ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

Μπαρμπαστάθης (Χρ.)

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ

ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

[Πρὸ ἑκάστης ὁμάδος ἀσκήσεων ἐκτίθεται κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ σύντομον καὶ μὲ τὰ νεώτερα δεδομένα ἡ ὕλη τῆς Κοσμογραφίας ἡ σχετικὴ μὲ τὰς ἀσκήσεις.]

Ὑπὸ
ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38
1950

ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ "Η ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ.— Περιέχει ὅλην τὴν ὕλην τὴν ἀπαραίτητον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτέρας σχολάς.

2. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.— Τὸ βιβλίον τοῦτο συμπληροῖ τὴν ὕλην τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Γυμνασίου τοῦ ἰδίου συγγραφέως.

3. ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ τοῦ ὀργανισμοῦ ἐκδόσεως σχολικῶν βιβλίων, μὲ ἁπλουστεύσεις μαθηματικῶν ἐννοιῶν, παρατηρήσεις, ἐπεξηγήσεις, πρακτικοὺς κανόνας, τύπους, ὁδηγίας καὶ ἀριθμητικοὺς πίνακας διὰ τὴν εὐκολωτέραν καὶ ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς ἀριθμητικῆς καὶ πρακτικῆς γεωμετρίας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

[Πρὸ ἑκάστης ὁμάδος ἀσκήσεων ἐκτίθεται κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ σύντομον καὶ μὲ τὰ νεώτερα δεδομένα ἡ ὕλη τῆς Κοσμογραφίας ἡ σχετικὴ μὲ τὰς ἀσκήσεις.]

Ὑπὸ
ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

314

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σιας Α. Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38
1950

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΑΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τυπογραφεῖον Ἀδ/φῶν Γ. Ρόδη, Κεραμεικοῦ 42

ΓΕΝΙΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ

Ἡ ἀστρονομία δὲν ἱκανοποιεῖ μόνον πνευματικὰ ἐνδιαφέροντα τοῦ ἀνθρώπου, ὅστις θέλει νὰ συλλάβῃ εἰς τὴν σκέψιν του τὴν φύσιν τῶν οὐρανίων σωμάτων, τὴν γένεσιν τοῦ Κόσμου καὶ τὸ μέλλον αὐτοῦ, ἀλλὰ χρησιμεύει καὶ εἰς τὴν ἱκανοποίησιν ἀναγκῶν τῆς πρακτικῆς αὐτοῦ ζωῆς. Διότι ὁ ἄνθρωπος ἐκ τῆς καθ' ἡμέραν φαινομένης κινήσεως τοῦ Ἡλίου καὶ ἐκ τῆς περιοδικῆς ἐπαναλήψεως ὡρισμένων οὐρανίων φαινομένων ἠδυνήθη νὰ διαιρέσῃ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας εἰς ὥρας, νὰ διαιρέσῃ τὸν χρόνον εἰς μῆνας καὶ ἔτη, νὰ ρυθμίσῃ τὰς περιοδικὰς ἀνάγκας τῆς ζωῆς του, ὡς εἶναι ἡ καλλιέργεια τῶν ἀγρῶν, ἡ σπορά, ἡ φύτευσις, αἱ θρησκευτικαὶ ἑορταί. Ὁμοίως ἐκ παρατηρήσεων ἐπὶ τοῦ οὐρανοῦ, εὗρεν ὁ ἄνθρωπος μεθόδους, διὰ τῶν ὁποίων δύναται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ προσδιορίζῃ εὐκόλως καὶ ταχέως τὴν θέσιν σημείου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Οὕτω δὲ κατέστησαν δυναταὶ αἱ γεωδαιτικαὶ ἐργασίαι, ἡ χαρτογράφησις, ἡ ἀνάπτυξις τῆς ναυτιλίας. Γενικῶς δὲ αἱ παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ οὐρανοῦ συνετέλεσαν καὶ ἐξακολουθοῦν νὰ συντελοῦν εἰς τὴν ἀπὸ πάσης ἀπόψεως πρόοδον καὶ ἀνάπτυξιν τῆς ἀνθρωπότητος.

Τὸ μάθημα λοιπὸν τῆς Κοσμογραφίας, ἥτις μᾶς δίδει στοιχεῖα τῆς ἀστρονομίας, εἶναι ἐκ τῶν οὐσιωδῶν. Διὰ νὰ τὸ κατανοήσῃ δὲ ὁ μαθητὴς καλῶς, πρέπει νὰ συνδυάζῃ τὴν μελέτην μὲ τὴν παρατήρησιν. Π. χ. νὰ παρατηρῇ καὶ νὰ παρακολουθῇ τὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος εἰς ἃ ἀνατέλλει εἰς διαφόρους ἡμέρας ὁ Ἥλιος, νὰ παρατηρῇ ἐν τῇ ἡμερησίᾳ κινήσει αὐτοῦ τὸ μῆκος καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς σκιᾶς τῶν ἀντικειμένων. Νὰ διακρίνῃ τοὺς σπουδαιοτέρους ἀστερισμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὁρατοὶ εἰς τὸν τόπον μας καὶ διὰ παρατηρήσεων νὰ ἀντιληφθῇ τὴν κίνησιν αὐτῶν, ὡς καὶ τὴν φορὰν τῆς κινήσεώς των. Ὁμοίως νὰ διακρίνῃ τὸν πολικὸν ἀστέρα, τοὺς ἀπλανεῖς ἀπὸ τοὺς πλανήτας κλπ. Γενικῶς δὲ ὅ,τι ἀναφέρεται ἐν τῷ βιβλίῳ τῆς Κοσμογραφίας, ὡς ἀποτέλεσμα παρατηρήσεως, νὰ προσπαθῇ ὁ μαθητὴς νὰ τὸ παρατηρῇ καὶ ὁ ἴδιος.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ

τῶν ἀσκήσεων τῆς ἐγκεκριμένης

ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Η ΟΥΡΑΝΙΟΣ ΣΦΑΙΡΑ

1. Οὐράνιος σφαῖρα. Ὁρισμοί.—Οὐράνιος σφαῖρα λέγεται ἡ ὑποθετικὴ σφαῖρα τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ, ἡ ἀκτὶς ἀπροσδιόριστος (ἀλλὰ πολὺ μεγάλη) καὶ ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς ὁποίας νοοῦμεν προβεβλημένους τοὺς ἀστέρας.

Ἡ κατακόρυφος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ Θ τοῦ παρατηρητοῦ, κέντρον τῆς οὐρανίου σφαίρας, τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα Ζ (ζενὶθ) καὶ Ν (ναδὶρ) ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου (σχ. 1). Ἐξ αὐτῶν τὸ ζενὶθ κεῖται ὑπεράνω τῆς κεφαλῆς τοῦ παρατηρητοῦ.

Τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀγόμενον διὰ τοῦ Ο καθέτως ἐπὶ τὴν ΖΝ τέμνει τὴν οὐράνιον σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια λέγεται **αἰσθητὸς ὁρίζων** τοῦ τόπου Ο.

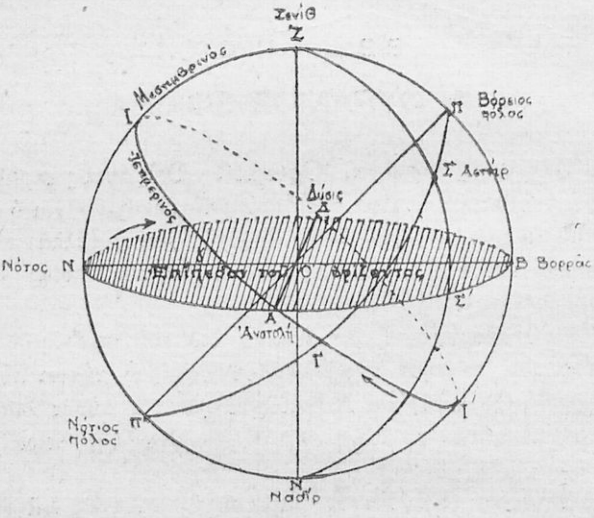
Πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ὁρίζοντα λέγεται **ὁριζόντιον** ἐπίπεδον, ὅπερ τέμνει τὴν οὐράνιον σφαῖραν κατὰ κύκλον, ὅστις λέγεται **ὁριζόντιος κύκλος** ἢ **ἀλμικανταράτος.**

Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κατακορύφου τόπου τινὸς (κατακόρυφον ἐπίπεδον) τέμνει τὴν οὐράνιον σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ὅστις λέγεται **κατακόρυφος** κύκλος. Τὸ ἡμικύκλιον δὲ κατακορύφου κύκλου τὸ περιέχον ἀστέρα τινὰ ἢ ἄλλο σημεῖον τῆς οὐρανίου σφαίρας λέγεται **κατακόρυφος** τοῦ ἀστέρος ἢ τοῦ σημείου αὐτοῦ. Π. χ. κατακόρυφος τοῦ ἀστέρος Σ εἶναι τὸ ἡμικύκλιον ΖΣΝ (σχ. 1).

Ἡ οὐράνιος σφαῖρα φαίνεται κινουμένη ἐξ ἀνατολῶν πρὸς δυσμὰς (ἀνάδρομος φορὰ) περὶ μίαν διάμετρον αὐτῆς ΠΠ′ (σχ. 1) διερχομένην πολὺ πλησίον τοῦ ἀστέρος α τῆς οὐρᾶς τῆς μικρᾶς ἄρκτου (πολικὸς ἀστήρ), κατὰ τοὺς κάτωθι νόμους:

1) **Ἕκαστος ἀστὴρ φαίνεται γράφων ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας περιφέρειαν μικροῦ κύκλου μὲ κοινὸν πόλον τὸ σημεῖον Π.**

2) **Τὰ τόξα τὰ ὁποῖα γράφει ἕκαστος ἀστὴρ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς χρόνους καθ᾿ οὓς ταῦτα γράφονται.** Ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι ἡ κίνησις τῶν ἀστέρων εἶναι ἰσοταχὴς καὶ ὅτι ὁ



Σχ. 1.

χρόνος καθ᾿ ὃν ἕκαστος ἀστὴρ γράφει μίαν περιφέρειαν τοῦ μικροῦ του κύκλου εἶναι σταθερὸς καὶ ὁ αὐτὸς δι᾿ ὅλους τοὺς ἀστέρας. Λέγεται δὲ οὗτος **ἀστρικὴ ἡμέρα.**

Ἡ διάμετρος ΠΠ′ περὶ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὅτι στρέφεται ἡ οὐράνιος σφαῖρα λέγεται **ἄξων τοῦ κόσμου** ἢ **γραμμὴ τῶν πόλων.** Ὁ πόλος Π ὅστις κεῖται ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντός μας λέγεται **βόρειος πόλος,** ὁ δὲ ἀντίθετος πόλος Π′, ὅστις εἶναι εἰς ἡμᾶς ἀόρατος λέγεται **νότιος πόλος.**

Ὁ μέγιστος κύκλος ΙΙ′ ὅστις εἶναι τομὴ τῆς οὐρανίου σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου εἰς τὸ κέντρον Ο λέγεται **οὐράνιος ἰσημερινὸς** (σχ. 1). Ἐκ τῶν δύο ἡμισφαιρίων εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ οὗτος τὴν οὐράνιον σφαῖραν, τὸ μὲν περιέχον τὸν βόρειον πόλον λέγεται **βόρειον ἡμισφαίριον**, ἐνῷ τὸ ἄλλο λέγεται **νότιον ἡμισφαίριον.** Πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ τέμνει τὴν οὐράνιον σφαῖραν κατὰ κύκλον, ὅστις λέγεται **οὐράνιος παράλληλος.** Τοιούτους δὲ παραλλήλους γράφουν οἱ ἀστέρες ἐν τῇ ἡμερησίᾳ κινήσει αὐτῶν. Ὡς π. χ. οἱ ἀστέρες α, β, γ, δ τοῦ σχ. 2. Τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῆς γραμμῆς τῶν πόλων ΠΠ΄, τέμνουν τὴν οὐράνιον σφαῖραν κατὰ μεγίστους κύκλους, οἱ ὁποῖοι λέγονται **ὡριαῖοι κύκλοι** ἢ **κύκλοι ἀποκλίσεως.** Τὸ ἥμισυ δὲ ἑνὸς τοιούτου κύκλου λέγεται ὡριαῖος τῶν σημείων τῆς οὐρανίου σφαίρας τὰ ὁποῖα περιέχει. Οὕτω τὸ ἡμικύκλιον ΠΣΠ΄ (σχ. 1), τὸ περιέχον τὸν ἀστέρα Σ, λέγεται ὡριαῖος αὐτοῦ (τοῦ Σ). Εἰδικῶς δὲ ὁ ὡριαῖος τοῦ σημείου γ τοῦ ἰσημερινοῦ (εἰς ὃ εὑρίσκεται ὁ Ἥλιος τὴν ἐαρινὴν ἰσημερίαν ἤτοι τὴν 21 Μαρτίου) λέγεται **κόλουρος** τῶν ἰσημεριῶν.

Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς οὐρανίου σφαίρας ὅστις διέρχεται διὰ τῶν δύο πόλων αὐτῆς ὡς καὶ διὰ τοῦ ζενὶθ (καὶ τοῦ ναδὶρ) τόπου τινὸς λέγεται **μεσημβρινὸς** (οὐράνιος) τοῦ τόπου αὐτοῦ. Ὁ μεσημβρινὸς 1) **τέμνει τὰς φαινομένας τροχιὰς τῶν ἀστέρων κατὰ μίαν διάμετρον** καὶ 2) **διχοτομεῖ τὰ τόξα αὐτῶν τὰ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα, ἤτοι τὰ ἡμερήσια τόξα αὐτῶν ὡς καὶ τὰ ὑπὸ τὸν ὁρίζοντα, ἤτοι τὰ νυκτερινὰ τόξα τούτων.**

Ὅταν ἀστὴρ διέρχεται διὰ τοῦ μεσημβρινοῦ τόπου τινός, λέγομεν ὅτι **μεσουρανεῖ** εἰς τὸν τόπον αὐτόν. Ὅταν δὲ διέρχεται διὰ τοῦ ὡριαίου τοῦ ζενὶθ (ἀνώτερος μεσημβρινὸς) λέγομεν ὅτι μεσουρανεῖ **ἄνω,** ὅταν δὲ διέρχεται διὰ τοῦ ὡριαίου τοῦ ναδὶρ (κατώτερος μεσημβρινὸς) λέγομεν ὅτι μεσουρανεῖ **κάτω.** Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἀμφότεραι αἱ μεσουρανήσεις τοῦ **ἀειφανοῦς** ἀστέρος α (σχ. 2) εἶναι ὁραταὶ εἰς ἡμᾶς, ἐνῷ αἱ μεσουρανήσεις τοῦ **ἀφανοῦς** ἀστέρος δ εἶναι **ἀόρατοι.**

Ἡ τομὴ ΝΒ (σχ. 1) τοῦ μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου ΠΖΠ΄Ν τόπου Ο μετὰ τοῦ ὁρίζοντος αὐτοῦ λέγεται **μεσημβρινὴ γραμμή.** Τὸ ἄκρον αὐτῆς Β τὸ κείμενον πρὸς ἡμᾶς πρὸς ὃ μέρος εἶναι ὁ βόρειος πόλος λέγεται **βορρᾶς,** ἐνῷ τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς Ν λέγεται **νότος.**

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ τέμνει τὸν ὁρίζοντα κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν μεσημβρινὴν γραμμὴν (σχ. 1) καὶ ἡ ὁποία λέγεται **ἄξων τοῦ μεσημβρινοῦ.** Τὸ ἄκρον αὐτῆς Α τὸ κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ ὁρίζοντος πρὸς ὃ ἀνατέλλουν οἱ ἀστέρες λέγεται **ἀνατολή,** τὸ δὲ ἄλλο ἄκρον λέγεται **δύσις.**

Ὁ βορρᾶς, ἡ ἀνατολή, ὁ νότος καὶ ἡ δύσις λέγονται **κύρια σημεῖα** τοῦ ὁρίζοντος.

2. Ὁριζόντιοι συντεταγμέναι.—Ἔστω Ο τόπος τῆς Γῆς καὶ Σ ἀστήρ τις. Ἔστω δὲ ἐπίσης ὅτι ὁ κατακόρυφος ΖΣΝ τοῦ ἀστέρος τούτου τέμνει τὸν αἰσθητὸν ὁρίζοντα τοῦ τόπου Ο εἰς τὸ Σ′ (σχ. 1). Τότε τὸ τόξον τοῦ ὁρίζοντος, ὅπερ ἄρχεται ἀπὸ τοῦ σημείου Ν τοῦ νότου καὶ λήγει εἰς τὸ Σ′ λέγεται **ἀζιμούθιον** τοῦ Σ. Μετρεῖται κατὰ τὴν ἀνάδρομον φορὰν καὶ ἀπὸ 0° ἕως 360°. Κατὰ ταῦτα τὸ ἀζιμούθιον τοῦ Σ εἶναι τὸ τόξον ΝΔΒΣ′, τὸ δὲ τοῦ σημείου Δ τῆς δύσεως εἶναι 90°, τὸ τοῦ Β (τοῦ βορρᾶ) εἶναι 180° καὶ τὸ τοῦ Α (τῆς ἀνατολῆς) εἶναι 270°.

Τὸ τόξον $\Sigma'\Sigma = \upsilon$ λέγεται **ὕψος** τοῦ ἀστέρος Σ, ἐνῷ τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ τόξον $Z\Sigma = Z$, λέγεται **ζενιθία ἀπόστασις** τοῦ ἰδίου ἀστέρος Σ.

Τὸ ὕψος μετρεῖται ἀπὸ τοῦ ὁρίζοντος καὶ ἀπὸ 0° ἕως 90° θετικῶς πρὸς τὸ ζενὶθ καὶ ἀρνητικῶς πρὸς τὸ ναδίρ. Ἡ δὲ ζενιθία ἀπόστασις μετρεῖται ἀπὸ τοῦ Ζ καὶ ἀπὸ 0° ἕως 180°. Εἶναι δὲ ὡς εἴδομεν $Z+\upsilon=90^{\circ}$, ἤτοι $\upsilon=90^{\circ}-Z$ ἢ $Z=90^{\circ}-\upsilon$. Τὸ ἀζιμούθιον καὶ τὸ ὕψος (ἢ ἡ ζενιθία ἀπόστασις) ἀστέρος λέγονται **ὁριζόντιοι συντεταγμέναι** αὐτοῦ ἢ **τοπικαὶ** διότι ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ τόπου (καὶ ἐκ τοῦ χρόνου) τῆς παρατηρήσεως.

3. Ἰσημεριναὶ συντεταγμέναι.—Ἔστω ἤδη ὅτι ὁ ὡριαῖος ΠΣΠ′ τοῦ ἀστέρος Σ τέμνει τὸν οὐράνιον ἰσημερινὸν εἰς τὸ Γ (σχ. 1). Τὸ τόξον τοῦ ἰσημερινοῦ, ὅπερ ἄρχεται ἀπὸ τοῦ Ι (τομὴ τοῦ οὐρανίου μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ) καὶ λήγει εἰς τὸ Γ λέγεται **ὡριαία γωνία** τοῦ ἀστέρος Σ. Μετρεῖται δὲ ἀπὸ 0° ἕως 360° ἢ ἀπὸ 0 ἕως 24 ὥρας κατὰ τὴν ἀνάδρομον φορὰν καὶ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος Η. Οὕτως ἡ Η τοῦ Σ εἶναι τὸ τόξον ΙΔΙ′Γ.

Τὸ τόξον $\Gamma\Sigma = \delta$ λέγεται **ἀπόκλισις** τοῦ ἀστέρος Σ, τὸ δὲ τόξον $\Pi\Sigma = P$ λέγεται **πολικὴ ἀπόστασις** αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόκλισις μετρεῖται ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ ἀπὸ 0° ἕως 90°, θετικῶς ἐν τῷ βορείῳ ἡμισφαιρίῳ καὶ ἀρνητικῶς ἐν τῷ νοτίῳ. Ἡ δὲ πολικὴ ἀπόστασις μετρεῖται ἀπὸ τοῦ Π καὶ ἀπὸ 0° ἕως 180°. Εἶναι δὲ $\delta+P=90^{\circ}$, ἤτοι $P=90^{\circ}-\delta$ ἢ $\delta=90^{\circ}-P$.

Ἡ ἀπόκλισις (ἀπλανοῦς) ἀστέρος (ἑπομένως καὶ ἡ πολικὴ ἀπόστασις αὐτοῦ) εἶναι σταθερὰ δι᾽ ὅλους τοὺς τόπους τῆς Γῆς, ἐνῷ ἡ ὡριαία γωνία αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τόπου (καὶ ἐκ τοῦ χρόνου) τῆς παρατηρήσεως.

Ἡ ὡριαία γωνία ἀστέρος καὶ ἡ ἀπόκλισις αὐτοῦ (ἢ ἡ πολικὴ ἀπόστασις) λέγονται **ἰσημεριναὶ** (ἢ ὡριαῖαι) συντεταγμέναι αὐτοῦ.

4. Οὐρανογραφικαὶ συντεταγμέναι.—Ἐὰν τὴν πρώτην τῶν ἄνω συντεταγμένων (δηλαδὴ τὴν Η) τὴν μετρήσωμεν κατὰ τὴν ὀρθὴν φορὰν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ σημείου γ τῆς οὐρανίου σφαίρας, ὅπερ εἶναι τομὴ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ κολούρου τῶν ἰσημεριῶν, τότε τὴν ὀνομάζομεν **ὀρθὴν ἀναφορὰν** τοῦ ἀστέρος, καὶ τὴν παριστάνομεν μὲ τὸ γράμμα α. Κατὰ ταῦτα ἡ α τοῦ ἀστέρος Σ εἶναι τὸ τόξον γΑΓ (σχ. 1). Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ γ εἶναι σημεῖον τῆς οὐρανίου σφαίρας μετέχει, ὡς καὶ ὁ ἀστὴρ Σ, τῆς φαινομένης ἡμερησίας κινήσεως τῆς οὐρανίου σφαίρας, ὡς ἐκ τούτου δὲ τὸ τόξον γΑΓ μένει σταθερόν, ἤτοι ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ ἀστέρος δὲν μεταβάλλεται οὔτε μετὰ τοῦ χρόνου οὔτε μετὰ τοῦ τόπου τῆς παρατηρήσεως.

Ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ ἀστέρος καὶ ἡ ἀπόκλισις αὐτοῦ (ἢ ἡ πολικὴ ἀπόστασις) λέγονται **οὐρανογραφικαὶ συντεταγμέναι** αὐτοῦ.

5. Σχέσεις μεταξὺ ὀρθῆς ἀναφορᾶς, ὡριαίας γωνίας καὶ ἀστρικοῦ χρόνου t κατά τινα στιγμήν.—Ὡς γνωστὸν ἀστρικὴ ὥρα ἢ ἀστρικὸς χρόνος τόπου Ο κατά τινα στιγμὴν εἶναι ἡ ὡριαία γωνία τοῦ γ κατὰ τὴν ἰδίαν αὐτὴν στιγμήν. Οὕτως ὁ ἀστρικὸς χρόνος t εἶναι τὸ τόξον ΙΔΙ′Γγ (σχ. 1), ὅπερ εἶναι ἄθροισμα τῶν τόξων ΙΔΙ′Γ $=$ Η τοῦ Σ καὶ γΑΓ $=$ α τοῦ Σ. Ἤτοι εἶναι $t = \alpha + H$ (1) καὶ ὅπου τὸ α καὶ τὸ Η ἐκφράζονται εἰς χρόνον.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $\alpha + H$ ὑπερβαίνει τὰς 24 ὥρας, ἀφαιροῦμεν ἀπ᾽ αὐτοῦ τὰς 24 ὥρας. Ἑπομένως τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται $t + 24 = \alpha + H$ (2).

Ἡ σχέσις (1) εἶναι σημαντικὴ διότι, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν ὁ ἀστὴρ μεσουρανεῖ ἄνω εἰς τόπον τινά, εἶναι $H = 0$ ἤτοι τότε εἶναι $t = \alpha$ (3).

Ἑπομένως **ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ ἀστέρος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀστρικὸν χρόνον κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἄνω μεσουρανή-**

σεως αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως, **ἐκ τῆς ὀρθῆς ἀναφορᾶς ἀστέρος δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸν ἀστρικὸν χρόνον κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἄνω μεσουρανήσεως τοῦ θεωρουμένου ἀστέρος.**

Οἱ ναυτικοί, οἵτινες διὰ καταλλήλων ὀργάνων μετροῦν τὴν ὡριαίαν γωνίαν τῶν ἀστέρων, χρησιμοποιοῦν τὴν ἄνω σχέσιν (1) διὰ νὰ γνωρίζουν τὴν ἀστρικὴν ὥραν τοῦ τόπου εἰς ὃν εὑρίσκονται. Διότι ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των καὶ ἀστρονομικὰς ἐφημερίδας, αἱ ὁποῖαι περιέχουν, μεταξὺ τῶν ἄλλων, καὶ τὰς οὐρανογραφικὰς συντεταγμένας, ὡρισμένων ἀστέρων, οἱ ὁποῖοι ἐκλήθησαν **θεμελιώδεις.**

Ἐπίσης οἱ ναυτικοὶ διὰ νὰ κανονίζουν τὴν πορείαν των ἀνὰ τοὺς ὠκεανοὺς ἔχουν ἀνάγκην νὰ γνωρίζουν ἐκτὸς τοῦ ἀστρικοῦ χρόνου καὶ τὸ ὕψος τοῦ πόλου καὶ τὴν θέσιν τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου, εἰς ὃν εὑρίσκονται. Ὥστε ἡ πρακτικὴ σημασία τῆς σχέσεως (1) εἶναι μεγάλη, ὡς καὶ ἡ χρησιμότης τῶν διαφόρων συστημάτων συντεταγμένων τὰ ὁποῖα εἴδομεν. Ἀναλόγως δὲ τοῦ σκοποῦ, χρησιμοποιεῖται τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο ἐκ τῶν συστημάτων τούτων.

Ἀκόμη σημειοῦμεν ὅτι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς διευθύνσεως τοῦ ἄξονος τοῦ Κόσμου χρησιμοποιεῖται ἡ σχέσις $ΖΠ = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$ (4), ὅπου ΖΠ εἶναι ἡ ζενιθία ἀπόστασις τοῦ πόλου Π, καὶ Z_1, Z_2 εἶναι αἱ ζενιθίαι ἀποστάσεις ἀειφανοῦς ἀστέρος κατὰ τὰς στιγμὰς τῆς ἄνω καὶ κάτω μεσουρανήσεως αὐτοῦ ἀντιστοίχως.

6. Θέσεις τῶν τροχιῶν τῶν ἀστέρων ὡς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.—Ἔστω Ο τόπος τῆς Γῆς, φ τὸ ὕψος τοῦ πόλου Π ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα τοῦ τόπου Ο καὶ Ρ ἡ πολικὴ ἀπόστασις ἀστέρος.

1) Ὅταν εἶναι $Ρ < φ$, ἡ τροχιὰ τοῦ ἀστέρος εὑρίσκεται ὅλη ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα τοῦ τόπου Ο, ἤτοι ὁ ἀστὴρ οὗτος εἶναι ἀειφανής.

Αἱ ζενιθίαι ἀποστάσεις Z_1 καὶ Z_2 κατὰ τὴν ἄνω καὶ κάτω μεσουράνησιν αὐτοῦ ἀντιστοίχως, εἶναι

$$Z_1 = 90^\circ - φ - Ρ \text{ καὶ } Z_2 = 90^\circ - φ + Ρ.$$

Παράδειγμα ὁ ἀστὴρ α τοῦ σχήματος 2.

2) Ὅταν εἶναι $180^\circ - φ > Ρ > φ$, ὁ ἀστὴρ ἀνατέλλει καὶ δύει καὶ μένει ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα πλέον τῶν 12 ὡρῶν, ὅταν ἡ

ἀπόκλισις αὐτοῦ εἶναι βορεία καὶ ὀλιγώτερον τῶν 12 ὡρῶν, ὅταν ἡ ἀπόκλισίς του εἶναι νοτία. Π. δ. οἱ ἀστέρες β καὶ γ (σχ. 2).

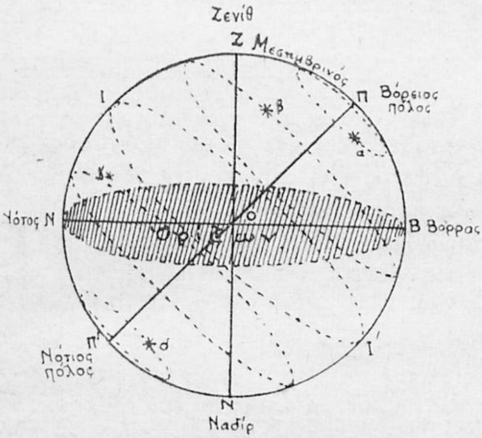
3) Ὅταν $P > 180^0 - \varphi$ ὁ ἀστὴρ οὐδέποτε ἀνατέλλει, μένων πάντοτε ὑπὸ τὸν ὁρίζοντα. Π. δ. ὁ ἀστὴρ δ (σχ. 2).

Σημείωσις. Ὅταν $P = \varphi$ ὁ ἀστὴρ α κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησιν αὐτοῦ ἅπτεται τοῦ ὁρίζοντος, ὅταν δὲ $180 - \varphi = P$, ὁ ἀστὴρ δ ἅπτεται τοῦ ὁρίζοντος κατὰ τὴν ἄνω μεσουράνησίν του.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 18 - 38.

***1)* Νὰ εὕρητε πόσοι κατακόρυφοι κύκλοι διέρχονται ἀπὸ τὴν κατακόρυφον ἑκάστου τόπου.**



Σχ. 2.

Ὁ κατακόρυφος κύκλος εἶναι ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κατακορύφου (εὐθείας). Ἐπειδὴ δὲ διὰ μιᾶς εὐθείας διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα, ἕπεται ὅτι διὰ τῆς κατακορύφου, διέρχονται ἄπειροι κατακόρυφοι κύκλοι.

***2)* Νὰ εὕρητε τὸν λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον οἱ κατακόρυφοι κύκλοι εἶναι μέγιστοι κύκλοι τῆς οὐρανίου σφαίρας.**

Τὸ ζενὶθ καὶ τὸ ναδὶρ τόπου ὁρίζουν μίαν διάμετρον τῆς οὐρανίου σφαίρας. Τὰ σημεῖα δὲ ταῦτα καὶ ἓν σημεῖον τῆς οὐρανίου σφαίρας, ὁρίζουν κατακόρυφον ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς διαμέτρου αὐτῆς ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ὥστε τὸ κατακόρυφον αὐτὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν οὐράνιον σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ὅστις ὡς γνωρίζομεν λέγεται κατακόρυφος κύκλος.

3) **Νὰ εὕρητε τὴν γωνιώδη ἀπόστασιν τοῦ Ζενὶθ καὶ τοῦ Ναδίρ.**

Εἶναι αὕτη ἴση μὲ τὴν ζενιθίαν ἀπόστασιν τοῦ Ναδίρ, ἤτοι 180° (§ 1).

4) **Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι οἱ κατακόρυφοι κύκλοι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁρίζοντος.**

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ κατακόρυφος τόπου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁρίζοντός του. Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι᾿ αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ὥστε τὸ ἐπίπεδον ἑκάστου κατακορύφου κύκλου, ὡς διερχόμενον διὰ τῆς κατακορύφου, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁρίζοντος.

5) **Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ κατακόρυφος ἑκάστου τόπου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τοῦ ὁρίζοντος καὶ τυχόντος κατακορύφου κύκλου.**

Ἡ κατακόρυφος τόπου, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁρίζοντος εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ὁρίζοντος διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ὅπερ εἶναι κέντρον τῆς οὐρανίου σφαίρας. Ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁρίζοντος καὶ τυχόντος κατακορύφου κύκλου, διότι ἡ τομὴ αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁρίζοντος καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς οὐρανίου σφαίρας, ἀφοῦ καὶ ὁ κατακόρυφος κύκλος διέρχεται δι᾿ αὐτοῦ.

6) **Νὰ εὕρητε τὴν γωνιώδη ἀπόστασιν τοῦ Ζενὶθ καὶ τυχόντος σημείου τοῦ ὁρίζοντος.**

Αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν ζενιθίαν ἀπόστασιν σημείου τοῦ ὁρίζοντος, ἤτοι εἶναι ἴση μὲ 90°.

7) **Νὰ εὕρητε τὴν γωνιώδη ἀπόστασιν τοῦ Ναδὶρ καὶ τυχόντος σημείου τοῦ ὁρίζοντος.**

Εἶναι 90°.

8) **Πόσον εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ ζενιθία ἀπόστασις τοῦ Ζενίθ;**

Εἶναι $υ = 90^{\circ}$ καὶ $Z = 0^{\circ}$ (§ 1).

9) **Πόσον εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ ζενιθία ἀπόστασις τοῦ Ναδίρ;**

Εἶναι $υ = -90^{\circ}$ καὶ $Z = 180^{\circ}$ $(Z+υ=90^{\circ}$, § 1).

10) **Πόσον εἶναι τὸ υ καὶ Ζ σημείου τινὸς τοῦ ὁρίζοντος;**

Εἶναι $υ=0^{\circ}$ καὶ $Z=90^{\circ}$.

11) **Πόση εἶναι ἡ Ζ ἀστέρος, καθ' ἣν στιγμὴν οὗτος ἔχει $υ=23^{\circ}\ 35'\ 40''$;**

Εἶναι (§ 1) $Z=90^{\circ}-23^{\circ}\ 35'\ 40''=66^{\circ}\ 24'\ 20''$.

12) **Πόσον εἶναι τὸ υ ἀστέρος, καθ' ἣν στιγμὴν οὗτος ἔχει $Z=95^{\circ}\ 35'\ 40''$.**

Εἶναι $υ=90^{\circ}-95^{\circ}\ 35'\ 40''=-5^{\circ}\ 35'\ 40''$.

13) **Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς οὐρανίου σφαίρας, ὧν ἕκαστον ἔχει ὕψος 30°;**

Ἔστω Σ σημεῖον τῆς οὐρανίου σφαίρας ὕψους 30° καὶ Σ′ τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ περιφέρεια τοῦ κατακορύφου τοῦ Σ τέμνει τὸν ὁρίζοντα (σχ. 1). Τότε τὸ τόξον Σ′Σ εἶναι 30°, ὁ δὲ ὁριζόντιος κύκλος (ὁ ἀλμικανταράτος) ὁ διερχόμενος διὰ τοῦ Σ εἶναι ὁ ζητούμενος γ. τ. Διότι εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶν σημεῖον αὐτοῦ ἔχει ὕψος 30°· ἀντιστρόφως δὲ πᾶν σημεῖον ἔχον ὕψος 30° κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου αὐτοῦ κύκλου.

14) **Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ οὐράνιος μεσημβρινὸς ἑκάστου τόπου εἶναι κατακόρυφος κύκλος.**

Διότι τὸ ἐπίπεδον τοῦ οὐρανίου μεσημβρινοῦ τόπου Ο διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου ΟΖ τοῦ τόπου αὐτοῦ (σχ. 1)· ὥστε ὁ οὐράνιος μέσημβρινὸς ἑκάστου τόπου εἶναι κατακόρυφος κύκλος.

15) **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ οὐράνιος μεσημβρινὸς ἑκάστου τόπου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα αὐτοῦ.**

Ὁ οὐράνιος μεσημβρινὸς ἑκάστου τόπου εἶναι κατακόρυφος κύκλος (ἄσκ. 14). Ὡς τοιοῦτος δὲ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα αὐτοῦ (ἄσκ. 4).

16) **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἄξων τοῦ μεσημβρινοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν μεσημβρινόν.**

Ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο. Ὥστε ὁ ἄξων τοῦ μεσημβρινοῦ ὡς κείμενος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁρίζοντος καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν μεσημβρινὴν γραμμήν, τομὴν τοῦ ὁρίζοντος καὶ τοῦ καθέτου πρὸς τὸν ὁρίζοντα οὐρανίου μεσημβρινοῦ (ἄσκ. 15) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν μεσημβρινόν.

***17)* Πόση εἶναι ἡ γωνιώδης ἀπόστασις τῆς ἀνατολῆς καὶ τοῦ βορρᾶ; Πόση ἡ τοῦ βορρᾶ καὶ τῆς δύσεως;**

Ὁ βορρᾶς εἶναι ἓν τῶν ἄκρων τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς, ἡ δὲ ἀνατολὴ καὶ ἡ δύσις εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος τοῦ μεσημβρινοῦ καθέτου ἐπὶ τῆς μεσημβρινῆς γραμμῆς. Ἑκάστη λοιπὸν τῶν ζητουμένων γωνιωδῶν ἀποστάσεων εἶναι 90°.

***18)* Πόση εἶναι ἡ ζενιθία ἀπόστασις καὶ τὸ ὕψος ἑκάστου τῶν κυρίων σημείων τοῦ ὁρίζοντος;**

Δι' ἕκαστον τῶν σημείων τούτων εἶναι φανερὸν ὅτι Ζ=90° καὶ υ=0°.

***19)* Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ὡριαῖοι κύκλοι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν οὐράνιον ἰσημερινόν.**

Οἱ ὡριαῖοι κύκλοι διέρχονται διὰ τῶν δύο πόλων τῆς οὐρανίου σφαίρας ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κόσμου, καθέτου ἐπὶ τὸν ἰσημερινόν. Ὥστε οἱ κύκλοι οὗτοι εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτὸν (βλέπε ἄσκησιν 4).

***20)* Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ οὐράνιος μεσημβρινὸς ἑκάστου τόπου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν οὐράνιον ἰσημερινόν.**

Διότι ὁ οὐράνιος μεσημβρινὸς εἶναι ὡριαῖος κύκλος (ἄσκ. 19).

***21)* Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ οὐράνιος ἰσημερινὸς καὶ ὁ ὁρίζων διχοτομοῦνται.**

Οἱ δύο αὐτοὶ κύκλοι εἶναι μέγιστοι κύκλοι τῆς οὐρανίου σφαίρας. Ὥστε εἶναι μεταξύ των ἴσοι καὶ διχοτομοῦνται. Διότι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας, ἑπομένως καὶ κοινὴ διάμετρος τοῦ οὐρανίου ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ ὁρίζοντος. Ὡς τοιαύτη δὲ διχοτομεῖ καὶ τὸν οὐράνιον ἰσημερινὸν καὶ τὸν ὁρίζοντα.

***22)* Νὰ εὕρητε τὴν ὡριαίαν γωνίαν ἑκάστου τῶν κυρίων σημείων τοῦ ὁρίζοντος.**

Τοῦ νότου εἶναι 0°, τῆς δύσεως 90°, τοῦ βορρᾶ 180° καὶ τῆς ἀνατολῆς 270°, ἢ 0 ὧραι, 6, 12 καὶ 18 ὧραι ἀντιστοίχως.

***23)* Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τῆς οὐρανίου σφαίρας, τὰ ὁποῖα ἔχουν Η=6 ὥρας.**

Εἶναι ὁ ὡριαῖος τῆς δύσεως. Διότι εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶν σημεῖον αὐτοῦ ἔχει ὡριαίαν γωνίαν 6 ὥρ. (ἄσκ. 22) καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τῆς οὐρανίου σφαίρας ἔχον Η = 6 ὡρῶν κεῖται ἐπὶ τοῦ ὡριαίου αὐτοῦ.

24) Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἔχουν Η=18 ὥρας.

Εἶναι ὁ ὡριαῖος τῆς ἀνατολῆς (ἄσκ. 22 καὶ 23).

25) Ποῖα σημεῖα τῆς οὐρανίου σφαίρας ἔχουσιν Η<12 ὡρῶν καὶ ποῖα ἔχουσιν Η>12 ὡρῶν;

Ὁ ὡριαῖος τοῦ νότου και ὁ ὡριαῖος τοῦ βορρᾶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ διαιρεῖ τὴν οὐράνιον σφαῖραν εἰς δύο ἡμισφαίρια. Ὅλα δὲ τὰ σημεῖα τοῦ ἡμισφαιρίου τοῦ περιέχοντος τὴν δύσιν καὶ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ ὡριαίου τοῦ βορρᾶ ἔχουν Η <12 ὡρῶν, ὅλα δὲ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἡμισφαιρίου τοῦ περιέχοντος τὴν ἀνατολὴν ἔχουν Η>12 ὡρῶν.

26) Ποῖα σημεῖα τῆς οὐρανίου σφαίρας ἔχουν Η=12 ὡρῶν.

Τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ ὡριαίου τοῦ βορρᾶ.

27) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἕκαστος ἀστὴρ χρειάζεται ἀπὸ τῆς ἄνω μεσουρανήσεως μέχρι τῆς δύσεως, ὅσον χρόνον χρειάζεται ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως.

Ἀστὴρ ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς του μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως καὶ ἀπ' αὐτῆς μέχρι τῆς δύσεώς του διατρέχει τὸ ἡμερήσιον τόξον τῆς τροχιᾶς του, ὅπερ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ οὐρανίου μεσημβρινοῦ (σελ. 7) καὶ εἰς τὸ σημεῖον εἰς ὃ ὁ ἀστὴρ αὐτὸς μεσουρανεῖ ἄνω. Ἀλλὰ τὰ δύο ἴσα τόξα εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ ἡμερήσιον τόξον τοῦ ἀστέρος ὑπὸ τοῦ οὐρανίου μεσημβρινοῦ τὰ διανύει ὁ ἀστὴρ εἰς ἴσους χρόνους, διότι κινεῖται ὁμαλῶς συνεπείᾳ τῆς ἡμερησίας κινήσεως.

28) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς κάτω μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως ἀστέρος χρόνος ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ἄνω μέχρι τῆς κάτω μεσουρανήσεως τοῦ αὐτοῦ ἀστέρος καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ.

Ὁ οὐράνιος μεσημβρινὸς διχοτομεῖ τὰ ἡμερήσια καὶ τὰ νυκτερινὰ τόξα τῶν ἀστέρων. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν (βλέπε καὶ σχ. 2) ὅτι ἀπὸ τῆς μιᾶς μεσουρανήσεως μέχρι τῆς ἄλλης (τῆς ἀντιθέτου της) ἀστήρ τις διατρέχει ἓν ἥμισυ τῆς τροχιᾶς του, ἤτοι διατρέχει τόξα ἴσα. Ταῦτα δὲ τὰ διανύει εἰς ἴσους χρόνους, διότι κινεῖται ὁμαλῶς ἕνεκα τῆς ἡμερησίας κινήσεως.

29) **Ἀστὴρ τις μεσουρανεῖ κάτω 4 ὥρας μετὰ τὴν δύσιν του. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς κάτω μεσουρανήσεως θὰ ἀνατείλῃ;**

Μετὰ 4 ὥρας (ἄσκ. 28 καὶ 27).

30) **Ἀστὴρ διαμένει 16 ὥρας ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μεσουρανεῖ ἄνω;**

Μετὰ 8 ὥρας (ἄσκ. 27).

31) **Κατὰ ποίαν ὥραν δύει καὶ κατὰ ποίαν ἀνατέλλει τὸ γ;**

Δηλαδὴ ζητεῖται ἡ Η τοῦ γ, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν δύσιν ἢ εἰς τὴν ἀνατολήν. Ἀλλὰ ἡ ὡριαία γωνία τῆς δύσεως εἶναι 90° ἢ 6 ὡρῶν, ἡ δὲ τῆς ἀνατολῆς εἶναι 270° ἢ 18 ὡρῶν (ἀσκ. 22). Ὥστε ὅταν τὸ γ δύῃ ἡ ἀστρικὴ ὥρα εἶναι 6 ὧραι καὶ ὅταν ἀνατέλλῃ εἶναι αὕτη 18 ὧραι.

32) **Κατὰ ποίαν ὥραν ἀνατέλλει καὶ κατὰ ποίαν δύει τὸ γ΄;**

Τὰ σημεῖα γ καὶ γ΄ εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου. Ἑπομένως τὸ γ΄ ἀνατέλλει, ὅταν τὸ γ δύῃ, δηλαδὴ τὴν 6ην ὥραν. Δύει δὲ τὸ γ΄, ὅταν τὸ γ ἀνατέλλῃ δηλαδὴ τὴν 18ην ἀστρικὴν ὥραν.

33) **Κατὰ ποίαν ὥραν τὸ γ μεσουρανεῖ κάτω; Πόσην Η ἔχει τότε τὸ γ΄;**

Γνωρίζομεν ὅτι ὡς ἀρχὴ τῆς ἀστρικῆς ἡμέρας λαμβάνεται εἰς ἕκαστον τόπον ἡ στιγμὴ τῆς ἄνω μεσουρανήσεως τοῦ γ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ. Ὥστε εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ γ μεσουρανεῖ κάτω τὴν 12ην ἀστρικὴν ὥραν. Τότε ὅμως τὸ γ΄ μεσουρανεῖ ἄνω, ἤτοι εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὡριαίου τοῦ νότου, ἤτοι τότε ἡ Η τοῦ γ΄ εἶναι 0°.

34) **Ἐὰν εἷς ἀστὴρ κατὰ τὴν ἡμερησίαν κίνησιν γράφῃ τὸν οὐράνιον ἰσημερινόν, πόσον χρόνον μένει ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα καὶ πόσον ὑπ᾿ αὐτόν;**

Ὁ οὐράνιος ἰσημερινὸς καὶ ὁ ὁρίζων διχοτομοῦνται (ἄσκ. 21). Ἐκ τῶν δύο λοιπὸν ἴσων μερῶν τοῦ ἰσημερινοῦ τὸ μὲν ἓν εἶναι ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος (ἡμερήσιον τόξον τοῦ ἀστέρος) τὸ δὲ ἄλλο ὑπ᾿ αὐτὸν (νυκτερινὸν τόξον τοῦ ἀστέρος). Διανύει δὲ ταῦτα ὁ ἀστὴρ εἰς ἴσους χρόνους, ἤτοι ἕκαστον εἰς 12 ὥρας.

35) **Πόσαι ὧραι μεσολαβοῦσι μεταξὺ τῆς ἄνω καὶ τῆς κάτω μεσουρανήσεως ἀστέρος, ὅστις γράφει τὸν οὐράνιον ἰσημερινόν;**

Ἀπὸ τῆς ἄνω μέχρι τῆς κάτω μεσουρανήσεως, ὁ ἀστὴρ γράφει τὸ ἥμισυ τῆς τροχιᾶς του, καὶ ἑπομένως εἰς χρόνον 12 ὡρῶν.

36) **Ἀστὴρ μεσουρανεῖ συγχρόνως μετὰ τοῦ γ καὶ παραμένει 8 ὥρας καὶ 20 π. ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα τόπου τινός. Κατὰ ποίαν ὥραν δύει;**

Ὁ ἀστὴρ μεσουρανεῖ τὴν ὥραν 0, ὡς μεσουρανῶν συγχρόνως μετὰ τοῦ γ. Δύει δὲ τὴν 4ην ὥραν καὶ 20′, διότι ὁ χρόνος ὁ παρερχόμενος ἀπὸ τῆς μεσουρανήσεως μέχρι τῆς δύσεως εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ χρόνου καθ᾽ ὃν ὁ ἀστὴρ διανύει τὸ ἡμερήσιον αὐτοῦ τόξον, ἤτοι τῶν 8 ὡρῶν καὶ 20 π.

37) **Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἄνω μεσουρανήσεως θὰ δύσῃ ἀστήρ, ὅστις μένει ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα 14 ὥρας καὶ 20 π.;**

Μετὰ (14 ὥρ. 20 π.) : 2=7 ὥρ. 10 π. (ἄσκ. 36).

38) **Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς κάτω μεσουρανήσεως θὰ ἀνατείλῃ ἀστήρ, ὅστις διανύει τὸ ἡμερήσιον τόξον του εἰς 13 ὥρας 20 π. 38 δ.;**

Μετὰ τὸ ἥμισυ τῶν ὡρῶν κατὰ τὰς ὁποίας ὁ ἀστὴρ διανύει τὸ νυκτερινὸν τόξον του. Ἤτοι μετὰ

(24 ὥρ.— 13 ὥρ. 20 π. 38 δ.) : 2 δηλαδὴ μετὰ

(10 ὥρ. 39 π. 22 δ.) : 2 = 5 ὥρ. 19 π. 41 δ.

39) **Ἀστὴρ μεσουρανεῖ κάτω μετὰ 6 ὥρ. 25 π. 38 δ. ἀπὸ τῆς δύσεώς του. Εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ ἡμερήσιον καὶ εἰς πόσον τὸ νυκτερινὸν τόξον τῆς τροχιᾶς του;**

Ὁ ἀστὴρ ἀπὸ τῆς δύσεως μέχρι τῆς κάτω μεσουρανήσεως διανύει τὸ ἥμισυ τοῦ νυκτερινοῦ τόξου του. Ἑπομένως διανύει τὸ νυκτερινὸν τόξον εἰς

(6 ὥρ. 25 π. 32 δ.) × 2 = 12 ὥρ. 51 π. 4 δ.

καὶ τὸ ἡμερήσιον τόξον εἰς

24 ὥρ.—12 ὥρ. 51 π. 4 δ.=11 ὥρ. 8 π. 56 δ.

40) **Ἀστὴρ ἀνατέλλει τὴν 8 ὥραν 15 π. καὶ μεσουρανεῖ ἄνω τὴν 17 ὥραν 21 π. 30 δ. Κατὰ ποίαν ὥραν δύει καὶ εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ νυκτερινὸν τόξον αὐτοῦ;**

Ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως τοῦ ἀστέρος παρέρχονται (17 ὥρ. 21 π. 30 δ.) — (8 ὥρ. 15 π.) = 9 ὥρ. 6 π. 30 δ. Ἑπομένως ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως παρέρχονται (9 ὥρ. 6 π. 30 δ.)×2 = 18 ὥρ. 13 π. Ὁ ἀστὴρ λοιπὸν οὗτος δύει τὴν 8 ὥρ. 15 π. + 18 ὥρ. 13 π. = 26 ὥρ. 28 π. δηλαδὴ τὴν 2 ὥρ. 28 π. τῆς ἑπομένης ἀστρικῆς ἡμέρας.

Τώρα ἐφόσον τὸ ἡμερήσιον τόξον του ὁ ἀστὴρ αὐτὸς τὸ διανύει εἰς 18 ὥρ. 13 π., τὸ νυκτερινὸν τόξον αὐτοῦ τὸ διανύει εἰς 24 ὥρ.—18 ὥρ. 13 π. = 5 ὥρ. 47 π.

***41)* Κατὰ ποίαν ὥραν μεσουρανεῖ ἄνω ἀστήρ, ὅστις ἀνατέλλει τὴν 10 ὥραν καὶ δύει τὴν 20 ὥρ. 20 π. 21 δ.;**

Ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως τοῦ ἀστέρος αὐτοῦ παρέρχονται (20 ὥρ. 20 π. 21 δ.—10 ὥρ.) : 2=5 ὥρ. 10 π. 10,5 δ. Ὥστε ὁ ἀστὴρ μεσουρανεῖ τὴν 10 ὥρ. + 5 ὥρ 10 π. 10,5 δ. = 15 ὥρ. 10 π. 10,5 δ.

***42)* Ἀστὴρ ἀνατέλλει τὴν 17 ὥραν καὶ δύει τὴν 7 ὥραν τῆς ἀκολούθου ἀστρικῆς ἡμέρας. Πόσην Η ἔχει κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἡμέρας ταύτης;**

Ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως τοῦ ἀστέρος αὐτοῦ παρέρχονται (24 ὥρ.—17 ὥρ.) + 7 ὥρ.=14 ὧραι. Ἑπομένως ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως παρέρχονται 14 ὥρ. : 2 = 7 ὧραι. Ὁ ἀστὴρ λοιπὸν μεσουρανεῖ τὴν 17 ὥρ. + 7 ὥρ. = 24 ὥραν ἢ τὴν ὥραν 0 τῆς ἑπομένης ἀστρικῆς ἡμέρας, δηλαδὴ κατὰ τὴν ἀρχὴν αὐτῆς. Ἡ Η λοιπὸν τοῦ ἀστέρος εἶναι τότε 0 ὧραι.

***43)* Ἀστὴρ ἀνατέλλει τὴν 3 ὥραν καὶ δύει τὴν 12 ὥραν. Κατὰ ποίαν ὥραν θὰ ἔχῃ Η = 12 ὥρας;**

Ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως παρέρχονται 12 ὧραι— 3 ὧραι=9 ὧραι. Ἑπομένως ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως παρέρχονται 9 ὥρ. : 2=4 ὥρ. 30΄. Ὥστε ὁ ἀστὴρ μεσουρανεῖ ἄνω τὴν 3 ὥρ.+4 ὥρ. 30΄=7 ὥραν 30 π. Τότε ὅμως ἡ Η τοῦ ἀστέρος εἶναι 0 ὧραι. Θὰ εἶναι δὲ ἡ Η αὐτοῦ 12 ὧραι τὴν 12 ὥραν+7 ὥρ. 30 π.=19 ὥρ. 30 π.

***44)* Νὰ ὁρίσητε τὰς οὐρανογραφικὰς συντεταγμένας τοῦ γ καὶ τοῦ γ΄.**

Τὰ σημεῖα αὐτὰ ὡς κείμενα ἀμφότερα ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ (§ 8, σχ. 5) ἔχουν δ=0° (§ 2).

Ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ γ εἶναι 0 ὧραι, ἤτοι εἶναι α=0 ὧραι διότι αἱ ὀρθαὶ ἀναφοραὶ τῶν ἀστέρων μετροῦνται ἀπὸ τοῦ γ. Διὰ δὲ τὸ γ΄ ἔχομεν α=12 ὧραι, διότι τὰ γ καὶ γ΄ εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ἤτοι διότι τὸ τόξον γγ΄ τοῦ οὐρανίου ἰσημερινοῦ, εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

***45)* Νὰ ὁρίσητε τὰς οὐρανογραφικὰς συντεταγμένας**

τῆς ἀνατολῆς καὶ τῆς δύσεως ἑνὸς τόπου, ὅταν τὸ γ μεσουρανῇ ἄνω ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ.

Ἡ ἀνατολὴ καὶ ἡ δύσις εἶναι ἄκρα τοῦ ἄξονος τοῦ μεσημβρινοῦ, ὁ ἄξων δὲ τοῦ μεσημβρινοῦ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τοῦ οὐρανίου ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ ὁρίζοντος. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἀνατολὴ καὶ ἡ δύσις κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ἔχουν ἕκαστον ἀπόκλισιν 0^o.

Ἤδη ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ὀρθὴν ἀναφορὰν τῆς ἀνατολῆς καὶ τῆς δύσεως παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν τὸ γ μεσουρανεῖ ἄνω εὑρίσκεται τοῦτο ἐπὶ τοῦ Ι (σχ. 1). Ἑπομένως ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τῆς ἀνατολῆς εἶναι (§ 3) τὸ τόξον (σχ. 1) ΙΑ=6 ὡρῶν, ἡ δὲ τῆς δύσεως τὸ τόξον ΙΑΙ'Δ=18 ὡρῶν.

46) **Νὰ ὁρίσητε τὴν ὀρθὴν ἀναφορὰν τοῦ νότου ἑνὸς τόπου κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀστρικῆς ἡμέρας ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ.**

Ὡς ἀρχὴ τῆς ἀστρικῆς ἡμέρας εἰς ἕκαστον τόπον λαμβάνεται ἡ στιγμὴ τῆς ἄνω μεσουρανήσεως τοῦ γ ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ, δηλαδὴ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν τὸ γ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ Ι (σχ. 1). Ἀλλὰ τότε ὁ ὡριαῖος τοῦ γ (ὁ κόλουρος τῶν ἰσημεριῶν) καὶ ὁ ὡριαῖος τοῦ νότου συμπίπτουν, ἤτοι ἡ ζητουμένη ὀρθὴ ἀναφορὰ εἶναι 0 ὧραι.

47) **Νὰ ὁρίσητε τὴν α τοῦ βορρᾶ ἑνὸς τόπου, ὅταν τὸ γ ἀνατέλλῃ ἐν αὐτῷ.**

Ὅταν τὸ γ ἀνατέλλῃ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀνατολὴν τοῦ τόπου δηλαδὴ εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 1). Ἑπομένως ἡ α τοῦ βορρᾶ εἶναι τὸ τόξον ΑΒ = 6 ὧραι.

48) **Νὰ ὁρίσητε τὴν α τῆς δύσεως καὶ τῆς ἀνατολῆς εἴς τινα τόπον τὴν 6 ἀστρικὴν ὥραν τοῦ τόπου τούτου.**

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς δύο προηγουμένας ἀσκήσεις εὐκόλως συνάγομεν ὅτι ἡ α τῆς δύσεως εἶναι 0 ὧραι, ἡ δὲ τῆς ἀνατολῆς 12 ὧραι.

49) **Νὰ ὁρίσητε τὴν α ἑνὸς ἀστέρος, ὁ ὁποῖος μεσουρανεῖ ἄνω, ὅταν τὸ γ μεσουρανῇ κάτω.**

Γνωρίζομεν (§ 5 τύπος 3) ὅτι α=t. Ἀλλ' ἐδῶ εἶναι t=12 ὧραι, διότι ἡ ἄνω μεσουράνησις τοῦ ἀστέρος γίνεται κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς κάτω μεσουρανήσεως τοῦ γ. Ἑπομένως εἶναι α = 12 ὧραι.

50) **Εἷς ἀστὴρ ἔχων $P=90^o$ μεσουρανεῖ ἄνω εἴς τινα τόπον, ὅταν τὸ γ ἀνατέλλῃ εἰς τὸ τόπον τοῦτον. Νὰ εὕρητε τὰς οὐρανογραφικὰς συντεταγμένας αὐτοῦ.**

Γνωρίζομεν (§ 2), ὅτι $P+\delta=90^\circ$. Ὥστε ἐδῶ, ἐπειδὴ $P=90^\circ$ εἶναι $\delta=0^\circ$. Ὡς πρὸς τὴν ἀναφορὰν παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $t=\alpha$ (§ 5, τύπος 3). Ἀλλ' ἐπειδὴ ὅταν ὁ ἀστὴρ μεσουρανῇ ἄνω, τὸ γ ἀνατέλλει, ἕπεται ὅτι ὁ ὡριαῖος τοῦ γ καὶ ὁ ὡριαῖος τῆς ἀνατολῆς συμπίπτουν, ἤτοι ἕπεται $t=18$ ὧραι. Ὥστε εἶναι καὶ $\alpha=18$ ὧραι.

51) **Εἷς ἀστὴρ μεσουρανεῖ ἄνω ἐν Ἀθήναις τὴν 15 ὥρ. 20 π. 35 δ. Νὰ εὕρητε τὴν α αὐτοῦ.**

Εἶναι $\alpha = 15$ ὥρ. 20 π. 35 δ. ($= t$, τύπος 3 § 5).

52) **Εἷς ἀστὴρ ἔχει $\alpha = 8$ ὥρ. Κατὰ ποίαν ἀστρικὴν ὥραν ἔχει οὗτος $H = 3$ ὥρ. 40 π.;**

Εἶναι $t = 3$ ὥρ. 40 π. + 8 ὥρ. = 11 ὥρ. 40 π. (τύπος 1 § 5).

53) **Εἷς ἀστὴρ ἔχει $\alpha = 13$ ὥρ. 25 π. Κατὰ ποίαν ἀστρικὴν ὥραν ἔχει $H = 15$ ὥρας;**

Εἶναι (τύπος 2, § 5) $t + 24$ ὥρ. = 15 ὥρ. + 13 ὥρ. 25 π., ἤτοι $t = 28$ ὥρ. 25 π. − 24 ὥρ. = 4 ὥρ. 25 π.

54) **Εἷς ἀστὴρ ἔχει $\delta = 0^\circ$ καὶ ἀνατέλλει ἐν Ἀθήναις τὴν 7 ὥρ. 24 π. 35 δ. Νὰ εὕρητε κατὰ ποίαν ὥραν μεσουρανεῖ ἄνω καὶ κατὰ ποίαν δύει ἐν Ἀθήναις;**

Ὁ ἀστὴρ οὗτος ὡς ἔχων $\delta = 0^\circ$, γράφει τὸν ἰσημερινόν. Ἑπομένως ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς του μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως παρέρχονται 6 ὧραι καὶ ἀπὸ ταύτης μέχρι τῆς δύσεως παρέρχονται ἄλλαι 6 ὧραι. Ὥστε ὁ ἀστὴρ οὗτος μεσουρανεῖ τὴν 7 ὥραν 24 π. 35 δ. + 6 ὥρ. = 13 ὥρ. 24 π. 35 δ. καὶ δύει τὴν 13 ὥραν 24 π. 35 δ. + 6 ὥρ. = 19 ὥρ. 24 π. 35 δ.

55) **Εἷς ἀστὴρ ἔχει $P = 12^\circ\ 0'\ 40''$ καὶ μεσουρανεῖ ἄνω ἐν Ἀθήναις τὴν 18 ὥρ. 10 π. 42 δ. Νὰ εὕρητε τὰς οὐρανογραφικὰς συντεταγμένας αὐτοῦ.**

Εἶναι (ἄσκ. 50) $\delta = 90^\circ - 12^\circ\ 0'\ 40'' = 77^\circ\ 59'\ 20''$ καὶ $\alpha = 18$ ὥρ. 10 π. 42 δ. ($= t$, τύπος 3, § 5).

56) **Εἷς ἀστὴρ ἔχει $P=90^\circ$ καὶ ἀνατέλλει εἰς ἕνα τόπον τὴν 3 ὥραν 20 π. Νὰ εὕρητε τὰς οὐρανογραφικὰς συντεταγμένας αὐτοῦ.**

Εἶναι $\delta = 0^\circ$ (ἄσκ. 50) καὶ $\alpha = 3$ ὥρ. 20 π. + 6 ὥρ. = 9 ὥρ. 20 π. (ἄσκ. 54).

57) **Εἷς ἀστὴρ ἔχει $\alpha=2$ ὥρας 12 π. 35 δ καὶ δύει εἰς ἕνα τόπον τὴν 8 ὥραν 12 π. 35 δ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόκλισιν αὐτοῦ.**

Ἐκ τοῦ τύπου $t=\alpha$, ὅστις προκύπτει, ὅταν εἷς ἀστὴρ μεσουρανεῖ ἄνω, συνάγομεν, ὅτι ὁ περὶ οὗ πρόκειται ἀστὴρ μεσουρανεῖ ἄνω τὴν 2 ὥρ. 12 π. 35 δ. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος δύει τὴν 8 ὥρ. 12 π. 35 δ., ἕπεται ὅτι ἀπὸ τῆς ἄνω μεσουρανήσεως μέχρι τῆς δύσεως αὐτοῦ παρέρχονται 8 ὥρ. 12 π 35 δ—2 ὥρ. 12 π. 35 δ= 6 ὧραι, ἤτοι ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως παρέρχονται 12 ὧραι. Ὁ ἀστὴρ λοιπὸν οὗτος γράφει τὸν ἰσημερινὸν καὶ ἔχει ἑπομένως $\delta=0^\circ$.

***58)* Εἷς ἀστὴρ ἀνατέλλει εἰς ἕνα τόπον τὴν 2 ὥραν καὶ δύει τὴν 12 ὥραν. Νὰ εὕρητε τὴν α αὐτοῦ.**

Ὁ ἀστὴρ οὗτος μεσουρανεῖ ἄνω μετὰ (12 ὥρ.—2 ὥρ.) : 2 ὥρ. ἀφ᾽ ἧς ἀνατέλλει, ἤτοι τὴν 2 ὥρ. + 5 ὥρ. = 7 ὥρ. Ὥστε εἶναι $\alpha = 7$ ὥρ. $(=t)$.

***59)* Εἷς ἀειφανὴς ἀστὴρ ἔχει ζενιθίαν ἀπόστασιν 25° 30′ κατὰ τὴν ἄνω μεσουράνησιν καὶ 45° 20′ κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησιν εἰς ἕνα τόπον. Νὰ εὕρητε τὴν πολικὴν ἀπόστασιν τοῦ ζενὶθ τοῦ τόπου τούτου.**

Εἶναι (§ 5, τύπος 4) $P=\dfrac{25^\circ\ 30'+45^\circ\ 20'}{2}=\dfrac{70^\circ\ 50'}{2}=35^\circ\ 25'$

***60)* Εἷς ἀειφανὴς ἀστὴρ ἔχει ζενιθίαν ἀπόστασιν 50° 52′ 40″ κατὰ τὴν ἄνω μεσουράνησιν ἐν Ἀθήναις καὶ 53°10′40″ κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησιν. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος (ἔξαρμα) τοῦ βορείου πόλου ἐν Ἀθήναις.**

Εἶναι $P=\dfrac{50^\circ\ 52'\ 40''+53^\circ\ 10'\ 40''}{2}=52^\circ\ 1'\ 40''$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ βορείου πόλου καὶ ἡ πολικὴ ἀπόστασις τοῦ ζενὶθ εἶναι τόξα συμπληρωματικά, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι $90^\circ - 52^\circ\ 1'\ 40'' = 37^\circ\ 58'\ 20''$.

***61)* Τὸ ζενὶθ ἑνὸς τόπου ἔχει $P=48^\circ 10'$. Εἷς δὲ ἀειφανὴς ἀστὴρ κατὰ τὴν ἄνω μεσουράνησιν εἰς τὸν τόπον τοῦτον ἔχει $Z=28^\circ 10'$. Νὰ εὕρητε τὴν ζενιθίαν ἀπόστασιν αὐτοῦ κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησιν εἰς τὸν αὐτὸν τόπον.**

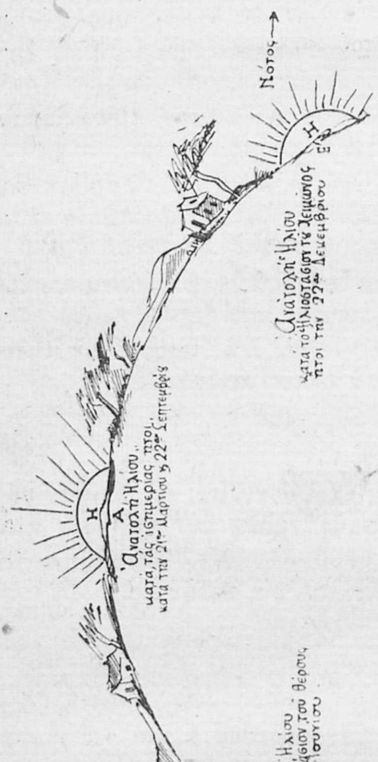
Εἰς τὸν τύπον 4 τῆς § 5 θέτομεν $Z\Pi = P = 48^\circ\ 10'$ καὶ $Z_1 = 28^\circ\ 10'$. Ὥστε εἶναι $48^\circ\ 10' = \dfrac{28^\circ\ 10' + Z_2}{2}$, ἤτοι

$$Z_2 = 96^\circ\ 20' - 28^\circ\ 10' = 68^\circ\ 10'.$$

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ο ΗΛΙΟΣ

7. Ἰδία κίνησις τοῦ Ἡλίου.—Ἡ ἰδία κίνησις τοῦ Ἡλίου ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ ὅτι 1) Δὲν ἀνατέλλει οὗτος πάντοτε ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ὁρίζοντος. Εἰς τοὺς τόπους μας ὁ Ἥλιος ἀνατέλλων φαίνεται ὅτι κάμνει ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος τὴν αὐτὴν πάντοτε διαδρομὴν ἐντὸς ἑνὸς ἔτους (σχ. 3). Ἐντὸς δὲ τοῦ αὐτοῦ χρόνου μεταβάλλονται περιοδικῶς καὶ τὰ ὕψη εἰς ἃ μεσουρανεῖ ὁ Ἥλιος. **Ἡ ἀπόκλισις λοιπὸν τοῦ Ἡλίου δὲν εἶναι σταθερά. Εἶναι δὲ ἐπὶ ἓν μέρος τοῦ ἔτους** (τὸ ἔαρ καὶ τὸ θέρος) **βορεία ἢ θετικὴ καὶ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον μέρος αὐτοῦ** (τὸ φθινόπωρον καὶ τὸν χειμῶνα) **νοτία ἢ ἀρνητική**· καὶ 2) ἐκ τοῦ ὅτι ἐντὸς ἑνὸς ἔτους προηγοῦνται ἀμέσως τῆς ἀνατολῆς τοῦ Ἡλίου κατὰ σειρὰν δώδεκα ἀστερισμοί, οἵτινες καλοῦνται ζῴδια (σχ. 4).

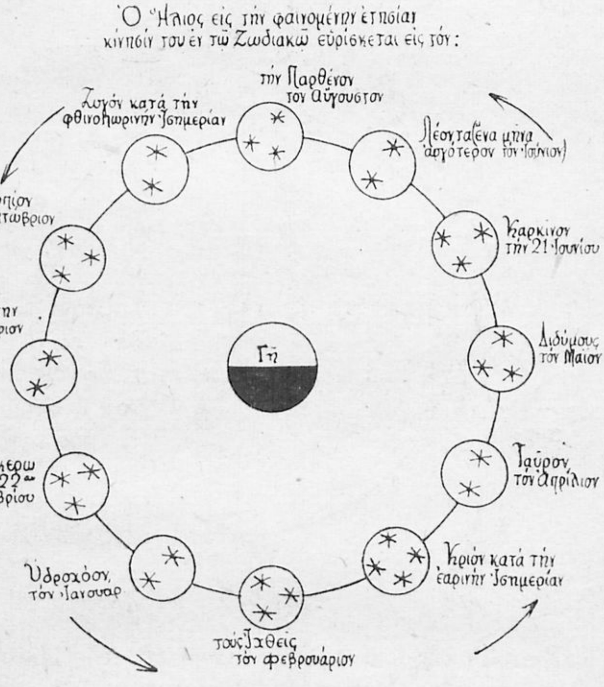


Σχ. 3.

Ὥστε καὶ ἡ **ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου δὲν εἶναι σταθερά. Αὐξάνει δὲ ἐντὸς ἑνὸς ἔτους κατὰ 24 ὥρας, ἤτοι κατὰ 4 πρῶτα λεπτὰ χρόνου περίπου καθ' ἑκάστην ἡμέραν.**

8. Ἐκλειπτική. Ὧραι τοῦ ἔτους.— Αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τὰς ὁποίας λαμβάνει τὸ κέντρον τοῦ Ἡλίου, ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους κεῖνται ἐπὶ περιφερείας μεγίστου κύκλου αὐτῆς, ἥτις λέγεται **ἐκλειπτική.** Τὸ ἐπίπεδον δὲ αὐτῆς σχηματίζει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἰσημερινοῦ γωνίαν 23° 27′, ἥτις λέγεται **λόξωσις** τῆς ἐκλειπτικῆς.

Ἡ διάμετρος γγ′ (τομὴ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τῆς ἐκλειπτικῆς)



Σχ. 4.

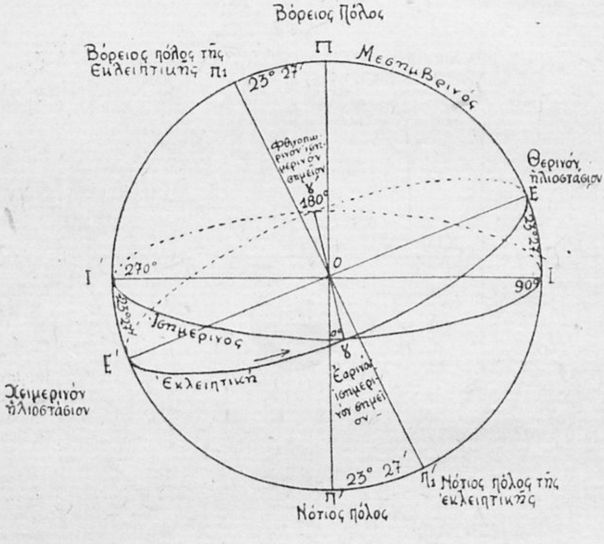
ἤτοι **ἡ ἰσημερινὴ γραμμὴ** εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ἐκλειπτικῆς ἤτοι **ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῶν ἡλιοστασίων ἢ τῶν τροπῶν** (σχ. 5).

Ὅταν ὁ Ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὰ σημεῖα γ καὶ γ′ ὅλοι οἱ τόποι τῆς Γῆς ἔχουν ἰσημερίαν.

Ὅταν ὁ Ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸ γ ἄρχεται τὸ **ἔαρ,** τὸ ὁποῖον λήγει, ὅταν ὁ Ἥλιος φθάσῃ εἰς τὸ Ε, ἀρχὴν τοῦ **θέρους.**

Τὸ θέρος λήγει καὶ ἄρχεται τὸ **φθινόπωρον,** ὅταν ὁ Ἥλιος φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον γ′. Τὸ φθινόπωρον λήγει καὶ ἄρχεται ὁ **χειμών,** ὅταν ὁ Ἥλιος φθάσῃ εἰς τὸ Ε′. Ὥστε αἱ τέσσαρες ὧραι τοῦ ἔτους ἤτοι τὸ ἔαρ, τὸ θέρος, τὸ φθινόπωρον καὶ ὁ χειμών, εἶναι οἱ χρόνοι καθ᾽ οὓς ὁ Ἥλιος διανύει τὰ τέσσαρα τόξα γΕ, Εγ′, γ′Ε′ καὶ Ε′γ ἀντιστοίχως.

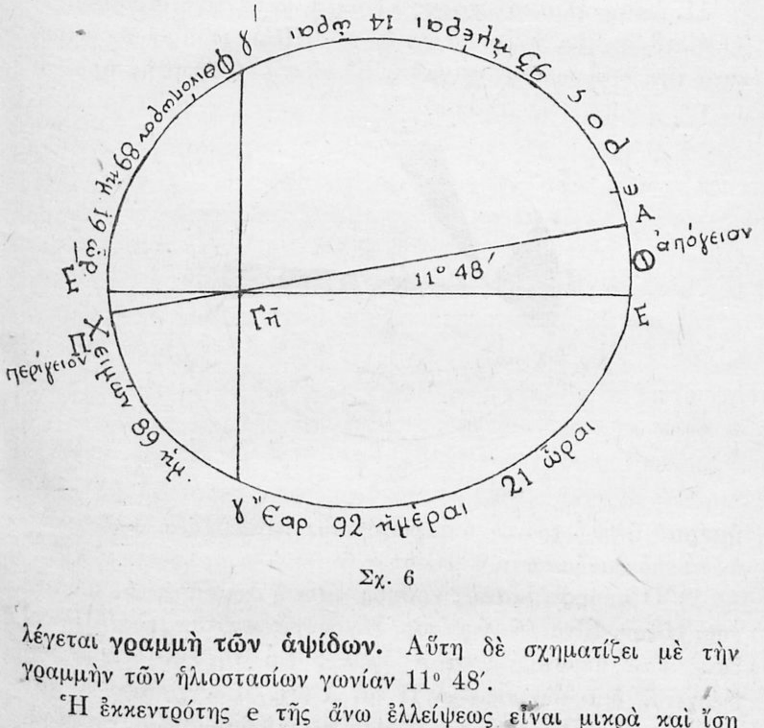
Τέλος σημειοῦμεν ὅτι ὁ παράλληλος τῆς οὐρανίου σφαίρας, ὁ διερχόμενος διὰ τοῦ Ε λέγεται **τροπικὸς τοῦ Καρκίνου,** ὁ δὲ διερχόμενος διὰ τοῦ Ε′ λέγεται **τροπικὸς τοῦ Αἰγόκερω.**



Σχ. 5.

9. Σπουδὴ τῆς φαινομένης κινήσεως τοῦ Ἡλίου.— Ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ Ἡλίου ἐπὶ τῆς ἐκλειπτικῆς δὲν εἶναι σταθερά. Μεταβαλλομένη συνεχῶς λαμβάνει μίαν μεγίστην τιμὴν $1^{o}\ 1'\ 10''$ τὴν 1ην Ἰανουαρίου καὶ μίαν ἐλαχίστην $57'\ 11''$ τὸ τέλος Ἰουνίου.

Ἐξ ἄλλου ἡ φαινομένη ἡμιδιάμετρος $\frac{\Delta}{2}$ τοῦ Ἡλίου λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν $16'\ 16''$ τὴν 1ην Ἰανουαρίου καὶ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν $15'\ 44''$ τὸ τέλος Ἰουνίου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόστασις τῆς Γῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς φαινομένης διαμέτρου τούτου (διότι $\alpha = \frac{2P}{\Delta}$, ὅπου P ἡ ἀκτὶς τοῦ Ἡλίου), ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι **ἐλαχίστη** τὴν 1ην Ἰουνίου καὶ **μεγίστη** τὸ τέλος Ἰουνίου. Ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι **ὁ Ἥλιος ἐν τῇ φαινομένῃ ἐτησίᾳ αὐτοῦ κινήσει ἐκ Δ πρὸς Α γράφει ἔλλειψιν μίαν τῶν ἑστιῶν τῆς ὁποίας κατέχει ἡ Γῆ** (σχ. 6). Τὰ σημεῖα Π **(περίγειον)** καὶ Α **(ἀπόγειον)** εἶναι ἄκρα τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς ἐλλείψεως, ὅστις



Σχ. 6

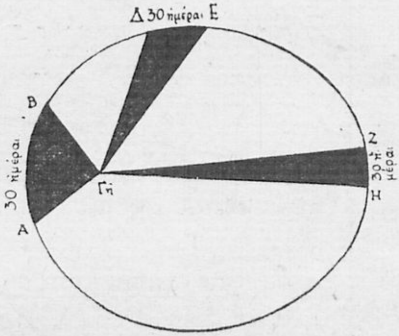
λέγεται **γραμμὴ τῶν ἀψίδων.** Αὕτη δὲ σχηματίζει μὲ τὴν γραμμὴν τῶν ἡλιοστασίων γωνίαν 11° 48′.

Ἡ ἐκκεντρότης e τῆς ἄνω ἐλλείψεως εἶναι μικρὰ καὶ ἴση μὲ $e = \frac{\text{ΑΓ} - \text{ΓΠ}}{\text{ΑΓ} + \text{ΓΠ}} = 0{,}016770.$

10. Νόμος τῶν ἐμβαδῶν.—Ἐὰν ω εἶναι ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ Ἡλίου καὶ α ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς Γῆς, παρετηρήθη ὅτι $\omega\alpha^2 =$ ποσότης σταθερά. Σταθερὸν δὲ εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}\,\omega\alpha^2 t$, ὅπερ γράφει εἰς χρόνον t ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτίς, ἥτις συνδέει τὸ κέντρον τῆς Γῆς μὲ τὸ κέντρον τοῦ Ἡλίου. Ἐξ οὗ συνάγομεν τὸν νόμον τῶν ἐμβαδῶν καθ' ὅν: **τὰ γραφόμενα ἐμβαδὰ ὑπὸ τῆς ἄνω ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων καθ' οὓς ταῦτα γράφονται.**

Ἑπομένως εἰς ἴσους χρόνους γράφονται ὡς ἄνω ἴσα ἐμβαδά. Π. χ. τὰ ἐμβαδὰ ΓΑΒ, ΓΔΕ καὶ ΓΖΗ (σχ. 7), καθ' ἓν τῶν ὁποίων γράφεται εἰς 30 ἡμέρας, εἶναι ἴσα. Ἐκ τοῦ νόμου δὲ τούτου ἐξηγεῖται καὶ ἡ ἀνισότης τῶν ὡρῶν τοῦ ἔτους.

11. Εἴδη ἡλιακοῦ χρόνου (τόπου κατά τινα στιγμήν). 1) Ὁ **ἀληθής,** ἤτοι ἡ ὡριαία γωνία τοῦ Ἡλίου (τοῦ κέντρου του) κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμήν. Ἐξ οὗ καὶ ἡ **ἀληθὴς ἡλιακὴ**



Σχ. 7

ἡμέρα, ἤτοι ὁ χρόνος ὁ περιεχόμενος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἄνω μεσουρανήσεων τοῦ Ἡλίου.

2) Ὁ **μέσος ἡλιακὸς χρόνος,** ἤτοι ἡ ὡριαία γωνία τοῦ μέσου Ἡλίου. Εἶναι δὲ ὁ μέσος Ἥλιος εἷς φανταστικὸς Ἥλιος, ὅστις καθ' ὑπόθεσιν κινεῖται ὁμαλῶς ἐπὶ τῆς ἐκλειπτικῆς καὶ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Π καὶ Α (σχ. 6) συγχρόνως μὲ τὸν πραγματικὸν Ἥλιον. Οὕτως ἡ μέση ἡλιακὴ ἡμέρα εἶναι σταθερά.

3) Ἐπειδὴ τόπος τις, ἐὰν κεῖται ἀνατολικώτερον ἄλλου ἔχει μεσημβρίαν ἐνωρίτερον τοῦ ἄλλου, ὁ ὡς ἄνω μέσος ἢ ἀληθὴς χρόνος εἶναι τοπικός, ἤτοι ἕκαστος τόπος ἔχει τὴν τοπικὴν ὥραν του. Ἀλλὰ διὰ λόγους συγκοινωνίας καὶ ἐπικοινωνίας τῶν ἀνθρώπων, δὲν εἶναι δυνατὸν κάθε τόπος νὰ ἔχῃ τὴν ἰδικήν του ὥραν. Δι' ὃ εὑρέθη ὁ **ἐπίσημος χρόνος** ἢ ἡ **ἐπίσημος ὥρα** στηριζομένη ἐπὶ τῆς ἀρχῆς καθ' ἥν, **οἱ τόποι οἱ εὑρισκόμενοι**

ἐπὶ περιωρισμένης ἐκτάσεως νὰ ἔχουν ὅλοι τὴν αὐτὴν ὥραν. Οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τῆς Γῆς διαιρεῖται διὰ μεσημβρινῶν εἰς 24 ἀτράκτους 15°, εἰς δὲ ἐξ αὐτῶν ὅστις θεωρεῖται πρῶτος νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ Greenwich τοῦ Λονδίνου.

Ἡ πρωτεύουσα ἑκάστου κράτους ἔχει ἐπίσημον ὥραν τὴν μέσην ὥραν τοῦ μεσημβρινοῦ, ὅστις διχοτομεῖ τὸν ἄτρακτον (**κεντρικὸς** μεσημβρινὸς) ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται αὕτη. Οὕτως ἐὰν ἡ ἐπίσημος ὥρα τοῦ Greenwich εἶναι 6 ὧραι π. μ. (κατά τινα στιγμήν), ἡ ἐπίσημος ὥρα τῶν τόπων τῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ πρώτου ἀτράκτου πρὸς ἀνατολὰς τοῦ Greenwich εἶναι κατὰ τὴν ἰδίαν στιγμὴν 7 ὥρ. π. μ. πρὸς δυσμὰς δὲ αὐτοῦ εἶναι 5 ὥρ. π.μ.

Εἰς τὴν Εὐρώπην ἔχομεν τὴν ἐπίσημον ὥραν τοῦ Greenwich ἢ τῆς δυτικῆς Εὐρώπης, τὴν ὥραν τῆς κεντρικῆς Εὐρώπης ἡ ὁποία προπορεύεται τῆς προηγουμένης κατὰ 1 ὥραν καὶ τὴν ὥραν τῆς ἀνατολικῆς Εὐρώπης, ἥτις προπορεύεται τῆς κεντρικῆς κατὰ μίαν ὥραν.

Ἡ Ἑλλὰς προσεχώρησεν εἰς τὴν ὥραν τῆς ἀνατολικῆς Εὐρώπης, ἡ ὁποία προπορεύεται τῆς μέσης ὥρας τῶν Ἀθηνῶν κατὰ 25 π. 5 δ. περίπου.

4) Μερικὰ κράτη κατὰ τοὺς μῆνας τοῦ θέρους ὁρίζουν, ἵνα ἡ ἐπίσημος ὥρα τῆς πρωτευούσης των προπορεύεται κατὰ μίαν ὥραν· ὀνομάζεται δὲ ἡ νέα αὕτη ἐπίσημος ὥρα, **θερινὴ** ὥρα.

12. Ἐξίσωσις τοῦ χρόνου. — Οὕτως λέγεται ἡ διαφορὰ τοῦ ἀληθοῦς χρόνου $t_α$ ἀπὸ τοῦ μέσου $t_μ$, ἤτοι εἶναι $ε = t_μ - t_α$. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι 0 κατὰ τὴν 16 Ἀπριλίου, 14 Ἰουνίου, 1 Σεπτεμβρίου καὶ 25 Δεκεμβρίου, ἤτοι κατὰ τὰς ἡμέρας αὐτὰς ὁ μέσος καὶ ὁ ἀληθὴς Ἥλιος μεσουρανοῦν συγχρόνως. Εἶναι δὲ μεγίστη τὴν 11 Φεβρουαρίου (+14 π 22 δ) καὶ τὴν 26 Ἰουλίου (+6 π 22 δ) καὶ ἐλαχίστη τὴν 14 Μαΐου (—3 π 47 δ) καὶ τὴν 3 Νοεμβρίου (—16 π 22 δ). Εὐνόητον εἶναι ὅτι, ὅταν ἡ ἐξίσωσις τοῦ χρόνου εἶναι θετικὴ μεσουρανεῖ πρῶτον ὁ μέσος Ἥλιος καὶ ἔπειτα ὁ ἀληθής, τὸ ἀντίθετον δὲ συμβαίνει ὅταν ἡ ε εἶναι ἀρνητική.

13. Ἡμερολόγια.— Ὁ χρόνος ὁ περιεχόμενος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀποκαταστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου εἰς τὸ αὐτὸ μὲν σημεῖον τῆς ἐκλειπτικῆς λέγεται **ἀστρικὸν ἔτος,** εἰς δὲ τὸ σημεῖον γ λέγεται **τροπικὸν** ἔτος. Τὸ ἀστρικὸν ἔτος διαρκεῖ 365,25636 μέσας ἡλιακὰς ἡμέρας, τὸ δὲ τροπικὸν διαρκεῖ 365,2422 τοιαύτας ἡμέρας.

Τὸ **πολιτικὸν ἔτος** πρέπει 1) **Νὰ ἀποτελεῖται ἐξ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἡμερῶν** καὶ 2) **Νὰ συμφωνῇ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον πρὸς τὸ τροπικὸν ἔτος,** ἵνα καὶ αἱ τέσσαρες ὧραι τοῦ ἔτους ἐπανέρχονται εἰς τὰς αὐτὰς πάντοτε ἡμερομηνίας. Ἀλλ' ἡ συμφωνία αὕτη δύναται νὰ γίνῃ κατὰ διαφόρους τρόπους. Ἐκ τούτων δὲ ἐπήγασαν τὰ διάφορα **ἡμερολόγια.**

Εἰς τὸ **Ἰουλιανὸν ἡμερολόγιον** ἐλήφθη ὡς μέση διάρκεια τοῦ ἔτους 365,25 ἡμ. Διὰ τοῦτο εἰς αὐτὸ τρία διαδοχικὰ ἔτη ἀποτελοῦνται ἀπὸ 365 ἡμέρας (κοινὰ ἔτη) τὸ δὲ ἔπειτα ἀπὸ αὐτὰ τέταρτον ἔτος ἀποτελεῖται ἐκ 366 ἡμερῶν (δίσεκτον). Τὸ ἔτος ὅμως ἐκ 365,25 ἡμερῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τροπικοῦ κατὰ 0,0078 ἡμέρας ἢ 11 πρῶτα λεπτά. Ἡ διαφορὰ δὲ αὕτη ἀνῆλθεν εἰς 3 καὶ πλέον ἡμέρας μετὰ 400 ἔτη. Κατὰ δὲ τὸ ἔτος 1852 ἀνῆλθεν εἰς 10 ἡμέρας καὶ τότε ἡ ἐαρινὴ ἰσημερία ἔπεσεν τὴν 11 Μαρτίου ἀντὶ τῆς 21 αὐτοῦ. Ἀλλ' ἵνα ἡ ἐαρινὴ ἰσημερία πίπτει πάντοτε τὴν 21 Μαρτίου ὁ Πάπας Γρηγόριος ὁ ΙΓ' ὥρισεν ὅπως:

1) Ἡ ἐπαύριον τῆς 4 Ὀκτωβρίου 1852 ὀνομασθῇ 15 Ὀκτωβρίου καὶ

2) Ἐπὶ 400 ἐτῶν νὰ ὑπάρχουν 97 δίσεκτα ἔτη ἀντὶ τῶν 100 τοῦ Ἰουλιανοῦ ἡμερολογίου. Οὕτως εἰς τὸ **νέον** ἡμερολόγιον, τὸ **Γρηγοριανόν,** τὰ ἔτη τῶν αἰώνων εἶναι δίσεκτα, μόνον ὅταν διαιροῦνται διὰ 400. Τὸ ἔτος λοιπὸν 1900 εἰς τὸ νέον ἡμερολόγιον ἦτο κοινόν, ἐνῷ εἰς τὸ παλαιὸν ἦτο δίσεκτον (διότι ὁ ἀριθμὸς 1900 διαιρεῖται διὰ 4).

Σήμερον ἡ διαφορὰ μεταξὺ νέου καὶ παλαιοῦ ἡμερολογίου εἶναι 13 ἡμέραι. Εἰς ἡμᾶς τὸ νέον ἡμερολόγιον εἰσήχθη τὸ 1923. Αἱ κινηταὶ ὅμως ἑορταὶ κανονίζονται μὲ τὸ παλαιὸν ἡμερολόγιον.

14. Παράλλαξις ἀστέρος.— Παράλλαξις ἀστέρος λέγεται ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἀστέρος ὡρισμένη ἀκτὶς τῆς Γῆς (σχ. 8.) Ἤδη ὑποθέτοντες ΓΑ = ΓΑ′ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑ′Γ καὶ ΟΑΓ

$$\frac{\eta\mu\rho'}{\eta\mu Z'} = \frac{\Gamma O}{\Gamma A'} = \frac{\Gamma O}{\Gamma A} \ (1) \quad \text{καὶ } \eta\mu\rho = \frac{\Gamma O}{\Gamma A} \ (2)$$

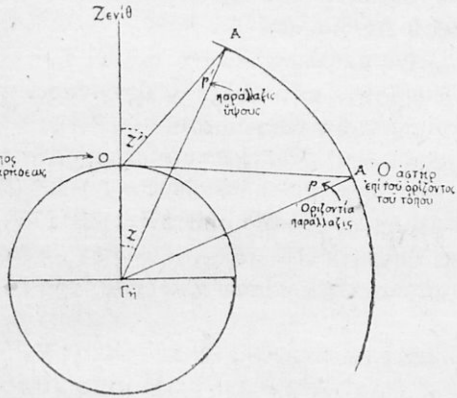
ἐξ ὧν προκύπτει ημp′=ημp . ημZ′ ἢ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι p καὶ p′ εἶναι ἐν γένει πολὺ μικραὶ p′=pημZ (3).

Ἐκτὸς τῆς σχέσεως αὐτῆς (3) ἔχομεν καὶ τὴν

$$Z = Z' - p' \quad (4)$$

Σημειωτέον ἤδη ὅτι ἐὰν ὁ τόπος O κεῖται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς, ἡ ὁριζοντία παράλλαξις ἀστέρος λέγεται **ὁριζοντία ἰσημερινὴ παράλλαξις.**

Ἡ ὁριζοντία ἰσημερινὴ παράλλαξις τοῦ Ἡλίου εἰς τὴν μέσην ἀπόστασιν αὐτοῦ α ἀπὸ τῆς Γῆς εἶναι 8″,80. Ἐξ ἧς εὑρί-



Σχ. 8.

σκεται ὅτι α=23438 γήιναι ἰσημεριναὶ ἀκτῖνες ἢ

α=149504200 χιλιόμετρα.

15. Διαστάσεις τοῦ Ἡλίου.— Μὲ τιμὴν 15′ 59″,63 τῆς φαινομένης ἡμιδιαμέτρου τοῦ Ἡλίου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀκτίς του εἶναι 109 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς Γῆς, ἤτοι 695300 χιλιόμετρα.

Ὁ Ἥλιος εἶναι σφαιρικός, ἡ δὲ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, ὁ ὄγκος του καὶ ἡ μᾶζα του εἶναι 11900, 1297000 καὶ 331939 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας, τοῦ ὄγκου καὶ τῆς μάζης τῆς Γῆς ἀντιστοίχως.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 40 - 72.

62) **Νὰ ὁρίσητε τὴν ἀπόκλισιν τοῦ θερινοῦ καὶ τοῦ χειμερινοῦ ἡλιοστασίου.**

Ἐκ τῆς § 8 καὶ τοῦ σχήματος 5 συνάγομεν ὅτι ἡ δ τοῦ Ε (θερινοῦ ἡλιοστασίου) εἶναι $23^{\circ}\,27'$, ἡ δὲ δ τοῦ Ε′ εἶναι $-23^{\circ}\,27'$.

63) **Νὰ ὁρίσητε τὴν ἀπόκλισιν σημείου τινὸς τοῦ τροπικοῦ τοῦ Καρκίνου.**

Πᾶν σημεῖον τοῦ τροπικοῦ τοῦ Καρκίνου (§ 8) ἔχει ἀπόκλισιν ἴσην μὲ τὴν τοῦ Ε, ἤτοι $23^{\circ}\,27'$.

64) **Νὰ ὁρίσητε τὴν ἀπόκλισιν σημείου τινὸς τοῦ τροπικοῦ τοῦ Αἰγόκερω.**

Ἡ ζητουμένη ἀπόκλισις εἶναι ἡ τοῦ Ε′, ἤτοι $-23^{\circ}27'$.

65) **Νὰ ὁρίσητε τὴν πολικὴν ἀπόστασιν τοῦ θερινοῦ καὶ τοῦ χειμερινοῦ ἡλιοστασίου.**

Ἐκ τῆς σχέσεως $P + \delta = 90^{\circ}$ εὑρίσκομεν ὅτι

Τοῦ θερινοῦ εἶναι $P = 90^{\circ} - 23^{\circ}\,27' = 66^{\circ}\,33'$ (ἄσκ. 62)

καὶ τοῦ χειμερινοῦ $P = 90^{\circ} + 23^{\circ}\,27' = 113^{\circ}\,27'$ (» 62)

66) **Νὰ ὁρίσητε τὴν πολικὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων τοῦ τροπικοῦ τοῦ Καρκίνου καὶ τοῦ τροπικοῦ τοῦ Αἰγόκερω.**

Τοῦ τροπικοῦ τοῦ Καρκίνου εἶναι $P = 66^{\circ}\ 33'$ (ἄσκ. 62 καὶ 63)

καὶ τοῦ » » Αἰγόκερω » $P = 113^{\circ}27'$ (» 62 καὶ 64).

67) **Νὰ ὁρίσητε τὴν ὀρθὴν ἀναφορὰν τοῦ γ καὶ γ′.**

Ἐπειδὴ αἱ ὀρθαὶ ἀναφοραὶ μετροῦνται ἀπὸ τοῦ γ καὶ τὸ γ καὶ γ′ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ἕπεται ὅτι ἡ α τοῦ γ εἶναι 0 ὧραι ἡ δὲ τοῦ γ′ εἶναι 12 ὧραι.

68) **Νὰ ὁρίσητε τὴν ὀρθὴν ἀναφορὰν τῆς θερινῆς καὶ χειμερινῆς τροπῆς.**

Ἡ γραμμὴ γγ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΙΙ′ (σχ. 5), ἤτοι ὁ ἰσημερινὸς διαιρεῖται ὑπὸ τούτων εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Ὥστε ἡ α τοῦ Ε εἶναι 6 ὧραι καὶ ἡ τοῦ Ε′ εἶναι 18 ὧραι.

69) **Πόση εἶναι ἡ γωνιώδης ἀπόστασις τοῦ γ καὶ τοῦ ἀπογείου μετρουμένη ἀπὸ τοῦ γ κατὰ τὴν ὀρθὴν φοράν;**

Ἡ γραμμὴ γγ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν γραμμὴν ΕΕ′ τῶν ἡλιοστασίων (§ 8). Ἡ γραμμὴ ΕΕ′ μὲ τὴν γραμμὴν ΠΑ τῶν ἀψίδων (σχ. 6) σχηματίζει γωνίαν $11^{\circ}\ 48'$ (§ 9). Ἡ γωνιώδης λοιπὸν ἀπόστασις τοῦ γ ἀπὸ τοῦ ἀπογείου μετρουμένη ἀπὸ τοῦ γ κατὰ τὴν ὀρθὴν φορὰν εἶναι $90^\circ + 11^\circ\ 48' = 101^\circ\ 48'$.

70) **Πόση εἶναι ἡ γωνιώδης ἀπόστασις τοῦ γ καὶ τοῦ περιγείου ἀπὸ τοῦ γ κατὰ τὴν ὀρθὴν φοράν;**

Ὡς συνάγομεν ἐκ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἡ ζητουμένη γωνιώδης ἀπόστασις εἶναι (σχ. 6) $270^\circ + 11^\circ 48' = 281^\circ 48'$.

71) **Νὰ σπουδάσητε τὴν μεταβολὴν τῆς ἀποκλίσεως τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἔαρος καὶ ἑξῆς.**

Τὸ ἔαρ ἀρχίζει τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ Ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸ γ, (21 Μαρτίου) ὅπερ εἶναι σημεῖον τοῦ ἰσημερινοῦ. Τότε δὲ ἡ δ τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου εἶναι 0°. Ἀπὸ τῆς ἡμέρας ἐκείνης ἡ δ καθισταμένη βορεία αὐξάνει καὶ λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν ($23^\circ\ 27'$) καθ' ἣν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸ Ε (σχ. 5) δηλαδὴ ὅταν τὸ ἔαρ λήγει καὶ ἄρχεται τὸ θέρος. Κατόπιν ἡ δ ἐλαττοῦται καὶ γίνεται πάλιν 0°, ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸ γ', ἤτοι ὅταν τὸ θέρος τελειώνει καὶ ἀρχίζει τὸ φθινόπωρον. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ φθινοπώρου ἡ ἀπόκλισις εἶναι νοτία καὶ αὐξάνει κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ γίνεται μεγίστη ($23^\circ\ 27'$), ὅταν ὁ ἥλιος φθάσῃ εἰς τὸ Ε', δηλαδὴ ὅταν ἀρχίσῃ ὁ χειμών. Κατὰ τὴν διάρκειαν δὲ τούτου ἡ δ οὖσα νοτία, ἐλαττοῦται καὶ γίνεται 0°, ὅταν ὁ Ἥλιος ἐπανέλθῃ εἰς τὸ γ.

72) **Νὰ σπουδάσητε τὴν μεταβολὴν τῆς ὀρθῆς ἀναφορᾶς τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἔαρος καὶ ἑξῆς.**

Αὐξάνει συνεχῶς (§ 7) ἀπὸ 0 ὥρας (εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔαρος) μέχρι 24 ὡρῶν (εἰς τὸ τέλος τοῦ χειμῶνος).

73) **Κατὰ ποίας ὥρας τοῦ ἔτους ἡ ἀπόκλισις τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου εἶναι θετικὴ καὶ κατὰ ποίας ἀρνητική;**

Ἡ δ τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου εἶναι θετικὴ (§ 7) κατὰ τὸ ἔαρ καὶ τὸ θέρος καὶ ἀρνητικὴ κατὰ τὸ φθινόπωρον καὶ τὸν χειμῶνα (βλέπε καὶ ἄσκ. 71).

74) **Κατὰ ποίας ὥρας τοῦ ἔτους ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ κέντρου τοῦ Ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα καὶ κατὰ ποίας εἶναι μικροτέρα τῶν 12 ὡρῶν;**

Κατὰ τὸ ἔαρ καὶ τὸ θέρος εἶναι μικροτέρα τῶν 12 ὡρῶν καὶ μεγαλυτέρα αὐτῶν εἶναι κατὰ τὰς δύο ἄλλας ἐποχάς.

75) **Νὰ ὁρίσητε τὴν πολικὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου**

τοῦ ἡλίου κατὰ τὴν ἀρχὴν ἑκάστης τῶν ὡρῶν τοῦ ἔτους.

Ἐκ τῆς σχέσεως $P+\delta=90^\circ$ καὶ ἐκ τῶν ἀσκήσεων 71 καὶ 73 συνάγομεν ὅτι

κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔαρος εἶναι $P=90^\circ$ $(\delta=0)$
» » » » θέρους » $P=66^\circ\,33'$ $(\delta=23^\circ\,27')$
» » » » φθινοπώρου » $P=90^\circ$ $(\delta=0)$ καὶ
» » » » χειμῶνος » $P=113^\circ\,27'$ $(\delta=-23^\circ\,27')$

***76)* Ὅταν τὰ ὡρολόγια ἡμῶν ἐδείκνυον μέσον χρόνον Ἀθηνῶν, ποῖον τῶν ἑκατέρωθεν τῆς μεσημβρίας τῆς 11ης Φεβρουαρίου τμημάτων ἐφαίνετο μεγαλύτερον καὶ κατὰ πόσον ;**

Τὴν 11ην Φεβρουαρίου ἡ ε (ἐξίσωσις τοῦ χρόνου) εἶναι θετικὴ καὶ ἴση μὲ 14 π 22 δ (§ 12). Ἄρα τὸ μετὰ τὴν μεσημβρίαν τμῆμα τῆς ἡμέρας ἐφαίνετο μεγαλύτερον κατὰ 2 ε=28 π 44 δ.

***77)* Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν 14ην Μαΐου, 26ην Ἰουλίου καὶ 3ην Νοεμβρίου.**

Τὴν 14ην Μαΐου ἡ ε εἶναι —3π 47 δ.

Τὴν 26ην Ἰουλίου ἡ ε εἶναι 6 π 22 δ, ἐνῷ

Τὴν 3ην Νοεμβρίου εἶναι —16 π 22 δ (§ 12).

Ὥστε τὴν 14ην Μαΐου τὸ π. μ. τμῆμα ἐφαίνετο μεγαλύτερον κατὰ 2 ε=7 π 34 δ. Τὴν 26ην Ἰουλίου τὸ μ. μ. τμῆμα ἐφαίνετο μεγαλύτερον κατὰ 2 ε=12 π 44 δ, ἐνῷ τὴν 3ην Νοεμβρίου τὸ π. μ. τμῆμα ἐφαίνετο μεγαλύτερον κατὰ 2 ε=32 π 44 δ.

***78)* Κατὰ ποίας ἡμέρας τοῦ ἔτους τὰ δύο τμήματα τῆς ἡμέρας ἐφαίνοντο ἀκριβῶς ἴσα ;**

Καθ᾽ ἃς ἡμέρας εἶναι ε=0 ἤτοι (§ 12) τὴν 14ην Ἀπριλίου, 14ην Ἰουνίου, 1ην Σεπτεμβρίου καὶ 24ην Δεκεμβρίου.

***79)* Πόσον φαίνεται μεγαλύτερον τὸ μεταμεσημβρινὸν ἀπὸ τὸ προμεσημβρινὸν τμῆμα τῆς 1ης Ἰανουαρίου παρ᾽ ἡμῖν ;**

Τὴν 1ην Ἰανουαρίου εἶναι ε=4 π, καὶ τὸ μ. μ. τμῆμα φαίνεται μεγαλύτερον τοῦ π. μ. κατὰ (§ 11) (4 π + 25 π 5δ)×2 = (29 π 5 δ)×2=58 π 10 δ.

***80)* Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν 14ην Μαΐου, 26ην Ἰουλίου καὶ 3ην Νοεμβρίου.**

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰς ἀσκήσεις 77 καὶ 79 καὶ ὅτι 25 π 5 δ×2=50 π 10 δ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μ. μ. τμῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ π. μ. τμήματος

διὰ τὴν 14ην	Μαΐου	50π 10δ— 7π 34δ=42π 36δ
» » 26ην	Ἰουλίου	50π 10δ+12π 44δ=62π 54δ
» » 3ην	Νοεμβρίου	50π 10δ—32π 44δ=17π 26δ.

81) **Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν 14ην Ἀπριλίου, 14ην Ἰουνίου, 1ην Σεπτεμβρίου καὶ 24ην Δεκεμβρίου.**

Ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι ε=0, ἡ ἀπάντησις εἶναι (25π 5δ) × 2 = = 50π 10δ.

82) **Ἡ κατὰ τὸ Ἰουλιανὸν ἡμερολόγιον 1η Ἰανουαρίου 1583 ποίαν ἡμερομηνίαν τοῦ Γρηγοριανοῦ ἡμερολογίου ἔφερεν ;**

Ἡ 1η Ἰανουαρίου κατὰ τὸ Ἰουλιανὸν ἡμερολόγιον ἦτο εἰς τὸ Γρηγοριανὸν 1+10=11η Ἰανουαρίου (§ 13).

83) **Ἡ κατὰ τὸ Γρηγοριανὸν ἡμερολόγιον 7η Μαρτίου 1630 ποίαν ἡμερομηνίαν ἔφερε κατὰ τὸ Ἰουλιανὸν ἡμερολόγιον ;**

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ νέου καὶ παλαιοῦ ἡμερολογίου ἦτο τότε 10 ἡμέραι. Ἑπομένως ἐδῶ θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν δεδομένην χρονολογίαν 10 ἡμέρας, ὁπότε θὰ εὕρωμεν 26 Φεβρουαρίου.

84) **Κατὰ ποίαν ἡμερομηνίαν τοῦ Γρηγοριανοῦ ἡμερολογίου ἀνεκηρύχθη ἡ Ἑλληνικὴ ἐπανάστασις ;**

Τότε ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ νέου καὶ παλαιοῦ ἡμερολογίου ἦτο 12 ἡμέραι. Ἑπομένως εἰς τὴν 25ην Μαρτίου (τοῦ 1821) θὰ προσθέσωμεν 12 ἡμέρας, ὁπότε θὰ εὕρωμεν 6 Ἀπριλίου 1821.

85) **Ποίαν ἡμερομηνίαν θὰ φέρῃ κατὰ τὸ Ἰουλιανὸν ἡμερολόγιον, ἡ κατὰ τὸ Γρηγοριανὸν 14η Μαρτίου τοῦ ἔτους 2100 ;**

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἡμερολογίων θὰ εἶναι τότε 14 ἡμέραι. Διότι τὸ 2100 θὰ εἶναι δίσεκτον μόνον κατὰ τὸ παλαιὸν ἡμερολόγιον. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη χρονολογία θὰ εἶναι 29 Φεβρουαρίου 2100.

86) **Ἐγεννήθη τις τὴν 20ὴν Μαρτίου 1904 κατὰ τὸ Ἰουλιανὸν ἡμερολόγιον. Πόσην ἡλικίαν εἶχε τὴν 1ην Αὐγούστου 1931 κατὰ τὸ Γρηγοριανὸν ἡμερολόγιον ;**

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἡμερολογίων εἶναι 13 ἡμέραι. Ὥστε ἐγεννήθη οὗτος τὴν 2αν Ἀπριλίου 1904 κατὰ τὸ νέον ἡμερολόγιον, καὶ ἡ ζητουμένη ἡλικία εἶναι

1931 ἔτ	8 μ.	1 ἡμ.
1904 ἔτ.	4 μ.	2 ἡμ.
27 ἔτ.	3 μ.	29 ἡμ.

87) **Νὰ ἐκτιμήσητε εἰς χιλιόμετρα τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ἡλίου ἀπὸ τῆς Γῆς ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ γηίνη ἰσημερινὴ ἀκτὶς εἶναι 6 378 388 μέτρα.**

Πολλαπλασιάζοντες τὴν τιμὴν τῆς γηίνης ἰσημερινῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 23 438 (§ 14) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις Γῆς—Ἡλίου εἶναι

149 503 037 χιλιόμετρα (περ.).

88) **Νὰ εὕρητε πόσον χρόνον χρειάζεται τὸ φῶς τοῦ Ἡλίου, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Γῆν.**

Διαιροῦμεν τὴν ἄνω εὑρεθεῖσαν ἀπόστασιν Γῆς - Ἡλίου διὰ 300 000, λαμβάνοντες ὡς ταχύτητα τοῦ φωτὸς τὴν τιμὴν τῶν 300 000 χιλιομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Εὑρίσκομεν δὲ

498,35δ = 8π 18,35δ (περ.).

89) **Νὰ εὕρητε πόσον χρόνον θὰ ἐχρειάζετο ἓν ἀεροπλάνον νὰ φθάσῃ τὸν Ἥλιον, ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ τρέχῃ συνεχῶς μὲ ταχύτητα 500 χιλιομέτρων τὴν ὥραν.**

Διαιροῦντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἀπόστασιν Γῆς - Ἡλίου (ἀσκ. 87) διὰ 500, εὑρίσκομεν 32 περίπου ἔτη.

90) **Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ Ἡλίου εἰς χιλιόμετρα γνωρίζοντες ὅτι ἡ ἰσημερινὴ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι 6 378 388 μέτρα.**

Πολλαπλασιάζοντες τὴν τιμὴν τῆς γηίνης ἰσημερινῆς ἀκτῖνος ἐπὶ 109 (§ 15) εὑρίσκομεν ὡς μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ Ἡλίου 695244 χιλιόμετρ.

91) **Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἡλιακῆς ἐπιφανείας εἰς τετραγωνικὰ μυριάμετρα.**

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἔχει ἐμβαδὸν 5 100 650 τ. μυριάμετρα. Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ἡλίου (§ 15) ἔχει ἐμβαδὸν 5 100 650 × 11 900 = 60 697 735 000 τ. μυριάμετρα.

92) **Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ Ἡλίου εἰς κυβικὰ μυριάμετρα.**

Ὁ ὄγκος τῆς Γῆς εἶναι 1083,205 ἑκατομμύρια κ. μυριάμετρα.

Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ Ἡλίου εἶναι 1083,205×1 297 000 κυβικὰ μυριάμετρα.

93) Νὰ εὕρητε τὴν πυκνότητα τοῦ Ἡλίου συναρτήσει τῆς πυκνότητος τῆς Γῆς.

Ἡ (ἀπόλυτος) πυκνότης σώματος τινός, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς μάζης του πρὸς τὸν ὄγκον του. Κατὰ ταῦτα πυκνότης Ἡλίου $= \frac{\text{μᾶζα Ἡλίου}}{\text{ὄγκου Ἡλίου}} = \frac{331\,939 \times \text{μᾶζα Γῆς}}{1\,297\,000 \times \text{ὄγκον Γῆς}} =$

$$= \frac{331\,939}{1\,297\,000} \times \frac{\text{μᾶζα Γῆς}}{\text{ὄγκος Γῆς}}$$

ἤτοι πυκνότης Ἡλίου $= \frac{331\,939}{1\,297\,000} \times$ πυκνότητα Γῆς ἢ πυκνότης Ἡλίου $= 0{,}26 \times$ πυκνότητα Γῆς (περίπου).

94) Γνωρίζοντες ὅτι ἡ μέση πυκνότης τῆς Γῆς εἶναι 5,52 νὰ εὕρητε τὴν πυκνότητα τοῦ Ἡλίου.

Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν εἶναι

πυκνότης Ἡλίου $= 0{,}26 \times 5{,}52 = 1{,}4352$.

95) Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ Ἡλίου εἰς τόννους.

Θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ Ἡλίου εἰς κυβικὰ μέτρα ἐπὶ 1,4352.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΟΙ ΠΛΑΝΗΤΑΙ

16. Νόμοι τοῦ Κεπλέρου. — Ἡ πραγματικὴ κίνησις τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον, γίνεται κατὰ μεγίστην προσέγγισιν κατὰ τοὺς κάτωθι τρεῖς νόμους τοῦ Κεπλέρου.

1) Οἱ πλανῆται γράφουν ἐλλείψεις μίαν τῶν ἑστιῶν τῶν ὁποίων κατέχει ὁ Ἥλιος.

2) Τὰ γραφόμενα ἐμβαδὰ ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ἥτις συνδέει τὸ κέντρον πλανήτου τινὸς μὲ τὸ κέντρον τοῦ Ἡλίου εἶναι ἀνάλογα τῶν χρόνων καθ' οὓς ταῦτα γράφονται. (Νόμος τῶν ἐμβαδῶν § 10).

3) Τὰ τετράγωνα τῶν χρόνων τῶν περιφορῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς κύβους τῶν μεγάλων ἡμιαξόνων τῶν τροχιῶν.

Ἤτοι, ἐὰν α καὶ α′ εἶναι οἱ μεγάλοι ἡμιάξονες, Τ καὶ Τ′ εἶναι οἱ χρόνοι τῶν περιφορῶν δύο πλανητῶν, κατὰ τὸν ἄνω 3ον νόμον εἶναι

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{\alpha'^3}{\alpha^3} \text{ ἐξ οὗ } T' = T.\sqrt{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3}.$$

Ἑπομένως ἂν α εἶναι ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς τροχιᾶς τῆς Γῆς καὶ θέσωμεν $\alpha = 1$ καὶ $T = 1$ ἔτος, ὁ χρόνος Τ′ τῆς περιφορᾶς πλανήτου τινὸς ἰσοῦται μὲ

$$T' = \sqrt{\alpha'^3} = \alpha' \sqrt{\alpha'} \text{ ἔτη.}$$

17. Νόμος τοῦ Νεύτωνος ἢ τῆς παγκοσμίου ἕλξεως.— Κατὰ τὸν νόμον τοῦτον, **δύο οἱαδήποτε ὑλικὰ μόρια ἕλκονται ἀμοιβαίως κατ' εὐθὺν λόγον τῶν μαζῶν των καὶ κατ' ἀντίστροφον λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν.**

Ὁ νόμος οὗτος ἐκφράζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $F = K.\frac{mm'}{\delta^2}$, ὅπου F εἶναι ἡ ἑλκτικὴ δύναμις ἡ μεταξὺ δύο ὑλικῶν σημείων μαζῶν m καὶ m′ εἰς μεταξύ των ἀπόστασιν δ καὶ K ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἕλξεως. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς K ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν μονάδων δι' ὧν ἐκφράζονται τὰ F, m, m′ καὶ δ. Π. χ. ἐὰν $m = m' = 1$ γραμμάριον καὶ $\delta = 0{,}01$ τοῦ μέτρου, ἡ ἑλκτικὴ δύναμις F ἰσοῦται μὲ $6{,}667 \,.\, 10^{-8}$ δύνας.

18. Γενικὰ περὶ πλανητῶν.—Οἱ κυριώτεροι πλανῆται εἶναι ἐννέα, ἤτοι πλὴν τῆς Γῆς εἶναι: οἱ Ἑρμῆς, Ἀφροδίτη (κατώτεροι ἢ ἐσωτερικοὶ πλανῆται) Ἄρης, Ζεύς, Κρόνος, Οὐρανός, Ποσειδῶν καὶ Πλούτων (ἀνώτεροι ἢ ἐξωτερικοὶ πλανῆται καὶ μεταξὺ τούτων καὶ τῶν κατωτέρων εὑρίσκεται ἡ Γῆ).

Ἐκτὸς τῶν ἐννέα αὐτῶν πλανητῶν ὑπάρχουν μεταξὺ Ἄρεως καὶ Διὸς πολλοὶ μικροὶ πλανῆται (1223 τὸν ἀριθμόν), οἵτινες λέγονται **τηλεσκοπικοὶ** (πλανῆται) ἢ **ἀστεροειδεῖς.**

Ὅλοι οἱ πλανῆται στρέφονται περὶ τὸν Ἥλιον ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς ἐπὶ τροχιῶν ἐγγύτατα πρὸς τὴν ἐκλειπτικὴν (§ 16).

Κατωτέρω δίδομεν τοὺς μεγάλους ἡμιάξονας τῶν τροχιῶν τῶν πλανητῶν ἐν σχέσει μὲ τὸν μεγάλον ἡμιάξονα τῆς τροχιᾶς τῆς Γῆς καὶ τὰς ἀστρικὰς περιφορὰς αὐτῶν.

Ὄνομα	Μέγας ἡμιάξων	ἀστρικὴ περιφορὰ ἔτη	ἡμέραι
Ἑρμῆς	0,387099	0	87,9693
Ἀφροδίτη	0,723332	0	224,7008
Γῆ	1,000000	1	0,0142
Ἄρης	1,523688	1	321,7375
Ζεὺς	5,202561	11	314,925
Κρόνος	9,554747	29	167,21
Οὐρανὸς	19,21814	84	8,11
Ποσειδῶν	30,10957	164	281,6
Πλούτων	39,51774	248	157

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 78 - 79.

***96)* Πόσον χρόνον χρειάζεται τὸ φῶς τοῦ Ἡλίου ἵνα μεταβῇ ἀπ' αὐτοῦ εἰς τὸν Ποσειδῶνα;**

Τὸ φῶς τοῦ Ἡλίου φθάνει εἰς τὴν Γῆν μετὰ 8 π. 18,35 δ. (ἄσκ. 88). Ἀλλ' ἡ ἀπόστασις Ἡλίου - Ποσειδῶνος εἶναι 30,11 μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως Ἡλίου - Γῆς (§ 18). Ὥστε τὸ φῶς τοῦ Ἡλίου διανύει τὴν ἀπόστασιν Ἡλίου - Ποσειδῶνος εἰς (8 π. 18,35 δ) $\times$ 30,11 = 4 ὥρ. 10 π. 5 δ.

***97)* Ποσάκις ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἑρμοῦ θὰ ἐφωτίζετο ὑπὸ τοῦ Ἡλίου ἐντατικώτερον ἢ ἐπὶ τῆς Γῆς, ἂν αἱ αὐταὶ ἀτμοσφαιρικαὶ συνθῆκαι ὑφίσταντο ἐπ' ἀμφοτέρων;**

Ἔστω ε καὶ ε′ αἱ ἐντάσεις καθ' ἃς φωτίζονται καθέτως ὑπὸ τοῦ Ἡλίου ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς καὶ ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἑρμοῦ ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος αὐτῶν $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ ἰσοῦται, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς, μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου $\frac{1^2}{0{,}38^2}$ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς Γῆς καὶ τοῦ Ἑρμοῦ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου ἀντιστοίχως, ἔχομεν $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{0{,}38^2}{1}$, ἤτοι $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{0{,}38^2} = \varepsilon \frac{1}{0{,}1444}$ ἤτοι $\varepsilon' = \varepsilon \,.\, 6{,}925$. Ὥστε ὑπὸ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἑρμοῦ, θὰ ἐφωτίζετο ὑπὸ τοῦ Ἡλίου 6,925 ἐντατικώτερον.

Ἐὰν αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες προσπίπτουν ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν ὄχι καθέτως, ἀλλὰ πλαγίως ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν προσπτώσεως ω, τότε αἱ ἀνωτέρω ἐντάσεις θὰ εἶναι ἴσαι μὲ εσυνω καὶ ε΄συνω,

ὁ δὲ λόγος αὐτῶν $\dfrac{\varepsilon\sigma\upsilon\nu\omega}{\varepsilon'\sigma\upsilon\nu\omega}$, εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντα

λόγον $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'}$.

***98)* Ποσάκις ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ Ποσειδῶνος θὰ ἐφωτίζετο ἀσθενέστερον ἢ ἐπὶ τῆς Γῆς, ἂν αἱ αὐταὶ ὑφίσταντο ἐπ᾿ ἀμφοτέρων ἀτμοσφαιρικαὶ συνθῆκαι;**

Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 30{,}11^2$ ἤτοι

$\varepsilon' = \varepsilon.\dfrac{1}{30{,}11^2} = \varepsilon.\dfrac{1}{906{,}6121}$ ἤτοι $\varepsilon' = \varepsilon\,.\,0{,}0011$ (περίπου).

Ὥστε ὑπὸ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος ἡ ἔντασις ἐπὶ τῆς μονάδος ἐπιφανείας τοῦ Ποσειδῶνος εἶναι τὰ 0,0011 τῆς ἐντάσεως ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, ἢ ἄλλως ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ποσειδῶνος θὰ ἐφωτίζετο 906,6121 φορὰς ἀσθενέστερον τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς.

***99)* Ὁ Ἄρης ἀπέχει τοῦ Ἡλίου κατὰ μέσον ὅρον 1,52 ἀποστάσεις τῆς Γῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τῆς περὶ τὸν Ἥλιον περιφορᾶς αὐτοῦ.**

Ὁ ζητούμενος χρόνος περιφορᾶς ἰσοῦται (§ 16) μὲ

$T' = 1{,}52\cdot\sqrt{1{,}52}$ ἔτη $= 366{,}25.\ 1{,}52.\ 1{,}23 = 685$ ἀστρικαὶ ἡμέραι (περίπου).

***100)* Ὁ Ζεὺς ἀπέχει τοῦ Ἡλίου 5,20 ἀποστάσεις τῆς Γῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τῆς περὶ τὸν Ἥλιον περιφορᾶς αὐτοῦ.**

Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $T' = 5{,}20.\ \sqrt{5{,}20}$ ἔτη, ἤτοι $T' = 5{,}20.\ 2{,}28 = 11$ ἔτη 315 ἀστρ. ἡμ. (περίπου).

***101)* Ὁ Πλούτων ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Ἡλίου περίπου 39,51 ἀποστάσεις τῆς Γῆς ἀπὸ τοῦ Ἡλίου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τῆς περὶ τὸν Ἥλιον περιφορᾶς αὐτοῦ.**

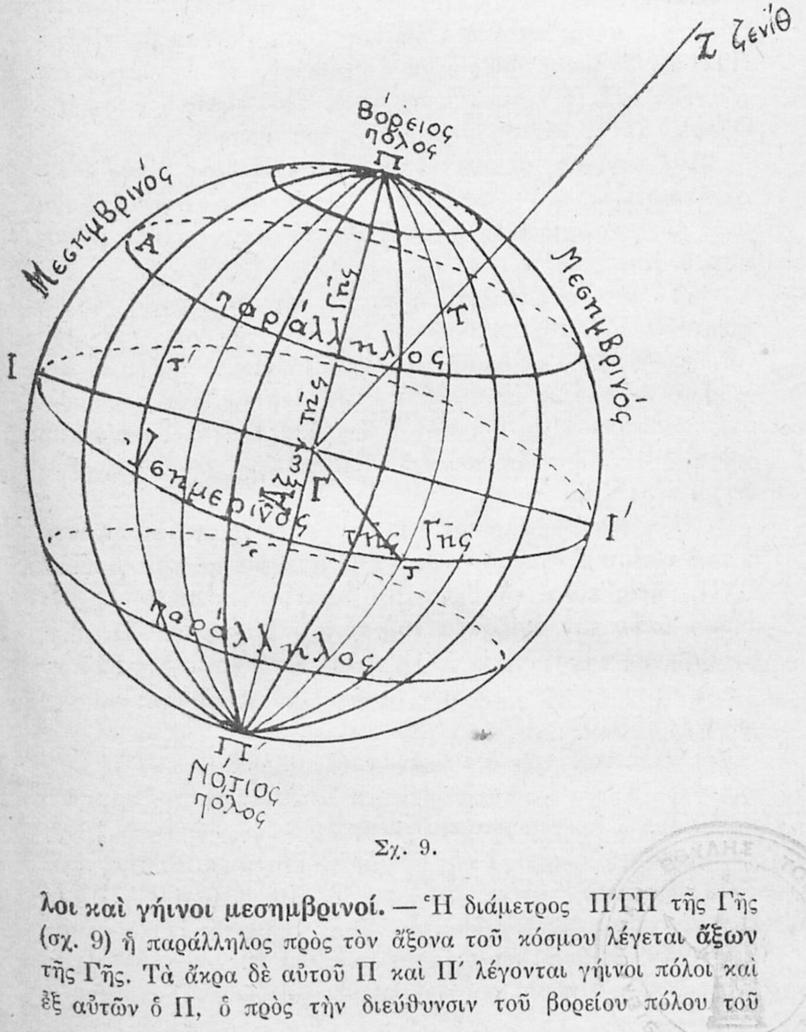
Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $T' = 39{,}51.\ \sqrt{39{,}51}$ ἔτη, ἤτοι $T' = 39{,}51.\ 6{,}28 = 248{,}1228$ ἀστρικὰ ἔτη (περίπου) ἢ 248 ἔτη 45 ἀστρικαὶ ἡμέραι.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Η ΓΗ

19. Ἡ Γῆ εἰς τὸ διάστημα. — Ἡ Γῆ εἶναι **μεμονωμένη** εἰς τὸ διάστημα, **πεπερασμένη** καὶ ὅταν δὲν λαμβάνωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὰς ἀνωμαλίας τοῦ ἐδάφους, εἶναι **σφαιροειδής.**

20. Ἄξων καὶ πόλοι τῆς Γῆς. Ἰσημερινός, παράλληλοι καὶ γήινοι μεσημβρινοί. — Ἡ διάμετρος Π΄ΓΠ τῆς Γῆς (σχ. 9) ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου λέγεται **ἄξων** τῆς Γῆς. Τὰ ἄκρα δὲ αὐτοῦ Π καὶ Π΄ λέγονται γήινοι πόλοι καὶ ἐξ αὐτῶν ὁ Π, ὁ πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ βορείου πόλου τοῦ



Σχ. 9.

οὐρανοῦ εἶναι ὁ βόρειος πόλος τῆς Γῆς, ὁ δὲ Π′ εἶναι ὁ νότιος πόλος αὐτῆς. Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς Γῆς ὁ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονα αὐτῆς, ἤτοι ὁ ΙΙ′ λέγεται **γήινος ἰσημερινός,** οἱ δὲ πρὸς αὐτὸν παράλληλοι κύκλοι λέγονται **γήινοι** παράλληλοι.

Ὁ γήινος ἰσημερινὸς διαιρεῖ τὴν Γῆν εἰς δύο ἡμισφαίρια, τὸ **βόρειον** (τὸ περιέχον τὸν βόρειον πόλον τῆς Γῆς) καὶ τὸ **νότιον.**

Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τῆς Γῆς τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς κατὰ ἕνα **γήινον μεσημβρινὸν** ὡς εἶναι ὁ ΠΤΠ′Τ′. Τὸ ἥμισυ τοῦ γηίνου μεσημβρινοῦ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν πόλων Π, Π′ λέγεται μεσημβρινὸς τῶν τόπων ποὺ περιέχει. Οὕτω τὸ ΠΤΠ′ λέγεται μεσημβρινὸς τοῦ τόπου Τ.

21. Γεωγραφικαὶ συντεταγμέναι.—Ἡ θέσις τόπου Τ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς ὁρίζεται διὰ δύο συντεταγμένων αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ **γεωγραφικὸν πλάτος** καὶ τὸ **γεωγραφικὸν μῆκος αὐτοῦ.** Καὶ

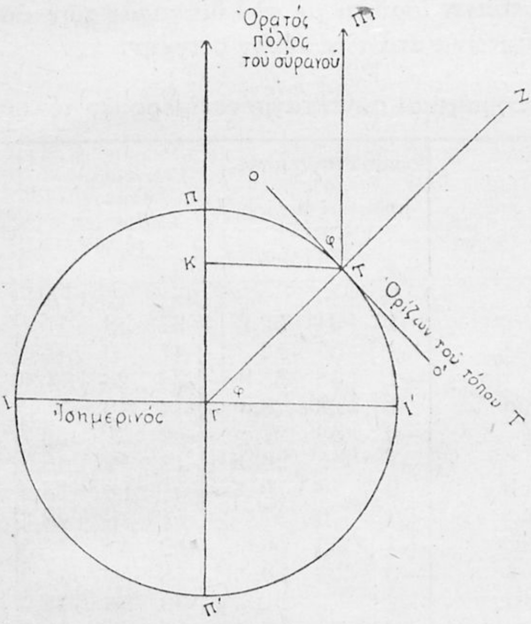
α′) Γεωγραφικὸν πλάτος τόπου Τ λέγεται ἡ γωνία τῆς κατακορύφου ΓΤΖ (σχ. 9) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ γηίνου ἰσημερινοῦ, ἤτοι ἡ γωνία τΓΤ. Μετρεῖται δὲ αὕτη ὑπὸ τοῦ τόξου τΤ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ Τ, καὶ ἀπὸ 0° ἕως 90° ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ πρὸς τοὺς πόλους καὶ εἶναι **βόρειον** ἢ **θετικόν,** ὅταν ὁ Τ εὑρίσκεται πρὸς βορρᾶν τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ **νότιον** ἢ ἀρνητικόν, ὅταν εὑρίσκεται πρὸς νότον αὐτοῦ.

Ἤδη παρατηροῦμεν (σχ. 10), ὅτι τὸ **γεωγραφικὸν πλάτος φ τοῦ τόπου Τ** (ἤτοι ἡ γωνία Ι′ΓΤ) **ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ΟΤΠ$_1$, ἥτις εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὁρατοῦ πόλου** (τὸ ἔξαρμα αὐτοῦ) **ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα τοῦ τόπου Τ,** διότι ἡ ΤΠ$_1$, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Π′Π, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΙ′, ὡς καὶ ἡ κατακόρυφος ΓΤΖ τοῦ τόπου Τ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα αὐτοῦ.

β′) Ἤδη ἐκλέγομεν ἕνα μεσημβρινὸν ΠΑΠ′ (σχ. 9) ὡρισμένου τόπου Α, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **ἀρχικὸν** ἢ **πρῶτον** μεσημβρινόν. Τότε **γεωγραφικὸν μῆκος** τόπου Τ λέγεται ἡ δίεδρος γωνία (ἡ μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν) ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν μεσημβρινῶν τῶν τόπων Α καὶ Τ, ἤτοι ἡ γωνία ΑΠΠ′Τ. Ἡ γωνία αὕτη μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου Ιτ (ἀρχῆς Ι) τοῦ ἰσημερινοῦ ἀπὸ 0° ἕως 180° ἢ ἀπὸ 0 ὥρας ἕως 12 ὥρας πρὸς **ἀνατολὰς** ἢ πρὸς **δυσμὰς** τοῦ πρώτου μεσημβρινοῦ. Ὥστε ἔχομεν μῆκος **ἀνατολικὸν** καὶ **δυτικόν.** Γενικῶς ὅμως τὸ ἀνατολικὸν μῆκος παρίσταται δι᾽ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, τὸ δὲ δυτικὸν διὰ θετικοῦ.

Ὡς πρῶτος μεσημβρινὸς λαμβάνεται ὁ μεσημβρινὸς τοῦ Greenwich πλησίον τοῦ Λονδίνου.

Τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τόπου μετρεῖται ἐνίοτε ὑπὸ τῶν ἀστρονόμων ἀπὸ τοῦ πρώτου μεσημβρινοῦ πρὸς δυσμὰς αὐτοῦ



Σχ. 10.

ἀπὸ 0° ἕως 360° ἢ ἀπὸ 0 ὥρας ἕως 24 ὥρας. Ἐὰν δὲ οὕτως ὁ λαμβανόμενος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τῶν 180° ἢ τῶν 12 ὡρῶν, τὸ γ.μ εἶναι δυτικόν, ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλύτερος τῶν 180° ἢ 12 ὡρῶν, τὸν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 360° ἢ 24 ὥρας, ὁπότε ἡ διαφορὰ θὰ παριστάνει μῆκος ἀνατολικόν.

Ἔστωσαν ἤδη δύο τόποι Α καὶ Β, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντιστοίχως γεωγραφικὰ μήκη $\mu_\alpha = -5$ ὥρας ($= -75^0$) καὶ $\mu_\beta = -2$ ὥρας ($= -30^0$). Οὕτως ὅμως ὁ τόπος Α κεῖται ἀνατολικώτερον τοῦ τόπου Β κατὰ 45°. Εἷς ἀστὴρ λοιπὸν ὅστις διέρχεται διὰ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ Α κατά τινα στιγμὴν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ Β μετὰ 3 ἀστρικὰς ὥρας. Ἤτοι καθ᾽ ἣν στιγμὴν ὁ τόπος Α ἔχει π. χ. ἀστρικὸν χρόνον $t_\alpha = 8$ ὥρας κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ὁ τόπος Β θὰ ἔχῃ ἀστρικὸν χρόνον $t_\beta = 8 - 3 = 5$ ὥρας. Ὥστε εἶναι $t_\alpha - t_\beta = 3$ ὧραι. Ἤδη ὅμως παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι καὶ $\mu_\beta - \mu_\alpha = -2$ ὧραι — (-5 ὧραι) $= -2$ ὧραι $+ 5$ ὧραι $= 3$ ὧραι. Ἑπομένως εἶναι $\mu_\beta - \mu_\alpha = t_\alpha - t_\beta$ (1). Γενικῶς δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι: **Ἡ διαφορὰ τῶν γεωγραφικῶν μηκῶν δύο τόπων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀστρικῶν χρόνων αὐτῶν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν.**

Γεωγραφικαὶ συντεταγμέναι μερικῶν τόπων.

Ὀνόματα	Γεωγραφικὸν μῆκος πρὸς μεσ. Greenwich + δυτικὸν — ἀνατολικὸν			Γεωγραφικὸν πλάτος + βόρειον — νότιον			Ὕψος ὑπὲρ τὴν θάλασσαν
	ὡρ.	π.	δ.	ὡρ.	π.	δ.	μέτρα
Ἀθῆναι	—1	34	52,2	+37	58	15,5	110
Κωνσ]πολις	—1	55	52	+41	0	45	65
Σμύρνη	—1	48	38,9	+38	26	30	—
Βελιγράδιον	1	22	3,8	+44	48	8	250
Βερολῖνον	—0	53	27,40	+52	31	30,7	47
Βιέννη	—1	5	26,24	+48	12	40,5	211
Greenwich	0	0	0,00	+51	28	38,2	47
Λονδῖνον	+0	0	57,77	+51	36	46,3	82
Ν. Ὑόρκη	+4	55	56,66	+40	43	48,5	—
Παρίσιοι	—0	9	20,93	+48	50	11,2	59
Πετρούπολις	—2	1	21,3	+59	56	32,0	4
Μόσχα	—2	30	17,03	+55	45	19,5	142
Ρώμη	—0	47	55,36	+41	53	53,6	59

22. Ἀκριβὲς σχῆμα τῆς Γῆς.—Ἐκ τῆς μετρήσεως τόξων μεσημβρινοῦ εἰς διαφόρους τόπους τῆς Γῆς καὶ εἰς ὅλα τὰ πλάτη προέκυψεν ὅτι:

Οἱ μεσημβρινοὶ τῆς Γῆς εἶναι ὅλοι ἴσοι μεταξύ των· ἔχουν δὲ τὸ σχῆμα ἐλλείψεως μὲ μικρὸν ἄξονα τὸν ἄξονα τῆς Γῆς. Δι' ὃ λέγομεν ὅτι ἡ **Γῆ ἔχει τὸ σχῆμα ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν μικρὸν ἄξονα αὐτῆς,** ἤτοι εἶναι πεπιεσμένη εἰς τοὺς πόλους καὶ ἐξογκωμένη περὶ τὸν ἰσημερινόν.

Τὸ γήινον ὅμως ἐλλειψοειδὲς ἐλάχιστα διαφέρει τῆς σφαίρας. Θὰ θεωροῦμεν λοιπὸν τὴν Γῆν ὡς σφαῖραν, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου εἶναι 40 000 000 μέτρα καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς (μέση) εἶναι 6366197 μ.

Τὸ μέσον μῆκος τόξου 1° μεσημβρινοῦ εὑρέθη ἴσον μὲ 111111,11 μέτρα, τὸ δὲ μῆκος τόξου 1′ μεσημβρινοῦ, ἤτοι τὸ μῆκος ἑνὸς ναυτικοῦ μιλίου ἔχει ὁρισθῇ εἰς 1852 μέτρα.

23. Περιστροφὴ καὶ περιφορὰ τῆς Γῆς.—Ἡ ἡμερησία κίνησις τῆς οὐρανίου σφαίρας δὲν εἶναι πραγματική. Ἐξηγεῖται δὲ αὕτη ἐκ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολάς. Ἐκτελεῖ δὲ ἡ Γῆ μίαν πλήρη περιστροφὴν εἰς 86400 ἀστρικὰ δευτερόλεπτα.

Ὁμοίως καὶ ἡ ἐτησία κίνησις τοῦ Ἡλίου ἐπὶ τῆς ἐκλειπτικῆς δὲν εἶναι πραγματικὴ καὶ ἐξηγεῖται ὑπὸ τῆς περιφορᾶς τῆς Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον, γράφουσα ἐντὸς ἑνὸς ἔτους ἔλλειψιν μίαν τῶν ἑστιῶν τῆς ὁποίας κατέχει ὁ Ἥλιος.

24. Ἀνισότης τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν νυκτῶν.—Ὡς πρὸς τὴν διάρκειαν τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν νυκτῶν παρατηροῦνται τὰ ἑξῆς:

1) Οἱ τόποι τοῦ ἰσημερινοῦ ἔχουν πάντοτε ἡμέρας ἴσας μὲ τὰς νύκτας.

2) Ὅλοι οἱ τόποι τῆς Γῆς ἔχουν ἰσημερίαν τὴν 21 Μαρτίου καὶ 22 Σεπτεμβρίου ἑκάστου ἔτους.

3) Ἕκαστος τῶν πόλων τῆς Γῆς ἔχει ἐντὸς ἑνὸς ἔτους μίαν ἡμέραν διαρκείας ἓξ μηνῶν καὶ μίαν νύκτα διαρκείας ἐπίσης ἓξ μηνῶν. Καὶ ὁ μὲν βόρειος πόλος ἔχει ἡμέραν τὸ ἔαρ καὶ τὸ θέρος, ὁ δὲ νότιος τὸ φθινόπωρον καὶ τὸν χειμῶνα.

4) Γενικῶς ἡ ἀνισότης τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν νυκτῶν παρατηρεῖται εἰς τόπους ἔχοντας πλάτος διάφορον τοῦ μηδενός. Ὅταν δὲ τοῦτο καὶ ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι ὁμόσημα, αἱ ἡμέραι εἶναι μεγαλύτεραι τῆς νυκτός, καὶ εἶναι αὗται μικρότεραι τῆς νυκτὸς ὅταν τὸ πλάτος καὶ ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι ἑτερόσημα.

5) Οἱ τόποι τῆς Γῆς οἱ ἔχοντες γ. π. μεγαλύτερον τοῦ συμπληρώματος τῆς λοξώσεως τῆς ἐκλειπτικῆς, ἤτοι μεγαλύτερον τῶν $90^{\circ}-23^{\circ}\ 27'=66^{\circ}\ 33'$, ἔχουν ἡμέραν ἐφ' ὅσον ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ συμπληρώματος τοῦ πλάτους $(90^{\circ}-\varphi)$ καὶ ὁμόσημος πρὸς αὐτό. Θὰ ἔχουν δὲ οἱ τόποι οὗτοι νύκτα ἐφ' ὅσον ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι ἑτερόσημος μὲ τὸ πλάτος καὶ μεγαλυτέρα τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ. Ἑπομένως

αἱ διάρκειαι τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν νυκτῶν, αἱ ἴσαι μὲ 24 ὥρας ἢ μεγαλύτεραι τῶν 24 ὡρῶν, παρατηροῦνται εἰς τόπους πλάτους ἀπὸ 66° 33′ μέχρι 90° καὶ εἶναι αὗται τόσον μεγαλύτεραι, ὅσον οἱ τόποι εὑρίσκονται πλησιέστερα πρὸς τοὺς πόλους. Εἰδικώτερον δὲ εἰς τοὺς τόπους τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου καὶ ἀπὸ τῆς 21 Μαρτίου ἡ ἡμέρα γίνεται βαθμηδὸν μεγαλυτέρα τῆς νυκτὸς μέχρι τῆς 22 Ἰουνίου, ὁπότε ἔχει τὴν μεγαλυτέραν διάρκειαν. Μετὰ τὴν 22 Ἰουνίου ἡ διάρκεια τῆς ἡμέρας βαθμηδὸν ἐλαττοῦται, καὶ τὴν 22 Σεπτεμβρίου γίνεται ἴση μὲ τὴν νύκτα· μετὰ τὴν ἡμερομηνίαν αὐτὴν γίνεται μικροτέρα τῆς νυκτὸς μέχρι τῆς 22 Δεκεμβρίου ὁπότε ἔχει τὴν μικροτέραν διάρκειαν. Ἔπειτα ἡ διάρκεια τῆς ἡμέρας ἀρχίζει νὰ αὐξάνῃ διὰ νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν νύκτα τὴν 21 Μαρτίου. Σημειωτέον δὲ ἤδη, ὅτι αἱ διαφοραὶ μεταξὺ ἡμέρας καὶ νυκτὸς εἶναι τόσον μεγαλύτεραι, ὅσον τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ τόπου εἶναι μεγαλύτερον.

Εἰς τοὺς τόπους τοῦ νοτίου ἡμισφαιρίου παρατηρεῖται ἡ αὐτὴ πορεία τῶν ὡς ἄνω φαινομένων, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τοὺς ἀντιστοίχους τόπους τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου, ἀλλὰ κατὰ τάξιν ἀντίθετον. Οὕτως ὅταν εἰς τόπον βορείου πλάτους π. χ. 40° ἡ ἡμέρα αὐξάνῃ, εἰς τὸν τόπον νοτίου πλάτους 40° ἡ ἡμέρα ἐλαττοῦται καὶ ὅταν ὁ πρῶτος τόπος ἔχει ἡμέραν 14 ὡρῶν, ὁ δεύτερος ἔχει νύκτα 14 ὡρῶν καὶ ἡμέραν 10 ὡρῶν κ.ο.κ.

Τὸ ἀληθὲς ὕψος υ τοῦ Ἡλίου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἄνω μεσουρανήσεως αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\upsilon = (90^\circ - \varphi) + \delta \quad \text{διὰ τὸ βόρειον ἡμισφαίριον}$$
$$\upsilon = (90^\circ - \varphi) - \delta \quad \text{διὰ τὸ νότιον ἡμισφαίριον}$$

ὅπου φ εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος λαμβανόμενον κατ᾿ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ δ ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου. Τὸ ὕψος δὲ τοῦτο μετρεῖται ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ νότου ἐν τῷ βορείῳ ἡμισφαιρίῳ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ βορρᾶ ἐν τῷ νοτίῳ.

Ἡ διάρκεια τῆς ἡμέρας αὐξάνει ἕνεκα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς διαθλάσεως, διότι ἕνεκα ταύτης ὁ Ἥλιος ἀνατέλλει ἐνωρίτερον καὶ δύει βραδύτερον.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 106 - 132.

***102)* Πόσον εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος ἑκάστου σημείου τοῦ ἰσημερινοῦ;**

᾿Αφοῦ τοῦτο μετρεῖται ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ (§ 21), ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον γ. π. εἶναι 0^o.

***103)* Ὁ γήινος μεσημβρινὸς τόπου Α΄ καὶ ὁ α΄ μεσημβρινὸς κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἀλλὰ δὲν συμπίπτουσι. Πόσον εἶναι τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τοῦ Α΄;**

Ἂν ΠΙΠ΄ (σχ. 9) εἶναι ὁ α΄ μεσημβρινός, ὁ μεσημβρινὸς τοῦ τόπου Α΄ θὰ εἶναι ὁ Π΄Ι΄Π. Ἑπομένως τὸ γ. μ. τοῦ τόπου Α΄ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου ΙτΙ΄ ἢ τοῦ Ιτ΄Ι΄, ἤτοι εἶναι 180^o (ἀνατολικὸν ἢ δυτικόν).

***104)* Τόπος ἔχει δυτικὸν γεωγραφικὸν μῆκος 45^o. Νὰ ἐκτιμηθῇ τοῦτο κατὰ τὸν ἀστρονομικὸν τρόπον μετρήσεως.**

Τὸ τόξον τοῦτο ἐμετρήθη πρὸς δυσμὰς τοῦ α΄ μεσημβρινοῦ (§ 21). Ἐπειδὴ δὲ τόξ. 360^o = τόξ. 24 ὡρῶν, ἕπεται ὅτι τόξον 15^o = τόξ. 1 ὥρ. καὶ τόξ. 45^o = τόξ. 3 ὡρῶν = ζητούμενον γ. μ.

***105)* Τόπος ἔχει ἀνατολικὸν μῆκος 105^o. Νὰ ἐκτιμηθῇ τοῦτο κατὰ τὸν ἀστρονομικὸν τρόπον μετρήσεως.**

Τὸ τόξον τοῦ ἰσημερινοῦ ἀπὸ τοῦ α΄ μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου εἶναι $360^o - 105^o = 255^o = 255 : 15 = 17$ ὡρῶν. = ζητούμενον γ. μ.

***106)* Τόπος ἔχει γεωγραφικὸν μῆκος 10 ὡρῶν κατὰ τὸν ἀστρονομικὸν τρόπον. Ἀνατολικὸν ἢ δυτικὸν εἶναι τοῦτο καὶ πόσων μοιρῶν.**

Τὸ δοθὲν γ. μ. εἶναι $15^o \times 10 = 150^o$ καὶ δυτικόν, διότι εἶναι $150^o < 180^o$ (§ 21).

***107)* Τόπος ἔχει γεωγραφικὸν μῆκος 17 ὡρῶν. Πρὸς Α ἢ πρὸς Δ τοῦ α΄ μεσημβρινοῦ κεῖται καὶ πόσας μοίρας;**

Τὸ δοθὲν γ. μ. εἶναι $15^o \times 17 = 255^o$. Ἐπειδὴ δὲ $255^o > 180^o$, ὁ τόπος κεῖται πρὸς Α τοῦ α΄ μεσημβρινοῦ καὶ ἔχει μῆκος $360^o - 255^o = 105^o$ (§ 21).

***108)* Τόπος Α ἔχει βόρειον γεωγραφικὸν πλάτος 25^o 15΄ 40΄΄, ἕτερος δὲ Β ἔχει νότιον γεωγραφικὸν πλάτος 10^o 7΄ 32΄΄. Πόσας μοίρας κλπ. ὁ Β κεῖται νοτιώτερον τοῦ Α;**

Κεῖται $25^o\ 15'\ 40'' + 10^o\ 7'\ 32'' = 35^o\ 23'\ 12''$.

***109)* Νὰ εὑρεθῇ τῇ βοηθείᾳ τοῦ προηγουμένου πίνακος τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τῶν Ἀθηνῶν ὡς πρὸς τὸν**

μεσημβρινὸν τοῦ Greenwich καὶ ὡς πρὸς τὸ τῶν Παρισίων.

Τὸ γ. μ. τῶν Ἀθηνῶν πρὸς τὸν μεσημβρινὸν τοῦ Greenwich εἶναι

1 ὥρ. 11 π. 36,1 δ.—2 ὥρ. 46 π. 31 δ.= — 1 ὥρ. 34 π. 54,9 δ.

Ὡς πρὸς δὲ τὸν μεσημβρινὸν τῶν Παρισίων εἶναι

1 ὥρ. 20 π. 34 δ.— 2 ὥρ. 46 π. 31 δ.=— 1 ὥρ. 25 π. 34 δ.

Σημείωσις. — Ἀκριβέστεροι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ διδόμενοι εἰς τὸν πίνακα τῆς σελίδος 42.

110) **Νὰ εὑρεθῇ τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τῶν Παρισίων ὡς πρὸς τὸν μεσημβρινὸν τοῦ Greenwich.**

Εἶναι 1 ὥρ. 11 π. 36,1 δ.—1 ὥρ. 20 π. 57 δ.= —0 ὥρ. 9 π. 20,9 δ.

111) **Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἐν Σμύρνῃ ἄνω μεσουρανήσεως ἀστέρος μεσουρανεῖ οὗτος ἄνω ἐν Ἀθήναις;**

Κατὰ τὸν πίνακα τῆς σελ. 42 καὶ τὴν § 21 β′) θὰ μεσουρανήσῃ μετὰ

—1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ.—(—1 ὥρ. 48 π. 38,9 δ.)=0 ὥρ. 13 π. 46,7 δ.

112) **Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος ἑνὸς τόπου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόκλισιν τοῦ ζενὶθ τοῦ τόπου τούτου.**

Ἐὰν φ εἶναι τὸ γ. π. τοῦ τόπου θὰ εἶναι $\varphi = 90^\circ - Z$, ὅπου Z εἶναι ἡ ζενιθία ἀπόστασις τοῦ ὁρατοῦ πόλου ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ, ἤτοι ἡ πολικὴ ἀπόστασις τοῦ ζενὶθ τοῦ τόπου τούτου. Ὥστε ἡ ἀπόκλισις τοῦ ζενὶθ τοῦ ἰδίου τόπου εἶναι $\delta = 90^\circ - Z$, ἤτοι εἶναι $\delta = \varphi$.

113) **Ἀστὴρ ἔχων ἀπόκλισιν 25°12′ διέρχεται διὰ τοῦ ζενὶθ τόπου τινός. Πόσον εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ τόπου τούτου;**

Εἶναι (ἄσκ. 112) 25°12′.

114) **Τί ὥρα (ἀστρικὴ) εἶναι ἐν Ἀθήναις, ὅταν ἐν Σμύρνῃ εἶναι 2 ὧραι; Τί ὥρα εἶναι τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἐν Κωνσταντινουπόλει;**

Κατὰ τὸν τύπον $\mu_\beta - \mu_\alpha = t_\alpha - t_\beta$ εἶναι (πίναξ σελ. 42).

α) —1 ὥρ. 48 π. 38,9 δ.+1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ. = t_α — 2 ὥρ. ἤτοι t_α (ὥρα Ἀθηνῶν)=1 ὥρ. 46 π. 13,3 δ.

β) —1 ὥρ. 48 π. 38,9 δ.+1 ὥρ. 55 π. 52 δ. = t_α —2 ὥρ. ἤτοι t_α (ὥρα Κων/πόλεως)=2 ὥρ. 7 π. 13,1 δ.

115) **Ὅταν ἐν Παρισίοις ἡ ἀστρικὴ ὥρα εἶναι 22 ὧραι πόση εἶναι ἐν Ν. Ὑόρκῃ;**

Εἶναι —0 ὥρ. 9 π. 20,93 δ.—4 ὥρ. 55 π. 56,66 δ.$=t_\alpha$ —22 ὥρ. ἤτοι t_α (ὥρα Ν. Ὑόρκης)=16 ὥρ. 54 π. 42,41 δ.

116) **Τί ὥρα εἶναι ἐν Πετρουπόλει, ὅταν ἐν Ἀθήναις εἶναι 0 ὧραι;**

Εἶναι —1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ. +2 ὥρ. 1 π. 21,3 δ. $= t_\alpha$ — 0 ὧραι ἤτοι t_α (ὥρα ἐν Πετρουπόλει) = 0 ὥρ. 26 π. 29,1 δ.

117) **Ὅταν ἐν Κωνσταντινουπόλει εἶναι 0 ὧραι τί ὥρα εἶναι ἐν Ἀθήναις;**

Εἶναι — 1 ὥρ. 55 π. 52 δ. + 1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ. = tα —0 ὥρ.

ἤτοι tα = — 0 ὥρ. 20 π. 59,8 δ. =

24 ὥρ. — 0 ὥρ. 20 π. 59,8 δ. = 23 ὥρ. 39 π. 0,2 δ.

τῆς προηγουμένης ἡμέρας.

118) **Ἀστὴρ ἔχει ὀρθὴν ἀναφορὰν 5 ὥρ. 20 π. Τί ὥρα εἶναι ἐν Παρισίοις, καθ' ἣν στιγμὴν οὗτος μεσουρανεῖ ἐν Ἀθήναις;**

Ὁ ἀστὴρ οὗτος (§ 5) μεσουρανεῖ ἐν Ἀθήναις τὴν 5 ὥρ. 20 π. Ἑπομένως εἶναι

—1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ + 0 ὥρ. 9 π. 20,93 δ. = tα — 5 ὥρ. 20 π.

ἤτοι tα (ὥρα ἐν Παρισίοις) =3 ὥρ. 54 π. 28,73 δ.

119) **Τί ὥρα εἶναι ἐν Νέᾳ Ὑόρκῃ, ὅταν ἐν Ἀθήναις εἶναι 2 ὧραι;**

Εἶναι —1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ.—4 ὥρ. 55 π. 56,66 δ.= tα —2 ὥρ.

ἤτοι tα (ὥρ. ἐν Ν. Ὑόρκῃ) = — 4 ὥρ. 30 π. 48,86 δ. = = 24 ὥρ. — 4 ὥρ. 30 π. 48,86 δ. = 19 ὥρ. 29 π. 11,14 δ. τῆς προηγουμένης ἡμέρας.

120) **Πόσον εἶναι τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τόπου, ἐν ᾧ ἡ ὥρα εἶναι 1 ὥρ. 13 π. 29 δ., καθ' ἣν στιγμὴν ἐν Ἀθήναις εἶναι 0 ὧραι;**

Εἶναι μ_β —(—1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ.)=0 ὥρ.—1 ὥρ.13 π. 29 δ. ἤτοι μ_β (ζητούμενον γ. μ.) =— 2 ὥρ. 48 π. 21,2 δ. πρὸς μεσημβρινὸν Greenwich καὶ πρὸς μεσημβρινὸν Φέρου — 2 ὥρ. 48 π. 21,2 δ. —1 ὥρ. 11 π. 36,1 δ. = — 3 ὥρ. 59 π. 57,3 δ.

121) **Νὰ εὑρεθῇ τὸ γεωγραφικὸν μῆκος τῆς Ἱερουσαλήμ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ὅταν ἐν Ἀθήναις ἡ ἀστρικὴ ὥρα εἶναι 11 ὥρ. 20 π. ἐν Ἱερουσαλὴμ εἶναι 12 ὥρ. 5 π. 50 δ.**

Εἶναι $μ_β$ +1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ.=11 ὥρ. 20 π.—12 ὥρ. 5 π. 50 δ. ἤτοι $μ_β$ = —2 ὥρ. 20 π. 42,2 πρὸς μεσημβρινὸν Greenwich καὶ πρὸς μεσημβρινὸν Φέρου $μ_β$ = —3 ὥρ. 32 π. 18,3 δ.

122) **Πόση εἶναι κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἡ διαφορὰ τῶν ὡρῶν ἐν Ἀθήναις καὶ Νέᾳ Ὑόρκῃ;**

Εἶναι 4 ὥρ. 55 π. 56,66 δ. +1 ὥρ. 34 π. 52,2 δ. =
= 6 ὥρ. 30 π. 48,86 δ.

123) **Πόσον ἦτο τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῆς Συήνης σύμφωνα μὲ τὴν παρατήρησιν τοῦ Ἐρατοσθένους;**

Ὁ Ἐρατοσθένης παρετήρησεν ὅτι ἐν Συήνῃ κατὰ τὴν μεσημβρίαν τῆς θερινῆς τροπῆς (δηλαδὴ τὴν μεσημβρίαν τῆς 21ης Ἰουνίου ὅπως θὰ ἐλέγομεν σήμερον) τὰ κατακόρυφα ἀντικείμενα δὲν ἔρριπτον σκιάν. Κατὰ τὴν ἡμέραν λοιπὸν ἐκείνην ἡ ἀκτὶς ΟΕ (σχ. 5) ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Ε τοῦ θερινοῦ ἡλιοστασίου (θερινὴ τροπὴ) ἦτο ἡ κατακόρυφος τῆς Συήνης. Ἡ γωνία λοιπὸν ΕΟΙ εἶναι ἴση μὲ τὴν λόξωσιν τῆς ἐκλειπτικῆς, ἴση κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 21, α΄) μὲ τὸ γ. π. τῆς Συήνης.

124) **Πόσον ἦτο κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ Ἐρατοσθένους τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῆς Ἀλεξανδρείας;**

Ἡ Ἀλεξάνδρεια κεῖται βορειότερον τῆς Συήνης καὶ κατὰ τὸν Ἐρατοσθένην 7° 12΄. Ὥστε τὸ γ. π. τῆς Ἀλεξανδρείας ἦτο λόξωσις τῆς ἐκλειπτικῆς +7° 12΄.

125) **Ἡ γεωγραφικὴ λεύγα ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{25}$ τῆς μοίρας μεσημβρινοῦ τόξου τῆς Γῆς. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα ἔχει αὕτη.**

Ἔχει 111111,11 : 25 = 4444,44 μ.

126) **Ἡ ναυτικὴ λεύγα ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς μοίρας μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα ἔχει αὕτη.**

Ἔχει 111111,11 : 20 = 5555,55 μ.

127) **Ἀτμόπλοιον ἀναχωρῆσαν ἀπὸ σημείου τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς βορρᾶν κατευθυνόμενον ἔχει ταχύτητα 12 ναυτικῶν μιλίων καθ᾽ ὥραν. Εἰς πόσον γεωγραφικὸν πλάτος θὰ εὑρίσκεται μετὰ 24 ὥρας;**

Ἓν ναυτικὸν μίλιον εἶναι τὸ μῆκος μεσημβρινοῦ 1΄ καὶ 12×24=288 ναυτικὰ μίλια (ὅσα διήνυσε τὸ ἀτμόπλοιον εἰς 24 ὥρας) εἶναι τὸ μῆκος μεσημβρινοῦ τόξου $288' = 4^\circ\ 48'$. Ὥστε τὸ ἀτμόπλοιον εὑρίσκεται εἰς γ. π. $4^\circ\ 48'$ Β.

128) **Ἀτμόπλοιον ἀναχωρῆσαν ἀπὸ γεωγραφικὸν πλάτος 38° Β κατευθύνεται κατ' εὐθεῖαν πρὸς Νότον καὶ μετὰ πλοῦν 15 ὡρῶν ἔφθασεν εἰς γεωγραφικὸν πλάτος 35° 30′ Β. Μὲ πόσην ταχύτητα ἔπλεεν ;**

Εἰς 15 ὥρας διήνυσε τὸ ἀτμόπλοιον τόξον μεσημβρινοῦ $38^\circ - 35^\circ\ 30' = 2^\circ\ 30' = 150'$. Ἤτοι εἰς 15 ὥρας διήνυσε 150 ναυτικὰ μίλια καὶ εἰς 1 ὥραν διήνυσε $150 : 15 = 10$ ναυτικὰ μίλια.

129) **Τὸ μεταξὺ δύο τόπων τοῦ ἰσημερινοῦ τόξον αὐτοῦ ἔχει μῆκος 50 γεωγραφικὰς λεύγας. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν αὐτῶν ;**

Μία γεωγραφικὴ λεύγα $= \frac{1}{25}$ τῆς μοίρας καὶ 50 γεωγραφικαὶ λεῦγαι $= \frac{1}{25} \times 50 = 2$ μοῖραι. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν αὐτῶν εἶναι 2°.

130) **Μὲ πόσην ταχύτητα κατὰ 1 δ. στρέφεται ἕκαστον σημεῖον τοῦ γηίνου ἰσημερινοῦ ;**

Στρέφεται μὲ ταχύτητα

$$40\,000\,000 : 86\,400 = 462{,}97 \text{ μ. ἢ } 463 \text{ μ.}$$

131) **Μὲ πόσην ταχύτητα στρέφεται σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, τὸ ὁποῖον ἔχει γεωγραφικὸν πλάτος 40°;**

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μικροῦ κύκλου πλάτους 40° εἶναι $40\,000\,000 \,.\, \text{συν}\, 40^\circ = 40\,000\,000 \,.\, 0{,}766 = 30\,640\,000$ μ. Ὥστε ἡ ζητουμένη ταχύτης εἶναι $30\,640\,000 : 86\,400 = 355$ μ. (περίπου).

132) **Σημεῖόν τι τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς στρέφεται μὲ ταχύτητα 234 μέτρων κατὰ 1 δ. Πόσον εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος αὐτοῦ ;**

Ἡ περιφέρεια τοῦ μικροῦ κύκλου ὃν γράφει τὸ σημεῖον ἔχει μῆκος $234 \times 86\,400$ μέτρα. Ἑπομένως εἶναι (ἄσκησις 131)

$$\text{συνφ} = \frac{234 \times 86\,400}{40\,000\,000} = 0{,}50544 = 0{,}5 = \frac{1}{2} \text{ (περίπου) ἤτοι}$$

εἶναι $\varphi = 60^\circ$.

133) **Νὰ εὕρητε τὸ μέγιστον καὶ ἔπειτα τὸ ἐλάχιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον μεσουρανεῖ ὁ Ἥλιος εἰς τὸν αὐτὸν τόπον τῆς Γῆς καὶ νὰ ὁρίσητε πότε μεσουρανεῖ εἰς τὸ**

μέγιστον καὶ πότε εἰς τὸ ἐλάχιστον ὕψος. Νὰ ἐφαρμόσητε δὲ τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα διὰ τὰς Ἀθήνας.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (σελ. 44).

$$\upsilon = (90^\circ - \varphi) + \delta \text{ ἐν τῷ βορείῳ ἡμισφαιρίῳ}$$

$$\upsilon = (90^\circ - \varphi) - \delta \text{ ἐν τῷ νοτίῳ ἡμισφαιρίῳ}$$

εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν τόπον (ὁπότε φ σταθερὸν) τὸ ὕψος υ ἐν τῷ βορείῳ ἡμισφαιρίῳ γίνεται μέγιστον ὅταν $\delta = 23^\circ\ 27''$ (μέγιστον) ἤτοι τὴν 21 Ἰουνίου καὶ ἐλάχιστον ὅταν $\delta = -23^\circ\ 27'$ (ἐλάχιστον) ἤτοι τὴν 22αν Δεκεμβρίου. Ἐν τῷ νοτίῳ δὲ ἡμισφαιρίῳ τὸ μέγιστον ὕψος παρατηρεῖται τὴν 22αν Δεκεμβρίου (ὅταν $\delta = -23^\circ\ 27'$) καὶ τὸ ἐλάχιστον τὴν 21ην Ἰουνίου (ὅταν $\delta = 23^\circ\ 27'$).

Ἑπομένως διὰ τὰς Ἀθήνας τὰ ἄκρα ὕψη εἶναι:

$$\upsilon = 90^\circ - 37^\circ\ 58'\ 15,''5 + 23^\circ\ 27' = 75^\circ\ 28'\ 44,''5 \text{ (21 Ἰουν.)}$$

$$\upsilon = 90^\circ - 37^\circ\ 58'\ 15,''5 - 23^\circ\ 27' = 28^\circ\ 34'\ 44,''5 \text{ (22 Δεκ.)}$$

***134)* Ὅταν ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι $\delta > 0$ νὰ εὕρητε εἰς πόσην ζενιθίαν ἀπόστασιν μεσουρανεῖ οὗτος κάτω εἰς τόπον, ὁ ὁποῖος ἔχει βόρειον γεωγραφικὸν πλάτος φ. Νὰ ἐφαρμόσητε τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διὰ τὰς Ἀθήνας, ὅταν $\delta = 15^\circ$.**

Ὅταν ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ ἄνω εἰς ὕψος $\upsilon = 90^\circ - \varphi + \delta$ μεσουρανεῖ κάτω τὴν ἰδίαν ἡμέραν εἰς ὕψος $\upsilon = -90^\circ + \varphi + \delta$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 2) $Z = 90^\circ - \upsilon$, ἕπεται ὅτι $Z = 90^\circ + 90^\circ - \varphi - \delta = 180^\circ - (\varphi + \delta)$. Ὥστε διὰ τὰς Ἀθήνας, ὅταν $\delta = 15^\circ$, θὰ ἔχομεν $Z = 180^\circ - (37^\circ\ 58'\ 15'',5 + 15^\circ) = 127^\circ\ 1'\ 44'',5$.

***135)* Ὅταν ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι 20°, οὗτος μεσουρανεῖ ἄνω εἰς ὕψος $23^\circ\ 27'$ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἑνὸς τόπου. Νὰ εὕρητε τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ τόπου τούτου.**

Εἶναι (σελ. 44) $\varphi = 90^\circ - \upsilon + \delta = 90^\circ - 23^\circ\ 27' + 20^\circ = 86^\circ\ 33'$.

***136)* Νὰ ὁρίσητε τὸ σημεῖον τῆς οὐρανίου σφαίρας, εἰς τὸ ὁποῖον μεσουρανεῖ ὁ Ἥλιος κατὰ τὰς ἰσημερίας εἴς τινα τόπον τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς.**

Τόπος τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς ἔχει γ.π. 0° ἤτοι εἶναι $\varphi = 0^\circ$. Ὁ Ἥλιος κατὰ τὰς ἰσημερίας εὑρίσκεται εἰς τὸν ἰσημερινόν. Ἑπομένως ἔχει τότε ἀπόκλισιν 0° ἤτοι εἶναι $\delta = 0^\circ$. Τὸ ὕψος λοιπὸν εἰς ὃ μεσουρανεῖ τότε ὁ Ἥλιος εἶναι $\upsilon = 90^\circ - \varphi + \delta =$

$= 90^{\circ} - 0 + 0 = 90^{\circ}$. Ἤτοι ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ κατὰ τὰς ἰσημερίας εἰς τὸ ζενὶθ τοῦ θεωρουμένου τόπου.

***137)* Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς τῶν κατακορύφων ἀντικειμένων τοῦ ἰσημερινοῦ κατὰ τὰς ἰσημερίας.**

Εἰς τὸν ἰσημερινὸν κατὰ τὰς ἰσημερίας, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ὁ Ἥλιος ρίπτει τὰς ἀκτῖνας του κατακορύφως. Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι μηδέν.

***138)* Νὰ ὁρίσητε τὴν κατεύθυνσιν, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σκιὰ τῶν κατακορύφων ἀντικειμένων τοῦ ἰσημερινοῦ κατὰ τὴν μεσημβρίαν ἑκάστης ἡμέρας τοῦ ἔτους.**

Εἰς τόπον τοῦ ἰσημερινοῦ ὁ Ἥλιος γράφει ἑκάστην ἡμέραν ἕνα μικρὸν κύκλον κάθετον ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα αὐτοῦ, τέμνει δὲ τὸν ὁρίζοντα κατὰ χορδὴν παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων τῆς ἀνατολῆς καὶ τῆς δύσεως. Ἡ χορδὴ δὲ αὕτη κεῖται πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ βορρᾶ κατὰ τὸ ἔαρ καὶ τὸ θέρος, ἤτοι τότε ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ πρὸς βορρᾶν τοῦ ζενὶθ καὶ ἡ σκιὰ τῶν κατακορύφων ἀντικειμένων διευθύνεται πρὸς νότον. Κατὰ δὲ τὸ φθινόπωρον καὶ τὸν χειμῶνα ἡ ὡς ἄνω χορδὴ κεῖται πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ νότου, ἤτοι τότε ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ πρὸς νότον τοῦ ζενὶθ καὶ ἡ σκιὰ τῶν κατακορύφων ἀντικειμένων διευθύνεται πρὸς βορρᾶν. Τέλος κατὰ τὰς ἰσημερίας ἡ σκιὰ τούτων εἶναι μηδὲν (ἄσκ. 137).

***139)* Νὰ ὀνομάσητε τὴν ζώνην εἰς τὴν ὁποίαν κεῖνται αἱ Ἀθῆναι, τὸ Βερολῖνον, ἡ Νέα Ὑόρκη.**

Καὶ αἱ τρεῖς ὡς ἄνω πόλεις ἔχουν βόρειον γ. π. καὶ αἱ μὲν Ἀθῆναι $37^{\circ}\ 58'\ 15,''5$, τὸ Βερολῖνον $52^{\circ}\ 31'\ 30,''7$ καὶ ἡ Νέα Ὑόρκη $40^{\circ}\ 43'\ 48,''5$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ πλάτη αὐτὰ εἶναι μεγαλύτερα τῶν $23^{\circ}\ 27'$ καὶ μικρότερα τῶν $66^{\circ}\ 33'$, αἱ ἀνωτέρω τρεῖς πόλεις κεῖνται εἰς τὴν βόρειον εὔκρατον ζώνην.

***140)* Νὰ ὀνομάσητε τὴν ζώνην, εἰς τὴν ὁποίαν κεῖται ἑκάτερος τῶν πόλων τῆς Γῆς.**

Ὁ βόρειος πόλος κεῖται εἰς τὴν βόρειον κατεψυγμένην ζώνην, ὁ δὲ νότιος πόλος, εἰς τὴν νότιον κατεψυγμένην ζώνην.

***141)* Νὰ ὀνομάσητε τὴν ζώνην, εἰς τὴν ὁποίαν κεῖται τὸ βορειότατον ἄκρον τῆς Σκανδιναυϊκῆς χερσονήσου.**

Ἡ Σκανδιναυικὴ χερσόνησος κεῖται μεταξὺ $55^{\circ}\ 20'$ καὶ $71^{\circ}\ 11'$ Β. πλάτους. Τὸ βορειότατον λοιπὸν ἄκρον αὐτῆς κεῖται εἰς τὴν βόρειον κατεψυγμένην ζώνην.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

Η ΣΕΛΗΝΗ

25. Ἰδία κίνησις τῆς Σελήνης. — Καὶ ἡ Σελήνη, ὡς ὁ Ἥλιος, ἔχει ἰδίαν κίνησιν διὰ μέσου τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς μὲ ταχύτητα 13 φορὰς μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος τῆς ὁμοίας κινήσεως τοῦ Ἡλίου. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην τὸ κέντρον τῆς Σελήνης φαίνεται γράφον ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας μέγιστον κύκλον, τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁποίου τέμνει τὸ μὲν ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ ὑπὸ γωνίαν $28^\circ\ 36'$ περίπου, τὸ δὲ ἐπίπεδον τῆς ἐκλειπτικῆς ὑπὸ γωνίαν $5^\circ\ 9'$ περίπου.

26. Τροχιὰ τῆς Σελήνης. — Ἡ φαινομένη διάμετρος τῆς Σελήνης κυμαίνεται μεταξὺ μιᾶς μεγίστης καὶ μιᾶς ἐλαχίστης τιμῆς. Συνάγομεν ὅθεν (§ 9) ὅτι: **Τὸ κέντρον τῆς Σελήνης γράφει περὶ τὴν Γῆν ἐκ Δ πρὸς Α, κατὰ τὸν νόμον τῶν ἐμβαδῶν, ἔλλειψιν μίαν τῶν ἑστιῶν τῆς ὁποίας κατέχει ἡ Γῆ.**

Ἡ κίνησις τῆς Σελήνης περὶ τὴν Γῆν εἶναι πραγματική. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη συνοδεύει τὴν Γῆν εἰς τὴν ἐτησίαν κίνησίν της περὶ τὸν Ἥλιον, λέγεται **δορυφόρος** τῆς Γῆς.

27. Παράλλαξις τῆς Σελήνης. — Ἡ ὁριζοντία ἰσημερινὴ παράλλαξις τῆς Σελήνης μεταβάλλεται μετὰ τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τῆς Γῆς καὶ περιέχεται μεταξὺ $61'\ 29''$ (εἰς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν) καὶ $53'\ 54''$ (εἰς τὴν μεγίστην). Ὡς μέσην δὲ τιμὴν αὐτῆς δέχονται σήμερον τὴν τῶν $57'\ 2'',325$.

Ἡ μεγίστη ἀπόστασις τῆς Σελήνης ἀπὸ τῆς Γῆς εἶναι 64 γήιναι ἀκτῖνες, ἡ ἐλαχίστη 56 τοιαῦται ἀκτῖνες καὶ ἡ μέση εἶναι 60,27 ἢ ἀκριβέστερον 60,2745 γήιναι ἀκτῖνες ἢ 384000 χιλιόμετρα εἰς στρογγυλὸν ἀριθμόν. Εἰς ταύτην δὲ ἡ φαινομένη διάμετρος τῆς Σελήνης εἶναι $31'\ 8''$. Τέλος ἡ ἀκτὶς τῆς Σελήνης εἶναι τὰ 0,27296 τῆς γηίνης ἰσημερινῆς ἀκτῖνος ἢ 1741 χιλιόμετρα.

28. Ἀποχή. Συζυγίαι. Τετραγωνισμοί. — **Ἀποχὴ** τῆς Σελήνης λέγεται ἡ γωνιώδης ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ κέντρου τοῦ Ἡλίου.

Ἡ Σελήνη ὅταν ἔχῃ ἀποχὴν 0° εὑρίσκεται εἰς **σύνοδον** ἢ εἰς **συζυγίαν κατωτέραν,** ὅταν δὲ ἔχῃ ἀποχὴν 180° εὑρίσκεται εἰς **ἀντίθεσιν** ἢ εἰς **συζυγίαν ἀνωτέραν.** Τέλος ὅταν ἡ Σελήνη ἔχει ἀποχὴν 90° εὑρίσκεται εἰς **τετραγωνισμόν.** Ὑπάρχουν δὲ **δύο** τετραγωνισμοί.

Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συνόδου ἡ Σελήνη εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς Γῆς καὶ τοῦ Ἡλίου. Ἀνατέλλει δὲ τότε καὶ δύει ἡ Σελήνη εἰς ὅλους τοὺς τόπους συγχρόνως μετὰ τοῦ Ἡλίου. Ὅταν ἡ Σελήνη εὑρίσκεται εἰς ἀντίθεσιν, ἡ Γῆ εὑρίσκεται μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ Ἡλίου. Ἀνατέλλει δὲ τότε ἡ Σελήνη, ὅταν δύῃ ὁ Ἥλιος καὶ δύει, ὅταν ὁ Ἥλιος ἀνατέλλῃ.

Κατὰ τὸν τετραγωνισμόν, ὅστις συμβαίνει μετὰ τὴν σύνοδον, ὅταν ὁ Ἥλιος δύῃ, ἡ Σελήνη μεσουρανεῖ ἄνω, ἐνῷ κατὰ τὸν τετραγωνισμὸν μετὰ τὴν ἀντίθεσιν, ὅταν ἡ Σελήνη μεσουρανῇ ἄνω, ὁ Ἥλιος ἀνατέλλει.

29. Φάσεις τῆς Σελήνης.—Ὅταν ἡ Σ. εὑρίσκεται εἰς σύνοδον, εἶναι ἀόρατος. Ἤτοι τότε ἔχομεν **νέαν Σελήνην** ἢ **νουμηνίαν.** Μετὰ 7 ἡμέρας καὶ 9 ὥρας ἀπὸ τῆς νέας Σελήνης αὕτη εὑρίσκεται εἰς τὸν πρῶτον τετραγωνισμόν. Τότε ἔχει αὕτη τὸ σχῆμα φωτεινοῦ ἡμικυκλίου στρέφοντος τὸ κυρτὸν πρὸς τὸν Ἥλιον, ἤτοι πρὸς δυσμάς. Ἡ φάσις αὕτη λέγεται **πρῶτον τέταρτον.** Μετὰ 15 ἡμέρας ἀπὸ τῆς νουμηνίας ἔχομεν τὴν **Πανσέληνον.** Τότε αὕτη ἔχει τὸ σχῆμα κυκλικοῦ δίσκου φωτεινοῦ ἐξ ὁλοκλήρου. Μετὰ 22 περίπου ἡμέρας ἀπὸ τῆς νέας Σ. ἔχομεν τὸ **τελευταῖον τέταρτον.** Τότε ἡ Σ. φαίνεται ὑπὸ μορφὴν φωτεινοῦ ἡμικυκλίου στρέφοντος τὸ κυρτὸν πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ἡλίου, ἤτοι πρὸς ἀνατολάς. Τέλος μετὰ 29 ἡμέρας 13 ὥρας περίπου ἀπὸ τῆς νέας Σ. ἔχομεν τὴν ἑπομένην νέαν Σελήνην. Αἱ ἀνωτέρω τέσσαρες φάσεις εἶναι αἱ **κύριαι** φάσεις τῆς Σελήνης. Αἱ δὲ **δευτερεύουσαι** μεταξὺ τῶν κυρίων φάσεων, ἀρχόμεναι ἀπὸ τῆς νέας Σελήνης εἶναι ἡ **μηνοειδὴς αὔξουσα, ἀμφίκυρτος αὔξουσα, ἀμφίκυρτος φθίνουσα** καὶ **μηνοειδὴς φθίνουσα.**

30. Ἀστρικὸς καὶ συνοδικὸς μήν.— **Ἀστρικὸς μὴν** ἢ **ἀστρικὴ περιφορὰ** τῆς Σελήνης, λέγεται ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται αὕτη, ἵνα ἐπανέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ οὐρανοῦ. 1 ἀστρ. μὴν=27 ἡμ. 8 ὧραι περίπου.

Συνοδικὸς μὴν ἢ **συνοδικὴ περιφορὰ** τῆς Σελήνης λέγεται ὁ χρόνος ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς μιᾶς νέας Σελήνης μέχρι τῆς ἑπομένης νέας Σελήνης.

1 συνοδικὸς μὴν=29 ἡμ. 13 ὧραι περίπου.

31. Περιστροφὴ τῆς Σελήνης.—Ἡ Σελήνη στρέφει πάντοτε τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον πρὸς τὴν Γῆν. Συμβαίνει δὲ τοῦτο διότι ἡ Σελήνη στρέφεται περὶ ἄξονα κατὰ τὴν ὀρθὴν φορὰν μὲ κίνησιν ὁμαλὴν καὶ εἰς χρόνον ἴσον μὲ τὴν ἀστρικὴν περιφοράν της.

32. **Ἐκλείψεις.**—Ἔκλειψις Σελήνης συμβαίνει, ὅταν ἡ Γῆ εὑρισκομένη μεταξὺ τῆς Σελήνης καὶ τοῦ Ἡλίου ἐμποδίζει τὰς ἡλιακὰς ἀκτίνας νὰ φθάσουν μέχρι τῆς Σελήνης.

Ἔκλειψις δὲ Ἡλίου συμβαίνει, ὅταν ἡ Σελήνη εὑρισκομένη μεταξὺ Γῆς καὶ Ἡλίου, καλύπτει ἀπὸ τῶν βλεμμάτων μας ὁλόκληρον τὸν Ἡλιακὸν δίσκον ἢ μέρος αὐτοῦ.

Ἐκλείψεις Σελήνης εἶναι δυνατὸν νὰ συμβοῦν μόνον κατὰ τὰς ἀντιθέσεις καὶ ἐκλείψεις Ἡλίου μόνον κατὰ τὰς συνόδους.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 138 - 150.

***142)* Πόσον χρόνον χρειάζεται τὸ φῶς, διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὴν Σελήνην εἰς τὴν Γῆν;**

Χρειάζεται (§ 27) 384000 : 300000 = 1,28 δ.

***143)* Ἂν ἦτο δυνατὸν ἓν ἀεροπλάνον νὰ ἵπταται συνεχῶς μὲ ταχύτητα 500 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, πόσον χρόνον θὰ ἐχρειάζετο νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Σελήνην;**

Θὰ ἐχρειάζετο 384000 : 500 = 768 ὥρας = 32 ἡμερονύκτια.

***144)* Νὰ συγκρίνητε τὴν ἀκτῖνα τοῦ Ἡλίου πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς Σελήνης ἀπὸ τῆς Γῆς.**

Ἀκτὶς Ἡλίου = 109 ρ (ρ = γηίνη ἰσημερινὴ ἀκτίς)

Ἀπόστασις Γῆς - Σελήνης = 60,2745 ρ.

Ἀκτὶς Ἡλίου : ἀποστάσεως Γῆς - Σελήνης $= \frac{109}{60,2745} = 1,8$ (περίπου).

***145)* Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς Σελήνης συναρτήσει τοῦ ὄγκου τῆς Γῆς.**

Ἐὰν P εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς Σελήνης καὶ ρ ἡ τῆς Γῆς γνωρίζομεν (§ 27) ὅτι P = 0, 27 ρ. Ἀλλ' ὅμως

$$\text{ὄγκος Σελήνης} = \frac{4}{3}\pi P^3 = \frac{4}{3}\pi\rho^3 \cdot 0,27^3 \text{ καὶ}$$

$$\text{ὄγκος Γῆς} = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Ἤτοι ὁ ὄγκος τῆς Σελήνης εἶναι τὰ $0,27^3$ τοῦ ὄγκου τῆς Γῆς, ἤτοι τὰ 0,019583 τοῦ ὄγκου τῆς Γῆς.

146) **Οἱ ἀστρονόμοι εὗρον ὅτι ἡ μᾶζα τῆς Σελήνης εἶναι τὸ $\frac{1}{81}$ τῆς μάζης τῆς Γῆς. Νὰ εὕρητε τὴν πυκνότητα τῆς Σελήνης συναρτήσει τῆς πυκνότητος τῆς Γῆς καὶ ἔπειτα ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ (4° K).**

Κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Φυσικῆς εἶναι

$$\text{Πυκνότης τῆς Σελήνης} = \frac{\text{Μᾶζα τῆς Σελήνης}}{\text{Ὄγκος τῆς Σελήνης}}$$

ἢ ἐπειδὴ μᾶζα τῆς Σελήνης $= \frac{1}{81}$ τῆς μάζης τῆς Γῆς

καὶ ὄγκος τῆς Σελήνης $= 0,019583$ τοῦ ὄγκου τῆς Γῆς

ἕπεται ὅτι πυκνότης τῆς Σελήνης $= \frac{1}{81 \times 0,019583} = 0,63$ τῆς πυκνότητος τῆς Γῆς. Ἤδη γνωρίζομεν ὅτι ἡ μέση πυκνότης τῆς Γῆς ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ εἶναι 5,5. Ἑπομένως ἡ μέση πυκνότης τῆς Σελήνης ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ εἶναι $5,5 \times 0,62 = 3,410$.

147) **Μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλεται ἡ ἀπόκλισις τοῦ κέντρου τῆς Σελήνης;**

Μεταβάλλεται (§ 25) μεταξὺ $28^\circ 36'$ καὶ $-28^\circ 36'$.

148) **Μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλεται ἡ μεσημβρινὴ ζενιθία ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς Σελήνης ἐν Ἀθήναις; (γ. πλ. $37^\circ 58' 20''$ Β).**

Ἐκ τῆς σχέσεως (§ 6) $Z_1 = 90_0 - \varphi - P$, ὅπου φ εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ τόπου καὶ P $(=90_0 - \delta)$ ἡ πολικὴ ἀπόστασις ἀστέρος, εὑρίσκομεν:

$$Z_1 = 90^\circ - \varphi - 90^\circ + \delta \quad \text{ἤτοι} \quad Z_1 = \delta - \varphi$$

Ἑπομένως διὰ τὰς Ἀθήνας εὑρίσκομεν τὴν μεγίστην

$$Z_1 = 37^\circ 58' 20' + 28^\circ 36' = 66^\circ 34' 20''$$

καὶ τὴν ἐλαχίστην $Z_1 = 37^\circ 58' 20'' - 28^\circ 36' = 9^\circ 22' 20''$.

149) **Εἰς τίνα βόρεια πλάτη ἡ πανσέληνος δύναται νὰ μεσουρανῇ εἰς τὸ ζενίθ;**

Ὅταν ἡ πανσέληνος μεσουρανῇ ἄνω εἰς τὸ ζενίθ, ἐπειδὴ εὑρίσκεται εἰς ἀντίθεσιν μετὰ τοῦ Ἡλίου, οὗτος θὰ μεσουρανῇ κάτω εἰς τὸ ναδίρ, δηλαδὴ εἰς $Z = 180^\circ$. Ἀλλ' ἐπειδὴ (ἄσκ. 134) τότε εἶναι καὶ $Z = 180^\circ - (\varphi + \delta)$ εὑρίσκομεν $180^\circ = 180^\circ - (\varphi + \delta)$,

$\varphi + \delta = 0$, ἤτοι $\varphi = -\delta$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πλάτος φ εἶναι βόρειον πρέπει νὰ εἶναι $\delta < 0$. Ὁ Ἥλιος λοιπὸν δύναται νὰ μεσουρανῇ κάτω εἰς τὸ ναδὶρ εἰς τόπους μὲ βόρειον πλάτος ἀπὸ 0° ἕως $23^\circ 27'$ καὶ ὅταν ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι ἀρνητική, ὁπότε ἐὰν εἶναι πανσέληνος, θὰ μεσουρανῇ αὕτη εἰς τὸ ζενίθ.

***150)* Ἐὰν κατὰ τὴν ἐαρινὴν ἰσημερίαν συμβῇ νὰ εἶναι πανσέληνος, πόση τότε θὰ εἶναι ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ κέντρου τῆς Σελήνης;**

Τότε ὁ Ἥλιος ἔχει $\alpha = 0^\circ$ ὡρῶν καὶ ἡ Σελήνη ὡς ἔχουσα ἀποχὴν 180°, θὰ ἔχῃ $\alpha = 12$ ὡρῶν.

***151)* Ἐὰν κατὰ τὴν θερινὴν τροπὴν εἶναι νέα Σελήνη πόση εἶναι τότε ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ τοῦ κέντρου τῆς Σελήνης;**

Τότε ὁ Ἥλιος ἔχει $\alpha = 6$ ὡρῶν καὶ ἡ Σελήνη ὡς ἔχουσα ἀποχὴν 0° θὰ ἔχῃ καὶ αὕτη $\alpha = 6$ ὡρῶν.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΚΟΜΗΤΑΙ ΚΑΙ ΜΕΤΕΩΡΑ

33. Κομῆται. — Εἰς ἕκαστον κομήτην διακρίνομεν ἐν γένει τρία μέρη 1) τὸν **πυρῆνα,** ὅστις ἔχει τὴν μορφὴν συνήθους ἀστέρος 2) **τὴν κόμην,** ἤτοι τὴν νεφέλην ἡ ὁποία περιβάλλει τὸν πυρῆνα καὶ 3) τὴν **οὐράν,** ἤτοι τὴν προέκτασιν τῆς κόμης. Ὁ πυρὴν καὶ ἡ κόμη ἀποτελοῦν ὁμοῦ τὴν **κεφαλὴν** τοῦ κομήτου.

Αἱ τροχιαὶ τῶν κομητῶν εἶναι ἢ ἐλλείψεις πολὺ ἐπιμήκεις μίαν τῶν ἑστιῶν τῶν ὁποίων κατέχει ὁ Ἥλιος ἢ παραβολαὶ τὴν ἑστίαν τῶν ὁποίων κατέχει ὁ Ἥλιος.

Οἱ κομῆται τῶν ὁποίων αἱ τροχιαὶ εἶναι ἐλλείψεις λέγονται **περιοδικοί.** Τοιοῦτοι κομῆται εἶναι σήμερον γνωστοὶ περὶ τοὺς 70. Ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων κομητῶν ἀναφέρομεν τὸν κομήτην τοῦ Halley, τοῦ ὁποίου μία πλήρης περιφορὰ περὶ τὸν Ἥλιον διαρκεῖ 75 ἔτη, τοῦ Enke, τοῦ Biéla..

34. Μετέωρα. — Τοιαῦτα εἶναι οἱ **διάττοντες ἀστέρες,** ἤτοι τὰ αἰφνιδίως ἐμφανιζόμενα καὶ ταχύτατα ἐξαφανιζόμενα εἰς τὸν οὐρανὸν φωτεινὰ σώματα καὶ αἱ **βολίδες,** ἤτοι τὰ αἰφνιδίως ἐμφανιζόμενα εἰς τὸν οὐρανὸν φωτεινὰ σώματα καὶ συνοδευόμενα ὑπὸ φωτεινῆς οὐρᾶς καὶ τὰ ὁποῖα συνήθως ἐκρήγνυνται. Τὰ θραύσματα τούτων τὰ ὁποῖα πίπτουν εἰς τὴν Γῆν ὀνομάζονται **ἀερόλιθοι** ἢ **οὐρανόλιθοι**.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 164.

152) **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς τροχιᾶς τοῦ κομήτου τοῦ Halley.**

Ἐὰν α καὶ α′ εἶναι οἱ μεγάλοι ἡμιάξονες τῶν τροχιῶν τῆς Γῆς καὶ τοῦ κομήτου τοῦ Halley ἀντιστοίχως, ἐκ τοῦ τρίτου νόμου τοῦ Κεπλέρου (§ 16) εὑρίσκομεν $\alpha' = \alpha \sqrt[3]{\frac{T'^2}{T^2}}$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν α=1 καὶ T=1 ἀστρικὸν ἔτος καὶ T′=75 ἀστρικὰ ἔτη (§ 33) εὑρίσκομεν $\alpha' = \sqrt[3]{75^2}$ καὶ $2\alpha' = 2\sqrt[3]{75^2} = 35,57$ περίπου. Ὥστε τὸ μῆκος τοῦ μεγάλου ἄξονος 2α′ τῆς τροχιᾶς τοῦ κομήτου τοῦ Halley ἰσοῦται μὲ 35, 57. α.

153) **Ἡ περιήλιος ἀπόστασις τοῦ κομήτου τοῦ Halley εἶναι τὰ 0,587 τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς γηίνης τροχιᾶς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀφήλιος ἀπόστασις τοῦ κομήτου τούτου.**

Ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν ὅτι

2α′=περιήλιος ἀπόστασις + ἀφήλιος ἀπόστασις τοῦ κομήτου τοῦ Halley ἤτοι

35,57α — 0,587 . 2α = ἀφήλιος ἀπόστασις ἢ

17,785 . 2α— 0,587 . 2α = » »

(17,785 — 0,587). 2α = » » ἢ τέλος ἀφήλιος ἀπόστασις = 17,198 . 2α.

154) **Ἡ ἀφήλιος ἀπόστασις τοῦ κομήτου τοῦ Enke εἶναι 4,0935, ἡ δὲ περιήλιος 0,3383 τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος τῆς γηίνης τροχιᾶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς τροχιᾶς τοῦ κομήτου τούτου.**

Τὸ ζητούμενον μῆκος ἰσοῦται μὲ

(4,0935 + 0,3383) . α = 4,4318 . α, ὅπου α εἶναι ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς γηίνης τροχιᾶς.

’Ασκήσεις

Σελίδες 174 - 183.

155) **῾Ο Σείριος ἔχει α = 6 ὥρ. 11 π. 56 δ. ὁ δὲ Λαμπαδίας ἔχει α = 4 ὥρ. 31 π. 44 δ. Κατὰ ποίαν ὥραν μεσουρανεῖ ἑκάτερος τούτων ἐν ’Αθήναις;**

Μεσουρανοῦν κατὰ τὴν ὥραν, ἥτις ἐκφράζεται μὲ τὰς ἄνω διδομένας ὀρθὰς ἀναφοράς των, διότι t = α (§ 5, τύπος 3).

156) **῾Ο Πολυδεύκης ἔχει α = 7 ὥρ. 40 π. 51 δ. καὶ ἀνατέλλει εἴς τινα τόπον τὴν 23ην ὥραν. Εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ νυκτερινὸν τόξον αὐτοῦ;**

῾Ο Πολυδεύκης μεσουρανεῖ ἄνω τὴν 7 ὥρ. 40 π. 51 δ. ῞Ωστε ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως αὐτοῦ παρέρχονται (24 ὥρ.— 23 ὥρ.) + 7 ὥρ. 40 π. 51 δ. = 8 ὥρ. 40 π. 51 δ. ῾Επομένως τὸ μὲν ἡμερήσιον τόξον αὐτοῦ τὸ διανύει εἰς

(8 ὥρ. 40 π. 51) × 2 = 17 ὥρ. 21 π. 42 δ.

τὸ δὲ νυκτερικὸν τόξον του τὸ διανύει εἰς

24 ὥρ.— 17 ὥρ. 21 π. 42 δ. = 6 ὥρ. 38 π. 18 δ.

157) **῾Ο Βασιλίσκος ἔχει α = 10 ὥρ. 4 π. 29 δ., ὁ δὲ Προκύων ἔχει α = 7 ὥρ. 35 π. 29 δ. Κατὰ ποίαν ὥραν μεσουρανεῖ κάτω ἐν ’Αθήναις ἑκάτερος τούτων;**

Μεσουρανεῖ κάτω ὁ μὲν Βασιλίσκος τὴν
10 ὥρ. 4 π. 29 δ. + 12 ὥρ. = 22 ὥρ. 4 π. 29 δ. ὁ δὲ Προκύων τὴν
7 ὥρ. 35 π. 29 δ. + 12 ὥρ. = 19 ὥρ. 35 π. 29 δ., διότι ἀστήρ τις μεσουρανεῖ κάτω 12 ὥρας μετὰ τὴν ἄνω μεσουράνησιν αὐτοῦ (ἄσκ. 155).

158) **῾Η Αἶξ ἔχει α = 5 ὥρ. 11 π. 18 δ. καὶ δ = 45° 55′ 32″. Κατὰ ποίαν ὥραν μεσουρανεῖ ἄνω ἐν ’Αθήναις καὶ πόση εἶναι ἡ P αὐτοῦ;**

Μεσουρανεῖ ἄνω (ἄσκ. 155) τὴν 5 ὥρ. 11 π. 18 δ. καὶ ἔχει $P = 90° - δ = 90° - 45° 55' 32'' = 44° 4' 28''$.

159) **῾Ο Rigel ἔχει δ = — 8° 17′ 5″. Πόση εἶναι ἡ P αὐτοῦ;**

Εἶναι $P = 90° - (-8° 17' 5'') = 98° 17' 5''$.

160) **῾Ο Πολυδεύκης ἀνατέλλει εἴς τινα τόπον, καθ’ ἣν στιγμὴν μεσουρανεῖ ἄνω ἐν αὐτῇ ἡ Αἶξ. Εἰς πόσον χρόνον ὁ Πολυδεύκης θὰ διανύσῃ τὸ ἡμερήσιον τόξον αὐτοῦ;**

῾Ο Πολυδεύκης ἀνατέλλει (ἄσκ. 158) τὴν 5 ὥρ. 11 π. 18 δ. καὶ μεσουρανεῖ ἄνω (ἄσκ. 156) τὴν 7 ὥρ. 40 π. 51 δ. ῞Ωστε τὸ ἡμερήσιον τόξον αὐτοῦ τὸ διανύει εἰς

$$(7 \text{ ὥρ. } 40 \text{ π. } 51 \text{ δ.} - 5 \text{ ὥρ. } 11 \text{ π. } 18 \text{ δ.}) \times 2 = (2 \text{ ὥρ. } 29 \text{ π. } 35 \text{ δ.}) \times 2 = 4 \text{ ὥρ. } 59 \text{ π. } 6 \text{ δ.}$$

***161)* ῾Ο Βέγας ἔχει α = 18 ὥρ. 34 π. 28 δ. καὶ δ = 38° 42′ 53″. Οὗτος ἢ ὁ Βασιλίσκος μεσουρανεῖ ἐνωρίτερον ἐν ᾿Αθήναις καὶ πόσον χρόνον ἐνωρίτερον;**

῎Εχοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὴν ἄσκησιν 157, συμπεραίνομεν ὅτι ἐνωρίτερον μεσουρανεῖ ὁ Βασιλίσκος κατὰ

$$18 \text{ ὥρ. } 34 \text{ π. } 28 \text{ δ.} - 10 \text{ ὥρ. } 4 \text{ π. } 29 \text{ δ.} = 8 \text{ ὥρ. } 29 \text{ π. } 59 \text{ δ.}$$

***162)* ῾Ο Βέγας ἢ ἡ Αἶξ κεῖται νοτιώτερον καὶ πόσον;**

Νοτιώτερον κεῖται ὁ ἔχων τὴν μικροτέραν ἀπόκλισιν, ἤτοι ἐδῶ ὁ Βέγας (ἄσκ. 161 καὶ 158) καὶ κατὰ

$$45^\circ\, 55'\, 32'' - 38^\circ\, 42'\, 53'' = 7^\circ\, 12'\, 39''.$$

***163)* Πόση εἶναι ἡ P τοῦ δ ᾿Ωρίωνος καὶ εἰς πόσον χρόνον διανύει οὗτος τὸ ἡμερήσιον καὶ εἰς πόσον τὸ νυκτερινὸν τόξον του;**

῾Ο δ τοῦ ᾿Ωρίωνος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ. ῞Ωστε κατὰ τὴν ἡμερησίαν κίνησιν αὐτοῦ γράφει τὸν ἰσημερινόν. ῎Εχει λοιπὸν $P = 0^\circ$, καὶ διανύει τὸ ἡμερήσιον καὶ τὸ νυκτερινὸν τόξον αὐτοῦ εἰς 12 ὥρας ἕκαστον (ἄσκ. 21).

***164)* ῾Η ἐτησία παράλλαξις τοῦ Λαμπαδίου εἶναι 0″,10. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ.**

1 parsec ἰσοῦται μὲ 3,2598 ἔτη φωτὸς $= 30{,}84 \cdot 10^{12}$ χιλιόμετρα (§ 37,3). ᾿Επειδὴ δὲ ἐδῶ ἔχομεν ἐτησίαν παράλλαξιν 0″,10 ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς Γῆς τοῦ Λαμπαδίου εἶναι 3,2598 ἔτη : 0,10 = 32,598 ἔτη φωτὸς $= 308{,}4 \cdot 10^{12}$ χιλιόμετρα.

***165)* ῾Η ἐτησία παράλλαξις τοῦ 61 τοῦ Κύκνου εἶναι 0″,29. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ.**

Σύμφωνα μὲ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ὁ 61 τοῦ Κύκνου ἀπέχει ἀπὸ τῆς Γῆς 3,2598 : 0,29 = 11,2407 ἔτη φωτὸς $= 106{,}345 \cdot 10^{12}$ χλμ. (περίπου).

***166)* ῾Η ἐτησία παράλλαξις τοῦ ᾿Αλτάϊρ εἶναι 0″,23. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ.**

Εἶναι 3,2598 : 0,23 = 14,173 ἔτη φωτὸς $= 134{,}09 \cdot 10^{12}$ χλμ.

***167)* Εἷς ἀπλανὴς ἀστὴρ μετατίθεται κατὰ 10″ ἐτη-**

σίως. Νὰ εὕρητε εἰς πόσον χρόνον ἡ μετάθεσίς του ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας θὰ γίνῃ ἴση πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῆς φαινομένης διαμέτρου τῆς Σελήνης.

Ἐπειδὴ ἡ μέση τιμὴ τῆς φαινομένης διαμέτρου τῆς Σελήνης εἶναι (§ 27) 1868″, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 1868 : 10=186,8 ἔτη.

168) **Εἷς ἀπλανὴς ἀστὴρ μετατίθεται κατὰ 0″,1 ἐτησίως. Νὰ εὕρητε εἰς πόσον χρόνον θὰ μετατεθῇ κατὰ τὴν μέσην τιμὴν τῆς φαινομένης διαμέτρου τοῦ Ἡλίου.**

Ἡ μέση τιμὴ τῆς φαινομένης διαμέτρου τοῦ Ἡλίου εἶναι 32′ 4″,1 = 1924″,1. Ὥστε ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 1924,1 : : 0,1 = 19241 ἔτη.

169) **Εἷς ἀπλανὴς ἀστὴρ μετατίθεται κατὰ 0″,11 ἐτησίως. Νὰ εὕρητε μετὰ πόσον χρόνον ἡ μετάθεσίς του θὰ γίνῃ ἴση πρὸς τὴν ἐτησίαν παράλλαξιν τοῦ Πολικοῦ ἀστέρος.**

Ἡ ἐτησία παράλλαξις τοῦ Πολικοῦ ἀστέρος εἶναι 0″,07. Ἑπομένως ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι $0,07 : 0,11 = \frac{7}{11}$ τοῦ ἔτους.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν.

Σελὶς *190.*

170) **Ἀστὴρ ἔχων α=15 ὥρ. 20 π. ἀνατέλλει ἔν τινι τόπῳ τὴν 6ην ἀστρικὴν ὥραν. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ ἡμερήσιον τόξον τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ;**

Ὁ ἀστὴρ οὗτος μεσουρανεῖ ἄνω (§ 5) τὴν 15 ὥρ. 20 π. Ὥστε ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς του μέχρι τῆς μεσουρανήσεως αὐτοῦ παρέρχονται 15 ὥρ. 20 π. – 6 ὥρ. = 9 ὥρ. 20 π. = 9 $^1/_3$ ὥρ. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ διάστημα αὐτὸ γράφει τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμερησίου τόξου του, ἕπεται ὅτι τοῦτο εἶναι $15^\circ \times 9\frac{1}{3} = 140^\circ$ (ἐπειδὴ εἰς 1 ὥραν γράφει τόξον $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$). Ὥστε ὅλον τὸ ἡμερήσιον τόξον τοῦ ὡς ἄνω ἀστέρος εἶναι $140^\circ \times 2 = 280^\circ$

171) **Ἀστέρος τὸ ἡμερήσιον τόξον εἶναι 200°. Ἐὰν**

ἀνατέλλῃ τὴν 2 ὥρ. 10 π., πόση εἶναι ἡ ὀρθὴ ἀναφορὰ αὐτοῦ;

Ὁ ἀστὴρ οὗτος διανύει τὰς 200° εἰς 24 ὥρ. $\times \frac{200}{360} =$ $= 24$ ὥρ. $\times \frac{5}{9} = 13$ ὥρ. 20 π. καὶ τὰς 100°, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμερησίου τόξου εἰς 6 ὥρ. 40 π. Ὥστε ὁ ἀστὴρ οὗτος μεσουρανεῖ ἄνω 6 ὥρ. 40 π. μετὰ τὴν ἀνατολήν του, ἤτοι τὴν 2 ὥρ. 10 π. + 6 ὥρ. 40 π. = 8 ὥρ. 50 π. Ἑπομένως ἔχει οὗτος α = = 8 ὥρ. 50 π.

172) **Ἀστὴρ ἔχων $\delta = 35^\circ 15' 20''$ μεσουρανεῖ ἄνω ἔν τινι τόπῳ εἰς ὕψος $47^\circ 12' 42''$. Πόσον εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ τόπου τούτου;**

Εἰς τὴν ἄσκησιν 148 εἴδομεν ὅτι $\varphi = \delta + Z$. Ἐδῶ δὲ εἶναι (§ 1) $Z = 90^\circ - 47^\circ 12' 42'' = 42^\circ 47' 18''$. Ὥστε εἶναι $\varphi = 35^\circ 15' 20'' + 42^\circ 47' 18'' = 78^\circ 2' 38''$.

173) **Ἀειφανὴς ἀστὴρ μεσουρανεῖ ἄνω εἰς ὕψος 50° καὶ εἰς τόπον, ὅστις ἔχει γεωγραφικὸν πλάτος 40°. Πόσον ὕψος ἔχει ὁ ἀστὴρ οὗτος κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησίν του;**

Τὸ ζητούμενον ὕψος θὰ τὸ εὕρωμεν ἐκ τῆς ζενιθίας ἀποστάσεως Z_2 τοῦ ἀστέρος κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησιν αὐτοῦ. Ἀλλ' ἡ ζενιθία ἀπόστασις Z_1 τοῦ ἰδίου ἀστέρος κατὰ τὴν ἄνω μεσουράνησίν του εἶναι (§ 1) $Z_1 = 90^\circ - \upsilon = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι τὸ γ. π. τόπου ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τοῦ ὁρατοῦ πόλου ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ (§ 21). Ὥστε τοῦτο, ἐδῶ εἶναι 40°, καὶ ἑπομένως ἡ πολικὴ ἀπόστασις τοῦ Ζενὶθ εἶναι $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Κατόπιν τούτων ἐκ τῆς ἰσότητος 4, § 5, $Z\Pi = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$ εἰς ἣν θέτομεν $(Z\Pi) = 40^\circ$ καὶ $Z_1 = 40^\circ$ εὑρίσκομεν $Z_2 = 60^\circ$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

174) **Ἀστὴρ ἀνατέλλει τὴν 2 ὥραν 24 π. συγχρόνως μετὰ τοῦ γ ἐν τόπῳ, ὅστις ἔχει γεωγραφικὸν πλάτος $30^\circ 25'$. Μεσουρανεῖ δὲ οὗτος ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ 2 ὥρας βραδύτερον τοῦ γ, εἰς ὕψος $69^\circ 35'$. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ οὐρανογραφικαὶ συντεταγμέναι τοῦ ἀστέρος τούτου.**

Ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς τοῦ γ μέχρι τῆς ἄνω μεσουρανήσεως αὐτοῦ παρέρχονται 6 ὧραι. Ἑπομένως ὁ γ μεσουρανεῖ τὴν 2 ὥρ. 24 π. + 6 ὥρ = 8 ὥρ. 24 π., ὁ δὲ ἀστὴρ μεσουρανεῖ τὴν 8 ὥρ. 24 π. + 2 ὥρ. = 10 ὥρ. 24 π. Ἔχει ἑπομένως οὗτος (§ 30) $\alpha = 10$ ὥρ. 24. π.

Ἡ ἀπόκλισις δ τοῦ ἀστέρος θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς σχέσεως (ἄσκ. 148) $\varphi = \delta + Z$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\delta = \varphi - Z = 30^\circ\, 25' - (90^\circ - 69^\circ\, 35') = 30^\circ\, 2+' + 69^\circ\, 35' - 90^\circ = 100^\circ - 90^\circ = 10^\circ$.

***175)* Ἀστὴρ μεσουρανεῖ ἐν Ἀθήναις 4 ὥρ. 12 π. 20 δ. βραδύτερον τοῦ Σειρίου (α=6 ὥρ. 41 π. 5 δ.) καὶ εἰς ὕψος 67° 10′. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ οὐρανογραφικαὶ συντεταγμέναι τοῦ ἀστέρος τούτου.**

Ὁ Σείριος μεσουρανεῖ (§ 5) τὴν 6 ὥρ. 41 π. 5 δ, ὁ δὲ ἀστὴρ μεσουρανεῖ τὴν 6 ὥρ. 41 π. 5 δ. + 4 ὥρ. 12 π. 20 δ. = 10 ὥρ. 53 π. 25 δ. Ὥστε ὁ ἀστὴρ ἔχει $\alpha = 10$ ὥρ. 53 π. 25 δ. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ γ. π. τῶν Ἀθηνῶν εἶναι $\varphi = 37^\circ\, 58'\, 15'',5$, ἔχει

$$\delta = \varphi - Z = 37^\circ\, 58'\, 15'',5 - (90^\circ - 67^\circ\, 10') = 105^\circ\, 8'\, 15'',5 - 90^\circ = $$
$$= 15^\circ\, 8'\, 15'',5.$$

***176)* Πόση εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ἀποκλίσεως τῶν ἀστέρων, οἵτινες οὐδέποτε δύουν ἐν Ἀθήναις;**

Εἰς τὰς Ἀθήνας δὲν δύουν οἱ ἀστέρες οἱ ὁποῖοι ἔχουν (§ 6,1 καὶ § 21) $P \leqslant 37^\circ\, 58'15'',5$, ἢ ἐπειδὴ $P = 90^\circ - \delta$, $90 - \delta \leqslant 37^\circ 58'\, 15'',5$ καὶ $\delta \geqslant 90^\circ - 37^\circ\, 58'\, 15'',5$ ἤτοι $\delta \geqslant 52^\circ\, 1'\, 44'',5$. Ἡ τιμὴ δὲ αὐτὴ τῶν $52^\circ\, 1'\, 44'',5$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ἀποκλίσεως.

***177)* Εἰς πόσην ζενιθίαν ἀπόστασιν μεσουρανεῖ ἄνω ἐν Ἀθήναις ἀστὴρ ἔχων ἀπόκλισιν 62° 15′ 35″ καὶ εἰς πόσην κάτω;**

Ὁ ἀστὴρ οὗτος ὡς ἔχων ἀπόκλισιν μεγαλυτέραν τῶν $52^\circ\, 1'\, 43'',5$ εἶναι ἐν Ἀθήναις ἀειφανὴς (ἄσκ. 176). Ὥστε αἱ ζενιθίαι ἀποστάσεις αὐτοῦ Z_1 καὶ Z_2 κατὰ τὴν ἄνω καὶ κάτω μεσουράνησιν αὐτοῦ ἀντιστοίχως δίδονται ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (§ 6,1)

$$Z_1 = 90^\circ - \varphi - P,\quad Z_2 = 90^\circ - \varphi + P$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\varphi = 37^\circ\, 58'\, 15''5$ καὶ $P = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 62^\circ\, 15'\, 35''$, εὑρίσκομεν:

$$Z_1 = 24^\circ\, 17'\, 19''5 \text{ καὶ } Z_2 = 79^\circ\, 46'\, 9'',5.$$

_178)_ Τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῶν Παρισίων εἶναι $48^{\circ}\,50'\,10'',7$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερήσιον τόξον ἀστέρος ὁρωμένου ἐκ Παρισίων, ὅστις ἔχει ἀπόκλισιν $41^{\circ}\,9'\,49'',3$.

Ὁ ἀστὴρ οὗτος ἐπειδὴ ἔχει πολικὴν ἀπόστασιν $P=90^{\circ}-41^{\circ}\,9'\,49'',3=48^{\circ}\,50'\,10'',7=\varphi$, εἶναι (ἄσκ. 176) ἐν Παρισίοις ἀειφανής. Τὸ ἡμερήσιον λοιπὸν τόξον αὐτοῦ εἶναι 360°.

_179)_ Δύο τόποι Α καὶ Β κείμενοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου ἔχουσιν ἀντιστοίχως μήκη $43^{\circ}\,17'$ καὶ $46^{\circ}\,41'$ ἀνατολικά. Τὸ μῆκος δὲ τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου τόξου τοῦ παραλλήλου αὐτῶν εἶναι 261 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῶν τόπων αὐτῶν.

Ἔστω φ τὸ ζητούμενον γ. π. καὶ (σχ. 10) (ΚΤ)=α ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου τούτου καὶ (ΓΤ)=Α ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς. Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΚΤ εἰς ὃ εἶναι γων. ΚΤΓ=φ, εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{A}$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{2\pi\alpha}{2\pi A}$ (1). Ἀλλὰ τὸ μὲν μῆκος $2\pi A$ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς Γῆς εἶναι 40 000 000 μ. τὸ δὲ μῆκος $2\pi\alpha$ τῆς περιφερείας τοῦ ὡς ἄνω παραλλήλου, θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ μήκους τοῦ τόξου αὐτοῦ $46^{\circ}\,11'-43^{\circ}\,17'=3^{\circ}\,24'$, ὅπερ εἶναι 261 000 μ. Ἑπομένως εἶναι $2\pi\alpha=\frac{261000.360}{3,4}$ καὶ

$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{261000.360}{3,4.40000000}=0,6909,\ \text{ἤτοι}\ \varphi=46^{\circ}\,17'\,51''.$$

_180)_ Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης μεθ' ἧς στρέφεται ἐκ Δ πρὸς Α τόπος ἔχων γεωγραφικὸν πλάτος $37^{\circ}\,58'\,20''$.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς ἄνω ἀσκήσεως θέτοντες $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\, 37^{\circ}\,58'\,20''=0,78831$ καὶ $2\pi A=40\,000\,000$, εὑρίσκομεν $2\pi\alpha=31\,532\,400$ μ.

Ἀλλ' ὁ τόπος οὗτος διανύει τὴν περιφέρειαν $2\pi\alpha$ εἰς 24 ὥρας ἤτοι εἰς 86400 δ. Ὥστε εἰς 1 δ. διανύει $31\,532\,400:86\,400 = 365$ μ περίπου.

_181)_ Πόσον εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τόπου, ὅστις ἔχει ταχύτητα 81 μ. κατὰ δευτερόλεπτον κατὰ τὴν ἐκ Δ πρὸς Α στροφήν του;

Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς ἀσκήσεως 179 εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{86400.81}{40\,000\,000}=0,17496$ καὶ $\varphi=79^{\circ}\,55'\,25''$.

182) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν φ εἶναι τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τόπου τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου τῆς Γῆς, δ ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου κατά τινα ἡμέραν καὶ $\varphi+\delta=90^\circ$, ἡ ἡμέρα αὕτη διαρκεῖ εἰς τὸν τόπον τοῦτον 24 ὥρας. Ἂν δὲ εἶναι $\varphi+\delta>90^\circ$, ἡ ἡμέρα διαρκεῖ εἰς τὸν τόπον τοῦτον περισσότερον τῶν 24 ὡρῶν.

Εἰς τόπον τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου, ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ κάτω εἰς ὕψος $\upsilon=\varphi+\delta-90^\circ$. Ὥστε, ἐὰν $\varphi+\delta=90^\circ$, θὰ εἶναι $\upsilon=0^\circ$, ἤτοι ὁ Ἥλιος κατὰ τὴν κάτω μεσουράνησιν ἅπτεται τοῦ ὁρίζοντος (§ 6, σημείωσις) καὶ ἡ ἡμέρα ἐκείνη εἶναι διαρκείας 24 ὡρῶν. Ὅταν δὲ εἶναι $\varphi+\delta>90^\circ$ ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ κάτω εἰς ὕψος μεγαλύτερον τοῦ 0 καὶ ἑπομένως ἡ ἡμέρα ἐκείνη εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 24 ὡρῶν.

183) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κατὰ τὴν θερινὴν τροπὴν ὅλοι οἱ τόποι τῆς Γῆς, οἵτινες ἔχουσι βόρειον γεώγραφικὸν πλάτος $\varphi>66^\circ\,33'$ ἔχουν μίαν μακρὰν ἡμέραν (>24 ὡρῶν). Οἱ δὲ ἀντίστοιχοι τόποι τοῦ νοτίου ἡμισφαιρίου τῆς Γῆς ἔχουσι μίαν μακρὰν νύκτα.

Κατὰ τὴν θερινὴν τροπὴν ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι $23^\circ\,27'$. Ἑπομένως κατὰ ταύτην ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ κάτω εἰς ὕψος $\upsilon=\varphi+23^\circ\,27'-90^\circ=\varphi-66^\circ\,33'$. Εἰς δὲ τοὺς τόπους οἵτινες ἔχουν $\varphi>66^\circ\,33'$ μεσουρανεῖ κάτω εἰς ὕψος μεγαλύτερον τοῦ 0. Ἤτοι τότε εἰς τοὺς τόπους αὐτοὺς ἡ ἡμέρα εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 24°. Εἰς δὲ τοὺς ἀντιστοίχους τόπους τοῦ νοτίου ἡμισφαιρίου ἡ νύκτα εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 24 ὡρῶν (§ 24).

184) Εἰς τόπον ἔχοντα γεωγραφικὸν πλάτος 38° ὑψοῦται κατακόρυφος πύργος ὕψους 35 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς αὐτοῦ κατὰ τὴν μεσημβρίαν τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι $-12^\circ\,20'$.

Ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ ἄνω εἰς ὕψος $\upsilon=90^\circ-\varphi+\delta=90^\circ-38^\circ-12^\circ\,20'=39^\circ\,40'$. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου κάθετοι πλευραὶ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου καὶ ἡ σκιὰ αὐτοῦ, ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τοῦ ὕψους τοῦ πύργου εἶναι $39^\circ\,40'$. Ἐκ τοῦ τριγώνου δὲ αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς ἰσοῦται μὲ $35\,.\,\sigma\varphi 39^\circ\,40'=35\,.\,1{,}2059=42{,}2065$ μ. (Πίνακες λογαρίθμων νέα ἔκδοσις Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 147).

185) Πόσον ὕψος ἔχει δένδρον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται

εἰς βόρειον γεωγραφικὸν πλάτος 40° καὶ ρίπτει σκιὰν $2\sqrt{3}$ μέτρων τῆς μεσημβρίαν τῆς ἡμέρας καθ' ἣν ἡ ἀπόκλισις τοῦ Ἡλίου εἶναι 10°.

Ὁ Ἥλιος μεσουρανεῖ ἄνω εἰς ὕψος $υ=90^\circ-40^\circ+10^\circ=60^\circ$. Ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ἰσοῦται μὲ $2\sqrt{3}\,.\,εφ\,60^\circ=2\,.\,\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}=$ $=2\,.\,3\,.=6$ μ.

186) **Ἀστὴρ ἀνατέλλων καὶ δύων διέρχεται διὰ τοῦ Βορρᾶ τόπου ἔχοντος γεωγραφικὸν πλάτος 27° B. Πόσον εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ ἐν τῷ τόπῳ τούτῳ οὗτος;**

Ὁ ἀστὴρ κατὰ τὴν ἡμερησίαν κίνησίν του γράφει κύκλον παράλληλον πρὸς τὸν ἰσημερινόν. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τοιοῦτον παράλληλον διερχόμενον διὰ τοῦ Β (σχ. 2), οὗτος θὰ συναντήσῃ τὸν οὐράνιον μεσημβρινὸν τοῦ τόπου εἰς ἕτερον σημεῖον Β′ τοιοῦτον ὥστε τόξ. ΠΒ′ = τόξ. ΒΠ = 27°. Ἑπομένως τόξον ΒΠΒ′$=54^\circ$. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀστὴρ εὑρίσκεται εἰς τὸ Β′ μεσουρανεῖ ἄνω. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον μέγιστον ὕψος εἶναι 54°.

187) **Εἰς τόπον ἔχοντα γεωγραφικὸν πλάτος 28°, πόσον μέρος τοῦ ὡριαίου τοῦ Ζενὶθ εὑρίσκεται ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα καὶ πόσον ὑπ' αὐτόν; Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸν ὡριαῖον τοῦ Ναδίρ.**

Ὡς βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα 2, τὸ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα τόξον τοῦ ὡριαίου τοῦ ζενὶθ εἶναι τὸ ΠΖΝ. Εὑρίσκομεν δὲ τὸ μέτρον τούτου, ἂν ἀπὸ τὰς 180° ἀφαιρέσωμεν τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΝΠ′, ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΒΠ. Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο, ἐπειδὴ παριστᾷ τὸ ἔξαρμα τοῦ βορείου πόλου ἰσοῦται μὲ τὸ γ. π. τοῦ τόπου, ἤτοι μὲ 28°. Ὥστε τὸ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα τόξον τοῦ ὡριαίου τοῦ Ζενὶθ εἶναι $180^\circ-28^\circ=152^\circ$, τὸ δὲ ὑπὸ τὸν ὁρίζοντα εἶναι 28°, ἴσον μὲ τὸ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα τόξον τοῦ ὡριαίου τοῦ Ναδίρ. Εἶναι δὲ τὰ τόξα ταῦτα τὰ $\frac{152}{180}$ καὶ $\frac{28}{180}$ μέρη τῶν ἀντιστοίχων ὡριαίων.

188) **Εἰς ποίους τόπους οὐδέποτε ἀνατέλλει ὁ Rigel, ὅστις ἔχει $δ=-8^\circ\,17'\,5''$;**

Εἷς ἀστὴρ οὐδέποτε ἀνατέλλει, ὅταν ἔχει πολικὴν ἀπόστασιν

$P > 180^\circ - \varphi$ (§ 6,3) ἢ ἐπειδὴ $P = 90^\circ - \delta$, ὅταν εἶναι

$$90^\circ - \delta > 180^\circ - \varphi,$$

$\varphi > 90^\circ + \delta$ ἤτοι ἐδῶ $\varphi > 90^\circ - 8^\circ 17' 5''$ ἢ $\varphi > 81^\circ 42' 55''$.

189) **Πόση εἶναι ἡ ἀπόκλισις ἀστέρος, ὅστις κατὰ τὴν κάτω ἐν Ἀθήναις μεσουράνησίν του εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος τῶν Ἀθηνῶν;**

Τὸ ὕψος τοῦ πόλου ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀστέρος ἀπὸ τὸν πόλον, ἤτοι ἡ πολικὴ ἀπόστασις αὐτοῦ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ ὕψος τοῦ πόλου ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα, ἰσοῦται μὲ τὸ γ. π. τῶν Ἀθηνῶν. Ὥστε εἶναι $P = 37^\circ 58' 15'',5$, ἤτοι $90^\circ - \delta = 37^\circ 58' 15'',5$ καὶ $\delta = 90^\circ - 37^\circ 58' 15'',5$ ἤτοι $\delta = 52^\circ 1' 44'',5$

190) **Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς μεγίστης πρὸς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς Σελήνης ἀπὸ τῆς Γῆς.**

Ἡ μεγίστη ἀπόστασις τῆς Σελήνης ἀπὸ τῆς Γῆς, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐλαχίστην φαινομένην διάμετρον τῆς Σελήνης, καὶ ἡ ἐλαχίστη εἰς τὴν μεγίστην. Εἶναι δὲ αἱ ἀποστάσεις αὗται α καὶ α′ ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ $\alpha = \frac{2P}{29' 26''} = \frac{2P}{1766}$ καὶ $\alpha' = \frac{2P}{33' 33''} = \frac{2P}{2013}$. Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{2P}{1726} : \frac{2P}{2013} = \frac{2013}{1766}$.

191) **Τὸν χειμῶνα ἢ τὸ θέρος σημειοῦνται τὰ μεγαλύτερα μεσημβρινὰ ὕψη τῆς Πανσελήνου εἰς τοὺς τόπους τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου τῆς Γῆς καὶ διατί;**

Ἡ πανσέληνος μεσουρανεῖ ἄνω τὸ μεσονύκτιον, ἤτοι ὅταν μεσουρανεῖ κάτω ὁ Ἥλιος. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος μεσουρανεῖ κάτω χαμηλότερα τὸν χειμῶνα, ἕπεται ὅτι ἡ Σελήνη κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν τοῦ ἔτους μεσουρανεῖ ἄνω ὑψηλότερα.

192) **Τὸ κέντρον τῆς Σελήνης ἔχει ἀπόκλισιν 0° κατὰ τὴν στιγμὴν μιᾶς ἀνατολῆς αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε τὴν ὡριαίαν γωνίαν αὐτοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην.**

Τὸ κέντρον τῆς Σελήνης ὡς ἔχων ἀπόκλισιν 0° εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τότε ἀνατέλλει, εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος, ἤτοι ἐπὶ τοῦ σημείου τῆς ἀνατολῆς Α (σχ. 1), ὅπερ εἶναι τομὴ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ ὁρίζοντος. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ὡριαία γωνία μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ ἰσημερινοῦ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ ὡριαίου τοῦ νότου ΠΝΠ′ καὶ τοῦ ὡριαίου τῆς ἀνατολῆς, ΠΑΠ′ κατὰ τὴν ἀνάδρομον φορὰν (§ 2), ὅπερ τόξον εἶναι 270° ἢ 18 ὡρῶν.

193) **Νὰ εὕρητε τὴν μεγίστην ἀποχὴν τῆς Γῆς διὰ παρατηρητὴν κείμενον ἐπὶ τοῦ Διός.**

Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ Διός, Γ τὸ τῆς Γῆς καὶ Η τὸ κέντρον τοῦ Ἡλίου, ἡ γωνία ΓΖΗ παριστᾷ τὴν ἀποχὴν τῆς Γῆς ὁρωμένης ἐκ τοῦ Διός. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ γωνία αὕτη λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμήν, ὅταν ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὴ ΖΓ ἐφάπτεται τῆς τροχιᾶς τῆς Γῆς, ἤτοι ὅταν ἐν τῷ τριγώνῳ ΖΓΗ ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\eta\mu(\Gamma Z H) = \dfrac{H\Gamma}{HZ}$ ἢ

ἐπειδὴ $(H\Gamma) = HZ = 5{,}20$ (§ 18) εἶναι $\eta\mu(\Gamma Z H) = \dfrac{1}{5{,}20} = 0{,}1923$,

$\lambda o\gamma\eta\mu(\Gamma Z H) = \overline{1}{,}28398$ καὶ $\Gamma Z H = 11^\circ\, 5'\, 13''$.

194) **Ὁ Ποσειδῶν ἀπέχει τοῦ Ἡλίου 30 ἀστρονομικὰς μονάδας. Νὰ εὕρητε τὸν χρόνον τῆς περιφορᾶς αὐτοῦ περὶ τὸν Ἥλιον.**

Ὁ ζητούμενος χρόνος εἰς ἀστρικὰ ἔτη ἰσοῦται (§ 16,3) μὲ $30\sqrt{30} = 30.5{,}477 = 164{,}31$.

195) **Ὁ μέγας ἄξων τῆς τροχιᾶς τοῦ Ἄρεως εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς τροχιᾶς τοῦ Ἑρμοῦ. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῶν χρόνων τῶν περιφορῶν αὐτῶν περὶ τὸν Ἥλιον.**

Ἂν α εἶναι ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς τροχιᾶς τοῦ Ἑρμοῦ, ὁ μέγας ἡμιάξων τῆς τροχιᾶς τοῦ Ἄρεως εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ εἶναι 4α. Ἑπομένως κατὰ τὸν τρίτον νόμον τοῦ Κεπλέρου (§ 16) ἔχομεν $\dfrac{T^2}{T'^2} = \dfrac{(4\alpha)^3}{\alpha^3}$ ἤτοι $\dfrac{T^2}{T'^2} = 4^3$ καὶ ἑπομένως $\dfrac{T}{T'} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.

196) **Ὁ πλανήτης Οὐρανὸς περιφέρεται περὶ τὸν Ἥλιον εἰς 84 ἔτη καὶ 7 ἡμέρας. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου εἰς ἀστρονομικὰς μονάδας.**

Εἰς τὴν ἰσότητα $\frac{T^2}{T'^2} = \frac{\alpha^3}{\alpha'^3}$, ἥτις ἐκφράζει τὸν 3ον νόμον τοῦ Κεπλέρου, θέτομεν $\alpha' = 1$ (1 ἀστρονομικὴ μονάς, § 37). $T'=1$ ἀστρικὸν ἔτος καὶ $T=84$ ἔτη 7 ἡμέρας$=84{,}0192$ ἔτ. Ἑπομένως εὑρίσκομεν $\alpha^3 = 84{,}0192^2$ καὶ $\alpha = \sqrt[3]{84{,}0192^2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\lambda o\gamma\ \alpha = \frac{2}{3}\ \lambda o\gamma\ 84{,}0192 = \frac{2}{3} . 1{,}92438 = 1{,}28292$, ἕπεται ὅτι $\alpha = 19{,}1832$ περίπου ἀστρονομικαὶ μονάδες.

197) **Ἡ περιήλιος ἀπόστασις τοῦ κομήτου τοῦ Faye εἶναι 1,666, ἡ δὲ ἀφήλιος 5,965 ἀστρονομικαὶ μονάδες. Νὰ εὕρητε τὸν χρόνον τῆς περιφορᾶς αὐτοῦ περὶ τὸν Ἥλιον.**

Εἰς τὴν ἰσότητα (ἄσκ. 196) $\frac{T^2}{T'^2} = \frac{\alpha^3}{\alpha'^3}$, θὰ θέσωμεν $T'=1$ ἀστρικὸν ἔτος καὶ $\alpha' = (1{,}665 + 5{,}966) : 2 = 3{,}816$. Ὥστε εἶναι $T = \sqrt{3{,}816^3} = 3{,}816 \sqrt{3{,}816} = 3{,}816 . 1{,}95 = 7{,}4412$ ἀστρικὰ ἔτη.

198) **Ὁ κομήτης τοῦ Perrine περιφέρεται περὶ τὸν Ἥλιον εἰς 6,454 ἔτη καὶ ἡ περιήλιος ἀπόστασίς του εἶναι 1,1727 ἀστρονομικαὶ μονάδες. Νὰ εὕρητε τὴν ἀφήλιον ἀπόστασιν αὐτοῦ εἰς χιλιόμετρα.**

Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 196, εὑρίσκομεν $\alpha = \sqrt[3]{6{,}454^2}$ $\lambda o\gamma\ \alpha = \frac{2}{3} . 0{,}80983 = 0{,}53989$ καὶ $\alpha = 3{,}4665$ ἀστρονομικαὶ μονάδες. Ὥστε ὁ μέγας ἄξων τῆς τροχιᾶς τοῦ Perrine εἶναι $3{,}4665 \times 2 = 6{,}9330$ ἀστρ. μον., ἡ δὲ ἀφήλιος ἀπόστασις αὐτοῦ εἶναι $6{,}9330 - 1{,}1727 = 5{,}7603$ ἀστρ. μονάδες. Ἐπειδὴ δὲ 1 ἀστρ. μονὰς=μέση ἀπόστασις Γῆς - Ἡλίου=149 504 200 χιλιόμετρα, ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι $149\,504\,200 \times 5{,}7603 = 861\,189\,043{,}260$ χιλιόμετρα.

199) **Ὁ Πολικὸς ἀστὴρ ἔχει ἐτησίαν παράλλαξιν 0″,07. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασίν του εἰς ἀστρονομικὰς μονάδας, εἰς ἔτη φωτὸς καὶ εἰς μονάδας parsec.**

1 parsec εἶναι ἡ ἀπόστασις, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐτησίαν παράλλαξιν 1″ τόξου. Ἑπομένως εἰς ἐτησίαν παράλλαξιν 0″,07 ἀντιστοιχοῦν μονάδες parsec $1 : 0{,}07 = 14{,}2857$, ἢ ἐπειδὴ 1 par-

sec = 3,2598 ἔτη φωτὸς 14,2857 × 3,2598 = 46,5685 ἔτη φωτὸς (περίπου) ἢ ἐπειδὴ 1 ἔτος φωτὸς = 63275 ἀστρον. μονάδες 63275 × 46,5685 = 2946621,8375 ἀστρον. μονάδες.

***200)* Ὁ Ἀρκτοῦρος ἀπέχει τῆς Γῆς 11 000 000 ἀστρονομικὰς μονάδας. Νὰ εὕρητε τὴν ἐτησίαν παράλλαξιν αὐτοῦ.**

Ὁ Ἀρκτοῦρος ἀπέχει τῆς Γῆς (ἄσκ. 199) 11 000 000 : 63275 = = 173,844 ἔτη φωτός. Ὥστε ἡ ἐτησία παράλλαξις αὐτοῦ εἶναι

$$3{,}2598 : 173{,}844 = 0'',0187 \text{ περίπου.}$$

ΤΕΛΟΣ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩι ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩι ΣΧΟΛΕΙΩι ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Νέα ἔκδοσις

Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον εἰς τὸν μαθητήν, ὅστις ἠμπορεῖ νὰ εἶναι βέβαιος, ὅτι θὰ εὕρῃ εἰς αὐτὸ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα, τὸ ὁποῖον χρειάζεται νὰ ἀναφέρῃ εἰς τὴν ἀπόδειξίν του, ἢ τὸν τύπον τὸν ἁρμόζοντα εἰς τὸ ζήτημά του ἢ καὶ ἀριθμούς, οἵτινες θὰ τὸν διευκολύνουν νὰ λύσῃ ὀρθῶς καὶ ταχέως τὸ πρόβλημά του: τῆς Ἀριθμητικῆς ἢ τῆς Ἀλγέβρας, τῆς Γεωμετρίας, τῆς ἐπιπέδου ἢ σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, τῆς Κοσμογραφίας ἢ τῆς Φυσικῆς.

Περιέχει δὲ ἀκόμη τὸ βιβλίον τοῦτο παραγώγους καὶ ἀρχικὰς συναρτήσεις.

Οἱ πίνακές του ἀνέρχονται εἰς 34. Εἶναι π.χ. πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων. Πίνακες ἀνατοκισμοῦ, ἴσων καταθέσεων καὶ χρεωλυσίας. — Δυνάμεων ἀριθμῶν, τετραγωνικῶν ριζῶν, κύβων καὶ κυβικῶν ριζῶν, πρώτων ἀριθμῶν, διαφόρων τιμῶν τοῦ π. — Ἀναγωγῆς μοιρῶν εἰς ἀκτίνια, βαθμοὺς καὶ ἀντιστρόφως· καὶ ἀναγωγῆς κοινῶν λογαρίθμων εἰς φυσικοὺς καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐκ τῆς Χημείας καὶ τῆς Φυσικῆς περιέχει τὸν διεθνῆ πίνακα τῶν ἀτομικῶν βαρῶν, καὶ πίνακας εἰδικῶν βαρῶν, συντελεστῶν γραμμικῆς διαστολῆς, θερμοκρασίας τήξεως, ποσοῦ θερμότητος τήξεως, θερμοκρασίας βρασμοῦ ὕδατος ὑπὸ διαφόρους πιέσεις.

Ἰδιαιτέρως σημειοῦμεν τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τιμῶν καὶ τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων μὲ τρία καὶ μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, διὰ τὴν λύσιν ζητημάτων Φυσικῆς, ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν κ. ἄ. Ζητήματα μὲ τοιαύτας φυσικὰς τιμάς, δίδονται καὶ εἰς τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις ἀνωτέρων σχολῶν.

Ζητεῖτε τὴν νέαν ἔκδοσιν.

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩι ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩι ΣΧΟΛΕΙΩι ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μὲ τὸ βιβλίον τοῦτο, δύναται ὁ μαθητὴς νὰ ἀποκτήσῃ τὴν ἱκανότητα νὰ λύῃ πᾶν πρόβλημα Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον θὰ τοῦ δοθῇ εἰς τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις τῶν ἀνωτέρων σχολῶν τοῦ Κράτους. Ἐπιτυγχάνει δὲ τοῦτο,

1) **Διὰ τῆς ἐπιτυχοῦς ἐκλογῆς τῆς ὕλης καὶ τῶν ἀσκήσεων,** ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 600 περίπου δίδονται μετὰ τῶν λύσεων. Ἐξ αὐτῶν αἱ ὑπ᾽ ἀριθ. 74, 110, 121, 158, 190, 237, 402, 538, 633, 639, 806 καὶ 989 ἐδόθησαν εἰς τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις τοῦ Πολυτεχνείου, τοῦ Πανεπιστημίου καὶ ἄλλων σχολῶν κατὰ τὰ δύο τελευταῖα ἔτη.

2) **Διὰ τῶν ὁδηγιῶν,** ἵνα δι᾽ αὐτῶν δύναται ὁ μαθητὴς νὰ λαμβάνῃ εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς τὴν ὀρθὴν κατεύθυνσιν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματός του. Π. χ. ν᾽ ἀντιληφθῇ ἀμέσως, ὅτι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἢ περιφέρεια κύκλου.

3) **Διὰ τῆς ἀναπτύξεως τῶν κλασσικῶν μεθόδων λύσεως προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας,** ὡς εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ καὶ ἡ συνθετικὴ (πρωτεύουσαι μέθοδοι), ἡ ἀλγεβρική, ἡ μέθοδος τῆς ὁμοιότητος ἢ τῶν ὁμοίων σχημάτων.

4) **Διὰ τῶν νέων μεθόδων,** ὧν ἡ κατανόησις δὲν εἶναι καθόλου δύσκολος καὶ διὰ τῶν ὁποίων πλεῖστα προβλήματα τῆς Γεωμετρίας λύονται πολὺ εὐκόλως.

Τὸ βιβλίον τοῦτο διαιρεῖται εἰς δύο μέρη :

Μέρος πρῶτον. — *Ἐπιπεδομετρία.* — Πρῶται γνώσεις. Θεμελιώδη θεωρήματα καὶ προβλήματα. Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις. Γ. κατασκευαί. Γ. τόποι. Λύσις προβλημάτων διὰ τῆς τομῆς τῶν γ. τ. Μετρικαὶ σχέσεις. Γ. κατασκευὴ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Μέθοδος τῆς ὁμοιότητος. Ἁρμονικὴ διαίρεσις. Ριζικοὶ ἄξονες. Κύκλοι τεμνόμενοι ὀρθογωνίως. Ὁμοιοθεσία. Μεταφορά. Περιστροφή. Ἀντιστροφή.

Μέρος δεύτερον.—*Στερεομετρία.* —Περὶ τοῦ ἐπιπέδου. Γ. τόποι. Θ. περὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν. Συμμετρία ἐν τῷ χώρῳ. Ὅμοια πολύεδρα. Περὶ τῶν πολυέδρων ἐν γένει. Περὶ κυλίνδρου, κώνου καὶ σφαίρας. Σφαιρικὰ τρίγωνα. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Μεταφορά, περιστροφή, ὁμοιοθεσία καὶ ἀντιστροφὴ ἐν τῷ χώρῳ. Στερεογραφικὴ προβολή. Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν μεθ᾽ ἕκαστον κεφάλαιον καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου 117 ζητήματα λυμένα καὶ μή, δοθέντα εἰς ἀνωτέρας σχολάς, ἰδικάς μας καὶ ξένας.