ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ ΚΟΣΜΑ ΜΙΧΑΗΛΙΔΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ" Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ[ΙΑΣ] Α.Ε.
ΑΘΗΝΑΙ

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ ΚΟΣΜΑ ΜΙΧΑΗΛΙΔΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ
Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 61452/12-6-52

ΙΔΚ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
38 ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ 38
1952

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σας
Α. Ε.
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις Ἑλληνικῆς Ἐκδοτικῆς Ἑταιρείας Α.Ε.—Ἀθῆναι, Παπαδιαμαντοπούλου 44
Ἐκμετάλλευσις: Ἀλεξάνδρου Α. Φιλοπούλου

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

1. Ἕνα σχολεῖο ἔχει τὸ γραφεῖο του καὶ ἕξι αἴθουσες διδασκαλίας καὶ σὲ κάθε μιὰ ὑπάρχει ἀπὸ ἕνας μαυροπίνακας.

α) Νὰ γράψης μὲ ψηφία: Πόσους μαυροπίνακας ἔχει ἡ μία αἴθουσα· πόσους ἔχουν οἱ δυὸ αἴθουσες μαζί· πόσους οἱ τρεῖς, οἱ τέσσαρες, οἱ πέντε, οἱ ἕξι αἴθουσες μαζί.

β) Νὰ γράψης μὲ ἀριθμὸ πόσους μαυροπίνακας ἔχει τὸ γραφεῖο τοῦ σχολείου.

2. Ἕνα παιδὶ εἶναι σήμερα ἕξι χρονῶν. Πόσο θὰ εἶναι ἔπειτα ἀπὸ ἕνα χρόνο; ἀπὸ δυό, ἔπειτα ἀπὸ τρία χρόνια;

3. Μὲ πόσα ψηφία γράφομε τοὺς ἀριθμούς; Ποιὰ ἀπὸ αὐτὰ τὰ λέγομε σημαντικά;

4. Ποιὰ ἀξία ἔχει τὸ ψηφίο 2 σὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 32, 324, 1200; Γιατὶ ἀλλάζει ἡ ἀξία του;

5. Νὰ γράψης μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμούς:

α) Χίλια πεντακόσια σαράντα τρία.

β) Ἑβδομήντα χιλιάδες ἑξακόσια ὀχτώ.

γ) Διακόσιες πενήντα χιλιάδες τριάντα δύο.

δ) Δύο ἑκατομμύρια ὀχτακόσιες εἴκοσι χιλιάδες.

στ) Δέκα πέντε ἑκατομμύρια, τριάντα ἕξι χιλιάδες, σαράντα πέντε.

6. Νὰ γράψης μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ γίνονται:

α) ἀπὸ 3 χιλιάδες, 7 ἑκατοντάδες, 5 ἁπλὲς μονάδες.

β) ἀπὸ 2 δεκάδες χιλιάδων, 5 ἑκατοντάδες, 6 δεκάδες.

γ) ἀπὸ 1 ἑκατοντάδα χιλιάδων, 7 χιλιάδες, 3 δεκάδες, 1 ἁπλὴ μονάδα.

δ) ἀπὸ 9 ἁπλὲς μονάδες, 3 δεκάδες, 8 χιλιάδες, 5 δεκάδες χιλιάδων.

7. Νὰ ἀπαγγείλης τοὺς ἀριθμούς:

α) 45 012 β) 275 460 γ) 806 160 δ) 2 025 843 ε) 35 035 035 στ) 815 444 138.

8. Ἕνας ἔχει 28 ἑκατοντάδραχμα καὶ ἄλλος ἔχει 28 χιλιάρικα. Πόσες φορὲς περισσότερα χρήματα ἔχει ὁ δεύτερος ἀπὸ τὸν πρῶτο;

9. Ἕνας ἔχει 45 ἑκατοντάδραχμα καὶ ἄλλος ἔχει 45 χαρτονομίσματα τῶν δέκα χιλιάδων δραχμῶν. Πόσες φορὲς περισσότερα χρήματα ἔχει ὁ δεύτερος ἀπὸ τὸν πρῶτο;

10. Νὰ γράψῃς τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι δέκα ἢ ἑκατὸ ἢ χίλιες φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 6.

11. Νὰ γράψῃς τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι δέκα ἢ ἑκατὸ ἢ χίλιες φορὲς μικρότερος ἀπὸ τὸν 7 000.

12. Πόσες τὸ ὅλον δεκάδες, ἑκατοντάδες καὶ μονάδες χιλιάδων ἔχει ὁ ἀριθμὸς 583 689;

Πρόσθεσις ἀκεραίων.

1. Τὸ ὕφασμα μιᾶς ἐνδυμασίας κοστίζει 425 500 δραχμές, καὶ τὰ ραφτικὰ 327 000 δραχμές. Πόσο ἐκόστισε ἡ ἐνδυμασία αὐτή;

2. Ἕνας εἶχε εἰσόδημα 1 252 750 δραχμὲς τὸ μῆνα. Ἀργότερα αὐξήθηκε κατὰ 379 500 δραχμὲς τὸ μῆνα. Τί εἰσόδημα ἔχει τώρα τὸ μῆνα;

3. Πόσες ἡμέρες ἔχουν οἱ τρεῖς πρῶτοι μῆνες τοῦ ἔτους; Καὶ πόσες οἱ τέσσαρες πρῶτοι μῆνες;

4. Νὰ προσθέσῃς ὅλους τοὺς περιττοὺς ἀριθμοὺς μεταξὺ 150 καὶ 160.

5. Ἕνας ἐξώδεψε γιὰ τὶς ἀνάγκες του τὸν πρῶτο μῆνα 875 800 δραχμὲς καὶ τὸ δεύτερο 137 500 δραχμὲς περισσότερες. Πόσα ἐξώδεψε τὸ δεύτερο μῆνα; Καὶ πόσα τοὺς δυὸ μῆνες μαζί;

6. Ὁ Νῖκος ἐπλήρωσε γιὰ ἕνα μολύβι 1000 δραχμές. Γιὰ ἕνα τετράδιο 2500 δραχμὲς περισσότερες καὶ γιὰ ἕνα βιβλίο 3500 δραχμὲς περισσότερες ἀπὸ τὸ τετράδιο. Νὰ εὕρῃς:

α) Πόσα ἐπλήρωσε γιὰ τὸ τετράδιο β) Πόσα γιὰ τὸ βιβλίο καὶ γ) Πόσα γιὰ ὅλα μαζί.

Ἀφαίρεσις.—Ἀφαίρεσις καὶ πρόσθεσις.

1. Ἕνα βαρέλι μὲ λάδι ζυγίζει 175 ὀκάδες καὶ ἄδειο ζυγίζει 32 ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες λάδι ἔχει τὸ βαρέλι αὐτό;

2. Ἀπὸ τὴν ἐπανάστασι τοῦ 1821 ὡς σήμερα πόσα χρόνια ἐπέρασαν;

3. Μία ἐνδυμασία ἐκόστισε 1 000 000 δραχμές. Τὸ ὕφασμα ἐκόστισε 605 750 δραχμές. Πόσο ἐκόστισαν τὰ ραφτικά;

4. Ἀπὸ 1000 ὀκάδες λάδι ἐπούλησε ἕνας 135 ὀκάδες, 107 ὀκάδες καὶ 139 ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες λάδι τοῦ ἀπέμειναν;

5. Μὲ 1000 πορτοκάλια ἐγέμισε ἕνας 4 κοφίνια. Τὰ τρία ἀπὸ αὐτὰ ἐχώρεσαν 235 πορτοκάλια τὸ ἕνα, 258 τὸ ἄλλο καὶ 261 τὸ τρίτο. Πόσα πορτοκάλια ἐχώρεσε τὸ τέταρτο κοφίνι;

6. Τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 5 000. Οἱ δυὸ ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1 879 καὶ 2 058. Νὰ εὕρης τὸν τρίτο ἀριθμό.

7. Ἕνας πατέρας εἶναι 40 χρονῶν καὶ τὸ παιδί του 8 χρονῶν. Πόσων χρονῶν θὰ εἶναι ὁ πατέρας, ὅταν τὸ παιδί του γίνη 20 χρονῶν;

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων.

1. Πόσο στοιχίζουν 721 ὀκ. ζάχαρη μὲ 12 000 δραχμὲς τὴν ὀκά;

2. Πόσες ὀκάδες λάδι ἔχουν 125 δοχεῖα, ὅταν τὸ κάθε δοχεῖο ἔχη 13 ὀκάδες;

3. Ἀγόρασε ἕνας 53 πῆχες ὕφασμα μὲ 25 000 δραχμὲς τὴν πήχη καὶ 47 πῆχες ἄλλο ὕφασμα μὲ 28 000 δραχμὲς τὴν πήχη. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε γιὰ τὰ δυὸ ὑφάσματα;

4. Ἕνας ἀγόρασε 5 ὀκάδες καφὲ μὲ 87 500 δραχμὲς τὴν ὀκά. Γιὰ τὴν ἀξία τοῦ καφὲ ἔδωκε 8 χάρτινες λίρες ποὺ ἔχουν 45 000 δραχμὲς ἡ μία. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πληρώση ἀκόμα;

5. Ἕνας ἀγόρασε 5 δωδεκάδες μαντήλια μὲ 8 500 δραχμὲς τὸ 1. Πόσες δραχμὲς ἔδωκε;

6. Ἕνα σχολεῖο ἔχει 6 τάξεις. Κάθε τάξι ἔχει 15 θρανία καὶ σὲ κάθε θρανίο κάθηνται 3 μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχει τὸ σχολεῖο;

Διαίρεσις ἀκεραίων.

1. Ἕνας μὲ 100 ὀκάδες ἀλεύρι ἐγέμισε ἐξίσου 4 σάκκους. Πόσες ὀκάδες ἀλεύρι ἔχει ὁ 1 σάκκος;

2. Ἐμοιράσαμε 100 ὀκάδες ἀλεύρι σὲ οἰκογένειες καὶ ἐπῆρε ἡ κάθε μιὰ 25 ὀκάδες. Πόσες εἶναι οἱ οἰκογένειες αὐτές;

3. Νὰ βρῆτε τὸ μισὸ $\left(\text{τὸ } \frac{1}{2}\right)$ τοῦ 2 750

τὸ τέταρτο $\left(\text{τὸ } \frac{1}{4}\right)$ τοῦ 2 800

τὸ πέμπτο $\left(\text{τὸ } \frac{1}{5}\right)$ τοῦ 1 325

τὸ δέκατο $\left(\text{τὸ } \frac{1}{10}\right)$ τοῦ 37 570

4. Ἐργάτης γιὰ 12 ἡμερομίσθια ἐπῆρε 450 000 δραχμές. Πόσο εἶναι τὸ ἡμερομίσθιό του;

5. Ραπτομηχανὴ ἀξίας 1 800 000 δραχμῶν ἀγοράσθηκε μὲ μηνιαῖες δόσεις ἀπὸ 225 000 δραχμὲς τὴ μία. Πόσες εἶναι οἱ δόσεις;

6. Ἔμπορος ἀγόρασε 45 πῆχες ὕφασμα μὲ 810 000 δραχμές, καὶ θέλει νὰ ἀγοράση ἄλλες 25 πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα. Πόσες δραχμὲς θὰ δώση ἀκόμα;

7. Ἔμπορος ἀπὸ 8 δωδεκάδες ζευγάρια κάλτσες, ποὺ τὶς ἀγόρασε μὲ 960 000 δραχμές, ἐκέρδισε 80 000 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τὴ 1 δωδεκάδα;

8. Ἔμπορος, ὕφασμα ἀξίας 595 000 δραχμῶν, τὸ ἐπούλησε 714 000 δραχμές. Ἔτσι ἐκέρδισε 1 400 δραχμὲς τὴν πήχη. Πόσες πῆχες ἦταν τὸ ὕφασμα;

Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

1. Ἀπὸ δυὸ ταινίες ἡ μία ἔχει μῆκος 1 μέτρο καὶ ἡ ἄλλη 0,1 τοῦ μέτρου (1 παλάμη). Πόσες φορὲς εἶναι μικρότερη ἡ δεύτερη ταινία ἀπὸ τὴν πρώτη; Πόσα δέκατα κάμνουν μιὰ ἀκεραία μονάδα;

2. Ἕνα πενάκι ἔχει μῆκος 0,01 τοῦ μέτρου. Τὸ μῆκος αὐτὸ πόσες φορὲς εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ 1 μέτρο; Πόσα ἑκατοστὰ κάμνουν μιὰ ἀκεραία μονάδα;

3. Τί ἀξία ἔχουν τὰ ψηφία στοὺς ἀριθμούς: α) 20 καὶ 0,2 β) 300 καὶ 0,03 γ) 4 000 καὶ 0,004 δ) 50 000 καὶ 0,0005;

4. Νὰ γράψης τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς: α) 25 ἀκέραια καὶ 12 ἑκατοστὰ β) 3 ἀκέραια καὶ 123 χιλιοστὰ γ) 2 ἀκέραια καὶ 3 χιλιοστὰ δ) 0 ἀκέραια καὶ 1237 δεκάκις χιλιοστὰ ε) 237 δεκάκις χιλιοστὰ στ) 37 δεκάκις χιλιοστά.

5. Νὰ γράψης τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς α) ἑκατὸν ἕξι ἑκατοστὰ β) χίλια δεκατρία δέκατα γ) πεντακόσια τριάντα δύο ἑκατοντάκις χιλιοστὰ δ) ἕνα ἑκατομμυριοστὸ ε) ἑξακόσια τριάντα πέντε ἑκατομμυριοστά.

6. Νὰ ἀπαγγείλης τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ἀπαγγέλλοντας α) ἕνα-ἕνα ψηφίο χωριστὰ μὲ τὴν ἀξία του καὶ β) χωριστὰ τὸ ἀκέραιο μέρος καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικό: 2,85· 7,509· 58,2· 0,0284. 0,36205· 128,44· 1,00039· 200,033788· 15,009009.

Προσθήκη μηδενικῶν. Μετακίνησις τῆς ὑποδιαστολῆς.

1. Νὰ ἀπαγγείλης μὲ τὸν παραπάνω α' τρόπο τοὺς ἀριθμοὺς 3,15· 3,150· 3,1500· 3,15000.

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, τί εἶναι μεταξύ τους ἴσοι ἢ ἄνισοι;

2. Τὸν ἀριθμὸ 72,376 νὰ τὸν γράψης μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία χωρὶς ν' ἀλλάξη ἡ ἀξία του.

3. Νὰ γράψης μὲ δεκαδικὴ μορφὴ τοὺς ἀκεραίους 7, 18, 35, 108.

4. Τὸν ἀριθμὸ 128,25000 νὰ τὸν γράψης μὲ τρία ἢ μὲ δυὸ δεκαδικὰ ψηφία χωρὶς νὰ ἀλλάξη ἡ ἀξία του.

5. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 5,78 καὶ 57,8 ποῖος εἶναι μεγαλύτερος; Καὶ πόσες φορὲς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἄλλον;

6. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 0,125 καὶ 12,5 ποῖος εἶναι μικρότερος; Καὶ πόσες φορές;

7. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

5,76 × 10	3,725 × 100	3,56 × 1000
0,0003 × 1000	0,6785 × 10 000	12,4 × 10 000

8. Νὰ κάνης τὶς διαιρέσεις:

24,5 : 10	24,5 : 100	12,7 : 1000	127 : 1000
0,3 : 10	0,3 : 100	0,7 : 1000	0,017 : 1000

9. 176,5 χιλιόδραχμα πόσες δραχμὲς κάνουν;

10. 562 750 μέτρα πόσα χιλιόμετρα κάνουν;

Πράξεις μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

1. Ἀπὸ τρία τόπια ὕφασμα, τὸ ἕνα εἶναι 52,5 μέτρα, τὸ ἄλλο 49,3 μέτρα καὶ τὸ τρίτο 54,2 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ὅλο τὸ ὕφασμα;

2. Ἔλαβε ἕνας ἀπὸ τὸ Λονδῖνο τρεῖς ἐπιταγές: 75,5 λιρῶν, 128,75 λιρῶν καὶ 109,25 λιρῶν. Πόσες εἶναι ὅλες αὐτὲς οἱ λίρες;

3. Ἔφερε ἕνας ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸ α) 182,5 μέτρα ὕφασμα ἀξίας 1815,5 δολλαρίων, β) 109,75 μέτρα ἄλλο ὕφασμα ἀξίας 1527,25 δολλαρίων καὶ γ) ὕφασμα 82,4 μέτρα ἀξίας 1648,70 δολλαρίων. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔφερε καὶ ποιὰ εἶναι ἡ ἀξία τους;

4. Σὲ μιὰ ἑβδομάδα ἡ μητέρα ὕφανε ὕφασμα 57,25 μέτρα καὶ ἡ κόρη της ὕφανε 48,75 μέτρα. Πόσο περισσότερο ὕφασμα ὕφανε ἡ μητέρα ἀπὸ τὴν κόρη;

5. Μία ράβδος μεταλλικὴ σὲ θερμοκρασία 0° εἶχε μῆκος 0,735 τοῦ μέτρου καὶ σὲ θερμοκρασία 100° τὸ μῆκος της ἔγινε 0,736118

τοῦ μέτρου. Πόσο αὐξήθηκε τὸ μῆκος της ἀπὸ τὴ διαστολὴ ποὺ ἔπαθε;

6. Ἔμπορος εἶχε ἀπὸ ἕνα ὕφασμα 100 μέτρα. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπούλησε 25,15 μ., 32,45 μ. καὶ 39,75 μέτρα. Πόσο ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτὸ τοῦ ἀπέμεινε;

7. Ὑφάντρια ὑφαίνει 6,5 μέτρα σὲ μιὰ ἡμέρα. Πόσο ὑφαίνει σὲ μιὰ ἑβδομάδα;

8. Μία ὀκὰ ἀλεύρι δίνει 1,25 ὀκάδες ψωμί. Πόσο ψωμὶ δίνουν 15,4 ὀκάδες ἀλεύρι;

9. Μία ὀκὰ σιτάρι δίνει 325 δράμια ἀλεύρι καὶ 75 δράμια πίτουρα. Πόσα δράμια ἀλεύρι καὶ πόσα δράμια πίτουρα δίνουν 12,4 ὀκάδες σιτάρι;

10. Ἀπὸ 12 000 τόννους βαλανίδι ἐπουλήθηκανσ τὸ ἐξωτερικὸ οἱ 7 000 τόννοι μὲ 9,25 χρυσὲς λίρες Ἀγγλίας τὸν τόννο καὶ τὸ ὑπόλοιπο μὲ 9,125 χρυσὲς λίρες τὸν τόννο. Μὲ πόσες λίρες ἐπουλήθηκε ὅλο τὸ βαλανίδι;

11. Αὐτοκίνητο σὲ 4,5 ὥρες ἔτρεξε 198 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει σὲ 1 ὥρα;

12. Ἕνας ὑδραγωγὸς σωλήνας μὲ μῆκος 2 400 μέτρων, ἔγινε ἀπὸ μικροὺς σωλῆνες μήκους 0,75 τοῦ μέτρου ὁ καθένας. Πόσοι εἶναι οἱ σωλῆνες αὐτοί;

13. Ἕνας εἶχε 1 800 ὀκάδες κρασὶ σὲ φιάλες, ποὺ ἡ κάθε μιὰ εἶχε 0,8 τῆς ὀκᾶς κρασί. Πόσες ἦταν οἱ φιάλες αὐτές;

14. Ἕνας εἶχε 10 βαρέλια, ποὺ τὸ καθένα εἶχε 27 ὀκ. μπύρα. Τὴ μπύρα αὐτὴ τὴ μετέφερε σὲ φιάλες, ποὺ ἡ κάθε μιὰ χωροῦσε 0,75 τῆς ὀκᾶς. Σὲ πόσες φιάλες τὴ μετέφερε;

Εὐθεῖα καὶ ἀντίστροφη σχέσις ποσῶν.

1. Μία πήχη ὕφασμα ἀξίζει 60 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν οἱ δυὸ πῆχες; οἱ 3 πῆχες; Καὶ πόσο ἀξίζει ἡ μισὴ $\left(\text{τὸ } \frac{1}{2}\right)$ πήχη; Τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς πήχης;

2. Σιδηρόδρομος ἔχει ταχύτητα 40 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξῃ σὲ 2 ὥρες, σὲ 3, σὲ 4 ὥρες; Καὶ πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξῃ σὲ $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας, σὲ $\frac{1}{4}$, σὲ $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας;

3. Ἐργάτης σκάφτει ἕνα χωράφι σὲ 12 ἡμέρες. Δυὸ ἐργάτες

σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο χωράφι; Καὶ σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ σκάψουν 3 ἐργάτες;

4. Αὐτοκίνητο ἔχει ταχύτητα 60 χιλιόμετρα τὴν ὥρα καὶ ἀπόστασι ἀπὸ 120 χιλιόμετρα τὴν τρέχει σὲ 4 ὧρες. Ἂν διπλασιάση τὴν ταχύτητά του, σὲ πόσες ὧρες θὰ τρέξη τὴν ἀπόστασι αὐτή; Καὶ σὲ πόσες ὧρες θὰ τὴν τρέξη, ἂν ἡ ταχύτητά του γίνη 30 χιλιόμετρα τὴν ὥρα;

Λύσις προβλημάτων μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

1. Δυὸ ὀκάδες τυρὶ ἀξίζουν 40 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ μία ὀκά; Καὶ πόσο ἀξίζουν οἱ 3 ὀκάδες, οἱ 4, οἱ 5 ὀκάδες;

2. Μὲ 16,5 πῆχες ὕφασμα ἔκαμα 3 ὑποκάμισα. Μὲ πόσες πήχεις θὰ κάμω 1 ὑποκάμισο; Καὶ μὲ πόσες θὰ κάμω 4, 5, 7, 10 ὑποκάμισα;

3. 4 ὀκ. βούτυρο ἀξίζουν 200 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ καὶ πόσο ἀξίζουν οἱ 3 ὀκάδες ἀπὸ τὸ ἴδιο βούτυρο;

4. 3,5 ὀκ. κρέας ἀξίζουν 70 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ καὶ πόσο ἀξίζουν οἱ 5 ὀκάδες;

5. Αὐτοκίνητο σὲ 4,5 ὧρες τρέχει 160,2 χιλιόμετρα. Πόσα θὰ τρέξη σὲ 5 ὧρες;

6. 4 ἐργάτες σκάφτουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 16 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ σκάψη 1 ἐργάτης; Καὶ σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ σκάψουν 2 ἐργάτες; 8 ἐργάτες;

7. Αὐτοκίνητο μὲ ταχύτητα 40 χιλιόμετρα τὴν ὥρα τρέχει μιὰ ἀπόστασι σὲ 3,6 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διατρέξη τὴν ἴδια ἀπόστασι, ἂν ἡ ταχύτητά του γίνη 60 χιλιόμετρα τὴν ὥρα;

8. Αὐτοκίνητο μὲ ταχύτητα 50 χιλιόμετρα τὴν ὥρα τρέχει μιὰ ἀπόστασι σὲ 4,5 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ τρέξη τὴν ἴδια ἀπόστασι ἕνας ποδηλάτης μὲ ταχύτητα 15 χιλιόμετρα τὴν ὥρα;

Μετρικὸ σύστημα — Συμμιγεῖς ἀριθμοί.

1. Ποιὲς εἶναι οἱ μονάδες μήκους; Σὲ τί ὑποδιαιρεῖται τὸ μέτρο; Ποιὰ εἶναι τὰ πολλαπλάσια τοῦ μέτρου; Σὲ τί ὑποδιαιρεῖται ἡ πήχη, ἡ γυάρδα;

2. Τί μετροῦμε μὲ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο; Μὲ τὴν τετραγωνικὴ τεκτονικὴ πήχη;

3. Τί μετροῦμε μὲ τὸ κυβικὸ μέτρο;

4. Ποιὲς εἶναι οἱ μονάδες βάρους; 1 δράμι πόσα γραμμάρια ἔχει; 1 ὀκὰ πόσα γραμμάρια ἔχει; 1 χιλιόγραμμο πόσα δράμια ἔχει καὶ πόσες ὀκάδες ἔχει ἕνας τόννος;

5. Ποιὲς εἶναι οἱ ἑλληνικὲς μονάδες νομισμάτων; Οἱ ἀγγλικές, οἱ ἀμερικανικές, οἱ γερμανικές, οἱ ρωσικές, οἱ τουρκικές;

6. Μὲ τί μονάδες μετροῦμε τὸ χρόνο;

7. Νὰ τρέψῃς:

α) 8 πῆχες καὶ 5 ρούπια σὲ ρούπια.

β) 2 γυάρδες 2 πόδες καὶ 5 ἴντσες σὲ ἴντσες.

γ) 3 στατῆρες 25 ὀκάδες καὶ 300 δράμια σὲ δράμια.

δ) 3 λίρες 8 σελίνια καὶ 4 πέννες σὲ πέννες.

ε) 12 σελίνια 7 πέννες καὶ 2 φαρδίνια σὲ φαρδίνια.

στ) 2 ὧρες 20 πρῶτα λεπτὰ καὶ 30 δεύτερα σὲ δεύτερα λεπτά.

8. Μιὰ χάρτινη λίρα ἔχει 45 000 δραχμές. α) Πόσες δραχμὲς κάνουν 15,6 χάρτινες λίρες καὶ β) πόσες χάρτινες λίρες κάνουν 315 000 δραχμές; γ) Πόσες δραχμὲς κάνουν 12 σελίνια;

9. Ἕνα δολλάριο ἔχει 15 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς κάνουν τὰ 60 σέντς;

10. Ἕνας τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 0,5625 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. 400 τετραγωνικοὶ τεκτονικοὶ πήχεις, πόσα τετραγωνικὰ μέτρα κάνουν;

11. 900 τετραγωνικὰ μέτρα πόσους τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις κάνουν;

Πράξεις στοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς.

1. Ἀπὸ τρία χωράφια ἔδωκαν σιτάρι τὸ α′ 34 στατ. 20 ὀκ. καὶ 300 δραμ., τὸ β′ 45 στατ. 25 ὀκ. καὶ 200 δραμ. καὶ τὸ γ′ 50 στατ. καὶ 300 δραμ. Πόσο σιτάρι ἔδωκαν τὰ τρία χωράφια μαζί;

2. Ἕνας ἀγόρασε καπνὸ α) 450 χιλιόγραμμα καὶ 500 γραμμάρια, β) 675 χιλγρ. καὶ 750 γραμ. καὶ γ) 504 χιλγρ. καὶ 250 γραμ. Πόσο καπνὸ ἀγόρασε;

3. Πεζοπόρος ἐβάδισε τὴν 1η ἡμέρα 8 ὧρες καὶ 40 π., τὴ 2η 7 ὧρ. 30 π. καὶ τὴν 3η 6 ὧρ. 5 π. Πόσες ὧρες καὶ πρῶτα λεπτὰ ἐβάδισε στὶς τρεῖς αὐτὲς ἡμέρες;

4. Ἕνας μαθητὴς εἶναι 10 χρονῶν 6 μηνῶν καὶ 20 ἡμερῶν. Ἡ ἀδελφή του εἶναι μεγαλύτερή του κατὰ 2 χρόνια 7 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες. Ποιὰ εἶναι ἡ ἡλικία τῆς ἀδελφῆς;

5. Παρήγγειλε ἕνας ἐμπορεύματα στὸ Λονδῖνο ἀξίας 1000 λι-

ρῶν καὶ τοῦ ἔστειλαν ἐμπορεύματα ἀξίας 725 λιρῶν καὶ 15 σελ. Πόσης ἀξίας ἐμπορεύματα πρέπει νὰ τοῦ στείλουν ἀκόμα;

6. Ἕνας γεννήθηκε στὶς 6 τοῦ Δεκέμβρη τοῦ 1932. Τί ἡλικία ἔχει σήμερα;

7. Ἕνας ὀρειβάτης ἄρχισε τὴν ἀνάβασι ἑνὸς βουνοῦ στὶς 6 ὧρες 45 π. τὸ πρωῒ καὶ ἔφθασε στὴν κορυφὴ στὶς 2 ὧρες καὶ 35 π. ἔπειτα ἀπὸ τὸ μεσημέρι τῆς ἴδιας ἡμέρας. Πόσο διήρκεσε ἡ ἀνάβασις τοῦ βουνοῦ;

8. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα 55 πήχ. ἐπούλησε ἕνας α) 15 πήχ. 6 ρουπ. καὶ 2) 23 πήχ. 4 ρ. Πόσο ὕφασμα τοῦ ἀπέμεινε;

9. Γιὰ ἕνα ὑποκάμισο χρειάζονται 5 πήχ. καὶ 2 ρ. ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα χρειάζεται γιὰ 4 ὑποκάμισα; Γιὰ 5, 8 ὑποκάμισα;

10. Μία ὀκὰ νῆμα ἀξίζει 6 λίρες (χάρτινες) καὶ 4 σελίνια. Πόσο ἀξίζουν 5 ὀκάδες ἀπὸ τὸ ἴδιο νῆμα;

11. Ἕνα δοχεῖο μὲ λάδι ζυγίζει 13 ὀκ. καὶ 300 δράμια. Πόσο ζυγίζουν 8 ἴδια δοχεῖα;

12. Ἕνα βαρέλι γεμᾶτο μὲ μπύρα ζυγίζει 28 ὀκ. καὶ 300 δράμια. Πόση μπύρα περιέχουν 5 ἴδια βαρέλια;

Διαίρεσις συμμιγῶν δι' ἀκεραίου.

13. Γιὰ 5 παιδικὲς ἐνδυμασίες χρειάσθηκε ὕφασμα 16 πήχ. 7 ρ. Μὲ πόσο ὕφασμα ἔγινε ἡ 1 ἐνδυμασία;

14. 4 σάκκοι μὲ ἀλεύρι ζυγίζουν 2 στατ. 33 ὀκ. 200 δράμια. Πόσο ζυγίζει ὁ 1 σάκκος;

15. 6 γυάρδες ὕφασμα ἀξίζουν 51 λίρ. 3 σελ. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 γυάρδα;

16. Αὐτοκίνητο ἔτρεξε 272 χιλιόμετρα καὶ 400 μέτρα σὲ 6 ὧρες. Πόση ἀπόστασι ἔτρεξε σὲ 1 ὥρα;

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΓΙΑ ΤΗΝ Ε΄ ΤΑΞΙ

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

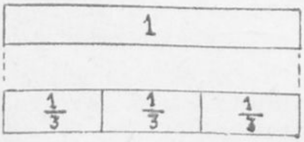
Κλασματικὲς μονάδες.

Ἕνα μῆλο τὸ χωρίζομε σὲ δύο ἴσα μέρη. Τὸ ἕνα μέρος, δηλαδὴ τὸ μισὸ τοῦ μήλου τὸ γράφουμε $\frac{1}{2}$ (ἕνα δεύτερο) τοῦ μήλου. Ἕτσι $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου μᾶς κάνουν 1 μῆλο, δηλαδὴ εἶναι:

$$\frac{1}{2} \text{ τοῦ μήλου} + \frac{1}{2} \text{ τοῦ μήλου} = 1 \text{ μῆλο.}$$

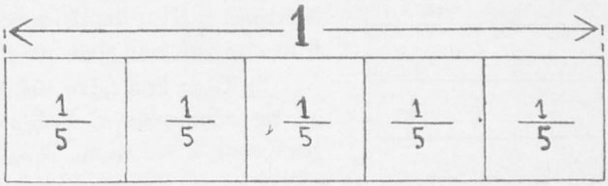
Τώρα τὸ μῆλο τὸ χωρίζομε σὲ 4 ἴσα μέρη. Τότε τὸ 1 μέρος τὸ λέγομε *τέταρτο* καὶ τὸ γράφομε $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου. Ὥστε 4 τέταρτα τοῦ μήλου μᾶς κάνουν 1 μῆλο, δηλαδὴ εἶναι:

$\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου $+$ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου $+$ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου $+$ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου $= 1$ μῆλο.



Ἕτσι ἂν ὁ Νῖκος ἀπὸ ἕνα γλύκισμα ἔφαγε τὸ ἕνα τρίτο $\left(\text{τὸ } \frac{1}{3}\right)$ ἐννοοῦμε ὅτι τὸ γλύκισμα κόπηκε σὲ τρία ἴσα μέρη καὶ ὁ Νῖκος ἔφαγε τὸ ἕνα μέρος.

Καὶ ἂν ἕνας ἀπὸ ἕνα οἰκόπεδο πρέπει νὰ πάρῃ τὸ ἕνα πέμπτο $\left(\text{τὸ } \frac{1}{5}\right)$ αὐτὸ φανερώνει, ὅτι τὸ οἰκόπεδο θὰ χωρισθῇ σὲ πέντε ἴσα μερίδια καὶ αὐτὸς θὰ πάρῃ τὸ ἕνα.



Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ κ.λ.π., λέγονται *κλασματικὲς μονάδες*, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς 1 λέγεται ***ἀκεραία μονάδα.***

Ὥστε: **Κλασματικὴ μονάδα λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομε τὴν ἀκεραία μονάδα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Σὲ πόσα δεύτερα, τρίτα, ὄγδοα ἠμποροῦμε νὰ χωρίσωμε ἕνα πορτοκάλι, ἕνα ψωμί, ἕνα ὁποιοδήποτε πρᾶγμα;

2. Μία ἀκεραία μονάδα τὴ χωρίζομε σὲ 6 ἴσα μέρη. Πῶς λέγεται ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη; Καὶ πῶς λέγεται, ἂν τὴν ἀκεραία μονάδα τὴ χωρίσωμε σὲ 7, 9, 10, 20 ἴσα μέρη;

3. Πόσα δωδέκατα κάνουν μιὰ ἀκεραία μονάδα; Καὶ πόσα τριακοστὰ ἢ πεντηκοστὰ ἢ ἑκατοστά;

4. Μὲ τί εἶναι ἴσο τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; Καὶ μὲ τί τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$;

5. Νὰ γράψῃς τέσσερες διαφορετικὲς κλασματικὲς μονάδες. Κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτὲς πῶς θὰ γίνῃ ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα;

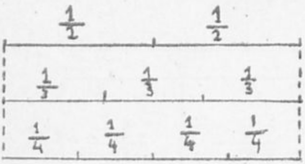
6. Τὸ 1 ρούπι τί μέρος τῆς πήχης εἶναι;

7. Τὸ 1 δράμι τί μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι; Καὶ ἡ 1 ὀκὰ τί μέρος εἶναι τοῦ στατῆρα;

8. Ὁ 1 μήνας τί μέρος εἶναι τοῦ ἔτους; Καὶ τί μέρος τῆς ἡμέρας εἶναι ἡ ὥρα; Καὶ τὸ 1 πρῶτο λεπτὸ τί μέρος εἶναι τῆς ὥρας;

2η ὁμάδα.

1. α) Ἔχω δυὸ ἴσες εὐθεῖες. Τὴ μιὰ τὴ χωρίζω σὲ δυὸ ἴσα μέρη καὶ τὴν ἄλλη τὴ χωρίζω σὲ τρία ἴσα μέρη. Κάθε μέρος τῆς πρώτης εὐθείας καὶ κάθε μέρος τῆς δεύτερης, τί εἶναι μεταξύ τους; Ἴσα ἢ ἄνισα; καὶ ποιὸ εἶναι μικρότερο;



β) Τώρα ἔχω τρίτη εὐθεῖα ἴση μὲ τὶς προηγούμενες δύο, καὶ τὴ χωρίζω σὲ 4 ἴσα μέρη. Ἕνα μέρος ἀπὸ αὐτή, τί εἶναι σχετικὰ μὲ καθένα μέρος ἀπὸ τὶς δύο προηγούμενες εὐθεῖες;

γ) Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς λοιπὸν μονάδες $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$ ποιὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη καὶ ποιὰ ἡ μικρότερη;

δ) Καὶ ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ποιὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη καὶ ποιὰ ἡ μικρότερη;

ε) Μιὰ κλασματικὴ μονάδα πότε εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ μιὰ ἄλλη καὶ πότε εἶναι μικρότερή της;

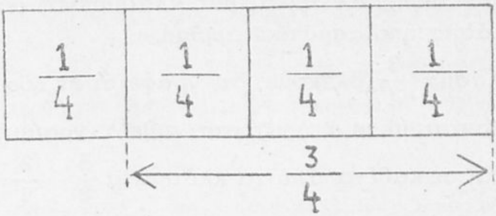
2. Τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}$ νὰ τὶς γράψης στὴ σειρὰ μὲ τὴν ἀξία τους καὶ ν' ἀρχίσης α) ἀπὸ τὴ μικρότερη καὶ β) ἀπὸ τὴ μεγαλύτερη.

3. Ἕνας χώρισε τὸ κτῆμα του σὲ τρία μέρη: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Στὸ μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτὰ θὰ φυτέψη λαχανικά, στὸ μικρότερο ἄνθη καὶ τὸ ἄλλο θὰ τὸ κάνη φυτώριο γιὰ δένδρα. Σὲ ποιὸ μέρος θὰ φυτέψη λαχανικά, σὲ ποιὸ ἄνθη καὶ πόσο μέρος θὰ κάνη φυτώριο;

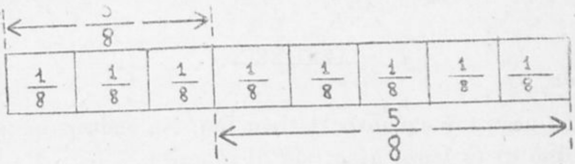
Κλασματικοὶ ἀριθμοί.

1. Δυὸ ἀδελφοὶ ἐχώρισαν ἕνα χωράφι σὲ 4 ἴσα μέρη. Ἀπὸ αὐτὰ ὁ ἕνας ἔλαβε τὸ ἕνα μέρος καὶ ὁ ἄλλος τὰ ἄλλα τρία. Δηλαδὴ ὁ πρῶτος ἔλαβε ἀπὸ τὸ χωράφι τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ δεύτερος ἔλαβε $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Τὸ μερίδιο τοῦ δευτέρου τὸ

γράφομε συντομώτερα : $\frac{3}{4}$: Ὥστε εἶναι $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.



Ἔτσι βλέπομε πὼς τὸ $\frac{3}{4}$ γίνεται ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{4}$, τὴν ὁποίαν ἐπαναλαμβάνομε τρεῖς φορές. Γι' αὐτὸ τὸν ἀριθμὸ $\frac{3}{4}$ τὸν ὀνομάζομε ***κλασματικὸ ἀριθμὸ*** ἢ πιὸ ἁπλὰ τὸν ὀνομάζομε ***κλάσμα***.



2. Γνωρίζομε ὅτι 1 ρούπι $=\frac{1}{8}$ τῆς πήχης· ὥστε ἂν ἀγοράσωμε ἀπὸ ἕνα ὕφασμα 5 ρούπια ἀγοράζομε $\frac{1}{8}$ πήχ. $+\frac{1}{8}$ πήχ. $+\frac{1}{8}$ πήχ. $+\frac{1}{8}$ πήχ. $+\frac{1}{8}$ πήχ. Δηλαδὴ ἀγοράζομε 5 ὄγδοα τῆς πήχης καὶ γράφομε $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης. Ὥστε εἶναι $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$. Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς $\frac{5}{8}$ ποὺ γίνεται ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{8}$, τὴν ὁποίαν ἐπαναλαμβάνομε 5 φορές, εἶναι κλασματικὸς ἢ κλάσμα.

Ὥστε: **Κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ κλάσμα λέγεται ὁ ἀριθμὸς ποὺ γίνεται ἀπὸ μιὰ ὁποιαδήποτε κλασματικὴ μονάδα, τὴν ὁποίαν ἐπαναλαμβάνομε πολλὲς φορές.**

Ἔτσι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, $\frac{4}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$ εἶναι κλασματικοί. Ἀλλὰ καὶ μία κλασματικὴ μονάδα τὴν λέγομε κλάσμα ἢ κλασματικὸ ἀριθμό.

Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ βλέπομε, ὅτι γράφεται μὲ δύο ἀριθμούς, ποὺ χωρίζονται μὲ μιὰ ὁριζόντια εὐθεῖα γραμμή. Τὸ ἴδιο βλέπομε καὶ σὲ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$.

Τὸν ἀριθμὸ τὸν κάτω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα γραμμὴ τοῦ κλάσματος τὸν ὀνομάζομε ***παρονομαστή.*** Αὐτὸς φανερώνει σὲ πόσα ἴσα μέρη χωρίζεται ἡ ἀκεραία μονάδα. Ἐνῶ τὸν ἀριθμὸ τὸν ἐπάνω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα γραμμὴ τοῦ κλάσματος τὸν ὀνομάζομε ***ἀριθμητή.*** Αὐτὸς φανερώνει πόσες μονάδες τοῦ κλάσματος ἐλάβαμε.

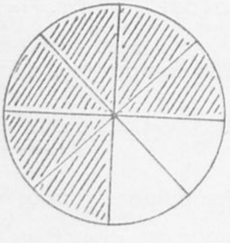
Ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος καὶ ὁ παρονομαστής του λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα ***ὅροι*** τοῦ κλάσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Τὰ μέρη τοῦ σχήματος 1 εἶναι ἴσα. Νὰ γράψης μὲ κλασματικὸ ἀριθμὸ α) τὸ λευκὸ μέρος καὶ β) τὸ μαῦρο.

2. Νὰ χωρίσης ἀπὸ μιὰ εὐθεῖα τὰ $\frac{2}{3}$, τὰ $\frac{3}{5}$ τὰ $\frac{4}{5}$.



Σχ. 1.

3. Νὰ ἀναλύσης τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ στὶς κλασματικές του μονάδες. Πόσες θὰ εἶναι;

4. Τί φανερώνει καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα: $\frac{7}{8}$ τῆς πήχης; $\frac{2}{3}$ ἑνὸς χωραφιοῦ, $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου; $\frac{11}{15}$; Σὲ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτά, ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητής; Ποῖος ὁ παρονομαστής; Ποῖοι οἱ ὅροι του;

5. Νὰ γράψης τὸ κλάσμα ποὺ ἔχει α) ἀριθμητὴ 4 καὶ παρονομαστὴ 9, β) παρονομαστὴ 17 καὶ ἀριθμητὴ 11, γ) ποὺ ἔχει ὅρους 23 καὶ 21. Πόσα κλάσματα μὲ τοὺς ὅρους αὐτοὺς ἠμπορεῖς νὰ γράψης;

6. Νὰ γράψης τὰ κλάσματα: α) ἕνδεκα, δέκατα πέμπτα β) δώ-

δεκα, τριακοστὰ πέμπτα γ) ἐννέα, εἰκοστὰ πρῶτα δ) εἴκοσι τρία, ἑβδομηκοστὰ ἔνατα ε) σαράντα ἑφτά, τριακοστά.

7. Τί μέρος τῆς πήχης εἶναι τὰ 3 ρούπια; τὰ 5 ρούπια;

8. Τί μέρος τῆς ἀγγλικῆς λίρας εἶναι τὰ 7 σελίνια; Τὰ 13 σελίνια;

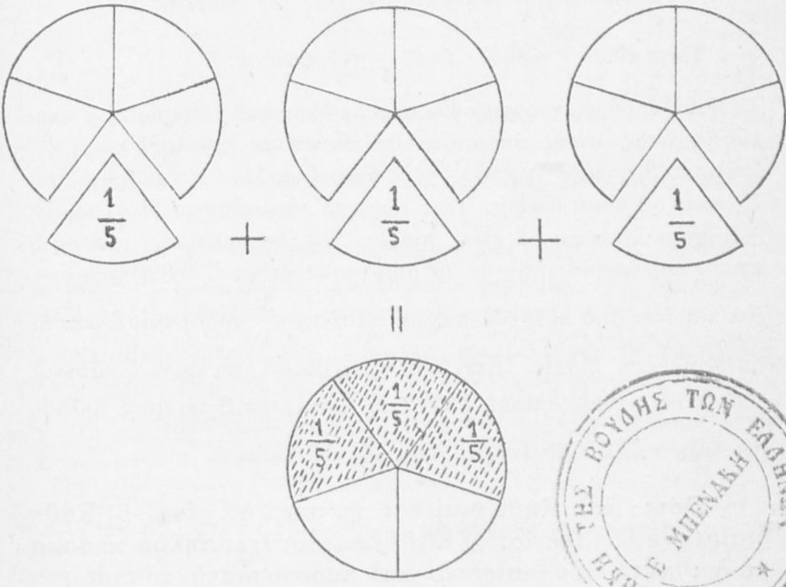
9. Τί μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι τὰ 50 δράμια; Τὰ 160 δράμια;

10. Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι οἱ 3 μῆνες; οἱ 7 μῆνες;

2η ὁμάδα.

1. Νὰ μοιρασθοῦν 3 ἴσα ψωμιὰ σὲ 5 ἀνθρώπους ἐξίσου.

Θὰ μοιράσωμε τὰ 3 ψωμιὰ στοὺς 5 ἀνθρώπους ἕνα, ἕνα. Θὰ χωρίσωμε δηλαδὴ πρῶτα 1 ψωμὶ σὲ 5 ἴσα μέρη καὶ θὰ δώσωμε σὲ



Σχ. 2.

κάθε ἄνθρωπο ἀπὸ 1 μέρος. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ μοιράσωμε στοὺς 5 ἀνθρώπους τὸ δεύτερο ψωμὶ καὶ ὕστερα τὸ τρίτο. Ἔτσι ἀπὸ 1 ψωμὶ θὰ πάρῃ ὁ ἄνθρωπος τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ ἀπὸ τὰ 3 ψωμιὰ θὰ πάρῃ $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ τοῦ ψωμιοῦ (Σχ. 2).

Ἐδῶ ἐκάναμε τὴ διαίρεσι 3 ψωμιὰ : 5, ἡ ὁποία καθὼς βλέπομε ἔχει πηλίκο $\frac{3}{5}$ τοῦ ψωμιοῦ. Δηλαδὴ βλέπομε, ὅτι ἡ διαίρεσι $3:5$ ἔχει πηλίκο τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, εἰς τὸ ὁποῖον ἀριθμητὴς εἶναι ὁ διαιρετέος 3 καὶ παρονομαστὴς ὁ διαιρέτης 5.

Ἔτσι ἐδῶ λέγομε, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ παριστάνει τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $3:5$.

2. *Νὰ μοιρασθοῦν 7 ἴσα ψωμιὰ σὲ 4 ἀνθρώπους ἐξίσου.*

Θὰ τὰ μοιράσωμε, ὅπως ἐμοιράσαμε τὰ 3 ψωμιὰ στοὺς 5 ἀνθρώπους στὸ προηγούμενο πρόβλημα. Ἔτσι θὰ ἴδωμε, ὅτι κάθε ἄνθρωπος θὰ πάρη $\frac{7}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ.

Ὥστε εἶναι 7 ψωμιὰ : $4 = \frac{7}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ.

Ἀλλὰ τώρα παρατηροῦμε, ὅτι ἂν ἐκάναμε τὴ διαίρεσι 7 ψωμιὰ : 4, ὅπως στοὺς ἀκεραίους, θὰ εὑρίσκαμε πηλίκο 1 ψωμὶ καὶ ὑπόλοιπο 3 ψωμιά. Δηλαδὴ στοὺς ἀκεραίους λέγομε, ὅτι ἡ διαίρεσι 7 ψωμιὰ : 4 εἶναι ἀτελής. Ἐνῶ τώρα μὲ τὰ κλάσματα βλέπομε, ὅτι ἡ διαίρεσι 7 ψωμιὰ : 4 εἶναι τελεία. Καὶ πραγματικά, γιατὶ τὰ 3 ψωμιὰ ποὺ ἐπερίσσεψαν θὰ τὰ μοιράσωμε στοὺς 4 ἀνθρώπους ἕνα, ἕνα καὶ ἔτσι ἀπὸ αὐτὰ θὰ πάρη ὁ καθένας $\frac{3}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ καὶ δὲ θὰ περισσέψη τίποτε. Ἔτσι ἀπὸ τὰ 7 ψωμιὰ θὰ πάρη ὁ καθένας 1 ὁλόκληρο ψωμί, δηλαδὴ 4 τέταρτα καὶ ἀκόμα 3 τέταρτα, δηλαδὴ θὰ πάρη τὸ ὅλον 7 τέταρτα, ἤτοι $\frac{7}{4}$ τοῦ ψωμιοῦ.

Ὥστε: α΄) **Κάθε διαίρεσι ἠμπορεῖ νὰ γίνη,** β) **Κάθε διαίρεσι εἶναι τελεία,** γ) **Κάθε διαίρεσι ἔχει πηλίκο κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸν διαιρετέο καὶ παρονομαστὴ τὸ διαιρέτη** καὶ δ) **Κάθε κλάσμα ἠμποροῦμε νὰ τὸ ἐννοήσωμε ὡς πηλίκο, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομε διαιρῶντας τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.**

3. Ἔχω τρία ἴσα γλυκίσματα. Στὸ Νίκο ἔδωσα τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τὸ ἕνα καὶ στὸ Γιαννάκη ἔδωσα $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τὸ δεύτερο γλύκισμα καὶ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τὸ τρίτο. Σὲ ποιὸν ἔδωσα περισσότερο γλύκισμα;

4. Τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ γλυκίσματος τί ἠμπορεῖ νὰ φανερώνῃ; Καὶ τί ἠμποροῦν νὰ φανερώνουν τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$ πήχ., $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς, ἢ τὰ κλάσματα $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$;

5. Τί πηλίκα ἔχουν οἱ διαιρέσεις:

α) 4 : 9, β) 15 : 28, γ) 17 : 11, δ) 19 : 15;

6. Νὰ γράψετε ὡς κλάσματα τὰ πηλίκα στὶς διαιρέσεις:

α) 8 : 4, β) 18 : 6, γ) 30 : 5, δ) 20 : 20.

7. Νὰ γράψετε ὡς πηλίκα διαιρέσεων τὰ κλάσματα:

α) $\frac{7}{8}$ β) $\frac{13}{16}$ γ) $\frac{19}{4}$ δ) $\frac{33}{2}$.

8. Ἕνας εἶχε ἕνα χωράφι ἀπὸ 50 στρέμματα καὶ ἔσπειρε τὰ 37. Τί μέρος ἀπὸ τὸ χωράφι αὐτὸ ἔσπειρε;

9. Ἀπὸ 150 ὀκάδες σιτάρι ποὺ εἶχε ἕνας, ἐξώδεψε τὶς 73. Τί μέρος ἀπὸ τὸ σιτάρι αὐτὸ ἐξώδεψε;

10. Ἀπὸ 500 τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις ἑνὸς οἰκοπέδου ἐκτίσθηκαν οἱ 350 καὶ οἱ ἄλλοι ἔμειναν γιὰ κῆπο. Τί μέρος ἀπὸ τὸ οἰκόπεδο αὐτὸ ἐκτίσθηκε καὶ τί ἔμεινε γιὰ κῆπο;

11. Ἕνας ἔστειλε στὶς 3 ἀδελφές του 50 λίρες νὰ τὶς μοιράσουν ἐξίσου. Τί μέρος ἀπὸ τὶς 50 λίρες ἔλαβε ἡ κάθε μιὰ ἀδελφή;

12. Σὲ 5 φτωχὲς οἰκογένειες ἐμοιράσθηκαν 4 ἑκατομμύρια δραχμές. Τί μέρος ἀπὸ τὰ 4 ἑκατομμύρια ἔλαβε ἡ κάθε μιὰ οἰκογένεια;

Σύγκρισις κλάσματος μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Εἶχε ἕνας ἕνα μεγάλο οἰκόπεδο καὶ τὸ ἐχώρισε σὲ 4 ἴσα μέρη, δηλαδὴ τὸ ἐχώρισε σὲ τέταρτα. Ἐπούλησε δὲ καὶ τὰ 4 τέταρτα. Τί μέρος ἀπὸ τὸ μεγάλο οἰκόπεδο ἐπούλησε;

2. Νὰ συγκρίνῃς τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$ μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα. Δηλαδὴ νὰ ἴδῃς ἂν τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$ εἶναι ἴσο, μεγαλύτερο ἢ μικρότερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.

3. Ὅμοια νὰ συγκρίνης μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{5}, \frac{9}{9}, \frac{12}{12}, \frac{30}{30}.$$

4. Μὲ τί ἰσοῦται ἕνα κλάσμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστή;

5. Πόσα ἕκτα κάνουν μιὰ ἀκεραία μονάδα; Καὶ πόσα ἕβδομα; Καὶ πόσα ὄγδοα;

6. Μία θέλει νὰ ὑφάνη 1 πήχη δαντέλλα. Ὕφανε ὅμως $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης. Ἔχει νὰ ὑφάνη ἀκόμα;

7. Νὰ συγκρίνης τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα. Ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος;

8. Νὰ συγκρίνης μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{7}, \frac{7}{9}, \frac{12}{13}, \frac{6}{10}, \frac{19}{20}, \frac{12}{13}.$$

9. Ἂν σὲ ἕνα κλάσμα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τί εἶναι τὸ κλάσμα αὐτὸ σὲ σύγκρισι μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα;

10. Μία φιάλη περιέχει $\frac{5}{4}$ τῆς ὀκᾶς λάδι. Περιέχει περισσότερο ἀπὸ μιὰ ὀκά, ὀλιγώτερο ἢ ἴσο μὲ ὀκά;

11. Νὰ συγκρίνης τὸ κλάσμα $\frac{5}{4}$ μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα. Ἀπὸ τους ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{5}{4}$ ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος;

12. Ἂν σὲ ἕνα κλάσμα ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομοστή, τί εἶναι τὸ κλάσμα αὐτό, σὲ σύγκρισι μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα;

13. Πότε ἕνα κλάσμα εἶναι 1) ἴσο μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα, 2) μικρότερο ἀπὸ αὐτὴ καὶ 3) μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτή;

14. Ἔχομε τὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{5}, \frac{17}{24}, \frac{50}{50}, \frac{9}{7}, \frac{77}{78}, \frac{35}{35}, \frac{69}{68}, \frac{31}{36}, \frac{51}{51}.$$

Ἀπὸ αὐτὰ νὰ ξεχωρίσῃς: 1) ὅσα εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα, 2) ὅσα εἶναι μικρότερα ἀπὸ αὐτὴ καὶ 3) ὅσα εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ αὐτή.

Σημείωσις. *Τὰ κλάσματα τὰ μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα λέγονται γ ν ή σ ι α κλάσματα. Ἐνῶ τὰ κλάσματα τὰ ἴσα μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα ἢ τὰ μεγαλύτερα ἀπὸ αὐτὴν λέγονται κ α τ α χ ρ η σ τ ι κ ά.*

15. Νὰ γράψῃς δύο κλάσματα μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα καὶ δυὸ μικρότερα ἀπὸ αὐτὴ μὲ παρονομαστὴ 11 ἢ μὲ 45.

Πῶς τρέπομε ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ κλάσμα.

Πόσα ὄγδοα ἔχουν οἱ 3 πῆχες;

Ἡ 1 πήχη ἔχει 8 ὄγδοα, οἱ δυὸ πῆχες ἔχουν 2 φορὲς 8 ὄγδοα καὶ οἱ 3 πῆχες ἔχουν 3 φορὲς 8 ὄγδοα, δηλαδὴ ἔχουν $8 \times 3 = 24$ ὄγδοα. Ὥστε 3 πῆχες $= \frac{8 \times 3}{8} = \frac{24}{8}$ πῆχ.

Πόσα τέταρτα ἔχουν οἱ 5 ὀκάδες;

Ἡ 1 ὀκὰ ἔχει 4 τέταρτα καὶ οἱ 5 ὀκάδες ἔχουν 5 φορὲς τὰ 4 τέταρτα. Ἔτσι εἶναι 5 ὀκάδες $= \frac{4 \times 5}{4} = \frac{20}{4}$ ὀκ.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ τρέψωμε ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ κλάσμα μὲ ὡρισμένο παρονομαστὴ** 1) **πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸν ὡρισμένο παρονομαστὴ** καὶ 2) **κάτω ἀπὸ τὸ γινόμενο ποὺ βρίσκομε, γράφομε στὸ κλάσμα παρονομαστὴ αὐτὸν ποὺ ἔχομε ὁρίσει.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Πόσα ὄγδοα ἔχουν οἱ 5 πῆχες; Οἱ 8 πῆχες;
2. Πόσα τέταρτα ἔχουν οἱ 3 ὀκάδες, οἱ 10 ὀκάδες;
3. Πόσα δέκατα ἔχουν τὰ 7 μέτρα, τὰ 20, τὰ 30 μέτρα;
4. Πόσα ἑκατοστὰ ἔχουν οἱ 15 δραχμές, οἱ 50, οἱ 67 δραχμ.;
5. Πόσα ἑξηκοστὰ ἔχουν οἱ 4 ὧρες; οἱ 7 ὧρες;
6. Καθένα ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους 9, 12, 31 νὰ τὸν τρέψῃς σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ α) 5, β) 12, γ) 20, δ) 45.
7. Νὰ τρέψῃς τὸν ἀκέραιο 7 σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ 1. Ὅμοια νὰ τρέψῃς καὶ τὸν ἀκέραιο 9. Ἕνα λοιπὸν κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὴ μονάδα 1 μὲ ποιὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ εἶναι ἴσο;

8. Μὲ ποιὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ εἶναι ἴσο καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{6}{1}$, $\frac{20}{1}$, $\frac{30}{1}$, $\frac{15}{1}$, $\frac{1}{1}$;

9. Ἠμποροῦμε νὰ παραστήσωμε ἕνα ἀκέραιο μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη ἀριθμητὴ τὸν ἴδιο ἀκέραιο; Τί παρονομαστὴ θὰ ἔχη τότε τὸ κλάσμα;

Μεικτοὶ ἀριθμοί.

Μοιράζομε 3 μῆλα σὲ 2 παιδιὰ ἐξίσου. Τότε κάθε παιδὶ θὰ πάρη 1 μῆλο καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου. Δηλαδὴ θὰ πάρη 1 μῆλο $+\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου. Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τὸ γράφομε συντομώτερα $1\frac{1}{2}$ μῆλο (ἕνα καὶ ἕνα δεύτερο). Ὅμοια ἂν ἕνας ἀγοράση 5 ὀκάδες ζάχαρη καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, δηλαδὴ ἂν ἀγοράση 5 ὀκ. $+\frac{3}{4}$ ὀκ. γράφομε: $5\frac{3}{4}$ ὀκ.

Ἔτσι βλέπομε, ὅτι ἔχομε ἀριθμοὺς ποὺ γίνονται ἀπὸ ἀκέραιο καὶ ἀπὸ κλάσμα. Τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς $1\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$ τοὺς ὀνομάζομε μεικτούς.

Τί λοιπὸν λέγεται μεικτὸς ἀριθμός;

Νὰ γράψετε δύο μεικτοὺς ἀριθμούς.

Ἕνας μεικτὸς ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ τραπῆ σὲ κλάσμα. Π. χ. ὁ μεικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{3}{8}$ πῆχες. Γιατὶ ἠμποροῦμε νὰ τρέψωμε τὸν ἀκέραιο 5 τοῦ μεικτοῦ (τὶς 5 πῆχες) σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν 8. Ἔτσι ὁ 5 τρέπεται σὲ $5\times8=40$ ὄγδοα. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μεικτὸς ἔχει καὶ ἄλλα 3 ὄγδοα, ἔχει ἐν ὅλῳ $40+3=43$ ὄγδοα, δηλαδὴ ἔχει $\frac{5\times8+3}{8}=$ $=\frac{43}{8}$. Ὥστε εἶναι $5\frac{3}{8}=\frac{5\times8+3}{8}=\frac{43}{8}$.

Ὅμοια ἂν ἔχωμε τὸ μεικτὸ $3\frac{4}{7}$, τρέπομαι τὸν ἀκέραιο 3 σὲ $3\times7=21$ ἕβδομα. Ὥστε 21 ἕβδομα $+$ 4 ἕβδομα $=\frac{25}{7}$.

Ἔτσι εἶναι $3\frac{4}{7}=\frac{3\times7+4}{7}=\frac{25}{7}$.

Ὥστε: Γιὰ νὰ τρέψωμε μεικτὸ ἀριθμὸ σὲ κλάσμα: 1) πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, 2) στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ 3) τὸ ἄθροισμα ποὺ βρίσκομε τὸ γράφομε ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ βρῆτε (ἀπὸ μνήμης):

α) Πόσα ὄγδοα ἔχουν οἱ $6\frac{5}{8}$ πῆχες.

β) Πόσα τέταρτα ἔχουν οἱ $5\frac{3}{4}$ ὀκάδες.

γ) Πόσα δέκατα ἔχουν τὰ $12\frac{9}{10}$ μέτρα.

δ) Πόσα σέντς (ἑκατοστὰ) ἔχουν τὰ $8\frac{35}{100}$ δολλάρια.

2. Πόσα εἰκοστὰ (σελίνια) ἔχουν οἱ $29\frac{17}{20}$ λίρες Ἀγγλίας.

3. Πόσα τετρακοσιοστὰ (δράμια) ἔχουν οἱ $13\frac{175}{400}$ ὀκάδες.

4. Νὰ βρῆτε:

α) Πόσα δεύτερα κάμνουν οἱ:

$$1\frac{1}{2},\quad 3\frac{1}{2},\quad 7\frac{1}{2},\quad 8\frac{1}{2},\quad 11\frac{1}{2},\quad 15\frac{1}{2}.$$

β) Πόσα τρίτα κάμνουν οἱ:

$$1\frac{1}{3},\quad 2\frac{1}{3},\quad 3\frac{1}{3},\quad 7\frac{2}{3},\quad 8\frac{2}{3},\quad 10\frac{2}{3}.$$

γ) Πόσα τέταρτα κάμνουν οἱ:

$$1\frac{1}{4},\quad 2\frac{1}{4},\quad 2\frac{2}{4},\quad 9\frac{3}{4},\quad 12\frac{1}{4},\quad 15\frac{3}{4}.$$

5. Νὰ τρέψετε σὲ κλάσματα τοὺς μεικτούς:

$$6\frac{1}{5},\ 9\frac{2}{5},\ 5\frac{1}{6},\ 3\frac{4}{9},\ 8\frac{3}{7},\ 5\frac{5}{6}.$$

$$7\frac{8}{9},\ 11\frac{3}{5},\ 21\frac{5}{7},\ 37\frac{1}{6},\ 43\frac{3}{4},\ 17\frac{1}{12}.$$

$$24\frac{19}{20},\ 19\frac{1}{19},\ 105\frac{4}{5},\ 300\frac{7}{11},\ 158\frac{6}{7}.$$

Πῶς ἐξάγομε τὶς ἀκέραιες μονάδες, ποὺ ἔχει ἕνα κλάσμα.

Εἴδαμε, ὅτι ὁ μεικτὸς ἀριθμὸς $3\frac{5}{8}$ πῆχες τρέπεται στὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$ πῆχες. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$ πῆχες περιέχει ἀκέραιες μονάδες (3 πῆχες). Μὲ ποιὸ τρόπο λοιπὸν θὰ ἐξαγάγωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες ποὺ ἔχει τὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$ πῆχες ; Ἀλλ' ἐμεῖς γνωρίζομε, ὅτι ἡ 1 πήχη ἔχει 8 ὄγδοα. Ὅσες λοιπὸν φορὲς χωροῦν τὰ 8 ὄγδοα στὰ 29 ὄγδοα, τόσες (ἀκέραιες) πῆχες περιέχει τὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$ πῆχες. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαίρεσις 29 : 8 δίνει πηλίκο 3 καὶ ὑπόλοιπο 5, συμπεραίνομε, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$ περιέχει 3 πῆχ. καὶ ἀκόμα $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης. Ὥστε εἶναι $\frac{29}{8}$ πῆχ. $= 3\frac{5}{8}$ πῆχες.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε, ὅτι $\frac{43}{8}$ πῆχες $= 5\frac{3}{8}$ πῆχ. (43 : 8 = 5 πηλίκο καὶ 3 ὑπόλοιπο).

Ὥστε: **Γιὰ νὰ ἐξαγάγωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες κλάσματος, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἔτσι τὸ πηλίκο θὰ φανερώνη τὶς ἀκέραιες μονάδες τοῦ κλάσματος, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπο (ἂν μείνη) θὰ φανερώνη πόσες κλασματικὲς μονάδες ἔχει ἀκόμα τὸ κλάσμα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἐξαγάγης (ἀπὸ μνήμης) τὶς ἀκέραιες μονάδες ποὺ ἔχουν τὰ κλάσματα:

α) $\frac{4}{2}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{16}{2}$, $\frac{20}{2}$, $\frac{36}{2}$, $\frac{64}{2}$, $\frac{100}{2}$, $\frac{300}{2}$

β) $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{60}{3}$, $\frac{90}{3}$, $\frac{33}{3}$, $\frac{45}{3}$

γ) $\frac{4}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{28}{4}$, $\frac{36}{4}$, $\frac{40}{4}$, $\frac{80}{4}$, $\frac{120}{4}$

2. Νὰ ἐξαγάγῃς τὶς ἀκέραιες μονάδες ποὺ ἔχουν τὰ κλάσματα:

α) $\frac{49}{7}$, $\frac{72}{8}$, $\frac{42}{6}$, $\frac{54}{9}$, $\frac{63}{7}$, $\frac{63}{9}$

β) $\frac{57}{3}$, $\frac{77}{11}$, $\frac{108}{9}$, $\frac{90}{5}$, $\frac{56}{4}$, $\frac{91}{7}$

γ) $\frac{124}{31}$, $\frac{160}{40}$, $\frac{300}{60}$, $\frac{125}{25}$, $\frac{252}{12}$

3. Ἀγόρασε ἕνας $\frac{19}{4}$ ὀκάδες βούτυρο. Πόσες ὀκάδες ἀγόρασε καὶ πόσα μέρη τῆς ὀκᾶς;

4. Πόσες πῆχες καὶ πόσα μέρη τῆς πήχης κάνουν $\frac{77}{8}$ πῆχες;

5. Νὰ ἐξαγάγῃς τὶς ἀκέραιες μονάδες ποὺ ἔχουν τὰ κλάσματα:

α) $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{17}{2}$, $\frac{31}{2}$, $\frac{49}{2}$

β) $\frac{8}{3}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{17}{3}$, $\frac{52}{3}$, $\frac{67}{3}$, $\frac{70}{3}$

γ) $\frac{5}{4}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{18}{4}$, $\frac{39}{4}$, $\frac{65}{4}$, $\frac{90}{4}$

δ) $\frac{61}{5}$, $\frac{91}{8}$, $\frac{103}{9}$, $\frac{96}{7}$, $\frac{83}{6}$, $\frac{206}{9}$

6. Νὰ ἐξαγάγῃς τὶς ἀκέραιες μονάδες ποὺ ἔχουν τὰ κλάσματα:

α) $\frac{157}{20}$ λίρες, $\frac{373}{4}$ ὀκ., $\frac{672}{12}$ ἡμέρες, $\frac{8735}{100}$ μέτρα

$\frac{7569}{1000}$ χιλιόγραμμα.

β) $\frac{140}{18}$, $\frac{187}{19}$, $\frac{304}{25}$, $\frac{132}{13}$, $\frac{1210}{30}$, $\frac{1100}{20}$.

7. Ἕνα βαρέλι χωράει 40 ὀκάδες κρασί. Χωροῦν σ᾿ αὐτὸ $\frac{77}{2}$ ὀκάδες κρασί;

8. Ζητοῦν ἀπὸ ἕναν 4 στατῆρες κάρβουνα. Αὐτὸς δὲ ἔχει $\frac{180}{4}$ στατῆρες ἀπὸ τὸ κάρβουνο αὐτό. Ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ δώσῃ ὅ,τι τοῦ ζητοῦν;

9. Νὰ συγκρίνῃς τοὺς ἀριθμοὺς 89 καὶ $\frac{534}{6}$.

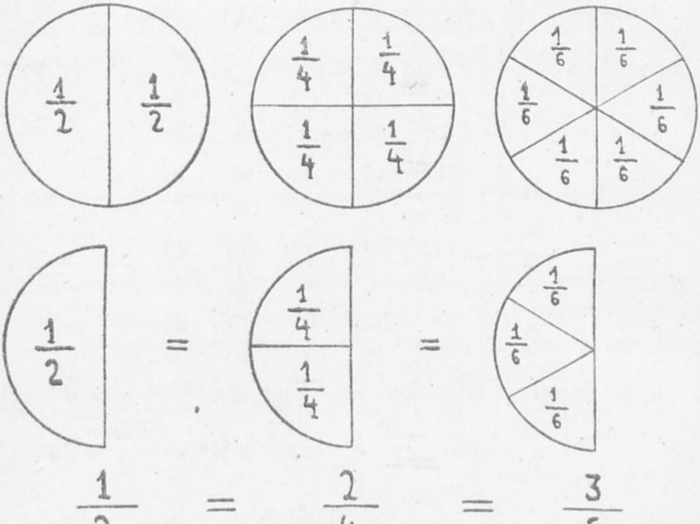
10. Νὰ κάνῃς τὶς διαιρέσεις:

α) 27 ἡμ. : 12, β) 87 χιλιόγραμμα : 50, γ) 87 ὧρες : 12.
ε) 69 : 17, στ) 190 : 13, ζ) 875 : 6.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

1η. *Τί παθαίνει ἡ ἀξία κλάσματος, ὅταν οἱ ὅροι του πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.*

1. α) Κόβομε 1 μῆλο σὲ 2 ἴσα μέρη. Τότε τὸ 1 μέρος εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου (Σχ. 3).



Σχ. 3.

β) Τώρα καθένα ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ μήλου τὸ κόβομε πάλι σὲ δύο ἴσα μέρη. Ἔτσι τὸ μῆλο ἐκόπηκε σὲ 4 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ αὐτὸ τὸ 1 μέρος εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήλου. Ἔτσι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου (τὸ μισὸ μῆλο) ἐκόπηκε σὲ $\frac{2}{4}$, ὥστε $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου $= \frac{2}{4}$ τοῦ μήλου $= \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$.

γ) Τώρα ἂν κόψωμε καθένα ἀπὸ τὰ πρῶτα 2 μέρη τοῦ μήλου $\left(\text{τὸ } \frac{1}{2}\right)$ σὲ τρία ἴσα μέρη, ὁλόκληρο τὸ μῆλο θὰ κοπῆ σὲ 6 ἕκτα $\left(\frac{6}{6}\right)$ καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου θὰ κοπῆ σὲ $\frac{3}{6}$. Ὥστε $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου $= \frac{3}{6}$ τοῦ μήλου $= \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$.

Ἔτσι βρήκαμε $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$ καὶ $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$.

Ὥστε: **Ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι κλάσματος πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν ἀλλάζει.**

δ) Τώρα παρατηροῦμε, ὅτι $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, δηλαδὴ $\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, δηλαδὴ $\frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2}$.

Ἂν λοιπὸν οἱ δύο ὅροι κλάσματος διαιρεθοῦν διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, θὰ πάθη τίποτε ἡ ἀξία του (ἢ ὄχι;)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς πήχης πόσα τέταρτα ἔχει; καὶ πόσα ὄγδοα;

2. Τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς πόσα ὄγδοα ἔχει; Καὶ πόσα δέκατα ἕκτα καὶ πόσα εἰκοστά;

3. Τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας πόσα τριακοστὰ ἔχει; Καὶ πόσα τριακοστὰ ἔχουν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας;

4. Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς πήχης πόσα ὄγδοα ἔχουν καὶ τὰ $\frac{7}{20}$ τῆς ὀκᾶς πόσα ἑκατοστὰ ἔχουν;

5. Θέλομε νὰ βροῦμε κλάσμα ἴσο μὲ τὸ $\frac{1}{2}$, ἀλλὰ νὰ ἔχη παρονομαστὴ 8. Τί ἀριθμητὴ θὰ ἔχη τὸ νέο κλάσμα;

6. Θέλομε νὰ βροῦμε κλάσμα ἴσο μὲ τὸ $\frac{3}{5}$, ἀλλὰ νὰ ἔχη παρονομαστὴ 10. Τί ἀριθμητὴ θὰ ἔχη τὸ νέο κλάσμα;

7. α) Πόσα δέκατα ὄγδοα κάνει καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{9},\ \frac{1}{2}$$

β) Πόσα εἰκοστὰ τέταρτα κάνει καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{12}$$

γ) Πόσα τριακοστὰ ἕκτα κάνει καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα:

$$\frac{3}{4},\ \frac{7}{9},\ \frac{5}{12},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{11}{18}$$

δ) Πόσα τεσσαρακοστὰ δεύτερα κάνει καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα:

$$\frac{5}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{3},\ \frac{13}{21},\ \frac{11}{14}.$$

8. Νὰ τρέψετε:

α) τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ σὲ δωδέκατα.

β) » » $\frac{5}{7}$ σὲ τριακοστὰ πέμπτα.

γ) » » $\frac{9}{20}$ σὲ ἑκατοστά.

δ) » » $\frac{3}{8}$ σὲ ἑκατοστὰ εἰκοστά.

ε) » » $\frac{9}{13}$ σὲ ἑξηκοστὰ πέμπτα.

2η ὁμάδα (ἁπλοποίησις κλάσματος).

1. ***Μποροῦμε νὰ βροῦμε κλάσμα ἴσο μὲ τὸ $\frac{12}{16}$, ἀλλὰ νὰ ἔχῃ μικροτέρους ὅρους;***

Γιὰ νὰ βροῦμε κλάσμα ἴσο μὲ τὸ $\frac{12}{16}$ καὶ μὲ μικροτέρους ὅρους, πρέπει νὰ διαιρέσωμε τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Διαιροῦμε λοιπὸν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ 2 καὶ βρίσκομε $\frac{12:2}{16:2}=\frac{6}{8}$.

Ὥστε εἶναι $\frac{12}{16}=\frac{6}{8}$.

Ἔτσι ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{12}{16}$ βρήκαμε τὸ ἴσο του καὶ ἁπλούστερο $\frac{6}{8}$.

Ὅταν ἀπὸ ἕνα κλάσμα βρίσκωμε ἄλλο ἴσο μὲ αὐτό, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους, λέγομε ὅτι ἁπλοποιοῦμε τὸ κλάσμα ἢ ὅτι κάνομε ***ἁπλοποίησι.***

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ἁπλοποιήσωμε πιὸ πολὺ ἀκόμα τὸ κλάσμα $\frac{12}{16}$; Μποροῦμε, γιατὶ βλέπομε, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{6}{8}$ διαιροῦνται διὰ τοῦ 2, δηλαδὴ γιατὶ ἔχουν κοινὸ διαιρέτη τὸ 2. Ἔτσι εἶναι $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, δηλαδὴ εἶναι $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$. Μποροῦμε ὅμως τὸ $\frac{3}{4}$ νὰ τὸ βροῦμε ἀμέσως ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{12}{16}$, διαιρώντας τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τους 4. Καὶ τώρα μποροῦμε νὰ ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$; Ὄχι. Γιατὶ οἱ ὅροι του δὲν ἔχουν κοινὸ διαιρέτη, δηλ. γιατὶ οἱ ὅροι του εἶναι ***πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.***

Τὸ κλάσμα ποὺ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἁπλοποιηθῆ λέγεται ***ἀνάγωγο.***

Τί εἶναι λοιπὸν τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{7}{8}$;

2. α) Τί λέγεται ἁπλοποίησις κλάσματος;

β) Πότε ἁπλοποιεῖται ἕνα κλάσμα;

γ) Πότε ἕνα κλάσμα λέγεται ἀνάγωγο;

δ) Τὴ μισὴ ὀκὰ τὴ γράφω $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς· ἠμπορῶ ὅμως νὰ τὴ γράψω καὶ $\frac{128}{256}$ τῆς ὀκᾶς. Ἀπὸ ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα, ἐννοοῦμε γρηγορώτερα, ὅτι παριστάνουν μισὴ ὀκά; Σὲ τί λοιπὸν ἠμπορεῖ νὰ χρησιμεύση ἡ ἁπλοποίησις κλάσματος;

3. Διὰ ποίου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσετε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους:

α) τοῦ κλάσματος $\frac{9}{18}$ γιὰ νὰ βρῆτε $\frac{1}{2}$;

β) » » $\frac{16}{20}$ » » » $\frac{4}{5}$;

γ) » » $\frac{25}{30}$ » » » $\frac{5}{6}$;

δ) » » $\frac{22}{36}$ » » » $\frac{11}{18}$;

ε) » » $\frac{16}{36}$ » » » $\frac{4}{9}$;

στ) » » $\frac{54}{72}$ » » » $\frac{9}{12}$;

4. Νὰ ἁπλοποιήσῃς (ἀπὸ μνήμης) τὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{5}{10},\ \frac{15}{10},\ \frac{10}{15},\ \frac{15}{20}$$

5. Νὰ ἁπλοποιήσῃς τὰ κλάσματα:

$$\alpha)\ \frac{14}{22},\ \frac{35}{50},\ \frac{22}{24},\ \frac{18}{30},\ \frac{33}{36},\ \frac{36}{44}.$$

$$\beta)\ \frac{36}{45},\ \frac{56}{64},\ \frac{60}{100},\ \frac{48}{80},\ \frac{48}{84},\ \frac{38}{57}.$$

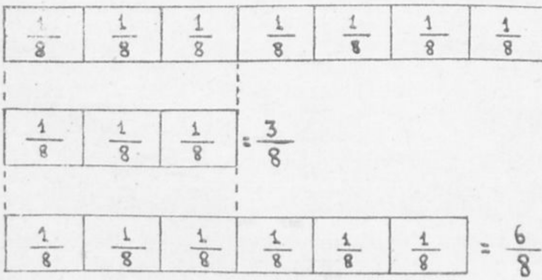
6. Νὰ κάνῃς ἀνάγωγα τὰ κλάσματα:

$$\alpha)\ \frac{4}{12},\ \frac{20}{30},\ \frac{6}{24},\ \frac{25}{50},\ \frac{40}{100},\ \frac{45}{60}$$

$$\beta)\ \frac{28}{32},\ \frac{60}{90},\ \frac{48}{80},\ \frac{32}{56},\ \frac{70}{84},\ \frac{27}{81}.$$

2η. ***Τί παθαίνει ἡ ἀξία κλάσματος, ὅταν ὁ ἀριθμητής του πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ.***

Μία ἔπλεξε 3 ρούπια δαντέλλα καὶ ἡ ἀδελφή της ἔπλεξε διπλάσια. Ἡ ἀδελφὴ λοιπὸν ἔπλεξε 6 ρούπια, ἀλλὰ τὰ 3 ρούπια εἶναι $\frac{3}{8}$ τῆς πήχης καὶ τὰ 6 ρούπια εἶναι $\frac{6}{8}$ τῆς πήχης. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ ἔχει ἀξία διπλασία ἀπὸ τὴν ἀξία ποὺ ἔχει τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$. Γίνεται δὲ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητή του 3 ἐπὶ τὸ 2.



Καὶ ἀντίστροφα: ἡ πρώτη ἀδελφὴ ἔπλεξε τὰ μισὰ ρούπια ἀπὸ ὅσα ἔπλεξε ἡ δεύτερη. Ἔτσι τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἔχει τὴ μισὴ ἀξία, ἀπὸ τὴν ἀξία ποὺ ἔχει τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$. Γίνεται δὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἀπὸ τὸ $\frac{6}{8}$, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή του 6 διὰ τοῦ 2.

Ὥστε: **1. Ἂν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.**

2. Ἂν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος διαιρεθῆ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ τριπλασιάσης τὴν ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{2}{11}$ καὶ νὰ τετραπλασιάσης τὴν ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{3}{17}$.

2. Ἀπὸ τὴν πλατεῖα τοῦ χωριοῦ ὡς τὸ σιδηροδρομικὸ σταθμό, ἕνας ποδηλάτης ἐπῆγε σὲ $\frac{5}{60}$ τῆς ὥρας καὶ ἕνας πεζὸς ἐπῆγε σὲ τριπλάσιο χρόνο. Σὲ πόσα ἑξηκοστὰ τῆς ὥρας ἔκανε ὁ πεζὸς τὸ δρόμο αὐτό;

3. Τὴν ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{12}{13}$ νὰ τὴν κάνης 2 φορές, 3, 4 φορὲς μικρότερη.

4. Ἕνα οἰκόπεδο ἀξίζει $\frac{24}{20}$ τῆς χρυσῆς λίρας τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Ἄλλο οἰκόπεδο ἀξίζει 4 φορὲς ὀλιγώτερο. Τί ἀξία ἔχει τὸ τετραγωνικὸ μέτρο τοῦ οἰκοπέδου αὐτοῦ;

5. Νὰ συγκρίνης τὰ κλάσματα (τὴν ἀξία τους):

α) $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$ β) $\frac{1}{7}$ καὶ $\frac{5}{7}$

γ) $\frac{8}{9}$ καὶ $\frac{1}{9}$ δ) $\frac{7}{10}$ καὶ $\frac{1}{10}$

ε) $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{1}{3}$ στ) $\frac{12}{19}$ καὶ $\frac{1}{19}$

ζ) $\frac{15}{27}$ καὶ $\frac{1}{27}$ η) $\frac{30}{31}$ καὶ $\frac{1}{31}$

6. Νὰ συγκρίνης τὰ κλάσματα:

α) $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{8}{9}$ β) $\frac{7}{30}$ καὶ $\frac{21}{30}$

γ) $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{20}{12}$ δ) $\frac{9}{25}$ καὶ $\frac{18}{25}$

ε) $\frac{3}{17}$ καὶ $\frac{12}{17}$ στ) $\frac{11}{20}$ καὶ $\frac{33}{20}$

ζ) $\frac{45}{31}$ καὶ $\frac{9}{31}$ η) $\frac{6}{47}$ καὶ $\frac{42}{47}$

7. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{6}{7}$ ποιὸ ἔχει τὴ μεγαλύτερη ἀξία; Καὶ ποιὸ ἔχει τὴ μικρότερη ἀξία ἀπὸ τὰ κλάσματα

$\frac{13}{18}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{11}{18}$;

8. Τί παθαίνει γενικὰ ἡ ἀξία κλάσματος, ὅταν τὸν ἀριθμητή του τὸν κάνωμε μεγαλύτερο ἢ ὅταν τὸν κάνωμε μικρότερο;

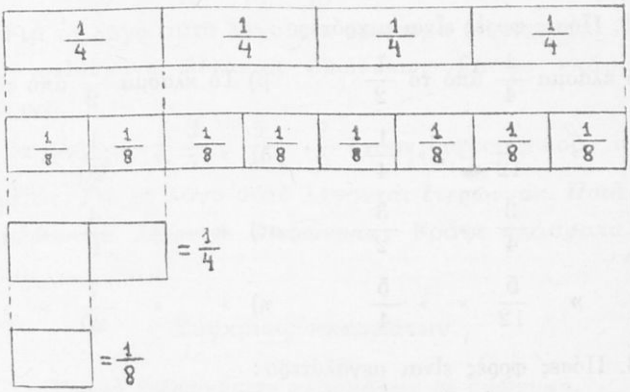
9. Νὰ βάλης στὴ σειρὰ μὲ τὴν ἀξία τους τὰ κλάσματα:

$\frac{5}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{13}$ ἀρχίζοντας:

α) ἀπὸ τὸ μικρότερο καὶ β) ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο.

3η. ***Τί παθαίνει ἡ ἀξία κλάσματος, ἂν ὁ παρονομαστής του πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.***

Κόβομε μιὰ πήχη ὕφασμα σὲ 4 ἴσα μέρη, δηλαδὴ σὲ τέταρτα. Ὕστερα καθένα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ τὸ κόβομε σὲ 2 ἴσα μέρη. Ἔτσι ἡ πήχη κόβεται τώρα σὲ 8 ἴσα μέρη, δηλαδὴ σὲ ὄγδοα. Ἕνα δὲ ὄγδοο τῆς πήχης εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ ἕνα τέταρτό της. Δηλαδὴ $\frac{1}{8}$ τῆς πήχης εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ $\frac{1}{4}$ τῆς πήχης καὶ τὰ $\frac{2}{8}$ τῆς πήχης εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὰ $\frac{2}{4}$ καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς πήχης εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῆς. Γίνεται δὲ τὸ $\frac{1}{8}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ του 4 ἐπὶ τὸ 2. Ἔτσι γίνεται καὶ τὸ $\frac{2}{8}$ ἀπὸ τὸ $\frac{2}{4}$ καὶ τὸ $\frac{3}{8}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$.



Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ $\frac{1}{8}$ εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι τὸ διπλάσιο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{8}$. Ἔτσι καὶ τὸ $\frac{2}{4}$, εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ $\frac{2}{8}$ καὶ τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{8}$. Γίνεται δὲ ὁ παρονομαστὴς 4, ἂν διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴ 8 διὰ τοῦ 2.

Ὥστε: 1. **Ἂν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἡ ἀξία του διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.**

2. **Ἂν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος διαιρεθῇ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ νὰ τὸν πολλαπλασιάσης ἐπὶ τὸ 2. Τί θὰ πάθη ἡ ἀξία του;

β) Τὸν ἀριθμητὴ τοῦ ἰδίου κλάσματος $\frac{4}{5}$ νὰ τὸν διαιρέσης διὰ τοῦ 2. Τί θὰ πάθη ἡ ἀξία του;

γ) Μὲ πόσους τρόπους ἠμπορεῖς νὰ κάνης ἕνα κλάσμα δυὸ φορὲς ἢ περισσότερες φορὲς μικρότερο;

δ) Ἠμπορεῖς νὰ κάνης τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ τρεῖς φορὲς μικρότερο μὲ δύο τρόπους;

2. Πόσες φορὲς εἶναι μικρότερο:

α) Τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ β) Τὸ κλάσμα $\frac{1}{9}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{3}$

γ) » » $\frac{1}{12}$ » » $\frac{1}{4}$ δ) » » $\frac{1}{20}$ » » $\frac{1}{4}$

ε) » » $\frac{3}{4}$ » » $\frac{3}{2}$ στ) » » $\frac{4}{9}$ » » $\frac{4}{3}$

ζ) » » $\frac{5}{12}$ » » $\frac{5}{4}$ η) » » $\frac{7}{20}$ » » $\frac{7}{4}$

3. Πόσες φορὲς εἶναι μεγαλύτερο:

α) Τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{8}$ β) Τὸ κλάσμα $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{12}$

γ) » » $\frac{1}{4}$ » » $\frac{1}{24}$ δ) » » $\frac{1}{6}$ » » $\frac{1}{30}$

ε) » » $\frac{5}{2}$ » » $\frac{5}{4}$ στ) » » $\frac{7}{3}$ » » $\frac{7}{12}$

ζ) » » $\frac{4}{5}$ » » $\frac{4}{25}$ η) » » $\frac{7}{6}$ » » $\frac{7}{42}$

4. Νὰ συγκρίνης τὰ κλάσματα (τὴν ἀξία τους):

α) $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{10}$ β) $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{6}$ γ) $\frac{1}{9}$ καὶ $\frac{1}{3}$ δ) $\frac{1}{20}$ καὶ $\frac{1}{4}$

ε) $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{3}{14}$ στ) $\frac{9}{8}$ καὶ $\frac{9}{40}$ ζ) $\frac{13}{50}$ καὶ $\frac{13}{5}$ η) $\frac{11}{130}$ καὶ $\frac{11}{13}$.

5. Τί παθαίνει γενικὰ ἡ ἀξία κλάσματος ὅταν αὐξήσωμε τὸν παρανομαστή του; καὶ τί παθαίνει ὅταν τὸν ἐλαττώσωμε;

6. Νὰ βάλῃς στὴ σειρὰ μὲ τὴν ἀξία τους τὰ κλάσματα:

$\frac{7}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{5}$, ἀρχίζοντας:

α) ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο καὶ β) ἀπὸ τὸ μικρότερο.

Κλάσματα ὁμώνυμα καὶ κλάσματα ἑτερώνυμα.

Τὰ κλάσματα $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{9}{10}$, ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ λέγονται *ὁμώνυμα* (κλάσματα). ***Ποιὰ λοιπὸν κλάσματα λέγονται ὁμώνυμα;*** Γράψε κλάσματα ὁμώνυμα.

Τὰ κλάσματα $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{9}$ ἔχουν διαφορετικοὺς παρονομαστάς. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ λέγονται *ἑτερώνυμα*. ***Ποιὰ λοιπὸν κλάσματα λέγονται ἑτερώνυμα;*** Γράψε κλάσματα ἑτερώνυμα.

Σύγκρισις κλασμάτων.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα.

1. ***Ἀπὸ δυὸ μεταλλικὲς ταινίες ἡ μία ἔχει μῆκος $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ ἡ ἄλλη ἔχει μῆκος $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου. Ποιὰ εἶναι μεγαλύτερη;***

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὰ προηγούμενα εἶναι φανερό, ὅτι μεγαλύτερη εἶναι ἡ δεύτερη ταινία.

2. ***Ἀπὸ δύο μεταλλικὲς ταινίες ἡ μία ἔχει μῆκος $\frac{5}{8}$ τοῦ μέτρου καὶ ἡ ἄλλη ἔχει μῆκος $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου. Ποιὰ εἶναι μεγαλύτερη;***

Ἐδῶ δὲν ἠμποροῦμε νὰ ἐννοήσωμε ἀμέσως ποιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ ταινίες εἶναι μεγαλύτερη. Γιατὶ τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$ καὶ

$\frac{2}{3}$ δὲ γίνονται ἀπὸ τὴν ἴδια κλασματικὴ μονάδα, (ὅπως στὸ προηγούμενο πρόβλημα) καὶ ἔτσι νὰ ἰδοῦμε ποιὸ ἔχει τὶς περισσότερες κλασματικὲς μονάδες. Γιὰ νὰ συγκριθοῦν λοιπὸν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα πρέπει νὰ γίνουν πρῶτα ὁμώνυμα.

Ἀλλὰ μὲ ποιὸν τρόπο ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται σὲ ὁμώνυμα;

Γιὰ νὰ τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{2}{3}$ σὲ ὁμώνυμα:

1. Πολλαπλασιάζομε τοὺς παρονομαστὰς 8 καὶ 3. Τὸ γινόμενό τους $8 \times 3 = 24$ θὰ εἶναι ὁ κοινὸς παρονομαστής.

2. Θὰ διαιρέσωμε τὸν κοινὸ παρονομαστὴ 24 διὰ τοῦ καθενὸς ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς 8 καὶ 3.

3. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο πηλίκον $24 : 8 = 3$ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο πηλίκο $24 : 3 = 8$.

Ἔτσι θὰ βροῦμε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$ καὶ $\frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$. Εἶναι δὲ τὸ $\frac{15}{24}$ ἰσοδύναμο ἢ ἴσο μὲ τὸ $\frac{5}{8}$ καὶ τὸ $\frac{16}{24}$ ἰσοδύναμο ἢ ἴσο μὲ τὸ $\frac{2}{3}$.

Ὅλη αὐτὴ τὴν ἐργασία τὴ γράφομε γιὰ εὐκολία ἔτσι:

$$\overset{3}{\frac{5}{8}} \qquad \overset{8}{\frac{2}{3}} \qquad \text{(κοινὸς παρονομαστὴς } 8 \times 3 = 24$$

$$24 : 8 = 3, \ 24 : 3 = 8)$$

$$\frac{15}{24} \qquad \frac{16}{24}$$

Ὥστε ἀπὸ τὶς δυὸ ταινίες μεγαλύτερη εἶναι ἡ δεύτερη.

3. ***Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα*** $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$.

Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα κοινὸς παρονομαστὴς θὰ εἶναι τὸ γινόμενο $8 \times 12 = 96$ καὶ ἐπειδὴ $96 : 8 = 12$ καὶ $96 : 12 = 8$, τὰ ὁμώνυμα κλάσματα ποὺ ζητοῦμε θὰ εἶναι τά:

$$\frac{\overset{12}{5}}{8} \qquad \frac{\overset{8}{7}}{12}$$

$$\frac{5\times12}{8\times12}, \quad \frac{7\times8}{12\times8}$$

$$\frac{60}{96} \qquad \frac{56}{96}$$

Ἐδῶ ὅμως ἠμποροῦμε νὰ ἔχωμε μικρότερο κοινὸ παρονομαστή. Γιατὶ βλέπομε, ὅτι οἱ παρονομασταὶ 8 καὶ 12 ἔχουν κοινὸ διαιρέτη τὸν 2 (καὶ τὸν 4). Βρίσκομε δὲ τὸν μικρότερο κοινὸ παρονομαστὴ μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο· λαμβάνομε τὸ μεγαλύτερο παρονομαστὴ 12 καὶ βλέπομε ἂν διαιρεῖται διὰ τοῦ μικροτέρου 8. Ἀλλὰ ἐπειδὴ δὲν διαιρεῖται, διπλασιάζομε τὸ 12· ἔτσι βρίσκομε 24· βλέπομε δὲ τώρα, ὅτι ὁ 24 διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ 8. Ἔτσι ὁ 24 θὰ εἶναι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς καὶ τὰ ὁμώνυμα κλάσματα θὰ εἶναι τά:

$$\frac{\overset{3}{5}}{8} \quad \frac{\overset{2}{7}}{12} \quad (\text{κοινὸς παρον. } 24,\ \ 24:8=3,\ \ 24:12=2)$$

$$\frac{15}{24} \quad \frac{14}{24}$$

Μὲ αὐτὸν λοιπὸν τὸν τρόπο βρίσκομε ἀριθμό, ποὺ νὰ διαιρεῖται διὰ καθενὸς παρονομαστή.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ τρέψωμε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα:** 1) **Ὁρίζομε τὸν κοινὸ παρονομαστὴ καὶ αὐτὸς θὰ εἶναι ἢ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν ἢ ἀριθμὸς μικρότερος, ὁ ὁποῖος ὅμως νὰ διαιρεῖται διὰ καθενὸς παρονομαστή.** 2) **Διαιροῦμε τὸν κοινὸ παρονομαστὴ διὰ καθενὸς παρονομαστὴ** καὶ 3) **Πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους καθενὸς κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο πηλίκο.**

Σημείωσις. *Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα* $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ *τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα ἔτσι:*

$$\frac{\overset{7}{3}}{5} \quad \frac{\overset{5}{4}}{7} \quad (\textit{κοινὸς παρονομ. } 5\times7=35,\ \ 35:5=7,\ \ 35:7=5)$$

$$\frac{3\times7}{5\times7} \qquad \frac{4\times5}{7\times5}$$

$$\frac{21}{35} \qquad \frac{20}{35}$$

Τώρα ὅμως νὰ προσέξετε μὲ τὶ πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\left(\text{τοῦ}\ \frac{3}{5}\right)$ *καὶ μὲ τί πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου* $\left(\text{τοῦ}\ \frac{4}{7}\right)$ *καὶ γίνονται τὰ κλάσματα αὐτὰ ὁμώνυμα. Ἔτσι θὰ βρῆτε ἄλλον τρόπο γιὰ νὰ τρέπετε δύο ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα. Ποιὸς λοιπὸν εἶναι ὁ τρόπος αὐτός ;*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ β) $\frac{3}{5}, \frac{1}{6}$ γ) $\frac{4}{7}, \frac{5}{8}$ δ) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ε) $\frac{2}{5}, \frac{7}{10}$

στ) $\frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ ζ) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$ η) $\frac{5}{8}, \frac{11}{24}$ θ) $\frac{2}{5}, \frac{7}{25}$

2. Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ β) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ γ) $\frac{1}{6}, \frac{4}{9}$ δ) $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}$ ε) $\frac{4}{9}, \frac{5}{12}$,

στ) $\frac{3}{4}, \frac{7}{10}$ ζ) $\frac{5}{9}, \frac{8}{15}$ η) $\frac{5}{12}, \frac{11}{18}$, θ) $\frac{5}{14}, \frac{8}{21}$

3. Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$ $(3 \times 5 \times 4 = 60,\ 60:3,\ 60:5,\ 60:4)$

$$\frac{2 \times 20}{3 \times 20}, \quad \frac{4 \times 12}{5 \times 12}, \quad \frac{3 \times 15}{4 \times 15}$$

β) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ γ) $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}$, δ) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

ε) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{7}$ στ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}$ ζ) $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}$

4. Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ β) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{12}$ γ) $\frac{3}{8}, \frac{1}{6}, \frac{7}{24}$

δ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ε) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ στ) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$

ζ) $\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, \frac{5}{14}$ η) $\frac{1}{3}, \frac{3}{16}, \frac{5}{8}$ ϑ) $\frac{1}{8}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}$

5. Ἡ 1 πήχη ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀξίζει $\frac{3}{4}$ τῆς λίρας καὶ ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα ἀξίζει $\frac{4}{5}$ τῆς λίρας. Ποιὸ ὕφασμα εἶναι ἀκριβώτερο;

6. Ἀπὸ 3 πλάκες σαπούνι ἡ μία ζυγίζει $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς, ἡ ἄλλη ζυγίζει $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἡ τρίτη $\frac{3}{10}$ τῆς ὀκᾶς. Ποιὰ ἀπὸ τὶς πλάκες αὐτὲς εἶναι ἡ βαρύτερη καὶ ποιὰ ἡ ἐλαφρότερη;

7. Ἕνας εἶχε τέσσαρα ἴδια τόπια ὑφάσματος, τὰ ὁποῖα ἐπούλησε μὲ τὸ μέτρο. Τοῦ ἔμειναν δὲ ἀπὸ τὰ τόπια αὐτὰ στὴ σειρὰ $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{12}$ τοῦ μέτρου. Ἀπὸ ποιὸ τόπι τοῦ ἔμεινε περισσότερο ὕφασμα;

8. Νὰ βάλῃς στὴ σειρὰ κατὰ τὴν ἀξία τους τὰ κλάσματα:

$$\frac{3}{8}, \frac{11}{16}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$$

ἀρχίζοντας α) ἀπὸ τὸ μικρότερο καὶ β) ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἀπὸ 12 στρέμματα ποὺ εἶχε ἕνα χωράφι ἐκαλλιεργήθηκαν τὰ 7. Πόσο μέρος ἀπὸ τὸ χωράφι αὐτὸ ἐκαλλιεργήθηκε;

2. Ἐμοιράσαμε 7 ὀκάδες ζάχαρη σὲ 8 ἀνθρώπους. Τί μερίδιο ἔλαβε ὁ καθένας ἀπὸ αὐτούς;

3. Ἡ διαίρεσις 7 : 8 τί πηλίκο ἔχει; καὶ τί (ἀκριβὲς) πηλίκο ἔχει ἡ διαίρεσις 21 : 5;

4. Νὰ γράψετε τὸ κλάσμα $\frac{13}{15}$ ὡς πηλίκο διαιρέσεως.

5. Νὰ κάμετε τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ πέντε φορὲς μεγαλύτερο καὶ ἔπειτα νὰ ἐξαγάγετε τὶς ἀκέραιες μονάδες του. Τί ἐξαγόμενο θὰ βρῆτε σὲ σχέσι μὲ τὸν ἀριθμητή του;

6. Πόσα ὄγδοα ἔχουν οἱ 4 πῆχες; Πόσα τέταρτα ἔχουν οἱ 5 ὀκάδες; Καὶ πόσα εἰκοστὰ ἔχουν οἱ 8 λίρες; Πῶς τρέπομε ἀκέραιο σὲ κλάσμα μὲ ὡρισμένο παρονομαστή;

7. α) Πόσα δεύτερα ἔχει ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$; Καὶ πόσα τρίτα ἔχει ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $1\frac{2}{3}$, $9\frac{1}{3}$, $15\frac{2}{3}$;

β) Πῶς τρέπομε μεικτὸ ἀριθμὸ σὲ κλάσμα;

8. Νὰ ἐξαγάγετε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ κλάσματα:

$$\frac{5}{5},\quad \frac{6}{5},\quad \frac{10}{5},\quad \frac{12}{5},\quad \frac{20}{5},\quad \frac{23}{5},$$

$$\frac{19}{17},\quad \frac{53}{19},\quad \frac{63}{31},\quad \frac{69}{16},\quad \frac{77}{18},\quad \frac{187}{9}.$$

9. α) Ἐζήτησε ἕνας νὰ ἀγοράση ἀπὸ ἕνα ὕφασμα $\frac{3}{4}$ τῆς πήχης καὶ τοῦ ἔδωσαν $\frac{6}{8}$ τῆς πήχης. Τοῦ ἔδωκαν ὅ,τι ἐζήτησε;

β) Μιὰ ποσότητα ἀπὸ καπνὸ ζυγίζει $\frac{8}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου καὶ μιὰ ἄλλη ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιογράμμου. Εἶναι καμμιὰ ἀπ' αὐτὲς βαρύτερη ἀπὸ τὴν ἄλλη;

10. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς ποὺ πρέπει στὶς ἰσότητες:

α) $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{12}$ β) $\frac{1}{5} = \frac{3}{\quad} = \frac{5}{\quad} = \frac{7}{\quad}$

γ) $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{18} = \frac{\quad}{36}$ δ) $\frac{7}{8} = \frac{21}{\quad} = \frac{35}{\quad} = \frac{49}{\quad}$

11. α) Πόσα εἰκοστὰ τέταρτα ἔχει καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4} \quad \text{καὶ} \quad \frac{7}{12};$$

β) Πόσα τριακοστὰ ἔχει καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{3}{10} \quad \text{καὶ} \quad \frac{11}{15};$$

12. Νὰ ἁπλοποιήσετε τὰ κλάσματα:

$$\frac{3}{6},\quad \frac{9}{12},\quad \frac{14}{21},\quad \frac{21}{36},\quad \frac{36}{45}.$$

13. Νὰ κάνετε ἀνάγωγα τὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{12},\ \frac{8}{32},\ \frac{9}{27},\ \frac{18}{30},\ \frac{12}{48}$$

14. Ἀπὸ ποιὸ ἀνάγωγο κλάσμα γίνονται τὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{8},\ \frac{15}{30},\ \frac{18}{36},\ \frac{21}{42},\ \frac{27}{54}$$

15. Νὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

α) $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{11}$, β) $\frac{6}{13}$, $\frac{1}{8}$, γ) $\frac{11}{15}$, $\frac{10}{30}$ καὶ δ) $\frac{17}{50}$, $\frac{13}{25}$

16. Νὰ βρῆτε πόσες φορὲς εἶναι μεγαλύτερο ἢ μικρότερο α) τὸ κλάσμα $\frac{2}{9}$ ἀπὸ τὸ $\frac{8}{9}$, β) τὸ $\frac{9}{20}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{20}$, γ) τὸ $\frac{6}{35}$ ἀπὸ τὸ $\frac{24}{35}$, δ) τὸ $\frac{3}{8}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$, ε) τὸ $\frac{5}{7}$ ἀπὸ τὸ $\frac{5}{21}$ καὶ στ) τὸ $\frac{3}{11}$ ἀπὸ τὸ $\frac{3}{55}$

17. Ἀπὸ δύο ὑφάσματα τὸ ἕνα ἔχει πλάτος $\frac{11}{15}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ἄλλο $\frac{17}{20}$ τοῦ μέτρου. Ποιὸ ἀπὸ τὰ ὑφάσματα αὐτὰ ἔχει μεγαλύτερο πλάτος;

18. Στὸ ἅλμα εἰς ὕψος χωρὶς φόρα ἕνας μαθητὴς ἔφθασε σὲ ὕψος $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἄλλος σὲ $\frac{11}{15}$ τοῦ μέτρου καὶ τρίτος μαθητὴς ἔφθασε σὲ $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου. Ποιὸς ἀπὸ τοὺς τρεῖς αὐτοὺς μαθητὰς ἔφθασε σὲ μεγαλύτερο ὕψος;

19. Στὸ 24ωρο, ἀπὸ τρία ὡρολόγια, τὸ ἕνα μένει ὀπίσω $\frac{5}{6}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, τὸ ἄλλο $\frac{4}{5}$ τοῦ π. λ. καὶ τὸ τρίτο $\frac{13}{15}$ τοῦ π. λ. Ποιὸ ἀπὸ αὐτὰ τὰ τρία ὡρολόγια δείχνει τὴν ὥρα μὲ μεγαλύτερη ἀκρίβεια;

Πράξεις μὲ κλασματικοὺς ἀριθμούς.

Α΄. Πρόσθεσις.

Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα: ***Μιὰ ἔπλεξε δαντέλλα τὴν πρώτη ἡμέρα*** $\frac{3}{8}$ ***τῆς πήχης, τὴ δεύτερη*** $\frac{7}{8}$ ***τῆς πήχης καὶ τὴν τρίτη ἔπλεξε*** $\frac{5}{8}$ ***τῆς πήχης. Πόση δαντέλλα ἔπλεξε τὶς τρεῖς αὐτὲς ἡμέρες;***

Γιὰ νὰ βροῦμε πόση δαντέλλα ἔπλεξε τὶς ἡμέρες αὐτές, πρέπει νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\frac{5}{8}$.

Ἀλλὰ 3 ὄγδοα + 7 ὄγδοα + 5 ὄγδοα = 15 ὄγδοα.

Ὥστε ἔπλεξε $\frac{15}{8}$ πῆχες, ἤτοι $1\frac{7}{8}$ πῆχες.

Ὅμοια, ἐπειδὴ 2 τέταρτα + 3 τέταρτα + 1 τέταρτο = = 6 τέταρτα, εἶναι $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+3+1}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}$

Πῶς λοιπὸν προσθέτομε ὁμώνυμα κλάσματα; Τί ἀριθμητὴ θὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμά τους; Καὶ τί παρονομαστή;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε (ἀπὸ μνήμης) τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ β) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ γ) $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$ δ) $\frac{5}{11}+\frac{6}{11}$

ε) $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{7}{15}$ στ) $\frac{7}{24}+\frac{5}{24}+\frac{11}{24}$

ζ) $\frac{2}{35}+\frac{19}{35}+\frac{11}{35}$ η) $\frac{5}{51}+\frac{15}{51}+\frac{25}{41}$

2. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{29}{30}$ μῆν. + $\frac{25}{30}$ μῆν. β) $\frac{51}{60}$ ὥρ. + $\frac{39}{60}$ ὥρ. γ) $\frac{97}{100}$ μέτ. + $\frac{73}{100}$ μέτ.

3. Τρεῖς φιάλες ἔχουν λάδι, ἡ μία $\frac{8}{10}$ τῆς ὀκᾶς, ἡ ἄλλη $\frac{6}{10}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἡ τρίτη $\frac{9}{10}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο λάδι ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς φιάλες μαζί;

4. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{7}{13}+\frac{6}{13}+\frac{9}{13}$, β) $\frac{7}{16}+\frac{5}{16}+\frac{11}{16}$

γ) $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{8}{9}$ δ) $\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{8}{11}+\frac{9}{11}$

ε) $\frac{29}{75}+\frac{47}{75}+\frac{73}{75}+\frac{1}{75}$ στ) $\frac{21}{50}+\frac{37}{50}+\frac{29}{50}+\frac{39}{50}$

2η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $7\frac{3}{5}+5\frac{1}{5}(=7+5)+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)=12+\frac{4}{5}=12\frac{4}{5}$

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμε νὰ προσθέσωμε μεικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα προσθέτομε τὰ ἀθροίσματα.**

β) $7\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$ γ) $3\frac{5}{11}+\frac{4}{11}$ δ) $\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}$

ε) $10\frac{3}{4}+9\frac{1}{4}$ στ) $9\frac{7}{9}+15\frac{2}{9}$ ζ) $15\frac{7}{16}+13\frac{11}{16}$

η) $3\frac{2}{5}+1\frac{4}{5}+7\frac{4}{5}$ ϑ) $4\frac{3}{8}+5\frac{1}{8}+9\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$

3η ὁμάδα.

1. Γιὰ μιὰ πλύση ἐξωδεύθηκαν 5 πλάκες σαπούνι. Ἡ μία ἐζύγιζε $\frac{135}{400}$ τῆς ὀκᾶς, ἡ ἄλλη $\frac{150}{400}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἡ τρίτη $\frac{115}{400}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο εἶναι ὅλο τὸ σαπούνι ποὺ ἐξωδεύθηκε;

2. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα ἐπούλησε ἕνας $37\frac{5}{8}$ πῆχες καὶ τοῦ ἔμειναν $15\frac{3}{8}$ πῆχες. Πόσες πῆχες εἶχε τὸ τόπι;

3. Ἀπὸ τρεῖς σάκκους μὲ κάρβουνο ὁ ἕνας ζυγίζει $1\frac{5}{44}$ στατῆρες, ὁ ἄλλος $1\frac{15}{44}$ στατ. καὶ ὁ τρίτος $\frac{39}{44}$ στατ. Πόσο ζυγίζουν οἱ τρεῖς αὐτοὶ σάκκοι;

4. Ἀπὸ 4 σάκκους μὲ ζάχαρη ζυγίζουν ὁ α) $20\frac{3}{8}$ ὀκ., ὁ β) $23\frac{1}{8}$ ὀκ., ὁ γ) $25\frac{7}{8}$ ὀκ. καὶ ὁ δ) $24\frac{5}{8}$ ὀκ. Πόσο ζυγίζουν οἱ 4 αὐτοὶ σάκκοι;

5. Νὰ βρῆτε τὸ ἄθροισμα:

$$3\frac{5}{12} + 2\frac{1}{12} + 7\frac{11}{12} + 1\frac{1}{12} + 4\frac{7}{12}.$$

Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα: ***Δυὸ πακέτα νῆμα ζυγίζουν τὸ ἕνα $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ τὸ ἄλλο $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο ζυγίζουν τὰ 2 πακέτα;***

Γιὰ νὰ βροῦμε ὅ,τι ζητοῦμε, πρέπει στὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς νὰ προσθέσωμε τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἠμποροῦμε νὰ προσθέσωμε ὄγδοα μὲ τέταρτα, παρὰ ὄγδοα μὲ ὄγδοα (ἢ τέταρτα μὲ τέταρτα), θὰ τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα αὐτὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα· δηλαδὴ στὰ κλάσματα $\frac{6}{8}$ καὶ $\frac{5}{8}$.

Ὥστε εἶναι: $\frac{3}{4}$ ὀκ. $+$ $\frac{5}{8}$ ὀκ. $=$ $\frac{6}{8}$ ὀκ. $+$ $\frac{5}{8}$ ὀκ. $=$ $\frac{11}{8}$ ὀκ.

Τὰ δύο λοιπὸν πακέτα ζυγίζουν $\frac{11}{8}$ ὀκ. $= 1\frac{3}{8}$ ὀκ.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ προσθέσωμε ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομε πρῶτα σὲ ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα προσθέτομε.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{1}{3}$ μετ. $+$ $\frac{1}{4}$ μετ. β) $\frac{2}{3}$ δολ. $+$ $\frac{3}{4}$ δολ. γ) $\frac{3}{4}$ λίρ. $+$ $\frac{4}{5}$ λίρ.

δ) $\frac{1}{6}+\frac{4}{5}$ ε) $\frac{7}{8}+\frac{3}{5}$ στ) $\frac{3}{4}+\frac{1}{9}$

ζ) $\frac{7}{9}+\frac{1}{2}$ η) $\frac{6}{7}+\frac{2}{3}$ θ) $\frac{5}{6}+\frac{5}{7}$

2. Τρεῖς φιάλες ἔχουν λάδι, ἡ μία $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, ἡ ἄλλη $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἡ τρίτη $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο λάδι ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς φιάλες μαζί;

3. Ἕνας κῆπος εἶναι χωρισμένος σὲ τρία μέρη. Τὸ ἕνα μέρος εἶναι $\frac{2}{3}$ τοῦ στρέμματος, τὸ ἄλλο $\frac{4}{5}$ τοῦ στρέμματος καὶ τὸ τρίτο $\frac{5}{6}$ τοῦ στρέμ. Πόσα στρέμματα εἶναι ὁ κῆπος αὐτός;

4. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ β) $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ γ) $\frac{1}{5}+\frac{7}{10}$

δ) $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}$ ε) $\frac{13}{30}+\frac{7}{15}$ στ) $\frac{9}{50}+\frac{11}{25}$

5. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ β) $\frac{5}{6}+\frac{2}{9}$ γ) $\frac{4}{15}+\frac{1}{6}$

δ) $\frac{7}{15}+\frac{3}{30}$ ε) $\frac{7}{12}+\frac{7}{8}$ στ) $\frac{4}{9}+\frac{5}{12}$

6. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ β) $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{3}{16}$

γ) $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{7}{20}$ δ) $\frac{7}{15}+\frac{2}{5}+\frac{11}{30}$

7. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{5}{9}$ β) $\frac{1}{7}+\frac{3}{4}+\frac{5}{14}$ γ) $\frac{1}{4}+\frac{4}{5}+\frac{3}{10}$

δ) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}$ ε) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ στ) $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{3}{4}$

8. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ β) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$

γ) $\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{7}$ δ) $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{9}$.

2α ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $2\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}$ $\left(2\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+\frac{15}{4}=\frac{10}{4}+\frac{15}{4}=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}\right.$

$$\text{ἢ} = (2+3)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=5+\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)=$$

$$\left.=5+\frac{5}{4}=5+1\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}\right).$$

β) $2\frac{5}{6}+3\frac{7}{12}$ γ) $8\frac{3}{5}+9\frac{11}{15}$ δ) $10\frac{7}{9}+\frac{11}{18}$

ε) $5\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}+7\frac{1}{8}$ στ) $5\frac{1}{2}+9\frac{2}{3}+11\frac{3}{4}$

ζ) $3\frac{1}{2}+5\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{5}{16}$ η) $4\frac{7}{15}+3\frac{1}{5}+\frac{11}{30}+\frac{5}{6}$

3η ὁμάδα.

1. Γιὰ νὰ λιπάνουν τρία χωράφια ἐχρειάσθηκαν: γιὰ τὸ πρῶτο χωράφι $\frac{5}{6}$ τοῦ τόννου λίπασμα, γιὰ τὸ δεύτερο $\frac{3}{8}$ τοῦ τόννου καὶ γιὰ τὸ τρίτο χωράφι ἐχρειάσθηκε λίπασμα $\frac{1}{12}$ τοῦ τόννου. Πόσο λίπασμα ἐχρειάσθηκε καὶ γιὰ τὰ τρία χωράφια μαζί.

2. Δύο δοχεῖα μὲ λάδι ζυγίζουν τὸ ἕνα $9\frac{3}{4}$ ὀκ. καὶ τὸ ἄλλο $11\frac{4}{5}$ ὀκάδες. Πόσο ζυγίζουν τὰ δύο αὐτὰ δοχεῖα;

3. Ἕνα μεῖγμα ἔγινε ἀπὸ δύο ποιότητες καπνοῦ, ποὺ ζυγίζουν $7\frac{9}{10}$ χιλιόγραμμα ἡ μία καὶ $9\frac{13}{50}$ χιλιόγραμμα ἡ ἄλλη. Πόσο ζυγίζει τὸ μεῖγμα;

4. Ἔμπορος ἀγόρασε ὕφασμα 1) $75\frac{5}{10}$ μέτρα 2) $132\frac{1}{2}$ μέτρα καὶ 3) $215\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσο ὕφασμα ἀγόρασε τὸ ὅλον;

5. Μία οἰκογένεια ἐπλήρωσε γιὰ ἠλεκτρικὸ τὸν 1ο μῆνα $50\frac{3}{4}$ χιλιόδραχμα, τὸ 2ο μῆνα $63\frac{2}{5}$ χιλιόδραχμα καὶ τὸν 3ο μῆνα ἐπλήρωσε $70\frac{7}{8}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἐπλήρωσε γιὰ τοὺς 3 αὐτοὺς μῆνες;

6. Μία οἰκογένεια ἐξώδεψε νερὸ τὸν 1ο μῆνα $7\frac{1}{2}$ κυβικὰ μέτρα, τὸ 2ο $9\frac{17}{20}$ κυβ. μέτρ., τὸν 3ο 8 κυβ. μέτρα καὶ τὸν 4ο μῆνα ἐξώδεψε $11\frac{7}{8}$ κυβ. μέτρα. Πόσο νερὸ ἐξώδεψε στοὺς 4 αὐτοὺς μῆνες;

Β′. Ἀφαίρεσις.

1η ὁμάδα (ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων).

1. Ἀπὸ 9 δέκατα τῆς ὀκᾶς λάδι, ἐξώδεψε μία τὰ 4 δέκατα. Πόσα δέκατα τῆς ὀκᾶς τῆς ἔμειναν;

2. Ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$ νὰ ἀφαιρέσης τὸ $\frac{4}{10}$.

3. Μία ἤθελε νὰ κεντήση 7 ὄγδοα τῆς πήχης ὕφασμα. Ὡς τώρα ὅμως ἐκέντησε τὰ 3 ὄγδοα τῆς πήχης. Πόσα ὄγδοα τῆς πήχης ἔχει νὰ κεντήση ἀκόμα;

4. Ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ νὰ ἀφαιρέσης τὸ $\frac{3}{8}$.

5. Πῶς ἀφαιροῦμε δυὸ κλάσματα ὁμώνυμα; Ἡ διαφορά τους, τί ἀριθμητὴ θὰ ἔχη; Καὶ τί παρονομαστή;

6. Νὰ κάνης (ἀπὸ μνήμης) τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις :

α) $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$ β) $\frac{11}{12} - \frac{8}{12}$ γ) $\frac{14}{15} - \frac{4}{15}$

δ) $\frac{21}{23} - \frac{14}{23}$ ε) $\frac{20}{31} - \frac{9}{31}$ στ) $\frac{23}{30} - \frac{17}{30}$

7. Νὰ κάνης τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις καὶ ὕστερα τὴ δοκιμή τους.

α) $6\frac{8}{11} - \frac{3}{11} \left(= 6\frac{5}{11}\right)$ β) $4\frac{13}{15} - \frac{8}{15}$

γ) $8\frac{18}{25} - \frac{9}{25}$ δ) $14\frac{29}{32} - \frac{13}{32}$ ε) $25\frac{60}{73} - \frac{60}{73}$

στ) $100\frac{49}{50} - \frac{29}{50}$ ζ) $132\frac{71}{100} - \frac{25}{100}$ η) $79\frac{15}{53} - \frac{15}{53}$

8. Νὰ κάνης τὶς ἀφαιρέσεις :

α) $6\frac{5}{7} - 2\frac{4}{7} = 4\frac{1}{7}\left(6 - 2 = 4,\ \frac{5}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7}\right)$

β) $13\frac{13}{15} - 7\frac{6}{15}$ γ) $18\frac{19}{25} - 9\frac{13}{25}$ δ) $11\frac{15}{16} - 11\frac{14}{16}$

ε) $2\frac{19}{21} - 2\frac{17}{21}$ στ) $10\frac{13}{30} - 7\frac{13}{30}$ ζ) $48\frac{1}{3} - 29\frac{1}{3}$

9. Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσωμε στὸν $13\frac{18}{25}$ γιὰ νὰ ἔχωμε ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸ $20\frac{23}{25}$;

10. Ἕνα βαρέλι μὲ κρασὶ ζυγίζει $35\frac{13}{16}$ ὀκ. καὶ τὸ βαρέλι κενὸ ζυγίζει $9\frac{5}{16}$ ὀκάδες. Πόσο κρασὶ περιέχει τὸ βαρέλι αὐτό;

2η ὁμάδα (ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων).

1. Μποροῦμε νὰ ἀφαιρέσωμε πέμπτα ἀπὸ τέταρτα ; Τέταρτα ἀπὸ πέμπτα ; Τρίτα ἀπὸ ἔνατα ;

2. Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ τί πρέπει νὰ κάνωμε πρῶτα τὰ ἑτερώνυμα αὐτὰ κλάσματα;

3. Πῶς λοιπὸν ἀφαιροῦμε δυὸ κλάσματα ἑτερώνυμα;

4. Νὰ κάνετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις καὶ ὕστερα τὴ δοκιμή τους:

α) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ β) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$ γ) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$

δ) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3}$ ε) $\frac{9}{10} - \frac{3}{5}$ στ) $\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$

ζ) $2\frac{19}{20} - \frac{1}{5}$ η) $8\frac{5}{6} - \frac{3}{18}$ ϑ) $17\frac{2}{3} - \frac{5}{24}$

5. Νὰ κάνετε τὶς ἀφαιρέσεις.

α) $7\frac{5}{9} - 2$ β) $28\frac{5}{23} - 9$ γ) $97\frac{23}{31} - 68$

δ) $132\frac{27}{50} - 73$ ε) $35\frac{1}{2} - 35$ στ) $85\frac{19}{30} - 85$.

6. Νὰ βρῆτε τὶς διαφορές:

α) $1 - \frac{5}{8}\left(\frac{8}{8} - \frac{5}{8}\right)$ β) $1 - \frac{3}{4}$. γ) $1 - \frac{14}{15}$

δ) $5 - \frac{11}{12}$ ε) $25 - \frac{9}{16}$ στ) $23 - 7\frac{3}{10}$

7. Νὰ βρῆτε τὶς διαφορές:

α) $5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$

$$\left[5\frac{4}{6} - 3\frac{1}{6},\ (5-3) + \left(\frac{4}{6} - \frac{1}{6}\right) = 2 + \frac{3}{6} = 2\frac{3}{6}\right]$$

β) $15\frac{7}{9} - 8\frac{2}{3}$ γ) $23\frac{18}{25} - 15\frac{2}{5}$ δ) $20\frac{3}{7} - 9\frac{3}{21}$

ε) $8\frac{2}{6} - 5\frac{1}{4}$ στ) $14\frac{7}{9} - 3\frac{1}{6}$ ζ) $39\frac{3}{10} - 18\frac{1}{4}$

8. Νὰ βρῆτε τὶς διαφορές:

α) $7\frac{2}{3} - 4\frac{3}{4}$ $\left(7\frac{8}{12} - 4\frac{9}{12} = 6\frac{20}{12} - 4\frac{9}{12} = 2\frac{11}{12}\right)$

β) $4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{5}$ γ) $11\frac{1}{6} - 8\frac{4}{9}$ δ) $10\frac{4}{5} - 8\frac{6}{7}$

9. Τί πρέπει νὰ προσθέσωμε:

α) Στὸ $\frac{3}{4}$ γιὰ νὰ βροῦμε $\frac{11}{12}$, β) στὸ $\frac{2}{3}$ γιὰ νὰ βροῦμε $\frac{3}{4}$, γ) στὸ $\frac{7}{12}$ γιὰ νὰ βροῦμε $\frac{5}{8}$, δ) στὸ μεικτὸ $2\frac{3}{4}$ γιὰ νὰ βροῦμε 5 καὶ ε) στὸ μεικτὸ $7\frac{3}{7}$ γιὰ νὰ βροῦμε $19\frac{2}{3}$.

3η ὁμάδα.

1. Δυὸ δρομεῖς ἔτρεξαν τὴν ἴδια ἀπόστασι. Ὁ ἕνας σὲ $\frac{43}{60}$ τῆς ὥρας καὶ ὁ δεύτερος σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας. Ποιὸς ἔφθασε στὸ τέρμα ἐνωρίτερα καὶ σὲ πόσο χρόνο;

2. Αὐτοκίνητο καὶ σιδηρόδρομος ξεκίνησαν ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ γιὰ τὴν Πάτρα τὴν ἴδια στιγμή. Τὸ αὐτοκίνητο ἔφθασε στὴν Πάτρα ἔπειτα ἀπὸ $7\frac{17}{30}$ ὧρες καὶ ὁ σιδηρόδρομος ἔπειτα ἀπὸ 8 ὧρες. Ποιὸς ἔφθασε ἀργότερα στὴν Πάτρα καὶ πόσο;

3. Ἀεροπλάνο ξεκίνησε ἀπὸ τὸ Χασάνι στὶς $7\frac{1}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασε στὴ Θεσσαλονίκη στὶς $9\frac{1}{2}$ π. μ. τῆς ἴδιας ἡμέρας. Πόσο διήρκεσε τὸ ταξίδι αὐτό;

4. Ἀτμόπλοιο ξεκίνησε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὶς $5\frac{45}{60}$ μ. μ. καὶ ἔφθασε στὴ Ρόδο στὶς $8\frac{1}{2}$ μ. μ. τῆς ἄλλης ἡμέρας. Πόσο διήρκεσε τὸ ταξίδι αὐτό;

5. Νὰ βρῆτε τὶς διαφορές:

α) $50 - 9\frac{10}{13}$, β) $15 - 14\frac{5}{16}$, γ) $28 - 27\frac{17}{36}$

δ) $9\frac{2}{3} - 5\frac{3}{7}$, ε) $19\frac{3}{5} - 18\frac{3}{8}$, στ) $20\frac{7}{11} - 3\frac{1}{3}$

ζ) $4\frac{1}{3} - 3\frac{7}{11}$, η) $21\frac{3}{4} - 8\frac{3}{10}$, ϑ) $18\frac{2}{15} - 5\frac{4}{9}$.

6. Μιὰ ἐργάτρια σὲ μιὰ ἑβδομάδα ὕφανε $48\frac{5}{8}$ πῆχες ὕφασμα. Τὴ δεύτερη ἑβδομάδα ὕφανε $4\frac{3}{4}$ πῆχες ὀλιγώτερο. Πόσο ὕφασμα ὕφανε τὴ δεύτερη ἑβδομάδα;

7. Ἕνα δοχεῖο ἄδειο ζυγίζει $1\frac{1}{4}$ ὀκ. καὶ γεμᾶτο μὲ λάδι ζυγίζει $13\frac{1}{8}$ ὀκ. Πόσο ζυγίζει τὸ λάδι;

8. Ἀπὸ ἕνα κτῆμα μὲ $23\frac{27}{100}$ στρέμματα ἐκαλλιεργήθηκαν τὰ $19\frac{2}{5}$. Πόσα στρέμματα ἔμειναν ἀκαλλιέργητα;

9. Ἀγόρασε ἕνας $3\frac{175}{1000}$ τόννους ἀνθρακίτη καὶ ἐξώδεψε τοὺς $2\frac{3}{4}$ τόννους. Πόσος ἀνθρακίτης τοῦ ἔμεινε;

10. Μιὰ ράβδος ἀπὸ μέταλλο, σὲ θερμοκρασία 0°, ἔχει μῆκος $1\frac{1}{10}$ μέτρ. καὶ σὲ θερμοκρασία 100° ἔχει μῆκος $1\frac{103}{1000}$ τοῦ μέτρου. Πόση εἶναι ἡ διαστολή της;

11. Ἂν ἕνας ἀπὸ ὅσες λίρες ἔχει εἶχε ἀκόμα ἄλλες $7\frac{7}{8}$ λίρες, θὰ ἐπλήρωνε ἕνα χρέος του ἀπὸ $25\frac{17}{20}$ λίρες. Πόσες λίρες ἔχει;

4η ὁμάδα.

1. α) Ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{13}{15}$ νὰ ἀφαιρέσης τὸ $\frac{4}{15}$ καὶ ἀπὸ τὴ διαφορὰ ποὺ θὰ εὕρης, νὰ ἀφαιρέσης τὸ $\frac{7}{15}$. Ποιὰ θὰ εἶναι ἡ τελικὴ διαφορά;

β) Νὰ προσθέσης τὰ κλάσματα $\frac{4}{15}$ καὶ $\frac{7}{15}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τους νὰ τὸ ἀφαιρέσης ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{13}{15}$. Τί διαφορὰ θὰ εὕρης; Καὶ τί θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτὴ μὲ τὴν προηγούμενη τελικὴ διαφορά;

2. Νὰ κάνῃς τὶς πράξεις:

α) $\frac{17}{19} - \frac{8}{19} - \frac{3}{19}$ β) $\frac{19}{20} - \frac{7}{20} - \frac{3}{20}$

γ) $1 - \frac{13}{30} - \frac{7}{30}$. δ) $2\frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

ε) $5\frac{7}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ στ) $9\frac{15}{16} - 2\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$.

3. Ἕνας ἔχει κῆπο ἀπὸ 1 στρέμμα. Στὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ ἐφύτεψε λαχανικά, στὸ $\frac{1}{4}$ ἄνθη καὶ στὸ ὑπόλοιπο καρποφόρα δένδρα. Σὲ πόσο μέρος τοῦ κήπου ἐφύτεψε τὰ δένδρα;

4. Μιὰ οἰκογένεια ἀπὸ 7 ὀκ. βούτυρο ἐξώδεψε τὸν 1ο μῆνα $2\frac{3}{4}$ ὀκ., τὸν 2ο $2\frac{5}{8}$ ὀκ. καὶ τὸν 3ο μῆνα ἐξώδεψε τὸ ὑπόλοιπο. Πόσο βούτυρο ἐξώδεψε τὸν 3ο μῆνα;

5. Νὰ κάνῃς τὶς πράξεις:

α) $\frac{5}{13} + \frac{7}{13} - \frac{6}{13}$ β) $\frac{4}{15} + \frac{8}{15} - \frac{11}{15}$

γ) $\frac{5}{12} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ δ) $\frac{5}{8} + \frac{5}{6} - \frac{11}{12}$

ε) $4\frac{7}{8} + 3\frac{3}{4} - 5\frac{1}{6} = 2 + \frac{35}{24} = 3\frac{11}{24}$

$$\left(4 + 3 - 5 = 2,\quad \frac{7}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{21 + 18 - 4}{24}\right)$$

στ) $5 + 3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3}$ ζ) $4\frac{3}{4} + 7\frac{9}{16} - 2\frac{7}{8}$

6. Ἀτμόπλοιο ξεκίνησε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὶς $9\frac{3}{4}$ π. μ. καὶ ἔφθασε στὴν Πάτρα στὶς $6\frac{7}{12}$ μ. μ. τῆς ἴδιας ἡμέρας. Πόσες ὧρες διήρκεσε τὸ ταξίδι αὐτό;

7. Ἕνα δοχεῖο γεμᾶτο λάδι ζυγίζει $13\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Ἡ τάρα εἶναι $\frac{7}{8}$ ὀκ. Ἀπὸ τὸ λάδι αὐτὸ ἐξωδεύθηκαν $7\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσο λάδι ἔμεινε;

8. Ἀπὸ $193\frac{4}{5}$ ὀκάδες ζάχαρη ἐπούλησε ἕνας $19\frac{3}{4}$ ὀκάδες, $27\frac{7}{10}$ ὀκ. καὶ $38\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες ζάχαρη τοῦ ἔμειναν;

9. Δυὸ βαρέλια γεμᾶτα κρασὶ ζυγίζουν τὸ ἕνα 150 ὀκ. καὶ τὸ ἄλλο 127 ὀκάδες. Ἡ τάρα εἶναι τοῦ 1ου $7\frac{7}{8}$ ὀκάδες καὶ τοῦ 2ου $6\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Πόσο κρασὶ ἔχουν τὰ δύο βαρέλια μαζί;

10. Ἀπὸ τρία βαρέλια μὲ λάδι τὸ ἕνα ἔχει 60 ὀκάδες, τὸ ἄλλο ἔχει 50 ὀκάδες καὶ τὸ τρίτο ἔχει $28\frac{1}{2}$. Ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ τὸ δεύτερο βαρέλι ἀφαιρέσαμε ἀντίστοιχα $12\frac{3}{4}$ ὀκ. καὶ $8\frac{5}{8}$ ὀκάδες, τὶς ὁποῖες προσθέσαμε στὸ τρίτο βαρέλι. Νὰ βρῆτε πόσες ὀκάδες λάδι ἔχει τὸ κάθε βαρέλι.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.

Πρόβλημα: ***Μιὰ πλάκα σαπούνι ζυγίζει $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσο ζυγίζουν 4 ἴσες πλάκες σαπούνι;***

Ἀφοῦ ἡ 1 πλάκα ζυγίζει $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς, οἱ δύο πλάκες ζυγίζουν 2 φορὲς περισσότερο, ἤτοι $\frac{5}{8}$ ὀκ. $\times$ 2 καὶ οἱ 4 πλάκες ζυγίζουν 4 φορὲς περισσότερο, ἤτοι $\frac{5}{8}$ ὀκ. $\times$ 4. Ὥστε γιὰ νὰ βροῦμε ὅ,τι ζητοῦμε, πρέπει τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ νὰ τὸ κάνωμε 4 φορὲς μεγαλύτερο ἢ πολλαπλασιάζοντας τὸν ἀριθμητὴ 5 ἐπὶ 4 (ἴδ. σελ. 31,1) ἢ διαιρῶντας τὸν παρονομαστὴ 8 διὰ 4 (ἴδ. σελ. 33,2).

Έτσι εἶναι $\frac{5}{8}$ ὀκ. $\times 4 = \frac{20}{8}$ ὀκ. $= \frac{5}{2}$ ὀκ. $= 2\frac{1}{2}$ ὀκ.

ἢ $\frac{5}{8}$ ὀκ. $\times 4 = \frac{5}{8:4}$ ὀκ. $= \frac{5}{2}$ ὀκ. $= 2\frac{1}{2}$ ὀκ.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο ἢ 1) πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο ἢ 2) διαιροῦμε τὸν παρονομαστὴ διὰ τοῦ ἀκεραίου (ὅταν διαιρεῖται).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε (ἀπὸ μνήμης) τὰ γινόμενα:

α) $\frac{2}{9} \times 4$, $\frac{3}{11} \times 3$, $\frac{1}{12} \times 7$, $\frac{5}{13} \times 2$

β) $\frac{3}{16} \times 2$, $\frac{3}{20} \times 5$, $\frac{5}{24} \times 4$, $\frac{1}{30} \times 6$

2. Νὰ βρῆτε τὶς ἀκέραιες μονάδες στὰ γινόμενα:

$\frac{3}{4} \times 4$, $\frac{5}{9} \times 9$, $\frac{6}{7} \times 7$.

Ὅταν λοιπὸν πολλαπλασιάζωμε κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστή του, μὲ τί εἶναι ἴσο τὸ γινόμενο ποὺ βρίσκομε;

3. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα (χωρὶς πράξεις):

$\frac{13}{36} \times 36$, $\frac{29}{50} \times 50$, $\frac{53}{60} \times 60$, $\frac{61}{72} \times 72$.

4. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $\frac{3}{4} \times 7$, β) $\frac{3}{8} \times 9$, γ) $\frac{4}{9} \times 8$,

δ) $\frac{5}{8} \times 13$, ε) $\frac{3}{5} \times 21$, στ) $\frac{5}{7} \times 20$,

ζ) $\frac{3}{11} \times 10$, η) $\frac{7}{10} \times 11$, ϑ) $\frac{2}{13} \times 60$.

5. Μιὰ κουζίνα σὲ 1 ἡμέρα καίει $\frac{3}{4}$ κυβικ. μέτρ. φωταέριο. Πόσο φωταέριο καίει σὲ 1 ἑβδομάδα;

6. Ἕνα ἠλεκτρικὸ καμινέτο καίει σὲ 1 ὥρα $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοβάττ. Πόσα κιλοβὰττ καίει σὲ 5 ὧρες; Σὲ 12 ὧρες;

7. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $\frac{3}{4} \times 12 = 3 \times 3 = 9$, β) $\frac{5}{9} \times 18$,

γ) $\frac{7}{10} \times 40$, δ) $\frac{7}{12} \times 24$, ε) $\frac{2}{3} \times 36$.

2η ὁμάδα.

1. Μιὰ πήχη σειρήτι ἀξίζει $\frac{3}{5}$ τοῦ χιλιοδράχμου. Πόσο ἀξίζουν 20 πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο σειρήτι;

2. Γνωρίζομε, ὅτι 1 πήχη $= \frac{64}{100}$ τοῦ μέτρου. Πόσα μέτρα κάνουν οἱ 10 πῆχες; οἱ 100 πῆχες;

3. Ἕνα τετράγωνο ἔχει πλευρὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου. Τί περίμετρο ἔχει τὸ τετράγωνο αὐτό;

4. Ἔμπορος ἔφερε ἀπὸ τὸ Λονδῖνο 200 γυάρδες ὕφασμα μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς λίρας τὴ γυάρδα. Πόσο τοῦ στοίχισε τὸ ὕφασμα αὐτό;

3η ὁμάδα (πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιο).

1. Γιὰ 1 σενδόνι ἐχρειάσθηκε ὕφασμα $3\frac{2}{5}$ μέτρα. Πόσο ὕφασμα χρειάζεται γιὰ 4 ἴδια σενδόνια;

Χρειάζεται $3\frac{2}{5}$ μ. $\times 4 = \frac{17}{5}$ μ. $\times 4 = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$ μ.

ἢ $3\frac{2}{5}$ μ. $\times 4 = 3$ μ. $\times 4 + \frac{2}{5}$ μ. $\times 4 =$

$= 12$ μ. $+ \frac{8}{5}$ μ. $= 12$ μ. $+ 1\frac{3}{5}$ μ. $= 13\frac{3}{5}$ μ.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μεικτὸ ἐπὶ ἀκέραιο, 1) τρέπομε τὸ μεικτὸ σὲ κλάσμα καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἀκέραιο ἢ 2) πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του ἐπὶ τὸν ἀκέραιο καὶ ἔπειτα προσθέτομε τὰ δύο γινόμενα.**

2. Ἐργάτρια ὑφαίνει $5\frac{3}{8}$ πῆχες σὲ 1 ἡμέρα. Πόσο ὑφαίνει σὲ 1 ἑβδομάδα;

3. Μιὰ φιάλη μὲ γάλα ζυγίζει $1\frac{3}{5}$ ὀκάδες. Πόσο ζυγίζουν 15 ἴδιες φιάλες μὲ γάλα;

4. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $1\frac{3}{4} \times 4$, β) $2\frac{1}{5} \times 5$, γ) $1\frac{3}{8} \times 8$, δ) $4\frac{4}{9} \times 9$

ε) $2\frac{2}{5} \times 10$, στ) $2\frac{4}{7} \times 14$, ζ) $5\frac{2}{9} \times 3$, η) $1\frac{1}{10} \times 5$

ϑ) $4\frac{2}{3} \times 5$, ι) $6\frac{1}{2} \times 9$, ια) $10\frac{1}{4} \times 3$, ιβ) $1\frac{1}{8} \times 11$.

5. Ὡρολόγιο μένει ὀπίσω $2\frac{3}{4}$ δευτερόλεπτα σὲ 1 ὥρα. Πόσο μένει ὀπίσω στὸ 24ωρο;

6. Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ 1 ὥρα τρέχει $33\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει σὲ 3 ὧρες;

7. Ἀγόρασε ἕνας 5 μανδήλια μὲ $7\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα τὸ ἕνα καὶ 3 ζεύγη κάλτσες μὲ $10\frac{3}{4}$ χιλιόδραχμα τὸ ἕνα. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσε;

8. Σὲ 36 ἄπορες οἰκογένειες ἐμοιράσθηκε σαπούνι ἀπὸ $1\frac{1}{2}$ ὀκ. καὶ ἀλεύρι ἀπὸ $2\frac{3}{4}$ ὀκ. σὲ κάθε οἰκογένεια. Πόσο σαπούνι ἐμοιράσθηκε; Καὶ πόσο ἀλεύρι;

Διαίρεσις κλάσματος δι᾽ ἀκεραίου.

1. Διαίρεσις ἀκεραίου δι᾽ ἀκεραίου.

Πρόβλημα: ***Τρία ἴδια πακέτα νῆμα ζυγίζουν 2 ὀκάδες. Πόσο ζυγίζει τὸ 1 πακέτο;***

Ἀφοῦ τὰ 3 πακέτα ζυγίζουν 2 ὀκάδες, τὸ 1 πακέτο ζυγίζει 3 φορὲς ὀλιγώτερο. Ἔτσι θὰ κάνωμε τὴ διαίρεσι 2 ὀκ. : 3.

ἡ ὁποία ἔχει (σελ. 18,γ) πηλίκο $\frac{2}{3}$ ὀκάδες. Ἤτοι εἶναι 2 ὀκ. : : 3 = $\frac{2}{3}$ ὀκ. Ὥστε τὸ 1 πακέτο ζυγίζει $\frac{2}{3}$ ὀκ.

Παρατήρησις: Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ πηλίκο $\frac{2}{3}$ ὀκ. ἐπὶ τὸν διαιρέτη 3, θὰ βροῦμε γινόμενο $\frac{2}{3}$ ὀκ. $\times 3 = 2$ ὀκ. δηλαδὴ θὰ βροῦμε γινόμενο τὸ διαιρετέο 2 ὀκ.

2. *Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.*

Πρόβλημα: ***Πέντε πῆχες σειρῆτι ἀξίζουν $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 πήχη;***

Ἀφοῦ οἱ 5 πῆχες ἀξίζουν $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα, ἡ 1 πήχη ἀξίζει 5 φορὲς ὀλιγώτερο. Ἔτσι θὰ κάνωμε τὴν διαίρεσι $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα : 5 καὶ τὸ πηλίκο της θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς 1 πήχης. Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ἀξία τῆς 1 πήχης εἶναι 5 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ὅλη ἀξία, δηλαδὴ ἀπὸ τὰ $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα, συμπεραίνομε, ὅτι τὸ πηλίκο ποὺ ζητοῦμε θὰ εἶναι 5 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα. Γιὰ νὰ κάνωμε ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{25}{10}$, 5 φορὲς μικρότερο, θὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ 25 διὰ τοῦ 5 (σελ. 31,2) ἢ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ 10 ἐπὶ τὸ 5 (σελ. 33,1).

Ἔτσι εἶναι $\frac{25}{10}$ χλδρχ. : 5 = $\frac{25:5}{10}$ χλδρχ. = $\frac{5}{10}$ χλδρ.

ἢ $\frac{25}{10}$ χλδρχ. : 5 = $\frac{25}{10 \times 5}$ χλδρχ. = $\frac{25}{50}$ χλδρ. =

= $\frac{25:5}{50:5} = \frac{5}{10}$ χιλιόδραχμα.

Δηλαδὴ ἡ 1 πήχη ἀξίζει $\frac{5}{10}$ χιλιόδραχμα.

2. Ἐργάτρια ὑφαίνει $5\frac{3}{8}$ πῆχες σὲ 1 ἡμέρα. Πόσο ὑφαίνει σὲ 1 ἑβδομάδα;

3. Μιὰ φιάλη μὲ γάλα ζυγίζει $1\frac{3}{5}$ ὀκάδες. Πόσο ζυγίζουν 15 ἴδιες φιάλες μὲ γάλα;

4. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $1\frac{3}{4}\times 4$, β) $2\frac{1}{5}\times 5$, γ) $1\frac{3}{8}\times 8$, δ) $4\frac{4}{9}\times 9$

ε) $2\frac{2}{5}\times 10$, στ) $2\frac{4}{7}\times 14$, ζ) $5\frac{2}{9}\times 3$, η) $1\frac{1}{10}\times 5$

ϑ) $4\frac{2}{3}\times 5$, ι) $6\frac{1}{2}\times 9$, ια) $10\frac{1}{4}\times 3$, ιβ) $1\frac{1}{8}\times 11$.

5. Ὡρολόγιο μένει ὀπίσω $2\frac{3}{4}$ δευτερόλεπτα σὲ 1 ὥρα. Πόσο μένει ὀπίσω στὸ 24ωρο;

6. Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ 1 ὥρα τρέχει $33\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει σὲ 3 ὧρες;

7. Ἀγόρασε ἕνας 5 μανδήλια μὲ $7\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα τὸ ἕνα καὶ 3 ζεύγη κάλτσες μὲ $10\frac{3}{4}$ χιλιόδραχμα τὸ ἕνα. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσε;

8. Σὲ 36 ἄπορες οἰκογένειες ἐμοιράσθηκε σαπούνι ἀπὸ $1\frac{1}{2}$ ὀκ. καὶ ἀλεύρι ἀπὸ $2\frac{3}{4}$ ὀκ. σὲ κάθε οἰκογένεια. Πόσο σαπούνι ἐμοιράσθηκε; Καὶ πόσο ἀλεύρι;

Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.

1. Διαίρεσις ἀκεραίου δι' ἀκεραίου.

Πρόβλημα: ***Τρία ἴδια πακέτα νῆμα ζυγίζουν 2 ὀκάδες. Πόσο ζυγίζει τὸ 1 πακέτο;***

Ἀφοῦ τὰ 3 πακέτα ζυγίζουν 2 ὀκάδες, τὸ 1 πακέτο ζυγίζει 3 φορὲς ὀλιγώτερο. Ἔτσι θὰ κάνωμε τὴ διαίρεσι 2 ὀκ. : 3, ἡ ὁποία ἔχει (σελ. 18,γ) πηλίκο $\frac{2}{3}$ ὀκάδες. Ἤτοι εἶναι 2 ὀκ. : : 3 $= \frac{2}{3}$ ὀκ. Ὥστε τὸ 1 πακέτο ζυγίζει $\frac{2}{3}$ ὀκ.

Παρατήρησις: Ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ πηλίκο $\frac{2}{3}$ ὀκ. ἐπὶ τὸν διαιρέτη 3, θὰ βροῦμε γινόμενο $\frac{2}{3}$ ὀκ. $\times 3 = 2$ ὀκ. δηλαδὴ θὰ βροῦμε γινόμενο τὸ διαιρετέο 2 ὀκ.

2. *Διαίρεσις κλάσματος δι᾽ ἀκεραίου.*

Πρόβλημα: ***Πέντε πῆχες σειρήτι ἀξίζουν $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 πήχη;***

Ἀφοῦ οἱ 5 πῆχες ἀξίζουν $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα, ἡ 1 πήχη ἀξίζει 5 φορὲς ὀλιγώτερο. Ἔτσι θὰ κάνωμε τὴν διαίρεσι $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα : 5 καὶ τὸ πηλίκο της θὰ εἶναι ἡ ἀξία τῆς 1 πήχης. Ἀλλ᾽ ἀφοῦ ἡ ἀξία τῆς 1 πήχης εἶναι 5 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ὅλη ἀξία, δηλαδὴ ἀπὸ τὰ $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα, συμπεραίνομε, ὅτι τὸ πηλίκο ποὺ ζητοῦμε θὰ εἶναι 5 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{25}{10}$ χιλιόδραχμα. Γιὰ νὰ κάνωμε ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{25}{10}$, 5 φορὲς μικρότερο, θὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ 25 διὰ τοῦ 5 (σελ. 31,2) ἢ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ 10 ἐπὶ τὸ 5 (σελ. 33,1).

Ἔτσι εἶναι $\frac{25}{10}$ χλδρχ. $: 5 = \frac{25:5}{10}$ χλδρχ. $= \frac{5}{10}$ χλδρ.

ἢ $\frac{25}{10}$ χλδρχ. $: 5 = \frac{25}{10 \times 5}$ χλδρχ. $= \frac{25}{50}$ χλδρ. $=$

$= \frac{25:5}{50:5} = \frac{5}{10}$ χιλιόδραχμα.

Δηλαδὴ ἡ 1 πήχη ἀξίζει $\frac{5}{10}$ χιλιόδραχμα.

Καὶ πραγματικά, γιατὶ $\frac{5}{10}$ χλδρχ. $\times 5 = \frac{25}{10}$ χλδρ.

δηλαδὴ τὸ γινόμενο τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτη, μᾶς δίνει τὸ διαιρετέο.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου** ἢ 1) **διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ ἀκεραίου** (ἂν διαιρεῖται).

ἢ 2) **πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ τὸν ἀκέραιο.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ κάνης (ἀπὸ μνήμης) τὶς διαιρέσεις:

α) $\frac{7}{9} : 7$, $\frac{5}{7} : 5$, $\frac{11}{12} : 11$, $\frac{15}{16} : 15$

β) $\frac{4}{5} : 2$, $\frac{8}{9} : 4$, $\frac{14}{15} : 7$, $\frac{16}{21} : 8$

γ) $\frac{3}{5} : 2$, $\frac{4}{7} : 3$, $\frac{1}{2} : 10$, $\frac{3}{4} : 5$

2. 4 μέτρα ὕφασμα ἀξίζουν 125 χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζει τὸ 1 μέτρο;

3. 16 πῆχες ὕφασμα ἀξίζουν 175 χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 πήχη;

4. Νὰ κάνης τὶς διαιρέσεις μὲ τὶς δοκιμές τους:

α) $\frac{36}{37} : 9$, $\frac{24}{35} : 3$, $\frac{35}{51} : 7$, $\frac{51}{58} : 3$

β) $\frac{6}{7} : 12$, $\frac{7}{9} : 4$, $\frac{5}{8} : 15$, $\frac{9}{11} : 36$

γ) $\frac{3}{4} : 7$, $\frac{7}{8} : 8$, $\frac{8}{11} : 7$, $\frac{10}{13} : 9$

δ) $\frac{7}{17} : 25$, $\frac{13}{16} : 30$, $\frac{13}{18} : 11$, $\frac{2}{3} : 75$

2η ὁμάδα.

1. Ἐργάτρια σὲ 3 ὥρες ὕφανε $\frac{6}{8}$ τῆς πήχης τάπητα. Πόσο ὕφανε σὲ 1 ὥρα;

2. Ἐργάτης σὲ ἕνα ὀκτάωρο ἠμπορεῖ νὰ σκάψη $\frac{2}{5}$ τοῦ στρέμματος. Πόσο ἠμπορεῖ νὰ σκάψη σὲ 1 ὥρα;

3. Τετράγωνο ἔχει περίμετρο $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

4. Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια κύβου ἔχει ἐμβαδὸ $\frac{16}{25}$ τετραγ. μέτρα. Πόσο ἐμβαδὸ ἔχει ἡ μία ἕδρα του;

5. Ὡρολόγιο σὲ 24 ὧρες ἐπῆγε ἐμπρὸς $\frac{2}{5}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Πόσο ἐπῆγε ἐμπρὸς σὲ 1 ὥρα;

3η ὁμάδα (διαίρεσις μεικτοῦ δι' ἀκεραίου).

1. Πεζὸς σὲ 4 ὧρες ἐβάδισε $16\frac{4}{5}$ χιλιόμετρα. Πόσο ἐβάδισε σὲ 1 ὥρα;

Ἐβάδισε $16\frac{4}{5}$ χλμ. $: 4 = 16 : 4 + \frac{4}{5} : 4 = 4 + \frac{1}{5} = 4\frac{1}{5}$ χλμ.

ἢ $16\frac{4}{5}$ χλμ. $: 4 = \frac{84}{5}$ χλμ. $: 4 = \frac{84 : 4}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$ χλμ.

Πῶς λοιπὸν διαιρεῖται μεικτὸς δι' ἀκεραίου;

2. 3 ὀκάδες βούτυρο ἀξίζουν $96\frac{3}{5}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκά;

3. Γιὰ 5 ὑποκάμισα ἐχρειάσθηκαν $25\frac{5}{8}$ πῆχες ὕφασμα. Μὲ πόσο ὕφασμα ἔγινε τὸ 1 ὑποκάμισο;

4. Νὰ κάνης (ἀπὸ μνήμης) τὶς διαιρέσεις:

α) $4\frac{4}{5} : 2$, β) $3\frac{3}{7} : 3$, γ) $12\frac{12}{13} : 4$, δ) $63\frac{18}{25} : 9$.

5. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

α) $18\frac{9}{11} : 9$, $24\frac{16}{17} : 8$, $42\frac{21}{40} : 21$, $84\frac{32}{33} : 4$

β) $1\frac{2}{3} : 5$, $2\frac{1}{4} : 9$, $4\frac{3}{8} : 5$, $3\frac{3}{5} : 6$

γ) $2\frac{7}{9} : 2$, $2\frac{9}{11} : 3$, $8\frac{1}{9} : 8$, $10\frac{4}{5} : 12$

4η ὁμάδα.

1. 3 γυάρδες ὕφασμα κοστίζουν $10\frac{1}{2}$ λίρες. Πόσο κοστίζει ἡ 1 ὑάρδα;

2. 4 μέτρα ὕφασμα ἀξίζουν $120\frac{8}{10}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζει τὸ 1 μέτρο;

3. Αὐτοκίνητο σὲ 3 ὧρες ἔτρεξε $240\frac{6}{10}$ χιλιόμετρα. Πόσο ἔτρεξε τὴν ὥρα;

4. Ἔμπορος ξεπλήρωσε χρέος ἀπὸ $144\frac{15}{20}$ λίρες μὲ ἴσες μηνιαῖες δόσεις σὲ ἕνα χρόνο. Πόσο ἐπλήρωνε τὸ μῆνα;

5. 15 ἴσα κιβώτια μὲ σαπούνι ζυγίζουν $660\frac{3}{5}$ ὀκάδες. Πόσο ζυγίζει τὸ 1 κιβώτιο;

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα: ***Μία ὀκὰ ζάχαρη ἀξίζει 12 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;***

Θὰ βροῦμε πρῶτα πόσο ἀξίζει τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ 1 ὀκὰ ζάχαρη ἀξίζει 12 000 δραχμές, τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζει 4 φορὲς ὀλιγώτερο, δηλαδὴ ἀξίζει 12 000 δραχ. : $4 = \frac{12\,000}{4}$ δραχ. Καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 3 φορὲς περισσότερο, ἤτοι ἀξίζουν $\frac{12\,000}{4}$ δραχμὲς $\times 3 = 3\,000$ δραχμὲς $\times 3 = 9\,000$ δραχμές.

Τὰ $\frac{3}{4}$ λοιπὸν τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 9 000 δραχμές.

Ἀλλὰ γιὰ νὰ βροῦμε τὶς 9 000 δραχμές, διαιρέσαμε πρῶτα τὶς 12 000 δραχ. διὰ τοῦ 4, δηλαδὴ βρήκαμε πρῶτα τὸ τέταρτο μέρος τῶν 12 000 δραχ. καὶ αὐτὸ τὸ τέταρτο τὸ ἐπολλαπλασιάσαμε ἐπὶ τὸ 3.

Τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ τετάρτου μέρους τῶν 12 000 δρχ. ἐπὶ 3 τὸν ὀνομάζομε πολλαπλασιασμὸ τῶν 12 000 δραχμῶν ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Ἔτσι εἶναι:

$$12\,000 \text{ δρχ.} \times \frac{3}{4} = \frac{12\,000}{4} \text{δρχ.} \times 3.$$

Ὥστε: **Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε ἕνα μέρος τοῦ ἀριθμοῦ.**

Ποιὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ θὰ ἐπαναλάβωμε, τὸ ὁρίζει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος. Πόσες δὲ φορὲς θὰ ἐπαναλάβωμε τὸ μέρος αὐτό, τὸ ὁρίζει ὁ ἀριθμητής του.

Ἔτσι ὁ πολλαπλασιασμὸς $25 \times \frac{3}{8}$ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμε 3 φορὲς τὸ ὄγδοο μέρος τοῦ 25.

Δηλαδὴ εἶναι $25 \times \frac{3}{8} = \frac{25}{8} \times 3$.

Τὸ προηγούμενο λοιπὸν πρόβλημα τὸ ἐλύσαμε μὲ πολλαπλασιασμό. Ἐπολλαπλασιάσαμε δὲ τὴν τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς (δηλαδὴ τὶς 12 000) ἐπὶ τὸ μέρος $\frac{3}{4}$ αὐτῆς.

Ὥστε: **Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ μιᾶς ἀκεραίας μονάδας, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ μέρους αὐτῆς, πολλαπλασιάζομε τὴν τιμὴ τῆς ἀκεραίας μονάδας ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ φανερώνει πόσο εἶναι τὸ μέρος αὐτὸ τῆς ἀκεραίας μονάδας.**

Σημείωσις. Καὶ γενικά: Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ μιᾶς ἀκεραίας μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ πολλῶν μονάδων, θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό, εἴτε οἱ πολλὲς μονάδες εἶναι ἀκέραιες, εἴτε εἶναι κλασματικές, εἴτε εἶναι μαζὶ ἀκέραιες καὶ κλασματικές. Πολλαπλασιαστέος θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδας καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς ποὺ φανερώνει πόσες εἶναι οἱ πολλὲς μονάδες καὶ τί μονάδες εἶναι.

Παρατήρησις: Πολλαπλασιασμὸ θὰ κάνωμε καὶ ὅταν μᾶς ζητοῦν μέρος ἀριθμοῦ. Π. χ. ἕνας εἶχε 60 ὀκάδες ρύζι καὶ ἐπούλησε τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῶν. Πόσο ρύζι ἐπούλησε;

Ἐπούλησε $60 \text{ ὀκ.} \times \frac{3}{4} = \frac{60}{4} \text{ ὀκ.} \times 3 = 15 \text{ ὀκ.} \times 3 =$ $= 45$ ὀκάδες.

Πῶς πολλαπλασιάζομε ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα.

Στὸ προηγούμενο πρόβλημα εἴδαμε, ὅτι:

$12\,000$ δρχ. $\times \frac{3}{4} = \frac{12\,000}{4}$ δρχ. $\times 3$. Ἔτσι βλέπομε, ὅτι ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα $\left(\text{τὸ } \frac{12\,000}{4}\right)$ ἐπὶ ἀκέραιο (τὸν 3). Ἀλλὰ γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητή του ἐπὶ τὸν ἀκέραιο. Ὥστε $\frac{12\,000 \text{ δρχ.}}{4} \times 3 = \frac{12\,000 \times 3}{4}$ δρχ. $= \frac{36\,000}{4}$ δρχ. $= 9\,000$ δρ., ἤτοι $12\,000$ δρχ. $\times \frac{3}{4} = \frac{12\,000 \times 3}{4}$ δραχ. $= 9\,000$ δραχ.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα**

1) **πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος** καὶ

2) **κάτω ἀπὸ τὸ γινόμενο γράφομε ὡς παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε (ἀπὸ μνήμης) τὰ γινόμενα:

α) $7 \times \frac{5}{7}$, β) $10 \times \frac{9}{10}$, γ) $16 \times \frac{3}{8}$, δ) $24 \times \frac{5}{6}$,

ε) $6 \times \frac{3}{4}$, στ) $9 \times \frac{3}{5}$, ζ) $7 \times \frac{3}{10}$, η) $11 \times \frac{4}{5}$.

2. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

24 ὀκ. $\times \frac{1}{8}$, 35 μέτ. $\times \frac{1}{7}$, 20 πήχ. $\times \frac{3}{4}$, 18 ὧρ. $\times \frac{7}{9}$

3. Μία ὀκὰ μῆλα κοστίζει 8 000 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς;

4. Ἡ 1 πήχη ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀξίζει 64 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης;

5. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $28 \times \frac{1}{6}$, $32 \times \frac{1}{12}$, $40 \times \frac{2}{15}$, $14 \times \frac{5}{21}$

β) $9 \times \frac{13}{14}$, $18 \times \frac{7}{11}$, $20 \times \frac{5}{21}$, $43 \times \frac{5}{8}$

6. Νὰ βρῆτε α) τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 10 β) τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 20 γ) τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ 40 καὶ δ) τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ 100.

7. Νὰ βρῆτε α) τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 60 β) τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 40 γ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ 100 καὶ δ) τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ 42.

2η ὁμάδα.

1. Αὐτοκίνητο ἔχει ταχύτητα 42 000 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσο δρόμο θὰ τρέξῃ σὲ $\frac{7}{12}$ τῆς ὥρας;

2. Ἕνας, ἀπὸ τὰ 60 στρέμματα ποὺ εἶχε τὸ χωράφι του, ἐκαλλιέργησε τὰ $\frac{5}{6}$. Πόσα στρέμματα ἐκαλλιέργησε; Καὶ πόσα στρέμματα μένουν ἀκαλλιέργητα;

3. Ἕνας εἶχε 500 000 δραχμὲς καὶ ἐξώδεψε τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῶν. Πόσες δραχμὲς ἐξώδεψε; Καὶ πόσες δραχμὲς τοῦ μένουν ἀκόμα;

4. Εἶχε ἕνας 360 ὀκάδες κρασὶ καὶ ἐπούλησε τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτῶν. Πόσες ὀκάδες κρασὶ ἔχει ἀκόμα;

5. Μία τάξις σχολείου ἔχει 50 ἀγόρια καὶ κορίτσια μαζί. Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι ἀγόρια. Πόσα ἀγόρια ἔχει ἡ τάξις αὐτὴ καὶ πόσα κορίτσια;

Πῶς πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα: ***Μία ὀκὰ φασόλια ἀξίζουν $\frac{9}{2}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;***

Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα λέγομε:

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκὰ ἀξίζει $\frac{9}{2}$ χιλιόδραχμα, τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $\frac{9}{2}$ χιλδρχ. $\times \frac{3}{4}$, ἤτοι ἀξίζουν 3 φορὲς τὸ τέταρτο τοῦ $\frac{9}{2}$. Ἀλλὰ τὸ τέταρτο τοῦ $\frac{9}{2}$ εἶναι $\frac{9}{2\times4}$ καὶ τὸ τριπλάσιο τοῦ $\frac{9}{2\times4}$ εἶναι $\frac{9\times3}{2\times4}$. Ἔτσι εἶναι $\frac{9}{2}$ χλδρ. $\times \frac{3}{4} = \frac{9\times3}{2\times4}$ χλδρ. $= \frac{27}{8}$ χλδρ. $= 3\frac{3}{8}$ χλδρ.

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴ ἐπὶ ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἐπὶ παρονομαστή. Τὸ δὲ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τὸ γράφομε ὡς ἀριθμητὴ καὶ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστή.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε (ἀπὸ μνήμης) τὰ γινόμενα:

α) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$, γ) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$. δ) $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

ε) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, στ) $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, ζ) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{10}$, η) $\frac{1}{11} \times \frac{1}{5}$

2. Μία ὀκὰ ζάχαρη ἀξίζει $\frac{25}{2}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

3. Μία ὑάρδα ὕφασμα κοστίζει $\frac{17}{20}$ τῆς λίρας. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὑάρδας;

4. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $\frac{7}{8} \times \frac{3}{10}$, $\frac{4}{5} \times \frac{3}{13}$, $\frac{2}{7} \times \frac{5}{12}$, $\frac{3}{4} \times \frac{9}{11}$

β) $\frac{13}{15} \times \frac{3}{4}$, $\frac{9}{16} \times \frac{3}{5}$, $\frac{13}{30} \times \frac{10}{17}$, $\frac{9}{11} \times \frac{11}{25}$

γ) $\frac{1}{16} \times \frac{3}{17}$, $\frac{11}{12} \times \frac{7}{11}$, $\frac{10}{13} \times \frac{2}{13}$, $\frac{9}{25} \times \frac{13}{40}$

5. Νὰ βρῆτε τὸ τρίτο τοῦ κλάσματος $\frac{6}{7}$ καὶ τὸ πέμπτο τοῦ $\frac{15}{19}$.

6. Νὰ βρῆτε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{6}{7}$ καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ $\frac{15}{19}$.

2η ὁμάδα.

1. Μία βρύση γεμίζει τὰ $\frac{4}{5}$ δεξαμενῆς σὲ 1 ὥρα. Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίση σὲ $\frac{7}{12}$ τῆς ὥρας;

2. Μὲ μία λίρα ἀγοράζει μία $\frac{9}{10}$ τοὺ μέτρου μεταξωτὸ ὕφασμα. Πόσο ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτὸ θὰ ἀγοράση μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς λίρας;

3. Ἕνα σῶμα στὸν ἀέρα ζυγίζει $\frac{5}{8}$ τοῦ χιλιογράμμου. Ὅταν τὸ βυθίσωμε στὸ νερὸ χάνει ἀπὸ τὸ βάρος του τὸ $\frac{1}{10}$. Πόσο βάρος χάνει; Καὶ πόσο ζυγίζει μέσα στὸ νερό;

4. Τετράγωνο μὲ πλευρὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου τί ἐμβαδὸ ἔχει;

5. Μία πήχη ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀξίζει $\frac{3}{8}$ τῆς λίρας Ἀγγλίας. Μία πήχη ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα ἀξίζει τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ ὅ,τι ἀξίζει ἡ πήχη ἀπὸ τὸ πρῶτο ὕφασμα. Πόσο ἀξίζει ἡ πήχη ἀπὸ τὸ δεύτερο ὕφασμα;

3η ὁμάδα.

1. Μία ὀκὰ ἀχλάδια ἀξίζει $7\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς;

(ἀξίζουν $7\frac{1}{2}$ χλδρ. $\times \frac{4}{5} = \frac{15}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{15 \times 4}{2 \times 5} = \frac{60}{10} = 6$ χλδρχ.

ἢ $7\frac{1}{2}$ χλδρ. $\times \frac{4}{5} = 7 \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} =$

$= \frac{28}{5} + \frac{4}{10} = \frac{56}{10} + \frac{4}{10} = \frac{60}{10} = 6$ χλδρχ.

Πῶς λοιπὸν πολλαπλασιάζομε μεικτὸ ἐπὶ κλάσμα;

2. Μία ὀκὰ κρέας ἀξίζει $24\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;

3. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ β) $1\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ γ) $5\frac{2}{3} \times \frac{6}{17}$ δ) $2\frac{5}{6} \times \frac{1}{4}$

ε) $7\frac{2}{3} \times \frac{4}{9}$ στ) $9\frac{4}{5} \times \frac{7}{8}$ ζ) $10\frac{1}{2} \times \frac{6}{7}$ η) $8\frac{7}{12} \times \frac{10}{11}$

4. Μία ὀκὰ ρύζι ἀξίξει 10 000 δραχμ. Πόσο ἀξίζουν $2\frac{3}{4}$ ὀκ.;

('Επειδὴ $2\frac{3}{4}$ ὀκ. $= \frac{11}{4}$ ὀκ., τὰ $\frac{11}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν $10\,000 \times \frac{11}{4} = \frac{110\,000}{4}$ δρχ. $= 27\,500$ δρχ.).

Ἠμποροῦμε ὅμως νὰ βροῦμε χωριστὰ πόσο ἀξίζουν οἱ 2 ὀκάδες καὶ χωριστὰ πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς.

Ὥστε: 10 000 δρχ. $\times 2\frac{3}{4} =$ 10 000 δρχ. $\times 2 +$ 10 000 δραχ. $\times \frac{3}{4} =$ 20 000 δρχ. $+$ 7 500 δρχ. $=$ 27 500 δρχ.

Πῶς λοιπὸν πολλαπλασιάζομε ἀριθμὸ ἐπὶ μεικτό;

5. Ἕνα μέτρο ὕφασμα ἀξίζει 3 λίρες. Πόσο ἀξίζουν τὰ $3\frac{7}{10}$ μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

6. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $8 \times 2\frac{1}{8}$, $4 \times 8\frac{3}{4}$, $5 \times 7\frac{2}{5}$, $7 \times 2\frac{5}{7}$

β) $15 \times 2\frac{3}{5}$, $48 \times 1\frac{5}{8}$, $100 \times 3\frac{7}{20}$, $60 \times 4\frac{5}{12}$

γ) $\frac{1}{4} \times 12\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} \times 3\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10} \times 9\frac{1}{4}$

7. Μία ὀκὰ πατάτες ἀξίζει $2\frac{3}{5}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἀξίζουν οἱ $7\frac{1}{2}$ ὀκάδες;

(ἀξίζουν $2\frac{3}{5}$ χλδρ. $\times 7\frac{1}{2} = \frac{13}{5}$ χλδρ. $\times \frac{15}{2} =$

$\frac{13\times15}{5\times2} = \frac{195}{10}$ χλδρ. $= 19\frac{5}{10}$ χλδρ.).

Πῶς λοιπὸν πολλαπλασιάζομε μεικτὸ ἀριθμὸ ἐπὶ μεικτό ;

8. Σὲ 1 ὥρα βαδίζει ἕνας $4\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα βαδίζει σὲ $3\frac{4}{5}$ ὥρας ;

9. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα :

α) $6\times2\frac{1}{6}$, $3\times7\frac{1}{3}$, $5\times4\frac{2}{5}$, $7\times2\frac{5}{7}$

β) $6\times2\frac{1}{3}$, $10\times2\frac{1}{4}$, $16\times3\frac{1}{8}$, $18\times4\frac{2}{9}$

γ) $\frac{5}{7}\times2\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}\times2\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}\times3\frac{1}{5}$, $\frac{7}{25}\times4\frac{1}{6}$

δ) $\frac{3}{7}\times8\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}\times6\frac{1}{5}$, $\frac{5}{9}\times6\frac{3}{10}$, $\frac{1}{7}\times6\frac{5}{12}$

ε) $1\frac{2}{5}\times1\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}\times1\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}\times5\frac{2}{5}$, $5\frac{1}{25}\times2\frac{1}{4}$

4η ὁμάδα.

1. Τὸ γινόμενο $4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$ παρατηροῦμε, ὅτι εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέο 4, γιατὶ παίρνομε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 4 δύο φορές, δηλαδή: γιατὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.

2. Τὸ γινόμενο $4\times\frac{7}{5}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5}$ παρατηροῦμε, ὅτι εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέο 4, γιατὶ παίρνομε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 4, 7 φορές, ἤτοι γιατὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.

3. Ἔτσι ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἀκεραία μονάδα, τὸ γινόμενο εἶναι ἴσο μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο.

Πότε λοιπὸν τὸ γινόμενο δύο ἀριθμῶν εἶναι 1) μικρότερο ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέο 2) μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτὸν καὶ 3) ἴσο μὲ τὸν πολλαπλασιαστέο;

4. Νὰ πῆτε, πρὶν κάνετε τὶς πράξεις, γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω γινόμενα, ἂν θὰ εἶναι μικρότερα ἢ μεγαλύτερα ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέο:

α) $5 \times \frac{3}{4}$ β) $9 \times \frac{7}{8}$ γ) $12 \times \frac{11}{12}$

β) $\frac{1}{3} \times \frac{4}{3}$ γ) $2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{5}$ στ) $\frac{1}{8} \times \frac{2}{3}$.

5η ὁμάδα.

1. Μία πήχη ὕφασμα ἀξίζει $24\frac{1}{5}$ χλδραχ. Πόσο ἀξίζουν $\frac{3}{8}$ τῆς πήχης;

2. Σὲ μεῖγμα ἀπὸ βούτυρο καὶ λῖπος, τὰ $\frac{7}{10}$ εἶναι βούτυρο. Σὲ $2\frac{3}{8}$ ὀκάδες ἀπὸ τὸ μεῖγμα αὐτό, πόσο βούτυρο εἶναι;

3. Ἔμπορος ἔφερε ὕφασμα ἀπὸ τὴν Ἀγγλία καὶ τοῦ ἐστοίχισε $8\frac{3}{4}$ λίρες χάρτινες ἡ πήχη. Ἀπὸ τὸ κόστος αὐτὸ τὸ $\frac{1}{5}$ εἶναι φόροι. Τί φόρο ἐπλήρωσε γιὰ 1 πήχη καὶ πόσο τὴν ἀγόρασε;

4. Τὸ κωδωνοστάσιο ἐκκλησίας ἔχει ὕψος $17\frac{1}{2}$ μέτρα. Τὸ ὕψος τῆς ἐκκλησίας εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὕψους, ποὺ ἔχει τὸ κωδονοστάσιο. Τί ὕψος ἔχει ἡ ἐκκλησία;

5. Μία ὀκὰ τυρὶ ἀξίζει 20 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν οἱ $3\frac{4}{5}$ ὀκάδες;

6. Αὐτοκίνητο τρέχει μὲ ταχύτητα 40 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε σὲ $5\frac{1}{2}$ ὧρες;

7. Ὑφάντρια σὲ 1 ὥρα ὑφαίνει $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα ὑφαίνει σὲ $6\frac{1}{2}$ ὧρες;

8. Ἠλεκτρικὸ καμινέτο καίει σὲ 1 ὥρα $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοβάττ. Πόσα κιλοβὰττ καίει σὲ $8\frac{4}{5}$ ὧρες;

9. Ὕφασμα κοστίζει $3\frac{7}{20}$ λίρες τὴ 1 γυάρδα. Πόσο κοστίζουν $6\frac{2}{3}$ γυάρδες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

10. Ὕφασμα κοστίζει $16\frac{3}{4}$ χιλιόδραχμα τὸ μέτρο. Πόσο κοστίζουν $2\frac{4}{5}$ μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

11. Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ 1 ὥρα καίει $2\frac{3}{4}$ χιλιόγραμμα βενζίνη. Πόση βενζίνη θὰ κάψη σὲ $4\frac{4}{5}$ ὧρες;

12. Πεζοπόρος βαδίζει σὲ 1 ὥρα $6\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ βαδίση σὲ $2\frac{1}{2}$ ὧρες;

13. Ποδηλάτης σὲ 1 ὥρα τρέχει $27\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξη σὲ $3\frac{7}{15}$ ὧρες;

14. Γνωρίζομε, ὅτι 1 δράμι $= 3\frac{1}{5}$ γραμμάρια. Νὰ τρέψης $7\frac{1}{5}$ δράμια σὲ γραμμάρια.

15. Κῆπος μὲ σχῆμα ὀρθογώνιο ἔχει $20\frac{1}{2}$ μέτρα βάσι καὶ $9\frac{1}{2}$ μέτρα ὕψος. Τί ἐμβαδὸ ἔχει;

16. Τί ἐμβαδὸ ἔχει ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρά:

α) $2\frac{1}{2}$ μέτρα, β) $3\frac{1}{5}$ μέτρα;

γ) $2\frac{3}{4}$ μέτρα καὶ δ) $8\frac{7}{10}$ μέτρα;

6η ὁμάδα (ἀντίστροφοι ἀριθμοί).

1. Στὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους. Ἔτσι θὰ λάβωμε τὸ κλάσμα $\frac{5}{3}$. Ἀλλὰ τώρα βλέπομε, ὅτι: $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$.

Ὅμοια βλέπομε, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 8 $\left(=\frac{8}{1}\right)$ καὶ $\frac{1}{8}$ ἔχουν γινόμενο $8 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$, καθὼς καὶ οἱ ἀριθμοὶ $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ καὶ $\frac{4}{9}$ ἔχουν γινόμενο $2\frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{36}{36} = 1$.

Δύο ἀριθμοί, ὅταν ἔχουν γινόμενο ἴσο μὲ τὴ μονάδα 1, λέγονται ἀντίστροφοι.

Τί εἶναι λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{3}$;

β) Ποιὸς ἀριθμὸς εἶναι ἀντίστροφος τοῦ $\frac{3}{5}$; καὶ ποιὸς τοῦ $\frac{5}{3}$;

γ) Ποιὸς εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{8}$; καὶ ποιὸς τοῦ 8;

δ) Ποιὸς εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ $2\frac{1}{4}$;

2. Νὰ εὕρῃς τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν:

α) $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{15}{13}$

β) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{16}$

γ) 7, 9, 3, 8, 2, 5

δ) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{8}$, $6\frac{7}{9}$

7η ὁμάδα (γινόμενο πολλῶν παραγόντων).

1. ***Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενο*** $\frac{3}{5} \times \frac{9}{2} \times \frac{7}{10}$.

Θὰ βροῦμε πρῶτα τὸ γινόμενο $\frac{3}{5} \times \frac{9}{2}$ καὶ ὕστερα θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸν τρίτο παράγοντα $\frac{7}{10}$.

Ἔτσι ἔχομε $\frac{3}{5} \times \frac{9}{2} = \frac{3 \times 9}{5 \times 2}$ καὶ $\frac{3 \times 9}{5 \times 2} \times \frac{7}{10} = \frac{3 \times 9 \times 7}{5 \times 2 \times 10}$

Ἤτοι $\frac{3}{5} \times \frac{9}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{3 \times 9 \times 7}{5 \times 2 \times 10}$

$$\left(= \frac{27 \times 7}{10 \times 10} = \frac{189}{100} = 1\,\frac{89}{100}\right)$$

Ὥστε: **Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε πολλὰ κλάσματα, πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ χωριστὰ τοὺς παρονομαστάς. Καὶ τὸ γινόμενο θὰ ἔχη ἀριθμητὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν.**

2. Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενο $\frac{4}{5} \times 3 \times 3\frac{1}{2}$.

Ἐδῶ ἠμποροῦμε νὰ θέσωμε $\frac{3}{1}$ ἀντὶ 3 καὶ $\frac{7}{2}$ ἀντὶ $3\frac{1}{2}$

Ἔτσι ἔχομε:

$$\frac{4}{5} \times 3 \times 3\frac{1}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{1} \times \frac{7}{2} = \frac{4 \times 3 \times 7}{5 \times 1 \times 2} = \frac{84}{10} = 8\frac{4}{10}$$

3. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ β) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$ γ) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{11} \times \frac{4}{5}$

δ) $\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{7} \times 9$ (Νὰ προσέξετε, ὅτι οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες καὶ οἱ δύο ἑπόμενοι εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίστροφοι. Ἔτσι τὸ γινόμενο θὰ τὸ βρῆτε σύντομα, χωρὶς νὰ πολλαπλασιάσετε χωριστὰ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ χωριστὰ τοὺς παρονομαστάς.

ε) $\frac{4}{9} \times \frac{6}{5} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{3}$ (ἐδῶ ἠμπορεῖτε νὰ ἁπλοποιήσετε πρῶτα, διαιροῦντες ἕνα ἀριθμητὴ καὶ ἕνα παρονομαστὴ δι' ἀριθμοῦ, ποὺ τοὺς διαιρεῖ.

Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ σὲ τοῦτο τὸ παράδειγμα ἠμπορεῖτε νὰ κάνετε δυὸ ἁπλοποιήσεις καὶ ὕστερα νὰ βρῆτε τὸ γινόμενο.

Ἔτσι καὶ στὶς παρακάτω τρεῖς ἀσκήσεις, πρὶν βρῆτε τὰ γινόμενα, νὰ κάνετε ἁπλοποιήσεις.

στ) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{7}$ ζ) $1\frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3}{4}$ η) $1\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{5} \times \frac{5}{8}$

4. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{7} \times \frac{2}{5}$ β) $\frac{4}{9} \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} \times \frac{10}{21}$ γ) $\frac{11}{12} \times \frac{14}{15} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$

5. Ἕνα μικρὸ χαλὶ ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις $\frac{4}{5}$ μέτρα καὶ $\frac{9}{10}$ μέτρα. Ἐστοίχισε δὲ 40 000 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Πόσο ἐστοίχισε τὸ χαλί;

6. Τί ὄγκο ἔχει ὁ κύβος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμή:
α) $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου, β) $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου καὶ γ) $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου;

7. Ἕνα ξενοδοχεῖο ἔχει 12 δωμάτια. Κάθε δωμάτιο ἔχει ἀπὸ 1 ἠλεκτρικὸ λαμπτήρα, ὁ ὁποῖος καίει $\frac{1}{10}$ τοῦ κιλοβὰττ τὴν ὥρα. Οἱ λαμπτῆρες αὐτοὶ ἀνάβουν $6\frac{1}{2}$ ὧρες τὴν ἡμέρα. Ὅλοι οἱ λαμπτῆρες τοῦ ξενοδοχείου πόσα κιλοβάττ καίουν σὲ 1 ἡμέρα; Καὶ πόσα καίουν σὲ 1 μῆνα;

8. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:
α) $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}$ β) $2\frac{1}{4}\times1\frac{1}{5}\times2\frac{2}{9}$ γ) $7\frac{1}{8}\times1\frac{5}{8}\times3\frac{3}{7}$

9. Ἐργάτρια ὑφαίνει σὲ 1 ὥρα $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης ὕφασμα καὶ ἐργάζεται $7\frac{1}{2}$ ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσο ὕφασμα ὑφαίνει σὲ 1 ἑβδομάδα;

10. Καθένας ἀπὸ 10 σάκκους ἔχει $22\frac{1}{2}$ ὀκάδες ἀλεύρι, ποὺ ἀξίζει $3\frac{1}{4}$ χιλιόδραχμα τὴν ὀκά. Πόσα χιλιόδραχμα ἀξίζει ὅλο τὸ ἀλεύρι;

11. Ἔμπορος ἀγόρασε 3 τόπια ὕφασμα ἀπὸ $52\frac{1}{2}$ πῆχες τὸ καθένα καὶ μὲ $4\frac{1}{2}$ λίρες τὴν πήχη. Πόσο τοῦ ἐστοίχισαν τὰ τρία αὐτὰ τόπια;

12. Ὁ προηγούμενος ἔμπορος ἀπὸ ὅλο τὸ ὕφασμα ποὺ ἀγόρασε, ἐκέρδισε $\frac{1}{2}$ τῆς λίρας τὴν πήχη. Πόσο εἶναι τὸ κέρδος του;

13. Τί ὄγκο ἔχει ὁ κύβος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴ α) $1\frac{1}{2}$ μέτρα καὶ β) $2\frac{1}{3}$ μέτρα;

14. Τί ὄγκο ἔχει ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ :

α) $2\frac{1}{2}$ μ. μῆκος, $3\frac{1}{2}$ μ. πλάτος καὶ $1\frac{1}{2}$ μ. ὕψος ;

β) $1\frac{1}{3}$ μ. » $1\frac{3}{4}$ μ. » καὶ $1\frac{1}{5}$ μ. »

Διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος.

Πρόβλημα 1ο. ***Μὲ 20 χιλιόδραχμα ἀγοράζομε $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης ὕφασμα. Πόσο ἀγοράσαμε τὴ 1 πήχη ;***

Ὅταν γνωρίζωμε πόσο ἀξίζουν πολλὲς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ ἕνα πρᾶγμα καὶ θέλομε νὰ μάθωμε πόσο ἀξίζει ἡ 1 ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸ ἴδιο πρᾶγμα, κάνομε διαίρεσι (μερισμό). Ὁ κανόνας ὅμως αὐτὸς ἀληθεύει καὶ ὅταν γνωρίζωμε πόσο ἀξίζουν πολλὲς κλασματικὲς μονάδες καὶ θέλομε νὰ μάθωμε πόσο ἀξίζει ἡ ἀκεραία μονάδα, καθὼς συμβαίνει στὸ πρόβλημα ποὺ θέλομε νὰ λύσωμε. Ἔτσι ἐδῶ θὰ κάνωμε, τὴ διαίρεσι 20 χλδρχ. : $\frac{5}{8}$. Γιὰ νὰ βροῦμε δὲ τὸ πηλίκο της λέγομε : Ἂν μὲ 20 χιλιόδραχμα ἀγοράζαμε 5 πῆχες, ἡ 1 πήχη θὰ ἄξιζε 20 χλδρχ. : $5 = \frac{20}{5}$ χιλιόδραχμα. Ἐπειδὴ ὅμως μὲ 20 χιλιόδραχμα ἀγοράσαμε $\frac{5}{8}$ τῆς πήχης, δηλαδὴ ἀγοράσαμε 8 φορὲς ὀλιγώτερο ὕφασμα, ἡ 1 πήχη θὰ ἀξίζη 8 φορὲς περισσότερο, δηλαδὴ θὰ ἀξίζη $\frac{20}{5} \times 8 = 20 \times \frac{8}{5}$ χιλιόδραχμα.

Ὥστε εἶναι 20 χλδρ. : $\frac{5}{8} = 20 \times \frac{8}{5}$ χλδρ. $= \frac{160}{5}$ χιλιόδραχμα = 32 χιλιόδραχμα.

Ἤτοι 1 πήχη ἀξίζει 32 χιλιόδραχμα.

Πρόβλημα 2ο. ***Μιὰ πήχη σειρήτι τὸ ἀγοράζομε μὲ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιοδράχμου. Πόσες πῆχες θὰ ἀγοράσωμε μὲ 6 χιλιόδραχμα ;***

Εἶναι φανερό, ὅτι θὰ ἀγοράσωμε τόσες πῆχες σειρήτι ὅσες φορὲς χωρᾶνε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιοδράχμου στὰ 6 χιλιόδραχμα.

Ἔτσι θὰ κάνωμε τὴ διαίρεσι (μέτρησι) $6 : \frac{3}{4}$ καὶ τὸ πηλίκο της θὰ παριστάνη πῆχες. Τώρα βλέπομε ὅτι:

Ἂν ἡ 1 πήχη σειρήτι ἄξιζε 3 χιλιόδραχμα, μὲ 6 χιλιόδραχμα θὰ ἀγοράζαμε $6 : 3 = \frac{6}{3}$ πῆχες. Τώρα ὅμως ποὺ ἡ 1 πήχη ἀξίζει $\frac{3}{4}$ χιλιόδραχμα, δηλαδὴ ἀξίζει 4 φορὲς ὀλιγώτερο, θὰ ἀγοράσωμε 4 φορὲς περισσότερες πῆχες, ἤτοι θὰ ἀγοράσωμε $\frac{6}{3} \times 4 = 6 \times \frac{4}{3}$ πῆχες.

Εἶναι λοιπὸν $6 : \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Ἤτοι μὲ 6 χιλιόδραχμα θὰ ἀγοράσωμε 8 πῆχες.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀριθμὸ διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένο.**

Ἔτσι εἶναι $\frac{4}{9} : \frac{7}{8} = \frac{4}{9} \times \frac{8}{7}$ καὶ $2\frac{1}{3} : \frac{3}{5} = 2\frac{1}{3} \times \frac{5}{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα:

3 ὀκ. $: \frac{2}{5}$, 2 πῆχ. $: \frac{5}{8}$, 4 ἑβδ. $: \frac{7}{9}$, 11 ὑάρ. $: \frac{1}{3}$, 5 λίρ. $: \frac{1}{12}$

2. $\frac{7}{8}$ τῆς πήχης ὕφασμα ἀξίζει 12 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 πήχη;

3. Μία φιάλη χωράει $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς λάδι. Πόσες φιάλες θὰ γεμίσωμε μὲ 48 ὀκάδες λάδι;

4. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα:

α) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, $\frac{9}{10} : \frac{7}{8}$, $\frac{5}{9} : \frac{2}{9}$, $\frac{7}{12} : \frac{11}{12}$

β) $2\frac{1}{4}:\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{2}:\frac{3}{5}$, $3\frac{3}{4}:\frac{1}{8}$, $4\frac{3}{7}:\frac{1}{14}$

γ) $\frac{7}{5}:\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}:\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}:\frac{3}{4}$, $5\frac{3}{8}:1\frac{1}{8}$

2η ὁμάδα.

1. $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαρη ἀξίζουν 10 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκά;

2. Μὲ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιοδράχμου ἀγόρασε μία, $\frac{3}{8}$ τῆς πήχης σειρήτι. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 πήχη;

3. Αὐτοκίνητο σὲ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας ἔτρεξε $32\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεχε τὴν ὥρα;

4. Ἕνα βαρέλι εἶναι γεμάτο μὲ λάδι κατὰ τὰ $\frac{7}{8}$ καὶ τὸ λάδι αὐτὸ ζυγίζει $52\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες χωράει ὅλο τὸ βαρέλι;

5. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα ἐπούλησε ἕνας τὰ $\frac{3}{10}$ καὶ τὸ ὕφασμα ποὺ ἐπούλησε ἦταν $36\frac{2}{5}$ πῆχες. Πόσες πῆχες ὕφασμα εἶχε τὸ τόπι αὐτό;

6. Ἀπὸ ἕνα σάκκο ἀλεύρι ἐπούλησε ἕνας τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τοῦ ἔμειναν $18\frac{3}{4}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες ἀλεύρι εἶχε ὁ σάκκος αὐτός;

3η ὁμάδα.

1. Ἀγόρασε ἕνας ὕφασμα μὲ $\frac{9}{20}$ τῆς λίρας τὴ γυάρδα καὶ ἐπλήρωσε 108 λίρες. Πόσες γυάρδες ἀγόρασε;

2. Ἕνα δράμι χρῶμα ἀξίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ χιλιοδράχμου. Πόσα δράμια ἀπὸ τὸ χρῶμα αὐτὸ θὰ ἀγοράσωμε μὲ $9\frac{3}{5}$ χιλιόδραχμα;

3. Ὑφάντρια σὲ 1 ὥρα ὑφαίνει $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου τάπητα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ ὑφάνῃ $4\frac{4}{5}$ μέτρα;

4. Ἀπὸ δέρμα μὲ πλάτος $1\frac{1}{4}$ μέτρα ἔκαμε ἕνας ζῶνες μὲ πλάτος $\frac{1}{50}$ τοῦ μέτρου τὴ κάθε μιά. Πόσες ζῶνες ἔκαμε;

5. Γνωρίζομε, ὅτι 1 γραμμάριο $= \frac{5}{16}$ τοῦ δραμίου. Νὰ τρέψετε $312\frac{1}{2}$ δράμια σὲ γραμμάρια.

4η ὁμάδα (διαίρεσις διὰ μεικτοῦ).

1. ***$2\frac{1}{2}$ ὀκάδες βούτυρο ἀξίζουν 100 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκά;***

Ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει $2\frac{1}{2}$ φορὲς ὀλιγώτερο ἀπὸ ὅτι ἀξίζουν οἱ $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Ἔτσι θὰ κάνωμε τὴ διαίρεσι 100 000 δραχμές : $2\frac{1}{2}$. Ἐδῶ ὅμως βλέπομε, ὅτι ὁ διαιρέτης εἶναι μεικτὸς ἀριθμός. ***Ἀλλ' ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μεικτὸς θὰ τὸν τρέπωμε πάντοτε σὲ κλάσμα.***

Ἔτσι ἡ διαίρεσι διὰ μεικτοῦ ἀριθμοῦ θὰ τρέπεται πάντοτε σὲ διαίρεσι διὰ κλάσματος. Ὥστε 100 000 δρχ. : $2\frac{1}{2} =$ 100 000 δρχ. : $\frac{5}{2} =$ 100 000 δρχ. $\times \frac{2}{5} =$ 40 000 δραχμές.

2. Ἀγόρασε ἕνας $2\frac{3}{4}$ ὀκάδες τυρὶ μὲ 55 000 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τὴ 1 ὀκά;

3. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

α) $5 : 1\frac{1}{3}$, $7 : 3\frac{1}{2}$, $8 : 2\frac{2}{5}$, $11 : 1\frac{3}{8}$, $33 : 1\frac{5}{6}$

β) $\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5} : 2\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4} : 1\frac{1}{20}$, $\frac{5}{8} : 6\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9} : 2\frac{4}{7}$

γ) $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{5} : 1\frac{3}{5}$, $2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{6}$, $1\frac{4}{5} : 1\frac{1}{2}$, $5\frac{5}{6} : 4\frac{1}{5}$

4. Γιὰ 1 ὑποκάμισο χρειάζονται $4\frac{3}{4}$ πήχες ὕφασμα. Πόσα ὑποκάμισα γίνονται μὲ 76 πήχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

5. Μία πλέκει $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου δαντέλλα σὲ $1\frac{3}{5}$ ὧρες. Πόση δαντέλλα πλέκει σὲ 1 ὥρα;

6. Ἀγόρασε ἕνας ὕφασμα μὲ $\frac{17}{20}$ τῆς λίρας τὴ γυάρδα καὶ ἐπλήρωσε $127\frac{1}{2}$ λίρες. Πόσες γυάρδες ἀγόρασε;

7. Ὑφάντρια ὑφαίνει $1\frac{1}{4}$ τῆς πήχης ὕφασμα σὲ 1 ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ ὑφάνη $9\frac{3}{8}$ πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

8. Αὐτοκίνητο ἔτρεξε $96\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα σὲ $2\frac{3}{4}$ ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε τὴν ὥρα;

9. Τεχνίτης ἐργάσθηκε $5\frac{1}{2}$ ὧρες καὶ ἔλαβε $68\frac{3}{8}$ χιλιόδραχμα. Πόσο ἐπληρώθηκε τὴν ὥρα;

10. Ὡρολόγιο σὲ $21\frac{1}{2}$ ὥρας πηγαίνει ἐμπρὸς $\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας. Πόσο πηγαίνει ἐμπρὸς σὲ 1 ὥρα;

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. α) Ἠμποροῦμε νὰ προσθέσωμε τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ ἔτσι ὅπως εἶναι;

β) Προσθέτομε δυὸ κλάσματα καὶ βρίσκομε ἄθροισμα $\frac{1+2}{5}$. Ποιὰ εἶναι αὐτὰ τὰ δύο κλάσματα;

γ) Προσθέτομε τρία κλάσματα καὶ βρίσκομε ἄθροισμα $\frac{2+3+4}{11}$. Ποιὰ εἶναι αὐτὰ τὰ τρία κλάσματα;

2. Ἕνας ἀλάτισε τρία δοχεῖα μὲ ἐλιές. Τὸ ἕνα μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἁλάτι, τὸ ἄλλο μὲ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ τὸ τρίτο μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἁλάτι. Πόσο ἁλάτι ἔρριψε στὰ τρία αὐτὰ δοχεῖα;

3. Ἕνας ἀγόρασε τὴ μιὰ ἡμέρα $3\frac{1}{2}$ ὀκάδες μῆλα καὶ τὴν ἄλλη $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς περισσότερο. Πόσα μῆλα ἀγόρασε τὴ δεύτερη ἡμέρα καὶ πόσα τὶς δυὸ ἡμέρες μαζί;

4. α) Ἠμποροῦμε νὰ κάνωμε τὴν ἀφαίρεσι $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}$;

β) Δυὸ κλάσματα ἔχουν διαφορὰ $\frac{7-3}{8}$. Ποιὰ εἶναι τὰ κλάσματα αὐτά;

5. Ποιὸ κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσετε στὸ $\frac{7}{13}$ γιὰ νὰ βρῆτε ἄθροισμα $\frac{11}{13}$;

6. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἰσότητες:

α) $\frac{4}{9}+\ldots=\frac{7}{9}$ β) $\frac{4}{11}+\ldots=2\frac{7}{11}$ γ) $3\frac{1}{8}+\ldots=5\frac{7}{8}$

δ) $\frac{3}{4}+\ldots=\frac{7}{8}$ ε) $\frac{2}{3}+\ldots=\frac{3}{4}$ στ) $2\frac{3}{5}+\ldots=3\frac{7}{10}$

ζ) $\frac{7}{8}+\ldots=3$ η) $1\frac{1}{3}+\ldots=5$ θ) $8\frac{9}{10}+\ldots=15$.

7. Μία ἐργάτρια ὕφανε τὴν 1η ἑβδομάδα $27\frac{3}{4}$ μέτρα ὕφασμα, τὴ 2η ἑβδομάδα ὕφανε $3\frac{7}{12}$ μέτρα ὀλιγώτερο καὶ τὴν τρίτη ἑβδομάδα ὕφανε $2\frac{5}{6}$ μέτρα ὀλιγώτερο, ἀπὸ ὅ,τι ὕφανε τὴ 2η ἑβδομάδα. α) Πόσα μέτρα ὕφανε τὴ 2η ἑβδομάδα. β) Πόσα μέτρα ὕφανε τὴ 3η καὶ γ) Πόσα μέτρα ὕφανε τὶς τρεῖς ἑβδομάδες μαζί;

8. α) Νὰ πῆτε ἀπὸ πρὶν ἂν τὰ ἐξαγόμενα ποὺ θὰ βρῆτε κάνοντας τὴν πρόσθεσι $\frac{5}{16}+\frac{5}{16}+\frac{5}{16}$ καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸ $\frac{5}{16}\times3$ θὰ εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα.

β) Τὸ ἄθροισμα $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$ νὰ τὸ γράψετε συντομώτερα.

γ) Τὸ γινόμενο $\frac{7}{13}\times3$ νὰ τὸ γράψετε ὡς ἄθροισμα.

9. Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενο $\frac{7}{12}\times3$.

10. Γνωρίζομε, ὅτι $10\times3=10+10+10$

καὶ $10\times\frac{3}{7}=\frac{10}{7}\times3=\frac{10}{7}+\frac{10}{7}+\frac{10}{7}$

Τί διαφορὰ βλέπετε στὸν πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ ἀκέραιο καὶ στὸν πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ κλάσμα;

11. Ἕνας ἐπούλησε $5\frac{1}{2}$ ὀκάδες βούτυρο μὲ 42 χιλιόδραχμα τὴν ὀκὰ καὶ μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε $82\frac{1}{2}$ ὀκάδες σιτάρι μὲ $2\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα τὴν ὀκά. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν;

12. Ἕνας εἶχε 100 μελίσσια. Ἀπὸ κάθε μελίσσι ἐπῆρε $7\frac{1}{2}$ ὀκάδες μέλι. Ὅλο δὲ τὸ μέλι ποὺ ἐπῆρε τὸ ἐπούλησε μὲ $15\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα τὴν ὀκά. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε;

13. Εἶναι 1) $2 : \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3}$ ἤτοι $2 \times \frac{4}{3} = 2 : \frac{3}{4}$

2) $9 : 3 = 9 : \frac{3}{1} = 9 \times \frac{1}{3}$ ἤτοι $9 \times \frac{1}{3} = 9 : 3.$

3) $4\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = 4\frac{1}{5} \times \frac{3}{2}$ ἤτοι $4\frac{1}{5} \times \frac{3}{2} = 4\frac{1}{5} : \frac{2}{3}$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ βλέπομε, ὅτι 1) ἡ διαίρεσις δι' ἀριθμοῦ ἔχει τὴν ἴδια σημασία μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφό του καὶ 2) ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸ ἔχει τὴν ἴδια σημασία μὲ τὴ διαίρεσι διὰ τοῦ ἀντιστρόφου του. Ἔτσι στὶς παρακάτω ἀσκήσεις νὰ τρέψετε τὶς διαιρέσεις σὲ πολλαπλασιασμοὺς καὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς σὲ διαιρέσεις.

α) $5 : 8,\ \frac{3}{5} : 4,\ 1\frac{2}{3} : 8,\ 4\frac{5}{8} : 11$

β) $4 \times \frac{1}{3},\ \frac{2}{5} \times \frac{1}{5},\ 2\frac{1}{2} \times \frac{3}{4},\ 1\frac{1}{6} \times 2\frac{1}{2}.$

14. Ἕνας εἶχε 84 ὀκάδες μακαρόνια καὶ τὰ ἔβαλε σὲ πακέτα ἀπὸ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τὸ καθένα. Ἐπούλησε δὲ τὸ κάθε πακέτο μὲ $3\frac{3}{4}$ χιλιόδραχμα. 1) Σὲ πόσα πακέτα ἔβαλε τὰ μακαρόνια; 2) Πόσα χρήματα εἰσέπραξε τὸ ὅλον;

15. Αὐτοκίνητο σὲ $5\frac{1}{2}$ ὧρες ἔτρεξε $178\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε τὴν ὥρα; Καὶ πόσες δραχμὲς ἔλαβε ἂν πληρώθηκε μὲ 2 000 δραχμὲς γιὰ κάθε χιλιόμετρο ποὺ ἔτρεξε;

16. Ἕνας ἠλεκτροτεχνίτης γιὰ ἐργασία 1 ὥρας παίρνει $7\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα. Ἔτσι τὸ ἡμερομίσθιό του γίνεται 60 χιλιόδραχμα. Πόσες ὧρες ἐργάζεται τὴν ἡμέρα καὶ πόσα χρήματα τοῦ περισσεύουν τὴν ἑβδομάδα, ἂν κάθε ἡμέρα ἐξοδεύει $4\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα;

17. Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $\frac{3}{5}$ γιὰ νὰ βροῦμε γινόμενο $2\frac{1}{10}$; Καὶ ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $\frac{7}{8}$ γιὰ νὰ γίνη $\frac{11}{24}$;

18. Διὰ ποίου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμε τὸν $3\frac{1}{4}$ γιὰ νὰ βροῦμε πηλίκο $4\frac{7}{8}$;

Λύσις προβλημάτων μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

Πρόβλημα 1ο. ***Δύο ὀκάδες ζάχαρη ἀξίζουν 26 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν οἱ 5 ὀκάδες;***

Θὰ βροῦμε πρῶτα πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ ζάχαρη καὶ ὕστερα πόσο ἀξίζουν οἱ 5 ὀκάδες.

Ἔτσι ἡ 1 ὀκὰ ἀξίζει 26 000 δραχ. : $2 = \frac{26\,000}{2}$ δρχ. $= 13000$ δραχ. καὶ οἱ 5 ὀκάδες ἀξίζουν $\frac{26\,000}{2}$ δρχ. $\times 5 = 65000$ δρχ.

Ὥστε: οἱ 5 ὀκάδες ἀξίζουν 65 000 δραχμές.

Πρόβλημα 2ο. ***Μία ὀκὰ τυρὶ ἀξίζει 20 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;***

Θὰ βροῦμε πρῶτα πόσο ἀξίζει τὸ 1 τέταρτο $\left(\text{τὸ } \frac{1}{4}\right)$ τῆς ὀκᾶς καὶ ὕστερα πόσο ἀξίζουν τὰ 3 τέταρτα $\left(\text{τὰ } \frac{3}{4}\right)$ τῆς ὀκᾶς.

'Αλλὰ 1 ὀκᾶ τυρὶ ἢ $\frac{4}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 20 000 δραχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » » ἀξίζει $\frac{20\,000}{4}$ δραχ.

καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ » » ἀξίζουν $\frac{20\,000}{4}$ δρ. $\times 3 =$

$= 5\,000$ δρχ. $\times\ 3 = 15\,000$ δραχ.

Ὥστε: τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 15 000 δραχμές.

Πρόβλημα 3ο. *Τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς βούτυρο ἀξίζουν 25 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;*

1ος τρόπος. Θὰ βροῦμε πρῶτα πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκᾶ βούτυρο καὶ ὕστερα πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς.

'Αλλ' ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 25 000 δραχμές.

τὸ $\frac{1}{8}$ ὀκ. ἀξίζει $\frac{25\,000}{5}$ δραχ. $= 5\,000$ δραχ.

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ ἢ 1 ὀκᾶ ἀξίζει 5 000 δρχ. $\times\ 8 = 40\,000$ δραχμές.

'Αλλ' ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἢ τὰ $\frac{4}{4}$ αὐτῆς ἀξίζουν 40 000 δραχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ ὀκ. ἀξίζει $\frac{40\,000}{4}$ δρχ. $= 10\,000$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀξίζουν 10 000 δρχ. $\times\ 3 = 30\,000$ δρχ.

Ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 30 000 δραχμές.

2ος τρόπος: Τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{3}{4}$, τὰ τρέπομε στὰ ὁμώνυμα $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{6}{8}$.

Καὶ τώρα, ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{8}$ ὀκ. ἀξίζουν 25 000 δραχμὲς

τὸ $\frac{1}{8}$ ὀκ. ἀξίζει $\frac{25\,000}{5}$ δρχ. $= 5\,000$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{6}{8}$ ὀκ. ἀξίζουν 5 000 δρ. $\times 6 = 30\,000$ »

Τώρα παρατηροῦμε, ὅτι καὶ στὰ τρία παραπάνω προβλήματα βρήκαμε πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ κατόπιν βρήκαμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων. Ἀδιάφορο ἂν ἡ μιὰ μονάδα, τῆς ὁποίας βρίσκομε τὴν τιμή, εἶναι ἀκεραία ἢ κλασματική.

Ὁ τρόπος νὰ βρίσκωμε πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας λέγεται *μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴν μονάδα*. Ἡ μέθοδος δὲ αὐτὴ εἶναι πολὺ συνηθισμένη.

Μὲ τὴ μέθοδο αὐτὴ θὰ λύσωμε καὶ τὰ παρακάτω προβλήματα.

Πρόβλημα 4ο. *Ἀπὸ 72 ὀκάδες ζάχαρη, ποὺ εἶχε ἕνας, ἐπούλησε τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῶν. Πόσες ὀκάδες ζάχαρη ἐπούλησε;*

Τὴ ζάχαρη τὴν ἐχώρισε σὲ 8 ἴσα μέρη καὶ ἐπούλησε τὰ 5. Ἔτσι ὅλη τὴ ζάχαρη τὴν παριστάνομε μὲ $\frac{8}{8}$.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ $\frac{8}{8}$ τῆς ζάχαρης εἶναι 72 ὀκάδες

τὸ $\frac{1}{8}$ » » εἶναι $\frac{72}{8}$ ὀκάδες

καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ » » εἶναι $\frac{72}{8}$ ὀκ. $\times$ 5=9 ὀκ. $\times$ 5 = 45 ὀκ. Ὥστε ἐπούλησε 45 ὀκάδες ζάχαρη.

Σημείωσις: *Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητοῦμε τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν 72 ὀκάδων, δηλαδὴ ζητοῦμε μέρος ἀριθμοῦ. Ἀλλὰ καθὼς γνωρίζομε (σελ. 61, παρατήρησις) γιὰ νὰ βροῦμε μέρος ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ κλάσμα ποὺ φανερώνει τὸ μέρος. Ὥστε τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν 72 ὀκάδων εἶναι 72 ὀκ. $\times \frac{5}{8} = \frac{72 \times 5}{8} = 45$ ὀκ.*

Πρόβλημα 5ο. *Τὰ $\frac{4}{7}$ τῆς ζάχαρης ποὺ εἶχε ἕνας εἶναι 25 ὀκάδες. Πόση εἶναι ὅλη ἡ ζάχαρη ποὺ εἶχε;*

'Αφοῦ τὰ $\frac{4}{7}$ τῆς ζάχαρης εἶναι 25 ὀκ.

τὸ $\frac{1}{7}$ » » » $\frac{25}{4}$ ὀκ.

καὶ τὰ $\frac{7}{7}$ ἢ ὅλη ἡ ζάχαρη εἶναι $\frac{25}{4}$ ὀκ. $\times 7 =$

$= \frac{25 \times 7}{4}$ ὀκ. $= 43\frac{3}{4}$ ὀκ.

Ὥστε ὅλη ἡ ζάχαρη ποὺ εἶχε ἦταν $43\frac{3}{4}$ ὀκάδες.

Σημείωσις: *Τὸ ἐξαγόμενο* $\frac{25 \times 7}{4}$ *τὸ βρίσκομε ἀπὸ τὴ διαίρεσι* $25 : \frac{7}{4}$. *Ὥστε: Ὅταν γνωρίζωμε μέρος ἀριθμοῦ καὶ θέλωμε νὰ βροῦμε ὅλον τὸν ἀριθμό, θὰ διαιρέσωμε τὸ γνωστὸ μέρος διὰ τοῦ κλάσματος ποὺ φανερώνει τὸ μέρος.*

Πρόβλημα 6ο. ***Τὰ*** $\frac{3}{4}$ ***ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι*** $\frac{1}{3}$. ***Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;***

'Αφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{1}{3}$

τὸ $\frac{1}{4}$ » » » $\frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι $\frac{1}{3 \times 3} \times 4 = \frac{4}{9}$

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς ποὺ ζητοῦμε εἶναι ὁ $\frac{4}{9}$. Καὶ πραγματικὰ γιατὶ $\frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Σημείωσις: *Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ εἶναι* $\frac{1}{3}$, *καὶ ζητοῦμε ὅλον τὸν ἀριθμό. Ἔπειτα δὲ ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὸ 5ο πρόβλημα, θὰ κάνωμε τὴ διαίρεσι*

$$\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9}.$$

Πρόβλημα 7ο. ***Μὲ*** $14\frac{1}{4}$ ***πῆχες ἔκαμε ἕνας 3 ὑποκάμισα. Πόσα ὑποκάμισα θὰ κάμη μὲ*** $28\frac{1}{2}$ ***πῆχες;***

Θὰ βροῦμε πρῶτα μὲ πόσες πῆχες ἔγινε 1 ἀπὸ τὰ ὑποκάμισα αὐτά. Βρίσκομε δὲ ὅτι 1 ὑποκάμισο γίνεται μὲ

$14\frac{1}{4}$ πῆχ. $: 3 = \frac{57}{4} : 3 = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$ πῆχες.

Ἀφοῦ λοιπὸν μὲ $4\frac{3}{4}$ πῆχες γίνεται 1 ὑποκάμισο, μὲ

$28\frac{1}{2}$ πῆχες γίνονται $28\frac{1}{2} : 4\frac{3}{4} = \frac{57}{2} : \frac{19}{4} = 6$ ὑποκάμισα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Νὰ λύσετε μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα τὰ προβλήματα:

1. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χιλιομέτρου πόσα μέτρα εἶναι;

2. Τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς πόσα δράμια εἶναι;

3. Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ στατῆρα πόσες ὀκάδες εἶναι;

4. Τὰ $\frac{7}{12}$ τῆς ὥρας πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι;

5. Νὰ βρῆτε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 200 καὶ τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ ἀριθ. 81.

6. Νὰ βρῆτε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ $5\frac{3}{4}$.

7. Τὰ $\frac{5}{8}$ ἀριθμοῦ εἶναι 50. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

8. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ εἶναι $6\frac{3}{8}$. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

9. Γιὰ ἕνα ὑποκάμισο χρειάζονται $5\frac{1}{8}$ πῆχες ὕφασμα. Πόσα ἴδια ὑποκάμισα γίνονται μὲ 41 πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

10. Γιὰ 3 σενδόνια χρειάζονται $10\frac{1}{2}$ πῆχες ὕφασμα. Πόσα ἴδια σενδόνια γίνονται μὲ $24\frac{1}{2}$ πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

11. Μία πλέκει σὲ 1 ὥρα $1\frac{1}{4}$ ρούπια δαντέλλα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ πλέξῃ $16\frac{1}{2}$ ρούπια ἀπὸ τὴν ἴδια δαντέλλα;

12. Ἀπὸ τὴ ζάχαρη ποὺ εἶχε ἕνας ἐπούλησε τὰ $\frac{3}{5}$. Οἱ ὀκάδες ὅμως αὐτὲς ἦταν 180. Πόσες ὀκάδες ζάχαρη εἶναι στὴν ἀρχή;

13. Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς τυρὶ ἀξίζουν 18 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν οἱ $2\frac{3}{5}$ ὀκάδες;

14. Ἀτμόπλοιο μὲ ταχύτητα $8\frac{1}{2}$ ναυτικῶν μιλίων τὴν ὥρα ἐπῆγε ἀπὸ ἕνα λιμάνι σὲ ἄλλο σὲ $10\frac{3}{4}$ ὧρες. Πόσα ναυτικὰ μίλια ἀπέχει τὸ ἕνα λιμάνι ἀπὸ τὸ ἄλλο;

15. Ταχυδρόμος βαδίζει $5\frac{1}{4}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ βαδίσῃ $60\frac{3}{8}$ χιλιόμετρα;

16. Ἀπὸ τὸ σπόρο σιταριοῦ ποὺ εἶχε ἕνας, ἐχρειάστηκε τὰ $\frac{5}{8}$ καὶ τοῦ ἔμειναν 75 ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες σπόρο εἶχε στὴν ἀρχή;

17. Ἀπὸ 1500 ὀκάδες σιτάρι ποὺ εἶχε ἕνας ἐκράτησε τὰ $\frac{2}{5}$ γιὰ τὴν οἰκογένειά του, καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ γιὰ σπόρο. Καὶ τὶς ὑπόλοιπες ὀκάδες τὶς ἐπούλησε. Πόσες ὀκάδες ἐπούλησε;

18. Ἕνας εἶχε 200 000 δραχμές. Μὲ τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῶν ἀγόρασε 6 ὀκάδες τυρί. Πόσο ἀγόρασε τὴν ὀκὰ τὸ τυρί;

19. Ἕνας εἶχε 600 ὀκάδες κρασὶ καὶ ἐπούλησε τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ὀκ. αὐτῶν. Τὸ ὑπόλοιπο κρασὶ τὸ ἔβαλε σὲ φιάλες, ποὺ κάθε μιὰ ἐχωροῦσε $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσες φιάλες ἐγέμισε;

20. Ἕνας εἶχε 1 000 000 δραχμές. Μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῶν ἐξώφλησε ἕνα χρέος του καὶ μὲ τὶς ὑπόλοιπες ἀγόρασε δυὸ ὅμοιες παιδικὲς ἐνδυμασίες. Πόσο ἀγόρασε τὴ 1 ἐνδυμασία;

21. Ἀγόρασε ἕνας κτῆμα ἀξίας 40 ἑκατομμυρίων δραχμῶν. Ἐπλήρωσε τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ἀξίας του καὶ τὰ ὑπόλοιπα θὰ τὰ πληρώσῃ σὲ τρεῖς ἴσες δόσεις.

α) Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε καὶ β) Πόση εἶναι ἡ κάθε δόσι;

22. Τρεῖς ἄνοιξαν κατάστημα μὲ κεφάλαια 60 ἑκατομμυρίων δραχμῶν. Ἀπὸ αὐτὰ κατέθεσε ὁ πρῶτος τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ σὲ ρευστὸ χρῆμα. Ὁ δὲ τρίτος κατέθεσε τὰ ὑπόλοιπα σὲ ἐμπορεύματα. α) Πόσα χρήματα κατέθεσε ὁ πρῶτος, β) Πόσα κατέθεσε ὁ δεύτερος καὶ γ) Ποιὰ εἶναι ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων;

23. Ἕνας εἶχε 1200 ὀκάδες κρασί. Ἀπὸ αὐτὲς ἐπούλησε πρῶτα τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ ἀπὸ ὅσες τοῦ ἔμειναν ἐπούλησε τὰ $\frac{5}{8}$. Πόσες ὀκάδες ἐπούλησε τὴν πρώτη φορὰ καὶ πόσες ἐπούλησε τὴ δεύτερη φορά;

24. Ἕνας ἀγόρασε 480 ὀκάδες σιτάρι. Καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ ἀπὸ τὶς ὀκάδες αὐτὲς τὰ ἀγόρασε μὲ 2 800 δραχμὲς τὴν ὀκά. Τὶς δὲ ὑπόλοιπες ὀκάδες τὶς ἀγόρασε μὲ 3 100 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε γιὰ ὅλο τὸ σιτάρι ποὺ ἀγόρασε;

25. Ἕνας εἶχε 360 ὀκάδες σιτάρι καὶ καλαμπόκι μαζί. Ἀπὸ τὶς ὀκάδες αὐτὲς τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι σιτάρι, ποὺ τὸ ἀγόρασε μὲ 2 700 δραχ. τὴν ὀκά. Τὸ καλαμπόκι τὸ ἀγόρασε σὲ τιμὴ ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς τιμῆς τοῦ σιταριοῦ. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε 1) γιὰ τὸ σιτάρι, 2) γιὰ τὸ καλαμπόκι καὶ 3) γιὰ τὰ δύο μαζί;

Τροπὴ κοινῶν κλασμάτων σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

1. Ἀπὸ τὶς κλασματικὲς μονάδες, οἱ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10\,000}$ κτλ. βλέπομε, ὅτι ἔχουν παρονομαστὴ τὴ μονάδα, ποὺ ἀκολουθεῖται ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά. Οἱ μονάδες αὐτὲς λέγονται *δεκαδικὲς κλασματικὲς μονάδες*.

Ἂν τώρα ἐπαναλάβωμε μιὰ δεκαδικὴ μονάδα θὰ πάρωμε ἕνα κλάσμα ποὺ τὸ λέγομε *δεκαδικό*.

Ἔτσι τὰ κλάσματα $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{59}{1000}$ κλπ. εἶναι δεκαδικά.

Ὥστε: **Δεκαδικὸ λέγεται τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει παρονομαστὴ τὴ μονάδα, ποὺ ἀκολουθεῖται ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά.**

Όταν ένα κλάσμα δὲν ἔχῃ παρονομαστὴ 10, 100, 1000 κτλ., δηλαδὴ ὅταν δὲν εἶναι δεκαδικό, λέγεται κοινό. Π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{11}$ κλπ. εἶναι κοινά.

2. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ποὺ ἔχομε μάθει δὲν εἶναι παρὰ δεκαδικὰ κλάσματα, γραμμένα μὲ ἄλλη μορφὴ ποὺ τὴ λέγομε *δεκαδικὴ μορφή*.

Π. χ. Τὰ 5 δέκατα δηλαδὴ τὰ $\frac{5}{10}$, στοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἐμάθαμε ὅτι γράφονται ἔτσι : 0,5.

Ὥστε $0{,}5 = \frac{5}{10}$. Ὅμοια τὰ 27 ἑκατοστά, δηλαδὴ τὰ $\frac{27}{100}$ τὰ γράφομε 0,27. Ὥστε $0{,}27 = \frac{27}{100}$ καὶ $0{,}035 = \frac{35}{1000}$.

Ἔτσι καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα λέγομε, ὅτι εἶναι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ὥστε οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται μὲ δύο μορφές, ἡ μιὰ εἶναι ἡ δεκαδικὴ μορφὴ καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ μορφὴ κλάσματος.

Καθὼς δὲ εἴδαμε παραπάνω:

Ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ γραμμένο μὲ δεκαδικὴ μορφή, γιὰ νὰ τὸν γράψωμε μὲ μορφὴ δεκαδικοῦ κλάσματος 1) παραλείπομε τὴν ὑποδιαστολή· ἔτσι θὰ λάβωμε ἀριθμὸ ἀκέραιο. 2) τὸν ἀκέραιο αὐτὸ ἀριθμὸ τὸν γράφομε ὡς ἀριθμητὴ καὶ 3) παρονομαστὴ γράφομε τὴ μονάδα 1 καὶ ἔπειτα ἀπὸ αὐτὴ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ ἔχει δοθῆ.

Ἔτσι εἶναι $42{,}5 = \frac{425}{10}$ καὶ $20{,}03 = \frac{2\,003}{100}$

δηλ. εἶναι $\frac{425}{10} = 42{,}5$ καὶ $\frac{2\,003}{100} = 20{,}03$.

Ὥστε: **Ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ γραμμένο μὲ μορφὴ δεκαδικοῦ κλάσματος, γιὰ νὰ τὸν γράψωμε μὲ δεκαδικὴ μορφὴ 1) γράφομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος ποὺ ἔχει δοθῆ καὶ**

2) ἀρχίζοντας ἀπὸ τὰ δεξιὰ χωρίζομε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ μὲ μιὰ ὑποδιαστολὴ τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ γράψετε μὲ μορφὴ δεκαδικοῦ κλάσματος τοὺς ἀριθμούς :

α) 0,2· 0,5· 0,1· 4,8· 15,7.

β) 0,03· 0,75· 1,45· 3,05· 140,08.

γ) 0,125· 0,147· 0,001· 1,875· 12,875.

δ) 0,1432· 0,0042· 0,0009· 1,0007.

2. Νὰ γράψετε μὲ δεκαδικὴ μορφὴ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα :

$$\frac{2}{10}, \quad \frac{7}{100}, \quad \frac{47}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \quad \frac{58}{10000}.$$

3. Νὰ γράψετε μὲ δεκαδικὴ μορφὴ τοὺς ἀριθμούς :

$$2\frac{3}{10}, \quad 21\frac{7}{100}, \quad 2\frac{52}{1000}, \quad 1\frac{5}{10000}, \quad 1293\frac{7}{10}.$$

Πῶς τρέπεται κοινὸ κλάσμα σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό.

Γνωρίζομε ὅτι $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$, δηλαδὴ $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Ὅτι τὸ $\frac{1}{2}$ ἰσοῦται μὲ τὸ 0,5, ἠμποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε, ὅταν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2 \\ \hline 10 & 0{,}5 \\ 0 & \end{array} \qquad \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ὥστε τὸ κοινὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ τὸ τρέψαμε στὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 0,5.

Ὅμοια, ἂν ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, θὰ βροῦμε

$$\begin{array}{l|l} 3 & 4 \\ \hline 30 & 0{,}75 \\ \;\;20 & \end{array}$$ ἤτοι θὰ βροῦμε $\frac{3}{4} = 0{,}75$

$$\left(\frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}\right)$$

Ἔτσι τὸ κοινὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τὸ τρέψαμε στὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 0,75.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ τρέψωμε κοινὸ κλάσμα σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.**

Παρατήρησις: Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, πρέπει πρῶτα νὰ τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα. Ἔτσι θὰ ἔχωμε $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$. Τώρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $\frac{5}{4}$ θὰ ἐξαγάγωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες καὶ θὰ βροῦμε, ὅτι $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$. Ἀλλ' ἂν τὰ κοινὰ αὐτὰ κλάσματα μᾶς δοθοῦν ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ 0,5 $\left(=\frac{1}{2}\right)$ καὶ 0,75 $\left(=\frac{3}{4}\right)$, τὸ ἄθροισμα $0{,}5+0{,}75$ βρίσκεται εὐκολώτατα ὅτι εἶναι 1,25.

Ὅμοια ὁ πολλαπλασιασμὸς $3\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\times\frac{3}{2}=$ $=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$ μὲ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς γίνεται ὅπως καὶ στοὺς ἀκεραίους, γιατὶ $3\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}=3{,}5\times 1{,}5=5{,}25$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ πράξεις στοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς εἶναι εὔκολες οἱ ἄνθρωποι προτιμοῦν νὰ κάνουν τοὺς λογαριασμούς τους μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Καὶ ὅταν στοὺς λογαριασμοὺς αὐτοὺς παρουσιάζονται κοινὰ κλάσματα, τὰ τρέπουν σὲ δεκαδικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κοινὰ κλάσματα:

α) $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{19}{50}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{80}$

β) $\frac{3}{16}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{37}{160}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{20}{25}$, $\frac{175}{250}$

γ) $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{30}{48}$, $\frac{9}{75}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{7}{56}$.

2. Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικούς, τοὺς ἀριθμούς:

$$2\frac{1}{2},\quad 3\frac{2}{5},\quad 17\frac{4}{5},\quad 3\frac{1}{8},\quad 7\frac{3}{20},\quad 11\frac{4}{25},\quad 8\frac{21}{400}$$

3. Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$.

Θὰ δῆτε, ὅτι ἡ διαίρεσις 2 : 3 δὲν τελειώνει. Δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸ κοινὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$. Γι᾽ αὐτὸ προχωροῦμε μόνο ὥς τὸ δεκαδικὸ ψηφίο ποὺ θέλομε π. χ. ὥς τὸ ἑκατοστό, ἢ ὥς τὸ χιλιοστό. Τότε δὲ λέγομε, ὅτι τὸ πηλίκο ποὺ βρίσκομε εἶναι μὲ ***προσέγγισι*** ἑνὸς ἑκατοστοῦ (ἂν σταματήσωμε στὰ ἑκατοστὰ) ἢ ἑνὸς χιλιοστοῦ (ἂν σταματήσωμε στὰ χιλιοστά).

4. Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κοινὰ κλάσματα:

$$\frac{5}{6},\quad \frac{3}{11},\quad \frac{7}{11},\quad \frac{3}{22},\quad \frac{5}{18},\quad \frac{13}{33}.$$

2η ὁμάδα.

1) Νὰ βρῆτε τὰ ἐξαγόμενα, τρέποντας τὰ κοινὰ κλάσματα σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς, στὶς πράξεις:

α) $\frac{1}{2} + 0{,}4$ β) $\frac{3}{4} + 0{,}25$ γ) $2\frac{3}{8} + 0{,}325$

δ) $4{,}25 + 2\frac{1}{2} + 1{,}65$ ε) $12\frac{4}{5} + 6\frac{1}{2} + 11{,}5$

2. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῆτε τὰ ἐξαγόμενα στὶς πράξεις.

α) $0{,}87 - \frac{3}{5}$ β) $\frac{3}{4} - 0{,}125$ γ) $12{,}25 - 2\frac{7}{40}$

3. Νὰ βρῆτε τὰ ἐξαγόμενα τρέποντας τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς σὲ κοινὰ κλάσματα στὶς πράξεις:

α) $\frac{2}{3} + 0{,}2$ β) $\frac{5}{6} + 0{,}05$ γ) $\frac{3}{11} + 0{,}25$

δ) $\frac{1}{6} - 0{,}04$ ε) $1\frac{1}{3} - 0{,}03$ στ) $2\frac{1}{11} - 0{,}7$

4. Ἕνας καφεπώλης ἀγόρασε καφὲ α) $3\frac{3}{4}$ ὀκ. β) 2,60 ὀκ. καὶ γ) $\frac{4}{5}$ ὀκ. Πόσο καφὲ ἀγόρασε;

5. Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ποὺ εἶχε ἕνας ἐπούλησε α) $52\frac{3}{4}$ μέτρα καὶ β) 22,25 μέτρα, τοῦ ἔμειναν δὲ 37,5 μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα εἶχε;

6. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα μὲ $52\frac{3}{8}$ πῆχες ἐπούλησε ἕνας 32,5 πῆχες. Πόσες πῆχες τοῦ ἔμειναν;

7. Σὲ μιὰ νέα σιδηροδρομικὴ γραμμή, ποὺ πρέπει νὰ ἔχῃ μῆκος $187\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα, ἔχουν στρωθῆ μὲ σιδηροτροχιὲς τὰ 93,75 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ στρωθοῦν ἀκόμα;

3η ὁμάδα.

1. Νὰ βρῆτε τὰ ἐξαγόμενα στὶς πράξεις;

α) $0{,}4 \times \frac{3}{4}$ β) $\frac{3}{5} \times 1{,}25$ γ) $0{,}4 \times 3\frac{7}{8}$

δ) $0{,}9 : \frac{3}{5}$ ε) $\frac{3}{4} : 0{,}25$ στ) $1\frac{1}{8} : 0{,}25$.

2. Αὐτοκίνητο ἔχει ταχύτητα 37,5 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσο διάστημα τρέχει σὲ $2\frac{1}{2}$ ὧρες;

3. Ὕφασμα ἐστοίχισε $2\frac{3}{20}$ λίρες τὴν γυάρδα. Πόσο στοιχίζουν 5,2 γυάρδες;

4. Μία φιάλη χωράει $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς κρασί. Πόσες τέτοιες φιάλες θὰ γεμίσωμε μὲ 7,5 ὀκάδες κρασί;

5. Πόσα σενδόνια θὰ κάνωμε μὲ $19\frac{1}{5}$ πῆχες, ἂν τὸ κάθε σενδόνι τὸ κάνωμε μὲ 3,2 πῆχες;

6. Ἕνας μὲ 16,4 χιλιόδραχμα ἀγόρασε ὕφασμα $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου. Πόσο ἀγόρασε τὸ μέτρο;

7. Μὲ $52\frac{1}{5}$ χιλιόδραχμα ἀγόρασε ἕνας 4,4 ὀκάδες λάδι. Πόσο τὸ ἀγόρασε τὴν ὀκά;

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σὲ 48 ὀκάδες μεῖγμα ἀπὸ βούτυρο καὶ λῖπος, οἱ 36 ὀκάδες εἶναι βούτυρο. Τί μέρος τοῦ μείγματος αὐτοῦ εἶναι τὸ βούτυρο;

2. Ἕνα σῶμα στὸν ἀέρα ζυγίζει 72 δράμια καὶ ὅταν τὸ βυθίσωμε στὸ νερὸ ζυγίζει 56 δράμια. Τί μέρος τοῦ βάρους του χάνει μέσα στὸ νερό;

3. Μετρήσαμε μιὰ μεταλλικὴ ράβδο δυὸ φορὲς σὲ δυὸ διαφορετικὲς θερμοκρασίες καὶ βρήκαμε τὴ μιὰ φορὰ ὅτι εἶχε μῆκος $7\frac{1}{2}$ πόντους καὶ τὴν ἄλλη φορὰ ὅτι εἶχε μῆκος $7\frac{13}{25}$ πόντους. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος, ποὺ εἶχε στὴ μικρότερη θερμοκρασία καὶ ποιὸ στὴ μεγαλύτερη;

4. Ἔμπορος ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα ἐπούλησε $23\frac{2}{5}$ μέτρα, $17\frac{1}{2}$ μέτρα καὶ τοῦ ἔμειναν $15\frac{7}{10}$ μέτρα. Πόσα μέτρα εἶχε τὸ τόπι αὐτό;

5. Ἀπὸ 100 ὀκάδες λάδι ἐπούλησε ἕνας $25\frac{3}{4}$ ὀκάδες καὶ $32\frac{5}{8}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ τὸ λάδι αὐτὸ μένουν ἀκόμα ἀπούλητες;

6. Μεῖγμα ἀπὸ ἴσα μέρη βούτυρο καὶ λῖπος ζυγίζει $28\frac{3}{5}$ ὀκ. Πόσο βούτυρο καὶ πόσο λῖπος ἔχει τὸ μεῖγμα αὐτό; Καὶ πόσο βούτυρο καὶ λῖπος θὰ εἶχε, ἂν τὸ μεῖγμα ἐζύγιζε $35\frac{1}{2}$ ὀκάδες;

7. Ἕνα μεῖγμα ἔχει $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες λῖπος καὶ διπλάσιο βούτυρο. Πόσο ζυγίζει τὸ μεῖγμα αὐτό;

8. Ἕνας ἀγοράζει κάθε ἡμέρα $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς γάλα. Πόσο γάλα ἀγοράζει σὲ μιὰ ἑβδομάδα; Καὶ πόσα πληρώνει ἂν τὸ γάλα κοστίζει 4000 δραχμὲς τὴν ὀκᾶ;

9. Ἕνας χρειάζεται γιὰ τὴ θέρμανσι τοῦ σπιτιοῦ του $5\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀνθρακίτη τὴν ἡμέρα. Πόσες ὀκάδες χρειάζεται γιὰ 1 μῆνα; Καὶ πόσες ὀκάδες χρειάζεται γιὰ τοὺς 4 μῆνες τοῦ χειμῶνα;

10. Ἀγόρασε ἕνας 1000 ὀκάδες ἐλιές. Καὶ ὅταν ἠθέλησε νὰ

τὶς πουλήση, εἶδε ὅτι εἶχαν φύρα τὰ $\frac{3}{40}$ τοῦ βάρους. Πόση ἦταν ἡ φύρα καὶ πόσες ὀκάδες ἐπούλησε;

11. Στὸ 0,1 τοῦ κτήματός του ἐφύτεψε ἕνας λαχανικά, στὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ ἔσπειρε σιτάρι καὶ στὸ ὑπόλοιπο ἔσπειρε κριθάρι. Σὲ πόσο μέρος τοῦ κτήματος ἔσπειρε κριθάρι;

12. Ἂν τὸ κτῆμα ποὺ ἀναφέρομε στὸ προηγούμενο πρόβλημα ἦταν 30 στρέμματα, σὲ πόσα στρέμματα ἐφύτεψε λαχανικά, σὲ πόσα ἔσπειρε σιτάρι καὶ σὲ πόσα στρέμματα ἔσπειρε κριθάρι;

13. Δυὸ ἀδελφοὶ ἐμοίρασαν μεταξύ τους ἕνα κτῆμα. Ὁ ἕνας ἐπῆρε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ καὶ ὁ ἄλλος τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἦταν 15 στρέμματα. Πόσα στρέμματα ἐπῆρε ὁ πρῶτος ἀδελφός; Καὶ πόσα στρέμματα ἦταν ὅλο τὸ κτῆμα;

14. Ἀγόρασε ἕνας $5\frac{1}{4}$ πῆχες ὕφασμα μὲ 210 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 πήχη καὶ πόσο οἱ 8,5 πῆχες;

15. Ἐπούλησε ἕνας 15 φιάλες, ποὺ ἡ κάθε μιὰ εἶχε $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς λάδι. Πόσες ὀκάδες λάδι εἶχαν οἱ φιάλες αὐτές; Καὶ πόσο τὸ ἐπούλησε τὴν ὀκά, ἂν ἀπὸ τὸ λάδι ποὺ εἶχαν οἱ φιάλες αὐτές, ἐπῆρε 135 000 δραχμές;

16. Ἕνας εἶχε $7\frac{1}{2}$ στατῆρες κάρβουνα. Ἔπειτα ἀγόρασε ἄλλους $8\frac{3}{4}$ στατῆρες ἀπὸ τὸ ἴδιο κάρβουνο. Ἀπὸ τὸ κάρβουνο ποὺ εἶχε ἐπούλησε $9\frac{7}{22}$ στατῆρες. Πόσο κάρβουνο ἔχει ἀκόμα;

17. Ἀπὸ 160 μέτρα ὕφασμα ποὺ εἶχε ἕνας, ἐπούλησε $49\frac{3}{4}$ μέτρα καὶ 87,5 μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔχει ἀκόμα;

18. Ἕνας εἶχε 3600 ὀκάδες σιτάρι. Ἀπὸ αὐτὸ τὰ $\frac{2}{9}$ τὰ ἐκράτησε γιὰ τὴν οἰκογένειά του. Τὸ $\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἐκράτησε γιὰ σπόρο καὶ τὸ ἄλλο τὸ ἐπούλησε. Νὰ βρῆτε α) πόσες ὀκάδες σιτάρι ἐκράτησε γιὰ τὴν οἰκογένειά του β) πόσες ὀκάδες ἐκράτησε γιὰ σπόρο καὶ γ) πόσες ὀκάδες σιτάρι ἐπούλησε.

19. Ἕνας εἶχε παραγγελία νὰ κάμη 10 ὑποκάμισα μὲ $4\frac{3}{4}$ πήχες τὸ καθένα. Ἀλλὰ τὰ ἔκαμε μὲ 0,25 τῆς πήχης τὸ καθένα περισσότερο. Πόσο ὕφασμα τοῦ ἐχρειάσθηκε γιὰ τὰ 10 ὑποκάμισα;

20. Ἔμπορος ἀγόρασε 5 τόπια ὕφασμα ἀπὸ $49\frac{1}{2}$ πῆχες τὸ καθένα καὶ μὲ 20,5 χιλιόδραχμα τὴν πήχη. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε;

21. Ἕνας ἄλεσε 360 ὀκάδες σιτάρι καὶ ἐπῆρε ἀλεύρι τὰ 0,9 τοῦ βάρους τοῦ σιταριοῦ. Τὸ ψωμὶ ποὺ θὰ γίνη ἀπὸ τὸ ἀλεύρι αὐτὸ θὰ εἶναι βαρύτερο κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$. Πόσες ὀκάδες ψωμὶ θὰ γίνη ἀπὸ τὸ ἀλεύρι αὐτό;

22. Τὸ πενταπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ὁ $120\frac{10}{11}$. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

23. Ποιὸς ἀριθμὸς ὅταν πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ τὸν 1,6 θὰ δώση γινόμενο τὸν ἀριθμὸ $\frac{13}{25}$;

24. Ὁ βαθμὸς τοῦ θερμομέτρου τοῦ Κελσίου εἶναι τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ θερμομέτρου τοῦ Ρεωμύρου. Νὰ βρῆτε πόσους βαθμοὺς Κελσίου κάμνουν 10 βαθμοὶ Ρεωμύρου.

25. Ὅμοια νὰ βρῆτε πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου κάνουν οἱ 30 βαθμοὶ Κελσίου.

26. Κῆπος μὲ σχῆμα ὀρθογώνιο ἔχει διαστάσεις $15\frac{1}{5}$ μέτρα καὶ 12,5 μέτρα. Τί ἐμβαδὸ ἔχει;

27. Κῆπος μὲ σχῆμα ὀρθογώνιο ἔχει βάσι $18\frac{2}{5}$ μέτρα καὶ ἐμβαδὸ 303,60 τετρ. μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος του;

28. Μιὰ στήλη ἀπὸ μάρμαρο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ βάσι τετράγωνο πλευρᾶς $\frac{1}{2}$ μέτρου καὶ ὕψος 1,6 μέτρα. Τί ὄγκο ἔχει ἡ στήλη αὐτή; Καὶ τί βάρος, ὅταν γνωρίζωμε, ὅτι τὸ μάρμαρο ἔχει εἰδικὸ βάρος 2,65;

29. Ἕνα δράμι νήματος κοστίζει 1 σελίνι καὶ 2 πέννες. Πόσο κοστίζουν τὰ 80 δράμια ἀπὸ τὸ ἴδιο νῆμα;

30. Μιὰ ἀτμομηχανὴ σὲ 5 ὧρες καίει 20 στατῆρες καὶ 12 ὀκ. κάρβουνο. Πόσο κάρβουνο καίει σὲ μιὰ ὥρα.

31. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) (15 πῆχες 3 ρούπια) $\times \frac{2}{3}$ β) (3 στατ. 12 ὀκ.) $\times \frac{3}{4}$

γ) (18 χιλιόμετρα 650 μέτρα) $\times 2\frac{1}{2}$

δ) (4 χιλιόγραμμα 250 γραμ.) $\times 1\frac{1}{5}$

32. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα:

α) (3 γυάρδες 2 πόδες) : $\frac{3}{4}$ β) (8 ὀκ. 300 δραμ.) : $\frac{2}{3}$

γ) (9 λίρες 15 σελ.) : $1\frac{1}{4}$ δ) (1 τόν. 400 χλγ. 200 γραμ.) : $2\frac{1}{2}$.

33. Ἕνας ἀγόρασε 17 χιλιόγραμμα ἀγγλικὸ μαλλὶ μὲ 3 λίρες 10 σελίνια καὶ 6 πέννες τὸ χιλιόγραμμο. Ἔπειτα δὲ τὸ ἐπούλησε μὲ 4 λίρες τὸ χιλιόγραμμο. Πόσα ἐκέρδισε;

34. Ἀγόρασε ἕνας ἀγγλικὸ ὕφασμα μὲ 2 λίρες τὴ γυάρδα. Ἐπλήρωσε δὲ 180 λίρες 10 σελ. Πόσες γυάρδες ἀγόρασε;

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΤ΄ ΤΑΞΙ

ΜΕΘΟΔΟΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Τί λέγεται ποσόν.— Στὰ διάφορα προβλήματα μᾶς δίνουν ἀριθμοὺς μέτρων, ὀκάδων, δραχμῶν κλπ. ἄλλοτε μικροτέρους καὶ ἄλλοτε μεγαλυτέρους. Γιατὶ τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος ἢ τὸ βάρος ἑνὸς πράγματος εἶναι ἄλλοτε μικρότερο καὶ ἄλλοτε μεγαλύτερο κλπ.

Κάθε πρᾶγμα, ποὺ ἠμπορεῖ νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται ποσόν.

Ἔτσι τὸ σιτάρι, τὸ κριθάρι, τὸ γάλα, τὸ νερό, τὰ μῆλα, τὰ ἀχλάδια κλπ. εἶναι ποσά.

2. Ὁμοειδῆ καὶ ἑτεροειδῆ ποσά.— Δύο ποσὰ ἀπὸ σιτάρι, ἢ δύο ποσὰ ἀπὸ βούτυρο, δηλαδὴ δύο ποσὰ ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος λέγονται ***ὁμοειδῆ***. Ἐνῶ ἕνα ποσὸ ἀπὸ μῆλα, καὶ ἕνα ποσὸ ἀπὸ ἀχλάδια καὶ γενικὰ δύο ποσὰ ποὺ γίνοντα ἀπὸ διαφορετικὰ εἴδη, λέγονται ***ἑτεροειδῆ***.

Νὰ δώσετε παραδείγματα μὲ ποσὰ ὁμοειδῆ καὶ μὲ ποσὰ ἑτεροειδῆ.

3. Μέτρησις ποσοῦ καὶ τιμή του.— Ὅταν λέγω, ὅτι σ' ἕνα καλάθι ἔχω πορτοκάλια, λέγω μόνο, ὅτι ἔχω ἕνα ποσὸ ἀπὸ πορτοκάλια. Γιὰ νὰ ἰδῶ ὅμως πόσα πορτοκάλια ἔχω στὸ καλάθι, πρέπει νὰ τὰ μετρήσω ἕνα, ἕνα.

Δηλαδὴ παίρνω γιὰ μονάδα τὸ 1 πορτοκάλι καὶ βρίσκω πόσες φορὲς τὸ ποσὸ τῶν πορτοκαλιῶν τοῦ καλαθιοῦ περιέχει τὴ μονάδα (τὸ 1 πορτοκάλι). Δηλαδὴ συγκρίνω τὸ ποσὸν αὐτὸ πρὸς τὴ μονάδα ποὺ ἐπῆρα. Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται *μέτρησις* τοῦ ποσοῦ.

῞Ωστε: *Μέτρησις ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ μὲ ἕνα ποσὸ ὁμοειδὲς καὶ ὡρισμένο, ποὺ λέγεται μονάδα.*

Τώρα ἀπὸ τὴ μέτρησι τῶν πορτοκαλιῶν, ἄς ποῦμε, ὅτι βρήκαμε πὼς τὸ καλάθι εἶχε 15 πορτοκάλια. Ὁ ἀριθμὸς 15 πορτοκάλια, λέγεται *τιμὴ* τοῦ ποσοῦ, ποὺ μετρήσαμε.

῎Ετσι π.χ. ὁ ἀριθμὸς 10 ὀκάδες μῆλα, εἶναι ἡ τιμὴ ποσοῦ ἀπὸ μῆλα, ποὺ τὸ ἐμετρήσαμε μὲ μονάδα 1 μῆλο.

Καὶ ἡ τιμὴ 20 ζευγάρια αὐγά, εἶναι ἡ τιμὴ ποσοῦ ἀπὸ αὐγά, ποὺ τὸ ἐμετρήσαμε μὲ μονάδα τὸ 1 ζευγάρι αὐγά.

῞Ωστε: **Τιμὴ ποσοῦ λέγεται ὁ ἀριθμὸς ποὺ βρίσκομε ἀπὸ τὴ μέτρησί του.**

4. Ἐξάρτησις δύο ἑτεροειδῶν ποσῶν.—Θέλομε νὰ ἀγοράσωμε μιὰ ποσότητα ἀπὸ ἕνα ὡρισμένο ὕφασμα.

Ἀλλ' εἶναι φανερό, ὅτι τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ θὰ δώσωμε, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ποσὸ ἢ ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος, ποὺ θέλομε νὰ ἀγοράσωμε.

῎Εχομε ἕνα κτῆμα καὶ θέλομε νὰ τὸ σκάψωμε. Ἀλλὰ πάλι εἶναι φανερό, ὅτι ὁ χρόνος ποὺ θὰ σκαφθῆ ὅλο τὸ κτῆμα, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοῦ πόσους ἐργάτες θὰ πάρωμε.

῞Ομοια βλέπομε, ὅτι τὸ πετρέλαιο ποὺ θὰ κάψη ἡ λάμπα μας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ χρόνο ποὺ θὰ εἶναι ἀναμμένη.

Ὑπάρχουν λοιπὸν ποσὰ ποὺ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου.

Νὰ δώσετε παραδείγματα ποσῶν, ποὺ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου.

5. Ποσὰ ἀνάλογα καὶ ποσὰ ἀντίστροφα.— Στὸ προηγούμενο παράδειγμα εἴδαμε, ὅτι ἡ τιμὴ ἑνὸς ὡρισμένου ὑφάσματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος του. Καὶ ὅτι ὁ χρόνος ποὺ τελειώνει μία ἐργασία, ἢ ἕνα ἔργο, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐργατῶν. Ἀλλὰ ἄλλη εἶναι ἡ ἐξάρτησις ἢ ἡ σχέσις τῶν δύο πρώτων ποσῶν καὶ ἄλλη ἡ σχέσις τῶν δύο ἄλλων.

Γιατὶ ἂν ἡ 1 πήχη ἀξίζει 40 000 δραχμές,

οἱ 2 πῆχες ἀξίζουν 80 000 (= 40 000 δρχ. × 2)

οἱ 3 » » 120 000 (= 40 000 δρχ. × 3)

τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς πήχ. ἀξίζει 20 000 (= 40 000 δρχ. : 2)

Ἐνῶ ἂν 12 ἐργάτες σκάβουν τὸ κτῆμα σὲ 8 ἡμέρες
οἱ $12 \times 2 = 24$ » » » » » $8:2=4$ ἡμ.
καὶ οἱ $12:2=6$ » » » » » $8 \times 2 = 16$ »

Ἔτσι στὸ α) παράδειγμα βλέπομε ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ πολλαπλασιάζεται (ἢ διαιρεῖται) ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Ἐνῶ στὸ β) παράδειγμα βλέπομε τὸ ἀντίστροφο. Δηλαδή, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ πολλαπλασιάζεται (ἢ διαιρεῖται) ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διαιρεῖται (ἢ πολλαπλασιάζεται) διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Δύο ποσά, ὅπως τὰ πρῶτα, λέγονται ***ἀνάλογα.*** Δύο ποσά, ὅπως τὰ δεύτερα, λέγονται ***ἀντιστρόφως ἀνάλογα*** ἢ ἁπλῶς ***ἀντίστροφα.***

Παρατήρησις: Ὅταν θέλωμε νὰ δοῦμε ἂν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα, πρέπει νὰ προσέχωμε ἂν ἔχουν μιὰ ἀπὸ τὶς παραπάνω σχέσεις. Δηλαδὴ ὅταν π. χ. διπλασιάζωμε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, πρέπει νὰ ἐξετάζωμε ἂν ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ 2. Ἔτσι δὲν πρέπει νὰ λέγωμε ἀόριστα ὅτι π. χ. δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, γιατὶ ὅταν αὐξάνεται τὸ ἕνα αὐξάνεται καὶ τὸ ἄλλο. Γιατὶ ἠμπορεῖ δύο ποσὰ νὰ αὐξάνουν μαζί, χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι ἀνάλογα. Π. χ. ὅταν ἕνα παιδὶ 6 χρονῶν ἔχει 1 μέτρο ἀνάστημα, ὅταν θὰ γίνη 12 χρονῶν, θὰ ἔχη βέβαια μεγαλύτερο ἀνάστημα, ἀλλ' ὄχι 2 μέτρων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. Ἡ τιμὴ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ τὸ μῆκος του τί ποσὰ εἶναι;
2. Ἐργάτης ἐργάζεται μὲ τὴν ὥρα. Οἱ ὧρες τῆς ἐργασίας του καὶ ἡ ἀμοιβή του τί ποσὰ εἶναι;
3. Ἐργάτες ἀνοίγουν ἕνα δρόμο, ἢ φτιάνουν ἕνα ὁποιοδήποτε ἔργο. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ τὸ ἔργο ποὺ φτιάνουν τί ποσὰ εἶναι;
4. Τὸ διάστημα ποὺ τρέχει ἕνα κινητὸ (αὐτοκίνητο, σιδηρόδρομος κλπ.), ὅταν ἔχη τὴν ἴδια ταχύτητα, καὶ ὁ χρόνος εἰς τὸν ὁποῖον κινεῖται τὸ κινητό, τί ποσὰ εἶναι;

2η ὁμάδα.

1. Ὁ χρόνος ποὺ θέλει ἕνα κινητὸ νὰ τρέξῃ ἕνα ὡρισμένο διάστημα καὶ ἡ ταχύτητά του τί ποσὰ εἶναι;

2. Τὸ πλάτος ἑνὸς τάπητα καὶ τὸ μῆκος του, ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ στρώσετε μὲ αὐτὸν ὅλο τὸ πάτωμα δωματίου, τί ποσὰ εἶναι;

3. Πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ἐξίσου ἕνα ποσὸ ἀπὸ σιτάρι εἰς οἰκογενείας. Ἡ μερίδα ποὺ θὰ πάρῃ ἀπὸ αὐτὸ κάθε οἰκογένεια καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν οἰκογενειῶν τί ποσὰ εἶναι;

4. Μὲ ἕνα ὡρισμένο ποσὸ δραχμῶν ποὺ ἔχουμε, θέλομε νὰ ἀγοράσωμε ὕφασμα. Ἡ τιμὴ τῆς 1 πήχης του καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ποὺ θὰ ἀγοράσωμε τί ποσὰ εἶναι;

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Πρόβλημα 1ο. ***Οἱ 4 ὀκάδες ζάχαρη ἀξίζουν 48 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀξίζουν 9 ὀκάδες ζάχαρη;***

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε δυὸ ποσά: τὸ βάρος τῆς ζάχαρης καὶ τὴν τιμή του, εἶναι δὲ τὰ ποσὰ αὐτὰ ἀνάλογα.

Ὥστε: ἀφοῦ οἱ 4 ὀκ. ἀξίζουν 48 000 δραχμὲς

ἡ 1 ὀκ. ἀξίζει $\frac{48\,000}{4}$ δραχμὲς

καὶ οἱ 9 ὀκ. ἀξίζουν $\frac{48\,000}{4} \times 9 = 12\,000 \times 9 =$

$= 108\,000$ δραχμές.

Ὥστε οἱ 9 ὀκάδες ζάχαρη ἀξίζουν 108 000 δραχμές.

Τώρα ὅμως βλέπομε ὅτι:

$$\frac{48\,000}{4} \times 9 = 48\,000 \times \frac{9}{4} = 108\,000 \text{ δραχμές.}$$

Ἔτσι ἂν παραστήσωμε τὴν ἀξία ποὺ ζητᾶμε (τὴν ἄγνωστη τιμὴ) μὲ τὸ X καὶ κάνωμε τὴν κατάταξι:

οἱ 4	ὀκ.	ἀξίζουν	48 000	δραχ.
οἱ 9	»	»	X	»

$$X = 48\,000 \text{ δραχ.} \times \frac{9}{4}$$

βλέπομε, ὅτι ἡ ἄγνωστη τιμὴ Χ εὑρίσκεται, ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὸν ὁμοειδῆ ἀριθμὸ 48 000 δραχ., ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο Χ, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{9}$ ποὺ κάνουν οἱ δυὸ γνωστὲς τιμὲς τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένο.

Πρόβλημα 2ο. *8 ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα χωράφι σὲ 15 ἡμέρες. Ἂν οἱ ἐργάτες ἦταν 5, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἔσκαφταν τὸ ἴδιο χωράφι;*

Ὑποθέτομε, ὅτι κάθε ἐργάτης στὸν ἴδιο χρόνο κάμνει ἴση ἐργασία. Ἔτσι οἱ ἐργάτες καὶ ὁ χρόνος, εἰς τὸν ὁποῖον κάνουν ἕνα ἔργο, εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Γι' αὐτό:
ἀφοῦ οἱ 8 ἐργάτες σκάφτουν ἕνα χωράφι σὲ 15 ἡμ.
ὁ 1 ἐργάτης θὰ σκάψη τὸ χωράφι σὲ 15×8 ἡμ.
καὶ οἱ 5 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ χωράφι σὲ $\frac{15 \times 8}{5} = 24$ ἡμ.

Ἔτσι, ἂν παραστήσωμε τὶς ἡμέρες ποὺ ζητᾶμε μὲ τὸ Χ καὶ κάνωμε τὴν κατάταξι

8 ἐργάτες σκάφτουν ἕνα χωράφι σὲ 15 ἡμέρες
5 » » » » » Χ »

$$X = 15 \times \frac{8}{5} = 24 \text{ ἡμέρες}$$

βλέπομε, ὅτι ἡ ἄγνωστη τιμὴ Χ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ὁμοειδῆ ἀριθμὸ 15 ἡμέρες, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{5}$, ποὺ κάνουν οἱ δυὸ γνωστὲς τιμὲς τοῦ ἄλλου ποσοῦ ὅπως ἔχει.

Στὰ δύο παραπάνω προβλήματα μᾶς δίνουν δύο ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα καὶ δύο ἀντίστοιχες τιμές τους. Στὸ πρῶτο πρόβλημα ἀντίστοιχες τιμὲς εἶναι οἱ 4 ὀκ. καὶ 48 000 δραχμὲς καὶ στὸ δεύτερο ἀντίστοιχες τιμὲς εἶναι οἱ 8 ἐργάτες καὶ οἱ 15 ἡμέρες. Ἀκόμα μᾶς δίνουν καὶ μιὰ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἀπὸ αὐτά, δηλαδὴ οἱ 9 ὀκ. στὸ πρῶτο πρόβλημα καὶ οἱ 5 ἐργάτες στὸ δεύτερο. Τέλος μᾶς ζητοῦν τὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ποὺ εἶναι ἀντίστοιχη στὴ νέα τιμὴ τοῦ πρώτου. Ἔτσι μᾶς δίνουν *τρεῖς* ἀριθμοὺς καὶ μᾶς ζητοῦν τέταρτο ἀριθμό.

Γιὰ τὸ λόγο αὐτό, τὰ παραπάνω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοιά τους, δηλαδὴ στὰ ὁποῖα δίνονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται νὰ βρεθῆ ἀπὸ αὐτοὺς τέταρτος (ὁ ἄγνωστος) λέγονται *προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.*

Τὰ παραπάνω δύο προβλήματα τὰ λύσαμε ἀρχικὰ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα. Καὶ κάθε ἄλλο πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν λύεται μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα. Ἂν ὅμως στὰ προβλήματα αὐτά, τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ποὺ μᾶς δίνουν καθὼς καὶ τὸν ἄγνωστο τοὺς κατατάξωμε σὲ δύο σειρές, ἔτσι ὥστε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ εἶναι στὴν ἴδια κατακόρυφη στήλη, τὰ λύομε μὲ νέο τρόπο, ποὺ τὸν δείχνουν τὰ ὅσα εἴπαμε στὶς παραπάνω δύο λύσεις. Δηλαδή:

Στὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν βρίσκομε τὴν ἄγνωστη τιμή, ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὸν ὁμοειδῆ ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ αὐτή, ἐπὶ τὸ κλάσμα ποὺ κάνουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, ἀντεστραμμένο, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, καὶ ὅπως ἔχει, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η ὁμάδα.

1. 36 ὀκάδες γάλα δίνουν 4 ὀκάδες βούτυρο. Πόσες ὀκάδες βούτυρο δίνουν 108 ὀκάδες ἀπὸ τὸ ἴδιο γάλα;

2. Αὐτοκίνητο μὲ σταθερὴ ταχύτητα, σὲ 3 ὧρες τρέχει 135 χιλιόμετρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ τρέξη 90 χιλιόμετρα;

3. Μιὰ βρύση δίνει 192 ὀκάδες νερὸ σὲ 4 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας. Πόσες ὀκάδες νερὸ θὰ δώση σὲ 15 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας;

4. Ἀγόρασε ἕνας 3 πῆχες ὕφασμα μὲ 135 000 δραχμές. Θέλει δὲ νὰ ἀγοράση ἄλλες 5 πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα. Πόσα θὰ πληρώση ἀκόμα;

5. Ἐργάτης ποὺ ἐργάζεται μὲ τὸ ἴδιο ἡμερομίσθιο, γιὰ 8 ἡμερομίσθια ἐπῆρε 240 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη γιὰ 15 ἡμερομίσθια;

6. Μὲ 3,5 ὀκάδες ἀλεύρι γίνεται 4 ὀκάδες ψωμί. Πόσες ὀκάδες ψωμὶ θὰ γίνουν μὲ 42 ὀκάδες ἀλεύρι;

7. Μὲ 31,5 πῆχες ὕφασμα γίνονται 6 ὑποκάμισα. Μὲ πόσες πῆχες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα θὰ γίνουν 9 ὑποκάμισα;

8. $3\frac{1}{2}$ γυάρδες ὕφασμα κοστίζουν 14 χάρτινες λίρες. Πόσο κοστίζουν 27 γυάρδες ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

9. Δυὸ μέτρα δαντέλλα ἀξίζουν 140 000 δραχμές. Μία ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ἀπὸ τὴν δαντέλλα αὐτή. Πόσα ἐπλήρωσε;

10. Εἴκοσι γραμμάρια καπνὸ ἀξίζουν 2500 δραχμές. Ἕνας ἀγόρασε $\frac{1}{4}$ τοῦ χιλιογράμμου ἀπὸ τὸν καπνὸ αὐτό. Πόσα ἐπλήρωσε;

11. Τρεῖς πῆχες ὕφασμα ἀξίζουν 96 000 δραχμές. Πόσο ἀξίζει 1 πήχη καὶ 5 ρούπια ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

12. Ἀγόρασε ἕνας 250 δράμια βούτυρο καὶ ἐπλήρωσε 27 500 δραχμές. Ἔπειτα ἀγόρασε 1 ὀκὰ καὶ 300 δράμια ἀπὸ τὸ ἴδιο βούτυρο. Πόσα ἐπλήρωσε γιὰ τὸ βούτυρο αὐτό;

2η ὁμάδα.

1. Ἐργάτης ἂν ἐργασθῆ 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ σκάψη ἕνα χωράφι σὲ 16 ἡμέρες. Ἐργάσθηκε ὅμως 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες ἔσκαψε τὸ χωράφι αὐτό;

2. Δύο αὐτοκίνητα ἔκαναν τὸ ἴδιο ταξείδι ἀπὸ μία πόλι σὲ ἄλλη. Τὸ ἕνα αὐτοκίνητο ἔκανε τὸ ταξείδι αὐτὸ σὲ 3 ὧρες μὲ ταχύτητα 40 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Τὸ ἄλλο αὐτοκίνητο, ποὺ εἶχε ταχύτητα 30 χιλιόμετρα τὴν ὥρα, σὲ πόσες ὧρες ἔκανε τὸ ἴδιο ταξείδι;

3. Ἐπρόκειτο νὰ μοιρασθοῦν ἐξίσου 600 ὀκάδες ἀλεύρι σὲ 15 οἰκογένειες, ἐμοιράσθηκαν ὅμως τελικὰ σὲ 5 οἰκογένειες περισσότερες. Τί μερίδιο ἐπῆρε κάθε οἰκογένεια;

4. Μία εἶχε 210 000 δραχμὲς καὶ μὲ αὐτὲς ἤθελε νὰ ἀγοράση μάλλινο ὕφασμα μὲ 42 000 δραχμὲς τὴν πήχη. Τελικὰ ὅμως, μὲ τὶς δραχμὲς ποὺ εἶχε, ἀγόρασε ὕφασμα 7 000 δραχμὲς τὴν πήχη φθηνότερο. Πόσες πῆχες ἀγόρασε;

5. Μία ἤθελε νὰ κάνη φόρεμα ἀπὸ ὕφασμα ποὺ εἶχε πλάτος 1 πήχη. Ἔτσι ἔπρεπε νὰ ἀγοράση 5 πῆχες. Τελικὰ ὅμως ἀγόρασε γιὰ τὸ φόρεμά της ὕφασμα μὲ πλάτος 1 πήχη καὶ 2 ρούπια. Πόσες πῆχες ἀγόρασε;

6. Ἕνας εἶχε σανίδες μὲ τὸ ἴδιο μῆκος. Ἀλλ' ἄλλες ἔχουν πλάτος 0,1 τοῦ μέτρου καὶ ἄλλες 0,08 τοῦ μέτρου. Γιὰ νὰ στρώση δὲ ἕνα πάτωμα δωματίου χρειάζεται 64 σανίδες μὲ τὸ πλάτος 0,1 τοῦ μέτρου. Ἀλλ' ἂν στρώση τὸ πάτωμα αὐτὸ ἀπὸ τὶς ἄλλες σανίδες πόσες θὰ χρειασθῆ;

7. Ὑφάντρια ἐργάσθηκε $6\frac{1}{2}$ ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὕφανε τάπητα σὲ 16 ἡμέρες. Θέλει ὅμως νὰ ὑφάνῃ ἕνα ἀκόμα ἴδιο τάπητα σὲ 13 ἡμέρες. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργασθῇ τὴν ἡμέρα;

8. Φορτηγὸ πλοῖο εἶχε πλήρωμα ἀπὸ 12 ἄτομα καὶ τροφὴ γι᾽ αὐτὰ γιὰ 20 ἡμέρες. Τὴ στιγμὴ ὅμως ποὺ ἐπρόκειτο νὰ ξεκινήσῃ ἐπῆρε γιὰ πλήρωμα ἄλλα 4 ἄτομα. Πόσες ἡμέρες θὰ περάσῃ μὲ τὶς ἴδιες τροφὲς ὅλο τὸ πλήρωμα;

Προβλήματα ποσοστῶν.

1. Πολλὲς φορὲς ὅταν ζητοῦμε ἀπὸ ἕνα ἔμπορο νὰ μᾶς πωλήσῃ τὸ ὕφασμά του φθηνότερα, μᾶς λέγει ὅτι θὰ μᾶς κάνῃ ἔκπτωσι 10 τοῖς ἑκατό. Δηλαδὴ σὲ 100 δραχμὲς ἀξία θὰ πληρώσωμε 10 δραχμὲς ὀλιγώτερο, ἤτοι θὰ πληρώσωμε 90 δραχμές. Ἔτσι σὲ 200 δραχμὲς ἀξία θὰ πληρώσωμε 180 δραχμὲς καὶ σὲ 1000 δρχ. ἀξία θὰ πληρώσωμε 900 δραχμές.

Ἡ ἔκπτωσις 10 τοῖς 100 γράφεται: 10%. Ἔτσι ἂν ἡ ἔκπτωσις εἶναι 15%, ἐννοοῦμε ὅτι σὲ κάθε 100 δραχμὲς ἀξία θὰ πληρώσωμε 15 δραχμὲς ὀλιγώτερο.

Ἄλλες φορὲς πάλι διαβάζομε, ὅτι οἱ ἐργάτες ζητοῦν γιὰ τὰ ἡμερομίσθιά τους αὔξησι 40%. Δηλαδὴ σὲ κάθε 100 δραχμὲς ζητοῦν αὔξησι 40 δραχμές, δηλαδὴ ζητοῦν νὰ παίρνουν 140 δραχμὲς ἀντὶ 100. Καὶ πολλὲς ἄλλες δοσοληψίες τους, οἱ ἄνθρωποι τὶς κανονίζουν μὲ βάσι τὸν 100.

Ἔτσι ὁ ἔμπορος λέγει, ὅτι πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 20%. Ὁ μεσίτης ζητάει μεσιτεία 2%. Οἱ τράπεζες παίρνουν προμήθεια 2,5%. Ὁ φόρος εἰσοδήματος εἶναι 5%. Ἀκόμα λέγομε, ὅτι ἡ φύρα ἀπὸ ἕνα ἐμπόρευμα ἦταν 3%, ἢ ὅτι αἱ γεννήσεις σὲ μία πόλη ἢ σὲ ἕνα κράτος αὐξήθηκαν κατὰ 25%. Ἄλλα πάλι ποσὰ κανονίζονται μὲ βάσι τὸ 1000, καὶ ἰδιαίτερα τὰ ἀσφάλιστρα. Ἔτσι ἀσφαλίζομε τὸ σπίτι μας ἀπὸ τὸν κίνδυνο πυρκαϊᾶς μὲ 3 ἐπὶ τοῖς χιλίοις καὶ γράφομε 3‰. Δηλαδὴ σὲ κάθε 1000 δραχμὲς πληρώνομε γιὰ ἀσφάλιστρα 3 δραχμές. Ἔτσι ἕνας ἔμπορος κάνει συμφωνία, ὅτι τὸ ρύζι ποὺ παρήγγειλε, ἐπιτρέπεται νὰ ἔχῃ ξένες οὐσίες $\frac{1}{2}$‰. Δηλαδὴ 1000 ὀκάδες ρύζι νὰ ἔχουν μισὴ ὀκὰ ξένες οὐσίες, ἢ 1000 τόννοι ρύζι νὰ ἔχουν μισὸ τόννο ξένες οὐσίες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1η ὁμάδα.

1. ***Ἔμπορος ἐπούλησε ἐμπορεύματα ἀξίας 450 000 δραχμῶν μὲ κέρδος 15 %. Πόσες δραχμὲς ἐκέρδισε;***

Σὲ	100	δραχμὲς ἐκέρδισε	15	δραχμὲς
σὲ	450 000	» »	X;	»

Ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Ἔτσι εἶναι

$$X = 15 \text{ δρχ.} \times \frac{450\,000}{100} = 15 \text{ δρχ.} \times 4500 = 67\,500 \text{ δραχμές.}$$

Ὥστε ὁ ἔμπορος αὐτὸς ἐκέρδισε 67 500 δραχμές.

Τώρα σημειώνομε, ὅτι ἡ ὅλη ἀξία τῶν 45 0000 δραχμῶν, στὴν ὁποία ὑπολογίσαμε τὸ κέρδος μὲ βάσι τὸ 15%, λέγεται ***ἀρχικὸ ποσό***, τὸ δὲ κέρδος τῶν 67 500 δραχμῶν λέγεται ***ποσοστό.***

Γενικὰ ***ποσοστὸ*** λέγεται τὸ ποσό, ποὺ μὲ βάσι τὸ 100 ἢ τὸ 1000, βρίσκομε ἀπὸ τὴν ὅλη ἀξία (ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ ποσό).

2. Ἔμπορος ἐπούλησε ἐμπορεύματα ἀξίας 165 250 δραχμῶν μὲ ἔκπτωσι 16%. Πόση εἶναι ἡ ἔκπτωσις; Καὶ πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε;

3. Μεῖγμα ἀπὸ βούτυρο καὶ λῖπος ζυγίζει 104 ὀκάδες. Τὰ δὲ 75 % αὐτοῦ εἶναι βούτυρο. Πόσο βούτυρο ἔχει τὸ μεῖγμα αὐτό; Καὶ πόσο λῖπος;

4. Σὲ κρᾶμα 75 ὀκάδων ἀπὸ χαλκὸ καὶ κασσίτερο, ὁ χαλκὸς εἶναι τὰ 60 % αὐτοῦ. Πόσες ὀκάδες χαλκὸ ἔχει τὸ κρᾶμα αὐτὸ καὶ πόσες κασσίτερο;

5. Σὲ μετάλλευμα 3 000 ὀκάδων τὰ 6,5 % εἶναι καθαρὸς σίδηρος. Πόσες ὀκάδες εἶναι ὁ καθαρὸς σίδηρος στὸ μετάλλευμα αὐτό;

6. Μεσίτης ἐνοίκιασε γιὰ λογαριασμὸ ἄλλου ἕνα σπίτι μὲ ἐνοίκιο 250 000 δραχμὲς τὸ μῆνα. Ἐπῆρε δὲ μεσιτεία 2 % ἀπὸ τὸν ἐνοικιαστὴ καὶ 2 % ἀπὸ τὸν ἰδιοκτήτη. Τί μεσιτεία ἐπῆρε; (Ἡ μεσιτεία στὶς περιπτώσεις αὐτὲς λογαριάζεται στὰ ἐνοίκια ἑνὸς χρόνου).

7. Ἔμπορος ἐπούλησε ἐμπορεύματα ἀξίας 600 000 δραχμῶν. Ἀπὸ τὰ μισὰ ἐμπορεύματα ἐκέρδισε 30 % καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα μισὰ ἐκέρδισε 25 %. Πόσο εἶναι τὸ κέρδος του ἀπὸ ὅλα αὐτὰ τὰ ἐμπορεύματα;

8. Ἕνας εἶχε δύο χωράφια. Τὴ μιὰ χρονιὰ ἐπῆρε σιτάρι ἀπὸ τὸ ἕνα χωράφι 1700 ὀκάδες καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο 1600 ὀκάδες. Τὴν ἄλλη χρονιὰ ἐπῆρε ἀπὸ τὸ πρῶτο 12 % περισσότερο σιτάρι καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο 8 % ὀλιγώτερο. Πόσο σιτάρι ἐπῆρε ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ χωράφια τὴ δεύτερη χρονιά;

9. Ἕνας ἀσφάλισε τὸ σπίτι του ἀπὸ τὸν κίνδυνο πυρκαϊᾶς μὲ ἀσφάλιστρα 2,5 ‰. Τὸ ἀσφάλισε δὲ γιὰ 40 000 000 δραχμές. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώση; (Στὶς περιπτώσεις αὐτὲς τὰ ἀσφάλιστρα εἶναι γιὰ ἕνα χρόνο. Δηλαδὴ τὸ κατάστημα ἢ τὸ σπίτι μὲ τὸ ποσοστὸ ποὺ πληρώνεται ἀσφαλίζεται γιὰ ἕνα χρόνο).

10. Ἀπὸ τοὺς 600 τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις οἰκοπέδου, τὰ 60% προορίζονται γιὰ τὴν οἰκοδομὴ τοῦ σπιτιοῦ, τὰ 15% γιὰ τὴν αὐλὴ καὶ τοὺς διαδρόμους καὶ τὰ ὑπόλοιπα γιὰ κῆπο. Σὲ πόσους τεκτονικοὺς πήχεις θὰ κτισθῆ τὸ σπίτι; Πόσους πήχεις θὰ πιάσουν ἡ αὐλὴ καὶ οἱ διάδρομοι; Καὶ πόσοι πήχεις θὰ μείνουν γιὰ τὸν κῆπο;

2η ὁμάδα.

1. ***Ἔμπορος ἐπούλησε ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 14% καὶ εἰσέπραξε 228 000 δραχμές. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ποὺ ἐπούλησε;***

Γιὰ ἀξία 100 δραχμῶν	εἰσπράττει	114 δραχμὲς
» » X »	»	228 000 »

Ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα. Ὥστε εἶναι:

$$X = 100 \text{ δρχ.} \times \frac{228\,000}{114} = 100 \text{ δρχ.} \times 2000 = 200\,000 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε τὰ ἐμπορεύματα ποὺ ἐπούλησε ὁ ἔμπορος αὐτὸς ἀξίζουν 200 000 δραχμές.

2. Ἔμπορος ἐπούλησε ἐμπορεύματα μὲ ζημία 8% καὶ εἰσέπραξε 276 000 δραχμές. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ποὺ ἐπούλησε;

3. Ἀσφάλισε ἕνας ἐμπορεύματα μὲ 5‰ καὶ ἐπλήρωσε 144 000 δραχμές. Πόσο ἄξιζαν τὰ ἐμπορεύματα ποὺ ἀσφάλισε;

4. Ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα καὶ ἐπλήρωσε μετρητὰ τὰ 45% τῆς ἀξίας τους. Ἔτσι ἐπλήρωσε 1 350 000 δραχμές. Τί ἀξία εἶχαν τὰ ἐμπορεύματα ποὺ ἀγόρασε;

5. Ἕνας μεσίτης ἀπὸ μιὰ πώλησι οἰκοπέδου ἐπῆρε μεσιτεία 105 000 δραχμές. Πόσο ἐπουλήθηκε τὸ οἰκόπεδο, ὅταν ἡ μεσιτεία ἦταν 3,5%;

6. Γιὰ νὰ ἀγοράση ἕνας ἕνα οἰκόπεδο ἐπλήρωσε μεσιτεία 2% καὶ ἀμοιβὴ ½% ἐπὶ τῆς ἀξίας του, στὸ δικηγόρο ποὺ ἐξήτασε τοὺς τίτλους τοῦ οἰκοπέδου. Ἡ μεσιτεία δὲ καὶ ἡ ἀμοιβὴ μαζὶ ἔφθασε τὶς 250 000 δραχμές. Πόσο ἀγοράσθηκε τὸ οἰκόπεδο;

3η ὁμάδα.

1. ***Ἕνας ἄλεσε 400 ὀκάδες σιτάρι καὶ ἐπῆρε 340 ὀκάδες ἀλεύρι. Τὸ σιτάρι αὐτὸ πόσο τοῖς ἑκατὸ ἔδωκε ἀλεύρι;***

Σὲ 400 ὀκάδες σιτάρι ἐπῆρε 340 ὀκάδες ἀλεύρι
στὶς 100 » » » X » »

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

$$\text{Ὥστε } X = 340 \text{ ὀκ. ἀλ.} \times \frac{100}{400} = \frac{340}{4} = 85\%.$$

Τὸ σιτάρι λοιπὸν αὐτὸ ἔδωκε 85% ἀλεύρι.

2. Ὕφασμα ἀξίας 320 000 δραχμ. τὸ ἀγόρασε μία μὲ 288 000 δραχμές. Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸ ἔκπτωσι τὸ ἀγόρασε;

3. Ἐμπόρευμα ἀξίας 500 000 δραχμῶν τὸ ἐπούλησε ἕνας μὲ 460 000 δραχμές. Πόσο τοῖς % ἐζημιώθηκε;

4. Ἐμπόρευμα ἀξίας 675 000 δραχμῶν τὸ ἐπούλησε ἕνας μὲ 810 000 δραχμές. Πόσο τοῖς % ἐκέρδισε;

5. Μὲ 340 ὀκάδες ἀλεύρι ἔκανε ἕνας ἀρτοποιὸς 425 ὀκάδες ψωμί. Πόσο τοῖς % τὸ ἀλεύρι αὐτὸ δίνει περισσότερο ψωμί;

6. Ἕνας ἐργάτης ἀπὸ 28 000 δραχμὲς ποὺ ἔπαιρνε ἡμερομίσθιο, παίρνει τώρα 36 400 δραχμές. Πόσο τοῖς % ἐπῆρε αὔξησι;

7. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει μισθὸ 1 600 000 δραχμὲς τὸ μῆνα. Ἀπὸ τὸ μισθὸ αὐτὸ πληρώνει γιὰ νοίκι 160 000 δραχμὲς τὸ μῆνα, γιὰ τὸν ἑαυτό του κρατάει 1 040 000 δραχμὲς καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ στέλλει στοὺς γονεῖς του. Ἀπὸ τὸ μισθό του πόσα τοῖς % πληρώνει γιὰ νοίκι, πόσα τοῖς % κρατάει γιὰ τὸν ἑαυτό του καὶ πόσα τοῖς % στέλλει στοὺς γονεῖς του;

4η ὁμάδα.

1. Ἐργοστάσιο κατεσκεύαζε 1 200 ζευγάρια κάλτσες τὴν ἡμέρα. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔφερε νέα μηχανήματα, κατασκευάζει τώρα κατὰ 125 % περισσότερες κάλτσες ἀπὸ πρίν. Πόσα ζευγάρια κάλτσες κατασκευάζει τώρα τὴν ἡμέρα;

2. Ἐμπόρευμα ἔχει μεικτὸ βάρος 374 ὀκάδες. Τὸ ἀπόβαρο (ἡ τάρα) εἶναι 7,5 %. Πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ βάρος;

3. Ἀγόρασε ἕνας 500 ὀκάδες κριθάρι μὲ 2 200 δραχμὲς τὴν ὀκὰ καὶ τὸ ἐπούλησε μὲ κέρδος 18 %. Πόσο ἐκέρδισε ἀπὸ ὅλο τὸ σιτάρι;

4. Ἔμπορος ἀγόρασε ἐλιὲς μὲ 6 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Τὰ μεταφορικὰ καὶ τὸ ἁλάτισμα τοῦ ἐστοίχισαν 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας. Ἀπὸ τὶς ἐλιὲς αὐτὲς ἐκέρδισε 25 %. Πόσο τὶς ἐπούλησε τὴν ὀκά;

5. Ἔκανε ἕνας μεῖγμα ἀπὸ 24 ὀκάδες βούτυρο καὶ 16 ὀκάδες λῖπος. Τὸ ὅλο μεῖγμα πόσο τοῖς % ἔχει βούτυρο καὶ πόσο τοῖς % ἔχει λῖπος;

6. Μιὰ ἔκανε φόρεμα καὶ τῆς ἐστοίχισε 490 000 δραχμές. Ἀπὸ τὶς δραχμὲς αὐτὲς τὶς 350 000 τὶς ἐπλήρωσε γιὰ τὸ ὕφασμα καὶ τὶς ὑπόλοιπες γιὰ τὰ ραφτικά. Πόσο τοῖς % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ὑφάσματος εἶναι τὰ ραφτικά;

7. Ἔμπορος ἀπὸ ὕφασμα, ποὺ ἐπούλησε μὲ κέρδος $22\frac{1}{2}$ %, εἰσέπραξε 367 500 δραχμές. Πόσο ἄξιζε τὸ ἐμπόρευμα ποὺ ἐπούλησε;

8. Ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπόρευμα καὶ ἐπλήρωσε μετρητὰ τὰ 40 % τῆς ἀξίας τους καὶ τὰ ὑπόλοιπα σὲ τρεῖς ἴσες μηνιαῖες δόσεις. Τὰ μετρητὰ ποὺ ἐπλήρωσε ἦταν 800 000 δραχμές. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ποὺ ἀγόρασε; Καὶ πόση ἦταν ἡ κάθε μία δόσις;

Σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν.

Πρόβλημα 1ο. ***Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθηκαν 4 ἡμέρες καὶ ἐπῆραν 360 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρουν 7 ἐργάτες, ἂν ἐργασθοῦν 6 ἡμέρες;***

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε τρία ποσά. Ἤτοι τοὺς ἐργάτες, τὶς ἡμέρες ἐργασίας καὶ τὴν ἀμοιβὴ τῆς ἐργασίας. Γιὰ νὰ τὸ λύσωμε, θὰ βροῦμε πρῶτα πόσα θὰ πάρουν οἱ 7 ἐργάτες ἂν ἐργασθοῦν ὅσες ἡμέρες ἐργάσθηκαν καὶ οἱ τρεῖς ἐργάτες, δηλαδὴ ἂν ἐργασθοῦν 4 ἡμέρες. Ἔτσι ἀφοῦ οἱ ἡμέρες ἐργασίας εἶναι οἱ ἴδιες γιὰ ὅλους τοὺς ἐργάτες, τὶς παραλείπομε καὶ τότε ἔχομε τὸ πρόβλημα:

οἱ	3	ἐργάτες ἐπῆραν	360 000	δραχμὲς
οἱ	7	» »	X	»

$$\text{Ὥστε}\quad X = 360\,000 \text{ δρχ.} \times \frac{7}{3} = 840\,000 \text{ δραχμὲς}$$

γιατὶ οἱ ἐργάτες καὶ ἡ ἀμοιβὴ τῆς ἐργασίας τους εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

Τώρα ἀφοῦ βρήκαμε πόσα θὰ πάρουν οἱ 7 ἐργάτες γιὰ 4 ἡμέρες ἐργασία, θὰ βροῦμε πόσα θὰ πάρουν οἱ ἴδιοι ἐργάτες γιὰ 6 ἡμέρες ἐργασίας. Ἔτσι, τώρα ἔχομε τὸ πρόβλημα:

γιὰ	4	ἡμέρες ἐργασίας ἐπῆραν	840 000	δραχμὲς
»	6	» » »	X	»

$$\text{Ὥστε}\quad X = 840\,000 \text{ δρχ.} \times \frac{6}{4} = 1\,260\,000 \text{ δρχ.}$$

γιατὶ οἱ ἡμέρες ἐργασίας καὶ ἡ ἀμοιβή τους εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

Ὥστε οἱ 7 ἐργάτες γιὰ 6 ἡμέρες ἐργασίας θὰ πάρουν 1 260 000 δραχμές.

Τώρα βλέπομε, ὅτι γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ποὺ μᾶς δόθηκε, τὸ ἀνελύσαμε σὲ δυὸ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτο ἀπὸ αὐτὰ βρήκαμε τὶς $840\,000 \text{ δρχ.} = 360\,000 \times \frac{7}{3}$ καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερο βρήκαμε τὶς $1\,260\,000 \text{ δρχ.} = 840\,000 \text{ δρχ.} \times \frac{6}{4} = 360\,000 \text{ δρχ.} \times \frac{7}{3} \times \frac{6}{4}$.

Γιὰ τὸ λόγο τοῦτο τὸ ἀρχικὸ πρόβλημα μὲ τὰ τρία ποσὰ λέγεται πρόβλημα *τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν.*

Πρόβλημα 2ο. *14 ἐργάτες ἂν ἐργασθοῦν 8 ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ σκάψουν ἕνα χωράφι σὲ 9 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάτες ἂν ἐργασθοῦν 7 ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο χωράφι σὲ 6 ἡμέρες;*

Καὶ στὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομε τρία ποσά. Τοὺς ἐργάτες, τὶς ὧρες τῆς ἐργασίας τους καὶ τὸ χρόνο ποὺ τελειώνουν ἕνα ἔργο. Ἔτσι κι ἐδῶ θὰ βροῦμε πρῶτα πόσοι ἐργάτες ὅταν ἐργάζωνται 7 ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ σκάψουν τὸ χωράφι σὲ 9 ἡμέρες. Ἔτσι ἔχομε τὸ πρόβλημα:

14 ἐργ. σκάφτουν ἕνα χωράφι μὲ ἐργασία 8 ὧρ. τὴν ἡμ.
X » » » » » » 7 » » »

Ὥστε $X = 14$ ἐργ. $\times \frac{8}{7} = 16$ ἐργ.

γιατὶ οἱ ἐργάτες καὶ οἱ ὧρες ἐργασίας εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

Τώρα ἀφοῦ βρήκαμε πόσοι ἐργάτες, ὅταν ἐργάζωνται 7 ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ σκάψουν τὸ χωράφι σὲ 9 ἡμέρες, θὰ βροῦμε πόσοι ἐργάτες ὅταν ἐργάζωνται 7 ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ σκάψουν τὸ χωράφι σὲ 6 ἡμέρες.

Ὥστε ἔχομε τὸ πρόβλημα:

16 ἐργάτες σκάφτουν τὸ χωράφι σὲ 9 ἡμέρες
X » » » » » 6 »

Καὶ $X = 16$ ἐργάτες $\times \frac{9}{6}$ ἢ ἐπειδὴ βρήκαμε ὅτι:

16 ἐργ. $= 14$ ἐργ. $\times \frac{8}{7}$, $X = 14$ ἐργ. $\times \frac{8}{7} \times \frac{9}{6} = 24$ ἐργ.

24 λοιπὸν ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ χωράφι σὲ 6 ἡμέρες ἂν ἐργασθοῦν 7 ὧρες τὴν ἡμέρα.

Τώρα βλέπομε, ὅτι καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο τὸ ἀναλύσαμε σὲ δυὸ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· δηλαδὴ καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν. Λύομε δὲ τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὸ προηγούμενο συντομώτερα ὡς ἑξῆς: Κατατάσσομε τοὺς γνωστοὺς ἀριθμούς τους καὶ τὸν ἄγνωστον σὲ δυὸ σειρές, ὅπως ἐκάναμε καὶ στὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

3 ἐργ. 4 ἡμ. 360 000 δρχ.
7 ἐργ. 6 ἡμ. X »

$X = 360\,000$ δρχ. $\times \frac{7}{3} \times \frac{6}{4}$

14 ἐργ. 8 ὧρ. 9 ἡμ.
X » 7 » 6 »

$X = 14$ ἐργάτες $\times \frac{8}{7} \times \frac{9}{6}$

Ἂν τώρα προσέξωμε τὰ ἐξαγόμενα, συμπεραίνομε τὸν κανόνα: ***Στὰ προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἄγνωστο X, πολλαπλασιάζομε τὸν ὁμοειδῆ ἀριθμὸ ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν X, ἐπὶ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο τιμὲς κάθε ποσοῦ, ὅπως ἔχει, ἂν τὸ ποσὸν αὐτὸ εἶναι ἀντίστροφο μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου καὶ ἀντεστραμμένο ἂν εἶναι ἀνάλογο μὲ αὐτό.***

Στὴν ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνα αὐτοῦ θὰ προσέχωμε νὰ συγκρίνωμε τὰ ποσὰ ἕνα, ἕνα χωριστὰ μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου. Ἔτσι ἂν τὰ ποσὰ εἶναι τρία θὰ κάνωμε δυὸ συγκρίσεις, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι τέσσερα θὰ κάνωμε τρεῖς συγκρίσεις κ.ο.κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. 5 ἐργάτες ἐργάσθηκαν 6 ἡμέρες καὶ ἐπῆραν 600 000 δραχμ., 12 ἐργάτες ἂν ἐργασθοῦν 4 ἡμέρες, πόσες δραχμὲς θὰ πάρουν;

2. 6 ἐργάτες σκάφτουν ἕνα κτῆμα ἀπὸ 12 στρέμματα σὲ 12 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες 8 ἐργάτες θὰ σκάψουν ἕνα κτῆμα ἀπὸ 16 στρέμματα;

3. Γιὰ νὰ μεταφέρη ἕνας 5 κιβώτια γεμάτα ἐμπορεύματα σὲ ἀπόστασι 6 χιλιομέτρων, ἐπῆρε 72 000 δραχμές. Ἔπειτα μετέφερε 9 τέτοια κιβώτια σὲ ἀπόστασι 8 χιλιομέτρων. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε;

4. 2 ἴδιες μηχανὲς σὲ 5 ὧρες κατασκευάζουν 200 ζευγάρια κάλτσες, 3 μηχανὲς σὰν τὶς πρῶτες σὲ 6 ὧρες πόσα ζευγάρια κάλτσες θὰ κατασκευάσουν;

5. Ἕνας μύλος ἀλέθει σὲ 3 ὧρες 4 σάκκους σιτάρι ἀπὸ 48 ὀκάδες ὁ καθένας. Ὁ ἴδιος μύλος σὲ πόσες ὧρες θὰ ἀλέση 12 σάκκους μὲ 64 ὀκάδες σιτάρι ὁ καθένας;

6. Ἐργοστάσιο μὲ 100 χιλιόγραμμα νῆμα κατασκευάζει ὕφασμα μὲ μῆκος 400 μέτρα καὶ πλάτος 1,2 μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα μὲ πλάτος 1 μέτρο θὰ κατασκευάση μὲ 250 χιλιόγραμμα ἀπὸ τὸ ἴδιο νῆμα;

7. 20 παιδικὰ φορέματα ἔγιναν μὲ 60 πῆχες ὕφασμα, ποὺ εἶχε 1 πήχη πλάτος. Πόσα ὅμοια φορέματα θὰ γίνουν μὲ 120 πῆχες ὕφασμα, ὅταν ἔχη πλάτος 1 πήχη καὶ 2 ρούπια;

8. 7 ἐργάτες σὲ 5 ἡμέρες σκάφτουν ἕνα χωράφι ἀπὸ 17,5 στρέμματα. Πόσοι ἐργάτες σὲ 11 ἡμέρες θὰ σκάψουν ἕνα χωράφι ἀπὸ 49,5 στρέμματα;

100 δρχ. κεφ. σὲ 360 ἡμέρες φέρουν τόκ. 9 δρχ.
480 000 » » » 20 » » » X »

$$X = 9 \text{ δρχ.} \times \frac{480\,000}{100} \times \frac{20}{360} = \frac{9 \times 480\,000 \times 20}{36\,000} = 2\,400 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε ὁ τόκος ποὺ ζητοῦμε εἶναι 2 400 δραχμές.

Ἀπὸ τοῦτο δὲ τὸ πρόβλημα βρίσκομε, ὅτι:

$$T = \frac{E \cdot K \cdot X}{36\,000} \text{ (χρόνος σὲ ἡμέρες)} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω τρία προβλήματα ἔχομε τὸν κανόνα: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐπιτόκιο ἐπὶ τὸ κεφάλαιο καὶ ἐπὶ τὸ χρόνο καὶ τὸ γινόμενό τους διαιροῦμε διὰ τοῦ 100, ἂν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη, διὰ τοῦ 1 200, ἂν δίνεται σὲ μῆνες, καὶ διὰ τοῦ 36 000, ἂν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες.***

Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς παραπάνω τρεῖς ἰσότητες (1), (2) καὶ (3) λέγεται *τύπος* τοῦ τόκου. Ἠμποροῦμε ὅμως νὰ τοὺς γράψωμε καὶ τοὺς τρεῖς μαζὶ ὡς ἕνα τύπο:

$$T = \frac{E \cdot K \cdot X}{100 \text{ ἢ } 1\,200 \text{ ἢ } 36\,000}$$

Ἔτσι ἂν $E = 10$, $K = 180\,000$ καὶ $X = 1$ ἔτος καὶ 3 μῆνες = 15 μῆνες, βρίσκομε ἀμέσως

$$T = \frac{10 \times 180\,000 \times 15}{1200} = 22\,500 \text{ δραχμές.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Νὰ βρῆτε (ἀπὸ μνήμης) τὸν τόκο γιὰ 1 ἔτος:
α) τῶν 50 000 δραχ. μὲ 4 % (500 × 4 = 2 000),
β) τῶν 20 000 δραχ. μὲ 3 %, γ) τῶν 60 000 δρχ. μὲ 5 %,
δ) τῶν 100 λιρῶν μὲ 5 %, ε) τῶν 400 δολλαρίων μὲ 2 %.

2. Νὰ βρῆτε τὸν τόκο:
α) τῶν 350 000 δραχμῶν μὲ 4 % γιὰ 2 ἔτη,
β) » 420 000 » » 5 % » 4 »
γ) » 800 000 » » 4,5 % » 3 »
δ) » 600 000 » » $6\frac{1}{2}$ » 5 »

3. Νὰ βρῆτε τὸν τόκο:

α) τῶν 3 000 000 δραχ. μὲ 6 % γιὰ 1 μῆνα

β) » 450 000 » » 9 % » 3 μῆνες

γ) » 175 500 » » 7 % » 1 ἔτος καὶ 4 μῆνες.

δ) » 1 800 δολλ. » $4\frac{1}{2}$ % γιὰ $1\frac{1}{6}$ ἔτη.

4. Νὰ βρῆτε τὸν τόκο:

α) τῶν 630 000 δραχ. μὲ 9 % γιὰ 40 ἡμέρες

β) τῶν 380 000 δραχ. μὲ 5 % γιὰ 1 μῆνα καὶ 24 ἡμέρες

γ) τῶν 1 640 λιρῶν μὲ 4,5 % γιὰ 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες

δ) τῶν 225 000 δραχ. μὲ 6 % γιὰ 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρες.

5. Ἕνας εἶχε 1 800 000 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς τὸ $\frac{1}{3}$ τὸ ἐδάνεισε μὲ 10 % γιὰ 8 μῆνες καὶ τὶς ὑπόλοιπες μὲ 6 % γιὰ 5 μῆνες. Πόσος εἶναι ὅλος ὁ τόκος ποὺ ἐπῆρε ἀπὸ τὶς δραχμὲς ποὺ εἶχε;

6. Ἕνας στὶς 15 τοῦ Μάρτη δανείσθηκε 640 000 δραχμὲς μὲ 4,5 % καὶ ἐξώφλησε τὸ δάνειο στὶς 15 τοῦ Αὐγούστου τοῦ ἰδίου ἔτους. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε;

7. (Τοκάριθμοι καὶ σταθεροὶ διαιρέτες). ***Πόσο τόκο φέρουν 270 000 δραχμὲς σὲ 45 ἡμέρες μὲ 6 %;***

Εἶναι $T = \frac{6 \times 270\,000 \times 45}{36\,000}$ ἢ ἂν διαιρέσωμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 6 εἶναι: $T = \frac{270\,000 \times 45}{6\,000}$

Ἔτσι ἐδῶ βρίσκομε τὸν τόκο, ὅταν πολλαπλασιάσωμε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὶς ἡμέρες καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ 36 000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου.

Τὸ γινόμενο τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὶς ἡμέρες λέγεται ***τοκάριθμος*** καὶ τὸ πηλίκο τοῦ 36 000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου λέγεται ***σταθερὸς διαιρέτης.***

Ἔτσι: ***Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες, βρίσκομε τὸν τόκο κεφαλαίου, ὅταν διαιρέσωμε τὸν τοκάριθμο διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτη.***

8. Νὰ βρῆτε μὲ τὸν τοκάριθμο τὸν τόκο:

α) τῶν 200 000 δρχ. γιὰ 40 ἡμέρ. μὲ 9 % (36 000 : 9)

β) » 630 000 » » 25 » » 8 % (36 000 : 8)

γ) » 267 000 » » 99 » » 4 %

δ) » 72 000 » » 1 μῆνα καὶ 15 ἡμ. μὲ 5 %.

2. Πῶς βρίσκεται τὸ κεφάλαιο.

Πρόβλημα: ***Ποιὸ κεφάλαιο μὲ 8 % δίνει σὲ 3 ἔτη τόκο 90 000 δραχμές;***

100 δρχ. κεφ. σὲ 1 ἔτος δίνουν τόκο 8 δραχμὲς
X » » » 3 ἔτη » » 90 000 δρχ.

Ὁ τόκος καὶ τὸ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

Ὁ χρόνος ὅμως καὶ τὸ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Γιατὶ ἂν 8 δραχμὲς τόκο δίνουν οἱ 100 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος, τὶς 8 δραχμὲς τόκο, διπλάσιο κεφάλαιο θὰ τὶς δώση σὲ μισὸ ἔτος.

Ἔτσι εἶναι:

$$X = 100 \text{ δρχ.} \times \frac{1}{3} \times \frac{90\,000}{8} = \frac{100 \times 90\,000}{3 \times 8} = 375\,000 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε τὸ κεφάλαιο ποὺ ζητοῦμε εἶναι 375 000.

$$\text{Βλέπομε δὲ ὅτι Κεφάλαιο} = \frac{\text{τόκος} \times 100}{\text{χρόνος} \times \text{ἐπιτόκιο}}$$

$$\text{ἤτοι} \quad K = \frac{T \times 100}{X \times E}.$$

Ἡ ἰσότητα αὐτὴ εἶναι ὁ *τύπος τοῦ κεφαλαίου*. Μᾶς λέγει δὲ ὅτι: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ τὸ 100 καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.***

Ὁ παραπάνω τύπος ἀληθεύει, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη. Ἂν ὅμως ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, τὸ 100, ὅπως καὶ στὸν τύπο τοῦ τόκου, θὰ γίνη 1 200, καὶ θὰ γίνη 36 000, ἂν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποιὸ κεφάλαιο:

α) Μὲ 4 % δίνει σὲ 1 ἔτος τόκο 37 200 δραχμές;
β) » 6 % » » 3 ἔτη » 27 000 » ;
γ) » 4,5 % » » 6 » » 108 000 » ;

2. Ποιὸ κεφάλαιο:

α) Μὲ 9 % δίνει σὲ 1 μῆνα τόκο 18 000 δραχμές;
β) » 5 % » » 10 μῆνες » 35 500 » ;
γ) » 7,5 % » » 8 » » 120 000 » ;

3. Ποιὸ κεφάλαιο:

α) Μὲ 8 % δίνει σὲ 100 ἡμέρες τόκο 40 000 δραχμές;
β) » 9 % » » 1 μῆνα καὶ 20ἡμ. » 13 000 » ;
γ) » 4,5 % » » 6 μῆν. καὶ 20ἡμ. » 32 000 » ;

4. Γεωργὸς δανείσθηκε ἕνα ποσὸ χρημάτων μὲ 8 % στὶς 24 τοῦ Ἀπρίλη τοῦ 1949 καὶ στὶς 24 τοῦ Ἀπρίλη τοῦ 1950 ἐξώφλησε τὸ δάνειό του, πληρώνοντας καὶ 16 500 δραχμές τόκο. Πόσα χρήματα δανείσθηκε;

5. Κεφαλαιοῦχος ἐδάνεισε κεφάλαιο μὲ 10 % στὶς 3 τοῦ Ἀπρίλη τοῦ 1949 καὶ στὶς 3 τοῦ Νοέμβρη τοῦ 1950 ἐπῆρε τὸ κεφάλαιο ποὺ ἐδάνεισε καὶ 91 000 δραχμὲς τόκο. Τί κεφάλαιο ἐδάνεισε καὶ τί ἐπῆρε κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί;

6. Ἕνας ἐδάνεισε κεφάλαιο σὲ δολλάρια μὲ 9 % στὶς 21 τοῦ Μάρτη τοῦ 1950 καὶ στὶς 12 τοῦ Ὀκτώβρη τοῦ 1950, ἐπῆρε τὸ κεφάλαιο ποὺ ἐδάνεισε καὶ 914,05 δολλάρια τόκο. Τί ἐπῆρε κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί;

7. Ἕνας εἶχε καταθέσει δύο κεφάλαια σὲ δύο τράπεζες. Στὴ μία μὲ 4 % καὶ ἔπαιρνε 372 000 δραχμὲς τόκο τὸ μῆνα καὶ στὴν ἄλλη μὲ 3 % καὶ ἔπαιρνε 378 000 δραχμὲς τόκο τὸ μῆνα. Τί κεφάλαιο εἶχε καταθέσει στὴν πρώτη τράπεζα καὶ τί κεφάλαιο εἶχε καταθέσει στὴν ἄλλη;

8. Ἕνας εἶχε δανείσει 1 000 000 δραχμὲς μὲ 10 % γιὰ δύο χρόνια. Ἔπειτα ἀπὸ αὐτὰ ἐπρόσθεσε στὸν τόκο ποὺ ἐπῆρε ἕνα ποσὸ χρημάτων καὶ τὸ ἐτόκισε πάλι μὲ 10 % καὶ ἔπαιρνε 50 000 δραχμὲς τόκο τὸ χρόνο. Τί κεφάλαιο ἐτόκισε τὴ δεύτερη φορά; Καὶ τί ποσὸ χρημάτων ἐπρόσθεσε στὸν τόκο ἀπὸ τὸ πρῶτο κεφάλαιο γιὰ νὰ γίνη τὸ δεύτερο κεφάλαιο;

3. Πῶς βρίσκεται ὁ χρόνος.

Πρόβλημα: ***Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 400 000 δραχμῶν, ὅταν τὸ τοκίσωμε μὲ 5 %, θὰ φέρη 80 000 δραχμὲς τόκο;***

100 δρχ.	κεφ.	σὲ	1 ἔτος	φέρει τόκο	5 δραχ.
400 000	»	»	» Χ ἔτη	» »	80 000 »

Εἴδαμε στὸ πρόβλημα ποὺ βρίσκομε τὸ κεφάλαιο, ὅτι ὁ χρόνος καὶ τὸ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Ἔτσι εἶναι :

$$X = 1 \text{ ἔτος} \times \frac{100}{400\,000} \times \frac{80\,000}{5} = \frac{100 \times 80\,000}{400\,000 \times 5} = 4 \text{ ἔτη.}$$

Ὥστε ὁ χρόνος ποὺ ζητοῦμε εἶναι 4 ἔτη.

Βλέπομε δέ, ὅτι $\text{χρόνος} = \dfrac{\text{τόκος} \times 100}{\text{κεφάλαιο} \times \text{ἐπιτόκιο}}$

Ἤτοι $X = \dfrac{T \times 100}{K \times E}$.

Ἡ ἰσότητα αὐτὴ εἶναι ὁ *τύπος τοῦ χρόνου* (σὲ ἔτη).

Ὥστε : **Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρόνο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ τὸ 100 καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.**

Ἔτσι ἂν $K = 600\,000$ δρχ. $E = 6$ καὶ $T = 30\,000$, εἶναι :

$$X = \frac{30\,000 \times 100}{600\,000 \times 6} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \text{ τοῦ ἔτους} = 10 \text{ μῆνες.}$$

Ἠμπορεῖ ὅμως νὰ ζητηθῇ ὁ χρόνος σὲ μῆνες. Τότε στὸν τύπο, ἀντὶ 100 θὰ θέσωμε 1200 καὶ θὰ ἔχωμε :

$$X = \frac{T \times 1200}{K \times E} = \frac{30\,000 \times 1200}{600\,000 \times 6} = \frac{360}{36} = 10 \text{ μῆνες.}$$

Ἂν μᾶς ζητήσουν τὸ χρόνο σὲ ἡμέρες, πῶς θὰ γράψωμε τὸν τύπο τοῦ χρόνου ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σὲ πόσο χρόνο πρέπει νὰ τοκίσωμε :

α) 200 000 δραχμὲς μὲ 5 % γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 60 000 δρχ. ;
β) 600 000 » » 8 % » » » » 192 000 » ;
γ) 800 000 » » 5,5 % » » » » 396 000 » ;

2. Σὲ πόσους μῆνες πρέπει νὰ τοκίσωμε :

α) 70 000 δραχμὲς μὲ 4 % γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 2 100 δρχ. ;
β) 800 000 » » 6 % » » » » 28 000 » ;

3. Σὲ πόσες ἡμέρες πρέπει νὰ τοκίσωμε:

α) 1 000 000 δρχ. μὲ 9 % γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 20 000 δρχ.;

β) 1 200 000 » » 5 % » » » » 4 000 » ;

4. Γεωργὸς ἐδανείσθηκε 300 000 δραχμὲς μὲ 8 % καὶ ὅταν ἐξώφλησε τὸ δάνειο, ἐπλήρωσε 340 000 δραχμὲς τόκο καὶ κεφάλαιο μαζί. Γιὰ πόσο χρόνο ἔκανε τὸ δάνειο αὐτό;

5. Ἕνας ἐδανείσθηκε 500 000 δραχμὲς μὲ 9 % καὶ ἐπλήρωσε ἔπειτα τόκους καὶ κεφάλαιο μαζὶ 530 000 δραχμές. Γιὰ πόσο χρόνο ἐδανείσθηκε τὰ χρήματα αὐτά;

4. Πῶς βρίσκεται τὸ ἐπιτόκιο.

Πρόβλημα: ***Μὲ ποῖο ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε 450 000 δραχμές, γιὰ νὰ πάρωμε σὲ 2 χρόνια 54 000 δραχμὲς τόκο;***

450 000 δρχ. κεφ. σὲ 2 ἔτη φέρουν τόκο 54 000 δραχ.

100 » » » 1 ἔτος » » Χ »

Ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸ κεφάλαιο καὶ μὲ τὸν χρόνο.

Ὥστε: $X = 54\,000 \text{ δρχ.} \times \frac{100}{450\,000} \times \frac{1}{2} = \frac{54\,000 \times 100}{450\,000 \times 2} = 6\ \%$.

Ὥστε τὸ ἐπιτόκιο ποὺ ζητοῦμε εἶναι 6 %.

Βλέπομε δέ, ὅτι: $E = \frac{\text{τόκος} \times 100}{\text{κεφάλαιο} \times \text{χρόνο}}$

ἤτοι $E = \frac{T \times 100}{K \times X}$

Ἡ ἰσότητα αὐτὴ εἶναι ὁ *τύπος τοῦ ἐπιτοκίου* (ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη).

Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, πῶς θὰ γράψωμε τὸν τύπο αὐτό; Καὶ πῶς θὰ τὸν γράψωμε, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε:

α) 900 000 δραχ. γιὰ νὰ πάρωμε σὲ 2 χρόνια τόκο 72 000 δραχμές;

β) 1 000 000 δραχ. γιὰ νὰ πάρωμε σὲ 5 μῆνες τόκο 25 000 δραχμές;

γ) 3 600 000 δραχμὲς γιὰ νὰ πάρωμε σὲ 40 ἡμέρες τόκο 15 000 δραχμές;

δ) 2 700 δολλάρια γιὰ νὰ πάρωμε σὲ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔτους τόκο 36 δολλάρια;

ε) 400 λίρες γιὰ νὰ πάρωμε σὲ 30 ἡμέρες τόκο 1,5 λίρες;

2. Ἕνας κτηματίας ἐδανείσθηκε 3 600 000 δραχμὲς καὶ μετὰ 40 ἡμέρες ἐξώφλησε τὸ δάνειό του, ἀφοῦ ἐπλήρωσε 3 630 000 δραχμὲς τόκο καὶ κεφάλαιο μαζί. Μὲ ποῖο ἐπιτόκιο ἐδανείσθηκε τὰ χρήματα αὐτά;

3. Ἕνας στὶς 15 τοῦ Ἀπρίλη ἐδανείσθηκε 750 000 δραχμὲς καὶ στὶς 25 τοῦ Σεπτέμβρη τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἐξώφλησε τὸ χρέος του μὲ 780 000 δραχμὲς τόκο καὶ κεφάλαιο μαζί. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐδανείσθηκε τὰ χρήματα αὐτά;

4. 450 000 δραχμὲς κεφάλαιο σὲ 3 μῆνες ἔφερε 4 500 δραχμὲς τόκο καὶ 250 000 δραχμὲς κεφάλαιο σὲ 6 μῆνες ἔφερε 5 000 δραχμὲς τόκο. Ποῖο ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ κεφάλαια ἐτοκίσθηκε μὲ μεγαλύτερο ἐπιτόκιο;

5. Ἕνας κτηνοτρόφος ἐδανείσθηκε 300 000 δραχμὲς γιὰ 4 μῆνες. Στὴ προθεσμία αὐτὴ ἐπούλησε 14 ὀκάδες τυρὶ κεφαλίσιο μὲ 22 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Καὶ μὲ τὰ χρήματα ποὺ ἐπῆρε, ἐπλήρωσε τὰ χρήματα ποὺ ἐδανείσθηκε καὶ τὸν τόκο μαζί. Μὲ ποῖο ἐπιτόκιο ἔκανε τὸ δάνειο αὐτό;

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνας εἶχε 20 000 000 δραχμές. Τὸ $\frac{1}{2}$ ἀπὸ τὶς δραχμὲς αὐτὲς τὸ ἐδάνεισε μὲ 8 % καὶ μὲ τὸ ἄλλο $\frac{1}{2}$ ἀγόρασε ἕνα μικρὸ κτῆμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖο εἶχε εἰσόδημα 1 200 000 δραχμὲς τὸ χρόνο. Νὰ συγκρίνετε τὸ ἐτήσιο εἰσόδημα ἀπὸ τὸ κτῆμα, μὲ τὸ ἐτήσιο εἰσόδημα ἀπὸ τὸ δάνειο.

2. Ἀπὸ ἕνα ἐλαιώνα ποὺ εἶχε ἕνας, ἐμάζεψε μιὰ χρονιὰ 1540 ὀκάδες ἐλιές. Τὶς ἐλιὲς αὐτὲς τὶς ἐπούλησε μὲ 4000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Καὶ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε, τὰ ἐτόκισε μὲ 10 %. Πόσο τόκο τοῦ δίνουν κάθε χρόνο τὰ χρήματα ποὺ ἐτόκισε;

3. Ἕνας ἀμπελουργὸς ἔκανε μιὰ χρονιὰ 6 000 ὀκάδες κρασί. Τὸ κρασὶ αὐτὸ τὸ ἐπούλησε μὲ 2 500 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ἀπὸ δὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε, ἐκράτησε τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ ἐτόκισε γιὰ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες μὲ 8 %. Πόσο τόκο ἐπῆρε ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ ἐτόκισε;

4. Ἕνας θέλει νὰ ἔχη εἰσόδημα ἀπὸ τόκους 150 000 δραχμὲς τὸ μῆνα. Ἔτσι κατέθεσε σὲ μιὰ τράπεζα ἕνα ποσὸ χρημάτων μὲ 4 %. Πόσα χρήματα κατέθεσε;

5. Ἕνας ἐδάνεισε 450 000 δραχμὲς μὲ 8 % γιὰ 9 μῆνες. Ἔπειτα ἐδάνεισε ἄλλο ποσὸ χρημάτων μὲ 10 % γιὰ 10 μῆνες. Ἐπῆρε δὲ ἀπὸ τὰ δύο δάνεια τὸν ἴδιο τόκο. Πόσες δραχμὲς ἐδάνεισε τὴ δεύτερη φορά;

6. Ἀπὸ ἕνα κτῆμα ἔχει ἕνας εἰσόδημα 180 000 δραχμὲς τὸ μῆνα. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δανείση μὲ 9 % γιὰ νὰ ἔχη εἰσόδημα τὸ μῆνα τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ εἰσοδήματος ἀπὸ τὸ κτῆμα;

7. 200 000 δραχμὲς κεφάλαιο τοκίζεται μὲ 4 %. Σὲ πόσο χρόνο θὰ φέρη τόκο ἴσο μὲ τὸ κεφάλαιο;

8. Κεφάλαιο τοκίζεται μὲ 8 %. Σὲ πόσο χρόνο θὰ γίνη διπλάσιο;

9. Ἕνας ἐδάνεισε 900 000 δραχμὲς μὲ 8 % γιὰ $4\frac{1}{2}$ μῆνες. Ἔπειτα ἐδάνεισε 648 000 δραχμὲς μὲ 10 %. Σὲ πόσο χρόνο θὰ πάρη τόκο, ὅσο τόκο ἐπῆρε ἀπὸ τὸ πρῶτο δάνειο;

10. Ἕνας ἐπούλησε 80 ὀκάδες λάδι μὲ 12 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε τὰ ἐδάνεισε μὲ 7 % καὶ ἀπὸ τὰ δάνειο αὐτὸ ἐπῆρε 85 400 δραχμὲς τόκο. Γιὰ πόσο χρόνο εἶχε δανείση τὰ χρήματα αὐτά;

11. Ἕνας ἐπούλησε 350 ὀκάδες κρασὶ μὲ 2400 δραχμὲς τὴν ὀκά. Τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε τὰ ἐτόκισε καὶ ἔπειτα ἀπὸ 6 μῆνες ἐπῆρε 31 500 δραχμὲς τόκο. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτόκισε τὰ χρήματα αὐτά;

12. Ἕνας ἐπούλησε 450 ὀκάδες σιτάρι μὲ 2 200 δραχμὲς τὴν ὀκά. Τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε τὰ ἐτόκισε καὶ ἔπειτα ἀπὸ 7 μῆνες

ἐπῆρε 1036200 δραχμὲς κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτόκισε τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε;

13. Ἕνας ἐδανείσθηκε 1440000 δραχμὲς γιὰ 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες μὲ 7,5%. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὸν τόκο ἐπλήρωσε καὶ $1\frac{1}{2}$% προμήθεια ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου. Πόσο ἐπλήρωσε γιὰ τόκο καὶ προμήθεια μαζί;

Ὑφαίρεσις.

Γραμμάτια: Οἱ ἔμποροι, ὅταν κάνουν μεγάλες σχετικὰ παραγγελίες σὲ ἐργοστάσια ἢ σὲ ἐμπορικοὺς οἴκους, δὲν πληρώνουν πάντοτε ἀμέσως τὴν ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ποὺ παραγγέλουν. Ἀλλ' ἀντὶ γιὰ χρήματα δίνουν στοὺς πωλητὰς ἔγγραφο ὑπόσχεσι ὅτι τὴν ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ποὺ ἀγόρασαν, θὰ τὴν πληρώσουν ἔπειτα ἀπὸ ὡρισμένο χρονικὸ διάστημα. Τὸ ἔγγραφο αὐτὸ λέγεται γενικὰ ***γραμμάτιο εἰς διαταγὴν*** ἢ ἁπλῶς ***γραμμάτιο.*** Καὶ γράφεται σὲ χαρτόσημο.

Ἔτσι ἕνας ἔμπορος π.χ. ὁ κ. Γ. Βασιλείου στὶς 10 τοῦ Ἀπρίλη τοῦ 1950 ἀγόρασε ἀπὸ τὸν κ. Κ. Εὐθυμίου ἐμπορεύματα ἀξίας 3000000 δραχμῶν. Μὲ τὴ συμφωνία ὅμως νὰ πληρώση τὴν ἀξία αὐτὴ ἔπειτα ἀπὸ 4 μῆνες. Τότε ὁ κ. Γ. Βασιλείου δίνει στὸν κ. Εὐθυμίου τὸ παρακάτω ἐμπορικὸ γραμμάτιο.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Ἀπριλίου 1950

Διὰ δραχμὰς 3000000.

Ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω τὴν 10 Αὐγούστου 1950 εἰς τὸν κ. Κ. Εὐθυμίου ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ, τρία ἑκατομμύρια δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἔλαβον ἀπὸ αὐτὸν εἰς ἐμπορεύματα.

Γ. Βασιλείου, ὁδὸς . . . , ἀριθ. . . .

Ὑφαίρεσις: Ὁ κ. Εὐθυμίου ἀντὶ νὰ περιμένη τέσσερες μῆνες γιὰ νὰ πάρη ἀπὸ τὸν κ. Βασιλείου τὰ 3000000 δραχμές, ἠμπορεῖ νὰ πωλήση τὸ γραμμάτιο ποὺ ἔχει σὲ ἄλλον (σχεδὸν πάντοτε σὲ τράπεζα) πρὶν ἀπὸ τὴ 10 Αὐγούστου. Ἡ πρᾶξις αὐτὴ τοῦ κ. Εὐθυμίου λέγεται ***προεξόφλησις*** τοῦ γραμματίου. Ἀλλ' ὁ προεξοφλητής, δηλαδὴ αὐτὸς ποὺ θὰ θελήση νὰ προεξοφλήση (νὰ ἀγοράση) τὸ γραμμάτιο, δὲν θὰ πληρώση στὸν πωλητή, δηλ. στὸν κ. Εὐθυμίου, ὁλόκληρο τὸ ποσὸ τῶν 3 000 000 δραχμῶν, ποὺ γράφει τὸ γραμμάτιο. Ἀλλὰ θὰ κρατήση ἕνα ποσὸ δραχμῶν καὶ τὸ ὑπόλοιπο θὰ δώση στὸν κ. Εὐθυμίου.

Τὸ ποσὸ ποὺ θὰ κρατήση ὁ προεξοφλητὴς λέγεται *ὑφαίρεσις*. Τὸ ποσὸ ποὺ γράφει τὸ γραμμάτιο (3 000 000 δραχ.) λέγεται *ὀνομαστικὴ ἀξία* τοῦ γραμματίου. Ἔτσι ὁ κ. Εὐθυμίου θὰ πάρη τὸ ποσὸ ποὺ θὰ μείνη, ὅταν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ποὺ προεξοφλεῖ, ἀφαιρεθῆ ἡ ὑφαίρεσι ποὺ κρατάει ὁ προεξοφλητής. Τὸ ποσὸ δὲ ποὺ θὰ πάρη τότε ὁ κ. Εὐθυμίου λέγεται *παροῦσα* ἢ *πραγματικὴ* ἀξία τοῦ γραμματίου.

Ἔτσι στὰ γραμμάτια ξεχωρίζομε :

1) Τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τους. Ο. Α.
2) Τὴν ὑφαίρεσι Υ.
καὶ 3) Τὴν πραγματικὴ ἀξία τους Π. Α.

Πῶς βρίσκεται ἡ ὑφαίρεσις: Στὸ ἐμπόριο βρίσκεται ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου, ποὺ προεξοφλεῖται, ὅπως βρίσκεται ὁ τόκος κεφαλαίου. Ἐδῶ τὸ κεφάλαιο εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ χρόνος εἶναι ὁ χρόνος ποὺ μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ προεξοφλεῖται τὸ γραμμάτιο, ὡς τὴν ἡμέρα ποὺ λήγει. Τὸ προεξοφλητικὸ ἐπιτόκιο ὁρίζεται μὲ ἰδιαίτερη συμφωνία μεταξὺ ἐκείνου ποὺ παραδίνει τὸ γραμμάτιο καὶ ἐκείνου ποὺ τὸ προεξοφλεῖ. Οἱ μεγάλες ὅμως τράπεζες προεξοφλοῦν, ἔπειτα ἀπὸ νόμο, μὲ 12 %.

Ἔτσι ἂν ὁ κ. Εὐθυμίου προεξοφλήση τὸ παραπάνω γραμμάτιο δύο μῆνες ἐνωρίτερα ἀπὸ τὴ λῆξι του μὲ τὸ νόμιμο προεξοφλητικὸ ἐπιτόκιο 12 %, θὰ πληρώση ὑφαίρεσι :

$$Y = \frac{3\,000\,000 \times 2 \times 12}{1\,200} = 60\,000 \text{ δραχμές},$$

καὶ θὰ πάρη $3\,000\,000 - 60\,000 = 2\,940\,000$ δραχμές.

Ἡ ὑφαίρεσις *ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας* τοῦ γραμματίου λέγεται *ἐξωτερική*. Γιατὶ ὑπάρχει καὶ ἄλλη ὑφαίρεσις, ἡ ὁποία λέγεται *ἐσωτερική*. Αὐτὴ λογαριάζεται *ἐπὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας*, ποὺ ἔχει τὸ γραμμάτιο τὴν ἡμέρα ποὺ προεξοφλεῖται καὶ ποὺ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀνομαστική του ἀξία. Γιατὶ ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀνομαστική του, μόνο τὴν ἡμέρα ποὺ λήγει τὸ γραμμάτιο. Στὸ ἐμπόριο ὅμως οἱ προεξοφλήσεις γίνονται μὲ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσι. Ἔτσι ὅσα προβλήματα θὰ δοῦμε παρακάτω, θὰ εἶναι προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἤτοι θὰ εἶναι προβλήματα τόκου. Μόνο ποὺ στὰ προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἀντὶ κεφάλαιο θὰ λέγωμε ὀνομαστικὴ ἀξία καὶ ἀντὶ τόκο θὰ λέγωμε ὑφαίρεσι. Ἀκόμα πρέπει νά ἔχωμε ὑπ' ὄψι μας, ὅτι:

Ὀνομ. ἀξ.— ὑφαίρ.= πραγμ. ἀξ.	Ο.Α.—Υ.=Π.Α.
Ὀνομ. ἀξ.— πραγμ. ἀξ.= ὑφαίρ.	Ο.Α.—Π.Α.=Υ.
Πραγμ. ἀξ.+ ὑφαίρ.= ὀνομ. ἀξία	Π.Α.+Υ.=Ο.Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γραμμάτιο μὲ ὀνομαστικὴ ἀξία 270 000 δρχ. προεξοφλεῖται 3 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του μὲ 9 %. Ποιὰ εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποιὰ ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;

2. Γραμμάτιο μὲ ὀνομ. ἀξία 820 000 δρχ., ποὺ ἔληγε στὶς 20 Δεκεμβρίου, προεξοφλήθηκε στὶς 20 Ἰουνίου τοῦ ἴδιου ἔτους μὲ 8 %. Ποιὰ εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποιὰ ἡ πραγματική του ἀξία;

3. Γραμμάτιο μὲ ὀν. ἀξ. 630 000 δρχ. προεξοφλήθηκε 5 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του μὲ 7,5 %. Ποιὰ εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ ποιὰ ἡ πραγματική του ἀξία;

4. Γραμμάτιο προεξοφλήθηκε μὲ 10 % 3 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του μὲ 32 400 δραχμὲς ὑφαίρεσι. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομαστική του ἀξία;

5 Γραμμάτιο ποὺ ἔληγε στὶς 26 Αὐγούστου, προεξοφλήθηκε μὲ 9% στὶς 6 Μαΐου τοῦ ἴδιου ἔτους μὲ ὑφαίρεσι 45 450 δραχμές. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομαστική του ἀξία καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία του;

6. Γραμμάτιο μὲ ὀν. ἀξ. 720 000 δρχ. προεξοφλήθηκε 4 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του μὲ ὑφαίρεσι 114 000 δραχμές. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφλησις;

7. Γραμμάτιο μὲ ὀν. ἀξ. 540 000 δρχ,, πληρωτέο ἔπειτα ἀπὸ 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες, προεξοφλήθηκε μὲ 492 000 δραχμὲς πραγματικὴ ἀξία. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφλησις;

8. Γραμμάτιο μὲ ὀν. ἀξ. 1 400 000 δρχ. ἔληγε στὶς 5 Ὀκτωβρίου. Προεξοφλήθηκε δὲ στὶς 20 Ἰουνίου τοῦ ἴδιου ἔτους μὲ 1 190 000 δρχ. πραγματικὴ ἀξία. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο προεξοφλήθηκε;

9. Γραμμάτιο μὲ ὀν. ἀξ. 138 000 δρχ. προεξοφλήθηκε μὲ 5 %

καὶ ἔδωκε ὑφαίρεσι 2 300 δραχμές. Σὲ πόσο χρόνο πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του ἔγινε ἡ προεξόφλησις;

10. Γραμμάτιο μὲ ὀν. ἀξ. 1 720 δολλάρια, προεξοφλήθηκε μὲ 9 % καὶ ἔδωκε ὑφαίρεσι 113,95 δολλάρια. Σὲ πόσο χρόνο πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του ἔγινε ἡ προεξόφλησις;

11. Γραμμάτιο μὲ ὀν. ἀξ. 4 800 000 δρχ. προεξοφλήθηκε μὲ 6 % καὶ ἔδωκε πραγματικὴ ἀξία 4 559 200 δραχμές. Σὲ πόσο χρόνο πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξι του ἔγινε ἡ προεξόφλησις;

Χρεώγραφα.

1. ***Ὁμολογία.*** — Πολλὲς φορὲς τὰ Κράτη κάνουν δάνεια γιὰ τὶς ἔκτακτες ἀνάγκες τους. Ὅταν θέλῃ νὰ δανεισθῇ ἕνα κράτος ἀπὸ τοὺς πολίτας του, ἐκδίδει γραμμάτια μὲ ὡρισμένη ἀξία τὸ καθένα καὶ τὰ πωλεῖ. Γιὰ τὰ ποσὰ ποὺ εἰσπράττει, πληρώνει κάθε χρόνο ἢ κάθε ἑξάμηνο τόκο, σύμφωνα μὲ ἐπιτόκιο ποὺ ἔχει ὁρίσει προηγουμένως. Ἕνα τέτοιο ἔντοκο γραμμάτιο λέγεται ***ὁμολογία*** (δανείου). Σὲ κάθε ὁμολογία γράφεται ἡ ὀνομαστική της ἀξία. Π. χ. 10 000 δραχμές. Τότε ἂν τὸ ἐπιτόκιο τοῦ δανείου εἶναι π. χ. 6 % μιὰ τέτοια ὁμολογία φέρει κάθε χρόνο τόκο 600 δραχμές. Καὶ ἂν ὁ τόκος πληρώνεται κάθε χρόνο καὶ τὸ κρατικὸ δάνειο ἔγινε π.χ. γιὰ 40 χρόνια, τότε στὸ κάτω μέρος τῆς ὁμολογίας ὑπάρχουν 40 ἴσα μικρὰ τετράγωνα. Σὲ καθένα δὲ ἀπὸ αὐτὰ εἶναι γραμμένος ὁ τόκος 600 δραχ. καὶ ἡ ἡμερομηνία τῆς πληρωμῆς του. Ὅταν λοιπὸν ἔλθῃ ἡ ὥρα τῆς πληρωμῆς του, τὸ κόβει, ἐκεῖνος ποὺ ἔχει τὴν ὁμολογία, τὸ δίνει σὲ μιὰ τράπεζα καὶ εἰσπράττει τὸν τόκο. Τὸ τετράγωνο αὐτὸ λέγεται ***τοκομερίδιο.*** Ὥστε κάθε ὁμολογία ἀπὸ αὐτὲς ποὺ εἴπαμε ἔχει 40 τοκομερίδια. Ὁμολογιακὰ δάνεια κάνουν μεγάλοι οἰκονομικοὶ ὀργανισμοί, μεγάλοι δῆμοι κλπ.

2. ***Μετοχή, μέρισμα.*** — Δάνεια ὡς τὰ παραπάνω κάνουν καὶ ἑταιρεῖες. Ἔτσι κι αὐτὲς ἐκδίδουν ἔγγραφα (γραμμάτια) ὅμοια μὲ τὶς ὁμολογίες, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι μὲ τὰ ἔγγραφα αὐτὰ δὲ δίνουν καμμιὰ ὑπόσχεσι γιὰ τόκο. Γι' αὐτὸ ἕνα τέτοιο ἔγγραφο ἢ καλύτερα μιὰ τέτοια ὁμολογία λέγεται ***μετοχή.*** Καὶ ὅποιος ἔχει μιὰ ἢ πολλὲς μετοχὲς μιᾶς ἑταιρείας, εἶναι ***μέτοχος*** αὐτῆς.

Κάθε μετοχικὴ ἑταιρεία κάνει κάθε ἑξάμηνο ἢ κάθε χρόνο *ἰσολογισμὸ* καὶ βλέπει ἂν ἔχη καθαρὰ κέρδη καὶ πόσα. Ἂν ἔχη καθαρὰ κέρδη τὰ μοιράζει σὲ τόσα ἴσα μέρη, ὅσες εἶναι ὅλες οἱ μετοχές της. Κάθε μέρος ἀπὸ αὐτὰ λέγεται *μέρισμα*. Ἔτσι ἂν ἕνας ἔχη π. χ. 100 μετοχὲς μιᾶς ἑταιρείας, ποὺ ἔδωκε μέρισμα, θὰ πληρωθῆ 100 μερίσματα. Ἠμπορεῖ ὅμως μιὰ ἑταιρεία μιὰ χρονιὰ νὰ μὴ ἔχη καθαρὰ κέρδη. Τότε τὴ χρονιὰ αὐτὴ δὲ θὰ δώση ἡ ἑταιρεία αὐτὴ μέρισμα.

3. *Χρεώγραφα.* — Οἱ ὁμολογίες, οἱ μετοχές, τὰ ἐμπορικὰ γραμμάτια καὶ γενικὰ κάθε ἔγκυρο ἔγγραφο ποὺ φανερώνει, ὅτι ἔχει γίνει δάνειο, λέγονται μὲ ἕνα ὄνομα *χρεώγραφα*.

4. *Χρηματιστήριο.* — Οἱ ὁμολογίες, οἱ μετοχὲς καὶ ἄλλα χρεώγραφα ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ τὰ ἀγοράση ἢ νὰ τὰ πουλήση σὲ ἕνα ἵδρυμα ποὺ λέγεται *χρηματιστήριο ἀξιῶν*. Γιατὶ ὑπάρχει καὶ χρηματιστήριο ἐμπορευμάτων. Σ' αὐτὸ ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ ἀγοράση καὶ νὰ πουλήση ἐμπορεύματα σὲ μεγάλες σχετικὰ ποσότητες.

Οἱ τιμὲς ποὺ ἔχουν στὸ χρηματιστήριο ἀξιῶν τὰ χρεώγραφα δὲν εἶναι πάντα ἴδιες. Ἄλλοτε εἶναι μεγαλύτερες καὶ ἄλλοτε μικρότερες, κατὰ τὴν προσφορὰ καὶ τὴ ζήτησι.

Τὸ χρηματιστήριο ἐκδίδει κάθε μέρα δελτίο (ποὺ δημοσιεύεται στὶς ἐφημερίδες), καὶ μὲ τὶς τελευταῖες τιμὲς τῶν χρεωγράφων ποὺ ἔχουν τὴν ἡμέρα ποὺ ἐκδίδεται τὸ δελτίο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Μία ὁμολογία δανείου ὀν. ἀξίας 10 000 φέρει τόκο 5 %, ὁ ὁποῖος πληρώνεται κάθε ἑξάμηνο. Τί τόκο θὰ γράφει καθένα ἀπὸ τὰ τοκομερίδιά της;

2. Ἕνας ἔχει 1 000 ὁμολογίες δανείου 6,5 %, μὲ 1 000 δραχμὲς ὀνομαστικὴ ἀξία ἡ κάθε μιά. Πόσο τόκο παίρνει κάθε χρόνο ἀπὸ τὶς ὁμολογίες αὐτές;

3. Ἕνας ἀγόρασε 500 ὁμολογίες δανείου 6 % ὀνομαστικῆς ἀξ. 10 000 δραχ., μὲ 8 000 δραχμὲς τὴν κάθε μιά. Πόσο τοῖς % τόκο παίρνει ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ διέθεσε;

4. Μία ἑταιρεία ἔχει ἐκδόσει 25 000 μετοχὲς καὶ τὰ καθαρὰ κέρδη της μιὰ χρονιὰ ἦταν 125 000 000 δραχμές. Τί μέρισμα ἔδωκε τὴ χρονιὰ ἐκείνη γιὰ κάθε μιὰ μετοχή;

5. Ἀγόρασε ἕνας 50 μετοχὲς μιᾶς ἑταιρείας μὲ 30 000 δραχμὲς τὴ μία. Ἡ ἑταιρεία αὐτὴ ἔδωκε μιὰ χρονιὰ μέρισμα 2 275 δραχ. κατὰ μετοχή. Πόσο εἰσέπραξε τὴ χρονιὰ αὐτὴ ἀπὸ τὶς μετοχές του;

6. Ἕνας ἀγόρασε μετοχὲς μιᾶς ἑταιρείας μὲ 210 000 δραχμὲς τὴ μία. Μιὰ χρονιὰ ἐπῆρε μέρισμα 5% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ἔτσι ἀπὸ ὅλες τὶς μετοχὲς ποὺ ἀγόρασε, ἐπῆρε 2 100 000 δραχμὲς μέρισμα. Πόσες μετοχὲς ἀγόρασε;

7. Ἕνας ἔχει ὁμολογίες δανείου 4,5% ὀν. ἀξίας 10 000 δραχμῶν καὶ εἰσπράττει ἀπὸ αὐτὲς 67 500 δραχμὲς κάθε ἑξάμηνο. Πόσες ὁμολογίες ἔχει;

8. Ἕνας εἶχε καταθέσει σὲ Τράπεζα 800 000 δραχμὲς μὲ 4%. Ἔπειτα ἀπὸ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες ἀπέσυρε τὸ κεφάλαιαο αὐτὸ καὶ μαζὶ μὲ τὸν τόκο του ἀγόρασε μετοχὲς μιᾶς ἑταιρείας μὲ 10 000 δραχμὲς τὴ μία. Πόσες μετοχὲς ἀγόρασε;

9. Ὁ κεφαλαιοῦχος τοῦ προηγουμένου προβλήματος, ἀπὸ τὶς μετοχὲς ποὺ ἀγόρασε ἐπῆρε, μιὰ χρονιὰ μέρισμα 6% στὰ χρήματα ποὺ ἔδωσε. Πόσο μέρισμα ἐπῆρε κατὰ μετοχή; Καὶ πόσα εἰσέπραξε ἀπὸ τὶς μετοχὲς ποὺ ἀγόρασε;

10. Ἕνας ἀγόρασε ὁμολογίες δανείου μὲ 16 000 δραχμὲς τὴ μία. Ἐπλήρωσε δὲ γιὰ μεσιτικὰ 1,5% στὰ χρήματα ποὺ ἔδωσε. Πόσο τοῦ ἐστοίχισε ἡ μία ὁμολογία; Καὶ πόσο τοῖς % τοῦ ἔρχονται τὰ χρήματά του, ἂν ἀπὸ κάθε ὁμολογία παίρνει 812 δραχμὲς τόκο κάθε χρόνο;

Λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον.

1. ***Μία ὑφάντρια ὑφαίνει 4 πῆχες ὕφασμα τὴν ἡμέρα καὶ μία ἄλλη ὑφαίνει ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα 8 πῆχες τὴν ἡμέρα. Πόσες φορὲς περισσότερες πῆχες ὑφαίνει ἡ δεύτερη ὑφάντρια ἀπὸ τὴν πρώτη;***

Ὑφαίνει τόσες φορὲς περισσότερες πῆχες, ὅσες φορὲς χωράει ὁ 4 στὸν 8. Ἐπειδὴ δὲ $8:4=2$, ὑφαίνει ἡ δεύτερη ὑφάντρια 2 φορὲς περισσότερες πῆχες τὴν ἡμέρα, ἀπὸ ὅσες ὑφαίνει ἡ πρώτη ὑφάντρια.

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ τὸ πηλίκο 2 τῆς διαιρέσεως $8:4$ τὸ λέγομε καὶ ***λόγο*** τῶν 8 πήχεων πρὸς τὶς 4 πῆχες.

Ὅμοια καὶ τῆς διαιρέσεως $6:18=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$, τὸ πηλίκο $\frac{1}{3}$ τὸ λέγομε καὶ ***λόγο*** τοῦ ἀριθμοῦ 6 πρὸς τὸν 18.

Ὥστε: **Λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἕνα ἄλλον λέγεται τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου.**

Ἔτσι ὁ λόγος τοῦ 3 πρὸς τὸν 5 εἶναι τὸ πηλίκο $\frac{3}{5}$ τῆς διαιρέσεως 3 : 5 καὶ ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 3 εἶναι τὸ πηλίκο $\frac{5}{3}$ τῆς διαιρέσεως 5 : 3.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ ποὺ μᾶς δίνουν ἕνα λόγο λέγονται *ὅροι* αὐτοῦ. Ἔτσι στὸ λόγο $3:5=\frac{3}{5}$ ὅροι εἶναι ὁ 3 (πρῶτος) καὶ ὁ 5 (δεύτερος).

Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ προσέξωμε, ὅτι εἶναι πάντοτε ἀφηρημένος ἀριθμός. Τὸ πηλίκο λοιπὸν δύο ἀριθμῶν ἠμποροῦμε νὰ τὸ ποῦμε καὶ λόγο τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς τὸν ἄλλο ἢ 1) ὅταν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἀφηρημένοι ἢ 2) ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι ὁμοειδεῖς.

Ἂν οἱ ὅροι τοῦ λόγου εἶναι συγκεκριμένοι ὁμοειδεῖς, πρέπει νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν ἴδια μονάδα. Π. χ. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ λόγο τῶν 3 πήχεων πρὸς τὰ 6 ρούπια, πρέπει νὰ τρέψωμε τὶς πῆχες σὲ ρούπια. Τότε δὲ θὰ ἔχωμε τὸ λόγο 24 ρούπια : 6 ρούπια = 4. Ἠμποροῦμε ὅμως νὰ τρέψωμε καὶ τὰ ρούπια σὲ πῆχες. Τότε δὲ θὰ ἔχωμε 3 πῆχ. : $\frac{6}{8}$ πῆχες $=\frac{3\times 8}{6}=\frac{24}{6}=4$, δηλαδὴ θὰ ἔχωμε τὸν ἴδιο λόγο 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ βρῆτε τὸ λόγο:

α) τοῦ 30 πρὸς τὸν 6 β) τοῦ 27 πρὸς τὸν 3.
γ) τοῦ 5 πρὸς τὸν 25 δ) τοῦ 4 πρὸς τὸν 9.
ε) τοῦ $\frac{1}{2}$ πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ στ) τοῦ $\frac{1}{9}$ πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$.
ζ) τοῦ 4 πρὸς τὸν 5 καὶ η) τοῦ 5 πρὸς τὸν 4.
Τί ἀριθμοὶ εἶναι οἱ δύο τελευταῖοι λόγοι;

2. Νὰ βρῆτε τὸ λόγο:

α) τῶν 36 πήχεων πρὸς τὶς 4 πῆχες.
β) » 30 μέτρων πρὸς τὰ 120 μέτρα.

γ) τῶν 5 λιρῶν ἀγγλίας πρὸς τὶς 9 λίρες ἀγγλίας.

δ) τοῦ 1 στατῆρα πρὸς τὶς 11 ὀκάδες.

ε) τοῦ 1 μέτρου πρὸς τὰ 20 ἑκατοστόμετρα (πόντοι).

στ) τῶν 5 ἑκατοστομέτρων πρὸς τὶς 4 παλάμες.

3. Μία ἐκκλησία ἔχει ὕψος 12 μέτρα καὶ τὸ κωδωνοστάσιό της ἔχει ὕψος 18 μέτρα. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τοῦ ὕψους τοῦ κωδωνοστασίου πρὸς τὸ ὕψος τῆς ἐκκλησίας;

4. Δύο ὑφάσματα ἔχουν πλάτος 1 πήχη τὸ ἕνα καὶ 1 πήχη καὶ 2 ρούπια τὸ ἄλλο. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τοῦ πλάτους τοῦ πρώτου ὑφάσματος πρὸς τὸ πλάτος τοῦ ἄλλου;

5. Τὸ ρύζι προπολεμικὰ εἶχε 16 δραχμὲς τὴν ὀκά. Σήμερα ἔχει 8 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τῆς σημερινῆς τιμῆς τοῦ ρυζιοῦ πρὸς τὴν προπολεμικὴ τιμή του;

Δηλαδὴ ποιὸς εἶναι ὁ σημερινὸς τιμάριθμος τοῦ ρυζιοῦ;

6. Δύο τετράγωνα ἔχουν πλευρὲς 4,5 μέτρα τὸ ἕνα καὶ 1,5 μέτρα τὸ ἄλλο. Τί λόγο ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου πρὸς τὴν πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου; Καὶ τί λόγο ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰ τοῦ πρώτου τετραγώνου;

7. Ἂν ἕνας ἀριθμὸς α πρὸς ἕνα ἀριθμὸ β ἔχει λόγο $\frac{2}{3}$, τί λόγο ἔχει ὁ ἀριθμὸς β πρὸς τὸν ἀριθμὸ α;

8. Ὁ λόγος τοῦ μισθοῦ ὑπαλλήλου πρὸς τὸ ἐνοίκιο ποὺ πληρώνει εἶναι 6· ἂν ὁ ὑπάλληλος αὐτὸς παίρνη 1 200 000 δραχμὲς μισθὸ τὸ μῆνα, τί ἐνοίκιο πληρώνει τὸν μῆνα;

9. Τὸ ποσὸ τοῦ σπόρου μὲ τὸν ὁποῖον ἔσπειρε ἕνας τὸ χωράφι του καὶ ὁ καρπὸς ποὺ ἐπῆρε ἦταν μιὰ χρονιὰ 1 : 12. Ἂν ὁ σπόρος αὐτὸς ἦταν 72 ὀκάδες, πόσες ὀκάδες ἦταν ὁ καρπός;

10. Ὁ λόγος τῆς περιουσίας ἑνὸς πρὸς τὴν περιουσία ἄλλου εἶναι 3. Ἂν ὁ δεύτερος ἔχη περιουσία 24 ἑκατομμύρια, τί περιουσία ἔχει ὁ πρῶτος;

11. Ὁ λόγος τοῦ πλάτους δύο ὑφασμάτων εἶναι $\frac{1}{2}$. Ἂν τὸ πλατύτερο ὕφασμα ἔχει πλάτος 1 πήχη καὶ 6 ρούπια, τί πλάτος ἔχει τὸ ἄλλο ὕφασμα;

12. Σὲ μιὰ στιγμὴ τὸ ὕψος ἑνὸς κυπαρισσιοῦ πρὸς τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς του εἶναι 2 πρὸς 1. Ἂν ἡ σκιὰ τὴ στιγμὴ ἐκείνη εἶχε μῆκος 5,2 μέτρα, τί ὕψος ἔχει τὸ κυπαρίσσι;

'Αριθμοὶ ἀνάλογοι ἄλλων ἀριθμῶν. Μερισμὸς ἀριθμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα.

1. 'Αριθμοὶ ἀνάλογοι ἄλλων ἀριθμῶν.

Ἕνας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιο 25 000 δραχμ. Ὥστε:

γιὰ ἐργασία	1 ἡμέρας,	2 ἡμερῶν,	3 ἡμερῶν
θὰ πάρη	25 000 δρχ.×1	25 000 δρχ.×2	25 000 δρχ.×3
	25 000 δρχ.	50 000 δρχ.	75 000 δρχ.

Ὥστε γιὰ νὰ βροῦμε τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 25 000, 50 000, 75 000 πολλαπλασιάσαμε καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3 ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ 25 000. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 25 000, 50 000, 75 000 λέγονται ***ἀνάλογοι*** πρὸς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 1, 2, 3. 'Αλλὰ τότε καὶ οἱ 1, 2, 3 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 25 000, 50 000, 75 000, γιατὶ γίνονται ἀπὸ αὐτοὺς μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ $\frac{1}{25\,000}$.

Ὥστε: **Μία σειρὰ ἀπὸ ἀριθμοὺς γιὰ νὰ εἶναι ἀνάλογη πρὸς ἄλλη σειρὰ ἀπὸ ἀριθμοὺς πρέπει 1) ὅσους ἀριθμοὺς ἔχει ἡ μιὰ σειρά, τόσους ἀριθμοὺς νὰ ἔχη καὶ ἡ ἄλλη σειρὰ καὶ 2) οἱ ἀριθμοὶ τῆς μιᾶς σειρᾶς νὰ γίνωνται ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἄλλης, ὅταν τοὺς πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμό.**

2. Μερισμὸς ἀριθμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα.

Πρόβλημα: ***Ἕνας χρησιμοποιοῦσε στὴν ἐπιχείρησί του ἐργάτες, τοὺς ὁποίους ἐπλήρωνε μὲ τὸ ἴδιο ἡμερομίσθιο. Τρεῖς ἀπὸ αὐτοὺς ἐργάσθηκαν, 4 ἡμέρες ὁ ἕνας, 5 ἡμέρες ὁ ἄλλος καὶ 6 ἡμέρες ὁ τρίτος. 'Επῆραν δὲ καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ 375 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ καθένας ἀπὸ αὐτούς;***

Ὁ ἐπιχειρηματίας ἐπλήρωσε στοὺς ἐργάτες αὐτοὺς $4+5+6=15$ ἡμερομίσθια. Ὥστε γιὰ ἕνα ἡμερομίσθιο ἐπλήρωσε $\frac{375\,000}{15}$ δραχμές. Καὶ γιὰ τὰ 4, 5 καὶ 6 ἡμερομίσθια ἐπλήρωσε:

$$\frac{375\,000}{15} \times 4 = \frac{375\,000 \times 4}{15} = 100\,000 \text{ δραχμές},$$

$$\frac{375\,000}{15} \times 5 = \frac{375\,000 \times 5}{15} = 125\,000 \quad \text{»}$$

$$\frac{375\,000}{15} \times 6 = \frac{375\,000 \times 6}{15} = \frac{150\,000}{375\,000} \quad \text{»}$$

Ὥστε: ὁ α΄ ἐργάτης ἐπῆρε 100 000 δραχμές, ὁ β΄ ἐπῆρε 125 000 δραχμὲς καὶ ὁ γ΄ ἐργάτης ἐπῆρε 150 000 δραχμές. Καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ ἐπῆραν:

$$100\,000 + 125\,000 + 150\,000 = 375\,000 \text{ δραχμές}.$$

Τώρα βλέπομε 1) ὅτι ὁ ἀριθμὸς 375 000 ἐμοιράσθηκε σὲ τρία μέρη, 100 000, 125 000, 150 000 καὶ 2) ὅτι βρήκαμε τὰ μέρη αὐτὰ ἀφοῦ πολλαπλασιάσαμε τὸν ἴδιο ἀριθμὸ $\frac{375\,000}{15}$ ἐπὶ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 6.

Ὥστε τὰ τρία μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμοιράσθηκε ὁ 375 000 εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 6.

Γι' αὐτὸ τὸ πρόβλημα ποὺ ἐλύσαμε λέγεται: *πρόβλημα μερισμοῦ ἀριθμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα.*

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 375 000. Γιὰ νὰ βροῦμε δὲ τὰ τρία μέρη του τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 4, 5, 6, τὸν ἐπολλαπλασιάσαμε ἐπὶ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ κάθε γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀριθμῶν.

Ὥστε: **Γιὰ νὰ μερίσωμε ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν 1) πολλαπλασιάζομε τὸ μεριστέο ἀριθμὸ ἐπὶ καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ 2) καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα ποὺ βρίσκομε τὸ διαιροῦμε, διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων ἀριθμῶν.**

Σημείωσις: *Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων ἀριθμῶν, προτιμώτερο εἶναι νὰ διαιροῦμε πρῶτα τὸ μεριστέο ἀριθμὸ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων καὶ ἔπειτα τὸ πηλίκο ποὺ βρίσκομε, νὰ τὸ πολλαπλασιάζωμε ἐπὶ καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους ἀριθμούς.*

Π.χ. στὸ προηγούμενο πρόβλημα ὁ 375 000 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 15 καὶ δίνει πηλίκο τὸν ἀριθμὸ 25 000 δραχ., ποὺ *εἶναι καὶ τὸ ἕνα ἡμερομίσθιο. Ἂν τώρα τὸν ἀριθμὸ 25 000 δρχ. τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, καὶ 6 θὰ βροῦμε 100 000 δρχ., 125 000 δραχ. καὶ 150 000 δραχμές.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1η ὁμάδα.

1. Νὰ μοιρασθῇ :

α) Ὁ ἀριθμὸς 108 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5.

β) Ὁ ἀριθμὸς 210 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 4.

γ) Ὁ ἀριθμὸς 180 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5, 6 καὶ 7.

δ) Ὁ ἀριθμὸς 10 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5, 6 καὶ 9.

2. Δύο ἐργάτες ἄνοιξαν ἕνα πηγάδι σὲ βάθος 12 μέτρα. Ὁ ἕνας ἄνοιξε τὰ 7 μέτρα καὶ ὁ ἄλλος ἄνοιξε τὰ ὑπόλοιπα. Ἐπῆραν δὲ γιὰ τὴν ἐργασία τους αὐτὴ 480 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ καθένας ;

3. Ἀπὸ δύο ἐργάτες ἐργοστασίου ὁ ἕνας ἐργάζεται μὲ ἡμερομίσθιο 20 000 δραχ. καὶ ὁ ἄλλος μὲ ἡμερομίσθιο 25 000 δραχ. Καὶ γιὰ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἡμερομισθίων ἐπῆραν οἱ δύο μαζὶ 90 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ ἕνας ἐργάτης καὶ πόσες ὁ ἄλλος;

4. Ἔκανε ἕνας μεῖγμα ἀπὸ 3 ὀκάδες βούτυρο καὶ 2 ὀκάδες λῖπος. Θέλει δὲ νὰ κάνῃ 40 ὀκάδες ἴδιο μεῖγμα. Πόσες ὀκάδες βούτυρο καὶ πόσες ὀκάδες λῖπος θὰ βάλῃ στὸ μεῖγμα αὐτό;

5. Σὲ ἕνα χρυσὸ κόσμημα τὰ 9 μέρη τοῦ βάρους του εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὸ ἄλλο 1 μέρος εἶναι χαλκός· ἂν τὸ κόσμημα αὐτὸ ἔχει βάρος 7 δράμια, πόσος εἶναι ὁ καθαρὸς χρυσὸς στὸ κόσμημα αὐτὸ καὶ πόσος ὁ χαλκός;

6. Δύο τεχνίτες γιὰ μιὰ ἐργασία ἐπῆραν 1 200 000 δραχμές. Ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἐργάσθηκε διπλάσια ἀπὸ τὸν ἄλλο. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ καθένας;

7. Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθηκαν 4 ἡμέρες ὁ ἕνας, 5 ἡμέρες ὁ ἄλλος καὶ 9 ἡμέρες ὁ τρίτος. Ἐπῆραν δὲ γιὰ τὴν ἐργασία τους 360 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ καθένας;

8. Τρεῖς ἐργάτες ἐργοστασίου ἐπληρώθηκαν γιὰ 18 ἡμερομίσθια. Ὁ πρῶτος ἀπὸ αὐτοὺς ἐπῆρε 125 000 δραχμές. Ὁ δεύτερος ἐπῆρε 150 000 δραχμὲς καὶ ὁ τρίτος ἐπῆρε 175 000 δραχμές. Γιὰ πόσα ἡμερομίσθια ἐπληρώθηκε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἐργάτες αὐτούς;

9. Ἕνα μεγάλο οἰκόπεδο ἀπὸ 3 στρέμματα ἐχωρίσθηκε σὲ τρία μέρη, ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4. Πόσα στρέμματα εἶχε τὸ καθένα μέρος;

10. Τρεῖς ἐμοίρασαν μεταξύ τους 338 000 δραχμές. Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἔπαιρνε 2 μερίδια, ὁ ἄλλος ἔπαιρνε 4 καὶ ὁ τρίτος ἔπαιρνε 7 μερίδια. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ καθένας ἀπὸ τὶς 338 000 δραχμές;

11. Τρεῖς ἐμοίρασαν μεταξύ τους 221 000 δραχμές. Ὅταν ὁ ὁ πρῶτος ἔπαιρνε 2 μερίδια, ὁ δεύτερος ἔπαιρνε 3 μερίδια περισσότερο. Καὶ ὁ τρίτος ἔπαιρνε 1 μερίδα περισσότερο ἀπὸ ὅσα ἔπαιρνε ὁ δεύτερος. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ καθένας ἀπὸ τὶς 221 000 δραχμές;

12. Τρεῖς ἀγρότες Α, Β, Γ, ἀγόρασαν ἕνα κτῆμα ἀπὸ 48 στρέμματα καὶ τὸ ἐμοίρασαν μεταξύ τους κατὰ τὰ χρήματα ποὺ ἔδωκε ὁ καθένας. Ὁ Β ἔδωκε διπλάσια χρήματα ἀπὸ τὸν Α καὶ ὁ Γ ἔδωκε τριπλάσια χρήματα ἀπὸ τὸν Α. Πόσα στρέμματα ἀγόρασε ὁ καθένας ἀπὸ αὐτούς;

2η ὁμάδα.

1. ***Ἕνας ἔκανε μεῖγμα 94 ὀκάδων ἀπὸ καφὲ καὶ κριθάρι μὲ τὴν ἑξῆς ἀναλογία. Σὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς καφὲ ἔβαλε $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς κριθάρι. Πόσο καφὲ καὶ πόσο κριθάρι ἔβαλε στὸ μεῖγμα αὐτὸ τῶν 94 ὀκάδων;***

Ἐδῶ πρέπει νὰ μερίσωμε τὶς 94 ὀκάδες σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$. Ἀλλὰ γιὰ νὰ γίνῃ ὁ μερισμὸς αὐτός, πρέπει οἱ ἀριθμοὶ $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$ νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν ἴδια μονάδα. Ἔτσι τρέπομε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{4}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$ στὰ ὁμώνυμα $\frac{32}{40}$ καὶ $\frac{15}{40}$. Ἀλλὰ τώρα βλέπομε, ὅτι στὰ 32 μέρη (32 τεσσαρακοστὰ) καφέ, βάζει 15 μέρη (15 τεσσαρακοστὰ) κριθάρι. Ὥστε τὶς 94 ὀκάδες θὰ τὶς μερίσωμε σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 32 καὶ 15, ποὺ εἶναι ἀριθμηταὶ στὰ ὁμώνυμα κλάσματα ποὺ βρήκαμε. Ὥστε στὸ μεῖγμα θὰ βάλῃ:

$$\frac{94 \times 32}{32+15} = \frac{94 \times 32}{47} = 64 \text{ ὀκάδες καφὲ}$$

καὶ $$\frac{94 \times 15}{47} = 30 \text{ ὀκάδες κριθάρι.}$$

Πῶς λοιπὸν μερίζομε ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα κλασμάτων;

2. Νὰ μερίσης τὸν ἀριθμὸ 21 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ $\frac{3}{4}$. (Ἐπειδὴ $1 = \frac{4}{4}$, θὰ μερίσωμε τὸν 21 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 3).

3. Νὰ μερίσης τὸν ἀριθμὸ 210 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{3}$·

4. Νὰ μερίσης τὸν ἀριθμὸ 300 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{6}$·

5. Ἕνα μεῖγμα ἔγινε ἀπὸ $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες βούτυρο καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς λῖπος. 26 ὀκάδες ἀπὸ τὸ ἴδιο μεῖγμα πόσες ὀκάδες βούτυρο καὶ πόσες ὀκάδες λῖπος ἔχουν;

6. Ἔκανε ἕνας μεῖγμα 60 ὀκάδων ἀπὸ καφὲ καὶ κριθάρι μὲ τὴν ἑξῆς ἀναλογία. Σὲ 1 ὀκὰ καφὲ ἔβαλε $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς κριθάρι. Πόσες ὀκάδες καφὲ καὶ πόσες ὀκάδες κριθάρι ἔβαλε στὸ μεῖγμα αὐτὸ τῶν 20 ὀκάδων;

7. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα 240 ὀκάδων ἀπὸ ἀλεύρι σιταριοῦ καὶ καλαμποκιοῦ μὲ τὴν ἑξῆς ἀναλογία. Σὲ $2\frac{1}{2}$ ὀκάδες ἀπὸ τὸ πρῶτο ἀλεύρι, ἔβαλε 200 δράμια ἀπὸ τὸ δεύτερο. Πόσες ὀκάδες ἔβαλε ἀπὸ τὸ πρῶτο ἀλεύρι καὶ πόσες ὀκάδες ἀπὸ τὸ δεύτερο γιὰ νὰ κάνη τὸ μεῖγμα αὐτὸ τῶν 240 ὀκάδων;

8. Ἕνας διαθέτει ἀπὸ τὰ εἰσοδήματά του 7 500 000 δραχμὲς τὸ χρόνο γιὰ τὸ δημοτικὸ σχολεῖο τῆς πόλεώς του, γιὰ τοὺς ἀπόρους ἀσθενεῖς καὶ γιὰ τὸν ἀθλητικὸ σύλλογο. Κάνει δὲ τὴ διανομὴ μὲ τρόπο ὥστε, ὅταν ὁ ἀθλητικὸς σύλλογος παίρνη 1 μερίδιο, τὸ δημοτικὸ σχολεῖο νὰ παίρνη $1\frac{1}{2}$ μερίδιο καὶ γιὰ τοὺς ἀπόρους ἀσθενεῖς νὰ μένουν $2\frac{1}{2}$ μερίδια. Νὰ βρῆτε πόσες δραχμὲς διαθέτει γιὰ καθένα σκοπὸ χωριστά.

9. Ἕνας ἔκανε κρᾶμα 24,65 χιλιογράμμων ἀπὸ 8 μέρη χαλκό, 3,5 μέρη τσίγκο καὶ 3 μέρη νίκελ. Πόσα χιλιόγραμμα ἔχει βάλη ἀπὸ καθένα ἀπὸ τὰ μέταλλα αὐτὰ γιὰ νὰ κάνη τὸ κρᾶμα;

3η ὁμάδα.

1. *Δύο ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα χωράφι καὶ ἐπῆραν 167 500 δραχμές. Ὁ πρῶτος ἐργάτης ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες ἀπὸ 7 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ὁ δεύτερος ἐργάτης ἐργάσθηκε 4 ἡμέρες ἀπὸ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσες ἀπὸ τὶς 167 500 δραχμὲς θὰ πάρῃ ὁ καθένας ἐργάτης;*

Ὁ α′ ἐργάτης ἐργάσθηκε 7 ὧρες $\times 5 = 35$ ὧρ. καὶ ὁ β′ ἐργάσθηκε 8 ὧρες $\times 4 = 32$ ὧρες. Ὥστε τὶς 167 500 δραχμὲς θὰ τὶς μερίσωμε σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ὡρῶν, ποὺ ἐργάσθηκε ὁ καθένας ἐργάτης.

Ὥστε ὁ α′ ἐργάτης θὰ πάρῃ:

$$\frac{167\,500 \times 35}{35 + 32} = \frac{167\,500 \times 35}{67} = 2\,500 \times 35 = 87\,500 \text{ δραχ.}$$

Ὁ δὲ β′ ἐργάτης θὰ πάρῃ:

$$\frac{167\,500 \times 32}{67} = 2\,500 \times 32 = 80\,000 \text{ δραχ.}$$

2. Ἀπὸ τρεῖς ὑφάντριες ἡ μία ἐργάσθηκε 5 ἡμέρες ἀπὸ 6 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ἡ ἄλλη ἐργάσθηκε 4 ἡμέρες ἀπὸ 7 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ἡ τρίτη ἐργάσθηκε 6 ἡμέρες ἀπὸ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ἔτσι ὕφαναν οἱ τρεῖς μαζὶ 53 πῆχες ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα ὕφανε ἡ κάθε μιά;

3. Τρεῖς καπνοπαραγωγοὶ εἶχαν καπνὸ τῆς ἰδίας ποιότητας καὶ τὸν ἐπούλησαν μὲ 20 000 000 δραχμές. Ὁ ἕνας ἀπ' αὐτοὺς εἶχε 4 δέματα καπνὸ ἀπὸ 45 ὀκάδες τὸ καθένα. Ὁ ἄλλος εἶχε 2 δέματα καπνὸ ἀπὸ 53 ὀκάδες τὸ καθένα. Καὶ ὁ τρίτος εἶχε 3 δέματα καπνὸ ἀπὸ 38 ὀκάδες τὸ καθένα. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ 1ος, πόσες ὁ 2ος καὶ πόσες ὁ 3ος καπνοπαραγωγός;

4. Μία ἔκτασις ἀπὸ 470 στρέμματα ἐμοιράσθηκε σὲ 10 οἰκογένειες, ἀνάλογα μὲ τὰ μέλη ποὺ εἶχε ἡ κάθε μιά. Ἀπὸ τὶς οἰκογένειες αὐτὲς οἱ 2 εἶχαν ἀπὸ 6 μέλη, οἱ 3 εἶχαν ἀπὸ 5 μέλη καὶ οἱ ὑπόλοιπες εἶχαν ἀπὸ 4 μέλη ἡ κάθε μιά. Πόσα στρέμματα ἐπῆραν οἱ 2 πρῶτες οἰκογένειες, πόσα ἐπῆραν οἱ 3 δεύτερες καὶ πόσα στρέμματα ἐπῆραν οἱ ὑπόλοιπες; Πόσα στρέμματα ἀναλογοῦν σὲ κάθε μέλος ἀπὸ τὶς οἰκογένειες αὐτές;

Προβλήματα Ἑταιρείας.

Ὅταν δύο ἢ περισσότεροι ἄνθρωποι εἶναι ἑνωμένοι σὲ ἑταιρεία (ἐμπορική) αὐτὸ σημαίνει, ὅτι ἔχουν συμφωνήσει νὰ καταθέσουν κεφάλαια γιὰ νὰ κάμουν μιὰ ἐπιχείρησι μαζί. Στὰ προβλήματα ἑταιρείας ζητεῖται νὰ μοιρασθῆ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μιᾶς ἐπιχειρήσεως σὲ ὅσους τὴν ἀνέλαβαν.

1η ὁμάδα.

1. ***Τρεῖς ἄνθρωποι ἔκαναν μιὰ συνεταιρικὴ ἐπιχείρησι· δηλαδὴ ἔκαναν μιὰ ἑταιρεία. Σ' αὐτὴ ὁ ἕνας συνέταιρος κατέθεσε 5 000 000 δραχμές, ὁ ἄλλος κατέθεσε 8 000 000 δραχμὲς καὶ ὁ τρίτος κατέθεσε 7 000 000 δραχμές. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐκέρδισαν 2 400 000 δραχμές. Πόσες δραχμὲς κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας;***

Στὸ πρόβλημα τοῦτο βλέπομε, ὅτι ὅσο χρόνο ἔμεινε ὁ ἕνας στὴν ἐπιχείρησι, τόσο χρόνο ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος. Οἱ τρεῖς τους ὅμως κατέθεσαν ὁ ἕνας μὲ τὸν ἄλλο διαφορετικὰ κεφάλαια. Ὥστε τὸ κέρδος θὰ τὸ μοιράσουν ἀνάλογα μὲ τὰ κεφάλαιά τους.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν αὐτό, τὸ ὁποῖον λέγεται *πρόβλημα ἑταιρείας*, δὲν εἶναι παρὰ πρόβλημα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα. Ὥστε οἱ 2 400 000 δραχμὲς κέρδος θὰ μερισθοῦν σὲ μέρη ἀλάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5 000 000, 7 000 000 καὶ 8 000 000.

Ὥστε ὁ α΄ ἐπῆρε:

$$\frac{2\,400\,000 \times 5\,000\,000}{20\,000\,000} = 600\,000 \text{ δραχμές,}$$

ὁ β΄ ἐπῆρε:

$$\frac{2\,400\,000 \times 8\,000\,000}{20\,000\,000} = 960\,000 \text{ δραχμές,}$$

καὶ ὁ γ΄ ἐπῆρε:

$$\frac{2\,400\,000 \times 7\,000\,000}{20\,000\,000} = 840\,000 \text{ δραχμές.}$$

Οἱ τρεῖς δὲ μαζὶ ἐπῆραν:

$$600\,000 + 960\,000 + 840\,000 = 2\,400\,000 \text{ δραχμές.}$$

Σημείωσις: Νὰ διαιρέσετε τοὺς ἀριθμοὺς 5 000 000, καὶ 7 000 000 καὶ 8 000 000 διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτη τους 1 000 000. Ἔτσι θὰ βρῆτε τοὺς ἀριθμοὺς 5, 7 καὶ 8. Τότε νὰ μερίσετε τὸ κέρδος τῶν 2 400 000 δραχμῶν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5, 7 καὶ 8. Κατόπιν τὰ μέρη ποὺ θὰ βρῆτε, νὰ τὰ συγκρίνετε μὲ τὰ μέρη ποὺ βρήκαμε ἀπὸ τὸν προηγούμενο μερισμό. Τέλος νὰ πῆτε, στὰ προβλήματα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα, τί ἠμπορεῖτε νὰ κάνετε γιὰ νὰ γίνωνται ἁπλούστερες οἱ πράξεις.

2. Ἕνας ἄρχισε ἐμπορικὴ ἐπιχείρησι μὲ 12 000 000 δραχμές. Ἔπειτα ἀπὸ 4 μῆνες ἐπῆρε συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσό. Τώρα οἱ δύο μαζὶ ἐπῆραν ἔπειτα ἀπὸ 2 μῆνες τρίτο συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε πάλι τὸ ἴδιο ποσό. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτή, ἕνα ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε, ἔδωσε 5 200 000 δραχμὲς κέρδος. Πόσες δραχμὲς ἐπῆρε ὁ καθένας;

Στὸ πρόβλημα τοῦτο οἱ τρεῖς συνέταιροι κατέθεσαν ἴσα κεφάλαια. Ἀλλὰ τὰ κεφάλαια τοῦ α′ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 1 ἔτος = 12 μῆνες, τοῦ β′ ἔμειναν 12 μῆν — 4 μῆν. = 8 μῆνες καὶ τὰ κεφάλαια τοῦ γ′ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 8 μῆν. — 2 μῆν. = 6 μῆνες. Ὥστε τὸ κέρδος θὰ μοιρασθῆ ἀνάλογα πρὸς τοὺς χρόνους ποὺ ἔμειναν τὰ (ἴσα) κεφάλαια στὴν ἐπιχείρησι. Ἤτοι οἱ 5 200 000 δρχ. κέρδος θὰ μερισθοῦν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 12, 8 καὶ 6.

3. Δυὸ ἄνθρωποι ἔκαναν συνεταιρικὴ ἐπιχείρησι: ὁ ἕνας μὲ 7 500 000 δραχμὲς κεφάλαιο καὶ ὁ ἄλλος μὲ διπλάσιο κεφάλαιο. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐζημιώθηκαν 1 125 000 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

4. Σὲ μιὰ ἐπιχείρησι ἀπὸ δύο συνεταίρους, ὁ ἕνας κατέθεσε 1 250 000 δραχμὲς καὶ ὁ ἄλλος 500 000 δραχμὲς περισσότερο. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἔδωκε κέρδος 2 250 000 δραχμές. Πόσο κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας;

5. Δύο συνέταιροι κατέθεσαν μαζὶ σὲ μιὰ ἐπιχείρησι 27 000 000 δραχμές. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ὁ ἕνας ἐκέρδισε 2 500 000 δραχμὲς καὶ ὁ ἄλλος ἐκέρδισε 1 250 000 δραχμές. Τί κεφάλαιο κατέθεσε στὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο συνεταίρους;

6. Τρεῖς συνέταιροι κατέθεσαν γιὰ μιὰ ἐπιχείρησι ἀπὸ ἴσα χρήματα. Ἡ κατάθεσις τοῦ α′ ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ 18 μῆνες, τοῦ β′ ἔμεινε 1 ἔτος καὶ τοῦ γ′ ἡ κατάθεσις

ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι 8 μῆνες. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἔδωκε 19 ἑκατομμύρια δραχμὲς κέρδη. Πόσο κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας;

7. Ἕνας ἄρχισε ἐπιχείρησι μὲ ἕνα ὡρισμένο κεφάλαιο. Ἔπειτα ἀπὸ 2 μῆνες ἐπῆρε συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο κεφάλαιο. Ἔπειτα δὲ ἀπὸ ἄλλους 8 μῆνες, οἱ δύο συνέταιροι εἶδαν, ὅτι ἡ ἐπιχείρησις ἀφῆκε ζημία 900 000 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

8. Τρεῖς ἔκαναν συνεταιρικὴ ἐπιχείρησι μὲ 12 000 000 δραχμές. Ἀπὸ τὶς δραχμὲς αὐτές, ὁ α΄ κατέθεσε τὸ $\frac{1}{3}$, ὁ β, τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ γ΄ τὰ ὑπόλοιπα. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἀφῆκε κέρδη 6 300 000 δραχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

9. Ἀπὸ δύο συνεταίρους σὲ μία ἐπιχείρησι, ὁ ἕνας κατέβαλε 18 000 000 δραχμὲς καὶ ὁ ἄλλος 27 000 000 δραχμές. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἀφῆκε κέρδη 6 750 000 δραχμὲς γιὰ τὰ ὁποῖα ἐπληρώθηκε φόρος 25 %. Πόσες δραχμὲς καθαρὸ κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο συνεταίρους;

10. Ἀπὸ δύο συνεταίρους σὲ μιὰ ἐπιχείρησι ὁ ἕνας κατέβαλε 9 000 000 δραχμὲς καὶ ὁ ἄλλος κατέβαλε τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν δραχμῶν τοῦ πρώτου. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἀφῆκε κέρδη 2 250 000 δραχμές, γιὰ τὰ ὁποῖα ἐπληρώθηκε φόρος 20 %. Πόσες δραχμὲς καθαρὸ κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο συνεταίρους;

2η ὁμάδα.

1. Σὲ μία ἐπιχείρησι ἀπὸ δύο συνεταίρους τὰ κεφάλαια τοῦ α΄ ἀπὸ 5 000 000 δραχμὲς ἔμειναν 10 μῆνες καὶ τὰ κεφάλαια τοῦ β΄ ἀπὸ 8 000 000 δραχμὲς ἔμειναν 6 μῆνες. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἀφῆκε κέρδη 4 900 000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Στὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ καὶ τὰ κεφάλαια ποὺ κατέθεσαν οἱ συνέταιροι εἶναι ἄνισα καὶ οἱ χρόνοι ποὺ ἔμειναν τὰ κεφάλαια αὐτὰ εἶναι ἄνισοι.

Ἀλλὰ τώρα εὔκολο εἶναι νὰ ἐννοήσωμε, ὅτι ὁ α΄ ποὺ κατέθεσε 5 000 000 δρχ. γιὰ 10 μῆνες θὰ πάρῃ τὸ ἴδιο κέρδος, ποὺ θὰ ἔπαιρνε ἂν κατέθετε $5\,000\,000 \times 10 = 50\,000\,000$ δρχ. γιὰ 1 μῆνα.

Ὅμοια καὶ ὁ β', ποὺ κατέθεσε 8 000 000 δραχμὲς γιὰ 6 μῆνες, θὰ πάρῃ τὸ ἴδιο κέρδος ποὺ θὰ ἔπαιρνε ἂν κατέθετε $8\,000\,000 \times 6 = 48\,000\,000$ δραχμὲς γιὰ 1 μῆνα. Ὥστε γιὰ νὰ βροῦμε τί κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας συνέταιρος, θὰ μερίσωμε τὸ κέρδος τῶν 4 900 000 δραχμῶν σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 50 000 000 καὶ 48 000 000 ἢ ἁπλούστερα τῶν ἀριθμῶν 50 καὶ 48 ἢ ἀκόμα ἁπλούστερα σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 25 καὶ 24.

Ἔτσι ὁ α' θὰ πάρῃ $\dfrac{4\,900\,000 \times 25}{49} = 2\,500\,000$ δραχμὲς κέρδος καὶ ὁ β' θὰ πάρῃ $\dfrac{4\,900\,000 \times 24}{49} = 2\,400\,000$ δραχμὲς κέρδος καὶ οἱ δύο μαζὶ θὰ πάρουν:

$$2\,500\,000 + 2\,400\,000 = 4\,900\,000 \text{ δραχμές.}$$

Ὥστε: **Στὰ προβλήματα ἑταιρείας, ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι ἄνισα καὶ οἱ χρόνοι ποὺ μένουν τὰ κεφάλαια στὴν ἐπιχείρησι εἶναι ἄνισοι 1) θὰ πολλαπλασιάζωμε τὰ κεφάλαια ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους καὶ 2) θὰ μερίζωμε τὸ κέρδος ἢ τὴ ζημία σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα ποὺ βρίσκομε.**

2. Σὲ μιὰ ἐπιχείρησι ἀπὸ δύο συνεταίρους, τὰ κεφάλαια τοῦ α' ἀπὸ 4 500 000 δραχ. ἔμειναν 8 μῆνες καὶ τοῦ β' ἀπὸ 6 000 000 δραχμὲς ἔμειναν 7 μῆνες. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι αὐτὴ ἐκέρδισαν 3 900 000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

3. Ἕνας ἄρχισε ἐπιχείρησι μὲ 8 000 000 δραχμὲς καὶ ἔπειτα ἀπὸ 4 μῆνες ἐπῆρε συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 10 000 000 δραχμές. Ἕνα δὲ ἔτος ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις, ἐλογαριάσθηκαν καὶ ἐβρῆκαν, ὅτι ἐκέρδισαν 3 520 000 δραχμές. Τί κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο συνεταίρους;

4. Ἕνας ἄρχισε ἐπιχείρησι μὲ 6 000 000 δραχμές. Ἔπειτα δὲ ἀπὸ 6 μῆνες ἐπῆρε συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε διπλάσιο κεφάλαιο ἀπὸ τὸν πρῶτο. Δέκα δὲ μῆνες ἀκόμα ἀργότερα ἐλογαριάσθηκαν καὶ ἐβρῆκαν, ὅτι ἐκέρδισαν 4 320 000

δραχμές. Τί κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο συνεταίρους ;

5. Ἕνας ἄρχισε ἐπιχείρησι μὲ 2000 λίρες. Ἕνα ἔτος ἀργότερα ἐπῆρε συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 1800 λίρες. Ἕνα ἔτος ἀκόμα ἀργότερα ἐπῆρε τρίτο συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 3000 λίρες. Τρία δὲ ἔτη ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπιχειρήσεως, ἔκαναν τὸ λογαριασμὸ καὶ ἐβρῆκαν, ὅτι ἐκέρδισαν 5040 λίρες. Πόσο κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας ;

6. Σὲ μιὰ ἐπιχείρησι ἀπὸ τρεῖς συνεταίρους ὁ α΄ κατέθεσε κεφάλαιο ἀπὸ 10 000 δολλάρια, ὁ β΄ κατέθεσε διπλάσιο κεφάλαιο καὶ ὁ γ΄ κατέθεσε τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ κεφαλαίου τοῦ α΄. Τὰ κεφάλαια τοῦ α΄ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 20 μῆνες, τοῦ β΄ ἔμειναν 15 μῆνες καὶ τοῦ γ΄ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 10 μῆνες. Ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ἀφῆκε κέρδος 13 000 δολλάρια. Πόσο κέρδος ἐπῆρε ὁ καθένας ;

7, Στὰ προβλήματα ἑταιρείας, νὰ πῆτε πῶς μερίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία, ὅταν :

1) Οἱ καταθέσεις εἶναι ἄνισες καὶ οἱ χρόνοι ἴσοι.
2) Οἱ » » ἴσες » » » ἄνισοι.
3) Οἱ » » ἄνισες » » » ἄνισοι.

Προβλήματα μέσου ὅρου.

Πρόβλημα : ***Ἐλεύθερος ἐργάτης μιὰ ἡμέρα ἐκέρδισε ἀπὸ τὴν ἐργασία του 30 000 δραχμές, τὴν ἄλλη 37 000 δραχμὲς καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα ἐκέρδισε 29 000 δραχμές. Ἂν ὁ ἐργάτης αὐτὸς ἐργαζόταν σὲ ἐργοστάσιο, μὲ τί σταθερὸ ἡμερομίσθιο θὰ ἐκέρδιζε τὶς τρεῖς αὐτὲς ἡμέρες τὰ ἴδια χρήματα;***

Ὁ ἐργάτης αὐτὸς τὶς τρεῖς ἡμέρες ἐκέρδισε 30 000 δρχ. + 37 000 δρχ. + 29 000 δρχ. = 96 000 δρχ. Ἀλλ' ἀφοῦ τὶς τρεῖς αὐτὲς ἡμέρες ἔπρεπε νὰ πάρη 96 000 δρχ., τὴ μία ἡμέρα, ἔπρεπε νὰ παίρνη 96 000 δρχ. : 3 = 32 000 δρχ.

Ὥστε : $$32\,000 = \frac{30\,000 + 37\,000 + 29\,000}{3}.$$

Τὸ ἡμερομίσθιο τῶν 32 000 δραχμῶν λέγεται ***μέσος ὅρος*** ἢ ***ἀριθμητικὸ μέσο*** τῶν 30 000 δρχ., 37 000 δρχ. καὶ 29 000 δραχμῶν.

Ὥστε: Ἂν ἔχωμε δύο ἢ περισσοτέρους ὁμοειδεῖς ἀριθμοὺς καὶ 1) τοὺς προσθέσωμε καὶ 2) διαιρέσωμε τὸ ἄθροισμά τους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ μᾶς λέγει πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, τὸ πηλίκο ποὺ θὰ βροῦμε λέγεται μέσος ὅρος τῶν ὁμοειδῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι ἂν π.χ. ποῦμε, ὅτι σὲ μιὰ ἑβδομάδα τὰ ἔξοδά μας κατὰ μέσο ὅρο εἶναι 40 000 δραχμὲς τὴν ἡμέρα, αὐτὸ σημαίνει, ὅτι στὶς 7 ἡμέρες τῆς ἑβδομάδας αὐτῆς ἐξοδεύαμε ἄλλοτε περισσότερο ἀπὸ 40 000 δραχμὲς τὴν ἡμέρα καὶ ἄλλοτε ὀλιγώτερο. Ἂν ὅμως προσθέσωμε ὅλα τὰ ἔξοδα τῆς ἑβδομάδας αὐτῆς καὶ διαιρέσωμε τὸ ἄθροισμά τους διὰ τοῦ 7, πρέπει νὰ βροῦμε πηλίκο 40 000 δραχμές.

Τοὺς μέσους ὅρους τοὺς χρησιμοποιοῦν σὲ πολλὲς περιστάσεις. Ἔτσι π.χ. λέγουν, ὅτι τὰ ἔσοδα τοῦ Κράτους ἀπὸ τοὺς φόρους εἶναι τόσα δισεκατομμύρια τὸ μῆνα, κατὰ μέσο ὅρο. Ἢ ὅτι σὲ μιὰ πόλι ἢ σὲ μιὰ χώρα τόσες εἶναι κατὰ μέσο ὅρο οἱ γεννήσεις τὸ χρόνο κ.ο.κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Μία ὑφάντρια ὕφανε τὴ μιὰ ἡμέρα 3,6 μέτρα ὕφασμα, τὴν ἄλλη 2,7 μέτρα καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα ὕφανε 3,3 μέτρα ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα ὕφανε τὴν ἡμέρα κατὰ μέσο ὅρο;

2. Σὲ μιὰ πόλι ἡ θερμοκρασία ἦταν τὸ πρωῒ 12°, τὸ μεσημέρι 18° καὶ τὸ βράδυ 9°. Πόση ἦταν ἡ μέση θερμοκρασία τῆς ἡμέρας αὐτῆς;

3. Ἕνας ἐπῆρε ἀπὸ τὶς ἀγελάδες του, σὲ τέσσερες κατὰ συνέχεια ἡμέρες, γάλα 1) $8\frac{1}{2}$ ὀκ. 2) $9\frac{3}{4}$ ὀκ. 3) $10\frac{1}{4}$ ὀκ. 4) $9\frac{1}{2}$ ὀκ. Πόσες ὀκάδες γάλα ἐπῆρε τὴν ἡμέρα κατὰ μέσο ὅρο;

4. Ἕνας ἀπὸ τὸ χωράφι του, σὲ τέσσερα κατὰ συνέχεια χρόνια, ἐπῆρε σιτάρι 1) 2872 ὀκ., 2) 3940 ὀκ., 3) 4080 ὀκ. καὶ 4) 3144 ὀκ. Πόσες ὀκαδες σιτάρι ἐπῆρε τὸ χρόνο κατὰ μέσο ὅρο;

5. Ἕνας μιὰ χρονιά, ἀπὸ 6 στρέμματα χωράφι ἐπῆρε 4200 ὀκάδες κριθάρι καὶ ἀπὸ 4 στρέμματα χωράφι ἐπῆρε κριθάρι 2800 ὀκ. Ἀπὸ τὰ χωράφια αὐτὰ πόσο κριθάρι ἐπῆρε ἀπὸ κάθε στρέμμα κατὰ μέσο ὅρο;

Προβλήματα ἀναμείξεως.

1ο εἶδος.

Πρόβλημα: *Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 12 ὀκάδες καφὲ τῶν 80 000 δραχμῶν τὴν ὀκά, μὲ 3 ὀκάδες κριθάρι τῶν 3 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο κοστίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος;*

12 ὀκ. καφὲ μὲ 80 000 δρχ. τὴν 1 ὀκὰ κοστίζουν
80 000 δρχ. × 12 = 960 000 δρχ.
3 » κριθάρι » 3 000 δρχ. τὴν 1 ὀκὰ κοστίζουν
3 000 δρχ. × 3 = 9 000 δρχ.

15 ὀκ. μεῖγμα κοστίζουν 969 000 δρχ.

1 ὀκὰ τοῦ μείγματος κοστίζει 969 000 δρχ. : 15 = 64 600 δρχ.

Τώρα βλέπομε, ὅτι γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτό:

1) Ἐβρήκαμε τὴν ἀξία κάθε ποσοῦ ποὺ ἀναμείχθηκε χωριστά.

2) Τὰ ἐξαγόμενα ποὺ ἐβρήκαμε, τὰ προσθέσαμε. Ἔτσι ἐβρήκαμε τὴν ἀξία τοῦ μείγματος.

3) Ἐπροσθέσαμε τὰ ποσὰ ποὺ ἀναμείχτηκαν καὶ διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διαιρέσαμε τὴν ἀξία τοῦ μείγματος.

Ἔτσι ἐβρήκαμε τὴν ἀξία τῆς 1 ὀκᾶς τοῦ μείγματος.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ λύνωμε καὶ κάθε ἄλλο πρόβλημα ὅμοιο μὲ αὐτό. Δηλαδὴ κάθε πρόβλημα στὸ ὁποῖο μᾶς δίνουν 1) τὰ ποσὰ ποὺ ἀναμειγνύονται, 2) τὴν τιμὴ τῆς μονάδας κάθε ποσοῦ καὶ μᾶς ζητοῦν τὴν τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μείγματος.

Πρέπει ὅμως οἱ μονάδες τῶν ποσῶν καὶ ἡ μονάδα τοῦ μείγματος, ποὺ μᾶς ζητοῦν τὴν τιμή της, νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Δηλαδὴ ὅλες νὰ εἶναι ὀκάδες, ἢ χιλιόγραμμα, ἢ γραμμάρια κ.ο.κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. α) Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 1 ὀκὰ κρασὶ ἀξίας 4 000 δραχμῶν καὶ ἀπὸ 1 ὀκὰ κρασὶ ἀξίας 3 000 δραχμῶν. Πόσο ἀξίζει ἡ μία ὀκὰ τοῦ μείγματος; Ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς τοῦ μείγματος ποὺ θὰ βρῆτε τί εἶναι σχετικὰ μὲ τὶς τιμὲς τῆς 1 ὀκᾶς τῶν δύο ποιοτήτων;

β) Ἀπὸ τὶς δύο παραπάνω ποιότητες κρασί, ὁ ἴδιος ἔκαμε μεῖγμα ἀπὸ 20 ὀκάδες κρασὶ τῆς α΄ ποιότητας καὶ ἀπὸ 20 ὀκάδες κρασὶ τῆς β΄ ποιότητας. Ἠμπορεῖτε νὰ πῆτε χωρὶς νὰ κάνετε πράξεις πόσο θὰ ἀξίζη ἡ μία ὀκὰ τοῦ μείγματος;

γ) Ὅταν λοιπὸν ἕνα μεῖγμα γίνεται ἀπὸ ἴσες ποσότητες εἰδῶν καὶ οἱ ὁμοειδεῖς μονάδες αὐτῶν ἔχουν διαφορετικὲς τιμές, τί θὰ κάνωμε γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς ὁμοειδοῦς μονάδας τοῦ μείγματος;

2. Ἕνας ἔχει τρεῖς ποιότητες κρασί. Ἡ μία τοῦ στοιχίζει 4 200 δραχμὲς τὴν ὀκά, ἡ ἄλλη τοῦ στοιχίζει 3 000 δραχμὲς τὴν ὀκὰ καὶ ἡ τρίτη ποιότητα τοῦ στοιχίζει 3 300 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ἀπὸ κάθε δὲ μία ἀπὸ τὶς τρεῖς αὐτὲς ποσότητες ἐπῆρε 100 ὀκάδες καὶ ἔκανε μὲ αὐτὲς μεῖγμα. Πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος;

3. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 60 ὀκάδες λάδι τῶν 12 000 δραχμῶν τὴν ὀκά, μὲ 40 ὀκάδες λάδι τῶν 16 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο κοστίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μείγματος;

4. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 50 ὀκάδες βούτυρο τῶν 45 000 δραχμῶν τὴν ὀκά, μὲ 30 ὀκάδες λῖπος τῶν 18 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο στοιχίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος; Καὶ πόσο στοιχίζουν οἱ 5 ὀκάδες τοῦ μείγματος;

5. Ἕνας εἶχε 1 000 ὀκάδες κρασὶ τῶν 3 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ 800 ὀκάδες κρασὶ τῶν 2 300 δραχμῶν τὴν ὀκά. Ἔκανε δὲ μεῖγμα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ὀκάδων τῆς α΄ καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ὀκάδων τῆς β΄ ποιότητας. Πόσο τοῦ στοιχίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος.

6. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 15 ὀκάδες καφὲ τῶν 80 000 δραχ. τὴν ὀκὰ μὲ 10 ὀκάδες καφὲ τῶν 60 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο κοστίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος; Καὶ πόσο πρέπει νὰ τὸ πουλάη τὴν ὀκά, ἂν θέλη νὰ κερδίζη 20 % ἐπὶ τῆς ἀξίας;

7. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα 1) ἀπὸ 12 ὀκάδες λάδι τῶν 18 000 δρχ. τὴν ὀκὰ 2) ἀπὸ 3 ὀκάδες λάδι τῶν 15 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ 3) ἀπὸ 5 ὀκάδες λάδι τῶν 12 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο κοστίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος;

8. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα μὲ $3\frac{1}{2}$ ὀκάδες ἀλεύρι ἀπὸ σιτάρι τῶν 3 200 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ μὲ $1\frac{1}{2}$ ὀκὰ ἀλεύρι ἀπὸ καλαμπόκι τῶν 1 800 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος;

9. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα μὲ 2 ὀκάδες καπνὸ τῶν 50 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ μὲ 200 δράμια καπνὸ τῶν 60 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος;

10. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα 1) ἀπὸ 850 ὀκάδες κρασὶ τῶν 3 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ 2) ἀπὸ 600 ὀκάδες κρασὶ τῶν 3 600 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ 3) ἀπὸ 50 ὀκάδες νερό. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος;

11. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 15 ὀκάδες λῖπος τῶν 18 000 δρχ. τὴν ὀκὰ μὲ διπλάσια ποσότητα βουτύρου τῶν 48 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο στοιχίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος; Καὶ πόσο πρέπει νὰ τὸ πουλάη, ἂν θέλη νὰ κερδίζη 15 % ἐπὶ τῆς ἀξίας;

12. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 400 ὀκάδες ἀλεύρι τῶν 3 000 δρχ. τὴν ὀκὰ μὲ 200 ὀκάδες ἀλεύρι τῶν 2 400 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πουλάει δὲ τὸ μεῖγμα μὲ 3 200 τὴν ὀκά. Πόσες δραχμὲς κερδίζει ἀπὸ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος; Καὶ πόσες δραχμὲς κερδίζει ἀπὸ ὅλο τὸ μεῖγμα;

13. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 1 800 ὀκάδες κρασὶ ἀξίας 3 500 δραχμῶν τὴν ὀκά. Ἀπὸ τὸ μεῖγμα αὐτὸ οἱ 800 ὀκάδες ἔχουν ἀξία 4 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Οἱ ὑπόλοιπες 1 000 ὀκάδες τί ἀξία ἔχουν; Καὶ πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ τῆς ποιότητας αὐτῆς;

14. Ἕνας σὲ 20 ὀκάδες βούτυρο ἀξίας 42 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ ἔβαλε 20 % τοῦ βάρους αὐτοῦ λῖπος. Ἔτσι ἔκανε μεῖγμα ἀξίας 37 500 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ λίπους;

2ο εἶδος.

Πρόβλημα: *Ἔχει ἕνας κρασὶ τῶν 4000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ ἄλλο κρασὶ τῶν 3500 δραχμῶν τὴν ὀκά. Θέλει δὲ ἀπὸ τὶς δύο αὐτὲς ποιότητες νὰ κάνη μεῖγμα ἀπὸ 3000 ὀκάδες, ποὺ νὰ τοῦ κοστίζη 3700 δραχμὲς ἡ ὀκά. Πόσες ὀκάδες κρασὶ θὰ βάλη στὸ μεῖγμα ἀπὸ κάθε ποιότητα, χωρὶς καθόλου νὰ χάση ἢ νὰ κερδίση;*

Ἡ α΄ ποιότητα τοῦ κρασιοῦ τοῦ κοστίζει 4000 δραχμὲς τὴν ὀκὰ καὶ στὸ μεῖγμα θὰ τὴν πουλάη 3700 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ὥστε ἀπὸ αὐτὴ θὰ χάνη στὸ μεῖγμα 300 δραχμὲς τὴν ὀκά.

Ἡ β΄ ποιότητα τοῦ κρασιοῦ τοῦ κοστίζει 3500 δραχμὲς τὴν ὀκὰ καὶ στὸ μεῖγμα θὰ τὴν πουλάη 3700 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ὥστε ἀπὸ αὐτὴ θὰ κερδίζη στὸ μεῖγμα 200 δραχμὲς τὴν ὀκά. Ἀλλ' ὅμως ἀπὸ τὸ μεῖγμα δὲν πρέπει νὰ χάση ἢ νὰ κερδίση. Ἀλλ' ἂν βάλη ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα 200 ὀκάδες (ὅσες δραχμὲς κερδίζει ἀπὸ τὴ 1 ὀκὰ τῆς δευτέρας ποιότητας) θὰ χάση $300 \times 200 = 60\,000$ δραχμές. Ἂν δὲ βάλη ἀπὸ τὴ δεύτερη ποιότητα 300 ὀκάδες (ὅσες δραχμὲς χάνει ἀπὸ τὴ 1 ὀκὰ τῆς πρώτης ποιότητας) θὰ κερδίση $200 \times 300 = 60\,000$ δραχμές.

Ὥστε γιὰ νὰ μὴ ἔχη οὔτε κέρδος οὔτε ζημία πρέπει στὸ μεῖγμα νὰ βάλη 200 ὀκ. ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα καὶ 300 ὀκάδες ἀπὸ τὴ β΄ ποιότητα. Ἀλλὰ τότε θὰ κάνη μεῖγμα ἀπὸ 500 ὀκάδες.

Ἐπειδὴ ὅμως ἐμεῖς θέλομε νὰ κάνωμε μεῖγμα ἀπὸ 3000 ὀκάδες, θὰ ποῦμε:

1) Στὶς 500 ὀκ. μεῖγμα θὰ βάλη 200 ὀκ. ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα
» 3000 » » » » X » » » » »

$$X = 200 \text{ ὀκ.} \times \frac{3000}{500} = 1\,200 \text{ ὀκ.}$$

2) Στὶς 500 ὀκ. μεῖγμα θὰ βάλη 300 ὀκ. ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα
» 3000 » » » » X » » » » »

$$X = 300 \text{ ὀκ.} \times \frac{3000}{500} = 1\,800 \text{ ὀκ.}$$

Ὥστε θὰ βάλη στὸ μεῖγμα ἀπὸ τὴ α΄ ποιότ. 1 200 ὀκ.
καὶ » » β΄ » 1 800 »
3 000 »

Τὰ ἴδια ἐξαγόμενα θὰ βροῦμε ἂν μερίσωμε τὶς 3 000 ὀκάδες σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 200 καὶ 300. Γιατὶ ἂν βάλη στὸ μεῖγμα 2 φορὲς ἢ 3, 4 κλπ. φορὲς 200 ὀκ. ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα, πρέπει νὰ βάλη ἀντίστοιχα 2 φορὲς ἢ 3, 4 κλπ. φορὲς 300 ὀκάδες ἀπὸ τὴ β΄ ποιότητα γιὰ νὰ μὴ ἔχη κέρδος ἢ ζημία. Ἔτσι μὲ τὸ μερισμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα βρίσκομε ὅτι θὰ πάρη ἀπὸ τὴ α΄ ποιότητα.

$\frac{200 \times 3\,000}{500} = 1\,200$ ὀκ. καὶ ἀπὸ τὴ β΄ $\frac{300 \times 3\,000}{500} = 1\,800$ ὀκ.

Τὶς πράξεις γιὰ συντομία τὶς γράφομε ἔτσι:

Τιμὲς 1 ὀκᾶς	*Διαφορὲς*	*Ἀναλογία*		
α' 4000 δρχ.	200	200 ὀκ.	τῶν	4000 δρχ. τὴ 1 ὀκ.
μείγματος 3700 δρχ.				
β' 3500	300	300 ὀκ.	»	3500 δρχ. τὴ 1 ὀκ.
		500 ὀκ.	»	3700 δρχ. τὴ 1 ὀκ.

Μεῖγμα 3000 ὀκ. Ἀπὸ τὴ α' $\frac{3000 \times 200}{500} = 1\,200$ ὀκάδες

ἀπὸ τὴ β' $\frac{3000 \times 300}{500} = 1\,800$ ὀκάδες

Τώρα βλέπομε, ὅτι στὰ προβλήματα ἀναμείξεως τοῦ εἴδους αὐτοῦ μᾶς δίνονται:

1) Οἱ τιμὲς τῶν μονάδων δύο διαφορετικῶν ποσῶν.

2) Ἡ τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μείγματος.

3) Τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ μείγματος.

Καὶ μᾶς ζητοῦν. Πόσες μονάδες ἀπὸ κάθε ποσὸ θὰ βάλωμε στὸ μεῖγμα.

Πρέπει ὅμως οἱ παραπάνω μονάδες νὰ εἶναι ὅλες ὁμοειδεῖς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνας ἔχει βούτυρο τῶν 50 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ λῖπος τῶν 25 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Θέλει δὲ μὲ τὰ εἴδη αὐτὰ νὰ κάνη μεῖγμα 72 ὀκάδες καὶ νὰ τοῦ στοιχίζη 40 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ βάλη στὸ μεῖγμα;

2. Ἕνας ἔχει κρασὶ τῶν 4 400 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ ἄλλο κρασὶ τῶν 3 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Θέλει δὲ μὲ τὶς ποσότητες αὐτὲς νὰ κάνη μεῖγμα 1 000 ὀκάδες καὶ νὰ τοῦ στοιχιζει 3 700 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες θὰ βάλη στὸ μεῖγμα ἀπὸ κάθε ποιότητα; (Νὰ συγκρίνητε μεταξύ τους τὰ ἐξαγόμενα ποὺ θὰ βρῆτε. Ἀπὸ ποιὰ παρατήρησι θὰ βρίσκατε τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ χωρὶς πράξεις;)

3. Ἕνας εἶχε λάδι τῶν 18 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ ἄλλο λάδι τῶν 10 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Θέλει δὲ νὰ κάνη ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη μεῖγμα ἀπὸ 140 ὀκάδες ποὺ νὰ τοῦ στοιχίζει 15 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ βάλη στὸ μεῖγμα;

4. Ἕνας ἔχει δύο ποιότητες ἀλεύρι τῶν 3 200 δραχμῶν καὶ 2 600 δραχμῶν τὴν ὀκά. Μὲ ποιὰ ἀναλογία πρέπει νὰ ἀναμείξη τὸ πρῶτο ἀλεύρι μὲ τὸ δεύτερο γιὰ νὰ κάνη μεῖγμα τῶν 3 000 δραχμῶν τὴν ὀκά;

5. Ἕνας εἶχε οἰνόπνευμα τῶν 18 500 δραχμῶν καὶ τῶν 27 500 δραχμῶν τὴν ὀκά. Ἀπὸ τὰ εἴδη αὐτὰ ἔκανε μεῖγμα ἀπὸ 50 ὀκάδες ἀξίας 1 200 000 δραχμῶν τὸ ὅλον. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος καὶ πόσες ὀκάδες ἀπὸ κάθε εἶδος ἔβαλε στὸ μεῖγμα αὐτό;

6. Ἔχει ἕνας καφὲ τῶν 80 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ τῶν 60 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Θέλει δὲ ἀπὸ τὶς ποιότητες αὐτὲς νὰ κάνη μεῖγμα 12 ὀκάδων ἀξίας 780 000 δραχμῶν τὸ ὅλον. Πόσες ὀκάδες θὰ βάλη στὸ μεῖγμα ἀπὸ κάθε ποιότητα;

7. Ἔχει ἕνας 20 ὀκάδες λάδι τῶν 18 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ θέλει νὰ τὸ ἀναμείξη μὲ λάδι τῶν 12 000 δραχμῶν τὴν ὀκά, ὥστε τὸ μεῖγμα ποὺ θὰ γίνη νὰ κοστίζη 16 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσες ὀκάδες λάδι θὰ βάλη στὸ μεῖγμα ἀπὸ τὴ δεύτερη ποιότητα; (Τὸ μεῖγμα θὰ γίνη μὲ τὴν ἑξῆς ἀναλογία: 4 ὀκάδες λάδι ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα καὶ 2 ὀκάδες λάδι ἀπὸ τὴ δεύτερη ποιότητα.

Ἀφοῦ λοιπὸν σὲ 4 ὀκ. α′ θὰ βάλη 2 ὀκάδες β′
» 20 » » » » X » »

$$X = \frac{2 \times 20}{4} = 10 \text{ ὀκάδες.}$$

8. Ἕνας ἔχει 20 ὀκάδες βούτυρο τῶν 42 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ θέλει στὸ βούτυρο αὐτὸ νὰ βάλη λῖπος ἀξίας 15 000 δραχμῶν τὴν ὀκά, ὥστε τὸ μεῖγμα ποὺ θὰ γίνη νὰ ἔχη ἀξία 37 500 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσο λῖπος θὰ βάλη;

9. Ἕνας ἔχει 80 ὀκάδες κρασὶ τῶν 4 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ μὲ τὸ κρασὶ αὐτὸ καὶ μὲ ἄλλο κρασὶ ἀξίας 3 100 δραχμῶν τὴν ὀκὰ θέλει νὰ κάνη μεῖγμα ἀξίας 3 500 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο κρασὶ θὰ βάλη ἀπὸ τὴ δεύτερη ποιότητα;

10. Σὲ 1 ὀκὰ οἰνόπνευμα ἀξίας 60 000 δραχμῶν πόσο οἰνόπνευμα τῶν 20 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ πρέπει νὰ βάλη, ὥστε τὸ μεῖγμα νὰ ἀξίζη 30 000 δραχμὲς τὴν ὀκά;

Κράματα.

1. Μεῖγμα ἀπὸ δύο ἢ περισσότερα μέταλλα λέγεται **κρᾶμα.** Τὰ χρυσᾶ νομίσματα, τὰ χρυσᾶ κοσμήματα εἶναι κράματα ἀπὸ χρυσὸ (ποὺ λέγεται γενικὰ πολύτιμο μέταλλο)

καὶ ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μέταλλα μὴ πολύτιμα, ὅπως εἶναι π.χ. ὁ χαλκός. Ἕνα χρυσὸ κόσμημα (ἢ ἀπὸ πλατίνα ἢ ἀπὸ ἄργυρο) ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ πολὺ ἢ ὀλίγο χρυσὸ σχετικὰ μὲ τὰ ἄλλα μέταλλα. Τὸ ποσὸ τοῦ πολυτίμου μετάλλου ποὺ περιέχεται σὲ μιὰ μονάδα κράματος (σὲ 1 γραμμάριο, σὲ 1 δράμι κλπ.) λέγεται *τίτλος* τοῦ κράματος ἢ ***βαθμὸς καθαρότητος*** αὐτοῦ. Ὁ τίτλος ἐκφράζεται συνήθως σὲ χιλιοστά.

Ἔτσι ἂν ἕνα χρυσὸ νόμισμα ἔχει τίτλο 0,900 ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς φανερώνει, ὅτι σὲ 1000 μέρη τοῦ νομίσματος αὐτοῦ τὰ 900 μέρη εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ἄλλα 100 μέρη εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλα μέταλλα ὄχι πολύτιμα. Ὥστε ἂν τὸ νόμισμα αὐτὸ ἔχῃ βάρος π.χ. 7 γραμμάρια καὶ θέλομε νὰ βροῦμε πόσο καθαρὸ χρυσάφι ἔχει τὸ νόμισμα αὐτό, θὰ ποῦμε:

Σὲ βάρος 1000 γραμμ. τὰ 900 γραμμ. εἶναι καθ. χρυσὸς
» » 7 » » Χ » » » »

$$X = \frac{900 \times 7}{1000} = 6{,}3 \text{ γραμμάρια}$$

Ὥστε τὸ νόμισμα αὐτὸ ἔχει 6,3 γραμμ. καθαρὸ χρυσὸ καὶ $7 - 6{,}3 = 0{,}7$ γραμμάρια ἀπὸ ἄλλο μέταλλο.

Ἀντίστροφα. Ἂν σὲ κόσμημα βάρους 20 γραμμαρίων τὰ 15 γραμμάρια εἶναι καθαρὸς ἄργυρος καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τί τίτλο ἔχει τὸ κόσμημα αὐτό, θὰ ποῦμε:

Σὲ 20 γραμμάρια κρᾶμα τὰ 15 εἶναι καθαρὸς ἄργυρος
» 1 γραμμάριο » » Χ » » »

$$X = \frac{15 \times 1}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}750.$$

Ὥστε ὁ τίτλος τοῦ κοσμήματος αὐτοῦ εἶναι 0,750.

Στὰ χρυσᾶ κοσμήματα ὁ τίτλος τους ἢ ὁ βαθμὸς καθαρότητός τους ἐκφράζεται καὶ σὲ καράτια. Ὅταν τὸ κόσμημα εἶναι ἀπὸ καθαρὸ χρυσό, λέγομε ὅτι εἶναι 24 καρατίων.

Ἔτσι γιὰ ἕνα κόσμημα ἀπὸ χρυσὸ ἂν μᾶς ποῦνε ὅτι εἶναι π.χ. 18 καρατίων, πρέπει νὰ ἐννοήσωμε ὅτι τὰ 18 μέρη του εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ἄλλα 6 μέρη του εἶναι χαλκὸς ἢ ἄλλα μέταλλα μὴ πολύτιμα.

Ὥστε ἂν κόσμημα ἀπὸ χρυσὸ 15 καρατίων ἔχῃ βάρος 8 δράμια, ἔχει καθαρὸ χρυσὸ $\frac{15\times 8}{24}=5$ δράμια, γιατὶ

σὲ 24 δράμια τὰ 15 δράμια εἶναι καθαρὸς χρυσὸς
» 8 » » Χ » » » »

$$X=\frac{15\times 8}{24}=5 \text{ δράμια.}$$

Τὰ προβλήματα μὲ κράματα τὰ λύνομε, ὅπως καὶ τὰ προβλήματα ἀναμείξεως.

Π.χ. Πρόβλημα 1ου εἴδους: *Ἕνα κρᾶμα ἔγινε ἀπὸ 10 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,900 καὶ ἀπὸ 5 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,840. Τί τίτλο ἔχει τὸ κρᾶμα;*

Τὰ 10 γραμμ. τοῦ α΄ εἴδους ἔχουν $0{,}900\times 10=9$ γρ. καθ. χρ.
Τὰ 5 γραμμ. τοῦ β΄ εἴδους ἔχουν $0{,}840\times 5=4{,}2$ γρ. καθ. χρ.

Τὰ 15 γραμμ. κράματος ἔχουν 13,2 γρ. καθ. χρ.
Τὸ 1 » » ἔχει $13{,}2:15=0{,}880$ » » »

Ὥστε ὁ τίτλος τοῦ κράματος εἶναι 0,880.

Πρόβλημα 2ου εἴδους: *Ἕνας ἔχει δύο εἴδη χρυσοῦ. Οἱ τίτλοι τους εἶναι 0,900 καὶ 0,800. Θέλει δὲ ἀπὸ τὰ εἴδη αὐτὰ νὰ κάνῃ κρᾶμα ἀπὸ 80 γραμμάρια τίτλου 0,840. Πόσα γραμμάρια θὰ βάλῃ στὸ κρᾶμα ἀπὸ κάθε εἶδος;*

Ἀπὸ κάθε γραμμάριο τοῦ 1ου εἴδους, ὅταν τὸ βάλωμε στὸ κρᾶμα θὰ μᾶς περισσέψουν 900 χιλιοστὰ — 840 χιλιοστὰ = = 60 χιλιοστὰ τοῦ γραμμαρίου καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἀπὸ κάθε γραμμάριο τοῦ 2ου εἴδους, ὅταν τὸ βάλωμε στὸ κρᾶμα, θὰ μᾶς λείπουν 840 χιλιοστὰ — 800 χιλιοστὰ = 40 χιλιοστὰ τοῦ γραμμαρίου καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἔτσι ἂν βάλωμε στὸ κρᾶμα 40 γραμμάρια ἀπὸ τὸ 1ο εἶδος, θὰ μᾶς περισσέψουν $60\times 40=2400$ χιλιοστὰ = 2,400 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἂν δὲ βάλωμε στὸ κρᾶμα 60 γραμμάρια ἀπὸ τὸ 2° εἶδος θὰ μᾶς λείπουν $40 \times 60 = 2400$ χιλιοστὰ $= 2,400$ γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ.

Ὥστε ἂν βάλωμε στὸ κρᾶμα 40 γραμμάρια ἀπὸ τὸ 1° εἶδος καὶ 60 γραμμάρια ἀπὸ τὸ 2° εἶδος, οὔτε θὰ μᾶς περισσέψη, οὔτε θὰ μᾶς λείψη καθαρὸς χρυσός. Ἔτσι τὸ κρᾶμα τῶν 80 γραμμαρίων ποῦ θέλομε, θὰ γίνη μὲ τὴν ἀναλογία 40 γραμμ. ἀπὸ τὸ 1° εἶδος καὶ 60 γραμμαρ. ἀπὸ τὸ 2° εἶδος. Ὥστε θὰ μερίσωμε τὸν ἀριθμὸ 80 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 40 καὶ 60 καὶ θὰ βροῦμε, ὅτι πρέπει νὰ πάρωμε

ἀπὸ τὸ 1° εἶδος $\frac{80 \times 40}{100} = 32$ γραμ. καὶ

ἀπὸ τὸ 2° εἶδος $\frac{80 \times 60}{100} = 48$ γραμ.

Διάταξις τῆς πράξεως

α) 900 χιλιοστὰ — 40 γραμ. τοῦ 1ου εἴδους

840 χλστ.

β) 800 χιλιοστὰ — 60 γραμ. τοῦ 2ου εἴδους

100 γραμ. τοῦ κράματος

Σημείωσις: Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο λύνομε προβλήματα μὲ μείγματα ἀπὸ οἰνοπνεύματα. Γιατὶ ὅταν λέγωμε ὅτι ἕνα οἰνόπνευμα εἶναι 80° (80 βαθμῶν), ἐννοοῦμε ὅτι στὰ 100 μέρη αὐτοῦ τὰ 80 μέρη εἶναι καθαρὸ οἰνόπνευμα καὶ τὰ ἄλλα 20 μέρη εἶναι νερό. Ἔτσι 300 δράμια οἰνόπνευμα 80° ἔχει τὰ 0,80 καθαρὸ οἰνόπνευμα, δηλαδὴ ἔχει 300 δραμ. $\times$ *0,80 = 240 δράμια καθαρὸ οἰνόπνευμα.*

Καὶ ἀντίστροφα, ἂν σὲ 50 γραμμάρια τὰ 30 γραμμάρια εἶναι καθαρὸ οἰνόπνευμα αὐτὸ εἶναι τὰ $\frac{30}{50} = 0,60$ *τῶν 50 γραμμαρίων. Δηλαδὴ τὸ οἰνόπνευμα αὐτὸ εἶναι 60°.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1η ὁμάδα.

Α. 1. Κρᾶμα χρυσοῦ ἀπὸ 60 γραμμάρια ἔχει τίτλο 0,850. Πόσος καθαρὸς χρυσὸς εἶναι στὸ κρᾶμα αὐτό;

2. Σὲ χρυσὸ κόσμημα ἀπὸ 12 γραμμάρια τὰ 9 γραμμάρια εἶναι καθαρὸς χρυσός. Τί τίτλο ἔχει τὸ κόσμημα αὐτό;

3. Γιὰ νὰ κάνη ἕνας κόσμημα ἔβαλε τόσο χρυσό, ὅσο ἔβαλε χαλκό. Τί τίτλο ἔχει τὸ κόσμημα αὐτό;

4. Κόσμημα ἔγεινε μὲ 7 δράμια πλατίνη τίτλου 0,900 καὶ 8 δράμια πλατίνη τίτλου 0,750. Τί τίτλο ἔχει τὸ κόσμημα αὐτό;

5. Ἕνας ἔκανε κόσμημα μὲ 32 γραμμάρια καθαρὸ ἄργυρο καὶ μὲ 8 γραμμάριο χαλκό. Τί τίτλο ἔχει τὸ κόσμημα αὐτό; (Ὁ καθαρὸς ἄργυρος ἢ ὁ καθαρὸς χρυσὸς ἔχει τίτλο $1=1{,}000$ καὶ ὁ χαλκὸς ἔχει τίτλο 0).

6. Κρᾶμα ἀπὸ 3,06 χιλιόγραμμα καθαρὸ ἄργυρο καὶ 0,54 χιλιόγραμμα χαλκὸ τί τίτλο ἔχει;

7. Χρυσὸ κόσμημα 16 καρατίων ζυγίζει 6 δράμια. Πόσα δράμια καθαρὸ χρυσὸ ἔχει τὸ κόσμημα αὐτό;

8. Σὲ κόσμημα 20 δραμίων τὰ 15 δράμια εἶναι καθαρὸς χρυσός. Πόσων καρατίων εἶναι τὸ κόσμημα αὐτό;

Β. 1. Ἕνας ἔχει 80 ὀκάδες οἰνόπνευμα τῶν 20°. Πόσες ὀκάδες καθαρὸ οἰνόπνευμα ἔχουν οἱ 80 αὐτὲς ὀκάδες;

2. Σὲ 25 ὀκάδες οἰνόπνευμα, οἱ 20 ὀκάδες εἶναι καθαρὸ οἰνόπνευμα. Τί βαθμὸ ἔχουν οἱ 25 αὐτὲς ὀκάδες;

3. Ἕνας σὲ 16 ὀκάδες καθαρὸ οἰνόπνευμα ἔρριψε 4 ὀκάδες νερό. Τί βαθμὸ ἔχει τὸ μεῖγμα ποὺ ἔκανε; (Τὸ καθαρὸ οἰνόπνευμα εἶναι 100° καὶ τὸ νερὸ εἶναι 0°).

4. Ἕνας ἔκανε μεῖγμα μὲ 15 χιλιόγραμμα οἰνόπνευμα τῶν 40° καὶ μὲ 5 χιλιόγραμμα οἰνόπνευμα τῶν 60°. Τί βαθμὸ ἔχει τὸ μεῖγμα αὐτό;

5. Ἕνας μεῖγμα 40° τὸ ἔκανε μὲ 10 ὀκάδες οἰνόπνευμα 50° καὶ μὲ 5 ὀκάδες ἄλλο οἰνόπνευμα. Τί βαθμὸ εἶχε τὸ δεύτερο οἰνόπνευμα;

2η ὁμάδα.

Α. 1. Ἔχει ἕνας δύο εἴδη χρυσοῦ μὲ τίτλους 0,850 καὶ 0,750. Θέλει δὲ ἀπὸ αὐτὰ νὰ κάνη 30 γραμμάρια κρᾶμα μὲ τίτλο 0,780. Πόσα γραμμάρια θὰ βάλη στὸ κρᾶμα ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος καὶ πόσα ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος;

2. Ἕνας ἔχει δύο εἴδη ἀργύρου μὲ τίτλους 0,920 καὶ 0,850. Θέλει δὲ νὰ κάνῃ ἀπὸ αὐτὰ 80 γραμμάρια κρᾶμα μὲ τίτλο 0,8[illegible]5. Πόσα γραμμάρια θὰ βάλῃ στὸ κρᾶμα ἀπὸ κάθε εἶδος;

3. Ἕνας ἔκανε κρᾶμα τίτλου 0,750, ἀπὸ 12 γραμμάρια καθαρὸ χρυσὸ καὶ χαλκό. Πόσα γραμμάρια εἶναι ὁ χαλκὸς αὐτός;

Β. 1. Ἕνας ἔχει οἰνόπνευμα τῶν 30° καὶ ἄλλο οἰνόπνευμα τῶν 10°. Θέλει δὲ νὰ κάνῃ μὲ αὐτὰ 80 ὀκάδες οἰνόπνευμα τῶν 18°. Πόσο οἰνόπνευμα θὰ βάλῃ στὸ μεῖγμα ἀπὸ κάθε εἶδος;

2. Ἕνας θέλει νὰ κάνῃ μὲ καθαρὸ οἰνόπνευμα καὶ μὲ νερὸ μεῖγμα 39 ὀκάδων 20°. Πόσο καθαρὸ οἰνόπνευμα καὶ πόσο νερὸ θὰ βάλῃ στὸ μεῖγμα;

3. Σὲ 10 ὀκάδες οἰνοπνεύματος 30° πόσο οἰνόπνευμα 60° πρέπει νὰ βάλωμε γιὰ νὰ γίνῃ μεῖγμα 40°;

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. 4 ἐργάτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σὲ 15 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ τελειώσουν 3 ἐργάτες;

2. 15,6 ὀκάδες ρύζι στοιχίζουν 124 800 δραχμές. Πόσο στοιχίζει ἡ 1 ὀκά;

3. Αὐτοκίνητο μὲ ταχύτητα 40 000 χιλιόμετρα τὴν ὥρα τρέχει μία ἀπόστασι σὲ 7 ὧρες. Ἂν ἡ ταχύτητά του γίνῃ μικρότερη κατὰ 5 χιλιόμετρα, σὲ πόσες ὧρες θὰ τρέξῃ τὴν ἴδια ἀπόστασι;

4. 2,5 ὀκάδες ζάχαρη κοστίζουν 30 000 δραχμές. Πόσο κοστίζουν 7,5 ὀκάδες ζάχαρη;

5. 3 ἐργάτες σὲ 6 ἡμέρες ἀνοίγουν 72 μέτρα δρόμο. 15 ἐργάτες σὲ 2 ἡμέρες πόσα μέτρα δρόμο ἀνοίγουν;

6. 10 μηχανὲς σὲ 14 ὧρες δίνουν 3 255 μέτρα ὕφασμα. 15 ἴδιες μηχανὲς πόσο ὕφασμα θὰ δώσουν σὲ 12 ὧρες;

7. Νὰ βρῆτε τὸ 1 %, τὰ 10 %, τὰ 100 % τοῦ ἀριθμοῦ 150.

8. Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{2}$ %, τὰ $2\frac{1}{2}$ τοῖς % τοῦ ἀριθμοῦ 900.

9. Ὁ νωπὸς καφὲς ὅταν καβουρδισθῇ χάνει τὰ $12\frac{1}{2}$ % τοῦ βάρους του. Νωπὸς καφὲς 88 ὀκάδων, πόσες ὀκάδες θὰ γίνῃ ὅταν καβουρδισθῇ;

10. Τὰ 21 % τοῦ ὄγκου ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα εἶναι ὀξυγόνο καὶ τὰ 79 % ἄζωτο. Πόσο ὀξυγόνο καὶ πόσο ἄζωτο ἔχει ὁ ἀέρας δωματίου μὲ 137,5 κυβικὰ μέτρα ὄγκο;

11. Ἕνα μεγάλο λειβάδι ἀπὸ 2 700 στρέμματα ἐμοιράσθηκε στοὺς κτηνοτρόφους τεσσάρων γειτονικῶν χωριῶν. Οἱ κτηνοτρόφοι τοῦ πρώτου χωριοῦ ἐπῆραν ἀπὸ τὰ στρέμματα αὐτὰ τὰ 28 %, οἱ τοῦ δευτέρου ἐπῆραν τὰ 30 %, οἱ τοῦ τρίτου ἐπῆραν τὰ 20 % καὶ οἱ κτηνοτρόφοι τοῦ τελευταίου χωριοῦ ἐπῆραν τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα στρέμματα ἐπῆραν οἱ κτηνοτρόφοι τοῦ καθενὸς χωριοῦ;

12. Ἀγόρασε ἕνας ἔμπορος μιὰ ποσότητα ἐλιές. Ἔπειτα δὲ ἀπὸ ὀλίγο χρόνο, οἱ ἐλιὲς αὐτὲς εἶχαν φύρα $4\frac{1}{2}$ %. Πόσες ἐλιὲς ἀγόρασε, ὅταν ἡ φύρα ἦταν 450 ὀκάδες;

13. Τὰ $67\frac{1}{2}$ % τοῦ μισθοῦ του τὰ διαθέτει ἕνας γιὰ τὴν τροφὴ τῆς οἰκογενείας του, καὶ τὰ ὑπόλοιπα γιὰ τὶς ἄλλες ἀνάγκες τους. Ἔτσι γιὰ τὴν τροφὴ διαθέτει 810 000 δραχμὲς τὸ μῆνα. Τί μισθὸ παίρνει τὸ μῆνα καὶ τί διαθέτει γιὰ τὶς ἄλλες ἀνάγκες τῆς οἰκογενείας του;

14. Τὰ 150 % ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 18. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

15. Σὲ 97,5 χιλιόγραμμα ὀρείχαλκο (μπροῦτζο) τὰ 74,1 χιλιόγραμμα εἶναι χαλκὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα τσίγκος. Στὸν ὀρείχαλκο αὐτὸ πόσα % εἶναι χαλκὸς καὶ πόσα % εἶναι τσίγκος;

16. Ἔφερε ἕνας ἐμπόρευμα ἀπὸ τὸ ἐξωτερικὸ ἀξίας 436 λιρῶν. Γιὰ τὴ μεταφορά του ἐπλήρωσε 28,34 λίρες καὶ γιὰ τελωνειακὸ δασμὸ ἐπλήρωσε 50,14 λίρες. Στὴν ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ πόσα % εἶναι τὰ μεταφορικὰ καὶ πόσα % ὁ τελωνειακὸς δασμός;

17. Ἕνας ἀγόρασε τὴν 1η Μαρτίου ἕνα σπίτι ἀξίας 75 000 000 δραχμῶν. Τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν δραχμῶν αὐτῶν τὰ ἐπλήρωσε ἀμέσως. Τὶς δὲ ὑπόλοιπες δραχμὲς τὶς ἐπλήρωσε στὶς 31 Αὐγούστου τοῦ ἰδίου ἔτους μὲ τόκο $4\frac{1}{2}$ %. Πόσες δραχμὲς ἐπλήρωσε τὸ ὅλον;

18. Ἕνας ἀγόρασε σπίτι καὶ ἐπλήρωσε ἀμέσως τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀξίας του. Γιὰ τὸ ὑπόλοιπο ἐπλήρωσε γιὰ ἕνα ἔτος τόκο 1 275 000 δραχμὲς μὲ 8,5 %. Πόσο ἀγόρασε τὸ σπίτι;

19. Ἕνας στὶς 5 Μαρτίου κατέθεσε σὲ Τράπεζα 3 500 000 δραχμὲς καὶ στὶς 10 Ὀκτωβρίου τοῦ ἴδιου ἔτους ἀπέσυρε τὴν κατάθεσί του μαζὶ μὲ τοὺς τόκους. Ἔτσι εἰσέπραξε 3 563 000 δραχμές. Μὲ πόσα τοῖς % ἐτόκισε τὰ χρήματά του;

20. Ἕνας τὴν 1η Ἀπριλίου κατέθεσε σὲ Τράπεζα 6 000 000

δραχμὲς μὲ 3,75 % καὶ ὅταν ἀπέσυρε τὰ χρήματά του εἰσέπραξε 6 195 000 δραχμές. Σὲ ποιὰ ἡμερομηνία ἀπέσυρε τὰ χρήματά του;

21. Ἕνας ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 1 800 000 δραχμῶν. Γιὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀξίας αὐτῆς ὑπέγραψε γραμμάτιο πληρωτέο ἔπειτα ἀπὸ 3 μῆνες, καὶ γιὰ τὸ ἄλλο $\frac{1}{2}$ ὑπέγραψε γραμμάτιο πληρωτέο ἔπειτα ἀπὸ 4 μῆνες. Ἐξώφλησε ὅμως καὶ τὰ δύο αὐτὰ γραμμάτια μετὰ 2 μῆνες ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ τὰ ὑπέγραψε μὲ ἔκπτωσι 8 %. Μὲ πόσες δραχμὲς ἐξώφλησε τὰ γραμμάτια αὐτά;

22. Μία ἀγόρασε ραπτομηχανὴ ἀξίας 1 200 000 δραχμῶν καὶ συνεφώνησε νὰ τὴν πληρώση σὲ δύο ἴσες δόσεις. Τὴν πρώτη ἔπειτα ἀπὸ 3 μῆνες καὶ τὴ δεύτερη ἔπειτα ἀπὸ 6 μῆνες. Ἀλλὰ κάθε δόσις θὰ ἐπιβαρύνεται μὲ τόκο 9 %. Ἔτσι ὑπέγραψε δύο γραμμάτια. Ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία καθενὸς γραμματίου;

23. Ἕνας ἀγόρασε 50 μετοχὲς Ἠλεκτρικῶν Σιδηροδρόμων μὲ 10 000 δραχμὲς τὴ μία καὶ 25 μετοχὲς τῆς Ἑταιρείας Οἴνων μὲ 22 000 δραχμὲς τὴ μία. Ἀπὸ τὶς πρῶτες μετοχὲς εἰσέπραξε μιὰ χρονιὰ μέρισμα 6 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς καὶ ἀπὸ τὶς ἄλλες εἰσέπραξε μέρισμα 4 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Νὰ βρῆτε α) Τί χρήματα ἔδωσε γιὰ νὰ ἀγοράση ὅλες αὐτὲς τὶς μετοχὲς καὶ β) Τί εἰσέπραξε ἀπὸ τὰ μερίσματα τῶν μετοχῶν αὐτῶν.

24. Δύο πρόσωπα Α καὶ Β ἐμοίρασαν μεταξύ τους 100 000 δραχμές. Ἀλλὰ τὸ μερίδιο τοῦ Α ἦταν κατὰ 20 000 δραχμὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μερίδιο τοῦ Β. Πόσο ἦταν τὸ μερίδιο τοῦ Α καὶ πόσο τὸ μερίδιο τοῦ Β;

25. Σὲ ἕνα σχολεῖο φοιτοῦν 300 μαθηταί, ἀγόρια καὶ κορίτσια. Τὰ κορίτσια εἶναι κατὰ 50 ὀλιγώτερα ἀπὸ τ' ἀγόρια. Πόσα ἀγόρια καὶ πόσα κορίτσια φοιτοῦν στὸ σχολεῖο αὐτό;

26. Στὴν Ἑλλάδα ἡ ποιὸ μεγάλη ἡμέρα τοῦ ἔτους εἶναι κατὰ 10 ὧρες μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ποιὸ μικρὴ νύχτα αὐτοῦ. Πόσες ὧρες διαρκεῖ στὴν Ἑλλάδα ἡ μεγαλύτερη ἡμέρα καὶ πόσες ὧρες διαρκεῖ ἡ μικρότερη νύχτα;

27. Ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ νεροῦ τὸ 1 μέρος του εἶναι ὑδρογόνο καὶ τὰ 8 μέρη του εἶναι ὀξυγόνο. Σὲ νερὸ βάρους 246,24 χιλιογράμμων, πόσο εἶναι τὸ ὑδρογόνο;

28. Ἀπὸ τὰ 100 μέρη ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρα τὰ 21 μέρη εἶναι ὀξυγόνο. Πόσο εἶναι τὸ ὀξυγόνο στὸν ἀτμοσφαιρικὸ ἀέρα δωματίου μὲ διαστάσεις 5 μέτρα (μῆκος), 4 μέτρα (πλάτος) καὶ 4 μέτρα ὕψος;

29. Τρεῖς ἐργάτριες ἀγόρασαν ἕνα γραμμάτιο τοῦ Ἐθνικοῦ λαχείου ἀξίας 60 000 δραχμῶν καὶ ἐπλήρωσε ἡ μία τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας αὐτῆς, ἡ ἄλλη τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ἡ τρίτη τὰ ὑπόλοιπα. Συνεφώνησαν δὲ ἂν κερδίση τὸ λαχεῖο τους, νὰ μοιράσουν τὰ κέρδη του ἀνάλογα μὲ τὰ χρήματα ποὺ ἔδωσαν. Τὸ λαχεῖο αὐτὸ ἐκέρδισε 3 000 000 δραχμές. Νὰ βρῆτε: α) Πόσα χρήματα ἔδωσε ἡ κάθε μία ὅταν ἀγόρασαν τὸ λαχεῖο καὶ β) Τὸ μερίδιο τῆς καθεμιᾶς ἀπὸ τὰ κέρδη του.

30. Μεῖγμα ἀπὸ καφὲ καὶ κριθάρι ζυγίζει 3 ὀκάδες καὶ 300 δράμια. Στὸ μεῖγμα αὐτὸ τὰ 3 μέρη εἶναι καφὲς καὶ τὸ 1 μέρος κριθάρι. Πόσο καφὲ καὶ πόσο κριθάρι ἔχει τὸ μεῖγμα αὐτό;

31. Τὰ κεφάλαια ποὺ κατέθεσαν τρεῖς συνέταιροι σὲ μιὰ ἐπιχείρησι εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 5. Ἂν ὁ πρῶτος κατέθεσε στὴν ἐπιχείρησι 4 000 000 δραχμές, πόσες κατέθεσε ὁ δεύτερος καὶ πόσες ὁ τρίτος; Καὶ ἂν ἡ ἐπιχείρησι αὐτὴ ἀφῆκε κέρδος 3 000 000 δραχμές, πόσο εἶναι τὸ κέρδος τοῦ καθενός;

32. Σὲ μιὰ ἐπιχείρησι ἀπὸ 2 συνεταίρους ὁ πρῶτος κατέθεσε 8 000 000 δραχμὲς καὶ ὁ δεύτερος κατέθεσε 10 000 000 δραχμές. Ἔπειτα δὲ ἀπὸ 3 μῆνες ἐπῆραν καὶ τρίτο συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 12 000 000 δραχμές. Ἕνα δὲ ἔτος ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρησις ἐλογαριάσθηκαν καὶ βρῆκαν κέρδος 6 480 000 δραχμές. Πόσο εἶναι τὸ μερίδιο τοῦ καθενός;

33. Ἔκανε ἕνας μεῖγμα μὲ 1 ὀκὰ καὶ 200 δράμια βούτυρο τῶν 45 000 δραχμῶν τὴν ὀκὰ καὶ μὲ 150 δράμια λῖπος τῶν 18 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Πόσο ἀξίζει ἡ 1 ὀκὰ τοῦ μείγματος;

34. Ἔχει ἕνας καφὲ τῶν 80 000 δραχμῶν καὶ τῶν 55 000 δραχμῶν τὴν ὀκά. Θέλει δὲ ἀπὸ τὶς ποιότητες αὐτὲς νὰ κάνη μεῖγμα 3 ὀκάδων καὶ 300 δραμίων ποὺ νὰ τοῦ κοστίζη 70 000 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσο καφὲ θὰ βάλη στὸ μεῖγμα αὐτὸ ἀπὸ κάθε ποιότητα;

35. Μὲ οἰνόπνευμα τῶν 85° καὶ μὲ οἰνόπνευμα τῶν 45° ἔκανε ἕνας μεῖγμα 1 ὀκᾶς τῶν 70°. Πόσο οἰνόπνευμα ἔβαλε στὸ μεῖγμα αὐτὸ ἀπὸ κάθε εἶδος;

36. Σὲ κρᾶμα 50 γραμμαρίων τὰ 20 % εἶναι καθαρὸς χρυσός. Μὲ τὸ κρᾶμα αὐτὸ καὶ μὲ καθαρὸ χρυσὸ θέλομε νὰ κάνωμε κρᾶμα μὲ 60 % καθαρὸ χρυσό. Πόσο καθαρὸ χρυσὸ θὰ βάλωμε στὸ κρᾶμα αὐτό. (Τὸ πρῶτο κρᾶμα ἔχει τίτλο 0,200).

37. Ἔχομε ἁρμύρα μὲ 8 % ἁλάτι. Πόση ἀπὸ τὴν ἁρμύρα αὐτὴ

καὶ πόσο ἁλάτι πρέπει νὰ ἀναμείξωμε γιὰ νὰ κάνωμε ἁρμύρα 46 ὀκάδων ἡ ὁποία νὰ ἔχη 12 % ἁλάτι;

38. Δύο χωρικοὶ ἀγόρασαν ἕνα χωράφι μὲ 4 500 000 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς ὁ ἕνας ἐπλήρωσε 2 400 000 δραχμὲς καὶ ὁ ἄλλος τὶς ὑπόλοιπες. Τὸ χωράφι αὐτὸ εἶχε σχῆμα ὀρθογώνιο μὲ 185,5 μέτρα μῆκος καὶ 80 μέτρα πλάτος. Πόσα στρέμματα ἀπὸ τὸ χωράφι αὐτὸ ἀναλογοῦν σὲ κάθε χωρικό;

39. Κυλινδρικὸ δοχεῖο ἔχει ὕψος 1 μέτρο καὶ βάσι μὲ ἐσωτερικὴ διάμετρο 8 παλάμες. Εἶναι δὲ γεμάτο λάδι. Νὰ βρῆτε α) τὸν ὄγκο τοῦ λαδιοῦ σὲ κυβικὲς παλάμες β) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ σὲ χιλιόγραμμα, ὅταν τὸ εἰδικὸ βάρος του εἶναι 0,92 γ) πόσο εἶναι τὸ μερίδιο καθενὸς ἀπὸ δύο ἀδελφούς, οἱ ὁποῖοι ἐμοίρασαν τὸ λάδι τοῦ δοχείου μεταξύ τους ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$.

40. Κρᾶμα ἀπὸ χρυσὸ τίτλου 0,900 ἔχει σχῆμα σφαίρας ἀκτῖνος 3 ἑκατοστομέτρων. Νὰ βρῆτε α) πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κράματος αὐτοῦ σὲ κυβικοὺς δακτύλους β) πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ βάρος του, ὅταν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ κράματος αὐτοῦ εἶναι 10 καὶ γ) πόσο καθαρὸ χρυσὸ ἔχει τὸ κρᾶμα αὐτό.

ΤΕΛΟΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Δ/ΝΣΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

'Αριθμ. Πρωτ. 61330

'Εν 'Αθήναις τῇ 20 'Ιουλίου 1952

Πρὸς

Τὸν κ. **Χ. ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΝ**

Φώτου Πολίτου 9

ΕΝΤΑΥΘΑ

'Ανακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 61452/12-7-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου 'Εκπαιδεύσεως ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ» βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς 'Αριθμητικῆς διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε' καὶ ΣΤ' τάξεων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμορφούμενοι πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ 'Εκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

'Ε. 'Υ.
'Ο Δ/ντὴς
Σ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Κοινοποίησις
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.