Δ 2 Μικ1

Κορώνη (Ν.Γ.) Καραπιάδη (Σ.Τ.)

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Γ. ΚΟΡΩΝΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤ. ΣΧΟΛΗΣ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ Τ. ΚΑΡΑΚΑΣΗ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τ. ΥΠΟΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΣΧΟΛΗΣ Ε.Ν.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Βιβλίον περιέχον θεωρίαν καὶ πλείστας λελυμένας καὶ ἀλύτους ἀσκήσεις, ἀπαραίτητον δι᾽ ὅλους τοὺς μαθητὰς καὶ ἰδίᾳ διὰ τοὺς ὑποψηφίους πρὸς συμμετοχὴν εἰς διαγωνισμοὺς Τραπεζῶν, Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν, Δημοσίων ὑπηρεσιῶν ἢ διαφόρων Σχολῶν ὅπου ζητεῖται πρὸς ἐξέτασιν καὶ τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς.

Β´ ΕΚΔΟΣΙΣ
(Βελτιωμένη)

ΑΘΗΝΑΙ 1955

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Γ. ΚΟΡΩΝΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ Τ. ΚΑΡΑΚΑΣΗ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τ. ΥΠΟΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΣΧΟΛΗΣ Ε.Ν.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Βιβλίον περιέχον θεωρίαν καὶ πλείστας λελυμένας καὶ ἀλύτους ἀσκήσεις, ἀπαραίτητον δι' ὅλους τοὺς μαθητὰς καὶ ἰδίᾳ διὰ τοὺς ὑποψηφίους πρὸς συμμετοχὴν εἰς διαγωνισμοὺς Τραπεζῶν, Παιδαγωγικῶν 'Ακαδη-ιῶν, Δημοσίων ὑπηρεσιῶν ἢ διαφόρων Σχολῶν ὅπου τεῖται πρὸς ἐξέτασιν καὶ τὸ μάθημα τῆς 'Αριθμητικῆς.

Β' ΕΚΔΟΣΙΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1955

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν ἀμφοτέρων τῶν συγγραφέων.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ μεγάλη ζήτησις καὶ ἡ ἐξάντλησις τῶν ἀντιτύπων τῆς πρώτης ἐκδόσεως τοῦ βιβλίου τῆς Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς ἡμῶν καὶ τὰ εὐμενῆ σχόλια, διὰ τὴν ὕλην καὶ τὴν ἐπιλογὴν τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων, προερχόμενα ἐκ συναδέλφων καὶ ἄλλων, οἵτινες ἐχρησιμοποίησαν τὸ βιβλίον τοῦτο, μᾶς ἐνεθάρρυναν καὶ προέβημεν εἰς δευτέραν ἔκδοσιν αὐτοῦ.

Ἡ νέα ἔκδοσις, βελτιωμένη εἴς τε τὴν θεωρίαν καὶ τὰ προβλήματα, θέλει καταστήσει τὸ βιβλίον τοῦτο ἔτι καταλληλότερον διὰ τὸν σκοπὸν δι' ὃν ἐξεδόθη, ἤτοι, διὰ τὴν καλλιτέραν κατάρτισιν τῶν ὑποψηφίων εἰς τὸ μάθημα τοῦτο διὰ τὴν συμμετοχήν των εἰς διαγωνισμοὺς Τραπεζῶν, Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν, Δημοσίων Ὑπηρεσιῶν ἢ διαφόρων ἄλλων Σχολῶν.

Ἀθῆναι, Ἀπρίλιος 1955

Ν. ΚΟΡΩΝΗΣ—Σ. ΚΑΡΑΚΑΣΗΣ

ΜΕΡΟΣ Α'. -ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'. — ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. — Ἀριθμητική. — Ἀριθμός. — Ποσά.

Ἀριθμητικὴ εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῶν ἀριθμῶν.

Αὕτη μᾶς κάνει νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν καὶ μᾶς δίδει τοὺς κανόνας διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἢ τῶν ζητουμένων.

Ἀριθμὸς λέγεται τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ διὰ τῆς μονάδος του ἢ ***ἀριθμὸς εἶναι*** μία ἔννοια παριστῶσα πλῆθος μονάδων.

Ποσὸν καλεῖται πᾶν ὅτι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν, ἢ πᾶν τοῦ ὁποίου ὑπάρχει μεγαλύτερον ἢ μικρότερον.

π.χ. τὸ μῆκος ἑνὸς δρόμου, ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ἀγροῦ, ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν ἑνὸς σχολείου, ὁ ἀριθμὸς μήλων κλπ.

Ὑπάρχουν δύο εἰδῶν ποσά· τὰ ***συνεχῆ*** καὶ τὰ ***ἀσυνεχῆ***.

Συνεχῆ ποσὰ εἶναι ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπὸ μέρη ποὺ δὲν διακρίνονται ἐκ τῆς φύσεως π.χ. τὸ μῆκος, ἡ ἐπιφάνεια κλπ.

Ἀσυνεχῆ ποσὰ εἶναι ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἀπὸ μέρη ποὺ διακρίνονται ἐκ τῆς φύσεως π.χ. ποσὸν μήλων, ποσὸν μαθητῶν κλπ.

2. — Μονάς. — Ἀρίθμησις καὶ μέτρησις ποσοῦ

Ἡ μονὰς εἶναι ὡρισμένη ἐκ τῆς φύσεως διὰ τὰ ἀσυνεχῆ ποσά, ἐνῶ διὰ τὰ συνεχῆ εἶναι αὐθαίρετος ἐκλεγομένη κατὰ βούλησιν ὑπὸ τῶν ἀνθρώπων.

Τὰ ἀσυνεχῆ ποσὰ τὰ ***ἀριθμοῦμεν*** (ἕνα, δύο, τρία θρανία, πέντε μαθηταὶ κλπ.), ἐνῶ τὰ συνεχῆ τὰ ***μετροῦμεν*** συγκρίνοντας αὐτὰ μὲ ὁμοειδῆ μονάδα· π.χ. διὰ νὰ μετρήσωμεν μῆκος λαμβάνομεν ὡς μονάδα ἕνα ὡρισμένον μῆκος (μέτρον, πῆχυν κλπ.).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἐπιφάνειαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα τετράγωνον μὲ πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους (π.χ. τετρ. μέτρον, τετρ. πῆχυν κλπ.).

3. – Εἴδη ἀριθμῶν.

Ὅταν μετροῦμεν ἕνα ποσὸν δύναται τοῦτο νὰ περιλαμβάνῃ.

α) Τὴν μονάδα του ἀκριβῶς μίαν ἢ πολλὰς φοράς.

β) Ἕνα ἢ πολλὰ μέρη τῆς μονάδος του διαιρεθείσης εἰς ἴσα μέρη.

γ) Τὴν μονάδα πολλὰς φορὰς καὶ ἐπὶ πλέον ἕνα ἢ πολλὰ μέρη τῆς εἰς ἴσα μέρη διαιρεθείσης μονάδος του.

Ἐκ τῶν ἄνω συνάγομεν ὅτι ***ὑπάρχουν τριῶν εἰδῶν ἀριθμοί,*** οἱ ἀκέραιοι, τὰ κλάσματα καὶ οἱ μικτοί.

Ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις περιέχει ἀκριβῶς τὴν ἀκεραίαν μονάδα μίαν ἢ περισσοτέρας φοράς, π. χ. 5 μέτρα, 2 θρανία.

Κλασματικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις περιέχει ἕνα ἢ περισσότερα μέρη τῆς μονάδος διαιρεθείσης εἰς ἴσα μέρη π.χ. $\frac{3}{5}$ τοῦ μήλου.

Μικτὸς ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλασματικὸν μέρος· π.χ. $5\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως.

Διακρίνομεν ὡσαύτως τοὺς ἀριθμοὺς εἰς συγκεκριμμένους καὶ ἀφῃρημένους, ἐπίσης εἰς ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς, ἴσους καὶ ἀνίσους.

Συγκεκριμμένος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα τῆς μονάδος εἶναι ὡρισμένον· π.χ. 10 μαθηταί, 20 θρανία.

Ἀφῃρημένος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα τῆς μονάδος δὲν εἶναι ὡρισμένον· π.χ. 10, 20, 90 κλπ.

Ὁμοειδεῖς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ ἐκεῖνοι ποὺ παριστῶσι τὰ αὐτὰ πράγματα· π.χ. θρανία, δραχμὰς κλπ.

Ἑτεροειδεῖς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι παριστῶσι διάφορα πράγματα.

Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοὶ ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων ***καὶ ἄνισοι*** ὅταν δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'. — ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

4. —'Αρίθμησις

'Αρίθμησις εἶναι τὸ μέρος τῆς ἀριθμητικῆς, τὸ ὁποῖον ἐξετάξει τὴν ὀνομασίαν καὶ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν.

Ἡ ἀρίθμησις εἶναι δύο εἰδῶν, προφορικὴ καὶ γραπτή.

5. —Προφορικὴ ἀρίθμησις

Οἱ ἄνθρωποι ἔδωσαν ἰδιαιτέραν ὀνομασίαν διὰ τοὺς μέχρι τοῦ ἐννέα ἀριθμούς· ἕνα, δύο, τρία, ... ὀκτώ, ἐννέα.

Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας καὶ λέγονται οὗτοι ***ἀριθμοὶ πρώτης τάξεως***.

Ὅταν εἰς τὸν ἐννέα προσθέσωμεν μίαν μονάδα ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν δέκα.

Ὁ ἀριθμὸς δέκα ἐλήφθη ὡς νέα μονὰς καὶ ὠνομάσθη ***μία δεκὰς ἢ μονὰς δευτέρας τάξεως***. Τὸ εἴκοσι, τριάντα . . . . ἐνενῆντα εἶναι ἀριθμοὶ δευτέρας τάξεως.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρέθησαν οἱ ἀριθμοὶ τῆς τρίτης, τετάρτης, πέμπτης κ.ο.κ. τάξεως καὶ οὕτω μὲ ὀλίγας λέξεις:

ἕνα, δύο . . . . ἐννέα (ἀριθμοὶ πρώτης τάξεως) 9 λέξεις,
δέκα, εἴκοσι . . . . ἐνενῆντα (ἀριθμοὶ δευτέρας τάξεως) 9 λέξεις,
ἑκατό, διακόσια... ἐννεακόσια (ἀριθμοὶ τρίτης τάξεως) 9 λέξεις,
χίλια, ἑκατομμύριον, δισεκατομμύριον κλπ. 3 λέξεις,

ἤτοι μὲ τριάντα περίπου λέξεις κατώρθωσαν οἱ ἄνθρωποι νὰ συνεννοοῦνται διὰ τὴν παράστασιν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ.

6. —Γραπτὴ ἀρίθμησις

Ἡ γραπτὴ ἀρίθμησις εἶναι ἡ τέχνη τοῦ νὰ παρίστανται οἱ ἀριθμοὶ διὰ συμβόλων, τὰ ὁποῖα ὠνομάσθησαν ***ψηφία***. Τὰ σύμβολα ταῦτα εἶναι:

1 (ἕνα), 2 (δύο), 3 (τρία). 4 (τέσσαρα), 5 (πέντε), 6 (ἕξ), 7 (ἑπτά), 8 (ὀκτώ), 9 (ἐννέα), 0 (μηδέν).

Τὰ ψηφία ἀπὸ τὸ 1 μέχρι καὶ τοῦ 9 λέγονται καὶ ***σημαντικὰ ψηφία***.

7.—Προϋπόθεσις γραπτῆς ἀριθμήσεως.

Πᾶν ψηφίον γραφόμενον ἀριστερὰ ἑνὸς ἄλλου παριστᾷ μονάδας κατὰ δέκα φορὰς μεγαλυτέρας τῶν μονάδων αὐτοῦ.

Οὕτω π.χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 7295 τὸ 5 παριστᾶ ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 9 παριστᾷ δεκάδας (κάθε μονὰς τῶν δεκάδων περιέχει 10 ἁπλᾶς μονάδας), τὸ 2 παριστᾶ ἑκατοντάδας (κάθε μονὰς τῶν ἑκατοντάδων περιέχει 10 μονάδος τῶν δεκάδων), τὸ 7 παριστᾶ χιλιάδας (κάθε μονὰς τῶν χιλιάδων περιέχει 10 μονάδας τῶν ἑκατοντιάδων).

Ἑπομένως ἐκ τῶν ἄνω ἐξάγεται α) ὅτι διὰ τῶν ὡς ἄνω δέκα συμβόλων κατωρθώθη ἡ παράστασις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου καὶ β). Ὅτι διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἁπλῶν μονάδων χρειάζεται ἓν ψηφίον, τῶν δεκάδων χρειάζονται δύο ψηφία, τῶν ἑκατοντάδων χρειάζονται τρία, τῶν χιλιάδων χρειάζονται τέσσαρα ψηφία κ.ο.κ.

8.—Ἀπαγγελία ἀριθμῶν.

Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἕνα ἀριθμὸν χωρίζομεν τοῦτον συνήθως εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

π.χ. 21.573.567

Τὸ 567 παριστᾶ πρωτευούσας μονάδας 1ης τάξεως ἢ ἁπλᾶς μονάδας, τὸ 573 παριστᾶ πρωτευούσας μονάδας 2ας τάξεως ἢ χιλιάδας, τὸ 21 παριστᾶ πρωτευούσας μονάδας 3ης τάξεως ἢ ἑκατομμύρια.

Ἀπαγγέλλεται δὲ οὗτος ὡς ἑξῆς, 21 ἑκατομμύρια, 573 χιλιάδες, 567 μονάδες.

Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἀρχίζομεν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Οὕτω π.χ. νὰ γραφῇ ὁ ἀριθμὸς τρία ἑκατομμύρια, ὀκτὼ χιλιάδας δέκα πέντε.

Οὗτος κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς 3.008.015.

9.—Συνέπεια βάσεως ἀριθμήσεως.

Συνεπεία τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν § 7, ἕνας ἀριθμὸς γίνεται 10,100 κλπ. φορὰς μεγαλύτερος ἑνὸς ἄλλου ἂν θέσωμεν ἕνα ἢ δύο . . . μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

Ἐπίσης ἕνας ἀριθμὸς λήγων εἰς μηδενικὰ γίνεται 10, 100, 1000.... φορὰς μικρότερος ἄλλου, ἂν διαγράψωμεν ἕνα, δύο, τρία . . . . μηδενικὰ αὐτοῦ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

10. – Δεκαδικὸν σύστημα γραφῆς ἀριθμῶν.

Τὸ ἐν παραγράφῳ 7 σύστημα τῆς ἀριθμήσεως, ἤτοι, τὸ σύστημα καθ' ὃ αἱ μονάδες μιᾶς τάξεως εὑρισκομένης ἀριστερὰ μιᾶς ἄλλης περιέχουν δέκα μονάδας τῆς ἄλλης δεξιὰ κειμένης τάξεως, ὠνομάσθη ***δεκαδικὸν σύστημα*** καὶ εἶναι τὸ καλύτερον καὶ τὸ ἁπλούστερον ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων συστημάτων, τὰ ὁποῖα ἐπεννόησαν οἱ ἄνθρωποι διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν.

11.—Ἑλληνικὸν σύστημα γραφῆς ἀριθμῶν.

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες διὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν μετεχειρίζοντο τὰ γράμματα τῆς ἀλφαβήτου διαιρέσαντες ταύτην εἰς τρία μέρη, ἤτοι μὲ α—θ παρίστανον τὰς μονάδας, 8 γράμματα
» ι—π » » δεκάδας 8 »
» ρ—ω » » ἑκατοντ. 8 »

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ Ἑλληνικὴ ἀλφάβητος ἔχει 24 γράμματα καὶ ἔπρεπε νὰ εἶχον 27 γράμματα, ἤτοι ἐννέα γράμματα εἰς ἑκάστην τάξιν προσέθεσαν εἰς μὲν τὴν πρώτην τὸ ς (στίγμα), εἰς τὴν δευτέραν τὸ ϟ (κόπα) καὶ εἰς τὴν τρίτην τὸ ϡ' (σαμπί).

Ὅταν τὰ γράμματα παρίστανον ἀριθμοὺς ἐλάμβανον ἕνα τόνον π.χ.

Μονάδες		Δεκάδες		Ἑκατοντάδες	
1	α'	10	ι'	100	ρ'
2	β'	20	κ'	200	σ'
3	γ'	30	λ'	300	τ'
4	δ'	40	μ'	400	υ'
5	ε'	50	ν'	500	φ'
6	ς'	60	ξ'	600	χ'
7	ζ'	70	ο'	700	ψ'
8	η'	80	π'	800	ω'
9	θ'	90	ϟ'	900	ϡ'

Μὲ τὰ ὡς ἄνω γράμματα παρίστανον ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μέχρι τὸ 999. Τὰς μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας χιλιάδων παρίστανον μὲ τὰ αὐτὰ γράμματα ἀλλὰ μὲ τὸν τόνον κάτω ἀριστερά.

π.χ. 3000=͵γ ͵ι=10.000 ͵ϡ=900.000

Ἐπίσης εἶχον καὶ τὴν λέξιν μύριοι =10.000.

Παραδείγματα. 1947 = ͵αϡμζ', 32=λβ'

996 = ϡϟϛ', 145 = ρμε'

11 = ια' 16 = ιϛ'

12. – Ρωμαϊκὸν σύστημα γραφῆς ἀριθμῶν.

Οἱ Ρωμαῖοι ἐχρησιμοποίουν ὡς ψηφία ἑπτὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

καὶ ἐσχημάτιζον τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας:

α) Πᾶν ψηφίον τοποθετούμενον δεξιὰ μεγαλυτέρου του ἢ ἴσου προστίθεται εἰς αὐτό· π. χ. XX = 20, XV = 15, CX = 110.

β) Πᾶν ψηφίον τοποθετημένον ἀριστερὰ ἑνὸς ψηφίου μεγαλυτέρου του ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτό· π. χ. IX = 9, XC = 90, CM = 900.

γ) Πᾶν ψηφίον τοποθετημένον μεταξὺ δύο ψηφίων ὧν αἱ μονάδες εἶναι ἀνωτέρας τάξεως αὐτοῦ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου· π.χ. XIX = 19, CIX = 109, LIV = 54.

δ) Ἀριθμὸς ἄνωθεν τοῦ ὁποίου γράφεται μία εὐθεία παριστᾷ χιλιάδας, δύο εὐθεῖαι παριστᾷ ἑκατομμύρια, τρεῖς εὐθεῖαι δισεκατομμύρια.

π.χ. $\overline{\mathrm{IV}}$=4.000, $\overline{\overline{\mathrm{XIX}}}$ = 19.000.000, $\overline{\overline{\overline{\mathrm{C}}}}$ = 100.000.000.000.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'. — ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

13. – Ἀρχικοὶ ὁρισμοί.

Ἀριθμητικαὶ πράξεις ἐν τῇ ἀριθμητικῇ καλοῦνται αἱ διάφοροι ἐναλλαγαὶ ποὺ πρέπει νὰ κάνουμε εἰς τοὺς ἀριθμοὺς διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα.

Ὑπάρχουν 4 βασικαὶ πράξεις, ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις. Ὡσαύτως εἶναι ***καὶ ἡ ἐξαγωγὴ ρίζης.***

Εἰς ἑκάστην πρᾶξιν ὑπάρχουν πέντε πράγματα ποὺ ἐξετάζονται συνήθως.

α) Ὁ ***Ὁρισμός,*** ὅστις μᾶς κάνει νὰ γνωρίζωμεν τὸν σκοπὸν τῆς πράξεως.

β) ***Ὁ Κανών,*** ὅστις δίδει τὴν μέθοδον ποὺ πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν ἐπιδιωκόμενον σκοπόν.

γ) ***Ἡ ἀπόδειξις,*** ἥτις εἶναι σειρὰ συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι ἄγουν εἰς τὸ ποθούμενον.

δ) ***Τὸ ἀποτέλεσμα,*** ὅπερ μᾶς δίδει τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

ε) ***Ἡ ἐπαλήθευσις ἢ δοκιμὴ*** ἥτις εἶναι μία ἄλλη πρᾶξις διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης πράξεως, ποὺ μᾶς ἔδωσε τὸ ἀποτέλεσμα, δηλαδὴ διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν ἡ πρώτη πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

14.– Σημεῖα τιθέμενα μεταξὺ ἀριθμῶν.

Διὰ νὰ σημειώνωμεν τὰς πράξεις καὶ διὰ νὰ ἐκφράζωμεν τὰς σχέσεις τῶν ἀριθμῶν μεταξύ των χρησιμοποιοῦμεν διάφορα ***σύμβολα ἢ σημεῖα*** τιθέμενα μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν.

Τὰ κυριώτερα τῶν σημείων τούτων εἶναι:

Τὸ σημεῖον $+$ ***σύν.*** Εἶναι τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως.
» » $-$ ***μεῖον ἢ πλήν.*** Εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως,
» » $\times$ ***ἢ. ἐπὶ*** » » » τοῦ πολ)σμοῦ
» » : ***διὰ*** » » » τῆς διαιρέσεως
» » $=$ ***ἴσον*** » » » τῆς ἰσότητος
» » $>$ » » » τῆς ἀνισότητος

Εἰς τὸ κοῖλον τῆς γωνίας γράφεται ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός· π.χ. $10 > 7$ ἢ $4 < 9$.

Ἐπίσης ὑπάρχει καὶ ἡ ***παρένθεσις*** ( ) ἡ ὁποία σημαίνει ὅτι τὰ ἐντὸς αὐτῆς ποσὰ θεωροῦνται συνήθως ὡς ἓν ποσόν.

15.– Ὁρισμοὶ θεωρήματος, ἀξιώματος κλπ.

Διὰ τὰς ἀποδείξεις στηριζόμεθα εἰς ἀποδειχθέντα θεωρήματα ἢ εἰς ἀξιώματα.

Θεώρημα εἶναι μία πρότασις, ἥτις ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως.

᾿Αξίωμα εἶναι μία πρότασις, ἥτις εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά, ***Τὰ κυριώτερα ἀξιώματα ἅτινα χρησιμοποιοῦμεν ἐν τῇ ἀριθμητικῇ εἶναι :***

α) Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τῶν μερῶν του.

β) Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του.

γ) Δύο ποσὰ ἴσα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ ἀναμεταξύ των ἴσα.

δ) ᾿Εὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἡ ἰσότης παραμένει καὶ ἂν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς πάλιν ἡ ἰσότης παραμένει· καὶ

ε) ῎Αν πολλαπλασιάσωμεν δύο ἴσους ἀριθμοὺς ἐπὶ ἄλλους ἴσους θὰ ἔχωμεν πάλιν ἴσους.

Πόρισμα καλεῖται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ἐξάγεται ἀμέσως ἐξ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἀποδειχθέντων ἤδη θεωρημάτων.

Πρόβλημα καλεῖται μία πρότασις πρὸς λύσιν.

Σκοπὸς τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ εὕρεσις ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ζητουμένων ἀγνώστων ἀριθμῶν διὰ τῆς ἐκτελέσεως πράξεων ἐπὶ δοθέντων γνωστῶν ἀριθμῶν.

Λύσις προβλήματος καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων ἀριθμῶν, οἵτινες ἁρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα. ***῾Απλοῦν*** λέγεται τὸ πρόβλημα ὅταν διὰ μιᾶς μόνον πράξεως εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον. ***Σύνθετον*** λέγεται τὸ πρόβλημα ὅταν τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται κατόπιν πολλῶν πράξεων.

Τύπος λέγεται μία ἰσότης παρισταμένη διὰ γραμμάτων ἥτις ἐκφράζει μίαν γενικὴν σχέσιν. Π.χ. ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω ὁ τῦπος τῆς τελείας διαιρέσεως εἶναι $\Delta = \delta \times \pi$.

16. – Πρόσθεσις

Πρόσθεσις καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὅστις περιέχει τόσας μονάδας ὅσας ὅλοι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ μόνον ταύτας.

Παραδείγματα προσθέσεως ἀριθμῶν. Κυρίως εἰς τὴν πρόσθεσιν πρέπει νὰ προσέχωμεν ὥστε οἱ ἀριθμοὶ νὰ γράφωνται κανονικῶς ἤτοι αἱ μονάδες κάτωθι τῶν μονάδων, αἱ δεκάδες κάτωθι τῶν δεκάδων κ.ο.κ.

153		2.828	
8	+	708	*προσθετέοι*
161		218	
		1.250	
		5.004	*ἄθροισμα ἢ ἐξαγόμενον*

Δοκιμὴ προσθέσεως α) Ἐὰν ἐπροσθέσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, προσθέτομεν καὶ ἄλλην φορὰν τούτους ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. β) Ἂν ἔχομεν πολλοὺς προσθετέους χωρίζομεν τούτους εἰς τμήματα καὶ ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν τμημάτων προσθέτομεν εἶτα ταῦτα καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γενικὸν ἄθροισμα.

17. — Ἀφαίρεσις.

Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις καθ' ἣν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν κατὰ τόσας μονάδας ὅσας ἔχει ὁ ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Διαφορὰ ἢ ὑπόλοιπον λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν μικρότερον διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μεγαλύτερον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδείγματα ἀφαιρέσεως

1.594 —	*μειωτέος*	7.342 —
323	*ἀφαιρετέος*	1.054
1.271	*διαφορὰ ἢ ὑπόλοιπον*	6.288

Δοκιμὴ ἀφαιρέσεως α) Προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον μὲ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἂν εὕρωμεν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν μειωτέον τότε ἡ πρᾶξις ἐγένετο χωρὶς λάθος.

β) Ἀφαιροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον ἐγένετο καλῶς ἡ πρᾶξις.

18. Ἰδιότητες Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

α) Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους. (Ἰδιότης ***ἀδιαφορίας ἢ ἀντιμεταθέσεως***).

π.χ. $2+5+8=8+2+5$

β) Τὸ ἄθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά των (Ἰδιότης ***ἀντικαταστάσεως—συνθετική)***.

π.χ. $5+\mathit{8}+\mathit{2}+4=5+\mathit{10}+4$

γ) Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον τινὰ μὲ ἄλλους ἀριθμούς, ποὺ ἔχουν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα. (Ἰδιότης ***ἀντικαταστάσεως—ἀναλυτική)***.

π.χ. $5+\mathit{12}+3=5+\mathit{8}+\mathit{4}+3$

δ) Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀρκεῖ νὰ τοὺς προσθέσωμεν διαδοχικῶς.

π.χ. $5+(7+2)=(5+7)+2$

ε) Ἄθροισμα ἀθροισμάτων εὑρίσκεται ἂν σχηματίσωμεν ἓν ἄθροισμα ἐξ ὅλων τῶν προσθετέων τῶν δοθέντων ἀθροισμάτων.

π.χ. $(5+3+8)+(6+4)=5+3+8+6+4$

στ) Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον.

π.χ. $18+(7-4)=18+7-4$

ζ) Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀπὸ ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τοὺς προσθετέους αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἀριθμόν.

π.χ. $30-(8+12)=(30-8)-12$

η) Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν μειωτέον καὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸν ἀφαιρετέον.

π.χ. $30-(12-8)=(30-12)+8$

ϑ) Ὅταν προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των ἔχομεν τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ καὶ ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των ἔχομεν τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ.

π.χ. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 30 καὶ 12.

$30+12=\boldsymbol{42}, \quad 42+18=60=2\times 30$ } δηλαδὴ τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου

$30-12=\boldsymbol{18}, \quad 42-18=24=2\times 12$ } τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου

ι) Ἂν αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τὸ ὑπόλοιπον μένει τὸ αὐτό.

π.χ. $18-12=6$ ἢ $18-12=6$

$(18+5)-(12+5)=6 \quad (18-5)-(12-5)=6$

19.—Πολλαπλασιασμός.

Γινόμενον δύο ἀριθμῶν καλεῖται τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τόσους προσθετέους ἴσους μὲ τὸν πρῶτον ἀριθμόν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος δοθεὶς ἀριθμός.

π. χ. $15\times 4 = 15+15+15+15=60$

Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις καθ' ἣν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Παραδείγματα πολ)σμοῦ

37	63	250	726	πολλαπλ)στέος	} παράγοντες
× 3	2000	300	12	πολ)στής	
111	126.000	75.000	1452	} μερικὰ γινόμενα	
			726		
			8712	γινόμενον ἢ ἐξαγόμενον	

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου προκύπτει, ὅτι ***τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὅμοιον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον.*** Ἤτοι θὰ ἂν ὁ πολλαπλασιαστέος παριστᾷ δραχμὰς καὶ τὸ γινόμενον θὰ παριστᾷ δραχμάς, ἢ ἂν ὁ πολλαπλασιαστέος παριστᾷ μέτρα καὶ τὸ γινόμενον θὰ παριστᾷ μέτρα.

Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου προκύπτουν καὶ τὰ ἑξῆς: $25\times 1=1\times 25=25$ καὶ $12\times 0=0\times 12=0$. Ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς πολ)ζόμενος ἐπὶ τὴν μονάδα μᾶς δίδει γινόμενον τὸν ἑαυτόν του καὶ πολ)ζόμενος ἐπὶ μηδὲν μᾶς δίδει γινόμενον ***μηδέν.***

Δοκιμὴ πολλαπλασιασμοῦ. α) Ἀλλάσσομεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ πολλαπλασιάζοντες πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον.

β) Ἡ ἐν § 29 ἀναφερομένη.

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ. α) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000, κλπ. ἤτοι ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικὰ ὅσα ἔχει ἡ μονάς.

π.χ. $325 \times 100 = 32500$, $905 \times 1000 = 905.000$

β) Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμούς, ὡς πολλαπλασιαστὴν λαμβάνομεν πάντοτε τὸν ἔχοντα ὀλιγώτερα σημαντικὰ ψηφία, διότι οὕτω θὰ ἔχωμεν ὀλιγώτερα μερικὰ γινόμενα.

γ) Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 καὶ διαιροῦμεν διὰ 2.

π.χ. $426 \times 5 = 4260 : 2 = 2130$.

δ) Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 25 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ 4.

π.χ. $245 \times 25 = 24500 : 4 = 6125$

ε) Ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἕνα ἄλλον, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶναι τὸ 9 γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου τόσα μηδενικά, ὅσα 9 ἔχει ὁ ἄλλος καὶ ἀπὸ τὸν εὑρεθέντα νέον ἀριθμὸν ἀφαιροῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον.

π.χ. $745 \times 999 = 745000 - 745 = 744.255$

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ***α)*** μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ***β)*** μᾶς δίδεται ἕνας ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται ἕνα πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Π. χ. Ἡ μία ὀκᾶ λάδι ἔχει 19 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἔχουν ἡ 5 ὀκόδες ; ***Λύσις :*** $19 \times 5 = 95$ δρχ.

Πόσον εἶναι τὸ 8πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 125; ***Λύσις :*** $125 \times 8 = 1000$.

Τρόπος πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμῶν ὑπὸ Ἀγγλοφώνων λαῶν.

α) Ὑπὸ Ἑλλήνων, Ἰταλῶν Γάλλων κλπ.		β) Ὑπὸ Ἀγγλοφώνων λαῶν.
38.456	Πολλαπλασιαστέος	38.456
425	Πολλαπλασιαστὴς	425
192280 = 38.456 × 5		153824 = 38456 × 400
76912 = » × 20		76912 = » × 20
153824 = » × 400		192280 = » × 5
16343800		16343800

Δηλαδὴ ἐνῶ ἡμεῖς ἀρχίζομεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὸ δεξιὰ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐκεῖνοι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Τοῦτο ὅμως δὲν ἔχει καμμίαν σημασίαν, ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ ἄνω παραδείγματος.

20.— Ἰδιότητες πολλαπλασιασμοῦ.

α) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

π.χ. $(6+4)\times 3=(6\times 3)+(4\times 3)=18+12=30.$

β) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ὅρον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

π.χ. $(8-5)\times 4=(8\times 4)-(5\times 4)=32-20=12.$

γ) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐφ᾿ ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

π.χ. $5\times(3+8)=(5\times 3)+(5\times 8)=15+40=55$

δ) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ διαφορὰν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐφ᾿ ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς διαφορᾶς καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

π.χ. $5\times(8-3)=(5\times 8)-(5\times 3)=40-15=25$

ε) Ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ πρώτου ἀθροίσμασος ἐφ᾿ ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ δευτέρου καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

π.χ. $(5+3)\times(4+6)=(5\times 4)+(5\times 6)+(3\times 4)+(3\times 6)=$
$20+30+12+18=80$

21.—Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὀνομάζομεν τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου παράγοντος.

Ἰδιότητες* : *α) Εἰς πᾶν γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λάβωμεν τοὺς παράγοντας θὰ ἔχωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. (Ἰδιότης τῆς ἀδιαφορίας ἢ ἀντιμεταθέσεως). π.χ. $5\times3\times2\times7=3\times7\times2\times5$

Ὁμοίως $1\times25=25\times1=25$, $25\times0=0\times25=0$

β) Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἐξαγόμενον. (Ἰδιότης Ἀντικαταστάσεως—συνθετική). π.χ. $5\times3\times2\times4=5\times6\times4$

γ) Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀντικαταστήσωμεν παράγοντά τινα μὲ ἄλλους ποὺ ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον (Ἰδιότης Ἀντικαταστάσεως—ἀναλυτική) π.χ. $3\times8\times7=3\times2\times4\times7$

δ) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.

π.χ. $(5\times3\times7)\times6=5\times18\times7$

ε) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ γινόμενον παραγόντων, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διαδοχικῶς.

π.χ. $12\times(4\times7)=12\times4\times7$

στ) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν διαδοχικῶς ἐπὶ περισσοτέρους ἄλλους, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν.

π.χ. $15\times3\times7\times2=15\times(3\times7\times2)=15\times42$

ζ) Γινόμενον γινομένων εὑρίσκεται ἂν σχηματισθῇ ἓν γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν παραγόντων τῶν δοθέντων γινομένων.

π. χ. $(4\times5\times8)\times(2\times3)=4\times5\times8\times2\times3$

22. Δυνάμεις.

1) ***Δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται*** τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

τὸ γιν. 5×5 λέγεται δύναμις τοῦ 5 καὶ γράφεται συμβολικῶς 5^2,
τὸ γιν. $2\times2\times2$ » δύναμις » 2 » » » 2^3,
τὸ $3\times3\times3\times3$ » δύναμις » 3 » » » 3^4.

Τὸ 5^2 ἀπαγγέλλεται 5 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν ἢ 5 εἰς τὸ τετράγωνον, το 2^3 ἀπαγγέλλεται 2 εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ἢ 2 εἰς τὸν κῦβον ἢ 2 κῦβος, τὸ 3^4 ἀπαγγέλεται 3 εἰς τὴν τετάρτην ἢ τετάρτη δύναμις τοῦ 3.

Εἰς τὴν δύναμιν π. χ. 10^4 τὸ 10 λέγεται ***βάσις*** καὶ τὸ 4 ***ἐκθέτης*** παριστᾷ δὲ οὗτος τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων.

Πᾶς ἀριθμὸς μὴ ἔχων ἐκθέτην ὑποτίθεται ἔχων ἐκθέτην τὴν μονάδα ἤτοι ὅτι τὸ $4=4^1$, $12=12^1$ κ.ο.κ.

2) ***Ἰδιότητες Δυνάμεων.*** Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ ἐκθέτου.

π. χ. $10^3=10\times10\times10=1000$ ἢ $10^6=1.000.000$

α) Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων τοῦ ***αὐτοῦ ἀριθμοῦ*** εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην **τὸ** ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

π. χ. $2^3\times2^5=2^{3+5}=2^8$

β) Δύναμις ἀριθμοῦ τινος ὑψουμένη εἰς ἄλλην δύναμιν μᾶς δίδει δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

π. χ. $(3^2)^4=3^{2\times4}=3^8$

γ) Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

π. χ. $(2\times4^3\times5^2)^2=2^2\times(4^3)^2\times(5^2)^2=2^2\times4^6\times5^4$

23. Διαίρεσις.

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον μᾶς δίδει τὸν πρῶτον.

Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν συμβαίνει πάντοτε τοῦτο, δι' ὃ καὶ ἔχομεν τὴν ***τελείαν*** καὶ ***ἀτελῆ*** διαίρεσιν.

Διακρίνομεν δύο εἴδη διαιρέσεως α) ***Τὴν διαίρεσιν μερισμοῦ,*** καθ' ἥν δοθέντων δύο ἀριθμῶν χωρίζομεν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Π. χ. νὰ μοιρασθοῦν 20 καρύδια εἰς 5 παιδιά. Πόσα θὰ λάβη ἕκαστον;

καὶ β) ***Τὴν διαίρεσιν μετρήσεως,*** καθ' ἥν δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν πόσας φορὰς ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν χωρεῖ εἰς τὸν ἄλλον.

Π. χ. ἡ 1 ὀκᾶ μῆλα τιμᾶται 6 δραχ. Πόσας ὀκάδας μῆλα θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 24 δραχμάς;

Παραδείγματα διαιρέσεως

32	8
0	4

Διαιρετέος	863512	3547	Διαιρέτης
	15411	243	πηλίκον
	12232		
	1591	ὑπόλοιπον	

Ἐκ τῶν ἄνω παραδειγμάτων καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως ἐξάγονται τὰ ἑξῆς:

$$4 \times 8 = 32 \text{ καὶ } 243 \times 3547 + 1591 = 863512.$$

Γενικῶς ἂν παραστήσωμεν μὲ Δ = Διαιρετέος, δ=διαιρέτης, π=πηλῖκον καὶ υ=ὑπόλοιπον, τότε

διὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν τὸν τύπον $\Delta = \delta \times \pi$

καὶ » » ἀτελῆ » » » » $\Delta = \delta \times \pi + \upsilon$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως ἐξάγονται

α) $0 : 12 = 0$, διότι $0 \times 12 = 0$

β) $14 : 0 =$ ἀδύνατος ἡ διαίρεσις, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, πηλίκον, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ 0 νὰ μᾶς δίδη τὸν διαιρετέον 14.

Δοκιμὴ διαιρέσεως α) Πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ὑπάρχη.

Ἂν οὕτω εὕρωμεν τὸν διαιρετέον ἡ πρᾶξις ἔγινε καλῶς.

β) Ἡ ἐν § 29 ἀναφερομένη.

Τρόπος διαιρέσεως ἀριθμῶν ὑπὸ Ἀγγλοφώνων Λαῶν

α) Ὑπὸ Ἑλλήνων, Γάλλων, Ἰταλῶν καὶ ἄλλων λαῶν

Διαιρ. 5842	32	διαιρέτης
264	182	πηλίκον
82		
18	ὑπόλοιπον	

β) Ὑπὸ Ἀγγλοφώνων λαῶν

	182	πηλίκον
διαιρέτης 32)	5842	Διαιρετέος
	264	
	82	
	18	ὑπόλοιπον

24.—Ἰδιότητες διαιρέσεως.

α) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ***ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ*** ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ πηλίκα.

π.χ. $(10+15+25):5=(10:5)+(15:5)+(25:5)=2+3+5=10$

β) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ***διαφορὰν δι' ἀριθμοῦ***, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τῆς διαφορᾶς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ μερικὰ πηλίκα.

π.χ. $(27-15):3=(27:3)-(15:3)=9-5=4$

γ) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ***γινόμενον παραγόντων δι' ἀριθμοῦ***, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.

π.χ. $(5\times6\times12):3=5\times(6:3)\times12=5\times2\times12=120$

δ) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ***γινόμενον παραγόντων δι' ἑνὸς παράγοντός του***, ἀρκεῖ νὰ ἀπαλείψωμεν τοῦτον.

π.χ. $(5\times6\times10):6=5\times(6:6)\times10=5\times1\times10=5\times10=50$

ε) Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ ***αὐτοῦ ἀριθμοῦ*** εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν.

π.χ. $5^6:5^4=5^{6-4}=5^2=5\times5=25$

στ) Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

π.χ. $\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$ καὶ $(35\times2):(8\times2)$ ἢ $\begin{array}{r|l} 70 & 16 \\ \hline 6 & 4 \end{array}$

ζ) Ὅταν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμσῦ.

π.χ. $\begin{array}{r|l} 52 & 6 \\ \hline \mathit{4} & 8 \end{array}$ καὶ $\begin{array}{r|l} 26 & 3 \\ \hline \mathit{2} & 8 \end{array}$

Ἐκ τῆς ἄνω ἰδιότητος ἐξάγονται τὰ ἑξῆς:

1) Δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν τὸ αὐτὸ πλῆθος μηδενικῶν ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον. π.χ. 48.000 : 2000=48 : 2=24

2) Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ διαιρέτης εἶναι γινόμενα παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας χωρὶς νὰ μεταβληθῇ οὕτω τὸ πηλίκον.

π.χ. $(15\times \mathit{8}\times \mathit{3}\times 10):(4\times 8\times 3)=(15\times 10):4$

η) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ***ἀριθμὸν διὰ γινομένου παραγόντων*** ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοῦτον διὰ τοῦ α΄ παράγοντος, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ β΄ κ.ο.κ. μέχρι τοῦ τελευταίου παράγοντος. π.χ. 240 : (5×6)=(240 : 5) : 6=48 : 6=8

25.—Προβλήματα διαιρέσεως

α) ***Μερισμοῦ. Τιμὴ πολλῶν μονάδων : πολλῶν μονάδων =τιμὴ μιᾶς μονάδος.***

π.χ. Αἱ 5 ὀκ. ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 400 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ;

Λύσις 400 δρχ. : 5=80 δρχ. στοιχίζει ἡ 1 ὀκᾶ.

β) ***Μετρήσεως. Τιμὴ πολλῶν μονάδων : τιμῆς μονάδος =πολλαὶ μονάδες.***

π.χ. Ἡ 1 ὀκᾶ στοιχίζει 80 δρχ. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 400 δρχ.

Λύσις 400 : 80=5 ὀκάδες.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ τὸ πηλίκον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον δηλ. ἂν δραχμὰς παριστᾷ ὁ διαιρετέος, δραχμὰς παριστᾷ καὶ τὸ πηλίκον.

Εἰς τὰ προβλήματα μετρήσεως τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἔχομεν τὴν τιμήν, δηλαδὴ εἰς τὸ ἄνω πρόβλημα ἔχομεν ὅτι ἡ ***1 ὀκᾶ*** στοιχίζει 80 δρχ. ἄρα τὸ πηλίκον 5 θὰ παριστᾷ ὀκάδας.

26. – Διαιρετότης.

Λέγομεν ὅτι ἕνας ἀριθμὸς εἶναι ***διαιρετὸς*** δι᾿ ἄλλου, ὅταν διαιρούμενος δι᾿ αὐτοῦ δὲν ἀφίνει ὑπόλοιπον.

Λέγομεν ὅτι ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖ ἕνα ἄλλον ἀκριβῶς ἢ ὅτι εἶναι ***διαιρέτης*** τούτου, ὅταν διαιρῶν τοῦτον δὲν ἀφίνει ὑπόλοιπον.

π.χ. λέγομεν ὅτι ὁ 30 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 30.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς δι᾿ ἄλλου λέγεται ***πολλαπλάσιον*** τούτου. π. χ. ὁ 30 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἀκριβῶς ἄλλον λέγεται ***ὑποπολλαπλάσιον*** τούτου ἢ ***διαιρέτης τούτου.***

π. χ. ὁ 6 εἶναι διαιρέτης τοῦ 30 ἢ ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 30.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 λέγεται ***ἄρτιος ἀριθμὸς*** καὶ πᾶς ἀριθμὸς μὴ διαιρετέος διὰ 2 λέγεται ***περιττὸς ἀριθμός.***

Σημ. Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

27. Ἰδιότητες τῆς διαιρετότητος

α) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμά των π. χ. $(30+15+5) : 5 = 50 : 5 = 10$

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἐξάγονται καὶ τὰ ἑξῆς :

1) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἄλλον διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ

2) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς δι᾿ ἄλλου εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τῶν ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ.

β) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

γ) » » » τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ καὶ τὸν ἄλλον.

δ) » » » τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διαιρεῖ ὡσαύτως καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

ε) » » » τὸν διαιρέτην καὶ τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεώς τινος, διαιρεῖ καὶ τὸν διαιρετέον.

ϛ) Πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ ὅλους τοὺς ὅρους ἀθροίσματός τινος πλὴν ἑνὸς δὲν διαιρεῖ τὸ ἄθροισμά των, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ ἔχομεν διαιροῦντες τὸν μὴ διαιρούμενον προσθετέον διὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

π. χ. (15+24) : 5=39 : 5 ἀφίνει ὑπόλοιπον 4 ὅσον καὶ ὁ ἀριθμὸς 24 : 5.

28.—Χαρακτῆρες τῆς διαιρετότητος.

Χαρακτῆρες τῆς διαιρετότητος καλοῦνται ὡρισμένα χαρακτηριστικὰ διὰ τῶν ὁποίων κατορθώνομεν νὰ γνωρίζωμεν ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι᾽ ἄλλου χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Πότε ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετός :

α) Διὰ 2 ἢ 5, ὅταν λήγῃ εἰς 0 ἢ ὅταν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5.

π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 24*6* , 35*0* εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2
» » 20*5* , 15*0* » » » 5

Ὁ ἀριθμὸς 48 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, διαιρούμενος δὲ διὰ τούτου ἀφίνει ὑπόλοιπον τόσον, ὅσον καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον διαιρούμενον διὰ 5, δηλ. 3.

β) Διὰ 4 ἢ 25, ὅταν λήγῃ εἰς πλείονα τῶν δύο μηδενικὰ ἢ τὸ τελευταῖον δεξιὰ διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.

π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 275*16*, 6*24* εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4
» » 670*00*, 57*75* » » » 25

Ὁ ἀριθμὸς 67*25* εἶναι διαιρετὸς διὰ 25 ἀλλ᾽ ὄχι διὰ 4.

γ) Διὰ 3 ἢ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ λαμβανομένων ὡς ἁπλῶν μονάδων εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9.

π. χ. ὁ ἀριθμὸς 1269 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 διότι 1+2+6+9=18 εἶναι διαιρετὸν διὰ 3. Ἐπίσης ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 9. Ὁ ἀριθμὸς 6213 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἀλλ᾽ ὄχι καὶ διὰ 9, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 6+2+1+3=12 εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἀλλ᾽ ὄχι διὰ 9.—Ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρούμενος διὰ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3 δηλαδὴ τόσον, ὅσον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 12, διὰ 9.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 εἶναι πάντοτε διαιρετὸς καὶ διὰ 3 διότι τὸ 9 εἶναι πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

δ) Διὰ 8 ἢ 125, ὅταν λήγῃ εἰς πλείονα τῶν τριῶν μηδενικὰ ἢ τὸ τελευταῖον δεξιὰ τριψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125.

π. χ. ὁ ἀριθμὸς *7040* εἶναι διαιρετὸς διὰ 8

» » *2500* » » διὰ 125 ἀλλ' ὄχι διὰ τοῦ 8

ε) Διὰ 11, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων του, ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, εἶναι διαιρετὸν διὰ 11 ***ἢ ὅταν*** ἡ διαφορὰ τῶν ἀθροισμάτων τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ τάξεως περιττῆς καὶ τάξεως ἀρτίας εἶναι 0 ἢ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 11.

π. χ. ὁ ἀριθμὸς 123024 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, διότι τὸ ἄθροισμα 12+30+24=66 εἶναι διαιρετὸν διὰ 11. Ἐπίσης κατὰ τὸν ἄλλον κανόνα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ 11 διότι 4+0+2=6 καὶ 2+3+1=6 καὶ 6—6=0.

Ὡσαύτως καὶ ὁ ἀριθμὸς 64251 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, διότι 1+2+6=9, 5+4=9 καὶ 9—9=0.

Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς 919160 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11 διότι 0+1+1=2 καὶ 6+9+9=24 καὶ 24—2=22, ὅπερ 22 εἶναι διαιρετὸν διὰ 11.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἄνω, δυνάμεθα ἀμέσως καὶ εὐκόλως, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις, νὰ εὕρωμεν ἂν ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς ἢ ὄχι διὰ τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 2 μέχρι 12.

Εἰδικώτερον ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετός:

α) Διὰ 2. Ὅταν τὸ τελευταῖον ψηφίον του εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς ἢ 0.

β) » 3. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, λαμβανομένων ὡς ἁπλῶν μονάδων, εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 3.

γ) » 4. Ὅταν τὸ τελευταῖον διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 4.

δ) » 5. Ὅταν τὸ τελευταῖον φηφίον τοῦ ἀριθμοῦ εἶεαι 0 ἢ 5.

ε) » 6. Ὅταν διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3.

στ) » 7. Δὲν ὑπάρχει χαρακτηριστικόν.

ζ) » 8. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς λήγει εἰς πλείονα τῶν τριῶν μηδενικῶν ἢ ὅταν τὸ τελευταῖον τριψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 8.

η) » 9. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, λαμβανομένων ὡς ἁπλῶν μονάδων, εἶναι διαιρετὸς διὰ 9.

θ) » 10. Ὅταν λήγει εἰς 0.

ι) » 11. Ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν ἀθροισμάτων τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ τάξεως περιττῆς καὶ τάξεως ἀρτίας εἶναι 0 ἢ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 11.

ια) » 12. Ὅταν διαιρεῖται καὶ διὰ 3 καὶ διὰ 4.

29.—Δοκιμὴ δι' ἑνὸς οἱουδήποτε διαιρέτου τῶν πράξεων πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

Ἡ δοκιμὴ τῶν πράξεων πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἰδιότητος.

Ὅ,τι ὑπόλοιπον διά τινος ἀριθμοῦ ἀφίνει τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου δύο ἀριθμῶν, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ἀφίνει καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἢ συγκεκριμένως, ἂν θεωρήσωμεν ὡς τοιοῦτον διαιρέτην τὸ 9, τότε ἡ ἰδιότης ἔχει ὡς ἑξῆς :

Ὅτι ὑπόλοιπον διὰ 9 ἀφίνει τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων διὰ 9 δύο ἀριθμῶν, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ἀφίνει καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν διὰ 9. π.χ.

$$\begin{array}{rl} & 183 \quad \text{Ὑπόλοιπον διὰ } 9 = 3 \\ \times & 32 \quad\quad » \quad\quad » \quad » = 5 \end{array} \Big\} 3\times5=15,\ \text{ὑπολ. διὰ } 9=6$$

$$\begin{array}{r} 366 \\ 549 \\ \hline 5856 \end{array} \quad \text{Ὑπόλοιπον διὰ } 9=6$$

Ἢ ἄλλως πως ἡ δοκιμὴ τοῦ ἄνω πολλαπλασιασμοῦ δύναται νὰ σημειωθῇ καὶ ὡς κάτωθι, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καὶ συνήθως γίνεται.

Ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ πολ)σιαστέου 183	3	5	Ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ πολ)σιαστοῦ 32
Ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ 3X5=15	6	6	Ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ γινομένου 5856

Ἀφοῦ 6=6 ἕπεται ὅτι ὁ πολ)σμὸς ἐγένετο καλῶς.

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ἔχομεν $\delta\times\pi=\Delta$ ***ἡ ἄνω ἰδιότης ἰσχύει καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν.***

Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν 9 ὡς τοιοῦτον διαιρέτην, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ 9 (§ 28—γ) καὶ διότι λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν δοκιμὴν ὅλα τὰ ψηφία τῶν παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου.

Δι' ὡρισμένους λόγους ἡ δοκιμὴ αὕτη δὲν εἶναι πάντοτε ἀκριβής.

Παραδείγματα δοκιμῆς πράξεων πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

α) Δοκιμὴ πολλαπλασιασμοῦ.

```
  326
   51 ×
 ─────
  326
 1630
 ─────
 16626
```

Δοκιμὴ

῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ πολ)σιαστέου 326	2	6	῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ πολ)σιαστοῦ 51
῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ 2Χ6=12	*3*	*3*	῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ γινομένου 16626

᾿Αφοῦ εὑρέθη ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς *3* καὶ εἰς τὰ δύο μέρη κάτωθι τοῦ σταυροῦ, ἕπεται ὅτι ὁ πολ]σμὸς ἐγένετο καλῶς.

β) Δοκιμὴ διαιρέσεως.

1) ᾿Εὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, ἤτοι ἂν δὲν ἀφίνει ὑπόλοιπον.

```
78350 | 25
 33   |─────
  85  | 3134
  100
    0
```

Δοκιμὴ

῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ διαιρέτου 25	7	2	῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ πηλίκου 3134
῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ 7Χ2=14	*5*	*5*	῾Υπόλοιπον διὰ 9 τοῦ διαιρετέου 78350

᾿Αφοῦ 5=5 ἕπεται ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο καλῶς.

2) ᾿Εὰν ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι τελεία ἀλλ᾿ ἀτελής, ἤτοι ἂν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, τότε ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὸ ὑπόλοιπον ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τούτου.

Δοκιμὴ

π. χ.

```
78342 | 25
 33   |─────
  84  | 3133
   92
   17
```

ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ διαιρέτου 25	7	1	ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ πηλίκ. 3133
ὑπόλοιπ. διὰ 9 τοῦ 7×1=7	7	7	ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ 78325 ἤτοι 78342—17

᾿Αφοῦ 7=7 ἕπεται ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο καλῶς.

30.— Πρῶτοι ἀριθμοί.

Πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται ἐκεῖνος, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην, παρὰ μόνον τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα. τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι π.χ. οἱ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

Ἀριθμός, ὅστις ἔχει καὶ ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος λέγεται ***σύνθετος***, εἶναι δὲ οὗτος γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι.

Ἰδιότητες πρώτων ἀριθμῶν. *α)* Πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι πρῶτος, ἔχει τοὐλάχιστον ἕνα διαιρέτην.

β) Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος, ὅταν δὲν διαιρεῖται ὑπὸ οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι μικρότερα αὐτοῦ.

π.χ. ὁ 127 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, διότι δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 καὶ 11, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα περιέχει.

Ἐπίσης διὰ νὰ εὕρωμεν, ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος, διαιροῦμεν αὐτὸν διαδοχικῶς δι' ὅλων τῶν ἐξ ἀρχῆς πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 κλπ. μέχρις ὅτου εὕρομεν πηλίκιον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρέτου· τότε ἂν οὐδεμία διαίρεσις εἶναι τελεία ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι πρῶτος.

31. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ μόνον τὴν μονάδα. (Τί λέγεται κοινὸς διαιρέτης ἰδὲ κατωτέρω εἰς τὴν § 33 περὶ ΜΚΔ).

π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 15 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι δὲν ἔχουν κανένα κ.δ. πλὴν τῆς μονάδος.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν.

α) Ὅταν διαιροῦμεν δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν, τὰ πηλίκα των εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

β) Δύο ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοί, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. π.χ. οἱ 12 καὶ 13, οἱ 25 καὶ 26 κλπ.

γ) Ὅταν ἕνας πρῶτος ἀριθμός, δὲν διαιρεῖ ἄλλον δοθέντα ἀριθμόν, εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν. Δηλαδὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

δ) Πᾶς ἀριθμός, διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα διαιρεῖ τὸν ἄλλον.

ε) Πᾶς πρῶτος, διαιρῶν τὸ γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, διαιρεῖ τοὐλάχιστον τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν.

στ) Πᾶς πρῶτος, διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο ἄλλων πρώτων ἀριθμῶν, εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν.

ζ) Πᾶς πρῶτος, διαιρῶν δύναμιν ἀριθμοῦ τινός, διαιρεῖ ὡσαύτως καὶ τὸν ἀριθμόν.

η) Ἐὰν δύο ἀριθμοί, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ἀντιστρόφως.

ϑ) Πᾶς ἀριθμός, πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενόν των. Καὶ ἀντιστρόφως.

ι) Πᾶς ἀριθμός, διαιρούμενος ὑπὸ περισσοτέρων ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, εἶναι διαιρετὸς καὶ ὑπὸ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰδιότητος ἐξάγεται ὅτι, ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, ὅταν διαιρεῖται διὰ 2 καὶ διὰ 3.

Ἐπίσης εἶναι διαιρετὸς διὰ 15 ὅταν διαιρεῖται διὰ 3 καὶ διὰ 5 κ.ο.κ.

32.—Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων—Εὕρεσις τῶν διαιρετῶν ἑνὸς συνθέτου ἀριθμοῦ.

α) ***Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων*** εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς γινόμενον τὸν δοθέντα.

Ἰδιότης. Ἕνας σύνθετος ἀριθμὸς δὲν ἀναλύεται, παρὰ μόνον, εἰς ἓν σύστημα πρώτων παραγόντων καθ᾿ οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν γίνῃ ἡ ἀνάλυσις.

π.χ. ὁ 420 ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀναλυθῇ εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας, θὰ εἶναι $420=2^2\times3\times5\times7$.

Κανών. Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα σύνθετον ἀριθμόν, εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν ὡς καὶ τὰ ἑκάστοτε εὑρισκόμενα πηλίκα διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ 2 μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον τὴν μονάδα. Τότε τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαιρετῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

Τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα δεικνύει τὸν τρόπον τῆς ἐργασίας.

β) Εὕρεσις τῶν διαιρετῶν ἑνὸς συνθέτου ἀριθμοῦ. Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καὶ εἶτα λαμβάνομεν ὅλα τὰ δυνατὰ γινόμενα αὐτῶν.

π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ 90 διαιρέται εἶναι οἱ 1, 2, 3 καὶ 5 ὡς καὶ ὅλα τὰ δυνατὰ γινόμενα αὐτῶν ἤτοι ὁ 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 καὶ 90 δηλαδὴ ἐν συνόλῳ ὁ ἀριθμὸς 90 ἔχει 12 διαιρέτας.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Εἰδικώτερον ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ἂν αὐξήσωμεν ὅλους τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων εἰς οὕς ἀναλύεται ὁ ἀριθμὸς κατὰ μονάδα.

π. χ. ὁ ἀριθμὸς $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. Τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ ηὐξημένων κατὰ μονάδα εἶναι $2 \times 3 \times 2 = 12$. Ὅθεν 12 εἶναι ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ 90.

33.—Περὶ μεγίστου Κοινοῦ Διαιρέτου (Μ.Κ.Δ.)

Ὀνομάζομεν ***κοινὸν διαιρέτην*** δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἕνα ἄλλον ἀριθμόν, ὅστις διαιρεῖ πάντας ἀκριβῶς.

π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 12, 24, 36 ἔχουν κ. δ. τοὺς 2, 3, 4, 6 καὶ 12.

Ὁ μεγαλύτερος τῶν κ. δ. λέγεται ***μ. κ. δ.*** αὐτῶν. Π. χ. ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 12, 24, 36 εἶναι ὁ 12.

Ἰδιότητες Μ.Κ.Δ.

α) Πᾶς ἀριθμὸς διαιρῶν ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν.

β) » » » τὸν μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν διαιρεῖ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς.

γ) Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τοὺς διαιρέτας τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

δ) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν δοθέντας ἀριθμοὺς μὲ ἕνα δοθέντα ἀριθμόν, τότε καὶ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν πολ)ζεται ἢ διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

ε) Ὁ μ.κ.δ. δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πρώτων κοινῶν παραγόντων των, λαμβανομένων μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

1. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν. Συνήθως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, κατόπιν τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, ἔπειτα τὸν νέον διαιρέτην διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν.

Ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.

π. χ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶτ ἀριθμῶν 324 καὶ 132.

πηλίκα		2	2	5
	324	132	60	12
ὑπολ.	60	12	0	

Ὁ τελευταῖος διαιρέτης 12, ὅστις διαιρέσας τὸν 60 μᾶς ἔδωσε μηδὲν ὑπόλοιπον, εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 324 καὶ 132.

2. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. περισσοτέρων τῶν δύο ἀριθμῶν.

Αος τρόπος. Διὰ τῆς καταβιβάσεως τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ. Π.χ. νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 240, 360 καὶ 540.

240	360	540
240	120	60
0	0	*60*

Γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς, εἰς μίαν σειρὰν καὶ ἔπειτα ἀφοῦ κατεβάσωμεν εἰς τὴν β′ σειρὰν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν 240 διαιροῦμεν τοὺς ἄλλους ἀριθμούς, μὲ τοῦτον καὶ γράφομεν κάτωθεν ἑκάστου τὰ ὑπόλοιπα. Ὁμοίως πράττομεν εἰς τὴν β′ σειρὰν κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι ὅλα μηδέν. Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

π.χ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν

	120	180	210
Διαιροῦμεν διὰ τοῦ 120 τοὺς ἄλλους	*120*	60	90
» » » 60 » »	0	*60*	30
» » » 30 τὸν 60	0	0	*30*

Ὁ τελευταῖος διαιρέτης 30 εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.

Βος τρόπος. Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας ὁπότε συμφώνως πρὸς τὴν ἄνω ἰδιότητα ε' ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

π. χ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 420, 720 καὶ 600.

$$\left.\begin{array}{l} 420=2^2\times3\times5\times7 \\ 720=2^4\times3^2\times5 \\ 600=2^3\times3\times5^2 \end{array}\right\} \text{ὁ μ.κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι } 2^2\times3\times5=60$$

Γος Τρόπος. Διὰ διαιρέσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διὰ κοινῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς : Γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν καὶ δεξιὰ σύρομεν μίαν κατακόρυφον γραμμήν. Ἂν πάντες οἱ ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ δι' ἑνὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τὸ 2, γράφομεν τοῦτον δεξιὰ τῆς γραμμῆς εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν θέσιν. Ἔπειτα διαιροῦμεν ὅλους τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ εὑρεθέντος κοινοῦ διαιρέτου καὶ γράφομεν κάτωθεν αὐτῶν τὰ εὑρεθέντα πηλίκα.

420	720	600	2
210	360	300	2
105	180	150	3
35	60	50	5
7	12	10	

ΜΚΔ $=2\times2\times3\times5=60$

Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς β' σειρᾶς καὶ εἰς ἑκάστην τῶν ἑπομένων, μέχρις ὅτου εὕρωμεν σειρὰν πηλίκων, τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὅταν εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὅπως π.χ. εἰς τὸ παράδειγμά μας τοὺς ἀριθμοὺς 7, 12, 10, τότε τελειώνει ἡ πρᾶξις καὶ τὸ γινόμενον τῶν εὑρεθέντων κοινῶν διαιρετῶν εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

π.χ. εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 420, 720 καὶ 60 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2\times2\times3\times5=60$.

34.—Περὶ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου (Ε.Κ.Π.)

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἢ ὁ μικρότερος ἀριθμός, ὅστις εἶναι διαιρετὸς μὲ ἕκαστον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

π.χ. τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 20, τὸ ΕΚΠ=60, οὐδεὶς δὲ ἄλλος μικρότερος τοῦ 60 ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὅστις νὰ εἶναι διαιρετὸς ὑπὸ τῶν δοθέντων.

Εὕρεσις τοῦ Ε.Κ.Π.

Αος τρόπος. *Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.* Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. δοθέντων ἀριθμῶν ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καὶ κατόπιν σχηματίζομεν γινόμενον ἐκ τῶν πρώτων παραγόντων, κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν, λαμβάνοντες αὐτοὺς μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην.

π.χ. τῶν ἀριθμῶν 420, 720 καὶ 600 τὸ ἐ.κ.π. εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

$$\left.\begin{array}{l} 420=2^2\times3\times5\times7 \\ 720=2^4\times3^2\times5 \\ 600=2^3\times3\times5^2 \end{array}\right\} \quad \text{Ε.Κ.Π.}=2^4\times3^2\times5^2\times7=25.200$$

Συνήθως τὸ ἐ.κ.π. εὑρίσκεται καὶ ὡς κάτωθι:

Βος τρόπος. *Διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.* Εἰδικώτερον παρατηροῦμεν μὴ τυχὸν ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν ἄλλων. Ἂν εἶναι διαιρετός, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἄλλως τὸν διπλασιάζομεν, τριπλασιάζομεν κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὕρομεν πολλαπλάσιόν τι τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιρετὸν ὑπὸ τῶν ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν.

π.χ. τῶν ἀριθμῶν	4	6	15	
			30	
			45	
			60	τὸ ἐ. κ. π.=60

Γος τρόπος. *Διὰ διαιρέσεως τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διὰ πρώτων τοιούτων.*

Ὁ τρόπος τῆς πράξεως εἶναι σχεδὸν ὁ ἴδιος μὲ τὸν τοιοῦτον τοῦ γ' τρόπου εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ., μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνῶ ἐκεῖ λαμβάνομεν τοὺς κοινοὺς διαιρέτας, ἐδῶ λαμβάνομεν καὶ ***γράφομεν δεξιὰ τῆς γραμμῆς τοὺς κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς διαιρέτας*** τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

12	14	21	2
6	7	21	2
3	7	21	3
1	7	7	7
1	1	1	

Ε.Κ.Π. $2\times2\times3\times7=84$

Ἡ πρᾶξις τελειώνει ὅταν εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν ἴσων πρὸς τὴν μονάδα.

Δος τρόπος. Δι' ἀπαλοιφῆς ἀριθμοῦ, διαιρέτου ἄλλου ἀριθμοῦ τῆς αὐτῆς σειρᾶς.

Ἡ εὕρεσις τοῦ Ε.Κ.Π. διὰ τοῦ τρόπου τούτου γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 16, 28, 48, καὶ 105.

~~16~~	28	48	105	2
	14	24	105	2
	~~7~~	12	105	3
		4	35	

Ε.Κ.Π.$=2\times2\times3\times4\times35=1680$

Γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἰς ὁριζοντίαν σειρὰν καὶ δεξιὰ φέρομεν κατακόρυφον γραμμήν. Μετὰ κυττάζομεν μήπως τις ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διαιρεῖ ἄλλον τινά. Ἂν συμβαίνει τοῦτο τὸν διαγράφομεν. Εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, τὸ16 εἶναι διαιρέτης τοῦ 48 καὶ διὰ τοῦτο τὸ διαγράφομεν. Μετὰ λαμβάνομεν οἱονδήποτε πρῶτον ἀριθμόν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2, ὅστις νὰ εἶναι διαιρέτης δύο τουλάχιστον ἐκ τῶν ἀπομεινάντων ἀριθμῶν. Ἐλάβομεν τὸ 2 καὶ τὸ ἐγράψαμεν δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς εἰς τὴν αὐτὴν σειράν. Διαιροῦμεν διὰ τοῦ 2 τοὺς διαιρετοὺς δι' αὐτοῦ ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς καὶ κατεβάζομεν τὰ πηλίκα ὡς καὶ τοὺς ἀριθμοὺς οἵτινες δὲν διαιροῦνται. Οὕτω ἔχομεν δευτέραν σειρὰν ἀριθμῶν.

Κυττάζομεν πάλιν μήπως ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς ταύτης διαιρεῖ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τῆς αὐτῆς σειρᾶς. Δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμός.

Λαμβάνομεν πάλιν ἕνα πρῶτον ἀριθμὸν ὅστις νὰ διαιρῇ δύο τουλάχιστον ἀριθμοὺς τῆς σειρᾶς ἔστω τὸν 2 πάλιν. Διαιροῦντες εὑρίσκομεν τὴν τρίτην σειρὰν ἀριθμῶν. Κυττάζομεν πάλιν μήπως τις τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς διαιρεῖ ἄλλον τινά. Βλέπομεν ὅτι τὸ 7 διαιρεῖ τὸν 105. Σβύνομεν τὸ 7 καὶ μένουν οἱ ἀριθμοὶ 12 καὶ 105. Λαμβάνομεν πάλιν ἕνα πρῶτον ἀριθμὸν ποὺ τυχὸν νὰ διαιρῇ τούτους. Οὗτος εἶναι ὁ 3. Διαιροῦμεν διὰ τούτου καὶ ἔχομεν τετάρτην σειρὰν ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 35 οἵτινες εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι προς ἀλλήλους. Ἐδῶ σταματᾶ ἡ πρᾶξις, ἤτοι ὅταν εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους, καὶ ἔχομεν ὅτι τὸ Ε.Κ.Π.=οἱ δεξιὰ τῆς γραμμῆς ἀριθμοὶ καὶ οἱ τῆς τελευταίας σειρᾶς$=2\times2\times3\times4\times35=1680$.

Ὅπως βλέπομεν καὶ ὁ Δος τρόπος δὲν εἶναι δύσκολος.

Σχέσις μεταξὺ τοῦ Μ.Κ.Δ. καὶ Ε.Κ.Π. δύο ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν ἐπὶ τὸ ε.κ.π. αὐτῶν.

π.χ. τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 10. Τὸ ε.κ.π.$=20$, ὁ μ.κ.δ.$=2$

$$4\times10=2\times20$$

Ἐκ τῆς ἄνω σχέσεως ἐξάγονται καὶ τὰ ἑξῆς:

α) Τὸ ε.κ.π. δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιρούμενον διὰ τοῦ μ.κ.δ. των. καὶ

β) Ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιρούμενον διὰ ἐ.κ.π. των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄—ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

35.—Ἔννοιαι καὶ ὁρισμοὶ

α) ***Κλασματικὴ μονὰς*** λέγεται ἕκαστον ἐκ τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς π.χ. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$...

β) ***Κλασματικὸς ἀριθμὸς*** ἢ ***κλάσμα*** καλεῖται ἕνα ἢ περισσότερα μέρη τῆς μονάδος διαιρεθείσης εἰς ἴσα μέρη π.χ. $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{10}$ κ.ο.κ.

γ) ***Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν κλασμάτων***

$$\begin{matrix} \textit{δύο} & 2 & \textit{ἀριθμητὴς} \\ \textit{πέμπτα} & \overline{5} & \textit{παρονομαστὴς} \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} \textit{Ὅροι τοῦ} \\ \textit{κλάσματος} \end{matrix}$$

δ) *Ὁμώνυμα κλάσματα* λέγονται ὅσα ἔχουν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.

π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{12}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{9}{12}$ εἶναι ὁμώνυμα

ε) ***Ἑτερώνυμα κλάσματα*** λέγονται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρανομαστήν.

π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{5}{8}$ εἶναι ἑτερώνυμα

στ) ***Σύγκρισις κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.***

Τὸ $\frac{2}{5} < 1$ Συνήθως τοῦτο νοεῖται ὡς ***κλάσμα***, δηλαδὴ τὸ κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ.

Τὸ $\frac{5}{5} = 1$

Τὸ $\frac{7}{5} > 1$

Τὰ ἔναντι κλάσματα λέγονται ***κλασματικαὶ παραστάσεις.***

Ἐκ τῶν ἄνω ἐξάγεται ὅτι, ἓν κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἓν κλάσμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶναι ἴσοι.

Ἓν κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ.

Τὰ ἄνω ἐξάγονται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κλάσματος.

ζ) Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀποτελούμενος ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλασματικὸν μέρος π.χ. $5\frac{2}{3}$, $7\frac{3}{5}$ κ.ο.κ., ἀπαγγέλεται δὲ ὡς ἑξῆς: 5 καὶ $\frac{2}{3}$, 7 καὶ $\frac{3}{5}$.

η) ***Πᾶν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ.***

Τοῦτο καθίσταται νοητὸν ἂν ἔχωμεν π.χ. νὰ μοιράσωμεν 2 μῆλα εἰς 3 μαθητάς. Κόπτομεν τὸ ἕνα μῆλο σὲ 3 ἴσα μέρη καὶ δίδομεν ἀπὸ $\frac{1}{3}$ εἰς ἕκαστον μαθητήν. Ἔπειτα κόπτομεν τὸ ἄλλο μῆλο εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ δίδομεν πάλιν ἀπὸ $\frac{1}{3}$ εἰς ἕκαστον μαθητήν. Οὕτω ἕκαστος μαθητὴς θὰ λάβῃ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήλου. Ἐδῶ ὁ ἀριθμητὴς 2 παριστᾶ τὰ μῆλα καὶ τὸ 3 τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν καὶ τὸ $\frac{2}{3}$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2 : 3. Ἤτοι $2 : 3 = \frac{2}{3}$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἂν μία διαίρεσις ἀφίνει ὑπόλοιπον δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πηλίκον δι᾿ ἑνὸς κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

π.χ. $\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$ ἤτοι $35 : 8 = 4\frac{3}{8}$.

Οὕτω ***κατόπιν τῆς γνώσεως τῶν κλασμάτων, πᾶσα διαίρεσις εἶναι τελεία.***

θ) Ἴσα λέγονται δύο κλάσματα, ὅταν μετροῦν τὸ αὐτὸ μέγεθος μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα π.χ. $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$.

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{4}{10}$ τὰ ὁποῖα μετροῦν τὸ αὐτὸ μέγεθος ἀλλὰ μὲ διαφόρους μονάδας λέγονται ***ἰσοδύναμα.***

36.—Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων

α) Ἐὰν πολ)σωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπί τινα ἀριθμὸν τὸ κλάσμα πολ)ζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ ἂν τὸν διαιρέσωμεν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

β) Ἐὰν πολ)σωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπί τινα ἀριθμὸν τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸ παρονομαστὴν τὸ κλάσμα πολ)ζεται, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Τὰ ἀνωτέρω ἐξάγονται ἐκ τῆς ἐννοίας τῶν κλασμάτων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων ἐξάγονται καὶ τὰ ἑξῆς :

Ὑπάρχουν δύο τρόποι διὰ νὰ πολ)σωμεν ἕνα κλάσμα ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν.
1) ἢ νὰ πολ)σωμεν τὸν ἀριθμητήν
2) ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἂν εἶναι διαιρετός.

Ἐπίσης ὑπάρχουν δύο τρόποι διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα κλάσμα διά τινος ἀριθμοῦ.
1) ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν, ἂν εἶναι διαιρετός
2) ἢ νὰ πολ)σωμεν τὸν παρονομαστὴν μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

γ) Ἐὰν πολ)σωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

Ὅθεν $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ διότι $\frac{4:2}{10:2}=\frac{2}{5}$ ἢ $\frac{8}{12}=\frac{8\times 2}{12\times 2}=\frac{8:2}{12:2}$

37.—Μεταβολαὶ ἐπὶ τῶν κλασμάτων χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ ἡ ἀξία των.

α) Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα. Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται ὁ παρονομαστής, πολ)ζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν δοθέντα.

π.χ. Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 5 εἰς τέταρτα : $5=\frac{20}{4}$.

β) Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλάσμα. Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα πολ)ζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματός του, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον.

π.χ. $3\frac{5}{8}=\frac{29}{8}$.

γ) Ἐξαγωγὴ ἀκεραίων μονάδων ἐκ κλασματικῆς παραστάσεως. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς μίαν κλασματικὴν παράστασιν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Τὸ πηλίκον παριστᾷ τὰς ἀκεραίας μονάδας καὶ τὸ τυχὸν ὑπόλοιπον τὸ γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ, παρονομαστὴν δὲ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον.

π.χ. $\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$, ἐπίσης $\frac{30}{6}=5$.

δ) Ἁπλοποίησις κλάσματος.

1) ***Ἁπλοποίησις δοθέντος κλάσματος*** λέγεται ἡ εὕρεσις ἑνὸς ἄλλου κλάσματος ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθέν, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.

Ἡ ἁπλοποίησις στηρίζεται εἰς τὴν ἰδιότητα (§ 36—γ) ἤτοι εἰς τὴν ἰδιότητα καθ᾽ ἥν, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.

π.χ. νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{8}{24}=\frac{8:8}{24:8}=\frac{1}{3}$.

2) ***Ἀνάγωγον καλεῖται τὸ κλάσμα,*** τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ πλέον.

Ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος μέχρι τῆς πλέον ἁπλῆς μορφῆς του, σημαίνει νὰ καταστῇ τοῦτο ἀνάγωγον.

π.χ. Νὰ ἁπλοποιηθῇ μέχρι τῆς πλέον ἁπλῆς μορφῆς τὸ κλάσμα $\frac{480}{540}$

θὰ ἔχωμεν $\frac{480}{540}=\frac{48}{54}=\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$. Τὸ $\frac{8}{9}$ δὲν δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ πλέον, δηλαδὴ εἶναι ἀνάγωγον κλάσμα.

Ἰδιότητες ἐπὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων.

I) Ὅταν ἓν κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον οἱ δύο ὅροι του εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

II) Ὅταν ἓν κλάσμα ἀνάγωγον, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο κλάσμα, τότε οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου τούτου κλάσματος, εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ πρώτου.

III) Πᾶν κλάσμα ἔχον τοὺς ὅρους του πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι ἀνάγωγον δηλαδὴ δὲν δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ.

IV) Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα κλάσμα καὶ νὰ τὸ φέρωμεν ἀμέσως εἰς τὴν πλέον ἁπλῆν μορφήν του, δηλαδὴ νὰ τὸ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμον ἀνάγωγον κλάσμα, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

π. χ. $\frac{480}{540}=\frac{480:60}{540:60}=\frac{8}{9}$, ὅπου 60=μ.κ.δ. τῶν 480 καὶ 540

V. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὸ ἄνω δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα καὶ διαδοχικῶς.

π. χ. $\frac{480}{540}=\frac{240}{270}=\frac{120}{135}=\frac{40}{45}=\frac{8}{9}$.

ε) ***Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.***

Τοῦτο σημαίνει νὰ εὕρωμεν ἐκ δοθέντων κλασμάτων ἐχόντων διαφόρους παρονομαστάς, ἄλλα κλάσματα ἰσοδύναμα ἔχοντα τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς.

Κυρίως ἡ μεταβολὴ αὕτη τῶν κλασμάτων, μᾶς χρειάζεται, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἰς τὰς πράξεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων, ὡσαύτως καὶ εἰς τὴν σύγκρισιν δύο ἢ περισσοτέρων ἑτερωνύμων κλασμάτων ἐχόντων διαφόρους ἀριθμητάς. Π.χ. δὲν δυνάμεθα ἀμέσως νὰ ἀπαντήσωμεν ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{11}{18}$ ἢ $\frac{13}{21}$ εἶναι μεγαλύτερον. Πρέπει νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐκεῖνο θὰ εἶναι μεγαλύτερον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

Ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς δύο τρόποι τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

α΄) **Τρόπος.** *Διὰ πολ]σμοῦ τῶν ὅρων ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.*

π. χ. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}$$

$$\frac{2\times(4\times5)}{3\times(4\times5)},\quad \frac{3\times(3\times5)}{4\times(3\times5)},\quad \frac{4\times(3\times4)}{5\times(3\times4)},\ \text{ἢ}\ \frac{40}{60}\ \ \frac{45}{60}\ \ \frac{48}{60}$$

β΄) **Τρόπος.** *Διὰ τοῦ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν.*

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, ἔπειτα διαιροῦμεν τοῦτο δι᾿ ἑνὸς ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ σημειοῦμεν τὰ πηλίκα ἄνωθεν τῶν κλασμάτων. Τέλος πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

π. χ. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{3}{4},\ \frac{11}{15},\ \frac{17}{20}$

Τὸ ΕΚΠ τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ 60.

$$\overset{15}{\frac{3}{4}},\ \overset{4}{\frac{11}{15}},\ \overset{3}{\frac{17}{20}}\ \text{ἢ}\ \frac{45}{60},\ \frac{44}{60},\ \frac{51}{60}$$

Ἰδιότης ἐπὶ τῆς τροπῆς ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα. Ὅταν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα, ὁ μικρότερός των κοινὸς παρονομαστής, εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

Ἑπομένως, ὅταν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν ὁμώνυμα κλάσματα μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρανομαστήν, πρέπει πάντα ταῦτα νὰ τὰ καταστήσωμεν ἀνάγωγα καὶ κατόπιν νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα.

π. χ. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα ***μὲ τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστὴν*** τὰ κλάσματα $\frac{2}{6},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{8}$

Ἁπλοποιοῦντες αὐτὰ ἔχομεν $\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

Ἤδη ἂν τραποῦν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα θὰ ἔχωμεν $\frac{4}{12},\ \frac{6}{12},\ \frac{3}{12}$

Ἂν δὲν ἁπλοποιούσαμεν ταῦτα θὰ ἐτρέποντο εἰς τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{8}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{6}{24}$ καὶ δὲν θὰ εἶχον πράγματι ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν.

38.—Πράξεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων

Πρόσθεσις

α) $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{9}{12}=\frac{5+7+9}{12}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$

β) $\overset{6}{\frac{3}{4}}+\overset{4}{\frac{5}{6}}+\overset{3}{\frac{7}{8}}=\frac{18}{24}+\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{18+20+21}{24}=\frac{59}{24}=2\frac{11}{24}$

γ) $4\overset{9}{\frac{3}{5}}+7\overset{8}{\frac{8}{9}}+12\overset{3}{\frac{11}{15}}=4\frac{27}{45}+7\frac{40}{45}+12\frac{33}{45}=23+\frac{100}{45}=$

$25\frac{10}{45}=25\frac{2}{9}$

ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα ὅτε ἔχομεν,

$\overset{9}{\frac{23}{5}}+\overset{5}{\frac{71}{9}}+\overset{3}{\frac{191}{15}}=\frac{207}{45}+\frac{355}{45}+\frac{573}{45}=\frac{1135}{45}=25\frac{10}{45}=25\frac{2}{9}$

Ἀφαίρεσις

α) $\frac{15}{18}-\frac{7}{18}=\frac{15-7}{18}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

β) $\overset{5}{\frac{8}{9}}-\overset{3}{\frac{4}{15}}=\frac{40}{45}-\frac{12}{45}=\frac{28}{45}$

γ) $10\overset{3}{\frac{7}{8}}-6\overset{8}{\frac{2}{3}}=10\frac{21}{24}-6\frac{16}{24}=4\frac{5}{24}$

ἢ τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα ὅτε ἔχομεν

$$\overset{3}{\frown}\quad\overset{8}{\frown}$$

$$\frac{87}{8}-\frac{20}{3}=\frac{261}{24}-\frac{160}{24}=\frac{101}{24}=4\frac{5}{24}$$

$$\delta)\ 1-\frac{3}{8}=\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$\overset{4}{\frown}\quad\overset{5}{\frown}$$

$$\varepsilon)\ 10\frac{2}{5}-7\frac{3}{4}=10\frac{8}{20}-7\frac{15}{20}=9\frac{28}{20}-7\frac{15}{20}=2\frac{13}{20}$$

δηλαδὴ ἂν τοῦ μειωτέου τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τοῦ ἀφαιρετέου δανειζόμεθα μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἣν τρέπομεν εἰς ὁμώνυμον κλάσμα, τὸ ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν.

Πολλαπλασιασμὸς

$$\alpha)\quad \frac{3}{4}\times 5=\frac{3\times 5}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$$

$\beta)\quad 5\times\frac{3}{4}=\frac{5\times 3}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$ Τὸ $5\times\frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 5 τρεῖς φοράς, ἤτοι,

$$5\times\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\times 3$$

$\gamma)\quad \frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times 5}{4\times 7}=\frac{15}{28},\quad \frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{3\times 5}{5\times 3}=1$ Αὐτὰ τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν γινόμενον τὴν μονάδα λέγονται ***ἀντίστροφα.***

$$\delta)\quad 2\frac{3}{4}\times 3\frac{1}{3}=(2+\frac{3}{4})\times(3+\frac{1}{3})=(2\times 3)+(2\times\frac{1}{3})+$$

$$(\frac{3}{4}\times 3)+(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3})=6+\frac{2}{3}+\frac{9}{4}+\frac{3}{12}=6+\frac{8}{12}+\frac{27}{12}+\frac{3}{12}=$$

$$6\frac{38}{12}=6+3\frac{2}{12}=9\frac{2}{12}=9\frac{1}{6}$$

ἢ καλύτερον τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν. Π.χ. εἰς τὸ παρὸν παράδειγμα ἔχομεν οὕτω :

$$2\frac{3}{4}\times3\frac{1}{3}=\frac{11}{4}\times\frac{10}{3}=\frac{11\times10}{4\times3}=\frac{110}{12}=9\frac{2}{12}=9\frac{1}{6}.$$

ε′) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times4\times5}{3\times5\times6}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$

Διαίρεσις

1) *Διαίρεσις δι᾽ ἀκεραίου*

$\frac{10}{13}:5=\frac{10:5}{13}=\frac{2}{13}$. Ἂν δὲν διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν π. χ. $\frac{5}{6}:4=\frac{5}{6\times4}=\frac{5}{24}$

2) *Διαίρεσις διὰ κλάσματος*

Ὅταν ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ κλάσματος ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν. Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν διὰ μικτοῦ, ἀφοῦ πρῶτον τραπῇ οὗτος εἰς κλάσμα.

α) $5:\frac{3}{4}=5\times\frac{4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$

β) $\frac{3}{7}:\frac{4}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{4}=\frac{15}{28}$

γ) $3\frac{2}{3}:5\frac{3}{4}=\frac{11}{3}:\frac{23}{4}=\frac{11}{3}\times\frac{4}{23}=\frac{44}{69}$

Ἐξαιρετικῶς ὅταν ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν δύο κλάσματα καὶ οἱ ὅροι τοῦ διαιρετέου εἶναι διαιρετοὶ διὰ τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τοῦ διαιρέτου ***δυνάμεθα,*** πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν μὲ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν μὲ παρονομαστήν. π. χ. $\frac{12}{20}:\frac{3}{4}=\frac{12:3}{20:4}=\frac{4}{5}$.

39.—Σύνθετα κλάσματα

Ἁπλοῦν λέγεται ἓν κλάσμα, ὅταν οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Σύνθετον κλάσμα λέγεται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ εἷς τοὐλάχιστον τῶν ὅρων του εἶναι κλάσμα ἢ μικτὸς ἀριθμός.

α) $$\frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 : \frac{4}{5} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

β) $$\frac{\frac{3}{7}}{5} = \frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7 \times 5} = \frac{3}{35}$$

γ) $$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{24}{20} = 1\frac{4}{20} = 1\frac{1}{5}$$

δ) $$\frac{5\frac{2}{3}}{6\frac{4}{10}} = 5\frac{2}{3} : 6\frac{4}{10} = \frac{17}{3} : \frac{64}{10} = \frac{17}{3} \times \frac{10}{64} = \frac{170}{192} = \frac{85}{96}$$

Κατ' ἄλλον τρόπον δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν διὰ τοῦ πολ]σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἑ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ.

π. χ. $$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{3}{4} \times 8}{\frac{5}{8} \times 8} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

40.—Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ

Κατόπιν τῆς γνώσεως τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν γενικεύονται οἱ ὁρισμοὶ οἱ δοθέντες εἰς τὴν § 25 ὡς κάτωθι.

Κάμνομεν πολλαπλασιασμὸν

α) ***Ὅταν μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους).***

π.χ. Ἡ 1 ὀκὰ ἀξίζει 240 δρχ. Πόσον ἔχουν αἱ 3 ὀκάδες;

Λύσις 240×3=720 δρχ.

Ὡσαύτως. Ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει 240 δρχ. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκάδες ;

Λύσις $240 \times \frac{3}{4} = 180$ δρχ.

β) ***Ὅταν θέλομεν νὰ εὕρωμεν πολλαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἢ ἕνα μέρος αὐτοῦ.***

π.χ. Πόσον εἶναι τὸ 5πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 40 ;

Λύσις $40 \times 5 = 200$

Ὡσαύτως. Πόσον εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40 ;

Λύσις $40 \times \frac{5}{8} = 25.$

41.—Προβλήματα Διαιρέσεως.

α) ***Μερισμοῦ. Ὅταν μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους)*** καὶ αἱ πολλαὶ μονάδες (ἢ μέρος) ***καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος κάμνομεν διαίρεσιν.***

Λύσις. $\frac{\text{Τιμὴ πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους)}}{\text{πολλαὶ μονάδες (ἢ μέρος).}} = \text{Τιμὴ μιᾶς μονάδος}$

π.χ. Αἱ 4 ὀκ. ἀξίζουν 16 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ;

Λύσις $\frac{16}{4} = 4$ δρχ.

Ἄλλο παράδειγμα. Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν 30 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ ;

Λύσις $\frac{30}{\frac{3}{4}} = 40$ δρχ.

β) ***Μετρήσεως. Ὅταν μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους) καὶ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦνται αἱ πολλαὶ μονάδες (ἢ μέρος) κάμνομεν διαίρεσιν.***

Λύσις. $\frac{\text{Τιμὴ πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους)}}{\text{Τιμὴ μονάδος}} = \text{Πολλαὶ μονάδες (ἢ μέρος)}$

π.χ. Ἡ 1 ὀκὰ ἔχει 40 δρχ. Πόσας ὀκ. ἀγοράζομεν μὲ 1640 δρ.;

Λύσις $\frac{1640}{40} = 41$ ὀκ.

Ἄλλο. Ἡ 1 ὀκὰ ἔχει 40 δρχ. Πόσας ὀκ. ἀγοράζομεν μὲ 10 δρχ;

Λύσις $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ ὀκ.

γ) ***Ὅταν γνωρίζωμεν πολλαπλάσιον (ἢ μέρος) ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν κάμνομεν διαίρεσιν.***

π.χ. Τὸ 5πλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 400. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Λύσις $\frac{400}{5}=80$

Ἄλλο. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 60. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Λύσις $\frac{60}{\frac{3}{4}}=80$

42.—Προβλήματα λυόμενα μὲ τὴν μέθοδον διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα

Ἀριθμητικὴ μέθοδος καλεῖται ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιλύονται προβλήματα τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

Μέθοδος διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα καλεῖται ἕνας τρόπος λύσεως προβλημάτων διὰ τῆς εὑρέσεως πρῶτον τῆς τιμῆς μιᾶς μονάδος (εἴτε τῆς ἀκεραίας εἴτε τῆς κλασματικῆς) καὶ ἔπειτα τῆς τιμῆς τοῦ ζητουμένου ποσοῦ.

Μὲ τὴν μέθοδαν ταύτην λύονται ἁπλούστερον πλεῖστα ὅσα προβλήματα τοῦ πολ)σμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.

Παραδείγματα

Πρόβλημα 1ον. Αἱ 3 ὀκ. ζάχαρι ἀξίζουν 36 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;

αἱ 3 ὀκ.		ἀξίζουν	36 δρχ.
ἡ 1 ὀκ. ἢ τὰ	$\frac{4}{4}$ ὀκ.	»	$\frac{36}{3}=12$ δρχ.
τὸ	$\frac{1}{4}$ ὀκ.	ἀξίζει	$\frac{12}{4}=3$ δρχ.
καὶ τὰ	$\frac{3}{4}$ ὀκ.	ἀξίζουν	$3\times3=9$ δρχ.

Πρόβλημα 2ον. Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. βουτύρου ἀξίζουν 54 δρχ.

Πόσον ἀξίζει τὸ $\frac{1}{16}$ ὀκ. βουτύρου ;

Διάταξις πράξεως

Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν 54 δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » ἢ τὰ $\frac{4}{16}$ ὀκ. » $\frac{54}{3}=18$ δρχ.

Καὶ τὸ $\frac{1}{16}$ ὀκ. ἀξίζει $\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}$ δρχ.

Πρόβλημα 3ον. Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 65 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{2}{8}$ αὐτοῦ ;

Διάταξις πράξεως

Τὰ $\frac{5}{8}$ πηχ. ἀξίζουν 65 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » ἀξίζει $\frac{65}{5}=13$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{2}{8}$ » ἀξίζουν $13\times2=26$ δρχ.

Πρόβλημα 4ον. Ὁ 1 πηχ. ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 32 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ πηχ. αὐτοῦ;

Διάταξις πράξεως

Ὁ 1 πηχ. ἢ τὰ $\frac{8}{8}$ πηχ. ἀξίζουν 32 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » ἀξίζει $\frac{32}{8}=4$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ » ἀξίζουν $4\times3=12$ δρχ.

Πρόβλημα 5ον. Εἷς κρουνὸς γεμίζει ἕνα λουτῆρα εἰς 20 λεπτὰ τῆς ὥρας καὶ ἕτερος εἰς 30 λεπτά. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ ὁμοῦ εἰς πόσα λεπτὰ θὰ γεμίσῃ ὁ λουτήρ ;

Λύσις. Πρῶτον θὰ εὕρωμεν πόσον μέρος τοῦ λουτῆρος γεμίζει εἰς 1 λεπτὸν ἕκαστος τῶν κρουνῶν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ ὁ α΄ κρουνὸς γεμίζει τὸν λουτῆρα εἰς 20 λ. τῆς ὥρας, εἰς 1 λ. θὰ γεμίζῃ τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ λουτῆρος. Ἀφοῦ ὁ β΄ κρουνὸς γεμίζει τὸν λουτῆρα εἰς 30 λ., εἰς 1 λ. θὰ γεμίζῃ τὸ $\frac{1}{30}$ τοῦ λουτῆρος.

Ἑπομένως καὶ οἱ δύο κρουνοὶ εἰς 1 λ. θὰ γεμίζουν τὸ $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{3}{60}+\frac{2}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ τοῦ λουτῆρος. Ὅθεν ἀφοῦ

τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ λουτῆρος γεμίζει εἰς 1 λ.

τὰ $\frac{12}{12}$ » » ἤτοι ὁλόκληρος ὁ λουτὴρ γεμίζει εἰς, $1\times12=12$ λ. τῆς ὥρας.

Πρόβλημα 6ον. Πόσον εἶναι τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ ἀριθμοῦ 140;

Διάταξις πράξεως

Ὅλος ὁ ἀριθμὸς ἤτοι τὰ $\frac{7}{7}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 140

τὸ $\frac{1}{7}$ » » » $\frac{140}{7}=20$

καὶ τὰ $\frac{2}{7}$ » » » $20\times2=40$

Πρόβλημα 7ον. Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 210;

Διάταξις πράξεως

Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 210

τὸ $\frac{1}{4}$ » » » » » $\frac{210}{3}=70$

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ » », ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $70\times4=280$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ—ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

43.—Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες

Δεκαδικὸν κλάσμα ὀνομάζεται ἕνα κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι μία δύναμις τοῦ 10, ἤτοι ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ἀπὸ μηδενικά.

π.χ. $\frac{1}{10}, \frac{5}{100}, \frac{14}{1000}$ κλπ.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται ἕνας ἀριθμὸς ἀκέραιος ηὐξημένος κατὰ δεκαδικὸν κλάσμα π.χ. $3\frac{4}{10}$.

Γραφὴ δεκαδικῶν κλασμάτων. Ἐπειδὴ εἶναι φανερόν, ὅτι μία μονάς, οἱασδήποτε τάξεως, ἀξίζει 10 μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης

π.χ. $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}, \frac{1}{100}=\frac{10}{1000}\ldots$, καὶ ἐπειδὴ ἡ βασικὴ προϋπόθεσις τῆς γραφῆς τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (§ 7) ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, ἕπεται ὅτι, ἕν δεκαδικὸν κλάσμα ἢ ἕνας δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύνανται νὰ γραφῶσιν ὅπως καὶ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ πρὸς διάκρισιν τοῦ ἀκεραίου μέρους ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ θέτομεν ἕνα κόμμα, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ὑποδιαστολή***. Φανερὸν ἐπίσης εἶναι ἐκ τοῦ κάτωθι παραδείγματος

π. χ $\frac{372}{1000}=\frac{300}{1000}+\frac{70}{1000}+\frac{2}{1000}=\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{2}{1000}$

ὅτι τὴν πρώτην θέσιν κατέχουν τὰ δέκατα, τὴν δευτέραν τὰ ἑκατοστά, τὴν τρίτην τὰ χιλιοστὰ κ.ο.κ.

Ἑπομένως ὁ ἄνω ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{372}{1000}=0 \text{ ἀκέραιος}+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{2}{1000}=0{,}372$$

Ἐπίσης $20\frac{4}{100}=20,04$ ἢ $30\frac{14}{10000}=30,0014$

Σημ. Οἱ Ἀγγλόφωνοι Λαοὶ ἀντὶ ὑποδιαστολῆς θέτουν ἄνω τελείαν τὸ δὲ κόμμα τὸ χρησιμοποιοῦν διὰ νὰ χωρίζουν ἕναν ἀριθμὸν εἰς τριψήφια τμήματα πρὸς ἀνάγνωσιν. Π.χ. 2·75 ἢ 2·085. Ὡς ἐπίσης 13,759,832.

Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ. Δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν κατὰ τρεῖς τρόπους π.χ. τὸν 17,206

α΄ Τρόπος 17 ἀκέραιος, δύο δέκατα, μηδὲν ἑκατοστὰ καὶ ἕξ χιλιοστά.

β΄ τρόπος 17 ἀκέραιος καὶ 206 χιλιοστά.

γ΄ τρόπος 17206 χιλιοστά.

Συνήθως χρησιμοποιεῖται ὁ β΄ τρόπος, καθ᾽ ὅν ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ εἶτα τὸ δεκαδικόν, ὡς ἀριθμὸν ἀκέραιον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

π.χ. 3,705245 τρία ἀκέραιος καὶ ἑπταπόσιαι πέντε χιλιάδες διακόσια σαράντα πέντε ἑκατομμυριοστά.

ἢ ἄλλο 0,0004 μηδὲν ἀκέραιος καὶ τέσσαρα δεκάκις χιλιοστὰ ἢ ἁπλῶς τέσσαρα δεκάκις χιλιοστά.

Ἰδιότητες δεκαδικῶν ἀριθμῶν

α) Ἡ ἀξία ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν δεξιὰ τούτου.

π.χ. 3,7=3,70 ἢ ἄλλο 25,4=25,400 κ.ο.κ.

β) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κλπ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα μηδενικὰ ἔχει τὸ 10, 100, 1000 κλπ.

π.χ. $3,75\times100=375$ ἢ ἄλλο $6,75\times10=67,5$.

γ) Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κλπ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης 10, 100 κλπ.

π.χ. 354,5 : 100=3,545 ἢ ἄλλο 75,40 : 10=7,540.

Σημ. Ὅταν ὁ πολλαπλασιζόμενος ἢ διαιρούμενος ὡς ἄνω ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἀρκετὰ ψηφία διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω, παραθέτομεν μηδενικά.

π.χ. $2,53\times10000=25300$ ὁμοίως 2,39 : 1000=0,00239.

44.—Πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσέχωμεν εἶναι τὸ νὰ θέτωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον γραμμὴν καὶ αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

α) *Πρόσθεσις*

$$\begin{array}{r} 6{,}75 \\ 24{,}30 \\ 145{,}955 \\ 0{,}114 \\ \hline 177{,}119 \end{array} +$$

β) *Ἀφαίρεσις*

$$\begin{array}{r} 594{,}50 \\ 200{,}75 \\ \hline 393{,}75 \end{array} -$$

γ) *Πολλαπλασιασμός.*

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡσὰν νὰ εἶναι ἀκέραιοι, χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν, ἀπὸ δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τῶν πολλαπλασιαζομένων ἀριθμῶν.

π. χ.

$$\begin{array}{r} 1{,}25 \\ 0{,}6 \\ \hline 0{,}750 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}20 \\ 4 \\ \hline 12{,}80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15{,}4 \\ 0{,}21 \\ \hline 154 \\ 308 \\ \hline 3{,}234 \end{array}$$

δ) *Διαίρεσις.*

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.*

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ διαιρετέου καὶ εἶτα τὸ δεκαδικόν, προσέχοντες νὰ θέσωμεν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον μόλις τελειώσει ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου μέρους.

π. χ.

$$\begin{array}{r|l} 25{,}2 & 2 \\ \cline{2-2} 05 & 12{,}6 \\ 1\ 2 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2{,}54 & 4 \\ \cline{2-2} 14 & 0{,}63 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0{,}048 & 16 \\ \cline{2-2} 0 & 0{,}003 \end{array}$$

2) *Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός.*

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ***διὰ δεκαδικοῦ*** πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10, 100, 1000, κλπ. ὥστε ὁ ***διαιρέτης νὰ γίνῃ ἀκέραιος*** καὶ μετὰ διαιροῦμεν.

π. χ. 125 : 0,5=1250 : 5. Ἐπίσης 624 : 0,004=624000 : 4

1250	5
25	250
00	
0	

624000	4
22	156000
24	
0	

Τιμὴ πηλίκου κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε δεκαδικῆς μονάδος. Ὅταν μᾶς ζητεῖται τοῦτο προχωροῦμεν εἰς τὴν διαίρεσιν μέχρις ἐκείνου τοῦ δεκαδικοῦ ψηφίου, οὗτινος μᾶς ζητεῖται ἡ προσέγγισις. ***Συνήθως ὅμως προχωροῦμεν εἰς τὴν διαίρεσιν μέχρι τοῦ ἑπομένου δεκ. ψηφίου ἐκείνου οὗτινος μᾶς ζητεῖται ἡ προσέγγισις*** καὶ μετὰ ἂν τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον εἶναι μικρότερον τοῦ 5 τὸ παραλείπομεν, ἂν δὲ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5 τότε αὐξάνομεν κατὰ μίαν μονάδα τὸ προηγούμενον δεκαδικὸν ψηφίον καὶ τὸ τελευταῖον τὸ παραλείπομεν. Οὕτω ἡ εὕρεσις τοῦ πηλίκου γίνεται μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν. π. χ.

Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις τοῦ 390 : 165 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ (θὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν διαίρεσιν μέχρι τοῦ χιλιοστοῦ).

390	165
600	2,363
1050	
600	
105	

Ὥστε 390 : 165=2,36 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις τοῦ 1,30 : 55 κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ (θὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν διαίρεσιν μέχρι τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ, κατεβάζοντες μηδενικὰ ἑκάστοτε ἔστω καὶ ἂν δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸν διαιρετέον).

1,30	55
200	0,0236
350	
20	

Ὥστε 1,30 : 55=0,024 κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

45.—Μετατροπὴ κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ καὶ τανάπαλιν.

1) *Μετατροπὴ κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.*

Μετατροπὴ ἑνὸς κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν σημαίνει νὰ εὕρωμεν ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κοινόν, ἢ τοῦ ὁποίου νὰ διαφέρῃ ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος οἱασδήποτε ζητουμένης τάξεως.

π. χ. διὰ διαιρέσεως εὑρίσκομεν.

α) $\frac{15}{16} = 0,9375$ δηλαδὴ ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{15}{16}$ τραπὲν εἰς δεκαδικὸν μᾶς ἔδωσε τὸ ***πεπερασμένον δεκαδικὸν κλάσμα*** 0,9375 (διότι ἐτερματίσθη ἡ διαίρεσις καὶ εὕρομεν ὑπόλοιπον μηδέν).

β) $\frac{5}{11} = 0,\underbrace{45}\,\underbrace{45}\ldots$ Δηλ. ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{5}{11}$ τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν μᾶς δίδει ἓν ***ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκ. κλάσμα*** τὸ 0, 4545 . . . δηλαδὴ ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνονται τὰ ἴδια καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

τὸ 45, 45 . . . λέγεται ***περίοδος.***

γ) $\frac{13}{55} = 0,2\underbrace{36}36\ldots$ Δηλαδὴ ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{13}{55}$ τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν μᾶς δίδει ἕνα ***μικτὸν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα*** τὸ 0,23636 . . . ἤτοι ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνονται τὰ ἴδια καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ὄχι ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ἀλλὰ μετὰ ἕνα ἢ περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία.

Τὸ 2 εἶναι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος καὶ τὸ 36, 36 . . . εἶναι ἡ περίοδος.

Ἰδιότητες

α) Πᾶν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν μᾶς δίδει ἕνα κλάσμα δεκαδικὸν πεπερασμένον, ἢ ἕνα περιοδικόν.

β) Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας παρὰ μόνον τὸν 2 ἢ 5 ἢ καὶ τοὺς δύο, προκύπτει πάντοτε δεκαδικὸν κλάσμα πεπερασμένον.

γ) Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας, ἐκτὸς τοῦ 2 ἢ 5, τρέπεται ὑποχρεωτικῶς εἰς ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα.

δ) Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχει ***καὶ*** ἄλλους πρώτους παράγοντας, ἐκτὸς τοῦ 2 ἢ 5, τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν.

$$\text{π. χ.}\ \frac{7}{12} = 0,\ 58333\ldots$$

2) ***Μετατροπὴ δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς κοινά.***

Μετατροπὴ δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς κοινὸν σημαίνει νὰ εὕρωμεν ἕνα κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν δεκαδικὸν ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παρήχθη τὸ δεκαδικὸν (δι᾽ ὅ καὶ τὸ κοινὸν κλάσμα λέγεται ***παράγωγον*** τοῦ δεκαδικοῦ).

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α) Ὅταν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι ***πεπερασμένον.*** Τότε ἔχομεν $0{,}475 = \frac{475}{1000} = \frac{19}{40}$.

β) Ὅταν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι ***ἁπλοῦν περιοδικόν.*** Τότε ἔχομεν $0{,}5454\ldots = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

ἢ ἄλλο παράδειγμα

$$6{,}5454\ldots = 6\frac{54}{99} = 6\frac{6}{11}.$$

Δηλαδὴ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἓν ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν μὲν τὴν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν ἕνα ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἀπὸ τόσα 9 ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

γ) Ὅταν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι ***μικτὸν περιοδικόν.*** Τότε ἔχομεν $0{,}58\ \underbrace{314}\ \underbrace{314}\ldots = \frac{58314 - 58}{99900}$

ἢ ἄλλο παράδειγμα

$$7{,}\overset{\vee}{58}\,\underbrace{314}\,\underbrace{314}\ldots = 7\frac{58314-58}{99900}$$

Δηλαδὴ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἕνα μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους καὶ μιᾶς περιόδου, ἐλαττωθέντα κατὰ τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος, παρονομαστὴν δὲ ἕναν ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἀπὸ τόσα 9 ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου καὶ ἀπὸ τόσα μηδενικὰ ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους.

46.—Τετραγωνικὴ Ρίζα

1) ***Τετραγωνικὴ ρίζα ἢ δευτέρα ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ καλεῖται*** ἕνας ἄλλος ἀριθμός, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον μᾶς δίδει τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

π.χ. $\sqrt{25}=5$ διότι $5^2=25$

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ λέγεται ***ριζικόν,*** ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ εὑρισκόμενος ὑπὸ τὸ ριζικὸν λέγεται ***ὑπόρριζον*** ἢ ***ὑπόρριζος παράστασις.***

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καλεῖται ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἰσχωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα.

π.χ. $\sqrt{27}$ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ ἀρ. 5.

2) Ὁ ἑπόμενος πίναξ δίδει τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1 μέχρι καὶ τοῦ 12, ἑπομένως καὶ τὰς τετρ. ρίζας τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς.

Ἀριθμὸς	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Τετράγων.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Ἐκ τοῦ ἄνω πίνακος ἐξάγονται τὰ κάτωθι :

α) Ὅτι οὐδὲν τετράγωνον ἀριθμοῦ ἀπὸ 1—9 τελειώνει εἰς 2, 3, 7 καὶ 8. Καὶ ἐπειδὴ κάθε ἀριθμὸς λήγει εἰς ἓν ἐκ τῶν ἐννέα ψηφίων ἢ εἰς μηδέν, ἕπεται ὅτι οὐδὲν τετράγωνον ἀριθμοῦ δύναται νὰ τελειώνῃ εἰς τὰ ἄνω ψηφία 2, 3, 7 καὶ 8. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ πιθανότης ὅτι ἕνας ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον ἄλλου πρέπει νὰ τελειώνῃ εἰς 1, 4, 5, 6, 9 ἢ 0.

β) Ὅτι κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι τετρ. ρίζα ἑνὸς ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

γ) Ὅτι ὀλίγοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἀκεραίαν ρίζαν. Π.χ. ἐκ τοῦ ἄνω πίνακος ἐξάγεται ὅτι ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 1—144 μόνον 12 ἀριθμοὶ ἔχουν τετρ. ρίζαν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἤτοι οἱ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, καὶ

δ) Ὅτι ἡ τετρ. ρίζα μονοψηφίων ἢ διψηφίων ἀριθμῶν εἶναι μονοψήφιος ἀριθμός.

3) *Παραδείγματα εὑρέσεως τετραγων. ρίζης ἀριθμοῦ.*

Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{136.879}$

13.68.79	369 = ἡ τετρ. ρίζα	
9	66	729
468	6	9
396	396	6561
72.79		
65.61		
718		

Τρόπος ἐργασίας. Κατ᾽ ἀρχὰς χωρίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Μετὰ ἀρχίζομεν ἐξ ἀριστερῶν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ λέγομεν: Ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 13 πόση εἶναι κατὰ προσέγγισιν μονάδος; Εἶναι 3. Γράφομεν τὸ 3 εἰς τὸ δεξιὸν μέρος (ὅπου συνήθως εἶναι ὁ διαιρέτης εἰς μίαν διαίρεσιν) καὶ ὕστερα λέγομεν. Τὸ 3 εἰς τὸ τετράγωνον μᾶς κάνει 9. Γράφομεν τὸ ἐννέα κάτωθεν τοῦ 13 καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν 4. Ὕστερα κατεβάζομεν καὶ τὸ ἄλλο διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 468. Τώρα διπλασιάζομεν τὸ 3 (ποὺ εἶναι εἰς τὴν θέσιν τοῦ διαιρέτου) καὶ κάτωθεν γράφομεν τὸ διπλάσιον αὐτοῦ *6*. Ἔπειτα δοκιμάζομεν νοερῶς πόσο χωρεῖ τὸ 6 εἰς τὸ 46 (δηλαδὴ εἰς τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ 468) καὶ εὑρίσκομεν 6. Γράφομεν τὸ 6 τοῦτο δεξιὰ τοῦ ἄλλου *6* ποὺ εἴχομεν γράψει, ὡς καὶ 6 κάτωθεν τοῦ 66 πρὸς πολλαπλασιασμὸν καὶ πολ)ζοντες ἔχομεν 396. Τὸ 396 τὸ γράφομεν κάτωθεν τοῦ 468 καὶ ἀφαιροῦντες ἔχομεν 72. Ἀφοῦ γράψωμεν τὸ 6 δίπλα ἀπὸ τὸ 3 (ποὺ εἶναι στὴ θέσι τοῦ διαιρέτου) κατεβάζομεν καὶ τὸ ἄλλο διψήφιον τμῆμα καὶ ἔχομεν 7279. Διπλασιάζομεν τώρα τὸ 36 καὶ γράφομεν 72 κάτωθεν δεξιὰ τοῦ 66. Νοερῶς εὑρίσκομεν πάλιν πόσο χωρεῖ τὸ 7 (τοῦ 72) εἰς τὸ 72 (τοῦ 7279) καὶ εὑρίσκομεν 10 ἀλλὰ δὲν λέγομεν 10 ἀλλὰ 9 (ὅπως πολλάκις συμβαίνει καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν). Γράφομεν τὸ 9 δεξιὰ καὶ κάτωθεν τοῦ 72 καὶ πολ)ζοντες εὑρίσκομεν 6561. Γράφομεν τὸ 6561 κάτωθεν τοῦ 7279 καὶ ἀφαιροῦντες ἔχομεν 718. Τέλος γράφομεν τὸ 9 δεξιὰ τοῦ 36 (ποὺ εἶναι στὴ θέσι τοῦ διαιρέτου) καὶ ἔχομεν 369.

Ἤδη ἐτελείωσεν ἡ πρᾶξις, ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν νὰ κατεβάσωμεν ἄλλο διψήφιον τμῆμα, καὶ εὕρομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 369 εἶναι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 136879 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

Παρατηρήσεις : α) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετρ. ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσος πρὸς τὰ διψήφια τμήματα εἰς ἃ ἐχωρίσαμεν τὸν ἀριθμόν. π.χ. εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα τὰ ψηφία τῆς τετραγων. ρίζης εἶναι τρία ὅσα καὶ τὰ μέρη εἰς ἃ ἐχωρίσαμεν τὸν ἀριθμόν.

β) Ἕκαστον ὑπόλοιπον δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ρίζης. π.χ. τὸ προτελευταῖον ὑπόλοιπον εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα εἶναι 72 καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ μέρους τῆς ρίζης εἶναι 36Χ2=72. Μέχρι τοῦ διπλασίου μπορεῖ νὰ εἶναι, πλέον τοῦ διπλασίου δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι τὰ ἑκάστοτε ὑπόλοιπα.

Δοκιμή. Ἂν ὑψώσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τετρ. ρίζαν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέσωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ὑπάρχῃ, τότε θὰ εὕρωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Πράγματι εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα $369^2 + 718 = 136.879$.

Οὕτω δοκιμάζομεν ἂν ἔγινε καλῶς ἡ πρᾶξις.

Ἄλλο παράδειγμα ἐξαγωγῆς τ. ρίζης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{67.424}$

6.74.24	259 = ἡ τετρ. ρίζα	
4	45	509
27.4	5	9
225	225	4581
49.24		
45 81		
3 43		

Δοκιμή. $259^2 + 343 = 67424$

Σημ. Ὅταν χωρίζομεν δοθέντα ἀριθμὸν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἰς διψήφια τμήματα δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει τί θὰ εἶναι τὸ ἀριστερὰ τμῆμα ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ, δηλαδὴ ἂν θὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον.

4) ***Ἰδιότητες.***

α) Ἕνας ἀριθμὸς λήγων εἰς μηδενικὰ τότε δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν μηδενικῶν του εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ σημαντικὰ ψηφία αὐτοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

π. χ. Οἱ ἀριθμοὶ 100, 400, 160000 κ.λ.π. εἶναι τέλεια τετράγωνα ἀριθμῶν ἤτοι ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης των γίνεται ἀκριβῶς χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον.

$$\sqrt{100} = 10 \qquad \sqrt{10.000} = 100 \qquad \sqrt{1.000.000} = 1000$$

$$\sqrt{400} = 20 \qquad \sqrt{160.000} = 400 \qquad \sqrt{1.440.000} = 1200$$

β) Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος ἰσοῦται μὲ τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, διὰ τῆς τετρ. ρίζης τοῦ παρονομαστοῦ.

π. χ. $$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$$

5) ***Τετραγωνικὴ ρίζα κλασμάτων.***

α) Ἂν καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλεια τετράγωνα τότε εὑρίσκεται ἀμέσως ἡ τετρ. ρίζα. ὡς κάτωθι :

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}\ , \quad \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}\ ,$$

$$\sqrt{\frac{81}{144}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{144}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

β) Ἂν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα ἀριθμῶν, τότε τρέπομεν τὸ κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος ὡς κάτωθι :

6) ***Τετραγωνικὴ ρίζα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε δεκαδικῆς μονάδος.***

Ἐὰν λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸ ἐν ἀρχῇ ἀναφερόμενον καὶ ζητοῦμεν ἤδη νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 136879 κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς τινὸς μονάδος τότε ἡ πρᾶξις θὰ γίνῃ

13.68.79	369,97 = τ. ρ. κατὰ προσέγγισιν 0,01
9	66 729 7389 73987
46.8	6 9 9 7
396	396 6.561 66.501 517.909
72.79	
6561	
71.800	
66 501	
529900	
517909	
11 991	

ὡς ἐλέχθη ἐν ἀρχῇ μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι, ὅταν τελειώσουν τὰ διψήφια τμήματα εἰς ἃ ἐχωρίσαμεν τὸν ἀριθμὸν τότε

α) Θὰ βάλωμεν ἀμέσως ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν τετρ. ρίζαν καὶ

β) Θὰ παραθέσωμεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον (ἐδῶ π. χ. εἰς τὸ 718) ***δύο μηδενικὰ*** καὶ θὰ συνεχίσωμεν τὴν πρᾶξιν, ὅτε θὰ εὕρωμεν τ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν 0,1. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν 0,01 τότε εἰς τὸ νέον ὑπόλοιπον (τὸ 5299) θὰ παραθέσωμεν πάλιν δύο μηδενικὰ κ.ο.κ. ἂν θέλωμεν μεγαλυτέραν προσέγγισιν.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0,0001.

2	1,4142			
1	24	281	2824	28282
100	4	1	4	2
96	96	281	11296	56564
400				
281				
11.900				
11.296				
60.400				
56.564				
3.836				

Ὥστε κατὰ προσέγγισιν 0,0001 ἡ $\sqrt{2} = 1,4142$

Ἄλλο παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 0,072 κατὰ προσέγγισιν 0,001.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ἂν τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός. Ἐδῶ εἶναι περιττός, ἤτοι 3 δεκ. ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός. Θέτομεν δεξιὰ ἕνα μηδὲν ὅτε, ὡς γνωρίζομεν, ἡ ἀξία τοῦ δεκ. ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται. Τότε τὰ δεκ. ψηφία γίνονται τέσσαρα ἤτοι ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

0,07.20	0,268	
4	46	528
320	6	8
276	276	4224
44.00		
42.24		
176		

Ὥστε κατὰ προσέγγισιν 0,001 ἡ $\sqrt{0{,}072}$ $=0{,}268$.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκεται καὶ ἡ $\sqrt{\frac{19}{40}}$, διότι $\frac{19}{40}=0{,}475=$ $0{,}4750$. *Ἤτοι τρέπομεν τὸ κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ - ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

47.—Ἔννοιαι καὶ ὁρισμοί.

Διὰ τὴν μέτρησιν κυρίως τῶν συνεχῶν ποσῶν (§ 1) ἐλήφθησαν ὑπὸ τῶν ἀνθρώπων διάφοροι ὁμοειδεῖς μονάδες τούτων, ἤτοι διὰ τὰ μήκη, ὡρισμένον μῆκος—διὰ τὰς ἐπιφανείας, ὡρισμένη ἐπιφάνεια—διὰ τοὺς ὄγκους, ὡρισμένος ὄγκος—διὰ τὰ βάρη, ὡρισμένον βάρος κλπ.

Καὶ ἄλλαι μὲν τῶν μονάδων τούτων ἔχουν πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα καὶ δύναται τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως νὰ παρασταθῇ διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἄλλαι δὲ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια κατὰ τὸ μὴ δεκαδικὸν σύστημα, ὅτε τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως παρίσταται διὰ **συμμιγοῦς ἀριθμοῦ,** ἤτοι δι᾿ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια ἔχουν ἰδιαίτερα ὀνόματα.

48.—Μονάδες μετρήσεως.

Αἱ κυριώτεραι μονάδες μετρήσεως, αἵτινες χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ διαφόρων Κρατῶν εἶναι αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τοὺς ἑπομένους πίνακας.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ

1 ἡμέρα. Εἶναι ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἡ Γῆ διὰ νὰ ἐκτελέσῃ μίαν πλήρη περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονά της.

Πολλαπλάσια

1) *Ἡ ἑβδομὰς*=7 ἡμέραι
2) *Ὁ μὴν*=30 ἡμέραι. Οὕτω ὑπολογίζεται συνήθως ἐν τῷ ἐμπορίῳ.
3) *Τὸ ἔτος*=360 ἡμέραι. Οὕτω συνήθως ὑπολογίζεται ἐν τῷ ἐμπορίῳ.
4) *Ὁ αἰὼν*=100 ἔτη. Λέγεται ἄλλως ἑκατονταετηρίς.
5) *Ἡ χιλιετηρίς*=1000 ἔτη.

Ὑποπολλαπλάσια

1) *1 ὥρα*= $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας ἢ 1 ἡμέρα=24 ὧραι.
2) *1 ὥρα*=60 λεπτὰ ἢ 60 λ.
3) *1 λεπτὸν*=60 δεύτερα λεπτὰ ἢ 60 δ.

Σημείωσις. Διὰ τὴν ἀκρίβειαν τὸ ἔτος διακρίνεται:

1) ***Εἰς τὸ τροπικὸν ἔτος***=365 $^1/_4$ ἡμέρας περίπου ὅσας κάμνει ἡ Γῆ διὰ μίαν *πλήρη* περιφορὰν περὶ τὸν ἥλιον.

2) ***Εἰς τὸ πολιτικὸν ἔτος***=365 ἡμέρας ἐπὶ 3 συνεχῆ ἔτη καὶ 366 ἡμέρας ἀνὰ πᾶν τέταρτον ἔτος, ὅπερ καλεῖται ***δίσεκτον*** καὶ κατὰ τὸ ὁποῖον ὁ Φεβρουάριος ἔχει 29 ἡμέρας ἀντὶ 28 ποὺ ἔχει κατὰ τὰ ἄλλα ἔτη. Εἰς τοῦτο ἄλλοι ἐκ τῶν 12 μηνῶν ἔχουν 30 ἡμέρας καὶ ἄλλοι ἔχουν 31.

3) *Τὸ ἐμπορικὸν ἔτος*=360 ἡμέραι. Κατὰ τοῦτο οἱ 12 μῆνες ἔχουν ἀνὰ 30 ἡμέρας ἕκαστος.

ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΟΞΩΝ ἢ ΓΩΝΙΩΝ

1 μοῖρα=1^0= $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας κύκλου,

Πολλαπλάσια

Περιφέρεια κύκλου 360^0

Ὑποπολλαπλάσια

1 λεπτὸν ἢ 1′ = $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας ἢ 1^0=60′

1 δεύτερον λεπτὸν ἢ 1″=$\frac{1}{60}$ τοῦ 1′ ἢ 1′=60″.

ΚΥΡΙΩΤΕΡΑΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗ

ΚΡΑΤΗ	ΣΥΣΤΗΜΑ	ΜΗΚΟΥΣ	ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
Πλεῖστα ὅσα Κράτη πλὴν τῶν Ἀγγλοφώνων	Μονάδες δεκαδικοῦ συστήματος	***Πολλαπλάσια*** 1000 μ.=χιλιόμετρον 100 μ.=ἑκατόμετρον 10 μ.=δεκάμετρον ***Μονὰς*** ***1 μέτρον*** = $\frac{1}{40.000000}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς ***Ὑποπολλαπλάσια*** $\frac{1}{10}$=ὑποδ)τρον ἢ παλάμη $\frac{1}{100}$= ἑκατοστόμετρον ἢ δάκτυλος ***ἢ πόντος*** $\frac{1}{1000}$= χιλιοστόμετρον ἢ γραμμὴ	***Πολλαπλάσια*** 1000^2=1.000.000 τ. μ.=τ. χιλιόμετρον 100^2=10.000 τ.μ.=τ. ἑκατόμετρον ἢ ***ἑκτάριον*** 10^2=100 τ. μ.=τ. δεκάμετρον ἢ ***ἄριον*** ***Μονὰς*** ***1 τετραγωνικὸν μέτρον***= τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 μέτρου ***Ὑποπολλαπλάσια*** $\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$ τ.μ.=τ. ὑποδεμετρον ἢ παλάμη $\frac{1}{100^2}=\frac{1}{10.000}$ τ.μ. =τ. ἑκατοστόμετρον ἢ τ. δάκτυλος ἢ τ. πόντος $\frac{1}{1000^2}=\frac{1}{1.000.000}$ τ. μ.= τ. χιλιοστόμ. ἢ τ. γραμμή.
Ἑλλὰς Τουρκία κ.λ.π.	Μονάδες κατὰ μὴ δεκαδικὸν σύστημα	α) ***1 πῆχυς ἐμπορίου*** (πῆχυς Κων)πόλεως)= =0,648 μ. Ἐν τῷ ἐμπορίῳ λαμβάνεται 1 πῆχ.=0,64 μ. 1 πῆχυς=8 ρούπια. β) ***1 τεκτονικὸς πῆχυς***= $\frac{3}{4}$ μ.=0,75 μ. Τὸν μεταχειρίζονται διὰ τὴν μέτρησιν μήκους πλευρῶν οἰκοπέδων, τοίχων κλπ. καὶ γενικῶς οἱ κτίσται.	α) ***1 βασιλικὸν στρέμμα*** =1000 τ.μ. 1 παλαιὸν βασ. στρέμμα= 1270 τ. μ. ἤτοι 1 παλ. στρέμμα=1,27 βασ. στρέμματος. β) *1 τ.τ.π.*=$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ τ.μ. Τὸν μεταχειρίζονται διὰ τὴν μέτρησιν ***ἐπιφανειῶν*** οἰκοπέδων, τοίχων κλπ.
Ἀγγλία Ἡν. Πολιτεῖαι καὶ ἄλλα Ἀγγλόφωνα Κράτη		***1 κόμβος***=1853 μ.=6080 πόδες=Ἀγγλ. ναυτικὸν μίλλιον=Μέσος ὅρος μήκους τόξου 1′ τοῦ Ἰσημ. καὶ Μεσημβρινοῦ τῆς γῆς. ***1 ναυτικ. μίλλιον***=2026,6 ὑάρδες=1852 μ. = Μῆκος 1′ Μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς ***1 μίλλιον(ξηρᾶς)***=1760 ὑ. ***1 ὀργυιὰ***=2 ὑάρδες. ***1 ὑάρδα***=0,914 μ.=3 πόδες ἢ 3′. 1 ποῦς=12 δακτύλους ἢ ἴντσες ἢ 12′′. *1 ἴντσα=0,0254 μ. =2,5 πόντους περ., 1 μ.=39,77 ἴντσες περ., 1 ποῦς=0,305μ. περ.=30,5 πόντους.*	640 ἄκρ.=1 ***τ. μίλλιον*** 4840 τ. ὑ.=1 ***ἄκρ*** ***1 τ. ὑάρδα***=0,836 τ.μ. περίπου. 1 τ.ὑ.=9 τ. πόδες. 1 τ. ποῦς =144 τ. ***ἴντσες*** *1 τ.μ.=1550 τ. ἴντσες* *1 τ.ἴν. = 6,45 τ. πόντους περίπου.* *1 ἑκτάριον = 2,5 ἄκρ περίπου.*
Ὑπὸ πλείστων Κρατῶν		***1 ναυτικ. μίλλιον***=1852μ. ***1 κόμβος***=1853 μ. περίπ.	

ΣΕΩΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΡΑΤΩΝ

ΟΓΚΟΥ	ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΟΣ	ΒΑΡΟΥΣ
Πολλαπλάσια 1000^3=1.000.000.000κ.μ.= =κ. χιλιόμετρον 100^3=1.000.000 κ.μ.=κ. ἑκατόμετρον 10^3=1000 κ.μ.=κ. δεκάμετρον *Μονὰς* *1 κυβικόν μέτρον*=κῦβος τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ =1 μ. *Ὑποπολλαπλάσια* $\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$κ.μ.=κ. ὑποδεκάμετρον ἢ κ. παλάμη $\frac{1}{100^3}=\frac{1}{1.000.000}$κ.μ. = κ. ἑκ)μετρον ἢ κ. πόντος $\frac{1}{1000^3}=\frac{1}{1.000.000.000}$κ.μ. =κ. χιλιοστόμετρον	*Πολλαπλάσια* *1000 λιτρον*=χιλιόλιτρον *100 λιτρὸν ἢ κοιλόν.* Εἰς τὰ Βαλκάνια καὶ Τουρκίαν χρησιμοποιεῖται διὰ μέτρησιν σιτηρῶν 24 ὀκ. περίπου. 2, 5, 10 λίτραι *Μονὰς* *1 λίτρον* = χωρητικότης μιᾶς κ. παλάμης. Χρησιμοποιεῖται κυρίως διὰ τὴν μέτρησιν ὑγρῶν. *Ὑποπολλαπλάσια* $\frac{1}{10}$=δέκατον λίτρου $\frac{1}{100}$=ἑκατοστὸν λίτρου *1 λίτρον =·1,759 πάϊντς* *1 » =61,024 κ.ἴντσες*	*Πολλαπλάσια* 1000 χιλιόγραμμα ἢ *μετρικὸς τόνος*=781,25 ὀκάδ. 100 χιλιόγραμμα ἢ *Κουϊντὰλ* 2,5,10,50 χιλιόγραμμα. *Μονὰς* *1 χιλιόγραμμον ἢ κιλὸν*=Τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0 Κ τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς μίαν κ. παλάμην δηλ. εἰς 1 λίτραν. *Ὑποπολλαπλάσια* Γραμμάριον = $\frac{1}{1000}$ χιλγρ. 1000 γραμ.=1 κιλόν.
α) ὡς ἄνω β) *1 κ.τ.π.*=$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$κμ Τὸν μεταχειρίζονται διὰ τὴν μέτρησιν *ὄγκου* τοίχων.	Ὡς ἄνω, ὡς καὶ δοχεῖα ἔχοντα χωρητικότητα μιᾶς ὀκᾶς, μισῆς, 100 δραμίων κλπ.	*1 χλγρ.=312,5 δράμια* *1 δράμι=3,2 γραμμάρια* *1 χλγρ.=2,205 πάουντς περίπ.* *1 Ἀγγλ. τόνος=2240 πάουντς* *1 μετρικὸς » =2200 »* *1 κ.μ. ὕδατος= 1000 χλγρ.* *1 κ.μ. θαλασ. ὕδατος=1027 χλγρ. περίπου* *1 κ.μ. ἐλαιολάδου=917 χλγρ.* *1 κ.μ. βενζίνης=730χλγρ. περ.* α) *1 ὀκὰ*=400 δράμια=1280 γρμ.=1,28 χλγρ. 44 ὀκάδ.=*1 στατὴρ* β) ***Ἐνετικὴ λίτρα***=480 γρμ. =150 δράμια
1 κ. ὑάρδα=0,7645 κ.μ. 1 κ.ὑ.=3^3=27 κ.πόδες 1 κ.π.=12^3=1728 κ.ἴν. *1 κ. ποῦς=0,0283 κ.μ.* *1 κ.μ.=35,31 κ.π.*	*Διὰ τὰ ὑγρὰ* *1 πάϊντ*=$\frac{4}{7}$λίτρου περίπ. Ἐν τοιοῦτον δοχεῖον χωρεῖ περίπ. 570 γρμ. καθαρὸ νερὸ=178 δρμ. 2 πάϊντς=1 κουὸρτ 4 κουὸρτς=1 γκάλλον=10 πάουντς καθ. νερό. Εἰς τὰ Ἑπτάνησα χρησιμοποιοῦν διὰ τὰ ὑγρὰ τὴν πάϊντ καὶ τὴν λένε πίντα. *Διὰ τὰ σιτηρὰ κυρίως* 1 αὐτοκρ.μποῦσελ=8 γκάλ	*1 πάουντ ἢ λίμπρα*=454 γρμ. περ.=142 δρμ. περίπ. Πάουντ λέγεται προφορικῶς ἀλλὰ γράφεται lb. (λίμπρα) 1 πάουντ=16οὐγγ.(ὄνσες) 14 πάουντς=1 στὸν 2 στὸνς=1 κουῶρτερ 4 κουῶρτερς=1 χάντρετγουέϊτ 20 χάντρετγουέϊτς=*1 τόνος Ἀγγλικὸς*=2240 πάουντς=1016 χλγρ. περίπ.
1 κόρος=100 κ.π.=2,83 κ.μ. Τὸν μεταχειρίζονται κυρίως διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου ἢ χωρητικότητος τῶν πλοίων.	*1 κόρος*=2,83 κ.μ.	*Καράτιον*=0,2 γρμ. ἢ 5 καρ. =1 γρμ. ἢ 16 καρ.=1 δρμ. Τὸ μεταχειρίζονται εἰς τὴν *ζύγισιν τῶν πολυτίμων λίθων* ὡς ἀδαμάντων κλπ.

Κυριώτεραι μονάδες νομισμάτων διαφόρων Κρατῶν

Κράτη	Ὀνομασία μονάδος νομίσματος καὶ ὑποδ)σεις
Ἀγγλία καὶ πολλαὶ τῶν ἀποικιῶν της	***Ἡ λίρα Στερλίνα (στίρλιγκ) £.*** Ἡ χρυσῆ λίρα λέγεται καὶ ***σοβερέϊν*** ἡ δὲ χάρτινη ***πάουντ***. Ἡ χρυσῆ ἔχει βάρος ὁλικὸν 7,988 γραμμάρια, βάρος καθ. χρυσοῦ 7,322 γραμ. καὶ τίτλον 0,9166. 1 λ.=20 σελλίνια (σίλιγκς) 1 σελλίνιον=12 πέννες (πὲνς) 1 πέννα=4 φαρδίνια (φάρδινς) 1 ***Γκινέα***=21 σελ. Νόμισμα τοιοῦτον δὲν ὑπάρχει σήμερον ἀλλὰ χρησιμοποιεῖται ἡ λέξις πολλάκις εἰς τιμὰς διαφόρων εἰδῶν.
Ἀργεντινή, Γουεταμάλα, Ὀνδούρα, Κολομβία, Μεξικό, Χιλὴ κλπ.	***Πέζο***=100 σεντάβος
Αἴγυπτος	***Λίρα Αἰγύπτου*** 1 λ. =100 πιάστρες (γρόσια), 1 πιάστρο=10 μιλιὲμ (γροσάκια)
Βενεζουέλα	***Βόλιβαρ***=100 σεντάβος
Βέλγιον	***Βελγικὸν φράγκον***=100 σαντὶμ
Βραζιλία	***Κρουζέερο***=100 σεντάβος (πρό τινος ἦτο τὸ μιλρέϊς)
Βουλγαρία	***Λέβα***=100 στοτίνκι
Γερμανία	***Μᾶρκον***=100 πφένιχ
Γαλλία	***Φράγκον***=100 σαντὶμ
Γιουγκοσλαυΐα	***Δηνάριον***=(Ντινὰρ)=100 παρὰς
Δανία, Νορβηγ. Σουηδία	***Κρόννερ***=100 ὄρε
Ἑλβετία	***Ἑλβετικὸν φράγκον***=100 σαντὶμ
Ἑλλὰς	***Δραχμὴ***=100 λεπτὰ
Ἡν. Πολιτ.—Καναδᾶς	***Δολλάριον***= (Ντόλλαρ $) =100 σὲντς
Ἱσπανία	***Πεσσέτα***=100 σέντιμος
Ἰταλία	***Λίρα ἢ λιρέττα***=100 τσεντέσιμι
Ἰνδίαι	***Ρουπία***=16 ἄννες, 1 ἄννα=12 πάϊς
Ἰαπωνία	***Γιὲν***=100 σὲν
Ἰνδοκίνα	***Πίαστρ***=100 σὲντς
Κίνα	***Λιὰνγκ ἢ τάελ***=180 μάτσες

Κυριώτεραι μονάδες νομισμάτων διαφόρων Κρατῶν
(Συνέχεια)

Κράτη	Ὀνομασία νομίσματος μονάδος καὶ ὑποδ)σεις
Ὀλλανδία	***Φλῶριν ἢ γκίλντε***=100 σαντὶμ
Παναμᾶς	***Μπαλμπόα***=100 σέντς
Περσία	***Τομὰν***=10 κράν, 1 κρὰν=20 σάχις
Πορτογαλλία	***Ἐσκοῦντο***=100 σεντάβος
Ρουμανία	***Λέϊ***=100 μπάνι
Ρωσσία	***Ρούβλιον***=100 κόπικς (καπίκια) Διὰ τὰς ἐξωτερικὰς συναλλαγάς, πρὸ τοῦ τελευταίου πολέμου, ἐχρησιμοποιεῖτο τὸ ***Τσερβόνετς***, νόμισμα χρυσοῦν=7,74 γραμ. καθ. χρυσοῦ=10 χρυσᾶ ρούβλια.
Τουρκία	***Λίρα Τουρκίας***, ἡ χρυσὴ λέγεται ***ρεσὰτ*** ἡ δὲ χαρτίνη ***μπαγκνότ***. 1 λ.=100 γρόσια, 1 γρ.=40 παράδες.
Φιλλανδία	***Μάρκαας***=100 πένις

Σημ. Ἡ ἀξία τῶν νομισμάτων, ἡ ὁποία μετρᾶται μὲ τὴν ἀγοραστικὴν δύναμιν ἐπὶ ὡρισμένων συνήθους χρήσεως εἰδῶν, διὰ τὰ Κράτη ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν χρυσῆν βάσιν—καὶ τὰ πλεῖστα σήμερον τῶν Κρατῶν δὲν ἔχουν τοιαύτην ἀλλ' ἔχουν ἀναγκαστικὴν κυκλοφορίαν χαρτονομισμάτων—εἶναι εὐμετάβλητος ἀκόμη καὶ σήμερον, καθορίζεται δὲ κυρίως, ἑκάστοτε, ἀναλόγως τοῦ ἀποθέματός των εἰς χρυσόν, τοῦ εἰς χεῖρας των ἐξωτερικοῦ συναλλάγματος, τοῦ ἰσοζυγίου εἰσαγωγῆς καὶ ἐξαγωγῆς ἐμπορευμάτων, τοῦ ὄγκου κυκλοφορίας τῶν νομισμάτων, τοῦ ὄγκου τῶν κυκλοφορούντων ἐμπορευμάτων κ.λ.π.

Οὕτω π.χ. ἐνῶ ἡ Ἑλλὰς εἶχε προσχωρήσει κατὰ τὸ 1868 εἰς τὴν ἀπὸ τοῦ ἔτους 1865 συναφθεῖσαν Λατινικὴν ἕνωσιν δι' ἧς καθωρίζετο ὅτι ἡ μονὰς νομίσματος διαφόρων Κρατῶν (Γαλλίας—Ἐλβετίας—Ἰταλίας καὶ Βελγίου] θὰ ἰσοδυνάμῃ πρὸς ἓν χρυσοῦν φράγκον ἤτοι π.χ. διὰ τὴν Ἑλλάδα 1 δρχ.=1 χρ. φράγκον=0,290 γραμ. χρυσοῦ ἢ 25,22 χρ. δρχ.=25,22 χρ. φράγκα=1 χρυσὴ λίρα Ἀγγλίας, ἐν τούτοις μετὰ τὸν πρῶτον παγκόσμιον πόλεμον (1914—1918) δὲν κατώρθωσεν ἡ Ἑλλάς, ὅπως καὶ ὅλα τὰ ἄλλα Κράτη, νὰ κρατήσῃ τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος της εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἔπεσεν ἡ δραχμή της ὥστε πρὸ τοῦ τελευταίου παγκοσμίου πολέμου εἶχον 800 δρχ. περίπου=1 χρυσ. λίρα Ἀγγλίας, σήμερον δὲ μετὰ τὴν κατὰ τὸ 1953 ἀναπροσαρμογὴν τῆς δραχμῆς 300 δρχ. περίπου=1 χρ. λίρα Ἀγγλίας, 84 δρχ.=1 χαρτίνη λίρα Ἀγγλίας καὶ 30 δρχ.=1 δολλάριον.

Τὰ νομίσματα τῶν διαφόρων κρατῶν εἶναι χρυσᾶ ἢ ἀργυρᾶ ἢ χάρτινα ἢ χαλκᾶ κ.λ.π. Σήμερον ὅμως κατὰ κανόνα μόνον τὰ μικρᾶς ἀξίας νομίσματα εἶναι ἐκ μετάλλου τὰ δὲ μεγάλης ἀξίας εἶναι ἐκ χάρτου (χαρτονομίσματα).

49.—Μεταβολαὶ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

α) *Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας οἱασδήποτε τάξεως.*

1) *Τῆς κατωτάτης τάξεως*

π.χ. 1ἔ. 2μ. 10ἡμ. 16 ὥ. *εἰς ὥρας*

$$
\begin{array}{rl}
\times\ 12 & \\
\hline
12 & \text{μῆνες} \\
+\ 2 & » \\
\hline
14 & » \\
\times\ 30 & \\
\hline
420 & \text{ἡμέρ.} \\
+\ 10 & » \\
\hline
430 & » \\
\times\ 24 & \text{ὧρες} \\
\hline
1720 & \\
860\ & \\
\hline
10320 & » \\
+\ 16 & » \\
\hline
10336 & » =1\text{ἔ}.\ 2\text{μ}.\ 10\text{ἡμ}.\ 16\text{ὥ}.
\end{array}
$$

2) *Μιᾶς ἄλλης οἱασδήποτε τάξεως.*

π.χ. 1 ἔ. 2 μ. 10 ἡ. 16 ὥ. *εἰς μῆνας*

$$
\begin{array}{rlrl}
\times\ 12 & & \times\ 24 & \\
\hline
12 & \text{μην.} & 240 & \text{ὧρες} \\
+\ 2 & » & +\ 16 & » \\
\hline
14 & » & 256 & »
\end{array}
$$

Ἀλλ' ὁ μὴν πόσας ὥρας ἔχει;
$1 \times 30 \times 24 = 720$ ὥρας

Ὅθεν αἱ 256 ὧραι εἶναι $\frac{256}{720}$ τοῦ μηνός.

Ἑπομένως 1 ἔτος 2 μ. 10 ἡμ. 16 ὥρ. $= 14\frac{256}{720}$ μῆνες.

β' *Τρόπος* τοῦ ἄνω δεξιὰ παραδείγματος.

Τρέπομεν πρῶτον τὸν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτάτης τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον τὸ γράφομεν ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος, ὡς παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης κατωτάτης τάξεως κάμνουν μίαν μονάδα τῆς τάξεως ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμός.

π.χ. 1 ἔτ. 2 μ. 10 ἡμ. 16 ὥρ. $= \frac{10336}{720}$ μῆνες $= 14\frac{256}{720}$ μῆνες.

β) *Τροπὴ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.*

1) *Ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ*

Νὰ τραποῦν 110226 λ. τῆς ὥρας εἰς συμ. ἀριθμόν.

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
110226 & 60 & & \\
\cline{2-2}
502 & 1837\ \text{ὥρ.} & 24 & \\
\cline{3-3}
222 & 157 & 76\text{ἡμ.} & 30 \\
\cline{4-4}
426 & \mathit{13}\ \text{ὥρ.} & \mathit{16}\text{ἡμ.} & \mathit{2}\,\text{μ.} \\
\mathit{6}\ \text{λ.} & & &
\end{array}
$$

Ὥστε 110226 λ. = 2 μῆν. 16 ἡμ. 13 ὥρ. 6 λ.

1) *Κλάσματος εἰς συμμιγῆ*

Νὰ τραποῦν $\frac{3}{7}$ τῆς λίρας Ἀγγλίας εἰς συμ. ἀριθμόν.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3\ \text{λιρ.} & 7 \\
\cline{3-3}
\times & 20\ \text{σελ.} & 0\ \text{λιρ.}\ 8\ \text{σελ.}\ 6\ \text{πεν.}\ 3\frac{3}{7}\ \text{φρδ} \\
\cline{2-2}
 & 60\ » & \\
 & 4\ » & \\
\times & 12\ \text{πεν.} & \\
\cline{2-2}
 & 48\ » & \\
 & 6\ » & \\
\times & 4\text{φρδ.} & \\
\cline{2-2}
 & 24\ » & \\
 & 3\ » &
\end{array}
$$

Ὥστε $\frac{3}{7}$ λιρ. = 0 λ. 8 σελ. 6 πεν. $3\frac{3}{7}$ φ.

3) ***Δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς συμμιγῆ.***

Νὰ τραποῦν 0,34 λίραι Ἀγγλίας εἰς συμ. ἀριθμόν.

$0,34 = \frac{34}{100}$ λιρ. Ὅθεν

$$
\begin{array}{r|l}
34 \text{ λ.} & 100 \\ \hline
\times\ 20 \text{ σελ} & 0 \text{ λιρ. } 6 \text{ σελ. } 9 \text{ πεν } 2\frac{40}{100} \text{ φ.} \\
680\ » & \\
80\ » & \\
\times\ 12 \text{ πεν} & \\
960\ » & \\
60\ » & \\
\times\ 4 \text{ φρδ} & \\
240\ » & \\
40\ » &
\end{array}
$$

Ὥστε 0,34 λιρ. = 0 λ. 6 σελ. 9 πεν. 2,4 φ.

4) ***Μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.***

Νὰ τραποῦν 3,28 μῆν. εἰς συμ. ἀριθμόν.

3,28 μῆν. $= 3\frac{28}{100} = \frac{328}{100}$ μῆν.

$$
\begin{array}{r|l}
328 \text{ μην} & 100 \\ \hline
28\ » & 3 \text{ μ. } 8 \text{ ἡμ. } 9 \text{ ὥρ. } 36 \text{ λ.} \\
\times\ 30 \text{ ἡμ.} & \\
840\ » & \\
40\ » & \\
\times\ 24 \text{ ὥρ.} & \\
960\ » & \\
60\ » & \\
\times\ 60 \text{ λ.} & \\
3600 \text{ λ.} & \\
0 &
\end{array}
$$

Ὥστε 3,28 μην. = 3 μην· 8 ἡμ. 9 ὥρ. 36 λ.

γ) *Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἄλλον συμμιγῆ.*

Διὰ τὴν λύσιν παρομοίων προβλημάτων πρέπει νὰ γνωρίζωμεν πολὺ καλῶς τὰς σχέσεις δι' ὧν συνδέονται αἱ διάφοροι μονάδες μετρήσεως.

1) 10 ὀκ. εἰς χιλιόγραμμα *Λύσις* 1,28×10=12,80 χιλιόγραμμα

2) 1 χιλιόγρ. εἰς ὀκάδας *Λύσις* $\frac{1}{1,28}$ =0,781 ὀκάδας περίπου

3) 4 πηχ. Κων)λεως εἰς μέτρα *Λύσις* 0,64×4=2,56 μέτρα

4) 2,56 μέτρα εἰς πήχ. Κ)λεως *Λύσις* $\frac{2,56}{0,64}$ = 4 πήχεις.

5) 5 ὑάρδες εἰς πήχ. Κ)λεως *Λύσις* $5\times\frac{0,914}{0,64}$=7,14 πήχεις.

6) 3 τεκτ. πήχ. εἰς πηχ. Κων)λεως

Λύσις $3\times\frac{0,75}{0,64}$=3,51 πηχ. Κων)πόλεως.

Κυρίως ἐκ τῶν δύο τελευταίων παραδειγμάτων ἐξάγεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς ***Κανών.*** Ὅταν ἔχωμεν νὰ τρέψωμεν μονάδας εἰς ἄλλας μονάδας ὁμοειδεῖς (δηλ. μονάδας μήκους εἰς ἄλλας μονάδας μήκους, ἐπιφανείας εἰς ἄλλας μονάδας ἐπιφανείας κλπ.) πολ)ζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ τρέψωμεν, ἐπὶ τὸ κλάσμα ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν τὴν σχέσιν τῆς δοθείσης μονάδος πρὸς τὴν μονάδα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος καὶ παρονομαστὴν τὴν σχέσιν τῆς ζητουμένης μονάδος πρὸς τὴν μονάδα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, π.χ.

1) 10 ὑαρ. εἰς πηχ. Κων)πόλεως

$$\textit{Λύσις}\ 10\times\frac{\text{ὑάρδαι}}{\text{εἰς πηχ.}}=10\times\frac{0{,}914}{0{,}64}=14\ \text{π. } 2{,}2\ \text{ρ.}$$

2) 12 τ. πηχ. εἰς ὑάρδας

$$\textit{Λύσις}\ 12\times\frac{\text{τ. πήχεις}}{\text{εἰς ὑάρδ.}}=\times12\frac{0{,}75}{0{,}914}=9\ \text{ὑ. } 2\ \text{π. } 6{,}5\ \text{δ.}$$

3) 10 λίμπρες εἰς ὀκάδας. ***Λύσις*** 142 δρμ.×10 λιμ.=3 ὀκ. καὶ 220 δράμ. ἢ $10\times\frac{\text{λίμπρες}}{\text{εἰς ὀκ.}}=10\times\frac{454}{1280}=3$ ὀκ. καὶ 219 δράμ.

4) 3 τετρ. ὑάρδας εἰς Τ.Τ.Π.

$$\textit{Λύσις}\ 3\times\frac{\text{Τ ὑάρδας}}{\text{εἰς τ.τ. π.}}=3\times\frac{0{,}914^2}{\frac{9}{16}}=\frac{3\times16\times0{,}914^2}{9}=\text{Τ.Τ.Π}$$

5) 1 μ. εἰς ὑάρδας

$$\textit{Λύσις}\ 1\times\frac{\text{μέτρα}}{\text{εἰςὑάρδας}}=1\times\frac{1}{0{,}914}=1\ \text{ὑ. } 0\ \text{π. } 3{,}4\ \text{ἴντσες κ.ο.κ.}$$

δ) ***Τροπὴ μονάδων δεκαδικοῦ συστήματος εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν καὶ ἀντιστρόφως.***

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τούτων πρέπει νὰ γνωρίζωμεν καλῶς τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια τῶν μονάδων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος. Εἰδικώτερον πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα.

Ἐκ τῶν μονάδων μήκους	Τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων παριστᾷ παλάμας » » » ἑκατοστῶν » δακτύλους » » » χιλιοστῶν » γραμμὰς
Ἐκ τῶν μονάδων ἐπιφανείας	Τὰ δεκαδικὰ ψηφία μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ παριστῶσι τ. παλάμας » » » » δεκάκις χιλ)στοῦ τ. δ)λους » » » » ἑκατομ)στοῦ τ. γραμμὰς
Ἐκ τῶν μονάδων ὄγκου	Τὰ δεκ. ψηφία μέχρι τοῦ χιλιοστοῦ παριστῶσι κ. παλάμας » » » » ἑκατομ)στοῦ » κ. δ)λους » » » » δισεκατ)στοῦ » κ. γρ)μὰς

Παραδείγματα

1) Νὰ τραποῦν 1,056 μ. εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Λύσις 1,056μ.=1 μ. 0 π. 5 δ. 6 γρ.

2) Νὰ τραποῦν 2,6754 τ.μ. εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Λύσις 2,6754 τ.μ.=2 τ.μ. 67 τ.π. 54 τ.δ.

3) Νὰ τραποῦν 4,563072 κ.μ.=4 κ.μ. εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Λύσις 4,563072 κ.μ.=4 κ.μ. 563 κ.π. 72 κ.δ.

4) Νὰ τραποῦν 2 μ. 6 π. 8 δ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Λύσις=2,68 μέτρα.

5) Νὰ τραποῦν 2 τ.μ. 15 τ.π. 6 τ.δ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Λύσις=2,1506 τ.μ.

6) Νὰ τραποῦν 2 κ.μ. καὶ 14 κ.δ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Λύσις=2,000014 κ.μ.

7) Νὰ τραποῦν 2 χιλγρ. καὶ 15 γραμ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Λύσις=2,015 χλγρ.

8) Νὰ τραποῦν 5 τόν. 78 χιλιόγρ. καὶ 60 γραμ. εἰς δεκαδικὸν ἀριθ. τόννων.

Λύσις=5,078060 τόννοι

9) Νὰ τραποῦν 5,350600 μετρικοὶ τόννοι εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Λύσις 5 τόννοι 350 χιλιόγρ. 600 γραμ.

10) ἢ εἰς τὸ ἄνω χαράδειγμα ἂν θέλωμεν νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ κουϊντάλια θὰ ἔχωμεν 5,350600 τόννοι=5 τόννοι 3 κουϊντάλια 50 χιλιόγρ. 600 γραμ.

50.—Πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

α) ***Πρόσθεσις***

	2 ὥρ.	40 λ.	20 δ.
+	5	20	50
	20	00	30
	28 ὥρ.	60 λ.	100 δ.

ἢ 1 ἡμ. 5 ὥρ. 1 λ. 40 δ.

β) ***Ἀφαίρεσις***

—	45 ἔτη	4 μην.	15 ἡμ.
	2	6	20
	12 ἔτη	9 μην.	25

—	15 ὑαρ.		
	4	2 π.	4 δ.
	10 ὑαρ.	0 π.	8 δ.

γ) ***Πολλαπλασιασμὸς***

1) Πολ)σμὸς ἐπὶ ἀκέραιον

2 ὀκ.	100 δρμ.
	25 ×
50 ὀκ.	2500 δρμ.

ἢ 1 στατὴρ 12 ὀκ. 100 δρμ.

2) Πολ)σμὸς ἐπὶ κλάσμα.

$(35^0\ 15'\ 20'')\times\frac{2}{3}=$ ὡς κατωτέρω.

$$\begin{array}{r|l} 35^0\ 15'\ 20'' & \\ 2 & \\ \hline 70^0\ 30'\ 40'' & 3 \\ \hline 10 & 23^0\ 30'\ 13''\frac{1''}{3} \\ \times 1^0 & \\ 60' & \\ \hline 60' & \\ +30' & \\ \hline 90' & \\ \times 0 & \\ 60'' & \\ \hline 0'' & \\ +40 & \\ \hline 40'' & \\ 10 & \\ 1'' & \end{array}$$

3) *Πολ)σμὸς ἐπὶ δεκαδικὸν κλάσμα.*

π.χ. (4 ὀκ. 260 δραμ.) $\times 0,3$

$=$(4 ὀκ. 260 δραμ.) $\times \frac{3}{10}$

δηλαδὴ τρέπεται εἰς πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα.

4) *Πολ)σμὸς ἐπὶ μικτὸν ἢ δεκαδικὸν ἀριθμόν.*

Τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ δεκαδικὸν εἰς κλάσμα, ὁπότε ὁ πολ)σμὸς καταλήγει εἰς πολ)σμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα.

5) *Πολ)σμὸς ἐπὶ συμμιγῆ.*

π.χ. Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἔχει 100 δραχ. Πόσας δραχ. ἔχουν οἱ 10 στατ. 2 ὀκ. καὶ 100 δράμια ;

Λύσις 100$\times$(10 στατ. 2 ὀκ. 100 δραμ)$=100\times 442\frac{1}{4}$ ὀκ. $=$

$100\times 442,25=44225$ δραχμάς.

Δηλαδὴ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας ἔχομεν τὴν τιμήν, καὶ εἶτα πολλαπλασιάζομεν.

δ) ***Διαίρεσις***

1) ***Διαίρεσις δι' ἀκεραίου***

$$\begin{array}{l|l} 1\ \text{στ.}\ 12\ \text{ὀκ.}\ 100\ \text{δρμ.} & 25 \\ \hline 44 & 0\ \text{στ.}\ 2\ \text{ὀκ.} \\ \hline 44\ \text{ὀκ.} & 100\ \text{δρμ.} \\ 12\ » & \\ \hline 56\ » & \\ 6 & \\ 400 & \\ \hline 2400\ \text{δρμ.} & \\ 100 & \\ \hline 2500\ » & \\ 0 & \end{array}$$

2) ***Διαίρεσις διὰ κλάσματος.*** Ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ πολ)ζομεν.

3) ***Διαίρεσις διὰ δεκ. κλάσματος.*** Τρέπομεν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἰς κοινὸν καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω.

4) ***Διαίρεσις διὰ μικτοῦ ἢ δεκ. ἀριθμοῦ.*** Τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ δεκ. ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ πολ)ζομεν.

5) ***Διαίρεσις διὰ συμμιγοῦς.*** Διακριτέον ἂν τὸ πρόβλημα εἶναι μερισμοῦ ἢ μετρήσεως.

α) ***Προβλήματα μερισμοῦ.***

Ὡς γνωρίζομεν (§ 43) εἰς τὰ προβλήματα μερισμοῦ ἔχομεν.

$$\frac{\text{τιμὴ πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους)}}{\text{διὰ πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους)}} = \text{τιμὴ μιᾶς μονάδος}$$

π.χ. 4 ὑάρδες καὶ 2 π. ἔχουν 3. λ. 15 σελ. 10 πεν. Πόσον ἔχει ἡ 1 ὑάρδα;

Λύσις $$\frac{3\text{ λ. }15\text{ σελ. }10\text{ πεν.}}{4\text{ ὑάρ. }2\text{ π.}} = \frac{3\text{ λ. }15\text{ σελ. }10\text{ π.}}{4\frac{2}{3}} = \frac{3\text{ λ. }15\text{ σελ. }10\text{ π.}}{\frac{14}{3}} =$$

$$= (3\text{ λ. }15\text{ σελ. }10\text{ π.}) \times \frac{3}{14} = 0\text{ λ. }16\text{ σελ. }3\text{ πεν.}$$ ἔχει ἡ 1 ὑάρδα.

δηλαδή, ***ὅταν τὸ πρόβλημα εἶναι μερισμοῦ καὶ ὁ διαιρέτης συμμιγὴς τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν τιμὴν καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.*** Τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον.

β) ***Προβλήματα μετρήσεως.***

$$\frac{\text{Τιμὴ πολλῶν μονάδων (ἢ μέρους)}}{\text{διὰ τιμῆς μονάδος}} = \text{πολλαὶ μονάδες (ἢ μέρος).}$$

Πρόβλημα. 1ον. Ἡ 1 ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 3 σελ. 5 πεν. 4 φ. Πόσας ὑάρδας δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 2 λιρ. 10 σελ. 8 πεν.;

Λύσις $$\frac{2\text{ λιρ. }10\text{ σελ. }8\text{ πέν.}}{3\text{ σελ. }5\text{ πεν. }3\text{ φ.}} = \frac{(2432\text{ φαρδίνια})}{(167\text{ φαρδίνια})} = \text{ὑάρδαι}$$

Δηλαδή, ***ὅταν τὸ πρόβλημα εἶναι μετρήσεως τρέπομεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως*** (προτιμῶμεν τῆς κατωτάτης, ἵνα ἔχωμεν ἀκεραίους ἀριθμούς) ***καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.*** Τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας ἔχομεν τὴν τιμήν.

Πράγματι, ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν εἰς τὸ ἐν λόγῳ πρόβλημα θὰ εὕρωμεν ὡς κατωτέρω, 14 ὑάρδας 1 π. $8\frac{44}{167}$ ἴντσες

2432 ὑάρδες	167
762	14 ὑαρ. 1 π. $8\frac{44}{167}$ ἴντσες
94 ὑάρδες	
× 3 πόδες	
282 πόδες	
115 »	
× 12 ἴντσες	
230	
115	
1380 ἴντσες	
44 »	

Σημ. Τό πηλίκον $\frac{2432}{167}$ παριστᾶ ὑάρδας, δι' ὃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 94 ἢ μᾶλλον $\frac{94}{167}$ εἶναι ὑάρδαι, ἃς τρέπομεν εἰς πόδας πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 3 κ.ο.κ.

Πρόβλημα 2ον. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν 2 πηχ. καὶ 3 ρούπια ἑνὸς ὑφάσματος. Ἐπὶ πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ ὑφάνῃ 10 μέτρα ;

Λύσις. Θὰ τρέψωμεν πρῶτον τὰ μέτρα εἰς πήχεις.

$$10\times\frac{\text{μέτρα}}{\text{εἰς πήχεις}}=10\times\frac{1}{0{,}64}=10\times\frac{1}{\frac{64}{100}}=10\times\frac{100}{64}=\frac{1000}{64}=15\pi\ 5\varrho$$

καὶ ἔπειτα θὰ ἔχωμεν $\frac{15\ \pi.\ 5\ \varrho.}{2\ \pi.\ 3\ \varrho.}=\frac{125}{19}$ ὡρ. = 6 ὥρ. 34 λ. $44\frac{4}{19}$ δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

ΛΟΓΟΙ, ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ, ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕΓΕΘΗ

51. – Λόγοι.

Λόγος δύο ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου.

π.χ. ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸ 3 εἶναι $\frac{12}{3}=4$. Τὸ 12 λέγεται ἡγούμενος ὅρος. Τὸ 3 λέγεται ἑπόμενος ὅρος.

ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸ 7 εἶναι $\frac{5}{7}$

» » » 1 » » 8 » $\frac{1}{8}$

Δύο λόγοι λέγονται ἀντίστροφοι, ὅταν οἱ ὅροι των εἶναι γραμμένοι κατ' ἀντίστροφον τάξιν, ἤτοι, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἑνὸς εἶναι παρονομαστὴς τοῦ ἄλλου καὶ ἀντιθέτως.

π.χ. οἱ λόγοι $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{7}{5}$ λέγονται ἀντίστροφοι

ὡσαύτως » » 5 » $\frac{1}{5}$ » » διότι τὸ 5 δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς $\frac{5}{1}$.

Τὸ γινόμενον δύο ἀντιστρόφων λόγων ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα

Πράγματι $\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=1$. Ὁμοίως $6\times\frac{1}{6}=1$ κ.ο.κ.

Λόγος δύο ὁμειδῶν μεγεθῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου λαμβανομένου ὡς μονάδος.

π.χ. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος 20 ὀκ. μήλων ποὺ περιέχει ἕνα κιβώτιον πρὸς 4 ὀκ. μῆλα ποὺ περιέχει ἕνα καλάθι ;

Λύσις. $\frac{20}{4}=5$

Ἰδιότης. 1) Εἰς μίαν σειρὰν ἴσων λόγων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων, διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἑπομένων, ἰσοῦται πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν.

π.χ. $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\frac{3+6+12}{4+8+16}=\frac{21}{28}$

πράγματι $\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$, $\frac{6}{8}=\frac{21}{28}$, $\frac{12}{16}=\frac{21}{28}$

2) Εἰς μίαν σειρὰν ἴσων λόγων ἂν διαιρέσωμεν ἢ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἡγουμένους ἢ ἑπομένους ὅρους μὲ τὸν αὐ-

τὸν ἀριθμὸν θὰ προκύψῃ πάλιν σειρὰ ἴσων λόγων.

π.χ. $\frac{20}{28}=\frac{40}{56}=\frac{80}{112}$ Διαιροῦντες ἢ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἡγουμένους ὅρους μὲ 2 ἔχομεν πάλιν σειρὰν ἴσων λόγων $\frac{10}{28}=\frac{20}{56}=\frac{40}{112}$ $\frac{40}{28}=\frac{80}{56}=\frac{160}{112}$

ἢ διαιροῦμεν διὰ 7 π.χ. τοὺς ἑπομένους ὅρους τῆς ἄνω σειρᾶς ὅτε ἔχομεν πάλιν ἴσους λόγους, ἤτοι $\frac{20}{4}=\frac{40}{8}=\frac{80}{16}$

52.—Ἀναλογίαι.

Ἀναλογία καλεῖται ἡ ἰσότης ***δύο λόγων.***

$$\text{π.χ.}\ \frac{3}{4}\ \begin{matrix}\text{ἡγούμενοι}\\ =\\ \text{ἑπόμενοι}\end{matrix}\ \frac{6}{8}\ \text{ἢ}\ \underbrace{3:\overbrace{4=6}^{\text{μέσοι}}:8}_{\text{ἄκροι}}$$

Σημ. Ὅταν ἔχομεν περισσοτέρους τῶν δύο ἴσους λόγους δὲν ἔχομεν ἀναλογίαν, ἀλλὰ σειρὰν ἴσων λόγων.

Τὸ 3 καὶ τὸ 8 λέγονται ***ἄκροι ὅροι.*** Τὸ 4 καὶ 6 ***μέσοι.***

Οἱ 4 ἀριθμοὶ μιᾶς ἀναλογίας λέγονται ***ὅροι τῆς ἀναλογίας.***

Συνεχὴς ἀναλογία ὀνομάζεται ἡ ἀναλογία, ἥτις ἔχει ἴσους μέσους ὅρους.

$$\text{π.χ.}\ \frac{2}{8}=\frac{8}{32}\ \text{ἢ}\ 2:8=8:32$$

Μέσος ἀνάλογος ὀνομάζεται ἕκαστος τῶν μέσων ὅρων συνεχοῦς ἀναλογίας. Οὗτος ὀνομάζεται καὶ ***γεωμετρικὸς μέσος.***

π.χ. εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα ὁ 8 εἶναι μέσος ἀνάλογος.

Ὅταν 4 ποσότητες εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ ἡ τελευταία ποσότης λέγεται ὅτι εἶναι ἡ ***τετάρτη ἀνάλογος*** τῶν ἄλλων τριῶν.

π.χ. ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $2:3=6:9$ τὸ 9, εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος.

Ἰδιότητες.

α) Εἰς ἑκάστην ἀναλογίαν, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων, εἶναι ἴσον, πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων π.χ. εἰς τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}\ \text{ἔχομεν}\ 2\times 12=3\times 8$$

Ἐκ τῆς ἄνω ἰδιότητος προκύπτουν ἀμέσως καὶ αἱ κάτωθι ἰδιότητες.

β) Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐξ αὐτῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων δύο, τότε αὐτοὶ οἱ 4 ἀριθμοὶ δύνανται νὰ σχηματίσουν ἀναλογίαν.

π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 6, 3, 4 δύνανται νὰ ἀποτελέσουν ἀναλογίαν, ἐπειδὴ $2 \times 6 = 3 \times 4$. Ποίαν ἀναλογίαν; τὴν ἑξῆς π.χ.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

γ) Εἰς ἑκάστην ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν μέσων ἢ ἄκρων ὅρων αὐτῆς, ὁπότε προκύπτει πάλιν ἀναλογία.

π.χ. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Ἀλλάσσοντες τὴν τάξιν τῶν ἄκρων ὅρων ἔχομεν $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ ἢ τῶν μέσων ἔχομεν $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, ἢ τῶν μέσων καὶ τῶν ἄκρων ὅτε θὰ ἔχωμεν $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, ἤτοι θὰ ἔχωμεν πάλιν ἀναλογίας.

δ) Εἰς ἑκάστην ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τοὺς μέσους ὅρους ἄκρους καὶ τοὺς ἄκρους μέσους, ὁπότε προκύπτει πάλιν ἀναλογία.

π.χ. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Καθιστῶντες τοὺς μέσους ἄκρους, καὶ τοὺς ἄκρους μέσους θὰ ἔχωμεν πάλιν ἀναλογίαν ἤτοι $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$.

Ἡ ἄνω ἰδιότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Εἰς ἑκάστην ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου λόγου, ὅτε θὰ προκύψῃ πάλιν ἀναλογία.

π.χ. $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$ καὶ ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους ἔχομεν $\frac{10}{7} = \frac{30}{21}$

ε) Εἰς ἑκάστην ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ὅρον, ὅταν γνωρίζομεν τοὺς ἄλλους τρεῖς π.χ.

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος ἄκρος ὅρος α τῆς ἑξῆς ἀναλογίας $\frac{2}{5} = \frac{6}{\alpha}$.

Λύσις. Ἐπειδὴ $5 \times 6 = 2 \times \alpha$ ἤτοι $30 = 2 \times \alpha$ ἕπεται ὅτι $\alpha = \frac{30}{2} = 15$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος μέσος ὅρος α τῆς ἀναλογίας $\frac{3}{\alpha}=\frac{15}{20}$.

Λύσις. Ἐπειδὴ $\alpha \times 15 = 3 \times 20$ ἢ $\alpha \times 15 = 60$ ἕπεται ὅτι $\alpha=\frac{60}{15}=4$

Ἐκ τῶν ἄνω παραδειγμάτων ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Κανών. Ὅταν εἰς μίαν ἀναλογίαν, εἶναι ἄγνωστος εἷς ἄκρος ὅρος, πρὸς εὕρεσιν τούτου πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου καὶ τἀνάπαλιν, ἂν εἶναι ἄγνωστος εἷς μέσος ὅρος.

π.χ. $\frac{\alpha}{8}=\frac{10}{40}$, $\alpha=\frac{8 \times 10}{40}=\frac{80}{40}=2$. Πράγματι $\frac{2}{8}=\frac{10}{40}$.

Ἐπίσης $\frac{2}{\alpha}=\frac{10}{35}$, $\alpha=\frac{2 \times 35}{10}=\frac{70}{10}=7$. » $\frac{2}{7}=\frac{10}{35}$.

53.—Συμμεταβλητὰ ποσά.
Ἀνάλογα καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά.

Συμμεταβλητὰ ποσὰ λέγονται δύο ποσὰ ὅταν ἐξαρτῶνται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε μεταβαλλομένου τοῦ ἑνὸς νὰ μεταβάλλεται καὶ τὸ ἄλλο.

α) Δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ λέγονται εὐθέως ἀνάλογα, ὅταν τὸ ἓν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἄλλου κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς μὲ ἕνα ἀριθμόν, νὰ πολλαπλασιάζεται ἢ νὰ διαιρεῖται καὶ τὸ ἄλλο ***μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

π.χ. τοιαῦτα ποσὰ εἶναι :

1) Ἡ τιμὴ καὶ τὸ μῆκος ὑφάσματός τινος.
2) » » » » βάρος ἑνὸς πράγματος.
3) Ἡ περιφέρεια κύκλου καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ.
4) Τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ ἐργάτου καὶ ὁ χρόνος τῆς ἐργασίας του.

Ὅλα τὰ ἀνωτέρω ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, διότι ἂν π.χ. διπλασιασθῇ τὸ ἓν διπλασιάζεται καὶ τὸ ἄλλο ἢ ἂν ὑποδιπλασιασθῇ τὸ ἓν ὑποδιπλασιάζεται καὶ τὸ ἄλλο.

Σημ. Ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀνθρώπου καὶ τὸ ὕψος του εἶναι κατὰ τὴν νεαρὰν ἡλικίαν ἁπλῶς συμμεταβλητὰ ποσά, ἀλλ' ὄχι ἀνάλογα.

Εἰς τὰ εὐθέως ἀνάλογα ποσά, δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἔχουν τὸν ἴδιον λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου.

π.χ. αἱ 2 ὀκ. ἔχουν 30 δρχ.
» 10 » » 150 » $\Big\{$ Τὸ $\frac{2}{10}=\frac{30}{150}$

β) Δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν τὸ ἓν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἄλλου κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, νὰ διαιρεῖται τὸ ἄλλο διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, καὶ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς διά τινος ἀριθμοῦ, τὸ ἄλλο νὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

π.χ. τοιαῦτα ποσὰ εἶναι.

1) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος περατώσεως ἑνὸς ἔργου. Πράγματι τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι ἂν π.χ. χρειάζονται 3 ἐργάται διὰ νὰ ἐκτελέσουν ἓν ἔργον εἰς 24 ἡμέρας, διπλάσιοι ἐργάται θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἴδιον ἔργον εἰς ὑποδιπλασίας ἡμέρας. Ἤτοι οἱ 6 ἐργάται εἰς 12 ἡμέρας.

2) Τὰ ὕψη δύο τριγώνων, ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις των.

Εἰς τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑνός ποσοῦ, ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχουν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου.

π.χ. 10 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 30 ἡμέρ.
5 » θὰ » τὸ αὐτὸ » » 60 » $\Big\{$ τὸ $\frac{10}{5}=\frac{60}{30}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

54.— Μέθοδος τῶν τριῶν.

Μέθοδος τῶν τριῶν καλεῖται ἕνας τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιλύομεν διάφορα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα μᾶς δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ἢ περισσοτέρων ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) καὶ ζητεῖται, ποία νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχεῖ, εἰς νέαν τινὰ δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, ἢ εἰς νέας τινὰς δοθείσας τιμὰς τῶν ἄλλων.

Ὠνομάσθη ὁ τρόπος οὗτος μέθοδος τῶν τριῶν, διότι δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα ταῦτα, διὰ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀναλογιῶν, εἰς ἃς γνωρίζομεν 3 ὅρους.

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν 3 λέγεται ὅταν ἔχωμεν μίαν ἀναλογίαν πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος καὶ ***σύνθετος*** ὅταν ἔχωμεν πολλάς.

55.—Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Πρόβλημα 1ον. 12 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος ἔχουν 7200 δρχ. Πόσας δρχ. ἔχουν οἱ 8 πήχεις ;

Κατάταξις $\left.\begin{matrix} 12 \text{ πηχ.} & 7200 \text{ δρχ.} \\ 8 \quad » & \mathbf{x}\,; \end{matrix}\right\}$ $\mathbf{x} = 7200 \times \frac{8}{12} = 4.800$ δρχ.

Ὅτι $\mathbf{x} = 7200 \times \frac{8}{12}$ προκύπτει ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ καὶ τὸ μῆκος ὑφάσματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα ποσὰ θὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον 53α, ὅτι $\frac{12}{8} = \frac{7200}{\mathbf{x}}$. Ἀλλὰ συμφώνως μὲ τὰ ἀναφερθέντα εἰς § 52—ε τὸ $\mathbf{x} = \frac{7200 \times 8}{12} = 4800$ δρχ.

Πρόβλημα 2ον. Ἕξ ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 30 ἡμ. Εἴκοσι ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἴδιον ἔργον ;

Κατάταξις $\left.\begin{matrix} 6 \text{ ἐργάται} & 30 \text{ ἡμέρας} \\ 20 \quad » & \mathbf{x}\,; \end{matrix}\right\}$ $\mathbf{x} = 30 \times \frac{6}{20} = 9$ ἡμέραι

Ὅτι $\mathbf{x} = 30 \times \frac{6}{20}$ προκύπτει ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος περατώσεως ἑνὸς ἔργου εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν (παραγρ. 53—β) ὅτι :

$$\frac{6}{20} = \frac{\mathbf{x}}{30} \text{ καὶ } \mathbf{x} = \frac{6 \times 30}{20} = 9 \text{ ἡμέραι.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὁ ἑξῆς κανών.

Κανών. **Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου x πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθι αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.**

56. – Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ἢ περισσοτέρων ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) καὶ ζητεῖται ποία νέα τιμὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ὅταν δοθῶσι νέαι τιμαὶ εἰς τὰ ἄλλα.

Ἕνα μέγεθος Α εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον πρὸς δοθέντα μεγέθη Β, Γ, Δ, ὅταν μεταβαλλομένου ἑνὸς οἱουδήποτε ἐκ τῶν μεγεθῶν αὐτῶν (τῶν ἄλλων μενόντων σταθερῶν), τὸ μέγεθος Α εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτό, τὸ ὁποῖον μεταβάλλεται.

Πρόβλημα 1ον. 10 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν ἔσκαψαν εἰς 30 ἡμέρας μίαν τάφρον μήκους 100 μέτρων. Εἰς πόσας ἡμέρας 8 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ σκάψουν ἄλλην ὁμοίαν τάφρον μήκους 120 μέτρων ;

Κατάταξις. 10	ἐργάται	8	ὥρας	30	ἡμ.	100	μ.	μήκους
8	»	9	»	**x** ;	»	120	»	»

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν 3, θὰ συγκρίνωμεν ἕκαστον ποσὸν πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα τιμή, ἀδιαφοροῦντες διὰ τὰ ἄλλα ποσά.

Ἤτοι : α) 10 ἐργ. σκάπτουν μίαν τάφρον εἰς 30 ἡμέρας. Ὑποδιπλάσιοι ἐργάται θὰ σκάπτουν τὴν ἰδίαν τάφρον εἰς διπλασίας ἡμέρας. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα θὰ ληφθῇ ὡς ἔχει.

β) Ἐὰν ὡρισμένοι ἐργάται ἐργάζωνται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ σκάψουν τὴν τάφρον εἰς 30 ἡμέρας. Ἐὰν οἱ αὐτοὶ ἐργάται ἐργάζωνται τὰς ἡμισείας ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ σκάψουν τὴν τάφρον εἰς διπλασίας ἡμέρας. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ τὸ κλάσμα θὰ ληφθῇ ὡς ἔχει.

γ) Τὰ 100 μέτρα τὰ σκάβουν εἰς 30 ἡμέρας. Διπλάσια μέτρα θὰ τὰ σκάψουν εἰς διπλασίας ἡμέρας. Ὅθεν τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα καὶ τὸ κλάσμα θὰ ληφθῆ ἀντεστραμμένον.

Ἑπομένως κατόπιν τῶν ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν

$$\mathbf{x}=30\times\frac{10}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{120}{100}=40 \text{ ἡμέρας}$$

Πρόβλημα 2ον. Διὰ νὰ κάμωμεν 1 ὑποκάμισον χρειαζόμεθα 3,5 πήχεις, ἂν τὸ ὕφασμα ἔχει πλάτος 2 πηχ. καὶ 2 ρούπια. Διὰ νὰ κάμωμεν 6 ὑποκάμισα ὅμοια μὲ τὸ ἄνω, ἀπὸ ὕφασμα τὸ ὁποῖον ἔχει 2 πηχ. καὶ 5 ρ. πλάτος πόσον ὕφασμα θέλομεν;

Κατάταξις

$$\left.\begin{array}{llll} 1 \text{ ὑποκ.} & 3{,}5 \text{ πηχ.} & 18 \text{ ρ.} & \text{πλάτος} \\ 6 & \mathbf{x}\,; & 21 \text{ »} & \text{»} \end{array}\right\} \mathbf{x}=3{,}5\times\frac{6}{1}\times\frac{18}{21}=18 \text{ πηχ.}$$

Ἡ σκέψις τοῦ προβλήματος τούτου ἔχει ὡς ἑξῆς :

α) Διὰ νὰ κάμωμεν ἕνα ὑποκάμισον χρειάζεται ὕφασμα μήκους 3,5 πηχ.

Διὰ νὰ κάμωμεν διπλάσιον ἀριθμὸν τοιούτων, χρειάζεται διπλάσιον μῆκος ὑφάσματος.

Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα καὶ τὸ κλάσμα θὰ ληφθῇ ἀντεστραμμένον.

β) Ὅταν τὸ ὕφασμ. ἔχει πλάτος 18 ρ. χρειάζεται μῆκ. 3,5 πηχ.
» » » » » διπλάσιον χρειάζεται » ὑποδιπλάσιον.

Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ τὸ κλάσμα θὰ ληφθῇ ὡς ἔχει.

57.—Μερισμὸς ποσοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς.

α) ***Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἰσαρίθμους ἄλλους,*** ἂν οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων των δευτέρων διὰ τοῦ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ ἂν οἱ λόγοι τῶν πρώτων, πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους των δευτέρους εἶναι ἴσοι.

π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 20 30 50
εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2 3 5

διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν δευτέρων διὰ τοῦ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10.

Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 2 3 5
εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 20 30 50

διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν δευτέρων διὰ τοῦ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{10}$

β) ***Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς ἰσαρίθμους ἄλλους,*** ἂν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τούτων.

π.χ. οἱ 4 6 10 λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι

πρὸς τοὺς $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ διότι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τούτων,

ἤτοι πρὸς τοὺς 2 3 5 κ. ο. κ.

γ) ***Μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς, λέγεται*** ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου μερίζομεν αὐτὸν εἰς τόσα μέρη, ὅσα εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ***καὶ τὰ μέρη*** *ταῦτα νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.*

Πῶς μερίζεται ἕνας ἀριθμός,

α) ***Εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀκεραίους.*** Διαιροῦμεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν καὶ πολ)ζομεν τὸ πηλίκον ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Τοῦτο ἐξάγεται ὡς κάτωθι. ***Ἔστω π.χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα:***

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 1200 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4 καὶ 5:

Λύσις. Ἂν π.χ. παραστήσωμεν διὰ Χ, Ψ καὶ Ω τὰ τρία ζητούμενα ποσὰ τότε συμφώνως πρὸς τὸν ἄνω ὁρισμὸν τοῦ ἐδαφίου α θὰ ἔχωμεν $\frac{X}{3}=\frac{\Psi}{4}=\frac{\Omega}{5}$. Ἀλλὰ συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 51 θὰ ἔχωμεν $\frac{X}{3}=\frac{\Psi}{4}=\frac{\Omega}{5}=\frac{X+\Psi+\Omega}{3+4+5}=\frac{1200}{12}$ καὶ ἐκ τούτων ἐξάγονται τὰ ἑξῆς:

$$\frac{X}{3}=\frac{1200}{12} \text{ ἢ } X=\frac{1200}{12}\times 3=100\times 3=300$$

$$\frac{\Psi}{4}=\frac{1200}{12} \text{ ἢ } \Psi=\frac{1200}{12}\times 4=100\times 4=400$$

$$\frac{\Omega}{5}=\frac{1200}{12} \text{ ἢ } \Omega=\frac{1200}{12}\times 5=100\times 5=500$$

ἐπαλήθευσις 1200

Συνηθέστερον ἡ κατάταξις καὶ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος γίνεται ὡς κάτωθι.

Μεριστέος ὁ ἀριθμὸς 1200.

3	$\frac{1200}{12}\times 3=100\times 3=300$
4	» $\times 4=100\times 4=400$
5	» $\times 5=100\times 5=500$
12	ἐπαλήθευσις 1200

Ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ 300, 400, 500 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας, 3, 4, 5 εἶναι φανερόν, διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν δευτέρων διὰ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 100. Ἢ φανερὸν εἶναι, ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ ἔχουν ἴσους λόγους πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους των δοθέντας, διότι πράγματι :

$$\frac{300}{3} = \frac{400}{4} = \frac{500}{5}$$

Παρατήρησις. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ μερισθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τούτους πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ὥστε νὰ ἔχωμεν μικροτέρους ἀριθμοὺς καὶ εἰδικώτερον διὰ νὰ ἔχωμεν διαίρεσιν διὰ μικροτέρου ἀριθμοῦ. *Ἤτοι, ὡς ἐμάθομεν (§ 51), δυνάμεθα νὰ πολ)σωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν ἴσους λόγους μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὁπότε θὰ προκύψῃ πάλιν σειρὰ ἴσων λόγων.* Δηλονότι, ἂν ἔχωμεν ὡς ἴδωμεν ἀνωτέρω.

$$\frac{X}{3} = \frac{\Psi}{4} = \frac{\Omega}{5} \text{ πάλιν θὰ ἔχωμεν καὶ } \frac{X}{6} = \frac{\Psi}{8} = \frac{\Omega}{10}$$

π.χ. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 2400 ἀναλόγως τῶν ἀριθμ. 12 16, καὶ 20.

Μεριστέος ὁ ἀριθμὸς 2400

Λύσις 12		3	$\frac{2400}{12} \times 3 = 200 \times 3 = 600$
16	ἢ	4	» $\times 4 = 200 \times 4 = 800$
20		5	» $\times 5 = 200 \times 5 = 1000$
		12	Ἐπαλήθευσις 2400

Φανερὸν εἶναι ὅτι $\frac{600}{12} = \frac{800}{16} = \frac{1000}{20}$ ὡς ἐπίσης $\frac{600}{3} = \frac{800}{4} = \frac{1000}{5}$

β) ***Εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας κλασματικοὺς ἢ κλασματικοὺς καὶ ἀκεραίους.*** Πολλαπλασιάζομεν τούς δοθέντας κλασματικοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν καὶ εἶτα μερίζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἀναλόγως πρὸς τοὺς εὑρεθέντας ἀκεραίους.

π.χ. ***Πρόβλημα 1ον.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 4200 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, καὶ 2

Μεριστέος ὁ ἀριθμὸς 4200. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν=8.

$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4} \times 8 = 2$	$\frac{4200}{21} \times 2 = 200 \times 2 = 400$
$\frac{3}{8}$	ἢ	$\frac{3}{8} \times 8 = 3$	$\frac{4200}{21} \times 3 = 200 \times 3 = 600$
2		$2 \times 8 = 16$	$\frac{4200}{21} \times 16 = 200 \times 16 = 3200$
		21	Ἐπαλήθευσις 4200

Πρόβλημα 2ον. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 9200 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$

Μεριστέος ὁ ἀριθ. 9200. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ 12.

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2} \text{ ἢ } \frac{1}{2} \times 12 = 6 & \frac{9200}{23} \times 6 = 400 \times 6 = 2400 \\
\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \times 12 = 8 & \frac{9200}{23} \times 8 = 400 \times 8 = 3200 \\
\frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \times 12 = \underline{9} & \frac{9200}{23} \times 9 = 400 \times 9 = \underline{3600} \\
\qquad\qquad\quad 23 & \text{Ἐπαλήθευσις} \qquad 9200
\end{array}$$

Παρατηρήσεις.

1) Ὅτι δυνάμεθα νὰ πολ)σωμεν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὅλα τὰ κλάσματα ἢ μᾶλλον τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐξηγήσαμεν τοῦτο εἰς τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν.

2) Ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μερισθῇ ὁ μεριστέος ἀριθμός, εἶναι δεκαδικοί, τότε πάλιν τοὺς τρέπομεν εἰς ἀκεραίους πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς καταλλήλως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10 ἢ 100 κλπ.

γ) ***Εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τινας δοθέντας ἀριθμούς.*** Μερίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

π.χ. ***Πρόβλημα 1ον.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθ. 465 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 5.

Μεριστέος ὁ 465.

$$\begin{array}{l|l}
2 \text{ ἢ ἀναλόγως πρὸς } \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \times 30 = 15 & \frac{465}{31} \times 15 = 15 \times 15 = 225 \\
3 \text{ » » » } \frac{1}{3} \text{ ἢ } \frac{1}{3} \times 30 = 10 & \text{»} \times 10 = 15 \times 10 = 150 \\
5 \text{ » » » } \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \times 30 = \underline{6} & \text{»} \times 6 = 15 \times 6 = \underline{90} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 31 & \text{ἐπαλήθευσις} \quad 465
\end{array}$$

Πρόβλημα 2ον. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 1200 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθ. $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{9}$.

Μεριστέος ὁ ἀριθμὸς 1200.

$$\begin{array}{l|l}
\frac{2}{3} \text{ ἢ ἀναλόγως πρὸς } \frac{3}{2} \text{ ἢ } \frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{ ἢ } 2 & \frac{1200}{5} \times 2 = 240 \times 2 = 480 \\
\frac{4}{9} \text{ » » » } \frac{9}{4} \text{ ἢ } \frac{9}{4} \times 4 = 9 \text{ ἢ } \underline{3} & \text{»} \times 3 = 240 \times 3 = \underline{720} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5 & \text{ἐπαλήθευσις} \quad 1.200
\end{array}$$

58.—Προβλήματα τόκου

Όταν δανείζη τις χρήματα εἰς ἄλλον λαμβάνει συνήθως ἕνα κέρδος. Τὸ κέρδος τοῦτο λέγεται τόκος καὶ συνήθως συμφωνεῖται εἰς τόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν (τόσον εἰς τὰς ἑκατὸν δραχμάς). Ἐπειδὴ συμφωνεῖται ὁ τόκος οὗτος λέγεται ***συμβατικὸς τόκος***.

Κεφάλαιον λέγεται τὸ δανειζόμενον ποσόν.

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον λαμβάνει τις ὅταν δανείζει χρήματα. Ὁ τόκος δίδεται ἀπὸ τὸν ὀφειλέτην εἰς τὸν δανειστήν, συνήθως κατ' ἔτος, ἢ ὡς ἄλλως ἔχει συμφωνηθῆ.

Χρόνος λέγεται τὸ χρονικόν διάστημα, καθ' ὃ συνεφωνήθη, μεταξὺ δανειστοῦ καὶ ὀφειλέτου νὰ ἐπιστραφῶσι τὰ χρήματα, ἢ ἄλλως πως, χρόνος λέγεται ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου.

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν (ἢ λιρῶν κλπ.) εἰς 1 ἔτος. Τοῦτο σημειοῦται διὰ τοῦ συμβόλου %, καὶ ἀπαγγέλεται ὡς ἑξῆς, 8%=ὀκτὼ τοῖς ἑκατὸν ἢ 4%=τέσσαρα τοῖς ἑκατὸν κ.ο.κ.

Τὸ ἐπιτόκιον καθορίζεται ὑπὸ τοῦ Κράτους καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνη ἕνα ὡρισμένον ποσὸν π.χ. 12%, διότι ἄλλως ὁ λαμβάνων τόκον μὲ μεγαλύτερον ἐπιτόκιον μηνύεται ἐπὶ ***τοκογλυφίᾳ***.

Διακρίνομεν δύο εἴδη τόκου. ***Τὸν ἁπλοῦν*** καὶ τὸν ***σύνθετον***.

Ὁ τόκος εἶναι ἁπλοῦς, ὅταν τὸ κεφάλαιον παραμένει τὸ ἴδιον καθ' ὅλον τὸ διάστημα τοῦ δανεισμοῦ. ***Ὁ τόκος εἶναι σύνθετος,*** ὅταν προστίθεται καθ' ἕκαστον ἔτος εἰς τὸ Κεφάλαιον, διὰ νὰ ἀποδώση καὶ οὗτος τόκον.

Τὰ τελευταῖα ταῦτα προβλήματα λέγονται προβλήματα ***ἀνατοκισμοῦ***, ἐνῶ τὰ πρῶτα, ***ἁπλοῦ τόκου ἢ τόκου*** καὶ ταῦτα ἐξειάζονται κατωτέρω.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου ἐμφανίζονται τέσσαρα ποσὰ ἤτοι ὁ τόκος, τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον τὰ δὲ σχετικὰ τέσσαρα προβλήματα λύονται τότε μόνον, ὅταν μᾶς δίδονται τὰ 3 ἐκ τῶν ἄνω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον.

Τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου λύονται μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν 3, εἶναι δέ, ὡς ἀμέσως γίνεται ἀντιληπτόν, τὰ ποσά :

α) Ὁ τόκος πρὸς τὸ Κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον εὐθέως ἀνάλογα.

β) Κεφάλαιον καὶ χρόνος ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

1ον) Εὕρεσις τοῦ τόκου

Πρόβλημα 1ον. Πόσον τόκον φέρει Κεφάλαιον 20.000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 5°/₀ διὰ 4 ἔτη ;

Λύσις :

$$\left.\begin{array}{llll} \text{αἱ} & 100 \text{ δρχ.} & \text{εἰς } 1 \text{ ἔτος} & \text{τόκον } 5 \text{ δρχ.} \\ \text{»} & 20.000 \text{ »} & \text{» } 4 \text{ ἔτη} & T\,; \end{array}\right\} \quad T = \frac{5\times4\times20.000}{1\times100} = 4000 \text{ δρ.}$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ Τ = τόκος, Κ = Κεφάλαιον, Χ = χρόνος καὶ Ε = ἐπιτόκιον τότε γενικῶς ὁ τύπος τῆς εὑρέσεως τοῦ τόκου ἔχει ὡς ἑξῆς: $T = \frac{K.E.X.}{1\times100} = \frac{K.E.X.}{100}$

Ἂν ὁ χρόνος ἦτο ἐκπεφρασμένος εἰς μῆνας, τότε τὸ 1 τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ ἄνω κλάσματος θὰ ἦτο 12 καὶ ὁ παρανομαστὴς ἑπομένως θὰ ἦτο 1200 καὶ θὰ ἔχωμεν, τὸν ἑξῆς γενικὸν τύπον τῆς εὑρέσεως τοῦ τόκου $T = \frac{K.E.X.}{1200}$

Ἂν ὁ χρόνος ἦτο ἐκπεφρασμένος εἰς ἡμέρας τότε τὸ 1 τοῦ παρονομαστοῦ θὰ ἦτο 360 καὶ ἐπὶ 100 θὰ ἦτο ὁ παρονομαστὴς 36.000 καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν τύπον τῆς εὑρέσεως τοῦ τόκου. $T = \frac{K.E.X.}{36000}$

Κανών. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία ἄλλα δεδομένα ποσὰ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100 μέν, ἂν ὁ χρόνος ἔχει δοθῇ εἰς ἔτη, διὰ 1200 ἂν ἔχῃ δοθῇ εἰς μῆνας, διὰ 36000 ἂν ἔχῃ δοθῇ εἰς ἡμέρας.

Πρόβλημα 2ον. Πόσον τόκον φέρουν 48.000 δραχ. εἰς 1 ἔτος, 3 μην. καὶ 6 ἡμέρας πρὸς 8°/₀ ;

Κατάταξις καὶ λύσις

$$\left.\begin{array}{l} T = \,; \\ K = 48000 \text{ δρχ.} \\ E = 8\ \% \\ X = 1 \text{ ἔτ. } 3 \text{ μην. } 6 \text{ ἡμ.} = 456 \text{ ἡμ.} \end{array}\right| \; T = \frac{K.E.X.}{36000} = \frac{48000\times84\times56}{36000} = \\ = 4864 \text{ δρχ.}$$

2ον) Εὕρεσις Κεφαλαίου, Ἐπιτοκίου καὶ Χρόνου.

α) Εὕρεσις Κεφαλαίου.

Πρόβλημα. Ποῖον Κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 6°/₀ ἐπὶ 2 ἔτη μᾶς δίδει τόκον 3000 δρχ. ;

Λύσις

αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτ. δίδουν 6 δρχ. Τ.
Κ ; » 2 » » 3000

$$K = \frac{100 \times 3000 \times 1}{6 \times 2} = \frac{100.\ T}{E.X}$$

β) Εὕρεσις Ἐπιτοκίου.

Πρόβλημα. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον Κεφάλαιον 80.000 δρχ. τοκιζόμενον ἐπὶ 4 ἔτη μᾶς δίδει τόκον 6000 δρχ.

Λύσις

αἱ 80000 Κ. εἰς 4 ἔτη δίδουν 6000 δρχ. Τ.
100 » 1 Ε ;

$$E = \frac{6000 \times 1 \times 100}{4 \times 80000} = \frac{100\ .\ T}{X.K.}$$

γ) Εὕρεσις Χρόνου.

Πρόβλημα. Εἰς πόσον χρόνον Κεφάλαιον 80.000 δρχ. τοκιζόμενον πρὸς 7,5°/₀ μᾶς δίδει τόκον 6000 δρχ.

Λύσις

αἱ 100 Κ. εἰς 1 ἔτ. δίδουν 7,5 δρχ. Τ.
80000 Χ ; 6000

$$X = \frac{1 \times 100 \times 6000}{80000 \times 7{,}5} = \frac{100.\ T}{K.E}$$

Κανών. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ Κ ἢ τὸ Ε ἢ τὸν Χ πολλαπλασιάζομεν τὸ 100*** (ἢ 1200, ὅταν ὁ χρόνος ἔχει δοθῇ εἰς μῆνας, ἢ 36000, ὅταν ὁ χρόνος ἔχει δοθῇ εἰς ἡμέρας) ***ἐπὶ τὸν Τ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων ποσῶν.***

Ὅθεν οἱ τύποι ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων τόκου ἔχουν ὡς κάτωθι :

Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος :

α) *εἰς ἔτη*	β) *εἰς μῆνας*	γ) *εἰς ἡμέρας*
$T = \frac{K.E.X}{100}$	$T = \frac{K.E.X}{1200}$	$T = \frac{K.E.X}{36.000}$
$K = \frac{100.\ T}{E.X}$	$K = \frac{1200.\ T}{E.X}$	$K = \frac{36.000.\ T}{E.X}$
$E = \frac{100.\ T}{K.X}$	$E = \frac{1200.\ T}{K.X}$	$E = \frac{36\ 000.\ T}{K.\ X}$
$X = \frac{100.\ T}{K.E}$	$X = \frac{1200.\ T}{K.E}$	$X = \frac{36.000.\ T}{K.\ E}$

Παραδείγματα λύσεως προβλημάτων τόκου.

Πρόβλημα 1ον. Ποσὸν χρημάτων τοκισθὲν πρὸς 4,5% ἔδωσε μετὰ 1 ἔτος καὶ 8 μῆν. κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὺ 206.400 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ Κ. καὶ πόσος ὁ τόκος ;

Λύσις. Ὡς ἔχει τὸ πρόβλημα δὲν δύναται νὰ λυθῇ ἀμέσως, διότι ἔχομεν δύο ἄγνωστα ποσὰ τὸν Τ. καὶ τὸ Κ. ἐκ τῶν ὁποίων τό ἓν εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸν χρόνον καὶ τὸ ἄλλο ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς αὐτόν. Διὰ τοῦτο σκεπτόμεθα ἄλλως πως χρησιμοποιοῦντες βοηθητικὸν Κεφάλαιον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐτοκίσθησαν 100 δρχ. Πόσος εἶναι ὁ τόκος αὐτῶν μετὰ 1 ἔτος καὶ 8 μ. πρὸς 4,5% ; Οὗτος θὰ εἶναι, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $T = \frac{K.E.X.}{1200} = \frac{100 \times 4,5 \times 20}{1200} = 7,50$ δρχ.

Ὅθεν ἂν τὸ Κ. καὶ Τ = 107,50 δρχ. τὸ Κ. θὰ εἶναι 100 δρχ.
» » » » » = 206400 πόσον τὸ Κ ;

$$K = 100 \times \frac{206400}{107,50} = \mathbf{192.000} \text{ δρχ.}$$

Ἑπομένως Τ = 206400 — 192000 = **14.400** δρχ.

Πρόβλημα 2ον. Εἰς πόσον χρόνον Κ. 24000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 10% διπλασιάζεται ;

Λύσις. Διὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Διὰ νὰ διπλασιασθῇ τὸ Κ πρέπει νὰ μᾶς δώσῃ τόσον Τ. ὅσον εἶναι καὶ τὸ Κ. Ὅθεν ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Κ=100 τότε καὶ ὁ Τ. θὰ εἶναι 100 ἢ ἂν τὸ Κ=1 καὶ ὁ Τ. θὰ εἶναι 1. Ἑπομένως λαμβάνοντες βοηθητικὸν Κεφάλαιον π.χ. 100 δρχ. θὰ ἔχωμεν.

$$\left.\begin{array}{l} K=100 \\ E=10\% \\ X=; \\ T=100 \end{array}\right\} \quad X = \frac{100 \,.\, T}{K.E.} = \frac{100 \times 100}{100 \times 10} = 10 \text{ ἔτη}$$

Ὅθεν εἰς 10 ἔτη θὰ διπλασιασθῇ τὸ Κ.

Πρόβλημα 3ον. Ἠγόρασέ τις ὄρυζαν πρὸς 4500 δρχ. τὸν τόννον καὶ μετὰ 2 μ. καὶ 20 ἡμ. τὴν ἐπώλησε πρὸς 4800 δρχ. τὸν τόννον. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε ;

Λύσις. Ἀπὸ ἕκαστον τόννον ἐκέρδισε 300 δρχ. ἤτοι ἔλαβε τόκον ἐπὶ Κ. 4500 δρχ. μετὰ 2 μ. καὶ 20 ἡμ. 300 δρχ. Κατόπιν τούτου ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l} K=4500 \\ E=; \\ X=2 \text{ μ. καὶ } 20 \text{ ἡμ.} = 80 \text{ ἡμ.} \\ T=300 \end{array}\right\} \quad E = \frac{36000.\, T}{K.X.} = \frac{36000 \times 300}{4500 \times 80} = 30\%$$

Ὅθεν ἐκέρδισε 30%

Εὐκολίαι διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τόκου.

1) ***Ὅταν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἐτήσιον τόκον Κεφαλαίου πολλαπλασιάζομεν τὸ ἑκατοστὸν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπικιον.*** π.χ.

Πρόβλημα 1ον. Πόσον τόκον φέρουν 15.000 δρχ. εἰς 1 ἔτος πρὸς 4%;

Λύσις $T=\frac{K.E.X.}{100}=\frac{15000\times4\times1}{100}=150\times4=600$ δρχ.

Πρόβλημα 2ον. Πόσον τόκον φέρουν 500.000 δρχ. εἰς 1 ἔτος πρὸς 6%;

Λύσις. $T=5000\times6=30.000$ δρχ.

2) ***Μέθοδος τοκαρίθμων καὶ σταθερῶν διαιρετῶν.*** Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται ὅταν ὁ χρόνος μᾶς δίδεται εἰς ἡμέρας (κατωτέρω Η=ἡμέραι) ***καὶ ὁ τόκος εὑρίσκεται. ἂν διαιρέσωμεν τὸν τοκάριθμον διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου.***

Τοκάριθμος καλεῖται τὸ γινόμενον τοῦ Κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας ἤτοι Κ.Η.

Σταθερὸς διαιρέτης καλεῖται τὸ πηλίκον 36000 : τοῦ Ε.

Πρόβλημα 1ον. Πόσος εἶναι ὁ τόκος 20000 δρχ. εἰς 40 ἡμέρας πρὸς 9%;

Λύσις. $T=\frac{K.X.E.}{36000}=K.H.\frac{E}{36000}=K.H.\frac{9}{36000}=\frac{K.H}{4000}=\frac{\text{Τοκάριθμος}}{\text{Σταθ. δ)ρέτης}}$

Ὅθεν τὸ ἄνω πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ ὡς ἑξῆς:

$T=\frac{K.H.}{4000}=\frac{20000\times40}{4000}=200$ δραχμαί.

Πρόβλημα 2ον. Πόσος εἶναι ὁ τόκος 900.000 δρχ. εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 4%;

Λύσις $T=\frac{K.H.}{36000:4}=\frac{K.H.}{9000}=\frac{900000\times20}{9000}=2000$ δραχμαί.

Σημ. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν τόκον πολλῶν ποσῶν δανεισθέντων μὲ τό αὐτὸ ἐπιτόκιον π.χ. 6% καὶ διὰ διαφόρους ἡμέρας τότε εἶναι προτιμώτερος ὁ κάτωθι τρόπος εὑρέσεως τοῦ συνολικοῦ τόκου τῶν ποσῶν αὐτῶν. (ὁ σταθερὸς διαιρέτης εἶναι 36000 : 6 = 6000).

Δανεισθέντα ποσὰ		*Ἡμέραι*		*Τοκάριθμος*		*Στ. δ]της*		*Τόκος*
50.000	×	32	=	1.600.000				
45.250	×	40	=	1.810.000				
170.000	×	56	=	9.520.000				
250.000	×	150	=	37.500.000				
		Σύνολον		50.430.000	:	6000	=	**8405** δρχ.

59. – Προβλήματα ποσοστῶν.

Διὰ νὰ κατανοῶσιν οἱ ἄνθρωποι ἀμέσως τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν ἐπὶ ποσοῦ τινος, τὸ ἀσφάλιστρον κλπ χρησιμοποιῶσι καθημερινῶς εἰς τὰς συναλλαγάς των τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν. Οὕτω λέγουσιν. Ἐκέρδισεν οὗτος 8%₀ ἢ ἔχασε 5%. Ὡσαύτως λέγουν, ὅτι τὸ πλοῖον αὐτὸ ἠσφαλίσθη πρὸς 7‰ (ἑπτὰ τοῖς χιλίοις) ἢ ὅτι ὁ παραγγελιοδόχος αὐτὸς λαμβάνει προμήθειαν 3%, ἢ ὅτι ὁ μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2%.

Τὸ τόσον ἐπὶ τοῖς 100 ἢ τοῖς 1000 λέγεται ***ποσοστόν***, ἐξ οὗ καὶ προβλήματα ποσοστῶν ἐκλήθησαν, τὰ σχετικὰ τοιαῦτα προβλήματα.

Ὅθεν ***προβλήματα ποσοστῶν λέγονται*** ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ὑπολογίζεται ἐπὶ 100 ἢ 1000 μονάδων ἑνὸς ποσοῦ.

Τὰ προβλήματα ταῦτα λύονται μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, χωρὶς νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὁ χρόνος.

Παραδείγματα.

Πρόβλημα 1ον. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν ἕνας ἔμπορος ὅστις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀξίας 64.200 δρχ. μὲ κέρδος 7% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ;

Λύσις. Εἰς τὰς 100 δρχ. ἀξία ἀγορᾶς 7 δρχ. κέρδος
» » 64200 X ; » »

$$X = 7 \times \frac{64200}{100} = 4494 \text{ δρχ. ἐκέρδισε.}$$

Πρόβλημα 2ον. Ἔμπορος πωλεῖ μὲ κέρδος 20%. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕνα ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον ἀξίζει 14.400 δρχ.;

Λύσις. Ὅταν ἀξίζει 100 δρχ. θὰ τὸ πωλήσῃ 120 δρχ.
» » 14400 X ;

$$X = 120 \times \frac{14400}{100} = 17.280 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα 3ον. Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀπὸ ἄλλον μεγαλέμπορον ἀξίας 1.500.000 δραχμῶν, ἀλλ' ἐπειδὴ ἦτο πελάτης καὶ ἐπλήρωσε τοῖς μετρητοῖς, τῷ ἐγένετο ἔκπτωσις 3%. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσε ;

Λύσις

ἐπὶ 100 δρχ. θὰ πληρώσῃ 97 δρχ.
1.500.000 X ;

$$X = 97 \times \frac{1500000}{100} = 1455000 \text{δρ.}$$

Πρόβλημα 4ον. Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 400.000 δρχ. καὶ τὰ ἐπώλησεν ἀντὶ 480.000 δραχμῶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι τὸ κέρδος του ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ;

Λύσις. 480.000—400.000=80.000 δρχ. κέρδος

Ἐπὶ ἀγορᾶς 400.000 δρχ. ἐκέρδισεν 80.000 δρχ.

» » 100 X ;

$$X = 80000 \times \frac{100}{400000} = 20\,\%\ \text{κέρδος}$$

Πρόβλημα 5ον. Πόσα θὰ λάβῃ ἕνας μεσίτης, ὅστις ἐπώλησε μίαν οἰκίαν ἀντὶ 540 λιρῶν Ἀγγλίας, ὅταν δικαιοῦται νὰ λάβῃ 2% μεσιτείαν ;

Λύσις. Εἰς τὰς 100 λίρ. δικαιοῦται 2 λιρ.

» » 540 X ;

$$X = 2 \times \frac{540}{100} = 10{,}8 = 10\,\frac{16}{20} = 10\ \text{λίρας καὶ 16 σελίνια.}$$

Πρόβλημα 6ον. Ἔμπορος ἠγόρασε ὕφασμα πρὸς 24 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ μετὰ 3 μῆνας τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 25%. Πόσον ἐπώλησε τὸν πῆχυν ;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τόκου καὶ ὄχι ποσοστῶν ἐπειδὴ ἀναφέρει καὶ χρόνον.

$$\text{Ὅθεν } T = \frac{K.E.X.}{1200} = \frac{24 \times 25 \times 3}{1200} = 1{,}50\ \text{δρχ. κέρδος.}$$

Ἑπομένως ἐπώλησε τὸν πῆχυν 24+1,50=25,50 δραχμάς.

Πρόβλημα 7ον. Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἔλαιον πρὸς 18 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 4 μῆνας τὸ ἐπώλησε πρὸς 21 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς % ἐκέρδισε ;

Λύσις. Καὶ τοῦτο εἶναι πρόβλημα τόκου διότι ἀναφέρεται ὁ χρόνος, ζητεῖται δὲ τὸ ἐπιτόκιον.

K' = 18 δρχ.
E = ;
X = 4 μ.
T = 21—18=3 δρχ.

$$E = \frac{1200\,.\,T}{K.X.} = \frac{1200 \times 3}{18 \times 4} = 50\%$$

Ἑπομένως ἐπώλησε μὲ κέρδος 50 %.

Πρόβλημα 8ον. Ἐπώλησε τις ἐμπορεύματα ἀντὶ 400.000 δραχμῶν μὲ ζημίαν 20%. Πόσον ἐστοίχιζον τὰ ἐμπορεύματα ;

Λύσις. Ἂν ἐστοίχιζον 100 δρχ. θὰ τὰ ἐπώλει 80 δρχ.

X ; 400.000

$$X = 100 \times \frac{400000}{80} = 500.000\ \text{δρχ.}$$

60.—Προβλήματα ὑφαιρέσεως.

α) *Ἔννοιαι.*

Δανειστὴς ἢ ***πιστωτὴς*** καλεῖται ὁ ἔχων λαμβάνειν.

Ὀφειλέτης καλεῖται ὁ ὀφείλων εἰς ἄλλον.

Γραμμάτιον ἢ ***καλύτερον γραμμάτιον εἰς διαταγὴν*** καλεῖται ἓν ἔγγραφον συντασσόμενον ὑπὸ τύπον ἀνοικτῆς ἐπιστολῆς, διὰ τοῦ ὁποίου ἓν πρόσωπον (ὁ ὀφειλέτης) ὑπόσχεται εἰς ἄλλο (εἰς τὸν δανειστὴν) νὰ πληρώσῃ εἰς αὐτὸν τὸν ἴδιον ἢ εἰς διαταγήν του ὡρισμένον χρηματικὸν ποσὸν εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Ὑπόδειγμα Γραμματίου εἰς διαταγὴν

Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν δρχ. 100.000

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 20 Μαΐου 1955   Λῆξις 20 Αὐγούστου 1955

Μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν Α.......... ἢ εἰς διαταγήν του τὰς ἄνω δρχ. ***ἑκατὸ χιλιάδας.***

(Ὑπογραφὴ) Β....................

Συναλλαγματικὴ καλεῖται τὸ ἔγγραφον, τὸ συντασσόμενον ὑπὸ τύπον ἀνοικτῆς ἐπιστολῆς, διὰ τοῦ ὁποίου ἓν πρόσωπον (ἐκδότης) παραγγέλει εἰς ἄλλο (πληρωτὴς) νὰ πληρώσῃ εἰς αὐτὸν τὸν ἴδιον ἢ εἰς διαταγήν του ὡρισμένον χρηματικὸν ποσὸν εἰς ὡρισμένον χρόνον.

π.χ. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος τοῦ γραμματίου ἐξάγεται ὅτι ὁ Β ὀφείλει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν Α ***δρχ.*** 100.000.— Ἀντὶ τούτου ὁ Α δύναται νὰ ἐκδώσῃ συναλλαγματικὴν εἰς βάρος τοῦ Β, τὴν ὁποίαν οὗτος ὑπογράφει ὡς δεκτήν.

Ὑπόδειγμα Συναλλαγματικῆς (μὲ τὰ ἄνω 2 πρόσωπα)

Συναλλαγματικὴ δραχμῶν 100.000

Ἐν Ἀθήναις, τῃ 20 Μαΐου 1955   Λῆξις 20 Αὐγούστου 1955

Τὴν 20ὴν Αὐγούστου ἐνεστῶτος ἔτους πληρώσατε εἰς ἐμὲ τὸν ἴδιον ἢ εἰς διαταγήν μου καὶ εἰς τὸ ἐνταῦθα κατάστημα τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης τὰς ἄνω δραχμὰς ***ἑκατὸ χιλιάδας.***

Πρὸς τὸν κ. Β.   (Ὑπογραφὴ) Α

Ἐνταῦθα   Δεκτὴ

Β.

Τόσον τὸ Γραμμάτιον ὅσον καὶ ἡ Συναλλαγματικὴ γράφονται ἐπὶ φύλλου χαρτοσήμου ἐμπορικῆς κλίμακος, ἡμικλάστου, μεταβιβάζονται δὲ δι᾽ ὀπισθογραφήσεως.

Συνήθως, ὅταν ἕνας μικρέμπορος ἀγοράζῃ ἐμπορεύματα ἀπὸ ἕνα μεγαλέμπορον δύο τινα δύνανται νὰ συμβῶσι κατὰ τὸν διακανονισμὸν τοῦ λογαριασμοῦ. Ἢ πληρώνει ἀμέσως ὁ μικρέμπορος τὴν ἀξίαν τῶν ἐμπορευμάτων (λαμβάνει τὰ ἐμπορεύματα τοῖς μετρητοῖς), ὁπότε τοῦ γίνεται καὶ σχετικὴ ***ἔκπτωσις ἢ σκόντο,*** ἤ, ἂν εἶναι φερέγγυος οὗτος, τῷ δίδονται τὰ ἐμπορεύματα ***ἐπὶ πιστώσει,*** ἤτοι μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ ἀργότερον τὴν ἀξίαν των.

Ὅταν ὁ μικρέμπορος λαμβάνει τὰ ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει τότε ἢ δίδει ἕνα γραμμάτιον εἰς διαταγὴν εἰς τὸν μεγαλέμπορον ἢ ἐκδίδει ὁ δανειστὴς μεγαλέμπορος μίαν συναλλαγματικὴν εἰς βάρος τοῦ μικρεμπόρου διὰ τὸ ὀφειλόμενον ποσόν. Οὕτω ὁ μεγαλέμπορος θὰ ἔχῃ εἰς χεῖρας του μίαν ἀπόδειξιν ἔγγραφον, ὅτι τῷ ὀφείλονται χρήματα ὑπὸ τοῦ μικρεμπόρου.

Τὰ χρήματα ταῦτα δὲν δύναται νὰ ζητήσῃ ὁ μεγαλέμπορος ἀπὸ τὸν μικρέμπορον ἐνωρίτερον ἀπὸ τὴν συμφωνηθεῖσαν χρονολογίαν.

Ἤδη, ἂν ὁ μεγαλέμπορος, ὅστις ἔχει εἰς χεῖρας του τὸ γραμμάτιον ἢ τὴν συναλλαγματικήν, ἔχει ἐν τῷ μεταξὺ ἀνάγκην μετρητῶν, κάμνει τὸ ἑξῆς συνήθως διὰ νὰ ἀποκτήσῃ τοιαῦτα. Μεταβαίνει εἰς ἕνα ἄλλον ἔμπορον ἢ συνηθέστερον εἰς μίαν Τράπεζαν καὶ ***προεξοφλεῖ*** τὴν συναλλαγματικὴν ἢ τὸ γραμμάτιον. (Ἀναφέροντες κατωτέρω γραμμάτιον θὰ νοοῦμεν γραμμάτιον ἢ συναλλαγματικήν). Τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς: ***Ὀπισθογράφει*** τὸ γραμ. ὁ κομιστὴς τούτου καὶ διατάσσεται νὰ πληρώσῃ ὁ ὀφειλέτης μικρέμπορος τὸ ποσόν, εἰς τὴν Τράπεζαν. Τότε ἡ Τράπεζα λαμβάνουσα τὸ γραμ. δίδει εἰς τὸν κομιστὴν μεγαλέμπορον τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται ἐν τῷ γραμματίῳ, μεῖον τῷ τόκῳ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἡ Τράπεζα τότε μόνον προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον, ὅταν εἴτε ὁ ὀφειλέτης μικρέμπορος εἴτε ὁ ὀπισθογράψας μεγαλέμπορος εἶναι φερέγγυα πρόσωπα, δηλαδὴ πρόσωπα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει ἡ Τράπεζα ἐμπιστοσύνην, ὅτι θὰ πληρώσουν τὸ ποσὸν κατὰ τὴν λῆξιν τοῦ γραμματίου.

Ὁ ὀφειλέτης, μικρέμπορος, ὡς εἴπομεν, εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ ἐξοφλήση τὸ γραμμάτιον κατὰ τὴν χρονολογίαν τῆς λήξεως καὶ ὄχι ἐνωρίτερον.

Ἂν δὲν τὸ ἐξοφλήση κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως, τότε γίνεται ***διαμαρτύρησις τοῦ γραμματίου*** εἰς τὸ Δικαστήριον καὶ διὰ νὰ μὴ ἔχῃ καὶ ἄλλας συνεπείας ὁ μικρέμπορος, ἤτοι διὰ νὰ μὴ κηρυχθῇ εἰς πτώχευσιν κ.λ.π. σπεύδει νὰ ἐξοφλήση τὸ γραμμάτιον.

Ἂν παρῆλθον ἀρκεταὶ ἡμέραι ἀπὸ τῆς ἡμέρας ποὺ ὤφειλε νὰ ἐξοφλήση τὸ γραμμάτιον μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς πληρωμῆς του, τότε εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ καταβάλῃ καὶ ***τόκον ὑπερημερίας,*** ἤτοι τὸν τόκον ἀπὸ τῆς ἡμέρας λήξεως τοῦ γραμματίου μέχρι τῆς πληρωμῆς αὐτοῦ. Ὅλων τῶν εἰδῶν οἱ τόκοι, ***τόκος συμβατικός, τόκος προεξοφλήσεως*** καὶ ***τόκος ὑπερημερίας,*** ἢ μᾶλλον τὰ ἐπιτόκια τῶν τόκων τούτων ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ Κράτους καὶ δὲν δύνανται νὰ ὑπερβοῦν ἕνα ὡρισμένον ὅριον π. χ. 8—12%.

β) ***Ὁρισμοί.***

Ὑφαίρεσις (ἢ σκόντο ἢ ἔκπτωσις) ὀνομάζεται ἡ γινομένη μείωσις συνήθως ἐπὶ γραμματίου προεξοφλουμένου πρὸ τῆς λήξεώς του.

Φανερὸν εἶναι, ὅτι ἡ Ὑφαίρεσις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τοῦ γραμματίου, ἐκ τοῦ χρόνου προεξοφλήσεως καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου προεξοφλήσεως.

Ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου καλεῖται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται ἐν αὐτῷ.

Τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι πληρωτέον κατὰ τὴν λῆξιν τοῦ γραμματίου.

Χρόνος προεξοφλήσεως ἑνὸς γραμματίου καλεῖται τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως.

Παροῦσα ἀξία λέγεται, ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς προεξοφλήσεώς του.

Ὅθεν Ὀν. ἀξία=Π. ἀξ.+Ὑφ., ἢ Π. ἀξία=Ὀν. ἀξ.—Ὑφ., ἢ Ὑ.=Ὀν. ἀξ.—Παρ. ἀξ.

Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὑφαίρεσιν εἴτε ἐπὶ τῆς ὀν. ἀξίας ἑνὸς γραμματίου εἴτε ἐπὶ τῆς παρούσης ἀξίας του (πρᾶγμα δικαιότερον). Ὅθεν ἔχομεν δύο εἴδη Ὑφαιρέσεως τὴν ἐξωτερικὴν καὶ τὴν ἐσωτερικήν, ἐξ ὧν ἡ ἐξωτερικὴ κυρίως ἐφαρμόζεται ἐν τῷ ἐμπορίῳ καὶ παρὰ τῶν Τραπεζῶν.

Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις γραμματίου λέγεται ***ὁ τόκος τῆς Ὀν. ἀξίας*** αὐτοῦ, ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεώς του.

Ἐσωτερικὴ Ὑφαίρεσις γραμματίου λέγεται ***ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας*** αὐτοῦ, ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεώς του.

Τόκος ὑπερημερίας γραμματίου καλεῖται ὁ τόκος τῆς Ὀν. ἀξίας γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς πληρωμῆς του.

γ) ***Λύσις προβλημάτων ἐξωτερικῆς Ὑφαιρέσεως.***

Τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται ὡς τὰ τοῦ τόκου (Τ. = ἐξ. ὑφ., Ὀν. ἀξ. = Κ) ***καὶ μόνον διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ὀν. ἀξίας ἢ τῆς ἐξ. ὑφαιρέσεως, ὅταν δίδεται ἡ ἡ παρ. ἀξία, χρησιμοποιεῖται πάντοτε βοηθητικὸν Κεφάλαιον.***

Παραδείγματα.

Πρόβλημα 1ον. Γραμμάτιον προεξοφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8% καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις 1.800 δραχμῶν. Ποία εἶναι ἡ Ὀν. ἀξία αὐτοῦ;

Λύσις

Κ ἢ Ὀν. ἀξ. = ;
Τ ἢ ἐξ. ὑφ. = 1800
Χ = 3 μῆν.
Ε = 8%

$$\text{Ὀν. ἀξ.} = \frac{1200 \times 1800}{3 \times 8} = 90.000 \text{ δραχ.}$$

Πρόβλημα 2ον. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 180.000 δρχ. προεξοφλουμένου 40 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10%;

Λύσις

Κ. ἢ ὀν. ἀξ. = 180.000
Τ ἢ ἐξ. ὑφ. = ;
Χ = 40 ἡμ.
Ε = 10%

$$\text{ἐξ. ὑφ.} = \frac{180000 \times 40 \times 10}{36.000} =$$
$= 2.000$ δραχμαί.

Πρόβλημα 3ον. Τράπεζα προεξόφλησε γραμμάτιον 100.000 δραχμῶν πρὸς 8% τὴν 2 Μαΐου 1955 καὶ ἔδωσεν εἰς τὸν κομιστὴν τούτου 97.600 δραχμάς. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον;

Λύσις. Κ ἢ ὀν. ἀξ. $= 100.000$

Ε $= 8\%$

Χ $=$;

Τ ἢ ἐξ. ὑφ. $= 100.000-97.600=2.400$ δρχ.

$$X = \frac{36000.\,T}{K.E.} = \frac{36000 \times 2400}{100000 \times 8} = 108 \text{ ἡμ.}$$

Ὅθεν τὸ γραμμάτιον ἔληγε μετὰ 108 ἡμέρας. Ἤτοι μετὰ 3 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας.

Ἑπομένως :	1955 ἔτ.	5 μ.	2 ἡμ.
		3	18
	1955	8	20

Δηλαδὴ τὸ γραμμάτιον ἔληγε εἰς τὰς 20 Αὐγούστου 1955.

Πρόβλημα 4ον. **Γραμμάτιον προεξοφλήθη 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9% ἀντὶ 145.500 δραχμῶν. Ποία εἶναι ἡ ὀν. ἀξία του ;**

Λύσις. Ἐπειδὴ μᾶς δίδεται ἡ παρ. ἀξία καὶ ζητεῖται ἡ ὀνομαστική, θὰ χρησιμοποιήσωμεν βοηθητικὸν Κεφάλαιον καὶ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς :

Ἡ ἐξ. ὑφ. γραμματίου ὀν. ἀξ. 100 δρχ. εἰς 4 μ. πρὸς 9% εἶναι $\frac{100 \times 9 \times 4}{1200} = 3$ δρχ. ἐξ. ὑφ.

Ὅθεν

100 ὀν. ἀξ. 97 π. ἀξ.

Χ ; 145500

$$X = 100 \times \frac{145500}{97} = 150.000 \text{ δρχ.}$$

Πρόβλημα 5ον. **Γραμμάτιον προεξοφλήθη ὑπὸ μιᾶς Τραπέζης 4 μῆν. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9% ἀντὶ 291.000 δρχ. Πόση ἐξωτερικὴ ὑφ. ἐκρατήθη ὑπὸ τῆς Τραπέζης καὶ πόση ἦτο ἡ ὀν. ἀξία τοῦ γραμματίου ;**

Λύσις. Ἐπειδὴ μᾶς δίδεται ἡ Π. ἀξία καὶ ζητεῖται ἡ ἐξ ὑφ. καὶ ἡ ὀν. ἀξία θὰ χρησιμοποιήσωμεν βοηθητικὸν Κεφάλαιον σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Ἡ ἐξ. ὑφ. γραμ. ὀν. ἀξίας 100 δρχ. εἰς 4 μ. πρὸς 9% εἶναι $\frac{100 \times 9 \times 4}{1200} = 3$ δρχ. ἐξ. ὑφ.

Ὅθεν 100 ὀν. ἀξ.—3 ἐξ. ὑφ. $=97$ π. ἀξία.

Ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

97 δρχ. π. ἀξ. 3 δρχ. ἐξ. ὑφ.

291.000 Χ ;

$$\text{ἐξ. ὑφ.} = 3 \times \frac{291000}{97} = 9.000 \text{ δρχ.}$$

Ἑπομένως 291.000 Π. ἀξ.$+$9.000 ἐξ. ὑφ.$=$300.000 δρχ. ὀν. ἀξία.

δ) *Λύσις προβλημάτων ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.*

Τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται συνήθως διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν τύπων τοῦ τόκου (Τ=ἐσ. ὑφ., Π.ἀξ.=Κ) *καὶ μόνον διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐσ. ὑφ. ἢ τῆς Π. ἀξίας, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ὀν. ἀξία, χρησιμοποιεῖται πάντοτε βοηθητικὸν Κεφάλαιον.*

1) ***Εὕρεσις ἐσ. ὑφ. ἢ Π. ἀξ.*** (ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ὀν. ἀξ.).

Πρόβλημα. Εὑρεῖν τὴν ἐσ. ὑφ. γραμματίου 12000 δρχ. προεξοφλουμένου 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6%.

Λύσις. Ἐπειδὴ μᾶς δίδεται ἡ ὀν. ἀξία καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ ἐσ. ὑφ. θὰ χρησιμοποιήσωμεν βοηθητικὸν Κεφάλαιον σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἐσ. ὑφ. τῆς π. ἀξίας 100 δρχ. εἰς 3 μ. πρὸς 6% εἶναι

$\frac{100\times3\times6}{1200}=1{,}50$ δρχ. Ὅθεν

101,50 ὀν. ἀξία — 1,50 ἐσ. ὑφ.
12000 — Χ;

$$X=\frac{1{,}50\times12000}{101{,}50}=177{,}34 \text{ δρχ.}$$

2) ***Εὕρεσις τῆς ὀν. ἀξίας.***

Πρόβλημα. Ποία εἶναι ἡ ὀν. ἀξ. γραμματίου ὅπερ προεξοφληθὲν 5 μην. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6% μᾶς δίδει ἐσ. ὑφ. 1500 δραχμῶν;

Λύσις

Κ ἢ π. ἀξ.= ;
Τ ἢ ἐσ. ὑφ.=1500 δρχ.
Χ = 5 μ.
Ε = 6%

$$\text{Π. ἀξ.}=\frac{\text{Τ}.1200}{\text{Χ}.\text{Ε}}=\frac{1500\times1200}{5\times6}=60.000 \text{ δρχ.}$$

Ὅθεν ὀν. ἀξ.=60.000+1500=61.500

Ἑτέρα λύσις μὲ βοηθητικὸν Κεφάλαιον, χωρὶς τοῦτο νὰ εἶναι ὑποχρεωτικὸν ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Ἡ ἐσ. ὑφ. τῶν 100 δρχ. εἰς 5 μ. πρὸς 6% εἶναι $\frac{100\times6\times5}{1200}=2{,}50$ δρχ.

2,50 ἐσ. ὑφ. — 102,50 ὀν. ἀξ.
1500 — Χ;

$$X=102{,}50\times\frac{1500}{2{,}50}=61.500 \text{ δρχ.}$$

3) ***Εὕρεσις τοῦ Ἐπιτοκίου.***

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 100.000 δραχμῶν προεξοφλήθη

4 μῆν. πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐσ. ὑφ. 4000 δραχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη ἡ ἐσ. ὑφ.;

Λύσις. 100000 ὀν. ἀξ.—4000 ἐσ. ὑφ.=96.000 π. ἀξ.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{K ἢ Π. ἀξ.} & =96000 \\ \text{E} & =\,; \\ \text{X} & =4\ \mu. \\ \text{T ἢ ἐσ. ὑφ.} & =4000\ \text{δρχ.} \end{array}\right\}\quad E=\frac{1200\,.\,T}{K.X.}=\frac{1200\times4000}{96000\times4}=12{,}50\,\%$$

4) ***Εὕρεσις τοῦ Χρόνου.***

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 100.000 δρχ. προεξοφληθὲν ἐσωτερικῶς πρὸς 12% ἐξωφλήθη μὲ ἔκπτωσιν 2400 δραχμῶν. Πόσον χρόνον προεξωφλήθη πρὸ τῆς λήξεώς του;

Λύσις. 100.000 ὀν. ἀξ.—2400 ἐσ. ὑφ.=97.600 π. ἀξ.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{K ἢ Π. ἀξ.} & =97.600 \\ \text{E} & =12\,\% \\ \text{X} & =\,; \\ \text{T ἢ ἐσ. ὑφ.} & =2400 \end{array}\right\}\quad X=\frac{36000.T}{K.E.}=\frac{36000\times2400}{97600\times12}=74\,\text{ἡμ.}=2\mu\,14\,\text{ἡμ}$$

ε) ***Κοινὴ λῆξις Γραμματίων.***

Μεταξὺ ἐμπόρων συμβαίνει συνήθως τὸ ἑξῆς:

Ἕνας ἔμπορος ὀφείλει εἰς ἕνα ἄλλον, π.χ. δύο ἢ περισσότερα γραμμάτια διαφόρου ὅμως λήξεως. Ἐὰν συμφωνήσουν, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντικατασταθοῦν τὰ γραμμάτια ταῦτα δι' ἑνὸς μόνον, χωρὶς οὔτε ὁ ἕνας οὔτε ὁ ἄλλος νὰ ζημιώσῃ, οὕτως ὥστε νὰ μὴ εὑρίσκωνται πολλὰ γραμμάτια εἰς χεῖρας τοῦ ἔχοντος λαμβάνειν ἐμπόρου.

Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη πολλῶν γραμματίων, ὀφειλέτου τινος ἐμπόρου δι' ἑνὸς μόνον γραμματίου, λέγεται, ***κοινὴ λῆξις γραμματίων.*** Κατὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τούτων ἐμφανίζονται ***αἱ ἑξῆς κυρίως δύο περιπτώσεις:***

α) Ἢ δίδεται ὁ χρόνος τῆς λήξεως τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ἡ ὀν. ἀξ. αὐτοῦ.

β) Ἢ δίδεται ἡ ὀν. ἀξία τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ἡ λῆξις αὐτοῦ.

Διὰ τὴν λύσιν.

α) ***Τῶν α' προβλημάτων εὑρίσκομεν τὰς π. ἀξίας τῶν***

δοθέντων γραμματίων καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι καὶ ἡ π. ἀξ. τοῦ νέου Γραμματίου εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ τὴν ὀν. ἀξίαν του.

Πρόβλημα. Ἔμπορός τις ὀφείλει εἰς ἄλλον δύο γραμμάτια τὸ ἓν 126.000 δραχ. λῆγον μετὰ 4 μῆνας καὶ τὸ ἄλλο 180.000 δραχ. λῆγον μετὰ 45 ἡμ. θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτὰ δι' ἑνὸς γραμματίου, τὸ ὁποῖον νὰ λήγῃ μετὰ 3 μῆνας. Πόση θὰ εἶναι ἡ ὀν. ἀξ. τοῦ νέου γραμματίου, ἂν τὸ ἐπιτόκιον προεξοφλήσεως εἶναι κατὰ τὴν ἡμέραν ταύτην τῆς ἀντικαταστάσεώς των 10%;

Λύσις.

1) $\frac{126.000 \times 4 \times 10}{1.200} = 4.200$ δρχ. ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις τοῦ α' γραμματίου

Ὅθεν ἡ π. ἀξία του=121.800 δρχ.

2) $\frac{180.000 \times 45 \times 10}{36.000} = 2.250$ δρχ. ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις τοῦ β' γραμματίου

Ὅθεν ἡ π. ἀξία του = 177.750 δρχ.

Ἑπομένως ἡ π. ἀξία τοῦ νέου γραμματίου= 299.550 δρχ.

3) Ἤδη γνωρίζομεν τὴν π. ἀξίαν τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητοῦμεν τὴν ὀν. ἀξίαν αὐτοῦ. Κατὰ τὸ πρόβλημα 4 τῆς προηγουμένης γ' παραγράφου θὰ ἔχωμεν $\frac{100 \times 3 \times 10}{1200} = 2,50$ δρχ. ἡ ὑφ. ἐπὶ βοηθ. κεφαλαίου 100 δρχ.

Ὅθεν ἐπὶ 100 δρχ. ὀν. ἀξ. 97,50 ἡ Π. ἀξ.

X ; 299550

$$\text{Ὀν. ἀξ.} = 100 \times \frac{299550}{97,50} = 307.230,75$$

Ἤτοι ἡ ὀν. ἀξία τοῦ γραμματίου θὰ εἶναι **307.230,75** δραχμαί.

β) ***Διὰ τὴν λύσιν τῶν β' προβλημάτων εὑρίσκομεν τὰς π. ἀξίας τῶν δοθέντων γραμματίων. Τὸ ἄθροισμα τούτων θὰ εἶναι ἡ π. ἀξία τοῦ νέου γραμματίου. Ἐπειδὴ ὅμως ἔχομεν καὶ τὴν ὀν. καὶ τὴν π. ἀξίαν τοῦ νέου γραμματίου δι' ἀφαιρέσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν.***

Μετὰ ὁ χρόνος εὑρίσκεται διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$X = \frac{36000 \cdot \text{ὑφ.}}{\text{ὀν.ἀξ.} \times E}$$

Πρόβλημα. Ἔμπορός τις ὀφείλει δύο γραμμάτια τὸ ἓν 120.000 δρχ. λῆγον μετὰ 2 μῆνας καὶ τὸ ἄλλο 400.000 δρχ.

λῆγον μετὰ 6 μῆνας, θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα μὲ ἓν γραμμάτιον 540.000 δραχ. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, ἂν τὸ ἐπιτόκιον προεξοφλήσεως εἶναι 10 %;

Λύσις.

1) $\frac{120000 \times 2 \times 10}{1200} = 2000$ δρχ. ἡ ἐξ ὑφ. τοῦ α′ γρ.

Ὅθεν ἡ π. ἀξ. του=118.000

2) $\frac{400000 \times 6 \times 10}{1200} = 20000$ δρχ. ἡ ἐξ. ὑφ. τοῦ β′ γρ.

Ὅθεν ἡ π. ἀξ. του=380.000

Ἡ ὑφ.=22.000 καὶ ἡ π. ἀξια τοῦ νέου γραμ.=498.000

3) Ἤδη τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς : Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 540.000 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον προεξοφλούμενον σήμερον πρὸς 10 % μᾶς δίδει π. ἀξίαν 498.000 δραχμάς;
Κ ἢ ὀν. ἀξ.=540000 Ε=10% *Χ*= ; Τ ἢ ὑφ.=540000—498000=42000

$$X = \frac{36000 \,.\, T}{K.E.} = \frac{36000 \times 42000}{540000 \times 10} = 280 \text{ ἡμ.} = 9 \text{ μῆν. καὶ } 10 \text{ ἡμ.}$$

Ἤτοι τὸ νέον γραμμάτιον θὰ λήγῃ μετὰ 9 μῆν. καὶ 10 ἡμέρας.

Πρόβλημα. Ἕνας μικρέμπορος ὀφείλει τὰ κάτωθι γραμμάτια εἰς ἕνα μεγαλέμπορον λήξεως ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἔτους.

Τὸ πρῶτον	100.000 δρχ.	λήξεως	4 Ἰουλίου
Τὸ δεύτερον	160.000 »	»	10 Αὐγούστου
Τὸ τρίτον	200.000 »	»	20 Σεπτεμβρίου

καὶ ἐπειδὴ ὁ ὀφειλέτης μικρέμπορος δὲν ἠδύνατο νὰ πληρώσῃ τὰ ληξιπρόθεσμα γραμμάτια, συνεφώνησαν νὰ τὰ ἀντικαταστήσῃ ὅλα σήμερον 10 Αὐγούστου, δι᾿ ἑνὸς γραμματίου 470.000 δραχμῶν.

Πότε θὰ λήγῃ τὸ νέον γραμμάτιον, ὅταν καὶ ὁ τόκος ὑπερημερίας καὶ ὁ τόκος προεξοφλήσεως εἶναι 9 % ;

Λύσις. 1) Τὸ α′ γραμμάτιον ἔληξε ἤδη ἀπὸ 36 ἡμερῶν

2) » β′ » λήγει σήμερον

3) » γ′ » » μετὰ 40 ἡμέρας.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου πρέπει νὰ εὕρωμεν τὰς παρούσας ἀξίας τῶν γραμματίων σήμερον τὴν 10ην Αὐγούστου. Ἀλλὰ τοῦ α′ γραμματίου ἡ Π. ἀξία εἶναι τόση ὅση ἡ Ὀν. ἀξία σὺν τῷ τόκῳ ὑπερημερίας 36 ἡμερῶν.

Ὅθεν κατὰ σειρὰν αἱ παροῦσαι ἀξίαι τῶν τριῶν γραμματίων εἶναι

1) Τόκος ὑπερ.$=\frac{100.000\times 36\times 9}{36.000}=900$ δραχ.

Ὅθεν π. ἀξ.$=100.000+900=100.900$

2) Ἡ π. ἀξία τοῦ β′ γραμματίου εἶναι τόση

ὅσον καὶ ἡ ὀνομαστικὴ$=160.000$

3) Ἡ Ἐξ. ὑφ. τοῦ γ′ γραμ.$=\frac{200.000\times 40\times 9}{36.000}=2.000.$

Ὅθεν ἡ π. ἀξ.$=200.000-2.000=198.000$

Ἤτοι ἡ π. ἀξ. τοῦ νέου γραμματίου$=458.900$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ἤδη Κ ἢ ὀν. ἀξ.$=470.000$, Χ ; Ε $=9\%$

Τ ἢ ἐξ. ὑφαίρεσις$=470.000-458.900=11.100$

$$X=\frac{36.000.T}{K.E.}=\frac{36.000\times 11.100}{470.000\times 9}=94 \text{ ἡμ.}$$

Ἤτοι τὸ νέον γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 470.000 δρχ. θὰ λήγῃ μετὰ 94 ἡμ., ἤτοι τὴν 14 Νοεμβρίου ἰδίου ἔτους.

61.—Προβλήματα Ἑταιρείας.

Τὰ προβλήματα ταῦτα ἀνάγονται εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ ποσοῦ (κέρδους ἢ ζημίας), εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ κατατεθημένα κεφάλαια καὶ τοὺς χρόνους τῶν καταθέσεών των ἐν ἐμπορικῇ ἐπιχειρήσει.

Ὅθεν ἂν Κ καὶ Κ′=Κεφάλαια, Χ καὶ Χ′=Χρόνοι, καὶ κ, κ′=κέρδη ἢ ζημίαι, θὰ ἔχωμεν,

α) $\frac{\kappa}{\kappa'}=\frac{K}{K'}$ Ἂν κατετέθησαν διάφορα Κεφάλαια κατὰ τοὺς αὐτοὺς χρόνους.

β) $\frac{\kappa}{\kappa'}=\frac{K.X}{K'X'}$ » ». » » » διαφόρους χρόνους.

γ) $\frac{\kappa}{\kappa'}=\frac{X}{X'}$ » » » ἴσα » διαφόρους χρόνους.

καὶ δ) $\frac{K}{K'}=\frac{X'}{X}$ Ἂν εἶναι ἴσα τὰ κέρδη, διότι θὰ ἔχωμεν τότε $KX=K'X'$

Παραδείγματα.

Πρόβλημα 1ον. Δύο ἑταῖροι κατέθεσαν δι' ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν, ὁ μὲν εἷς 400.000 δραχμὰς ὁ δὲ ἕτερος 1.000.000 δραχμὰς καὶ ἐκέρδισαν ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης 280.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω $\frac{\kappa}{\kappa'}=\frac{K}{K'}$ Ἦτοι τὰ κέρδη θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων. Ἑπομένως ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος τῶν 280.000 δρχ. ἀναλόγως τῶν κατατεθέντων κεφαλαίων.

400.000 ἢ 4 ἢ 2	$\frac{280.000}{7}\times 2 = 80.000$ δρχ. θὰ λάβῃ ὁ α'
1.000.000 ἢ 10 ἢ 5 / 7	» $\times 5 = 200.000$ » » » » β'
	Σύνολον κέρδους=280.000

Πρόβλημα 2ον. Εἷς ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 400.000 δραχ. καὶ μετὰ 4 μῆνας προσέλαβεν συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσεν 1.000.000 δρχ. Μετὰ 10 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως διελύθη αὕτη, μὲ κέρδη 280.000 δραχμῶν. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν συνεταίρων.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, ἐπειδὴ τοῦ Κ. τοῦ α' ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 10 μῆν. καὶ τὸ Κ' τοῦ β' 6 μῆνες, θὰ ἔχωμεν $\frac{\kappa}{\kappa'}=\frac{K.X}{K'X'}$ ἤτοι τὰ κέρδη θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν γινομένων, ἅτινα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἐπὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν ἔμεινε τοῦτο ἐν τῇ ἐπιχειρήσει. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ***Μεριστέος ἀριθμὸς ὁ 280.000.***

400.000×10=4.000.000 ἢ 4 ἢ 2	$\frac{280000}{5}\times 2=112000$ δρχ. θὰ λάβῃ ὁ α'
1.000.000× 6=6.000.000 ἢ 6 ἢ 3 / 5	» $\times 3=168000$ » » » » β'
	280000 » θὰ λάβουν καὶ οἱ δύο

Πρόβλημα 3ον. Εἷς ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 600.000 δρχ. καὶ μετὰ 4 μῆνας προσέλαβεν συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν. Μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως διελύθη αὕτη, ἀπέδωσε δὲ κέρδος 400.000 δρχ. Πόσον μέρος ἐκ τοῦ κέρδους θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν συνεταίρων;

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἐν ἀρχῇ τοῦ παρόντος ἀναφερόμενα θὰ ἔχωμεν $\frac{\kappa}{\kappa'}=\frac{X}{X'}$ ἤτοι τὰ κέρδη, ἐφ' ὅσον τὰ κεφάλαια εἶναι τὰ αὐτά, θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων καθ' οὓς ἔμειναν τὰ κεφάλαια ἐν τῇ ἐπιχειρήσει. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν, δεδομένου ὅτι τὸ Κεφάλαιον τοῦ α' ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 1 ἔτος=12 μῆνες καὶ τοῦ β' 12—4=8 μῆνες.

Μεριστέον ποσὸν 400.000

$$\left.\begin{array}{l} 12 \text{ ἢ } 3 \\ 8 \text{ ἢ } \frac{2}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{400000}{5}\times3=80000\times3=240000 \text{ δρχ. θὰ λάβῃ ὁ α'} \\ \text{» } \times2=80000\times2=\underline{160000 \text{ » » » » β'}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 400000 \text{ » θὰ λάβουν καὶ οἱ δύο.} \end{array}$$

Πρόβλημα 4ον. Διαλυθείσης, μετὰ 1 ἔτος ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς της, μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἐκ δύο συνεταίρων, ἐξ ὧν ὁ εἷς ἦτο ὁ ἱδρυτής της ὁ δὲ ἕτερος εἰσῆλθεν εἰς ταύτην 4 μῆνας μετὰ τὸν α', ἔλαβεν ἕκαστος τούτων ἀνὰ 200.000 δραχ. κέρδος ἐπὶ συνολικοῦ κατατεθέντος κεφαλαίου 1.500.000 δραχμῶν. Πόσον Κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ἕκαστος τῶν συνεταίρων;

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω $\frac{K}{K'}=\frac{X'}{X}$ ἤτοι, ἂν τὰ κέρδη εἶναι ἴσα, τὰ κεφάλαια θὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἔμειναν ταῦτα ἐν τῇ ἐπιχειρήσει. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

Μεριστέον ποσὸν 1.500.000 δραχ., τὸ ὁποῖον θὰ μερισθῇ ἀντιστρόφως ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 8 (ὁ β' εἰσῆλθεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν μετὰ 4 μῆνας).

$$\begin{array}{l|l} 12 \text{ ἢ ἀναλόγως πρὸς } \frac{1}{12} \text{ ἢ } \frac{1}{12}\times24=2 & \frac{1.500.000}{5}\times2=600.000=K \\ 8 \text{ » » » } \frac{1}{8} \text{ ἢ } \frac{1}{8}\times24=\frac{3}{5} & \frac{1.500.000}{5}\times3=\underline{900.000=K'} \\ & \qquad\qquad 1.500.000 \end{array}$$

62. – Προβλήματα μέσου ὅρου.

Γενικῶς λέγοντες μέσον ὅρον μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων ποσοτήτων νοοῦμεν μίαν ποσότητα περιλαμβανομένην μεταξὺ τῆς μεγαλυτέρας δοθείσης καὶ τῆς μικροτέρας τοιαύτης.

Ἀριθμητικὸν μέσον ἢ μέσος ὅρος, διαφόρων ὁμοειδῶν δοθέντων ποσῶν, λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν.

π.χ. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 8, 16, 24 καὶ 64,

Λύσις $\frac{8+16+24+64}{4}=\frac{112}{4}=28$

Κυρίως τὰ προβλήματα μέσου ὅρου ἐμφανίζονται ἐν τῇ Στατιστικῇ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ καθημερινῷ βίῳ.

Παραδείγματα.

Πρόβλημα 1ον. Εἷς μαθητὴς ἔλαβεν τοὺς ἑξῆς βαθμοὺς εἰς τὰ διάφορα μαθήματά του. 14,10,18,16,8,12,16,18. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας του;

Λύσις $\frac{14+10+18+16+8+12+16+18}{8}=\frac{112}{8}=14$ ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας του.

Πρόβλημα 2ον. Εἷς ὑποψήφιος δι' εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις ἔλαβεν τοὺς ἑξῆς βαθμοὺς εἰς τὰ ἐξεταζόμενα μαθήματα. Ἑλληνικὰ 11, Μαθηματικὰ 13, Γεωγραφία 8 καὶ Ἀγγλικὰ 15. Ἀλλὰ τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὰ Ἀγγλικὰ ἔχουν συντελεστὴν 2 ἐνῶ τὰ ἄλλα μαθήματα ἔχουν 1. Θεωρεῖται ἐπιτυχὼν ὁ μαθητὴς οὗτος, ἂν ἡ βάσις ἐπιτυχίας εἶναι τὸ 12 ἐπὶ τῆς συνολικῆς βαθμολογίας;

Λύσις.		***Συντελ.***
Ἑλληνικὰ	11	$\times 1=11$
Μαθηματικὰ	13	$\times 2=26$
Γεωγραφία	8	$\times 1=8$
Ἀγγλικὰ	15	$\times 2=30$
		6 75

75 : 6=12,5 ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν του. Ἑπομένως θεωρεῖται ἐπιτυχών.

Ἂν δὲν εἶχον συντελεστὴν 2 τὰ δύο ἐκ τῶν μαθημάτων, τότε θὰ εἴχωμεν $\frac{11+13+8+15}{4}=\frac{47}{4}=11\frac{3}{4}=11{,}75$ ἤτοι δὲν θὰ συνεκέντρωνε τὴν βάσιν 12 ὁ ὑποψήφιος.

Πρόβλημα 3ον. Μία οἰκογένεια ἐκ 4 ἀτόμων ἐξοδεύει διὰ φαγητὸν ἐπὶ μίαν ἑβδομάδα τὰ κάτωθι ποσά. Πόσον ἐξοδεύει κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν;

Λύσις.

Τὴν Κυριακὴν	60	δραχ.
» Δευτέραν	45	»
» Τρίτην	55	»
» Τετάρτην	50	»
» Πέμπτην	75	»
» Παρασκευὴν	50	»
καὶ τὸ Σάββατον	120	»

455 : 7=65 δρχ. ἐξοδεύει ἡμερησίως.

Πρόβλημα 4ον. Εἰς μίαν πόλιν τὸ ἐνοίκιον ἐκ 4 δωματίων εἰς πτωχικὴν συνοικίαν εἶναι 400 δρχ., εἰς μεσαίαν συνοικίαν

600 δρχ. καὶ εἰς Κεντρικὴν συνοικίαν 1.100 δρχ. Πόσον εἶναι τὸ μέσον ἐνοίκιον ἐν τῇ πόλει ταύτῃ δι' ἕκαστον δωμάτιον;

Λύσις. $\frac{400+600+1100}{3}=\frac{2.100}{3}=700$ δρχ. διὰ 4 δωμάτια.

Ὅθεν $\frac{700}{4}=175$ δραχ. τὸ μέσον ἐνοίκιον δωματίου.

Πρόβλημα 5ον. Ἡ θερμοκρασία εἰς μίαν πόλιν κατὰ μίαν ἡμέραν ἦτο εἰς τὰς 8 π.μ. 15^0, εἰς τὰς 2 μ.μ. 23^0 καὶ εἰς τὰς 8 μ.μ. 16^0. Πόση ἦτο ἡ μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας ταύτης;

Λύσις. $\frac{15+23+16}{3}=\frac{54}{3}=18^0$

63.—Προβλήματα Μίξεως καὶ Κραμάτων.

α) *Ἔννοιαι καὶ ὁρισμοί.*

Κρᾶμα λέγεται ἡ ἀνάμιξις καὶ ἕνωσις πολλῶν μετάλλων εἰς ἓν εἶδος.

Μίξις καλεῖται ἡ ἀνάμιξις εἴτε ὁμοειδῶν εἴτε μὴ ὁμοειδῶν πραγμάτων εἰς ἕν.

Π.χ. ὕδατος καὶ οἴνου, οἰνοπνεύματος καὶ ὕδατος, ἔλαιον α΄ καὶ γ΄ ποιότητος εἰς β΄ ποιότητος κλπ.

Βαθμὸς Καθαρότητος πολυτίμου μετάλλου ἢ τίτλος νομίσματος ἢ κοσμήματος λέγεται τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος.

π.χ. Λέγοντες ὅτι ἓν χρυσοῦν κόσμημα ἢ νόμισμα εἶναι βαθμοῦ καθαρότητος ἢ τίτλου 0,900 νοοῦμεν, ὅτι εἰς 1 γραμμάριον ἢ εἰς 1 δράμιον ἢ εἰς 1 χιλιόγραμμον κλπ. τούτου τὰ 900 μέρη εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ἄλλα 100 μέρη ἄλλο μὴ πολύτιμον μέταλλον π.χ. χαλκός.

Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ εἰς εἰκοστὰ τέταρτα ἤτοι εἰς ***καράτια.*** Οὕτω π.χ. λέγοντες ὅτι αὐτὸ τὸ χρυσοῦν κόσμημα εἶναι 18 καρατίων νοοῦμεν, ὅτι ἔχει 18 μέρη καθαρὸν χρυσὸν καὶ ἄλλα 6 μέρη ἄλλο μὴ πολύτιμον μέταλλον ἢ λέγοντες, ὅτι αὐτὸ τὸ κόσμημα εἶναι 14 καρατίων νοοῦμεν ὅτι ἔχει 14 μέρη καθαρὸν χρυσὸν καὶ ἄλλα 10 μέρη ἄλλο μὴ πολύτιμον μέταλλον. Εἰς τὰς μονάδας μετρήσεως καὶ εἰδικώτερον εἰς τὰς μονάδας βάρους εἴδομεν ὅτι ὡς μονὰς βάρους πρὸς ζύγισιν τῶν ***πολυτίμων λίθων*** λαμβάνεται τὸ καράτιον=0,2 γραμμάρια. Ἐκεῖνο τὸ καράτιον εἶναι μονὰς βάρους διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους ἐνῷ τοῦτο παριστᾷ τὸν βαθμὸν καθαρότητος πολυτίμου μετάλλου.

Βαθμός καθαρότητος οἰνοπνεύματος λέγεται τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ οἰνοπνεύματος, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα τοῦ μίγματος.

Οὕτω π.χ. λέγοντες ὅτι αὐτὸ τὸ οἰνόπνευμα ἢ αὐτὸ τὸ οἰνοπνευματῶδες ποτὸν εἶναι 80 βαθμῶν νοοῦμεν ὅτι εἰς 1 ὀκᾶν ἢ εἰς 1 χιλιόγραμμον κλπ. τούτου, τὰ 80 μέρη εἶναι καθαρὸν οἰνόπνευμα καὶ τὰ ἄλλα 20 μέρη εἶναι ὕδωρ. Ἢ λέγοντες ὅτι αὐτὸ τὸ κονιὰκ εἶναι 40 βαθμῶν νοοῦμεν, ὅτι εἰς μίαν ὀκᾶν π.χ. τούτου, τὰ 40 μέρη εἶναι καθαρὸν οἰνόπνευμα καὶ τὰ ἄλλα 60 μέρη εἶναι ὕδωρ.

Τύποι βαθμοῦ καθαρότητος. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Β= βαθμὸς καθαρότητος, μὲ Μ=τὸ καθαρὸν μέταλλον ἢ τὸ καθαρὸν οἰνόπνευμα καὶ μὲ Κ=τὸ κρᾶμα, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Β}=\frac{\text{Μ}}{\text{Κ}},\ \text{π.χ.}\ 0{,}850=\frac{850}{1000}$$

β) ***Τά προβλήματα μίξεως καὶ κραμάτων διακρίνονται εἰς δύο εἴδη.***

Πρῶτον εἶδος. Δίδονται αἱ πρὸς ἀνάμιξιν ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστης αὐτῶν καὶ ***ζητεῖται*** ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος π.χ.

Πρόβλημα 1ον. Παντοπώλης ἀνέμιξεν 10 ὀκ. οἴνου τῶν 4 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 40 ὀκ. τῶν 6 δραχμῶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ μῖγμα χωρὶς νὰ κερδίσῃ ἢ νὰ ζημιώσῃ;

Λύσις. Αἱ 10 ὀκ. στοιχίζουν $4 \times 10 = 40$ δρχ.
» 40 » » $6 \times 40 = 240$ »

» 50 » τοῦ μίγματος στοιχίζουν 280 »

Ἑπομένως ἡ 1 » » » στοιχίζει $\frac{280}{50}=5{,}60$ δρχ.

Ὥστε πρέπει νὰ πωλῇ τὸ μῖγμα 5,60 δρχ. χωρὶς οὔτε νὰ ζημιώσῃ οὔτε νὰ κερδίσῃ ἐκ τῆς ἀναμίξεως.

Πρόβλημα 2ον. Χρυσοχόος ἔκαμεν ἕνα βραχιόλι μὲ 40 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,900 καὶ μὲ 8 γραμμάρια χαλκοῦ. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κοσμήματος τούτου;

Λύσις. Τὰ 40 γρμ. τοῦ χρυσοῦ ἔχουν καθ. χρυσὸν 0,900×40=36 γρ
» 8 » » χαλκοῦ » » » = 0 »

Ὅθεν » 48 » » βραχιολ. » βάρος καθ. χρυσοῦ 36 γρ.

Ἑπομένως 1 » » » ἔχει βαθμ. καθαρ. $\frac{36}{48}=0,750$

Ἦτοι τὸ βραχιόλι ἔχει τίτλον 0,750 ἢ ἂν θέλωμεν νὰ ἴδωμεν πόσων καρατίων εἶναι θὰ πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸ 0,750 εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, ἤτοι $\frac{750}{1000}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$ ἤτοι εἶναι 18 καρατίων.

Πρόβλημα 3ον. Παντοπώλης ἀνέμιξεν 20 ὀκάδας ἔλαιον τῶν 20 δραχ. τὴν ὀκᾶν, μὲ 30 ὀκ. τῶν 24 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μὲ 50 ὀκ. ἔλαιον ἄλλης ποιότητος. Ἂν ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τοῦ στοιχίζει 21,50 δραχ., νὰ εὑρεθῇ πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τοῦ γ΄ εἴδους;

Λύσις. Αἱ 20 ὀκ. στοιχίζουν 20 × 20 = 400 δραχ.
» 30 » » 24 × 30 = 720 »
» 50 » » ; »

» 100 » » 21,50×100 = 2150 »

Ὅθεν 400+720=1120 στοιχίζουν τὰ 2 πρῶτα εἴδη.
Ἑπομένως 50 ὀκ. τοῦ γ΄ εἴδους θὰ στοιχ. 2150—1120=1030 δραχ.
καὶ ἡ 1 » » » » » στοιχ. $\frac{1030}{50}=20,60$ δραχ.

Δεύτερον εἶδος. Δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο ἢ περισσοτέρων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος καὶ ***ζητεῖται,*** πόσον θὰ λάβωμεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένης ποσότητος ἐκ τῶν πραγμάτων τούτων καὶ νὰ μὴ ἔχωμεν οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν.

Πρόβλημα 1ον. Ἔχει τις δύο εἴδη ἀλεύρων, τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἔχει 9 δραχ. καὶ τοῦ β' 8 δραχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 120 ὀκ., τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς 8,30 δραχ. τὴν ὀκᾶν;

Λύσις. Ἐὰν λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος 1 ὀκ. ζημιώνει 0,70 δραχ. ἀπὸ δὲ τὸ β΄ εἶδος κερδίζει 0,30 δραχ. Ὅθεν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:
Ἂν ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος λάβῃ 30 ὀκ. θὰ ζημιώσῃ 0,70 δρχ.×30=21 δρχ.
» » » β΄ » » 70 » » κερδίσῃ 0,30 » ×70=21 »

Ἑπομένως ὁ σχηματισμὸς τοῦ μίγματος τῶν 120 ὀκ. πρέπει νὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 70 καὶ οὕτω ἔχομεν.

Μεριστέος ἀριθ. ὁ 120 ὀκ.

30 ἢ 3	$\frac{120}{10}\times3=12\times3=36$ ὀκ. πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος
70 ἢ $\frac{7}{10}$	» $\times7=12\times7=84$ » » » » » » β΄ »
	120 » ὅλον τὸ μῖγμα

Συνήθως διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ εἴδους τούτου χρησιμοποιεῖται ἡ ἑξῆς διάταξις.

Μεριστέος ὁ ἀριθ. 120 οκ.

α΄ εἴδους 9 δρχ.		0,30 ἢ 3	$\frac{120}{10}\times3=36$ ὀκ. ἐκ τοῦ α΄ εἴδους
Τιμὴ μίγματος	$>8{,}30<$		
β΄ εἴδους 8 »		0,70 ἢ $\frac{7}{10}$	» $\times7=84$ » » » β΄ »
			120 » ὅλον τὸ μῖγμα

Πρόβλημα 2ον. Χρυσοχόος ἔχει χρυσὸν τίτλου 0,650 καὶ ἄλλον τίτλου 0,850 καὶ θέλει νὰ κάμῃ κρᾶμα βάρους 320 γραμμαρίων τίτλου 0,800. Πόσα γραμμάρια θὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

Μεριστέος ὁ ἀριθ. 320 γραμ.

τοῦ α΄ εἴδους 0,650		0,050 ἢ 50 ἢ 1	$\frac{320}{4}\times1=80$ γραμ.
τοῦ μίγματος	$>0{,}800<$		
τοῦ β΄ 0,850		0,150 ἢ 150 ἢ $\frac{3}{4}$	$\frac{320}{4}\times3=240$ »
			320 γραμ.

Πρόβλημα 3ον. Ἔχει τις δύο εἴδη ἐλαίου. Τοῦ ἑνὸς εἴδους ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 20 δραχμὰς καὶ τοῦ ἑτέρου 16 δραχμάς, θέλει δὲ νὰ κάμῃ μῖγμα τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ στοιχίζῃ 19 δρχ. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος, ὅταν λάβῃ 24 ὀκ. ἐλαίου ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος;

Λύσις

Ἐὰν λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος 3 ὀκ. (19—16) θὰ ζημιώσῃ $1\times3=3$ δρχ.
Ἐὰν λάβῃ » » β΄ » 1 » (20—19) » κερδίσῃ $3\times1=3$ δρχ.

Ὅθεν ὅταν λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ α΄ 3 ὀκ. θὰ λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ β΄ 1 ὀκ.
» » » » » 24 » X;

$$\mathbf{X}=1\times\frac{24}{3}=8 \text{ ὀκ. θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος.}$$

ἢ μὲ τὴν ἄλλην Κατάταξιν

τοῦ α΄ 20		3	3 ὀκ. α΄ 1 ὀκ. β΄	
τοῦ μίγματος	$>19<$			$\mathbf{X}=1\times\frac{24}{3}=8$ ὀκ.
τοῦ β΄ 16		1	24 » » X;	

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον.—Ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

1) Διὰ νὰ ἀγοράσῃ τις ὕφασμα, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς τιμᾶται 175 δραχμάς, ἔδωσε 12 ὀκάδες βουτύρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 63 δραχμὰς καὶ 119 δραχ. ἐπὶ πλέον. Νὰ εὑρεθῇ πόσους πήχεις ὕφασμα ἠγόρασεν. *ἀπ. 5*

2) Ἐπώλησε τις 309 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 18 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔλαβε, ἐκράτησεν 2187 δραχ. καὶ μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 45 δραχ. τὸν πῆχυν. Νὰ εὑρεθῇ πόσους πήχεις ὕφασμα ἠγόρασεν. *ἀπ. 75*

3) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε ἔλαιον ἀντὶ 14450 δραχμῶν. Πωλεῖ δὲ κατόπιν ἐξ αὐτοῦ 250 ὀκ. μὲ κέρδος 2 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ εἰσπράττει 4750 δρχ. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου εἶχεν ἀγοράσει;

Λύσις.

α) $2 \times 250 = 500$ δρχ. εἶναι τὸ κέρδος εἰς τὰς 250 ὀκ.
β) $4750 - 500 = 4250$ δρχ. στοιχίζουν αἱ 250 ὀκ.
γ) $4250 : 250 = 17$ δρχ. στοιχίζει ἡ ὀκ. ἐλαίου.
δ) $14450 : 17 = 850$ ὀκ. ἐλαίου εἶχεν ἀγοράσει.

4) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασεν 125 πήχεις ὕφασμα. Κατόπιν πωλεῖ 25 πήχεις πρὸς 14 δρχ. τὸν πῆχυν, 45 πήχεις πρὸς 13 δρχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 15 δρχ. Ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὑφάσματος ἐκέρδισεν 260 δραχ. Πρὸς πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀγοράσῃ τὸν πῆχυν; *ἀπ 12*

5) Διὰ νὰ ἀγοράσῃ τις 64 δοχεῖα ἐλαίου πρὸς 234 δρχ. ἕκαστον, ἔδωσε 57 πήχεις ὕφασμα τῶν 54 δραχμῶν κατὰ πῆχυν, 98 πήχεις ἄλλου ὑφάσματος καὶ 3372 δραχμὰς ἐπὶ πλέον. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς τοῦ δευτέρου ὑφάσματος; *ἀπ. 87*

6) Εἷς ἐργάτης δι᾿ ἑκάστην ἡμέραν ἐργασίας λαμβάνει ἡμερομίσθιον 65 δραχ. καὶ ἐξοδεύει τὴν ἡμέραν διὰ τροφὴν 35 δραχ. Ἐὰν μετὰ πάροδον 30 ἡμερῶν εἶχεν περίσευμα 575 δραχ., νὰ εὑρεθῇ πόσας ἡμέρας ἠργάσθη. *ἀπ. 25*

7) Εἶχε τις 2850 δραχμάς. Μὲ τὸ ποσὸν αὐτὸ ἤθελε νὰ ἀγοράσῃ 495 ὀκάδας σίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3 δραχμὰς καὶ 95 ὀκάδας ἐλαίου, ἀλλὰ τοῦ ἔλειπον 440 δραχμαί. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ ἐλαίου. *ἀπ. 19*

8) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε 1450 ὀκ. τυρὶ καὶ θέσας αὐτὸ εἰς ψυγεῖον ἐπλήρωνεν ἐνοίκιον 900 δρχ. κατὰ μῆνα. Μετὰ 8 μῆνας ἐπώλησε αὐτὸ ἀντὶ 54.800 δρχ. καὶ ἐκέρδισεν 8450 δρχ. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν τὸ τυρί; *ἀπ. 27*

9) Ἠγόρασέ τις 250 πήχεις ὕφασμα πρὸς 189 δρχ. τὸν πῆχυν. Πωλεῖ κατόπιν ἐξ αὐτῶν 35 πήχεις πρὸς 209 δρχ. καὶ 29 πρὸς 205 δρχ. τὸν πῆχυν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 10.092 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ ὅλου ὑφάσματος; *ἀπ. 237 δρχ.*

10) Εἷς ἠγόρασε 45 πήχεις ὕφασμα πρὸς 12 δρχμὰς τὸν πῆχυν. Πωλήσας κατόπιν ἓν μέρος αὐτοῦ πρὸς 18 δρχ. τὸν πῆχυν παρετήρησεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἔμεινε κέρδος. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἦσαν οἱ ἐναπομείναντες πήχεις. *ἀπ. 15 πήχ.*

11) Δύο τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν συνολικὸν μῆκος 68 μέτρα καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἑνὸς ὑπερβαίνει τὸ τριπλάσιον τοῦ μήκους τοῦ ἄλλου κατὰ 4 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου. *ἀπ· 52 μ. 16 μ.*

12) Εἷς ἠγόρασε 6 δοχεῖα λῖπος, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιεῖχεν 12 ὀκάδας καὶ ἐπλήρωσε 2308 δρχ. Ἐξόδευσε προσέτι διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτοῦ 32 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν αὐτοῦ, διὰ νὰ τοῦ μείνῃ ἓν δοχεῖον κέρδος;

ἀπ. 39 δρχ.

13) Ἔχει τις δύο δοχεῖα ἐλαίου καὶ τὸ ἓν περιέχει 54 ὀκάδες περισσότερον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας περιέχει ἕκαστον, δεδομένου ὅτι τὸ ἓν περιέχει τριπλάσιον ἀριθμὸν ὀκάδων τοῦ ἄλλου καὶ 10 ὀκάδας ἐπιπλέον. *ἀπ. 76 22*

14) Εἷς ἠγόρασε βούτυρον καὶ ἐπλήρωσε 5440 δρχ. Ἐὰν ὅμως ἠγόραζε 17 ὀκάδας ὀλιγώτερον θὰ ἐπλήρωνε 4352 δρχ. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ; *ἀπ. 64 δρχ.*

15) Εἷς ἠγόρασε δύο δοχεῖα ἐλαίου πρὸς 18 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπλήρωσε 684 δρχ. Τὸ ἓν δοχεῖον περιέχει 6 ὀκάδας περισσότερον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας περιέχει ἕκαστον. *ἀπ. 22 ὀκ. 16 ὀκ.*

16) Δύο κιβώτια σάπωνος τῆς αὐτῆς ποιότητος τιμῶνται 1320 δρχ. Τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν περιέχει 26 ὀκάδας περισσότερον τοῦ ἄλλου καὶ τιμᾶται 312 δρχ. ἐπὶ πλέον. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας περιέχει ἕκαστον κιβώτιον. *ἀπ. 42 68*

17) Διὰ δύο τεμάχια ὑφάσματος τοῦ αὐτοῦ μήκους ἐπλήρωσέ τις 336 δρχ. Ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου ἐτιμᾶτο 8 δρχ. καὶ τοῦ δευτέρου 6 δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο ἕκαστον;

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ μῆκος ἀμφοτέρων εἶναι τὸ αὐτό, ἡ μέση τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι 7 δραχμάς. Ἑπομένως τὸ ὅλον ὕφασμα εἶναι 336 : 7=48 πήχεων καὶ ἕκαστον 24 πήχεων.

18) Εἷς ζωέμπορος ἐνοικίασεν βοσκὴν ἀντὶ 7.500 δραχμῶν, ἵνα θρέψῃ 85 ἀρνιά, τὰ ὁποῖα ἠγόρασε. Κατόπιν ἐπώλησεν αὐτὰ ἀντὶ 64.875 δραχμῶν καὶ εἶχεν κέρδος 30.600 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς ἑκάστου ἀρνίου. *ἀπ. 315*

19) Εἷς εἰσπράττει 2250 δραχμὰς κατὰ μῆνα. Ἐξοδεύει δὲ ἀπὸ αὐτὰ 975 δραχμὰς κατὰ μῆνα διὰ τροφὴν καὶ 350 δραχμὰς δι' ἐνοίκιον. Ἐὰν τὰ λοιπὰ ἐτήσια ἔξοδα αὐτοῦ εἶνα 2425 δραχμαί, νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρονικὸν διάστημα θὰ δυνηθῇ νὰ πληρώσῃ χρέος 15.700 δραχμῶν. *ἀπ. 4 ἔτη*

20) Ἔμπορος ἠγόρασε κυτία, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιεῖχεν 6 δωδεκάδας μανδύλια, πρὸς 1050 δραχμὰς ἕκαστον. Κατόπιν ἐπώλησεν τὰ μανδύλια πρὸς 150 δραχμὰς τὰ 9 καὶ ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 2250 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσα κυτία εἶχεν ἀγοράσει. *ἀπ. 15*

21) Εἷς ἠγόρασε 90 ἀρνιὰ καὶ 75 ἐρίφια ἀντὶ 40.500 δραχμῶν. Πωλεῖ κατόπιν τὰ ἀρνιὰ ἀντὶ 31.500 δραχμῶν καὶ τὰ ἐρίφια ἀντὶ 17250 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς ἑκάστου, ὅταν ὅλα ἐπωλήθησαν μὲ τὸ αὐτὸ κέρδος κατὰ κεφαλήν. *ἀπ. 300 180*

22) Ἔμπορος ἠγόρασεν 80 ὀκάδας καφὲ ἀντὶ 63 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν, τὸν ὁποῖον ὅταν ἐκαβούρδισεν ἔχασεν ἐκ τοῦ βάρους του 8 ὀκάδας. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τώρα τὴν ὀκᾶν τοῦ καφέ διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 1440 δραχμάς. *ἀπ. 90*

23) Ἔμπορος ἠγόρασε 6 ἴσα τεμάχια ὕφασμα τῆς αὐτῆς ποιότητος ἀντὶ 24 δραχμῶν τὸν πῆχυν. Κατὰ τὴν μεταφορὰν 3 πήχεις ἀπὸ ἕκαστον ἠχρηστεύθησαν. Πωλεῖ κατόπιν τὸ ἐναπομεῖναν ὕφασμα, ἀντὶ 32 δραχμῶν τὸν πῆχυν καὶ εἶχεν ὀλι-

κὸν κέρδος 1248 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν μῆκος ἑκάστου τεμαχίου. *ἀπ. 38 πήχ.*

24) Ἔχει τις δύο βαρέλια κονιὰκ τῆς αὐτῆς ποιότητος καὶ συνολικῆς ἀξίας 2880 δραχμῶν. Ἐὰν μὲ τὸ κονιὰκ τοῦ δευτέρου βαρελίου, τὸ ὁποῖον εἶναι 36 ὀκάδες ὀλιγότερον τοῦ πρώτου, ἐπλήρωσεν 96 φιάλας, τῶν ὁποίων τὸ περιεχόμενον ἀξίζει 12 δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ καὶ πόσας ὀκάδας περιέχει ἕκαστον. *ἀπ. 16 δρχ. 108 72*

25) Εἷς ἔμπορος πωλῇ τὸν πῆχυν ἑνὸς ὑφάσματος ἀντὶ 28 δραχμῶν καὶ κερδίζει 12 δραχμὰς ὀλιγότερον ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῆς ἀγορᾶς τοῦ πήχεως. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸν πῆχυν. *ἀπ. 20*

26) Δύο τεμάχια ὕφασμα ἔχουν μῆκος τὸ ἓν 72 πηχ. καὶ τὸ ἄλλο 48 πηχ. Ὁ ἔμπορος πωλεῖ ἀπὸ ἕκαστον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πήχεων καὶ εἶδεν, ὅτι τὰ ἐναπομείναντα τεμάχια ἔχουν μῆκος τὸ ἓν τετραπλάσιον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ πόσους πήχεις ἐπώλησεν ἀπο ἕκαστον. *ἀπ. 40*

27) Εἰς μίαν ἐπιχείρησιν ἐργάζονται τρεῖς ἐργάται καὶ λαμβάνουν: ὁ Α καὶ Β εἰς 18 ἡμέρας 1944 δραχμάς, ὁ Α καὶ Γ εἰς 15 ἡμέρας 2070 δραχμάς, ὁ Β καὶ Γ εἰς 20 ἡμέρας 3000 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου.
ἀπ. 48 60 ϨO

28) Εἰς μίαν ἐπιχείρησιν ἐργάζονται 120(25) ἄνδρες καὶ γυναῖκες καὶ λαμβάνουν ἡμερησίως 3720(1122) δραχμάς. Ἐὰν κάθε ἀνὴρ λαμβάνει 35(50) δραχμὰς καὶ ἑκάστη γυνὴ 25(34) δραχμὰς τὴν ἡμέραν, πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; *ἀπ. 72(17) 48(8)*

29) Μὲ ἓν ποσὸν χρημάτων, τὰ ὁποῖα εἶχε τις, ἐσκόπευε νὰ ἀγοράσῃ 18 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Ἐπέτυχεν ὅμως ἀπὸ τὸν ἔμπορον ἔκπτωσιν 3 δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ οὕτω μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν ἠγόρασε 6 πήχεις περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ πήχεως.

Λύσις. Ἀπὸ τὸν ἕνα πῆχυν ἔχει ἔκπτωσιν 3 δραχ. ἑπομένως ἀπὸ τοὺς 24 πήχεις εἶχεν $3 \times 24 = 72$ δραχ., ἥτις εἶναι ἡ ἀξία τῶν 6 πήχεων. Ἄρα ὁ πῆχυς τιμᾶται 12 δραχ.

30) Διὰ νὰ σκάψῃ τις ἄμπελον ἐμίσθωσεν δύο ἐργάτας μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον. Περατώσαντες οὗτοι τὴν ἐργασίαν εἰς 6 ἡμέρας ἔλαβον, ὁ πρῶτος 5 ὀκ. ἐλαίου καὶ 150 δραχ., ὁ δὲ

δεύτερος 8 ὀκ. ἐλαίου καὶ 96 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν ἡμερομίσθιον.

Λύσις. Αἱ 54 δραχμαί, τὰς ὁποίας ἔλαβεν ὁ δεύτερος ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου, εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 3 ὀκάδων τοῦ ἐλαίου, τὰς ὁποίας ἔλαβεν ἐπὶ πλέον αὐτοῦ. Ὅθεν ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 56 : 3=18 δραχ. Ἤδη εὐκόλως εὑρίσκεται ὅτι τὸ κοινὸν ἡμερομίσθιον εἶναι 40 δραχμαί.

31) Ἔχει τις τρία τεμάχια ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος. Τὸ πρῶτον ἔχει μῆκος 14 πήχεις περισσότερον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ τρίτον 12 πήχεις ὀλιγώτερπν τοῦ δευτέρου. Ἡ ἀξία τοῦ πρώτου εἶναι 624 δραχμαὶ καὶ τοῦ τρίτου 416 δραχμαί. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου.

Λύσις. Τὸ πρῶτον τεμάχιον εἶναι 26 πήχεις περισσότερον τοῦ τρίτου. Ἀφοῦ εἶναι τῆς αὐτῆς ποιότητος, ἕπεται ὅτι, ἡ διαφορὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν 624—416=208 δραχ. ὀφείλεται εἰς τὴν διαφορὰν τῶν μηκῶν αὐτῶν, ἥτις εἶναι 26 πήχεις. Ἄρα ὁ πῆχυς ἑκάστου τιμᾶται 8 δραχμάς. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ μήκη αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς : 78 πήχ. 64 πήχ. καὶ 52 πήχ.

32) Μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα εἶχε τις ἠθέλησε νὰ ἀγοράσῃ 22 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, ἀλλὰ τοῦ ἔλειπαν 26 δραχμαί. Κατόπιν ὅμως ἠγόρασε 17 πήχεις ἐξ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐπερίσσευσαν 14 δραχμαί. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ πήχεως τοῦ ὑφάσματος καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ οὗτος εἶχεν.

Λύσις. Παρατηροῦμεν εἰς τὸ πρόβλημα τὰ ἑξῆς. Ἐὰν οὗτος εἶχεν 14 δρχ. ὀλιγώτερον τῶν ὅσων ἔχει θὰ ἠγόραζε 17 πήχεις καὶ ἐὰν εἶχεν 26 δρχ. περισσότερον τῶν ὅσων ἔχει θὰ ἠγόραζε 22 πήχεις. Ὅθεν ἡ ἀξία τῶν 22 πήχεων εἶναι κατὰ 14+26=40 δρχ. περισσότερου ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῶν 17 πήχεων. Ἡ διαφορὰ αὕτη ὀφείλεται εἰς τοὺς 5 πήχεις, τοὺς ὁποίους ἔχωμεν ἐπὶ πλέον. Ἄρα ὁ πῆχυς τιμᾶται 40 : 5=8 δρχ. καὶ τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον εἶχεν οὗτος εἶναι 8×17+14 =150 δρχ.

33) Εἷς ἠγόρασε 450 πήχεις ὕφασμα. Ἐπώλησε κατόπιν τοὺς 180 πήχεις πρὸς 30 δραχμὰς ἕκαστον, τοὺς ὑπόλοιπους πρὸς 35 δραχμάς, καὶ οὕτω ἐκέρδισε 8 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ἑκάστου πήχεως. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τον πῆχυν.

Λύσις. Ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν 450 πήχεων εἰσέπραξε ποσὸν ἴσον μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέπραττεν ἂν πωλοῦσε τοὺς 450 πήχεις μὲ κέρδος 8 δραχ. ἕκαστον. Ἤτοι εἰσέπραξεν 14.850 δραχμάς. Τὸ κέρδος εἶναι 3600 δραχ ὅθεν ἡ ἀξία τοῦ πήχεως εἶναι 11.250 : 450= 25 δραχ.

34. Ἐὰν τις ἐπώλει ἓν τεμάχιον ὑφάσματος πρὸς 20 δρχ. τὸν πῆχυν θὰ ἐκέρδιζεν 875 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ἐὰν ὅμως ἐπώλει αὐτὸ πρὸς 12 δρχ. τὸν πῆχυν θὰ ἐζημιοῦτο 525 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τοῦ πήχεως.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι μὲ τιμὴν πωλήσεως 12 δρχ. θὰ εἰσέπραττε 525 δραχμὰς ὀλιγώτερον τῶν ὅσων εἶχε δώσει, ἐνῷ μὲ τιμὴν πωλήσεως 20 δρχ. λαμβάνει 875 δραχμὰς περισσότερον τῶν ὅσων εἶχε δώσει. Ἄρα πωλῶν αὐτὸ πρὸς 20 δρχ. τὸν πῆχυν εἰσπράττει 1400 δραχμὰς περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι θὰ εἰσέπραττε μὲ τιμὴν πωλήσεως 12 δραχμῶν. Ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν δύο εἰσπράξεων προῆλθεν ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν τιμῶν τῶν δύο πωλήσεων, ἥτις εἶναι $20-12=8$ δραχ. Ὅθεν οἱ πήχεις ἦσαν $1400:8=175$. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῆς ἀγορᾶς ἑκάστου, ἥτις εἶναι 15 δραχμαί.

35. Ἠγόρασέ τις ἓν τεμάχιον ὕφασμα. Πωλεῖ ἐξ αὐτοῦ κατ᾽ ἀρχὰς 156 πήχεις μὲ κέρδος 25 δραχμὰς τὸν πῆχυν, κατόπιν τὸ ὑπόλοιπον λόγῳ βλάβης μὲ ζημίαν 65 δρχ. τὸν πῆχυν. Ἐκέρδισε δὲ οὕτω ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὅλου ὑφάσματος 1300 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσων πήχεων ἦτο τοῦτο.

ἀπ. 196 πήχεις

36. Εἷς ἔμπορος ἠγόρασεν 125 πήχεις ὕφασμα. Πωλήσας κατόπιν 45 πηχ. πρὸς 10 δρχ. ἕκαστον, 65 πήχεις πρὸς 9 δραχμὰς ἕκαστον καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς ἐκέρδισε 155 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸν πῆχυν.

ἀπ. 8

37. Ἐπλήρωσέ τις διὰ 15 ὀκάδας ἐλαίου καὶ 18 ὀκάδας λίπους 810 δρχ. Πωλεῖ κατόπιν τὸ ἔλαιον ἀντὶ 345 δρχ. καὶ τὸ λῖπος ἀντὶ 630 δρχ. Δοθέντος ὅτι ἡ ὀκᾶ ἀμφοτέρων ἐπωλήθη μὲ τὸ αὐτὸ κέρδος, νὰ εὑρεθῇ πρὸς πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν ἑκάστου εἴδους.

ἀπ. 18 30

38. Εἷς ἠγόρασε καρύδια πρὸς 12 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Κρατήσας ὅμως ἀπ᾽ αὐτὰ 60 ὀκ., ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 15 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ εἰσέπραξεν 420 δραχμὰς περισσότερον, τῶν ὅσων εἶχε δώσει διὰ τὴν ἀγορὰν ὅλων. Πόσας ὀκάδας εἶχεν ἀγοράσει ;

ἀπ. 440

39. Εἰς τὴν αἴθουσαν τῶν τελετῶν ἑνὸς σχολείου, ἐὰν το-

ποθετήσουν τοὺς μαθητὰς αὐτοῦ ἀνὰ 8 εἰς ἕκαστον θρανίον, θὰ μείνουν ὄρθιοι 60, ἂν ὅμως τοποθετήσουν αὐτοὺς ἀνὰ 10, θὰ μείνουν 30 θέσεις κεναί. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταί;

Λύσις. Κατὰ τὴν δευτέραν τοποθέτησιν, προσετέθησαν δύο μαθηταὶ εἰς ἕκαστον θρανίον. οἱ ὁποῖοι φυσικὰ εἶναι οἱ 60 ὄρθιοι καὶ ἀφοῦ ἐπερίσευσαν 30 θέσεις, συνάγομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν νέων θέσεων εἶναι 90. Ὅθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν θρανίων εἶναι 90 : 2=45. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν ὅτι οἱ μαθηταὶ ἦσαν 420.

40. Εἶχέ τις δύο τεμάχια ὕφασμα τοῦ αὐτοῦ μήκους. Οἱ 4 πήχεις τοῦ πρώτου τιμῶνται ὅσον οἱ 5 πήχεις τοῦ δευτέρου. Ἡ δὲ ἀξία 4 πήχεων τοῦ πρώτου καὶ 5 πήχ. τοῦ δευτέρου εἶναι 120 δραχμαὶ καὶ ὁλόκληρον τὸ πρῶτον τεμάχιον τιμᾶται 75 δραχμὰς περισσότερον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος καὶ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἑκάστου τεμαχίου.

Λύσις. Παρατηροῦμεν εἰς τὸ πρόβλημα, ὅτι τὸ ποσὸν τῶν 120 δραχμῶν δύναται νὰ τὸ εἰσπράξῃ ἐκ τῶν 8 πήχ. τοῦ πρώτου ἢ ἐκ τῶν 10 πήχεων τοῦ δευτέρου. Ἄρα ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου τιμᾶται 15 δρχ. καὶ τοῦ δευτέρου 12 δρχ. Τώρα διαιροῦντες τὴν διαφορὰν τῆς ἀξίας τῶν δύο τεμαχίων διὰ τῆς διαφορᾶς τῆς τιμῆς κατὰ πῆχυν ἤτοι 75 : 3 = 25, εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστον ἦτο 25 πήχεις.

41. Δύο ὁμάδες ἐργατῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶχεν 6 ἐργάτας ἐπὶ πλέον τῆς δευτέρας, ἀφοῦ ἐπληρώθησαν μετὰ τὸ πέρας τῆς ἐργασίας, ἔλαβεν ἡ πρώτη ὁμὰς 1200 δραχμὰς περισσότερα τῆς δευτέρας. Νὰ εὑρεθῇ πόσους ἐργάτας εἶχεν ἑκάστη δεδομένου ὅτι ἕκαστος ἐργάτης τῆς πρώτης ὁμάδος ἐλάμβανε ἡμερομίσθιον 120 δραχμὰς καὶ τῆς δευτέρας 80 δραχμάς.

Λύσις. Ἐὰν ἡ πρώτη ὁμὰς δὲν εἶχε 6 ἐργάτας ἐπὶ πλέον, ἡ διαφορὰ τῶν χρημάτων τῶν δύο ὁμάδων θὰ ἦτο 1200 — 6 × 120 = 480 δραχμαὶ καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν θὰ εἶχεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐργατῶν ἤτοι : 480 : 40 = 12 ἐργάτας, Ἄρα ἡ πρώτη ὁμὰς εἶχε 18 καὶ ἡ δευτέρα 12 ἐργάτας.

42. Δύο φίλοι ἠγόρασαν ὁμοῦ 32 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 416 δραχμῶν. Ἐπλήρωσεν δὲ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν 52 δρχ. περισσότερα τοῦ ἄλλου. Πόσους πήχεις ἠγόρασε ἕκαστος;

απ. 14 18

43. Ἤθελέ τις νὰ ἀγοράσῃ ἓν τεμάχιον ὑφάσματος. Ὁ ἔμπορος παρουσίασεν εἰς αὐτὸν δύο τεμάχια, τὸ πρῶτον 35 πήχεων καὶ τὸ δεύτερον 25 πήχεων, ἀλλ' ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως τοῦ

δευτέρου ἦτο κατὰ 4 δραχμὰς περισσότερον τοῦ πρώτου. Ὅταν τώρα ἠγόραζεν τὸ πρῶτον θὰ ἐχρειάζετο ἀκόμη 140 δραχμάς, ἐνῷ ἐὰν ἠγόραζεν τὸ δεύτερον θὰ τοῦ ἐπερίσσευαν 80 δραχμαί. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἑκάστου τεμαχίου καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ εἶχεν ὁ ἀγοραστής.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τιμῶν τῶν δύο τεμαχίων εἶναι 140 + 80 = 220 δραχμαί. Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ πῆχυς τοῦ δευτέρου ἐπωλεῖτο ὅσον ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου, ἡ διαφορὰ τῶν τιμῶν τῶν δύο τεμαχίων θὰ ἦτο 220 + 4 × 25 = 320 δρχ. Ἀφοῦ ὅμως ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι τώρα ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰ δύο ὑφάσματα, ἡ διαφορὰ τῶν 320 δραχμῶν προέρχεται ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν μηκῶν, ἥτις εἶναι 10 πήχεις. Ἄρα μὲ τὴν αὐτὴν τιμήν, ὁ πῆχυς ἑκάστου τιμᾶται 320 : 10 = 32 δραχμάς. Ὅθεν ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου τιμᾶται 32 δρχ. καὶ τοῦ δευτέρου 36 δρχ. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα, ὅτι τὰ χρήματα τοῦ ἀγοραστοῦ ἦσαν 980 δρχ.

44. Εἷς ἠγόρασεν ἓν δοχεῖον λῖπος καὶ ἕτερον δοχεῖον βουτύρου, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιεῖχεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὀκάδων. Ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὸ λῖπος 624 δραχμὰς καὶ διὰ τὸ βούτυρον 1176 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν τῶν ὀκάδων ἑκάστου δοχείου καὶ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ βουτύρου τιμᾶται 23 δραχμὰς περισσότερον τῆς ὀκᾶς τοῦ ἐλαίου.

ἀπ. 24 ὀκ. 26 49

45. Ἠθέλησέ τις νὰ πωλήσῃ ὡρολόγιον διὰ λαχνῶν. Ἂν ἐπώλει τοὺς λαχνοὺς πρὸς 5 δραχμὰς ἕκαστον, θὰ ἐκέρδιζε 60 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ὡρολογίου, ἂν ὅμως ἐπώλει αὐτοὺς πρὸς 4 δραχμάς, θὰ εἶχεν ζημίαν 20 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ ὡρολογίου καὶ τὸ πλῆθος τῶν λαχνῶν.

ἀπ. 340 80

46. Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 25 ἡμέρας, ὁ δὲ δεύτερος 37 ἡμέρας, ἀλλὰ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ πρώτου ἦτο κατὰ 20 δραχ. ὀλιγώτερον τοῦ δευτέρου. Ὅταν ἐπληρώθησαν, ὁ δεύτερος ἔλαβεν 1220 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ πρώτου. Πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου;

Λύσις. Ὅταν ὁ δεύτερος δὲν ἐλάμβανε 20 δραχ. ἐπὶ πλέον ἡμερομίσθιον ἀπὸ τὸν πρῶτον, θὰ ἔπερνε συνολικῶς 1220 — 20 × 37 = 480 δραχ. περισσότερον ἀπὸ αὐτόν. Ἀφοῦ τώρα τὰ ἡμερομίσθια εἶναι τὰ αὐτά, αἱ 480 δραχ. προέρχονται ἀπὸ 12 ἡμέρας ποὺ εἰργάσθη ἐπὶ πλέον καὶ τὸ κοινὸν ἡμερομίσθιον αὐτῶν θὰ ἦτο 480 : 12 = 40 δραχ. Ὅθεν τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ πρώτου εἶναι 40 δραχ. καὶ τοῦ δευτέρου 60 δραχ.

47. Τρεῖς ἄνθρωποι ἔχουν ὁμοῦ 231 δραχμάς. Ὁ πρῶτος ἔχει περισσότερον τοῦ δευτέρου 22 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος περισσότερα τοῦ τρίτου 7 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἔχει ἕκαστος.

Λύσις. Ἐὰν ὁ πρῶτος εἶχεν 29 δραχ. ὀλιγώτερον ἀπό ὅσα ἔχει καὶ ὁ δεύτερος 7 δρχ. ὀλιγώτερα τῶν ὅσων ἔχει, τότε θὰ εἶχαν ὅλοι τὸ αὐτὸ ποσὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν χρημάτων αὐτῶν θὰ ἦτο 231—36=195 δραχμαὶ καὶ συνεπῶς ἕκαστος θὰ εἶχεν 65 δραχ. Ὅθεν ὁ πρῶτος εἶχεν 94, ὁ β' 72 καὶ ὁ γ' 65.

48) Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τῶν 118.000 δραχ. εἰς τρία ἄτομα ὡς ἑξῆς : ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 8.000 δραχ. περισσότερον τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος 12.000 δραχ. ὀλιγώτερον τοῦ δευτέρου.

Λύσις. Διὰ νὰ λάβουν οἱ δύο ἄλλοι ὅσα ὁ δεύτερος πρέπει τὸ ποσὸν τοῦ α' νὰ αὐξηθῇ κατὰ 8000 δρχ. καὶ τοῦ τρίτου κατὰ 12000 δραχμὰς καὶ συνεπῶς τὸ ποσὸν τῆς διανομῆς θὰ ἦτο 118.000+20.000=138.000 δραχμαὶ καὶ ἀφοῦ ἔλαβον ἴσα, ἕκαστος ἔλαβεν 138.000 : 3=46.000 δρχ. Ὅθεν ἐκ τοῦ ποσοῦ τῶν 118.000 δρχ. θὰ ἐλάμβανε ὁ α' 46.000−8.000=38.000 δρχ., ὁ γ' 46.000—12.000=34.000 δρχ. καὶ ὁ β' 46.000 δρχ.

49) Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τῶν 285.000 δραχμῶν εἰς τέσσαρα ἄτομα ὡς ἑξῆς : ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ 10.000 δρχ. περισσότερον τοῦ α', ὁ γ' 20.000 περισσότερον τοῦ δευτέρου καὶ ὁ δ' 15.000 δρχ. περισσότερον τοῦ γ'. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

ἀπ. ὁ α' 50.000, ὁ β' 60.000, ὁ γ' 80.000, ὁ δ' 95.000

50) Δύο ἄνθρωποι ἔχουν ὁμοῦ 360.000 δρχ. Ὅταν ὁ πρῶτος δώσῃ ἀπὸ τὰ χρήματά του 60.000 δραχμὰς εἰς τὸν δεύτερον θὰ ἔχουν ἴσα. Τί ποσὸν χρημάτων ἔχει ἕκαστος;

Λύσις. Ἐὰν ὁ δεύτερος εἶχεν 60.000 δρχ. περισσότερον τῶν ὅσων ἔχει, θὰ ἐχρειάζετο ἀκόμη 60.000 δρχ. διὰ νὰ φθάσῃ τὸ ποσὸν τοῦ πρώτου, ἤτοι χρειάζεται ἐν ὅλῳ 120.000 δραχμάς, διὰ νὰ ἔχῃ ὅσα ὁ πρῶτος. Ὅθεν ἂν ὁ δεύτερος εἶχεν ὅσα ὁ πρῶτος τὸ ἄθροισμα τῶν χρημάτων των θὰ ἦτο 360.000+120.000=480.000 δραχμαὶ καὶ θὰ εἶχεν ἕκαστος 240.000 δραχμάς. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ὁ πρῶτος ἔχει 240.000 δρχ. καὶ ὁ β' 120.000.

51) Δύο τεμάχια ὑφάσματος διαφορετικῶν μηκῶν, εἶναι ἐν συνόλῳ 208 πήχεις. Ὅταν ὅμως ἀποκόψωμεν ἀπὸ ἕκαστον 8 πήχεις, τὰ ἐναπομείναντα τεμάχια θὰ ἔχουν μήκη τὸ ἓν διπλάσιον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀρχικὰ μήκη αὐτῶν.

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν μηκῶν εἶναι 208 πήχεις, ἂν ἀποκόψωμεν ἀπὸ ἕκαστον 8 πήχεις, τὰ ἐναπομείναντα τεμάχια θὰ ἔχουν ἄθροισμα μηκῶν 192 πήχεων. Ἀφοῦ ὅμως τὸ ἓν ἔχει μῆκος διπλάσιον τοῦ ἄλλου, οἱ 192 πήχεις πρέπει νὰ εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ μικροτέρου. Ὅθεν τὸ μικρότερον τῶν ἐναπομεινάντων εἶναι 192 : 3=64 πήχεων καὶ τὸ μεγαλύτερον 128 πήχεων. Ἂν προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τοὺς ἀποκοπέντας 8 πήχεις θὰ ἔχωμεν τὰ ἀρχικὰ αὐτῶν μήκη, τὰ ὁποῖα εἶναι 72 πηχ. καὶ 136 πηχ.

52) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 400 τὸ δὲ πηλῖκον αὐτῶν 15. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί. *ἀπ. 375 25*

53) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 380 μέτρα καὶ ἡ μία τῶν διαστάσεων αὐτοῦ εἶναι τετραπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ. *ἀπ. 38 μ. 152 μ.*

54) Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τῶν 480.000 δραχμῶν εἰς τρία πρόσωπα ὡς ἑξῆς : ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ διπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ ὁ δεύτερος 20.000 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ τρίτου.

Λύσις. Ἂν τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου αὐξηθῇ κατὰ 20.000 δραχμὰς θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι 500.000 δραχμαί. Ὅθεν δύο φορὰς τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ ἤτοι τὸ τετραπλάσιον τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου εἶναι 500.000 δααχμαί. Ἄρα ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ 125.000 δραχμάς, ὁ πρῶτος 250.000 καὶ ὁ τρίτος 105.000 δραχμάς.

55) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 195. Τὸ τριπλάσιον τοῦ μικροτέρου ὑπερβαίνει τὸν μεγαλύτερον κατὰ 165. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν εἰς τὸν μικρότερον προσθέσωμεν 195 μονάδας θὰ εὕρωμεν τὸν μεγαλύτερον, εἰς τὸν ὁποῖον ἂν προσθέσωμεν ἄλλας 165 μονάδας θὰ ἔχωμεν ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ μικροτέρου. Ὅθεν ἂν εἰς τὸν μικρότερον ἀριθμὸν προσθέσωμεν 360 μονάδας εὑρίσκομεν τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ 360 μονάδες εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου. Ἑπομένως ὁ μικρότερος εἶναι 360 : 2=180 καὶ ὁ μεγαλύτερος 375.

56) Τὸ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶναι 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 65. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί, ἂν ἔχουν διαφορὰν 740. *ἀπ. 965 225*

57) Δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι. Ὅταν ὅμως ἀπὸ τὸν ἕνα ἀφαιρέσωμεν 20 μονάδας καὶ ἀπὸ τὸν ἄλλον 70, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ὁ εἷς τριπλάσιος τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν 20 μονάδων ἀπὸ τὸν ἕνα καὶ 70 ἀπὸ τὸν ἄλλον οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ ἔχουν α) διαφορὰν 50 καί β) ὁ εἷς εἶναι τριπλάσιος τοῦ ἄλλου, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 50 εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου. Ὅθεν ὁ μικρότερος εἶναι 25 καὶ ὁ μεγαλύτερος 75. Ἂν τώρα προσθέσωμεν τὰς 70 μονάδας εἰς τὸν πρῶτον, τὰς ὁποίας εἴχαμεν ἀφαιρέσει καὶ τὰς 20 εἰς τὸν δεύτερον εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ ζητούμενοι ἴσοι ἀριθμοὶ ἦσαν 95 ἕκαστος.

58) Δύο φίλοι ἔχουν ὁ εἷς 36.800 δραχμὰς καὶ ὁ ἄλλος 25.600. Ἐξόδευσαν ἕκαστος τὸ αὐτὸ ποσὸν καὶ εἶδον ὅτι ὁ εἷς εἶχεν τριπλάσια τοῦ ἄλλου. Πόσα ἐξώδευσεν ἕκαστος;

ἀπ. 20.000

59) Εἷς ἐπλήρωσε διὰ 3 ὀκάδας ἐλαίου καὶ 5 ὀκάδας βουτύρου 382 δραχμάς. Ἐὰν ὅμως ἠγόραζεν 6 ὀκάδας ἐλαίου καὶ 8 ὀκάδας βουτύρου θὰ ἐπλήρωνε 624 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους.

Λύσις. 3 ὀκ. ἐλαίου + 5 ὀκ. βουτύρου = 382 δρχ.
6 ὀκ. ἐλαίου + 8 ὀκ. βουτύρου = 634 »

6 ὀκ. ἐλαίου + 10 ὀκ. βουτύρου = 764 »
6 ὀκ. ἐλαίου + 8 ὀκ. βουτύρου = 634 »

2 ὀκ. βουτύρου = 130 δρχ.

Ἀφοῦ αἱ 2 ὀκ. βουτύρου τιμῶνται 130 δρχ. ἡ ὀκᾶ αὐτοῦ τιμᾶται 65 δρχ. Εὑρίσκομεν τώρα εὐκόλως ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 19 δραχμάς.

60) Εἰς ἓν πλοῖον 27 ἐπιβάται τῆς πρώτης θέσεως καὶ 56 τῆς δευτέρας ἐπλήρωσαν δι' εἰσιτήρια ἐν ὅλῳ 2200 δραχμάς. Ἐὰν ὅμως ἦσαν 56 εἰς τὴν πρώτην θέσιν καὶ 27 εἰς τὴν δευτέραν θὰ ἐπλήρωναν 2780 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ εἰσιτηρίου ἑκάστης θέσεως. *ἀπ. 40 20*

61) Δύο ἐργάται, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἰργάσθη 12 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος 15 ἡμέρας, ἀλλὰ μὲ ἡμερομίσθιον 20 δραχμὰς ἐπὶ πλέον τοῦ πρώτου, ἔλαβον ὁμοῦ 1650 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου. *ἀπ. 50 70*

62) Ἠγόρασε τις 30 πήχεις λινοῦ ὑφάσματος καὶ 6 πήχεις μαλλίνου ἀντὶ 690 δρχ. Κατόπιν πωλήσας αὐτὰ ἐκέρδισε εἰς τὸν πῆχυν τοῦ μαλλίνου ὑφάσματος ποσὸν τριπλάσιον ἀπὸ τὸ κέρδος εἰς τὸν πῆχυν τοῦ λινοῦ, εἰσέπραξεν δὲ ἀπὸ τὸ λινὸν 360 δραχμὰς καὶ ἀπὸ τὸ μάλλινον 522 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τοῦ πήχεως ἑκάστου.

Λύσις. Τὸ ὁλικὸν κέρδος ἦτο 360+522—690=192 δρχ. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὸ κέρδος εἰς 1 πῆχυν τοῦ μαλλίνου ὑφάσματος ἰσοῦται μὲ τὸ κέρδος τῶν 3 πήχεων τοῦ λινοῦ. Ἑπομένως τὸ κέρδος εἰς τοὺς 6 πήχεις τοῦ μαλλίνου ὑφάσματος ἰσοῦται μὲ τὸ κέρδος τῶν 18 πήχεων τοῦ λινοῦ. Ἄρα τὸ κέρδος τῶν 192 δραχμῶν θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς 48 πήχεις τοῦ λινοῦ ὑφάσματος καὶ συνεπῶς εἰς ἕκαστον πῆχυν τοῦ λινοῦ κερδίζει 192 : 48=4 δραχμάς. Ἀφοῦ ἀπὸ τὸ λινὸν εἰσέπραξε 360 δραχμάς, ὁ πῆχυς αὐτοῦ ἐπωλήθη 360 : 30=12 δρχ. καὶ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ ἦτο 12—4=8 δραχμαί. Ὁ πῆχυς τοῦ μαλλίνου ἐπωλήθη πρὸς 522 : 6=87 καὶ ἠγοράσθη ἀντὶ 87—3×4=75 δρχ.

63) Ἠγόρασέ τις τρία τεμάχια ὑφάσματος. Τὸ πρῶτον 16 πήχεων, τὸ δεύτερον 12 πήχεων καὶ τὸ τρίτον 8 πήχεων. Ἐπλήρωσεν δὲ ἐν ὅλῳ 1248 δραχμάς. Ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως τοῦ δευτέρου ὑφάσματος ἦτο τετραπλασία τῆς τοῦ πρώτου, τοῦ δὲ τρίτου ὅσον τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὁμοῦ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἑκάστου; *ἀπ. 12 48 60*

64) Εἷς ἐπλήρωσε 1746 δραχμὰς διὰ τὴν ἀγορὰν δύο τεμαχίων ὑφάσματος συνολικοῦ μήκους 30 πήχεων. Ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου ἐτιμᾶτο 55 δραχ. καὶ τοῦ δευτέρου 63 δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο ἕκαστον; *ἀπ. 18 12*

65) Εἷς ἠγόρασεν 360 ὀκάδας οἴνου δύο ποιοτήτων. Ἐπλήρωσε διὰ τὴν μίαν ποιότητα 4 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ διὰ τὴν ἄλλην 6. Ἐσκόπευε ὅμως νὰ πωλήσῃ ὅλον τὸν οἶνον μὲ ἑνιαίαν τιμὴν 5 δραχμὰς κατ᾽ ὀκᾶν, ἀλλὰ παρετήρησεν ὅτι ἐζημιοῦτο 110 δρχ. ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ἐξ ἑκάστης ποιότητος εἶχεν ἀγοράσει.

ἀπ. 125 235

66. Εἷς ἠγόρασε δύο τεμάχια ὑφάσματος. Τὸ πρῶτον πρὸς 76 δραχ. τὸν πῆχυν καὶ τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον ἦτο κατὰ 1 πῆχυν μικρότερον τοῦ πρώτου πρὸς 95 δρχ. τὸν πῆχυν, ἐπλήρωσεν δὲ δι᾽ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων. Νὰ εὑρεθῇ πόσων πήχεων ἦτο ἕκαστον τεμάχιον.

Ἀπ. 5 πηχ. 4 πηχ.

67. Δύο τεμάχια ὑφάσματος, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἦτο 4 πήχεις καὶ τὸ δεύτερον 5 πήχεις τιμῶνται 156 δραχμάς. Οἱ 8 πήχεις τοῦ πρώτου τιμῶνται ὅσων οἱ 3 πήχεις τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ πήχεως ἑκάστου ὑφάσματος.

ἀπ. 9 24

68. Ἠγόρασέ τις δύο τεμάχια ὑφάσματος τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ ἐπλήρωσε διὰ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν 90 δραχμὰς περισσότερον τοῦ ἄλλου. Οἱ 3 πήχεις ὅμως τοῦ ἑνὸς τιμῶνται ὅσον οἱ 2 πήχεις τοῦ ἄλλου καὶ ἡ ἀξία τῶν 5 αὐτῶν πήχεων εἶναι 72 δραχμαί. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν μῆκος τῶν δύο τεμαχίων.

ἀπ. 15 πήχεις

69. Ἐὰν εἶχε τις 90 δραχμὰς περισσότερα τῶν ὅσων ἔχει, θὰ ἠγόραζεν ἓν ὡρολόγιον ἀξίας 450 δρχ. καὶ θὰ τοῦ ἔμειναν καὶ 20 δραχμαί. Πόσα χρήματα ἔχει ;

ἀπ. 380

70. Εἷς ἠγόρασε ἔλαιον ἀντὶ 52358 δραχμῶν. Πωλήσας κατόπιν αὐτὸ ἀντὶ ὡρισμένου ποσοῦ, παρετήρησεν ὅτι ἂν πωλεῖ αὐτὸ κατὰ 560 δραχμὰς ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅτι τὸ ἐπώλησε, θὰ ἐκέρδιζεν 4315 δρχ. ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπωλήθη τὸ ἔλαιον ;

ἀπ. 57233

71. Εἷς ἐπλήρωσε 12250 δραχμάς, διὰ 7 κιβώτια, τὰ ὁποῖα περιέχουν τὸ αὐτὸ ποσὸν ποτηρίων. Πωλήσας κατόπιν 175 ποτήρια ἀντὶ 525 δραχμῶν, παρετήρησε ὅτι ἐκέρδισε 1 δραχμὴν εἰς ἕκαστον. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ποτήρια περιέχει ἕκαστον κιβώτιον.

ἀπ. 875

72. τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 42250, ἡ διαφορὰ δὲ αὐτῶν εἶναι τριπλασία τοῦ μικροτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

ἀπ. 33.800 8450

73. Εἷς ἑστιάτωρ ἐπλήρωσε διὰ 12 ὀκ. κρέας καὶ 7 ὀκ. μακαρόνια 437 δρχ. Ἂν ἠγόραζε 11 ὀκ. κρέας καὶ 6 ὀκ. μακαρόνια θὰ ἐπλήρωνε 396 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους.

ἀπ. 30 11

74. Καταστηματάρχης προσέλαβεν ὑπάλληλον δίδων εἰς αὐτὸν 4320 δραχμὰς ἐτησίως καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Μετὰ 5 μῆνας ὁ ὑπάλληλος ἐγκατέλειψε τὴν ἐργασίαν καὶ ἔλαβεν ὡς ἀμοιβὴν τὴν ἐνδυμασίαν καὶ 1380 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας.

Λύσις. Διὰ τοὺς ὑπολοίπους 7 μῆνας ἔπρεπε νὰ λάβῃ 4320—1380 = 2940 δραχμὰς ἤτοι ὁ μηνιαῖος αὐτοῦ μισθὸς ἦτο 2940 : 7 =

420 δρχ. εἰς 5 μῆνας ἔπρεπε νὰ λάβῃ $420 \times 5 = 2100$ ἀφοῦ ὅμως ἔλαβε 1380 ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας ἦτο $2100 - 1380 = 720$ δραχμαί.

75. Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τῶν 151.200 δραχμῶν εἰς τέσσαρα πρόσωπα ὡς ἑξῆς: Ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ διπλάσια τοῦ δευτέρου μεῖον 3800 δραχμαί, ὁ δεύτερος ὅσον ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ὁμοῦ καὶ ὁ τέταρτος 21.250. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἂν ὁ πρῶτος λάβῃ 3800 δραχμὰς περισσοτέρας τῶν ὅσων ἔλαβε, θὰ ἔχει διπλάσια τοῦ δευτέρου. Ἐπειδὴ ὁ δεύτερος ἔλαβεν ὅσας ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ὁμοῦ, τὸ σύνολον τῶν χρημάτων θὰ εἶναι $151.200 + 3800 = 155.000$ δρχ. καὶ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ δευτέρου. Ὅθεν ὁ δεύτερος ἔλαβεν $155.000 : 4 = 38.750$ δραχμάς. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν τὰ μερίδια τῶν ἄλλων.

76. Μία χωρικὴ ἔδωσεν 12 ὀκάδας βουτύρου καὶ 28 δραχμὰς διὰ νὰ ἀγοράσῃ 20 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Ἂν ὅμως ἔδιδεν 15 ὀκάδας βουτύρου εἰς τὸν ἔμπορον θὰ ἐλάμβανε ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος 24 πήχεις χωρὶς νὰ δώσῃ τίποτε ἐπὶ πλέον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ βουτύρου καὶ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως.

Λύσις. Ἀφοῦ μὲ 12 ὀκ. βουτύρου καὶ 28 δραχμὰς ἀγοράζει 20 πήχεις ὕφασμα, μὲ 60 ὀκ. βουτύρου καὶ 140 δραχμὰς ἀγοράζει 100 πήχεις ὕφασμα. Ἐπειδὴ ὅμως μὲ 60 ὀκ. βουτύρου ἀγοράζει 96 πήχεις ὕφασμα ἕπεται ὅτι 140 δραχμαὶ εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 4 πήχεων. Ὅθεν ὁ πῆχυς τιμᾶται $140 : 4 = 35$ δραχμάς. Εὑρίσκομεν τώρα εὐκόλως, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ βουτύρου εἶναι 56 δραχμαί.

77. Ἐπλήρωσέ τις διὰ δύο τεμάχια ὑφάσματος 1160 δραχμάς. Τὸ ἓν ἦτο 15 πήχεων καὶ τὸ ἄλλο 20 πήχεων. Οἱ 5 πήχεις ὅμως τοῦ ἑνὸς τιμῶνται ὅσον οἱ τρεῖς πήχεις τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἑκάστου ὑφάσματος.

ἀπ. 24 40

78) Ἐπλήρωσέ τις διὰ 18 ὀκάδας ἐλαίου καὶ 13 ὀκάδας βουτύρου 1260 δραχμάς Ἡ τιμὴ ὅμως τῆς ὀκᾶς τοῦ βουτύρου ἦτο τετραπλασία τῆς ὀκᾶς τοῦ ἐλαίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους. *ἀπ. 18 72*

79) Ἐὰν πωλήσῃ τις ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος πρὸς 50 δραχ. τὸν πῆχυν κερδίζει 1656 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ὅταν ὅμως πωλήσῃ αὐτὸ πρὸς 36 δρχ. τὸν πῆχυν ζημιοῦται 920 δραχμάς. Πόσον πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τοῦ πήχεως;

ἀπ. 184 πήχ 41 δρχ.

80) Εἷς προσέλαβεν ἐργάτην μὲ τὴν ἑξῆς συμφωνίαν: Νὰ δίδῃ εἰς αὐτὸν ἡμερομίσθιον 50 δραχμάς, ἀλλὰ ἄνευ τροφῆς καὶ τὰς ἡμέρας ὅπου θὰ προσφέρῃ εἰς αὐτὸν τροφὴν τὸ ἡμερομίσθιον θὰ εἶναι 30 δραχμαί. Ἐὰν τὸ ἔργον ἐπερατώθη εἰς 25 ἡμέρας καὶ ὁ ἐργάτης ἔλαβεν 850 δραχμάς, ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἔλαβεν τροφήν ;

Λύσις. Ἂν ὅλας τὰς ἡμέρας ἐλάμβανε τροφὴν ἔπρεπε νὰ λάβῃ διὰ τὰ ἡμερομίσθια αὐτοῦ $30 \times 25 = 750$ δραχμάς, ἤτοι 100 δραχμὰς ὀλιγώτερον. Ἡ διαφορὰ αὕτη προῆλθεν ἀπὸ τὰς 20 δραχμάς, τὰς ὁποίας χάνει ἀπὸ τὰς ἡμέρας ποὺ δὲν ἔλαβε τροφήν. Ὅθεν αἱ ἡμέραι κατὰ τὰς ὁποίας δὲν ἔλαβε τροφὴν εἶναι $100 : 20 = 5$ καὶ αἱ ἡμέραι ποὺ ἔλαβεν τροφὴν ἦσαν $25 - 5 = 20$.

2ον. Ἐπὶ τῆς Διαιρετότητος.

1) Μὲ ποίους ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 18, 20, 22, καὶ 25 εἶναι διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ 3510 καὶ 53625. Καὶ διατί ;

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν α) 228 καὶ 144 β) 1740 καὶ 1095. *ἀπ. α' 12 β' 15*

3) Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 12, τὰ δὲ πηλῖκα τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ εἶναι κατὰ σειρὰν 3, 2, 4. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί. *ἀπ. 372 108*

4) Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 14, τὰ δὲ πηλῖκα τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ εἶναι κατὰ σειρὰν 3, 8, 2, 4. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί. *ἀπ. 3318 1064*

5) Ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ὅστις, διαιρῶν τὸν 2566 ἀφίνει ὑπόλοιπον 46, διαιρῶν δὲ τὸν 4694 ἀφίνει ὑπόλοιπον 74 ; *ἀπ. 420*

6) Νὰ εὑρεθῇ, ἂν οἱ ἀριθμοὶ 113 καὶ 661 εἶναι πρῶτοι.

Λύσις. Ὁ ἀριθμὸς 113 δι' οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 καὶ 11 εἶναι διαιρετός. Δὲν δοκιμάζομεν πέραν τοῦ 11, διότι ὁ 113 διαιρούμενος διὰ 11 δίδει πηλῖκον μικρότερον αὐτοῦ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς 661 εἶναι πρῶτος.

7) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων οἱ οἱ ἀριθμοί. 132, 180, 280, 360, 375, 420, 720, 468, 760, 975, 840, 1890, 2520, 2970, 3312, 4488, 6930, 16335, 172172.

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 110.

Λύσις. 110=2×5×11. Τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν ηὐξημένων κατὰ μονάδα εἶναι 2×2×2=8. Ὅθεν τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ 110 εἶναι 8.

9) Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν: α) 8624 καὶ 672 β) 1890 καὶ 3528 γ) 183456 καὶ 458640 δ) 90 καὶ 945 ε) 1166 καὶ 2464 στ) 53625 καὶ 82875 ζ) 900 καὶ 375 η) 12285 καὶ 4375 θ) 54864 καὶ 20328.

ἀπ. 112, 126, 91728, 45, 22, 4875, 75, 35, 168.

10. Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν:

α)	360	420	1200	δ)	96	110	210
β)	72	216	128	ε)	432	624	760
γ)	180	840	324	στ)	10500	15400	910

ἀπ. 60. 8, 12, 2, 8, 70

11) Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν:

α)	60	70	72	ε)	70	130	190		
β)	765	315	450	στ)	506	769	1771		
γ)	60	1036	3108	ζ)	135	648			
δ)	60	81		η)	12	18	24	36	48

ἀπ. 2520 53550 15540 1620 17290 10626 3240 144

12) Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 36 καὶ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν 312. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν. *ἀπ. 36×312*

13) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 5040, ὁ δὲ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν 12. Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν. *ἀπ. 420*

14) Ἔχει τις 3168 (200) γαρύφαλλα, 6048 (280) κρῖνα καὶ 4896 (400) βιολέτες. Πόσας τὸ πολὺ ὁμοιομόρφους ἀνθοδέσμας δύναται νὰ κάμῃ μὲ αὐτά;

ἀπ. 288 (40)

15) Μία χωρικὴ ἐπώλησεν τυρὸν μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν κατ' ὀκᾶν, ἡ ὁποία ἦτο ἄνω τῶν 20 δραχμῶν. Ἐὰν οὗτος ἐπωλήθη εἰς δύο δόσεις καὶ εἰσέπραξεν τὴν μίαν φορὰν 312 δραχ. καὶ τὴν ἄλλην 504 δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ πόσον τυρὸν εἶχεν καὶ πρὸς ποίαν τιμὴν ἐπωλήθη;

Λύσις. Ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 312 καὶ 504, καὶ κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν μεγαλύτερος τοῦ 20 εἶναι μόνον ὁ 24. Ἄρα πρὸς 24 δρχ. τὴν ὀκᾶν ἐπωλήθη. Ὅθεν ὁ τυρὸς ἦτο ἐν ὅλῳ 34 ὀκ.

16) Μία αὐλὴ σχήματος ὀρθογωνίου, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 10,58 μ. καὶ τὸ πλάτος 8,05 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικὰς πλάκας ἴσας καὶ ὅσον τὸ δυνατὸν μεγάλας. Πόσας τοιαύτας πλάκας θὰ χρειασθῶμεν ;

Λύσις. Τὸ μῆκος τῆς αὐλῆς εἶναι 1058 ἑκ. καὶ τὸ πλάτος 805 ἑκ. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑκάστης πλακὸς θὰ εἰσχωρῇ ἀκριβῶς εἰς τὸ μῆκος καὶ εἰς τὸ πλάτος τῆς αὐλῆς καὶ ἐπειδὴ ἡ πλὰξ ὀφείλει νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μεγάλη, ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ αὐτῆς θὰ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 1058 καὶ 805 ἤτοι ἡ πλευρὰ θὰ ἔχει μῆκος 23 ἑκ. Ὅθεν κατὰ μῆκος θὰ χρειασθῶμεν 46 πλάκας καὶ κατὰ πλάτος 35 ἤτοι ἐν συνόλῳ 1610 πλάκας.

17) Ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν ἑνὸς σχολείου περιέχεται μεταξὺ τοῦ 300 καὶ 400. Πόσοι εἶναι οὗτοι, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δύναται νὰ παραταχθοῦν εἰς γραμμὴν ἀνὰ 4 ἢ 5 ἢ 9 χωρὶς νὰ περισσεύῃ κανείς. *ἀπ. 360*

18) Ἔχει τις δύο βιβλία : τὸ ἓν ἔχει 176 σελίδας, τὸ ἄλλο 272 σελίδας καὶ ἀποτελοῦνται ταῦτα ἀπὸ φυλλάδια, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν σελίδων ἄνω τῶν 10. Νὰ εὑρεθῇ πόσα φυλλάδια ἔχει ἕκαστον.

Λύσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν σελίδων ἑκάστου φυλλαδίου εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 176 καὶ 272, θὰ εὕρωμεν ὅθεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν τούτων, ὁ ὁποῖος εἶναι 16. Οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν εἶναι 2, 4, 8, 16 καὶ συνεπῶς καὶ ὁ ἄνω τῶν 10 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 16. Ὅθεν 16 σελίδες ἔχει ἕκαστον φυλλάδιον καὶ τὰ βιβλία ἔχουν 11 φυλλάδια τὸ ἓν καὶ 17 τὸ ἄλλο.

19) Ἔχει τις 3 ὀκάδες κονιὰκ τῶν 18 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν καὶ 6 ὀκ. ἄλλου τῶν 15 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Θέλει δὲ νὰ θέσῃ αὐτὰ εἰς φιάλας τῆς αὐτῆς ἀξίας, ἀλλὰ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσοτέρας. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν διαφόρων φιαλῶν, β) ἡ χωρητικότης ἑκάστης ἐξ αὐτῶν καὶ γ) πόσας φιάλας θὰ χρειασθῇ.

Λύσις. Ἡ ἀξία τῶν 3 ὀκάδων εἶναι $18 \times 3 = 54$ δραχμαὶ καὶ τῶν 6 ὀκ. $15 \times 6 = 90$ δραχ. Ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν φιαλῶν εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 54 καὶ 90 ἤτοι 9 δραχμαί. Θὰ χρειασθῇ $6 + 10 = 16$ φιάλας καὶ ἡ χωρητικότης αὐτῶν θὰ εἶναι 200 δράμια καὶ 240 δράμια.

20) Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως εἶναι ὀλιγώτεροι ἀπὸ 100. Δύνανται δὲ οὗτοι νὰ παραταχθοῦν εἰς γραμμὴν ἀνὰ 3 ἢ 4 ἢ 5 χωρὶς νὰ περισσεύῃ μαθητής. Πόσοι ἦσαν οὗτοι ; *ἀπ. 60*

21) Ἀνεχώρησαν σήμερον ἐκ Πειραιῶς τρία ἀτμόπλοια. Τὸ πρῶτον ἐπανέρχεται ἀνὰ 6 ἡμέρας, τὸ δεύτερον ἀνὰ 12 ἡμέρας καὶ τὸ τρίτον ἀνὰ 18 ἡμέρας. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸν λιμένα τοῦ Πειραιῶς. *ἀπ. 36*

22) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 1828 καὶ 2456 ἀφίνει ὑπόλοιπον 19 καὶ 26 ἀντιστοίχως. *ἀπ. 27*

23) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ μεταξὺ τοῦ 500 καὶ 1000 ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8, 15 καὶ 20.

ἀπ. 600, 720, 840, 920

24) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι 1056. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. $1056 = 2^5 \times 3 \times 11 = 2^5 \times (3 \times 11) = 32 \times 33$. Ὅθεν οἱ ἀριθμοὶ 32 καὶ 33.

25) Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ 6, εἶναι 432. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. $432 = 2^4 \times 3^3 = (2^3 \times 3) \times (2 \times 3^2) = 24 \times 18$. Ὅθεν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 24 καὶ 18.

26) Κὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ 400 καὶ 500, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 12 ἢ 15 νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 0 καὶ διὰ 9 ὑπόλοιπον 6. *ἀπ. 420*

3ον.—Ἐπὶ τῶν κλασμάτων.

1) Ἐξηγήσατε τῇ βοηθείᾳ παραδειγμάτων, ὅτι ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἐκλέγομεν.

Λύσις. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ δὲν εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἐὰν ἡ μονὰς τὴν ὁποίαν ἐκλέγομεν δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ λ.χ. τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς μήκους (16 μέτρων) δὲν εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς μήκους (12 μέτρων) διότι ἡ μονὰς τὴν ὁποίαν ἐκλέγομεν εἶναι διάφορος. Ἐπίσης τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{2}{3}$, ἐνῷ φαίνονται ἄνισα, δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἴσα λ.χ. τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς μήκους (60 μέτρων) καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς μήκους (54 μ.)

Πρέπει ὅθεν εἰς κάθε κλάσμα νὰ δηλοῦμεν τὸ μέγεθος, τὸ ὁποῖον τοῦτο παριστᾷ.

2) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{60}{168}$

Λύσις. α) $\frac{60}{168} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times2\times2\times3\times7} = \frac{5}{14}$ β) Μ.Κ.Δ. τοῦ 168 καὶ 60 εἶναι ὁ 12. Ὅθεν $\frac{60}{168} = \frac{60:12}{168:12} = \frac{5}{14}$

3) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν διὰ τοῦ συντομωτέρου τρόπου τὰ κλάσματα.

$\frac{1080}{1350}$ $\frac{663}{1105}$ $\frac{1470}{2205}$ $\frac{5673}{13237}$ $\frac{6408}{84060}$ $\frac{9764}{36615}$ $\frac{56272}{263775}$

Ἀπ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{16}{75}$

4) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\frac{95}{144}$ καὶ ἔχον παρανομαστὴν 105.

Λύσις. Καθιστῶμεν τὸ δοθὲν κλάσμα ἀνάγωγον, ἤτοι $\frac{96}{144} = \frac{2}{3}$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τό ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{70}{105}$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν εἶναι πάντοτε δυνατόν, π.χ. ἐὰν ἐδῶ ὁ δοθεὶς παρονομαστὴς 105 δὲν ἦτο διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ 3 δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα.

5) Νὰ εὑρεθῇ ἀνάγωγον κλάσμα, τὸ ὁποῖον δὲν ἀλλάσσει τιμήν, ὅταν εἰς τὸν ἀριθμητήν του προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12 καὶ εἰς τὸν παρονομαστήν του τὸν 16.

Λύσις. Οἱ ἀριθμοὶ 12 καὶ 16 πρέπει νὰ εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ ζητουμένου ἀναγώγου κλάσματος. Οἱ ἀριθμοὶ ὅμως 12 καὶ 16 εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 4, ὅθεν τὸ ζητούμενον ἀνάγωγον κλάσμα εἶναι $\frac{3}{4}$.

6) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{4}{5}$ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων νὰ εἶναι 108 ***ἀπ.*** $\frac{48}{90}$

7) Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{12}{21}\ \frac{7}{14}\ \frac{11}{42}\ \frac{8}{27}$ διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ παρονομαστοῦ.

ἀπ. Ε. Κ. Παρονομαστὴς 378

8) Ὁμοίως τὰ κλάσματα $\frac{18}{64}\quad\frac{25}{120}\quad\frac{48}{216}$

ἀπ. Ε. Κ. Παρονομαστὴς 288

9) Νὰ τραποῦν τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{5}{8}$ εἰς ἰσοδύναμα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὸ Ε. Κ. Π. τῶν ἀριθμητῶν. Κοινὸς ἀριθμητὴς τῶν κλασμάτων εἶναι ὁ 60.

10) Εὕρετε ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{12}{99}$ καὶ $\frac{1212}{9999}$ εἶναι ἰσοδύναμα χωρὶς νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα ἢ νὰ ἁπλοποιηθοῦν.

Λύσις. $\frac{1212}{9999}=\frac{1200+12}{9900+99}=\frac{12\times101}{99\times101}=\frac{12}{99}$

11) Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{28}{63}$ προσθέσωμεν τὸν 4. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν παρονομαστήν, ἵνα μὴ ἀλλάξῃ ἡ ἀξία αὐτοῦ; *ἀπ.* 9

12) Εὕρετε, ὅτι, ὅταν ἔχομεν δύο ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τοὺς ὅρους αὐτῶν ἀντιστοίχως, προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον.

Λύσις. $\frac{24}{32}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$. Καὶ $\frac{24+15}{32+20}=\frac{3.8+3.5}{4.8+4.5}=\frac{3.13}{4.13}=\frac{3}{4}$

ἢ $\frac{24}{32}=\frac{15}{20}=\frac{3.8-3.5}{4.8-4.5}=\frac{3.3}{4.3}=\frac{3}{4}$.

13) Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι $\frac{2}{7}$, ὁ δὲ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν 375. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν μικρότερον καὶ παρονομαστὴν τὸν μεγαλύτερον. Ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν ὅρων του, θὰ προκύψῃ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$. Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 750 καὶ 2625.

14) Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι $\frac{3}{4}$. Ὁ Μ.Κ Δ. αὐτῶν εἶναι 8. Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν.

Λύσις. Θὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ κατόπιν θὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. Ἤτοι Ε.Κ.Π. 96.

15) Εἷς ἠγόρασεν $105\frac{1}{2}$ ὀκάδας σίτου πρὸς $2\frac{4}{5}$ δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ὅταν ἐκαθάρισεν αὐτὸν ἐξήγαγεν $4\frac{3}{4}$ ὀκάδας ξένας ὕλας. Πόσόν πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ ἐναπομείναντος σίτου, ἵνα κερδίσῃ 27 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ;

ἀπ. $3\frac{1}{5}$ *δρχ.*

16) Εἷς ἠγόρασε $38\frac{4}{5}$ ὀκάδας ἐλαίου. Πωλεῖ κατόπιν αὐτὸ μὲ κέρδος ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς καὶ εἰσπράττει $746\frac{9}{10}$ δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν καὶ πόσα ἐκέρδισεν.

ἀπ. $17\frac{1}{2}$ *δρχ.* $67\frac{9}{10}$ *δρχ.*

17) Ἠγόρασέ τις 75 πήχεις ὕφασμα πρὸς $12\frac{2}{5}$ δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ ἐπλήρωσε δι᾽ ἔξοδα μεταφορᾶς $42\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πωλεῖ κατόπιν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ πρὸς $13\frac{3}{5}$ δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου, ἵνα ἔχῃ ὁλικὸν κέρδος $197\frac{1}{2}$ δραχμάς;

ἀπ. $16\frac{4}{5}$

18) Εἶχε τις $165\frac{3}{5}$ δραχμάς. Ἐξοδεύει κατ᾽ ἀρχὰς τὰ $\frac{2}{9}$ τῶν χρημάτων του καὶ κατόπιν μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἠγόρασεν $14\frac{3}{8}$

πήχεις ὕφασμα. Ἐὰν οὗτος εἶχεν ἀκόμη $8\frac{1}{20}$ δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸν πῆχυν τοῦ ὑφάσματος.

ἀπ. $8\frac{2}{5}$ δρχ.

19) Ἠγόρασε τις οἶνον ἀντὶ $1490\frac{2}{5}$ δραχμῶν. Πωλεῖ κατόπιν τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ πρὸς $2\frac{4}{5}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτοῦ πρὸς $2\frac{2}{5}$ δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ τέλος ἀπὸ τὸν ὑπόλοιπον, τὸν ὁποῖον ἐπώλησεν πρὸς $2\frac{3}{5}$ δρχ. τὴν ὀκᾶν εἰσέπραξε $514\frac{4}{5}$ δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν καὶ πόσα ἐκέρδισεν.

ἀπ. $2\frac{3}{10}$ $169\frac{1}{5}$

20) Δίδει τις τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων του διὰ τὴν ἀγορὰν ζακχάρεως, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ τιμᾶται $12\frac{1}{2}$ δραχμάς. Κατόπιν τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ὑπολοίπων διὰ τὴν ἀγορὰν ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται $17\frac{1}{2}$ δαχμάς. Τέλος μὲ τὰ ἐναπομείναντα χρήματα ἠγόρασε $1\frac{3}{4}$ ὀκάδας βουτύρου ἀντὶ 72 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ζακχάρεως καὶ πόσας ἐλαίου ἠγόρασεν.

ἀπ. $5\frac{3}{5}$ $4\frac{4}{5}$

21) Εἷς ἀμνὸς καὶ ἓν ἐρίφιον τιμῶνται ὁμοῦ 460 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστου, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἐριφίου εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς τοῦ ἀμνοῦ. *ἀπ. 276 184*

22) Δύο ἐργάται ἔλαβον ὁμοῦ 1140 δραχμὰς δι᾽ ἐργασίαν 16 ἡμερῶν ὁ πρῶτος καὶ 12 ἡμερῶν ὁ δεύτερος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου, δεδομένου ὅτι τοῦ δευτέρου ἦτο τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ πρώτου. *ἀπ. 45 35*

23) Δύο τεμάχια ὕφασμα διαφέρουν κατὰ 32 πήχεις. Ὅταν ὅμως ἀποκόψωμεν ἀπὸ ἕκαστον 8 πήχεις, τὰ ἐναπομείναντα θὰ εἶναι τὸ ἓν τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν μῆκος ἑκάστου.

ἀπ. 64 32

24) Μία δεξαμενὴ δέχεται εἰς $1\frac{1}{2}$ ὥρ. 150 ὀκάδας ὕδατος καὶ χάνει εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον $45\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσας ὀκάδας θὰ περιέχῃ μετὰ $7\frac{1}{2}$ ὥρας;

ἀπ. $521\frac{1}{4}$

25) Εἷς ἐπώλησεν τὰ $\frac{2}{9}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος καὶ τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{10}{21}$ αὐτοῦ καὶ $28\frac{1}{2}$ πήχεις. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τεμαχίου.

ἀπ. $94\frac{1}{2}$ πήχεις

26) Ἐὰν ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἦτο κατὰ τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ μικρότερον, θὰ ἐπωλεῖτο πρὸς $12\frac{4}{5}$ δραχμὰς τὸν πῆχυν ἀντὶ 192 δραχμῶν. Πόσων πήχεων ἦτο;

ἀπ. 18 πηχ.

27) Ἀπὸ ἓν βαρέλιον, τὸ ὁποῖον περιέχει 360 ὀκ. οἴνου, ἀφαιροῦμεν 24 ὀκάδας καὶ ἀναπληροῦμεν αὐτάς μὲ ὕδωρ. Κατόπιν ἐξάγομεν 24 ὀκ. ἐκ τοῦ μίγματος. Νὰ εὑρεθῇ πόσος οἶνος περιέχεται εἰς τὸ βαρέλιον.

Λύσις. Τὴν πρώτην φορὰν ἐξήχθη ποσὸν οἴνου, ἴσον πρὸς τὰ $\frac{24}{360}$ τοῦ ἀρχικοῦ ἤτοι $\frac{1}{15}$. Ἑπομένως ἔμεινε ποσὸν οἴνου ἴσον πρὸς τὰ $\frac{14}{15}$ τοῦ ἀρχικοῦ. Ἐπίσης τὴν δευτέραν φορὰν θὰ μείνῃ ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{14}{15}$ τοῦ ἤδη ὑπάρχοντος ἢ $\frac{14}{15}\times\frac{14}{15}=\frac{196}{225}$ τοῦ ἀρχικοῦ.

Ἄρα ὁ ἐναπομείνας οἶνος εἶναι $360\times\frac{196}{225}=313\frac{3}{5}$ ὀκ.

28) Εἷς ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 50 δραχμὰς τοὺς 3 πήχεις. Πωλήσας δὲ αὐτὸ κατόπιν πρὸς 90 δραχμὰς τοὺς 4 πή-

χεις, ἐκέρδισε 420 δραχμάς. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα;

ἀπ. 72 πηχ.

29) Ὅταν ἐπώλει τις ἓν ὕφασμα πρὸς 40 δραχμὰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως, θὰ ἐκέρδιζε 780 δραχμάς. Ὅταν ὅμως ἐπώλει αὐτὸ πρὸς 35 δραχμὰς τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ πήχεως θα ἐζημιοῦτο 390 δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο καὶ ποία ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως;

ἀπ. 65 πηχ. 48 δρχ.

30) Εἷς ἠγόρασεν ἓν τεμάχιον ὑφάσματος μήκους 112 πήχεων. Λόγῳ ὅμως βλάβης τὰ $\frac{3}{48}$ αὐτοῦ ἠχρηστεύθησαν. Ἐὰν τώρα πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ἐναπομείναντος μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς, θὰ ἐζημιοῦτο 126 δραχμάς. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 189 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ ὅλου ὑφάσματος;

ἀπ. 21

31) Ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἔχει μῆκος $25\frac{1}{2}$ πηχ. Ἐὰν πωλήσωμεν ἐξ αὐτοῦ $1\frac{1}{2}$ πηχ., $5\frac{5}{6}$ πηχ., $1\frac{4}{5}$ πηχ., 7 πήχεις καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν κατὰ πῆχυν, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον θὰ λάβωμεν $112\frac{2}{5}$ δραχμάς. Πρὸς πόσον ἐπωλήθη ὁ πῆχυς;

ἀπ. 12

32) Δεξαμενὴ πληροῦται διὰ τριῶν κρουνῶν. ὁ α′ πληροῖ αὐτὴν εἰς 45 λ., ὁ β′ εἰς 60 λ. καὶ ὁ γ′ εἰς 36 λ. Εἰς πόσον χρόνον καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενήν;

ἀπ. 15 λ.

33) Δεξαμενὴ πληροῦται διὰ δύο κρουνῶν· ἀνοίγομεν τὸν πρῶτον, ὅστις παρέχει 20 ὀκάδας εἰς 3 λ. ἐπί τινα χρόνον καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δεξαμενὴ χρειάζεται 40 ὀκάδας ὕδατος διὰ νὰ γεμίσῃ. Ἂν ὅμως ἀντ᾽ αὐτοῦ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἀνοίγαμεν τὸν δεύτερον, ὅστις παρέχει 52 ὀκάδας ὕδατος εἰς

5 λ., θὰ ἐχύνοντο 72 ὀκάδες ἀπὸ τὴν δεξαμενήν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ὕδωρ χωρεῖ ἡ δεξαμενή.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τοῦ ὕδατος ὅπου παρέχουν εἰς 1 λ. εἶναι $\frac{52}{5}-\frac{20}{3}=\frac{56}{15}$ ὀκ. Ἡ διαφορὰ τοῦ ὕδατος εἰς τὸν ἄγνωστον χρόνον εἶναι 102 ὀκ. Ἄρα ὁ χρόνος καθ' ὃν παρέμεινον ἀνοικτοὶ εἶναι $102:\frac{56}{15}=30$ λ. Ἄρα χωρεῖ $\frac{20}{3}\times 30+40=240$ ὀκ.

34) Ἔχει τις φιάλας τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ἐν ὅλῳ 60, αἱ ὁποῖαι εἶναι πλήρεις οἴνου. Τὸ ποσὸν τοῦ περιεχομένου οἴνου εἶναι $38\frac{3}{4}$ ὀκάδες. Νὰ εὑρεθῇ πόσας φιάλας εἶχεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος.

ἀπ. 35 25

\# 35) Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος ἐπωλήθησαν ἀντὶ 1260 δραχμῶν, μὲ τιμὴν τοῦ πήχεως 28 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τεμαχίου.

ἀπ. 75 πηχ.

\# 36) Εἷς ἠγόρασεν λῖπος πρὸς 33 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πωλήσας δὲ κατόπιν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 42 τὴν ὀκᾶν, ἐκέρδισεν 30 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσας ὀκάδας λῖπος εἶχεν ἀγοράσει ;

ἀπ. 50 ὀκ.

37) Σφαῖρα ἐλαστικὴ πίπτει ἀπό τινος ὕψους ἐπὶ μαρμαρίνης πλακός. Ἀναπηδᾷ τρεῖς φορὰς ἀνερχομένη ἑκάστοτε εἰς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὕψους, ἐκ τοῦ ὁποίου καταπίπτει. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) τὸ ἀρχικὸν ὕψος ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεσε, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ τελικὸν ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνῆλθε εἶναι $\frac{1}{2}$ μ. β) τὸ τελικὸν ὕψος, ἂν τὸ ἀρχικὸν ἦτο $\frac{4}{5}$ μ.

ἀπ. 32 μ. $\frac{1}{80}$ μ.

38) Δύο φίλοι ἔχουν ὁ εἷς 24.000 δραχμὰς καὶ ὁ ἄλλος 32.000 δραχμάς. Ἀφοῦ ἐξόδευσεν τὸ αὐτὸ ποσὸν ἕκαστος, τὸ ὑπόλοιπον τῶν χρημάτων τοῦ πρώτου ἦτο ἴσον πρὸς τὰ $\frac{9}{13}$ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ δευτέρου. Πόσα ἐξόδευσεν ἕκαστος;

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑπολοίπων εἶναι ἴση πρὸς τὰ $\frac{4}{13}$ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ δευτέρου. Αὕτη δὲ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν εἶχον τὰ ἀρχικά των χρήματα, ἤτοι 8.000 δραχ. ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δευτέρου ἦτο $8.000 : \frac{4}{13} = 26.000$ δραχ. καὶ συνεπῶς ἕκαστος ἐξόδευσε 6.000 δραχ.

39) Ἔμπορος ἠγόρασε τὰ $\frac{4}{5}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος πρὸς 64 δραχ. τὸν πῆχυν. Κατόπιν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἐμπορεύματός του ἀντὶ 3197 δραχμὰς καὶ εἶδεν ὅτι ἐκέρδισεν 125 δραχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀγορασθέντος ὑφάσματος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν μῆκος τοῦ ὑφάσματος καὶ πόσα ἐκέρδισεν.

Λύσις. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀγορασθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὕφασμα τὸ ὁποῖον ἔμεινε κέρδος, ἀποτελοῦν ὁλόκληρον τὸ ἀγορασθὲν καὶ τιμῶνται $3197-125=3072$ δραχ. Ὅθεν τὸ ἀγορασθὲν ἦτο $3072 : 64 = 48$ πηχ., τὸ ἀρχικὸν 60 πήχεις καὶ τὸ κέρδος 893 δραχ.

40) Ἐάν τις εἶχεν 88 δραχ. περισσοτέρας τῶν ὅσων ἔχει θὰ ἠδύνατο νὰ πληρώσῃ τὴν ἀξίαν ἑνὸς βιβλίου, ἐὰν ὅμως εἶχεν 40 δραχ. ὀλιγώτερον τῶν ὅσων ἔχει, θὰ εἶχεν τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς ἀξίας αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ βιβλίου καὶ τὶ ποσὸν χρημάτων εἶχεν.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα εἶχεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν φοράν, ἥτις εἶναι 128 δραχ. ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς ἀξίας τοῦ βιβλίου. Ὅθεν τὸ βιβλίον εἶχεν 288 δραχ. καὶ οὗτος εἶχεν 200 δραχ.

41) Εἷς ἠγόρασε αὐγά, τὰ ὁποῖα ὅταν ἐπώλει πρὸς 2 δρχ. ἕκαστον θὰ ἐκέρδιζε 150 δραχ. ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἐὰν

ὅμως ἐπώλει αὐτὰ πρὸς $1\frac{1}{2}$ δραχ. ἕκαστον θὰ εἰσέπραττε ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{9}{10}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ πόσα αὐγὰ εἶχεν ἀγοράσει.

Λύσις. Διὰ νὰ εἰσπράξῃ ποσὸν ἴσον πρός τὰ $\frac{9}{10}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἔπρεπε νὰ πωλῇ αὐτὰ πρὸς $1\frac{1}{2}$ ἕκαστον. Διὰ νὰ εἰσπράξῃ ποσὸν ἴσον πρὸς τὴν ἀξίαν τῆς ἀγορᾶς ἔπρεπε νὰ πωλῇ αὐτὰ πρὸς $1\frac{1}{2}\times\frac{10}{9}=1\frac{2}{3}$ δρχ. ἕκαστον. Ἄρα τὰ εἶχεν ἀγοράσει πρὸς $1\frac{2}{3}$ δρχ. ἕκαστον. Ὅταν τὰ ἐπώλει πρὸς 2 δρχ. θὰ ἐκέρδιζε $\frac{1}{3}$ δρχ. Ὅθεν τὸ ποσὸν τῶν αὐγῶν ἦτο $150 : \frac{1}{3}=450$ αὐγά.

42) Ποσόν τι χρημάτων διενεμήθη μεταξὺ τριῶν προσώπων ὡς ἑξῆς :

Ὁ α΄ ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ποσοῦ, ὁ β΄ τὰ $\frac{3}{7}$ καὶ ὁ γ΄ τὸ ὑπόλοιπον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ δεύτερος ἔλαβε 420 δραχμὰς περισσότερον τοῦ πρώτου.

ἀπ. 5880, 6300, 2520

43) Εἷς ἠγόρασεν ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἀντὶ 5832 δρχ. Πωλεῖ κατόπιν τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς, τὸ ὑπόλοιπον μὲ κέρδος 25 δρχ. κατὰ πῆχυν καὶ εἰσέπραξε 6372 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος αὐτοῦ καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τοῦ πήχεως.

ἀπ. $32\frac{2}{5}$ πηχ. 180

44) Ποσόν τι χρημάτων ἐμοιράσθη εἰς τρία πρόσωπα ὡς ἑξῆς : Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτοῦ καὶ 6000 δρχ. ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ 7.000 δρχ., ὁ δὲ τρίτος τὰς 11.000 δραχμάς, αἱ ὁποῖαι ἀπέμειναν. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος τῶν δύο ἄλλων ;

ἀπ. ὁ α΄ 24.000 ὁ β΄ 28.000

45) Εἷς χωρικὸς ἔφερεν εἰς ἕνα ἔμπορον ἔλαιον, ἵνα ἀγο-

ράση 32 πήχεις ὕφασμα. Παρετήρησε δὲ ὅτι, ὅταν ἔδιδεν εἰς τὸν ἔμπορον τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἐλαίου καὶ 144 δρχ. θὰ ἠγόραζε τὸ ὕφασμα, ὅταν ὅμως ἔδιδεν εἰς αὐτὸν τὰ $\frac{6}{7}$ τοῦ ἐλαίου, θὰ εἶχεν ἀκριβῶς τὴν ἀξίαν τοῦ ὑφάσματος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως.

ἀπ. 36

46) Ἔμπορος ἐπώλησεν εἰς δύο μικρεμπόρους ἀνὰ ἓν τεμάχιον ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ἀξίας μὲ κέρδος εἰς τὸν πρῶτον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ εἰς τὸν δεύτερον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀξίας των. Οὗτοι δὲ πάλιν μεταπωλήσαντες αὐτά, ὁ πρῶτος μὲ κέρδος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἔλαβεν 900 ὀλιγώτερον τοῦ δευτέρου, ὁ ὁποῖος τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ κοινὴ ἀξία τῶν δύο τεμαχίων.

ἀπ. 1500

47) Δύο ἄνθρωποι εἶχον τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων ἕκαστος. Ἐὰν ὁ πρῶτος αὐξήσῃ τὰ χρήματά του κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῶν καὶ ὁ δεύτερος τὰ ἐλαττώσῃ κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$, θὰ ἔχῃ ὁ εἷς περισσότερα τοῦ ἄλλου 230 δραχμάς. Πόσα εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς;

ἀπ. 200

48) Ἐξώδευσέ τις τὰ $\frac{2}{7}$ τῶν χρημάτων του, κατόπιν τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ὑπολοίπων καὶ τοῦ ἔμειναν 4.500 δραχμαί. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς; *ἀπ. 12.600*

49) Δύο τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν διαφορὰν μηκῶν $9\frac{4}{5}$ πηχ, ἀλλὰ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα πρὸς τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη αὐτῶν. *ἀπ.* $44\frac{4}{5}$ *35*

50) Δύο ἐργάται ἠργάσθησαν 25 ἡμέρας ὁ πρῶτος καὶ 20 ἡμέρας ὁ δεύτερος, ἀλλὰ μὲ ἡμερομίσθιον ὁ πρῶτος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου. Ἔλαβον δὲ ὁμοῦ 1860 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου. *ἀπ. 36 48*

51) Δύο φίλοι εἶχον ὁμοῦ 708 δραχμάς. Ὁ πρῶτος, ἀφοῦ ἐξόδευσεν τὰ $\frac{4}{7}$ τῶν χρημάτων του καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῶν, εἶχον ἀμφότεροι τὸ αὐτὸ ποσόν. Νὰ εὑρεθῇ πόσα εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς *ἀπ. 420 288*

52) Δύο ἄνθρωποι εἶχον ὁμοῦ 183 δραχμάς. Ἀφοῦ ὁ πρῶτος ἐξόδευσεν τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{7}$ τῶν χρημάτων του, ἔμεινεν εἰς τὸν πρῶτον ποσὸν διπλάσιον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ πόσα εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς. *ἀπ. 120 63*

4ον Ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

1) Διατὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν (διαιρέσωμεν) ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 0,5 0,25, 0,125 κ.ο.κ. διαιροῦμεν (πολλαπλασιάζομεν) αὐτὸν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, 8 κ.ο.κ. ;

2) Νὰ εὑρεθῇ χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός, ὅτι τὰ γινόμενα $3,75 \times 38,45$ καὶ $37,5 \times 3,845$ εἶναι ἴσα.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $348,52 : 63,5$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 καθὼς καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς.

ἀπ. 5,488 ὑπ. 0,0320

4) Νὰ εὑρεθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{6}{7}$ εἶναι μεγαλύτερον *ἀπ.* $\frac{6}{7} > \frac{4}{5}$

5) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{1080}{1350}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{37}{99}$ $\frac{3737}{9999}$ χωρὶς νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα. *ἀπ.* $\frac{74}{99}$

7) Ποῖα ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{631}{2244}$, $\frac{288}{360}$, $\frac{625}{700}$, $\frac{6408}{48060}$, $\frac{663}{1105}$ τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ποῖα εἰς ἁπλᾶ ἢ μικτὰ περιοδικὰ κλάσματα;

Λύσις. Πρῶτον θὰ τρέψωμεν αὐτὰ εἰς ἀνάγωγα καὶ κατόπιν θὰ ἐξετάσωμεν αὐτὰ διὰ τοῦ γνωστοῦ τρόπου.

8) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κοινὰ παράγωγα κλάσματα τῶν ἑξῆς δεκαδικῶν περιοδικῶν κλασμάτων:
0,909090.. 0,4545. . . 0,0888. . . 0,01666. . . 22,121212. . .

ἀπ. $\frac{10}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{4}{45}$, $\frac{1}{60}$, $22\ \frac{4}{33}$

9) Εἷς ἠγόρασε 248 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 12,45 δραχ. τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως. Κατόπιν πωλεῖ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ πρὸς 14,6 δραχμὰς τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ πήχεως. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου ὑφάσματος, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ ἐξ ὅλου τοῦ ἀγορασθέντος ὑφάσματος 378,2 δραχ. *ἀπ. 17,75*

10) Εἷς ἠγόρασε 116 πήχεις ὕφασμα. Κατὰ τὴν μεταφορὰν τὰ $\frac{3}{48}$ αὐτοῦ λόγῳ βλάβης κατέστησαν ἄχρηστα. Ἐὰν τώρα πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ἐναπομείναντος ὑφάσματος μὲ τὴν ἀξίαν τῆς ἀγορᾶς, θὰ ζημιωθῇ 185,6 δραχ. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν, ἵνα κερδίσῃ 510,4 δραχ. ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. *ἀπ. 32*

11) Εἷς ἐπώλησεν δύο εἴδη σίτου. Ἡ ὀκᾶ τοῦ πρώτου ἐπωλήθη $\frac{1}{4}$ περισσότερον ἀπὸ τὴν ὀκᾶν τοῦ δευτέρου. Ἀπὸ τὸ πρῶτον, τὸ ὁποῖον 48 ὀκ. περισσότερον τοῦ δετέρου, εἰσέπραξε 393,75 δραχ. καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 180,6 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐπωλήθη ἡ ὀκᾶ ἑκάστου. *ἀπ. 3,5 2,8*

12) Δύο φίλοι εἶχον ὁμοῦ 9982 δραχμάς. Ἀφοῦ ἐξόδευσεν ὁ πρῶτος τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{4}{5}$ θὰ εἶχον ἴσα ὑπόλοιπα, ἂν ὁ πρῶτος ἔδιδεν εἰς τὸν δεύτερον 87,65 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα χρήματα εἶχεν ἕκαστος.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἐναπομείναντα χρήματα εἰς αὐτούς, ἔχουν διαφορὰν 175,3 δραχ., δηλ. ἂν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ τοῦ πρώτου ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ τοῦ δευτέρου εὑρίσκομεν 175,3 δραχ. καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ χρήματα τοῦ πρώτου εἶναι ἴσα μὲ τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ δευτέρου+701,2 δραχ. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα ὅτι ὁ πρῶτος εἶχεν 4826 δραχμὰς καὶ ὁ δεύτερος 5156.

13) Μῖγμα οἰνοπνεύματος καὶ ὕδατος ἔχει βάρος 300 ὀκ. Ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτοῦ 120 ὀκ. καὶ τὸ ἀναπληροῦμεν μὲ 120 ὀκ. καθαροῦ ὕδατος. Κατόπιν πράττομεν τὸ αὐτὸ διὰ δευτέραν, τρίτην καὶ τετάρτην φοράν. Ἐὰν εἰς τὸ τελευταῖον μῖγμα περιέχονται 32,4 ὀκ. οἰνοπνεύματος, νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας οἰνόπνευμα περιεῖχεν τὸ ἀρχικὸν μῖγμα.

Λύσις. Τὴν πρώτην φορὰν παρέμεινεν οἰνόπνευμα ἴσον πρὸς τὰ $\frac{180}{300}=\frac{3}{5}$ τοῦ ἀρχικοῦ. Τὴν δευτέραν φορὰν παρέμεινεν οἰνόπνευμα ἴσον πρὸς τὰ $\frac{180}{300}$ τοῦ ὑπάρχοντος εἰς τὸ μῖγμα, ἤτοι τὰ $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$ τοῦ ἀρχικοῦ, τὴν τρίτην ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{5}\times\frac{9}{25}=\frac{27}{125}$ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τὴν τετάρτην ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{5}\times\frac{27}{115}=\frac{81}{625}$ τοῦ ἀρχικοῦ. Ἑπομένως τὸ ἀρχικὸν ποσὸν ἦτο $32,4\times\frac{625}{81}=250$ ὀκάδες.

14) Ἔχει τις 35 ὀκάδας διαλύματος ἅλατος. Ἀφαιρεῖ ἐξ αὐτοῦ 14 ὀκάδας καὶ θέτει 14 ὀκάδας καθαροῦ ὕδατος. Κατόπιν ἀφοῦ ἀφήρεσε ἐκ τοῦ μίγματος 14 ὀκάδας καὶ ἔθεσεν 14 ὀκάδες καθαροῦ ὕδατος, παρετήρησεν ὅτι αἱ 8 ὀκάδες τοῦ προκύψαντος μίγματος περιέχουν 0,36 ὀκ. ἅλατος. Πόσας ὀκάδας ἅλατος περιεῖχεν τὸ ἀρχικὸν διάλυμα;

ἀπ. 4,375 ὀκ.

15) Τὰ $\frac{5}{12}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος ἔχουν μῆκος ὅσον τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἄλλου. Ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν αὐτῶν εἶναι 2,7 πηχ.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν δύο τεμαχίων.

ἀπ. α' 7,2 πηχ. β' 4,5 πηχ.

5ον Ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τῶν ἀριθμῶν: 529, 4096, 166464, 748225, 94249, 870489, 356409, 471969, 21609, 88804, 550564.

Ἀπ. 23, 64, 408, 865, 307, 933, 597, 687, 147, 298, 742.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τῶν ἀριθμῶν: 11925,48225, 672340, 106149770, 225131865

ἀπ. 109, 219, 819, 10302, 15004

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,1 τῶν ἀριθμῶν: 0,85, 1,44, 42, 6,19, 95,7, 3008,54, 50311.

ἀπ. 0,9 1,2 6,4 2,4 9,7 54,8 224,3

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,1 τῶν ἀριθτῶν: 0,3136 0,7335 6,914 47,5423 3,1416 2 3

ἀπ. 0,56 0,85 2,48 6,89 1,77 1,41 1,73

5) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,001 τῶν ἀριθμῶν: 0,35 0,462 362,4 230 867 3711 16920

ἀπ. 0,591 0,679 19,036 15,165 29,444 69,917 130,076

6) Νὰ εὑρεθᾷ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,001 τῶν κλασμάτων: $\frac{3}{8}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{11}$ $\frac{3}{4}$

ἀπ. 0,612 0,925 0,912 0,797 0,866

7) Νὰ εὑρεθοῦν κατὰ προσέγγισιν 0,01 τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα: $5\sqrt{2}$ $6\sqrt{3}$

ἀπ. 7,05 10,38

8) Τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν ἔχουν ἄθροισμα 1025. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ 20. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄλλος.

ἀπ. 25

9) Διπλασιάζομεν ἕνα ἀριθμὸν καὶ εὑρίσκομεν ὡς τετράγωνον τοῦ νέου ἀριθμοῦ, τὸν ἀριθμὸν 62500. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀρχικὸς ἀριθμός.

ἀπ. 125

10) Τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι 722. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

Λύσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του εἶναι 1444, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς εἶναι 38.

11) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν εἶναι 99 καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 3. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Σχηματίσατε δύο τετράγωνα ἔχοντα κοινὴν μίαν γωνίαν, τῶν ὁποίων τὰ μήκη τῶν πλευρῶν νὰ παριστοῦν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς. Προεκτείνατε κατόπιν τὰς δύο πλευρὰς τοῦ ἐσωτερικοῦ, τότε σχηματίζετε τετράγωνον εἰς τὴν ἀπέναντι γωνίαν τῆς κοινῆς τῶν δύο τετραγώνων. Κατόπιν εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 18 καὶ 15.

12) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ εὑρίσκομεν γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 6075. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

Λύσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτὸν του εἶναι 18225. ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 135.

13) Τὰ τετράγωνα δύο ἀρτίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαφέρουν κατὰ 68. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Ἡ λύσις ὁμοία μὲ τῆς ἀσκήσεως 11.

14) Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ εὑρίσκομεν γινόμενον 1080. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

Λύσις. Τὰ $\frac{8}{15}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του εἶναι 1080, ἑπομένως τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτὸν του εἶναι $1080 : \frac{8}{15} = 2025$. Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 45.

15) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν εἶναι 6850 καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 4400. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν εὑρίσκωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἤτοι τὸ ἄθροισμα $6850+4400=11250$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου. Ὅθεν τὰ τετράγωνα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἶναι 5625 καὶ 1225. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι 75 καὶ 35.

16) Νὰ εὑρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν γινόμενον 1332.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ 1332. Ἐὰν οὗτος ὅμως αὐξηθῇ κατὰ μονάδα τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 1332. Ἑπομένως ὁ μικρότερος τῶν δύο ζητουμένων διαδοχικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ 1332. Ὅθεν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 36 καὶ 37.

17) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 2070 τ.μ. καὶ αἱ διαστάσεις αὐτοῦ διαφέρουν κατὰ 1 μέτρον. Νὰ εὑρεθοῦν αὗται. *ἀπ. 45μ. 46μ.*

18) Τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν ἔχουν ἄθροισμα 720. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ εἷς εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου.

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ μεγαλύτερος εἶναι διπλάσιος τοῦ μικροτέρου, ἕπεται ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου θὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 720 εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου θὰ εἶναι 720 : 5=144. Ὅθεν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 12 καὶ 24.

19) Τὸ ἄθροισμα ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ εἶναι 50850. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, εἶναι τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 50850 κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἤτοι 225.

20) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 552,25 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ. *ἀπ. 94 μ.*

21) Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 100 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 36 μ. Πόσον πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μῆκος καὶ νὰ αὐξήσωμεν τὸ πλάτος αὐτοῦ, ἵνα προκύψῃ τετράγωνον τοῦ αὐτοῦ ἐμβαδοῦ;

Ἀπ. τὸ μῆκος θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 40 μ.
καὶ τὸ πλάτος θὰ αὐξηθῇ κατὰ 24 μ.

22) Δύο τετράγωνα ἔχουν ἄθροισμα ἐμβαδῶν 2425 τ.μ. καὶ διαφορὰν 1625 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ ἑκάστου. *ἀπ. 45 μ. 20 μ.*

24) Ἑνὸς ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 810 τ.μ. καὶ τὸ

πλάτος αὐτοῦ εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μήκους. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ. *ἀπ. 18 μ. 45 μ.*

25) Ἑνὸς τετραγώνου τὸ μῆκος εἶναι τριπλάσιον τοῦ πλάτους καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 9408 τ.μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ. *ἀπ. 168 μ. 56 μ.*

26) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπὸ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ νὰ δίδῃ διαφορὰν 600.

Λύσις. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 600 κατὰ προσέγγισιν μονάδος αὐξηθεῖσα κατὰ μονάδα 24+1=25

6ον Ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

1) Ἕνα δοχεῖον πλῆρες ὕδατος ζυγίζει 18,5 κιλά, ὅταν ὅμως ἀφαιρέσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ὕδατος ζυγίζει 11,5 κιλά. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης αὐτοῦ καὶ πόσον ζυγίζει κενόν. *ἀπ. 14 4,5 κιλὰ*

2) Εἷς ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 122 δραχμὰς τὴν ὑάρδα. Κατόπιν πωλήσας αὐτὸ μὲ κέρδος 19,6 δραχ. κατὰ πῆχυν εἰσέπραξε 4158 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι πήχεις ἦτο τὸ ὕφασμα. *ἀπ. 39,25*

3) Εἷς ἠγόρασε ζάκχαρι πρὸς 8,50 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 1,5 δρχ. ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς αὐτῆς. *ἀα. 12,4*

4) Εἷς ἐπώλησεν οἰκόπεδον 360 τ.μ. πρὸς 60 δραχ. τὸν τ.π. Ἠγόρασε δέ μὲ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα εἰσέπραξεν ἄλλο οἰκόπεδον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ προηγουμένου. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν. *ἀπ. 80 δρχ.*

5) Εἷς διήνυσε διάστημα 35100 μέτρων εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον διήνυσε τὰ 10257 μ. αὐτοῦ ;

ἀπ. 1 ὥρ. 45 λ. 12 δ

6) Νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ὁ ἀριθμὸς 532629 δ. *ἀπ. 6 ἡμ. 3 ὥρ, 57 λ. 9 δ.*

7) Ἐγεννήθη τις τὴν 23 Ἀπριλίου τοῦ 1882 καὶ ἀπέθανε

τὴν 12 Δεκεμβρίου τοῦ 1946. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε;
ἀπ. 64 ἔτη 7 μ. 19 ἡμ.

8) Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κύβου ἀκμῆς 1,8 μέτρα. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ κρουνός, ὅστις παρέχει 12 κιλὰ ὕδατος εἰς 1 λ., ἵνα γεμίσῃ αὐτήν; *ἀπ. 8 ὥρ. 6 λ.*

9) Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τὰς 8 ὥρ. 45 λ. π.μ. μὲ ταχύτητα 36 χιλ. τὴν ὥραν καὶ φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β εἰς τὰς 3 ὥρ. 20 λ. τὸ ἀπόγευμα τῆς ἰδίας ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων. *ἀπ. 237 χιλμ.*

10) Εἷς ἠγόρασε 8 ὑάρδ. 2 πόδ. ὕφασμα ἀντὶ 5 λίρ. 8 σελ. 4 πεν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὑάρδας. *ἀπ. 12 σελ. 6 πεν.*

11) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 12 σελ. 8 πεν. Πόσας ὑάρδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 10 λιρ. 2 σελ. 8 πεν.
ἀπ. 16 ὑάρδ.

12) Θέλει τις νὰ ὑφάνῃ 490 μέτρα ὕφασμα. Οἱ ἐργάται, εἰς τοὺς ὁποίους ἀνέθεσεν τὴν ὕφανσιν αὐτοῦ, ἐργάζονται $8\frac{2}{5}$ ὥρας καθ' ἡμέραν καὶ ὑφαίνουν 16 μέτρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον θὰ τελειώσῃ ἡ ὕφανσις.
ἀπ. 3 ἡμ 15 ω 30 λ

13) Μία ἀτμάμαξα διανύει 70 χιλμ. εἰς 1 ω 40 λ. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ 98,35 χιλμ.
ἀπ. 2 ω 20 λ 30 δ

14) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρ. καὶ ἕτερος τοιοῦτος εἰς $1\frac{1}{4}$ ὥρ. Εἰς πόσον χρόνον καὶ οἱ δύο ὁμοῦ θὰ πληρώσουν αὐτήν; *ἀπ. 50 λ.*

15) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 5 ὥρας. Εἷς ἄλλος παρὰ τὸν πυθμένα ἀδιάζει αὐτὴν εἰς 7 ὥρας. Ἐὰν ἀνοίξουν καὶ οἱ δύο συγχρόνως, εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτῆς; *ἀπ. 8 ὥρ. 45 λ.*

16) Μία μηχανὴ λειτουργοῦσα κανονικῶς θὰ ἐπεράτωνε ἓν ἔργον εἰς 12 ω 45 λ. Αὔτη ὅμως ἀφοῦ ἐξετέλεσεν τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ

ἔργου, λόγῳ βλάβης ἠλάτωσεν τὴν ἀποδοτικότητα αὐτῆς κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἀρχικῆς. Πόσον χρόνον ἐχρειάσθη διὰ τὴν περάτωσιν τοῦ ἔργου ; *ἀπ. 15 ω 24 λ 22,5 δ*

17) Δύο κρουνοὶ πληροῦν δεξαμενὴν ὁ α΄ εἰς 30 λ. καὶ ὁ β΄ εἰς 60 λ. Ἂν ἀνοίξωμεν τὸν α΄ ἐπὶ 10 λ. καὶ κατόπιν ἐν συνεχείᾳ τὸν δεύτερον, εἰς πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμανή ;

Λύσις. Τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἀνοίξαμεν τὸν δεύτερον κρουνόν, ὁ πρῶτος εἶχεν πληρώσει τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ ἐναπομένουν τώρα τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῆς, ἅτινα θὰ χρειασθοῦν 13 λ. 20 δ., ἵνα τὴν πληρώσουν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ.

18) Εἷς ἐργάτης ἐργαζόμενος 6 ὥρας τὴν ἡμέραν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἓν ἔργον εἰς 18 ἡμέρας καὶ εἷς ἄλλος ἐργαζόμενος 9 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 15 ἡμέρας. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς 8 ἡμέρας, πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐξ ἀρχῆς ; *ἀπ. 7 ὥρ. 30 λ.*

19) Ἐκ τριῶν κρουνῶν ὁ α΄ πληροῖ αὐτὴν εἰς 20 ὥρας, ὁ β΄ εἰς 8 ὥρας καὶ ὁ γ΄ παρὰ τὸν πυθμένα δύναται νὰ ἐκκενώσῃ αὐτὴν εἰς 10 ὥρας. Ἂν ἡ δεξαμενὴ ἔχει πληρωθῆ κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς καὶ ἀνοίξουν καὶ οἱ τρεῖς συγχρόνως εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ; *ἀπ. 10 ὥρ. 40 λ.*

20) Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι ὁμοῦ θὰ ἐξετέλουν ἓν ἔργον εἰς 15 ἡμέρας. Κατόπιν 12 ἡμερῶν ἐργασίας, ὁ α΄ ἐγκαταλείπει αὐτὸ καὶ οὕτω ὁ δεύτερος ἐχρειάσθη 7 ἡμέρας, ἵνα περατώσῃ τὸ ὑπολειφθὲν ἔργον. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος μόνος του θὰ ἐτελείωνε τὸ ἔργον.

Λύσις. Καὶ οἱ δύο ὁμοῦ εἰς 12 ἡμέρ. ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἔμεινεν ἄρα τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ. Ἀφοῦ ὁ δεύτερος ἐργάτης διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου ἐχρειάσθη 8 ἡμ. δι' ὁλόκληρον θὰ ἐχρειάζετο 40 ἡμέρ. Ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰς μίαν ἡμέραν ἐξετέλεσεν τὸ $\frac{1}{15}-\frac{1}{40}=\frac{1}{24}$

τοῦ ἔργου καὶ ἐπομένως ὁλόκληρον τὸ ἔργον θὰ τὸ ἐκτελοῦσε εἰς 24 ἡμέρας.

21) Δεξαμενὴ πληροῦται διὰ δύο κρουνῶν. Ὁ α΄ γεμίζει αὐτὴν εἰς 50 ὥρας καὶ ὁ δεύτερος εἰς 40 ὥρας. Ἀνοίγομεν κατ᾽ ἀρχὰς τὸν α΄ ἐπὶ 15 ὥρας καὶ τὸν κλείομεν. Ἐν συνεχείᾳ τὸν δεύτερον ἐπὶ 16 ὥρας καὶ τὸν κλείομεν. Ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν τώρα 900 ὀκ. ὕδατος ἐκ τῆς δεξαμενῆς καὶ ἀνοίξωμεν τοὺς δύο κρουνοὺς θὰ χρειασθοῦν 10 ὥρας, ἵνα γεμίσουν αὐτήν. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

Λύσις. Ὁ πρῶτος εἰς 15 ὥρας πληροῖ τὰ $\frac{15}{50}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ ὁ δεύτερος εἰς 16 ὥρας τὰ $\frac{16}{40}$ αὐτῆς καὶ οἱ δύο θὰ πληρώσουν τὰ $\frac{15}{50}+\frac{16}{40}=\frac{7}{10}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἐπίσης καὶ οἱ δύο ὁμοῦ εἰς 10 ὥρας πληροῦν τὰ $\frac{9}{20}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἐξ ἀρχῆς καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐπλήρωσαν τὰ $\frac{7}{10}+\frac{9}{20}=\frac{23}{20}$ τῆς δεξαμενῆς, ἐπομένως τὸ ἀφαιρεθὲν ὕδωρ τῶν 900 ὀκ. εἶναι $\frac{3}{20}$ αὐτῆς, συνεπῶς ἡ δεξαμενὴ χωρεῖ $900 : \frac{3}{20} = 6000$ ὀκάδας.

22) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο ἀντλιῶν. Ἡ πρώτη πληροῖ αὐτὴν εἰς 12 ὥρας καὶ ἡ δευτέρα εἰς 18 ὥρας. Ἡ δεξαμενὴ εἶναι κενὴ καὶ αἱ ἀντλίαι, αἵτινες ἐτέθησαν συγχρόνως εἰς λειτουργίαν, παρέσχον εἰς αὐτὴν ὕδωρ ἐπὶ $4\,{}^1/_2$ ὥρας. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ταύτην ἡ παροχὴ τῆς πρώτης περιορίσθη εἰς τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ἀρχικῆς. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή. *ἀπ. 7 ὥρ. 30 λ.*

23) Εἷς ἐργάτης διὰ 50 ἡμέρας ἐργασίας ἔλαβε τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, ὅπερ ἔλαβε εἷς ἄλλος ἐργάτης διὰ 30 ἡμέρας ἐργασίας. Ἐπὶ πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ, ἵνα λάβουν τὸ ποσόν, ὅπερ ἔλαβεν ἕκαστος τὴν πρώτην φοράν;

Λύσις. Ὁ α΄ εἰς μίαν ἡμέραν λαμβάνει $\frac{1}{50}$ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν τὴν πρώτην φοράν, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{30}$ αὐτοῦ. Ἐπομένως καὶ οἱ δύο ὁμοῦ λαμβάνουν διὰ μίαν ἡμέραν ἐργασίας τὰ $\frac{1}{50}+\frac{1}{30}=\frac{8}{150}$ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ ἔλαβεν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν τὴν πρώτην φοράν. Ἄρα θὰ χρειασθοῦν $1:\frac{8}{150}=18\frac{3}{4}$ ἡμέρας διὰ νὰ λάβουν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν τὴν πρώτην φοράν.

24) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο κρουνῶν. Ὁ πρῶτος πληροῖ αὐτὴν εἰς 17 ὥρ. 30 λ. καὶ ὁ δεύτερος εἰς 15 ὥρ, Ἡ δεξα μενὴ εἶναι κενή, ἀνοίγομεν τὸ πρῶτον ἐπὶ 6 ὥρας καὶ τὸν κλείομεν. Ἐν συνεχείᾳ τὸν δεύτερον ἐπὶ 5 ὥρας. Ἐὰν τὸ ὕδωρ τῆς δεξαμενῆς αὐξηθῇ τώρα κατὰ 240 ὀκάδας καὶ ἀνοίξωμεν καὶ τοὺς δύο συγχρόνως θὰ χρειασθοῦν ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης 2 ὥρας, ἵνα γεμίσουν αὐτήν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ ἡ δεξαμενή. *ἀπ. 3150 ὀκ.*

25) Δύο ἐργάται ὁμοῦ θὰ ἐξετέλουν ἓν ἔργον εἰς $7\frac{1}{2}$ ἡμέρας. Κατόπιν 5 ἡμερῶν ἐργασίας ὁ πρῶτος ἀπεχώρησε καὶ οὕτω ὁ δεύτερος διὰ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον ἐχρειάσθη $6\frac{2}{3}$ ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ἕκαστος τῶν ἐργατῶν θὰ ἐξετέλει τὸ ἔργον;

ἀπ. ὁ α' 12 ἡμ. ὁ β' 20 ἡμ.

26) Δεξαμενὴ κενοῦται ὑπὸ δύο κρουνῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ἐκκενεῖ αὐτὴν μόνος του εἰς 10 ὥρας. Ἀνοίγομεν καὶ τοὺς δύο συγχρόνως ἐπὶ 3 ὥρ. 20 λ. καὶ κλείομεν κατόπιν τὸν πρῶτον. Ἐὰν ἀμφότεροι κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα αὐτὸ ἐξεκένωσαν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δεξαμενῆς, πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ ὁ δεύτερος κρουνός, ἵνα ἐκκενώσῃ τὸ ὑπόλοιπον μέρος αὐτῆς;

Λύσις. Ὁ πρῶτος κρουνὸς εἰς μίαν ὥραν κενώνει τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς $\frac{10}{3}$ ὥρας τὸ $\frac{1}{10}\times\frac{10}{3}=\frac{1}{3}$ αὐτῆς, ὁ δεύτερος κρουνὸς κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον κενώνει τὰ $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ αὐτῆς, ἑπομένως εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{5}{12}:\frac{10}{3}=\frac{1}{8}$ αὐτῆς. Ἀφοῦ λοιπὸν εἰς μίαν ὥραν κενώνει τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς δεξαμενῆς διὰ νὰ κενώσῃ τὸ ὑπόλοιπον μέρος ἤτοι τὸ $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ αὐτῆς θὰ χρειασθῇ $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=2$ ὥρας.

27) Δεξαμενὴ πληροῦται διὰ τριῶν κρουνῶν. Ὁ α′ πληροῖ αὐτὴν εἰς 12 ὥρας, ὁ β′ εἰς 15 ὥρας καὶ ὁ γ′ εἰς ἄγνωστον χρόνον. Ἀφοῦ ἀνοίξωμεν τὸν πρῶτον ἐπὶ $1\frac{1}{2}$ ὥρας, ἀνοίγομεν ἐν συνεχείᾳ τὸν δεύτερον καὶ ρέουν ὁμοῦ ἐπὶ δύο ὥρας, μετὰ ταῦτα ἀνοίγομεν τὸν τρίτον καὶ ρέουν ὁμοῦ ἐπὶ $1\frac{3}{4}$ ὥρ. Κλείσαντες τώρα τοὺς δύο πρώτους ἀφήνομεν ἀνοικτὸν τὸν τρίτον, ὁ ὁποῖος ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης ἐχρειάσθη 4 ὥρας 45 λ., ἵνα πληρώσῃ τὴν δεξαμενήν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον ὁ τρίτος θὰ ἐπλήρου μόνος ἐξ ἀρχῆς τὴν δεξαμενήν.

Λύσις. Ὁ πρῶτος ἔμεινεν ἀνοικτὸς ἐπὶ $1\frac{1}{2}+2+1\frac{3}{4}=5\frac{1}{4}$ ὥρας καὶ ἑπομένως ἐπλήρωσε τὰ $\frac{21}{48}=\frac{7}{16}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ δεύτερος ἔμεινεν ἀνοικτὸς ἐπί $2+1\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$ ὥρας καὶ ἐπλήρωσε τὰ $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$ αὐτῆς ἄρα ὑπολείπονται τώρα τὰ $\frac{5}{16}$, ὁ τρίτος ἔμεινεν ἀνοικτὸς ἐπί $1\frac{3}{4}+4\frac{3}{4}=6\frac{1}{2}$ ὥρας. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα ὅτι ὁ γ′ χρειάζεται $20\frac{4}{5}$ ὥρας, ἵνα πληρώσῃ μόνος του τὴν δεξαμενήν.

28) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο ἀντλιῶν εἰς 11 ὥρας. Ἀφοῦ ἠργάσθησαν καὶ αἱ δύο ὁμοῦ ἐπὶ 4 ὥρας, ἡ μία ἔπαυσε λειτουργοῦσα, ἡ δὲ ἄλλη ἐχρειάσθη ἀπὸ τὴν στιγμὴν ταύτην 11 ὥρ. 40 λ., ἵνα πληρώσῃ τὴν δεξαμενήν. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον χρειάζεται ἑκάστη μόνη της, ἵνα πληρώσῃ τὴν δεξαμενήν.

ἀπ. 18 ὥρ. 20 λ. 27 ὥρ. 30 λ.

29) Μία δεξαμενὴ περιέχει 600 ὀκάδας ὕδατος καὶ δέχεται ὕδωρ ἀπὸ κρουνόν, ὅστις παρέχει εἰς αὐτὴν 320 ὀκ. ὕδατος εἰς 40 λ. Ἑτέρα δεξαμενὴ περιέχει 80 ὀκάδας ὕδατος καὶ δέχεται ὕδωρ ἀπὸ κρουνόν, ὅστις παρέχει εἰς αὐτὴν 480 ὀκ. ὕδατος καθ᾽ ὥραν. Ἐὰν ἀνοίξωμεν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν τοὺς δύο κρουνούς, μετὰ πόσον χρόνον ἡ πρώτη δεξαμενὴ θὰ περιέχῃ ὕδωρ τριπλάσιον τῆς δευτέρας ;

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ κάθε κρουνὸς παρέχει 8 ὀκάδας ὕδατος εἰς 1 λ. Ἑπομένως εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον θὰ παράσχῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν ὕδατος ἕκαστος. Ἀφοῦ ὅμως ἡ πρώτη θὰ περιέχῃ ὕδωρ τριπλάσιον τῆς δευτέρας, ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν περιεχομένων ποσοτήτων, ἥτις εἶναι πάντοτε 600—80=520 ὀκάδες, εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ περιεχομένου τῆς δευτέρας. Ἄρα ἡ δευτέρα θὰ περιέχῃ 520 : 2 =260 ὀκ. Ἐπειδὴ ὅμως περιεῖχεν 80 ὀκ. ἐξ ἀρχῆς, τὸ ἐπιπλέον ὕδωρ τῶν 180 ὀκ. προσετέθη εἰς 180 : 8=22,5 λ. Ὅθεν ἔμειναν ἀνοικτοὶ ἀμφότεροι ἐπὶ 22,5 λ.

30) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς $\frac{3}{4}$ ὥρας. Δύο ἄλλοι κρυυνοὶ ἐκκενώνουν αὐτὴν ὁ εἷς εἰς $1\frac{1}{6}$ ὥρας καὶ ὁ ἄλλος εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρας. Ἐὰν ἡ δεξαμενὴ ἔχει πληρωθῇ κατὰ τὰ $\frac{7}{15}$ αὐτῆς καὶ ἀνοίξουν καὶ οἱ τρεῖς συγχρόνως, εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ; *ἀπ. 7 ὥρ.*

31) Μία ὁμὰς ἐργατῶν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἓν ἔργον εἰς 16 ἡμέρας καὶ ἑτέρα ὁμὰς δύναται νὰ ἐκτελέσῃ αὐτὸ εἰς 24 ἡμέρας. Ἐὰν λάβωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν ἐργατῶν τῆς πρώτης καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δευτέρας ὁμάδος, εἰς πόσας ἡμέρας οὗτοι ὁμοῦ θὰ περατώσουν τό ἔργον; *ἀπ. $12\frac{4}{13}$ ἡμ.*

32) Ἓν ποταμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α μὲ ἀντίθετον τὸ ρεῦμα τοῦ ποτυμοῦ ταχύτητος 2 μιλ. καθ' ὥραν καὶ φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β μετὰ 15 ὥρας, ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του, κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν καὶ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ ἰδίαν ταχύτητα ἐχρειάσθη 9 ὥρας, ἵνα ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μέση ταχύτης κατὰ τὴν ἄνοδον εἶναι μικροτέρα κατὰ 4 μίλια ἀπὸ τὴν τῆς καθόδου. Κατὰ τὴν ἄνοδον εἰς 1 ὥραν θὰ ὑστερῇ 4 μίλια καὶ συνεπῶς εἰς 9 ὥρας 4×9=36 μιλ. Ἄρα τὰ 36 μίλ. θὰ τὰ διανύσῃ εἰς 6 ὥρας καὶ συνεπῶς ἡ μέση ταχύτης αὐτοῦ εἶναι 36 : 6=6 μίλ. καὶ ἀφοῦ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἶναι 2 μίλ. ἕπεται ὅτι ἡ ἰδία ταχύτης αὐτοῦ εἶναι 8 μίλλια, ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι 15×6=90 μίλια.

33) Εἷς ποδηλάτης διανύει μίαν ἀπόστασιν εἰς 6 ὥρας 24 λ. Κατὰ τὴν ἐπάνοδον ἠλάττωσε τὴν ταχύτητά του κατὰ 5 χιλ. καὶ διήνυσε οὕτω τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν εἰς 8 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοῦ.

Λύσις. Κατὰ τὴν ἐπάνοδον εἰς 6 ὥρ. 24 λ. θὰ ἔχῃ ὑστερήσει $5\times 6\frac{2}{5}=32$ χιλ. τὰ ὁποῖα θὰ διανύσῃ εἰς $8-6\frac{2}{5}=1\frac{3}{5}$ ὥρας. Ἄρα ἡ ταχύτης αὐτοῦ κατὰ τὴν ἐπάνοδον εἶναι $32 : 1\frac{3}{5}=20$ χιλ. καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἀρχική του ταχύτης ἦτο 25 χιλ.

34) Ἕν κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α διὰ τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα 25 χιλ. καθ' ὥραν καὶ ἀφοῦ ἔφθασεν εἰς αὐτὴν εὐθὺς ἀναχωρεῖ διὰ τὴν πόλιν Α μὲ ταχύτητα 30 χιλ. καθ' ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων, ἄν ὁ διαρεύσας χρόνος ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως αὐτοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α μέχρι τῆς ἐπανόδου του εἰς αὐτὴν εἶναι $5\frac{1}{2}$ ὥρας. *ἀπ.* 75

35) Εἷς αὐτοκινητιστὴς διανύει τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο πόλεων μὲ ταχύτητα 25 χιλ. καθ' ὥραν. Ἐὰν ὅμως διήνυεν αὐτὴν μὲ ταχύτητα 30 χιλ. καθ' ὥραν θὰ διήνυε τὸ διάστημα αὐτὸ εἰς 50 λ. ἐνωρίτερον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

Λύσις. Τὴν πρώτην φορὰν διὰ τὸ 1 χιλ. χρειάζεται $\frac{1}{25}$ ὥρας, ἐνῷ τὴν δευτέραν $\frac{1}{30}$ ὥρας, ἄρα τὸ ἓν χιλιόμετρον τὸ διανύει εἰς $\frac{1}{25}-\frac{1}{30}=\frac{1}{150}$ ὥρας ἐνωρίτερον καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι $\frac{5}{6} : \frac{1}{150}=125$ χιλ.

36) Ποταμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α διὰ τὴν πόλιν Β μὲ ἀντίθετον τὸ ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ ταχύτητος 4 μιλ. καθ' ὥραν καὶ ἀφοῦ ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Β ἐπιστρέφει εἰς τὴν πόλιν Α χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ ἰδίαν ταχύτητα, μὲ μέσην ταχύτητα διπλασίαν τῆς ἀνόδου καὶ οὕτω ἐχρειάσθη ἐν συνόλῳ 15 ὥρας διὰ νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

Λύσις. Ἡ ταχύτης τῆς ἀνόδου ἰσοῦται μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα τοῦ πλοίου μεῖον 4 μίλ. ἐνῷ τῆς καθόδου ἰσοῦται μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα τοῦ πλοίου σὺν 4 μίλλια. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο ταχυτήτων εἶναι 8 μιλ. καὶ ἀφοῦ εἶναι ἡ μία διπλασία τῆς ἄλλης τὰ 8 μιλ. εἶναι ἡ μικροτέρα ταχύτης. Ἤτοι ὅταν ἀπὸ τὴν ἰδίαν ταχύτητα τοῦ πλοίου ἀφαιρέσωμεν 4 μίλλια ἔχομεν διαφορὰν 8, ἄρα ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου εἶναι 12 μίλλια. Ὅθεν ἡ ταχύτης τῆς ἀνόδου εἶναι 8 μιλ. καὶ τῆς καθόδου 16 μιλ. Διὰ τὸ 1 μίλ. χρειάζεται $\frac{1}{8}$ τῆς ὥρας κατὰ τὴν ἄνοδον, ἐνῷ $\frac{1}{16}$ τῆς ὥρας κατὰ τὴν κάθοδον ἤτοι συνολικὸν χρόνον $\frac{1}{8}=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}$ ὥρας. Ὅθεν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι $15:\frac{3}{16}=80$ μίλλια.

37) Μία ἁμαξοστοιχία διανύει τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο πόλεων εἰς 8 ὥρας. Ὅταν ὅμως τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν τὴν διήνυε μὲ ταχύτητα κατὰ 5 χιλ. τὴν ὥραν ὀλιγώτερον, θὰ ἐχρειάζετο 9 ὥρ. 36 λ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

άπ. 240 χιλ.

38) Μία ἁμαξοστοιχία ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς πόλεως Α διὰ τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα 30 χιλ. καθ' ὥραν. Ἀφοῦ ὅμως διήνυσε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀποστάσεως, λόγῳ βλάβης τῆς μηχανῆς περιώρισε τὴν ταχύτητά της εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ἀρχικῆς καὶ οὕτω ἐχρειάσθη 22 ὥρ 32 λ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς της, ἵνα φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

Λύσις. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ἦτο 1 χιλ. θὰ ἐχρειάζετο χρόνον $\frac{1}{30}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{24}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{360}$ ὥρας, ἵνα διανύσῃ αὐτὴν ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας. Ὅθεν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι $22\frac{8}{15}:\frac{13}{360}$ $=624$ χιλ.

39) Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο πόλεων εἶναι 180 χιλμ. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἀπὸ αὐτὰς ἀντιθέτως πρὸς συνάντησίν των μὲ ταχύτητας 32 χιλμ. καὶ 40 χιλμ. ἀντιστοίχως καθ' ὥραν. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθοῦν;

Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν καλύπτουν διάστημα $32+40=72$ χιλ. ὅθεν, ἵνα καλύψουν διάστημα 180 χιλ. θὰ χρειασθοῦν $180:72=2\frac{1}{2}$ ὥρας.

40) Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο πόλεων Α καὶ Β εἶναι 720 χιλμ. Ἐκ τῆς πόλεως Α ἀναχωρεῖ κινητὸν μὲ ταχύτητα 30 χιλμ. καθ' ὥραν κατευθυνόμενον πρὸς τὴν Β. Μετὰ 5 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως αὐτοῦ, ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς Β ἕτερον κινητὸν διὰ τὴν πόλιν Α μὲ ταχύτητα 45 χιλ. τὴν ὥραν. Ζητεῖται μετὰ

πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των θὰ συναντηθοῦν καὶ τὶ διάστημα θὰ ἔχη διανύσει ἕκαστον.

Λύσις. Εἰς 5 ὥρας τὸ πρῶτον κινητὸν ἔχει διανύσει 150 χιλμ. καὶ συνεπῶς κατὰ τὴν ἐκκίνησιν τοῦ δευτέρου, ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ἦτο 570 χιλμ., ὅθεν θὰ συναντηθοῦν μετὰ $570 : 75 = 7\frac{3}{5}$ ὥρας ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ δευτέρου. Τὸ πρῶτον θὰ ἔχη διανύση διάστημα $(5 + 7\frac{3}{5}) \times 30 = 378$ χιλμ. καὶ τὸ δεύτερον 342 χιλμ.

41) Ἀπὸ δύο πόλεις ἀναχωροῦν δύο κινητὰ ἀντιθέτως πρὸς συνάντησίν των. Ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς εἶναι 45 χιλμ. καὶ τοῦ ἄλλου 60 χιλμ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων, ἂν ταῦτα συνηντήθησαν μετὰ 6 ὥρας 36 λ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των.
ἀπ. 693 χιλμ,

42) Ἐκ δύο πόλεων, αἵτινες ἀπέχουν 201,6 χιλμ. ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα 42 χιλμ. καθ' ὥραν. Τὸ πρῶτον ἀνεχώρησε τὴν 7 ὥρ. 40 λ. πρωϊνὴν καὶ τὸ δεύτερον τὴν 9 ὥρ. 25 λ. πρωϊνήν. Ποίαν ὥραν θὰ συναντηθοῦν;

ἀπ. μετὰ 1 ὥρ. 31 λ. 30 δ. ἀπὸ τὴν ἀναχώρησιν τοῦ β'

43) Ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀναχωροῦν ἀντιθέτως πρὸς συνάντησιν δύο ἁμαξοστοιχίαι. Ἡ πρώτη ἀνεχώρησε τὴν 6ην πρωϊνὴν καὶ ἔφθασε εἰς τὴν πόλιν Β τὴν $6\frac{1}{2}$ ὥραν τὸ ἀπόγευμα. Ἡ δευτέρα ἀνεχώρησε ἐκ τῆς πόλεως Β τὴν 9ην πρωϊνὴν καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Α τὴν $4\frac{1}{2}$ ὥραν ἀπογευματινήν. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν ὥραν συνηντήθησαν.

Λύσις. Ἡ πρώτη διανύει τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων εἰς $12\frac{1}{2}$ ὥρας καὶ ἡ δευτέρα εἰς $7\frac{1}{2}$ ὥρας· ἑπομένως εἰς μίαν ὥραν διανύουν ἀντιστοίχως τὸ $\frac{2}{25}$ καὶ $\frac{2}{15}$ τοῦ διαστήματος. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πρώτη ἀνεχώρησε 3 ὥρας ἐνωρίτερον ἔχει ἤδη διανύσει τὰ $\frac{6}{25}$ τῆς ἀποστάσεως καὶ συνεπῶς κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεως τῆς δευτέρας ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἁμαξοστοιχιῶν εἶναι τὰ $\frac{19}{25}$ τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο πόλεων. Ὅθεν θὰ συναντηθοῦν μετὰ

$\frac{19}{25} : \left(\frac{2}{25}+\frac{2}{15}\right)=3$ ὥρ. 33 λ. 45 δ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῆς δευτέρας.

44) Τὴν 6ην πρωϊνὴν ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν αὐτοκίνητον. Τὴν 8 ὥρ. 45 λ. πρωϊνὴν τῆς ἰδίας ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως ἕτερον αὐτοκίνητον μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ πρώτου καὶ διευθύνεται πρὸς συνάντησιν τοῦ πρώτου. Ἀφοῦ συνηντήθησαν ἐξηκολούθησαν τὴν πορείαν των καὶ μετὰ 2 ὥρ. 15 λ. τὸ δεύτερον προηγεῖτο τοῦ πρώτου 22,5 χιλμ. Νὰ εὑρεθῇ τὶ ὥραν ἔλαβεν χώραν ἡ συνάντησις καὶ ἡ ταχύτης ἑκάστου. *ἀπ. 5 ὥρ. μ.μ. 30 χιλμ. 40 χιλμ.*

45) Ἐκ δύο πόλεων, αἵτινες ἀπέχουν 579 χιλμ. ἀναχωροῦν ἀντιθέτως πρὸς συνάντησίν των δύο ἁμαξοστοιχίαι. Ἡ πρώτη, τῆς ὁποίας ἡ ταχύτης ἦτο 45 χιλμ. τὴν ὥραν, ἀνεχώρησε 5 ὥρ. 40 λ. ἐνωρίτερον τῆς δευτέρας, τῆς ὁποίας ἡ ταχύτης ἦτο 36 χιλμ. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς της ἡ δευτέρα θὰ συναντήσῃ τὴν πρώτην; *ἀπὸ 4 ὥρας*

46) Ἐκ δύο πόλεων, αἵτινες ἀπέχουν 270 χιλμ. ἀναχωροῦν συγχρόνως κατευθυνόμεναι ἀντιθέτως δύο ἁμαξοστοιχίαι πρὸς συνάντησίν των. Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως ἡ μία εἶχε διανύσει 90 χιλ. ἐπιπλέον τῆς ἄλλης. Ὅταν ὅμως ἡ ταχυτέρα ἠλάττωνε τὴν ταχύτητά της κατὰ 15 χιλ. καὶ ἡ ἄλλη ηὔξανε τὴν ταχύτητα κατὰ 5 χιλμ. θὰ συνηντῶντο εἰς τὸ μέσον τῆς ὁδοῦ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης ἑκάστης.

Λύσις. Ὅταν ἡ ταχύτης τῆς μιᾶς ἐλαττωθῇ κατὰ 15 χιλ. καὶ τῆς ἄλλης αὐξηθῇ κατὰ 5 χιλ., ἐπειδὴ θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ μέσον τῆς ὁδοῦ, ἕπεται ὅτι ἔγιναν ἴσαι. Ἡ διαφορὰ τῶν ἀρχικῶν ταχυτήτων εἶναι 20 χιλ. Διαιροῦντες τὴν διαφορὰν τῶν διαστημάτων διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ διαστήματος τῆς μιᾶς ὥρας εὑρίσκομεν τὸν χρόνον τῆς συναντήσεως ἤτοι $90 : 20 = 4\frac{1}{2}$ ὥρας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων εἶναι $270 : 4\frac{1}{2} = 60$ χιλ. ἄρα οἱ ταχύτητες ἦσαν 40 χιλ. καὶ 20 χιλ.

47) Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, αἵτινες ἀπέχουν 216 χιλ. Ἂν μὲν διευθύνονται ἀντιθέτως θὰ συναντηθοῦν μετὰ 2 ὥρας, ἂν δὲ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν θὰ συναντηθοῦν μετὰ 36 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστης. *ἀπ. 57 χιλ. 51 χιλ.*

48) Ἐκ τοῦ λιμένος τοῦ Πειραιῶς ἀναχωρεῖ ἀτμόπλοιον μὲ ταχύτητα 12 μιλ. καθ' ὥραν. Μετὰ 3 ὥρας ἀναχωρεῖ ἄλλο ἀτμόπλοιον πρὸς συνάντησιν τοῦ πρώτου μὲ ταχύτητα 18 μιλ. Ζητεῖται μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ δευτέρου θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν.

Λύσις. Τὸ δεύτερον πλησιάζει τὸ πρῶτον εἰς μίαν ὥραν 18—12=6 μίλλια. ἄρα θὰ τὸ φθάσῃ μετὰ 36 : 6 = 6 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του καὶ εἰς ἀπόστασιν 108 μιλλίων ἀπὸ τοῦ Πειραιῶς.

49) Ἓν ἀτμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἀπό τινα λιμένα μὲ ταχύτητα 15 μιλ. καθ' ὥραν. Μετὰ πάροδον ὡρισμένου χρόνου ἀναχωρεῖ ἕτερον τοιοῦτον πρὸς συνάντησιν τοῦ πρώτου μὲ ταχύτητα 18 μιλλίων καὶ φθάνει νὸ πρῶτον μετὰ 4 ὥρ. 53 λ. 20 δ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεσολαβήσας χρόνος μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων.

Λσσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάντησις ἔλαβε χώραν εἰς ἀπόστασιν $18\times4\frac{8}{9}=88$ μιλ. ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐκκινήσεως. Τὸ διάστημα τοῦτο τὸ διήνυσε τὸ πρῶτον εἰς χρόνον 88 : 15=5 ὥρ. 52 λ. Ἄρα εἶχεν ἀναχωρήσει ἐνωρίτερον κατὰ 5 ὥρ. 52 λ.—4 ὥρ. 53 λ. 20 δ.

50) Ἁμαξοσνοιχία ἀναχωρεῖ τὴν 7ην πρωϊνὴν ἐκ τῆς πόλεως Α διὰ τὴν πόλιν Β, αἵτινες ἀπέχουν 217 χιλ. καὶ ἦτο ὑποχρεωμένη νὰ διανύσῃ αὐτὴν εἰς 5 ὣρ. 10 λ. Εἰς τὰς 7 ὥρ. 40 λ. ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς Α ἑτέρα ἁμαξοστοιχία, ἥτις συνήντησε τὴν πρώτην εἰς τὸ 175 χιλμ. ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τῆς δευτέρας ἁμαξοστοιχίας.

Λύσις. Ἡ ταχύτης τῆς πρώτης ἦτο $217 : 5\frac{1}{6}=42$ χιλμ. καὶ προηγεῖτο κατὰ $42\times\frac{2}{3}=28$ χιλ., ὅθεν ἡ συνάντησις ἔλαβε χώραν μετὰ ἀπὸ 175 : 42=4 ὥρ. 10 λ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῆς πρώτης καὶ συνεπῶς μετὰ 4 ὥρ. 10 λ.—40 λ.=3 ὥρ. 30 λ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῆς δευτέρας. Ἄρα ἡ ταχύτης τῆς δευτέρας ἦτο $175 : 3\frac{1}{2}=50$ χιλ.

51) Ἐκ τινος πόλεως ἀναχωρεῖ κινητὸν τὴν 7ην πρωϊνὴν μὲ ταχύτητα 11 χιλμ, καθ' ὥραν. Ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ ἕτερον κινητόν, τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης εἶναι 15 χιλμ., ἵνα φθάσῃ τὸ πρῶτον μετὰ 2 ὥρ. 45 λ.;

ἀπ. τὴν 8ην πρωϊνὴν

52) Ἐκ τινος σημείου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ μὲ

ταχύτητας 18 χιλμ. καὶ 15 χιλμ. ἀντιστοίχως καθ᾽ ὥραν. Κατόπιν 3 ὡρῶν πορείας, τὸ ταχύτερον, λόγῳ βλάβης τῆς μηχανῆς του, ἠλάττωσε τὴν ταχύτητά του κατὰ 8 χιλμ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐκκινήσεως θὰ συναντηθοῦν;

ἀπ. 72 χιλμ.

53. Ἀπὸ μίαν πόλιν ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν μὲ ταχύτητας 65 χιλ. καὶ 45 χιλ. ἀντιστοίχως καθ᾽ ὥραν. Ἔπειτα ἀπὸ 4 ὥρας ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἰδίας πόλεως ἕτερον κινητὸν μὲ ταχύτητα 75 χιλ. καθ᾽ ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του τὸ κινητὸν τοῦτο θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων;

Λύσις. Ἐὰν τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο κινητῶν τὸ λάβωμεν ὡς φανταστικὸν κινητόν, τοῦτο θὰ ἔχῃ ταχύτητα $(65+45):2=55$ χιλ. καθ᾽ ὥραν. Θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ αὐτό. Ἀφοῦ τοῦτο ἀναχωρεῖ 4 ὥρας ἐνωρίτερον τοῦ τρίτου κινητοῦ θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ αὐτὸ $55\times4=220$ χιλ. καὶ ἐφ᾽ ὅσον τὸ πλησιάζει καθ᾽ ὥραν $75-55=20$ χιλ. ἕπεται ὅτι θὰ τὸ φθάσῃ μετὰ $220:20=11$ ὥρας Ὅθεν μετὰ 11 ὥρας τὸ τρίτον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων κινητῶν.

54) Τρία κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τῆς πόλεως Α διὰ τὴν πόλιν Β, ἥτις ἀπέχει αὐτῆς 100 χιλ. Τὸ α′ τὴν 8ην πρωϊνὴν μὲ ταχύτητα 25 χιλ. καθ᾽ ὥραν, τὸ β′ τὴν 8 ὥρ. 15 λ. μὲ ταχύτητα 30 χιλ. καὶ τὸ γ′ τὴν 8 ὥρ. 30 λ. μὲ ταχύτητα 40 χιλ.

Ζητεῖται 1) εἰς ποίους χρόνους θὰ λάβῃ χώραν ἡ συνάντησις αὐτῶν, 2) εἰς ποίας ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς πόλεως Α καὶ 3) οἱ χρόνοι τῆς ἀφίξεώς των εἰς τὴν πόλιν Β.

Ἀπ. Τὸ δεύτερον θὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον μετὰ 1 ὥρ. 30 λ., ἤτοι τὴν 9 ὥρ. 30 λ. πρωϊνὴν καὶ εἰς ἀπόστασιν 37,5 χιλ. ἐκ τῆς πόλεως Α. Τὸ τρίτον θὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον μετὰ 50 λ. ἤτοι τὴν 9 ὥρ. 20 λ. καὶ εἰς ἀπόστασιν $33\frac{1}{3}$ χιλ. ἐκ τῆς πόλεως Α. Τὸ τρίτον πάλιν θὰ φθάσῃ τὸ δεύτερον μετὰ 45 λ. ἤτοι τὴν 9 ὥρ. 15 λ. καὶ εἰς ἀπόστασιν 30 χιλ. ἐκ τῆς πόλεως Α. Οἱ χρόνοι τῆς ἀφίξεως αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν τὸ α′ τὴν 12ην, τὸ β′ τὴν 11 ὥρ. 35 λ. καὶ τὸ γ′ τὴν 11 ὥρ. πρωϊνήν.

55) Ἐκ τινος πόλεως Α ἀναχωρεῖ διὰ τὴν πόλιν Β κινητόν, τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ταχύτητος ἑνὸς ἄλλου, ὅπου ἀνεχώρησε μετὰ 4 ὥρ. κατόπιν. Ἀφοῦ τὸ δεύτερον κινη-

τὸν ἔφθασε τὸ πρῶτον ἐχρειάσθη ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως 3 ὥρ. 20 λ., ἵνα φθάση εἰς τὴν πόλιν Β. Τὸ δὲ πρῶτον, ὅτε τὸ δεύτερον ἀφίχθη εἰς τὴν πόλιν Β, ἀπεῖχεν ἀπὸ αὐτὴν 50 χιλ. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του τὸ δεύτερον συνήντησε τὸ πρῶτον, ὡς καὶ ἡ ταχύτης ἑκάστου.

Λύσις. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου ἦτο 1 ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ἦτο $\frac{2}{3}$. Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον προηγεῖτο κατὰ 4 ὥρας, ἕπεται ὅτι εἶχε διανύσει διάστημα $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$. Ὅθεν ἡ συνάντησις ἔλαβε χώραν μετὰ $\frac{8}{3} : \frac{1}{3} = 8$ ὥρ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ δευτέρου. Μετὰ τὴν συνάντησιν τὸ δεύτερον κινητὸν ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Β ἔπειτα ἀπὸ 3 ὥρ. 20 λ., ἐνῷ τὸ δεύτερον ἀπεῖχεν αὐτῆς 50 χιλ. Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτὴ τῶν 50 χιλ. ὀφείλεται εἰς τὴν διαφορὰν τῶν ταχυτήτων ἥτις εἶναι $\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ καὶ συνεπῶς ἡ ταχύτης τοῦ β′ εἶναι $50 : \frac{1}{3} \times 3\frac{1}{3} = 50 : \frac{10}{9} = 45$ χιλ. καὶ τοῦ α′ $45 \times \frac{2}{3} = 30$ χιλ.

56) Ἀπὸ δύο λιμένας, οἵτινες ἀπέχουν 144 μιλ. ἀναχωροῦν συγχρόνως κατευθυνόμενα ἀντιθέτως πρὸς συνάντησίν των δύο ἀτμόπλοια καὶ συνηντήθησαν εἰς ἀπόστασιν 80 μιλ. ἀπὸ τὸν ἕνα τῶν λιμένων. Ἐὰν ὅμως τὸ ταχύτερον ἀνεχώρει 54 λ. ἀργότερον ἡ συνάντησις θὰ ἐλάμβανε χώραν εἰς τὸ μέσον τῆς ὁδοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες αὐτῶν.

Λύσις. Τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως ἀπέχει ἀντιστοίχως 80 μιλ. καὶ 64 μίλια ἀπὸ τοὺς 2 λιμένας. Ὅταν συνηντῶντο εἰς τὸ μέσον τὸ βραδύτερον εἶχεν διανύσει 72 μιλ., ἀλλ' εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ ἄλλο θὰ εἶχεν διανύσει διάστημα $72 \times \frac{80}{64} = 90$ μιλ., ἤτοι ἐπὶ πλέον $90 - 72 = 18$ μιλ. πέραν τοῦ μέσου. Ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν διαστημάτων, ὅταν διαιρεθῇ διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν χρόνων τῆς ἐκκινήσεως, μᾶς δίδει τὴν ταχύτητα τοῦ ταχυτέρου, ἥτις εἶναι $18 : \frac{54}{60} = 20$ μιλ. καὶ συνεπῶς τοῦ ἄλλου εἶναι $20 \times \frac{64}{80} = 16$ μιλ.

57) Ἔκ τινος πόλεως Α ἀναχωρεῖ μοτοσυκλετιστὴς τὴν 8

ὥρ. πρωϊνὴν μὲ ταχύτητα 18 χιλ. καθ' ὥραν. Τὴν 8 ὥρ. 45 λ. ἀναχωρεῖ ἕτερος μὲ ταχύτητα 30 χιλ. πρὸς συνάντησιν τοῦ πρώτου. Ὁ δεύτερος ὅμως καθ' ὁδὸν ἠναγκάσθη νὰ σταθμεύσῃ ἐπὶ 5 λ. καὶ ἐξακολουθήσας κατόπιν τὴν πορείαν του μὲ 24 χιλ καθ' ὥραν ἔφθασε τὸ πρῶτον τὴν 10 ὥρ. 35 λ. πρωϊνήν. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ πόσον χρόνον ὁ δεύτερος εἶχεν ταχύτητα 30 χιλ. *άπ. 45 λ.*

58) Μία ἁμαξοστοιχία ἀνεχώρησε ἐκ τῆς πόλεως Α τὴν 6 ὥρ. πρωϊνὴν καὶ ἔφθασε εἰς τὴν πόλιν Β τὴν $10\frac{1}{2}$ ὥρ. πρωϊνήν. Διήνυσε δὲ τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀποστάσεως μὲ ταχύτητα 42 χιλμ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον διάστημα μὲ ταχύτητα 35 χιλμ. καθ' ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων. *ἀπ. 175 χιλμ.*

59) Εἷς ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν καὶ εὑρίσκετο εἰς ἀπόστασιν 64 χιλμ. καθ' ἣν στιγμὴν ἀναχωρεῖ μοτοσυκλετιστὴς ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν. Ἡ ὡριαία ταχύτης τοῦ ποδηλάτου ἦτο τὰ $\frac{4}{7}$ τῆς τοῦ μοτοσυκλετιστοῦ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν ὁ ποδηλάτης θὰ προηγεῖται τοῦ μοτοσυκλετιστοῦ 4 χιλμ. καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ὁ μοτοσυκλετιστὴς θὰ προηγεῖται 24 χιλμ.

Λύσις. Ὅταν ὁ μοτοσυκλετιστὴς διανύει 1 χιλμ., ὁ ποδηλάτης διανύει $\frac{4}{7}$ χιλμ. Εἰς μίαν ὥραν τὸν πλησιάζει $\frac{3}{7}$ χιλμ, καὶ διὰ νὰ πλησιάσῃ αὐτὸν 64—4=60 χιλμ., πρέπει νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν $60 : \frac{3}{7} = 140$ χιλμ καὶ ὁ ποδηλάτης 144 χιλμ. Ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς ἀπόστασιν $64 : \frac{3}{7} = 149\frac{1}{3}$ χιλμ. καὶ 56 χιλμ. ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως ὁ μοτοσυκλετιστὴς θὰ προηγεῖται 24 χιλμ.

60) Ἓν ἀτμόπλοιον ἀνεχώρησε ἐκ τοῦ λιμένος Α διὰ τὸν λιμένα Β μὲ ταχύτητα 8 μιλ. καθ' ὥραν. Ἀφοῦ ἔφθασε εἰς τὸν λιμένα Β καὶ παρέμεινεν εἰς αὐτὸν 2 ὥρας, ἐπιστρέφει πάλιν εἰς τὸν Α μὲ ταχύτητα 10 μιλ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο λιμένων, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως του

ἐκ τοῦ λιμένος Α μέχρι τῆς ἐπιστροφῆς του εἰς αὐτὸν διαρρεύσας χρόνος ἦτο 11 ὧραι.

ἀπ. 40 μιλ.

61) Ἔκ τινος πόλεως Α ἀναχωρεῖ κινητὸν διὰ τὴν πόλιν Β καὶ φθάνει εἰς αὐτὴν μετὰ 12 ὥρας. Ἕτερον τοιοῦτον ἀναχωρήσαν ἐκ τῆς Β ἔφθασεν εἰς τὴν Α μετὰ 9 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς εἶναι κατὰ 15 χιλμ. μεγαλυτέρα τῆς τοῦ ἄλλου.

ἀπ. 540 χιλμ.

62) Ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ μὲ ταχύτητας 32 χιλμ. καὶ 45 χιλμ. ἀντιστοίχως καθ' ὥραν. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ ἓν ἐχρειάσθη 1 ὥρ. 5 λ. ὀλιγώτερον τοῦ ἄλλου, ἵνα διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

ἀπ. 120 μιλ.

63) Ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ἁμαξοστοιχίαι. Ἡ πρώτη, ἥτις ἀνεχώρησε ἐκ τῆς Α φθάνει εἰς τὴν Β μετὰ 6 ὥρ. 30 λ. Ἡ δευτέρα, ἥτις ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν Β καὶ τῆς ὁποίας ἡ ταχύτης εἶναι κατὰ 14 χιλμ. μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης, φθάνει εἰς τὴν Α μετὰ 4 ὥρ. 52 λ. 30 δ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς της. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων καὶ ἡ ταχύτης ἑκάστης.

ἀπ. 273 χιλμ. 42 χιλμ. 56 χιλμ.

64) Μία ἁμαξοστοιχία ὤφειλε νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σταθμῶν μὲ ταχύτητα 60 χιλμ. τὴν ὥραν. Εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὁδοῦ μικρὰ βλάβη τῆς μηχανῆς ἠνάγκασε αὐτὴν νὰ σταθμεύσῃ 45 λ. καὶ κατόπιν ἐξηκολουθήσασα τὴν πορείαν της μὲ ταχύτητα 18 χιλμ. τὴν ὥραν, ἔφθασε εἰς τὸ τέρμα τῆς διαδρομῆς μὲ καθυστέρησιν 2 ὥρ. 30 λ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σταθμῶν.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν σταθμῶν ἦτο 5 χιλμ. Τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν ἔπρεπε νὰ τὴν διανύσῃ εἰς χρόνον $\frac{5}{60}$ ὥρας, ἀλλὰ τὴν διήνυσεν εἰς $\frac{4}{60}+\frac{1}{18}=\frac{11}{90}$ ὥρας. Ἐπομένως θὰ εἴχαμεν καθυστέρησιν $\frac{11}{90}-\frac{5}{60}=\frac{7}{180}$ ὥρας. Εἰς τὸ πρόβλημα ὅμως ἡ καθυστέρησις ἦτο 2 ὥρ. 30 λ. — 45 λ. = 1 ὥρ. 45 λ. ἤτοι $1\frac{3}{4}$ ὥρας.

Ὅθεν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι $(5\times\frac{7}{4}):\frac{7}{180}=225$ χιλμ.

65) Ἔκ τινος πόλεως Α ἀναχωρεῖ κινητὸν διὰ τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα 10 χιλμ. Μετὰ 50 λ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου, ἀναχωρεῖ δεύτερον κινητὸν μὲ ταχύτητα 12 χιλμ. τὴν ὥραν καὶ φθάνει εἰς τὴν πόλιν Β ἔπειτα ἀπὸ 5 λ. ἀπὸ τῆς ἀφίξεως τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

ἀπὸ 45 χιλμ.

66) Ἓν ὡρολόγιον προπορεύεται 6 λ. εἰς τὸ εἰκοσιτεράωρον καὶ ἐρρυθμίσθη τὴν μεσημβρίαν τῆς σήμερον νὰ δεικνύῃ τὴν ἀκριβῆ ὥραν. Ποίαν ὥραν θὰ δεικνύῃ τοῦτο τὸ ἀπόγευμα τῆς ἑπομένης ἡμέρας ὅταν εἶναι 6 ὥρ. ἀκριβῶς;

Λύσις. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ρυθμίσεώς του μέχρι τῆς 6 ὥρ. ἀπογευματινῆς τῆς ἑπομένης εἶχον παρέλθει 30 ὧραι. Εἰς μίαν ὥραν προχωρεῖ $\frac{6\lambda}{24}$, ὅθεν εἰς 30 ὥρας $\frac{6}{24}\times 30=7{,}5$ λ. καὶ ἑπομένως θὰ δεικνύῃ 6 ὥρ. 7,5 λ.

67) Ἓν ὡρολόγιον ὑστερεῖ 12 λ. εἰς τὸ εἰκοσιτετράωρον καὶ ἐρρυθμίσθη τὴν μεσημβρίαν τῆς σήμερον νὰ δεικνύῃ τὴν ἀκριβῆ ὥραν. Ποία θὰ εἶναι ἡ πραγματικὴ ὥρα, ὅταν τοῦτο δεικνύῃ 10ην ἑσπερινὴν τῆς ἰδίας ἡμέρας;

Λύσις. Αἱ 24 ὧραι εἶναι 1440 λ., ἄρα τοῦτο εἰς τὰς 24 ὥρας θὰ δεικνύῃ 12 λ, ὀλιγώνερον καὶ εἰς τὰς 10 ὥρας δηλ. 600 λ. θὰ δεικνύῃ $\frac{12\times 600}{1428}=5$ λ. 2 δ. ὀλιγώτερον ἤτοι ἡ ἀκριβὴς ὥρα θὰ εἶναι 10 ὥρ. 5 λ. 2 δ.

68) Ὅταν εἰς τὰς Ἀθήνας εἶναι μεσημβρία, τὶ ὥραν ἔχει εἷς τόπος, ὅστις εὑρίσκεται εἰς μῆκος 12° 30′ ἀνατολικῶς καὶ τὶ ὥραν θὰ ἔχῃ ἕτερος τοιοῦτος, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἴδιον μῆκος δυτικῶς τῶν Ἀθηνῶν;

Λύσις. Πᾶς τόπος τῆς γῆς γράφει τόσον 360^0 εἰς 24 ὥρας, τόξον 15^0 εἰς 1 ὥραν, τόξον 1^0 εἰς 4λ καὶ τόξον 1′ εἰς 4δ. Ἀφοῦ ὁ τόπος κεῖται ἀνατολικῶς $12^0\ 30'=750'$ θὰ εἶχεν 12ην ὥραν πρὸ $750\times 4=3000$ δ ἤτοι πρὸ 50λ ἄρα τὴν στιγμὴν ταύτην ἡ ὥρα τοῦ τόπου αὐτοῦ θὰ εἶναι 12ω 50λ. Ὁ τόπος ὁ κείμενος δυτικῶς τῶν Ἀθηνῶν ἔχει τὴν στιγμὴν ταύτην ὥραν 11ω 10λ π.μ.

69) Ἕνας τόπος κεῖται εἰς μῆκος 28° 9′ 48″ δυτικῶς τῶν

Ἀθηνῶν καὶ ἕτερος τόπος εἰς μῆκος $30^0\ 37'\ 36''$ δυτικῶς τῶν Ἀθηνῶν. Ποίαν διαφορὰν χρόνου ἔχουν οὗτοι ;

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν εἶναι $2^0\ 27'\ 48''$ ἤτοι $2^0\ 27\frac{4'}{5}$, ἡ διαφορὰ τῶν χρόνων θὰ εἶναι $4\lambda \times 2 + 4\delta \times 27\frac{4}{5} = 9\lambda\ 51\delta$.

70) Μία δεξαμενή, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 1,8 μ. τὸ πλάτος 1,4 μ. καὶ τὸ βάθος 0,7 μ., δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ μιᾶς ἀντλίας εἰς 40λ. Εἷς δὲ κρουνός, ὅστις εἶναι εἰς τὸν πυθμένα αὐτῆς δύναται νὰ τὴν ἐκκενώσῃ εἰς 30λ. Ἐὰν ἡ δεξαμενὴ περιέχει ὕδωρ κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῆς καὶ ἀφίσωμεν νὰ λειτουργήσῃ συγχρόνως ἡ ἀντλία καὶ ὁ κρουνός, εἰς πόσον χρόνον θὰ κενωθῇ αὕτη.

Λύσις. Ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς εἶναι 1764 κ.π. τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς δεξαμενῆς εἶναι 1176 κ.π. Εἰς 1λ θὰ ἐκκενωθῇ τὸ $\frac{1}{30} - \frac{1}{40} = \frac{1}{120}$ αὐτῆς ἤτοι $1764 \times \frac{1}{120} = 14{,}7$ κ.π. ἄρα ἡ ἐκκένωσις θὰ γίνῃ μετὰ $1175 : 14{,}7 = 80\lambda$ ἤτοι 1ω 20λ.

71) Εἷς εὑρίσκεται ἐπὶ ἁμαξοστοιχίας, τῆς ὁποίας ἡ ταχύτης εἶναι 40 χιλ. καθ' ὥραν. Καθ' ὁδὸν συναντᾷ ἑτέραν ἁμαξοστοιχίαν μήκους 75 μέτρων ἐρχομένην ἐξ ἀντιθέτου καὶ ἡ ὁποία ἐχρειάσθη 3δ νὰ διέλθῃ τὴν πρώτην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὡριαία ταχύτης αὐτῆς.

Λύσις. Διαιροῦντες τὸ διάστημα τῶν 75 μέτρων διὰ 3 εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων τῶν δύο ἁμαξοστοιχιῶν εἰς 1δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{75}{3} = 25$ μ. ἡ πρώτη εἰς 1δ διανύει $40 : 60 \times 60 = \frac{1}{90}$ τοῦ χιλιομέτρου ἢ $\frac{100}{9}$ μ. Ἄρα ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης εἶναι $25 - \frac{100}{9} = \frac{125}{9}$ μ. κατὰ δευτερόλεπτον καὶ συνεπῶς ἡ ὡριαία ταχύτης αὐτῆς εἶναι 50 χιλ.

72) Δεξαμενὴ τῆς ὁποίας ἡ χωρητικότης εἶναι 45 κ.π. πληροῦται διὰ τριῶν κρουνῶν. Ὁ πρῶτος καὶ δεύτερος κρουνὸς ὁμοῦ πληροῦν αὐτὴν εἰς 25 λ. Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος εἰς 27 λ.

Ἡ παροχὴ τοῦ τρίτου εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς παροχῆς τοῦ δευτέρου κρουνοῦ. Ζητεῖται ἡ παροχὴ ἑκάστου κρουνοῦ εἰς μίαν ὥραν καὶ εἰς πόσον χρόνον καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ θὰ πληρώσουν τὴν δεξαμενήν.

Λύσις. Εἰς 1 ὥραν ὁ Α καὶ ὁ Β κρουνὸς πληροῦν τὰ $\frac{1}{25} \times 60 = \frac{12}{5}$ τῆς δεξαμενῆς. Εἰς 1 ὥραν ὁ Α καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς παροχῆς τοῦ Β κρουνοῦ πληροῦν τὰ $\frac{1}{27} \times 60 = \frac{20}{9}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἑπομένως τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς παροχῆς τοῦ Β εἶναι $\frac{12}{5} - \frac{20}{9} = \frac{8}{45}$ τῆς δεξαμενῆς ἢ 8 κ.π. ὕδατος. Ἄρα εἰς μίαν ὥραν ὁ Β κρουνὸς παρέχει 20 κ.π. ὕδατος. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα, ὅτι ὁ πρῶτος παρέχει 88 κ.π. ὕδατος. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα, ὅτι ὁ πρῶτος παρέχει 88 κ.π. ὕδατος καθ' ὥραν καὶ ὁ τρίτος 12 κ.π. καθ' ὥραν. Ὅθεν καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ θὰ πληρώσουν αὐτὴν εἰς 45 : 120 = 25,5 λ.

73) Κύων διώκει δορκάδα, ἥτις προηγεῖται αὐτοῦ κατὰ 27 βήματα αὐτῆς. Ὅταν ἡ δορκὰς κάμνῃ 8 βήματα, ὁ κύων κάμνει 7, ἀλλὰ 5 βήματα αὐτοῦ εἶναι 7 τῆς δορκάδος. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσα βήματα αὐτῆς θὰ τὴν φθάσῃ ὁ κύων.

Λύσις. Ὅταν ἡ δορκὰς κάμνῃ ἓν βῆμα, ὁ κύων κάμνει $\frac{7}{8}$ τοῦ βήματος, ἀλλὰ τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ βήματος τοῦ κυνὸς εἶναι $\frac{7}{8} \times \frac{7}{5} = \frac{49}{40}$ τῆς δορκάδος. Εἰς κάθε βῆμα τῆς δορκάδος ὁ κύων τὴν πλησιάζει $\frac{49}{40} - 1 = \frac{9}{40}$ καὶ συνεπῶς θὰ τὴν φθάσῃ μετὰ $27 : \frac{9}{40} = 120$ βήματα αὐτῆς.

7ον) Ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν καὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

1) Τρεῖς ἐργάται ὀφείλουν νὰ ἐκτελέσουν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν ἀσθενήσας δὲν ἔλαβε μέρος. Οἱ δύο ἄλλοι ἐργαζόμενοι 1 ὥραν ἐπιπλέον τὴν ἡμέραν ἐξετέλεσαν αὐτὸ εἰς 16 ἡμέρας. Ἐπὶ πόσας ὥρας ἠργάσθη ἕκαστος τῶν δύο ἐργατῶν ;

Λύσις. Οἱ 3 ἐργάται ἐργαζόμενοι ὡρισμένας ὥρας τὴν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ ἔργον εἰς 12 ἡμ. καὶ ὁ εἷς 36 ἡμ. Οἱ δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι μίαν ὥραν ἐπὶ πλέον τὴν ἡμέραν τελειώνουν αὐτὸ εἰς 16 ἡμέρας καὶ ὁ εἷς εἰς 32 ἡμ. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν ὡρῶν εἶνσι ἀντίστροφα, ἕπεται ὅτι ὁ λόγος τῶν ὡρῶν ἐργασίας τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν φοράν, θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$. Ὅθεν ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν ἐργασίας τὴν δευτέραν φορὰν εἶναι $\frac{9}{9}$, τὴν πρώτην φορὰν εἶναι $\frac{8}{9}$. Ἡ διαφορὰ $\frac{9}{9}-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$ εἶναι 1 ὥρα. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ $\frac{1}{9}$ τῶν ὡρῶν τὴν δευτέραν φορὰν εἶναι 1 ὥρα, τὰ $\frac{9}{9}$ θὰ εἶναι 9 ὧραι.

2) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 110 καὶ ἂν αὐξήσωμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κατὰ 45, ὁ λόγος των θὰ εἶναι $\frac{3}{5}$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ λόγος τῶν προκυψάντων ἀριθμῶν εἶναι $\frac{3}{5}$, ὁ μικρότερος θὰ εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι τώρα $110+45+45=200$. Τὰ $\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$ τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι 200, ἤτοι ὁ μεγαλύτερος εἶναι $200 : \frac{8}{5} = 125$ καὶ ὁ μικρότερος 75. Ὅθεν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 30 καὶ 80.

3) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες λόγον $\frac{5}{3}$ καὶ τοιοῦτοι ὥστε, ὅταν τὸν μεγαλύτερον τὸν ἐλαττώσωμεν κατὰ 15 καὶ αὐξήσωμεν τὸν μικρότερον κατὰ 15 νὰ γίνωνται ἴσοι.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἶναι 30 καὶ ὁ μικρότερος εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μεγαλυτέρου. Τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι 30, ἄρα ὁ μεγαλύτερος εἶναι 75 καὶ συνεπῶς ὁ μικρότερος εἶναι 45.

4) Ἔμπορος ἠγόρασε ὕφασμα πρὸς 40 δραχ. τὸν πῆχυν. Κατόπιν πωλεῖ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ πρὸς 54,4 δραχ. τὸν πῆχυν, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 56 καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 50 δραχ. τὸν πῆχυν.

Ἐκέρδισεν δὲ οὕτω ἐν συνόλῳ 1476 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος καὶ τὸ κέρδος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα. Ὑποθέτομεν λοιπὸν τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος 20 πήχεις καὶ τὸ πωλοῦμεν ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ λόγος τοῦ πραγματικοῦ μήκους πρὸς 20, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τοῦ ὁλικοῦ κέρδους πρὸς τὸ κέρδος τὸ προερχόμενον ἀπὸ τοὺς 20 πήχεις, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι 120 πήχεις.

5) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 24 δρχ. τὸν πῆχυν. Κατόπιν πωλεῖ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ πρὸς 34 δραχ, τὸν πῆχυν καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ πρὸς 36 δραχ. τὸν πῆχυν. Ἐκέρδισε δὲ οὕτω 880 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος. *ἀπ. 80 πηχ.*

6) Ἐπλήρωσέ τις διὰ τρία τεμάχια ὑφάσματος 2870 δραχμάς. Τὸ πρῶτον, τὸ ὁποῖον ἦτο 9 πηχ. ἐπὶ πλέον τοῦ δευτέρου καὶ 20 πηχ. ἐπὶ πλέον τοῦ τρίτου, τὸ ἠγόρασε πρὸς 22 δραχμὰς τὸν πῆχυν, τὸ δεύτερον πρὸς 30 δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ τὸ τρίτον πρὸς 32 δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν τριῶν τεμαχίων.

ἀπ. τὸ α' 45 πηχ., τὸ β' 36 πηχ., τὸ γ' 25 πηχ.

7) Εἷς ἠγόρασε δύο δοχεῖα ἐλαίου, τὸ πρῶτον πρὸς 20 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δεύτερον πρὸς 22 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 1920 δραχμάς. Ἐὰν τὸ πρῶτον δοχεῖον περιέχῃ τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου, νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας περιέχει ἕκαστον. *ἀπ. 30 60*

8) Εἷς ἠγόρασε ἓν τεμάχιον ὕφασμα πρὸς 36 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Λόγῳ ὅμως βλάβης αὐτοῦ ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ πρὸς 24 δραχ. τὸν πῆχυν, τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 30 δραχ. τὸν πῆχυν καὶ ἐζημιώθη 168 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τεμαχίου. *ἀπ. 20 πηχ.*

9) Εἷς ἠγόρασε ὕφασμα πρὸς 20 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πωλεῖ κατόπιν τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ πρὸς 24 δρχ. τὸν πῆχυν, τὸ $\frac{1}{6}$ πρὸς δραχ. 24,5, τὸ $\frac{1}{4}$ πρὸς 24 δραχμὰς καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 30 δραχ. τὸν πῆχυν. Οὕτω ἐκέρδισε 165 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος αὐτοῦ. *ἀπ. 36 πηχ.*

10) Ἠγόρασέ τις σῖτον. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ πρὸς 4,2 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τὰ $\frac{2}{5}$ πρὸς 3,8 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸν ὑπόλοιπον πρὸς 3 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Κατόπιν πωλήσας αὐτὸν ἀντὶ 3348 δραχ. ἐκέρδισε τὸ $\frac{1}{5}$ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας εἶχεν ἀγοράσει. *ἀπ. 750*

11) Δύο ἐργάται συνεφώνησαν νὰ ἐκτελέσουν ἓν ἔργον εἰς 24 ἡμέρας, ἀλλὰ κατόπιν 8 ἡμερῶν ἐργασίας προσελήφθησαν καὶ ἕτεροι 6 ἐργάται. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τώρα τὸ ἔργον. *ἀπ. 4 ἡμ.*

12) Εἷς λόχος στρατιωτῶν ἐξ 120 ἀνδρῶν εἶχε προμηθευθῆ τρόφιμα διὰ 25 ἡμέρας, ἀλλὰ μετὰ 10 ἡμέρας προσετέθησαν εἰς αὐτοὺς καὶ ἕτεροι 30 στρατιῶται ἄνευ τροφίμων. Ἐπὶ πόσας ἡμέρας θὰ ἐπαρκέσουν τώρα τὰ τρόφιμα ; *ἀπ. 12 ἡμ.*

13) Οἱ ἄνδρες ἑνὸς φρουρίου εἶχον ἀκόμη τρόφιμα διὰ 60 ἡμέρας, ὅταν ἔλαβον διαταγὴν ἡ δύναμις αὐτῶν νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 30 στρατιώτας. Οἱ ἐναπομείναντες ἠλάττωσαν τὴν ἀρχικὴν μερίδα κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς καὶ οὕτω τὰ τρόφιμα, τὰ ὁποῖα εἶχον ἐπήρκεσαν διὰ 90 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἄνδρες ἦσαν ἐξ ἀρχῆς.

Λύσις. Οἱ ἐναπομείναντες, ὅταν λαμβάνουν τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ἀρχικῆς μερίδος περνοῦν 90 ἡμέρας, ὅταν ὅμως ἐλάμβανον τὰ $\frac{5}{5}$ τῆς ἀρχικῆς θὰ περνοῦσαν 72 ἡμέρας. Ἤτοι οἱ ἐναπομείναντες περνοῦν μὲ τὰ τρόφιμα τῶν 30 στρατιωτῶν 12 ἡμέρας ἐπιπλέον. Ἄρα οἱ ἐναπομείναντες ἦσαν $30 \times \frac{60}{12} = 150$. Ὅθεν ὁ ἀρχικὸς ἀριθμὸς αὐτῶν ἦτο 180 στρατιῶται.

14) Οἱ 9 ἐργάται εἰς 12 ἡμ. λαμβάνουν 8640 δρχ. Οἱ 12 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ λάβουν 7680 δρχ. *ἀπ. 8 ἡμ*

15) Οἱ 25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 30 ἡμέρ. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 10

ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ τελειώσουν αὐτὸ εἰς 20 ἡμέρας;

ἀπ. 30 ἐργ.

16) Οἱ 36 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 50 ἡμέρας ὑφαίνουν ὕφασμα μήκους 9000 μέτρων. Εἰς πόσας ἡμέρας οἱ 12 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ ὑφάνουν 3600 μέτρα ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος; *ἀπ. 48 ἡμ.*

17) Οἱ 14 ἐργάται ἐργαζόμενοι 6 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὑφαίνουν εἰς 8 ἡμ. 600 μ. ὑφάσματος. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν οἱ 7 ἐργάται, ἵνα ὑφάνουν εἰς 4 ἡμέρας 200 μέτρα ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος; *ἀπ. 8 ὥρ.*

18) Μὲ 275 ὀκ. χόρτου τρέφει τις 3 ἀγελάδας διὰ 10 ἡμέρας. Πόσας ἀγελάδας θὰ ἔτρεφε μὲ 2475 ὀκ. χόρτου διὰ 30 ἡμέρας; *ἀπ. 9 ἀγ.*

19) Οἱ 7 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 28 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέρρν οἱ 49 ἐργάται, ἵνα τελειώσουν αὐτὸ εἰς 5 ἡμέρας; *ἀπ. 8 ὥρ.*

20) Οἱ 13 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 16 ἡμέρας ἔσκαψαν τάφρον μήκους 52 μ., πλάτους 1 μ. καὶ βάθους 12 μέτρων. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ σκάψουν εἰς 9 ἡμέρας τάφρον μήκους 48 μέτρων, πλάτους 0,75 μ. καὶ βάθους 6 μέτρων; *ἀπ. 12 ἐργ.*

21) Μὲ 18 ὀκάδας νήματος ὑφαίνει τις ὕφασμα μήκους 36 μέτρων καὶ πλάτους 0,72 μ. Πόσα μέτρα μήκους ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος θὰ ὑφάνῃ μὲ 24 ὀκ. νήματος, ὅταν τὸ πλάτος αὐτοῦ εἶναι 0,80 μ; *ἀπ. 43,2 μ.*

22) Μία ἀντλία πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 2 ἡμέρας, ὅταν λειτουργεῖ $4\frac{1}{3}$ ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ λειτουργῇ ἑτέρα ἀντλία, τῆς ὁποίας ἡ παροχὴ εἶναι τὰ $\frac{8}{9}$ τῆς πρώτης, ἵνα πληρώσῃ αὐτὴν εἰς 3 ἡμέρας;

ἀπ. 3 ὥρ. 15 λ.

23) Ἀγρὸς 12,5 στρεμάτων θερίζεται ὑπὸ 15 ἐργατῶν, ὅταν ἐργάζωνται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 5 ἡμέρας. Πόσοι ἐρ-

γάται ἐργαζόμενοι 7,5 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ θερίσουν ἀγρὸν 15 στρεμ. εἰς 4 ἡμέρας; *ἀπ. 24 ἐργ.*

24) Μία ὁδὸς μήκους 240 μέτρων καὶ πλάτους 4,5 μέτρων ἐπεστρώθη ὑπὸ 6 ἐργατῶν, οἱ ὁποῖοι ἠργάζοντο 7,5 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 10 ἡμέρας. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται 10 ἐργάται, ἵνα εἰς 6 ἡμέρας ἐπιστρώσουν ὁδὸν μήκους 180 μέτρων καὶ πλάτους 6,4 μ; *ἀπ. 8 ὥρ.*

25) Εἷς πεζοπόρος βαδίζων 8 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ καλύπτων ἀπόστασιν 8 χιλμ. εἰς 1 ὥρ. 20 λ, ἐχρειάσθη 5 ἡμέρας ἵνα μεταβῇ ἀπὸ μίαν πόλιν εἰς ἄλλην. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ βαδίζῃ ἕτερος πεζοπόρος, ὅταν καλύπτῃ ἀπόστασιν 6,25 χιλμ. εἰς 1 ὥρ. 15 λ., ἵνα διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων εἰς 4 ἡμέρας; *ἀπ. 12 ὥρ.*

26) Οἱ 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρ. 20 λ. τὴν ἡμέραν ὑφαίνουν ὕφασμα 120 μ. μήκους καὶ 0,75 μ. πλάτους εἰς 3 ἡμέρας. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 7,5 ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ ὑφάνουν ὕφασμα 72 μ. μήκους καὶ 0,80 μ. πλάτους εἰς 4 ἡμέρας; *ἀπ. 8 ὥρ.*

27) Τέσσαρες ἐργάται ἐργαζόμενοι 7,5 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 18 ἡμέρας. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται 9 ἐργάται, ἵνα ἐκτελέσουν τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 12 ἡμέρας; *ἀπ. 8 ὥρ. 20 λ.*

28) Ἕξ ἐργάται δι' ἐργασίαν 4 ἡμερῶν ἐπληρώθησον 1080 δραχμάς. Οἱ 8 ἐργάται με ἡμερομίσθιον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἡμερομισθίου τῶν πρώτων ἐργατῶν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ λάβουν 2240 δραχμάς. *ἀπ. 7 ἡμ.*

29) Ἔργον τι συνεφωνήθη νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 17 ἡμέρας. Πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 15 ἐργάται, οἵτινες εἰς 12 ἡμέρας ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ. Δύνανται οἱ ἐργάται οὗτοι νὰ περατώσουν τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ταχθείσης προθεσμίας καὶ ἂν ὄχι πόσους ἀκόμη ἐργάτας θὰ χρειασθῶμεν πρὸς τοῦτο; *ἀπ. 9 ἐργ.*

30) Μία ὁμὰς ἐργατῶν ἀφοῦ ἐξετέλεσε τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ἔργου, περιωρίσθη εἰς τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς καὶ ἐχρειάσθη 15 ἡμέρας, ἵνα τελειώσῃ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον. Εἰς πόσας ἡμέρας οἱ ἐργάται τῆς ἀρχικῆς ὁμάδος ἐργαζόμενοι ὁμοῦ θὰ ἐξετέλουν ὁλόκληρον τὸ ἔργον;

Λύσις.

Τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ἐργατῶν τελειώνουν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ἔργου εἰς 15 ἡμέρας

$\frac{5}{5}$ » » » » $\frac{8}{8}$ » X=24 ἡμ.

31) Ἔχει τις τέσσαρα τεμάχια ὑφάσματος. Οἱ 2 πήχεις τοῦ πρώτου τιμῶνται ὅσον οἱ 3 πηχ. τοῦ δευτέρου, οἱ 5 πήχεις τοῦ δευτέρου ὅσον οἱ 6 πηχ. τοῦ τρίτου καὶ οἱ 3 πήχεις τοῦ τρίτου ὅσον οἱ 2 πήχ. τοῦ τετάρτου. Ἄν ὅμως ἀγοράσωμεν ἕνα πῆχυν ἀπὸ ἕκαστον θὰ πληρώσωμεν ἐν ὅλῳ 247,5 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ἑκάστου.

Ἀπ. 81 54 45 67,5

32) Κατόπιν 20 ἡμερῶν ἐργασίας οἱ 16 ἐργάται ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ἔργου. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ταύτην 4 ἐργάται ἀπεχώρησαν. Πόσας ἡμέρας θὰ χρειασθοῦν οἱ ἐναπομείναντες ἐργάται, ἵνα ἐκτελέσουν τὸ ὑπόλοιπον ἔργον; *ἀπ. 16 ἡμ.*

33) Δύο ἐργάται ἐργάζονται ὁμοῦ καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει ἡμερομίσθιον $\frac{1}{5}$ ἐπιπλέον τοῦ πρώτου. Ἀφοῦ ἠργάσθησαν ὁ πρῶτος ἐπὶ 25 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ 18 ἡμέρας ἔλαβον ὁμοῦ 2796 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου.

Λύσις. Ἡ 1 ἡμέρα ἐργασίας τοῦ δευτέρου ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{6}{5}$ ἡμέρας ἐργασίας τοῦ πρώτου καὶ αἱ 18 ἡμέραι ἐργασίας τοῦ δευτέρου ἰσοδυναμοῦν μὲ $18 \times \frac{6}{5}$ ἡμέρας ἐργασίας τοῦ πρώτου, ἤτοι 21,6 ἡμέρας, καὶ συνεπῶς ἂν ὁ πρῶτος ἠργάζετο $25 + 21{,}6 = 46{,}6$ ἡμέρας θὰ ἐλάμβανε 2796 δραχ. ὅθεν τὸ ἡμερομίσθιον αὐτοῦ εἶναι 2796 : $46.6 = 60$ δραχμαὶ καὶ τοῦ δευτέρου 72 δραχμαί.

34) Τρία τεμάχια ὑφάσματος εἶναι ἐν συνόλῳ 480 πήχεις.

Ἂν τὸ πρῶτον ἐλαττωθῇ κατὰ τὰ $\frac{2}{7}$, τὸ δεύτερον κατὰ τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὸ τρίτον κατὰ τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ μήκους του, θὰ εἶναι ὅλα τοῦ αὐτοῦ μήκους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν μῆκος ἑκάστου.

Λύσις. Τὸ πρῶτον εἶναι τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ τρίτου καὶ τὸ δεύτερον τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ τρίτου, ἄρα τὰ $\frac{24}{9}$ τοῦ τρίτου εἶναι 480 πήχεις καὶ συνεπῶς τὸ τρίτον ἔχει μῆκος $480 : \frac{24}{9} = 180$ πηχ. Ἑπομένως τὸ πρῶτον εἶναι 140 πήχ. καὶ τὸ δεύτερον 160 πήχεις.

35) Ἔργον τι συνεφωνήθη νὰ ἐκτελεσθῇ ὑπὸ 9 ἐργατῶν εἰς 16 ἡμέρας. Οὗτοι ὅμως εἰς 6 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὰς ὑπολοίπους ἡμέρας οἱ ἐργάται οὗτοι, ἵνα περατώσουν τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ταχθείσης προθεσμίας;

ἀπ. 12 ὥρ.

36) Ἕνα ἔργον ἔπρεπε νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 24 ἡμέρας. Πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 15 ἐργάται, οἵτινες ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ ἐξετέλουν αὐτὸ ἐντὸς τῆς ταχθείσης προθεσμίας, ἀλλὰ ἔπειτα ἀπὸ 10 ἡμέρας ἐργασίας οἱ 5 ἐργάται ἀπεχώρησαν. Πόσας ἡμέρας θὰ χρειασθοῦν οἱ ἐναπομείναντες ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἵνα περατώσουν αὐτό;

Λύσις. Διὰ τὴν περάτωσιν τοῦ ἔργου ἀπαιτοῦντο ἐν ὅλῳ $15 \times 8 \times 24 = 2880$ ὧραι. Ἐκαλύφθησαν ὅμως $15 \times 8 \times 10 = 1200$ ὧραι, ἄρα ὑπολείπονται 1680 ὧραι ἀκόμη καὶ οἱ ἐναπομείναντες ἐργάται καλύπτουν $10 \times 9 = 90$ ὥρας ἡμερησίως. Ἑπομένως θὰ χρειασθοῦν $1680 : 90 = 18\frac{2}{3}$ ἡμέρας διὰ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον.

37) Εἷς ἠγόρασε δύο τεμάχια ὑφάσματος διαφόρων μηκῶν καὶ ποιοτήτων ἀντὶ 810 δραχμῶν. Τὰ δύο τεμάχια εἶναι συνολικῶς 40 πήχεων. Οἱ 4 πήχεις τοῦ πρώτου τιμῶνται ὅσον οἱ 3 πήχεις τοῦ δευτέρου καὶ ἡ ἀξία τοῦ δευτέρου τεμαχίου εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ἀξίας τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου καὶ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως. *ἀπ. 25 πηχ. 15 πηχ. 18 δρχ. 24 δρχ.*

38) Ἔργον τι συνεφωνήθη νὰ ἐκτελεσθῇ ὑπὸ 12 ἐργατῶν εἰς 17 ἡμέρας. Ἔπειτα ἀπὸ 11 ἡμέρας ἐργασίας 5 ἐργάται ἀσθενήσαντες ἀπέσχον καὶ ὁ ἐργολάβος δὲν ἠδυνήθη νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτοὺς εἰμὴ μετὰ 4 ἡμέρας. Πόσους ἐργάτας πρέπει νὰ μισθώσῃ ἀπὸ τῆς ἡμέρας ταύτης, ἵνα ἐκτελεσθῇ τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ταχθείσης προθεσμίας ;

Λύσις. Πρὸς περάτωσιν τοῦ ἔργου ἐχρειάζοντο $17 \times 12 = 204$ ἡμερομίσθια. Συνεπληρώθησαν μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς προσλήψεως νέων ἐργατῶν $11 \times 12 + 4 \times 7 = 160$ ἡμερομισθ., ἄρα ὑπολείπονται ἤδη 44 ἡμερομίσθια, ἅτινα πρέπει νὰ τελειώσουν εἰς 2 ἡμ. καὶ συνεπῶς ἀπαιτοῦνται $44 : 2 = 22$ ἐργάται, ἐπειδὴ ὅμως ὑπάρχουν ἤδη 7 ἐργάται πρέπει νὰ μισθωθοῦν 15 ἐργάται, ἵνα τελειώσῃ τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ταχθείσης προθεσμίας.

8ον. Προβλήματα Μερισμοῦ

1) Ἓν ποσὸν χρημάτων διενεμήθη εἰς τρεῖς ἀνθρώπους ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 5. Ἐὰν ὁ δεύτερος ἐξ αὐτῶν ἔλαβε 8400 δραχμὰς περισσότερον τοῦ πρώτου, νὰ εὑρεθῇ πόσα ἔλαβεν ἕκαστος. *ἀπ. 8400 16800 21000*

2) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 3876 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}$. Ὁ ἀριθμὸς 1197 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ καὶ ὁ 635 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $4\frac{4}{5}, 5\frac{1}{3}, 7\frac{1}{2}$.

ἀπ. α) 1836 1224 816 β) 360 405 432 γ) 250 225 160

3) Εἰς μίαν συγκέντρωσιν ἦσαν 244 πρόσωπα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν ἦτο τὰ $\frac{8}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γυναικῶν, τῶν δὲ γυναικῶν τὰ $\frac{2}{7}$ τῶν παιδιῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ἑκάστου τούτων. *ἀπ. 64 40 140*

4) Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τῶν 4802 δραχμῶν εἰς τρία πρόσωπα ὡς ἑξῆς : Τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι τὰ $\frac{8}{5}$ τοῦ δευτέρου καὶ $\frac{12}{5}$ τοῦ τρίτου. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

ἀπ. 2352 1470 980

5) Ἓν ποσὸν χρημάτων διενεμήθη εἰς τρία πρόσωπα ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{5}$, $8\frac{1}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου δεδομένου ὅτι ὁ τρίτος ἔλαβε 680 δραχ.

ἀπ. 180 592 680

6) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν 47200 δραχμῶν εἰς τρία πρόσωπα ὡς ἑξῆς: Ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ πρώτου καὶ 1600 δραχμὰς ἐπὶ πλέον, ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου καὶ 1200 δραχμὰς ἀκόμη. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

Λύσις. Ὁ τρίτος ἔλαβε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ πρώτου, τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 1600 δραχμῶν καὶ 1200 δραχμὰς ἐπὶ πλέον, ἤτοι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πρώτου 2400 δρρχμάς. Ἂν τώρα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ μεριστέον ποσὸν τὸ ἄθροισμα 1600+2400=4000 δρσχ. θὰ ἔχωμεν πρὸς διανομὴν τὸ ποσὸν τῶν 47200—4000=43200 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον θὰ μερίσωμεν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1, $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$ ἢ 5, 4, 3. Ὅθεν τὰ ἀντίστοιχα μερίδια θὰ εἶναι 18.000 16.000 13.200.

7) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν 46.600 δραχμῶν εἰς τρία πρόσωπα ὡς ἑξῆς: Ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ διπλάσια τοῦ πρώτου καὶ 6250 δραχμὰς ἐπὶ πλέον, ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ὅσων ἔλαβον οἱ δύο ἄλλοι ὁμοῦ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἂν ἀπὸ τὸ μεριστέον ποσὸν ἀφαιρέσωμεν τὰς 6250 δρχ. καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῶν, θὰ μερίσωμεν τὰ ἐναπομείναντα χρήματα ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1. 2, $\frac{3}{5}\times(1+2)$ ἢ 5 10 9. Ὅθεν εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι τὰ μερίδια αὐτῶν, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως 7625 21500 17475.

8) Νὰ μερισθῇ νὸ ποσὸν τῶν 2220 δραχμῶν εἰς 2 ἄνδρας 3 γυναῖκας καὶ 5 παιδιά, ὡς ἑξῆς: Τὸ μερίδιον ἑκάστου παιδιοῦ νὰ εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τῆς γυναικός, ταύτης δὲ τὸ μερίδιον νὰ εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἀνδρός. Πόσα θὰ λάβῃ ἑκάστη ὁμάς;

Λύσις. Θὰ μερίσωμεν τὸ ποσὸν τῶν 2220 δραχμῶν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1×2, $\frac{4}{5}\times3$, $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times5$ ἢ 10 12 15 καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως πόσα θὰ λάβῃ ἑκάστη ὁμάς.

9) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν 15000 δραχμῶν εἰς τρία πρόσωπα ὡς ἑξῆς: Τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ τοῦ δευτέρου $\frac{5}{4}$ καὶ τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τοῦ τρίτου $\frac{7}{3}$

Λύσις. Ὅταν ὁ πρῶτος λαμβάνῃ 5 δραχμὰς ὁ δεύτερος θὰ λαμβάνῃ 4, ἄρα εἰς τὰς 35 δραχμὰς τοῦ πρώτου ἀντιστοιχοῦν 28 τοῦ δευτέρου. Ἐπίσης εἰς τὰς 35 δραχμὰς τοῦ πρώτου ἀντιστοιχοῦν 15 δραχμαὶ τοῦ τρίτου. Ὅθεν θὰ μερίσωμεν τὸ ποσὸν τῶν 15000 δραχμῶν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 35 28 καὶ 15, ἵνα εὕρωμεν τὰ ἀντίστοιχα μερίδια.

10) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν 2060 δραχμῶν εἰς τρία μέρη ὡς ἑξῆς: Τὸ πρῶτον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ δεύτερον $\frac{4}{5}$ καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον $\frac{7}{8}$·

ἀπ. 560 700 800

11) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 15755 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $2\frac{1}{4}$ 3 1,6.

ἀπ. 5175 6900 3680

12) Τρεῖς ἐργάται δύνανται νὰ ἐκτελέσουν ἓν ἔργον εἰς 25 ($10\frac{1}{2}$) ἡμέρας ὁ α', εἰς 30 ($6\frac{1}{4}$) ἡμ. ὁ β' καὶ εἰς 35 ($11\frac{2}{3}$) ἡμ. ὁ γ'. Ἀφοῦ ἀνέλαβον ὁμοῦ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου καὶ ἐπεράτωσαν αὐτό, ἔλαβον ὡς ἀμοιβὴν 5350 (716). Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ;

ἀπ. 2100 (200) 1750 (336) 1500 (180)

13) Εἷς ἀντήλλαξε ὕφασμα, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς τιμᾶται 18 (12,5) δραχμὰς μὲ ὕφασμα τῶν 12 (18,75) δραχμῶν κατὰ πῆχυν. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ ἀνταλλαγέντα τεμάχια εἶχον συνολικὸν μῆκος 170 (80) πήχεων, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου.

ἀπ. 68 (48) 102 (32)

14) Τρία τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν συνολικὸν μῆκος 497,7 πήχεις καὶ εἶναι ὅλα τῆς αὐτῆς ἀξίας. Ἐὰν ὁ πῆχυς τοῦ πρώ-

του τιμᾶται 42 δραχμάς, τοῦ δευτέρου 45 δραχμὰς καὶ τοῦ τρίτου 60 δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου.

Λύσις. Ἀφοῦ πάντα εἶναι τῆς αὐτῆς ἀξίας, τὰ μήκη αὐτῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς τιμάς των. Ὅθεν εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μήκη των εἶναι ἀντιστοίχως 189, 176,4 132,3 πήχεις.

15) Ἕνα κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α διὰ τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα 70 χιλ. καθ᾽ ὥραν. Ἀφοῦ ἔφθασε εἰς αὐτὴν εὐθὺς ἀμέσως ἀναχωρεῖ διὰ τὴν πόλιν Α μὲ ταχύτητα 55 χιλ. τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ συνολικὸς χρόνος ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως μέχρι τῆς ἀφίξεώς του εἰς τὴν πόλιν Α εἶναι 5 ὧραι.

Λύσις. Ὁ δαπανηθεὶς χρόνος ἑκάστην φορὰν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν ταχύτητα. Ὅθεν μερίζοντες τὸν ἀριθμὸν 5 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὴν ταχύτητα, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου ἦτο $2\frac{1}{5}$ ὧραι. Ἡ ἀπόστασις λοιπὸν τῶν δύο πόλεων εἶναι $70 \times 2\frac{1}{5} = 154$ χιλιόμετρα.

16) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν βοσκήν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ πρῶτος ἔβοσκεν 45 πρόβατα ἐπὶ 20 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος 225 ἐπὶ 8 ἡμ. Ἐὰν διὰ τὴν βοσκὴν ἐπλήρωσαν ὁμοῦ 936 δραχ., νὰ εὑρεθῇ πόσα ἐπλήρωσε ἕκαστος. *ἀπ. 312 624*

17) Δύο ὁμάδες ἐργατῶν ἀνέλαβον ἑκάστη νὰ περατώσῃ ὡρισμένον ἔργον. Ἡ πρώτη ὁμάς, ἡ ὁποία εἶχεν 6 ἐργάτας ἐπεράτωσε τὸ ἀνατεθὲν εἰς αὐτὴν ἔργον εἰς 10 ἡμέρας. Ἡ δευτέρα ἡ ὁποία εἶχεν 9 ἐργάτας ἐπεράτωσε τὸ ἰδικόν της εἰς 8 ἡμέρας. Δεδομένου ὅτι τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς ἐργάτου τῆς δευτέρας ὁμάδος εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ τῆς πρώτης ὁμάδος καὶ ὅτι αἱ δύο ὁμάδες ἔλαβον ὁμοῦ 8820 δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἐργάτου ἑκάστης ὁμάδος. *ἀπ. 75 60*

18) Εἷς ἠγόρασε τρία τεμάχια ὑφάσματος, τῶν ὁποίων τὰ μήκη ἦσαν ἀντιστοίχως 8 πήχεις, 7 πήχεις καὶ 4 πήχεις καὶ ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 833 δραχμάς. Ἐὰν οἱ 5 πήχεις τοῦ πρώτου τιμῶνται ὅσον οἱ 3 πήχεις τοῦ δευτέρου καὶ οἱ 6 πήχεις τοῦ δευτέρου ὅσον καὶ οἱ 2 πήχεις τοῦ τρίτου, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἑκάστου τεμαχίου. *ἀπ. 21 35 105*

19) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν 357 δραχμῶν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 24 18 12 καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$.

Λύσις. Θὰ μερίσωμεν τὰς 357 δραχμὰς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 24×1 $18 \times \frac{4}{3}$ $12 \times \frac{5}{3}$ ἢ τῶν ἀριθμῶν 6, 6 καὶ 5, καὶ εὑρίσκομεν 126 126 105.

20) Εἷς μίαν ἐπιχείρησιν ἐργάζονται 320 ἄνδρες καὶ γυναῖκες. Λαμβάνουν δὲ ἡμερησίως οἱ ἄνδρες 8700 δραχμὰς καὶ αἱ γυναῖκες 7875 δραχμάς. Δεδομένου ὅτι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης γυναικὸς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀνδρός, νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἄνδρες καὶ πόσαι γυναῖκες ἦσαν καὶ τί ἡμερομίσθιον ἐλάμβανον.

Λύσις. Ἐὰν τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἀνδρὸς ἦτο ἴσον πρὸς τὸ τῆς γυναικός, οἱ ἄνδρες θὰ ἐλάμβανον ἡμερησίως $8700 \times \frac{3}{4} = 6525$ δραχμὰς καὶ αἱ γυναῖκες 7875 δραχμάς, ἕπεται ὅτι τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν. Ὅθεν μερίζοντες τὸν ἀριθμὸν 320 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6525 καὶ 7875 ἢ 29 καὶ 35 εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ ἄνδρες ἦσαν 145 καὶ αἱ γυναῖκες 175. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα ὅτι τὰ ἡμερομίσθια αὐτῶν ἦσαν 60 δραχμαὶ καὶ 45 δραχμαί.

21) Εἷς ἠγόρασε τρία τεμάχια ὑφάσματος συνολικοῦ μήκους 275 πήχεων. Ἐπλήρωσε διὰ τὸ πρῶτον 720 δραχμάς, διὰ το δεύτερον 540 δραχμάς καὶ διὰ τὸ τρίτον 630 δραχμάς. Δεδομένου ὅτι οἱ 3 πήχεις τοῦ πρώτου τιμῶνται ὅσον οἱ 5 πήχεις τοῦ δευτέρου ἢ οἱ 8 πήχεις τοῦ τρίτου, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου καὶ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως.

Λύσις. Ἐὰν ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου τιμᾶται 40 δραχμὰς, τότε τοῦ δευτέρου θὰ τιμᾶται 24 δραχμὰς καὶ τοῦ τρίτου 15 δραχμάς. Προσέτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ἑκάστου τεμαχίου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ ὑφάσματος καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως αὐτοῦ. Ἄρα θὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 275, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 720 540 630 καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμούς, 40, 24, 15, ἤτοι εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{720}{40}$ $\frac{540}{24}$ $\frac{630}{15}$ ἢ τῶν 12. 15, καὶ 28. Εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μήκη αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως 60, 75 καὶ 140 πήχεις καὶ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως 12 7,2 4,5.

22) Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ εἷς δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἓν ἔργον εἰς 18 ἡμέρας καὶ ὁ ἄλλος εἰς 27 ἡμέρας, ἀφοῦ ἠργάσθησαν ὁ πρῶτος μόνος ἐπὶ 9 ἡμέρας καὶ ἐν συνεχείᾳ ὁ δεύτερος μόνος ἐπὶ 9 ἡμέρας. Κατόπιν περατώνουν ὁμοῦ αὐτὸ καὶ λαμβάνουν ἐν συνόλῳ 1620 δραχμάς. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἂν τὸ μερίδιόν του εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ἐκτελεσθὲν ὑπ' αὐτοῦ ἔργον;

Λύσις. Εἰς τὸ διάστημα τῶν 9 ἡμερῶν ὅπου ἠργάσθησαν ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{9}{18}+\frac{9}{27}=\frac{5}{6}$ τοῦ ἔργου. Ὑπολοίπεται τώρα τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον ἐξετέλεσαν ὁμοῦ εἰς $\frac{1}{6}:\frac{5}{54}=1{,}8$ ἡμέρας, διότι εἰς μίαν ἡμέραν καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐκτελοῦν τὰ $\frac{5}{54}$ τοῦ ἔργου. Ὁ πρῶτος λοιπὸν ἐξετέλεσεν τὰ $\frac{9}{18}+\frac{1{,}8}{18}=\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{9}{27}+\frac{1{,}8}{27}=\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἂν μερίσωμεν τώρα τὸ ποσὸν τῶν 1620 δραχμῶν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 2, εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβουν, ὁ πρῶτος 972 δραχμὰς καὶ ὁ δεύτερος 648.

23) Ἐὰν λάβῃ τις ἐκ δύο ποιοτήτων ἀλεύρου 3 ὀκάδας ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ 2 ὀκάδας ἀπὸ τὸ δεύτερον, θὰ παρασκευάσῃ 6 ὀκ. 240 ἄρτου. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον ἂν θέλῃ νὰ παρασκευάσῃ ἄρτον 660 ὀκάδων;

ἀπ. α' 300 β' 200

24) Διὰ δύο τεμάχια ὑφάσματος συνολικοῦ μήκους 63 πήχεων ἐπλήρωσέ τις 2826 δραχμάς. Ἐὰν τὸ δεύτερον ὕφασμα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου, καὶ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως αὐτοῦ εἶναι τὰ $\frac{19}{25}$ τοῦ πρώτου, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἑκάστου.

ἀπ. 50 38

25) Εἷς ἐπώλησε δύο τεμάχια ὕφασμα. Τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦτο τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου πρὸς 8 δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 5,5 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Ὅταν ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ πρώτου εἰσέπραττε 15 δραχ. ὀλιγώτερον καὶ τοῦ δευτέρου 15 δραχμὰς περισσότερον, θὰ εἰσέπραττε ἀπ' ἀμφότερα τὸ αὐτὸ ποσόν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου.

Λύσις. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πρῶτον εἶναι 3 πήχεων καὶ τὸ δεύτερον 4 πήχεων. Τότε θὰ εἰσέπραττε ἐκ τοῦ πρώτου 24 δραχ. καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου 22 δραχ. καὶ διὰ νὰ εἰσπράξῃ ἀπ' ἀμφότερα τὸ αὐτὸ ποσόν, ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ τὸ πρῶτον 1 δρχ. ὀλιγώτερον καὶ τὸ δεύτερον 1 δραχ. περισσότερον ἀπὸ ὅτι τὰ ἐπώλησε. Ὅθεν ἡ ἀξία τοῦ πρώτου τεμαχίου ἦτο $24 \times 15 : 1 = 360$ δραχμαὶ καὶ τοῦ δευτέρου $22 \times 15 : 1 = 330$ δρχ. Τὰ δὲ μήκη αὐτῶν ἦσαν 45 πήχεις καὶ 60 πήχεις ἀντιστοίχως.

26) Εἷς ἠγόρασε δύο τεμάχια ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος, τῶν ὁποίων τὰ μήκη ἔχουν λόγον 3 πρὸς 8 καὶ διαφορὰν 20 πήχεων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου, δεδομένου ὅτι τὸ πλάτος τοῦ μακρυτέρου εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἄλλου καὶ ὅτι δι' ἀμφότερα ἐπλήρωσεν 810 δραχμάς.

Λύσις. Τὰ μήκη αὐτῶν εἶναι $8 \times 20 : 5 = 32$ πηχ. καὶ $3 \times 20 : 5 = 12$ πήχεις. Αἱ τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη καὶ τὰ πλάτη αὐτῶν ἤτοι $8 \times \frac{3}{4}$ καὶ 3×1 ἢ 6 καὶ 3. Ὅθεν ἡ ἀξία τοῦ πρώτου εἶναι 540 δραχμαὶ καὶ τοῦ δευτέρου 270 δραχμαί.

27) Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν τὴν 9ην π.μ. ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β. Ἐὰν τὸ πρῶτον διανύει 8 χιλμ. τὴν ὥραν ὀλιγότερον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ σημεῖον ὅπου συνηντήθησαν τὴν 1ὥρ. 45 λ. μ.μ. χωρίζει τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\frac{3}{4}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων. *ἀπ. 24 32 252 χιλμ*

9ον) Προβλήματα ποσοστῶν

1) Εἷς ἠγόρασεν 175 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 18 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ἐὰν ἐπώλησεν αὐτὸ μὲ κέρδος 16% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του, νὰ εὑρεθῇ πόσα ἐκέρδισεν. *ἀπ. 504*

2) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 18% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς καὶ ἐκέρδισεν 810 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος. *ἀπ. 4500*

3) Εἷς ἠγόρασεν ἐμπόρευμα ἀντὶ 3600 δραχμῶν. Ἐὰν ἐπώλησεν αὐτὸ ἀντὶ 4140 δραχμῶν, νὰ εὑρεθῇ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν. *ἀπ. 15%*

4) Ἕνα ἔπιπλον ἐπωλήθη μὲ κέρδος 12% ἐπὶ τῆς ἀξίας

τῆς ἀγορᾶς του ἀντὶ 1400 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ. *ἀπ. 1250*

5) Ἓν τετάχιον ὑφάσματος 15 πήχεων ἐπωλήθη μὲ ζημίαν 24°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του ἀντὶ 570 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τοῦ πήχεως. *ἀπ. 50 δρχ.*

6) Εἷς ἔμπορος ἐπώλησεν 24 πηχ. ὕφασμα μὲ κέρδος 25°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς καὶ εἰσέπραξε 480 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τοῦ πήχεως. *ἀπ. 16*

7) Ὅταν πωλήσῃ τις ἓν ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 12°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας του θὰ εἰσπράξῃ ὡρισμένον ποσόν, ἐνῷ ὅταν πωλήσῃ αὐτὸ μὲ κέρδος 16°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας του, θὰ εἰσπράξῃ 70 δρχ. περισσότερον ἀπὸ τὴν πρώτην φοράν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ ἐπίπλου. *ἀπ. 1750*

8) Εἷς ἐσκόπευε νὰ εἰσπράξῃ ὡρισμένον ποσὸν χρημάτων ὅταν πωλήσῃ ἓν ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 12°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του, ἀλλὰ λόγῳ βλάβης ἐπώλησεν αὐτὸ μὲ ζημίαν 5°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του καὶ εἰσέπραξε 459 δρχ. ὀλιγότερον ἀπὸ ὅτι ὑπελόγιζε τὴν πρώτην φοράν. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτό. *ἀπ. 2700*

9) Ἔμπορος ἐπώλησεν εἰς μικροπωλητὴν ἓν ὕφασμα μὲ κέρδος 12°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Ὁ μικροπωλητὴς ἐπώλησεν αὐτὸ μὲ κέρδος 25°/₀ ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του καὶ εἰσέπραξε 197,50 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐκόστιζεν τὸ ὕφασμα εἰς τὸν ἔμπορον. *ἀπ. 150*

10) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἓν ἐμπόρευμα καὶ ἐκέρδισε ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{16}$ τῆς ἀξίας ἀγορᾶς του. Νὰ εὑρεθῇ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν. *ἀπ. 18,75%*

11) Εἷς ἠγόρασε 75 πήχεις ὕφασμα πρὸς 68 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Κατόπιν πωλεῖ τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 15°/₀ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 64 δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσα ἐκέρδισε; *ἀπ. 339 δρχ.*

12) Εἷς ἠγόρασε 45 πήχεις ὕφασμα πρὸς 115 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Κατόπιν ἐπώλησε τὰ $\frac{5}{9}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 12°/₀ καὶ τὸ

ὑπόλοιπον μὲ ζημίαν 3 %. Πόσα ἐκέρδισε; *ἀπ. 276 δρχ.*

13) Εἷς ἠγόρασε 435 ὀκ. ζακχάρεως πρὸς 10 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πωλεῖ κατόπιν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ πρὸς 11 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ ὑπολοίπου, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 12 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τῆς ὅλης ζακχάρεως; *ἀπ. 11,3 δραχ.*

14) Ἠγόρασέ τις καφὲ πρὸς 75 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Ὅταν ὅμως ἔψησεν αὐτὸν ἔχασε τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ βάρους του. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τώρα τὴν ὀκᾶν, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 15 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς;

Λύσις. Τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς τοῦ νέου καφὲ τιμῶνται 75 δραχ. καὶ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται $75 : \frac{5}{6} = 90$ δρχ. Ὅθεν διὰ νὰ κερδίσῃ 15 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 103,5 δρχ.

14) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἀντὶ 1588 δραχμῶν. Κατόπιν πωλεῖ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 15 %, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου μὲ κέρδος 12 % καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μὲ κέρδος 4 δραχ. κατὰ πῆχυν ἀντὶ 433 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος.

Λύσις. Τὴν πρώτην φορὰν ἐπώλησε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ τεμαχίου, τὴν δευτέραν τὰ $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ αὐτοῦ καὶ ἑπομένως τὴν τελευταίαν φορὰν πάλιν τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ τεμαχίου μὲ κέρδος 4 δραχ. κατὰ πῆχυν ἐπωλήθη 433 δραχμάς, ἕπεται ὅτι ὁλόκληρον τὸ τεμάχιον θὰ ἐπωλεῖτο 1732 δραχμάς, ἤτοι θὰ εἴχαμεν κέρδος $1732 - 1588 = 144$ δραχμὰς κατὰ συνέπειαν τὸ μῆκος αὐτοῦ ἦτο $144 : 4 = 36$ πήχεις.

15) Ἐπλήρωσέ τις διὰ δύο ἐνδυμασίας 2260 δραχμάς. Κατόπιν πωλήσας τὴν μίαν μὲ κέρδος 12 % καὶ τὴν ἄλλην μὲ κέρδος 15 % ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 300 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς ἑκάστης ἐνδυμασίας.

Λύσις. Ἂν ἐπώλει καὶ τὰς δύο μὲ κέρδος 15 % θὰ εἶχεν ὁλικὸν κέρδος 339 δραχ. ἤτοι 39 δραχ. ἐπὶ πλέον. Τὸ ἐπιπλέον κέρδος προῆλθεν ἐκ τῆς πωλήσεως τῆς μιᾶς μὲ κέρδος 3 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς της. Ὅταν λοιπὸν αὕτη εἶχεν ἀγορασθῆ 1 δρχ. θὰ εἶχε κέρδος 0,03 δρχ., ἄρα ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς της εἶναι 39 : 0,03 = 1300 δρχ. καὶ ἑπομένως ἡ ἄλλη εἶχεν ἀγορασθῆ 960 δραχμάς.

17) Εἷς ἠγόρασε 340 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 18,8 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Κατόπιν ἐπώλησε τὰς 220 ὀκάδας μὲ κέρδος 10 % καὶ τὰς ὑπολοίπους μὲ τιμὴν κατωτέραν τῆς ἀγορᾶς. Ἐὰν ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὅλου ἐλαίου ἐκέρδισεν 173,6 δραχμάς, πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν αὐτοῦ ἑκάστην φοράν;

Λύσις. Ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τοῦ ἐλαίου ἦτο 6392 δραχμαὶ καὶ ἑπομένως ἐπωλήθη ἀντὶ 6392+173,6=6565,6 δρχ. αἱ 220 ὀκάδες ἐπωλήθησαν 4549,6 δραχμάς. Ὅθεν αἱ 120 ὀκάδες ἐπωλήθησαν ἀντὶ 2016 δραχμὰς καὶ ἡ ὀκᾶ ἐπωλήθη πρὸς 2016 : 120=16,8 δραχμάς.

18) Εἷς ἠγόρασε αὐγὰ ἀντὶ 975 δραχμάς. Κατόπιν πωλεῖ τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ ποσοῦ μὲ κέρδος 0,4 δρχ. τὸ ἕνα, τὰ δὲ ὑπόλοιπα μὲ κέρδος 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς καὶ εἰσέπραξε ἐκ τῆς πωλήσεως ὅλων 1201,5 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσα αὐγὰ εἶχεν ἀγοράσει.

Λύσις. Τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ ποσοῦ τὰ ἠγόρασε 682,5 δραχμὰς καὶ ἐκέρδισεν ἀπὸ αὐτὰ 136,5 δραχμάς. Τὸ ὁλικὸν κέρδος ἦτο 226,5 δρχ. Ἡ διαφορὰ 226,5—136,5=90 δραχμαὶ προῆλθεν ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐπωλήθησαν μὲ κέρδος 0,4 δρχ. ἕκαστον, ἄρα αὐτὰ ἦσαν 90 : 0,4= 225. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν, ὅτι ὅλον τὸ ποσὸν ἦτο 750 αὐγά.

19) Ἔμπορος ἔχει δύο τεμάχια ὑφάσματος συνολικοῦ μήκους 110 πήχεων. Πωλεῖ κατόπιν τὸν πῆχυν τοῦ ἑνὸς μὲ κέρδος 12% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ἀντὶ 22,4 δραχμῶν, τοῦ ἄλλου μὲ μέρδος 14 % ἀντὶ 34,2 δραχμῶν καὶ εἰσπράττει ἐκ τῶν δύο τεμαχίων 3054 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου καὶ τὸ ὁλικὸν κέρδος. *ἀπ. 60 πηχ. 50 πηχ. 354*

20) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε ἓν τεμάχιον ὕφασμα. Πωλεῖ κατόπιν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ μὲ ζημίαν 3% καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου μὲ ζημίαν 8 %. Μὲ πόσον τοῖς ἑκατὸν κέρδος πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ ὑπόλοιπον, ἵνα μὴ ζημιωθῇ:

Λύσις. Ἂν εἶχεν ἀγοράσει τὸν πῆχυν 800 δραχμάς, ἀπὸ τὰ $\frac{3}{8}$

τοῦ πήχεως θὰ ἐζημιοῦτο 9 δραχ. ἀπὸ τὰ $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$ πηχ. θὰ ἔχῃ ζημίαν 16 δραχ., ἤτοι ἐν συνόλῳ 25 δραχ. Τοῦ ἐναπομείναντος ἡ τιμὴ εἶναι 300 δραχ. καὶ ἀφοῦ θέλει εἰς τὰς 300 δραχμὰς νὰ κερδίσῃ 25 πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ ὑπόλοιπον μὲ κέρδος $8\frac{1}{3}$%, ἵνα μὴ ζημιωθῇ

21) Εἷς ἠγόρασε 120 ὀκάδας ζακχάρεως πρὸς 7,5 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Κατόπιν πωλεῖ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου μὲ κέρδος 5% καὶ τὴν ἐναπομείνασαν ἀντὶ 275 δραχμάς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ὁλοκλήρου τοῦ ποσοῦ; *ἀπ. 7,5%*

22) Εἷς ἠγόρασε 45 πήχεις ὕφασμα πρὸς 47,5 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Κατόπιν πωλεῖ 20 πήχεις πρὸς 60 δραχμὰς ἕκαστον. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου ὑφάσματος, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ ὅλου ὑφάσματος; *ἀπ. 54,6 δραχ.*

23) Εἷς ἠγόρασε 475 ὀκάδας καφὲ πρὸς 63 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ θέλει ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ νὰ κερδίσῃ 25% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πωλεῖ κατόπιν τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πρὸς 75,6 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 84 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ ἐναπομείναντος καφέ, ἵνα ἐκπληρωθῇ ἡ θέλησίς του; *ἀπ. 78,75 δραχ.*

24) Εἷς ἐπλήρωσε διὰ 18 ὀκάδας ζακχάρεως καὶ 6 ὀκάδας μέλι ἐν ὅλῳ 336 δρχ. Πωλήσας κατόπιν τὴν ζάκχαριν μὲ κέρδος 15% εἰσέπραξε ἀπὸ αὐτὴν 248,4 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν ἑκάστου. *ἀπ. 12 20*

25) Εἷς ἠγόρασεν 90 πήχεις ὕφασμα. Πωλεῖ κατόπιν 37 πήχεις μὲ κέρδος 8%, τὸ ὑπόλοιπον μὲ κέρδος 12% καὶ εἰσπράττει 27,2 περισσότερον ἀπὸ ὅτι θὰ εἰσέπραττεν, ἂν ἐπώλει ὅλον τὸ ὕφασμα μὲ κέρδος 10%. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸν πῆχυν.

Λύσις. Ἂν εἶχεν ἀγοράσει τὸν πῆχυν 100 δραχμὰς θὰ εἰσέπραττε συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα :

Ἀπὸ τοὺς 90 πήχεις μὲ κέρδος 10% τὸ ποσὸν τῶν 9.900 δραχμῶν
» » 37 » » » 8% » » » 3.996 »
» » 53 » » » 12% » » » 5.936 »

Ἤτοι θὰ εἶχεν διαφορὰν κέρδους 32 δραχ. Ἄρα ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ἦτο $27,2 \times 100 : 32 = 85$ δρχ.

26) Εἷς ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 63 δραχμὰς τόν πῆχυν. Κατόπιν πωλεῖ τὰ $\frac{5}{7}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 15% καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ ζημίαν 2%. Ἐὰν ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὅλου ποσοῦ ἐκέρδισε 319,5 δρχ., πόσους πήχεις εἶχεν ἀγοράσει;

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι εἶχεν ἀγοράσει ἕνα πῆχυν. Τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ πήχεως μὲ κέρδος 15% τιμῶνται 51,75 δρχ., τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ πήχεως μὲ ζημίαν 2% τιμῶνται 17,64 δρχ. ἄρα ἔχει κέρδος εἰς τὸν πῆχυν 6,39 δρχ. Ὅθεν οἱ πήχεις ἦσαν $319,50 : 6,39 = 50$.

27) Εἷς ἠγόρασε σῖτον ἀντὶ ὡρισμένου ποσοῦ χρημάτων. Κατόπιν πωλεῖ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 10%, τὸ $\frac{1}{5}$ μὲ κέρδος 20% καὶ τὸν ἐναπομείναντα μὲ ζημίαν 16%. Οὕτω ἐζημιώθη 153 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ ἀντὶ πόσων δρχ. εἶχεν ἀγοράσει τὸν σῖτον.

Λύσις. Ἂν εἶχεν ἀγοράσει αὐτὸν 500 δρχ., ἡ ζημία θὰ ἦτο $48-30=18$ δρχ. Ὅθεν ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς ἦτο $500 \times 153 : 18 = 4250$ δραχ.

28) Εἷς ἠγόρασεν ἓν κιβώτιον σάπωνα. Κατόπιν πωλεῖ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ κερδίζει 600 δρχ., τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου μὲ ζημίαν 3% καὶ τὸν ἐναπομείναντα μὲ κέρδος 10%. Ἐὰν ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ σάπωνος ἐκέρδισεν ἐν συνόλῳ 772,8 δρχ., νὰ εὑρεθῇ ἀντὶ πόσων δρχ. εἶχεν ἀγοράσει αὐτόν.

Λύσις. Ἐκ τῶν δύο ἄλλων πωλήσεων ἐκέρδισε $772,8-600=172,8$ δραχμάς. Ἐὰν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἶχε δώσει 40 δραχ. διὰ τὴν ἀγορὰν ὅλου τοῦ σάπωνος, τότε διὰ $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{40}$ αὐτοῦ εἶχε δώσει 6 δρχ. καὶ διὰ τὰ $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$ αὐτοῦ 9 δρχ. ἤτοι ἐν συνόλῳ 15 δρχ. Ἔλαβε δὲ ἐκ τῶν $\frac{6}{40}$ τοῦ ποσοῦ 5,82 δρχ. καὶ ἐκ τῶν $\frac{9}{40}$ τοῦ ποσοῦ 9,90 δρχ. ἤτοι ἐν συνόλῳ 15,72 δρχ. Ἀφοῦ ἐκ τῶν δύο τελευταίων εἶχε κέρδος 0,72 δρχ.. ἕπεται ὅτι εἶχε πληρώσει διὰ τὰ δύο αὐτὰ μέρη 15×172,8 : 0,72=3600 δραχμάς. Ἀφοῦ διὰ $\frac{15}{40}$ τοῦ ποσοῦ ἐπλήρωσεν 3600 δρχ. δι' ὁλόκληρον εἶχε πληρώσει 9600.

29) Πωλεῖ τις τὸ $\frac{1}{5}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος καὶ ζημιοῦται 690 δραχμάς, τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου μὲ κέρδος 12% καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μὲ ζημίαν 5%. Ἐὰν ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὅλου ὑφάσματος ἐκέρδισε 686 δρχ., νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ. *ἀπ. 20000 δρχ.*

30) Εἷς ἠγόρασεν ἓν τεμάχιον ὕφασμα πρὸς 12 δρχ. τὸν πῆχυν. Κατὰ τὴν πώλησιν εὑρέθη ὅτι ἦτο 5 πήχεις περισσότερον, ἀλλὰ ποιότητος κατωτέρας καὶ ἐπωλήθη πρὸς 9 δρχ. τὸν πῆχυν. Ἐὰν ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ ἐξημιώθη 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, νὰ εὑρεθῇ πόσων πήχεων ἦτο.

Λύσις. Ἐὰν τὸ τεμάχιον ἦτο 9 πήχεις θὰ εἶχεν ἀγορασθῇ 108 δρχ. Ἐκ τῆς πωλήσεως ὅμως αὐτοῦ ἐξημιώθη 20% καὶ ἑπομένως ἐπωλήθη 86,4 δρχ. Ὅθεν οἱ πωληθέντες πήχεις ἦσαν 86,5 : 9=9,6 δηλ. ἦτο ἐπὶ πλέον 0,6 πηχ. εὑρίσκομεν τώρα ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τεμαχίου ἦτο 9,6×5 : 0,6=80 πήχεις.

31) Εἷς ἠγόρασε γεώμηλα πρός ὡρισμένην τιμὴν τὴν ὀκᾶν. Κατὰ τὴν πώλησιν αὐτῶν παρετήρησεν, ὅτι τὸ βάρος των εἶχεν ἐλαττωθῇ κατὰ 15%. Πωλήσας ὅμως τὴν ὀκᾶν πρὸς 2,1 δρχ. εἰσέπραξε 5355 δρχ. ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 855 δρχ. ἦσαν κέρδος. Νὰ εὑρεθῇ πρὸς πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν.

Λύσις. Τὰ γεώμηλα εἶχον ἀγορασθῆ ἀντὶ 5355−855=4500 δρχ. Αἱ πωληθεῖσαι ὀκάδες ὀκάδες ἦσαν 5355 : 2,1=255. Ὅθεν αἱ ἀγορασθεῖσαι ὀκάδες ἦσαν 300 καὶ εἶχον ἀγορασθῆ πρὸς 1,5 δαχ. τὴν ὀκᾶν.

32) Εἷς ἠγόρασε 45 ὀκάδας ἐλαίου. Κατόπιν πωλεῖ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 22% ἀντὶ 256,2 δρχ. καὶ 13,8 ὀκάδας ἀντὶ 195,60 δρχ. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ ἐναπομείναντος ἐλαίου, ἵνα κερδίσῃ ἐκ τοῦ ὅλου ἐμπορεύματος 18%.

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ εἶχε ἀγορασθῆ ἀντὶ 210 δραχ. καὶ ἑπομένως ὁλόκληρον τὸ ἔλαιον ἀντὶ 630 δρχ. Διὰ νὰ κερδίσῃ λοιπὸν

18% πρέπει νὰ τὸ πωλήσῃ ἀντὶ 753,4 δρχ. Ἀφοῦ τὸ ἐναπομεῖναν ἔλαιον μετὰ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν πώλησιν ἦτο 16,2 ὀκάδες καὶ ἐπωλήθη ἀντὶ 291,60 δρχ., ἕπεται ὅτι ἡ ὀκᾶ αὐτοῦ ἐπωλήθη πρὸς 18 δρχ.

33) Εἷς ἠγόρασε δύο τεμάχια ὑφάσματος συνολικοῦ μήκους 54 πήχεων, τὸ πρῶτον πρὸς 37 δραχμὰς καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 51 δραχμὰς κατὰ πῆχυν. Πωλήσας κατόπιν ἀμφότερα μὲ κέρδος 10% εἰσέπραξε 2444,20 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου.

Λύσις. Ἀφοῦ ἀμφότερα ἐπωλήθησαν μὲ κέρδος 10% ἀντὶ 2444,20 δραχμῶν, ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς αὐτῶν ἦτο 2222 δραχμαί. Ἂν τώρα τά δύο τεμάχια εἶχον ἀγορασθῇ πρὸς 51 δραχμὰς τὸν πῆχυν ἡ ἀξία αὐτῶν θὰ ἦτο 2754 δραχμαὶ ἤτοι 2754—2222=532 δραχμαὶ ἐπὶ πλέον, ἥτις διαφορὰ προῆλθεν ἐκ τοῦ ὅτι ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου ἐπωλήθη 51—37=14 δραχμὰς ἐπὶ πλέον τῆς ἀξίας του. Ὅθεν τὸ πρῶτον ἦτο 38 πήχεων καὶ τὸ δεύτερον 15 πηχ.

34) Ἓν ἐμπόρευμα ἐπωλήθη διαδοχικῶς ἐπὶ τέσσαρας φορὰς μὲ κέρδος ἑκάστοτε 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ἀξία αὐτοῦ, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τελικῶς ἐπωλήθη ἀντὶ 5856,40 δραχμῶν.

Λύσις. Ἂν ἡ ἀρχικὴ ἀξία αὐτοῦ ἦτο 100 δραχμαί, αἱ τιμαὶ μὲ τὰς ὁποίας ἐπωλήθη ἑκάστοτε θὰ ἦσαν 110 121 133,1 146,41 δραχμαί. Ὅθεν ἡ ἀρχικὴ ἀξία αὐτοῦ ἦτο 5856,4 × 100 : 146,41 = 4000 δραχμαί.

35) Ἓν ἐμπόρευμα ἐπωλήθη διαδοχικῶς τέσσαρας φοράς, τὰς δύο πρώτας ἑκάστοτε μὲ κέρδος 10% καὶ τὰς δύο τελευταίας μὲ ζημίαν 10% τῆς ἀγορᾶς του. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ἀξία αὐτοῦ, ἂν τελικῶς ἐπωλήθη ἀντὶ 2450,25 δραχμῶν.

Λύσις. Ἂν ἡ ἀρχική του ἀξία ἦτο 100 δραχμαί, αἱ τιμαὶ μὲ τὰς ὁποίας ἐπωλήθη ἑκάστοτε θὰ ἦσαν 110, 121, 108,9 98,01 δραχμαί. Ὅθεν ἡ ἀρχικὴ ἀξία αὐτοῦ ἦτο 2450,25 × 100 : 98,01=2500 δραχμαί.

36) Ἓν ἐμπόρευμα ἐπωλήθη τὴν πρώτην φορὰν μὲ ζημίαν 13%. τὴν δευτέραν μὲ ζημίαν 8%, τὴν τρίτην μὲ κέρδος 10% ἀντὶ 83641,8 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχική του ἀξία.

Λύσις. Ἀφοῦ τὴν τελευταίαν φορὰν ἐπωλήθη μὲ κέρδος 10% ἀντὶ 83641,8 δραχμῶν εἶχεν ἀγορασθῇ ἀντὶ 76038 δραχμῶν. Τὴν πρὸ τελευταίαν φορὰν ἐπωλήθη μὲ ζημίαν 8% ἀντὶ 76038 δραχμῶν κ.ο.κ. Προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀξία αὐτοῦ ἦτο 95.000 δραχμαί.

37) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασεν ἓν τεμάχιον ὑφάσματος ἀντὶ 750 δρχ. Πωλήσας κατόπιν τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πρὸς 12 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 10,50 δραχμὰς τὸν πῆχυν, ἐκέρδισεν 10% ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς τοῦ ὅλου τεμαχίου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος αὐτοῦ. *ἀπ. 75 πηχ.*

38) Εἷς ἠγόρασε σῖτον πρὸς 2,40 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν. Πωλήσας κατόπιν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 3,10 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς 3,25 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν καὶ τέλος τὸν ἐναπομείναντα πρὸς 2,3 δραχμάς, ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 47,40 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας σίτου εἶχεν ἀγοράσει καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε. *ἀπ. 79 καὶ 25%*

39) Ἠγόρασέ τις ἓν τεμάχιον ὑφάσματος πρὸς 35 δραχ. τὸν πῆχυν. Κατόπιν πωλεῖ τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 18%, τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς 27,5 δραχμὰς τὸν πῆχυν καὶ τὸ ἐναπομεῖναν μὲ ζημίαν 4%. Ἐὰν ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὅλου ὑφάσματος ἐκέρδισεν 432 δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα. *ἀπ. 420 πηχ.*

40) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 12 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Κατὰ τὴν πλύσιν αὐτοῦ, τοῦτο ἔχασε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μήκους του. Πόσον πρέπει τώρα νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν τοῦ ὑφάσματος ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 12% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς; *ἀπ. 16,8 δρχ.*

41) Εἷς ἐπώλησεν τὴν ὀκᾶν τοῦ ἐλαίου, τὸ ὁποῖον εἶχεν μὲ ζημίαν 4% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ὅταν ὅμως ἐπώλει αὐτὴν 17,55 δραχμὰς ἐπὶ πλέον θὰ εἶχεν κέρδος 5% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ ἀντὶ πόσων δραχμῶν εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν.

Λύσις. Ἂν εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν 100 δρχ., τότε μὲ ζημίαν 4% θὰ ἐπώλει αὐτὴν 96 δρχ., ἐνῷ μὲ κέρδος 5% θὰ τὴν ἐπώλει 105 δρχ. καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο πωλήσεων θὰ ἦτο 9 δρχ. Ὅθεν εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν ἀντὶ $17{,}55 \times 100 : 9 = 19{,}5$ δρχ.

42) Εἷς ἠγόρασεν 198 ὀκάδας βουτύρου πρὸς 36 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πωλεῖ δὲ κατόπιν τὰ $\frac{5}{9}$ αὐτοῦ πρὸς 48 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν τοῦ ὑπολοίπου, ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 30% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ ὅλου ποσοῦ;

ἀπ. 45,30 δρχ.

43) Πωλεῖ τις τὰ $\frac{2}{7}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος, κατόπιν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τέλος τὸ ἐναπομεῖναν, τὸ ὁποῖον ἦτο 8 πήχεις, ἀντὶ 220 δρχ. Δοθέντος ὅτι, εἰς ἑκάστην πώλησιν εἶχε κέρδος 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, νὰ εὑρεθῇ πόσα χρήματα ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὑφάσματος.

ἀπ. 1540 δρχ.

44) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε δύο τεμάχια ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος, ἀλλὰ ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς εἶναι τὰ $\frac{12}{19}$ τῆς ἀξίας τοῦ ἄλλου. Τὸ μῆκος τοῦ πρώτου τεμαχίου εἶναι κατὰ 15 πήχεις ὀλιγώτερον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ πλάτος αὐτοῦ εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου. Πωλήσας κατόπιν ἀμφότερα ἀντὶ 2046 δραχ. ἐκέρδισε 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ πήχεως καὶ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου.

Λύσις. Ἀφοῦ ἐπωλήθησαν ἀμφότερα μὲ κέρδος 10% ἀντὶ 2046 δραχ., ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς αὐτῶν ἦτο 1860 δραχμαί. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς εἶναι τὰ $\frac{12}{19}$ τῆς ἀξίας τοῦ ἄλλου εὑρίσκομεν ὅτι ἠγοράσθησαν ἀντὶ 720 καὶ 1140 δρχ. ἀντιστοίχως. Ἐὰν τώρα τὸ πρῶτο ὕφασμα εἶχεν τὸ πλάτος τοῦ δευτέρου θὰ ἐτιμᾶτο $720 \times \frac{4}{3} =$ 960 δραχ. καὶ συνεπῶς οἱ 15 πήχεις τοῦ δευτέρου θὰ ἐτιμῶντο 180 δραχ. καὶ εἷς 12 δρχ. Ὅθεν τὰ μήκη αὐτῶν εἶναι 80 πηχ. 95 πηχ.

45) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε ἓν ἐμπόρευμα. Τοῦτο ἐπεβαρύνθη κατὰ τὴν μεταφορὰν μὲ διάφορα ἔξοδα κατὰ 15% ἐπὶ τῆς ἀξίας του, προσέτι δὲ καὶ μὲ 2400 δραχμὰς διὰ φόρον δημοτικόν. Ὁ ἔμπορος λόγῳ πτώσεως τῆς τιμῆς αὐτοῦ κατὰ τὴν ἄφιξιν, τὸ ἐπώλησε μὲ ζημίαν 5% ἐπὶ τοῦ κόστους. Ἐὰν ὅμως ἐπώλει τοῦτο 3152,40 δρχ. ἐπὶ πλέον θὰ ἐκέρδιζε 10% ἐπὶ τοῦ κόστους. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τοῦ ἐμπορεύματος.

Λύσις. Αἱ 3152,4 δραχμαί εἶναι τὰ $\frac{6}{100}$ τοῦ κόστους, συνεπῶς τὸ ἐμπόρευμα ἐκόστιζεν εἰς τὸν ἔμπορον 52540 δραχ. Ὅταν ἀπὸ αὐτὰς ἀφαιρέσωμεν τὰς 2400 δραχ. τοῦ δημοτικοῦ φόρου, θὰ ἀπομείνουν 52540—2400=50140 δραχ. Τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς αὐξηθεῖσα κατὰ 15%. Ὅθεν ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς ἦτο 43600 δραχμαί.

10) Προβλήματα τόκου.

1) Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 32.800 δραχμῶν πρὸς 6% εἰς 2 ἔτη 3 μῆνας; *ἀπ. 4428*

2) Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 35600 δραχμῶν πρὸς 9% εἰς 3 μῆνας 25 ἡμ.; *ἀπ. 1023,5*

3) Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 9% διὰ 2 ἔτη ἔφερεν τόκον 1296 δραχμάς; *ἀπ. 7200*

4) Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 8% διὰ 5 μῆνας ἔφερεν τόκον 250 δραχμὰς; *ἀπ. 7500*

5) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 3720 δραχμῶν τοκισθὲν πρὸς 7,5%, ἔφερε τόκον 558 δραχμάς. *ἀπ. 2 ἔτη*

6) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 18750 δραχμῶν τοκισθὲν πρὸς 8%, ἔφερε τόκον 5625 δραχμάς; *ἀπ. 3 ἔτη 9 μ.*

7) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 22400 δραχμῶν τοκισθὲν πρὸς 9%, ἔφερε τόκον 252 δραχμάς. *ἀπ. 45 ἡμ.*

8) Εἷς ἐτόκισε κεφάλαιον 43500 δραχμῶν καὶ μετὰ 1 ἔτος 4 μ. Ἔλαβεν διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον 48720 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον εἶχε τοκίσει τὰ χρήματά του. *ἀπ. 9%*

9) Εἷς ἐτόκισεν ἓν ποσὸν χρημάτων πρὸς 8% καὶ μετὰ 3 ἔτη 3 μ. ἀποσείρει αὐτὸ καὶ τὸ καταθέτει ὁμοῦ μὲ τὸν τόκο του εἰς μίαν ἐπιχείρησιν πρὸς 12%. Ἐὰν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν λαμβάνει μηνιαίως 567 δραχμάς, ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον; *ἀπ. 45.000*

10) Εἷς εἶχεν ἐνοικιάσει ἓν κτῆμα καὶ ἐλάμβανεν ἐτησίως ἀπὸ αὐτὸ 534 δραχμάς κατὰ στρέμα. Ἐὰν ὅμως ἐπώλει αὐτὸ ἀντὶ 14400 δραχμῶν τὸ στρέμα καὶ ἐτόκιζεν τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων του πρὸς 7,5% καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ πρὸς 6,75% θὰ

εἶχεν μηνιαίως 582 δραχμὰς περισσότερον ἀπὸ τὸ μηνιαῖον ἐνοίκιον. Νὰ εὑρεθῇ πόσων στρεμάτων ἦτο τὸ κτῆμα.

ἀπ. 15

11) Εἷς ἠγόρασεν ἓν οἰκόπεδον 5 στρεμάτων πρὸς 25.000 δρχ. τὸ στρέμα. Ἔπειτα ἀπὸ 9 μῆνας πωλεῖ τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 30 δραχμὰς τὸ τ.μ. καὶ μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ πρώτου μέρους, πωλεῖ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 35 δραχμὰς τὸ τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τί κέρδος θὰ εἶχεν, ἂν τὰ εἰς χεῖρας του εὑρισκόμενα χρήματα ἐτοκίζοντο πρὸς 8%. *ἀπ. 26.100*

12) Ἓν κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 9% διά 1 ἔτ. 4 μην. ἔφερεν ὡρισμένον τόκον. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ παραμείνῃ τοκισμένον τὸ κεφάλαιον τοῦτο πρὸς 6%, ἵνα φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον; *ἀπ. 2 ἔτη*

13) Τίνος κεφαλαίου τὰ $\frac{3}{5}$ τοκισθέντα πρὸς 7,5% φέρουν 101,25 δρχ. τόκον εἰς 1 μῆνα 15 ἡμ.; *ἀπ. 18000*

14) Εἷς ἐτόκισεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 7,5% καὶ ἔλαβεν μετὰ ἓν ἔτος 450 δραχμὰς τόκον. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσῃ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 6%, διὰ νὰ λάβῃ τόκον 120 δραχμάς; *ἀπ. 8 μῆν.*

15) Εἷς ἠγόρασε ἔλαιον πρὸς 17 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 8 μῆνας πωλήσας αὐτὸ μὲ κέρδος 5% ἐκέρδισε 850 δρχ. πόσας ὀκάδας ἐλαίου εἶχεν ἀγοράσει; *ἀπ. 1500*

16) Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 5% διά 3 ἔτη γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 71967 δραχμαί.

Λύσις. Διὰ λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ παρατηροῦμεν πολλάκις τὸν ἑξῆς ἐσφαλμένον τρόπον.

αἱ 100 δραχ.	1 ἔτος	105 δρχ	Κ+Τ
×	3	71.967	

εἶναι δὲ ἐσφαλμένος, διότι ἐνῷ τὸ τοκοκεφάλαιον εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ κεφάλαιον, ἤτοι διπλασιαζομένου λ.χ. τοῦ κεφαλαίου, διπλασιάζεται καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν διπλάσιον τοκοκεφάλαιον, δέν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ μὲ τὸν χρόνον, διότι διπλασιαζομένου λ.χ. τοῦ χρόνου, μόνον ὁ τόκος ἀπὸ τὸ τοκοκεφάλαιον διπλασιάζεται. Ἤτοι τὸ τοκοκεφάλαιον μέ τὸν χρόνον δὲν εἶναι οὔτε ἀνάλογα οὔτε ἀντίστροφα ποσὰ καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν. Θὰ ζητήσωμεν ὅθεν ἄλλον τρόπον λύσεως τοῦ προβλήματος. Λαμβάνομεν βοηθητικὸν κεφάλαιον λ.χ. 500 δραχ. καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος αὐτοῦ πρὸς 5% διὰ 3 ἔτη εἶναι 75 δραχ., ἤτοι θὰ ἔχωμεν τοκοκεφάλαιον δραχ. 575 καὶ συνεπῶς:

500 δρχ. Κ. ἔχομεν 575 δρχ. Κ+Τ   575 δρχ. Κ+Τ ἔχομεν 75 δρχ. Τ
Χ=62.580   71.967   ἢ 71967 δρχ.   Χ=9387

17) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 3,25% διὰ 2 μῆνας 12 ἡμ., γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 80.520 δραχμαί;

ἀπ. 80.000

18) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 4,5% διὰ 3 ἔτη 8 μῆνας γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 26096 δραχμαί;

ἀπ. 22.400

19) Ἓν κεφάλαιον τοκισθὲν διὰ 5 ἔτη ἔφερε τόκον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{7}{20}$ τοῦ κεφαλαίου, πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη;

ἀπ. 7%

20) Ἓν κεφάλαιον τοκισθὲν διὰ 5 ἔτη γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 143.000 δραχ. Ἐὰν ὁ τόκος αὐτοῦ εἶναι τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ κεφαλαίου, νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη.

ἀπ. 6%

21) Εἷς ἐτόκισε κεφάλαιον πρὸς 5% καὶ μετὰ 3 ἔτη τὸ κεφάλαιον τοῦτο μετὰ τοῦ τόκου του τὸ τοκίζει πρὸς 6% δι' ἓν ἔτος. Ἐὰν τὴν δευτέραν φορὰν ἔλαβε σύνολον κεφαλαίου καὶ τόκου 57.049,2 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον.

ἀπ. 46.800

22) Δύο κεφάλαια τοκισθέντα πρὸς 4% διὰ 7 μῆνας, ἔφεραν ὁμοῦ τόκον 2790 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια, δεδομένου ὅτι ὁ τόκος τοῦ πρώτου κεφαλαίου ἦτο 1050 δραχ. ἐπὶ πλέον τοῦ δευτέρου.

Λύσις. Ὁ τόκος τοῦ πρώτου ἦτο (2790+1050) : 2=1920 δραχ. καὶ τοῦ δευτέρου 870. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ κεφάλαια ἦσαν 64000 καὶ 29000 δρχ.

23) Ἓν κεφάλαιον εἰς 8 μῆνας γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 12400 δρχ., ἐνῷ εἰς 14 μῆνας μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον γίνε-

ται 12700. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον πρὸς τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ αὔξησις 12700 — 12400 = 300 δρχ. εἶναι ὁ τόκος τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου εἰς 14—8=6 μῆνας. Ἀφοῦ τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἰς 6 μῆνας φέρει τόκον 300 δραχ. εἰς 8 μῆνας θὰ φέρῃ τόκον (300×8) : 6=400 δρχ. Ὅθεν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἶναι 12400—400=12000 δραχ. Τὸ ἐπιτόκιον εὑρίσκομεν τώρα εὐκόλως ὅτι εἶναι 5%.

24) Ἓν κεφάλαιον τοκισθὲν διὰ 11 μῆνας γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 37.320 δρχ., ἐὰν ὅμως παρέμεινεν ἐπὶ 7 μῆνας ἐπὶ πλέον θὰ ἐγίνετο 38.160. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον. *ἀπ. 36.000* 4%.

25) Ἐὰν ἓν κεφάλαιον ἐλαττωθῇ κατὰ τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον φέρει εἰς 9 μῆνας γίνεται 19250 δρχ. Ὅταν ὅμως ἐλαττωθῇ κατὰ τὸν τόκον τῶν 15 μηνῶν πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον γίνεται 18750 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

ἀπ. 20.000 5%

26) Ἐὰν ἓν κεφάλαιον αὐξηθῇ κατὰ τὸν τόκον τῶν 10 μηνῶν γίνεται 18.600 δρχ. Ὅταν ὅμως τοῦτο ἐλαττωθῇ κατὰ τὸν τόκον τῶν 5 μηνῶν πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον γίνεται 17.700 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ 18.600—17.700=900 δρχ., εἶναι ὁ τόκος τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου εἰς 15 μῆνας καὶ κατὰ συνέπειαν τῶν 10 μηνῶν εἶναι 600 δρχ. Ὅθεν τὸ κεφάλαιον ἦτο 18600—600=18000 δρχ. Τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%.

27) Τὸ ἄθροισμα δύο κεφαλαίων εἶναι 115.500 δραχ. Ἐὰν τοκίσωμεν τὸ ἓν πρὸς 3%, καὶ ἄλλο πρὸς 4% θὰ λάβωμεν ἴσους ἐτησίους τόκους. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

Λύσις. Θὰ εὕρωμεν ποῖον κεφάλαιον πρὸς 3% εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 1 δρχ. καὶ ποῖον κεφάλαιον πρὸς 4% εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 1 δραχ. Εὑρίσκομεν ὅτι ταῦτα εἶναι $\frac{100}{3}$ δρχ. καὶ $\frac{100}{4}$. Ὅταν τώρα μερίσωμεν τὸ 115.500 δρχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εὑρεθέντων κεφαλαίων εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ζητούμενα κεφάλαια εἶναι, τὸ πρῶτον 66.000 καὶ τὸ δεύτερον 49.500 δρχ.

28) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν τῶν 28.000 δραχ. εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε, τὸ ἓν τοκισθὲν πρὸς 4% καὶ τὸ ἄλλο πρὸς 3% νὰ φέρουν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τόκους ἴσους.

ἀπ. 12.000 16.000

29) Εἷς ἠγόρασεν ἔλαιον πρὸς 18 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν μετὰ 6 μῆνας, ἐὰν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 20%;
ἀπ. 19,80

30) Δύο κεφάλαια τὸ πρῶτον 28.725 δραχ. καὶ τὸ δεύτερον 42.125 δρχ., τοκισθέντα πρὸς διαφορετικὰ ἐπιτόκια ἔφερον εἰς ἓν ἔτος σύνολον τόκων 2696,15 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο ἐπιτόκια, δεδομένου ὅτι ὁ τόκος τοῦ δευτέρου κεφαλαίου, ὑπερβαίνει τὸν τόκον τοῦ πρώτου κατὰ 168,35 δραχμάς.
ἀπ. 4,4% 3,4%

31) Κεφάλαιον 20.000 δρχ. ἐτοκίσθη διὰ 3 ἔτη καὶ ἕτερον τοιοῦτον 50.000 δρχ. διὰ 4 ἔτη, μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον, ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν τόκων εἶναι 7000 δρχ.

Λύσις. Λαμβάνομεν βοηθητικὸν ἐπιτόκιον 1%, ὁπότε θὰ ἔχωμεν διαφορὰν τόκων 1400 δραχ. Ὅθεν τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 7000 : 1400=5%.

32) Τὸ ἄθροισμα δύο κεφαλαίων εἶναι 28.800 δρχ. Ἐὰν τοκίσωμεν τὸ πρῶτον διὰ 9 μην. 15 ἡμ. θὰ λάβωμεν τόκον 470,25 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον διὰ 6 μην. 20 ἡμ. πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον τόκον 390 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια καὶ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον.

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὶ τόκον θὰ φέρῃ ἕκαστον κεφάλαιον εἰς ἓν ἔτος καὶ θὰ μερίσωμεν τὸ ποσὸν τῶν 28.800 δρχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εὑρεθέντων τόκων. Εὑρίσκομεν οὕτω, ὅτι τὰ κεφάλαια εἶναι 13.200 καὶ 15.600 δραχ. Κατόπιν εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,5%.

33) Εἷς ἐτόκισε κεφάλαιον 75.000 δρχ. πρός τι ἐπιτόκιον καὶ ἕτερον κεφάλαιον 25.000 δρχ. μὲ ἐπιτόκιον κατὰ δύο μονάδας μεγαλύτερον τοῦ πρώτου. Ἐὰν ὁ ἐτήσιος τόκος ἀμφοτέρων εἶναι 5500 δρχ., νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο ἐπιτόκια.

Λύσις. Αἱ 25.000 δραχ. πρὸς 2% φέρουν τόκον 500 δρχ. Ἐπομένως ὁ ἐτήσιος τόκος ἀμφοτέρων πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου εἶναι 5500—500=5000 δρχ. Τώρα ἀντὶ νὰ τοκίσωμεν καθένα χωριστὰ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, τοκίζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 100.000 δρχ. Ἀφοῦ κεφάλαιον 100.000 δρχ. εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 5000 δραχ. τὸ ἐπιτόκιον θὰ εἶναι 5% ὅθεν τοῦ πρώτου εἶναι 5% καὶ τοῦ δευτέρου 7%.

34) Ὅταν ἓν κεφάλαιον αὐξηθῇ κατὰ τὸν τόκον αὐτοῦ τῶν 10 μηνῶν, γίνεται 29.760 δραχ., ὅταν ὅμως τοῦτο ἐλαττωθῇ

κατὰ τὸν τόκον τῶν 17 μηνῶν πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον γίνεται 27.168 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον·

ἀπ. 28.800 4°/₀

35) Εἷς ἐτόκισε κεφάλαιον 15.000 δρχ. πρὸς 4°]₀ καὶ μετὰ 9 μῆνας ἕτερον κεφάλαιον 18.000 δρχ. πρὸς 5°]₀. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο κεφάλαια θὰ φέρουν ἴσους τόκους.

Λύσις. Τὸ πρῶτον κεφάλαιον εἰς τοὺς 9 μῆνας εἶχεν φέρει τόκον 450 δραχ. Ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ πρώτου εἶναι 600 δραχ, καὶ τοῦ δευτέρου 900 δραχ. Ἄρα εἰς ἓν ἔτος ἡ διαφορὰ τῶν τόκων εἶναι 300 δρχ. καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ἴσους τόκους μετὰ 450 : 300=1,5 ἔτος ἀπὸ τὸ δεύτερον κεφάλαιον.

36) Κεφάλαιον τοκισθὲν διά τινα χρόνον πρὸς 5°[₀ γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 87125 δραχ., ἐνῷ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον πρὸς 4°]₀ γίνεται 86.700 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον παρέμεινεν τοκισμένον.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τῶν τόκων εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον εἶναι 425 δρχ. Ἡ διαφορὰ ὅμως αὕτη εἶναι ὁ τόκος τοῦ ζητουμένου κεφαλαίου πρὸς 1°/₀ διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον πρὸς 1°/₀ φέρει τόκον 425 δραχ. πρὸς 5% θὰ φέρῃ 2125 δραχ. Ὅθεν τὸ κεφάλαιον εἶναι 87.125—2125=85.000 δρχ. καὶ ὁ χρόνος, ὅστις εὐκόλως τώρα εὑρίσκεται, εἶναι 6 μῆνες.

37) Εἷς ἐτόκισε κεφάλαιον 25.320 δραχμῶν πρὸς 5°[₀ καὶ μετὰ 7 μῆνας ἕτερον τοιοῦτον 21.100 δραχ. πρὸς 7°]₀. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ κεφάλαια αὐτὰ μετὰ τοῦ τόκου των γίνονται ἴσα ;

Λύσις. Ὅτε ἐτοκίσθη τὸ δεύτερον, τὸ πρῶτον εἶχε γίνει μετὰ τοῦ τόκου του 26058,5 δρχ., ἄρα ἡ διαφορά των τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἐτοκίσθη τὸ δεύτερον ἦτο 26058,5—21.100=4958,5 δραχ. Ὅταν ἡ διαφορὰ αὕτη διαιρεθῇ διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν ἐτησίων τόκων, ἡ ὁποία εἶναι 1477—1266=211 δραχ., θὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον; ὅστις εἶναι 4958,5 : 211=23,5 ἔτη.

38) Κεφάλαιον ἐμερίσθη εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{8}{9}$. Τὸ τρίτον μέρος τοκισθὲν πρὸς 4°]₀ διὰ 2 ἔτη 6 μῆνας ἔγινε μετὰ τοῦ τόκου του 13.200 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερισθὲν κεφάλαιον. *ἀπ. 28.650 δρχ.*

39) Εἷς ἠγόρασεν ἓν τεμάχιον ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἐπιβαρύνθη μὲ ἔξοδα μεταφορᾶς κατὰ ποσὸν ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς

ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πωλήσας κατόπιν τοῦτο μετὰ 18 μῆνας πρὸς 195,65 δραχ. τὸν πῆχυν, ἐκέρδισε 5°]$_0$ ἐπὶ τῆς ὅλης ἀξίας αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸν πῆχυν.

Λύσις.

Ἐὰν ἡ ὅλη ἀξία τοῦ πήχ. ἦτο 100 δρχ. εἰς 12 μ. θὰ εἶχεν κέρδος 5 δρχ.
» » 100 18 $X = 7,5$
ὅθεν ἡ ἀξία τοῦ πήχεως ἦτο $195,65 \times 100 : 107,5 = 182$ δραχ. καὶ εἶχεν ἀγορασθῆ ἀντὶ $182 : \frac{13}{12} = 168$ δραχμάς.

40) Ἓν ποσὸν χρημάτων διενεμήθη εἰς τέσσαρα πρόσωπα ὡς ἑξῆς: ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{9}$ αὐτοῦ, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου, ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ ὁ τέταρτος τὸ ἐναπομείναν ποσόν, τὸ ὁποῖον τοκίσας πρὸς 4°]$_0$ ἔλαβε μετὰ 5 μῆνας σύνολον κεφαλαίου καὶ τόκου 48.800 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διανεμηθὲν ποσόν. *ἀπ. 180.000 δρχ.*

41) Εἷς ἐτόκισε δύο κεφάλαια. Τὸ πρῶτον πρὸς 4°]$_0$ καὶ τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον ἦτο κατὰ 42.000 δραχ. ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου, πρὸς 3°]$_0$. Ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν ἐτησίων τόκων εἶναι 3680 δραχ., νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

Λύσις. Τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἔχει 42.000 δραχ. περισσότερον τοῦ δευτέρου. Αἱ 42.000 δραχ., τὰς ὁποίας ἔχει ἐπὶ πλέον πρὸς 4°]$_0$ δι' ἓν ἔτος φέρουν τόκον 1680 δραχ. Ὅταν λοιπὸν ἀπὸ τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἀφαιρέσωμεν τὰς ἐπὶ πλέον 42.000 δραχ., θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τόκων των θὰ εἶναι τώρα $3680 - 1680 = 2000$ δραχ. Ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν 2000 δραχμῶν ὀφείλεται εἰς τὴν διαφορὰν τῶν ἐπιτοκίων, ἥτις εἶναι 1%, ἄρα τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον πρὸς 1% εἰς 1 ἔτος φέρει τόκον 2000 δραχ. εἶναι 200.000 δραχ., ἤτοι τὰ ζητούμενα κεφάλαια εἶναι 242.000 καὶ 200.000 δρχ.

43) Εἷς ἐτόκισε δύο κεφάλαια τὸ πρῶτον πρὸς 5°]$_0$ καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4°]$_0$ καὶ ἔλαβε σύνολον ἐτησίων τόκων 36.000 δρχ. Ἐὰν ὅμως ἐνήλλασε τὰ ἐπιτόκια θὰ ἐλάμβανε 1260 δραχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

Λύσις. Ἡ μία δραχ. τοῦ πρώτου κεφαλαίου εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 0,05 δραχ. αἱ δύο $0,05 \times 2$ κ.ο.κ., ἄρα ὁ τόκος τοῦ πρώτου κεφαλαίου εἰς 1 ἔτος εἶναι τὰ $\frac{5}{100}$ αὐτοῦ καὶ τοῦ δευτέρου τὰ $\frac{4}{100}$ αὐτοῦ.

Ὅθεν :

$$\text{Τὰ } \frac{5}{100} \text{ α΄ Κεφ.} + \frac{4}{100} \text{ τοῦ β΄} = 36.000 \text{ δραχμὰς}$$

$$\frac{4}{100} \text{ »} + \frac{5}{100} \text{ » »} = 37.260 \text{ »}$$

ἐξ αὐτῶν συνάγομεν :

$$\text{Τὰ } \frac{20}{100} \text{ α΄ Κεφ.} + \frac{16}{100} \text{ β΄ κεφ.} = 144.000 \text{ δραχμὰς}$$

$$\frac{20}{100} \text{ »} + \frac{25}{100} \text{ »} = 186.300 \text{ »}$$

ἡ διαφορὰ 186.300—144.000=42.300 δραχ. εἶναι τὰ $\frac{9}{100}$ τοῦ δευτέρου κεφαλαίου, ἤτοι τοῦτο εἶναι 42.300 : $\frac{9}{100}$ = 470.000 δρχ. εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα ὅτι τὸ πρῶτον εἶναι 344.000 δραχ.

43) Κεφάλαιον ἐχωρίσθη εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\frac{4}{3}$. Ἐὰν τοκισθοῦν τὸ πρῶτον πρὸς 5% διὰ 1 ἔτος 8 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4% διὰ 2 ἔτη 6 μῆνας, θὰ φέρουν σύνολον τόκων 15.390 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον.

Λύσις. Λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὸν κεφάλαιαν 700 δραχ. ὁπότε τὰ δύο μέρη θά εἶναι 400 δραχ. καὶ 300 δραχ. Εὑρίσκομεν τώρα εὐκόλως ὅτι τό ἀρχικὸν κεφ. ἦτο 170.100 δραχ.

44) Εἶχέ τις κεφάλαιον 360.000 δραχ. καὶ τοκίζει ἓν μέρος αὐτοῦ πρὸς 4,5% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 6%. Λαμβάνει δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ὁμοῦ σύνολον τόκων, ἴσον πρὸς τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον θὰ ἐλάμβανε, ἂν ἐτόκιζε τὸ ὅλον κεφάλαιον πρὸς 5%. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη.

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ ἂν λάβωμεν τὸ ἐπιτόκιον 5% ὡς μέσην τιμὴν τῶν δύο ἐπιτοκίων ὡς ἑξῆς : Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέρος ἐτοκίσθη τὴν πρώτην φορὰν πρὸς 4,5% καὶ τὴν δευτέραν 5%, ἄρα εἶχε κέρδος 0,5%, ἐπίσης τὸ δεύτερον μέρος τὴν πρώτην φορὰν ἐτοκίσθη πρὸς 6% καὶ τὴν δευτέραν πρὸς 5%, ἄρα εἶχε ζημίαν 1%. Ἐπειδὴ ὅμως κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ἔχωμεν τὸν αὐτὸν τόκον καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, δὲν πρέπει νὰ ἔχωμεν οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν. Καὶ διὰ νὰ συμβῇ αὐτὸ πρέπει ὁ λόγος τῶν κεφαλαίων νὰ εἶναι $\frac{1}{0,5} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$. Ὅθεν τὸ πρῶτον μέρος εἶναι 240.000 δρχ. καὶ τὸ δεύτερον 120.000.

45) Εἶχέ τις κεφάλαιον 43000 δρχ. καὶ τοκίζει μέρος αὐ-

τοῦ πρὸς 3°/₀ διὰ 15 μῆνας καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 3,5°/₀ διὰ τὸν αὐτὸν χρόνον. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἔλαβεν ἐν συνόλῳ τόκον 1837,5 δρχ.

Λύσις. Ἐὰν ἐτοκίζαμεν ἀμφότερα μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον λ.χ. 3,5°/₀ δι' ἓν ἔτος θὰ εἴχαμε σύνολον τόκων 1.505 δρχ. Ἀφοῦ πάλιν εἰς 15 μῆν. εἶχεν ἐξ ἀμφοτέρων σύνολον τόκων 1.837,5 δρχ. εἰς ἓν ἔτος θὰ εἴχαμε σύνολον τόκων 1.837,5×12 : 15=1.470 δρχ. Ἔχομεν λοιπὸν διαφορὰν τόκων 1.505—1.470=35 δρχ., ἥτις εἶναι ὁ τόκος τοῦ πρώτου κεφαλαίου πρὸς 0,5°/₀ δι' ἓν ἔτος. Ὅθεν τὸ πρῶτον μέρος εἶναι 70000 δρχ. καὶ συνεπῶς τὸ δεύτερον 36.000.

46) Ἐὰν τοκίσῃ τις δύο κεφάλαια τὸ πρῶτον πρὸς 5°/₀ καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 3°/₀ θὰ λάβῃ σύνολον τόκων 2587 δρχ. Ὅταν ὅμως ἐναλλάξῃ τὰ ἐπιτόκια θὰ λάβῃ σύνολον τόκων 2253 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

ἀπ. 38.600 21.900

47) Εἷς εἶχε 200.000 δρχ. καὶ τοκίζει μέρος αὐτῶν πρὸς 3°/₀ δι' 6 μῆνας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 4°/₀ δι' ἓν ἔτος. Λαμβάνει δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου μέρους τόκον 1400 δραχ. περισσότερον τοῦ πρώτου. Νά εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη.

Λύσις. Τὰ $\frac{4}{100}$ τοῦ β′ $-\frac{18}{1200}$ τοῦ α′ $=1400$ δρχ.

$\frac{4}{100}$ τοῦ β′ $+\frac{4}{100}$ τοῦ α′ $=8000$ δρχ.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τόκων 8000−1400=6600 δραχ. εἶναι τὰ $\frac{11}{200}$ τοῦ πρώτου μέρους· ἄρα τοῦτο εἶται $6600\times\frac{200}{11}=120.000$ δρχ. καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἄλλο εἶναι 80.000 δρχ.

48) Τὸ ἄθροισμα δύο κεφαλαίων εἶναι 28.000 δρχ. Ἐὰν τοκίσωμεν τὸ πρῶτον 4°/₀ καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 3°/₀ δι' ἓν ἔτος, θὰ λάβωμεν ἀπ' ἀμφότερα ἴσους τόκους. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια. *ἀπ. 12.000 16.000*

49) Ἓν κεφάλαιον ἐτοκίσθη πρὸς 4°/₀ καὶ ἕτερον κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ὑπερβαίνει τὸ πρῶτον κατὰ 30.000 δρχ. πρὸς 3°/₀. Ἐὰν ἀμφότερα φέρουν τόκους ἴσους εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, νὰ εὑρεθοῦν ταῦτα.

Λύσις. Ἀφοῦ φέρουν τόκους ἴσους εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὰ κεφάλαια εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐπιτόκια, ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{3}$ ἢ 3 καὶ 4. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ πρῶτον εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ β′ καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 30.000 δρχ. εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι ταῦτα εἶναι 90.000 καὶ 120.000

50) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν 470.000 δρχ. εἰς τρία μέρη τοιαῦτα ὥστε, οἱ τόκοι αὐτῶν πρὸς 3 %, 4 % καὶ 5% εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον νὰ εἶναι ἴσοι.

Λύσις. Θὰ μερίσωμεν τὸ ὡς ἄνω ποσὸν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἐπιτοκίων καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ζητούμενα μέρη εἶναι 200.000, 150.000 καὶ 120.000 δρχ.

51) Νὰ μερισθῇ τὸ ποσὸν τῶν 420.000 δρχ. εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε, τὸ πρῶτον τοκιζόμενον πρὸς 4% καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 6%, νὰ γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἴσα.

Λύσις. Θὰ μερίσωμεν τὰς 420.000 δρχ. εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τοῦ 104 καὶ 106 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ μέρη εἶναι 212.000 καὶ 208.000 δρχ.

52) Εἷς ἐτόκισε κεφάλαιον 120.000 δρχ. διὰ 60 ἡμέρας καὶ κεφάλαιον 80.000 δρχ. διὰ 30 ἡμέρας, πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἐὰν ἐκ τοῦ πρώτου κεφαλαίου ἔλαβεν 800 δρχ. τόκον περισσότερον τοῦ δευτέρου, νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον.

Λύσις. Λαμβάνομεν βοηθητικὸν ἐπιτόκιον 10 % καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι 6%.

53) Ἓν κεφάλαιον αὐξηθὲν κατὰ τὸν τόκον τῶν 10 μηνῶν γίνεται 128.650 δρχ., ἂν ὅμως αὐξηθῇ κατὰ τὸν τόκον τῶν 14 μηνῶν πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον γίνεται 130.510 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον. *ἀπ. 124.000 4,5 %.*

54) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 43.700 δρχ. διὰ 2 ἔτη 6 μῆνας καὶ κεφάλαιον 61.200 δρχ. διὰ 3 ἔτη 9 μῆν. Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν τόκων εἶναι 7215 δρχ. νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον. *ἀπ. 6%.*

55) Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς 3% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4,5 % δι᾿ ἓν ἔτος. Ἓν ἄλλο κεφάλαιον μικρότερον τοῦ πρώτου κατὰ 15.000 δραχ. τοκισθὲν πρὸς 4 % δι᾿ ἓν ἔτος, ἔφερε τόκον 625 δραχ. περισσότερον αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

Λύσις. Ἐὰν τὸ δεύτερον κεφάλαιον ἦτο ἴσον πρὸς τὸ πρῶτον, θὰ ἔφερεν τόκον ἐπιπλέον αὐτοῦ 625 + 600 = 1.225 δραχ. Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἦτο 800 δραχ., ἀπὸ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτοῦ θὰ εἴχαμεν τόκον 15 δραχ. καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον 13,5, ἄρα σύνολον τόκων 28,5 δραχ. Ἀπὸ τὸ δεύτερον κεφάλαιον, ὅπερ ὑπεθέσαμεν ἴσον πρὸς τὸ πρῶτον, 32 δραχ. τόκον. Ἄρα θὰ εἴχαμεν διαφορὰν τόκων 3,5 δραχ. Ὅθεν τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἦτο 1.225×800 : 3,5 = 280.000 δραχ. καὶ τὸ δεύτερον 265.000 δραχ.

56) Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν διὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα, τὸ πρῶτον πρὸς 6 % καὶ ἔφερε τόκον 12.000 δραχ. τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον ὑπερβαίνει τὸ πρῶτον κατὰ 36.000 δραχ. πρὸς 9 % καὶ ἔφερε τόκον 20.160 δραχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια καὶ ὁ χρόνος καθ' ὃν παρέμειναν τοκισμένα.

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ πρῶτον πρὸς 6% φέρει τόκον 12.000 δραχ., ἂν ἐτοκίζετο πρὸς 9% θὰ ἔφερε τόκον 12.000×9 : 6 = 18.000 δραχ. Ἤτοι, ἂν τὰ κεφάλαια ἦσαν τοκισμένα πρὸς 9% θὰ εἴχαμεν διαφορὰν τόκων 20.160—18.000 = 2.160 δραχ. Ἡ διαφορὰ αὕτη θὰ εἶναι ὁ τόκος τῶν 36.000 δραχ. πρὸς 9% εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. ὅθεν ὁ χρόνος εἶναι 8 μῆνες. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ζητούμενα κεφάλαια, εἶναι 300.000 καὶ 336.000.

57) Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν διὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα, τὸ πρῶτον πρὸς 3% καὶ ἔφερε τόκον 3.000 δραχ., τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον ὑπερβαίνει τὸ πρῶτον κατὰ 18.000 δραχ. πρὸς 4,5% ἔφερε τόκον 5040 δραχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια. *ἀπ. 150.000 168.000*

58) Εἷς ἐτόκισε τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς 8%. Τὸ ὑπόλοιπον μέρος αὐτοῦ τὸ ἐχώρισε εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα τοκιζόμενα ἀντιστοίχως πρὸς 4% καὶ 6% φέρουν τόκους ἴσους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, δεδομένου ὅτι, τὸ σύνολον τῶν ἐτησίων τόκων εἶναι 30.400 δραχ.

Λύσις. Ἂν τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον εἶναι 500 δραχ. τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ εἶναι 200 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 300 δραχ. Τὰς 300 δραχ. θὰ τὰς μερίσωμεν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τοῦ 4 καὶ 6. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι τὰ τρία μέρη εἶναι 200 180 120 δραχ. Ἀπὸ αὐτὰ ἔχομεν σύνολον τόκων 16+7,2+7,2 = 30,4. Ὅθεν τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον ἦτο 30.400×500 : 30,4 = 500.000 δραχ.

59) Τὸ ἄθροισμα δύο κεφαλαίων εἶναι 126.000 δραχ. Ἂν

τοκίσωμεν τὸ πρῶτον πρὸς 6% διὰ 75 ἡμέρας καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 8% διὰ 6 μῆνας, θὰ ἔχωμεν ἴσους τόκους. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

ἀπ. 96.000 30.000

60) Τὸ ἄθροισμα δύο κεφαλαίων εἶναι 253.000 δραχ. Ἂν τοκίσωμεν τὸ πρῶτον πρὸς 9% διὰ 4 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 6% διὰ 2,5 μῆνας, θὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ πρώτου τόκον διπλάσιον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεχάλαια.

ἀπ. 115.000 138.000

61) Εἷς ἐτόκισε δύο κεφάλαια, τὸ πρῶτον πρὸς 10% καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 8% καὶ ἔλαβε σύνολον ἐτησίων τόκων 24.800 δραχ. Ἐὰν ὅμως ἐνήλλασσε τὰ ἐπιτόκια θὰ ἐλάμβανε 800 δραχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

ἀπ. 120.000 160.000

62) Ἓν κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπί τινα χρόνον πρὸς 3% γίνεται μετὰ τοῦ τόκου του 367.560 δαχ., ἂν ὅμως ἦτο κατὰ 45000 δρχ. μεγαλύτερον, θὰ ἐγίνετο εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 413.505 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος καθ' ὃν παρέμεινε τοκισμένον.

ἀπ. 360.000 8 μην. 12 ἡμ.

63) Εἷς ἐτόκισε πρὸς διαφορετικὰ ἐπιτοκια δύο κεφάλαια, τὸ πρῶτον 420.000 δρχ. διὰ 15 ἡμέρας, τὸ δεύτερον 525.000 δρχ. διὰ 16 ἡμέρας καὶ λαμβάνει ἴσους τόκους. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο ἐπιτόκια, δέδομένου ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 10,5 δρχ.

ἀπ. 6% 4,5%

64) Ἀὰν προσθέσωμεν εἰς ἓν κεφάλαιον τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τόκου, τὸν ὁποῖον φέρει πρὸς 6% εἰς 8 μῆνας, θὰ ἔχωμεν 139.840 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον.

ἀπ. 138.000

65) Εἷς ἐτόκιοε κεφὰλαιον πρὸς 5%. Εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ἀποσύρει τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ, μετὰ 6 μῆνας ἀποσύρει τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τέλος μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ τὴν δευτέραν φορὰν ἀποσύρει καὶ τὸ ὑπόλοιπον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, δεδομένου ὅτι τὸ σύνολον τῶν τόκων, τοὺς ὁποίους ἔλαβεν εἶναι 106.675 δρχ.

ἀπ. 850.000

66) Εἶχέ τις 260 πήχεις ὕφασμα. Πωλεῖ κατ' ἀρχὰς ἐξ αὐ-

τοῦ ἓν μέρος πρὸς 18 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ κατόπιν τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 24 δρχ. τὸν πῆχυν. Ἐὰν τοκίσῃ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ἐκ τῆς πρώτης πωλήσεως πρὸς 4% καὶ τῆς δευτέρας πρὸς 3,5% θὰ λάβῃ ἴσους τόκους εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Νὰ εὑρεθῇ πόσους πήχεις ἐπώλησεν ἑκάστοτε.

Λύσις. Θὰ μερίσωμεν τὸ 260 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐπιτόκια καὶ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν τιμῶν πρὸς τὰς ὁποίας ἐπώλησε τὸν πῆχυν ἤτοι εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν 4×18 καὶ $3,5\times24$ ἢ 6 καὶ 7. Ὅθεν εὑρίσκομεν ὅτι τὴν πρώτην φορὰν ἐπώλησεν 140 πηχ. καὶ τὴν δευτέραν 120 πηχ.

67) Ἔμπορος ἐπώλησε 250 ὀκάδες οἴνου μὲ κέρδος 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀγοραστὴς δὲν εἶχε νὰ πληρώσῃ ἀμέσως τὸ ποσὸν τῆς ἀξίας τοῦ οἴνου, ἔλαβε προθεσμίαν 4 μηνῶν, ἀλλὰ νὰ πληρώσῃ τόκον 8% ἐπὶ τοῦ ποσοῦ τούτου. Ὅταν οὗτος εἰς τὴν ὡρισμένην προθεσμίαν ἐπλήρωσε τὸν ἔμπορον, ἔδωσεν εἰς αὐτὸν ἐν ὅλῳ 739,2 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐστοίχιζεν εἰς τὸν ἔμπορον ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου.

Λύσις. Ἀφοῦ μετὰ 4 μῆνας ὁ ἀγοραστὴς ἔδωσεν 739,2 δρχ. θὰ εὕρωμεν ποῖον κεφάλαιον πρὸς 8% εἰς 4 μῆνας ἔγινε μετὰ τοῦ τόκου 739,2 δρχ. ἤτοι 720 δρχ. Ἀφοῦ ὁ ἔμπορος μὲ κέρδος 20% τὸν εἶχε πωλήσει 720 ἔπεται ὅτι τὸν εἶχεν ἀγοράσει 600 δρχ. καὶ συνεπῶς τὴν ὀκᾶν $600 : 250 = 2,4$ δρχ.

68) Ἡ διαφορὰ δύο κεφαλαίων εἶναι 20.300 δραχμαί. Ἐὰν τοκίσωμεν τὸ μεγαλύτερον πρὸς 4% διὰ 20 μῆνας καὶ τὸ μικρότερον πρὸς 4,5% διὰ 2 ἔτη θὰ λάβωμεν ἴσους τόκους. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια. *ἀπ. 78.300 58.000*

69) Τὸ ἄθροισμα τριῶν κεφαλαίων εἶναι 360.000 δρχ. Ἐὰν ταῦτα εἰς 8 ἔτη πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον γίνονται μετὰ τοῦ τὸκου των ἀντιστοίχως 237.600, 158.400, 79.200 δραχμαί. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον.

Λύσις. Τὰ κεφάλαια εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 237.600 158.400, 79.200 ἢ 3, 2 καὶ 1. Ὅθεν ταῦτα εἶναι 180.000, 120.000 60.000 δρχ. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον εἶναι 4%.

70) Εἷς ἐχώρισεν κεφάλαιόν τι εἰς τρία μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ δεύτερον ὑπερβαίνει τὸ τρίτον κατὰ 12.000 δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέρη τοῦτα, δεδομένου ὅτι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πρώτου πρὸς 5%, τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ δευτέρου πρὸς 4% καὶ $\frac{4}{5}$ τοῦ τρίτου

πρὸς 3,5%₀ φέρουν ἴσους τόκους.

Λύσις. Εὑρίσκομεν κατ' ἀρχὰς τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον πρὸς 4% εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 1 δρχ. ἤτοι 25 δρχ. κατόπιν τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον πρὸς 3,5% εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 1 δρχ ἤτοι $\frac{200}{7}$ δρχ. ἀλλὰ αἱ 25 δραχμαὶ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου καὶ συνεπῶς τὸ δεύτερον πρέπει νὰ εἶναι $\frac{75}{2}$, ὡσαύτως αἱ $\frac{200}{7}$ εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ τρίτου κεφαλαίου καὶ συνεπῶς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $\frac{250}{7}$ δρχ., ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $\frac{75}{2} - \frac{250}{7} = \frac{25}{14}$. Ὅθεν τὸ δεύτερον κεφάλαιον εἶναι $\frac{25}{7} \times 12.000 : \frac{25}{14} = 252.000$ δρχ. Τὸ τρίτον εἶναι 252.000—12.000 =240.000 δρχ. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα ὅτι τὸ πρῶτον εἶναι 224.000 δρχ.

71) Εἷς ἐτόκισεν δύο κεφάλαια πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ λαμβάνει ἀπὸ τὸ πρῶτον κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ὑπερβαίνει τὸ δεύτερον κατὰ 32.700. δρχ. διὰ 8 μῆνας τόκον 5280 δρχ. ἐνῷ ἀπὸ τὸ δεύτερον διὰ 10 μῆνας τόκον 5237,5 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια καὶ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον.

Λύσις. Ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ πρώτου εἶναι 7920 καὶ τοῦ δευτέρου 6285 δρχ. Ἡ διαφορὰ τῶν τόκων, ἡ ὁποία εἶναι 1635 δρχ., θὰ εἶναι ὁ τόκος τῶν 32700 δρχ. τοῦ πρώτου πρὸς τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον δι' ἓν ἔτος. Ὅθεν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 1635 : 327=5%. Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα τά δύο κεφάλαια, τὰ ὁποῖα εἶναι 158.400 καὶ 125.700 δρχ.

72) Δύο κεφάλαια ἴσα ἐτοκίσθησαν πρὸς 5%. Ἐὰν ὅμως τὸ πρῶτον ηὐξάνετο κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ καὶ τὸ δεύτερον ἠλαττώνετο κατὰ 63.000 δρχ. καὶ ἐτοκίζοντο ἀμφότερα πρὸς 5% διὰ 8 μῆνας ἡ διαφορὰ τῶν τόκων τῶν δύο κεφαλαίων θὰ ἦτο 5600 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ, ποῖα ἦσαν τὰ ἴσα κεφάλαια.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τῶν ἐτησίων τόκων θὰ ἦτο $5600 \times \frac{12}{8} = 8400$ δρχ. Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δεύτερον κεφάλαιον δὲν ἦτο ὀλιγώτερον 63000 δραχμαί, τότε ἡ διαφορὰ τῶν ἐτησίων τόκων θὰ ἦτο 8400—3150=5250 δηλ. μικροτέρα κατὰ τὸν ἐτήσιον τόκον τῶν 63.000 δρχ. πρὸς 5%. Ἡ διαφορὰ παριστᾷ τὸν ἐτήσιον τόκον κεφαλαίου

$5250 : 0{,}05 = 105.000$ δρχ., τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ζητουμένου. Ὅθεν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἶναι 262.500 δρχ.

73) Δύο κεφάλαια ἔχουν ἄθροισμα 256.000 δρχ. Ἐὰν τοκίσωμεν τὸ πρῶτον πρὸς 4,5% θὰ λάβωμεν εἰς 6 μῆνας τόκον τριπλάσιον τοῦ δευτέρου, τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη πρὸς 5% διὰ 3 μῆνας. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

ἀπ. 160.000 96.000

74) Κατέθεσέ τις εἰς μίαν Τράπεζαν ὡρισμένον κεφάλαιον πρὸς 5% καὶ μετὰ 5 μῆνας ἕτερον κεφάλαιον ἴσον μὲ τὸ πρῶτον, μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἀφοῦ παρῆλθε χρονικόν τι διάστημα ἀπὸ τῆς καταθέσεως τοῦ δευτέρου, ἀποσύρει ἀμφότερα καὶ λαμβάνει ἐκ τοῦ πρώτου τόκον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{12}$ αὐτοῦ, σύνολον δὲ κεφαλαίων καὶ τόκων 515.000 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ πρῶτον κεφάλαιον εἶχε φέρει τόκον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{12}$ αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι παρέμεινε τοκισμένον ἐπὶ 20 μῆνας καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ δεύτερον ἐπὶ 15 μῆνας. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ δύο τοκισθέντα κεφάλαια ἦσαν 240.000 δρχ. ἕκαστον.

11ον Προβλήματα Ὑφαιρέσεως.

1) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 12.000 προεξοφλήθη 45 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωτερικῶς πρὸς 6%. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ

ἀπ. 11.910

2) Γραμμάτιον προεξοφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωτερικῶς πρὸς 6% ἀντὶ 17.730 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ.

ἀπ. 18.000

3) Γραμμάτιον προεξοφλήθη ἐξωτερικῶς πρὸς 6% 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ δραχ. 43.875. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ.

ἀπ. 45.000

4) Γραμμάτιον προεξοφλήθη 48 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωτερικῶς πρὸς 5% ἀντὶ 74.500 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ.

ἀπ. 75.000

5) Γραμμάτιον λῆγον τὴν 15 Δ]βρίου προεξοφλήθη τὴν 1

Ν]βρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἐξωτερικῶς πρὸς 5%, ἀντὶ 4929 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομοστικὴ ἀξία αὐτοῦ. *ἀπ. 4960*

6) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 15.000 δραχ. προεξοφλήθη ἐξωτερικῶς προς 3% ἀντὶ 14.850 δραχ. Μετὰ πόσον χρόνον λήγει τοῦτο ; *ἀπ. 4 μῆνας*

7) Εἷς γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 6.300 δραχ. ἐγένετο ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις 105 δραχ., ὅταν ὅμως προεξοφλῆτο μετὰ 10 ἡμέρας θὰ εἶχεν ὑφαίρεσιν 94,5 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶναι 105—94,5=10,5 δραχ. Αὕτη ὅμως εἶναι ἡ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου διὰ 10 ἡμέρας πρὸς τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον, τὸ ὁποῖον εἶναι 6%.

8) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀκίας 7.500 ὀραχ. λῆγον μετὰ 1 ἔτος καὶ ἕτερον ὀνομαστικῆς ἀξίας 7650 δραχ. λῆγον μετὰ 20 ἡμέρας, προεξοφλήθησαν σήμερον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐγένετο εἰς τὸ πρῶτον κράτησις 353,75 δραχ. περισσότερον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις.

Λύσις. Λαμβάνομεν βοηθητικὸν ἐπιτόκιον 10%. Εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 5%.

9) Ἐπώλησέ τις 375 ὀκάδας ἐλαίου. Ὁ ἀγοραστὴς ἐπλήρωσε εἰς χρῆμα τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ἀξίας αὐτοῦ, διὰ δὲ τὸ ὑπόλοιπον ποσὸν ὑπέγραψε γραμμάτιον λῆγον μετὰ 3 μῆνας. Ὁ ἔμπορος ἐξοφλήσας αὐτὸ τὴν ἰδίαν ἡμέραν πρὸς 8% ἔλαβεν 3307,5. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τοῦ ἐλαίου, ὅταν τὸ κέρδος ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ ἦτο 1807,50 δραχ.

Λύσις. Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 3375 δραχ., ἡ ὁποία φανερώνει ἀντὶ πόσων δραχ. ἐπωλήθη τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἀξίας τοῦ ἐλαίου. Ἐπομένως τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ποσοῦ ἐπωλήθησαν ἀντὶ 13.500 δρχ. Ὁ πωλητὴς εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ 13.500+3.307,5=16.807,5 δραχ. Ὅταν ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτῶν τὸ κέρδος, ὅπερ ἦτο 1807,5 δρχ., εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῆς ἀγορᾶς αὐτοῦ, ἤτοι 15.000 δραχ.

10) Εἷς ἠγόρασεν ἐμπόρευμα ἀξίας 69.120 δρχ. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἐπλήρωσε τὴν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος ἀμέσως ὑπέ-

γραψε τρία γραμμάτια διὰ τὴν ἐξόφλησιν αὐτοῦ τῆς αὐτῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας καὶ λήγοντα τὸ πρῶτον μετὰ 4 μῆνας, τὸ δεύτερον μετὰ 8 μῆνας καὶ τὸ τρίτον μετὰ 12 μῆνας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑκάστου, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6°/₀.

Λύσις. Ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τῶν τριῶν γραμματίων εἶναι 69.120 δρχ. Ὑποθέτωμεν τώρα, ὅτι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑκάστου γραμματίου εἶναι 100 δρχ., ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἐξωτερικαὶ ὑφαιρέσεις αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως 2, 4 καὶ 6 δρχ. ἕπεται, ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τῶν τριῶν ὁμοῦ θὰ εἶναι 288 δρχ. Ὅθεν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτῶν εἶναι 69.120×300 : 288=72.000 δρχ. καί ἑκάστου 24.000 δρχ.

11) Γραμμάτιον λῆγον μετὰ 45 ἡμέρας προεξοφλήθη σήμερον ἐξωτερικῶς πρὸς 6°/₀ καὶ μὲ προμήθειαν $\frac{3}{4}$°/₀ ἀντὶ 2.364 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐὰν ἡ ὀνομ. ἀξία τοῦ γραμματίου ἦτο 100 δρχ. θὰ εἶχεν ἐν συνόλῳ κράτησιν 0,75 ἐξ. ὑφ.+0,75 προμ.=1,5 δρχ. Ἑπομένως ἡ ὀνομ. ἀξ. αὐτοῦ εἶναι 2.364×100 : 98,5=2.400 δρχ.

12) Δύο γραμμάτια τῆς αὐτῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας προεξοφλήθησαν ἐξωτερικῶς πρὸς 6°/₀. Ἔλαβε δὲ ἀπὸ τὸ δεύτερον, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 75 ἡμέρας 54 δραχ. περισσότερον τοῦ ἄλλου, τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 4 μῆνας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑκάστου. *ἀπ 7200*

13) Προεξοφλεῖ τις δύο γραμμάτια λήγοντα μετὰ 45 ἡμέρας ἐξωτερικῶς πρὸς 6°/₀ καὶ λαμβάνει ἐν συνόλῳ 5.955 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑκάστου, ὅταν ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 1.500 δρχ.

Λύσις. Ἡ ὀνομ. ἀξία καὶ τῶν δύο ὁμοῦ εἶναι 6.000 δρχ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὀνομ. ἀξιῶν 1.500 δρχ. τοῦ ἑνὸς θὰ εἶναι 3.750 καὶ τοῦ ἄλλου 2.250.

14) Προεξοφλεῖ τις σήμερον δύο γραμμάτια λήγοντα τὸ ἓν μετὰ 60 ἡμέρας καὶ τὸ ἄλλο μετὰ 45 ἡμέρας πρὸς 6°/₀. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑκάστου, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀνομαστικῶν ἀξιῶν αὐτῶν εἶναι 17.000 δρχ. καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὑφαιρέσεων 157,5 δρχ. *ἀπ 12.000 5.000*

15) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 4.284 δρχ. προεξοφλήθη 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως του ἐσωτερικῶς πρὸς 8°/₀. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

ἀπ 4.200 84

16) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 2.640 δρχ. προεξοφλήθη ἐσωτερικῶς 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 2605,25 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις

ἀπ. 4%

17) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφλήθη ἐσωτερικῶς 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8% ἀντὶ 1.200 δρχ. *ἀπ. 1.2:4*

18) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 2.424 δρχ. προεξοφλήθη ἐσωτερικῶς πρὸς 5% καὶ εἶχεν ὑφαίρεσιν 24 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως αὐτοῦ. *ἀπ. 72 ἡμ.*

19) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως γραμματίου ὀνομαστικῆς ἀξίας 8.190 δρχ. τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 40 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 10%. *ἀπ. 1 δρχ.*

20) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως γραμματίου λήγοντος μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ σήμερον εἶναι 4 δρχ Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 8%.

Λύσις. Λαμβάνομεν γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 100 δρχ. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ εἶναι 4 δρχ. καὶ ἡ ἐσωτερικὴ $\frac{400}{104}$ δρχ. καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $4-\frac{400}{104}=\frac{2}{13}$ δρχ. Ὅθεν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ εἶναι $100\times4:\frac{2}{13}=2.600$ δρχ. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου τούτου εἶναι 104 δρχ. καὶ ἡ ἐσωτερικὴ 100 δρχ. ἤτοι ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 4 δρχ. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τόκος τῶν 100 δρχ. πρὸς 8% διὰ 6 μῆνας εἶναι 4 δρχ. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως ἑνὸς γραμματίου, εἶναι ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως διὰ τὸν χρόνον τῆς προεξοφλήσεως πρὸς τὸ ὡρισμένον ἐπιτόκιον». Τὸ πρόβλημα τώρα δύναται νὰ λυθῇ ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν ποῖον κεφάλαιον εἰς 6 μῆνας πρὸς 8% φέρει 4 δρχ. ἤτοι τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν τοῦ γραμματίου, ἡ ὁποία εἶναι 100 δρχ. Κατόπιν, ποῖον κεφάλαιον εἰς 6 μῆνας πρὸς 8% φέρει τόκον 100 δρχ. ἤτοι τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἡ ὁποία εἶναι 2500 δρχ. Ὅθεν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ εἶναι $2.500+100=2.600$ δρχ.

21) Γραμμάτιον λῆγον μετὰ 3 μῆνας προεξοφλήθη σήμερον ἐξωτερικῶς πρὸς 5%. Ὅταν ὅμως τοῦτο προεξοφλεῖτο ἐσω-

τερικῶς ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου θὰ ἐλάμβανε 1,2 δραχ. περισσότερον τῆς πρώτης φορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου. *ἀπ. 7.776*

22) Ἔχει τις δύο γραμμάτια, τὸ πρῶτον ὀνομαστικῆς ἀξίας 4.410 δραχ., τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 75 ἡμέρας, τὸ δεύτερον ὀνομ. ἀξίας 7840 δραχ. καὶ λῆγον μετὰ 45 ἡμέρας. Θέλει δὲ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι' ἑνὸς γραμματίου, τὸ ὁποῖον νὰ λήγῃ μετὰ 90 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 8%. *ἀπ. 12345*

23) Ὀφείλει τις τρία γραμμάτια: Τὸ πρῶτον ὀνομαστικῆς ἀξίας 6.000 δραχ. λῆγον μετὰ 30 ἡμέρας, τὸ δεύτερον 12.500 δραχ. λῆγον μετὰ 45 ἡμέρος καὶ τὸ τρίτον 4.500 δραχ. λῆγον μετὰ 50 ἡμέρας. Θέλει δὲ ἀντικαταστήσῃ αὐτὰ σήμερον δι' ἑνὸς γραμματίου, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀνομαστικῶν ἀξιῶν τῶν δοθέντων. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον λήγει τοῦτο.

Λύσις.

Αἱ 6.000	δρχ.	ἔχουν ὑφ.	διὰ 40	ἡμ.,	ὅσον	αἱ 180.000	δρχ.	διὰ 1	ἡμ.
12.500	»	»	» 45	»	»	» 562.500	»	» 1	»
4.500	»	»	» 50	»	»	» 225.000	»	» »	»
Ὅθεν αἱ :									
23.000	»		» X	»	»	» 967.500	»	» 1	»

Ἑπομένως X=967.500 : 23.000=42 ἡμ. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐξάγομεν : Ὅτι εἰς τὰ προβλήματα κοινῆς λήξεως γραμματίων, ὅταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία νέου γραμματίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀνομ. ἀξιῶν τῶν δοθέντων γραμμματίων, ὁ χρόνος τῆς λήξεως αὐτοῦ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἐπιτοκίου.

24) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς Ὑφαιρέσεως γραμματίου λήγοντος μετὰ 9 μῆνας πρὸς 4% εἶναι 18 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ. *ἀπ. 20.600*

25) Εἷς ἔμπορος ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 16.500 δροχ. Κατὰ τὴν πώλησιν αὐτοῦ, ἐπειδὴ ὁ ἀγοραστὴς δὲν ἠδύνατο νὰ τὸ πληρώσῃ ἀμέσως, ὑπέγραψε γραμμάτιον, λῆγον μετὰ δύο μῆνας καὶ τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος προεξοφλεῖ τὴν ἰδίαν ἡμέραν πρὸς 6%. Νὰ εὑρεθῇ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, δεδομένου ὅτι ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὑφάσματος ὁ ἔμπορος ἐκέρδισεν 5%. *ἀπ. 17.500*

26) Ὀφείλει τις τρία γραμμάτια, τὸ πρῶτον ὀνομαστικῆς ἀξίας 12.500 δραχ. λῆγον μετὰ 24 ἡμέρας, τὸ δεύτερον 17.500 δραχ. λῆγον μετὰ 40 ἡμέρας καὶ τὸ τρίτον 20.000 δρχ. λῆγον μετὰ 36 ἡμέρας. Θέλει δὲ νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι᾽ ἑνὸς γραμματίου λήγοντος μετὰ 32 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9%.

ἀπ. 49.969,7

27) Προεξόφλησέ τις γραμμάτιον λῆγον μετὰ 65 ἡμέρας πρὸς 6% ἐξωτερικῶς. Ὅταν ὅμως προεξόφλει τοῦτο μετὰ 17 ἡμέρας πρὸς 5,5% θὰ εἶχεν κέρδος 44,10 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέοτ γραμματίου. *ἀπ. 12.600*

28) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 5.000 δρχ. λήγει μετὰ 6 μῆνας καὶ ἀντικαθίσταται σήμερον μὲ δύο ἄλλα γραμμάτια, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἔχει ὀνομαστικὴν ἀξίαν 2.000 δρχ. καὶ λήγει μετὰ 9 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον ὀνομαστικὴν ἀξίαν 3.000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τὸ δεύτερον.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ πρὸς ἀντικατάστασιν γραμματίου, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀνομαστικῶν ἀξιῶν τῶν δύο ἄλλων, ὁ χρόνος τῆς λήξεως τοῦ δευτέρου εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἐπιτοκίου. Ὅταν λοιπὸν λάβωμεν ἐπιτόκιον λ.χ. 10%, ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ πρώτου γραμματίου εἶναι 4.750 καὶ τοῦ δευτέρου 1.850 δρχ. Ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ τρίτου εἶναι 4.750—1.850=2.900 δρχ. Ἤτοι εἰς τὸ τρίτον γραμμάτιον ἐγένετο ὑφαίρεσις 100 δρχ. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν ὅτι τοῦτο θὰ λήγῃ μετὰ 120 ἡμέρας.

29) Πωλήσας τις οἶνον πρὸς 2,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν, ἔλαβεν παρὰ τοῦ ἀγοραστοῦ διὰ τὴν ἀξίαν τοῦ πωληθέντος οἴνου γραμμάτιον λῆγον μετὰ 3 μῆνας πρὸς 6%. Προεξοφλήσας ὅμως αὐτὸ αὐθημερόν, εἶχεν ἓν ὡρισμένον κέρδος· ὅταν ὅμως ἐπωλοῦσε τὸν οἶνον πρὸς 2,90 δρχ. τὴν ὀκᾶν, ἀντὶ τῶν 2,80 δρχ., τὸ κέρδος θὰ ἦτο 197 δρχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας οἴνου ἐπώλησεν.

Λύσις. Ὅταν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπώλησε 1 ὀκᾶν οἴνου, αὕτη ἐπωλήθη ἀντὶ 2,80—0,042=2,758 δρχ. εἰς τὴν πραγματικότητα καὶ ὑπάρχει εἰς τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς πωλήσεως κέρδος τι. Τὴν δευτέραν φορὰν ἡ πραγματικὴ τιμὴ τῆς πωλήσεως κατ᾽ ὀκᾶν θὰ ἦτο 2,90—0,0435=2,8565 δρχ. καὶ ἔχει πάλιν κέρδος τί. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο κερδῶν εἶναι 2,8565—2,758=0,0985 δρχ. Ὅθεν ὁ πωληθεὶς οἶνος ἦτο 197 : 0,0985=200 ὀκάδες.

30) Ἔχει τις δύο γραμμάτια συνολικῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας

28.800 δρχ., ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον λήγει μετὰ 75 ἡμέρας καὶ τὸ δεύτερον μετὰ 30 ἡμέρας. Ἐξοφλήσας ταῦτα σήμερον ἐξωτερικῶς πρὸς 6% καὶ μὲ προμήθειαν $\frac{1}{2}$% ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 28.458 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑκάστου.

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ κοινὴ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτῶν ἦτο 28.800 δρχ. καὶ ἔλαβεν οὗτος ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῶν 28.458 δρχ., ἡ συνολικὴ κράτησις ἦτο 28.800—28.458=342 δρχ. Εἰς τὸ ποσὸν ὅμως αὐτὸ εἶναι καὶ ἡ προμήθεια $\frac{1}{2}$%, ἡ ὁποία εἶναι 288×0,5=144 δρχ. Ὅθεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὑφαιρέσεων εἶναι 342+144=486 δρχ. Τώρα τὸ πρόβλημα λύεται εὐκόλως, διότι γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν τόκων, τὸ ὁποῖον εἶναι 486 δρχ. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι, αἱ ὀνομαστικαὶ ἀξίαι εἶναι 7.200 21.600.

31) Ἔχει τις δύο γραμμάτια λήγοντα, τὸ πρῶτον μετὰ 50 ἡμέρας καὶ τὸ δεύτερον μετὰ 120 ἡμέρας. Προεξοφλήσας αὐτὰ σήμερον ἐξωτερικῶς πρὸς 6%, εἶχεν συνολικὴν κράτησιν 260 δραχ. Ὅταν ὅμως προεξοφλοῦσε ταῦτα μετὰ 20 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον τὸ σύνολον τῶν κρατήσεων θὰ ἦτο 193$\frac{1}{3}$ δραχμ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑκάστου. *ἀπ 12.000 8.000*

32) Ἔχει τις δύο γραμμάτια, τὸ πρῶτον ὀνομαστικῆς ἀξίας 15.000 λῆγον μετὰ 58 ἡμέρας καὶ τὸ δεύτερον ὀνομ. ἀξίας 14700 δρχ. λῆγον μετὰ 10 ἡμέρας. Προεξοφλήσας αὐτὰ σήμερον πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, λαμβάνει ἀπὸ τὸ πρῶτον γραμμάτιον 120,5 δραχ. περισσότερον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν ἐπιτόκιον.

ἀπ. 6%

12ον) Προβλήματα Ἑταιρείας.

1) Τρεῖς συνεταῖροι ἠγόρασαν ὁμοῦ ἓν ἐμπόρευμα, διὰ τὸ ὁποῖον ἔδωσαν ὁ α′ 22.500 δρχ., ὁ β′ 29.500 δρχ. καὶ ὁ γ′ 38.250 δρχ. Ἐὰν τὸ ἐμπόρευμα ἐπωλήθη ἀντὶ 112.500, νὰ εὑρεθῇ τὶ κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος.

ἀπ. 5625 7.062,5 9.562,5

2) Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν 65.250 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ τὶ κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ὁ α′ εἶχεν καταθέσει 48.000 δρχ. διὰ 18 μῆνας, ὁ β′

36.000 δρχ. διὰ 15 μῆνας καὶ ὁ γ′ 45.000 δρχ. διὰ 21 μῆνας.

ἀπ 24.000 15.000 26.250

3) Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν ὁ α′ 42.000 δρχ., ὁ β′ 46.200 δρχ. καὶ ὁ γ′ 54.600 δρχ. Ὅταν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἐζημιώθησαν 35.700 δρχ., νὰ εὑρεθῇ τί ποσὸν ἐζημιώθη ἕκαστος.

ἀπ. 10.500 11.550 13.650

4) Εἷς ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν καταθέσας κεφάλαιον 22.500 δρχ. Τέσσαρας μῆνας βραδύτερον προσλαμβάνει δεύτερον συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσεν 18.750 δρχ. καὶ 3 μῆνας ἔπειτα ἀπὸ αὐτόν, τρίτον συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσεν 15.000 δρχ. Μετὰ 9 μῆνας ἀπὸ τῆς προσλήψεως τοῦ τρίτου λογαργιασθέντες εἶχον κέρδος 11.280 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τί κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος.

ἀπ. 5.640 3.525 2.115

5) Τρεῖς συνεταῖροι ἤνοιξαν ἐπιχείρησιν καταθέσαντες ὁμοῦ εἰς αὐτὴν τὸ ποσὸν τῶν 122.400 δραχ. Μετὰ τὸ πέρας τῆς ἐπιχειρήσεως λογαργιασθέντες εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 30.600 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τί κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος καὶ τί κεφάλαιον εἶχεν καταθέσει, ὅταν τὰ κεφάλαια ἦσαν ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $1\frac{3}{4}$ $2\frac{2}{5}$ $3\frac{1}{2}$.

ἀπ. 7.000 9.600 14.000—28.000 38.400 56.000

6) Δύο συνεταῖροι κατέθεσαν ὁμοῦ 24.600 δρχ. εἰς μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐκέρδισαν 8.610 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ πρῶτος εἶχε καταθέσει εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 2.400 δρχ. περισσότερον τοῦ δευτέρου.

ἀπ. 4725 3885

7) Δύο συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κατατεθέντος κεφαλαίου. Ὅταν ἐτελείωσεε ἡ ἐπιχείρησις καὶ ἐμοίρασαν τὸ κέρδος ἔλαβεν ὁ πρῶτος 6.000 δρχ. καὶ ὁ δεύτερος 18.400 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τί ποσὸν εἶχε καταθέσει ἕκαστος.

ἀπ 15.000 46.000

8) Ἐκ δύο συνεταίρων, ὁ πρῶτος ὅστις εἶχε καταθέσει εἰς μίαν ἐπιχείρησιν 9.600 δρχ. διὰ 6 μῆνας, ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρ-

δους 1440 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὶ κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ὁ δεύτερος εἰς αὐτὴν διὰ 9 μῆνας, ὅταν τὸ κέρδος τὸν ὁποῖον ἔλαβεν ἦτο 4.050 δρχ. *ἀπ. 18.000*

9) Ἔμπορος πτωχεύσας ἐπλήρωσε τοὺς δανειστάς του τὰ 75% τῶν ὀφειλομένων εἰς αὐτοὺς χρημάτων καὶ οὕτω ἔδωσεν εἰς τὸν πρῶτον 12.600 δρχ., εἰς τὸν δεύτερον 15300 δρχ. καὶ εἰς τὸν τρίτον 21.900 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἔχασεν ἕκαστος τῶν δανειστῶν. *ἀπ. 4.200 5.100 7.300*

10) Δύο συνεταῖροι εἶχον καταθέσει κατὰ τὴν ἔναρξιν μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ὁ εἷς 45.000 δρχ. καὶ ὁ ἄλλος 38.000 δρχ. Ὅταν ἐτελείωσεν αὕτη, μοιρασθέντες τὸ κέρδος ἔλαβεν ὁ εἷς 861 δρχ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν κέρδος καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου. *ἀπ. 10.209 5.535 4.674*

11) Δύο συνεταῖροι ἤρχισαν μίαν ἐπιχείρησιν καταθέσαντες εἰς αὐτήν, ὁ πρῶτος 25.000 καὶ ὁ δεύτερος 40.000 δρχ. Τέσσαρας μῆνας μετὰ ταῦτα προσέλαβον καὶ τρίτον συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσε ποσὸν ἴσον πρὸς τὸ τῶν δύο ἄλλων ὁμοῦ. Ὅταν ἔληξεν ἡ ἐπιχείρησις, ἡ ὁποία διήρκεσεν ἓν ἔτος, εὑρέθη ὅτι ἐκέρδισαν 32.500 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἔλαβεν ἕκαστος, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ πρῶτος πρὸ τῆς διανομῆς, ὡς διευθύνων τὴν ἐπιχείρησιν, ἀπέσυρεν ἐκ τοῦ κέρδους 20%.

ἀπ. α) 12.500 β) 9.600 γ) 10.400

12) Δύο συνεταῖροι κατέθεσαν ὁμοῦ εἰς μίαν ἐπιχείρησιν 80.000 δρχ., ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐκέρδισαν 15.000 δρχ. Μοιρασθέντες τὸ κέρδος ὁ πρῶτος ἔλαβε κεφάλαιον καὶ κέρδος 57.000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον εἶχε καταθέσει ἕκαστος καὶ τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου.

ἀπ. 48.000 32.000 6.000

13) Εἷς ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν καταθέσας κεφάλαιον 50.000 δραχ. μετὰ 4 μῆνας προσλαμβάνει δεύτερον συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσε 25.000 δραχ., μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ αὐτόν, τρίτον συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσεν 50.000 δραχ. Ὁ τελευταῖος οὗτος μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ τῆς προσλήψεώς του, ἀποσύρει ἐκ τοῦ κατατεθέντος κεφαλαίου 25.000 δραχ. Ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως λογαριασθέντος εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 40.000 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος.

ἀπ. 24.000 8.000 8.000

14) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν κατὰ τὴν ἔναρξιν μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ὁ δεύτερος ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος ποσὸν πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτέρου. Ληξάσης τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 2635 δραχ., ὅπερ παριστᾶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ὁλικοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εἶχον καταθέσει. Νὰ εὑρεθῇ τὶ ποσὸν εἶχον καταθέσει καὶ τὶ κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος.

ἀπ. 13.175 1.240 930 465

15) Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν, ὁ πρῶτος 75.000 δραχ., ὁ δεύτερος 50.000 δραχ. καὶ ὁ τρίτος ποσόν τι ἄγνωστον. Μετὰ τὸ πέρας τῆς ἐπιχειρήσεως, ὁ πρῶτος ὡς διευθύνων τὴν ἐπιχείρησιν ἔλαβεν πρὸ τῆς διανομῆς ἐκ τοῦ κέρδους 10%. Ἀπὸ τὸ ἐναπομεῖναν, τὸ ὁποῖον ἐμοιράσθησαν μεταξύ των ἔλαβεν ὁ πρῶτος 22.500 καὶ ὁ τρίτος 7.500 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὶ ποσὸν εἶχεν καταθέσει ὁ τρίτος, τὶ συνολικὸν κέρδος ἔλαβεν ὁ πρῶτος, ὡς καὶ τὸ ὁλικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως.

Λύσις. Εὐκόλως εὑρίσκομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι ὁ τρίτος εἶχεν καταθέσει 25.000 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος ἔλαβεν ὡς κέρδος 15.000 δρχ., ἑπομένως τὸ ἐναπομεῖναν κέρδος μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ 10% ἦτο 45.000 δραχ. Εὑρίσκομεν τώρα ὅτι τὸ ὁλικὸν κέρδος ἦτο 50.000 δρχ. καὶ συνεπῶς τὸ συνολικὸν κέρδος. τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ πρῶτος ἦτο 22.500 +5.000=27.500 δραχ.

16) Τρεῖς ἐργάται ἀνέλαβον συνεταιρικῶς τὴν ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἔργου, τὸ ὁποῖον ἐξετέλεσαν εἰς 8 ἡμέρας καὶ ἔλαβον ὡς ἀμοιβὴν 4.500 δραχ. Ὁ πρῶτος ἠδύνατο μόνος νὰ ἐκτελέσῃ τοῦτο εἰς 16 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος εἰς 20 ἡμέρας. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος, ὅταν τὸ ληφθὲν ποσὸν μοιρασθῇ ἀναλόγως τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον ἐξετέλεσεν ἕκαστος εἰς 8 ἡμέρας ;

Λύσις. Ὁ πρῶτος ἐξετέλεσε εἰς 8 ἡμέρας τὰ $\frac{8}{16}$ τοῦ ἔργου, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{8}{20}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτοῦ. Ὅθεν θὰ λάβουν ἀντιστοίχως 2.250 1.800 καὶ 450 δρχ.

17) Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν, ὁ πρῶτος ποσὸν ἴσον πρὸς τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος ὅσον

οἱ δύο ἄλλοι ὁμοῦ. Μετὰ τὸ πέρας τῆς ἐπιχειρήσεως εἶχον κεφάλαιον καὶ κέρδος ὁμοῦ 72.000 δρχ. Δεδομένου ὅτι τὸ κέρδος τοῦ πρώτου εἶναι ἴσον πρὸς τὰ 0,45 τοῦ κεφαλαίου του, τοῦ δευτέρου πρὸς τὰ 0,40 καὶ τοῦ τρίτου πρὸς τὰ 0,35. Νὰ εὑρεθῇ τὶ ποσὸν εἶχεν καταθέσει ἕκαστος καὶ τὶ κέρδος ἔλαβεν.

Λύσις. Ὅταν ὁ πρῶτος εἶχεν καταθέσει 500 δρχ., ὁ δεύτερος θὰ εἶχεν 800 καὶ ὁ τρίτος 1.300 δρχ. Εὑρίσκομεν τώρα εὐκόλως, ὅτι τὰ κεφάλαια, τὰ ὁποῖα εἶχον καταθέσει ἦσαν 10.000 16.000 καὶ 26.000 δρχ., τὰ δέ κέρδη ἦσαν 4.500 6.400 καὶ 9.100.

18) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν, ὁ πρῶτος 15.000 δρχ., ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ὁμοῦ 30.000 δρχ. Τὸ κεφάλαιον ὅμως τοῦ δευτέρου αὐξηθὲν κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ, γίνεται ἴσον πρὸς τὸ τοῦ τρίτου ἠλαττωθέντος κατὰ τὸ $\frac{1}{15}$ αὐτοῦ. Μετὰ τὸ πέρας τῆς ἐπιχειρήσεως λογαριασθέντες εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 12.000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὶ κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος.

ἀπ. 4000 3200 4800

19) Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν ὁμοῦ εἰς μίαν ἐπιχείρησιν ποσόν, τὸ ὁποῖον ηὐξήθη κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ἔγινε 60.500 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τό κέρδυς τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ἕκαστος, δεδομένου ὅτι ὁ πρῶτος εἶχεν καταθέσει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὁλικοῦ ποσοῦ, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον.

ἀπ. 3025 4840 4235

20) Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν 41.500 δρχ. Δεδομένου ὅτι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εἶχεν καταθέσει ὁ πρῶτος εἶναι ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δευτέρου καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον εἶχεν καταθέσει ὁ δεύτερος εἶναι ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{20}$ τοῦ τρίτου. Νὰ εὑρεθῇ τὶ κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος.

ἀπ. 13500 12000 16000

13ον Μίξεως καὶ κραμάτων.

1) Ἀνέμιξέ τις 48 ὀκ. ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 18 δρχ. μὲ 12 ὀκ. ἑτέρου ἐλαίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 15 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος.

ἀπ 17,40

2) Ἀνέμιξέ τις 150 ὀκ. οἴνου τῶν 3,60 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 187,5 ὀκ. ἄλλου οἴνου καὶ ἐσχημάτισεν μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,10 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ δευτέρου οἴνου.

ἀπ 2,70

3) Ἀνέμιξέ τις βούτυρον τῶν 72 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ ἕτερον τοιοῦτον τῶν 54 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐσχημάτισε μῖγμα 54 ὀκ. ἀξίας 3.348 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος.

ἀπ. 24 30

4) Ἔχει τις δύο εἴδη ἐλαίου, τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 16,20 καὶ τοῦ δευτέρου 19,20 δρχ. Θέλει δὲ ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 120 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 17,40 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος

ἀπ. 72 48

5) Ἔχει τις 48 ὀκάδας οἴνου τῶν 4,80 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἕτερον οἶνον τῶν 3,40 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας οἴνου πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ δευτέρου, ἵνα σχηματίσῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 4 δραχ.

ἀπ. 64

6) Ἐπλήρωσέ τις τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς βαρελίου τῶν 675 ὀκάδων, μὲ οἶνον τῶν 3, 45 δρχ. κατ' ὀκᾶν καὶ τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ μὲ οἶνον τῶν 3,60 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, ὅταν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 20%;

ἀπ. 4,20

7) Εἷς ἀνέμιξε 180 ὀκάδας οἴνου τῶν 3,45 δρχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 270 ὀκάδας ἄλλου οἴνου. Πωλήσας κατόπιν τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος ἀντὶ 4,50 δρχ. ἐκέρδισεν 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν ὀκᾶν τοῦ δευτέρου οἴνου.

ἀπ. 3,95

8) Ἀναμίξας τις ζάκχαριν τῶν 9,60 δρχ. κατ' ὀκᾶν μὲ ἑτέραν τοιαύτην τῶν 8,40 δρχ., ἐσχημάτισε μῖγμα 25 ὀκ., τὸ ὁποῖον πωλήσας ἀντὶ 277,50 δρχ. ἐκέρδισεν 25% ἐπὶ τῆς ἀξίας

τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ζακχάρεως ἔλαβεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος.

Λύσις. Ἡ μέση τιμὴ τοῦ μίγματος εἶναι 222 δρχ. καὶ τῆς ὀκᾶς 8,88 δρχ. Σχηματίζοντες τώρα τὸ μῖγμα εὑρίσκομεν, ὅτι θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ πρῶτον 10 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 15 ὀκ.

9) Ἔχει τις ἕνα βαρέλιον, τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε οἴνου κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ. Προσθέσας δὲ εἰς αὐτὸ 50 ὀκάδας ὕδατος, ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ οἴνου ἠλαττώθη κατὰ τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ βαρελίου.

Λύσις. Ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου πρὸ τῆς ἀναμίξεως ἐτιμᾶτο 10 δρχ. τότε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος θὰ τιμᾶται 9 δρχ. Ἀφοῦ τώρα ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τιμᾶται 9 δρχ., ἕπεται ὅτι εἰς τὰς 10 ὀκ. τοῦ μίγματος αἱ 9 ὀκάδες εἶναι καθαρὸς οἶνος. Ὅθεν τὸ ποσὸν τοῦ περιεχομένου οἴνου εἰς τὸ μῖγμα εἶναι $50 \times 9 : 1 = 450$ ὀκάδες καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ χωρητικότης τοῦ βαρελίου εἶναι $450 : \frac{3}{4} = 600$ ὀκάδες.

10) Ἔχει τις δύο εἴδη ἐλαίου, τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 14 δραχ. καὶ τοῦ δευτέρου 18 δραχ. Σχηματίσας ἐξ αὐτῶν μῖγμα 50 ὀκάδων, τὸ ἐπώλησεν ἀντὶ 966 δραχ. καὶ οὕτω ἐκέρδισε 15% ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου εἴδους. · *ἀπ. 15 35*

11) Ἔχει τις 120 ὀκάδας οἴνου τῶν 3 δραχ. τὴν ὀκᾶν, 150 ὀκάδας ἄλλου οἴνου τῶν 4,50 δραχ. Πόσας ὀκάδας ἀπὸ ἕνα οἶνον τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 2,40 δραχ. πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μὲ τὰς δύο ἄλλας ποσότητας, ἵνα σχηματίσῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 3,60 δραχ.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τοῦ πρώτου οἴνου ἔχει κέρδος $0{,}60 \times 120 = 72$ δραχ., ἐκ τοῦ δευτέρου ζημίαν $0{,}90 \times 150 = 135$ δρχ. Ἐπομένως ἀπὸ τὰ δύο πρῶτα ἔχει ζημίαν $135 - 72 = 63$ δραχ. Ἀπὸ τὴν ὀκᾶν τοῦ τρίτου ἐλαίου ἔχει κέρδος 1,20 δραχ., ἄρα διὰ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ τὸ τρίτον 63 δρχ. πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ $63 : 1{,}2 = 52{,}5$ ὀκ. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα καὶ ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν τὴν μέσην τιμὴν τῆς ὀκᾶς τῶν δύο πρώτων, ὅτι εἶναι $3\frac{5}{6}$ δρχ. καὶ κατόπιν ἔχομεν:

$$\begin{array}{lcc} \alpha+\beta \quad 3\frac{5}{6} & & 1\frac{1}{5} \\ & 3\frac{3}{5} & \\ \gamma \quad 2\frac{2}{5} & & \frac{7}{30} \end{array}$$

ἤτοι

ἡ ἀναλογία τῶν δύο πρώτων πρὸς τὸ τρίτον εἶναι $\dfrac{1\frac{1}{5}}{\frac{7}{30}}=\dfrac{36}{7}$ καὶ συνεπῶς θὰ λάβη ἐκ τοῦ τρίτου $7\times270 : 36=52,5$ ὀκ.

12) Ἔχει τις δύο εἴδη βουτύρου. Τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 50 δραχ. καὶ τοῦ δευτέρου 63. Θέλει δὲ νὰ σχηματίση ἐξ αὐτῶν μῖγμα 442 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον πωλῶν πρὸς 75 δρχ. νὰ κερδίζη 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας θὰ λάβη ἐξ ἑκάστου εἴδους.

ἀπ. 17 425

13) Ἔχει τις τρία εἴδη καφέ, τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 63, τοῦ δευτέρου 72 καὶ τοῦ τρίτου 81 δρχ. Σχηματίζει δὲ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 90 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 74 δρχ. Δεδομένου ὅτι ἐκ τοῦ πρώτου ἔλαβεν 20 ὀκάδας, νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου τῶν δύο ἄλλων.

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὴν μέσην τιμὴν ὁλοκλήρου τοῦ μίγματος, ἥτις εἶναι 6660 δρχ. καὶ τὴν ἀξίαν τῶν 20 ὀκ., ἥτις εἶναι $63\times20=1260$ δρχ. Ἑπομένως αἱ δύο ἄλλαι ποσότητες τιμῶνται $6660-1260=5400$ καὶ εἶναι 70 ὀκάδες. Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι πωλεῖ τὰς 70 ὀκάδας πρὸς 72 δρχ. θὰ εἰσπράξῃ 5040 δρχ. ἤτοι 360 δρχ. ὀλιγώτερον. Ἡ διαφορὰ αὕτη προῆλθε, διότι εἰς τὴν ὀκᾶν τοῦ τρίτου εἴδους ζημιοῦται $81-72=9$ δρχ. Ὅθεν ἐκ τοῦ τρίτου θὰ λάβη $360 : 9=40$ ὀκάδας καὶ συνεπῶς ἐκ τοῦ δευτέρου $90-60=30$ ὀκ.

14) Ἔχει τις τρία εἴδη τεΐου τῶν 78 τῶν 84 καὶ 75 δρχ. κατ᾽ ὀκᾶν. Θέλει δὲ ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίση μῖγμα 100 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον πωλῶν πρὸς 87,45 δρχ. τὴν ὀκᾶν, νὰ κερδίση 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβη πρὸς τοῦτο ἐξ ἑκάστου τῶν δύο ἄλλων, ὅταν ἐκ τοῦ τρίτου λάβη 20 ὀκάδας.

ἀπ. 45 35

15.—Ἐπώλησέ τις 250 ὀκάδας ἀλεύρου ἀντὶ 1352 δρχ., μὲ κέρδος 4% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Αἱ 250 ὀκάδες αὗται εἶχον γίνει ἀπὸ δύο εἴδη ἀλεύρου, τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἐπωλεῖτο πρὸς 6 δρχ. καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 5 δρχ. κατ᾽ ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

ἀπ 100 140

16.—Ἔχει τις τρία εἴδη οἴνου τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 4,50, τοῦ δευτέρου 4 καὶ τοῦ τρίτου 3 δρχ. καὶ σχηματίζει ἐξ αὐτῶν μῖγμα 40 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς εἶναι 4,05 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, δεδομένου ὅτι ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἔλαβε συνολικὸν ποσόν, ἴσον πρὸς τὰς ὀκάδας τοῦ πρώτου.

Λύσις. Ἀφοῦ τὸ ποσὸν τῶν ὀκάδων ὁλοκλήρου τοῦ μίγματος εἶναι 40, ἕπεται ὅτι ἀπὸ τὸ πρῶτον ἔλαβεν 20 ὀκάδας καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα ὁμοῦ 20 ὀκάδας. Ἡ ἀξία ὅλου τοῦ μίγματος εἶναι $4{,}05 \times 40 = 162$ δραχ., αἱ 20 ὀκ. τοῦ πρώτου τιμῶνται 90 δραχ. καὶ τῶν δύο τελευταίων αἱ 20 ὀκάδας τιμῶνται 72 δραχ., ἤτοι ἡ μέση τιμὴ τοῦ μίγματος αὐτῶν εἶναι 3,60 δραχ. Εὐκόλως τώρα εὑρίσκομεν ὅτι ἐκ τοῦ δευτέρου θὰ λάβῃ 12 ὀκάδας καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 8 ὀκ.

17.—Ἔχει τις τρία εἴδη οἴνου, τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,60, τοῦ δευτέρου 5,40 καὶ τοῦ τρίτου 4,20 δραχ. καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 720 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 4,30 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος δεδομένου ὅτι, ὁ λόγος τῶν ὀκάδων τῶν δύο πρώτων πρέπει νὰ εἶναι $\frac{4}{5}$.

Λύσις. Λαμβάνομεν 4 ὀκάδας ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ 5 ἀπὸ τὸ δεύτερον καὶ σχηματίζομεν μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ μέση τιμὴ εἶναι 4,60 κατ' ὀκᾶν. Τώρα σχηματίζομεν ἕτερον μῖγμα ἐξ αὐτοῦ καὶ τοῦ τρίτου ἤτοι

$$\begin{array}{lcr} \alpha+\beta)\ 4{,}60 & & 0{,}10\ \text{K} \\ & 4{,}30 & \\ \gamma)\ 4{,}20 & & 0{,}30\ \text{Z} \end{array}$$

ἑπομένως, ὁ λόγος τῶν ὀκάδων τῶν δύο πρώτων πρὸς τὰς ὀκάδας τοῦ τρίτου εἶναι $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ καὶ συνεπῶς ἀπὸ τὰ δύο ἄλλα ὁμοῦ πρέπει νὰ λάβῃ ποσὸν ὀκάδων, ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τρίτου ἤτοι $\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ τοῦ τρίτου εἶναι 720 ὀκάδες καὶ αἱ ὀκάδες αὐτοῦ εἶναι 540. Τὸ πρῶτον καὶ δεύττρον ὁμοῦ εἶναι τώρα 180 ὀκάδες, τὰς ὁποίας θὰ μερίσωμεν ἀναλόγως τοῦ 4 καὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἐκ τοῦ πρώτου ἔλαβε 80 καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου 100 ὀκάδας.

18.—Κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ βάρους 1.200 γραμμαρίων ἔχει τίτλον 0,850. Πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτό, ἵνα ὁ τίτλος τοῦ κράματος γίνῃ 0,800;

Λύσις. 0,850 — 0,800 — 0,800 — 0 — 0,050. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀναλογία τῶν βαρῶν εἶναι $\frac{16}{1}$ δηλ. εἰς τὰ 16 γραμμάρια τοῦ κράματος πρέπει νὰ προστεθῇ 1 γραμ. χαλκοῦ καὶ εἰς ὅλον τὸ κρᾶμα 1.200 : 17=75 γραμ. χαλκοῦ.

19.—Κρᾶμα χρυσοῦ ἔχει βάρος 1.500 γραμμάρια καὶ τίτλον 0,750. Πόσον καθαρὸν χρυσὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτό, ἵνα ὁ τίτλος αὐτοῦ γίνῃ 0,800; *ἀπ. 375 γρ.*

20.—Κρᾶμα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ 120 γρμ. ἔχει τίτλον 0,700. Πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐξ αὐτοῦ, ἵνα προκύψῃ κρᾶμα καθαρότητος 0.800;

Λύσις. Εἰς τὸ κρᾶμα τῶν 120 γραμ., τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 84 γραμ. καὶ τοῦ χαλκοῦ 36 γραμ. Εἰς τὸ δεύτερον κρᾶμα, τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ εἶναι τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ βάρους του καὶ συνεπῶς τὸ ὅλον βάρος αὐτοῦ εἶναι 84 : $\frac{8}{10}$=105 γραμ. Ὅθεν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν 120—105=15 γραμ. χαλκοῦ, ἵνα ἔχωμεν κρᾶμα καθαρότητος 0,800.

21.—Εἶχέ τις δύο κράματα ἀργύρου, τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον περιεῖχε 15.781,5 γραμ. καὶ τὸ δεύτερον 1.417,5 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου καὶ ὁ χαλκὸς ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ πρῶτον ἦτο κατὰ 2.961 γραμ. περισσότερον τοῦ χαλκοῦ τοῦ δευτέρου, τὰ ὁποῖα συντήξας ἐσχημάτισεν κρᾶμα τίτλου 0,840. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τίτλοι τῶν δύο κραμάτων.

Λύσις. Ὁ καθαρὸς ἄργυρος εἰς τὸ νέον κρᾶμα ἔχει βάρος 1.417,5+15.781,5=17.199 γραμ. ἤτοι τὰ $\frac{84}{100}$ τοῦ νέου κράματος εἶναι 17.199 γραμ. καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ 20.475 γραμ. Τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 20.475—17.199=3.276 γραμ. Ὅθεν τὸ πρῶτον περιεῖχεν 3118,5 καὶ τὸ δεύτερον 157,5 γραμ. χαλκοῦ. Εὐκόλως εὑρίσκομτν τώρα ὅτι οἱ τίτλοι αὐτῶν ἦσαν 0,835 0,900.

22.—Ἔχει τις δύο κράματα χρυσοῦ τίτλων 0,810 καὶ 0,925. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου, ἵνα σχηματίσῃ κρᾶμα 575 γραμ. τίτλου 0,880; *ἀπ. 225 350*

23.—Δύο κράματα ἀργύρου τίτλων 0,850 καὶ 0,750 ἔχουν συνολικὸν βάρος 300 γραμ., τὸ δὲ βάρος τοῦ χαλκοῦ ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς ἀμφότερα εἶναι 63 γραμ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν δύο κραμάτων.

Λύσις. Όταν τὰ δύο εἶχον τὸν αὐτὸν τίτλον λ.χ. 0.850, τότε τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ, ὅστις θὰ περιείχετο εἰς ἀμφότερα θὰ ἦτο $0{,}150 \times 300 = 45$ γραμ. ἤτοι κατὰ $63 - 45 = 18$ γραμ. ὀλιγώτερον τοῦ δεδομένου. Ἡ διαφορὰ αὕτη προῆλθεν ἐκ τοῦ ὅτι, ὁ χαλκὸς τοῦ δευτέρου κράματος ἠλαττώθη κατὰ $0{,}250 - 0{,}150 = 0{,}1$. Ὅθεν τὸ βάρος τοῦ δευτέρου εἶναι $18 : 0{,}1 = 180$ γραμ. καὶ τοῦ πρώτου 120 γραμ.

24) Εἶχεν τις δύο κράματα χρυσοῦ τίτλων 0,900 καὶ 0,850 καὶ συνολικοῦ βάρους 660 γραμ., τὰ ὁποῖα συντήξας ἐσχημάτισε κράμα τίτλου 0,885. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ βάρη τῶν δύο κραμάτων. *ἀπ. 462 198*

25) Ἔχει τις τρία εἴδη χρυσοῦ τίτλων 0,750 0,840, 0,920 καὶ θέλει ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίσῃ κράμα 810 γραμ. τίτλου 0,890. Νὰ εὑρεθῇ τὶ βάρος πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου, δεδομένου ὅτι, τὰ βάρη τῶν δύο πρώτων θὰ ἔχουν λόγον $\frac{2}{7}$·

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων εἶναι $\frac{2}{7}$ ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς συντήξεως αὐτῶν θὰ εἶναι $(2 \times 0{,}75 + 7 \times 0{,}84) : 9 = 0{,}82$. Λαμβάνω τώρα τὸ προκύψαν κράμα καὶ τὸ συντήκω μὲ τὸ τρίτον, ὁπότε θὰ προκύψῃ κράμα τίτλου 0,89. Ἔχομεν λοιπὸν

α+β : 0,820		0,030
	0,890	
γ : 0,920		0,070

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ βάρος τῶν δύο πρώτων ἔχει λόγον πρὸς τὸ τοῦ τρίτου $\frac{3}{7}$· Ὅταν μερίσωμεν τώρα τὰ 810 γραμ. ἀναλόγως τοῦ 3 καὶ 7, εὑρίσκομεν τὰ δύο πρῶτα ὁμοῦ εἶναι 243 γραμ. καὶ τὸ τρίτον 567 γραμ. Μερίζοντες πάλιν τὰ 243 γραμ. ἀναλόγως τοῦ 2 καὶ 7 εὑρίσκομεν τὰ βάρη τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, τὰ ὁποῖα εἶναι 54 καὶ 189 γραμ.

26) Ἔχει τις τρία εἴδη ἀργύρου τίτλων 0,700 0,800 0,900 καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ ἐξ αὐτῶν κρᾶμα 2.000 γραμ. τίτλου 0,795. Νὰ εὑρεθῇ τί ποσὸν πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον, δεδομένου ὅτι, τὰ βάρη τῶν δύο πρώτων ἔχουν λόγον $\frac{3}{4}$·

ἀπ. 630 840 530

27) Ἔχει τις τρία εἴδη χρυσοῦ τίτλων 0,700 0,800 καὶ 0,900 καὶ θέλει ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα 1.500 γραμ. τί-

τλου 0,820. Τὶ ποσὸν θὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου τῶν δύο πρώτων, ὅταν ἐκ τοῦ τρίτου λάβῃ 600 γραμ.;

Λύσις. Σχηματίζομεν κρᾶμα ἐκ τῶν δύο πρώτων, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Εἰς τὰ 1.500 γραμ. τοῦ κράματος περιέχεται καθαρὸς χρυσὸς $0{,}82 \times 1.500 = 1.230$ γραμ. Εἰς τὰ 600 γραμ. τοῦ τρίτου ὁ καθαρὸς χρυσὸς εἶναι $0{,}9 \times 600 = 540$ γραμ. Ὅθεν εἰς τὰ 900 γραμ. τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου περιέχονται $1.230 - 540 = 690$ γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ συνεπῶς ὁ τίτλος αὐτοῦ εἶναι $\frac{690}{900} = \frac{23}{30}$

Τώρα εὑρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \frac{7}{10} & & \frac{1}{30} \\ & \frac{23}{30} & \\ \beta : \frac{8}{10} & & \frac{2}{30} \end{array}$$

Ἤτοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀναλογία τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι 1 πρὸς 2. Ἐὰν μερίσωμεν τώρα τὸ ποσὸν τῶν 900 γραμ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, εὑρίσκομεν ὅτι ἀπὸ τὸ πρῶτον θὰ λάβῃ 300 γραμ. καὶ τὸ δεύτερον 600 γραμ.

28) Ἔχει τις δύο τεμάχια ἀργύρου, τὸ πρῶτον βάρους 526 γραμ. καὶ τίτλου 0,920, τὸ δεύτερον βάρους 483 γρομ. καὶ τίτλου 0,750 γραμ. καὶ θέλει νὰ σχηματίσῃ ἐξ αὐτῶν κρᾶμα τίτλου 0,850. Νὰ εὑρεθῇ τὶ βάρος καθαροῦ ἀργύρου ἢ χαλκοῦ πρέπει νὰ προσθέσῃ εἰς τὸ κρᾶμα, ἵνα ἐπιτύχῃ τοῦτο.

Λύσις. Πρῶτον θὰ εὕρωμεν τὸν βαθμὸν καθαρότητος τοῦ κράματος, ὅστις εἶναι 0,842. Ὅθεν διὰ νὰ γίνῃ ὁ τίτλος αὐτοῦ 0,850. Πρέπει νὰ προσθέσωμεν καθαρὸν ἄργυρον, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εὑρίσκεται εὐκόλως, ὅτι εἶναι 46,53 γραμ.

29) Εἰς κράμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, ὁ λόγος τοῦ ἀργύρου πρὸς τὸν χαλκὸν εἶναι 9 πρὸς 1. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ 260 γραμ. χαλκοῦ, ὁ λόγος αὐτῶν εἰς τὸ νέον κράμα εἶναι $\frac{835}{165}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀρχικοῦ κράματος.

Λύσις. Ὁ χαλκὸς εἰς τὸ πρῶτον κράμα εἶναι τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ ἀργύρου, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον εἶναι τὰ $\frac{165}{835}$ τοῦ ἀργύρου. Ἡ διαφορὰ αὐτῶν, ἡ ὁποία εἶναι $\frac{130}{1503}$ τοῦ περιεχομένου ἀργύρου, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν βαρῶν τοῦ χαλκοῦ εἰς τὰ δύο κράματα, ἤτοι 260 γρμ. Ὅθεν ὁ καθαρὸς ἄργυρος ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ πρῶτον κράμα εἶναι $260 : \frac{130}{1503} = 3006$ γραμ. Συνεπῶς τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 334 γραμ. καὶ τὸ βάρος τοῦ κράματος $3006+334=3340$ γραμ.

30) Ἔχει τις τρία εἴδη οἴνου, τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,80, τοῦ δευτέρου 4,60 καὶ τοῦ τρίτου 5,40 δραχ. καὶ ἐσχημάτισεν ἐξ αὐτῶν μῖγμα 80 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον πωλήσας ἀντὶ 489,90 δρχ., ἐκέρδισεν 15% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορῆς. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου τῶν δύο ἄλλων, δεδομένου ὅτι ἐκ τοῦ δευτέρου ἔλαβεν 15 ὀκάδας.

ἀπ. 25 15 40

31) Ἔχει τις ἓν βαρέλιον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 450 ὀκάδας οἴνου. Ἀφοῦ ἐπλήρωσεν αὐτὸ κατὰ τὰ $\frac{13}{15}$ μὲ οἶνον τὸ ὑπόλοιπον τὸ ἐπλήρωσεν μὲ ὕδωρ καὶ ἀφαιρέσας κατόπιν ἐκ τοῦ μίγματος 90 ὀκ. τὸ πληροῖ πάλιν μὲ ὕδωρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ τελευταίου αὐτοῦ μίγματος, ὡς καὶ τὸ ποσὸν τοῦ περιεχομένου εἰς αὐτὸ οἴνου, δεδομένου ὅτι, τὸν οἶνον τὸν εἶχεν ἀγοράσει πρὸς 3,75 δραχ. τὴν ὀκᾶν.

ἀπ. 2,60 δρχ. 312 ὀκ.

32) Ἀνέμιξέ τις 480 ὀκ. ἀλεύρου τῶν 3,50 δραχ. κατ' ὀκᾶν καὶ 520 ὀκάδας ἄλλου ἀλεύρου τῶν 7 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Νὰ εὑρεθῇ πόσαι ὀκάδες ἐκ τοῦ μίγματος τούτου τιμῶνται 3.192 δραχ. καὶ πόσες ὀκάδες ἐξ ἑκάστου εἴδους περιέχονται εἰς αὐτάς. *ἀπ. 600 ὀκ. α' 288 β' 312*

32) Συνέτηξέ τις 3750 γραμ. ἀργύρου τίτλου 0,850 καὶ 5.425 γραμ. ἄλλου ἀργύρου τίτλου 0,950. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ τίτλος τοῦ κράματος καὶ β) τὶ βάρος ἀργύρου ἢ χαλκοῦ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸ νέον κράμα, ἵνα ὁ τίτλος αὐτοῦ γίνῃ 0,900. *ἀπ. 0,905 51,4 γρμ. χαλκὸς*

34) Συνέτηξέ τις τρία κράματα χρυσοῦ τίτλων 0,920 0,840 0,750 καὶ ἐσχημάτισε κράμα 3410 γραμ. τίτλου 0.900. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ βάρη τῶν δύο κραμάτων δεδομένου, ὅτι τὸ βάρος τοῦ τρίτου εἶναι 180 γραμ. ἀπ. *α' 2760 β' 470*

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1) Ἓν σῶμα βάρους 52 χιλ)μων ζυγίζει εἰς τὸ ὕδωρ 34,4 χιλ)μα. Ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ καταβάλωμεν, ἵνα συγκρατήσωμεν αὐτὸ αἰωρούμενον εἰς ὑγρόν, πυκνότητος 1,8.

Λύσις. Θὰ χάσῃ ἀπὸ τὸ βάρος του (52—34,4)×1,8=31,68 χιλ]μα. Ὅθεν ἀπαιτεῖται δύναμις 52—31,68=20,32 χιλ]μων.

2) Μῖγμα οἰνοπνεύματος μιᾶς κ. παλ. ζυγίζει 740 γραμ. καὶ ἀποτελεῖται κατ᾽ ὄγκον ἀπὸ 65% οἰνοπνεύματος καὶ 35% ὕδατος. Ὅταν προσθέσωμεν εἰς τὸ μῖγμα 3 κ. παλ. καθαροῦ οἰνοπνεύματος, ποία θὰ εἶναι ἡ περιεκτικότης εἰς βάρος μιᾶς κ. παλ. τοῦ μίγματος ;

Λύσις. Τὸ βάρος τοῦ ὕδατος εἰς 1000 κ.δ. εἶναι 350 γραμ. καὶ τοῦ οἰνοπνεύματος 390 γραμ. Ἡ μία κ. παλ. οἰνόπνευμα ζυγίζει 390 : 0,65=600 γραμ. καὶ αἱ 3 κ. παλ. 1800 γραμ. ἤτοι τὸ νέον μῖγμα ζυγίζει 740 + 1800 = 2540 γραμ. καὶ περιέχει καθαρὸν οἰνόπνευμα 390+1800=2190. Ὅθεν εἰς μίαν κ. παλ. τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 86,22% οἰνόπνευμα καὶ 13,75% ὕδωρ.

3) Ὄγκος πάγου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλ)δου ἐξέχει τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης 1,2 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν ὕψος αὐτοῦ δεδομένου ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ πάγου εἶναι 0.918 καὶ τοῦ ὕδατος 1,026.

Λύσις. Τὸ ὁλικὸν ὕψος τοῦ πάγου εἶναι τὰ $\frac{1,026}{0,918}=\frac{19}{17}$ τοῦ ὕψους τοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος μέρους αὐτοῦ. Ὅθεν τὸ ὁλικὸν ὕψος αὐτοῦ εἶναι 11,4 μ.

4) Βαρέλιον πλῆρες οἴνου ζυγίζει 246,25 χιλ)μα, πλῆρες δὲ ἐλαίου 225 χιλ)μα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ κενοῦ, δεδομένου ὅτι τὸ εἰδ. β. τοῦ οἴνου εἶναι 0,99 καὶ τοῦ ἐλαίου 0,9.

ἀπ. 225 κ.π. 22,5 χιλ)μα

5) Ἓν δοχεῖον κράματος ἀργύρου καὶ χαλκοῦ πλῆρες καθαροῦ ὕδατος ζυγίζει 9680 γραμ. καὶ πλῆρες ἐλαίου πυκνότητος 0,91 ζυγίζει 9266 γραμ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης αὐτοῦ, τὸ βάρος αὐτοῦ κενοῦ καὶ ὁ τίτλος αὐτοῦ, δεδομένου ὅτι περιέχει 1270 γραμ. χαλκοῦ.

Λύσις. Ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἶναι 414 : 0,09=4600 κ. δ. τὸ βάρος αὐτοῦ κενοῦ 5080 γραμ. Ὅθεν τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ ἀργύρου εἶναι 3810 γραμ. καὶ συνεπῶς ὁ τίτλος αὐτοῦ 0,750.

6) Μία φιάλη πληρωθεῖσα ἐλαίου κατὰ τὰ $\frac{11}{15}$ τῆς χωρητικότητος αὐτῆς, ἔχει βάρος 649 γραμ. περισσότερον τοῦ βάρους ὅπερ ἔχει κενή. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης αὐτῆς, ὅταν ἡ πυκνότης τοῦ ἐλαίου εἶναι 0,915. *ἀπ. 967 κ.δ.*

7) Ἓν δοχεῖον πλῆρες ὕδατος ζυγίζει 350 γραμ. πλῆρες δὲ ὑδραγύρου 2868 γραμ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ κενοῦ.

Λύσις. Ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἶναι 2518 : 12,29=200 κ.δ. καὶ συνεπῶς τό βάρος του 150 γραμ.

8) Μία φιάλη πλήρης ἐλαίου εἰδ. βάρους 0,915. ζυγίζει 0,549 χιλ)μα. Δεδομένου ὅτι τὸ βάρος αὐτῆς κενῆς εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὁλικοῦ βάρους, νὰ εὑρεθῇ πόσον ὕδωρ χωρεῖ.

ἀπ. 0,4 χιλ)μα

9) Ἓν δοχεῖον πλῆρες ὕδατος ζυγίζει 45,2 χιλ)μα καὶ πλῆρες ἐλαίου 42,05 χιλ)μα. Δεδομένου ὅτι 87,5 κ. παλ. ἐλαίου ζυγίζουν 80 χιλ)μα, νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ δοχείου καὶ ἡ χωρητικότης αὐτοῦ.

Λύσις. Ἡ διαφορὰ τῶν βαρῶν τῶν δύο ὑγρῶν εἶναι 3,15 χιλ)μα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν βαρῶν εἰς μίαν κ. π. $1-\frac{32}{35}=\frac{3}{35}$ χιλ)μα Ὅθεν ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι $3,15 : \frac{3}{35} = 36,75$ κ. π. καὶ συνεπῶς τὸ βάρος του 8,45 χιλ)μα.

10) Κυλινδρικὸν δοχεῖον πλῆρες ὕδατος ζυγίζει 5 χιλ)μα καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ κενοῦ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ βάρους τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, ὅπερ θὰ ἐκχυθῇ, ὅταν ρίψωμεν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τεμάχιον σιδήρου βάρους 1,95 χιλ)μων καθὼς καὶ τὸ ὕψος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ τεμαχίου. Εἰδ. β. σιδήρου 7,8.

Λύσις. Τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἶναι 4 χιλ)μα καὶ τὸ ἐκχυθὲν ὑγρὸν ἔχει βάρος 1,95 : 7,8=0,25 χιλ)μα. Μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ τεμαχίου τὸ βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι 4—0,25=3,75 χιλ)μα καὶ συνεπῶς τὸ ὕψος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας θὰ εἶναι $3{,}75 : 4=\frac{15}{16}$ τοῦ ἀρχικοῦ.

11) Ἓν δοχεῖον πλῆρες καθαροῦ ὕδατος ἔχει βάρος 800 γραμ., τὸ δὲ βάρος τοῦ δοχείου εἶναι τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ βάρους τοῦ περιεχομένου ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ ζυγίζῃ τοῦτο, ὅταν πληρωθῇ οἰνοπνεύματος πυκνότητος 0,875

ἀπ. 712,5 γραμ.

12) Ὅταν 18 κ. παλ. γάλακτος ζυγίζουν 18,45 χιλ)μα καὶ εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ καθαροῦ γάλακτος εἶναι 1,03, νὰ εὑρεθῇ ἂν τοῦτο εἶναι καθαρὸν ἢ περιέχει ὕδωρ καὶ πόσον.

Λύσις. Ὅταν ἦτο καθαρὸν θὰ ἐζύγιζεν 1,03×18=18,54 χιλ)μα ἤτοι ἔχομεν διαφορὰν βάρους 0,09 χιλ)μα. Ἡ διαφορὰ τῶν εἰδ. β. ὕδατος καὶ γάλακτος εἶναι 1,03—1=0,03. Ὅθεν ἡ χωρητικότης τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἶναι 0,09 : 0,03=3 κ. παλ. καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ 3 χιλ)μα.

13) Δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλ]δου, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ τ.μ. καὶ ὕψος 0,72 μ. χρειάζεται 37,5 λ., ἵνα πληρωθῇ ὑπὸ κρουνοῦ, ὅστις παρέχει εἰς αὐτὴν 12,5 κ.π. ὕδατος εἰς 1 λ, ἐπειδὴ εἰς τὸν πυθμένα αὐτῆς ὑπάρχει μικρά τις ὀπή. Νὰ εὑρεθῇ τὶ ποσότης ὕδατος διαφεύγει ἀπὸ αὐτὴν εἰς 1 λ.

Λύσις. Τὸ ὁλικὸν ὕδωρ, τὸ ὁποῖον παρέσχε ὁ κρουνὸς ἦτο 12,5× 37,5=468,75 κ.π. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἦτο $0{,}72\times\frac{5}{8}=450$ κ.π. Ἡ διαφορὰ τοῦ ὕδατος, ὅπερ ἐδέχθη ἀπὸ τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον πραγματικὰ χωρεῖ εἶναι 18,75 κ.π. Ὅθεν ἐχάθησαν 18,75 κ.π. καὶ συνεπῶς εἰς 1 λ. χάνει ὕδωρ 18,75 : 37,5=0,5 κ.π.

14) Δεξαμενὴ δέχεται ὕδωρ ἀπό τινα κρουνόν, ὅστις εἰς 1 ω 24 λ. ἐπλήρωσεν 0,6 αὐτῆς. Ὅταν ἀφήσωμεν αὐτὸν ἀνοικτὸν ἐπὶ 50 λ ἀκόμη, ἡ δεξαμενὴ θὰ χρειασθῇ 540 κ.π. ὕδατος, ἵνα πληρωθῇ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα κ.μ. ὕδατος χωρεῖ αὕτη καὶ πόσας ὀκάδας ὕδατος παρέχει εἰς αὐτὴν ὁ κρουνὸς εἰς 1 λ.

ἀπ. 12,6 κ.μ $70\frac{5}{16}$ ὀκ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ — ΘΕΩΡΙΑ

Κεφ. Α΄—Έννοιαι καὶ Ὁρισμοί.

Κεφάλαιον Β΄—Ἀρίθμησις

Κεφ. Γ΄—Ἀκέραιοι ἀριθμοί·

Κεφ. Δ'.—Κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Κεφ. Ε'.—Δεκαδικοὶ ἀριθμοί—Τετραγωνικὴ ρίζα

Κεφ. ΣΤ'.—Μονάδες μετρήσεως—Συμμιγεῖς ἀριθμοί,

Κεφ. Ζ΄.—Λόγοι, Ἀναλογίαι, Ἀνάλογα μεγέθη

Κεφ. Η΄. Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναλογιῶν.

ΜΕΡΟΣ Β'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΕΞΕΤΥΠΩΘΗ ΕΙΣ ΤΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
Δ. ΜΟΥΣΟΥΛΙΩΤΗ — Ι. ΠΡΟΔΡΟΜΟΥ
ΜΑΝΗΣ ΚΑΙ ΖΩΟΔΟΧΟΥ ΠΗΓΗΣ 31
ΔΙΑ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΝ ΤΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

ΤΙΜΗ ΔΡΧ. 40