁμοιότητος*** δύο ὁμοίων στερεῶν Σ καὶ Σ′ τὸν λόγον ὁμοθεσίας αὐτῶν, ὅταν αὐτὰ γίνουν ὁμόθετα διὰ καταλλήλου μετατοπίσεως. Εἰς δύο ὅμοια σχήματα Σ καὶ Σ′ δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ λέγονται ***ὁμόλογα*** , ὅταν τὰ σημεῖα αὐτὰ γίνουν ἀντίστοιχα κατὰ τὴν ὁμόθετον τοποθέτησιν τῶν Σ καὶ Σ′.

Παρατηρήσεις :

Ἐὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ Σ εὑρίσκωνται ἐπ᾽ εὐθείας, τότε τὰ ὁμόλογά των Α′, Β′, Γ′ ἐπὶ τοῦ Σ′ εὑρίσκονται ἐπ᾽ εὐθείας. Ἰσχύει ἐπίσης :

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΑ}{Γ'Α'} = \lambda \text{ λόγος ὁμοιότητος}$$

ΙΙ. Ἐὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοῦ Σ ἔχουν ὡς ὁμόλογά των ἐπὶ τοῦ Σ′ τὰ Α′, Β′, Γ′, Δ′ καὶ τὰ Α καὶ Δ δὲν εὑρίσωκνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, τότε ἡ κυρτὴ δίεδρος γωνία $Α.\widehat{ΒΓ}.Δ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν κυρτὴν ὁμόλογόν της $Α'.\widehat{Β'Γ'}.Δ'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

268) Νὰ κατασκευάσετε τὸ ὁμόθετον τετραγώνου ΑΒΓΔ, μὲ κέντρον Ο, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν της εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του, καὶ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda = -\frac{1}{3}$.

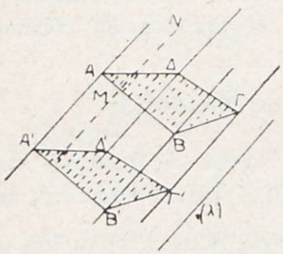
269) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁμόθετον ἑνὸς ἡμιεπιπέδου, μὲ κέντρον ὁμοθεσίας ἕνα σημεῖον εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς ἀκμῆς του καὶ μὲ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda = -2$, ἢ μὲ 1,5. Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁμὸθετον τοῦ ἡμιεπιπέδου διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ λόγου, ὅταν τὸ κέντρον ὁμοθεσίας κεῖται ἐντὸς τοῦ ἡμιεπιπέδου.

270) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὁμόθετον τοῦ ἀθροίσματος τριῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου καὶ μὲ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda = \frac{3}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

§ **186. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια - Πρίσματα :** Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα, π.χ. ἕνα τετράπλευρον (Σχ. 52). Ἂς φαντασθῶμεν μίαν εὐθεῖαν ΜΝ, ἡ ὁποία κινεῖται παραλλήλως πρὸς εὐθεῖαν τοῦ χώρου (λ), ἐνῶ διαρκῶς συναντᾶ κατὰ τὴν κίνησίν της τήν περίμετρον τοῦ τετραπλεύρου καὶ διαγράφει ἐξ ὁλοκλήρου αὐτήν. Ἡ εὐθεῖα ΜΝ διαγράφει μίαν ἐπιφάνειαν ἀποτελουμένην ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τεσσάρων ταινιῶν. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ὀνομάζεται *πρισματικὴ* καὶ ἔχει *ἀκμὰς* τὰς τέσσαρας εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ καὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν (λ).



Σχ. 52.

Ἐὰν τὴν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν (Σχ. 52) τὴν τμήσωμεν μὲ ἕνα ἐπίπεδον, παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ, προκύπτει τότε τὸ τετράπλευρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓΔ. Πράγματι, ἐὰν τὸ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τὸ μετατοπίσωμεν παραλλήλως κατὰ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$, ἐπειδὴ $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}=\overrightarrow{\Delta\Delta}$, τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι ἴσα καὶ ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους πλευράς των παραλλήλους. Δηλαδὴ ΑΒ=Α΄Β΄, ΒΓ ∥ Β΄Γ΄, ΓΔ ∥ Γ΄Δ΄ καὶ ΔΑ=Δ΄Α΄. Γενικῶς προκύπτουν ἴσα πολύγωνα, ὅταν μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια τμηθῇ ἀπὸ δύο ἐπίπεδα παράλληλα μεταξύ των, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὰς ἀκμάς της.

Πρῖσμα. Ὀνομάζομεν πρῖσμα τὸ σημειοσύνολον τοῦ χώρου, ποὺ περικλείεται ἀπὸ μίαν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἀπὸ δύο ἴσα πολύγωνα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν αὐτὴ τμηθῇ ἀπὸ δύο παράλληλα ἐπίπεδα.

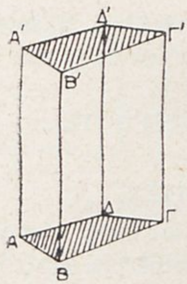
Τὰ δύο ἴσα πολύγωνα λέγονται *βάσεις* τοῦ πρίσματος.

Παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος ὀνομάζονται τὰ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων εὐθύγρ. τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ ΓΓ΄ ΔΔ΄. Δηλαδὴ αἱ ἀκμαί, ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὰς βάσεις. (Σχ. 52).

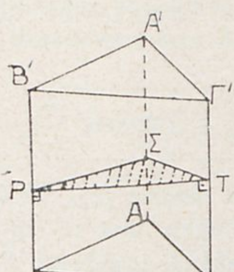
Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι εὐθυγρ. τμήματα ἴσα καὶ παράλληλα μεταξύ των.

Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΑ΄Β΄Β, ΒΓΓ΄Β΄, ΔΓΓ΄Δ΄ ΑΔΔ΄Α΄ ὀνομάζονται ***παράπλευροι*** ἕδραι τοῦ πρίσματος καὶ ἀποτελοῦν τὴν ***παράπλευρον ἐπιφάνειάν του.***

Ἕνα πρῖσμα ὀνομάζεται ***τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν*** κλπ., ὅταν αἱ βάσεις του εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα πεντάγωνα κλπ.



(Σχ. 53)



(Σχ. 54)

Ἕνα πρῖσμα ὀνομάζεται ***ὀρθόν***, ὅταν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων.

Ἕνα πρῖσμα λέγεται ***πλάγιον***, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ δὲν τέμνουν καθέτως τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων.

Κάθετος τομὴ ἑνὸς πρίσματος λέγεται τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν τμήσωμεν τήν πρισματικὴν ἐπιφάνειάν του μὲ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς ἀκμάς. Εἰς τὸ (Σχ. 54) κάθετος τομὴ εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΣΤ.

Ὅταν ἕνα πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, τότε αἱ βάσεις του εἶναι καὶ κάθετοι τομαὶ αὐτοῦ.

Π.χ. εἰς τὸ ὀρθὸν πρῖσμα (Σχ. 53) κάθετοι τομαὶ εἶναι αἱ βάσεις τοῦ ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

Ὕψος ἑνὸς πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο βάσεων. Δηλαδὴ τὸ εὐθυγρ. τμῆμα τῆς κοινῆς καθέτου τῶν βάσεων, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ αὐτῶν. Εἰς τὸ ὀρθὸν πρῖσμα τὸ ὕψος συμπίπτει μέ τὴν παράπλευρον ἀκμήν. Εἰς τὸ ὀρθὸν πρῖσμα (Σχ. 54) ὕψος του εἶναι μία, ὁποιαδήποτε, ἐκ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν π.χ. ΑΑ΄.

§ **187. Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος**. α)

Ὅταν τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθὸν (Σχ. 54), αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια παρ/μα, ὁπότε ἔχομεν :

$$\text{Ἐμ. Παρ. Ἐπιφ} = (A'B'BA) + (B\Gamma\Gamma'B') + (\Gamma\Delta\Delta'\Gamma') + (A\Delta\Delta'A') =$$
$$= (AB)(BB') + (B\Gamma)(\Gamma\Gamma') + (\Gamma\Delta)(\Delta\Delta') + (\Delta A)(A'A')$$

Ἐπειδὴ ὅμως : $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \Delta\Delta'$. Ἔχομεν :

$$\text{Ἐμ. Παρ. Ἐπιφ.} = (AA')\,[(AB) + (B\Gamma) + (\Gamma\Delta) + (\Delta A)].$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ὀρθοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

β) ***Ὅταν τὸ πρῖσμα εἶναι πλάγιον***, τότε αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ (Σχ. 54) θὰ εἶναι τὸ ὕψος τῶν παραλληλογράμμων τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν του.

$$\text{Ἐμβ. Παρ. Ἐπιφ.} = (AA')(\Sigma P) + (BB')(PT) + (\Gamma\Gamma')(T\Sigma).$$

Ἐπειδὴ ὅμως $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$, ἔχομεν :

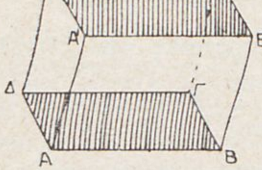
$$\text{Ἐμβ. Παρ. Ἐπιφ.} = (AA')\,[(\Sigma P) + (PT) + (T\Sigma)].$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πλαγίου πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ μῆκος μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας σὺν τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως :

$$\boxed{E_{\text{ὁλ}} = \text{E παραπλεύρου ἐπιφανείας} + 2\ \text{Βάσεις}}$$

§ **188. Παραλληλεπίπεδον :** Ὅταν αἱ βάσεις (Σχ. 55) ἑνὸς τετραγωνικοῦ πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα, τότε τὸ πρῖσμα λέγεται ***παραλληλεπίπεδον.*** Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμα, ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα.



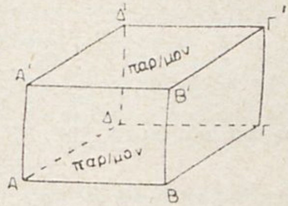
Σχ. 55.

Δύο ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς παράλληλα ἐπίπεδα, λέγονται ***ἀπέναντι*** ἕδραι.

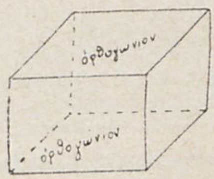
Αἱ ἀπέναντι ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα. Πράγματι : ἕδρα ΑΒΒ΄Α΄ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἕδραν ΔΓΓ΄Δ΄ διὰ παραλλήλου μετατοπίσεως κατὰ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΔΑ} = \overrightarrow{ΓΒ} = \overrightarrow{Γ'Β'} = \overrightarrow{Δ'Α'}$

Ἕνα παραλληλεπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ***ὀρθὸν*** ἢ ***πλάγιον***.

Ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ παραλληλεπίπεδον,



Σχ. 56.

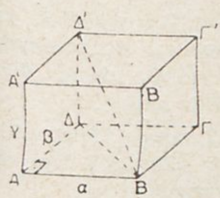


Σχ. 57.

τοῦ ὁποίου αἱ μὲν βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα (Σχ. 56), αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ὀρθογώνια. (Σχ. 57).

Διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν του, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφήν. Π.χ. εἰς τὸ (Σχ. 58) αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι $(ΑΒ) = α$, $(ΑΔ) = β$, $(ΑΑ') = γ$. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ καὶ α, β, γ αἱ διαστάσεις του. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ ($\widehat{Α} = 1$ ὀρ.) ἔχομεν :



Σχ. 58.

$(ΔΒ)^2 = α^2 + β^2$. (1) Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου Δ΄ΔΒ ἔχομεν : $(Δ'Β)^2 = γ^2 + (ΔΒ)^2$ (2). Ἡ (2) δυνάμει τῆς (1) γράφεται.

$$(Δ'Β)^2 = α^2 + β^2 + γ^2,$$

Τὸ τετράγωνον μιᾶς διαγωνίου ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαστάσεών του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

271. Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 2m. καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

272. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 50 cm, τὸ δὲ ὕψος του ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

273. Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ῥόμβον μὲ διαγωνίους 11 cm καὶ 9,6 cm καὶ ὕψος 10 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος καὶ ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια.

274. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ῥόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 16 cm, καὶ ἡ μικροτέρα διαγώνιός του 30 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του, ἂν τὸ ὕψος του ἰσοῦται μὲ τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον τῆς βάσεως.

275. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ τριγωνικοῦ ἢ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος μὲ πλευρὰν βάσεως α καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ. (Ἐφαρμογὴ $\alpha = 10$ cm $\lambda = 50$ cm).

276. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωγικοῦ πρίσματος, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ βάσις του εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον ἀκτῖνος 15 cm καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 0,5 m.

277. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου ἀκμῆς α. (Ἐφαρμογὴ $\alpha = 10$ cm).

278. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου, ἂν ἡ διαγώνιος μιᾶς τῶν ἑδρῶν του εἶναι $2\sqrt{2}$.

279. Ἕνα ὀρθογώνιον δωμάτιον ἔχει 6 m μῆκος, 3,6 m πλάτος καὶ 3 m ὕψος. Πρόκειται νὰ καλυφθῇ μὲ χαρτὶ ταπετσαρίας, συσκευασμένο εἰς ρόλους, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 0,6 m, τὸ δὲ μῆκος 9 m. Πόσους τέτοιους ρόλους χρειαζόμεθα διὰ τὴν ἐργασίαν αὐτήν ;

280. Ἕνα δωμάτιον μήκους 5,4 m, πλάτος 4,2 m καὶ ὕψους 2,5 m πρόκειται νὰ ταπετσαρισθῇ μὲ χαρτί, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 8 dam. καὶ τιμᾶται 9,95 τὸ μέτρον. Πόσο θὰ κοστίση τὸ ταπετσάρισμα ;

281. Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὡς βάσιν ἕνα ὀρθογ. καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν 3,25 m Τὸ ὕψος του εἶναι 6,25 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια.

282. Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 5 dam καὶ βάσεις ἰσοσκελῆ τραπέζια. Ἐὰν αἱ βάσεις κάθε τραπεζίου εἶναι 26 cm καὶ 12 cm, τὸ δὲ ὕψος κάθε τραπεζίου 0,4 dam, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

283. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἑνὸς κύβου εἶναι 289 cm^3. Πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου.

284. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα κυβικὸν κυβώτιον μὲ χαρτόνι, τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι 84 dm^2 Πόσον θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του ;

285. Κανονικὸν τριγωνικὸν ἢ τετραγωνικὸν ἢ ἑξαγωνικὸν πρῖσμα ἔχει ὅλας τὰς ἀκμὰς του ἴσας, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι 58,12 m². Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

286. Ἕνα κυβικὸ κουτί, χωρὶς καπάκι, ἔχει κατασκευασθῇ μὲ ἕνα φύλλο λαμαρίνας 4,5 dm²,. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του ;

287. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος, μὲ ὅλας τὰς ἀκμὰς του ἴσας, εἶναι 122,88 cm². Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

288. Πλάγιον τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει ἀκμὴν 18 cm καὶ κάθετον τομὴν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 3 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του.

289. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 3πλάσιον τοῦ πλάτους του. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 6 m καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του 96 m², νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

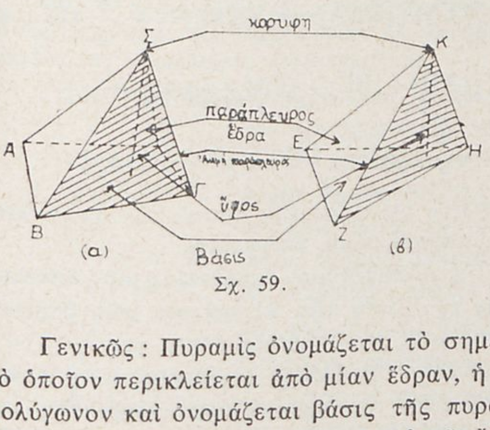
290. Ἡ διαγώνιος ἑνὸς κύβου, εἶναι 0,72 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας.

291. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 486 cm². Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου του.

292. Παραλληλεπίπεδον ἔχει μῆκος 8 cm, πλάτος 4 cm καὶ ὕψος 5 cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος καὶ ἡ ὁλικὴ του ἐπιφάνεια.

293. Αἱ ἀκμαὶ ὀρθογ. παρα/πέδων εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5 καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι 942 m². Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν του.

§ **189. Πυραμίδες.** Τὸ σημειοσύνολον τοῦ χώρου, ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὰς τριγωνικὰς ἕδρας ΣΑΒ, ΣΒΓ... (Σχ. 59α), τὰς ΚΕΖ, ΚΖΗ... (Σχ. 59β), αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Σ ἢ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΓΔ(Σχ. 59α) ἢ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΕΖΗ. (Σχ. 59β), ὀνομάζεται πυραμίς.



Σχ. 59.

Γενικῶς : Πυραμὶς ὀνομάζεται τὸ σημειοσύνολον τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν ἕδραν, ἡ ὁποία εἶναι ἕνα τυχὸν πολύγωνον καὶ ὀνομάζεται βάσις τῆς πυραμίδος καὶ ἀπὸ ἄλλας ἕδρας, αἱ ὁποῖαι εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴ κορυφὴν καὶ ἔχουν ὡς βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου.

Ὕψος τῆς πυραμίδος λέγεται ἡ κάθετος, ποὺ φέρομεν ἀπὸ τὴν κορυφὴν πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. (Σχ. 59α,β).

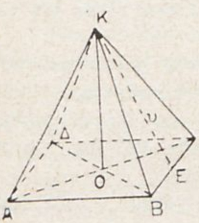
Μία πυραμὶς λέγεται *τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ* κλπ., ὅταν ἡ βάσις της εἶναι ἕνα τρίγωνον, ἕνα τετράπλευρον, ἕνα πεντάγωνον κλπ.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται καὶ τετράεδρον. Ὡς βάσιν τοῦ τετραέδρου εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν οἱανδήποτε ἕδραν του. Ὡς κορυφὴ τοῦ τετραέδρου θά ληφθῇ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφή·

Κανονικὴ πυραμίς ὀνομάζεται ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἕνα κανονικὸν πολύγωνον, τὸ δὲ ὕψος της διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ καν. πολυγώνου τῆς βάσεως.

Αἱ παράπλευροι ἕδραι μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα μεταξύ των.

§ **190. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος.** Ἔστω μία κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς (Σχ. 60). Θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.



Σχ: 60.

Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς κανονικῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα τρίγωνα. ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ. Ὁπότε ἔχομεν :

$$\text{Ἐμβ. Παρ. Ἐπιφ.} = (ΚΑΒ) + (ΚΒΓ) + (ΚΓΔ) + (ΚΔΑ) = 4\,.\,(ΚΒΓ) = 4\,.\,\frac{1}{2}\,.(ΒΓ)\,.\,υ$$

$$= \frac{1}{2}\,.\,4\;(ΒΓ)\,.\,υ = \frac{1}{2}\,[\,(ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + (ΔΑ)\,]\,.\,υ.$$

Ἐὰν ὀνομάσωμεν $τ = \frac{1}{2}\,[\,(ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + (ΔΑ)\,]$.

Τότε $Ε_π = τ.\,υ$, ὅπου $υ$ = ὕψος ἐπὶ τὴν βάσιν τῶν ἴσων καὶ ἰσοσκελῶν τριγώνων τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

Ὥστε : Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ἐπὶ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της.

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας μιᾶς πυραμίδος, πρέπει εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

$$Ε_{ὁλ} = Ε_π + Β.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

294) Μιὰ σκηνὴ ἔχει σχῆμα κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 10m. καὶ τῆς ὁποίας αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι ἐπίσης 10m. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.

295) Κατασκευάζομεν μὲ χαρτόνι μίαν κανονικὴν πυραμίδα, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 6cm. Τὸ ὕψος τῆς παραπλεύρου ἕδρας της εἶναι 14cm: Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος καὶ ἡ ὁλική της ἐπιφάνεια.

296) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 0,4 m καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαί της 0,7 m·

297) Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τὸ ὕψος μιᾶς ἕδρας της εἶναι 1,20 m, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνειά της 1,84 m^2. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσεώς της.

298) Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 10 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της, ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της εἶναι 10 dm.

299) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος κανονικῆς τριγωνικῆς ἢ τετραγωνικῆς ἢ ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, ἂν ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεώς της εἶναι 3 m, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ 5 m.

300) Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ διαγώνιον 2m. Ἐὰν ἡ παράπλευρος ἀκμή της εἶναι 6 m, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά της.

301) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 2,30 m^2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράπλευρος ἀκμή της, ἂν τό τὸ ὕψος τῆς παραπλεύρου ἕδρας της εἶναι 0,7 m.

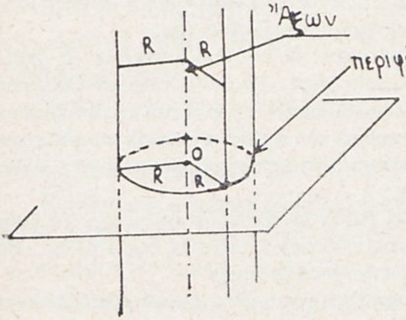
302) Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἑξάγωνον πλευρᾶς 2m. Νὰ εὑρεθῇ τί ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ πυραμίς, ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της.

303) Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἑξάγωνον πλευρᾶς 2 m καὶ τὸ ὕψος της 10 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί της καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.

§ **191. Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια.** Ἔστω μία τυχοῦσα καμπύλη Κ εἰς τὸν χῶρον (Σχ. 61). Μία εὐθεῖα (ε), ὅταν κινηθῇ παραλλήλως πρὸς μίαν δοθεῖσαν σταθερὰν διεύθυνσιν (λ) καὶ συναντήσῃ τὴν Κ, παράγει κατὰ τὴν κίνησίν της μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια· Ἡ κινουμένη εὐθεῖα (ε) λέγεται *γενέτειρα* τῆς κυλινδρινῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ καμπύλη Κ λέγεται *ὁδηγός*.

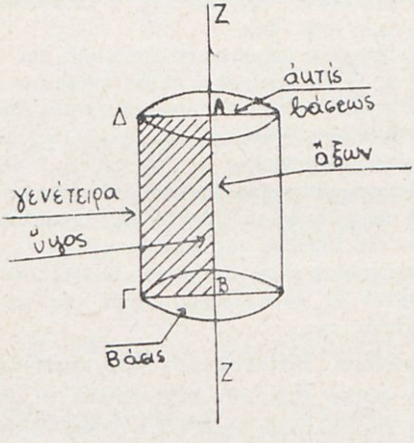
Σχ. 61.

Ἔστω ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ὁδηγὸν μίαν περιφέρειαν καὶ γενέτειραν μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας ὁδηγοῦ (Σχ. 62). Κάθε σημεῖον τῆς κυλινδρικῆς αὐτῆς ἐπιφανείας ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν κάθετον zz΄ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας - ὁδηγοῦ, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο. Ἡ κυλινδρική αὐτὴ ἐπιφάνεια λέγεται ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.



Σχ. 62.

Ἐὰν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ (Σχ. 63) τὴν τμήσωμεν μὲ δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα zz΄, τότε αἱ τομαὶ θὰ εἶναι δύο κύκλοι παράλληλοι Τὸ σημειοσύνολον, τὸ ὁποῖον περικλείεται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων κύκλων καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, λέγεται *ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος*.

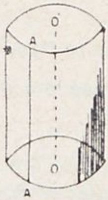


Σχ. 63.

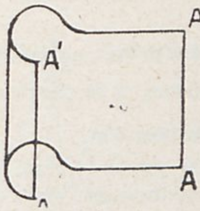
Ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθῇ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (Σχ. 63) ΑΒΓΔ, ὅταν τοῦτο περιστραφῇ περὶ μίαν πλευράν του (ἄξων), π,χ. τὴν ΑΒ

§ **192. Ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.** Ἔστω ἕνας κυκλικὸς κύλινδρος (Σχ. 64). Σχίζομεν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας ΑΑ΄. Ξεδιπλώνομεν (Σχ. 65) καὶ τοποθετοῦμεν αὐτὴν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Προκύπτει τότε ἕνα ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

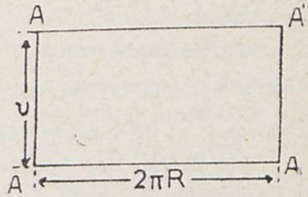
Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ κυ-



Σχ. 64.



Σχ: 65.



Σχ. 66.

κλικοῦ κυλίνδρου εἶναι :

$$\boxed{E_{\text{κυλ. ἐπ.}} = 2\pi R\upsilon}$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχωμεν :

$$E_{\text{ολ}} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(\upsilon + R).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

304) Κατασκευάζομεν ἕνα κύλινδρον ἀπὸ χαρτόνι, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 3 cm καὶ ὕψος 10cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χρησιμοποιουμένου χαρτονιοῦ.

305) Πόση θὰ εἶναι ἡ δαπάνη διὰ νὰ χρωματίσωμεν μίαν κυλινδρικὴν κολώνα ὕψους 7.4 m, καὶ τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 1,44 m πρὸς 12 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτροι.

306) Θέλομεν νὰ βάψωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν πυθμένα ἑνὸς κυλινδρικοῦ σωλῆνος, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 3,68 m, τὸ δὲ ὕψος τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δαπάνη, ἂν πληρώνωμεν διὰ κάθε τετραγωνικὸν μέτρον 18 δρχ.

307) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,2 m καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του 4,80 m.

308) Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 6,28 m, τὸ δὲ ὕψος του 0,8 m, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του.

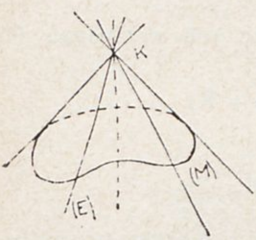
309) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως μιᾶς κυλινδρικῆς δεξαμενῆς βάθους 0,75 m, ἐὰν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της εἶναι 5 m².

310) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 628,32 dm^2. Ἡ διάμετρός του εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος του. Νά ὑπολογισθοῦν ἡ ἀκτίς του καί τὸ ὕψος του.

311) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς κυλίνδρου, ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του, ἡ δὲ ὁλική του ἐπιφάνεια εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 5 m.

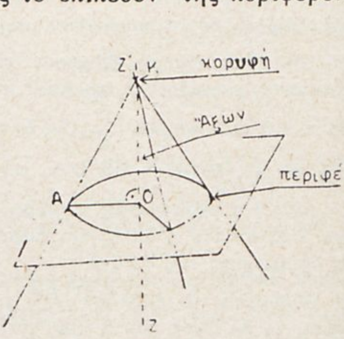
312) Φύλλον ἀπὸ λαμαρίνα ἔχει μῆκος 4,71 m, καὶ πλάτος 1 m. Τὸ χωρίζομεν εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα τυλίσσωμεν, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν κύλινδροι οὕτως, ὥστε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι διπλασία τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ἄλλου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο αὐτῶν κυλίνδρων, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὰ ὕψη των εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ 1 m ($\pi = 3,14$).

§ **193. Κωνικὴ ἐπιφάνεια.** Ἔστω ὅτι ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σημεῖον Κ διέρχεται μία εὐθεῖα (Ε), ἡ ὁποία συναντᾶ, κινουμένη διαρκῶς, μίαν ὡρισμένην καμπύλην (Μ). Ἡ εὐθεῖα (Ε) παράγει κατὰ τὴν κίνησίν της αὐτὴν μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται ***Κωνικὴ*** (Σχ. 67). Τὸ σημεῖον Κ λέγεται ***Κορυφὴ*** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἡ καμπύλη (Μ) λέγεται ***ὁδηγὸς*** καὶ ἡ εὐθεῖα (Ε) λέγεται ***γενέτειρα*** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.



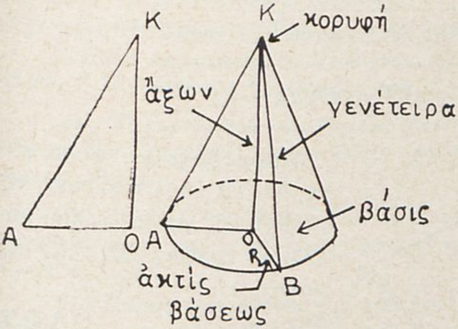
Σχ. 67.

Ἔστω μία κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἔχει διὰ ὁδηγὸν μίαν περιφέρειαν κύκλου καὶ ὡς κορυφήν της ἕνα σημεῖον Κ ἐπὶ τῆς καθέτου zz′ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας καὶ διὰ τοῦ Ο διερχομένης. Ἡ γενέτειρα αὐτῆς τῆς ἐπιφανείας σχηματίζει μίαν σταθερὰν γωνίαν μὲ τὴν κάθετον ZZ′. Ἡ παραγομένη κωνικὴ ἐπιφάνεια λέγομεν ὅτι εἶναι μία ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς καὶ ἡ ZZ′ εἶναι ὁ ἄξων τῆς κωνικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας (Σχ. 68).



Σχ. 68.

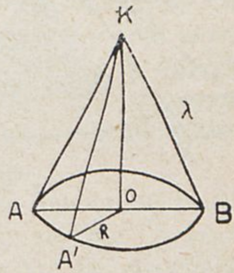
Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται, ὅταν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον στραφῇ περὶ τὴν μίαν κάθετον πλευράν του. Εἰς τὸ (Σχ. 69) ἡ ἀκίνητος πλευρὰ εἶναι ἡ ΚΟ. Ἡ ὑποτείνουσα ΚΑ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου παράγει τὴν *παράπλευρον* ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τῆς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μὲ ὁδηγὸν τὴν περιφέρειαν (Ο, ΑΟ),



Σχ. 69.

Ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος εἶναι τὸ σημειοσύνολον τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τὸν κύκλον (Ο, ΟΑ) (βάσιν) καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ὑποτείνουσα ΚΑ (παράπλευρος).

§ **191**. **Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.** Ἔστω ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος (Σχ. 70). Τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του τὴν σχίζομεν κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας ΑΑ΄. Τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν τὴν ξεδιπλώνομεν (Σχ. 71) καὶ τὴν ἁπλώνομεν ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον. Θὰ προκύψῃ τότε ἕνας κυκλικὸς τομεὺς (Σχ. 72), μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν γενέτειραν λ τοῦ κώνου. Τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ τοῦ κυκλικοῦ τομέως θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας 2ΠR τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Διὰ τὸ ἐμβαδὸν E_π αὐτοῦ τοῦ τομέως ἰσχύει ἡ ἀναλογία ; (Σχ. 72).



Σχ. 70.

$$\frac{\text{Ἐμβ. τομέως}}{\text{Ἐμβ. ὁλοκλ: τοῦ κύκλου}} = \frac{\text{Μῆκος ἀντιστοίχου τόξου}}{\text{Μῆκος ὁλοκλ. περιφερείας}}.\quad \text{Συνεπῶς}$$

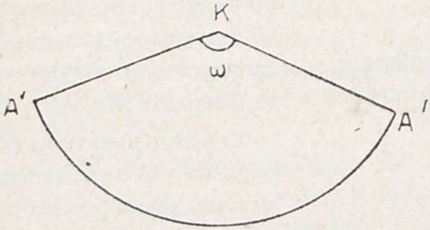
$$\frac{E_\pi}{\pi\,.\,\lambda^2} = \frac{2\pi R}{2\pi\lambda} = \frac{R}{\lambda} \Longrightarrow E_\pi = \pi\lambda^2\,\frac{R}{\lambda} = \pi\,.\,\lambda\,.\,R\,.$$

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον

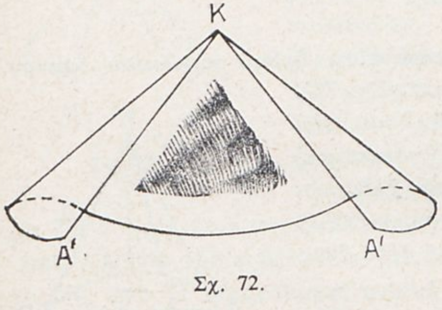
$$\boxed{E_\pi = \pi\lambda R}$$

Διὰ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{E_{o\lambda} = \pi\lambda R + \pi R^2 = \pi R\ (\lambda + R)}$$



Σχ. 71.



Σχ. 72.

Παρατήρησις : Εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω τοῦ κυκλικοῦ τομέως (Σχ. 72) εἰς μοίρας :

$$\frac{2\pi\lambda\ .\ \omega}{360} = 2\pi R \text{ ἢ } \omega = \frac{360.R}{\lambda}$$

Ὁ τελευταῖος τύπος εἶναι πολὺ χρήσιμος διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς κοίλου κώνου, ὅταν μᾶς δοθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ ἡ γενέτειρα, διότι κατασκευάζομεν ἀκριβῶς τὸν κυκλικὸν τομέα, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

313) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κωνικὴ σκηνὴ διαμέτρου βάσεως 8 μ. καὶ ὕψους 3 m. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μέτρα ὑφάσματος χρειαζόμεθα, ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 0,64 m.

314) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 10,80 m καὶ ἡ γενέτειρά του διπλασία τῆς διαμέτρου του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

315) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι 35 dm^2, ἡ δὲ ἀκτὶς 0,25 m.

316) Πόσα μέτρα ὑφάσματος πλάτους 1,4 m χρειαζόμεθα διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κωνικὴν σκηνήν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον βάσεως 2,5m καὶ πλευρὰν 2,80 m.

317) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι $5\,m^2$ ἡ δὲ ἀκτὶς 0,6 m,

318) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι $1\,m^2$, ἡ δὲ πλευρά του διπλασία τῆς διαμέτρου.

319) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 24 cm, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεώς του 18 cm.

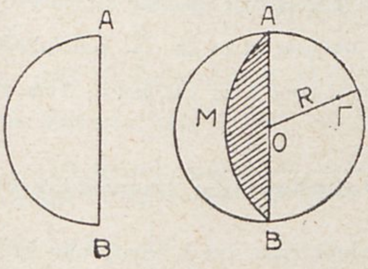
320) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου ἔχει μῆκος 5,4 m, ἡ δὲ πλευρά του σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν γωνίαν 60^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια.

321) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου εἶναι 3 m, τὸ δὲ ὕψος του 10 m. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

322) Κῶνος ἔχει ἀκτῖνα 3 m καὶ ὕψος 7 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου εἶναι ἀνάπτυγμα.

323) Ἀπὸ ὀρθὸν κύλινδρον ἀκτῖνος 4.2 dm καὶ ὕψους 8,51 dm ἀφαιροῦμεν τὸν κῶνον, ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ βάσιν τὴν ἄλλην βάσιν τοῦ κυλίνδρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον ἀπομένει.

§ **195. Σφαῖρα.** Ἔστω ἕνα ἡμικύκλιον ΑΒΜ (Σχ. 73). Ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον αὐτὸ στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΑΒ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτοῦ θέσιν, τότε παράγεται ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται ***σφαῖρα.***



Σχ. 73.

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία παράγεται ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΜΒ, ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο (κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου), τὸ ὁποῖον λέγεται *κέντρον* τῆς σφαίρας.

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσαι.

Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὰ ἄκρα του εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Κάθε διάμετρος μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς δύο ἀκτῖνας.

Ὅλαι αἱ διάμετροι μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον

$$\boxed{E = 4\pi R^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E = \pi \Delta^2}$$

ὅπου Δ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας.

Εἰς τὸ Λύκειον θὰ μάθωμεν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

324) Πόσον ὕφασμα χρειαζόμεθα διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἀερόστατον διαμέτρου 8 m, ἐὰν κατὰ τὴν κατασκευὴν χάνεται τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ χρησιμοποιουμένου ὑφάσματος;

325) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας εἶναι 15,7 m². Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου της;

326) Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος μιᾶς σφαίρας, τί γίνεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της;

327) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν κύβου, ἀκμῆς 0,5 m.

328) Ἕνας κύβος ἔχει ἀκμὴν 5 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν τῆς περιγεγραμμένης καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς αὐτόν.

329) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας εἶναι τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 6 cm καὶ ἀκτῖνα 3 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

§ 196. Σχέσις μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων στερεῶν.

Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἐπιπεδομετρίας ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Αἱ ὁμόλογοι ἕδραι δύο ὁμοίων πολυέδρων Σ καὶ Σ′ εἶναι σχήματα ὅμοια. (§ 185) καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος λ τῶν πολυέδρων.

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου Σ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἕδρας $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ καὶ τοῦ ὁμοίου Σ′ ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς $E'_1 . E'_2, \ldots E'_\nu$, τότε ἔχομεν

$$\frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \ldots = \frac{E_\nu}{E'_\nu} = \lambda^2 \Longrightarrow$$

$$\frac{E_1 + E_2 + \ldots + E_\nu}{E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_\nu} = \lambda^2 \Longrightarrow \frac{\text{Ἐπιφάνεια τοῦ } \Sigma}{\text{Ἐπιφάνεια τοῦ } \Sigma'} = \lambda^2.$$

Ἄρα: ***Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.***

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων *πολυέδρων* ἰσχύει γενικῶς καὶ διὰ τὰς ὁμολόγους ἐπιφανείας δύο ὁμοίων στερεῶν, (τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι πολύεδρα).

Πράγματι :

Ἐὰν ἔχωμεν δύο κυλίνδρους Κ, Κ΄ μὲ ἀκτῖνας βάσεων R, λR καὶ ὕψη υ, $\lambda\upsilon$ ἀντιστοίχως, οἱ κύλινδροι αὐτοὶ θὰ εἶναι ὅμοια στερεὰ μὲ λόγον ὁμοιότητος τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν πρῶτον λ.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κυλίνδρου $K = 2\pi R\upsilon + \pi R^2$

» » » $K' = 2\pi\lambda R\lambda\upsilon + \pi\lambda^2 R^2$

Ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τοῦ Κ΄ πρὸς τὸν Κ εἶναι

$$\frac{2\pi\lambda R\lambda\upsilon + \pi\lambda^2 R^2}{2\pi R\upsilon + \pi R^2} = \frac{(2\pi R\upsilon + \pi R^2)\lambda^2}{2\pi R\upsilon + \pi R^2} = \lambda^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

330) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὁμόθετον κανονικοῦ τετραέδρου, μὲ κέντρον ὁμοθεσίας μίαν κορυφήν του καὶ λόγον $\lambda = \frac{2}{3}$, ἢ $\lambda = -\frac{1}{2}$.

331) Δίδεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὁμόθετόν του, μὲ κέντρον ὁμοθεσίας τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ μὲ λόγον $\lambda = \frac{1}{2}$.

332) Δίδεται κύβος ΑΒΓΔΕΖΗΘ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὁμόθετόν του, ὡς πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda = -2$.

333) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὁμόθετον ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, μὲ κέντρον ὁμοθεσίας τὸ κέντρον τῆς βάσεώς του καὶ λόγον $\lambda = -\frac{2}{3}$.

334) Δίδεται κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς μὲ πλευρὰν βάσεως 12cm καὶ παράπλευρον ἀκμὴν 20 cm. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους. Νὰ εὑρεθοῦν α) τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο πυραμίδων, β) ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν. γ) Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν οἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιες καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος ὁμοιότητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ΄

ΟΓΚΟΙ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

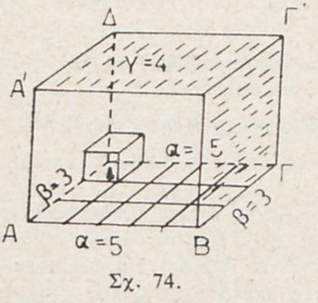
§ **197. Ὄγκος πρίσματος.** Εἰς τὴν § 157 ἐδόθη ἡ ἔννοια τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς πολυέδρου καὶ γενικώτερον ἑνὸς στερεοῦ, ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς : Ἐκλέγομεν τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων. Ἡ μονὰς αὐτὴ εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου, ὁ ὁποῖος ἔχει διαστάσεις συνήθως 1m, 1dm, 1cm κλπ. Συγκρίνομεν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ μὲ τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου. Δηλαδὴ εὑρίσκομεν πόσας φορὰς ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου ἢ μέρος αὐτῆς περιέχεται εἰς τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τὸν ὁποῖον μετρῶμεν. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν μέτρησιν αὐτήν, ἐκφράζει τὸ μέτρον τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ.

Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς ὄγκος πρίσματος, ὄγκος πυραμίδος κλπ., θὰ ἐννοοῦμεν τὴν μέτρησιν (τὸ μέτρον) τοῦ ὄγκου τῶν ἀναφερομένων στερεῶν.

Μονάδες ὄγκου : Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὄγκων τῶν διαφόρων στερεῶν χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὸ κυβικὸν μέτρον (m^3) ἢ τὰς ὑποδιαιρέσεις του. Αἱ κυριώτεραι ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι αἱ ἑξῆς :

$$1m^3 = 10^3dm^3 = 10^6cm^3 = 10^9mm^3$$
$$1dm^3 = 10^3cm^3 = 10^6mm^3$$
$$1cm^3 = 10^3mm^3$$

§ **198. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.** Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον (Σχ. 74), τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι α=5, β=3, γ=4. Καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις ἔχουν μετρηθῆ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους. Διαιροῦμεν τὴν α εἰς πέντε ἴσα μέρη καὶ τὴν β εἰς τρία ἴσα μέρη. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΒ. Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς 5×3 τετράγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς



Σχ. 74.

τὴν μονάδα τῶν ἐμβαδῶν. Διαιροῦμεν τὴν γ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Ἀπὸ τὰ σημεῖα διαιρέσεως φέρομεν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ, ἐὰν δὲ αὐτὸ ἐπαναληφθῇ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν ἄλλων διαστάσεων, τὸ παραλληλεπίπεδον θὰ διαιρεθῇ εἰς $(5\times3\times4)$ κύβους, ἕκαστος τῶν ὁποίων θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι $5\times3\times4$, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του. Ἐὰν ὡς μονὰς τοῦ μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον, τότε

$$\alpha = 5\text{m},\ \beta = 3\text{m},\ \gamma = 4\text{m}$$

$$V = 5\times3\times4 = 60\text{m}^3.$$

β) Αἱ διαστάσεις α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ δεκαδικοί.

Ἔστω $\alpha = 2{,}5$m, $\beta = 3{,}25$m, $\gamma = 2.4$m. Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους τὸ ἑκατοστὸν (cm). Ἡ μονὰς τότε τοῦ ὄγκου θὰ εἶναι τὸ κυβικὸν ἑκατοστόν. Αἱ διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι 250 cm, 325 cm. 240 cm, ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὴν α) περίπτωσιν, θὰ ἔχωμεν

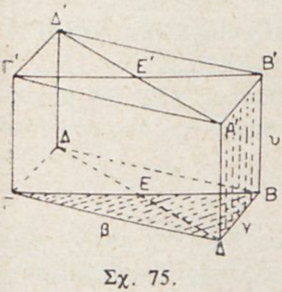
$$V = (250 \times 325 \times 240)\ \text{cm}^3 = \frac{250 \times 325 \times 240}{1.000.000}\ \text{m}^3$$

ἢ $$V = \left(\frac{250}{100} \times \frac{325}{100} \times \frac{240}{100}\right)\text{m}^3 = (2{,}5 \times 3{,}25 = 2{,}4)\ \text{m}^3 = 19{,}5\text{m}^3.$$

Ὄγκος κύβου. Ἐπειδὴ ὁ κύβος εἶναι ἕνα παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἴσαι, ἐὰν τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου εἶναι α, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι

$$V = \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha^3.$$

§ **199. Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος.** α) Ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, μὲ βάσιν τρίγωνον ὀρθογώνιον.



Σχ. 75.

Ἔστω τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα (Σχ. 75), μὲ βάσιν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. ($\widehat{A} = 1$ ὀρθή). Ἐάν, εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς τριγωνικῆς βάσεως, λάβωμεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α, ὡς πρὸς τὸ μέσον Ε τῆς ΓΒ, αὐτὸ θὰ εἶναι τότε τὸ σημεῖον Δ.

Ἐὰν γίνῃ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ σημεῖον Α΄ τῆς ἄλλης βάσεως, θὰ ἔχωμεν ὡς συμμετρικόν του πρὸς Ε΄ τὸ Δ΄.

Προκύπτει τότε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΔΓ Α΄Β΄Δ΄Γ΄, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα τριγωνικὰ πρίσματα, τὸ ἀρχικὸν καὶ τὸ συμμετρικόν του, ὡς πρὸς τὴν ΕΕ΄. Ὁ ὄγκος V τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι β, γ, υ. Ἄρα.

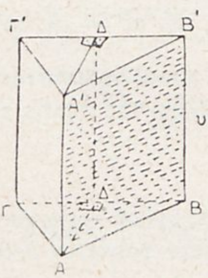
$$V = \frac{1}{2}(\beta \cdot \gamma \cdot \upsilon) = \frac{1}{2}(\beta \cdot \gamma) \cdot \upsilon =$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) \cdot \upsilon = (\mathrm{AB\Gamma}) \cdot \upsilon$$

Ἐὰν λοιπὸν Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ υ τὸ ὕψος του, ὁ ὄγκος του θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον

$$\boxed{V = B \cdot \upsilon}$$

β) Ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, μὲ βάσιν τυχὸν τρίγωνον.

Ἔστω τὸ ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ βάσιν τυχὸν τρίγωνον (Σχ. 76). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον τῆς βάσεως ΑΒΓ τὸ ὕψος του ΑΔ εὑρίσκεται ἐντὸς αὐτοῦ. Τὸ ἀρχικὸν τριγωνικὸν πρῖσμα χωρίζεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ ΑΑ΄ καὶ ΑΔ, εἰς δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα μὲ βάσεις τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ καὶ ὕψος υ. Ὁ ὄγκος V τοῦ ἀρχικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος θὰ ἰσοῦται



Σχ. 76.

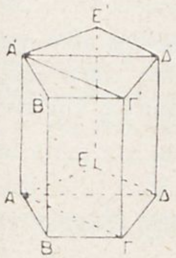
$$V = (\mathrm{AB\Delta})\,\upsilon + (\mathrm{A\Delta\Gamma})\,\upsilon = [(\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{B\Delta\Gamma})]\,\upsilon$$
$$= (\mathrm{AB\Gamma})\,\upsilon.$$

Ἐὰν ὀνομάσωμεν Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ τοῦ ἀρχικοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ὁ ὄγκος του θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον

$$\boxed{V = B \cdot \upsilon}$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν ὅτι : Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τριγωνικῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

γ) ***Ὄγκος τυχόντος ὀρθοῦ πρίσματος.*** Ἔστω ὀρθὸν πρῖσμα μὲ βάσιν τυχὸν πολύγωνον (Σχ. 77). Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τὰς διαγωνίους τῆς βάσεως, τὸ πρῖσμα χωρίζεται εἰς ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, μὲ βάσεις τὰ ἀντίστοιχα τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως, Ἐὰν ὀνομάσωμεν E_1, E_2, E_3, ... , E_ν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων αὐτῶν, ὁ ὄγκος V τοῦ ἀρχικοῦ πρίσματος θὰ εἶναι



Σχ. 77.

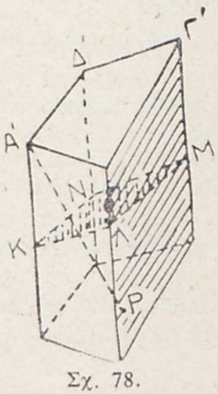
$$V = (E_1 \upsilon + E_2 \upsilon + E_3 \upsilon + \ldots + E_\nu \upsilon) =$$
$$= (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_\nu)\, \upsilon = \text{Ἐμβαδὸν βάσεως} \,.\, \text{ὕψος}.$$

Συνάγομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα :

Ὁ ὄγκος τυχόντος ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενόν τοῦ ἐμβαδοῦ Β τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.

$$\boxed{V = B \,.\, \upsilon}$$

§ **200. Ὄγκος πλαγίου πρίσματος.** Ἡ πλήρης ἀποδεικτικὴ ἐργασία καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῶν σχετικῶν τύπων ὑπολογισμοῦ τῶν ὄγκων τοῦ πλαγίου πρίσματος, τῆς πυραμίδος, τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου καὶ τῆς σφαίρας, θὰ γίνῃ εἰς τὸ Λύκειον. Κατωτέρω θὰ ἀναγράψωμεν τοὺς τύπους αὐτοὺς καὶ θὰ τοὺς χρησιμοποιοῦμεν, ὅταν ὑπάρχῃ ἀνάγκη.



Σχ. 78.

α) Ὁ ὄγκος ἑνὸς πλαγίου πρίσματος ἰσοῦται μὲ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μιᾶς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του. Δηλαδή : (Σχ. 78)

$$V = \text{Ἐμβαδὸν ΑΒΓΔ} \,.\, \text{ὕψος Α΄Δ}$$

β) Ἐὰν εἰς τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ (Σχ. 78) ΚΛΜΝ εἶναι μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ, ὁ ὄγκος του θὰ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον

$$V = (\text{ΚΛΜΝ}) \,.\, \text{ΑΑ΄}$$

Δηλαδή : Ὁ ὄγκος ἑνὸς πλαγίου πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ μῆκος μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς του.

§ **201**. ***Βάρος σώματος.*** Ὅπως εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς φυσικῆς τὸ εἰδ. βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου. Συνεπῶς, ἐάν γνωρίζωμεν τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος καὶ τὸν ὄγκον του, εὑρίσκομεν τὸ βάρος αὐτοῦ.

Βάρος = ὄγκος . εἰδικὸν βάρος.

Ἐὰν ὁ ὄγκος ἐκφράζεται εἰς cm^3, τότε τὸ βάρος ἐκφράζεται εἰς γραμμάρια.

Ἐὰν ὁ ὄγκος ἐκφράζεται εἰς dm^3, τότε τὸ βάρος θὰ λαμβάνεται εἰς Kg.

Ἐὰν ὁ ὄγκος ἐκφράζεται εἰς m^3, τότε τὸ βάρος θὰ λαμβάνεται εἰς τόννους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 10cm, ἐὰν κάθε πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς βάσεως εἶναι 10cm.

336. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἂν τὸ ὕψος του εἶναι 20cm καὶ κάθε πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 10cm.

337) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ ἀκμὴ εἶναι 0,95m ;

338) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 12,25 dm^2,

339) Διά νὰ φοδράρωμεν τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυβικοῦ κιβωτίου, χωρὶς σκέπασμα, χρησιμοποιοῦμεν 0,8820m^2 χαρτί. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου ;

340) Ἡ διαγώνιος μιᾶς τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κύβου εἶναι α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

341) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 24m^2, ἡ βάσις ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐμβαδοῦ 6m^2, τὸ δὲ ὕψος του ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως.

342) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κύβου εἶναι 1,5m^2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

343) Ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ἔχει ὕψος 8cm, βάσεις ῥόμβους μὲ διαγωνίους 6 cm καὶ 4cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

344) Σιδηρᾶ δοκὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ μῆκος της εἶναι 5m, τὸ πλάτος της εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μήκους της καὶ τὸ πάχος

της εἶναι $\frac{4}{5}$ τοῦ πλάτους της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της καὶ τὸ βάρος της, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,6.

345) Ἡ βάσις ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ρόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 0,10m ἡ δὲ μικροτέρα διαγώνιος 0,12m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος του, ἂν τὸ ὕψος του εἶναι 0,3m.

346) Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα δωμάτιον μὲ διαστάσεις 18m καὶ 8,4m, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ μείνουν 30 μαθηταί. Τὰ ἔπιπλα καταλαμβάνουν τὰ $\frac{5}{72}$ τοῦ ἐλευθέρου χώρου. Πόσον ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ δωμάτιον διὰ νὰ ἀντιστοιχοῦν 20m³ ἀέρος εἰς κάθε μαθητήν;

347) Κανονικὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἐγγεγραμμένην εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ. Ἂν τὸ ὕψος του εἶναι 2ρ καὶ ὁ ὄγκος του 500m³, πόσον εἶναι τὸ ρ;

348) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον *810m³* καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς *2, 3, 5*.

349) Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος καὶ τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ, τὸ ὁποῖον περιέχει εἶναι 0,8m. Ἂν ρίψωμεν ἕνα κυβικὸν λίθον ἀκμῆς 0,75m, τὸ ἐπίπεδον τοῦ νεροῦ ἀνέρχεται κατὰ 0,006m. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, τὸ ὁποῖον περιέχει ἡ δεξαμενή. β) Ἡ πλευρὰ τῆς ἑξαγωνικῆς βάσεως.

350) Ὁ ὄγκος ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 816,4cm³ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του 480cm². Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς του.

351) Ἀπὸ κύβον ἀκμῆς 50cm ἀποκόπτομεν πυραμίδα ἡ ὁποία ἔχει βάσιν μίαν ἕδραν τοῦ κύβου καὶ τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς ἕδρας τοῦ κύβου, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι ἐκείνης τῆς ἕδρας, τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν ὡς βάσιν τῆς πυραμίδος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τὸ ὁποῖον ἀπομένει μετὰ τὴν ἀποκοπὴν τῆς πυραμίδος καὶ τί σχέσιν ἔχει ὁ ὄγκος αὐτὸς πρὸς τὸν ὄγκον τῆς ἀποκοπείσης πυραμίδος.

§ **202. Ὄγκος πυραμίδος.** Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος ἰσοῦται *μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της Β, ἐπὶ τὸ ὕψος της υ.*

$$\boxed{V = \frac{B \cdot \upsilon}{3}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

352) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν α) τετράγωνον μὲ πλευρὰν 4,3m καὶ ὕψος 1,9m, β) τρίγωνον ἰσόπλευ-

ρον μὲ πλευρὰν 0,1m καὶ ὕψος 0,15m, γ) κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν 0,4m καὶ ὕψος 1,2m.

353) Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 0,4m καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της 1,10m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ ὁ ὄγκος της.

354) Πυραμὶς μὲ ἴσας παραπλεύρους ἀκμὰς ἔχει ὕψος 10m, βάσιν δὲ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ πλευρὰς 5m καὶ 12m. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της καὶ τὸ μῆκος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν της.

355) Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἑξάγωνον, πλευρᾶς 3m. Τὸ ὕψος της εἶναι 15m. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ παράπλευρος ἀκμή της, β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της, γ) ὁ ὄγκος της.

356) Κανονικὴ πυραμὶς ὕψους 12m μετεσχηματίσθη εἰς κανονικὸν πρῖσμα μὲ βάσιν ἰσοδύναμον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

357) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος πυραμίδος ἐχούσης ὄγκον 26,963m^3, πλευρὰν δὲ τῆς τριγωνικῆς βάσεώς της 3,6m.

358) Αἱ ἀκμαὶ τῆς βάσεως τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 40m, αἱ δὲ παράπλευροι ἀκμαί της 1,01m. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

359) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της εἶναι 12m, ἡ δὲ βάσις ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἀκτῖνος 10m.

360) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της εἶναι 8,5m. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

361) Πυραμὶς περικλείεται ἀπὸ τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς 2m. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

362) Μία κανονικὴ πυραμὶς μὲ βάσιν ἑξάγωνον πλευρᾶς 7,5m καὶ ὕψους 3,3m σχηματίζεται ἀπὸ οἰκοδομήσιμα ὑλικά. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγος τῆς πυραμίδος καὶ τὸ μῆκος τοῦ τοίχου, ὁ ὁποῖος κατασκευάζεται ἀπὸ τὰ ὑλικὰ αὐτά, ἂν αὐτὸς ἔχῃ ὕψος 2,5m καὶ πάχος 0,3m.

363) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της εἶναι 2,125m. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

364) Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2m. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι 3πλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, β) τὸ βάρος κύβου ἐκ σιδήρου, ὁ ὁποῖος ἔχει διαγώνιον τῆς ἕδρας του τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος. Εἰδ. βάρος σιδήρου 7,6.

365) Τετραέδρου ΣΑΒΓ ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι τρισορθογώνιος, εἶναι δὲ (ΣΑ)=(ΣΒ)=4m καὶ (ΣΓ)=3m. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ἀγνώστων ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου τούτου, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του, ὁ ὄγκος του καὶ τὸ ὕψος του.

§ **203. Ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.** Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μέ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ

$$\boxed{V = B \cdot \upsilon = \pi R^2 \upsilon}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει ὁμοιότης μεταξύ τῶν τύπων, οἱ ὁποῖοι δίδουν ἀφ' ἑνὸς τόν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου καὶ ἀφ' ἑτέρου τόν ὄγκον ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος. Ἡ ὁμοιότης αὐτὴ δικαιολογεῖται μὲ τόν τρόπον, τὸ ὁποῖον θὰ περιγράψωμεν κατωτέρω. Ἡ περιγραφὴ αὐτὴ εἶναι συγχρόνως καὶ μία σκιαγραφία τῆς ἀποδείξεώς του, τὴν ὁποίαν θὰ διδαχθῶμεν εἰς τὸ Λύκειον.

Ἂς φαντασθῶμεν εἰς τὰς κυκλικὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου δύο ἐγγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα, μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν. Τὸ ὀρθὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις τὰ πολύγωνα αὐτά, εἶναι προφανῶς ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος, ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχῃ ἐλαχίστην διαφορὰν ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος. Εἶναι μάλιστα δυνατὸν νὰ φαντασθῶμεν ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτὴ γίνεται, ὅσον θέλομεν μικρή, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων αὐξάνῃ. Εἶναι λοιπὸν λογικὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἰσχύει ὁ αὐτὸς τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον ὀρθοῦ πρίσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

366) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, ἂν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του εἶναι 12,40m καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 1,2m.

367) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, ἂν τὸ ὕψος του εἶναι 1,20m, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου μὲ διαγώνιον $2\sqrt{2}$ m.

368) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 456,16dm², τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του 653,12dm². Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

369) Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν μίαν κυλινδρικὴν δεξαμενήν, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος νὰ εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, ὁ δὲ ὄγκος της νὰ εἶναι 10m³. Νά εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις της.

370) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 9,42m. Ἡ δεξαμενή εἶναι γεμάτη κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ περιέχει 37,68m³ νερό. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος τῆς δεξαμενῆς.

371) Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι $13{,}128m^3$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του, ἂν ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 1,48m.

372) Εἰς τὸ μέσον ἑνὸς τετραγωνικοῦ κήπου πλευρᾶς 2m ὑπάρχει ἕνα πηγάδι κυλινδρικὸν γεμᾶτο μὲ χῶμα καὶ μὲ περιφέρειαν τῆς βάσεως 6,28m. Ἐὰν βγάλωμεν τὸ χῶμα ἀπὸ τὸ πηγάδι καὶ τὸ ρίψωμεν εἰς τὸν ὑπόλοιπον κῆπον καταλαμβάνει ὕψος 8m. Πόσον εἶναι τὸ βάθος τοῦ πηγαδιοῦ ;

373) Ἕνα κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει ὕψος 0,75m καὶ γεμίζεται μὲ νερὸ μέχρι τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ὕψους του. Προσθέτομεν 7 λίτρας ἀκόμη καὶ τότε τὸ δοχεῖον γεμίζει μέχρι τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους του. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης του καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του.

374) Μία κυλινδρικὴ δεξαμενὴ ἐσωτερικῆς διαμέτρου 24m καὶ βάθους 1,6m περικλείεται ἀπὸ τοῖχον πάχους 0,6m. Νὰ εὑρεθῇ α) πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ μία βρύσις, τῆς ὁποίας ἡ παροχὴ εἶναι $1\frac{1}{3}$ λίτραι ὕδατος τὸ δευτερόλεπτον διὰ νὰ τὴν γεμίσῃ μέχρι ὕψους 1,25m β) ὁ ὄγκος τοῦ τοίχου ὁ ὁποῖος τὴν περικλείει.

375) Ἀγωγὸς μήκους 100m ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα πλευρᾶς 1,4m. Ἐὰν τὸ κοῖλον τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι κύλινδρος διαμέτρου 1m καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑλικοῦ, μὲ τὸ ὁποῖον εἶναι κατασκευασμένος ὁ ἀγωγός, εἶναι 4,2, νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀγωγοῦ αὐτοῦ.

376) Κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει πληρωθῆ μὲ νερὸ μέχρι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους του. Ἐὰν ρίψωμεν εἰς αὐτὸ 3 κυβικὰς παλάμας ὕδατος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἀνέρχεται κατὰ 0,05m καὶ φθάνει εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὕψους τοῦ δοχείου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος καὶ τὸ βάθος τοῦ δοχείου.

377) Μὲ 1kg ὀρειχάλκου κατασκευάζομεν 400m σύρματος. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι 8,9. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος.

378) Νὰ κατασκευασθῇ δοχεῖον ἐκ ψευδαργύρου, τὸ ὁποῖον ἔχει εἰδικὸν βάρος 7,2, καὶ νὰ χωρῇ 2 kg ὕδατος, νὰ ἔχῃ δὲ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεώς του. Ποῖαι εἶναι αἱ διαστάσεις του ;

379) Ἕνα ὀρθογώνιον φύλλον λαμαρίνας ἔχει μῆκος 66cm καὶ πλάτος 43cm. Κυρτοῦται καὶ ἐφοδιάζεται μὲ μίαν βάσιν. Ποῖαι εἶναι αἱ χωρητικότητες τῶν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον κατασκευασθέντων δοχείων, ἐὰν τὰ ἄκρα καλύπτωνται κατὰ 2cm, ἡ δὲ κύρτωσις γίνεται α) κατὰ μῆκος καὶ β) κατὰ πλάτος.

§ **204. Ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.** Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυκλικῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος

$$\boxed{V = \frac{B \cdot \upsilon}{5} = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon}$$ R ἀκτὶς τῆς βάσεως

Μὲ ἀναλόγους σκέψεις, ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον (§ 203), δικαιολογεῖται ἡ ὁμοιότης τοῦ τύπου, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου μὲ τὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

380) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι 9m, ἡ δὲ πλευρά του ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

381. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 1,05m, ὁ δὲ ὄγκος ἴσος μὲ τόν ὄγκον κύβου, ἀκμῆς 3m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του.

382) Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι 6 m, ὁ δὲ ὄγκος του $80m^3$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

383) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ἀκτῖνος $\frac{2}{3}$m. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του, ἂν ἡ ἀκτίς του εἶναι 0,5m.

384) Ἕνα κωνικὸν δοχεῖον κατεσκευάσθη μὲ ἕνα κυκλικὸν τομέα λαμαρίνας 80^0 καὶ ἀκτῖνα 80cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ δοχείου καὶ ὁ ὄγκος του, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τῆς λαμαρίνας εἶναι 5,2.

385) Αἱ διαστάσεις ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι 3m, 4m, 5,5m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὸ κώνου, μὲ ἀκτῖνα βάσεως 3m.

386) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως κώνου εἶναι 14m καὶ τὸ ὕψος του 8m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου του ὀρθοῦ πρίσματος, μὲ βάσιν τετράγωνον, πλευρᾶς 4m.

387) Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι κυκλικὸς τομεύς, ἀκτῖνος 4m καὶ γωνίας 120^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου, ὁ ὄγκος του καὶ ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια.

388) Κῶνος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς κανονικὴν πυραμίδα, βάσεως ἑξαγωνικῆς, πλευρᾶς 3m. Ἐὰν τό ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 2m νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου.

389) Ἀπὸ ὀρθὸν κύλινδρον ἐκ ξύλου, ἀκτῖνος 4,2m καὶ ὕψους 8,51m ἀποκόπτομεν τὸν κῶνον, ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ βάσιν τὴν ἄλλην βάσιν τοῦ κυλίνδρου. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον ἀπομένει, β) τὸ βάρος του, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,7.

§ **205. Ὄγκος σφαίρας.** Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi \,.\, \delta^3}$$

$R =$ ἀκτὶς τῆς σφαίρας $\delta = 2R =$ διάμετρος τῆς σφαίρας

Ἕνας προσιτὸς τρόπος δικαιολογίας τοῦ τύπου, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ἀνάλογος τῶν προηγουμένων (§ 203), εἶναι ὁ ἑξῆς.

Φανταζόμεθα ὅτι μία σφαῖρα περικλείεται ἀπὸ ἕνα πολύεδρον οὕτως, ὥστε κάθε ἕδρα τοῦ πολυέδρου νὰ ἔχῃ ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ πολυέδρου μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, θὰ προκύψουν πυραμίδες ἰσάριθμοι πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου μὲ κοινὴν κορυφὴν καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ἐὰν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων αὐτῶν. Δηλαδὴ

$$\frac{1}{3}\varepsilon_1 R + \frac{1}{3}\varepsilon_2 R + \ldots + \frac{1}{3}\varepsilon_\nu R = \frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu)R =$$

$$= \frac{1}{3} \text{ ἐμβ, ἐπιφ. πολυέδρου } R.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου πολυέδρου εἶναι πολὺ μικρῶν διαστάσεων, ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου θὰ διαφέρῃ πολύ ὀλίγον τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας. Λογικὸν εἶναι λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας προκύπτει ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα R κατὰ τρόπον παρόμοιον, μὲ ἐκεῖνον, διὰ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}(4\pi R^2)R = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

390) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας διαμέτρου 43cm.

391) Σφαῖρα ἔχει ὄγκον $75m^3$, νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρός της.

392) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας ἔχει μῆκος 15,7m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της καὶ ὁ ὄγκος της.

393) Ἕνα τόξον 30^{0} μεγίστου κύκλου σφαίρας ἔχει μῆκος 15cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

394) Ἕνα ἐπίπεδον τέμνει μίαν σφαῖραν καὶ ἀπέχει 0,9m ἀπὸ τὸ κέντρον της. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς εἶναι 0.4m νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

395) Πόσον εἶναι τὸ βάρος μιᾶς ἀργυρᾶς σφαίρας, ἂν τὸ μῆκος μεγίστου κύκλου της εἶναι 0,42m τὸ δὲ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου 10,42.

396) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας περιγεγραμμένης περὶ κύβον. ἀκμῆς 2cm.

397) Μία σφαῖρα ἐξ ὀρειχάλκου ζυγίζει 12kg. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι 7,35. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ τὸ βάρος τοῦ ἀπαιτουμένου χρυσοῦ διὰ τὴν ἐπικάλυψίν της μὲ στρῶμα πάχους 0,0006m, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19,26.

398) Ἕνας λέβης ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κύλινδρον μήκους 2m καὶ διαμέτρου 0,8m καὶ κλεισμένος εἰς τὰ δύο ἄκρα του ἀπὸ δύο ἡμισφαίρια τῆς αὐτῆς διαμέτρου μὲ τὸν κύλινδρον. Νὰ, ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, τὸ ὁποῖον χωρεῖ.

399) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑνὸς κοίλου ἡμισφαιρίου ἐκ χαλκοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον 12cm καὶ πάχος 12mm. Εἰδικὸν βάρος χαλκοῦ 8,8.

§ **206. Σχέσις μεταξὺ τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων στερεῶν.** Ἐὰν λάβωμεν δύο κύβους Κ, Κ′ ὁμοθέτους, ὡς πρὸς ἕνα κέντρον ὁμοθεσίας Ο καὶ λόγον ὁμοθεσίας λ, οἱ δύο αὐτοὶ κύβοι εἶναι ὅμοια πολύεδρα (§ 185), μὲ λόγον ὁμοιότητος λ.

Ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου Κ ἔχῃ μῆκος α, ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου Κ′ θὰ ἔχῃ μῆκος $\alpha' = \alpha \, . \, \lambda$. Οἱ ὄγκοι τῶν κύβων Κ καὶ Κ′ θὰ εἶναι

$$V = \alpha^3 \qquad V' = \alpha'^3 = \alpha^3\lambda^3 \qquad (1)$$

διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη των (1) ἔχομεν

$$\frac{V'}{V} = \frac{\alpha^3\lambda^3}{\alpha^3} = \lambda^3 .$$

Δηλαδή : Ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο ὁμοθέτων κύβων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοθεσίας.

Γενικῶς ἰσχύει ἡ αὐτὴ ἰδιότης διὰ δύο ὁποιαδήποτε ὁμόθετα πολύεδρα ἢ δύο ὁποιαδήποτε ὁμόθετα στερεά.

Ἐπειδὴ δύο *ὅμοια* στερεὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν ***ὁμόθετα*** μὲ κατάλληλον μετακίνησιν καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητος γίνεται τότε λόγος ὁμοθεσίας, ἰσχύει τότε ἡ ἑξῆς ἰδιότης διὰ τοὺς ὄγκους αὐτῶν. Ὁ λόγος τοῦ ὄγκου V′ τοῦ στερεοῦ Σ′ πρὸς τὸν ὄγκον V τοῦ ὁμοίου πρὸς τὸ Σ′ στερεοῦ Σ ἰσοῦται μὲ τὸν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος τοῦ Σ′ πρὸς τὸ Σ. Δηλαδὴ

$$\frac{V'}{V} = \lambda^3 .$$

Οἱ μαθηταὶ νὰ ἐπαληθεύσουν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα λαμβάνοντες πρῶτον δύο ὅμοια τετράεδρα καὶ δεύτερον δύο σφαίρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

400) Αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων τριγωνικῶν πρισμάτων ἔχουν λόγον $\frac{4}{5}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν των καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων των.

401) Ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ΚΑΒΓ ἔχει ἀκμὴν 10cm. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς ΚΑ καὶ φέρωμεν ἀπὸ αὐτὸ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δυο τετραέδρων.

402) Ἕνας κύβος ΑΒΓΔΕΖΗΘ ἔχει ἀκμὴν τριπλασίαν ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ἄλλου κύβου Α′Β′Γ′Δ′Ε′Ζ′Η′Θ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο κύβων.

403) Ἔχομεν ἕνα κυλινδρικὸν δοχεῖον ἀκτῖνος 20cm καὶ βάθους 30cm. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἄλλο δοχεῖον, ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου ὅμως ἡ χωρητικότης νὰ εἶναι τριπλασία. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ δευτέρου δοχείου.

404) Κῶνος ἔχει γενέτειραν 25cm καὶ ἀκτῖνα βάσεως 15cm. Εἰς ἀπόστασιν 5cm ἀπὸ τὴν κορυφήν του φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μικροῦ κώνου.

405) Ἐὰν ἡ ἀκμὴ μιᾶς πυραμίδος εἶναι 10cm, ποία εἶναι ἡ ὁμόλογος ἀκμὴ ἄλλης πυραμίδος, ὁμοίας πρὸς τὴν πρώτην ; α) ἐὰν ἔχῃ διπλασίαν ἐπιφάνειαν β) ἐὰν ἔχῃ διπλάσιον ὄγκον ;

406) Τὸ ὕψος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 6m. ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεώς της 4m. Ποῖαι αἱ διαστάσεις ὁμοίας πυραμίδος πρὸς αὐτὴν τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς πρώτης ;

407) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν καὶ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν των, ἐὰν αἱ ἀκτῖνες των ἔχουν μήκη $R_1 = 5$cm καὶ $R_2 = 8$cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ΄

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

§ **207. Τυχαῖα γεγονότα.** Τὸ ἐνδιαφέρον διὰ τὴν ἐπιτυχίαν εἰς τὰ τυχερὰ παιγνίδια ἦταν ἡ ἀρχικὴ αἰτία τῆς δημιουργίας τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων.

Ὅταν λέγωμεν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων, ἐννοοῦμεν τὴν εὕρεσιν καὶ ἔκφρασιν, διὰ τῶν Μαθηματικῶν, τῶν νόμων, εἰς τοὺς ὁποίους ὑπακούουν τὰ τυχαῖα γεγονότα. Μερικὰ παραδείγματα τυχαίων γεγονότων εἶναι τὰ ἑξῆς :

α) Ὅταν ρίπτωμεν πρὸς τὰ ἄνω ἕνα νόμισμα, ὥστε νὰ περιστρέφεται κατὰ τὴν διαδρομήν του, ἐκ πείρας γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν τὸ νόμισμα ἠρεμήσῃ, θὰ παρουσιάσῃ «κορώνα» ἢ «γράμματα».

β) Ὅταν ρίπτωμεν ἕνα κύβον (ζάρι), ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ ὁποίου εἶναι γραμμένοι μὲ κοκκίδας οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὸ 1 μέχρι 6, ἐμφανίζεται ἐπὶ τῆς ἐπάνω ἕδρας ἕνας ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Εἶναι εὔκολον νὰ ἀντιληφθῇ κανείς, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων τί θὰ παρουσιάσῃ τὸ νόμισμα ἢ ὁ κύβος.

Τὸ πείραμα τῆς ρίψεως τοῦ νομίσματος ἔγινε 10000 φορὰς καὶ κατεγράφησαν τὰ ἀποτελέσματα.

Ἡ καταγραφὴ τῆς ἐνδείξεως «κορώνα», ἀνὰ 1000 ρίψεις, παρουσίασε τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς :

502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529.

Ἐπίσης ἐπὶ 240 ρίψεων τοῦ κύβου, αἱ ἐνδείξεις τῆς ἄνω ἕδρας ἦσαν αἱ ἑξῆς :

1	2	3	4	5	6
38	43	37	39	42	41

Εἰς τὴν πρώτην χιλιάδα ρίψεων ἡ «κορώνα» ἐνεφανίσθη 502 φοράς. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{502}{1000}$ λέγεται ***σχετικὴ συχνότης*** τῆς ἐμφανίσεως τῆς κορώνας. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς $\frac{38}{240}$ σχετικὴ συχνότης τῆς ἐμφανίσεως τοῦ 1.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐπανάληψις τοῦ τυχαίου γεγονότος τείνει νὰ ἐξισώσῃ τὰς διαφόρους ἐνδείξεις. Ὁδηγούμεθα ἔτσι εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς «πιθανότητος».

Λέγομεν ὅτι ἡ ἐμφάνισις τῆς κορώνας ἔχει πιθανότητα $\frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$. Ἐπίσης κάθε ἔνδειξις τῆς ἄνω ἕδρας τοῦ κύβου ἔχει πιθανότητα $\frac{1}{6}$.

Διὰ τὴν θεμελίωσιν τῶν στοιχείων τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα κεφάλαια τὴ ρίψιν νομισμάτων, κύβων κλπ. Μὲ τὴν βοήθειαν τούτων θὰ δοθοῦν μερικοὶ βασικοὶ ὁρισμοὶ καὶ θὰ ὑπολογισθοῦν εὔκολα αἱ πιθανότητες, αἱ σχετιζόμεναι μὲ αὐτά.

Ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων σήμερον ἔχει γίνει ἕνας ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων κλάδων τῶν Μαθηματικῶν. Ἡ Φυσική, ἡ Χημεία, ἡ Βιολογία, ἡ Ἰατρική, αἱ Κοινωνικαὶ Ἐπιστῆμαι κ.ἄ. χρησιμοποιοῦν τὴν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων. Φυσικὰ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν πολυπλόκων προβλημάτων τῶν διαφόρων ἐπιστημῶν γίνεται χρῆσις μιᾶς γενικωτέρας θεωρίας πιθανοτήτων μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀνωτέρων Μαθηματικῶν.

§ 208. Πειράματα τύχης : 1ον Ρίπτομεν πρὸς τὰ ἄνω ἕνα νόμισμα, ὥστε νὰ περιστρέφεται κατὰ τὴν διαδρομήν του. Ὅταν τὸ νόμισμα ἠρεμήσῃ ἐπάνω εἰς τὸ ἔδαφος ἢ ὁπουδήποτε ἀλλοῦ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ὄψις τοῦ νομίσματος, τὴν ὁποίαν βλέπομεν, θὰ εἶναι «κορώνα» ἢ «γράμματα».

Εἶναι δυνατὸν τώρα νὰ λέγωμεν ὅτι ἐκτελέσαμεν ἕνα ***πείραμα τύχης***.

Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πειράματος αὐτοῦ εἶναι ἡ ἐμφάνισις εἴτε τῆς «κορώνας» εἴτε τῶν «γραμμάτων».

Κάθε μία ἀπὸ τὰς ἐμφανίσεις αὐτὰς λέγεται ***γεγονὸς*** ἢ ***συμβάν***.

Ἐπειδή, ὁσάκις ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα αὐτό, καθένα ἀπὸ τὰ δύο γεγονότα (κορώνα, γράμματα) ἐμφανίζεται ***κατὰ ἕνα μόνον τρόπον***, τὰ γεγονότα αὐτὰ λέγονται ***στοιχειώδη γεγονότα*** ἢ ***ἁπλᾶ συμβάντα***.

2ον) Ἕνα ἄλλο πείραμα εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μὲ τὸν γνωστὸν εἰς ὅλους μας κύβον (ζάρι).

Ἐπάνω εἰς κάθε ἕδραν τοῦ κύβου ἔχει γραφῆ ἕνας ἀριθμὸς (μὲ κοκκίδας) ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ 6. Ρίπτομεν τὸν κύβον ἐπάνω εἰς ἕνα τραπέζι καὶ παρατηροῦμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἀναγράφεται εἰς τὴν ἐπάνω ἕδραν του. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος θὰ εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ἐπειδή, ὁσάκις ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα αὐτό, καθένα ἀπὸ τὰ ἕξ γεγονότα ἐμφανίζεται ***κατὰ ἕνα μόνον τρόπον***, ἔχομεν εἰς τὸ πείραμα τῆς ρίψεως τοῦ κύβου ἕξ ***στοιχειώδη γεγονότα***.

Ἐὰν εἰς τὸ πείραμα τῆς ρίψεως τοῦ κύβου μεταβληθῇ τὸ ἐνδιαφέρον μας καὶ γίνῃ ὄχι πλέον «ποῖος ἀριθμὸς ἀναγράφεται ἐπὶ τῆς ἐπάνω ἕδρας τοῦ κύβου», ἀλλὰ «ἄρτιος ἀριθμὸς ποὺ ἀναγράφεται ἐπὶ τῆς ἐπάνω ἕδρας τοῦ κύβου», τότε αὐτὸ τὸ γεγονὸς δὲν εἶναι πλέον στοιχειῶδες, διότι δὲν ἐμφανίζεται κατὰ ἕνα μόνον τρόπον, ἀλλὰ κατὰ τρεῖς εἰς τὰς ἐνδείξεις 2, 4, 6. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ***τὸ γεγονὸς εἶναι ἕνα σύνολον στοιχειωδῶν γεγονότων***.

3ον) Ἐὰν ἔχωμεν μίαν «τράπουλαν» καὶ τὸ ἐνδιαφέρον μας εἶναι τὸ γεγονὸς «τὸ χαρτὶ πού θὰ λάβωμεν νὰ εἶναι ἄσσος». θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὐτὸ ἐμφανίζεται κατὰ 4 τρόπους. (Τέσσαρα εἴδη ἄσσων ὑπάρχουν εἰς τὴν τράπουλαν). Τὸ γεγονὸς «τὸ χαρτὶ πού θὰ λάβωμεν νὰ εἶναι ἄσσος» δὲν εἶναι στοιχειῶδες, εἶναι ἕνα σύνολον στοιχειωδῶν γεγονότων.

4ον) Ρίπτομεν δύο ἐγχρώμους κύβους εἰς ἕνα τραπέζι. Ἕνα λευκὸν (Λ.) καὶ ἕνα μαῦρον (Μ). Τὰ στοιχειώδη γεγονότα θὰ εἶναι διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν (α, β), ὅπου α ἀριθμός, ποὺ ἐμφανίζει ὁ (Λ) καὶ β ἀριθμός, ποὺ ἐμφανίζει ὁ (Μ). Τὸ πλῆθος τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων τοῦ πειράματος αὐτοῦ θὰ εἶναι 36 διατεταγμένα ζεύγη. (Καρτεσιανὸν γινόμενον τοῦ συνόλου $E = \{1, 2, 3, 4, 5. 6\}$ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του).

§ **209. Δειγματικὸς χῶρος.** Εἰς τὸ 1ον πείραμα τῆς (§ 208) τὰ στοιχειώδη γεγονότα, τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν λογικῶς νὰ ἐμφανισθοῦν, εἶναι ἡ «κορώνα» καὶ τὰ «γράμματα». Αὐτὰ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον $E = \{$ κορώνα, γράμματα $\}$.

Εἰς τὸ 2ον πείραμα τῆς (§ 208), τῆς ρίψεως τοῦ κύβου, τὰ στοιχειώδη γεγονότα εἶναι προφανῶς στοιχεῖα τοῦ συνόλου $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Κάθε στοιχειῶδες γεγονὸς εἶναι ἕνα στοιχεῖον τοῦ συνόλου E_1.

Εἰς τὸ 3ον πείραμα τῆς (§ 208) τὰ στοιχειώδη γεγονότα εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{x/x$ χαρτὶ τράπουλας $\}$.

Εἰς τὸ 4ον πείραμα τῆς (§ 208) τὰ στοιχειώδη γεγονότα εἶναι τὰ 36 διατεταγμένα ζεύγη τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$.

Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς ἕνα ὁρισμόν.

Τό σύνολον τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων, τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς ἕνα πείραμα τύχης, ὀνομάζεται Δειγματικὸς χῶρος. Κάθε στοιχειῶδες γεγονὸς λέγεται καὶ ***δεῖγμα.***

§ **210. Τὸ «Γεγονὸς» εἰς τὸ πείραμα τύχης.** Εἰς τὸ πείραμα 2 (§ 207)· τῆς ρίψεως τοῦ κύβου, τὸ γεγονὸς Γ = «ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν» εἶναι ἕνωσις τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων «ὁ κύβος παρουσιάζει 2», «ὁ κύβος παρουσιάζει 4», «ὁ κύβος παρουσιάζει 6». Τὸ Γ συντελεῖται μόνον, ὅταν ἕνας ἀπὸ τούς ἀριθμοὺς 2, 4, 6 παρουσιασθῇ. Ἀντιστρόφως, ἂν μᾶς πληροφορήσουν ὅτι ὁ κύβος ἔδειξεν ἄρτιον ἀριθμόν, θὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἕνα ἀπὸ τὰ στοιχειώδη γεγονότα 2, 4, 6 ἐνεφανίσθη εἰς τὸ πείραμα.

Εἰς τὸ 4ον πείραμα (§ 208), τῆς ρίψεως τῶν δύο ἐγχρώμων κύβων, τὸ γεγονὸς Γ = «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 7» εἶναι ἕνωσις τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων (6,1), (5,2), (4,3) (3,4), (2,5), (1,6). Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Ὀνομάζομεν «Γεγονὸς» κάθε σύνολον ἀπὸ στοιχειώδη γεγονότα ἑνός πειράματος ἢ κάθε ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου.

Τὸ «Γεγονὸς» ἐμφανίζεται εἰς ἕνα πείραμα τύχης, ὅταν ἕνα ἀπὸ τὰ στοιχειώδη γεγονότα του ἐμφανισθῇ.

§ **211. Μαθηματικὴ πιθανότης ἑνὸς γεγονότος.** Κατὰ τὴν πρὸς τὰ ἄνω ρίψιν τοῦ νομίσματος τὰ στοιχειώδη γεγονότα εἶναι δύο. Ἡ «κορώνα» (Κ) καὶ τὰ «γράμματα» (Γ). Λέγομεν τότε ὅτι ἡ μαθηματικὴ πιθανότης τοῦ γεγονότος Κ = {κορώνα} ἢ τοῦ γεγονότος Γ = {γράμματα} εἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ γράφομεν συμβολικῶς

$$P(K) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$$

2) Ὅταν ρίπτωμεν τὸ κύβον, στοιχειώδη γεγονότα εἶναι συνολικῶς ἕξ. Λέγομεν πάλιν ὅτι ἡ μαθηματικὴ πιθανότης τοῦ γεγονότος

Γ = { x/x ἀριθμός, ποὺ ἀναγράφεται ἐπὶ τῆς ἄνω ἕδρας τοῦ κύβου } εἶναι $\frac{1}{6}$ καὶ γράφομεν συμβολικῶς

$$P(\Gamma) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

3) Τὸ γεγονὸς $\Gamma = \{x/x$ ἄσσος τῆς τράπουλας$\}$ ἐμφανίζεται, ὅταν ἀπὸ τὴν τράπουλαν τῶν 52 παιγνιοχάρτων, λάβωμεν τοὺς 4 ἄσσους. Τὸ Γ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 στοιχειώδη γεγονότα.

Λέγομεν ὅτι ἡ μαθηματικὴ πιθανότης τοῦ γεγονότος Γ εἶναι $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ καὶ γράφομεν συμβολικῶς

$$P\,(\text{ἄσσος}) - \frac{4}{52} = \frac{1}{13}\,.$$

4) Κατὰ τὴν ρίψιν τῶν δύο κύβων τὸ γεγονὸς «τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων νὰ εἶναι 7», δηλαδὴ

$$\Gamma = \{(6,1),\ (5,2),\ (4,3),\ (3,4),\ (2,5),\ (1,6)\}$$

ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 στοιχειώδη γεγονότα. Ἡ μαθηματικὴ πιθανότης τοῦ Γ θὰ εἶναι τότε

$$P\,(\Gamma) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\,.$$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα εἶναι δυνατὸν νὰ καταλήξωμεν εἰς ἕνα συμπέρασμα.

Εἰς ἕνα πείραμα τύχης ἕνα γεγονὸς Γ, διὰ τὸ ὁποῖον ἐνδιαφερόμεθα, εἶναι ἕνα σύνολον (πεπερασμένον) στοιχειωδῶν γεγονότων. Τὰ στοιχειώδη γεγονότα τοῦ Γ λέγονται *εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις.*

Εἰς ἕνα πείραμα τύχης ὅμως ἐμφανίζονται καὶ ἄλλα στοιχειώδη γεγονότα, ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ γεγονὸς Γ. Τὸ πλῆθος ὅλων τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων εἰς ἕνα πείραμα τύχης ὀνομάζεται *δυναταὶ περιπτώσεις.*

Μαθηματικὴ λοιπὸν πιθανότης ἑνὸς γεγονότος Γ ὀνομάζεται ὁ λόγος τοῦ πλήθους τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ Γ πρὸς τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων.

Ἡ μαθηματικὴ πιθανότης γράφεται συμβολικῶς P (Γ)

$$(1) \qquad P\,(\Gamma) = \frac{\text{Πλῆθος εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ } \Gamma}{\text{Πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων}}$$

Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ τύπου (1).

1) Ὅταν τὸ πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι 0, τότε

$$P(\Gamma) = 0$$

2) Ὅταν ὅλαι αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι καὶ δυναταί, τότε $P(\Gamma) = 1$.

Συνεπῶς $0 < P(\Gamma) \leq 1$.

3) Ὅταν τὸ πλῆθος τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων ἑνὸς πειράματος τύχης ἰσοῦται μὲ K, τότε ἡ μαθηματικὴ πιθανότης κάθε στοιχειώδους γεγονὸτος ἰσοῦται μέ $\frac{1}{K}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

408) Εἰς ἕνα κουτὶ ὑπάρχουν 10 λευκοὶ καὶ 8 μαῦροι βῶλοι, ἐὰν πάρωμεν ἕνα ἐξ αὐτῶν, ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι: 1ον) μαῦρος; 2ον) λευκός.

409) Αἱ 4 ἕδράι ἑνὸς κύβου ἔχουν χρῶμα λευκὸν καὶ αἱ 2 μαῦρον. Ποία ἡ πιθανότης κατὰ τὴν ρίψιν τοῦ κύβου ἡ ἐπάνω ἕδρα νὰ εἶναι: 1ον λευκή; 2ον) μαύρη;

410) Κατὰ τὴν ρίψιν τοῦ λευκοῦ (Λ) καὶ τοῦ μαύρου (Μ) κύβου, νὰ εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες τῶν κάτωθι γεγονότων:

α) Γ_1 = «ὁ λευκὸς καὶ ὁ μαῦρος παρουσιάζουν τὴν αὐτὴν ἔνδειξιν».

β) $\Gamma_2 = $ « $\Lambda + M = 8$ » δ) $\Gamma_3 = $ « $\Lambda + M < 5$ »

γ) $\Gamma_4 = $ « $\Lambda + M > 9$ » ε) $\Gamma_5 = $ « $M \geqslant \Lambda + 4$ »

411) Κατὰ τὴν ρίψιν τοῦ κύβου, ποία ἡ πιθανότης νὰ παρουσιασθῇ 1ον) ἄρτιος ἀριθμός; 2ον ἀριθμὸς > 2;

412) Ποία ἡ πιθανότης, ὅταν ριφθοῦν δύο νομίσματα νὰ ἐμφανίσουν καὶ τά δύο γράμματα; Νά ἐμφανίσῃ τὸ ἕνα κορώνα καὶ τὸ ἄλλο γράμματα;

413) Ἕνα παιδὶ ἔχει εἰς τὴν τσέπην του τὰ ἑξῆς κέρματα: Ἕνα δεκάλεπτον (Δ), ἕνα εἰκοσάλεπτον (Ε), ἕνα πεντηκοντάλεπτον (Π) καὶ ἕνα τάλληρον (Τ). Τὸ παιδὶ ἀνασύρει δύο κέρματα τὸ ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου. Νὰ ἀναγράψετε τὸν δειγματικὸν χῶρον τοῦ πειράματος.

414) Εἰς ἕνα κουτὶ περιέχονται 5 σφαῖραι, ἐκ τῶν ὁποίων 3 λευκαὶ καὶ 2 μαῦραι. Τὸ πείραμα τύχης εἶναι τὸ τράβηγμα 2 σφαιρῶν. Νὰ ἀναγράψετε τὸν δειγματικὸν χῶρον.

415) Ἐκ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 — 30 λαμβάνομεν ἕνα τυχαίως. Ποία ἡ πιθανότης: 1ον) ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 5; 2ον) ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ 4;

§ 212. Πρόσθεσις τῶν πιθανοτήτων διὰ γεγονότα ξένα με-

ταξύ των : α) Δύο γεγονότα $Γ_1$ καὶ $Γ_2$ λέγονται *ξένα* μεταξύ των, ὅταν δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχειώδη γεγονότα.

Ἂς ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ πείραμα τῆς ρίψεως τῶν δύο ἐγχρώμων κύβων, τοῦ λευκοῦ (Λ) καὶ τοῦ μαύρου (Μ). Ὁ δειγματικὸς χῶρος, ὅπως εἶναι γνωστόν, θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ 36 διατεταγμένα ζεύγη.

Τὸ γεγονὸς $Γ_1$ = « Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τοῦ λευκοῦ καὶ τοῦ μαύρου κύβου ἰσοῦται μὲ 5 » ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 στοιχειώδη γεγονότα ($Λ + Μ = 1 + 4$, $Λ + Μ = 2 + 3$, $Λ + Μ = 3 + 2$, $Λ + Μ = 4 + 1$).

Τὸ γεγονὸς $Γ_2$ = « Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τοῦ λευκοῦ καὶ τοῦ μαύρου κύβου ἰσοῦται μὲ 8 » ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 στοιχειώδη γεγονότα :

$$(Λ + Μ = 2 + 6. \quad Λ + Μ = 3 + 5. \quad Λ + Μ = 4 + 4,$$
$$Λ + Μ = 5 + 3, \quad Λ + Μ = 6 + 2).$$

Τὰ γεγονότα $Γ_1$ καὶ $Γ_2$ εἶναι ξένα μεταξύ των, διότι προφανῶς δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχειώδη γεγονότα.

Ἐὰν τώρα ζητήσωμεν τὴν μαθηματικὴν πιθανότητα τοῦ γεγονότης Γ = « Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων νὰ εἶναι εἴτε 5 εἴτε 8 », τότε τὸ Γ ἀποτελεῖται ἀπὸ $4 + 5 = 9$ στοιχειώδη γεγονότα καὶ ἡ μαθηματικὴ πιθανότης του εἶναι :

$$P(Γ) = P(Γ_1) + P(Γ_2) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Εἶναι δυνατὸν κατόπιν τῶν ἀνωτέρω νὰ γενικεύσωμεν.

Ἐὰν $Γ = Γ_1 \cup Γ_2 \cup \ldots \cup Γ_κ$, ὅπου $Γ_1, \; Γ_2, \ldots, Γ_κ$, εἶναι γεγονότα ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο, τότε

$$P(Γ) = P(Γ_1) + P(Γ_2) + \ldots + P(Γ_κ).$$

Δηλαδή :

Ἕνα γεγονὸς Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνωσις ἄλλων γεγονότων ξένων ἀνὰ δύο, ἔχει μαθηματικὴν πιθανότητα ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν γεγονότων τῆς ἑνώσεως.

β) Εἰς ἕνα πείραμα τύχης δύο γεγονότα, ξένα μεταξύ των, θὰ λέγωνται ***συμπληρωματικά***, ἐὰν ἡ ἕνωσίς των δίδῃ τὸ σύνολον τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων, τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν λογικῶς νὰ ἐμφανισθοῦν.

Ἐὰν Γ εἶναι ἕνα γεγονός, τὸ συμπληρωματικόν του τό παριστάνομεν μὲ Γ′.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ Γ εἶναι

$P(\Gamma) = p$ (1) καὶ ἡ πιθανότης τοῦ Γ′ $P(\Gamma') = p'$ (2),

ἐπειδὴ τὰ Γ καὶ Γ′ εἶναι ξένα μεταξύ των, θὰ ἔχωμεν

$$P(\Gamma) + P(\Gamma') = p + p' \quad (3)$$

Ἀλλὰ $p + p' = 1$, διότι ὅλαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι καὶ εὐνοϊκαί, ἄρα ἡ (3) γράφεται

$$P(\Gamma) + P(\Gamma') = 1 \Longrightarrow p + P(\Gamma') = 1 \Longrightarrow P(\Gamma') = 1 - p \quad (4)$$

Παράδειγμα 1ον). Ποία ἡ μαθηματικὴ πιθανότης νὰ μὴ παρουσιασθῇ τὸ 1, ὅταν ρίπτωμεν ἕνα κύβον.

Τὸ γεγονὸς Γ = «Νὰ παρουσιασθῇ τὸ 1» ἔχει ὡς συμπληρωματικόν του τὸ γεγονὸς Γ′ = «Νὰ μὴ παρουσιασθῇ τὸ 1». Ἐπειδὴ

$$P(\Gamma) = \frac{1}{6} \qquad P(\Gamma') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Παράδειγμα 2ον). Ἐὰν ρίψωμεν δύο κύβους, ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ ἕνας τουλάχιστον ἄσσος.

Ἔστω Γ τὸ γεγονός, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν πιθανότητα, τότε τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ Γ εἶναι τὸ Γ′ = «Οὐδεὶς ἄσσος ἐμφανίζεται». Εὑρίσκομεν εὐκολώτερα τὴν πιθανότητα τοῦ Γ′. Τὸ Γ′ ἐμφανίζεται, ὅταν ἐμφανισθῇ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος τοῦ $\{2, 3, 4, 5, 6\} \times \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Συνεπῶς τὸ πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ Γ′ εἶναι 25. Τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος εἶναι 36. Συνεπῶς $P(\Gamma') = \frac{25}{36}$

$$P(\Gamma) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

416) Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα τῆς ρίψεως τῶν δύο ἐγχρώμων κύβων τοῦ λευκοῦ (Λ) καὶ τοῦ μαύρου (Μ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ μαθηματικὴ πιθανότης

1ον) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεών τους νὰ εἶναι εἴτε 6 εἴτε 9.

2ον) Οἱ δύο κύβοι νὰ ἐμφανίσουν μόνον τοὺς ἀριθμοὺς 2 ἢ 3 ἢ ἀμφοτέρους.

3ον) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων νὰ μὴ εἶναι 11.

4ον) Νὰ μὴ ἐμφανισθῇ οὔτε τὸ 3 οὔτε τὸ 4.

5ον) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων νὰ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

417) Ρίπτομεν τρία νομίσματα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πιθανότης νὰ παρουσιασθῇ μία τουλάχιστον κορώνα.

418) Ἀπὸ τράπουλαν τῶν 52 χαρτιῶν λαμβάνομεν ἕνα χαρτί. Τὸ γεγονὸς Α = «Τὸ χαρτὶ εἶναι ἄσσος» καὶ τὸ γεγονὸς Β = «Τὸ χαρτὶ εἶναι σπαθὶ» εἶναι ξένα μεταξύ των;

419) Ἕνας ἀκέραιος λαμβάνεται τυχαίως ἐκ τῶν 20 πρώτων ἀκεραίων. Ποία ἡ πιθανότης ὅτι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 6 εἴτε διὰ 8:

420) Ρίπτομεν τοὺς δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴ παρουσιάσουν καὶ οἱ δύο τὴν αὐτὴν ἔνδειξιν;

§ **213. Ἀνεξάρτητα πειράματα. Ἀνεξάρτητα γεγονότα.** Ρίπτομεν διαδοχικῶς πρὸς τὰ ἄνω δύο νομίσματα. Ἐκτελοῦμεν δηλαδὴ δύο φορὰς τὸ πείραμα τῆς ρίψεως τοῦ νομίσματος. Λογικῶς οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἐξασκεῖ τὸ πρῶτον πείραμα (1η ρίψις) ἐπὶ τοῦ δευτέρου πειράματος (2α ρίψις) καὶ ἀντιστρόφως. Δηλαδὴ τὰ δυνατὰ στοιχειώδη γεγονότα, τὰ ὁποῖα ἐμφανίζει τὸ πρῶτον πείραμα, δὲν μεταβάλλονται μὲ κανέναν τρόπον ἀπὸ τὰ δυνατὰ στοιχειώδη γεγονότα τοῦ δευτέρου πειράματος.

Εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα καταλήγομεν καὶ ὅταν ἐκτελοῦμεν τὴν ρίψιν τῶν δύο ἐγχρώμων κύβων. Αἱ ἐνδείξεις τοῦ (Λ) εἶναι ἀνεξάρτητοι τῶν ἐνδείξεων τοῦ (Μ).

Δύο ἢ περισσότερα *πειράματα* λέγονται *ἀνεξάρτητα*, ὅταν ἡ ἐκτέλεσίς των δὲν ἐπιφέρῃ οὐδεμίαν μεταβολὴν εἰς τὰ στοιχειώδη γεγονότα αὐτῶν.

Δύο ἢ περισσότερα *γεγονότα* λέγονται *ἀνεξάρτητα*, ὅταν ἀνήκουν εἰς πειράματα ἀνεξάρτητα.

§ **214. Σύνθετα πειράματα. Σύνθετα γεγονότα.** Ἐκτελοῦμεν τὰ ἑξῆς πειράματα. Ρίπτομεν ἕνα κύβον καὶ ἕνα νόμισμα. Τὰ στοιχειώδη γεγονότα τῶν δύο ἀνεξαρτήτων αὐτῶν πειραμάτων εἶναι:

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \; E_2 = \{\text{κορῶνα}, \; \text{γράμματα}\} = \{K, \Gamma\}.$$

Ἐὰν τὸ ἐνδιαφέρον μας στραφῇ τώρα εἰς τὸ *ζεῦγος* τῶν ἐμφανιζομένων στοιχειωδῶν γεγονότων, τότε λέγομεν πὼς ἐκτελοῦμεν ἕνα *σύνθετον πείραμα.*

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύνθετον πείραμα τὸ γεγονὸς Γ = «ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν καὶ τὸ νόμισμα κορῶνα» λέγεται *σύνθετον γεγονὸς* ἢ *γινόμενον τῶν δύο γεγονότων.*

$\Gamma_1 = \{$ ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμόν $\}$,

$\Gamma_2 = \{$ τὸ νόμισμα παρουσιάζει κορώνα $\}$

καὶ γράφομεν συμβολικῶς $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Πρέπει ἰδιαιτέρως νὰ προσέξωμεν ὅτι τὸ σύνθετον γεγονὸς Γ παρουσιάζεται, ὅταν ἡ ρίψις τοὺ κύβου ἐμφανίσῃ τὸ $Γ_1$ καὶ ἡ ρίψις τοῦ νομίσματος τὸ $Γ_2$.

§ **215. Ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ ἀνεξάρτητα γεγονότα.** Ρίπτομεν τὸν λευκὸν (Λ) καὶ τὸν μαῦρον (Μ) κύβον. Ποία ἡ πιθανότης νὰ δείξῃ ὁ (Λ) : 1, 2, 3 καὶ ὁ (Μ) : 1, 2, 3, 4, 5;

Τὸ γεγονὸς $Γ_1$ = « ὁ (Λ) παρουσιάζει 1, 2, 3 » καὶ τὸ γεγονὸς $Γ_2$ = « ὁ (Μ) παρουσιάζει 1, 2, 3, 4, 5 » εἶναι ἀνεξάρτητα. Ἡ $P(Γ_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ καὶ ἡ $P(Γ_2) = \frac{5}{6}$.

Τὸ γεγονὸς Γ = « ὁ (Λ) $\leqq 3$ καὶ ὁ (Μ) $\leqq 5$ » πραγματοποιεῖται, ὅταν ἐμφανισθῇ ἕνα ἀπὸ τὰ διατεταγμένα ζεύγη τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καὶ εἶναι

$$P(Γ) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι (καὶ σημειώνομεν συμβολικῶς) :

$$P(Γ) = P(Γ_1 \times Γ_2) = P(Γ_1) \cdot P(Γ_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{22}.$$

Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς ἕνα συμπέρασμα γενικευμένον ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος.

Ἡ μαθηματικὴ πιθανότης ἑνὸς συνθέτου γεγονότος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν πιθανοτήτων τῶν ἀνεξαρτήτων γεγονότων, ἐκ τῶν ὁποίων συντίθεται τὸ σύνθετον γεγονός.

§ **216. Τομὴ γεγονότων.** Ρίπτομεν ἕνα κύβον. Τὸ γεγονὸς Α = «ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν» καὶ τὸ γεγονὸς Β = «ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 3» εἶναι δύο γεγονότα πού ἀναφέρονται εἰς τὸ αὐτὸ πείραμα τύχης καὶ δὲν εἶναι ξένα μεταξύ των. Ἐὰν ὁ κύβος μᾶς παρουσιάσῃ 4 ἢ 6, ἔχομεν μίαν σύγχρονον ἐμφάνισιν τῶν γεγονότων Α καὶ Β καὶ αὐτὸ λέγεται ***τομὴ*** τῶν γεγονότων Α καὶ Β καὶ τὸ παριστάνομεν μὲ $A \cap B$. Ἡ τομὴ τῶν δύο γεγονότων Α καὶ Β εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων, τὰ ὁποῖα εἶναι κοινὰ τῶν Α καὶ Β, δηλ. $\{4, 6\}$.

$$Ἡ\ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Γενικῶς, ὅταν ἐκτελοῦμεν ἕνα πείραμα τύχης καὶ ἔχωμεν δύο γεγονότα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὸ πείραμα, θὰ ὀνομάζωμεν ***τομὴν*** τῶν γεγονότων Α καὶ Β ($A \cap B$) τὸ γεγονός, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ κοινὰ στοιχειώδη γεγονότα τῶν Α καὶ Β.

§ **217. Πιθανότης ὑπὸ συνθήκην.** Ἐπὶ τοῦ πειράματος τῆς (§ 216) εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα : Ἐὰν μᾶς πληροφορήσουν ὅτι ὁ κύβος παρουσίασε ἄρτιον ἀριθμόν, ποία ἡ πιθανότης ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 ; Δηλαδὴ μᾶς πληροφοροῦν ὅτι ἐνεφανίσθη τὸ γεγονὸς Α καὶ κατόπιν τούτου ζητοῦμεν τὴν πιθανότητα τοῦ Β. Τὰ Α καὶ Β δὲν εἶναι ξένα, τὸ γεγονὸς Β ἔχει δύο εὐνοϊκὰς περιπτώσεις (4, 6) μέσα εἰς τὸ σύνολον τῶν στοιχειωδῶν γεγονότων (2, 4, 6) τοῦ Α. Ἐφ' ὅσον ἐξετάζομεν τὴν ἐμφάνισιν τοῦ Β, μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἔχει ἤδη ἐμφανισθῇ τὸ Α, ***λέγομεν ὅτι ἐξετάζομεν τὸ γεγονὸς Β ὑπὸ τὴν συνθήκην Α καὶ τὸ παριστάνομεν Β/Α.*** Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι δυνατὸν νά δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Μαθηματικὴ πιθανότης τοῦ γεγονότος Β ὑπὸ τὴν συνθήκην Α εἰς ἕνα πείραμα τύχης λέγεται ὁ λόγος τοῦ πλήθους ρ τῶν κοινῶν διὰ τὰ Α καὶ Β εὐνοϊκῶν περιπτώσεων πρὸς τὸ πλῆθος α τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ Α. Συμβολισμὸς P(B/A).

$$\boxed{P(B/A) = \frac{\rho}{\alpha}} \qquad (1)$$

Εἰς τὸ πρόβλημά μας ἡ $P(B/A) = \dfrac{2}{3}$.

Τὴν P(B/A) εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι δυνατὸν νὰ τὴν εὕρωμεν ὡς ἑξῆς :

$$P(B/A) = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$P(B/A) = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{\rho}{k} : \frac{\alpha}{k} \Longrightarrow$$

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad (2)$$

ὅπου $\rho =$ πλῆθος τῶν κοινῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τῶν Α καὶ

B, k = πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν στοιχειωδῶν γεγονότων τοῦ πειράματος, α = πλῆθος εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ Α:

Παρατηρήσεις :

I) Ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A). \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3) ἐκφράζει τὸ ἑξῆς :

Ἡ πιθανότης τῆς τομῆς τῶν γεγονότων Α καὶ Β ἰσοῦται μὲ τὴν πιθανότητα τοῦ Β, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἔχει ἐμφανισθῇ τὸ Α.

II) Ἐὰν ἐμφανισθῇ πρῶτον τὸ γεγονός Β, τότε τὸ γεγονὸς Α ἔχει μίαν πιθανότητα ὑπὸ συνθήκην Β, τὴν P (A/B), ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου (3) ἔχομεν $P(B \cap A) = P(B) \,.\, P(A/B) \qquad (4)$

Εἶναι γνωστὸν ὅμως ὅτι $A \cap B = B \cap A$, ὁπότε

$$P(A \cap B) = P(B \cap A), \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν (3), (4), (5) ἔχομεν :

$$P(A)\, P(B/A) = P(B)\, P(A/B). \qquad (6)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

421) Ρίπτομεν τοὺς δύο ἐγχρώμους κύβους τὸν λευκὸν (Λ) καὶ τὸν μαῦρον (Μ). Ποία ἡ πιθανότης νὰ παρουσιάσουν ὁ $\Lambda \leqslant 3$ καὶ $M \geqslant 5$;

422) Ποία ἡ πιθανότης ὁ λευκὸς (Λ) νὰ παρουσιάσῃ 1 ὅταν μᾶς πληροφορήσουν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τοῦ λευκοῦ καὶ τοῦ μαύρου κύβου εἶναι < 4 ;

423) Ρίπτομεν 5 νομίσματα, ποία ἡ πιθανότης νὰ παρουσιασθῇ μία τουλάχιστον κορώνα ;

424) Ρίπτομεν τοὺς δύο ἐγχρώμους κύβους, ἐὰν ὁ λευκὸς ἐμφανίσῃ 5, ποία ἡ πιθανότης ὁ μαῦρος νὰ ἐμφανίσῃ ἄρτιον ἀριθμόν ;

425) Ἀπὸ μίαν τράπουλαν 52 χαρτιῶν ἐκλέγομεν κατὰ τύχην ἕνα. Ἐὰν τὸ ἐκλεγεν χαρτὶ εἶναι ἄσσος, ποία κατόπιν τούτου ἡ πιθανότης νὰ εἶναι «μπαστούνι» ;

426) Ρίπτομεν τοὺς δύο ἐγχρώμους κύβους (τὸν λευκὸν καὶ τὸν μαῦρον). Νὰ εὑρεθῇ ἡ πιθανότης :

1ον) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν κύβων νὰ εἶναι > 10, ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ μαῦρος παρουσίασε 5.

2ον) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν κύβων νὰ εἶναι < 4 ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ μαῦρος κύβος ἔδειξεν 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΒ'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

§ **218. Γενικότητες.** Κατὰ τὴν ἔρευναν, ἡ ὁποία ἔγινε τὸ 1963, εὑρέθη ὅτι ἐκ τῶν ἀφιχθέντων εἰς τὴν Ἑλλάδα ταξιδιωτῶν :

τὸ	37,7 %	ἔφθασε	ἀεροπορικῶς
τὸ	18,2 %	»	σιδηροδρομικῶς
τὸ	29,7 %	»	ἀτμοπλοϊκῶς
τὸ	14,4 %	»	ὁδικῶς.

Ὁμοίως κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος εὑρέθη ὅτι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἀνεχώρησαν ἀπὸ τὴν Ἑλλάδα :

τὸ	21 %	ἀνεχώρησε	ἀεροπορικῶς
τὸ	40,5 %	»	σιδηροδρομικῶς
τὸ	24,7 %	»	ἀτμοπλοϊκῶς
τὸ	13,8 %	»	ὁδικῶς

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων αὐτῶν εἶναι δυνατὸν νὰ συμπεράνωμεν ποῖαι ὑπῆρξαν αἱ προτιμήσεις τῶν συγκοινωνιακῶν μέσων ἀπὸ τοὺς ταξιδιώτας.

Ἀπὸ ἄλλας ἀναλόγους ἐρεύνας εἶναι δυνατὸν νὰ λαμβάνωμεν χρησίμους πληροφορίας διὰ διαφόρους σκοποὺς (οἰκονομικούς, κοινωνικοὺς κλπ.). Ἔρευναι, ὅπως αἱ ἀνωτέρω, ὀνομάζονται ***Στατιστικαὶ ἔρευναι.*** Ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μὲ τὰς Στατιστικὰς ἐρεύνας, λέγεται ***Στατιστική.***

Ὁ Μαθηματικὸς κλάδος, ὁ ὁποῖος συγκεντρώνει, ταξινομεῖ καὶ παρουσιάζει μὲ καταλλήλους μορφὰς ἀριθμητικὰ δεδομένα πρὸς χρησιμοποίησιν διὰ διαφόρους σκοποὺς λέγεται Περιγραφικὴ Στατιστική.

Τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα, τὰ ὁποῖα συγκεντρώνει καὶ μελετᾶ ἡ Στατιστική, λέγονται ***Στατιστικὰ στοιχεῖα*** καὶ ἀναφέρονται εἰς ἕνα σύνολον ἐμψύχων ἢ ἀψύχων, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν Στατιστικὴν λέγονται ***Στατιστικὸς πληθυσμὸς*** ἢ ἁπλῶς ***πληθυσμός.***

Π.χ. Τὸ σύνολον τῶν ἐπιβατικῶν πλοίων ἑνὸς Κράτους εἶναι ἕνας πληθυσμὸς καί, ἐὰν ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὴν χωρητικότητά των, τὰ δεδομένα λαμβάνονται διὰ ***μετρήσεως*** τῆς χωρητικότητός των. Ἂν ὅμως ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὸ πλῆθος τῶν δρομολογίων των, τὰ στατιστικὰ δεδομένα εὑρίσκονται ***δι' ἀπαριθμήσεως*** αὐτῶν.

Ἄρα τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα εἶναι ἀποτελέσματα μετρήσεων ἢ ἀπαριθμήσεων μιᾶς ἰδιότητος ἑνὸς πληθυσμοῦ.

§ **219. Ποιοτικαὶ καὶ ποσοτικαὶ ἰδιότητες τῶν στοιχείων ἑνὸς πληθυσμοῦ.** Τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα ἀναφέρονται εἰς μίαν ἰδιότητα τῶν στοιχείων ἑνὸς πληθυσμοῦ. Αἱ ἰδιότητες αὐταὶ εἶναι ἢ ποσοτικαὶ ἢ ποιοτικαί.

α) ***Ποσοτικαὶ ἰδιότητες :*** Εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθοῦν μὲ μίαν σταθερὰν μονάδα καὶ νὰ λάβουν διαφόρους ἀριθμητικὰς τιμάς, π.χ. ἡ χωρητικότης τῶν πλοίων, ἡ ἡλικία, τὸ βάρος, ἡ πυκνότης πληθυσμοῦ εἶναι ποσοτικαὶ ἰδιότητες.

β) ***Ποιοτικαὶ ἰδιότητες :*** Εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθοῦν: Π.χ. οἱ ἀθληταὶ μιᾶς πόλεως μὲ χαρακτηριστικά : ποδοσφαιρισταί, δρομεῖς, ἅλται κτλ. Τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὰ εἴδη τῶν ἀθλητῶν εἶναι ἀπαριθμήσεις τῶν ἀθλητῶν τοῦ ἰδίου ἀγωνίσματος. Ἄλλο παράδειγμα ποιοτικῶν ἰδιοτήτων εἶναι ἡ διάκρισις τοῦ φύλου μὲ χαρακτηριστικά : ἄρρεν - θῆλυ.

§ **220. Συνεχεῖς καὶ ἀσυνεχεῖς μεταβληταί.** Ἐπειδὴ αἱ ποσοτικαὶ ἰδιότητες εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθοῦν καὶ νὰ λάβουν διαφόρους ἀριθμητικὰς τιμάς, ὀνομάζονται ***μεταβληταὶ ποσότητες***, ἢ ἁπλῶς ***μεταβληταί***.

Ἐὰν μία μεταβλητὴ εἶναι δυνατὸν νὰ λάβῃ ὅλας τὰς δυνατὰς τιμάς, ἀπὸ μιᾶς ἐλαχίστης μέχρι μιᾶς μεγίστης, ἡ ποσότης αὐτὴ λέγεται ***συνεχής***. Π.χ. ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας, δὲν αὐξομειώνεται κατὰ ἀκεραίους βαθμούς, ἀλλὰ ἀπὸ μιᾶς ἀκεραίας τιμῆς εἰς ἄλλην διέρχεται συνεχῶς καὶ ἀπὸ ἐνδιαμέσους τιμάς.

Ἐὰν ὅμως μία μεταβλητὴ λαμβάνῃ μόνον ἀκεραίας τιμάς, τότε λέγεται ***ἀσυνεχής***. Π.χ. τὸ πλῆθος τῶν οἰκιῶν μιᾶς πόλεως, τὸ πλῆθος τῶν στρατιωτῶν ἑνὸς λόχου, τὸ πλῆθος τῶν παραγομένων αὐτοκινήτων ἀπὸ ἕνα ἐργοστάσιον.

§ **221. Συλλογὴ στατιστικῶν στοιχείων.** Ὁ τρόπος συλλογῆς τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀκολουθεῖ ὡρισμένους κανόνας καὶ μεθόδους. Εἰδικὴ Κρατικὴ ὑπηρεσία ἐνεργεῖ τὰς συγκεντρώσεις τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὥστε αὐτὰ νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἐπωφελῶς.

Οἱ τρόποι συλλογῆς τῶν στατιστικῶν δεδομένων εἶναι :

α) ***Ἡ ἀπογραφή.*** Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν γίνεται συγκέντρωσις στοιχείων ἐπὶ ἑνὸς πληθησμοῦ, ὁ ὁποῖος μᾶς ἐνδιαφέρει : Π.χ. ἀπογραφὴ γεωργίας, κτηνοτροφίας, ναυτιλίας, πληθυσμοῦ μιᾶς χώρας, κλπ.

β) ***Ἡ συνεχὴς ἐγγραφή.*** Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν γίνεται ἐγγραφὴ διαφόρων στοιχείων, τὰ ὁποῖα μᾶς ἐνδιαφέρουν, καὶ εἰς εἰδικὰ δελτία. Εἰς τὸ τέλος ὡρισμένης χρονικῆς περιόδου γίνεται συγκέντρωσις τῶν δελτίων καὶ ἐκ τῆς μελέτης των ἐξάγονται ὡρισμένα συμπεράσματα. Π.χ. αἱ ἐγγραφαὶ εἰς ληξιαρχεῖα, νοσοκομεῖα, σχολεῖα, τελωνεῖα, κλπ.

γ) ***Ἡ δειγματοληψία.*** Ἕνα ἐργοστάσιον κατασκευῆς διακοπτῶν παρήγαγε εἰς μίαν ἡμέραν 20.000 διακόπτας.

Ἐπειδὴ εἶναι δύσκολος ὁ ἔλεγχος καλῆς λειτουργίας τῶν 20.000 διακοπτῶν, λαμβάνομεν τυχαίως 300 ἐξ αὐτῶν (δεῖγμα) καὶ ἐξετάζομεν αὐτούς.

Ἔστω ὅτι ἐκ τῶν 300 αὐτῶν διακοπτῶν εὑρέθησαν 6 ἐλαττωματικοί. Θὰ ζητήσωμεν τώρα νὰ ἐξαγάγωμεν συμπέρασμα διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐλαττωματικῶν διακοπτῶν ἐπὶ ὁλοκλήρου τοῦ πληθυσμοῦ τῶν 20.000 διακοπτῶν. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ γίνεται ἡ ἀπογραφὴ τῶν στοιχείων ἑνὸς ***δείγματος***, δηλ. ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ πληθυσμοῦ. Μὲ ἀνάλυσιν τῶν στοιχείων τοῦ «δείγματος» ἐξάγονται συμπεράσματα δι᾿ ὁλόκληρον τὸν πληθυσμόν.

δ) ***Ἡ ἔρευνα.*** Κατὰ τὸ ἔτος 1960 μία ἔρευνα ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος, ἡλικίας ἄνω τῶν 10 ἐτῶν, ἔδειξεν ὅτι

οἱ 2 % εἶναι διπλωματοῦχοι ἀνωτάτων σχολῶν
οἱ 8 % » ἀπόφοιτοι γυμνασίου
οἱ 42 % » ἀπόφοιτοι δημοτικοῦ σχολείου
οἱ 30 % δὲν ἐτελείωσαν τὸ δημοτικόν, ἀλλὰ γνωρίζουν γραφὴν καὶ ἀνάγνωσιν καὶ
οἱ 18 % εἶναι ἀγράμματοι.

Αἱ ἔρευναι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν συγκέντρωσιν στοιχείων εἰς εἰδικὰ θέματα. Ἄλλαι ἔρευναι π. χ. γίνονται διὰ τὴν παιδικὴν ἐγκληματικότητα, διὰ τὴν μετανάστευσιν κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

427) Ποῖαι ἐκ τῶν κατωτέρω ἰδιοτήτων εἶναι ποσοτικαὶ καὶ ποῖαι ποιοτικαί ;

α) ἀριθμὸς γεννήσεων, β) ταχύτης αὐτοκινήτου, γ) αἴτια ἀσθενειῶν, δ) ἐμβαδὸν εὐθυγράμμου σχήματος, ε) ποσοστὸν θανάτων ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, στ) πυκνότης πληθυσμοῦ, ζ) ἡμερομίσθιον, η) ὄγκος κυλίνδρου, θ) ἀσφάλισις αὐτοκινήτων.

428) Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν νὰ εὑρεθοῦν μερικὰ ἀπὸ τὰ χαρακτηριστικὰ ἑκάστης ποιοτικῆς ἰδιότητος. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπίσης καὶ μερικαὶ ἀπὸ τὰς δυνατὰς τιμὰς ἑκάστης ποσοτικῆς ἰδιότητος.

429) Νὰ εὑρεθοῦν διάφορα παραδείγματα πληθυσμῶν μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν στοιχείων των (ποσοτικαὶ - ποιοτικαί): Κατὰ ποῖον τρόπον θὰ συγκεντρωθοῦν τὰ στατιστικὰ δεδομένα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὰς κατωτέρω περιπτώσεις : α) ἀριθμὸς γεννήσεων, β) Κίνησις ὀχημάτων ἐπὶ τῆς Ἐθνικῆς ὁδοῦ, γ) Ἐπαγγέλματα

§ **222. Ἐπεξεργασία καὶ παρουσίασις τῶν στατιστικῶν δεδομένων.** Τὸ πλῆθος τῶν στατιστικῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα συλλέγονται μὲ τούς τρόπους, τοὺς ὁποίους ἴδομεν εἰς § 221, πρέπει νὰ ταξινομηθοῦν καὶ νὰ συμπυκνωθοῦν καταλλήλως διὰ νὰ μᾶς διευκολύνουν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν συμπερασμάτων. Μία μέθοδος παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων γίνεται διὰ πινάκων.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι γίνεται μία ἔρευνα διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰατρῶν κατ' εἰδικότητας, εἰς ἕνα δεῖγμα 300 ἰατρῶν. Εἰς μίαν στήλην γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰατρῶν κατ' εἰδικότητα καὶ παραπλεύρως τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰατρῶν τῆς ἀντιστοίχου εἰδικότητος,

ΠΙΝΑΞ 1.
Ἰατροὶ κατ' εἰδικότητας

Εἰδικότης	Ἀριθμὸς ἰατρῶν
Γενικὴ Ἰατρικὴ	152
Παθολογία	62
Μαιευτική	17
Χειρουργικὴ	20
Καρδιολογία	8
Ὀρθοπεδικὴ	4
Παιδιατρικὴ	15
Φυματιολογία	13
Ὀφθαλμολογία	4
Μικροβιολογία	2
Ἀκτινολογία	3
Σύνολον	300

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ μᾶς δίδει μίαν σαφῆ εἰκόνα τῆς κατανομῆς τῶν ἰατρῶν κατ' εἰδικότητας. Ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ πινάκων εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία ἔχει μόνον δύο στήλας. Ἡ πρώτη στήλη εἶναι τῶν χαρακτηριστικῶν καὶ ἡ δευτέρα τῶν στατιστικῶν στοιχείων.

Ἡ ταξινόμησις τῶν στατιστικῶν στοιχείων εἰς ὁμάδας καὶ ἡ ἀπαρίθμησις ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς κάθε ὁμάδα λέγεται ***κατανομὴ τοῦ πληθυσμοῦ κατ' ἀπολύτους συχνότητας*** ἢ κατανομὴ ***συχνοτήτων***.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔχομεν ἀπόλυτον συχνότητα, 20 διὰ τοὺς χειρούργους, ἀπόλυτον συχνότητα 3 διὰ τοὺς ἀκτινολόγους κτλ. ἐπὶ συνόλου 300 ἰατρῶν.

Τὰ πηλίκα $\frac{20}{300}$, $\frac{62}{300}$, $\frac{3}{300}$, κτλ. εἶναι αἱ σχετικαὶ συχνότητες, τὰς ὁποίας ἔχομεν ἐξετάσει εἰς τὴν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων,

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν σχετικῶν συχνοτήτων ἰσοῦται μὲ 1.

Παράδειγμα 2ον.

1. ***Κατάπλοι πλοίων εἰς τὸν λιμένα Πειραιῶς :***

Οἱ κατάπλοι τῶν πλοίων εἰς ἕνα λιμένα ἀποτελοῦν ἕνα σπουδαιότατον θέμα διὰ τὴν Ἐθνικὴν οἰκονομίαν, (εἰσαγωγὴ - ἐξαγωγὴ ἐμπορευμάτων, ἐργατικαὶ χεῖρες, τουρισμός κτλ.

Ἡ κίνησις τῶν πλοίων δίδεται ἀπὸ τὸν κάτωθι πίνακα :

ΠΙΝΑΞ 2.

Κατάπλοι πλοίων εἰς τὸν λιμένα τοῦ Πειραιῶς.

Ἔτη	Ἀριθμός πλοίων
1958	9762
1959	10538
1960	10012
1961	9934
1962	11696
1963	21298

Παράδειγμα 3ον.

Παραγωγὴ γεωργικῶν προϊόντων. Ἡ παραγωγὴ τῶν γεωργικῶν προϊόντων μιᾶς χώρας εἶναι θέμα, τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει τὴν οἰκονομίαν της.

Ἡ στατιστικὴ ὑπηρεσία δίδει τὰ ἑξῆς στοιχεῖα :

ΠΙΝΑΞ 3

Παραγωγὴ ἐτησίων καλλιεργειῶν δημητριακῶν εἰς τόννους

Ἔτη	Σῖτος	Σίκαλις	Κριθὴ	Ἀραβόσιτος	Ὄρυζα
1958	1607	953	1364	1102	3928
1959	1519	818	1178	1407	3722
1960	1457	965	1325	1371	3928
1961	1303	880	1170	1193	3682
1962	1443	909	1254	1295	3578

Εἰς τὸν πίνακα αὐτὸν ὁ πληθυσμὸς εἶναι τὰ γεωργικὰ προϊόντα ποὺ παρήχθησαν μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1958, 1962. Ἐπίσης ὁ πίναξ αὐτὸς μᾶς δεικνύει τὴν χρονολογικὴν καὶ τὴν ποσοτικὴν ταξινόμησιν τῶν δημητριακῶν προϊόντων τῆς χώρας.

Παράδειγμα 4ον. Ἔστω ὅτι ἐνδιαφερόμεθα ἀπὸ στατιστικῆς ἀπόψεως διὰ τὴν ἡλικίαν 300 ἐργατῶν, τοὺς ὁποίους ἀπασχολεῖ ἕνα ἐργοστάσιον. Ὁ πληθυσμὸς τοῦ παραδείγματός μας εἶναι οἱ 300 ἐργάται, ἡ δὲ ἰδιότης, ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει εἶναι ἡ συνεχὴς μεταβλητὴ «ἡλικία». Γράφομεν τὰ ὀνόματα τῶν συνεργατῶν καὶ παραπλεύρως τὴν ἡλικίαν ἑκάστου : π.χ.

Ἀσημάκης Ν., ἡλικίας 15 ἐτῶν.

. . . .

. . . .

Ἀναστασίου Α., ἡλικίας 35 ἐτῶν.

. . . .

. . . .

Κότσιρος Π. ἡλικίας 18 ἐτῶν.

. . . .

. . . .

Βρανᾶς Δ., ἡλικίας 65 ἐτῶν κ,τ.λ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἐργάτης Ἀσημάκης Ν. ἔχει ἡλικίαν 15 ἐτῶν, (ὁ μικρότερος) ὁ δὲ ἐργάτης Βρανᾶς Δ. ἔχει ἡλικίαν 65 ἐτῶν, (ὁ μεγαλύτερος). Ὅπως παρουσιάζονται τὰ ἀνωτέρω δεδόμενα δὲν μᾶς βοηθοῦν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν συμπερασμάτων.

Πρέπει ἑπομένως τὰ δεδόμενα νὰ ταξινομηθοῦν εἰς ὁμάδας ἢ τάξεις καὶ νὰ γίνῃ κατόπιν μία κατανομὴ εἰς ἀντιστοίχους συχνότητας.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἄκραι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς (δηλ. ἡ ἐλαχίστη καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ) εἶναι 15 καὶ 65 ἀντιστοίχως. Ἡ διαφορὰ 65 — 15 = 50 μεταξὺ τῶν ἄκρων τιμῶν λέγεται ***εὖρος*** τῆς κατανομῆς καὶ μᾶς δίδει τό πλάτος τῆς διακυμάνσεως τῆς μεταβλητῆς.

Χωρίζομεν τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν εἰς ὁμάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὀνομάζεται ***ταξικὸν διάστημα.***

Τὰ ταξικὰ διαστήματα πρέπει νὰ εἶναι ἀπὸ 8 ἕως 20 χωρὶς τοῦτο νὰ ἀποτελῇ καὶ κανόνα.

Εἰς τὸ παράδειγμά μας ὁρίζομεν 10 ὁμάδας (ταξικὰ διαστήματα).

Κάθε ὁμὰς περιέχει πέντε τιμὰς τῆς ἀκεραίας μεταβλητῆς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ τελευταία ἀναφέρεται εἰς τὴν ἑπομένην ὁμάδα, ἑπομένως αἱ τάξεις θὰ εἶναι 15—20, 20—25, ... 60—55. Ταξινομοῦμεν τὰ δεδομένα καὶ σχηματίζομεν τὸν πίνακα.

ΠΙΝΑΞ 4

Κατανομὴ 300 ἐργατῶν κατὰ ὁμάδας ἡλικιῶν.

Τάξις ἡλικιῶν	Μέση τιμὴ τάξεως ἡλικιῶν	Ἀριθμὸς ἐργατῶν (συχνότης	Ἀθροιστικὴ συχνότης	Σχετικὴ συχνότης %	Ἀθροιστικὴ σχετικὴ συχνότης
15 — 20	17,5	10	10	3,34	3,34
20 — 25	22,5	24	34	8	11,34
25 — 30	27,5	36	70	12	23,34
30 — 35	32,5	57	127	19	42,34
35 — 40	37,5	63	190	21	63,34
40 — 45	42,5	45	235	15	78,34
45 — 50	47,5	28	263	9,34	87,68
50 — 55	52,5	20	283	6,66	94,34
55 — 60	57,5	11	294	3,66	98 —
60 — 65	62,5	9	300	2	100
		N = 300		100	

Κάθε ὁμὰς τιμῶν (ταξικὸν διάστημα) ἔχει μίαν μέσην τιμήν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἂν λάβωμεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων τιμῶν της. Π.χ, ἡ μέση τιμὴ τῆς τάξεως 35—40 εἶναι $\frac{35+40}{2}=37,5$. Δηλαδὴ ἀντὶ νὰ λέγωμεν ὅτι 63 ἐργάται ἔχουν ἡλικίαν ἀπὸ 35 μέχρι 40 ἐτῶν, λέγομεν ὅτι οἱ 63 ἐργάται ἔχουν ἡλικίαν 37,5 ἐτῶν ὁ καθένας. Ἡ στήλη, ἡ ὁποία ἔχει τὸν τίτλον «ἀριθμὸς ἐργατῶν», λέγεται στήλη τῆς *ἀπολύτου συχνότητος*.

Ὁ πίναξ συμπληροῦται μὲ μίαν στήλην, ἡ ὁποία λέγεται στήλη τῆς ***ἀθροιστικῆς συχνότητος*** καὶ σχηματίζεται, ἂν δι' ἑκάστην ὁμάδα γράψωμεν τό ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων αὐτῆς καὶ ὅλων τῶν προηγουμένων τάξεων. Σχηματίζομεν ἐπίσης στήλην, ἡ ὁποία περιέχει τόν ἀριθμὸν τῆς ἀπολύτου συχνότητος ὡς ἑκατοστιαῖον ποσοστὸν (%) τῆς ὁλικῆς συχνότητος. Ἔτσι ἡ ἀπόλυτος συχνότης 45 εἰς ποσοστὸν ἐπὶ τῆς ὁλικῆς συχνότητος 300 εἶναι 15%. Ἡ στήλη τῶν ποσοστῶν ὀνομάζεται στήλη τῆς σχετικῆς συχνότητος. Σχηματίζομεν ἐπίσης καὶ στήλην ***ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητος***.

Ἀπὸ τὴν στήλην τῆς συχνότητος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεγαλυτέρα συχνότης εἶναι 63 καὶ ὅτι ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὁμάδα 35-40, ἐνῷ ἡ ἀντίστοιχος σχετικὴ συχνότης εἶναι 21%. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ 21% τῶν ἐργατῶν ἔχουν ἡλικίαν μεγαλυτέραν ἢ ἴσην τῶν 35 ἐτῶν καὶ μικροτέραν τῶν 40. Ἀπὸ τὴν ἀθροιστικὴν συχνότητα παρατηροῦμεν ὅτι 190 ἐργάται $(10+24+36+57+53=190)$ ἔχουν ἡλικίαν μικροτέραν τῶν 40 ἐτῶν. Ἀπὸ τὴν ἀθροιστικὴν σχετικὴν συχνότητα βλέπομεν ὅτι τὸ 63,34% τῶν ἐργατῶν ἔχουν ἡλικίαν μικροτέραν τῶν 40 ἐτῶν.

Παράδειγμα 5ον. Ὅταν ἡ ποσοτικὴ μεταβολὴ εἶναι ***ἀσυνεχής***, αἱ τιμαί της εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Εἰς τὸν πίνακα κατανομῆς τῶν συχνοτήτων αἱ τιμαὶ εἶναι δυνατὸν νὰ γραφοῦν ὡς ἔχουν ἢ νὰ ὁμαδοποιηθοῦν. Τὸ 1963 ἔγινε ἀπογραφὴ τῶν φαρμακείων τῆς Ἑλλάδος κατὰ νομούς. Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ γεωγραφικοῦ διαμερίσματος Στερεὰ Ἑλλὰς - Εὔβοια δίδονται ἀπὸ τὸν κάτωθι πίνακα.

ΠΙΝΑΞ 5

Κατανομὴ Φαρμακείων

Στερεᾶς Ἑλλάδος — Εὐβοίας

Ἑλλὰς 1961

Νομοὶ	Ἀριθμὸς φαρμακείων	Ἀριθμὸς Φαρμακείων %
Ἀττικὴ	695	85,5
Αἰτωλοακαρνανία	28	3,4
Βοιωτία	21	2,5
Εὔβοια	31	3,8
Εὐρυτανία	2	0,3
Φθιῶτις	29	3,6
Φωκὶς	7	0,9
	813	

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 85,5% τῶν φαρμακείων τοῦ διαμερίσματος Στερεὰ Ἑλλὰς - Εὔβοια εὑρίσκεται εἰς τὸν νομὸν Ἀττικῆς.

Παράδειγμα 6ον. Εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα αἱ συχνότητες ἀναφέρονται εἰς δύο ἰδιότητας τοῦ πληθυσμοῦ μας. Πρώτη ἰδιότης εἶναι τὸ φύλον μὲ χαρακτηριστικὰ ἄρρεν—θῆλυ καὶ ἡ δευτέρα Μηχανικὸς μὲ πέντε χαρακτηριστικὰ (πολιτικός, ἀρχιτέκτων, κλπ.). Ἐπειδὴ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς πρώτης ἰδιότητος εἶναι 2, τῆς δὲ δευτέρας 5, ὁ πίναξ, τὸν ὁποῖον κατασκευάζομεν, λέγεται πίναξ τῶν 2×5 θυρίδων.

ΠΙΝΑΞ 6

Πτυχιοῦχοι Πολυτεχνιακῶν Σχολῶν

Ἀπογραφὴ 1961

Σχολαὶ	Φύλον		Ἀριθ. προσώπ. καὶ τῶν δύο φύλων
	Ἄρρενες	Θήλεις	
Πολιτικοὶ Μηχανικοὶ	3431	23	3454
Μηχαν. Ἠλεκτρολ.	1705	16	1721
Ἀρχιτέκτονες	685	112	797
Ἀγρονομ. Τοπογρ.	250	2	252
Χημικοὶ Μηχ.	644	32	676
Σύνολ. ἀριθ. προσώπων	6715	185	6900

Πηγή : Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος 1964.

Ἐκ τοῦ πινακος (6) εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ποσοστὰ ἐπὶ τοῦ γενικοῦ ἀθροίσματος (Ἄρρενες - Θήλεις), καθὼς και ποσοστὰ ἐπὶ τῶν ἀθροισμάτων τῶν στηλῶν. Π. χ. τὸ ποσοστὸν τῶν ἀρρένων μηχανικῶν εἶναι 97,3 % τοῦ συνόλου ὅλων τῶν μηχανικῶν.

Παράδειγμα. Οἱ πίνακες χρονολογικῆς κατατάξεως μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ κάμνωμεν συγκρίσεις καὶ μελέτας μέ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου.

ΠΙΝΑΞ 7

Ἀφίξεις τουριστῶν

Ἔτη	Ἀριθμὸς ἀτόμων
1956	199.707
1957	238.289
1958	257.030
1959	327.155
1960	379.959
1961	471.983
1962	572.503
1963	716.126

Πηγή: Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος 1964.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

430. Συμπληρώσατε τὸν πίνακα 1 γράφοντες τοὺς ἀριθμοὺς τῶν εἰδικοτήτων τῶν ἰατρῶν εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ των.

431, Μία τάξις ἑνὸς σχολείου ἔχει 50 μαθητὰς τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι :

1.54,	1,62,	1,67,	1,55,	1,58,	1,63,	1,64,	1,70
1,72,	1,53,	1,63,	1,71,	1,54,	1,69,	1,80,	1,79
1,65,	1,66,	1,82,	1,74,	1,78,	1,67,	1,55,	1,71
1.54,	1,63,	1,81,	1,70,	1,79,	1,78,	1,55,	1,69
1,55,	1,60,	1,72,	1,64.	1,80,	1,79,	1,53,	1,62
1,71,	1.67,	1,84,	1,73,	1,55,	1,63,	1,72,	1,74
1,69.	1,80,						

Νὰ σχηματισθῇ πίναξ κατανομῆς ἀπολύτων καὶ σχετικῶν συχνοτήτων (τό εὖρος κάθε ὁμάδος νά εἶναι 5). Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ στῆλαι τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος καθὼς καὶ τῆς ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητος

432. Ἕνας ὀργανισμὸς ἀπασχολεῖ 120 ὑπαλλήλους, οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν τοὺς ἑξῆς μισθούς : 12 ὑπάλληλοι λαμβάνουν ἀπὸ 2200 ἕως 2700 δρχ., 8 ὑπάλληλοι λαμβάνουν ἀπὸ 2700 ἕως 3200 δρχ., 15 ὑπάλληλοι λαμβάνουν

ἀπὸ 3200 ἕως 3700 δρχ., 27 ὑπάλληλοι λαμβάνουν ἀπὸ 3700 ἕως 4200 δρχ., 34 ὑπάλληλοι λαμβάνουν ἀπὸ 4200 ἕως 4700 δρχ., 13 ὑπάλληλοι λαμβάνουν ἀπὸ 4700 ἕως 5200 δρχ., 7 ὑπάλληλοι λαμβάνουν ἀπὸ 5200 ἕως 5700 δρχ. καὶ 4 ὑπάλληλοι λαμβάνουν 5700 ἕως 6200 δρχ. Νὰ σχηματισθῇ πίναξ ὁ ὁποῖος νὰ δίδη τὴν μέσην τιμήν, τὴν ἀπόλυτον, τὴν σχετικήν, τὴν ἀθροιστικὴν καὶ τὴν σχετικὴν ἀθροιστικὴν συχνότητα.

433. Εἰς ἕνα πληθυσμὸν ἐκ 500 πλοίων ἐξετάζομεν δύο ποιοτικὰς ἰδιότητας : εἶδος πλοίου (ἐπιβατηγὸν - φορτηγὸν) καὶ τὴν ἀπασχόλησιν (ναυλωμένον - ἀναύλωτον), ὁ πληθυσμὸς ἔχει 120 ἐπιβατηγά, 60 φορτηγὰ εἶναι ἀναύλωτα, 420 πλοῖα εἶναι ναυλωμένα. Νὰ κατασκευασθῇ πίναξ 2 x 2 θυρίδων.

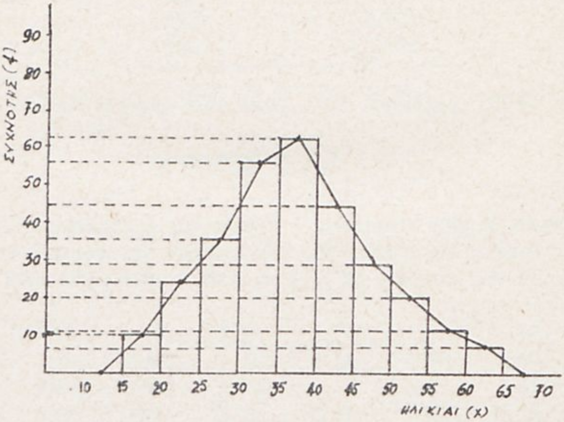
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΓ΄

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ (ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ)

§ **223. Ἱστόγραμμον συχνότητος. Πολύγωνον συχνότητος.** Αἱ *γραφικαὶ παραστάσεις* ἢ *διαγράμματα* εἶναι ἕνας ἄλλος τρόπος εὐκόλου μελέτης καὶ παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων.

Ἕνας τρόπος γραφικῆς παραστάσεως εἶναι τὸ ***ἱστόγραμμον συχνότητος.*** Θὰ ἐφαρμόσωμεν τοῦτο εἰς τὸν πίνακα 4 τοῦ παραδείγματος 4 (Σχ. 79).

Εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ἐπὶ τοῦ ἄξονος οx το-



Σχ. 79.

ποθετοῦμεν τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς (ἡλικίας) καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος οy τὴν συχνότητα (f).

Κατασκευάζομεν κατόπιν ὀρθογώνια ὡς ἑξῆς : Φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα οx ἐκ τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς ἄκρας τιμὰς κάθε τάξεως. Ἡ μία διάστασις τῶν ὀρθογωνίων θὰ εἶναι τὸ *εὖρος* κάθε τάξεως, αἱ δὲ ἄλλαι διαστάσεις των θὰ ἔχουν μήκη ἴσα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας.

Τὸ πολύγωνον συχνότητος εἶναι μία γραφικὴ παράστασις, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται, ὅταν ἡ μεταβλητὴ εἶναι συνεχὴς καὶ κατασκευάζεται κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους (Σχ. 79) :

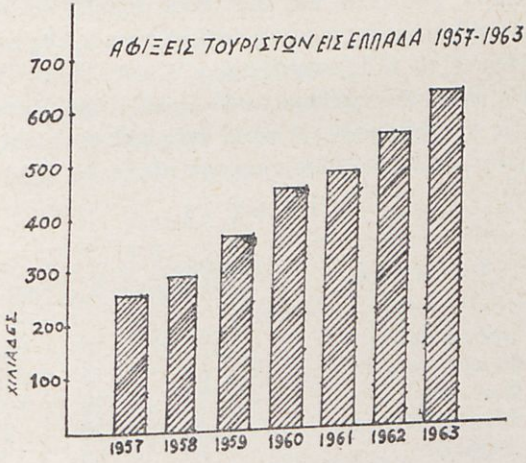
α) Συνδέομεν τὰ μέσα τῶν ἄνω πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων τοῦ ἱστογράμμου συχνότητος καὶ προκύπτει τότε μία τεθλασμένη γραμμή. Τὰ ἄκρα τῆς τεθλασμένης γραμμῆς θὰ εἶναι τὰ μέσα τῶν κάτω πλευρῶν (ἐπὶ τοῦ ἄξονος) τῶν γειτονικῶν τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου ὀρθογωνίου.

β) Ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox ὁρίζομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς μέσας τιμὰς τῶν τάξεων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Ἐκ τῶν σημείων τούτων φέρομεν ἐπὶ τὸν ἄξονα ox καθέτους καί ἐπ' αὐτῶν ὁρίζομεν μήκη ἴσα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας.

Τὸ ἱστόγραμμον καὶ τὸ πολύγωνον τῆς ***σχετικῆς συχνότητος*** κατασκευάζονται κατὰ τρόπον παρόμοιον.

§ 224. Ἄλλα εἴδη διαγραμμάτων.

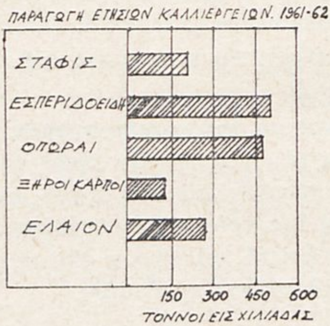
α) ***Ραβδογράμματα.*** Τὸ ραβδόγραμμα εἶναι γραφικὴ παράστα-



Σχ. 80.

σις, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ μία σειρὰ ὀρθογωνίων, μὲ ἴσας βάσεις καὶ μὲ ὕψη ἀνάλογα πρὸς τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας παριστάνουν.

Τὸ σχῆμα 80 εἶναι ἕνα ραβδόγραμμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὰς ἀφίξεις τουριστῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα 1957—1963. Ἐκ τοῦ ραβδογράμματος εἶναι καταφανὴς ἡ αὔξησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τουριστῶν κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον ἐξετάζομεν. Τὸ σχῆμα 81 εἶναι ἕνα ραβδόγραμμα τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν παραγωγὴν τῶν ἐτησίων καλλιεργειῶν 1961 - 62.



Σχ. 81.

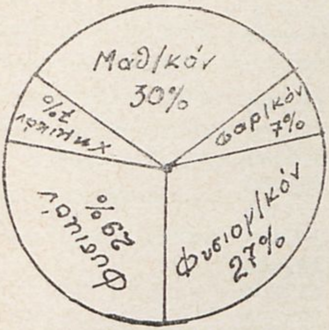
β) ***Κυκλικὰ διαγράμματα.*** Τὸ κυκλικὸν διάγραμμα εἶναι ἕνας κύκλος, ὁ ὁποῖος χωρίζεται εἰς κυκλικοὺς τομεῖς, τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁποίων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς.

Ἄς λάβωμεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα. Κατὰ τὸ σχολικὸν ἔτος 1962 — 63 εἰς τὴν Φυσικομαθηματικὴν Σχολὴν τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης ἐνεγράφησαν εἰς τὸ α΄ ἔτος 857 φοιτηταί, οἱ ὁποῖοι κατενεμήθησαν εἰς τὰ διάφορα τμήματα αὐτῆς ὡς ἑξῆς :

ΠΙΝΑΞ 8

Τμήματα	Ἀριθμὸς φοιτητῶν	%	Εἰς Μοίρας
1. Μαθηματικὸν	259	30	108^0
2. Φαρμακευτικὸν	61	7	$25{,}2^0$
3. Φυσικὸν	255	29	$104{,}4^0$
4. Φυσιογνωστικὸν	220	27	$97{,}2^0$
5. Χημικὸν	62	7	$25{,}2^0$
Συνολικοὶ ἀριθμοὶ	857	100	360^0

Γράφομεν μία περιφέρειαν κύκλου μὲ τυχοῦσαν ἀκτῖνα Σχ. 82. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ 100% τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐγγραφέντων φοιτητῶν, ὁ κυκλικὸς τομεύς, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 1%, θὰ ἔχῃ γωνίαν $3{,}6^0$. Ἄρα ὁ κυκλικὸς τομεύς, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς ποσοστὸν 30%, θὰ ἔχῃ γωνίαν $3{,}6 \times 30^0 = 108^0$ κ.ο.κ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς διαδοχικὰ τόξα 108^0, $25{,}2^0$, $104{,}4^0$ 97.2^0, $25{,}2^0$ καὶ γράφομεν τὰς ἀκτῖνας, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων. Οἱ κυκλικοὶ τομεῖς ποὺ σχηματίζονται δίδουν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς κατανομῆς τῶν πρωτοετῶν φοιτητῶν τῆς Φυσικομαθηματικῆς σχολῆς τοῦ Πανεπισνημίου Θεσσαλονίκης.



Σχ. 82.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

434. Μὲ τὰ δεδομένα τοῦ κατωτέρω πίνακος κατασκευάσατε ἱστόγραμμον, ραβδόγραμμον καὶ κυκλικὸν διάγραμμα.

Κατανομὴ τῶν ὑψῶν μαθητῶν
τοῦ Λυκείου

Ὕψος εἰς μέτρα	Συχνότης
1,45—1,50	4
1,50—1,55	3
1,55—1,60	6
1,60—1,65	6
1,65—1,68	2
1,68—1,70	3
1,70—1,72	7
1,72—1,75	5
1,75—1,80	4
Σύνολον	40

435. Νὰ συγκεντρώσετε τὴν ἐπίδοσιν τοῦ ἅλματος εἰς ὕψος 20 ἀθλητῶν καὶ νὰ κάμετε κατάλληλα διαγράμματα.

436. Ἡ Στατιστικὴ ὑπηρεσία τῆς Ἑλλάδος δίδει τὰ ἑξῆς ἀποτελέσματα διὰ τὸν ἐνεργὸν πληθυσμὸν τῆς Ἑλλάδος:

Ἡλικίαι	Ἐνεργὸς πληθυσμὸς
10—14	133600
15—19	351500
20—24	390800
25—29	493000
30—34	473500
35—39	346600
40—44	292500
45—54	612800
55—64	375500
65—74	128000
75 ἐτῶν καὶ ἄνω	39500

Νὰ κατασκευασθοῦν βάσει τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, ἱστόγραμμον, ραβδόγραμμον καὶ κυκλικὸν διάγραμμα.

§ **225. Κεντρικαὶ τιμαί.** Ἐκτὸς τῶν στατιστικῶν πινάκων καὶ τῶν γραφικῶν παραστάσεων ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι ἐξ ἴσου χρήσιμοι τρόποι παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων καὶ μάλιστα μὲ ὀλίγους χαρακτηριστικοὺς ἀριθμούς. Οἱ χαρακτηριστικοὶ αὐτοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***τυπικαὶ τιμαὶ*** ἢ ***παράμετροι***.

Εἰς τὴν στατιστικὴν γίνεται χρῆσις διαφόρων τυπικῶν τιμῶν (παραμέτρων), αἱ ὁποῖαι δίδουν μίαν ἱκανοποιητικὴν περιγραφὴν ἑνὸς συνόλου δεδομένων.

Θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω δύο τυπικὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται ***κεντρικαὶ τιμαὶ*** ἢ ***τιμαὶ κεντρικῆς τάσεως***. Χαρακτηριστικὸν τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι ὅτι τὰ δεδομένα συγκεντρώνονται γύρω ἀπὸ τὰς τιμὰς αὐτάς.

α) ***Μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ*** (ἢ ***ἀριθμητικὸς μέσος*** ἢ ἁπλῶς ***μέσος***).

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ δεδομένα μας εἶναι ἀταξινόμητα, εὑρίσκεται, ***ἂν προσθέσωμεν τὰ δεδομένα καὶ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ πλήθους αὐτῶν.***

Π. χ. οἱ μαθηταὶ τῶν τεσσάρων τμημάτων μιᾶς τάξεως εἶναι 52, 58, 60 καὶ 62 ἀντιστοίχως. Τότε ὁ μέσος εἶναι :

$(52+58+60+62) : 4 = \frac{232}{4} = 58$ μαθηταί: Ὁ μέσος 58 σημαίνει ὅτι, ἂν κάθε τμῆμα τῆς τάξεως εἶχεν ἀπὸ 58 μαθητάς, ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν αὐτῆς τῆς τάξεως θὰ ἦτο 232 ματηταί. Δηλαδὴ ἴσος ἀριθμὸς μαθητῶν μὲ ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος κατανέμεται ὡς ἀνωτέρω εἰς τὰ τέσσαρα τμήματα τῆς τάξεως.

Ἐὰν τὰ δεδομένα τοῦ παραδείγματός μας τὰ παραστήσωμεν μὲ τὰ σύμβολα x_1, x_2, x_3, x_4 ἀντιστοίχως, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος αὐτῶν, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται $\overline{x}$, θὰ εἶναι :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

Γενικῶς, ἐὰν ἔχωμεν $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$ δηλ. N τιμὰς τότε ὁ ἀριθμητικὸς μέσος θὰ εἶναι :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\Sigma x}{N}$$

ὅπου τὸ Σx σημαίνει τὸ ἄθροισμα τὼν N τιμῶν $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$.

Ὅταν ἔχωμεν καταρτίσῃ πίνακας κατανομῆς τῶν συχνοτήτων διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς :

1ον) ***Ὅταν αἱ τιμαὶ δὲν ἔχουν κατανεμηθῇ εἰς τάξεις :***

Παλλαπλασιάζομεν κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς μὲ τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα, προσθέτομεν τὰ γινόμενα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ διαιροῦμεν διὰ τῆς ὁλικῆς συχνότητος.

2ον) ***Ὅταν αἱ τιμαὶ ἔχουν κατανεμηθῇ εἰς τάξεις :***

Λαμβάνομεν ὡς τιμὴν τῆς μεταβλητῆς τὴν μέσην τιμὴν κάθε τάξεως καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ προηγουμένως, δηλ. ὅταν δὲν ἔχουν αἱ τιμαὶ κατανεμηθῆ εἰς τάξεις.

Ὁ τύπος καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f \,.\, x}{\Sigma f}$$

ὅπου $f \,.\, x$ σημαίνει τὸ γινόμενον τῆς τιμῆς x μὲ τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα, $\Sigma f \,.\, x$ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν καὶ Σf τὴν ὁλικὴν συχνότητα.

Παράδειγμα ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἀπὸ δύο πίνακας, εἰς τοὺς ὁποίους τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα :

α) δὲν ἔχουν κατανεμηθῆ εἰς τάξεις καὶ β) ἔχουν κατανεμηθῆ εἰς τάξεις : Μᾶς δίδεται ἡ κατανομὴ 150 οἰκογενειῶν ἐν σχέσει πρὸς τὰ παιδιά, τὰ ὁποῖα ἔχουν.

'Αριθμ. παιδιῶν x	'Αριθμ. οἰκογενειῶν f	f . x
0	30	0
1	45	45
2	34	68
3	20	60
4	10	40
5	7	35
6	3	18
7	1	7
$N = \Sigma f = 150$		$\Sigma fx = 273$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{273}{150} \backsimeq 1{,}82.$$

Παι-διὰ	Μέση τιμὴ τάξεως x	f	f . x
0—1	0,5	75	37,5
2—3	2,5	54	135,0
4—5	4,5	17	76,5
6—7	6,5	4	26
		N=150	275

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{275}{150} \backsimeq 1{,}82$$

Ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ 1,82 τοῦ παραδείγματος σημαίνει πῶς ὑπάρχουν 1,82 παιδιὰ εἰς κάθε οἰκογένειαν ἢ 182 παιδιὰ ἀνὰ 100 οἰκογενείας.

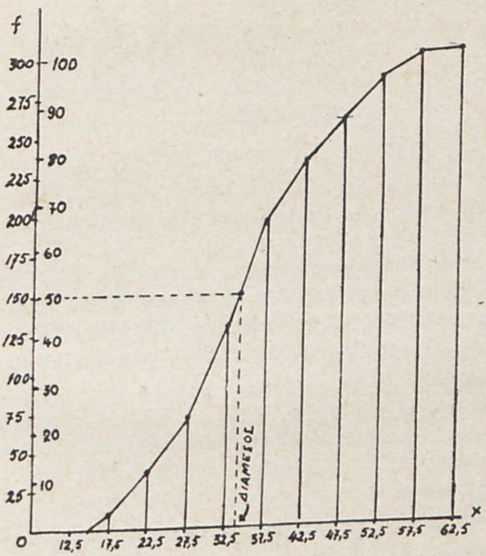
β) ***Διάμεσος. Ὅταν μία σειρὰ στατιστικῶν δεδομένων ἔχουν καταταχθῆ εἰς σειρὰν μεγέθους, τότε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ μία τιμή, ἡ ὁποία χωρίζει τὰ δεδομένα εἰς δύο ἰσοπληθεῖς ὁμάδας. Ἡ τιμὴ αὐτὴ λέγεται διάμεσος.*** Π. χ. ἂν τὰ ἡμερομίσθια 5 ἐργατῶν εἶναι : 55, 70, 95, 110, 120 δραχμαί, ἡ διάμεσος εἶναι ὁ 95, διότι, ἐφ' ὅσον τὰ στατιστικὰ δεδομένα ἔχουν καταταχθῆ κατὰ σειρὰν μεγέθους, πρὸ τοῦ 95 ὑπάρχουν μικρότεραι τιμαὶ καὶ μετὰ τὸ 95 ὑπάρχουν δύο μεγαλύτεραι.

'Εὰν ὑπῆρχε καὶ ἕκτος ἐργάτης μὲ ἡμερομίσθιον 125 δραχμὰς τότε ἡ διάμεσος θὰ ἦτο ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν τιμῶν 95 καὶ 110 δηλ. $(95 + 110) : 2 = 102{,}5$.

Ὅταν τὰ στατιστικὰ δεδομένα ἔχουν δοθῆ εἰς πίνακα κατανομῆς κατὰ συχνότητας, ὁ ὑπολογισμὸς τῆς διαμέσου γίνεται μὲ κατάλληλον μαθηματικὸν τύπον, τοῦ ὁποίου δὲν θὰ γίνῃ χρῆσις.

Ἡ εὕρεσις τῆς διαμέσου θὰ γίνῃ ἐδῶ μόνον μὲ γραφικὴν μέθοδον. Θὰ λάβωμεν ὡς παράδειγμα ἐκεῖνο τῆς κατανομῆς τῶν 300 ἐργατῶν κατὰ τάξεις ἡλικιῶν τοῦ πίνακος 4 (§ 222).

Λαμβάνομεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας οx, οf (Σχ. 83). 'Επὶ τοῦ ἄξονος οx ὁρίζομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς μέσας τιμὰς τῶν τάξεων τῶν ἡλικιῶν καὶ ἀπὸ αὐτὰ φέρομεν κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα, μὲ μήκη ἴσα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἀθροιστικὰς συχνότητας. Τὰ ἄνω ἄκρα τῶν καθέτων αὐτῶν τμημάτων, ἂν συνδεθοῦν κατὰ σειράν, θὰ μᾶς δώσουν τὸ πολύγωνον τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος of εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν δύο κλίμακας: α) Κλίμακα ἀθροιστικῆς ἀπολύτου συχνότητος καὶ β) Κλίμακα σχετικῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος. Κατόπιν τούτων τὸ διάγραμμα τοῦ πολυγώνου τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητος θὰ εἶναι τὸ κατωτέρω.



Σχ. 83.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὴν διάμεσον, φέρομεν ἀπὸ σημεῖον 150 τοῦ ἄξονος f, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ἥμισυ τῆς ὁλικῆς συχνότητος (50%), εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ox καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον, ὅπου αὐτὴ θὰ συναντήσῃ τὸ πολύγωνον, φέρομεν κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Τὸ ἴχνος αὐτῆς τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox ὁρίζει τὴν ζητουμένην διάμεσον.

Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ διάμεσος εἶναι περίπου 34. Τοῦτο σημαίνει ὅτι 150 ἐργάται ἔχουν ἡλικίαν μικροτέραν τῶν 34 ἐτῶν οἱ δὲ ἄλλοι 150 ἡλικίαν μεγαλυτέραν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

437) Δίδονται αἱ ἀριθμοὶ 12, 21, 14, 13, 6, 54, 42, 9, 11, 6, 18, 26, 35 νὰ τοποθετηθοῦν εἰς σειρὰν αὔξουσαν καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ καὶ ἡ διάμεσος.

438) Αἱ ἀποδοχαὶ ποὺ λαμβάνουν οἱ ὑπάλληλοι μιᾶς Ἑταιρίας δίδονται ἀπὸ τὸν πίνακα.

Μισθοὶ εἰς δραχμὰς	Συχνότης
2000—2500	11
2500—3000	17
3000—3500	18
3500—4000	24
4000—4500	15
4500—5000	12
5000—5500	8
	N = 105

Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ δι' ὑπολογισμοῦ καὶ ἡ διάμεσος γραφικῶς.

439) Ἕνας ὀρνιθοτρόφος εὗρῆκεν ὅτι ἡ κατὰ μίαν ἑβδομάδα ἡ μέση ἡμερησία παραγωγὴ αὐγῶν ἦτο 350 αὐγά. Διὰ τὰς ἕξ ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος εἶχε καταγράψει τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς 347, 351, 358, 345, 350 καὶ 353, ἀλλὰ παρέλειψε νὰ καταγράψῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν αὐγῶν τῆς ἑβδόμης ἡμέρας. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

440) Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 5, 4, 9, 12, 15. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ αὐτῶν. Νὰ προσθέσετε εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν τὸ 2 καὶ νὰ εὕρετε πάλιν τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμήν. Νὰ συγκρίνετε τὰς δύο εὑρεθείσας τιμάς.

441) Αἱ μετρήσεις τοῦ ὕψους τῶν μαθητῶν ἑνὸς Σχολείου δίδονται εἰς τὸν πίνακα.

ὕψη	Ἀριθμὸς Μαθητῶν
148 — 154	40
154 — 160	94
160 — 166	128
166 — 172	60
172 — 178	58
178 — 184	20
Σύνολον	400

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον ὕψος τῶν μαθητῶν δι' ὑπολογισμοῦ καὶ ἡ διάμεσος γραφικῶς.

§ **226. Διασπορὰ τῶν στατιστικῶν δεδομένων.** Ἕνας πατέρας δίδει εἰς τὰ δύο παιδιά του τὰ ἑξῆς ποσὰ εἰς δραχμὰς καθημερινῶς ἐπὶ ἐννέα ἡμέρας :

α παιδί : 12, 10, 14, 6, 18, 15, 18, 13, 16
β' παιδί : 9, 10, 18, 14, 18, 18, 9, 15, 11

Ὁ μέσος ὅρος τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν τὸ α' παιδί, εἶναι προφανῶς $\frac{122}{9}$. Ἐπίσης εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ὁ μέσος ὅρος τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν τὸ β' παιδὶ εἶναι ὁμοίως $\frac{122}{9}$.

Ἐάν τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα ἔλαβον τὸ α' καὶ β' παιδί, τὰ γράψωμεν κατὰ σειρὰν αὐξάνοντος μεγέθους :

α' παιδί : 6, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 18
β' παιδί : 9, 9, 10, 11, 14, 15, 18, 18, 18

παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διάμεσοι (14) καὶ αἱ ἐπικρατοῦσαι τιμαὶ (18) καὶ τῶν δύο σειρῶν εἶναι αἱ αὐταί. Παρὰ τὰς συμπτώσεις ὅμως τοῦ μέσου ὅρου τῆς διαμέσου καὶ τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς, ἡ μορφὴ τῆς α' σειρᾶς εἶναι ἐντελῶς διάφορος τῆς μορφῆς τῆς β' σειρᾶς, Τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν τὸ α' παιδί, εἶναι διεσπαρμένα ἀπὸ τὸ 6 ἕως τὸ 18, ἐνῷ τοῦ β' παιδιοῦ ἀπὸ τὸ 9 ἕως τὸ 18. Δηλαδή τὸ εὖρος τῆς κατανομῆς τῆς β' σειρᾶς εἶναι μικρότερον τοῦ εὔρους τῆς πρώτης.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι αἱ τρεῖς κεντρικαὶ τιμαὶ (μέσος ὅρος, διάμεσος, ἐπικρατοῦσα τιμὴ) δέν ἀρκοῦν πάντοτε διὰ τὴν περιγραφὴν μιᾶς κατανομῆς στατιστικῶν δεδομένων.

Ὑπάρχει ἀνάγκη καὶ ἄλλων χαρακτηριστικῶν τιμῶν (παραμέτρων), αἱ ὁποῖαι νὰ περιγράφουν τὴν *διασποράν* πέριξ μιᾶς κεντρικῆς τιμῆς.

Τὸ εὖρος ἐπίσης μιᾶς κατανομῆς παρέχει περιωρισμένην πληροφορίαν διὰ τὸ μέγεθος τῆς διασπορᾶς καὶ δὲν μᾶς δεικνύει πάντοτε τὴν διαφορὰν τῆς διασπορᾶς μεταξὺ δύο κατανομῶν στατιστικῶν δεδομένων.

Ἂν λάβωμεν π.χ. δύο σειρὰς ἐκ πέντε στοιχείων

14	15	15	15	16
14	14	15	16	16

παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν μέσον 15 καὶ τὸ αὐτὸ εὖρος. Ἡ δευτέρα σειρὰ ὅμως ἔχει μεγαλυτέραν διασποράν. Δηλαδὴ εἰς τὴν πρώτην σειρὰν μόνον δύο διαφορετικὰ στοιχεῖα εὑρίσκονται δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τοῦ μέσου ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν τέσσαρα.

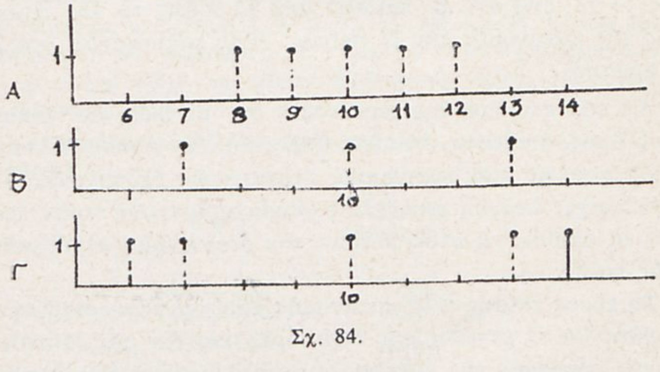
Ἡ περιγραφὴ τῆς διασπορᾶς τῶν δεδομένων εἰς μίαν κατανομὴν γίνεται μὲ μίαν παράμετρον, ἡ ὁποία μετρᾶ τὸ μέγεθος τῆς συγκεντρώσεως πέριξ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς μετρήσεως τῆς διασπορᾶς θὰ λάβωμεν παραδείγματα, ὅπου τὰ δεδομένα κατανέμονται κατὰ τρόπον συμμετρικὸν πέριξ τοῦ αὐτοῦ μέσου x.

Ἔστω αἱ ἑξῆς τρεῖς σειραὶ δεδομένων

Α :	8,	9,	10,	11,	12
Β :	7,	10,	13,		
Γ :	6,	7,	13,	14.	

Ἂν παραστήσωμεν μὲ τὰ κατωτέρω διαγράμματα Σχ. 84 τῆς αὐτῆς κλίμακος, τὰς σειρας Α, Β, Γ, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ἡ Α παρουσιάζει μικροτέραν διασπορὰν ἀπὸ τὴν Β καὶ ἡ Β μικροτέραν ἀπὸ τὴν Γ. Συνεπῶς ἡ διασπορὰ τῆς Α πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ μὲ ἀριθμὸν (παράμετρον) μικρότερον ἀπὸ ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος θὰ ἐκφράζῃ τὴν διασπορὰν τῆς Β ἢ τῆς Γ.



Σχ. 84.

ΤΕΛΟΣ

Ἐκτύπωσις : ΧΡ. ΛΟΥΚΟΥ, Ἀκαδημίας 63 - Τηλ. 633.767

Εφαπτομένες όξειών γωνιών.

Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0,344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0,499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171,9	343,8

Ἡμίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,84[illegible]
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,894	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0,935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	0,569	0,571	79	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	0,609	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	0,638	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα όξειών γωνιών.

Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοίρες	0′	10	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0,957	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,273
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0,869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0,759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

ΠΙΝΑΞ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Σύμβολον	Σημασία τοῦ συμβόλου
$\{\ \}$	Δεσμοὶ ἢ ἄγκιστρον συνόλου
$\Longrightarrow$	«συνεπάγεται», «ἄρα»
$\Longleftrightarrow$	«ἰσοδύναμον πρὸς» ἢ «ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν» Λογικὴ ἰσοδυναμία
$\forall$	«ὅτι καὶ ἂν εἶναι» ἢ «διὰ κάθε» ὑπαρξιακὸς ποσοδείκτης
$\exists \cdot x$	«ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα x, ὥστε» » »
x/x	«...στοιχεῖα x ὅπου x...»
$\in$	«ἀνήκει εἰς» «ἒν» «τοῦ»
$\notin$	«δὲν ἀνήκει εἰς...» «ὄχι ἐν»
$\subseteq$	«ἐγκλείεται ἐντὸς» ἢ «ὑποσύνολον»
$\not\subseteq$	«δὲν εἶναι ὑποσύνολον»
$\subset$	«ἐγκλείεται μὲ στενὴν σημασίαν ἐντὸς» γνήσιον ὑποσύνολον
$\cup$	«ἕνωσις»
$\cap$	«τομὴ»
$\varnothing$	«σύνολον κενὸν»
Π	«σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν»
Π^+	«σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν»
Φ	«σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν»
$\rightarrow$	«μονοσήμαντος ἀντιστοίχησις
$\leftarrow\rightarrow$	«ἀντιστοίχησις ἕνα μὲ ἕνα»
$\wedge$	«καὶ» λογικὴ σύζευξις
$\perp$	«κάθετον»
$\parallel$	«παράλληλον»
$\simeq$	«περίπου»
$\uparrow\downarrow$	«παράλληλον καὶ ἀντίρροπον»
$\uparrow\uparrow$	«παράλληλον καὶ ὁμόρροπον»
$=$	«ἰσοῦται μὲ» «εἶναι»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς	3	στῖχος	3	ἐκ τῶν κάτω	(῞Αν) ἀντὶ (῎Αν)
»	3	»	5	»	(ἑνὸς) ἀντὶ (ἐνὸς)
»	3	»	7	»	($x \in A \rightarrow f(x) \in B$) ἀντὶ ($f(x) \in A$)
»	3	»	11	»	(ὁποῖα) ἀντὶ (ὀποῖα)
»	8	»	10	»	(συντελεστὴν) ἀντὶ (συννελεστὴν)
»	8	»	11	»	(ἕνα) ἀντὶ (ἔνα)
»	8	»	1	»	(μονωνύμων) ἀντὶ (μονονύμων)
»	20	»	2	»	(ἐλαχιστοβαθμίων) ἀντὶ (ἑλαχιστο-βαθμιῶν)
»	30	»	12	»	(τέσσαρας) ἀντὶ (τεσσέρας)
»	30	»	25	»	(διαιρέτου) ἀντὶ διαιρετοῦ)
»	31	»	1	»	(῞Αν) ἀντὶ (῎Αν)
»	32	»	2	»	(διαιρέτου) ἀντὶ (διαιρετοῦ)
»	43	»	10	»	(ἀνισώσεων) ἀντὶ (ἀνισόσεων)
»	45	»	10	»	(διαφορὰς) ἀντὶ (διφορὰς)
»	57	»	15	»	(48) ἀντὶ (43)
»	59	»	9	»	(ἀντιστοίχου) ἀντὶ (ἁντιστοίχου)
»	77	»	3	»	(ὁδηγῆ) ἀντὶ (ὁδηγεῖ)
»	77	»	11	»	(ἱκανοποιῆ) ἀντὶ (ἱκανοποιεῖ)
»	84	»	14	»	(μιᾶς) ἀντὶ (μιὰς)
»	94	»	12	»	(εἶναι) ἀντὶ (εἰναι)
»	95	»	7	»	(90) ἀντὶ (91)
»	96	»	1	»	(91) ἀντὶ (95)
»	96	»	15	»	(92) ἀντὶ (93)
»	96	»	1	»	(93) ἀντὶ (94)
»	97	»	1	»	(ἔχη) ἀντὶ (ἔχει)
»	113	»	5	ἡ τελευταῖα	λέξις (λογάριθμον) ἀντὶ λογά)
»	113	»	7	ἡ τελευταῖα	λέξις (λογαρίθμων) ἀντὶ (λ...ρίθμων)
»	154	»	8	»	(σημεῖον) ἀντὶ σημείον)
»	155	»	6	»	($\not\subset$) ἀντὶ ($\in$)
»	155	»	8	»	(ποία) ἀντὶ (ποῖα)
»	155	»	18	»	(ἔχη) ἀντὶ (ἔχει)
»	155	»	25	»	(τέμνη) ἀντὶ (τέμνει)
»	155	»	31	»	(εὐθύγραμμα) ἀντὶ (εὑθύγραμμα)
»	156	»	8	»	(ἀπέχη) ἀντὶ (ἁπέχει)
»	159	»	3	»	(συμπίπτη) ἀντὶ (συμπίπτει)
»	160	»	11	»	(εἶναι) ἀντὶ (εἰναι)
»	207	»	16	»	(τὸν) ἀντὶ (τὸ)
»	213	»	1	»	(Παρατηρήσεις) ἀντὶ (Παρατηρή-σείς)
»	214	»	12	»	(ἐμφανίση) ἀντὶ (ἑμφανίση)
»	214	»	17	»	(εἴδομεν) ἀντὶ (ἴδομεν)