Σ. ΜΕΓΑΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΣΤ. ΔΑΣΚΑΛΟΓΙΑΝΝΗ

78

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΑΞΙΣ Ε - ΣΤ

Σ. ΜΕΓΑΛΟΠΟΥΛΟΥ — ΣΤ. ΔΑΣΚΑΛΟΓΙΑΝΝΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τὴν Ε΄ καὶ ΣΤ΄ Τάξιν τοῦ Δημοτικοῦ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ
διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52
ἀποφάσεως Ὑπουργείου Παιδείας

ΡΕΑ
ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ
ΑΘΗΝΑΙ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Δ)νσις Διδακτικῶν Βιβλίων

'Αριθμ. πρωτ. 61330

'Εν 'Αθήναις τῇ 20-6-1952

Πρὸς τοὺς κ. κ.

Σ. Μεγαλόπουλον—Στ. Δασκαλογιάννην

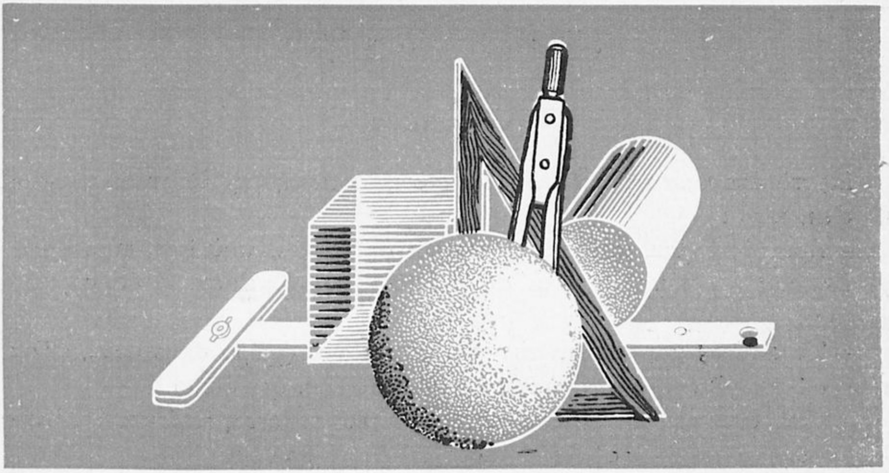
'Αβέρωφ 2 — 'Αθήνας

'Ανακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452/12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ 'Υπουργείου, μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κ.Γ.Δ.Σ.Ε. ἐνεκρίθη διὰ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1—9—52, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» βιβλίον σας, ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Γεωμετρίας, διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως προβῆτε εἰς τὴν διόρθωσιν τοῦ βιβλίου σας, κατὰ τὰς ὑποδείξεις τῶν οἰκείων 'Επιτροπῶν καὶ μετὰ τὴν θεώρησιν αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἁρμοδίου 'Εκπαιδευτικοῦ Συμβούλου ἐκτυπώσητε τοῦτο, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ ἔγκρισις αὕτη παρέχεται ὑπὸ τὸν ὅρον τῆς διορθώσεως τῶν σφαλμάτων καὶ δύναται νὰ ἀνακληθῇ ἀνὰ πᾶσαν στιγμήν.

Πᾶν βιβλίον μὴ φέρον αὐτολεξεὶ τὴν παροῦσαν δὲν εἶναι ἐγκεκριμένον.

'Εντολῇ 'Υπουργοῦ
'Ο Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γεωμετρία — Γεωμετρικὰ σώματα

Ἡ παραγωγὴ τῆς λέξεως «Γεωμετρία» μᾶς λέει τὶ εἶναι.

Εἶναι ἡ ἐπιστήμη, ποὺ μετράει τὴ γῆ.

Ὁ Χαράλαμπος διαφωνεῖ: —Μοῦ φαίνεται ὅτι δὲν μᾶς ἀποδίδει πολὺ καλὰ ἡ λέξις τὴν ἔννοιαν τῆς Γεωμετρίας. Δὲν μετρᾶμε μόνον τὴ γῆ, χωράφια, κήπους, λίμνες κλπ., ἀλλὰ καὶ διάφορα σώματα, ποὺ εἶναι ἐπάνω στὴ γῆ, ὅπως σπίτια, καράβια, δεξαμενές, κιβώτια κτλ.

Πολλὰ φυσικὰ σώματα, ὅπως βουνά, φυτά, ζῶα, ἔχουν ἰδικόν τους μέγεθος καὶ σχῆμα. Καὶ αὐτὰ τὰ μετράει ἡ Γεωμετρία. Εἰς πολλὰ πάλι τεχνικὰ σώματα, δίδομε ἡμεῖς τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος. Καὶ αὐτὰ τὰ ἐξετάζει ἡ Γεωμετρία καὶ τὰ λέγομε *γεωμετρικὰ* ἢ *στερεὰ σώματα*.

2. Ἔννοια τοῦ χώρου

Τί εἶναι χῶρος

Εἰς τὸ ἄκουσμα τῆς λέξεως χ ῶ ρ ο ς, ὁ Δημήτρης ἐσήκωσε τὸ χέρι νὰ εἴπη κάτι :

— Προχθὲς εἴχαμε μπῆ τόσοι πολλοὶ στὸ τράμ, ποὺ ἕνας κύριος ἔλεγε ζωηρά : —«Τὶ χάλια εἶναι αὐτά ! ἐδῶ παραβιάζεται ἡ ἔννοια τοῦ χώρου».

— Ὁ καθένας μας εἶχε πιάσει τὸν τόπον του (χῶρο ὡρισμένο), ἀλλὰ τόσο στρίμωγμα εἴχαμε, ποὺ λὲς καὶ εἴμαστε ὅλοι ἕνα σῶμα.

—Αὐτὸ δὲν συμβαίνει μὲ τὰ ἄλλα στερεὰ σώματα, ποὺ καθένα πιάνει ἕνα ὡρισμένο χῶρο σ' ὅποιο μέρος καὶ ἂν τὸ βάλωμε.

Ὥστε χῶρος εἶναι τὸ μέρος, ὁ τόπος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνουν τὰ σώματα.

Ἀσκήσεις 1. Ποῖος εἶναι ὁ χῶρος τῆς αἰθούσης μας ;

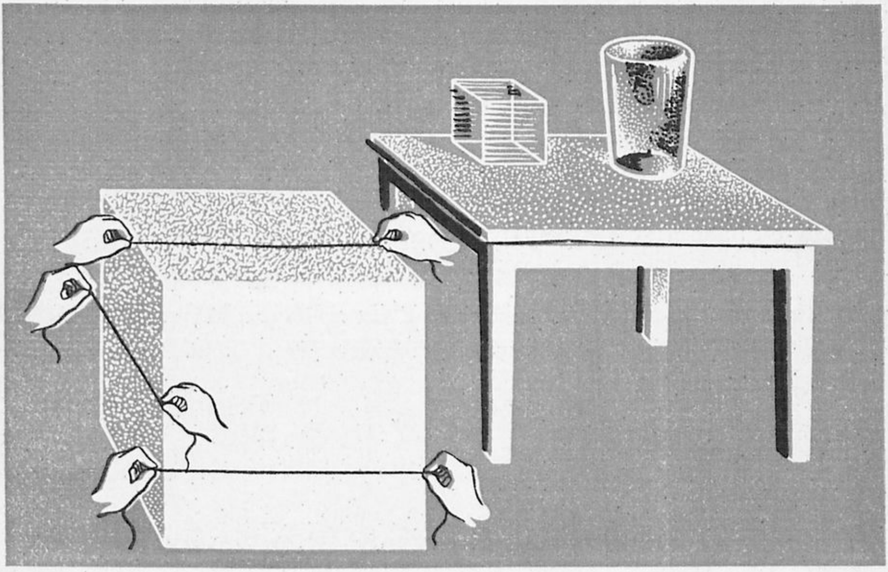
2. Ποῖος εἶναι ὁ χῶρος τῆς αὐλῆς μας ;

3. Τὶ βλέπετε εἰς τὸν χῶρον τῆς πόλεώς μας ;

4. Κοιτάξετε εἰς τὸν χάρτην τὸν χῶρον τοῦ νομοῦ σας, τῆς πατρίδος μας.

5. Εἰς τὴν σφαῖραν ποίους ἄλλους μεγαλύτερους χώρους βλέπετε ;

6. Μὲ τὸ νοῦ σας, μὲ τὰ μάτια σας, τὴν ἡμέρα καὶ τὴ νύχτα ποίους ἄλλους χώρους αἰσθάνεσθε καὶ βλέπετε ;



ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Α΄. ΚΥΒΟΣ

Ὁ Γιάννης ἔφερε ἀπὸ τὸ γραφεῖο ἕνα κιβώτιο μὲ διάφορα γεωμετρικὰ σώματα. Ὅταν ἐβγάλαμε τὸ πρῶτο σῶμα, ἀμέσως τὰ παιδιὰ τὸ ἀνεγνώρισαν.

— Αὐτὸ εἶναι κύβος, λέγει ὁ Ἀλκιβιάδης.

— Ἀκριβῶς τὸ ἴδιο σχῆμα ἀλλὰ σὲ μικρότερο μέγεθος ἔχουν τὰ ζάρια, ποὺ παίζουν στὸ τάβλι.

1. Ἐπιφάνειαι

Τὸ ἐξωτερικὸν κάθε σώματος λέγεται ἐ π ι φ ά ν ε ι α.

α) Ἐπίπεδος

Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύβου παρατηροῦμε, ὅτι ὑπάρχουν 6 λεῖαι ἐπιφάνειαι. Ἂν ἐπάνω εἰς κάθε μίαν ἀπὸ αὐτὰς βάλωμε μία τεντωμένη κλωστή, θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἰς ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα της ἀκουμβᾶ συγχρόνως. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται *ἐπίπεδος*.

Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τοῦ κύβου λέγονται καὶ *ἕδραι* τοῦ κύβου.

Ὁ Σπῦρος ἐμέτρησε τὰς ἕδρας τοῦ κύβου μὲ τὴν κλωστὴ καὶ τὸ ὑποδεκάμετρό του καὶ τὰς εὑρῆκε ὅλας ἴσας.

Ὥστε αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των.

Ἀσκήσεις. 1. Δοκιμάσετε καὶ σεῖς μὲ μία τεντωμένη κλωστὴ εἰς μίαν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου. 2) Πόσας ἐπιπέδους ἐπιφανείας ἔχει ὁ κύβος ; Πόσας ἕδρας; 3) Τί εἶναι μεταξύ των ;

2. Διευθύνσεις ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

α' Ὁριζόντιος ἐπιφάνεια.

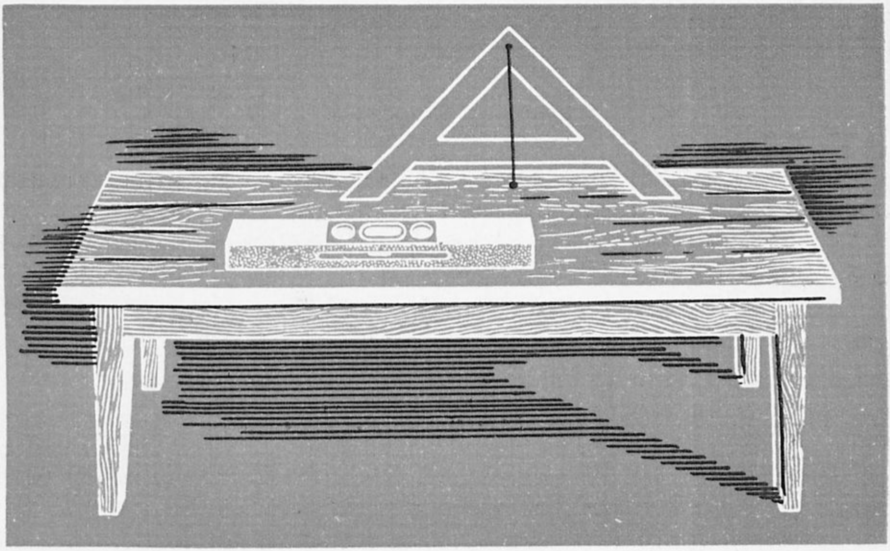
Ὁριζοντία ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἕδρα ποὺ στηρίζεται ὁ κύβος καὶ ἡ ἀπέναντί της.

Τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν τὴν ἐπήραμε ἀπὸ τὴν διεύθυνσι ἠρεμοῦντος νεροῦ ἐντὸς δοχείου.

Οἱ διάφοροι τεχνῖται ἔχουν δύο ὄργανα ποὺ εὑρίσκουν, ἐὰν μία ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζοντία. Τὸ *ἀλφάδι* καὶ τὴν *ἀεροστάθμη*.

Ὁ Κώστας καὶ ὁ Τέλης ἔφεραν ὁ πρῶτος ἕνα ἀλφάδι καὶ ὁ δεύτερος μιὰ ἀεροστάθμη.

— Ὁ πατέρας μου, λέγει ὁ Κώστας, προσέχει πολὺ στὰ τραπέζια πολυτελείας ποὺ κάμνει. Δὲν πρέπει στὸ παραμικρὸ νὰ λαθεύῃ ἡ ἐπιφάνειά τους. Δοκιμάζει μὲ τὸ ἀλφάδι παντοῦ τὰ τραπέζια. Ἂν σὲ κανένα μέρος δῇ τὸ σχοινάκι μὲ τὸ βαρίδι, ποὺ βλέπετε στὸ ἀλφάδι, νὰ φεύγῃ ἀπὸ τὸ αὐλάκι, ποὺ εἶναι πίσω του χαραγμένο, θὰ πῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζιοῦ δὲν εἶναι ὁριζοντία. Τότε γλύφει μὲ τὰ ἐργαλεῖα του τὸ μέρος ἐκεῖνο, ὥσπου ὅταν βάλῃ τὸ ἀλφάδι, τὸ σχοινάκι νὰ σκεπάζῃ τελείως τὸ αὐλάκι ποὺ εἶναι πίσω του.



β΄ Πλαγία ἐπιφάνεια

Ὁ Τέλης ἔφερε τὴν ἀεροστάθμη καὶ τὴν ἔβαλε ἐπάνω στὸ θρανίο.

— Βλέπετε, λέγει, ἡ «φουσκαλίτσα», ποὺ ἔχει μέσα ὁ γυάλινος σωλῆνας τῆς ἀεροστάθμης, δὲν στέκεται στὴ μέση· πάει δεξιὰ καὶ ἀριστερά. Αὐτὴ τὴ λέγει ὁ πατέρας μου *πλαγία ἐπιφάνεια.*

Δοκιμάζομε μὲ τὴν ἀεροστάθμη τὸ τραπέζι τῆς ἕδρας τοῦ διδασκάλου· βλέπομε τὴν φουσκαλίτσα νὰ στέκεται στὴ μέση ἀκριβῶς.

— Νά, λέγει ὁ Τέλης. Αὐτὴ εἶναι *ὁριζοντία ἐπιφάνεια.*

— Πόσο εὐχαριστήθηκα σήμερα, λέγει ἡ Ἀριστέα. Ἔβλεπα τὸν μαραγκὸ τῆς γειτονιᾶς μας νὰ δοκιμάζῃ μὲ τὴν ἀεροστάθμη του κάθε τόσο τὰ ἔπιπλα, ποὺ ἔκαμνε καὶ δὲν ἐνοοῦσα τὴν αἰτία. Τώρα σκέπτομαι, ἐὰν δὲν εἶχαν βρῆ οἱ ἄνθρωποι τὴ Γεωμετρία, δὲν θὰ εἴχαμε τόσα ὡραῖα πράγματα. Οὔτε καὶ ὁ πολιτισμός μας, σὲ τόσα πράγματα ποὺ θαυμάζομε θὰ εἶχε ἀναπτυχθῆ.

Ἀσκήσεις 1) Προσέξετε καλὰ τὸ ἀλφάδι καὶ τὴν ἀεροστάθμη. Ἰχνογραφήσετέ τα. 2) Ποῖος ἀπὸ τοὺς θεοὺς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἦτο τεχνίτης ; 3) Ἡ ἐργασία καὶ ἡ τέχνη τί καλὰ φέρουν εἰς τὸν κόσμον ; 4) Πόσας ὁριζοντίας ἐπιφανείας ἔχει ὁ κύβος ; Πόσας ἡ αἴθουσά μας ;

γ΄ Κατακόρυφος ἐπιφάνεια

Αἱ ἄλλαι 4 ἐπιφάνειαι (ἕδραι) τοῦ κύβου λέγονται *κατακόρυφοι*. Τὴν ὀνομασία τὴν ἐπήραμε ἀπὸ τὴν διεύθυνσι τοῦ νήματος τῆς στάθμης.

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλε ἕνα σπάγγο, στὸ κάτω μέρος τοῦ ὁποίου ἦτο δεμένο ἕνα βαρίδι.

Τὰ παιδιὰ ἐγνώρισαν ἀμέσως τὸ ὄργανο τοῦ κτίστου, μὲ τὸ ὁποῖο δοκιμάζει κάθε τόσο, ἂν ὁ τοῖχος εἶναι κατακόρυφος. Καὶ εἶναι φυσικὰ κατακόρυφος, ὅταν λαμβάνῃ τὴ διεύθυνσι τοῦ σπάγγου μὲ τὸ βαρίδι ποὺ λέγεται *νῆμα τῆς στάθμης*.

Ἀσκήσεις. 1) Εἰς τὴν αἴθουσά μας, ποίας λέγομε κατακορύφους ἐπιφανείας ; 2) Κάμετε καὶ σεῖς τὸ νῆμα τῆς στάθμης.

3. Ὀνομασία τῶν ἑδρῶν ἀπὸ τὴ θέσι των

α΄ Παράλληλοι ἕδραι ἢ ἐπιφάνειαι

Αἱ δύο ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου, ὅσον καὶ ἂν τὰς μεγαλώσωμε πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, δὲν συναντῶνται· δοκιμάσετε.

Τὰς ἕδρας αὐτὰς τὰς λέγομε *παραλλήλους*.

Ἐρωτήσεις. 1) Ποίας λέγομε παραλλήλους ἕδρας ἢ ἐπιφανείας ἢ ἐπίπεδα ; 2) Εὕρετε ταῦτα.

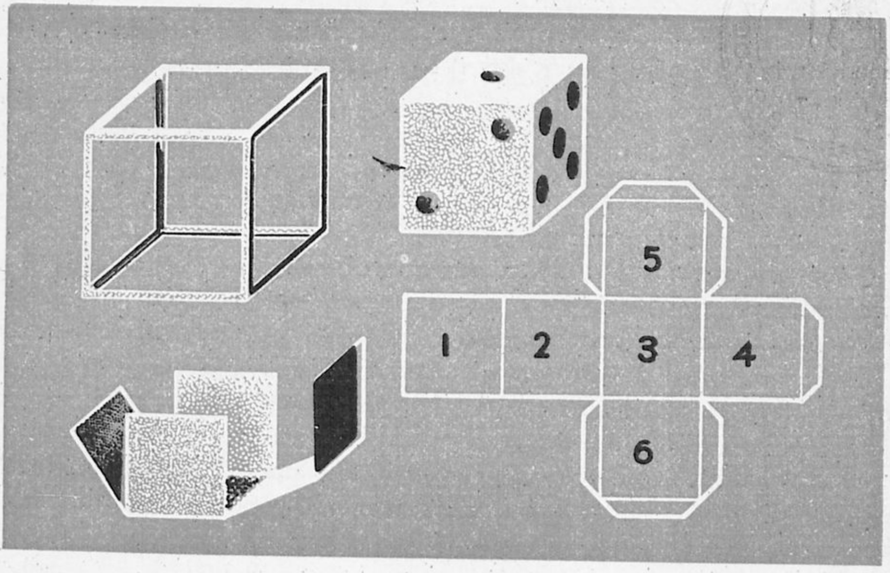
β΄ Βάσεις τοῦ κύβου

Ἡ ἕδρα τοῦ κύβου, εἰς τὴν ὁποία στηρίζεται, καὶ ἡ ἀπέναντί της λέγονται *βάσεις* τοῦ κύβου.

Αἱ ἕδραι αὐταί, ὅπως εἴδαμε εἶναι ὁριζόντιαι.

γ΄ Κάθετοι ἕδραι

Αἱ τέσσαρες ἕδραι, ποὺ τὰς ὠνομάσαμε κατακορύφους, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις.



Σημ. Τὰς τέσσαρας αὐτὰς ἕδρας τὰς λέγομε καὶ παραπλεύρους ἕδρας τοῦ κύβου.

Ὁ Ἀντώνης, ἔκαμε κύβο ἀπὸ χαρτόνι.

Ἐρωτήσεις. Ποίας λέγομε καθέτους ἐπιφανείας ;

Γενικαὶ ἐρωτήσεις. 1) Πόσαι εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου ; 2) Πόσα εἴδη ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν ἔχομε ; 3) Μὲ ποῖα ὄργανα δοκιμάζομε τὰς ὁριζοντίας ἐπιφανείας ; 4) Μὲ ποῖο ὄργανο τὰς κατακορύφους ; 5) Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἀπὸ τὴ θέσι των τί εἶναι ; 6) Νὰ κάμετε ἕνα κύβο.

4. Κατασκευὴ κύβου

— Ἐὰν θέλετε, λέγει, νὰ κάμετε κύβο εὔκολα, ἰχνογραφήσετε στὸ χαρτόνι ἕνα σταυρὸ μὲ ἓξ ἴσα, χαραγμένα λίγο στὴν ἄκρη τους, τετραγωνάκια, γιὰ νὰ μποροῦν νὰ διπλωθοῦν. Νὰ ἔτσι. Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ὁριζόντια τετραγωνάκια νὰ περισσεύῃ ἀπὸ τὸ σταυρὸ πρὸς τὸ δεξιὸ μέρος. Ξεχωρίσετε τώρα ὅλο τὸ σχῆμα ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο χαρτόνι. Σπάσετε ἔπειτα τὰ τετραγωνάκια πρὸς τὸ ἄλλο μέρος. Τὶς ἄκρες των τὶς ἐλεύθερες ἀλείψετε μὲ κόλλα. Ἑνώσετε τώρα τὰ ἐπάνω καὶ κάτω τετράγωνα (καπάκια) καὶ ἔγινε ὁ κύβος.

"Οταν τὸ ἐξεδίπλωσε ἐφάνη τὸ σχῆμα. Τὸ σχῆμα ἐδῶ εἶναι ἀνεπτυγμένο. Τὸ συνέπτυξε πάλι καὶ μᾶς εἶπε τὶ βλέπει ἐπάνω εἰς τὸν κύβο.

α΄ 'Ακμαὶ

— Πρῶτον, λέγει ὁ 'Αντώνης, ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας.

— Αὐτό, λέγει ὁ Θανάσης, τὸ εἴπαμε.

Τότε παρακάλεσε τὸν διδάσκαλο νὰ εἰπῆ πῶς λέγεται τὸ μέρος, ὅπου συναντῶνται δύο ἕδραι.

— Αὐτὲς ἡ μητέρα μου, ὅταν ἔκανα τὸν κύβο, μοῦ τὶς εἶπε κ ό ψ ε ι ς.

— Σωστά, λέγει ὁ διδάσκαλος, ἀλλὰ στὴ Γεωμετρία συνηθίσαμε τὰ σημεῖα αὐτὰ νὰ τὰ ὀνομάζωμε ἀ κ μ ά ς.

Τὶ λέγομεν λοιπὸν ἀκμάς ;

Μετροῦμε τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου καὶ τὰς εὑρίσκομε ἐν ὅλῳ 12. Αἱ 8 εἶναι ὁριζόντιαι καὶ αἱ 4 κατακόρυφοι. Κάθε ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκμάς, ποὺ συναντᾶ, καὶ παράλληλος μὲ τὰς ἀπέναντί της.

β΄ Κορυφαί.

Τὸ μέρος πάλι, ποὺ συναντῶνται τρεῖς ἕδραι τοῦ κύβου, λέγεται κορυφή. Ὁ Σωκράτης ἐμέτρησε τὰς κορυφὰς καὶ τὰς εὑρῆκε 8.

Τὶ λέγεται κορυφὴ τοῦ κύβου ;

'Ασκήσεις. Πόσας ἕδρας, ἀκμάς, κορυφὰς ἔχει ὁ κύβος ;

5. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ σχέσεις μεταξύ των

α΄ Τετράγωνον

Ὁ Σπῦρος εἶχε μετρήσει προχθὲς τὰς ἕδρας τοῦ κύβου καὶ τὰς εὑρῆκε ἴσας ἀναμεταξύ των.

'Επήραμε τὸν κύβο, τὸν ἐστηρίξαμε καλὰ σὲ μία ἕδρα (τὴ βάσι του) καὶ ἐσύραμε μὲ τὴν κιμωλία γραμμάς, ἀκολουθοῦντες τὰς ἀκμὰς τῆς βάσεώς του. Ἔγινε τὸ σχῆμα.

Σημείωσις. Σχῆμα λέγεται ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον παρουσιάζεται ἕνα σῶμα.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται τετράγωνον. Αἱ γραμμαί, ποὺ τὸ περικλείουν, λέγονται πλευραί. Τὰς μετροῦμε καὶ βλέπομε ὅτι εἶναι 4 καὶ ὅλαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

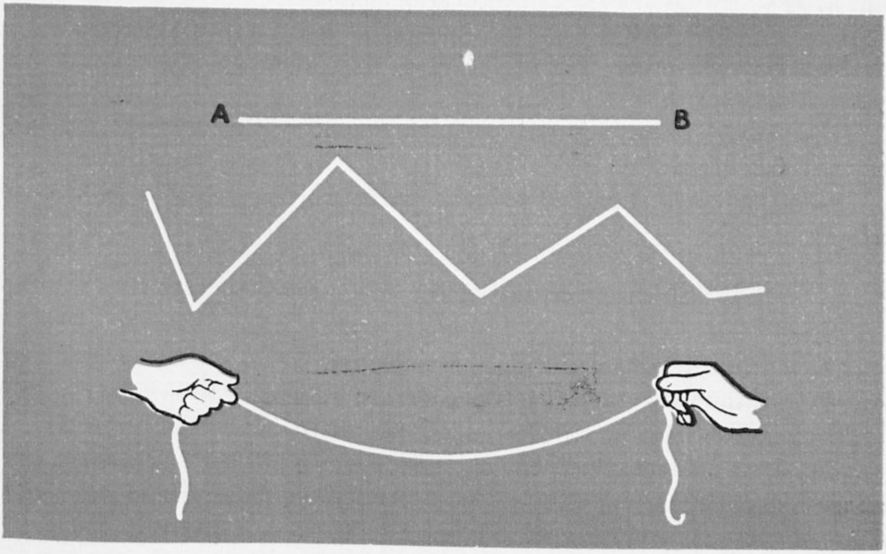
Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παλάλληλοι. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν λέγεται *περίμετρος*.

᾿Ασκήσεις. 1) Τὶ λέγεται τετράγωνον ; 2) Πόσα τετράγωνα ἔχει ὁ κύβος ; 3) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ; 4) Ὅταν ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 225 μέτρα, πόσο εἶναι ἡ κάθε πλευρά του ; 5) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου εἶναι 75 μέτρα. Πόσα μέτρα σύρματος θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ κάμωμε γύρω φράχτη μὲ 5 σειρὲς σύρματος ;

6. Γραμμαὶ

α΄ Εὐθεῖα γραμμή.

Κάθε πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι μία εὐθεῖα γραμμή.



— Γραμμὴ λέγει ὁ Θανάσης, εἶναι τὰ ἀκρινὰ μέρη τῶν ἐπιφανειῶν.
— Σωστά.

Ἕνα ἐλάχιστο τῆς γραμμῆς εἶναι τὸ *σημεῖον*, μία τελεία. Πολλὰ τέτοια συνεχῆ σημεῖα ἀποτελοῦν τὴ γραμμή.

Εὐθεῖα γραμμὴ λέγεται αὐτή, ποὺ ἀκολουθεῖ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς καλὰ τεντωμένης κλωστῆς.

Κάθε εὐθεῖα τὴν ὀνομάζουμε μὲ δύο γράμματα.

Τὰς εὐθείας ἡμεῖς τὰς γράφομε μὲ τὸν κανόνα (ρίγα).

β′ Τεθλασμένη γραμμή

Λέγεται αὐτή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τμήματα εὐθείας τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν σχηματίζουν εὐθεῖα.

γ′ Καμπύλη γραμμή.

Λέγεται ἡ γραμμή, ποὺ δίνει τὸ σχῆμα κλωστῆς χαλαρωμένης. Τότε κανένα κομμάτι της δὲν ἀποτελεῖ εὐθεῖα γραμμή.

7. Ὀνομασία εὐθειῶν ἀπὸ τὴ διεύθυνσί των

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει τὴ διεύθυνσι τοῦ νήματος τῆς στάθμης, λέγεται *κατακόρυφος*.

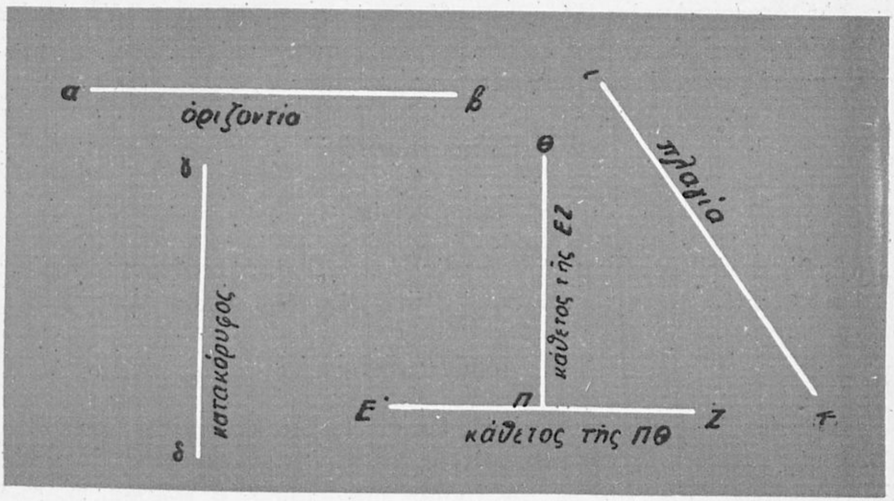
Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει τὴ διεύθυνσι ἠρεμοῦντος νεροῦ ἐντὸς δοχείου, λέγεται *ὁριζοντία*.

Ἐκείνη ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφος οὔτε ὁριζοντία λέγεται *πλαγία*.

8. Ὀνομασία εὐθειῶν ἀπὸ τὴ θέσι των

Μία ὁριζοντία εὐθεῖα καὶ μία κατακόρυφος, ὅταν συναντῶνται (ὅπως καὶ τὰ ἐπίπεδα) σχηματίζουν δύο *καθέτους εὐθείας*.

Τὰς καθέτους εὐθείας τὰς δοκιμάζομε μὲ τὸν γνώμονα (γωνία) τῶν τεχνιτῶν, ὅταν βάλωμε αὐτὸν ἐπὶ τῆς μιᾶς, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρά του νὰ πέση ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς. Ἂν ἡ ἄλλη εὐθεῖα ἀκολουθήση τὴν ἄλλη κάθετο τοῦ γνώμονος, αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι.



Δύο εὐθεῖαι, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδο, ὅσον δὲ καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμε οὐδέποτε συναντῶνται, λέγονται *παράλληλοι*. Παραλλήλους εὐθείας γράφομε μὲ τὸ γεωμετρικὸ ὄργανο Ταῦ.

᾽Ασκήσεις. 1) Πόσα εἴδη γραμμῶν ἔχομε ; 2) Πόσα εἴδη εὐθειῶν γραμμῶν ἔχομε ; 3) Πῶς λέγονται ἀπὸ τὴ θέσι, ποὺ ἔχουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι γραμμαί ; 4) Μὲ ποιὸ ὄργανο δοκιμάζομε δύο γραμμάς, ἂν εἶναι κάθετοι ; 5) Τί εἶναι μεταξύ των αἱ συνεχόμεναι ἀκμαὶ καὶ ἕδραι τοῦ κύβου ; 6) Τί εἶναι μεαξύ των αἱ συνεχόμεναι (γραμμαὶ) πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ;

9. Γωνίαι

῾Ο Τάκης μᾶς εἶπε τὴν ἄλλη ἡμέρα, ὅτι αἱ συνεχόμεναι εὐθεῖαι τοῦ τετραγώνου εἶναι κάθετοι. ῾Ο Τέλης τοῦ εἶπε νὰ ἐξηγήση τί θὰ εἰπῆ συνεχόμεναι.

— Νά, ὅταν ἡ μία εἶναι συνέχεια τῆς ἄλλης.

— Καὶ σμίγουν δύο - δύο.

᾽Εκεῖ σχηματίζουν καὶ ἀπὸ μία γωνία. ᾽Αφοῦ σμίγουν εἰς τέσσαρα σημεῖα, φυσικὰ θὰ σχηματίζουν καὶ τέσσαρας γωνίας.

Τὸ σημεῖον ποὺ σμίγουν αἱ εὐθεῖαι, λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τὴν ἀποτελοῦν, λέγονται πλευραὶ τῆς γωνίας.

Τὴν γωνία τὴν ὀνομάζομε μὲ τρία γράμματα, τὰ ὁποῖα θέτομε εἰς τὴν κορυφὴ καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν. Προσέχομε ὥστε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς νὰ τὸ ἐκφωνοῦμε πάντοτε εἰς τὸ μέσον.

10. Εἴδη γωνιῶν

α΄ Ὀρθὴ γωνία

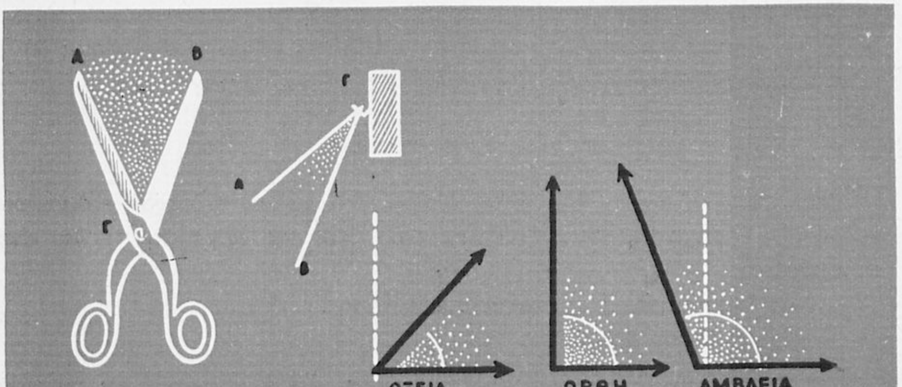
Ὀρθὴ γωνία λέγεται αὐτή, ἡ ὁποία γίνεται ἀπὸ δύο καθέτους πλευράς. Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραγώνου τὶ εἶναι ; Πῶς τὸ ἐξακριβώνομε ;

β΄ Ὀξεῖα γωνία.

Συμβαίνει ὅμως μία γωνία νὰ μὴν ἔγινε π.χ. ἀπὸ δύο καθέτους πλευράς, ἀλλὰ μία πλευρά της νὰ εἶναι πλαγία καὶ ἡ ἄλλη ὁριζοντία. Τότε τὸ ἄνοιγμά τους, ἀναλόγως μὲ τὸν τρόπο ποὺ ἔσμιξαν αἱ πλευραί, ἠμπορεῖ νὰ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται *ὀξεῖα* γωνία.

γ΄ Ἀμβλεῖα γωνία.

Ἐὰν ὅμως τὸ ἄνοιγμά της εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς, τότε ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται *ἀμβλεῖα*.



Τὰς γωνίας τὰς μετροῦμε ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν των καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος των.

Ἀσκήσεις. 1) Κάμετε τρεῖς διαφόρους γωνίας καὶ ὀνομάσετέ τας. 2) Ποία γωνία λέγεται α) ὀρθή ; β) ὀξεῖα ; γ) ἀμβλεῖα ; 3) Κάμετε ἕνα γνώμονα ἀπὸ χαρτόνι ξύλο ἢ τσίγκο.

11. Γωνίαι τοῦ κύβου

α΄ Ὀρθαὶ γωνίαι τοῦ κύβου

Ὁ Ἐπαμεινώνδας ἐμέτρησε τὰς ὀρθὰς γωνίας τοῦ κύβου καὶ τὰς εὗρῆκε 24.

– Αὐτὸ τὸ εὑρίσκει κανεὶς καὶ ἀπέξω εἶπε ὁ Θανάσης.

Ἀφοῦ ὁ κύβος ἔχει 6 τετραγωνικὰς ἕδρας, ποὺ κάθε μία ἔχει 4 ὀρθάς, ὅλαι μαζὶ θὰ ἔχουν 24 ὀρθὰς γωνίας.

β΄ Δίεδροι γωνίαι.

Ἐξωτερικῶς δύο ἕδραι τοῦ κύβου, ὅταν συναντῶνται, σχηματίζουν ἀκμή. Ἂν τὸν ἀνοίξωμε ἀπὸ μέσα του, ἐκεῖ ποὺ δύο συνεχόμεναι ἕδραι του συναντῶνται καὶ κόπτουν ἡ μία τὴν ἄλλη, σχηματίζεται *δίεδρος γωνία.*

Ὁ Κύβος λοιπὸν ἔχει 12 διέδρους γωνίας. Ὅσας δηλαδὴ καὶ ἀκμάς.

Τὶ λέγεται λοιπὸν δίεδρος γωνία ;

Αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ὅλαι ὀρθαί, διότι γίνονται ἀπὸ καθέτους ἕδρας.

Ἀσκήσεις. Εὕρετε εἰς τὴν αἴθουσά μας διέδρους γωνίας.

γ΄ Στερεαὶ γωνίαι.

Ὁ κύβος, βλέπομε ὅτι ἔχει 8 κορυφάς. Ἡ κορυφή του γίνεται ἐκεῖ, ποὺ συναντῶνται 3 συνεχόμεναι ἕδραι τοῦ κύβου. Ἂν ἀνοίξωμε ἀπὸ μέσα τὸν κύβο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἰς τὸ μέρος αὐτὸ συναντῶνται 3 συνεχόμεναι ἕδραι εἰς ἕνα κοινὸ σημεῖο. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *στερεὰ* ἢ *τρίεδρος γωνία.*

Ὁ κύβος, ἐπειδὴ ἔχει 8 κορυφάς, ἔχει καὶ 8 τριέδρους ἢ στερεὰς γωνίας.

᾿Ερωτήσεις. 1) Ποία λέγεται στερεὰ ἢ τρίεδρος γωνία ; 2) Πόσας ὀρθάς, διέδρους καὶ στερεὰς γωνίας ἔχει ὁ κύβος ;

12. Διαστάσεις τῶν σωμάτων

Κάθε στερεὸ σῶμα, π.χ. ἕνα κιβώτιο, ἔχει *μῆκος*, *πλάτος* καὶ *ὕψος*. Ἡ αἴθουσα τῆς διδασκαλίας μας ἔχει τὸ *μῆκος* της, τὸ *πλάτος* της καὶ τὸ *ὕψος* της. Τὰ τρία αὐτὰ λέγονται *διαστάσεις* τῶν σωμάτων. Τὰ λέγομε καὶ ἀποστάσεις.

Σημ. Αἱ ἐπιφάνειαι ἔχουν μόνον δύο διαστάσεις, μῆκος καὶ πλάτος. Ὅπως τὰ χωράφια, τὰ οἰκόπεδα, τὸ ἐξωτερικὸ τῶν σωμάτων.

13. Μέτρα μήκους.

Πῶς μετροῦμε τὰς διαστάσεις τῶν στερεῶν σωμάτων

α΄ Τὸ μέτρο ἢ Γαλλικὸ μέτρο.

Ὅλοι γνωρίζομε τὸ μέτρο. Κατὰ πρῶτον τὸ μετεχειρίσθησαν οἱ Γάλλοι. Εἶναι 1 /40.000.000 τοῦ Μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ Παρίσι.

1 μέτρο χωρίζεται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰς *παλάμας*.

1 παλάμη χωρίζεται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τοὺς *δακτύλους* (πόντους).

1 δάκτυλος χωρίζεται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰς *γραμμάς*.

Ἔτσι 1 μ. ἔχει 10 παλάμας ἢ δέκατα, 100 δακτ. ἢ ἑκατοστά, 1.000 γραμμὰς ἢ χιλιοστά.

1 παλάμη ἔχει 10 δακτύλους ἢ ἑκατοστά, 100 γραμμὰς ἢ χιλιοστά.

1 δάκτυλος ἔχει 10 γραμμὰς ἢ χιλιοστά.

Τὸ μέτρο μὲ τὰς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεις του τὸ χρησιμοποιοῦμε διὰ μικρὰς ἀποστάσεις καὶ τὰς γράφομε καὶ τὰς ἀπαγγέλλομε ὅπως τοὺς δεκαδικούς· π.χ. 2 παλάμαι γράφονται 0,2 μ.
15 δάκτυλοι γράφονται 0,15 μ.
1 γραμμὴ γράφεται 0,001 μ.

Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ μετρήσωμε μεγάλας ἀποστάσεις, μεταχειριζόμεθα τὴν κορδέλλα, ποὺ λέγεται δεκάμετρο, ἑκατόμετρο ἢ χιλιόμετρο.

Δηλαδὴ τὰ πολλαπλάσια τοῦ μέτρου. Τοὺς ἀριθμούς, ποὺ βρίσκομε ἀπὸ τὸ μέτρημα τῶν διαστάσεων, καὶ εἶναι παραπάνω ἀπὸ τὸ μέτρο, τοὺς γράφομε καὶ τοὺς ἀπαγγέλλομε μὲ ἀκεραίους Π.χ.

Ἕνα μέτρο γράφεται 1 μέτ.

Ἕνα δεκάμετρο γράφεται 1 δμ.

Ἕνα ἑκατόμετρο γράφεται 1 ἑκ.μ.

Ἕνα χιλιόμετρο γράφεται 1 χμ.

Εἰς τὴν Ἑλλάδα τὸ μέτρο χρησιμοποιεῖται καὶ γιὰ τὴ μέτρησι τῶν διαστάσεων τῶν ὑφασμάτων.

Τεκτονικὸς πῆχυς

Οἱ κτίσται, γιὰ τὴ μέτρησι τῶν τοίχων καὶ τῶν οἰκοδομῶν, μεταχειρίζονται τὸν τεκτονικὸ πῆχυ. Αὐτὸς εἶναι τὰ 0,75 τοῦ μέτρου (ἢ 3/4 τοῦ μέτρου).

Ἀσκήσεις 1) Ἕνα τετράγωνο ἔχει πλευρὰ 17 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ; 2) Πόσα δέκατα, ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ ἔχει ἕνα μέτρο ; 3) Πόσας παλάμας ἔχει τὸ μέτρο ; Πόσας γραμμάς ; 4) Πόσους δακτύλους ἔχει κάθε παλάμη ; Πόσας γραμμάς ; 5) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 60 μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του ;

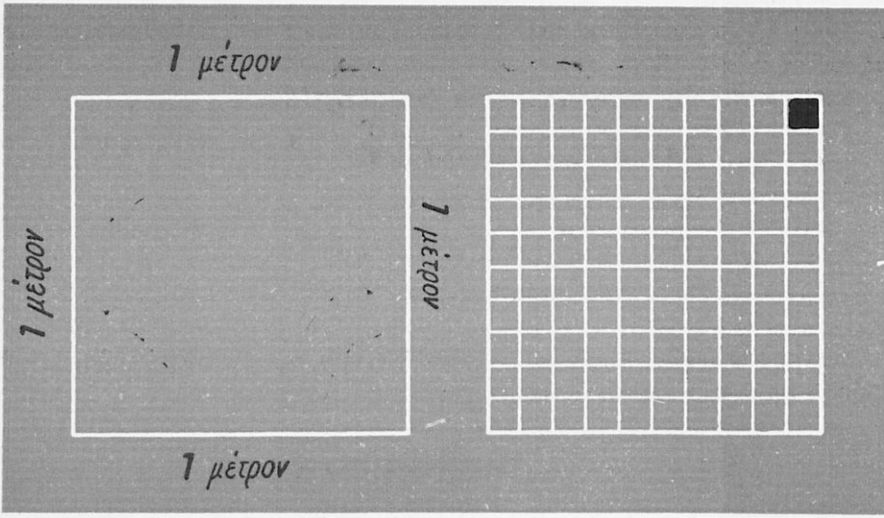
Ἐργασίαι : Κάμετε ἕνα μέτρο μὲ τὰς ὑποδιαιρέσεις του.

14. Μέτρα ἐπιφανείας

α΄ Τετραγωνικὸ μέτρο.

Γιὰ τὴν μέτρησι λοιπὸν τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τοῦ ὕψους ἑνὸς σώματος μεταχειριζόμεθα τὸ μέτρο. Ὅταν ὅμως θέλωμε νὰ μετρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος, μεταχειριζόμεθα τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Αὐτὸ εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι ἕνα μέτρο.

Τὸ ἁπλὸ μέτρο ἔχει 10 παλάμας. Τὸ τετραγωνικὸ ὅμως μέτρο ἔχει



100 τετραγωνικὰς παλάμας. Αὐτὸ τὸ ἐννοοῦμε καλύτερα, ἂν χωρίσωμε κάθε πλευρὰ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἰς 10 ἴσα μέρη. Ἑνώνομε ἔπειτα τὰ ἀπέναντι χωρίσματα καὶ ἔτσι βλέπομε, ὅτι σχηματίζονται 10 τετράγωνα. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἔχει πλευρὰ μιᾶς παλάμης.

Ἡ τετραγωνικὴ λοιπὸν παλάμη εἶναι 0,01 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Τὸ ἴδιο καὶ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη, ἔχει 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ἔχει 10.000 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Καὶ κάθε τετραγωνικὸς δάκτυλος ἔχει 100 τετραγωνικὰς γραμμάς. Τὸ τετραγωνικὸ λοιπὸν μέτρο ἔχει 1.000.000 τετραγωνικὰς γραμμάς.

Δηλαδή :

1. τετρ. μέτρο ἔχει 100 τ. παλ. ἢ ἑκατοστά, 10.000 τ.δ. ἢ δεκάκις χιλιοστὰ 1.000.000 τ. γραμμὰς ἢ ἑκατομμυριοστά.

1 τετρ. παλάμη ἔχει 100 τ. δ. ἢ δεκάκις χιλιοστά. 10.000 τετραγ. γραμμὰς ἢ ἑκατομμυριοστά.

1. τετρ. δάκτ. ἔχει 100 τετρ. γραμμὰς ἢ ἑκατομμυριοστὰ τοῦ τ.μ

Ὁ Σωτήρης παρετήρησε ὅτι : Κάθε μονάδα ἐπιφανείας κατώτερη εἶναι 100 φορὰς μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνώτερή της.

Γράφομε τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου καὶ τὰς ἀπαγγέλλομε μὲ δεκαδικούς:

1 τετρ. παλάμη = 0,01 τ.μ.
1 τετρ. δάκτυλος = 0,0001 τ.μ.
1 τετρ. γραμμὴ = 0,000001 τ.μ.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου τὰ γράφομε καὶ τὰ ἀπαγγέλλομε μὲ ἀκεραίους.

1 τετρ. μέτρο εἶναι τετράγωνο ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι 1 μ.
1 τ.δ. (τετρ. δεκάμετρο) εἶναι τετράγωνο ποὺ ἡ κάθε του πλευρὰ εἶναι 10 μ.
1 τ.ἑκ. (τετρ. ἑκατόμετρο) εἶναι τετράγωνο ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι 100μ.
1 τ.χ. (τετρ. χιλιόμ.) εἶναι τετράγωνο ποὺ κάθε του πλευρὰ εἶναι 1.000 μ.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὰ χωράφια, τὰ ἀμπέλια, τοὺς κήπους καὶ τὰ κτήματα γενικὰ μεταχειριζόμεθα τὸ στρέμμα = 1.000 τετραγωνικὰ μέτρα.

β΄ Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς

Ἀκόμη γιὰ τὴν μέτρησι τῶν οἰκοπέδων μεταχειρίζονται τὸν τεκτονικὸ τετραγωνικὸ πῆχυ. Ὁ τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἔχει πλευρὰ ἕνα τετκονικὸ πῆχυ, 0,75 μ. ἢ 3/4 τοῦ μέτρου. Εἶναι λοιπὸν ὁ *τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς* :

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \text{ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.}$$

Ἂν θέλωμε νὰ τρέψωμε 150 τετραγ. μέτρα εἰς τεκτον. τετρ. πήχεις, διαιροῦμε τὰ 150 τ.μ. διὰ τοῦ 9/16.

$$150 : \frac{9}{16} = 150 \times \frac{16}{9} = 266\frac{6}{9} \text{ τ.τ. πήχ.}$$

Ἂν θέλωμε νὰ τρέψωμε 320 τ.τ. πήχεις εἰς τετραγ. μέτρα, πολλαπλασιάζομε τοὺς τ. τετρ. πήχεις ἐπὶ τὸ 9/16

$$320 \times \frac{9}{16} = \frac{2880}{16} = 180 \text{ τ. μέτρα.}$$

Ἀσκήσεις: Κάμετε μία τετραγωνικὴ παλάμη ἀπὸ χαρτόνι.

15. Ἐμβαδὸν

α΄ Ἐμβαδὸν τετραγώνου

Ὁ Ἀντώνης ἔφερε μία τετραγωνικὴ παλάμη, ποὺ ἡ κάθε πλευρὰ της ἦτο μία παλάμη τοῦ ἁπλοῦ μέτρου. Μετροῦμε μὲ αὐτὴ τὴν αἴθουσά μας. Ἀρχίζομε ἀπὸ τὴ μία πλευρά. Μετροῦμε κάτω τὸ πάτωμα καὶ φθάνομε μέχρι τῆς ἄλλης. Προσέχομε καλὰ καὶ σημειώνομε μὲ γραμμὰς τὸ εὐθὺ μέρος, ποὺ ἐμετρήσαμε. Τὸ μέτρημα ἄργησε λίγο, ἀλλὰ συνεχίσαμε καὶ τὴν ἄλλη ὥρα. Εὑρήκαμε, ὅτι ἡ αἴθουσά μας εἶχε ἐν ὅλῳ 4900 τετραγωνικὰς παλάμας. Διαιροῦμε τὶς 4900 τετρ. παλάμας, διὰ τὰ 100 καὶ εὑρίσκομε ὅτι ἡ αἴθουσά μας εἶναι 49 τετρ. μέτρα.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν τῶν τετρ. μέτρων, ὁ ὁποῖος χωρεῖ εἰς κάθε ἐπιφάνεια, λέγεται *ἐμβαδόν*.

— Ἠμπορούσαμε, λέγει ὁ διδάσκαλος, νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς αἰθούσης μας ἀμέσως χωρὶς νὰ μετρήσωμε μὲ τὴν τετραγωνικὴ παλάμη.

— Φέρε τὸ ἁπλὸ μέτρο σου, Νῖκο. Μέτρησε τὰς πλευρὰς τῆς αἰθούσης μας.

Ὁ Νῖκος μετρᾶ καὶ εὑρίσκει ὅτι ὅλαι εἶναι ἀπὸ 7 μέτρα ἡ κάθε μία.

Ὁ Τέλης λέγει ὅτι ἡ αἴθουσα μας ἔχει σχῆμα τετραγώνου, διότι ὅλαι αἱ πλευραί της εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

— Λοιπόν, λέγει ὁ διδάσκαλος, σημείωσε μὲ κιμωλία, ἐνῶ μετρᾷς τὰς πλευράς, τὴν ἀπόστασιν κάθε μέτρου. Τώρα ἕνωσε τὰς διαστάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τῆς ἐπιφανείας τῆς αἰθούσης. Τὶ βλέπεις ;

— Ἐσχηματίσθησαν τετράγωνα, ποὺ τὸ καθένα εἶναι ἴσο μὲ ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο.

— Πόσα τέτοια ἐσχηματίσθησαν ;

Ὁ Νῖκος μετρᾶ καὶ βρίσκει 49 ἐν ὅλῳ. Δηλαδὴ ὅσα καὶ κατὰ τὸ μέτρημα μὲ τὴν τετραγωνικὴ παλάμη. Ἐκεῖ ὅμως ἐχάσαμε πολλὴ ὥρα. Ἐνῶ ἐδῶ ἀμέσως τὸ εὑρήκαμε.

Ὁ Δημήτρης ὑπέδειξε εὐκολώτερο τρόπο εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου :

— Ἀντὶ νὰ μετρᾶμε καὶ νὰ σύρωμε γραμμὲς στὶς ἀπέναντι πλευρὲς γιὰ νὰ γίνωνται τὰ τετραγωνικὰ μέτρα, νά : Εὑρίσκομε τὴν μία πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ τὴν πολλαπλασιάζομε μὲ τὸν ἑαυτό της: $7 \times 7 = 49$ τ.μ.

ΚΑΝΩΝ.— Διὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν πλευρὰ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

Ἐρωτήσεις: 1) Τί λέγεται ἐμβαδόν; 2) Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου;

Προβλήματα: 1) Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα τετραγωνικό. Ἡ πλευρά του εἶναι 65,5 μέτρα. Ποῖο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου;

2) Τετραγωνικὸ δωμάτιο ἔχει περίμετρο 32 μέτρα. Ποῖο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3) Ἕνας τετραγωνικὸς χῶρος μὲ πλευρὰ 12 μέτρων πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλακάκια τετραγωνικά. Τὸ κάθε πλακάκι ἔχει ἀκμὴ 0,2. μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν;

Ἐμβαδὸν τοῦ κύβου

Πρόβλημα: Ἕνα κιβώτιο κυβικὸ ἔχει ἀκμὴ 2,5 μέτρα. Ποῖο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του;

Ὁ Σωτήρης εἶπε ὅτι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας. Κάθε ἕδρα ἔχει σχῆμα τετραγωνικὸ καὶ ὅλαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ὅταν λοιπὸν εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς καὶ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 6, θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου.

— Οἱ ἀκμὲς εἶναι πάλι ὅλες ἴσες. Ἐπίσης, ἐπειδὴ εἶναι τὸ τέλος τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου, κατ' ἀνάγκην εἶναι ἴσες καὶ οἱ γραμμὲς (πλευρὲς) τῶν τετραγωνικῶν ἐπιφανειῶν τοῦ κύβου.

— Ἔτσι, ὅταν γνωρίζωμε τὴν ἀκμὴ τοῦ κύβου, γνωρίζομε καὶ τὴν πλευρὰ τῶν τετραγωνικῶν ἐπιφανειῶν του.

Λύσις: 1) $2,5 \times 2,5 = 6,25$ τ.μ. τὸ Ε. μιᾶς ἕδρας κύβου.
2) $6,25 \times 6 = 37,50$ τ.μ. τὸ Ε. ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

Προβλήματα 1) Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κύβου. Ἡ ἀκμή της εἶναι 4 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της;

2) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς δωματίου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα κύβου, εἶναι 96 τ.μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κάθε ἕδρας τοῦ κύβου;

3) Ἕνα κιβώτιο σχηματίζει κύβο, ἔχει δὲ ἀκμὴ 1,8 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας καὶ πόσο εἶναι ὅλου τοῦ κιβωτίου;

4) Ἕνα οἰκόπεδο τετραγωνικὸ ἔχει πλευρὰ 28 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του καὶ πόσο στοιχίζει ἐν ὅλῳ, ἐὰν κάθε τεκτον. τετραγωνικὸς πῆχυς στοιχίζει 59 δραχμάς;

5) Ἕνα οἰκόπεδο 570 τ.τ. πήχεων πωλεῖται πρὸς 45 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρο. Πόσα χρήματα ἀξίζει;

16. Τί λέγεται ὄγκος. Μέτρα ὄγκου

Ὁ πατέρας τοῦ Θεμιστοκλῆ ἀγόρασε 2 καρπούζια καὶ ἕνα πεπόνι. Εἶχε τὸ καλάθι του καὶ ἐδοκίμασε νὰ τὰ βάλῃ μέσα. Τὰ καρπούζια ὅμως ἔπιασαν ὅλο τὸ χῶρο τοῦ καλαθιοῦ καὶ τὸ πεπόνι δὲν ἐχωροῦσε. Ἔβγαλε τότε τὸ ἕνα καρπούζι καὶ ἔβαλε τὸ πεπόνι, ἀλλὰ τώρα ἔμενε ἔξω τὸ ἄλλο καρπούζι. Γιατὶ δὲν χωράει τὸ ἄλλο ;

Ὁ Σπῦρος τότε λέγει :

— Κάθε πρᾶγμα ἔχει τὸν ὄγκον του. Ἀφοῦ τό ἕνα καρπούζι καὶ τὸ πεπόνι ἔπιασαν μὲ τὸν ὄγκο τους τὸ χῶρο τοῦ καλαθιοῦ, φυσικὰ τὸ ἄλλο καρπούζι ἔμεινε ἔξω.

1) Ὥστε *ὄγκος τῶν σωμάτων λέγεται ὁ χῶρος, ποὺ καταλαμβάνει κάθε σῶμα.*

Τὸν ἴδιο χῶρο δὲν δύνανται νὰ καταλάβουν δύο σώματα.

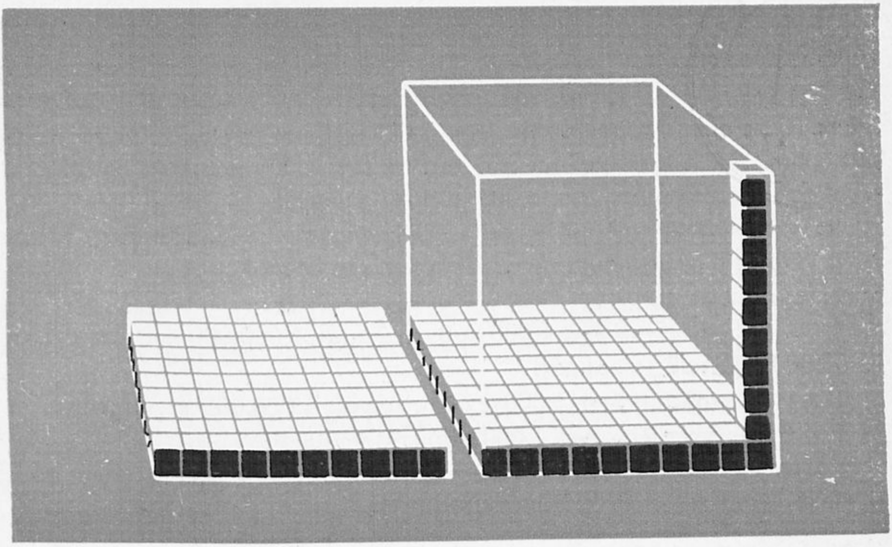
Τὰ παιδιὰ ἔφεραν πολλὰ ἄλλα παραδείγματα. Ὅπως τὰς θέσεις τοῦ αὐτοκινήτου μὲ τὰ ἄτομα, τὸ μπουκάλι μὲ τὸ λάδι, τὰ κιβώτια μὲ τὰ πορτοκάλια ἢ μὲ τὰ σταφύλια, τὰ μπαοῦλα μὲ τὰ ροῦχα, τὸ κάρρο μὲ τὴν ἄμμο, πέτρες κτλ.

17. Τὸ κυβικὸ μέτρο

Διὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν σωμάτων εἴδαμε ὅτι μεταχειριζόμεθα τὸ ἁπλὸ μέτρο. Διὰ τὰς ἐπιφανείας αὐτῶν τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Διὰ τὸν ὄγκον ;

Ὁ Σωτήρης ἐσήκωσε τὸ χέρι καὶ εἶπε :

— Ἐμεῖς ἔχομε μάντρα καὶ πωλοῦμε εἴδη οἰκοδομῶν. Ὅταν οἱ πελάται μας ἀγοράζουν ἄμμο, τὴν πωλοῦμε μὲ τὸ κυβικό. Εἶναι ἕνα κιβώτιο κυ-



βικό, ἀνοικτὸ ἀπὸ τὶς δύο βάσεις του. Ἡ κάθε του ἕδρα εἶναι ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο. Αὐτὸ τὸ γεμίζομε ἄμμο. Ἔπειτα σηκώνομε τὸ ἀνοικτὸ ξύλινο κιβώτιο καὶ ὁ ὄγκος τῆς ἄμμου εἶναι ἀκριβῶς ἕνα κυβικό.

— Γιὰ τὸ νερὸ ἔχομε τὸ ἴδιο σχέδιο τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἀλλὰ σιδερένιο καὶ μὲ κάνουλα. Ὅταν γεμίζῃ ἀπὸ τὴ βρύσι μας, τὸ ἀδειάζουν οἱ πελάται σὲ δικά τους κιβώτια.

— Ἕνα κυβικὸ νεροῦ, λέγει ὁ διδάσκαλος, χωρεῖ 1000 χιλιόγραμμα (κιλά).

Ὥστε, λέγει ὁ Ἀντώνης, τὸ κυβικὸ μέτρο ἐπειδὴ μετρᾶ τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων, ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος. Ἡ κάθε του ἀκμὴ εἶναι 1 μέτρο. Τότε, γιὰ νὰ εὕρωμε τὶς ὑποδιαιρέσεις του, χωρίζομε τὴ βάσι του, ἡ ὁποία εἶναι ἕνα τετραγ. μέτρο εἰς 100 ἴσα μέρη, τὶς τετραγωνικὲς παλάμες. Ἐπίσης καὶ τὴν ἐπάνω βάσι εἰς 100 ἴσα μέρη, τὶς τετραγωνικὲς παλάμες. Ἑνώνομε μὲ κλωστὲς τὰ ἑκατὸ τετραγωνίδια των. Τώρα ὁ κύβος ἔχει ὕψος, ποὺ ἡ ἀκμή του ἀπὸ τὴ μία βάσι ἕως τὴν ἄλλη εἶναι 1 μέτρο. Τὸ ἕνα μέτρο ἔχει 10 παλάμες. Ἀπὸ κάθε λοιπὸν παλάμη δένομε μία κλωστὴ καὶ τὴν ἑνώνομε μὲ τὶς ἀπέναντι πλευρές. Τότε θὰ ἰδοῦμε ὅτι σχηματίζονται 10 σειρὲς ἀπὸ 100 τετραγωνίδια ἡ κάθε μία, ἤτοι ἐν ὅλῳ 1.000 μικροὶ κύβοι. Κάθε κύβος ἀπ' αὐτοὺς ἔχει ἕδρα μία τετραγωνικὴ παλάμη, ποὺ ἡ ἀκμή της εἶναι μία παλάμη τοῦ ἁπλοῦ μέτρου. Αὐτὲς εἶναι οἱ κυβικὲς παλάμες. Τὸ κυβικὸ λοιπὸν μέτρο ἔχει 1.000 κυβικὲς παλάμες. Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ ἡ κάθε κυβικὴ παλάμη θὰ ἔχη 1.000 κυβικοὺς δακτύλους. Κάθε κυβικὸς δάκτυλος ἔχει 1.000 κυβικὲς γραμμές.

Ἡ κάθε κυβικὴ παλάμη χωρεῖ 1000 γραμμάρια νερό. Ἡ κυβικὴ παλάμη λέγεται καὶ *χιλιόγραμμο* ἢ *κιλό*. Ὁ κυβικὸς δάκτυλος χωρεῖ 1 γραμμάριο· ἑπομένως :

1. Κυβικὸ μέτρο ἔχει 1.000 κυβ. παλάμας, 1.000.000 κυβ. δακτύλους 1.000.000.000 κυβ. γραμμάς.

1 κυβικὴ παλάμη ἔχει 1.000 κ. δακτύλους, 1.000.000 κ. γραμμάς.

1 κυβικὸς δάκτυλος ἔχει 1.000 κυβικὰς γραμμάς.

Παρατήρησις. Ὁ Βασίλης λέγει : — Ἐγὼ ἐσκέφθηκα : ἀφοῦ ὁ κύβος ἔχει κάθε ἀκμή του 1 μέτρο, ἔχει 10 παλάμες. Πολλαπλασιάζω ἐπὶ 10 παλάμες καὶ βρίσκω τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας. Ὅ,τι βρῶ, πάλι ἐπὶ 10 γιὰ νά βρῶ πόσα τέτοια τετραγωνίδια θὰ γίνουν στὸ χῶρο τοῦ ὕψους τοῦ ἑνὸς μέτρου. $10 \times 10 \times 10 = 1.000$ κυβ. παλάμες καὶ τὰς παλάμας εἰς δακτύλους κ.τ.λ.

γ' Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν ὄγκων

Τὰ κυβικὰ μέτρα γράφονται μὲ ἀκεραίους, π.χ. 1 κ.μ., 5 κ.μ., 8 κ.μ. κ.λ.π. Ἐνῶ αἱ ἄλλαι ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου, μὲ δεκαδικούς. Χωρίζομε ὅμως αὐτοὺς εἰς τριψήφια τμήματα. Τὸ πρῶτο παριστάνει τὰς κ. παλάμας, τὸ δεύτερο τοὺς κ. δακτύλους καὶ τὸ τρίτο τὰς κ. γραμμάς.

1) Π.χ. γράφεται ἔτσι ὁ 5, 236,785,500 καὶ ἀπαγγέλεται ἔτσι: 5 κ. μέτρα 236 κ. παλάμαι, 785 κ. δάκτυλοι, 500 κ. γραμμαί.

Παρατήρησις. 1) Ὁ Ἀλκιβιάδης λέγει : Οἱ παλάμες εἶναι χιλιοστὰ τοῦ κ.μ., οἱ δάκτυλοι ἑκατομμυριοστά.

2) Κάθε μονάδα ὄγκου κατώτερη εἶναι 1000 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀνώτερή της. Π.χ. ἡ κυβικὴ παλάμη 1000 φορὲς μικρότερη τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Ὁ κυβ. δάκτυλος 1000 φορὲς μικρότερος τῆς κυβικῆς παλάμης.

᾿Ασκήσεις: 1) Γράψετε μαζί τοὺς ἀριθμούς : 1 κ.μ. 56 κ.π. καὶ 356κ. δάκτυλοι. 2) ᾿Επίσης 485 κυβ. παλάμαι, 12 κυβ. δάκτυλοι καὶ 256 κυβ. γραμ. 3) Τὰς 2365 κυβ. παλάμας καὶ 500 κυβ. δακτύλους νὰ τοὺς γράψετε ὅπως ἐμάθαμε. 4) Τὰς 547 κυβ. παλάμας νὰ τὰς τρέψετε εἰς κυβικὰ μέτρα.

Προβλήματα: 1) Τὸ τεπόζιτο τῆς κατοικίας μας περιέχει 3.256 κυβ. μέτρα νερό. Εἴμεθα εἰς τὴν κατοικία 14 ἄτομα. Πόσα κιλὰ νεροῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ καθένα ;

2) Αἱ ᾿Αθῆναι ἔχουν πληθυσμὸν μαζὶ μὲ τὸν Πειραιᾶ καὶ τὰ προάστεια 1.389.000 ἄτομα. ῾Η ἑταιρεία ῾Υδάτων παρέχει καθημερινῶς 45.000 κυβικὰ μέτρα νεροῦ. Πόσα χιλιόγραμμα ἀντιστοιχοῦν διὰ κάθε ἄτομο ;

18. ῾Ο ὄγκος τοῦ κύβου

Πρόβλημα. Μία δεξαμενὴ σχήματος κύβου ἔχει ἀκμὴ 4 μέτρων. Πόσα κυβικὰ μέτρα νεροῦ χωρεῖ ;

Θέλομε νὰ εὕρωμε πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ αὐτὸς ὁ χῶρος. ῞Οπως ἐμάθαμε θὰ γίνουν εἰς τὴν ἕδρα τῆς βάσεως τοῦ χώρου αὐτοῦ $4 \times 4 =$ 16 τετραγωνικὰ μέτρα. Τὸ ὕψος τοῦ κύβου εἶναι πάλι 4 μέτρα. ᾿Απὸ κάθε μέτρο λοιπὸν τοῦ ὕψους σύρομε γραμμὰς καὶ ἑνώνομε τὰς ἀπέναντι ἕδρας. Θὰ σχηματισθοῦν 4 σειραὶ ἀπὸ 16 κυβικὰ μέτρα ἡ κάθε μία. ῏Ητοι : $16 \times 4 = 64$ κυβικὰ μέτρα.

Παρατήρησις. ῾Ο Γιῶργος λέγει : ῞Οπως βλέπω ἐδῶ εὑρήκαμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κύβου, (ποὺ εἶναι τετράγωνη) καὶ αὐτὸ τὸ ἐπολλαπλασιάσαμε ἐπὶ τὸ ὕψος. ᾿Επειδὴ ὅμως καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυβικοῦ σώματος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὴν πλευρὰ τῆς βάσεως, ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴδιος. Δηλαδή : $4 \times 4 \times 4 = 64$ κ.μ.

ΚΑΝΩΝ.— Διὰ νὰ εὕρωμε τὸν ὄγκον τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος, ἐπὶ τὸ ὕψος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος τοῦ κύβου εἶναι ὁ αὐτός, πολλαπλασιάζομε αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὸν ἴδιον πάλι ἐπὶ τὸ γινόμενο, τὸ ὁποῖο θὰ προκύψῃ.

Προβλήματα 1) ῞Ενα κυβικὸ δωμάτιο ἔχει πλευρὰ 6,5 μέτρα. Τὸ δωμάτιο αὐτὸ χρησιμεύει ὡς ἕδρα διδασκαλίας 40 μαθητῶν. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἀντιστοιχοῦν εἰς κάθε μαθητήν ; Πόσα κυβικά ;

2. ῞Ενα κυβ. δοχεῖον πλευρᾶς 0,6 μ. πόσα κυβικὰ μέτρα νεροῦ χωρεῖ ;

3. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἔχει ὁ κύβος, ποὺ ἔκαμε ὁ Γιῶργος ἀπὸ πηλό, ἀφοῦ ἡ ἀκμή του εἶναι 0,2 μέτρα.

4. Τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ κύβου τῆς στέρνας τοῦ ἀγροτικοῦ σπιτιοῦ τοῦ κ. Χάλαρη εἶναι 216 τ.μ. Πόσος εἶναι ὄγκος της καὶ πόσα κιλὰ νεροῦ χωρεῖ, ὅταν ἡ ἀκμή της εἶναι 6 μέτρα ;

5. Μία κυβικὴ παλάμη πόσα γραμμάρια νεροῦ χωρεῖ ; Πόσα κιλά ;

6. Τὸ κυβ. μέτρο πόσα χιλιόγραμμα νεροῦ χωρεῖ ;

19. Εἰδικὸν βάρος τῶν σωμάτων

Τὴν ἄλλη ἡμέρα ὁ Στράτος ἐρώτησε τὸν διδάσκαλο :

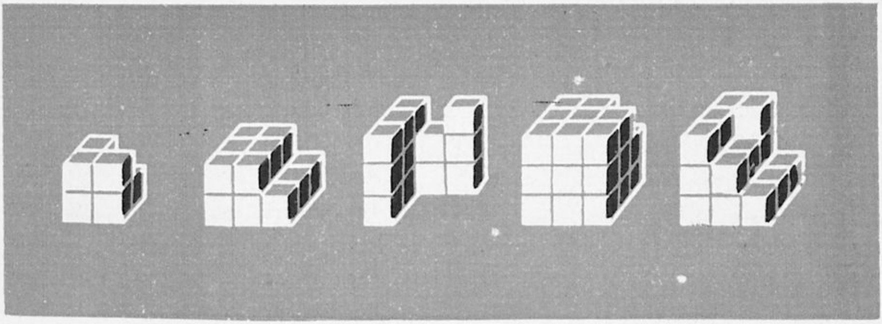
— Στὰ δοχεῖα μόνον τὸ νερὸ θὰ μετρᾶμε πόσα κυβικὰ εἶναι ; Τὸ λάδι, τὸ κρασί, τὸ γάλα καὶ τόσα ἄλλα δὲν μποροῦμε νὰ τὰ ὑπολογίσωμε, ὅταν εἶναι μέσα π.χ. σ' ἕνα κυβικὸ δοχεῖο, πόσα χιλιόγραμμα θὰ εἶναι ;

Ὁ διδάσκαλος τότε εἶπε :

— Ὅλων, παιδιά, τῶν σωμάτων δυνάμεθα ἀπὸ τὸν ὄγκο τους νὰ ὑπολογίσωμε τὸ βάρος τους. Μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι πρέπει νὰ ἠξεύρωμε τοῦ κάθε σώματος τὸ *εἰδικὸν βάρος*. Ὡς βάσι ἔχουν πάρει οἱ ἄνθρωποι μία κυβικὴ παλάμη νεροῦ, ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0. Αὐτὴ ζυγίζει ἕνα χιλιόγραμμο (1000 γραμμάρια). Ἂν τὴν κυβικὴ τώρα παλάμη τὴ γεμίσωμε μὲ ἔλαιον, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ζυγίζει 915 γραμμάρια. Διαιροῦμε τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου μὲ τὸ βάρος ἴσου ὄγκου νεροῦ, 915 : 1000 = 0,915. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου. Ὁ ἴδιος ὄγκος μιᾶς κυβικῆς παλάσιδήρου ζυγίζει 7600 γραμμάρια. Τὸν διαιροῦμε διὰ τοῦ 1000 γραμμάρια ἴσου ὄγκου νεροῦ, 7600: 1000 = 7,6 χιλιόγραμμα (κιλά). Εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου.

— Ὥστε, λέγει ὁ Σωκράτης, *ὅταν ἠξεύρω τὸν ὄγκον ἑνὸς σώματος, τὸν πολλαπλασιάζω μὲ τὸ εἰδικόν του βάρος καὶ εὑρίσκω τὸ βάρος τοῦ σώματος*.

Π.χ. Ὁ ὄγκος σιδήρου εἶναι 6 κυβικαὶ παλάμαι. Πόσο εἶναι τὸ βάρος του ;



Λύσις.

6 κ.π. × 7,6 τὸ εἰδ. βάρος του = 45,6 κιλά.

Ἡ Οὐρανία τότε παρετήρησε ὅτι καὶ ἀπὸ τὸ βάρος ἑνὸς σώματος, ὅταν τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους του, εὑρίσκομε τὸν ὄγκο του.

Εἰς τὸ ἴδιο παράδειγμα: Διαιροῦμε τὰ 45,6 κιλὰ (τὸ βάρος τοῦ σιδήρου) διὰ τοῦ εἰδικοῦ του βάρους 7,6 καὶ εὑρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ σιδήρου.

Λύσις : 45,6 : 7.6 = 6 κ.π.

456	76
=0	6

2ο παράδειγμα: 49,41 κιλὰ ἐλαίου πόσο ὄγκο ἑνὸς δοχείου θὰ καταλάβουν ;

Λύσις. Διαιροῦμε τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου διὰ τοῦ εἰδικοῦ του βάρους.

49,41 : 0,915 = 54 κ.π.

49410	915
3660	54 κ.π.
000	

Πίναξ εἰδικοῦ βάρους τῶν πλέον συνηθισμένων σωμάτων

Πλατίνα	21,5	Νερὸ καθαρὸ	1,000
Χρυσὸς	19,33	Νερὸ θαλάσσης	1,020
Μόλυβδος	11,38	Γάλα	1,030
Ἄργυρος	10,5	Οἶνος	0,990
Χαλκὸς	8,8	Μπύρα	0,980
Νικέλιον	8,28	Πάγος	0,990
Ἀτσάλι	7,7	Ἔλαιον	0,915
Σίδηρος	7,6	Οἰνόπνευμα	0,900
Καλάϊ	7,29	Πετρέλαιον	0,840
Ἀδάμας	3,5	Φελλὸς	0,240
Μάρμαρον	2,84		
Ὕαλος	2,5		

1) Γενικὰ λοιπὸν γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος, διαιροῦμε τὸ βάρος μὲ τὸν ὄγκο του.

2) Ὡς μονάδα μετρήσεως γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν σωμάτων ἔλαβον οἱ ἄνθρωποι τὴ χωρητικότητα μιᾶς κυβικῆς παλάμης,

Αὐτὴ χωρεῖ ἕνα κιλὸ (χιλιόγραμμο) καθαρὸ νερὸ 4°.

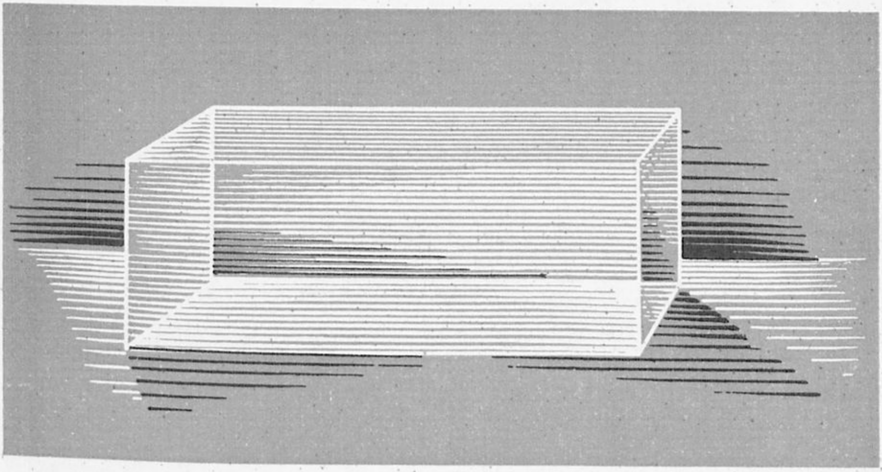
Προβλήματα: 1) Ἕνα κυβικὸ τεπόζιτο ἔχει ἀκμὴ 3 μ. Πόσα κιλὰ πετρελαίου χωρεῖ; Πόσα γάλακτος;

2) Ἕνας τενεκὲς κυβικὸς ἔχει ἀκμὴ 0,8 μέτρα. Πόσα κιλὰ οἴνου χωρεῖ; Πόσα οἰνοπνεύματος;

3) 65 κιλὰ χρυσοῦ, πόσο ὄγκο ἔχουν;

4) 235 κιλὰ μολύβδου πόσο ὄγκο ἔχουν;

5) Ὄγκος σιδήρου 567 κ.π. πόσα κιλὰ ζυγίζει;



Β΄. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

1. Τί εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Ὁ Ἀριστομένης εἶχε πέσει ἔξω στὴν κατασκευὴ τοῦ κύβου. Ὁ Βασίλης καὶ τὰ ἄλλα παιδιά, ποὺ τὸν εἶδαν, τοῦ εἶπαν ὅτι τὸ σχῆμα, ποὺ εἶχε κάμει ἀπὸ σύρμα, δὲν ἦτο κύβος. Μετροῦν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρό τους καὶ ἡ μία ἀκμὴ του ἦτο 0,18 τοῦ μέτρου. Τόση ἦτο καὶ ἡ ἀπέναντί της. Ἡ ἄλλη ὅμως ἀκμή του ἦτο 0,16 μ. καθὼς καὶ ἡ ἀπέναντί της. Ὅμοια ἦταν καὶ ἡ ἄλλη βάσις. Ἀπὸ τὰς τέσσαρας παραπλεύρους ἐπιφανείας ἡ μία καὶ ἡ ἀπέναντί της εἶχαν ἀκμὰς 0,16 μ. καὶ 0,15 μ. καὶ αἱ ἄλλαι δύο εἶχαν 0,18 καὶ 0,15.

—Βλέπεις, Ἀριστομένη· ὁ κύβος πρέπει νὰ ἔχῃ ὅλας τὰς ἀκμὰς ἴσας μεταξύ των. Τὸ σχῆμα τὸ δικό σου ἔχει μόνον τὰς ἀπέναντι ἴσας. Τέτοιο σχῆμα εἶναι τὰ διάφορα κουτιὰ ἀπὸ τὰ λουκούμια, γλυκά, τὰ κιβώτια μὲ κονσέρβες, αἱ αἴθουσαι τοῦ σχολείου μας κ.λ.π.

Ὁ διδάσκαλος τοὺς εἶπε τότε ὅτι τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο*. Ὁ Κώστας λέγει :

— Πολὺ ὁμοιάζει μὲ τὸν κύβο, γιατὶ ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες. Ἔχει μῆκος, πλάτος, ὕψος, ἀκμάς, κορυφάς, γωνίες, ὅ,τι δηλαδὴ καὶ ὁ κύβος.

—Ἂς ἰδοῦμε λοιπὸν μὲ τὴ σειρά, λέγει ὁ διδάσκαλος, ποῦ ὁμοιάζει καὶ ποῦ διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸν κύβο.

α′ Ἕδραι

Ὁ Βασίλης λέγει ὅτι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας, ὅπως ὁ κύβος.

— Λοιπὸν τὰς ἐπιφανείας αὐτάς, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, τὰς ὀνομάζομε *ἕδρας*, λέγει ὁ διδάσκαλος.

Ὁ Σωτήρης προσθέτει :

—Ἐνῶ ὅμως ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσες μεταξύ των, τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μόνον οἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσες. Ἐπίσης ἔχει, ὅπως καὶ ὁ κύβος, τὰς ἀπέναντι ἕδρας παραλλήλους. Οἱ δύο βάσεις του εἶναι ὁριζόντιες καὶ οἱ ἄλλες παράπλευρες ἕδρες, κατακόρυφες. Καὶ οἱ 4 ὅμως εἶναι κάθετες ἐπὶ τὶς βάσεις.

β′ Ἀκμαί.

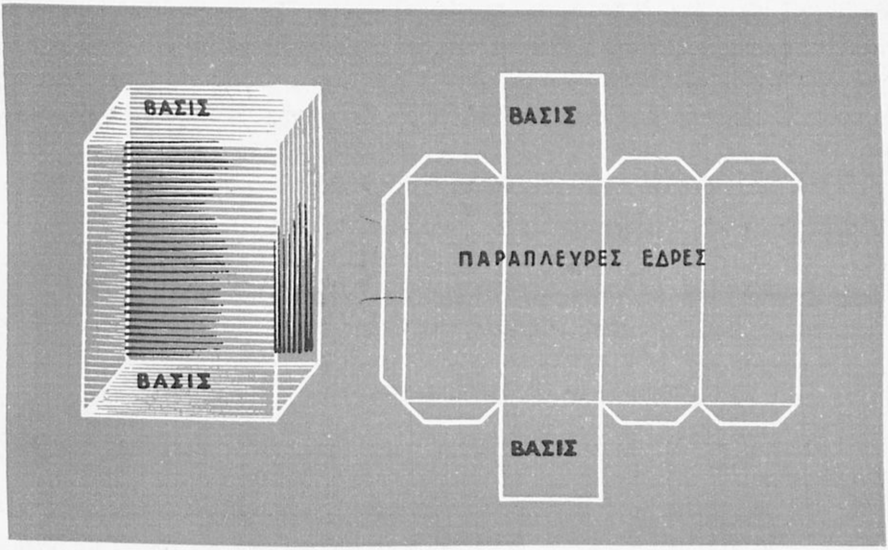
— Τὸ μέρος, ποὺ συναντῶνται δύο ἕδρες τοῦ κύβου, λέγεται *ἀκμή*, λέγει ὁ Θανάσης.

— Τὸ ἴδιο ἰσχύει, καὶ γιὰ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο λέγει ὁ διδάσκαλος.

— Τότε καὶ αὐτὸ ἔχει δύο ἀκμές, ἀλλὰ δὲν εἶναι μεταξύ τους ἴσες· μόνον οἱ ἀπέναντι. Ἐπίσης οἱ ἀπέναντι εἶναι, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβο, παράλληλες. Οἱ 8 εἶναι ὁριζόντιες καὶ οἱ 4, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβο, κατακόρυφες. Κάθε ἀκμὴ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβο, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὶς ἀκμές, ποὺ συναντᾶ.

γ′ Κορυφαὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει, ὅπως καὶ ὁ κύβος, 8 κορυφάς. Ἀπὸ κάθε κορυφή, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβο, ξεκινοῦν 3 ἀκμαί. Αἱ ἀκμαὶ αὐταὶ δεικνύουν τὰς διατάσεις τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου : μῆκος, πλάτος, ὕψος. Εἰς τὸν κύβο αἱ διαστάσεις αὐταὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Εἰς τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο εἶναι διάφοροι.



δ΄ Γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Παρατηρήσετε ἀπὸ τὶ γίνονται ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ὁ Θανάσης λέγει:

—Ὅπως ὁ κύβος ἔχει 24 ὀρθὲς γωνίες, ἔτσι καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 24 ὀρθὲς γωνίες. Ὅλες οἱ γωνίες γίνονται ἀπὸ κάθετες πλευρὲς καὶ γι' αὐτὸ εἶναι ὀρθές. Ἐπίσης ἔχει ὅπως καὶ ὁ κύβος 12 διέδρους καὶ 8 τριέδρους ἢ στερεὲς γωνίες.

Ἐρωτήσεις: 1) Τί λέγεται ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο ; 2) Εἰς τί ὁμοιάζει καὶ εἰς τί διαφέρει ἀπὸ τὸν κύβο ; Κάμετε ἕνα ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο μὲ ὅ,τι ὁ καθένας θέλει.

ε΄. Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ὁ Ἄλκης λέγει:

— Τώρα πιὰ δὲν ἐδυσκολεύθηκα στὴ κατασκευὴ τοῦ ὀρθογωνίου πραλληλεπιπέδου. Τὸ ἀνάπτυγμα κάθε σώματος τὸ κατασκευάζω ἀμέσως. Ὁ κύβος τοῦ Ἀριστομένη, ποὺ ἀπὸ τὴ βιασύνη του ἔγινε παραλληλεπίπεδο, μὲ ἐδίδαξε ἀμέσως γιὰ νὰ κάμω τὸ σχῆμα του. Ἐχάραξα ἐπάνω στὸ χαρτόνι μου ἕξι παραλληλόγραμμα. Τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἀπέναντί του μόνο. Ἐξεχώρισα ἔπειτα τὸ σχέδιό μου ἀπὸ τὸ ἄλλο χαρτόνι ποὺ δὲν μοῦ χρειάζεται. Ἔσπασα τὸ χαρτόνι μὲ τὸ σχέδιό μου στὰ χαράγματα τῶν ἀκμῶν, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος. Στὶς ἄκρες, ἀφοῦ τὶς ἔξυσα γιὰ νὰ κολοῦν ἔβαλα κόλλα. Ἔτσι ἐκόλλησα τὰ ἀσύνδετα ἄκρα τῶν συνεχομένων ἑδρῶν καὶ νὰ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Ὅλα τὰ παιδιὰ ἔφεραν τὴν ἄλλη ἡμέρα ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

2. Σχῆμα ἑδρῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ σχέσις μεταξύ των

α΄ Ὀρθογώνιο (ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο)

Ὅλα τὰ παιδιὰ ἔφεραν τὴν ἄλλη ἡμέρα ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

— Νά, Κύριε, εἶπε ὁ Μανώλης. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ὁμοιάζει καθ᾿ ὅλα μὲ τὸν κύβο, ἀλλὰ δὲν ἔχει τὶς ἄκρες του ὅλες ἴσες οὔτε, τὶς ἕδρες του. Ἐπίσης οἱ ἕδρες δὲν εἶναι τετράγωνες, ὅπως τοῦ κύβου.

Ὅπως ἔχετε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδό σας, βάλετε ἀπὸ κάτω ἀπὸ τὴ βάσι του μία κόλλα χαρτί. Σύρετε γραμμὲς μὲ τὸ μολύβι σας ἀκολουθοῦντες τὶς γραμμὲς τῆς βάσεως. Τὶ ἐσχηματίσθη ;

— Τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

— Τὶ παρατηρεῖτε ;

— Ἔχει 4 πλευρὲς κάθετες ἀνὰ δύο. Ἀπὸ αὐτὲς οἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές.

Τὸ σχῆμα αὐτό, λέγει ὁ διδάσκαλος, λέγεται *ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο* ἢ ἁπλῶς *ὀρθογώνιο*. Τὶ λέγεται λοιπὸν ὀρθογώνιο ἢ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο;

β΄ Ὁμοιότητες καὶ διαφοραὶ μὲ τὸ τετράγωνο.

Ὁ Σωτήρης περετήρησε ὅτι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ὁμοιάζει μὲ τὸ τετράγωνο : 1) Διότι ἔχει, ὅπως ἐκεῖνο, 4 γωνίες ὀρθές. 2) Ἔχει 4 πλευρές, ὅπως ἐκεῖνο. Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὸ τετράγωνο, γιατὶ οἱ πλευρές του δὲν εἶναι ἴσες μεταξύ των, ἀλλὰ μόνον οἱ ἀπέναντι.

Ἀσκήσεις: Κάμετε ἕνα ὀρθογώνιο.

γ΄ Μῆκος, πλάτος, περίμετρος, διαγώνιος.

Ὁ Ἀλκιβιάδης εἶχε κάμει ἕνα τέλειο ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ἐπρόσεξε πολύ. Ἔσυρε πρῶτα μία ὁριζοντία εὐθεῖα. Εἰς τὰ δύο της ἄκρα ἔσυρε δύο καθέτους εὐθείας καὶ τὰς ἕνωσε μὲ μία ἄλλη εὐθεῖα.

Ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται *βάσις* ἢ *μῆκος*. Καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο μικρὰς πλευρὰς *πλάτος* ἢ *ὕψος*.

Ὅπως εἰς τὸ τετράγωνο, ἔτσι καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιο τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν λέγεται *περίμετρος*.

Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος προστιθέμενα μᾶς δίδουν τὴν *ἡμιπερίμετρο* τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἐὰν λοιπὸν διπλασιάσωμε τὴν ἡμιπερίμετρο, θὰ εὕρωμε τὴν περίμετρο. Ἔτσι, ὅταν ἕνα ὀρθογώνιο ἔχῃ πλάτος 60 μ. καὶ μῆκος 100 μ. ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι :

$$100 + 60 = 160$$
$$160 \times 2 = 320 \text{ μ.}$$

— Ἐγώ, λέγει ἡ Κατίνα, ἠμποροῦσα καὶ ἀλλοιῶς νὰ βρῶ τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου: α) Διπλασιάζω τὴ βάσι ἢ τὸ μῆκος, γιατὶ τόσο θὰ εἶναι ἡ ἀπέναντί της : $100 \times 2 = 200$. β) διπλασιάζω καὶ τὸ πλάτος ἢ ὕψος : $60 \times 2 = 120$ καὶ γ) προσθέτω τὰ δύο γινόμενα : $200 + 120 = 320$ ἡ περίμετρος.

Ὁ Μίμης ἐπρόσθεσε καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς καὶ ηὗρε πάλι τὸ ἴδιο : $100 + 100 + 60 + 60 = 320$.

Λύσετε τὰ δύο προβλήματα μὲ τὸν συντομότερο τρόπο.

1) Ὁ κῆπος τοῦ Μιλτιάδη ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθῆ γιὰ νὰ τὸν περιφράξῃ μὲ 4 σειράς, ἐὰν τὸ μῆκος του εἶναι 45 μέτρα καὶ τὸ πλάτος του 19 μέτρα ;

2) Ἡ περίμετρος τῆς αὐλῆς μας εἶναι 56 μ. Τὸ μῆκος εἶναι 18 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ πλάτος της ;

Διαγώνιος λέγεται ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει δύο ἀπέναντι γωνίας. Αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

3. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου

Ἡ αἴθουσα τῆς πρώτης τάξεως, λέγει ὁ Θανάσης, ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου. Παρακαλέσαμε τὴ διδασκάλισσα τῆς πρώτης τάξεως καὶ ἐμετρήσαμε εἰς τὸ διάλειμμα τὴ βάσι της. Εἶχε 8 μέτρα μῆκος καὶ 6 μέτρα πλάτος.

Τὰ ἴδια μέτρα εἶχε καὶ ἡ ἀπέναντι τοῦ μήκους πλευρά, καθὼς καὶ ἡ ἀπέναντι τοῦ πλάτους. Εἰς κάθε μέτρο τοῦ μήκους ἐσύραμε μία γραμμὴ ἕως τὴν ἀπέναντι πλευρά, ποὺ συνηντήθη ἀκριβῶς μὲ τὸ σημαδάκι, ποὺ ἐβάλαμε, ὅταν ἐμετρούσαμε. Τὸ ἴδιο ἐκάναμε καὶ ἀπὸ τὴν πλευρὰ τοῦ πλάτους. Ἐσύραμε εὐθεῖες γραμμὲς εἰς τὴν ἀπέναντί της. Εἴδαμε ὅτι ἐσχηματίσθησαν 48 τετραγωνικὰ μέτρα. Εἶναι τετραγωνικά, διότι ἐμετρήσαμε καὶ εἴδαμε, ὅτι κάθε τους πλευρὰ εἶναι 1 μέτρο. Ὁ Σπῦρος τότε εἶπε :

— Τὸ ἴδιο ἔγινε, ὅταν εὑρήκαμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου. Ἐκεῖ ὅμως ἐπολλαπλασιάσαμε τὴν πλευρὰ ἐπὶ τὸν ἑαυτό της, γιατὶ ὅλες οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες. Ἐδῶ, ὅπως βλέπω, πολλαπλασιάζομε τὴ βάσι ἢ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἢ ὕψος.

Ἤτοι : 8 μ. × 6 μ. = 48 μ.

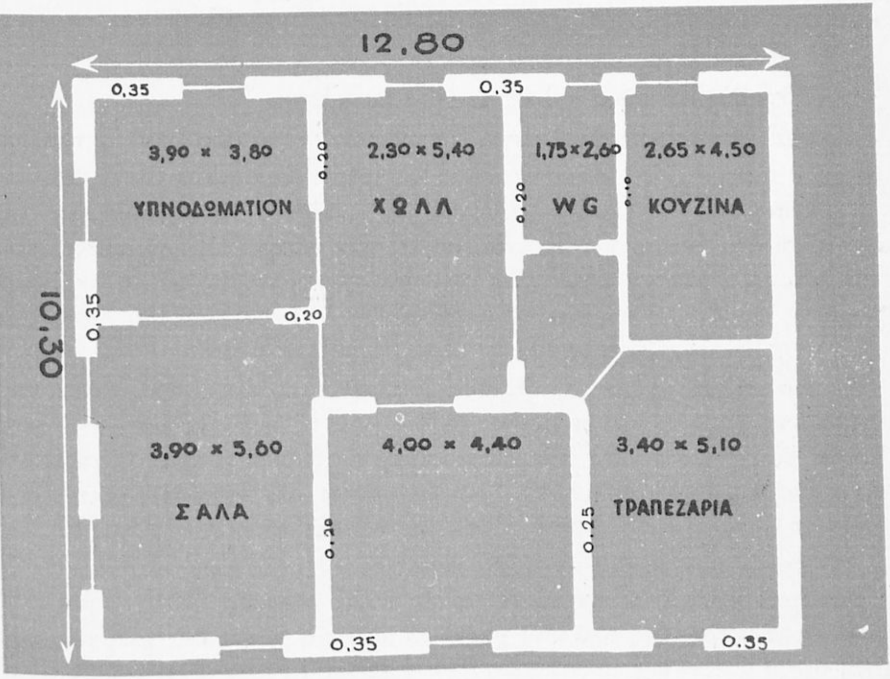
ΚΑΝΩΝ.— Διὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του.

Προβλήματα : 1) Ὁ κύριος Σωκράτης ἐπώλησε ἕνα οἰκόπεδο σχήματος ὀρθογωνίου ἀντὶ 96 δραχμῶν τὸ τετραγ. μέτρο. Τὸ μῆκος τοῦ οἰκοπέδου ἦτο 76 μ. καὶ τὸ πλάτος 16 μ. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ;

2. Τὸ πάτωμα τῆς Βας τάξεως τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 6,75 μ. καὶ πλάτος 4,65 μ. Ἐμετρήσαμε ἕνα ἀπὸ τὰ πλακάκια, μὲ τὰ ὁποῖα εἶναι στρωμένο τὸ πάτωμα, καὶ ἔχει μῆκος 0,35 μ. καὶ πλάτος 0,20 μ. Πόσα πλακάκια ἔχει ὅλο τὸ πάτωμα ;

3. Τὸ γραφεῖο τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 4 μ. καὶ πλάτος 3,25 μ. Εἶναι στρωμένο μὲ σανίδες. Κάθε σανίδα ἔχει μῆκος 6 μ. καὶ πλάτος 0,25 μ. Πόσαι σανίδες ἐχρειάσθησαν ;

4. Ὁ κ. Θεμιστοκλῆς θέλει νὰ βάλη εἰς τὸ κτῆμα του δένδρα ροδακινιᾶς. Τὸ κτῆμα του ἔχει μῆκος 235 μ. καὶ πλάτος 15 μ. Ὁ Γεωπόνος τοῦ εἶπε τὸ κάθε δένδρο νὰ ἀπέχη 5 μ. εἰς τὸ μῆκος καὶ 3 μ. εἰς τὸ πλάτος. Πόσα δένδρα θὰ χωρέση τὸ κτῆμα του ;



4. Κλῖμαξ

α) Τί εἶναι κλῖμαξ

Ὁ διδάσκαλος ἔδειξε εἰς τὰ παιδιὰ μία φωτογραφία τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ ἀεροπλάνο. Οἱ δρόμοι καὶ τὰ οἰκήματα φαίνονται πολὺ μικρά. Ἕνας, ποὺ δὲν ἔχει ἰδῆ εἰς μεγαλυτέρας εἰκόνας τὰ ἀξιοθέατα τῶν Ἀθηνῶν, ἠμπορεῖ μὲ τὴν φωτογραφία νὰ ὁδηγηθῆ, διὰ νὰ γυρίση τὰς Ἀθήνας. Δὲν εἶναι ὅμως εὔκολο νὰ ἔχωμε αὐτὰς τὰς εἰκόνας. Οὔτε καὶ ἕνας ξένος εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγηθῆ ἀσφαλῶς μὲ αὐτάς.

Ὁ Γιῶργος τότε εἶπε :

— Στὰ περίπτερα πωλοῦν σχέδια τῆς Ἀθήνας. Νά, εἶναι κάτι μικροὶ χάρτες. Στοὺς χάρτες αὐτοὺς εἶναι σχεδιασμένη ὅλη ἡ Ἀθήνα. Πολλοὶ γράφουν καὶ τὰ σπουδαιότερα σημεῖα τῆς Ἀθήνας. Τὴν Ὁμόνοια καὶ γύρω της ὅλους τοὺς δρόμους, ποὺ πηγαίνουν στὸ Σύνταγμα, στὴν Ἀκρόπολι, στὴ Βουλὴ κ.λ.π. καὶ σὲ ὅλα τὰ προάστεια τῆς Ἀθήνας.

Ἡ Φλώρα λέγει :

— Τότε θὰ βαδίσωμε καὶ θὰ κοιτᾶμε τὸ χάρτη.

— Μὰ οἱ χάρτες αὐτοὶ εἶναι μικροὶ σὰν τὸ φύλλο τοῦ τετραδίου μας.

— Ὅπως λοιπὸν εἰς τὴν φωτογραφία φαίνονται πολὺ μικρρότερα ἀπ' ὅ,τι εἶναι τὰ οἰκοδομήματα, ἔτσι καὶ εἰς τὸν χάρτη. Οἱ μηχανικοί, ποὺ τὸν ἔκαμαν, γράφουν ἀπὸ κάτω ἀπὸ τὸν χάρτη πόσας φορὰς μικρότερα εἶναι τὰ οἰκοδομήματα καὶ οἱ δρόμοι.

Ὁ Γιῶργος ἐσήκωσε τὸ χέρι.

— Νὰ σᾶς πῶ ἐγὼ κάτι, ποὺ εἶδα ἐδῶ καὶ λίγον καιρό. Ὁ πατέρας μου ἐπῆγε στὸ μηχανικὸ καὶ πῆρε ἕνα σχέδιο, γιὰ νὰ κτίσωμε τὸ σπίτι μας. Ὅταν ἦλθε στὸ σπίτι τὸ ξεδίπλωσε καὶ τὸ ἔδειξε στὴ μητέρα. Τέτοιο ἐπάνω κάτω ἦταν τὸ σχῆμα, τὸ ἔχω ξεσηκώσει στὸ τετράδιό μου. Εἶναι ὅπως τὸ βλέπετε στὴν εἰκόνα τῆς προηγουμένης σελίδος.

Ὁ ἀριθμὸς 12,80 δείχνει πόσα μέτρα εἶναι ἡ πρόσοψις τοῦ σπιτιοῦ. Ὁ ἄλλος ἀριθμὸς 10,30 δείχνει τὰ μέτρα τῆς ἄλλης πλευρᾶς. Ἀλλά, ὅπως βλέπετε, ὅταν μετρήσωμε ἐδῶ στὸ χαρτὶ τὰ μέτρα π.χ. τῆς δευτέρας πλευρᾶς εἶναι 0,103 μ. Καὶ τῆς προσόψεως εἶναι 0,128 μ. Κι ἐγὼ τότε, ποὺ τὸ εἶδα, ἐρώτησα μὲ ἀπορία τὸν πατέρα μου. Τόσο μικρό ! Ποιὸς θὰ πρωτομπῆ !

— Γιὰ κοίταξε, λέγει ὁ πατέρας. Ἀπὸ κάτω λέγει : Κλῖμαξ 1 : 100. Λοιπὸν αὐτὸ θὰ εἰπῆ ὅτι κάθε γραμμή, ποὺ σημειώνεται στὸ σχέδιο, θὰ γίνη 100 φορὰς μεγαλύτερη.

— Ἐπειδὴ ὁ μηχανικὸς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κάμη τὸ σχέδιο σὲ χαρτὶ ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 12,80 μ. καὶ πλάτος 10,30 μ., τὸ ἔκαμε σὲ μικρὸ χαρτί. Ἀλλὰ ἐσημείωσε ἀπὸ κάτω πόσας φορὰς μικρότερο ἔκαμε τὸ σχέδιο στὸ χαρτί. Ἤτοι 100 φορὰς μικρότερο. Ἐμεῖς τώρα θὰ τὸ κάνωμε σύμφωνα μὲ τὴν ὁδηγία του 100 φορὰς μεγαλύτερο. Ἔτσι στὸ χτίσιμο τὰ 0,103 μ. θὰ γίνουν $0{,}103 \times 100 = 10{,}38$ μ. καὶ τὰ $0{,}128 \times 100 = 12{,}80$ μ.

Ὅπως καὶ στὸ σχέδιο τὸ ἀντίθετο, τὰ 10,30 μ. ἔγιναν 0,103 μ. καὶ τὰ 12,80 μ. ἔγιναν 0,128 μ.

Ὥστε κλῖμαξ λέγεται ἡ ὑπὸ σμίκρυνσιν παράστασις εἰς σχέδιον ἑνὸς πράγματος.

β' Διάφοροι κλίμακες.

— Ἐγὼ λέγει ὁ Γιῶργος, θέλω νὰ κάμω τὴν κλίμακα : 1 : 100.

— Ναί, ἀλλὰ θέλει μεγάλο χαρτὶ γιὰ νὰ σχεδιάσης, τοῦ λέγει ὁ Τέλης.

— Νά, στὸν πίνακα νὰ σχεδιάσωμε τὴν αἴθουσά μας.

Τὰ παιδιὰ βάζουν τὸν πίνακα κατὰ τὸ Βορρᾶ ὁριζοντίως κάτω εἰς τὸ πάτωμα. Δεξιὰ εἶναι ἡ Ἀνατολή, κάτω ὁ Νότος καὶ ἀριστερὰ ἡ Δύσις. Ὅλα τὰ ἰχνογραφοῦν 10 φορὲς μικρότερα ἀπὸ ὅ,τι εἶναι. Μετροῦν καλὰ ὅμως καὶ προσεκτικὰ τὸ καθένα. Ἡ βόρειος καὶ ἡ νότιος πλευρὰ εἶναι 7 μέτρα. Εἰς τὸ σχέδιο θὰ γίνη 7 : 10 = 0,7μ.

Ἡ ἀνατολικὴ καὶ ἡ δυτικὴ εἶναι ἀπὸ 9 μέτρα. Εἰς τὸ σχέδιο θὰ γίνουν 9 : 10 = 0,9 μέτρα.

Ἔτσι καὶ ὅλα τὰ ἀντικείμενα τῆς αἰθούσης γίνονται 10 φορὰς μικρότερα.

Παρατήρησις. 1) Εἰς τὴν κλίμακα 1 : 10 τὰ ἀντικείμενα παριστάνονται μεγαλύτερα ἀπὸ ὅτι εἰς τὴν κλίμακα 1 : 100. 2) Εἰς τὴν κλίμακα 1 : 10 διὰ κάθε μέτρο σύρομε γραμμὴ 0,01 μ. Εἰς τὴν κλίμακα 1 : 100 διὰ κάθε μέτρο σύρομε γραμμὴ 0,01 μ. Ἡ κλῖμαξ ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῆ καὶ ἔτσι : 1 : 10 ἢ 1 : 100.

Ὁ Σωτήρης λέγει :

— Ἐγὼ θέλω τὴν κλίμακα 1 :1000. Δηλαδὴ κάθε πρᾶγμα νὰ εἶναι 1.000 φορὲς μικρότερο ἀπ' ὅτι εἶναι στὴν πραγματικότητα.

Τότε ὁ διδάσκαλος ἐπρόσθεσε, ὅτι καὶ 1 : 10.000 καὶ 1 : 100.000 καὶ 1 : 1.000.000 καὶ 1 : 10.000.000 ἀκόμη ἔχομε κλίμακας. Ἀρκεῖ κάθε πρᾶγμα, ποὺ θέλομε νὰ παρασταθῆ, νὰ μετρηθῆ καλά.

Ἀσκήσεις : 1) Ἕνας μηχανικὸς ἔκαμε ἕνα σχέδιο οἰκοδομῆς οἰκίας μὲ κλίμακα 1 :100. Ὅταν μετρήσωμε τὴν ἀνατολικὴ πλευρὰ μὲ τὸ μέτρο μας εὑρίσκομε 0,9 μ. Τὴν νοτία 0,6 μ. Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ διαστάσεις τῆς οἰκοδομῆς ;

2) Νὰ κάμετε τὸ σχέδιο τῆς περιοχῆς τοῦ σχολείου σας σὲ κλίμακα 1 : 100.

3) Νὰ κάμετε ἕνα σχέδιο ἀνεγέρσεως μονωρόφου οἰκίας σὲ οἰκόπεδο, τὸ ὁποῖο ἔχει ἀρκετὸ χῶρο. Ἡ βόρειος πλευρὰ νὰ εἶναι 16 μ. ἡ ἀνατολικὴ 25 μ. μὲ κλίμακα 1 : 1000. Τὰς θύρας καὶ τὰ παράθυρα τοποθετήσετε ὅπου νομίζετε σεῖς καλύτερα.

4) Ἕνα κτῆμα ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἡ μία πλευρά του εἶναι 100 μ. ἡ ἄλλη 200 μ. καὶ ἡ τρίτη 300 μ. Ἰχνογραφήσετό το εἰς τὸ τετράδιό σας μὲ κλίμακα 1 :1000.

γ΄ Χάρται. Γεωγραφικοὶ χάρται.

Εἰς ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου μας δυνάμεθα νὰ κάμωμε τὸν χάρτη τῆς πόλεώς μας ἢ τοῦ χωρίου μας. Αὐτοὶ οἱ χάρται λέγονται καὶ *σχεδιαγραφήματα*. Χρειάζεται ὅμως προσοχὴ εἰς τὴν μέτρησι τῶν δρόμων τῶν πλατειῶν, οἰκοδομημάτων, πρὶν τὰ παραστήσωμε στὴ θέσι των. Ἀλλὰ καὶ προηγουμένως μία γενικὴ καταμέτρησις ὅλης τῆς περιοχῆς, γιὰ νὰ ἰδοῦμε ἂν μᾶς παίρνη τὸ χαρτὶ μὲ τὴ κλίμακα, ποὺ ἔχομε ὑπ᾿ ὄψι μας. Ἄλλως νὰ μικρύνωμε τὴν κλίμακα, γιὰ νὰ μᾶς χωρέση εἰς τὸ χαρτί, ποὺ θέλομε νὰ σχεδιάσωμε τὴν περιοχή.

Ὅταν ὅμως παριστάνωνται μεγάλαι περιοχαί, ὅπως νομοί, χῶραι κ.λ.π. αὐτοὶ οἱ χάρται λέγονται *Γεωγραφικοί*. Οἱ γεωγραφικοὶ χάρται εἶναι μὲ πολὺ μικρὴ κλίμακα, γιὰ νὰ εἶναι εὔχρηστοι ἀφ᾿ ἑνὸς καὶ ἀφ᾿ ἑτέρου νὰ χωρέσουν τὰς τεραστίας περιοχάς.

Εἰς τοὺς γεωγραφικοὺς χάρτας γίνεται χρῆσις τῶν κάτωθι κλιμάκων :

α) 1 : 25.000. Τότε 1 ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματηκότητα εἶναι 250 μέτρα.

β) 1 : 50.000. Τότε 1 ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 500 μέτρα.

γ) 1 : 100.000. Τότε 1 ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 1 χιλιόμετρο.

δ) 1 : 200.000. Τότε 1 ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου εἶναι εἰς τὴ πραγματικότητα 2 χιλιόμετρα.

ε) 1 : 500.000. Τότε εἰς τὴν πραγματικότητα 1 ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου εἶναι 5 χιλιόμετρα.

στ) 1 : 1.000.000. Τότε 1 χιλιοστὸ τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 10 χιλιόμετρα.

ζ) 1 : 5.000.000. Τότε 1 χιλιοστὸ τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 50 χιλιόμετρα.

η) 1 : 10.000.000. Τότε 1 χιλιοστὸ τοῦ μέτρου εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 100 χιλιόμετρα.

᾿Ασκήσεις : 1) Ὁ χάρτης τῆς Ἑλλάδος ποὺ ἔχεις ἐμπρός σου, εἶναι μὲ κλίμακα 1 :5.000.000. Μέτρησε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρό σου τὴν ἀπόστασι ᾿Αθηνῶν - Θεσσαλονίκης. Εὗρε πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν μεταξύ των αἱ δύο πόλεις κατ᾿ εὐθεῖαν γραμμήν.

2. Μέτρησε εἰς τὸν ἴδιο χάρτη τὴν ἀπόστασι ᾿Αθηνῶν - Καλαμῶν. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν ;

3) ᾿Επίσης τὴν ἀπόστασι Καβάλας — Δράμας. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν ; (κατ᾿ εὐθεῖαν γραμμὴν ἀπὸ τὸν ἀέρα).

4) ᾿Επίσης τὴν ἀπόστασι ᾿Αθηνῶν καὶ ἰδιαιτέρας σου πατρίδος καὶ εὗρε τὰ χιλιόμετρα (κατ᾿ εὐθεῖαν γραμμήν).

Ἡ μέτρησις αὐτὴ γίνεται, ἂν ὁ δρόμος εἶναι ὁλόϊσιος, χωρὶς ἐμπόδια. Τοῦτο σπάνια συμβαίνει. Οἱ δρόμοι ἔχουν στοφάς. Ὅταν λοιπὸν θέλωμε νὰ εἴμεθα ἀκριβεῖς εἰς τὴν μέτρησι, κάμνομε ἔτσι : παίρνομε κλωστὴ καὶ μὲ καρφίτσα τὴν καρφώνομε στὴν ἀφετηρία. Ἔπειτα ἀκολουθοῦμε μὲ ὑπομονὴ καὶ προσοχὴ τὴν πορεία τοῦ δρόμου· κάθε τὸσο, ποὺ ἀλλάζει ἡ πορεία τοῦ δρόμου, βάζομε καρφίτσες ἐπάνω εἰς τὴν κλωστή, γιὰ νὰ μὴ χάνη τὸ ζὶκ - ζὰκ τοῦ δρόμου. Ὅταν φθάσωμε εἰς τὸ μέρος, ὅπου θέλομε, σημειώνομε τὴν κλωστή. Τὴν ξεκαρφώνομε ἀπὸ τὸν χάρτη καὶ τὴ μετροῦμε μὲ τὸ μέτρο ἢ τὸ ὑποδεκάμετρό μας. Ἔτσι μὲ ἀκρίβεια πλέον ὑπολογίζομε τὴν ἀπόστασι ἑνὸς τόπου ἀπὸ ἕναν ἄλλον.

5. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

α′ Παραπλεύρου ἐπιφανείας *

Ἐπήραμε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο τοῦ Ἀριστομένη καὶ ἐδιπλώσαμε μὲ ἕνα λευκὸ χαρτόνι τὴν παράπλευρο ἐπιφάνειά του. Ἔπειτα ἐξεδιπλώσαμε τὸ χαρτὶ καὶ εἴδαμε, ὅτι ἐσχηματίσθη ἕνα σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μετροῦμε τὴν περίμετρο τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ εὑρίσκομε ὅτι εἶναι ἴση εἰς τὸ μῆκος καὶ ὕψος μὲ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του. Ἂν λοιπὸν αὐτὴ τὴν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸ ὕψος, θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

ΚΑΝΩΝ.—Ὥστε : Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Παράδειγμα. Ἡ δεξαμενὴ τῆς πόλεώς μας ἔχει μῆκος 36 μέτρων, πλάτος 25 καὶ ὕψος 12 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν ὁ Δήμαρχος θὰ βάλη νὰ ἀσβεστώσουν ;

Σκέψις. Ἡ βάσις τῆς δεξαμενῆς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου. Σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τῆς δεξαμενῆς εἶναι 36 μ. ἡ μία πλευρὰ + 36 μ. ἡ ἀπέναντι + 25 μ. τὸ πλάτος της + 25 μ. ἡ ἀπέναντί της.

Λύσις. Ἤτοι, συντόμως :

$36 + 36 + 25 + 25 = 122$ μ. ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς δεξαμενῆς, 122 μ. $\times 12 = 1464$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς δεξαμενῆς.

2ος τρόπος. Ὁ Γιῶργος λέγει :

— Ἐγὼ θὰ εὕρισκα δύο - δύο χωριστὰ καὶ θὰ τὰ ἕνωνα ἔπειτα τὰ γινόμενα. Νά :

1) $36 \times 2 = 72$ $\quad$ $72 \times 12 = 864$ τ.μ.
2) $25 \times 2 = 50$ $\quad$ $50 \times 12 = 600$ τ.μ.
3) $864 + 600 = 1464$ τ.μ.

Ἡ Ἀλεξάνδρα εἶπε :

* Παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι αἱ 4 κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις πλευραί.

—Εἶναι καλὸ νὰ ηὑξεύρωμε πῶς εὑρίσκεται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, γιατὶ καμμιὰ φορὰ αὐτὴ μᾶς χρειάζεται περισσότερο ἀπὸ τὸ ὅλο ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Προβλήματα : 1) Ἡ κ. Πολυξένη ἔδωσε νὰ ἀσβεστώσουν ἀπὸ ἔξω τὴν οἰκία της μὲ 2 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρο. Ἡ οἰκία ἔχει μῆκος 12 μέτ. πλάτος 9 καὶ ὕψος 6 μ. Πόσο θὰ στοιχίσῃ ;

2) Ὁ κ. Γεράσιμος ἐσκέπασε τοὺς παραπλεύρους τοίχους τοῦ δωματίου του τῆς ὑποδοχῆς μὲ εὐθηνοὺς τάπητας. Τὸ μῆκος τοῦ δωματίου ἦτο 4,25 μ. τὸ πλάτος 3,8 καὶ τὸ ὕψος 3,75 μ. Πόσα τ.μ. ἦσαν οἱ τάπητες ;

β΄ Ὅλης τῆς ἐπιφανείας.

Ὁ Θανάσης λέγει :

—Καλὸ θὰ εἶναι νὰ μάθωμε γιὰ ὅλο τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ὄχι μόνον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

Ὁ Σωτήρης τότε εἶπε :

—Θὰ προσθέσωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων.

Ἀφοῦ τὸ σχῆμα τῶν βάσεων εἶναι ὀρθογώνιο, εὑρίσκομε πρῶτον τῆς μιᾶς βάσεως καὶ ἔπειτα τὸ διπλασιάζομε.

Σημ. Ἐπειδὴ ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ἔχει φυσικὰ μῆκος καὶ πλάτος.

Παράδειγμα. Ποῖο εἶναι ὁλόκληρο τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κιβωτίου, ποὺ ἔχει μῆκος 3 μ. πλάτος 2 μ. καὶ ὕψος 1,5 μ ;

1) Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως 3+ 3+ 2+ 2= 10 μ.
2) Ἐμβαδὸν παραπλευρ. ἐπιφ. 10× 1,5= 15 τ.μ.
3) Ἐμβαδὸν βάσεως 3× 2= 6 τ.μ. (× 2 διὰ τὰς δύο)
   6× 2= 12 τ.μ.
4) Προσθέτομε τὰ δύο ἐμβαδὰ τῶν βάσεων καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας : 15+ 12= 27 τ. μέτρα

2ος τρόπος, (ὅπως εἶπε ὁ Γιῶργος).
1) 3×2 = 6 τ.μ. 6 ×2=12 τ.μ. ἐμβ. τῶν 2 βάσεων
2) 2×1,5= 3 τ.μ. 3 ×2= 6 τ.μ. ἐμβ. 2 ἐπέναντι ἑδρῶν.
3) 3×1,5= 4,5 τ.μ. 4,5×2= 9 τ.μ. ἐμβ. τῶν δύο ἄλων ἀπένατι ἑδρῶν.
27 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἀσκήσεις : 1) Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ; Ἀναφέρετε καὶ τοὺς δυὸ τρόπους.

2) Παρατηρήσετε τὴν κασετίνα σας. Τὸ ἀνάπτυγμα ἐπίσης τοῦ ὀρθ. παραλληλεπιπέδου τοῦ σχήματος τοῦ Γιώργου καθὼς καὶ ἄλλα παραλληλεπίπεδα καὶ λέγετε :

α) Διατὶ αἱ βάσεις ἔχουν μῆκος καὶ πλάτος μόνον ; β) Διατὶ αἱ ὑπ' ἀριθ. 5 καὶ 6 ἐπιφάνειαι τοῦ παραλληλεπιπέδου ἔχουν διαστάσεις τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ; καὶ γ) Διατὶ αἱ ἐπιφάνειαι 1 καὶ 3 ἔχουν διαστάσεις τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ; Παρατηρήσετε καὶ τὸ σχῆμα τοῦ κιβωτίου, ποὺ εἴπαμε εἰς τὸ πρόβλημα.

Προβλήματα : 1) Ἡ αἴθουσα τῆς Α' τάξεως τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 7 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς αἰθούσης ;

2) Ὁ κ. Μανώλης, ὁ κιβωτοποιός, ἠθέλησε νὰ καλύψῃ ἐξωτερικὰ 10 κιβώτια μὲ δέρμα. Τὸ κάθε κιβώτιο ἔχει μῆκος 2,5 μ., πλάτος 1,7 μ. καὶ ὕψος 1,6 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα δέρμα θὰ χρειασθῇ ;

3) Εὕρετε τὰς ἐπιφανείας τῆς κασετίνας σας.

4) Κάμετε καὶ σεῖς δυὸ ἰδικά σας προβλήματα.

6. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Παράδειγμα. Ἡ ἀποθήκη τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 4 μ., πλάτος 3 καὶ ὕψος 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

Ἡ Σόνια λέγει :

—Χωρίζομε τὴ βάσι της εἰς 4 μέρη (μέτρα) καὶ φέρομε εὐθείας εἰς τὴν ἀπέναντί της πλευρά. Ἔπειτα χωρίζομε τὸ πλάτος εἰς 3 μέρη (μέτρα) καὶ φέρομε εὐθείας εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρά. Βλέπομε ὅτι ἐσχηματίσθησαν στὴ βάσι 12 τετράγωνα. Τὰ τετράγωνα αὐτὰ ἰσοῦνται τὸ καθένα μὲ ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο, διότι κάθε του πλευρὰ εἶναι ἕνα μέτρο. Τὰ ἴδια τετράγωνα θὰ εἶναι καὶ στὴ ἄλλη βάσι. Τώρα σὲ κάθε μέτρο τοῦ ὕψους τῆς ἀποθήκης θὰ ἔχωμε 12 κύβους, ποὺ κάθε τους ἕδρα εἶναι ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο καὶ ἡ κάθε ἀκμὴ 1 μέτρο. Ἐπειδὴ ἐδῶ ἔχομε 5 μέτρα ὕψος, θὰ ἔχωμε 5 σειρὰς τὴ μία ἐπάνω στὴν ἄλλη, ἀπὸ 12 κύβους. Ἤτοι $12 \times 5 = 60$ κυβ. μέτρα. Ἔτσι θὰ γεμίση ὅλος ὁ χῶρος τῆς ἀποθήκης ἀπὸ κύβους ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου

Ὁ Ἀλκιβιάδης λέγει :

—Τὸ ἴδιο ἐκάναμε καὶ μὲ τὸν κυβισμὸ τῶν κυβικῶν σωμάτων. Μόνον ἐκεῖ τὸ μῆκος, πλάτος, ὕψος εἶναι ἴσα. Ἐδῶ εἶναι διάφορα, ἀλλὰ πάλι πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ εὑρίσκομε τὸν ὄγκο τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων.

ΚΑΝΩΝ : (Κάμετε μόνοι σας τὸν κανόνα).

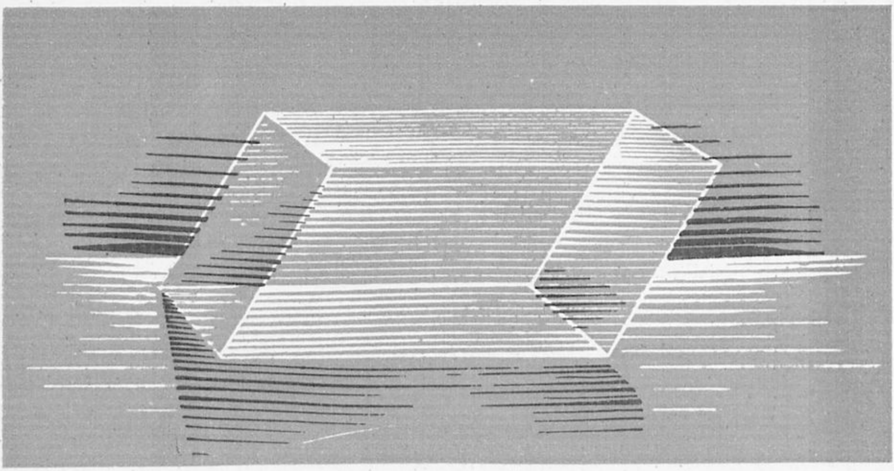
Προβλήματα : 1) Εἰς τὸν κ. Ἀθανασούλην ἔφεραν πέτρα διὰ νὰ κτίση τὸ σπίτι του. Τὴν πέτρα ἐτακτοποίησαν οἱ ἐργάται εἰς τὸ οἰκόπεδο. Ὁ σωρὸς τῆς πέτρας εἶχε μῆκος 36 μ, πλάτος 29 καὶ ὕψος 1,8 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ; Πόσο στοιχίζει ὅλη ἡ πέτρα ἂν τὸ κυβικὸ ἠγοράσθη πρὸς 65 δραχμάς ;

2) Ἕνα κιβώτιο ἔχει μῆκος 0,8 μ., πλάτος 0,7 καὶ ὕψος 0,9 μ. Θέλομε νὰ τὸ γεμίσωμε μὲ κυβικὰ κουτιά, ποὺ τοῦ καθενὸς ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,08μ. Πόσα κουτιὰ θὰ χωρέση τὸ κιβώτιο ;

3) Δεξαμενὴ μήκους 13μ. πλάτους 10 μ. καὶ ὕψους 8 μέτρων πόσα κιλὰ πετρελαίου χωρεῖ ;

4) Εἰς κιβώτιο παραλληλεπίπεδο μήκους 2,5 μ., πλάτους 1,8 καὶ ὕψους 1,5 μ. ἔχομε ἔλαιον. Πόσα κιλὰ (χιλιόγραμμα) ἐλαίου ὑπάρχουν ;

5) Μάρμαρο μήκους 4 μ., πλάτους 3,5 μ. καὶ ὕψους 2,7, μ. Πόσα κιλὰ ζυγίζει ;



Γ΄. ΠΛΑΓΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

1. Γενικὴ αὐτοῦ ἐπισκόπησις

α΄ Ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ἕδραι.

Ὁ Κώστας ἔφερε ἀπὸ τὸ γραφεῖο τὸ κιβώτιο μὲ τὰ στερεὰ σώματα. Ἐβγάλαμε ἕνα σῶμα, ποὺ ὁμοιάζει πολὺ μὲ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

—Αὐτὸ ὁμοιάζει μὲ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, λέγει ἡ Κατίνα. Ἔχει ὅμως λίγο πλαγιαστὲς τὶς ἕδρες του. Κατὰ τὰ ἄλλα ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες (ἕδρες)

Ἡ ἕδρα ποὺ στηρίζεται, ὅπως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, λέγεται βάσις ὡς καὶ ἡ ἀπέναντί της. Οἱ ἄλλες παράπλευρες.

β΄ Θέσις ἑδρῶν καὶ ἀκμῶν αὐτοῦ

Ἡ Ἁγνὴ παρατηρεῖ ὅτι αἱ ἀπέναντι ἕδραι καὶ αἱ ἀκμαὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (ὅπως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου). Ὅμως αἱ ἕδραι καὶ αἱ ἀκμαὶ δὲν εἶναι κάθετοι (ὅπως εἰς τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ τὸν κύβο), ἀλλὰ πλάγιαι.

γ′ Γωνίαι ἀκμαί, κορυφαὶ αὐτοῦ

— Ἐγὼ παρατηρῶ τώρα, λέγει ὁ Γιάννης, ὅτι αὐτὸ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο δὲν ἔχει καθόλου ὀρθὲς γωνίες. Νά, σὲ κάθε του ἕδρα βλέπομε 2 ἀμβλεῖες καὶ 2 ὀξεῖες γωνίες. Τοῦτο φυσικὰ γίνεται, γιατὶ οἱ ἀκμές του δὲν εἶναι κάθετες μεταξύ τους. Ἔτσι τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 12 ἀμβλεῖες καὶ 12 ὀξεῖες γωνίες. Ὅλες οἱ ἀμβλεῖες εἶναι ἴσες μεταξύ τους καθὼς καὶ οἱ ὀξεῖες. Τὶς μετροῦμε μὲ τὴ γωνία ἢ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο (ποὺ θὰ μάθωμε), καὶ εὑρίσκομε ὅτι ὄντως ἔτσι εἶναι.

Ἀκμαί. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 12, ὅπως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ κύβου, καὶ αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Κορυφαί. Ἔχει 8, ὅπως ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Τὶ λοιπὸν διαφέρει τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίδο ;

Βγάλετε τώρα τὸν κανόνα, τὶ λέγεται πλάγιο παραλληλεπίπεδο καὶ γράψετέ τον. Κάμετε ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ ὅ,τι θέλετε.

δ′ Κατασκευὴ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ὁ Γιάννης ἔκαμε τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδό του ἀπὸ χαρτόνι.

— Ἰχνογράφησα τὸ ἀνάπτυγμά του. Κάθε του ἕδρα εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο, πλαγιαστὸ ὅμως. Οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Βλέπετε, οἱ ἀκμὲς δὲν εἶναι κάθετες, ἀλλὰ πλαγιαστές, γι᾽ αὐτὸ κάνουν σὲ κάθε ἕδρα δύο ὀξεῖες καὶ δύο ἀμβλεῖες γωνίες. Κατὰ τὰ ἄλλα, ἔκαμα ὅ,τι καὶ στὸν κύβο καὶ στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

2. Σχῆμα ἑδρῶν πλαγίου παραλληλεπιπέδου

α′ Πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Τὴν ἄλλη ἡμέρα τὰ παιδιὰ εἶχαν ὅλα τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδό τους. Ἔθεσαν τὴ βάσι του κάτω ἀπὸ ἕνα λευκὸ χαρτὶ καὶ ἔσυραν τεθλασμένη γραμμὴ γύρω της, ἀκολουθοῦντες τὰς ἀκμάς της. Ὅταν ἐσήκωσαν τὸ στερεὸ σῶμα, εἶδαν ὅτι ἐσχηματίσθη τὸ σχῆμα. Ὁ Τέλης καὶ ἡ Βάσω, ἀντὶ τῆς βάσεως, ἔθεσαν μία ἀπὸ τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας. Καὶ ἀπὸ αὐτὰς τέτοιο σχῆμα ἐσχηματίσθη.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *πλάγιο παραλληλόγραμμο.*

Ἡ Ἑλένη τότε λέγει :

—Μοιάζει μὲ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, γιατὶ καὶ αὐτὸ ἔχει 4 πλευρές. Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς (γραμμὲς) εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Ἔχει 4 γωνίες. Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο, γιατὶ οἱ πλευρὲς δὲν εἶναι κάθετες καὶ οἱ γωνίες δὲν εἶναι ὀρθὲς ἀλλὰ οἱ δύο εἶναι ὀξεῖες καὶ οἱ ἄλλες δύο ἀμβλεῖες. Μετροῦμε μὲ τὴν γωνία καὶ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὶς ὀξεῖες καὶ εἶναι μεταξύ τους ἴσες. Ἐπίσης καὶ οἱ ἀμβλεῖες εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

ΚΑΝΩΝ.— Πλάγιον παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ σχῆμα, ποὺ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, καὶ τὰς δύο γωνίας ὀξείας καὶ ἴσας καὶ τὰς ἄλλας δύο ἀμβλείας καὶ ἴσας.

β΄ Ἡ περίμετρος τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου.

Εὑρίσκεται ὅπως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Ἡ Σωτηρία λέγει, ὅτι πρέπει νὰ ἠξεύρωμε, ὅπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιο, τὸ μῆκος τῶν δύο γειτονικῶν πλευρῶν του.

Ὁ Γιῶργος εἶπε τότε :

— Ἐνῶ στὸ τετράγωνο, μία ἂν ἠξεύρωμε, μᾶς φθάνει.

Παράδειγμα. Αἱ γειτονικαὶ πλευραὶ τοῦ οἰκοπέδου τῆς θείας Νίτσας εἶναι ἡ μία 38 καὶ ἡ ἄλλη 27 μ. Ποιὰ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ οἰκοπέδου ;

Ὁ Σωτήρης τὸ ἔλυσε σύντομα ἔτσι :

$38 + 27 = 65$
$65 \times 2 = 130$ μ. περίμετρος.

— Πρῶτα εὑρῆκα, τὴν ἡμιπερίμετρο 65 καὶ τὴν ἐδιπλασίασα.

Ὁ Γιάννης ἐπρόσθεσε ὅλας τὰς πλευράς.

$38 + 38 + 27 + 27 + = 130$ μ. περίμετρος.

Προβλήματα : 1) Αἱ γειτονικαὶ πλευραὶ ἑνὸς μεγάλου κτήματος, σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου, εἶναι ἡ μία 1365 μ. καὶ ἡ ἄλλη 965 μ. Ποία εἶναι ἡ ἡμιπερίπετρος καὶ ποία ἡ περίμετρός του ;

2) Ἰχνογραφήσετε ἕνα παραλληλόγραμμο, ποὺ αἱ γειτονικαὶ πλευραί του νὰ εἶναι ἡ μία 0,33 μ. καὶ ἡ ἄλλη 0,08 μ. α) Εὕρετε τὴν περίμετρό του. β) Μετρήσετε μὲ τὸν γνώμονά σας τὰς ἀμβλείας καὶ ὀξείας του γωνίας.

3. Ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλογράμμου

Εἰς τὸ παραλληλόγραμμο, ποὺ ἐκάματε, φέρετε μία κάθετο ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάσι. Τὸ τρίγωνο ποὺ ἐσχηματίσθη, κόψετό το καὶ κολλήσετέ το εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρά.

Ὁ Γιῶργος τότε λέγει :

— Ἔγινε τώρα ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάγιο.

Ὥστε γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομε τὴ βάσι ἐπὶ τὸ ὕψος.

Βάσις εἶναι ἡ μία ἀπὸ τὰς πλευράς του.

Ὕψος εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντί της παράλληλη πλευρά.

Παράδειγμα. Ὁ κῆπος τοῦ Σωτήρη ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου. Ἡ βάσις του εἶναι 89 μ. Τὸ ὕψος του 20 μ. Ποῖο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

Ὁ Τέλης εἶπε νὰ ἐργασθοῦμε ὅπως εἰς τὸ τετράγωνο. Νὰ κάμωμε εἰς τὸ χαρτί μας 100 φορὰς μικρότερο τὸν κῆπο. Ἀφοῦ τὰ μέτρα θὰ εἶναι 100 φορὰς μικρότερα, θὰ σύρωμε γραμμὰς εἰς τὰς ἀπέναντι πλευράς. Ὅ,τι εὕρωμε θὰ τὸ μεγαλώσωμε 100 φορὰς γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ πραγματικό. Ὁ Σωκράτης, ὅμως εἶπε.

— Αὐτὰ τὰ ἐκάμαμε μὲ ὁλόκληρα τὰ μέτρα εἰς τὴν τάξι. Τώρα ἠξεύρωμε πιά. Ὅ,τι θὰ εὕρωμε μὲ τόση δουλειά, ποὺ θὰ κάμωμε, τὸ εὑρίσκομε ἀμέσως μὲ μία μόνο πρᾶξι.

Λύσις. $89 \times 20 = 1780$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου.

Προβλήματα : 1) Ἡ βάσις ἑνὸς πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι 3,25 μ. τὸ δὲ ὕψος, 2,1 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2) Ὁ κ. Στέφανος ἀγόρασε ἕνα οἰκόπεδο ἀντὶ 12.000 δραχ. Τὸ οἰκόπεδο εἶχε σχῆμα πλαγίου παραλληλογράμμου μὲ βάσι 54 μ. καὶ ὕψος 25 μ. Πόσο στοιχίζει τὸ τετραγωνικὸ μέτρο; Πόσο ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς;

3) Κάμετε καὶ σεῖς δύο προβλήματα.

4. Ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ὁ Ἀλκιβιάδης ἐνεθυμήθη τὸν τρόπο, ποὺ ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

—Βρίσκομε, λέγει, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ διπλασιάζομε. Ἔπειτα τῆς μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καθὼς καὶ τῆς γειτονικῆς καὶ τὰ διπλασιάζομε. Τέλος προσθέτομε τὰ τρία γινόμενα.

— Ἔτσι εἶναι, λέγει ὁ διδάσκαλος, ἀφοῦ κάθε του ἕδρα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντί της. Θὰ πρέπει ὅμως κάθε ἕδρας νὰ ἠξεύρωμε τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος. Εἰς τὸ ὀρθογώνιο ἡ μία πλευρὰ εἶναι τὸ μῆκος καὶ ἡ ἄλλη, ἡ κάθετος, τὸ πλάτος (ὕψος). Εἰς τὸ παραλληλόγραμμο ὅμως, τὸ ὕψος του εἶναι ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴ εἰς τὴν βάσι. Δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἡ κεκλιμένη (πλαγιαστὴ) γειτονικὴ πλευρά της. Ἐπειδὴ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου αἱ ἕδραι εἶναι ὅλαι πλάγια παραλληλόγραμμα, πρέπει νὰ ἠξεύρωμε τοὐλάχιστον τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος της. Καθὼς καὶ τῆς γειτονικῆς της ἕδρας τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος της. Τῆς ἄλλης τὸ μῆκος θὰ εἶναι ὅσο τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος ὅσο τῆς γειτονικῆς.

Τὰ παιδιὰ παρετήρησαν καλὰ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο καὶ διεπίστωσαν ὅτι ἔτσι εἶναι.

Παράδειγμα. Τὸ μῆκος τῆς βάσεως πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 15 μέτρα καὶ τὸ ὕψος της 10 μέτρα. Τῆς γειτονικῆς ἕδρας τὸ μῆκος εἶναι 8 μ. καὶ τὸ ὕψος 5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Λύσις 1ος τρόπος:

1) Ἐμβαδὸν βάσεων $= 15 \times 10 = 150$ τ.μ. $150 \times 2 = 300$ τ.μ.
2) Ἐμβαδὸν γειτονικῶν ἑδρῶν $8 \times 5 = 40$ τ.μ. $40 \times 2 = 80$ τ.μ.
3) Ἐμβαδὸν τῶν ἄλλων γειτον. πλευρῶν

$15 \times 5 = 75$ τ.μ. $75 \times 2 = 150$ τ.μ.

Σύνολον 530 τ.μ.

εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

2ος τρόπος.

Ὁ Σωτήρης, ἔλυσε τὸ πρόβλημα, ἀφοῦ ηὗρε, ὅπως εἰς τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Καὶ ἔπειτα ἐπρόσθεσε τὰ δύο γινόμενα.

1) Ἐμβαδὸν βάσεων 15× 10= 150 τ.μ. 150× 2= 300 τ.μ.

2) Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας

8+ 15+ 8+ 15= 46 μ. 46× 5 = 230 τ.μ.

530 τ.μ.

εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρησις. 1) Ὁ Βαγγέλης λέγει :

— Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν περίμετρο τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

—Ἐδῶ ὅμως, ἐὰν ἔχωμε τοποθετημένο, κατὰ τὴν μέτρησι, τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο μὲ βάσι τὴ μεγαλύτερη σὲ μῆκος καὶ ὕψος ἕδρα, οἱ ἄλλες θὰ ἔχουν τὴν ἴδια σχέσι μὲ τὴ βάσι ὅπως τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Γιατὶ τὸ ὕψος τῶν ἄλλων διαφέρει. Ἐπειδὴ δὲν τυχαίνει, ὅπως στὸ ὀρθογώνιο, νὰ εἶναι γιὰ τὸ ὕψος τῆς βάσεως τὸ πλάτος τῆς πλευρᾶς, ἀλλὰ ἡ κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴ ἕως τὴ βάσι.

—Ἔτσι ἂν εἶναι τοποθετημένο τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο στὴ μεγαλύτερη κατὰ τὸ μῆκος καὶ ὕψος ἕδρα του, πρέπει νὰ γνωρίζωμε καὶ τῆς γειτονικῆς ἕδρας τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος. Ἐὰν ὅμως εἶναι τοποθετημένο σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς ἄλλες, τότε πρέπει νὰ γνωρίζωμε κατὰ σειρὰ καὶ τῶν δύο ἄλλων ἑδρῶν τὸ μῆκος καὶ τὸ ὕψος.

ΚΑΝΩΝ. — Διὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ διπλασιάζομε. Ἔπειτα (ἐὰν τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο εἶναι τοποθετημένο μὲ βάσι τὴ μέγαλυτέρα εἰς μῆκος καὶ ὕψος ἕδρα του), τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ προσθέτομε τὰ δύο ἐμβαδά. Ἢ εὑρίσκομε κατὰ σειρὰν ἀπὸ τὴν βάσι τὰς διαστάσεις (μῆκος καὶ ὕψος) τῶν τριῶν ἑδρῶν. Ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς ἕδρας καὶ τὸ διπλασιάζομε. Τέλος προσθέτομε τὰ τρία ἐμβαδά.

Προβλήματα. 1) Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἡ βάσις εἶναι 65 μ. καὶ τὸ ὕψος της 30 μ. Τῆς γειτονικῆς ἕδρας τὸ μῆκος εἶναι 35 μ. καὶ τὸ ὕψος 16 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

2) Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἡ βάσις εἶναι 80 μ. καὶ τὸ ὕψος

της 55 μ. Ἡ γειτονική της ἕδρα ἔχει μῆκος 120 μ. καὶ ὕψος 55 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

5. Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ὅπως εὑρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔτσι εὑρίσκομε καὶ τὸν ὄγκο τοῦ πλαγίου.

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο τοῦ Γιάννη τὸ ἐγεμίσαμε νερό. Ἔπειτα τὸ ἀδειάσαμε εἰς τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδό του, ποὺ εἶχε διαστάσεις ἴδιες μὲ τὸ πρῶτο. Εἴδαμε ὅτι οὔτε σταγόνα ὀλιγώτερο ἢ περισσότερο ἐχωροῦσε τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Παράδειγμα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἡ βάσις του εἶναι 8 μ. καὶ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴ βάσι ἕως τὴν ἄλλη βάσι εἶναι 12 μ. καὶ τὸ ὕψος τῆς βάσεως 12 μ. ;

Λύσις :

$8 \times 12 = 96$ τ.μ. ἐμβ. βάσεως. Ὄγκος $= 96 \times 12 = 1152$ κ.μ.

Σημείωσις. Ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴ μία βάσι ἕως τὴν ἄλλη.

ΚΑΝΩΝ. — Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ὕψος τῆς βάσεως συμπίπτει ἐδῶ μὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου.

2) Ὡς βάσις δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε ἕδρα. Ἀπὸ τὴ θέσι αὐτὴ θὰ κάμωμε τὰς μετρήσεις τῶν ἀποστάσεων.

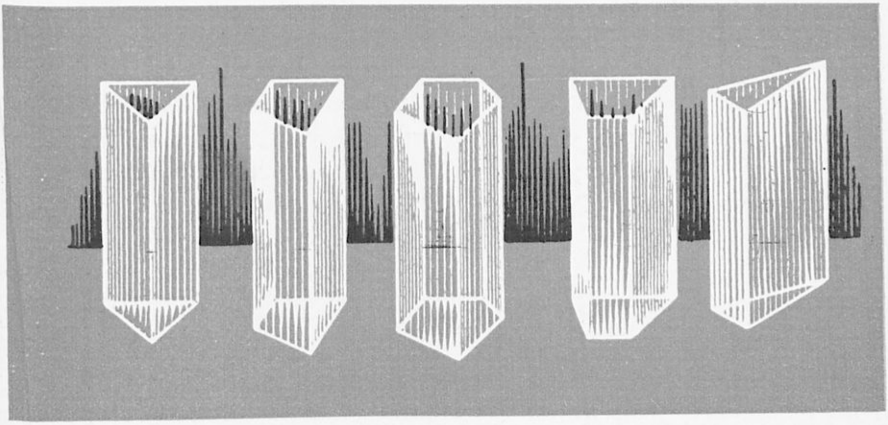
3) Ὁ Γιῶργος λέγει : — Νὰ χωρίσωμε τὴ βάσι καὶ τὸ ὕψος καὶ νὰ γεμίσωμε τὸν χῶρο μὲ κλωστές, ὅπως καὶ στὰ ἄλλα δύο σώματα.

Ὁ Σωτήρης λέγει, ὅτι περιττεύει ἡ δουλειὰ αὐτή, ἀφοῦ εἶναι γνωστό, ὅτι θὰ σχηματισθοῦν κύβοι μὲ ἀπανωτὲς σειρὲς ὅσες μᾶς λέγει τὸ ὕψος.

Προβλήματα. 1) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κιβωτίου σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἡ βάσις του ἔχει μῆκος 0,75 μ. καὶ πλάτος 0,5 μ., τὸ δὲ ὕψος του εἶναι 1,35 μ.

2) Πόσα χιλιόγραμμα θαλασσίου ὕδατος χωρεῖ τεπόζιτο σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει μῆκος βάσεως 6 μ., πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 8 μ.

3) Πόσο ζυγίζει ὄγκος χρυσοῦ, σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει μῆκος βάσεως 0,15 μ, πλάτος 0,12 μ. καὶ ὕψος 0,35 μ.



Δ'. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

α' Ὀρθά, πλάγια.

—Ἄνοιξε, Νῖκο, τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας τοῦ κύβου σου, λέγει ὁ διδάσκαλος.

Παρετηρήσαμε ὅλοι, ὅτι αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι τοῦ κύβου ἔγιναν ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Ὁ Σωτήρης ἀνοίγει τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου του καὶ βλέπομε, ὅτι πάλι ἔγιναν ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

Ἡ Ἀλίκη ἀναπτύσσει τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου της καὶ γίνεται πλάγιο παραλληλόγραμμο.

Αὐτὰ τὰ στερεὰ σώματα, ποὺ ἔχουν τὰς βάσεις ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι των ἀναπτύσσονται εἰς παραλληλόγραμμα λέγονται *πρίσματα*.

Ὅσα ἔχουν τὰς παραπλεύρους ἕδρας καθέτους ἐπὶ τὰς βάσεις των (κύβος, ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο), λέγονται *ὀρθὰ πρίσματα*.

Ὅσων αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τοποθετημέναι πλαγίως ἐπὶ τὰς βάσεις (πλάγιο παραλληλεπίπεδο), λέγονται *πλάγια πρίσματα*.

β' Τριγωνικὰ πρίσματα.

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλε ἀπὸ τὸ κιβώτιο μὲ τὰ στερεὰ σώματα ἕνα πρῖσμα ἄλλου σχμήματος. Ἀμέσως τὰ παιδιὰ ἐνεθυμήθησαν, ὅτι τέτοιο σχῆμα εἶδαν εἰς τοὺς ὑαλίνους πολυελαίους τῶν ἐκκλησιῶν.

Ὁ Παντελῆς μᾶς λέγει, ὅτι αὐτὸ τὸ πρῖσμα ἔχει πέντε ἐπίπεδα (ἕδρας). Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος καὶ ἡ ἀπέναντί της ἕδρα εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ ἔχουν σχῆμα τριγώνου. Αἱ ἄλλαι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια καὶ εἶναι αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος. Ὑπάρχουν πρίσματα μὲ 5 ἕδρας, 6 ἕδρας κ.τ.λ.

Ὁ Σωτήρης λέγει : —Αὐτὸ τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθό, γιατὶ οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι κάθετες ἐπὶ τὶς βάσεις.

Ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴ μία βάσι ὡς τὴν ἄλλη.

ΚΑΝΩΝ. Τὶ λέγεται τριγωνικὸ πρῖσμα ; Εὕρετε μόνοι σας τὸν κανόνα.

Ἐρωτήσεις : 1) Παρατηρήσετε : Πόσας ἕδρας, ἀκμάς, κορυφὰς καὶ γωνίας ἔχει τὸ πρῖσμα ; 2) Ἀπὸ ποῦ ἔλαβε τὸ ὄνομα ὅλο τὸ πρῖσμα (δηλαδὴ γιατὶ τὸ εἴπαμε τριγωνικό ;)

γ΄ Τρίγωνο

Κάμετε ὅλοι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σύρετε μία διαγώνιο.

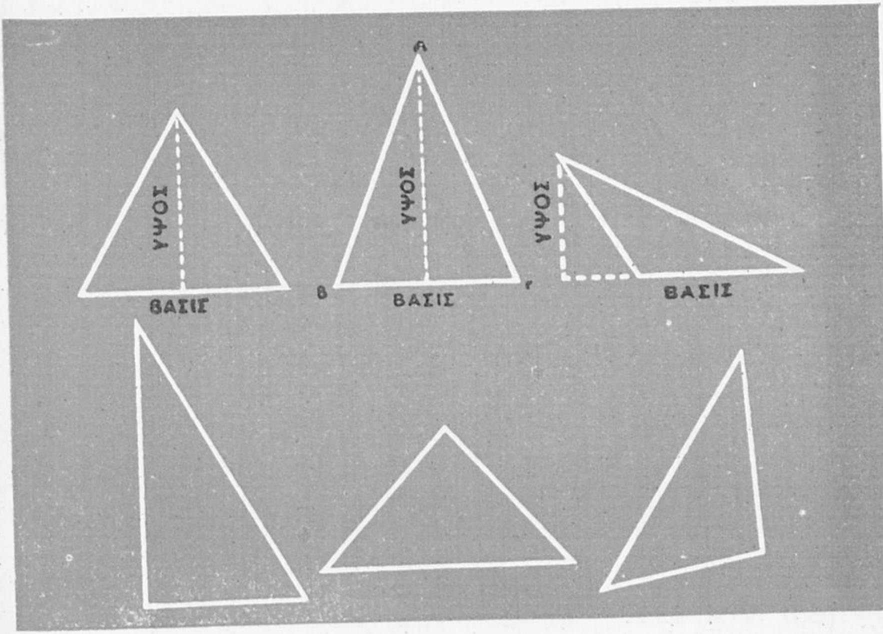
— Παρατηροῦμε, λέγει ὁ Εὐστάθιος, ὅτι τὸ ὀρθογώνιο ἐχωρίσθη εἰς δύο νέα ἴσα σχήματα. Ὁμοιάζουν μὲ τὸ σχῆμα τῶν βάσεων τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ θὰ λέγωνται καὶ αὐτὰ τρίγωνα.

Παρατηρήσεις : Ὁ Σωτήρης ἔκοψε ὅπως εἶχε χωρίσει τὸ παραλληλόγραμμο εἰς τὴν μέση. Μετρᾶ χωριστὰ τὰ δύο τρίγωνα, ποὺ ἔγιναν, καὶ τὰ ηὗρε μεταξύ τους ἴσα. Ἔχουν ἴσας πλευρὰς καὶ ἴσας γωνίας. Ἔμεινε ἀπὸ μία μόνον ὀρθὴ γωνία εἰς τὸ καθένα. Αἱ δύο ἄλλαι ἐχωρίσθησαν ἀπὸ τὴ διαγώνιο εἰς τὸ μέσον καὶ ἔγιναν ὀξεῖαι, ἀλλὰ πάλιν ἴσαι.

Ὁ Γιῶργος λέγει : Ὁποιοδήποτε παραλληλόγραμμο καὶ ἂν κόψωμε εἰς τὴν μέση, θὰ μοιραστῇ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Καὶ ἔκοψε τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμό του.

ΚΑΝΩΝ.— Κάθε τρίγωνο εἶναι τὸ ἥμισυ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖο ἔχει τὴν αὐτὴ βάσι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἔτσι βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι μία ἀπὸ τὰς 3 πλευράς του. Ὕψος ἡ εὐθεῖα, ποὺ φέρομε ἀπὸ τὴν κορυφὴ εἰς τὴν βάσι του.

Ὁ Σωτήρης λέγει : Τὸ τρίγωνο ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας.



δ' Ὀνομασία τῶν τριγώνων ἀπὸ τὰς πλευράς των

1) *Ἰσόπλευρον* ὀνομάζεται τὸ τρίγωνο, ποὺ ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας.

2) *Ἰσοσκελές*, ὅταν ἔχη δύο πλευρὰς ἴσας.

3) *Σκαληνόν*, ὅταν ἔχη καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους.

Σημ. Περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

ε' Ὀνομασία τῶν τριγώνων ἀπὸ τὰς γωνίας των

1) *Ὀρθογώνιον* ὀνομάζομε τὸ τρίγωνο, ποὺ ἔχει μία γωνία του ὀρθή.

2) *Ὀξυγώνιον*, ἐκεῖνο ποὺ ἔχει καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας.

3) *Ἀμβλυγώνιον*, ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μία ἀμβλεῖα.

Ἀσκήσεις: 1) Τὶ ἐπιφάνεια εἶναι τὸ τρίγωνο ; Ἀπὸ πόσας γραμμὰς περικλείεται ; Πῶς λέγομε τὰς γραμμάς του ;

2) Ἰχνογραφήσετε ἀπὸ ἕνα ἰσόπλευρο, ἰσοσκελὲς καὶ σκαληνὸν τρίγωνο. Ἐπίσης ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο, ὀξυγώνιο καὶ ἀμβλυγώνιο.

3) Τὸ τριγωνικὸ οἰκόπεδο τοῦ κ. Στάθη ἔχει μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του 52 μ. καὶ τὴν ἄλλη 23 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του; Καὶ πῶς λέγεται τὸ τρίγωνο αὐτό;

4) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγωνικοῦ κήπου εἶναι 32 μ. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθοῦμε γιὰ νὰ τὸν περιφράξωμε μὲ πέντε σειρές;

5) Κάμετε μόνοι σας ἄσκησι γιά τὴν ἄλλη περίπτωσι τοῦ τριγώνου.

στ΄ Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου

Παράδειγμα. Ἡ βάσις τῆς τριγωνικῆς πρασιᾶς, ποὺ ἔχει ὁ κῆπος μας μὲ πανσέδες, εἶναι 4 μ. Τὸ ὕψος 2,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

Ὁ Ἀντώνης ἔλυσε ἀμέσως τὸ πρόβλημα.

$4 \times 2{,}5 = 10$

$10 : 2 = 5$ τ. μ.

Ἀφοῦ, λέγει, ἐμάθαμε, ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ ἕνα παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴ βάσι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τότε: Ἡ βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι καὶ τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι καὶ τοῦ παραλληλογράμμου. Εὑρίσκω λοιπὸν μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ μισό, διαιρῶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου διὰ 2.

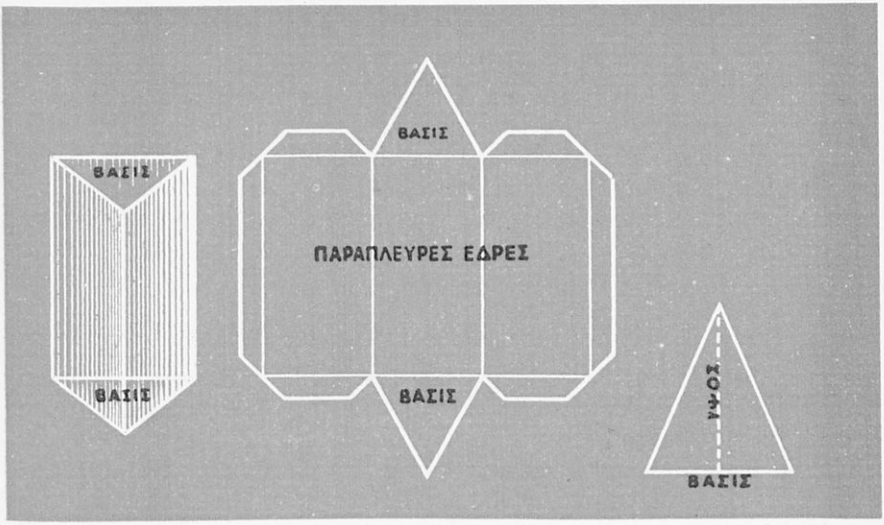
Ὁ Γιῶργος εἶπε τὸν κανόνα.

ΚΑΝΩΝ. — Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴ βάσι του ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ 2.

Προβλήματα. 1) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγωνικοῦ κτήματος τοῦ κ. Στασινοῦ, ποὺ ἡ βάσις του εἶναι 268 μ. καὶ τὸ ὕψος του 350 μ.; Πόσο στοιχίζει σήμερα, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ὑπολογίζεται εἰς 52 δραχμάς;

2) Ἡ βάσις ὀρθογωνίου τριγωνικῆς αὐλῆς εἶναι 35,3 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος 25,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

3) Κάμετε ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα ἀπὸ χαρτὶ καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγωνικῶν βάσεών του μόνον.



Κατασκευὴ πρίσματος

Τὰ παιδιά, μὲ βάσι τὸ ἀνάπτυγμα, ἔκαναν τὸ πρῖσμα των. Πολλοὶ μὲ χαρτόνι. Ἡ Ἀλίκη μὲ πηλό. Ὁ Σωτήρης μὲ σύρμα. Ὁ Τέλης μὲ λαμαρίνα. Τοῦ τὸ ἐκόλλησε ὁ ἀδελφός του, ποὺ εἶναι σιδηρουργός.

ξ' Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τριγωνικοῦ πρίσματος

Ὁ Ἄλκης λέγει, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὅλου τώρα τοῦ πρίσματος ἀπὸ τὸ σχῆμα φαίνεται, ὅτι θὰ εὑρεθῇ ὅπως τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Πρῶτον τῶν δύο βάσεων, ποὺ εἶναι τρίγωνα. Δεύτερον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Τέλος θὰ ἑνώσωμε τὰ δύο ἐμβαδά.

Ἀφαιροῦμε λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα τοῦ πρίσματος. Ἀνοίγομε ἔπειτα τὸ χαρτὶ τοῦ πρίσματος τοῦ Ἄλκη καὶ ἔχομε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κάμνουν ἕνα παραλληλόγραμμο. Αὐτὸ ἔχει βάσι τὴν περίμετρο τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Πρόβλημα. Ἑνὸς ὑαλίνου τριγωνικοῦ πρίσματος αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως εἶναι 0,6 μ. 0,8 μ. καὶ 0,9 μ. καὶ τὸ ὕψος τῆς βάσεως 0,7 μ.

Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του, ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 1,7 μ ;

Λύσις : Ἐμβαδὸν τριγωνικῶν βάσεων $= 0{,}9 \times 0{,}7 = 0{,}63$

$0{,}63 : 2 = 0{,}315$.

$0{,}315 \times 2 = 0{,}63$ τ.μ.

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας (παραλληλογράμμου)

$= 0{,}9 \times 0{,}8 + 0{,}6 = 2{,}3 \quad 2{,}3 \times 1{,}7 = 3{,}91$.

Σύνολον 4,54 τ.μ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

ΚΑΝΩΝ. Γράψετε μόνοι σας τὸν κανόνα.

Ἀσκήσεις. 1) Πῶς κατασκευάζομε ἕνα πρῖσμα ἀπὸ χαρτί, ξύλο, σύρμα, πηλό ;

2) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίματος ; Μὲ τί ὁμοιάζει ;

3) Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μὲ πλευρὰ 2,5 μ. Τὸ ὕψος τῆς βάσεως εἶναι 2,15 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ; Πόσο ὅλου τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 3,05 μ.

η΄ Ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

Ὁ Βασίλης λέγει :

— Ὅπως καταλάβαμε καλά, τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα σὲ ὅλα ὁμοιάζει μὲ τὰ ἄλλα πρίσματα, ποὺ ἐμάθαμε. Λοιπὸν ὅπως καὶ στὰ ἄλλα, ὁ ὄγκος του θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Πρόβλημα. Ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα ἔχει βάσι 3 μ. ὕψος βάσεως 2,5 μ., ὕψος πρίσματος 3,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

Λύσις : Ἐμβαδὸν βάσεως $3 \times 2{,}5 = 7{,}5 : 2 = 3{,}75$ τ.μ.

Ὄγκος πρίσματος $3{,}75 \times 3{,}5 = 13{,}125$ κ. μ.

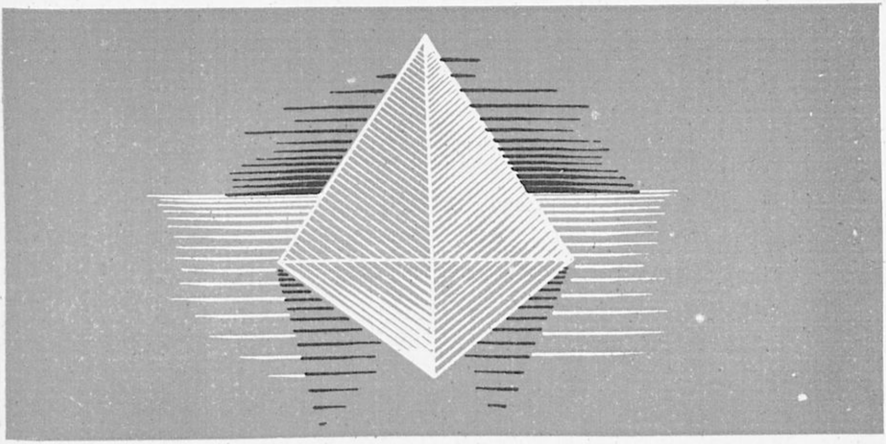
Ἀσκήσεις. 1) Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο, καὶ εἶναι 1,13 μ. καὶ τὸ ὕψος της 0,9 μ. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 1,5 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ; Πόσο ἔλαιον χωρεῖ ;

2) Τὰ πρίσματα ἀπὸ ποῦ λαμβάνουν τὴν ὀνομασία των ;

3) Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ;

4) Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ὅλων τῶν στερεῶν σωμάτων, ποὺ ἐμάθαμε ;

5) Κοιτάξετε, ἐὰν ἔχετε κάνει ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ποὺ ἐμάθαμε ; Εἰς τί ὁμοιάζουν καὶ εἰς τί διαφέρουν μεταξύ των.



Ε΄. ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

1. Τριγωνικὴ πυραμὶς

α΄ Τὶ λέγεται τριγωνικὴ πυραμὶς

Ὅταν ἐβγάλαμε ἀπὸ τὸ κιβώτιο ἕνα νέο στερεὸ σῶμα, τὰ περισσότερα παιδιὰ ἤξευραν καὶ τὸ ὄνομά του : «*Πυραμίς*».

Ὁ Γιῶργος, ποὺ κάθεται πλησίον εἰς τὸν στρατῶνα, εἶχε ἰδῆ τοὺς στρατιώτας, ποὺ εἰς τὰ διαλείμματα τῶν ἀσκήσεων ἐτοποθετοῦσαν τὰ ὅπλα των ὄρθια, εἰς σχῆμα πυραμίδος.

Τὸ ὄνομά της τὸ ἐπῆρε, λέγει ὁ διδάσκαλος ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς φλόγας τοῦ πυρὸς (φωτιᾶς). Τὰς πυραμίδας ἔκαμαν πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι διὰ τοὺς τάφους τῶν βασιλέων των. Εἰς τὴν Αἴγυπτον σώζονται ἀκόμη. Ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς βάσεως ἡ πυραμὶς λαμβάνει τὴν ὀνομασία της: τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική, ἑξαγωνικὴ κ.λ.π.

Τὰ παιδιὰ παρατηροῦν ὅτι ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 ἐπίπεδα. Αὐτὰ λέγονται *ἕδραι* αὐτῆς καὶ ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειά της. Ἡ ἕδρα, ποὺ στηρίζεται ἡ πυραμὶς λέγεται *βάσις* αὐτῆς.

Αἱ ἄλλαι τρεῖς ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρο ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος καὶ δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴ βάσι. Αἱ παράπλευροι ἕδραι καταλήγουν εἰς τὴν κορυφὴ τῆς πυραμίδος.

Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν, ποὺ τελειώνουν αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος, λέγονται *ἀκμαὶ* αὐτῆς. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 6 ἀκμάς.

β΄ Σχῆμα ἑδρῶν τριγωνικῆς πυραμίδος

Ὅπως βλέπετε, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τρίγωνα. Ὥστε ὅλαι αἱ ἕδραι ἔχουν σχῆμα τριγωνικό. Ἐπειδὴ τὸ κάθε τρίγωνο ἔχει καὶ τὴν κορυφή του, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 κορυφάς.

Ὁ Γιῶργος λέγει :

—Μὰ εἴπαμε, ὅτι ἐκεῖ, ποὺ τελειώνουν οἱ παράπλευρες ἐπιφάνειες τῆς πυραμίδος, λέγεται *κορυφή*.

— Φυσικά. Αὐτὴ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς πυραμίδος, δι᾿ ὅλας τὰς παραπλεύρους. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ κάθε τρίγωνο ἔχει καὶ τὴν κορυφή του εἰς ἄλλα μέρη τῆς πυραμίδος, μετροῦμε καὶ εὑρίσκομε 4 ἐν ὅλῳ κορυφάς.

γ΄ Ὕψος τῆς πυραμίδος

Ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν κορυφὴ ἕως τὴ βάσι.

ΚΑΝΩΝ Ἀπ᾿ ὅσα βλέπομε καὶ ἐμάθαμε γιὰ τὴν πυραμίδα, κάμετε τὸν κανόνα : Τὶ λέγεται πυραμίς ;

δ΄ Ἐμβαδὸν τριγωνικῆς πυραμίδος

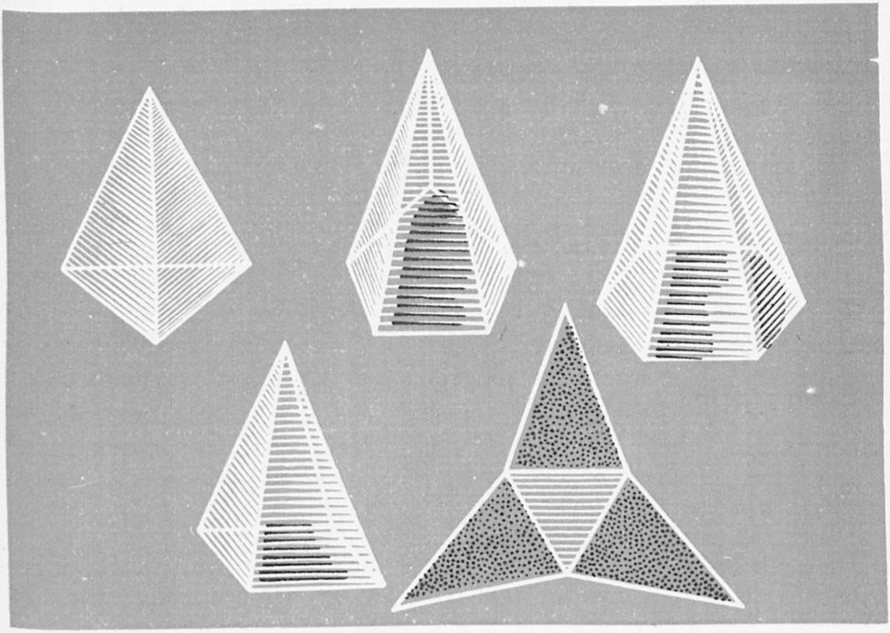
Ὁ Γιῶργος παρατηρεῖ, ὅτι τὰ 4 τρίγωνα τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος δὲν εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Ὥστε γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, θὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν κάθε τριγώνου καὶ θὰ προσθέσωμε ἔπειτα τὰ 4 ἐμβαδά.

Παράδειγμα. Τὸ τρίγωνο τῆς βάσεως τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχει 4 μέτρα μῆκος καὶ ὕψος 2,6 μ. Τὰ τρίγωνα κατὰ σειρὰν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἔχουν τὸ πρῶτο μῆκος βάσεως 3 μ. καὶ ὕψος 2,5 μ. Τὸ δεύτερο 3,5 μ. μῆκος βάσεως καὶ ὕψος 2,8 μ. καὶ τὸ τρίτο μῆκος βάσεως, 3,2 καὶ ὕψος 2,7 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς πυραμίδος ;

—Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα εἶναι εὔκολο τὰ παιδιὰ ἀνέλαβαν νὰ τὸ λύσουν μόνα των.

Ἀσκήσεις. 1) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἰσόπλευρα τρί-



γωνα. Ἡ πλευρὰ κάθε ἑνὸς εἶναι 2,3 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 1,95 μ. Ποῖο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

2) Κάμετε δύο ἰδικά σας προβλήματα παρόμοια.

3) Κάμετε ὅλοι μία πυραμίδα ὁ καθένας ἀπὸ ὅ,τι θέλετε. Ὁ Κώστας καὶ ὁ Θανάσης νὰ ἐργασθοῦν μαζί. Ὁ Κώστας νὰ κάμη μία τριγωνικὴ πυραμίδα καὶ ὁ Θανάσης μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσι ἕνα πρῖσμα.

ε΄ Κατασκευὴ τριγωνικῆς πυραμίδος

Ὁ Κώστας ἔφερε ἀπὸ κόντρα - πλακέ, μία ὡραία τριγωνικὴ πυραμίδα.

—Ἐπαιδεύτηκα λιγάκι. Πρῶτα ὅμως τὴν ἐζωγράφισα σὲ χαρτί. Ἔκαμα ἕνα μεγάλο τρίγωνο. Εὑρῆκα τὸ μέσον τῶν 3 πλευρῶν του. Ἔσυρα εὐθεῖες γραμμὲς στὰ σημεῖα τῶν μέσων τῶν 3 πλευρῶν του. Ἔτσι ἔγιναν 4 τρίγωνα. Τὸ μεσαῖο ἔμεινε βάσις, τὰ ἄλλα τὰ ἐτσάκισα στὶς βάσεις τους καὶ τὰ ἐσήκωσα ἐπάνω. Ἔγινε τότε ἡ πυραμίδα μου, ἀφοῦ ἐκόλλησα στὴν κορυφὴ τὶς 3 κορυφὲς τῶν 3 τριγώνων. Ἐγὼ ὅμως τότε τόσο ἱκανοποιήθηκα, ποὺ τὴν ἐφεύρεσί μου ἠθέλησα νὰ τὴν τελειοποιήσω. Ἐπάνω σὲ κόντρα πλακὲ ἔκαμα πάλι τὸ ἴδιο. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν τσακίζεται τὸ κόντρα - πλακέ, ἔκοψα τὰ τρίγωνα. Κάτω στὶς βάσεις τους ἔβαλα καρφάκια καὶ ἐκάρφωσα κάθε τρίγωνο σὲ μιὰ πλευρὰ τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως. Καὶ ἐπάνω στὴν κορυφὴ τὰ ἐκάρφωσα, γιὰ νὰ μὴν τὰ δέσω καὶ φαίνονται ἄσχημα.

Τὰ παιδιὰ συνεχάρησαν τὸν Κώστα γιὰ τὴν ἐργασία του.

στ΄. Ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Τὴν ἄλλη ἡμέρα ἐγεμίσαμε μὲ νερὸ τὴν πυραμίδα τοῦ Κώστα καὶ τὴν ἀδειάσαμε εἰς τὸ ἴσο πρῖσμα τοῦ Θανάση. Γιὰ νὰ γεμίσῃ τὸ πρῖσμα, ἐχρειάσθη νὰ ἀδειάσωμε μέσα τρεῖς φορὰς γεμάτη τὴν πυραμίδα τοῦ Κώστα.

Ὥστε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖο ἔχει τὴν αὐτὴ βάσι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἀφοῦ γνωρίζομε πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, εὔκολα τώρα θὰ εὕρωμε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδος.

Παράδειγμα. Ὁ θόλος Γοτθικῆς Ἐκκλησίας σχήματος τριγωνικῆς πυραμίδος, ἔχει μῆκος βάσεως 2,5 μ. καὶ ὕψος βάσεως 2,8 μ. Τὸ ὕψος ὅλης τῆς πυραμίδος εἶναι 4 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ;

Ὅλα σχεδὸν τὰ παιδιὰ τὸ ἔλυσαν.

Λύσις α) $2,5 \times 2,8 = 7$ τ.μ.
$7 : 2 = 3,5$ τ.μ. Ἐμβαδὸν βάσεως πυραμίδος.
β) $3,5 \times 4 = 14$ τ.μ.
$14 : 3 = 4\ 2/3$ κ.μ. Ὄγκος πυραμίδος.

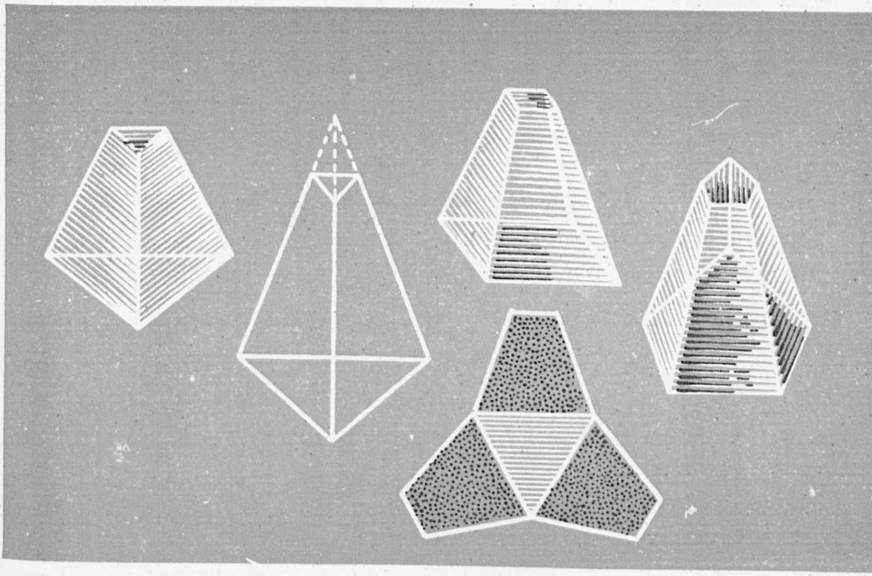
Ὁ Ἄλκης εἶχε γράψει καὶ τὸν κανόνα.

ΚΑΝΩΝ.— Διὰ νὰ εὕρωμε τὸν ὄγκο μιᾶς πυραμίδος, εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος της. Ὅ,τι θὰ εὕρωμε τὸ διαιροῦμε διὰ 3.

Προβλήματα. 1) Ἡ βάσις τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχει μῆκος 6 μ. καὶ ὕψος 5 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 7 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

2) Μία πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσι τετραγωνική, ποὺ ἡ πλευρά της εἶναι 116 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 90 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

3) Πυραμὶς ἀπὸ πλατίνα ἔχει βάσι τριγώνου ποὺ τὸ μῆκος του εἶναι 0,13 μ. τὸ δὲ ὕψος του 0,20 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 0,68 μ. Πόσο ζυγίζει;



2. Κόλουρος πυραμὶς

α΄. Τὶ εἶναι κόλουρος πυραμίς.

῾Ο διδάσκαλος ἔβγαλε ἀπὸ τὸ κιβώτιο ἕνα ἄλλο στερεὸ σῶμα. Τὰ παιδιὰ ἀμέσως εἶπαν, ὅτι καὶ αὐτὴ εἶναι πυραμίς. Τῆς λείπει ὅμως ἡ κορυφή. Εἶναι ἀκρωτηριασμένη. Γι' αὐτὸ λέγεται καὶ κόλουρος. Αὐτὸ εἶναι ἕνα μέρος ἀπὸ τὴ βάσι ἕως τὸ κόψιμο. Τὸ κανονικὸ μέρος τῆς πυραμίδος τὸ ἀφήρεσα. ᾿Αντὶ κορυφῆς ἔχει ἕνα τρίγωνο, μικρότερο ἀπὸ τὸ τρίγωνο τῆς βάσεως.

῾Η πυραμὶς αὐτὴ λέγεται *κόλουρος πυραμίς*. Αἱ πυραμίδες αὐταὶ ἔχουν δύο βάσεις μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι ἡ μία εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης. ῞Ο,τι σχῆμα ἔχει ἡ μία βάσις ἔχει καὶ ἡ ἄλλη: τριγωνικό, τετραγωνικὸ κ.λ.π.

῾Η ἁπλουστέρα κόλουρος πυραμὶς εἶναι αὐτή, ποὺ ἔχει βάσεις τριγωνικάς. Αἱ πυραμίδες αὐταὶ περικλείονται ἀπὸ 5 ἐπίπεδα, τὰς ἕδρας.

Αἱ δύο ἕδραι εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν σχῆμα τριγώνου. Εἶναι καὶ αἱ βάσεις τῆς πυραμίδος. Αἱ ἄλλαι ἕδραι λέγονται παράπλευροι ἐπιφάνειαι ἢ ἕδραι τῆς πυραμίδος.

'Ασκήσεις. 1) Τὶ εἶναι αἱ ἀκμαὶ ἐπὶ τὰς βάσεις τῆς πυραμίδος, κάθετοι ἢ πλάγιαι; Πόσαι εἶναι αἱ ἀκμαί της;

2) Πόσαι εἶναι αἱ κορυφαὶ τῆς κολούρου πυραμίδος;

3) Κάμετε μὲ ὅ,τι θέλετε κόλουρον πυραμίδα καὶ εὕρετε μόνοι σας τὰς ἕδρας, ἀκμὰς καὶ κορυφάς της. Κάμετε μόνοι σας τὸν κανόνα, τὶ λέγεται κόλουρος πυραμίς.

Κατασκευὴ κολούρου πυραμίδος

Τὰ παιδιὰ δὲν ἐδυσκολεύθησαν. Ἔκαμαν μία κανονικὴ πυραμίδα καὶ τὴν ἀκρωτηρίασαν ὁριζοντίως.

β' Σχῆμα παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ὁ Τέλης εἶπε, ὅτι τὸ σχῆμα τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ὅλων τετράπλευρο. Αὐτὰ δὲν ὁμοιάζουν ὅμως μὲ ὅσα ἄλλα τετράπλευρα ἐμάθαμε. Κάθε ἕνα ἀπ' αὐτὰ ἔχει δύο μόνον ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται *τραπέζιον*.

Εὕρετε μόνοι σας τὶ λέγεται τραπέζιον.

Βάσεις λέγονται αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου. *Ὕψος* ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴ μία βάσι ἕως τὴν ἄλλη. *Περίμετρος* λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

γ' Σύγκρισις τραπεζίου — παραλληλογράμμου.

Ὁ Γιάννης λέγει:

—Ἔχουν καὶ τὰ δύο 4 πλευρές. Τὸ τραπέζιον ἔχει μόνον δύο παράλληλες πλευρές. Οἱ ἀπέναντί του δὲν εἶναι ἴσες. Οἱ δύο βάσεις οὐδέποτε εἶναι ἴσες.

Ὅταν τὸ τραπέζιον ἔχῃ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἴσας, τότε λέγεται καὶ ἰσοσκελές.

δ' Ἐμβαδὸν τραπεζίου

Λαμβάνομε ἕνα τραπέζιο. Φέρομε τὴν διαγώνιο. Παρατηροῦμε ὅτι ἐχωρίσθη σὲ δύο τρίγωνα. Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων, ποὺ ἠξεύρομε πῶς εὑρίσκεται, καὶ ἑνώνομε τὰ δύο ἐμβαδά.

Τὸ πρῶτο τρίγωνο ἔχει βάσι τὴν μεγάλη βάσι τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὴν κάθετο ἀπὸ τὴν κορυφὴ ἕως τὴ βάσι.

Τὸ δεύτερο ἔχει βάσι τὴν μικρὴ βάσι τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὴν κάθετο ἀπὸ τὴν κορυφὴ ἕως τὴ βάσι. Ὅπως βλέπομε, τὸ ὕψος τους εἶναι ἴσο. Τὸ μέτρημά τους, ἀπέδειξε, ὅτι τὰ τρίγωνα, ποὺ σχηματίζονται, ὅταν φέρωμε τὴ διαγώνιο, ἔχουν ἴσο ὕψος ἀλλ' ἄνιση βάσι. Ἔτσι, ἂν οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ μία 8 μ. καὶ ἡ ἄλλη 6, τὸ δὲ ὕψος 5 μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου θὰ εἶναι :

1) Τοῦ ἑνὸς τριγώνου $\frac{8 \times 5}{2} = 20$ τ. μ.

2) Τοῦ ἄλλου τριγώνου $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ τ. μ.

Σύνολον 35 τ. μ.

Παρατηρήσεις : 1) Ὁ Γιάννης λέγει :—Μὲ πολὺ ἁπλούστερη διατύπωσι, πολλαπλασιάζομε κάθε βάσι χωριστὰ μὲ τὸ ὕψος, διαιροῦμε τὰ γινόμενά τους μὲ τὸ 2 καὶ ἑνώνομε τὰ πηλίκα.

$\frac{8 \times 5}{2} = 20 \quad \frac{6 \times 5}{2} = 15 \qquad 20 + 15 = 35$ τ.μ.

2) Ἡ Εὐθυμία :— Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου προσθέτομε τὶς δύο βάσεις, τὶς πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 2. Π.χ.

1) $8 + 6 = 14$
2) $14 \times 5 = 70$
3) $70 : 2 = 35$ τ. μ.

Ὁ Σωτήρης : — Προσθέτομε τὶς δύο βάσεις, παίρνομε τὸ μισὸ αὐτῶν καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐμβαδὸν τραπεζίου =

$8 + 6 : 2 = 7$
$7 \times 5 = 35$ τ.μ.

Ἄς λάβωμε, λέγει ὁ διδάσκαλος, τὰς παρατηρήσεις τοῦ Σωτήρη καὶ τῆς Εὐθυμίας. Μία μόνον ἀπὸ αὐτὰς νὰ τὴν ἔχωμε ὡς κανόνα διὰ τὴν εὕρεσι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου.

Προβλήματα. 1) Ὁ κ. Γεωργίου ἔχει ἕνα οἰκόπεδο εἰς τὸν Κεραμεικό, σχήματος τραπεζίου. Ἡ μία βάσις του εἶναι 180 μ., ἡ ἄλλη 70 μ., καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων 80 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου ;

2) Ὁ κ. Τρύφων, ὁ ἐργολάβος, ἀνέλαβε νὰ ἐπιστρώσῃ τὴν πλατεῖα τῆς Ἁγίας Ἄννης, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Αἱ βάσεις της εἶναι 35 μ. καὶ 26 μ. Τὸ ὕψος 30 μ. Τὰ πλακάκια μὲ τὰ ὁποῖα θὰ ἐπιστρώσῃ, εἶναι τετραγωνικὰ καὶ ἔχουν τὸ καθένα πλευρὰ 0,80 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν ;

3) Κάμετε καὶ ἐσεῖς δύο παρόμοια προβλήματα.

ε΄ Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἐὰν ἀναπτύξωμε τὴν κόλουρο πυραμίδα, θὰ λάβωμε καὶ τὸ ἀνάπτυγμά της. Τότε ὅλη ἡ παράλευρος ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος θὰ εἶναι ἕνα τραπέζιο. Βλέπομε λοιπόν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου τῆς μεγάλης βάσεως τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν μεγάλη βάσι τοῦ τραπεζίου τοῦ ἀναπτύγματος. Ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου τῆς μικρῆς βάσεως εἶναι ἴση μὲ τὴ μικρὴ τοῦ τραπεζίου. Αὐτὴ ἡ ἐξακρίβωσις, λέγει ὁ διδάσκαλος, μᾶς εἶναι πολὺ χρήσιμος.

Ἡ κόλουρος λοιπὸν πυραμὶς ἔχει μία παράπλευρο ἐπιφάνεια καὶ 2 τριγωνικὰς ἐπιφανείας. Πρέπει νὰ εὕρωμε τὰ τρία αὐτῶν ἐμβαδά, γιὰ νὰ εὕρωμε ὅλο της τὸ ἐμβαδόν.

Παράδειγμα : Ὑπάρχει ὕψωμα πλησίον τῆς λίμνης Ἀχρίδος σχήματος κολούρου πυραμίδος. Ἡ τριγωνικὴ βάσις του ἔχει βάσι μήκους 585 μ. καὶ ὕψους 300 μ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ μία 250 μ. καὶ ἡ ἄλλη 200. Ἡ ἄνω βάσις ἔχει βάσι μήκους 75 μ. καὶ ὕψους 40 μ. Αἱ ἄλλαι της πλευραὶ εἶναι ἡ μία 60 καὶ ἡ ἄλλη 55 μ. Τὸ ὕψος τῆς παραπλεύρου ἕδρας τῆς πυραμίδος εἶναι 400 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος ;

	Πρᾶξις :
1) $\dfrac{585 + 75 \times 400}{2} = 132.000$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.	1) $585 + 75 = 660$; $660 : 2 = 330$; $330 \times 400 = 132.000$
2) $\dfrac{585 \times 300}{2} = 87.750$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγάλης βάσεως τοῦ τριγώνου τῆς κολούρου πυραμίδος.	2) $585 \times 300 = 176.500$; $176.500 : 2 = 87.750$ (15, 15, 10, 0)

3) $\frac{75 + 50}{2} =$ 1875 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μικρᾶς βάσεως τοῦ τριγώνου τῆς κολούρου πυραμίδος.	3) $75 \times 50 = 3750$ $\begin{array}{r\|l} 3750 & 2 \\ \hline 17 & 1875 \\ 15 & \\ 10 & \end{array}$
4) 132.000 + 87.750 + 1.875 = 221.625 τ.μ. εἶναι ὅλον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος.	4) $\begin{array}{r} 132.000 \\ +\ 87.750 \\ 1.875 \\ \hline 221.625 \end{array}$

Γράψετε μόνοι σας τὸν κανόνα: Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος.

Γενικὴ ἀνακεφαλαίωσις

Πολύεδρα σώματα

Ἀσκήσεις. 1) Τί σχῆμα γίνεται, ὅταν ἀναπτύξωμε τὰς παραπλεύρους ἕδρας τῆς κολούρου πυραμίδος;

2) Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κολούρου πυραμίδος;

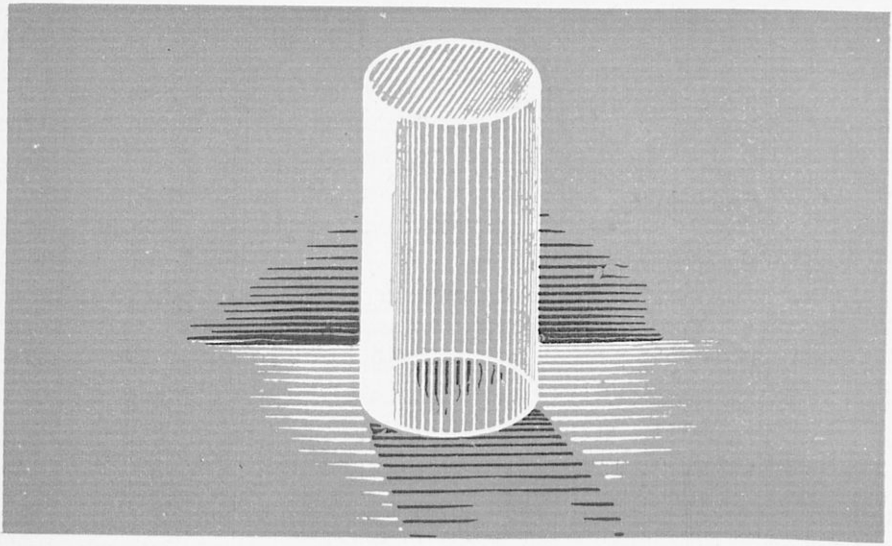
3) Διατί ἡ βάσις τοῦ τραπεζίου, ποὺ ἔγινε ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος, εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς της; Δοκιμάσετε μὲ τὴ δική σας πυραμίδα.

4) Ἡ τριγωνικὴ βάσις κολούρου πυραμίδος ἔχει βάσι 18 μ. καὶ ὕψος 13 μ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ μία 9 μ. καὶ ἡ ἄλλη 10 μ. Ἡ ἄνω βάσις ἔχει βάσι 4 μ. καὶ ὕψος 2 μ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ ἔχουν ἡ μία 3 καὶ ἡ ἄλλη 1 μ. Τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι 11 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης κολούρου πυραμίδος;

5) Κάμετε καὶ σεῖς δύο παρόμοια προβλήματα.

6) Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς τῶν σωμάτων, ποὺ ἐμάθαμε;

7) Πῶς εὑρίσκομε τὸν ὄγκο των;



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Α΄ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

1. Γενικὴ ἐπισκόπησις

Ὁ διδάσκαλος εἶπε εἰς τὸν Σωκράτη νὰ βγάλη ἀπὸ τὸ κιβώτιο τῶν στερεῶν σωμάτων τὸν κύλινδρο. Ὁ Σωκράτης δὲν ἐδυσκολεύθη καθολοκληρίαν.

— Ὁρίστε εἶπε, καὶ ἔδειξε τὸ σῶμα.

Μᾶς ἐξήγησε ὅτι, ὅταν εἰς τὸ χωριό του ἔτυχε νὰ ἐπισκευάζεται ἡ δημοσία ὁδός, εἶχε ἔλθει ἐκεῖ ἕνας ὁδοστρωτήρ. Οἱ κάτοικοι τὸν ἔλεγαν «κύλινδρο». Ἐρώτησε τὸν πατέρα του καὶ τοῦ ἐξήγησε, ὅτι τὸ ὄνομα τὸ ἔδωσαν οἱ χωρικοὶ ἀπὸ τὸ ἔμπροσθεν κυλινδρικὸ μέρος τοῦ ὁδοστρωτῆρος. Αὐτὸ ὁμοιάζει μὲ τὸ σχῆμα ποὺ εἰς τὴν Γεωμετρία ὀνομάζεται κύλινδρος.

— Καὶ οἱ κυλινδρόμυλοι, ποὺ ἀλέθουν τὸ σιτάρι, τὸ κριθάρι κ.λ.π. τέτοιο σχῆμα ἔχουν.

— Καὶ τὰ κουτιὰ τοῦ γάλακτος καὶ γενικῶς ὅλες οἱ κονσέρβες, λέγει ἡ Ἑλένη.

α΄ Κυρτὴ καὶ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια αὐτοῦ

Τὰ παιδιὰ παρατηροῦν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἐπιφανείας. Δύο ἐπιπέδους καὶ μία κυρτή.

β΄ Βάσεις καὶ ὕψος αὐτοῦ

Ὁ κύλινδρος στηρίζεται εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ αἱ δύο καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ. Αἱ βάσεις εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ὕψος. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴ μία βάσι ἕως τὴν ἄλλη λέγεται ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

2. Κύκλος

α΄ Τὶ εἶναι κύκλος

Αἱ δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἔχουν τὸ ἴδιο σχῆμα. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *κύκλος*.

Κύκλος λοιπὸν εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ μία καμπύλη γραμμή.

β΄ Περιφέρεια

Ἡ καμπύλη γραμμή, ποὺ περικλείει τὴν ἐπίπεδο ἐπιφάνεια, λέγεται *περιφέρεια*. Ἡ καμπύλη αὐτὴ γραμμὴ ὅπως βλέπετε, εἶναι κλειστή.

γ΄ Κέντρον.

Ὁ Γιῶργος ἔφερε τὸν διαβήτη τοῦ πατέρα του.

– Νά, μ᾽ αὐτὸν ὁ πατέρας, ποὺ εἶναι μηχανικός, κάμνει περιφέρειες. Στηρίζει τὸ ἕνα σκέλος τοῦ διαβήτη στὸ χαρτὶ (ξύλο κ.λ.π.) καὶ περιστρέφει τὸ ἄλλο, ποὺ ἔχει ἕνα μολυβάκι, ἕως ὅτου κλείση. Αὐτὸ σημειώνει γύρω - γύρω τὴν περιφέρεια.

Τὸ σημεῖο, ποὺ στηρίζεται ὁ διαβήτης λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου.

Γιὰ συντομία τὸ σημειώνομε μὲ τὸ γράμμα Κ. *Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον.* Διότι τὸ κέντρον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον ἀκριβῶς τοῦ κύκλου.

Δέσετε μία κλωστὴ σ ἕνα καρφάκι, στηρίξετε τὸ καρφάκι εἰς τὸ χαρτόνι ἢ ξύλο ἢ στὴ γῆ. Εἰς τὴν ἄλλη ἄκρη τῆς κλωστῆς βάλετε ἕνα μολύβι, κιμωλία κ.λ.π. καὶ γυρίσετέ την, γιὰ νὰ κάμετε κύκλο ἀκριβῆ, ἂν δὲν ἔχετε διαβήτη.

δ' Ἀκτὶς τοῦ κύκλου

Ἀκτὶς λέγεται ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρον μὲ ἕνα σημεῖο τῆς περιφερείας.

Ἀκτῖνας εἰς κάθε κύκλο δυνάμεθα νὰ ἔχωμε πάρα πολλάς. Εἶναι δὲ μεταξύ των ὅλαι ἴσαι. διότι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον.

ε' Διάμετρος

Σύρομε μία εὐθεῖα γραμμὴ ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς περιφερείας, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τελειώνει εἰς ἕνα ἄλλο σημεῖο τῆς περιφερείας. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται *διάμετρος*

Ὥστε ἡ εὐθεῖα γραμμή, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, λέγεται διάμετρος.

Διαμέτρους ἔχομε πολλὰς καὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπίσης βλέπομε, ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος. Αἱ δύο ἀκτῖνες κάμνουν μία διάμετρο.

στ' Ἡμικύκλιον — Ἡμιπεριφέρεια

Ἡ διάμετρος βλέπομε ὅτι χωρίζει τὸν κύκλο εἰς δύο ἴσα μέρη. Αὐτὰ λέγονται *ἡμικύκλια*. Ἐπίσης ἡ διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρεια εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται *ἡμιπεριφέρεια*.

Τί λοιπὸν λέγεται ἡμικύκλιον ; Τί ἡμιπεριφέρεια ;

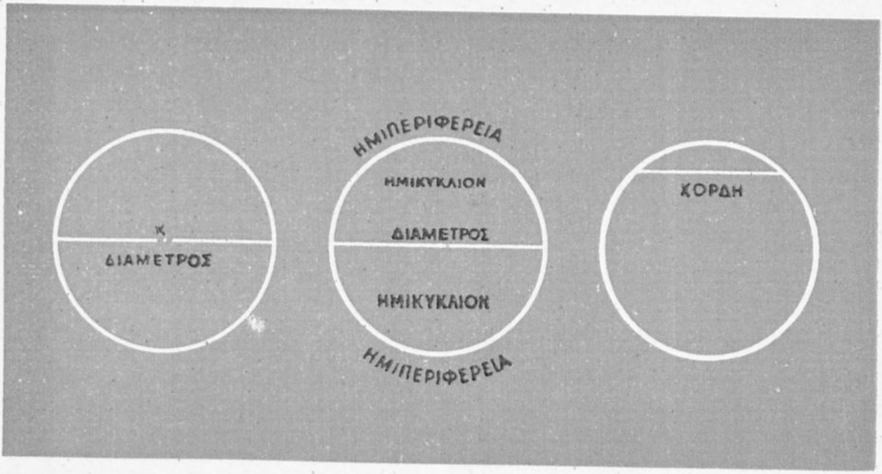
ζ' Τόξον — Χορδὴ

Ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν περιφέρεια ἑνὸς κύκλου λέγεται *τόξον*.

Ὅταν μέσα εἰς τὸν κύκλο σύρωμε μία εὐθεῖα ἀπὸ ἕνα σημεῖο εἰς ἄλλο τῆς περιφερείας, χωρὶς νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο, ἡ εὐθεῖα αὕτη λέγεται *Χορδή*. Ἄρα αἱ χορδαὶ τοῦ κύκλου εἶναι μικρότεραι ἀπὸ τὴ διάμετρο.

η' Τμῆμα — Τομεύς.

Φέρομε εἰς τὸν κύκλο μία χορδή. Ἡ χορδὴ βλέπομε, ὅτι χωρίζει ἕνα μέρος τοῦ κύκλου. Τὸ μέρος αὐτὸ περικλείεται ἀπὸ ἕνα τόξο καὶ ἀπὸ μία



χορδή. Αὐτὸ τὸ μέρος τοῦ κύκλου λέγεται *τμῆμα*.

Ὅταν ἕνα μέρος τοῦ κύκλου λαμβάνεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ δύο ἀκτίνων, λέγεται *κυκλικὸς τομεύς*.

θ΄ Τί εἶναι μοῖρα.

Ἡ περιφέρεια ἑκάστου κύκλου χωρίζεται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*. Ἡ μοῖρα χωρίζεται εἰς 60 πάλι ἴσα μέρη, τὰ πρῶτα λεπτά. Κάθε πάλι πρῶτο λεπτὸ χωρίζεται εἰς 60 δευτερόλεπτα. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειώνομε μὲ μία ὀξεῖα ἐπάνω εἰς τὸν ἀριθμό, π.χ. 55΄, τὰ δεύτερα μὲ δύο ὀξεῖες.

Ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει ἄνοιγμα 90°. (*Σημ.* Τὸ ° ἐπάνω ἀπὸ τὸ 90° σημαίνει μοίρας). Αὐτὸ τὸ ἐξακριβώνομε μὲ τὸ *μοιρογνωμόνιον*. Εἶναι ἕνα ὄργανο, τὸ ὁποῖο εἶναι χωρισμένο εἰς 180 μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*.

Γιὰ νὰ μετρήσωμε τὴ γωνία, βάζομε τὸ κέντρο του εἰς τὴν κορυφή της. Ἡ μία πλευρά της θὰ πέση εἰς τὴν ὁριζοντία γραμμὴ τοῦ μοιρογνωμονίου. Ἡ ἄλλη πλευρὰ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸν ἀριθμὸ τῶν μοιρῶν τοῦ ὀργάνου. Ἐκεῖ ἀκριβῶς εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν, ποὺ θὰ ἔχη ἡ γωνία. Φυσικὰ ἡ ὀρθὴ γωνία θὰ ἔχη 90°, διότι ἔγινε ἀπὸ δύο καθέτους πλευράς.

'Ερωτήσεις. 1) Τὶ λέγομε κύκλον ; Τὶ εἶναι αἱ δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου ; 2) Τὶ λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου ; 3) Τὶ ἀκτῖνα ; 4) Τὶ διάμετρος ; 5) Τὶ ἡμικύκλιον ; Τὶ ἡμιπεριφέρεια ; 6) Τὶ τόξον ; Τὶ χορδή, 7) Τὶ τμῆμα ; Τὶ τομεύς ; 8) Τὶ μοῖρα : 9) Εἰς πόσας μοίρας χωρίζεται ὁ κύκλος ; 10) Πόσας μοίρας ἔχει ἡ κάθε ὀρθὴ γωνία ; Πόσας θὰ ἔχη μία ἀμβλεῖα ; Μία ὀξεῖα ;

'Εργασίαι : 1) Πῶς κάμνομε ἀκριβῶς κύκλον ; Κάμετε ἕνα. Σημειώσετε ἐπ' αὐτοῦ κέντρο, ἀκτῖνα, διάμετρο, ἡμικύκλιο, ἡμιπεριφέρεια.

2) Κάμετε δεύτερο κύκλο. Σημειώσετε ἐπ' αὐτοῦ τόξο, χορδή, τμῆμα, τομέα.

3) Κάμετε ἕνα κύκλο μὲ χονδρὸ χαρτόνι καὶ σημειώσετε ἕνα τόξο 90°. Πόσαι ἄλλαι μοῖραι ἀπομένουν εἰς τὸν κύκλο : Μὲ τὶ μετροῦμε τὰς μοίρας ;

4) Μετρήσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιό σας μία ὀρθή, μία ὀξεῖα καὶ μία ἀμβλεῖα γωνία.

'Ανακεφαλαίωσις

Κάμετε ἕνα κύκλο ποὺ νὰ ἔχη διάμετρο 0,09 μ. Λέγετε τὶ παρατηροῦμε, ὅτι γίνεται εἰς τὸν κύκλο καὶ τὶ εἰς τὴν περιφέρεια ;

3. Κανονικὰ σχήματα

Κανονικὸ σχῆμα λέγεται τὸ τετράγωνο, διότι ὅλαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του ἴσαι.

'Επίσης καὶ τὸ *ἰσόπλευρο τρίγωνο* ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας. Αἱ γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἡ κάθε μία ἀπὸ 60°.

4. Κανονικὰ πολύγωνα

Τὰ σχήματα, ποὺ ἔχουν περισσοτέρας ἀπὸ 4 πλευρὰς καὶ γωνίας, τὰ λέγομε *πολύγωνα.*

῞Οταν ἔχουν ὅλας τὰς πλευράς των καὶ τὰς γωνίας των ἴσας, τὰ λέγομε *κανονικὰ πολύγωνα.*

Σημ. Τὰ σχήματα αὐτὰ συνηθίζομε νὰ τὰ ὀνομάζωμε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν γωνιῶν καὶ ὄχι τῶν πλευρῶν των. Π.χ. *πεντάγωνο, ἑξάγωνο, ὀκτάγωνο* κ.λ.π.

5. Ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλον πολύγωνο

Γιὰ νὰ ἐγγράψωμε εἰς κύκλον π.χ. ἕνα τετράγωνο, χωρίζομε τὴν περιφέρεια εἰς 4 ἴσα μέρη (τὰ τόξα). Φέρομε τὰς χορδάς αὐτῶν καὶ σχηματίζεται ἀμέσως τὸ τετράγωνο. Δυνάμεθα ὅμως καὶ ἀμέσως νὰ φέρωμε δύο διαμέτρους. Ἑνώνομε τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων καὶ ἔχομε ἀμέσως τὸ τετράγωνο.

Εἰς τὸ τετράγωνο τώρα αὐτὸ εὑρίσκομε τὸ μέσον τῶν πλευρῶν του. Φέρομε τὰς νέας χορδὰς αὐτῶν καὶ σχηματίζεται νέο πολύγωνο, τὸ *ὀκτάγωνο*. Ἂν θέλωμε ἐξακολουθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ διχοτομοῦμε τὰς πλευρὰς τοῦ νέου σχήματος καὶ νὰ φέρωμε τὰς χορδάς των. Τότε τὸ ὀκτάγωνο θὰ γίνη δεκαεξάγωνο, 32γωνο καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε θὰ καταντήση ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ νὰ γίνη ἕνα μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Σημ. Αἱ χορδαὶ θὰ εἶναι πλευραὶ τῶν πολυγώνων. Ποῖος θὰ βγάλη τὸν κανόνα ;

Ὁ Σπῦρος εἶπε τὸν καλύτερον.

ΚΑΝΩΝ.— Ὅταν ἕνα πολύγωνο εἶναι ἐγγεγραμμένο μέσα εἰς κύκλον μὲ πάρα πολλὰς πλευράς, ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος λοιπὸν εἶναι ἕνα πολύγωνο μὲ πάρα πολλὰς πλευράς.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ κάμετε ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο σὲ χαρτόνι κυκλικό.

Ὁ Ἄλκης εἶχε τὸ πιὸ καλὸ σχῆμα.

— Ἐχώρισα, λέγει, τὴν περιφέρεια εἰς 6 ἴσα τόξα μὲ τὸν διαβήτη μου. Ἀφοῦ ἐμέτρησα πρῶτα τὴν περιφέρεια, ἔφερα ἔπειτα τὶς χορδὲς κι ἔτσι ἔγινε τὸ ἑξάγωνο. Παρετήρησα μάλιστα, ὅτι ἡ ἀκτῖνα εἶναι τὸ 6ον τῆς περιφερείας. Γι' αὐτὸ κάθε χορδή, ποὺ βλέπετε, ἔχει μῆκος μιᾶς ἀκτῖνος, στὰ ἑξάγωνα ποὺ εἶναι ἐγγεγραμμένα σὲ κύκλο. Ἂν θέλω, κάθε τόξο τὸ διαιρῶ σὲ δυὸ ἴσα μέρη καὶ ἑνώνω μὲ εὐθεῖες τὰς σημεῖα τῆς διαιρέσεως. Τότε θὰ ἔχω ἕνα δωδεκάγωνο. Τὰ νέα τόξα πάλι τὰ διαιρῶ σὲ δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώνω μὲ εὐθεῖες τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως. Τότε θὰ ἔχω ἕνα 24γωνο. Συνεχίζω μέχρι νὰ γίνουν ἕνα οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου μὲ τὸν κύκλο.

Ὥστε ἡ περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, γίνεται ἴση μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του ἀδιακόπως διπλασιάζεται.

6. Ἀστερίσκος — Ρόμβος

Ὁ Γιάννης εἶδε εἰς ἕνα κέντημα τῆς ἀδελφῆς του ἕνα ὡραῖο σχῆμα καὶ τὸ ἔφερε.

— Αὐτό, εἶπε ὁ διδάσκαλος, λέγεται *ἀστερίσκος*.

Κάμνομε ἕνα κανονικὸ ἐγγεγραμμένο ἑξάγωνο. Σβήνομε τὰς χορδάς. Ἑνώνομε δύο - δύο τὰς κορυφάς, πηδῶντας μία, π.χ. τὴν 1 μὲ τὴν 3. Τὴν 2 μὲ τὴν 4. Τὴν 3 μὲ τὴν 6. Τὴν 5 μὲ τὴν 1 καὶ τὴν 6 μὲ τὴν 2. Ἔπειτα τὸ κέντρο μὲ τὰς κορυφάς. Ἑνώνομε τὸ κέντρο μὲ τὰς γωνίας, ποὺ ἐσχημάτισαν αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖ ποὺ συνηντῶντο. Ἔτσι ἔχομε τὸν ἀστερίσκο. Κάθε τετράγωνο τοῦ ἀστερίσκου λέγεται *ρόμβος*.

Ἀσκήσεις. 1) Ἐγγράψετε μέσα εἰς κύκλο ἕνα πεντάγωνο κανονικό. Κάμετέ το δεκάγωνο. Τί ἄλλο ἠμπορούσατε νὰ τὸ κάνετε;

2) Κάμετε ἕνα ἀστερίσκο καὶ χρωματίσετέ τον μὲ διάφορα χρώματα, ὅπως εἰς τὰ κεντήματα τῶν ἐργοχείρων.

3) Ὅποιος ἔχει ἰδῆ ἄλλο μεγαλύτερο πολύγωνο ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλον, νὰ προσπαθήσῃ νὰ τὸ ἰχνογραφήσῃ.

4) Τί θὰ κάμῃ ἕνας ἐπιπλοποιὸς γιὰ νὰ κατασκευάσῃ ἕνα κανονικὸ ὀκταγωνικὸ τραπέζι;

7. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου

Εἰς τὸ ἐγγεγραμμένο ἑξάγωνο φέρομε τὰς διαγωνίους του ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφάς του. Βλέπομε ὅτι ἐσχηματίσθησαν 6 τρίγωνα. Αὐτὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι αἱ βάσεις των εἶναι πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, αἱ δὲ ἄλλαι δύο πλευραὶ ἑκάστου τριγώνου εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου.

Ὁ Σωκράτης λέγει:

— Θὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ αὐτὸ θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε μὲ τὸν ἀριθμὸ ὅλων τῶν τριγώνων. Ἢ μὲ τὸν ἀριθμὸ ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, πού, φυσικά, εἶναι τόσες, ὅσα τὰ τρίγωνα.

Τότε ἡ Ἀλίκη εἶπε:

— Θὰ ἦταν πιὸ σύντομο, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴν περίμετρο τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου καὶ τὸ γινόμενο διαιρέσωμε διὰ 2.

Ὁ διδάσκαλος συνεφώνησε μὲ τὸν σύντομο τρόπο τῆς Ἀλίκης καὶ εἶπε, ὅτι ἡ ἀπὸ τὸ κέντρο κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου λέγεται *ἀπόστημα.* Ἔτσι ἔχομε τὸν κανόνα :

ΚΑΝΩΝ.— Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον ἐπὶ τὸ ἀπόστημα διὰ 2.

Προβλήματα. 1) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ποὺ ἡ πλευρά του ἔχει μῆκος 0,38 μ. καὶ τὸ ἀπόστημα εἶναι 0,27 μ. ;

2) Νὰ ἐγγράψετε εἰς κύκλον κανονικὸ ὀκτάγωνο μὲ πλευρὰ μήκους 0,05 μ. καὶ ἀπόστημα 0,04 μ. καὶ νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

3) Νὰ ἐγγράψετε ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο μὲ πλευρὰ 0,15 μ, ἀπόστημα 0,12 μ. νὰ νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

4) Ἐὰν κάνωμε ἕνα πολύγωνο μὲ πάρα πολλὰς πλευράς, τὶ θὰ συμβῇ ;

8. Εὕρεσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου

Ὁ Γιάννης ἀπήντησε εἰς τὴν ὑπ᾿ ἀριθ. 4 ἐρώτησι :

—Θὰ γίνη κύκλος· τότε πλέον θὰ δυσκολευώμεθα νὰ εὕρωμε τὶς πλευρὲς τοῦ πολυγώνου. Γι᾿ αὐτὸ πρέπει νὰ μάθωμε νὰ μετροῦμε τὴν περιφέρεια. Ἐὰν λοιπὸν πάρωμε τὴ διάμετρο ἑνὸς κύκλου καὶ μὲ αὐτὴ μετρήσωμε τὴν περιφέρειά του θὰ ἰδοῦμε : Ὅτι ἡ διάμετρος χωρεῖ εἰς τὴν περιφέρεια 3,14 φορές. Δοκιμάσετε. Ἔτσι ἐξάγεται ὅτι ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι μεγαλυτέρα 3,14 φορὲς ἀπὸ τὴ διάμετρό του. Ἡ δὲ διάμετρός εἶναι 3,14 φορὲς μικροτέρα ἀπὸ τὴν περιφέρεια ἑνὸς κύκλου. Εὔκολα τώρα εὑρίσκομε τὴν περιφέρεια, ὅταν γνωρίζωμε τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου.

Παράδειγμα : Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου, ὅταν ἡ διάμετρός του εἶναι 4 μ. ;

$4 \times 3,14 = 12,56$ μ. εἶναι ἡ περιφέρεια.

Σημ. Γιὰ εὐκολία μας τὴν περιφέρεια τὴ σημειώνομε μὲ τὸ γράμμα Π. Τὴ διάμετρο μὲ τὸ γράμμα δ καὶ τὴν ἀκτῖνα μὲ τὸ γράμμα α. Τὸν σταθερὸ ἀριθμό, ποὺ βγαίνει ἀπὸ τὴ διαίρεσι τῆς περιφερείας διὰ τῆς διαμέτρου, μὲ τὸ γράμμα π. Τὸν πολλαπλασιασμό, ἀντὶ τοῦ Χ, μὲ μία τελεία (.) ἢ καὶ χωρὶς τελεία καὶ τὴ διαίρεσι μὲ δύο τελείας (:).

ΚΑΝΩΝ.— Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὴ διάμετρο ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 3,14. Ἰδοὺ καὶ ὁ τύπος :

$\Pi = \delta . \pi$ ἢ $\Pi = \delta . 3{,}14$, ἢ $\Pi = 2\alpha\pi$ *(ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ἔχει δύο ἀκτῖνας).*

— Τώρα λέγει ὁ Λυκοῦργος, ἐννοοῦμε καὶ τὰς ἄλλας σχέσεις τῶν μερῶν τοῦ κύκλου. Π.χ. Ὅταν ἠξεύρω τὴν περιφέρεια, ἀμέσως εὑρίσκω καὶ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου, γιατὶ διαιρῶ διὰ 3,14 (ἢ π.)

Παράδειγμα. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 18,84 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος ;

Ὁ τύπος εἶναι : $\delta = \Pi : \pi$ ἢ $\delta = \dfrac{\Pi}{\pi}$.

Ἀντικαθιστῶ καὶ ἔχω : $18{,}84 : 3{,}14 = 6$ μ.

ΚΑΝΩΝ.— Ἡ διάμετρος ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρεια διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3.14.

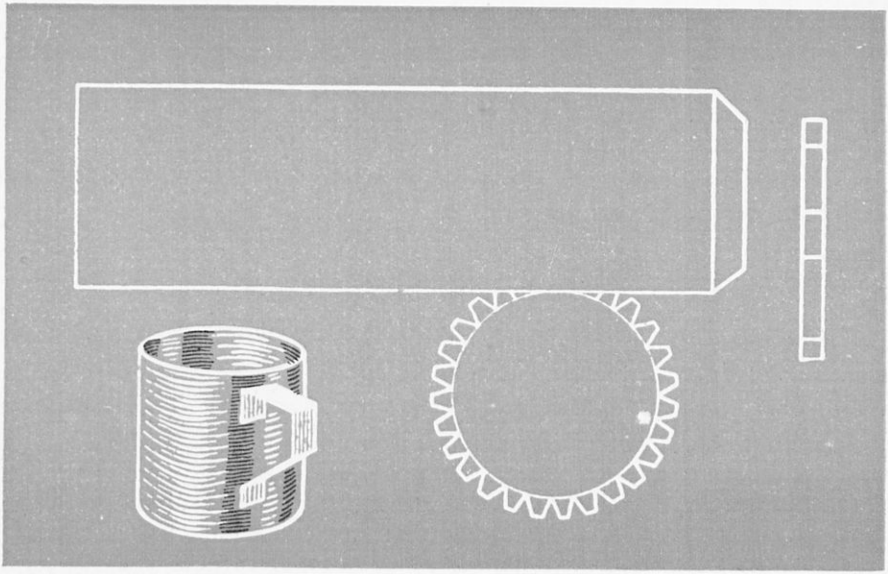
Προβλήματα. 1) Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,5 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

2) Ἕνας τροχὸς ἔχει περιφέρεια 10,52 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος καὶ πόση ἡ ἀκτίς του ;

3) Ἡ διάμετρος μερικῶν τροχῶν ἑνὸς ἐργοστασίου εἶναι 6,28 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά των.

9. Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου

Εἰς τὸν κύκλο σύρομε πολλὰς ἀκτῖνας. Βλέπομε, ὅτι σχηματίζονται πολλοὶ κυκλικοὶ τομεῖς, τρίγωνα. Κάθε ἕνα ἔχει βάσι τὸ τόξον τοῦ τομέως καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Γιὰ νὰ εὕρωμε λοιπὸν τὸ ἐβαδὸν ὅλου τοῦ κύκλου, εὑρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζωμε ἐπὶ τῶν ἀριθμὸ ὅλων τῶν τριγώνων τοῦ κύκλου (ἐφ᾽ ὅσον θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα μεταξύ των). Ἄλλως εὑρίσκομε κάθε ἑνὸς χωριστὰ καὶ προσθέτομε ὅλα τὰ ἐμβαδά.



῾Ο Σωτήρης λέγει :

— Γιατὶ νὰ κάνωμε τόση ἐπίπονη δουλειά, νὰ μετροῦμε δηλ. κάθε τρίγωνο ; ᾿Εμεῖς ἠξεύρομε ὅτι αἱ βάσεις ὅλων τῶν τριγώνων ἀποτελοῦν τὴν περιφέρεια, ὅπως συμβαίνει μὲ τὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ τὶς ἐπίπεδες πλευρές. Λοιπόν, εὑρίσκομε τὴν περιφέρεια, τὴν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος, ποὺ εἶναι ἡ ἀκτῖνα καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Νὰ καὶ ὁ τύπος : Ε κύκλου = Π . α : 2

Παράδειγμα. ῾Η ἀκτὶς μιᾶς ρόδας εἶναι 0,6 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

1) Π= 2α. 3,14. ᾿Αντικαθιστῶ 0,6.2.3,14= 3,768 μ.

2) Ε = Π.α : 2. ᾿Αντικαθιστῶ 3,768 + 0,6 : 2 = 1,1304 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ρόδας τοῦ ποδηλάτου.

῞Οταν μᾶς δίδεται ἡ ἀκτίς, ἀντὶ νὰ εὑρίσκωμε τὴν περιφέρεια καὶ ἔπειτα, γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδόν, πολλαπλασιάζομε πάλι μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἔχομε ἕνα συντομώτερο τρόπο, ποὺ εὑρέθη ἀπὸ τὴν ἰδία πρᾶξι.

$$\text{'Αντὶ λοιπὸν } \frac{α.2.3{,}14.α}{2} = \text{ ἁπλοποιοῦμε τὸν κλασματικὸ αὐτὸν τύπο.}$$

Ἔτσι, 2 ἐπάνω καὶ 2 κάτω, φεύγει. Καὶ μένει α.α.3.14.

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκεται, ὅταν πολλαπλασιάσω τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της καὶ ἐπὶ 3,14.

Ὅποιος λοιπὸν τρόπος μᾶς διευκολύνει, αὐτὸν θ' ἀκολουθήσωμε.

'Ασκήσεις. 1) Γράψετε τὸν κανόνα: Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου; 2) Μὲ ποῖο γράμμα γράφομε τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἐπιφανειῶν; 3) Ὁ κύκλος ὅταν χωρισθῇ σὲ πάρα πολλὰ τόξα, τί σχῆμα εἶναι; Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου;

Προβλήματα. 1) Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 12,56 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 38,14 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

4) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 38,14 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

5) Ἡ κυκλικὴ πλατεῖα τῆς Παντανάσσης ἔχει διάμετρο 56 μ. Πόσας πλάκας θὰ χρειασθῇ τῶν 0,4 μ. μήκους καὶ 0,3 μ. πλάτους;

6) Κάμετε διάφορα παρόμοια δικά σας προβλήματα, ποὺ συναντοῦμε εἰς τὸν βίο μας.

10. 'Εμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως

α'. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου

Τὸν κυκλικὸ τομέα τὸν ἐκλαμβάνομε ὡς τρίγωνο.

Παράδειγμα. Ποῖο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ποὺ τὸ τόξο του εἶναι 15 μ. καὶ ἡ ἀκτίς του 4 μ.;

$$\text{Ε κυκλ. τομ.} = \frac{15 \times 4}{2} = 30 \text{ μ.}$$

Παρατήρησις. Αἱ δύο πλευραὶ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου. Τὸ τόξο ΒΑ εἶναι ἡ βάσις. Ἔτσι ἐργασθήκαμε ὅπως εἰς τὸ τρίγωνο.

ΚΑΝΩΝ.— Διὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμε διὰ 2.

β'. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὰς μοίρας τοῦ τόξου.

Παράδειγμα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 90° ὁ ὁποῖος ὑπάρχει εἰς κύκλον ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 5,5 μ.

Σκέψις. Πρέπει νὰ εὕρωμε πόσα μέτρα μῆκος εἶναι τὸ τόξο τῶν 90°. Ὅλη ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐμάθαμε ὅτι ἔχει 360°. Νὰ εὕρωμε λοιπὸν τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, γιὰ νὰ ἰδοῦμε πόσα μέτρα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς 90°.

Λύσις : Ὅταν γνωρίζωμε τὴν ἀκτῖνα εὔκολα εὑρίσκομε τὴν περιφέρεια. Ὁ τύπος εἶναι : Π= 2 α.π. Ἀντικαθιστοῦμε :

Π = 5,5.2.3,14 = 34,54μ.

Ἀφοῦ 360° περιφέρεια εἶναι 34,54 μ.

90 » » Χ ;

Τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

$$\times = \frac{34{,}54 \times 90}{360} = 8{,}63 \text{ μ.}$$ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ποῦ ζητοῦμε .

Τώρα πλέον ἐφθάσαμε εἰς τὴν α' περίπτωσι.

$$\text{Ε. κυκλ. τομέως} = \frac{8{,}63 \times 5{,}5}{2} = 23{,}73 \text{ τ.μ.}$$

— Λίγο ἂν προσέχωμε, λέγει ὁ Βαγγέλης, τὰ πράγματα μόνα τους λύονται. Ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία κάμνουν τοὺς ἀνθρώπους λογικοὺς καὶ προσεκτικούς.

Ἀσκήσεις. 1) Κάμετε μὲ τὸν διαβήτη σας ἕνα κυκλικὸ τομέα μὲ ἀκτῖνα 0,05 μ. καὶ μὲ τόξο 0,10 μ. εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

2) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως 50° ὁ ὁποῖος ὑπάρχει εἰς κύκλον ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 2 μ. ;

3) Κάμετε δύο παρόμοια δικά σας προβλήματα.

11. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου

Ὁ διδάσκαλος λέγει εἰς τὸν Γιῶργο νὰ βγάλη τὸν κύλινδρό του καὶ νὰ εἰπῆ, ποιὸ θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του.

— Ὅπως βλέπω, πρέπει νὰ βρῶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς κύκλου καὶ νὰ τὸ διπλασιάσω, γιατὶ οἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου εἶναι δύο κύκλοι ἴσοι.

Ἔπειτα νὰ βρῶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ νὰ προσθέσω σ' αὐτὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κύκλων. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐμάθαμε πῶς εὑρίσκεται.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅμως τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, δὲν ηξεύρομε πῶς εὑρίσκεται. Καταλαβαίνω ὅμως ὅτι, ἂν ἦταν τρόπος νὰ ξεδιπλώσωμε τὸν κύκλινδρο, θὰ εἴχαμε μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια. Τότε ἀνάλογα μὲ τὸ σχῆμα θὰ εὕρισκα τὸ ἐμβαδόν.

Τὰ παιδιὰ ἐμπῆκαν σὲ κίνησι. Ὁ Σωτήρης εἶχε ἕνα κύλινδρο ἀπὸ τὸν ἀδελφό του. Τὸν ἄνοιξε.

— Νὰ ἔγινε ὀρθογώνιο ἡ κυρτή του ἐπιφάνεια.

Παρατήρησις. Τὸ μέρος, ποὺ ἦταν ἕνα μὲ τὴ βάσι τοῦ κυλίνδρου, εἶναι τώρα ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου. Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι καὶ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου.

—Ὥστε δὲν χρειάζεται νὰ χαλᾶμε τὸν κύλινδρο πιά, γιὰ νὰ ἰδοῦμε τὴν κυρτή του ἐπιφάνεια, λέγει ἡ Ἑλένη.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ὀρθογώνιο, ποὺ ἔχει βάσι τὴν περιφέρεια τῆς κυκλικῆς βάσεώς του καὶ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Παράδειγμα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυλινδρικοῦ τεπόζιτου νεροῦ τοῦ σιδηροδρομικοῦ σταθμοῦ Ἀχλαδοκάμπου, τὸ ὁποῖο ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 1,3 καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 4 μ. ;

Λύσις :

1) Ε. τῆς μιᾶς κυκλικῆς βάσεως $= \dfrac{1{,}3.2.3{,}14.1{,}3}{2} = 5{,}30$ τ.μ.

Ε. τῆς δευτέρας τὸ ἴδιο = 5,30 τ. μ. Σύνολον 10.60 τ. μ. εἶναι τὸ Ε. καὶ τῶν δύο βάσεών του.

2) Ε. κυρτῆς ἐπιφανείας

α) 1,3.2= 2,6 μ. διάμετρος.

β) 2, 6.3,14= 8,16 μ. περιφέρεια.

γ) 8,16.4= 32,64 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ε. ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου= 10,60+ 32,64= 43,24 τ.μ.

Ἐργασίαι. 1) Γράψετε μόνοι σας τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκομε τὸν Ε. τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ;

2) Πῶς εὑρίσκομε τὸ Ε. τῆς ὅλης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου;

3) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 2,4 μ. τὸ ὕψος του 6 μ. Πόσο εἶναι τὸ Ε. τῆς ἐπιφανείας του ;

4) Ἡ διάμετρος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,5 μ., τὸ ὕψος 8,3 μ. Πόσο εἶναι τὸ Ε τῆς ἐπιφανείας του ;

5) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης εἶναι 16, 5 μ. Τὸ ὕψος της 7 μ. Πόσα χρήματα θὰ μᾶς στοιχίση νὰ τὴν ἐπιχρίσωμε μὲ τσιγκόχρωμα, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸ μέτρο στοιχίζη 12 δραχμάς ;

12. Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου

Κάμνομε μὲ τὰς ἰδίας διαστάσεις ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο ἐξ ἀλουμινίου καὶ ἕνα πρισματικό. Γεμίζομε τὸ πρῶτο μὲ νερὸ καὶ τὸ ἀδειάζομε εἰς τὸ δεύτερο. Παρατηροῦμε ὅτι καὶ τὰ δύο δοχεῖα παίρνουν τὴν αὐτὴ ποσότητα ἀκριβῶς.

Εἴπαμε ὅτι ἕνα πολύγωνο ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλον, ὅταν τοῦ διπλασιάσωμε ἀδιακόπως τὰς πλευράς, γίνεται ἕνα μὲ τὸν κύκλο. Ἔτσι, ὅταν διπλασιάσωμε ἀδιακόπως τὰς ἕδρας ἑνὸς πολυγωνικοῦ πρίσματος, θὰ γίνη ἕνα μὲ τὸν κύλινδρο. Αἱ βάσεις θὰ γίνουν κύκλος καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

Λοιπὸν κύλινδρος εἶναι ἕνα πολυγωνικὸ πρῖσμα μὲ πάρα πολλὰς ἕδρας, συνεπῶς ὁ ὄγκος του εὑρίσκεται ὅπως τοῦ πρίσματος.

Εἰς ὅλα τὰ πρίσματα ἐμάθαμε ὅτι ὁ ὄγκος των ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸν κύλινδρο.

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 1 μέτρο. Τὸ ὕψος του 3 μέτρα. Πόσα κιλὰ ἐλαίου χωρεῖ ;

Λύσις :

1) 2.1.3,14.1 : 2 = 3,14 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν.

2) 3,14.3 = 9,42 κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου.

3) 9,42.0,915 = 8.619,30 κ.μ. ἐλαίου χωρεῖ ἢ 8619 κιλὰ καὶ 30 γραμμάρια.

Ἐργασίαι. 1) Κάμετε μόνοι σας τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ;

13. Κατασκευὴ τοῦ κυλίνδρου

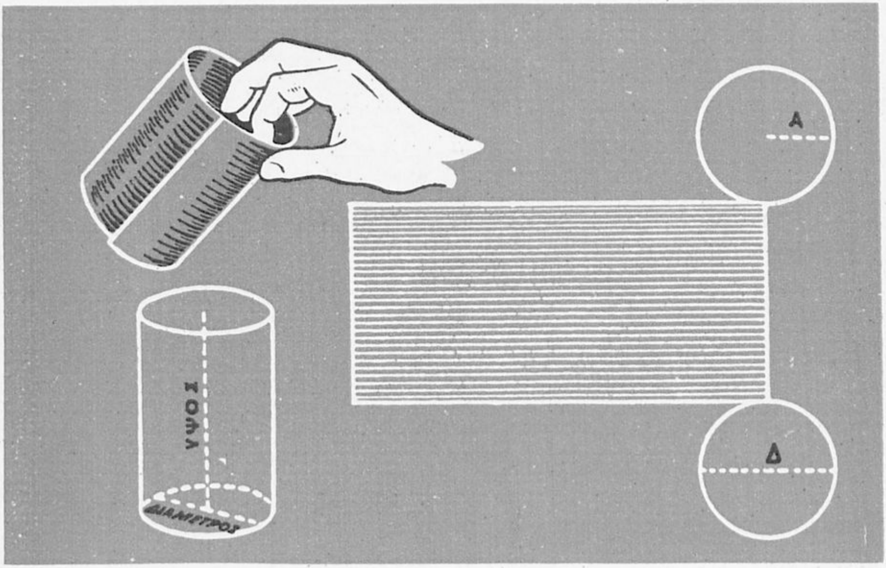
α΄ Ὁ Γιῶργος ἔκαμε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα ὀρθογώνιο. Τὴ μία πλευρὰ τὴν ἐκράτησε ἀκίνητη. Τὴν ἄλλη πλευρά, χωρὶς νὰ τὴν σπάση καθόλου, τὴν ἔφερε καὶ τὴν ἕνωσε μὲ τὴν πρώτη. Ἔκαμε καὶ δύο κυκλικὰ καπάκια ποὺ ἔχουν περιφέρεια ἴση μὲ τὴν βάσι τοῦ ὀρθογωνίου. Ἔτσι κατεσκεύασε τὸν κύλινδρο.

Κάμετε καὶ σεῖς μὲ τσίγκο, κόντρα πλακὲ ἢ χαρτόνι ἕνα κύλινδρο.

2ος τρόπος :

Ἡ Ἀλεξάνδρα δὲν ἔφυγε ἀπὸ τὸν γνωστὸ τρόπο τῆς κατασκευῆς τῶν στερεῶν γεωμετρικῶν σωμάτων.

—Ἰχνογραφῶ σὲ χαρτόνι τὸ παραλληλόγραμμο μὲ ὅσα μέτρα θέλω γιὰ βάσι. Μετρῶ μὲ τὸ διαβήτη καλὰ καὶ εὑρίσκω τὸ μέσο τῶν δύο βάσεων. Ἡ βάσις ἔχει μῆκος ὅση ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Εὑρίσκω τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Τώρα ἀπὸ τὴ βάσι τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ ἔχω βρῆ τὸ μέσον, σύρω κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ἀκτῖνα. Ἐκεῖ, ποὺ θὰ σταθῆ, εἶναι τὸ Κ. τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυκλίνδρου. Μὲ τὸν διαβήτη κάνω ἀπὸ τὸ Κ. κύκλο, ποὺ θὰ ἀκουμπήση ἕνα μέρος τοῦ τόξου του στὴ βάσι τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ ἴδιο κάνω καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς ἄλλης βάσεως τοῦ παραλληλογράμμου. Ἔτσι ἔγινε ἕνα παραλληλόγραμμο καὶ δύο κύκλοι, ποὺ ἀκουμποῦν μ᾽ ἕνα μέρος τοῦ τόξου των στὶς δύο βάσεις του. Ξεχωρίζω τὸ σχῆμα μου ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο χαρτόνι. Ξύνω λίγο τὶς ἄκρες, γιὰ νὰ παίρνουν τὴν κόλλα, καὶ διπλώνω. Ἔπειτα κατεβάζω καὶ τὰ καπάκια τῶν κύκλων, τὰ κολλῶ καὶ αὐτὰ κι ἔτσι ἔχω ἕτοιμο τὸν κύλινδρό μου.

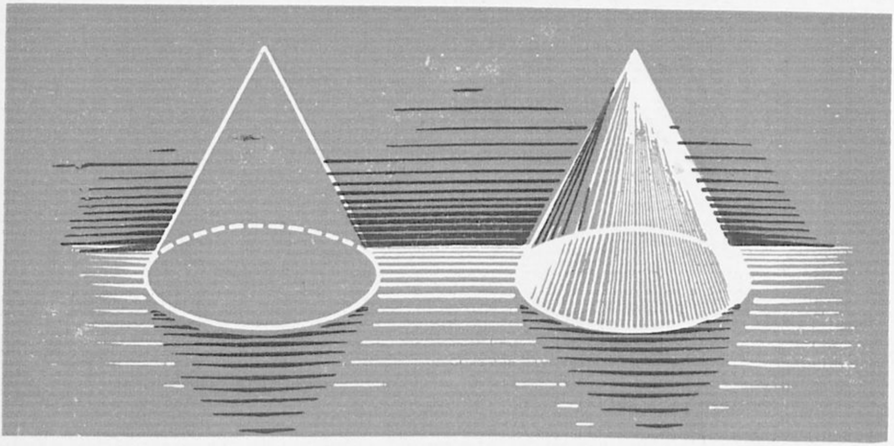


Προβλήματα : 1) Κυλινδρικὸ δοχεῖο ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,3 μ. Τὸ ὕψος του εἶναι 2,5 μ. Πόσα κιλὰ μπύρας χωρεῖ ;

2) Τὸ κυλινδρικὸ ντεπόζιτο τοῦ σιδηροδρομικοῦ σταθμοῦ Ἐδέσσης ἔχει διάμετρο βάσεως 2,3 μ. Τὸ ὕψος του εἶναι 3,35. μ. Πόσα κυβικὰ νερὸ χωρεῖ ;

3) Ἡ διάμετρος ἑνὸς φρέατος (πηγαδιοῦ) κυλινδρικοῦ εἶναι 1,65 μ. Τὸ βάθος του εἶναι 18 μ. Πόσα χρήματα ἐπληρώσαμε γιὰ νὰ τὸ ἀνοίξωμε, μὲ 225 δραχμὰς τὸ κυβ. μέτρο ;

4) Θέλει ὁ λαδέμπορος κ. Γεωργαντᾶς νὰ κάνη δοχεῖο κυλινδρικὸ νὰ χωρῆ 900 κιλὰ μὲ ὕψος 3,5 μ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του ;



Β΄ ΚΩΝΟΣ

1. Γενικὴ ἐπισκόπησις

α΄ Τὶ εἶναι κῶνος

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλε ἀπὸ τὸ κιβώτιο ἕνα ἄλλο στερεὸ σῶμα.

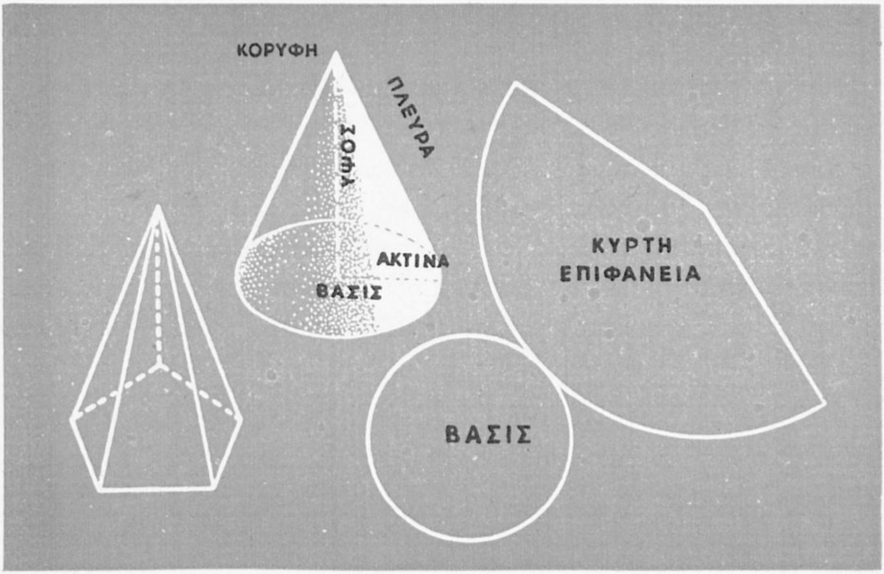
Ὁ Νῖκος εἶπε, ὅτι τὸ στερεὸ αὐτὸ σῶμα ὁμοιάζει μὲ τὰ χωνιά. Τὸ σῶμα λοιπὸν αὐτὸ λέγεται *κῶνος*.

Παρατηρήσεις. Ὁ Ἀλέκος λέγει : Τὸ σῶμα αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ μία *μεικτὴ* ἐπιφάνεια. Ἡ βάσις εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια καὶ εἰς αὐτὴν στηρίζεται. Ἡ παράλευρος ἐπιφάνειά του εἶναι *κυρτὴ* ἐπιφάνεια καὶ τελειώνει εἰς *κορυφήν*, ποὺ εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς βάσεως. Ἡ κάθετος γραμμή, ποὺ ἐννοοῦμε ἀπὸ τὴν κορυφὴ ἕως τὴν βάσι, εἶναι τὸ *ὕψος* τοῦ κώνου, καὶ λέγεται *ἄξων*. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν κορυφὴ εἰς ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του λέγεται πλευρὰ τοῦ κώνου

ΚΑΝΩΝ. — Κῶνος λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖο ἔχει γιὰ βάσι ἕνα κύκλο καὶ μία παράπλευρο ἐπιφάνεια κυρτή, ἡ ὁποία τελειώνει εἰς κορυφήν.

β΄ Κατασκευὴ κώνου.

Ὁ Γιάννης τὴν ἄλλη ἡμέρα εἶχε κάμει ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κῶνον. Ἀνοίξαμε αὐτὸν καὶ ἔγινε τὸ ἀνάπτυγμά του.



Ἡ Εὐθυμία τότε λέγει : — Γιὰ νὰ κάμωμε κῶνο, πρῶτα κάμνομε ἕνα κύκλο μὲ ὅση θέλομε ἢ μᾶς εἰποῦν περιφέρεια. Ἔπειτα ἕνα κυκλικὸ τομέα. Τὸ τόξο τῆς βάσεώς του κανονίζομε μὲ τὸν διαβήτη ὥστε νὰ ἔχη μῆκος ὅσο ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου. Βάζομε τὸ τόξο ἐπάνω στὸν κύκλο καὶ ἑνώνομε τὶς ἄκρες του.

Ἐργασίαι : 1) Κάμετε καὶ σεῖς κῶνο ἀπὸ χαρτόνι, σύρμα, τσίγκο, πηλό, μουσαμᾶ κ.λ.π.

2) Εὕρετε καὶ ὀνομάσετε κωνικὰ σώματα, ποὺ μεταχειριζόμεθα εἰς τὴν ζωή μας, ἢ φυσικὰ τοιαῦτα.

γ΄ Ἐμβαδὸν τοῦ κώνου

— Ὅσα χρειάζονται γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κώνου βγαίνουν μόνα τους, λέγει ὁ Τέλης.

— Ὁ Κῶνος μου ἔχει βάσι κύκλου. Ξεύρομε πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἐπίσης ἔχει μία κυρτὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ὅταν ἀναπτύχθηκε ἔγινε κυκλικὸς τομεύς. Ξέρομε πάλι, πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

Λοιπὸν ἀπομένει νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως (κύκλου), τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας (κυκλικοῦ τομέως) καὶ νὰ τὰ προσθέσωμε.

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 0,4μ. ἡ πλευρά του 1,2 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

1) $0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 = 0{,}5024$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεως τοῦ κώνου.

2) $0{,}8 \times 3{,}14$ (περιφ.) $\times 1{,}2 = 1{,}5072$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

3) $0{,}5024 + 1{,}5072 = 2{,}0096$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ἐργασίαι : 1) Κάμετε μόνοι σας τὸν κανόνα : Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ;

2) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ;

Προβλήματα: 1) Ἡ ἀκτὶς κυλινδρικῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 2 μ. Ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου εἶναι 7 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ;

2) Ἡ διάμετρος τῆς κυκλικῆς βάσεως μιᾶς στέγης εἶναι 0,9 μ., ἡ πλευρὰ τῆς στέγης εἶναι 9 μ. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμε, γιὰ νὰ τσιμεντοστρώσωμε τὴ βάσι, ἐὰν κάθε τετραγωνικὸ στοιχίσῃ 35 δραχμάς ; Καὶ πόσα γιὰ νὰ ἀσπρίσωμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια, μὲ 5 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

3) Θέλομε νὰ κάνωμε μία κωνικὴ σκηνὴ μὲ περιφέρεια βάσεως 5 μ. Ἡ πλευρά της νὰ εἶναι 3,50 μ. Πόσα μέτρα καραβόπανο θὰ χρειασθοῦμε γιὰ τὴν παράπλευρο ἐπιφάνεια ; Καὶ πόσα μέτρα ψάθες γιὰ τὴν ἐπίστρωσι τῆς βάσεως ;

δ΄ Ὄγκος τοῦ κώνου

Παίρνομε ἕνα δοχεῖο κωνικὸ καὶ τὸ γεμίζομε νερό. Ἔπειτα ἀδειάζομε τὸ νερὸ εἰς ἕνα δοχεῖο κυλινδρικό, μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσι. Θὰ παρατηρήσωμε ὅτι πρέπει νὰ ἀδειάσωμε εἰς τὸ κυλινδρικὸ δοχεῖο 3 φορὰς γεμάτο τὸ κωνικό. Ἢ τὸ δοχεῖο τὸ κυλινδρικὸ μὲ ἴσο ὕψος καὶ βάσι μὲ τὸ κωνικό, θὰ γεμίση τρεῖς φορὰς τὸ κωνικό.

Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εὑρίσκεται ὅπως τοῦ κυλίνδρου, ἀλλὰ εἶναι κατὰ τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερος. Καὶ διὰ συντομία: ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ 3.

Παρατήρησις. Ὁ Σωτήρης ἐνεθυμήθη τὴν πυραμίδα. — Προχθὲς ἐσυγκρίναμε τὸ πρῖσμα μὲ τὸν κύλινδρο καὶ τὰ εὑρήκαμε ὅτι εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς διαστάσεις. Ἐπίσης ὅτι τὸ πρῖσμα γίνεται κύλινδρος, ὅταν διπλασιάζωμε ἀδιακόπως τὰς πλευράς του.

Ἔτσι παίρνομε μία πυραμίδα καὶ τὴ βάσι της ἐγγράφουμε εἰς κύκλον καὶ διπλασιάζομε ἀδιακόπως τὰς πλευράς της. Θὰ καταντήση ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς της νὰ γίνη ἴση μὲ τὴν πριφέρεια τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος αὐτὸς θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύκλο τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος θὰ καταντήση, ἀπὸ τεθλασμένη, κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

— Λοιπὸν ὅπως τὸ πρῖσμα θὰ γίνη κύλινδρος, ἔτσι καὶ ἡ πυραμίδα κῶνος.

— Αὐτὸ ἂς τὸ δοκιμάσωμε, λέγει ὁ διδάσκαλος.

— Νά, μία πυραμὶς καὶ αὐτὸς ὁ κῶνος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσι.

— Γέμισέ τα νερό, Ἀλίκη.

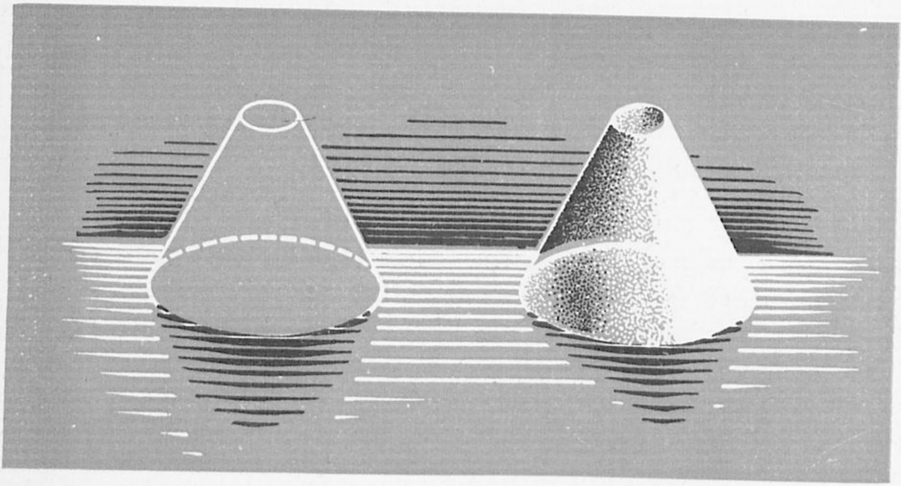
Ἡ Ἀλίκη γεμίζει πρῶτο τὸν κῶνο καὶ ἔπειτα τὸν ἀδειάζει εἰς τὴν πυραμίδα. Οὔτε μία σταγόνα περισσότερο ἢ ὀλιγώτερο ἐχώρεσε ἡ πυραμίς. Ἔτσι ἐφθάσαμε νὰ συνταυτίσωμε πυραμίδα καὶ κῶνο. Ὅ,τι ἐκάναμε γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος, κάμνομε καὶ γιὰ τὸν κῶνο.

Ἐρωτήσεις: 1) Πῶς εὑρίσκομε τὸν ὄγκο κώνου ; Γράψετε τὸν κανόνα.

Προβλήματα: 1) Ἕνα κωνικὸ δοχεῖο ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,6 μ. καὶ ὕψος 2,5 μ. Πόσα κιλὰ οἰνοπνεύματος χωρεῖ ;

2) Ἕνας κῶνος ἔχει διάμετρο βάσεως 0,5 μ. καὶ ὕψος 1,6 μ.μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ; Πόσο ἔλαιον χωρεῖ ;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κωνικοῦ ὑψώματος εἶναι 1.735. μ. Τὸ ὕψος του 265 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καὶ πόσα κιλὰ σιδηρομεταλλεύματος θὰ βγάλωμε, ὅταν ὁλόκληρο τὸ ὕψωμα εἶναι ἐκ σιδηροπυρίτου ;



2. Κόλουρος κῶνος

α΄. Τί εἶναι κόλουρος κῶνος

Ὁ διδάσκαλος ἔβγαλε ἀπὸ τὸ κιβώτιο ἕνα ἄλλο στερεό σῶμα. Τὰ παιδιὰ δὲν ἐδυσκολεύθησαν νὰ καταλάβουν τί σῶμα ἦτο.

— Κόλουρος κῶνος, εἶπαν.

Τὰ παιδιὰ ἐξετάζουν τὸν κόλουρο κῶνο :

— Τὸ σχῆμα αὐτὸ ὁμοιάζει μὲ τὸν κῶνο.

— Ἔχει ὅμως μιὰ τομὴ (κόψιμο) κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή, ὁριζοντία πρὸς τὴν βάσι τοῦ κώνου.

Ἀλίκη — Ἑλένη.— Ἐμεῖς ἐκάμαμε ἕνα κῶνο καὶ τὸν ἐκόψαμε μ᾽ ἕνα μαχαίρι ὁριζόντια. Τὸ κομμάτι τὸ ἕνα ἔχει καὶ τὴν κορυφὴ μαζί του. Εἶναι μάλιστα καὶ τέλειος κῶνος. Τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἔμεινε ἀπὸ τὴ βάσι ὡς τὸ κόψιμο, εἶναι κόλουρος κῶνος.

— Τὸ ἀμπαζοὺρ εἶναι κόλουρος κῶνος, ἡ δακτυλήθρα, τὰ ποτήρια, οἱ γλάστρες.

— Ὁ Κόλουρος κῶνος ἔχει *τρεῖς ἐπιφάνειες, δύο κυκλικὲς καὶ μία κυρτή.*

— Οἱ κυκλικὲς ἐπιφάνειες λέγονται βάσεις. Εἶναι παράλληλες μεταξύ τους, ἀλλ' ἄνισες.

— Ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εἶναι μεικτή.

— Ὕψος, λέγεται ἡ εὐθεῖα (ἄξων), ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων.

— Πλευρά, ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὶς περιφέρειες τῶν δύο κύκλων.

— Γιὰ βάσι τοῦ κώνου παίρνομε τὸν μεγαλύτερο κύκλο του.

Ἐργασίαι : Κάμετε ἕνα κόλουρο κῶνο ἀπ' ὅ,τι θέλετε. Ἡ Ἀλίκη καὶ ἡ Ἑλένη μᾶς εἶπαν πῶς γίνεται.

Ἐρωτήσεις : Τὶ λέγετε κόλουρος κῶνος ;

β' Ἐμβαδὸν τοῦ κολούρου κώνου

Ὁ Σωτήρης ἄνοιξε τὸν κόλουρο κῶνο του. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του, ὁμοιάζει, λέγει, μὲ τραπέζιο.

Ἔτσι ἐφθάσαμε στὴν ἴδια ἐργασία μὲ τὴν κόλουρο πυραμίδα.

— Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος διὰ 2. Βάσεις ὅμως στὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κολούρου κώνου εἶναι αἱ περιφέρειαι τῶν δύο κύκλων του. Ἔτσι γιὰ νὰ εὕρωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐπιφανειῶν του ἐπὶ τὴν πλευρά του καὶ διαιροῦμε διὰ 2. Διὰ νὰ εὕρωμε ὅλο τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, θὰ εὕρωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κύκλων του καὶ θὰ προσθέσωμε τὰ τρία ἐμβαδά.

Παράδειγμα. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει πλευρὰ 5 μ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγάλου κύκλου εἶναι 4 μ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ 2 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

2.4.3,14 = 25,12 μ. εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ μεγάλου κύκλου του.

2.2.3,14 = 12,56 μ. εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ μικροῦ κύκλου του.

37, 68 μ. εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο κύκλων.

$$\text{Α}' \quad \frac{37{,}68.5}{2} = 94{,}20$$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.

$$\text{Β}' \quad \frac{25{,}12.4}{2} = 50{,}24$$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μικροῦ κύκλου.

$$\text{Γ}' \quad \frac{12{,}56.2}{2} = 12{,}56$$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροῦ κύκλου.

157,00 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.

Ἐρωτήσεις : Πῶς εὑρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κολούρου κώνου ;

Προβλήματα : 1) Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἀπὸ ἕνα ἀμπαζούρ εἶναι ἡ μία 0,08 μ. καὶ ἡ ἄλλη 0,02 μ. Ἡ πλευρά του εἶναι 0,12 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

2) Αἱ διάμετροι τῶν βάσεων μιᾶς γλάστρας εἶναι 0,4 καὶ τῆς ἄλλης 0,15 μ. Ἡ πλευρά της εἶναι 0,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας της ;

3) Κάμετε καὶ σεῖς δύο παρόμοια προβλήματα.

γ' Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου, εὑρίσκομε τὸν ὄγκον τοῦ τελείου κώνου. Ἔπειτα ἀφαιροῦμε τὸν ὄγκον τοῦ κώνου ποὺ λείπει. Διότι ὁ κῶνος, ποὺ λείπει, εἶναι τέλειος πάλι, μὲ κορυφὴ καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα ποὺ τὸν κάμνουν ἀκριβῆ καὶ ηὑξεύρομε εὐκόλως τὴν εὕρεσι τοῦ ὄγκου του

Ἕνας ὅμως ἀκριβὴς τρόπος, ὅταν δὲν ἔχωμε εἰς τὰ χέρια μας τὸ μέρος τοῦ κώνου, ποὺ λείπει, εἶναι ὁ ἑξῆς :

Πολλαπλασιάζομε τὴν ἀκτῖνα τοῦ μεγάλου κύκλου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της. Ἐπίσης καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροῦ κύκλου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της. Ἔπειτα τὴ μεγάλη ἐπὶ τὴ μικρή. Προσθέτομε τὰ τρία γινόμενα, καὶ ὅ,τι εὑρίσκομε τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος, ἐπὶ τὸ 3,14 καὶ διαιροῦμε ὅλα αὐτὸ διὰ 3.

Νὰ καὶ ὁ τύπος : $$\frac{\text{Α.Α.} + \text{α.α.} + \text{Α.α.υ.}\ 3{,}14}{3}$$

Παράδειγμα. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει Α (ἀκτῖνα τοῦ μεγάλου κύκλου του) 2 μ., α (ἀκτῖνα τοῦ μικροῦ κύκλου του) 0,4 μ. καὶ ὕψος 0,8 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

$$\frac{2.2 + 0{,}4.0{,}4 + 2.0{,}4.0{,}8.3{,}14}{3}$$

Πράξεις

α)
$2 \times 2 = 4$
$0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$
$2 \times 0{,}4 = 0{,}8$

4,96 Εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

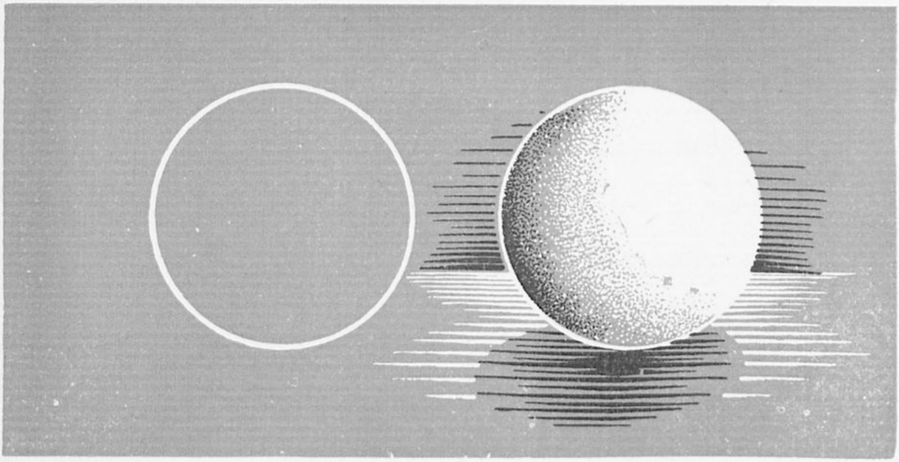
β)
$4{,}96 \times 0{,}8 = 3.688.$
$4{,}698 \times 3{,}14 = 12{,}459$
$12{,}459 : 3 = 4{,}153.17$ κ. μ.

Προβλήματα : 1) Θέλω νὰ κάμω ἕνα δοχεῖο σχήματος κολούρου κώνου γιὰ νὰ μεταφέρω ἔλαιον. Ὁ κύκλος τῆς βάσεως νὰ ἔχῃ διάμετρο 2,4 μ. Ὁ ἄλλος 0,8. μ. Τὸ ὕψος του νὰ εἶναι 1,5 μ. Πόσα κυβικὰ ἔλαιον θὰ χωρῇ ;

2) Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 6 μ., ἡ ἄλλη 1,5 μ. Τὸ ὕψος του εἶναι 7 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα νεροῦ χωρεῖ ;

3) Πόσα κυβικὰ μέτρα ξυλείας ἔχει ἕνας κορμὸς δένδρου, ποὺ ἡ μία βάσις του ἔχει περιφέρεια 5 μ., ἡ ἄλλη 1 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 12 μέτρα ;

4) Κάμετε δύο ἰδικά σας παρόμοια προβλήματα.



Γ΄ ΣΦΑΙΡΑ

α΄ Σώματα σφαιρικά.

Ἡ μπάλα, τὰ διάφορα τόπια, οἱ βόλοι, ὡρισμένα προρτοκάλλια, καρπούζια, οἱ μπίλιες τοῦ μπιλιάρδου, ὡρισμένοι γλόμποι πολυφώτων, ἡ γῆ, ἡ ὑδρόγειος σφαῖρα τοῦ σχολείου μας, ὅλα αὐτὰ τὰ σώματα λέγονται σφαιρικὰ σώματα.

β΄ Ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.

Παρατηροῦμε ἕνα τόπι. Τώρα στέκεται εἰς ἕνα μέρος τῆς ἐπιφανείας του, τὸ σημειώνομε. Τὸ κυλοῦμε. Βλέπομε, ὅτι ἐστάθη εἰς ἄλλο. Ὥστε ἡ σφαῖρα δὲν ἔχει ὡρισμένη βάσι, διότι ἡ *ἐπιφάνειά της εἶναι μία καὶ ὅλη κυρτή*.

γ΄ Τομὴ τῆς σφαίρας.

Ὁ διδάσκαλος ἄνοιξε τὴ σφαῖρα καὶ ἐχωρίσθη εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἡ τομὴ (τὸ κόψιμο) ἐπαρουσίασε δύο κύκλους. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἔχουν ἐπίπεδο ἐπιφάνεια. Ἐκόψαμε καὶ ἕνα ὁλοστρόγγυλο πορτοκάλλι, ὄχι ὅμως εἰς τὸ μέσον. Πάλι τὸ κόψιμο ἐπαρουσίασε κύκλο, ἀλλὰ μικρότερον.

— Ὅσες τομὲς καὶ ἂν κάνωμε στὴ σφαῖρα, θὰ γίνουν κύκλοι.

δ΄ Μέγιστος κύκλος.

Κόπτομε τώρα τὸ πορτοκάλλι ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον. Βλέπομε, ὅτι ὁ κύκλος ποὺ ἔγινε, εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐξ ὅλων.

Ὥστε, ὅταν ἡ τομὴ γίνῃ εἰς τὸ μέσον, ὁ κύκλος αὐτὸς εἶναι ὁ μεγαλύτερος. Αὐτὸς λέγεται *μέγιστος κύκλος*. Ὅσον ἡ τομὴ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸ μέσον, τόσον ὁ κύκλος εἶναι μικρότερος.

ε΄ Ἡμισφαίρια

Ὁ μεγαλύτερος κύκλος τῆς τομῆς τῆς σφαίρας χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη. Αὐτὰ λέγονται *ἡμισφαίρια*. Ἔτσι ὁ Ἰσημερινὸς εἶναι ὁ μέγιστος κύκλος τῆς γηίνης σφαίρας, ὁ ὁποῖος χωρίζει τὴ γῆ εἰς δύο ἡμισφαίρια, τὸ Βόρειο καὶ τὸ Νότιο. Σὲ κάθε σφαῖρα ἕνας μόνο μέγιστος κύκλος ὑπάρχει, ἀπὸ ὁποιοδήποτε μέρος ἂν κόψωμε τὴ σφαῖρα. Ὅσοι κύκλοι δὲν περνοῦν ἀπὸ τὸ μέσον τῆς σφαίρας λέγονται μικρότεροι.

στ΄ Κέντρον τῆς σφαίρας.

Εἴδαμε ὅτι ὁ μέγιστος κύκλος χωρίζει τὴ σφαῖρα εἰς δύο ἡμισφαίρια. Ἡ τομὴ ἔχει κυκλικὴ ἐπιφάνεια. Τὸ κέντρον τοῦ μεγίστου κύκλου εἶναι καὶ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας. Ὅπως ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρο, ἔτσι καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρο της. Κέντρο λοιπὸν εἶναι τὸ μέσον ἀκριβῶς τῆς σφαίρας.

Τί λέγεται λοιπὸν σφαῖρα; Ὁ Θανάσης ἔδωσε τὸν καλύτερο ὁρισμό:

Σφαῖρα λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖο περικλείεται ἀπὸ μία μόνον κυρτὴν ἐπιφάνεια, ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα της ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τό κέντρο.

ζ΄ Ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Κάθε ἀκτὶς τοῦ μεγίστου κύκλου ἑνώνει τὸ κέντρον του μὲ ἕνα σημεῖο τῆς περιφερείας του. Ἔτσι κάθε εὐθεῖα γραμμή, ποὺ ἑνώνει ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μὲ τὸ κέντρον, λέγεται *ἀκτίς*. Ὅπως στὸν κύκλο ἔτσι καὶ στὴν σφαίρα ὑπάρχουν πάρα πολλαὶ ἀκτῖνες. Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἔτσι καὶ ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ὁ Σωκράτης τότε εἶπε:

— Ἀπὸ τὴν σφαῖρα αὐτὴ (κι ἔδειξε τὴν σφαῖρα τοῦ σχολείου), συμπεραίνομε, ὅτι ὅλοι οἱ τόποι τῆς Γῆς ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον της. Ἔτσι καὶ ἡ Ἀμερικὴ καὶ ἡ Ἀσία καὶ ἡ Εὐρώπη καὶ ἡ Ἀφρικὴ καὶ ἡ Αὐστραλία καὶ γενικὰ κάθε γωνιὰ τῆς Γῆς, ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρο της.

η΄ Διάμετρος τῆς σφαίρας.

Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρο λέγεται στὸν κύκλο διάμετρος. Τὸ ἴδιο καὶ στὴ σφαῖρα: Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της λέγεται *διάμετρος*. Ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὅπως καὶ τοῦ κύκλου. Ἐπίσης ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος της. Εἰς κάθε σφαῖραν δυνάμεθα νὰ σύρωμε πολλὰς διαμέτρους.

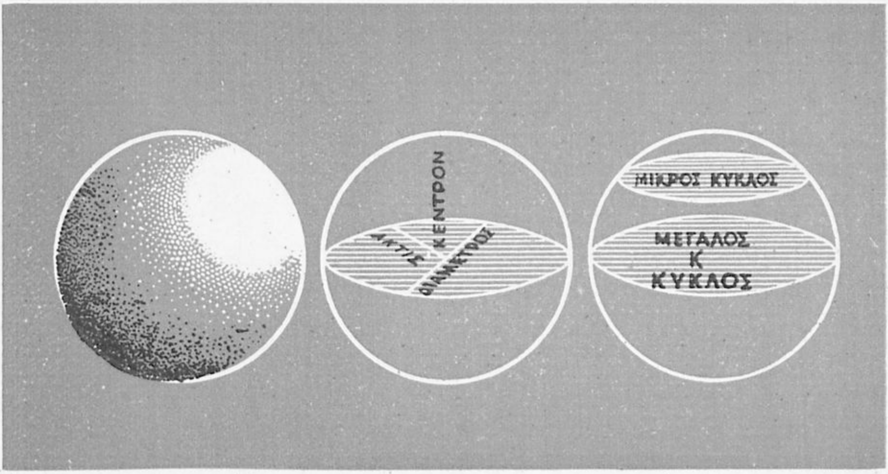
Ἔτσι οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, τὴν αὐτὴ ἀκτῖνα καὶ τὴν αὐτὴ διάμετρο μὲ τὴ σφαῖρα των.

Παρατήρησις. Αἱ ἀκτῖνες καὶ αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας σχηματίζονται κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο μὲ τοῦ κύκλου. Ἀλλὰ ἀντὶ νὰ λέγωμε ὅπως καὶ τοῦ κύκλου *περιφέρεια*, στὴ σφαῖρα θὰ λέγωμε *ἐπιφάνεια*.

θ΄ Ἄξων

Ἡ γῆ εἴπαμε ὅτι εἶναι μία πελωρία σφαῖρα. Φανταζόμεθα μία διάμετρο, γύρω ἀπὸ τὴν ὁποία στρέφεται ἡ γῆ *ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολάς*. Ἡ διάμετρος αὐτή, ποὺ περνᾷ φυσικά, ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς γῆς, λέγεται *ἄξων*.

— Νά, λέγει ὁ Φάνης. Ἐπέρασα ἀπὸ τὸ ὁλοστρόγγυλο πορτοκάλλι μου, αὐτὸ τὸ ξύλο. Αὐτὸς εἶναι ὁ ἄξονας. Ἔτσι ἐμάθαμε στὴ Γεωγραφία ὅτι στρέφεται ἡ γῆ. Ἀπὸ τὴν Δύση στὴν Ἀνατολή. Τὸ γύρο αὐτὸ τὸν κάνει σὲ 24 ὧρες. Τὸ ἕνα ἄκρο τοῦ ἄξονα λέγεται Βόρειος Πόλος. Τὸ ἄλλο, Νότιος Πόλος.



— Οἱ μέγιστοι κύκλοι, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τοὺς δύο πόλους τῆς γῆς λέγονται *μεσημβρινοί*, γιατί, ὅταν ὁ ἥλιος κατὰ τὴν περιστροφὴ τῆς γῆς βρεθῆ ἐπάνω σὲ καθένα ἀπ' αὐτούς, ὅλοι οἱ τόποι τους ἔχουν μεσημβρία. Οἱ ἄλλοι, ποὺ εἶναι στὸ ἄλλο, στὸ ἀπέναντι ἡμισφαίριο, ἔχουν μεσάνυχτα. Ὡς πρῶτο μεσημβρινὸ ποὺ ἐπῆραν οἱ ἐπιστήμονες γιὰ βάσι, εἶναι αὐτὸς ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ Γκρήνουϊτς. Ἐκεῖ εὑρίσκεται καὶ τὸ μεγαλύτερο ἀστεροσκοπεῖο τοῦ κόσμου.

— Ἡ ἀπόστασις κάθε μεσημβρινοῦ ἀπὸ τὸν πρῶτο λέγεται, στὴ Γεωγραφία γεωγραφικὸ μῆκος. Ὅταν ἡ ἀπόστασις εἶναι πρὸς τὰ δυτικά, δυτικό. Ὅταν πρὸς τὰ ἀνατολικά, ἀνατολικό. Ὁ πρῶτος μεσημβρινὸς χωρίζει τὴ γῆ ἀκριβῶς σὲ δύο ἡμισφαίρια. Ἀνατολικὸ καὶ Δυτικό. Ἔτσι ἔχομε 180 μεσημβρινοὺς ἀνατολικά, 180 δυτικά. Ἐνῶ ὁ μέγιστος κύκλος, ποὺ εἶναι κάθετος στὸν ἄξονα τῆς γῆς, λέγεται Ἰσημερινός. Αὐτὸς χωρίζει τὴ γῆ στὸ Βόρειο καὶ Νότιο ἡμισφαίριο. Οἱ δὲ τόποι, ποὺ βρίσκονται ἐπάνω σ' αὐτόν, ἔχουν ἰσημερία.

—Ἀπὸ αὐτὸν ἕως τὸν Βόρειο πόλο ἔχομε 90°. Καὶ ἀπὸ αὐτὸν ἕως τὸν Νότιον πάλι 90° ἢ 90 παραλλήλους κύκλους πρὸς τὸν Ἰσημερινό. Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς παραλλήλου ἀπὸ τὸν Ἰσημερινό, λέγεται γεωγραφικὸ πλάτος. Ἐπειδὴ ἡ γῆ χωρίζεται σὲ δύο ἡμισφαίρια, ἀπὸ τὸν Ἰσημερινό, τὸ Βόρειο καὶ Νότιο, ἔχομε βόρειο γωγραφικὸ πλάτος καὶ νότιο γεωγραφικὸ πλάτος.

ι΄ Πῶς ὁρίζομε τὴ θέσι ἑκάστου σημείου τῆς γῆς.

Εἴπαμε, ὅτι ὁ μέγιστος κύκλος, κάθετος εἰς τὸν ἄξονα τῆς γῆς, λέγεται Ἰσημερινός. Ὅπως κάθε κύκλος, ἔτσι καὶ ὁ Ἰσημερινὸς ἔχει 360°. Ἐχώρισαν λοιπὸν τὸν Ἰσημερινὸ εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰς μοίρας· ἐχάραξαν ἡμικύκλια, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως καὶ ἀπὸ τοὺς δύο πόλους. Ἔτσι ἔγιναν 360 μεσημβρινοί.

Ὥστε μία μοῖρα ἀντιστοιχεῖ εἰς κάθε μεσημβρινόν. Ἡ μία μοῖρα εἶναι τὸ 1 /36 τοῦ Ἰσημερινοῦ τῆς γῆς. Ὁ Ἰσημερινὸς ἔχει 40.000.000 μ. Ἡ μία μοῖρα θὰ ἔχῃ 111.111 μ. ἢ 111,111 χιλιόμετρα. Ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ ἑνὸς μεσημβρινοῦ ἀπὸ τοῦ ἄλλου εἶναι 111,111 χιλιόμετρα. Ἐπάνω στὴν ὑδρόγειο σφαῖρα ἔχει χαραχθῆ ὁ Ἰσημερινός, 90 παράλληλοι ἢ μοῖραι ἀπὸ τὸν Ἰσημερινὸ στὸν Νότο καὶ 90 ἀπὸ τὸν Ἰσημερινὸ πρὸς Βορρᾶ (δηλ. Βόρειον Πόλο). Ἐπίσης ἀπὸ τὸν Α. μεσημβρινὸ ἕως τὸ τέλος τοῦ Δυτικοῦ ἡμισφαιρίου 180° ἢ μεσημβρινοί. Καὶ ἄλλοι 180° ἢ μεσημβρινοὶ μέχρι τοῦ τέλους τοῦ Ἀνατολικοῦ ἡμισφαιρίου. Εἰς τὸ πρῶτο μεσημβρινὸ τοῦ Γκρήνουϊτς δίδομε ἀριθμὸ 0.

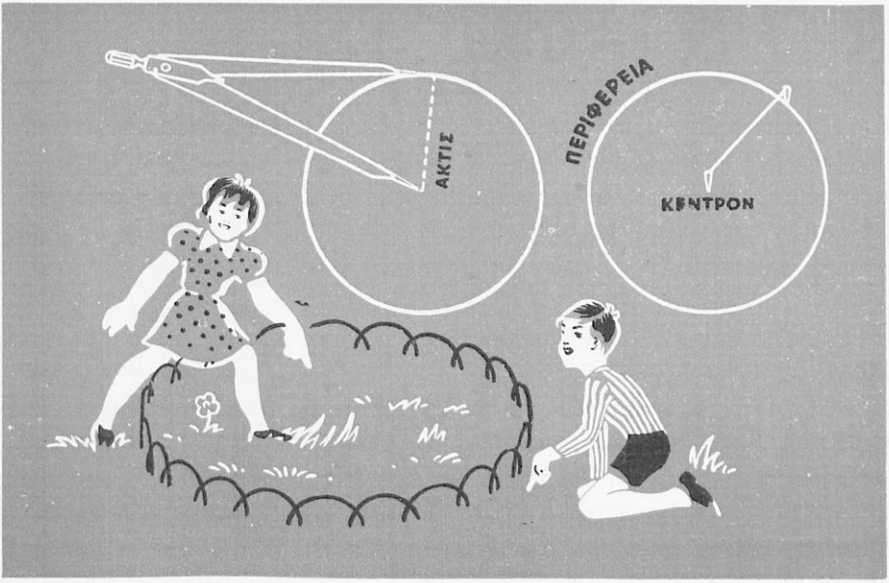
Τώρα πλέον δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμε ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς γῆς, ἀρκεῖ νὰ μᾶς δώσουν γεωγραφικὸ μῆκος καὶ πλάτος. Ἐπίσης γνωρίζομε μὲ ἀκρίβεια τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἑνὸς σημείου τῆς γῆς ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Παράδειγμα. 1) Αἱ Ἀθῆναι εὑρίσκονται εἰς τὸ 38ον βόρειον παράλληλον, ἡ Ἄγκυρα εἰς τὸ 40όν. Αἱ Ἀθῆναι ὅμως εὑρίσκονται καὶ εἰς τὸ 24 Ἀνατολικὸ Μῆκος, ἐνῶ ἡ Ἄγκυρα εἰς 33, 5 Α.Μ. Πῶς θὰ εὕρω στὸ χάρτη μὲ ἀκρίβεια, ποῦ εἶναι αἱ Ἀθῆναι καὶ ποῦ ἡ Ἄγκυρα ; Τὸ παράδειγμα ἠδύνατο νὰ γραφῆ μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα, ἔτσι :

Ἀθῆναι 38° Β.Π. (βόρειον πλάτος) 24° ΑΜ. (ἀνατολικὸν μῆκος). Ἄγκυρα 40° ΒΠ 33,5°. Α.Μ. Πῶς θὰ εὕρω στὸ χάρτη μὲ ἀκρίβεια, ποῦ εἶναι αἱ Ἀθῆναι καὶ ποῦ ἡ Ἄγκυρα ;

Ὁ Σωτήρης λέγει : Νά, κάτω καὶ ἐπάνω ἀπὸ τὸ χάρτη σημειώνεται μὲ μοῖρες τὸ γεωγραφικὸ μῆκος καὶ δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τὸ γεωγραφικὸ πλάτος.

— Λοιπὸν εὑρίσκω στὰ ἀριστερὰ τὸν ἀριθμὸ 38°. Ἀπὸ κάτω ἢ ἐπάνω εὑρίσκω τὸν ἀριθμὸ 24°. Α.Μ. Σύρω εὐθεῖα γραμμὴ πρὸς τὰ ἐπάνω, ἕως ὅτου



συναντήσω τὸν 38 παράλληλο. Στὸ σημεῖο τῆς συναντήσεως ἀκριβῶς, εἶναι αἱ Ἀθῆναι. Ἡ Εὐθυμία :

—Δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ηὗρα τὸ 40°, ἐπάνω ἢ κάτω, ὅλο δεξιὰ (διατὶ εἶναι ἀνατολικὸ μῆκος) ηὗρα τὸ 33,5. Τραβῶ ἴσα πρὸς τὰ ἐπάνω, ἐδῶ συναντῶ τὸν 50° παράλληλο, εἶναι ἡ Ἄγκυρα.

Ἀσκήσεις : 1) Τὸ Παρίσι ἔχει 2,5° Α.Μ. 48° Β.Π. Εὕρετε στὸ χάρτη ἢ σφαῖρα ποῦ ἀκριβῶς εὑρίσκεται ;

2) Ἡ Λισσαβὼν ἔχει 9,2° Δ.Μ. καὶ 38,5° Β.Π. Ποῦ εὑρίσκεται ;

3) Τὸ Κάϊρον τὶ γεωγραφικὸ πλάτος καὶ μῆκος ἔχει ;

4) Ποιὰ εἶναι ἡ πρωτεύουσα τῆς Αὐστραλίας καὶ τὶ γεωγραφικὸ μῆκος καὶ πλάτος ἔχει ;

5) Ἡ πρωτεύουσα τῆς Νορβηγίας Ὄσλο τὶ γεωγραφικὸ πλάτος καὶ μῆκος ἔχει ;

6) Αἱ Ἀθῆναι μὲ τὴν Σμύρνην εὑρίσκονται εἰς τὸν αὐτὸν παράλληλον. Διαφέρουν ὅμως κατὰ 4 μοίρας γεωγραφικοῦ μήκους. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν μεταξύ των ;

ια΄. Πῶς κανονίζομε περίπου τὴν ὥρα.

Ὅπως ἡ γῆ γυρίζει γύρω ἀπὸ τὸν ἥλιο, θὰ ρίψη διαδοχικῶς ἐπάνω του τοὺς 360 μεσημβρινούς της εἰς 24 ὥρας. Ἔτσι εἰς μία ὥρα ὁ ἥλιος θὰ πέση κατακορύφως ἐπάνω εἰς 15 μεσημβρινούς. Ὥστε ἂν μία πόλις εἶναι ἐπάνω εἰς τὸν πρῶτο μεσημβρινὸ καὶ ἡ ἄλλη εἰς τὸν 15ον, θὰ ἔχουν διαφορὰ μία ὥρα μεταξύ των. Διότι ἡ πρώτη θὰ ἔχη μία ὥρα ἐνωρίτερα μεσημβρία.

— Λοιπὸν ἔτσι ἐξηγεῖται, λέγει ὁ Ἄλκης, γιατὶ ὅλοι οἱ τόποι τῆς γῆς δὲν ἔχουν μεσημέρι τὴν αὐτὴ στιγμή.

— Γι' αὐτὸ τὸ καλοκαίρι ποὺ ἐπῆγα στὴν Ἄρτα, ὁ πατέρας μου, ὅταν ἐφθάσαμε ἔβαλε τὸ ρολόγι του 12' πίσω. Βλέπετε ἡ Ἄρτα ἔχει 21° γεωγραφικὸ Μ. ἐνῶ ἡ Ἀθήνα 24°.

— Καὶ ἐγὼ πῆγα στὴν Καβάλα, λέγει ἡ Ἀλίκη, ποὺ εἶναι μακρύτερα ἀπὸ τὴν Ἄρτα, ἀλλὰ δὲν ἀλλάξαμε τὴν ὥρα μας.

— Γιὰ δὲς ὅμως, λέγει ἡ Ἑλένη, ἡ Καβάλα εἶναι στὸ ἴδιο Γ.Μ. μὲ τὴν Ἀθήνα, κανένα - δύο λεπτὰ ἴσως διαφέρει.

— Ἐγώ, λέγει ὁ Νικήτας, ἐπῆγα μὲ τὴ θεία μου στὸ Παρίσι. Ἡ θεία μου εἶναι μεγάλη μοδίστρα καὶ ἐπῆγε γιὰ φιγουρίνια καὶ μὲ πῆρε κι ἐμένα. Ἡ θεία μου ἔβαλε τὸ ρολόγι της στὸ Παρίσι 1 1/2 ὥρα πίσω. Γιατὶ θυμᾶμαι, ὅταν τὸ καλοκαίρι ἐσηκωνόμαστε τὸ πρωὶ στὶς 7, μοῦ ἔλεγε : Τώρα στὴν Ἀθήνα ἔχει βγῆ ἡ ἀδελφούλα σου. Γιατὶ περίπου ἡ ὥρα θὰ εἶναι ὀκτώμιση στὴν Ἀθήνα μας.

Ἀσκήσεις : 1) Ὅταν στὸ Λονδῖνο, ποὺ εἶναι ἐπάνω στὸν 1ον Μεσημβρινό, εἶναι ὥρα 1, τί ὥρα θὰ εἶναι εἰς τὴν Τεχεράνη, ποὺ εἶναι ἐπάνω εἰς τὸ 52Α Μεσημβρινό ; (Μετρᾶτε μὲ ὥρας 24. Ὅσας ἔχει τὸ ἡμερονύκτιον).

2) Ὅταν εἰς τὰς Ἀθήνας ἡ ὥρα εἶναι 12, τί ὥρα θὰ εἶναι : α) Εἰς τὰ Ἱεροσόλυμα ; β) Εἰς τὸ Νέο Δελχί ; γ) Εἰς τὸ Πεκῖνο ; δ) Εἰς τὸ Τόκιο ;

3) Ὅταν ἡ ὥρα εἰς τὴν Ν. Ὑόρκη εἶναι 6, τί ὥρα θὰ εἶναι εἰς τὴν Λισσαβῶνα ; Εἰς τὴν Μαδρίτην ;

4) Τί διαφορὰ ὥρας ἔχουν αἱ Ἀθῆναι ἀπὸ τὴν Ρώμην ; Ἀπὸ τὸ Βερολῖνον ; Ἀπὸ τὸ Λονδῖνο ;

ιβ. Ἐμβαδὸν σφαίρας.

Μὲ διαφόρους μετρήσεις, ποὺ ἔκαμαν οἱ γεωμέτραι, κατέληξαν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴ διάμετρο ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ ἐπὶ 3,14.

Ὁ τύπος : Ε. τῆς σφαίρας = δ.δ.3,14.

Παράδειγμα. Ἡ διάμετρος ἑνὸς σφαιρικοῦ ἀεροστάτου εἶναι 8 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του ;

Λύσις. Ε = 8.8.3,14 = 200,96 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀεροστάτου.

2ος τρόπος. Ἐπίσης οἱ γεωμέτραι ηὗραν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου της.

Ἂς λύσωμε τὸ ἴδιο πρόβλημα :

8 : 2 = 4 μ. εἶναι ἀκτὶς τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

3,14.4.4. = 50,24 εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου.

50,24.4 = 200,96 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ὁποιονδήποτε ἀπὸ τοὺς δύο τρόπους χρησιμοποιήσωμε, θὰ εὕρωμε τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Παρατηρήσεις. Ὁ Φάνης λέγει : — Ὁ κύκλος, ἀπὸ τὸ κύλινδρο καὶ δῶθε, πάρα πολὺ μᾶς ἐχρησίμευσε. Μὲ τὴ γνῶσι τοῦ κύκλου, δὲν ἐδυσκολευθήκαμε στὴ λύσι τῶν προβλημάτων καθὼς καὶ στὴ κατανόησι τῶν σωμάτων.

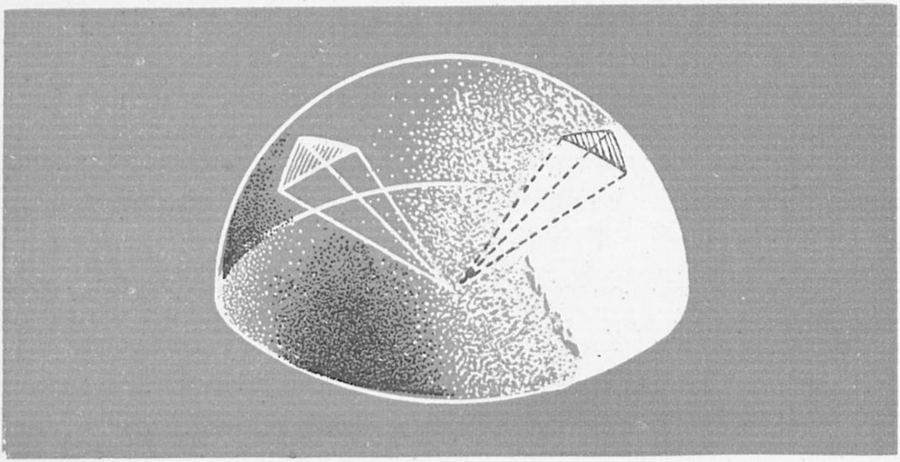
Προβλήματα : 1) Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 9,7. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

2) Πόσο ὕφασμα χρειάζεται γιὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕνα μπαλόνι σφαιρικὸ μὲ διάμετρο 23 μ. ;

3) Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας εἶναι 6,2 τ.μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ;

4) Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας ἔχει περιφέρειαν 236 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας ;

5) Κάμετε ὅλοι σας μία σφαῖρα ἀπὸ ὅ,τι θέλετε.



ιγ'. Εὕρεσις τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

Οἱ γεωμέτραι, ἔπειτα ἀπὸ πολλὰς μετρήσεις, ηὗραν ὅτι τὴ σφαῖρα δυνάμεθα νὰ τὴ χωρίσωμε εἰς πάρα πολλὰς πυραμίδας. Αἱ πυραμίδες αὐταὶ θὰ ἔχουν βάσι ἡ κάθε μία ἕνα μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ κοινὴ κορυφὴ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ὁ διδάσκαλος βγάζει ἕνα πορτοκάλλι. Χαράσσει ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνεια ἕνα τρίγωνο. Βυθίζει ἐπάνω εἰς τὰ χαράγματα βαθειὰ τὸ μαχαίρι ἕως τὸ κέντρο καὶ ἀποχωρίζει τὸ τεμάχιο. Βλέπομε πράγματι μία τριγωνικὴ πυραμίδα. Συνεχίζει ἔτσι καὶ τὸ πορτοκάλι ἔγινε ὅλο τριγωνικὲς πυραμίδες.

— Τότε λέγει ὁ Γιῶργος, *ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα διὰ 3.*

Παράδειγμα. Μία σφαῖρα σιδηρᾶ ἔχει ἀκτῖνα 2 μέτρα. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της καὶ τὸ βάρος της εἰς κιλά;

2 + 2 = 4μ. διάμετρός της.

4. 4.3,14 = 50,24 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν της.

$\frac{50,24.2}{3}$ = 33,49 κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος της ἢ 33,490 κ.π.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ σφαῖρα εἶναι ἀπὸ σίδηρο, ὁ δὲ σίδηρος ἔχει εἰδικὸν βάρος 7,6 πολλαπλασιάζω τὸν ὄγκο της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ αὐτόν.
Ἔτσι φυσικὰ ἐκάμαμε ἐξ ἀρχῆς.

33,49.7,6= 254,524 κυβ. μ. ἢ 254,524 κυβ. παλάμαι ἢ χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος τῆς σφαίρας.

Προβλήματα : 1) Ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγάλο κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

2) Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας ὑαλίνης (τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦν γιὰ πειράματα) εἶναι 0,9 μ. Πόσα κιλὰ οἰνοπνεύματος χωρεῖ ;

3) Μία συμπαγὴς σφαῖρα ἐξ ἀργύρου ἔχει ἀκτῖνα 1,2 μ. Πόσο ζυγίζει ;

4) Ἕνας σφαιρικὸς ὄγκος μολύβδου ἔχει διάμετρο 6 μέτρα. Πόσα κιλὰ ζυγίζει ;

5) Κάμετε ἕναν ἔλεγχον εἰς τὰ τετράδιά σας, μήπως σᾶς λείπει κανένας κανὼν ἀπὸ τὰ σχήματα, ποὺ ἐμάθαμε καὶ ἐκάναμε.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Μέρος πρῶτον — Α΄ Κύβος.

Β′.— Ὀρθογώνιον παραλληλεπίδεδον.

Γ′. Πλάγιο παραλληλεπίπεδον.

Δ'. Πρίσματα.

Ε' Πυραμίδες.

Γενικὴ ἀνακεφαλαίωσις.— Πολύεδρα σώματα

Μέρος δεύτερον — Α'. Κύλινδρος.

Β′. Κῶνος.

Γ′. Σφαῖρα

ΤΕΛΟΣ

'Εκ τοῦ Μονοτυπικοῦ Συγκροτήματος « Ν. ΑΛΙΚΙΩΤΗΣ & ΥΙΟΙ »
Κηφισοῦ 33, Τηλ. 522.283, 'Αθῆναι.

Τιμᾶται Δρχ. 13