ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣ ΤΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ε΄, ΣΤ΄ καὶ τῶν συνδιδασκομένων Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξεων
τῶν Δημοτικῶν Σχολείων

τοῦ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πειραματικοῦ Σχολείου Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΜΟΝΟΝ ΤΩΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Εκδοται: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & Σια

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„

46α—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—46α

1934

ΟΔΗΓΙΑΙ

Τὸ παρὸν τεῦχος ἐξεδόθη διὰ τὸν διδάσκοντα τὰ Ἀριθμητικά μας προβλήματα. Περιέχει ἰδιότητας, κανόνας, ἀριθμητικὰς ἐννοίας τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων καὶ ἀποκρίσεις. Ἀναγράφει δὲ τὰ κεφάλαια, τὰς ὁμάδας των, καὶ τοὺς ἀριθμοὺς μόνον τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων μεταξὺ δύο γραμμῶν π. χ —1—, —2—, κλπ. Ἔπειτα ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ἀκολουθοῦν αἱ λύσεις ἢ αἱ ἀποκρίσεις. Οἱ ἀριθμοὶ καὶ αἱ ἀποκρίσεις τῶν πολὺ εὐκόλων ἀσκήσεων δὲν ἀναγράφονται.

Τὸ παρὸν τεῦχος περιέχει τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων τῆς Εης καὶ ΣΤης τάξεως. Ἀλλὰ αἱ ἀσκήσεις καὶ τὰ προβλήματα τῶν τάξεων αὐτῶν περιέχονται καὶ εἰς τὸ τεῦχος τῶν συνδιδασκομένων τάξεων. Δι' αὐτὸ ἐκρίναμεν περιττὸν νὰ τὰς ἐπαναλάβωμεν. Πρέπει νὰ ἀναζητοῦνται εἰς τὰ τεύχη τῆς Εης καὶ ΣΤης τάξεως. Μόνον τὰ περὶ συμμιγῶν δὲν ἀναφέρονται εἰς αὐτὰ καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἴπωμεν ἐδῶ περὶ αὐτῶν, ὅσα εἶναι ἀπαραίτητα διὰ τὴν διδασκαλίαν των.

Ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶναι συγκεκριμμένος καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλοὺς ἀριθμούς, καθεὶς τῶν ὁποίων ἔχει ἰδιαίτερον ὄνομα· ἀλλ' αἱ μονάδες αὐτῶν εἶναι ἢ πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς.

Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του γίνεται ἀκέραιος, ἄλλως γίνεται κλασματικὸς ἢ μικτὸς ἀριθμός.

Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν καὶ **ἡ ἀφαίρεσις** αὐτῶν γίνεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ἤτοι προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τάξεως. **Πολλαπλασιάζομεν** συμμιγῆ ἐπὶ **ἀκέραιον** πολλαπλασιάζοντες χωριστὰ τὰ μέρη του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον διαιροῦμεν συμμιγῆ δι' **ἀκεραίου**. Πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ **κλάσμα** πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Διαιροῦμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφοντες τὸ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζοντες.

Ὅταν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ συμμιγῆ τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν συμμιγῆ εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα.

Εἰς τὴν διαίρεσιν συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς **ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις** τρέπομεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην εἰς ἀκεραίους ὁμοειδεῖς καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους, ἐνῷ ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι **μερισμὸς** τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του (ἐκείνης τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα) καὶ μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον. Εἰς τὰ προβλήματα **μετρήσεως** ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι **ὁμοειδεῖς**, τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἀπὸ τὸ πρόβλημα. Εἰς τὰ προβλήματα **μερισμοῦ** ὁ **διαιρετέος** εἶναι **ὁμοειδὴς** μὲ τὸ ζητούμενον πηλίκον καὶ **διάφορος** τοῦ διαιρέτου.

ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ Η „ΘΕΜΙΣ"
Ι. Κ. ΜΩΥΣΙΑΔΟΥ & Β. Π. ΜΑΡΔΑ
ΦΑΒΙΕΡΟΥ 45 – ΑΘΗΝΑΙ

ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Α΄. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ Ε^{ΗΣ} ΤΑΞΕΩΣ

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ. **1) Αἱ κλασματικαὶ μονάδες. Ὁμὰς πρώτη.** (Αἰσθητοποίησις τῆς κλασματικῆς μονάδος. Ἔννοια αὐτῆς).

— 1 — α) $\frac{1}{2}$ β) εἰς δύο. γ) δύο· ἤτοι $\frac{2}{2}=1$. Κ. τ. λ. ὁμοίως. Ἑπομένως $\frac{3}{3}=1$, $\frac{4}{4}=1$, $\frac{5}{5}=1$ κτλ.

—5— α) Ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{15}$ γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ὅταν διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς 15 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὸ ἕν. Κ.τ.λ. ὁμοίως. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι **κλασματικὴ μονὰς λέγεται, τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.**

Ὁμὰς δευτέρα. —1— α) $\frac{1}{10}$, β) $\frac{1}{10}$ γ) $\frac{1}{10}$ κ.ο.κ.

Ὁμὰς τρίτη. (Σύγκρισις τῶν κλασματικῶν μονάδων). Ἐκ τῆς ἐννοίας τῆς κλασματικῆς μονάδος προκύπτει ὅτι, ὅταν ἔχωμεν διαφόρους κλασματικὰς μονάδας, μεταξὺ αὐτῶν **μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἔχουσα τὸν μικρότερον παρονομαστὴν καὶ μικροτέρα ἡ ἔχουσα τὸν μεγαλύτερον.**

2) Κλασματικοὶ ἀριθμοί. Ὁμὰς πρώτη. (Αἰσθητοποίησις τοῦ κλάσματος).

—1— α) Τὰ τρία τέταρτα. β) $\frac{3}{4}$. γ) Γίνεται ἀπὸ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{4}$, ἡ ὁποία ἐπαναλαμβάνεται τρεῖς φοράς. κ.τ.λ. Ὥστε **κλασματικὸς ἀριθμὸς** ἢ ἁπλῶς **κλάσμα** λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ μίαν κλασματικὴν μονάδα διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· καὶ **ἡ κλασματικὴ μονὰς** εἶναι κλασματικὸς ἀριθμός.

(Ὁμοίως λέγομεν. **Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ** λέγονται, ὅσοι ἀριθμοὶ γίνονται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· καὶ ἡ μονὰς 1 εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός).

—4— Τὸ κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους· καὶ ὁ μὲν πρῶτος φανερώνει πόσας μονάδας (κλάσματος) ἔχει τὸ κλάσμα, ὁ δὲ δεύτερος δεικνύει εἰς πόσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικήν· ἤτοι τὸ μέγεθος τῆς κλασματικῆς μονάδος ἀπὸ τὴν ὁποίαν γίνεται τὸ κλάσμα. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται **ἀριθμητής,** ὁ δὲ δεύτερος (ὁ φανερώνων τὸ μέγεθος τῆς κλασματικῆς μονάδος) λέγεται **παρονομαστής·** οἱ δύο ὁμοῦ λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα **ὅροι** τοῦ κλάσματος.

Ὁμὰς δευτέρα. —1— Θὰ κόψω αὐτὸ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ αὐτὰ θὰ δώσω τὰ δύο. Κτλ. ὁμοίως.

Ὁμὰς τρίτη. —1— $\frac{3}{8}$ **—2—** $\frac{8}{150}$. Κτλ. ὁμοίως.

Ὁμὰς τετάρτη. —1— α) $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου. β) Τῆς διαιρέσεως (μερισμοῦ) 1 **μῆλον**: 4. γ) ὁ 1 εἶναι διαιρετέος καὶ ὁ 4 διαιρέτης.

—**2**— Θὰ κόψω τὸ 1 μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη (ὅσα εἶναι τὰ παιδιὰ) καὶ θὰ δώσω εἰς αὐτὰ ἀπὸ ἕνα μέρος. Κατόπιν θὰ κόψω τὸ ἄλλο μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ θὰ δώσω εἰς τὰ παιδιὰ ἀπὸ ἕνα μέρος. Τέλος θὰ κόψω τὸ τρίτον μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ θὰ δώσω εἰς αὐτὰ ἀπὸ ἕνα μέρος.

β) $\frac{3}{4}$ μηλ. γ) Τῆς διαιρέσεως 3 μῆλα: 4 δ) ὁ 3 διαιρετέος καὶ ὁ 4 διαιρέτης.

—**3**— Θὰ μοιράσω αὐτὰς ὡς ἄνω· ἤτοι θὰ μοιράσω αὐτὰς χωριστὰ μίαν μίαν. Ἀπὸ κάθε μίαν δραχμὴν ἑπομένως, θὰ λάβῃ καθεὶς τῶν ἀνθρώπων $\frac{1}{6}$ τῆς δραχμῆς· καὶ ἀπὸ τὰς 5 δραχμὰς θὰ λάβῃ ὁ καθεὶς $\frac{5}{6}$ (τὸ μερίδιον τοῦ καθενός). Ὥστε τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 5 : 6.

—**4**— $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{12}{35}$ —**5**— **Τὸ πηλίκον πάσης διαιρέσεως εἶναι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον αὐτῆς καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.**

—**6**— Τὸ $\frac{7}{9}$ εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως 7 : 9 τῆς ὁποίας διαιρετέος εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ διαιρέτης ὁ παρονομαστὴς κ.τ.λ.

—**8**— Ἐκέντησαν ἐξ ἴσου —**9**— Ἔλαβον ἐξ ἴσου.

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα 1 τῆς ὁμάδος αὐτῆς μᾶς δίδει τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπινοήσεως τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Φυσικὰ ὅταν θέλω νὰ μοιράσω 1 μῆλον ἐξ ἴσου εἰς 4 παιδιὰ θὰ κόψω αὐτὸ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη. Ἀλλὰ τὸ μερίδιον αὐτό, δηλαδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως (μερισμοῦ) 1 μῆλον : 4, ἂν θέλωμεν νὰ τὸ παραστήσωμεν μὲ ἀριθμόν, — καὶ ἔχομεν ὑπ' ὄψιν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς — δὲν δυνάμεθα, διότι ἡ διαίρεσις ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου εἶναι ἀδύνατος. Διὰ τοῦτο ἐπενοήθησαν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί. Οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ὁμοῦ μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀπετέλεσαν ἕνα γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν τὸ **κλασματικόν.** Εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ πᾶσα διαίρεσις ἶεναι **δυνατὴ καὶ τελεία** — μόνον ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ 0) διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος —

Μὲ τὴν γενίκευσιν αὐτὴν τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν γενικεύεται καὶ ὁ ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως, ὅστις εἶναι ὁ ἑξῆς. **Διαίρεσις δοθέντος ἀριθμοῦ** (ὅστις λέγεται διαιρετέος) **διά τινος ἄλλου** (ὅστις λέγεται διαιρέτης) **λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμὸν** (ὅστις λέγεται πηλίκον), **ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.**

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν, ἐπειδὴ εἴπομεν προηγουμένως $5 : 6 = \frac{5}{6}$, ἔχομεν $\frac{5}{6} \times 6 = 5$· ἤτοι τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρανομαστήν του 6, ἔδωκε γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του 5. Ὅθεν **πᾶν κλάσμα, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρανομαστήν του, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.**

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσοι, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1· διότι ὡς εἴδομεν εἶναι $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$, $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$ κ.τ.λ. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος· διότι π.χ. τὸ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ καὶ χρειάζονται ἀκόμη δύο πέμπτα $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1. Διότι τὸ $\frac{7}{6}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ $\frac{6}{6}$ καὶ ἀπὸ $\frac{1}{6}$. δηλαδὴ ἀπὸ τὴν μονάδα 1 καὶ $\frac{1}{6}$ ἀκόμη.

Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

—1— α) $\frac{5}{5}$, β) $\frac{10}{5}$, γ) $\frac{15}{5}$, $\frac{40}{5}$ κτλ. Ὅθεν **διὰ νὰ τρέψω ἀκέραιον εἰς κλάσμα μὲ δοθέντα παρονομαστὴν πολλαπλασιάζω τὸν ἀκέραιον μὲ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ κάτω ἀπὸ τὸ γινόμενον γράφω παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.**

—6— α) $18 = \frac{18\times15}{15} = \frac{270}{15}$, β) $25 = \frac{25\times21}{21} = \frac{525}{21}$ . . . στ) $1305 = \frac{156600}{120}$

Τροπὴ μικτῶν ἀριθμῶν εἰς κλάσμα. —2— διότι τὸ ἀκέραιον μέρος του γίνεται κλάσμα. —3— Οἱ 15 πήχεις κάμνουν $\frac{15\times8}{8} = \frac{120}{8}$. ἀλλὰ 120 ὄγδοα καὶ 7 ὄγδοα κάμνουν 127 ὄγδοα (ὅπως 120 δραχμαὶ καὶ 7 δραχμαὶ κάμνουν 127 δραχμάς)· ὥστε $15\frac{7}{8}$ πήχεις $= \frac{127}{8}$ πήχεις κτλ. Ὥστε **διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλασματικὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ κάτω ἀπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.**

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος. —1— Γνωρίζομεν ὅτι 1 πῆχυς ἔχει $\frac{8}{8}$· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὰ $\frac{16}{8}$ λάβωμεν τὰ $\frac{8}{8}$, κάμνομεν 1 πῆχυν· μένουσι δὲ ἀκόμη 16 ὄγδοα — 8 ὄγδοα = 8 ὄγδοα ἤτοι 1 πῆχυς ἀκόμη. Ὥστε $\frac{16}{8}$ πήχεις κάμνουν 2 πήχεις (16 : 8 = 2).

—2— $\frac{80}{10}$ δραχ. = 8 δρχ. (80 : 10 = 8) —3— 1, 5, 25 κτλ.

—4— $\frac{35}{2}$ πήχεις $= 17\frac{1}{2}$ πήχ. (35 : 2 = 17 καὶ ὑπόλοιπον 1) —5— $3\frac{3}{4}$ (15 : 4 = 3 καὶ ὑπόλοιπον 3) —6— $7\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{3}$ κ.τ.λ.

—7— 35 δρχ. : 6 = $5\frac{5}{6}$ δρχ., 78 μ. : 12 = $6\frac{6}{12}$ μ., 95 χιλγρ. : 18 = $5\frac{5}{18}$ χιλγρ. κ.τ.λ.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων. Ὁμὰς πρώτη. (Ἰδιότης αη).

—1—α) διπλασιάζεται· διότι εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ 10 δωδέκατα εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὰ 5 δωδέκατα. β) Θὰ διπλασιασθῇ. Διότι ἐὰν λάβω π. χ. μίαν εὐθεῖαν καὶ τὴν διαιρέσω εἰς 12 ἴσα μέρη, διὰ νὰ λάβω τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτῆς, πρέπει νὰ λάβω δύο ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη εἰς τὰ ὁποῖα τὴν διήρεσα. Ὥστε τὸ $\frac{1}{6}$ εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{12}$ καὶ ἑπομένως τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι διπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$. Ὁμοίως τὸ $\frac{5}{4}$ (12 : 3=4) εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{12}$ κ.τ.λ. Ὅθεν **ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕνα ἀριθμὸν ἢ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ διαιρεθῇ μὲ ἕνα ἀριθμὸν** (ἐὰν διαιρεῖται) **ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

—2— Μὲ δύο· ἢ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ ἢ μὲ τὴν διαίρεσιν τοῦ παρονομαστοῦ (ὅταν διαιρεῖται).

Ὁμὰς δευτέρα. (Ἰδιότης β'). —1— α) Διαιρεῖται διὰ 2. Ἡ ἐξήγησις δίδεται ἀνωτέρω (1,α) β) Διαιρεῖται διὰ 2. Ἡ ἐξήγησις δίδεται ἀνωτέρω (1,β). Ὅθεν. **Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος διαιρεθῇ μὲ ἕνα ἀριθμὸν** (ἐὰν διαιρεῖται) **ἢ ὁ παρονομαστὴς πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕνα ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

—6— Εὑρίσκω τὸ ζητούμενον, διαιρῶν τοὺς δύο ἀριθμητάς, ὅπου οἱ παρονομασταὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ ἢ τοὺς παρονομαστάς, ὅπου οἱ ἀριθμηταὶ εἶναι οἱ αὐτοί.—**7**—καὶ—**8**—Πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐν γένει ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξήσῃ τὸ κλάσμα αὐξάνει (διότι ἔχει περισσοτέρας μονάδας)· ἀλλ' ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξήσῃ τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται (διότι αἱ μονάδες του μικραίνουν).

Ὁμὰς τρίτη. (Ἰδιότης γ΄.). **—1—** $\frac{1}{2}$ ὀκ. $=$ $\frac{2}{4}$ ὀκ. $=$ $\frac{4}{8}$ ὀκ. $=$ $\frac{5}{10}$ ὀκ. $=$ $\frac{200}{400}$ κ.τ.λ.

— 4 — $\frac{4}{8}$ π. $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ κ.τ.λ. Ὅθεν, **ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολ/σι μὲ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ διαιρεθῶσι μὲ ἕνα ἀριθμόν.**

— 8 — α) $\frac{7}{15}$ β) $\frac{21}{45}$ γ) $\frac{7}{15} = \frac{21}{45}$ **— 11 —** α) $\frac{3\times9}{4\times9} = \frac{27}{36}$ (36:4=9), β) $\frac{7\times3}{9\times3}$

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων. **—1—** α) 2,3,6 β) 2,4,8 (τὴν μονάδα 1 τὴν παραλείπομεν) γ) ὁ 2 δ) $\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$. **—2—** Κοινοὶ διαιρέται 2,3. $\frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}$, $\frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$ ἢ $\frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$. **—4—** Δὲν ἁπλοποιεῖται καὶ λέγεται ἀνάγωγον.

Σημ. Ἡ ἁπλοποίησις στηρίζεται εἰς τὴν ἰδιότητα γ΄ καὶ γίνεται, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην.

Τὸ κλάσμα $\frac{15}{5}$ περιέχει 3 ἀκεραίας μονάδας $\frac{15}{5} = 3$· διὰ δὲ τῆς ἁπλοποιήσεως λαμβάνομεν $\frac{15:5}{5:5} = \frac{3}{1}$· ὥστε $3 = \frac{3}{1}$. Ὅθεν **δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.**

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων μεταξύ των κ.τ.λ. **—1—** Εἰς αὐτὴν βλέπομεν ὅτι **πολ/μεν τοὺς ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.** στηριζόμεθα δὲ εἰς τὴν ἰδιότητα γ΄. **—2—** Ὡς προηγουμένως. **—3—** α) Κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα $\frac{3\times8}{4\times8}$, $\frac{5\times4}{8\times4} = \frac{24}{32}$, $\frac{20}{32}$· ἀλλὰ ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν μικρότερον κοινὸν παρονομαστὴν τοῦ 8· ὁμοίως εὑρίσκομεν β) $\frac{1}{10}$, $\frac{1\times2}{5\times2} = \frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ (10 : 5 = 2) κ.τ.λ.

—4—α)Καὶ ἐδῶ παρατηροῦμεν ὁμοίως ὡς ἄνω γ) $\frac{1\times3}{6\times3}$, $\frac{1\times2}{9\times2} = \frac{3}{18}$, $\frac{2}{18}$ (18 : 6 = 3, 18 : 9 = 2) κ.τ.λ.

—5— α) $\frac{1\times3\times4}{2\times3\times4}$, $\frac{1\times2\times4}{3\times2\times4}$, $\frac{1\times2\times3}{4\times2\times3}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{6}{24}$ **ἤτοι πολ/μεν τοὺς ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.**

—6— α) Κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα $\frac{18}{36}$, $\frac{12}{36}$, $\frac{6}{36}$ · ἀλλ' ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν μικρότερον κοινὸν παρονομαστὴν τὸν 6, διότι τὸν διαιροῦν ὅλοι οἱ παρονομασταὶ καὶ λαμβάνομεν $\frac{1\times3}{2\times3}$, $\frac{1\times2}{3\times2}$, $\frac{1}{6} = \frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ β) $\frac{1\times4}{2\times4}$, $\frac{3\times2}{4\times2}$, $\frac{5}{8} = \frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{5}{8}$ κ.τ.λ.

—7— β) $\frac{1\times4}{6\times4}$, $\frac{3\times3}{8\times3}$, $\frac{5\times2}{12\times2} = \frac{4}{24}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{10}{24}$ κ.τ.λ.

Σημ. Ὁ μικρότερος κοινὸς παρονομαστὴς ποὺ ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων, (ἐὰν εἶναι ἀνάγωγα). Λέγεται δὲ **ε.κ.π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ὁ μικρότερος ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἀπὸ αὐτούς.**

Τὸ εὑρίσκομεν δὲ ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς διδομένους ἀριθμοὺς καὶ παρατηροῦμεν, ἐὰν διαιρεῖται μὲ καθένα τῶν ἄλλων. Ἐὰν ναὶ τότε οὗτος εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Ἐὰν ὄχι τὸν διπλασιάζομεν, τριπλασιάζομεν κ. ο. κ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, ποὺ νὰ διαιρεῖται ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους· τότε οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον ε.κ.π.

Πράξεις ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Πρόσθεσις. Διὰ νὰ προστεθῶσι κλάσματα πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμα, ἤτοι νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα. Προσθέτομεν δὲ κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτοντες μόνον τοὺς ἀριθμητάς των καὶ ἀφίνοντες παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.

Ὁμὰς δευτέρα. Πρόσθεσις μικτῶν· ὁ κανὼν ἐξάγεται ἀπὸ τὴν ἄσκ. 1.

Ἀφαίρεσις. Διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ ἕνα κλάσμα ἀπὸ ἄλλο πρέπει νὰ εἶναι ὁμώνυμον μὲ αὐτό. Τότε δὲ ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου καὶ κάτω ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.

Ὁμὰς δευτέρα. **Ἀφαίρεσις μικτῶν. Ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ δύο ὑπόλοιπα.**

—15— α) $\frac{13}{15} - \frac{7}{15} = \frac{6}{15}, \frac{6}{15} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ ἢ $\frac{13}{15} - \left(\frac{7}{15} + \frac{2}{15}\right) = \frac{13}{15} - \frac{9}{15} = \frac{4}{15}$ κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

—2— $1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$ **— 7 —** $7\frac{1}{12}$ μ. μ. **— 8 —** $26\frac{7}{15}$ ὥρας.

— 9 — $132\frac{18}{20}$ ὀκ.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον. Ὁμὰς πρώτη. **— 1 —** α) $\frac{2}{7} \times 3$, $\frac{3}{13} \times 3$, $\frac{2}{21} \times 5$ κ. τ. λ. **—2—** Ὁ πολ)μὸς $\frac{3}{8}$ πήχ. $\times$ 4 μᾶς λέγει νὰ κάμωμεν τὸ $\frac{3}{8}$ τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερον. Ὅθεν (ἰδιότης κλασμάτων α') **Διὰ νὰ πολ)μεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον ἢ πολ)μεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν** (ἐὰν διαιρεῖται).

Ὁμὰς δευτέρα. Πολ)μὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον. Ὁ κανὼν ἐξάγεται ἀπὸ τὴν ἄσκ. 1 (δύο τρόποι).

Διαίρεσις δι' ἀκεραίου. Ὁμὰς πρώτη. — 1 — β) Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου. Ἡ ἄσκησις β δίδει τὸν κανόνα καὶ ἡ ἰδιότης τῶν κλασμάτων β' τὸν ἐξηγεῖ.

Ὁμὰς δευτέρα. Δ)σις μικτοῦ δι' ἀκεραίου. Ἡ ἄσκησις 1 δίδει τὸν κανόνα (δύο τρόποι· προτιμῶμεν δὲ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλον ἀναλόγως τῆς ἀσκήσεως π. χ. ἡ ἄσκησις 2)

— 2 — α) $9 : 9 + \frac{9 : 9}{10} = 1\frac{1}{10}$ κ. τ. λ. β) $18 : 9 + \frac{5}{7 \times 9} = 2\frac{5}{63}$ κ. τ. λ.

γ) $\frac{11}{4} : 11 = \frac{11 : 11}{4} = \frac{1}{4}$ κ.τ.λ.

Πολ)σμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα ἢ ἐπὶ μικτόν.

Ὁ πολ)μὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον σημαίνει τὴν ἐπανάληψιν αὐτοῦ πολλάκις· ἐνῷ ὁ πολ)μὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα δὲν ἠμπορεῖ νὰ σημαίνῃ τὸ ἴδιον. Δὲν ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι $7 \times \frac{5}{8}$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 7, πέντε ὄγδοα φοράς. Διὰ τοῦτο ὁ πολ)μὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα λαμβάνει ἄλλην σημασίαν γενικωτέραν. Διὰ νὰ ἴδωμεν τοῦτο ἂς λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Μία ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 35 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῆς ;

Λύσις. (Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα). Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 35 δραχ. τὸ ἓν ὄγδοον αὐτῆς ἀξίζει, ὀκτὼ φορὰς ὀλιγώτερον ἤτοι $\frac{35}{8}$ δραχ. καὶ τὰ 5 ὄγδοα τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 5 φορὰς τὰ $\frac{35}{8}$ ἤτοι $\frac{35}{8} \times 5 = \frac{175}{8}$ δραχ. $= 21\frac{7}{8}$ δραχμάς.

Ἀλλὰ διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο βλέπομεν ὅτι ἐκάμαμεν **πρῶτον** διαίρεσιν (μερισμὸν) τοῦ 35 εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ **δεύτερον** ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ ἕνα μέρος δηλαδὴ τὰ $\frac{35}{8}$ ἐπὶ 5. Ἀλλὰ ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος (τῆς 1 ὀκᾶς) ἑνὸς πράγματος καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν **κλασματικῶν** μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν **ἀκεραίων** μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος κάμνομεν πολλαπλασιασμόν, κατ' ἀναλογίαν καὶ ὅταν ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν **κλασματικῶν** μονάδων λέγομεν ὅτι κάμνομεν πολλαπλασιασμόν, μολονότι κάμνομεν δύο πράξεις διαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμόν.

Δηλαδὴ τὰς δύο αὐτὰς πράξεις τὰς λέγομεν μὲ ἕνα ὄνομα **πολλαπλασιασμόν**, διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὁ προηγούμενος κανὼν οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ποὺ ζητεῖται ἡ ἀξία των (εἴτε ἀκέραιος, εἴτε κλασματικός). Ὥστε πρέπει νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ πολ/σμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα.

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶναι ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ. Ποῖον μέρος τοῦ πολ/στέου θὰ ἐπαναληφθῇ δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πόσας δὲ φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ. Οὕτω ὁ πολ/σμὸς $22 \times \frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 22, δηλαδὴ τὸ $\frac{22}{4}$, τρεῖς φορὰς ἤτοι $22 \times \frac{3}{4} = \frac{22}{4} \times 3 = \frac{22 \times 3}{4}$

Τώρα δὲ ἐξάγεται καὶ ὁ κανών. **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα πολ/μεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ κάτω ἀπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.**

Σημείωσις. Ὁ πολ/σμὸς καταντᾶ διαίρεσις (μερισμός), ὅταν ὁ πολ/στὴς εἶναι κλασματικὴ μονάς. Διότι π. χ. $8 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν νέαν σημασίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὁ ἀριθμὸς ὅστις πολλαπλασιάζεται αὐξάνει μέν, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δὲ ἂν εἶναι μικρότερος αὐτῆς (μένει δὲ ὁ ἴδιος ὅταν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν μονάδα 1).

Ὁμὰς δευτέρα. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα. —**1**— Ὁ πολ/σμὸς $\frac{17}{20} \times \frac{3}{8}$ σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{17}{20}$ τρεῖς φοράς. Ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{17}{20}$ εἶναι $\frac{17}{20 \times 8}$· τὸ δὲ τριπλάσιον αὐτοῦ εἶναι $\frac{17 \times 3}{20 \times 8}$ ἤτοι $\frac{17}{20} \times \frac{3}{8} = \frac{17 \times 3}{20 \times 8}$· ἐξ οὗ ἐξάγεται ὁ σχετικὸς κανών.

Ὁμὰς τρίτη. Ἀπὸ τὴν ἄσκησιν 1 ἐξάγεται ὁ κανὼν πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ μικτοῦ.

Προβλήματα διάφορα.

—**4**— Τὰ 4 τεμάχια χωρίζονται ἀπὸ 3 αὐλάκια. Ὥστε ἔχομεν $7\frac{3}{4}$ μ.

$\times 4 + \frac{1}{5}$ μ. $\times 3$. —6— $4\frac{9}{10}$ μ. $+ 4\frac{9}{10}$ μ. $\times 3 = 4\frac{9}{10}$ μ. $\times 4$ —7— $15\frac{1}{8}$ λ. $\times$ $8\frac{1}{2}$. —8— $85\frac{9}{20}$ στρ. $\times 1\frac{1}{2} \times 2$ —10— α) Κέρδος 1 ὀκᾶς $5\frac{1}{10}$ δρ., $7\frac{3}{4}$ δρ. β) ὅλον κέρδος $3424\frac{1}{2}$ δρχ.

Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος. Ὁμὰς **πρώτη.** —1— α) Γνωρίζομεν τὴν ἀξίαν μονάδων τινων (τῶν $\frac{3}{4}$) καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος (τῆς 1 ὀκᾶς). Ἄρα θὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν (μερισμοῦ) 15 δρχ. : $\frac{3}{4}$. Διὰ νὰ ἴδωμεν τώρα πῶς θὰ διαιρέσωμεν διὰ κλάσματος παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι τὸ 3 εἶναι 4 φορὰς **μεγαλύτερον** τοῦ $\frac{3}{4}$. Ὥστε ἂν διαιρέσωμεν τὸν 15 διὰ 3, τὸ πηλίκον $\frac{15}{3}$ εἶναι 4 φορὰς **μικρότερον** ἀπὸ τὸ ζητούμενον· ἐπομένως διὰ νὰ τὸ κάμωμεν ἴσον μὲ τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 4· ἤτοι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $\frac{15\times4}{3} =$ $15 \times \frac{4}{3}$· ὥστε 15δρ.: $\frac{3}{4} = 15 \times \frac{4}{3}$ δρχ. Ἐξ οὗ καὶ ὁ κανών: **διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.**

Ὁμὰς δευτέρα. —1— $\frac{8}{9} : \frac{2}{9} = 8 : 2 = 4$ ἢ $\frac{8}{9} : \frac{2}{9} = \frac{8}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$ κ.ο.κ. —3— (Μερισμοῦ). $\frac{3}{8}$ π. : $\frac{2}{5}$ —4— $\frac{5}{9}$ μ. : $\frac{3}{4}$ —5— $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$ —6— $\frac{15}{56} : \frac{3}{8}$ —7— $7\frac{7}{20}$ δρ. : $\frac{3}{4}$ —13 – (Μετρήσεως) $35\frac{3}{4} : 1\frac{3}{8}$ —14— $102\frac{1}{5} : 14\frac{3}{4} = 7$ ὀκ. —15— $48\frac{1}{8} : 7\frac{1}{4} = 6\frac{1}{2}$ ὥρ. —16— $197\frac{3}{4} : 4\frac{3}{8} = 45$ ὑπ.

Λύσις προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα (Δεύτεραι λύσεις).

—7— $\frac{9}{16}$ τ. μ. $\times \frac{4}{5}$ —8— $60 \times \frac{4}{5}$ —9— $12 \times \frac{2}{5}$ —10— $160 \times \frac{7}{8}$ (ὅταν ζητοῦμεν μέρος τι ἀριθμοῦ, πολ/μεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα μὲ τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται τὸ μέρος) —11— $120 : \frac{3}{5}$ (ὅταν γνωρίζομεν μέρος τι ἀριθμοῦ καὶ ζητοῦμεν ὅλον τὸν ἀριθμόν, διαιροῦμεν τὸ γνωστὸν μέρος, μὲ τὸ κλάσμα μὲ τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται τὸ μέρος). —12— $42 : \frac{5}{8}$ —17— τὸ 1 χιλμ. τὸ τρέχει εἰς 1′: $\frac{7}{8} = \frac{8'}{7}$ καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ εἰς $\frac{8}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{24'}{35}$ —18— Ὁ ἀριθμὸς εἶναι $120 : \frac{3}{4} = 160$ καὶ τὰ 5 τοῦ 160 εἶναι $160 \times \frac{5}{8}$ —19— 66 ὀκ. : $\frac{4}{7}$. —20— Τὰ $\frac{5}{9}$ εἶναι 65 ὀκ. καὶ τὰ $\frac{4}{9}$ εἶναι $\frac{65\times4}{5} = 52$ ὀκ. —21— Διέθεσε τὰ $\frac{3}{10} + \frac{5}{8} = \frac{37}{40}$ καὶ ἔμειναν ἀδιάθετα 60 ἑκ. $\times \frac{3}{40} = 4\frac{1}{2}$ ἑκ. —22— Τὰ $\frac{2}{5}$ εἶναι $1\frac{1}{2}$ ἑκ. καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ εἶναι $1\frac{1}{2}$ ἑκ : $\frac{2}{5}$ $= 3\frac{3}{4}$ ἑκ. —23— Ἔδωκεν $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$· ὥστε τὸ $\frac{1}{15}$ τῶν καταθέσεων εἶναι 20 ἑκ. ὅλαι αἱ καταθέσεις εἶναι 20 ἑκ. $\times 15 = 300$ ἑκ., τὰ μεσ. 180 καὶ τὰ μακρ. 100 ἑκ. —24— Ἐξοδεύει τὰ $\frac{2}{5} + \frac{1}{8} = \frac{21}{40}$ τοῦ προϋπολογισμοῦ καὶ τὰ $\frac{19}{40}$ αὐτοῦ εἶναι 684 ἑκ. τὰ $\frac{40}{40}$ εἶναι 684 ἑκ. : $\frac{19}{40} = 1440$ ἑκ. Διὰ τὰ δημ. σχολεῖα δαπανᾶ 1440 ἑκ. $\times \frac{2}{5} = 576$ ἑκ. καὶ διὰ τὰ γυμνάσια 180 ἑκ. —25— Τὰ $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$ εἶναι 39 καὶ ὁ ἀριθμὸς $39 : \frac{13}{12} = 36$ —26— 60 : $\frac{15}{12} = 48$ —27— $60 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = 18$. —28— Τὸ α′ εἶχε κάμει $6\frac{1}{2}$ μ. $\times 4 = 26$ μ. Τὸ β′ πλησιάζει τὸ α′ $9 - 6\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ μ. εἰς μίαν ὥραν. Ἄρα θὰ τὸ φθάση εἰς $26 : 2\frac{1}{2} = 10\frac{2}{5}$ ὥρας. **—30—** Τὰ $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 32 καὶ ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ $32 : \frac{8}{15} = 60$.

Τροπὴ κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά. Τρέπομεν ἕνα κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του· ἡ δὲ τροπὴ θὰ γίνῃ ἢ ἀκριβὴς (ἄν εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0 ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα α), β) καὶ γ) τῆς ἀσκήσεως 2 τῆς πρώτης ὁμάδος ἢ κατὰ προσέγγισιν (ἂν δὲν εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0, ὅπως εἰς τὸ παραδ. δ) τῆς ἰδίας ἀσκήσεως 2.

Προβλήματα διάφορα. **— 1 —** $\frac{450000}{6200000} = \frac{9}{124}$ **— 4 —** $60\frac{9}{16}$ **— 5 —** $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}\right) \times 15 = 10{,}5$ **— 7 —** $234 \times \frac{7}{9} = 182$ **— 8 —** $126 : \frac{7}{8} = 144$ **— 9 —** $54 \times \frac{5}{4} = 67\frac{1}{2}$ **— 10 —** 72 **— 11 —** $7800 \times 0{,}15$ **— 12 —** $337{,}2 \times 3{,}5 = 1180{,}20$. **— 13 —** $10{,}80 \times \frac{9}{4} \times 30 = 729$ **— 14 —** $82{,}50 \times 28{,}5 \times 25 = 58781{,}25$ **— 15 —** ὄγκος 1 δέματος $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times 0{,}8 = 0{,}3$ κ. μ. καὶ 1200 δεμ. 360 κ. μ. ἀχρησιμ. 60 κ. μ. Χωρεῖ ἀκόμη $60 : 0{,}3 = 200$ δέμ. **— 16 —** Βοήθημα $2400 \times \frac{2}{3} = 1600$. Ἐξοδεύει $800 \times \frac{3}{5} = 320$ καὶ καταθέτει 480. **— 17 —** Τὸ ψωμὶ τῶν 440 ὀκ. σίτου εἶναι 440 ὀκ. + 440 ὀκ. $\times \frac{1}{4} = 550$ ὀκ. καὶ τὸ ἔχει ἐξασφαλίσει δι' ἡμέρας $550 : 1{,}5 = 366$ (καὶ κάτι). **— 18 —** α) $17\frac{21}{40} - 9\frac{1}{10} = 10\frac{17}{40}$ β) $2\frac{1}{10} + 20 + 28\frac{1}{2}$ γ) $8\frac{4}{7} - 2\frac{1}{4}$. **— 19 —** $48\frac{8}{9} : 8$ **— 20 —** $7\frac{3}{4} : 3{,}2$ **— 22 —** $37{,}5 : 30 = 1{,}25$. **— 23 —** α) 4×5 β) $4 \times 5{,}4 \times 2 + 5 \times 5{,}4 \times 2 = 97{,}2$ γ) $20 : \frac{1}{100} = 2000$ δ) $2{,}5 \times 2000$ **— 24 —** Τὸ ὑπόλοιπον $1 - \left(\frac{2}{5} + 0{,}25\right) = 0{,}35$ εἶναι 63 δρχ. ἄρα τὰ $\frac{2}{5} = 0{,}40$ εἶναι $\frac{63 \times 40}{35} = 72$ δρ. καὶ τὰ 0,25 εἶναι 45 δρχ. **— 25 —** Τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ $\left(\frac{6}{3}\right)$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ κάμνουν $\frac{8}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ. Τὰ $\frac{8}{3}$ λοιπὸν εἶναι 72 καὶ ὁ ἀριθμὸς εἶναι $72 : \frac{8}{3} = 27$. Καὶ πράγματι εἶναι $27 \times 2 + 27 \times \frac{2}{3} = 54 + 18 = 72$. **— 26 —** Τὰ 1440 τ. μ. $= 1440 \times \frac{16}{9} = 2560$ τ.τ.π. καὶ τὸ 1 οἰκόπεδον εἶναι $2560 : 6 = 426\frac{2}{3}$ τ.τ.π.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤ' ΤΑΞΕΩΣ

ΜΕΘΟΔΟΙ. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν. Ὁμὰς πρώτη (ποσὰ ἀνάλογα) **— 1 —** ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει $\frac{125}{5}$ δραχ. διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων καὶ ἡ ἀξία αὐτῶν εἶναι ποσὰ **ἀνάλογα.** Ἐπειδὴ διπλασιαζομένης τῆς τυχούσης τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ (π.χ. τοὺς 5 πήχεις τοὺς ὁποίους κάμνομεν 10) διπλασιάζεται καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου (δηλ. αἱ 92 δραχ. γίνονται 184 δρχ.). Οἱ 11 πήχεις ἀξίζουν $\frac{125 \times 11}{5} = 25$ δρχ. $\times 11 = 275$ δρχ.

— 3 — Διὰ τοῦ κανόνος τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

8 ὀκ. ἀξίζουν 92 δρχ.
35 » » X

$X = 92$ δρ. $\times \frac{35}{8} = 402{,}50$ δρ.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου δίδονται **δύο** ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα καὶ δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ αὐτῶν (ἐδῶ αἱ τιμαὶ 8 ὀκ. καὶ 92 δραχ.). Ἐξ αὐτῶν ἡ μία μεταβάλλεται (ἐδῶ μετεβλήθη ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων καὶ ἔγινεν ἀπὸ 8, 35) ζητεῖται δὲ κατόπιν τὶ μεταβολὴν θὰ πάθῃ ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ (δηλ. ἐδῶ τί μεταβολὴν θὰ πάθῃ ἡ τιμὴ τῶν 92 δραχμῶν. Ἀπὸ τὴν λύσιν δὲ εἴδομεν ὅτι ἔγινεν 402, 50 δραχμαί.). Εἰς αὐτὰ ὅπως βλέπομεν δίδονται **τρεῖς** ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

—4— $285\frac{1}{3}$ **—5—** 384 **—6—** 12 **—7—** 660 **—8—** 51 **—9—** 27,50 δρ. $\times\frac{250}{350}$ = 38,50 δρ. **—10—** 125 δρ. $\times\frac{500}{30}$ = $2083\frac{1}{3}$ δρ. **—11—** 13 ρ. $\times\frac{5104}{1144}$ = 58 ρ. = $7\frac{1}{4}$ πήχ. **—12—** 3.5 λ. $\times\frac{37}{12}$ = 9.25 λ.

Ὁμὰς δευτέρα. (Ποσὰ ἀντίστροφα). **—1—** 1 ἐργάτης τὸ σκάπτει εἰς 10 × 9 ἡμέρας διότι τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα**. Ἐπειδὴ διπλασιαζομένης τῆς τυχούσης τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ (π. χ. τῶν 9 ἐργ.), ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ (10 ἡμ.) διαιρεῖται διὰ 2. Οἱ 15 ἐργάται θὰ τὸ σκάψουν εἰς $\frac{10\times9}{15}$ = 6 ἡμέρας.

—2— Διὰ τοῦ κανόνος τῆς ἁπλῆς μεθόδου.

10 ἐργ. τὸ σκάπτουν εἰς 28 ἡμ.
× » » » 8

× = 10 ἐρ. $\times\frac{28}{8}$ = 35 ἐργ.

—3— 12 ὧρ. $\times\frac{34}{40}$ = $10\frac{1}{5}$ ὧρ. **—4—** 8. **—5—** 17 **—6—** 468 **—7—** 57 **—8—** 48 **—9—** 68 σαν. $\times\frac{8}{8,5}$ = 64 σ. **—10—** 600 δρ. $\times\frac{8}{12}$ = 400 δρ.

Προβλήματα ποσοστῶν. Οἱ ἄνθρωποι εἰς τὰς συναλλαγάς των πολλὰ ποσὰ τὰ προσδιορίζουν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000. Π.χ. ὁ μεσίτης λαμβάνει μεσιτείαν 2 % ἤτοι διὰ κάθε 100 δραχμὰς ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος τὸ ὁποῖον μεσιτεύει καὶ πωλεῖται, λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 2 δραχμάς. Τὸ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000 ἀντιστοιχοῦν ποσὸν ἐπὶ τῆς ὅλης ἀξίας λέγεται **ποσοστόν.** Εἰς τὰ προβλήματα ποσοστῶν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Λύονται δὲ διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ὁμὰς πρώτη, (Εὕρεσις ποσοστοῦ) **—6—** 675 **—7—** 220000 **—8—** 30 **—9—** Κέρδος 1 πήχεως 8 δρχ. $\times\frac{56,25}{100}$ = 4,50 δρ. Πώλησις 60,75 δρ. ἢ ἀπ' εὐθείας (100 δρχμ. ἀξ. τὸ πωλεῖ 108) 108 δρ. $\times\frac{56,25}{100}$ = 60,75 δρ. **—10—** 136 **—11—** 618,75 **—12—** 72,5 **—13—** 28000 **—14—** 52 **—15—** α) 29450 β) 28272.

Ὁμὰς δευτέρα. (Εὕρεσις τῆς ἀξίας). **—2—** 100 δρ. $\times\frac{800}{2}$ = 40000 δρ. **—3—** 30000 δρ. **—4—** 85000 **—5—** 30000 **—6—** 75000.

Ὁμὰς τρίτη (Εὕρεσις τοῦ τόσον τοῖς %). **—2—** 12 **—3—** 7,5 **—4—** 8 **—5—** 20 **—6—** 35 **—7—** 210.

Ὁμὰς τετάρτη. **—2—** 100 ὀκ. $\times\frac{96}{120}$ = 80 ὀκ. **—3—** 100 δρ. $\times\frac{462,50}{92,50}$ = 500 δρ. **—4—** 3500 **—5—** 4.

Ὁμὰς πέμπτη (διάφορα προβλήματα ποσοστῶν). **—1—** $95\frac{1}{2}$ ὀκ. $\times\frac{875}{100}$ = $835\frac{5}{8}$ ὀκ. **—2—** 0,25 δρ. $\times\frac{5600}{100}$ = 140 δρ. **—3—** α) 105 $\times\frac{12000}{100}$ = 12600 β) 105 $\times\frac{12600}{100}$ = 13230. **—4—** Ἐπίδομα 360 δρ. Πληρώνει 48 + 3.60. Μένουν (2400 + 360) — (48 + 3.60) = 2708,40 δρ. **—5—** α) 36 $\times\frac{100}{45}$ = 80 β) 20 % **—6—** ἀξία 100 δρ. $\times\frac{3600}{112,5}$ = 3200. Ζημία 160 δρ. $\times\frac{100}{3200}$ = 5 % **—7—** κέρδος 40000, φόρος 4000, καθ. κέρδος 36000 πρὸς 9 % **—8—** 23,43 περίπου **—9—** 11 **—10—** α) 16,80 β) 20,16 **—11—** α) $\frac{3}{4}$ β) 7.65 γ) 9,15 **—12—** α) 150000 β) 48750.

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν. —1— α) $\frac{900}{5}$ δρχ. β) $\frac{900}{5\times4}$ δρ. γ) $\frac{900\times7}{5\times4}$ δρ. δ) $\frac{900\times7\times8}{5\times4}$ δραχ. = 2520 δρχ.

Παρατήρησις. Αἱ 4 αὗται ἐρωτήσεις ἀποτελοῦν, τὴν λύσιν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, τοῦ προβλήματος: **5 ἐργάται, ἐὰν ἐργασθοῦν 4 ἡμέρας, κερδίζουν 900 δραχ· πόσας δραχμὰς κερδίζουν 7 ἐργάται, ἐὰν ἐργασθοῦν 8 ἡμέρας ;**

Τοῦτο κατὰ τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λύεται ὡς ἑξῆς.

5 ἐργ. ἐργαζ. 4 ἡμέρ. κερδίζ. 900 δρχ.
7 » » 8 » » Χ ; »

Χ = 900 δρχ. $\times \frac{7}{5} \times \frac{8}{4}$ = 2520 δραχ.

Συγκρίνομεν καθ' ἓν τῶν ποσῶν πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ εἶναι α) ἀριθμὸς ἐργατῶν καὶ ἀμοιβὴ ἀνάλογα β) ἀριθμὸς ἡμερῶν ἐργασίας καὶ ἀμοιβὴ ἀνάλογα.

Σημ. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν δίδονται ποσὰ **περισσότερα τῶν δύο**, ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν (εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, τὴν ἀμοιβὴν) ὡς καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ (900 δρχ.) ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν (5 ἐργ. καὶ 4 ἡμ.) καὶ ζητεῖται τὶ γίνεται ἡ τιμὴ αὔτη (δηλ. τῶν 900 δραχ.), ὅταν αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν ἄλλων ποσῶν μεταβληθῶσι (δηλ. γίνουν ἀπὸ 5 ἐργ. 7 ἐργ. καὶ ἀπὸ 4 ἡμ. 8 ἡμ.).

Τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν (ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω) καὶ διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος μὲ τὴν ὁποίαν λύομεν τὰ προβλήματα αὐτὰ λέγεται **σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.**

—**2**— α) $\frac{420\times5}{3}$ δραχ. β) $\frac{420\times5\times7}{3\times4}$ = 1225 δραχ. **Παρατήρησις.** Αἱ ἐρωτήσεις α καὶ β ἀποτελοῦν τὴν ἀνάλυσιν εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, τοῦ προβλήματος τῆς συνθέτου : **Εἰς ἕνα οἰκοτροφεῖον διὰ νὰ τραφοῦν 3 μαθηταὶ εἰς 4 ἡμέρας χρειάζονται 420 δραχμάς. 5 μαθηταὶ διὰ νὰ τραφοῦν 7 ἡμέρας πόσας δραχμὰς χρειάζονται ;**

Καὶ εἶναι τὰ ἁπλᾶ προβλήματα τὰ ἑξῆς:

α) 3 μαθ. (διὰ τροφὴν 4 ἡμ.) χρειάζονται 420 δραχ.
5 μαθ. (διὰ τροφὴν 4 ἡμ.) χρειάζονται Χ δρχ.

β) (5 μαθ.) διὰ τροφ. 4 ἡμ. χρειάζονται 420 δρ. $\times \frac{5}{3}$
(5 μαθ.) διὰ τροφ. 7 ἡμ. χρειάζονται Χ ;

γ) 420 δρ. $\times \frac{9}{3} \times \frac{6}{4}$ = 1890 δρχ. —**3**— α) 14 ἡμ. $\times \frac{4}{7}$ β) 14 ἡμ. $\times \frac{4}{7} \times \frac{6}{8}$ γ) 14 ἡμ. $\times \frac{4}{12} \times \frac{6}{7}$ —**4**— 1800 δρ. $\times \frac{8}{6} \times \frac{4}{3}$ = 3200 δρ. —**5**— 6 ὥρ. $\times \frac{18}{15} \times \frac{5}{4}$ = 9 ὥρ. —**6**— 16 π. $\times \frac{18}{8} \times \frac{6}{8}$ = 27 π. —**7**— 1080 δρ. $\times \frac{4}{3} \times \frac{15}{12}$ = 1800 δρ. —**8**— 30 σαν. $\times \frac{4}{3} \times \frac{0,20}{0,16}$ = 50 σ. —**9**— 45 πηχ. $\times \frac{24}{15} \times \frac{1,25}{1,50}$ = 60 π. —**10**= 6 ὥρ. $\times \frac{5}{7} \times \frac{245}{180}$ = $5\frac{5}{6}$ ὥρ. —**11**— 8 ἡμ. $\times \frac{32}{16} \times \frac{0,60}{0,40}$ =24ἡμ.—**12**— 30 ἡμ. $\times \frac{15}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{5}{2,5}$ = 16 ἡμ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ. Εὕρεσις **τοῦ τόκου.** Πολλάκις οἱ ἄνθρωποι εὑρίσκονται εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ δανείζωνται χρήματα τὰ ὁποῖα ἐπιστρέφουν εἰς τὸν δανειστὴν μετὰ ὡρισμένον χρόνον, ἀναλόγως τῆς συμφωνίας. Ἐκτὸς ὅμως τῶν χρημάτων ποὺ ἐδανείσθησαν πληρώνουν εἰς τὸν δανειστὴν καὶ ἕνα ἄλλο ποσὸν χρημάτων ἤτοι τὸ **κέρδος** τὸ ὁποῖον λέγεται **τόκος.** Τὸ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται **κεφάλαιον**. Διὰ τὸν τόκον γίνονται ἰδιαίτεραι συμφωνίαι μεταξὺ δανειστοῦ καὶ ὀφειλέτου. Συνήθως ὁρίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τόκου τῶν 100 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος· ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς 1 ἔτος λέγεται **ἐπιτόκιον.** Ἐπίσης μία ἄλλη συνήθης συμφωνία ἡ ὁποία γίνεται, εἶναι νὰ μένῃ τὸ κεφάλαιον τὸ αὐτὸ ἐνόσῳ διαρκεῖ τὸ δάνειον. Ὁ τόκος τότε λέγεται **ἁπλοῦς.**

Ὁμὰς πρώτη. **—1—** α) διπλάσιον δηλ. 16 δραχ. β) τριπλάσιον (ἄρα τόκος καὶ κεφάλαιον ποσὰ ἀνάλογα). γ) διπλάσιον δ) τριπλάσιον (ἄρα τόκος καὶ χρόνος ποσὰ ἀνάλογα). **—3—** 7 δρ. $\times \frac{4}{1} \times \frac{24500}{100} = 6860$ δρ. **—4—** α) 318,75 β) 318,75 × 2 γ) 318,75 × 3. **—5—** 2550 **—6—** α) 1593,75 β) 1593,75 × 3 γ) 1593,75 × 5 **—7—** 16875 **—8—** 2904,30 **—9—** α) $T = \frac{5 \times 15000 \times 3}{100} = 2250$ β) 630 γ) 940,50 δ) 4359,375 ε) 2688 στ) 2800,41 **—10—** α) $\frac{5,5 \times 38500 \times 3}{100} = 6352,50$ β) 4950 γ) 10842 δ) 40437,90 **—11—** α) 8400 β) 770 **—12—** Ἔλαβεν 280000 Κ + 22400 Τ — 2240 Πρ. = 300160. **—13—** 4500 + 5400 **—14—** 3750 + 3437,50 + 5000.

Ὁμὰς δευτέρα. (Ὁ χρόνος εἰς μῆνας). **—1—** α) 10 δρ. $\times \frac{4}{12}$ β) 10 δρχ. $\times \frac{4}{12} \times \frac{400}{100} = \frac{10 \times 4 \times 400}{1200}$ δρ. γ) $\frac{10 \times 800 \times 6}{1200} = 40$. **—2—** 588 **—3—** 247,50 **—4—** 540 **—5—** 171,675 **—6—** 5950 **—7—** 199 $\frac{1}{2}$ σελ. = 9 λ. 19 σελ. 6 πεν. **—8—** Ἡ ἐξήγησις εὑρίσκεται εἰς τὸ β τῆς ἀσκήσεως 1 τῆς παρούσης ὁμάδος. α) 70 β) 109,20 γ) 800 δ) 4735,50 ε) 730 στ) 4503,51 **—9—** α) $\frac{6 \times 4760 \times 3}{1200} = 71,40$ β) 329,25 γ) 550 δ) 1552 **—10—** Τόκοι α) 572,92 β) 815,63 γ) 891,25. Ὁλικὸν 72129,80.

Ὁμὰς τρίτη. (Ὁ χρόνος εἰς ἡμέρας. **—1—** α) 9 δρ. $\times \frac{80}{360}$ β) 9 δρ. $\times \frac{80}{360} \times \frac{800}{100} = \frac{9 \times 80 \times 800}{36000}$ δρ. = 16 δρ. γ) 31,5. **—2—** 420 **—3—** 810 **—4—** 1500000 + 14062,50 **—5—** 4000 **—6—** 4993,75 **—7—** Ἡ ἐξήγησις εὑρίσκεται εἰς τὸ β τῆς ἀσκήσεως 1 τῆς παρούσης ὁμάδος. α) 240 β) 750 γ) 787,50 δ) 830,375. **—8—** α) $\frac{9 \times 7500 \times 100}{36000} = 187,50$ β) 675 γ) 335 δ) 670,07 ε) 9058,44. **—9—** Τόκοι α) 2520 β) 2587,50. Ὁλικὸν 545107,50. **—10—** 1500 Τ + 576 Πρ. **—12—** α) $\frac{25000 \times 40}{4500} = 222,22$ β) $\frac{18000 \times 24}{6000}$ γ) $\frac{30000 \times 45}{7200}$ (36000 : 5 = 7200) δ) $\frac{54000 \times 70}{9000}$ ε) $\frac{60000 \times 20}{3600} = 333,33$.

Ὁμὰς τετάρτη. **—1—** Ὁ τόκος δι' ἕνα ἔτος μιᾶς ὁμολογίας, ἠλαττωμένος κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι 6 δρ.— 6 δρ. $\times \frac{1}{4}$ = 6 δρ.—1,50 δρ.=4,50 δρ. Ὥστε λαμβάνει καθ' ἑξάμηνον τόκον 2,25 δρ. × 500 = 1125 δρχ. **—2—** Τόκος 800 ὁμολογιῶν εἰς 1 ἑξάμηνον 3,25 × 800 = 2600 καὶ ἠλαττωμένος κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$, 2600— — 2600 $\times \frac{1}{4}$ = 2600 — 650 = 1950. **—3—** ὁ ἠλαττωμένος τόκος μιᾶς ὁμολογίας, δι' ἓν ἑξάμηνον εἶναι 30 δραχ. ἄρα λαμβάνει 30 δρ. × 150 = 4500 δρ. **—4—** 22,50 δρ. × 275 = 6187,50 δρχ. **—5—** Μέρισμα μιᾶς μετοχῆς 60 δραχ. καὶ τῶν 80 μετοχῶν 4800 δρ. **—6—** 20,40 δρ. × 200 = 4080 δρ. **—7—** 28000 + 27000. **—8—** 6 δρ. + $\frac{6 \times 15 \times 6}{1200}$ δρ. = 6,45 δρ. **—9—** Κερδίζει εἰς 1 ὀκᾶν 1,30 δρ. ὅλον κέρδος 3250 δραχ. Εἰσέπραξεν 68250 δρ. **—10—** 27,40 **—11—** Ἀξία 1 πήχεως 31500 δρ. : 180 = 175 δρ. Πώλησις 175 δρ. + 8,75 δρ. **—12—** Ἀξία 96 δρ. Πώλησις 96—0,80 = 95,20. **—13—** Ἐπλήρωσε 33750 δρ. Εἰσέπραξε 33277,50 δρ. **—14—** Ἀξία οἰκίας 156000 δρ. Ἐνοίκιον 1 μηνὸς 1040 δρ. **—15—** Τόκοι 1875 δρ. Δόσις 468,75 δρ. **—16—** Κεφάλαιον καὶ τόκος 1 ἔτους 32500 δρ. + 2925 δρ. = 35425 δρ. Ἐπλήρωσε 18225 δρ. Χρεωστεῖ 17200 δρ.

Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου. Ὁμὰς πρώτη. —1— α) Αἱ 200 δραχ. φέρουν 8 δραχμὰς τόκον εἰς ἥμισυ ἔτος. β) 8 δραχμὰς τόκον εἰς δύο ἔτη φέρουν αἱ 50 δραχμαί· ἄρα τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ **ἀντίστροφα.** —2— 100 δρχ. $\times \frac{1}{5} \times \frac{1500}{12} = 2500$ δρ. —3— 17500. —4— 2500. —5— 14450. —6— 100 δρ. $\times \frac{12}{4} \times \frac{157{,}50}{7} = \frac{1200 \times 157{,}5}{4 \times 7}$ δρ. $= 6750$ δρχ. —7— 4250. —8— 51600. —9— 54000. —10— 100 δρχ. $\frac{360}{40} \times \frac{760}{12} - \frac{36000 \times 760}{40 \times 12}$ δρ. $= 57000$ δρ. —11— 18000. —12— 45000. —13— 32160. —14— Ἡ ἐξήγησις εὑρίσκεται εἰς τὰ προβλήματα 2, 6 καὶ 10. α) 1875 β) 3500 γ) 25600 δ) 45000 ε) 11045,45 στ) 18900.

Ὁμὰς δευτέρα. —1— 96000. —2— $\frac{1900 \times 1200}{4{,}75} = 480000$. —3— Μέρισμα 1 μετοχῆς 18 δραχ. ἀριθμὸς μετοχῶν 2700 : 18 = 150. —4— Μερίσματα 2 ἐτῶν 1 μετοχῆς 20 δρ. ἀριθμὸς μετοχῶν 400. —5— Ἠλαττωμένος τόκος 1 ἑξαμήνου μιᾶς ὁμολογίας 30 δρ. Ἀριθμὸς ὁμολογιῶν 400.

Ὁμὰς τρίτη. —2— $K = 100 \times \frac{9860}{116} = 8500$. $T = 1360$. —3— $K = 100 \times \frac{9090}{120} = 7575$. $T = 1515$. —4— $K = 100 \times \frac{6840}{114} = 6000$. $T = 840$. —5— $100 \times \frac{53000}{106} = 50000$. —6— $100 \times \frac{44325}{98{,}5} = 45000$.

Εὕρεσις τοῦ χρόνου. —1— α) Εἰς $\frac{100}{800}$ ἔτη (Κεφ. καὶ χρόνος ποσὰ ἀντίστροφα) β) $\frac{100}{800} \times \frac{260}{6} = 5$ ἔτη. —2— 1 ἐτ. $\times \frac{100}{3600} \times \frac{594}{5{,}5} = \frac{100 \times 594}{3600 \times 5{,}5}$ ἔτη $= 3$ ἔτη. —3— 3 ἔτη. —4— 14 μῆνες (πολ/μεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200). —5— 108 ἡμέραι (πολ/μεν τὸν τόκον ἐπὶ 36000). —6— $\frac{2000 \times 100}{2000 \times 4} = \frac{100}{4} = 25$ ἔτη. —7— $\frac{100}{8} = 12\frac{1}{2}$ ἔτη. (Ὁποιονδήποτε κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 8 % διπλασιάζεται — ἤτοι φέρει τόκον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον—μετὰ $12\frac{1}{2}$ ἔτη). —8— α) 6 ἔτη β) 5 μῆνες γ) 6 μῆνες δ) $2\frac{1}{2}$ μῆνες ε) 252 ἡμ. στ) 4 ἔτη. —9— Δηλαδὴ ἕνα ὁποιονδήποτε κεφάλαιον π. χ. 50 δρ. νὰ δώσῃ τόκον 100 δρχ. ἢ 1 δραχμῆς νὰ δώσῃ τόκον 2 δραχμῶν. α) $\frac{2 \times 100}{8} = 25$ ἔτη β) $\frac{2 \times 100}{10} = 20$ ἔτη γ) $\frac{2 \times 100}{15} = 13\frac{1}{3}$ ἔτη. —10— $2\frac{1}{3}$ ἔτη. —11— 45 ἡμ. —12— Τὰς 11 Ἰουνίου 1934 (χρόνος δανείου 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέραι).

Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου. Ὁμὰς πρώτη. —1— 120 δραχ. $\times \frac{100}{800} \times \frac{1}{} = \frac{120 \times 100}{800 \times 3} = 5$ —2— 4,5 %. —3— 75 δρ. $\times \frac{100}{5000} \times \frac{12}{3} \times \frac{75 \times 1200}{5000 \times 3} = 6$. —4— 3,5. —5— 82,50 δρ. $\times \frac{100}{4800} \times \frac{360}{75} = \frac{82{,}50 \times 36000}{4800 \times 75} = 8{,}25$ —6— 4,5 —7— α) 6,5 β) 8 γ) 5,5 δ) 7,5 ε) 12 στ) 9 —8— 4,75 (χρόνος 75 ἡμέραι).

Ὁμὰς δευτέρα. —1— Λαμβάνει καθαρὸν τόκον 60 δρ. τὸ ἔτος. Τοῦ ἔρχονται 10 %. —2— 8 %. —3— 28 %. —4— Πώλησις 1 ὀκᾶς 78,72. Ἐκέρδισε 16 %. —5— 8 %. —6— Ἀξία οἰκίας 210000 δρχ. Καθαρὸν εἰσόδημα 16800, καὶ πρὸς 8 %. —7— Τόκος κεφαλαίου 5400 δρχ. τοποθέτησις 245400 δρχ. κέρδος 5.5 %. —8— α) Ἀξία οἴνου 34375 δρχ. β) εἰσέπραξε 4375+34440=38815 δραχ. γ) κέρδος 19,30 %.

Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ. (Ὁμὰς πρώτη). —1— α) Τόκος 1ου ἔτους 4000 β) κεφ. 2ου ἔτους 84000 γ) τόκος 2ου ἔτους 4200 δ) κεφ. 3ου ἔτους 88200 ε) τόκος 3ου ἔτους 4410 στ) ἔλαβεν τέλος 3ου ἔτους 92610. Ὥστε εἰς τὰ προβλήματα ἀνατοκισμοῦ ὁ τόκος εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους (ἢ ἑξαμήνου, ἢ τριμήνου κ.τ.λ.) προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἄθροισμα λαμβάνεται ὡς νέον κεφάλαιον. —2— α) τ. 1240 β) Κ. 16740 γ) τ. 1339,20 δ) 18079,20 —3— α) 1260 β) 19260 γ) 1348,20 δ) 20608,20 ε) 1442,57 στ) 22050,77.

—4— 116985,85. —5—α) 3000 β) 63000 γ) 3150 δ) 66150 ε) 3307,50 στ) 69457,50 ζ) 3472,88 η) 72930,38. —6— 31625.

Ὁμὰς δευτέρα. —1— 265302. —2— α) 10000 β) 990000 γ) 9900 δ) 980100 ε) 9801 στ) 970299.

—3— Ἡ πρώτη κατάθεσις ἀνατοκίζεται ἐπὶ 3 ἔτη καὶ γίνεται 11576,25 β) ἡ δευτέρα ἀνατοκίζεται ἐπὶ 2 ἔτη καὶ γίνεται 11025 γ) ἡ τρίτη τοκίζεται ἐπὶ 1 ἔτος καὶ γίνεται 10500. Ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 11576,25+11025+10500=33101,25.

—4— Ὡς τὸ ἄνω. Ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 13891,30+13230+12600=39721,30.

Διάφορα προβλήματα τόκου. —1— α) Κεφ. 250000 β) τ. πρὸς 7,5 %. 1562,50 —2— α) 14625 β) 1500 γ) 10,25. —3—1363,50. —4— 14392.

—5— Ἡ ὀκᾶ κοστίζει 72 δρχ. τὴν πωλεῖ 82,80. —6— Ὁ τ. τ. π. ἀξίζει 33,75 $\left(\frac{9}{16} \times 60\right)$ τὸν πωλεῖ 35,10. —7— Τ. 100 δρ. εἰς 3 μῆνας 1,5. — Τὸν ἠγόρασεν $100 \times \frac{8148}{98,5} = 8272$ περίπου.

—8— Ἀξία οἰκοπέδου 90675 δρχ. τ. 100 δρχ. εἰς 39 μ. 16,25, κατέθεσεν $100 \times \frac{90675}{116,25} = 78000$.

—9— α) Τόκος 80000. 1800 β) δεύτερον κεφάλαιον 96800 γ) 15 μῆνες.

—10— α) 7,64 β) ἐκ τῶν 3820 δρχ. αἱ 2000 εἶναι ὁ τόκος πρὸς 4 %. Ἄρα αἱ 1820 δρ. εἶναι τὸ $\frac{1}{25}$ τοῦ κέρδους· ὥστε ὅλον τὸ κέρδος 45500 γ) κέρδος ἐπιχειρηματίου 1820×24=43680. Κεφάλαια ποὺ κατέθεσε 273000. —11— α) Ἁπλοῦς τόκος 7720 δρ. β) ἔγιναν ἀνατοκιζόμενα 47250 δρχ. ἄρα ὁ σύνθετος τόκος εἶναι 47250—42000=5250 δρ. γ) τὸ α΄. —12— 12924.

Προβλήματα ὑφαιρέσεως. Α΄. Ἐξωτερικῆς. Ὁμὰς πρώτη. —1— α) Διότι προσετέθη ὁ τόκος τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα ἠγοράσθησαν ἐπὶ προθεσμίᾳ β) εἶναι ὁ τόκος τῶν 30000 δραχ. διὰ 3 μῆνας γ) 8 % δ) ὀλιγωτέρας ε) ὅταν λήγῃ τὸ γραμμάτιον. (Ὀν. ἀξία λέγεται ἡ ἀξία ποὺ ἀναγράφει τὸ γραμμάτιον καὶ τὸ ποσὸν ποὺ λαμβάνει τις, ὅταν πωλεῖ τὸ γραμμάτιον πρὸ τῆς διορίας του, λέγεται παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου. Ὁ τόκος τῆς ὀν. ἀξίας λέγεται ἐξ. ὑφαίρεσις. —2— α) 328 β) 7872). —3— α) 43,75 β) 4156,25. —4— Ὑφ. 416,66, προμ. 187,5 εἰσ. 11895,84. —5— Ὑφ. α) 613,33 β) 437,5. Εἰσ. 42349,17. —6— Χρόνος 86 ἡμ., ὑφ. 752,50. π. α. 41247,50.

Ὁμὰς δευτέρα. — 1 — Ὀν. ἀξ. $= \frac{136 \times 1200}{4 \times 8,5} = 4800$ — 2 — 90000 — 3 — 25 — 4 — Ὑφ. 60,50. Ἡμέραι 72. — 5 — ὀν. ἀξ. 72000. Ἡμ. 65 —6— 6 % —7— 5,45 περίπου (χρόνος 55 ἡμ.) — 8 — Τ. τῶν 100 δραχ. εἰς 160 ἡμέρας = 3 δρχ. ὥστε γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 100 δρχ. θὰ προεξωφλεῖτο πρὸ 160 ἡμερῶν μὲ 97 δραχ. Γραμμάτιον λοιπὸν προεξωφληθὲν πρὸ 160 ἡμερῶν μὲ 6596 δραχ. ποίαν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἔχει; Εὑρίσκομεν 6800 δραχ.

Β΄. Ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως. — 1 — α) Διότι τοῦ ὑπελόγισαν τόκον ἐπὶ τῶν 30600 δρχ. δηλαδὴ ἐπὶ τῆς ὀν. ἀξίας. β) Ἐπὶ τῆς παρούσης. Λέγεται δὲ ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου **ἐσωτερικὴ** ὑφαίρεσις. γ) Ἡ ἐσωτερική. δ) Διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν. Δικαιολογεῖται δὲ αὕτη διὰ τῆς ἀμοιβαιότητος.

—2— α) Ὑφ. $\frac{2 \times 7650}{102} = 150$. Π. ἀξ. 7500. — 3 — Τόκος 100 δρ. εἰς 75 ἡμ. = 2,50. ὑφ. $= \frac{2,50 \times 2840}{102,50} = 69,26$ — 4 — Ἡ ὑφ. εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας δηλαδὴ τῶν 6000 δρχ. Ἄρα ὑφ. $= \frac{6000 \times 7 \times 5}{1200} = 175$. Ὀν. ἀξ. = 6175. —5—

Π. ἀξ. $= \frac{220 \times 36000}{10 \times 110} = 7200$ — **6** — Ε $= \frac{262,5 \times 1200}{500 \times 9} = 7$ — **7** — 6 — **8** — 4 μ. 10 ἡμ.

Λόγοι καὶ προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα — **2** — α) 24 : 8 = 3. Ὁ λόγος 3 φανερώνει ὅτι ὁ 24 γίνεται ἐκ τοῦ 8 λαμβανομένου τρεῖς φοράς. β) 27 : 9 = 3 κ.τ.λ. ζ) 1 : 2 = $\frac{1}{2}$ η) $\frac{2}{3}$ θ) $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ι) $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ ἤτοι ὁ λόγος $\frac{2}{9}$ φανερώνει ὅτι ὁ 8 γίνεται ἐκ τοῦ 36, ἂν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ 36 δύο φοράς. ια) $3 \times \frac{2}{1} = 6$ ιβ) $\frac{5}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$. — **3** — α) 3 β) 4 γ) $\frac{1}{2}$ δ) 2π : 10 π= $\frac{1}{5}$ ε) 0,64 : 1,00 = $\frac{64}{100} = \frac{16}{25}$ στ) $\frac{91}{100}$ ζ) $\frac{64}{91}$ η) $\frac{91}{64}$ —**4**— α) 4 : 2=2 β) 16 : 8=2 γ) 4 × 4 : 2 × 2 = 16 : 4 = 4 — **5** — α) 2 : 6 = $\frac{1}{3}$ β) 12 : 20 = $\frac{3}{5}$ γ) 2 × 4 : 6 × 4 = $\frac{1}{3}$ — **6** — α) 2 × 3,14 × 3 : 2 × 3,14 × 12 = $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. **Παρ.** Ὁ λόγος δύο περιφερειῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. β) 3,14×3 × 3 : 3,14 × 12 × 12 = $\frac{9}{144}$. **Παρ.** Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο κύκλων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. — **7** — 1 × 1 × 1 : 2 × 2 × 2 = 1 : 8 = $\frac{1}{8}$. —**8**— 2 × 2 × 2 : 2 × 2 × 10 = 8 : 40 = $\frac{1}{5}$. **Παρ.** Τὰ παραλ)δα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις ἔχουν λόγον τὸν ἴδιον ποὺ ἔχουν τὰ ὕψη των.—9— 2×3,14×4×3 : 2×3,14×2×8=4×3 : 2×8 = $\frac{3}{4}$ β)3,14×4×4×3: 3,14 × 2 × 2 × 8=4×4 × 3 : 2 × 2 × 8 = $\frac{3}{2}$ —**10**— α) 3,14 × 3 × 5 : 3,14 × 6 × 10=3 × 5 : 6 × 10= $\frac{1}{4}$ β) $\frac{1}{3}$ × 3,14 × 3 × 3 × 4 : $\frac{1}{3}$ × 3,14 × 6 × 6 × 8 = 3 × 3 × 4 : 6 × 6 × 8 = $\frac{1}{8}$ — **11**—α) 4×3,14×2×2 : 4×3.14×5×5= = 2×2 : 5×5 = $\frac{4}{25}$ β) $\frac{4}{3}$×3,14×2×2×2 : $\frac{4}{3}$ × 3,14×5×5×5 = 2×2×2 : 5×5×5 =: $\frac{8}{125}$ —**12**-- Ἀφοῦ ὁ 4 γίνεται ἀπὸ τὸν 2 λαμβανόμενον δύο φορὰς οὕτω καὶ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἐργάτου, γίνεται ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιον τῆς ἐργατρίας, ὅταν τὸ λάβωμεν δύο φορὰς ἤτοι ἡμερομ. ἐργάτου 35×2=70 δραχ. ἀντιστρόφως τὸ ἡμερομίσθιον τῆς ἐργατρίας εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμερομισθίου τοῦ ἐργάτου ἤτοι 40 δρχ.

Ὁμὰς δευτέρα. —**1**— α) 5+3+4=12 β) 600 δρ. : 12=50 δρχ. γ) ὁ πρῶτος 50 δρχ.×5=250 δρχ., ὁ δεύτερος 50 δρχ. ×3=150 δρχ. καὶ ὁ τρίτος 50 δρχ. ×4=200 δρχ. (250 δρ.+150 δρ.+200 δρ.=600 δρχ.) δ) ἂν πολλαπλασιασθῇ καθεὶς τῶν ἀριθμῶν 5,3 καὶ 4 ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 50. ε) Οἱ ἀριθμοὶ 250, 150 καὶ 200 λέγονται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5, 3, 4.

Παρ. Ἀπὸ τὰ α) β) καὶ γ) συνάγομεν τὸν κανόνα τοῦ μερισμοῦ ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν. Λέγονται δὲ δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ὅταν γίνωνται ἐξ αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἢ διὰ διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ). Εἴδομεν ὅτι οἱ 250, 150 καὶ 200 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 5, 3 καὶ 4, ἀλλὰ καὶ οἱ 5, 3 καὶ 4 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 250, 150 καὶ 200. —**2**— α) $\frac{1200 \times 15}{15+12+13}$ = 30×15=450 δρ. β) 30×12=360 δρ. γ) 30×13=390 δραχ. (450+360+390=1200). —**3**— α) 100 καὶ 140 β) 84 καὶ 96 γ) 140, 175, 315 δ) 400, 550, 250 ε) 329, 423, 235 στ) 1496, 1768, 690 ζ) 14,4 19.2 38,4 η) 17, 14,9 —**4**— 45, 39, 36. —**5**— 144, 192, 120. —**6**— 4500, 7500, 12000. —**7**— 16200, 10800, 16200. —**8**— 25000, 15000, 50000. —**9**— Αἱ 90000 δρχ. θὰ μοιρασθοῦν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν

23, 20, 17. Καὶ θὰ λάβῃ ὁ α΄ 34500 δρ. ὁ β΄ 30000 καὶ ὁ γ΄ 25500 δρ. —**10**— 932 δρμ. 372, 496. —**11**— α) $\frac{1800\times1}{1+2+4+5}$ = 150 β) 300 γ) 600 δ) 750. —**12**— Ἡ ἀδελφὴ λαμβάνει $\frac{12000\times2}{2+1}$ = 8000 καὶ ὁ ἀδελφὸς 4000. —**13**— Ἂν ἡ μικροτέρα ἀδελφὴ ὑφαίνει 1 π. ἡ μεγαλυτέρα ὑφαίνει 2 καὶ ἡ μητέρα 3 πήχ. ὥστε ἡ μικροτέρα ὕφανε $\frac{84\times1}{1+2+3}$ = 14 ἡ μεγαλυτέρα 28 καὶ ἡ μητέρα 42. —**14**— Νίτρον $\frac{60\times32}{42}$ = 45 $\frac{30}{42}$ ὀκ. ἄνθ. $\frac{60\times6}{42}$ = 8 $\frac{24}{42}$ ὀκ. θεῖον $\frac{60\times4}{42}$ = 5 $\frac{30}{42}$ ὀκάδ. —**15**— Ἀσβ. $\frac{800\times10}{10+3+12}$ = 320 ὀκ. ἄνθρ. $\frac{800\times3}{25}$ = 96 ὀκ. —**16**— 400, 300, 225. —**17**— Τρέπονται εἰς τὰ $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$ καὶ θὰ μοιράσωμεν τὰς 780 δρχ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 6, 4, 3. Εὑρίσκομεν δὲ 360, 240, 180.

—**18**— Τρέπονται εἰς τὰ $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{6}$. Εὑρίσκομεν α) $\frac{600\times4}{4+3+5}$ = 200 β) 150 γ) 250. —**19**— α) 640 β) 576 γ) 784 —**20**— 800×8 = 6400, 1000×5 = 5000, 2000×4 = 8000. Θὰ μοιράσωμεν τὰς 2910 δραχ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 6400, 5000, 8000 ἢ ἀναλόγως τῶν 64, 50, 80 ἢ τῶν 32, 25, 40. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α΄) 960 δρ. ὁ β) 750 καὶ ὁ γ) 1200 δρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ. Εἰς αὐτὰ ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι τὴν ἀνέλαβον· ἀνάγονται δὲ εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα.

—**1**— α) $\frac{3420\times5500}{28500}$ = 660 δρχ. β) $\frac{3420\times8000}{28500}$ = 960 δρχ. γ) $\frac{3420\times15000}{28500}$ = 1800 δρχ. —**2**— Θὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος τῶν 10500 δραχ. εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 45000, 40000, 55000 ἢ τῶν 45, 40, 55 ἢ τῶν 9, 8, 11. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α΄) $\frac{10500\times9}{28}$ = 3375, ὁ β΄) 3000 καὶ ὁ γ΄) 4125.

—**3**— α΄) 3000, β) 3320 γ) 1880. —**4**— α) 24000 β) 20000 γ) 16000. —**5**— Θὰ μοιράσωμεν τὰς 54000 δραχ. ἀναλόγως τῶν χρόνων. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α) 18000 ὁ β) 15000 ὁ γ) 12000 καὶ ὁ δ) 9000. —**6**— Τὸ 20 % εἶναι $\frac{20\times92500}{100}$ = 18500. Ἄρα θὰ μοιρασθῶσιν αἱ 74000 δρχ. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α) 24000 ὁ β) 30000 καὶ ὁ γ) 20000. —**7**— Κατέβαλον ὁ α) 300000 $\times\frac{2}{5}$ = 120000 ὁ β) 300000 $\times\frac{1}{4}$ = 75000 καὶ ὁ γ) 105000. Ἔλαβεν ὁ α) 30000 ὁ β) 18750 καὶ ὁ γ) 26250 —**8**— Ἀποθεματικὸν 300000×0,15 = 45000. Ποσὸν πρὸς διανομὴν 255000. Μέρισμα κατὰ μετοχὴν 255000 : 3000 = 85 δραχ. Ἔλαβεν ὁ α) 2125 δρχ. ὁ β) 3400 ὁ γ) 2970. —**9**— Αἱ 12000 δρχ. τοῦ α΄ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 1 ἔτος ἢ 12 μῆνας. Αἱ 15000 δρχ. τοῦ δευτέρου ἔμειναν ἐπὶ 9 μῆνας, διότι μετὰ τρεῖς μῆνας εἰσῆλθεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Βλέπομεν ἑπομένως ὅτι εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διάφοροι. Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὸ πρόβλημα αὐτό, πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὸ κέρδος εἰς μερίδια· ἕνα δὲ μερίδιον νὰ εἶναι τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα μῆνα. Ἂν λοιπὸν ὁ πρῶτος κατέθετεν 12000 δραχ. εἰς 1 μῆνα θὰ ἐλάμβανε 12000 μερίδια· τώρα ὅμως ποὺ κατέθεσεν 12000 δραχμὰς εἰς 12 μῆνας, θὰ λάβῃ 12000×12 = 144000 μερίδια. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ 15000×9 = 135000 μερίδια. Ὥστε ὅλον τὸ κέρδος θὰ χωρισθῇ εἰς 144000+135000 = 279000 μερίδια· ἑπομένως τὸ 1 μερίδιον εἶναι $\frac{5580}{279000}$ τῆς δραχμῆς. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α) $\frac{5580\times144000}{279000}$ = 2880 δραχ. καὶ ὁ β) $\frac{5580\times135000}{279000}$ = 2700 δρχ. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη λύσις μᾶς φανερώνει ὅτι ἐκάμαμεν μερισμὸν τοῦ κέρδους τῶν 5580 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν ποὺ εὕρομεν πολλαπλασιάσαντες τὰ κεφάλαια ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους. Ἤτοι ἐμοιράσαμεν τὸ κέρδος καὶ ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων καὶ ἀναλόγως τῶν χρόνων.

—10— Θὰ μοιράσωμεν τὰς 46800 δρχ. ἀναλόγως τῶν γινομένων 60000 × 24 = 1440000, 50000 × 18 = 900000 ἢ τῶν 144 καὶ 90. Ἔλαβον δὲ 28800 δρ. καὶ 18000 δρ. **—11—** Θὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν γινομένων 45000 × 20 = 900000, 60000 × 12 = 720000 ἢ τῶν 45 καὶ 36. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α) 27000 καὶ ὁ β) 21600. **—12—** Τὸ 8 % εἶναι 10800 καὶ τὸ καθαρὸν κέρδος ποὺ θὰ μοιρασθῇ εἶναι 124200. Θὰ μοιρασθῇ δὲ τοῦτο ἀναλόγως τῶν γινομένων 100000 × 3 = 300000, 120000 × 2 = 240000 ἢ τῶν 30 καὶ 24 ἢ τῶν 5 καὶ 4. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α) 69000 καὶ ὁ β) 55200. **—13—** Θὰ μοιράσωμεν ἀναλόγως τῶν γινομένων 80000 × 36 = 2880000, 100000 × 28 = 2800000, 60000 × 18 = 1080000 ἢ τῶν 288, 280 καὶ 108. Θὰ λάβῃ δὲ ὁ α) 28800 ὁ β) 28000 καὶ ὁ γ) 10800. **—14—** Αἱ 7000 δραχ. τοῦ α΄ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 4 ἔτη, αἱ 12000 τοῦ β΄ 2 ἔτη καὶ αἱ 4000 τοῦ α΄ 1 ἔτος. Θὰ μοιράσωμεν λοιπὸν τὰς 20000 δραχ. ἀναλόγως τῶν γινομένων 7000 × 4 = 28000, 12000 × 2 = 24000 καὶ 4000 × 1 = 4000 ἢ τῶν 7, 6, 1 καὶ θὰ λάβῃ ὁ α) 10000, ὁ β) $8571\frac{3}{7}$ καὶ ὁ α) πάλιν $1428\frac{4}{7}$. **—15—** Αἱ 80000 δραχμαὶ ἔδωκαν κέρδος 4000 δραχμὰς ἢ 1 δρ. ἔδωκε $\frac{4000}{80000}$ καὶ αἱ 50000 τοῦ β΄ ἔδωκαν $\frac{4000 \times 50000}{80000} = 2500$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ γ΄ ἔλαβεν 1750 δραχμάς. **—16—** Αἱ 3000 δραχμαὶ κέρδος ἀναλογοῦν εἰς κεφάλαιον 26000 δραχμῶν, ἡ 1 δραχμὴ κέρδος ἀναλογεῖ εἰς κεφάλαιον $\frac{26000}{3000}$ δρ. καὶ αἱ 2000 δραχ. ἀναλογοῦν εἰς κεφάλαιον $\frac{26000 \times 2000}{3000} = 17333{,}33$ δρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ. **Ὁμὰς πρώτη.** **—1—** $\frac{55+75+80}{3} = 70$ **—2—** $\frac{100+90+130+120}{4} = 110$. **—3—** $\frac{50+54+47+53}{4} = 51$ρ. = 6 πήχ. καὶ 3 ρούπια.

Ὁμὰς δευτέρα. Ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ 75 δρ. × 5 + 90 δρ. × 3 + 72 δρ. × 4 = 375 δρ. + 270 δρ. + 288 δρ. = 933 δρ. Αἱ δαπάναι αὐταὶ ἔγιναν εἰς 5 + 3 + 4 = 12 ἡμέρας. Ἄρα ὁ ζητούμενος μέσος ὅρος εἶναι 933 : 12 = 77,75 δρχ. **— 2 —** (650 × 3 + 550 × 9) : (3 + 9) ἤτοι 6900 : 12 = 575 δρχ. **— 3 —** (700 × 60 + 800 × 36 + 1000 × 24) : 120 = 94800 : 120 = 790 δρχ. **— 4 —** (10 ὥρ. + 8 ὥρ. + 7 ὥρ. + 40 ὥρ.) : 13 ἢ 65 ὥρ : 13 = 5 ὥρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ. **Α΄. εἴδους.** **Ὁμὰς πρώτη.** **— 1 —** α) Αἱ 30 ὀκάδες τῆς 1ης ποιότητος στοιχίζουν 10 δρ. × 30 = 300 δραχ. καὶ αἱ 30 ὀκ. τῆς 2ας ποιότητος στοιχίζουν 6 δρχ. × 30 = 180 δραχ. Ὥστε αἱ 60 ὀκάδες τοῦ μίγματος στοιχίζουν 300 δρ. + 180 δρ. = 480 δραχ. καὶ ἡ μία ὀκᾶ στοιχίζει 480 δραχ. : 60 = 8 δραχ. **Σημείωσις.** Ἀφοῦ αἱ ποσότητες εἶναι ἴσαι ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς τοῦ μίγματος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν τιμῶν τῆς 1 ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους ἤτοι (10 + 6) : 2 = 8 δρχ. β) 8, γ) (10 δρ. × 50 + 6 δρ. × 30) : (50 + 30) = 680 δρ. : 80 = 8,50 δρ., δ) (10 δρ. × 30 + 6 δρ. × 50) : (50 + 30) = 7,50 δρχ. **— 2 —** α) (35 δρ. × 50 + 30 δρ. × 75) : (50 + 75) = 32 δρ. β) 65 γ) 72,50 δ) 8,60 ε) 6,40 στ) 5,80 ζ) 60 η) 35 **— 3 —** (10 δρ. × 200 + 7 δρ. × 100 + 0 δρ. × 60) = (200 + 100 + 60) ἢ (2000 δρ. + 700 δρ.) : 360 ἢ 2700 δρ.: 360 = 7,50 δρ. **— 4 —** α) 27, 77 β) 27, 77 × 85 **— 5 —** Ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 8,50 δρ. αἱ 40 ὀκ. ἀξίζουν 8,50 δρ. × 40. Τὸ δὲ κέρδος 10 % εἶναι 0,85 δραχ. εἰς 1 ὀκᾶν. Ἄρα θὰ τὴν πωλῇ 9,35 δρχ. **— 6 —** Ἀπὸ τὴν αην ποιότητα ἔλαβεν $300 \times \frac{1}{5} =$ 60 ὀκ. Καὶ ἀπὸ τὴν βαν $420 \times \frac{1}{3} = 140$ ὀκ. α) Τὸ ὅλον μῖγμα ἀξίζει 6600 δραχ. καὶ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 33 δραχ. β) Τὸ κέρδος 1 ὀκᾶς εἶναι 1200 δρ. : 200 = 6 δρ. Ἄρα θὰ τὴν πωλῇ 39 δρχ. **— 7 —** (95 δρ. × 37 + 35 δρ. × 74) : (37 + 74) = 55 δρχ. **— 8 —** Ἔρριψεν ὕδωρ 96 ὀκάδας· ἀξίζει ἡ 1 ὀκᾶ 8,45 περ. **— 9 —** 7,85 περ. **— 10 —** Ἀξία 200 ὀκ., 8000 δραχ. Ἀξία 450 ὀκ. τοῦ ὅλου μίγματος 35 δρ. × 450 = 15750 δραχ. Ἀξία τῶν 250 ὀκάδων 15750 — 8000 = 7750 δραχ.

καὶ ἀξία τῆς 1 ὀκᾶς 7750 : 250 = 31 δραχ. **— 11 —** (69,40 δρ. × 197 — 85 δρ. × 158) : 39 = 6,20 δρ. **— 12 —** Ἔβαλεν εἰς τὸ μῖγμα λίπος 40 ὀκάδας. Ἀξίζει δὲ ἡ 1 ὀκᾶ αὐτοῦ. (70 δρ. × 200 — 80 δρχ ×160) : 40 = 30 δρχ.

Ὁμὰς δευτέρα. Οἱ 80° σημαίνουν ὅτι εἰς 100 ὀκάδας οἰνόπνευμα αἱ 80 ὀκάδες εἶναι καθαρὸν ἢ εἰς 100 δράμια τὰ 80 δράμια εἶναι καθαρὸν κ.τ.λ. Ἀφοῦ λοιπὸν αἱ 100 ὀκάδες ἔχουν 80 ὀκάδας καθαρόν, ἡ 1 ὀκᾶ ἔχει $\frac{80}{100}$ καὶ αἱ 50 ὀκάδες ἔχουν $\frac{80\times50}{100}$ = 40 ὀκάδας. **—2—** Αἱ 40 ὀκάδες ἔχουν 10 ὀκάδας καθαρὸν οἰνόπνευμα, ἡ 1 ὀκ ἔχει $\frac{10}{40}$ καὶ αἱ 100 ὀκ. ἔχουν $\frac{10\times100}{40}$ = 25 ὀκάδας. Ἄρα εἶναι 25°. **—3—** Αἱ 50 ὀκ. περιέχουν καθαρὸν οἰνόπνευμα $\frac{50\times80}{100}$ = 40 ὀκ. καὶ αἱ 550 ὀκ. περιέχουν $\frac{550\times20}{100}$ = 110 ὀκ. Ἄρα τὸ μῖγμα τῶν 600 ὀκάδων περιέχει καθαρὸν οἰνόπνευμα 40 ὀκ. + 110 ὀκ. = 150 ὀκ., ὁ δὲ βαθμὸς εἶναι $\frac{150\times100}{600}$ = 25°. **—4—** Τὸ μῖγμα τῶν 200 ὀκάδων περιέχει 36 ὀκάδας καθαροῦ οἰνοπνεύματος· ἄρα τὸ μῖγμα εἶναι 18°. **—5—** 20°. **—6—** Ὁ τίτλος 0,800 σημαίνει ὅτι εἰς 1000 δράμια κράματος τὰ 800 δράμια εἶναι καθαρὸς χρυσὸς ἢ εἰς 1000 γραμμ. κράματος τὰ 800 γραμ. εἶναι καθαρὸς χρυσός. Ἑπομένως τὰ 80 δράμια κράματος περιέχουν 80 × 0,800 = 64 δράμια καθαροῦ χρυσοῦ. **—7—** $\frac{105}{150}$ = 0,700. **—8—** (35 × 0,900 + 40 × 0,750) : (35+40)=61,500 : 75 = 0,820. **—9—** 0,840 **—10—** $\frac{24}{30}$ = 0,800.

Β. ΕΙΔΟΥΣ. (**Ὁμὰς πρώτη**). **—1—** α) 3 δραχ. β) 5 δραχ. γ) ἂν βάλῃ 5 ὀκ. ἀπὸ τὴν πρώτην θὰ χάσῃ 3 δρ. × 5 = 15 δραχ. Ἂν βάλῃ 3 ὀκ. ἀπὸ τὴν δευτέραν θὰ κερδίσῃ 5 δρ. × 3=15 δρχ. Ἄρα δὲν θὰ ἔχῃ οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν. δ) Ἀπὸ τὴν αην θὰ βάλῃ $\frac{5\times800}{8}$ = 500 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὴν βαν $\frac{3\times800}{8}$ = 300 ὀκ. **Σημ.** Αἱ τέσσαρες ἐρωτήσεις τοῦ ἄνω προβλήματος ἀποτελοῦν τὴν ἀνάλυσιν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀναμίξεως 2ου εἴδους. Τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ τὰ λύομεν συντόμως, χρησιμοποιοῦντες τὴν κάτωθι διάταξιν.

ἀξ. 1 ὀκ. α΄ εἴδους δραχ. 37 — 5 | ὀκ. α΄. εἴδους $\frac{5\times800}{8}$ = 500
» 1 » μίγματος δραχ. 34
» 1 » β΄ εἴδους δραχ. 29 — $\frac{3}{8}$ | ὀκ. β΄ εἴδους $\frac{3\times800}{8}$ = $\frac{300}{800}$

—2— α) $\frac{1\times1600}{4}$ = 400 ὀκ. β) $\frac{3\times1600}{4}$ = 1200 ὀκ. **—3—** α) $\frac{1200\times2}{3}$ = 800 ὀκ. β) $\frac{1200\times1}{3}$ = 400 ὀκ. **—4—** α) 1080 ὀκ. β) 720 ὀκ. **—5—** α) 1100 ὀκ. β) 660 ὀκ. **—6—** α) 60 ὀκ. β) 40 ὀκ. **—7—** Ἀξία 1 ὀκ. μίγματος 7,80 δρχ. α) 90 ὀκ. β) 60 ὀκ. **—9—** Εἰς 80 ὀκ. καφὲ θὰ ρίψῃ 14 ὀκάδας κριθῆς. Ἄρα εἰς 20 ὀκ. καφὲ θὰ ρίψῃ $\frac{14\times20}{80}$ = 3,5 ὀκάδας κριθῆς. **—10—** Ἀξία ὅλου τοῦ μίγματος 8×3500 = 28000 δραχ. Ἀλλὰ διὰ νὰ εἰσπράξῃ 28000 δραχ. πωλῶν τὸ κρασὶ πρὸς 7 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, πρέπει νὰ πωλήσῃ 28000 : 7 = 4000 ὀκάδας. Ἄρα πρέπει νὰ ρίψῃ νερὸ 4000 — 3500 = 500 ὀκ.

Ὁμὰς δευτέρα. **—1—** α) $\frac{150\times8}{60}$ = 20 ὀκ. β) $\frac{150\times52}{60}$ = 130 ὀκ. **—2—** α) 112,5 ὀκ. **—3—** 200 ὀκ. **—4—** α) $\frac{300\times150}{200}$ = 225 γρ β) 75 γρ. **—5—** α) 180 γρ. **—6—** 80 : 9.

Προβλήματα ἀνάμικτα. **—1—** 875. **—2—** 42500+8500. **—3—** Τὰς 1840 ὀκ. ἐπώλησε ἀντὶ 18400 δραχ. **—4—** 6 %. **—5—** 2550+60 **—6—** α) 16800 : 0,28 = 60000 β) 19200 γ) 24000 **—7—** α) 1,5 ἑκ. β) 13,5 ἑκ. γ) 1800 δρ. **—8—** 12 ἡμ. **—9—** 60 λεπτὰ **—10—** Ἐζημιώθη 4 %. **—11—** α) 8100 δρ. β) 22,5 %. **—12—** 12,5 ὥρ. **—13—** α) 40 β) 80 γ) 120 **—14—** α) 79,25 β) 7925×6 **—15—** (546 - 70) : (105 - 70) = 476 : 35 = 13,5 **—16—** 300 : 100 = 3 **—17—** 10 % **—18—** α) 6 ὀκ. 130 δρμ. β) 67,30 δρ. **—19—** 148096 **—20—** 113288,80 **—21—** 97380 **—22—** α) 6,80 β) 8 % **—23—** α) (9,20×180+6,80×540) : 720 **—24—** α) 220 β) 170 **—25—** α) 10269 **—26—** ὁ 126 εἶναι τὰ $\frac{7}{4}$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι 72 καὶ 54. **—27—** 20000 **—28—** 2240, 1800, 1500 **—29—** 1260. **—30—** 362 **—31—** 25 **—32—** 323 **—33—** 75 **—34—** 621,72 **—35—** 84,75 **—36—** 51 **—37—** 8 **—38—** α) 4 : 9 β) 8 : 27.

ΤΕΛΟΣ