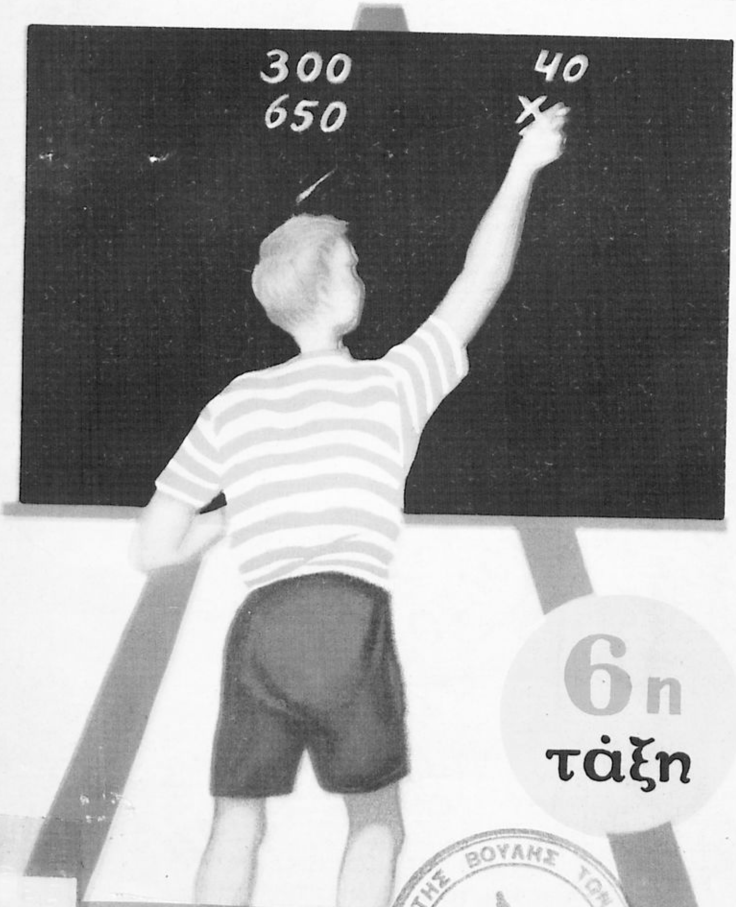
Φ. Ι. ΦΩΤΙΟΥ

ἡ ἀριθμητική μου



6η τάξη

...Σ ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΔΗΜ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.
ΠΛΑΤΕΙΑ ΣΥΝΤΑΓΜΑΤΟΣ — ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ: ΑΓΙΟΥ ΜΗΝΑ 10

Φ. Ι. ΦΩΤΙΟΥ

Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΥ

ΤΑΞΗ ΣΤ'

ΕΚΔΟΣΗ ΠΡΩΤΗ

ΑΡΧΑΙΟΣ ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.
ΑΘΗΝΑΙ — ΠΛΑΤΕΙΑ ΣΥΝΤΑΓΜΑΤΟΣ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ — ΟΔΟΣ ΑΓΙΟΥ ΜΗΝΑ 10

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο ἔχει τὴν ὑπογραφὴ τοῦ συγγραφέα καὶ τὴν σφραγίδα τοῦ ἐκδότη.

PRINTED IN GREECE

ΑΡΧΑΙΟΣ ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α.Ε

ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΔΑΣΚΑΛΟ

Ἡ «Ἀριθμητική» μας αὐτὴ παρουσιάζει τὰ ἑξῆς πλεονεκτήματα:

1) Εἶναι ἕνα συγχρονισμένο μεταπολεμικὸ βοήθημα τοῦ εἴδους αὐτοῦ γιὰ τὴν ΣΤ' τάξη. Ὅλα τὰ προβλήματα εἶναι καμωμένα μὲ τὶς σύγχρονες τιμὲς καὶ εἶναι παρμένα ἀπὸ τὴ ζωὴ τοῦ παιδιοῦ. Πολλὰ συσχετίζονται καὶ μὲ τὴν ὕλη τῶν ἄλλων μαθημάτων γιὰ τὴν καλύτερη ἐμπέδωσή της. Γίνεται λόγος καὶ γιὰ τὰ μεταπολεμικὰ μέτρα, σταθμά, νομίσματα κλπ. ποὺ ἐκλαϊκεύτηκαν στὴ χώρα μας (λίβρες κλπ.).

2) Τὸ ἀναλυτικὸ πρόγραμμα ὁρίζει τὴν ὕλη τῆς ἀριθμητικῆς τῆς ΣΤ' τάξης ἀπὸ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν καὶ πέρα. Ἐμεῖς προτιμήσαμε νὰ προσθέσουμε:

α) **Μιὰ σύντομη ἐπανάληψη τῶν ἀκεραίων, δεκαδικῶν καὶ κλασμάτων.**

β) **Ἕνα ἐκτεταμένο κεφάλαιο γιὰ τοὺς συμμιγεῖς,** ἄσχετα ἂν θὰ χρησιμοποιηθῆ ὁλόκληρο ἢ στὶς γενικές του γραμμές.

γ) **Μιὰ παράγραφο γιὰ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα** μὲ ἀνώτερες μορφές.

δ) **Μιὰ παράγραφο γιὰ τὸν ἀνατοκισμό.**

ε) **Μιὰ παράγραφο μὲ τὰ τοκοχρεωλυτικὰ δάνεια.**

καὶ 3) Προσπαθήσαμε τὸ βοήθημά μας αὐτὸ νὰ μὴν εἶναι μιὰ συλλογὴ ἀπὸ ξερὰ καὶ ἀνούσια προβλήματα. Αὐτὸ πιστεύομε νὰ τὸ πετύχαμε:

α) **Δένοντας ὅλες τὶς ἀριθμητικὲς ἔννοιες καὶ τοὺς κανόνες μὲ λόγια ἁπλά,** βγαλμένα ἀπὸ τὴ μακρόχρονη σχολικὴ πεῖρα **καὶ μὲ πολλὰ παραδείγματα** β) **Προτρέποντας τὰ παιδιά,** κάθε φορά, **νὰ κάνουν δικά τους προβλήματα** μὲ βάση τὶς γνωστὲς ἔννοιες καὶ κανόνες.

***

Παρ' ὅλα αὐτὰ τὸ βιβλίο μας δὲν παύει βέβαια νὰ εἶναι ἕνα **«ἐγχειρίδιο ἀριθμητικῆς». Ὁ δάσκαλος θὰ ξεδιαλύνῃ τὶς ἀπορίες τῶν παιδιῶν.** Ἐμεῖς ἐπίτηδες βάλαμε περισσότερη ὕλη ἀπ' ὅση ὁρίζει τὸ πρόγραμμα καὶ μερικὰ δύσκολα προβλήματα γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς μαθηματικῆς κρίσης τῶν παιδιῶν, ποὺ θὰ συνεχίσουν ἀνώτερες σπουδὲς (ὁρισμένες περιπτώσεις στοὺς συμμιγεῖς, στὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα, στὴν ὑφαίρεση κλπ.) Ἀπ' αὐτὰ οἱ συνάδελφοι μποροῦν φυσικὰ νὰ παραλείπουν, ὅσα νομίζουν ἀνώτερα ἀπὸ τὴν ἀντιληπτικὴ δύναμη τῶν μαθητῶν τους.

Ἀθῆναι 2 Αὐγούστου 1947

Φ. Ι. ΦΩΤΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Πρόσθεση.

1) Ἡ μάχη στὸ Μαραθώνα ἔγινε τὸ 490 π. Χ. Πόσα χρόνια περάσανε ὥς σήμερα.

2) Ἕνας μπακάλης ἔχει τρία σακιὰ ρύζι. Τὸ πρῶτο ζυγίζει 62 ὀκάδες, τὸ δεύτερο 48 καὶ τὸ τρίτο 54 ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες ἔχουν καὶ τὰ τρία σακιὰ μαζί;

3) Μιὰ γυναίκα ψώνισε 0,75 ὀκ. λάδι, 0,50 ὀκ. μακαρόνια, 3,25 ὀκ. ψωμὶ καὶ 1.20 ὀκ. βούτυρο. Πόσες ὀκάδες εἶναι τὰ πράγματα ποὺ ψώνισε;

4) Ἕνας ἔμπορος ἔχει τρία τόπια ὕφασμα. Ἀπὸ τὸ ἕνα πούλησε 24,25 μ. ἀπὸ τὸ ἄλλο 32,60 μ. καὶ ἀπὸ τὸ τρίτο 12,85 μ. Πόσα μέτρα ὕφασμα πούλησε;

5) Ἔχουμε τέσσερα κουτιὰ κρέας κονσέρβα. Τὸ α΄ ζυγίζει $2\frac{3}{4}$ τὸ β΄ $1\frac{6}{8}$, τὸ γ΄ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ δ΄ $2\frac{1}{4}$. Πόσες ὀκάδες ζυγίζουν καὶ τὰ τέσσερα μαζί;

6) Ποιό κλάσμα θὰ ἔχουμε, ἂν προσθέσουμε τὰ κλάσματα $\frac{3}{9}$ καὶ $\frac{7}{11}$;

Ἀφαίρεση.

7) Τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῆς Ἀθήνας εἶναι 38°. Πόσες μοῖρες ἀπέχει ἀπὸ τὸ Βόρειο Πόλο;

8) Πόσα χρόνια περάσανε ἀπὸ τὴν ἀνακάλυψη τῆς Ἀμερικῆς μέχρι σήμερα;

9) Ἕνας τενεκὲς λαδιοῦ χωρεῖ 13,75 ὀκάδες. Ἔχει μέσα 6,45 ὀκ. Πόσες ὀκάδες θέλει νὰ γεμίση;

10) Ἕνα τόπι ὕφασμα ἔχει 52,90 μ. Κόψαμε τὰ 48,25 μ. Πόσα μέτρα μείνανε;

11) Ποιὸ κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσω στὸ $\frac{3}{7}$ γιὰ νὰ βρῶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$;

12) Ὁ Γιῶργος πῆρε δυὸ κουτιά, ποὺ ζυγίζουν μαζὶ $4\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Τὸ ἕνα ἔχει $1\frac{3}{4}$ ὀκ. κρέας καὶ τὸ ἄλλο μαρμελάδα. Πόσο ζύγιζε τὸ κουτὶ μὲ τὴ μαρμελάδα;

Πολλαπλασιασμός.

13) Μιὰ γεωγραφικὴ μοίρα εἶναι ἴση μὲ 111 χιλιόμετρα. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀπόσταση τῆς Ἀθήνας ἀπὸ τὸν Ἰσημερινὸ καὶ ποιὰ ἀπὸ τὸ Βόρειο Πόλο σὲ χιλιόμετρα;

14) Στὸ συσσίτιό μας ρίξαμε τὸ πρωὶ 21 κουτιὰ γάλα. Τὸ καθένα ζυγίζει 81 δράμια. Πόσα δράμια γάλα ρίξαμε;

15) Πόσο στοιχίζουν 67,6 πῆχες ὕφασμα πρὸς 4.200 δρ. τὸν πήχη;

16) Ἕνα κουτὶ μαρμελάδα ζυγιζει 2,75 ὀκάδες. Πόσο ζυγίζουν τὰ 10 κουτιά, πόσο τὰ 100, πόσο τὰ 1000;

17) Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει $42\frac{6}{10}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξη σὲ $8\frac{3}{4}$ ὥρες;

18) Μιὰ νοικοκυρὰ θέλει τὴν ἡμέρα $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς λάδι. Πόσο θέλει τὸ μῆνα;

Διαίρεση.

19) Τὸ συσσίτιό μας παράλαβε γιὰ 26 μέρες 10.400 μπισκότα. Πόσα πρέπει νὰ μοιράζη τὴν ἡμέρα;

20) Ἕνας φούρναρης μοιράζει 758.500 δράμια ψωμὶ μὲ τὸ δελτίο. Κάθε δελτίο παίρνει 80 δράμια. Πόσα δελτία ἔχει ὁ φοῦρνος αὐτός;

21) 185.717 μέτρα πόσα δεκάμετρα μᾶς κάνουν, πόσα ἑκατόμετρα, πόσα χιλιόμετρα;

22) Πόσα φορέματα θὰ κάνουμε μὲ 52,25 πῆχες ὕφασμα, ἂν γιὰ τὸ κάθε φόρεμα χρειαζόμαστε 6,25 μέτρα;

23) Ἕνα αὐτοκίνητο ἔτρεξε 245 χιλιόμετρα σὲ $5\frac{3}{6}$ ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε τὴν ὥρα;

24) Ποιὸ κλάσμα πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω μὲ τὸ $\frac{3}{9}$ γιὰ νὰ βρῶ τὸ κλάσμα $\frac{10}{12}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Α'. Τὰ διάφορα μέτρα—σταθμὰ—νομίσματα καὶ οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὸ μάκρος ἔχομε: τὸ ***γαλλικὸ μέτρο.***

1 ***μέτρο***	ἔχει	10	παλάμες (ὑποδεκάμετρα)
1 ***παλάμη***	»	10	δακτύλους (πόντους)
1 ***δάκτυλος***	»	10	γραμμὲς (χιλιοστὰ)

Ἄρα: τὸ γαλλικὸ μέτρο ἔχει 10 παλάμες (δέκατα), 100 πόντους (ἑκατοστὰ) καὶ 1000 γραμμὲς (χιλιοστά). Αὐτὲς εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου. Μὰ ἔχομε καὶ πολλαπλάσια τοῦ μέτρου.

τὸ ***δεκάμετρο***=10 μέτρα
τὸ ***ἑκατόμετρο***=100 μέτρα
τὸ ***χιλιόμετρο***=1.000
τὸ ***μυριάμετρο***=10.000 μέτρα

Ὅπως βλέπομε κάθε πολλαπλάσιο ἢ ὑποδιαίρεση τοῦ μέτρου εἶναι δέκα φορὲς μεγαλύτερη ἢ μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀμέσως προηγούμενη. Αὐτὸ μᾶς εὐκολύνει νὰ γράφουμε τὰ μέτρα καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου σὰν δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

1,00 = 1 ***μέτρο*** = 10 παλάμες=100 πόντους=1000 γραμμές.
0,1 = 1 ***παλάμη***=10 πόντους=100 γραμμές.
0,01 = 1 ***πόντος*** =10 γραμμές.
0,001= 1 ***γραμμή.***
19,6 =19 ***μέτρα*** καὶ 5 παλάμες ἢ 19 μ. καὶ 50 πόντους.
35,58 =35 ***μέτρα*** καὶ 5 παλάμες καὶ 8 πόντοι ἢ 35 μ. καὶ 58 πόντοι.
46,249=46 ***μέτρα,*** 2 παλάμες, 4 πόντοι καὶ 9 γραμμὲς ἢ 46 μ. 24 πόν. καὶ 9 γραμμές, ἢ 46 μ. καὶ 249 γραμμές.

Ἀσκήσεις.

1. Τρέψετε 720 μέτρα σὲ παλάμες, δακτύλους, γραμμές.
2. Τρέψετε 895 μέτρα σὲ δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά.
3. Τρέψετε σὲ δεκάμετρα, ἑκατοστόμετρα, χιλιόμετρα καὶ μυριάμετρα τοὺς ἀριθμοὺς 457.439 μέτρα (964.003 μ., 620.880 μ.).
4. Γράψετε σὰν δεκαδικοὺς τὰ α) 32 μ. 4 παλάμες 9 δάκτυλοι 7 γραμμὲς β) μηδὲν μέτρα 8 παλάμες 2 δάκτυλοι 1 γραμμὴ γ) 156 μ. 6 παλάμες 5 δάκτυλοι 8 γραμμές.
5. Γράψετε ἀναλυτικὰ σὲ μέτρα, παλάμες, δακτύλους τοὺς παρακάτω δεκαδικοὺς α) 195,372 β) 549,001 γ) 93,67 δ) 1760,240.

Παρατήρηση.

Ἄλλα μέτρα ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μέτρο καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις του γιὰ νὰ μετροῦμε τὸ μάκρος ἔχομε:

α) τὸν ἐμπορικὸ πήχη:	1 πήχης = 8 ρούπια. 1 πήχης = 0,64 τοῦ μ.
β) τὴ γιάρδα:	1 γιάρδα = 3 πόδια. 1 πόδι = 12 ἴντσες.
	1 γιάρδα = 0,914 τοῦ μέτρου.
γ) τὸν τεκτονικὸ πήχη:	1 τεκτον. πήχης = $^3/_4$ ἢ 0,75 τοῦ μ.
δ) τὸ ναυτικὸ μίλι:	1 μίλι = 1852 μέτρα.
ε) τὸ Ἀγγλικὸ μίλι:	1 Ἀγγλ. μίλι = 1608 μ.

Ἀσκήσεις.

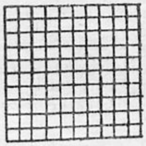
1. Τρέψετε 43 πήχεις σὲ μέτρα, σὲ γιάρδες, σὲ τεκτονικοὺς πήχεις.
2. Τρέψετε 714 πήχεις σὲ ρούπια.
3. Τρέψετε 156 γυάρδες σὲ μέτρα, σὲ τεκτονικοὺς πήχεις, σὲ ἐμπορ. πήχεις.
4. Τρέψετε 3895 μέτρα σὲ γιάρδες, σὲ ἐμπορ. πήχεις καὶ σὲ τεκ. πήχεις.
5. Τρέψετε 45 καὶ $^3/_4$ τεκτονικοὺς πήχεις σὲ μέτρα, γιάρδες, ἐμπορικοὺς πήχεις.
6. Τρέψετε 92.652 μέτρα σὲ χιλιόμετρα καὶ μίλια ναυτικὰ καὶ Ἀγγλικά.
7. Κάνετε καὶ σεῖς τὰ δικά σας προβλήματα τέτοια.

Β.' Πῶς μετροῦμε τὶς ἐπιφάνειες.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὶς ἐπιφάνειες ἔχομε:

α) τὸ τετραγωνικὸ μέτρο.

1 τ. μ. ἔχει 100 τ. παλάμες.
1 τ. παλάμη ἔχει 100 τ. δακτύλους.
1 τ. δάκτυλος ἔχει 100 τ. γραμμές.



Σχ. 1

Ἄρα 1 τ. μ. ἔχει 100 τ. παλάμες, 10.000 τ. δακ. καὶ 1.000.000 τ. γραμμές. Στὸ διπλανὸ σχῆμα [1] βλέπετε ὅλες τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ τ. μέτρου.

Γιὰ τὶς μεγαλύτερες ἐπιφάνειες ἔχομε:

α) τὸ τ. δεκάμετρο=τετράγωνο μὲ πλευρὰ 10 μ. = 100 τ.μ.
β) τὸ τ. ἑκατόμετρο=τετράγωνο μὲ πλευρὰ 100 μ. = 10.000 τ. μ.
γ) τὸ τ. χιλιόμετρο=τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1 000 μ. = 1.000.000 τ. μ.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὰ χωράφια ἔχομε:

α) τὸ ***δεκαδικὸ ἢ βασιλικὸ στρέμμα***=1.000 τ. μ.
β) τὸ ***παλαιὸ στρέμμα ἢ τουρκικὸ***=1270 τ. μ.
καὶ γ) τὸ ***Μακεδονικὸ στρέμμα***=2.000 τ. μ. περίπου.

Γιὰ τὰ οἰκόπεδα ἔχομε:

α) τὸν ***τετρ. τεκτονικὸ πήχη***=9/16 τοῦ τ. μ.
β) τὴν ***τετραγωνικὴ γιάρδα***=0,836 τοῦ τ. μ.

Ἀσκήσεις.

1. Τρέψετε 1.600 τ. μ. σὲ τετρ. παλάμες, τ. δακτύλους, τ. γραμμές.

2. Τρέψετε 23.935 τ. μ. σὲ δεκαδικά, παλαιὰ καὶ Μακεδονικὰ στρέμματα.

3. Τρέψετε 892.000 τ. μ. σὲ τ. δεκάμετρα, ἑκατόμετρα, χιλιόμετρα.

4. Τρέψετε 442 τ. μ. σὲ τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις, σὲ τ. γιάρδες.

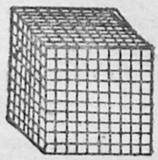
5. Πόσα δεκαδικά, παλαιά, Μακεδονικὰ στρέμματα εἶναι ἕνα χωράφι τετράγωνο μὲ πλευρὰ 6350 μέτρα ;

6. Κάνετε καὶ σεῖς δικά σας προβλήματα.

Γ'. Πῶς μετροῦμε τοὺς ὄγκους καὶ τὴ χωρητικότητα.

Γιὰ νὰ μετρήσουμε τὸν ὄγκο μεταχειριζόμαστε:

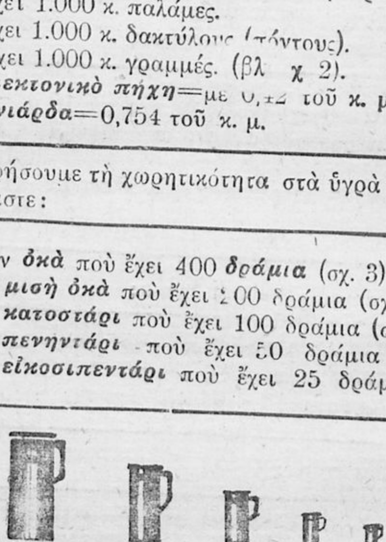
α) ***τὸ κυβικὸ μέτρο*** (κύβος μὲ πλευρὰ 1 μέτρο).
1 κ. μ. ἔχει 1.000 κ. παλάμες.
1 κ. π. ἔχει 1.000 κ. δακτύλους (πόντους).
1. κ. δ. ἔχει 1.000 κ. γραμμές. (βλ. σχ. 2).
β) ***τὸν κ. τεκτονικὸ πήχη***=μὲ 0,42 τοῦ κ. μ.
γ) ***τὴν κ. γιάρδα***=0,754 τοῦ κ. μ.



Σχ. 2

Γιὰ νὰ μετρήσουμε τὴ χωρητικότητα στὰ ὑγρὰ (λάδι, κρασὶ) κ. π. μεταχειριζόμαστε:

α) τὴν ***ὀκὰ*** ποὺ ἔχει 400 ***δράμια*** (σχ. 3).
β) τὴ ***μισὴ ὀκὰ*** ποὺ ἔχει 200 δράμια (σχ. 4).
γ) τὸ ***κατοστάρι*** ποὺ ἔχει 100 δράμια (σχ. 5).
δ) τὸ ***πενηντάρι*** ποὺ ἔχει 50 δράμια (σχ. 6).
καὶ ε) τὸ ***εἰκοσιπεντάρι*** ποὺ ἔχει 25 δράμια (σχ. 7).



Σχ. 3 Σχ. 4 Σχ. 5 Σχ. 6 Σχ. 7

Γιὰ τὰ σιτηρὰ ἔχομε:

α) τὸ ***ἑκατόλιτρο ἢ κοιλὸ*** (ἕνα καδὶ ποὺ παίρνει ἑκατὸ λίτρες δηλ. 35 περίπου ὀκάδες σιτηρα).

Γιὰ τὰ ὑγρὰ βενζίνα κλπ. σήμερα μεταχειριζόμαστε **τὸ *γαλλόνι*.**

α) 1 γαλλόνι=2 ὀκάδες 240 δράμια
β) 1 λίτρα=142 δράμια.

Ἀσκήσεις.

1. *Τρέψετε 2500 κ.μ. σὲ κ. παλάμες, κ. δακτύλους, κ. γραμμές.*
2. *Τρέψετε 4567 κ.μ σὲ κ. τεκτονικοὺς πήχεις, σὲ κ. γιάρδες.*
3. *Τρέψετε 380 ὀκάδες σὲ μισὲς ὀκάδες, κατοστάρια, πενηντάρια κλπ.*
4. *Τρέψετε 9150 ὀκάδες σὲ γαλλόνια καὶ ἀντίθετα.*
5. *Τρέψετε 450 ἑκατόλιτρα (κοιλὰ) σὲ ὀκάδες, γαλλόνια.*
6. *Πόσους κυβικοὺς δακτύλους ἔχουν 24 κ. μέτρα;*
7. *Πόσα κυβ. μέτρα ἔχει κύβος μὲ πλευρὰ 21 μ;*

Δ'. Πῶς μετροῦμε τὸ βάρος.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὸ βάρος μεταχειριζόμαστε:

α) τὴν ὀκᾶ: 1 ὀκᾶ = 400 **δράμια**. (Σχ. 8).
β) τὸ χιλιόγραμμο ἢ κιλό: 1 κιλὸ = 312,5 δράμια.
γ) τὸ γραμμάριο: (3,2 γραμμάρια = 1 **δράμι**).
δ) τὸ στατῆρα (καντάρι): 1 στατῆρας = 44 ὀκάδες.
ε) τὸν τόνο: 1 τόνος = 780 ὀκάδες.
στ) τὴ λίβρα ἢ λίτρα: 1 λίβρα ἔχει 16 οὐγγιὲς (ὄνζες).
1 οὐγγιὰ = 8,87 δράμια.
1 λίβρα = 142 δράμια.


Σχ. 8

Τὸ γραμμάριο διαιρεῖται σέ:

α) γραμμάριο
β) δεκατόγραμμο (0,1 τοῦ γραμ.).
γ) ἑκατοστόγραμμο (0,01 τοῦ γραμ.).
δ) χιλιοστόγραμμο (0,001 τοῦ γραμμ.).

Τὸ γραμμάριο ἐπίσης ἔχει καὶ ἀνώτερες μονάδες:

α) γραμμάριο.
β) δεκάγραμμο (10 γραμμάρια).
γ) ἑκατόγραμμο (100 γραμμάρια).
δ) χιλιόγραμμο (1000 γραμμάρια δηλ. 1 κιλὸ) κ.λ.π.

Στὰ φαρμακεῖα τὰ φάρμακα ζυγίζονται σὲ γραμμάρια. Στὰ χρυσοχοεῖα τὰ πολύτιμα πετράδια ζυγίζονται σὲ **καράτια**.

α) 1 καράτιο = 0,2 τοῦ γραμμαρίου.
β) 1 δράμι ἢ 3,2 γραμμάρια = 16 καράτια.

Ἀσκήσεις.

1. Τρέψετε 124 ὀκάδες σὲ δράμια, γραμμάρια, κιλά, στατῆρες, λίβρες.

2. Τρέψετε 159 γαλόνια σὲ ὀκάδες.

3. Τρέψετε 16.200 ὀκάδες σὲ στατῆρες, τόνους, κιλά.

4. Τρέψετε 882 λίβρες σὲ οὐγγιὲς καὶ δράμια.

5. Τρέψετε 25.000 γραμμάρια σὲ δεκάγραμμα, ἑκατόγραμμα, χιλιόγραμμα (κιλά).

6. Τρέψετε 320 καράτια σὲ γραμμάρια καὶ δράμια.

Ε'. Τὰ νομίσματα καὶ ἡ ἀξία τους.

Νὰ ποιὰ νομίσματα μεταχειρίζονται τὰ διάφορα κράτη γιὰ τὶς συναλλαγές τους:

Ἡ Ἑλλάδα	τὴ ***δραχμὴ***	=	100 ***λεπτὰ*** (ἢ ἑκατοστά).
Ἡ Γαλλία κλπ'	τὸ ***φράγκο***	=	100 ἑκατοστὰ ἢ ***σαντίμ.***
Ἡ Ἰταλία	τὴ ***λιρέτα***	=	100 ***τσεντέσιμα.***
Ἡ Ἰσπανία	τὴν ***πεσέττα***	=	100 ***τσέντιμος.***
Ἡ Ρουμανία	τὸ ***λέϊ***	=	100 ***μπάνι.***
Ἡ Βουλγαρία	τὸ ***λέβι***	=	100 ***στοντίκι.***
Ἡ Σερβία	τὸ ***δηνάριο***	=	100 ***πάρα.***
Ἡ Τουρκία	τὴ ***λίρα***	=	100 ***γρόσια.*** 1 γρόσι = 100 ***παράδες.***
Ἡ Γερμανία	τὸ ***μάρκο***	=	100 ***πφέννιγκ.***
Ἡ Αὐστρία	τὸ ***φιορδίνο***	=	100 ***κρόϊτσερ.***
Ἡ Ὀλλανδία	τὸ ***φλωρίνιο***	=	100 ***σέντ.***
Ἡ Ἀγγλία	τὴ ***στερλίνα.***		1 στερλίνα = 20 σελίνια. 1 σελ. = 20 πέννες. 1 πέννα = 4 φαρδίνια.
Ἡ Ἀμερικὴ	τὸ ***δολλάριο***	=	100 ***σέντς.***
Ἡ Ρωσσία	τὸ ***ρούβλι***	=	100 ***καπίκια.***

Παρατήρηση.

Τὰ νομίσματα δὲν ἔχουνε σταθερὴ ἀξία, γιατὶ μεταβάλλονται, γιὰ πολλοὺς λόγους. Ὁ πόλεμος ἔφερε ***πληθωρισμὸ*** κι ὅ,τι ἀγόραζες παλιότερα μὲ 1 δραχμή, σήμερα δὲν τὸ ἀγοράζεις οὔτε μὲ 1.000. Ἡ σημερινή τους ἀξία σὲ δραχμὲς εἶναι ἡ ἑξῆς:

1 στερλίνα = 124.000 δραχ.	1 Μάρκο = 13.000 δραχ.
1 δολλάριο = 5.000 »	1 Λιρέττα = 2.000 »
1 φράγκο = 50 »	1 Ρούβλι = 10.000 »
1 Τουρκικὴ λίρα 94.000 »	

Ἀσκήσεις

1. *Τρέψετε 93 στερλίνες σὲ δραχμές, δολλάρια, ρούβλια κλπ.*
2. *Τρέψετε 15 στερλίνες σὲ σελλίνια, πέννες, φαρδίνια.*
3. *Τρέψετε 400.000 δραχ. σὲ στερλίνες, δολλάρια, ρούβλια κλπ.*
4. *Μὲ βάση τὸν παραπάνω πίνακα κάνετε μόνοι σας πολλὰ προβλήματα γιὰ ἐξάσκηση.*

ΣΤ'. Πῶς μετροῦμε τὸ χρόνο.

Ὁ χρόνος μετριέται σέ:

Ἡμέρες:

α) 1 ἡμέρα = ***24 ὧρες*** ἢ 1 εἰκοσιτετράωρο.
β) 1 ὥρα = ***60 πρῶτα λεπτὰ*** (τὰ σημειώνουμε μὲ ').
γ) 1 πρῶτο λεπτὸ = ***60 δευτερόλεπτα*** ('').

Ἔχομε καὶ μεγαλύτερες μονάδες χρόνου:

α) τὴν ***ἑβδομάδα*** = 7 ἡμέρες.
β) τὸ ***μῆνα*** = 30 ἡμέρες.
γ) τὸ ***χρόνο*** ἢ τὸ ***ἔτος*** = 12 μῆνες = 360 ἡμέρες.
δ) τὸν ***αἰῶνα*** ἢ ἑκατονταετηρίδα = 100 χρόνια.
ε) τὴ ***χιλιετηρίδα*** = 1000 χρόνια.

Σημείωση: Οἱ μῆνες ὑπολογίζονται μὲ 30 ἡμέρες. Ὁ χρόνος μὲ 360 ἡμέρες Οἱ μῆνες λογαριάζονται ὡς ἑξῆς:

α) ***Γενάρης***: πρῶτος μῆνας (γράφεται μὲ τὸν ἀριθ. 1).
β) ***Φλεβάρης***: δεύτερος μῆνας (γράφεται μὲ τὸν ἀριθ. 2).
γ) Κλπ. κλπ.

Ἀσκήσεις.

Τρέψετε χιλιετηρίδες σὲ αἰῶνες, αἰῶνες σὲ χρόνια, χρόνια σὲ μῆνες, μῆνες σὲ ἡμέρες, ἡμέρες σὲ ὧρες, ὧρες σὲ πρῶτα λεπτὰ (′) καὶ πρῶτα λεπτὰ σὲ (″).

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, τὰ διάφορα μέτρα, σταθμά, τὰ νομίσματα καὶ ὁ χρόνος δὲν παριστάνονται μὲ ἕνα μονάχα ἀκέραιο ἀλλὰ μὲ πολλοὺς ἀριθμοὺς ἢ μονάδες ποὺ εἶναι τῆς ἴδιας οἰκογένειας (ὁμοειδεῖς) ἀλλὰ ἔχουν δικό τους ὄνομα καὶ εἶναι ὑποδιαιρέσεις τῆς βασικῆς μονάδας. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. 7 στατ. 23 ὀκάδ. καὶ 250 δράμια οὔτε ἀκέραιος εἶναι, σὰν ἕνας ἀριθμός, οὔτε κλασματικὸς οὔτε δεκαδικός. Τὸ ἴδιο καὶ ὁ ἀριθμὸς 15 στερ. 9 σελ. 12 πέννες καὶ 1 φαρδίνι. Ἢ ὁ ἀριθμὸς 4 ἔτη 8 μῆνες 27 ἡμέρες 14 ὧρες 45′ καὶ 20″.

Ὅλοι οἱ παραπάνω ἀριθμοὶ λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα **συμμιγεῖς ἀριθμοὶ** καὶ γράφονται σὲ μιὰ σειρά. Πρῶτα οἱ μονάδες τῆς ἀνώτερης τάξης. Ὕστερα οἱ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξης κλπ. Οἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων χωρίζονται μεταξύ τους μὲ μιὰ παῦλα (—). Π. χ. 150 στατῆρ. 22 ὀκ. καὶ 200 δραμ. γράφονται ἔτσι: 15σ.—22ὀκ.—200δρμ.

Α′. Πῶς τρέπομε τοὺς συμμιγεῖς σὲ μονάδες τῆς κατώτερης ἢ σὲ μονάδες τῆς τελευταίας τάξης καὶ ἀντίθετα.

Ἕνα παράδειγμα: Νὰ τραποῦν 4 ἔτη 7 μῆνες καὶ 16 ἡμέρες σὲ ἡμέρες.

Λύση: Ἡ ἄσκηση αὐτὴ καταστρώνεται ἔτσι:

4 ἔτ. 7 μῆν. 16 ἡμέρ. = *1666 ἡμέρες.*

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ +7 \\ \hline 55 \text{ μην.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 55 \text{ μην.} \\ \times 30 \\ \hline 1650 \\ +16 \\ \hline 1666 \text{ ἡμ.} \end{array}$$

Δεύτερο παράδειγμα : Νὰ τραποῦν 3600″ σὲ ὧρες.

Λύση :

3600″	60″	
360	60′	60′
0000	60	
	00	1 ὥρα

ἄρα ἔχομε 1 ὥρα ἀκριβῶς

Κανόνας πρῶτος :

Γιὰ νὰ τρέψουμε συμμιγὴ σὲ μονάδες τῆς κατώτερης ἢ τῆς τελευταίας του τάξης, τρέπουμε πρῶτα τὶς μονάδες τῆς ἀνώτερης τάξης σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης. Ἔπειτα τὶς μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξης σὲ μονάδες τῆς παρακάτω τάξης κ.ο.κ. (τὰ ἔτη σὲ μῆνες, τοὺς μῆνες σὲ ἡμέρες ἢ τὶς γιάρδες σὲ πόδια κ.λ.π. ἢ τοὺς πήχεις σὲ ρούπια κ.λ.π.) καὶ στὸ γινόμενο προσθέτουμε τὶς μονάδες τῆς ἀντίστοιχης τάξης.

Γιὰ νὰ τρέψουμε μονάδες τῆς τελευταίας τάξης σὲ μονάδες κάποιας ἀνώτερης τάξης διαιροῦμε τὶς μονάδες αὐτὲς μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ παριστάνει μιὰ ὁλόκληρη ἀνώτερη μονάδα (π. χ. τὰ δευτερόλεπτα μὲ τὸ 60″ καὶ βρίσκομε τὰ πρῶτα λεπτὰ κ.ο.κ. ἢ τὰ ρούπια διὰ τοῦ 8 καὶ βρίσκομε τοὺς πήχεις κ.ο.κ.) καὶ ἔτσι προχωροῦμε ἕως ἐκεῖ ποὺ θέλομε.

Ἀσκήσεις.

1. Τρέψετε 16 στερλ. 10 σελ. 8 πέννες 3 φαρδ. σὲ φαρδίνια.

2. Τρέψετε τὸν ἴδιο ἀριθμὸ σὲ σελίνια ἢ σὲ πέννες μονάχα.

3. Τρέψετε 95 τόννους 372 στατ. 32 ὀκ. καὶ 150 δράμια σὲ δράμια πρῶτα, ὕστερα σὲ ὀκάδες.

4. Τρέψετε 89 γιάρδες, 1 πόδι 7 ἴντσες σὲ ἴντσες (καὶ σὲ πόδια ὕστερα).

5. Τρέψετε 1.200 δολλάρια καὶ 90 σέντς σὲ σέντς.

6. Τρέψετε 2.500 ρούβλια καὶ 51 καπίκια σὲ καπίκια.

7. Τρέψετε καὶ ὅλα τὰ ἄλλα νομίσματα ποὺ μάθαμε στὶς μονάδες τῆς τελευταίας τους τάξης.

8. Τρέψετε 60.856″ σὲ πρῶτα λεπτά, σὲ ὧρες, ἡμέρες, μῆνες κ.λ.π.

9. Τρέψετε 70.974.300 δράμια σὲ ὀκάδες, στατῆρες, τόννους.

10. Τρέψετε 220.000 ἴντσες σὲ πόδια, γιάρδες.

11. Τρέψετε 30.830.200 ἑκατοστὰ (πόντους) τοῦ μέτρου σὲ μέτρα, χιλιόμετρα καὶ σὲ ναυτικὰ μίλια.

Β'. Πῶς τρέπομε κλάσμα σὲ συμμιγή.

Ἕνα παράδειγμα: Νὰ τραποῦν $\frac{3}{4}$ τοῦ στατῆρα σὲ ὀκάδες.

Λύση:

3	4
X44	
132 ὀκ.	0 στ. 33 ὀκ.
12	
0	

Δεύτερο παράδειγμα: Νὰ τραπῆ τὸ κλάσμα $\frac{15}{7}$ τοῦ πήχη σὲ πήχεις.

Λύση:

15	7
14	
1	2 πήχ. 1 ρ. καὶ $\frac{1}{7}$ τοῦ ρ.
X8	
8	
7	
1	

Κανόνας δεύτερος:

Γιὰ νὰ τρέψουμε ἕνα κλάσμα σὲ συμμιγὴ διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ μὲ τὸν παρονομαστή. Τὸ πρῶτο πηλίκο, ποὺ θὰ βροῦμε, θὰ εἶναι ἡ πρώτη ἀνώτερη μονάδα τοῦ συμμιγῆ. Τὸ ὑπόλοιπο θὰ διαιρεθῆ πάλι, ἀφοῦ πρῶτα τραπῆ σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξης, κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις:

1) Νὰ τραπῆ τὸ κλάσμα $\frac{71}{90}$ σὲ χρόνια, ἡμέρες, ὧρες κ.λ.π.

2) Νὰ τραπῆ τὸ κλάσμα $\frac{350}{65}$ σὲ στερ. σελ. πέν. καὶ φαρδίνια. (1 στερ. ἔχει 20 σελίνια κλπ.).

3. Νὰ τραπῆ τὸ κλάσμα (ὁ μικτὸς) $83\frac{1}{3}$ σὲ γιάρδες, πόδια, ἴντσες. (1 γιάρ. ἔχει 3 πόδια κλπ.)

4. Νὰ τραπῆ τὸ κλάσμα $150\frac{3}{4}$ σὲ λίβρες καὶ οὐγγιές. (1 λίβρα=16 οὐγγιές).

Κάμετε μόνοι σας διάφορα τέτοια προβλήματα μὲ τόννους, στατῆρες, ὀκάδες, δράμια, νομίσματα, πήχεις κλπ.

Γ'. Πῶς προσθέτομε καὶ ἀφαιροῦμε τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς.

Πρόσθεση :

Παράδ. α)	93 στατ.	— 36 ὀκ.	— 100 δρμ.
+	9	— 11	— 300
	18	— 28	— 250
	121	— 32	— 250

Παραδ. β)	18π.	— 7ρ
+	9	— 6
	25	— 3
	54	— 0

Ἀφαίρεση :

Παράδ. α)	480 ἔτη	— 8 μῆν.	— 29 ἡμέρ.
	93	— 11	— 17
	386	— 9	— 12

Παραδ. β)	93	— 5ρ.
—	71	— 7
	21	— 6

Κανόνας τρίτος :

Γιὰ νὰ προσθέσουμε ἢ ἀφαιρέσουμε συμμιγεῖς ἀριθμοὺς τοὺς βάζομε τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο ὅπως καὶ στοὺς ἀκεραίους. Προσέχομε μονάχα οἱ μονάδες κάθε τάξης νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὶς μονάδες τῆς ἴδιας τάξης τοῦ ἄλλου προσθετέου. Ἡ πρόσθεση καὶ ἡ ἀφαίρεση ἀρχίζουν πάντοτε ἀπὸ τὶς μονάδες τῆς τελευταίας τάξης.

Π ρ ο σ ο χ ή : α) ἅμα τὸ ἄθροισμα, στὴν πρόσθεση, τῶν μονάδων τῆς κατώτερης τάξης περιέχη μιὰ ἢ περισσότερες μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξης, τὶς βγάζομε καὶ τὶς προσθέτομε σὲ κεῖνες (κύττα β'. παράδειγμα τῆς πρόσθεσης). β) Ἅμα, στὴν ἀφαίρεση, δὲ φτάνουν δηλ. δὲν ἀφαιροῦνται οἱ μονάδες κάποιας τάξης, δανειζόμαστε μιὰ μονάδα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνώτερη τάξη (κύττα τὸ β'. παράδειγμα τῆς ἀφαίρεσης).

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρόσθεσης καὶ ἀφαίρεσης.

Πρόσθεση:

1) Ἕνας χωρικὸς ἁλώνισε στὶς 25 Ἰουνίου 74 στατ. 36 ὀκ. καὶ 180 δράμια σιτάρι. Στὶς 28 τοῦ ἴδιου μῆνα ἁλώνισε 62 στ. 17 ὀκ. καὶ 300 δράμια. Καὶ στὶς 7 Ἰουλίου 50 στ. 26 ὀκ. καὶ 230 δράμια. Πόσο σιτάρι ἁλώνισε καὶ τὶς τρεῖς φορές;

2) Ἕνας ἔμπορος ἔκανε τρία ταξίδια στὴν Ἀθήνα γιὰ ν' ἀγοράση ὑφάσματα. Στὸ πρῶτο ταξίδι ξόδεψε 57 στερ. 15 σελ. 8 πέννες. Στὸ δεύτερο 220 στερ. 16 σελ. 3 πέννες. Καὶ στο τρίτο 165 στ. καὶ 18 σελ. Πόσες λίρες κλπ. ξόδεψε καὶ στὰ τρία ταξίδια;

3) Τὸ ἀτμόπλοιο «Κορινθία» ἔτρεξε: α) 223 μίλια καὶ 650 μέτρα γιὰ νὰ πάη ἀπὸ Πειραιᾶ στὴ Θεσσαλονίκη. β) 470 μίλια καὶ 900 μέτρα γιὰ νὰ πάη ἀπὸ Πειραιὰ στὴν Ἀλεξάνδρεια. γ) 470 μίλια καὶ 200 μέτρα γιὰ νὰ πάη ἀπὸ Πειραιὰ στὸ Πρίντεζι. Πόσα μίλια ἔτρεξε ὅλα ὅλα;

4) Ἕνας ὑφασματέμπορος πούλησε μιὰ μέρα 82 πήχεις καὶ 6 ρούπια ὕφασμα. Ἄλλη μέρα 230 πήχεις καὶ 5 ρούπια. Καὶ ἄλλη μέρα 367 π. καὶ 7 ρ. Πόσους πήχεις ὕφασμα πούλησε τὸ ὅλο;

5) Τρία αὐτοκίνητα ξεκίνησαν μαζὶ ἀπὸ τὴν Ἀθήνα γιὰ τὴν Πάτρα. Τὸ ἕνα ἔτρεξε τὴν ἀπόσταση σὲ 12 ὧρες 25′ καὶ 45′′. Τὸ δεύτερο σὲ 14 ὥρ. 32′ καὶ 55′′. Καὶ τὸ τρίτο σὲ 9 ὥρ. 15′ καὶ 30′′. Πόσες ὧρες ταξίδι ἔκαναν καὶ τὰ τρία αὐτοκίνητα μαζί;

6) Γιὰ τὰ μαθητικὰ συσσίτια τοῦ σχολειοῦ μας παραλάβαμε τὸ Νοέμβριο 2542 λίβρες καὶ 10 οὐγγιὲς τρόφιμα. Τὸ Δεκέμβριο 1250 λίβρες καὶ 10 οὐγγιές. Τὸ Γενάρη 1943 λ. καὶ 12 οὐγγιές. Τὸ Φλεβάρη 2900 λ. καὶ 11 οὐγ. Τὸ Μάρτη 3560 λ. καὶ 15 οὐγ. Πόσες λίβρες τρόφιμα παραλάβαμε μέχρι τὸ Μάρτη;

7) Λύσετε καὶ σεῖς τὰ δικά σας προβλήματα μὲ χρόνια, πήχεις, στατῆρες, γιάρδες, νομίσματα κλπ.

Ἀφαίρεση:

1) Ἕνας χωρικὸς ἔβγαλε ἀπὸ τὰ χωράφια του 137 στατῆρες 29 ὀκάδες καὶ 300 δράμια σίκαλη. Ἀπὸ αὐτὴ τὴν ποσότητα πούλησε 16 στ. 33 ὀκ. 350 δράμια, γιὰ νὰ ψωνίση ροῦχα γιὰ τὰ παιδιά του. Πόση σίκαλη τοῦ περίσσεψε;

2) Ἕνας ἔμπορος εἶχε 85 στερ. 7 σελ. καὶ 2 πέννες. Ἀπὸ τὸ ποσὸν αὐτὸ ξόδεψε 58 στερ. 10 σελ. καὶ 13 πέννες γιὰ νὰ ἀγοράση ἐμπόρευμα. Τί ποσὸν τοῦ περίσσεψε;

3) Ἕνα τόπι πανὶ εἶχε μάκρος 72 γιάρδες 2 πόδια καὶ 9 ἴν-

τσες. Ἅμα πουλήση ὁ ἔμπορος ἀπ' αὐτὸ 16 γιάρδες, 1 πόδι καὶ 10 ἴντσες, τί θὰ τοῦ ἀπομείνη;

4) Ὁ Σάκης γεννήθηκε στὶς 19 Νοεμβρίου 1933. Ἡ Μαρίκα στὶς 17 Σεπτεμβρίου 1932. Καὶ ὁ Χάρης στὶς 22 Ἰουνίου 1930. Καὶ τὰ τρία αὐτὰ παιδιὰ εἶναι μαθητὲς τῆς ΣΤ' τάξης τοῦ σχολειοῦ μας. Πόσων χρονῶν, πόσων μηνῶν καὶ πόσον ἡμερῶν εἶναι σήμερα καθένα ἀπὸ τὰ παιδιὰ αὐτά;

5) Βρῆτε καὶ σεῖς, παιδιά, τὴν ἡλικία τῶν γονιῶν σας, τῶν ἀδερφιῶν σας κλπ.

6) Πόσα χρόνια, μῆνες καὶ μέρες πέρασαν μέχρι σήμερα ἀπὸ τὴ μάχη τοῦ Μαραθώνα, τῆς Σαλαμίνας, τῶν Θερμοπυλῶν, τὴν κτίση τῆς Κων)λης ἀπὸ τὸ Μ. Κωνσταντῖνο, τὴν ἅλωσή της ἀπὸ τὸ Μωάμεθ;

7) Πόσα χρόνια, μῆνες καὶ μέρες πέρασαν μέχρι σήμερα ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ κηρύχτηκε ἡ ἐπανάσταση τοῦ 1821 ἢ ἀπὸ τὴν πολιορκία καὶ ἔξοδο τοῦ Μεσολογγιοῦ, τὴ ναυμαχία τοῦ Ναυαρίνου κ.λ.π. κ.λ.π.

8) Κάμετε καὶ σεῖς διάφορα τέτοια προβλήματα δικά σας.

Δ'. Πῶς πολλαπλασιάζομε καὶ διαιροῦμε τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς.

α) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγῆ μὲ ἀκέραιο:

Ἕνα παράδειγμα: Ἕνας μυλωνὰς ἀγόρασε 12 σακκιὰ ἀλεύρι. Κάθε σακκὶ εἶχε 1 στατ. 8 ὀκ. 180 δράμια. Πόσο ἦταν ὅλο τὸ ἀλεύρι ποὺ ἀγόρασε;

Λύση:	1 στ.	8 ὀκ.	180 δρμ.
			Χ 12
	12—	96—	2160
ἄρα	14—	13—	160

Κανόνας τέταρτος:

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε συμμιγὴ μὲ ἀκέραιο ἀρχίζομε τὸν πολλαπλασιασμὸ ἀπὸ τὶς μονάδες τῆς τελευταίας τάξης. Ὕστερα τὸν πολλαπλασιάζομε μὲ τὶς μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξης κ.ο.κ.

Σημ. Ὅταν ἕνα γινόμενο περιέχη μονάδες τῆς ἀνώτερης τάξης, τὶς βγάζομε καὶ τὶς προσθέτομε στὶς μονάδες τῆς κατηγορίας τους.

β) Διαίρεση συμμιγῆ μὲ ἀκέραιο.

Ἕνα παράδειγμα: Δυὸ γεωργοὶ καλλιέργησαν ἕνα χωράφι μεσιακὸ καὶ τὸ ἔσπειραν σιτάρι. Ὅταν τὸ ἁλώνισαν ἔβγαλαν 59 στ. 26 ὀκ. 200 δράμια. Πόσο σιτάρι ἀναλογεῖ στὸν καθένα τους;

Λύση: 59 στ. — 26 ὀκ. — 200 δρμ. | 2

59 στ. — 26 ὀκ. — 200 δρμ.		2
58	200	29 στ. — 35 ὀκ. 100 δρμ.
1	000	
×44		
44		
+26		
70		
70		
0		

Κανόνας πέμπτος:

Γιὰ νὰ διαιρέσουμε συμμιγὴ μὲ ἀκέραιο ἀρχίζομε τὴ διαίρεση ἀπὸ τὶς ἀνώτερες μονάδες. Ὅ,τι βρίσκομε μπαίνει στὸ πηλίκο. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ τρέπομε πάντοτε σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξης. Ὕστερα προσθέτομε σ᾿ αὐτὲς καὶ τὶς ἄλλες μονάδες τῆς ἴδιας τάξης καὶ κάνομε τὴ διαίρεση.

γ) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγῆ μὲ κλάσμα.

Ἕνα παράδειγμα: Νὰ πολλαπλασιαστῆ ὁ **συμμιγὴς 8 ἔτη — 6 μῆνες — 21 ἡμέρες** μὲ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$

Λύση 8 ἔτη — 6 μ. — 21 ἡμ.

X7

59	— 10	— 27	8
56			$7 - 5 - 25\frac{7}{8}$
3 ἔτη			
X12			
36	6		
+10	X30		
46	180		
40	+27		
6	207		
	47		
	7		

Κανόνας ἕκτος :

Γιὰ νὰ πολλασιάσωμε συμμιγῆ μὲ κλάσμα πολλαπλασιάζομε τὸ συμμιγὴ πρῶτα μὲ τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βροῦμε τὸ διαιροῦμε μὲ τὸν παρονομαστὴ (κύττα τοὺς κανόνες τέταρτο καὶ πέμπτο).

δ) Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση συμμιγῆ μὲ συμμιγή.

Τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲ λύονται εὔκολα. Ἄλλωστε κανένας δὲν τὰ ἐφαρμόζει στὴ ζωή. Γιὰ νὰ λυθοῦν ὅμως εὐκολώτερα πρέπει νὰ ἔχετε ὑπόψη τὸν ἑξῆς κανόνα:

α) Ὅλα τὰ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαίρεσης: συμμιγῆ μὲ συμμιγὴ λύνονται εὐκολώτερα, ἅμα τρέψωμε τὸν ἕναν ἀπὸ τοὺς συμμιγεῖς σὲ ἀκέραιο (μονάδες κατώτερης τάξης).

β) Μὰ καὶ ὅλα τὰ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαίρεσης τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν λύνονται εὐκολώτερα, ἅμα τρέψουμε ὅλους τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς (ὅπου κι ἂν τοὺς συναντήσουμε) σὲ ἀκεραίους ἢ κλάσματα. Ἀπὸ ἐκεῖ καὶ πέρα ἐφαρμόζονται οἱ κανόνες τῶν ἀκεραίων ἢ κλασμάτων.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαίρεσης συμμιγῶν.

Ἀσκήσεις.

1. Νὰ τραπῆ ὁ συμμιγὴς 34 γιάρδες 2 πόδια 6 ἴντσες σὲ ἀκέραιο (ἴντσες).

2. Ὁ ἴδιος συμμιγὴς νὰ πολλαπλασιαστῆ μὲ τὸ 15 καὶ νὰ διαιρεθῆ μὲ τὸ 8.

2. Νὰ τραπῆ ὁ συμμιγὴς 25 ἔτη 11 μῆνες σὲ κλάσμα $\left(=25\frac{11}{12}\right)$.

Ὁ ἴδιος συμμιγὴς νὰ πολλαπλασιασθῆ μὲ τὸν ἀριθμὸν 35 καὶ νὰ διαιρεθῆ κὲ τὸ 65.

4. Νὰ τραπῆ ὁ συμμιγὴς 42 στερ. 10 πέννες σὲ κλάσμα $\left(=42\frac{10}{20}\right)$. *Ὁ ἴδιος νὰ πολλαπλασιαστῆ μὲ τὸ μικτὸ* $7\frac{3}{4}$ *καὶ νὰ διαιρεθῆ μὲ τὸ* $\frac{1}{3}$.

5. Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 80 λίβρες καὶ 13 οὐγγιὲς σὲ κλάσμα $\left(=80\frac{13}{16}\right)$. *Ὁ ἴδιος νὰ πολλαπλασιαστῇ μὲ τὸ* $\frac{7}{8}$ *καὶ νὰ διαιρεθῇ μὲ τὸ* $\frac{2}{5}$.

6. Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 78 στατ. 30 ὀκ. καὶ 300 δράμια σὲ ἀκέραιο. Ὁ ἴδιος νὰ πολλαπλασιαστῇ μὲ τὸ $\frac{3}{4}$.

Προβλήματα.

1) Ἕνας φούρναρης ἀγόρασε 5 σακκιὰ ἀλεύρι ποὺ τὸ καθένα περιεῖχε 73 ὀκ. καὶ 250 δράμια. Πόσο ἀλεύρι ἀγόρασε;

2) Ὁ ἴδιος φούρναρης ζύμωσε μὲ τὸ ἀλεύρι αὐτὸ ψωμιά. Γιὰ κάθε ψωμὶ χρειάστηκε 300 δράμια ἀλεύρι. Πόσα ψωμιὰ ζύμωσε;

3) Ἕνας πατέρας εἶχε τρία χωράφια. Τὸ ἕνα ἦταν 22 δεκαδικὰ στρέμματα καὶ 450 τ. μέτρα. Τὸ ἄλλο 15 στρ. καὶ 370 τ. μ. Καὶ τὸ τρίτο 34 στρ. καὶ 800 τ. μ. Ὅλα αὐτὰ τὰ στρέμματα τὰ μοίρασε στὰ 4 παιδιά του. Πόσα πῆρε τὸ καθένα;

4) Τὸν Ἰούνιο τοῦ 1947 ἐκποιηθήκανε σὲ μιὰ πόλη ἀπὸ τὴν Οὔνρα τὰ ἑξῆς εἴδη μὲ τὶς ἀντίστοιχες τιμές τους: α) 762 ὀκ. 200 δράμια κακάο πρὸς 21.000 τὴν ὀκά. β) 3452 λίβρες καὶ 10 οὐγγιὲς γάλα ἐβαπορὲ πρὸς 2400 δρ. τὴν ὀκά. γ) 15.800 λίβρες καὶ 8 οὐγγιὲς κονσέρβες πρὸς 4150 δρ. τὴν ὀκά. δ) 35.600 ὀκ. 300 δράμια ἄλευρα πρὸς 4150 τὴν ὀκά. Πόσα χρήματα εἰσπράχθηκαν ἀπὸ τὴν ἐκποίηση αὐτή;

5) Ἕνας ἀγρότης τὸν καιρὸ τῆς Γερμανοϊταλικῆς κατοχῆς ἀντήλλαξε 250 ὀκ. καὶ 300 δράμια σιτάρι μὲ 46 πήχ. καὶ 6 ρούπια ὕφασμα. Πόσο σιτάρι θἄπρεπε νὰ δώση γιὰ νὰ πάρη 62 πήχ. καὶ 5 ρούπια;

6) Γιὰ νὰ ἀγοράσης σήμερα 4 πήχεις καὶ 6 ρούπια ἀπὸ ἕνα καλὸ ἀνδρικὸ ὕφασμα πρέπει νὰ πληρώσης 650,000 δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσης γιὰ νὰ ἀγοράσης 16 πήχεις καὶ 3 ρούπια ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

7) Ἕνας ταχυδρόμος βαδίζει τὴν ὥρα 4 χιλιόμετρα καὶ 600 μ. Σὲ πόσες ὥρες θὰ διατρέξη 46 χιλ. καὶ 800 μ. ἀπόσταση;

8) Ἡ λίρα στερλίνα ἀξίζει σήμερα 124 200 δραχ. Πόσο ἀξίζουν 17 λίρες καὶ 5 σελ. (ἢ 35 στερ. 12 σελ. 8 πέννες);

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μὴ ξεχνᾶτε, παιδιά, ποτὲ τοὺς κυριώτερους συμμιγεῖς ἀριθμοὺς ποὺ χρησιμοποιοῦνται σήμερα στὴν Ἑλλάδα. Παραπάνω σᾶς τοὺς δώσαμε ὅλους. Στὸν παρακάτω πίνακα θὰ βρῆτε τοὺς κυριώτερους, αὐτοὺς ποὺ συναντᾶτε κάθε μέρα. Μὲ αὐτοὺς νὰ κάνετε δικά σας προβλήματα, ὅσα θέλετε.

Α'. Γιὰ τὸ μάκρος	**Β'. Γιὰ τὶς ἐπιφάνειες**	**Γ', Γιὰ τὸν ὄγκο**	**Δ'. Γιὰ τὴ χωρητικότητα**
1. Τὸ *μέτρο*. 2. Τὸ *χιλιόμετρο*. 3. Τὸ *μίλι* (1852 μ.). 4. Τὸν *πήχη* (0,64 μ.) 5. Τὸν *τεκτονικὸ πήχη* (0,75 μ.). 5. Τὴ *γιάρδα* (0,914 μ.).	1. τὸ *τετρ. μέτρο*. 2. Τὸ *τ. χιλιόμετρο*. 3. Τὸ *δεκαδ. στρέμμα* ποὺ ἔχει 1000 τ. μέτρα. 4. Τὸ *παλαιὸ στρέμμα* ποὺ ἔχει 1270 τ. μ. 5. Τὸ *Μακεδονικὸ στρέμ.* ποὺ ἔχει 2000 τ. μ	1. Τὸ *κ. μέτρο*.	1. Τὴν *ὀκὰ* (δοχεῖο ποὺ χωράει 400 δράμια). 2. Τὴ *λίτρα* (δοχεῖο ποὺ χωράει 142 δράμ.), 3. Τὸ *ἑκατόλιτρο* (καδὶ ποὺ χωράει 100 λίτρες ἢ 35 ὀκάδες). 4. Τὸ *γαλλόνι* (δοχεῖο ποὺ χωράει 2 ὀκ. καὶ 240 δράμια).

Ε'. Γιὰ τὰ βάρη (ζύγισμα)	**ΣΤ'. Τὰ νομίσματα**	**Ζ'. Γιὰ τὸ χρόνο**
1. Τὴν *ὀκὰ* ποὺ ἔχει *400 δράμια*. 2. Τὸ *στατήρα* ποὺ ἔχει 44 ὀκάδες. 3. Τὸν *τόννο* ποὺ ἔχει 780 ὀκάδες. 4. Τὸ *κιλὸ* ποὺ ἔχει 312,5 δράμια ἢ 1000 γραμμάρ. 5. Τὸ *γραμμάριο* 6. Τὸ *δράμι* ποὺ ἔχει 3,2 γραμμάρια. 7. Τὴ *λίβρα* ποὺ ἔχει 142 δράμια. 8. Τὴν *οὐγγιὰ* ποὺ ἔχει 8,87 δράμια. 9. Τὸ *καράτιο* ποὺ εἶναι 0.2 τοῦ γραμμαρίου	1. Τὴ *δραχμὴ* = 100 λεπτά. 2. Τὸ *δολλάριο* = 100 σέντς (ἀξίζει 5000 δραχ.). 3. Τὴ *λίρα στερλίνα* 20 σελλίνια (ἀξίζει 124.000 δρ.). 4. Τὸ *γαλλικὸ φράγκο* = 100 σαντὶμ (ἀξίζει 50 δραχ.). 5. Τὴν *ἰταλικὴ λιρέτα* = 100 τσέντιμος (ἀξίζει σήμερα 000 δραχ. περίπου). 6. Τὸ *γερμανικὸ μάρκο* = 100 πφένιγγ (ἀξίζει σήμερα 13.000 δραχ. περίπου). 7. Τὴν *τουρκικὴ λίρα* = 100 γρόσια (ἀξίζει 94.000 δρ.) 8. Τὸ *ρωσσικὸ ρούβλι* = 100 καπίκια (ἀξίζει 60.000 δραχ. περίπου).	1. Τὴν *ἡμέρα*. . Τὴν *ὥρα*. 3. Τὸ *λεπτό*. 4. Τὸ *δευτερόλεπτο*. 5. Τὴ *βδομάδα* (= 7 ἡμέρ.). 6. Τὸ *μῆνα* (= 30 ἡμέρες). 7. Τὸ *χρόνο* (= 12 μῆνες ἢ 360 ἡμέρες). α) 1 ἡμέρα = 4 ὧρες. β) 1 ὥρα = 60' λεπτά. γ) 1' = 60'' λεπτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ἁπλὴ καὶ σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν.

Τί ὀνομάζομε μέθοδο.

Κάθε τρόπος, ποὺ μεταχειριζόμαστε γιὰ νὰ λύνουμε τὰ διάφορα προβλήματα τῆς ἀριθμητικῆς, τὸν ὀνομαζομε ***μέθοδο***.

Πόσες μέθοδες ἔχομε.

Πολλοὺς τρόπους καὶ πολλὲς μέθοδες μεταχειριζόμαστε στὴν ἀριθμητικὴ γιὰ νὰ λύσουμε τὰ προβλήματα, ποὺ μᾶς παρουσιάζονται στὴ ζωή. Οἱ σπουδαιότερες ὅμως μέθοδες τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι δύο:

1) ***Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα*** καὶ
2) ***Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν (ἁπλῆ καὶ σύνθετη).***

Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι πολὺ σπουδαία, γιατὶ εἶναι εὔκολη καὶ ἁπλή. Τόσο εὔκολη εἶναι ποὺ τὴ μεταχειρίζονται κατὰ ἁπλὸ τρόπο καὶ οἱ ἀγράμματοι, γιὰ νὰ λύνουνε ***πρακτικὰ*** διάφορα προβλήματα τῆς ζωῆς χωρὶς μολύβι καὶ χαρτί. Ἐμεῖς βέβαια ἐδῶ στὸ σχολειὸ δὲ θὰ τὴ μάθουμε τόσο ἁπλά, γιατὶ θέλομε νὰ τὴν ἐφαρμόσουμε ὄχι μονάχα στοὺς ἀκεραίους, μὰ καὶ στὰ κλάσματα κλπ.

Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στη μονάδα εἶναι εὔκολη, γιατὶ κάθε πρόβλημα ποὺ μᾶς παρουσιάζεται, μᾶς λέει νὰ τὸ λύνουμε ***ἀρχίζοντας πάντοτε ἀπὸ τὴ μονάδα*** κι ὅπου δὲ μποροῦμε νὰ ἀρχίζουμε ἀμέσως ἀπὸ τὴ μονάδα, νὰ προσπαθοῦμε ***νὰ φτάσουμε στὴ μονάδα*** κι ὕστερα νὰ προχωροῦμε παραπέρα. ***Κι ἅμα ξέρουμε πόσο ἀξίζει ἡ 1 μονάδα, δηλ. ἅμα ξέρουμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας, εὔκολα βρίσκουμε πόσο ἀξίζουν, οἱ πολλές, δηλ. ποιὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων*** (μὲ ἕνα πολλαπλασιασμό).

Μερικὰ παραδείγματα μὲ ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

1) ***Πρῶτο παράδειγμα μὲ ἀκεραίους:***

Πρόβλημα. Οἱ 56 ὀκ. σιτάρι ἀξίζουν 112.000 δραχ. Πόσο ἀξίζουν οἱ 16 ὀκάδες;

Λύση: Οἱ 56 ὀκ. ἀξίζουν 112.000 δραχ.

ἡ 1 ὀκ. θὰ ἀξίζει $\frac{112.000}{56}$

καὶ οἱ 16 θὰ ἀξίζουν $\frac{112.000 \times 16}{56} = 32.000$ δραχμές.

Παρατήρηση.

Ἡ μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα εἶναι εὔκολη, ἀλλὰ πολλὰ παιδιὰ δυσκολεύονται νὰ καταστρώσουν τὸ πρόβλημα κι ἔτσι δὲν τὸ λύνουν σωστά.

Πρόσεξε:

1. ***Τὸ ποσὸ ποὺ ξέρομε τὸ βάνομε πάντοτε πρὸς τὰ ἀριστερά.*** (π.χ. ἔχομε δραχμὲς καὶ θέλομε ν᾽ ἀγοράσουμε ὀκάδες· οἱ δραχμὲς θὰ μποῦν ἀριστερά).
2. ***Τὸ ποσὸ ποὺ ζητᾶμε νὰ βροῦμε τὸ βάνομε πάντοτε πρὸς τὰ δεξιὰ*** (π.χ. ἅμα ἔχομε δραχμὲς καὶ ζητᾶμε ὀκάδες, οἱ ὀκάδες θὰ μποῦν δεξιά.
3. Αὐτὸ νὰ τὸ προσέξετε στὸ παραπάνω πρῶτο πρόβλημα καὶ στὰ ἄλλα τρία προβλήματα ποὺ ἀκολουθοῦν.

2) ***Δεύτερο παράδειγμα:***

$8\frac{1}{2}$ πήχεις ὕφασμα ἀξίζουν 80.000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν 25 πήχεις;

Κατάταξη.

Λύση:

Τὰ $\frac{17}{2}$ πήχ. ἀξίζουν 80.000

τὸ $\frac{1}{2}$ » » $\frac{80.000}{17}$

τὰ $\frac{2}{2}$ (1 πήχ.) » $\frac{80.000 \times 2}{17} =$

καὶ οἱ 25 » » $\frac{80.000 \times 2 \times 25}{17} = 235.294\frac{2}{17}$ δραχ.

3) ***Τρίτο παράδειγμα:***

Μὲ τὸ $156\frac{1}{3}$ δρχ. ἀγοράζομε 2 πήχεις δαντέλλα κατώτερης ποιότητας. Πόσους πήχεις δαντέλλας θὰ γοράσουμε μὲ $358\frac{2}{5}$ δραχ.;

Κατάταξη.

Λύση:

με $\frac{469}{3}$ δραχ. ἀγορ. 2 π.

» $\frac{1}{3}$ $\qquad\frac{2}{469}$

» $\frac{3}{3}$ (= 1 δραχ.) $\qquad\frac{2 \times 3}{469}$

» $\frac{5}{5}$ (= 1 δραχ.) $\qquad\frac{2 \times 3}{469}$

» $\frac{1}{5}$ $\qquad\frac{2 \times 3}{469 \times 5}$

καὶ » $\frac{1792}{5}$, $\qquad\frac{2 \times 3 \times 1792}{469 \times 5}$ $\quad\frac{10752}{2345}$ $\quad\frac{1372}{2345}$ πή-
χεις. Δηλ. 4 πήχ. καὶ 4 ρούπ. περίπου.

4) *Τέταρτο παράδειγμα:*

Μὲ 60.000 δραχ. ἀγοράζομε $8\frac{3}{4}$ ὀκ. ζάχαρη. Πόσες ὀκάδες θὰ ἀγοράσουμε μὲ 90.000 δραχμές;

Κατάταξη.

Λύση:

Μὲ 60.000 δραχ. ἀγορ. $\frac{35}{4}$ ὀκάδες

» 1 » » $\frac{35}{4 \times 60.000}$

καὶ μὲ 90.000 » » $\frac{35 \times 90.000}{4 \times 60.000} = \frac{315}{24} = 13\frac{1}{8}$ πήχεις

Προβλήματα ποὺ λύνονται μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

1) Μὲ 30.000 δραχμὲς ἀγοράζομε 7 πήχεις πανί. Πόσα χρήματα θὰ δώσουμε γιὰ ν' ἀγοράσουμε 29 πήχεις ἀπὸ τὸ ἴδιο πανί;

2) Γιὰ νὰ σπαρθοῦν 25 στρέμματα γῆς χρειάστηκαν 282 ὀκάδες σιταρόσπορος. Πόσες ὀκάδες θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ σπαρθοῦν 68 στρέμματα;

3) Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ $3\frac{1}{4}$ ὥρας διατρέχει 72 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξη σὲ $12\frac{2}{3}$ ὧρες;

4) Ἕνα ἀτμόπλοιο χρειάστηκε 14 ὧρες γιὰ νὰ διατρέξη ἀπόσταση 183 χιλιομέτρων. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διατρέξη ἀπόσταση $245\frac{1}{3}$ χιλιομέτρων;

5) $5\frac{6}{7}$ ὀκάδες σύκα ἀξίζουν 13.560 δραχ. Ἂν δώσουμε 5000 δραχ. πόσες ὀκάδες σύκα θ' ἀγοράσουμε;

6) Ἕνας πατέρας μοίρασε 78 000 δραχμὲς στὰ 4 παιδιά του ὡς ἑξῆς: Στὸ πρῶτο ἔδωσε τὰ $\frac{2}{8}$, στὸ δεύτερο τὸ $\frac{1}{6}$, στὸ τρίτο τὰ $\frac{4}{12}$ καὶ στὸ τέταρτο τὸ $\frac{1}{4}$. Πόσα χρήματα ἔδωσε στὸ καθένα;

7) Κάμετε καὶ σεῖς, παιδιά, ἁπλὰ ἢ καὶ δύσκολα προβλήματα ἀναγωγῆς στὴ μονάδα γιὰ νὰ ἀσκηθῆτε.

Ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν.

Τὸ παραπάνω πρόβλημα λύνεται εὔκολα καὶ μὲ τὴ δεύτερη μέθοδο τῆς ἀριθμητικῆς, ποὺ ἀναφέραμε προτύτερα. Λύνεται καὶ μὲ τὴ ***μέθοδο τῶν τριῶν.***

Τί εἶναι ἡ μέθοδος τῶν τριῶν.

Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ὁ καλύτερος τρόπος γιὰ νὰ λύνουμε ***ὅλα σχεδὸν τὰ προβλήματα τῆς ἀριθμητικῆς.*** Αὐτὴ ποτὲ δὲ λαθεύει καὶ πάντοτε μᾶς δείχνει τὴ σωστὴ πράξη (πολλαπλασιασμὸ ἢ διαίρεση) ποὺ πρέπει νὰ κάνουμε. Λέγεται μέθοδος τῶν τριῶν, γιατὶ στὰ προβλήματα ποὺ λύνει, γνωρίζομε τρία πράμματα ***καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε ἕνα τέταρτο,*** ποὺ δὲν τὸ ξέρομε.

Παρατήρηση:

Ποσὸ λέγεται κάθε τι ποὺ μπορεῖ νὰ μετρηθῆ καὶ νὰ βρεθῆ μικρότερο ἢ μεγαλύτερο ἀπὸ ἕνα ἄλλο πράμμα καὶ γενικὰ κάθετι ποὺ μπορεῖ νὰ μεγαλώνη καὶ νὰ μικραίνη. (π.χ. 20 πήχεις, 1.000 δραχμές, 8 ἡμέρες κλπ.).

Ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα.

Δυὸ ποσά ἅμα μετρηθοῦνε ἢ συγκριθοῦνε ἀναμεταξύ τους, βλέπομε, πῶς ἔχουνε κάποια **ἀναλογία.** Δηλαδὴ ἅμα τὸ ἕνα μεγαλώνη μπορεῖ καὶ τὸ ἄλλο νὰ μεγαλώνη ἢ ἅμα τὸ ἕνα μικραίνη μπορεῖ καὶ τὸ ἄλλο νὰ μικραίνη. Μπορεῖ ὅμως, ἅμα μεγαλώνη τὸ ἕνα ποσό, νὰ μικραίνη τὸ ἄλλο ἢ ἅμα μικραίνη τὸ ἕνα, νὰ μεγαλώνη τὸ ἄλλο.

Πρόσεξε:

α) ***ποσὰ ἀνάλογα*** λέμε δυὸ ποσά, πού, ἅμα μεγαλώνη ἢ μικραίνη τὸ ἕνα, πρέπει νὰ μεγαλώνη ἢ νὰ μικραίνη καὶ τὸ ἄλλο. Π. χ. 7 πῆχες πανὶ ἔχουν 3.500 δραχμές. 14 πῆχες πανὶ θὰ ἔχουν 7.000 δραχμές. Δηλ. διπλασιάστηκαν οἱ πῆχες, διπλασιάστηκαν καὶ οἱ δραχμές. Ἡ 8 πῆχες ἀλατζὰς ἀξίζουν 3.0 0 δραχμές, οἱ 4 πῆχες θὰ ἀξίζουν 1500 δραχμές. Δηλ. λιγόστεψαν στὸ μισὸ οἱ πῆχες, λιγόστεψαν στὸ μισὸ καὶ οἱ δραχμές.

β) ***ποσὰ ἀντίστροφα*** λέμε δυὸ ποσά, ποὺ ἅμα μεγαλώνη τὸ ἕνα μικραίνει τὸ ἄλλο ἢ ἅμα μικραίνη τὸ ἕνα μεγαλώνει τὸ ἄλλο. Π. χ. 10 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 8 μέρες. 20 ἐργάτες τὸ σκάβουν σὲ 4 μέρες. Δηλ, ἐνῶ αὐξήθηκαν οἱ ἐργάτες λιγόστεψαν οἱ μέρες. Ἡ: 10 ἐργάτες, σκάβουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι σὲ 8 μέρες. 5 ἐργάτες θὰ χρειαστοῦν περισσότερες δηλ. διπλάσιες (16 μέρες).

Παρατήρηση:

Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λύνει ὅλα τὰ προβλήματα εἴτε ἔχουν ἀνάλογα ποσὰ εἴτε ἔχουν ἀντίστροφα τέτοια. Καὶ λέγεται ***ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν,*** ἅμα γνωρίζουμε τρεῖς ἀριθμούς, τρεῖς τιμὲς καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε ἕναν τέταρτο. Λέγεται ὅμως καὶ ***σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν,*** ἅμα ξέρουμε παραπάνω ἀπὸ τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε κάποιον ἄλλο ἄγνωστο.

Πῶς γίνεται ἡ κατάστρωση ἢ ἡ κατάταξη στὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Ἕνα παράδειγμα (τὸ ἴδιο): 56 ὀκάδες σιτάρι ἀξίζουν 112.000 δραχ. Πόσο κοστίζουν οἱ 16 ὀκάδες;

Κατάταξη.

Οἱ 56 ὀκάδ. σιτάρι ἀξίζουν 112 : 000 δραχ.
» 16 » » » Χ ;

ἢ

μὲ 112.000 δραχμὲς ἀγοράζουμε 56 ὀκάδες σιτάρι
» Χ; » » 16 » »

Πῶς λύνονται τὰ προβλήματα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Γενικὸς κανόνας:

Γιὰ νὰ λύσουμε ἕνα πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἀπὸ πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο «Χ» μὲ τὸ κλάσμα, ποὺ σχηματίζουν οἱ δυὸ ἄλλοι ἀριθμοὶ ἀντεστραμμένο, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ μὲ τὸ κλάσμα ὅπως εἶναι, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

1) ***Ἕνα παράδειγμα μὲ ποσὰ ἀνάλογα*** (τὸ ἴδιο): 56 ὀκάδες σιτάρι ἀξίζουν 112.000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν οἱ 16 ὀκάδες;

Κατάταξη.

56 ὀκ. ἀξίζουν 112.000 δραχ.
16 » » Χ;

Λύση: $X = 112.000 \times \frac{16}{56} = \frac{1.792.000}{56} = 32.000$ δραχ.

2) ***Ἕνα παράδειγμα μὲ ποσὰ ἀντίστροφα***: 10 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 8 μέρες. Πόσοι ἐργάτες θὰ τὸ σκάψουν σὲ 4 ἡμέρες;

Κατάταξη.

10 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 8 μέρες
Χ; » » » » » 4

Λύση: $X = 10 \times \frac{8}{4} = \frac{80}{4} = 20$ μέρες.

3) ***Ἕνα παράδειγμα μὲ κλάσματα***: Τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχ. ἀξίζουν 3200 δραχ. Πόσο ἀξίζουν $5\frac{1}{2}$ πήχεις;

Κατάταξη.

$\frac{7}{8}$ 3200

$5\frac{1}{2}\left(\frac{16}{2}\right)$ Χ;

Λύση:

α) $$X = 3200 \times \frac{\frac{16}{2}}{\frac{7}{8}} = 3200 \times \frac{16}{2} = \frac{51200}{2} : \frac{7}{8} = \frac{51200}{2} \times \frac{8}{7} =$$
$$= \frac{409600}{14} = 29.257\,\frac{2}{14}\left(\frac{1}{7}\right) \text{δρ.}$$

β) ἢ ἁπλούστερα $$X = 3200 \times \frac{16}{2} : \frac{7}{8} = 3200 \times \frac{16}{2} \times \frac{8}{7} =$$
$$= \frac{409600}{14} = 29.257\,\frac{1}{7}.$$

Παρατηρήσεις.

1. Ἅμα τὰ ποσὰ εἶναι μικτοί, τὰ τρέπουμε πάντοτε σὲ κλάσματα.
2. Ἅμα τὸ κλάσμα ποὺ σχηματίζουν δυὸ ποσὰ εἶναι σύνθετο, τότε τὸ ἀναλύομε σὲ ἁπλὸ ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἀρχή, ὅπως βλέπετε στὸ παραπάνω ὑπ᾽ ἀριθ. 3 παράδειγμα.

Διάφορα προβλήματα μὲ τὴ ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

α) Μὲ ποσὰ ἀνάλογα:

1) Γιὰ νὰ ἀγοράσουμε 27 ἀναγνωστικὰ βιβλία τῆς στ΄ τάξης τοῦ σχολειοῦ μας δώσαμε 75.000 δραχμές. Πόσο θὰ στοιχίζανε τὰ 3;

2) Μὲ 23.500 δραχμὲς ἀγοράσαμε 47 τετράδια γιὰ τὰ φτωχὰ παιδιὰ τῆς ε΄ τάξης. Πόσο θὰ πληρώναμε, ἂν ἀγοράζαμε 13 τετράδια μονάχα;

3) Ἀπὸ μιὰ πόλη ἕως μιὰ ἄλλη ἡ ἀπόσταση εἶναι 109 χιλιόμετρα. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει $27\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ φτάση ἀπὸ τὴ μιὰ πόλη στὴν ἄλλη; Κι ἂν ξεκινήση στὶς 10 σαὶ 45΄ π.μ., τί ὥρα ἀκριβῶς θὰ φτάση;

4) $45\frac{3}{7}$ γιάρδες ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀξίζουν 225.000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν 3 γιάρδες καὶ 2 ἴντσες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα; (μιὰ γιάρδα ἔχει 3 ἴντσες).

5) Μιὰ λίρα στερλίνα ἀξίζει σήμερα 124.000 δραχ. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ δώσουμε γιὰ νὰ ἀγοράσουμε 4 λίρες καὶ 8 σελλίνια; (ἡ λίρα ἔχει 20 σελλίνια).

6) $4\frac{2}{8}$ πήχεις κασμήρι ἔχουν 168.500 δραχ. Πόσο ἔχουν 21,3 πήχεις;

7) Μιὰ ὑφάντρα ὑφαίνει 9,40 μέτρα ὕφασμα στὸν ἀργαλειὸ μέσα σὲ $4\frac{1}{4}$ ὧρες. Πόσους πήχεις θὰ ὑφάνῃ σὲ μιὰ μέρα;

8) Ἕνα βαπόρι ξεκινάει ἀπὸ τὸν Πειραιὰ γιὰ τὴ Θεσσαλονίκη στὶς 6 τὸ πρωῒ τὴν Πέμπτη. Τρέχει $12\frac{1}{5}$ μίλια τὴν ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες καὶ ποιὰ μέρα καὶ ὥρα θὰ φτάσῃ ἀκριβῶς στὴ Θεσσαλονίκη, ὅταν ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὸν Πειραιὰ μέχρις ἐκεῖ εἶναι 223 μίλια;

9) Ἕνα δολλάριο ἀξίζει 7000 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ πάρετε ἀπὸ τὴν Τράπεζα, ἂν πᾶτε νὰ ἐξοφλήσετε ἕνα τσὲκ ἀπὸ 55 δολλάρια, ποὺ σᾶς ἔστειλε ὁ θεῖος σας ἀπὸ τὴν Ἀμερική;

10. Γιὰ νὰ σκάψουμε 15 μέτρα αὐλάκι στὸ σχολικό μας κῆπο ἐργάστηκαν ὅλα τὰ παιδιὰ τῆς στ΄ τάξης 4 ὧρες τὴν ἡμέρα στὸ διάστημα μιᾶς ὁλόκληρης ἑβδομάδας. Πόσες ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ ἔπρεπε νὰ ἐργαστοῦν τὰ παιδιά, ὥστε νά σκαφτῆ αὐλάκι 62,80 μ. ὁλόγυρα ἀπὸ τὸ σχολικὸ κῆπο;

11) Λύσετε, παιδιά, καὶ τὰ ἕξ (6) προβλήματα τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα, ποὺ βρίσκονται στὶς προηγούμενες σελίδες, ἀλλὰ μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν τώρα.

β) Μὲ ποσὰ ἀντίστροφα :

1) 400 στρατιῶτες εἶναι κλεισμένοι σὲ ἕνα φρούριο καὶ ἔχουν τροφὲς γιὰ νὰ περάσουν 40 ἡμέρες. Ἅμα φύγουν 230 στρατιῶτες σὲ μιὰ ἀποστολή, γιὰ πόσες μέρες θἄχουν τροφὲς οἱ ὑπόλοιποι, ποὺ ἔμειναν στὸ φρούριο;

2) Ἡ Κατινίτσα γιὰ νὰ κάνῃ ἕνα φουστάνι χρειάζεται $5\frac{3}{8}$ πήχ. ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ποὺ τὸ πλάτος του εἶναι 7 ρούπια. Πόσους πήχεις θὰ χρειαστῆ ἀπὸ ἕνα ἄλλο ὕφασμα μὲ πλάτος 1 πήχη καὶ 2 ρούπια γιὰ νὰ κάνῃ τὸ ἴδιο φόρεμα;

3) Ἕνας ἀγροτικὸς διανομέας βαδίζει $6\frac{1}{5}$ ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ τελειώνει τὴν περιοδεία του σὲ 7 ἡμέρες. Σὲ πόσες μέρες θὰ τελείωνε τὴν περιοδεία του, ἂν βάδιζε 8 ὧρες τὴν ἡμέρα;

4) Μερικὰ παιδιὰ τοῦ σχολειοῦ μας δεύλεψαν μερικὲς μέρες καὶ ἔφτιαξαν μιὰ πρόχειρη δεξαμενὴ μὲ πλάτος 2,20 καὶ βάθος 3,30 μ. Ἂν τὰ ἴδια παιδιὰ στὶς ἴδιες ἡμέρες ἔσκαβαν μιὰ ἄλλη δεξαμενὴ μὴ πλάτος 4,50 μ., πόσο θὰ ἦταν τὸ βάθος της;

5) Ἕνας μάστορας (κτίστης) κτίζει 3,60 μ. τοῖχο τὴν ἡμέρα μὲ

πάχος 0,90 μ. Πόσο θὰ εἶναι τὸ πάχος τοῦ τοίχου, ἂν ὁ ἴδιος μάστορας κτίση τὴν ἡμέρα 2,75 μ. τοῖχο;

6) Ἕνα καΐκι τρέχει 7 μίλια τὴν ὥρα καὶ κάνει τὴ διαδρομὴ ἀπὸ τὸν Πειραιὰ στὴν Πρέβεζα σὲ μιὰ μέρα καὶ 3 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ κάνη τὴν ἴδια διαδρομὴ ἕνα πλοῖο ποὺ τρέχει 13 μίλια τὴν ὥρα;

7) Ἕνα ἀρτεσιανὸ πηγάδι σὲ μιὰ μέρα βγάζει τρεῖς τόννους νερό. Πόσες ὀκάδες νερὸ θὰ βγάλη σὲ 11 ὧρες καὶ 15΄ λεπτά;

8) Μιὰ βρύση ἔχει τρεῖς κάνουλες. Ἂν ἀνοίξουμε τὴ μιὰ κάνουλα, γεμίζει μιὰ στέρνα σὲ 9 ὧρες καὶ 20΄ λεπτά. Ἂν ἀνοίξουμε καὶ τὶς τρεῖς κάνουλες, σὲ πόσες ὧρες θὰ γεμίση ἡ ἴδια στέρνα;

9) Γιὰ νὰ πλακοστρώσουμε ἕνα μικρὸ διάδρομο τοῦ σπιτιοῦ μας, χρειαστήκαμε 150 τετράγωνα πλακάκια μὲ πλευρὰ 0.25 μ. Πόσα τ. πλακάκια θὰ χρειαστοῦμε, ἂν ἡ πλευρά τους ἦταν 0,45 μ.;

ΣΥΝΘΕΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Εἴπαμε παραπάνω, πὼς στὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν μᾶς δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητοῦμε τὸν τέταρτο. Μπορεῖ ὅμως νὰ μᾶς δοθοῦν περισσότεροι ἀπὸ τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ νὰ ζητοῦμε νὰ βροῦμε κάποιον ἄλλον (ἕκτο, ὄγδοο κ.λ.π.). Στὴν περίπτωση αὐτὴ θὰ ἐφαρμόσουμε τὴ ***σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν***. Ἡ σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν λύνει τὰ προβλήματα σὰν τὴν ἁπλή. Μὲ ἄλλα λόγια εἶναι πολλὲς ἁπλὲς μέθοδες τῶν τριῶν βαλμένες στὴν ἴδια σειρὰ μὰ μὲ ἕνα μονάχα ἄγνωστο «Χ».

Παρατήρηση:

Καὶ ἡ σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν λύνει ὅλα τὰ προβλήματα εἴτε ἔχουν ἀνάλογα εἴτε ἔχουν ἀντίστροφα ποσά. Ἡ κατάταξη γίνεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο.

Πρόσεξε τὸν κανόνα:

Γιὰ νὰ λύσουμε ἕνα πρόβλημα μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν πολλαπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἀπὸ πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο «Χ» μὲ τὰ κλάσματα (ποὺ σχηματίζονται ἂν τραβήξουμε μιὰ γραμμὴ ἀνάμεσα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἄλλων ποσῶν) ἀντεστραμμένα ἂν τὰ ποσά τους εἶναι ἀνάλογα ἢ ὅπως εἶναι, ἂν τὰ ποσά τους εἶναι ἀντίστροφα.

Σημείωση: Ἡ σύγκριση τῶν ποσῶν γίνεται πάντοτε μὲ τὸν ἄγνωστο «Χ». Ὁπότε εἶναι σὰν νὰ κόβουμε τὸ πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν σὲ πολλὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἕνα παράδειγμα μὲ ἀνάλογα ποσά:

10 ἐργάτες σκαλίζουνε ἕνα χωράφι μὲ 30 στρέμματα σὲ 6 ἡμέρες. Πόσα στρέμματα θὰ σκαλίσουνε 20 ἐργάτες σὲ 3 ἡμέρες;

Κατάταξη:

$$\frac{10}{20}\ \text{ἐργ.}\quad \frac{6}{3}\ \text{ἡμ.}\quad \frac{30}{X;}\ \text{στρέμ.}$$

ἢ

$$\frac{10\ \text{ἐργ.}}{20\ \text{»}}\quad \frac{30\ \text{στρέμ.}}{X;\ \text{»}}\quad \frac{6\ \text{ἡμ.}}{3\ \text{»}}$$

ἢ

$$\frac{30\ \text{στρ. γιὰ νὰ σκαλ.}}{X;\ \text{»}\qquad \text{θὰ}\ \text{»}}\quad \frac{10\ \text{ἐργ. χρειάζ.}}{20\ \text{»}\qquad \text{σὲ}}\quad \frac{6\ \text{ἡμ.}}{3\ \text{»}}$$

Σημ. Τὴν κατάταξη μποροῦμε νὰ τὴν κάνουμε ὅπως θέλομε. Προσέχομε ὅμως νὰ βάλουμε τὸν ἄγνωστο Χ στὴ σωστὴ θέση καὶ κάθε ποσὸ κάτω ἀπὸ τὸ ὅμοιό του.

Λύση: Γιὰ νὰ λύσουμε τὸ πρόβλημα αὐτό, θὰ συγκρίνουμε πρῶτα τὰ διάφορα ποσὰ μὲ τὸν ἄγνωστο «Χ». Καὶ ὅσα εἶναι ἀνάλογα θὰ τὰ πολλαπλασιάσουμε μὲ ἀντεστραμμένα κλάσματα. Ὅσα ὅμως εἶναι ἀντίστροφα θὰ τὰ πολλαπλασιάσουμε μὲ τὰ κλάσματα ὅπως εἶναι (σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα).

α) Καὶ πρῶτα ἂς συγκρίνουμε τὰ ποσὰ ***ἐργάτες*** καὶ ***στρέμματα.*** Τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι ἀνάλογα γιατί, ἂν οἱ 10 ἐργάτες σκαλίζουν 30 στρέμματα, ὁ 1 ἐργάτης θὰ σκαλίσῃ 3 μονάχα στρέμματα καὶ οἱ 20 ἐργάτες 60 στρέμματα. Δηλ. ἅμα αὐξάνουν οἱ ἐργάτες, αὐξάνουν καὶ τὰ στρέμματα κι ἅμα λιγοστεύουν οἱ ἐργάτες, λιγοστεύουν καὶ τὰ στρέμματα. Ἄρα γιὰ νὰ λύσουμε τὸ πρόβλημα ὡς ἐδῶ, δὲν ἔχουμε παρὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν ὑπεράνω τοῦ «Χ» ἀριθμὸ μὲ τὸ κλάσμα ποὺ σχηματίζουν οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 20 ἐργάτες ἀντεστραμμένο δηλ. μὲ τὸ κλάσμα $\frac{20}{10}$.

β) Τώρα ἂς συγκρίνουμε τὰ ποσὰ ***ἡμέρες*** καὶ ***στρέμματα.*** Βλέπομε, πὼς καὶ τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι ἀνάλογα, γιατί, ἂν σὲ 6 ἡμέρες ὁρισμένοι ἐργάτες σκαλίζουν 30 στρέμματα σὲ 3 ἡμέρες θὰ σκαλίσουν λιγώτερα στρέμματα. Ἄρα λιγοστεύουν οἱ μέρες λιγοστεύουν καὶ τὰ στρέμματα. Ὥστε γιὰ νὰ λύσουμε καὶ τὸ δεύτερο μέρος τοῦ προβλήματος, θὰ πολλαπλασιάσουμε στὸ μέχρι τώρα γνωστὸ ἀποτέλεσμα καὶ τὸ κλάσμα, ποὺ σχηματίζουν οἱ ἀριθμοὶ 6 καὶ 3 ἡμέρες, ἀντεστραμμένο δηλ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{6}$.

Συμπέρασμα : Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω ἔχουμε:

$X = 30 \text{ X } \frac{20}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{1800}{60} = 30$ στρέμματα. Ἄρα τὰ ἴδια στρέμματα θὰ σκαλίσουν καὶ οἱ δεύτεροι ἐργάτες, γιατί ἂν καὶ ἦταν διπλοὶ ἀπὸ τοὺς πρώτους, ὅμως δούλεψαν τὶς μισὲς ἡμέρες ἀπ' ὅσες δούλεψαν ἐκεῖνοι.

Κι ἕνα παράδειγμα μὲ ἀντίστροφα ποσά :

15 κτίστες, ἅμα δουλεύουνε 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, τελειώνουνε ἕνα σπίτι σὲ 25 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες 5 κτίστες θὰ τελειώσουνε τὸ ἴδιο σπίτι ἅμα δουλεύουνε 8 ὧρες τὴν ἡμέρα;

Κατάταξη:

15 κτ.	6 ὧρ.	25 ἡμ.
5	8	X;

Λύση : Γιὰ νὰ λύσουμε καὶ τὸ πρόβλημα αὐτό, τὸ χωρίζομε σὲ δυὸ μικρότερα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν μὲ τὸ νοῦ μας. Ἄρα ἔχουμε νὰ συγκρίνουμε:

α) τὰ ποσὰ ***κτίστες*** καὶ ***ἡμέρες*** καὶ
β) τὰ ποσὰ ***ὧρες*** καὶ ***ἡμέρες.***

Τὰ ποσὰ κτίστες καὶ ἡμέρες εἶναι ἀντίστροφα, γιατὶ ἂν οἱ 15 κτίστες τελειώνουν τὸ σπίτι σὲ 25 ἡμέρες, οἱ 5 κτίστες, ποὺ εἶναι τρεῖς φορὲς λιγώτεροι ἀπὸ τοὺς πρώτους, θὰ τελειώσουνε τὸ σπίτι σὲ τρεῖς φορὲς περισσότερες μέρες. Δηλ. ἐνῶ λιγοστεύουν οἱ κτίστες αὐξάνουνε οἱ ἡμέρες.

Ἐπίσης καὶ τὰ ποσὰ ὧρες καὶ ἡμέρες εἶναι ἀντίστροφα, γιατὶ ἂν μὲ 6 ὧρες δουλειὰ ὁρισμένοι ἐργάτες χρειάζονται 25 μέρες γιὰ νὰ τελειώσουν τὸ σπίτι, μὲ 8 ὧρες δουλειὰ τὴν ἡμέρα θὰ χρειαστοῦν λιγώτερες μέρες. Δηλ. ἐνῶ αὐξάνουν οἱ ὧρες, λιγοστεύουν οἱ μέρες.

Συμπέρασμα: Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω καὶ σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα γιὰ νὰ λύσουμε τὸ πρόβλημα αὐτό, θὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν ὑπεράνω τοῦ «Χ» ἀριθμὸ μὲ τὰ κλάσματα, ὅπως εἶναι καὶ ὄχι ἀνεστραμμένα. Ἔτσι ἔχομε:

$$X=25 \times \frac{15}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{2250}{40} = 56 \text{ καὶ } \frac{1}{4} \text{ ἡμέρες δηλ. } 56 \text{ ἡμ. } 16 \text{ ὥρ.}$$

Σημείωση. Τὰ ποσὰ τὰ συγκρίνομε πάντοτε μὲ βάση τὸν ἄγνωστο «Χ» χωριστὰ τὸ καθένα κομματιάζοντας τὰ προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν σὲ πολλὰ μικρὰ τῆς ἁπλῆς. Τὴ στιγμὴ ποὺ κάνομε τὴ σύγκριση ἑνὸς ποσοῦ μὲ τὸν ἄγνωστο «Χ», δὲ μνημονεύομε τὰ ἄλλα ποσὰ μὲ τὸν ἀριθμό τους, γιὰ νὰ μὴ μπερδευόμαστε. Ἁπλῶς τὰ ὀνομάζομε μὲ τὶς λέξεις «ὁρισμένοι, ὁρισμένες, ὁρισμένα» ἢ «ἴδιοι, ἴδιες, ἴδια».

Διάφορα προβλήματα μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.
(ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα).

Θυμηθῆτε ὅτι:

α) Τὰ ποσὰ πῆχες καὶ δραχμὲς εἶναι ἀνάλογα.
β) Τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ δραχμὲς εἶναι ἀνάλογα.
γ) Τὰ ποσὰ κέρδος (τόκος) καὶ δραχμὲς εἶναι ἀνάλογα.
δ) Τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ μάκρος, πλάτος, βάθος, ὕψος εἶναι ἀνάλογα. κλπ.

Μὴ ξεχνᾶτε ὅτι:

α) Τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ὧρες εἶναι ἀντίστροφα.
β) Τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ μέρες εἶναι ἀντίστροφα.
γ) Τὰ ποσὰ ἡμέρες καὶ ὧρες εἶναι ἀντίστροφα.
δ) Τὰ ποσὰ πλάτος καὶ βάθος ἢ ὕψος εἶναι ἀντίστροφα.

1) Ἕνας δημόσιος ὑπάλληλος παίρνει σήμερα 6.000 δραχμὲς τὴν ἡμέρα. Πόσο μισθὸ παίρνουν 46 δημόσιοι ὑπάλληλοι τὸ μῆνα; (τὸ ἑξάμηνο, τὸ χρόνο;).

2) Μιὰ ἐργάτρια ἐργάζεται 9 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὑφαίνει στὸ ἐργοστάσιο τοῦ Λαναρᾶ Κύρτση σὲ 12 ἡμέρες 27 γιάρδες ὕφασμα. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ δουλέψη τὴν ἡμέρα, ὥστε σὲ 30 ἡμέρες νὰ ὑφάνη 65 γιάρδες;

3) Ἕνα πλοῖο μὲ ταχύτητα 16 μίλια τὴν ὥρα σὲ 20 ὧρες κάνει διαδρομὴ 320 μίλια. Πόσα μίλια θὰ διατρέξη σὲ 11 ὧρες ἕνα ἄλλο πλοῖο ποὺ ἔχει ταχύτητα 14 μίλλια τὴν ὥρα;

4) $6\frac{1}{4}$ πηχες κάμποτ μὲ πλάτος 1.25 μ. ἀξίζουν 9.250 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν 13.75 πῆχες μὲ πλάτος 0,92 μ.; (Γιὰ εὐκολία τρέπετε τὰ κλάσματα σὲ δεκαδικούς).

5) Ἕνα δωμάτιο πλακοστρώθηκε μὲ 240 πλακάκια, ποὺ καθένα

-ίχε πλάτος 0,30 μ. καὶ μάκρος 0,40 μ. Πόσα πλακάκια μᾶς χρειάζονται γιὰ νὰ πλακοστρώσουμε τὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου, ὅταν τὸ κάθε πλακάκι θὰ ἔχη πλάτος 0,·0 μ. καὶ μάκρος 0,80 ;

6) Ἕνα ἄλλο δωμάτιο μὲ μάκρος 8,25 μ. καὶ πλάτος 5,45 μ. χρειάστηκε 148 πλακάκια γιὰ νὰ στρωθῆ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειαστῆ ὁ νάρθηκας τῆς ἐκκλησίας γιὰ νὰ στρωθῆ, ὅταν ἔχη μάκρος 10 50 μ. καὶ πλάτος 4,36 μ. ;

7) Σ' ἕνα στρατῶνα παίρνουν συσσίτιο 1.200 στρατιῶτες καὶ ἔχουν ἀποθηκευμένες 7.600 ὀκάδες ἀλεύρι γιὰ νὰ περάσουν 24 ἡμέρες ἀπὸ ψωμί. Ἂν ὕστερα ἀπὸ 4 ἡμέρες φύγουν 300 στρατιῶτες καὶ πάρουν μαζί τους 840 ὀκάδες ἀλεύρι, πόσες μέρες θὰ ἔχουν ψωμὶ οἱ ὑπόλοιποι στρατιωτες;

8) Ἕνας ταχυδρόμος, ποὺ βαδίζει 6 ὧρες τὴ μέρα, σὲ 21 ἡμέρες κόβει ἀπόσταση 504 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ βαδίση σὲ 3 μέρες, ἅμα βαδιζει 4 ὧρες τὴν ἡμέρα;

9) 40 θεριστὲς θερίζουνε 160 στρέμματα σιτηρὰ σὲ 4 μέρες. Πόσα στρέμματα θὰ θερίσουν 18 θεριστὲς σὲ 10 ἡμέρες;

10) 60 ἐργάτες μὲ 8 ὧρες δουλειὰ τὴν ἡμέρα χρειάστηκαν 15 ἡμέρες γιὰ νὰ ἀνοίξουν ἕνα μεγάλο ποτιστικὸ αὐλάκι 140 μ. μάκρος, 2 μ. πλάτος καὶ 1,80 μ. βάθος. Σὲ πόσες ἡμέρες 100 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 9 ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ ἀνοίξουνε ἕνα ἄλλο αὐλάκι 200 μ. μάκρος, 4,2 μ. πλάτος καὶ 2.5 μ. βάθος;

11) Μὲ τὴ διεύθυνση τοῦ μηχανικοῦ Κοκκίνη 800 Μεσολογγίτες ἔσκαψαν τὸν καιρὸ τῆς πολιορκίας τῆς πόλης τους ἀπὸ τοὺς Τούρκους (1825) μιὰ μεγάλη τάφρο μὲ μάκρος 3 χιλιόμετρα, πλάτος 5 μ. καὶ βάθος 4 μέτρα. Πόσοι ἐργάτες δούλεψαν κάτω ἀπὸ τὴ διεύθυνση τοῦ περίφημου μηχανικοῦ Φερδινάνδου Λεσσὲψ γιὰ νὰ σκαφτῆ ἡ διώρυγα τοῦ Σουὲζ ποὺ ἔχει μάκρος 160 χιλ., πλάτος 100 μ. καὶ βάθος 12 μ. ; Καὶ πόσοι δούλεψαν γιὰ νὰ σκαφτῆ ἡ διώρυγα τῆς Κορίνθου ποὺ ἔχει μάκρος 6 χιλιόμετρα, πλάτος 16 μ. καὶ βάθος 8 μ.;

Ἐργασία γιὰ τὰ παιδιά:

Κάμετε μόνοι σας διάφορα προβλήματα ἁπλῆς καὶ σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν μὲ τὰ ἑξῆς ποσά:

1) Μὲ ἐργάτες, ὧρες καὶ μεροκάματα (δραχμές).

2) Μὲ γεωργούς, στρέμματα, ἐργαλεῖα καὶ παραγωγὴ (τόνους, στατῆρες, ὀκάδες).

3) Μὲ κτηνοτρόφους, κεφάλια ζῶα καὶ παραγωγὴ (τυρί, βούτυρο; μαλλιά, δέρματα).

4) Μὲ θαλασσινοὺς καὶ τὶς ἀσχολίες τους (δίχτυα, σφουγγάρια, ψάρια, ἁλάτι κ.λ.π.).

5) Μὲ βαπόρια, αὐτοκίνητα, ἀεροπλάνα, μὲ τὶς ταχύτητές τους στὴν ὥρα καὶ τὶς ἀποστάσεις ποὺ διαιρέχουν.

6) Μὲ μαθητές, συσσίτια, βιβλία, τετράδια καὶ τὸ κόστος τους.

7) Μὲ ὑφάσματα, μὲ πῆχες, μὲ φάρδος καὶ μὲ μάκρος.

8) Μὲ ἐμπορεύματα, κέρδη, ζημίες κ.λ.π., κ.λ.π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΠΟΣΟΣΤΑ - ΤΟΚΟΣ - ΥΦΑΙΡΕΣΗ

Α,. Τὰ ποσοστά.

Τί λέγονται ποσοστά:

Τὰ ποσοστὰ εἶναι ἕνας λογαριασμὸς τῆς ἀριθμητικῆς γιὰ τὸ κέρδος, τὴ ζημιά, τὴ διαφορὰ ποὺ παρουσιάζουν οἱ τιμές, τὶς ἐκπτώσεις, τὶς μεσιτεῖες κλπ. μὲ βάση πάντοτε τὸν ἀριθμὸ **ἑκατὸ μονάδες,** δηλαδὴ μὲ βάση τὸ κέρδος κλπ. στὶς ἑκατὸ μονάδες.

Παραδείγματα: 1) Μιὰ ὀκὰ λάδι τὸ 1940 εἶχε 38 δραχμές. Σήμερα ἔχει 6800 δραχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ (%;) αὐξήθηκε ἡ τιμὴ τοῦ λαδιοῦ ἀπὸ τότε μέχρι σήμερα;

2) Ἀγόρασα μερικὰ βιβλία καὶ ἔδωσα 15.000 δραχ. Τὰ πούλησα 18 000 δραχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ (%;) κέρδισα;

3) Σὲ 300 ὀκάδες σταρίσιο ἀλεύρι ἀνακατέψαμε 100 ὀκάδες κριθαρίσιο. Πόσο στὰ ἑκατὸ (%;) ἀναλογεῖ τὸ κριθαρίσιο ἀλεύρι;

4) Μοῦ ἀνάθεσαν μιὰ δουλειὰ καὶ μοῦ ἔταξαν μεσιτεία 3 % πάνω στὸ κέρδος της. Τί θὰ μοῦ δώσουν, ἂν τὸ συνολικὸ κέρδος ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση εἶναι 350 000 δραχμές,

5) Σὲ μιὰ τάξη σχολειοῦ γράφτηκαν 67 μαθητές. Ἀπ' αὐτοὺς φοίτησαν 62, ἔδωσαν ἐξετάσεις 58, προβιβάστηκαν 51, ἔμειναν στάσιμοι 16. Πόσοι στοὺς ἑκατὸ (%;) φοίτησαν, ἐξετάσθηκαν, προβιβάστηκαν, ἔμειναν στάσιμοι;

6) Δανειστήκαμε 485.000 δραχμὲς καὶ σὲ κάμποσο καιρὸ γυρίσαμε τὰ χρήματα ἀλλὰ δώσαμε καὶ τόκο 5680 δραχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ πληρώσαμε τόκο;

7) Σὲ μιὰ πόλη μέσα σ' ἕνα χρόνο γεννήθηκαν 871 ἀγόρια καὶ κορίτσια. Πέθαναν στὸν ἴδιο χρόνο 109 ἀπὸ διάφορες ἀρρώστειες. Πόσα στὰ ἑκατὸ (%;) πέθαναν:

8) Μιὰ καπαρντίνα τὸ χειμώνα ἄξιζε 220.000 δραχ. Τὴν ἄνοιξη πουλοῦσαν τὴν ἴδια καπαρντίνα 175.000 δραχ. Πόσο στὰ

ἑκατὸ εἴχαμε ἔκπτωση (σκόντο) ἀνάμεσα στὴ χειμερινὴ καὶ στὴν ἀνοιξιάτικη τιμή;

Πῶς λύνονται τὰ προβλήματα μὲ τὰ ποσοστά.

Ἕνα παράδειγμα: Ἀγόρασα μερικὰ βιβλία καὶ ἔδωσα 15.000 δραχ. Τὰ πούλησα 18.000 δρχ. Πόσο °/₀ κέρδισα;

α) Λύση: μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

Στὶς 15.000 δρχ. κέρδισα 3000 δρχ.

στὴ 1 » » $\frac{3000}{15.000}$

καὶ στὶς 100 » » $\frac{3000 \times 100}{15.000} = \frac{300.000}{15.000} = 20\ \%$

β) Λύση μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν:

Κατάταξη.

στὶς 15.000 δρχ. κέρδισα 3000 δρχ.

» 100 X

$$X = 3000 \times \frac{100}{15.000} = \frac{300.000}{15.000} = 20\ \%$$

Ἄλλο παράδειγμα: Ἕνας μεσίτης ἀγόρασε γιὰ λογαριασμὸ κάποιου ἐμπόρου 24.000 ὀκάδες σιτηρὰ μὲ προμήθεια σὲ εἶδος 3 %. Πόσες ὀκάδες προμήθεια (μεσιτεία) θὰ πάρη γι᾿ αὐτὴ τὴ δουλειά;

α) Λύση μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

στὶς 100 ὀκάδες ἔχει προμήθεια 3 ὀκ.

στὴ 1 ὀκὰ » » $\frac{3}{100}$ »

καὶ στὶς 24.000 ὀκάδες » » $\frac{3}{100} \times 24.000 = \frac{72.000}{100} = 720$ ὀκάδες.

β) Λύση μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν:

Κατάταξη.

στὶς 100 ὀκ. ἔχει προμ. 3 ὀκ.

» 24000 X;

$$X = 3 \times \frac{24000}{100} = \frac{72000}{100} = 720 \text{ ὀκ.}$$

Συμπέρασμα :

> Τὰ προβλήματα μὲ τὰ ποσοστὰ λύνονται μὲ δυὸ τρόπους, Ἢ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα ἢ μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Προτιμοῦμε ὅμως τὴ μέθοδο τῶν τριῶν γιὰ συντομία καὶ εὐκολία.

Διάφορα προβλήματα μὲ τὰ ποσοστά.

1) Νὰ βρῆτε τὸ ποσοστὸ 1 % τῶν ἀριθ. 250, 999, 1234, 2567, 25000.
2) » » » » 2 % » » 500, 880, 5600, 9400, 53000.
3) » » » » 3 % » » 300, 990, 7700, 6620, 48000.
4) » » » » 4 % » » 160, 550, 4240, 8004, 6[illegible]000.
5) » » » » 5 % » » 200, 690, 8700, 5595, 94000.
6) » » » » 2,5 % » » 900, 800, 6000, 7000, 80000.
7) » » » » 3,25 % » » 500, 900, 2000, 4000, 30000.
8) » » » » $\frac{1}{3}$ % » » 376, 892, 4678, 6201, 98765.
9) » » » » $2\frac{2}{3}$ % » » 400, 550, 1000, 3000, 55200.

10) Νὰ βρῆτε πόσο % ἀκρίβηναν τὰ τρόφιμα, ὑφάσματα, κ.λ.π. ἀπὸ τὸ 1928 μέχρι σήμερα κι ἀπὸ τὸ 1940 μέχρι σήμερα. Οἱ τιμές τους βρίσκονται στὸν παρακάτω πίνακα:

	στὰ 1928	στὰ 1940	στὰ 1947
ψωμὶ	9,80	12,50	2000
κρέας	32	45	7000
λάδι	35	48	7200
ὄσπρια	8,40	12,80	3750
λαχανικὰ	0 75	1,20	900
γάλα	0,30	10 50	1800
ζυμαρικὰ	11,[illegible]0	18,40	3100
πανικὰ	82 20	13,70	3 50
κοστούμι	1200	2200	550000
παπούτσια	275	450	85000

κ.λ.π. κ.λ.π.

11) Νὰ βρῆτε πόσο αὐξήθηκε ὁ πληθυσμὸς τῆς χώρας μας ἀπὸ τὸ 1861 μέχρι τὴν ἀπογραφὴ τοῦ 1928. Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ βρίσκονται στὸν παρακάτω πίνακα:

	1861	1896	1928
ἄρρενες	567.334	1.266.816	3.076.235
θήλεις	529.476	1.166.990	3.128.449
σύνολο	1.096.819	2.433.806	6.204.684

12) Νὰ βρῆτε πόσο % αὐξήθηκε ἢ λιγόστεψε ἡ καλλιέργεια τῆς γῆς στὴ χώρα μας ἀπὸ τοῦ 1933 μέχρι τοῦ 1937 μὲ βάση τοὺς παρακάτω ἀριθμούς;

Στρέμματα ποὺ καλλιεργήθηκαν:

1933	1934	1935	1936	1937	1947
20.810.898	21.444.947	21.909.500	23.156.025	24.154.978	. . . .

13) Ὁ πληθυσμὸς ὁλόκληρης τῆς γῆς εἶναι 2.100.000.000. Ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι:

α) λευκοὶ	1.029.000
β) μαῦροι	248 900
γ) κίτρινοι	781.200
δ) ἄλλες φυλὲς	40.900

Πόσο ἀναλογοῦν οἱ διάφορες φυλὲς τῆς γῆς σχετικὰ μὲ τὸ συνολικὸ πληθυσμό της;

14) Ἀπὸ τὸν πληθυσμὸ αὐτὸν εἶναι:

α) χριστιανοὶ	808.500
β) μουσουλμάνοι	281 400
γ) βραχμανιστὲς	283.500
δ) βουδιστὲς	170 100
ε) κομφουκιστὲς	327.600
στ) ἑβραῖοι	14.700
ζ) ὑπόλ. θρησκεῖες	195.300
καὶ η) ἄγνωστες θρησκ.	18.900

Ποιὰ ἀναλογία στὰ % ὑπάρχει ἀνάμεσα στὶς θρησκεῖες τοῦ πληθυσμοῦ τῆς γῆς;

15) Ἀπὸ τὸ συνολικὸ πληθυσμὸ τῆς γῆς μιλοῦνε: α) τὰ 21,1 % τὴν κινεζικὴ γλῶσσα. β) τὰ 14,9 % τὴν ἰνδικὴ γλῶσσα. γ) τὰ 12,4 % τὴν ἀγγλική. δ) τὰ 7,5 % τὴ σλαυϊκή. ε) τὰ 5 % τὴν ἱσπανική. στ) τὰ 4,4 % τὴ γερμανική. ζ) τὰ 3,7 % τὴν ἰαπωνική. η) τὰ 3,1 % τὴ γαλλική. θ) τὰ 2,5 % τὴν ἰταλικὴ καὶ ι) τὰ 0 5 % τὴν ἑλληνική. Πόσος πληθυσμὸς ὁμιλεῖ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς γλῶσσες αὐτές;

Ἐμπορικὰ προβλήματα:

1) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε διάφορες ποσότητες ἐμπορεύματα καὶ ἔδωσε 865.000 δραχ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση αὐτὴ κέρδισε 25 %. Πόσο τὰ πούλησε;

2) Ἕνας ἄλλος γιὰ τὸν ἴδιο σκοπό:

ξόδεψε	κέρδισε	πόσο τὰ πούλησε!
7 000.000	27,3 %	» » »
32.627 498	33.5 %	» » »
11.987.400	45 %	» » »

3) Ἕνας μπακάλης

	πλήρωσε:	κέρδισε:	Πόσο % κέρδισε;
γιὰ ζυμαρικὰ	756 000	136 000	» » »
» λίπη	489.000	93.700	» » »
» ὄσπρια	1.942.000	245.890	» » »

3) Ἕνας ἄλλος

	πλήρωσε:	ζημίωσε:	Πόσο % ζημίωσε;
γιὰ λάδια	877 000	32.000	» » »
» τυριὰ	3.414 500	348.650	» » »
» δερματα	622.330	53.800	» » »

4) Τρίτος κέρδισε:

	πλήρ. προμήθ.:	Πόσα χρήμ. πλήρ. προμήθ.;
8.190 δολλάρια	» 3 %	» » » »
999 λίρες	» 2,4 %	» » » »
875.600 δραχμὲς	» 7,1 %	» » » »
65.340 γαλλ. φρ.	» 5 %	» » » »

6) Ἕνας ὑφασματέμπορος ἔκανε τὶς ἑξῆς ἐκπτώσεις στὰ ὑφάσματά του κατὰ τὴν καλοκαιρινὴ περίοδο:

	ἀρχικὴ τιμὴ	τιμὴ μὲ ἔκπτωση	Πόσο % ἔκπτωση ἔκανε;
ντρίλια	15.400 δρ.	11.100	»
φανέλλες	4.800 »	2.180	»
καπέλλα	27.300 »	24.900	»

7) Κάμετε καὶ σεῖς διάφορα προβλήματα μὲ **βάση τὰ ποσοστὰ** καὶ τὶς σημερινὲς **τιμὲς** τῶν ἐμπορευμάτων **κ.λ.π.**

Β΄. Ὁ τόκος.

Ὅταν ἕνας δανειστὴς δανείζη χρήματα, ζητεῖ σὰν ***κέρδος*** ἕνα ἀνάλογο ποσό. Σπάνια δανείζουν χρήματα χωρὶς κέρδος. (Αὐτὸ γίνεται μονάχα ἀνάμεσα σὲ φίλους κι ὅταν πρόκειται γιὰ μικρὰ δάνεια κι ὄχι γιὰ πολὺν καιρό). Τὸ κέρδος ποὺ παίρνει ὁ δανειστὴς ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ δανείζεται, στὴν ἀριθμητικὴ λέγεται ***τόκος***. Ὁ τόκος πάλι μπορεῖ νὰ εἶναι μικρὸς ἢ μεγάλος ἀνάλογα μὲ τὸ ποσὸ τοῦ δανείου, ποὺ στὴν ἀριθμητικὴ λέγεται ***κεφάλαιο***. Ἐπίσης θὰ εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸ ***χρόνο***, ποὺ θὰ βαστάξη τὸ δάνειο. Ἂν μείνη λίγο, ὁ τόκος θὰ εἶναι μικρότερος. Τέλος ὁ τόκος - κέρδος ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὸ ***ἐπιτόκιο*** (ποσοστὸ) δηλαδὴ ἀπὸ τό: **πόσος τόκος στὶς ἑκατὸ (%) δραχμὲς γιὰ διάστημα ἑνὸς χρόνου συμφωνήθηκε.**

Στὴ ζωὴ μπορεῖ νὰ συναντήσουμε πολλὰ προβλήματα τέτοια. Αὐτὰ μ' ἕνα ὄνομα τὰ ὀνομάζομε ***προβλήματα τοῦ τόκου.*** Τὰ προβλήματα ὅμως τοῦ τόκου μπορεῖ νὰ τὰ συναντήσουμε μὲ τέσσερες μορφές:

1) Σὰν προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸν ***τόκο.***
2) » » » » » » » » ***κεφάλαιο.***
3) » » » » » » » » ***χρόνο.***
4) » » » » » » » » ***ἐπιτόκιο.***

Σημείωση: Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύνονται μὲ τρεῖς τρόπους: α) μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα, β) μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν καὶ 3) μὲ τὸν εἰδικὸ τύπο, ποὺ μᾶς παρέχει ἡ ἀριθμητικὴ γιὰ τὴ λύση κάθε τέτοιου προβλήματος. Προτιμοῦμε ὅμως τὴ μέθοδο τῶν τριῶν γιὰ εὐκολία.

Μερικὰ παραδείγματα.

1ο) Ζητοῦμε τὸν τόκο.

Πρόβλημα: Δανείστηκα ἀπὸ κάποιο γνωστό μου 33 425 δρχ. μὲ 3 %. Πόσο τόκο θὰ πληρώσω ὕστερα ἀπὸ 2 χρόνια;

α) Λύση μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

Ἀφοῦ 100 δρχ. σὲ 1 χρ. δίνουν τόκο 3 δρχ.

ἡ 1 » » 1 » θὰ δώση $\frac{3}{100}$

ἡ 1 » πάλι σὲ 2 χρ. θὰ δώση $\frac{3 \times 2}{100}$

καὶ οἱ 33.425 δρχ. σὲ 2 χρ. θὰ δώσουν $\frac{3X2X33425}{100} = \frac{200550}{100} = 2.005,50.$

β) Λύση μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν:

Κατάταξη.

100 δραχ. σὲ 1 χρόνο δίνουν τόκο 3 δραχ.
33425 2 X;

$$X = 3 \times \frac{33425}{100} \times \frac{2}{1} = \frac{200550}{100} = 2005{,}50$$

γ) Λύση μὲ τὸν εἰδικὸ τύπο τοῦ τόκου:

$$T = \frac{K X E.}{100} = \frac{33.425\ X2X\ 3}{100} = \frac{200.550}{100} = 2.005{,}50.$$

1ος Γενικὸς κανόνας: Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ χρόνο καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε μὲ τὸ 100.

Παρατήρηση: Ἂν ὅμως ὁ χρόνος (ποὺ ἔμεινε τοκισμένο τὸ κεφάλαιο) εἶναι μῆνες, διαιροῦμε μὲ τὸ $100 \times 12 = 1200$. Κι ἂν εἶναι μέρες διαιροῦμε μὲ τὸ $100 \times 360 = 36\,000$. Ἂν εἶναι χρόνια καὶ μῆνες τρέπομε τὰ χρόνια σὲ μῆνες. Κι ἂν εἶναι μῆνες καὶ μέρες τρέπομε τοὺς μῆνες σὲ μέρες κ.ο.

Τύπος τόκου:

α) $T = \frac{K.E.X.}{100} =$ ὅταν ***ὁ χρόνος*** εἶναι χρόνια.

β) $T = \frac{K.E.X.}{1.200} =$ ὅταν ***ὁ χρόνος*** εἶναι μῆνες.

γ) $T = \frac{K.E.X.}{36.000} =$ ὅταν ***ὁ χρόνος*** εἶναι ἡμέρες.

Ἀσκήσεις:

1.	*Πόσο*	*τόκο*	*δίνουν*	*7500*	*δραχ.*	*σὲ*	*4*	*χρόνια*	*μὲ*	*1 %*	*;*
2.	»	»	»	*27890*	»	»	*7*	»	»	*2 %*	*;*
3.	»	»	»	*568954*	»	»	*11*	»	»	*3 %*	*;*
4.	»	»	»	*643200*	»	»	*7*	*μῆνες*	»	*4,7 %*	*;*
5.	»	»	»	*11232*	»	»	*14*	»	»	*5,65 %*	*;*
6.	»	»	»	*775698*	»	»	*8*	»	»	*6 %*	*;*
7.	»	»	»	*88942*	»	»	*10*	»	»	*7,4 %*	*;*
8.	»	»	»	*9745*	»	»	*6*	»	»	*8 %*	*;*
9.	»	»	»	*100060*	»	»	*160*	*μέρες*	»	*9 %*	*;*
10.	»	»	»	*50000*	»	»	*324*	»	»	*10,2 %*	*;*
11.	»	»	»	*8865000*	»	»	*4 μῆν.—10*	*μέρες*		$11\frac{2}{3}$ *%*	*;*

2ο) Ζητοῦμε τὸ κεφάλαιο.

Πρόβλημα: Ποιὸ κεφάλαιο ἅμα τοκισθῆ μὲ 3 % δίνει τόκο 11.500 δραχ. μέσα σὲ 4 χρόνια;

α) Λύση μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

Γιὰ	3	δραχ.	τόκο	σὲ 1	χρόνο	χρειάζεται	κεφ.	100 δραχ.
»	1	»	»	» 1	»	»	»	$\frac{100}{3}$
»	11 500	»	»	» 1	»	»		$\frac{100 \times 11.500}{3}$

καὶ γιὰ 11500 δρ. τόκο σὲ 4 χρ. χρειάζ. κεφ. $\frac{100 \times 11500}{3 \times 4} = \frac{1150000}{12} = 95833\frac{1}{3}$

β) Λύση μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν :

$$\begin{array}{lcccc} 100 \text{ δρχ. σὲ} & 1 \text{ χρόνο} & \text{δίνουν} & \text{τόκο} & 3 \text{ δρχ.} \\ X\,; & » \ 4 & » & » & 11.500 \\ \hline \end{array}$$

$$X = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{11.500}{3} = \frac{1.150.000}{12} = 95.833 \frac{1}{3}$$

γ) Λύση μὲ τὸν εἰδικὸ τύπο τοῦ κεφαλαίου :

$$K = \frac{T.\ 100}{X.\ E.} = \frac{11500 \times 100}{4 \times 3} = \frac{1150000}{12} = 95.833 \frac{1}{3}.$$

2ος γενικὸς κανόνας : Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε μὲ τὸ γινόμενο χρόνου ἐπὶ ἐπιτόκιο.

Παρατήρηση : Ἅμα ὅμως ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 (δηλ. 100 × 12) καὶ ἅμα εἶναι σὲ μέρες μὲ τὸ 36.000 (δηλ. 100×360).

Τύπος κεφαλαίου :

α) $K = \frac{T.\ 100}{X.\ E} =$ ὅταν ἔχουμε χρόνια.

β) $K = \frac{T.\ 1200}{X.\ E} =$ ὅταν ἔχουμε μῆνες.

γ) $K = \frac{T.\ 36000}{X.\ E} =$ ὅταν ἔχουμε ἡμέρες.

Ἀσκήσεις.

1)	Ποιὸ κεφάλ.	τοκιζόμ.	μὲ 1 %	σὲ	2 χρόνια	δίνει	τόκο	700	δρχ ;
2.	»	»	» 2 %	»	3	»	»	880	»
3.	»	»	» 8 %	»	4	»	»	9560	»
4.	»	»	» 4,6 %	»	9 μῆνες	»	»	10050	»
5.	»	»	» 5,5 %	»	11	»	»	43000	»
6.	»	»	» 6 %	»	8	»	»	6224	»
7.	»	»	» 7,1 %	»	240 μέρες	»	»	910	»
8.	»	»	» $8\frac{1}{4}$ %	»	90	»	»	720	»
9,	»	»	» [illegible] %	»	150	»	»	1300	»

3ο) Ζητοῦμε τὸ χρόνο.

Πρόβλημα: Σὲ πόσο χρόνο πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφάλαιο 490.000 δραχ. μὲ 4 % γιὰ νὰ δώση τόκο 9900 δραχμές;

α) Λύση μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

100 δρχ. δίνουν τόκο 4 δρχ. σὲ 360 μέρες.

1 » » » 4 » » 360×100 »

490.000 » » » 4 » » $\frac{360 \times 100}{490000}$ »

490.000 » » » 1 » » $\frac{360 \times 100}{490000 \times 4}$ »

καὶ 490.000 » » » 9900 » $\frac{360 \times 100 \times 990}{490000 \times 4}$ »

ἄρα = 181 μέρες.

β) Λύση μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν:

Κατάταξη.

100 δρχ. σὲ 360 μέρες δίνουν τόκο 4 δρχ.
490000 » » X; » » 9900 »

$$X = 360 \times \frac{100}{490000} \times \frac{9900}{4} = \frac{35640000}{1960000} = 181 \text{ μέρες καὶ } \frac{164}{196} \text{ τῆς ἡμ.}$$

γ) Λύση μὲ τὸν τύπο τοῦ χρόνου:

$$X = \frac{(\text{T. } 100 \text{ ἢ T. } 1200) \text{ ἢ T. } 36000}{\text{K. E.}} = \frac{9900 \times 36000}{490000 \times 4} = 181 \frac{164}{196} \text{ ἡμέρες.}$$

3ος Γενικὸς κανόνας: Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρόνο πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 (ἂν ὁ χρόνος εἶναι χρόνια) ἢ τὸν τόκο ἐπὶ 1200 (ἂν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες) ἢ τὸν τόκο ἐπὶ 36000 (ἂν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες) καὶ διαιροῦμε μὲ τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.

Παρατήρηση: Στά προβλήματα ποὺ ζητοῦμε τὸ χρόνο, καλὰ εἶναι γιὰ εὐκολία νὰ τὸν ὑπολογίσουμε πάντοτε σὲ μέρες, γιατὶ μᾶς εἶναι εὔκολο ὕστερα νὰ κάνουμε τὶς ἡμέρες μῆνες, τοὺς μῆνες χρόνια κλπ.

Τύπος χρόνου:

α) $X = \frac{\text{T. } 100}{\text{K. E}}$ = ὅταν ζητοῦμε χρόνια.

β) $X = \frac{\text{T. } 1200}{\text{K. E}}$ = ὅταν ζητοῦμε μῆνες.

γ) $X = \frac{\text{T. } 36000}{\text{K. E}}$ = ὅταν ζητοῦμε ἡμέρες.

Ἀσκήσεις.

1. Σὲ	πόσο	χρόνο	κεφάλαιο	65000	δρχ.	μὲ	1 %	δίνει	τόκο	900 δρχ. ;
2. »	»	»	»	1700000	»	»	2 %	»	»	10000 »
3. »	»	»	»	986450	»	»	3 %	»	»	32500 »
4. »	»	»	»	222400	»	»	4 %	»	»	20000 »
5. »	»	»	»	4000000	»	»	5,5 %	»	»	80000 »
6. »	»	»	»	800000	»	»	6,8 %	»	»	60000 »
7. »	»	»	»	2500000	»	»	$7\frac{4}{5}$ %	»	»	35000 »
8. »	»	»	»	1800000	»	»	8 %	»	»	40000 »
9. »	»	»	»	330000	»	»	10 %	»	»	11000 »

4ο) Ζητοῦμε τὸ ἐπιτόκιο.

Πρόβλημα : Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφάλαιο 156.000 δραχ. γιὰ νὰ δώση σὲ 2 χρόνια 6.240 δραχ. τόκο ;

α) Λύση μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα :

Οἱ 156.000 δρχ. σὲ 2 χρόνια δίνουν τόκο 6.240 δρχ.

οἱ 1 » » 2 » δίνει » $\frac{6.240}{156.000}$

οἱ 100 » » 2 » δίνουν » $\frac{6.240 \times 100}{156.000}$

καὶ » 100 » » 1 » » » $\frac{6.240 \times 100}{156.000 \times 2} = 2\%$.

β) Λύση μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν :

Κατάταξη.

κεφ. 156.000 σὲ 2 χρόνια δίνει τόκο 6 240 δρχ.

100 1 » » » Χ ;

$$X = 6.240 \times \frac{100}{156.000} \times \frac{1}{2} = \frac{624.000}{312.000} = 2\%.$$

γ) Λύση μὲ τὸν τύπο τοῦ ἐπιτοκίου :

$$E = \frac{T.\ 100\ (\text{ἢ } T.\ 1200 \text{ ἢ } T.\ 36000)}{K.\ X} = \frac{6.240 \times 100}{156.000 \times 2} = \frac{624.000}{312.000} = 2\%.$$

Γενικὸς κανόνας :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 (ἂν ὁ χρόνος εἶναι χρόνια) ἢ τὸν τόκο ἐπὶ 1.200 (ἂν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες) ἢ τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 (ἂν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέρες) καὶ ὅ,τι βροῦμε τὸ διαιροῦμε μὲ τὸ γινόμενο κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο.

Τύπος ἐπιτοκίου :

α) $Ε = \frac{Τ.100}{Κ.Χ}$ = ὅταν ἔχουμε χρόνια.

β) $Ε = \frac{Τ.1200}{Κ.Χ}$ = ὅταν ἔχουμε μῆνες.

γ) $Ε = \frac{Τ.36000}{Κ.Χ}$ = ὅταν ἔχουμε ἡμέρες.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

1. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφ. 750.000 δρ. γιὰ νὰ δώση τόκο 75.000 δραχ. (ἢ 7500 ἢ 750 ἢ 75 δραχ.) σὲ 3 χρόνια ;

2. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφ. 1.000.000 δραχ. γιὰ νὰ δώση σὲ 2 χρόνια 50.000 δρχ. τόκο (ἢ 5000 ἢ 500 ἢ 50 ἢ 5 δρχ.) ;

3. Πόσο % πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφ. 500.000 δρχ. γιὰ νὰ δώση τόκο 25.000 δρχ. μέσα σὲ 5 χρόνια ; (ἢ τόκο 2500 ἢ 250 ἢ 25 δραχ. ;).

4 Πόσο % πρέπει νὰ δανείσουμε 657.432 δραχ. ὥστε σὲ 9 μῆνες νὰ μᾶς φέρουν τόκο 30.000 δραχ. ;

5. Πόσο % πρέπει νὰ δανεισθοῦμε 246.000 δραχ. γιὰ νὰ πληρώσουμε σὲ 5 μῆνες 2500 δρ. τόκο ;

6. Πόσο % πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφάλαιο 150.000 δραχ. γιὰ νὰ φέρη τόκο 22000 δραχ. μέσα σὲ 11 μῆνες ;

7. Πόσο % πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφ. 849.000 δραχ. γιὰ νὰ φέρη τόκο 55.000 δραχ. σὲ 3 μῆνες καὶ 28 μέρες ; (ἢ σὲ 125 μέρες ἢ σὲ 285 μέρες ἢ σὲ 1 χρόνο 2 μῆνες καὶ 12 μέρες ;).

8. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφάλαιο 456.000 δραχ. ὥστε σὲ 36 μέρες νὰ δώση τόκο 4560 δραχ. (ἢ 456 ἢ 5570 ἢ 9000 δραχ. ;).

9. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφ. 80.000 δραχ. ὥστε σὲ 2 μῆνες καὶ 27 μέρες νὰ φέρη τόκο 6.000 δραχ ; (ἢ 400 ἢ 750 ἢ 3200).

Διάφορα προβλήματα τόκου.

1. Ἕνας ἀγρότης δανείστηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 650.000 δραχμὲς γιὰ 9 μῆνες μὲ $7\frac{1}{3}$ %. Πόσα χρήματα θὰ ἔπρεπε νὰ πληρώση στὴν ὁρισμένη προθεσμία γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί ;

2. Ἕνας χωρικὸς ἐπούλησε 712 ὀκ. ροδάκινα πρὸς 1200 δρχ. τὴν ὀκά. Καὶ 520 ὀκάδες πατάτες πρὸς 1750 δρ. τὴν ὀκά. Ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτὰ ξόδεψε 22 000 δρ. γιὰ ν' ἀγοράση διάφορα μικροπράμματα γιὰ τὸ σπίτι του. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ κατέθεσε στὸ ταχ. Ταμιευτήριο μὲ 5 %. Ὕστερα ἀπὸ 250 ἡμέρες τοῦ παρουσιάστηκε ἀνάγκη καὶ πῆρε τὴν κατάθεσή του ἀπὸ τὸ Ταμιευτήριο. Πόσα χρήματα πῆρε μαζὶ μὲ τοὺς τόκους ;

3. Ἕνας κτηνοτρόφος εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα 1.960.000 δραχμές. Ὕστερα ἀπὸ 8 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες πῆγε καὶ πῆρε τὰ χρήματά του. Πῆρε ὅμως καὶ 32.000 δραχ. παραπάνω γιὰ τόκο. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο εἶχαν τοκισθῆ τα χρήματά του ;

4. Ἕνας ἔμπορος ἐδάνεισε 800.000 δρ. σ' ἕνα γνωστό του καὶ ὕστερα ἀπὸ 7 μῆνες πῆρε γιὰ κεφαλαιο καὶ τόκο 826.000 δραχ. Μὲ τί ἐπιτόκιο εἶχε δανείσει τὰ χρήματά του ;

5. Ἕνας κτηματίας νοίκιασε ἕνα μαγαζὶ γιὰ 380.000 δραχ. τὸ χρόνο. Κάνοντας ἕνα λογαριασμὸ βρῆκε πὼς μὲ τὸ νοῖκι αὐτὸ κερδίζει 12 % τὸ χρόνο πάνω στὴν ἀξία τοῦ μαγαζιοῦ του. Ποιὰ ἤτανε ἄραγε ἡ ἀξία τοῦ μαγαζιοῦ αὐτοῦ ;

6. Ἕνας ἔμπορος κατέθεσε στὴν Τράπεζα ἕνα χρηματικὸ ποσὸ μὲ 8,5 %. Ὕστερα ἀπὸ 6 μῆνες καὶ 13 ἡμέρες πῆρε πίσω τὰ χρήματά του καὶ τόκο 82.000 δραχμές. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει στὴν Τράπεζα ;

7. Ἕνας περιβολάρης δανείστηκε στὶς 5 Μαρτίου 1946 ἀπὸ τὴν Τράπεζα 2.000 000 δραχ. πρὸς 9 % γιὰ νὰ καλλιεργήση τὸ περιβόλι του. Στὶς 28 Ἰανουαρίου 1947 ἐπέστρεψε τὰ χρήματα στὴν Τράπεζα. Πόσα χρήματα ἐπέστρεψε μαζὶ μὲ τὸν τόκο ;

8. Ἕνας ἐπαγγελματίας εἶχε δανειστῆ 750.000 δραχ. μὲ 10 % καὶ στὶς 15 Μαΐου 1947 ἐπέστρεψε στὸ δανειστή του 802.000 δραχμὲς γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί. Πόσο χρόνο βάσταξε τὸ δάνειο αὐτὸ καὶ ποιὰ ἀκριβῶς ἡμερομηνία εἶχε γίνει ;

9. Ἕνας πατέρας κατέθεσε στὴν Τράπεζα 1.600.000 δραχ. πρὸς 5 % γιὰ προῖκα τῆς μοναχοκόρης του. Τὸ κοριτσι αὐτὸ εἶναι σήμερα 4 χρονῶν. Πόσων χρονῶν πρέπει νὰ παντρευτῆ τὸ κορίτσι αὐτὸ γιὰ νὰ πάρη προῖκα 3.000.000 δραχμές ; (ἀπόκρ. $21 \frac{1}{2}$ χρονῶν).

10. Κάμετε καὶ σεῖς, παιδιά, δικά σας προβλήματα ἀπὸ τὴ ζωή.

Γ'. Ἀνατοκισμός.

Πολλὲς φορὲς δανειζόμαστε ἢ δανείζομε χρήματα μὲ ***ἀνατοκισμό.*** Αὐτὸ γίνεται ἅμα δὲν ἐπιστρέφομε τὰ χρήματα στὸ χρόνο ποὺ συμφωνήσαμε. Τότε πληρώνομε τόκο ὄχι μονάχα γιὰ τὸ κεφάλαιο ποὺ δανειστήκαμε ἀλλὰ καὶ γιὰ τὸν τόκο ποὺ χρωστᾶμε καὶ ποὺ ἀπὸ τὴ μέρα ἐκείνη προστίθεται στὸ κεφάλαιο καὶ γίνεται ἕνα μ' αὐτό. Μ' ἄλλα λόγια ἀπὸ τὴ μέρα ἐκείνη τὸ κεφάλαιο καὶ ὁ τόκος μαζὶ ***ξανατοκίζονται.*** Κι ἂν στὸν καινούργιο χρόνο δὲν ξεπληρώσουμε τὸ χρέος μας καὶ δὲ δώσουμε οὔτε τὸν τόκο, τότε ὁ ἀνατοκισμὸς συνεχίζεται καὶ μπορεῖ νὰ φτάση στιγμή, ποὺ οἱ τόκοι νὰ ξεπεράσουν τὸ ἀρχικὸ κεφάλαιο.

Παρατήρηση: Ὅταν λύνουμε προβλήματα τοῦ τόκου, πρέπει νὰ προσέχουμε μήπως εἶναι μὲ ἀνατοκισμό, ὁπότε θὰ τὰ λύνουμε ἔτσι:

Πρόβλημα: Ἕνας χωρικὸς δανείστηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 2.000.000 δραχ. μὲ 6 % γιὰ ν' ἀγοράση ἕνα βόδι. Στὸ χρόνο ἐπάνω δὲν πῆγε νὰ πληρώση στὴν Τράπεζα τὸν τόκο. Κι' ἡ Τράπεζα τὸν χρέωσε γιὰ τὸν καινούργιο χρόνο μὲ τὸ παλιὸ κεφάλαιο αὐξημένο καὶ μὲ τὸν τόκο. Στὸ τέλος τοῦ δεύτερου χρόνου ὁ χωρικὸς κατάφερε νὰ ξεχρεωθῆ. Πόσα χρήματα πλήρωσε στὴν Τράπεζα ὅλα ὅλα ;

Λύση: Στὸν ἕνα χρόνο ἔπρεπε νὰ πληρώση τόκο 120.000 δραχ. καὶ 2.000.000 κεφάλαιο ἄρα σύνολο 2.120.000. Ἐπειδὴ ὅμως κεφάλαιο καὶ τόκος ἀνατοκίστηκαν γιὰ τὸ δεύτερο χρόνο ἔχομε :

κεφ. 100 δρχ. σὲ 1 χρόνο δίνουν 6
2.120.000 » » 1 » X;

$$X=6\times\frac{2.120.000}{100}=127.200$$

Ἄρα ἔχομε κεφ. 2.120.000 + 127.200=247.200 δραχ. σύνολο.

Σημείωση: Ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται συνήθως ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρόνο. Μπορεῖ ὅμως νὰ γίνη καὶ συμφωνία ἀνατοκισμοῦ κατὰ ἑξάμηνο κλπ. Ἢ μὲ 4 % ἀρχικὸ καὶ μὲ μεγαλύτερο ἢ μικρότερο ἐπιτόκιο γι' ἀργότερα. Αὐτὸ νὰ τὸ προσέχουμε στὰ προβλήματα αὐτά.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

1. Ἕνας μαθητὴς κατάθεσε στὸ Ταχ. Ταμιευτήριο 45.000 δρχ. μὲ 4 % καὶ μὲ ἀνατοκισμό. Πόσα χρήματα πῆρε ὕστερα ἀπὸ 4 χρόνια; (ὕστερα ἀπὸ 5, 6 7:)

2. Ἕνας δανείστηκε 5.000.000 δραχ. μὲ ἀνατοκισμὸ πρὸς 7 %. Συμφώνησε ὅμως, κάθε χρόνο (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ) νὰ προστίθεται στὸ ἐπιτόκιο καὶ 1 % ἀκόμη σὲ βάρος του φυσικά. Πόσα χρήματα ἔπρεπε νὰ πληρώση συνολικὰ ὕστερα ἀπὸ 4 χρόνια;

3. Ἕνας πατέρας κατάθεσε στὰ 1945, 2.000.000 δραχ. σὲ μιὰ Τράπεζα πρὸς 3 % καὶ μὲ ἀνατοκισμό, γιὰ νὰ προικίση τὴν κόρη του. Σὲ τί ποσὸ θἀνεβῆ αὐτὴ ἡ προῖκα τὸ ἔτος 1963.

4. Δανείστηκε κάποιος 500.000 δραχ. πρὸς 8 % καὶ μὲ ἀνατοκισμὸ κατὰ ἑξάμηνα. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ πληρώση γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκους μαζὶ ὕστερα ἀπὸ 9 χρόνια;

5. Κάμετε καὶ σεῖς, παιδιά, δικά σας προβλήματα μὲ ἀνατοκισμό.

Δ'. Δάνεια τοκοχρεολυτικά.

Μὲ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου καὶ τοῦ ἀνατοκισμοῦ συγγενεύουν καὶ τὰ τοκοχρεολυτικὰ προβλήματα. Γιατὶ πολλὲς φορὲς δανειζόμαστε χρήματα γιὰ 1, 2, ἢ καὶ περισσότερα χρόνια καὶ ἐπειδὴ δὲ θέλομε νὰ ἀφήσουμε ὅλο αὐτὸ τὸ χρέος γιὰ πολλὰ χρόνια συμφωνᾶμε νὰ τὸ πληρώνουμε σὲ δόσεις. Σὲ δόσεις βέβαια πληρώνουμε τὸ κεφάλαιο. Μὰ ὁ τόκος πρέπει νὰ πλερώνεται ξεχωριστὰ κάθε χρόνο κι αὐτός. Ἀλλοιῶς δὲ συμφέρει στὸ δανειστή. Οἱ δόσεις στὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν εἶναι ἴσες καὶ ὁ τόκος δὲν εἶναι ἴδιος γιὰ κάθε χρονιά. Γιατὶ τὸ κεφάλαιο ὁλοένα καὶ λιγοστεύει. Τὰ τοκοχρεολυτικὰ δάνεια εἶναι μιὰ πολὺ συνηθισμένη μορφὴ συναλλαγῆς. Οἱ ραφτομηχανές, τὰ αὐτοκίνητα, τὰ ραδιόφωνα κ.λ.π. ἔτσι πουλιοῦνται. Μὲ τὴ διαφορά, πὼς πολλὲς φορὲς οἱ δόσεις μᾶς φαίνονται ἀπόλυτα ἴσες γιατὶ κεφάλαιο καὶ τόκος ἔχουν ὑπολογισθῆ ἀπὸ τὰ πρὶν καὶ ὅλα μαζὶ χωριστήκανε σὲ ἴσες δόσεις, ποὺ τὶς πληρώνουμε κάθε μῆνα ἢ δίμηνο ἢ ἑξάμηνο ἢ χρόνο, χωρὶς νὰ μπερδευόμαστε κάθε φορὰ μὲ τόκους κ.λ.π. Ἐμεῖς ὅμως ἐδῶ πρέπει νὰ βρίσκουμε τὶ τόκο, τὶ κεφάλαιο καὶ τόκο δηλ. τὶ τοκοχρεολύσιο θὰ πληρώνουμε σὲ κάθε δόση γιὰ νὰ μὴ πέφτουμε ἔξω στὶς συναλλαγές μας.

Ἕνα πρόβλημα:

Ὁ πατέρας μου προπολεμικὰ ἀγόρασε μιὰ ραφτομηχανὴ γιὰ τὸ σπίτι μας ποὺ ἄξιζε 16.000 δραχμές. Συμφώνησε νὰ τὴν πληρώση σὲ 8 χρονιάτικες δόσεις καὶ μὲ τόκο 10 %. Πόσο πλήρωνε σὲ κάθε τοκοχρεολυτικὴ δόση; (κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί).

Λύση: Ἡ ἀξία τῆς ραφτομηχανῆς ἦτανε 16.000 δραχμές, ἄρα κάθε δόση ἦτανε 2.000. ***Ἀλλά***:

Στὴν α)	δόση	πλήρωσε	καὶ τόκο	1.600	(γιὰ	κεφάλαιο	16.000)	ἄρα	σύνολο	3.600.—
» β)	»	»	» »	1.400	(»	»	14.000)	»	»	3.400.—
» γ)	»	»	» »	1.200	(»	»	12.000)	»	»	3.200.—
» δ)	»	»	» »	1.000	(»	»	10.000)	»	»	3.000.—
» ε)	»	»	» »	800	(»	»	8.000)	»	»	2.800.—
» στ)	»	»	» »	600	(»	»	6.000)	»	»	2.600.—
» ζ)	»	»	» »	400	(»	»	4.000)	»	»	2.400.—
» η)	»	»	» »	200	(»	»	2.000)	»	»	2.200.—
				7.000			16.000			23.000.—

Ἀπὸ τὴν παραπάνω ἀνάλυση βλέπουμε πώς:

α) Ἐνῶ τὴ ραφτομηχανὴ τὴν εἶχε συμφωνήσει 16.000 δραχ. στὴν πραγματικότητα, ὕστερα ἀπὸ 8 χρόνια πλήρωσε 23.000 δραχ. ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ 7.000 εἶναι τόκοι.

καὶ β) ὅτι οἱ τοκοχρεολυτικὲς δόσεις, δὲν ἤτανε ἴσες ἀλλὰ ἡ δεύτερη μικρότερη ἀπὸ τὴν πρώτη, ἡ τρίτη μικρότερη ἀπὸ τὴ δεύτερη κ.ο.κ. γιατὶ ὕστερα ἀπὸ κάθε δόση λιγόστευε τὸ κεφάλαιο (ἡ ἀξία τῆς μηχανῆς) ὁπότε λιγόστευε καὶ ὁ τόκος.

Σημείωση: Στὰ τοκοχρεολυτικὰ δάνεια μπορεῖ νὰ ἔχουμε καὶ ἴσες τοκοχρεολυτικὲς δόσεις, ἂν διαιρέσουμε τὸ σύνολο τοῦ κεφαλαίου καὶ τῶν τόκων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δόσεων π. χ. 23.200 : 8=2.900 Μπορούσαμε δηλαδὴ νὰ συμφωνήσουμε μὲ τὸ δανειστὴ νὰ τοῦ δίνουμε ἴσες δόσεις.

Παρατήρηση.

Ὅταν οἱ τοκοχρεολυτικὲς δόσεις δὲν εἶναι χρονιάτικες ἀλλὰ ἑξάμηνες, τρίμηνες, δίμηνες ἢ καὶ μηνιάτικες τότε ὁ τόκος τοῦ κάθε φορὰ κεφαλαίου ὑπολογίζεται στὸ ἑξάμηνο, στὸ τρίμηνο κ.λ.π. κι ὄχι στὸ χρόνο ὅπως παραπάνω. Π. χ. μὲ ἑξάμηνες 8 τοκοχρεολυτικὲς δόσεις στὸ παραπάνω πρόβλημα θὰ εἴχαμε :

στὴν	α)	τόκο	800	δραχ.	σύνολο	δόσης	2.800.—
»	β)	»	700	»	»	»	2.700.—
»	γ)	»	600	»	»	»	2.600.—
»	δ)	»	500	»	»	»	2.500.—
»	ε)	»	400	»	»	»	2.400.—
»	στ)	»	300	»	»	»	2.300.—
»	ζ)	»	200	»	»	»	2.200.—
»	η)	»	100	»	»	»	2.100.—

ἄρα σύνολο τόκου 3.600 καὶ σύνολο τοκ. δόσεων 19.600 δραχ. Δηλαδὴ ἡ μηχανὴ ὕστερα ἀπὸ 8 ἑξάμηνα θὰ στοίχιζε λιγότερο ἀπ᾽ ὅσο θὰ στοίχιζε ὕστερα ἀπὸ 8 χρόνια.

Προβλήματα:

1) Ὁ μπαμπᾶς τοῦ Πίπη ἀγόρασε ἕνα φορτηγὸ αὐτοκίνητο ἀπὸ μιὰ ἀμερικανικὴ ἀντιπροσωπεία ἀξίας 8·000.000 δρχ. Συμ-

φώνησε δὲ νὰ τὸ πληρώση τοκοχρεολυτικὰ μὲ 12 % σὲ 20 χρονιάτικες δόσεις. Πόσα χρήματα θὰ πληρώση στὴν κάθε δόση;

2) Ὁ κ. Τριανταφύλλου ἀγόρασε ἕνα ραδιόφωνο ἀξίας 1.200.000 δρχ. καὶ θὰ τὸ πληρώση σὲ 10 ἑξάμηνες τοκοχρεολυτικὲς δόσεις μὲ 7 %. Πόσο θὰ πληρώση σὲ κάθε δόση;

3) Ἕνας δημόσιος ὑπάλληλος ἔρραψε ἕνα παλτὸ καὶ ἕνα κοστούμι σ' ἕναν ἐμπορoράφτη ἀξίας 950.000 δρχ. καὶ συμφώνησε νὰ τὸ πληρώση τοκοχρεολυτικὰ σὲ 9 μηνιάτικες δόσεις μὲ 4 %. Πόσο θὰ πληρώνη τὴ δόση;

4) Ἕνας ἔμπορος δανείστηκε ἀπὸ τὴν Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος 3.000.000 δρχ. μὲ 9 % καὶ συμφώνησε νὰ πληρώνη τὸν τόκο στὸ τέλος κάθε ἑξαμηνίας καὶ κεφάλαιο 600.000 δρχ. Σὲ πόσες δόσεις θὰ ξεπληρώση τὸ δάνειό του; Πόσο τόκο θὰ πληρώση ξεχωριστὰ γιὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ καὶ τί ποσὸν ἀναλογεῖ σὲ κάθε τοκοχρεολυτικὴ δόση;

5) Ἕνας καπνοκαλλιεργητὴς στὴ Μακεδονία δανείστηκε 1.500.000 δρχ. γιὰ νὰ ἐπεξεργαστῆ τὰ καπνά του. Πλήρωσε τὸ δάνειο αὐτὸ σὲ 5 τρίμηνες δόσεις μὲ τόκο 7 %. Πόσα χρήματα πλήρωσε συνολικὰ τὴ μέρα ποὺ ξόφλησε τὸ δάνειό του; Καὶ τί ποσὸ ἀναλογεῖ σὲ κάθε τοκοχρεολυτικὴ δόση;

6) Κάμετε καὶ μόνοι σας διάφορα προβλήματα τοκοχρεολυτικὰ μὲ παραδείγματα ἀπὸ τὸ σπίτι σας, τοὺς δικούς σας κλπ.

Ε'. Ὑφαίρεση (σκόντο). Δάνεια προεξοφλητικά.

Παραδείγματα : Κάποιος δάσκαλος πῆγε μιὰ μέρα σ' ἕνα βιβλιοπωλεῖο καὶ ἀγόρασε διάφορα βιβλία ἀξίας 50.000 δρχ. Μὰ ἐπειδὴ τὰ πλήρωσε ἀμέσως ὁ βιβλιοπώλης τοῦ ἔκανε μιὰ ἔκπτωση (σκόντο) 10 %. Πόσα χρήματα πλήρωσε στὴν πραγματικότητα ὁ δάσκαλος;

β) Ὁ ἔμπορος κ. Ι. Κ. δανείστηκε ἀπὸ μιὰ Τράπεζα 750.000 δρχ. καὶ συμφώνησε νὰ ἐπιστρέψη τὰ χρήματα ὕστερα ἀπὸ 8 μῆνες μὲ ἐπιτόκιο 6 %. Πόσα χρήματα θὰ πληρώση μαζὶ μὲ τὸν τόκο ὕστερα ἀπὸ τὴ λήξη τοῦ δανείου;

γ) Γιὰ νὰ εἶναι σίγουρη ὅμως ἡ Τράπεζα, πὼς δὲ θὰ χάση τὰ χρήματά της, ἔβαλε τὸν ἔμπορο νὰ ὑπογράψη ***γραμμάτιο.*** Στὸ γραμμάτιο ἐπάνω συμφωνήσανε νὰ γραφῆ καὶ ὁ τόκος τῶν 750.000 δρχ. σὲ 8 μῆνες μὲ 6 %. Δὲ βάλανε δηλαδὴ τὴν ***πραγματικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου, μὰ τὴν ***ὀνομαστικὴ*** ἀξία του. Τί λογῆς γραμμάτιο ὑπόγραψε στὴν Τράπεζα ὁ ἔμπορος κ. Ι. Κ.;

Γραμμάτιον δρχ. 780.000.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἰανουαρίου 1947.

Μετὰ 8 μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι, ὁ ὑποφαινόμενος Ι. Κ., ἔμπορος, νὰ πληρώσω εἰς τὴν Τράπεζαν τῆς Ἑλλάδος δρχ. ἑπτακοσίας ὀγδοήκοντα χιλιάδας (780.000), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτῆς σήμερον ὡς δάνειον δι' ἐμπορικὸν σκοπόν.

Ὑπογραφὴ
Ι. Κ.

Ὕστερα ἀπὸ 5 μῆνες ὅμως ὁ ἔμπορος κ. Ι. Κ. ἐξοικονόμησε τὰ χρήματα καὶ ἐξόφλησε τὸ γραμμάτιό του. Ἐπειδὴ ἡ ἐξόφληση αὐτὴ ἔγινε 3 μῆνες πρὶν ***τὴ λήξη*** του ἀσφαλῶς θὰ πλήρωσε λιγότερα, γιατὶ τὸ δάνειο ἔμεινε τοκισμένο μονάχα 5 μῆνες. Πόσα πλήρωσε **στὴν πραγματικότητα καὶ τὶ** ἔκπτωση **τοῦ** ἔκανε ἡ Τράπεζα;

ε) Ἕνας ἄλλος μικρέμπορος ψώνισε στὴν Ἀθήνα ἐμπορεύματα ἀξίας 1.000.000 δραχ. Καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶχε τὰ χρήματα ὑπόγραψε γραμμάτιο γιὰ 1 χρόνο μὲ 8 %. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ποὺ ὑπόγραψε;

στ) Ὁ κάτοχος τοῦ παραπάνω γραμματίου ὅμως βρέθηκε στὴν ἀνάγκη νὰ τὸ προεξοφλήση στὴν Τράπεζα 6 μῆνες πρὶν τὴ λήξη του μὲ ἔκπτωση 7 %. Πόσα χρήματα πῆρε στὰ χέρια του; Τί τοῦ κράτησε ἡ Τράπεζα;

Παρατηρήσεις στὶς παραπάνω περιπτώσεις.

1) Κάθε γραμμάτιο ἔχει ὀνομαστικὴ καὶ πραγματικὴ ἀξία:

α) ***Ὀνομαστικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου εἶναι ἐκείνη ποὺ γράφεται ἐπάνω στὸ γραμμάτιο καὶ στὴν ὁποία ἔχει συμψηφισθῆ καὶ ὁ τόκος γιὰ ὅλο τὸ χρονικὸ διάστημα τοῦ δανείου μέχρι τὴ λήξη του.

β) ***Πραγματικὴ ἀξία*** τοῦ γραμματίου εἶναι τὰ χρήματα ποὺ παίρνει καθαρὰ στὸ χέρι του ὁ δανειζόμενος.

2) Κάθε γραμμάτιο ἔχει καὶ τὴν ***ἡμερομηνία τῆς λήξης του.*** Μὲ βάση αὐτὴ γίνονται ὅλες οἱ ἐκπτώσεις καὶ οἱ λογαριασμοί.

3) ***Ὑφαίρεση*** λέγεται ἡ ἔκπτωση ποὺ κερδίζει ἀπὸ τὸν ἔμπορο ὁ ἀγοραστὴς ἐμπορευμάτων κλπ. ὅταν προκαταβάλη ὁλόκληρη τὴν ἀξία τους. Ἢ τὸ κέρδος ποὺ ἔχει ἐκεῖνος ποὺ προεξοφλεῖ γραμμάτια πρὶν τὴ λήξη τους μὲ κάποια ἔκπτωση.

3) ***Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση*** λέγεται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς

ἀξίας τοῦ γραμματίου. Αὐτὴ εἶναι πολὺ ἄδικη γιατί κρατεῖται ἀπὸ ὅλο τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου ποὺ δὲν ἀντιπροσωπεύει τὸ πραγματικὸ δάνειο.

4) *Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση* λέγεται ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Αὐτὴ εἶναι δικαιότερη μὰ σπάνια γίνεται χρήση της, γιατί οἱ ἔμποροι καὶ οἱ Τράπεζες προτιμοῦν τὴν ἐξωτερική.

5) Καθένας ἔχει τὸ δικαίωμα νὰ πουλῇ καὶ ν' ἀγοράζῃ γραμμάτια. Ἡ προεξόφληση γραμματίων γίνεται ὕστερα ἀπὸ συμφωνία μὲ δυὸ τρόπους: α) ἢ με ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση, β) ἢ μὲ ἐσωτερική. Στὴν πρώτη περίπτωση κρατεῖται ὁ τόκος ἢ γίνεται σκόντο πάνω στὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου μὲ βάση πάντοτε τὸ ποσοστὸ (ἐπιτόκιο) ποὺ θὰ συμφωνηθῇ καὶ τὸ χρόνο τῆς ἐξόφλησης τοῦ γραμματίου. Στὴ δεύτερη περίπτωση ἡ ὑφαίρεση γίνεται μὲ βάση τὴν πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου κ.λ.π.

Πῶς λύνονται τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαίρεσης.

Πρόβλημα: Ἡ Ἀγροτικὴ Τράπεζα προεξόφλησε γραμμάτιο 560.000 δραχ. μὲ 10 %. 6 μῆνες πρὸ τῆς λήξης του. Πόσο σκόντο κράτησε καὶ πόσα χρήματα ἔδωσε;

Λύση: κατάταξη

100 δραχ. σὲ 12 μῆνες δινουν ἔκπτωση 10 δραχ.
550,000 6 Χ;

$$X = 10 \times \frac{550.000}{100} \times \frac{6}{12} = \frac{33\,000\,000}{1.200} = 27.500$$

Ἄρα ἡ Τράπεζα κράτησε ἔκπτωση 27.500 δραχμὲς (ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση) καὶ ἔδωσε στὸ χέρι τοῦ καιόχου τοῦ γραμματίου 522.500 δραχ.

Σημείωση: Τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαίρεσης καὶ γενικὰ τῆς ὑφαίρεσης λύνονται, ὅπως τὰ προβλήματα τοῦ τόκου.

Προβλήματα μὲ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση.

1) Πόση ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση θὰ κρατηθῇ καὶ τὶ πραγματικὸ ποσὸ θὰ δοθῇ στὰ χέρια τοῦ δικαιούχου ἅμα ἐξοφληθοῦν τὰ ἑξῆς γραμμάτια:

Ὀνομασ. ἀξία		χρόνος λήξης	ποσοστὸ ἔκπτωσης
α)	425.600	10 μῆνες	7 %
β)	678.200	14 μῆνες	9,5 %
γ)	890.800	8 μῆνες	6,4 %
δ)	64 .000	195 ἡμέρες	8 %
ε)	930.000	45 ἡμέρες	4,3 %

2) Λύσετε τὰ ἓξ προβλήματα ποὺ βρίσκονται στὶς δυὸ προηγούμενες σελίδες καὶ ποὺ τὰ ἔχομε σὰν παραδείγματα. Εἶναι προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαίρεσης.

3) Ὁ κ. Κ. Φ. βιβλιοπώλης ἀπὸ τὶς Σέρρες ἀγόρασε ἀπὸ τὸν ἐκδοτικὸ οἶκο Δ. Δημητράκου βιβλία ἀξίας 4.500.000 δραχ. Ἀπὸ τὸ ποσὸ αὐτὸ πλήρωσε ἀμέσως 2.350.000 δραχ. καὶ γιὰ τὸ ὑπόλοιπο ὑπόγραψε γραμμάτιο γιὰ 4 μῆνες μὲ 8 %. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ; Μπορεῖτε νὰ συντάξετε τὸ κείμενό του;

4) Ὁ Οἶκος ὅμως Δ. Δημητράκου ἐπειδὴ εἶχε πολλὰ τέτοια γραμμάτια προεξόφλησε στὴν Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος τὸ γραμμάτιο αὐτὸ 1 μῆνα πρὶν τὴ λήξη του μὲ σκόντο 6 %. Τί τοῦ κράτησε ἡ Τράπεζα καὶ τί πῆρε στὸ χέρι του;

5) Ὁ κ. Κ.Φ. 15 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη τοῦ γραμματίου πῆγε στὴν Τράπεζα καὶ ἐξόφλησε τὸ γραμμάτιό του μὲ τὸ ἀρχικὸ ποσοστό. Τί κέρδισε ἀπὸ τὴν προεξόφληση αὐτὴ ὁ κ. Κ. Φ. καὶ τί κέρδισε ἡ Τράπεζα μέσα στὶς 15 ἡμέρες ποὺ εἶχαν περάσει ἀπὸ τὴν ἀγορὰ τοῦ γραμματίου αὐτοῦ;

6) Ἕνας ἔμπορος ἀπὸ τὸ Ἡράκλειο τῆς Κρήτης, ὁ κ. Σ. Κ., ψώνισε ἀπὸ τὸν μεγαλέμπορο ἀποικιακῶν τοῦ Πειραιᾶ κ. Μ. Π. διάφορα ἐμπορεύματα ἀξίας 3.500.000 δραχ. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν πλήρωσε ἀμέσως τὰ χρήματα ὑπόγραψε γραμμάτιο γιὰ 7 μῆνες μὲ 9 %. Ὕστερα ἀπὸ 2 μῆνες ὅμως ἐξοικονόμησε τὰ μισὰ χρήματα καὶ τὰ πλήρωσε. Ἀλλάξανε λοιπὸν τὸ παλιὸ γραμμάτιο μὲ νέο γιὰ τὸν ὑπόλοιπο χρόνο καὶ μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο. Νὰ βρῆτε: α) Πόση ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ ἀρχικοῦ γραμματίου, β) ποιὰ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ δευτέρου γραμματίου καὶ γ) τί κέρδος εἶχε ὁ κ. Σ. Κ. ἀπὸ τὴν προεξόφληση τοῦ πρώτου γραμματίου.

7) Ἕνα γραμμάτιο μὲ ὀνομαστικὴ ἀξία 754.000 δραχ. προεξοφλήθηκε 175 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του γιὰ 690.000 δραχ. Μὲ τί ἐπιτόκιο (ποσοστὸ) ἔγινε αὐτὴ ἡ προεξόφληση (%;)

8) Ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τῶν παρακάτω γραμματίων:

πραγματικὴ ἀξία	**χρόνος λήξης**	**ποσοστὸ ὑφαίρεσης**
α) 850 000	9 μῆνες	13 %
β) 532.000	11 μῆνες	12 5 %
γ) 963.000	145 ἡμέρες	$10\frac{1}{3}$ %
δ) 250.000	38 ἡμέρες	7,2 %

Σ η μ ε ί ω σ η : Θὰ βρεθῆ ἡ ὑφαίρεση καὶ θὰ προστεθῆ στὴν πραγματικὴ ἀξία.

9) Μὲ τί ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ ἐξόφληση στὰ παρακάτω γραμμάτια:

ὀνομαστικὴ ἀξία	*χρόνος λήξης*	*τί ποσὸν δόθηκε στὸ χέρι*
α) 1.698 000	18 μῆνες	1.500.000
β) 3 540 000	13 μῆνες	3 230 000
γ) 2.940 000	256 ἡμέρες	2 700 000
δ) 5 300.000	90 ἡμέρες	4.900 000

10) Κάμετε καὶ σεῖς, παιδιά, δικά σας προβλήματα μὲ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση.

Πῶς λύνονται τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσης.

Πρόβλημα: Ἕνας ἐπαγγελματίας δανείστηκε ἀπὸ κάποιο γνωστό του γιὰ 5 μῆνες 300.000 δρχ. μὲ 6 %. Ὁ δανειστὴς κράτησε προκαταβολικὰ τὸν τόκο τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ γιὰ τοὺς 5 μῆνες καὶ στὸ γραμμάτιο βάλανε σὰν ὀνομαστικὴ ἀξία τὸ ἴδιο ποσόν. Ποιὰ ἦταν ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση καὶ τί ποσὸν καθαρὸ πῆρε στὰ χέρια του ὁ δικαιοῦχος;

Λύση:

100 δρχ. σὲ 12 μῆνες 6
300 000 » » 5 » X;

$$X = 6 \times \frac{300\,000}{100} \times \frac{5}{12} = \frac{9\,000.000}{1200} = 7500.$$

Ἄρα εἴχαμε ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση 7500 δρχ. καὶ στὸ χέρι τοῦ δικαιούχου 300 000 — 7500 = 292.500 δρχ.

Ἕνας ἔμπορος προεξόφλησε γραμμάτιο 680.000 δρχ. μὲ 10 % τὸ ὁποῖον ἔληγε μετὰ ἕνα χρόνο. Ποιὰ ἦταν ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση, δηλ. τί σκόντο κράτησε ὁ ἔμπορος καὶ τί ποσὸν πλήρωσε στὸ χέρι τοῦ δικαιούχου;

α) ***Λύση:*** σὲ 110 δρχ. κράτησε 10
» 680.000 » » X;

$$X = 10 \times \frac{680.000}{110} = \frac{6.800\,000}{1.0} = 61.818,18.$$

Ἄρα κράτησε 61.818,18 γιὰ σκόντο καὶ ἔδωσε καθαρὲς (680.000 — 61.818,18 =) 618.181,82.

β) ***Λύση:*** Σὲ ὀνομ. αξία 110 δρχ. ἡ πραγματ. ἀξία ἦταν 100
» » » 580.000 » » » » X;

$$X = 100 \times \frac{680\,000}{110} = \frac{68.000.000}{110} = 618.181,82.$$

Ἄρα κράτησε γιὰ σκοντο 680.000 — 610.181.82 = 61,818,82.

Σημείωση: Στὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσης, ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν ἀρχή, τὸ σκόντο κρατεῖται μὲ βάση τὴν πραγματικὴν ἀξία τοῦ δανείου ἢ τοῦ γραμματίου κι ὄχι τὴν ὀνομαστική. Εἶναι λοιπὸν ἀπαραίτητο νὰ βρίσκουμε πρῶτα τὴν πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ τοῦ δανείου. Σὰν ὑπόδειγμα νὰ ἔχετε τὴν παραπάνω β΄ λύση.

Προβλήματα μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση.

1) Τί ποσὸν πληρώθηκε στὸ χέρι καὶ τί κρατήθηκε ὅταν ἐξοφλήθηκαν τὰ παρακάτω γραμμάτια τὴ μέρα τῆς λήξης τους μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση;

	Ὀνομασ. ἀξία	*χρόνος λήξης*	*ποσοστὸ*
α)	985.000	12 μῆνες	14 %
β)	4.600.000	9 μῆνες	8 %
γ)	3.950.000	11 μῆνες	12 %
δ)	875.000	92 ἡμέρες	6 %
ε)	1.238.000	35 ἡμέρες	5,5 %

Ἕνας ἔμπορος προεξόφλησε 75 μέρες πρὸ τῆς λήξης τους καὶ μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση τὰ ἑξῆς γραμμάτια ποὺ εἶχε ἀγοράσει καὶ ποὺ ἔληγαν σὲ ἕνα χρόνο.

α) γραμμάτιο	650.000	δραχ.	ἀντὶ	610.000	δραχ.
β) »	848.000	»	»	795.000	»
γ) »	1.535 000	»	»	1.400 000	»
δ) »	2.980 000	»	»	2.750 000	»

Μὲ τί ποσοστὸ (%) ἔγιναν οἱ προεξοφλήσεις αὐτές;

3) Ἡ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος προεξόφλησε 3 μῆνες πρὶν τὴ λήξη τους τὰ παρακάτω γραμμάτια:

α) γραμμάτιο	450 000	μὲ 7 %	καὶ χρόνο	λήξης	6 μῆνες.
β) »	295 000	» 8 %	»	»	10 μῆνες.
γ) »	756 000	» 9 %	»	»	1 χρόνο.
δ) »	2.448.000	» 5 %	»	»	5 μῆνες.

Τί ποσὰ κρατήθηκαν σὰν ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση;

4) Κάνετε καὶ σεῖς δικά σας προβλήματα μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ. — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ. — ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ. — ΜΙΞΗ.

Α΄. Μερισμὸς σὲ μέρη ἀνάλογα.

Παραδείγματα:

1) Δυὸ κτηνοτρόφοι εἶχαν μαζὶ 100 πρόβατα. Ὁ πρῶτος εἶχε 60 πρόβατα καὶ ὁ δεύτερος 40. Ἐνοίκιασαν ἕνα λιβάδι μαζὶ καὶ

Σ η μ ε ί ω σ η : Στὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαίρεσης, ὅπως εἴπαμε καὶ στὴν ἀρχή, τὸ σκόντο κρατεῖται μὲ βάση τὴν πραγματικὴν ἀξία τοῦ δανείου ἢ τοῦ γραμματίου κι ὄχι τὴν ὀνομαστική. Εἶναι λοιπὸν ἀπαραίτητο νὰ βρίσκουμε πρῶτα τὴν πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ τοῦ δανείου. Σὰν ὑπόδειγμα νὰ ἔχετε τὴν παραπάνω β΄ λύση.

Προβλήματα μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση.

1) Τί ποσὸν πληρώθηκε στὸ χέρι καὶ τί κρατήθηκε ὅταν ἐξοφλήθηκαν τὰ παρακάτω γραμμάτια τὴ μέρα τῆς λήξης τους μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση;

	Ὀνομασ. ἀξία	*χρόνος λήξης*	*ποσοστὸ*
α)	965 000	12 μῆνες	14 %
β)	4.600.000	9 μῆνες	8 %
γ)	3.950.000	11 μῆνες	12 %
δ)	875.000	92 ἡμέρες	6 %
ε)	1.238.000	35 ἡμέρες	5,5 %

Ἕνας ἔμπορος προεξόφλησε 75 μέρες πρὸ τῆς λήξης τους καὶ μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση τὰ ἑξῆς γραμμάτια ποὺ εἶχε ἀγοράσει καὶ ποὺ ἔληγαν σὲ ἕνα χρόνο.

α) γραμμάτιο	650.000	δραχ.	ἀντὶ	610.000	δραχ.
β) »	848.000	»	»	795.000	»
γ) »	1.535 000	»	»	1.400 000	»
δ) »	2.980 000	»	»	2.750 000	»

Μὲ τί ποσοστὸ (%) ἔγιναν οἱ προεξοφλήσεις αὐτές;

3) Ἡ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος προεξόφλησε 3 μῆνες πρὶν τὴ λήξη τους τὰ παρακάτω γραμμάτια:

α) γραμμάτιο	450 000	μὲ 7 %	καὶ	χρόνο	λήξης	6 μῆνες.
β) »	295 000	» 8 %	»	»	»	10 μῆνες.
γ) »	756 000	» 9 %	»	»	»	1 χρόνο.
δ) »	2.448.000	» 5 %	»	»	»	5 μῆνες.

Τί ποσὰ κρατήθηκαν σὰν ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση;

4) Κάνετε καὶ σεῖς δικά σας προβλήματα μὲ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ. — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ. — ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ. — ΜΙΞΗ.

Α΄. Μερισμὸς σὲ μέρη ἀνάλογα.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α :

1) Δυὸ κτηνοτρόφοι εἶχαν μαζὶ 100 πρόβατα. Ὁ πρῶτος εἶχε 60 πρόβατα καὶ ὁ δεύτερος 40. Ἐνοίκιασαν ἕνα λιβάδι μαζὶ καὶ

πλήρωσαν γιὰ βοσκὴ 750.000 δραχμές. Πόσες δραχ. πλήρωσε καθένας τους;

Γιὰ 100 πρόβατα πλήρ. 750.000 δρχ.

» 1 » » $=\frac{750.000}{00}$

ὁ α΄ » 60 » » $\frac{750.000\times 60}{100}=\frac{45000000}{100}=450.00$

ὁ β΄ » 40 » » $\frac{750.000\times 40}{100}=\frac{30000000}{100}=300.00$

Λύση μὲ τὴ μέθοδο τοῦ μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα:

Μοιράζομε (μερίζομε) τὶς 750.000 δρχ. σὲ μέρη ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθ. 60 καὶ 40 ὡς ἑξῆς:

ὁ α΄ εἶχε 60 πρόβατα.
ὁ β΄ » 40 »
σύνολο 100

Ἄρα:

ὁ α΄ πλήρωσε $750\,000\times\frac{60}{100}=450.000$

ὁ β΄ » $750.000\times\frac{40}{100}=300.000$

2) Ἕνας πατέρας κατάθεσε στὴν Τράπεζα 2.800.000 δραχμὲς μὲ τὸν ὅρο νὰ μοιραστοῦν στὰ παιδιά του ἅμα μεγαλώσουν. Ἀλλὰ στὸ πρῶτο παιδὶ ὅριζε νὰ δοθῆ τὸ $^1/_4$, στὸ δεύτερο τὸ $^1/_5$, καὶ τὰ ὑπόλοιπα στὴ μητέρα τους γιὰ τὰ γεράματά της. Πόσα χρήματα πῆρε κάθε παιδὶ καὶ πόσα ἡ μητέρα τους;

Λύση μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

$\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{9}{20}$

Ἄρα τὸ α΄ παιδὶ πῆρε τὰ $\frac{5}{20}$

τὸ β΄ » » » $\frac{4}{20}$

καὶ ἡ μητέρα » » $\frac{11}{20}$

Κατάταξη:

τὰ $\frac{20}{20}$ ποὺ πῆραν ὅλοι μαζὶ ἦταν 2.800.000

τὸ $\frac{1}{20}$ » $\frac{2.800.000}{20}$

τὰ $\frac{5}{20}$ ποὺ πῆρε τὸ α΄ παιδὶ ἦταν $\frac{2800.000 \times 5}{20} = 700000$
τὰ $\frac{4}{20}$ » » τὸ β΄ » » $\frac{2800.000 \times 4}{20} = 560000$ Σύνολο : 2800000
καὶ τὰ $\frac{11}{20}$ » » ἡ μητέρα » $\frac{2800000 \times 11}{20} = 1540000$

Λύση μὲ τὴ μέθοδο τοῦ μερισμοῦ:

Καὶ ἡ λύση μὲ τὴ μέθοδο τοῦ μερισμοῦ μοιάζει μὲ τὴν παραπάνω. Θὰ μοιράσουμε δηλ. τὸν ἀριθμὸ 2.800.000 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν κλασμάτων $\frac{5}{20}$, $\frac{4}{20}$ καὶ $\frac{11}{20}$ ὁπότε θἄχουμε:

$$\alpha' \text{ παιδὶ } 2.800.000 \times \frac{5}{20} = 700.000$$

$$\beta' \text{ παιδὶ } 2.800.000 \times \frac{4}{20} = 560.000$$

$$\gamma' \text{ μητέρα } 2.800.000 \times \frac{11}{20} = 1.540.000$$

Ἡ διαίρεση μὲ τὸ ἄθροισμα $\frac{20}{20}$ εἶναι περιττὴ γιατὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἴδιοι.

Σ η μ ε ί ω σ η: Τὸ παραπάνω πρόβλημα λύνεται καὶ μὲ τὰ ἁπλὰ κλάσματα ποὺ μάθαμε στὴν Ε΄ Τάξη, δηλ. μ᾽ ἕναν ἁπλὸ πολλαπλασιασμό.

3) Μιὰ χωρικὴ πῆγε σὲ μιὰ πόλη καὶ πούλησε 240 αὐγά. Ἀλλὰ στὸ δρόμο ποὺ πήγαινε τῆς ἔσπασαν τὸ $\frac{1}{8}$ τῶν αὐγῶν. Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα πούλησε σ᾽ ἕνα μπακάλη τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ σ᾽ ἕνα ζαχαροπλάστη τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ ὅσα τῆς περίσσεψαν. Τέλος κάτι λίγα αὐγὰ ποὺ ἔμειναν ἀπούλητα τὰ ἐπέστρεψε στὸ χωριό της. Πόσα αὐγὰ ἔσπασαν, πόσα πούλησε στὸ μπακάλη, πόσα στὸ ζαχαροπλάστη καὶ πόσα ἐπέστρεψε στὸ χωριό της;

Λύση: Ἡ χωρικὴ αὐτὴ εἶχε 240 αὐγά. Ὅλα τὰ αὐγὰ αὐτὰ ἦταν $\frac{8}{8} - \frac{1}{8}$ ποὺ ἔσπασαν $= \frac{7}{8}$. Ἄρα στὸ μπακάλη πούλησε

$\frac{7}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{40}$, στὸ ζαχαροπλάστη $\frac{40}{40} - \frac{14}{40} - \frac{26}{40} \times \frac{2}{3} = \frac{25}{120}$

καὶ στὸ χωριό της ἐπέστρεψε $\frac{120}{120} - \frac{52}{120} = \frac{68}{120}$.

Θὰ μερίσωμε λοιπὸν τὸν ἀριθμὸ 240 αὐγὰ ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμούς: α) $\frac{7}{8}$ ποὺ ἔσπασαν, β) $\frac{14}{40}$ ποὺ ἔδωσε στὸ μπακάλη, γ) $\frac{52}{120}$ ποὺ ἔδωσε στὸ ζαχαροπλάστη καὶ δ) $\frac{68}{120}$ ποὺ τῆς περίσσεψαν.

Σημείωση: Ὁ μερισμὸς θὰ γίνη ὅπως στὸ παραπάνω πρόβλημα. Τὰ κλάσματα καὶ δῶ θὰ γίνουν ὁμώνυμα. Τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ μπορεῖ νὰ γίνη ὁμώνυμο, ὁπότε ἔχομε $\left(\frac{7}{8} \times \frac{15}{15} = \frac{105}{120}\right)$.

Κανόνας μερισμοῦ:

Γιὰ νὰ μερίσουμε ἕνα ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα κάποιων ἄλλων ἀριθμῶν ποὺ μᾶς δίνονται πολλαπλασιάζομε τὸν μεριστέο ἀριθμὸ μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δοσμένους ἀριθμοὺς καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο μὲ τὸ ἄθροισμά τους.

Προβλήματα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα.

1) Μιὰ μητέρα ἐμοίρασε 120 σύκα στὰ τρία παιδιά της ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία τους. Τὸ ἕνα ἦταν 8 χρονῶν, τὸ δεύτερο 10 χρονῶν καὶ τὸ τρίτο 12 χρονῶν. Πόσα σύκα πῆρε κάθε παιδί;

2) Πέντε ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα αὐλάκι καὶ πῆραν 800.000 δραχμές. Ὁ α΄ δούλεψε 30 μέρες ὁ β΄ 25 μέρες ὁ γ΄ 20 μέρες ὁ δ΄ 15 μέρες καὶ ὁ ε΄ 10 μέρες. Πόσα χρήματα πῆρε ὁ καθένας τους;

3) Ἡ Οὔνρα μοίρασε σὲ πέντε φτωχὲς οἰκογένειες 640 ὀκάδες ἀλεύρι, 25 ὀκάδες κακάο, 5000 κουτιὰ γάλα ἐβαπορέ, 60 ὀκάδες ζάχαρη καὶ 35 ὀκάδες λίπος μαργαρίνης. Τὶς ποσότητες ὅμως αὐτὲς τὶς μοίρασε στὶς οἰκογένειες αὐτὲς ἀνάλογα μὲ τὰ μέλη ποὺ εἶχαν. Ἡ α΄ οἰκογένεια εἶχε 3 μέλη, ἡ β΄ εἶχε 4 μέλη ἡ γ΄ 5, ἡ δ΄ 6 καὶ ἡ ε΄ 7. Τί ποσότητα ἀπὸ κάθε εἶδος πῆρε καθεμιὰ ἀπὸ τὶς οἰκογένειες αὐτές;

4) Τρεῖς χωρικοὶ καλλιέργησαν μαζὶ 75 στρέμματα χωράφια καὶ ἔβγαλαν 15.000 ὀκάδες σιτάρι. Ὁ α΄ ἀπ᾽ αὐτοὺς ἔβγαλε 28 στρέμματα, ὁ β΄ 26 καὶ ὁ γ΄ 21. Πόσο σιτάρι ἀναλογεῖ στὸν καθένα τους;

5) Ἕνας πατέρας ἔγραφε στὴ διαθήκη του νὰ μοιραστοῦν 1.800.000 δραχμὲς δηλ. ἡ χρηματική του περιουσία ὡς ἑξῆς: στὴ γυναίκα του νὰ δοθοῦν τὰ $\frac{3}{8}$, στὸ γιό τὰ $\frac{2}{7}$, στὴ θυγατέρα του τὸ $\frac{1}{6}$. Καὶ τὰ ὑπόλοιπα νὰ δοθοῦν σένα ὀρφανοτροφεῖο. Νὰ βρῆτε πόσα πῆρε ἡ γυναίκα του, τὸ α΄ παιδί, ἡ θυγατέρα καὶ πόσα δωρήθηκαν στὸ ὀρφανοτροφεῖο;

6) Ἕνας ἔμπορος ξόδεψε 5.000.000 δραχμὲς γιὰ νὰ ἀγοράση διάφορα ἐμπορεύματα. Τὸ $\frac{1}{2}$ ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτὰ τὸ ξόδεψε γιὰ νὰ ἀγοράση ἄλευρα. Τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπ ὅσα τοῦ περίσσεψαν τὸ ξόδεψε γιὰ νὰ ἀγοράση ζάχαρη. Καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ χρησιμοποίησε γιὰ νὰ ἀγοράσι ρύζι. Πόσα χρήματα ξόδεψε γιὰ ἀλεύρι, πόσα γιὰ ζάχαρη καὶ πόσα γιὰ ρύζι;

7) Κάνετε καὶ σεῖς, παιδιά, δικά σας προβλήματα μερισμοῦ ἁπλᾶ μὰ καὶ δύσκολα.

Β. Εταιρεία - Προβλήματα Εταιρείας

Τὰ προβλήματα τῆς ἑταιρείας δὲ διαφέρουν σὲ τίποτε ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα. Εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἐφαρμογή τους.

Παραδείγματα:

1) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρίστηκαν καὶ κατέθεσαν μαζὶ 2.400.000 δραχμές. Ἀπὸ τὸ ποσὸ αὐτὸ ὁ α΄ κατέθεσε 900.000 ὁ β΄ 850.000 καὶ ὁ γ΄ 650.000. Στὸ τέλος βρῆκαν πῶς κέρδισαν 1.500.000 δρχ. ἀπὸ τὸ συνεταιρισμό τους αὐτό. Πόσα κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας του;

Λύση. Θὰ μερίσουμε τὸ κέρδος ἀνάλογα μὲ τὶς καταθέσεις τους.

2) Δυὸ ἔμποροι ἔκαναν μιὰ ἐπιχείρηση. Ὁ α΄ εἶχε καταθέσει 2.000.000 στὶς 5 Μαρτίου 1946. Ὁ β΄ μπῆκε στὴν ἐπιχείρηση 3 μῆνες ἀργότερα καὶ κατέθεσε 1.500.000. Ὕστερα ἀπὸ 1 χρόνο διέλυσαν τὴν ἑταιρεία τους καὶ βρῆκαν πῶς κέρδισαν 1.200.000 δραχμές. Πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας τους;

Λύση. Θὰ μερίσουμε τὸ κέρδος σὲ μέρη ἀνάλογα τοῦ γινομένου τῶν καταθέσεων ἐπὶ τὸ χρόνο ποὺ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση τὰ κεφάλαια καθενός. Ἔτσι·

Ὁ α' κατάθεσε 2.000.000×12 μῆνες : 24.000.000
Ὁ β' » 1.500.000× 9 » : 13.500.000
σύνολον : 37.500.000

Ἄρα θὰ μερίσομε τὸ κέρδος 1.208.000 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 24.000.000 καὶ 13.500.000, ὁπότε βρίσκομε, πὼς ὁ α' πῆρε 768.000 καὶ ὁ β' 432.000.

Σημείωση: α) Ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι ἴσα ἀλλὰ διαφέρει μονάχα ὁ χρόνος, τότε ὁ μερισμὸς γίνεται ἀνάλογα μὲ τὸ χρόνο. β) Τὰ προβλήματα ἑταιρείας λύνονται καὶ μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

Προβλήματα ἑταιρείας.

1) Τρεῖς γεωργοὶ συνεταιρίστηκαν καὶ ἀγόρασαν μιὰ ἁλωνιστικὴ μηχανὴ μὲ 6.000.000 δραχμές. Ὁ α' ἔβαλε τὰ μισὰ καὶ τ' ἄλλα μισὰ οἱ δυὸ ἄλλοι. Ὕστερα ἀπὸ κάμποσο καιρὸ βρῆκαν πὼς ἀπὸ τὸ συνεταιρισμὸ αὐτὸ κέρδισαν 3.200.000 δρχ. Πόσο κέρδος πῆρε ὁ καθένας τους ;

2) Ἕνας σωφὲρ ἀγόρασε ἕνα αὐτοκίνητο μὲ 3.600.000 δραχ. Ἀλλὰ δὲν ἔβγαινε πέρα στὰ ἔξοδα καὶ ἀναγκάστηκε ὕστερα ἀπὸ 8 μῆνες νὰ πάρη συνέταιρο ποὺ κατάθεσε καὶ κεῖνος ἄλλες 3.600,000. Τὸ αὐτοκίνητο δούλεψε καλὰ τρία ὁλόκληρα χρόνια καὶ ἔδωσε στοὺς δυὸ αὐτοκινητιστὲς 10.000.000 κέρδος. Νὰ βρῆτε πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρη ὁ καθένας ;

3) Ἕνας ἔμπορος ἄνοιξε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ κεφάλαιο 3.800.000 δρχ. Μετὰ δυὸ μῆνες πῆρε συνέταιρο ποὺ κατέθεσε 3.000.000 δρχ. Ὕστερα ἀπὸ 5 μῆνες μετὰ τὴν πρόσληψη τοῦ πρώτου συνεταίρου πῆρε καὶ δεύτερο ποὺ κατέθεσε 2.000.000 δραχ. Τέλος ἅμα πέρασαν 19 μῆνες διέλυσαν τὴν ἑταιρεία καὶ βρῆκαν πὼς εἶχαν κερδίσει 4.400.000 δραχ. Πόσο κέρδος δικαιοῦται ὁ καθένας τους :

4) Τρεῖς ἔμποροι εἶχαν καταθέσει μαζὶ 1.500.000 δραχ· σὲ μιὰ ἐπιχείρηση. Ὅταν τὴ διάλυσαν πῆραν κέρδος ὁ α' 600.000 δρχ. ὁ β' 500.000 καὶ ὁ γ' 400.000. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει καθένας τους :

5) Πέντε ἔμποροι ἔκαναν μιὰ ἑταιρεία ποὺ βάσταξε 4 χρόνια. Ὁ α' κατάθεσε στὶς 10 Ἀπριλίου 1946 2.000.000 δραχ. Ὁ β' κατάθεσε στὶς 25 Μαΐου τοῦ ἴδιου χρόνου 400.000 δραχ. Ὁ γ' κατάθεσε στὶς 17 Ἰουνίου ἴδιου χρόνου 400.000 δραχ. καὶ ὁ δ' κατάθεσε 500.000 δρχ. στὶς 14 Ἰουλίου ἴδιου χρόνου. Ἡ εται-

ρεῖα διαλύθηκε στὶς 7 Μαρτίου 1947 μὲ συνολικὰ κέρδη 10.000.000 δραχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

6) Πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρη κάθε συνέταιρος μιᾶς ἐπιχείρησης ὅταν:

ὁ α΄ κατάθεσε 100.000 δρχ. γιὰ 7 μῆνες
ὁ β΄ » 150.000 » » 8 »
ὁ γ΄ » 220.000 » » 10 »
ὁ δ΄ » 3.0.000 » » 15 »
ὁ ε΄ » 600.000 » » 9 χρόνια
ὁ στ΄ » 900.000 » » 36 μῆνες.

Καὶ ὅταν τὰ συνολικὰ κέρδη τους ἦταν 1.600.000 δραχμές;

7) Τί κεφάλαια κατάθεσαν σὲ μιὰ ἐπιχείρηση ὅταν:

ὁ α΄ συνεταῖρος πῆρε κέρδος 75.000 δρχ.
ὁ β΄ » » » 126.000 »
ὁ γ΄ » » » 245.000 »
ὁ δ΄ » » » 458.000 »

Καὶ ὅταν τὸ σύνολον τῶν καταθέσεων ἦταν 5.350.000 δρχ;

8) Κάνετε καὶ σεῖς, παιδιά, δικά σας προβλήματα ἑταιρείας μὲ καταθέσεις, κέρδη, ἄνισες καταθέσεις καὶ ἄνισο χρόνο.

Γ΄ Μέσος ὅρος—Προβλήματα μέσου ὅρου.

Παραδείγματα: Ὁ Γιῶργος πῆρε στὰ προφορικὰ βαθμὸ 10. Στὰ γραπτὰ 9. Τί βαθμὸ πῆρε στὸ ἐνδεικτικό του;

Λύση: Θὰ προσθέσουμε τοὺς δυὸ βαθμοὺς καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ τὸ διαιρέσουμε μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν 2 βαθμῶν ἔτσι:

α) στὰ γραπτὰ 10
β) » προφορ. 9
σύνολον 19

Ἄρα ὁ μέσος ὅρος τῶν δυὸ βαθμῶν εἶναι $19:2 = 9\frac{1}{2}$

Κανόνας:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μέσο ὅρο μερικῶν ἀριθμῶν ποὺ μᾶς δίνονται βρίσκομε πρῶτα τὸ ἄθροισμά τους καὶ ἔπειτα διαιροῦμε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Προβλήματα μέσου ὅρου.

1) Ὁ Ἄγγελος πῆρε τοὺς ἑξῆς βαθμοὺς στὰ προφορικά: ἑλληνικὰ 10, μαθηματικὰ 9, ἱστορία 10, θρησκευτικὰ 10, γεωγρα-

φία 8, γεωμετρία 7, ἰχνογραφία 6, καλλιγραφία 6, χειροτεχνία 7, Φ. πειραματικὴ 9. Ποιὸς ἦταν ὁ μέσος ὅρος τῶν προφορικῶν βαθμῶν του; Ἐπίσης ὁ ἴδιος μαθητὴς πῆρε στὰ γραπτά του τοὺς ἑξῆς βαθμούς: ἑλληνικὰ 10, μαθηματικὰ 8, ἱστορία 9, θρησκευτικὰ 7, γεωγραφία 9, γεωμετρία 8, ἰχνογραφία 7, καλλιγραφία 7, χειροτεχνία 6 καὶ φυσ. πειραματικὴ 8. Ποιὸς ἦταν ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν του στὰ γραπτὰ καὶ ποιὸς ὁ γενικὸς βαθμὸς τοῦ ἀπολυτηρίου του; (σὲ γραπτὰ καὶ προφορικά).

2) Νὰ βρῆτε καὶ σεῖς, παιδιά, τὸ μέσο ὅρο τῶν ἐφετεινῶν βαθμῶν σας καθὼς καὶ τῶν ἀδερφιῶν σας.

3) Μιὰ καλοκαιρινὴ ἡμέρα τὸ θερμόμετρο ἔδειχνε τοὺς ἑξῆς βαθμοὺς πάνω ἀπὸ τὸ μηδενικό: 24,7 β., 25,3 β., 27,8 β., 29 β., 32,9 β., καὶ 30,5 β. Ποιὸς ἦταν ὁ μέσος ὅρος τῆς θερμοκρασίας τὴ μέρα ἐκείνη;

4) Μετρήσατε καὶ σεῖς παιδιὰ τὴ σημερινὴ θερμοκρασία τῆς ἀτμόσφαιρας μὲ τὸ ἐπιτοίχιο θερμόμετρο τοῦ σπιτιοῦ σας ἢ περνᾶτε ἀπὸ κανένα φαρμακεῖο ἢ ἄλλο κατάστημα καὶ σημειώσετε τὴ θερμοκρασία τοῦ καιροῦ στὶς 6 τὸ πρωΐ, στὶς 1 τὸ μεσημέρι, στὶς 3 τὸ ἀπόγευμα καὶ στὶς 9 τὸ βράδυ. Βρῆτε ἔπειτα τὸ μέσο ὅρο τῆς θερμοκρασίας τοῦ τόπου σας γιὰ σήμερα. (Ἐπίσης κανετε τὸ ἴδιο μετρώντας τὴ θερμοκρασία τὴ δική σας μὲ κοινὸ θερμόμετρο).

5) Ἕνας οἰκονενειάρχης δημόσιος ὑπάλληλος ξόδεψε σὲ μιὰ βδομάδα τὰ ἑξῆς ποσὰ γιὰ τὴ συντήρηση τῆς οἰκογενείας του: Τὴν Δευτέρα 11.000 δρχ. Τὴν Τρίτη 11.500 δρχ. Τὴν Τετάρτη 9.800 δρχ. Τὴν Πέμπτη 10.300 δρχ. Τὴν Παρασκευὴ 8250 δρχ. Τὸ Σάββατο 12.700 δρχ. Καὶ τὴν Κυριακὴ 17.900 δρχ. Ποιός εἶναι ὁ μέσος ὅρος στὰ ἔξοδα μιᾶς βδομάδας τῆς ὑπαλληλικῆς αὐτῆς οἰκογένειας;

6) Ἕνας τσαγκάρης δούλευε μὲ τὸ κομμάτι καὶ ἔπερνε ἀνάλογο μεροκάματο. Μιὰ μέρα πῆρε 8.000 δρχ. Τὴ δεύτερη 9.200 δρχ. Τὴν ἄλλη 6.400 δρχ. Τὴν τέταρτη 7.300 δρχ. Τὴν ἄλλη 10.500 δρχ. Τὴν ἕκτη μέρα 11.350 δρχ. Καὶ τὴν ἕβδομη 11.800 δρχ. Μὲ τί μέσο ὅρο μεροκάματου δούλεψε;

7) Ἕνα αὐτοκίνητο ἔτρεξε τὴν ἀπόσταση ἀπὸ τῆς Σέρρες στὴ Θεσσαλονίκη 5 φορὲς μὲ τὶς ἑξῆς ταχύτητες: τὴν πρώτη φορὰ σὲ $4\frac{1}{3}$ ὥρες, τὴ δεύτερη σὲ 5 ὥρες καὶ 25΄, τὴν τρίτη σὲ 6 ὥρες καὶ 48΄, τὴν τέταρτη σὲ 3 ὥρες καὶ 22΄ καὶ τὴν πέμπτη σὲ 7

ὧρες καὶ 55΄. Ποιὸς ἦταν ὁ μέσος ὅρος σὲ ὧρες σαὐτὲς τὶς διαδρομές ;

8) Μιὰ ὑφάντρα ὕφανε μιὰ μέρα 9 πῆχες καὶ 6 ρούπια ὕφασμα. Τὴν ἄλλη 7 πῆχες καὶ 5 ρούπια. Καὶ τὴν ἄλλη 8 πῆχες καὶ 4 ρούπια. Πόσους πήχεις ὕφανε τὴν ἡμέρα μὲ βάση τὸ μέσο ὅρο τῶν τριῶν αὐτῶν ἡμερῶν ;

9) Κάνετε, παιδιά, καὶ σεῖς δικά σας προβλήματα.

Δ. προβλήματα μίξης (ἀνάμιξης)

Τὰ προβλήματα τῆς μίξης λύνονται, ὅπως τὰ προβλήματα μερισμοῦ, ἑταιρείας καὶ μέσου ὅρου. Ἀνήκουν δηλαδὴ στὴν ἴδια κατηγορία.

Παραδείγματα:

1) Ἕνας μπακάλης εἶχε δυὸ ποιότητες λάδι. Ἀπὸ τὴν α΄ εἶχε 50 ὀκ. ὀκ. καὶ τὴν πουλοῦσε πρὸς 6.000 δρχ. τὴν ὀκᾶ καὶ ἀπὸ τὴν β΄ εἶχε 30 ὀκάδες καὶ τὸ πουλοῦσε πρὸς 5000 δρχ. τὴν ὀκά. Ἂν ἀναμίξη τὶς δυὸ αὐτὲς ποσότητες καὶ κάνη ἕνα μίγμα 80 ὀκάδων λαδιοῦ, πόσο θὰ τοῦ στοιχίση ἡ ὀκά ;

Λύση: Ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα εἶχε 50 ὀκ. ×6.000 δρχ.: 300 000 δρ
» » β΄ » » 30 » ×5.000 » 150.000 »
Ἄρα ἡ ὀκὰ θὰ τοῦ στοιχίση 450.000 : 80=5625 δρχ.

2) Ἕνας ταβερνιάρης ἀνακάτεψε τρεῖς ποιότητες κρασιοῦ α) 10 ὀκάδες μὲ τιμὴ 900 δρχ. τὴν ὀκά, β) 60 ὀκ. μὲ τιμὴ 1200 δρχ. τὴν ὀκὰ καὶ γ) 25 ὀκ. μὲ τιμὴ 1600 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσο πρέπει νὰ πουληθῆ ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος γιὰ νὰ κερδίση ὁ ταβερνιάρης αὐτὸς 200 δρχ. τὴν ὀκά ;

Λύση: α) 10 × 900 = 9 000
β) 20 × 1200 = 24 000
γ) 25 × 1600 = 40.000

Ἄρα ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος ἐστοίχιζε: 73.000 : 55 = 1327 27 δρχ. Ἄρα γιὰ νὰ κερδίση 200 δρχ. τὴν ὀκὰ πρέπει νὰ πουλήση τὸ μίγμα 1327,27+200=1527,27.

Παρατηρήσεις στὰ παραπάνω παραδείγματα.

1) Τὰ δυὸ παραπάνω προβλήματα ἀνήκουνε στὸ ***α΄ εἶδος μίξης.*** Στὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ ***ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ μίγματος.*** Γιατὶ τὶς ποσότητές του τὶς ξέρομε. Ἐνῶ στὰ προβλήματα τοῦ ***β΄ εἴδους μίξης,*** ποὺ θὰ δοῦμε παρακάτω ***ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὶς ποσότητες ποὺ θὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε εἶδος*** γιὰ νὰ κάνωμε τὸ μίγμα.

2) Γιὰ νὰ λύσωμε ἕνα πρόβλημα α΄ εἴδους μίξης πολλαπλασιάζομε πρῶτα κάθε ποσότητα μὲ τὴν τιμή της. Ὕστερα προσθέτομε χωριστὰ τὶς ποσότητες καὶ χωριστὰ τὸ γινόμενο τῆς τιμῆς τους. Τέλος διαιροῦμε τὸ ἄθροισμα τῆς τιμῆς ὅλων τῶν ποσοτήτων μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων ὅλων τῶν ποσοτήτων (ὅπως εἴδαμε παραπάνω).

Προβλήματα μίξης πρώτου εἴδους.

1) Ἕνας γεωργὸς ἀνάμιξε 4 ποσότητες σιταριοῦ διαφορετικῆς ποιότητας γιὰ νὰ τὸ πουλήση. Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος ἔβαλε 100 ὀκ. Ἀπὸ τὸ β΄ 150 ὀκ. Ἀπὸ τὸ γ΄ 200 ὀκ. Καὶ ἀπὸ τὸ δ΄ 250 ὀκ. Πόσο πρέπει νὰ πουλήση τὴν ὀκᾶ τὸ μίγμα γιὰ νὰ κερδίση συνολικὰ 240.000 δραχ. ὅταν χωριστὰ ἡ τιμὴ τῆς α΄ ποιότητας τοῦ σιταριοῦ ἦταν 2000 δραχ. Τῆς β΄ 1800. Τῆς γ΄ 1600· Καὶ τῆς δ΄ 1400 δραχ. ;

2) Ἕνας βλάχος σαρακατσιάνος ἀνακάτεψε 180 ὀκάδες βούτυρο α΄ πρόβειο μὲ 20 ὀκάδες βούτυρο κατσικίσιο. Τὸ πρόβειο βούτυρο ἄξιζε 14.000 δραχ. ἡ ὀκά. Τὸ κατσικίσιο στοίχιζε 12.800 δραχ. ἡ ὀκά. Νὰ βρῆτε α) τὴν τιμὴ τοῦ μίγματος β) πόσο θἄπρεπε τὰ πουληθῆ ἡ ὀκὰ τὸ μίγμα αὐτὸ γιὰ νὰ κερδίση συνολικὰ 60.000 δρχ. ;

3) Ἕνας ζαχαροπλάστης ἀνακάτεψε 70 ὀκ. ζαχαρη ποὺ ἄξιζε 8.500 δρχ. ἡ ὀκὰ μὲ 450 ὀκάδες γλυκόζη ποὺ ἄξιζε 4600 δραχ. ἡ ὀκά. Μὲ τὰ εἴδη αὐτὰ ἔκανε κουραμπιέδες καὶ ἄλλα πολλὰ γλυκύσματα ἀπὸ τὰ ὁποῖα πῆρε συνολικὰ 6.000.000 δραχ. Νὰ βρῆτε α) πόσο εἶχε στοιχίσει ἡ ὀκὰ τὸ μίγμα. β) Πόσο ἀκριβώτερα πουλήθηκε ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος γιὰ νὰ εἰσπραχθῆ τὸ ποσὸν αὐτό ;

4) Κάποιος ἔμπορος σταριοῦ εἶχε τρεῖς ποιότητες βρώμης. Τὴν πρώτη ποιότητα τὴν πουλοῦσε 800 δρχ. τὴν ὀκά. Τὴ β΄ 900. Καὶ τὴν γ΄ 1100. Ἂν ἀνακατέψη 1 ὀκὰ ἀπὸ κάθε ποιότητα πόσο θὰ ἀξίζη ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος ;

5) Ἕνας χρυσοχόος γιὰ νὰ κάνη ἕνα βραχιόλι ἔβαλε 18 γραμμάρια χρυσό, 15 γραμμάρια ἀσήμι καὶ 6 γραμμάρια χάλκωμα. Κάθε γραμμάριο χρυσὸ ἄξιζε 10.000 δρχ. Κάθε γραμ. ἀσήμι 2.000 δρχ. Καὶ κάθε γραμ. χάλκωμα 80 δραχ. Πόσο στοίχισε κάθε γραμμάριο τοῦ μίγματος;

6) Ἕνας ἄλλος χρυσοχόος ἔκαμε μιὰ ἀσημένια θήκη. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ ἀνάμιξε **(ἔκανε κράμα)** 500 γραμμάρια ἀσήμι μὲ **βαθμὸ (τίτλο) καθαρότητας** 0.900 καὶ 350 γραμμάρια ἄλλο

ἀσήμι ποὺ εἶχε βαθμὸ καθαρότητας 0.960. Νὰ βρῆτε ποιός εἶναι ὁ τίτλος δηλ. ὁ βαθμὸς καθαρότητας τοῦ κράματος (τὰ μίγματα στὰ μέταλλα λέγονται κράματα).

Προβλήματα μίξης δευτέρου εἴδους.

1) Ἕνας καφετζῆς ἀνακάτεψε δυὸ ποιότητες καφὲ ποὺ ἄξιζαν ἡ α΄ 5800 δρχ. τὴν ὀκὰ καὶ ἡ β΄ 6100 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κάνῃ ἕνα μίγμα 80 ὀκ. μὲ τιμὴ 6000 δρχ.;

Λύση:

α΄ ποιότ. ἄξιζε 5800 δρχ. ⟩ 6000 ⟨ τιμὴ ἑκ. μίγματ. — 100 (διαφορὰ)

β΄ » » 6100 » — 200 (διαφορὰ)

300

Θὰ μερίσωμε τώρα τὶς 80 ὀκάδες μίγμα σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν 100 καὶ 200, ὁπότε ἔχομε:

Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος $80 \times \frac{100}{200} = 26 \frac{1}{3}$ ὀκ.

» » β) » $80 \times \frac{200}{300} = 53 \frac{1}{3}$ ὀκ.

2) Ἕνας χρυσοχόος ἔχει δυὸ τεμάχια ἀπὸ ἀσήμι. Τὸ ἕνα ἔχει τίτλο 0,900. Τὸ ἄλλο 0,800. Θέλει νὰ κάνῃ ἕνα κράμα 200 γραμμαρίων μὲ τίτλο 0,860. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε τεμάχιο;

Λύση:

α΄ 0,900 ⟩ 0,860 ⟨ 0,060 (διαφορά)

β΄ 0,800 — 0,040 (διαφορά)

0,100

Ἄρα πῆρε ἀπὸ τὸ α΄ τεμάχιο $\frac{200 \times 0{,}060}{0{,}100} = 120$ γραμμάρια.

» » » » β΄ » $\frac{200 \times 0{,}040}{0{,}100} = 80$ »

200

3) Μιὰ χωρικὴ εἶχε δυὸ ποιότητες βούτυρο. Τὴν α΄ τὴν πουλοῦσε 16.000 δρχ. τὴν ὀκά. Τὴν β΄ ποιότητα 14.000 δρχ. Μιὰ μέρα σκέφτηκε νὰ ἀνακατέψῃ τὶς δυὸ ποιότητες καὶ ἔκανε ἕνα

μίγμα 400 ὀκάδων ποὺ τὸ πούλησε 15.800 δραχ. Πόσες ὀκάδες πῆρε ἀπὸ τὸ α΄ καὶ πόσες ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος;

4) Ἕνας μανάβης εἶχε ἀγοράσει δυὸ ποιότητες βερύκοκα. Τὴν α΄ μὲ 600 δραχ. τὴν ὀκὰ καὶ τὴ β΄ μὲ 550 δραχ. τὴν ὀκά. Ἐπειδὴ τὰ βερύκοκα τῆς δεύτερης ποιότητας πῆραν νὰ χαλνοῦν ἀναγκάστηκε νὰ τὰ ἀνακατέψη μὲ τὰ βερύκοκα τῆς πρώτης ποιότητας καὶ ἔτσι ἔκανε ἕνα μίγμα ἀπὸ 1200 ὀκάδες ποὺ τὰ πούλησε 580 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες βερύκοκα εἶχε ἀπὸ τὸ α΄ καὶ πόσες ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος;

5) Ἕνας ζαχαροπλάστης θέλει νὰ κάνη μίγμα ζάχαρης καὶ γλυκόζης 250 ὀκάδων. Πῆρε λοιπὸν ζάχαρη ποὺ ἄξιζε 8000 δρχ. ἡ ὀκὰ καὶ γλυκόζη ποὺ ἄξιζε 4400 δρχ. ἡ ὀκά. Τὸ μίγμα αὐτὸ τὸ πούλησε 7900 τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες ζάχαρη καὶ πόσες γλυκόζη ἔβαλε στὸ μίγμα;

6) Ἕνα δαχτυλίδι γιὰ νὰ γίνη χρειάστηκε χρυσάφι καὶ ἀσήμι μαζὶ 60 δράμια. Τὸ χρυσάφι εἶχε τίτλο 0,950 καὶ τὸ ἀσήμι 0,840. Πόσα δράμια χρυσάφι καὶ πόσα δράμια ἀσήμι χρειάστηκαν;

7) ***Κάμετε καὶ σεῖς, παιδιά, δικά σας προβλήματα ἀνάμιξης μὲ τὸ πρῶτο καὶ μὲ τὸ δεύτερο εἶδος.***

Βοηθητικά βιβλία

ΓΙΑ ΤΑ ΔΗΜΟΤΙΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

Ἐκυκλοφόρησαν (γλῶσσα δημοτική)

Φ. Ι. ΦΩΤΙΟΥ

1) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ γιὰ τὴν Πέμπτη τάξη.

2) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ γιὰ τὴν Ἕκτη τάξη.

Ἑτοιμάζονται (γλῶσσα δημοτική)

ΤΣΑΜΑΣΦΥΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ διδάκτορος τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, τέως ἀνώτατου ἐκπαιδευτικοῦ συμβούλου **καὶ**

ΦΩΤΙΟΥ ΙΩΑΝΝΟΥ τεως Γέν. Ἐπιθεωρητοῦ δημοτικῶν σχολείων.

3) ΖΩΟΛΟΓΙΑ γιὰ τὴν Ἕκτη τάξη.

4) ΧΗΜΕΙΑ γιὰ τὴν Πέμπτη καὶ Ἕκτη τάξη.

5) ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ γιὰ τὴν Πέμπτη τάξη.

6) ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ γιὰ τὴν Ἕκτη τάξη.

Τὸ ἐλατήριο τῆς συγγραφῆς τῶν βιβλίων αὐτῶν εἶναι:

Ἡ ἐπιθυμία τῶν συγγραφέων νὰ διευκολύνουν τὸ δάσκαλο καὶ τὸ μαθητή, εἰς τοὺς ὁποίους ἀφιέρωσαν τὴ ζωή τους, καὶ νὰ τοὺς ἀπαλλάξουν ἀπὸ τὸν κυκεῶνα τῶν βοηθητικῶν βιβλίων ποὺ παρουσιάστηκαν τελευταία, καὶ νὰ τοὺς δώσουν βιβλία **μεθοδικὰ καὶ ἐπιστημονικῶς ἄψογα.**

Ἡ ἐπιστημονικὴ κατάρτηση τῶν συγγραφέων, ἡ μακροχρόνια πεῖρά των τοῦ σχολείου, καὶ ἡ βαθειὰ γνώση αὐτῶν τοῦ μαθητοῦ, εἶναι ἐγγύηση τῆς ἐπιτυχίας τοῦ σκοποῦ τούτου.