Π. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε΄. & ΣΤ΄. ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

*

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΠΕΤΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.
ΟΔΟΣ ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 8 - ΑΘΗΝΑΙ
1934

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

Τύποις: Κ. Σ. Παπαδογιάννη
— Ψαρρῶν 41, Ἀθῆναι —

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε΄. ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

Ἀπὸ τὴν Φυσικὴν γνωρίζομεν ὅτι τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα βλέπομεν γύρω μας διαιροῦνται εἰς τρεῖς κατηγορίας, εἰς στερεά, ὑγρὰ καὶ ἀέρια.

Στερεὰ λέγονται τὰ σώματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἰδικόν των σχῆμα. Δυνάμεθα νὰ τὰ ἐγγίσωμεν, νὰ τὰ λάβωμεν εἰς τὰς χεῖρας μας καὶ νὰ τὰ μεταφέρωμεν. Π. χ. τὸ βιβλίον, ἡ κιμωλία, ἡ πέτρα εἶναι στερεὰ σώματα.

Ὑγρὰ λέγονται τὰ σώματα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἐγγίσαμεν καὶ νὰ γευθῶμεν ἀλλὰ δὲν ἔχουν ἰδικόν των σχῆμα. Π. χ. τὸ νερό, τὸ κρασί, τὸ γάλα εἶναι σώματα ὑγρά.

Τὰ ὑγρὰ σώματα λαμβάνουν τὸ σχῆμα τοῦ δοχείου ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὰ χύνομεν.

Ἀέρια λέγονται τὰ σώματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα οὔτε τὰ βλέπομεν οὔτε τὰ ἐγγίζομεν. Δυνάμεθα ὅμως νὰ τὰ αἰσθανθῶμεν εἰς τὸ πρόσωπόν μας καὶ εἰς ὅλον τὸ σῶμα μας, ὅταν κινοῦνται μὲ δύναμιν. Π. χ. ὁ ἀέρας, τὸ ἀνθρακικὸν ὀξύ, τὸ φωταέριον καὶ ἄλλα εἶναι ἀέρια.

Ὅπως καὶ τὰ ὑγρά, τοιουτοτρόπως καὶ τὰ ἀέρια δὲν ἔχουν ἰδικόν των σχῆμα, ἀλλὰ γεμίζουν τὸ δοχεῖον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται. Ὅταν δὲ εὑρίσκονται ἐλεύθερα εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν, ἀραιώνονται καὶ τείνουν νὰ καταλάβουν ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον χῶρον.

Ὅλα τὰ σώματα καταλαμβάνουν χῶρον. Ὁ χῶρος τῶν σωμάτων λέγεται ***ὄγκος*** αὐτῶν.

Τὰ στερεὰ σώματα δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν κατὰ τρεῖς διαφόρους διευθύνσεις: α) ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἡ ἀπόστασις αὕτη τοῦ σώματος λέγεται ***μῆκος*** αὐτοῦ, β) ἐκ τῶν ἔμπροσθεν πρὸς τὰ ὄπισθεν. Ἡ ἀπόστασις αὕτη λέγεται **πλάτος** τοῦ σώματος καὶ γ) ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ ἀπόστασις αὕτη λέγεται **ὕψος** τοῦ σώματος. Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τοῦ σώματος λέγονται μὲ μίαν λέξιν **διαστάσεις** τοῦ σώματος.*)

Ἀσκήσεις

1) Ὀνομάσατέ μου 2 στερεά, 2 ὑγρὰ καὶ 1 ἀέριον.

2) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσα εἰς τὴν στάμναν, τοῦ γάλακτος, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσα εἰς τὸ ποτήριον;

3) Μετρήσατε τὰς 3 διαστάσεις τῆς ἕδρας τῆς τάξεως, τοῦ βιβλίου, τοῦ κυτίου τῶν κιμωλιῶν.

4) Τί σώματα εἶναι ὁ κώδων τοῦ σχολείου, ὁ πίναξ, τὸ φωταέριον, τὸ ἔλαιον, τὸ γάλα, ὁ ζωμὸς τοῦ λεμονίου, ἡ μελάνη;

5) Δείξατέ μου τὰς 3 διαστάσεις τοῦ δωματίου τῆς τάξεώς σας.

ΚΥΒΟΣ

Ἐὰν λάβωμεν τὸ ζάρι εἰς τὰς χεῖρας μας καὶ μετρήσωμεν τὰς 3 αὐτοῦ διαστάσεις, μῆκος πλάτος καὶ ὕψος, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι. Ὅπως εἰς τὸ ζάρι, τοιουτοτρόπως καὶ εἰς ἄλλα σώματα, ὅπως π. χ. τετράγωνα κουτιά, πελεκημένα μάρμαρα κλπ. αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι. Τὰ σώματα ταῦτα εἶναι κύβοι. ***Κύβος λοιπὸν λέγεται τὸ στερεὸν ἐκεῖνο σῶμα, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι.***

Ὅπως ἔχομεν τὸν κύβον ἐνώπιόν μας, βλέπομεν μόνον τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ μέρος. Τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ κύβου, καθὼς καὶ ὅλων τῶν σωμάτων, λέγεται **ἐπιφάνεια.**

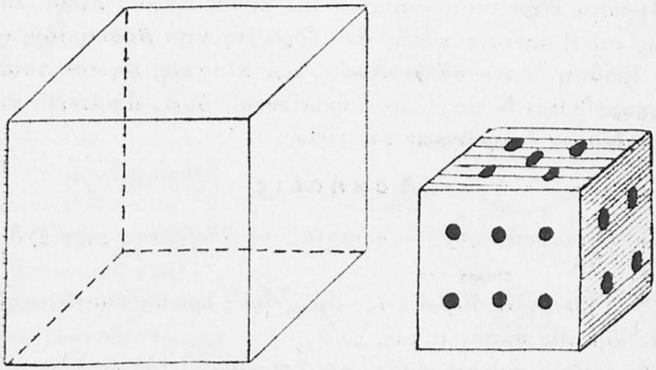
Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου διαιρεῖται εἰς 6 μέρη. Ὁ κύβος δύναται νὰ στηριχθῇ ἐπὶ τῆς τραπέζης καὶ διὰ τῶν 6 μερῶν τῆς ἐπιφανείας του. Ἕκαστον ἐκ τῶν μερῶν τούτων τῆς ἐπιφανείας

---

*) Σὲ μερικὰ σώματα τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος λέγεται καὶ πάχος. Π. χ. στὴ σανίδα. Σ' ἄλλα πάλι τὸ ὕψος τὸ λέμε βάθος. Π. χ. στὴ δεξαμενὴ ἀντὶ ὕψος λέμε βάθος τῆς δεξαμενῆς.

τοῦ κύβου λέγεται **ἕδρα.** Ὁ κύβος λοιπὸν ἔχει 6 ἕδρας καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **ἑξάεδρον** σχῆμα.

Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὰς ἕδρας τοῦ κύβου θὰ ἴδωμεν ὅτι συναντῶνται ἀνὰ δύο. Ἡ γραμμὴ εἰς τὴν ὁποίαν συναντῶνται αἱ ἕδραι λέγεται **ἀκμή**. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι δώδεκα καὶ ὅταν μετρήσωμεν αὐτὰς θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.



Ἐκεῖ ὅπου συναντῶνται δύο ἀκμαὶ τοῦ κύβου σχηματίζεται μία γωνία. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **ἐπίπεδος** γωνία τοῦ κύβου. Τοιαῦται ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι 4 εἰς ἑκάστην ἕδραν τοῦ κύβου. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι 6, ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι αὐτοῦ γωνίαι εἶναι $4 \times 6 = 24$.

Ὅταν ἑνωθῶσι δύο ἕδραι τοῦ κύβου, σχηματίζεται πάλιν μία γωνία. Αὐτὴ ὅμως ἡ γωνία λέγεται **δίεδρος,** διότι σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἕδρας. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται εἰς 12 ἀκμὰς καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι δώδεκα, ὅσαι δηλαδὴ καὶ αἱ ἀκμαί.

Ὅταν τέλος ἑνωθοῦν 3 ἕδραι τοῦ κύβου, σχηματίζεται πάλιν μία γωνία. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **τρίεδρος,** διότι σχηματίζεται ἀπὸ τρεῖς ἕδρας. Λέγεται καὶ **στερεά.** Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας αὐτῆς εἶναι καὶ κορυφὴ τοῦ κύβου. Ἂν μετρήσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ κύβου, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι 8. Τόσαι εἶναι καὶ αἱ στερεαὶ αὐτοῦ γωνίαι.

Ἐὰν στηρίξωμεν τὸν κύβον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς 6 αὐτοῦ ἕδρας καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν γύρω ἀπ' αὐτὴν καὶ κατὰ μῆκος τῶν ἀκμῶν αὐτῆς, θὰ ἴδωμεν ὅτι θὰ σχηματισθῇ ἓν τετράγωνον σχῆμα. Ἂν δὲ τώρα στηρίξωμεν τὸν κύβον ἐπὶ τοῦ σχήματος τούτου μὲ ὅλας κατὰ σειρὰν τὰς ἕδρας αὐτοῦ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὅλαι ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ σχήματος. Τοῦτο μᾶς δεικνύει ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἡ κάτω ἕδρα τοῦ κύβου, διὰ τῆς ὁποίας ὁ κύβος στηρίζεται, καθὼς καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἄνω ἕδρα λέγονται **βάσεις** τοῦ κύβου. Ἑκάστη ἐκ τῶν ἄλλων ἑδρῶν, τῶν πλαγίων, λέγεται **παράπλευρος.** Ὅλαι δὲ μαζὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρον ἐπιφάνειαν** τοῦ κύβου.

Ἀσκήσεις

1) Ὀνομάσατέ μου 5 σώματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα κύβου.

2) Λάβετε ἕνα κύβον εἰς τὰς χεῖρας σας καὶ δείξατε τὰς ἕδρας καὶ τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ.

3) Δείξατε καὶ μετρήσατε τὰς ἐπιπέδους, τὰς διέδρους καὶ τὰς στερεὰς γωνίας αὐτοῦ.

4) Κόψατε ἓν μῆλον ἢ μίαν πατάταν εἰς σχῆμα κύβου.

5) Κόψατε χρωματιστὰ χαρτιὰ ἴσα μὲ τὰς ἕδρας τοῦ κύβου. Συγκρίνατε τὰ χαρτιὰ αὐτὰ μεταξύ των.

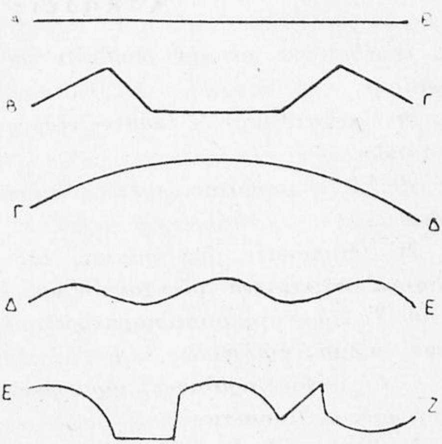
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

Τὸ παρακείμενον σχῆμα δεικνύει διάφορα εἴδη γραμμῶν: Ἡ γραμμὴ αβ τοῦ σχήματος τούτου λέγεται **εὐθεῖα**. Ἂν προσέξωμεν τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὅλαι εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί.

Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν γράφομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ **κανόνος** (τῆς ῥίγας). Κανὼν εἶναι μία μικρά, στενὴ καὶ ἐπιμήκης σα-

νίς. Διὰ νὰ γράψωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν στηρίζομεν τὸν κανόνα ἐπὶ τοῦ πίνακος καὶ σύρομεν τὴν κιμωλίαν κατὰ μῆκος αὐτοῦ. Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία θὰ γραφῇ θὰ εἶναι εὐθεῖα.

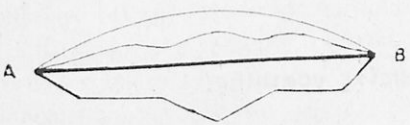
Ἡ γραμμὴ βγ τοῦ σχήματος λέγεται **τεθλασμένη**. Εἶναι δὲ τεθλασμένη ἡ γραμμὴ ἐκείνη ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰς εὐθείας γραμμάς, χωρὶς ὅλη νὰ εἶναι εὐθεῖα.



Καμπύλη λέγεται ἡ γραμμὴ ἐκείνη τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα. Π. χ. αἱ γραμμαὶ γδ καὶ δε τοῦ παρακειμένου σχήματος εἶναι καμπύλαι γραμμαί.

Τέλος ***μικτὴ*** λέγεται ἡ γραμμὴ ἐκείνη ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα οὔτε καμπύλη, ἀλλὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας. Ἡ γραμμὴ εζ τοῦ σχήματος εἶναι μικτὴ γραμμή.

Τὰ ἄκρα μιᾶς γραμμῆς λέγονται σημεῖα. Μεταξὺ δύο σημείων μόνον μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν. Ὁσασδήποτε ἄλλας καὶ ἂν φέρωμεν, αὗται δὲν θὰ εἶναι εὐθεῖαι. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ παρακειμένου σχήματος.



Εὐθεῖαν γραμμὴν ἀποτελεῖ τὸ νῆμα ὅταν εἶναι τεντωμένον μεταξὺ δύο σταθερῶν σημείων. Ἐπίσης μερικοὶ ἁμαξητοὶ ὁδοὶ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν γραμμήν.

Καμπύλην γραμμὴν ἀποτελοῦν τὰ σύρματα τοῦ τηλεγράφου ὅταν εἶναι χαλαρωμένα. Ἐπίσης οἱ ποταμοί, αἱ γραμμαὶ τῶν σιδηροδρόμων καὶ αἱ μεγάλαι ἁμαξητοὶ ὁδοὶ σχηματίζουν καμπύλην γραμμὴν εἰς τὰ μέρη ὅπου μεταβάλλουν διεύθυνσιν.

Τεθλασμένην γραμμὴν ἀποτελεῖ τὸ σχῆμα μερικῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ὅπως π.χ. τὸ Σ τὸ Ζ. Ἡ ἀστραπὴ διαγράφει τεθλασμένην γραμμήν.

Μικτὰς τέλος γραμμὰς σχηματίζουν οἱ ἐξοχικοὶ δρόμοι, οἱ σιδηρόδρομοι, τὸ σχῆμα τῶν ἀριθμῶν καὶ ἄλλα.

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

2) Γράψατε μίαν ἐξ ἑκάστου εἴδους τῶν ἄλλων εἰδῶν τῶν γραμμῶν.

3) Ἐξ ἑνὸς σημείου φέρετε εὐθείας πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

4) Ὀνομάσατε τὰς γραμμὰς τὰς ὁποίας βλέπετε εἰς τὰ διάφορα ἀντικείμενα τοῦ σχολείου σας.

5) Τί εἴδους γραμμὰς παρατηρεῖτε εἰς τὰ ἀκόλουθα γράμματα καὶ τοὺς ἀριθμούς : 8, 4, 2, ζ, ξ, 7, 1.

6) Εἰς ποίους ἀριθμοὺς παρατηροῦμεν εὐθείας γραμμάς, εἰς ποίους τεθλασμένας ;

7) Τί γραμμὰς διαγράφει εἰς τὸν οὐρανὸν τὸ πτηνόν, ἡ πέτρα τὴν ὁποίαν ῥίπτομεν μὲ τὴν σφενδόνην, ἡ σφαῖρα τοῦ ὅπλου ;

8) Φέρετε μεταξὺ δύο σημείων ὅλα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν.

9) Φέρετε εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι νὰ συναντῶνται εἰς τὸ μέσον αὐτῶν.

10) Γράψατε 4 σημεῖα. Ἑνώσατέ τα δι' εὐθειῶν γραμμῶν. Τί γραμμὴ θὰ ἀποτελεσθῇ ;

Περὶ εὐθείας γραμμῆς.

Εἴπομεν ὅτι τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν γράφομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος. Διὰ τοῦ κανόνος ὅμως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μόνον μικρὰς εὐθείας ἐπὶ τοῦ τετραδίου μας ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος. Ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ σημαδεύσωμεν μίαν μεγάλην εὐθεῖαν, κάμνομεν τοῦτο δι' ἄλλων διαφόρων τρόπων. Οἱ γεωργοὶ π. χ., ὅταν θέλουν νὰ σημαδεύσουν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, μεταχειρίζονται ἓν μακρὺ σχοινίον τὸ ὁποῖον τεντώνουν εἰς τὰ δύο σημεῖα, μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλουν νὰ σημαδεύσουν τὴν εὐθεῖαν γραμμήν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτῶν σημοδεύουν τὴν γραμὴν τῶν τοίχων τῶν χωραφίων των, τῶν χανδάκων κλπ.

Οἱ ξυλουργοὶ πάλιν καὶ οἱ ἐλαιοχρωματισταί, διὰ νὰ σημαδεύσουν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, μεταχειρίζονται ἓν ράμμα, τὸ ὁποῖον ἔχουν ποτίσει μὲ χρῶμα. Κατ᾽ ἀρχὰς τεντώνουν τὸ ράμμα μεταξὺ τῶν σημείων τῆς εὐθείας. Κατόπιν ἀνασηκώνουν μὲ τὸ χέρι των ὀλίγον τὸ ράμμα καὶ τὸ ἀφήνουν κατόπιν νὰ πέσῃ μὲ δύναμιν ἐπὶ τοῦ ξύλου ἢ τοῦ τοίχου. Τὸ χρῶμα τότε σημειώνει τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.

Εἴπομεν ὅτι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί. Ἂν παρατηρήσωμεν αὐτοὺς θὰ ἴδωμεν ὅτι ὅλαι δὲν ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν.

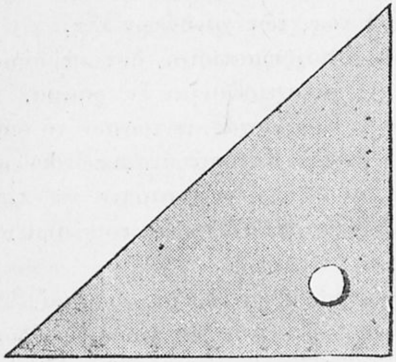
Ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω ἀκμὴ τῆς ἕδρας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐμπρός μας, διευθύνονται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἡ διεύθυνσις αὐτὴ λέγεται ὁριζοντία καὶ αἱ γραμμαί, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν διεύθυνσιν αὐτήν, λέγονται ***ὁριζόντιαι.***

Αἱ πλάγιαι ἀκμαὶ κοῦ κύβου διευθύνονται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Ἡ διεύθυνσις αὐτὴ λέγεται κατακόρυφος καὶ αἱ γραμμαί, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν διεύθυνσιν αὐτὴν λέγονται ***κατακόρυφοι.***

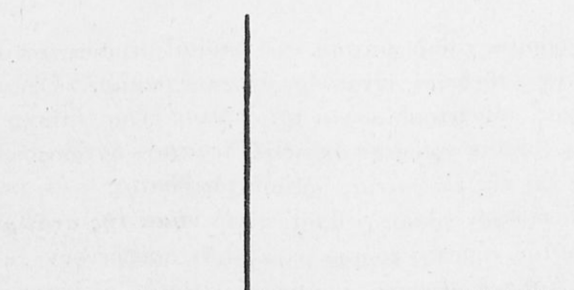
Αἱ γραμμαὶ τοῦ δωματίου, αἱ ὁποῖαι διευθύνονται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, εἶναι ὁριζόντιαι γραμμαί. Οἱ γραμμαὶ τῆς πλάκας, τοῦ τετραδίου καὶ τοῦ βιβλίου εἶναι ἐπίσης ὁριζόντιαι. Ὁριζοντίαν γραμμὴν ἀποτελεῖ τεμάχιον σανίδος, ὅταν τὸ ρίψωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὕδατος.

Κατακόρυφον γραμμὴν ἀποτελεῖ τὸ ***νῆμα τῆς στάθμης***. Εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος τούτου οἱ κτίσται προσδένουν ἓν μικρὸν βαρύδι. Διὰ τοῦ νήματος τούτου οἱ κτίσται ἐξελέγχουν ἂν οἱ τοῖχοι τοὺς ὁποίους κτίζουν ἔχουν κατακόρυφον διεύθυνσιν. Πρὸς τοῦτο προσαρμόζουν τὸ νῆμα εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ τοίχου. Κατόπιν ἀφήνουν τὸ νῆμα νὰ κατέλθῃ συρόμενον ἀπὸ τὸ βαρύδι. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐξελέγχουν τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν τοῦ τοίχου.

Διὰ νὰ γράψωμεν ὁριζοντίας καὶ κατακορύφους γραμμὰς μεταχειριζόμεθα ἓν ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***γνώμων.*** Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο, ὅπως δεικνύει καὶ τὸ παρακείμενον σχῆμα εἶναι μία τριγωνικὴ σανίς, ἡ ὁποία φέρει μίαν ὀπὴν εἰς τὸ μέσον διὰ νὰ τὴν κρατῶμεν. Ἐὰν στηρίξωμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ πίνακος ὄρθιον καὶ γράψωμεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τῆς κάτω αὐτοῦ εὐθείας πλευρᾶς ἡ γραμμὴ αὕτη θὰ εἶναι ὁριζοντία. Ἂν κατόπιν, χωρὶς νὰ μετακινήσωμεν τὸν γνώμονα, γράψωμεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τῆς ὀρθίας αὐτοῦ πλευρᾶς, ἡ γραμμὴ αὕτη θὰ εἶναι κατακόρυφος.

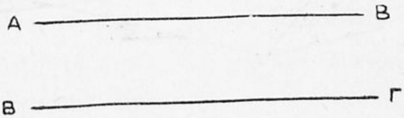


Ὅταν φέρωμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος μίαν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ κατόπιν μίαν κατακόρυφον ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας, προεκτείνωμεν δὲ κατόπιν τὴν ὁριζοντίαν, τότε ἡ κατακόρυφος θὰ εἶναι ***κάθετος*** ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας, ὅπως δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα.



Ἐὰν τώρα παρατηρήσωμεν τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς τοῦ κύβου, τὴν ἄνω καὶ τὴν κάτω, τὴν ἀριστερὰν καὶ τὴν δεξιάν, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται γραμμαὶ δὲν ἀπαντῶνται ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι. Ἡ ἀπόστασις δηλαδὴ μεταξὺ αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται. Αἱ εὐθεῖαι αὗται λέγονται ***παράλληλοι.***

Παράλληλοι λοιπὸν λέγονται αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἰδίας ἐπιπέδου ἐπιφανείας καὶ δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι. Αἱ γραμμαὶ αβ καὶ βγ τοῦ παρακειμένου σχήματος εἶναι παράλληλοι. Κάθετοι εἶναι ὅλαι αἱ κατακόρυφοι ἀκμαὶ τοῦ κύβου ἐπὶ τῶν ὁριζοντίων ἀκμῶν. Κάθετοι ἐπίσης εἶναι αἱ ἀκμαὶ τῶν τοίχων τῶν οἰκιῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.



Αἱ ὁδοὶ τῶν πόλεων εἶναι συνήθως παράλληλοι. Αἱ πάροδοι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ὁδῶν.

Τὰ πεζοδρόμια τῶν ὁδῶν, αἱ γραμμαὶ τῶν σιδηροδρόμων κλπ. ἀποτελοῦν παραλλήλους γραμμάς.

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος ὁριζοντίας καὶ κατακορύφους γραμμάς.

2) Γράψατε μίαν ὁριζοντίαν γραμμήν. Φέρετε ἐπ᾽ αὐτῆς κάθετον.

3) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος δύο παραλλήλους γραμμάς.

4) Κατασκευάσατε ἓν πρόχειρον νῆμα τῆς στάθμης καὶ ἐξελέγξατε δι᾽ αὐτοῦ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν τῶν τοίχων τῆς τάξεως καὶ ἄλλων ἐπίπλων τοῦ σχολείου.

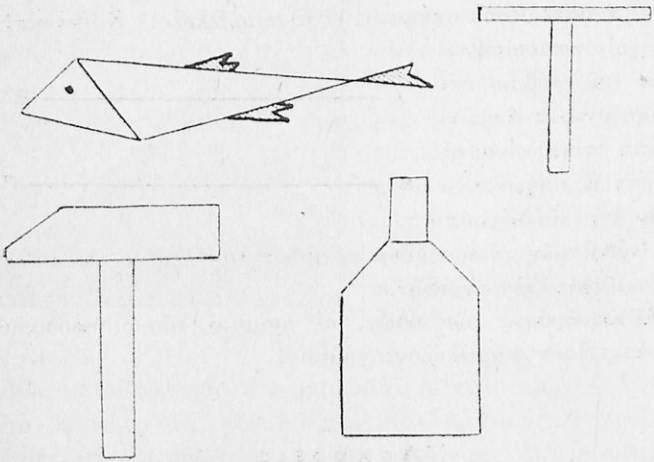
5) Λάβετε ἕνα σπάγγον, ἀλείψατέ τον μὲ σκόνιν κιμωλίας καὶ μιμηθῆτε τὸν ἐλαιοχρωματιστὴν γράφοντες ὁριζοντίαν γραμμὴν ἐπὶ τοῦ πίνακος.

6) Ὀνομάσατε πράγματα, τὰ ὁποῖα νὰ παρουσιάζουν κατακορύφους, ὁριζοντίας καὶ παραλλήλους γραμμάς.

7) Τί γραμμὰς παρατηρεῖτε ἐπὶ τῆς ἕδρας, ἐπὶ τοῦ θρανίου, ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς τάξεως;

8) Δείξατε τὰς ὁριζοντίας, τὰς κατακορύφους καὶ τὰς παραλλήλους γραμμὰς τοῦ σχολείου σας.

9) Τί γραμμὰς παρατηρεῖτε εἰς τὸν σταυρόν;
10) Τί γραμμὰς παρατηρεῖτε εἰς τὰ κατωτέρω σχήματα;



ΠΩΣ ΜΕΤΡΟΥΜΕΝ ΤΑΣ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ

Ἀπόστασις δύο πραγμάτων ἢ δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ὁποία τὰ ἑνώνει.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀποστάσεων δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν διάφορα μέτρα μήκους. Τὰ παιδιὰ μετροῦν μὲ τὸν δάκτυλόν των, μὲ τὴν σπιθαμήν των, μὲ τὸ πέλμα των, μὲ τὸ βῆμα των κλπ. Τὴν ἀπόστασιν τῶν βόλων των μετροῦν μὲ τὴν σπιθαμήν των. Τὸ μῆκος τοῦ πηδήματός των μετροῦν μὲ τὸ βῆμα των καὶ μὲ τὸ πόδι των. Οἱ γεωργοὶ μετροῦν τὰ σχοινία των μὲ τὸ ἄνοιγμα καὶ τῶν δύο των χειρῶν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζουν «ὀργυάν». Αἱ γυναῖκες πάλιν συνήθως μετροῦν τὸ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἀγοράζουν, μὲ τὸ μῆκος τῆς μιᾶς χειρός των ἀντὶ τοῦ πήχεως.

Ἐπειδὴ ὅμως ὅλα τὰ παιδιὰ καὶ ὅλοι οἱ μεγάλοι δὲν ἔχουν ἴσην σπιθαμὴν ἢ ἴσον βῆμα, ἀλλὰ ἄλλος ἔχει μεγάλο καὶ ἄλλος ἔχει μικρόν, δὲν εἶναι δυνατὸν καὶ ἡ μέτρησις τῶν ἀποστάσεων νὰ εἶναι δι᾽ ὅλους ἴση. Διὰ τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπέλθουν καὶ παρεξηγήσεις μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν ὁμοιομορφία εἰς τὴν μέτρησιν, ὥρισαν ὡς κοινὴν μονάδα μετρήσεως τὸ ***γαλλικὸν μέτρον καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ.***

Τὸ γαλλικὸν μέτρον εἶναι τὸ $\frac{1}{40.000.000}$ τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς γῆς. Διὰ νὰ ὁρίσουν δηλαδὴ τὸ μῆκος τοῦ μέτρου, ἐμέτρησαν τὸν ἰσημερινὸν τῆς γῆς. Κατόπιν ἐχώρισαν τὸ μῆκος αὐτοῦ εἰς 40.000.000 μέρη καὶ ἔλαβον τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν.

Αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου εἶναι αἱ ἑξῆς:

Τὸ μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***παλάμαι.***

Ἑκάστη παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***δάκτυλοι.*** Ἕκαστος πάλιν δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***γραμμαί.*** Δηλαδή, μία παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, εἷς δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης καὶ μία γραμμὴ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου. Ἔχομεν λοιπόν:

1 μέτρον = 10 παλάμαι, ἢ 100 δάκτυλοι, ἢ 1000 γραμμαί,
1 παλάμη = 10 δάκτυλοι, ἢ 100 γραμμαί,
1 δάκτυλος = 10 γραμμαί.

Ἢ ἄλλέως:

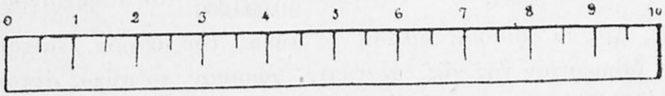
1 παλάμη = $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου,
1 δάκτυλος = $\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης, ἢ $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου,
1 γραμμὴ = $\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου, ἢ $\frac{1}{100}$ τῆς παλάμης, ἢ $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου.

Τὸ γαλλικὸν μέτρον εἶναι ἡ μονὰς μήκους εἰς τὴν Γαλλίαν καὶ εἰς τὰ ἄλλα κράτη.

Τὰ διάφορα ὅμως κράτη ἔχουν, ἐκτὸς τοῦ μέτρου καὶ ἄλλας μονάδας μήκους.

Εἰς τὴν Ἀγγλίαν π. χ. ἔχουν τὴν ***ὑάρδαν,*** ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὰ 91 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Ἡ ὑάρδα διαιρεῖται εἰς 100 ***ἔντσες.*** Εἰς τὴν Ἑλλάδα καὶ τὴν Τουρκίαν μετροῦμεν τὰ ὑφάσματα μὲ τὸν **πῆχυν.** Ὁ πῆχυς ἰσοῦται πρὸς τὰ 64 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Ἕκαστος πῆχυς διαιρεῖται εἰς 8 ρούπια.

Διὰ τὰς οἰκοδομὰς ἔχομεν ὡς μονάδα μήκους τὸν **τεκτονικὸν πῆχυν.** Ὁ πῆχυς οὗτος ἰσοῦται πρὸς τὰ 75 ἑκατοστὰ (3)4) τοῦ μέτρου.



Τὸ Γαλλικὸν μέτρον.

Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδας μήκους τὸ ***δεκάμετρον,*** τὸ ὁποῖον εἶναι 10 μέτρα, τὸ ***ἑκατόμετρον,*** τὸ ὁποῖον εἶναι 100 μέτρα, ***τὸ χιλιόμετρον***, τὸ ὁποῖον εἶναι 1000 μέτρα καὶ τὸ ***μυριάμετρον,*** τὸ ὁποῖον εἶναι 10.000 μέτρα.

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος δύο εὐθείας γραμμάς. Ἡ μία νὰ εἶναι 6 δακτύλους μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης.

2) Γράψατε δύο εὐθείας γραμμὰς μήκους 45, 56, 62 δακτύλων.

3) Μετρήσατε μὲ τὴν σπιθαμήν σας τὸ μῆκος τοῦ θρανίου σας, μὲ τὸ πέλμα σας τὸ πλάτος τοῦ διαδρόμου τοῦ σχολείου, μὲ τὸ βῆμα σας τὸ μῆκος τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου, τὸ πλάτος τοῦ δρόμου τοῦ σχολείου.

4) Ὑπολογίσατε μὲ τὸ μάτι σας τὸ ὕψος τοῦ σχολείου σας εἰς μέτρα καὶ εἰς πήχεις.

5) Γράψατε ἐπὶ τοῦ πίνακος μίαν εὐθείαν 80 δακτύλων. Διαιρέσατέ την εἰς 10 ἴσα μέρη.

6) Γράψατε εὐθεῖαν 46 δακτύλων. Μετρήσατεε καὶ εὕρετε τὸ μέσον αὐτῆς.

7) Λάβετε τὸ μέτρον εἰς τὰς χεῖρας σας καὶ μετρήσατε τὰς διαστάσε.ς τῆς ἕδρας, τοῦ θρανίου.

8) Ὑπολογίσατε εἰς μέτρα τὸ ὕψος τοῦ σχολείου σας, τῆς ἀντικρυνῆς οἰκίας, τῆς ἐκκλησίας τῆς ἐνορίας σας.

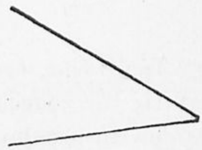
9) *Μετρήσατε εἰς τὸν δρόμον μίαν ἀπόστασιν 9 πήχεων καὶ 9 μέτρων. Συγκρίνατε τὰς δύο ἀποστάσεις.*

10) *Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαύτας ἐργασίας.*

ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

Τὸ παρακείμενον σχῆμα εἶναι γωνία. Τὸ σχῆμα τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν.

Γωνία λέγεται τὸ σχῆμα ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ δυὸ εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν, χωρὶς νὰ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν γραμμήν.



Ἀναλόγως τοῦ ἀνοίγματος τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν γωνίαν ἔχομεν διάφορα εἴδη γωνιῶν. Τὸ ἄνοιγμα δὲ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν μετροῦμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κύκλου. Μετροῦμεν δηλαδὴ τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

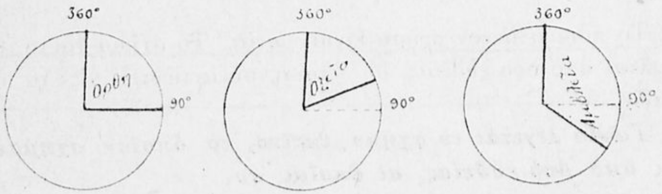
Ἕκαστος κύκλος διαιρεῖται εἰς 360 μέρη, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται ***μοῖραι***. Αἱ μοῖραι γράφονται ὡς ἑξῆς : 360°. Τὰς γωνίας λοιπὸν ὀνομάζομεν ἀναλόγως τῶν μοιρῶν τοῦ ἀνοίγματός των.

Πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν ἔχομεν ἓν ἐργαλεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***μοιρογνωμόνιον***.

Τὸ ἐργαλεῖον τοῦτο εἶναι ἓν ἡμικύκλιον, ἡ περιφέρεια τοῦ ὁποίου εἶναι διῃρημένη εἰς 180 μοίρας. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, τοποθετοῦμεν τοιουτοτρόπως τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπὶ τῆς γωνίας, ὥστε ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου. Μετροῦμεν κατόπιν τὰς μοίρας, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Ὅσαι εἶναι αἱ μοῖραι αὗται τόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία.

Ὅταν ἡ γωνία περιλαμβάνῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, δηλαδὴ 90 μοίρας, λέγεται ***ὀρθὴ*** γωνία. Ὅταν περιλαμβάνῃ ὀλιγωτέρας τῶν 90 μοιρῶν, λέγεται **ὀξεῖα** γωνία καὶ ὅταν περιλαμβάνῃ περισσοτέρας τῶν 90 μοιρῶν, λέγεται **ἀμβλεῖα** γωνία.

Αἱ γωνίαι λοιπὸν εἶναι τριῶν εἰδῶν : ὀρθαί, ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι, ὅπως δεικνύουν καὶ τὰ παρακείμενα σχήματα :



Τὰς γωνίας ὀνομάζομεν ἢ μὲ ἓν γράμμα, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, ἢ μὲ τρία γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεσαῖον εἶναι πάντοτε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς.

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε μίαν ἐξ ἑκάστου εἴδους γωνιῶν.

2) Κατασκευάσατε μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Μεταβάλετέ την εἰς ὀξεῖαν εἰς ἀμβλεῖαν.

3) Κατασκευάσατε μίαν γωνίαν 55°. Τί γωνία εἶναι. Πόσας μοίρας πρέπει νὰ ἀνοίξουν ἀκόμη αἱ πλευραί της διὰ νὰ γίνῃ ὀρθή ;

4) Κατασκευάσατε γωνίαν 120°. Πόσον μεγαλυτέρα εἶναι τῆς ὀρθῆς ;

5) Καταασκευάσατε γωνίαν ἴσην μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσον μοιρῶν θὰ εἶναι ;

6) Γράψατε μίαν ὀξεῖαν, μίαν ὀρθὴν καὶ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν. Μετρήσατε καὶ εὕρετε τὴν διαφορὰν μεταξύ των.

7) Διχοτομήσατε μίαν γωνίαν 140°. Τί γωνίαι θὰ σχηματισθοῦν ;

8) Πόσαι μοῖραι εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι ;

9) Προσθέσατε ὀξείας γωνίας μέχρις ὅτου ἀποτελεσθοῦν 2 ὀρθαί.

10) Ὅταν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας, μεγα-

μέτρων. Οἱ λίθοι κοστίζουν 122 δραχμὰς τὸ κυβικὸν μέτρον. Ἡ ἐργασία ἐδόθη ἐργολαβικῶς πρὸς 42 δραχμὰς τὸ τετ. μέτρον. Λογαριάσατε.

9) Δωμάτιον ὀρθογωνίου σχήματος, μὲ βάσιν 4,20 μέτρα καὶ ὕψος 3,80 πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ σανίδας μήκους 3,60 μέτρα καὶ πλάτος 0,15. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν;

10) Εὕρετε τὰ ἀκόλουθα:

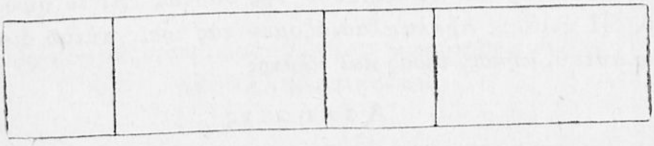
Ὀρθογώνιον ἔχει:

βάσιν	*0,72 μ.*	*ὕψος*	*0,33 μ.*	*ἐμβαδὸν*	*;*
»	*1,04 μ.*	»	*; μ.*	» »	*2,10 τ. μ.*
»	*;*	»	*0,02 μ.*	» »	*0,55 τ. μ.*
»	*0,09 μ.*	»	*1,03 μ.*	» »	*;*

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων.

Ὅταν λάβωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ χαρτονίου καὶ ἀφαιρέσωμεν τὰς δύο βάσεις αὐτοῦ, δηλαδὴ τὴν ἐπάνω καὶ κάτω ἕδραν αὐτοῦ, θὰ μείνῃ ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια. Ἐὰν τότε ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, θὰ σχηματισθῇ τὸ παρακείμενον σχῆμα:



Τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον. Βάσις αὐτοῦ εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τοῦ σχήματος τούτου τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν εὔκολα ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλλαλεπιπέδου. Ἂν εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν δύο βάσεων, ποὺ ἀφῃρέσαμεν εἰς τὴν ἀρχήν, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων εἶναι ἐπίσης εὔκολον νὰ εὕρωμεν, διότι καὶ αὗται εἶναι ὀρθογώνια. Δὲν εἶναι δὲ ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν δύο. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι ἴσαι μεταξύ των ἐπειδὴ εἶναι ἀπέναντι ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν μόνον μιᾶς καὶ διπλασιάζομεν αὐτό.

Ὥστε, ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου αὐτῆς ἐπιφανείας. Εἰς τοῦτο κατόπιν προσθέτομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων.***

Δυνάμεθα ὅμως καὶ κατ' ἄλλον τρόπον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, τῆς ἄνω, τῆς ἐμπροσθίας καὶ δεξιᾶς καὶ διπλασιάζομεν αὐτό.

Εὕρεσις τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου κάμνομεν ὅ,τι ἐκάμαμεν καὶ διὰ τὸν κύβον. Εὑρίσκομεν δηλαδὴ πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ. Κατόπιν ἐπὶ ἑκάστου τετραγωνικοῦ μέτρου τῆς βάσεως ὑψώνομεν μίαν στήλην κυβικῶν μέτρων ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν ἀπέναντι βάσιν.

Τοιουτοτρόπως φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι, ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*** Ἢ ἀλλέως: ***πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις αὐτοῦ, μῆκος, ὕψος καὶ πλάτος.***

Ἀσκήσεις

1) Τὸ δωμάτιον τῆς τάξεώς σας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι 5,80 μ., τὸ πλάτος 4,60 μ. καὶ τὸ ὕψος 4,20 μ. Οἱ τοῖχοι καὶ ἡ ὀροφὴ πρόκειται νὰ ἀσβεστοχρισθοῦν. Ἡ ἐργασία ἐδόθη πρὸς δρχ. 2,70 τὸ τ. μέτρον, πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ἀσβεστόχρισμα.

2) Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μετρήσατε καὶ εὕρετε πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ἀσβεστόχρισμα ὅλων τῶν δωματίων τοῦ σχολείου.

3) Θέλετε νὰ ἐπενδύσετε τὸν διάδρομον τοῦ σχολείου σας *καὶ τὴν ὀροφὴν αὐτοῦ μὲ χαρτί. Μετρήσατε καὶ εὕρετε πόσα μέτρα χαρτιοῦ θὰ χρειασθοῦν.*

4) Μιὰ δεξαμενὴ ἔχει μῆκος 3,20, πλάτος 2,80 μ. καὶ ὕψος 1,30 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ.

5) Πόσοι στρατιῶται ἠμποροῦν νὰ κοιμηθοῦν εἰς ἕνα θάλαμον μήκους 18 μ., πλάτος 5,20 μ. καὶ ὕψους 4,60 μ., ὅταν ὑπολογίσωμεν ὅτι κάθε στρατιώτης χρειάζεται εἰς μίαν νύκτα 3,80 κ. μέτρα καθαροῦ ἀέρος.

6) Πόσους θεατὰς δύναται νὰ περιλάβῃ αἴθουσα κινηματογράφου μήκους 28 μ., πλάτους 13 μ. καὶ ὕψους 12 μέτρων ὅταν ἕκαστος θεατὴς πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὴν διάθεσίν του 1,60 κ. μέτρα ;

7) Πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πόσα πακέτα σπίρτων περιέχει ἓν κιβώτιον ὀρθογωνίου σχήματος, χωρὶς νὰ τὰ μετρήσωμεν ;

8) Εἰς τὰ σαπωνοποιεῖα γεμίζουν κιβώτια ὀρθογωνίου σχήματος μήκους 1,20 μ. πλάτους 0,72 μ. καὶ ὕψους 0,98 μέτρων μὲ πλάκας σάπωνος. Αἱ πλάκες ἔχουν τὰς διαστάσεις 0,14 μ., 0,05 μ. καὶ 0,06 μ. Πόσαι πλάκες χωροῦν εἰς ἕκαστον κιβώτιον ;

9) Ἐὰν εἰς τὸ σχολεῖον σας ἔχετε ντεπόζιτο νεροῦ, εὕρετε πόσο νερὸ χωρεῖ.

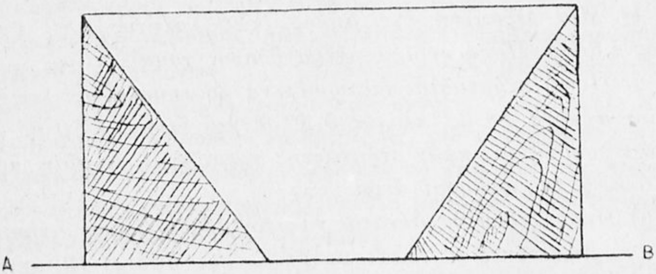
10) Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα.

Ἰχνογράφησις ὀρθογωνίου καὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

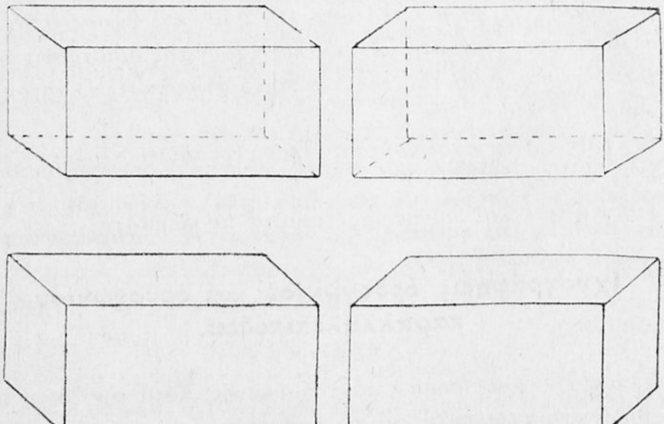
Ὅπως ἰχνογραφήσαμεν τὸ τετράγωνον, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ ἰχνογραφήσωμεν καὶ τὸ ὀρθογώνιον :

Λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς ἓν διάστημα ἴσον μὲ τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν. Ἐκ τῶν ἄκρων α καὶ β τοῦ διαστήματος τούτου φέρομεν μὲ τὸν γνώμονα δύο ἴσας καθέτους ἐπὶ τῆς αβ. Ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων δι᾽ εὐθείας γραμμῆς καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἕτοιμον.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον κάμνομεν ὅ,τι ἐκάμαμεν καὶ διὰ τὸν κύβον, ἀλλὰ μὲ ὀρθογώνια :



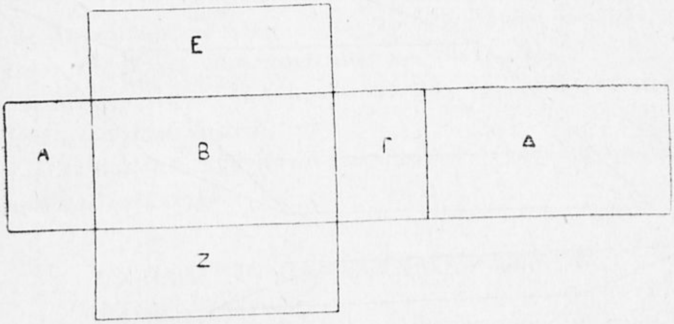
Ἰχνογραφοῦμεν δύο ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα νὰ τέμνουν τὸ ἓν τὸ ἄλλο. Σβήνομεν τὰς ἐσωτερικὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου καὶ ἑνώνομεν μὲ εὐθείας τὰς γωνίας τῶν δύο ὀρθογωνίων, ὅπως δεικνύουν τὰ κατωτέρω σχήματα.



Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ χαρτόνι, ξύλον καὶ πηλόν.

Ὅταν λάβωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίδον καὶ ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας αὐτοῦ, θὰ λάβῃ τὸ κατωτέρω ἐπίπεδον σχῆμα :

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν λοιπὸν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ χαρτονίου, ἰχνογραφοῦμεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ παρακείμενον σχῆμα. Τὰ ὀρθογώνια τοῦ σχήματος τούτου εἶναι ἀνὰ δυὸ ἴσα. Τὸ α μὲ τὸ γ, τὸ β μὲ τὸ δ καὶ τὸ ε μὲ τὸ ζ.



Ἐὰν χαράξωμεν τὰς γραμμὰς τοῦ σχήματος, εἰς τὰς ὁποίας συναντῶνται τὰ ὀρθογώνια καὶ κατόπιν κλείσωμεν τὸ σχῆμα καὶ κολλήσωμεν τὰ ἄκρα του, τὸ παραλληλεπίπεδον θὰ εἶναι ἕτοιμον. Θὰ παρατηρήσωμεν τότε ὅτι τὰ ἴσα ὀρθογώνια ἔγιναν ἀπέναντι ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἄν, ἀντὶ χαρτονίου, θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ ξύλον, ἰχνογραφοῦμεν πάλιν τὸ ἴδιον σχῆμα. Ὕστερα ὅμως μὲ ἓν μικρὸν πριόνιον χωρίζομεν τὰ ὀρθογώνια καὶ κατόπιν κολλῶμεν τὰ ἄκρα των μὲ ψαρόκολλαν.

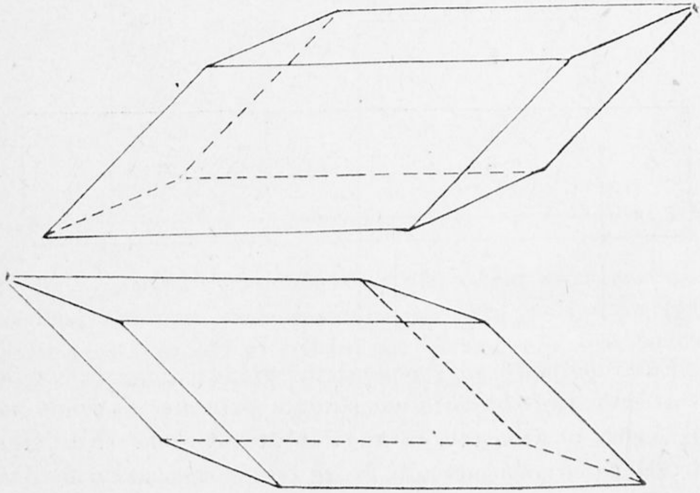
Μὲ πηλὸν κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον κατασκευάζομεν καὶ τὸν κύβον, ὅπως εἴδομεν. Ἀντὶ ὅμως τετραγώνου, κολλῶμεν εἰς τὰ πλάγια τοῦ πηλοῦ ὀρθογώνια.

ΤΟ ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Τὰ κατωτέρω σχήματα δεικνύουν ἓν τρίτον στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον λέγεται ***πλάγιον παραλληλεπίπεδον.***

Κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὅταν πιέσωμεν τὰς ἀπέναντι ἕδρας αὐτοῦ, μεταβάλλεται εἰς πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Τὸ σχῆμα τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν συνήθως τὰ τεμάχια τῶν γλυκῶν τοῦ ταψιοῦ. Ἐπίσης καὶ μερικαὶ πλάκες τῶν διαδρόμων καὶ εἰσόδων τῶν οἰκιῶν ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦτο.



Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ὁμοιάζει μὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ μὲ τὸν κύβον. Διαφέρει ὅμως καὶ ἀπὸ τὰ δύο. Διότι ἐν πρώτοις αἱ ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῶν βάσεως, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ εἰς τὸν κύβον, ἀλλὰ εἶναι πλάγιαι. Ἂν ὅμως μετρήσωμεν τὰς ἕδρας του θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι. Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι.

Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου δὲν εἶναι κάθετοι, διὰ τοῦτο καὶ αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν μὲ τὰς ἕδρας τῶν βάσεων δὲν εἶναι ὀρθαί.

Αἱ 4 ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀμβλεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι 4 ὀξεῖαι. Αἱ ἀπέναντι δὲ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐπίσης αἱ ἀκμαὶ τῶν πλαγίων ἑδρῶν δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῶν βάσεων, ἀλλὰ πλάγιαι. Αἱ ἀπέναντι ὅμως ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι, ***πλάγιον παραλληλεπίπεδον λέγεται τὸ στερεὸν ἐκεῖνο σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς***

ἀπέναντι ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας, ἀλλ᾽ ὄχι ὀρθάς.

Ἀσκήσεις.

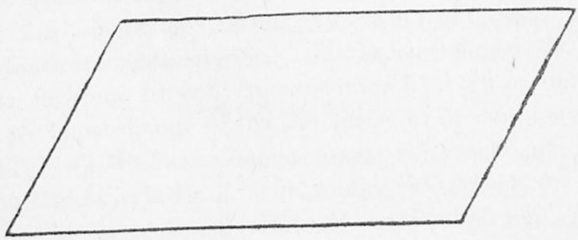
1) Συγκρίνατε τὸ πλάγιον μὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ εἰπέτε τὰς ὁμοιότητας καὶ διαφοράς.

2) Μετρήσατε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς ἀπέναντι γωνίας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

3) Ὀνομάσατε πράγματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

ΤΟ ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

Τὸ κατωτέρω σχῆμα λέγεται πλάγιον παραλληλόγραμμον, ἢ ἁπλῶς ***παραλληλόγραμμον***. Γράφεται δὲ τὸ σχῆμα τοῦτο ἂν στηρίξωμεν τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του ἐπὶ τοῦ πίνακος καὶ σύρωμεν γύρω ἀπ᾽ αὐτὴν τὴν κιμωλίαν.



Τὸ σχῆμα τοῦτο δὲν εἶναι οὔτε τετράγωνον οὔτε ὀρθογώνιον. Ὀρθογώνιον δὲν εἶναι, διότι αἱ γωνίαι του δὲν εἶναι ὀρθαί. Ἀλλὰ καὶ τετράγωνον δὲν εἶναι, διότι καὶ αἱ γωνίαι του δὲν εἶναι ὀρθαί, ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραί του δὲν εἶναι ἴσαι.

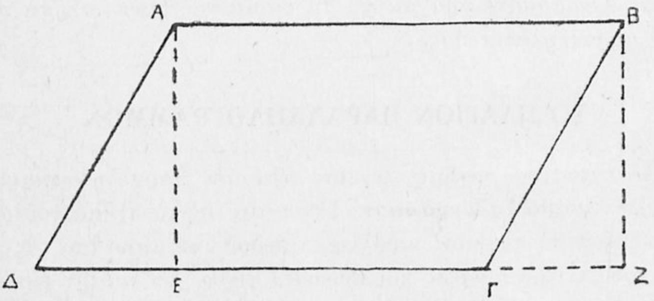
Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς γωνίας τοῦ σχήματος τούτου, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ σχήματος τούτου εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἀκμαὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι.

Ὥστε, ***παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον ἐκεῖ-***

νο σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας, ἀλλὰ μὴ ὀρθάς.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἔχομεν τὸ παλληλόγραμμον αβγδ τοῦ κατωτέρω σχήματος καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.



Ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αβ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τῆς πλευρᾶς δγ καὶ τῆς προεκβολῆς αὐτῆς, τὰς αε καὶ βγ.

Θὰ παρατηρήσωμεν τότε ὅτι ἐσχηματίσθησαν δύο τρίγωνα, τὸ αδε καὶ τὸ βγζ. Ἂν ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ παραλληλογράμμου τὸ τρίγωνον αδε καὶ τὸ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιά του, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ βγζ. Τοιουτοτρόπως, τὸ παραλληλόγραμμον αβγδ μετετράπη εἰς τὸ ὀρθογώνιον αβζε. Τὸ ὀρθογώνιον δὲ τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον, διότι καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ εζ εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου δγ (ἐπειδὴ δε=γζ) καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἡ αε, εἶναι καὶ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῶν δύο αὐτῶν σχημάτων εἶναι ἴσον.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδὴ ***ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 6 παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὰς ἕδρας αὐτοῦ. Δὲν εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν ἓξ ἑδρῶν. Εὑρίσκομεν μόνον τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν καὶ διπλασιάζομεν αὐτό, διότι αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου· παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, τὸ ἓν ὅμως σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὸ ἄλλο σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Γεμίζομεν τὰ δύο δοχεῖα μὲ ἄμμον. Κατόπιν ἀνταλλάσσομεν τὸ περιεχόμενον τῶν δοχείων καὶ βλέπομεν ὅτι τὰ δοχεῖα εἶναι πάλιν γεμᾶτα. Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Ὅπως λοιπὸν διὰ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοιουτοτρόπως καὶ διὰ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον, ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἢ ἀλλέως πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.***

Ἀσκήσεις

1) Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει

βάσιν	*3,20 μ.*	*καὶ ὕψος*	*1,80 μ.*
»	*0,98 μ.*	» »	*2,13 μ.*
»	*1,04 μ.*	» »	*0,17 μ.*

2) Εὕρετε τὰ κατωτέρω:

Παραλληλόγραμμον ἔχει

βάσιν	*1,30 μ.*	*ὕψος 0,88 μ.,*	*ἐμβαδόν ;*
»	*;*	» *1,22*	» *2,40 τ. μ.*
»	*2,02*	» *;*	» *3,14 τ. μ.*

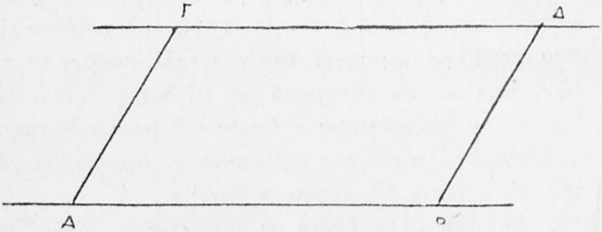
3) Κιβώτιον σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 1,70 μ., 0,76 μ., καὶ 1,10 μ. πρόκειται νὰ γεμίσῃ μὲ μικρὰ παραλληλεπίπεδα διαστάσεων 0,18 μ., 0,12 μ. καὶ 0,14 μ. Πόσα θὰ χωρέσῃ ;

4) Πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει διαστάσεις 7, 9, 6. Ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

5) Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα.

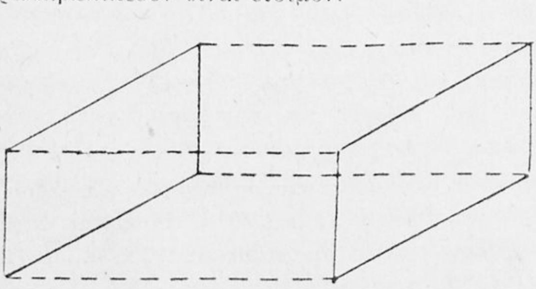
Ἰχνογράφησις παραλληλογράμμου καὶ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν παραλληλόγραμμον λαμβάνομεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἓν διάστημα ἴσον μὲ τὴν βάσιν τοῦ παραλληλο-



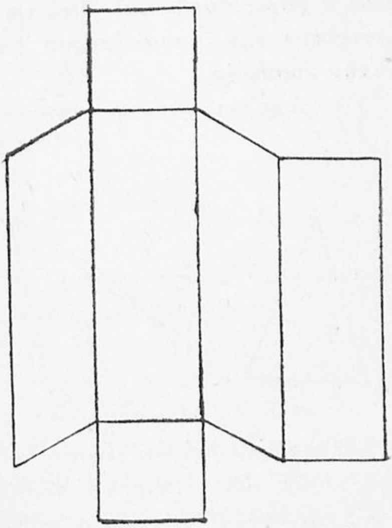
γράμμου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἰχνογραφήσωμεν π. χ. τὴν αβ. Ἀπέναντι τῆς εὐθείας ταύτης γράφομεν μίαν παράλληλον πρὸς αὐτὴν καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς λαμβάνομεν δύο σημεῖα, τὰ γ καὶ δ, τὰ ὁποῖα δὲν πρέπει νὰ εἶναι ἀπέναντι τῶν α καὶ β. Ἑνώνομεν τὸ σημεῖον α μὲ τὸ γ καὶ τὸ β μὲ τὸ δ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἔγινε.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, ἰχνογραφοῦμεν δύο παραλληλόγραμμα, τὸ ἓν ἀπέναντι τοῦ ἄλλου. Ἑνώνομεν κατόπιν τὰς κορυφὰς τῶν δύο παραλληλογράμμων καὶ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ἕτοιμον.



Κατασκευὴ πλαγίου παραλλεπιπέδου.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἐκ χαρτονίου, ἰχνογραφοῦμεν τὸ κατωτέρω σχῆμα. Τὸ σχῆμα τοῦτο λαμβάνει τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ὅταν ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας του. Χαράσσομεν τὰς ἀκμάς, κλείομεν τὸ σχῆμα καὶ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ἕτοιμον. Ὅταν ἀντὶ χαρτονίου λάβωμεν ξύλον, αἱ ἕδραι κόπτονται χωριστὰ καὶ κατόπιν κολλῶνται ἢ καρφώνονται.



Μὲ πηλὸν κατασκευάζομεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, μὲ τὸν ἴδιον τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον κατασκευάζομεν καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἀντὶ ὀρθογωνίου ὅμως εἰς τὰ πλάγια τοῦ πηλοῦ κολλῶμεν παραλληλόγραμμα.

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

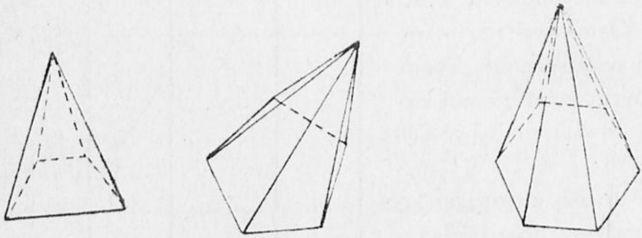
Πρῖσμα εἶναι κάθε στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ δύο εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα. Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα εἶναι αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος. Ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετος ἡ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων. Ὅταν τὰ πλάγια ἐπίπεδα τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετα ἐπὶ τῆς βάσεως, τὸ πρῖσμα λέγεται ***ὄρθιον***. Ὅταν εἶναι πλάγια λέγεται ***πλάγιον.***

Τὰ πρίσματα, ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς βάσεως, εἶναι τριγωνικά, τετραγωνικά, πενταγωνικὰ κ. λ. π.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

Πυραμὶς λέγεται τὸ στερεὸν ἐκεῖνο σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν τριγωνικὴν ἢ πολιγωνικὴν ἕδραν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ βάσις αὐτῆς καὶ ἀπὸ τριγωνικὰς ἕδρας, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτῆς καὶ ἔχουν κοινὴν κορυφήν.

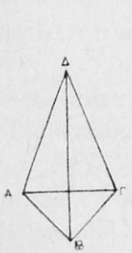
Τὰ κατωτέρω σχήματα παριστῶσι πυραμίδας:



Βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ πολυγωνικὴ αὐτῆς ἕδρα. Κορυφὴ αὐτῆς εἶναι ἡ κορυφὴ τῶν παραπλεύρων αὐτῆς ἑδρῶν. Ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ κάθετος ἡ φερομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτῆς.

Ἡ πυραμὶς ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι τριγωνική, τετραγωνική, ἑξαγωνικὴ κλπ.

Η ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ



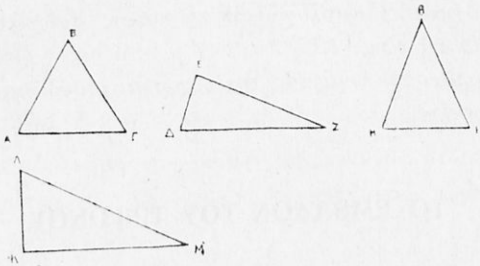
Τὸ παρακείμενον σχῆμα αβγδ παριστάνει τριγωνικὴν πυραμίδα.

Ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι τὸ σχῆμα αβγ.

Τὸ σχῆμα τοῦτο δὲν ὁμοιάζει μὲ κανὲν ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν εἰς ἡμᾶς σχημάτων. Ὅπως βλέπομεν, ἔχει 3 πλευρὰς καὶ 3 γωνίας. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται ***τρίγωνον.***

ΠΕΡΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τὰ κατωτέρω σχήματα δεικνύουν διάφορα εἴδη τριγώνων.



Τὸ τρίγωνον λαμβάνομεν ὅταν στηρίξωμεν τὴν πυραμίδα ἐπὶ τοῦ πίνακος μὲ μίαν ὁποιανδήποτε ἕδραν αὐτῆς καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν γύρω ἀπὸ τὴν ἕδραν ταύτην.

Ἀναλόγως τῶν πλευρῶν αὐτῶν τὰ τρίγωνα διαιροῦνται: α) εἰς ***ἰσόπλευρα,*** ὅταν καὶ αἱ τρεῖς αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Τὸ τρίγωνον αβγ τοῦ σχήματος εἶναι ἰσόπλευρον, β) εἰς ***ἰσοσκελῆ,*** ὅταν ἔχουν τὰς δύο πλαγίας αὐτῶν πλευρὰς ἴσας. Τὸ τρίγωνον ηθι τοῦ σχήματος εἶναι ἰσοσκελές, καὶ γ) εἰς ***σκαληνά,*** ὅταν αἱ τρεῖς αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.

Ἀναλόγως τῶν γωνιῶν αὐτῶν τὰ τρίγωνα εἶναι:

α) ***Ὀρθογώνια,*** ὅταν ἡ μία ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν εἶναι ὀρθή, ὅπως τὸ τρίγωνον κλμ τοῦ σχήματος.

β) Εἰς ***ὀξυγώνια,*** ὅταν καὶ αἱ τρεῖς αὐτῶν γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι, ὅπως τὰ τρίγωνα αβγ καὶ ηθι τοῦ σχήματος καὶ

γ) Εἰς ***ἀμβλυγώνια,*** ὅταν μία ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἀμβλεῖα, ὅπως τὸ τρίγωνον δεζ τοῦ σχήματος.

Βάσις τοῦ τριγώνου δύναται νὰ ληφθῇ ὁποιαδήποτε αὐτοῦ πλευρά. Κορυφὴ τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως.

Ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ κάθετος ἐκ τῆς κορυφῆς πρὸς τὴν βάσιν.

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε δύο τρίγωνα ἐξ ἑκάστου εἴδους ἀναλόγως τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

2) Γράψατε ἓν τρίγωνον ἐξ ἑκάστου εἴδους ἀναλόγως τῶν γωνιῶν.

3) Γράψατε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ μετρήσατε τὰς γωνίας του.

4) Γράψατε ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία νὰ εἶναι 125°.

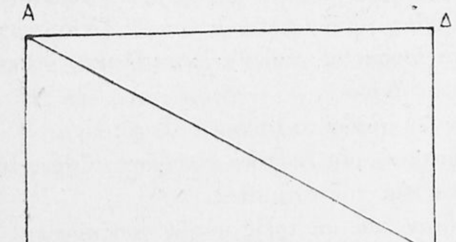
5) Προσθέσατε καὶ τὰς τρεῖς γωνίας οἱουδήποτε τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε ;

ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ἔχομεν τὸ α τρίγωνον αβγ τοῦ παρακειμένου σχήματος καὶ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Μὲ βάσιν τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου βγ καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ αβ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον αβγδ.

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου αβγ. Ἂν κόψωμεν τεμάχιον χάρτου ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον αβγ καὶ τοποθετήσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τοῦ τριγώνου αδγ θὰ ἐφαρμόση ἐπ᾽ αὐτοῦ ἀκριβῶς. Ἄρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου αβγ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου αβγδ. Ἡμεῖς γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εὑρίσκομεν ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.



Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκομεν ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ.

Ἂν παραστήσωμεν τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ β καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ διὰ τοῦ υ, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου : $Ε = \frac{β \times υ}{2}$.

Προβλήματα

1) *Τρίγωνον ἔχει βάσιν 0,85 μ. καὶ ὕψος 0,68 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;*

2) *Τρίγωνον ἔχει βάσιν 2,22 μ. καὶ ἐμβαδὸν 3,12 τ. μ. Ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ;*

3) *Οἰκόπεδον τριγωνικὸν μὲ βάσιν 16,25 μ. καὶ ὕψος 12 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 192 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσον ἐκόστισε;*

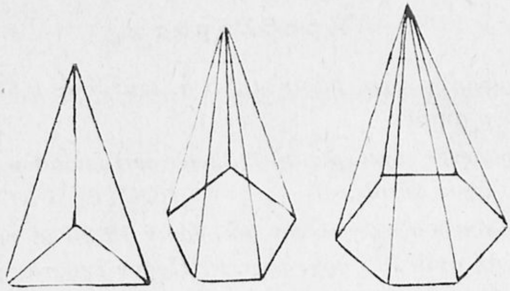
4) *Ἄλλο οἰκόπεδον τριγωνικὸν μὲ βάσιν 65,40 μ. καὶ ὕψος 27 μ. ἐμοιράσθη μεταξὺ τριῶν κληρονόμων. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;*

Ο ΟΓΚΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

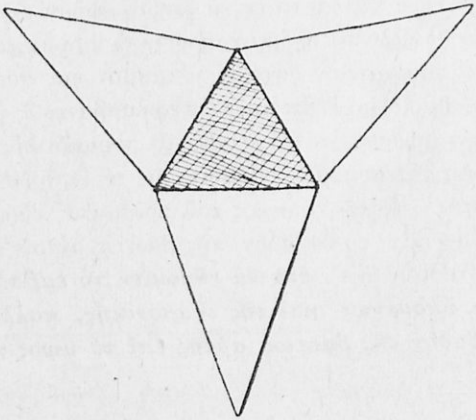
Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, ἀλλὰ τὸ ἓν νὰ ἔχῃ τὸ σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος, τὸ δὲ ἄλλο τὸ σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἐὰν γεμίσωμεν τὸ πρισματικὸν δοχεῖον μὲ ἄμμον καὶ χύσωμεν αὐτὴν εἰς τὸ ἄλλο, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο περιλαμβάνει 3 φορὰς τόσην ἄμμον ὅσην δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ πυραμοειδὲς δοχεῖον. Ὁ ὄγκος δηλαδὴ τῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἓν τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος. Ἀφοῦ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εὑρίσκεται ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος, ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι, ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης πυραμίδος, ἐπομένως καὶ τῆς τριγωνικῆς, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ λαμβάνομεν τὸ*** $\frac{1}{3}$.

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ πυραμίδος.

Γράφομεν πρῶτον τὸ σχῆμα τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος. Κατόπιν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς βάσεως, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς κορυφὴν τῆς πυραμίδος, φέρομεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως, ὅπως δεικνύουν καὶ τὰ κατωτέρω σχήματα.



Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν τριγωνικὴν πυραμίδα ἐκ χαρτονίου γράφομεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ κατωτέρω σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ὅταν ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας της. Χαράσσομεν κατόπιν τὰς πλευρὰς τοῦ κεντρικοῦ τριγώνου καὶ κλείομεν τὰς τριγωνικὰς ἕδρας, οὕτως ὥστε νὰ ἑνωθοῦν αἱ κορυφαί των. Ἡ πυραμὶς εἶναι ἑτοίμη.



Ἂν ἀντὶ χαρτονίου λάβωμεν ξύλον, ἰχνογραφοῦμεν τὸ ἴδιον σχῆμα, αἱ ἕδραι ὅμως πρέπει νὰ κοποῦν καὶ νὰ κολληθοῦν κατόπιν ἢ νὰ καρφωθοῦν.

Προβλήματα

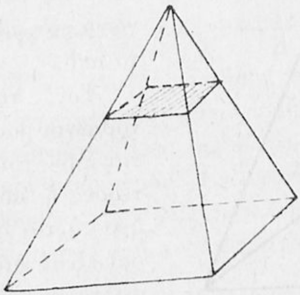
1) Εὕρετε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 3,40 τ. μ. καὶ ὕψος 1,20 μ.

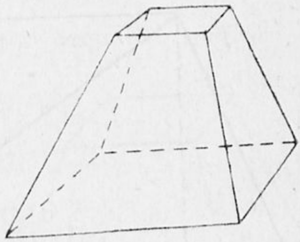
2) Πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὸν βάσεων 3,80 τ. μ. καὶ ὄγκον 4,20 κ. μ. Ποῖον τὸ ὕψος αὐτῆς;

3) Εἰς τὴν Αἴγυπτον εἶναι μία τετραγωνικὴ πυραμὶς μὲ πλευρὰν βάσεως 233 μ. καὶ ὕψος 146 μ. Εὕρετε τὸν ὄγκον της.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

Ἡ ***Κόλουρος*** πυραμὶς γίνεται ὅταν κόψωμεν τὴν κανονικὴν πυραμίδα κάτω ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτῆς δι᾽ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς.



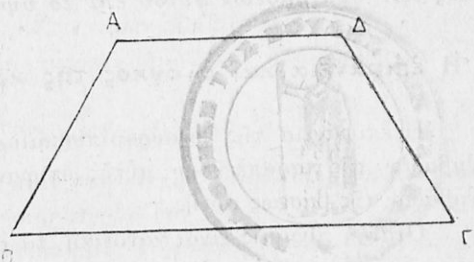


Αἱ δύο βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι πάντοτε τοῦ ἰδίου σχήματος. Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι, ὄχι ὅμως ἴσαι.

Ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι, ἀναλόγως τοῦ σχήματος τῆς βάσεως αὐτῆς, τριγωνική, τετραγωνικὴ κ.λ.π.

ΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

Ἐὰν στηρίξωμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος τὴν κόλουρον πυραμίδα διὰ μιᾶς τῶν ἑδρῶν τῆς παραπλεύρου αὐτῆς ἐπιφανείας καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν πέριξ αὐτῆς, θὰ γραφῇ τὸ παρακείμενον σχῆμα αβγδ. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται **τραπέζιον**. Αἱ δύο πλευραὶ τοῦ σχήματος τούτου, ἡ αδ καὶ ἡ βγ εἶναι παράλληλοι



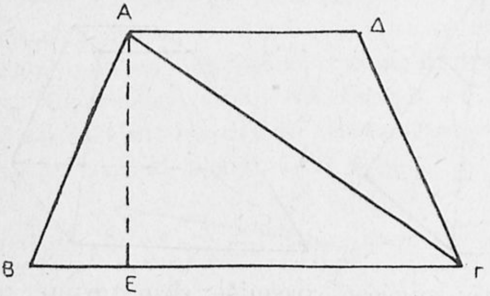
καὶ ἄνισοι. Αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ δύνανται νὰ εἶναι ἴσαι, ἀλλὰ δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἄνισοι.

Ὥστε ***τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον ἐκεῖνο σχῆμα, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.***

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Ἔχομεν τὸ τραπέζιον αβγδ καὶ πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Μὲ τὴν διαγώνιον αγ χωρίζομεν τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα, τὸ αβγ καὶ τὸ αγδ.



Τοῦ πρώτου τριγώνου βάσις εἶναι ἡ βγ, τοῦ δευτέρου ἡ αδ. Αἱ δύο αὗται πλευραὶ εἶναι καὶ βάσεις τοῦ τραπεζίου. Ὕψος καὶ τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἡ αε, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν δύο τριγώνων. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος, καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι, ***τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.***

Ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος εὑρίσκεται ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου αὐτῆς ἐπιφανείας προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτῆς.

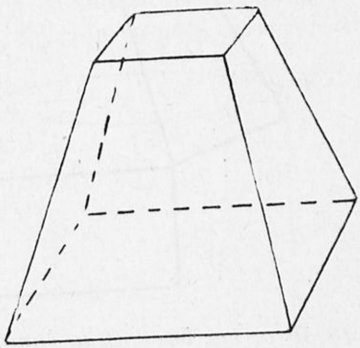
Ὅταν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, τὰ τραπέζια τῆς παραπλεύρου αὐτῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσα. Ἑπομένως δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἑκάστου. Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μόνον ἐξ αὐτῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν τραπεζίων.

Ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν ἂν προσθέσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο αὐτῆς βάσεων, λάβωμεν τὸ ἥμισυ ἐξ αὐτῶν καὶ ὅ,τι εὕρωμεν τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Εὑρίσκεται ὅμως ἐπίσης ἂν ἀπὸ τὸν ὄγκον τῆς κανονικῆς πυραμίδος ἀφαιρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον ἀπεκόπη διὰ νὰ γίνῃ ἡ κόλουρος πυραμίς.

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ κολούρου πυραμίδος.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν κόλουρον πυραμίδα γράφομεν ἓν παραλληλόγραμμον. Ἄνωθεν αὐτοῦ γράφομεν ἄλλο παραλληλόγραμμον μικρότερον. Ἑνώνομεν τὰς κορυφὰς τῶν δύο παραλληλογράμμων καὶ ἡ πυραμὶς εἶναι ἑτοίμη.



Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κόλουρον πυραμίδα ἐκ χαρτονίου, ἰχνογραφοῦμεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου τὸ ἀνωτέρω σχῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἡ πυραμὶς ὅταν ἀνοίξωμεν τὰς ἕδρας αὐτῆς. Χαράσσομεν κατόπιν τὰς γραμμάς, κλείομεν τὰς ἕδρας καὶ κολλῶμεν τὰ ἄκρα αὐτῶν. Ἡ πυραμὶς εἶναι ἑτοίμη. Ὅταν, ἀντὶ χαρτονίου, λάβωμεν ξύλον, ἰχνογραφοῦμεν πάλιν τὸ ἴδιον σχῆμα. Αἱ ἕδραι ὅμως ἀποκόπτονται καὶ κατόπιν κολλῶνται ἢ καρφώνονται μὲ λεπτὰ καρφία.

Ἀσκήσεις

1) Ἰχνογραφήσατε μίαν τριγωνικήν, μίαν πενταγωνικὴν καὶ μίαν ἑξαγωνικὴν κανονικὴν πυραμίδα.

2) Ἰχνογραφήσατε κολούρους πυραμίδας μὲ τὰς ἰδίας βάσεις.

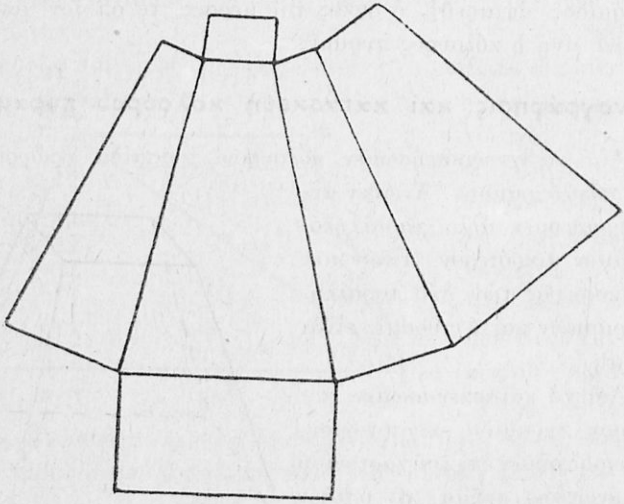
3) Ὀνομάσατέ μου σώματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα κανονικῆς καὶ κολούρου πυραμίδος.

Προβλήματα

1) Τραπέζιον ἔχει βάσεις 2,30 μ. καὶ 1,80 μ. καὶ ὕψος 0,96 μ. Εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

2) Τραπέζιον ἔχει βάσεις 3,10 μ. καὶ 1,90 μ. καὶ ἐμβαδὸν 4,80 τ. μ. Ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ.

3) Οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου, μὲ βάσεις 62,20 μ. καὶ



48,50 μ. καὶ ὕψος 39 μ. ἐμοιράσθη μεταξὺ τεσσάρων ἀδελφῶν. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος.

4) Ἐπὶ οἰκοπέδου σχήματος τραπεζίου, μὲ βάσεις 23,15 μ. καὶ 16,30 μ. καὶ ὕψος 14,20 μ. ἐκτίσθη οἰκία τετραγωνικὴ μὲ πλευρὰν 11,30 μ.

Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῆς οἰκίας καὶ πόσον μέρος ἔμεινε ἄκτιστον.

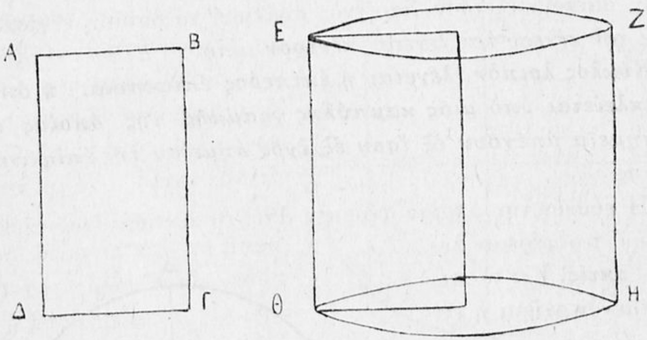
5) Πλατεῖα σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 78,60 μ. καὶ 52,40 μ. καὶ ὕψος 38,30 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικὰς πλευρᾶς 0,45 μ. Αἱ πλάκες κοστίζουν 92 δρχ. τὸ τ. μέτρον. Πόσον θὰ κοστίσῃ ἡ ἐπίστρωσις.

6) Κόλουρος πυραμὶς ἔχει ἐμβαδὰ βάσεων 2,85 τ. μ. καὶ 1,09 τ. μ. καὶ ὕψος 4,15 μ. Εὕρετε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤ΄. ΤΑΞΕΩΣ

ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Τὸ κατωτέρω σχῆμα εξηθ παριστάνει ***κύλινδρον.*** Τὸ σχῆμα τοῦτο προκύπτει ἂν περιστρέψωμεν τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον αβγδ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ βδ, ἡ ὁποία νὰ μένῃ ἀκίνητος. Αἱ



πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου αβ καὶ δγ κατὰ τὴν περιστροφὴν γράφουν δύο ἴσους κύκλους, ἡ δὲ πλευρὰ αδ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μεταξὺ τῶν δύο κύκλων.

Αἱ τρεῖς αὗται ἐπιφάνειαι εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου. Ἐκ τούτων αἱ δύο κυκλικαί, ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω, λέγονται βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δύο κύκλων εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

Ἡ κάθετος ἡ ὁποία φέρεται μεταξὺ τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου λέγεται ὕψος ἢ ***ἄξων*** αὐτοῦ.

Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν πολλὰ σώματα, ὅπως π. χ. οἱ σωλῆνες τῆς θερμάστρας, κυλινδρικὰ κουτιά, οἱ κάλυκες τῶν ὀβίδων καὶ ἄλλαι.

Ο ΚΥΚΛΟΣ

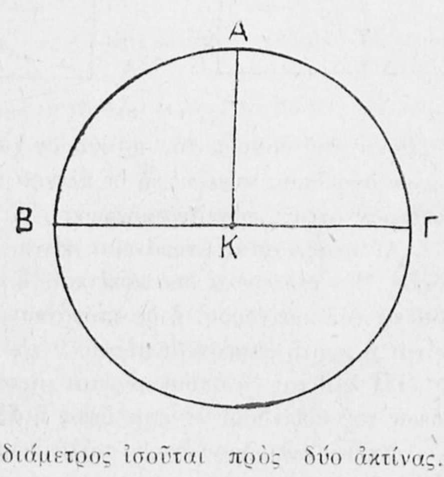
Ἐὰν στηρίξωμεν τὸν κύλινδρον ἐπὶ τοῦ πίνακος μὲ μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ σύρωμεν τὴν κιμωλίαν πέριξ αὐτῆς θὰ γραφῇ τὸ παρακείμενον σχῆμα.

Τὸ σχῆμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον, ὅπως βλέπομεν, περικλείεται ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, λέγεται ***κύκλος***. Ἡ γραμμή, ἡ ὁποία τὸ περικλείει λέγεται ***περιφέρεια*** τοῦ κύκλου.

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ λέγεται ***κέντρον*** αὐτοῦ.

Κύκλος λοιπὸν λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ὑπὸ μιᾶς καμπύλης γραμμῆς, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

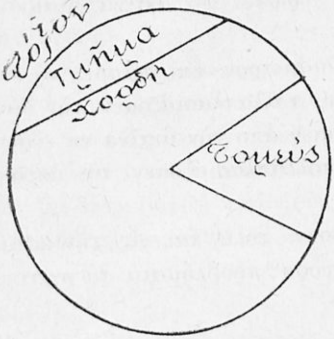
Ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὴν περιφέρειαν λέγεται ***ἀκτίς***. Εἰς τὸ παρακείμενον σχῆμα ἡ εὐθεῖα κα εἶναι ἀκτίς.



Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγε- ***διάμετρος***. Εἰς τὸ παρακείμενον σχῆμα διάμετρος εἶναι ἡ βγ.

Ἡ ἀκτὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου, ἢ ἡ διάμετρος ἰσοῦται πρὸς δύο ἀκτῖνας.

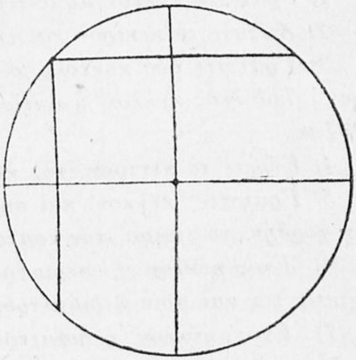
Κάθε διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δυὸ ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ἡμικύκλια.** Ἐπίσης κάθε διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον σὲ δυὸ ἴσα μέρη ποὺ λέγονται ἡμιπεριφέρεια.



Τόξον τῆς περιφερείας λέγεται ἓν μέρος αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο ἄκρα τοῦ τόξου λέγεται ***χορδή.***

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς χορδῆς καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου λέγεται **τμῆμα.**

Τέλος τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς χορδῆς καὶ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος τόξου, λέγεται **τομεύς.**



Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκομεν ἂν ἐκ τοῦ μέσου δύο χορδῶν φέρομεν καθέτους πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ὅπως δεικνύει καὶ τὸ παρακείμενον σχῆμα. Κάθε κάθετος ἡ ὁποία φέρεται ἐκ τοῦ μέσου ὁποίασδήποτε χορδῆς πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου θὰ διέλθη ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτοῦ.

Σχέσις τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ τὴν ἀκτίνα.

Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου καὶ μετρήσωμεν καὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι 3,14 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν διάμετρον.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος, ἕπεται ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι 6,28 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα.

Ὅταν λοιπὸν γνωρίζωμεν τὴν περιφέρειαν καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν μὲ τὸ 3,14. Καὶ ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα, διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν μὲ τὸ 6,28.

Ὅταν πάλιν γνωρίζωμεν τὴν διάμετρον καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν διάμετρον μὲ τὸ 3,14. Καὶ ὅταν θέλωμεν ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα νὰ εὕρωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀκτῖνα μὲ τὸ 6,28.

Αἱ σχέσεις αὐταὶ μᾶς εὐκολύνουν πολὺ καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ κύκλου καὶ εἰς τὰ διάφορα προβλήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὸν κύκλον.

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε κύκλον μὲ ἀκτῖνα 0,35 μ.

2) Δείξατε τὸ κέντρον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

3) Γράψατε δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν τὸ ἴδιον κέντρον. Τοῦ ἑνὸς κύκλου ἡ ἀκτὶς νὰ εἶναι 0,24 μ., τοῦ ἄλλου 0,31 μ.

4) Εὕρετε τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἐκ τῶν χορδῶν αὐτοῦ.

5) Γράψατε κύκλον καὶ σημειώσατε ἐπ' αὐτοῦ τὸ τόξον, τὴν χορδήν, τὸ τμῆμα, τὸν τομέα.

6) Ἑνὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι 1,20 μ. Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς του καὶ ποία ἡ διάμετρός του.

7) Ἑνὸς κύκλου ἡ διάμετρος εἶναι 0,44 μ. Εὕρετε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὴν περιφέρειαν.

8) Θέλω νὰ γράψω μὲ τὸν διαβήτην κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια νὰ εἶναι 0,88 μ. Πόσον θὰ ἀνοίξω τὸν διαβήτην;

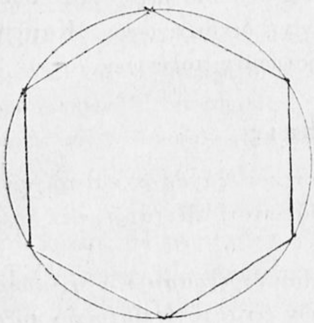
9) Ἕνας ξυλουργὸς ἤνοιξε τὸν διαβήτην του 0,18 μ. καὶ ἔγραψε κύκλον. Ποία εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου αὐτοῦ;

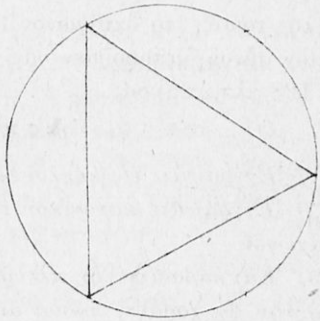
10) Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαύτας ἀσκήσεις.

Ἐγγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων εἰς τὸν κύκλον.

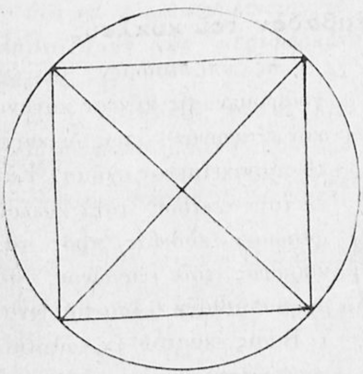
Ὅταν θέλωμεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν πολύγωνον, χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν. Κατόπιν ἑνώνομεν τὰ μέρη ταῦτα τῆς περιφερείας μὲ χορδάς. Αἱ χορδαὶ αὗται θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον, χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 6 ἴσα μέρη. Τοῦτο εἶναι εὔκολον νὰ γίνῃ μὲ τὸν διαβήτην ὅταν ἀνοίξωμεν τὸν διαβήτην ὅσον εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐὰν τότε ἑνώσωμεν τὰ τόξα ἀνὰ ἕν, θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν ἑξάγωνον. Ἂν ἑνώσωμεν αὐτὰ ἀνὰ δύο, θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν τρίγωνον.





Καὶ ἐὰν χωρίσωμεν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομὰς θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον. Καὶ ἂν πάλιν χωρίσωμεν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ τούτου δωδεκαγώνου, ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομάς, τὸ δωδεκάγωνον θὰ γίνῃ εἰκοσιτετράγωνον. Τοιουτοτρόπως δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνα μὲ 48, 96, 192 κλπ. πλευράς.



Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν τετράγωνον, γράφομεν δύο διαμέτρους, μίαν κάθετον καὶ μίαν ὁριζοντίαν. Αἱ διάμετροι αὗται θὰ χωρίσουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς 4 ἴσα μέρη. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ μέρη ταῦτα μὲ εὐθείας γραμμάς, αἱ γραμμαὶ αὗται θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

Ἐὰν χωρίσωμεν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου τούτου, ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομάς, τὸ τετράγωνον θὰ γίνῃ ὀκτάγωνον. Καὶ ἐὰν πάλιν χωρίσωμεν τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ὀκταγώνου, ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομάς, τὸ ὀκτάγωνον θὰ γίνῃ δεκαεξάγωνον. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἠμποροῦμεν νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνα καὶ μὲ 32, 64, 128 κλπ. πλευράς.

Ἀσκήσεις

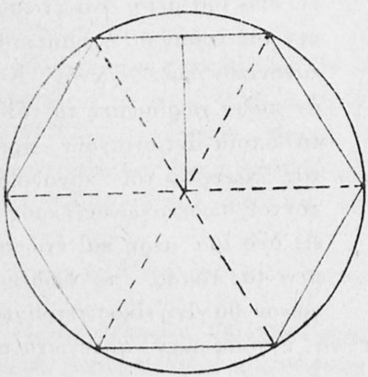
1) Ἐγγράψατε εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ τρίγωνον.

2) Ἐγγράψατε κανονικὸν τετράγωνον. Μετατρέψατέ το εἰς ὀκτάγωνον.

3) Ἐὰν λάβωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἑξαγώνου ὡς χορδήν, πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τόξον;

4) Τί θὰ κάμωμεν ὅταν πρόκειται νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον κανονικὸν πεντάγωνον;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.



Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐγγράφομεν εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον, ὅπως δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου φέρωμεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου, θὰ σχηματισθοῦν 6 ἴσα τρίγωνα.

Βάσις ἑκάστου ἐκ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου καὶ ὕψος αὐτοῦ ἡ κάθετος, ἡ ὁποία φέρεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, δηλαδὴ τὴν κορυφὴν τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων εὑρίσκομεν, ὅπως γνωρίζωμεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους.

Ὅταν ὅμως χωρίσωμεν εἰς δύο τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων τούτων καὶ ἑνώσωμεν τὰς τομὰς μὲ χορδάς, φέρωμεν δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθείας πρὸς τὰ σημεῖα τῶν τομῶν, τότε τὰ 6 τρίγωνα γίνονται 12. Ἡ βάσις ἑκάστου τῶν νέων τούτων τριγώνων θὰ εἶναι κατὰ τὸ ἥμισυ μικροτέρα.

Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ διχοτομοῦμεν τὸ τόξον, τὰ τρίγωνα ὁλονὲν θὰ διπλασιάζωνται. ,Τότε θὰ φθάσωμεν εἰς ἓν σημεῖον, ὥστε ἡ βάσις τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι ἓν μόνον σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ὅλη δηλαδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου θὰ εἶναι τότε βάσις τῶν τριγώνων. Ὕψος δὲ τῶν τριγώνων θὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ὅλος τότε ὁ κύκλος θὰ περιέχεται μέσα εἰς τὰ τρίγωνα.

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων τούτων, δηλαδὴ ὁλοκλήρου τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως αὐτῶν, δηλαδὴ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτῶν, δηλαδὴ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Π. χ. Ὅταν εἷς κύκλος ἔχει ἀκτῖνα 0,35 μ. ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θὰ εἶναι $0{,}35 \times 6{,}28 = 2{,}20$ μ. σχεδόν. Τὸ ἐμβαδὸν τότε τοῦ κύκλου τούτου θὰ εἶναι $\frac{2{,}20 \times 0{,}35}{2}$ τ.μ.

Προβλήματα.

1) Κυκλικὴ τράπεζα ἔχει ἀκτῖνα, 0,72 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

2) Κυκλικὴ πλατεῖα ἔχει περιφέρειαν 42,60 μ. Ποία ἡ ἀκτὶς αὐτῆς καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδόν της.

3) Πόσα πρόσωπα δύνανται νὰ καθίσουν πέριξ μιᾶς κυ-

κλικῆς τραπέζης μὲ ἀκτῖνα 0,88 μ. Ὅταν ὑπολογίσωμεν δι' ἕκαστον πρόσωπον 0,98 μ. τῆς περιφερείας;

4) Εἷς χωρικὸς θέλει νὰ στρώσῃ τὸ ἁλώνιόν του, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα 3,35 μ. μὲ τετραγωνικὰς πλάκας πλευρᾶς 0,46 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν.

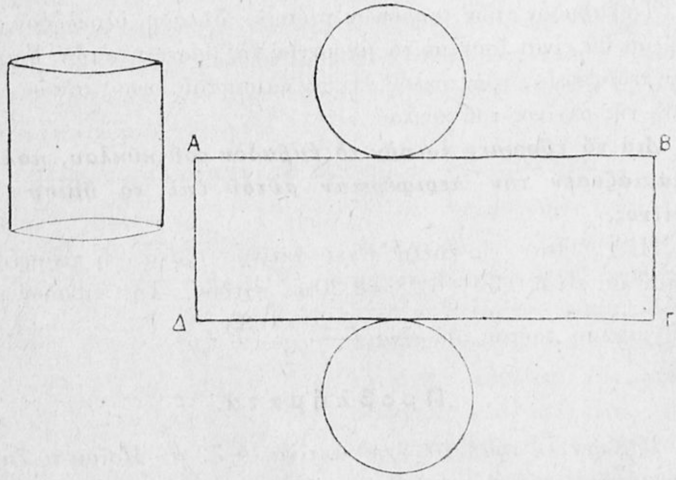
5) Εἰς πόσον χρόνον μία ἅμαξα, τῆς ὁποίας οἱ τροχοὶ ἔχουν ἀκτῖνα 0,48 μ., θὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν 8 χιλιομέτρων ἂν εἰς ἕκαστον λεπτὸν οἱ τροχοί της κάμνουν 8 στροφάς;

6) Δύο ποδηλάται ἐξεκίνησαν συγχρόνως διὰ νὰ διατρέξουν μίαν ἀπόστασιν 18 χιλιομέτρων. Εἰς ἕκαστον λεπτὸν τὰ ποδήλατα κάμνουν 16 στροφάς. Τοῦ ἑνὸς ποδηλάτου ἡ ἀκτὶς εἶναι 0,37 μ. καὶ τοῦ ἄλλου 0,45μ.

7) Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα.

Ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας τῶν δύο κυκλικῶν αὐτοῦ βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπι-



φανείας. Ἂν ἀνοίξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυλίνδρου, θὰ σχηματισθῇ τὸ ἀνωτέρω ὀρθογώνιον, α β γ δ.

Οἱ δύο κύκλοι, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, παριστῶσι τὰς δύο κυκλικὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἔχει ὡς βάσιν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδόν του δὲ εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἄρα, **διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.**

Ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτοῦ κυκλικῶν βάσεων, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν πῶς θὰ εὑρίσκωμεν θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ἐκλαμβάνομεν αὐτὸν ὡς πρῖσμα. Καὶ ὅπως διὰ τὸ πρῖσμα, τοιουτοτρόπως καὶ διὰ τὸν κύλινδρον, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Προβλήματα

1) Κυλινδρικὸν δοχεῖον, μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,53 μ. καὶ ὕψος 1,20 μ. πόσο ὕδωρ περιλαμβάνει.

2) Κορμὸς δένδρου κυλινδρικός. Περιφέρεια βάσεως 2,18 μ. Ὕψος τὸ τετραπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. Πόσον ζυγίζει; (Εἰδικὸν βάρος ξύλου 0,5).

3) Μαρμαρίνη κολώνα ὕψους 4,80 μ. καὶ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,66 μ. πόσον ζυγίζει; (Εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,7).

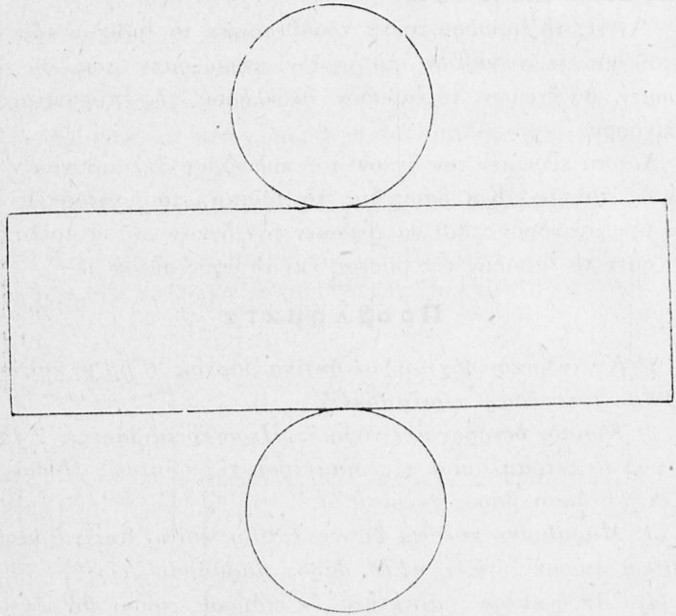
4) Ἂν ἡ κολώνα αὐτὴ ἦτο ἐκ σιδήρου, πόσον θὰ ἐζύγιζε; (Εἰδ. βάρος σιδήρου 7,9).

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 1,32 μ. καὶ περιφέρειαν βάσεως 3,20 μ.

Ἰχνογράφησις καὶ κατασκευὴ κύκλου καὶ κυλίνδρου.

Διὰ νὰ γράψωμεν κύκλον στηρίζομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου εἰς ἓν σημεῖον καὶ ἀνοίγομεν τὸ ἄλλο σκέλος τόσον, ὅση θέλομεν νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Περιστρέφομεν τότε τὸν διαβήτην οὕτως ὥστε τὸ ἐλεύθερον σκέλος νὰ γράψῃ κυκλικὴν γραμμήν. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον θὰ γραφῇ θὰ εἶναι κύκλος. Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐστηρίξαμεν τὸν διαβήτην, θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ἡ κυκλικὴ γραμμὴ θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ.

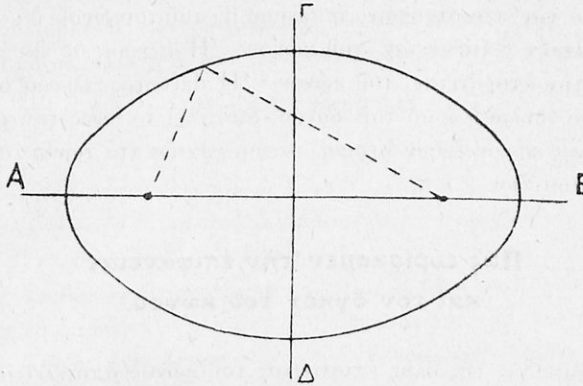
Ἐὰν ἀνοίξωμεν τὰς δύο βάσεις καὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, θὰ προκύψῃ τὸ κατωτέρω σχῆμα.



Ἐὰν λοιπὸν ἰχνογραφήσωμεν τὸ σχῆμα τοῦτο ἐπὶ χαρτονίου καὶ ἀποκόψωμεν αὐτό, κατόπιν δὲ κλείσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τοῦ σχήματος καὶ σκεπάσωμεν τὰς δύο κυκλικὰς βάσεις, ὁ κύκλος θὰ εἶναι ἕτοιμος.

ΕΛΛΕΙΨΙΣ

Τὸ κατωτέρω σχῆμα παριστᾷ ἔλλειψιν. Ὅπως βλέπομεν, ὁμοιάζει μὲ τὸν κύκλον. Ὅπως ἐκεῖνος τοιουτοτρόπως καὶ αὐτὴ εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περικλειομένη ἀπὸ καμπύλην γραμμήν. Ἐνῷ ὅμως ὁ κύκλος εἶναι κυκλικός, ἡ ἔλλειψις εἶναι ἐπιμήκης.



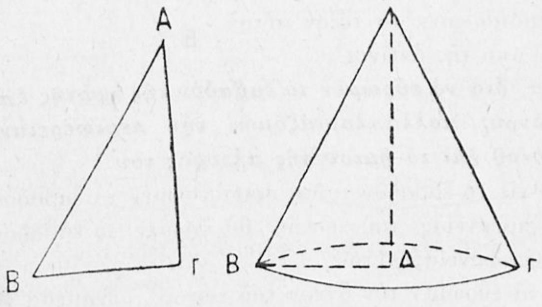
Αἱ διάμετροι αβ καὶ γδ εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα λέγονται **ἄξονες** τῆς ἐλλείψεως.

Διὰ νὰ γράψωμεν ἔλλειψιν, προσδένομεν εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα τὰ ἄκρα ἑνὸς νήματος. Τὸ νῆμα πρέπει νὰ εἶναι μακρύτερον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο σημείων.

Κατόπιν τεντώνομεν τὸ νῆμα μὲ τὸ μολυβδοκόνδυλόν μας καὶ σύρομεν τοῦτο συνεχῶς ἐπὶ τοῦ τεντωμένου νήματος. Τὸ μολυβδοκόνδυλον θὰ γράψῃ ἔλλειψιν.

ΚΩΝΟΣ

Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον αβγ τοῦ κατω-



τέρου σχήματος περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ αγ, θὰ σχηματισθῇ τὸ ἀνωτέρω σχῆμα. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται **κῶνος.**

Κατὰ τὴν περιστροφήν, ἡ πλευρὰ βγ τοῦ τριγώνου θὰ γράψῃ τὴν κυκλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ἡ πλευρὰ αβ θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ αγ τοῦ τριγώνου, δηλαδὴ ἡ αδ τοῦ κώνου, ἀποτελεῖ τὸ ὕψος τοῦ κώνου.

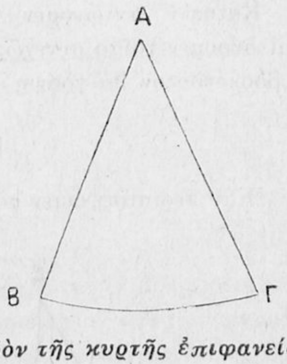
Σχῆμα κώνου ἔχουν μερικαὶ στέγαι οἰκιῶν, τὰ χωνία, αἱ στέγαι ἀνεμομύλων κ.λ.π.

Πῶς εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς αὐτοῦ βάσεως.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεως γνωρίζομεν. Ἄς ἴδωμεν πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

Ἄν ἀνοίξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, θὰ σχηματισθῇ τὸ παρακείμενον σχῆμα αβγ. Τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι τομεὺς κύκλου. Τὸ τόξον αὐτοῦ βγ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ἡ ἀκτὶς αβ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου.



Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τούτου, ὅπως ἐμάθαμεν, εὑρίσκομεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ τόξον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Ἄρα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του.

Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν αὐτὸν ὡς πολυγωνικὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας ἡ βάσις ἔχει ἀπείρους πλευράς.

Ὅπως λοιπὸν τῆς πυραμίδος, τοιουτοτρόπως καὶ τοῦ κώνου, **διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ $^1/_3$ τοῦ ὕψους του.**

Προβλήματα

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 1,30 μ. καὶ πλευρὰν 1,92 μ.

2) Κῶνος ἔχει διάμετρον βάσεως 0,87 μ. καὶ πλευρὰν 1,32. Ποία ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια;

3) Κῶνος ἔχει περιφέρειαν βάσεως 3,40 μ. καὶ ὕψος 2,04 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν καὶ ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

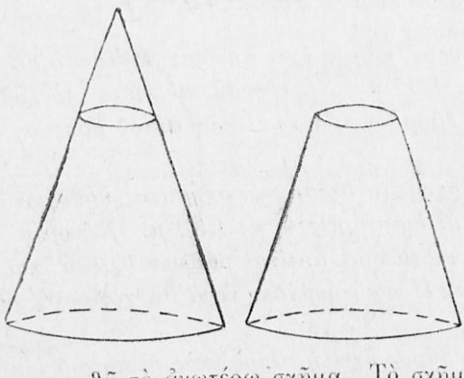
4) Κῶνος ἔχει ὄγκον 6,80 κυβ. μέτρα καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,64 μ. Ποῖον τὸ ὕψος αὐτοῦ;

5) Κῶνος ἔχει ὄγκον 4,80 κυβ. μέτρα καὶ ὕψος 3,60 μ. Ποία ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ;

6) Κάμετε καὶ μόνοι σας τοιαῦτα προβλήματα.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ἐὰν κόψωμεν τὸν κανονικὸν κῶνον τοῦ κατωτέρω σχήματος κάτωθεν τῆς βάσεως αὐτοῦ μὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν



βάσιν, θὰ σχηματισθῇ τὸ ἀνωτέρω σχῆμα. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται ***κόλουρος κῶνος.***

Τὸ σχῆμα τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν καὶ δύο κυκλικάς. Αἱ δύο κυκλικαὶ ἐπιφάνειαι εἶναι αἱ βάσεις αὐτοῦ.

Ὕψος τοῦ κολούρου κώνου λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία φέρεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

Τὸ σχῆμα τοῦ καλούρου κώνου ἔχουν διάφορα ἀντικείμενα, ὅπως αἱ γάστραι τῶν ἀνθέων, ὁ κάδος (κουβάς), ἀνθοδοχεῖα καὶ ἄλλα.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφενείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν αὐτοῦ βάσεων. Τὸ ἐμβαδὸν τῶν κυκλικῶν βάσεων εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν ὅπως ἐμάθαμεν. Ἀλλὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν. Διότι ὅταν ἀνοίξωμεν αὐτὴν θὰ σχηματισθῇ κανονικὸν τραπέζιον, ἡμεῖς δὲ γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκομεν ὅταν λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν δύο βάσεων καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ ὕψος.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν αὐτὸν καὶ ἂν μετρήσωμεν τὸ μέρος τοῦ ὀρθίου κώνου, τὸ ὁποῖον ἀπεκόπη διὰ νὰ σχηματισθῇ ὁ κόλουρος κῶνος.

Προβλήματα

1) Κόλουρος κῶνος ἔχει ἀκτῖνας βάσεων 0,86 μ. καὶ 0,48 μ. καὶ ὕψος 1,25 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, β) ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τῶν κυκλικῶν αὐτοῦ βάσεων, γ) ποῖος ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

2) Ὑπάρχει μία δεξαμενὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ διαστάσεις 5, 4, 1,30 μ. Χύνομεν ἐντὸς αὐτῆς νερὸ μὲ ἕνα κουβὰν μὲ ἀκτίνας βάσεων 0,16 μ. καὶ 0,09 μ. καὶ ὕψος 0,45 μ. Πόσοι κουβάδες νερὸ θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

3) Πόσο βάρος ἔχει ἡ πέτρα ἑνὸς ἐλαιοτριβείου τῆς ὁποίας αἱ βάσεις ἔχουν διάμετρον 0,52 μ. καὶ 0,34 μ. καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 1,30 μ. (Εἰδ. βάρος πέτρας 2,7).

Ἀσκήσεις

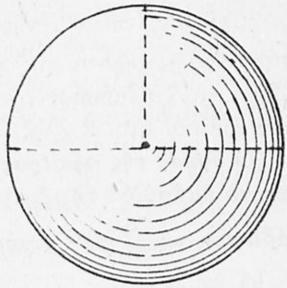
1) Γράψατε ἕνα ὄρθιον καὶ ἕνα κόλουρον κῶνον.

2) Δείξατε τὸ ὕψος καὶ τὴν περιφέρειαν τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου.

3) Ὀνομάσατε πράγματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν σχῆμα κολούρου κώνου.

ΣΦΑΙΡΑ

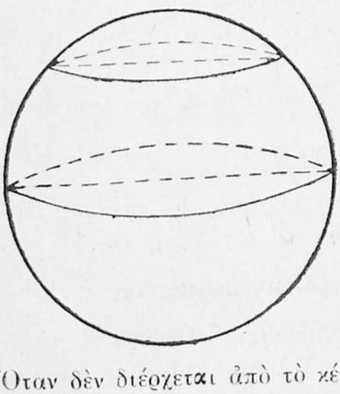
Τὸ κατωτέρω σχῆμα παριστάνει σφαῖραν. Σχῆμα σφαίρας ἔχουν πολλὰ σώματα, ὅπως ἡ ποδόσφαιρα, τὸ πορτοκάλλι, τὸ τόπι, τὸ καρπούζι καὶ ἄλλα.



Τὰ σώματα ταῦτα περικλείονται ἀπὸ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς σφαίρας καὶ λέγεται ***κέντρον*** αὐτῆς.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται κάθε εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτῆς.

Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς καὶ καταλήγει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν περιφέρειαν.



Ὅταν κόψωμεν τὴν σφαῖραν μὲ ἓν ἐπίπεδον, ἡ τομὴ ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ θὰ εἶναι κύκλος.

Ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, τὸ ὁποῖον κόπτει τὴν σφαῖραν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς, ὁ κύκλος ὁ ὁποῖος θὰ σχηματισθῇ, λέγεται ***μέγιστος*** κύκλος. Ὅταν δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται, λέγεται ***μικρὸς*** κύκλος.

Ὅσον τὸ ἐπίπεδον πλησιάζει πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τόσον ὁ κύκλος τῆς τομῆς γίνεται μεγαλύτερος, καὶ ὅσον ἀπομακρύνεται ἀπ᾽ αὐτὸ τόσον γίνεται μικρότερος.

Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμισφαίρια.

Ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς.

Ἐὰν μιᾶς σφαίρας ἡ διάμετρος εἶναι 1,20 μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς θὰ εἶναι $\frac{1,20 \times 3,14 \times 0,60}{2}$ δηλαδὴ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἤτοι 2,25 τ. μ. Τὸ ἐμβαδὸν τότε τῆς σφαίρας θὰ εἶναι τὸ τετραπλάσιον τούτου, ἤτοι $2,25 \times 4 = 5$ τ. μ.

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εὑρίσκεται ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου.

Ὁ ὄγκος τῆς ἀνωτέρω σφαίρας θὰ εἶναι $\frac{5 \times 0,60}{3} = 1$ κ. μέτρ.

Προβλήματα

1) Νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,46 μ. ἢ διάμετρον 0,98 μ. ἢ περιφέρειαν 2,32 μ.

2) Σφαῖρα μαρμαρίνη ἔχει ἀκτῖνα 0,52 μ. Εὕρετε τὸ βάρος της. (Εἰδ. βάρος 2,7).

3) Σφαῖρα ἔχει διάμετρον 1,62 μ. Εὕρετε τὴν ἐπιφάνειάν της καὶ τὸν ὄγκον της.

4) Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ ποδοσφαίρου σας.

5) Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 3,10 μ. Εὕρετε τὴν ἐπιφάνειάν της καὶ τὸν ὄγκον της.

Μέτρησις μὴ γεωμετρικῶν σωμάτων.

Ὅλα τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα ἐξετάσαμεν ἕως τώρα εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, λέγονται γεωμετρικά. Δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν καὶ τὰς 3 αὐτῶν διαστάσεις.

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ σώματα, τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὰς 3 διαστάσεις. Π. χ. μία ἀκανόνιστος πέτρα. Τὰ σώματα ταῦτα δὲν εἶναι γεωμετρικά.

Τὸν ὄγκον τῶν σωμάτων τούτων εὑρίσκομεν κατὰ διαφόρους τρόπους: Π. χ.

α) Λαμβάνομεν δοχεῖον κανονικὸν πλῆρες ὕδατος. Θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ ἀκανόνιστον σῶμα, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον. Τὸ σῶμα τοῦτο ἐκτοπίζει ὕδωρ, τὸ ὁποῖον χύνεται ἐντὸς λεκάνης. Ἀφαιροῦμεν τότε τὸ σῶμα ἀπὸ τὸ δοχεῖον καὶ βλέπομεν πόσον μέρος τοῦ δοχείου μένει κενόν. Ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τούτου εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

β) Λαμβάνομεν πάλιν δοχεῖον κανονικὸν καὶ γνωστῆς χωρητικότητος. Θέτομεν ἐντὸς αὐτοῦ τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ μετρήσωμεν καὶ γεμίζομεν τὸ δοχεῖον μὲ ἄμμον. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ σῶμα. Ὁ ὄγκος τοῦ κενοῦ μέρους τοῦ δοχείου ἰσοῦται πάλιν μὲ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1) ***Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου ἀπὸ τὴν σκιάν του:***

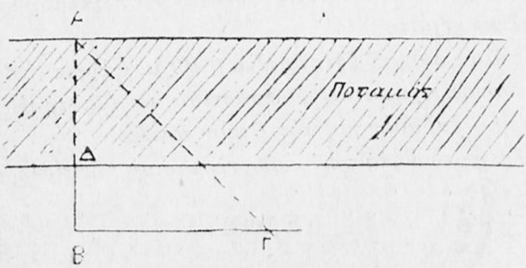
Μετροῦμεν εἰς ὡρισμένην στιγμὴν τὴν σκιὰν τοῦ δένδρου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι 3,40 μέτρα. Πλησίον τοῦ κορμοῦ τοῦ δένδρου στηρίζομεν μίαν ὀρθίαν ῥάβδον ὕψους ἑνὸς μέτρου καὶ μετροῦμεν τὴν σκιάν της. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι 0,65 μ. Τὸ ὕψος τοῦ δένδρου εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἑξῆς ἀναλογίας:

Σκιὰ 0,65 μ. προέρχεται ἀπὸ ὕψος 1 μέτρου.

Σκιὰ 3,40 μ. ἀπὸ πόσον ὕψος θὰ προέλθῃ;

2) ***Πῶς εὑρίσκομεν τὸ πλάτος ποταμοῦ;***

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ξηρᾶς καὶ πλησίον τοῦ ποταμοῦ τὸ ση-



μεῖον β. Ἔπειτα καθορίζομεν ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ὄχθης τοῦ ποταμοῦ καὶ ἀκριβῶς ἀπέναντι τοῦ σημείου β τὸ σημεῖον α.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τῆς φανταστικῆς γραμμῆς αβ, τὴν βγ. Ἡ γωνία αβγ εἶναι ὀρθὴ γωνία. Ἂν ἑνώσωμεν φανταστικῶς τὰ σημεῖα α καὶ γ ὑπὸ γωνίας 45°, τότε ἡ βγ εἶναι ἴση πρὸς τὴν αβ. Ἂν λοιπὸν ἀπο τὴν βγ ἀφαιρέσωμεν τὴν βδ, ἐκεῖνο ποὺ θὰ μείνῃ θὰ εἶναι τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ.

Διάφορα προβλήματα.

1) Κκατασκευάσατε ἀμβλυγώνιον τρίγωνον μὲ ἀμβλεῖαν γωνίαν 110°.

2) Κατασκευάσατε τετράγωνον πλευρᾶς 0,48 μ. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

3) Χωρίσατε ὀρθογώνιον οἰκόπεδον βάσεως 23,50 μ. καὶ ὕψους 18,20 μ. εἰς 3 ἴσα μέρη.

4) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1,30 μ. ἐγγράφεται τετράγωνον. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου ;

5) Ἐντὸς τετραγώνου πλευρᾶς 3,40 μ. ἐγγράφομεν κύκλον. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

6) Κυκλικὴ πλατεῖα πλευρᾶς 42 μέτρων, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικοὺς λίθους πλευρᾶς 0,28 μ. Πόσοι λίθοι θὰ χρειασθοῦν ;

7) Ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου μὲ βάσεις 125 μ. καὶ 89 μ. ἐμοιράσθη μεταξὺ 4 κληρονόμων. Λογαριάσατε.

8) Κυλινδρικὸν δοχεῖον μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,23 μ. καὶ ὕψος 0,88 μ. Πόσον γάλα περιλαμβάνει ; (Νὰ μάθετε τὸ εἰδ. βάρος τοῦ γάλακτος).

9) Εἷς πηγαδᾶς ἤνοιξε 0,92 μ. τὸν διαβήτην του καὶ ἐσημάδευσε τὸν κύκλον ἑνὸς πηγαδιοῦ, τὸ ὁποῖον ἔσκαψεν εἰς βάθος 18 μέτρων. Πόσον ὕδωρ δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ πηγάδι ὅταν θὰ εἶναι γεμᾶτο ;

10) Σφαῖρα σιδηρᾶ ἔχει ἀκτῖνα 0,09 μ. Εὕρετε τὸ βάρος της.

11) Αἴθουσα σχήματος ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 28, 22, 16. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν ὄγκον αὐτῆς.

12) Εὕρετε τὸ ὕψος τοῦ κωδωνοστασίου τῆς πόλεώς σας ἐκ τῆς σκιᾶς του.

ΤΕΛΟΣ