ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Τάξεις Ε' ΣΤ'

ΑΡΙΘΜΟΣ 29

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ ΑΘΗΝΑΙ

ΚΩΝ. ΑΡΓ. ΒΟΣΤΑΝΤΖΗ - ΕΥΘ. Ν. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ
ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Ε' ΤΑΞΕΩΣ
ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΜΙΑΝ ΤΡΙΕΤΙΑΝ
Διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως Ὑπουργ. Παιδείας

ΕΚ ΤΗΣ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΩΣ 1959

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ,, ΑΘΗΝΑΙ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΙΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

'Αριθ. Πρωτ. 61330 — 'Εν 'Αθήναις τῇ 20 'Ιουνίου 1952

Πρὸς τοὺς κ.κ.
Κ. ΒΟΣΤΑΝΤΖΗΝ — ΕΥΘ. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΝ
Τιμοκρέοντος 5 (Νέα Σμύρνη)

ΕΝΤΑΥΘΑ

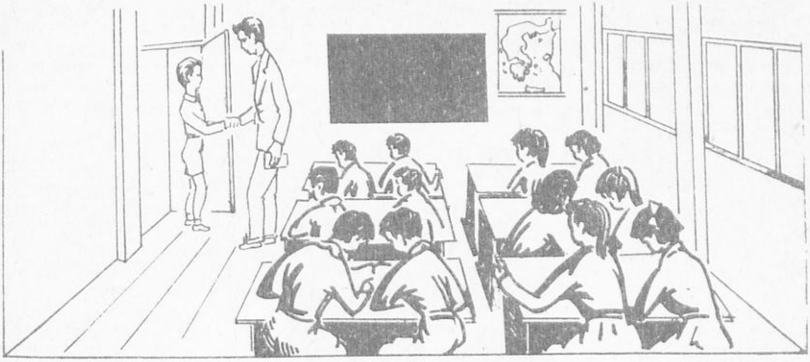
'Ανακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452|12|61952 ἀποφάσεως τοῦ 'Υπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου 'Εκπαιδεύσεως ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον **''ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ,,** βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς **'Αριθμητικῆς** διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε'. καὶ ΣΤ'. τάξεων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφούμενοι πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Κοινοποίησις :

Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

'Εντολῇ 'Υπουργοῦ
'Ο Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Καλό μου παιδί, καλῶς ἦλθες στὴν Ε΄ τάξι. Ἐσὺ δὲν εἶσαι μικρὸς ὅπως εἶχα πληροφορηθῆ. Εἶσαι ἀρκετὰ μεγάλος καὶ μποροῦμε νὰ κάνουμε συντροφιὰ μαζί. Πιστεύω, νὰ περάσωμε καλά. Θὰ μάθης τόσα καινούρια πράγματα χρήσιμα γιὰ τὴ ζωή σου. Οἱ ἄλλες μου ἀδελφές, οἱ μικρότερες, ποὺ τόσο καλὰ σὲ συντρόφεψαν νὰ φθάσης ὣς ἐδῶ, σοῦ ἔδωσαν ἀρκετὰ ἐφόδια. Ξέρεις τώρα νὰ λογαριάζης μὲ τὸ νοῦ σου καὶ μὲ μολύβι. Ξέρεις νὰ λύνης προβλήματα καὶ νὰ μὴν κάμνης λάθη στὴ λύσι τους.

Ἔμαθες βέβαια νὰ ψωνίζης στὸν μπακάλη, στὸ μανάβη, στὸ χαρτοπώλη, καὶ νὰ κάνης μόνος σου τοὺς λογαριασμοὺς χωρὶς νὰ γελιέσαι. Κι αὐτὸ τὸ χρωστᾶς στὸ καλὸ σχολεῖο, στοὺς καλούς σου διδασκάλους καὶ στὶς... ἀδελφοῦλες μου, τὶς ἀριθμητικὲς ποὺ γνώρισες στὴν κάθε τάξι. Ἀλλά, μικρέ μου φίλε, ἔχεις πολλὰ ἀκόμη νὰ μάθης. Πρέπει κι αὐτὰ νὰ τὰ μάθης. Εἶναι χρήσιμα γιὰ τὴ ζωή σου. Τὰ συναντᾶς σὲ κάθε βῆμα σου. Αὐτὸ τὸ καθῆκον, γιὰ τὴν ἐφετεινή σου χρονιά, ἀνήκει σὲ μένα. Πρὶν ὅμως σὲ ὁδηγήσω στὸ δικό μου παλάτι, ποὺ θὰ ἰδῆς τόσα καὶ τόσα, θέλω νὰ θυμηθῆς ὅλα τὰ περασμένα. Στὶς διακοπές σου ἴσως νὰ λησμόνησες μερικά, γι᾿ αὐτὸ ἔλα νὰ ξαναθυμηθοῦμε ὅσα ἔμαθες.

Καὶ πάλι καλῶς ἦλθες
Ἡ Ἀριθμητική σου
Τῆς Ε΄ τάξεως.

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΣ ΠΙΝΑΞ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ΜΕΡΟΣ Α'

ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στὴ ζωή, σὲ κάθε μας βῆμα, συναντοῦμε ἕνα πλῆθος ἀπὸ προβλήματα. Πρόβλημα εἶναι κάθε ζήτημα, ποὺ ἀπαιτεῖ σκέψι π. χ. θέλω νὰ πάω κάπου... Πρέπει νὰ σκεφθῶ τὸ πῶς θὰ πάω, ποῦ θὰ σταθῶ, τί θὰ πάρω μαζί μου, τί θὰ κάμω ἐκεῖ καὶ ποιὸ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεώς μου.

Ὅλη αὐτὴ ἡ ἀλυσσίδα τῶν ἐνεργειῶν μου καὶ τῶν σκέψεών μου εἶναι ἕνα εἶδος προβλήματος. Στὴν ἀριθμητική μας, τὰ προβλήματα εἶναι μὲ ἀριθμούς. Καὶ πρὶν ἀπὸ τὴ λύσι κάθε προβλήματος, μάθετε νὰ προσέχετε τὰ ἑξῆς :

α) Διαβάζω μὲ προσοχὴ τὸ κείμενο τοῦ προβλήματος, ὥστε νὰ καταλάβω τὸ περιεχόμενό του.

β) Καταστρώνω τὸ πρόβλημα. Δηλαδὴ γράφω στὴ σειρά, χωρὶς πολλὰ λόγια, τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ προβλήματος.

γ) Προσέχω **τί ζητεῖται** στὸ πρόβλημα.

δ) Προσέχω **τὶ μᾶς δίδονται** στὸ πρόβλημα. Δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, τῶν πολλῶν ἢ καὶ οἱ δύο τιμές ;

ε) Προχωρῶ στὴ λύσι του, **δηλαδή,** ἐκτελῶ τὶς διάφορες πράξεις.

στ) Δίνω τὴν **ἀπάντησι** στὸ πρόβλημα.

1. Πολλαπλασιασμὸς μὲ τὸ 10, 100, 1000 Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1.000 ἐὰν στὸ τέλος τῶν ψηφίων του, προσθέσωμε ἕνα 0, δύο 00, ἢ τρία 000.	Π.χ. 8 × 10 = 80 8 × 100 = 800 8 ×1.000 =8.000
2. Διαίρεσι διὰ 10, 100, 1.000 κλπ. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ διὰ 10, χωρίζομε, ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά του, ἕνα ψηφίο. Διὰ 100, χωρίζομε δύο ψηφία καὶ διὰ τοῦ 1000 χωρίζομε τρία ψηφία.	Π.χ. 5.600 : 10 = 560 5.600 : 100 = 56 5.000 :1 000 = 5

Ἀσκήσεις

Ὁμάδα 1η. Πολλαπλασιάσετε :

3 × 10 =	75 × 10 =	25.400 × 10 =
4 × 100 =	89 × 100 =	2.540 × 100 =
5 × 1000 =	350 × 1000 =	1.554 × 1000 =

Ὁμάδα 2α. Διαιρέσατε :

750 : 10 =	486 : 10 =	460 : 10 =
750 : 100 =	4.590 : 100 =	1.700 : 100 =
1.750 : 1000 =	76.080 : 1.000 =	28.900 : 1.000 =

Ὁμάδα 3η. Ἀπαντήσατε προφορικὰ στὶς παρακάτω σειρές :

(25 + 25) × 2 =	(60 + 60) × 6 =
(30 + 30) × 3 =	(70 + 70) × 7 =
(40 + 40) × 4 =	(80 + 80) × 8 =
(50 + 50) × 5 =	(90 + 90) × 9 =

Ὁμάδα 4η.

(50 + 50) : 5 =	(100 + 100) : 10 =
(60 + 60) : 6 =	(35 + 35) : 10 =
(70 + 70) : 7 =	(30 + 30) : 3 =
(80 + 80) : 8 =	(45 + 45) : 9 =

Ὁμάδα 5η. Ἀπαντήσατε γραπτῶς στὶς παρακάτω σειρές, κάνοντας ὅλες τὶς πράξεις μὲ τὸ νοῦ σας :

Παράδειγμα : [(5 + 10 + 5 + 10) : 3] — 10 = 0·

[(20 — 10) × 5] : 50 =	[(6 × 100) + 1400] : 5 =
[(30 × 4) + 120] : 4 — 60 =	[(4 × 80) + 600] : 4 —230 =
[(100 + 900) — 500 =	[(3 × 100) + 700] : 100 =

Ἀπαντήσατε μὲ λίγα λόγια. Γιὰ κάθε ὁμάδα ἔχετε καιρὸ 5 λεπτὰ τῆς ὥρας. Δοκιμάσατε τὴν ἐξυπνάδα σας καὶ τὴν ἀντυχή σας.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Ἕνας πωλεῖ αὐγὰ λιγώτερο ἀπὸ ὅσο τὰ ἀγόρασε. Κέρδισε ἢ ἔχασε; . . . . Ἀπάντησι : Ἔχασε.

Ὁμάδα 6η. 6) Ἕνας μανάβης ἀγόρασε μῆλα. Τί πρέπει νὰ κάνη γιὰ νὰ κερδίση ;

7) Κάποια κυρία ποὺ βγῆκε στὴν ἀγορά, ξέρει πόσα χρήματα εἶχε στὴν τσάντα της. Ξέρει καὶ πόσα ἐξώδεψε. Τί πρᾶξι πρέπει νὰ κάνη γιὰ νὰ ἰδῆ πόσα τῆς ἔμειναν ;

8) Γνωρίζει ἕνας ἰδιοκτήτης ὅτι γιὰ νὰ ἀσβεστώση τὸ σπίτι του, χρειάζεται ἕνα ποσὸν χρημάτων γιὰ ὅλα τὰ ὑλικὰ καὶ ὅτι τὰ ἡμερομίσθια εἶναι π.χ. 4. Τί ἄλλο πρέπει νὰ ξέρη ἀκόμη γιὰ νὰ λογαριάση, τί θὰ κοστίση τὸ ἀσβέστωμα ;

9) Ὁ ἀρχηγὸς μιᾶς ὁμάδος ἐκδρομέων, γνωρίζει τὴν τιμὴ τοῦ εἰσιτηρίου γιὰ μιὰ διαδρομὴ μὲ αὐτοκίνητο. Τί πρέπει νὰ ξέρη ἀκόμη καὶ τί πρέπει νὰ κάνη, γιὰ νὰ βρῆ πόσα χρήματα θὰ δώση γιὰ ὅλα τὰ εἰσιτήρια τῆς ὁμάδος του ;

10) Ξέρετε πότε ἔγινε ἡ μάχη στὸ Μαραθῶνα. Τί πρᾶξι θὰ κάνετε γιὰ νὰ βρῆτε πόσα χρόνια πέρασαν μέχρι σήμερα ;

Ὁμάδα 7η. 11) Ξέρετε πότε ἔγινε ἡ Ἑλληνικὴ Ἐπανάστασις κατὰ τῶν Τούρκων (1821). Τί πρᾶξι θὰ κάνετε γιὰ νὰ βρῆτε πόσα χρόνια πέρασαν ὥς τώρα ;

12) Ἂν ξέρετε τὴν τιμὴ μιᾶς δωδεκάδας ποτηριῶν, μὲ ποία πρᾶξι μπορεῖτε νὰ βρῆτε τὴν τιμὴ κάθε ποτηριοῦ ;

13) Ἕνας νοικοκύρης ξέρει τὰ ἔξοδα τοῦ μηνὸς γιὰ ἐνοίκιο καὶ γιὰ φαγητό. Ποιὲς πράξεις θὰ κάνη γιὰ νὰ βρῆ τὰ ἔξοδα γιὰ ὅλο τὸ χρόνο ;

14) Ἕνας πατέρας ἀγόρασε 100 μπισκότα. Ἂν κάθε μέρα δίνη στὸ παιδάκι του 4 μπισκότα, τί πρᾶξι θὰ κάνη γιὰ νὰ βρῆ γιὰ πόσες ἡμέρες θὰ τοῦ φθάσουν ;

15) Διάβασες ἕνα βιβλίο Ἱστορίας, ἕνα βιβλίο Γεωγραφίας καὶ ἕνα Παραμυθιῶν. Σὲ ἐρωτοῦν πόσες σελίδες διάβασες ὅλες μαζί. Τί θὰ κάνης ;

Ὁμάδα 8η. 16) Ξέρω πόσα μολύβια ἀγόρασε τὸ σχολικὸ ταμεῖο. Ἐπίσης ξέρω καὶ πόσα μολύβια μοίρασε σὲ κάθε μαθητή. Ποιὰ πρᾶξι πρέπει νὰ κάμω γιὰ νὰ βρῶ πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταί, ποὺ πῆραν τὰ μολύβια ;

17) Γνωρίζεις τὸ διαιρετέο καὶ τὸ πηλίκο μιᾶς διαιρέσεως. Πῶς μπορεῖς νὰ βρῆς τὸ διαιρέτη ;

18) Γνωρίζεις τὸ πηλίκο καὶ τὸ διαιρέτη μιᾶς τελείας διαιρέσεως. Πῶς μπορεῖς νὰ βρῇς τὸ διαιρετέο ;

19) Γνωρίζεις τὸν πολ]στέο καὶ τὸ γινόμενον ἑνὸς πολ]σμοῦ. Πῶς μπορεῖς νὰ βρῇς τὸν πολ]στή ;

20) **Πρὶν προχωρήσης στὰ παρακάτω προβλήματα μὲ ἀριθμούς, νὰ κάμης συγκεκριμμένα, τὰ παραπάνω 14 προβλήματα, δηλ. μὲ ἀριθμούς.**

ΑΠΛΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Τῶν τεσσάρων πράξεων

Ὁμάδα 9η. 21) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 150 κιλὰ βούτυρο καὶ ἔδωσε 7.200 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὸ ἕνα κιλό ;

22) Τριάντα δωδεκάδες σεντόνια, κοστίζουν 14.400 δρχ. Πόσο κοστίζει τὸ ἕνα σεντόνι ;

23) Σὲ ἕνα ἀμπέλι εἶναι φυτευμένα 6392 κλήματα σὲ 68 σειρές. Ὅλες οἱ σειρὲς ἔχουν ἴσον ἀριθμὸ κλημάτων. Πόσα κλήματα ἔχει ἡ κάθε σειρά ;

Ὁμάδα 10η. 24) Ὁ ταμίας ἀπὸ ἕνα κατάστημα, ἔκαμε σὲ μία ἡμέρα, τρεῖς πληρωμές : 1560 δρχ., 730 δρχ., 2865 δρχ., Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε συνολικά ;

25) Ἕνας ἀγόρασε μία σόμπα καὶ ἔδωσε 1368 δρχ. Ἐξώδεψε γιὰ νὰ τὴν ἐπισκευάση 146 δρχ. καὶ ὕστερα τὴν ἐπώλησε μὲ κέρδος 370 δρχ. Πόσα εἰσέπραξε ἀπὸ τὴ μεταπώλησί της ;

26) Ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ὥς τὴν Καλαμάτα εἶναι 328 χιλιόμ. καὶ ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ὥς τὴν Τρίπολι 213 χιλμ. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἀπὸ τὴν Τρίπολι ὥς τὴν Καλαμάτα ;

27) Ἡ ἅλωσις τῆς Κων)πόλεως ἀπὸ τοὺς Τούρκους ἔγινε τὸ ἔτος 1453. Πόσα χρόνια ἐπέρασαν ἀπὸ τότε ὥς σήμερα ;

28) Ὁ Ἀπόστολος Παῦλος ἦλθε στὴν Ἑλλάδα τὸ 51 μ. Χ. Πόσα χρόνια ἐπέρασαν ὥς τώρα ;

Ὁμάδα 11η. 29) Ἕνας ἔμπορος ἐφόρτωσε 384 βαρέλια λάδι, ποὺ τὸ καθένα ἐζύγιζε 108 κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι ἐφόρτωσε ;

30) Μία ἁμαξοστοιχία τρέχει μὲ ταχύτητα 28 χιλιόμ. τὴν ὥρα. Διανύει δὲ τὴν ἀπόστασι ἀπὸ τὴν Ἀθήνα μέχρι τὸν Πύργο, σὲ 10 ὧρες. Πόσα χιλιόμ. εἶναι τὸ μῆκος τῆς σιδηροδρομικῆς αὐτῆς γραμμῆς ;

31) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 65 δωδεκάδες κάλτσες πρὸς 12 δρχ. τὸ ζευγάρι. Πόσες δραχ. ἐπλήρωσε ;

32) Ἕνας ἄνθρωπος ἀπέθανε τὸ 1952 σὲ ἡλικία 57 ἐτῶν. Ποῖον ἔτος εἶχε γεννηθῆ ;

33) Δύο ἄνθρωποι ἔκαμαν μίαν ἐπιχείρησι. Ὁ α΄ κατέθεσε 19.000 δρχ. Ὁ β΄ κατέθεσε 2.370 δρχ. λιγώτερες ἀπὸ τὸν πρῶτο. Πόσες δραχμὲς κατέθεσε ὁ δεύτερος ;

Ὁμάδα 12η. 34) Ἂν σὲ κάθε κιβώτιο χωροῦν 258 λεμόνια, πόσα κιβώτια χρειάζονται γιὰ νὰ συσκευάσωμε 59.340 λεμόνια ;

35) Μία ἁμαξοστοιχία τρέχει 32 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσες ὧρες θὰ κάμη γιὰ νὰ διατρέξη 2.240 χιλιόμ. ;

36) Τὸ ἕνα κιλὸ κρέας στοιχίζει 36 δρχ. Πόσα κιλὰ κρέας θὰ ἀγοράσωμε μὲ 720 δρχ.

37) Ὁ αὐγοπώλης τῆς γειτονιᾶς ἐπώλησε 4 κιβώτια αὐγά, πρὸς 4 δρχ. τὸ ζευγάρι. Κάθε κιβώτιο εἶχε 1.000 αὐγά. Πόσα εἰσέπραξε ;

38) Κάποιος ἐχρησιμοποίησε 8 ἐργάτες ἐπὶ μίαν ἑβδομάδα (6 ἡμέρες), γιὰ τὸ σκάψιμο τοῦ ἀμπελιοῦ του. Πόσα ἐπλήρωσε, ἂν σὲ κάθε ἐργάτην ἐπλήρωνε 65 δραχμὲς ἡμερομίσθιο ;

39) Ἕνας ἀγόρασε 4 αὐτοκίνητα κάρβουνο. Τὸ πρῶτο εἶχε 3450 κιλά, τὸ δεύτερο 2080 κιλά, τὸ τρίτο 4095 κιλὰ καὶ τὸ τέταρτο 3875 κιλά. Πόσα κιλὰ κάρβουνο ἀγόρασε συνολικά ;

40) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἐπλήρωσε στὸ τέλος τοῦ μηνός, γιὰ ἐνοίκιο 375 δρχ., στὸ μπακάλη 108 δρχ., στὸν κρεοπώλη 135 δρχ., στὸ ράφτη του 280 δρχ. καὶ γιὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 398 δρχ. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε ὅλες ὅλες τὸ μῆνα αὐτόν ;

41) Ἕνας χρωστάει σ' ἕναν ἔμπορο 1760 δρχ., σὲ ἄλλον 3545 δρχ. καὶ σὲ τρίτον 4870 δρχ. Πόσα χρωστάει καὶ στοὺς τρεῖς ;

42) Ἕνας ἐργάτης εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν ἐργασίαν του 1248 δρχ. Πόσες ἡμέρες ἐργάσθηκε, ὅταν τὴν ἡμέρα παίρνη 48 δραχμές ;

43) Ἕνα κιλὸ βούτυρο στοιχίζει 42 δρχ. Πόσα κιλὰ βούτυρο θὰ ἀγοράση ἕνας παντοπώλης μὲ 2436 δρχ. ;

ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Τῶν τεσσάρων πράξεων

Ὁμάδα 13η. 44) Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει τὸ μῆνα 2.100 δρχ. Ξοδεύει γιὰ ἐνοίκιο 450 δρχ. Γιὰ τροφή του 1.000 δρχ. καὶ γιὰ ἄλλα ἔξοδά του 270 δρχ. Πόσα ἐξοικονομεῖ εἰς ἕνα ἔτος ;

45) Ἕνας γεωργὸς εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησι τῶν προϊόντων του, 8.000 δρχ. Ἐπλήρωσε ἀπὸ αὐτὰ α) ἕνα χρέος ποὺ εἶχε στὴν Τράπεζα 2.000 δρχ. β) γιὰ τὴν ἀγορὰ τριῶν προβάτων 975 δρχ. καὶ γ) γιὰ τὴν καλλιέργεια τοῦ κτήματός του, 850 δρχ. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

46) Σὲ ἕνα φυτώριο ὑπάρχουν 3.860 δενδράκια. Ἀπὸ αὐτὰ 1008 εἶναι μουριές, 399 πεῦκα, 896 εὐκάλυπτοι, τὰ δὲ ὑπόλοιπα μηλιές. Πόσες εἶναι οἱ μηλιές ;

47) Τρία ἀδέρφια ἀγόρασαν ἕνα οἰκόπεδο. Τὸ πρῶτο ἐπλήρωσε 275 λίρες χρυσές, τὸ δεύτερο ἔδωσε 85 λίρες περισσότερες ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ τὸ τρίτο ἔδωσε 48 λιγώτερες ἀπὸ τὸ δεύτερο. Πόσο ἄξιζε τὸ οἰκόπεδο αὐτό ;

48) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε δύο ὑφάσματα. Τὸ πρῶτο ἄξιζε 30.000 δρχ. καὶ τὸ δεύτερο 25.000 δρχ. Ὅταν τὰ ἐπώλησε, ἀπὸ τὸ πρῶτο ὕφασμα ζημιώθηκε 5.500 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερο ἐκέρδισε 2.780 δρχ. Πόσα εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησι καὶ τῶν δύο ;

Ὁμάδα 14η. 49) Ἕνας ἔμπορος ἀγοράζει 560 κιλὰ λάδι πρὸς 18 δρχ. τὸ κιλό. Ἐξώδεψε γιὰ τὴν μεταφορὰ στὸ κατάστημά του 270 δρχ. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἐστοίχισε τὸ λάδι ὥς τὴν ἀποθήκη του ;

50) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 65 μέτρα μεταξωτὸ ὕφασμα κι ἔδωσε γιὰ ὅλο 2.730 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὸ μέτρο γιὰ νὰ κερδίση 8 δραχ. τὸ μέτρο ;

51) Ἕνας βοσκὸς ἐπώλησε 385 κιλὰ τυρὶ πρὸς 23 δραχ. τὸ κιλό. Ἀντὶ γιὰ χρήματα ἐπῆρε 245 κιλὰ λάδι, ποὺ ἡ ἀξία του ὑπολογίστηκε 18 δραχ. τὸ κιλό. Ποιὸς χρωστάει στὸν ἄλλον ; Καὶ πόσα ;

52) Ἕνας λαδέμπορος ἐφόρτωσε γιὰ τὸ ἐξωτερικό, 275 βαρέλια ἐλιές. Τὸ κάθε βαρέλι εἶχε μικτὸ βάρος 108 κιλά. Πόσα κιλὰ ἐλιὲς ἐφόρτωσε ἂν τὸ ἀπόβαρο κάθε βαρελιοῦ ἦταν 12 κιλά ;

53) Σ' ἕνα ἐργοστάσιο ἐργάζονται 86 ἐργάτες. Ἀπὸ αὐτοὺς οἱ 18 παίρνουν 65 δρχ. τὴν ἡμέρα ὁ καθένας, 25 ἐργάτες παίρνουν 45 δρχ. τὴν ἡμέρα ὁ καθένας καὶ οἱ ἄλλοι 28 δραχμὲς ὁ καθένας. Πόσα πληρώνει ὁ ἐργοστασιάρχης αὐτός, γιὰ ὅλους τοὺς ἐργάτες του τὴν ἑβδομάδα ; Καὶ πόσα τὸν μῆνα (26 ἡμέρες).

Ὁμάδα 15η. 54) Ἕνας γεωργὸς ἐπώλησε 1508 κιλὰ σιτάρι πρὸς 3 δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε λάδι, ποὺ τὸ κιλὸ ἄξιζε 18 δρχ. καὶ τοῦ ἔμειναν καὶ 1500 δρχ. Πόσα κιλὰ λάδι ἀγόρασε ;

55) Ἕνας ἰδιοκτήτης παίρνει ἐνοίκιο ἀπὸ τὸ σπίτι του 22.850 δραχμὲς τὸ χρόνο. Πληρώνει γιὰ ἐπισκευὴ 1800 δρχ. καὶ στὴν Ἐφορία φόρο 1.250 δρχ. Πόσο καθαρὸ ἐνοίκιο παίρνει τὸ μῆνα ;

56) Ἕνας ἀγόρασε ἕνα ραδιόφωνο ἀξίας 2400 δρχ. Ἔδωσε ὡς προκαταβολὴ 600 δρχ. Σὲ πόσους μῆνες θὰ ἐξοφλήση τὸ ὑπόλοιπο ποσό, ὅταν κάθε μῆνα πληρώνη 150 δρχ. ;

57) Σ' ἕνα χωριὸ θέλουν νὰ κτίσουν ἕνα σχολεῖο, ποὺ θὰ στοιχίση 50.000 δρχ. Τὸ κράτος ἔδωσε 35.000 δρχ. Τὰ ὑπόλοιπα, ἀνέλαβαν νὰ τὰ

πληρώσουν 75 οἰκογένειες. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ στὴν κάθε οἰκογένεια;

58) Ἕνας ἀγόρασε 840 κόττες πρὸς 24 δρχ. τὴ μία. Ἀλλὰ στὸ δρόμο τοῦ ἐψόφησαν 64 κότες καὶ τὶς ὑπόλοιπες τὶς ἐπώλησε πρὸς 32 δραχμὲς τὴ μία. Ἐκέρδισε ἢ ἐζημιώθη; Καὶ πόσα;

Ὁμάδα 16η 59) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 15 τόπια ὕφασμα ἀντὶ 37.800 δρχ. Τὸ κάθε τόπι εἶχε 60 μέτρα. Πόσον ἀγόρασε τὸ μέτρο;

60) Ἕνας ἀτμόμυλος ἀλέθει σὲ 12 ὧρες 18.300 κιλὰ σιτάρι. Ἄλλος ἀτμόμυλος σὲ 20 ὧρες ἀλέθει 35.680 κιλὰ σιτάρι. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ἀλέθει περισσότερο τὴν ὥρα; Καὶ πόσο;

61) Ἕνα βαρέλι γεμάτο λάδι ζυγίζει 185 κιλά. Τὸ ἀπόβαρο τοῦ βαρελιοῦ εἶναι 28 κιλά. Πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ βάρος, καὶ πόσο στοιχίζει τὸ λάδι πρὸς 16 δρχ. τὸ κιλό;

62) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε βούτυρο μὲ 48 δρχ. τὸ κιλό. Τὸ ἐπώλησε πρὸς 60 δρχ. τὸ κιλό. Ἀπὸ τὴν πώλησι ἐκέρδισε 1392 δρχ. Πόσα κιλὰ βούτυρο ἀγόρασε;

Ὁμάδα 17η 63) Ἕνα πλοῖο ἔκαμε ἀπὸ ἕνα λιμάνι σὲ ἄλλο 36 ὧρες. Τὶς πρῶτες 9 ὧρες ἔτρεχε μὲ 16 μίλια τὴν ὥρα, τὶς ἑπόμενες 14 μὲ 19 μίλια τὴν ὥρα καὶ τὶς ὑπόλοιπες μὲ 18 μίλια. Πόσα μίλια εἶναι ἡ ἀπόστασι μεταξὺ τῶν δύο λιμανιῶν;

64) Ἕνας παραγωγὸς ἐπώλησε 684 κιλὰ μῆλα α΄ ποιότητος πρὸς 12 δραχ. τὸ κιλό, 908 κιλὰ β΄ ποιότητος πρὸς 3 δραχ. φθηνότερα ἀπὸ τὰ πρῶτα καὶ 1084 κιλὰ ἀχλάδια μὲ διπλάσια τιμὴ κατὰ κιλὸ ἀπὸ τὰ μῆλα β΄ ποιότητος. Ἀγόρασε κατόπιν μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ ἕνα οἰκόπεδο 376 τετρ. μέτρων καὶ τοῦ ἔμειναν 172 δραχ. Πόσο ἐπῆρε τὸ μέτρο τὸ οἰκόπεδο;

65) Μία μοδίστα παίρνει ραπτικὰ γιὰ κάθε φόρεμα 135 δραχ. Ἂν τὰ ἔξοδά της εἶναι 20 δραχ. γιὰ κάθε φόρεμα, πόσα πρέπει νὰ ράψη γιὰ νὰ τῆς μείνουν 5520 δραχμὲς καθαρές;

66) Ἕνας κτηνοτρόφος ἐπώλησε 85 ἀρνιὰ πρὸς 168 δραχ. τὸ ἕνα. Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε ἀγόρασε 38 μέτρα ὕφασμα πρὸς 65 δραχ. τὸ μέτρο καὶ 5 ζεύγη ὑποδήματα πρὸς 148 δραχ. Ἂν εἶχε καὶ ἔξοδα μεταφορᾶς κλπ. 1025 δραχ. πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν;

67) Ἕνας ἐργολάβος ἔστρωσε ἕνα δρόμο 135 μέτρων καὶ ἔλαβε 33.750 δραχ. Πόσον ἐκέρδισε κατὰ μέτρον, ἂν ἐπλήρωσε γιὰ ἐργατικὰ 19.500 δραχ. καὶ γιὰ ὑλικὰ 7.500 δραχ;

Ὁμάδα 18η 68) Ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ὡς τὴ Θεσσαλονίκη εἶναι 560 χιλιόμετρα. Ἂν ἕνα αὐτοκίνητο πρέπη νὰ φθάση σὲ 11 ὧρες καὶ ἔτρεξε τὶς πρῶτες 5 ὧρες μὲ 46 χιλμ. τὴν ὥρα, πόσο πρέπει νὰ τρέχη τώρα τὴν ὥρα γιὰ νὰ διανύση τὰ ὑπόλοιπα ἐντὸς τῆς ὡρισμένης προθεσμίας;

69) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 475 κιλὰ φασόλια πρὸς 12 δραχ. τὸ κιλό. Ἂν τοῦ ἐχύθηκαν στὸ δρόμο 15 κιλὰ καὶ θέλει νὰ κερδίση καὶ 1660 δραχ. συνολικὰ, πόσο πρέπει νὰ πωλήση τὸ κιλό;

70) Γιὰ τὸ σκάψιμο ἑνὸς ἀμπελιοῦ ἐπληρώθησαν γιὰ ἡμερομίσθια 9.984 δραχ. καὶ ἐργάσθηκαν 8 ἐργάτες μὲ ἡμερομίσθιο 48 δραχ. Πόσες ἡμέρες διήρκεσεν ἡ ἐργασία αὐτή;

71) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 158 μέτρα ὑφάσματος καὶ ἔδωκε 48.600 δραχ. Ἐξώδευσε γιὰ μεταφορικὰ 240 δραχ. καὶ γιὰ φόρο 1.720 δραχ. Πόσες δραχ. τοῦ στοιχίζει τώρα τὸ μέτρο τοῦ ὑφάσματος;

72) Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων ἀγόρασε 135 μέτρα ὕφασμα πρὸς 108 δραχ. τὸ μέτρο. Πόσες δραχ. πρέπει νὰ πωλήση τὸ μέτρο τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ γιὰ νὰ κερδίση ἀπὸ ὅλο τὸ ὕφασμα 4.050 δραχ; Καὶ πόσες δραχ. θὰ εἰσπράξη ἀπὸ τὴν πώλησι;

73) Ἕνας παντοπώλης πωλεῖ τὸ βούτυρο σὲ τιμὴ τετραπλασία τῆς τιμῆς τοῦ λαδιοῦ. Ἂν τὸ λάδι τιμᾶται 16 δραχ. τὸ κιλό, πόσες δραχ. τιμῶνται τὰ 86 κιλὰ βούτυρο; Καὶ πόσα κιλὰ βούτυρο θὰ ἀγοράση μὲ 8.704 δραχμές;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ

Ἀσκήσεις

Κάμε τὶς παρακάτω πράξεις :

Ὁμάδα 19η. 74) α) 385,45+1.786,30+87,5 +38,665+178,90=

β) 753,75+ 896,8 +175,785 +77,56 + 6.378=

75) 7.866,38 — 5.376,75 = 6.476,5 —2.785,45 =

3.586 — 1.475,45 = 5.870,65—3.966,170=

76) 375,47 × 14,5 = 186,35 × 7,8 =

375,175 × 6,75 = 475,48 × 0,750 =

437,85 × 100 = 648,57 × 10 =

375,5 × 1.000 = 447,68 ×1.000 =

77) 6.375,480 : 40 = 10.870,185 : 0,95 =

4.756,5 : 4,15= 37.580 : 4,25 =

386,75 : 10 = 98.953,7 : 1.000 =

4.878,6 : 100 = 4.756,5 : 10.000=

2.066,075 : 5,5 = 555.512 : 0,176=

Ὁμάδα 20η 78) Ἕνα κορίτσι ἀγόρασε 4,75 μέτρα πανὶ γιὰ σεντόνια πρὸς 32,60 δραχ. τὸ μέτρο καὶ 15,6 μέτρα χασὲ πρὸς 8,50 δραχ τὸ μέτρο. Πόσα ἔδωκε συνολικά;

79) Μία γυναίκα ἀγόρασε 16,75 κιλὰ λάδι πρὸς 18 δραχ. τὸ κιλό. Ἔδωσε γιὰ νὰ τὸ πληρώση 500 δραχ. Πόσα ρέστα ἐπῆρε;

80) Ἕνας ἀγόρασε 7 μανδήλια ποὺ ἡ δωδεκάδα ἄξιζε 110,40 δραχμές. Πόσες δραχ. ἔδωσε;

81) Ἕνας μαθητὴς ἀγόρασε 8 νέα βιβλία πρὸς 9,40 δραχ. τὸ ἕνα. Ἔδωσε γιὰ νὰ τὰ πληρώση ἕνα ἑκατοστάρικο. Πόσα ρέστα ἐπῆρε ;

82) Γιὰ νὰ κάνωμε μιὰ πετσέτα φαγητοῦ, θέλομε 0,64 τοῦ μέτρου. Πόσες πετσέτες θὰ κάνωμε μὲ 16 μέτρα;

83) Μία οἰκογένεια ἀγοράζει κάθε ἡμέρα 1,5 κιλὸ γάλα πρὸς 4,80 δραχ. τὸ κιλό. Πόσα ξοδεύει κατὰ μῆνα (30 ἡμέρες);

Ὁμάδα 21η. 84) Ἕνας ἀγόρασε λεμόνια πρὸς 4,50 δραχ. τὰ 10 λεμόνια. Πόσο ἀξίζουν τὰ 100 καὶ πόσο τὰ 1000 λεμόνια;

85) Μία αὐλὴ ἔχει ἐπιφάνεια 125,60 τετρ. μέτρα καὶ πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ πλάκες ποὺ κάθε μία ἔχει ἐπιφάνεια 0,785 τ. μ. Πόσες πλάκες θὰ χρειασθοῦν; Καὶ πόσο θὰ στοιχίση ἡ πλακόστρωσι τῆς αὐλῆς, ὅταν συμφωνηθῆ πρὸς 14,50 δραχ. τὸ τετρ. μέτρο;

86) Ἕνας φρουτέμπορος ἀγόρασε 18 κιβώτια μῆλα, ποὺ τὸ κάθε κιβώτιο ζυγίζει 18,50 κιλὰ πρὸς 5,5 δραχ. τὸ κιλό. Ἐξώδεψε γιὰ νὰ τὰ μεταφέρη στὴν ἀποθήκη του 125,50 δραχ. Πόσο τοῦ ἐκόστισαν τὰ μῆλα;

87) Μία γυναίκα ἐπώλησε 366 αὐγὰ πρὸς 3 δραχ. τὸ ζευγάρι. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε, ἀγόρασε γιὰ προῖκα τοῦ κοριτσιοῦ της χασὲ πρὸς 12,20 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσα μέτρα χασὲ ἀγόρασε ;

88) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε 286 κιλὰ λάδι πρὸς 12,60 δραχ. τὸ κιλό. Στὸ δρόμο ἐχύθησαν 28 κιλά καὶ τὸ ὑπόλοιπο ἐπώλησε πρὸς 18,80 δραχ. τὸ κιλό. Ἐκέρδισε ἢ ἐζημίωσε καὶ πόσα ;

Ὁμάδα 22η. 89) Ἕνας βιβλιοπώλης ἐπώλησε 109 ἀναγνωστικὰ πρὸς 12,40 δρχ. τὸ ἕνα καὶ 316 βοηθητικὰ βιβλία πρὸς 10,50 δρχ. τὸ ἕνα. Ἔδωσε γιὰ τὴν ἀγορά τους 3.934 δρχ. Ποῖο εἶναι τὸ κέρδος του ;

90) Δύο ἀδέλφια ἔχουν 108,60 δρχ. Ὁ μεγαλύτερος ἔχει 9,80 δρχ. περισσότετερα ἀπὸ τὸν ἄλλο. Πόσα ἔχει ὁ καθένας τους ;

91) Ὁ εἰσπράκτωρ ἑνὸς λεωφορείου ἔκοψε τὴ μία ἡμέρα 575 εἰσιτή-

ρια τῶν 1,30 δρχ. τὸ ἕνα καὶ 238 εἰσιτήρια τῶν 1,80 δρχ. τὸ ἕνα καὶ 119 εἰσιτήρια ἀκόμη. Στὸ τέλος τῆς ἡμέρας παρέδωσε στὸ Ταμεῖο 1354,40 δρχ. Ποία ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ 119 εἰσιτήρια ;

92) Μία ἀνδρικὴ ἐνδυμασία ἐστοίχισε μὲ τὰ ραπτικὰ 1700 δρχ. Τὰ ραπτικὰ ἦσαν 724 δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ μέτρο τοῦ ὑφάσματος, ἐὰν ἐχρειάσθηκαν 3,2 μέτρα γιὰ τὴν ἐνδυμασία ;

93) Ἕνας οἰνοπώλης ἀγόρασε 1575 κιλὰ κρασί Ἀπὸ αὐτὸ ἐγέμισε ἕνα βαρέλι ποὺ χωροῦσε 540,4 κιλὰ καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἔβαλε σὲ μπουκάλια ποὺ χωροῦσαν 1,4 κιλὰ τὸ καθένα. Πόσα μπουκάλια ἐγέμισε ;

Ὁμάδα 23η. 94) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε σιτάρι πρὸς 2,90 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ ἐπλήρωσε 3.909,20 δρχ. Ἀπὸ τὸ σιτάρι αὐτὸ ἐπώλησε τὰ 448,50 κιλὰ πρὸς 3,60 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ ὑπόλοιπο πρὸς 3,80 δρχ. τὸ κιλό. Πόσα χρήματα ἐκέρδισε ἀπὸ τὴν πώλησι ;

95) Ἕνας ὑαλοπώλης ἀγόρασε 36 δωδεκάδες πιάτα πρὸς 4,50 δρχ. τὸ ἕνα. Κατὰ τὴν μεταφορὰ τοῦ ἔσπασαν 28 πιάτα. Πόσες δρχ. πρέπει νὰ πωλήση τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα πιάτα γιὰ νὰ κερδίση 601.20 δρχ. ;

96) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε ρύζι πρὸς 10,60 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 0,80 δραχ. τὸ κιλὸ καὶ εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησι 1550,40 δραχ. Πόσα κιλὰ ρύζι εἶχε ἀγοράσει;

97) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 1240 κιλὰ καφὲ πρὸς 63,40 δραχ. τὸ κιλό. Ἐπώλησε ὅλη τὴν ποσότητα τοῦ καφὲ καὶ εἰσέπραξε 93.248 δραχ. Πόσες δραχ. ἐκέρδισε στὸ κάθε κιλό.

98) Ἕνας μανάβης ἀγόρασε 12 κιβώτια μῆλα, ποὺ τὸ κάθε κιβώτιο ἐζύγιζε 14,50 κιλά, πρὸς 4,75 δραχ. τὸ κιλό. Τὰ μῆλα τὰ ἐπώλησε μὲ κέρδος 1,40 δραχ. τὸ κιλό. Πόσες δραχ. εἰσέπραξε;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μάθημα 1ον.—Ἡ ἀκεραία μονάδα—ὁ ἀκέραιος ἀριθμός

Ἀπὸ ἕνα πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων π.χ. μαθητῶν, προβάτων, μήλων κλπ., ὅταν παίρνωμε τὸ ἕνα πρᾶγμα, λέμε, ὅτι αὐτὸ τὸ ἕνα, εἶναι μία **ἀκεραία μονάδα**. Ὥστε ὁ **1** μαθητής, τὸ **1** πρόβατο, τὸ **1** μῆλο, εἶναι ἀπὸ **1 ἀκεραία μονάδα**.

Συμπέρασμα: Τὸ ἕνα πρᾶγμα ποὺ παίρνομε ἀπὸ ἕνα πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων, ὀνομάζεται ἀκεραία μονάδα

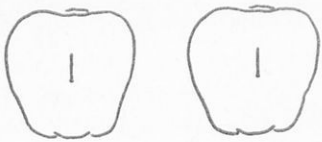
Ἡ ἀκεραία μονάδα εἶναι ἡ βάσι γιὰ τὴ μέτρησι πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων. Ὅταν λέμε ὅτι ἡ Ε΄ τάξι, ἔχει τριάντα (30) μαθητάς, τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν εἶναι ὡρισμένο, ὁ δὲ ἀριθμὸς 30 λέγεται **ἀκέραιος ἀριθμός.** Ὁ ἀριθμὸς 30 γίνεται ἐὰν ἐπαναλάβωμε τὴν ἀκεραία μονάδα 30 φορές :

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,1,1=30

Σ υ μ π έ ρ α σ μ α : Ἀκέραιος ἀριθμὸς λέγεται τὸ ἐξαγόμενον ποὺ βρίσκομε ἀπὸ τὴν ἀρίθμησι τῶν ἀκεραίων μονάδων. ποὺ ἀποτελοῦν ἕνα πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων.

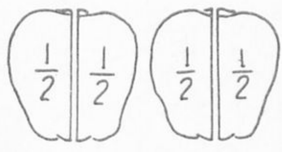
Μάθημα 2ον. — Ἡ Κλασματικὴ μονάδα.

Παράδειγμα. Μία μητέρα ἔχει 4 μῆλα καὶ θέλει νὰ τὰ μοιράση στὰ 2 παιδιά της. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μερίδιο τοῦ κάθε παιδιοῦ, πρέπει νὰ διαιρέσωμε τὸ 4 διὰ τοῦ 2 (4:2=2). Θὰ ἰδοῦμε λοιπόν, ὅτι τὸ κάθε παιδὶ θὰ πάρη 2 μῆλα.



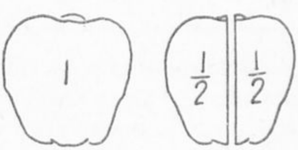
Ἂν ὅμως ἡ μητέρα εἶχε 2 **μῆλα** νὰ τὰ μοιράση σὲ 4 **παιδιά**, πῶς θὰ τὰ ἐμοίραζε; Θὰ ἔκανε καὶ πάλι διαίρεσι 2 : 4. Ἀλλὰ γίνεται αὐτὴ ἡ διαίρεσι, ποὺ ὁ διαιρέτης 4, εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ διαιρετέο ; Γιὰ τὶς διαιρέσεις αὐτές, πού ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ διαιρετέο, οἱ ἄνθρωποι ἐσκέφθησαν καὶ εὕρῆκαν ἄλλους ἀριθμούς.

Ἡ μητέρα θέλει νὰ μοιράση τὰ 2 μῆλα στὰ 4 παιδιά της. Καὶ βέβαια πρέπει τὸ κάθε παιδὶ νὰ πάρη ἀπὸ ἴσο μερίδιο. Τί θὰ κάμη λοιπὸν ἀφοῦ τὰ μῆλα εἶναι μόνο 2 καὶ δὲν φθάνουν νὰ πάρη τὸ κάθε παιδὶ ἀπὸ ἕνα ὁλόκληρο ; Παίρνει τὸ κάθε μῆλο καὶ τὸ κόβει στὴ μέση κι ἔτσι τὸ ἕνα ὁλόκληρο μῆλο, γίνεται δύο μισά.



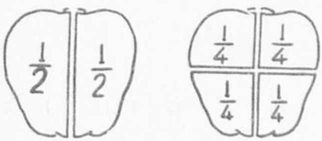
Ἀφοῦ τὸ κάθε μῆλο ἐκόπηκε σὲ δύο ἴσα μέρη, σὲ δύο μισά, τὰ **δύο μῆλα ἔγιναν τέσσερα ἴσα κομμάτια**, ὅσα ἐχρειάζετο ἡ μητέρα γιὰ νὰ δώση ἀπὸ ἕνα ἴσο κομμάτι στὸ κάθε παιδί. Ἔτσι λοιπὸν βρῆκε ὅτι τὸ κάθε παιδὶ πρέπει νὰ πάρη **ἀπὸ μισὸ μῆλο.**

Πῶς θὰ μπορούσαμε νὰ γράψωμε αὐτὸ τὸ ΜΙΣΟ μῆλο στὸ τετράδιό μας ἢ στὸν πίνακα; Κάθε ἀκέραιο πρᾶγμα γράφεται, ὅπως ξέρετε μὲ τὸν ἀριθμὸν 1. Τώρα τὴν ἀκεραία μονάδα, τὸ ἕνα μῆλο, τὴν ἐκόψαμε σὲ δύο ἴσα μέρη καὶ τὴν ἔχομε χωρισμένη σὲ δύο μισά. **Τὸ κάθε μισὸ γράφεται** $\frac{1}{2}$ καὶ διαβάζεται **ἕνα δεύτερο**.

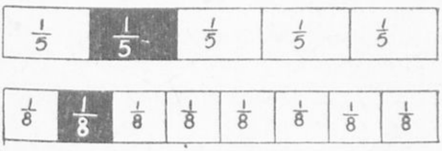


Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ διαβάσωμε τὸ 1 σοκολατάκι, ἂν τὸ κόψωμε σὲ 2 ἴσα μέρη. Ἕνα σοκολατάκι $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Ἀλλὰ μία ἀκεραία μονάδα δὲν κόβεται μονάχα σὲ δύο ἴσα μέρη. Μπορεῖ νὰ παραστῆ ἀνάγκη νὰ τὴν κόψωμε σὲ τρία, σὲ τέσσερα ἢ σὲ περισσότερα ἴσα κομμάτια, ἀνάλογα μὲ τὰ μέρη, ποὺ θέλομε νὰ τὴ μοιράσωμε. Τότε τὸ κάθε κομμάτι ἀπὸ αὐτά, **θὰ** ἔχη ἄλλο ὄνομα καὶ θὰ γράφεται διαφορετικά. Ἀντὶ νὰ ἔχη κάτω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα, τὸ 2, ὅταν ἡ ἀκεραία μονάδα κόπηκε σὲ δύο ἴσα μέρη, τότε **θὰ ἔχη τὸν ἀριθμό, ποὺ μᾶς φανερώνει σὲ πόσα ἴσα κομμάτια κόβομε κάθε ἀκεραία μονάδα.**



Ὅταν τὸ γλυκὸ κόβεται σὲ **τρία κομμάτια,** τὸ ἕνα κομμάτι ἀπὸ αὐτὰ θὰ τὸ λέμε ἕνα **τρίτο** καὶ θὰ τὸ γράφωμε $\frac{1}{3}$. Ἂν κόβεται σὲ **τέσσερα ἴσα κομμάτια,** τὸ ἕνα θὰ τὸ διαβάζωμε **ἕνα τέταρτο** καὶ θὰ τὸ γράφωμε $\frac{1}{4}$. Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ λέμε **ἕνα πέμπτο** $\frac{1}{5}$,



ἕνα ὄγδοο $\frac{1}{8}$, **ἕνα δέκατο** $\frac{1}{10}$ κλπ.

Πάντοτε, ὅταν ἡ ἀκεραία μονάδα κόβεται σὲ ἴσα κομμάτια, γιὰ νὰ διαβάσωμε καὶ νὰ γράψωμε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ κομμάτια, θὰ λέμε πρῶτα τὸ ἕνα (1) καὶ ὕστερα τὸν ἀριθμὸ ποὺ μᾶς δείχνει σὲ πόσα ἴσα κομμάτια κόβεται ἡ ἀκεραία μονάδα. Σ' αὐτὰ δηλ. στὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ κλπ. ἔδωσαν τὸ ὄνομα **κλασματικὴ μονάδα,** γιὰ νὰ διακρίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα, ἡ ὁποία φανερώνει ἕνα ὁλόκληρο πρᾶγμα.

Συμπέρασμα : Κλασματικὴ μονάδα λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα κομμάτια, στὰ ὁποῖα μοιράζεται ἡ ἀκεραία μονάδα.

Ἀσκήσεις

Προφορικά.

Ὁμάδα 1η. 99) Ποιὰ κλασματικὴ μονάδα θὰ ἔχωμε, ἂν μοιράσωμε τὴν ἀκεραία μονάδα σὲ 3, 5, 6, 7, 12, 15, 20 κομμάτια ;

100) Πόσοι μῆνες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ χρόνου ; (ὁ 1 χρόνος = 12 μῆνες).

101) Πόσες ἡμέρες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{5}$, τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μηνός ; (ὁ 1 μήνας = 30 ἡμέρες).

102) Πόσα λεπτὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{10}$, τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ; (1 ὥρα = 60 λεπτά).

103) Τί φανερώνουν οἱ κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$ τοῦ χιλιάρικου ;

Γραπτά.

Ὁμάδα 2η) 104) Γράψετε 10 κλασματικὲς μονάδες δικές σας.

105) Γράψετε μὲ κλασματικὴ μορφή : α) 1 ὥρα τοῦ 24ώρου, β) 1 ἡμέρα τοῦ μηνός. (Μήν.=30 ἡμέρες). γ) 1 μήνας τοῦ ἔτους, (1 ἔτος=12 μῆνες).

106) Γράψετε μὲ κλασματικὴ μορφή : α) 1 παλάμη (1 μέτρο=10 παλάμες) β) 1 πόντο τοῦ μέτρου (1 μέτρο ἔχει 100 πόντους), γ) 1 γραμμὴ τοῦ μέτρου (1 μέτρο=1000 γραμμές).

107) Τί μέρος τοῦ χιλιάρικου εἶναι τὸ ἕνα ἑκατοστάρικο, τὸ ἕνα πενηντάρικο ; Νὰ τὰ γράψετε μὲ κλασματικὴ μορφή.

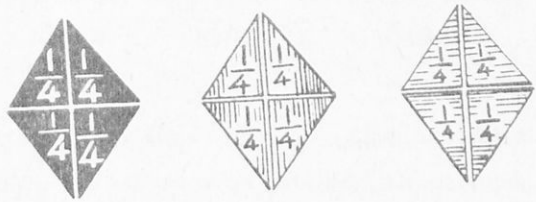
Ὁμάδα 3η. 108) Γράψετε τὶς κλασματικὲς μονάδες ἀπὸ τὸ $\frac{1}{20}$ ἕως τὸ $\frac{1}{40}$ καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ ἕως τὸ $\frac{1}{20}$.

109) Κόψετε καὶ σεῖς δέκα ἀκέραιες μονάδες σὲ ὅσα κομμάτια θέλετε καὶ ὀνομάσετε τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ κομμάτια, γράφοντας τὴν κλασματικὴ μονάδα τους.

110) Γράψετε μία εὐθεῖα γραμμὴ μήκους 1 μέτρου. Χωρίσετέ την σὲ 4, 5, 8, 10 ἴσα μέρη. Πῶς θὰ ὀνομάσωμε τὸ κάθε μέρος ἀπὸ αὐτά ; Γράψετέ το μὲ κλασματικὴ μορφή.

Μάθημα 3ο. — Κλάσματα ἤ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ

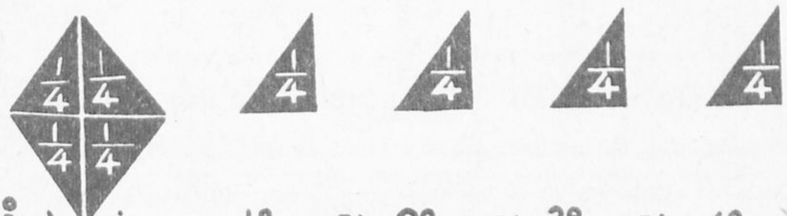
Παράδειγμα 1ο.—Μία μητέρα ἔχει τρία γλυκὰ ὅμοια στὸ μέγεθος καὶ θέλει νὰ τὰ μοιράση στὰ τέσσερα παιδιά της.



Τρία γλυκὰ μοιρασμένα σε 4 κομμάτια τὸ καθένα

Καὶ ἐδῶ βέβαια δὲν φθάνουν τὰ γλυκὰ γιὰ νὰ πάρη τὸ κάθε παιδὶ ἀπὸ ἕνα ὁλόκληρο. Πρέπει νὰ τὰ μοιράσωμε ἔτσι, ὥστε νὰ πάρη τὸ καθένα ἴσο μερίδιο.

Νὰ πῶς τὰ μοιράζει : Πρῶτα κόβει τὸ ἕνα γλυκὸ σὲ τέσσερα κομμάτια ἴσα καὶ δίνει στὸ κάθε παιδὶ ἕνα, δηλ. τὸ $\frac{1}{4}$.



1ο γλυκό 1ο παιδί 2ο παιδί 3ο παιδί 4ο παιδί

Κόβει ἔπειτα τὸ δεύτερο γλυκὸ πάλι σὲ τέσσερα κομμάτια καὶ δίνει ἐπίσης ἀπὸ ἕνα κομμάτι ἀκόμη στὸ κάθε παιδί, δηλ. ἄλλο $\frac{1}{4}$ καὶ ἔτσι τὸ καθένα θὰ ἔχη ἀπὸ δύο κομμάτια, δηλ. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Τέλος παίρνει τὸ τρίτο γλυκὸ καὶ τὸ κόβει καὶ αὐτὸ πάλι σὲ τέσσερα ἴσα κομμάτια καὶ δίνει στὸ κάθε παιδὶ ἄλλο $\frac{1}{4}$ καὶ ἔτσι τώρα ἀποκτᾶ τὸ καθένα ἀπὸ τρία ἴσα κομμάτια, δηλ. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

Ἔτσι μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ τὸ κάθε παιδὶ παίρνει ἀπὸ τρία κομμάτια ἴσα καὶ τὸ κάθε κομμάτι εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ γλυκοῦ. Πῶς θὰ παρα-

στήσωμε τώρα ὁλόκληρο αὐτὸ τὸ μερίδιο, ποὺ πῆρε τὸ κάθε παιδί; Βέβαια δὲν μποροῦμε νὰ τὸ γράφωμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, καὶ νὰ τὸ λέμε ἕνα τέταρτο καὶ ἕνα τέταρτο καὶ ἕνα τέταρτο, ὅπως δὲν συνηθίζωμε νὰ γράφωμε τὸν ἀκέραιο 3 μὲ $1+1+1$. Ἔτσι καὶ τὸ μερίδιο τοῦ γλυκοῦ γιὰ τὸ κάθε παιδὶ τὸ γράφομε μὲ ἕναν ἀριθμό καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ $\frac{3}{4}$ τὸν ὁποῖον διαβάζομε **τρία τέταρτα** καὶ γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ὅπως καὶ στοὺς ἀκεραίους ὁ ἀριθμὸς 3 γίνεται ἀπό τρεῖς ἀκέραιες μονάδες. Ὁ νέος αὐτὸς ἀριθμὸς $\frac{3}{4}$(τρία τέταρτα) ὀνομάζεται **κλά-**

σμα ἢ **κλασματικός ἀριθμός**. Ὁ $\frac{3}{4}$ παριστάνει τρία ἴσα κομμάτια ἀπὸ τὰ 4, ποὺ κόψαμε τὴν ἀκεραία μονάδα (τὸ γλυκό). Ἀλλὰ τὸ μερίδιο τοῦ κάθε παιδιοῦ, τὸ $\frac{3}{4}$ τοῦ γλυκοῦ, εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3 : 4.

Παράδειγμα 2ο. Μία δραχμὴ διαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, **ποὺ λέγονται δεκάρες.**

Ἂν πάρωμε μία δεκάρα, λέμε, ὅτι παίρνομε τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς. Ὅταν ὅμως μία γυναίκα θέλη πέντε δεκάρες γιὰ ν' ἀγοράση ἕνα λεμόνι, δὲν θὰ εἰποῦμε, οὔτε θὰ γράψωμε πέντε φορές τὸ $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$ ἀλλὰ θὰ ἐκφραστοῦμε ἔτσι: πέντε δέκατα $\frac{5}{10}$ τῆς δρχ. Ὁ $\frac{5}{10}$ γίνεται μὲ τὴν ἐπανάληψι τῆς κλασμ. μονάδος $\frac{1}{10}$ πέντε φορές. Καὶ ἐδῶ τὸ $\frac{5}{10}$ εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρετέου 5 διὰ τοῦ διαιρέτου 10. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται **κλάσμα**.

Συμπέρασμα: Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψι μιᾶς κλασματικῆς μονάδος.

Κάθε κλάσμα φανερώνει τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως. Ὥστε τώρα, ποὺ ξέρομε τὰ κλάσματα, δὲν θὰ ὑπάρχη πλέον διαίρεσις ἀτελής.

Ἀσκήσεις

Προφορικά. 111) Διαβάσετε καὶ πέστε τί φανερώνουν τὰ κλάσματα $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, τοῦ μέτρου;

112) Τί μέρος τοῦ χιλιάρικου εἶναι τα τρία ἑκατοστάρικα, τὰ πέντε ἑκατοστάρικα, τὰ ἐννέα ἑκατοστάρικα, τὰ πέντε πενηντάρικα, τὰ δέκα πενηντάρικα;

113) Τί ἐννοοῦμε ὅταν γράφωμε $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ;

114) Πόσες φορὲς πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε τὸ $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{15}$ γιὰ νὰ ἔχωμε μία ἀκεραία μονάδα;

Γραπτά.

Ὁμάδα 1η. 115) Νὰ γράψετε 10 κλάσματα δικά σας.

116) Ἂν κόψωμε ἕνα μῆλο σὲ 6 ἴσα κομμάτια καὶ πάρωμε τὰ 2, 3, 4, 5, 6 ἀπὸ αὐτά, ποιὰ κλάσματα θὰ ἔχωμε;

117) Ἡ Ρένα ἀγόρασε μισὸ μέτρο λάστιχο, 40 πόντους κορδέλλα καὶ 7 παλάμες δαντέλλα. Τί μέρος τοῦ μέτρου ἀγόρασε, ἀπὸ κάθε εἶδος;

118) Ἡ κυρία Μαρία ἀγόρασε 100 γραμμάρια καφέ, 50 γραμμάρια κακάο, 200 γραμμάρια ζάχαρι, 250 γραμμάρια ρύζι, καὶ 300 γραμμάρια λάδι. Νὰ γράψετε τὶ μέρος τοῦ κιλοῦ ἀγόρασε ἀπὸ κάθε εἶδος.

Ὁμάδα 2α. 119) Τὶ μέρος τοῦ μηνὸς εἶναι οἱ 5, 10, 15, 20, 25 ἡμέρες;

120) Νὰ γράψετε τὶ μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὰ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, καὶ 40 πρῶτα λεπτά.

121) Τὶ μέρος τοῦ χρόνου εἶναι οἱ 2, 3, 6, 7 μῆνες;

122) Ἕνα στρέμμα ἔχει 1.000 τετραγ. μέτρα. Τί μέρος τοῦ στρέμματος ἀποτελοῦν τὰ 50, 100, 200, 400, 500 τετραγ. μέτρα;

123) Πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, τὰ $\frac{2}{5}$, τὰ $\frac{3}{4}$, τοῦ κιλοῦ;

Μάθημα 4ο. — α) Ὅροι τοῦ Κλάσματος

Ὅπως εἴδαμε οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ διαφέρουν ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους καὶ στὴ σημασία καὶ στὸ γράψιμό τους. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ φανερώνουν ὁλόκληρα πράγματα καί γράφονται μὲ ἕναν ἀριθμό, π. χ. 5 μῆλα.

Παράδειγμα : ***Κόβομε ἕνα μῆλο σὲ 4 κομμάτια καὶ ἕνα ἄλλο σὲ 6 κομμάτια καὶ παίρνομε ἀπὸ τὸ καθένα 3 κομμάτια.***

Λέμε λοιπὸν ὅτι πήραμε τὰ τρία τέταρτα ἀπὸ τὸ πρῶτο μῆλο καὶ θὰ τὸ γράψωμε $\frac{3}{4}$ καὶ τὰ τρία ἕκτα ἀπὸ τὸ δεύτερο μῆλο καὶ θὰ τὸ γράψωμε $\frac{3}{6}$.

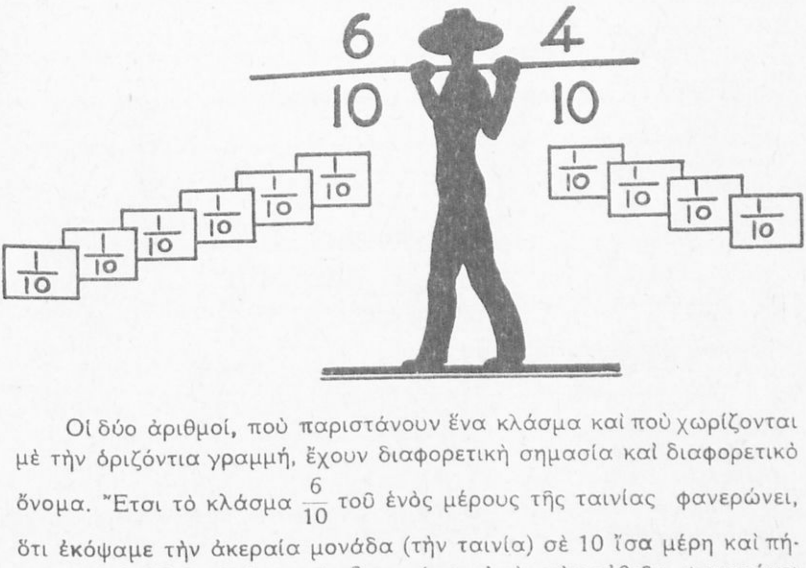
Τὰ κλάσματα αὐτὰ φανερώνουν μέρος μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ γράφονται μὲ δύο ἀριθμούς, ποὺ χωρίζονται μὲ μία ὁριζόντια γραμμή. Ὁ ἕνας γράφεται πάνω ἀπὸ τὴν γραμμὴ καὶ ὁ ἄλλος κάτω ἀπὸ αὐτή. Οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Π. χ. α) $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου β) $\frac{3}{6}$ τοῦ μήλου.

> **Συμπέρασμα: Ὅροι τοῦ κλάσματος λέγονται οἱ δύο ἀριθμοί, μὲ τοὺς ὁποίους γράφεται ἕνα κλάσμα.**

β) Ὀνομασία τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος

Παράδειγμα: ***Ἔχομε τὴν παρακάτω ταινία μήκους ἑνὸς μέτρου, ἡ ὁποία χωρίζεται σὲ 10 ἴσα μέρη.***

Τὸ κάθε κομμάτι εἶναι $\frac{1}{10}$ τῆς ταινίας. Κρατοῦμε ἀπὸ τὰ 10 αὐτὰ κομμάτια τῆς ταινίας τὰ 6 μόνο κομμάτια. Θὰ ἔχωμε τότε ἕνα μέρος τῆς ταινίας, ποὺ θὰ εἶναι τὰ $\frac{6}{10}$ αὐτῆς.



Οἱ δύο ἀριθμοί, ποὺ παριστάνουν ἕνα κλάσμα καὶ ποὺ χωρίζονται μὲ τὴν ὁριζόντια γραμμή, ἔχουν διαφορετικὴ σημασία καὶ διαφορετικὸ ὄνομα. Ἔτσι τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$ τοῦ ἑνὸς μέρους τῆς ταινίας φανερώνει, ὅτι ἐκόψαμε τὴν ἀκεραία μονάδα (τὴν ταινία) σὲ 10 ἴσα μέρη καὶ πήραμε τὰ 6. Ὁ ἀριθμός, ποὺ εἶναι κάτω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα, φανερώνει σὲ πόσα ἴσα κομμάτια μοιράσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα καὶ λέγεται ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ.

Ὁ ἀριθμός, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα, φανερώνει πόσα κομμάτια πήραμε ἀπὸ τὰ ἴσα κομμάτια, ποὺ μοιράσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα, καὶ λέγεται ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ.

$$\frac{6}{10} = \frac{\text{ὁ ἕξι}}{\text{ὁ δέκατα}} \quad \frac{(6)=}{(10)=} \quad \frac{\text{ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ}}{\text{ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ}}$$

Καὶ οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοί: ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς λέγονται **ὅροι τοῦ κλάσματος**.

Συμπέρασμα: Ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος λέγεται ὁ ἀριθμός, ποὺ μᾶς φανερώνει πόσα κομμάτια παίρνομε ἀπὸ τὰ ἴσα κομμάτια μιᾶς ἀκεραίας μονάδος.

Παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος λέγεται ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς φανερώνει σὲ πόσα ἴσα κομμάτια μοιράσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα.

Παρατήρησι: *Βλέπομε ὅτι μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ γράφεται κάθε κλάσμα* $\frac{3}{4}$ *καὶ* $\frac{3}{6}$, *λέμε ὄχι μόνο τὰ κομμάτια ποὺ παίρνουμε, ἀλλὰ καὶ πόσο μεγάλα εἶναι αὐτά. Δηλαδὴ διαβάζοντας ἕνα κλάσμα, καταλαβαίνομε συγχρόνως καὶ τὸ μέγεθος τῶν κομματιῶν, στὰ ὁποῖα μοιράζεται ἡ ἀκεραία μονάδα.*

Ἀσκήσεις

Ὁμάδα 1η. 124) Ἀπὸ ἕνα γλύκισμα δώσαμε σ' ἕνα παιδὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ. Τί φανερώνει τὸ κλάσμα αὐτό.

125) Ἕνα παιδὶ ἔδωσε ἀπὸ μία δραχμή, ποὺ εἶχε, σ' ἕναν φτωχὸ τὰ $\frac{4}{10}$ καὶ σὲ ἕναν ἄλλον τὰ $\frac{6}{10}$ αὐτῆς, σὲ ποιὸν ἔδωσε περισσότερα; Καὶ γιατί;

126) Ἂν κόψωμε ἕνα ὕφασμα σὲ 12 κομμάτια καὶ δώσωμε σὲ μία γυναίκα 5 κομμάτια καὶ σὲ μίαν ἄλλη τὰ 7 κομμάτια, τί μέρος τοῦ ὑφάσματος θὰ πάρῃ ἡ κάθε γυναίκα;

127) Κάμετε ἀπὸ χαρτὶ ἕνα χιλιάρικο ὅλο πενηντάρικα. Πάρετε χωριστὰ 3 πενηντάρικα, 6 καὶ 7 πενηντάρικα. Ποῖα κλάσματα θὰ γίνουν ;

Ὁμάδα 2α. 128) Τί μέρος τοῦ χρόνου ἀποτελοῦν οἱ 2, 6, 7, 5, 8 μῆνες ;

129) Τί μέρος τοῦ μηνὸς ἀποτελοῦν οἱ 7, 9, 12, 15, 20 καὶ 25 ἡμέρες;

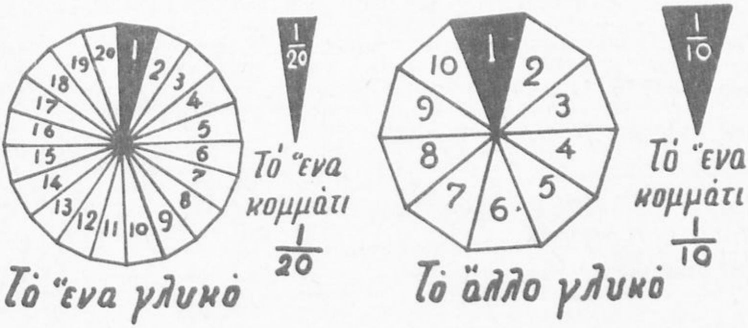
130) Τί μέρος τοῦ κιλοῦ ἀποτελοῦν τὰ 30, τὰ 75, τὰ 250 γραμμάρια ;

131) Γράψετε καὶ σεῖς 5 κλάσματα δικά σας καὶ στὸ πλάϊ τί φανερώνει ὁ ἀριθμητὴς καὶ τί ὁ παρονομαστής τους.

Μάθημα 5ο. — Σύγκρισι τῶν κλασματικῶν μονάδων

Παράδειγμα : *Σήμερα ὁ Φίλιππος, μαθητὴς τῆς Ε' τάξεως, ἔφερε δύο γλυκὰ γιατὶ γιόρταζε καὶ τὰ ἔδωσε στὴ δασκάλα του μὲ τὴν παράκλησι νὰ τὰ μοιράση στοὺς συμμαθητάς του.*

Ἔκαμε ὅμως τὴν παρατήρησι : Τὰ παιδιὰ ποὺ γιορτάζουν νὰ πάρουν περισσότερο γλυκὸ καὶ τὰ ἄλλα νὰ πάρουν μικρότερο κομμάτι. Ἡ δασκάλα του ἄνοιξε τὸν κατάλογό της καὶ εἶδε ὅτι τὰ παιδιὰ ποὺ εἶχαν γιορτὴ ἦταν 10 καὶ τὰ ἄλλα 20. Πῆρε λοιπὸν τὸ ἕνα γλυκὸ καὶ τὸ ἔκοψε σὲ 10 κομμάτια καὶ τὸ ἄλλο σὲ 20 κομμάτια.



Τὸ κάθε παιδὶ ποὺ γιόρταζε πῆρε ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὸ γλυκὸ ποὺ κόπηκε σὲ 10 κομμάτια, δηλ. τὸ ἕνα δέκατο $\frac{1}{10}$. Τὰ ἄλλα παιδιὰ πῆραν ἀπὸ ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὸ ἄλλο γλυκό, ποὺ κόπηκε σὲ 20 κομμάτια. Πῆρε δηλ. τὸ καθε παιδὶ ἕνα εἰκοστὸ τοῦ γλυκοῦ $\frac{1}{20}$. Ἀντὼ ρα συγκρίνωμε τὶς δύο αὐτὲς μονάδες, δηλ. τὸ $\frac{1}{10}$ καὶ τὸ $\frac{1}{20}$, βλέπομε ὅτι τὸ $\frac{1}{10}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{20}$.

Συμπέρασμα: Μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων κλασματικῶν μονάδων μεγαλύτερη εἶναι ἐκείνη ποὺ ἔχει τὸν μικρότερο παρονομαστή.

Ἀσκήσεις

Προφορικά. 132) Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ τοῦ μέτρου ποία εἶναι ἡ μεγαλύτερη καὶ ποία ἡ μικρότερη καὶ γιατί ;

133) Ποῖο εἶναι πιὸ μεγάλο : τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς μήλου ἢ τὸ $\frac{1}{8}$ ἄλλου μήλου, ἴδιου μὲ τὸ πρῶτο στὸ μέγεθος ; Καὶ γιατί ;

134) Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου ποία εἶναι ἡ μεγαλύτερη καὶ ποία ἡ μικρότερη ; Γιατί ;

135) Ὁ Τάκης πῆρε $\frac{1}{3}$ τοῦ μέτρου χαρτὶ γλασσὲ καὶ ὁ Μίμης $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου. Ποῖος ἐπῆρε μεγαλύτερο κομμάτι ;

Γραπτά. 136) Γράψετε στὴ σειρά, ἀπὸ τὴ μικρότερη ὥς τὴ μεγαλύτερη, τὶς παρακάτω κλασματικὲς μονάδες : $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κιλοῦ.

137) Γράψετε καὶ σεῖς 5 κλασματικὲς μονάδες δικές σας καὶ βάλετέ τις κατὰ σειρὰν μεγέθους.

138) Ὁ Δημητράκης ἐργάσθηκε $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας, ὁ Λάμπρος $\frac{1}{2}$, ὁ Κωστάκης $\frac{1}{3}$ καὶ ὁ Γιάννης $\frac{1}{10}$ τῆς ὥρας.
Πόσα λεπτὰ τῆς ὥρας ἐργάσθηκε ὁ καθένας ;

139) Τὸ 24ωρο ἑνὸς μαθητοῦ περνάει ἔτσι : $\frac{1}{4}$ ἐργάζεται στὸ σχολεῖο, $\frac{1}{12}$ παίζει, $\frac{1}{24}$ περίπατο, $\frac{1}{8}$ μελέτη καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας ἀναπαύεται

Νὰ βρῆτε : Μὲ τί ἀσχολεῖται περισσότερο καὶ μὲ τί ὀλιγώτερο ;

Μάθημα 6ο —Κλάσματα Ὁμώνυμα καὶ Ἑτερώνυμα

Παράδειγμα : Ἔχομε δύο ὁμάδες ἀπὸ τρία κλάσματα.

Ὁμάδα 1η	Ὁμάδα 2α
$\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{9}{10}$

Ἄς προσέξωμε τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων στὴν κάθε μία ὁμάδα χωριστά. Βλέπομε ὅτι στὴν πρώτη ὁμάδα καὶ τὰ τρία κλάσματα ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ (τὸν 5) : $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}$, ἐνῶ τὰ κλάσματα τῆς δευτέρας ὁμάδος ἔχουν διαφορετικὸ παρονομαστή, (τὸν 5, 8, καὶ 10) : $\frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{9}{10}$. Τὰ κλάσματα τῆς πρώτης ὁμάδος, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ καὶ διαβάζονται μὲ τὸ ἴδιο ὄνομα (πέμπτα), λέγονται ΟΜΩΝΥΜΑ. Τὰ κλάσματα τῆς δευτέρας ὁμάδος, ποὺ ἔχουν διαφορετικὸ παρονομαστὴ καὶ διαβάζονται μὲ διαφορετικὸ ὄνομα (πέμπτα, ὄγδοα, δέκατα), λέγονται ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ.

Ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι τὰ $\frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{6}{8}$, ἐπειδὴ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ (ὄγδοα). Τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}, \frac{6}{8}, \frac{9}{15}, \frac{15}{30}$ εἶναι **ἑτερώνυμα** γιατὶ ἔχουν διαφορετικὸν παρονομαστή.

Συμπέρασμα 1) ΟΜΩΝΥΜΑ κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή.
2) ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή.

Ἀσκήσεις

Προφορικά. 140) Πῶς ξεχωρίζομε τὰ ὁμώνυμα καὶ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα ;

141) Νὰ βρῆτε **4 ὁμώνυμα** καὶ **4 ἑτερώνυμα** κλάσματα.

142) Τὰ $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου τὶ κλάσματα εἶναι καὶ γιατί;

143) Τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς τὶ κλάσματα εἶναι καὶ γιατί;

Γραπτά. 144) Γράψετε 5 ὁμώνυμα κλάσματα, μὲ παρονομαστὴ τοὺς 100 πόντους τοῦ μέτρου.

145) Γράψετε 5 ὁμώνυμα κλάσματα, μὲ παρονομαστὴ τὸ 30 καὶ νὰ φανερώνουν μῆνες.

146) Γράψετε 5 ὁμώνυμα κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὸ 12, τὸ 30 καὶ τὸ 24.

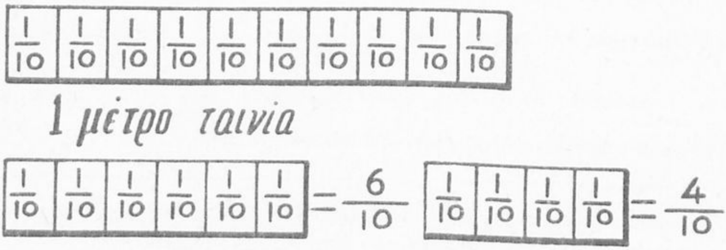
147) Στὰ παρακάτω κλάσματα χωρίσετε τὰ ὁμώνυμα ἀπὸ τὰ ἑτερώνυμα.

$\frac{3}{4}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{14}{25}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{30}$

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ (μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα)

Μάθημα 7ο. — Γνήσια κλάσματα

Παράδειγμα 1ο.— ***Χωρίζομε μία ταινία χαρτὶ σὲ 10 ἴσα μέρη καὶ παίρνομε τὰ 4 κομμάτια.***



Παίρνομε τὰ 4 ἀπὸ τὰ 10, δηλαδὴ τὰ $\frac{4}{10}$ καὶ ἀφήνομε τὰ $\frac{6}{10}$. Τὰ $\frac{4}{10}$, ποὺ πήραμε, εἶναι λιγώτερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα $\frac{10}{10}$ τοῦ μέτρ.

Παράδειγμα: 2ο.—***Κόψετε ἕνα μῆλο σὲ 6 κομμάτια.***

Κάνετε μὲ αὐτὰ δύο κλάσματα, ποὺ νὰ εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα, τὸ 1 μῆλο $\left(\frac{6}{6}\right)$

Συγκρίνετε α) τὰ κλάσματα, ποὺ κάνατε μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα $\frac{6}{6}$.

β) τὸ $\frac{4}{10}$ τοῦ πρώτου παραδείγματος, μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα $\frac{10}{10}$ τῆς ταινίας. Τί παρατηρεῖτε;

Συμπέρασμα: Ἕνα κλάσμα εἶναι μικρότερο τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ του. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται γνήσια.

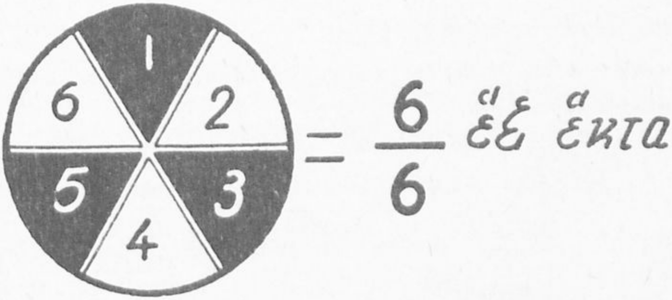
Ἀσκήσεις

148) Ποῖα κλάσματα λέγονται γνήσια;

149) Γράψετε 10 κλάσματα μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.

Μάθημα 8ον. — Κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα

Στὰ δύο προηγούμενα παραδείγματα τῆς ταινίας, ποὺ τὴν κόψαμε σὲ 10 ἴσα μέρη, καὶ τοῦ γλυκοῦ, ποὺ τὸ κόψαμε σὲ 6 κομμάτια, ἂν πάρωμε ἀπὸ τὴν ταινία τὰ 10 κομμάτια, δηλαδὴ ὁλόκληρη τὴν ταινία, καὶ ἀπὸ τὸ γλυκὸ καὶ τὰ 6 κομμάτια, δηλαδὴ ὁλόκληρο τὸ γλυκό, τότε θὰ ἔχωμε τὰ κλάσματα $\frac{10}{10}$ τῆς ταινίας καὶ $\frac{6}{6}$ τοῦ γλυκοῦ.



Καὶ τὰ δύο κλάσματα $\frac{10}{10}$ καὶ $\frac{6}{6}$ φανερώνουν ὅτι παίρνομε όλόκληρη τὴν ἀκεραία μονάδα. Τὸ κλάσμα $\frac{10}{10} = 1$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{6} = 1$.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής τους εἶναι οἱ ἴδιοι ἀριθμοί.

Συμπέρασμα: Ὅταν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴσοι ἀριθμοί, τὸ κλάσμα εἶναι μία ἀκεραία μονάδα. Τὸ κλάσμα δηλ. αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα.

Ἀσκήσεις

150) Γράψετε 10 κλάσματα ἴσα μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα.

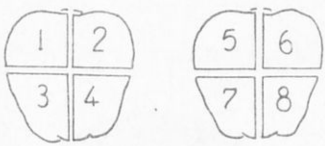
151) Μοιράσετε 1 ψωμὶ σὲ 5 ἴσα κομμάτια, 1 σοκολάτα σὲ 8 ἴσα κομμάτια καὶ γράψετέ τα μὲ κλασματικὴ μορφή.

152) 1 δραχμὴ πόσα δέκατα εἶναι καὶ 1 μέτρο πόσα δέκατα, ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ ἔχει; Γράψετέ τα μὲ κλασματικὴ μορφή.

Μάθημα 9ον.— Καταχρηστικὰ κλάσματα.

Παράδειγμα 1ο. ***Ἔχω δύο μῆλα ἴσα στὸ μέγεθος. Κόβω τὸ καθένα σὲ 4 κομμάτια καὶ γίνονται 8 κομμάτια.***

Ἂν πάρω ἀπὸ τὸ ἕνα τὰ 4 καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τὰ 2, θὰ ἔχω ὅλα μαζὶ 6 κομμάτια. Θὰ ἔχω δηλ. τὸ κλάσμα $\frac{6}{4}$ μῆλα, ποὺ εἶναι περισσότερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα (ἀπὸ τὸ ἕνα μῆλο).



Παράδειγμα 2ο. ***Ἡ μητέρα μου γιὰ νὰ κάμη στὴ γιορτή μου ἕνα γλυκὸ χρειάστηκε ζάχαρι.***

Πῆγε λοιπὸν στὸν μπακάλη καὶ ἀγόρασε 1200 γραμμάρια. Ἀγόρασε δηλ. $\frac{1200}{1000}$ γραμ. ζάχαρι. Ἀγόρασε, ὅπως βλέπετε, περισσότερο ἀπὸ ἕνα κιλό, γιατὶ τὸ κιλὸ ἔχει 1000 γραμμάρια $\left(\frac{1000}{1000}\right)$. Πῆρε δηλαδὴ 200 γραμμάρια $\left(\frac{200}{1000}\right)$ περισσότερο. Τὸ κλάσμα λοιπὸν $\left(\frac{1200}{1000}\right)$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα (ἕνα κιλό).

'Από τά δύο αὐτά παραδείγματα ἔχομε δύο κλάσματα. Τό $\frac{6}{4}$ μῆλα καί τό $\frac{1200}{1000}$ τοῦ κιλοῦ. Καί τά δύο εἶναι μεγαλύτερα ἀπό τήν ἀκεραία μονάδα, γιατί φανερώνουν περισσότερα κομμάτια, ἀπό τά κομμάτια πού κόβομε τήν ἀκεραία μονάδα (1 μῆλο = 4 κομμάτια) καί (1 κιλό = 1000 γραμμάρια). Καί στά δύο **ὁ ἀριθμητής εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν παρονομαστή τους.** Καταλαβαίνετε τώρα ποῖα κλάσματα θά λέγωμε, ὅτι εἶναι μεγαλύτερα ἀπό τήν ἀκεραία μονάδα.[1]

Συμπέρασμα: Ἕνα κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τήν ἀκεραία μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν παρονομαστή του. Τό κλάσμα αὐτό λέγεται καταχρηστικό κλάσμα.

'Ασκήσεις

Προφορικά. 153) Πῶς διακρίνομε τά κλάσματα, πού εἶναι μικρότερα ἤ μεγαλύτερα ἀπό τήν ἀκεραία μονάδα καί ὅσα εἶναι ἴσα μέ αὐτήν;

154) Νά βρῆτε δύο κλάσματα μέ παρονομαστή 12, πού νά φανερώνουν μέρος τοῦ χρόνου.

155) Νά βρῆτε δύο κλάσματα μέ παρονομαστή τό 30 καί νά φανερώνουν μέρος τοῦ μηνός (ἡμέρες).

156) Οἱ 15 μῆνες ποῖο κλάσμα τοῦ χρόνου κάνουν; Τί κλάσμα εἶναι αὐτό;

157) 'Από τά κλάσματα: $\frac{5}{10}$ καί $\frac{15}{10}$ τῆς δραχ. ποῖο εἶναι τό μικρότερο καί ποῖο τό μεγαλύτερο; Γιατί;

Γραπτά. 158) 'Από τά παρακάτω κλάσματα νά ξεχωρίσετε καί νά γράψετε τά **γνήσια**, τά **ἰσοδύναμα** μέ τήν ἀκεραία μονάδα καί τά **καταχρηστικά**.

α) $\frac{7}{9}, \frac{8}{5}, \frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{8}, \frac{12}{12}, \frac{15}{12}, \frac{18}{24}, \frac{12}{8}, \frac{5}{6}.$

β) $\frac{4}{5}, \frac{12}{10}, \frac{3}{4}, \frac{10}{10}, \frac{40}{40}, \frac{150}{100}, \frac{7}{8}, \frac{400}{400}, \frac{25}{5}, \frac{6}{8}, \frac{8}{12}, \frac{2}{2}.$

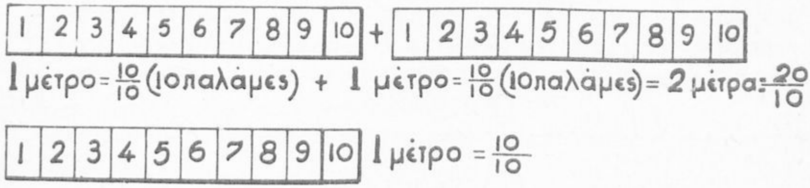
159) Γράψετε ἀπό 5 κλάσματα **γνήσια, ἰσοδύναμα** μέ τήν ἀκεραία μονάδα καί **καταχρηστικά**.

160) Μὲ παρονομαστὴ τὸ 100 νὰ βρῆτε καὶ νὰ γράψετε 5 **γνήσια** καὶ 5 **καταχρηστικὰ** κλάσματα καὶ νὰ φανερώνουν μέτρα.

161) Μὲ παρονομαστὴ τὸ 24 (24ωρο) νὰ γράψετε 5 **γνήσια** καὶ 5 **καταχρηστικὰ** κλάσματα.

Μάθημα 10ο.— Πῶς τρέπεται ἀκέραιος ἀριθμὸς σὲ κλάσμα

Παράδειγμα 1ο.— ***Ἡ Ὄλγα ἀγόρασε 2 μέτρα κορδέλλα. Πόσες παλάμες (δέκατα) ἀγόρασε.***



Εὔκολα μποροῦμε νὰ βροῦμε πόσα δέκατα ἔχουν τὰ 2 μέτρα κορδέλλα, ἂν παρατηρήσωμε τὸ παραπάνω σχῆμα. τὸ ἕνα μέτρο ἔχει 10 παλάμες ἢ δέκα δέκατα $\left(\frac{10}{10}\right)$ τὰ 2μέτρα ἔχουν δύο φορὲς τὸ $\frac{10}{10}$ δηλ. 2 φορὲς τὶς 10 παλάμες, $10 \times 2 = 20$ παλάμες ἢ $\frac{20}{10}$ (20 δέκατα).

Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 2 μέτρα, ἔγινε τώρα κλάσμα $\frac{20}{10}$ $\left(2 \text{ μέτρα} = \frac{20}{10}\right)$.

Παράδειγμα 2ο.— ***Ἔχομε 3 μῆλα καὶ θέλομε νὰ κόψωμε τὸ καθένα σὲ 4 κομμάτια.***

Τὸ κάθε μῆλο θὰ γίνη τέσσερα τέταρτα, γιατὶ ἕνα μῆλο $= \frac{4}{4}$. Τὰ 2 μῆλα θὰ ἔχουν 8 τέταρτα, γιατὶ 4 τέταρτα τὸ ἕνα μῆλο ἐπὶ 2 μῆλα $= \frac{8}{4}$ καὶ τὰ 3 μῆλα θὰ γίνουν $\frac{4 \times 3}{4} = \frac{12}{4}$. Καὶ στὸ παράδειγμα αὐτὸ ὁ ἀκέραιος 4 ἔγινε κλάσμα ἀφοῦ πολλαπλασιάσαμε τὸν 4, ποὺ μᾶς δόθηκε ὡς παρονομαστής, ἐπὶ τὸν 3.

Γράψαμε τὸ γινόμενο $4 \times 3 = 12$ ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο. Δηλ. $\frac{4 \times 3}{4} = \frac{12}{4}$.

Συμπέρασμα α΄. Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕναν ἀκέραιο σὲ κλάσμα, μὲ δοθέντα παρονομαστή, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴ καὶ τὸ μὲν γινόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δέ, γράφομε τὸν δοθέντα.

Παρατήρηση. Ἔχομε τὸν ἀκέραιο 3 (μῆλα) καὶ θέλομε νὰ τὸν κάνωμε κλάσμα. Δὲν μᾶς ὁρίζουν παρονομαστή. Τότε κάθε μῆλο θὰ εἶναι μία ἀκεραία μονάδα, τὴν ὁποία μποροῦμε νά γράψωμε μὲ τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα $\left(\underset{\text{(ἕνα πρῶτο)}}{\frac{1}{1}}\right)$, ποὺ σημαίνει, ὅτι ἕνα μῆλο τὸ παίρνει πάλι ὁλόκληρο $\left(\frac{1}{1}=1\right)$. Τὰ 2 ὁλόκληρα μῆλα θὰ εἶναι, **1 πρῶτο** τὸ ἕνα καὶ **1 πρῶτο** τὸ ἄλλο, ποὺ μᾶς κάνουν **2 πρῶτα** $\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}\right)$. Καὶ τὰ τρία ὁλόκληρα μῆλα θὰ εἶναι τρεῖς φορὲς τὸ $\frac{1}{1}$ δηλ. $1+1+1=3$ ἢ $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{3}{1}$.

Ὁ ἀκέραιος 3, χωρὶς νὰ μεταβληθῆ ἡ ἀξία του, ἔγινε κλάσμα καὶ γράφτηκε σὰν ἀριθμητὴς μὲ παρονομαστὴ τὸ 1 (τὴ μονάδα).

Ἄλλο παράδειγμα : 5 μέτρα $=\frac{5}{1}$ | 10 κιλὰ $=\frac{10}{1}$.

Συμπέρασμα β΄. Γιὰ νά γράψωμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ ὡς κλάσμα, γράφομε αὐτὸν ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ γράφομε τὴ μονάδα.

Ἀσκήσεις

177) Γράψετε μὲ μορφὴ κλασματικὴ τὰ 3 χιλιάρικα, τὰ 2, τὰ 5, τὰ 7, τὰ 10 χιλιάρικα, μὲ παρονομαστὴ τὸ 10 καὶ τὸ 20 (δηλ. δέκατα καὶ εἰκοστά).

178) Τρέψετε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, ποὺ παριστάνουν 2, 4, 6, 8, 9 ὧρες. σὲ κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὰ 60 λεπτὰ (ἑξηκοστά).

179) Τρέψετε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 10, 15, 20, 35, 50 σὲ κλάσματα (μὲ ὅποιο παρονομαστὴ θέλετε).

180) Κάμετε τά 5, 6, 8, 16 καὶ 20 μέτρα κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὸ 10 (δέκατα).

181) Κάμετε καὶ σεῖς 5 ἀκεραίους ἀριθμοὺς κλάσματα, μὲ ὅποιο παρονομαστὴ θέλετε.

Μάθημα 11ο.—Μικτὸς ἀριθμός

Παράδειγμα 1ο. ***4 παιδιὰ ἔχουν νὰ μοιράσουν 9 μῆλα. Ἀπὸ πόσα θὰ πάρουν;***

Διαιροῦμε τὰ 9 μῆλα διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παιδιῶν. Βρίσκομε ὅτι τὸ κάθε παιδὶ παίρνει ἀπὸ δύο ὁλόκληρα μῆλα καὶ μένει γιὰ μοίρασμα ἕνα ὁλόκληρο μῆλο ἀκόμη. Τό μῆλο αὐτὸ τὸ μοιράζομε σὲ 4 ἴσα κομμάτια, ὅσα εἶναι τὰ παιδιὰ καὶ ἔτσι τὸ κάθε παιδί, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ δύο ἀκέραια μῆλα, παίρνει καὶ ἕνα κομμάτι ἀκόμη δηλ. ἀπὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου. Αὐτὸ γιὰ συντομία θὰ τὸ γράψωμε ἔτσι : $2\frac{1}{4}$ μῆλα.

Παράδειγμα 2ο. ***Γιὰ νὰ κάνῃ ἕνας ἕνα κοστούμι, χρειάζεται 2 μέτρα καὶ 4 παλάμες.***

Τὸ 2 εἶναι ἀκέραιος καὶ οἱ 4 παλάμες εἶναι μέρος τῆς ἀκεραίας μονάδος (τοῦ 1 μέτρου). Αὐτὸ γράφεται πάλι μὲ ἕναν ἀριθμὸν ἔτσι: $2\frac{4}{10}$ μέτρα.

Παρατήρησι : Στὰ παραδείγματα αὐτὰ βλέπετε τοὺς ἀριθμούς : $2\frac{1}{4}$ καὶ $2\frac{4}{10}$. Ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραιο μέρος καὶ ἀπὸ κλασματικό. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται **μικτοὶ** ἀριθμοί.

Συμπέρασμα: Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιο καὶ ἀπὸ κλάσμα.

Ἀσκήσεις

182) Τὰ παρακάτω γράψετέ τα μὲ ἀκέραιο καὶ κλάσμα (Μικτούς).
8 δραχ. καὶ 7 δεκάρες, 5 δραχ. καὶ 5 δεκάρες

9 ὧρες καὶ 35π λεπτὰ	2 μέτρα καὶ 4 παλάμες
5 μῆνες » 8 ἡμέρες	6 » » 8 »
4 χρόνια » 7 μῆνες	3 » » 300 γραμμές.

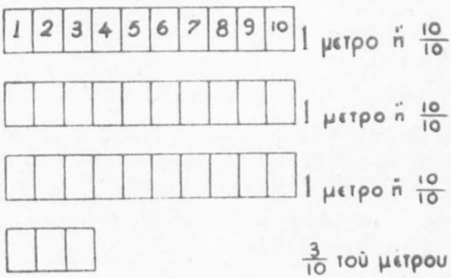
183) Ἐπίσης : 8 χιλιάρικα καὶ 1 πεντακοσάρικο
7 » » 6 ἑκατοστάρικα
15 » » 10 πενηντάρικα (εἰκοστὰ)

12 μέτρα καὶ 25 πόντους	5 κιλὰ καὶ 300 γραμμάρια
16 » » 30 »	10 » » 150 »

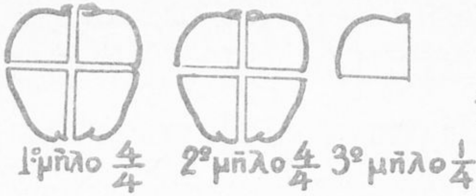
Μάθημα 12ο.—Πῶς τρέπεται ἕνας μικτὸς ἀριθμὸς σὲ κλάσμα.

Παράδειγμα 1ο. ***Ἡ Τασία ἀγόρασε τρία μέτρα λάστιχο καὶ 3 παλάμες δηλ. $3\frac{3}{10}$ μέτρα. Πόσες παλάμες (δέκατα) ἀγόρασε ;***

Ἐδῶ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $3\frac{3}{10}$ μέτρα, πρέπει νὰ γίνη κλάσμα. Νὰ γίνη δηλ. δέκατα. Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 3 μέτρα γιὰ νὰ γίνη δέκατα, θὰ πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ 10. Ἔχομε λοιπὸν 3 μέτρα $= \frac{3 \times 10}{10} = \frac{30}{10}$. Ὥστε τὰ 3 μέτρ. ἔγιναν $\frac{30}{10}$. Ἡ Τασία ὅμως ἀγόρασε ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τρία μέτρα $\left(\frac{30}{10} = 30 \text{ παλάμ.}\right)$ καὶ $\frac{3}{10}$ (3 παλάμες). Δηλαδὴ σύνολον 33 δέκατα : $\frac{30}{10} + \frac{3}{10} = \frac{33}{10}$ $\left(3\frac{3}{10} = \frac{33}{10}\right)$.



Παράδειγμα 2ο. ***Ἔχετε 2 μῆλα ὁλόκληρα καὶ ἕνα τέταρτο ἀπὸ ἕνα ἄλλο μῆλο, ὅμοιο στὸ μέγεθος μὲ τὰ ἄλλα δύο. Πόσα τέταρτα εἶναι ὅλα μαζί, ὅταν καὶ τὰ δύο ἀκέραια μῆλα κοποῦν σὲ 4 κομμάτια τὸ καθένα ;***



$$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

Τὰ δύο ὁλόκληρα μῆλα γίνονται 2×4 τέταρτα = 8 τέταρτα $\frac{8}{4}$ γιατὶ ὁ ἀκέραιος 2, γίνεται τέταρτα, ἀφοῦ τὸν πολλαπλασιάσαμε μὲ τὸν δοθέντα παρονομαστὴ 4 καὶ τὸ γινόμενο 8 τὸ γράψαμε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο. Δηλ. Τὸ κάθε μῆλο $\frac{4}{4}\times 2=\frac{8}{4}$

Τώρα προσθέτομε καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ τρίτου μήλου καὶ ἔχομε $\frac{9}{4}$. Ὁ μικτὸς λοιπὸν ἀριθμὸς $2\frac{1}{4}$ ἔγινε κλάσμα $\frac{9}{4}$.

Ἀπαντῆστε: α) Πῶς τρέπομε ἕνα μικτὸν ἀριθμὸ σὲ κλάσμα ;
β) Τί παρατηρήσατε στὰ παραπάνω παραδείγματα;

Συμπέρασμα: Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕναν μικτὸ σὲ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος καὶ στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸν ἀριθμητή του. Τὸ ἐξαγόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ γράφομε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις

184) Νὰ τρέψετε σὲ κλάσματα τοὺς παρακάτω μικτούς :

α) $12\frac{1}{4}$ ὧρες. β) $5\frac{7}{10}$ χιλιάρικα. γ) $7\frac{5}{30}$ μῆνες. δ) $3\frac{100}{1000}$ κιλά.

185) Κάμετε μικτοὺς ἀριθμοὺς τὶς παρακάτω ποσότητες καὶ τρέψετε τοὺς μικτοὺς αὐτοὺς σὲ κλάσματα :

α) 5 ὧρες καὶ 3π. λεπτά.
β) 10 ἔτη καὶ 8 μῆνες.
γ) 4 κιλὰ καὶ 50 γραμμάρ.
δ) 9 μῆνες καὶ 22 ἡμέρες.
ε) 6 χιλιάρικα καὶ 8 ἑκατ.
στ) 8 δρχ. καὶ 7 δεκάρες.

Μάθημα 13ο.—Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ καταχρηστικὸν κλάσμα

Παράδειγμα. Τὸ κλάσμα $\frac{12}{4}$ κιλὰ εἶναι καταχρηστικὸ καὶ περιέχει ἀκέραιες μονάδες, τὶς ὁποῖες μποροῦμε νὰ ἐξαγάγωμε.

Ἡ ἀκεραία μονάδα (ἕνα κιλὸ) ἔχει $\frac{4}{4}$. Τὰ δύο κιλὰ θὰ ἔχουν 4 τέταρτα καὶ 4 τέταρτα $\frac{8}{4}$. Τρία κιλὰ θὰ ἔχουν τρεῖς φορὲς τὸ 4 τέταρτα δηλ. $\frac{12}{4}$. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{12}{4}$ τοῦ κιλοῦ, περιέχει 3 κιλ. δηλ. $\frac{12}{4}=3$ κιλά.

Στὸ παράδειγμα, τὸ καταχρηστικὸ κλάσμα $\frac{12}{4}=3$ κιλὰ περιέχει τόσες ἀκέραιες μονάδες, ὅσες φορὲς χωράει ὁ παρονομαστής του στὸν ἀριθμητή του.

Συμπέρασμα: Γιὰ νὰ ἐξαγάγωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ ἕνα καταχρηστικὸ κλάσμα, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρανομαστοῦ. Τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιες μονάδες. Ἂν μείνῃ ὑπόλοιπο, τὸ γράφομε ἀριθμητή. Παρανομαστὴ δέ, γράφομε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις

Προφορικά. 185) Μὲ πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦν οἱ 80 παλάμες;
186) Μὲ πόσα κιλὰ ἰσοδυναμοῦν τὰ 1.200 γραμμάρια;
187) Μὲ πόσα ἔτη ἰσοδυναμοῦν οἱ 28 μῆνες;

Γραπτά. 188) Νὰ ἐξαγάγετε τὶς ἀκέραιες μονάδες:

α) $\frac{67}{5}$ κιλά. β) $\frac{42}{4}$ δραχ. γ) $\frac{9000}{1000}$ κιλά. δ) $\frac{120}{4}$ μέτρ.

ε) $\frac{67}{12}$ ἔτη. στ) $\frac{325}{30}$ μῆνες ζ) $\frac{142}{24}$ ἡμέρ. η) $\frac{1800}{60}$ ὧρες.

189) Γράψετε καὶ σεῖς 5 καταχρηστικὰ κλάσματα δικά σας καὶ βγάλετε τὶς ἀκέραιες μονάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

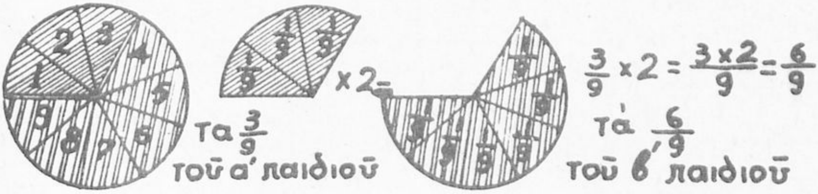
Μάθημα 14ο.—Α΄. Ἰδιότητα.—Τί παθαίνει ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος

1. Ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητής του.

Παράδειγμα 1ο. — ***Ἀπὸ ἕνα μέτρο κορδέλλα παίρνομε τὰ $\frac{3}{10}$.***

Ἂν μεγαλώσωμε, (πολαπλασιάσωμε)τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος 3 φορές, τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ θὰ γίνῃ $\frac{9}{10}$. Τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου, ἔχει ἀξία 3 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ $\frac{3}{10}$. Γιατί, ἐνῶ τὸ $\frac{3}{10}$ φανερώνει 3 παλάμες, τὸ $\frac{9}{10}$ φανερώνει 9 παλάμες. Τὸ $\frac{9}{10}$ λοιπὸν ἔγινε μεγαλύτερο 3 φορές, γιατὶ πολλαπλασιάσθηκε ὁ ἀριθμητής του μὲ τὸ 3. Ἔτσι τριπλασιάσθηκε ἡ ἀξία του.

Παράδειγμα 2ο. ***Ἂν κόψωμε ἕνα τσουρέκι σὲ 9 ἴσα κομμάτια καὶ δώσωμε σ' ἕνα παιδὶ τὰ 3 ἀπὸ αὐτά, καὶ σὲ ἄλλο παιδὶ διπλάσια*** *κομμάτια δηλ. 6, τότε, τὸ πρῶτο παιδὶ θὰ πάρῃ τὰ $\frac{3}{9}$ τοῦ τσουρεκιοῦ καὶ τὸ δεύτερο τὰ $\frac{6}{9}$.*



Τὸ κλάσμα $\frac{6}{9}$ εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{9}$, γιατὶ φανερώνει διπλάσιον ἀριθμὸ ἴσων κομματιῶν. Τὸ κλάσμα $\frac{6}{9}$ διπλασιάσθηκε, γιατὶ πολλαπλασιάσθηκε ὁ ἀριθμητής του 3 ἐπὶ 2.

Σημείωσι : Στὰ δύο προηγούμενα παραδείγματα βλέπομε, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ ἔγινε μεγαλύτερο 3 φορὲς ἐπειδὴ πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμητή του ἐπὶ τὸ 3. Καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{9}$ ἔγινε μεγαλύτερο δύο φορές, ἐπειδὴ πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμητή του ἐπὶ 2.

Συμπέρασμα: Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴ ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, τὸ κλάσμα πολλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμό.

2) Ὅταν διαιρῆται ὁ παρονομαστής.

Παράδειγμα: ***Ἔχομε*** *$\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου.*

Ἂν διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴ διὰ τοῦ 2, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{5}{5}$ δηλ. $\frac{5}{10:2} = \frac{5}{5}$. Βλέπομε ὅτι ἀπὸ μισὸ μέτρο, ποὺ ἦταν τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ μὲ τὴν διαίρεσι τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 2, ἔγινε $\frac{5}{5}$, ποὺ σημαίνει ἕνα ὁλόκληρο μέτρο. Μεγάλωσε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{5}{10}$ δύο φορές.

> **Συμπέρασμα: Ἂν διαιρέσωμε τὸν παρανομαστὴ ἑνὸς κλάσματος μὲ ἕναν ἀριθμό, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμό.**

Ἡ μεταβολὴ τῆς ἀξίας ἑνὸς κλάσματος, μὲ **πολλαπλασιασμὸ τοῦ ἀριθμητοῦ** ἢ **διαίρεσι τοῦ παρονομαστοῦ,** μπορεῖ νὰ διατυπωθῆ μὲ ἕνα γενικὸ συμπέρασμα:

> **ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, ὅταν πολλαπλασιασθῆ ὁ ἀριθμητής του ἢ διαιρεθῆ ὁ παρονομαστής του μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό.**

190) Νὰ πολλαπλασιάσετε τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ $\frac{2}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ μηνός, ἀπὸ τὸν ἀριθμητή τους, 3, 5 καὶ 8 φορές.

191) Νὰ μεγαλώσετε τὰ κλάσματα $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ $\frac{100}{1000}$ τοῦ χιλιομέτρου, ἀπὸ τὸν παρονομαστή τους 5 καὶ 10 φορές.

192) Κάμετε τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{15}{20}$, μεγαλύτερα 4 φορές, χωρὶς νὰ ἀλλάξετε τὸν ἀριθμητή τους.

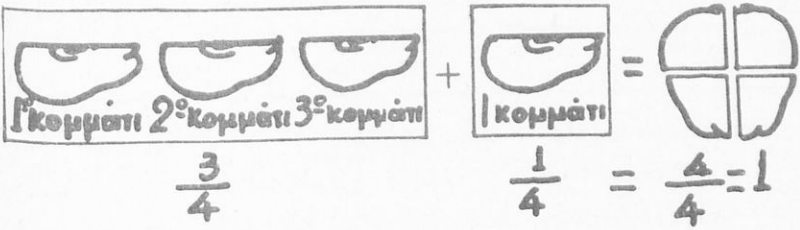
193) Κάμετε τὰ κλάσματα $\frac{12}{15}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{10}{40}$, μεγαλύτερα 4 φορὲς χωρὶς ν' ἀλλάξετε τὸν παρονομαστή τους.

194) Κάμετε τὰ κλάσματα $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{16}{18}$, $\frac{12}{21}$, μεγαλύτερα 3 φορές, μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο παραπάνω τρόπους.

Μάθημα 15ο.—Β' Ἰδιότητα.—Πότε διαιρεῖται ἕνα κλάσμα.

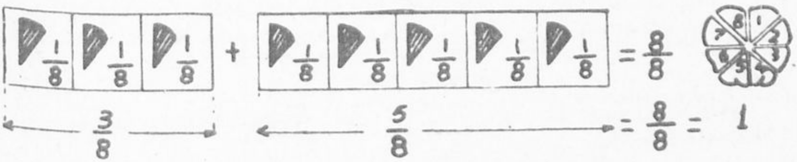
Ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του.

Παράδειγμα: Ἔχομε ἕνα μῆλο, τὸ ὁποῖο κόβομε σὲ 4 ἴσα κομμάτια.



Τὸ μῆλο αὐτὸ εἶναι ἴσο μὲ $\frac{4}{4}$. Ἂν πάρωμε ἀπὸ 4 κομ. τὰ 3, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Ἂν τώρα κάθε κομμάτι τὸ κόψωμε σὲ 2 ἴσα μέρη, τὸ μῆλο θὰ μοιρασθῇ σὲ 8 ἴσα μέρη. Ἀπὸ τὰ 8 αὐτὰ νέα κομμάτια, ἂν πάρωμε τὰ 3, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$.



Τὸ κάθε κομμάτι ἀπὸ τὰ νέα κομμάτια $\left(\frac{1}{8}\right)$, εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ κάθε προηγούμενο κομμάτι $\left(\frac{1}{4}\right)$. Ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἔγινε ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$, ἀφοῦ τοῦ πολλαπλασιάσαμε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ 2: $\left(\frac{3}{4 \times 2} = \frac{3}{8}\right)$.

Ἔτσι τὸ $\frac{3}{4}$ ἔγινε δύο φορὲς μικρότερο, ἐπειδὴ πολλαπλασιάστηκε ὁ παρονομαστής του ἐπὶ 2. Καὶ στὰ δύο παραδείγματα αὐτά, βλέπομε, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ μικραίνει μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Συμπέρασμα: Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

2. Ὅταν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του.

Παράδειγμα : Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{10}{10}$ *τοῦ μέτρου.*

Ἂν στὸ κλάσμα αὐτό, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ 1 ἀκεραία μονάδα (1 μέτρο), διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ 5, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{2}{10}$, γιατὶ $\frac{10:5}{10}=\frac{2}{10}$. Τὸ κλάσμα $\frac{10}{10}$, τὸ ὁποῖο εἶναι 10 παλάμες, μὲ διαίρεσι διὰ τοῦ 5, ἔγινε $\frac{2}{10}$ δηλ. μόνο 2 παλάμες (5 φορὲς μικρότερο).

Συμπέρασμα β΄.: Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅταν διαιρῆται ὁ ἀριθμητής του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

195) Νὰ κάμετε μικρότερα 5 φορὲς τὰ παρακάτω κλάσματα ἀπὸ τὸν **παρονομαστή** τους.

α) $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρ. β) $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιάρ. γ) $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ.

δ) $\frac{5}{12}$ τοῦ ἔτους. ε) $\frac{5}{6}$ τοῦ μηνός. στ) $\frac{1}{10}$ τῆς ὥρας.

196) Νὰ κάμετε μικρότερα 4 φορὲς τὰ παρακάτω κλάσματα ἀπὸ τὸν **ἀριθμητή** τους:

α) $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρ. β) $\frac{8}{10}$ τοῦ χιλιάρ. γ) $\frac{4}{10}$ τοῦ κιλοῦ.

δ) $\frac{8}{12}$ τοῦ ἔτους ε) $\frac{28}{30}$ τοῦ μηνός. στ) $\frac{10}{60}$ τῆς ὥρας.

197) Βάλετε τὸν ἀριθμητὴ ἢ τὸν παρονομαστή, ποὺ ταιριάζει, ὅπου λείπει, γιὰ νὰ γίνουν τὰ κλάσματα 3 φορὲς μικρότερα.

$\frac{12}{30}\ \frac{;}{30}$, $\frac{6}{7}\ \frac{6}{;}$, $\frac{15}{24}\ \frac{;}{24}$, $\frac{18}{27}\ \frac{;}{27}$, $\frac{3}{4}\ \frac{3}{;}$, $\frac{7}{9}\ \frac{7}{;}$

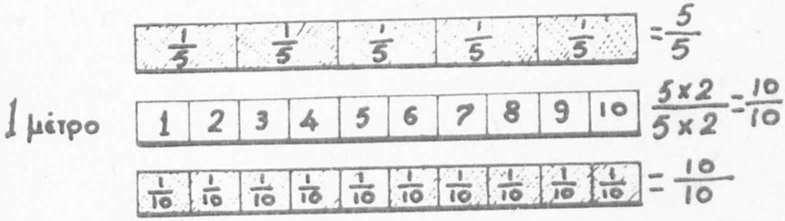
198) Κάμετε τὰ παρακάτω κλάσματα 6 φορὲς μικρότερα μὲ ὅποιον τρόπο θέλετε.

$\frac{5}{6}$; $\frac{30}{60}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{12}{24}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$;

Μάθημα 16ο. — Γ΄. Ἰ δ ι ό τ η τ α — Πότε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μ ε τ α β ά λ λ ε τ α ι.

1) Ἂν πολλαπλασιασθοῦν οἱ ὅροι ἐπὶ ἕναν ἀριθμό.

Παράδειγμα : Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου. Τὸ κλάσμα αὐτὸ εἶναι ἴσο μὲ μιὰ ἀκεραία μονάδα, (1 μέτρο).



Ἂν τώρα πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸ 2, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{10}{10}$ $\left(\frac{5\times2}{5\times2}=\frac{10}{10}\right)$.

Παρατήρησι : Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{5}{5}$ μέτρ., ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ κλάσμα $\frac{10}{10}$, γιατὶ τὰ 5 κομμάτια τοῦ πήχεως εἶναι ἴσα μὲ 1 μέτρο, ὅπως καὶ οἱ 10 παλάμες εἶναι πάλι ἕνα μέτρο. **Ἐπομένως, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{5}{5}$ δὲν ἄλλαξε, ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιάστηκαν μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὸν 2.**

$$\frac{5\times2}{5\times2}=\frac{10}{10} \quad ἢ \quad \frac{5}{5}=\frac{10}{10}$$

2) Ἂν διαιρεθοῦν οἱ ὅροι μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό.

Ἔχομε τὰ $\frac{4}{8}$ ἑνὸς γλυκίσματος, ποὺ εἶναι ἴσα μὲ μισὴ ἀκεραία μονάδα. Ἂν τώρα διαιρέσωμε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος αὐτοῦ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὸν 4, θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ γιατὶ $\frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}$ τοῦ γλυκίσματος, τὸ ὁποῖο φανερώνει πάλι μισὴ ἀκεραία μονάδα.

Παρατήρησι : *Βλέπομε καὶ στὸ παράδειγμα αὐτό, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{4}{8}$ δὲν ἄλλαξε, γιατὶ διαιρέθηκαν καὶ οἱ δύο ὅροι μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὸν 2.*

Συμπέρασμα: Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν καὶ οἱ δύο ὅροι του μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (ἐφόσον διαιροῦνται ἀκριβῶς).

Ἀσκήσεις

199) Πολλαπλασιάσετε ἐπὶ 4 τοὺς ὅρους τῶν παρακάτω κλασμάτων :

α) $\frac{1}{5}$ τοῦ κιλοῦ. β) $\frac{1}{5}$ τοῦ χιλιάρ. γ) $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου.

δ) $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔτους. ε) $\frac{1}{6}$ τῆς ἡμέρας στ) $\frac{5}{24}$ τῆς ὥρας.

200) Τί ἔπαθε ἡ ἀξία τῶν κλασμάτων αὐτῶν; Γιατί;

201) Διαιρέσετε διὰ τοῦ 5 τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων ;

α) $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ β) $\frac{15}{20}$ τοῦ χιλιάρ. γ) $\frac{25}{100}$ τοῦ μέτρ.

δ) $\frac{15}{30}$ τοῦ μηνός. ε) $\frac{30}{60}$ τῆς ὥρας. στ) $\frac{5}{15}$ τοῦ ἔτους.

202) Τί ἔπαθε ἡ ἀξία τῶν κλασμάτων αὐτῶν; Καὶ γιατί ;

203) Νὰ βρῆτε τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα τῶν παρακάτω, μὲ ὅρους τρεῖς φορὲς μεγαλυτέρους, μὲ ὅποιο τρόπο θέλετε.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{6}{12}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{10}, \quad \frac{8}{10}, \quad \frac{15}{15}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{9}{300}.$$

204) Ποιὸν παρανομαστὴ πρέπει νὰ βάλωμε στὰ παρακάτω, κλάσματα γιὰ νὰ ἔχωμε ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ αὐτά ;

$$\frac{6}{12}=\frac{1}{;},\quad \frac{16}{20}=\frac{4}{;},\quad \frac{30}{60}=\frac{6}{;},\quad \frac{12}{48}=\frac{3}{;}\quad \frac{75}{100}=\frac{15}{;}$$

205) Ποιὸν ἀριθμητὴ πρέπει νὰ βάλωμε στὰ παρακάτω, κλάσματα γιὰ νὰ ἔχωμε ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ αὐτά ;

$$\frac{3}{5}=\frac{;}{15},\quad \frac{5}{10}=\frac{;}{50},\quad \frac{7}{9}=\frac{;}{81},\quad \frac{10}{20}=\frac{;}{100},\quad \frac{5}{6}=\frac{;}{30}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος		*Τρόπος*	*Παράδειγμα*
. . . . Πολ)πλασιάζεται	Α΄	α) Μὲ πολλαπλασιασμὸ τοῦ ἀριθμητοῦ	$\frac{4\times2}{10}=\frac{8}{10}$
		β) Μὲ διαίρεσι τοῦ παρονομαστοῦ	$\frac{4}{10:2}=\frac{4}{5}$
. . . . Διαιρεῖται	Β΄	α) Μὲ πολλαπλασιασμὸ τοῦ παρανομαστοῦ . . .	$\frac{4}{10\times2}=\frac{4}{20}$
		β) Μὲ διαίρεσι τοῦ ἀριθμητοῦ.	$\frac{4:2}{10}=\frac{2}{10}$
. . . . Δὲν μεταβάλλεται	Γ΄	α) Πολλαπλασιασμὸς τῶν δύο ὅρων μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.	$\frac{4\times2}{10\times2}=\frac{8}{20}$
		β) Διαίρεσι τῶν δύο ὅρων μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό . . .	$\frac{4:2}{10:2}=\frac{2}{5}$

Ἀσκήσεις

Γιὰ ἐπανάληψι τῶν ἰδιοτήτων

Προφορικά. 205) α) Πότε πολλαπλασιάζεται ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος ;
β) Πότε διαιρεῖται ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος ;

206) Τί παθαίνει ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος :
α) ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητής του ;
β) ὅταν διαιρῆται ὁ παρονομαστής του ;

γ) ὅταν διαιρῆται ὁ ἀριθμητής του ;

δ) ὅταν πολλαπλασιάζεται ὁ παρανομαστής του ;

Γραπτά. 207) Κάμετε τὰ παρακάτω κλάσματα 4 καὶ 5 φορὲς μεγαλύτερα στὴν ἀξία τους :

$$\frac{5}{8}\ ;,\quad \frac{7}{9}\ ;,\quad \frac{9}{16}\ ;,\quad \frac{13}{15}\ ;,\quad \frac{3}{10}\ ;$$

208) Κάμετε τὰ παρακάτω κλάσματα 4 φορὲς μικρότερα :

$$\frac{6}{7},\quad \frac{15}{28},\quad \frac{9}{10},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{8}{10},\quad \frac{12}{24}.$$

209) Γράψετε 5 κλάσματα καὶ μεγαλώσετε τὴν ἀξίαν τους 6 φορές.

210) Γράψετε 5 κλάσματα καὶ μικρύνετε τὴν ἀξία τους 8 φορές.

211) Γράψετε 4 κλάσματα, ἰσοδύναμα μὲ τὰ παρακάτω :

$$\frac{1}{4}=-,\quad \frac{8}{12}=-,\quad \frac{3}{5}=-,\quad \frac{16}{24}=-,\quad \frac{9}{27}=-,\quad \frac{5}{8}=-,\quad \frac{50}{100}=-$$

Μάθημα 17ο.—Ἁπλοποίησις κλασμάτων

Σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς προηγούμενες ἰδιότητες τῶν κλασμάτων, εἴδαμε ὅτι ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἂν οἱ ὅροι του διαιρεθοῦν μὲ ἕνα καὶ τὸν ἴδιον ἀριθμὸ π.χ. $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ διότι $\frac{6:6}{12:6}=\frac{1}{2}$. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο μποροῦμε ἀπὸ ἕνα κλάσμα νὰ βροῦμε ἕνα ἄλλο ἰσοδύναμο, ποὺ νὰ ἔχῃ μικροτέρους ὅρους, χωρὶς νὰ χάσῃ τὴν ἀξία του. Αὐτὸ θὰ τὸ ἐπιτύχωμε, ἂν βροῦμε ἕναν ἀριθμό, ποὺ νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.

Παράδειγμα : ***Ἀπὸ ἕνα μέτρο κορδέλλα, παίρνομε τὶς 6 παλάμες, δηλαδὴ $\frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου.***

Τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$ γίνεται πιὸ ἁπλό, $\frac{3}{5}$ ἂν διαιρέσωμε τοὺς ὅρους του μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ τὸν 2, χωρὶς νὰ χάσῃ τὴν ἀξία του, δηλαδὴ $\frac{6:2}{10:2}=\frac{3}{5}$. Ἡ πράξι αὐτή, μὲ τὴν ὁποία κάνομε ἕνα κλάσμα πιὸ ἁπλὸ δηλ. μὲ μικρότερους ὅρους, ἀλλὰ μὲ τὴν ἴδια ἀξία, λέγεται **ἁπλοποίησις**.

Συμπέρασμα: Ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος, λέγεται ἡ εὕρεσις ἑνὸς ἄλλου κλάσματος, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ἴδια ἀξία, ἀλλὰ μικροτέρους ὅρους.

Πῶς γίνεται ἡ ἁπλοποίησις.

Γιὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε ἕνα κλάσμα, δηλ. νὰ τὸ κάνωμε πιὸ ἁπλό, χωρὶς ν' ἀλλάξῃ ἡ ἀξία του, εὑρίσκομε ἕναν ἀριθμό, ποὺ νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τοὺς δύο ὅρους του.

Παράδειγμα : **Τὸ κλάσμα $\frac{12}{24}$ τῆς ἡμέρας, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ 12 ὧρες (μισὴ μέρα), μπορῇ ν' ἁπλοποιηθῇ πολλὲς φορές, ὥστε νὰ φτάσωμε ὡς τὸ πιὸ ἁπλὸ ἰσοδύναμο μὲ αὐτὸ κλάσμα, ποὺ νὰ μὴ δέχεται ἄλλην ἁπλοποίησι. Δηλ.**

$$\frac{12:2}{24:2} = \frac{6:2}{12:2} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{12:12}{24:12} = \frac{1}{2}.$$

Ἔτσι φθάνομε στὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$, τὸ ὁποῖον δὲν ἁπλοποιεῖται πλέον.

Τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ὅπως καὶ κάθε ἄλλο, στὸ ὁποῖο δὲν μπορεῖ νὰ γίνῃ ἁπλοποίησι (π.χ. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$ κλπ.) λέγεται **ἀνάγωγον**.

Συμπέρασμα: Ἀνάγωγον λέγεται τὸ κλάσμα τό ὁποῖον δὲν μπορεῖ νὰ ἁπλοποιηθῇ.

Ἀσκήσεις

212) Σὲ ποιὰ ἰδιότητα στηρίζεται ἡ ἁπλοποίησι τῶν κλασμάτων ;

213) Ἁπλοποιῆστε τὰ παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{6}{24}$ τῆς ἡμέρας β) $\frac{50}{100}$ τοῦ μέτρου γ) $\frac{75}{100}$ τοῦ μέτρου

δ) $\frac{8}{10}$ τοῦ χιλμ. ε) $\frac{100}{1000}$ τοῦ κιλοῦ στ) $\frac{25}{100}$ αἰῶνος

214) Γράψετε καὶ σεῖς μερικὰ κλάσματα καὶ ἁπλοποιῆστε τα.

Μάθημα 18ο. Διαιρετότης

Γιὰ νὰ βρίσκωμε εὔκολα κάθε φορὰ τὸν ἀριθμό, ποὺ θὰ διαιρῆ καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἀκριβῶς, πρέπει νὰ προσέξωμε αὐτά:

α) Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου, ὅταν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς καὶ δὲν ἀφήνει ὑπόλοιπο. Π.χ. ὁ 40 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5.

β) Ἕνας ἀριθμός, ποὺ διαιρεῖ ἕναν ἄλλον ἀκριβῶς, εἶναι διαιρέτης αὐτοῦ. Π.χ. ὁ 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ 40.

γ) Ὁ 40, ποὺ εἶναι διαιρετὸς ἀπὸ τὸν 5, εἶναι καὶ πολλαπλάσιον τοῦ 5, διότι διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ αὐτόν.

Χαρακτῆρες διαιρετότητος

Γιὰ νὰ καταλαβαίνωμε εὔκολα, ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου ἀριθμοῦ ἀκριβῶς, χωρὶς νὰ ἐκτελοῦμε πράξι διαιρέσεως, ὑπάρχουν ὡρισμένα χαρακτηριστικά, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ μάθωμε. Ἔτσι θὰ διευκολυνώμεθα ἰδιαιτέρως κατὰ τὴν ἁπλοποίησι τῶν κλασμάτων. Τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτῶν λέγονται **χαρακτῆρες διαιρετότητος**.

1. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2

Ὁ ἀριθμὸς 12 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2 (12 : 2 = 6). Τὸ ἴδιο καὶ οἱ ἀριθμοὶ 14, 18, 36, 50.

Συμπέρασμα : Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἂν τελειώνη σὲ 0, 2, 4, 6, ἢ 8, δηλαδὴ σὲ ζυγό ἀριθμό

Ἀσκήσεις

215) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς διαιροῦνται διὰ 2 ;
35, 70, 84, 215, 220, 400, 75, 304, 963, 1250, 759, 85, 960.

2. Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3 καὶ 9

α) Ὁ ἀριθμὸς 1563 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 (1563 : 3 = 521). Τὸ ἄρθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 1563, (1+5+6+3) εἶναι ὁ 15. Ὁ 15 διαρεῖται ἀκριβῶς διὰ 3.

β) Ὁ ἀριθμὸς 5643 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9 (5643 : 9=627). Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 5643, (5+6+4+3), εἶναι ὁ 18, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9.

Συμπέρασμα: Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα ψηφίων του δίδει ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9.

Ἀσκήσεις

216) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς διαιροῦνται διὰ τοῦ 3, διὰ τοῦ 9 ἢ καὶ ἀπὸ τοὺς δύο αὐτούς;

α) 345, 75, 63, 284, 965, 729, 544, 218, 3857.

β) 645, 1875, 45, 639, 105, 10542, 7020, 42645.

3) Ποῖοι ἀριθμοὶ εἶναι διαιρετοὶ ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4 καὶ 25

Τὸ γινόμενο 4×25=100. Ἄρα τὸ 4 καὶ 25 διαιροῦν τὸν 100. Ἀφοῦ ὁ 4 καὶ 25 διαιροῦν τὴν ἑκατοντάδα (τὸ 100) διαιροῦν καὶ ὅλες τὶς ἑκατοντάδες.

Ἂν τώρα ἕνας ἀριθμὸς εἶναι τριψήφιος ἢ πολυψήφιος, δὲ θὰ προσέχουμε παρὰ μόνον τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ. Ἂν αὐτὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4 ἢ τοῦ 25, διαιρεῖται καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς διὰ 4 ἢ 25. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 1324. Τὰ δύο τελευταῖα ψηφία εἶναι ὁ 24. Ὁ 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4. Ὅλος ὁ ἀριθμὸς τώρα 1324 διαιρεῖται διὰ 4 ἀκριβῶς.

Τὸ ἴδιο καὶ ὁ ἀριθμὸς 325 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 25. Γιατί;

Συμπέρασμα: Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25, ἂν τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία κάμνουν ἀριθμόν, ποὺ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25.

Ἀσκήσεις

217) Ποῖοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοὺς παρακάτω διαιροῦνται διὰ τοῦ 4 καὶ ποῖοι διὰ τοῦ 25;

α) 348, 612, 750, 845, 1624, 1508, 372, 650.

β) 1.025, 2.192, 1.500, 643, 55.416, 10.772, 4.664.

4) Ποῖοι ἀριθμοί εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5

Ὁ ἀριθμὸς 750 καὶ ὁ ἀριθμὸς 1.035 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ **5**, διότι ὁ πρῶτος τελειώνει σὲ 0 καὶ ὁ δεύτερος σὲ 5 (750 : 5 = 150 καὶ 1.035 : 5 = 207).

Τὸ γιατί, θὰ τὸ καταλάβετε, ἂν πολλαπλασιάσετε τὸ 5, μὲ ὁποιονδήποτε ἀριθμό. Προσέξετε σὲ τὶ ψηφίο τελειώνει πάντοτε τὸ γινόμενο ἀπὸ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἐπὶ 5.

Συμπέρασμα: Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5, ὅταν τελειώνῃ σὲ 0 ἢ 5.

Ἀσκήσεις

218) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5.

α) 75, 284, 650, 10875, 7.020, 3.875, 150.

β) 1.502, 4.830, 660, 648, 3.500, 15.875, 150.670.

219) Ποῖοι ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 25.

α) 650, 445, 775, 1.025, 3.020, 7.825.

β) 10.050, 6.800, 9.440, 105,850, 54.675.

220) Νὰ βρῆτε μὲ ποίους ἀριθμοὺς διαιροῦνται ἀκριβῶς οἱ παρακάτω ἀριθμοί :

α) 16, 10, 50, 15, 125, 471, 548, 1.440, 1.404.

β) 3.500, 5.675, 6.716, 3.723.

γ) 6435, 4.635, 624. 4830, 3.100, 9832.

221) Γράψετε 2 πενταψηφίους ἀριθμούς, ποὺ νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3 καὶ τοῦ 5.

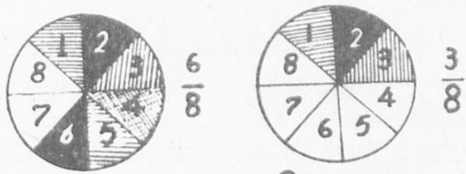
222) Γράψετε 5 τετραψηφίους ἀριθμούς, ποὺ νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 25 καὶ 4.

223) Γράψετε τρεῖς πενταψηφίους ἀριθμούς, ποὺ νὰ διαιροῦνται διὰ τοῦ 25.

Μάθημα 18ο.—Σύγκρισις τῶν κλασμάτων μεταξύ των.

Παράδειγμα.—"Εχομε δύο γλυκὰ ὅμοια, τὰ ὁποῖα εἶναι μοιρασμένα σὲ 8 ἴσα κομμάτια τὸ καθένα.

"Αν πάρωμε ἀπὸ τὸ πρῶτο γλυκὸ τὰ 6 κομμάτια δηλ. τὰ $\frac{6}{8}$ καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερο τὰ 3, δηλ. τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ συγκρίνομε τὸ ἕνα μὲ τὸ ἄλλο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$.



1ο γλυκό 2ο γλυκό

***Παρατήρησι**: "Ας προσέξουμε τώρα αὐτὰ τὰ δύο κλάσματα $\frac{6}{8}$, καὶ $\frac{3}{8}$. Εἶναι ὁμώνυμα. Τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{6}{8}$ ποὺ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$, ὁ ἀριθμητής εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{3}{8}$. "Ετσι λοιπόν :*

Συμπέρασμα: Ἀπὸ δύο ἢ περισσότερα ὁμώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο σὲ ἀξία εἶναι τὸ κλάσμα, ποὺ ἔχει τὸν μεγαλύτερο ἀριθμητή.

Σημείωσι: "Αν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα τὰ τρέπομε εἰς ὁμώνυμα, ὅπως τονίζομε στὰ μαθήματα 19 καὶ 20, καὶ μετὰ κάμνομε τὴ σύγκρισι. Οἱ παρακάτω γραπτὲς ἀσκήσεις νὰ λυθοῦν μετὰ τὸ 20ο μάθημα.

Ἀσκήσεις

Προφορικά: 224) Ποιὸ εἶναι μεγαλύτερο τὸ $\frac{7}{12}$ ἢ τὸ $\frac{3}{12}$;

225) Ποῖοι εἶναι περισσότεροι μῆνες $\frac{6}{12}$ ἔτους ἢ $\frac{4}{12}$;

226) Ποῖο εἶναι λιγώτερο τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας ἢ $\frac{3}{4}$;

227) Ποῖο εἶναι πιὸ πολὺ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ ἢ τὸ $\frac{3}{5}$; Γιατί;

228) Ποῖο εἶναι τὸ πιὸ μεγάλο καὶ ποῖο τὸ μικρότερο, τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου, τὰ $\frac{3}{4}$ ἢ τὰ $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου;

Γραπτά: 229) Ἕνας ἐπῆρε τὸν Ὀκτώβριο $\frac{2}{5}$ τῆς λίρας, τὸ Νοέμβριο $\frac{3}{4}$ τῆς λίρας καὶ τὸ Δεκέμβριο $\frac{3}{8}$ αὐτῆς. Ποιὸ μῆνα ἐπῆρε περισσότερα;

230) Ποῖο κλάσμα εἶναι περισσότερα γραμμάρια τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κιλοῦ τὰ $\frac{3}{5}$ ἢ τὰ $\frac{3}{20}$ αὐτοῦ;

231) Ποῖος ἐδούλεψε περισσότερο ἀπὸ τούς τρεῖς ἐργάτες, ὅταν ἐργάστηκαν, ὁ α) $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, ὁ β) $\frac{7}{10}$ καὶ ὁ γ) $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας;

232) Δύο μαθηταὶ προσέφεραν εἰς τὸ Ταμεῖον τῆς τάξεως τὰ ἑξῆς ποσά: Ὁ Κώστας $\frac{3}{4}$ χιλιάρ. καὶ ὁ Γιῶργος $\frac{1}{2}$ χιλιάρ. Ποῖος προσέφερε περισσότερα;

233) Κατατάξετε κατὰ σειρὰν ἀξίας, ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο ὣς τὸ μικρότερο, τὰ παρακάτω κλάσματα:

ὁ α) $\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{5}{13}, \frac{4}{13}, \frac{11}{13}$, β) $\frac{3}{15}, \frac{6}{15}, \frac{9}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}$.

234) Κατατάξετε κατὰ σειρὰν ἀξίας, ἀπὸ τὸ μικρότερο ὣς τὸ μεγαλύτερο, τὰ παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{5}{9}, \frac{6}{10}, \frac{3}{3}, \frac{1}{2}$. β) $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{4}{6}, \frac{1}{2}$. γ) $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{5}{12}$.

Μάθημα 19ο —Πῶς τρέπομε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα.

Α΄ Τρόπος

Παράδειγμα 1ο.— Ἡ ***Μαρία ἀγόρασε*** $\frac{2}{10}$ ***τοῦ μέτρ. ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἡ Ἔλλη*** $\frac{3}{5}$ ***μέτρ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος.*** *Ποία* ***ἀγόρασε περισσότερο ὕφασμα;*** ;

Διὰ νὰ δώσουμε ἀπάντησι στὸ πρόβλημα αὐτὸ πρέπει τὰ κλάσματα $\frac{2}{10}$ καὶ $\frac{3}{5}$, ποὺ εἶναι ἑτερώνυμα νὰ γίνουν ὁμώνυμα. Νὰ βροῦμε δηλαδὴ κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ κοινὸ παρονομαστή. Ἔτσι, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ α΄ κλάσματος μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ β΄ : $\frac{2}{10}$ ἐπὶ $5 = \left(\frac{2\times5}{10\times5} = \frac{10}{50}\right)$. Τὸ $\frac{10}{50}$ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{2}{10}$

Τώρα τοὺς ὅρους τοῦ β΄ κλάσματος $\frac{3}{5}$ μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ α΄ τὸν 10 καὶ προκύπτει $\left(\frac{3\times10}{5\times10} = \frac{30}{50}\right)$ τὸ κλάσμα $\frac{30}{50}$, ποὺ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{3}{5}$. Ἔτσι λοιπὸν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα ἔγιναν ἰσοδύναμα ὁμώνυμα, τὰ $\frac{10}{50}$ καὶ $\frac{30}{50}$.

Ἀπάντησι : Περισσότερο ὕφασμα ἀγόρασε ἡ Ἔλλη.

Παράδειγμα 2ο.—Ποῖο εἶναι περισσότερο τὸ $\frac{1}{2}$ ***ἢ τὰ*** $\frac{3}{5}$ ***τοῦ κιλοῦ;***

Τὰ ἑτερώνυμα αὐτὰ κλάσματα θὰ γίγουν ὁμώνυμα : $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$

1) $\frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10}$ καὶ 2) $\frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$. Ὥστε $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5} = \frac{5}{10}$ $\frac{6}{10}$.

Ἀπάντησι : Περισσότερο εἶναι τὸ $\frac{3}{5}$.

Συμπέρασμα. Γιὰ νὰ τρέψωμε δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ δευτέρου καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου.

Ἀσκήσεις

Νὰ γίνουν ὁμώνυμα τὰ παρακάτω κλάσματα :

224) $\frac{5}{6}\ \frac{2}{3}$, $\frac{3}{8}\ \frac{8}{9}$, $\frac{7}{9}\ \frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}\ \frac{7}{12}$.

225) $\frac{5}{12}\ \frac{7}{8}$, $\frac{5}{16}\ \frac{5}{9}$, $\frac{3}{9}\ \frac{8}{15}$, $\frac{1}{2}\ \frac{5}{15}$.

226) $\frac{7}{20}\ \frac{1}{4}$, $\frac{14}{25}\ \frac{3}{4}$, $\frac{35}{40}\ \frac{5}{10}$, $\frac{15}{20}\ \frac{12}{15}$.

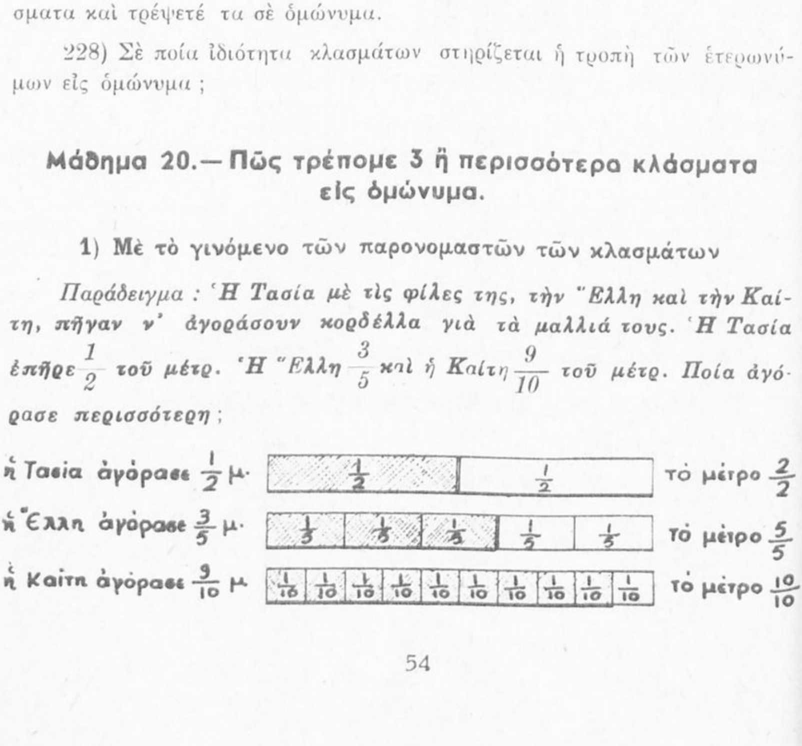
227) Κάμετε καὶ σεῖς 4 ὁμάδες ἀπὸ 2 ἡ κάθε ὁμάδα ἑτερώνυμα κλάσματα καὶ τρέψετέ τα σὲ ὁμώνυμα.

228) Σὲ ποία ἰδιότητα κλασμάτων στηρίζεται ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων εἰς ὁμώνυμα ;

Μάθημα 20.— Πῶς τρέπομε 3 ἢ περισσότερα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.

1) Μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων

Παράδειγμα : ***Ἡ Τασία μὲ τὶς φίλες της, τὴν Ἔλλη καὶ τὴν Καίτη, πῆγαν ν' ἀγοράσουν κορδέλλα γιὰ τὰ μαλλιά τους. Ἡ Τασία ἐπῆρε $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρ. Ἡ Ἔλλη $\frac{3}{5}$ καὶ ἡ Καίτη $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρ. Ποία ἀγόρασε περισσότερη ;***



Έχομε ἐδῶ $\frac{1}{2}$ μέτρ. $\frac{3}{5}$ μέτρ. καὶ $\frac{9}{10}$ μέτρ. Τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα. **Δεύτερα, πέμπτα, δέκατα.** Ἂν ἦταν ὁμώνυμα, θὰ προσέχομε τὸν ἀριθμητὴ καὶ ὅποια ἔπαιρνε περισσότερα κομμάτια τοῦ μέτρου αὐτὴ θὰ εἶχε περισσότερη κορδέλλα. Γι' αὐτὸ πρέπει νὰ γίνουν τὰ ἑτερώνυμα, ὁμώνυμα. Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων, ποὺ λέγει πῶς : **πολλαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται,** πολλαπλασιάζω λοιπόν :

α) Τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{1}{2}$ μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων $5\times10=50$, $\left(\frac{1\times50}{2\times50}=\frac{50}{100}\right)$. Τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἔγινε ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{50}{100}$.

β) Τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{3}{5}$ μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων : $2\times10=20$, $\left(\frac{3\times20}{5\times20}=\frac{60}{100}\right)$ καὶ ἔχω τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}=\frac{60}{100}$.

γ) Τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος $\frac{9}{10}$ πολλαπλασιάζω μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων δύο κλασμάτων : $2\times5=10$ $\left(\frac{9\times10}{10\times10}=\frac{90}{100}\right)$ καὶ ἔχω τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}=\frac{90}{100}$.

Ἄρα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{10}$, ἔγιναν ὁμώνυμα : $\frac{50}{100}, \frac{60}{100}, \frac{90}{100}$.

Τώρα μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι ἀγόρασαν :

α) Ἡ Τασία	β) Ἡ Ἔλλη	γ) Ἡ Καίτη
$\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$	$\frac{3}{5}=\frac{60}{100}$	$\frac{9}{10}=\frac{90}{100}$

Ὥστε ἡ Καίτη ἐπῆρε περισσότερη κορδέλλα, γιατὶ πῆρε τὰ 90 (ἑκατοστὰ) ἀπὸ τὰ 100 κομ., ποὺ μοιράζεται τὸ μέτρο στὰ ὁμώνυμα κλάσματα.

Συμπέρασμα: Γιὰ νὰ τρέψωμε τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους καθενὸς κλάσματος, μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

229) Νὰ τρέψετε τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα:

α) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{10}$ β) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$. γ) $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$. $\frac{8}{10}$.

230) α) $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$. β) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$.

231) α) $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{3}$. β) $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{12}{20}$.

232) Κάμετε καὶ σεῖς 4 ὁμάδες ἀπὸ τρία ἑτερώνυμα κλάσματα ἡ κάθε μία καὶ τρέψετέ τα εἰς ὁμώνυμα.

233) Σὲ ποία ἰδιότητα στηρίζεται ἡ ἐργασία αὐτή;

Μάθημα 21ο.— Κοινὸ Πολλαπλάσιο καὶ Ἐλάχιστο Κοινὸ Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)

Ἐκτὸς ἀπὸ τὸν τρόπο, ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω μὲ τὸν ὁποῖο μάθαμε, πῶς τρέπομε ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὑπάρχει καὶ δεύτερος τρόπος μὲ τὸ **ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο**.

α) Τί εἶναι ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο.

Παράδειγμα — Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 2, 4 καὶ 5 λέγομε, ὅτι ἔχουν κοινὸ πολλαπλάσιο τὸν ἀριθμὸ 20. Γιατί;

Διότι ὁ ἀριθμὸς 20 γίνεται ἀπὸ τὸν καθένα ἀπὸ αὐτούς, ἅμα πολλαπλασιαστοῦν ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, π.χ. ὁ ἀριθμὸς $2\times10=20$, ὁ $4\times5=20$, ὁ $5\times4=20$. Ὁ 20 ἐπειδὴ εἶναι κοινὸ πολλαπλάσιο θὰ διαιρῆται ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, 5. Εἶναι δηλαδὴ ὁ 20 διαιρετὸς ἀπὸ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, π.χ. $20:2=10$, $20:4=5$ καὶ $20:5=4$.

Ἄρα ὁ ἀριθμός 20 εἶναι **κοινὸ πολλαπλάσιο** τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5.

Συμπέρασμα: Κοινὸ πολλαπλάσιο δύο ἢ περισσοτέρων δοθέντων ἀριθμῶν, λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ καθέναν ἀπὸ αὐτούς.

β) Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (Ε. Π.Κ.)

Παράδειγμα 1ο. — ***Οἱ ἀριθμοὶ 2, 4 καὶ 5 δὲν ἔχουν μόνο κοινὸ πολλαπλάσιο τὸν ἀριθμὸ 20 ποὺ εἴδαμε, ἀλλὰ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς 40, 60, 80 καὶ 100 κλπ. δηλαδὴ τὸ διπλάσιον κλπ. τοῦ ἀριθμοῦ 20.***

Ἀπὸ τὰ κοινὰ ὅμως αὐτὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2, 4 καὶ 5 τὸ μικρότερο, ὁ 20, λέγεται ***Ἐλάχιστο Κοινὸ Πολλαπλάσιο.***

Παράδειγμα 2ο.—***Οἱ ἀριθμοὶ 3, 4 καὶ 6 ἔχουν κοινὸ πολλαπλάσιο τὸν ἀριθμὸ 12.***

Ἔχουν ὅμως ἀκόμη κοινὰ πολλαπλάσια τοὺς ἀριθμοὺς 24, 36, 48 κλπ. Τὸ Ε.Κ.Π. ὅμως τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν 3, 4 καὶ 6 εἶναι ὁ 12, διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος μικρότερος ἀπὸ τὸν 12, ποὺ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς.

Συμπέρασμα: Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερο ἀπὸ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια.

Ἀσκήσεις

234) Τί εἶναι Κοινὸ Πολλαπλάσιο ;

235) Τί λέγεται Ε.Κ.Π. ;

236) Ποῖα εἶναι τὰ Κοινὰ Πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν :
α) 4, 8, 12. β) 3, 5, 6. γ) 4, 5, 12. δ) 2, 3, 4, 6.

Μάθημα 22ο.—Πῶς εὑρίσκομε τὸ Ε.Κ.Π.

Α'. Τρόπος

Παράδειγμα 1ον.—Ποῖον εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 6 καὶ 12;

Παίρνομε τὸν μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτούς, τὸν 12, καὶ προσέχομε ἂν αὐτὸς διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ ὅλους τοὺς ἄλλους, τοὺς 2, 3 καὶ 6. Ἐπειδὴ λοιπὸν διαιρῆται ἀκριβῶς λέμε, ὅτι ὁ 12 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος μικρότερος, ποὺ νὰ διαιρῆται ἀπὸ αὐτούς.

Παράδειγμα 2ο.—Ποῖον εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 6 καὶ 10;

Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα παίρνομε τὸν μεγαλύτερο, τὸν 10, καὶ προσέχομε, ἂν αὐτὸς διαιρῆται ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς 3, 5 καὶ 6. Βλέπομε ὅμως ὅτι ὁ 10 διαιρεῖται μόνο μὲ τὸν 5 καὶ τὸν ἑαυτό του Δὲν μποροῦμε, λοιπόν, νὰ ποῦμε ὅτι ὁ 10 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 6 καὶ 10. Τότε διπλασιάζομε, τριπλασιάζομε, τετραπλασιάζομε κλπ. τὸν 10, ὥσπου νὰ βροῦμε πολλαπλάσιό του, ποὺ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Βρίσκομε ὅτι ὁ 30 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 6, 10.

Συμπέρασμα: Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. δοθέντων ἀριθμῶν, παίρνομε τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτοὺς καὶ προσέχομε ἂν διαιρῆται ἀπὸ ὅλους ἀκριβῶς. Ἂν διαιρῆται, αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. Ἂν ὅμως δὲν διαιρῆται, τὸν διπλασιάζομε ἢ τριπλασιάζομε ἢ τετραπλασιάζομε κλπ· ὥσπου νὰ βροῦμε ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς ἀπὸ ὅλους τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Τὸ πολλαπλάσιο αὐτό, θὰ εἶναι τὸ Ε.Κ.Π.

Β'. Τρόπος

Παράδειγμα.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

Δοθέντες ἀριθμοί

2,	3,	4	: 2
1,	3,	2	: 2
1,	3,	1	: 3
1,	1,	1	Ε. Κ. Π. $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

Ἀπάντ.: Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 2, 3, 4 εἶναι ὁ 12.

Τὸν τρόπο αὐτὸ μεταχειριζόμαστε, ὅταν δὲν εἶναι εὔκολο νὰ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. μὲ τὸ διπλασιασμό, τριπλασιασμὸ κλπ. τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Γράφομε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς σὲ μία σειρα, φέρομε μία κάθετο γραμμή, καὶ ἀρχίζομε νὰ τοὺς διαιροῦμε ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 2 καὶ συνέχεια μὲ τοὺς πρώτους ἀριθμούς (πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι ἐκεῖνοι, ποὺ δὲν ἔχουν ἄλλον διαιρέτη ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἑαυτό τους καὶ τὴν μονάδα π.χ. 2, 3. 5, 7, 11, 13 κλπ.). Καὶ τὸν μὲν διαιρέτη γράφομε δεξιὰ ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, τὰ δὲ πηλίκα κάτω ἀπὸ τὸν καθένα διαιρετέο, ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς. Ὅσοι δὲν διαιροῦνται, τοὺς κατεβάζουμε ὅπως εἶναι, ὥσπου νὰ βρεθῇ ὁ διαιρέτης των.

Στὶς στῆλες τῶν διαιρετέων, πρέπει νὰ εἶναι τελευταῖα ἡ μονάδα.

Ἔπειτα σχηματίζομε τὸ γινόμενο ὅλων τῶν διαιρετῶν, ποὺ εἶναι στὴν κάθετη στήλη δεξιά.

Τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Τὸν τρόπο αὐτὸν θὰ σᾶς τὸν ἐξηγήσῃ ὁ δάσκαλός σας καλύτερα.

Ἀσκήσεις

Νὰ βρῆτε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρακάτω ἀριθμῶν :

Προφορικά.	237)	α) 3, 9.	β) 4, 16.	γ) 6, 30.
	238)	α) 2, 5, 10.	β) 4, 8, 16.	γ) 3, 7, 21.
	239)	α) 3, 4, 8.	β) 2, 3, 5, 6.	γ) 3, 4, 6, 9·
Γραπτά:	240)	α) 6, 20, 15, 30.	β) 3, 5, 6, 12.	γ) 4, 8, 64
	241)	α) 6, 8, 15, 20.	β) 3, 7, 9.	γ) 3, 2, 6, 15
	242)	α) 2, 3, 6, 7.	β) 2, 4, 11.	

Μάθημα 23ο. Πῶς τρέπομε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸ Ε.Κ.Π.

Παράδειγμα : ***Ἡ Καίτη, ἡ Βάσω καὶ ἡ Μαίρη ἔπλεξαν δαντέλλα. Ἡ Καίτη ἔπλεξε $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, ἡ Μαίρη $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου καὶ ἡ Βάσω $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρ. Ποία ἀπὸ τὶς τρεῖς ἔπλεξε περισσότερο;***

Γιὰ νά βροῦμε αὐτὸ ποὺ ζητάει τὸ πρόβλημα, πρέπει νά τρέψωμε τὰ 3 αὐτὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνη καὶ μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

Οἱ παρονομασταὶ εἶναι : α) 10, 5, 2. Τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν εἶναι ὁ 10 (Κοινὸς Παρονομαστής). Τὸ Ε.Κ.Π. ποὺ βρήκαμε, τὸ διαιροῦμε μὲ τόν καθένα παρονομαστὴ τῶν δοθέντων κλασμάτων καὶ μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλσσιάζομε τοὺς ὅρους καθενὸς κλάσματος. Θὰ ἔχωμε λοιπόν :

$$\frac{1}{10}\ \frac{3}{5}\ \frac{1}{2}\ \text{Ε.Κ.Π.} = 10 \quad \frac{\overset{1}{\smile}1}{10}\ \frac{\overset{2}{\smile}3}{5}\ \frac{\overset{5}{\smile}1}{2} = \frac{1}{10}\ \frac{6}{10}\ \frac{5}{10}$$

Ἀπάντησι : Περισσότερο ἔπλεξε ἡ Μαίρη.

Συμπέρασμα : Γιὰ νὰ τρέψωμε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, εὑρίσκομε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν, τὸ ὁποῖο διαιροῦμε μὲ καθένα παρονομαστή. Τὸ πηλίκο ποὺ προκύπτει σὲ κάθε κλάσμα τὸ πολλαπλασιάζομε μὲ τοὺς ὅρους του.

Ἀσκήσεις

243) Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα μὲ τὸ Ε.Κ.Π.

α) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12},$ β) $\frac{7}{10}, \frac{4}{8}, \frac{3}{4}$ γ) $\frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{4}{10}.$

δ) $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{9}{15}, \frac{2}{3}.$ ε) $\frac{4}{20}, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{60}.$

244) α) $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}.$ β) $\frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{10}.$ γ) $\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{5}{8}, \frac{2}{4}.$

245) Κάμετε καὶ σεῖς τρεῖς ὁμάδες ἀπὸ 4 κλάσματα ἑτερώνυμα καὶ τρέψετέ τα σὲ ὁμώνυμα, μὲ τὸ Ε.Κ.Π.

Ἀσκήσεις γιὰ ἐπανάληψι

246) Τί φανερώνουν οἱ κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{24}$ τῆς ὥρας;

247) Τί φανερώνουν οἱ κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου;

248) Γράψετε μὲ κλασματικὴ μορφὴ τὶς κλασματικὲς μονάδες, ἕνα ἕβδομο, ἕνα ἔνατο, ἕνα εἰκοστό, ἕνα πεντηκοστό, ἕνα ἑκατοστό, ἕνα χιλιοστό. Πέστε τί φανερώνουν ;

249) Νὰ βρῆτε τὴ σχέσι, ποὺ ἔχουν οἱ κλασματικὲς μονάδες :

$\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{20}$ καὶ $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{12}$ καὶ $\frac{1}{6}$.

250) Νὰ βρῆτε τὶς κλασματικὲς μονάδες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἔγιναν τὰ κλάσματα : $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{20}$.

251) Τί φανερώνουν τὰ κλάσματα : $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{7}{20}$ τοῦ κιλοῦ ;

252) Τὰ κλάσματα : $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{25}$ ἀπὸ ποῖες κλασματικὲς μονάδες γίνονται ; Καὶ πῶς ;

253) Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες : $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$ ποῖα κλάσματα θὰ προκύψουν, ἂν τὶς πάρωμε 3 καὶ 5 φορές ;

254) Κάμετε τὴ σύγκρισι μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα τῶν παρακάτω κλασμάτων καὶ βρῆτε τὰ μεγαλύτερα, τὰ μικρότερα καὶ τὰ ἰσοδύναμα μὲ αὐτά.

$\frac{3}{7}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{19}{19}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{25}{20}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{60}{25}$, $\frac{40}{40}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{5}{50}$, $\frac{18}{3}$.

255) Τί ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $6\frac{3}{4}$ μέτρα, $18\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ καὶ γιατί ;

256) Νὰ τρέψετε τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς $25\frac{5}{10}$ μέτρα, $48\frac{3}{4}$ κιλά, $35\frac{15}{24}$ ἡμέρες, $7\frac{9}{12}$ τοῦ ἔτους σὲ κλάσματα.

257) Ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα ξεχωρίσετε τὰ γνήσια καὶ τὰ καταχρηστικὰ $\frac{18}{44}$, $\frac{35}{40}$, $\frac{135}{8}$, $\frac{78}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{375}{40}$, $\frac{19}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{25}{8}$.

258) Νὰ ἐξαγάγετε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα :

$\frac{35}{7}$, $\frac{125}{12}$, $\frac{635}{5}$, $\frac{1275}{44}$, $\frac{650}{25}$, $\frac{144}{8}$, $\frac{750}{15}$, $\frac{48}{4}$, .

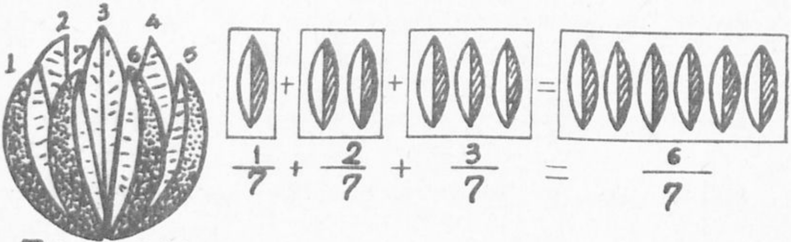
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α'. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Μάθημα 24ο.—Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Παράδειγμα: Μοιράσαμε ἕνα πορτοκάλι σὲ 7 ἴσα κομμάτια καὶ δώσαμε σὲ ἕνα παιδὶ τὸ $\frac{1}{7}$, σὲ ἄλλο $\frac{2}{7}$ καὶ σὲ τρίτο $\frac{3}{7}$. Πόσα πῆραν καὶ τὰ τρία παιδιά;



$\frac{7}{7}$ ἑπτὰ ἕβδομα

Θὰ κάνωμε πρόσθεσι. Τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα. Προθέτομε τοὺς ἀριθμητάς, ποὺ δείχνουν τὸν ἀριθμὸ τῶν κομματιῶν, τὰ ὁποῖα ἐπῆρε κάθε παιδὶ καὶ εὑρίσκομε, ὅτι καὶ τὰ τρία πῆραν 6 ἔβδομα $\left(\frac{6}{7}\right)$ τοῦ πορτοκαλιοῦ.

Λύσι : $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+2+3}{7}=\frac{6}{7}.$

Ἐργασίες. α) Τί κάνουμε στὴν πρόσθεσι ὁμωνύμων κλασμάτων; Λύσετε καὶ σεῖς β) στὸ πρόχειρό σας, τὸ παρακάτω:

Πρόβλημα. *Σὲ μιὰ διανομὴ καφὲ 3 οἰκογένειες ἐπῆραν ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομά τους, ἡ μία $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ. Ἡ ἄλλη $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλ. καὶ ἡ τρίτη $\frac{3}{10}$*

τοῦ κιλ. Πόσα κιλὰ καφὲ ἐπῆραν καὶ οἱ τρεῖς οἰκογένειες;

γ) Κάμετε καὶ σεῖς τρία δικά σας προβλήματα.

δ) Νὰ βγάλετε μόνοι σας τὸν κανόνα ἀπὸ τὰ παραπάνω.

Κανόνας. Γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ περισσότερα ὁμώνυμα κλάσματα προσθέτομε τοὺς ἀριθμητάς, τὸ ἄθροισμα γράφομε ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ γράφομε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

259) Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀγόρασε τὴ μία ἡμέρα $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο, τὴ δεύτερη $\frac{1}{5}$ τοῦ κιλοῦ, τὴν τρίτη $\frac{3}{5}$ καὶ τὴν τετάρτη $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσο βούτυρο ἀγόρασε καὶ στὶς τέσσερες ἡμέρες;

260) α) $\frac{8}{10}+\frac{7}{10}+\frac{9}{10}$ μέτρα. β) $\frac{10}{12}+\frac{5}{12}+\frac{6}{12}+\frac{3}{12}$ ἔτη.

γ) $\frac{15}{24}+\frac{7}{24}+\frac{5}{24}+\frac{12}{24}$ ἡμέρ. δ) $\frac{18}{30}+\frac{25}{30}+\frac{4}{30}+\frac{15}{30}$ μῆν.

261) Τρία κορίτσια ἀγόρασαν κορδέλλα. Ἡ Μαρία ἐπῆρε $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου. Ἡ Οὐρανία $\frac{6}{10}$ καὶ ἡ Καίτη $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρ. Πόσα μέτρα κορδέλλα ἀγόρασαν καὶ οἱ τρεῖς;

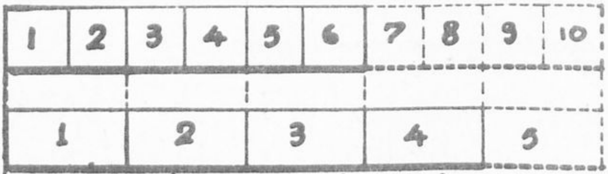
262) Μιὰ πλέκτρα ἔπλεξε τὴν πρώτη ἡμέρα $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρ. δαντέλλα, τὴ δεύτερη $\frac{2}{4}$ τοῦ μέτρ. καὶ τὴν τρίτη $\frac{1}{4}$ μ. Πόση δαντέλλα ἔπλεξε καὶ στὶς τρεῖς ἡμέρες;

263) Ἕνας μαθητής, γιὰ νὰ πάη ἀπὸ τὸ σπίτι του στὸ κατάστημά του, ἐβάδισε $\frac{1}{6}$ τῆς ὥρας καὶ ἔπειτα γιὰ νὰ πάη στὸ σχολεῖο του ἐβάδισε ἄλλα $\frac{2}{6}$ τῆς ὥρας. Πόσο ἐβάδισε ἀπὸ τὸ σπίτι ὣς τὸ σχολεῖο;

264) Κάμετε καὶ σεῖς τρία προβλήματα προσθέσεως ὅμοια καὶ λύσετέ τα.

Μάθημα 25—Πρόσθεσι ἑτερωνύμων κλασμάτων

Παράδειγμα: Ἡ Μαρία χρησιμοποίησε γιὰ ἕνα φουστάνι $\frac{6}{10}$ *τοῦ μέτ. κορδέλλα καὶ γιὰ ἕνα ἄλλο* $\frac{4}{5}$ *τοῦ μέτρ. Πόση κορδέλλα ἐπῆραν καὶ γιὰ τὰ δύο φουστάνια;*



$\frac{6}{10}+\frac{4}{5}$ Ε.Κ.Π.$=10$

$\frac{6}{10}+\frac{4}{5}=\frac{6}{10}+\frac{8}{10}=\frac{14}{10}=1+\frac{4}{10}=1+\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου

Θὰ κάνουμε πρόσθεσι. Τὰ κλάσματα αὐτὰ βλέπομε ὅτι εἶναι ἑτερώνυμα καὶ δὲ μποροῦμε νὰ τὰ προσθέσουμε.

Λύσι : Θὰ τὰ κάνουμε ὁμώνυμα ὅπως μάθαμε.

α) Ε.Κ.Π.$=10$ $\quad \frac{6}{10}+\frac{4}{5}=\frac{6}{10}+\frac{8}{10}$

β) Τὰ προσθέτομε : $\frac{6}{10}+\frac{8}{10}=\frac{14}{10}=1\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου ἢ $1\frac{2}{5}$ μέτρα.

Ἀπάντησι : Μεταχειρίστηκε $1\frac{4}{10}$ ἢ $1\frac{2}{5}$ μέτρα κορδέλλα.

> **Κανόνας: Γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομε εἰς ὁμώνυμα. Ἔπειτα προσθέτομε τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τὸ ἄθροισμά των γράφομε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ γράφομε τὸν ἴδιο.**

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

265) Μία μαθήτρια ἀγόρασε γιὰ τὴν ποδιά της $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρ. δαν-

τέλλα καὶ ἔπειτα ἐπῆρε γιὰ συμπλήρωμα ἄλλα $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρ. Πόση δαντέλλα χρησιμοποίησε συνολικά;

266) Ἕνας ἐργάτης ἔσκαψε τὴν πρώτη ἡμέρα τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς χωραφιοῦ. Τὴ δεύτερη τὸ $\frac{1}{8}$ καὶ τὴν τρίτη τὰ $\frac{3}{10}$ ἀπὸ ὅλο τὸ χωράφι. Πόσο ἔσκαψε καὶ τὶς τρεῖς ἡμέρες;

267 α) $\frac{7}{16}+\frac{7}{8}=$; β) $\frac{10}{15}+\frac{2}{3}=$; γ) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$;

δ) $\frac{5}{6}+\frac{4}{9}+\frac{7}{12}+\frac{1}{3}=$; ε) $\frac{3}{8}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=$; στ) $\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=$;

268) Μία μαθήτρια ἀγόρασε $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρ. κορδέλλα, ἡ δὲ φίλη της ἀγόρασε $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρ. Πόσο ἀγόρασαν καὶ οἱ δυὸ μαζί;

269) Ὁ Κωστάκης εἶχε $\frac{7}{10}$ τοῦ χιλιάρικου. Τοῦ ἔδωσε ἡ μητέρα του $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιάρ. καὶ καὶ ὁ πατέρας του $\frac{1}{2}$ τοῦ χιλιάρ. Πόσα ἔχει τώρα;

Μάθημα 26ο. — Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν

Παράδειγμα: — **Σὲ τρεῖς οἰκογένειες μοίρασαν γιὰ βοήθεια ἀλεύρι. Στὴν πρώτη ἔδωσαν $5\frac{1}{2}$ κιλά, στὴ δεύτερη $7\frac{3}{4}$ κιλὰ καὶ στὴν τρίτη $3\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι ἔδωσαν καὶ στὶς τρεῖς οἰκογένειες;**

Ἡ πρόσθεσι τῶν μικτῶν ἀριθμῶν μπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ δύο τρόπους.

α) Χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα

Προσθέτομε πρῶτα τοὺς ἀκεραίους τῶν μικτῶν $5+7+3$ καὶ ἔπειτα τὰ κλάσματά των $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$.

Εὑρίσκομε α) τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων $5+7+3=15$ κιλά, καὶ β) τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων, ὅπως μάθαμε.

Ε.Κ.Π. = 20 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}=\frac{10}{20}+\frac{15}{20}+\frac{12}{20}=\frac{37}{20}=1\frac{17}{20}$

γ) προσθέτομε τὰ δύο ἀθροίσματα: $15+1\frac{17}{20}=16\frac{17}{20}$ κιλ. ἀλεύρι μοιράστηκε καὶ στὶς τρεῖς οἰκογένειες.

β) Τρόπος. Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα

$$5\frac{1}{2}+7\frac{3}{4}+3\frac{3}{5}=\frac{11}{2}+\frac{31}{4}+\frac{18}{5}=\frac{110}{20}+\frac{155}{20}+\frac{72}{20}=\frac{337}{20}$$

$$=16\frac{17}{20} \text{ κιλά.}$$

Καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους βρίσκομε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα: $16\frac{17}{20}$ κιλ.

Κ α ν ό ν α ς. Γιὰ νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομε τὰ δύο ἀθροίσματα. Ἢ τρέπομε τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ προσθέτομε.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

270) Ἕνας κουλουρὰς εἰσέπραξε τὸ πρωῒ $18\frac{4}{5}$ δρχ. καὶ τὸ ἀπόγευμα $12\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσα εἰσέπραξε ὅλη τὴν ἡμέρα ἀπὸ τὰ κουλούρια;

271) Ἕνας βιβλιοπώλης ἀγόρασε ἕνα βιβλίο $48\frac{1}{2}$ δρχ. καὶ θέλει νὰ τὸ πωλήση μὲ κέρδος $8\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσο πρέπει νὰ τὸ πωλήση

272) Ἕνας μαθητὴς πλήρωσε γιὰ νὰ ἀγοράση τὸ ἀναγνωστικό του $12\frac{1}{2}$ δρχ. τὴν Ἱστορία του $8\frac{3}{4}$ δρχ., τὴ Φυσική του $9\frac{4}{10}$ δρχ., τὰ Θρησκευτικά του $8\frac{2}{4}$ δρχ. καὶ τὴ Γεωγραφία του $10\frac{1}{4}$ δρχ. Πόσα ἐπλήρωσε γιὰ ὅλα τὰ βιβλία του;

Γραπτά. 273) α) $4\frac{2}{11}+2\frac{6}{11}+7\frac{5}{11}+\frac{8}{11}+8=$

β) $4\frac{4}{6}+3\frac{2}{7}+4\frac{1}{2}=$ γ) $1\frac{1}{3}+6\frac{7}{9}+8\frac{17}{18}$

δ) $25\frac{5}{8}+9\frac{1}{3}+6\frac{3}{4}=$ ε) $3\frac{3}{4}+5+4\frac{5}{6}=$

274) Ἕνας ἐκδρομέας ἐβάδισε τὴν πρώτη ὥρα τῆς πορείας του $5\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα, τὴ δεύτερη ὥρα $5\frac{1}{10}$ χιλιόμετρα καὶ τὴν τρίτη $4\frac{8}{20}$ χιλιόμετ. Πόσα χιλιόμετρα ἐβάδισε καὶ τὶς τρεῖς ὧρες ;

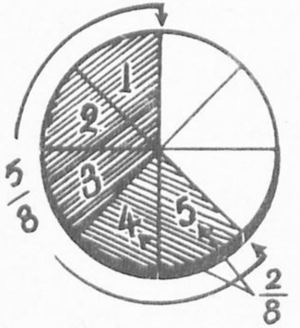
275) Μία νοικοκυρά, ἐπέστρεψε ἀπὸ τὴν ἀγορὰ μὲ τρία πακέτα. Τὸ ἕνα εἶχε πατάτες, βάρος 2 κιλά. Τὸ δεύτερο ζάχαρι $1\frac{3}{5}$ κιλά, καὶ τὸ τρίτο μακαρόνια βάρος, $1\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσο ἦταν τὸ ὁλικὸ βάρος ποὺ ἔφερε στὸ σπίτι;

276) Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἐπωλήθησαν $12\frac{3}{5}$ μέτρα, $15\frac{1}{2}$ μέτρα, $6\frac{7}{10}$ μέτρα καὶ ἔμειναν ἀκόμη ἀπώλητα 18 μέτρα. Πόσα μέτρα ἦταν ὅλο τὸ ὕφασμα ;

Β΄ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Μάθημα 27ο.—Πῶς ἀφαιροῦνται ὁμώνυμα κλάσματα

Παράδειγμα.—Ἀπὸ τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς γαλέττας, ὁ Παῦλος ἐπῆρε τὰ $\frac{2}{8}$. Τί μέρος τῆς γαλέττας ἔμεινε;



$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{5-2}{8}=\frac{3}{8}$$

5	ὄγδοα	τῆς	γαλέττας
−2	»	»	»
= 3	»	»	»

Τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$ — $\frac{2}{8}$ εἶναι ὁμώνυμα. Ὅπως καὶ στὴν πρόσθεσι τὸ ἴδιο κάνομε καὶ στὴν ἀφαίρεσι, ὅταν πρόκειται γιὰ ὁμώνυμα κλάσματα:

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}.$$

Ἀπάντησι: Ἔμειναν τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς γαλέττας.

Κ α ν ό ν α ς. Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε δύο ὁμώνυμα κλάσματα, ἀφαιροῦμε ἀριθμητὴ ἀπὸ ἀριθμητή. Τὴ διαφορὰ γράφομε ἀριθμητή, καὶ παρονομαστὴ γράφομε τὸν ἴδιο.

277) Μία νοικοκυρὰ εἶχε $\frac{9}{10}$ τοῦ κιλοῦ φασόλια καὶ μαγείρεψε τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσα τῆς ἔμειναν;

278) Ἕνας ἐργάτης εἶχε $\frac{9}{10}$ τοῦ ἑκατοστάρικου καὶ ἔδωσε γιὰ νὰ ἀγοράση κρέας τὰ $\frac{5}{10}$ τοῦ ἑκατοστάρικου. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

Προφορικά: 279) α) $\frac{17}{30}-\frac{12}{30}$ μῆνες. β) $\frac{10}{12}-\frac{3}{12}$ ἔτη.

280) α) $\frac{85}{100}-\frac{60}{100}$ κιλά. β) $\frac{9}{10}-\frac{4}{10}$ μέτρ.

Γραπτά: 281) α) $\frac{8}{9}-\frac{5}{9}$. β) $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}$. γ) $\frac{175}{400}-\frac{100}{400}$

δ) $\frac{9}{15}-\frac{2}{15}$. ε) $\frac{45}{60}-\frac{37}{60}$.

282) Μία γυναῖκα εἶχε ἕνα μέτρο λάστιχο καὶ χρησιμοποίησε τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου. Πόσο λάστιχο τῆς ἔμεινε;

283) Ἕνα παιδὶ εἶχε $\frac{7}{10}$ τοῦ δεκάρικου. Πόσα θέλει ἀκόμα γιὰ νὰ ἔχη ἕνα δεκάρικο;

284) Ἕνας μαθητὴς εἶχε $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου καὶ ἔδωσε γιὰ τὸ συσσίτιό του τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

285) Κάμετε καὶ σεῖς τρία προβλήματα ἀφαιρέσεως ὁμωνύμων κλασμάτων.

Μάθημα 28ο.—Πῶς ἀφαιροῦμε ἑτερώνυμα κλάσματα

Παράδειγμα.—**Ἡ Μαρία εἶχε $\frac{7}{10}$ κιλὰ λάδι. Ἔδωσε ἀπὸ αὐτὸ στὴ γειτόνισσά της τὴν Ἔλλη $\frac{1}{2}$ κιλοῦ. Πόσο λάδι τῆς ἔμεινε;**

Λύση : $\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{14}{20}-\frac{10}{20}=\frac{4}{20}$ ἢ $\frac{2}{10}$ τοῦ κιλοῦ.

'Απάντησις: Τῆς ἔμειναν $\frac{2}{10}$ κιλὰ λάδι.

Πῶς ἔγινε ἡ λύση στὸ πρόβλημα αὐτό ;

Κανόνας. Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομε πρῶτα εἰς ὁμώνυμα. Ἔπειτα κάνομε ἀφαίρεσι ὁμωνύμων κλασμάτων.

'Ασκήσεις καὶ προβλήματα

286) Ἕνας μαθητὴς ἀγόρασε $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ σταφύλια καὶ ἔδωσε σ' ἕνα συμμαθητή του τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

287) Μία γυναῖκα εἶχε $\frac{7}{10}$ τοῦ δεκάρικου καὶ ἔδωσε σὲ μιὰ φτωχὴ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δεκάρικου. Πόσα τῆς ἔμειναν ;

288) Νὰ βρῆτε μὲ τὸ νοῦ σας :

α) $\frac{1}{2} - \frac{3}{10}$ μέτρα. β) $\frac{3}{4} - \frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ. γ) $\frac{8}{10} - \frac{50}{100}$ δρχ.

289) Νὰ κάμετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις στὸ τετράδιό σας :

α) $\frac{4}{5} - \frac{3}{8} =$ β) $\frac{9}{10} - \frac{1}{3} =$ γ) $\frac{11}{15} - \frac{1}{2} =$ δ) $\frac{16}{20} - \frac{1}{3} =$

290) Ὁ Πέτρος εἶχε $\frac{4}{5}$ τοῦ ἑκατοστάρικου καὶ ἔδωσε γιὰ ν' ἀγοράση μία γραβάτα $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατοστάρικου. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

291) Ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς ἀποστάσεως, ἕνα αὐτοκίνητο διέτρεξε τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς. Πόσο θέλει ἀκόμη νὰ διατρέξη ;

292) Κάμετε καὶ σεῖς 3 προβλήματα ἀφαιρέσεως ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Μάθημα 29.—Πῶς ἀφαιρεῖται κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιο

Παράδειγμα.—**Μία μαθήτρια εἶχε ἕνα μέτρο κορδέλλα καὶ χρησιμοποίησε γιὰ τὴ σχολικὴ γιορτὴ τά $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου. Πόση κορδέλλα τῆς ἔμεινε;**

Γιὰ νὰ εὕρωμε πόση κορδέλλα τῆς ἔμεινε ἀπὸ τὸ ἕνα μέτρο θὰ ἀφαιρέσωμε τὰ $\frac{7}{10}$ ἀπὸ τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 1 μέτρο $\left(1 - \frac{7}{10}\right)$. Ἔχομε δηλαδὴ ν' ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιο. Ἡ ἀφαίρεσι αὐτὴ δὲν μπορεῖ νὰ γίνη ἔτσι ὅπως εἶναι ὁ μειωτέος, Γιατὶ εἶναι ἀκέραιος. Πρέπει νὰ γίνη καὶ αὐτὸς κλάσμα. Θὰ τρέψωμε τὸ 1 μέτρο σὲ δέκατα γιατὶ δέκατα πῆρε καὶ ἡ μαθήτρια αὐτή, γιὰ τὴ σχολικὴ γιορτή. Τὸ 1 μέτρο κάνει $\frac{10}{10}$. Ἀπὸ τὰ $\frac{10}{10}$ τώρα θ' ἀφαιρέσωμε τὰ $\frac{7}{10}$.

Λύσι : $1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ μέτρα κορδέλλα ἔμεινε.

Παράδειγμα 2ο. — **Ἕνας παντοπώλης εἶχε 5 κιλὰ βούτυρο καὶ ἐπώλησε σὲ μία γυναῖκα $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσο βούτυρο τοῦ ἔμεινε;**

Καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμε τὸ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ ἀπὸ τὸν ἀκέραιο 5 κιλ. Ἡ ἀφαίρεσι θὰ γίνη ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο.

$5 - \frac{4}{5} = 4\,\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 4\,\frac{1}{5}$ τοῦ κιλ. βούτυρο θὰ μείνη ὑπόλοιπο.

Κ α ν ό ν α ς. Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιο παίρνομε μία ἀκεραία μονάδα τοῦ ἀκεραίου καὶ τὴν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστή, τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα, ὅπως μάθαμε.

Σημείωσι : Μποροῦμε ἀκόμη νὰ κάνωμε τὸν μειωτέο ἀκέραιο κλάσμα, βάζοντας παρονομαστὴ τὴ μονάδα καὶ ἔχομε ν' ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα, ὅπως μάθαμε. Ἔτσι : $5 - \frac{4}{5} = \frac{5}{1} - \frac{4}{5} = \frac{25}{5} - \frac{4}{5} = \frac{21}{5} = 4\,\frac{1}{5}$ κιλ.

'Ασκήσεις καὶ Προβλήματα

293) 'Από ἕνα δεκάρικο πλήρωσε ὁ Γιῶργος τὰ $\frac{7}{10}$ γιὰ ἕνα βιβλίο του. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

294) Ἕνα δοχεῖο λάδι ζυγίζει 13 κιλά. Τὸ ἀπόβαρο τοῦ δοχείου εἶναι $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πὸσο λάδι καθαρὸ ἔχει μέσα τὸ δοχεῖο ;

Προφορικά : 295) Κάμετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις :

α) $5 - \frac{200}{1000}$ κιλὰ β) $2 - \frac{5}{10}$ μέτρα γ) $1 - \frac{3}{4}$ ὥρας

δ) $3 - \frac{6}{12}$ ἔτους. ε) $5 - \frac{9}{10}$ δραχ. στ) $1 - \frac{3}{4}$ κιλοῦ.

296) Νὰ κάμετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις γραπτά :

α) $1 - \frac{5}{8}$ β) $3 - \frac{5}{6} =$ γ) $56 - \frac{2}{3} =$ δ) $7 - \frac{6}{9} =$ ε) $200 - \frac{9}{10} =$

στ) $1 - \frac{15}{20} -$ ζ) $18 - \frac{3}{5} -$ η) $100 - \frac{8}{12}$ θ) $35 - \frac{2}{3} =$

297) Ἕνας ταχυδρόμος γιὰ νὰ πάη ἀπὸ ἕνα χωριὸ σ' ἕνα ἄλλο, ποὺ ἀπέχει 3 ὧρες, ἔχει περπατήσει μόνο $\frac{45}{60}$ τῆς ὥρας. Πόσο πρέπει νὰ περπατήση ἀκόμα ;

290) Ἕνα τόπι ὕφασμα εἶναι 15 μέτρα. Ὁ ἔμπορος ἔκοψε καὶ ἐπώλησε τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρ. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε στὸ τόπι ;

Μάθημα 30ο. — Πῶς ἀφαιροῦνται μικτοὶ ἀριθμοὶ

Παράδειγμα 1ο. — **Ὁ μπακάλης τῆς γειτονιᾶς ἔφερε $10\frac{3}{4}$ κιλὰ τυρί. καὶ ἔδωσε τὴν πρώτη μέρα $5\frac{1}{4}$ κιλά. Πόσα κιλὰ τυρὶ τοῦ ἔμεινε ;**

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ πρέπει ν' ἀφαιρέσωμε τὰ $5\frac{1}{4}$ κιλά, ποὺ ἐπώλησε ἀπὸ τὰ $10\frac{3}{4}$ κιλὰ τυρί, ποὺ ἀγόρασε: $10\frac{3}{4}-5\frac{1}{4}$. Ἔχομε ν' ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀπὸ μικτόν. Ἡ ἀφαίρεσι γίνεται μὲ δύο τρόπους:

α) Τρόπος.

Ἀφαιροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.

Λύση: $10\frac{3}{4}-5\frac{1}{4}$ α) $10-5=5$. β) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{2}$ καὶ

γ) Ἑνώνομε τὰ δύο ὑπόλοιπα $5+\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$ κιλά.

Γιὰ συντομία: $10\frac{3}{4}-5\frac{1}{4}=5\frac{2}{4}=5\frac{1}{2}$ κιλά.

Παράδειγμα 2ο.—Τὴ δεύτερη μέρα ἀπὸ τὰ $5\frac{2}{4}$ κιλὰ τυρὶ ποὺ εἶχαν μείνει, πωλήθηκαν τὰ $3\frac{3}{4}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἔμειναν τώρα;

Καὶ πάλι θ' ἀφαιρέσωμε τὰ $3\frac{3}{4}$ ἀπὸ τὰ $5\frac{2}{4}$ κιλά. $5\frac{2}{4}-3\frac{3}{4}=$

Βλέπομε ὅμως ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀφαιρετέου, δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου $\frac{2}{4}$ γιατὶ εἶναι μεγαλύτερο. Γι' αὐτὸ παίρνομε μία ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου 5 καὶ τὴν κάνομε τέταρτα $\left(\frac{4}{4}\right)$, τὰ ὁποῖα προσθέτομε μὲ τὰ $\frac{2}{4}$ καὶ γίνεται $\frac{6}{4}$. Ὁ μικτὸς τώρα τοῦ μειωτέου $5\frac{2}{4}$ ἔγινε $4\frac{6}{4}$, ὁπότε εὔκολα ἡ ἀφαίρεσι γίνεται ἔτσι: $5\frac{2}{4}-3\frac{3}{4}=4\frac{6}{4}-3\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$ κιλ. (ὑπόλοιπο).

β) Τρόπος.

Ἀπὸ $5\frac{2}{4}$ κιλὰ τυρί, πωλήθηκαν τὰ $3\frac{3}{4}$ κιλά. Πόσα κιλ. ἔμειναν;

Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἀφαιροῦμε:

$5\frac{2}{4}-3\frac{3}{4}=\frac{22}{4}-\frac{15}{4}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ κιλὰ τυρὶ ἔμειναν ὑπόλοιπο.

Κανόνας. **Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀπὸ μικτόν, α) ἀφαιροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα. Μετά, ἑνώνομε τὰ δύο ὑπόλοιπα. (Ἂν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα τρέπομε αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα) ἢ β) Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.**

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

291) Ἕνας μπακάλης εἶχε ἕνα σακκὶ καφέ, ποὺ ζύγιζε $51\frac{1}{2}$ κιλά. Ἐπωλήθησαν $36\frac{7}{10}$ κιλά. Πόσα κιλὰ καφὲ ἔμειναν;

292) Στὴν ἀποθήκη τοῦ συσσιτίου ὑπῆρχαν $15\frac{1}{4}$ κιλὰ κακάο καὶ σὲ μία ἑβδομάδα διετέθησαν $6\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσο κακάο ἔμεινε στὴν ἀποθήκη;

292) Κάμετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις. **Προφορικά:**

α) $7\frac{6}{10} - 5\frac{2}{10}$ χιλιάρ. β) $9\frac{2}{5} - 4\frac{4}{5}$ μέτρα. γ) $5\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2}$ λίρες.

293) **Γραπτά.**

α) $13\frac{7}{12} - 8\frac{11}{12}$ β) $68\frac{3}{8} - 51\frac{1}{2}$ γ) $25\frac{13}{25} - 18\frac{11}{15}$ δ) $90\frac{1}{3} - 75\frac{3}{5}$.

294) Ἕνας ἄνθρωπος ἐργάζεται κάθε ἡμέρα $9\frac{1}{2}$ ὧρες. Πόσες ὧρες μένουν γιὰ ὕπνο καὶ γιὰ ἀνάπαυσι; (1 ἡμ. = 24 ὧρες).

295) Μία γυναίκα ἀγόρασε $7\frac{1}{2}$ κιλὰ σαπούνι καὶ ἐξώδεψε ὅλο τὸ μῆνα $4\frac{4}{5}$ κιλά. Πόσο τῆς ἔμεινε;

296) Ἕνας γεωργὸς ἔχει ἕνα χωράφι $150\frac{1}{2}$ στρέμματα καὶ ἔσπειρε τὰ $90\frac{2}{5}$ στρέμ. σιτάρι, τὸ δὲ ἄλλο κριθάρι. Πόσα στρέμματα κριθάρι ἔσπειρε;

297) Κάμετε καὶ σεῖς 3 ὅμοια προβλήματα, τὰ ὁποῖα νὰ λύσετε.

Μάθημα 31ο.—Πῶς ἀφαιρεῖται μικτὸς ἀπὸ ἀκέραιο

Παράδειγμα ***Μία γυναίκα εἶχε 10 δραχμὲς καὶ ἔδωσε*** $4\frac{4}{10}$ ***ἀπὸ αὐτὲς γιὰ ν' ἀγοράση ἕνα κιλὸ γάλα.*** *Πόσες δραχμές τῆς ἔμειναν;*

Ἐδῶ ἔχομε ν' ἀφαιρέσωμε τὸ μικτὸ $4\frac{4}{10}$ ἀπὸ τὸν ἀκέραιο 10. Πρέπει καὶ ὁ μειωτέος νὰ γίνη μικτός. Γι' αὐτὸ παίρνομε μιὰ ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸν 10, τὴν κάνομε κλάσμα μὲ ἴδιο παρονομαστὴ καὶ ἀφαιροῦμε ἔτσι:

$10-4\frac{4}{10}=9\frac{10}{10}-4\frac{4}{10}=5\frac{6}{10}$ δραχμὲς τῆς ἔμειναν.

Ἀπάντησι: Τῆς ἔμειναν $5\frac{6}{10}$ δραχμές.

> **Κανόνας. Γιὰ νὰ ἀφαιρέσουμε μικτὸ ἀπὸ ἀκέραιο, τρέπομε τὸν ἀκέραιο σὲ μικτό, παίρνοντας μία ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸν ἴδιο. Αὐτὴ τὴν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν ἴδιον τοῦ κλασματικοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἀφαιροῦμε μικτὸ ἀπὸ μικτό.**

Ἀσκήσεις — Προβλήματα

Γραπτά:

298) Ἕνα κιλὸ ρύζι ἔχει $12\frac{6}{10}$ δρχ. Πόσα ρέστα θὰ πάρω ἂν ἔδωσα 50 δραχμές γιὰ ν' ἀγοράσω ἕνα κιλό;

299) α) 6 κιλ. — $3\frac{5}{10}$ κιλ. β) 8 μέτρ. — $5\frac{3}{5}$ μέτρ. γ) 12 μ. — $9\frac{7}{10}$ μέτρα. δ) $200-150\frac{7}{8}=$ ε) $45-30\frac{18}{30}=$ στ) $65-25\frac{5}{9}=$ ζ) $100-76\frac{4}{10}$ η) $40-28\frac{7}{16}$ θ) $50-38\frac{3}{4}$ ι) $19-3\frac{4}{5}$.

300) Ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ὣς τὸ Βόλο ἡ ἀπόσταση εἶναι 360 χιλιόμετρα. Ἂν ἕνα αὐτοκίνητο ἔτρεξε τὰ $200\frac{3}{4}$ χιλιομ., Πόσα χιλιόμετρα μένουν ἀκόμη ὣς τὸ Βόλο;

301) Ἕνας μαθητὴς χρωστάει στὸ βιβλιοπώλη του 50 δραχμές. Τοῦ ἔδωσε $35\frac{5}{10}$ δραχμές. Πόσα χρωστάει ἀκόμη ;

302) Κάμετε καὶ σεῖς 3 προβλήματα ὅμοια, τὰ ὁποῖα νὰ λύσετε.

Προβλήματα μικτά

303) Ἕνας ἀγόρασε λάδι $17\frac{1}{5}$ δραχ. τὸ κιλό, καὶ τὸ πωλεῖ $20\frac{1}{2}$ δρ. Πόσα κερδίζει στὸ κιλό ;

304) Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει μισθὸ 65 δραχ. τὴν ἡμέρα. Ξοδεύει γιὰ τὴν τροφή του $30\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ γιὰ ἄλλα ἔξοδά του $10\frac{3}{5}$ δραχ. Πόσα τοῦ μένουν ;

305) Ἕνα τόπι ὕφασμα ἦταν $35\frac{1}{4}$ μέτρα. Ἐπωλήθησαν τὴν πρώτη ἡμέρα 15 μέτρα, καὶ τὴ δεύτερη $12\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε ;

306) Ἕνα χωράφι εἶναι 3 στρέμματα. Τὴν πρώτη ἡμέρα ὠργώθηκαν $1\frac{1}{4}$ στρέμμ. καὶ τὴ δεύτερη $\frac{9}{10}$ στρέμ. Πόσο ἔμεινε ἀκαλλιέργητο ;

307) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε 23 κιλὰ βούτυρο. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε σὲ ἕναν $4\frac{3}{5}$ κιλά, σὲ ἄλλον $6\frac{1}{2}$ κιλ. καὶ σὲ τρίτον $5\frac{1}{4}$ κιλ. Πόσα κιλὰ βούτυρο τοῦ ἔμειναν ;

308) Μία πλέκτρα θέλει νὰ πλέξη $42\frac{3}{10}$ μέτρα δαντέλλα. Τὴν α) ἡμέρα ἔπλεξε $8\frac{1}{2}$ μέτρα τὴ β) ἡμέρα ἔπλεξε $11\frac{1}{4}$ μέτρα καὶ τὴν γ) 12 μέτρα. Πόση δαντέλλα θέλει νὰ πλέξη ἀκόμα;

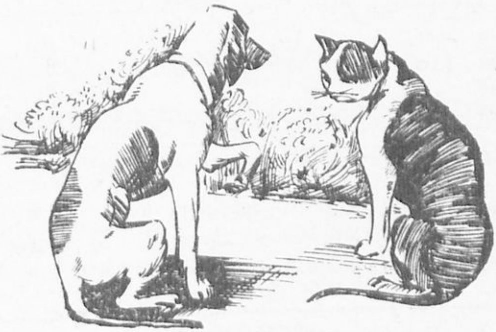
309) Δύο παιδιὰ θέλουν ν' ἀγοράσουν μαζὶ ἕνα φοὺτ-μπώλ, τὸ ὁποῖο κοστίζει 80 δρχ. Τὸ ἕνα παιδὶ ἔχει $25\frac{3}{5}$ δρχ. καὶ τὸ ἄλλο $32\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσα θέλουν ἀκόμη γιὰ νὰ τὸ ἀγοράσουν ;

310) Ἕνας ἐργάτης ἐργάζεται τὴν ἡμέρα ἀπὸ τὶς $7\frac{3}{4}$ τὸ πρωῒ ὥς τὸ

μεσημέρι (12) καὶ ἀπὸ τὶς $2\frac{1}{2}$ μ. μ. ὣς τὶς $6\frac{1}{4}$ τὸ βράδυ. Πόσες ὧρες ἐργάζεται ὅλη τὴν ἡμέρα;

311) Ἀπὸ ἕνα σάκκο ζάχαρι, ποὺ ζύγιζε $30\frac{1}{4}$ κιλὰ ἔβγαλε ὁ δάσκαλος γιὰ συσσίτιο τὴν πρώτη ἡμέρα $2\frac{3}{4}$ κιλά, τὴ δεύτερη $3\frac{1}{5}$ κιλά, τὴν τρίτη 4 κιλά, καὶ τὴν τετάρτη $3\frac{1}{2}$ κιλά. Πόση ζάχαρι ἔμεινε ἀκόμη στὸ σάκκο;

312) Ἕνα ἐμπορικὸ ἐπώλησε σὲ 3 μέρες $70\frac{1}{5}$ μέτρα ὕφασμα. Τὴν πρώτη ἡμέρα ἐπώλησε $17\frac{1}{2}$ μέτρα, τὴ δεύτερη $14\frac{3}{5}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ἐπώλησε τὴν τρίτη ἡμέρα;



Γ. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Μάθημα 32ο.— Πολλαπλασιασμός κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον

Περίπτωση Α'. (Πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος)

Παράδειγμα.—***Τρεῖς μαθήτριες ἤθελαν νὰ κάνουν ἀπὸ μία ταινία γιὰ τὴ γιορτή τους. Ἡ κάθε μία ταινία χρειαζόταν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα ἀγόρασαν καὶ τὰ τρία κορίτσια;***

Ἀφοῦ γιὰ μία ταινία χρειαζόμαστε $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα, γιὰ τὶς 3 ταινίες θὲ χρειαστοῦμε 3 φορὲς τὸ $\frac{4}{5}$.

Γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν. Θὲ κάνωμε πολλαπλασιασμό.

Σκέψι: ἡ 1 ταιν. $= \frac{4}{5}$ μέτρου
οἱ 3 » $= X$; »

Λύσι: $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ μ.

Ἀπάντησι: Γιὰ τὶς 3 ταινίες θὰ ἀγοράσουν $2\frac{2}{5}$ μέτρα ὕφασμα.

Πρόβλημα. Ἕνας μαθητὴς ἀγόρασε 5 πέννες ποὺ ἡ κάθε πέννα ἄξιζε $\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε;

Ἐργασίες; Τί μᾶς δίδετε στὸ πρόβλημα αὐτό; β) Τί ἀριθμοὺς ἔχομε γιὰ τὴν πρᾶξι μας; γ) Πῶς θὰ κάνωμε τὴν πρᾶξι; δ) Λύσετέ το μόνοι σας κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο.

Κανόνας: **Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο, τὸ γινόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ γράφομε τὸν ἴδιο.**

Μάθημα 33ο.—Πολλαπλασιασμός μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον

Παράδειγμα.—"**Ενα; μαθητὴς πληρώνει γιὰ ἕνα τετράδιο $5\frac{1}{4}$ δρχ. Πόσα πρέπει νὰ πληρώση γιὰ νὰ ἀγοράση 4 τετράδια ;**

Ἐδῶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε **μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον.** Τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε νά πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, ὅπως μάθαμε.

Λύσι : $5\frac{1}{4}\times4=\frac{21}{4}\times4=\frac{21\times4}{4}=\frac{84}{4}=21$ δραχμές.

Ἀπάντησι : Ὁ μαθητὴς αὐτὸς θὰ πληρώση 21 δραχμές.

Πρόβλημα. **"Ενα κιλὸ ρύζι κοστίζει $8\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσο κοστίζουν τὰ 5 κιλά ;**

Ἐργασίες : α) Τί μᾶς δίδετε καὶ τὶ ζητοῦμε ἐδῶ ; β) Μὲ τί ἀριθμοὺς ἔχομε νὰ κάνωμε τὴν πρᾶξι μας ; γ) Βγάλτε τὸν κανόνα μόνοι σας ἀπὸ τὴ λύσι τοῦ παραπάνω παραδείγματος καὶ λύσετε το στὸ τετράδιό σας.

> **Κανόνας. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο.**

Προβλήματα

313) Μία γυναῖκα ἐπώλησε 12 αὐγὰ πρὸς $\frac{9}{10}$ δρχ. τὸ 1. Πόσα χρήματα ἐπῆρε ;

314) "Ενας γιαουρτὰς πωλεῖ κάθε ἡμέρα 25 κεσεδάκια πρὸ $3\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ ἕνα. Πόσες δραχ. εἰσπράττει τὴν ἡμέρα ;

Ἀσκήσεις

Προφορικά. 315) Πολλαπλασιάσετε τὰ παρακάτω :

α) $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ $\times 5$ β) $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρ. $\times 8$ γ) $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρ. $\times 10$

δ) $\frac{7}{10}$ τῆς δρχ $\times 6$ γ) $\frac{3}{8}$ τῆς ὥρας $\times 4$ ε) $\frac{4}{12}$ τοῦ χρόνου $\times 12$

Γραπτά. 316) Κάμετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{8}{9}\times 15=$ β) $7\frac{7}{9}\times 9=$ γ) $19\frac{5}{9}\times 100=$ δ) $4\frac{4}{7}\times 14=$

ε) $28\frac{3}{4}\times 20=$ στ) $85\frac{3}{4}\times 40=$ ζ) $3\frac{3}{5}\times 10=$ η) $150\frac{1}{2}\times =$

317) Ἕνα μπουκάλι ΕΒΓΑ, περιέχει $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ γάλα. Πόσο γάλα περιέχουν τὰ 108 μπουκάλια ; Καὶ πόσες δραχ. στοιχίζουν ἂν τὸ κιλὸ πωλῆται πρὸς $3\frac{2}{5}$ δραχ. ;

318) Θέλομε νὰ κάνωμε 4 πουκάμισα, ποὺ γιὰ τὸ καθένα χρειαζόμαστε $2\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσα μέτρα θ' ἀγοράσωμε ;

319) Πόσο θὰ στοιχίσῃ ἕνα πουκάμισο ἀπὸ τὰ παραπάνω, ὅταν τὸ μέτρο στοιχίζῃ $115\frac{2}{5}$ δρχ. καὶ πληρώσαμε καὶ γιὰ ραφτικὰ 30 δραχμὲς στὸ καθένα ;

Μάθημα 34.—Περίπτωσις Β', (ὁ πολλαπλασιαστὴς κλάσμα)

1) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα

Παράδειγμα. Τὸ μέτρο μιᾶς κορδέλλας στοιχίζει 7 δραχμές. Πόσο θὰ πληρώσῃ ἕνα κορίτσι γιὰ $\frac{6}{10}$ μέτρου ποὺ θέλει νὰ βάλῃ στὸ φόρεμά του;

Σκέψι :

1 μέτρο κοστίζει 7 δραχμὲς

$\frac{6}{10}$ » » Χ ; »

Λύσι :

$$7\times\frac{6}{10}=\frac{7\times 6}{10}=\frac{42}{10}=4\frac{2}{10}=4\frac{1}{5} \text{ δραχ.}$$

Ἀπάντησι : Τὰ $\frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου κορδέλλα ἀξίζουν $4\frac{1}{5}$ δραχμές.

Ἐργασίες : α) Τί μᾶς δίδεται καὶ τί ζητεῖται στὸ πρόβλημα αὐτό ; β) Τί πρᾶξι κάναμε καὶ γιατί ;

Ξέρετε ὅτι : **Πολλαπλασιασμὸ κάνομε ὅταν μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων. Ἀλλὰ τώρα μαθαίνομε, ὅτι πολλαπλασιασμὸ κάνομε καὶ ὅταν ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴ τιμὴ τοῦ μέρους τῆς ἀκεραίας μονάδος.**

Κ α ν ό ν α ς. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενο γράφομε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ τὸν ἴδιο.

Σημείωσι.—Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιο ἐπὶ μικτό, ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται ἔτσι :

Παράδειγμα. **Τὸ μέτρο μιᾶς κορδέλλας ἔχει 7 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $5\frac{3}{5}$ μέτρα ;**

Λύσι : $7 \times 5\frac{3}{5} = 7 \times \frac{28}{5} = \frac{7 \times 28}{5} = \frac{196}{5} = 39\frac{1}{5}$ δραχ.

Ἀπάντησι : Τὰ $5\frac{3}{5}$ μέτρα ἀξίζουν $39\frac{1}{5}$ δραχ.

Κ α ν ό ν α ς. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιον ἐπὶ μικτὸν ἀριθμόν, τρέπομε τὸ μικτὸν σὲ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον.

Προβλήματα

Προφορικά. 320) Πόσοι μῆνες εἶναι τὰ 5 ἔτη, τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὰ $\frac{5}{6}$, τὰ $\frac{7}{12}$ τοῦ ἔτους ;

321) Πόσες ἡμέρες, εἶναι οἱ 3, οἱ 6 μῆνες καὶ πόσες τό : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ μηνός ;

322) Πόσες ὧρες εἶναι οἱ 4 καὶ οἱ 5 ἡμέρες καὶ πόσες τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{8}$ τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ τὰ $\frac{15}{24}$ τῆς ἡμέρας ;

323) **Γραπτά.** Τὸ ἕνα κιλὸ τυριοῦ ἀξίζει 18 δρχ. Πόσο ἀξίζουν τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{2}$, τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ ;

324) Κάμετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς.

α) $8 \times \frac{5}{8} =$ β) $15 \times \frac{6}{10} =$ γ) $5 \times \frac{5}{12} =$ δ) $10 \times \frac{3}{4} =$

ε) $5 \times 10\frac{1}{2} =$ στ) $18 \times 6\frac{5}{6} =$ ζ) $45 \times 30\frac{2}{3} =$

325) Μία γυναῖκα ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ λάδι, ποὺ τὸ κιλὸ ἄξιζε 18 δραχμές. Πόσα ἐπλήρωσε ;

326) Ἕνα κιλὸ βούτυρο κοστίζει 49 δραχ. Πόσο κοστίζουν τὰ $5\frac{3}{4}$ κ.

327) Γιὰ μία ἐνδυμασία χρειάζονται $2\frac{3}{4}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσο θὰ κοστίση τὸ ὕφασμα τῆς ἐνδυμασίας, ὅταν τὸ μέτρο κοστίζη 150 δραχμές ;

328) Ὁ ἦχος τρέχει μέσα στὸ νερὸ 1435 μέτρα στὸ 1 δευτερόλεπτο. Πόσα μέτρα θὰ τρέξη στὰ $5\frac{1}{2}$ δευτερόλεπτα ;

Μάθημα 35ο.—Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα

Παράδειγμα.—**Μία γυναῖκα ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ρύζι. Πόσο θὰ πληρώση, ὅταν τὸ ἕνα κιλὸ ἔχη $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκάρικου ;**

$$\left(\frac{8}{10} \times \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{8 \times 3}{10 \times 4}\right) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} \text{ δεκάρικου}$$

Ἂν προσέξωμε αὐτὸ ποὺ βρήκαμε, θὰ δοῦμε ὅτι εἶναι τὸ ἴδιο ἂν πολλαπλασιάζαμε τοὺς ἀριθμητὰς τῶν δύο κλασμάτων χωριστὰ καὶ τοὺς παρονομαστὰς ἐπίσης.

Κατάστρωσι : Τὸ 1 κιλὸ ἀξίζει $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκάρ., $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλ., πόσο ἀξίζουν ;

Σκέψι : Ἀφοῦ τὰ $\frac{4}{4}$ =(1 κιλὸ) ἀξίζουν $\frac{8}{10}$ δεκάρ. τὸ $\frac{1}{4}$ κιλ. ποὺ εἶναι 4 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{4}{4}$, ἀξίζει 4 φορὲς λιγώτερο, δηλ. $\frac{8}{10} : 4$ ἢ $\frac{8}{10 \times 4}$ (Γιατί;)

Καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ (κιλ). ποὺ εἶναι 3 φορὲς μεγαλύτερα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ κιλ. θὰ ἀξίζουν 3 φορὲς περισσότερο, δηλ. $\frac{8 \times 3}{10 \times 4} = \frac{24}{40}$ τοῦ δεκάρικου.

Ἁπλοποιοῦμε τὸ $\frac{24}{40}$ μὲ τὸ 8 καὶ βρίσκομε $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκάρικου.

Ἐργασίες: α) Τί μᾶς δίδονταν καὶ τί ζητούσαμε νὰ βροῦμε στὸ πρόβλημα αὐτό; β) Τί ἀριθμούς εἴχαμε στὴν πρᾶξι; γ) Πῶς κάναμε τὸν πολλαπλασιασμό; δ) Βγάλετε μόνοι σας τὸν κανόνα.

Κανόνας. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴ ἐπὶ ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἐπὶ παρονομαστή. Τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν, γράφομε ὡς ἀριθμητή, καὶ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστή.

Προβλήματα καὶ Ἀσκήσεις

329) Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάδρ. Πόσο κοστίζει τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου;

330) Ἕνα κιλὸ φασόλια κοστίζει $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκάρικου. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

331) Νὰ κάμετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς:

α) $\frac{3}{4} \times \frac{7}{8} =$, β) $\frac{4}{5} \times \frac{3}{10} =$, γ) $\frac{21}{25} \times \frac{20}{30} =$, δ) $\frac{25}{40} \times \frac{5}{6} =$,

ε) $\frac{7}{8} \times \frac{12}{15} =$, ζ) $\frac{25}{30} \times \frac{75}{100} =$, η) $\frac{16}{30} \times \frac{12}{20} =$, θ) $\frac{7}{12} \times \frac{12}{15} =$.

332) Τὸ μέτρο τοῦ κάμποτ κοστίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου;

333) Ἕνας ταχυδρόμος περνάει σὲ μιὰ ὥρα τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἀποστάσεως.

Πόσο θὰ περάση σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

Κάμετε καὶ σεῖς 3 προβλήματα δικά σας.

Μάθημα 36ο.—Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν ἀριθμῶν

Παράδειγμα.—**Τὸ μέτρο τῆς δαντέλλας πωλεῖται $4\frac{4}{5}$ δραχ. Πόσες δραχμὲς στοιχίζουν τὰ $5\frac{4}{5}$ μέτρα ;**

Κατάταξι :

Τὸ 1 μέτρ ἀξίζει $4\frac{4}{5}$ δραχ

τὰ $5\frac{3}{4}$ » » $\times$; »

Λύσι :

$$4\frac{4}{5}\times5\frac{3}{4}=\frac{24}{5}\times\frac{23}{4}=\frac{552}{20}=27\frac{12}{20} \text{ ἢ } 27\frac{6}{10} \text{ δραχ.}$$

Ἀπάντησι : Τὰ $5\frac{3}{4}$ μέτρα στοιχίζουν $27\frac{6}{10}$ δραχ.

Ἐργασίες ; α) Τί πρᾶξι κάναμε ; β) Τί ἀριθμοὺς ἔχομε ; γ) Βγάλετε τὸν κανόνα πῶς πολλαπλασιάζομε μικτοὺς ἀριθμούς.

Προβλήματα

334) Ὁ ἦχος στὸν ἀέρα τρέχει 340 μέτρα στὸ δευτερόλεπτο. Πόσα μέτρα θὰ τρέξη σὲ $5\frac{3}{4}$ δευτερόλεπτα ;

335) Ἕνα χωράφι ποὺ εἶναι 35 στρέμματα, ἐσπάρθηκε μὲ σιτάρι. Τὸ κάθε στρέμμα πῆρε $12\frac{1}{2}$ κιλὰ σπόρο. Πόσος σπόρος χρειάστηκε γιὰ τὸ χωράφι αὐτό ;

336) Ὅταν θερίστηκε τὸ χωράφι αὐτό, τὸ κάθε στρέμμα ἔδωσε $100\frac{3}{4}$ κιλὰ σιτάρι. Πόσα κιλὰ σιτάρι ἐπῆρε ὁ γεωργός ;

337) Τὸ τραῖνο ἀπὸ Θεσσαλονίκη μέχρι Σέρρας ἔκαμ $5\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας

χωρὶς σταθμό. Ἂν ἔτρεχε μὲ $30\frac{1}{2}$ χιλιόμ. τὴν ὥρα, πόση εἶναι ἡ ἀπόστασι μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ;

338) Ἕνας ταχυδρόμος διανύει $5\frac{3}{4}$ χιλιόμ. τὴν ὥρα. Πόσα θὰ διανύση σὲ $3\frac{4}{5}$ ὥρες ;

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

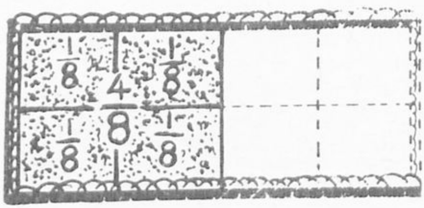
Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε	Κανόνες
1ον) Κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον	Ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, τὸ γινόμενον τὸ γράφομε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ γράφομε τὸν ἴδιο.
2ον) Μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον	Ἕνας μικτὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον ἂν τὸν τρέψωμε εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάσωμεν.
3ον) Ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα	Ἕνας ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον γράψομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴ δὲ γράψομε τὸν ἴδιον.
4ον) Κλάσμα ἐπὶ κλάσμα	Ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν. Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ἀριθμητήν, καὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν γράφομεν παρονομαστήν.
5ον) Μικτοὺς ἀριθμοὺς	Μικτοὺς ἀριθμοὺς παλλαπλασιάζομε ἂν τρέψωμε τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ πολλαπλασιάσομεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα.
Πρόσεξε :	Στὸν πολλαπλασιασμό, τοὺς μικτοὺς τρέπομε πάντοτε σὲ κλάσματα.

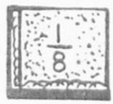
Δ΄. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Μάθημα 37.—Περίπτωσι Αη (Ὁ διαιρέτης ἀκέραιος).

1. Διαίρεσι κλάσματος δι' ἀκεραίου.

Παράδειγμα 1ο.—4 μαθηταὶ μοιράστηκαν τὰ $\frac{4}{8}$ τοῦ σχολικοῦ των κήπου γιὰ νὰ τὸν καλλιεργήσουν. Τί μέρος τοῦ κήπου ἐπῆρε ὁ κάθε μαθητής;



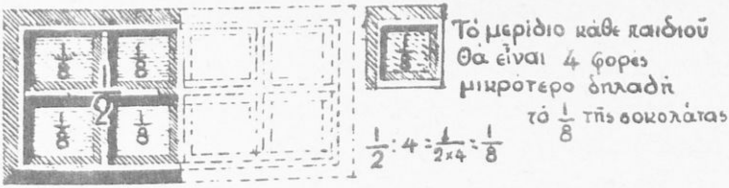


Τὸ μερίδιο τοῦ ἑνὸς παιδιοῦ

Ἐδῶ θὰ κάνωμε τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$, τέσσαρες φορὲς μικρότερο γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μερίδιο τοῦ ἑνὸς παιδιοῦ. Διαιροῦμε τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ διὰ τοῦ 4. $\left(\frac{4}{8} : 4 = \frac{1}{8}\right)$. Ὥστε τὸ μερίδιο τοῦ κάθε παιδιοῦ εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ κήπου.

Τὸ ἴδιο ὅμως συμβαίνει, ἄν, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή, πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ ἐπὶ τὸ 4. $\left(\frac{4}{8 \times 4} = \frac{4}{32} \text{ ἢ } \frac{1}{8}\right)$. Τὸ $\frac{4}{32}$ ἁπλοποιήθηκε μὲ τὸ 4.

Παράδειγμα 2ο. — ***Θέλομε νὰ μοιράσωμε $\frac{1}{2}$ μιᾶς σοκολάτας σὲ 4 παιδιά. Τί μέρος τῆς σοκολάτας θὰ πάρῃ τὸ κάθε παιδί;***



Λύσι : $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$. Τὸ κάθε παιδὶ θὰ πάρη $\frac{1}{8}$ τῆς σοκολ.

Ἐργασίες : α) Τί μᾶς δίδεται καὶ τί ζητεῖται στὸ πρόβλημα αὐτό ; β) Σὲ ποιὰ ἰδιότητα στηρίζεται ἡ ἐλάττωσι τῆς ἀξίας ἑνὸς κλάσματος ; γ) Γιατὶ κάνομε διαίρεσι ; δ) Πῶς κάναμε τὴν πρᾶξι ; ε) Λύσετε τώρα καὶ σεῖς ἕνα παρόμοιο πρόβλημα δικό σας. στ) Κοιτάξετε στὴ σελ. 41, πότε διαιρεῖται ἡ ἀξία κλάσματος.

Κανόνας. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου ἢ διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιο.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Προφορικά : 339) α) νὰ μοιράσετε $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ σῦκα σὲ 3 παιδιά, β) $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου κορδέλλα σὲ 2 κορίτσια, γ) $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατοστάρικου σὲ 5 παιδιά, δ) $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ καφὲ σὲ 3 οἰκογένειες, ε) $\frac{1}{2}$ τοῦ εἰκοσάρικου σὲ 5 παιδιά.

Γραπτά : 340) Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω διαιρέσεις :

α) $\frac{12}{14} : 6 =$, $\frac{18}{21} : 3 =$, $\frac{28}{38} : 7 =$, $\frac{32}{35} : 4 =$,

β) $\frac{13}{15} : 5 =$, $\frac{3}{4} : 5 =$, $\frac{12}{4} : 9 =$ $\frac{3}{8} : 10 =$,

341) Στὸ ἐστιατόριο πληρώσαμε γιὰ 5 μῆλα $\frac{1}{2}$ τοῦ εἰκοσάρικου· Πόσο ἄξιζε τὸ ἕνα μῆλο ;

342) 7 ἐργάτες ἔσκαψαν μαζὶ τὰ $\frac{7}{8}$ ἑνὸς κήπου σὲ μία μέρα. Πόσο μέρος τοῦ κήπου ἔσκαψε ὁ κάθε ἐργάτης ;

343) Τὰ 4 ἄτομα μιᾶς οἰκογενείας πῆραν $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιάρικου. Πόσα ἀνὰ λογοῦν στὸ κάθε ἄτομο ;

344) Μὲ 5 δραχμὲς ἀγοράζομε $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου κορδέλλα. Μὲ 1 δραχμὴ πόση κορδέλλα ἀγοράζομε ;

Μάθημα 38ο.—Διαίρεσι μικτοῦ δι' ἀκεραίου.

Παράδειγμα : ***Ἕνα παιδὶ εἶχε $4\frac{4}{5}$ δραχ. Τὴν Κυριακὴ τὰ μοίρασε σὲ 4 φτωχούς. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε στὸν καθένα ;***

Θὰ γίνη διαίρεσι τοῦ $4\frac{4}{5}$ δραχμὲς διὰ 4.

Κατάταξι	Λύσι
4 φτωχοὶ παίρνουν $4\frac{4}{5}$ δρχ.	**$4\frac{4}{5} : 4$ α) $4 : 4 = 1$**
1 φτωχὸς παίρνει X ; »	**β) $\frac{4}{5} : 4 = \frac{1}{5}$ γ) $1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$ δραχ.**

Ἀπάντησι : Ὁ ἕνας φτωχὸς ἐπῆρε $1\frac{1}{5}$ δραχμές.

Σημείωσι : Ἡ διαίρεσι ἔγινε χωριστὰ γιὰ τὸν ἀκέραιο καὶ χωριστὰ γιὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ. Πιὸ καλὰ ὅμως εἶναι νὰ κάνωμε τὸν μικτὸ κλάσμα καὶ νὰ διαιροῦμε ἔτσι : $4\frac{4}{5} : 4 = \frac{24}{5} : 4 = \frac{24 : 4}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ δραχ. ὁπότε βρίσκομε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Ἐργασίες : α) Τί μᾶς δίδεται καὶ τί ζητεῖται στὸ πρόβλημα ; β) Τί ἀριθμοὺς εἴχαμε ; γ) Πῶς ἔγινε ἡ λύσι ; δ) Ἀπαντήσετε στὰ παραπάνω καὶ βγάλετε τὸν κανόνα μόνοι σας. ε) Λύσετε τώρα ἕνα δικό σας παρόμοιο πρόβλημα.

Κ α ν ό ν α ς. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε μικτὸν δι' ἀκεραίου, τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ διαιροῦμε κλάσμα δι' ἀκεραίου ἢ διαιροῦμε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομε τὰ δύο μερικὰ πηλίκα.

Προβλήματα

345) α) Μοιράσετε $4\frac{4}{10}$ μέτρα ὑφάσμ. σὲ 4 κορίτσια β) $5\frac{1}{2}$ κιλὸ βούτυρο σὲ 5 οἰκογένειες. γ) $6\frac{6}{10}$ μέτρ. κόντρα πλακὲ σὲ 6 παιδιά.

346) Πόση ὥρα ἀναλογεῖ σὲ κάθε μάθημα ἂν 5 μαθήματα γίνονται σὲ $4\frac{1}{2}$ ὧρες ;

347) α) $5\frac{1}{3} : 2 =$ β) $6\frac{3}{4} : 5 =$ γ) $12\frac{8}{9} : 4 =$ δ) $5\frac{2}{6} : 4 =$

348) α) $24\frac{8}{9} : 8 =$ β) $18\frac{2}{3} : 7 =$ γ) $15\frac{3}{5} : 9 =$ δ) $10\frac{4}{5} : 6 =$

349) 4 κιλὰ πατάτες κοστίζουν $8\frac{4}{5}$ δραχ. Πόσο κοστίζει τὸ ἕνα κιλό ;

350) 12 μέτρα κορδέλλα κοστίζουν $52\frac{4}{5}$ δραχ. Πόσο κοστίζει τὸ 1 μέτρο ;

351) 7 ἄτομα μοιράστηκαν $59\frac{1}{2}$ κιλὰ ἀλεύρι. Πόσο ἀλεύρι ἐπῆρε τὸ κάθε ἄτομο ;

352) 25 πρόβατα ὅταν τὰ κούρεψαν ἔδωσαν $68\frac{3}{4}$ κιλὰ μαλλιά. Πόσα κιλὰ μαλλιὰ ἔδωσε τὸ ἕνα πρόβατο ;

353) Γιὰ τὸ συσσίτιο 42 παιδιῶν μαζεύτηκαν $260\frac{2}{5}$ δραχ. Πόσες δρχ. ἀναλογοῦν στὸ ἕνα παιδί ;

Μάθημα 39ο.—Περίπτωσι Β΄. (ὁ Διαιρέτης κλάσμα).

1. Διαίρεσι ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

Παράδειγμα 1ο.—Μὲ 6 δρχ. ἀγοράζομε $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα. Πόσο κοστίζει τὸ 1 μέτρο ;

Ἂν ἀγοράζαμε 3 μέτρα μὲ 6 δρχ. γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ἀγοράσαμε τὸ 1 μέτρο θὰ κάναμε διαίρεσι 6 δρχ. διὰ 3 μέτρ. (6 : 3=2 δρ.).

Στὸ πρόβλημά μας ὅμως ὁ διαιρέτης δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀλλὰ κλάσμα. Ἂς λύσωμε τὸ πρόβλημα.

Κατάταξι :

Τὰ $\frac{3}{4}$ μέτρ ἀξίζουν 6 δρχ.
ὁ 1 » » Χ ; »

Λύσι : Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ μέτρου ἀξίζουν 6 δρχ., τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρ. θὰ ἀξίζη 3 φορὲς λιγώτερο, δηλαδὴ $\frac{6}{3}$ δρ.

Τώρα τὸ 1 μέτρο, ποὺ εἶναι $\frac{4}{4}$, θὰ ἀξίζη 4 φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ μέτρο δηλαδὴ $\frac{6}{3} \times 4$. Ὥστε ἡ διαίρεσι 6 δρχ. : $\frac{3}{4}$ μέτρου ἔγινε $\frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$ δρχ.

Ἐργασίες : α) Τί ζητεῖται στὸ πρόβλημα ; β) Πῶς ἔγινε ἡ λύσι ; γ) Πῶς διαιροῦμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος ; δ) Λύσετε τὸ πρόβλημα :

Μὲ $\frac{2}{5}$ μέτρ. ὕφασμα, κάνομε ἕνα μαντήλι. Πόσα μαντήλια θὰ κάνωμε μὲ 8 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ;

Κανόνας Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.

354) Τὰ $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ πιπέρι ἀξίζουν 54 δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

355) Τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὸ Βόλο εἶναι 216 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχει ὁ Βόλος ἀπὸ τὴν Ἀθήνα:

356) α) $12 : \frac{1}{2}$, β) $8 : \frac{4}{5}$, γ) $5 : \frac{2}{7}$, δ) $63 : \frac{3}{5}$, ε) $25) : \frac{4}{10}$

357) α) $6 : \frac{3}{5}$, β) $8 : \frac{4}{5}$, γ) $5 : \frac{2}{7}$, δ) $63 : \frac{3}{5}$, ε) $25 : \frac{4}{10}$

358) α) $675 : \frac{25}{30}$, β) $180 : \frac{5}{8}$, γ) $400 : \frac{1}{2}$, δ) $500 : \frac{6}{7}$, ε) $300 : \frac{50}{75}$

359) Ἕνα κορίτσι θέλει $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου κορδέλλα γιὰ τὰ μαλλιά του. Γιὰ πόσα κορίτσια θὰ φθάσουν 15 μέτρα κορδέλλα;

360) Σὲ $\frac{5}{10}$ τῆς ὥρας ἕνας ἀγωγιάτης περπάτησε 3 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ περπατήση σὲ μιὰ ὥρα;

361) Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς χωραφιοῦ ἔβγαλαν 2700 κιλὰ πατάτες. Πόσα κιλὰ πατάτες ἔβγαλε ὅλο τὸ χωράφι;

362) Κάμετε καὶ σεῖς 3 δικά σας προβλήματα ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

Μάθημα 40ο.—Διαίρεσι κλάσματος διά κλάσματος.

Παράδειγμα. — ***Μὲ $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκάρικου ἀγοράζομε $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου λάστιχο. Πόσο ἀξίζει τὸ 1 μέτρο;***

Κατάταξι: Τὰ $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκάρικου.

Τὸ 1 μέτρο ἢ $\left(\frac{10}{10}\right)$ » » » Χ; » »

Διαιρετέος εἶναι ὁ ὁμοειδὴς πρὸς τὸν ζητούμενον δηλ. ὁ $\frac{3}{5}$ δεκάρ.

Σκέψι

$\frac{5}{10}$ μέτρ. ἀξίζουν $\frac{3}{5}$ δεκάρ.

1 μέτ. $\left(\frac{10}{10}\right)$ » » Χ; »

Λύσι

$\frac{5}{10}$ μέτρ. ἀξίζουν $= \frac{3}{5}$ δεκάρ.

$\frac{1}{10}$ » » $= \frac{3}{5} : 5 = \frac{3}{5 \times 5}$

$\frac{10}{10}$ ἢ 1 μέτρ. $= \frac{3}{5 \times 5} \times 10 = \frac{3 \times 10}{5 \times 5} = \frac{30}{25} =$

$1\frac{5}{25} = 1\frac{1}{5}$ δεκάρ.

Παρατήρησι: Ὁ διαιρετέος $\frac{3}{5}$ πολλαπλασιάζεται μὲ τὸ $\frac{5}{10}$ ποὺ εἶναι ὁ διαιρέτης ἀντεστραμμένος δηλ. $\frac{3}{5} : \frac{5}{10} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{5} = \frac{30}{25}$ $1\frac{1}{5}$ δεκάρ.

Ἐργασίες: α) Τί μᾶς δόθηκε καὶ τί ἐζητεῖτο στὸ πρόβλημα; Τί ἀριθμοὺς εἴχαμε καὶ πῶς τοὺς διαιρέσαμε; γ) Λύσετε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο τὸ παρακάτω πρόβλημα καὶ βγάλετε τὸν κανόνα.

Πρόβλημα. **Μὲ $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκάρικου ἀγοράζομε $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ τυρί. Πόσο κοστίζει τὸ 1 κιλό;**

Κανόνας: Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

363) Μὲ $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκάρ. ἀγοράζομε $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ κρέας. Πόσο κοστίζει τὸ κιλό;

364) α) $\frac{12}{15} : \frac{3}{4}$ β) $\frac{3}{10} : \frac{2}{5}$ γ) $\frac{7}{12} : \frac{9}{16}$ δ) $\frac{3}{5} : \frac{1}{10}$ ε) $\frac{12}{25} : \frac{4}{15}$

365) Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου δαντέλλας ἀξίζουν $\frac{12}{10}$ δρχ. Πόσο κοστίζει τὸ ἕνα μέτρο;

366) Τὰ $\frac{4}{5}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἶναι $\frac{9}{10}$ χιλιόμ. Πόσα χιλιόμ. εἶναι ὅλη ἡ ἀπόστασι;

367) Ἕνας ἐργάτης σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡμέρας σκάβει τὸ $\frac{1}{8}$ ἑνὸς κήπου. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψη ὅλο τὸν κῆπο;

Κάνετε καὶ σεῖς 3 προβλήματα ὅμοια.

Μάθημα 41.—Διαίρεσι μικτῶν ἀριθμῶν

α) Ἀκέραιος διὰ μικτοῦ.

Παράδειγμα.—Τὰ $7\frac{1}{2}$ κιλὰ μῆλα κοστίζουν 60 δρ. Πόσα κοστίζει τὸ κιλό;

Νὰ τρέψετε τὸν μικτὸ διαιρέτη σὲ κλάσμα καὶ νὰ συνεχίσετε τὴ διαίρεσι ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

β) Μικτὸς διὰ μικτοῦ.

Παράδειγμα.— $13\frac{1}{2}$ κιλὰ φασόλια κοστίζουν $116\frac{1}{10}$ δραχμές. Πόσο στοιχίζει τὸ 1 κιλό;

Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε μικτὸν διὰ μικτοῦ. Νὰ τρέψετε τοὺ μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ νὰ συνεχίσετε τὴ διαίρεσι.

Ἐργασίες: α) Πῶς κάμετε τὶς πράξεις; β) Βγάλετε συμπεράσματα καὶ γιὰ τὶς δύο περιπτώσεις. γ) Λύσετε τὸ παρακάτω πρόβλημα:

Μὲ $254\frac{1}{5}$ δραχμὲς πόσα μέτρα πανὶ ἀγοράζομε, ὅταν τὸ 1 μέτρο κοστίζη $12\frac{2}{5}$ δραχμές;

Κανόνας. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς, τρέπομε αὐτοὺς σὲ κλάσματα καὶ διαιροῦμε κλάσμα διὰ κλάσματος.

Προβλήματα — Ἀσκήσεις

368) Ἕνας ἐργάτης κέρδισε μὲ τὴν ἐργασία του $191\frac{1}{4}$ δραχ. τὶς ὁποῖες ἔδωσε καὶ ἀγόρασε $12\frac{3}{4}$ κιλὰ λάδι. Πόσο ἀξίζει τὸ ἕνα κιλό;

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

Συμπέρασμα 1ο. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ μέρους αὐτῆς καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ὁμοειδοῦς), κάνομε διαίρεσι ΜΕΡΙΣΜΟΥ

Συμπέρασμα 2ο. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, κάνομε διαίρεσι ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε	Συμπέρασμα
1) Κλάσμα δι' ἀκεραίου	Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται δι' ἀκεραίου ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου ἢ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.
2) Μικτὸν δι' ἀκεραίου	Ἕνας μικτὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου ἂν τρέψωμε τὸν μικτὸν σὲ κλάσμα καὶ διαιρέσωμε.
3) Ἀκέραιον διὰ κλάσματος	Ἕνας ἀκέραιος διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἂν ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.
4) Κλάσμα διὰ κλάσματος	Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἂν ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.
5) Μικτὸν διὰ μικτοῦ	Μικτὸν διὰ μικτοῦ διαιροῦμε, ἂν τρέψωμε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος.
Πρόσεξε:	Στὴ διαίρεσι κλασμάτων ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα πάντοτε ἀντιστρέφεται καὶ γίνεται πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων. Τοὺς μικτοὺς πάντοτε τοὺς κάνομε κλάσματα.

369) Μία γυναίκα ἀγόρασε γιὰ τὸ φόρεμά της $3\frac{3}{4}$ μέτρα ὕφασμα καὶ πλήρωσε 162 δρχ. Πόσον ἀξίζει τὸ 1 μέτρο τοῦ ὑφάσματος;

370) α) 80 : $5\frac{5}{8}$, β) 220 : $7\frac{3}{5}$, γ) 475 : $9\frac{7}{8}$, δ) 120 : $4\frac{2}{6}$.

371) α) $120\frac{1}{2} : 8\frac{2}{3}$, β) $7\frac{3}{5} : 3\frac{1}{4}$, γ) $25\frac{2}{3} : 3\frac{1}{3}$, δ) $45\frac{2}{8} : 3\frac{1}{4}$

372) Ἕνα ἀτμόπλοιο διέτρεξε μία ἀπόστασι $55\frac{1}{4}$ μίλια, σὲ $4\frac{1}{4}$ ὧρες. Πόσα μίλια ἔτρεχε τὴν ὥρα;

373) Μία βρύσι τρέχει σὲ μία δεξαμενὴ $28\frac{4}{5}$ κιλ. νερὸ σὲ κάθε λεπτὸ τῆς ὥρας. Σὲ πόσα λεπτὰ θὰ τρέξῃ 288 κιλὰ νερό;

Μάθημα 42ο.—Ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

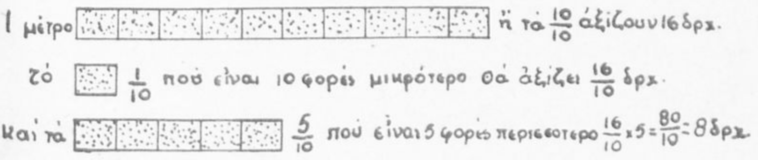
*Παράδειγμα 1ο.—**Τὰ 12 κιλὰ πατάτες κοστίζουν 36 δραχ. Πόσο κοστίζουν τὰ 35 κιλά;***

Λύσι: Τὰ 12 κιλὰ κοστίζουν 36 δρχ.

Τὸ 1 κιλὸ κοστίζει (12 φορὲς λιγώτερο) $= \frac{36}{12}$ δρχ.

Καὶ τὰ 35 κιλὰ κοστίζουν (35 φορὲς περισσότερα) $= \frac{36 \times 35}{12} = \frac{1260}{12}$ 105 δρχ.

*Παράδειγμα 2.—**Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει 16 δρχ. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου;***



Ἀπάντησι: Τὰ $\frac{5}{10}$ μέτρα κοστίζουν 8 δρχ.

Ὁ τρόπος αὐτός, μὲ τὸν ὁποῖο βρίσκομε πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἔπειτα τὴν ζητουμένην τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ μέρους αὐτῆς, λέγεται ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΑ.

Προβλήματα

374) Τὸ ἕνα κιλὸ ζάχαρι κοστίζει 8 δρχ. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ ;

375) Τὸ 1 μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος, κοστίζει 32 δρχ. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρ.; Καὶ πόσο τὰ $6\frac{1}{4}$ μέτρα ;

376) Ἕνα κιλὸ γάλα κοστίζει 4 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ κιλ.

377) Ἕνας πατέρας, ὅταν πέθανε ἄφησε περιουσία 4000 δρχ., ποὺ μοιράστηκε ἔτσι : Ἡ σύζυγός του πῆρε τὰ $\frac{5}{8}$ καὶ ἡ θυγατέρα τὴν ὑπόλοιπο περιουσία. Πόσα ἐπῆρε ἡ θυγατέρα ;

378) Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ ; Πόσα τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ ;

379) Πόσα κιλὰ εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ τόννου ; (1 τόννος=1000 κιλά ;

380) Πόσες ἡμέρες εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ χρόνου ; (1 χρόνος=360 ἡμ.).

381) Πόσες ὧρες εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡμέρας ; (1 ἡμέρα=24 ὧρες).

*Παράδειγμα 3.—**Τὸ μέτρο μιᾶς δαντέλλας κοστίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικ. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ;***

Λύσι : Τὸ 1 μέτρο ἢ $\frac{4}{4}$ μέτρο κοστίζει $\frac{4}{5}$ δεκάρικου

τὸ $\frac{1}{4}$ » » $\left(\frac{4}{5} : 4\right)$ ἢ $\frac{4}{5 \times 4}$

τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου κοστίζουν $\frac{4}{5 \times 4} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5 \times 4} = \frac{12}{20}$ ἢ $\frac{6}{10}$ δεκάρ.

Ἀπάντησι : Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρ. κοστίζουν $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκάρικ.(6 δρχ.).

382) Ἕνα κιλὸ ἐλιὲς κοστίζει $\frac{8}{10}$ δεκάρ. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{3}{4}$κιλοῦ;

383) Γιὰ νὰ διατρέξη ἕνας ταχυδρόμος μία ἀπόστασι θέλει $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας. Σὲ πόση ὥρα θὰ περάση τὰ $\frac{10}{15}$ τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς;

384) Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει $\frac{2}{5}$ τῆς λίρας. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου;

Μάθημα 43.—Ὅταν ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Παράδειγμα.—***Μὲ 75 δραχμὲς ἀγοράζω $\frac{3}{5}$τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσο ἀξίζει τό 1 μέτρο;***

Γνωστὰ=ἡ τιμὴ **μέρους** τῆς ἀκεραίας μονάδας.

Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς **μιᾶς**(δηλ. ὁλοκλήρου τῆς ἀκεραίας μονάδος).

Λύσι : Τὰ $\frac{3}{5}$ μέτρου ἀξίζουν 75 δρχ.

Τὸ $\frac{1}{5}$ μέτρα ἀξίζει 3 φορὲς λιγώτερο δηλ. $\frac{75}{3}$ δραχμ.

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ μέτρα (1 μέτρο ἀξίζει 5 φορὲς περισσότερο δηλ. $\frac{75 \times 5}{3} = \frac{375}{3} = 125$ **δρχμ.**

Ἀπάντησι: Τὸ 1 μέτρο κοστίζει 125 δρχ.

Προβλήματα.

Νὰ λυθοῦν μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

385) Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μισθοῦ ἑνὸς ὑπαλλήλου εἶναι 1720 δρχ. Πόσος εἶναι ὅλος ὁ μισθός του;

386) Τὰ $\frac{5}{6}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἶναι 240 χιλ.. Πόση εἶναι ὅλη ἡ ἀπόστασι;

387) Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς χωραφιοῦ ἔδωσαν 8.400 κιλὰ σιτάρι. Πόσο σιτάρι ἔδωσε ὅλο τὸ χωράφι;

388) Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ λάδι κοστίζουν 12 δρχ. Πόσο κοστίζει τὸ κιλό; Καὶ πόσο τὰ $6\frac{3}{5}$ κιλά;

389) Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζουν 40 δρχ. Πόσο κοστίζει τὸ μέτρο τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;

390) Ἕνα παιδὶ ἀγόρασε $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου κόλλα γλασσὲ καὶ ἔδωσε $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσο κοστίζει ὅλο τὸ μέτρο;

391) Ἕνας ἐργάτης ἔσκαψε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ σχολικοῦ κήπου καὶ ἔκανε $\frac{3}{4}$ τῆς ἡμέρας. (Ἐργ. ἡμ. 12 ὡρ.). Πόσο θὰ κάμη γιὰ νὰ σκάψη ὅλο τὸ κῆπο;

392) Ἕνας μαθητὴς ἀντιγράφει τὰ $\frac{3}{5}$ μιᾶς σελίδος τοῦ βιβλίου του σὲ $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας. Σὲ πόση ὥρα θὰ ἀντιγράψη τὴν σελίδα;

393) Τὰ $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρ. ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζουν $\frac{3}{4}$ τοῦ δεκάρικου. Πόσο κοστίζει τὸ μέτρο τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;

Μάθημα 44ο.—Σχέσις δεκαδικῶν καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν

1) Πῶς τρέπεται ἕνας δεκαδικὸς σὲ κλάσμα

α) Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,8 μέτρου εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου. Γιατί;

β) Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 4,50 δραχ. ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{450}{100}$, ποὺ εἶναι ἴσον μὲ $4\frac{50}{100}$. Γιατί;

Κ α ν ό ν α ς. Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ σὲ κλάσμα, παραλείπομε τὴν ὑποδιαστολὴ καὶ τὸν γράφομε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δέ τὴ μονάδα μὲ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι καὶ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐργασίες: α) Ποῖοι ἀριθμοὶ λέγονται δεκαδικοί; β) Τρέψετε στὸ πρόχειρό σας τώρα τοὺς παρακάτω δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς σὲ κλάσματα:

α) 0,65= 0,01= 0,7= 4,4= 0,008=

β) 9,08= 12,45= 10,095= 0,0075= 18,085=

2) Πῶς τρέπεται κλάσμα σὲ δεκαδικὸν ἀριθμό.

Π.χ. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ μέτρα, νὰ γίνῃ δεκαδικὸς ἀριθμός.

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75 \text{ τοῦ μέτρου.}$$

Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{7}{10}$ νὰ γίνῃ δεκαδικὸς ἀριθμός.

$$5\frac{7}{10} = \frac{57}{10} = 57 : 10 = 5{,}7.$$

Ἐργασίες: α) Τί κάναμε γιὰ νὰ γίνῃ τὸ κλάσμα δεκαδικὸς ἀριθμός; β) Πῶς τρέπεται ἕνας μικτὸς σὲ δεκαδικὸν ἀριθμό;

Κ α ν ό ν α ς: Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα κλάσμα σὲ δεκαδικὸν ἀριθμό, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Τὸ πηλίκον τὸ ὁποῖον προκύπτει, εἶναι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

394) Νὰ τρέψετε τὰ κλάσματα σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

α) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{10}{25}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$

β) $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ, γ) $6\frac{3}{4}$ μέτρα. δ) $3\frac{2}{5}$ ὧρες. ε) $7\frac{5}{10}$ χιλιόμ.

3. Δεκαδικὰ κλάσματα

$\frac{8}{10}$, $\frac{85}{100}$, $\frac{300}{1000}$. Τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν παρονομαστὴ τὸν 10, 100, 1000, δηλ. τὴ δεκαδικὴ ὑποδιαίρεσι τῆς ἀκεραίας μονάδος. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται **Δεκαδικὰ** κλάσματα.

Ἐργασίες: Γράψετε στὸ πρόχειρό σας 4 δεκαδικὰ κλάσματα. β) Πότε ἕνα κλάσμα λέγεται δεκαδικό;

Κανόνας: Δεκαδικὰ κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὴ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά. (10, 100, 1000, 10.000 κ λ.π.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

395) Μία γυναῖκα ἀγόρασε $4\frac{1}{2}$ κιλὰ ἀχλάδια καὶ ἔδωσε $50\frac{2}{5}$ δραχμ. Πόσες δραχ. ἄξιζε τὸ κιλό.

396) Ἕνα κατάστημα ἐπώλησε σὲ τρεῖς πελάτες του ὕφασμα. Στὸν α) $9\frac{1}{2}$ μ. στὸ β) $5\frac{1}{5}$ μ. καὶ στὸ γ) $16\frac{4}{10}$ μ. Πόσα μέτρα ὕφασμα τοῦ ἔμειναν ἀπὸ 1 τόπι 50 μέτρων;

397) Ἕνας κουλουρᾶς εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησι τῶν κουλουριῶν του τὴν πρώτη ἡμέρα $75\frac{2}{5}$ καὶ ἐξώδευσε $50\frac{1}{2}$ δρχ. καὶ τὴ δεύτερη ἡμέρα εἰσέπραξε 80 δρχ. καὶ ἐξώδευσε $60\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσες δρχ. τοῦ ἔμειναν κέρδος καὶ στὶς δυὸ ἡμέρες;

398) Ἕνας παντοπώλης ἐπώλησε $13\frac{1}{2}$ κιλὰ βούτυρο πρὸς $40\frac{4}{5}$ δραχμ. τὸ κιλό. Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε ἀγόρασε 40 κιλὰ πατάτες πρὸς $2\frac{1}{5}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσες δρχ. τοῦ ἔμειναν;

399) Ἕνας πεζοπόρος διέτρεξε τὰ $\frac{6}{14}$ μιᾶς ἀπάστασεως μεταξὺ δύο πόλεων. Ἡ ὑπόλοιπη ἀπόστασι εἶναι 100 χιλιόμ. Πόσο χιλιόμ. ἀπέχουν αἱ δύο πόλεις; Καὶ πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε;

400) Ἕνας ἔμπορος ἐπλήρωσε 6.500 δρχ. διὰ τὴν ἀγορὰν ἑνὸς ὑφάσματος. Κατὰ τὴν πώλησι ἐζημίωσε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἀξίας του. Πόσες δρχ. εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησι;

401) Ἕνας αὐτοκινητιστὴς πρέπει νὰ διανύσῃ μιὰν ἀπόστασι 540 χιλιομέτρων. Διανύει τὰ $\frac{2}{6}$ τῆς ἀποστάσεως καὶ τὴν ὑπόλοιπον ἀπόστασι πρέ-

πει νὰ τὴν διανύσῃ σὲ $5\frac{1}{2}$ ὥρες. Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ τρέχῃ τώρα τὸ αὐτοκίνητο τὴν ὥρα;

402) Ἀπὸ ἕνα μεγάλο βαρέλι κρασὶ βγάλαμε τὰ $\frac{5}{8}$ ποὺ ἦσαν 800 κιλά. Πόσο κρασὶ περιεῖχε τὸ βαρέλι;

403) Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται $65\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσο θὰ στοιχίσουν δύο φορέματα $4\frac{3}{4}$ μέτρα τὸ ἕνα καὶ $5\frac{1}{2}$ μέτρα τὸ ἄλλο;

404) Ἕνας μαθητὴς ἔχει 198 δραχ. Δίδει γιὰ τὴν ἀγορὰ βιβλίων $83\frac{1}{2}$, δραχμὲς διὰ τετράδια $17\frac{3}{4}$ καὶ γιὰ ἄλλα ἔξοδα 14 δραχμές. Πόσα χρήματα τοῦ μένουν ἀκόμη;

405) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε $28\frac{1}{2}$ κιλὰ λάδι πρὸς $15\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ κιλὸ Πόσα χρήματα ἔδωσε γιὰ τὴν ἀγορὰ τοῦ λαδιοῦ;

406) Ἕνας οἰνοπώλης εἶχε ἕνα βαρέλι γεμάτο κρασί. Ἐπώλησε τὴ μία ἑβδομάδα τὰ $\frac{2}{6}$ αὐτοῦ, τὴν ἄλλη ἑβδομάδα τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ καὶ ἔμειναν ἀκόμη 280 κιλά. Πόσα κιλὰ κρασὶ χωροῦσε τὸ βαρέλι;

407) Ὁ ταμίας τῆς τάξεως ἀγόρασε 30 μολύβια πρὸς $1\frac{1}{4}$ δρχ. τὸ ἕνα καὶ 30 γομολάστιχες πρὸς $1\frac{3}{5}$ δρχ. τὴ μία, Ἔδωσε 100 δρχ. πόσα ρέστα ἐπῆρε;

408) Ἕνας μανάβης ἀγόρασε 80 κιλὰ ἀχλάδια πρὸς $8\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ κιλό. Τοῦ ἐσάπισαν ὅμως $12\frac{1}{2}$ κιλά. Τὰ ὑπόλοιπα ἐπώλησε πρὸς $12\frac{4}{5}$ δραχ. τὸ κιλό. Ἐκέρδισε ἢ ἐζημίωσε καὶ πόσα;

409) Ἕνας ἐλαιέμπορος ἀπὸ ἕνα δοχεῖον λάδι ἐπώλησε τὰ $\frac{5}{8}$ καὶ ἔμειναν 50 κιλά. Πόσα κιλὰ ἦταν ὅλο τό λάδι; Πόσα κιλὰ ἐπώλησε; Καὶ πόσες δρχ. εἰσέπραξε πρὸς $18\frac{1}{2}$ δραχ. τὸ κιλό;

410) Ἕνας ἔμπορος ἔχει 39 μ. ὕφασμα. Πωλεῖ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πρὸς

$23\frac{1}{2}$ τὸ μέτρο καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς $28\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσα χρήματα ἔλαβε ἀπὸ τὴν πώλησι τοῦ ὑφάσματος;

411) Ἕνας φιλάνθρωπος διέθεσε τὴν περιουσία του ὡς ἑξῆς: Στὴν ἐκκλησία τοῦ χωριοῦ ἀφῆκε τὰ $\frac{2}{5}$, στὸ σχολεῖο τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιουσία του καὶ τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἦταν 24.500 δρχ. τὸ ἀφῆκε στὴν Κοινότητα. Πόση ἦταν ὅλη ἡ περιουσία; Καὶ πόσες δρχ. ἄφησε στὴν ἐκκλησία καὶ στὸ σχολεῖο;

412) Ἡ ἀπόστασι Ἀθηνῶν—Θεσσαλολίκης εἶναι 570 χιλιόμετρα. Ἂν ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει διατρέξει τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτῆς, πόσα χιλιόμετρα μένουν ἀκόμη;

413) Ἕνας πατέρας ἄφησε περιουσίαν 24.000 δρχ. μὲ τὴν ἐντολὴν ἡ μητέρα νὰ πάρη τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῶν, ἡ θυγατέρα του τὰ $\frac{5}{12}$ καὶ ὁ γυιός του τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας; (Μὲ ἀναγωγὴ ἡ λύσι του).

414) Πόσα γραμμάρια κρέατος εἶναι τὰ $\frac{6}{8}$, τὰ $\frac{4}{5}$, τὰ $2\frac{3}{4}$, τὰ $4\frac{1}{4}$ κιλά;

415) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 16 δωδεκάδες ποτήρια πρὸς $55\frac{1}{5}$ δραχ. τὴ δωδεκάδα. Ἔπειτα τὰ ἐπώλησε πρὸς $6\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ ἕνα. Πόσες δραχμὲς ἐκέρδισε ἀπὸ ὅλα τὰ ποτήρια;

Ε΄. ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μονάδες μετρήσεως

Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἕνα ποσόν, παίρνομε ἕνα μέρος ἀπὸ τὸ ἴδιο, **τὸ ὁποῖον εἶναι ὡρισμένο** καὶ τὸ συγκρίνομε μὲ αὐτό. Π.χ. Γιὰ νὰ μετρήσω **τὸ μῆκος**, παίρνομε ἕνα ὡρισμένο μέρος ἀπὸ τὸ ἴδιο καί τὸ συγκρίνομε μὲ αὐτό. Γιὰ τὴν ἐπιφάνεια, παίρνομε **ἕνα ὡρισμένο μέρος ἐπιφανείας** καὶ τὸ συγκρίνομε (μὲ τὸ ποσὸν τῆς ἐπιφανείας). Τὸ ἴδιο κάνομε γιὰ τὸ **βάρος,** τὸν **ὄγκο**, τὰ **χρήματα**, τὸν **χρόνο** κλπ.

Τὸ ὡρισμένο καὶ σταθερὸ κομμάτι ποὺ παίρνομε γιὰ τὴ σύγκρισι τοῦ ποσοῦ, λέγεται **μονὰς μετρήσεως**.

Ἡ σύγκρισις αὐτὴ λέγεται μέτρησις.

Μέτρησις ἑνὸς ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ πρὸς τὴν ὁμοειδῆ του μονάδα.

Γιὰ τὴ μέτρησι τῶν ποσῶν μεταχειριζόμαστε τὶς **μονάδες μετρήσεως.**

Οἱ ἀρχικὲς μονάδες μετρήσεως ἔχουν **πολλαπλάσια** καὶ **ὑποδιαιρέσεις,** ποὺ θὰ ἐξετάσωμε στὴ συνέχεια τῶν μαθημάτων. Πρίν ὅμως προχωρήσετε νὰ κάμετε αὐτὲς τὶς ἐργασίες :

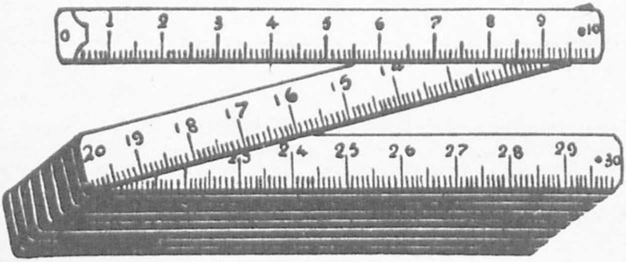
1) Χωριστῆτε σὲ ὁμάδες καὶ κάθε μιὰ ὁμάδα νὰ φροντίση νὰ φέρη στὴν τάξι αὐτά:

α) 1 μέτρο, β) μερικὰ ὑποδεκάμετρα, γ) μία κορδέλλα μετρικὴ (δεκάμετρο), δ) διάφορα ζύγια τοῦ 1 κιλοῦ, 2 κιλῶν, μισοῦ κιλοῦ κ.λ.π. Μιὰ ζυγαριά.

γ) Κάμετε τὰ χαρτονομίσματα ποὺ κυκλοφοροῦν σήμερα.
δ) Φέρετε καὶ μερικὰ ἡμερολόγια.

Μάθημα 45ο.—1. Μονάδες μήκους.

Ἀρχικὴ μονάδα γιὰ τὴ μέτρησι τοῦ μήκους εἶναι τὸ **Γαλλικὸ μέτρο.**



Τὸ Γαλλικὸ μέτρο

α) Ὑποδιαιρέσεις τοῦ Γαλλικοῦ μέτρου.

1 μέτρο = 10 παλάμ.	**= 100 δάκτυλοι**	**= 1.000**	**γραμμὲς**
1 παλάμη=	**10 »**	**= 100**	**»**
	1 δάκτυλος	**= 10**	**»**

β) Πολλαπλάσια τοῦ μέτρου

Τὸ δεκάμετρο= 10 μέτρα
Τὸ Ἑκατόμετρο = 100 μ.

Τὸ χιλιόμετρο=1.000 μέτρα
Τὸ Μυριάμετρο= 10.000 μ.

γ) Ἄλλες μονάδες μήκους.

Τὸ ναυτικὸν μίλιον =1.852 μέτρα.

Ἡ ὑάρδα (στὴν Ἀγγλία) 0 914 τοῦ μέτρου. Ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται : 1 ὑάρ. = 3 πόδες. 1 πόδας=12 δάκτυλοι.

Ἀσκήσεις

416) α) 35 μέτρα πόσες παλάμες, δακτύλους καί γραμμές κάνουν; β) 8δάκτυλοι πόσα μέτρα κάνουν; γ) 30 παλάμες πόσα μέτρα κάνουν; δ) 25 ὑάρδες πόσα μέτρα κάνουν; ε) 85 μέτρα πόσες ὑάρδες κάνουν; στ) 40 μέτρα πόσες ὑάρδες κάνουν; η) 185 μίλια πόσα μέτρα καὶ πόσα χιλιόμετρα κάνουν; ζ) 460 χιλιόμ. πόσα μέτρα καὶ πόσα μίλια κάνουν;

Μάθημα 46ο.—2. Μονάδες ἐπιφανείας.

Ἀρχικὴ μονάδα γιὰ τὴ μέτρησι ἐπιφανείας, εἶναι τὸ **τετραγωνικὸ μέτρο.**

α) Ὑποδιαίρεσις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

1 τετρ. μ· =	**100 τετρ. παλ. =**	**10.000 τ.δ. =**	**1.000.000 τ. γραμμ.**
	1 » » =	**100 τ.δ. =**	**10.000 τ. γραμμ.**
		1 τ.δ. =	**100 τ. γραμμ.**

β) Πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου

Τὸ **τετραγ. δεκάμετρο** = 100 τετραγ. μέτρα.
Τὸ **τετραγ. ἑκατόμετρο** = 10.000 τετραγ. μέτρα.
Τὸ **τετραγ. χιλιόμετρο** = 1.000.000 τετραγ. μέτρα.
Τὸ **Βασιλικὸ στρέμμα** = 1.000 τετραγ. μέτρα.
Τὸ **παλαιὸ στρέμμα** = 1.270 τετραγ. μέτρα.

γ) Ἄλλες μονάδες.

Ὁ **τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς** = $\frac{9}{16}$ τοῦ τ,μ. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ γιὰ τὴ μέτρησι τῶν οἰκοπέδων.

Ἀσκήσεις

417) 3 τετραγ. μέτρα, πόσες τετραγ. παλ., τ. δακτ. καὶ γραμ. κάνουν;

418) Ἕνα οἰκόπεδο 245 τετρ. μ. μὲ πόσους τετρ. τεκτον. πήχεις ἰσοδυναμεῖ;

419) 56 στρέμματα βασιλικά, πόσα τ.μ. κάνουν;

420) 67.500 τ.μ πόσα βασιλικὰ καὶ πόσα παλαιὰ κάνουν;

421) 400 τ. πήχεις, πόσα τ.μ. κάνουν;

422) 8.700 τ. μ. πόσα τετρ. ἑκατόμετρα καὶ πόσα τ. δεκάμετρα κάνουν;

Μάθημα 47ο.—3. Μονάδες ὄγκου.

Ἀρχικὴ μονάδα γιὰ τὴ μέτρησι τοῦ ὄγκου, εἶναι τὸ **Κυβικὸ μέτρο.**

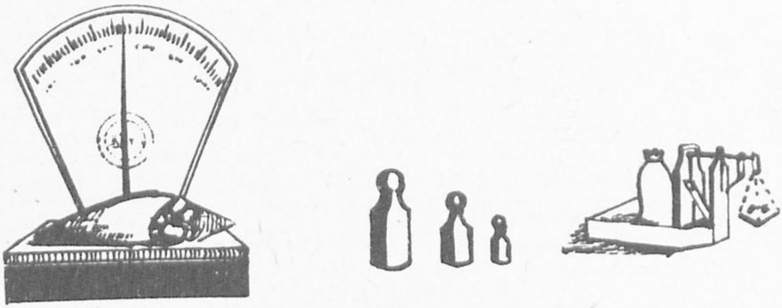
α) **Ὑποδιαιρέσεις τοῦ Κυβικοῦ μέτρου.**

1 Κυβ. μ.	=	**1.000 κυβ. παλάμες**	=	**1.000.000 κυβ. δάκτ·**	
		1 » »	=	**1.000** » »	

β) **Ἄλλες μονάδες**

Ὁ **κυβ. τεκτ. πῆχυς** γιὰ τὴ μέτρησι τῶν τοίχων, εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{27}{64}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Μάθημα 48ο.—4. Μονάδες βάρους



2) Στὴν Πατρίδα μας καὶ σὲ ὅλα τὰ κράτη χρησιμοποιεῖται ὡς ἀρχικὴ μονάδα βάρους τὸ **χιλιόγραμμο** ἢ **κιλό.** Τὸ **χιλιόγραμμο** εἶναι βάρος νεροῦ ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4° Κελσίου, ποὺ χωράει σὲ μία **κυβικὴ παλάμη** Τὸ **γραμμάριο** εἶναι βάρος νεροῦ ἀπεσταγμένου ποὺ χωράει σ' ἕνα **κυβικὸ δάκτυλο.**

1 τόννος	=	**1.000 χιλιόγραμμα**	=	**1.000.000 γραμμάρια**
		1 χιλιόγραμμο	=	**1.000** »

Γιὰ τὴ μέτρησι τοῦ χρυσοῦ καὶ τῶν πολυτίμων λίθων ἔχομε τὸ καράτιο=0,2 γραμμάρια

Ἀσκήσεις

423) Τὸ κάθε ψωμάκι ποὺ δίνομε στὸ συσσίτιο ζυγίζει 38 γραμμάρια. Πόσα κιλὰ ζυγίζουν 350 ψωμάκια ποὺ μοιράζονται κάθε μέρα στὰ παιδιά ;

424) Μία βάρκα χωράει 5 τόννους βάρος. Πόσα κιλὰ χωράει ;

425) Ἕνα αὐτοκίνητο μετέφερε ἀλεύρι βάρους 6.500 κιλῶν. Πόσων τόννων ἦτο τὸ βάρος ;

426) Πόσα κιλὰ καὶ πόσα γραμμάρια εἶναι 8,5 τόννοι ;

427) Νὰ πᾶς στὸ μπακάλη νὰ ζυγιστῇς καὶ νὰ γράψῃς πόσα κιλά καὶ πόσα γραμμάρια εἶσαι ;

Μάθημα 49ο. 5. – Μονάδες νομισμάτων.

Στὴν Πατρίδα μας γιὰ ἀρχικὴ μονάδα νομισμάτων ἔχομε τὴ **δραχμή**. Πολλαπλάσιά της εἶναι τὰ ἑξῆς:

Κέρματα:			Χαρτονομίσματα:	
Ἡ **πεντάρα**	= 0,05 δραχμῆς	(πεντάλεπτο)	Τὸ **δεκάρικο**	= 10 δραχμὲς
Ἡ **δεκάρα**	= 0,10 »	(δεκάλεπτο)	Τὸ **εἰκοσάρικο**	= 20 »
Τὸ **εἰκοσαράκι**	= 0,20 »	(εἰκοσάλεπτο)	Τὸ **πενηντάρικο**	= 50 »
Τὸ **πενηνταράκι**	= 0,50 »	(πενηντάλεπτο	Τὸ **ἑκατοστάρικο**	= 100 »
Ἡ **δραχμὴ**	= 1 δραχμὴ		Τὸ **πεντακοσάρικο**	= 500 »
Τὸ **δίδραχμο**	= 2 δραχμὲς		Τὸ **χιλιάρικο**	= 1000 »
Τὸ **πεντάδραχμο**	= 5 »	(τάλληρο)		
Τὸ **δεκάδραχμο**	= 10 »	(δεκάρικο)		

Ἀσκήσεις

428) 10 λίρες Ἀγγλικὲς πόσα σελίνια, πέννες καὶ φαρδίνια εἶναι ;

429) 25 λίρες Ἀγγλικὲς μὲ πόσες δραχμὲς ἰσοδυναμοῦν ; (Μὲ τὴν τρέχουσα τιμή).

430) 3.307.500 δραχμὲς πόσες λίρες γίνονται ; (Μὲ τὴν τρέχουσα τιμή).

Νομίσματα ξένων κρατῶν

Κράτος	Μονάδα νομίσματος
Ἀγγλία	Λίρα στερλίνα=20 σελίνια =240 πέννες = 960 φαρδίνια 1 σελλίνι= 12 » = 48 » 1 πένν = 4 »
Ἀμερική	Δολλάριο =100 σέντς.
Γαλλία	Φράγγο
Ἰταλία	Λιρέττα =100 τσεντέσιμα
Τουρκία	Λίρα =100 γρόσια 4·000 παράδες 1 γρόσι = 40 »
Αἴγυπτος	Λίρα =100 γρόσια γερὰ ἢ 1000 μιλλιέμ.
Γερμανία	Μάρκο =100 πφένιγκ.
Ρωσία	Ρούβλι =100 καπίκια
Ἑλβετία	Φάργκο =100 σαντὶμ κλπ.

Μάθημα 50.—Μονάδες χρόνου

Ἀρχικὴ μονάδα εἶναι ἡ **ἡμέρα** (ἡμερονύκτιον).

α) Ὑποδιαιρέσεις τῆς ἡμέρας

1 ἡμέρα=24 ὧρες	**1 ὥρα 60 π (πρῶτα λεπτὰ)**
1 πρῶτο λεπτὸ=60 δεύτερα λεπτὰ (1π = 60δ)	

β) Πολλαπλάσια τῆς ἡμέρας

1 ἑβδομάδα= 7 ἡμέρες.
1 μῆνας . .= 30 ἡμέρες. **1 χρόνος**=12 μῆνες.=365 ἡμέρες
1 αἰῶνας =100 χρόνια **1 χιλιετηρίδα**=1000 χρόνια.
Μ' αὐτὰ τὰ πολλαπλάσια θὰ ὑπολογίζωμε τὸ χρόνο.

Ἀσκήσεις

18 ἡμέρες μὲ πόσες ὧρες, λεπτὰ καὶ δευτερόλεπτα ἰσοδυναμοῦν ;

20 χρόνια μὲ πόσους μῆνες καὶ ἡμέρες ἰσοδυναμοῦν ;

431) Ἀπὸ τὴν ἐπανάσταση τοῦ 1821 ὑπολογίσετε πόσα χρόνια πέρασαν καὶ τρέψετέ τα σὲ μῆνες καὶ ἡμέρες.

432) Ἡ καρδιὰ τοῦ ἀνθρώπου κατὰ μέσον ὅρον χτυπᾶ 70 φορὲς στό 1 πρῶτο λεπτό. Ὑπολογίσετε πόσους χτύπους κάνει στὸ εἰκοσιτετράωρο καὶ πόσους τὸ μῆνα ;

433) Ἕνας αἰώνας νὰ τραπῇ σὲ μῆνες, σὲ ἡμέρες καὶ σὲ ὧρες.

434) Δύο δρομεῖς ἔτρεξαν μία ἀπόστασι: ὁ 1ος σὲ 1.080 δευτερόλεπτα, ὁ 2ος σὲ 1980 δεύτερα λεπτά. Σὲ πόσες ὧρες ἔτρεξε ὁ καθένας τὴν ἀπόστασι αὐτή;

435) Τὰ πρωϊνά σας μαθήματα διαρκοῦν 5 ὧρες. Πόσα πρῶτα λεπτὰ καὶ δευτερόλεπτα διαρκοῦν ;

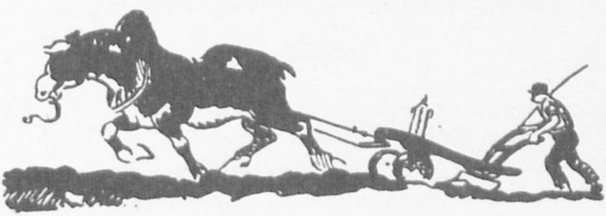
436) Δύο ποδηλατισταὶ ἔτρεξαν 200 χιλιόμ. σὲ 4 ὧρες. Ὁ πρῶτος ἔτρεξε 30 χιλιόμ· περισσότερο ἀπὸ τὸν δεύτερο. Ζητεῖται πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε ὁ καθένας τὴν ὥρα.

437) Νὰ τραποῦν σὲ γραμμάρια α) 270 χιλιόγραμμα, β) 5 τόννοι.

438) Πόσο ἀξίζει τὸ κιλὸ ἑνὸς πράγματος ὅταν τὸ γραμμάριο ἀξίζη α) 0,8 δραχμές, β) 0,06 δραχμές ;

439) Ἕνας γεωργὸς ἐκαλλιέργησε ἕνα χωράφι 8,5 στρέμματα μὲ πατάτες. Ἔβγαλε ἀπὸ τὸ κάθε τετραγωνικὸ μέτρο 4 κιλὰ πατάτες τὶς ὁποῖες ἐπώλησε πρὸς 1,80 δρχ. τὸ κιλό. Πόσες δραχ. ἐπῆρε ἀπὸ ὅλες τὶς πατάτες;

440) Ἕνα οἰκόπεδο ποὺ ἦταν 485 τετραγ. μέτρα ἐπωλήθη πρὸς 370 δρχ. τὸ τετραγ. μέτρο. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου ;



*Παράδειγμ.—**Τρεῖς μοδίστρες ἀγόρασαν ὕφασμα.** 'Η α) 4 μέτρα, ἢ β) 4,5 μέτρα, ἢ γ) $4\frac{3}{10}$ μέτρα. Πῆγε καὶ ἡ Μαρία καὶ ἀγόρασε 4 μέτρα καὶ 7 παλάμες.*

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπομε τέσσερες ἀριθμούς. Εἶναι ὅλοι τους τὸ ἐξαγόμενο ἀπὸ τὴ μέτρησι τοῦ ποσοῦ, μέτρα.

'Ο 4 μέτρα εἶναι **ἀκέραιος ἀριθμός.**

'Ο 4,5 » » **δεκαδικὸς ἀριθμός.**

'Ο $4\frac{3}{8}$ » » **κλασματικὸς ἀριθμός.**

'Ο 4 μέτρ. καὶ 7 παλάμες τί ἀριθμὸς εἶναι; Θὰ τὸ μαντέψατε. Αὐτὸς λέγεται **Συμμιγὴς** ἀριθμός. Μπορεῖτε μόνοι σας νὰ ἐξηγήσετε τὴ διαφορά ;

Οἱ τρεῖς πρῶτοι εἶναι **ἁπλοὶ** ἀριθμοί.

'Ο **4** μέτρ. καὶ 7 παλάμες εἶναι **συμμιγὴς** ἀριθμός.

Στοὺς 3 πρώτους δὲν διακρίνομε πολλαπλάσια ἢ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος δηλ. τοῦ μέτρου.

Μὲ τὸν συμμιγῆ ὅμως μποροῦμε νὰ ἐκφράσωμε καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος. Ὥστε :

Συμμιγὴς ἀριθμός, εἶναι ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀριθμούς, τῶν ὁποίων οἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος.

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμμένοι καὶ τρέπονται σὲ ἁπλοὺς ἀριθμούς, δηλ. εἰς ἀκεραίους, δεκαδικοὺς καὶ κλασματικούς.

Τροπὴ συμμιγῶν εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως.

Προβλήματα

441) 4 μέτρα καὶ 5 παλάμες νὰ γίνουν μέτρα.
442) 8 κιλὰ καὶ 250 γραμμάρια νὰ γίνουν κιλά.
443) 6 ὑάρδες, 2 πόδες, 10 δάκτ., νὰ γίνουν πόδες.
444) 15 λίρες, 8 σελλίνια, 7 πέννες, 2 φαρδίνια νὰ γίνουν σελλίνια.

Τροπὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

Προβλήματα

445) 45.750 γραμμάρια . . . . . νὰ γίνη συμμιγὴς ἀριθμός.
446) 175 φαρδίνια . . . . » » » »
447) 270 δάκτυλοι ὑάρδας. . . . . » » » »

Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις

448) Νά τρέψετε τὰ παρακάτω κλάσματα εἰς συμμιγεῖς :

α) $\frac{7}{8}$ στατῆρες, β) $\frac{3}{4}$ ἔτους γ) $\frac{7}{8}$ ὑάρδας, δ) $5\frac{3}{10}$ κιλά, ε) $15\frac{4}{5}$ λίρες.

449) Νὰ τραποῦν σὲ μονάδες κατωτάτης τάξεως οἱ συμμιγεῖς :

α) 8 ἔτη 4 μῆνες 18 ἡμέρ.

β) 9 ὧρες 45′ καὶ 38″.

γ) 3 τόννοι 760 χιλόγρ. 875 γραμμάρ.

δ) 12 μέτρα 65 πόντοι 7 γραμμές.

450) Νὰ τραποῦν σὲ μονάδες ἀνωτέρας καὶ ἀνωτάτης τάξεως :

α) 2786 ἡμέρες νὰ γίνουν ἔτη - μῆνες - ἡμέρες.

β) 43765 δεύτερα λεπτὰ εἰς ὥρες, πρῶτα καὶ δ. λεπτά.

γ) 6784965 γραμμάρια νὰ γίνουν τόννοι - χιλιόγραμμα.

451) Νὰ τρέψετε σὲ συμμιγεῖς τὰ παρακάτω κλάσματα :

α) $\frac{13}{7}$ ὧρες σὲ συμμιγῆ ἀριθμὸν ὡρῶν καὶ δευτέρων λεπτῶν.

β) $\frac{17}{9}$ ἐτῶν εἰς συμμιγῆ ἀριθ. ἐτῶν, μηνῶν καὶ ἡμερῶν.

γ) $\frac{8}{3}$ τόννων εἰς συμμιγῆ ἀριθ. τόννων-χιλιγράμμ.-γραμμάρια.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Προβλήματα προσθέσεως

452) α) 8 μέτρ. 9 παλάμ. 70 γραμ. + 5 μέτρ. 7 παλάμ. 70 γραμ.=
453) β) 12 λίρ. 13 σελ. 9 πέν. 2 φαρδ. + 7 λίρ. 18 σελ. 3 φαρδ.
454) γ) 9 ὑάρ. 2 πόδ. 9 δάκτ.+2 πόδ. 8 δάκτ.+10 ὑάρ. 7 δάκτ.
455) δ) Ἕνας γεννήθηκε τὴν 15ην Ἀπριλίου τοῦ 1884 καὶ πέθανε σὲ ἡλικία 60 ἐτῶν, 8 μηνῶν, 20 ἡμερῶν. Πότε ἀπέθανε;

Προβλήματα ἀφαιρέσεως

456) α) 18 λίρ. 3 σελ. 8 πέν.—15 λίρ. 15 σελ. 10 πέν.

457) β) 30 μέτρα 7 παλ. 50 γραμ.—20 μέτρα 7 παλ. 75 γραμ.

458) γ) 12 μῆνες 6 ἡμ. 18 ὧρες 25π—10 μῆνες 20 ἡμ. 12 ὧρες 35 π.

459) Ἕνας γεννήθηκε τὴν 1ην Μαΐου 1910. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία του;

460) Σ' ἕνα χωριὸ δόθηκαν γιὰ διανομὴ στούς κατοίκους του, 35 τόννοι καὶ 300 κιλὰ σιτάρι. Μοιράστηκαν 30 τόνοι 450 κιλ. καὶ 300 γραμ. Πόσο σιτάρι ἔμεινε ἀπὸ τὴ διανομή ;

Προβλήματα Πολλαπλασιασμοῦ

461) Ἕνας πατέρας μοίρασε στὰ 3 παιδιά του ἕνα μεγάλο οἰκόπεδο. Τὸ κάθε παιδὶ πῆρε ἀπὸ 875 τ. μ., 70 τ. παλ., Πόση ἦταν ἡ ἔκτασι ὁλοκλήρου τοῦ οἰκοπέδου ;

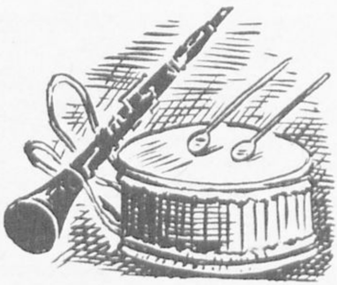
462) Τὸ κιλὸ μεταξωτοῦ νήματος στοιχίζει 1 λίρα, 5 σελ., 10 πέν.Πόσο στοιχίζουν 8 κιλὰ τοῦ ἰδίου νήματος ;

Προβλήματα Διαιρέσεως Συμμιγῶν

463) Ἕνας λόχος ἐξοδεύει τὸ μῆνα 1700 κιλὰ καὶ 700 γραμ. κρέας. Πόσο ἐξοδεύει τὴν ἡμέρα ;

464) Ἕνα αὐτοκίνητο ἔτρεξε 250 χιλιόμ. καὶ 375 μέτρα σὲ 5 ὧρες. Πόσα ἔτρεξε τὴν ὥρα ;

465) Γιὰ τὴν ἀγορὰ ἑνὸς οἰκοπέδου. ποὺ ἦταν 485 τ. πήχ., ἐπληρώθησαν 679 λίρ. Πόσο στοιχίζει τὸ ἕνα τετραγ. μέτρο;

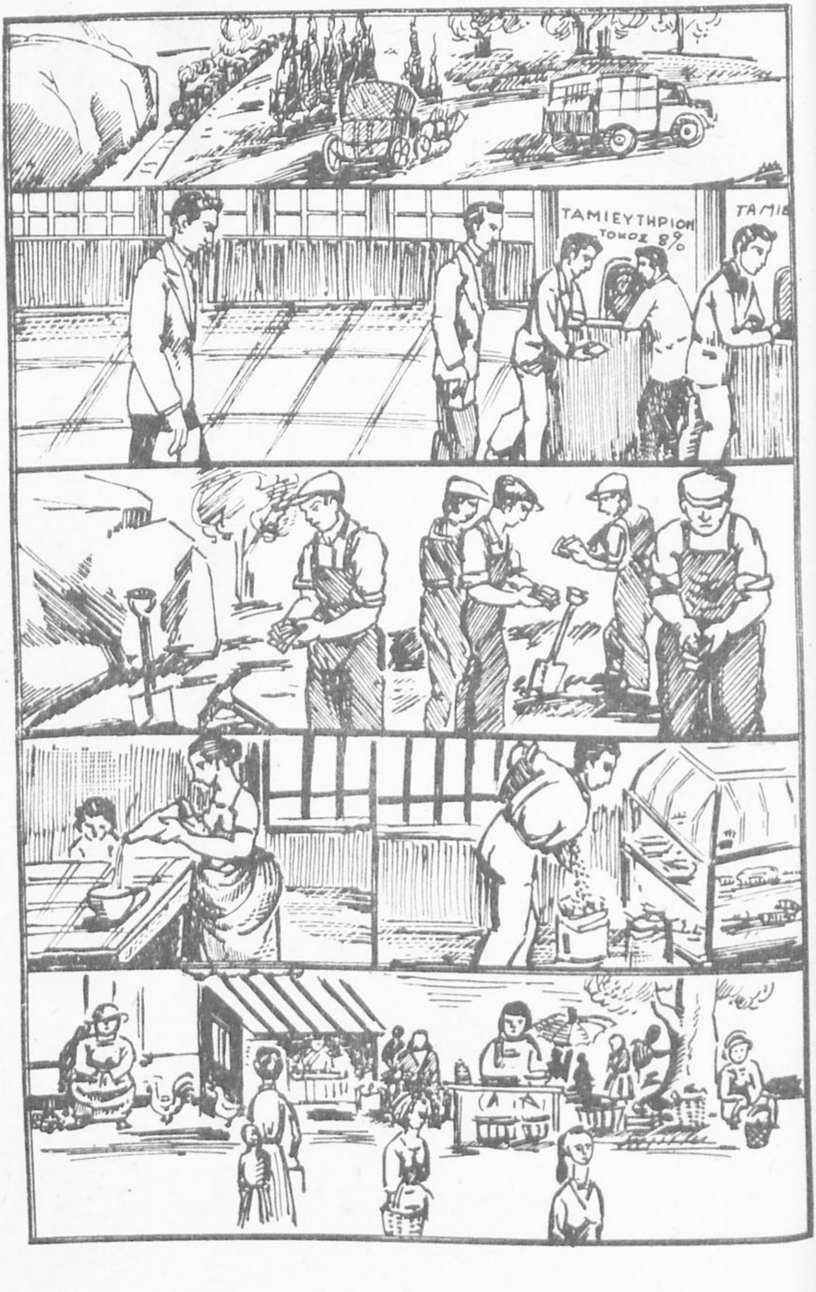


ΚΩΝ. ΑΡΓ. ΒΟΣΤΑΝΤΖΗ - ΕΥΘ. Ν. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ
ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤ' ΤΑΞΕΩΣ
ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ" ΑΘΗΝΑΙ


ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΙΟΝ
ΤΟΚΟΣ 8%
ΤΑΜΙΕ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ

Ἔχετε μάθει στὶς προηγούμενες τάξεις, νὰ λύετε προβλήματα **ἀκεραίων, δεκαδικῶν κλασματικῶν καὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν**. Στὸ διάστημα τῶν διακοπῶν σας ἴσως νὰ λησμονήσατε μερικὰ ἀπὸ ὅσα μάθατε. Γι' αὐτὸ πρὶν ἀρχίσωμε τὴν καθαυτὸ ὕλη τῆς νέας σας τάξεως, εἶναι ἀνάγκη νὰ λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα. Σᾶς ὑπενθυμίζομε λοιπὸν καὶ πάλιν μερικὰ ποὺ πρέπει νὰ ἔχετε ὑπ' ὄψι σας, ὅταν πρόκειται νὰ λύσετε ἕνα πρόβλημα :

1) Διαβάζομε τὸ πρόβλημα προσεκτικά, μία ἢ περισσότερες φορές. 2) Προσέχομε **τί ζητεῖται** καὶ **τί δίδεται** στὸ πρόβλημα (**ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων κλπ.**). 3) Κάνομε τὴν κατάταξι 4) Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις καὶ 5) Δίδομε τὴν ἀπάντησι.

α) Ἀσκήσεις

Ὁμάδα 1η

25.400× 10= ; . . .	460 : 10= ; . .	[(25+ 8)×40]— 10=
2.540× 100= ; . . .	1.700 : 100= ; . . .	[(20× 8)+40] : 10=
1.254×1.000= ; . . .	28.000 : 1000= ; . . .	[(6×100)+25] : 100=

Ὁμάδα 2η

0, 8× 100= ; . . .	487,5 : 100= ; . . .	[(375× 3)+ 375]: 10=
7,84×1.000= ; . . .	526,30 : 10= ; . . .	(0,35×100): 10=
3,04× 10= ; . . .	359,50 : 1000= ; . . .	[(2,5×2,5] × 2,5×100=

'Ομάδα 3η

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=; \ldots$	$2{,}8+\frac{5}{8}=; \ldots$	$6\frac{3}{4}+13\frac{4}{7}=; \ldots$
$4-\frac{3}{4}=; \ldots$	$7-\frac{5}{8}=; \ldots$	$12{,}6-11\frac{2}{3}=; \ldots$
$\frac{7}{9}\times 3{,}6=; \ldots$	$11 : 3\frac{1}{2}=; \ldots$	$48 : \frac{5}{12}=; \ldots$

6) Προβλήματα

'Ομάδα 4η. 1) Σὲ ἕνα ἀμπέλι εἶναι φυτεμένα 5.963 κλήματα σὲ 89 σειρές. Ὅλες οἱ σειρὲς ἔχουν ἴσον ἀριθμὸ ἀπὸ φυτά. Πόσα κλήματα ἔχει ἡ κάθε σειρά.

2) Ἕνας ἐργάτης ἐπῆρε ἀπὸ τὴν ἐργασία του 864 δραχμές. Πόσες ἡμέρες ἐργάσθηκε ἂν κάθε μέρα ἔπαιρνε 48 δραχμές;

3) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε δύο ὑφάσματα. Τὸ πρῶτο ἄξιζε 3.000 δραχ. καὶ τὸ δεύτερο 2.500 δρχ. Ὅταν τὰ ἐπώλησε, ἀπὸ τὸ α' ὕφασμα ζημιώθηκε 550 δραχ. καὶ ἀπὸ τὸ β' κέρδισε 278 δραχ. Πόσα εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησι καὶ τῶν δύο;

4) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 560 κιλὰ λάδι πρὸς 24 δραχ. τὸ κιλό. Ἐξώδεψε γιὰ τὴ μεταφορὰ στό κατάστημά του 275 δραχ. Πόσες δρχ. συνολικά, τοῦ ἐκόστισε τὸ λάδι ὥς τὴν ἀποθήκη του;

5) Σὲ κάποιο χωριὸ θέλουν νὰ κτίσουν σχολεῖο, ποὺ θὰ στοιχίση 262.500 δραχ. Τὸ κράτος ἔδωσε 75.000 δρχ. Τὰ ὑπόλοιπα ἀνέλαβαν νὰ τὰ πληρώσουν 75 εὔπορες οἰκογένειες τοῦ χωριοῦ. Τί ποσὸν ἀναλογεῖ στὴν κάθε οἰκογένεια;

'Ομάδα 5η. 6) Ἕνας ἀγόρασε πορτοκάλια πρὸς 20 δρχ. τὰ 10. Πόσο ἀξίζουν τὰ 100 πορτοκάλια; Πόσο τὰ 1.000 πορτοκάλια;

7) Μιὰ αὐλὴ ἔχει ἐπιφάνεια 125,36 τετρ. μέτρα καὶ πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ πλάκες ποὺ ἡ κάθε μία ἔχει 0,7835 τετρ. μέτρα ἐπιφάνεια. Πόσες πλάκες θὰ χρειασθοῦν καὶ πόσο θὰ κοστίση ἡ πλακόστρωσι τῆς αὐλῆς ἂν τὸ ἕνα τετρ. μέτρο κοστίση 4,35 δρχ.;

8) Ἕνας μανάβης ἀγόρασε 18 κιβώτια μῆλα. Κάθε κιβώτιο ζύγιζε 18,50 κιλά. Τὰ μῆλα ἀγοράστηκαν πρὸς 10,50 δραχ. τὸ κιλό. Γιὰ τὴν μεταφορὰ ἐπλήρωσε 250,60 δρχ. Πόσο τοῦ ἐκόστισαν ὅλα τὰ μῆλα; (Σύνολον ἐξόδων).

9) Μιὰ χωρικὴ ἐπώλησε 300 αὐγὰ πρὸς 2,80 δραχ. τὸ ζευγάρι. Μὲ τὰ

χρήματα πού πῆρε, ἀγόρασε γιὰ προῖκα τοῦ κοριτσιοῦ της πανὶ πρὸς 8,40 δραχ. τὸ μέτρο. Πόσα μέτρα πανί ἀγόρασε;

10) Ἕνας κτηματίας ἐπώλησε ἕνα κομμάτι τοῦ κτήματός του καί ἐπῆρε 11.537,5 δρχ. Πόσες δρχ. ἐπώλησε τὸ κάθε τετρ. μέτρο ἂν τὸ κομμάτι πού ἐπωλήθηκε ἦταν 325 τετρ. μέτρα;

Ὁμάδα 6η. Προφορικά. 11) Πόσες δρχ. κάνουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑκατοστάρικου, τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ πεντακοσάρικου, τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ χιλιάρικου;

12) Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

13) Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$; τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου;

14) Τί μέρος τοῦ ἀριθμοῦ 40 ἀποτελεῖ ὁ ἀριθμὸς 8;

15) Τὰ 100 γραμ. τί μέρος τοῦ κιλοῦ ἀποτελοῦν;

Ὁμάδα 7η. 16) Τὰ 50 γραμ. τὰ 40 γραμ. τί μέρος τοῦ κιλοῦ εἶναι;

17) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 20;

18) Πόσο ἀξίζει **τὸ ἕνα μέτρ.** ὑφάσματος, ὅταν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ **μέτ.** ἀξίζουν 30 δρχ.;

19) Πόσοι μῆνες εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χρόνου;

20) Πόσα ἔτη εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ αἰῶνος;

Ὁμάδα 8η. Γραπτά. 21) Ἕνας μαθητὴς ἐπλήρωσε κατὰ τὴν ἐγγραφήν του, γιὰ τὸ σχολικὸ ταμεῖο 25 δρχ. γιὰ τὸ συσσίτιο $6\frac{2}{10}$ δραχ., γιὰ τὴν ἐπιστάτρια $5\frac{1}{2}$ δρχ. καὶ γιὰ τὸ γυμναστήριο $10\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσες δρχ. πλήρωσε γιὰ ὅλα;

22) Ἀπὸ ἕνα σάκκο ζάχαρι πού ζυγίζει $40\frac{1}{2}$ κιλά, ἐπωλήθηκαν τὰ $32\frac{5}{8}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἔμειναν στὸ σάκκο.

23) Ἕνας πεζοπόρος θέλει νὰ πάη ἀπὸ ἕνα χωριὸ σ᾽ ἕνα ἄλλο πού ἀπέχουν μεταξύ τους 50 χιλμ. Μέχρι τὸ μεσημέρι εἶχε περάσει τὰ $32\frac{7}{10}$ χιλιόμ. Πόσα χιλιόμετρα ἔχει ἀκόμα γιὰ νὰ φθάση στὸ ἄλλο χωριό;

24) Βλέπω τὴν ἀστραπὴ καὶ ὥσπου ν' ἀκούσω τὴ βροντὴ περνοῦν $4\frac{2}{10}$ δευτερόλεπτα. Πόσο μακριὰ ἀπὸ μένα ἔγινε ἡ ἀστραπή; (Ὁ ἦχος τρέχει στὸν ἀέρα 340 μέτρα στὸ 1 δευτερόλεπτο).

25) Μιὰ γυναίκα ἀγόρασε γιὰ τὸ φόρεμά της 6 μέτρα ὕφασμα μάλλινο ποὺ τὸ μέτρο ἄξιζε $42\frac{4}{5}$ δρχ. Πόσο τῆς ἐκόστισε τὸ ὕφασμα;

Ὁμάδα 9η. 26) Γιὰ $5\frac{3}{4}$ κιλὰ μῆλα ἐπλήρωσα $50\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσο ἄξιζε τὸ κιλό;

27) Μιὰ οἰκογένεια ἀγόρασε 48 κιλὰ λάδι. Πόσες ἑβδομάδες θὰ περάση ὅταν στὴν 1 ἑβδομάδα ἐξοδεύη $1\frac{1}{2}$ κιλὰ λάδι;

28) Ἕνα ἀτμόπλοιο τρέχει $12\frac{1}{2}$ μίλια τὴν ὥρα. Πόσες ὧρες θὰ κάνη νὰ φτάση ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὴν Κωνσταντινούπολη, ποὺ ἀπέχει 350 μίλια;

29) Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα 50 μέτρων ἐπωλήθηκαν α) τὰ $9\frac{1}{2}$ μέτρα β) $5\frac{1}{4}$ μέτρα καὶ γ) $16\frac{5}{8}$ μέτρα. Πόσο ὕφασμα ἔμεινε ἀπὸ τὸ τόπι;

30) Ἕνας ἐργάτης κέρδισε τὴ μιὰ μέρα $75\frac{2}{5}$ δρχ. καὶ ξώδεψε $50\frac{1}{2}$ δρχ. Τὴν ἄλλη μέρα κέρδισε 80 δρχ. καὶ ξώδεψε $60\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσες δραχμὲς ἐξοικονόμησε στὶς δύο αὐτὲς ἡμέρες;

Ὁμάδα 10η. (31) Ἕνας μπακάλης πούλησε $13\frac{1}{2}$ κιλὰ βούτυρο πρὸς $60\frac{4}{5}$ δρ. τὸ κιλό. Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ πῆρε ἀγόρασε 40 κιλὰ πατάτες πρὸς $3\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

32) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ποτήρια πρὸς 48 δρχ. τὴ δωδεκάδα καὶ τὰ πούλησε πρὸς $5\frac{1}{5}$ δρχ. τὸ ἕνα. Ἀπὸ τὴν πώλησι, ἐκέρδισε 360 δραχ. Πόσα ποτήρια ἀγόρασε;

33) Δύο γεωργοὶ ἀντήλλαξαν σιτάρι μὲ κριθάρι. Ὁ πρῶτος ἔδωσε 50

κιλὰ σιτάρι ποὺ τὸ κιλὸ ἄξιζε $3 \frac{1}{5}$ δρχ. Πόσα κιλὰ κριθάρι θὰ πάρῃ ἂν τὸ ἕνα κιλὸ τοῦ κριθαριοῦ ἄξιζε $2 \frac{1}{2}$ δρχ. ;

34) Ἕνας διέτρεξε τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο πόλεων. Ἡ ὑπόλοιπη ἀπόστασις εἶναι 50 χιλόμετρα. Πόσο ἀπέχουν οἱ δύο πόλεις ;

35) Ἕνας φιλάνθρωπος ἄφησε τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς περιουσίας του, ποὺ ἦταν 600.000 δρχ., στὸ νοσοκομεῖο καὶ τὰ ὑπόλοιπα στὸ σχολεῖο τοῦ χωριοῦ του. Πόση ἦτο ὅλη ἡ περιουσία του καὶ πόσα ἄφησε στὸ σχολεῖο ;

Ὁμάδα 11η. 36) Νὰ εὑρεθῆ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 840, ἔπειτα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἐξαγόμενου καὶ τέλος τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ νέου ἐξαγομένου.

37) Ἕνας ἔμπορος ἐπλήρωσε 650 δρχ. γιὰ τὴν ἀγορὰ ἑνὸς ὑφάσματος. Θέλει νὰ κερδίσῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς του. Πόσες δραχμὲς θὰ πωλήσῃ τὸ ὕφασμα αὐτό ;

38) Ἕνας ἔμπορος ὅταν πέθανε, ἄφησε στὴ σύζυγό του τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του καὶ τὸ ὑπόλοιπο στὴ θυγατέρα του. Ἡ θυγατέρα του πῆρε 1.200 λίρες. Πόση ἦταν ὅλη ἡ περιουσία του ; Καὶ πόσα ἐπῆρε ἡ σύζυγός του ;

39) Ἕνας ἀγόρασε 8 δωδεκάδες ποτήρια πρὸς $55 \frac{1}{5}$ δρχ. τὴ δωδεκάδα. Ὕστερα τὰ ἐπώλησε πρὸς $6 \frac{3}{5}$ δρχ. τὸ ἕνα ποτήρι. Πόσα ἐκέρδισε ἀπὸ ὅλα τὰ ποτήρια ;

40) Ἕνας ἀμπελουργὸς ἀπὸ 20.000 κιλὰ σταφύλια πρέπει νὰ βγάλῃ τὰ $\frac{2}{5}$ κιλὰ κρασὶ καὶ τὸ $\frac{1}{20}$ οὖζο. Πόσα κιλὰ κρασὶ καὶ πόσα κιλὰ οὖζο θὰ βγάλῃ ;

41) Ἀγόρασε ἕνας ἕνα καλάθι αὐγὰ καὶ ἔδωσε 560 δρχ. Τὰ ἐπώλησε καὶ εἰσέπραξε 780 δραχμές. Κέρδισε ἀπὸ τὸ κάθε αὐγὸ $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσα αὐγὰ εἶχε τὸ καλάθι ;

42) Ἕνα οἰκόπεδο 880 τετραγ. μέτρων ἐπωλήθηκε πρὸς 250 δρχ. τὸ τετραγ. μέτρο. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε ὁ πωλητής ;

43) Νὰ τραποῦν εἰς μονάδας ἀνωτέρας καὶ ἀνωτάτης τάξεως: α) 6365 ἡμέρες καὶ β) 57623 ὧρες.

44) Ἕνα οἰκόπεδο εἶναι 400 **τετρ. μέτρα**. Πωλήθηκε πρὸς 200 δρχ. τὸν **τετραγ. πῆχυ**. Πόσες δραχ. εἰσέπραξε ὁ πωλητής ;

45) Ἕνα ραδιόφωνο κόστισε 100 δολλάρια. Πόσες δραχμὲς θὰ πωληθῆ ὅταν ὁ ἔμπορος θέλη νὰ κερδίση καὶ 375 δρχ. ἀπὸ τὴν πώλησι ;

Ὁμάδα 13η.

46) 1750 γραμμάρια νὰ τραποῦν εἰς συμμιγῆ ἀριθμό.
47) 175 φαρδίνια . . . » » » » »
48) 18.975 ὧρες . . . » » » » »
49) 5.675 πόντοι (δάκτυλοι) . » » » » »
50) 4565 ἡμέραι . » » » » »

Ὁμάδα 14η. 51) Νὰ τραποῦν τὰ παρακάτω κλάσματα καὶ οἱ δεκαδικοί, εἰς συμμιγεῖς :

$\frac{7}{8}$ τοῦ τόνου $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔτους. $\frac{7}{8}$ τῆς ὑάρδας.

52) $5\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ $15\frac{4}{5}$ λίρες. $7\frac{10}{15}$ λίρες.

3,28 τόνοι 0,34 λίρες.

Ὁμάδα 15η. 53) Ἕνας λόχος ξοδεύει τὸν μῆνα 500 κιλά, 300 γραμ. κρέας. Πόσο κρέας ξοδεύει τὴν ἡμέρα ;

54) 8 ὑποκάμισα στοιχίζουν 25 δολλάρια καὶ 76 σέντς. Πόσο στοιχίζει τὸ ἕνα ;

55) Ἕνα αὐτοκίνητο ἔτρεξε 250 χιλιόμετρα καὶ 365 μέτρα, σὲ 5 ὧρες. Πόσα χιλιόμ. ἔτρεξε τὴν ὥρα ;

56) Δύο ἔμποροι ἔφεραν ἀπὸ τὴν Ἀγγλία ἕνα ὕφασμα. Ὁ ἕνας ἐπῆρε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ ποὺ ἦταν 30 ὑάρδ., 1 ποὺς καὶ 10 δάκτ. α) Πόσο ἦταν ὅλο τὸ ὕφασμα ; β) Πόσο πῆρε ὁ ἄλλος ;

57) Γιὰ τὴν ἀγορὰ ἑνὸς οἰκοπέδου ποὺ ἦταν 485 τετραγ. πήχεις, πληρώθηκαν 679 λίρες. Πόσο κοστίζει ὁ ἕνας τετρ. πῆχυς ;

58) Τὸ $\frac{1}{2}$ ἑνὸς μοσχαριοῦ ζυγίζει 58 κιλὰ καὶ 150 γραμ. Πόσο ζυγίζει ὅλο τὸ μοσχάρι ;

59) 25 τόνοι ζάχαρι, πόσα κιλὰ καὶ πόσα γραμμάρια εἶναι;

60) 385 πόδες μὲ πόσοι πόδες καὶ ὑάρδες ἰσοδυναμοῦν;

61) 60 δολλάρια μὲ πόσες δρχ. ἰσοδυναμοῦν; (τὸ δολ. δραχ. 30)

62) Τί θὰ προτιμοῦσες; 16.000 δραχμὲς ἢ 57 λίρες; (ἡ λίρα=280 δρχ.

63) Μία ἡμέρα νὰ τραπῇ σὲ δευτερόλεπτα.

64) Μιὰ ἑβδομάδα σὲ πρῶτα λεπτά.

65) Ἕνας μῆνας νὰ τραπῇ σὲ ὧρες.

66) Ἕνα οἰκόπεδο εἶναι 400 τετραγ. πήχεις καὶ ἐπωλήθηκε πρὸς 240 δραχμές τὸ τετραγ. μέτρο. Πόσο ἐπωλήθηκε; (Θὰ τρέψετε πρῶτα τοὺς τετρ. πήχεις σὲ τετραγ. μέτρα κλπ.).

67) Ἕνα ραδιόφωνο ἐκόστισε 100 δολλάρια. Πόσες δραχμὲς ἐπωλήθηκε ἐδῶ ὅταν ὁ ἔμπορος εἶχε ζημία 375 δραχμές; (Τὸ δολλάριο μὲ τὴν τρέχουσα τιμή).

68) 7 ὑάρδες καὶ 2 πόδες, νὰ γίνουν πόδες.

69) 3 τόνοι. 10 κιλ. 200 γραμ. νὰ γίνουν γραμμάρια.

70) 3 ἔτη, 4 μῆνες, 20 ἡμ., 15 ὧρες, 35π 40δ, νὰ γίνουν δευτερόλεπτα.

71) 15 λίρες, 15 σελλίνια, 8 πέννες, 3 φαρδίνια, νὰ γίνουν φαρδίνια.

72) 4 τόνοι, 30 κιλά, 150 γραμ. νὰ γίνουν γραμμάρια.

73) 2 ἔτη, 7 μῆνες, 20 ἡμέρες, 15 ὧρες, 40ο, νὰ γίνουν πρῶτα λεπτά.

74) 7 μέτρα, 5 παλάμες, 6 δάκτυλοι, 8 γραμμὲς νὰ γίνουν γραμμές.

75) Μιὰ οἰκογένεια ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν πατέρα, τὴ μητέρα καὶ τὴν κόρη. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐτῶν τῆς ἡλικίας καὶ τῶν τριῶν εἶναι 120 χρόνια. Ὁ πατέρας εἶναι 58 ἐτῶν, 9 μηνῶν καὶ 25 ἡμερῶν. Ἡ μητέρα εἶναι 40 ἐτῶν, 7 μηνῶν καὶ 10 ἡμερῶν. Πόσο εἶναι ἡ κόρη;

76) Ἕνας πλήρωσε γιὰ τὴν ἀγορὰ βαμβακιοῦ, 216 λίρες, 3 σελλίνια, 2 πέννες καὶ πλήρωσε γιὰ ἔξοδα μεταφορᾶς 13 λίρες, 17 σελλίνια, 2 πέννες. Ὅταν τὸ μετεπώλησε, εἰσέπραξε 302 λίρες, 12 σελ., 9 πέννες. Πόσο εἶναι τὸ κέρδος του;

77) α) λίρ., 12 σελ., 7 πέν. × 8.

β) 5 τόνοι 30 κιλ. 250 γραμ. × 12.

78) Τὸ μέτρο ἑνὸς ἀγγλικοῦ ὑφάσματος, στοιχίζει 1 λίρα, 10 σελ., 8 π. Πόσο ἔχουν τὰ 5 μέτρα;

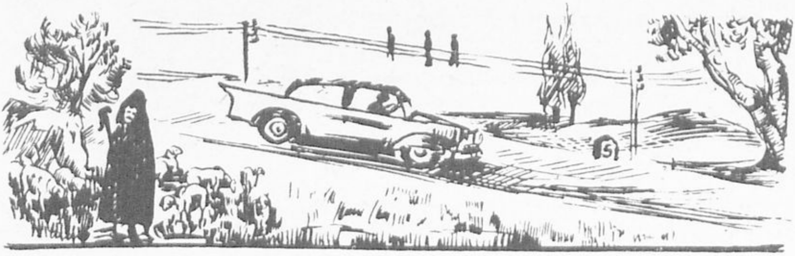
79) Στὸ συσσίτιο ἑνὸς σχολείου, πλήρωσε τὸ κάθε παιδί 6 δρχ. καὶ 20 λεπτά. Πόσο πλήρωσαν τὰ 140 παιδιά, ποὺ ἔτρωγαν;

80) Νὰ κάνετε τὶς παρακάτω διαιρέσεις:

α) 19 ἡμέρ. 14 ὧρες, 45 πρῶτα λεπτά, 50 δεύτερα λεπτά : 9

β) 10 τόνοι, 37 κιλὰ 300 γραμ. : 25

γ) 8 λίρες, 17 σελ., 6 πέννες : 4



ΜΕΡΟΣ Β'

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I.

Α'. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΠΟΣΟΝ

Μάθημα Ιο.—Ποσά.

Σὲ μία αἴθουσα διδασκαλίας ὑπάρχουν 35 μαθηταί, 18 θρανία, 2 πίνακες, 1 τραπέζι, 3 καθίσματα, 5 παράθυρα, 2 βιβλιοθῆκες, 150 βιβλία, 10 εἰκόνες, 5 χάρτες, 3 γλάστρες κλπ. Αὐτὰ τὰ πράγματα μποροῦν νὰ αὐξηθοῦν ἢ νὰ ἐλαττωθοῦν. Δηλαδὴ οἱ 5 χάρτες γίνονται 10 ἂν προσθέσωμε καὶ ἄλλους 5, ὅπως καὶ τὰ 18 θρανία μποροῦν νὰ ἐλαττωθοῦν καὶ νὰ μείνουν 12 ἂν ἀφαιρέσωμε τὰ 6 κλπ. Τα πράγματα αὐτὰ λέγονται **ποσά**.

Συμπέρασμα : Κάθε τί ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, στὴν ἀριθμητικὴ λέγεται ποσὸν ἢ μέγεθος.

Ἀσκήσεις

1) Ρωτήσετε τὸ δάσκαλό σας ἢ διαβάσετε σὲ ἀριθμητικές, ποιὰ εἶνα τὰ **συνεχῆ** καὶ ποῖα τὰ **ἀσυνεχῆ** ποσά.

2) Τὰ παρακάτω ποσὰ νὰ τὰ ξεχωρίσετε σὲ συνεχῆ καὶ ἀσυνεχῆ :

α) Τὸ μῆκος τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου σας β) Τὸ ἀνάστημά σας γ) Τὰ βιβλία σας δ) Τὸ βάρος σας ε) Τὰ χρήματα τοῦ ταμείου σας στ) Τὰ θρανία τῆς τάξεώς σας ζ) Τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν τῆς ΣΤ' τάξεως η) Τὰ δένδρα τοῦ σχολικοῦ σας κήπου θ) Τὶς βρύσες, τὰ πρόβατα καὶ τὰ ἄλογα τοῦ χωριοῦ σας. Ἐπίσης τὴν ποσότητα τῶν προϊόντων τοῦ σχολικοῦ σας κήπου.

Β΄ ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΣΩΝ

Μάθημα 2ο. — Ποσά ἀνάλογα

Ἐὰν συγκρίνωμε δύο ποσὰ π.χ. κρέας καὶ δραχμὲς βλέπομε ὅτι 5 κιλὰ κρέας ἀξίζουν 150 δραχμές, 10 κιλὰ κρέας ποὺ εἶναι διπλάσιες, θὰ πληρωθοῦν μὲ διπλάσια χρήματα, δηλαδη 300 δραχμές. Συγκρίνοντας τὸ ποσὸν τοῦ βάρους τῶν κιλῶν, μὲ τὸ ποσὸν τῆς ἀξίας των, παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέσις των εἶναι ἡ ἑξῆς: Αὐξάνει τὸ ποσὸν τοῦ βάρους 2 φορές, αὐξάνει καὶ τὸ ἀντίστοιχο ποσὸν τῶν χρημάτων ἀναλόγως. Ἢ καλύτερα, πολλαπλασιάζεται ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν κιλῶν ἐπὶ 2, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2 καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἀντιστοίχου ποσοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως: Διαιρεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιρεῖται ἀντιστοίχως καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται **εὐθέως ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀνάλογα**.

> Συμπέρασμα. **Δύο ποσὰ λέγονται εὐθέως ἀνάλογα ὅταν, πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ (ἢ διαιρουμένης) μὲ ἕναν ἀριθμό, πολλαπλασιάζεται (ἢ διαιρεῖται) καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό.**

Ὁ παρακάτω πίνακας δείχνει μερικὰ ποσὰ ποὺ ἔχουν σχέσιν ἀνάλογον μεταξύ των.

1. **Ἐξηγήσατε** γιατὶ τὰ παρακάτω ποσὰ τοῦ πίνακος εἶναι ἀνάλογα.
2. Μὲ τα ποσὰ τοῦ πίνακος κάμετε συγκεκριμένα παραδείγματα μὲ ἀριθμούς.
3. **Ἀντιγράψατε** τὸν πίνακα σὲ χαρτόνι καὶ χρωματίστε τὰ ποσά.

Πίναξ ἀναλόγων ποσῶν

Ποσὰ	Ποσὰ
1. Ἡ **τιμὴ** ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸ	**βάρος** του.
2. Ἡ **τιμὴ** ἑνὸς ὑφάσματος εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸ	**μῆκος** του
3. Τὸ **διάστημα** ποὺ δισνύει ἕνα αὐτοκίνητο ποὺ κινεῖται ἰσοταχῶς εἶναι ἀνάλογο μὲ τὸν	**χρόνο** κατὰ τὸν ὁποῖο κινεῖται.
4. Ἡ **ἀπόστασις** δύο τόπων εἶναι ἀνάλογος μὲ τό...	**βάρος** (τῆς βενζίνης ποὺ χρειάζεται).
5. Ἡ **περίμετρος** ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἀνάλογος μὲ τὴν	**πλευράν** του
6. Τὸ **ἔργον** ποὺ ἐκτελοῦν ἐργάται εἶναι ἀνάλογο μὲ τοὺς	**ἐργάτας**
7. Τὸ **μῆκος** περιφ. κύκλου εἶναι ἀνάλογο μὲ τὴν	**ἀκτῖνα** του

Μάθημα 3ο. — Ἀντίστροφα ποσά.

α) Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Ἕνα ἀεροπλάνο διανύει μιὰ ἀπόστασι ἀπὸ μιὰ πόλι σὲ ἄλλη μὲ ταχύτητα 400 χιλιόμ. τὴν ὥρα σὲ 4 ὧρες. Ἂν ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου ἦταν 800 χιλιόμετρα τὴν ὥρα, τὸ ἀεροπλάνο θὰ περνοῦσε τὴν ἴδια ἀπόστασι σὲ μισὲς βεβαίως ὧρες, δηλαδὴ σὲ 2 ὧρες. Ἂν πάλι πετοῦσε μὲ ταχύτητα 200 χιλιόμ. τὴν ὥρα, θὰ ἔκανε διπλάσιο χρόνο δηλαδὴ 8 ὧρες. Τί παρατηρεῖτε;

α) Μὲ ταχύτητα 400 χιλιόμετρα τὴν ὥρα κάνει 4 ὧρες
β) » » 800 » » » » 2 »
γ) » » 200 » » » » 8 »

Τὰ ποσά, **ταχύτης** καὶ **χρόνος** λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Γιατὶ ἅμα τὸ ἕνα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2, τὸ ἄλλο διαιρεῖται διὰ 2, καὶ ὅταν τὸ πρῶτο ποσὸν (ταχύτης) διαιρεῖται διὰ 2 τὸ ἄλλο ποσὸν τοῦ χρόνου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2.

β) Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Ἂν ἕνα χωράφι σκάβεται ἀπὸ 20 ἐργάτες σὲ 10 ἡμέρες, εἶναι φανερὸ πὼς μὲ 40 ἐργάτες, τῆς ἰδίας ἀποδοτικότητος, θὰ σκαβόταν σὲ 5 μόνον ἡμέρες. Ἐπειδὴ αὐξήθηκαν οἱ ἐργάτες ἀπὸ 20 σὲ 40, λιγόστεψαν καὶ οἱ ἡμέρες ἐργασίας ἀπὸ 10 σὲ 5. Ὥστε ὅταν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2 ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ **ἐργάτες**, ἀντίθετα διαιρεῖται διὰ 2, ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ **ἡμέρες ἐργασίας**.

γ) Παράδειγμα. Μὲ πλάτος 40 πόντους, χρειάζονται 40 σανίδια γιὰ ἕνα πάτωμα. Γιὰ τὸ ἴδιο πάτωμα θὰ χρειασθοῦν 80 σανίδια ἂν τὸ πλάτος κάθε σανιδιοῦ εἶναι 20 πόντοι.

Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα**.

Συμπέρασμα. Ἀντιστρόφως ἀνάλογα λέγονται δύο ποσά, ὅταν, πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ (καὶ ἀντιστρόφως).

Πίναξ Β΄.—Ἀντιστρόφων ποσῶν

Ποσὰ	Ποσὰ
1. Ἡ **ταχύτης** καὶ	ὁ **χρόνος**
γιὰ νὰ διανυθῇ μία ἀπόστασις.	
2. Ὁ **ἀριθμὸς** τῶν ἐργατῶν καὶ	τὸ **μερίδιο**
(γιὰ χρημ. ποσὸ ποὺ μοιράζεται).	
3. Ὁ **ἀριθμὸς** τῶν στρατιωτῶν καὶ	τὸ **ποσὸν**
τῶν τροφῶν, ὅταν εἶναι ὡρισμένες.	
4. Ὁ **ἀριθμὸς** τῶν ἐργατῶν καὶ	ὁ **χρόνος**
ὅταν τὸ **ἔργον** εἶναι ὡρισμένο	
5. Τὸ **πλάτος** καὶ	τὸ **μῆκος**
ἑνὸς ὑφάσματος γιὰ νὰ γίνουν ἰδίου μεγέθους ἐνδύματα.	

Ἀσκήσεις

1) Γιατὶ τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι ἀντίστροφα;

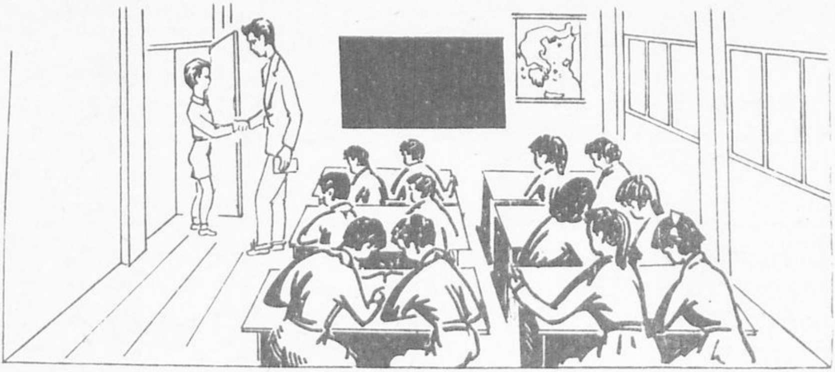
2) Μὲ βάσι τὰ ποσὰ τοῦ πίνακος αὐτοῦ, κάμετε συγκεκριμένα προβλήματα (μὲ ἀριθμούς).

Ἀντιγράψατε σὲ ἕνα χαρτόνι τὸν πίνακα καὶ κρεμάσετέ το στὸ σπίτι σας.

Προβλήματα χωρὶς ἀριθμούς. Ἀπαντῆστε:

Ἕνας ἔχει ἕνα ἀμπέλι. Ἕνας ἄλλος ἔχει ἀμπέλι μεγαλύτερο. Ποιὸς θὰ πληρώσῃ λιγώτερα ἐργατικὰ καὶ γιατί;

Ἕνα κοστούμι τὸ φτιάχνω μὲ 3 μέτρα ὕφασμα. Ἂν τὸ ὕφασμα εἶχε διπλὸ φάρδος, πόσα μέτρα θὰ ἤθελα καὶ γιατί;



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Α΄. ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Μέθοδοι στὴν Ἀριθμητικὴ εἶναι διάφοροι τρόποι γιὰ τὴ λύσι ὡρισμένων προβλημάτων.

Μάθημα 4ο—Ἀναγωγή στή Μονάδα.

Ἀρκετὰ προβλήματα λύονται μὲ ἕνα πολλαπλασιασμὸ καὶ μία διαίρεσι. Ἔχετε μάθει μάλιστα κάτι τέτοια προβλήματα γιὰ νὰ τὰ λύετε μὲ μιὰ μέθοδο. Αὐτὴ τὴ μέθοδο τὴν ξέρετε μὲ τὸ ὄνομα **ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.**

Παράδειγμα.—Ἂν 3 κιλὰ λάδι κοστίζουν 72 δραχμές, 5 κιλὰ λάδι πὸσο κοστίζουν;

Σκέψι: Μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα. Ἀφοῦ τὰ 3 κιλὰ λάδι κοστίζουν 72 δραχμὲς γιὰ νὰ βρῶ πόσες δραχ. κοστίζουν τὰ 5 κιλὰ πρέπει νὰ βρῶ πρῶτα πόσα κοστίζει τὸ 1 κιλό. Τὸ κιλὸ λοιπὸν κοστίζει 3 φορὲς λιγώτερο ἀπ᾽ ὅσο κοστίζουν τὰ 3 κιλὰ δηλαδὴ $\frac{72}{3}$ (72 : 3) = 24 δρχ. Τώρα ἀφοῦ τὸ 1 κιλὸ κοστίζει 24 δρχ. Τὰ 5 κιλὰ κοστίζουν 5 φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ 1 κιλὸ δηλ. $24 \times 5 =$ 120 δραχ.

Λύσι: Τὰ 3 κιλὰ λάδι κοστίζουν 72 δραχμές.

Τὸ 1 » » κοστίζει $\frac{72}{3}$ (δηλαδὴ 3 φορὲς λιγώτερο)

Καὶ τὰ 5 » » κοστίζουν $\frac{72 \times 5}{3}$ (δηλαδὴ 5 φορὲς περισσότερο ἀπ' ὅσο κοστίζει τὸ 1 κιλὸ $\frac{72 \times 5}{3} = \frac{360}{3}$ = 120 δραχμές.

Τί παρατηροῦμε ἐδῶ ;

1) Δύο ποσὰ α) **κιλὰ λάδι** , καὶ β) **ἀξία εἰς δραχμές**.

2) Τὶς τιμὲς κάθε ποσοῦ.

	Ποσὸν κιλῶν	**Ποσὸν δραχμῶν**
Τιμαί :	3 κιλὰ	72 δραχμὲς
	5 »	x ;

3) Ὅταν λιγοστεύῃ τὸ ποσὸν τῶν κιλῶν (δηλαδὴ διαιρεῖται, ἡ τιμή του ἀπὸ 3 κιλὰ γίνεται 1 κιλό, τὸ ἀντίστοιχο ποσὸ τῆς ἀξίας ἐπίσης λιγοστεύει, δηλαδή, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ διαιρεῖται διὰ 3 (72 : 3) = 24 δρχ. Καὶ ὅταν τὸ ποσὸν τῶν κιλῶν αὐξάνῃ, τὸ ποσὸ τῆς ἀξίας αὐξάνει καὶ αὐτό. Δηλαδὴ ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῆς ἀξίας τῶν κιλῶν, τὸ 1 κιλὸ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 5 καὶ γίνεται 5 κιλὰ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῆς ἀξίας, οἱ 24 δραχ., πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 5 καὶ γίνονται 120 δραχμές.

Τὰ ποσὰ λοιπὸν στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **ἀνάλογα**.

Ὥστε ἀναγωγὴ στὴ μονάδα εἶναι ἕνας τρόπος, μία μέθοδος, νὰ λύωμε διάφορα προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως, βρίσκοντας πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (τῆς ἀκεραίας ἢ τῆς κλασματικῆς) καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴ τοῦ ποσοῦ, ποὺ ζητεῖται στὸ πρόβλημα.

Προβλήματα

Ὁμάδα 1η.—81.—5. κιλὰ λάδι κοστίζουν 120 δραχ. Πόσο κοστίζουν τὰ 15 κιλά ; Καὶ πόσο τὰ $2\frac{1}{2}$ κιλά ;

82.—3 κιλὰ καφὲ ἀξίζουν 228 δραχ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $5\frac{3}{4}$ κιλά.

83.— 2 κιλὰ ζάχαρι ἀξίζουν 22 δραχ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ;

84.– Τὰ 0,5 τοῦ μέτρου ὑφάσματος ἀξίζουν 30 δρχ. Πόσο ἀξίζουν τὰ 5,25 μ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

85.– Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μ. μιᾶς κορδέλλας κοστίζουν $3\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ μέτρου τῆς ἰδίας κορδέλλας ;

Ὁμάδα 2α. 86.– Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ;

87.–Πόσα κιλά καὶ πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{14}{5}$ τοῦ κιλοῦ;

88.– Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑκατοστάρικου;

89.– Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 150. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ,

90.– Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{6}{8}$ εἶναι 750 ;

Ὁμάδα 3η. 91.—Ἀγόρασε ἕνας ἕνα οἰκόπεδο καὶ ἔδωσε τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀξίας του δηλαδὴ 60 λίρες. Πόσες λίρες χρωστᾶ ἀκόμη ;

92.—Ἂν τὰ $\frac{2}{5}$ μιᾶς ζημίας εἶναι 2.800 δραχ., πόση εἶναι ὁλόκληρη ἡ ζημία;

93.—Ἀπὸ μία ποσότητα αὐγῶν ἔσπασαν τὰ $\frac{3}{21}$ αὐτῆς. Πόσα ἦσαν τὰ αὐγὰ ἂν τὰ σπασμένα εἶναι 20 ;

94.—$4\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα, ἔχουν 450 δραχμές. Πόσες δραχμὲς κοστίζουν $10\frac{2}{8}$ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ;

95.—Ἕνα αὐτοκίνητο καίει $3\frac{1}{2}$ γαλόνια βενζίνη σὲ 24 ὧρες. Πόσα γαλόνια θὰ κάψη σὲ $3\frac{1}{2}$ εἰκοσιτετράωρα ;

Β' ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Μάθημα 5ο.—Ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα.

α) **Π α ρ ά δ ε ι γ μ α.** **Ἂν 3 κιλὰ λάδι κοστίζουν 84 δραχ. 5 κιλὰ λάδι πόσο κοστίζουν;**

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸ λύσαμε παραπάνω, ὅπως εἴδατε μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ὑπάρχει ὅμως κι' ἄλλος τρόπος πιὸ ἁπλός, μὲ τὸν ὁποῖο μπορεῖ νὰ λυθῆ.

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπετε τρεῖς ἀριθμοὺς γνωστούς. Εἶναι οἱ τιμὲς τῶν δύο ἀντιστοίχων ποσῶν καὶ ζητεῖται ἡ ἄγνωστος ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ.

Ποσὸν : κιλὰ	**Ποσὸν: ἀξία**
α) 3 κιλὰ	γ) 84 δρχ.
β) 5 κιλὰ	δ) Χ; »

Βλέπετε λοιπὸν 3 ἀριθμοὺς στὴν κατάταξι αὐτή. Γι' αὐτὸ καὶ ἡ μέθοδος μὲ τὴν ὁποία λύομε τέτοια προβλήματα, λέγεται **ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν**.

Μάθημα 6ο.-Πῶς λύομε προβλήματα μὲ ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα

Συνεχίζομε μὲ τὸ παραπάνω παράδειγμα:

Κατάταξις: Τὰ 3 κιλὰ λάδι ἀξίζουν 84 δράχ.
Τὰ 5 κιλὰ » » Χ; »

Συγκρίνομε τὰ ποσά, **κιλά, ἀξία.** Τὰ ποσὰ αὐτά, ὅπως καταλαβαίνετε, εἶναι ἀνάλογα. Διότι ὅταν ἀγοράζω 3 κιλὰ λάδι καὶ δίνω 84 δρχ., γιὰ $1\frac{1}{2}$ κιλὰ θὰ δώσω 42 δρχ. Γιὰ τὸ 1 κιλὸ θὰ δώσω 3 φορὲς λιγώτερο, δηλ. $84:3=\frac{84}{3}$. Καὶ γιὰ τὰ 5 κιλὰ θὰ δώσω 5 φορὲς περισσότερο, δηλ. $\frac{84\times5}{3}$ (5 φορὲς τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ). Ἔτσι ἡ ἄγνωστος τιμὴ ποὺ παριστάνεται μὲ τὸ X, ἰσοῦται (βρίσκεται), πολλαπλασιάζοντας τὴ γνωστὴ τιμὴ ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ X (84 δρχ.) ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν κιλῶν $\frac{3 \text{ κιλ.}}{5 \text{ κιλ.}}$, ἀλλὰ ἀντεστραμμένο $\frac{5}{3}$ $X=84\times\frac{5}{3}=\frac{420}{3}=140$ δρχ. Ὥστε τὰ 5 κιλὰ λάδι ἀξίζουν 140 δραχμές.

β) **Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Γιὰ 8 μέτρα ὑφάσματος πληρώσαμε 480 δρχ. Πόσες δρχμ. θὰ πληρώσωμε γιὰ 5 μέτρα τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;**

α) **Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.**

Ἀφοῦ γιὰ 8 μέτρα δίδομε 480 δραχμές.

γιὰ 1 μέτρο » 8 φορὲς λιγώτερο $=\frac{480}{8}$

καὶ γιὰ 5 μέτρα θὰ δώσωμε, 5 φορὲς περισσότερο ἀπ' ὅ,τι δώσαμε γιὰ ἕνα μέτρο.

Λύσις: $\frac{480\times5}{8}=\frac{2400}{8}=300$ δραχμές.

β) **Μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.**

Κατάταξις :

8	**μέτρα κοστίζουν**	**480**	**δραχμὲς**
5	» »	**X;**	»

Λύσις : $X=480X\frac{5}{8}=300$ δραχμὲς

α) Τί παρατηρεῖτε στὸ πρόβλημα αὐτό ;

β) Ποῖα ποσὰ συγκρίνομε ἐδῶ ;

γ) Τί κάνομε λοιπὸν στὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα; Νὰ βγάλετε μόνοι σας τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψετε στὸ τετράδιό σας.

96.—6 χτίστες γιὰ ἐργατικὰ πῆραν 8.400 δρχ. Πόσα θὰ πάρουν οἱ 15 χτίστες ;

97.—Ἕνα αὐτοκίνητο γιὰ 25 χιλιόμ. χρειάζεται 3 γαλόνια βενζίνη. Πόση βενζίνη χρειάζεται γιὰ 250 χιλιόμετρα;

98.—Ἕνα δένδρο ὕψους 12 μέτρων, ρίχνει σκιὰ 20 μέτρα μῆκος Πόσα μέτρα μῆκος θὰ ἦταν ἡ σκιὰ τοῦ δένδρου, τὴν ἴδια στιγμή, ἂν εἶχε ὕψος 4 μέτρα;

99.—Οἱ ἐργάτες ἑνὸς ἐργοστασίου παίρνουν σὲ 6 ἡμέρες 6.000 δραχμές. Πόσες δρχ. θὰ πάρουν σὲ 24 ἡμέρες;

100.— Μὲ 15 $\frac{6}{8}$ μέτρα ὕφασμα γίνονται 3 φουστανια. Πόσα φουστάνια τοῦ αὐτοῦ μεγέθους γίνονται μὲ 52 $\frac{4}{8}$ μέτρο ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ;

Ὁμάδα 2η 101.—Γιὰ 25 κιλὰ πατάτες ἕνας μανάβης πληρώνει 75 δραχμές. Πόσα κιλὰ πατάτες ἀγοράζει μὲ 3.000 δραχμές;

102.—Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει σὲ 12 ἡμέρες 600 δραχμές. Σὲ πόσες ἡμέρες παίρνει 1.500 δραχμές.

103.— 25 κιλὰ κάστανα ἀξίζουν 100 δραχμές. Μὲ 480 δραχμές πόσα κιλὰ κάστανα ἀγοράζετε;

104.— Μιὰ οἰκογένεια γιὰ 30 ἡμέρες χρειάζεται 12 κιλὰ λάδι. Πόσο χρειάζεται γιὰ 3 μῆνες; (1 μῆνας=30 ἡμέρες).

105.—Μὲ 28 $\frac{6}{8}$ μέτρα ὕφασμα, γίνονται 10 ὑποκάμισα ἀνδρικά. Μὲ πόσα μέτρα θὰ γίνουν 24 ἴδια ὑποκάμισα;

Ὁμάδα 3η. 106. — 350 γραμμάρια καφὲς κοστίζουν 63 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ καφέ;

107.—Ἂν γιὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο δίνω 45 δραχμές, πόσο θὰ δώσω γιὰ 3 $\frac{1}{2}$ κιλά ;

108.—4 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 272 δραχμές. Πόσα μέτρα τοῦ ἰδίου ὑφάσματος ἀγοράζει ἕνας μὲ 1360 δραχμές;

109.—Μία δωδεκάδα μαντήλια ἀξίζουν 108 δραχμες. Πόσες δραχμὲς θὰ δώσετε γιὰ 25 ἴδια μαντήλια;

110.—50 ζευγάρια αὐγὰ ἔχουν 180 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἔπιασε ὁ αὐγουλὰς ὅταν σὲ μιὰ ἡμέρα ἐπώλησε 500 αὐγά;

Μάθημα 7ο.—Πῶς λύομε προβλήματα μὲ ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Παράδειγμα. 4 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 10 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ το ἔσκαβαν 8 ἐργάτες (ἴδιας ἀποδοτικότητος ;

Ἐδῶ ἔχομε τὰ ποσὰ καὶ τίς τιμές :

Ἐργάτες		**Ἡμέρες**	Ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν 4 ἐργατῶν εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 10 ἡμερ. καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν 8 ἐργατῶν εἶναι ἄγνωστος
4 ἐργάτες	κάνουν	10 ἡμέρες	
8 »	»	X ; »	

Τὰ ποσὰ **ἐργάτες - ἡμέρες** εἶναι **ἀντίστροφα**.

Διότι, ἀφοῦ οἱ 4 ἐργάτες σκάβουν τὸ ἀμπέλι σὲ 10 ἡμέρες, οἱ 8 ἐργάτες, ποὺ εἶναι διπλάσιοι, θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι σὲ 5 ἡμέρες. Ὅπως βλέπετε, ὅταν πολλαπλασιάζεται τὸ ποσὸν τῶν ἐργατῶν ἐπὶ 2, τὸ ἀντίστοιχο ποσὸν τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται διὰ 2.

α) Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν μονάδα.

Ἀφοῦ οἱ 4 ἐργάτες κάνουν 10 ἡμέρες νὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι,
ὁ 1 ἐργάτης κάνει 4 φορὲς περισ. ἡμέρ. δηλ. 10Χ4
καὶ οἱ 8 ἐργάτες κὰνουν 8 » λιγώτερες ἡμέρες ἀπὸ τὸν

ἕναν ἐργάτη δηλ. $\frac{10\times4}{8}=\frac{10\times4}{8}=\frac{40}{8}=5$ ἡμέρες.

β) Μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν

Κατάταξις: Οἱ 4 ἐργάτες χρειάζονται 10 ἡμέρες γιὰ σκάψιμο
» 8 » » X ; » » »

Λύσις: $X = 10 \times \frac{4}{8} = \frac{40}{8} = 5$ ἡμέρες.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἄγνωστο $\boxed{X}$, δηλαδὴ τὴν ἀντίστοιχο τιμὴ σὲ ἡμέρες, τῶν 8 ἐργατῶν, πολλαπλασιάσαμε, τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸ (10 ἡμέρες), ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν 2 τιμῶν, 4 καὶ 8, $\left(\frac{4}{.8}\right)$ τοῦ ποσοῦ (ἐργάτες), **ὅπως εἶναι** καὶ ὄχι ἀντεστραμμένο.

Κ α ν ό ν α ς 1ος. Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀ ν ά λ ο γ α, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ σχηματίζουν αἱ τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον.

Κ α ν ὸ ν α ς 2ος. Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς ἀ ν ά λ ο γ α πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμόν, ἐπὶ τὸ κλάσμα τῶν δύο τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως εἶναι.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

Ὁμάδα 1η. 111.—Ἕνα αὐτοκίνητο διανύει μιά ἀπόστασι σὲ 5 ὧρες, ἂν τρέχη μὲ 60 χιλιόμ. τὴν ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διανύση τὴν ἴδια ἀπόστασι ἂν τρέξη μὲ ταχύτητα 40 χιλμ. τὴν ὥρα ;

112 –Μία οἰκογένεια λογαριάζει ὅτι ἂν ξοδεύη τὴν ἡμέρα 120 γραμμ. λάδι, μπορεῖ νὰ περάση ἕνα μῆνα μὲ τὸ λάδι ποὺ ἔχει. Πόσο λάδι πρέπει νὰ ξοδεύη τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ περάση 36 ἡμέρες. (μὲ τὸ ἴδιο λάδι) ;

113—200 στρατιῶτες ἔχουν τροφὲς γιὰ 56 ἡμέρες. Ἂν φύγουν οἱ 60 στρατιῶτες πόσες ἡμέρες θὰ περάσουν οἱ ὑπόλοιποι μὲ τὶς ἴδιες τροφές ;

114.—Ἕνα ἀτμόπλοιο πλέοντας μὲ 12 μίλια τὴν ὥρα, χρειάστηκε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ $21\frac{1}{4}$ ὧρες γιὰ νὰ φθάση στὴ Θεσσαλονίκη. Πόσες ὧρες θὰ ἔκανε τὸ ταξίδι αὐτό, ἂν ἔτρεχε μὲ 10 μίλια τὴν ὥρα ;

115.–Μία μοδίστρα γιὰ νὰ κάμη ποδιὲς ποὺ παρήγγειλε ἕνα σχολεῖο, ἐργάστηκε $7\frac{1}{2}$ ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ τὶς ἑτοίμασε σὲ 15 ἡμέρες. Τὸ ἴδιο σχολεῖο ἔκανε τὴν ἴδια παραγγελία ἀλλὰ ἤθελε τὶς ποδιὲς σὲ 10 ἡμέρες. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργάζεται ἡ μοδίστρα τὴν ἡμέρα ;

Ὁμάδα 2η. 116.–Ἕνα σχολεῖο γιὰ τὶς γιορτὲς ὥρισε ἕνα ποσὸν νὰ μοιρασθῆ ὡς δῶρον στοὺς ἀπόρους μαθητάς. Οἱ μαθηταὶ ἦσαν 45 καὶ πῆρε ὁ καθένας ἀπὸ 240 δραχ. Ἂν οἱ μαθηταὶ ἦσαν 80, ἀπὸ πόσες δραχ. θὰ ἔπαιρνε ὁ καθένας ;

117.–15 ἐργάτες ἔστρωσαν τὴ μισὴ πλατεῖα μιᾶς πόλεως σὲ 8 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ στρώσουν τὴν ὑπόλοιπη πλατεῖα ὅταν οἱ ἐργάτες αὐξηθοῦν σὲ 24 ;

118.—75 ἄνδρες ἑνὸς χωριοῦ κάνουν μὲ προσωπική τους ἐργασία τὸν ἁμαξιτὸ δρόμο ἀπὸ τὸ διπλανὸ χωριὸ ὡς τὸ δικό τους σὲ 20 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἔκαναν τὸ δρόμο αὐτὸν ἂν ἐργάζονταν 100 ἄνδρες ;

119.—Γιὰ μιὰ αἴθουσα διδασκαλίας χρειάζονται 45 σανίδες μὲ πλάτος 0,20 τοῦ μέτρου ἡ κάθε μία. Πόσες σανίδες θὰ χρειάζονταν ἂν τὸ πλάτος τῆς μιᾶς σανίδος ἦταν 0,12 τοῦ μέτρου ;

120.—Ένας μοτοσυκλετιστὴς ἂν τρέχη μὲ ταχύτητά 40 χιλιόμ. τὴν ὥρα, χρειάζεται $8\frac{1}{4}$ ὧρες νὰ διανύση μία ἀπόστασι. Γιὰ νὰ διανύση τὴν ἴδια ἀπόστασι σὲ $4\frac{1}{8}$ ὧρες, μὲ πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ τρέξη τὴν ὥρα ;

Ὁμάδα 3η. 121.—Μία βρύση ἡ ὁποία σὲ ἕνα πρῶτο λεπτὸ τῆς ὥρας ρέει 30 κιλὰ νερό, γεμίζει μία δεξαμενὴ σὲ 15 ὧρες. Πόσα κιλὰ νερὸ ἔπρεπε νὰ ρέη τὸ λεπτὸ γιὰ νὰ γεμίση τὴ δεξαμενὴ σὲ $7\frac{1}{2}$ ὧρες ;

122.—35 ἄνδρες ἑνὸς φυλακίου στὰ σύνορα, ἔχουν τρόφιμα γιὰ νὰ περάσουν 20 ἡμέρες. Ἂν οἱ ἄνδρες ἦσαν 50, γιὰ πόσες ἡμέρες θὰ ἐπαρκοῦσαν τὰ τρόφιμα ;

123.—Ένας μὲ τὰ χρήματα ποὺ ἔχει, ἀγοράζει ὕφασμα 8,5 μέτρων τοῦ ὁποίου τὸ μέτρο στοιχίζει 80 δραχμές. Πόσα μέτρα θὰ μποροῦσε νὰ ἀγοράση μὲ τὰ ἴδια χρήματα ἂν τὸ μέτρο ἄξιζε 136 δραχμές ;

124.—Ἂν 18 ἐργάτες βγάζουν μία ποσότητα τσιγάρων σέ 12 ὧρες σὲ πόσες ὧρες θὰ ἔβγαζαν τὴν ἴδια ποσότητα 24 ἐργάτες ;

125. Ένας ἐργολάβος πρέπει νά στρώση ἕνα ἁμαξιτὸ δρόμο σὲ 28 ἡμέρες. Γι' αὐτὸ χρησιμοποιεῖ 22 ἐργάτες. Ἂν θὰ ἤθελε νά τὸν στρώση σὲ 7 ἡμέρες, πόσους ἐργάτες θὰ χρειαζόταν ;

126.—Ένας δρομεὺς τρέχοντας 11 χιλιόμετρα τὴν ὥρα, διανύει μία ἀπόστασι σὲ 14 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ τρέχη τὴν ὥρα γιὰ νὰ διανύση τὴν ἴδια ἀπόστασι σὲ $10\frac{1}{2}$ ὧρες ;

Κάμετε 5 δικά σας προβλήματα μὲ ἀνάλογα ποσὰ καὶ 5 μὲ ἀντίστροφα ποσά.

Γ' ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Μάθημα 8ο — Μὲ ποσὰ ἀνάλογα.

Παράδειγμα : 5 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 10 ἡμέρες καὶ παίρνουν 2250 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρουν 10 ἐργάτες ἂν ἐργασθοῦν 15 ἡμέρες;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε α) περισσότερα ἀπὸ δύο ποσὰ καὶ β) περισσοτέρους ἀπὸ 3 ἀριθμούς. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ ποσὰ εἶναι 3. Δηλαδή :

ΠΟΣΑ

	Ἐργάτες	**ἡμέρες**	**χρήματα**
Οἱ τιμὲς =	α) 5 / δ) 10	β) 10 / ε) 15	γ) 2250 / Χ;

Ἡ μέθοδος τῆς λύσεώς του, εἶναι ἡ ἴδια μὲ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι τὸ ποσὸν τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ἄγνωστος τιμή, συγκρίνεται ξεχωριστὰ μὲ κάθε ἄλλο ποσόν. Νὰ ἔτσι :

Κατάταξις : 5 ἐργάτες σὲ 10 ἡμέρες παίρνουν 2250 δραχμές.

10 » » 15 » » Χ ; »

Λύσις . α) Σύγκρισις τοῦ ποσοῦ **δραχμὲς** μὲ τὸ ποσὸν **ἐργάτες**. Γνωρίζετε ἀπὸ προηγούμενα προβλήματα ὅτι τὰ ποσὰ **ἐργάτες** καὶ **ἀμοιβή**, εἶναι ἀνάλογα (γιατί;).

$$\text{Ἄρα ὁ } X = 2250 \text{ δρχ.} \times \frac{10 \text{ ἐργ.}}{5 \text{ »}}$$

β) Πάλι τὸ ἴδιο ποσὸν **δραχμὲς** μὲ τὸ ποσὸν τῶν **ἡμερῶν** (χρόνος ἐργασίας), εἶναι ἀνάλογα (γιατί);.

Συνεχίζοντας ἔχομε : δρχ. ἐργ. ἡμ. δρχ.

$$X = 2250 \times \frac{10}{5} \times \frac{15}{10} = \frac{2250 \times 10 \times 15}{5 \times 10} = \frac{337.500}{50} = 6.750$$

Τί κάμαμε λοιπόν ;

1) Κατατάξαμε τὸ πρόβλημα.

2) Συγκρίναμε τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου Χ μὲ τὰ ἄλλα ποσά.

3) Πολλαπλασιάσαμε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κάθε κλάσμα τῶν τιμῶν ποὺ σχηματίζουν τὰ ἄλλα δύο ποσὰ – ἀντεστραμμένα – διότι τὰ ποσὰ ἦσαν **ἀνάλογα**. Τὰ προβλήματα αὐτὰ εἶναι τῆς **συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.**

Μάθημα 9ο.—Μὲ ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα

Παράδειγμα: 12 μαθηταὶ ἑτοιμάζουν τὸ παρτέρι τους στὸ σχολικὸ κῆπο, τὸ ὁποῖο εἶναι 80 τετραγ. μέτρα, σὲ 4 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἑτοιμάσουν 6 μαθηταὶ τὸ δικό τους, ποὺ εἶναι 40 τετρ. μέτρα;

Σύγκρισις τῶν ποσῶν. Τὰ ποσὰ **ἡμέρες - μαθηταί.**

α) Ὅταν οἱ μαθηταὶ εἶναι 12 ἑτοιμάζουν τὸ παρτέρι σὲ 4 ἡμέρες. Ὅταν οἱ μαθηταὶ εἶναι 6, εἶναι φυσικὸ τὸ παρτέρι νὰ ἑτοιμασθῇ σὲ διπλάσιες ἡμέρες. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα καὶ τὸ κλάσμα τοῦ ποσοῦ τῶν μαθητῶν θὰ γραφῇ ὅπως εἶναι. Ἔτσι : $4 \times \frac{12}{6}$.

β) Τὰ ποσὰ **τετρ. μέτρα** καὶ **ἡμέρες**. Τὰ 80 τετρ. μέτρα ἑτοιμάζονται σὲ 4 ἡμέρες. Τὰ 40 τετραγ. μέτρα θὰ ἑτοιμασθοῦν σὲ λιγώτερες ἡμέρες. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Ἄρα τὸ κλάσμα τῶν τετρ. μέτρων θὰ γραφῇ ἀντεστραμμένο.

Κατάταξις : 12 μαθ. ἑτοιμάζουν 80 τ. μ. σὲ 4 ἡμέρες
6 » » 40 τ. μ. σὲ Χ ; »

Λύσις : $X = 4 \times \frac{12}{6} \times \frac{40}{80} = \frac{1920}{480} = 4$ ἡμέρες.

Ἀπάντησις: Οἱ μαθηταὶ θὰ ἑτοιμάσουν τὸ παρτέρι τους σὲ 4 ἡμέρες.

Κανόνας 3ος.—Εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου Χ, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμόν, ἐπὶ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὰς δύο τιμὰς κάθε ὁμοειδοῦς ποσοῦ, ἀντεστραμμένα μέν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως εἶναι δέ, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Παρατηρήσεις. 1) Πρόσεχε τὴν κατάταξι τῶν ποσῶν ὥστε οἱ δύο τιμὲς κάθε ὁμοειδοῦς ποσοῦ νὰ εἶναι στὴν ἴδια στήλη.

2) Στὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου δίδονται καὶ περισσότερα τῶν τριῶν ποσῶν.

Προβλήματα

Ὁμάδα 1η. 127.—5 μοδίστρες ἔρραψαν σὲ 10 ἡμέρες 45 φουστάνια. Πόσα φουστάνια τοῦ ἰδίου μεγέθους θὰ ράψουν 8 μοδίστρες σὲ 15 ἡμέρες;

128.—Γιὰ τὴ μεταφορὰ 3.000 κιλῶν καπνοῦ σὲ ἀπόστασι 15 χιλιομέτρ., ζητᾶ ἕνας σωφὲρ 675 δραχμές. Πόσα θὰ ζητοῦσε ἂν μετέφερε 15.000 κιλά καὶ σὲ ἀπόστασι 25 χιλιομέτρων;

129.—Μία βρύσι ποὺ τρέχει συνέχεια 4 ἡμέρες ἀπὸ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα ἔτρεξε 3.200 κιλὰ νερό. Πόσο νερὸ θὰ βγάλη ἂν τρέχη ἐπὶ 16 ἡμέρες, ἀπὸ 12 ὧρες τὴν ἡμέρα;

130.—Γιὰ νὰ στρωθῆ ἕνας δρόμος 280 μέτρ. μῆκος καὶ 15 μέτρ. πλάτος χρησιμοποιήθηκαν 450 κυβικὰ μέτρα χαλίκι. Πόσα κυβ. μέτρα χαλικιοῦ θὰ χρησιμοποιηθοῦν γιὰ τὸ στρώσιμο δρόμου μήκους 560 μέτρ. καὶ πλάτους 10 μέτρων;

131.—Γιὰ τὸ χτίσιμο μιᾶς μάνδρας μήκους 30 μέτρων, πάχους 0.60 μ. καὶ ὕψους 1.20 μ. πληρώθηκαν 2.400 δραχ. Πόσα θὰ πληρωθοῦν γιὰ μάνδρα μήκους 45 μέτρων, πάχους 0,80 μ. καὶ ὕψους 2 μέτρων;

Ὁμάδα 2η. 132.—Ἕνας βοσκὸς γιὰ τὰ 60 πρόβατά του χρειάζεται 96 κιλὰ βαμβακόπητα γιὰ 8 ἡμέρες. Πόσα κιλὰ θὰ χρειασθῆ γιὰ 30 ἡμέρες, ἂν τὰ πρόβατά του αὐξηθοῦν κατὰ 25 ἀκόμη;

133.—Ἕνας ταχυδρόμος βαδίζοντας 10 ὧρες τὴν ἡμέρα διέτρεξε σὲ 8 ἡμέρες 480 χιλιόμετρα. Γιὰ νὰ διατρέξη 720 χιλιόμετρα σὲ 15 ἡμέρες πόσες ὧρες πρέπει νὰ βαδίση τὴν ἡμέρα;

134.—Ἕνα περσικὸ χαλὶ ποὺ ἔχει μῆκος 9 μέτρα καὶ πλάτος 4,5 μέτρα, πωλεῖται 24.300 δραχ. Ἐὰν εἶχε μῆκος 12 μέτρων καὶ πλάτος 6 μέτρων, πόσο θὰ ἔπρεπε νὰ πωληθῆ;

135.—Γιὰ τροφὴ 320 στρατιωτῶν ἐπὶ 50 ἡμέρας ἐχρειάσθησαν 75.000 δραχ. Γιὰ πόσες ἡμέρες θὰ φθάσουν 345.000 δραχ. γιὰ τροφὴ 800 στρατιωτῶν;

Προβλήματα
Μὲ ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα

Ὁμάδα 3η. 136.—Σὲ 10 ἡμέρες 8 ἐργάτες ἐπληρώθησαν 3.600 δραχμές. Πόσα θὰ πληρωθοῦν μὲ τὶς ἴδιες συνθῆκες ἐργαζόμενοι, 12 ἐργάτες γιὰ 7 ἡμέρες;

137.—25 ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα αὐλάκι 375 μέτρα σὲ 15 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάτες σκάβουν ἄλλο αὐλάκι 750 μέτρων σὲ 30 ἡμέρες;

138.—6 θεριστὲς χρειάστηκαν 7 ἡμέρες γιὰ νὰ θερίσουν ἕναν ἀγρὸ 84 στρεμμάτων Πόσα στρέμματα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ἀγροῦ θερισμένου ἀπὸ 9 ἐργάτες σὲ 5 ἡμέρες;

139.—Ἕνας ὅμιλος ἀπὸ 16 φοιτητὰς ἐπλήρωσε 840 δραχμὲς γιὰ ἕνα ταξίδι 168 χιλιομέτρων. Ἕνας ἄλλος ὅμιλος 25 φοιτητῶν κάνει ἕνα ταξίδι 96 χιλιομέτρων. Πόσα εἶναι τὰ ἔξοδα τῆς 2ας ὁμάδας καὶ πόσα καὶ τῶν δύο ὁμίλων ;

140.—Ἕνας ἀγρότης μοιράζει ἑβδομαδιαίως 168 κιλὰ ἄχυρο σὲ 8 ἄλογα. Πόσα κιλὰ ἄχυρο θὰ διαθέση ὁ γείτονάς του ἕνα μῆνα γιὰ τὰ 5 ἄλογά του, δίνοντας ἴδια μερίδα σὲ κάθε ἄλογο ;

141.—Ἕνας ἔμπορος ἐπλήρωσε 780 δραχμὲς γιὰ νὰ φωτίση τὸ κατάστημά του μὲ ἠλεκτρικὸ 5 ὧρες καθημερινῶς ἐπὶ 48 ἡμέρας. Τί θὰ πληρώση γιὰ νὰ τὸ φωτίση 4 ὧρες κάθε μέρα ἐπὶ 75 συνέχεια ἡμέρας ;

142.—9 ἐργάτες σκάβουν ἕνα κτῆμα σὲ 7 ἡμέρες ἐργαζόμενοι 6 ὧρες τὴν ἡμέρα. 14 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸ κτῆμα αὐτό ;

Ὁμάδα 5η. 143.—Ἕνας ἐργάτης πρέπει νὰ πάρη 680 δραχμὲς γιὰ 17 ἡμέρες ἐργαζόμενος 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ἀλλὰ δὲν ἐργάσθηκε παρὰ 14 ἡμέρες καὶ μόνον 7 ὧρες καθημερινῶς. Τί θὰ πάρη ;

144.—7 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα χρειάσθηκαν 15 ἡμέρες γιὰ νὰ κάνουν ἕνα δρόμο 1.750 μέτρων. Πόσες ἡμέρες 10 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 9 ὧρες κάθε ἡμέρα θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ κάμουν ἕνα δρόμο 4.500 μέτρων ;

145.—Γιὰ νὰ σκάψουν ἕνα χαράκωμα μήκους 105 μ., φάρδος 1,80 μ. καὶ βάθος 0,50 μ. ἐπλήρωσαν 840 δραχμές. Πόσα θὰ πληρώσουν γιὰ ἕνα ἄλλο χαράκωμα μήκους 186 μέτρων, φάρδους 2,80 καὶ βάθους 1,50.

146.—Μὲ 32,20 μέτρα ὕφασμα ποὺ εἶχε φάρδος 0,75 μ., ἔκαναν 10 παιδικὲς ποδιές. Γιὰ νὰ κάνουν 12 παρόμοιες ποδιὲς ἀπὸ ἕνα ὕφασμα 0,70 μ. φάρδους, πόσα μέτρα ὑφάσματος πρέπει νὰ χρησιμοποιήσουν ;

Ὁμάδα 6η. 147.—Ἕνας ποδηλάτης διατρέχει μίαν ἀπόστασι 850 χιλιομέτρων, σὲ 34 ὧρες, μὲ ταχύτητα 25 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διατρέξη 750 χιλιόμετρα μὲ ταχύτητα 30 χιλιόμετρα τὴν ὥρα ;

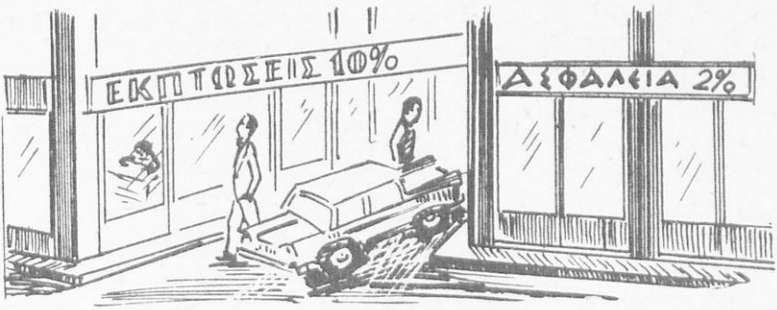
148.—18 μέτρα ὕφασμα μὲ πλάτος 0,45 μ. ἀξίζει 900 δραχμές. Πόσα ἀξίζουν 75 μέτρα μὲ πλάτος 0,90 τοῦ μέτρου ;

149.—4 ἐργάτες μὲ 5 ὧρες ἐργασία τὴν ἡμέρα, ὀργώνουν ἕνα χωράφι 15 στρεμμάτων, σὲ 4 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάτες ποὺ ἐργάζονται ἴδια μὲ τοὺς ἄλλους μὲ 8 ὧρες ἐργασίας τὴν ἡμέρα, θὰ ὀργώσουν ἕνα χωράφι 24 στρεμμάτων σὲ 8 ἡμέρες ;

150.—Οἰκόπεδον πλάτους 30 μέτρων, μήκους 50 μέτρων περιφράσσεται ἀπὸ 10 ἐργάτες, σὲ 8 μέρες, ποὺ ἐργάσθηκαν 6 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες μὲ 8 ὧρες ἐργασίας ἡμερησίως, 25 ἐργάτες θὰ περιφράξουν ἕνα οἰκόπεδο πλάτους 75 μέτρων καὶ μήκους 100 μέτρων ;

151.—Μὲ 15 μέτρα ὑφάσματος πλάτους 0,40 κάνομε 6 παιδικὲς ποδιές. Πόσες ποδιὲς θὰ κάνωμε μὲ 45 μέτρα πλάτους 0,80.

152.— 9 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα τελειώνουν τὰ $\frac{2}{10}$ ἑνὸς ἔργου σὲ 25 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες ἂν προστεθοῦν ἄλλοι 6 ἐργάτες θὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπο τοῦ ἔργου ἂν ἐργασθοῦν 6 ὧρες τὴν ἡμέρα ;



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΕΡΙ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Μάθημα 10ο.—Τί εἶναι ποσοστά.

᾿Εργασία: ᾿Απαντῆστε τί σημαίνουν τὰ παρακάτω:

1) Περνώντας τὴν ὁδὸ Σταδίου, στὴν ᾿Αθήνα, βλέπω μία μεγάλη ἐπιγραφὴ σ᾿ ἕνα κατάστημα: «Μεγάλαι ἐκπτώσεις. **᾿Εκπτώσεις** *$20^{0}/_{0}$».*

2) ῾Η Κυβέρνησις κάνει αὔξησι στοὺς μισθοὺς τῶν δημοσίων ὑπαλλήλων κατὰ $30^{0}/_{0}$.

3) ῞Ενας φοιτητὴς γιὰ νὰ νοικιάση δωμάτιο, καταφεύγει σ᾿ ἕνα μεσίτη. ῾Ο μεσίτης τοῦ παίρνει **μεσιτεία** *$5^{0}/_{0}$.*

*4) Ζυγίζουμε 5 κιβώτια γεμάτα σαποῦνι καὶ μετὰ τὰ ζυγίζουμε ἄδεια. Λέμε τότε «***τὸ ἀπόβαρον***» εἶναι $3^{0}/_{0}$.*

5) Τὸ σαποῦνι ὅταν ξεραθῆ χάνει $15^{0}/_{0}$ τοῦ ἀρχικοῦ του βάρους.

6) Τὸ Κράτος γιὰ νὰ εἰσπράξη χρήματα βάζει φόρους. ῎Ετσι στοὺς ἐμπόρους γιὰ τὴν Πρόνοια τῆς Βορείου ῾Ελλάδος βάζει φόρο $5^{0}/_{0}$ ἐπὶ τῶν εἰσπράξεων ἑνὸς μηνός.

7) ᾿Ασφάλισε κάποιος τὸ κατάστημά του σὲ μία ἀσφαλιστικὴ ῾Εταιρεία καὶ πλήρωσε γιὰ **ἀσφάλιστρα** *$1^{0}/_{00}$.*

8) ῾Ο πληθυσμὸς μιᾶς χώρας κατὰ τὸ 1919 αὐξήθηκε $6^{0}/_{0}$.

9) Τὸ **ποσοστὸ** *τῶν θανάτων σὲ μιὰ πόλι εἶναι $2^{0}/_{0}$ κάθε χρόνο, ἐνῶ τῶν γεννήσεων εἶναι $8^{0}/_{0}$.*

10) ῞Ενας κουλουρὰς πωλεῖ τὰ κουλούρια του μὲ **κέρδος** *$20^{0}/_{0}$.*

11) ῞Ενας ἔμπορος ἀπὸ τὸ ἐμπόρευμά του εἶχε ζημία $20^{0}/_{0}$

Σὲ ὅλα αὐτὰ βλέπετε μερικὲς νέες ἔννοιες : **ποσοστό, κέρδος, ζημία, ἀσφάλιστρα, μεσιτικὰ** κλπ.

Ἀκόμη βλέπετε ὅτι ὅλα αὐτὰ ἐκφράζονται μὲ τὶς φράσεις **τοῖς ἑκατὸν** (%) ἢ **τοῖς χιλίοις** (‰).

Ζητῆστε γιὰ ὅλα τὰ παραπάνω, πληροφορίες, καὶ νὰ τὶς ἀνακοινώσετε στὴν τάξι.

Μάθημα 11ο.—Κέρδος—ζημία.

α) Π α ρ ά δ ε ι γ μ α: Ὁ μπακάλης ἑνὸς χωριοῦ ἀγόρασε λάδι μὲ 12 δραχμὲς τὸ κιλὸ καὶ τὸ πωλεῖ 15 δραχμές.

Παρατηρήσεις. Ἐδῶ παρατηροῦμε ὅτι ὁ μπακάλης πωλεῖ τὸ λάδι ἀκριβώτερα ἀπ' ὅ,τι τὸ ἀγοράζει. Δηλαδὴ ἡ πώλησις εἶναι 3 δρχ. μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀγορά. Γιατί γίνεται αὐτό ;

Ὁ ἔμπορος ἢ ὁ μπακάλης ἢ ὁποιοσδήποτε ἄλλος ποὺ ἐμπορεύεται, δὲν πωλεῖ τὸ ἐμπόρευμά του ὅσο τὸ ἀγοράζει, ἀλλὰ προσθέτει καὶ κάτι παραπάνω. Αὐτὸ τὸ παραπάνω εἶναι τὸ **κέρδος**.

Ἐργασίες *: 1) Ἀναφέρετε παραδείγματα ἀπὸ τὴ ζωή, ποὺ νὰ φαίνεται τὸ* ***κέρδος***

2) Νὰ βγάλετε τὸ συμπέρασμα τί εἶναι ***κέρδος*** *καὶ νὰ τὸ γράψετε στὸ τετράδιό σας.*

β) Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Ἕνας μανάβης ἀγόρασε 75 κιλὰ τομάτα πρὸς 4 δραχμὲς τὸ κιλό. Εἰσέπραξε ὅμως μετὰ τὴν πώλησι 225 δραχμές.

Ἅμα ὑπολογίσωμε θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ὁ μανάβης ἐνῷ εἶχε δώσει 300 δραχμὲς πῆρε μόνο 225 δραχμές. Δηλαδή, ἔχασε ἀπὸ τὰ χρήματά του ἕνα μέρος. Τὸ μέρος τῶν χρημάτων ποὺ χάθηκε εἶναι ἡ **ζημία**.

Ζημία. μπορεῖ νὰ πάθη ὁποιοσδήποτε ἀπὸ πολλὲς αἰτίες. Μιὰ πυρκαϊά, μία ἀτυχία, μία πλημμύρα, ἡ ὑποτίμησι τοῦ νομίσματος (πληθωρισμός), φέρνουν οἰκονομικὲς καταστροφὲς μεγάλες ἢ μικρές. Τότε ἀντὶ **κέρδος** ἔχομε **ζημία**.

Ἐργασίες *: 1) Ἀναφέρετε παραδείγματα, ποὺ νὰ φαίνεται ἡ ζημία. 2) Γράψετε τὸ συμπέρασμα «****τί εἶναι ζημία****» στὸ τετράδιό σας. 3) Ρωτήσετε καὶ κάνετε ἀνακοίνωσι στὴν τάξι, τί εἶναι «****πτῶσις τοῦ νομίσματος καὶ πληθωρισμός****».*

Παρατηρήσεις: Ὡς τώρα εἴδατε δύο περιπτώσεις: Στὴν πρώτη ὅταν ἕνας κερδίζη καὶ στὴν δεύτερη ὅταν ζημιώνη. Καὶ ὅταν μὲν κερδίζη, εἰσπράττει τὸ ***ἀρχικὸν*** *ποσόν μὲ τὸ κέρδος, δηλαδή*

ἕνα ***αὐξημένο*** *ποσὸ ποὺ εἶναι ἡ* $\boxed{\text{ἀρχικὴ ἀξία + κέρδος}}$

Ὅταν δέ, ζημιώνη, εἰσπράττει τὸ ἀρχικὸν ποσὸν ***ἐλαττωμένο*** *κατὰ τὴν ζημία δηλ.* $\boxed{\text{Ἀρχικὴ ἀξία — Ζημία = Ἐλαττωμένο ποσὸν}}$

Μάθημα 12ο.— Τὸ τόσο τοῖς ἑκατὸ (%) ἢ τόσο τοῖς χιλίοις (‰).

α) Ὅταν λέμε ὅτι ἕνας ἔμπορος κάνει ἔκπτωσι 10%, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ πελάτης ἀγοράζοντας ἕνα ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δραχμῶν, πληρώνει μόνον 90 δραχμές.

β) Λέγοντας ὅτι ὁ καφὲς ὅταν καβουρντισθῆ χάνει 20% τοῦ βάρους του, ἐννοοῦμε ὅτι ἂν καβουρντίσωμε 100 κιλὰ καφέ, ὁ καβουρντισμένος θὰ ζυγίζη μόνον 80 κιλά.

Παρατηρήσεις. Τόσον ἡ ἔκπτωσις, ὅσον καὶ τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία, τὸ ἀπόβαρον, τὰ ἀσφάλιστρα, ἡ μεσιτεία, ὑπολογίζονται ὅπως βλέπετε, μὲ βάσι ἀρχικὸ ποσὸ 100 ἢ 1.000 μονάδων καὶ γράφεται ἔτσι:

(τόσο τοῖς ἑκατὸ % ἢ τόσο τοῖς χιλίοις ‰).

Π ρ ό β λ η μ α. Ἕνας κουλουρὰς πωλεῖ τὰ κουλούρια του μὲ 20% κέρδος. Πόσο πωλεῖ τὸ κάθε κουλούρι, ἂν τὸ ἀγοράζη 50 λεπτ.

Κ α τ ά τ α ξ ι ς : Ἂν ἡ ἀγορὰ ἦταν 100 λεπτὰ τὸ κέρδος εἶναι 20 λεπτὰ
τώρα ποὺ ἡ ἀγορὰ εἶναι 50 » τὸ κέρδος εἶναι X ; »

$$\text{Λύσις } X = 20 \times \frac{50}{100} = \frac{1.000}{100} = 10 \text{ λεπτά.}$$

Ὥστε τὸ κέρδος σὲ κάθε κουλούρι εἶναι 10 λεπτά.

Ἀγορὰ λοιπόν... 50 λεπτὰ **(ἀρχικὸ ποσόν).**
σὺν 10 » **κέρδος**
πώλησις... 60 » **αὐξημένον ποσόν.**

Π ρ ό β λ η μ α : Ἀγοράζω ἕνα παλτὸ ποὺ ἔχει 1200 δραχμὲς μὲ ἔκπτωσι 30%. Πόσο εἶναι ἡ ἔκπτωσι καὶ πόσο τὸ πλήρωσα;

Κ α τ ά τ α ξ ι ς "Αν ἡ ἀξία εἶναι 100 δραχμ. ἡ ἔκπτωσις εἶναι 30 δραχμ.
'Αφοῦ ἡ ἀξία εἶναι 1 200 » » » X ; »

Λύσις : $X = 30 \times \frac{1200}{100} = 360$ δραχμὲς (ἔκπτωσις).

Τιμὴ ἀγορᾶς 1200 δραχμὲς = τὸ ἀρχικὸ ποσὸ
Πλὴν 360 » = ἔκπτωσις

Τιμὴ πωλήσεως 840 δραχμὲς = τὸ ἐλαττωμένο ποσό.

Π ρ ό β λ η μ α: **Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως εἶναι 40 000 κάτοικοι. Πόσος θὰ γίνῃ σ' ἕνα χρόνο ἂν ἡ αὔξησις εἶναι 10‰;**

Κ α τ ά τ α ξ ι ς : Στοὺς 1.000 κατοίκους αὔξησις ... 10 κάτοικοι
» 40.000 » » ... X ; »

Λύσις : $X = 10 \times \frac{40.000}{1\,000} = 400$ κάτοικοι

Τὸ ποσοστὸ αὐξήσεως σὲ 1 χρόνο, εἶναι 400 κάτοικοι.

Ἐργασίες : *1) Ἀπαντήσατε τί εἶναι κέρδος, τί εἶναι ζημία, τί εἶναι ἔκπτωσις. 2) Συγκρίνετε τὰ ποσὰ τῶν παραπάνω παραδειγμάτων. Τί ποσὰ παρατηρεῖτε; 3) Πῶς ὑπολογίζεται τὸ ποσό; 4) Νὰ βγάλετε μόνοι σας τὸ συμπέρασμα.*

Πίνακας γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ποσοστοῦ %

Γιὰ	**τὸν ὑπολογισμὸ**	**τοῦ**	**50 %**	**παίρνομε**	**τὸ μισὸ**	**τοῦ**	**ἀρχ. ποσοῦ**
»	»	»	**25 %**	»	**τὸ τέταρτο**	»	»
»	»	»	**10 %**	»	**τὸ δέκατο**	»	»
»	»	»	**5 %**	»	**τὸ εἰκοστὸ**	»	»

'Ασκήσεις προφορικὲς

153. Ὑπολογίσετε μὲ κέρδος 50% τὸ ποσοστὸν τῶν 1.000 δραχ., 500 δραχμῶν, 820 δραχ., 2.000 000 δραχμῶν.
154. Πόσο εἶναι τὸ **κέρδος** μὲ 10% τῶν 700, 900, 1.500 δραχμῶν.
155. Πόση εἶναι ἡ **ἔκπτωσις** μὲ 25% τῶν 400, 600, 800 δραχμῶν.
156. Πόση εἶναι ἡ **ζημία** μὲ 10% τῶν 450, 680, 950 δραχμῶν.
157. Ὑπολογίσετε τὴ ζημία τῶν 600 δραχμῶν, α) μὲ 20%, β) μὲ 10%.

Μάθημα 13ο — Προβλήματα ποσοστῶν

Περίπτωσι 1η. Ὅταν ζητῆται μόνο τὸ ποσοστόν. (Κέρδος ἢ ζημία)..

α) Παράδειγμα. Ἕνας μπακάλης πωλεῖ τὴ ζάχαρι μὲ κέρδος 20%. Πόσο εἶναι τὸ κέρδος του ἂν πωλήσῃ ζάχαρι ἀξίας 945 δραχμῶν;

Κατάταξις: Ἀξία 100 δρχ· τὸ κέρδος εἶναι 20 δραχ.
» » 945 » » » » X; ;

Λύσις: $X = \frac{20 \times 945}{100} = \frac{18.900}{100} = 189$ δραχ.

Παρατήρησις. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἴχαμε **κέρδος**, μπορεῖ ὅμως νὰ ἦταν καὶ **ζημία.**

Περίπτωσις 2α. Ὅταν ζητῆται τὸ ηὐξημένο ἢ ἐλαττωμένο ποσόν. Γνωστά: Τὸ τόσο τοῖς % καὶ ἡ ἀρχικὴ ἀξία.

β) Παράδειγμα. Ἕνα σχολεῖο ἀγοράζει βιβλία γιὰ τὰ φτωχὰ παιδιὰ ἀπὸ ἕνα βιβλιοπωλεῖο μὲ ἔκπτωσι 25%. Πόσα θὰ πληρώσῃ ἂν ἀγοράσῃ βιβλία ἀξίας 2.800 δραχ.;

Κατάταξις: Ἀξία βιβλίων . . . 100 δραχ. ἔκπτωσις 25 δραχ·
» » 2.800 » » X; »

Λύσις: $X = 25 \times \frac{2.800}{100} = 700$ δραχ.

Ἡ ἔκπτωσις λοιπὸν στὸ ποσὸν τῶν 2.800 δραχ. εἶναι 700 δραχ. Ἀλλὰ στὸ πρόβλημα ζητεῖται τὸ ποσὸν ποὺ θὰ πληρωθῇ. Ἀφαιροῦμε λοιπὸν τὴν ἔκπτωσι ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ ποσὸ καὶ ἔχομε:

2.800 − 700 = 2.100 ἐλαττωμένο ποσό.

Λύσις β′: Ἀξία 100 δρχ. — (πλὴν) ἔκπτωσις 25 δρχ. πληρωτέον ποσὸν = 75 δρχ
Κατάταξις: Γιὰ βιβλία ἀξίας . . . 100 δρχ. πληρώνομε 75 δρχ.
» » » 2.800 » » X; »

Λύσις: $X = 75 \times \frac{2.800}{100} = 2.100$ δραχμαί.

***Ἐρωτήσεις:** Τί κάναμε στὸν α′ τρόπο καὶ τί στὸν β′; 2) Βγάλετε συμπέρασμα πῶς βρίσκομε τὸ **ποσοστὸ** καὶ τὸ **ηὐξημένο** ἢ **ἐλαττωμένο** ποσόν.*

Προβλήματα

Ὁμάδα 1η. (Προφορικά) α) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσοστὸ τῶν 1.000, 6.000, 22.000 50.000 δραχ. μὲ 10% καὶ 12‰.

β) Πόσο εἶναι τὸ 20°/₀ τῶν 200 λιρῶν, 500 λιρῶν, 1.000 λιρῶν;

Γραπτῶς. 158. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ὑφάσματα καὶ πλήρωσε 7 500 δραχ. Πόσα θὰ κερδίση ἂν τὰ πωλήση μὲ 25°/₀ κέρδος;

159. Ὁ φόρος γιὰ τὰ ἐνοίκια εἶναι 33°/₀. Πόσα θὰ πληρώση κάποιος γιὰ τὸ σπίτι του, ἂν παίρνη ἀπὸ ἐνοίκια 9.600 δραχμὲς σὲ ἕνα χρόνο;

160.—Ἕνας νοίκιασε ἕνα σπίτι γιὰ ἕνα χρόνο κι ἔδωσε 15.000 δρχ. Πόσα ἔδωσε στὸ μεσίτη ὅταν τὰ μεσιτικὰ εἶναι 5°/₀;

161.—Κάποιος ἀγοράζει λάδι μὲ 24 δραχ· τὸ κιλὸ καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 20°/₀ Πόσο κερδίζει στὸ κιλό;

Ὁμάδα 2η —162.—Ἕνας μεταπωλητὴς ἀγοράζει ἕνα παλτὸ 750 δραχμές. Τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 30°/₀. Πόσα εἶναι τὸ κέρδος του;

163.—Ὅταν ὁ μπακάλης ἀπὸ μία ἀγορὰ ζημιώθηκε 15°/₀. Πόση εἶναι ἡ ζημία του σὲ ἐμπορεύματα ἀξίας 150.000 δραχμῶν;

164.—Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνεται κάθε χρόνο 8°/₀. Πόσο εἶναι ἡ αὔξησις ὅταν ὁ πληθυσμὸς εἶναι 24.000 κάτοικοι;

165—Τὸ κοινὸ σαπούνι περιέχει 8°/₀ ποτάσσα. Πόση ποτάσσα περιέχεται σὲ 450 κιλὰ σαπούνι;

166.—Πόσο εἶναι τὸ ἀπόβαρο, καὶ πόσο τὸ καθαρὸ λάδι 18 βαρελιῶν, τὰ ὁποῖα ζυγίζουν 200 κιλὰ τὸ καθένα μικτὸν βάρος ὅταν τὸ ἀπόβαρον ὑπολογίζεται σὲ 12,5°/₀

Ὁμάδα 3η. 167.—Σὲ ἕνα σχολεῖο ἐγράφτηκαν 500 μαθηταί. Στὸ τέλος 5°/₀ τῶν μαθητῶν ἀπεκλείσθησαν ἀπὸ τὶς ἐξετάσεις, καὶ 8°/₀ ἀπερρίφθησαν. Νὰ εὑρεθῆ: α) Πόσοι μαθηταὶ ἀπερρίφθησαν. β) Πόσοι ἀπεκλείσθησαν, καὶ γ) πόσοι προβιβάσθηκαν;

168. — Ἕνας μπακάλης ἀγοράζει τὸ ρύζι 8 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 25°/₀. Πόσο πωλεῖ τὸ κιλό;

169 --Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε ἐμπορεύματα ἀξίας 15.000 δρχ· μὲ κέρδος 20°/₀. Πόσα εἰσέπραξε;

170.--Οἱ μισθοὶ τῶν δημοσίων ὑπαλλήλων αὐξήθηκαν κατὰ 20°/₀. Πόσος θὰ εἶναι ὁ μισθὸς ὑπαλλήλου τώρα, ἂν ἔπαιρνε 1.800 δραχμές;

171.--Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἀνέρχεται σὲ 60.000 κατοίκους. Πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμὸς μετὰ ἀπὸ 1 χρόνο, ἂν αὐξάνη κατὰ 50°/₀₀;

Ὁμάδα 4η. 172.--300 γραμμάρια ἀλεύρι πόσο θὰ ζυγίζη μετὰ τὸ ζύμωμα καὶ ψήσιμο, ὅταν αὐξάνη κατὰ 30°/₀;

Ζητεῖται ἐλαττωμένο ποσὸν

173.--Ὁ πόλεμος ἐμείωσε τὸν πληθυσμὸ ἑνὸς χωριοῦ ἀπὸ 2.500 κατὰ 20 °/₀ Πόσος εἶναι τώρα ὁ πληθυσμὸς τοῦ χωριοῦ;

174.-Τὸ νωπὸ σαπούνι χάνει 5°/₀ τοῦ ἀρχικοῦ του βάρους ὅταν ξεραθῆ. Πόσο θὰ ζυγίσουν 3.500 κιλὰ νωπὸ σαπούνι ὅταν ξεραθῆ;

175·--Τὸ μικτὸν βάρος ἑνὸς βαρελιοῦ κρασιοῦ, εἶνα 720 κιλ. Πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ κρασὶ ὅταν τὸ ἀπόβαρο τοῦ βαρελιοῦ εἶναι 5°/₀;

176.--Ἕνας γεωργὸς δίνει στὴ συγκέντρωσι 12°/₀ κιλὰ σιτάρι ἀπὸ τὴν παραγωγή του. Πόσο σιτάρι θὰ τοῦ μείνη, ἂν ἡ παραγωγὴ τῆς χρονιᾶς εἶναι 4.800 κιλά.

Μάθημα 14ο — Όταν εἶναι ἄγνωστα τὸ % ἢ ‰

α) **Π ρ ό β λ η μ α.** Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε μεταξωτὰ ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιο τῆς Ἀθηναΐδος καὶ ἔδωσε 7.000 δραχμές. Ἀπὸ τὴν πώλησί τους, εἰσέπραξε 9450 δραχμές. Π ό σ ο τοῖς % ἐκέρδισε ;

Ἀνάλυσις : Βλέπετε ἐδῶ 2 ποσὰ γνωστὰ	α) Τὸ αὐξημένο ποσὸν=9450 δραχ.=πώλησις β) Τὸ ἀρχικὸν ποσὸν =7000 » =ἀγορὰ

Ἂν ἀφαιρέσωμε, ἔχομε διαφορὰ=2450 » =ὁλικὸ κέρδος.

Σκέψις : Μετὰ τὴν ἀφαίρεσι αὐτή, ποὺ βρήκαμε τὸ κέρδος, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ποσοστὸ τῶν 100 μονάδων (%) μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξις : **Σὲ ἐμπόρευμα ἀξίας 7.000 δρχ. εἶχε 2.450 δρχ' κέρδος**
» » » 100 » » X ; » »

Λ ύ σ ι ς : $X = 2.450 \times \frac{100}{7000} - \frac{245.000}{7.000} = 35$ δραχμές.

Ἀ π ά ν τ η σ ι ς : **Κέρδισε 35%**

β) **Π ρ ό β λ η μ α.** Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε λάδι ἀξίας 36.000 δραχ. καὶ πλήρωσε μόνο 28.800 δραχ Πόσο τοῖς % ἔκαμε ἔκπτωσι ὁ λαδέμπορος ;

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς : Ἀρχικὸ ποσὸν . . . . . =36.000 δραχ.
Ἀφαιρῶ τὸ ἐλαττωμ. ποσ. =28.800 »
Ἔχω ἔκπτωσι . . . . . . = 7.200 »

Κ α τ ά τ α ξ ι ς : **Γιὰ λάδι ἀξίας 36.000 δραχ. = ἔκπτ. 7.200 δραχ.**
» » » 100 » = X ; »

Λ ύ σ ι ς : $X = \frac{7.200 \times 100}{36.000} = \frac{720.000}{36.000} = 20$ δραχ.

Ἡ ἔκπτωσις ποὺ ἔγινε εἶναι 20%

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

Ὁμάδα 1η Προφορικά.—177. Πόσο τοῖς % εἶναι ἡ ἔκπτωσις σὲ ἐμπορεύματα ἀξίας 10.000 δραχμῶν ποὺ πληρώθησαν 9.000 δραχμές.

178.—Σὲ ἐμπόρ. ἀξίας 200.000 ποὺ πληρώθηκαν 180.000
179.— » » » 300.000 » » 210.000
180.— » » » 1.000.000 » » 800.000

Πόσο τοῖς $^0/_0$ εἶναι τὸ ἀπόβαρο:

Προφορικῶς: Σὲ μικτὸ βάρος 100 κιλῶν κρασὶ μὲ ἀπόβαρ. 10 κιλά;

»	»	»	800	»	»	»	»	40	» ;
»	»	»	200	»	»	»	»	20	» ;
»	»	»	400	»	»	»	»	80	» ;

Ὁμάδα 2α. Γραπτῶς –181.–Ἀγόρασε μιὰ μητέρα ὑφάσματα ἀξίας 4.000 δραχ. καὶ ἐπέτυχε νὰ πάρη ἔκπτωσι 800 δραχ. Πόση ἔκπτωσι τῆς ἔγινε στὶς 100 δραχμές;

182–Ἕνας μικροπωλητὴς ἀπὸ ἐμπορεύματα ἀξίας 9.000 δραχ. ἐκέρδισε 1080 δραχ. Πόσο $^0/_0$ ἦτο τὸ κέρδος του;

183.–450 κιλὰ μεταλλεύματος, ἔδωσαν καθαρὸ σίδηρο 33,75. Πόσο $^0/_0$ εἶναι ὁ καθαρὸς σίδηρος;

184.–Ἕνας κτηματίας ἀγόρασε κτήματα ἀξίας 864 000 δραχ. καὶ τὰ ἐπώλησε ἀντὶ 1.036.800 δραχ. Πόσο τοῖς $^0/_0$ ἐκέρδισε:

Ὁμάδα 3η.—185.--Ἕνας ὑπάλληλος ἔπαιρνε μισθὸ 2.750 δραχ. τὸν μῆνα. Τώρα παίρνει 3.300 δραχ. Πόσο τοῖς $^0/_0$ αὐξήθηκε ὁ μισθός του;

186.–Στρατιῶτες κάνοντας σκοποβολὴ ἔρριψαν 12.000 σφαῖρες καὶ ἐπέτυχαν τὸ στόχο 8.400 σφαῖρες. Πόσο τοῖς $^0/_0$ ἐπέτυχαν;

187.—Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἦτο 312 250 κάτοικοι καὶ τώρα εἶναι 349.720. Πόσο τοῖς $^0/_0$ αὐξήθηκε;

188.–Μία οἰκοδομὴ κοστίζει 2.560 λίρες. Ἐπωλήθηκε ὅμως μόνον 1792 λίρες. Πόσο τοῖς $^0/_0$ ἐζημιώθηκε ὁ ἰδιοκτήτης.

Διάφορα προβλήματα ποσοστῶν

Ὁμάδα 4η.--189.--Ἕνας γεωργὸς χρεωστοῦσε στὴν Τράπεζα 8.000 δραχ. Ἡ Τράπεζα τοῦ ἔκανε ἔκπτωσι καὶ ἐκράτησε μόνο 5 200 δραχ. Πόσο τοῖς $^0/_0$ ἔγινε ἔκπτωσις.

190.–Ἀπὸ τὴν πτῶσι τοῦ νομίσματος ἕνας ἐμπορευόμενος εἶχε ζημία 25 τοῖς $^0/_0$. Πόση εἶναι ἡ ζημία εἰς δραχμάς, σὲ ἐμπορεύμα ἀξίας 850 λιρῶν στερλινῶν; (ἡ λίρα νὰ ὑπολογισθῆ μὲ 300 δρχ).

191.– Ἀνέμιξε κάποιος, βούτυρο μὲ λίπος. Τὸ λίπος ἦταν τὰ 17,5 τοῖς $^0/_0$ τοῦ βάρους τοῦ μίγματος. Πόσο εἶναι τὸ βούτυρο καὶ πόσο τὸ λίπος σὲ μικτὸ βάρος 180 κιλῶν;

192.–Ἕνας δημόσιος ὑπάλληλος παίρνει μισθὸ 3.800 δραχμὲς τὸ μῆνα. Ἀπὸ αὐτὲς τοῦ κρατοῦν 5$^0/_0$ γιὰ τὴ σύνταξί του καὶ 3 $^0/_0$ γιὰ τὸ Μετοχικὸ Ταμεῖο. α) Πόσα παίρνει καθαρὰ τὸ μῆνα καὶ β) πόσα τὸ χρόνο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Α'. ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

Μάθημα 15ο. – Τὸ χρῆμα

Ὁ ἄνθρωπος δὲν μπορεῖ νὰ ζήσῃ μόνος του. Ὁ καθένας ἔχει τὴν ἀνάγκη τοῦ ἄλλου. Γιὰ τὴν ἐξυπηρέτησι τῶν ἀναγκῶν του, μεταχειρίζεται πολλὰ μέσα. Ἕνα ἀπὸ τὰ μέσα αὐτά, ἀπαραίτητο στὴ ζωή, εἶναι καὶ τὸ **χρῆμα**. Τὸ χρῆμα χρειάζεται στὶς διάφορες συναλλαγές μας.

2. Δάνεια. Ὅταν ἕνας ἄνθρωπος θέλει νὰ κάμῃ μία ἐργασία π.χ. μία ἐπιχείρησι καὶ δὲν τοῦ φθάνουν τὰ χρήματα, πηγαίνει σὲ κάποιον ἄλλον, ποὺ ἔχει καὶ ζητεῖ τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ χρειάζεται.

Κάθε ἄνθρωπος ὅταν ἔχῃ ἀνάγκη χρημάτων καὶ ἐμπνέει ἐμπιστοσύνη, δανείζεται ἀπὸ ἐκείνους ποὺ ἔχουν, ἢ ἀπὸ ἐπιχειρήσεις ποὺ λέγονται **Τράπεζες.**

Ὅποιος δανείζει χρήματα λέγεται **δανειστὴς** καὶ ὅποιος δανείζεται, λέγεται, **ὀφειλέτης** ἢ **χρεώστης.**

3. Οἱ Τράπεζες εἶναι ὀργανισμοὶ (ἐπιχειρήσεις) ποὺ δουλειά τους εἶναι νὰ δέχωνται καταθέσεις καὶ νὰ δανείζουν σὲ τρίτους, μὲ τὸ σκοπὸ νὰ κερδίζουν καὶ αὐτές. Γενικὰ ἐπειδὴ διαθέτουν τεράστια κεφάλαια, εἶναι σὲ θέσι νὰ ἐξυπηρετοῦν τὶς χίλιες δυὸ ἀνάγκες τῶν ἀνθρώπων. Τέτοιες Τράπεζες εἶναι πολλὲς μὲ κεντρικὰ καταστήματα στὴν Πρωτεύουσα καὶ ὑποκαταστήματα στὶς περισσότερες πόλεις τῆς πατρίδας μας.

Ἐργασίες : 1) Φέρετε πληροφορίες γιὰ τὸ χρῆμα, τὰ νομίσματα καὶ γιὰ τὴν ἱστορία τους. 2) Τί ξέρετε σχετικὰ γιὰ τὰ **δάνεια**, ποιὸς δανείζει στὸ χωριό σας, πῶς δανείζει, καὶ τί εἶναι τὰ **ἀγροτικὰ δάνεια** ; 3) Ἀναφέρετε μερικὲς Τράπεζες. 4) Ποιὰ Τράπεζα ἐκδίδει τὸ Χαρτονόμισμα ; 5) Τί εἶναι Ἀγροτικὴ Τράπεζα; 6) Γιατί οἱ Τράπεζες λέγονται **πιστωτικοὶ** ὀργανισμοί !

Β' ΤΟΚΟΣ

Μάθημα 16ο.—Τί εἶναι Τόκος

α) Ὅταν ἕνας δανείζη σὲ κάποιον ἄλλον, εἶναι δίκαιο νὰ παίρνη ἐκτὸς ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ δάνεισε καὶ ἕνα κέρδος γιὰ τὸ χρονικὸ διάστημα, ποὺ δανείζει τὰ χρήματά του. Ἔτσι καὶ γίνεται.

Τὸ κέρδος ποὺ παίρνει ὁ δανειστής, εἶναι ἀνάλογο μὲ τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ δάνεισε. Τὸ κέρδος αὐτὸ λέγεται **Τόκος**

Συμπέρασμα.—Τόκος (Τ) λέγεται τὸ κέρδος, ποὺ παίρνει ἐκεῖνος, ποὺ δανείζει τὰ χρήματά του.

β) Τὸ ποσὸ ποὺ δίνομε ὡς δάνειο, λέγεται **Κεφάλαιον** (Κ). Π.χ. Δανείστηκα 5.000 δρχ. Αὐτό εἶναι τὸ Κεφάλαιο.

γ) Τὸ κεφάλαιο ποὺ δανείζεται, δίδεται γιὰ ὡρισμένο **χρόνο**. Ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ τὸ ἐπιστρέψη μαζί μὲ τὸν τόκο του μετὰ ἀπὸ ἕνα χρονικὸ διάστημα ποὺ συμφωνεῖ μὲ τὸ δανειστή. Ὁ χρόνος (ἢ ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου), μπορεῖ νὰ εἶναι **ἔτη, μῆνες ἢ ἡμέρες**.

Συμπέρασμα.—Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου λέγεται Χρόνος (Χ). Π.χ. Τὸ παραπάνω Κεφάλαιο 5.000 δρχ. τὸ δανείζομε γιὰ 2 ἔτη.

δ) Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ χρόνο, συμφωνῶ μὲ τὸ δανειστή μου καὶ πόσο τόκο θὰ πληρώσω. Ὁ τόκος ὑπολογίζεται μὲ βάσι **στὰ ἑκατὸ** %. Δηλαδὴ μὲ βάσι τὸ κέρδος στὶς 100 μονάδες (100) δραχ. κλπ. καὶ γιὰ ἕνα ἔτος, λέγεται **Ἐπιτόκιον**. Συμφωνῶ λοιπὸν μὲ τὸ δανειστή μου, ὅτι θὰ τοῦ πληρώσω Τόκο 10 τοῖς % (10%=Ἐπιτόκιο).

Συμπέρασμα.—Ὁ τόκος τῶν 100 μονάδων σ' ἕνα ἔτος, λέγεται Ἐπιτόκιον (Ε).

Σημείωσις. Τὸ **Ἐπιτόκιο** ὁρίζεται μὲ συμφωνία καὶ δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ξεπερνᾶ τὸ νόμιμο ὅριο. Ὁ δανειστὴς ποὺ δανείζει μὲ μεγαλύτερο Ἐπιτόκιο, ἀπ' ὅτι ἐπιτρέπει ὁ νόμος, τιμωρεῖται ὡς ἐκμεταλλευτὴς ἢ τοκογλύφος.

'Ανακεφαλαίωσις

1) ΤΟΚΟΣ . . .	εἶναι	τὸ κέρδος ποὺ παίρνει ὁ δανειστὴς
2) ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ .	»	τὸ ποσὸν ποὺ παίρνει ὁ δανειζόμενος
3) ΧΡΟΝΟΣ . .	»	ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου.
4) ΕΠΙΤΟΚΙΟΝ .	»	ὁ τόκος τῶν 100 μονάδων σ' ἕνα ἔτος

Παρατηρήσεις. 1) Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ Τόκου, ἔχομε 4 ποσά. Μᾶς δίνονται τὰ 3 καὶ ζητεῖται τὸ 4ο.

2) Λύονται ὅλα μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν.

3) Ἔχομε 4 περιπτώσεις προβλημάτων : α) **ὅταν ζητῆται ὁ τόκος**, β) **ὅταν ζητῆται τὸ Κεφάλαιο**, γ) **ὅταν εἶναι ἄγνωστος ὁ Χρόνος** καὶ δ) **ὅταν εἶναι ἄγνωστο τὸ 'Επιτόκιο.**

4) Στὴ λύσι τῶν προβλημάτων, θὰ χρησιμοποιοῦμε τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν ποσῶν (Τ, Κ, Χ, Ε).

'Εργασίες : 1) 'Αντιγράψετε τοὺς ὁρισμοὺς τῶν 4 ποσῶν. 2) Κάνετε συγκεκριμμένα παραδείγματα. 3) Φέρτε πληροφορίες τί εἶναι ἐμπορικὸν ἔτος καὶ τί πολιτικόν. 4) Ποιὸ ἔτος ἀπὸ αὐτὰ χρησιμοποιεῖται στὰ προβλήματα τοῦ τόκου ;

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΚΟΥ

Α'. ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΟΜΕ ΤΟΝ ΤΟΚΟ

Μάθημα 17ο. – Ὅταν ἡ χρονικὴ διάρκεια εἶναι ἔτη.

α) Παράδειγμα. 2.000 δραχμὲς δανείζονται γιὰ 2 ἔτη, μὲ 8 % ἐπιτόκιο. Πόσο τόκο θὰ φέρουν;

Κατάστρωσις :

Τ = ;
Κ = **2000 δρχ.**
Χ = **2 ἔτη**
Ε = **8 %**

Κατάταξις

Κεφ. 100 **δραχ. σὲ** 1 **ἔτ. δίνουν Τόκο** ... 8 **δραχ.**
» 2000 » » 2 » » » .. **Χ ; »**

Λύσις : $X = 8 \times \frac{2000 \times 2}{1 \times 100} = \frac{32.000}{100} = 320$ **δρχ.**

Πῶς ἔγινε ἡ λύσις :

α) 'Αφοῦ Κεφ. 100 **δρχ. σ' ἕνα ἔτος δίνει κέρδος 8 δρχ.**
Κεφ. 2000 » **στὸν ἴδιο χρόνο θὰ δώσῃ διπλᾶ.**

Τὰ ποσὰ **Τόκος - Κεφάλαιο**, εἶναι ἀνάλογα.

β) Σὲ 1 ἔτος ἕνα Κεφάλαιο δίνει τόκο 8 δρχ.

» 2 ἔτη τὸ ἴδιο Κεφάλαιο δίνει διπλάσιο Τόκο.

Καὶ τὰ ποσὰ **Χρόνος** καὶ **Τόκος** εἶναι ἀνάλογα.

Ὥστε ὁ **Τόκος** εἶναι ἀνάλογος καὶ μὲ τὸ ποσὸ τοῦ **Κεφαλαίου** καὶ μὲ τὸ ποσὸ τοῦ **Χρόνου**.

Παρατηρήσεις : 1) Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου, στὸ πρόβλημα αὐτό, εἶναι 2 ἔτη.

2) Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν Τόκο, πολλαπλασιάσαμε τὰ τρία γνωστὰ ποσά : Κεφάλαιο, Χρόνο, Ἐπιτόκιο καὶ τὸ γινόμενόν των, τὸ διαιρέσαμε διὰ 100.

Αὐτὸ φανερώνει ἂν στὸ παραπάνω πρόβλημα καὶ στὴ θέσι τῶν ἀριθμῶν, κατὰ τὴ λύσι, τοποθετήσωμε τὰ ἀρχικὰ τοῦ ποσοῦ, ποὺ ἀντιπροσωπεύουν. Θὰ προκύψη ὁ Τύπος : $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{E.K.X.}}{\mathbf{100}}$.

Ἐργασίες : 1) Λύσετε τὸ πρόβλημα αὐτό :

Ἕνας ἀγρότης δανείστηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 4250 δραχ. μὲ 7,5 % γιά 3 ἔτη. Πόσο τὸκο θά πληρώση ;

2) Νὰ βγάλετε τὸν κανόνα, πῶς βρίσκομε τὸ Τόκο, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη.

3) Κάμετε τὰ παρακάτω προβλήματα :

Ὁμάδα 1η. Προφορικά :

α) πρὸς 1 % τῶν		β) πρὸς 3 % τῶν		γ) πρὸς 10 % τῶν	
800	δραχμῶν	500	δραχμῶν	1.000	δραχμῶν
2.000	»	3.000	»	50.000	»
5.000	»	6.000	»	750.000	»
10.000	»	12.000	»	1.000.000	»
40.000	»	500.000	»	4.000.000	»

221. Νὰ βρῆτε τὸν **Τόκο (Τ)** σὲ ἕνα ἔτος.

(Γραπτῶς) **Πόσο Τόκο θὰ φέρουν;**

Ὁμάδα 2η. 193.—	Κεφάλαιον	50.000	δρχ.	σὲ	4	ἔτη	μὲ 8 %
194. —	»	24.000	»	»	2	»	» 6 %
195. —	»	750.000	»	»	5	»	» 9,5%
196. —	»	100.250	»	»	2	»	» 12%

Μάθημα 18ο. — Πῶς βρίσκεται ὁ Τόκος (Χρονική διάρκεια: μῆνες)

α) Πρόβλημα. Πόσο Τόκο δίνουν 5000 δραχμὲς σὲ 6 μῆνες μὲ 12 %;

Δὲν ὑπάρχει καμμιὰ διαφορὰ μὲ τὰ προηγούμενα γιατὶ τὰ γνωστὰ ποσὰ εἶναι τὰ ἴδια. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι τὸ ὅτι, ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ Κεφαλαίου ποὺ τοκίζεται, ἐδῶ εἶναι **μῆνες**.

Κατάστρωσις:	Κατάταξις	Τύπος:
Κ=5000 δρχ. Τ= ; » Χ=6 μῆνες Ε=12	**Κ = 100 δραχ. σὲ 12 μῆν., 12 δραχ. Τ.** **» =5000 » » 6 » Χ;** **Λύσις**: $X = \frac{12 \times 5000 \times 6}{12 \times 100} = \frac{360\,000}{1.200} = 300$ **δραχ.**	$T = \frac{E.K.X.}{1.200}$

Ὁ Τόκος λοιπὸν εἶναι 300 δρχ.

Ἐργασίες: 1) Νὰ βρῆτε τὴ διαφορὰ τῆς λύσεως ὅταν ὁ Τόκος ζητῆται γιὰ χρονικὴ διάρκεια μηνῶν. 2) Γράψετε τοὺς τύπους καὶ τῶν 2 περιπτώσεων. 3) Νὰ βγάλετε τὸν **κανόνα**, πῶς βρίσκομε τὸν ***Τόκο*** ὅταν ὁ ***Χρόνος εἶναι μῆνες***. 4) Νὰ λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα:

(*Γραπτῶς*) *Πόσο τόκο φέρνουν ;*

Ὁμάδα 1η.—197.—Κεφάλαιο 480 δρχ. σὲ 3 μῆνες μὲ 8%.
198.— » 2.500 » » 7 » » 9%.
199.— » 3.600 » » 10 » » 5,5%.
200.— » 800 » » 6 » » 7,5%.
201.— » 580 λίρες σὲ 1 ἔτος καὶ 8 μῆνες μὲ 8% (τὸ ἔτος θὰ γίνη μῆνες)

Μάθημα 19ο.—Πῶς βρίσκομε τὸν τόκο (εἰς χρόνον ἡμερῶν)

Πρόβλημα. Πόσο Τόκο φέρνει Κεφάλαιο 4500 δραχ. σὲ 80 ἡμέρες μὲ 5% Ἐπιτόκιο;

Κατάστρωσις	Κατάταξις:	Τύπος;
Κ=4500 δρχ. Τ= ; » Χ=80 ἡμέρ. Ε=5%	**Κεφ. 100 δραχ. σὲ 360 ἡμ. = 5 δραχ. Τόκο** **» 4500 » » 80 » Χ; » »** **Λύσις**: $X = \frac{5 \times 4500 \times 80}{360 \times 100} = \frac{1.800.000}{36.000} = 50$ **δραχ.**	$T = \frac{E.K.X.}{36.000}$

Ἀπάντησις: Ὁ τόκος τῶν 80 ἡμερῶν εἶναι 50 δραχ.

'Εργασίες : Πῶς βρίσκομε λοιπο τὸν **Τόκο** ὅταν ὁ Χρόνος εἶναι ἡμέρες ; Γράψετε τὸν κανόνα καὶ τὸν τύπο.

'Ασκήσεις **Πόσο Τὸκο φέρνει ;**

202.—Κεφάλαιο	9.600	δραχ.	σὲ	45	ἡμ, πρὸς 4%.
203.— »	15.000	»	»	90	» » 10%.
204.— »	36.000	»	»	2	μῆν., 2 ἡμ. μὲ 8%.
205.— »	63.000	»	»	3	» 10 » » 6,5%.
206.— »	72.000	»	»	1	ἔτ., 1 μῆν., 5 ἡμ. μὲ 9%

'Ανακεφαλαίωσις

Κανόνας.—Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν Τόκο, πολλαπλασιάζομε τὶς τιμὲς τῶν 3 γνωστῶν ποσῶν δηλ. Ε.Κ.Χ. καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν διαιροῦμε διὰ 100 ἂν ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, διὰ τοῦ 1.200 ἂν εἶναι μῆνες καὶ διὰ τοῦ 36.000 ἂν εἶναι ἡμέρες.

Προβλήματα

'Ομάδα 1η.—207.—Ἕνας γεωργὸς δανείστηκε ἀπὸ τὴν 'Αγροτικὴ Τράπεζα 7.800 δραχμὲς γιὰ 3 χρόνια πρὸς 7,5%. Πόσο τόκο θὰ πληρώση ;

208.—Ἄλλος ἔχει 15.000 δραχμὲς καὶ τὰ καταθέτει σὲ μιὰ Τράπεζα πρὸς 8%. Ποσο τόκο θὰ πάρη σὲ 2 ἔτη ;

209.—Κατέθεσε ἕνας ἔμπορος σὲ μιὰ Τράπεζα 50.000 δραχμὲς πρὸς 8%. Πόσο τόκο θὰ πάρη μετὰ 4 ἔτη ;

210.—Κεφάλαιο 6.000 δραχμῶν, πόσο τόκο θὰ φέρη σὲ 3 ἔτη πρὸς 8,5%.

211.—Ἕνας δανείστηκε Κεφάλαιο 75.000 δραχμὲς πρὸς 9,5% γιὰ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες. Πόσον τόκο θὰ πληρώση :

'Ομάδα 2η.—212.—Ἔχει κάποιος 35.000 δραχμές. Καταθέτει τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτῶν σὲ μία Τράπεζα γιὰ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνες πρὸς 9% τὰ ὑπόλοιπα δανείζει γιὰ 3 ἔτη μὲ 12%. Πόσο τόκο θὰ πάρη συνολικά ;

213.—Πούλησε ἕνας μελισσοκόμος 50 κυψέλες πρὸς 200 δραχμὲς ἡ κάθε μία. 'Απὸ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἐκράτησε γιὰ τὴν οἰκογένειά του τὸ $\frac{1}{4}$. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ κατέθεσε στὴν Τράπεζα μὲ 10%. Πόσο τόκο θὰ παίρνη κάθε χρόνο καὶ πόσο σὲ 5 χρόνια ;

214.—Δανείστηκε κάποιος τὴν 1η Μαρτίου 1960, 65.000 μὲ 9%. Πόσα χρήματα ἐπέστρεψε (Κεφάλαιο καὶ Τόκο μαζί), ἂν ἡ προθεσμία τοῦ δανείου ἐτελείωσε τὴν 1η Αὐγούστου 1960 ;

215.—Κεφάλαιο 400.000 δρχ. τοκίσθηκε σὲ μία ἐπιχείρησι πρὸς 9% γιὰ 2 μῆνες καὶ 15 ἡμέρ. Πόσο θὰ γίνη τὸ κεφάλαιο μὲ τὸν Τόκο μαζί ;

216.—Τὸ $\frac{1}{2}$ κεφαλαίου 480.000 δραχ. τοκίστηκε πρὸς 6,50% τὸ δὲ ὑπόλοιπο πρὸς 6%. Πόσος θὰ εἶναι ὁ τόκος του μετὰ 3 ἔτη καὶ 5 μῆνες ;

Μάθημα 20ο.—Πῶς εὑρίσκομε τὸν Τόκο μὲ τὸν Τοκάριθμο.

Π ρ ό β λ η μ α. Κεφάλαιο 4.800 δραχ. δανείστηκε γιὰ 72 ἡμέρες μὲ 10%. Πόσο τόκο θὰ φέρη ;

Λ ύ σ ι ς : Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο : $T = \frac{E.K.X.}{36.000}$

Τὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ δώση Τόκο :

$$T = \frac{10 \times 4.800 \times 72}{36.000} = 96 \text{ δρχ. Τόκος.}$$

β) **Λ ύ σ ι ς** : Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μπορεῖ νὰ λυθῆ καὶ μὲ ἄλλο τρόπο. Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ Κεφάλαιο 4.800 δρχ. μὲ τὶς 72 ἡμέρες, θὰ προκύψη ἕνα γινόμενο. Τὸ γινόμενο αὐτὸ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ **Κεφαλαίου ἐπὶ Ἡμέρας (Χρόνου)** λέγεται **Τοκάριθμος.**

Ἂν διαιρέσωμε τὸ 36.000 διὰ τοῦ Ἐπιτοκίου 10%, προκύπτει ἕνα πηλίκον. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 36.000 διὰ τοῦ **(Ε)**' λέγεται **Σταθερὸς διαιρέτης.**

Στὰ προβλήματα Τόκου, σὰν τὸ παραπάνω, ποὺ ὁ χρόνος δίδεται σὲ ἡμέρες, ὁ Τόκος εὑρίσκεται γιὰ συντομία μὲ τὴ **μέθοδο τοῦ Τοκαρίθμου.**

Λύσις τοῦ προβλήματος μὲ τὸν Τοκάριθμο

Κ=4.800, Χ=72 ἡμέρες, Ε=10%, Τόκος = ;

α) Εὑρίσκομε τὸν Τοκάριθμο πολλαπλασιάζοντας Κεφ.ἐπὶ Χρόν.
$4.800 \times 72 = 345.600$ = Τοκάριθμος.

β) Εὑρίσκομε τὸ Σταθερὸ διαιρέτη :
36.000 : 10 % (Ε) = 3.600 ὁ Σταθ. διαιρέτης.

γ) $\text{Τόκος} = \frac{\text{Τοκάριθμος} = 345.600}{\text{Σταθερ. διαιρέτης } 3.600} = 96 \text{ δραχ. τόκος}$

Κ α ν ό ν α ς.—Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν Τόκο ἑνὸς Κεφαλαίου ποὺ τοκίζεται σὲ χρόνο ἡμερῶν, διαιροῦμε τὸν Τ ο κ ά ρ ι θ μ ο διὰ τοῦ Σ τ α θ ε ρ ο ῦ δ ι α ι ρ έ τ ο υ

Προβλήματα

Πόσον τόκον φέρει

217.—Κεφαλαίου	350.000 πρὸς	9 %	σὲ 40	ἡμέρες.
218.— »	420.000 »	6 %	» 50	»
219.— »	300.000 »	5 %	» 45	»
220.— »	540.000 »	8 %	» 140	»
221.— »	6.000.000 »	12 %	» 40	»

Β΄ ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΟΜΕ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Γνωστὰ ποσὰ = **Τὸκος, Χρὸνος, Ἐπιτὸκιο.**
Ζητεῖται τὸ **Κεφάλαιο.**

Μάθημα 21ο—Ὅταν ὁ Χρόνος τοῦ δανείου εἶναι ἔτη

α) Π ρ ό β λ η μ α. Πὸσο κεφάλαιο τοκίσθηκε καὶ σὲ 3 ἔτη μὲ 10 % ἔφερε Τὸκο 8.400 δραχ.;

Κατάστρωσις:
Τ = 8.400
Κ = ;
Χ = 3 ἔτη
Ε = 10 %

Κ α τ ά τ α ξ ι ς
Κ = 100 δραχ. σὲ 1 ἔτος δίνει 10 δραχμ. Τόκο
Κ = Χ ; » » 3 ἔτη » 8.400 » »

Σκέψις: Τὰ ποσὰ **Κεφάλαιο** καὶ **Τὸκος**, εἶναι **ἀνάλογα**. (Γιατί;) Τὰ ποσὰ **Κεφάλαιο** καὶ **Χρὸνος** εἶναι **ἀντίστροφα**. Διότι:
Ἂν σὲ 1 ἔτος παίρνω . . . Τόκο 10 δραχ. ἀπὸ Κ. 100 δρχ.
Σὲ 3 ἔτη παίρνω ἴδιο . . . Τόκο 10 » » Κ. μικρότερο

Λύσις: $X = 100 \times \frac{(T).\ 8.400}{(E).\ 10} \times \frac{1 \text{ ἔτος}}{3 \text{ ἔτη}} = \frac{840.000}{30} = 28.000$ δραχ.

Ἀντικαθιστῶντας τοὺς ἀριθμούς, μὲ τὰ ἀντίστοιχα γράμματα ἔχομε τὸν τύπο: $\boxed{K = \frac{T.100}{E.\ X.}}$ δηλ. **Κεφάλαιο** = $\frac{\textbf{Τὸκος . . . ἐπὶ 100}}{\textbf{Ἐπιτὸκιον ἐπὶ χρὸνον}}$

Ἐργασία: 1) Ἀπαντήσετε πῶς βρήκαμε τὸ Κεφάλαιο, μὲ Χρόνο σὲ ἔτη. Γράψετε τὸν κανόνα ποὺ βγάλετε μόνοι σας.

Νὰ λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα γραπτῶς:

Νὰ εὑρεθῇ τὸ Κεφάλαιον ὅταν:

Ὁμάδα 1η. 222.—Τόκος	6.750 δραχ.	Ἐπιτ. 9 %	καὶ χρόνος	4 ἔτη
223.— »	450 »	» 5 %	» »	2 »
224.—	50.000 »	» 8 %	» »	5 »

	225.–	54.000	»	» 9 %	»	»	3 »
	226.–	288.000	»	» 9 %	»	»	4 »
Ὁμάδα 5η.	227.–	Τόκος = 50 λίρες		Ἐπιτ. = 5 %	χρόνος =		2 ἔτη
	228.–	Τ = 45	»	Ε = 4,5 %	Χ =		2 ἔτη
	229.–	Τ = 75	»	Ε = 7,5 %	Χ =		4 ἔτη
	230.–	Τ = 150	»	Ε = $7\frac{1}{2}$ %	Χ =		2 ἔτη
	231.–	Τ = 30	»	Ε = 12 %	Χ =		5 ἔτη

Μάθημα 22ο. — Πῶς εὑρίσκομε τὸ Κεφάλαιο ὅταν ὁ Χρόνος εἶναι μῆνες

Πρόβλημα. Πόσο Κεφάλαιο τοκίσθηκε, σὲ 1 ἔτος καὶ 2 μῆνες πρὸς 8 %, καὶ ἔδωσε Τόκο 4.200 δρχ. ;

Λύσις: Πρῶτα θὰ τρέψωμε τὸ χρόνο (1 ἔτος καὶ 2 μῆνες), σὲ μῆνες : 1 ἔτος=12 μῆνες+2 μῆνες=14 μῆνες.

Κατάταξις :
Κ=100 δρχ. σὲ 12 μῆνες δίνει .. 8 δρχ. Τ.
Κ=Χ ; » » 14 » »4.200 » Τ.;

$$\text{Λύσις : } K=100\times\frac{12\times 4.200}{14\times 8}=\frac{5.040.000}{112}=45.000 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντησις : Κεφάλαιο=45.000 δρχ.

Ἀσκήσεις

1) Τί παρατηρήσατε στὴ λύσι αὐτή ; 2) Ποιὸς τύπος χρησιμοποιεῖτε τώρα ; 3) Ποῖος κανόνας βγαίνει στὴν περίπτωσι αὐτή ; 4) Γράψετε τὸν τύπο καὶ τὸν κανόνα ποὺ βγάλατε. 5) Λύσετε γραπτῶς τὰ παρακάτω προβλήματα :

Νὰ εὑρεθῇ τὸ Κεφάλαιο ὅταν εἶναι :

Ὁμάδα 1η.	232.–Τ =	2.100 δρχ.	Ε = 6 %	Χ = 7 μῆνες
	233.– » =	960 »	» = 8 %	» = 9 »
	234.– » =	750 »	» = 5 %	» = 8 »
	235.– » =	1.000 »	» = 10 %	» = 10 »
	236.– » =	1.200 »	» = 12 %	» = 10 »
Ὁμάδα 2η.	237.–Τ =	1.500 δραχ.	Ε = $7\frac{1}{2}$ %	Χ=4 μῆνες
	238.– » =	2.000 »	» = 8 %	Χ=1 ἔτος 8 μῆνες

239 – » =	3.600	»	» = 4,50%	X=1 ἔτ. 3 μῆνες
240.– » =	3.000	»	» = 7,5%	X = 8 μῆνες
241.– » =	4.000	»	» = 8%	X = 3 ἔτη 4 μῆνες

Μάθημα 23ο.—Πῶς εὑρίσκομε τὸ Κεφάλαιο σὲ χρόνο ἡμερῶν

Π ρ ό β λ η μ α. Πόσο εἶναι τὸ Κ ε φ ά λ α ι ο, τὸ ὁποῖο σὲ 15 ἡμέρες μὲ 4,5% ἔφερε τόκο 27 δραχμές ;

Κατάστρωσις:
K = ;
T = 27 δρχ.
X = 15 ἡμ.
E = 4,5%.

Κ α τ ά τ α ξ ι ς:

Κεφ. 100 δρχ. σὲ 360 ἡμ. δίνει Τόκο 4,5 δραχ.
» ; » » 15 » » 27 δραχ,

Λύσις : $X = 100 \times \frac{360 \times 27}{15 \times 4{,}5} = 14.400$ δραχ.

Ἐργασίες: 1) Κάμετε τὶς παρατηρήσεις σας στὴν περίπτωσι αὐτή 2) Βγάλετε τὸν τύπο καὶ τὸν κανόνα καὶ γράψετέ τα, στὸ τετράδιό σας. 3) Νὰ λυθοῦν τὰ παρακάτω προβλήματα:

Νὰ βρῆτε τὸ Κεφάλαιο σὲ χρόνο ἡμερῶν ὅταν:

Ὁμάδα 1η. 242.—T =	6.750 δραχ.	E = 9%	Χρόνος = 40	ἡμέρες.
243.— » =	4.50 »	» = 5%	» = 20	»
244. – » =	5.000 »	» = 8%	» = 50	»
245. – » =	45.000 »	» = 9%	» = 50	»
246. – » =	7.500 »	» = $7\frac{1}{2}$%	» = 20	»
Ὁμάδα 2η. 247. – T =	5.000 δραχ.	E = 5%	Χρόνος = 1 μ.	20 ἡμ.
248. – » =	7.500 »	» = $7\frac{1}{2}$%	» = 2 μῆν.	15 μ.
249. – » –	10.000 »	» = 8%	» = 3 »	10 »
250. – » –	2.000 »	» = 9%	» = 80	ἡμέρες
251. – » –	3.000 »	» = 10%	» = 50	

Κ α ν ὸ ν α ς. **Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ Κεφάλαιο, πολλαπλασιάζομε τὸν Τόκο ἐπὶ 100 ἢ ἐπὶ 1.200 ἢ ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιο**

α) $K = \frac{T.\ 100}{E.\ X.}$ = ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη.

β) $K = \frac{T \cdot 1.200}{E.\ X.}$ » » » » » μῆνες.

γ) $K = \frac{T.\ 36\,000}{E.\ X.}$ » » » » » ἡμέρες.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

Ὁμάδα 1η.–252.–Πόσο Κεφάλαιο φέρνει Τόκο 9.600 δραχμὲς σὲ 4 ἔτη πρὸς 12%;

253.—Ἀπὸ πόσο Κεφάλαιο θὰ πάρωμε Τόκο 4.500 δραχ. γιὰ 3 ἔτη πρὸς 5%;

254.–Ἕνα Κεφάλαιο δανείστηκε μὲ 12% καὶ ἔφερε σὲ 2 ἔτη 2400 δραχμὲς κέρδος. Πόσο εἶναι τὸ Κεφάλαιο;

255.— Ἕνα σχολεῖο εἰσέπραξε Τόκο 80 λίρες χρυσὲς γιὰ 10 ἔτη ἀπὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ εἶχε κατατεθῆ σὲ μιὰ Τράπεζα μὲ 8%. Πόσες δραχμὲς ἦταν αὐτὸ τὸ χρηματικὸ ποσό; (Τιμὴ λίρας 300 δραχ.)

256.— Εἰσέπραξε ἕνας ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη του 7.500 δραχ. για Τόκο 4 ἐτῶν πρὸς 7,5%. Πόσο ἦταν τὸ Κεφάλαιο, ποὺ εἶχε δανείσει;

Ὁμάδα 2η. 257.– Πόσο Κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 8% φέρνει σὲ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες, Τόκο 3.024 δρχ.;

258.— Πόσο Κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 6% φέρνει σὲ 4 μῆνες, Τόκο 500 δραχμές.

259.– Δανείστηκε ἕνας ἐργάτης καὶ πλήρωσε μετὰ ἀπὸ 1 ἔτος καὶ τρεῖς μῆνες 600 δραχ. γιὰ Τόκο. Πόσα εἶχε δανεισθῆ, ἂν τὸ Ἐπιτόκιο ἦταν 12%;

260.— Ἕνας νοικιάζει τὸ σπίτι του καὶ παίρνει 1.250 δραχμές. Πόσο Κεφάλαιο δίνει τόσο Τόκο σὲ 5 μῆνες, ἂν τοκισθῆ πρὸς 10%;

261.– Πόσο Κεφάλαιο ἔχει καταθέσει μία ἐπιχείρησι στὴν Τράπεζα, ἂν σὲ κάθε τριμηνία, πρὸς 8% Ἐπιτόκιο, εἰσπράττει τόκο 8000 δραχ.;

Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες

Ὁμάδα 3η. – 262. – Ἔχει ἕνας καταθέσει δύο κεφάλαια πρὸς 8%. Ἀπὸ τὸ ἕνα παίρνει σὲ 50 ἡμ. Τόκο 1000 δραχ. καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο σὲ 25 ἡμ. τόκο 2.000 δραχμές. Τί ποσὸν ἀντιπροσωπεύει τὸ κάθε Κεφάλαιο ;

263. – Ἕνας, ἀφοῦ δάνεισε χρήματα πρὸς 6%, πῆρε μετὰ 1 μῆνα καί 6 ἡμέρες Τόκο 720 δραχμ. Πόσο εἶναι τὸ κεφάλαιο ποὺ δάνεισε ;

264. – Πόσο Κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσῃ κάποιος γιὰ νὰ πάρῃ σὲ 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες πρὸς 6%, Τόκο 1.050 δρχ.;

265. – Πόσο Κεφάλαιο σὲ 45 ἡμέρες φέρνει Τόκο 650 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς 6,50%;

266. – Πόσα χρήματο τοκίσαμε μὲ 10,50% καὶ πήραμε γιὰ 2 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες 1.950 δραχμὲς Τόκο ;

Γ΄ ΠΩΣ ΕΥΡΙΣΚΟΜΕ ΤΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ

Μάθημα 24ο. – Χρονικὴ διάρκεια : ἔτη.

α) Π ρ ο β λ η μ α. Μὲ πόσο Ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη Κεφάλαιο 2400 δραχ. καὶ ἔδωσε Τόκο 480 δραχ. σὲ 4 ἔτη ;

Γνωστὰ ποσά : **Κεφάλαιο, Τόκος, Χρόνος.**

Ζητεῖται τὸ **Ἐπιτόκιο.**

Κατάστρωσις :	Κ α τ ά τ α ξ ι ς :
Τ = 480 δραχ.	Κεφάλ. 2400 δραχ. σὲ 4 ἔτη δίνει 480 δρχ. Τόκο
Κ = 2400 »	» 100 » » 1 ἔτος » ; » »
Χ = 4 ἔτη	Λύσις : $X = 480 \times \frac{1 \times 100}{4 \times 2400} = 5$ δραχ. (5%).
Ε = ;	

Παρατηρήσεις : 1) Νὰ συγκρίνετε τὸ ποσὸ τοῦ **Ἐπιτοκίου** ποὺ εἶναι ἄγνωστο, μὲ τὸ ποσὸ τοῦ **Χρόνου** καὶ μὲ τὸ ποσό τοῦ **Κεφαλαίου** καὶ νὰ πῆτε ἂν εἶναι ἀνάλογο ἢ ἀντίστροφο μὲ αὐτό. 2) Προσέξετε τὴν κατάταξι. Τί βλέπετε ; Γιατὶ δὲν ἀρχίζομε ἀπὸ Κεφ. 100 μονάδων ; 3) Ἀντικαταστήσετε τοὺς ἀριθμοὺς στὴ λύσι, μὲ τὰ ἀρχικὰ τῶν ποσῶν ποὺ φανερώνουν. Ποῖος τύπος προκύπτει ; Πῶς εὑρίσκομε λοιπὸν τὸ **Ἐπιτόκιο** σὲ ἔτη ; Γράψετε τὸν κανόνα καὶ τὸν τύπο 4) Ὁ τύπος τοῦ Ἐπιτοκίου μὲ ποιὸν ὁμοιάζει, μὲ τὸν τύπο τοῦ τόκου ἢ μὲ τὸν τύπο τοῦ Κεφαλαίου ; 5) Λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα στὸ τετράδιό σας.

Προβλήματα

Μὲ πόσο Ἐπιτόκιο ($^0/_0$) ἐτοκίσθησαν τὰ παρακάτω κεφάλαια :

Ὁμάδα 1η	267. –	**Κεφάλαιο** :	4500 δρ.	**Τὸκος**	720 δρ.	=	**Χρὸν.** :	2 ἔτ.
	268. –	»	4800 »	»	1.008 »	=	»	3 »
	269. —	»	9600 »	»	1.920 »	=	»	4 »
	270. –	»	9000 »	»	810 »	=	»	2 »
	271. –	»	36000 »	»	8640 »	=	»	2 »

Μάθημα 25.—Πῶς εὑρίσκομε τὸ Ἐπιτόκιο ὅταν ὁ χρονος εἶναι μῆνες

Πρόβλημα. Κεφάλαιο 6.000 δρχ. σὲ 9 μῆνες ἔφερε Τὸκο 360 δραχ. Μὲ πόσο Ἐπιτόκιο τοκίστηκε ;

Λύσις : $X\ 360 \times \frac{100\times12}{6000\times 9} = 8\,{}^0/_0$ $\boxed{E=\frac{T.1.200}{X.K.}}$

Ἐργασίες : Νὰ κάνετε μόνοι σας τὴν κατάστρωσι καὶ κατάταξι τοῦ προβλήματος αὐτοῦ. 2) Νὰ συγκρίνετε τὰ ποσά. 3) Νὰ βγάλετε τὸν κανόνα πῶς εὑρίσκομε τὸ Ἐπιτόκιο σὲ χρόνο μηνῶν.

Μάθημα 26 —Πῶς εὑρίσκομε τὸ Ἐπιτόκιο ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες

Πρόβλημα. Κεφάλαιο 6 000 δρχ. σὲ 15 ἡμέρες ἔφερε Τόκο 30 δρχ. Μὲ πόσο Ἐπιτὸκιο τοκίστηκε ;

Καὶ ἐδῶ παραλείπομε τὴν κατάστρωσι καὶ κατάταξι.

Λύσις: $X = 3 \times \frac{360 \times 100}{15 \times 600} = 12\,{}^0/_0$.

Ἀπὸ τὴ λύσι προκύπτει ὁ τύπος : $\boxed{E=\frac{T.\ 36.000}{X.\ K.}}$

Κ α ν ό ν α ς.—Γιὰ νὰ εὕρωμε τό ἐπιτόκιο πολλαπλασιάζομε τὸν Τόκο ἐπὶ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν 2 ἄλλων ποσῶν (Κεφαλαίου ἐπὶ Χρόνο).

α) $E = \dfrac{T.\ 100}{K.\ X.}$ ... ὅταν ὁ Χρόνος εἶναι ἔτη.

β) $E = \dfrac{T.\ 1.200}{K.\ X.}$ ... » » » » μῆνες

γ) $E = \dfrac{T.\ 36.000}{K.\ X.}$ ... » » » » ἡμέρες

Προβλήματα

Ὁμάδα 1η.—272. – Πρὸς πόσο % ἐτησίως πρέπει νὰ τοκισθοῦν 4.500 δραχμὲς γιὰ νὰ φέρουν τόκο σὲ ἕνα ἔτος 315 δραχμές ;

273. – Ἕνας ἐτόκισε 300.000 δρχ. καὶ μετά ἀπὸ 4 ἔτη ἔλαβε τόκο καὶ κεφάλαιο μαζί, 396.000 δρχ. Πόσο εἶναι τὸ ἐπιτόκιο ;

274. – Μὲ πόσο ἐπιτόκιο τοκίστηκε κεφ. 7.200 δρχ. καὶ ἔδωσε μετὰ 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες τόκο 170 δραχμές ;

275. – Ἐδάνεισε ἕνας ἕνα κεφάλαιο 320.000 δραχ. καὶ μὲ τόκους 3 ἐτῶν αγόρασε ἕνα κτῆμα 4 στρεμμάτων πρὸς 19.200 δραχ. τὸ στρέμμα. Μὲ πόσο ἐπιτόκιο εἶχε δανείσει νὰ χρήματά του ;

276. – Μὲ πόσο ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθῆ ἕνα κεφάλαιο γιὰ νὰ διπλασιασθῆ σὲ 8 ἔτη ;

Ὁμάδα 2η. – 277. – Κεφάλαιο 320.000 δραχ. τοκίζεται καὶ δίνει σὲ 8 μῆνες τόκο τὸ $\frac{1}{25}$ αὐτοῦ. Μὲ πόσο ἐπιτόκιο τοκίσθηκε ;

278. – Μὲ πόσο ἐπιτόκιο τοκίσθηκαν 30.000 δραχμὲς καὶ ἔφεραν σὲ 1 ἔτος, 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρες, τόκον 2.000 δραχμές ;

279. Ἐκέρδισε ἕνας ἀπὸ τὸ Ἐθνικὸ Λαχεῖο τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν 300.000 δραχ. καὶ τὸ κατέθεσε στὴν Τράπεζα. Μετὰ ἀπὸ 10 μῆνες ἔλαβε τόκο καὶ κεφάλαιο μαζὶ 80.000 δρχ. Μὲ πόσο ἐπιτόκιο ἐτόκισε τὰ χρήματά του ;

280. – Ἕνας ταβερνιάρης ἀγόρασε 300 κιλὰ οὖζο πρὸς 25 δραχμὲς τὸ κιλό, Τὸ ἐπώλησε καὶ εἰσέπραξε 9.000 δραχμές. Νὰ εὑ-

ρεθῆ τὸ κέρδος καὶ νὰ ὑπολογισθῆ μὲ πόσο ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφάλαιο 15.000 δραχ. καὶ σὲ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνες νὰ φέρη τὸ ἴδιο κέρδος.

281.—Ἔχεις 75.000 δραχ, καὶ θέλεις νὰ τὶς τοκίσης ἔτσι ὥστε νὰ ἔχης κάθε μῆνα, Τόκους 500 δραχ. Μὲ πόσο Ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τὶς τοκίσης ;

Μάθημα 27ο.—Πῶς εὑρίσκομε τὸν Χρόνο.

α) Σ ὲ ἔ τ η

Π ρ ό β λ η μ α. Κεφάλαιο 4.500 δραχ. τοκιζόμενο μὲ 8%, **σὲ πόσο χρόνο θὰ δώση Τόκο 720 δραχμὲς ;**

Γνωστά ποσά : **Κεφάλαιο, Τόκος, Ἐπιτόκιο.**

Ἄγνωστο ποσό : **Χρόνος.**

Κατάστρωσις ;	Κ α τ ά τ α ξ ι ς :
Τ = 720 δραχ.	
Κ = 4500 »	100 δραχ. σὲ 1 ἔτος φέρουν 8 δρχ. Τόκο
Ε = 8%	4.500 » » Χ » » 720 » »
Χ = ;	

Σκέψις : Τὰ ποσὰ **Χρόνος** καὶ **Τόκος** εἶναι ἀνάλογα Τὰ ποσὰ ὅμως **Χρόνος** καὶ **Κεφάλαιο**, εἶναι ἀντίστροφα γιατὶ : Ἄν Κεφ 100 δραχ. δίνει τόκο 8 δραχ. σὲ 1 ἔτος διπλὸ κεφάλαιο θὰ δώση τον ἴδιο Τόκο σὲ μισὸ χρόνο.

Λ ύ σ ι ς: $X = 1 \times \frac{720 \times 100}{8 \times 4500} = \frac{72.000}{36.000} = 2$ ἔτη

Ὥστε ὁ χρόνος εἶναι 2 ἔτη.

Ἀντικαθιστώντας τώρα τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἔχομε στὴ λύσι, προκύπτει ὁ τύπος : $\boxed{X = \frac{T.\ 100}{E.\ K.}}$

Ἐργασίες : 1) Στὸ πρόβλημα αὐτὸ νὰ κάμετε τὴ λύσι μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα. 2) Νὰ βγάλετε τὸν κανόνα, πῶς εὑρίσκομε τὸν **Χρόνο** σὲ ἔτη.

γ) Πῶς εὑρίσκομε τὸ Χρόνο σὲ χρονικὴ διάρκεια μηνῶν

Π ρ ό β λ η μ α. Σὲ πόσους μῆνες κεφάλαιο 1.200 δραχ. τοκιζόμενο μὲ 8% φέρει Τόκο 72 δραχμές;
(Παραλείπομε κατάστρωσι καὶ κατάταξι. Νὰ γίνη ἀπὸ σᾶς).

Λ ύ σ ι ς : $X = 12 \times \frac{100 \times 72}{1.200 \times 8} = \frac{7200}{9600} = 9$ μῆνες.

Παρατήρησις: Τὸ πρόβλημα ἐλύθηκε ὅπως καὶ τὸ προηγούμενο. Στὴ θέσι ὅμως τοῦ ἑνὸς ἔτους, τοποθετήσαμε τοὺς 12 μῆνες, γιατὶ ὁ **Χρόνος** ζητεῖται σὲ **μῆνες**.

γ) Πῶς εὑρίσκομε τὸ Χρόνο σὲ ἡμέρες.

Προβλήματα. Σὲ πόσες ἡμέρες 5.000 δραχμὲς πρὸς 8%, θὰ δώσουν τόκο 300 δραχ.;

Κατάστρωσις :
Τ = 300 δρχ.
Κ = 5.000 »
Ε = 8%
Χ = ;

Κ α τ ά τ α ξ ι ς :

100 δρχ.	σὲ	360	ἡμ.	φέρνουν	8	δραχ.	Τόκο
5000 »	»	Χ	»	»	300	»	»

Λύσις : $x = 360 \times \frac{100 \times 300}{5.000 \times 8} = \frac{10.800.000}{40.000} = 270$ ἡμέρες.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

Ὁμάδα 1η.—282. Σὲ πόσο χρόνο 4.800 δραχ. δίνουν τόκο 960 δρχ. μὲ ἐπιτόκιο 5%;

283.—Δάνεισε κάποιος 96.000 δραχ. μὲ 9% καὶ πῆρε Τόκο 264 δραχ. Γιὰ πόσο χρόνο τόκισε τὰ χρήματά του;

284.—Σὲ πόσα ἔτη Κεφάλαιο 9.000 δραχ. τοκιζόμενο μὲ 4,5%, φέρνει τόκο 810 δραχμές;

285.—Σὲ πόσα ἔτη κεφάλαιο 300.000 δραχ., μὲ 10% δίνει τόκο τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ;

Ὁμάδα 2η.—286. Κεφάλαιο 8.000 δραχ. ἔφερε Τόκο 2.880 δρχ. τοκισθὲν μὲ 9%. Πόση εἶναι ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου;

287.—Σὲ πόσα ἔτη; α) Κεφ. 2.000 δραχμ. δίνει τόκο 320 δραχ·

πρὸς 8%; β) Κεφ. 425.000, δίνει τόκο 95.625 δραχ. πρὸς 7,5%;

288.—Σὲ πόσα ἔτη Κ=2.000 δρχ. δίνει Τ = 200 δρ. μὲ Ε = 5%;

289.— » » » Κ= 400 λιρῶν » Τ= 40 λίρες » Ε=10%;

Ὁμάδα 3η.—290. Πόσος εἶναι ὁ χρόνος σὲ μῆνες, ἑνὸς Κεφαλαίου 800.000 δρχ. ποὺ ἔφερε Τόκο 28.800 δραχ., πρὸς 9%;

291—Ἕνα κεφάλαιο 2.400 δρχ. τοκίσθηκε πρὸς 8% καὶ ἔγινε μὲ τοὺς τόκους του 2.480 δρχ. Γιὰ πόσους μῆνες τοκίσθηκε;

292.—Σὲ πόσους μῆνες κεφάλαιο 50.000 δραχμῶν, μὲ 12% θὰ δώση τόκο 3 000 δραχμές;

293.—Πόσους μῆνες πρέπει νὰ τοκισθῆ ἕνα κεφάλαιο 6.000 δραχμὲς μὲ 8% γιὰ νὰ γίνη μὲ τοὺς τόκους του 6.200 δραχμές;

294·—Ἐπώλησε ἕνας τσοπάνης 40 ἀρνιὰ ἀπὸ 150 δραχ. τὸ ἕνα. Τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε, τὰ τοκίζει μὲ 12%. Σὲ πόσους μῆνες θὰ πάρη Τόκο 480 δραχ.;

Ὁμάδα 4η.—295.—Σὲ πόσες ἡμέρες κεφάλαιο 12.000 δραχμὲς μὲ 6% δίνει τόκο 450 δραχμές;

296—Εἰσέπραξε ἕνας γεωργὸς ἀπὸ βαμπάκι 9.000 δραχ. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ πάρη 300 δραχ. κέρδος ἂν τὶς τοκίση μὲ 15%;

297.—Σὲ πόσες ἡμέρες πήραμε τόκο 270 δραχ. ἀπὸ Κεφάλαιο 20.000 δραχ. μὲ 4,5%;

298.—Σὲ πόσον χρόνον 18.000 δραχ. ποὺ τοκίζονται μὲ 6%, θὰ δώσουν Τόκο 1.500 δραχμές;

299.—Γιὰ ποσες ἡμέρες πρέπει νὰ τοκίσωμε 200 λίρες γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 8 λίρες μὲ 12%;

Μάθημα 28ο.—Πῶς λύομε προβλήματα, ὅταν ὁ Χρόνος δὲν εἶναι συγκεκριμένος

Παρατήρησις: α) Σὲ ὅλα τὰ παραπάνω προβλήματα, ὅπως βλέπετε, ὁ χρόνος ποὺ ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ, δὲν εἶναι ἀφηρημένος, ἀλλὰ ἐκφράζεται σὲ ἔτη ἢ σὲ μῆνες ἢ σὲ ἡμέρες. Συνήθως ὅμως στὰ προβλήματα τοῦ τόκου, στὰ ὁποῖα εἶναι ἄγνωστος ὁ Χρόνος, αὐτὸς ζητεῖται ἀορίστως.

α) Π ρ ό β λ η μ α: **Σὲ πόσο χρόνο 5.000 δραχμὲς πρὸς 8% θὰ δώσουν Τόκο 360 δραχμές;**

Κ α τ ά τ α ξ ι ς: Κεφ. 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνουν 8 δρ. Τόκο
» 5000 » » Χ; ἔτη » 360 » »

Τύπος: $X = \frac{T.\ 100}{E.\ K.}$

Λύσις: $x = 1 \times \frac{360 \times 100}{8 \times 5000} = \frac{36\,000}{40.000}$. . . Ἐδῶ σταματοῦμε.

Τὸ κλάσμα $\frac{36.000}{40.000} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$ παριστάνει ἔτη.

Δὲν διαιρεῖται. Ἀλλὰ ξέρετε ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς, πῶς τρέπεται ἕνα κλάσμα σὲ συμμιγῆ ἀριθμό. Ἡ πρᾶξις κατατάσσεται ὡς ἑξῆς:

α) Τρέπομε σὲ μῆνες: 36.000 ἔτη	40.000
× 12 μῆν.	0 ἔτη, 10 μῆνες, 24 μέρες.
72 000	
36.000	
432.000	
β) Τρέπομε σὲ ἡμέρ. 32.000	
× 30 ἡμ.	**Ἀπάντησις:** Τὸ Κεφάλαιον
960.000 ἡμ.	5.000 δρχ. τοκίσθηκε γιὰ 10 μῆνες καὶ 24 ἡμέρες.
160.000	

β) Ὅταν λοιπὸν ὁ Χρόνος ζητῆται ὄχι σὲ ἔτη, μῆνες, ἡμέρες, ἀλλ' ἁπλῶς μὲ τὴ φράσι **«Σὲ πόσο Χρόνο»**, θὰ λύωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὸν πρῶτο τύπο, ποὺ χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸν χρόνο σὲ ἔτη. Χρειάζεται προσοχή, ὅταν στὴ λύσι προκύψη κλάσμα, ποὺ θὰ δίνη στὴ διαίρεσι ὑπόλοιπο, νὰ ἐξακολουθῆ ἡ διαίρεσι, ὅπως στὸ παραπάνω παράδειγμα.

Προβλήματα

Ὁμάδα 1η.—300.—Σὲ πόσο Χρόνο Κεφάλαιο 6.000 δραχ. πρὸς 8% δίνει Τόκο 480 δραχμές;

301.—Κεφάλαιο 84.000 δραχμὲς τοκίσθηκε μὲ 9% καὶ ἔφερε τόκο 15.120 δραχμές. Πόσος εἶναι ὁ Χρόνος τοῦ δανείου;

302.—Σὲ πόσο Χρόνο 16.000 δραχμὲς μὲ 8% θὰ δώσουν Τόκο 840 δραχμές;

303.—Κεφάλαιο 4.800 δραχμὲς σὲ πόσο Χρόνο, ἂν τοκισθῆ μὲ 10% θὰ γίνη μὲ τοὺς Τόκους του 6.240 δραχμές;

304.—Κεφάλαιο 9.600 δραχ, τοκίστηκε μὲ 5%. Σὲ πόσο χρόνο θὰ γίνη μὲ τοὺς τόκους του 10.200 δραχμές.

Ὁμάδα 2η.—305.—Ἀπὸ δύο ἀδέλφια, τὸ ἕνα τοκίζει 3.000 δραχ-

μὲς πρὸς 9%, τὸ ἄλλο 2.600 πρὸς 10%.
Ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο ἀδέλφια παίρνει περισσότερο τόκο σὲ ἕνα ἔτος, καὶ πόσα;

306.—Πόσο τόκο φέρνει κεφάλαιο 625 λιρῶν πρὸς 6% σὲ 1 ἔτος καὶ 4 μῆνες ;

307.—Ἕνας γεωργὸς ἀγόρασε ἕνα χωράφι μὲ πίστωσι 3 μηνῶν καὶ μὲ τόκο 5% ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς, ἡ ὁποία αὐξήθηκε κατὰ 750 δραχμὲς περισσότερο. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὸ χωράφι ;

308.—Πόσο Κεφάλαιο σὲ 45 ἡμέρες μὲ 5% δίνει τόσο τόκο, ὅσο δίνει Κεφάλαιο 18.000 δραχμὲς μὲ 6% σὲ 90 ἡμέρες ;

309.—Πόσο Κεφάλαιο τοκιζόμενο μὲ 12% θὰ δώσῃ σὲ 5 ἔτη, τόκο ὅσο δίνει Κεφάλαιο 45.000 δραχμῶν σὲ 7 ἔτη μὲ 10% ;

Ὁμάδα 3η. – 310.—Κατέθεσε ἕνας τὴν 1η Μαρτίου στὴν Τράπεζα ἕνα κεφάλαιο μὲ 10% καὶ στὶς 15 Μαΐου ἰδίου ἔτους, εἰσέπραξε τόκο 750 δραχμές. Πόσα εἶχε καταθέσει ;

311.—Ὕστερα ἀπὸ 30 μῆνες ἕνα κεφάλαιο αὐξήθηκε κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ. Μὲ πόσο Ἐπιτόκιο εἶχε τοκισθῇ ;

312.—Μὲ πόσο ἐπιτόκιο, κεφάλαιο 12.000 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες ἔγινε μὲ τοὺς τόκους του 12.720 δραχμές ;

313.—Πότε ἔχομε μεγαλύτερο τόκο : Ἂν τοκίσωμε ἕνα Κεφάλαιο 100.000 δραχ. μὲ 3% γιὰ 96 ἡμέρες ἢ ἂν τὸ τοκίσωμε μὲ 4% γιὰ 72 ἡμέρες ;

314.—Ἐδάνεισε ἕνας 640.000 δραχμὲς γιὰ 3 μῆνες πρὸς 8%. Ἔπειτα τὸ κεφάλαιο μὲ τὸν τόκο μαζί, ἐδάνεισε σὲ ἄλλον μὲ 10% καὶ μετὰ ἀπὸ ὡρισμένο χρόνο εἰσέπραξε συνολικὰ 734.400 δραχμές. Πόσο χρόνο διήρκεσε τὸ δεύτερο δάνειο ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

Α'. ΓΡΑΜΜΑΤΙΟ - ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ

Μάθημα 29ο.—Δανειστής ή πιστωτής, όφειλέτης κλπ.

Ξέρετε τί είναι Τόκος καί, πῶς ὁ Τόκος κάθε Κεφαλαίου ὑπολογίζεται μὲ συμφωνία. Ἡ συμφωνία αὐτὴ ἀφορᾶ τὸ Ἐπιτόκιο καὶ τὴ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου. Ἐπίσης μάθατε ὅτι ἐκεῖνος ποὺ δανείζει λέγεται **δανειστής.** Μπορεῖ ὅμως νὰ γίνη καὶ τὸ ἑξῆς: Νὰ ἀγοράση ἕνας ἐμπορεύματα καὶ νὰ μὴν τὰ πληρώση ἀμέσως. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ ὁ ἔμπορος κάνει **πίστωσι** στὸν ἀγοραστή. Ὁ ἔμπορος λέγεται τώρα **πιστωτής.** Ὁ ἄλλος ποὺ πιστώνεται γιὰ τὰ ἐμπορεύματα ἢ δανείζεται χρήματα, εἶναι ὁ **ὀφειλέτης**, ὅπως ξέρετε.

2. Γραμμάτιο. Ἀλλὰ ἐκεῖνος ποὺ δανείζει, μὲ ποιὸν τρόπο ἀσφαλίζει τὰ χρήματά του ; Μπορεῖ ὁ δανειζόμενος χρήματα, ἢ αὐτὸς ποὺ παίρνει μὲ πίστωσι ἐμπορεύματα, νὰ πάθη κάτι καὶ νὰ μὴν ἐπιστρέψη τὸ χρέος του. Τί θὰ γίνη λοιπόν ; Θὰ χαθοῦν τὰ χρήματα ; Μὰ τότε δὲν θὰ δάνειζε κανεὶς καὶ δὲν θὰ μποροῦσαν νὰ γίνουν τόσες καὶ τόσες συναλλαγές. Γιὰ κάθε ἐνδεχόμενο λοιπὸν οἱ ἄνθρωποι βρῆκαν τρόπο γι' αὐτὲς τὶς περιπτώσεις, Ὁ δανειστὴς ἢ πιστωτὴς δίνοντας χρήματα ἢ ἐμπορεύματα, ζητᾶ ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη νὰ ὑπογράψη μιὰ ἀπόδειξι. Στὸ ἔγγραφο αὐτὸ ὁ ὀφειλέτης ὁμολογεῖ καὶ ὑπόσχεται νὰ ἐπιστρέψη τὸ χρέος του σὲ ὡρισμένη ἡμερομηνία. Τὸ ἔγγραφο αὐτὸ εἶναι ἕνας μάρτυρας ποὺ ἀσφαλίζει τὰ χρήματα τοῦ δανειστοῦ καὶ λέγεται **γραμμάτιο**·

Ἂς δοῦμε πῶς συντάσσεται ἕνα γραμμάτιο.

Παράδειγμα : Ὁ κ. Λάγιος χρειάζεται χρήματα καὶ τὰ ζητᾶ ἀπὸ τὸν συγχωριανόν του κ. Παπανικολάου. Ὁ κ. Λάγιος εἶναι ἕνας καλὸς ἀγοραστὴς καὶ ἔμπιστος ἄνθρωπος. Δανείζεται λοιπὸν 5.000 δραχμές. Πρὶν πάρη τὸ δάνειο, συμφωνεῖ μὲ τὸ δανειστή του γιὰ τὴ **χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου** καὶ γιὰ τὸν **Τόκο** ποὺ θὰ δώση. Συμφωνοῦν νὰ ἐπιστραφῆ τὸ Κεφάλαιο σὲ 6 μῆνες καὶ μὲ Ἐπιτόκιο 8%. Ὑπολογίζουν τώρα Τόκο, ποῦ δίνουν οἱ 5.000 δραχ. σὲ 6 μῆνες μὲ 8%

$$Τ = \frac{5.000 \times 6 \times 8}{1.200} = \frac{240.000}{1.200} = 200 \text{ δραχμές.}$$

Προσθέτουν μετὰ τὸ $Κ = 5.000 + Τ = 200$ καὶ προκύπτει τὸ ποσὸν

5.200 δρχ. ποὺ πρέπει νὰ ἐπιστρέψη μετὰ 6 μῆνες ὁ Λάγιος στὸν Παπανικολάου. Ὑπογράφει λοιπὸν τὸ παρακάτω γραμμάτιο :

ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΝ

ΛΗΞΙΣ τῇ 15 Ἰουνίου 1960, **Διὰ δραχ. 5.200**

Τὴν 15ην Ἰουνίου 1960 ὁ ὑπογεγραμμένος Κώστας Λάγιος κάτοικος . . . . ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Κ. Παπανικολάου ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ, τὸ ἄνω ποσόν τῶν πέντε χιλιάδων διακοσίων δραχ. (5.200), τὸ ὁποῖον ἔλαβον παρ᾿αὐτοῦ τοῖς μετρητοῖς,

Ἐν . . . τῇ 15 Δεκεμβρίου 1959

Ὁ Λαβὼν

(Χαρτόσημον) Κ. Λάγιος (ὑπογρ.)

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ γραμμάτιο ὑπογράφεται ἀπὸ τὸν χρεώστη καὶ τὸ κρατᾶ ὁ δανειστής. 2) Στὸ γραμμάτιο γράφεται τὸ σύνολο τοῦ κεφαλαίου ποὺ δανείζεται μὲ τὸν Τόκο του μαζί. 3) Γράφεται ἡ ἡμερομηνία τῆς **λήξεώς** του. 4) Τὸ γραμμάτιο γιὰ νὰ εἶναι ἐπίσημο, χαρτοσημαίνεται μὲ ἀνάλογο χαρτόσημο.

Ἐργασίες : 1) Φέρετε πληροφορίες σχετικὲς μὲ τὰ δάνεια καὶ τὰ γραμμάτια. 2) Κάμετε μεταξύ σας ψεφτοδάνεια καὶ ὑπογράψετε γραμμάτια. 3) Ζητῆστε ἀπὸ ἐμπορικά, ἀπὸ Τράπεζες κλπ. γραμμάτια ἔντυπα.

Μάθημα 30ο.—Ἐμπόριο - Συναλλαγματική.

α) Τὸ ἐμπόριο διακρίνεται σὲ μεγάλο καὶ μικρό. Ὑπάρχουν λοιπὸν μεγαλέμποροι καὶ μικρέμποροι. Καὶ ἀκόμα πιὸ πάνω ἀπὸ τοὺς μεγαλεμπόρους εἶναι οἱ Βιομήχανοι καὶ παρακάτω ἀπὸ τοὺς μικρεμπόρους οἱ ψιλικαντζῆδες, ποὺ κάνουν «τοῦ ποδαριοῦ ἐμπόριο», ὅπως λέγομε.

Ἡ πώλησι τῶν ἐμπορευμάτων διακρίνεται ἐπίσης σὲ δύο εἴδη. Στὴ **χονδρικὴ** καὶ **λιανικὴ** πώλησι.

Καὶ ἡ πληρωμὴ τῶν ἐμπορευμάτων διακρίνεται σὲ δύο : **«τοῖς μετρητοῖς»** καὶ **«ἐπὶ πιστώσει»**. Τί λέγομε πληρωμὴ **«τοῖς μετρητοῖς»**;

'Αγοράζω κάτι καὶ τό πληρώνω τὴν ἴδια στιγμή. Αὐτὸ γίνεται πάντοτε γιὰ τὰ χίλια δυὸ μικροπράγματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς. Θἄχετε ἰδῆ σὲ πολλὰ παντοπωλεῖα κρεμασμένες ταμπέλες, ποὺ γράφουν : «ΠΙΣΤΩΣΙΣ ΔΕΝ ΔΙΔΕΤΑΙ. ΟΛΑ ΤΟΙΣ ΜΕΤΡΗΤΟΙΣ». Καταλαβαίνετε τί θέλουν νὰ ποῦν αὐτὲς οἱ φάσεις.

β) Στὸ ἐμπόριο ὅμως χοντρικῆς πωλήσεως, συνήθως τὰ ἐμπορεύματα ἀγοράζονται μὲ πίστωσι. Μπορῶ δηλαδὴ νὰ ἀγοράσω κάτι ἔστω καὶ ἂν δὲν ἔχω ὅλα τὰ χρήματα διὰ νὰ τὰ πληρώσω ἀμέσως.

Σημείωσις. — Ὁ πιστωτὴς δὲν κάνει πιστώσεις στὴν τύχη καὶ σὲ κάθε εἴδους ἄνθρωπο. Προσέχει, ἂν αὐτὸς ποὺ ζητᾶ νὰ δανεισθῆ ἢ τὰ πιστωθῆ, εἶναι ἀξιόπιστος, δηλ. ἂν ἐμπνέῃ ἐμπιστοσύνη.

ΠΩΣ ΓΙΝΕΤΑΙ Η ΠΙΣΤΩΣΙΣ

Παράδειγμα : Ὁ Νικόλαος Δήμας μικροβιβλιοπώλης στὴν 'Ελασόνα ἀγόρασε ἀπὸ τὸν ἐκδοτικὸ οἶκο «ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ» στὴν 'Αθήνα, ἐμπορεύματα σὲ βιβλία καὶ ἄλλα σχολικὰ εἴδη. Τὰ ἐμπορεύματα ποὺ ἐπῆρε, ἀξίζουν 10.000 δραχμές. 'Αλλά, τόσα χρήματα δὲν εἶχε τὴ στιγμὴ τῆς ἀγορᾶς. Δὲν μπορεῖ δηλ. νὰ πληρώση «τοῖς μετρητοῖς». Ὁ ἐκδότης ξέρει τὸν κ. Δήμα, ὅτι εἶναι καλοπληρωτὴς καὶ τοῦ δίνει τὰ ἐμπορεύματα μὲ πίστωσι. Ὁ Δήμας παίρνοντας τὰ ἐμπορεύματα, πληρώνει μιὰ προκαταβολὴ ἀπὸ 2.000 δραχμὲς καὶ γιὰ τὶς ὑπόλοιπες 8.000 δραχμές, πιστώνεται. Ὑπόσχεται νὰ τὶς πληρώση αὐτές, σὲ 5 μῆνες. Πληρώνει λοιπὸν τώρα 2.000 δραχμές, τοῦ γίνεται ἡ σχετικὴ ἔκπτωσι, πού πάντοτε γίνεται σὲ χονδρικὴ πώλησι ἐμπορευμάτων καὶ γιὰ τὶς 8.000 δραχμὲς ὑπογράφει τὸ παρακάτω γραμμάτιο.

ΓΡΑΜΜΑΤΙΟΝ

Λῆξις τὴν 5 Φεβρουαρίου 1957 — Διὰ δραχ. 8.000

Τὴν 5ην Φεβρουαρίου 1960 ὁ ὑπογεγραμμένος Νικ. Δήμας Βιβλιοπώλης, κάτοικος 'Ελασόνος, ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν 'Εκδοτικὸν Οἶκον «ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ» 'Αγίου Κωνσταντίνου 14 'Αθήνας, τὰς ὡς ἄνω δραχμὰς τῶν ὀκτὼ χιλιάδων (8.000) ὡς ἀξίαν ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα ἔλαβον παρ' αὐτοῦ.

(Θέσις χαρτοσήμου)

'Εν 'Αθήναις τῇ 5/9/1959

Ὁ Λαβὼν

Νικ. Δήμας

Σημείωσις. Ἀντὶ τοῦ γραμματίου ὁ ἐκδότης προτιμᾶ νὰ ὑπογράψη ὁ χρεώστης τοῦ, ἕνα ἄλλο τύπο ἐγγράφου ποῦ λέγεται ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ. Μὲ αὐτὴν διατάσσει τὸν Δήμα νὰ πηλρώση τὸ χρέος σὲ τρίτον. Ἔτσι διευκολύνεται ὁ Δήμας ποὺ βρίσκεται στὴν Ἐπαρχία, γιατὶ μπορεῖ νὰ πληρώση τὸ χρέος του σὲ μία Τράπεζα τοῦ τόπου του καὶ νὰ ἀποφύγη τὰ ἔξοδα ἑνὸς ταξιδίου στὴν Ἀθήνα Ἀλλὰ καὶ διότι τὰ χρήματα μὲ τὴ συναλλαγματικὴ εἶναι πιὸ ἐξασφαλισμένα. Ἡ συναλλα γματικὴ ὑπογράφεται καὶ ἀπὸ τοὺς δύο συμβαλλομένους.

ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ

Λῆξις τῇ 5 Φεβρουαρίου 1960 Δραχ. 8.000

Τὴν 5ην Φεβρουαρίου 1960 πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης Συναλλαγματικῆς, εἰς διαταγὴν ἐμοῦ τοῦ ἰδίου καὶ εἰς τὸ ἐνταῦθα κατάστημα τῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος, τὸ ποσὸν τῶν ὀκτὼ χιλιάδων δραχμῶν (8.000), τὰς ὁποίας ἐλάβατε παρ' ἡμῶν εἰς ἐμπορεύματα τῆς ἀρεσκείας σας.

Πρὸς τὸν κ. Ν. Δήμαν
Ὁδὸς . . . . ἀριθ. . . . . .
Ἐλασόνα

Ἐν Ἀθήναις 5-9-59

ΔΕΚΤΗ ΕΚΔΟΤΗΣ

(Θέσις χαρτοσήμου) Ν. Δήμας

Παρατηρήσεις. Ὁ ὀφειλέτης εἶναι ὑποχρεωμένος κατὰ τὴν ἡμέρα **λήξεως προθεσμίας,** νὰ ἐπιστρέψη τὸ ποσὸν αὐτὸ ποὺ ἀναγράφεται στὸ **Γραμμάτιο** ἢ στὴν **Συναλλαγματική**. Μέσα στὸ ποσὸν αὐτό, ἀσφαλῶς θὰ ἔχη ὑπολογισθῆ ὁ Τόκος. Ἔτσι, **αὐτὸ ποὺ ἀναγράφεται, στὴν πραγματικότητα δὲν εἶναι τὸ κεφάλαιο ποὺ δανείστηκε, ἀλλὰ τὸ κεφάλαιο ηὐξημένο μὲ τὸν τόκο του, ποὺ πρέπει νὰ πληρωθῆ κατὰ τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.**

Ἐργασίες. Ἀπαντήσετε :

1) Τὶς 8.000 δραχμὲς ποὺ χρεώνεται ὁ Δήμας τὰ ἔλαβε πραγματικά ;

2) Ἂν πλήρωνε ἀμέσως τοῖς μετρητοῖς θἄδινε τόσα ἢ λιγώτερα; Πόσα θὰ πλήρωνε ἂν ἡ βιβλιοπωλικὴ ἔκπτωσι ἦταν 25% ;

3) Πόσα πλήρωσε γιὰ τίς 2.000 δραχμὲς μὲ 25% ;

4) Γιατὶ στὴ συναλλαγματικὴ γράφτηκε ὁλόκληρο τὸ ποσὸ τῶν 8.000 δραχμῶν ;

5) Νὰ κάμετε τὸ Γραμμάτιο καὶ τὴ Συναλλαγματικὴ σὰν νὰ εἶστε σεῖς ὁ ἐκδότης.

Β΄. ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

Μάθημα 31ο.– Προεξόφλησις — Ὀπισθογράφησις.

Στὸ προηγούμενο παράδειγμα μας ὁ «ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ» ἐκράτησε γιὰ τὰ ἐμπορεύματα ποὺ ἔδωσε στὸν Δήμα, συναλλαγματικὴ 8.000 δραχ. Ὁ ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ δὲν ἔχει μόνον αὐτὴν τὴ συναλλαγματική, ἀλλὰ καὶ ἄλλες πολλές, γιατὶ κάνει σὲ πολλοὺς πίστωσι. Ὑπολογίζει ὅμως, ὅτι θὰ ἔπιανε ἀπὸ λιανικὴ πώλησι, τόσα χρήματα ὥστε νὰ πληρώσῃ καὶ τοὺς ὑπαλλήλους του καὶ τόσα ἄλλα ἔξοδα ποὺ ἔχει τὸ κατάστημά του. Βέβαια ἔχει γραμμάτια ἢ συναλλαγματικές. Ἀλλὰ μ' αὐτὰ δὲν μπορεῖ νὰ πληρώσῃ τὰ ἔξοδα ποὺ ἔχει. Γι' αὐτὸ παίρνει μεταξὺ τῶν ἄλλων καὶ τὴ Συναλλαγματικὴ τοῦ Δήμα καὶ τὴν πηγαίνει στὴν Τράπεζα Ἑλλάδος 3 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι της. **Πωλεῖ τὴ συναλλαγματικὴ καὶ μεταβιβάζει τὰ δικαιώματα ποὺ ἔχει σ' αὐτή, στὴν Τράπεζα**. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ συμβαίνουν τὰ ἑξῆς : α) Ὁ ὡς τώρα πιστωτὴς ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ μὲ **ὀπισθογράφησι**, μεταβιβάζει τὴ συναλλαγματικὴ στὴν Τράπεζα. β) Ἡ Τράπεζα τώρα γίνεται ἡ ἴδια πιστωτὴς καὶ στὶς 5 Φεβρουαρίου ποὺ λήγει ἡ συναλλαγματικὴ θὰ εἰσπράξῃ αὐτὴ τὶς 8.000 δραχ., ἀπὸ τὸν Δήμα. γ). Ἡ Τράπεζα **προεξοφλεῖ** τὴ Συναλλαγματική, πληρώνοντάς την πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι της 3 μῆνες. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ λέγεται **προεξόφλησις**.

Τί εἶναι ἡ Ὑφαίρεσις.

Ἀλλὰ ἡ προεξόφλησις πῶς γίνεται ; Στὴν συναλλαγματικὴ ἀναγράφεται ποσὸν 8.000 δραχ. Τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ πληρωθῇ καὶ γίνεται πραγματικὰ τόσο, κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεώς του δηλ. στὶς 5 Φεβρουαρίου 1960. Προεξοφλῶντάς την τώρα ἡ Τράπεζα 3μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι—στὶς 5 Ν/ρίου 1959—θὰ πληρώσῃ στὸν ΚΕΝΤΑΥΡΟ ὅλο τὸ ποσὸν τῶν 8.000 δραχ. ; Ὄχι, βέβαια. Πρέπει νὰ λογαριάση τὸ διάστημα τῶν 3 μηνῶν πού λέγεται **χρόνος προεξοφλήσεως** καὶ νὰ τοῦ δώση λιγώτερα. Δηλαδὴ καὶ **ἡ Τράπεζα μέ τὴ σειρὰ της πρέπει νὰ κρατήση τὸ κέρδος της γιὰ τὴν προεξόφλησι ποὺ κάνει τῶν 3 μηνῶν καὶ μὲ ὡρισμένο Ἐπιτόκιο.** Ἡ Τράπεζα εἰσπράττει τὸν τόκο της ἀπὸ τὸν κομιστὴ τῆς συναλλαγματικῆς ΚΕΝΤΑΥΡΟ γιατὶ ἀπὸ τὸν Δήμα δὲν μπορεῖ νὰ ζητήση οὔτε δραχμὴ παραπάνω ἀπὸ ὅσα γράφονται στὴ συναλλαγματική, κατὰ τὶς 5 Φεβρουαρίου 1960 ποὺ λήγει.

Ἀπὸ τὴν ἀξία τῶν 8.000 δραχμῶν λέγεται ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ ΑΞΙΑ, θὰ κρατήση ἡ Τράπεζα τὸν Τόκο της γιὰ 3 μῆνες προεξοφλήσεως. **Αὐτὸ τό ποσὸν, ποὺ κρατᾶ ἡ Τράπεζα ὡς κέρδος, λέγεται ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ.** Τὸ ποσὸν δὲ, ποὺ πληρώνει στὸν ΚΕΝΤΑΥΡΟ ἀγοράζοντας τὸ Γραμμάτιο ἢ τὴν Συναλλαγματική, λέγεται ΠΑΡΟΥΣΑ (ἢ πραγματική) ΑΞΙΑ τοῦ Γραμματίου. Στὸ παράδειγμά μας ἄς ἰδοῦμε πόση εἶναι ἡ **Ὑφαίρεσις** ποὺ θὰ κρατήση ἡ Τράπεζα ὡς κέρδος, καὶ πόση ἡ **Πραγματικὴ ἀξία** ποὺ θὰ δώση στὸν ΚΕΝΤΑΥΡΟ. Καὶ ἡ **Ὑφαίρεσις,** ὅπως καὶ ὁ Τόκος ὑπολογίζεται μὲ βάσι ἕνα **Ἐπιτόκιο**.

Παράδειγμα: Γραμμάτιο Ὀνομαστ. ἀξίας 8.000 δρχ. προεξοφλεῖται 3 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του, μὲ 12%. Πόση εἶναι ἡ Ὑφαίρεσις;

Λύσις: Ὀνομ. ἀξία = 8.000 Χρ. προεξ. = 3 μῆνες Ἐπιτ. . . . . = 12 % Ὑφαίρ. . . . = ;	Σκέψις: Τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ λυθῆ ἀκριβῶς σὰν νὰ ἦταν τοῦ τόκου.

$$Ὑφ. = \frac{8.000 \times 3 \times 12}{1.200} = 240 \text{ δραχ.}$$

Ἀπάντησις: Ἡ **Ὑφαίρεσις**, ποὺ θὰ κρατήση ἡ Τράπεζα γιὰ τὴν προεξόφλησι ποὺ κάνει εἶναι 240 δραχ.

Ἡ **πραγματικὴ ἀξία**, ποὺ θὰ δώση στὸν «ΚΕΝΤΑΥΡΟ» βρίσκεται ἂν ἀπὸ τὴν Ὀνομ. ἀξία, ἀφαιρέσωμε τὴν Ὑφαίρεσι: 8.000 – 240 = 7.760 δραχμές.

Ἀνακεφαλαίωσις: Στὴν Ὑφαίρεσι ἔχομε 4 ποσὰ ὅπως καὶ στὰ προβλήματα τοῦ Τόκου.

Στὸν Τόκο:		Στὴν Ὑφαίρεσι
1) Κεφάλαιο . . (Κ)	. . . . . .	Ὀνομαστικὴ ἀξία . . (Ὀν. ἀξ.)
2) Τόκος . . . . (Τ)	. . . . . .	Ὑφαίρεσις . . . . (Ὑ.)

3) Χρόνος . . . . (Χ) . . . . . . Χρόνος προεξοφλ. . . . . (Χ.)
4) Ἐπιτόκιο . . (Ε) . . . . . . Ἐπιτόκιο . . . . (Ε.)

ΟΡΙΣΜΟΙ

1) **ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ** λέγεται ὁ Τόκος ποὺ παίρνει ἐκεῖνος, ποὺ προεξοφλεῖ ἕνα γραμμάτιο πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του.

2) **ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ ΑΞΙΑ** λέγεται τὸ ποσὸν, ποὺ ἀναγράφεται στὸ γραμμάτιο ἢ στὴ συναλλαγματικὴ καὶ πληρώνεται κατά τήν ἡμέρα τῆς λήξεως.

3) **ΧΡΟΝΟΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΕΩΣ** λέγεται τὸ χρονικὸ διάστημα ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

4) **ΕΠΙΤΟΚΙΟ** = ὁ Τόκος τῶν 100 μονάδων σ' ἕνα ἔτος.

5) **Ἡ ΠΑΡΟΥΣΑ Ἢ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ** ἀξία, λέγεται τὸ ποσόν ποὺ πληρώνεται μετὰ τὴν ἔκπτωσι, κατὰ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως.

1) ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ ΑΞΙΑ — ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ . . . = ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΑ
2) ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ ΑΞΙΑ — ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΑ . . . = ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ
3) ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΑ + ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ . . = ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗ ΑΞΙΑ

Μάθημα 32ο.—Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις λέγεται ὁ Τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως ἑνὸς γραμματίου, μέχρι τὴν ἡμέρα τῆς λήξεώς του.

Π ρ ό β λ η μ α. Γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 8.000 δραχμῶν, προεξωφλήθηκε 2 ἔτη πρό τῆς λήξεώς του πρός 12%. Πόση εἶναι ἡ Ὑφαίρεσις ;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ἡ Ὑφαίρεσις σὲ Χρόνο «**ἔτη**». Λύεται ἀκριβῶς σὰν παρόμοιο πρόβλημα Τόκου.

Κατάστρωσις :	Κατάταξις : Τύπος : $Y = \frac{E.O.X.}{100}$
'Ον. ἀξία = 8000 δρχ.	
'Υφαίρεσις = ; »	100 δραχ. σὲ 1 ἔτ. ἔχουν 12 δρχ. 'Υφαίρεσις
Χρόνος = 2 ἔτη	8000 » » 2 » » Χ ; » »
'Επιτόκιον = 12%	

Λ ύ σ ι ς : $X = 12 \times \frac{8000 \times 2}{1 \times 100} = 1920$ δραχ.

'Απάντησις: 'Υφαίρεσις = 1920 δραχμές.

Παρατηρήσεις : 1) "Αν ἡ 'Υφαίρεσις ἐζητεῖτο σέ Χρόνο προεξοφλήσεως **«μηνῶν»**, θὰ εἴχαμε τὸν τύπο : $\boxed{Y = \frac{E.O.X.}{1.200}}$

2) "Αν ὁ Χρόνος προεξοφλήσεως ἦτο **σὲ ἡμέρες,** θὰ εἴχαμε τὸν τύπο : $\boxed{Y = \frac{E.O.X.}{36.000}}$

Κανόνας.—Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν 'Υφαίρεση πολλαπλασιάζομε τὴν 'Ονομαστικὴ ἀξία ἐπὶ τὸν χρόνο καὶ τὸ 'Επιτόκιο καὶ τό γινόμενο αὐτῶν διαιροῦμε διὰ τοῦ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000 ἀναλόγως τοῦ χρόνου προεξοφλήσεως.

Σημείωσις : Στὸ παραπάνω πρόβλημα ἂν θελήσωμε νά βροῦμε τὴν πραγματικὴ ἀξία, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ ἀφαιρέσωμε τὴς 'Υφαίρεσι ποὺ βρήκαμε (1920 δραχμὲς) ἀπὸ τὴν 'Ονομαστικὴ ἀξία (8000 — 1920 = 6080 δραχμὲς ἡ πραγματικὴ ἀξία).

β) Περίπτωσις. "Οταν ζητῆται ἡ 'Ονομ. ἀξία

Πρόβλημα. Πόση εἶναι ἡ 'Ονομ. ἀξία γραμματίου ποὺ προεξωφλήθηκε 2 ἔτη πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του μὲ 12% καὶ ἔδωσε 'Υφαίρεσι 1920 δραχμὲς ;

Λύσις: Θὰ λυθῆ ἀκριβῶς ὅπως τὰ προβλήματα τόκου, ὅπου ζητεῖται τὸ Κεφάλαιο. Δὲν ἔχετε παρὰ νὰ ἀντικαταστήσετε τὸν τόκο μὲ τὴν 'Υφαίρεσι.

Νὰ κάνετε μόνοι σας τὴν κατάστρωσι καὶ κατάταξι τοῦ προβλήματος :

$$X = \frac{100 \times 1 \times 1920}{2 \times 12} = \frac{192.000}{24} = 8.000 \text{ δραχμές.}$$

Ἡ Ὀνομαστ. ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ εἶναι 8.000 δραχμές.

Ἀπαντήσετε : 1) Πῶς βρίσκεται ἡ Ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ Γραμματίου σὲ ἔτη; Ποῖον τύπο θὰ χρησιμοποιήσετε ὅταν ὁ προεξοφλητικὸς χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, σὲ ἡμέρες, καὶ ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία;

Κανόνας—Γιὰ νὰ εὕρωμε τὴν Ὀνομαστικὴ ἀξία, πολλαπλασιάζομε τὴν Ὑφαίρεσι ἐπὶ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὸ Ἐπιτόκιο.

γ) Περίπτωσις : Ὅταν ζητῆται ὁ Χρόνος

Πρόβλημα : Μία Τράπεζα προεξώφλησε γραμμάτιο 4.000 δραχμῶν πρὸς 8% στὶς 10 Ὀκτωβρίου 1960 καὶ κράτησε Ὑφαίρεσι 320 δραχμές. Πότε ἔληγε τὸ Γραμμάτιο ;

Κατάστρωσις	**Κατάταξις**
Ὀν. ἀξ. = 4000 δραχ.	100 δρχ. σὲ 1 ἔτος δίνουν 8 δρχ. Ὑφαίρ.
Ὑφαίρ. = 320 »	4000 » » Χ; » » 320 » »
Χρόνος = ;	Λύσις : $X = 1 \times \frac{320 \times 100}{8 \times 4000} = \frac{32.000}{32.000} = 1$ ἔτος
Ἐπιτόκ. = 8%	

Τὸ γραμμάτιο ἔληγε μετὰ 1 ἔτος. Τύπος : $X = \frac{Y. 100}{E. O.}$

Κανόνας.—Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν Χρόνο προεξοφλήσεως ἑνὸς Γραμματίου, πολλαπλασιάζομε τὴν Ὑφαίρεσι ἐπὶ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ Ἐπιτοκίου ἐπὶ τὴν Ὀνομαστικὴν ἀξίαν.

Σημείωσις. Ὅταν προκύψη κλάσμα γνήσιο θὰ τὸ τρέπετε σὲ συμμιγῆ, ὅπως μάθαμε στὸν Τόκο, ὅταν ζητῆται ὁ χρόνος.

δ) Περίπτωσις: Ὅταν ζητῆται τὸ Ἐπιτόκιο.

Πρόβλημα : Γραμμάτιο Ὀνομ. ἀξίας 8000 δραχ. προεξωφλήθηκε 2 ἔτη πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του καὶ ἔδωσε ὑφαίρεσι 1920 δραχ. Μὲ πόσο Ἐπιτόκιο ὑπολογίστηκε ἡ ὑφαίρεσι ;

Κατάταξις: Ὀνομ. ἀξία 8.000 δραχ σὲ 2 ἔτη δίνει Ὑφ.=1920 δρ.
» » 100 » » 1 » » » =Χ ; »

Λύσις: $X = \frac{1920 \times 1 \times 100}{2 \times 8.000} = 12\%$ Ε. Τύπος: $E = \frac{Y . 100}{X . O.}$

Ἀπάντησις: Τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 12%

Κανόνας. Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐπιτόκιο, πολλαπλασιάζομε τὴν Ὑφαίρεσι ἐπὶ 100 ἢ 1.200 ἢ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ Χρόνου ἐπὶ τὴν Ὀνομ. ἀξίαν.

Ἐργασίες: 1) Νὰ βγάλετε ἕνα γενικὸ κανόνα γιὰ τὰ προβλήματα Ὑφαιρέσεως. 2) Νὰ κάμετε ἕνα γενικὸ πίνακα ὅπως εἶναι οἱ πίνακες τοῦ τόκου. Λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα:

Προβλήματα

Ὁμάδα 1η. – 315. Γραμμάτιο Ὀνομαστικῆς ἀξίας 9.000 δρχ. προεξωφλήθηκε 3 ἔτη πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του πρὸς 12%. Πόσην Ὑφαίρεσι θὰ κρατήση ὁ προεξοφλητής;

316. – Γραμμάτιο 9.500 δραχ. προεξοφλεῖται 3 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του στὴν Τράπεζα Ἑλλάδος πρὸς 8%. Πόσην Ὑφαίρεσι κρατᾶ ἡ Τράπεζα; Καὶ πόση πραγματικὴ ἀξία θὰ πληρώση στὸν κομιστὴ τοῦ γραμματίου;

317. – Γραμμάτιο 5.400 δραχμ. προεξοφλεῖται 45 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του πρὸς 10 %. Πόση εἶναι ἡ Ὑφαίρεσι καὶ πόση ἡ πραγματικὴ ἀξία του;

318. – Ἕνα Γραμμάτιο προεξοφλεῖται 60 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του, πρὸς 6 % καὶ μὲ ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσι 500 δρχ. Πόση εἶναι ἡ Ὀνομαστικὴ ἀξία του;

319. – Ἕνα γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12% καὶ ἔδωσε ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσι 270 δραχμές. Πόση εἶναι ἡ Ὀνομαστικὴ ἀξία του;

Ὁμάδα 2η. – 320. Γραμμάτιο Ὀνομαστικῆς ἀξίας 8.500 δραχ. προεξοφλήθηκε πρὸς 9% καὶ ἔδωσε ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσι 340 δραχ. Ποιὸς εἶναι ὁ χρόνος προεξοφλήσεως;

321. – Μὲ πόσο ἐπιτόκιο, Γραμμάτιο Ὀνομ. ἀξίας 12000 δραχ.

προεξωφλήθηκε 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του καὶ εἶχεν ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσι 750 δραχμές ;

322. – Γραμμάτιο 3.600 δραχ. λήγει στὶς 20 Μαΐου καὶ προεξοφλεῖται τὴν 20ὴν Μαρτίου τοῦ ἰδίου ἔτους πρὸς 10 %. Πόση εἶναι ἡ Ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ πραγματικὴ ἀξία του ;

323. – Γραμμάτιο Ὀνομαστικῆς ἀξίας 7.500 δραχμὲς, ποὺ λήγει στὶς 14 Ἰουνίου (1960) προεξοφλεῖται τὴν 8ην Ἀπριλίου 1960 πρὸς 9%. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις καὶ ἡ πραγματικὴ ἀξία.

324. – Πρὸ πόσου χρόνου προεξοφλεῖται Γραμμάτιο Ὀνομαστικῆς ἀξίας 8.000 δρχ. πρὸς 5% καὶ δίνει ἐξωτεοικὴ Ὑφαίρεσι 20 δρχ. (σὲ ἡμέρες).

325. —Ἕνα Γραμμάτιο 3.500 δρχ. προεξωφλήθηκε 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξωτερικῶς πρὸς 5%. Πόση εἶναι ἡ πραγματική του ἀξία καὶ πόση ἡ Ὑφαίρεσι ;

326.—Μία συναλλαγματικὴ 12.000 δραχμὲς προεξωφλήθηκε 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς της ἀντὶ 11.800 δραχμές. Πρὸς πόσο τοῖς % ὑπολογίσθηκε ἡ ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσι ;

Α΄. ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Μάθημα 33ο.—Πῶς λύονται τὰ προβλήματα τοῦ Μερισμοῦ

Πρόβλημα. Τρεῖς ἐργάτες ἔκαμαν μιὰ ἐργασία καὶ ἐπῆραν 252 δραχμές. Ὁ α΄ ἐργάτης ἐργάστηκε 9 ὧρες, ὁ β΄ 7 ὧρες καὶ ὁ γ΄ 5 ὧρες. Πόσες δραχμὲς ἀναλογοῦν στὸν καθένα χωριστά ;

Λύσις : Ἂν ἐργάζονταν καὶ οἱ τρεῖς ἐργάτες ἀπὸ ἴσες ὧρες, δηλαδὴ ἀπὸ 7 ὧρες ὁ καθένας, τότε θὰ μοιράζανε τὶς 252 δραχμὲς σὲ 3 ἴσα μέρη. Ἀλλὰ τώρα ἔχομε διαφορὰ στίς ὧρες ἐργασίας. Πρέπει λοιπὸν τίς 252 δραχμὲς νά τὶς μοιράσουν ἀνάλογα μὲ τὶς ὧρες ἐργασίας, ποὺ ἐργάστηκε ὁ καθένας.

Ἔτσι ὁ α)	ἐργάτης	θὰ πληρωθῆ	γιὰ	9	ὧρες
ὁ β)	»	»	»	7	»
ὁ γ)	»	»	»	5	»
Ὅλοι μαζὶ ἐργάστηκαν . . . . :				21	ὧρες

Στὸ πρόβλημα ὁ ἀριθ. 252 δραχμὲς θὰ μοιρασθῆ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 9, 7 καὶ 5 ὧρες.

Ἡ λύσι γίνεται μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα ἢ μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν.

α) Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ Μονάδα

Γιὰ τὶς 21 ὧρες ἐπῆραν 252 δρχ.

» 1 ὥρα » $\frac{252}{21}$

καὶ γιὰ 9 ὧρες » $\frac{252\times9}{21}=108$ δρ

β) Μὲ τὴν ἁπλῆ μέθοδο

Γιὰ 21 ὧρες ἐπῆραν 252 δραχμ.

» 9 » » Χ; »

Λύσις : $Χ=\frac{252\times9}{21}=108$ δρχ.

Ἀπάντησις : Ὁ α΄ ἐργάτης θὰ πάρη 108 δραχμές.

Ἐργασία : Νὰ συνεχίσετε τὸ ἴδιο γιὰ τὸν β′ καὶ γ′ ἐργάτη, μόνοι σας.

Τὸ ὅλο πρόβλημα γιὰ συντομία λύεται ὡς ἑξῆς :

Μεριστέος ἀριθμὸς	Μερίδια	
		ὁ α′ θὰ πάρη $\frac{252\times9}{21}=$ 108 δραχμ.
252	α′. 9 ὧρες	ὁ β′ » » $\frac{252\times7}{21}=$ 84 »
	β′. 7 »	
	γ′. 5 » 21	ὁ γ′ « » $\frac{252\times5}{21}=$ 60 »

Ἐρωτήσεις : Ἀπαντήσατε : α) Τί κάναμε γιὰ νὰ μοιράσωμε δίκαια τὶς 252 δραχμές ; β) Βγάλετε τὸν κανόνα πῶς μερίζεται ἕνας ἀριθμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα. γ) Μελετήσετε τὸ παρακάτω πρόβλημα, συνεχίσετε τὴ λύσι καὶ δώσετε τὴν ἀπάντησι.

Πρόβλημα : Τρεῖς ἐργάτες, ἐργάστηκαν καὶ πληρώθηκαν 1.000 δραχμές.

Ὁ α) ἐργάτης ἐργάστηκε 5 ἡμ. ἀπὸ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα.
Ὁ β) » » 6 » » 6 » » »
Ὁ γ) » » 8 » » 3 » » »

Πόσα χρήματα ἀναλογοῦν στὸν καθένα;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε ἀριθμὸ ἡμερῶν καὶ ἀριθμὸ ὡρῶν ἐργασίας γιὰ τὸν καθένα. Εὑρίσκομε : α) πόσες ὧρες ἐργασίας ἔκανε ὁ καθένας, ὁπότε προκύπτει ἀπὸ ἕνας ἀριθμὸς γιὰ τὸν κάθε ἐργάτη.

Ὁ α) ἐργάτης ἐργάστηκε 5 ἡμέρ. × 8 ὧρες = 40 ὧρες
Ὁ β) » » 6 » × 6 » = 36 »
Ὁ γ) » » 8 » × 3 » = 24 »

Τὶς 1.000 δρχ. θὰ μοιρασθῆ ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 40,36, 24, ποὺ παριστάνουν τὶς ὧρες ἐργασίας τοῦ καθενὸς ἐργάτου.

Λύσις:

Μεριστέος ἀριθμὸς	Μερίδια	Ἀναλογία
	α) 40 ὧρες	α) $\frac{1.000\times40}{100}=$ 400 δραχ.
1.000	β) 36 »	β) $\frac{1.000\times36}{100}=$ 360 »
	γ) 24 » = 100 »	γ) $\frac{1.000\times24}{100}=$ 240 »

Ἀπάντησις : Ὁ α) θὰ πάρη 400 δρχ., ὁ β) 360 δρχ. καὶ ὁ γ) 240 δρχ.

Κανόνας. — Γιὰ νὰ μερίσωμε ἕναν ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν μεριστέον ἀριθμό, ἐπὶ καθένα ἀπὸ αὐτοὺς καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀθροίσματός των.

Προβλήματα μερισμοῦ.

Ὁμάδα 1η·—327. – Τρεῖς ἐργάτες παίρνουν τὸ ἴδιο ἡμερομίσθιο, ὁ α) ἐργάστηκε 5 ἡμέρες, ὁ β) 6 ἡμέρες καὶ ὁ γ) 7 ἡμέρες. Ἐπῆραν δὲ καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ 900 δραχμές. Πόσα ἀναλογοῦν στὸν καθένα;

328. – Ἕνας πατέρας ἐμοίρασε στὰ τέσσερα παιδιά του τὴν περιουσία του ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία τους. Ὁ α) υἱὸς ἦταν 25 ἐτῶν. Ὁ β) 24 ἐτῶν. Ὁ γ) 20 ἐτῶν καὶ ὁ δ) 15 ἐτῶν. Ἐὰν ἡ περιουσία ἦταν 1680 στρέμματα, πόσα ἀναλογοῦν στὸ κάθε παιδί;

329. – Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἐνοικίασαν ἕνα λειβάδι ἀντὶ 6750 δραχμῶν. Ὁ α) εἶχε 60 πρόβατα, ὁ β) 55 καὶ ὁ γ) 110. Πόσα θὰ πληρώση ὁ καθένας;

330. – Σὲ δύο φτωχὲς οἰκογένειες μοιράσθηκε βοήθημα 280 κιλὰ ἀλεύρι ἀναλόγως τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας, ἡ α) οἰκογένεια εἶχε 7 μέλη, ἡ β) 5. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι ἀναλογεῖ στὴν κάθε οἰκογένεια;

Ὁμάδα 2η.—331 Νὰ μερισθῆ ὁ ἀριθμὸς 54.000, ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμούς : $\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$.

332.–Δύο ἀγωγιάτες παίρνουν γιὰ μεταφορικὰ 960 δραχμές. Ὁ α) μετέφερε ἀπὸ 60 κιλ. σὲ 5 δρόμους, ὁ β) μετέφερε ἀπὸ 80 κιλὰ σὲ 6 δρόμους. Πόσες δραχ. ἔλαβε ὁ καθένας τους;

333 – Δύο κτηνοτρόφοι ἐπλήρωσαν λειβαδιάτικα 1425 δραχμές. Ὁ α) βοσκησε σ' αὐτὸ 200 πρόβατα ἐπὶ 25 ἡμέρες. Ὁ β) 12 πρόβατα ἐπὶ 30 ἡμέρες. Πόσα λειβαδιάτικα ἀναλογοῦν στὸν καθένα;

334. – Γιὰ μιὰ ἐργασία, 5 ἐργάτες ἐπῆραν 5.100 δραχμές Πόσα χρήματα ἀναλογοῦν στὸν καθένα, ἂν ὁ α) ἐργάστηκε 5 ἡμέρες ἀπὸ 8 ὧρες κάθε ἡμέρα, ὁ β) 6 ἡμέρες ἀπὸ 7 ὧρες κάθε ἡμέρα, ὁ γ) 7 ἡμέρες ἀπὸ 5 ὧρες τὴν ἡμέρα, ὁ δ) 8 ἡμέρες ἀπὸ 4 ὧρες ἡμερησίως καὶ ὁ ε) 3 ἡμέρες ἀπὸ 7 ὧρες τὴν ἡμέρα;

Μάθημα 34ο.—Τί εἶναι Ἑταιρεία

Τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας εἶναι προβλήματα Μερισμοῦ. Ἀλλὰ τί εἶναι **ἑταιρεία**;

Γιὰ νὰ γίνη μία ἐπιχείρησι π.χ. νὰ ἀνοίξη ἕνα κατάστημα, ἕνα ἐργοστάσιο κλπ. χρειάζονται πολλὰ χρήματα (κεφάλαια). Ἐὰν τὸ ποσὸν εἶναι τόσο μεγάλο, ὥστε ἕνας μοναχός του νὰ μὴν μπορῆ νὰ κάνη τὴν ἐπιχείρησι αὐτή, παίρνει καὶ ἄλλο πρόσωπο, ἕναν ἢ δύο ἢ καὶ περισσοτέρους. Ἡ συντροφιὰ αὐτὴ λέγεται **Ἑταιρεία**. Καὶ τὰ πρόσωπα ποὺ κάνουν τὴν ἑταιρεία λέγονται **συνεταῖροι** ἢ **μέτοχοι**. Οἱ συνεταῖροι βάζουν τὰ κεφάλαιά τους καὶ ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρονικὸ διάστημα, ἀνάλογα μὲ τὰ κεφάλαια ποὺ ἔχει καταθέσει καθένας (ἀνάλογα μὲ τὶς μετοχές τους), μοιράζονται τὰ κέρδη τῆς ἐπιχειρήσεως. Τὸ κέρδος δηλαδὴ ἢ καὶ ἡ ζημία τῆς ἐπιχειρήσεως μερίζεται α) **ἀνάλογα μέ τὰ κεφάλαια**, β) **ἀνάλογα μέ τὴ χρονικὴ διάρκεια τῆς καταθέσεως** καὶ γ) **ἀνάλογα μὲ τὸ κεφάλαιο καὶ τὴ χρονικὴ διάρκεια μαζί**. Τὰ προβλήματα ἑταιρείας λοιπὸν εἶναι προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ὥστε στὰ προβλήματα Ἑταιρείας ἔχομε περιπτώσεις:

α) Περίπτωσις: Κεφάλαια ἴσα . . . Χρόνος διαφορετικὸς
β) » » ἄνισα . . » ἴδιος
γ) » » ἄνισα . . » διαφορετικός

Ἀσκήσεις: 1) Τί εἶναι Ἑταιρεία; 2) Τί εἶναι καταθέσεις; 3) Τί εἶναι Μετοχές;

1η περίπτωσις: Κεφάλαια διαφορετικὰ (Χρόνος ἴδιος)

α) Π ρ ό β λ η μ α. Τρεῖς συνεταῖροι ἔκαναν μιὰ ἐπιχείρησι καὶ κατέθεσαν ὁ α) 40.000, ὁ β) 50.000 καὶ ὁ γ) 60.000 δραχ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐκέρδισαν μετὰ ἀπό 1 χρόνο 90.000 δραχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας;

Λ ύ σ ι ς: Ἐδῶ ἔχομε 3 συνεταίρους ποὺ βάζει ὁ καθένας καὶ διαφορετικό ποσὸ χρημάτων δηλ. κεφάλαια διαφορετικὰ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπιχειρήσεως.

Σ' ἕνα χρόνο ἔχουν κέρδος 90.000 δραχ. καὶ θέλουν νὰ τὰ μοιράσουν. Καταλαβαίνετε βέβαια ὅτι ὅπως διαφορετικὸ εἶναι τὸ κεφάλαιο τοῦ καθενός, διαφορετικὸ πρέπει νὰ εἶναι καὶ τὸ κέρδος. Τὸ κέρδος λοιπὸν τῶν 90.000 δραχ. θὰ μερισθῆ ἀνάλογα μὲ τά κεφάλαια ποὺ καταθέτει ὁ καθένας.

Κ α τ ά τ α ξ ι ς

Μεριστέος ἀριθμὸς	α) 40.000 ἢ 4
	β) 50.000 ἢ 5
Τὸ κέρδος τῶν	β) 60.000 ἢ 6
90.000	Ἄρθροισμα 150.000 ἢ 15

Λ ύ σ ι ς : ὁ α) θὰ πάρη $\frac{90.000 \times 4}{15} = 24.000$ δραχμές.

ὁ β) » » » $\frac{90.000 \times 5}{15} = 30.000$ »

ὁ γ) » » » $\frac{90.000 \times 6}{15} = 36.000$ »

Σ υ μ π έ ρ α σ μ α.—Ὅταν λοιπὸν τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἑταιρείας, μερίζεται ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, διαιροῦμε τὸν μεριστέο (κέρδος ἢ ζημία) ἀριθμό, διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν (κεφαλαίων) καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομε ἐπὶ καθένα ἀπὸ αὐτούς.

Προβλήματα Ἑταιρείας (ὁ Χρόνος ἴδιος)

335.—Δύο ἔμποροι κατέθεσαν ὁ μὲν α) 760 λίρες ὁ δὲ β) 740 λίρες· Μετὰ ἀπὸ δύο χρόνια ἐκέρδισαν 750 λίρες. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

336.—Τρεῖς συνεταῖροι ἄνοιξαν βιβλιοπωλεῖο. Ὁ α) κατέθεσε 1.500 λίρες, ὁ β) 1750 λίρ. καὶ ὁ γ) 1.250 λίρες. Μετὰ 1 χρόνο ἐκέρδισαν 2.250 λίρες. Πόσο κέρδος αναλογεῖ στὸν καθένα;

337.—Τρεῖς συνεταῖροι γιὰ μιὰ ἐργασία κατέθεσαν ὁ α) 7.500 δραχμές, ὁ β) 7.300 δραχμὲς καὶ ὁ γ) 4.700 δραχμές. Ἡ ἐργασία ὅμως διαλύθηκε μὲ ζημία 5850 δραχ. Πόσο ζημιώθηκε ὁ καθένας;

338. — Τρεῖς ἄνθρωποι κατέθεσαν 6.000.000 δραχ. Ἡ ἐπιχείρησι τοὺς ἔδωσε κέρδη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ὁ α) ἐπῆρε 300.000 δραχμές, ὁ β) 250.000 δραχ. καὶ ὁ γ) 200.000 δρχ. Πόσα εἶχε καταθέσει ὁ καθένας;

339.—Τὰ κέρδη μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἦταν 5.400.000 δρχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ σὲ κάθε συνεταῖρο ἐὰν εἶχε καταθέσει ὁ α) 1.200.000 δρχ., ὁ β) 1.000.000, ὁ γ) 800.000 δρχ. καὶ ὁ δ) 600.000 δραχμές:

Μάθημα 35ο.— Β' περίπτωσις. Χρόνος διαφορετικός. (Κεφάλαια ἴσα).

Πρόβλημα. Τρεῖς ἔμποροι γιὰ μιὰ ἐπιχείρησι κατέθεσαν ἴσα κεφάλαια. Ἀλλὰ τοῦ α) τὰ χρήματα ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 5 χρόνια, τοῦ β) ἔμειναν 4 χρόνια καὶ τοῦ γ) 3 χρόνια. Στὸ τέλος διέλυσαν τὴν Ἑταιρεία καὶ βρῆκαν ὅτι ἐκέρδισαν 720.000 δραχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα ;

Λύσις : Ἐδῶ ἔχομε α) Κεφάλαια ἴσα ἀλλὰ χρόνο διαφορετικό, δηλ. 5 χρόνια τοῦ α', 4 χρόνια τοῦ β' καὶ 3 χρόνια τοῦ γ'. Ὥστε τὸ κέρδος 720.000 θὰ μερισθῆ ἀνάλογα μὲ τὴ χρονικὴ διάρκεια, ποὺ ἔμειναν τὰ κεφάλαια τοῦ καθενός, στὴν ἐπιχείρησι.

Κατάταξις ;

Μεριστέος ἀριθμός		Λύσις
	5 χρόνια	ὁ α) $\frac{720.000 \times 5}{12} = 300.000$ δραχ.
	4 »	ὁ β) $\frac{720.000 \times 4}{12} = 240.000$ »
720.000	3 »	ὁ γ) $\frac{720.000 \times 3}{12} = 180.000$ »
	12 »	

Προβλήματα : Χρόνος διαφορετικός (Κεφάλαια ἴσα)

340. — Τέσσερες ἄνθρωποι γιὰ μιὰ ἐπιχείρησι κατέθεσαν ἴδια κεφάλαια. Ὁ α) ἦταν στὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ 16 μῆνες, ὁ β) 14 μῆνες, ὁ γ) 10 μῆνες καὶ ὁ δ) 8 μῆνες. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι ἐκέρδισαν 324.000 δραχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα ;

341. — Τρεῖς συνεταῖροι ἔβαλαν ἴδιες μετοχὲς σὲ μιὰ ἐργασία τους. Ἀλλ' ὁ γ) ἐμπῆκε στὴν Ἑταιρεία 8 μῆνες μετὰ τὸν δεύτερο καὶ ὁ δεύτερος 5 μῆνες μετὰ τὸν πρῶτο. Μετὰ ἀπὸ 20 μῆνες ἀπὸ τὴν

ἐποχὴ ποὺ ὁ πρῶτος ἄρχισε τὴν ἐργασία, ἐκέρδισαν 882 λίρες. Πόσες λίρες ἀναλογροῦν στὸν καθένα ὡς κέρδος;

342.— Ἀπὸ τὰ κεφάλαια μιᾶς ἐπιχειρήσεως, πέντε συνεταῖροι ἀπέσυραν κέρδη 459.000 δραχ. καὶ τὰ ἐμοίρασαν ἀνάλογα μὲ τὸν χρόνο καταθέσεως, ὁ α) 2 ἔτη. ὁ β) 1 ἔτος καὶ 8 μῆνες, ὁ γ) 18 μῆνες, ὁ δ) 16 μῆνες, ὁ ε) 12 μῆνες. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας;

Μάθημα 36ο.—Γ΄ περίπτωσις: Κεφ. καὶ Χρόνοι διαφορετικά

Πρόβλημα· Ἕνας ἔμπορος ἔκαμε μιὰ ἐπιχείρησι μὲ 2.000 λίρες. Ὕστερα ἀπὸ 3 μῆνες πῆρε καὶ ἄλλο συνεταῖρο ποὺ κατέθεσε 2.500 λίρες. Μετὰ ἀπὸ 1 χρόνο εἶχαν κέρδος 2.325 λίρες. Πόσο κὲρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

Παρατηρήσεις. 1) Τὰ Κεφάλαια ποὺ κατέθεσαν οἱ συνεταῖροι εἶναι διαφορετικά. 2) Ἡ χρονικὴ διάρκεια ποὺ εἶχε τὰ χρήματα του στὴν ἐπιχείρησι ὁ καθένας εἶναι διαφορετική. Ἔτσι τὸ κέρδος τῶν 2.325 λιρῶν θὰ μερισθῆ ἀναλόγως τῶν Κεφαλαίων ἐπὶ τὴν χρονικὴν διάρκειαν τοῦ κεφαλαίου κάθε συνεταίρου.

Ὁ α) κατέθεσε 2.000 λίρ. γιὰ 12 μῆνες. Ὁ β) κατέθεσε 2.500 λίρες γιὰ 9 μῆνες.

Τὸ κέρδος 2.325 λίρες θὰ μοιρασθῆ ἀνάλογα μὲ τὰ γινόμενα ποὺ δίνουν, ὅταν πολλαπλασιασθῆ τὸ κεφάλαιο τοῦ καθενὸς ἐπὶ τὸν χρόνον του.

Λύσις

Κέρδος	
2.325 λίρες	α) 2.000 λίρες × 12 μῆν. = 24.000
	β) 2.500 » × 9 » = 22.500
	Ἄθροισμα = 46.500

Λύσις: Ὁ α) ἔλαβε $= \frac{2.325 \times 24.000}{46.500} = 1.200$ λίρες.

Ὁ β) » $= \frac{2.325 \times 22.500}{46.500} = 1.125$ »

Ἀσκήσεις: 1) πῶς μπορεῖ νὰ λυθῆ τὸ πρόβλημα αὐτό; 2) Διατυπώσετε τὸν κανόνα. 3) Νὰ λύσετε τὸ ἴδιο πρόβλημα, μὲ τὴν μέθοδο τῶν τριῶν.

Προβλήματα: Κεφάλαια διαφορετικά (Χρόνος διαφορετικός)

343.—Ένας έμπορος άρχισε μιὰ ἐπιχείρησι μὲ 40.000 δραχμές. Μετὰ 6 μῆνες ἐπῆρε καὶ συνεταῖρο ποὺ κατέθεσε 30.000 δραχμές. Ἕνα ἔτος ἀργότερα βρῆκαν κέρδος 21.600 δραχ. Πόσα κέρδισε ὁ καθένας ;

344. — Τρία ἀδέλφια καλλιέργησαν ἕνα κτῆμα. Ὁ α' ἀδελφὸς ἔβαλε 49.000 δραχμές, ὁ β' ἔβαλε τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ πρώτου ἀδελφοῦ καὶ ὁ γ' τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ β'. Ἀλλὰ ὁ β' ἀδελφὸς εἶχε καταθέσει τὰ χρήματά του 2 μῆνες μετὰ τὸν πρῶτο καὶ ὁ τρίτος 5 μῆνες μετὰ τὸν δεύτερο. Μετὰ ἕνα χρόνο ἀπὸ τὴν ἐποχὴ ποὺ ὁ α' ἀδελφὸς ἄρχισε τὴν καλλιέργεια εἶχαν κέρδος 32.340 δραχμές. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

345. —Ἕνας ἔμπορος ἔκανε μιὰ ἐπιχείρησι μὲ 20.000 δραχμὲς καὶ μετὰ ἀπὸ 6 μῆνες προσέλαβε καὶ δεύτερο συνεταῖρο ποὺ κατέθεσε 15.000. Ὕστερα ἀπὸ 10 μῆνες βρῆκαν ὅτι εἶχαν ζημία 8.200 δραχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα ;

346. —Ἕνας ἔμπορος ἐζημιώθηκε στὴν ἐργασία του. Ἐπλήρωσε λοιπὸν στοὺς δανειστές του μόνο τὰ 75% ἀπὸ ὅσα χρεωστοῦσε. Ἔτσι στὸν α' δανειστὴ ἔδωσε 25.200 δραχμές, στὸν β' 30.600 δραχ. καὶ στὸν γ' 43.800 δραχμές. Πόσα ἔχασε ὁ κάθε δανειστής ;

347.— Δυὸ ἔμποροι ἀγόρασαν 500 κιλὰ βούτυρο πρὸς 40 δραχ. τὸ κιλό. Ὁ α' κατέθεσε 12.000 δραχμές, ὁ β' τὰ ὑπόλοιπα. Μετὰ ἀπὸ τὴν πώλησι εἰσέπραξαν κεφάλαια καὶ κέρδος 24.000 δραχμές. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα ;

348.—Δυὸ ἀχθοφόροι ἐργάζονται συνεταιρικὰ καὶ πῆραν ἀπὸ μεταφορικὰ 480 δραχ. Ὁ α' μετέφερε 500 κιλὰ φορτίο σὲ ἀπόστασι 20 χιλιομέτρων ὁ β) 600 κιλὰ σὲ ἀπόστασι 10 χιλιομέτρων. Πόσα χρήματα ἀναλογοῦν στὸν καθένα ;

349.—Δυὸ ἀγρότες ἐνοικίασαν ἕνα κτῆμα συνεταιρικὰ καὶ ἔβαλαν, ὁ α' 900 δραχ. καὶ 30 ἐργατικά. Ὁ β' 700 δραχμὲς καὶ 50 ἐργατικά. Πόσα κιλὰ σιτάρι ἀναλογεῖ στὸν καθένα, ἂν τὸ κτῆμα τοὺς ἔδωσε 3 162 κιλά.

350 —Ἕνα λειβάδι ἐνοικιάζεται γιὰ 3 μῆνες μὲ 50 δραχμὲς τὴν ἡμέρα. Ἕνας κτηνοτρόφος ἔβαλε γιὰ βοσκὴ 60 πρόβατα γιὰ 3 μῆνες. Ἕνας δεύτερος 80 πρόβατα γιὰ 80 ἡμέρες καὶ ἕνας τρίτος 160 πρόβατα γιὰ 20 ἡμέρες. Πόσα πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ καθένας ; Οἱ ἴδιοι πωλοῦν καὶ 27 κιλὰ βούτυρο πρὸς 50 δραχ. τὸ κιλό. Πόσα θὰ πάρῃ ὁ καθένας ;

Β' ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ

Μάθημα 37ο.—Πῶς λύονται τὰ προβλήματα Μέσου ὅρου.

Π ρ ό β λ η μ α. Οἱ προφορικοὶ βαθμοὶ ἑνὸς μαθητοῦ στὴν ἀριθμητικὴ τοῦ α' ἑξαμήνου εἶναι : (9), (8,5), (9,5). (10). Ποῖος εἶναι ὁ γενικὸς βαθμὸς τοῦ ἑξαμήνου κατὰ μ έ σ ο ν ὅ ρ ο ;

Λύσις : Ἔχομεν ἐδῶ 4 ὁμοειδεῖς ἀριθμούς. Δηλαδὴ βαθμούς : (9), (8,5), (9,5), καὶ (10). Γιὰ νὰ βγάλωμε **τὸ γενικὸ μέσο βαθμό,** προσθέτομεν τοὺς βαθμοὺς 9+8,5 +9,5+10=37. Τὸ ἄθροισμα τους εἶναι 37. Τὸ πλῆθος τους εἶναι 4. Διαιρῶ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν (37) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ φανερώνει τὸ πλῆθος τους διὰ τοῦ 4. (37 : 4=9,25).

Ὁ Μέσος ὅρος λοιπὸν ἢ μέσος γενικὸς προφορικὸς βαθμὸς τοῦ α' ἑξαμήνου εἶναι 9,25.

Ὁρισμός : Μέσος ὅρος ὁμοειδῶν ποσῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ παριστάνει τὸ πλῆθος των:

Προβλήματα

351.— Ἕνας ἔμπορος εἰσέπραξε τὴ Δευτέρα 8.000 δραχμές, τὴν Τρίτη 6.000 δραχ., τὴν Τετάρτη 7.500 δραχ , τὴν Πέμπτη 4.500 δραχ., τὴν Παρασκευὴ 6.000 δραχ., τὸ Σάββατο 10.000 δραχ. Πόσα εἰσέπραξε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέρα ;

352.— Ἕνας μαθητὴς ἐπῆρε στὰ διάφορα μαθήματά του, τοὺς ἑξῆς βαθμούς : 8, 10, 7, 9, 5, 8, 8· 10. Τί γενικὸ βαθμὸ θὰ πάρη κατὰ μέσον ὅρον ;

353.— Ἡ θερμοκρσσία 5 ἡμερῶν στὴ Λάρισα κατὰ τὸν Ἰούνιο ἦταν + 32°, + 35°, + 33°, + 38°, + 39°· Πόση ἦταν ἡ μέση θερμοκρασία τῶν ἡμερῶν αὐτῶν ;

354.— Σὲ μιὰ πόλι μέσα σὲ 3 χρόνια γεννήθηκαν τὸν 1ο χρόνο 250 παιδιά, τὸν 2ο χρόνο 180, καὶ τὸν 3ο χρόνο 230. Πόσος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν γεννήσεων στὴν πόλι αὐτὴ στὰ 3 χρόνια ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

Μάθημα 38ο—Γενικά : Μῖξις - Μῖγμα - Κράματα

α) Ἡ μαμά σας ἀκοῦτε νὰ λέη : «Ἄχ ! αὐτὸ τὸ λάδι δὲν εἶναι καλό. Τὸ ἔχει ἀνακατέψει ὁ λαδέμπορος». Ἐπίσης λέμε, ὅτι τὸ βούτυρο αὐτὸ εἶναι ἀνάμικτο μὲ λίπος κλπ.

Τὰ εἴδη τροφίμων εἶναι ἀνακατεμένα πολλὲς φορὲς μὲ διάφορες ποιότητες ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος π. χ. Ἕνας ἔμπορος ἔχει δύο εἰδῶν λάδι. Ἡ α' ποιότητα εἶναι πολὺ ἀκριβὴ καὶ δὲν πωλεῖται. Ἡ β' εἶναι κακὴ καὶ δὲν ἀγοράζεται. Γι' αὐτὸ ὁ ἔμπορος τὶς δύο αὐτὲς ποιότητες τὶς ἀνακατεύει καὶ κάνει μιὰ νέα ποιότητα ποὺ πωλεῖται εὔκολα. Αὐτὴ ἡ νέα ποιότητα εἶναι τὸ **Μῖγμα** καὶ ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται **ἀνάμιξις** ἢ **μῖξις**. Τὸ ἴδιο κάνει καὶ ὁ ταβερνιάρης στὸ κρασὶ καὶ κάθε ἄλλος ἔμπορος τροφίμων.

α' Ὁρισμός : ΜΙΞΙΣ λέγεται ἡ ἀνάμιξις διαφόρων ποιοτήτων τοῦ ἰδίου πράγματος σὲ ἕνα νέο εἶδος.

β) Γιὰ νὰ γίνη ἡ καμπάνα ποὺ μᾶς καλεῖ στὴν ἐκκλησία μὲ τὸν γλυκό της ἦχο, χρησιμοποιήθηκαν πολλὰ μέταλλα. Ἡ καμπάνα λοιπὸν εἶναι ἕνα εἶδος μετάλλου, ποὺ ἔγινε μὲ τὴ ἀνάμιξι πολλῶν μετάλλων. Τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς ἀναμίξεως λέγεται **κρᾶμα**.

β' Ὁρισμός : ΚΡΑΜΑ λέγεται ἡ ἀνάμιξις καὶ ἕνωσις πολλῶν μετάλλων σὲ ἕνα νέο εἶδος μετάλλου.

Τὰ μέταλλα εἶναι διαφορετικῆς ἀξίας. Πολύτιμο μέταλλο εἶναι ὁ χρυσός. Τὸ χρυσάφι εἶναι ἡ βάσις γιὰ τὴν ἐκτίμησι τῶν πολυτίμων μετάλλων (τῶν κοσμημάτων κλπ.)

Ἂς ποῦμε, πὼς πηγαίνετε στὸ χρυσοχόο νὰ πάρετε ἕνα δαχτυλίδι. Βλέπετε πολλά. Τὸ ἕνα ἔχει **βαθμὸ καθαρότητος ἢ τίτλο** 0,900, τὸ ἄλλο 0,750 κλπ. Τί εἶναι αὐτὸ πάλι ; Αὐτὸ θὰ εἰπῆ πὼς τὸ πρῶτο δαχτυλίδι ἔχει καθαρὸ ἀσήμι 900 μέρη ἐνῶ τὰ 100 μέρη, εἶναι ἄλλα μέταλλα, ὄχι πολύτιμα. Τὸ δεύτερο δαχτυλίδι ἔχει ἀσήμι 750 μέρη ἐνῶ τὰ 250 μέρη, εἶναι ἄλλα μέταλλα. Τὸ πολύτιμο μέταλλο ἢ **βαθμὸ καθαρότητος,** τὸν ὑπολογίζουν καὶ μὲ μιὰ ἄλλη μονάδα, ποὺ λέγεται ΚΑΡΑΤΙΟ. Ἔτσι π. χ. ὅταν ἕνα δαχτυλίδι εἶναι καθαρὸ χρυσάφι, τότε ὁ βαθμός του εἶναι 24 **καράτια,** δηλαδὴ 24 εἰκοστὰ τέταρτα $\left(\frac{24}{24}\right)$ **Τὸ χρυσάφι ὑπολογίζεται μὲ καράτια, ἐνῶ τὸ ἀσήμι μὲ χιλιοστά.**

γ′ **Ὁρισμός : Βαθμὸς καθαρότητος ἢ τίτλος, λέγεται τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου, ποὺ περιέχεται στὰ 24 μέρη ἢ 1.000 μέρη ἑνὸς κράματος.**

γ) Ὅταν λέγομε ὅτι αὐτὸ τὸ οἰνόπνευμα ἔχει **βαθμὸ καθαρότητος** 75 βαθμούς, ἐννοοῦμε, ὅτι, σὲ ἕνα κιλό, τὰ 75 μέρη εἶναι καθαρὸ οἰνόπνευμα καὶ τὰ 25 εἶναι νερὸ ἢ ἄλλο ὑγρό.

Τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως εἶναι δύο εἰδῶν

Ἀσκήσεις: 1) Τί λέγεται μῖξις; 2) Τί εἶναι βαθμὸς καθαρότητος καὶ τί εἶναι κρᾶμα ; 3) Τί λέγεται βαθμὸς οἰνοπνεύματος; 4) Κάμετε ἕνα πίνακα τῶν εἰδῶν ποὺ μποροῦν νὰ ἀναμιχθοῦν καὶ νὰ γίνουν: α) μίγματα β) κράματα.

Μάθημα 39ο.—Πῶς λύονται τὰ προβλήματα μίξεως καὶ κραμάτων

Α′. Εἶδος

Πρόβλημα. Ἕνας λαδέμπορος ἀνέμιξεν 75 κιλὰ λάδι τῶν 26 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 105 κιλὰ τῶν 20 δραχ. τὸ κιλό. Πόσο πρέπει νὰ πωλῆ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος γιὰ νὰ εἰσπράξῃ τόσα, ὅσα θὰ εἰσέπραττε ἂν πωλοῦσε χωριστὰ τὴν κάθε ποιότητα τοῦ λαδιοῦ;

Λύσις: 1) Τὰ 75 κιλὰ τῆς α) ποιότητος Χ 26=1950 δραχμές
2) τὰ 105 » » β) » Χ 20=2100 »
Τὰ 180 κιλὰ μῖγμα ἀξίζουν . . . . . . =4050 δραχμὲς

Ἀφοῦ τὸ μῖγμα τῶν 180 κιλῶν ἀζίζει 4050 δραχμὲς
Τὸ » τοῦ 1 κιλοῦ » Χ;

Λύσις: 4050 : 180=22,50 δραχμές.

Ἑπομένως 22,50 δραχμὲς πρέπει νὰ πωλεῖ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος.

Ἐρωτήσεις 1) Πῶς λύσαμε τὸ πρόβλημα αὐτό; 2) Ποιὲς πράξεις ἔγιναν; 3) Βλέπετε καμμιὰ σχέσι μὲ τὸν μέσον ὅρο; 4) Τί μᾶς δίδεται στὰ προβλήματα τοῦ α' εἴδους;

Παρατηρήσεις: 1) Στὸ πρόβλημα αὐτὸ παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς ποσά:

α) Ποσότητες ὁμοειδῶν ποσῶν γιὰ ἀνάμιξι ‖ β) τιμὴ τῆς 1 μονάδος
75 κιλὰ ἀπὸ τὴν α' ποιότητα πρὸς 26 δραχμὲς τὸ ἕνα κιλὸ
105 » » » β' » » 20 » » » »

γ) Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὁμοειδοῦς μονάδος τοῦ μίγματος.

Γιὰ νὰ εὕρωμε δέ, τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος τοῦ μίγματος διαιροῦμε τὴν τιμὴ ὅλου τοῦ μίγματος μὲ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων του.

β) **Πρόβλημα**. Ἕνας χρυσοχόος ἀναμιγνύει 30 γραμμάρια ἀσῆμι βαθμοῦ καθαρότητος 0,900 μὲ 24 γραμμάρια ἀσῆμι βαθμοῦ καθαρότητος 0,750. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος;

Λύσις: Ποσότης α) 30 γραμ. α' εἴδους Χ 0,900 (τιμὴ τίτλου=27 γραμ.
β) 24 » β' » Χ 0,750 » » =18 »
Ὥστε 54 γραμμάρια ἔχουν ἀσῆμι . . . . 45 »

Ἀφοῦ τὰ 54 γραμμάρια περιέχουν 45 γραμμάρια καθαρὸ ἀσῆμι τὸ 1 γραμμάριο θὰ περιέχῃ 45 : 54=0 833 καθ. ἀσῆμι.

Ἀπάντησις: Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶναι 0,833 περίπου.

Προβλήματα Α' εἴδους

Ὁμάδα 1η.—355.— Ἕνας ἔμπορος ἀνακατεύει 150 κιλὰ ἀλεύρι τῶν 3 δραχμῶν τὸ κιλὸ μὲ 120 κιλὰ τῶν 2,40 δραχμῶν τὸ κιλό. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος;

356.—Ἀνέμιξεν ἕνας ταβερνιάρης 128 κιλὰ κρασὶ τῶν 4,60 δραχμῶν τὸ κιλὸ μὲ 222 κιλὰ τῶν 3,20 δραχμῶν τὸ κιλό. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος;

357.—Ἕνας βουτυρὰς ἀνακάτεψε 40 κιλὰ λίπος τῶν 25 δραχμῶν τὸ κιλὸ μὲ 10 κιλὰ βούτυρο, ποὺ τὸ κιλὸ στοιχίζει 50 δραχμές. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος;

358.— Ἀνέμιξε ἕνας οἰνοπώλης 80 κιλὰ κρασὶ τῶν 7 δραχμῶν μὲ 120 κιλὰ κρασὶ τῶν 4 δραχμῶν. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος;

Ὁμάδα 2η.— 359.— Ἀνέμιξε ἕνας χρυσοχόος 200 γραμμάρια ἀσῆμι, βαθμοῦ καθαρότητος 0,800, μὲ 300 γραμμάρια ἀσῆμι, βαθμοῦ καθαριότητος 0,650. Τὶ βαθμὸ καθαρότητος θὰ ἔχῃ τὸ κρᾶμα;

360.—Ἔλειωσε ἕνας χρυσᾶ κοσμήματα:

τὸ α΄	ζύγιζε	25	γραμμάρια	μὲ	τίτλο	18 καράτια
τὸ β΄	»	30	»	»	»	16 »
τὸ γ΄	»	20	»	»	»	21 »

καὶ τὰ ἔκανε ἕνα κρᾶμα. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

361.— Ἀνακάτεψε ἕνας καφεπώλης δυὸ ποιότητες καφέ:

Ἀπὸ τὴν α΄	ποιότητα	45 κιλὰ	τῶν 72	δραχμῶν	τὸ κιλὸ
ἀπὸ τὴν β,	»	25 »	» 96	»	» »

Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος;

362.— Ἀνακάτεψε ἕνας 80 κιλὰ κονιὰκ περιεκτικότητος οἰνοπνεύματος 86 βαθμῶν μὲ 60 κιλὰ κονιὰκ περιεκτικότητος 50 βαθμῶν. Πόσο θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς οἰνοπνεύματος τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος;

Μάθημα 40ο —Προβλήματα Μίξεως

Β΄ Εἶδος

Πρόβλημα.— Ἕνας βουτυρὰς ἀνακάτεψε βούτυρο ἀξίας 60 δραχμῶν τὸ κιλὸ μὲ λίπος τῶν 20 δρχ. τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κάμῃ μῖγμα τῶν 150 κιλῶν, τὸ ὁποῖο νὰ πωλῆ προς 35 δραχ. τὸ κιλό;

Γνωστά: Ἐδῶ ξέρομε α) **τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος ἀπὸ κάθε εἶδος** καὶ β) **τὴν ποιότητα τοῦ μίγματος καὶ τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος του.**

Ἄγνωστα: Ζητεῖται πόση ποσότητα θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος

Σκέψις: Ἡ ἀνάμιξις θὰ γίνῃ ἔτσι ὥστε ὁ βουτυρὰς νὰ εἰσπράξῃ τόσα χρήματα ἀπὸ τὸ μῖγμα τῶν 150 κιλῶν μὲ 35 δραχμὲς τὸ κιλὸ ὅσα θὰ εἰσέπραττε ἀπὸ τὴν πώλησι χωριστὰ τοῦ βουτύρου καὶ τοῦ λίπους. Πρέπει νὰ πάρῃ τόσα κιλὰ ἀπὸ κάθε εἶδος ὥστε ἡ ζημία τοῦ βουτύρου νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ κέρδος ἀπὸ τὸ λίπος. Διότι τὸ ἕνα κιλὸ βούτυρο ποὺ ἀξίζει 60 δραχμὲς **στὸ μῖγμα θὰ χάνῃ,** γιατὶ θὰ πωλῆται μόνον 35 δραχμές.

Ἡ ζημία θὰ εἶναι 60 − 35 = 25 δραχμές.

β) Τὸ ἕνα κιλὸ λίπος ποὺ ἀξίζει 20 δραχμὲς στὸ **μῖγμα θὰ κερδίζῃ**, διότι θὰ πωλεῖται 35 δραχμές.

Τὸ κέρδος ἀπὸ τὸ λίπος, εἶναι 35—20=15 δραχμές.

Ἂν πάρῃ λοιπὸν βούτυρο 15 κιλὰ δηλαδὴ ὅσες δραχμὲς κερδίζει ἀπὸ τὸ λίπος, στὸ μῖγμα θὰ χάσῃ 25 X 15 κιλὰ = 375 δραχμές.

Καὶ ἂν πάρῃ λίπος 25 κιλά, δηλ. ὅσες δραχμὲς χάνει ἀπὸ τὸ βούτυρο, στὸ μῖγμα θὰ κερδίζῃ 15 δραχ. X 25 κιλὰ = 375 δραχμές.

Κατάταξις		**Ἀ ξ ί α**
Ποσότης	α) βούτυρο	15 δραχ. = 15 κιλὰ βούτυρο
μίγματος	Τιμὴ μίγματος . . .	35 δραχ.
150 κιλὰ	β) Λίπος	25 δραχ. = 25 κιλὰ λίπος

Δηλαδὴ παίρνοντας ἀναλογία 15 κιλὰ βούτυρο καὶ 25 κιλὰ λίπος, οὔτε χάνει οὔτε κερδίζει, ἀλλὰ παίρνει τὰ χρήματά του ὁ βουτυράς. Τώρα θὰ μερίσωμε τὸν ἀριθ. 150 κιλὰ ἀναλόγως τῶν ἀριθμων 15 κιλὰ καὶ 25 κιλὰ γιὰ νὰ κάνῃ μῖγμα 150 κιλά, ποὺ νὰ ἀξίζῃ 35 δραχμὲς τὸ κιλό.

Μεριστέος ἀριθμὸς		
	15	θὰ πάρῃ α) $\frac{150 \times 15}{40} = 56\frac{1}{4}$ κ. βούτ.
150 κιλὰ	+ 25	» » β) $\frac{150 \times 25}{40} = 93\frac{3}{4}$ κ. λίπ.
	40	

Παρατηρήσεις: 1) Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὰ 150 κιλὰ βούτυρο X 35 δρχ. πρέπει νὰ βροῦμε τόσο ποσὸν χρημάτων, ὅσο καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμε ξεχωριστὰ τὶς ποσότητες ἀπὸ κάθε εἶδος ἐπὶ τὴν τιμὴν τοῦ κιλοῦ των.

1) Γιὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα Β΄ εἴδους, ποὺ ζητοῦνται οἱ ποσότητες, ποὺ πρέπει νὰ παρθοῦν ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ γίνῃ ἕνα μῖγμα ἢ κρᾶμα, γίνεται: α) Μιὰ κατάταξις σὲ τύπο **X** ὅπως παραπάνω. β) Λύεται τὸ πρόβλημα μὲ Μερισμὸ ἢ μὲ ἁπλῆ μέθοδο. Π. χ. στὸ πρό-

βλημα, ἀφοῦ βρήκαμε τὴν ἀναλογία ἀναμίξεως ἀπὸ τὸ βούτυρο 15 κιλὰ καὶ ἀπὸ τὸ λίπος 25 κιλὰ, τὸ κατατάσσομε ὡς ἑξῆς:

α′	β′
Γιὰ μῖγ. 40 κ. παίρνει 15 κ. βούτ.	Γιὰ μῖγ. 40 κ. παίρνει 25 κ. λίπ.
» » 150 » » Χ ; »	» » 150 » » Χ ; » »

Λύσις: α) $X = \frac{15 \times 150}{40} = 56\frac{1}{4}$ κιλὰ βούτυρο

καὶ β) $X = \frac{25 \times 150}{40} = 93\frac{3}{4}$ κιλὰ λίπος

Ἐρωτήσεις: Ἀπαντήσατε: 1) Τί εἶναι μῖξις; 2) Τί εἶναι κρᾶμα; 3) Τί εἶναι καράτι καὶ τί βαθμὸς καθαρότητος; 4) Ποῖα λέμε πολύτιμα μέταλλα; 5) Τί εἶναι βαθμὸς καθαρότητος οἰνοπνεύματος; 6) Κάμετε 5 προβλήματα δικά σας.

Προβλήματα β′ εἴδους

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναλογία σὲ ποσότητες ἀπὸ κάθε εἶδος στὰ παρακάτω;

363. — Γιὰ μῖγμα σιταριοῦ 200 κιλὰ μὲ τιμὴ κιλοῦ 2,50 δρχ. ἀπὸ ποιότητες α) 3 δρχ, καὶ β) 2 δρχ. τὸ κιλό.

364. — Γιὰ μῖγμα 50 κιλὰ οἰνοπνεύματὸς, μὲ βαθμὸ οἰνοπνεύματος 40° ἀπὸ ποιότητες α) 30° οἰνοπνεύματος καὶ β) 60° οἰνοπνεύματος

365. — Γιὰ κρᾶμα ἀσημιοῦ 350 γραμμάρια τίτλου 0,850, ἀπὸ ποιότητες μὲ τίτλους α) 0,700 καὶ β′ 0,950.

366. — Γιὰ κρᾶμα μετάλλου 60 γραμμαρίων τῶν 20 καρατίων, ἀπὸ ποιότητες μὲ τίτλους α) 14 καράτια καὶ 2) 24 καράτια.

367. — Ἕνας ἔμπορος ἔχει δυὸ εἴδη λάδι: Τοῦ α′ εἴδους τὸ κιλὸ ἀξίζει 20 δρχ. καὶ τοῦ β′ εἴδους 30 δρχ. Θέλει νὰ κάνῃ μῖγμα 2.400 κιλὰ ποὺ τὸ κιλὸ νὰ ἀξίζῃ 25 δρχ. Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος

368. — Ἕνας ποτοποιὸς ἀνέμιξε δύο ποιότητες οἰνοπνεύματος: Τῆς πρώτης ποιότητος ὁ βαθμὸς οἰνοπνεύματος ἦταν 80° καὶ τῆς β′ ποιότητος 65°. Ἔκανε μῖγμα 240 κιλὰ τῶν 72°. Πόσα κιλὰ οἰνοπνεύματος πῆρε ἀπὸ κάθε ποιότητα;

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

369. — Ἄρχισε ἕνας ἐμπόριο λαχανικῶν μὲ 10.000 δρχ. κεφάλαιον. Μετὰ 9 μῆνες προσέλαβε συνεταῖρον ποὺ κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσό. Μετὰ

4 μῆνες προσέλαβαν τρίτον συνεταῖρο, ποὺ κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσόν. Δύο ἔτη ἀπὸ τὴν ἔναρξι τοῦ ἐμπορίου εἶχαν κέρδος 93.000 δρχ. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

370.—Προεξώφλησε ἕνας γραμμάτιον Ὀνοναστικῆς ἀξίας 4.500 δρχ. πρὸς 9% καὶ ἐπῆρε στὰ χέρια του (παροῦσα ἀξία) 4 387,50 δρχ. Μετὰ πόσον χρόνο ἔληγε τὸ Γραμμάτιον ;

371.—Ἀνέμιξεν ἕνας δυὸ ποιότητες λαδιοῦ. Τῆς α' ἀξία ἦταν 20,20 δρχ τὸ κιλὸ καὶ τῆς β' 16. 40 δρχ. τὸ κιλό. Ἂν ἔφτιασε μεῖγμα 760 κιλῶν ἀξίας 18,40 δρχ. τὸ κιλό, πόσα κιλὰ ἀνέμειξε ἀπὸ κάθε ποιότητα ;

372.—Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίση ἕνας πρὸς 9% γιὰ νὰ πάρη σὲ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες τόσον τόκον, ὅσον ἐπῆρε ἄλλος ἀπὸ 30.000 δρχ. σὲ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες πρὸς 10 % ;

373.—Ἔμπορος ὀσπρίων ἀγόρασε ἀπὸ ἕνα παραγωγὸ 300 κιλὰ φασόλια πρὸς 6,5 δρχ. τὸ κιλό, ἀπὸ ἄλλον 500 κιλὰ πρὸς 8,50 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ ἀπὸ ἄλλον 400 κιλὰ 11,5 δρχ. τὸ κιλό. Ὅλα τὰ ἀνέμιξε. Πόσο στοιχίζει τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος καὶ πόσον πρέπει νὰ τὸ πωλήση γιὰ νὰ κερδίση 20% ;

374.—Μὲ 84 μέτρα ὕφασμα, πλάτους 0,4 μετρ. κατασκευάζει ἕνας ράπτης 52 ὅμοιες παιδικὲς ἐνδυμασίες. Πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ χρειασθῆ, ἂν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 1,2 μέτρα γιὰ νὰ κατασκευάση 25 ὅμοιες ἐνδυμασίες ;

375.—Ἕνας ἐργολάβος ἀνέλαβε νὰ τελειώση μιὰ οἰκοδομὴ σὲ 36 ἡμέρες. Πρὸς τοῦτο ἔλαβε 24 ἐργάτες, οἱ ὁποῖοι εἰργάσθησαν 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ σὲ 24 ἡμέρες τελείωσαν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἐργασίας. Ἂν προσλάβη 8 ἐργάτες ἀκόμη, πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργάζωνται γιὰ νὰ τελειώση ἡ οἰκοδομὴ μέσα στὴν προθεσμία;

376.—Οἰνοπώλης ἀνέμιξεν 1.350 κιλὰ κρασὶ ἀξίας 3,40 δρχ. τὸ κιλό καὶ 1.550 κιλὰ ἀξίας 4,60 δρχ. τὸ κιλόν Ἂν πωλῆ 5,30 δρχ· τὸ κιλὸ πόσον κερδίζει στὸ κιλὸ ;

377.—Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 280 κιλὰ λάδι πρὸς 22 δραχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ μετεπώλησε μὲ κέρδος 12%, Πόσες δραχ. ἐκέρδισε ;

378. Μία ὑπάλληλος παίρνει 1000 δραχμὲς τὸν μῆνα. Πόσα παίρνει καθαρὰ τὸ χρόνο ὅταν ἔχη κρατήσεις ἀπὸ τὶς Κοινωνικὲς Ἀσφαλίσεις 6% τὸν μῆνα ;

379.—Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον 5.000 δραχ. τοκιζόμενον πρὸς 7,5% δίδει τόκον 97,50 δραχμές ;

380.—Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέση ἕνας στὴν Τράπεζα πρὸς 9% γιὰ νὰ ἔχη εἰσόδημα 900 δρχ· τὸν μῆνα ἀπὸ τὸν τόκο ;

381. Ένας μπακάλης ἀνακάτεψε 20 κιλὰ λάδι τῶν 30 δραχμ. τὸ κιλὸ μὲ 30 κιλὰ σπορέλαιο τῶν 15 δραχμῶν καὶ μὲ 50 κιλὰ ἄλλο λάδι τῶν 20 δραχμῶν τὸ κιλό. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος γιὰ νὰ κερδίσῃ καὶ 20 ο)ο;

382. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος γιὰ νὰ κερδίζῃ 25 ο)ο ἕνας μπακάλης, ἐὰν ἀναμίξῃ 50 κιλὰ βούτυρο τῶν 42 δραχμῶν τὸ κιλὸ μὲ 50 κιλὰ λίπος τῶν 20 δραχμῶν τὸ κιλό;

383. Ένας γεωργὸς ἀνέμιξεν 300 κιλὰ σιτάρι ποὺ τὸ κιλὸ ἀξίζει 3,10 δραχμὲς μὲ 200 κιλὰ ἄλλο εἶδος σιτάρι ποὺ τὸ κιλὸ ἀξίζει 2,35 δραχμές. α) Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τὸ μῖγμα γιὰ νὰ εἰσπράξῃ τὰ χρήματά του καὶ β) πόσο ἂν θέλῃ να βγάλῃ κέρδος 25 ο)ο;

384. Ἀγόρασε ἕνας 75 κιλὰ φασόλια πρὸς 16 δραχ. τὸ κιλό καὶ 75 κιλὰ φασόλια πρὸς 12 δραχμὲς τὸ κιλὸ καὶ ἄλλα 50 κιλὰ πρὸς 10 δραχμὲς τὸ κιλό. Τὰ ἀνακάτεψε καὶ θέλει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸ τοῦ μίγματος μὲ κέρδος 10 ο)ο. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλό;

385. Ἀγόρασα 60 μέτρα ὕφασμα πρὸς 10 δραχμὲς τὸ μέτρο. Ἐπώλησα τὸ $\frac{1}{4}$ πρὸς 20 δραχμὲς τὸ μέτρο καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ (τῶν 60 μέτρων) πρὸς 13 δραχμὲς τὸ μέτρο. Τὸ ὑπόλοιπο ἐπώλησα πρὸς 16 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσο τοῖς ο)ο ἐκέρδισα;

386. Εἶχε ἕνας ἕνα κτῆμα μὲ ἐληὲς ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἔπαιρνε καθαρὸ εἰσόδημα 28.000 δρχ. κάθε χρόνο. Τὸ πούλησε 300.000 δρχ. τὶς ὁποῖες κατέθεσε στὴν Τράπεζα μὲ 10ο)ο. Πότε ἔπαιρνε περισσότερο εἰσόδημα πρὶν ἢ τώρα, ἀπὸ τόκους;

387. 72 ὑφάντριες σὲ 12 ἡμέρες, ἐργαζόμενες 9 ὧρες τὴν ἡμερα. ὑφαίνουν 320 τεμάχια ὕφασμα μὲ μῆκος 30 μέτρα καὶ πλάτος 0,7 μέτρα. Πόσα τεμάχια ὑφαίνουν 36 ὑφάντριες ἐργαζόμενες 36 ἡμέρες ἐπὶ $4\frac{1}{2}$ ὧρες κάθε μέρα, ὅταν κάθε τεμάχιο ἔχῃ μῆκος 35 μέτρα καὶ πλάτος 1 μέτρο;

388. Μιὰ ποσότητα καφὲ ἀγοράστηκε 45 δραχμές. Ἐὰν ἐπιβαρυνθῇ τὸ ἐμπόρευμα αὐτό στὴν ἀξία τῆς ἀγορᾶς μέ 10 ο)ο γιὰ γενικὰ ἔξοδα τοῦ καταστήματος καὶ θέλωμε νὰ κερδίσωμε 15 ο)ο ἐπὶ τῆς τιμῆς ποὺ μᾶς κοστίζει. Πόσο πρέπει νὰ πουληθῇ ἡ ποσότητα;

389. Ἡ ἀξία τῶν μηχανῶν ἑνὸς ἐργοστασίου ἀνέρχεται σὲ 6570 λίρες, τῶν δὲ ἐπίπλων 840 λίρες. Στό τέλος τοῦ χρόνου λογαριάζεται ἀπόσβεσις γιὰ φθορὰ ἀπὸ τὴν χρῆσι 20 ο)ο στὴν ἀξία τῶν μηχανῶν καὶ 10 ο)ο στὴν ἀξία τῶν ἐπίπλων. Ποῖα εἶναι ἡ σημερινὴ ἀξία τῶν μηχανῶν καὶ τῶν ἐπίπλων;

390. Ένας ὑπάλληλος ἔχει μηνιαῖο εἰσόδημα ἀπὸ 4.500. Ἀπ' αὐτό, τὰ $\frac{7}{9}$ εἶναι ἡ μισθοδοσία του, τὸ δὲ ὑπόλοιπο εἶναι ὁ τόκος κεφαλαίου, ποὺ τοκίσθηκε πρὸς 10 ο)ο. Πόση εἶναι ἡ μισθοδοσία του; Καὶ πόσο τὸ κεφάλαιο ποὺ ἔχει τοκίσει;

Π Ι Ν Α Ξ

Ποὺ περιλαμβάνει συγκεντρωτικῶς τὶς κατατάξεις καὶ τοὺς ἀντιστοίχους Τύπους, διά τὴν λύσιν τῶν διαφόρων προβλημάτων τοῦ Τόκου, ἀναλόγως μὲ τὸ ζητούμενον ποσὸν καὶ τὸ εἶδος τοῦ διδομένου σὲ καθένα χρόνου (δηλ. ἔτη ἤ μῆνες ἤ ἡμέρες.)

ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΙΣ	ΚΑΤΑΤΑΞΕΙΣ		
	Α) ΣΕ ΕΤΗ	Γ) ΣΕ ΜΗΝΕΣ	Β) ΣΕ ΗΜΕΡΕΣ
Κ = 5000 Τ = ; Χ = 3 ΕΤΗ Ε = 8 %	ΚΕΦ. ΕΤΗ ΤΟΚ. 100 1 8 5000 3 Χ; ΛΥΣΙΣ $Τ=\frac{Κ.Χ.Ε}{100}$	ΚΕΦ. ΜΗΝ. ΤΟΚ 100 12 8 5000 36 Χ ; ΛΥΣΙΣ $Τ=\frac{Κ.Χ.Ε.}{1200}$	ΚΕΦ. ΗΜΕΡ. ΤΟΚ. 100 360 8 5000 1080 Χ ; ΛΥΣΙΣ $Τ=\frac{Κ.Χ.Ε}{36000}$
Κ = ; Τ = 1200 Χ = 3 ΕΤΗ Ε = 8 %	ΚΕΦ. ΕΤΗ ΤΟΚ. 100 1 8 Χ ; 3 1200 ΛΥΣΙΣ $Κ=\frac{Τ.100}{Χ.Ε.}$	ΚΕΦ. ΜΗΝ ΤΟΚ 100 12 8 Χ ; 36 1200 ΛΥΣΙΣ $Κ=\frac{Τ.1200}{Χ.Ε}$	ΚΕΦ. ΗΜΕΡ. ΤΟΚ. 100 360 8 Χ ; 1080 1200 ΛΥΣΙΣ $Χ=\frac{Τ.36000}{Χ.Ε}$
Κ = 5000 Τ = 1200 Χ = ; Ε = 8 %	ΚΕΦ. ΕΤΗ ΤΟΚ. 100 1 8 5000 Χ ; 1200 ΛΥΣΙΣ $Χ=\frac{Τ.100}{Κ.Ε}$	ΚΕΦ. ΜΗΝ. ΤΟΚ. 100 12 8 5000 Χ ; 1200 ΛΥΣΙΣ $Χ=\frac{Τ.1200}{Κ.Χ}$	ΚΕΦ. ΗΜΕΡ. ΤΟΚ. 100 360 8 5000 Χ; 1200 ΛΥΣΙΣ $Χ=\frac{Τ.36000}{Κ.Ε}$
Κ = 5000 Τ = 1200 Χ = 3 ΕΤΗ Ε = ;	ΚΕΦ. ΕΤΗ ΤΟΚ. 5000 3 1200 100 1 Χ ; ΛΥΣΙΣ $Ε=\frac{Τ.100}{Κ.Χ}$	ΚΕΦ. ΜΗΝ. ΤΟΚ. 5000 36 1200 100 12 Χ ; ΛΥΣΙΣ $Ε=\frac{Τ.1200}{Κ.Χ}$	ΚΕΦ. ΗΜΕΡ. ΤΟΚ. 5000 1080 1200 100 360 Χ ; ΛΥΣΙΣ $Ε=\frac{Τ.36000}{Κ.Χ.}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Τῶν προβλημάτων τῆς Ἀριθμητικῆς Ε' καὶ Στ' τάξεως
(αἱ ἀπαντήσεις ἀφοροῦν μόνον τὰ προβλήματα καὶ ὄχι τὰς ἀσκήσεις).
Ὁ ἀριθμὸς τῆς πρώτης στήλης εἶναι ὁ αὔξ. ἀριθμ. τοῦ προβλήματος τοῦ βιβλίου

ΤΑΞΙΣ Ε'

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ, ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ, ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
21	48 δραχ.
22	40 »
23	94 κλήματα
24	5155 δρχ.
25	1884 »
26	115 χιλμ.
27	509 ἔτη
28	
29	41472 κιλὰ
30	280 χιλ.
31	9360 δρχ.
32	1895 ἔτος
33	16630 δρχ.
34	230 κιβ.
35	70 ὧρες
36	20 κιλὰ
37	8000 δρχ.
38	3120 »
39	13500 κιλὰ
40	1296 δρχ.
41	10175 »
42	26 ἡμ.
43	58 κιλὰ
44	4560 δρχ.
45	4175 »
46	1557 δένδρα
47	947 λίρες
48	52280 δρχ.
49	10350 »
50	50 »
51	ὁ β' 4445 δρχ.
52	26400 κιλὰ
53	20994 δρχ. 90974
54	168 κιλὰ
55	1650 δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
56	12 μῆνες
57	200 δρχ.
58	ἐκέρδ. 4672 δρχ.
59	42 δρχ.
60	ὁ β' 259 κιλὰ
61	157 κιλὰ 2512 δρχ.
62	116 κιλὰ
63	644 μίλια
64	95 δρχ.
65	48 φορέματα
66	10045 δρχ.
67	50 δρχ.
68	55 χιλ.
69	16 δρχ.
70	26 ἡμέρ.
71	320 δρχ.
72	138 » 18630 »
73	5504 δρχ. 136 κιλὰ
78	287,45 δρχ.
79	198,50 »
80	64,40 »
81	24,80 »
82	25 πετσ.
83	216 δρχ.
84	45 δρχ. 450 δρχ.
85	160 πλάκες 1821,20 δρχ.
86	1957 δρχ.
87	45 μέτρα
88	ἐκέρδ. 1246,80 δρχ.
89	735,60 δρχ.
90	α) 59,20 δρχ. β) 49,40 δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
91	1,50 δρχ.
92	305 δρχ.
93	739 μπουκάλ.
94	1123,50 δρχ.
95	6,30 δρχ.
96	136 κιλὰ
97	11,80 δρχ.
98	1070,10 δρχ.
125	Εἰς τὸν β'.
135	Ὁ Τάκης
138	Ὁ Λάμπρος ὁ α' 15 λ. ὁ β' 30 λ. ὁ γ' 20 λ. ὁ δ' 6 λ.
139	Περισ. μὲ τὴν ἀναπ. ὀλιγ. μὲ τὸν περίπ.
229	Τὸν Νοέμβριο
230	Τὰ $\frac{3}{5}$
231	ὁ πρῶτος
259	$\frac{(10)}{5} = 2$ κιλὰ
261	$1\frac{8}{10}$ μέτρα
262	$1\frac{2}{4}$ μέτρα
263	$\frac{3}{6}$ ὥρ.
265	$1\frac{9}{20}$ μέτρ.
266	$\frac{33}{40}$ χωρ.
268	$1\frac{2}{10}$ μέτρ.
269	$1\frac{8}{10}$ χιλ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
270	$31\frac{3}{10}$ δρχ.
271	$57\frac{1}{10}$ δρχ.
272	$49\frac{4}{10}$ δρχ.
274	15 χιλ.
275	$5\frac{1}{10}$ κιλὰ
276	$52\frac{4}{5}$ μέτρα
277	$\frac{2}{10}$ κιλὰ
278	$\frac{4}{10}$ ἑκατ.
282	$\frac{3}{10}$ μέτρ.
283	$\frac{3}{10}$ δεκάρ.
284	μηδὲν
286	$\frac{3}{10}$ κιλ.
287	$\frac{2}{10}$ δεκ.
290	$\frac{3}{10}$ ἑκατ.
291	$\frac{2}{8}$ ἀποστ.
293	$\frac{3}{10}$ δεκαρ.
294	$12\frac{1}{5}$ κιλὰ

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις	ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις	ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις	ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
297	$2\frac{15}{60}$ ὧρες	**317**	54 κιλὰ	**341**	$\frac{1}{10}$ εἰκοσ.	372	13 μίλια
298	$14\frac{3}{10}$ μέτρα		$183\frac{3}{5}$ δρχ.	**342**	$\frac{1}{8}$ κήπου	373	10 λεπτὰ
291	$14\frac{4}{5}$ κιλὰ	**318**	11 μέτρα	**343**	$\frac{3}{20}$ χιλιάρ.	374	$5\frac{6}{10}$ δρχ.
292	$8\frac{3}{4}$ κιλὰ	**319**	$318\frac{1}{8}$ δρχ.	**344**	$\frac{1}{10}$ μέτρου	375	α) $25\frac{3}{5}$ β) 200 δχ.
294	$14\frac{1}{2}$ ὧρες	**325**	$13\frac{1}{2}$ δρχ.	**345**	α) $1\frac{1}{10}$ μέτρα	376	3 δρχ.
295	$2\frac{7}{10}$ κιλὰ	**326**	$281\frac{3}{4}$ δρχ.		β) $1\frac{1}{10}$ κιλὰ	377	1500 δρχ.
296	$60\frac{1}{10}$ στρέμμ.	**327**	$412\frac{1}{2}$ δρχ.		γ) $1\frac{1}{10}$ μέτρα	378	α) 700 γρμ. β) 600
298	$37\frac{4}{10}$ δρχ.	328	$7892\frac{1}{2}$ μέτρα	**346**	$\frac{9}{10}$ ὧρες	379	750 κιλὰ
300	$159\frac{1}{4}$ χιλ.	229	$\frac{3}{8}$ εἰκοσ. $7\frac{1}{2}$ δρχ.	**349**	$2\frac{1}{5}$ δρχ.	380	300 ἡμέρες
301	$14\frac{5}{10}$ δρχ.	330	$\frac{3}{5}$ δεκάρ. ἢ 6 δρχ.	**350**	$4\frac{2}{5}$ δρχ.	381	18 ὧρες
303	$3\frac{3}{10}$ δρχ.	332	$\frac{3}{5}$ δεκ. ἢ 6 δρχ.	**351**	$8\frac{1}{2}$ κιλὰ	382	$\frac{6}{10}$ δεκάρ.
304	$23\frac{13}{20}$ δρχ.	333	$\frac{1}{2}$ τῆς ἀποστ.	**352**	$2\frac{3}{4}$ κιλὰ	383	$\frac{2}{4}$ ὧρες
305	$7\frac{3}{4}$ μέτρα	334	1955 μέτρα	**353**	$6\frac{1}{5}$ δρχ.	384	$\frac{6}{20}$ λίρας
306	$\frac{17}{20}$ στρέμμ.	335	$437\frac{1}{2}$ κιλὰ	**354**	108 δρχ.	385	2150 δρχ.
307	$6\frac{13}{20}$ κιλὰ	336	$3526\frac{1}{4}$ κιλὰ	**355**	360 χιλιομ.	386	288 χιλιόμ.
308	$10\frac{11}{20}$ μέτρα	337	$164\frac{7}{10}$ χιλ.	**359**	20 κορίτσια	387	14000 κιλὰ
309	$21\frac{9}{10}$ δρχ.	338	$21\frac{17}{20}$ χιλ.	**360**	6 χιλιόμ.	388	α) 16 δρχ.
310	8 ὧρες	339	α) $\frac{1}{5}$ κιλοῦ	**361**	4500 κιλὰ		β) $105\frac{3}{5}$ δρχ.
311	$16\frac{16}{20}$ κιλὰ		β) $\frac{1}{4}$ μέτρου κορδ.	**363**	$3\frac{2}{10}$ δεκάρ.	389	50 δρχ.
312	$38\frac{1}{10}$ μέτρα		γ) $\frac{1}{10}$ ἑκατοστ.	**365**	$1\frac{6}{10}$ δρχ.	390	$1\frac{1}{5}$ δρχ.
313	$10\frac{8}{10}$ δρχ.		δ) $\frac{1}{4}$ κιλοῦ	**366**	$1\frac{1}{8}$ χιλ.	391	$1\frac{1}{8}$ ἡμερ.
314	$87\frac{1}{2}$ δρχ.		ε) $\frac{1}{10}$ εἰκοσ.	**367**	6 ἡμέρες	392	$\frac{5}{6}$ ὧρες
				368	15 δρχ.	393	$1\frac{1}{2}$ δεκάρ.
				369	$43\frac{1}{5}$ δρχ.	395	$11\frac{1}{5}$ δρχ.
						396	$18\frac{9}{10}$ μέτρα
						397	$44\frac{3}{20}$ δρχ.
						398	$462\frac{8}{10}$ δρχ

ΤΑΞΙΣ ΣΤ'

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
399	α) 175 χιλ. β) 75χ.
400	3900 δραχ.
401	$65\frac{5}{11}$ χιλιόμ.
402	1280 κιλὰ
403	$671\frac{3}{8}$ δρχ.
404	$82\frac{6}{8}$ δρχ.
405	$438\frac{9}{10}$ δρχ.
406	600 κιλὰ
407	$14\frac{2}{4}$ δρχ.
408	ἐκέρδ. 192 δρχ.
409	α) $133\frac{1}{3}$ κιλὰ
	β) $83\frac{1}{3}$ κιλὰ
	γ) $1541\frac{4}{6}$ δρχ.
410	$1043\frac{9}{10}$ δρχ.
411	α) 70.000 δρχ.
	β) 28.000 δρχ.
	γ) 17.500 δρχ.
412	$244\frac{2}{7}$ χιλ.
413	α) 9.000 δρχ.
	β) 10.000 δρχ.
	γ) 5.000 δρχ.
415	$364\frac{8}{10}$ δρχ.
432	α) 100800 κτύπ.
	β) 3.024.000 κτύπ.
434	α) $\frac{18}{60}$ ὧρες
	β) $\frac{33}{60}$ ὧρες
435	α) 300′
	β) 18000″
436	α) $28\frac{3}{4}$ χιλ.
	β) $21\frac{1}{4}$ χιλ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
437	α) 270.000 γραμμ.
	β) 5.000.000 γραμ.
438	α) 800 δρχ.
	β) 60 δρχ.
439	61.200 δρχ.
440	179.450 δρχ.
461	2.627 τ. μ. κ.
	10 τ. π.
462	10 λ. 6 σελ. 8 πεν.
463	56 κιλὰ 690 γραμ.
464	50 χιλ. 75 μέτρα
465	1 λίρα 8 σελ.
	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ
1	67 κλήμ.
2	18 ἡμ.
3	5228 δρχ.
4	13715 δρχ.
5	2500 δρχ.
6	200 κ. 2000 δρχ.
7	160 πλάκες 545,31δρ
8	3447,10 δρχ.
9	50 μέτρα
10	35,50 δρχ.
17	τοῦ 25
18	80 δρχ.
19	9 μῆνες
20	80 ἔτη
21	$47\frac{9}{47}$ δρχ.
22	$7\frac{7}{8}$ κιλὰ
23	$17\frac{3}{10}$ χιλ.
24	1428 μέτρα
25	256,8 δρχ.
26	$8\frac{92}{115}$ δρχ.
27	32 ἑβδ.
28	28 ὧρες
29	$18\frac{5}{8}$ μέτρα
30	$44\frac{3}{20}$ δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
31	$684\frac{4}{5}$ δρχ.
32	300 ποτήρια
33	64 κιλὰ κριθ.
34	$87\frac{1}{2}$ χιλιομ.
35	100.000 δρχ.
	400.000
36	210—140—100
37	910 δρχ.
38	α) 1920 λίρ.
	β) 720 λίρ.
39	192 δρχ.
40	α) 8000 κιλὰ κρ.
	β) 1000 κιλὰ οὔζο
41	275 αὐγὰ
42	220.000 δρχ.
43	α) 17 ἔτη 8 μ. 5 ἡμ.
	β) 6 ἔτη 8 μ. 6 ἡμ.
	23 ὧρες
44	$142.222\frac{1}{9}$ δρχ.
45	3375 δρχ.
53	16 κιλὰ 676 γραμ.
54	3 δολ. 22 σέντς
56	76 ὑάρδ 1 π. 7 δ.
	45 ὑάρδ. 2 π. 9 δ.
57	1 λίρ. 8 σελ.
	8 πέννες 3 φαρδ.
58	116 κιλὰ 300 γραμ.
59	25000 κιλὰ
	25.000.000 γραμ.
60	128 ὑάρδ. 1 πούς
61	1.800 δρχ.
66	54.000 δρχ.
67	2.625 δρχ.
75	20 ἐτῶν 6μ. 25 ἡμ.
76	72 λ.12 σελ. 5 πένες
78	7 λ. 13 σελ. 4 π.
79	868 δρχ.
	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΛΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ
81	α) 360 δρ. β) 60 δρ.
82	437 δρχ.
83	$7\frac{7}{10}$ δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
84	315 δρχ.
85	$4\frac{1}{12}$ δρχ.
86	625 γραμ.
87	2 κιλὰ 800 γρμ.
88	75 δρχ.
89	ὁ 250
90	τοῦ 1000
91	20 λίρ
92	7000 δρχ.
93	140 αὐγὰ
94	1025 δρχ.
95	$12\frac{1}{4}$ γαλόν.
96	21000 δρχ.
97	30 γαλ.
98	$6\frac{2}{3}$ μέτ,
99	24000 δρχ.
100	10 φοῦστ.
101	1000 κιλὰ
102	30 ἡμέρ.
103	120 κιλὰ
104	36 κιλὰ
105	69 μέτρα
106	112,5 δρχ.
107	210 δρχ.
108	20 μέτρα
109	225 δρχ.
110	900 δρχ.
111	$7\frac{1}{2}$ ὧρες
112	100 γραμμ.
113	80 ἡμέρ.
114	$25\frac{1}{2}$ ὧρες
115	$11\frac{1}{4}$ ὧρες
116	135 δρχ.
117	5 ἡμέρ.
118	15 ἡμ.
119	75 σανίδ.
120	80 χιλ
121	60 κιλὰ
122	14 ἡμέρ.
123	5 μέτρα
124	9 ὧρες
125	88 ἐργ.
126	$14\frac{2}{3}$

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ
127	108 φούστ.
128	5625 δρχ.
129	19200 κιλὰ
130	600 κ. μ.
131	8000 δρχ.
132	510 κιλὰ
133	8 ὧρες
134	43200 δρχ.
135	92 ἡμέρ.
136	3780 δρχ.
137	25 ἐργ.
138	90 στρεμ.
139	750 δρχ.
140	450 κιλὰ
141	975 δρχ.
142	3 ἡμέρ.
143	490 δρχ.
144	24 ἡμερ.
145	6944 δρχ.
146	41,4 μ.
147	25 ὧρες
148	7500 δρχ.
149	2 ἐργ.
150	12 ἡμερ.
151	36 ποδιὲς
152	80 ἡμέρ.
	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ
158	1875 δρχ.
159	3168 δρχ.
160	750 δρχ.
161	4,80 δρχ.
162	225 δρχ.
163	22500 δρχ.
164	1920 κατ.
165	36 κιλὰ
166	450 κιλ.-3150 κιλ.
167	25 ἀπεκλ. 40 ἀπερ.
	435 προβιβάσθ.
168	10 δρχ.
169	18000 δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
170	2160 δρχ.
171	63000 κατ.
172	390 γραμμ.
173	2000 κατ.
174	3325 κιλὰ
175	684 κιλὰ
176	4224 κιλὰ
181	20%
182	12%
183	7,5%
184	20%
185	20%
186	70 %
187	12 %
188	30 %
189	35 %
190	63.750 δρχ.
191	148,5 βούτυρο Κ'
	31,5 λίπος
192	α) 3496 τ. μ.
	β) 41952 τὸ χρ.
	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ
207	1.755 δρχ.
208	2400 δρχ.
209	16.000 δρχ.
210	1.530 δρχ.
211	24937,5 δρχ.
212	9.900 δρχ.
213	750 δρχ. τὸ χρόνο
	3750 στὰ 5 χρόνια
214	67.437 5 δρχ.
215	407500 δρχ.
216	α) 53300 δρχ. τόκο
	β) 49200 δρχ. τόκο
217	3500 δρχ.
218	3500 δρχ.
219	1875 δρχ.
220	16.800 δρχ.
221	80.000 δρχ.
222	18.750 δρχ.
223	4500 δρχ.
224	125000 δρχ.
225	200000 δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
226	800000 δρχ.
227	500 λίρες
228	500 λίρες
229	250 λίρες
230	1.000 λίρες
231	50 λίρες
232	60000 δρχ.
233	16000 δρχ.
234	22500 δρχ.
235	12000 δρχ.
236	12000 δρχ.
237	60000 δρχ.
238	15000 δρχ.
239	64000 δρχ.
240	60000 δρχ.
241	15000 δρχ.
242	675000 δρχ.
243	162000 δρχ.
244	450000 δρχ.
245	360000 δρχ.
246	1800000 δρχ.
247	720.000 δρχ.
248	480000 δρχ.
249	450000 δρχ.
250	100000 δρχ.
251	216000 δρχ.
252	20000 δρχ.
253	30000 δρχ.
254	10000 δρχ.
255	30000 δρχ.
256	25000 δρχ.
257	10800 δρχ.
258	25000 δρχ.
259	4000 δρχ.
260	30000 δρχ.
261	400000 δρχ.
262	90.000-360.000 δρ.
263	120000 δρχ.
264	31500 δρχ.
265	80.000 δρχ.
266	45000 δρχ.
267	8 % ἐπιτ.
268	7 ο)ο

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
269	5 ο)ο
270	4,5 %
271	12 %
272	7 %
273	8 %
274	8,5 %
275	8 %
276	12,5 %
277	6 %
278	6 %
279	8 %
280	4 %
281	8 %
282	4 ἔτη
283	11 ἡμέρ.
284	2 ἔτη
285	2 ἔτη
286	4 ἔτη
287	2 ἔτη καὶ 3 ἔτη
288	2 ἔτη
289	1 ἔτος
290	4 μῆν. καὶ 24 ἡμ.
291	5 μῆνες
292	6 μῆνες
293	5 μῆνες
294	8 μῆνες
295	225 ἡμέρ.
296	80 ἡμέρ.
297	108 ἡμέρ.
298	1 ἔτ. 4 μ. 20 ἡμ.
299	120 ἡμέρ.
300	1 ἔτος
301	2 ἔτη
302	7 μ. 26 ἡμ.
303	3 ἔτη
304	1 ἔτ. 3 μ,
305	τὸ πρῶτο 10 δρ.
306	50 λίρες
307	60000 δρχ.
308	43200 δρχ.
309	52500 δρχ.
310	36000 δρχ.
311	10 %

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
312	4 % ἐπιτ.
313	τὸν ἴδιο
314	1 ἔτος 3 μῆνες
	Προβλήματα Ὑφαιρέσεως
315	ὑφ.=3240 δρχ.
316	ὑφ. 190 δρχ.
317	ὑφ. 67,5 δρχ.
318	ὀν. ἀξ. 50000 δρ.
319	» » 9000 δρ.
320	5 μῆνες καὶ 10 ἡμ.
321	0,5 %
322	Ὑφ. 60 Π.Α. 3540
323	ὑφ. 123,75 Π.Α. 7376, 25 δρχ.
324	18 ἡμέρες
325	ὑφ.43,75 ἀξ.3456,25
326	10 %
327	α) 250 β) 300 γ) 350
328	α)500 β) 480 γ) 400 δ) 300
329	α) 1800 β) 1650 γ) 3300
330	α $163\frac{1}{3}$ β) $116\frac{2}{3}$
331	27000, 18000, 9000
332	α) $369\frac{3}{13}$ β) $590\frac{10}{13}$
333	α) 1329, 30 δρχ. β) 95,70 δρχ.
334	α) 1200 δρχ. β) 1260 γ) 1050δρχ. δ) 960 , ε) 630 δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
335	α) 380 β) 370 λίρ
336	α) 750 β) 875 καὶ γ) 625 λίρες
337	α) 2250 β) 2190 καὶ γ) 1410 δρχ.
338	α) 2.400 000 δρχ. β) 2.000.000 δρχ. γ) 1.600.000 δρχ.
339	α) 1.800.000 δρχ. β) 1500.000 δρχ. γ) 1.200.000 δρχ. δ) 900.000 δρχ.
340	α) 108.000 δρχ. β) 94.500 δρχ. γ) 67.500 δρχ. δ) 54.000 δρχ.
341	α) 420 λ., β) 315 λ. καὶ γ) 147 λίρ.
342	α) 122.400 δρχ. β) 102.000 δρχ. γ) 91.800 8ρχ. δ) 81.600 δρχ. ε) 61.200 δρχ.
343	α) $15709\frac{1}{11}$ δρχ. β $5890\frac{10}{11}$ δρχ.
344	α) 17640 δρχ. β) 10500 δρχ. γ) 4200 δρχ.
345	α $6307\frac{9}{13}$ δρχ. β) $1892\frac{4}{13}$ δρχ.

ἀρ. πρ.	Ἀπάντησις
346	α) 8400 δρχ. β) 10200 δρχ. γ) 14600 δρχ.
347	α) 2400 δρχ. β) 1600 δρχ.
348	α) 300 δρχ. β) 180 δρχ.
349	α) 1377 κιλὰ β) 1785 κιλὰ
350	α) 1620 β) 1920 γ) 960 δρχ. καὶ α) 486 β) 576 καὶ γ) 288 δρχ.
351	7000 δρχ.
352	$8\frac{1}{8}$
353	$35\frac{2}{5}$
354	220 γεννήσεις
355	2,73 δρχ.
356	3,71 δρχ.
357	30 δρχ.
358	5,20 δρχ.
259	0,710 βαθ. καθ.
360	18 καρατίων
361	80,57 δρχ.
362	70,57 βαδ.
363	100 καὶ 100
364	α) $16\frac{2}{3}$ β) $19\frac{1}{3}$ κιλ
365	α)210 β) 140 γραμ.
366	α) 24 β) 36

ἀρ. πρ.	Ἀπά
367	1200= 1200 κιλ.
368	112–β) 128 κιλ.
369	α) 44640 δρχ. β) 27900 δρχ. γ) 20460 δρχ.
370	3 μῆνες 10 ἡμέρ
371	α) 360 κιλὰ β) 400 κιλὰ
372	11904 δρχ.
373	α) 9 δρχ. κιλὸ β) 10,80 δρχ.
374	13,46 μέτρα
375	4 ὧρες
376	1, 26 δρΧ.
377	739,20 δρχ.
378	11280 δρχ.
379	93 ἡμ.
380	120000 δρχ.
381	24,60 δρχ.
382	38,75 δρχ.
383	2,80–3,50 δρχ.
384	14,30 δρχ.
385	60 %
386	ἀπὸ τόκους
387	144 τεμάχ.
388	56,25 δρχ.
389	5256–756 λίρ.
390	3500–120000κεφ

ΝΕΑ ΣΕΙΡΑ
ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ
ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ

ΤΑΞΙΣ Α'

Αρ. 1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ-ΤΕΤΡΑΔΙΟ

ΤΑΞΙΣ Β'

Αρ. 3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ-ΤΕΤΡΑΔΙΟ

ΤΑΞΙΣ Γ'

Αρ. 5. ΠΑΛΑΙΑ ΔΙΑΘΗΚΗ
» 6. ΜΥΘΙΚΑ ΧΡΟΝΙΑ
» 7. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
» 8. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
» 9. ΑΤΤΙΚΗ-ΑΘΗΝΑ-ΠΕΙΡΑΙΑΣ
» 18. ΠΑΙΔΙΚΕΣ ΕΚΘΕΣΕΙΣ

ΤΑΞΙΣ Δ'

Αρ. 10. ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ
» 11. ΙΣΤΟΡΙΑ ΑΡΧ. ΕΛΛΑΔΟΣ
» 12. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
» 13. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
» 15. ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΕΛΛΑΔΟΣ
» 18. ΠΑΙΔΙΚΕΣ ΕΚΘΕΣΕΙΣ

ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΟΜΕΝΑΙ ΤΑΞΕΙΣ Γ' & Δ'

Αρ. 15. ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΕΛΛΑΔΟΣ
(Α' και Β' έτος συνδ/λίας)
» 16. ΙΣΤΟΡΙΑ
(Α' έτος συνδ/λίας)
» 17. ΙΣΤΟΡΙΑ
(Β' έτος συνδ/λίας)
» 18. ΠΑΙΔΙΚΕΣ ΕΚΘΕΣΕΙΣ
(Α' και Β' έτος συνδ/λίας)

ΤΑΞΙΣ Ε'

Αρ. 19. ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Έγκεκρ.)
Αρ. 20. ΒΥΖΑΝΤΙΝΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Έγκεκρ.)
» 21. ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΗΠΕΙΡΩΝ »
» 22. ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ »
» 29. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
» 30. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »
» 23. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Έλεύθ.)
35. ΟΙ ΕΚΘΕΣΕΙΣ ΜΟΥ »

ΤΑΞΙΣ ΣΤ'

Αρ. 24. ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΗ & ΚΑΤΗΧΗΣΙΣ (Έγκεκρ.)
» 25. ΙΣΤΟΡΙΑ ΝΕΩΤ. ΕΛΛΑΔΟΣ »
» 26. ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΕΥΡΩΠΗΣ »
» 27. ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ »
» 29. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ »
» 30. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »
» 28. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Έλεύθ.)
» 35. ΟΙ ΕΚΘΕΣΕΙΣ ΜΟΥ »
» 36. ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ »

ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΟΜΕΝΑΙ ΤΑΞΕΙΣ Ε' & ΣΤ'

Αρ. 29. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ (Έγκεκρ.)
(Α' και Β' έτος συνδ/λίας)
» 30. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ε. & ΣΤ' »
(Α' και Β' έτος συνδ/λίας)
» 31. ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ »
(Α' έτος συνδ/λίας)
» 32. ΦΥΣΙΚΗ & ΧΗΜΕΙΑ »
(Β' έτος συνδ/λίας)
» 33. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ (Έλεύθ.)
(Α' έτος συνδ/λίας)
» 34. ΦΥΣΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ »
(Β' έτος συνδ/λίας)
» 35. ΟΙ ΕΚΘΕΣΕΙΣ ΜΟΥ »
» 36. ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ »

ΙΧΝΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΤΕΥΧΟΣ Α' — ΤΕΥΧΟΣ Β' ΤΕΥΧΟΣ Γ' — ΤΕΥΧΟΣ Δ'

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΕΝΤΑΥΡΟΣ

ΟΔΟΣ ΑΓ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 14 ΑΘΗΝΑΙ