Ντούζον - Παπανδρέου

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΤΑΞΙΣ ΣΤ'

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΓΡ. ΝΤΟΥΖΟΥ
ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ
1ΟΥ ΠΟΛΥΤΑΞΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ
ΜΑΡΑΣΛΕΙΟΥ ΠΑΙΔ. ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΑΝΔΡ. ΣΠ. ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ
2ΟΥ ΜΟΝΟΤΑΞΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ
ΜΑΡΑΣΛΕΙΟΥ ΠΑΙΔ. ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

**Διὰ τὴν Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξιν
τῶν Δημοτικῶν Σχολείων.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΝΕΑΣ ΔΡΑΧΜΑΣ

Ἐγκεκριμένη διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61.452/12/6/52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου τῆς Ἐθνικῆς Παιδείας

ΡΕΑ
ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ
ΑΘΗΝΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

1. Γιὰ ἐργασία μιᾶς ἑβδομάδος κάποιος ἐργάτης πῆρε 390 δραχμές. Ποιὸ ἦταν τὸ ἡμερομίσθιό του ;

2. Ἕνας βοσκὸς ἔδωσε σ᾽ ἕνα λαδέμπορο 29 ὀκάδες βούτυρο καὶ πῆρε 87 ὀκάδες λάδι. Μὲ πόσες ὀκάδες λάδι ἔχει ἀνταλλάξει τὴν ὀκὰ τὸ βούτυρο ;

3. Ἕνα σύνταγμα ἀπὸ 3.600 στρατιῶτες πρόκειται νὰ μεταφερθῆ μὲ αὐτοκίνητα στὸ μέτωπο. Ἂν κάθε αὐτοκίνητο χωρῆ 48 στρατιῶτες, πόσα χρειάζονται γι᾽ αὐτὴ τὴν μεταφορά ;

4. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ὥς τὰς Πάτρας εἶναι 216 χιλιόμετρα. Πόσες ὧρες χρειάζεται τὸ τραῖνο νὰ φθάση ἀπὸ τὴν μία πόλι στὴν ἄλλη, ἂν ἡ μέση του ταχύτης εἶναι 27 χιλιόμετρα χωρὶς σταθμούς ; Πότε θὰ φθάση, ἂν ξεκινήση στὶς 7 ἡ ὥρα τὸ πρωΐ ;

5. Δύο ἀδελφοὶ πρόκειται νὰ μοιρασθοῦν κληρονομίαν 65.800 δραχμῶν. Σύμφωνα μὲ τὴ διαθήκη τοῦ πατέρα, ὁ μεγαλύτερος ἔπρεπε νὰ πάρη 2.400 δραχμὲς περισσότερες ἀπὸ τὸν μικρότερο. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ὁ καθένας ἀδελφός ;

6. Τὸ Ἀγρίνιον εἶχε πρὸ δέκα ἐτῶν 16.429 κατοίκους. Σήμερα ὁ ἀριθμὸς τῶν κατοίκων του ἔχει μεγαλώσει κατὰ τὸ ἕνα ἕβδομο. Πόσους κατοίκους ἔχει σήμερα ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ

1. Μία οἰκογένεια πληρώνει γιὰ γάλα 31,50 δραχμὲς τὴν ἑβδομάδα. Πόσες δραχμὲς δίνει τὴν ἡμέρα καὶ πόσες θὰ δώση γιὰ ἕνα μῆνα;

2. Ἀγοράσαμε λάδι ἀπὸ 26,40 δραχμὲς τὴν ὀκὰ καὶ δώσαμε 211,20 δραχμές. Πόσες ὀκάδες πήραμε ;

3. Τὶ εἶναι προτιμότερο, ν᾽ ἀγοράσωμε μία δωδεκάδα πουκάμισα

ἀπὸ 85,70 δραχμὲς τὸ καθένα ἢ νὰ πάρωμε ὕφασμα 5 πήχεις γιὰ τὸ καθένα πουκάμισο ἀπὸ 14,50 δραχμὲς τὸν πῆχυ πληρώνοντας γιὰ τὰ δώδεκα καὶ ραπτικὰ 100 δραχμές ;

4. Μιὰ ὀκὰ φασόλια στοιχίζει 13,20 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ δώσωμε γιὰ 10 ὀκάδες ; Πόσες γιὰ 100 ὀκάδες ;

5. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε 14,50 μέτρα ὕφασμα καὶ πῆρε 246,50 δραχμές. Τὸ κέρδος του ἦταν 2,40 δραχμὲς στὸ μέτρο. Πόσες δραχμὲς ἐπώλησε τὸ μέτρο ; Πόσες τοῦ κόστιζε ;

6. Ἕνα σακκὶ ζάχαρι, ποὺ ζύγιζε 45,4 ὀκάδες, ἐπωλήθηκε 681 δραχμές. Πόσο ἐκόστιζε ἡ ὀκά ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΑ ΜΟΝΑΔΑ

1. Μιὰ γυναίκα ἀγόρασε 17 πήχεις πανὶ καὶ ἐπλήρωσε 289 δραχμές. Ἂν ἔπαιρνε μονάχα 14 πήχεις, πόσες θὰ ἔδινε ;

2. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἐξοδεύει τὸ χρόνο 18.600 δραχμές. Πόσες ἐξοδεύει τοὺς 7 μῆνες ;

3. Ἕνα βαρέλι κρασὶ 150,8 ὀκάδων κοστίζει 784,16 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ δώσωμε, ἂν ἀγοράσωμε ἕνα μικρότερο μὲ 125 ὀκάδες ἀπὸ τὸ ἴδιο κρασί ;

4. Μία ὀκὰ καφὲ κοστίζει 96 δραχμές. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ 50 δράμια ;

5. Ἐξαργύρωσε κάποιος στὴν Τράπεζα μίαν ἐπιταγὴ 125 δολλαρίων καὶ ἔλαβε 3.737,50 δραχμές. Πόσες θὰ λάβη ἕνας ἄλλος, ποὺ ἔχει ἐπιταγὴν 150 δολλαρίων ;

6. Σὲ μία ἡμέρα 15 ἐργάται σκάβουν μία τάφρο (αὐλάκι) μήκους 51 μέτρων. Ἂν ἐργασθοῦν σὲ παρόμοια τάφρο 18 ἐργάτες, πόσα μέτρα θὰ σκάψουν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ — ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ ΔΥΟ ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ — ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Ξέρομε, ὅτι ὅλοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ γίνονται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψι τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Π.χ ὁ 5 ἔχει γίνει ἀπὸ τὸ 1 ἔτσι : $1+1+1+1+1=5$ ἢ $5\times1=5$

Ἕνας ἀριθμὸς ὅμως μπορεῖ νὰ γίνεται καὶ ἀπὸ τὴν ἐπανάληψι ἑνὸς ἄλλου μικροτέρου του ἀριθμοῦ. Ἔτσι, ὁ 20 γίνεται καὶ ἀπὸ τὸ 4, ἂν τὸ ἐπαναλάβωμε 5 φορές.

Δηλαδή : ὁ $20=5\times4$ καὶ ὁ $27=9\times3$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν γίνονται ἀπὸ ἄλλους μὲ πολλαπλασιασμό, λέγονται ***πολλαπλάσια***, τὸ μὲν 20 τοῦ ἀριθμοῦ 4, τὸ δὲ 27 τοῦ 3. Ὥστε :

> *Πολλαπλάσιο λέγεται ὁ ἀριθμός, ποὺ ἔγινε ἀπὸ ἄλλον μικρότερό του μὲ πολλαπλασιασμό.*

Εἴπαμε, ὅτι ὁ 20 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 4, διότι :
$20=5\times4$. Ἀλλὰ ὁ 20 εἶναι πολλαπλάσιο καὶ τοῦ 10, διότι :
$20=2\times10$. Ἀκόμη ὁ 20 εἶναι πολλαπλάσιο καὶ τοῦ 5, διότι :
$20=4\times5$.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπόν, ποὺ εἶναι πολλαπλάσιο δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ἀριθμῶν, λέγεται ***κοινὸ πολλαπλάσιο*** αὐτῶν.

Ἔτσι ὁ 40 εἶναι κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 5, 8, 10, 20 διότι :

$40=20\times2$	$40=5\times8$
$40=10\times4$	$40=4\times10$
$40=8\times5$	$40=2\times20$

Καὶ ἀντιστρόφως, μποροῦμε νὰ εἰποῦμε, πὼς οἱ ἀριθμοὶ 2, 4, 5, 8, 10, 20, ἔχουν κοινὸ πολλαπλάσιο τὸν ἀριθμὸ 40.

Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἔχουν κοινὸ πολλαπλάσιο καὶ τὸ 80, 120, 160, 200, 240. . . καὶ συνεχῶς ἀπείρους ἀριθμούς. Τὸν μικρότερο ὅμως ἀριθμό, ποὺ μποροῦν νὰ σχηματίσουν μὲ πολλαπλασιασμὸ δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ τὸν λέμε ***ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο*** καὶ γράφομε γιὰ συντομία Ε. Κ. Π.

Ὥστε :

Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (Ε. Κ. Π.) δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέμε τὸν μικρότερο κοινὸν ἀριθμό, ποὺ μποροῦν νὰ σχηματίσουν μὲ πολλαπλασιασμό.

Ἄλλο παράδειγμα.

Ὁ 24 εἶναι Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 8 διότι :

$$24 = 8 \times 3$$
$$24 = 6 \times 4$$
$$24 = 3 \times 8$$

Δὲν μποροῦν δὲ νὰ κάμουν μικρότερο ἀριθμὸ ἀπὸ αὐτὸν μὲ πολλαπλασιασμό, ἐνῶ μεγαλυτέρους (κοινὰ πολλαπλάσια) μποροῦν νὰ κάμουν καὶ τὸ 48, 72, 96 κ. ο. κ. διότι :

$$48 = 16 \times 3$$
$$48 = 12 \times 4$$
$$48 = 6 \times 8 \text{ κλπ.}$$

ΕΥΡΕΣΙΣ Ε Κ. Π.

Ἄς πάρωμε τοὺς ἀριθμοὺς 8, 15, 16. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς :

Βάνομε τοὺς ἀριθμοὺς στὴ σειρὰ καὶ τραβοῦμε κάθετο γραμμὴ δεξιά τους. Γράφομε δεξιὰ ἀπὸ τὴν κάθετο γραμμὴ τὸν μικρότερο διαιρέτη, ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς ἔστω καὶ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀριστερὰ τῆς γραμμῆς ἀριθμούς. Κάτω ἀπὸ τὸν καθένα γράφομε, ἂν μὲν διαιρῆται ἀκριβῶς, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, ἂν ὄχι, τὸν ἴδιο ἀριθμό. Ἔτσι προχωροῦμε, ὥσπου νὰ βροῦμε κάτω - κάτω πηλίκο τὴ μονάδα. Τοὺς διαιρέτας δεξιὰ **ἀπὸ τὴν κάθετο,** τέλος, τοὺς πολλαπλασιάζομε. Τὸ γινόμενο αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. ποὺ ζητοῦμε. Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς :

Τῶν ἀριθμῶν	8	15	16	2	διαιρέτης
	4	15	8	2	»
	2	15	4	2	»
	1	15	2	2	»
	1	15	1	3	»
	1	5	1	5	»
	1	1	1		$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 240 =$ Ε.Κ.Π.

Ὥστε τὸ Ε.Κ.Π. εἶναι ὁ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ ἤτοι : ὁ 240.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ βρεθῆ, ποίων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσια οἱ 48, 56, 140, 88.
2. Νὰ βρεθῆ, ποίων ἀριθμῶν εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια οἱ 12, 30, 64.
3. Νὰ βρεθῆ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν :

α)	4	18	24
β)	12	30	48
γ)	7	12	15
δ)	60	15	24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

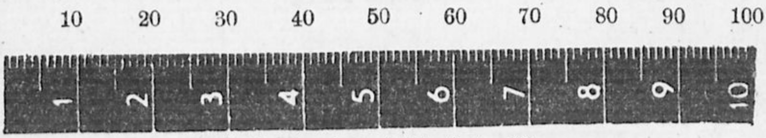
ΕΝΝΟΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. Μονάδες μετρήσεως μήκους

῞Ολοι ξέρετε, πῶς γιὰ νὰ μετρήσωμε, πόσο ψηλὸς εἶναι ἕνας ἄνθρωπος, ἕνα σπίτι, ἕνα δένδρο, χρησιμοποιοῦμε ἕνα ὄργανο, ποὺ τὸ λέμε ***Γαλλικὸ μέτρο***. Τὸ θυμᾶσθε μήπως ἀπὸ πέρυσι ; ῎Ας τὸ ξαναϊδοῦμε.

Τὸ ***μέτρο*** εἶναι ἕνα ὄργανο ξύλινο ἢ μετάλλινο καὶ τὸ βλέπομε νὰ τὸ χρησιμοποιοῦν συχνότατα οἱ κτίσται, οἱ ξυλουργοὶ καὶ ἄλλοι ἐργάται. Τοῦτο εἶναι χωρισμένο σὲ 10 ἴσα μέρη, ποὺ τὰ λέμε ***δακτύλους ἢ πόντους***. ῎Ετσι, τὸ μέτρο ἔχει 10 παλάμες ἢ 100 δακτύλους.

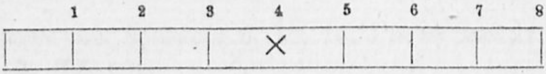
Σχέδιο 1ο



Γαλλικὸ μέτρο (κλῖμαξ 1 : 10)

῎Αν ὅμως ψωνίζωμε στὸν ἔμπορο ὕφασμα, θὰ ἰδοῦμε νὰ μᾶς τὸ μετράη, ὄχι μὲ Γαλλικὸ μέτρο, ἀλλα μὲ ἕνα μικρότερο ξύλινο ὄργανο, ποὺ τὸ λέμε ***πῆχυ***. ῾Ο πῆχυς εἶναι 0,64 τοῦ μέτρου, δηλαδὴ 64 δάκτυλοι (πόντοι). Χωρίζεται σὲ 8 ἴσα μέρη, ποὺ τὰ λέμε ***ρούπια,*** ἢ καὶ ὄγδοα.

Σχέδιο 2ο



᾿Εμπορικὸς πῆχυς (κλῖμαξ 1 : 10)

᾿Εκτὸς τοῦ γαλλικοῦ μέτρου καὶ τοῦ πήχεως, στὶς οἰκοδομὲς καὶ τὰ οἰκόπεδα, χρησιμοποοῦμε τὸν τεκτονικὸ πῆχυ, ποὺ εἶναι 0,75 τοῦ μέτρου.

Οἱ Ἄγγλοι καὶ οἱ Ἀμερικανοὶ δὲν χρησιμοποιοῦν τὰ δικά μας μέτρα. Ἔχουν μιὰ μονάδα μετρήσεως, ποὺ τὴν λένε **γιάρδα** καὶ εἶναι ἴση μὲ 0,914 τοῦ μέτρου. Κάθε **γιάρδα** χωρίζεται σὲ τρία **πόδια** καὶ κάθε πόδι σὲ 12 **ἴντσες.** Δηλαδή:

1 γιάρδα=3 πόδια=36 ἴντσες
1 πόδι =12 ἴντσες
1 ἴντσα =2,5 πόντους περίπου.

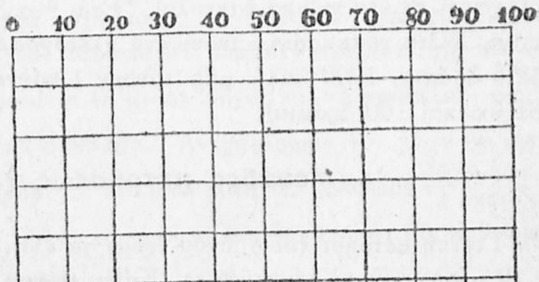
Οἱ Ἄγγλοι γιὰ τὶς μεγάλες ἀποστάσεις τῆς ξηρᾶς ἔχουν τὸ **μίλι** (1760 γιάρδες = 1608,64 μέτρα) καὶ τῆς θαλάσσης τὸ ναυτικὸ μίλι (κόμβο) ἴσον μὲ 1852 μέτρα. (Τοῦτο εἶναι τὸ μῆκος 1 πρώτου λεπτοῦ τῆς μοίρας ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς).

Ἐμεῖς τὶς μεγάλες ἀποστάσεις στὴν ξηρά, τὶς μετροῦμε μὲ τὰ χιλιόμετρα. (1 χιλιόμ. = 1000 μέτρα).

2. Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν

Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ μετρήσωμε τὴν ἔκτασιν (ἐπιφάνεια) τοῦ κήπου μας, τῆς αὐλῆς μας, χρησιμοποιοῦμε ἕνα μέτρο, ποὺ τὸ λέμε **Τετραγωνικό.** Εἶναι δὲ τοῦτο μία τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια, ποὺ κάθε της πλευρὰ εἶναι ἕνα μέτρο. Χωρίζεται δὲ σὲ 100 ἴσα μικρότερα τετράγωνα, ποὺ τὰ λέμε **τετραγωνικὲς παλάμες** καὶ κάθε **παλάμη** σὲ 100 **τετραγωνικοὺς δακτύλους** (πόντους). Ἔτσι, ἕνα **τετραγωνικὸ μέτρο** ἔχει 100 **τετραγωνικὲς παλάμες** ἢ 10.000 **τετραγωνικοὺς δακτύλους.**

Σχέδιο 3ον



Τετραγωνικὸ μέτρο (**Κλῖμαξ 1 : 15**)

Τὰ οἰκόπεδα μετροῦνται μὲ τὸν τετραγωνικὸ **τεκτονικὸ** πῆχυ, ποὺ εἶναι 0,5625 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Τὰ μεγάλα κτήματα τὰ μετροῦμε μὲ τὸ **στρέμμα.** Εἶναι δὲ τὸ στρέμμα χίλια τετραγωνικὰ μέτρα. Τὶς μεγάλες ἐπιφάνειες τὶς μετροῦμε μὲ τὸ **τετραγωνικὸ χιλιόμετρο.** Εἶναι δὲ τοῦτο ἕνα τετράγωνο, ποὺ κάθε πλευρά του ἔχει χίλια μέτρα. Ἰσοδυναμεῖ δὲ ἕνα **τετραγωνικὸ χιλιόμετρο** μὲ 1000 στρέμματα.

3. Μονάδες μετρήσεως βάρους

Ποιὸς δὲν ξέρει τὴν **ὀκά;** Μήπως ξεχάσατε, ὅτι κάθε ὀκά, ποὺ ζυγίζομε τὰ διάφορα πράγματα, χωρίζεται σὲ 400 ἴσα κομματάκια, ποὺ τὰ λέμε **δράμια;** Ἔτσι ἡ μισὴ ἔχει 200 δράμια. Ἔχομε βάρη ἀκόμη 100 δραμίων, 50 δραμίων, 25 δραμίων.

44 ὀκάδες μᾶς κάνουν 1 **στατῆρα** (καντάρι).

Πολλὲς φορὲς ὅμως ἀκοῦμε στὸ φαρμακεῖο νὰ ζυγίζουν μὲ **γραμμάρια.**

Τί εἶναι αὐτά; Τὸ **γραμμάριο** εἶναι ἐλαφρότερο ἀπὸ τὸ δράμι. (Γραμμάριο εἶναι τὸ βάρος νεροῦ καθαροῦ θερμοκρασίας 4° Κελσίου, ποὺ χωρεῖ σὲ ἕνα κυβικὸ δάκτυλο). Ἔτσι ἕνα δράμι εἶναι 3,2 γραμμάρια. Χίλια γραμμάρια κάνουν ἕνα **χιλιόγραμμο** (κιλὸ) καὶ ζυγίζει 312,5 δράμια. 1000 κιλὰ μᾶς κάνουν 1 **τόννο** (=781,25 ὀκάδες ἢ 781 ὀκ. καὶ 100 δράμια).

4. Μονάδες μετρήσεως χρόνου

Γιὰ τὴ μέτρησι τοῦ χρόνου ἔχομε τὰ **ἔτη.** Ἕνα **ἔτος** χωρίζεται σὲ 12 μέρη, ποὺ τὰ λέμε **μῆνες.** Κάθε **μήνας** χωρίζεται σὲ 30 ἡμέρες, (οἱ ἐμπορικοὶ —στὸ ἐμπόριο— μῆνες λογαριάζονται ἀπὸ 30 ἡμέρες). Ἔτσι τὸ ἔτος ἔχει 360 ἡμέρες. Ἀλλὰ καὶ ὁ μήνας ἔχει ἑβδομάδες. Κάθε ἑβδομάδα ἔχει 7 ἡμέρες. Κάθε ἡμέρα ἔχει 7 ἡμέρες. Κάθε ἡμέρα ἔχει 24 ὧρες (ἡμερόνυκτο). Καὶ ἡ ὥρα χωρίζεται σὲ 60 πρῶτα λεπτά, κάθε δὲ πρῶτο λεπτὸ σὲ 60 δεύτερα λεπτά.

5. Μονάδες μετρήσεως νομισμάτων

Ὅλοι σας γνωρίζετε τἆ χρήματα ποὺ κυκλοφοροῦν στὴν Πατρίδα μας. Ἔχομε

πεντάλεπτο	(5 λεπτὰ)	πεντηκοντάλεπτο	(50 λεπτὰ)
δεκάλεπτο	(10 »)	Δραχμὴ	(100 »)
εἰκοσάλεπτο	(20 »)	Δίδραχμο	(2 δραχμὲς)

πεντάδραχμο	(5 δραχ.)	πεντηκοντάδραχμο	(50 δραχ.)
δεκάδραχμο	(10 »)	ἑκατοντάδραχμο	(100 »)
εἰκοσάδραχμο	(20 »)	πεντακοσιόδραχμο	(500 »)
		χιλιόδραχμο	(1000 »)

Α΄ ΕΝΝΟΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

Πάρετε στὰ χέρια σας ἕνα **πῆχυ**. Ἂν δὲν ἔχετε, κάμετε μόνοι σας ἕνα καὶ χωρίστε τον σὲ 8 ἴσα μέρη **(ρούπια)**. Πολλὲς φορὲς ψωνίζομε ὄχι μόνο ὁλόκληρους (ἀκεραίους) πήχεις, ἀλλὰ καὶ κομάτια ἀπ' αὐτόν. Ἔτσι, ἂν πάρωμε μόνο ἕνα ρούπι (κομμάτι) λέμε, ὅτι πήραμε ἕνα ἀπὸ τὰ ὀκτὼ ἴσα μέρη του. Ἂν ὅμως τὸν χωρίσωμε στὴ μέση μὲ μιὰ γραμμὴ καὶ πάρωμε ἕνα κομμάτι λέμε, ὅτι πήραμε τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἴσα κομμάτια (ἢ μισὸν πῆχυ) καὶ τὸ γραφομε $\frac{1}{2}$.

Τὸ διαβάζομε δὲ **ἕνα δεύτερο**. Ἂν χφρίσωμε τὸν πῆχυ σὲ τέσσερα ἴσα μέρη καὶ πάρωμε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ θὰ γράψωμε $\frac{1}{4}$ καὶ διαβάζομε **ἕνα τέταρτο**. Ἂν πάρωμε τέλος ἕνα ρούπι, θὰ γράψωμε $\frac{1}{8}$ καὶ διαβάζομε **ἕνα ὄγδοο**.

Ὅλες τὶς παραπάνω φορὲς πήραμε ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη (κομμάτια) πού χωρίσαμε τὸν πῆχυ. Δὲν πήραμε ὁλόκληρο πῆχυ (ἀκέραιο). Τὸ κάθε ἕνα λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίσαμε τὸν πῆχυ τὸ λέμε **κλασματικὴ μονάδα**.

Ἔτσι ἡ παλάμη στὸ μέτρο εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου. Μιὰ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Ἕνας τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ $\frac{1}{1000}$

τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Τὸ γραμμάριο, τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κιλοῦ. Τὸ δράμι, τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς. Ὁ μήνας, τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους κλπ. Ὥστε :

Κλασματικὴ μονάδα λέμε τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίσαμε μία ἀκεραία μονάδα (πῆχυ, μέτρο, ἑβδομάδα, μῆνα κλπ.).

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

1. Ἂν χωρίσωμε τὸν πῆχυ σὲ δύο ἴσα μέρη, τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ (ἕνα δεύτερο τοῦ πήχεως).

Ἂν πάλι χωρισθῆ σὲ 4 ἴσα μέρη, τὸ καθένα θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ἂν τέλος σὲ ὀκτώ, κάθε κομμάτι θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως. Παρατηρῆστε προσεκτικὰ τὸ κάθε κομμάτι, ποὺ πήρατε. Πότε πήρατε τὸ πιὸ μεγάλο ; Ποιὰ κλασματικὴ μονάδα (κομμάτι) ἀπὸ τὶς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι μεγαλύτερη ;

2. Ποιὸ εἶναι περισσότερο βαρύ, τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς, τὸ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$ ἢ τὸ $\frac{1}{400}$;

Παρατηρῆστε, τί συμβαίνει ; Συμπέρασμα :

Ὅσο περισσότερα κομματάκια κάνομε μία ἀκεραία μονάδα (τὸν πῆχυ, τὴν ὀκὰ κλπ.) τόσο τὰ κομμάτια θὰ εἶναι μικρότερα.

Β΄ ΕΝΝΟΙΑ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Παίρνομε ὁλόκληρο τὸν πῆχυ, ποὺ ἔχει ὀκτὼ ἴσα μέρη (ρούπια). Πῶς θὰ τὸ γράψωμε ; Ἤ, πῶς θὰ τὸ διαβάσωμε ; Θυμᾶστε, ὅτι τὸ ἕνα ρούπι (ἕνα ἀπὸ τὰ ὀκτὼ ἴσα μέρη) τὸ γράφομε $\frac{1}{8}$ καὶ τὸ διαβάζομε ἕνα ὄγδοο.

Ἂν πάρωμε ὅμως δύο ; Δὲν εἶναι δύσκολο νὰ τὸ βροῦμε. Θὰ γράψωμε $\frac{2}{8}$ δύο ὄγδοα (δύο ἀπὸ τὰ ὀκτώ).

Ἂν πάρωμε τρία, $\frac{3}{8}$ (τρία ὄγδοα),

τέσσαρα, $\frac{4}{8}$ πέντε, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$. Ἂν τέλος καὶ ὀκτὼ ρούπια, θὰ γράψωμε $\frac{8}{8}$ (ὀκτὼ ὄγδοα), δηλαδὴ ὁλόκληρο τὸν πῆχυ, ἤτοι $\frac{8}{8} = 1$ πῆχυς.

Ἐδῶ παρατηροῦμε, ὅτι τὰ $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{8}$ ἔγιναν ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα $\frac{1}{8}$ πήχ. (ρούπια), ποὺ τὴν πήραμε περισσότερες φορές. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ποὺ δείχνουν πολλὲς ὅμοιες κλασματικὲς μονάδες μαζὶ καὶ ἔγιναν ἀπὸ τὴν κλασματικὴ μονάδα, λέγονται **κλάσματα**.

Ὥστε:

> *Κλάσμα ἢ κλασματικὸ ἀριθμὸ θὰ λέμε τὸν ἀριθμό, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν τῆς ἰδίας κλασματικῆς μονάδος.*

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε: Τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι μία ἡμέρα; Τί μέρος τοῦ ἔτους ὁ ἕνας μήνας; Τί μέρος τοῦ μέτρου ἡ μία παλάμη; Τί μέρος τοῦ ἡμερόνυκτου ἡ μία ὥρα; Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι τὸ πεντηκοντάλεπτο; Τί μέρος τοῦ πενταδράχμου εἶναι ἡ δραχμή;

2. Πόσα ρούπια εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως; Τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{8}$; Πόσα δράμια εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ τῆς ὀκᾶς; Πόσα πρῶτα λεπτὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ τῆς ὥρας;

3. Γράψετε: Τί μέρος τοῦ χρόνου εἶναι οἱ 3 μῆνες; Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι οἱ 7 παλάμες; Τί μέρος τῆς ὀκᾶς τὰ 100 δράμια; τὰ 200 δράμια; τὰ 300 δράμια;

4. Πόσες δραχμὲς εἶναι: Τὰ $\frac{7}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου; Πόσα

τὰ $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου; τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ πενταδράχμου;

5. Πόσα πεντηκοντάλεπτα εἶναι τὸ $\frac{12}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου; Τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πενταδράχμου; Τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου;

6. Πόσα δεκάλεπτα εἶναι τὰ $\frac{3}{10}$ τῆς δραχμῆς; Τὰ $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς; τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ πενταδράχμου;

7. Κάμετε καὶ μόνοι σας παρόμοιες, σὰν τὶς παραπάνω, ἀσκήσεις ἀπὸ τὶς μονάδες μετρήσεως, ποὺ μάθαμε.

ΟΡΟΙ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Εἴδαμε παραπάνω, πὼς ἡ **κλασματικὴ μονάδα** καὶ τὸ **κλάσμα** γράφονται μὲ δύο ἀριθμούς, τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ τοὺς χωρίζει μιὰ γραμμή. Κάθε **κλάσμα** ὅμως εἶναι ἕνας ἀριθμός, ποὺ λέγεται **κλασματικός**. Καὶ ἐπάνω ἀπὸ τὴ γραμμὴ γράφομε τὰ ἴσα μέρη ἢ κομμάτια, ποὺ παίρνομε ἀπὸ μιὰ ἀκεραία μονάδα, ποὺ τὴ χωρίσαμε σὲ ἴσα μέρη, κάτω δὲ γράφομε τὸν ἀριθμό, ποὺ δείχνει σὲ πόσα ἴσα μέρη ἢ κομμάτια χωρίσθηκε ἡ ἀκεραία μονάδα.

Ἔτσι, στὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως, τὸ 5 φανερώνει, ὅτι πήραμε πέντε ἴσα μέρη τοῦ πήχεως καὶ τὸ 8, ὅτι τὸν πῆχυ τὸν χωρίσαμε σὲ ὀκτὼ ἴσα μέρη.

Ἐπειδὴ ὁ ἀπὸ πάνω ἀριθμὸς μετράει (ἀριθμεῖ), πόσα ἴσα μέρη πήραμε, λέγεται **ἀριθμητής**, ὁ ἀπὸ κάτω, ποὺ μᾶς ὀνομάζει σὲ πόσα ἴσα μέρη χωρίστηκε ὁ πῆχυς, λέγεται **παρονομαστής**. Καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ μ' ἕνα ὄνομα λέγονται **ὅροι τοῦ κλάσματος** καὶ ἡ γραμμή, **κλασματικὴ γραμμή**. Καὶ ὁ μὲν **ἀριθμητὴς** διαβάζεται, ὅπως ὅλοι οἱ ἀριθμοί. Ὁ **παρονομαστὴς** ὅμως διαβάζεται σὰν τακτικὸ ἀριθμητικὸ ἐπίθετο. Θυμηθῆτε, πῶς διαβάζεται τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως (ἕνα ὄγδοο), τὰ $\frac{5}{10}$ τῆς δραχμῆς (πέντε δέκατα κ.ο.κ.).

Ἀσκήσεις

1. Ποιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω κλασματικὲς μονάδες εἶναι πιὸ με-

γάλη καὶ ποιὰ μικρότερη ;

$\frac{1}{4}$ ἔτους, $\frac{1}{12}$ ἔτους, $\frac{1}{368}$ ἔτους, $\frac{1}{6}$ ἔτους.

Ἐξηγῆστε γιατί.

2. Γράψετε, τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι ἡ μία ἡμέρα, ἡ μία ἑβδομάδα (52 ἑβδομάδες ἔχει τὸ ἔτος), ὁ ἕνας μήνας ;

3. Τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι οἱ 2, 3, 4, 5, 6 ἡμέρες :

4. Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι οἱ 25, 16, 150, 270 ἡμέρες ;

5. Μία βρύση γεμίζει μιὰ δεξαμενὴ (στέρνα) σὲ 8 ὧρες. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίση σὲ μιὰ ὥρα ;

6. Ἕνας ἐργάτης σκάβει ἕνα κῆπο σὲ 5 ἡμέρες. Τί μέρος τοῦ κήπου θὰ σκάψη, ἂν ἐργασθῆ μία μόνον ἡμέρα ;

7. Πόσοι μῆνες εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, τοῦ ἔτους ;

8. Διαβάστε τὰ παρακάτω κλάσματα : $\frac{3}{4}$ ἔτους, $\frac{5}{8}$ πήχεως, $\frac{6}{10}$ δεκαδράχμου, $\frac{4}{7}$ ἑβδομάδος, $\frac{15}{60}$ ὥρας. Δείξετε τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ καθενὸς κλάσματος. Ἐξηγῆστε, τί φανερώνει ὁ καθένας.

9. Τί φανερώνει τὸ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα : $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου, $\frac{8}{12}$ τοῦ ἔτους, $\frac{200}{400}$ τῆς ὀκᾶς, $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου, $\frac{26}{30}$ τοῦ μηνός ;

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ
ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΑ ΜΟΝΑΔΑ

1. Πόσα ρούπια εἴπαμε, πὼς ἔχει ἕνας πῆχυς ; ἂν πάρωμε καὶ τὰ ὀκτὼ ρούπια, μποροῦμε νὰ γράψωμε $\frac{8}{8}$ τοῦ πήχεως ; Ἀλλὰ δὲν πήραμε ἔτσι ὁλόκληρο (ἀκέραιο) τὸν πῆχυ ; Λέμε λοιπόν : $\frac{8}{8}$ τοῦ πήχεως $=$ 1 πῆχυς.

Ἡ ἑβδομάδα πόσες ἡμέρες ἔχει ; 7 ; Γράφομε καὶ τὶς 7 ἡμέρες τῆς ἑβδομάδος ἔτσι : $\frac{7}{7}$ ἑβδομάδος = 1 ἑβδομάδα. Παρόμοια μποροῦμε νὰ βροῦμε, πὼς $\frac{30}{30}$ μηνὸς = 1 μήνας, $\frac{12}{12}$ ἔτους = 1 ἔτος, $\frac{10}{10}$ μέτρου = 1 μέτρο, κ.ο.κ.

Βγάνομε λοιπὸν τὸ συμπέρασμα:

Ἂν μία ἀκεραία μονάδα (πῆχυ, ἑβδομάδα, μήνα, ἔτος κ. ἄ.) τὴν χωρίσωμε σὲ ὡρισμένα ἴσα μέρη καὶ τὰ πάρωμε ὅλα, παίρνομε ὁλόκληρη τὴν ἀκεραία μονάδα.

Ἢ καὶ μὲ ἄλλο τρόπο:

Ἂν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι ὁ ἴδιος ἀριθμός, τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμο μὲ μιὰ ἀκεραία μονάδα.

22. Ἂν ὅμως ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα δὲν πάρωμε ὅλα τὰ ἴσα μέρη, ποὺ χωρίσαμε τὴν ἀκεραία μονάδα, ἀλλὰ λιγώτερα, παίρνομε ὁλόκληρη τὴν ἀκεραία μονάδα; Βέβαια ὄχι. Γι᾽ αὐτό:

α) τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι λιγώτερα ἀπὸ τὸν πῆχυ, ἢ τὰ $\frac{7}{8}$ πήχεως $<$ 1 πῆχυ.

β) τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἑβδομάδος εἶναι λιγώτερα ἀπὸ μιὰ ἑβδομάδα, ἢ $\frac{5}{7}$ ἑβδομάδος $<$ 1 ἑβδομάδα.

γ) τὰ $\frac{28}{30}$ τοῦ μηνὸς εἶναι λιγώτερα ἀπὸ ἕνα μῆνα ἢ $\frac{28}{30} < 1$ μῆνα κ.ο.κ.

Εὔκολα λοιπὸν συμπεραίνομε, πώς:

Ἂν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μικρότερος ἀπ᾽ τὸν παρονομαστή, τότε ὁλόκληρο τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ μιὰ ἀκεραία μονάδα.

Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται ***γνήσια***.

3. Τί σημαίνει ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{10}{8}$ τοῦ πήχεως; Νὰ χωρίσωμε ἕνα ὁλόκληρο πῆχυ σὲ 8 ἴσα μέρη καὶ νὰ πάρωμε δέκα. Ἀλλά, ἀφοῦ

ἔχομε μόνο ὀκτώ, πῶς θὰ πάρωμε 10; Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ κόψωμε ἄλλον ἕνα πῆχυ καὶ αὐτὸν σὲ 8 ἴσα μέρη γιὰ νὰ πάρωμε τὰ δύο, ποὺ μᾶς λείπουν, γιὰ νὰ ἔχωμε $\frac{10}{8}$ πήχ. Ὥστε παίρνομε ἕνα ὁλόκληρο (ἀκέραιον) καὶ μέρη ἀπὸ ἄλλον. Ἑπομένως τὰ κλάσμα $\frac{10}{8}$ τοῦ πήχεως, εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ ἕναν ὁλόκληρο πῆχυ. Τὸ ἴδιο θὰ ἰδοῦμε ἂν συγκρίνωμε τὰ $\frac{9}{7}$ τῆς ἑβδομάδος μὲ τὴ μία ἑβδομάδα, τὰ $\frac{8}{4}$ τῆς ὥρας μὲ τὴ μία ὥρα. Δηλαδή:

$\frac{10}{8}$ πήχ. $>$ 1 πήχ. $\frac{9}{7}$ ἑβδ. $>$ 1 ἑβδ. $\frac{8}{4}$ ὥρ. $>$ 1 ὥρ.

Ἐδῶ παρατηροῦμε, πὼς ὁ ἀριθμητὴς σὲ κάθε κλάσμα εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή του. Συμπεραίνομε λοιπόν, ὅτι:

> *Ἂν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ του, τότε τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ μία ἀκεραία μονάδα.*

Τέτοια κλάσματα λέγονται **καταχρηστικά**, ἐπειδὴ ἔχουν καὶ ὁλόκληρες (ἀκέραιες) μονάδες καὶ κλάσμα.

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε 3 κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ ἕνα πῆχυ.
2. Γράψετε 3 κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ ἕνα χρόνο.
3. Γράψετε 3 κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ ἕνα μέτρο.
4. Γράψετε 3 κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ μία ὀκά.
5. Τί σημαίνουν $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου;
6. Τί σημαίνουν $\frac{5}{12}$ τοῦ χρόνου;
7. Γράψετε τρία γνήσια κλάσματα τῆς ὥρας.
8. Τί σημαίνει $\frac{10}{7}$ τῆς ἑβδομάδος;
9. Τί σημαίνει $\frac{45}{30}$ τοῦ μηνός;

10. Ποιὰ ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα εἶναι γνήσια, ποιὰ ἰσοδύναμα μὲ μιὰ ἀκεραία μονάδα, καὶ ποιὰ καταχρηστικά;

Ἐξηγῆστε, τί φανερώνει τὸ καθένα:

$$\frac{12}{7}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{4}{4}, \quad \frac{12}{10}, \quad \frac{5}{24}, \quad \frac{400}{400}, \quad \frac{15}{12}$$

11. Συμπληρῶστε τὰ κλάσματα: $1 = \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{3} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{6}$.

ΤΡΟΠΗ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΚΛΑΣΜΑ

Ξέρομε, πὼς ὁ ἕνας πῆχυς ἔχει 8 ρούπια. Ἔτσι γράφομε:

1 πῆχυς $= \frac{8}{8}$ πήχεως. Ἂν τώρα πάρωμε 2 πήχεις, θὰ ἔχωμε 16 ρούπια καὶ πρέπει νὰ γράψωμε:

2 πήχεις $= \frac{16}{8}$ πήχεως, ἀφοῦ ὁ καθένας ἔχει $\frac{8}{8}$ (ρούπια).

Ἂν τρεῖς, 3 πήχεις $= \frac{24}{8}$ πήχεως.

Ἂν τέσσαρες, 4 πήχεις $= \frac{32}{8}$ πήχεως.

Ἂς πάρωμε τώρα μία δραχμή. Δὲν ἔχει 10 δεκάλεπτα; Γράφομε λοιπόν:

1 δραχμὴ $= \frac{10}{10}$ δραχμῆς.

Οἱ δύο δραχμὲς θὰ εἶναι: 2 δραχμὲς $= \frac{20}{10}$ δραχ.

Οἱ τρεῖς δραχμὲς θὰ εἶναι: 3 δραχμὲς $= \frac{30}{10}$ δραχ.

Οἱ τέσσερες δραχ. θὰ εἶναι: 4 δραχμὲς $= \frac{40}{10}$ δραχ.

Τί παρατηροῦμε σ' αὐτὰ τὰ παραδείγματα; Δὲν εἶναι οἱ 3 πήχεις, ὅσο καὶ τὰ $\frac{24}{8}$ πήχεως;

Δὲν εἶναι οἱ 3 δραχμές, ὅσο καὶ τὰ $\frac{30}{10}$ δραχμές;

Ὥστε βλέπομε, ὅτι ὁ ἀκέραιος 3 (πήχεις) εἶναι ἴσος μὲ τὸ καταχρηστικὸ κλάσμα $\frac{24}{8}$. Ἐπίσης ὁ 3 (δραχμὲς) εἶναι ἴσος μὲ τὸ κλάσμα $\frac{30}{10}$.

Εὔκολα λοιπὸν συμπεραίνομε, πῶς μποροῦμε ἕναν ἀκέραιον ἀριθμὸ νὰ τὸν κάμωμε ἰσοδύναμο μὲ αὐτὸν κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ μᾶς εἰποῦν, σὲ πόσα μέρη θὰ χωρίσωμε τὴ μιὰ ἀκεραία μονάδα (παρονομαστή). Ἔτσι, στὴν πρώτη περίπτωσι, γιὰ νὰ κάμωμε τὸν ἀκέραιο 3 πήχεις ὄγδοα (ρούπια), τὸν πολλαπλασιάζομε μὲ τὸ 8, τὸν βάζομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸ 8. Τὸ ἴδιο καὶ στὸ δεύτερο παράδειγμα: τὸν ἀκέραιο 3 (δραχμὲς) γιὰ νὰ τὸν κάνωμε δέκατα (δεκάλεπτα) τὸν πολλαπλασιάσαμε μὲ τὸ 10, τὸ γινόμενο τὸ βάλαμε ἀριθμητή στὸ ἰσοδύναμό του κλάσμα καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸ 10. Βγάνομε λοιπὸν τό γενικὸ συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕναν ὁποιονδήποτε ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ ἰσοδύναμο κλάσμα μὲ ὡρισμένο παρονομαστή, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸν γνωστὸ παρονομαστή, τὸ γινόμενο τὸ βάνομε ἀριθμητὴ στὸ ἰσοδύναμό του κλάσμα καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ὡρισμένο παρονομαστή.

Ἔτσι, ἂν θέλωμε ὁ ἀκέραιος 8 νὰ γίνη πέμπτα, θὰ ἔχωμε

$$8 = \frac{8 \times 5}{5} = \frac{40}{5}$$

Ἀσκήσεις

1. Πόσα ὄγδοα ἔχουν 7 πήχεις; Γράψετέ το μὲ ἰσοδύναμο κλάσμα.
2. Γράψετε 5 μῆνες κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τριακοστὰ (ἡμέρες).
3. Οἱ 4, 5, 8 ὀκάδες νὰ γίνουν τέταρτα τῆς ὀκᾶς.
4. Κάμετε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 6, 7, 9 τρίτα καὶ ἔπειτα πέμπτα.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ ΑΠΟ ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ἂν ἀγοράσωμε 48 ρούπια ὕφασμα, μπορεῖτε νὰ βρῆτε, πόσους ὁλόκληρους πήχεις πήραμε; Δὲν εἶναι δύσκολο. Ἀφοῦ ὁ καθένας πῆχυς ἔχει 8 ρούπια, τὰ 48 θὰ εἶναι 6 ὁλόκληροι πήχεις. Τὰ 48 ρούπια δὲν γράφονται $\frac{48}{8}$ πήχεως; Τὸ κλάσμα εἶναι καταχρηστικό. Δὲν εἶναι ἔτσι; ἐπομένως ἔχει ἀκέραιες μονάδες (ὁλόκληρους πήχεις). Πόσους βρήκαμε; Δὲν θὰ βροῦμε ὅμως τὸ ἴδιο, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ καταχρηστικοῦ κλάσματος μὲ τὸν παρονομαστή του; Τὸ πηλίκον αὐτῆς τῆς διαιρέσεως θὰ εἶναι ὁ ἀκέραιος, μὲ τὸν ὁποῖο θὰ εἶναι ἰσοδύναμο τὸ καταχρηστικὸ αὐτὸ κλάσμα. Συμπεραίνομε λοιπόν, ὅτι:

Γιὰ νὰ βγάλωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ ἕνα καταχρηστικὸ κλάσμα, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός, ποὺ ζητοῦμε.

Ἀσκήσεις

1. Πόσες ὁλόκληρες ὧρες εἶναι τὰ $\frac{8}{2}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{120}{60}$ τῆς ὥρας;

2. Πόσα ὁλόκληρα μέτρα εἶναι τὰ $\frac{20}{10}$, $\frac{500}{100}$, $\frac{20}{5}$, τοῦ μέτρου;

3. Πόσα πεντάδραχμα εἶναι τὰ $\frac{10}{5}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{20}{5}$, τοῦ πενταδράχμου;

4. Πόσοι μῆνες εἶναι τὰ $\frac{60}{30}$, $\frac{120}{30}$, $\frac{360}{30}$, τοῦ μηνός;

5. Βγάλετε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα: $\frac{28}{7}$, $\frac{36}{6}$, $\frac{124}{4}$, $\frac{325}{25}$.

ΜΙΚΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Πολλὲς φορές, ποὺ ἀγοράζομε ὑφάσματα, παίρνομε, ὄχι μόνον ὁλόκληρους πήχεις, ἀλλὰ καὶ ρούπια. Ἔτσι, γιὰ ἕνα φόρεμα, ἂν χρειαστοῦμε 5 πήχεις καὶ 3 ρούπια, δύο κομμάτια θὰ τὸ κάνωμε ἢ θὰ τὸ μετρήσωμε καὶ θὰ τὸ κόψωμε ἕνα κομμάτι; Λοιπὸν μὲ δύο ἀριθμοὺς θὰ τὸ γράψωμε ἢ ἕνα; Τὸ γράφομε $5\frac{3}{8}$ πήχεις. Δηλαδή, πήραμε 5 ὁλόκληρους πήχεις (ἀκέραιος) καὶ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως (κλάσμα). Ὁ ἀριθμὸς αὐτός, ποὺ ἔχει ἀκέραιο καὶ κλάσμα μαζί, λέγεται **μικτός**. Λοιπόν:

Μικτὸν ἀριθμὸ θὰ λέμε τὸν ἀριθμό, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα μαζί.

ΤΡΟΠΗ ΜΙΚΤΟΥ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑ

Γιὰ νὰ ὑπολογίσωμε στὸν ***μικτὸ ἀριθμὸ*** $5\ \frac{3}{8}$ πήχεως, πόσα ὄγδοα (ρούπια) πήραμε ἐν συνόλω, ἀρκεῖ νὰ σκεφθοῦμε, ὅτι οἱ 5 πήχεις ἔχουν $5 \times 8 = 40$ ρούπια ἢ $\frac{40}{8}$ πήχεως καὶ $\frac{3}{8}$ ποὺ ἔχομε ἀκόμη, κάνουν $\frac{43}{8}$ πήχεως (δηλ. 43 ρούπια). Τὸ $\frac{43}{8}$ εἶναι, ὅπως βλέπετε, ***ἰσοδύναμο*** κλάσμα μὲ τὸν παραπάνω μικτό. Πῶς ἔγινε ; Πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, προσθέσαμε καὶ τὸν ἀριθμητή του καὶ τὸν ἀριθμό, ποὺ βρήκαμε, τὸν βάλαμε ἀριθμητὴ τοῦ ***ἰσοδυνάμου*** κλάσματος καὶ παρανομαστὴ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο.

Δηλαδή, τρέπομε τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος καὶ προσθέτομε καὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ. Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ τρέψωμε μικτὸν ἀριθμὸ σὲ ἰσοδύναμό του κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸν παρονομαστή, στὸ γινόμενο αὐτὸ προσθέτομε καὶ τὸν ἀριθμητή καί τὸν ἀριθμό, ποὺ θὰ βροῦμε, τὸν βάνομε ἀριθμητὴ στὸ ἰσοδύναμό του κλάσμα, παρονομαστὴ δὲ γράφομε πάλι τὸν ἴδιο παρονομαστὴ τοῦ μικτοῦ.

Ἔτσι $8\ \frac{3}{4}$ μικτὸς $= \frac{(8 \times 4)+3}{4} = \frac{35}{4}$ (καταχρηστικὸ κλάσμα).

ΕΞΑΓΩΓΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

Γνωρίζομεν, ὅτι :

1. Τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι 1 πῆχυς.

2. Τὰ $\frac{16}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι 2 πήχεις.

3. Τὰ $\frac{24}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι 3 πήχεις κλπ.

Ἂν ἔχωμε ὅμως $\frac{17}{8}$ πήχεως ; $\frac{26}{8}$ πήχεως ; Εὔκολο εἶναι νὰ τὸ βροῦμε. Τὸ πρῶτο καταχρηστικὸ κλάσμα ἔχει δύο ὁλόκληρους πήχεις καὶ μᾶς μένει καὶ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως. Τὸ δεύτερο ἔχει 3 ὁλόκληρους πήχεις καὶ μένουν καὶ $\frac{}{8}$ τοῦ πήχεως. Γράφομε λοιπόν :

$\frac{17}{8}$ πήχεως $= 2\frac{1}{8}$ πήχεως καὶ $\frac{26}{8}$ πήχεως $= 3\frac{2}{8}$ πήχεως.

Συμπληρώνοντας τὸν προηγούμενο κανόνα ἐξαγωγῆς ἀκεραίων μονάδων ἀπὸ καταχρηστικὸ κλάσμα συμπεραίνομε :

Γιὰ νὰ βγάλωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ ἕνα καταχρηστικὸ κλάσμα διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Τὸ πηλίκον τοῦτο γράφομε ἀκέραιο, τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο. Ὁ ἀριθμός, ποὺ βρίσκομε τώρα, εἶναι μικτός.

Ἀσκήσεις

1 Πόσα ἕβδομα εἶναι οἱ $2\frac{3}{7}$, $1\frac{6}{7}$, $5\frac{5}{7}$ ἑβδομάδες ;

2. Πόσα εἰκοστὰ τέταρτα εἶναι τὰ $2\frac{15}{24}$, $3\frac{1}{24}$ ἡμερόνυκτα ;

3. Νὰ τραποῦν σὲ ἰσοδύναμα καταχρηστικὰ κλάσματα οἱ παρακάτω μικτοὶ ἀριθμοί :

$5\frac{5}{8}$ πήχεις, $6\frac{8}{10}$ δραχμές. $8\frac{3}{4}$ ὧρες, $9\frac{2}{4}$ ὀκάδες.

4. Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω μικτοὶ ἰσοδύναμα κλάσματα :

$8\frac{1}{2}$, $4\frac{5}{8}$, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{1}{8}$, $7\frac{3}{5}$.

1. Πόσοι πήχεις εἶναι τὰ $\frac{12}{8}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{20}{8}$ τοῦ πήχεως ;

6. Πόσα ἔτη εἶναι τὰ $\frac{15}{2}$, $\frac{20}{12}$, $\frac{28}{12}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{5}{4}$ τοῦ ἔτους

7. Πόσα πεντάδραχμα εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{24}{5}$ τοῦ πεντα δράχμου ;

8. Μὲ πόσες ὀκάδες ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{23}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

9. Βγάλετε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα:

$$\frac{13}{4}, \frac{27}{7}, \frac{16}{5}, \frac{24}{9}, \frac{45}{8}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄ Πότε ἕνα κλάσμα μεγαλώνει

Πρόβλημα:

Ἕνα τετράδιο ἔχει $\frac{3}{10}$ τῆς δραχμῆς. Ἕνα ἄλλο τετράδιο ἔχει $\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε, ποιὸ εἶναι ἀκριβώτερο; Τὸ δεύτερο; Πόσες φορές;

Βλέπετε, πὼς καὶ τὰ δύο κλάσματα ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, ἐνῶ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου εἶναι 2 φορὲς μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ πρώτου.

Ἂν τρίτο τετράδιο ἔχη $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς, πόσες φορὲς ἀκριβώτερο εἶναι ἀπὸ τὸ πρῶτο; Ὥστε, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μεγαλώνει, ὅταν μεγαλώνη ὁ ἀριθμητής του. Καὶ πόσο; Ὅσες φορὲς μεγαλώνει (πολλαπλασιάζεται) ὁ ἀριθμητής του.

Πρῶτο συμπέρασμα:

Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος γίνεται τόσες φορὲς μεγαλυτέρα, ὅσες φορὲς πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητής του.

Ἔτσι τὸ κλάσμα: $\frac{12}{7}$ εἶναι 4 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{7}$ διότι: $\frac{3\times4}{7}=\frac{12}{7}$.

Ἂν τώρα τὸ πρῶτο τετράδιο ἔχη πάλι $\frac{3}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἕνα ἄλλο ἔχη $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς, ποιὸ εἶναι ἀκριβώτερο; Πόσες φορές; Γιατί:

Δεύτερο συμπέρασμα:

Ἕνα κλάσμα μεγαλώνει τόσες φορές, ὅσες φορὲς διαιρεῖται ὁ παρονομαστής του.

Π.χ. τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι 5 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{3}{20}$ διότι $\frac{3}{20:5}=\frac{3}{4}$.

Ὥστε:

Ἕνα κλάσμα μεγαλώνει τόσες φορές, ὅσες φορὲς πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητής του ἢ διαιρεῖται ὁ παρονομαστής του.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γίνουν 3 φορὲς μεγαλύτερα τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ πολλαπλασιασμὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τους: $\frac{1}{2}$ ὀκᾶς, $\frac{3}{8}$ πήχεως, $\frac{3}{24}$ ἡμέρας, $\frac{5}{12}$ ἔτους, $\frac{3}{5}$ πενταδράχμου.

2. Μεγαλώσετε 4 φορὲς τὰ παρακάτω κλάσματα, μὲ διαίρεσι τοῦ παρονομαστοῦ τους: $\frac{5}{8}$ πήχεως, $\frac{9}{16}$ ὀκᾶς, $\frac{12}{60}$ ὥρας, $\frac{10}{100}$ μέτρου.

3. Ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο κλάσματα στὰ παρακάτω ζεύγη εἶναι μεγαλύτερο καὶ πόσες φορές;

α) $\frac{2}{6}$ καὶ $\frac{2}{3}$ β) $\frac{8}{9}$ καὶ $\frac{2}{9}$ γ) $\frac{15}{20}$ καὶ $\frac{5}{20}$ δ) $\frac{18}{24}$ καὶ $\frac{18}{3}$· Γιατί:

Β΄ Πότε ἕνα κλάσμα μικραίνει

Πρόβλημα:

1. Ἀγοράσαμε $\frac{6}{8}$ πήχεως ὕφασμα καὶ ἕνα ἄλλο κομμάτι $\frac{2}{8}$ πήχεως. Ποιὸ εἶναι μικρότερο; Πόσες φορές; Γιατί;

Λοιπόν: Μικραίνει τόσες φορὲς ἕνα κλάσμα, ὅσες φορὲς διαιρεῖται ὁ ἀριθμητής του.

2. Ἔχω $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς ζάχαρι καὶ σεῖς $\frac{3}{8}$ ὀκᾶς. Ποιὸς ἔχει περισσότερη; Ἐγώ; Γιατί; Πόσες φορὲς περισσότερο ἔχω;

Λοιπόν: Ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος μεγαλώσῃ δύο ἢ περισσότερες φορὲς (πολλαπλασιασθῇ), μικραίνει δύο ἢ περισσότερες φορὲς τὸ κλάσμα. Συμπέρασμα:

Ἕνα κλάσμα μικραίνει τόσες φορές, ὅσες διαιρεῖται ὁ ἀριθμητής του ἢ ὅσες φορὲς πολλαπλασιάζεται ὁ παρονομαστής του.

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε δύο φορὲς μικρότερα, μὲ διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ τους τὰ κλάσματα:

$\frac{12}{8}$ πήχεως, $\frac{30}{60}$ μέτρου, $\frac{4}{8}$ ὀκᾶς, $\frac{30}{60}$ ὥρας.

2. Κάμετε 3 φορὲς μικρότερα μὲ πολλαπλασιασμὸ τοῦ παρονομαστοῦ τους, τὰ κλάσματα:

$\frac{3}{8}$ ὀκᾶς, $\frac{1}{\ }$ ὥρας, $\frac{2}{8}$ πήχεως, $\frac{2}{4}$ ἔτους.

3. Κάμετε 4 φορὲς μικρότερα τὰ παρακάτω κλάσματα, μὲ ὅποιο τρόπο σᾶς συμφέρει καλύτερα:

$\frac{8}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{30}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{24}{60}$

ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

Τί θὰ προτιμούσατε ν' ἀγοράσετε μὲ τὰ ἴδια χρήματα, $\frac{10}{10}$ μέτρου κορδέλλα ἢ $\frac{100}{100}$ μέτρα;

Ἐπίσης ποιὸ εἶναι μεγαλύτερο κομμάτι, $\frac{2}{4}$ πήχεως ἢ $\frac{4}{8}$ πήχεως;

Ἀκόμη, ποιὸ εἶναι βαρύτερο, $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς ζάχαρι ἢ $\frac{30}{40}$ ὀκᾶς, ἢ $\frac{300}{400}$ ὀκᾶς ζάχαρι;

Τί συμπέρασμα βγάζετε; Γιατί;

Ὥστε: Τὰ $\frac{10}{10}$ μέτρα εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ $\frac{100}{100}$ μ. Τὰ $\frac{2}{4}$ πήχεως εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὰ $\frac{4}{8}$ πήχεως. Καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς ζάχαρι εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὰ $\frac{30}{40}$ ὀκᾶς καὶ ἀκόμη μὲ τὰ $\frac{300}{400}$ ὀκᾶς.

Παρατηροῦμε ὅμως, πὼς τὸ κλάσμα $\frac{100}{100}$ μέτρα ἔχει καὶ τοὺς δύο ὅρους του 10 φορὲς μεγαλύτερους ἀπὸ τὸ $\frac{10}{10}$ μέτρου.

Ἐπίσης τὸ $\frac{4}{8}$ πήχεως ἔχει τοὺς ὅρους του 2 φορὲς μεγαλύτερους ἀπὸ τὸ $\frac{2}{4}$ πήχεως καὶ τὸ $\frac{300}{400}$ τῆς ὀκᾶς 100 φορὲς μεγαλύτερους ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς. Συμπέρασμα:

Ἂν πολλαπλασιάσωμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, θὰ βροῦμε καινούργιο κλάσμα μὲ μεγαλύτερους ὅρους, ἰσοδύναμο (ἴσο στὴν ἀξία) ὅμως μὲ τὸ πρῶτο.

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε τρία κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ τὸ $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς.

2. Γράψετε 4 κλάσματα ἰσοδύναμα μὲ τὸ $\frac{2}{12}$ ἔτους.

3. Γράψετε τοὺς ἀριθμητάς, ποὺ λείπουν στὰ παρακάτω κλάσματα, γιὰ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα (ἴσα στὴν ἀξία).

$$\frac{2}{3} = \frac{}{6} = \frac{}{15} = \frac{}{24} = \frac{}{30}.$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Προσέξετε. Δὲν εἶναι τὸ ἴδιο, ἂν πάρωμε $\frac{200}{400}$ ὀκᾶς καφὲ ἢ $\frac{1}{2}$ ὀκᾶς; Ἐπίσης, δὲν εἶναι τὸ ἴδιο, ἂν εἰποῦμε $\frac{15}{60}$ ὥρας ἢ $\frac{1}{4}$ ὥρας;

Τί παρατηροῦμε; Στὸ πρῶτο παράδειγμα οἱ ὅροι τοῦ πρώτου κλάσματος διαιρέθηκαν μὲ τὸ 200 ὁ καθένας καὶ στὸ δεύτερο παράδειγμα οἱ ὅροι τοῦ πρώτου κλάσματος διαιρέθηκαν καὶ οἱ δύο μὲ τὸ 15. Συμπέρασμα:

Ἂν τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος διαιρέσωμε μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, θὰ βροῦμε νέο κλάσμα μὲ μικρότερους ὅρους, ἀλλὰ ἰσοδύνατο (ἴσο στὴν ἀξία) μὲ τὸ πρῶτο.

Τὴν ἐργασία αὐτή, ποὺ ἀπὸ κλάσμα μὲ μεγάλους ὅρους βρίσκομε, μὲ διαίρεσι τῶν ὅρων του μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, νέο κλάσμα μὲ μικρότερους ὅρους (πιὸ ἁπλὸ) ἰσοδύναμο μὲ τὸ πρῶτο, τὴ λέμε **ἁπλοποίησιν.**

Πρέπει νὰ θυμόμαστε, ὅτι ἡ ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος εἶναι πρᾶξις ὑποχρεωτικὴ γιὰ μᾶς καὶ γιὰ τὴν καλύτερη κατανόησιν, ἀλλὰ καὶ διευκόλυνσίν μας στὶς πράξεις καὶ στοὺς λογαριασμούς μας.

Τὸ κλάσμα, ποὺ δὲν ἁπλοποιεῖται, τὸ λέμε **ἀνάγωγο** (δηλ. δὲν ἀνάγεται—γίνεται—σὲ κλάσμα πιὸ ἁπλό).

Ἄς ὑποθέσωμε, πὼς θέλομε ν' ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα $\frac{24}{60}$. Μποροῦμε ν' ἁπλοποιήσωμε αὐτό διαιροῦντες τοὺς ὅρους του μὲ τὸ 2. Ἀλλὰ καὶ μὲ τὸ 3, καὶ μὲ τὸ 4 καὶ ἄλλους. Ποιὸν θὰ προτιμήσωμε ; Προσέξετε ! Ἂν διαιρέσωμε διὰ τοῦ 2, θὰ βροῦμε τὸ ἰσοδύναμο $\frac{12}{30}$. Ἀλλὰ καὶ αὐτὸ θέλει ἁπλοποίησιν πάλι διὰ τοῦ 2. Θὰ βρῶ τώρα τὸ ἰσοδύναμο $\frac{6}{15}$. Μὰ καὶ αὐτὸ ἁπλοποιεῖται διὰ τοῦ 3 καὶ θὰ βρῶ ἰσοδύναμο $\frac{2}{5}$. Αὐτὸ τέλος εἶναι ἀνάγωγο. Παρατηρῆστε ὅμως, πόσον κόπο κάναμε καὶ πόσο χρόνο χάσαμε ; Πῶς θὰ βρίσκαμε ἀμέσως τὸ ἰσοδύναμό του ἀνάγωγο ;

Τοῦτο θὰ συμβῇ, καταλαβαίνομε, μὲ τὸν μεγαλύτερο ἀριθμό, ποὺ θὰ τοὺς διαιροῦσε καὶ τοὺς δύο ἀκριβῶς.

Εἶναι δὲ ἕνας ἀριθμὸς **διαιρετός** (διαιρεῖται ἀκριβῶς) δι' ἑνὸς ἄλλου, ἂν ἡ διαίρεσις ἀφήνη ὑπόλοιπο μηδέν.

Καί, ἂν μὲν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μονοψήφιος ἢ καὶ διψήφιος, μποροῦμε εὔκολα νὰ βροῦμε, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἑνὸς ἄλλου.

Δὲν εἶναι ὅμως τὸ ἴδιο, ὅταν πρόκειται γιὰ τριψήφιο καὶ πολυψήφιο ἀριθμό. Δὲν εἶναι εὔκολο π.χ. νὰ βροῦμε, ἂν ὁ 1850 εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ βασανισθοῦμε κάνοντας συνεχῶς πράξεις. Γιὰ εὐκολία μας ἔχομε μερικοὺς γενικοὺς κανόνες, ποὺ μᾶς λένε ἀσφαλῶς, πότε ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑνὸς ἄλλου, εἶναι δὲ οἱ παρακάτω :

ΚΑΝΟΝΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

1. Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2, ἂν τὸ τελευταῖο

ψηφίο του εἶναι ζυγὸς ἀριθμὸς δηλ. 0, 2. 4, 6, 8. Π.χ. ὁ 82 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2. Ἐπίσης, ὁ 148 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4.

2. Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του μᾶς δίνη ἀριθμό, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3.

Π.χ. ὁ 12 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 διότι 12=1+2=3
ὁ 123 » » » 3 » =1+2+3=6
ὁ 1581 » » » 3 » 1+5+8+1=15=
=1+5=6

3. Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, ἂν ὁ ἀριθμὸς ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο του τελευταῖα ψηφία, ὅπως εἶναι γραμμένα, διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4.

Π.χ. τὸ 24 διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἀκριβῶς, διότι 24 : 4 ὑπόλοιπον 0.
Τὸ 152 διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἀκριβῶς, διότι 52 : 4 ὑπόλοιπον 0.
Τὸ 4180 διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἀκριβῶς, διότι 80 : 4 ὑπόλοιπον 0.

4. Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5, ἂν τὸ τελευταῖον ψηφίον του εἶναι 5 ἢ 0.

Π.χ. ὁ 135 : 5 ὑπόλοιπον 0.
ὁ 1010 : 5 ὑπόλοιπον 0.

5. Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 6, ἂν διαιρῆται διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3.

Π.χ. ὁ 48 : 6 ὑπόλοιπον 0, διότι 48 : 2 ὑπόλοιπον 0, καὶ 48 : 3 ὑπόλοιπον 0.

6. Διὰ τοῦ 9 διαιρεῖται ἀκριβῶς ὁ ἀριθμός, ποὺ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 9.

Π.χ. ὁ 27 : 9 ὑπόλοιπον 0, διότι 2+7=9.
ὁ 144 : 9 ὑπόλοιπον 0, διότι 1+4+4=9.
ὁ 2565 : 9 ὑπόλοιπον 0, διότι 2+5+6+5=18=1+8=9.

7. Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 10, ἂν τὸ τελευταῖο του ψηφίο εἶναι 0.

Π. χ. 40 : 10 ὑπόλοιπον 0.
180 : 10 ὑπόλοιπον 0.

8. Διὰ τοῦ 25 διαιρεῖται ὁ ἀριθμός, ποὺ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του εἶναι 25, 50, 75, ἢ 00.

Π. χ. 875 : 25 ὑπόλοιπον 0.
1050 25 ὑπόλοιπον 0.

2400 : 25 ὑπόλοιπον 0.

9. Διὰ τοῦ 100 διαιροῦνται τέλος, ὅσοι ἀριθμοὶ τελειώνουν σὲ δύο μηδενικὰ καὶ μὲ τὸ 1000 ὅσοι σὲ τρία μηδενικά.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ βρῆτε τα ἰσοδύναμα κλάσματα πρὸς τὰ $\frac{18}{24}$ ἡμέρας, $\frac{350}{400}$ ὀκᾶς. $\frac{60}{360}$ ἔτους, μὲ μικρότερους ὅρους.

2. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ τὸν πιὸ μεγάλο ἀριθμό, γιὰ νὰ γίνουν ἀμέσως ἀνάγωγα.

$$\frac{325}{400}, \quad \frac{800}{1000}, \quad \frac{72}{126}, \quad \frac{150}{200}, \quad \frac{1200}{2400}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Μία πηγὴ γιὰ νὰ γεμίση μιὰ δεξαμενὴ χρειάζεται 12 ὧρες. Τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίση σὲ μιά, σὲ δύο, σὲ τρεῖς ὧρες;

2. Ἕνα βιβλίο ἔχει 96 σελίδες. Οἱ 16 σελίδες (ἕνα τυπογραφικὸ φύλλο), τί μέρος τοῦ βιβλίου εἶναι;

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄ ΟΜΩΝΥΜΩΝ

1. Ἔχομε ἀγοράσει $\frac{5}{8}$ πήχεως καὶ $\frac{7}{8}$ πήχεως. Ἐπίσης ἔχομε ἀγοράσει $\frac{50}{400}$ ὀκᾶς καὶ $\frac{80}{400}$ ὀκᾶς. Τί παρατηρεῖτε;

Στὸ πρῶτο παράδειγμα πήραμε καὶ τὶς δυὸ φορὲς κομμάτια μὲ τὸ ἴδιο ὄνομα (ὄγδοα). Στὸ δεύτερο πάλι τετρακοσιοστά. Βλέπομε δηλαδὴ τὰ $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{7}{8}$ νὰ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ 8. Καὶ τὰ $\frac{50}{400}$ καὶ $\frac{80}{400}$ τὸν ἴδιο παρονομαστὴ 400.

Τέτοια δύο ἢ περισσότερα κλάσματα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, λέγονται ***ὁμώνυμα***.

Προσέξετε τώρα τὸ πρῶτο παράδειγμα: Πότε πήραμε περισσότερους πήχεις; Στὸ δεύτερο παράδειγμα, πότε πήραμε περισσότερες ὀκάδες; Εὔκολα θὰ τὸ βρῆτε καὶ θὰ συμπεράνετε ἀσφαλῶς, πώς:

Ἀπὸ δύο ἢ περισσότερα ὁμώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο θὰ εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ θὰ ἔχῃ τὸν μεγαλύτερο ἀριθμητή.

Β' ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ

Μετρήσαμε μιὰ γραμμὴ καὶ εἶναι $\frac{3}{10}$ μέτρου καὶ μιὰ ἄλλη εἶναι $\frac{3}{100}$ μέτρου. Σκεφτῆτε καὶ βρῆτε, ποιὰ εἶναι πιὸ μεγάλη. Ἐξηγήσετε γιατί; Τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι ὁμώνυμα; (τὸ ἕνα λέει δέκατα, τὸ ἄλλο ἑκατοστά).

Τέτοια κλάσματα, ποὺ δὲν θὰ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, τὰ λέμε **ἑτερώνυμα** (ἕτερο=ἄλλο ὄνομα).

Προσέξετε ὅμως στὸ παράδειγμά μας.

Καὶ τὴν πρώτη φορὰ καὶ τὴ δεύτερη πήραμε τὸν ἴδιο ἀριθμὸ κομματιῶν. Πότε τὰ κομμάτια (μέρη) τοῦ μέτρου ἦσαν μεγαλύτερα; Συμπέρασμα:

Ἀπὸ δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἑτερώνυμα, ἀλλὰ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμητή, μεγαλύτερο θὰ εἶναι ἐκεῖνο, μὲ τὸν μικρότερο παρονομαστή.

Ἀσκήσεις

1. Βάλετε στὴ σειρὰ ἀπὸ τὰ μικρότερα στὰ μεγαλύτερα (πρῶτα τὰ μικρότερα) τὰ παρακάτω κλάσματα:

$\frac{10}{60}$ ὥρας, $\frac{9}{60}$ ὥρας, $\frac{25}{60}$ ὥρας, $\frac{18}{60}$ ὥρας, $\frac{55}{60}$ ὥρας, $\frac{45}{60}$.

2. Δείξετε στὰ παρακάτω ζευγάρια, ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο καὶ ἐξηγῆστε γιατί:

α) $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{15}$ β) $\frac{18}{30}$, $\frac{18}{24}$ γ) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ δ) $\frac{16}{20}$, $\frac{16}{15}$.

ΤΡΟΠΗ ΔΥΟ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ

Α' τρόπος

Πρόβλημα:

Ἕνας ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως καὶ τὴν ἄλλη μέρα $\frac{7}{8}$. Πότε πῆρε περισσότερο;

Σκέπτεσθε: Ἂν ἔπαιρνε καὶ δύο φορὲς ἴδια κομμάτια, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε ἀμέσως παραπάνω, θὰ ἔλεγα, πὼς μεγαλύτερο κλάσμα θὰ ἦταν ἐκεῖνο μὲ τὸν μικρότερο παρονομαστή. Ἀλλὰ τὰ ἑτερώνυμα αὐτὰ κλάσματα δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμητή. Ἂν πάλι ἦσαν ὁμώνυμα θὰ κοίταζα, πότε θὰ ἦταν μεγαλύτερος ὁ ἀριθμητὴς καὶ εὔκολα θὰ ἀπαντοῦσα. Μποροῦμε νὰ κάνωμε τίποτα;

Βλέπομε, ὅτι τὸ πρῶτο εἶναι ἀκατόρθωτο, ἀφοῦ πρέπει νὰ πάρω τὴ μιὰ φορὰ τρία κομμάτια καὶ τὴν ἄλλη ἑπτά. Μήπως ὅμως μποροῦμε νὰ χωρίσωμε τὸν πῆχυ σὲ ἴσα μέρη καὶ τὶς δυὸ φορές (νὰ τὰ κάνωμε ὁμώνυμα);

Ἂς πάρωμε στὴ σειρὰ τὰ κλάσματα: $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$.

Μποροῦμε τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{3}{4}$ νὰ πολλαπλασιάσωμε μὲ ἕνα καὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό. Τοὺς πολλαπλασιάζομε μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ δευτέρου κλάσματος 8. Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

α) $\frac{3\times8}{8\times4}=\frac{24}{32}$. Ἀλλὰ καὶ τοῦ $\frac{7}{8}$ τοὺς ὅρους μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ δευτέρου κλάσματος 4. Θὰ ἔχωμε καὶ ἐδῶ:

β] $\frac{7\times4}{8\times4}=\frac{28}{32}$.

Σημ.: Μποροῦμε νὰ τοὺς πολλαπλασιάσωμε μὲ ὁποιονδήποτε ἀριθμό. Ἀλλὰ γιὰ νὰ βρῶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ παρονομαστὴ καὶ στὸ πρῶτο καὶ στὸ δεύτερο, ἔπρεπε νὰ εἶναι κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν τους. Γι' αὐτὸ προτίμησα τοὺς παρονομαστὰς (τὸ γινόμενό τους).

Συμπέρασμα:

Δύο κλάσματα ἑτερώνυμα γίνονται ὁμώνυμα, ἂν πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ δευτέρου κλάσματος καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου.

Ἔτσι, στὰ ὁμώνυμα $\frac{24}{32}$, $\frac{28}{32}$ εὔκολα βρίσκομε τώρα, ποιὸ εἶναι μεγαλύτερο.

Β΄ τρόπος

῞Ας πάρωμε τὰ κλάσματα $\frac{4}{8}$, $\frac{15}{24}$. Θέλομε νὰ τὰ κάμωμε ὁμώνυμα. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε, θὰ ἔχωμε:

$$\frac{4\times24}{8\times42},\ \frac{15\times8}{24\times8} \text{ ἢ } \frac{96}{192},\ \frac{120}{192}$$

Δηλ. ὁ κοινὸς παρονομαστὴς 192 εἶναι Κοινὸ Πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 24. Ἐμεῖς ὅμως προτιμοῦμε κλάσματα μὲ τοὺς πιὸ μικροὺς δυνατὸν ὅρους.

Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ βροῦμε κοινὸν παρονομαστὴ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 24. Βλέπομε, ὅτι τοῦ 8 καὶ 24 Ε.Κ.Π. = 24. Προσέξετε τώρα, πῶς γίνονται ὁμώνυμα τὰ $\frac{4}{8}$, $\frac{15}{24}$. Διαιροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου καὶ τὸ πηλίκον τὸ βάνομε μὲ μιὰ γραμμὴ ἐπάνω στὸ πρῶτο κλάσμα.

῎Επειτα το διαιροῦμε διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου καὶ τὸ πηλίκον γράφομε ἐπάνω ἀπὸ τὸ δεύτερο κλάσμα. ῞Ετσι θὰ ἔχωμε:

$$\overbrace{\frac{4}{8}}^{3},\ \overbrace{\frac{15}{24}}^{1} \text{ Ε.Κ.Π.}=24$$

῎Επειτα πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀποπάνω του ἀριθμὸν καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν ἀποπάνω του ἀριθμόν. Δηλαδή: $\frac{4\times3}{8\times3},\ \frac{15\times1}{24\times1} = \frac{12}{24},\ \frac{15}{24}$.

῎Εγιναν καὶ τώρα ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{4}{8}$, $\frac{15}{24}$, ἀλλὰ μὲ μικρότερους ὅρους, πού, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, μᾶς συμφέρει.

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε ὁμώνυμα τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ τὸν πρῶτο τρόπο:
α) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. β) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$. γ) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$. δ) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$. ε) $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$. στ΄) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

2. Κάμετε ὁμώνυμα τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους.

α) $\frac{1}{3}$, $\frac{8}{9}$. β) $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{20}$. γ) $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{40}$. δ) $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{8}$. ε) $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{30}$.
στ) $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{12}$.

3. Κάμετε ὁμώνυμα τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ τὸν τρόπο, ποὺ σᾶς συμφέρει καλύτερα:

α) $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$. β) $\frac{4}{25}$, $\frac{3}{5}$. γ) $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{2}$. δ) $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$.
ε) $\frac{9}{100}$, $\frac{7}{10}$ καὶ στ) $\frac{8}{10}$, $\frac{1}{11}$.

4. Ν' ἁπλοποιήσετε τὰ παρακάτω κλάσματα καὶ ἔπειτα, ἂν εἶναι ἑτερώνυμα, νὰ τὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα,

α) $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{15}$. β) $\frac{5}{25}$, $\frac{8}{20}$. γ) $\frac{7}{4}$, $\frac{12}{42}$. δ) $\frac{16}{72}$, $\frac{9}{27}$.
ε) $\frac{15}{21}$. $\frac{12}{16}$. στ) $\frac{12}{28}$, $\frac{20}{26}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Δύο ἀδελφοὶ μοίρασαν ἕνα ἀμπέλι. Ὁ πρῶτος πῆρε τὰ $\frac{\ }{5}$ τοῦ ἀμπελιοῦ καὶ ὁ ἄλλος τὰ $\frac{6}{10}$ αὐτοῦ. Τίνος τὸ μερίδιον εἶναι μεγαλύτερο; Γιατί;

2. Ὁ τροχὸς (ρόδα) ἑνὸς αὐτοκινήτου κάνει 2 στροφὲς σὲ 3 δευτερόλεπτα. Κάποιου ἄλλου αὐτοκινήτου ὁ τροχὸς κάνει 7 στροφὲς σὲ 9 δευτερόλεπτα. Ποιὸς ἀπὸ τοὺς δύο γυρίζει γρηγορώτερα;

3. Μία λάμπα καίει σὲ μιὰ ὥρα $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς πετρέλαιο. Ἄλλη λάμπα τὴν ἴδια ὥρα καίει $\frac{7}{12}$ τῆς ὀκᾶς. Ποιὰ ἀπὸ τὶς δύο καίει λιγώτερο πετρέλαιο;

4. Δύο παιδιὰ ἔτρεξαν τὸν ἴδιο δρόμο, τὸ πρῶτο σὲ $\frac{5}{12}$ τῆς ὥρας καὶ τὸ δεύτερο σὲ $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας. Ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο τρέχει περισσότερο;

ΤΡΟΠΗ ΤΡΙΩΝ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ

Μᾶς ρωτοῦν: Ποιὸ εἶναι μεγαλύτερο, τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας, τὰ $\frac{2}{3}$ ἢ τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῆς; Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα πρέπει νὰ τὰ κάμωμε ὁμώνυμα τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, γιὰ νὰ τὰ συγκρίνωμε.

Α΄ Τρόπος

Ἂν ἦταν δύο τὰ κλάσματα, θὰ ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ δευτέρου, γιὰ νὰ βροῦμε κοινὸν παρονομαστὴ τὸ γινόμενο τῶν παρονουαστῶν τους.

Ἐδῶ πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου καὶ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ τρίτου κλάσματος.

Δὲν μποροῦμε; θὰ ἔχουμε λοιπόν:

α) $\frac{1\times3\times5}{2\times3\times5}$. Ἔπειτα τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου κλάσματος, ἀλλὰ καὶ τοῦ τρίτου. Δηλαδή:

β) $\frac{2\times2\times5}{3\times2\times5}$. Τέλος τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου.

Ἤτοι: γ) $\frac{4\times2\times3}{5\times2\times3}$. Ὅταν κάμωμε τὶς πράξεις, θὰ βροῦμε τὰ κλάσματα $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{28}$, $\frac{24}{30}$.

Ἔτσι βλέπομε, πῶς τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας ἢ $\frac{24}{30}$ εἶναι τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τὰ ἄλλα κλάσματα τῆς ὥρας. Ὥστε:

Γιὰ νὰ τρέψωμε τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Β΄ τρόπος

Μᾶς ρωτοῦν: Ποιὸς χρόνος εἶναι μεγαλύτερος, τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔτους, τὰ $\frac{23}{30}$ ἢ τὰ $\frac{273}{360}$;

Ἂν θελήσωμε νὰ τὰ κάνωμε ὁμώνυμα μὲ τὸν παραπάνω τρόπο, θὰ ἀναγκασθοῦμε νὰ κάμωμε πολλοὺς πολλαπλασιασμοὺς γραπτῶς καὶ ἔπειτα θὰ βροῦμε ὁμώνυμα μὲ μεγάλους ὅρους. Εἶναι ἀνάγκη νὰ προτιμήσωμε τὸν τρόπο μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν. Θὰ ἔχουμε λοιπόν :

$$\overset{72}{\frac{3}{5}},\ \overset{12}{\frac{23}{30}},\ \overset{1}{\frac{273}{360}}$$ = Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι ὁ 360

$= \frac{216}{360}, \frac{276}{360}, \frac{273}{360}$. Βλέπομε τώρα, πῶς τὸ $\frac{23}{30}$ τοῦ ἔτους ἢ $\frac{276}{360}$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος χρόνος. Συμπέρασμα :

> *Γιὰ νὰ τρέψωμε τρία ἢ περισσότερα κλάσματα ἑτερώνυμα σὲ ὁμώνυμα, βρίσκομε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους. Διαιροῦμε αὐτὸ δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ καὶ τὸ πηλίκο τὸ βάνομε ἐπάνω ἀπὸ κάθε κλάσμα. Τέλος πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους καθενὸς κλάσματος μὲ τὸν ἀποπάνω τους ἀριθμό.*

Ἀσκήσεις

1. Τρέψατε σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸν πρῶτο τρόπο τὰ ἑξῆς κλάσματα :
α) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. β) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. γ) $\frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}$.
δ) $\frac{5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}$.

2 Τρέψετε σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους τὰ ἑξῆς κλάσματα :

α) $\frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{5}{6}$. β) $\frac{2}{7}, \frac{5}{14}, \frac{4}{21}$. γ) $\frac{11}{20}, \frac{9}{10}, \frac{3}{4}$.
δ) $\frac{1}{8}, \frac{7}{10}, \frac{3}{5}$.

3. Νὰ ἁπλοποιήσετε πρῶτα καὶ νὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα ἔπειτα τὰ ἑξῆς κλάσματα :
α) $\frac{6}{10}, \frac{18}{24}, \frac{6}{18}$. β) $\frac{30}{35}, \frac{20}{40}, \frac{20}{25}$. γ) $\frac{12}{32}, \frac{10}{15}, \frac{10}{50}$.
δ) $\frac{10}{12}, \frac{12}{14}, \frac{8}{16}, \frac{5}{15}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τρεῖς ἐργάτες ἐργάζονται σὲ ἕνα χωράφι : Ὁ πρῶτος σκάβει σὲ μιὰ ἡμέρα τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ χωραφιοῦ, ὁ δεύτερος τὴν ἴδια μέρα σκά-

βει τὰ $\frac{3}{10}$ αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{4}{15}$ τοῦ χωραφιοῦ. Ποιὸς ἐργάζεται περισσότερον ἀπὸ τοὺς τρεῖς; Γιατί;

2. Τρία βαπόρια ξεκινοῦν μαζὶ ἀπὸ τὸ Βόλο γιὰ τὴ Θεσσαλονίκη. Τὸ πρῶτο τρέχει σ' ἕνα πρῶτο λεπτὸ $\frac{2}{5}$ τοῦ μιλίου, τὸ δεύτερο $\frac{5}{12}$ τοῦ μιλίου, τὸ τρίτο $\frac{9}{20}$ τοῦ μιλίου. Ποιὸ βαπόρι θὰ φθάση πρῶτο στὸν προορισμό του;

3. Τέσσερα παιδιὰ κληρονόμησαν τὴν πατρικὴ περιουσία μετὰ τὸν θάνατο τοῦ πατέρα τους. Σύμφωνα μὲ τὴ διαθήκη ὁ πρῶτος πῆρε τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{9}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{4}{15}$ καὶ ὁ τέταρτος τὰ $\frac{14}{15}$ αὐτῆς. Ποιὸ ἀπὸ τὰ παιδιὰ πῆρε μεγαλύτερο μερίδιο;

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄ Ὁμωνύμων

Πρόβλημα:

Ἀγοράσαμε τὴν Δευτέρα $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ὕφασμα, τὴν Τρίτη $\frac{4}{8}$ τοῦ πήχεως. Μποροῦμε νὰ ξέρωμε, πόσους πήχεις πήραμε καὶ τὶς δύο ἡμέρες; Βεβαίως. Θὰ κάνωμε πρόσθεσιν. Θὰ ἔχωμε λοιπόν: **3 ὄγδοα (ρούπια) + 4 ὄγδοα (ρούπια) = 7 ὄγδοα (ρούπια). Ἢ καὶ** $\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$.

Ἂν πάρωμε ἀκόμη $\frac{5}{8}$ πήχεις θὰ ἔχωμε:

3 ὄγδοα + 4 ὄγδοα + 5 ὄγδοα = $\frac{12}{8}$ πήχεις.

Ἁπλοποιοῦντες καὶ βγάνοντας τὶς ἀκέραιες μονάδες βρίσκομε: $\frac{12}{8}=\frac{2}{3}=1\frac{1}{2}$ πήχεις.

Συμπεραίνομε λοιπόν:

> ***Γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομε τοὺς ἀριθμητάς τους καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.***

Β' Ἑτερωνύμων

Πρόβλημα:

1. Ἀγοράσαμε χθὲς $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαρι καὶ σήμερα $\frac{1}{2}$ ὀκᾶς ἀκόμη. Πόσες ὀκάδες πήραμε ὅλες ὅλες;

Σκέψις: Πρέπει νὰ κάνωμε πρόσθεσιν.

Λύσις: Γράφομε: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=$; ἢ 3 τέταρτα καὶ 1 δεύτερο= ;

Δὲν εἶναι ὅμως, σὰν νὰ λέμε 3 θρανία + 1 παράθυρο, πόσα κάνουν; Μποροῦμε νὰ προσθέσωμε ἀνόμοια πράγματα; (ἑτεροειδῆ ποσά;) Ὄχι φυσικά.

Οὔτε λοιπὸν μποροῦμε νὰ προσθέσωμε 3 τέταρτα + 1 δεύτερο (ἑτερώνυμα κλάσματα).

Δὲν μποροῦμε ὅμως νὰ τὰ κάνωμε ὅμοια, νὰ ἔχουν δηλαδὴ τὸ ἴδιο ὄνομα; (ὁμώνυμα).

Τὰ τρέπομε γι' αὐτὸ σὲ ὁμώνυμα καὶ θὰ ἔχωμε:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4} \text{ ὀκ.}$$

2. Ὁμοίως, ἂν ἔχωμε νὰ προσθέσωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{2}{3}+\frac{5}{12}+\frac{5}{24}$, θὰ πρέπει νὰ τὰ κάμωμε καὶ αὐτὰ ὁμώνυμα. Δηλαδή:

$$\overbrace{\frac{2}{3}}^{8}+\overbrace{\frac{5}{12}}^{2}+\overbrace{\frac{5}{24}}^{1}= \text{Ε.Κ.Π. } 24$$

Συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ καὶ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομε πρῶτα σὲ ὁμώνυμα.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ προσθέσετε ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς τὰ παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$; πήχεις. β) $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=$; πήχεις.

γ) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$; ἔτη. δ) $\frac{5}{12}+\frac{11}{12}+\frac{8}{12}=$ ἔτη.

ε) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} =$; ὧρες. στ) $\frac{17}{60} + \frac{30}{60} + \frac{18}{60} =$; ὧρες.

2. Προσθέσετε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα :

α) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$; β) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} =$; γ) $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{2}{5} =$;

δ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$; ε) $\frac{5}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{5} + \frac{3}{4} =$;

Γ΄ Ἀκεραίου καὶ κλάσματος

Ἀγοράσαμε 5 πήχεις πανὶ γιὰ ἕνα πουκάμισο καὶ ἐπειδὴ δὲν μᾶς ἔφτασε, ξαναπήραμε ἄλλα $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε, πόσους πήχεις πήραμε καὶ τὶς δυὸ φορές ; Δὲν θὰ κάνετε πρόσθεσιν ; Τί ἀριθμοὺς ἔχετε νὰ προσθέσετε ; Ἀκέραιο καὶ κλάσμα. Μποροῦμε νὰ προσθέσωμε ἔτσι ; Εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνουν καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ ἀκέραιοι ἢ καὶ οἱ δύο κλάσματα. Ἀκέραιο τὸ κλάσμα δὲν μποροῦμε νὰ τὸ κάνωμε. Γι᾽ αὐτό κάνομε τὸν ἀκέραιο κλάσμα μὲ παρονομαστὴ 8 (δηλ. 8 ρούπια τὸν κάθε ὁλόκληρο πῆχυ). Καὶ θὰ ἔχωμε :

$5 + \frac{3}{8} = \frac{5 \times 8}{8} + \frac{3}{8} = \frac{40}{8} + \frac{3}{8} = \frac{43}{8} = 5\frac{3}{8}$. Ἐπίσης, ἂν ἔχωμε $\frac{7}{12}$ ἔτους καὶ 3 ἔτη, θὰ γράψωμε $\frac{7}{12} + 3 = \frac{7}{12} + \frac{36}{12} = \frac{43}{12} = 3\frac{7}{12}$ ἔτους. Τί παρατηρεῖτε ;

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ προσθέσωμε ἀκέραιο καὶ κλάσμα (καὶ ἀντιστρόφως κλάσμα καὶ ἀκέραιο), ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμε αὐτοὺς σὲ ἕνα ἀριθμὸ μικτό.

Δ΄. Ἀκεραίου καὶ Μικτοῦ

Ἂν θελήσωμε στὸ παραπάνω παράδειγμά μας νὰ ψωνίσωμεν ἄλλους 8 πήχεις, πόσους θὰ ἔχωμε συνολικὰ ψωνίσει ;

Δηλαδὴ $5\frac{3}{8} + 8 =$; Τί ἀριθμοὺς ἔχομε νὰ προσθέσωμε ;

Δὲν μποροῦμε καὶ τὸν μικτὸ καὶ τὸν ἀκέραιο νὰ τοὺς κάμωμε κλάσματα ; Γράφομε λοιπόν :

$$5\frac{3}{8}+8=\frac{43}{8}+\frac{64}{8}=\frac{107}{8}=13\frac{2}{8}$$ πήχεις.

Τὸ ἴδιο ὅμως βρίσκομε, ἂν προσθέσωμε τοὺς ἀκεραίους χωριστὰ καὶ βάλωμε κοντὰ καὶ τὸ κλάσμα. Δηλαδὴ προσθέτομε τὸν ἀκέραιο στὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ ἀφήνοντες τὸ ἴδιο κλάσμα. Συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ προσθέσωμε ἀκέραιο καὶ μικτὸ ἀριθμὸ ἢ καὶ ἀντιστρόφως (ἀνάποδα) μικτὸ καὶ ἀκέραιο, προσθέτομε τὸν ἀκέραιο καὶ τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ γράφοντας πλησίον καὶ τὸ κλάσμα.

Ε΄. Μικτοῦ καὶ κλάσματος

Ἂς συνεχίσωμεν ὅμως καὶ ἂς ψωνίσωμε ἀκόμη ἄλλα $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως. Πόσους πρέπει νὰ ἔχωμε τώρα ὅλους ὅλους μαζί;

Πάλι πρέπει νὰ προσθέσωμε $13\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=$;

Κάνομε τὸν μικτὸ κλάσμα καὶ θὰ ἔχωμε:

$13\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=\frac{107}{8}+\frac{6}{8}=\frac{113}{8}=14\frac{1}{8}$ πήχεως. Τὸ ἴδιο ὅμως μποροῦμε νὰ βροῦμε, ἂν τὸ κομμάτι $\frac{3}{4}$ τὸ ὑπολογίσωμε μαζὶ (τὸ προσθέσωμε) στὸ κομμάτι, ποὺ εἴχαμε $\frac{3}{8}$.

Δηλαδὴ $=13\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=13\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right)=13\left(\frac{3}{8}+\frac{6}{8}\right)=$

$=13\left(\frac{9}{8}\right)$. Ἀλλὰ τὰ $\frac{9}{8}$ εἶναι ἴσον μὲ $1\frac{1}{8}$ πήχεως.

(Βγάνομε τὶς ἀκέραιες μονάδες του).

Ἤτοι: $13+1\frac{1}{8}=14\frac{1}{8}$ πήχεως.

Συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ προσθέσωμε μικτὸν καὶ κλάσμα, προσθέτομε τὰ κλάσματα (τὰ τρέπομε πρῶτα σὲ ὁμώνυμα) γράφοντας στὴν ἀρχὴ τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ. Καί, ἂν τὸ κλάσμα, ποὺ θὰ βροῦμε, εἶναι καταχρηστικό, βγάνομε τὶς ἀκέραιες μονάδες, ποὺ τὶς προσθέτομε στὸν ἀκέραιο γράφοντας πλάϊ στὸ ἄθροισμα τὸ κλάσμα (τὸ γνήσιο), ποὺ μᾶς μένει.

ΣΤ΄. Μικτοῦ καὶ μικτοῦ

Πρόβλημα:

Πήραμε ἀπὸ τὸν παντοπώλη $6\frac{2}{5}$ ὀκάδες λάδι τὴν πρώτη ἑβδομάδα καὶ $4\frac{3}{4}$ ὀκάδες τὴ δεύτερη. Πόσες πήραμε ὅλες μαζί;

Σκέψις: Θὰ κάνωμε πρόσθεσι. Τί ἀριθμοὺς ἔχομε νὰ προσθέσωμε τώρα; Πῶς; Δὲν μᾶς εὐκολύνει νὰ ὑπολογίσωμε χωριστὰ τὶς ὁλόκληρες ὀκάδες καὶ χωριστὰ τὰ μέρη τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα νὰ ἰδοῦμε, πόσες ὀκάδες καὶ μέρος εἶναι μαζί; Γράφομε λοιπόν:

$$5\frac{2}{5}+4\frac{3}{4}=(6+4)=10 \text{ ὀκάδες} \qquad (1)$$

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20} \text{ ὀκ.} \qquad (2)$$

Καὶ τέλος $10+1\frac{3}{20}$ ὀκάδες.

Ἀπάντησις: Πήραμε ἐν συνόλῳ $11\frac{3}{20}$ ὀκάδες λάδι.

Τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα θὰ βροῦμε, ἂν κάμωμε τοὺς μικτοὺς κλάσματα καὶ προσθέσωμε τὰ κλάσματα, ὅπως μάθαμε πρίν. Δὲν εἶναι ὅμως ὁ τρόπος αὐτὸς συμφερώτερος, γιατὶ ἔχει περισσότερες πράξεις καὶ κόπο.

Π. χ. στὸ παράδειγμά μας θὰ εἴχαμε:

$$6\frac{2}{5}+4\frac{3}{4}=\frac{32}{5}+\frac{19}{4}=\frac{128}{20}+\frac{95}{20}=\frac{223}{20}=11\frac{3}{20}.$$

Ἀσκήσεις

1. Νὰ βρῆτε ἀπὸ μνήμης, πόσα μέτρα κάνουν:

α) $12+\frac{1}{4}$ μ. β) $\frac{3}{10}+18$ μ. γ) $3\frac{4}{5}+7$ μ. δ) $10\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ μ.

ε) $18\frac{5}{8}+11\frac{3}{8}$ μ.

2. Νὰ βρῆτε γραπτῶς: α) Πόσες ὀκάδες κάνουν:

$$3\frac{5}{8}+4\frac{1}{2}+7\frac{3}{4} \text{ ὀκάδες;}$$

β) Πόσες ὧρες κάνουν; $5\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}+8\frac{1}{6}$ ὧρες;

γ) Πόσα ἔτη κάνουν $7\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+3\frac{1}{3}+5\frac{1}{6}$ ἔτη;

3. Κάμετε τὶς προσθέσεις:

α) $15\frac{2}{5}+\frac{7}{8}=$; β) $7+5\frac{3}{4}=$;

γ) $8+\frac{5}{9}+7=$; δ) $4+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=$;

ε) $8\frac{1}{2}+3\frac{4}{5}+2\frac{1}{4}=$; στ) $27\frac{2}{3}+19\frac{3}{5}+27+\frac{1}{2}+5=$;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνας ἐργάτης ἐξοδεύει κάθε μέρα γιὰ φαγητὸ $\frac{15}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου, γιὰ ἐνοίκιο $\frac{3}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου καὶ γιὰ ἄλλα μικροέξοδά του $\frac{7}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου. Πόσα εἶναι τὰ καθημερινά του ἔξοδα;

2. Τρεῖς κτίσται ἀνέλαβον νὰ κάμουν ἕναν τοῖχον. Ὁ πρῶτος ἔκτισε $3\frac{1}{2}$ μέτρα, ὁ δὲ δεύτερος $2\frac{3}{4}$ μέτρα καὶ ὁ τρίτος $3\frac{1}{5}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ἦταν ὁ τοῖχος;

3. Ὁ παντοπώλης τῆς γειτονιᾶς μας ἔχει δύο σακκιὰ ρύζι. Τὸ πρῶτο ζυγίζει $65\frac{1}{2}$ ὀκάδες καὶ τὸ δεύτερο $68\frac{1}{4}$ ὀκάδες. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε, πόσες ὀκάδες ρύζι ἔχει ὅλο μαζί;

4. Τρεῖς ἐργάτες ἀνέλαβαν νὰ σκάψουν ἕνα ἀμπέλι, ποὺ ὁ πρῶτος μόνος του θέλει 8 ἡμέρες νὰ τὸ σκάψη, ὁ δεύτερος 5 ἡμέρες καὶ ὁ τρίτος 4 ἡμέρες. Σὲ μιὰ ἡμέρα οἱ τρεῖς τους, πόσο ἀπ' τὸ ἀμπέλι θὰ σκάψουν;

5. Ἕνα κορίτσι ἔπλεξε σὲ μιὰ ἑβδομάδα $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα, τὴ δεύτερη ἑβδομάδα $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως καὶ τὴν τρίτη $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως. Πόσους πήχεις δαντέλλα ἔπλεξε καὶ τὶς τρεῖς ἑβδομάδες;

6. Ἕνας τσοπάνης ἐπώλησε $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς βούτυρο τὴν Δευτέρα, $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς τὴν Τρίτη καὶ $\frac{7}{8}$ ὀκάδες τὴν Παρασκευή. Πόσες ὀκάδες ἐπώλησε συνολικά;

7. Τὸ Σάββατο ἡ μητέρα μας ἔδωσε γιὰ κρέας $18\frac{3}{5}$ δραχμές,

γιὰ λάδι $5\frac{1}{2}$ δραχμὲς καὶ γιὰ πατάτες $7\frac{1}{5}$ δραχμές. Πόσο θὰ κοστίση τὸ φαγητό μας;

8. Ἕνα βαπόρι ξεκίνησε ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη στὶς 9 τὸ πρωΐ καὶ ἔκαμε τὴν πρώτη ὥρα $5\frac{3}{}$ μίλια, τὴ δεύτερη ὥρα $6\frac{7}{8}$ μίλια καὶ τὴν τρίτη ὥρα $5\frac{5}{8}$ μίλια. Πόσα μίλια ἔκαμε ὥς τὸ μεσημέρι

9. Μιὰ δεξαμενὴ γεμίζει ἀπὸ μιὰ βρύση σὲ 5 ὧρες καὶ ἀπὸ ἄλλη σὲ 8 ὧρες. Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσουν καὶ οἱ δύο βρύσες μαζὶ σὲ μιὰ ὥρα;

10. Ἕνας πατέρας ἔδωσε ἀπὸ τὴν περιουσία του τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς στὸ ἕνα του παιδὶ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ στὸ δεύτερο. Ποιὸ πῆρε περισσότερο μερίδιο καὶ τί μέρος τῆς περιουσίας πῆραν καὶ τὰ δυὸ μαζί;

11. Μιὰ ὀκὰ ζάχαρι ἔχει $15\frac{2}{5}$ δραχμές. Πόσο πρέπει νὰ τὴν πωλήσωμε γιὰ νὰ κερδίσωμε $2\frac{1}{10}$ δραχμές;

12. Ἕνας ὑπάλληλος ἐξοδεύει κάθε μέρα $7\frac{1}{5}$ τοῦ πενταδράχμου καὶ τοῦ περισσεύουν $\frac{8}{10}$ τοῦ πενταδράχμου. Πόσα ἔσοδα ἔχει τὴν ἡμέρα;

13. Ἕνας ἔμπορος ἔχει τρία τόπια ὑφάσματος. Τὸ πρῶτο εἶναι $23\frac{5}{8}$ πήχεως, τὸ δεύτερο $25\frac{3}{4}$ πήχεως καὶ τὸ τρίτο $28\frac{5}{8}$ πήχεως. Πόσοι πήχεις εἶναι καὶ τὰ τρία τόπια;

14. Ἕνα ὡρολόγιον δείχνει $8\frac{3}{4}$ ὧρες. Ἀλλὰ ξέρομε, πὼς πηγαίνει $\frac{7}{60}$ τῆς ὥρας πίσω. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀκριβὴς ὥρα;

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄. Κλάσματος ἀπὸ κλάσμα

1. Ὁμωνύμων

Πρόβλημα:

Ἀπὸ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως κορδέλλα ἡ Μαρία ἔκοψε γιὰ τὰ μαλλιά της τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως. Μπορεῖτε νὰ τῆς εἰπῆτε, πόσα ὄγδοα ἔμειναν;

Σᾶς βλέπω νὰ σκέπτεσθε καὶ νὰ λέτε:

Ἡ κορδέλλα ἦταν 7 ὄγδοα—5 ὄγδοα, ποὺ ἔκοψε ἡ Μαρία=(μᾶς μένουν) 2 ὄγδοα.

Καὶ καλύτερα: $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$. Τί κάνατε;

Συμπέρασμα:

> *Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ ἄλλο ὁμώνυμο, ἀφαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ πρώτου, τὸ ὑπόλοιπον γράφομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τὸν ἴδιο.*

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις:

α) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$; β) $\frac{6}{7} - \frac{5}{7} =$;

γ) $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} =$; δ) $\frac{25}{30} - \frac{15}{30} =$;

2. Ἑτερωνύμων

Ἐὰν στὸ παραπάνω παράδειγμα ἡ Μαρία θέλη νὰ κόψη $\frac{2}{4}$ τοῦ πήχεως, θὰ ἔχωμε $\frac{7}{8} - \frac{2}{4}$. Δὲν εἶναι σὰν νὰ θέλωμε νὰ βγάλωμε ἀπὸ 7 ὀκάδες ζάχαρι (ὄγδοα ἐδῶ) 2 ὀκάδες κρεμμύδια (τέταρτα ἐδῶ); Ἀφαιροῦνται ἑτεροειδῆ ποσά; Ὄχι. Οὔτε ἑτερώνυμα κλάσματα. Ἀνάγκη λοιπὸν νὰ γίνουν ὁμώνυμα, ὅπως ξέρωμε.

Ἔτσι $\frac{7}{8} - \frac{2}{4} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$.

Δὲν εἶναι εὔκολο; Συμπέρασμα:

> *Ὅταν τὰ κλάσματα, ποὺ πρόκειται ν' ἀφαιρέσωμε εἶναι ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα.*

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε γραπτῶς τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις:

α) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$; β) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} =$;

γ) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} -$; δ) $\frac{7}{9} - \frac{2}{5} =$;

Β′ Κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον

Πρόβλημα:

Μᾶς λένε, ὅτι ἀπὸ 5 πήχεις ἐπωλήθησαν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως καὶ μᾶς ἐρωτοῦν νὰ βροῦμε, πόσοι πήχεις ἔμειναν. Θέλετε νὰ δοκιμάσωμεν ; Ἐμπρὸς λοιπόν.

Σκεπτόμαστε : Ἀπὸ ὁλόκληρους πήχεις ἐπωλήθησαν ὄγδοα τοῦ πήχεως. Εἶναι ἀνάγκη γι᾽ αὐτὸ ἢ ἕνα ἀπὸ τοὺς ὁλοκλήρους πήχεις νὰ τὸν κάνωμε ὄγδοα καὶ νὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ αὐτά, ὅσα ἐπωλήθησαν ἢ ὅλους τοὺς πήχεις (ἀκεραίους) νὰ τοὺς κάνωμε ὄγδοα καὶ νὰ βγάλωμε, ὅσα ὄγδοα ἐπωλήθησαν.

Ἔτσι θὰ ἔχωμε : 1) 5 ἢ $4\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = 4\frac{1}{8}$ ἢ

Συμπέρασμα : 2) 5 ἢ $\frac{40}{8} - \frac{7}{8} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$.

> *Γιὰ ν᾽ ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον ἢ μία ἀκεραία μονάδα τοῦ ἀκεραίου τὴν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, ποὺ πρόκειται νὰ ἀφαιρέσωμε ἢ τρέπομε ὁλόκληρον τὸν ἀκέραιον σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, ποὺ πρόκειται νὰ ἀφαιρέσωμε, καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμε τὸ δεύτερο κλάσμα ἀπὸ τὸ πρῶτο.*

Σημ. Μποροῦμε ἀκόμη νὰ βάλωμε στὸν ἀκέραιο παρονομαστὴ τὴ μονάδα (ἀφοῦ δὲν χάνει ὁ ἀκέραιος τὴν ἀξία του, εἴτε πολλαπλασιασθῆ εἴτε διαιρεθῆ μὲ τὴ μονάδα) κι ἔτσι ἔχομε ν᾽ ἀφαιρέσωμε ἑτερώνυμα κλάσματα.

Στὸ παράδειγμά μας λ.χ. θὰ ἔχωμε :

3) $\frac{5}{1} - \frac{7}{8} = \frac{40}{8} - \frac{7}{8} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$

Γ′ Κλάσματος ἀπὸ μικτὸν

Πρόβλημα:

Ἂν ἔχετε $6\frac{4}{5}$ δραχμὲς καὶ ξοδέψετε $\frac{3}{10}$ δραχ., τί σᾶς μένει ;

Λέτε : θὰ κάνωμε ἀφαίρεσιν. Δηλ. $6\frac{4}{5} - \frac{3}{10} =$;

Δυσκολεύεσθε στὴν πρᾶξι ; Δὲν μπορεῖτε τὸν μικτὸ νὰ τὸν κάνετε κλάσμα ; Ἀντὶ $6\frac{4}{5} = \frac{34}{5}$ καὶ θὰ ἔχετε $\frac{34}{5} - \frac{3}{10} =$;

Ἀλλὰ τώρα ξέρετε ν' ἀφαιρῆτε ἑτερώνυμα κλάσματα. Ἔτσι $\frac{34}{5} - \frac{3}{10} = \frac{68}{10} - \frac{3}{10} = \frac{65}{10} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$ δραχμές.

Συμπέρασμα :

> *Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ μικτόν, εἶναι ἀνάγκη νὰ κάνωμε τὸν μικτὸν ἀριθμὸ κλάσμα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμε τὸ δεύτερο κλάσμα ἀπὸ τὸ πρῶτο.*

Δ' Ἀκεραίου ἀπὸ μικτὸν

Πρόβλημα:

Ἀπὸ ἕνα κομμάτι ὕφασμα, ποὺ ἦταν $6\frac{5}{8}$ κόψαμε 5 πήχεις. Μπορο με νὰ βροῦμε τοὺς πήχεις, ποὺ μᾶς ἔμειναν ;

Γράφομε γι' αὐτὸ $6\frac{5}{8} - 5 =$; Μά, ἀφοῦ κόψαμε ὁλοκλήρους (ἀκεραίους) πήχεις, δὲν πρέπει νὰ τοὺς ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τοὺς ὁλοκλήρους (ἀκεραίους) τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ ;

Ὥστε θὰ εἰποῦμε : $6\frac{5}{8} - 5 = (6-5) + \frac{5}{8} = 1\frac{5}{8}$.

Συμπέρασμα :

> *Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε ἀκέραιον ἀριθμὸ ἀπὸ μικτόν, τὸν ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, τὸ ὑπόλοιπον γράφομε ἀκέραιον γράφοντας κοντά του πάλιν τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ.*

Ε' Μικτοῦ ἀπὸ μικτὸν

Πρόβλημα:

Ἀπὸ ἕνα σακκὶ ζάχαρι, ποὺ ζύγιζε $25\frac{3}{4}$ ὀκ., ἐπωλήθησαν $8\frac{1}{2}$ ὀκάδες. Πόσες ὀκάδες ἔμειναν ;

Ἐννοοῦμε, πῶς θὰ κάνωμε ἀφαίρεσι καὶ γράφομε:

$25\frac{3}{4} - 8\frac{1}{2} =$. Τί ἀριθμοὺς ἔχομε ν' ἀφαιρέσωμε; Μποροῦμε νὰ τοὺς τρέψωμε σὲ κλάσματα;

Λοιπόν: $25\frac{3}{4} - 8\frac{1}{2} = \frac{103}{4} - \frac{17}{2} =$; Ἀλλὰ ἀπ' ἐδῶ καὶ πέρα ξέρομε, τί νά κάνωμε καὶ προχωροῦμε.

$$\frac{103}{4} - \frac{17}{2} = \frac{103}{4} - \frac{34}{4} = \frac{69}{4} = 17\frac{1}{4}$$

Μὰ καὶ μὲ ἄλλο τρόπο μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα. Ν' ἀφαιρέσωμε τὶς ἀκέραιες ὀκάδες, ποὺ ἐπωλήθησαν, ἀπὸ τὶς ἀκέραιες, ποὺ ὑπῆρχαν καὶ τὸ κλάσμα τῆς ὀκᾶς, ποὺ ἐπωλήθηκε, ἀπὸ τὸ κλάσμα τῆς ὀκᾶς, ποὺ εἴχαμε στὸ σακκί, ἢ ὅπως τώρα θὰ λέμε, ν' ἀφαιρέσωμε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.

Δηλαδή. $25\frac{3}{4} - 8\frac{1}{2} = (25 - 8) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = 17 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}\right) = 17\frac{1}{4}$ ὀκάδες.

Σημ. Ἂν τὸ δεύτερο κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ δὲν ἀφαιρεῖται, παίρνομε ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ πρώτου μικτοῦ μία ἀκεραία μονάδα καὶ τὴν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου μικτοῦ. Π. χ.

$$7\frac{5}{9} - 3\frac{6}{9} = 6\frac{14}{9} - 3\frac{6}{9} = 3\frac{8}{9}.$$ Ἢ:

$8\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4} = 7\frac{6}{5} - 2\frac{1}{4} = 5 + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{24}{20} - \frac{5}{20} = \frac{19}{20}\right) = 5\frac{19}{20}.$

Συμπέρασμα:

> *Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀριθμὸ ἀπὸ ἄλλον μικτόν, ἀφαιροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομε τὰ δύο ὑπόλοιπα ἢ τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ κάνομε τὴν πρᾶξιν.*

ΣΤ' Μικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιον

Πρόβλημα:

Τὰ μαθήματα τοῦ σχολείου σας ἀρχίζουν στὶς $8\frac{1}{4}$ ὥρ. τὸ πρωΐ καὶ τελειώνουν στὶς 12 τὸ μεσημέρι. Σᾶς ρωτοῦν: Πόσες ὧρες διαρκοῦν τὰ μαθήματά σας;

Σκέπτεσθε: Πρέπει νὰ βροῦμε, πόσες ὧρες εἶναι ἀπὸ τὶς $8\frac{1}{4}$ ἕως τὶς 12, δηλαδὴ πρέπει νὰ βγάλωμε ἀπὸ τὶς 12 ὧρες τὶς $8\frac{1}{4}$, ποὺ ἀρχίζομε, γιὰ νὰ βροῦμε, πόσες μένουν. Ἄρα θὰ κάνωμε ἀφαίρεσι: $12 - 8\frac{1}{4} =$; Ἀλλὰ τώρα γνωρίζετε, πῶς ἀφαιρεῖται κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον καὶ προχωρεῖτε στὴ λύσι:

$12 - \frac{33}{4} = \frac{48}{4} - \frac{33}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ ὧρες.

Μπορεῖτε ἀκόμη νὰ πάρετε μιὰ ἀκεραία μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο καὶ νὰ τὴν κάνετε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ μικτοῦ. Καὶ θὰ ἔχετε ἔτσι $12 - 8\frac{1}{4} = 11\frac{4}{4} - 8\frac{1}{4} =$; Καὶ τώρα ἔχομε ἀφαίρεσι μικτοῦ ἀπὸ μικτόν, ποὺ τὴν ξέρομε καὶ προχωροῦμε: $11\frac{4}{4} - 8\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$ ὧρες. Συμπέρασμα:

> *Γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀριθμὸ ἀπὸ ἀκέραιον, ἢ τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα, ἢ παίρνομε μιὰ ἀκεραία μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τὴν κάνομε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἐκτελοῦμε τὴν πρᾶξιν.*

Προσοχή. **Μὴ γελασθῆτε ποτὲ καὶ ἀφαιρέσετε τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου, ὅπως πολλὲς φορὲς κάνουν μερικοὶ ἀπρόσεκτοι.**

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς ἑξῆς ἀφαιρέσεις:

α) $5 - \frac{6}{7} =$; $10 - \frac{1}{2} =$; $6 - \frac{5}{8} -$; $3\frac{3}{4} - \frac{2}{4} =$;

β) $8\frac{1}{5} - \frac{4}{5} =$; $7\frac{7}{8} - 5\frac{5}{8} =$; $5\frac{3}{4} - 2 =$;

$30\frac{7}{8} - 24 =$;

2. Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω ἀφαιρέσεις γραπτῶς:

α $5 - \frac{2}{3} =$; $6 - \frac{2}{9} =$; $5\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$; $8 - 1\frac{4}{5} =$;

β) $6\frac{2}{5} - 5\frac{1}{4} =$ $10 - 2\frac{5}{8} =$; $120\frac{3}{4} - 20\frac{1}{3} =$;

$42\frac{2}{3} - 28\frac{1}{2} =$;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἡ Ἑλένη ἀγόρασε $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς βούτυρο καὶ ἡ Μαρία $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς. Ποιὰ πῆρε περισσότερο καὶ πόσο ;

2. Τὸ τραῖνο Ἀθηνῶν—Θεσσαλονίκης (Σ.Ε.Κ.) τρέχει $62\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα καὶ τὸ τραῖνο Ἀθηνῶν—Πατρῶν (Σ.Π.Α.Π.) τρέχει $55\frac{1}{5}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει περισσότερα τὴν ὥρα τὸ πρῶτο ;

3. Ἕνα κοφίνι γεμᾶτο μῆλα ζυγίζει $15\frac{1}{4}$ ὀκάδες, ἄδειο δὲ εἶναι $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσες ὀκάδες μῆλα ἔχει μέσα ;

4. Μιὰ στάμνα χωράει 14 ὀκάδες νερό. Ἂν ἔχῃ μέσα $8\frac{3}{4}$ ὀκ., πόσες πρέπει νὰ ρίξωμε ἀκόμη, γιὰ νὰ γεμίσῃ ;

5. Μιὰ οἰκογένεια εἶχε ἀγοράσει $75\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀλεύρι καὶ τὸν πρῶτο μῆνα ξόδεψε $42\frac{7}{8}$ ὀκ. Πόσες ὀκάδες ἀλεύρι τῆς μένει ἀκόμη ;

6. Ἕνα βαρέλι γεμᾶτο τυρὶ ζυγίζει $44\frac{1}{2}$ ὀκ. Τὸ βαρέλι ἄδειο (ἀπόβαρον) ζυγίζει $5\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσο τυρί ἔχει μέσα ;

7. Ἕνα αὐτοκίνητο ξεκίνησε ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὶς $7\frac{1}{2}$ ὧρες τὸ πρωῒ καὶ ἔφτασε στὰ Τρίκαλα στὶς $2\frac{2}{3}$ τὸ ἀπόγευμα. Πόσες ὧρες διήρκεσε τὸ ταξίδι του ;

8. Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσω στὸ $\frac{5}{6}$ γιὰ νὰ βροῦμε $1\frac{1}{4}$;

9. Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ τὸν πῆχυ ἀπὸ ἕνα ὕφασμα $87\frac{3}{10}$ δραχμὲς καὶ κερδίζει $6\frac{2}{5}$ δραχμές. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε, πόσο τοῦ κόστιζε ὁ πῆχυς ;

10. Ἀπὸ δυὸ σακκιὰ ἀλεύρι, ποὺ ἦταν τὸ ἕνα $40\frac{3}{8}$ ὀκάδ. καὶ τὸ ἄλλο $43\frac{3}{4}$ ὀκ. ξοδεύτηκαν $64\frac{1}{5}$ ὀκ. Πόσες ὀκάδες μένουν;

11. Ἕνα βαπόρι ξεκίνησε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὶς $7\frac{3}{4}$ ὥρας τὸ πρωῒ γιὰ τὸ Βόλο. Θέλει δὲ $8\frac{1}{2}$ ὥρ. γιὰ νὰ φτάση. Ποιὰ ὥρα θὰ βρίσκεται ἐκεῖ;

12. Ἀγόρασε κάποιος 5 δραχμὲς τὰ τέσσερα αὐγὰ καὶ τὴν ἄλλη μέρα 4 δραχμὲς τὰ τρία. Πότε ἀγόρασε ἀκριβώτερα τ' αὐγὰ καὶ πόσο τὸ καθένα;

13. Ἕνας τυχυδρόμος θέλει $3\frac{1}{4}$ ὧρες νὰ πάη ἀπὸ ἕνα χωριὸ σὲ ἄλλο. Ἕως τώρα ἔχει βαδίσει $1\frac{1}{2}$ ὥρ. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ βαδίση ἀκόμη, γιὰ νὰ φτάση;

14. Ἕνας ἐργάτης ἀρχίζει τὴ δουλειά του στὶς $8\frac{1}{4}$ ὧρες τὸ πρωῒ καὶ σχολάει στὶς 12 τὸ μεσημέρι. Ξαναπιάνει πάλι δουλειὰ στὶ $2\frac{1}{2}$ ὧρες τὸ ἀπόγευμα καὶ τελειώνει στὶς $5\frac{3}{4}$ ὥρ. τὸ ἀπόγευμα. Πόσες ὧρες ἐργάζεται τὴν ἡμέρα;

15. Τρεῖς ἐργάτες ἔσκαψαν μαζὶ ἕνα ἀμπέλι. Ὁ πρῶτος ἐργάτης ἔσκαψε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀμπελιοῦ καὶ ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ. Τί μέρος τοῦ ἀμπελιοῦ ἔσκαψεν ὁ τρίτος;

16. Ἀπὸ ἕνα βαρέλι κρασί, ποὺ εἶχε 150 ὀκάδες, ἐπωλήθηκαν τὴν πρώτη ἑβδομάδα $38\frac{3}{4}$ ὀκάδες, τὴ δεύτερη $40\frac{1}{2}$ ὀκ. καὶ τὴν τρίτη $35\frac{1}{8}$ ὀκ. Πόσο κρασὶ μένει στὸ βαρέλι;

17. Τρεῖς ἐργάτες ἀνέλαβαν νὰ ἀνοίξουν ἕνα αὐλάκι 50 μέτρων μήκους. Ὁ πρῶτος ἔσκαψε $18\frac{2}{5}$ μ., ὁ δεύτερος $3\frac{1}{4}$ μ. ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν πρῶτο καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπο. Πόσα μέτρα ἔσκαψεν ὁ καθένας;

18. Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μιὰ ἐπιχείρησιν 380.000 δραχμές, τὰ μοιράστηκαν δὲ ὡς ἑξῆς: Ὁ πρῶτος πῆρε $125.000\frac{1}{2}$ δραχμές, ὁ δεύτερος $15.000\frac{2}{5}$ δραχ. περισσότερες τοῦ πρώτου καὶ

ὁ τρίτος τὰ ὑπόλοιπα. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ καθένας τους ;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄ Κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον

Πρόβλημα:

Ἕνα τετράδιο ἔχει $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσες δραχμὲς χρειαζόμαστε γιὰ 4 τετράδια ;

Σκεπτόμαστε : Ἀφοῦ ξέρομε, πόσο κοστίζει τὸ ἕνα τετράδιο καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε, πόσο κοστίζουν τὰ 4 (πολλά), πρέπει νὰ κάμωμε πολλαπλασιασμό.

Δηλαδή $\frac{2}{5} \times 4=$; Τί ἀριθμοὺς ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε ; Θὰ θυμᾶσθε ἀσφαλῶς ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς δὲν εἶναι παρὰ πρόσθεσι μὲ ἴσους προσθετέους. Ἔτσι μποροῦμε νὰ γράψωμε : $\frac{2}{5} \times 4 = \frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=$; Ἀλλὰ τώρα ἔχομε νὰ προσθέσωμε ὁμώνυμα κλάσματα. Δηλαδή :

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

Ἀλλὰ τὸ ἴδιο βρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος ἀφήνοντας τὸν ἴδιο παρονομαστή. Ἤτοι : $\frac{2}{5} \times 4 = \frac{2 \times 4}{5} = 1\frac{3}{5}$ δραχμές.

Σημ. Ἀλλὰ ἀκόμη ξέρετε, πῶς μεγαλώνει ἕνα κλάσμα. Τὸ ἔχομε εἰπῆ στὰ προηγούμενα. Ἔτσι $8 \times \frac{3}{4} = \frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

Β΄ Μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον

Πρόβλημα:

Ἕνας ἔμπορος ἔχει 5 τόπια ὕφασμα, ποὺ τὸ καθένα εἶναι $16\frac{3}{8}$ πήχεις. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε, πόσους πήχεις ἔχει ὅλους μαζί ;

Ἂς κάμωμε τὴν κατάταξι τοῦ προβλήματος.

Ξέρομε : Τὸ 1 τόπι ὕφασμα εἶναι $16\ \frac{3}{8}$ πήχεις.

Ζητοῦμε : Τὰ 5 τόπια » » Χ ; »

Σκέψις : Ἐπειδὴ γνωρίζομε, πόσοι πήχεις εἶναι τὸ ἕνα τόπι καὶ ζητοῦμε τὰ 5 (τὰ πολλά), θὰ κάμωμε πολλαπλασιασμό. Δηλαδή : $16\frac{3}{8} \times 5 =$. Τί ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε ; Μποροῦμε τὸν μικτὸ νὰ τὸν τρέψωμε σὲ κλάσμα. Καὶ θὰ ἔχωμε :

Λύσις : $16\ \frac{3}{8} \times 5 = \frac{131}{8} \times 5 = \frac{131 \times 5}{8} = \frac{655}{8} = 81\frac{7}{8}$ πήχ.

Ὥστε ὅλα τὰ τόπια ἔχουν $81\ \frac{7}{8}$ πήχεις.

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸν ἀριθμὸ ἐπὶ ἀκέραιο ἢ ἀντιστρόφως ἀκέραιο ἐπὶ μικτό, τὸ ἴδιο εἶναι, τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ὕστερα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο, τὸ γινόμενο γράφομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.

Σημ. Μποροῦμε ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀκέραιο τοῦ μικτοῦ καὶ τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ τέλος νὰ ἑνώσωμε τὰ δύο γινόμενα.

Π.χ. $16\ \frac{3}{8} \times 5 = (16 \times 5) + \left(\frac{3}{8} \times 5\right) = 80 + \left(\frac{3 \times 5}{8}\right) = 80 + \frac{15}{8} = 81\ \frac{7}{8}$.

Ἀσκήσεις

1. Βρῆτε ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα :

α) $\frac{2}{3} \times 4 =$; $\frac{3}{4} \times 20 =$; $\frac{2}{5} \times 2 =$;

β) $12 \times \frac{3}{4} =$; $10 \times \frac{5}{10} =$; $16 \times \frac{2}{5} =$:

2. Κάμετε γραπτῶς τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{8}{9} \times 5 =$; $\frac{21}{30} \times 4 =$; $28 \times \frac{3}{5} =$;

β) $4 \times 1\ \frac{1}{4} =$; $1\ \frac{7}{8} \times 20 =$: $12 \times 7\ \frac{1}{2} =$:

Γ' Κλάσματος ἐπὶ κλάσμα

Πρόβλημα:

Μία ὀκὰ πατάτες ἔχει $\frac{4}{5}$ τοῦ πενταδράχμου. Ἂν πάρωμε $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, πόσο θὰ πληρώσωμε;

Κάνομε τὴν κατάταξιν:

1 ὀκὰ πατάτες ἔχει $\frac{2}{5}$ τοῦ πενταδράχμου

$\frac{3}{4}$ ὀκᾶς » ἔχουν Χ; » »

Σκέψις; Ξέρομε τὴν ἀξία μιᾶς ὀκᾶς καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τῶν $\frac{3}{4}$ (μέρους) αὐτῆς. Τί πρᾶξι θὰ κάνωμε; Καὶ πῶς;

Ἂς δοκιμάσωμε νὰ τὸ λύσωμε ὡς ἑξῆς;

Γνωρίζομε, ὅτι ἡ 1 ὀκὰ ἢ 4 τέταρτα $\left(\frac{4}{4}\right)$ ὀκ. ἔχουν $\frac{4}{5}$ τοῦ πενταδράχμου.

Τὸ 1 τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ ὀκ. θὰ ἔχῃ 4 φορὲς λιγώτερο, δηλ. $\frac{4}{5\times4}$ (Πῶς μικραίνει κάθε κλάσμα;)

Καὶ τὰ 3 τέταρτα $\left(\frac{3}{4}\right)$ ὀκ. θὰ ἔχουν 3 φορὲς περισσότερο, δηλ. $\left(\frac{4}{5\times4}\right)\times 3=\frac{4\times3}{5\times4}$. (Πῶς μεγαλώνει κάθε κλάσμα;)

Ὥστε βρήκαμε, ὅτι τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. ἔχουν $\frac{4\times3}{5\times4}=\frac{12}{20}=$ τοῦ πενταδράχμου.

Τὸ ἴδιο ὅμως θὰ βρίσκαμε, ἂν πολλαπλασιάζαμε τὸ $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{4\times3}{5\times4}$

Ὁ παραπάνω τρόπος ἐργασίας μας λέγεται ***ἀναγωγὴ στὴν κλασματικὴ μονάδα.***

Ἀπ' αὐτὸν βγάζομε δύο συμπεράσματα:

1. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν ἀξία μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία μέρους (κλάσματος) αὐτῆς, κάνομε πολλαπλασιασμό.

2. *Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τὸ γινόμενο βάνομε ἀριθμητή, καὶ χωριστὰ τοὺς παρονομαστὰς καὶ τὸ γινόμενο βάνομε παρονομαστή.*

Σημ. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο πολλαπλασιάζομε καὶ περισσότερα ἀπὸ δύο κλάσματα (γινόμενο πολλῶν παραγόντων).

Π. χ. $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{8}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 1 \times 8 \times 2}{5 \times 4 \times 10 \times 3} = \frac{48}{600} = \frac{2}{25}$.

Δ' Κλάσματος ἐπὶ μικτὸν

Πρόβλημα:

Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει $\frac{4}{5}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου. Πόσα χρήματα θὰ δώσωμε γιὰ $7\frac{3}{8}$ πήχεις;

Κατάταξις:

Γνωρίζομε, ὅτι ὁ 1 πήχ. ἔχει $\frac{4}{5}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου

Ζητοῦμε: οἱ $7\frac{3}{8}$ ἔχουν Χ;

Ἂν τρέψωμε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα, θὰ γίνῃ ἡ κατάταξις ἔτσι:

1 πήχ. $\frac{4}{5}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου

$\frac{59}{8}$ » Χ; »

Σκέψις: Θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό, γιατὶ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τοῦ πήχεως καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν $\frac{59}{8}$ πήχεις. Σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο παράδειγμα θὰ ἔχωμε:

$\frac{4}{5} \times \frac{59}{8} = \frac{236}{40} = \frac{59}{10} = 5\frac{9}{10}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου.

Συμπέρασμα:

1. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν ἀξία μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία πολλῶν ἀκεραίων καὶ μέρους αὐτῆς, κάνομε πολλαπλασιασμό.

2. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ μικτὸν ἢ ἀντιστρόφως, (τὸ ἴδιο εἶναι), τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν.

Ε'. Μικτοῦ ἐπὶ μικτὸν

Πρόβλημα:

Ἕνα τραῖνο τρέχει $54\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ τρέξῃ σὲ $1\frac{3}{4}$ ὧρες μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα;

Κατάταξις: Σὲ 1 ὥρα τρέχει $54\frac{1}{2}$ χιλ.

» $1\frac{1}{4}$ ὧρες θὰ τρέξῃ Χ; »

Σκέψις: Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω θὰ κάμωμε πολλαπλασιασμό, γιατὶ ξέρομε, πόσο τρέχει τὴ μιὰ ὁλόκληρη ὥρα καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε, πόσο θὰ τρέξῃ στὶς $1\frac{3}{4}$ ὥρ. Θὰ ἔχωμε λοιπόν:

Λύσις: $54\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} = \frac{109}{2} \times \frac{7}{4} = \frac{763}{8} = 95\frac{3}{8}$ χιλιόμ.

Ἀπάντησις: Τὸ τραῖνο στὶς $1\frac{3}{8}$ ὥρ. θὰ τρέξῃ $95\frac{3}{8}$ χιλιόμ.

Συμπέρασμα:

> *Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτοὺς ἀριθμοὺς τοὺς τρέπομε πρῶτα σὲ κλάσματα.*

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς πράξεις:

α) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} =$; $\quad \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} =$; $\quad \frac{3}{10} \times \frac{3}{4} =$;

β) $1\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} =$; $\quad \frac{1}{3} \times 2\frac{1}{5} =$; $\quad 1\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} =$;

2. Νὰ βρῆτε γραπτῶς τὰ γινόμενα:

α) $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} =$; $\quad \frac{3}{4} \times \frac{8}{15} =$; $\quad \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} =$;

β) $8\frac{3}{4} \times 9\frac{1}{3} =$; $\quad 1\frac{3}{8} \times 10\frac{1}{2} =$; $\quad 12\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$;

ΠΟΤΕ ΚΑΝΟΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ

Σύμφωνα μὲ ὅσα ἔχομε μάθει, πολλαπλασιασμὸ κάνομε:

1. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ (ἀξία) τῶν πολλῶν ἀκεραίων μονάδων.

2. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ μέρους (κλάσματος) τῆς ἀκεραίας μονάδος ἢ γενικά, ὅταν γνωρίζωμε ἕνα ἀριθμὸ καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε μέρος του. Καὶ

3. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ἀκεραίων καὶ μέρους τούτων.

Σχηματικὴ παράστασις

Πολλοπλασιασμὸς γίνεται, ⟶ ὅταν εἶναι γνωστὸ τὸ **1** καὶ ζητεῖται ⟶ πολλὰ
⟶ μέρος
⟶ πολλὰ καὶ μέρος

Ἀσκήσεις

Ἀπὸ μνήμης.

1. Πόσοι μῆνες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ τοῦ ἔτους;

2. Πόσα δράμια εἶναι τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$ τῆς ὀκ.;

3. Πόσες ὧρες εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ τοῦ ἡμερόνυχτου;

4. Πόσες δραχμὲς εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. ζάχαρι, ἂν ἡ ὀκὰ ἔχῃ 16 δραχμές;

2. Μὲ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀλεύρι κάνομε μιὰ ὀκὰ ψωμί. Γιὰ $10\frac{4}{5}$ ὀκάδες ψωμί, πόσες ὀκάδες ἀλεύρι χρειαζόμαστε;

3. Νὰ βρεθοῦν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 25.

4. Ἀγοράσαμε $2\frac{1}{8}$ ὀκάδες κρέας ἀπὸ 36 δραχμὲς τὴν ὀκά. Πόσο θὰ πληρώσωμε;

5. Ἕνας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιο $65\frac{1}{5}$ δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ, ἂν ἐργασθῇ 15 ἡμέρες;

6. Πόσες δραχμὲς κάνουν $8\frac{3}{4}$ ὀκάδες φασόλια ἀπὸ $12\frac{1}{2}$ ἡ ὀκά;

7. Μιὰ ὀκὰ λάδι ἔχει 26 δραχμές. Πόσο θὰ δώσωμε γιὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

8. Μιὰ περιουσία 60.000 δραχμῶν μοιράστηκε μεταξὺ δύο ἀδελ-

φῶν. Ὁ πρῶτος πῆρε τὰ $\frac{5}{12}$ τῆς περιουσίας καὶ ὁ δεύτερος τὴν ὑπόλοιπη. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ καθένας;

9. Ἕνα ἐμπόρευμα ἀξίζει 348.000 δραχμές. Ὁ ἔμπορος, ποὺ τὸ ἐπώλησε, ἐκέρδισε τὸ $\frac{1}{16}$ τῆς ἀξίας του. Πόσο τὸ ἐπώλησε;

10. Ἕνα οἰκόπεδο 1800 τετραγωνικῶν πήχεων μοιράστηκε μεταξὺ τριῶν ἀδελφῶν. Ὁ πρῶτος πῆρε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ οἰκοπέδου, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος τοὺς ὑπολοίπους πήχεις. Πόσους πήχεις πῆρε ὁ κάθε ἀδελφός;

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΜΕ ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΑ

Παράδειγμα 1ον

Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 32 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως;

Κατάταξις:	Ξέρομε	1	πηχ.	32 δρχ.
	Ζητοῦμε	$\frac{7}{8}$	»	Χ; »

Σκέψις: Γνωρίζομε τὴν ἀξία τοῦ πήχεως καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως (μέρους του). Ἑπομένως πρέπει νὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό.

Λύσις: $32 \times \frac{7}{8} = \frac{32 \times 7}{8} = \frac{224}{8} = 28$ δραχμές.

Ἀπάντησις: Τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως θὰ ἔχουν 28 δραχμές.

Μποροῦμε ὅμως τὸ παραπάνω πρόβλημα νὰ τὸ λύσωμε μὲ **ἀναγωγὴ** στὴν κλασματικὴ μονάδα ὡς ἑξῆς:

Γνωρίζομε, ὅτι ὁ ἕνας πῆχυς ἢ $\frac{8}{8}$ πήχ. ἀξίζουν 32 χιλ.

Τὸ $\frac{1}{8}$ πήχ. θὰ ἔχῃ $32 : 8$ ἢ $\frac{32}{8}$ »

Καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ πήχ. θὰ ἔχουν $\frac{32 \times 7}{8} = \frac{224}{8} = 28$ »

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ παραπάνω πρόβλημα, βρήκαμε πρῶτα, πόσο ἀξίζει ἡ μιὰ κλασματικὴ μονάδα $\left(\frac{1}{8}\right)$ καὶ ἔπειτα, πόσο ἀξίζουν οἱ πολλὲς κλασματικὲς μονάδες $\left(\frac{7}{8}\right)$. Ὁ τρόπος αὐτός, ὅπως εἴπαμε καὶ προηγουμένως, λέγεται **ἀναγωγὴ** στὴν κλασματικὴ μονάδα. (Θυμηθῆτε τὴν ἀναγωγὴ στὴν ἀκεραία μονάδα).

Παράδειγμα 2ον

Μιὰ ὀκὰ ζυμαρικὰ ἔχει $\frac{12}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου.

Πόσο στοιχίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;

Κατάταξις: 1 ὀκὰ $\frac{12}{20}$ εἰκ.

$\frac{3}{4}$ » Χ; »

Σκέψις: Τὸ πρόβλημα λύεται μὲ πολλαπλασιασμό. Ἂς προσπαθήσωμε ὅμως νὰ τὸ λύσωμε μὲ ἀναγωγὴ στὴ μονάδα, ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκὰ ἢ $\frac{4}{4}$ ὀκ. ἔχουν $\frac{12}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου.

Τὸ $\frac{1}{4}$ θὰ ἔχῃ $\frac{12}{20 \times 4}$ (4 φορὲς λιγώτερο).

Καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ θὰ ἔχουν $\frac{12 \times 3}{20 \times 4}$ (3 φορὲς περισσότερο).

Ἤτοι $\frac{12 \times 3}{20 \times 4} = \frac{36}{80} = \frac{9}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου.

Παράδειγμα 3ον

Μιὰ λάμπα πετρελαίου καίει σὲ μιὰ ὥρα $\frac{3}{16}$ τῆς ὀκᾶς πετρέλαιο.

Πόσες ὀκάδες θὰ κάψῃ σὲ $3\frac{1}{4}$ ὧρες;

Κατάταξις: Σὲ 1 ὥρα καίει $\frac{3}{16}$ ὀκ.

» $3\frac{1}{4}$ » » Χ; »

Ἐκτὸς τοῦ ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ, μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε μὲ ἀναγωγὴ ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ σὲ 1 ἢ $\frac{4}{4}$ ὥρας καίει $\frac{3}{16}$ τῆς ὀκᾶς,

στὸ $\frac{1}{4}$ ὥρ. θὰ καίῃ $\frac{3}{16 \times 4}$ (4 φορὲς λιγώτερο) καὶ στὶς $3\frac{1}{4}$ ἢ $\frac{13}{4}$ ὥρ. θὰ καίη $\frac{3\times13}{16\times4}$ (13 φορὲς περισσότερο).

Ἤτοι $\frac{3\times13}{16\times4}=\frac{39}{64}$ τῆς ὀκᾶς πετρέλαιο.

Παράδειγμα 4ον

Μιὰ ὀκὰ σαπούνι κοστίζει $18\frac{4}{10}$ δραχ. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ $3\frac{5}{8}$ ὀκάδες ;

Κατάταξις : 1 ὀκὰ $8\frac{4}{10}$ δρχ.

$3\frac{5}{8}$ » X ; »

Λύσις : Μὲ ἀναγωγή.

Ἀφοῦ ἡ 1 ἢ $\frac{8}{8}$ ὀκ. στοιχίζουν $8\frac{4}{10}$ ἢ $\frac{84}{10}$ δραχμές.

Τὸ $\frac{1}{8}$ θὰ κοστίζη $\frac{84}{10\times8}$ (8 φορὲς λιγώτερο)

καὶ οἱ $3\frac{5}{8}$ ἢ $\frac{29}{8}$ » $\frac{84\times29}{10\times8}$ (29 φορὲς περισσότερ).

Ἤτοι : $\frac{84\times29}{10\times8}=\frac{2436}{80}=\frac{609}{20}=30\frac{9}{20}$ δραχμές.

Προβλήματα :

(Νὰ λυθοῦν μὲ ἀναγωγή).

1. Μιὰ ὀκὰ καφὲ ἔχει 96 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ $\frac{9}{20}$ τῆς ὀκᾶς ;

2. Ὁ πῆχυς ἀπὸ ἕνα ὕφασμα κοστίζει $12\frac{2}{5}$ δραχ. Πόσο θὰ πληρώσωμε, ἂν ἀγοράσωμε ἀπὸ αὐτὸ $5\frac{7}{8}$ πήχεις ;

3. Τὸ ἡμερομίσθιο ἑνὸς ἐργάτου εἶναι $58\frac{4}{5}$ δραχ. Πόσο πρέπει νὰ πληρωθῆ, ἂν ἐργασθῆ μόνο $\frac{3}{4}$ τῆς ἡμέρας ;

4. Μία ὀκὰ χοιρινὸ κρέας ἔχει $28\frac{3}{5}$ δραχμές. Μιὰ γυναίκα θέλει ν' ἀγοράση $2\frac{1}{4}$ ὀκάδες. Πόσο πρέπει νὰ πληρώση ;

5. Μιὰ λεύκα εἶναι 20 μέτρα ψηλή. Πόσα μέτρα εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$

τοῦ ὕψους της ;

6. Πόσον εἶναι τὰ $5\frac{3}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 25 ;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α΄ Κλάσματος δι' ἀκεραίου

Πρόβλημα :

῞Ενας ἐργάτης σὲ 6 ἡμέρες σκάβει τὰ $\frac{4}{5}$ ἑνὸς κήπου. Σὲ μιὰ ἡμέρα τί μέρος τοῦ κήπου θὰ σκάψη ;

Κατάταξις	Σὲ	6	ἡμ. σκάβει	$\frac{4}{5}$	κήπ.
	»	1	» »	X ;	»

Σκέψις : Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε, πόσο σκάβει στὶς 6 ἡμέρες (πολλὲς) καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε σὲ 1 ἡμέρα, τί μέρος (κομμάτι) τοῦ κήπου θὰ σκάψη.

᾿Αφοῦ στὶς 6 ἡμέρες σκάβει τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ κήπου στὴ μιὰ θὰ σκάψη 6 φορὲς λιγώτερο. Δηλαδὴ θὰ κάμωμε διαίρεσιν μερισμοῦ.

Θὰ ἔχωμε λοιπόν : $\frac{4}{5} : 6 =$

῾Η διαίρεσις αὐτὴ δὲν μᾶς λέει, ὅτι πρέπει νὰ κάμωμε τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ μικρότερο 6 φορές ;

Μὰ ἐμεῖς μάθαμε, πῶς ἕνα κλάσμα γίνεται μικρότερο. (῎Η διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστή του).

῾Επομένως : $\frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{5\times6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

᾿Απάντησις. Σὲ μιὰ ἡμέρα ὁ ἐργάτης θὰ σκάψη τὰ $\frac{2}{15}$ τοῦ κήπου.

Β΄. Μικτοῦ δι' ἀκεραίου

Πρόβλημα :

Γιὰ 4 ὀκάδες φασόλια πληρώσαμε $48\frac{4}{5}$ δραχμές. Πόσο ἔχει ἡ ὀκά ;

Κατάταξις: Οἱ 4 ὀκ. στοιχίζουν $48\frac{4}{5}$ δρχ.

ἡ 1 ὀκ. » Χ; »

Σκέψις: Ἀφοῦ οἱ 4 ὀκάδες στοιχίζουν $48\frac{4}{5}$ δραχμὲς ἡ μιὰ ὀκὰ θὰ στοιχίσῃ 4 φορὲς λιγώτερο, δηλαδὴ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ὀκάδων καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Γι' αὐτὸ θὰ κάνωμε διαίρεσιν (μερισμό).

Λύσις: $48\frac{4}{5} : 4 =$. Τί ἔχομε νὰ διαιρέσωμε;

Μποροῦμε τὸν μικτὸ νὰ τὸν τρέψωμε σὲ ἰσοδύναμο κλάσμα καὶ θὰ ἔχωμε: $48\frac{4}{5} : 4 = \frac{244}{5} : 4 = \frac{244 : 4}{5}$ (ἢ $\frac{244}{5 \times 4}$) $= \frac{61}{5} = 12\frac{1}{5}$.

Ἀπάντησις: Ἡ ὀκὰ τὰ φασόλια ἔχει $12\frac{1}{5}$ δραχμές.

Συμπέρασμα:

> *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀκεραίου ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ γράφομε τὸν ἴδιο ἀριθμητή.*

Σημ. Ἂν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε μικτὸ δι' ἀκεραίου, τρέπομε τὸν μικτὸ σὲ κλάσμα

Ἀσκήσεις

Κάμετε τὶς διαιρέσεις:

α) $\frac{2}{3} : 12 =$; $\frac{1}{4} : 5 =$; $\frac{8}{25} : 2 =$;

β) $3\frac{2}{5} : 4 =$; $7\frac{7}{8} : 7 =$; $5\frac{3}{4} : 3 =$;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνας ταβερνιάρης σὲ 3 μῆνες ξόδεψε τὰ $\frac{9}{10}$ ἑνὸς βαρελιοῦ, ποὺ ἦταν γεμᾶτο κρασί. Πόσο κρασὶ ξόδεψε σὲ ἕνα μῆνα;

2. Ἕνας ἐργάτης παίρνει $16\frac{4}{5}$ εἰκοσάδραχμα τὴν ἑβδομάδα (6 ἡμ.). Ποιὸ ἦταν τὸ ἡμερομίσθιό του;

3. Ἕνας χωρικὸς μοίρασε στὰ 4 παιδιά του ἕνα κτῆμα $8\frac{1}{2}$

στρεμμάτων. Τί μέρος τοῦ κτήματος πῆρε κάθε παιδί του;

4. Μία φιλάνθρωπος κυρία ἐδώρησε $70 \frac{5}{8}$ πήχεις ὕφασμα σὲ 6 φτωχὲς γυναῖκες. Πόσους πήχεις καὶ ρούπια θὰ πάρῃ καθεμιά;

5. Μιὰ ὀκὰ κάστανα ἔχει 8 δραχμές. Μὲ $72 \frac{4}{5}$ δρχ. πόσες ὀκάδες θὰ πάρωμε;

6. Μιὰ βρύση σὲ 6 ὧρες γεμίζει κάποια δεξαμενή. Ἂν τρέξῃ μόνο $4 \frac{1}{2}$ ὧρες, τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσῃ;

7. Ἕνας λόχος στρατιωτῶν χρειάζεται $2400 \frac{4}{8}$ ὀκάδες ψωμὶ γιὰ 20 μέρες. Πόσο ψωμὶ ξοδεύει κάθε μέρα;

Γ΄. Ἀκεραίου διὰ κλάσματος

1. Μερισμὸς

Πρόβλημα

Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαρι ἔχουν 12 δραχ. Πόσο κοστίζει ἡ ὀκά;

Κατάταξις. Τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. κοστίζουν 12 δραχμὲς

ἡ 1 » θὰ κοστίζει X; »

Σκέψις. Ἐδῶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς κι ἑπομένως θὰ κάμωμε διαίρεσιν.

Ἦτοι $12 : \frac{3}{4} =$. Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος. Πῶς θὰ γίνῃ ἡ πρᾶξις;

Ἡ ἀναγωγὴ στὴ μονάδα θὰ μᾶς βοηθήσῃ.

Λέμε: Ἀφοῦ τὰ 3 τέταρτα $\left(\frac{3}{4}\right)$ ἔχουν 12 δραχμὲς

τὸ 1 τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ θὰ ἔχῃ 3 φορὲς λιγώτερο

δηλ. $12 : 3$ ἢ $\frac{12}{3}$ δραχ.

καὶ τὰ 4 τέταρτα $\left(\frac{4}{4}\right)$ ἢ 1 ὀκ. θὰ ἔχουν 4 φορὲς

περισσσότερο, δηλ. $\frac{12}{3} \times 4 = \frac{48}{3} = 16$ δραχ.

Τί παρατηροῦμε στὴν πρᾶξιν

$\frac{12}{3} \times 4$ ἢ $12 \times \frac{3}{4}$; Μᾶς λέει, πὼς βρίσκομε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ἂν ἀντιστρέψωμε (ἀναποδογυρίσωμε) τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (διαιρέτου) καὶ ἀντὶ γιὰ διαίρεσιν κάνομε πολλαπλασιασμό.

2. Μέτρησις

Πρόβλημα

Πόσα μπουκάλια χρειαζόμαστε νὰ βάλωμε 124 ὀκαδες κρασί, ἂν τὸ καθένα χωρῇ $\frac{4}{6}$ τῆς ὀκᾶς;

Κατάταξις 1 μπουκάλι χωρεῖ $\frac{4}{6}$ ὀκ.

σὲ Χ; μπουκ. θὰ χωρέσουν 124 ὀκ.

Σκέψις. Ξέρομε, πόσο κρασὶ χωρεῖ τὸ ἕνα μπουκάλι καὶ θέλομε νὰ μάθωμε, πόσα ὅμοια μπουκάλια χρειαζόμαστε, γιὰ νὰ βάλωμε τὶς 124 ὀκάδες.

Γι' αὐτὸ θὰ κάνωμε διαίρεσιν μετρήσεως.

Ἤτοι $124 : \frac{4}{6} =$. Ἔχομε νὰ διαιρέσωμε πάλι ἀκέραιο διὰ κλάσματος. Καὶ ἐδῶ θὰ μᾶς βοηθήσῃ ἡ ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

Ἀφοῦ τὰ $\frac{4}{6}$ ὀκ. θὰ χωρέσουν σὲ 1 μπουκάλι,

τὸ $\frac{1}{6}$ » » χωρέσῃ σὲ $\frac{1}{4}$ μπουκαλιοῦ

τὰ $\frac{6}{6}$ ἢ 1 ὀκὰ θὰ χωρέσῃ σὲ $\frac{1}{4} \times 6 = \frac{6}{4}$ μπουκ.

Καὶ οἱ 124 ὀκάδες θὰ χωρέσουν σὲ $\frac{6}{4} \times 124$ ἢ $124 \times \frac{6}{4}$ μπουκ.

Τί παρατηροῦμε στὴν τελευταία αὐτὴ πρᾶξιν;

Δὲ θὰ βροῦμε τὸ ἴδιο, ἂν ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{4}{6}$ καὶ ἀντὶ γιὰ διαίρεσιν κάνομε πολλαπλασιασμό;

Κάνοντας τὴν παραπάνω πρᾶξιν βρίσκομε: $124 \times \frac{6}{4} = \frac{744}{4} = 185.$

Ἀπάντησις. Γιὰ τὶς 124 ὀκ. θὰ χρειασθοῦμε 186 μπουκάλια.

Συμπέρασμα:

Ὅταν ἔχωμε τὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (διαιρέτου) καὶ ἀντὶ γιὰ διαίρεσιν κάνομε πολλαπλασιασμό.

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε ἀπὸ μνήμης τὶς διαιρέσεις:

α) $1 : \frac{1}{2} =$; $1 : \frac{1}{3} =$; $1 : \frac{1}{4} =$;

β) $7 : \frac{1}{3} =$; $3 : \frac{1}{5} =$; $2 : \frac{1}{12} =$;

2. Κάμετε γραπτῶς τὶς διαιρέσεις;

α) $6 : \frac{3}{4} =$; $15 : \frac{3}{8} =$; $1 : \frac{5}{6} =$;

β) $20 : \frac{4}{7} =$; $8 : \frac{7}{12} =$; $5 : \frac{5}{6} =$;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὕψους ἑνὸς σπιτιοῦ εἶναι 4 μέτρα. Πόσο ψηλὸ εἶναι ὁλόκληρο;

2 Χρεωστοῦσε ἕνας χωρικὸς στὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Μὲ 675 δραχμὲς ἐξώφλησε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ χρέους του. Πόσα χρήματο ἦταν τὸ χρέος του; Τί ὀφείλει ἀκόμη;

3. Τὸ καντήλι τοῦ εἰκονοστασίου τοῦ σπιτιοῦ μας καίει κάθε βράδυ $\frac{3}{80}$ τῆς ὀκᾶς λάδι. Μὲ 3 ὀκάδες λάδι, ἂν καίῃ πάντα τὶς ἴδιες ὧρες, πόσες ἡμέρες θὰ περάσωμε;

4. Γιὰ $\frac{7}{8}$ ὀκάδες κρέας πληρώσαμε 28 δραχ. Πόσο ἔχει ἡ ὀκά;

5. Ἀγόρασε κάποιος τὰ $\frac{4}{5}$ ἑνὸς οἰκοπέδου καὶ πλήρωσε 12.000 δραχμές. Πόσο θὰ ἔδινε, ἂν ἔπαιρνε ὁλόκληρο τὸ οἰκόπεδο;

Δ΄. Ἀκεραίου διὰ μικτοῦ

Πρόβλημα:

Πήραμε $3\frac{1}{4}$ ὀκάδες μῆλα καὶ πληρώσαμε 26 δραχμές. Πόσο κοστίζει ἡ ὀκά τους;

Κατάταξις. Οἱ $3\frac{1}{4}$ ὀκ. 26 δρχ.
ἡ 1 » Χ; »

Σκέψις. Ξέρομε πόσο ἔχουν οἱ πολλὲς ὀκάδες $\left(3\frac{1}{4}\right)$ καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε, πόσο ἔχει ἡ μία ὀκά. Θὰ κάνωμε διαίρεσιν.

Λύσις. $26 : 3\frac{1}{4} =$. Τί ἀριθμοὺς ἔχομε νὰ διαιρέσωμε;

Μποροῦμε τὸν μικτὸ νὰ τὸν κάνωμε ἰσοδύναμο κλάσμα καὶ θὰ ἔχωμε: $26 : 3\frac{1}{4} = 26 : \frac{13}{4} = 26 \times \frac{4}{13} = \frac{26 \times 4}{13} = \frac{124}{13} = 8.$

Ἀπάντησις. Ἡ 1 ὀκ. μῆλα ἔχει 8 δραχμές.

Βρῆτε μόνοι σας τὸν κανόνα, πῶς διαιροῦμε ἀκέραιο μὲ μικτὸ καὶ γράψτε τον στὸ τετράδιό σας.

Ἀσκήσεις

Κάμετε τὶς διαιρέσεις:

α) $8 : 3\frac{2}{5} =$; $10 : 2\frac{1}{2} =$; $9 : 1\frac{1}{3} =$;

β) $24 : 5\frac{3}{4} =$; $18 : 6\frac{3}{7} =$; $15 : 2\frac{3}{5} =$;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἕνα βαρέλι χωρεῖ 340 ὀκάδες κρασί. Θέλομε δὲ νὰ τὸ γεμίσωμε μ' ἕνα δοχεῖο (τενεκέ), ποὺ παίρνει $8\frac{1}{2}$ ὀκ. Πόσα τέτοια δοχεῖα θὰ ἀδειάσωμε μέσα στὸ βαρέλι γιὰ νὰ γεμίσῃ;

2. Μὲ $4\frac{1}{5}$ δραχμὲς παίρνομε μιὰ ὀκὰ πατάτες. Ἂν δώσωμε 36 δραχμές, πόσες ὀκάδες θὰ ἀγοράσωμε;

3. Κάθε ρόδα (τροχὸς) σ' ἕνα ποδήλατο ἔχει περιφέρεια $1\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσες στροφὲς θὰ κάμῃ ἡ κάθε ρόδα, ἂν ὁ ποδηλάτης διανύσῃ (τρέξῃ) ἀπόστασιν 14.000 μέτρων;

4. Πήραμε $5\frac{6}{8}$ πήχεις ἀπὸ ἕνα ὕφασμα καὶ δώσαμε 69 δραχμές. Πόσα ἔχει ὁ πῆχυς;

Ε'. Κλάσματος διὰ κλάσματος

1. Μερισμὸς

Πρόβλημα:

1. Πόσο κοστίζει ἕνας πῆχυς ὕφασμα, ποὺ γιὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως δώσαμε $\frac{3}{4}$ τοῦ δεκαδράχμου;

Κατάταξις. Τὰ $\frac{3}{8}$ πήχ. ἔχουν $\frac{3}{4}$ δεκαδράχμου
῾Ο 1 » θὰ ἔχῃ Χ; »

Σκέψις. Γνωρίζομε, πόσο ἔχουν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως καὶ θέλομε νὰ μάθωμε, πόσο ἔχει ὁ ἕνας πῆχυς. Θὰ κάνωμε γι' αὐτὸ διαίρεσι. Ἤτοι: $\frac{3}{4}:\frac{3}{8}=$. Τί ἀριθμοὺς ἔχομε νὰ διαιρέσωμε; Πῶς θὰ γίνῃ ἡ πρᾶξις; Καταφεύγομε γιὰ εὐκολία μας καὶ πάλι στὴν ἀναγωγὴ καὶ λέμε:

Ἀφοῦ τὰ 3 ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$ πήχεις ἔχουν $\frac{3}{4}$ τοῦ δεκαδράχμου,
τὸ 1 ὄγδοο $\left(\frac{1}{8}\right)$ » θὰ ἔχῃ 3 φορὲς λιγώτερο δηλ. $\frac{3}{4\times3}$
καὶ τὰ 8 ὄγδοα $\left(\frac{8}{8}\right)$ ἢ 1 πήχ. θὰ ἔχῃ 8 φορὲς περισσότερο,

ἤτοι $\frac{3}{4\times3}\times8=\frac{3\times8}{4\times3}$ ἢ $\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}$.

῾Η τελευταία αὐτὴ πρᾶξις δείχνει, ὅτι βρίσκομε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ἂν ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου (κλάσματος) καί, ἀντὶ γιὰ νὰ κάμωμε διαίρεσιν, κάμωμε πολλαπλασιασμό.

Ἐκτελοῦντες τὶς πράξεις ἔχομε: $\frac{3}{4}\times\frac{8}{3}=\frac{24}{12}=2$ δεκάδρχ.

2. Μέτρησις

2. Ἕνα λεμόνι ἔχει $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσα θὰ πάρωμε, ἂν δώσωμε $\frac{8}{10}$ τῆς δραχμῆς;

Κατάταξις. Τὸ 1 λεμόνι ἔχει $\frac{2}{5}$ δραχμῆς
Χ; » θὰ πάρωμε μὲ $\frac{8}{10}$ δραχμῆς.

Σκέψις : Γνωρίζομε, πόσο στοιχίζει τὸ ἕνα λεμόνι καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε μὲ περισσότερα χρήματα, πόσα ὅμοια λεμόνια μποροῦμε ν' ἀγοράσωμε. Γι' αὐτὸ θὰ κάνωμε διαίρεσι μετρήσεως. Δηλ. $\frac{8}{10}$: $\frac{2}{5}$ =.

Ἀφοῦ μὲ $\frac{2}{5}$ δραχ. παίρνομε 1 λεμόνι,

» $\frac{1}{5}$ » θὰ πάρωμε $\frac{1}{2}$ »

καὶ » $\frac{5}{5}$ » » » $\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$ λεμόνια.

Ἀλλὰ καὶ μὲ $\frac{10}{10}$ δραχ. θὰ πάρωμε $\frac{5}{2}$ λεμόνια

» $\frac{1}{10}$ » » » $\frac{5}{2 \times 10}$ »

καὶ τέλος » $\frac{8}{10}$ » » » $\frac{5}{2 \times 10} \times 8 = \frac{5 \times 8}{2 \times 10}$

ἢ $\frac{8}{10} \times \frac{5}{2} =$

Τί παρατηροῦμε ἐδῶ ; Ὅτι τὸ ἴδιο βρίσκομε, ἂν στὴν παραπάνω διαίρεσι κλασμάτων ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου $\left(\frac{2}{5}\right)$ καὶ ἀντὶ γιὰ διαίρεσι κάνωμε πολλαπλασιασμό.

Ἤτοι : $\frac{8}{10} : \frac{2}{5} = \frac{8}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{40}{20} = 2.$

Ἀπάντησις. Μὲ $\frac{8}{10}$ δραχ. θὰ πάρωμε 2 λεμόνια.

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος (καὶ γενικά, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα), ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομε πολλαπλασιασμό.

Στ΄ Μικτοῦ διὰ κλάσματος

Πρόβλημα :

Τὰ $\frac{7}{8}$ πήχεως πανὶ ἔχουν 10 $\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσο ἔχει ὁ πῆχυς ;

Κατάταξις. Τὰ $\frac{7}{8}$ πηχ. $10\frac{1}{2}$ δραχμές

Ὁ 1 Χ; »

Σκέψις: Γνωρίζομε πόσο ἔχουν τὰ $\frac{7}{8}$ καὶ ζητοῦμε τὸν ἕνα πῆχυ καὶ γι αὐτὸ θὰ κάνωμε διαίρεσι. Ἤτοι $10\frac{1}{2} : \frac{7}{8} =$. Τί ἔχομε νὰ διαιρέσωμε; Μποροῦμε τὸν διαιρετέο μικτὸ νὰ τὸν κάνωμε κλάσμα καὶ θὰ ἔχωμε:

$$10\frac{1}{2} : \frac{7}{8} = \frac{21}{2} : \frac{7}{8} = \frac{21}{2} \times \frac{8}{7} = \frac{168}{14} = \frac{84}{7} = 12.$$

Ἀπάντησις. Ὁ πῆχυς ἔχει 12 δραχμές.

Ζ΄. Μικτοῦ διὰ μικτοῦ

Πρόβλημα

Μιὰ ὀκὰ πατάτες ἔχει $3\frac{2}{5}$ δραχμάς. Πόσες ὀκάδες θὰ πάρωμε μὲ $40\frac{8}{10}$ δραχμάς;

Κατάταξις. Ἡ 1 ὀκὰ ἔχει $3\frac{2}{5}$ δραχμ.

Χ; » θὰ πάρωμε μὲ $40\frac{8}{10}$ δραχμ.

Σκέψις. Ξέρομε, πόσο ἔχει μία ὀκὰ καὶ θέλομε νὰ μάθωμε, πόσες τέτοιες ὅμοιες θὰ πάρωμε μὲ περισσότερα χρήματα. Ἄρα θὰ κάνωμε διαίρεσιν (μέτρησιν). Ἤτοι $40\frac{8}{18} : 3\frac{2}{5} =$. Τί ἀριθμοὶ εἶναι αὐτοί; Ἂς τοὺς κάνωμε κλάσματα:

$$40\frac{8}{10} : 3\frac{2}{5} = \frac{408}{10} : \frac{17}{5} = \frac{408}{10} \times \frac{5}{17} = \frac{2040}{170} = \frac{204}{17} = 12.$$

Ἀπάντησις. Μὲ $40\frac{8}{10}$ δραχμὰς θὰ πάρωμε 12 ὀκ. πατ.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα στὶς παρακάτω διαιρέσεις ἀπὸ μνήμης:

α) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, β) $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$, γ) $\frac{1}{10} : \frac{1}{3}$.

2. Κάμετε γραπτῶς τὶς διαιρέσεις:

α) $\frac{8}{9} : \frac{3}{4} =$; $7\frac{1}{3} : \frac{1}{2} =$; $3\frac{4}{5} : \frac{3}{7} =$; $\frac{5}{6} : \frac{2}{3} =$;

β) $\frac{3}{10} : 4\frac{7}{8} =$; $\frac{1}{4} : 2\frac{4}{5} =$; $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} =$; $8\frac{1}{4} : 5\frac{2}{7} =$;

Πότε κάνομε Διαίρεσιν:

Διαίρεσιν κάνομε, σύμφωνα μὲ ὅσα παραπάνω εἴδαμε:

1. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ (ἀξία) πολλῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς (μερισμός).

2. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ μέρους (κλάσματος) τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος (μερισμός).

3. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ πολλῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ μέρους τῆς ἀκεραίας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ μιᾶς ἀκεραίας μονάδος (μερισμός).

4. Ὅταν γνωρίζωμε τὸ μέρος (κλάσμα) ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ θέλωμε νὰ βροῦμε ὁλόκληρον τὸν ἀριθμό, καὶ

5. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ μιᾶς ἀκεραίας μονάδος καὶ τὴν τιμὴ πολλῶν ἀκεραίων ἢ μέρους τῆς ἀκεραίας καί ζητοῦμε τὸ πλῆθος τῶν μονάδων (μέτρησις).

Σχηματικὴ παράστασις

1. Διαίρεσιν μερισμοῦ, → ὅταν ξέρωμε	πολλὰ → μέρος → πολ. καὶ μέρ. →	καὶ ζητοῦμε	1
2. Διαίρεσιν μετρήσεως → ὅταν ξέρωμε τὴν	τιμὴ 1 ἀκερ. καὶ τιμὴ πολλῶν ἀκερ. ἢ μέρους των.	καὶ ζητοῦμε	τὸ πλῆθος τῶν μονάδων

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Πεζοπόρος ἔκαμε σὲ μιὰ ὥρα δρόμο $4\frac{2}{5}$ χιλιόμετρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ κάμη δρόμο $35\frac{2}{10}$ χιλιόμετρα;

2. Ἐργάτης σκάβει σὲ μιὰ ὥρα τὰ $\frac{3}{16}$ μιᾶς τάφρου (αὐλακιοῦ). Πόσες ὧρες χρειάζεται, γιὰ νὰ σκάψη τὰ $\frac{6}{8}$ τῆς τάφρου;

3. Μιὰ ὀκὰ σταφύλια ἔχουν $5\frac{3}{4}$ δραχμές. Μὲ $86\frac{2}{8}$ δρχ. πόσες

ὀκάδες μποροῦμε νὰ πάρωμε;

4. Γιὰ $3\frac{3}{4}$ ὀκάδες τυρὶ δώσαμε $82\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσο ἔχει ἡ ὀκά;

5. Ἕνας κτίστης σὲ $8\frac{3}{4}$ ὧρες τελειώνει τὰ $\frac{5}{6}$ ἑνὸς τοίχου. Τί μέρος τοῦ τοίχου χτίζει σὲ μιὰ ὥρα;

6. Ἕνα βαπόρι σὲ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας διήνυσε (διέτρεξε) $28\frac{1}{3}$ μίλια. Πόση εἶναι ἡ ὡριαία ταχύτητά του;

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΑ

Εἴδαμε παραπάνω, ὅτι τὰ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κλασμάτων λύονται καὶ μὲ ἀναγωγὴ στὴν κλασματικὴ μονάδα.

Ἂς λύσωμε μερικὰ τέτοια προβλήματα ἀκόμη.

1ον.

Μιὰ ὀκὰ κρέας ἀρνὶ ἔχει 40 δραχμές. Πόσο θα πληρώσωμε γιὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

Κατάταξις. 1 ὀκ. 40 δραχ.
$\frac{3}{8}$ » Χ; »

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκ. ἢ $\frac{8}{8}$ ὀκ. ἔχει 40 δραχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » θὰ ἔχη $\frac{40}{8}$ »

καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ ὀκ. θὰ ἔχουν $\frac{40}{8} \times 3 = \frac{120}{8} = 15.$

Ἀπάντησις. Τὰ $\frac{3}{8}$ ὀκ. θὰ ἔχουν 15 δραχμές.

2ον

Γιὰ $\frac{6}{16}$ ὀκᾶς κρεμμύδια πληρώσαμε $\frac{3}{5}$ δραχμές. Πόσο ἔχει ἡ ὀκά;

Κατάταξις. $\frac{6}{16}$ ὀκ. $\frac{3}{5}$ δραχμές.
1 » Χ;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{6}{16}$ ὀκ. ἔχουν $\frac{3}{5}$ δραχμὲς τὸ $\frac{1}{16}$ » θὰ ἔχῃ $\frac{3}{5\times6}$ »

Καὶ τὰ $\frac{16}{16} = 1$ θὰ ἔχουν $\frac{3\times16}{5\times6} = \frac{48}{30} = 1\ \frac{3}{5}$ δραχμές.

3ον

Τὰ $\frac{4}{7}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 20. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

Κατάταξις, $\frac{4}{7}$ ἀριθ. 20

1 » (ὁλόκλ.) X;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 20

τὸ $\frac{1}{7}$ » » » θὰ » $\frac{20}{4}$

καὶ τὰ $\frac{7}{7}$ » » » » » $\frac{20}{4} \times 7 =$

$\frac{140}{4} = 35.$

4ον.

Ἡ ὀκὰ τὰ μῆλα ἔχουν $7\ \frac{4}{5}$ δραχ. Πόσες ὀκάδες θὰ ἀγοράσωμε μὲ $54\ \frac{6}{10}$ δραχμές;

Κατάταξις. Μὲ $7\ \frac{4}{5}$ δραχ. ἢ $\frac{39}{5}$ δραχ. παίρνομε 1 ὀκ.

» $54\ \frac{6}{10} = \frac{546}{10}$ » » X;

Λύσις. Ἀφοῦ μὲ $\frac{39}{5}$ δραχ. παίρνομε 1 ὀκ.

» $\frac{1}{5}$ » » $\frac{1}{39}$ »

καὶ » $\frac{5}{5}$ » » $\frac{1}{39} \times 5 = \frac{5}{39}$.

Ἀλλὰ καὶ μὲ $\frac{10}{10}$ » » $\frac{5}{39}$ ὀκ.

» $\frac{1}{10}$ » » $\frac{5}{39\times10}$ ὀκ.

Τέλος » $\frac{546}{10}$ θὰ πάρωμε $\frac{5\times546}{39\times10} = \frac{2730}{390} = 7.$

5ον.

Γιὰ 5 $\frac{3}{8}$ πήχεις ἀπὸ κάποιο ὕφασμα δώσαμε 43 $\frac{1}{2}$ δραχμὲς. Πόσο θὰ πληρώσωμε, ἄν πάρωμε 7 $\frac{3}{4}$ πήχεις ;

Κατάταξις. 3 $\frac{5}{8}$ πηχ. 43 $\frac{1}{2}$ δραχ.

7 $\frac{3}{4}$ » X ;

Λύσις. α) Ἀφοῦ οἱ 3 $\frac{5}{8}=\frac{29}{8}$ πήχ. κοστίζουν $43\frac{1}{2}=\frac{87}{2}$ δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » $\frac{87}{2\times29}$ »

καὶ τὰ $\frac{8}{8}=1$ » » $\frac{87\times8}{2\times29}$ »

β) Καί, ἀφοῦ $1=\frac{4}{4}$ » » $\frac{87\times8}{2\times29}$ »

τὸ $\frac{1}{4}$ » » $\frac{87\times8}{2\times29\times4}$ »

τὰ $7\frac{3}{4}=\frac{31}{4}$ » » $\frac{87\times8\times31}{2\times29\times4}=93$ »

Παρατήρησις. Ἡ λύσις γίνεται καὶ μὲ ἁπλῆ ἀναγωγή, ἄν τὰ κλάσματα τραποῦν σὲ ὁμώνυμα. Δηλαδή :

$\frac{29}{8}$ $\frac{31}{4}=\frac{29}{8}$ $\frac{62}{8}$. Καὶ ἡ ἀναγωγὴ θὰ γίνη ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ τὰ $\frac{29}{8}$ πήχ. ἔχουν $\frac{87}{2}$ δραχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » θὰ ἔχῃ $\frac{87}{2\times29}$ »

καὶ τὰ $\frac{62}{8}$ » θὰ ἔχουν $\frac{87\times62}{2\times29}=93$ δραχμές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. Τρεῖς ἐργάτες ἔχτισαν ἕναν τοῖχο μήκους 48 μέτρων. Ὁ πρῶτος ἔχτισε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ τοίχου καὶ ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$. Πόσα μέτρα ἔχτισε ὁ καθένας ;

2. Ἕνα βαπόρι ξεκίνησε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὶς 6 $\frac{3}{4}$ π. μ. καὶ

ἔπλεε $7\frac{1}{2}$ ὧρες γιὰ νὰ φτάση εἰς τὰς Πάτρας. Στὶς $8\frac{1}{2}$ π. μ. ξεκινᾶ καὶ τὸ τραῖνο ἀπὸ τὸ σταθμὸ Πειραιῶς μὲ μέση ταχύτητα 30 χιλιομέτρων τὴν ὥρα. Ἡ ἀπόστασις Πειραιῶς—Πατρῶν εἶναι 216 χιλιόμετρα. Νὰ βρῆτε : α) Ποιὰ ὥρα θὰ φθάση τὸ πλοῖο ; β) Ποιὰ ὥρα θὰ φθάση τὸ τραῖνο ; καὶ γ) Ποιὸ ἀπὸ τὰ δυὸ θὰ φθάση νωρίτερα καὶ πόσες ὧρες πρὶν ἀπὸ τὸ ἄλλο ;

3. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα, ποὺ ἦταν $65\frac{3}{8}$ πήχεις, ἐπωλήθησαν τὴν πρώτη μέρα $7\frac{3}{16}$ πήχεις, τὴν δεύτερη $12\frac{1}{4}$ καὶ τὴν τρίτη $8\frac{1}{2}$ πήχεις. Πόσοι πήχεις ἔχουν μείνει ;

4. Μιὰ ὑφάντρια ἔχει νὰ ὑφάνη 42 πήχεις ὕφασμα. Τὴν πρώτη ἑβδομάδα ὕφανε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὑφάσματος, τὴ δεύτερη $2\frac{1}{4}$ πήχεις περσσοτέρους ἀπὸ τὴν πρώτη καὶ τὴν τρίτη τὸ ὑπόλοιπο. Νὰ βρῆτε, πόσους πήχεις ὕφαινε κάθε ἑβδομάδα.

5. Ἕνα οἰκόπεδο 1560 τετραγωνικῶν πήχεων μοιράστηκε μεταξὺ τριῶν ἀδελφῶν. Ὁ πρῶτος πῆρε τὰ $\frac{}{5}$ τοῦ οἰκοπέδου, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος ὅ,τι ἔμεινε. Πόσους τετραγωνικοὺς πήχεις πῆρε ὁ καθένας ἀδελφός ;

6. Ρώτησαν ἕναν τσοπάνη, πόσα πρόβατα εἶχε καὶ αὐτὸς ἀπήντησε: Τὰ $\frac{7}{20}$ τῶν προβάτων μου θὰ τὰ πωλήσω σήμερα καὶ θὰ μοῦ μείνουν κι ἐμένα 104 ἀκόμη πρόβατα. Πόσα πρόβατα ἔχει ;

7. Μὲ $12\frac{1}{2}$ δράμια νήματος γίνεται ἕνα ζευγάρι κάλτσες. Πόσα ζευγάρια κάλτσες σὰν αὐτὲς μποροῦμε νὰ κάνωμε μὲ $262\frac{1}{2}$ δράμια ;

8. Τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς σιτάρι ἔχουν $3\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ $30\frac{1}{2}$ ὀκάδες ; Τί ρέστα θὰ πάρωμε, ἂν δώσωμε 100 δραχμές ;

9. Ἕνας σιδηρόδρομος τρέχει μὲ μέση ταχύτητα $26\frac{2}{3}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα καὶ διανύει τὴν ἀπόστασιν Ἀθηνῶν—Λαμίας σὲ $8\frac{1}{4}$

ὧρες. Ἂν εἶναι ἀνάγκη νὰ βρίσκεται ἐκεῖ σὲ $5 \frac{1}{2}$ ὧρες, μὲ πόση ταχύτητα πρέπει νὰ τρέξῃ ;

10. Δυὸ βρύσες γεμίζουν μιὰ δεξαμενὴ ἡ πρώτη σὲ 3 ὧρες καὶ ἡ δεύτερη σὲ 4 ὧρες. Εἰς τὴν βάσιν τῆς δεξαμενῆς ὑπάρχει μιὰ τρύπα, πού, ὅταν εἶναι γεμάτη ἡ δεξαμενή, τὴν ἀδειάζει σὲ 2 ὧρες. Ἂν ἀνοίξωμε καὶ τὶς δυὸ βρύσες μαζὺ καὶ τὴν τρύπα, σὲ πόσες ὧρες θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή ;

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μετρήσαμε μιὰ γραμμὴ καὶ βρήκαμε, ὅτι εἶναι 0,1 τοῦ μέτρου. Μιὰ ἄλλη εἶναι 0,01 μ. Μήπως μπορεῖτε νὰ γράψετε τοὺς δεκαδικοὺς αὐτοὺς μὲ ἄλλους, ἰσοδυνάμους μ' αὐτούς, ἀριθμούς ;

Δὲν εἶναι $0{,}1 = \frac{1}{10}$ καὶ $0{,}01 = \frac{1}{100}$;

Οἱ παραπάνω κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, καθὼς ἀκόμη καὶ οἱ $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10.000}$ κλπ. λέγονται ***δεκαδικές***, διατὶ ἡ ἀκεραία μονάδα ἔχει χωριστῆ σὲ δέκα ἴσα κομμάτια ἢ ἑκατό, χίλια κλπ. καὶ μποροῦμε νὰ τὶς γράψωμε καὶ μὲ δεκαδικὴ μορφή.

Ἂς πάρωμε τώρα τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,3 μ. 0,4 μ. 0,15, 0,625 μ. Δοκιμάσετε νὰ τοὺς γράψετε μὲ κλασματικὴ μορφή. Δὲν εἶναι δύσκολο. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$0{,}3 = \frac{3}{10},\ 0{,}4 = \frac{4}{10},\ 0{,}15 = \frac{15}{100},\ 0{,}625 = \frac{625}{1000}.$$

Τὰ κλάσματα αὐτὰ $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{15}{100}$, $\frac{625}{1000}$ λέγονται ***δεκαδικά***, διατὶ ἔχουν γίνει ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν τῆς δεκαδικῆς κλασματικῆς μονάδος. Ἄλλωστε καὶ ὅλοι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι κλάσματα (ἴσα μέρη) τῆς ἀκεραίας μονάδος ; Ἡ διαφορά τους εἶναι, πὼς ἡ ἀκεραία μονάδα χωρίζεται ἐδῶ πάντοτε μόνο σὲ δέκα, ἑκατό, χίλια, δέκα χιλιάδες κ.ο.κ. ἴσα μέρη, ἐνῶ στὰ κλάσματα, ποὺ γιὰ τὰ ξεχωρίζουν ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ τὰ λέμε ***κοινὰ*** κλάσματα, ἡ ἀκεραία μονάδα χωρίζεται σὲ ὁσαδήποτε μέρη θελήσωμε.

ΤΡΟΠΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΚΛΑΣΜΑ

1. Παίρνομε τοὺς δεκαδικοὺς 0,5 μ., 0,75 μ., 0,625 μ. Διαβά-

στε τους μεγαλοφώνως. Τί σημαίνει ὁ δεκαδικὸς 0,5 μ.; Νὰ χωρίσωμε τὸ μέτρο σὲ δέκα ἴσα μέρη (παλάμες) καὶ νὰ πάρωμε τὰ πέντε, δηλ. $\frac{5}{10}$ μέτρα.

Ἐπίσης ὁ δεκαδικὸς 0,75 μ. σημαίνει νὰ χωρίσωμε ἕνα μέτρο σὲ ἑκατὸ ἴσα μέρη (δακτύλους=πόντους) καὶ νὰ πάρωμε τὰ ἑβδομηνταπέντε, δηλ. $\frac{75}{100}$.

Ὁμοίως ὁ δεκαδικὸς 0,625 μ. σημαίνει, πὼς ἕνα μέτρο χωρίστηκε σὲ 1000 ἴσα μέρη (γραμμὲς) καὶ πήραμε 625, δηλ. $\frac{625}{1000}$ μ.

Τί παρατηρεῖτε; Πῶς ἔγιναν τὰ κλάσματα $\frac{5}{10}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{625}{1000}$ ἀπὸ τοὺς παραπάνω δεκαδικούς;

Ἂν ἁπλοποιήσωμε αὐτὰ τὰ κλάσματα, θὰ ἔχωμε:

$$\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\quad \frac{75}{100}=\frac{3}{4},\quad \frac{625}{1000}=\frac{5}{8}.$$

Τί κάναμε γιὰ νὰ γίνουν οἱ δεκαδικοὶ αὐτοὶ κοινὰ κλάσματα;

2 Ἄς πάρωμε τώρα τοὺς δεκαδικοὺς 2,4 μ., 3,85 μ., 47,258 μ. Τί φανερώνουν;

Ὁ πρῶτος,	ὅτι ἔχομε	2	ὁλόκληρα	μέτρα καὶ	0,4	μ.
Ὁ δεύτερος	» »	3	»	» »	0,85	μ.
καὶ ὁ τρίτος,	» »	47	»	» »	0,258	μ.

Μποροῦμε λοιπὸν σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω νὰ γράψωμε:

$$2{,}4=2\,\frac{4}{10},\quad 3{,}85=3\,\frac{85}{100}\quad \text{καὶ}\quad 47{,}258=47\,\frac{258}{1000}.$$

Τί ἀριθμοὶ εἶναι αὐτοί; Μποροῦμε νὰ τοὺς κάμωμε κλάσματα; Θὰ ἔχωμε τότε:

$$2{,}4=2\,\frac{4}{10}=\frac{24}{10},\quad 3{,}85=3\,\frac{85}{100}=\frac{385}{100},\quad 47{,}258=47\,\frac{258}{1000}=$$
$$=\frac{47258}{1000}.$$

Παρατηρήσετε προσεκτικὰ τοὺς δεκαδικοὺς καὶ τοὺς ἰσοδυνάμους μὲ αὐτοὺς μικτοὺς καὶ κλάσματα. Πῶς μποροῦμε κάθε δεκαδικὸ νὰ τὸν κάμωμε κοινὸ κλάσμα;

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸ σὲ κοινὸ κλάσμα, σβήνομε τὴν ὑποδιαστολή του, τὸν βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τὴν μονάδα μὲ τόσα μηδενικά, ὅσα ψηφία εἴχαμε μετὰ τὴν ὑποδιαστολή.

Σημ. Μετὰ ἁπλοποιοῦμε τὸ κλάσμα, ἂν ἁπλοποιῆται καὶ βγάνομε τὶς ἀκέραιες μονάδες, ἄν ἔχῃ.

Ἀσκήσεις

1. Γράψετε μία παλάμη, ἕνα δάκτυλο, μία γραμμὴ τοῦ μέτρου μὲ δεκαδικὴ καὶ κλασματικὴ μορφή.

2. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω κλασματικὲς μονάδες εἶναι δεκαδικές;

$$\frac{1}{5},\quad \frac{1}{10},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{250},\quad \frac{1}{1000}$$

3. Ποιά ἀπὸ τὰ ἑξῆς κλάσματα εἶναι κοινὰ καὶ ποιά δεκαδικά ;

$$\frac{3}{5},\quad \frac{8}{10},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{4}{100},\quad \frac{75}{100},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{750}{1000},\quad \frac{35}{900}$$

4. Γράψετε μὲ κλασματικὴ μορφὴ τοὺς δεκαδικούς :

0,08 0,036 0.7 1,50 18,642

5. Τρέψετε σὲ κοινὰ κλάσματα τοὺς δεκαδικούς:

3,5 0,0075 12,80 26,125

(Ν' ἁπλοποιηθοῦν καὶ ἐξαχθοῦν οἱ ἀκέραιες μονάδες).

ΤΡΟΠΗ ΚΟΙΝΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Πρόβλημα:

4 κορίτσια θέλουν νὰ μοιράσουν μιὰ κορδέλλα, ποὺ ἦταν 3 μέτρα. Πόσα μέτρα θὰ πάρῃ τὸ καθένα κορίτσι ;

Μποροῦμε μὲ δύο τρόπους νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα.

1ον) Ἂν μοιράζουν χωριστὰ κάθε μέτρο, ἀπὸ τὸ πρῶτο μέτρο, ποὺ θὰ γίνῃ 4 ἴσα μέρη (ἀφοῦ 4 εἶναι τὰ κορίτσια), καθένα κορίτσι θὰ πάρῃ ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὰ τέσσαρα, δηλαδὴ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου. Ἀπὸ τὸ δεύτερο ὁμοίως $\frac{1}{4}$ καὶ ἀπὸ τὸ τρίτο ἀκόμη $\frac{1}{4}$ μέτρου. Ἔτσι καὶ τὶς 3 φορὲς κάθε κορίτσι θὰ πάρη $\frac{3}{4}$ $\left(\frac{1}{4}\right.$ καὶ $\frac{1}{4}$ καὶ $\left.\frac{1}{4}\right)$ μέτρα κορδέλλα.

2ον) Ἂν κάνουν 10 ἴσα κομμάτια (παλάμες) τὸ κάθε μέτρο, θὰ ἔχουν νὰ μοιράσουν 30 (3×10) κομμάτια (παλάμες), δηλ. 30 :4=7 ὑπόλοιπον 2. Ἦτοι τὸ κάθε κορίτσι θὰ πάρη ἀπὸ 7 παλάμες (δέκατα) καὶ θὰ μείνουν 2 παλάμες. Τὴν κάθε τώρα παλάμη τὴν κάνουν 10 ἴσα ἀκόμη μέρη (δακτύλους=πόντους). Ἔτσι θὰ ἔχουν 20 δακτύλους τώρα καὶ, ἂν τοὺς μοιράσουν, θὰ πάρουν 5 δακτύλους (ἑκατοστὰ) ἀκριβῶς. Συνεπῶς πῆρε τὸ κάθε κορίτσι 7 παλάμες καὶ 5 δακτύλους δηλ. 0,75 μ.

Βλέπομε λοιπὸν μὲ τὸν πρῶτον τρόπον διανομῆς τὸ κάθε κορίτσι πῆρε $\frac{3}{4}$ μέτρα καὶ μὲ τὸν δεύτερον 0,75 μ. Ἀλλὰ καὶ τὶς δύο φορὲς πῆραν τὸ ἴδιο κομμάτι κορδέλλας δηλαδή :

$$\frac{3}{4}=0,75$$

Τί ἀριθμοὶ εἶναι αὐτοί ; Πῶς μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀπὸ τὸ $\frac{3}{4}$ τὸν δεκαδικὸ 0,75 ;

Αὐτὸ γίνεται μὲ διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, δηλαδὴ $\frac{3}{4}$ =3 : 4 (καὶ κάθε κλάσμα δείχνει διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του) :

Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r|l} 3,00 & 4 \\ \hline 20 & 0,75 \\ = & \end{array}$$

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα κλάσμα σὲ δεκαδικὸν ἀριθμό, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἂν δὲν διαιρῆται, γράφομε μηδὲν ἀκέραιο, βάνομε ὑποδιαστολὴ καὶ τὸν διαιρετέο τὸν κάνομε δέκατα καὶ διαιροῦμε. Τὸ ὑπόλοιπο τὸ κάνομε ἑκατοστὰ καὶ συνεχίζομε.

Παρατήρησις. Ἂν θελήσωμε νὰ τρέψωμε σὲ δεκαδικὸ τὸ κλάσμα

$\frac{2}{3}$ θὰ γράψωμε:

$$\begin{array}{r|l} 2{,}000 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}666\ldots \\ 20 & \end{array}$$

Ἐδῶ βλέπομε, ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν ἔχει τέλος, δηλαδὴ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ δὲν εἶναι ἴσο ἀκριβῶς μὲ δεκαδικὸν ἀριθμό.

Τί θὰ κάνωμε τότε;

Θὰ προχωροῦμε στὴν διαίρεσι ὥς τὰ δέκατα, ἢ ἑκατοστὰ ἢ χιλιοστὰ καὶ θὰ λέμε, πὼς τὸ κλάσμα θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν δεκαδικὸν αὐτὸν μὲ προσέγγισιν (μὲ πλησίασμα) δεκάτου ἢ ἑκατοστοῦ ἢ χιλιοστοῦ.

Π.χ. $\frac{1}{3} = 0{,}3\ldots$ (κατὰ προσέγγισιν δεκάτου).

$\frac{8}{9} = 0{,}88\ldots$ (κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ).

$1\frac{1}{7} = \frac{8}{7} = 1{,}142\ldots$ (κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ).

Ἀσκήσεις

1. Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικοὺς τὰ ἑξῆς κλάσματα καὶ μικτούς.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{9}{20}$, $7\frac{5}{8}$, $4\frac{3}{20}$

2. Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικοὺς μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ τὰ ἑξῆς κλάσματα καὶ μικτούς.

$\frac{3}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{15}$, $1\frac{1}{3}$, $7\frac{6}{7}$, $10\frac{1}{12}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἀσκήσεις

Κάμετε τὶς παρακάτω πράξεις:

α) $2{,}5 + \frac{1}{2} =$; β) $\frac{3}{4} + 2{,}75 + \frac{7}{8} =$;

γ) $3\frac{5}{6} + 0{,}125 =$; δ) $4{,}25 - \frac{4}{5} =$; ε) $\frac{11}{12} - 0{,}625 =$;

Σημ. Στὴν πρόσθεσι καὶ ἀφαίρεσι ἢ τοὺς κάνομε ὅλους κλάσματα ἢ ὅλους δεκαδικούς, ἄν φυσικὰ τρέπεται ἀκριβῶς τὸ κλάσμα σὲ δεκαδικό.

2. Κάμετε τὶς ἑξῆς πράξεις :

α) $\frac{5}{9} \times 0{,}4 =$; β) $4\frac{2}{3} \times 2{,}75 =$; γ) $3{,}20 \times \frac{6}{7} =$;

δ) $10{,}25 : \frac{3}{4} =$; ε) $7\frac{7}{8} : 0{,}35 =$; στ) $\frac{5}{12} : 1{,}50 =$;

Σημ. Στὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ διαίρεσιν μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ τὸν παραπάνω τρόπο, ἀλλὰ καὶ ὅπως εἶναι οἱ ἀριθμοί.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἀπὸ ἕνα βαρέλι, ποὺ εἶχε $250\frac{1}{2}$ ὀκάδες κρασὶ πωλήθηκε τὸ $\frac{1}{3}$ του. Πόσες ὀκάδες μένουν ἀκόμη μέσα ;

2. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος κοστίζει $32\frac{3}{5}$ δραχ. Πόσο πρέπει νὰ πωληθῆ διὰ νὰ δώση κέρδος 2,40 δραχμές ;

3. Ἀπὸ τὸν παντοπώλη ἀγοράσαμε $4\frac{3}{4}$ ὀκάδες λάδι ἀπὸ 26,20 δραχ. τὴν ὀκὰ καὶ 300 δράμια βούτυρο ἀπὸ 64 δραχ. τὴν ὀκά. Πόσο θὰ πληρώσωμε ;

4. Μιὰ γυναίκα ἀγόρασε 360 δράμια δευτέρας ποιότητος βούτυρο καὶ πλήρωσε 47,25 δραχ. Πόσο εἶχε ἡ ὀκά ;

5. Γιὰ 5 ρούπια ὑφάσματος, ποὺ πήραμε ἀπὸ τὸν ἔμπορο πόσο θὰ πληρώσωμε, ἄν ὁ πῆχυς ἔχη 14,80 δραχμές ;

6. Μία οἰκογένεια μένει στὸ δεύτερο πάτωμα μιᾶς πολυκατοικίας καὶ ἀνεβαίνει μὲ μαρμάρινη σκάλα. Τὸ κάθε σκαλοπάτι εἶναι 0,18 τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος τοῦ δωματίου ἀπὸ τὴν αὐλὴ 6,48 μέτρα. Πόσα σκαλοπάτια εἶχε ἡ σκάλα ;

7. Γιὰ 240 δράμια πίτουρα δώσαμε 1,50 δραχ. Πόσο θέλωμε γιὰ $2\frac{2}{5}$ ὀκάδες ;

8. Ἀγοράσαμε 8 ζεύγη κάλτσες πρὸς 182,40 δραχ. τὴ δωδεκάδα (ντουζίνα). Πόσο θὰ πληρώσωμε ;

9. Τρία κορίτσια κληρονόμησαν ἀπὸ τὸν πατέρα τους ἕνα χρηματικὸ ποσό. Ἡ διαθήκη ὥριζε, πὼς τὸ πρῶτο κορίτσι ἔπρεπε νὰ πάρη 18.652,80 δραχ., τὸ δεύτερο τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου

καὶ τὸ τρίτο τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου. Νὰ βρῆτε, πόσα χρήματα πῆρε κάθε κορίτσι καὶ τί ποσὸ χρημάτων εἶχε ἀφήσει ὁ πατέρας τους.

10. Ἔμπορος ἀγόρασε 25 $\frac{2}{4}$ ὀκάδες ἐληὲς μὲ 15,40 δραχ. τὴν ὀκὰ καὶ ὅταν τὶς ἐπώλησε ζημιώθηκε τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων του. Πόσες δραχμὲς ἦταν ἡ ζημία του;

11. Ἀπὸ ἕνα δοχεῖο μὲ 14 $\frac{1}{4}$ ὀκάδες λάδι, ξόδεψε μιὰ οἰκογένεια τὸν πρῶτο μῆνα τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ λαδιοῦ καὶ τὸν δεύτερο μῆνα 1,5 ὀκάδες περισσότερες ἀπὸ τὸν πρῶτο. Πόσες ὀκάδες λάδι μένουν ἀκόμη στὸ δοχεῖο ;

12. Δυὸ ἐργάτες ἀνέλαβαν τὰ σκάψουν ἕνα ἀμπέλι. Ὁ πρῶτος μόνος του τὸ σκάβη σὲ 4 ἡμέρες καὶ ὁ δεύτερος πάλι σὲ 6 ἡμέρες. Ἂν ἐργασθοῦν μαζί, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ τελειώσουν ;

13. Σὲ ἕνα ἑστιατόριο ἔτρωγαν 7 ἄτομα. Κι' ἐξώδευσαν γιὰ τὸ φαγητό τους 98 δραχ. Ἔπρεπε δὲ ὅλοι νὰ πληρώσουν ἐξ ἴσου. Μὰ οἱ ἄνδρες δὲν ἠθέλησαν νὰ πληρώσουν οἱ γυναῖκες. Γι' αὐτὸ πλήρωσε κάθε ἄνδρας, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μερίδιό του, ἄλλες 10,50 δραχ. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε, πόσοι ἄνδρες ἦσαν στὸ τραπέζι καὶ πόσες γυναῖκες ;

14. Μιὰ γυναῖκα ἔπλεξε 17 ζεύγη κάλτσες, ποὺ τὶς ἐπώλησε 14,70 δραχ. τὸ ζευγάρι. Πόσα χρήματα κέρδισε, ἂν γιὰ κάθε ζευγάρι κάλτσες χρειάστηκε 35 δράμια νῆμα (γνέμα) ποὺ ἡ ὀκά του ἔχει 120 δρχ. ;

15. Ἕνας ἔμπορος ἀπὸ ἕνα τόπι ὑφάσματος ἐπώλησε τὴν πρώτη ἡμέρα τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, τὴ δεύτερη τὰ $\frac{3}{10}$ καὶ τὴν τρίτη τὸ $\frac{1}{4}$. Τοῦ μένουν ἀκόμη 8 $\frac{6}{8}$ πήχεις. Πόσοι πήχεις ἦταν ὅλο τὸ ὕφασμα ; Πόσους ἐπώλησε κάθε φορά ;

16. Τρεῖς ἐργάτες μοιράστηκαν 630 δραχ. ὡς ἑξῆς : Ὁ πρῶτος πῆρε τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν χρημάτων, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ καθένας τους ;

17. Τρεῖς συνέταιροι μοιράστηκαν τὸ κέρδος ἀπὸ μιὰ ἐργασία. Ὁ πρῶτος πῆρε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κέρδους, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{7}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπο. Ὁ τελευταῖος στὸ μερίδιό του πῆρε 240 δραχ. Πόσα

πῆραν οἱ ἄλλοι δύο καὶ πόσο ἦταν τὸ συνολικὸ κέρδος ;

18. Χωρικὸς ἐπλήρωσε τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ χρέους του στὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα καὶ ὀφείλει ἀκόμη 130 δραχμές. Πόσα χρεωστοῦσε ;

19. Ἄφησε κάποιος μὲ τὴ διαθήκη του τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς περιουσίας του στοὺς κληρονόμους του, τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ὑπολοίπου στοὺς πτωχοὺς τοῦ χωριοῦ καὶ ἔμειναν ἀκόμη 48.000 δραχ., ποὺ τὶς χάρισε στὸ σχολεῖο, γιὰ νὰ ἱδρυθῇ σχολικὸς κῆπος.

Νὰ βρῆτε : α) Πόση ἦταν ἡ περιουσία, β) πόσα χρήματα πῆραν οἱ κληρονόμοι του καὶ γ) πόσα χρήματα μοιράστηκαν στοὺς πτωχούς.

20. Γιὰ τὸ συσσίτιο ἑνὸς λόχου στρατιωτῶν μὲ 150 ἄνδρες, ἀγόρασαν 31 $\frac{3}{5}$ ὀκάδες κρέας. Τί μερίδα ὑπολογίσθηκε γιὰ κάθε στρατιώτη ;

21. Χθὲς ἡ θερμοκρασία στὴν Ἀθήνα ἦταν 28,5° Κελσίου. Τί θερμοκρασία θὰ ἔδειχνε δίπλα του ἕνα θερμόμετρο Ρεωμύρου τὴν ἴδια στιγμή ;

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α.΄ ΤΑ ΝΟΜΙΣΜΑΤΑ

Στὴν πατρίδα μας, ὅπως ἀναφέραμε στὰ προηγούμενα, χρησιμοποιοῦμε ὡς νομίσματα δεκάλεπτο, εἰκοσάλεπτο, πενηντάλεπτο, δραχμή, δίδραχμο, πεντάδραχμο, δεκάδραχμο, εἰκοσάδραχμο, πεντηκοντάδραχμο, ἑκατοντάδραχμο, πεντακοσιόδραχμο, χιλιόδραχμο.

Στὴν Ἀγγλία νόμισμα ἔχουν τὴν λίρα Στερλίνα. Κάθε λίρα ὑποδιαιρεῖται σὲ 20 σελίνια καὶ κάθε σελίνι σὲ 12 πέννες.

Στὴν Ἀμερικὴ νόμισμα ἔχουν τὸ δολλάριο, ποὺ ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 σέντς (ἑκατοστά).

Ἡ ἀξία τῆς Ἀγγλικῆς λίρας εἶναι 84 δραχμὰς (τῆς χρυσῆς 300-328) καὶ τοῦ δολλαρίου 30 δραχμάς.

Τροπὴ διαφόρων μονάδων μετρήσεως σὲ ἄλλες

Παράδειγμα 1ον

Ἡ Ἀγγλικὴ λίρα ἔχει 84 δραχμάς. Πόσες δραχμὲς θὰ ἔχουν οἱ 15 λίρες ;

Κατάταξις 1 λ. 84 δραχ.
15 ; » X »

Θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Δηλαδὴ $84 \times 15 = 1260$ δραχ.

Παράδειγμα 2ον

Πόσα δολλάρια ἀγοράζομε μὲ 1230 δραχ.
Κατάταξις. 1 δολ. 30 »
X ; 1230 »

Θὰ κάνωμε διαίρεσιν μετρήσεως δηλ. $1230 : 30 = 41$ δολ.

Παράδειγμα 3ον

Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει πρόσοψιν 9,75 μέτρα. Πόσοι πήχεις εἶναι ;

Κατάταξις 1 π. 0,75 μ. ἢ $\frac{3}{4}$ μ.
X ; 9,75 μ. ἢ $9\frac{3}{4}$ μ.

Θὰ κάνωμε διαίρεσιν μετρήσεως, δηλαδὴ $9{,}75 : 0{,}75 = 13$ ἢ

$$9\frac{3}{4} : \frac{3}{4} = \frac{39}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{39}{3} = 13 \text{ μέτρα.}$$

Παράδειγμα 4ον

Ἕνας κῆπος εἶναι 270 τ. μ.
Πρόκειται νὰ πωληθῇ ὡς οἰκόπεδον. Πόσοι τετραγ. πήχεις εἶναι.

Κατάταξις. 1 τ. π. $\frac{9}{16}$ τ. μ. ἢ 0,5625 τ. μ.
X ; 270 τ. μ.

Θὰ κάνωμε διαίρεσιν (μέτρησιν)
ἤτοι $270 : \frac{9}{16} = 270 \times \frac{16}{9} = 480$ τ. π.

Παράδειγμα 5ον

Πόσα γραμμάρια ἔχει ἡ ὀκά ;
Κατάταξις. 1 δραμ. 3,2 γραμ.
400 » X ; »

Θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμὸ δηλ. $3{,}2 \times 400 = 1280$ γραμμάρια.

Παράδειγμα 6ον

Μιὰ κουβαρίστρα ἔχει 200 γιάρδες κλωστή. Πόσα μέτρα εἶναι ;

Κατάταξις. 1 γιάρδα	0,913 μέτρα	
200 »	Χ ; »	

Μὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Ἤτοι 0,914×200=182,8 μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἀγόρασε κάποιος οἰκόπεδο 240 τ.μ. καὶ πλήρωσε 11520 δρχ. Πόσο τοῦ κόστιζε ὁ τετραγ. τεκτον. πῆχυς ;

2. Ἐλάβαμε μία ἐπιταγὴ 30 Ἀγγλικῶν λιρῶν καὶ θέλομε ν' ἀγοράσωμε δολλάρια. Πόσα θὰ πάρωμε ;

3. Πόσα γραμμάρια εἶναι 160 δράμια ;

4. Ενα πλοῖο τρέχει 15 μίλια τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ;

5. Ἕνα τόπι ὕφασμα εἶναι 278,20 μέτρα. Πόσοι πήχεις εἶναι ;

6. Πόσα δράμια εἶναι οἱ 6,75 ὀκάδες ; Πόσα οἱ $3\frac{4}{8}$ ὀκάδες ;

7. Μιὰ μαθήτρια ζυγίστηκε καὶ εἶναι 34 κιλὰ (χιλιόγραμμα). Μπορεῖτε νὰ τῆς πῆτε, πόσες ὀκάδες εἶναι ;

8. Πόσοι τόννοι εἶναι 18.720 ὀκάδες ;

9. Πόσα τετράγ. μέτρα εἶναι 18 στρέμματα ;

10. Ἕνα τόπι ὕφασμα εἶναι 500 γιάρδες. Πόσα μέτρα εἶναι καὶ πόσοι πήχεις ;

ΕΝΝΟΙΑ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ

Πρόβλημα

1. Μία οἰκογένεια ξοδεύει 3 ὀκ. 150 δρμ. ψωμὶ τὴν ἡμέρα. Πόσο ψωμὶ χρειάζεται γιὰ 7 ἡμέρες ;

Κατάταξις. 1 ἡμέρα	3 ὀκ.	150 δράμια
7 »	Χ ;	

Πόσοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν ; Ποιὸς δὲ μοιάζει μὲ ὅσους μάθαμε ; Τί παρατηροῦμε ; Ὁ ἀριθμὸς 3 ὀκ. 150 δραμ. ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς καὶ ὁ πρῶτος (3 ὀκ.) φανερώνει ὅ,τι καὶ ὁ δεύτερος (δράμια), ἀλλὰ μέ ἰδικό του ὄνομα (ὀκάδες) καὶ γίνεται ἀπὸ τὰ δράμια, διότι 3 ὀκάδες=400 δράμια × 3= 1200 δράμια.

2. Αγοράσαμε 2 πηχ. 3 ρούπ. πανὶ καὶ δώσαμε 1 δεκάδραχμο.

Κατάταξις. 2 πήχ. 3 ρούπ.	1 δεκ. 1 πεν. 4 δραχ.	
1 »	Χ ;	

Τί παρατηροῦμε καὶ ἐδῶ ; Πόσους ἀριθμοὺς ἔχομε ;

Τί φανερώνει ὁ καθένας ἀπ' αὐτούς ;

Ὁ πρῶτος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀριθμούς, ποὺ τὸ πρῶτο μέρος (πήχεις 2=16 ρούπια) δείχνει ὅ,τι καὶ τὸ δεύτερο ἀλλὰ μὲ διαφορετικὸ ὄνομα. Τὸ ἴδιο καὶ ὁ ἀριθμὸς 1 δεκ. 1 πεντ. 4 δραχ. ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 ἁπλοῦς ἀριθμούς, ποὺ καθένας φανερώνει ὅ,τι καὶ ὁ τελευταῖος (δραχμὲς) ἀλλὰ μὲ διαφορετικὸ ὄνομα (δεκάδραχμο - πεντάδραχμο).

Συμπέρασμα :

Οἱ ἀριθμοί, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρους ἁπλοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι πολλαπλάσια ἢ μέρη τῆς ἴδιας ἀρχικῆς μονάδος ἀλλὰ μὲ ἰδιαίτερο ὄνομα, λέγονται συμμιγεῖς.

Σημ. Οἱ συμμιγεῖς εἶναι πάντοτε συγκεκριμένοι ἀριθμοί.

ΤΡΟΠΗ ΣΥΜΜΙΓΟΥΣ ΣΕ ΑΠΛΟΥΝ ΑΡΙΘΜΟ

Δ'. Σὲ ἀκέραιο (σὲ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του)

1. Μᾶς ρωτοῦν : Ἕνα κομμάτι ὕφασμα εἶναι 3 πήχεις καὶ 5 ρούπια. Πόσα ρούπια εἶναι ὅλα μαζί ;

Σκεπτόμαστε : Ἕνας πῆχυς ἔχει 8 ρούπια. Οἱ 3 θὰ ἔχουν 8×3==24 ρούπια. Καὶ 5 ρούπια, ποὺ ἔχομε ἀκόμη κάνουν 29 ρούπια. Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{rl} 3 \text{ πήχ.} & 5 \text{ ρούπ.} \\ \times\ 8 & \\ \hline 24 & \\ +\ 5 & \\ \hline 29 & \end{array}$$

Δηλ. 3 π. 5 ρ. = 29 ρ.

2. Πόσες ὧρες εἶναι μία ἑβδομάδα, 3 ἡμέρες, 5 ὧρες ;

Σκεπτόμαστε : Ἡ 1 ἑβδομάδα ἔχει 7 ἡμέρες καὶ 3, ποὺ ἔχομε ἀκόμη κάνουν 10 ἡμέρες. Ἡ 1 ἡμέρα ἔχει 24 ὧρες καὶ οἱ 10 θὰ ἔχουν 24 × 10 = 240 ὧρες. Τέλος ἔχομε ἀκόμη 5 ὧρες καὶ γίνονται συνολικὰ 245 ὧρες.

Ἡ πρᾶξις γίνεται ἔτσι:

$$
\begin{array}{rl}
1 & \text{ἑβδ. 3 ἡμ. 5 ὥρ.} \\
\times\ \ 7 & \\
\hline
7 & \\
+\ \ 3 & \\
\hline
10 & \text{ἡμέρ.} \\
\times\ \ 24 & \\
\hline
30 & \\
20\ & \\
\hline
240 & \\
+\ \ 5 & \\
\hline
245 & \text{ὧρες.}
\end{array}
$$

Ἀπάντησις. Μία ἑβδομάδα, 3 ἡμέρες, 5 ὧρες=245 ὧρες.

Συμπέρασμα:

> *Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα συμμιγῆ ἀριθμὸ σὲ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του (δηλαδὴ νὰ τὸν κάνωμε ἀκέραιο), τρέπομε τὸν πρῶτον του ἁπλοῦν ἀριθμὸ σὲ μονάδες τῆς ἑπομένης τάξεως. Προσθέτομε ἔπειτα καὶ αὐτές, ποὺ δείχνει ὁ δεύτερος καὶ τὸ ἄθροισμά τους τρέπομε πάλι σὲ μονάδες τῆς ἑπομένης τάξεως καὶ προσθέτομε καὶ αὐτές, ποὺ δείχνει ὁ τρίτος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.*

Β'. Σὲ κλάσμα (σὲ μονάδες ἀνωτέρας τάξεως)

1. Νὰ τραποῦν 7 ρούπια σὲ πήχεις.

Κατάταξις. 1 πήχ. 8 ρούπ.
X ; 7 »

Θὰ κάνωμε διαίρεσιν μετρήσεως. Δηλαδὴ $7 : 8 = \frac{7}{8}$ πήχ.

Ἀπάντησις. Τὰ 6 ρούπια εἶναι $\frac{7}{8}$ πήχ.

2. Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι 3 μῆνες 10 ἡμέρες;

Κατάταξις 1 ἔτος 360 ἡμ.
X ; 100 » Δηλ. οἱ 3 μην. 10 ἡμ.

Θὰ κάνωμε διαίρεσιν μετρήσεως $100:360$ ἢ $\frac{100}{360}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$ ἔτους. Δηλ. 3 μ. 10 ἡμ. $=\frac{5}{18}$ ἔτους.

Συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ τρέψωμε συμμιγῆ ἀριθμὸ σὲ μονάδες ὁποιασδήποτε ἀνωτέρας τάξεώς του (κλάσμα), τρέπομε πρῶτα αὐτὸν σὲ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του, καὶ τὸ ἐξαγόμενο βάνομε ἀριθμητή, παρονοματὴ δὲ γράφομε τὸν ἀριθμόν, ποὺ δείχνει, πόσες μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του ἀποτελοῦν μία μονάδα σὲ ἐκείνην, ποὺ θέλομε νὰ τραπῆ ὁ συμμιγής.

Σημ. Ἂν θέλωμε νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, τὸν τρέπομε πρῶτα σὲ κλάσμα καὶ τοῦτο σὲ δεκαδικό.

Ἀσκήσεις

Ἀπὸ μνήμης.

1. Πόσες δραχμὲς εἶναι, 1 δεκάδραχμο 1 πεντάδραχμο 3 δραχμές;
2. Πόσα ρούπια εἶναι 5 πήχεις 7 ρούπια;
3. Πόσοι δάκτυλοι εἶναι 4 παλάμες 3 δάκτυλοι;
4. Πόσα δράμια εἶναι 3 ὀκάδες 5 δράμια;
5. Πόσοι πήχεις εἶναι 3 ρούπια;
6. Πόσες ὧρες εἶναι 30′;
7. Πόσοι μῆνες εἶναι 10 ἡμέρες;

Γραπτῶς.

1. Πόσες ἴντσες εἶναι 15 γιάρδες 2 πόδια 5 ἴντσες.
2. Πόσα σὲντς εἶναι 15 δολλ. 45 σέντς;
3. Πόσες πέννες εἶναι 10 Ἀγγλικὲς λίρες 8 σελίνια 6 πέννες;
4. Πόσα δράμια εἶναι 12 ὀκάδ. 80 δράμια;
5. Πόσες ἡμέρες εἶναι 3 ἔτη 4 μῆνες 20 ἡμέρες;
6. 20 ἡμέρες, τί μέρος τοῦ μηνὸς εἶναι;
7. Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι 5 μῆνες 10 ἡμέρες;
8. Τί μέρος τοῦ στατῆρος εἶναι 15 ὀκάδες 200 δράμια;
9. Νὰ τραπῆ ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 2 ἡμέρες 6 ὧρες 30′ σὲ ἡμέρες.
10. 12 στατῆρες 30 ὀκάδες 250 δράμια, πόσες ὀκάδες καὶ πόσοι στατῆρες εἶναι;

Γ'. Τροπὴ ἀκεραίου σὲ συμμιγῆ.

Ἔχομε 47.320 δράμια καὶ θέλομε νὰ ἰδοῦμε, πόσες ὀκάδες καὶ στατῆρες κάνουν.

Σκέψις: Ἀφοῦ ἡ μία ὀκὰ ἔχει 400 δράμια, τὰ 47.320 δράμ. θὰ ἔχουν 47.320 : 400 = 118 ὀκάδες καὶ μένουν 120 δράμια. Ἀλλά, ἀφοῦ ὁ στατήρας ἔχει 44 ὀκάδες, οἱ 118 ὀκάδες θὰ εἶναι 118 : 44 ἤτοι 2 στατῆρες καὶ μένουν 30 ὀκάδ. Ἑπομένως τὰ 47.320 δράμια = 2 στατῆρες 30 ὀκάδες 120 δράμια.

Ἡ πρᾶξις γίνεται ἔτσι:

47320	400	
732	118 ὀκ.	44
3320	30 ὀκ.	2 στατῆρες
120		
δράμια		

Ὥστε 47.320 δραμ. = 2 στατ. 30 ὀκ. 120 δράμια.

Συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ τρέψωμε συγκεκριμένον ἀκέραιον ἀριθμὸ σὲ συμμιγῆ, διαιροῦμε τοῦτον μὲ τὸ ποσὸν τῶν μονάδων τῆς ἀνωτέρας τάξεώς του καὶ τὸ πηλίκον μὲ τὸ ποσὸν τῶν μονάδων τῆς προηγουμένης ἀνωτέρας τάξεως καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὸ τελευταῖο πηλίκον μὲ τὰ προηγούμενα ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι ὁ συμμιγής, ποὺ ζητοῦμε.

Δ΄. Τροπὴ συγκεκριμένου κλάσματος σὲ συμμιγῆ

1. Τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ ἔτους, πόσα ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέρες εἶναι ;

Σκέψις : Τὰ $\frac{7}{5}$ ἔτους εἶναι 1 ἔτος καὶ $\frac{2}{5}$ ἔτους.

Τὸ 1 ἔτος εἶναι 12 μῆνες καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ θὰ εἶναι $12 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$ μῆνες $= 4$ μῆνες καὶ $\frac{4}{5}$ μηνός. Ὁ ἕνας μῆνας εἶναι 30 ἡμέρες καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μηνὸς θὰ εἶναι $30 \times \frac{4}{5} = \frac{120}{5} = 24$ ἡμέρες.

Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς :

```
     7 | 5
       |--------------------------------
     2   1 ἔτος — 4 μῆνες — 24 ἡμέρες
  × 12
  ----
    24
     4
  × 30
  ----
   120
    20
    ==
```

Ὥστε : $\frac{7}{5}$ ἔτους = 1 ἔτος 4 μῆνες καὶ 24 ἡμέρες.

2. Πόσες ὀκάδες καὶ δράμ. εἶναι $\frac{4}{5}$ στατῆρος ;

Λύσις

Σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο θὰ ἔχωμε :

```
     4 | 5
       |------------------------------
  × 44   0 στατ. 35 ὀκ. 80 δράμια
  ----
   176
    26
     1
 × 400
 -----
   400
    ==
```

'Απάντησις : Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ στατῆρος= 35 ὀκ 80 δράμια.

Συμπέρασμα :

> *Γιὰ νὰ τρέψωμε συγκεκριμένο κλάσμα (ὄχι τῆς τελευταίας τάξεως) σὲ συμμιγῆ, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ πρῶτο πηλίκο θὰ εἶναι οἱ μονάδες τῆς τάξεως, ποὺ ἔχομε. Τὸ ὑπόλοιπο τρέπομε σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου. Συνεχίζομε δὲ ὡς τὶς μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του. Τὰ πηλίκα τῶν συνεχῶν αὐτῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος συμμιγής.*

Σημ. Ἂν θέλωμε συγκεκριμένο μικτὸ ἢ δεκαδικὸ νὰ τὸν τρέψωμε σὲ συμμιγῆ, μποροῦμε νὰ τὸν κάνωμε πρῶτα κλάσμα.

Ἀσκήσεις

Ἀπὸ μνήμης.

1. Πόσοι πήχεις καὶ ρούπια εἶναι 19 ρούπια;
2. Πόσα εἰκοσάδραχμα, δεκάδραχμα, πεντάδραχμα καὶ δραχμὲς εἶναι 39 δραχμές;
3. Πόσες ὀκάδες καὶ δράμια εἶναι 1400 δράμια;
4. Πόσα μέτρα, παλάμες καὶ δάκτυλοι εἶναι 248 δάκτυλοι;
5. Πόσα ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέρες εἶναι 400 ἡμέρες;

Γραπτῶς.

1. Πόσες ὧρες καὶ πρῶτα λεπτὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἡμέρας;
2. Πόσες ἡμέρες, ὧρες, πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτὰ εἶναι 872.430 δεύτερα;
3. Κάμετε 28 μῆνες συμμιγῆ ἀριθμό.
4. Πόσες γιάρδες, πόδια καὶ ἴντσες κάνους $2\frac{3}{4}$ γιάρδες;
5. 3,56 στατῆρες, πόσοι στατῆρες, ὀκάδες καὶ δράμια εἶναι;

ΟΙ 4 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ

Α΄. Πρόσθεσις.

Πρόβλημα:

1. Μιὰ γυναίκα ἀγόρασε ἀπὸ τὸν ἔμπορο χθὲς 4 πήχ. 5 ρούπια

ὕφασμα γιὰ ἕνα φόρεμά της καί, ἐπειδὴ δὲν τῆς ἔφθασε, ξαναπῆρε σήμερα ἄλλους 1 πήχ. 6 ρούπια. Πόσο ὕφασμα πῆρε ὅλο τὸ φόρεμα;

Σκέψις: Θὰ κάνωμε πρόσθεσιν. Καὶ θὰ λογαριάσωμε χωριστὰ τοὺς πήχεις, χωριστὰ τὰ ρούπια. Δηλαδὴ

4 πήχ. + 1 πήχ. = 5 πήχ. (1)

5 ρούπ. + 6 ρούπ. = 11 ρούπια ἢ 1 πήχ. 3 ρούπια (2)

καὶ 5 + 1 = 6 πήχ. 3 ρούπ.

Ἡ πρᾶξις γίνεται ἔτσι:

4 πήχ.	5 ρούπια	
+ 1	6 »	
5	11	Ἀλλὰ 8 ρούπ. = 1 πήχ.
+ 1	3	ὑπόλοιπο
6 πήχ.	3 ρούπια.	

2. Ἕνας ἄνθρωπος γεννήθηκε στὶς 25 Αὐγούστου 1876 καὶ ἔζησε 62 ἔτη 7 μῆνες 10 ἡμέρες. Πότε (ποιὰ χρονολογία) πέθανε;

Σκέψις. Πρέπει νὰ προσθέσωμε ὅσα ἔτη, μῆνες, ἡμέρες, ἔζησε στὴ χρονολογία, ποὺ γεννήθηκε γιὰ νὰ βροῦμε τὴ χρονολογία τοῦ θανάτου του.

Λύσις

1876 ἔτος	(Αὔγουστος)	8 μῆν.	25 ἡμέρ.
+ 62		7	10
1938		15	35
+ 1		+ 1	5 ὑπόλοιπο
1939		16	5
		4 ὑπόλοιπο	

Ἀπάντησις: Πέθανε στὶς 5 ἡμέρ. 4 μηνὸς (Ἀπριλίου) 1939.

Συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ προσθέσωμε δύο ἢ περισσοτέρους ὁμοειδεῖς συμμιγεῖς ἀριθμούς, τοὺς βάνομε ἕναν κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ προσέχομε οἱ μονάδες κάθε τάξεως νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὶς ἀντίστοιχες τοῦ ἄλλου. Ἔπειτα ἀρχίζομε τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν (δεξιὰ) καὶ συνεχίζομε πρὸς τὴν ἀνωτέραν τάξιν (ἀριστερά). Ἂν τὸ ἄθροισμα μιᾶς τάξεως ἀποτελῆ μονάδα τῆς ἀνωτέρας τάξεως, τὴν προσθέτομε στὴν ἀνωτέρα ἀφήνοντας τὸ ὑπόλοιπο (ἂν μένῃ).

Β΄. Ἀφαίρεσις

Πρόβλημα

1. Ἕνας παντοπώλης εἶχε ἕνα σακκὶ ἀλεύρι, ποὺ ζύγιζε 1 στατῆρα, 8 ὀκάδες, 150 δράμια. Ἀπ' αὐτὸ ἐπώλησε χθὲς 23 ὀκάδες 300 δράμια. Πόσο ἀλεύρι τοῦ ἔμεινε;

Σκέψις. Ὅσο ἀλεύρι ἐπώλησε, θὰ τὸ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ αὐτό, ποὺ εἶχε στὸ σακκί.

Λύσις.	1 στατ.	8 ὀκ.	150 δράμ.
	—	23 »	300 »

Τί παρατηρεῖτε; Ἀφαιροῦνται 300 δράμια ἀπὸ 150; ἐπίσης 23 ὀκ. ἀπὸ 8 ὀκάδες; Βεβαίως ὄχι. Προσέξετε ὅμως! Παίρνομε 1 στατῆρα, ποὺ εἴχαμε, καὶ τὸν κάνομε ὀκάδες, προσθέτοντας καὶ τὶς 8, ποὺ εἴχαμε. Ὕστερα παίρνομε 1 ὀκὰ καὶ τὴν κάνομε δράμια προσθέτοντας καὶ τὰ 150, ποὺ ἔχομε.

Ἔτσι θὰ εἶναι 1 στατήρας 8 ὀκ. 150 δράμ.=51 ὀκ. 550 δράμ.

Ἀντὶ λοιπὸν τῆς ἀφαιρέσεως 1 στατῆρα	8 ὀκάδ.	150 »
—	23 »	300 »

γράφομε	51 ὀκ	550 δράμ.	
—	23	300	καὶ τώρα εἶναι εὔκολη ἡ πρᾶξις
	28	250	

Ἀπάντησις. Ἔμειναν τοῦ παντοπώλου 25 ὀκ. 250 δράμ. ἀλεύρι.

2. Πόσος χρόνος πέρασε ἀπὸ τὴν Ἑλληνικὴν Ἐπανάστασιν τοῦ 1821;

Σκέψις. Σήμερα ἔχυμε π.χ. 15 Δεκεμβρίου 1959. Ἡ Ἐπανάστασις κηρύχθηκε στὶς 25 Μαρτίου 1821. Πρέπει λοιπὸν ν' ἀφαιρέσωμε τὴ χρονολογία τῆς Ἐπαναστάσεως ἀπὸ τὴ σημερινή.

Λύσις.	1959 ἔτος	(Δεκέμβριος)	12 μῆνες	15 ἡμέρες
	1821	(Μάρτιος)	3 »	25 »

Ἐπειδὴ δὲν ἀφαιροῦνται 25 ἡμέρες ἀπὸ τὶς 15, παίρνομε ἕνα μῆνα ἀπὸ τοὺς 12 ποὺ ἔχομε, τὸν κάνομε ἡμέρες καὶ τὶς προσθέτομε στὶς 15. Ἔτσι τώρα θὰ ἔχωμε:

1959 ἔτος	11 μῆνες	45 ἡμέρες
1821	3	25
138	8	20

Ἀπάντησις. Ἀπὸ τὴν Ἑλληνικὴν Ἐπανάστασιν τοῦ 1821 ὥς τὰ σήμερα πέρασαν 138 ἔτη 8 μῆνες 20 ἡμέρες.

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε τὶς προσθέσεις.

α)

	4 εἰκοσ.	1 δεκάδραχμ.	1 πεντάδραχμ.	3 δραχ.
+	3 »	2 »	1 »	2 »

β)

	20 ὥρ.	45′	45″
+	8	35′	45″

γ)

	3 λίρες	10 σελ.	8 πέννες
+	6 »	15 »	12 »

δ)

	5 χιλιόγραμμα	150 γραμμάρια
+	24 »	950 »

2. Κάμετε τὶς ἀφαιρέσεις.

α)

	3 ἔτη	11 μῆνες	5 ἡμ.
—	1 »	8 »	4 »

β)

	2 στ.	35 ὀκ.	240 δράμια
—	2 »	32 »	330 »

γ)

	5 στρέμματα	850 τ. μ.
—	3 »	900 »

δ)

	12 ὥρ.	—	—
—	3	10′	25″

3. Πῶς γίνεται ἡ ἀφαίρεσις στοὺς συμμιγεῖς;
Γράψετε τὸν κανόνα στὸ τετραδιό σας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τὸ τραῖνο Χαλκίδος ξεκίνησε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ στὶς 7 ὥρες 18 π. 10 δ. τὸ πρωΐ καὶ ὕστερα ἀπὸ 2 ὥρες 50 π. 50 δ. ἔφθασε στὴ Χαλκίδα. Ποιὰ ὥρα ἔφθασε ἐκεῖ;

2. Τὰ μαθήματα τοῦ σχολείου μας ἀρχίζουν στὶς 8 ὥρες 45 π. π. μ. καὶ τελειώνουν τὸ μεσημέρι. Πόσες ὥρες διαρκοῦν;

3. Ἕνα βαπόρι ξεκίνησε ἀπὸ τὴν Κόρινθο τὸ πρωῒ στὶς 8 ὥρες 18 π. 20 δ. καὶ ἔφθασε στὸ Μεσολόγγι στὶς 4 ὥρες 20 π. 15 δ. τὸ ἀπόγευμα. Πόσες ὥρες κράτησε τὸ ταξίδι του;

4. Πόσος χρόνος πέρασε ἀπὸ τὴν Ἅλωσιν τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ὥς τὰ σήμερα;

5. Ἕνα παιδὶ εἶναι σήμερα ἀκριβῶς 15 ἐτῶν 3 μηνῶν 20 ἡμε-

ρῶν. Νὰ βρῆτε, ποιὰ χρονολογία γεννήθηκε.

6. Μιὰ οἰκογένεια εἶχε δυὸ σακκιὰ ἀλεύρι. Τὸ πρῶτο ζύγιζε 1 στατῆρα 15 ὀκάδες 200 δράμια καὶ τὸ δεύτερο 1 στατῆρα 37 ὀκάδες 100 δράμια. Ἐξώδευσε δὲ γιὰ τρεῖς μῆνες 95 ὀκάδες 250 δράμια. Πόσο ἀλεύρι τῆς μένει ἀκόμη ;

7. Ὅταν στὰ Ἰωάννινα εἶναι μεσημέρι, στὸ Λονδῖνο εἶναι 10 ὥρες 24 π. 37 δ. π.μ. Ποιά ἡ διαφορὰ τῆς ὥρας μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν πόλεων ;

8. Ἕνας γεωργὸς εἶχε χωράφια 20 στρέμματα. Ἀπ᾽ αὐτὰ ἔδωσε στὸ πρῶτο του παιδὶ 7 στρέμματα 800 τ.μ., στὸ δεύτερο 2 στρέμματα 200 τ.μ. λιγώτερα καὶ στὸ τρίτο 3 στρέμματα 300 τ.μ. περισσότερα ἀπὸ τὸ δεύτερο. Νὰ βρῆτε : 1) Πόσο μερίδιο πῆρε κάθε παιδὶ καὶ 2) Τί ἔμεινε ἀκόμη στὸν πατέρα ;

Πολλαπλασιασμὸς

1. Συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον

Πρόβλημα :

Παντοπώλης ἔχει 3 κιβώτια σαπούνι, ποὺ τὸ καθένα ζυγίζει 25 ὀκ. 150 δράμια. Πόσο σαπούνι ἔχει συνολικά ;

Σκέψις. Ξέρομε, πόσο ζυγίζει τὸ κάθε κιβώτιο καὶ θέλομε νὰ βροῦμε, πόσο ζυγίζουν τὰ τρία. Θὰ κάνωμε γι᾽ αὐτὸ πολλαπλασιασμό.

Κατάταξις.	1 κιβ.	25 ὀκ. 150 δραμ.
	3 »	Χ ;

Λύσις. 25 ὀκ. 150 δραχ. × 3 =

Ἡ πρᾶξις αὐτὴ δὲν σημαίνει καὶ πρόσθεσιν ; Γράφομε :

25 ὀκ.	150 δραμ.
25	150
+ 25	150
75	450
ἢ 76	50

Τὸ ἴδιο ὅμως θὰ βροῦμε, ἂν πολλαπλασιάσωμε μὲ τὸ 3 χωριστὰ τὶς μονάδες κάθε τάξεως τοῦ συμμιγοῦ ἀρχίζοντας ἀπὸ τὰ δεξιά. Ἡ πρᾶξις γίνεται ἔτσι.

25 ὀκ.	150 δραμ.
×	3
75	450
ἢ 76	50

Ἀπάντησις. Ἔχει συνολικὰ στὰ 3 κιβώτια ἕνα στατῆρα 32 ὀκ. 50 δράμια.

Βγάλετε μόνοι σας τὸ συμπέρασμα, πῶς πολλαπλασιάζομε συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιο.

2. Συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα

Πρόβλημα :

1. Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα, ποὺ ἦταν 65 πήχεις 5 ρούπια, ἐπωλήθησαν τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτοῦ. Πόσοι πήχεις καὶ ρούπια ἐπωλήθησαν ;

Κατάταξις. 1 ὕφασμα 65 πήχ. 5 ρούπια

$\frac{3}{7}$ × ;

Σκέψις. Γνωρίζομε ὁλόκληρο τὸ ὕφασμα, πόσο εἶναι καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε μέρος του. Θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό.

Λύσις. 65 πήχ. 5 ρούπ. $\times \frac{3}{7} =$

Τί ἀριθμοὺς ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε ; Πῶς θὰ γίνῃ ἡ πρᾶξις ;

Ἂς τὸ λύσωμε πρῶτα μὲ ἀναγωγή. Λέμε:

Ἀφοῦ τὰ $\left(\frac{7}{7}\right)$ εἶναι 65 πηχ. 5 ρούπια

τὸ 1 ἕβδομο $\left(\frac{1}{7}\right)$ θὰ εἶναι 7 φορὲς λιγώτερο, δηλαδὴ 65 πήχεις 5 ρούπια : 7 ἢ $\frac{\text{65 πήχ. 5 ρούπια}}{7}$

καὶ τὰ 3 ἕβδομα $\left(\frac{3}{7}\right)$ θὰ εἶναι 3 φορὲς περισσότερο, δηλαδὴ $\left(\frac{\text{65 πήχ. 5 ρούπ.}}{7}\right) \times 3 = \frac{\text{65 πήχ. 5 ρ.} \times 3}{7}$.

Τί παρατηρεῖτε ; Ὅτι τὸν συμμιγῆ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Κάνοντας τὴν πρᾶξιν βρίσκομε :

$\frac{\text{65 π. 5 ρ.} \times 3}{7} = \frac{\text{195 π. 15 ρ.}}{7} = \frac{\text{196 π. 7 ρ.}}{7} =$ 28 π. 1 ρούπι.

Ἀπάντησις : Τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ ὑφάσματος, ποὺ ἐπωλήθησαν, εἶναι 28 πηχ. 1 ρούπι.

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸ γινόμενό τους διαιροῦμε διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Δ΄. Διαίρεσις

1. Συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

Πρόβλημα:

Πρόκειται νὰ μοιρασθοῦν 4 ἀδελφὲς 5 πήχ. 4 ρούπια κορδέλλα. Πόσο θὰ πάρῃ ἡ καθεμιά;

Κατάταξις.				
	οἱ	4 ἀδελ.	5 πήχ.	4 ρούπ.
	ἡ	1 »	Χ ;	

Σκέψις: Ξέρομε, πόσο θὰ πάρουν καὶ οἱ 4 ἀδελφὲς καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε, πόσο θὰ πάρῃ ἡ καθεμιά. Θὰ κάνωμε λοιπὸν διαίρεσιν (μερισμό).

Λύσις : 5 πήχ. 4 ρούπ. : 4 =

Τί ἔχομε νὰ διαιρέσωμε; Πῶς θὰ μοιράζατε σεῖς;

Τί θὰ μοιράζατε πρῶτα, τοὺς πήχεις ἢ τὰ ρούπια;

Καὶ, ἂν μοιράσετε τοὺς πήχεις, τί θὰ κάμετε αὐτούς, ποὺ μένουν;

Ἀλλὰ ἂς προσπαθήσωμε νὰ τὸ βροῦμε μαζί.

Ἂν μοιράσωμε τοὺς 5 πήχ. στὰ 4 κορίτσια, καθένα θὰ πάρῃ ἀπὸ 1 πῆχυ καὶ θὰ μείνῃ ἀκόμη 1 πήχ. Αὐτὸν τὸν κάνομε ρούπια. 8 ρούπια λοιπὸν ὁ πῆχυς, ποὺ μένει, καὶ 4, ποὺ ἔχομε, ἀκόμη γίνονται 12 ρούπια.

Ἂν τὰ μοιράσωμε καὶ αὐτὰ στὰ τέσσερα κορίτσια, θὰ πάρῃ τὸ καθένα ἀκριβῶς ἀπὸ 3 ρούπια.

Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 4 \\ \hline
1 & 1 \text{ πήχ. } \; 3 \text{ ρούπ.} \\
\times\ 8 & \\ \cline{1-1}
8 & \\
+\ 4 & \\ \cline{1-1}
12 & \\
- &
\end{array}
$$

Συμπέρασμα:

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, διαιροῦμε χωριστὰ τὶς μονάδες κάθε τάξεως διὰ τοῦ ἀκεραίου ἀρχίζοντας ἀπὸ τὶς ἀνώτερες (ἀριστερά). Ὅ,τι ὑπόλοιπο θὰ μένῃ, θὰ τὸ τρέπωμε σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως καὶ ἀφοῦ προσθέτομε καὶ αὐτές, ποὺ ὑπάρχουν στὸν συμμιγῆ, ξαναδιαιροῦμε μὲ τὸν ἀκέραιο. Ἔτσι θὰ συνεχίσωμε ὣς τὶς μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του.

2. Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος

Πρόβλημα:

Δύο οἰκογένειες μοιράστηκαν ἕνα σακκὶ κάρβουνα. Ἡ πρώτη οἰκογένεια πῆρε τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ σακκιοῦ, ποὺ ζύγιζαν 1 στατῆρα 2 ὀκ. 100 δράμια. Πόσο ζύγιζε ὁλόκληρο τὸ σακκί;

Κατάταξις. $\frac{5}{9}$ τοῦ σακ. 1 στατ. 2 ὀκ. 100 δραμ.

1 Χ;

Σκέψις. Γνωρίζομε, πόσο ζύγιζε μέρος τοῦ σακκιοῦ καὶ ζητοῦμε ὁλόκληρο τὸ σακκὶ νὰ ἰδοῦμε, πόσο ζύγιζε. Θὰ κάνωμε γι' αὐτὸ διαίρεσιν.

Λύσις. 1 στ. 2 ὀκ. 100 δράμ. : $\frac{5}{9}$

Πῶς θὰ γίνῃ ἡ πρᾶξις;

Ἂς κάνωμε ἀναγωγή.

Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ σακ. ζύγιζαν 1 στ. 2 ὀκ. 100 δράμ.

τὸ $\frac{1}{9}$ » » θὰ ζύγιζε $\frac{1 \text{ στ. } 2 \text{ ὀκ. } 100 \text{ δράμ.}}{5}$

καὶ τὰ $\frac{9}{9}$ ἢ 1 σακκὶ » » $\frac{1 \text{ στ. } 2 \text{ ὀκ. } 100 \text{ δράμ.} \times 9}{5}$

ἢ 1 στ. 2 ὀκ. 100 δράμ. $\times \frac{9}{5}$

Ἡ τελευταία αὐτὴ πρᾶξις μᾶς φανερώνει, ὅτι τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα θὰ βροῦμε, ἂν ἀντιστρέψωμε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ κάνωμε ὄχι διαίρεσιν, ἀλλὰ πολλαπλασιασμό. Συνεχίζοντες τὴν πρᾶξιν βρίσκομε $\frac{1 \text{ στ. } 2 \text{ ὀκ. } 100 \text{ δρ.} \times 9}{5} = \frac{9 \text{ στ. } 18 \text{ ὀκ. } 900 \text{ δρ.}}{5} =$

$= \frac{9 \text{ στ. } 20 \text{ ὀκ. } 100 \text{ δράμια}}{5} = 1$ στατ. 39 ὀκ. 100 δράμια.

Γράψετε μόνοι σας τὸν κανόνα.

Ἀσκήσεις

1. Κάνετε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

α) 7 πήχ. 5 ρούπ. $\times$ 4 $=$

β) 2 ὥρ. 15′ $\times$ $\frac{3}{5} =$

γ) 20 ὀκ. 80 δράμ. $\times$ $2\frac{3}{4} =$

2. Κάμετε τὶς διαιρέσεις:

α) 3 ὥρ. 18 π. : 3 $=$

β) 18 πήχ. 6 ρούπ. : $\frac{2}{3} =$

γ) 1 στ. 10 ὀκ. 200 δρμ. : $1\frac{1}{4} =$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἔμπορος ἐπώλησε 3 τόπια ὕφασμα καὶ τὸ καθένα ἦταν 29 γιάρδες 2 πόδια 5 ἴντσες. Πόσο ὕφασμα ἐπώλησε;

2. Δύο συνέταιροι μοιράστηκαν 28 στατῆρες 35 ὀκάδες 300 δράμια ζάχαρη. Ὁ ἕνας πῆρε τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ζάχαρης καὶ ὁ ἄλλος τὴν ὑπόλοιπη. Πόση πῆρε καθένας τους;

3. Μὲ 28,50 δραχμὲς πήραμε 2 πήχ. 3 ρούπια ὕφασμα. Πόσο πληρώσαμε τὸν πῆχυ;

4. Ἕνα ἀεροπλάνο πετῶντας μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα διήνυσε ἀπόσταση 1125 χιλιομέτρων σὲ 4 ὧρες 45 π. Μὲ πόσα χιλιόμετρα πετοῦσε τὴν ὥρα;

5. Ἕνα αὐτοκίνητο ξεκίνησε ἀπὸ τὸ Δομοκὸ στὶς 7 ὧρες 30 π. π.μ. μὲ μέση ταχύτητα 30 χιλιομέτρων τὴν ὥρα. Ἔφτασε δὲ στὰς Ἀθήνας στὶς 3 ὧρες 20 π. μ.μ. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε τὸ αὐτοκίνητο ἢ πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις Δομοκοῦ—Ἀθηνῶν;

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἀγόρασε κάποιος ἕνα οἰκόπεδο 400 τ. τ. π. πρὸς 50 δραχμὲς τὸν πῆχυ καὶ τὸ ἐπώλησε 75 δραχμὲς τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Ἐκέρ-

δισε ἢ ζημιώθηκε καὶ πόσο;

2. Ἀπὸ ἕνα βαρέλι ποὺ εἶχε 270 $\frac{3}{4}$ ὀκ. κρασὶ βγάλαμε πρῶτα τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ἔπειτα τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσες ὀκάδες βγάλαμε τὸν πρώτη καὶ δεύτερη φορά; Πόσες ὀκάδες ἔμειναν ἀκόμη στὸ βαρέλι;

3. Ἕνα αὐτοκίνητο μὲ ταχύτητα 30 χιλιομέτρων τὴν ὥρα ξεκίνησε στὶς 9 ἡ ὥρα τὸ πρωΐ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ τὴν Τρίπολιν. Τὸ μεσημέρι ξεκίνησε ἄλλο αὐτοκίνητο μὲ ταχύτητα 48 χιλιομέτρων τὴν ὥρα. Σὲ πόση ὥρα θὰ φτάση τὸ πρῶτο αὐτοκίνητο καὶ σὲ πόση ἀπόστασιν;

4. Δύο βρύσες γεμίζουν μιὰ δεξαμενὴ σὲ 4 ὧρες. Ἡ πρώτη τὴ γεμίζει σὲ 7 ὧρες. Πόσες ὧρες χρειάζεται ἡ δεύτερη γιὰ νὰ τὴ γεμίση μοναχή της;

5. Σὲ πόσες ὧρες θὰ περπατήση ἕνας ἄνθρωπος μιὰ ἀπόστασι 45 χιλιομέτρων ἂν κάνη 100 βήματα στὸ λεπτὸ καὶ τὸ κάθε βῆμα του εἶναι 0,75 μέτρα;

6. Ἐργολάβος ἀνέλαβε νὰ κτίση ἕνα σπίτι γιὰ 58.000 δραχμές. Ἐξώδευσε γιὰ πέτρα 8 πεντακοσιόδραχμα 200 δραχμές, γιὰ ἄμμο 4 πεντακοσ. 50 δραχμὲς καὶ ἄλλα ἔξοδα 24 πεντακ. 350 δραχμές. Πλήρωνε δὲ καὶ ἡμερομίσθιο τοὺς 5 ἐργάτες του 70 δραχμὲς τὴν ἡμέρα ἐπὶ 45 ἡμέρες. Ἐκέρδισεν ὁ ἐργολάβος ἢ ζημιώθηκε καὶ πόσο;

7. Ἕνας ἀμπελουργὸς ἔχει 20 στρέμματα σταφίδες. Γιὰ κάθε στρέμμα χρειάζεται 2 $\frac{1}{2}$ ὀκ. θειάφι, ποὺ στοιχίζει 8,30 δραχμές. Πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ ἀγοράση καὶ πόσο θὰ πληρώση;

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤ΄ ΤΑΞΙΣ

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Α΄. Περὶ ποσῶν

Ποσὸν λέγεται κάθε τι ποὺ μπορεῖ νὰ αὐξηθῆ ἢ νὰ ἐλαττωθῆ (νὰ αὐξομειωθῆ) π. χ.

μαθηταὶ δραχμὲς

ὀκάδες	δράμια
πήχεις	ρούπια
μέτρα	ὧρες
ἡμέρες	σελίνια
λίρες	

Ἄσκησις

Βρῆτε καὶ σεῖς μερικὰ ποσά.

Β΄. Ποσὰ ἀνάλογα

Παράδειγμα 1ον

Ἕνας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιο 30 δραχμὲς τὴν ἡμέρα. Σὲ δυὸ ἡμέρες θὰ παίρνῃ $2 \times 30 = 60$ δραχμές. Σὲ τρεῖς ἡμέρες $3 \times 30 = 90$ δραχμὲς κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2ον

Ἕνας τετραγωνικὸς πῆχυς οἰκοπέδου τιμᾶται 60 δραχμές, ὁ μισὸς τιμᾶται $\frac{60}{2} = 30$ δραχ.

Παράδειγμα 3ον

Ὁ ἕνας πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει 80 δραχμές.

Οἱ 5 πήχεις θ' ἀξίζουν $5 \times 80 = 400$ δραχμὲς καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως $\frac{80}{2} = 40$ δραχμές.

Στὰ παραπάνω παραδείγματα ἔχομε τὰ ποσά:

α) ***Ἡμερομίσθιο*** ἐργάτου καὶ ***χρόνον***, ποὺ παίρνει τὸ ἡμερομίσθιο.

β) ***Τετραγωνικὸν*** πῆχυ καὶ τὴν ***τιμή*** του.

γ) ***Μῆκος*** ὑφάσματος καὶ ***τιμὴν*** αὐτοῦ.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισί των φαίνεται καθαρά, ὅτι:

> *Ὅταν **πολλαπλασιάζεται** ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ τυχόντα ἀριθμὸν **πολλαπλασιάζεται** ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ· ἢ ὅταν **διαιρεῖται** μιὰ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διὰ τυχόντος ἀριθμοῦ, **διαιρεῖται** διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Αὐτὰ τὰ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα ἢ εὐθέως ἀνάλογα.*

Σημ. Ὅταν δύο ποσὰ δὲν ἔχουν τὴν παραπάνω σχέσι, ἀλλὰ ἁπλῶς συναυξάνονται, δὲν λέγονται ἀνάλογα. Π. χ. ἡ ἡλικία καὶ τὸ ἀνάστημα δὲν εἶναι ἀνάλογα, διότι διπλασιαζομένης τῆς ἡλικίας ἑνὸς παιδιοῦ, δὲν διπλασιάζεται καὶ τὸ ἀνάστημά του.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ πῆτε πρῶτα καὶ νὰ γράψετε ἔπειτα στὸ τετράδιο τῆς ἀριθμητικῆς σας, ποιὰ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα.

2. Νὰ βρῆτε καὶ νὰ γράψετε στὸ τετράδιό σας πέντε ζεύγη ποσῶν ἀναλόγων.

Γ'. Ποσὰ ἀντίστροφα

Παράδειγμα 1ον

5 ἐργάνες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 10 ἡμέρες.

2×5 » θὰ σκάβουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι σὲ $\frac{10}{2} = 5$ ἡμέρες

Παράδειγμα 2ον

Μὲ 10 ὀκάδες λάδι μιὰ οἰκογένεια περνᾶ ἕνα μῆνα· δύο οἰκογένειες σὰν αὐτὴ θὰ περάσουν 15 ἡμέρες μὲ τὸ ἴδιο λάδι.

Παράδειγμα 3ον

Γιὰ νὰ κάνωμε μιὰ σημαία χρειαζόμεθα 4 πήχεις 6 ρούπια ὕφασμα, ἂν τὸ ***πλάτος*** του εἶναι 2 πήχεις.

Ἀπὸ ἄλλο ὅμως ὕφασμα, ποὺ ἔχει πλάτος 4 πήχεις, θὰ χρειασθοῦμε $\frac{4 \text{ πήχ. } 6 \text{ ρούπια}}{2} = 2$ πήχ. 3 ρούπια ***μῆκος***.

Σ' αὐτὰ τὰ παραδείγματα ἔχομε τὰ ποσά :

α) ***Χρόνον***, ποὺ χρειάζονται οἱ ἐργάτες νὰ τελειώσουν ἕνα ἔργο καὶ τὸν ***ἀριθμό τους***.

β) Τὴν τιμὴ τῆς μονάδος καὶ τὴν ***ποσότητα*** αὐτῆς.

γ) Τὸ ***πλάτος*** ὑφάσματος καὶ τὸ ***μῆκος*** αὐτοῦ.

Ἀπὸ τὴ σύγκρισί τους φαίνεται, πώς :

> *Ὅταν **πολλαπλασιάζεται** ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα τυχόντα ἀριθμό, **διαιρεῖται** ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἢ ὅταν **διαιρεῖται** ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διὰ τυχόντος ἀριθμοῦ, **πολλαπλασιάζεται** ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό. Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται **ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.***

Ἀσκήσεις

α) Νὰ πῆτε πρῶτα καὶ ἔπειτα νὰ γράψετε στὸ τετράδιό σας, ποῖα ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα.

β) Νὰ βρῆτε καὶ νὰ γράψετε πέντε ζεύγη ποσῶν ἀντιστρόφων.

Δ΄ Λύσις προβλημάτων μὲ ποσὰ ἀνάλογα

σ. Τὰ 12 μαχαίρια στοιχίζουν 84 δραχμές.

Πόσο στοιχίζουν τὰ 9 μαχαίρια ;

Λύσις : Παριστάνομε μὲ τὸ γράμμα Χ τὸν ζητούμενο ἄγνωστο ἀριθμὸ (ἐδῶ τὴν τιμὴ τῶν 9 μαχαιριῶν) καὶ κατατάσσομε τὸ πρόβλη-ὡς ἑξῆς :

$$\text{κατάταξις} \left\{ \frac{12 \text{ μαχ.}}{9} \quad \frac{84 \text{ δραχ.}}{X} \right.$$

Στὴ λύσι τοῦ προβλήματος μᾶς διευκολύνουν, ὅσα ἔχομε πῆ στὸ πρῶτο μέρος τοῦ βιβλίου μας, σχετικὰ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴν ἀκεραία μονάδα. Σύμφωνα μὲ ἐκεῖνα τὸ ἕνα μαχαίρι θὰ στοιχίζῃ 84 : 12 ἢ

$\frac{84}{12}$ δρχ. καὶ τὰ 9 μαχαίρια $9 \times \frac{84}{12} = \frac{9 \times 84}{12}$ ἢ $\boxed{84 \times \frac{9}{12}} = 63$ δρχ.

Ἐφθάσαμε, λύνοντας τὸ πρόβλημα, στὴν πρᾶξι $\left(84 \times \frac{9}{12}\right)$. Δηλαδὴ γιὰ νὰ εὕρωμε, πόσο στοιχίζουν τὰ 9 μαχαίρια (τὸν ἄγνωστο ἀριθμὸ ποὺ ζητούσαμε), ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμό, ποὺ βρισκόταν ἀκριβῶς ἀπὸ πάνω του (τὸν 84) ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ κάνουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ (12 καὶ 9, δηλαδὴ τὸ $\frac{12}{9}$) ἀντεσταμμένο (ἀναποδογυρισμένο $\frac{12}{9} \updownarrow \frac{9}{12}$).

Εἴχαμε λοιπὸν στὴν ἀρχικὴ κατάταξι ἔτσι τὰ ποσά :

$$\frac{12}{9} \text{ μαχ.} \quad \begin{matrix} 84 \\ X \end{matrix} \text{ δραχ.}$$

ὁ ἄγνωστος $X = 84 \times \frac{9}{12} = \frac{756}{12} = 63$ δραχμές.

Ὥστε τὰ 9 μαχαίρια στοιχίζουν 63 δραχμές.

Συγκρίνοντας τὰ ποσά, μαχαίρια καὶ τὴν τιμήν τους, βρίσκομε ὅτι : Τὰ 12 μαχαίρια στοιχίζουν 84 δραχμές. Τὰ περισσότερα μαχαίρια θὰ στοιχίζουν περισσότερες δραχμὲς ἢ τὰ 24 (2×12) μαχαίρια θὰ στοιχίζουν 168 (2×84) δραχμές.

Τὰ **διπλάσια** δηλ. μαχαίρια θὰ στοιχίζουν **διπλάσιες** δραχμές. Δηλαδή, ὅτι τὰ ποσὰ (ἀριθμὸς μαχαιριῶν καὶ ἡ τιμή τους) εἶναι **ἀνάλογα.**

Συμπέρασμα :

> ***Ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα,*** *γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἄγνωστο X, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ βρίσκεται ἀπὸ πάνω του,* ***ἐπὶ τὸ κλάσμα,*** *ποὺ κάνουν οἱ δυὸ ἄλλοι ἀριθμοί,* ***ἀντεστραμμένο.***

Ε΄. Λύσις προβλημάτων μὲ ποσὰ ἀντίστροφα

1. 8 ἐργάτες κτίζουν ἕνα σπίτι σὲ 30 ἡμέρες· οἱ 5 ἐργάτες σὲ πόσες μέρες θὰ ἔκτιζαν τὸ ἴδιο σπίτι ;

Λύσις: Παριστάνομε τὸν ἄγνωστο μὲ τὸ γράμμα X καὶ γράφομε (κατατάσσομε) τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς :

Κατάταξις : $\left\{ \begin{array}{ll} 8 \text{ ἐργ.} & 30 \text{ ἡμ.} \\ \hline 5 & X \end{array} \right.$

Γιὰ νὰ βροῦμε, σκεπτόμαστε, σὲ πόσες ἡμέρες οἱ 5 ἐργάτες θὰ ἔκτιζαν τὸ σπίτι, ποὺ οἱ 8 ἐργάτες τὸ ἔκτισαν σὲ 30 ἡμέρες· πρέπει νὰ βροῦμε πρῶτα σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ ἔκτιζε ὁ **ἕνας** ἐργάτης.

(Ἀναγωγή). Ἀφοῦ οἱ 8 ἐργάτες τὸ κτίζουν σὲ 30 ἡμέρες ὁ **ἕνας** ἐργάτης (ποὺ εἶναι 8 φορὲς λιγώτερες ἀπὸ τοὺς 8) θὰ τὸ ἔκτιζε σὲ 8 φορὲς περισσότερες ἡμέρες δηλ. σὲ 8×30 ἡμέρες· ἀφοῦ τώρα ὁ ἕνας κτίζει τὸ σπίτι σὲ 8×30 ἡμέρες, οἱ 5 ἐργάτες, ποὺ εἶναι 5 φορὲς περισσότεροι ἀπὸ τὸν ἕνα, θὰ τὸ κτίζουν σὲ 5 φορὲς λιγώτερες ἡμέρες, δηλαδὴ σὲ $\frac{8 \times 30}{5}$ ἡμέρες $= \boxed{30 \times \frac{5}{8}} = \frac{30 \times 8}{5} = \frac{240}{5} = 48$ ἡμέρες.

Ἐφθάσαμε λύνοντας τὸ πρόβλημα στὴν πρᾶξι $30 \times \frac{8}{5}$. Δηλαδὴ ζητῶντας τὸν ἄγνωστο X ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμό, ποὺ βρισκόταν ἀπὸ πάνω του (30), ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ κάνουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ 8 καὶ 5 δηλ. τὸ $\frac{8}{5}$, ὅπως εἶναι.

Συγκρίνοντες τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ἡμέρες βρίσκομε, ὅτι εἶναι ἀντίστροφα, διότι : διπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται διὰ 2.

οἱ 8 ἐργάτες θὰ κάνουν 30 ἡμ.
οἱ $2 \times 8 = 16$ ἐρβάτες θὰ κάνουν $30 : 2 = 15$ ἡμέρες.

Συμπέρασμα :

> ***Ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα,*** γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἄγνωστο ἀριθμό, ποὺ ζητοῦμε δηλ. τὸν Χ, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμό, ποὺ βρίσκεται ἀπὸ πάνω του ***ἐπὶ τὸ κλάσμα,*** ποὺ κάνουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοί, ***ὅπως εἶναι.***

ΣΤ΄. Ἀνακεφαλαίωσις

Καὶ στὰ δύο παραπάνω προβλήματα μᾶς δόθηκαν τρεῖς ἀριθμοί.

(1)	(2)	(1)	(2)
12 μαχ.	84 δραχ.	8 ἐργ.	30 ἡμ.
(3)		(3)	
9	Χ	5	Χ

Ὁ τρόπος —ἡ μέθοδος ὅπως τώρα θὰ λέμε— ποὺ τὰ λύσαμε, ὀνομάζεται στὴν ἀριθμητικὴ ***ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.***

Γιὰ νὰ λύσωμε τέτοια προβλήματα, κάνομε ὅπως εἴπαμε τὶς πιὸ πάνω ἐργασίες.

1. Κάνομε κατάταξι τοῦ προβλήματος.
2. Συγκρίνομε τὰ ποσά· αὐτὴ εἶναι ἡ δυσκολώτερη ἐργασία καὶ χρειάζεται πολλὴ προσοχὴ καὶ κατανόησι τοῦ προβλήματος. Καὶ
3. ***Πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμό***, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο Χ ***ἐπὶ τὸ κλάσμα,*** ποὺ κάνουν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ***ἀντεστραμμένο*** (ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα) ἢ ἐπὶ τὸ κλάσμα ***ὅπως εἶναι*** (ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα).

Ζ΄. Προβλήματα

α) Λυόμενα ἀπὸ μνήμης

1. 4 τετράδια ἀξίζουν 12 δραχμές· πόσο ἀξίζουν τὰ διπλάσια; τριπλάσια ; τὰ μισά ;

2. 3 ὀκάδες μῆλα ἀξίζουν 15 δραχμές· πόσο ἀξίζουν διπλάσιες ὀκάδες ; β) Οἱ μισὲς ὀκάδες ; γ) Οἱ τριπλάσιες ὀκάδες :

3. 8 ὀκάδες καρύδια ἀξίζουν 96 δραχμές· πόσο ἀξίζουν: α) οἱ μισὲς ὀκάδες; β) τὸ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$ τῆς ὀκᾶς; γ) οἱ δεκαπλάσιες;

4. Τὸ ἀμπέλι ποὺ εἶναι κοντὰ στὸ σχολεῖο μας, τὸ σκάβουν 8 ἐργάτες σὲ 12 ἡμέρες· σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ σκάψουν: α) οἱ μισοὶ ἐργάτες; β) οἱ διπλάσιοι ἐργάτες; γ) τὸ $\frac{1}{8}$ τῶν ἐργατῶν;

5. Μὲ 20 πήχεις ὕφασμα πλάτους 2 μέτρων κάνομε 4 παλτά· πόσα παλτὰ θὰ κάνωμε μὲ τοὺς ἴδιους πήχεις ἄλλου ὑφάσματος, ποὺ ἔχει πλάτος 1, 3, 5 μέτρα;

6) 10 ἐργάτες κτίζουν ἕνα σπίτι σὲ ἕνα μῆνα σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἔκτιζαν τὸ ἴδιο σπίτι: 5, 20, 2, 1 ἐργάτης;

7. Γιὰ νὰ κατασκευασθοῦν 6 μεγάλες σκηνὲς γιὰ παιδικὴ κατασκήνωσι χρειάζονται 24 μέτρα ἀδιαβρόχου ὑφάσματος· πόσα μέτρα ὑφάσματος χρειάζονται γιὰ νὰ γίνουν 1, 3. 12 σκηνές;

8. Σ' ἕνα φυλάκιο ὑπάρχουν 5 στρατιῶτες καὶ ἔχουν ξηρὴ τροφὴ γιὰ νὰ περάσουν 25 ἡμέρες. Πόσες μέρες θὰ περάσουν 1, 10, 20 στρατιῶτες;

β) Λυόμενα γραπτῶς

Προσοχὴ στὴ σύγκρισι τῶν ποσῶν

1. 8 ὀκάδες κάστανα ἔχουν 40 δραχμές· οἱ 5 πόσο ἔχουν;

2. Ἕνας ἐργάτης κερδίζει σ' ἕνα μῆνα 1500 δραχμές· πόσα κερδίζει σὲ μιὰ ἑβδομάδα;

3. Μὲ 400 δραχμὲς ἀγοράζομε 8 πήχεις ὕφασμα· πόσους πήχεις ἀγοράζουμε μὲ 2.400 δραχμές;

4. Μὲ 6 πήχεις ὕφασμα ποὺ ἔχει πλάτος 2 μέτρα κάνομε ἕνα φόρεμα· πόσες πήχεις ὑφάσματος θὰ χρειασθοῦμε γιὰ νὰ κάνωμε τὸ ἴδιο φόρεμα, ἂν τὸ πλάτος του εἶναι 1,3 τοῦ μέτρου;

5. Ἕνα σπίτι ἐκτίσθη σὲ 24 ἡμέρες ἀπὸ 10 ἐργάτες· σὲ πόσες μέρες θὰ μποροῦσε νὰ κτισθῆ ἀπὸ 42 ἐργάτες.

6. 120 μαθηταὶ μαθητικοῦ συσσιτίου χρειάζονται γιὰ τὸ πρωϊνὸ ρόφημα 5 ὀκάδες γάλα σκόνη· 400 μαθηταὶ πόσες ὀκάδες χρειάζονται;

7. Ὑπάρχει τροφὴ γιὰ 2.800 ἀνθρώπους, ποὺ μποροῦν νὰ περάσουν μ' αὐτὴν 216 ἡμέρες. Ἂν προστεθοῦν ἀκόμη 200 ἄνθρωποι, γιὰ πόσες ἡμέρες θὰ ἐπαρκέση ἡ τροφή;

8. Μιὰ ἀντλία βγάζει 56 κυβικὰ μέτρα νεροῦ σὲ 3 ὧρες. Σὲ πό-

σες ὥρες θὰ βγάλη 784 κ. μ.;

9. Ἕνας ἐργάτης τελειώνει μιὰ ἐργασία σὲ 14 ἡμέρες ὅταν ἐργάζεται 8 ὥρες τὴν ἡμέρα· ἂν ἐργάζεται 6 ὥρες τὴν ἡμέρα σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώση τὴν ἐργασία;

10. Πέντε πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 250,5 δραχμές· πόσο ἀξίζουν $7\frac{1}{2}$ πήχεις;

11. Μιὰ βρύσι βγάζει 27 ὀκ. νερὸ σὲ 3 λεπτά. πόσο νερὸ θὰ βγάζη σὲ μιὰ ὥρα;

12. Ἕνας πεζοπόρος ὑπελόγιζε, ὅτι θὰ ἔφθανε σ' ἕνα μέρος μετὰ 13 ἡμέρες, ἂν ἐβάδιζε 10 ὥρες κάθε μέρα. Ἀλλὰ ξεκίνησε 3 ἡμέρες ἀργότερα· πόσες ὥρες πρέπει νὰ βαδίζῃ κάθε μέρα γιὰ νὰ φθάση τήν ὡρισμένη προθεσμία στὸν τόπο ποὺ ἤθελε;

13. Γιὰ 320 ὑποκάμισσα χρειάζονται 1024 πήχεις καὶ 7 ρούπια ὑφάσματος· πόσοι πήχεις χρειάζονται γιὰ 125 ὑποκάμισσα;

14. 70 ἐργάτες σκάβουν 12 στρέμματα τὴν ἑβδομάδα ἀμπέλι· οἱ 30 ἐργάτές πόσα στρέμματα θὰ σκάψουν;

15. 100 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου Κελσίου ἀντιστοιχοῦν σὲ 80 βαθμοὺς τοῦ θερμομέτρου Ρεωμύρου. 80 βαθμοὶ Κελσίου σὲ πόσους Ρεωμύρου ἀντιστοιχοῦν; 50 βαθμοὶ Ρεωμύρου σὲ πόσους Κελσίου ἀντιστοιχοῦν;

16. Ἐργολάβος τελειώνει μιὰ ἐργασία σὲ 25 ἡμέρες μὲ 10 ἐργάτες. Μὲ πόσους ἐργάτες θὰ τὴν τελειώση σὲ 15 ἡμέρες;

17. Ἕνας κτίστης κτίζει 12 μέτρα τοῖχο τὴν ἡμέρα, ὅταν τὸ πάχος τοῦ τοίχου εἶναι ἕνα μέτρο. Πόσα μέτρα τοίχου θὰ κτίση, ἂν τὸ πάχος του εἶναι 1,50 μέτρα;

18. 300 ὀκάδες ἀλεύρου μᾶς δίνουν 350 ὀκάδες ψωμιοῦ. Οἱ 500 ὀκάδες ἀλεύρου πόσες ὀκάδες ψωμιοῦ μᾶς δίδουν;

19. Μιὰ ὑφάντρια ὑφαίνει σὲ 3 ὥρες 7,20 μέτρα ὕφασμα. Σὲ πόσες ὥρες θὰ ὑφάνη 10,40 μέτρα;

20. Μὲ 80 δραχμὲς ἀγοράζομε $\frac{2}{8}$ τοῦ πήχεως ὕφασμα. Μὲ 320 δραχμὲς πόσους πήχεις ἀγοράζομε;

2. ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Α' Λύσις προβλημάτων μὲ ποσὰ ἀνάλογα

1. 30 στρατιῶτες σὲ 3 ἡμέρες χρειάζονται 45 ὀκάδες ψωμί· 20

στρατιῶτες σὲ 2 ἡμέρες, πόσο ψωμὶ χρειάζονται ;

Λύσις

α) Κατάταξις : $\frac{30}{20}$ στρατ. $\frac{3}{2}$ ἡμ. $\frac{45}{X}$ ὀκ.

β) Σκέψις : Οἱ 30 στρ. σὲ 3 ἡμέρες χρειάζονται 35 ὀκ. ψωμί.

῾Ο 1 » » 3 » θὰ χρειαστῆ $\frac{45}{30}$ » »

Οἱ 20 » » 3 » θὰ χρειασθοῦν $20 \times \frac{45}{30}$

Οἱ 20 » » 1 » » » $\frac{20\times45}{30\times 3}$

Καὶ οἱ 20 στρατ. σὲ δύο ἡμέρες θὰ χρειασθοῦν $2 \times \frac{20\times45}{30\times3} =$

$$= \frac{2\times20\times45}{30\times3} = \boxed{45\times\frac{20\times2}{30\times3}} = \frac{1800}{90} = \frac{180}{9} = 20 \text{ ὀκ.}$$

᾿Εχρησιμοποιήθη στὴ λύσι τοῦ προβλήματος, ὅπως βλέπωμε, ἡ ***ἀναγωγὴ στὴ μονάδα***· βρήκαμε στὴν ἀρχή, πόσο ψωμὶ χρειάζονται οἱ 20 στρατιῶτες γιὰ 3 ἡμέρες· ἔπειτα, μὲ βάσι αὐτό, βρήκαμε πόσο χρειάζονται γιὰ δυὸ ἡμέρες.

Κάνοντας τὶς πράξεις φθάσαμε καὶ σ᾿ αὐτήν, ποὺ βλέπομε πιὸ πάνω μέσα σὲ πλαίσιο δηλ. στὴν : $45 \times \frac{20\times2}{30\times3}$, ποὺ μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ ἔτσι : $45 \times \frac{20}{3} \times \frac{2}{3}$.

῎Αν παρατηρήσωμε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ τοὺς συγκρίνωμε μὲ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἔχομε στὴν κατάταξι τοῦ προβλήματος, βλέπομε, ὅτι : ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἄγνωστο Χ ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμὸν ποὺ βρίσκεται ἀπὸ πάνω του (τὸν 45), ἐπὶ τὰ κλάσματα, ποὺ κάνουν οἱ ἀριθμοί, ἀντεστραμμένα.***

γ) Συγκρίνοντες τὰ ποσά :

α) στρατιῶτες καὶ β) ἡμέρες	πρὸς τὶς ὀκάδες τοῦ ψωμιοῦ, ποὺ χρειάζονται νὰ περάσουν βρίσκομε

ὅτι εἶναι ἀνάλογα, διότι :

α) 30 στρ. (3) ἡμ. 45 ὀκ.	β) 30 στρ. 3 ἡμ. 45 ὀκ.
60 » (3) » 90 »	30 » 6 » 90 »
στρατιῶτες - ὀκ.=ἀνάλογα	ἡμέρες - ὀκάδες = ἀνάλογα

Ἀπὸ ὅλη τὴν παραπάνω ἐργασία βλέπομε, ὅτι σ' αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὰ προβλήματα, γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν ***ἄγνωστο X, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα***, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ βρίσκεται ἀπὸ πάνω του, ***ἐπὶ τὰ κλάσματα*** ποὺ κάνουν οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ ***ἀντεστραμμένα.***

Β'. Λύσις προβλημάτων μὲ ποσὰ ἀντίστροφα

1. 5 ἐργάτες, ὅταν ἐργάζωνται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν ἕναν κῆπο σὲ 10 ἡμέρες· 2 ἐργάτες σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὸν ἴδιο κῆπο, ἂν ἐργαζωνται 4 ὧρες τὴν ἡμέρα:

Λύσις

α) Κατάταξις: 5 ἐργ. 8 ὧρες 10 ἡμέρ.
2 4 X

β) Σκέψις:

Οἱ 5 ἐργ. ἐργαζόμενοι 8 ὧρες θὰ σκάβουν τὸν κῆπο σὲ 10 ἡμ.
Ὁ 1 » » 8 » » σκάβη σὲ 5×10 ἡμ.
Οἱ 2 » » 8 » » σκάψουν » $\frac{5\times10}{2}$ »
Οἱ 2 » » 1 « » » » $\frac{8\times5\times10}{2}$ »
καὶ οἱ 2 ἐργ. » 4 » » » » $\boxed{\frac{8\times5\times10}{2\times4}}$ =

$$= 10 \times \frac{4}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{10\times8\times10}{4\times2} = \frac{400}{8} = 50 \text{ ἡμ.}$$

Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα καὶ σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα φθάσαμε στὴν πρᾶξι: $\frac{8\times5\times10}{2\times4}$, ποὺ μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ ἔτσι: $10 \times \frac{5}{2} \times \frac{9}{4}$.

Συγκρίνοντες τὴν πρᾶξι αὐτὴ μὲ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ ὑπάρχουν στὴν κατάταξι, βρίσκομε εὔκολα ὅτι: ***γιὰ νὰ βροῦμε ἐδῶ τὸν ἄγνωστο X ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμό, ποὺ βρίσκεται ἀπὸ πάνω του (τὸν 10) ἐπὶ τὰ κλάσματα, ποὺ κάνουν οἱ ἄλλοι ἀριθμοί, ὅπως εἶναι.***

γ) Συγκρίνοντες τὰ ποσά:

α) ἐργάτες } πρὸς τὶς ἡμέρες, ποὺ ἀπαιτοῦνται γιὰ νὰ ἐκτε-
καὶ β) ὧρες } λέσουν οἱ ἐργάτες ἕνα ἔργο

βρίσκομε, ὅτι εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, διότι:

1.				2.			
5 ἐργ.	(8) ὥρ,	10 ἡμ.		(5) ἐργ.	8 ὥρ.	10 ἡμ.	
10 »	(8) »	5 »		(5) »	16 »	5 »	
ἐργάτες · ἡμέρ. = ἀντίστροφα				ὧρες—ἡμέρ. = ἀντίστροφα			

Καὶ ἐδῶ πάλι βλέπομε, ὅτι: «γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν ἄγνωστο Χ πολλαπλασιάσαμε, ***ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα,*** τὸν ἀριθμό, ποὺ βρίσκεται ἀπὸ πάνω του ***ἐπὶ τὰ κλάσματα,*** ποὺ κάνουν οἱ ἄλλοι ἀριθμοί, ***ὅπως εἶναι***».

Γ΄. Λύσις προβλημάτων μὲ ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα μαζί.

1. Μερικοὶ ἐργάτες, ποὺ ἐργάζονται 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ 6 ἡμέρες ἔκτισαν ἕνα τοῖχο μήκους 18 μέτρων. Σὲ πόσες ἡμέρες οἱ ἴδιοι ἐργάτες θὰ κτίσουν τοῖχο μήκους 32 μ. ἂν ἐργάζωνται 12 ὧρες τὴν ἡμέρα;

Λύσις

α) Κατάταξις: $\dfrac{9}{12}$ ὧρες $\dfrac{6}{X}$ ἡμέρες $\dfrac{18}{32}$ μ.

β) Σκέψις: Οἱ ἐργάτες αὐτοί, ποὺ ἐργάζονται 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, χρειάζονται 6 ἡμέρες γιὰ νὰ κτίσουν τὸν τοῖχο.

Ἂν ἐργάζωνται 1 ὥρα τὴν ἡμέρα, θὰ χρειάζωνται 9 φορὲς περισσότερες ἡμέρες δηλ. 9×6 ἡμ. Ἐργαζόμενοι ὅμως 12 ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ χρειασθοῦν 12 φορὲς ὀλιγώτερες ἡμέρες δηλ. $\dfrac{9 \times 6}{12}$.

Ἀφοῦ τώρα στὶς $\dfrac{9 \times 6}{12}$ ἡμέρες κτίζουν τοῖχο 18 μ., τὸ 1 μ. θὰ τὸ κτίζουν σὲ 12 φορὲς ὀλιγώτερες ἡμέρες ἤτοι $\dfrac{6 \times 9}{12 \times 18}$ ἡμέρες καὶ τὰ 32 μ. θὰ τὰ κτίσουν σὲ 32 φορὲς περισσότερες ἡμέρες ἤτοι:

$$32 \times \frac{6 \times 9}{12 \times 18} = \boxed{6 \times \frac{32}{18} \times \frac{9}{12}} = \frac{6 \times 32 \times 9}{18 \times 12} = \frac{1728}{216} = 8 \text{ ἡμέρες.}$$

γ) Συγκρίνοντες τὰ ποσά :

α) ὥρες	πρὸς τὶς ἡμέρες ποὺ χρειάζονται
καὶ β) μέτρα	οἱ ἐργάτες νὰ κτίσουν τὸν τοῖχο,

εὑρίσκομε, ὅτι τὰ ποσὰ ὥρες καὶ ἡμέρες εἶναι ἀντίστροφα, καὶ τὰ ποσὰ μέτρα καὶ ἡμέρες εἶναι ἀνάλογα διότι :

α) 9 ὥρ. 6 ἡμ. 18 μ.	β) (9) ὥρ. 6 ἡμ. 18 μ.
18 » 6 » 18 μ.	(9) » 12 » 32 μ.
ὥρες — ἡμέρες = ἀντίστροφα	μέτρα — ἡμέρες = ἀνάλογα

Ὥστε σ᾽ αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὰ προβλήματα : ***«Γιὰ νὰ εὕρωμε τὸν ἄγνωστο X ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι πάνω ἀπ᾽ αὐτὸν ἐπὶ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα, ποὺ κάνουν οἱ ἄλλοι ἀριθμοί. Ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένο, ἂν εἶναι ἀντίστροφα ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπως βρίσκεται»***

Δ΄. Ἀνακεφαλαίωσις

Τὰ παραπάνω προβλήματα μοιάζουν μὲ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· ἐδῶ ὅμως ἔχομε ἀντὶ τριῶν ἀριθμῶν, περισσοτέρους.

Αὐτὰ εἶναι προβλήματα ***τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν,***

Γιὰ τὴ λύσι τους παίρνομε κι ἐδῶ τρεῖς τρεῖς τοὺς ἀριθμούς, κάνοντας τὶς ἐργασίες ποὺ κάνομε στὴ λύσι προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ε΄. Προβλήματα

1) 10 ἐργάτες, ἂν ἐργάζωνται 8 ὥρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν ἕνα κῆπο σὲ 6 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες 12 ἐργάτες, ποὺ ἐργάζονται 7 ὥρες τὴν ἡμέρα, θὰ σκάψουν τὸν ἴδιο κῆπο ;

2) 8 βρύσεις, ὅταν τρέχουν 3 ὥρες τὴν ἡμέρα, ρίχνουν σὲ μιὰ δεξαμενὴ 5 τόννους νερό, ἐπὶ 6 ἡμέρες. Πόσο νερὸ θὰ ρίξουν στὴ δεξαμενή, 4 βρύσεις, ὅταν τρέχουν 5 ὥρες τὴν ἡμέρα ἐπὶ 9 ἡμέρες ;

3) 80 μαθητὲς σ᾽ ἕνα μαθητικὸ συσσίτιο χρειάζονται 120 ὀκ. ψωμὶ γιὰ 3 ἡμέρες. 308 μαθητὲς πόσες ὀκάδες ψωμὶ χρειάζονται γιὰ 8 ἡμέρες ;

4) 15 κτίστες κτίζουν σὲ 4 ἡμέρες τοῖχο πάχους 0,50 μέτρα καὶ μήκους 12 μ. Σὲ πόσες ἡμέρες 20 ἐργάτες θὰ κτίσουν τοῖχο πάχους 0,6 μ. καὶ μήκους 30 μ. ;

5) Σὲ μιὰ παιδούπολι μὲ 20 πήχεις ὑφάσφατος πλάτους 1,20 μ. κατεσκεύασαν 12 μαθητικὲς ποδιές. Μὲ 70 πήχεις ὕφασμα, ποὺ ἐδώρησεν ἕνας ἐμπορικὸς οἶκος, πλάτους 2 μ. πόσες ποδιὲς θὰ κάνουν;

6) Μιὰ ὑφάντρα, ἐργαζομένη 8 ὧρες τὴν ἡμέρα σὲ 5 ἡμέρες ὑφαίνει 20 πήχεις ὕφασμα. Ἂν ἐργάζεται 7 ὧρες τὴν ἡμέρα ἐπὶ 9 ἡμέρες, πόσες πήχεις ὕφασμα θὰ ὑφάνῃ;

7) Ἕνας γεωργὸς χρειάζεται 50 ὀκ. σπόρο γιὰ ἕνα του χωράφι, ποὺ ἔχει πλάτος 30 μ. καὶ μῆκος 25 μ. Πόσες ὀκάδες σπόρο θὰ χρειαστῆ γιὰ ἄλλο του χωράφι ποὺ ἔχει 12 μ. πλάτος καὶ μῆκος 18 μ.;

8) Ἕνας νερόμυλος ποὺ ἐργάζεται 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ 3 ἡμέρες ἀλέθει 250 ὀκ. σιτάρι. Ἂν ἐργάζεται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ἐπὶ 5 ἡμέρες συνέχεια πόσο σιτάρι θὰ ἀλέσῃ;

9) Μιὰ ψαρόβαρκα παίρνει 1.200 δραχμὲς γιὰ νὰ μεταφέρῃ 300 ὀκ. ψάρια σὲ ἀπόσταση 6 μιλίων. Πόσο θὰ πάρῃ ἂν μεταφέρῃ 450 ὀκ. ψάρια σὲ ἀπόσταση 4 μιλίων;

10) Ἕνα τρακτὲρ σὲ 5 ἡμέρες μὲ ταχύτητα 10 χιλ. τὴν ὥρα, ὀργώνει 3 στρέμματα χωραφιοῦ. 28 στρέμματα χωραφιοῦ, μὲ ταχύτητα 30 χιλ. τὴν ὥρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὸ ὀργώσῃ;

11) 13 τρυγητὲς ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, τρυγοῦν ἀμπέλι 9 στρεμμάτων σὲ 4 ἡμέρες. 40 τριγυτὲς ἐργαζόμενοι 7 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τρυγήσουν ἀμπέλι 27 στρεμμάτων;

12) Γιὰ 6 κουρτίνες τοῦ σχολείου μας χρειάσθηκαν 18 πήχεις ὕφασμα πλάτους 1 πήχ. 2 ρουπίων. Πόσοι πήχεις θὰ χρειασθοῦν νὰ γίνουν 15 κουρτίνες, ἂν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 2 πήχεων 3 ρουπίων;

3. ΠΟΣΟΣΤΑ

Α΄. Κέρδος - Ζημία - Μεσιτεία - Προμήθεια - Ἔκπτωσις

Παραδείγματα

1. Ἔμπορος ἀγόρασε ἀπὸ ἕνα ἐργοστάσιο χονδρικῶς ὑφάσματα ἀξίας 50.000 δρχ.· ὑπολογίζει νὰ κερδίσῃ 8 δρχ. στὶς ἑκατό, ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς· πόσα χρήματα θὰ κερδίσῃ;

Λύσις

Κατάταξις: Στὶς 100 δρχ. κέρδος 8 δρχ.
» 50.000 » X »

$$X = 8 \times \frac{50.000}{100} = \frac{400.000}{100} = 4.000 \text{ δρχ.}$$

2. Ψαρέμπορος εἶχε ἐμπόρευμα ἀξίας 3.000 δραχμῶν. Τὸ ἐπώλησε μὲ ζημία 3 στὶς ἑκατὸ δρχ. Πόσο ἐζημιώθη;

Λύσις

Κατάταξις: Στὶς 100 δρχ. ζημία 3 δρχ.
3.000 X »

$$X = 3 \times \frac{3.000}{100} = \frac{9.000}{100} = 90 \text{ δρχ.}$$

3. Μεσίτης ἐπώλησε ἕνα σπίτι ἀξίας 35.000 δραχμῶν μὲ ἀμοιβὴ (μεσιτεία) 2 δραχμὲς στὶς ἑκατό. Πόσα θὰ πάρη ὡς μεσιτεία;

Λύσις

Κατάταξις: Στὶς 100 δρχ. μεσιτεία 2 δρχ.
35.000 X »

$$X = 2 \times \frac{35.000}{100} = \frac{70.000}{100} = 700 \text{ δρχ.}$$

4. Προμηθευτὴς προμήθευε ἕνα ζαχαροπλάστη μὲ ὑλικὰ ζαχαροπλαστικῆς, ἀξίας 10.000 δραχμῶν, καὶ ἔπαιρνε προμήθεια 3 δραχ. στὶς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν προϊόντων. Πόσα λεπτὰ θὰ πάρη συνολικὰ ὡς προμηθευτικὰ δικαιώματα ἀπὸ τὸν ζαχαροπλάστη;

Λύσις

Κατάταξις: Στὶς 100 δρχ. προμήθεια 3 δρχ.
10.000 X »

$$X = 3 \times \frac{10.000}{100} = \frac{30.000}{100} = 300 \text{ δραχμὲς}$$

5. Γιὰ τὸν πλουτισμὸ μιᾶς σχολικῆς βιβλιοθήκης ἀγοράστηκαν βιβλία ἀξίας 3.500 δρχ. μὲ ἔκπτωσι (σκόντο) πέντε δραχμὲς στὶς ἑκατό. Πόσα λεπτὰ θὰ πληρωθοῦν καθαρὰ στὸν βιβλιοπώλη;

Λύσις

Κατάταξις: Στὶς 100 δρχ. ἔκπτωσις 5 δρχ.
» 3 200 X »

$$X = 5 \times \frac{3.500}{100} = \frac{17.500}{100} = 175 \text{ δρχ.}$$

$$3.500 - 175 = 3.325$$

Β΄ Παρατηρήσεις

— Καὶ τὰ 5 παραπάνω προβλήματα μοιάζουν μὲ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

— Γιὰ τὴ λύσι τους ἀκολουθοῦμε ἀκριβῶς τὸν ἴδιο τρόπο, ποὺ ἀκολουθούσαμε καὶ σ' αὐτή.

— Τὸ ἰδιαίτερο χαρακτηριστικό, ποὺ ἔχουν τὰ παραπάνω προβλήματα, εἶναι ὅτι μᾶς δίνεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ἔκπτωσις **στὰ ἑκατὸ** (τοῖς ἑκατὸν) ποὺ γράφεται: 2 %, 9 %, 20 %, 90 % ἢ τὸ κέρδος ἢ ἡ ἔκπτωσις **στὰ 1000** (τοῖς χιλίοις) ποὺ γράφεται 3 ‰, 5 ‰.

— Τὸ ποσόν, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ἔκπτωσις λέγεται **ἀρχικὸ ποσὸν** π. χ. 5% (ἀρχικὸ ποσὸν 100) 3‰ (ἀρχικὸ ποσὸν 1000).

— Τὸ κέρδος ἢ ἡ ἔκπτωσις ποὺ ἀναλογεῖ στὸ ἀρχικὸ ποσὸν λέγεται **ποσοστόν**.

— Τὸ κέρδος τοῦ μεσίτη λέγεται **μεσιτεία.**

— Τὸ κέρδος τῶν προμηθευτῶν λέγεται **προμήθεια.**

— Τὸ ποσοστόν, ποὺ παίρνει τὸ κράτος ἀπὸ ἀξία διαφόρων ἐμπορευμάτων ἢ ἀπὸ τὸ εἰσόδημά μας λέγεται **φόρος.**

— Τὸ ποσοστόν, ποὺ μᾶς χαρίζει (ἀφαιρεῖ) ὁ ἔμπορος ἀπὸ τὴν τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματός του, λέγεται **ἔκπτωσις.**

Γ΄. Ἀσκήσεις

1. Ἕνα αὐγὸ ἠγοράσθη 0,8 δραχμὲς καὶ ἐπωλήθη 1,2 δραχμές. Πόσο κέρδος ἔφερε;

2. Ὀπωροπώλης ἀγόρασε κάστανα πρὸς 8 δραχμὲς τὴν ὀκὰ καὶ θέλει νὰ κερδίση 1,5 δραχ. Πόσα θὰ τὰ πωλῆ τὴν ὀκά;

3. Ἰχθυοπώλης πωλεῖ τὴν ὀκὰ τὰ ψάρια 23 δραχμὲς καὶ ζημιώνεται 5 δραχμές. Πόσο εἶχε ἀγοράσει τὴν ὀκά;

Δ΄. Προβλήματα

α) Γνωστὸ τὸ ποσοστόν, ἄγνωστο τὸ κέρδος ἢ ζημία.

1. Τὸ κράτος εἰσπράττει φόρο ἀπὸ τὰ θέατρα καὶ τοὺς κινηματογράφους 30 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ εἰσιτηρίου. Πόσα χρήματα θὰ εἰσπράξη ἀπὸ ἕνα θέατρο, ποὺ εἰσέπραξε ἀπὸ μιὰ παράστασι 2.500 δραχμές;

Λύσις

Κατάταξις. Στὶς 100 δραχ. εἰσπράττει 30 δραχ.
» 2.500 » » X »

$$X = 30 \times \frac{2.500}{100} = \frac{75.000}{100} = 750 \text{ δραχ.}$$

β) Γνωστὸ τὸ κέρδος, ἄγνωστο τὸ ποσοστόν.

2. Ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 8.000 δραχ. Τὰ μετεπώλησε καὶ ἐκέρδισε 400 δραχ. Πόσο ἐκέρδισε τοῖς ἑκατό;

Λύσις

Κατάταξις: Στὶς 8.000 δραχ. ἐκέρδισε 400 δραχ.
» 100 » » X »

$$X = 400 \times \frac{100}{8.000} = \frac{40.000}{8.000} = 5\,\%$$

γ) Γνωστὸ τὸ ποσοστὸν καὶ ἡ τιμὴ ἀγορᾶς, ἄγνωστη ἡ τιμὴ πωλήσεως.

3. Ὀπωροπώλης ἀγοράζει πορτοκάλια πρὸς 0,5 δραχ. τὸ ἕνα. Τὸ νόμιμο κέρδος εἶναι 10 %. Πόσο θὰ πωλήσῃ τὸ κάθε πορτοκάλι;

Λύσις

Κατάταξις: Στὶς 100 δραχ. κερδίζει 10 δραχ.
(1ος τρόπος) » 0,5 » » X »

$$X = 10 \times \frac{0,5}{100} = \frac{5}{100} = 0,05 \text{ δρχ.}$$

Στὶς 0,5 θὰ κερδίζῃ 0,05 δραχ. δηλαδὴ θὰ πωλῇ τὸ κάθε πορτοκάλι 0,5+0,05=0,55 δραχ.

Κατάταξις: Τιμὴ ἀγορᾶς 100 τιμὴ πωλήσεως 110
(2ος τρόπος) » » 0,5 » » X

$$X = 110 \times \frac{0,5}{100} = \frac{55}{100} = 0,55 \text{ δραχ.}$$

Ε΄. Διάφορα προβλήματα ποσοστῶν

α) Ἀπὸ μνήμης

1. Ποιά εἶναι τὰ ποσοστὰ πρὸς 1 % τῶν 100 δραχ. τῶν 400;

τῶν 600 ; τῶν 900 ; τῶν 1.000 δραχμῶν ;

2. Ποιά εἶναι τὰ ποσοστὰ πρὸς 2 % τῶν 50 δραχ. τῶν 200 ; 500 ; 700 ; 900 δραχμῶν ;

3. Ποιά εἶναι τὰ ποσοστὰ πρὸς 4 % τῶν 800 δραχ. τῶν 2.000 ; τῶν 5.000 ; τῶν 50 δραχμῶν ;

4. Ποιά εἶναι τὰ ποσοστὰ πρὸς 9 % τῶν 50 δραχ. τῶν 150 ; τῶν 300 ; τῶν 600 ; τῶν 800 δραχμῶν ;

β) Γραπτῶς

1. Τὸ ἡμερομίσθιο ἑνὸς ἐργάτου ἦταν 35 δραχ. καὶ ηὐξήθη κατὰ 10 %. Πόσα παίρνει τώρα τὴν ἡμέρα ;

2. Τὸ ἀντίτιμο τοῦ εἰσιτηρίου στὸ σιδηρόδρομο Ἀθηνῶν—Πατρῶν ἦταν 200 δραχ. ηὐξήθη δὲ κατὰ 5 %. Πόσο ἔγινε τώρα ;

3. Εἰσπράκτωρ μιᾶς ἑταιρίας εἶχε ποσοστὸ 4,5 % ἐπὶ τῶν εἰσπράξεων. Πόσο θὰ πάρῃ, ἂν εἰσέπραξε 5.500 δραχμές ;

4. Τα ἔσοδα ἑνὸς θεάτρου φθάνουν τὸν μῆνα σὲ 75.000 δραχ. ὁ φόρος Δημοσίων θεαμάτων ποὺ παίρνει τὸ κράτος εἶναι 30 %. Πόσο φόρο θὰ εἰσπράξῃ τὸν μῆνα τὸ κράτος ;

5. Τὰ μεσιτικὰ εἶναι 2,5 %. Πόσα θὰ πάρῃ ἕνας μεσίτης ἀπὸ ἕνα κτῆμα ἀξίας 4.750 δραχ. ποὺ μεσίτευσε νὰ πωληθῇ ;

6. Ἕνας πλασιὲ (διαφημιστής, προμηθευτὴς) ἐπώλησε σὲ μιὰ ἡμέρα ὑφάσματα ἀξίας δραχμῶν 12.580 καὶ ἐκέρδισε προμήθεια 700 δραχ. Πόση ἦταν ἡ προμήθειά του στὶς 100 δραχμές ;

7. Μία ἀσφαλιστικὴ ἑταιρία παίρνει ἀσφάλιστρο 0,4 % ἐπὶ τῆς ἀξίας ἑνὸς σπιτιοῦ. Ποιά εἶναι ἡ ἀξία τοῦ σπιτιοῦ ἑνὸς ἰδιοκτήτη ποὺ πληρώνει ἀσφάλιστρα 50 δραχμές ;

8. Ἀπὸ τὸ μισθὸ ἑνὸς ὑπαλλήλου γίνεται κράτησις 8 % καὶ παίρνει καθαρὸ μισθὸ 960 δραχμές. Ποιός εἶναι ὁ ὁλικὸς μισθός του ;

9. Τὸ θαλασσινὸ νερὸ ἔχει μέσα του τὰ 3,5 % ἁλάτι. 250 ὀκάδες ἁλάτι ἀπὸ πόσο νερὸ μιᾶς ἁλυκῆς θὰ βγοῦν ;

10. Οἱ πατάτες ἔχουν μέσα τους 20 % νερό. Πόσο νερὸ ἔχουν 428 ὀκ. πατάτες ;

11. Ἐμπόρευμα ποὺ ἐστοίχιζε 12.000 δραχ. ἐπωλήθη 10.000 δραχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη ὁ ἔμπορος ;

12. Ἀπὸ τὸ ζαχαροκάλαμο βγαίνει 20 % ζάχαρι. Πόσες ὀκάδες ζάχαρι θὰ βγάλουν 6,800.000 ὀκ. ζαχαροκάλαμα ;

13. Ἔμπορος ἐπώλησε ὕφασμα ἀξίας 15.750 $\frac{1}{2}$ δραχ. μὲ ποσοστὸ κέρδους 10,5 °/₀. Πόσα κέρδισε ὅλα - ὅλα ;

14. Ὀπωροπώλης ἀγόρασε Κρητικὰ κάστανα ἀξίας 2.500,5 δρχ. καὶ ἐκέρδισε 200 $\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε ;

15. Αὐγοπώλης ἀγοράζει τὰ αὐγὰ πρὸς 1,2 δραχ. τὸ ἕνα. Ἔχει δικαίωμα νὰ κερδίσῃ 10 °/₀. Πόσο θὰ πωλήσῃ τὸ ἕνα ;

16. Μυλωνὰς παίρνει ἀλεστικὰ δικαιώματα 3 °/₀ ἐπὶ τῶν ὀκάδων ποὺ ἀλέθει. Πόσα θὰ πάρῃ ἂν ἀλέσῃ 2.300 ὀκάδες ;

17. Γεωργὸς ἔσπειρε 480 ὀκ. σπόρο σιταριοῦ στὸ χωράφι του· φύτρωσαν τὰ 80 °/₀ τοῦ σπόρου. Πόσες ὀκάδες σπόρος ἔμεινε ἀφύτρωτος.

18. Σ' ἕνα λιοτρίβι ἀλέστηκαν 8.000.000 ὀκ. ἐληές. Ἔβγαλαν λάδι 30 °/₀. Πόσες ὀκάδες λάδι βγῆκε ἀπὸ αὐτὲς τὶς ἐληές ;

19. Ἡ ψίχα τοῦ καρυδιοῦ ἀντιστοιχεῖ στὰ 30 °/₀ τῶν ὀκάδων καρυδιῶν μὲ τὰ τσόφλια. Πόση ψίχα θὰ βγάλουν 9.500.000 ὀκάδες καρυδιῶν ;

20. Ὑδρόμυλος ἄλεσε 939 ὀκ. σιτάρι καὶ ἔβγαλε 927 ὀκ. ἀλεύρι. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔπαθε φύρα τὸ σιτάρι ;

21. Ὑπάλληλος ἔπαιρνε 1550 δραχ. τὸ μῆνα. Τοῦ ἔγινε αὔξησις 40 °/₀. Πόσο θὰ παίρνῃ τώρα ;

22. Ὑπάληλος ἐπλήρωνε ἐνοίκιο προπολεμικὸ 628 δραχμὲς τὸ μῆνα μὲ τὸ ἐνοικιοστάσιον· τὸ ἐνοίκιο αὐξήθηκε 20 °/₀. Πόσο θὰ πληρώνῃ τώρα τὸ μῆνα ;

4. ΤΟΚΟΣ

Τί εἶναι τόκος;

Γραμμάτιον δραχμῶν 3.000

Μετὰ 5 ἔτη ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὀφείλω νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Γεώργιον Χρυσικόπουλον τρεῖς χιλιάδας δραχμὰς (3.000), τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ σήμερον εἰς μετρητὰ (ἢ εἰς ἐμπορεύματα) μὲ τόκον 7 °/₀.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 30 Φεβρουαρίου 1959

(ὑπογραφὴ) Νικόλαος Σαββόπουλος

Μὲ τὸ παραπάνω ἔγγραφο, ποὺ ἔχει ὑπογράψει ὁ Νικόλαος Σαββόπουλος, ὀφείλει νὰ πληρώση ὕστερα ἀπὸ 5 χρόνια δηλαδὴ στὶς 30 · 1 · 1964, στὸ Γεώργιο Χρυσικόπουλο 3.000 δραχμές, ποὺ δανείστηκε ἀπ' αὐτὸν σὲ μετρητὰ ἢ σὲ ἐμπορεύματα. Γιὰ ἐνοίκιο τῶν χρημάτων συμφώνησαν νὰ πληρώση στὸν Χρυσικόπουλο ποσοστὸ τόκου 7 %.

Αὐτὸ ποὺ ἔκαμαν ὁ Σαββόπουλος μὲ τὸν Χρυσικόπουλο, οἱ ἄνθρωποι, καὶ μάλιστα οἱ ἔμποροι, τὸ κάνουν πολλὲς φορές: δανείζουν καὶ δανείζονται. Οἱ ἔμποροι δανείζονται ἀπὸ τὶς Τράπεζες γιὰ ἀγοράσουν ἐμπορεύματα· ὅταν τὰ πωλήσουν, ἐπιστρέφουν τὰ χρήματα, ποὺ δανείστηκαν.

Οἱ γεωργοὶ δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα γιὰ νὰ ἀγοράσουν σπόρους, ἐργαλεῖα, λιπάσματα· μετὰ τὴν ἐσοδεία, πωλοῦν τὰ προϊόντα τους καὶ ἐξοφλοῦν τὰ χρέη τους.

Οἱ βιομήχανοι δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὸ Κράτος νὰ μεγαλώσουν τὰ ἐργοστάσιά τους γιὰ νὰ βγάζουν περισσότερα βιομηχανικὰ προϊόντα (ὑφάσματα, λιπάσματα, δέρματα, σιδερικὰ γιὰ τὴν ἀνοικοδόμησι κ.τ.λ.).

Διάφοροι οἰκοδομικοὶ συνεταιρισμοί, παίρνουν ἀπὸ τὸ Ταμεῖο Δανείων, δάνεια γιὰ νὰ κτίσουν σπίτια γιὰ τοὺς συνεταίρους τους.

Οἱ ἔμποροι, οἱ γεωργοί, οἱ βιομήχανοι, οἱ συνεταιρισμοὶ καὶ ὅσοι ἄλλοι δανείζονται χρήματα, κάνουν τὶς ἐργασίες τους καὶ ἔχουν κάποιο κέρδος. Ἀφοῦ αὐτοί, ποὺ δανείζονται ξένα χρήματα, ἔχουν κέρδος, οἱ δανειστές, ἐκεῖνοι δηλ. ποὺ δανείζουν δικά τους χρήματα, δὲν εἶναι δίκαιο νὰ ἔχουν κάποιο κέρδος; Καὶ βέβαια ἔχουν. ***Αὐτὸ τὸ δίκαιο κέρδος, ποὺ παίρνουν, ὅσοι δανείζουν δικά τους χρήματα σὲ ἄλλους***, λέγεται ***τόκος***.

Ἔτσι λοιπὸν καὶ ὁ Σαββόπουλος, ποὺ δανείστηκε 3.000 δρχ. ἀπὸ τὸν Χρυσικόπουλο, ὑπεσχέθη μὲ τὸ ἔγγραφο ποὺ ὑπέγραψε, νὰ τοῦ πληρώση ποσοστὸ τόκου 7 %.

Τὸ ἔγγραφο αὐτὸ (ποὺ γράφει τὴ συμφωνία δανειστοῦ καὶ ὀφειλέτου δηλ. πόσα χρήματα δανείστηκαν, γιὰ πόσο χρόνο καὶ μὲ ποιὸ χρόνο καὶ μὲ ποιὸ ποσοστὸ τόκου) λέγεται ***γραμμάτιο*** καὶ γίνεται περίπου, ὅπως αὐτὸ ποὺ βλέπομε πιὸ πάνω.

Σὲ κάθε γραμμάτιο ἔχομε:

α) Δυὸ πρόσωπα.

— Τὸν δανειστὴ (αὐτὸν ποὺ δανείζει δικά του χρήματα).

— Τὸν ὀφειλέτη (αὐτόν, ποὺ δανείζεται ξένα χρήματα).

β) Τρία ποσά :

1. ***Τὸ κεφάλαιο.*** Κεφάλαιο λέγεται τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, ποὺ δανείζονται.

2. ***Ὁ χρόνος.*** Δηλαδὴ ὕστερα ἀπὸ πόσον καιρὸ θὰ ἐπιστραφοῦν στὸ δανειστὴ τὰ χρήματά του.

Στό παραπάνω γραμμάτιο ὁ χρόνος εἶναι 5 ἔτη (χρόνια)· μπορεῖ ὅμως νὰ εἶναι λιγώτερος ἢ περισσότερος, μπορεῖ νὰ εἶναι μῆνες ἢ ἡμέρες ἢ καὶ συμμιγής.

3. ***Τὸ ἐπιτόκιο. Ἐπιτόκιο εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σὲ ἕνα ἔτος*** (χρόνο).

Στὸ γραμμάτιο, ποὺ εἴδαμε, ὁ Σαββόπουλος ὑπεσχέθη ὅτι θὰ πληρώση τόκο στὸν Χρυσικόπουλο 7 %, δηλ. ἂν δανειζόταν 100 δραχμές, σὲ ἕνα χρόνο θὰ τοῦ ἐπέστρεφε 107 δραχμές. Δὲν ἐδανείσθη ὅμως 100, ἀλλὰ 3.000 δραχ.· πόσο τόκο θὰ πληρώση;

Στὸ πρόβλημα αὐτό, ποὺ ***εἶναι πρόβλημα τόκου,*** μᾶς παρουσιάζονται 4 ποσά. Τὸ κεφάλαιο (3.000), ὁ χρόνος (5 ἔτη), τὸ ἐπιτόκιο (7%) καὶ ὁ τόκος (ποὺ ζητεῖται)· μὲ τὸ ἐπιτόκιο μπαίνουν ἀκόμη στὸ πρόβλημα δύο ποσά : Οἱ 100 δραχμὲς καὶ ὁ 1 χρόνος.

Τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν, χωρὶς καμμιά, σχεδόν, δυσκολία.

Α΄. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ο ΤΟΚΟΣ

α) Ὁ χρόνος σὲ ἔτη

(ἀκέραια χρόνια)

1. Πόσο τόκο θὰ πληρώση ὁ Νικ. Σαββόπουλος στὸ Γεώργιο Χρυσικόπουλο γιὰ τὶς 3.000 δραχμὲς, ποὺ δανείστηκε γιὰ 5 ἔτη μὲ τόκο 7 %;

Λύσις

α) Κατάταξις :	οἱ 100 δραχ.	σὲ 1 ἔτος	δίδουν	τόκο	7 δραχ.
	» 3.000	5	»	»	Χ ;

β) Σύγκρισις τῶν ποσῶν :

100 δρ. 1 ἔτος 7 δρ. 200 » 1 ἔτος 14 δρ.	100 δραχ. 1 ἔτος 7 δραχ. 100 » 2 ἔτη 14 »
κεφάλαιο - ἐπιτόκιο=ἀνάλογα	χρόνος - ἐπιτόκιο = ἀνάλογα

γ) Ἑπομένως Χ (Τόκος) $= 7 \times \frac{3.000}{100} \times \frac{5}{1} = \frac{7 \times 3.000 \times 5}{100 \times 1} =$

Ε.	Κ.	Χ.
$7 \times 3000 \times 5$		
100		

$= \frac{105.000}{100} = 1.050$ δραχμές.

Ὁ Σαββόπουλος θὰ πληρώση στὸ Χρυσικόπουλο ὕστερα ἀπὸ 5 χρόνια 3.000+1.050 δραχ.=4.050 δραχμές.

β) Ὁ χρόνος σὲ μῆνες

2. Πόσο τόκο δίδουν 5.000 δραχ., ποὺ τοκίζονται γιὰ 8 μῆνες, μὲ τόκο 6 %;

Λύσις

α) Κατάταξις: $\frac{100 \text{ δρχ.}}{5.000}$ $\frac{12 \text{ μῆνες}}{8}$ $\frac{6 \text{ δρχ.}}{X;}$

β) Σύγκρισις τῶν ποσῶν: Ἀπὸ τὴ σύγκρισι τῶν ποσῶν στὸ προηγούμενο πρόβλημα εἴδαμε, ὅτι τὰ ποσά: κεφάλαιο—ἐπιτόκιο καὶ χρόνος—ἐπιτόκιο εἶναι ἀνάλογα.

γ) Ἑπομένως Χ (τόκος)$=6 \times \frac{5.000}{100} \times \frac{8}{12} =$

Ε.	Κ.	Χ.
$6 \times 5.000 \times 8$		
1200		

$\frac{6 \times 5.000 \times 8}{1.200} = \frac{240.000}{1.200} = \frac{2.400}{12} = 200$ δραχ.

Οἱ 5.000 δραχμὲς τοκιζόμενες πρὸς 6 % γιὰ 8 μῆνες βρήκαμε, ὅτι θὰ φέρουν τόκο 200 δραχ.

γ) Ὁ χρόνος σὲ ἡμέρες

3. Πόσο τόκο φέρουν 800 δραχμὲς σὲ 3 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες πρὸς 9 %;

Λύσις

α) Κατάταξις:	οἱ 100 δραχ.	σὲ 360 ἡμ. *	φέρουν	9	δραχ. τόκο.
	» 800	» 105 »	»	X	»

β) Σύγκρισις ποσῶν: Ἀπὸ τὴ σύγκρισι τῶν ποσῶν στὸ πρῶτο πρόβλημα εἴδαμε, ὅτι τὰ ποσά: κεφάλαιο — τόκος καὶ χρόνος — τόκος εἶναι ἀνάλογα. Ἑπομένως:

$$\gamma)\ \ X\ (\text{τόκος}) = 9 \times \frac{800}{100} \times \frac{105}{360} = \boxed{\begin{array}{c} \text{E.} \quad \text{K.} \quad \text{X.} \\ \dfrac{9 \times 800 \times 105}{36\,000} \end{array}} = 21\ \text{δρχ.}$$

Οἱ 800 δραχ. σὲ 3 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες πρὸς 9 % θὰ φέρουν τόκο 21 δραχ.

Παρατηρήσεις

Ὕστερα ἀπὸ τὴν παραπάνω ἐργασία, βγάζομε γιὰ συμπέρασμα τὶς ἑξῆς παρατηρήσεις:

1. Καὶ τὰ 3 προβλήματα τόκου εἶναι ἁπλᾶ προβλήματα συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.
2. Καὶ στὰ 3 προβλήματα ζητούσαμε νὰ βροῦμε τὸν τόκο.
3. Διαφορὰ παρουσίαζαν στὸ ποσόν ***Χρόνος***.

Στὸ πρῶτο πρόβλημα ὁ χρόνος ἦταν ἀκέραια ἔτη.
» δεύτερο » » » μῆνες.
» τρίτο » » » ἡμέρες.

4. Ἂν παρατηρήσωμε καλὰ τὶς πράξεις ποὺ βρίσκονται μέσα σὲ τετραγωνίδια καὶ στὰ τρία προβλήματα, βλέπομε ὅτι, ζητῶντας τὸν τόκο, ἐπολλαπλασιάσαμε τὰ 3 ἄλλα ποσὰ (κεφάλαιο, ἐπιτόκιο καὶ χρόνο), καὶ τὸ γινόμενό τους τὸ διαιρέσαμε:

α) διὰ 100 (ὅταν εἴχαμε ἀκέραια ἔτη).
β) » 1.200 (» » μῆνες).
καὶ γ) » 36.000 (» » ἡμέρες).

5. Ἂν παραστήσωμεν μὲ Κ τὸ κεφάλαιο, μὲ Χ τὸν χρόνο, μὲ Ε τὸ ἐπιτόκιο, καὶ μὲ Τ τὸν τόκο, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω θὰ ἔχωμε:

---

* Τὸ ἔτος (χρόνος) στοὺς λογαριασμοὺς τόκου ὑπολογίζεται ὅτι ἔχει 360 ἡμέρες. Ὅλοι οἱ μῆνες ὑπολογίζονται ὅτι ἔχουν 30 ἡμέρες.

Τύπος Τόκου

$$T = \frac{K \times E \times X}{100} \text{ (ὅταν ἔχωμε ἀκέραια ἔτη).}$$

$$T = \frac{K \times E \times X}{1.200} \text{ (ὅταν ἔχωμε μῆνες).}$$

$$T = \frac{K \times E \times X}{36.000} \text{ (ὅταν ἔχωμε ἡμέρες).}$$

Προβλήματα διάφορα, ποὺ νὰ ζητῆται ὁ τόκος

α) Λυόμενα ἀπὸ μνήμης

1. Πόσο τόκο φέρουν 200 δρχ. σὲ ἕνα ἔτος πρὸς 3 %;

2. Πόσο τόκο φέρουν 200 δρχ. σὲ 3 ἔτη πρὸς 3 %;

3. Πόσο τόκο φέρουν σὲ ἕνα ἔτος 300 δρχ. πρὸς 4 %; 2.000 δρχ. πρὸς 7 %; 800 δρχ. πρὸς 8 %; 1.000 δρχ. πρὸς 5 %;

4. Πόσο τόκο φέρουν 100 δραχμὲς σὲ 6 ἔτη πρὸς 5 %; Εἰς 5 ἔτη πρὸς 3 %; Εἰς 4 ἔτη πρὸς 10 %;

5. Οἱ 100 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος φέρουν τόκο 8 δρχ.· πόσες θὰ φέρουν σὲ 6, 8, 9, 10, 3, 2 μῆνες;

6. Πόσο τόκο φέρουν 100 δραχμὲς πρὸς 10 % σὲ 6, 3, 9 μῆνες;

7. Οἱ 100 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος φέρουν τόκο 8 δραχμές. Πόσο τόκο θὰ φέρουν σὲ 180 ἡμέρες; Πόσο σὲ 90, σὲ 45 ἡμέρες;

8. Πόσο τόκο φέρουν 400 δραχμὲς πρὸς 16 % σὲ 30 ἡμέρες; Πόσο σὲ 15 ἡμέρες;

β) Λυόμενα γραπτῶς.

Λύστε τὰ παρακάτω προβλήματα πρῶτα μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν καὶ ἔπειτα μὲ τὸν τύπο τοῦ τόκου.

Δοκιμάστε καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

1. Ἀγρότης ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 1.200 δραχμὲς γιὰ 3 ἔτη πρὸς 6%. Πόσα χρήματα θὰ ἐπιστρέψη στὴν Τράπεζα;

2. Ὅταν ἐγεννήθη ἕνα κοριτσάκι τοῦ κατέθεσε ὁ πατέρας του στὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριο 1.000 δραχμές. Τὸ Ταμιευτήριο δίνει τόκο 8 %. Πόσα χρήματα (τόκο καὶ κεφάλαιο) θὰ πάρη τὸ κοριτσάκι, ὅταν γίνη 20 χρονῶν;

3. Πόσο τόκο φέρουν 3.750 δρχ. σὲ 3 ἔτη πρὸς 6 %;

4. Ἔμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος 6.200 δραχμὲς πρὸς 8 %. Πόσο τόκο θὰ πληρώση ὕστερα ἀπὸ 9 μῆνες;

5. Ἀγρότης πῆρε μακροπρόθεσμο δάνειο ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τρά-

πεζα κεφαλαίου 13.500 δραχμῶν πρὸς 9 %. Πόσο τόκο θὰ πληρώση ὕστερα ἀπὸ 15 χρόνια καὶ 8 μῆνες;

6. Ἔμπορος ἐδανείσθη τὴν 12ην Ἰανουαρίου 1958, 8.500 δρχ. πρὸσ 6,5 % καὶ τὰς ἐπέστρεψε στίς 15 Αὐγούστου 1958. Πόσο τόκο ἐπλήρωσε;

7. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 20.780 δραχμῶν πρὸς 7,5 % σὲ 9 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες;

8. Ἔμπορος ἐδανείσθη 18.700 δραχμὲς μὲ ἐπιτόκιον 7 % γιὰ 9 μῆνες. Πόσα χρήματα θὰ ἐπιστρέψη γιὰ τόκο καὶ κεφάλαιο μαζί;

9. Σταφιδοπαραγωγὸς πῆρε ἀπὸ τὴν πώλησι τῆς σταφίδος του 34.000 δραχμὲς καὶ τὶς κατέθεσε στὴν Τράπεζα πρὸς 5,5 %. Πόσο τόκο θὰ παίρνη τὸ μῆνα;

10. Πόσο τόκο θὰ φέρη ὕστερα ἀπὸ 8 ἔτη καὶ 12 ἡμέρες κεφάλαιο 8.900 δραχμῶν πρὸς 6,5 %.

11. Πόσο τόκο φέρουν 800 δραχμὲς σὲ 2 ἔτη 3 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες, ἂν τοκισθοῦν πρὸς 7 %.

12. Πόσο τόκο φέρουν 1.500 δραχμὲς σὲ 3 ἔτη καὶ 20 ἡμέρες, ἂν τοκισθοῦν πρὸς 4,75 %;

13. Πόσο τόκο φέρουν 975 δραχμὲς σὲ 8 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες, τοκιζόμενες πρὸς 3,5 %.

14. Γεωργὸς ἐδανείσθη ἀπὸ τὸ Ὑποκατάστημα τῆς Ἀγροτικῆς Τραπέζης τῆς περιφερείας του 2.500 δραχμὲς πρὸς 6,3 % γιὰ 2 ἔτη καὶ 25 ἡμέρες· ἡ Τράπεζα τοῦ κράτησε προκαταβολικὰ τὸν τόκο τὴ στιγμὴ ποὺ τοῦ ἔδωσε τὸ δάνειο· πόσα χρήματα πῆρε καθαρά;

15. Σὲ μιὰ τράπεζα καταθέσαμε 4.500 δραχμὲς μὲ τόκο 6 % καὶ τὶς ἀποσύραμε ὕστερα ἀπὸ 27 ἡμέρες. Πόσα χρήματα θὰ πάρωμε ὅλα-ὅλα.

16. Οἰκοδομικὸς συνεταιρισμὸς πῆρε ἀπὸ τὸ Ταμεῖο Δανείων δάνειο 65.000.000 δραχ. γιὰ 6 ἔτη πρὸς 5 %. Πόσο τόκο θὰ πληρώση;

Β΄. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

α) Ὁ χρόνος σὲ ἔτη

1. Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 3 ἔτη πρὸς 8 % ἔφερε τόκο 1440 δραχ.;

Λύσις

α) Κατάταξις: $\left\{ \dfrac{100 \text{ κεφ.}}{X} \qquad \dfrac{1 \text{ ἔτ.}}{3} \qquad \dfrac{8 \text{ τοκ.}}{1400} \right.$

β) Σύγκρισις ποσῶν:

I.				II.			
	100 κεφ.	1 ἔτ.	8 τοκ.		100 κεφ.	1 ἔτη	8 τόκ.
	200	1	16		50	2	8
Τόκος - κεφάλαιο=ἀνάλογα				χρόν. - κεφάλ.=ἀντίστροφα			

γ) Ἑπομένως ὁ X (κεφάλαιο)$=100\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1.440}{8}=$

$$\boxed{\dfrac{\overset{\text{Τόκος}}{100\times1400}}{\underset{\text{χρόνος ἐπιτόκιο}}{3\times8}}}=\frac{144.000}{24}=6.000 \text{ Κεφ.}$$

β) Ὁ χρόνος σὲ μῆνες

2. Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 5 μῆνες πρὸς 6% θὰ δώση τόκο 200 δρχ.;

Λύσις

α) Κατάταξις: $\left\{ \dfrac{100 \text{ κεφ.}}{X} \qquad \dfrac{12 \text{ μην.}}{5} \qquad \dfrac{6 \text{ τόκο}}{200} \right.$

β) Σύγκρισις ποσῶν:

Στὸ προηγούμενο πρόβλημα εἴδαμε, πῶς:

τόκος —κεφάλαιο= ποσὰ ἀνάλογα

χρόνος—κεφάλαιο= » ἀντίστροφα.

γ) Ἑπομένως X (κεφάλαιο) $=100\times\dfrac{12}{5}\times\dfrac{200}{6}=$

$$=\boxed{\dfrac{\overset{\text{τόκος}}{1200\times200}}{\underset{\text{χρόνος ἐπιτόκιο}}{5\times6}}}= 8.000 \text{ δραχ. κεφάλαιο.}$$

γ Ὁ χρόνος σὲ ἡμέρες

3. Πόσο κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 5% φέρει τόκον 800 δραχ. σὲ 96 ἡμέρες (3 μῆνες 6 ἡμέρες).

Λύσις

α) Κατάταξις: $\frac{100 \text{ κεφ.}}{X}$ $\frac{360 \text{ ἡμέρ.}}{96}$ $\frac{5 \text{ τόκο}}{800}$

β) Σύγκρισις ποσῶν:

Στὸ πρῶτο πρόβλημα, συγκρίνοντας τὰ ποσὰ εἴδαμε, πώς:

χρόνος—κεφάλαιο=ποσὰ ἀντίστροφα

τόκος—κεφάλαιο= » ἀνάλογα

γ) Ἑπομένως X (Κεφάλαιο)$=100\times\frac{360}{96}\times\frac{800}{5}=$

$$\boxed{\frac{\overset{\text{τόκος}}{36.000\times800}}{\underset{\text{χρόνος}\quad\text{ἐπιτόκιο}}{96\times5}}}=\frac{288.000}{480}=60.000 \text{ δρχ. κεφ.}$$

Παρατηρήσεις

Μὲ τὴ λύσι καὶ τῶν τριῶν παραπάνω προβλημάτων βγάζομε γιὰ συμπέρασμα τὶς ἑξῆς παρατηρήσεις:

1. Καὶ στὰ τρία ἄγνωστο ἦταν τὸ Κεφάλαιο.
2. Διαφορὰ παρουσίαζαν στὸ ποσό: Χρόνος.

Στὸ πρῶτο πρόβλημα ὁ χρόνος ἦταν ἀκέραια ἔτη.

» δεύτερο » » » » » μῆνες.

» τρίτο » » » » » ἡμέρες.

3. Λύοντας καὶ τὰ τρία προβλήματα φθάσαμε στὶς ἑξῆς πράξεις:

Α΄. πρόβλημα $\boxed{X=\frac{\overset{\text{τόκος}}{100\times1440}}{\underset{\text{χρόνος ἐπιτόκιο}}{3\times8}}}$ = χρόνος (ἔτη)

Β΄. » $\boxed{X=\frac{\overset{\text{τόκος}}{1.200\times200}}{\underset{\text{χρόνος}\quad\text{ἐπιτόκιο}}{5\times6}}}$ = χρόνος (μῆνες)

Γ'. » $\boxed{X = \dfrac{\overset{\text{τόκος}}{36.000 \times 800}}{\underset{\text{χρόνος ἐπιτόκιο}}{96 \times 5}}}$ = χρόνος (ἡμέρες)

Ἀπὸ τὶς πράξεις αὐτὲς βλέπομε ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε, τὸ Κεφάλαιο, πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο :

α) ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος ἦταν ἀκέραια ἔτη.
β) » 1.200, » » » » μῆνες
καὶ γ) » 36.000, » » » » ἡμέρες.

καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε μὲ τὸ γινόμενο τῶν ***δύο ἄλλων*** ποσῶν (χρόνου καὶ ἐπιτοκίου).

5. Ἂν καὶ ἐδῶ παραστήσωμε μὲ Κ τὸ κεφάλαιο, Χ τὸν χρόνο, μὲ Ε τὸ ἐπιτόκιο καὶ μὲ Τ τὸν τόκο, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, θὰ ἔχωμε :

Τύπος Κεφαλαίου

$$K = \frac{\text{Τόκος} \times 100}{X \times E} = \text{(ὅταν ἔχωμε ἀκέραια ἔτη)}$$

$$K = \frac{\text{Τόκος} \times 1200}{X \times E} = \text{(ὅταν ἔχωμε μῆνες)}$$

$$K = \frac{\text{Τόκος} \times 36.000}{X \times E} = \text{(ὅταν ἔχωμε ἡμέρες)}$$

Προβλήματα διάφορα μὲ ἄγνωστο τὸ κεφάλαιο

Προσπαθῆστε νὰ λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα.

Πρῶτον : Μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν.

Δεύτερον : Μὲ τὸν τύπο τοῦ Κεφαλαίου.

Τρίτον : Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

Βρῆτε ποιὸς τρόπος εἶναι εὐκολώτερος.

1. Ποιό κεφάλαιο, τοκιζόμενο πρὸς 6 % φέρνει σὲ 5 ἔτη τόκο 150 δραχμές ;

2. Ποιό κεφάλαιο ἐδάνεισε ἕνας πρὸς 8 % ἂν ὕστερα ἀπὸ 9 μῆνες πῆρε τόκο 300 δραχμές ;

3. Ποιό κεφάλαιο, τοκιζόμενο πρὸς 5 %, ὕστερα ἀπὸ 4 μῆνες καὶ 12 ἡμέρες, φέρνει τόκο 80 δραχμές ;

4. Ποιό κεφάλαιο ἐτοκίσθη 2 ἔτη καὶ 4 μῆνες πρὸς 6,50 % καὶ ἔφερε τόκο 120 δραχμές ;

5. Ποιό κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσωμε 8 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες πρὸς 7 °/₀ γιὰ νὰ πάρωμε τόσο τόκο ὅσο φέρνουν 2.000 δραχ. σὲ 5 μῆνες πρὸς 9 °/₀ ;

6. Ποιό κεφάλαιο ἀπὸ τὶς 10 Ἰουνίου 1958 μέχρι τῆς 15 Δεκεμβρίου 1959 πρὸς 6,5 °/₀, θὰ φέρη 70 δραχ. τόκο ;

7. Ἀγρότης γιὰ νὰ πληρώση τὸν τόκο 4 μηνῶν πρὸς 7 °/₀ ἔδωσε στὸ δανειστή του 63 ὀκ. σιταριοῦ πρὸς 3,5 δραχ. τὴν ὀκά. Πόσο ἦταν τὸ κεφάλαιο ποὺ χρωστοῦσε ;

8. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ καταθέσω στὸ Ταμιευτήριο πρὸς 4,5 °/₀ γιὰ νὰ πάρω ὕστερα ἀπὸ 20 χρόνια καὶ 3 μῆνες 5.000 δραχμές ;

9. Κάνετε καὶ σεῖς 6 προβλήματα, στὰ ὁποῖα νὰ ζητῆται τὸ κεφάλαιο καὶ ὁ χρόνος νὰ εἶναι :

α) Στὸ πρῶτο ἔτη
β) στὸ δεύτερο μῆνες
γ) στὸ τρίτο ἡμέρες
δ) στὸ τέταρτο μῆνες καὶ ἡμέρες
ε) στὸ πέμπτο ἔτη καὶ μῆνες
στ) στὸ ἕκτο ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέρες.

Γ') ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΖΗΤΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ

α) Ὁ χρόνος σὲ ἔτη

1. Κεφάλαιο 300 δραχμῶν σὲ 4 ἔτη ἔφερε τόκο 60 δραχμές. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτοκίσθη ;

Λύσις

α) Κατάταξις:

300 κεφ.	4 ἔτη	60 τόκο
100	1	X

β) Σύγκρισις τῶν ποσῶν :

I.			II.		
300 κεφ.	4 ἔτη	60 τ.	300 κεφ.	4 ἔτη	60 τόκο
100	4	120	300	8	120
κεφ.—τόκ.=ποσὰ ἀνάλογα			χρόν.—τόκος=ποσὰ ἀνάλογα		

γ) Ἑπομένως X (ἐπιτόκιο) $= 60 \times \frac{100}{300} \times \frac{1}{4} =$

$$\boxed{\dfrac{\overset{\text{τόκος}}{60 \times 100}}{\underset{\text{κεφάλαιο χρόνος}}{300 \times 4}}} = \frac{6.000}{1.200} = \frac{60}{12} = 5\,\%$$

β) Ὁ χρόνος σὲ μῆνες

2. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτοκίσθησαν 2.000 δραχμὲς, ποὺ σὲ 3 μῆνες ἔφεραν τόκο 240 δραχμές;

Λύσις

α) Κατάταξις: $\left\{ \dfrac{2.000 \text{ κεφ.}}{100} \quad \dfrac{3 \text{ μῆν.}}{12} \quad \dfrac{240 \text{ τόκ.}}{X} \right.$

β) Σύγκρισις ποσῶν:

Στὸ προηγούμενο πρόβλημα εἴδαμε, ὅτι τὰ ποσά:

α) Κεφάλαιο—τόκος εἶναι ἀνάλογα

β) χρόνος—τόκος » »

γ) Ἑπομένως X (ἐπιτόκιο) $= 240 \times \dfrac{100}{2.000} \times \dfrac{12}{3} =$

$$= \boxed{\dfrac{\overset{\text{τόκος}}{240 \times 1.200}}{\underset{\text{κεφάλαιο χρόνος}}{2.008 \times 3}}} = \frac{288.000}{6.000} = 48\,\%$$

γ) Ὁ χρόνος σὲ ἡμέρες

3. 800 δραχμὲς κεφάλαιο, σὲ 300 ἡμέρες φέρνουν τόκο 40 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐτοκίσθη;

Λύσις

α) Κατάταξις: $\left\{ \dfrac{800 \text{ κεφ.}}{100} \quad \dfrac{300 \text{ ἡμ.}}{360} \quad \dfrac{40 \text{ τόκο}}{X} \right.$

β) Σύγκρισις τῶν ποσῶν: Προηγουμένως εἴδαμε, πώς:

κεφάλαιο—τόκος=ποσὰ ἀνάλογα

χρόνος—τόκος= » »

γ) Ἑπομένως X (ἐπιτόκιο) $= 40 \times \dfrac{100}{800} \times \dfrac{360}{300} =$

$$= \boxed{\frac{\overset{\text{τόκος}}{40 \times 36.000}}{\underset{\text{κεφάλαιο χρόνος}}{800 \times 300}}} = \frac{1.440.000}{240.000} = 6\,\%$$

Παρατηρήσεις

Παρατηροῦντες προσεκτικὰ τὶς λύσεις καὶ τῶν τριῶν παραπάνω προβλημάτων μποροῦμε νὰ καταλήξουμε στὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

1. Καὶ στὰ 3 προβλήματα ἦταν ἄγνωστο τὸ ἐπιτόκιο.
2. Διαφορὰ εἶχαν ἐδῶ στὸ ποσὸ Χρόνος:

στὸ πρῶτο πρόβλημα ὁ χρόνος ἦταν ἀκέραια ἔτη
» δεύτερο » » » » μῆνες
» τρίτο » » » » ἡμέρες.

3. Λύοντας καὶ τὰ 3 προβλήματα φθάσαμε στὶς ἑξῆς πράξεις:

Α΄. Πρόβλημα: $\boxed{\text{Χ (ἐπιτόκιο)} = \frac{\overset{\text{τόκος}}{60 \times 100}}{\underset{\text{κεφαλ.}\quad\text{χρόνος}}{300 \times 4}}}$ = χρόνος ἔτη

Β΄ Πρόβλημα: $\boxed{\text{Χ (ἐπιτόκιο)} = \frac{\overset{\text{τόκος}}{240 \times 1200}}{\underset{\text{κεφαλ.}\quad\text{χρόνος}}{2.000 \times 8}}}$ = χρόνος μῆνες

Γ΄. Πρόβλημα: $\boxed{\text{Χ (ἐπιτόκιο)} = \frac{\overset{\text{τόκος}}{40 \times 36.000}}{\underset{\text{κεφαλ.}\quad\text{χρόνος}}{800 \times 300}}}$ = χρόνος ἡμέρες

4. Ἀπὸ τὶς πράξεις αὐτὲς βλέπομε, ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο:

α) ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος ἦταν ἀκέραια ἔτη
β) » 1200, » » » » μῆνες
γ) » 36000, » » » » ἡμέρες

καὶ τὸ ***γινόμενο*** τὸ διαιρέσαμε μὲ τὸ γινόμενο τῶν ***δύο ἄλλων ποσῶν*** (κεφαλαίου καὶ χρόνου).

5. Ἂν καὶ ἐδῶ παραστήσωμε τὰ ποσὰ μὲ τὰ ἀρχικά τους γράμματα θὰ ἔχωμε :

Τύπος ἐπιτοκίου

$$E = \frac{T \times 100}{K \times X} \quad \text{(ὅταν ἔχωμε ἀκέραια ἔτη)}$$

$$E = \frac{T \times 1200}{K \times X} \quad \text{(ὅταν ἔχωμε μῆνες)}$$

$$E = \frac{T \times 36000}{K \times X} \quad \text{(ὅταν ἔχωμε ἡμέρες)}$$

Προβλήματα διάφορα μὲ ἄγνωστο τὸ ἐπιτόκιο

α) Λυόμενα ἀπὸ μνήμης

1. 500 δραχμὲς διὰ 2 ἔτη φέρουν 60 δραχ. τόκο· πόσο θὰ φέρουν σὲ 1 ἔτος ; Ἂν ἦταν δραχ. 100 πόσο θὰ ἔφεραν σὲ 1 ἔτος ;

2. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο ἐτοκίστηκαν :

α) 1.000 δραχ. σὲ 1 χρον. καὶ ἔφεραν τόκο 100 δραχ.

β) 5.000 » » 1 » » » » 500 »

3. Πρὸς πόσο «τοῖς ἑκατὸ» ἐτοκίστηκαν 100 δραχ. καὶ ἔφεραν σὲ 2 χρόνια 14 δραχ. τόκο ; σὲ 3 χρόνια 18 ; σὲ 5 χρόνια 35 δραχ. τόκο ;

β) Λυόμενα γραπτῶς

1. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο ἐδανείσθη γεωργὸς ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα κεφάλαιο 2.500 δραχ., ἂν πλήρωσε 320 δραχ. τόκο, γιὰ 2 χρόνια.

2. Κεφάλαιο 8.000 δραχ. σὲ 9 μῆνες ἔδωσε τόκο 850 δραχμές· πρὸς πόσο τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη ;

3. Πόσο ἦταν τὸ ἐπιτόκιο, ἂν 13.000 δραχ. κεφάλαιο, σὲ 4 ἔτη, ἔφερε τόκο 1.200 δραχμές ;

4. Πρὸς ποιό ἐπιτόκιο ἐτοκίσθησαν 30.000 δραχ. καὶ ἔφεραν σὲ 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρες τόκο 2.000 δραχμές ;

5. Χωρικὸς εἶχε 60 ὀκ. βούτυρο· ἀπ' αὐτὸ κράτησε $6\frac{4}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ τὸ ἄλλο τὸ πώλησε πρὸς 70 δραχ. τὴν ὀκά. Ὅσα χρήματα πῆρε τὰ ἐτόκισε καὶ ὕστερα ἀπὸ 3 ἔτη καὶ 2 μῆνες πῆρε γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 4.200 δραχ. Πόσο «τοῖς ἑκατὸ» τὰ ἐτόκισε;

6. Στὶς 2 Ἰανουαρίου 1958 δανειστήκαμε 5.000 δραχ. Στὶς 29 τοῦ ἑπομένου μηνὸς ἐξωφλήσαμε τὸ χρέος μὲ 5.200 δρχ. Πρὸς πόσο «τοῖς ἑκατὸ» εἴχαμε δανεισθῆ τὰ χρήματα;

7. Νὰ βρῆτε μὲ πόσο «τοῖς ἑκατὸ» ἐτοκίσθησαν:

α) 5.000 δρχ. σὲ 1 ἔτ. καὶ ἔφεραν τόκο 500 δρχ.
β) 3.000 » » 2 » » » » 600 »
γ) 4.000 » » 3 » » » » 700 »
δ) 12.000 » » 5 » » » » 1.000 »

8. Μὲ πόσο «τοῖς ἑκατὸ» ἐτοκίστηκαν 7.000 καὶ σὲ 8 μῆνες ἔφεραν τόκο 300 δραχμές;

9. Νὰ βρῆτε μὲ πόσο «τοῖς ἑκατὸ» ἐτοκίστηκαν:

α) 3.000 δρχ. σὲ 6 μῆνες καὶ ἔφεραν τόκο 250 δρχ.
β) 5.000 » » 7 » » » » 520 »
γ) 9.000 » » 5 » » » » 750 »

10. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἐτοκίσθησαν 12.000 δραχμὲς ἂν σὲ 20 ἡμέρες ἔφεραν τόκο 300 δραχμές;

11. Νὰ βρῆτε μὲ πόσο ἐπιτόκιο ἐτοκίστηκαν:

α) 4.000 δρχ. σὲ 92 ἡμέρες καὶ ἔδωσαν τόκο 420 δρχ.
β) 7.000 » » 230 » » » » 500 »
γ) 3.500 » » 70 » » » » 180 »

12. Βρῆτε καὶ σεῖς 6 προβλήματα, στὰ ὁποῖα νὰ ζητῆται τὸ ἐπιτόκιο.

Δ΄) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ο ΧΡΟΝΟΣ

1. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 6.000 δραχμῶν πρὸς 5 % θὰ φέρη τόκο 600 δραχμές;

Λύσις

α) Κατάταξις: $\frac{100}{6.000}$ κεφ. δίδουν $\frac{5}{600}$ τόκο σὲ $\frac{1}{X}$ ἔτος

β) Σύγκρισις ποσῶν:

I.	κεφ.		τοκ.		ἔτος	II.	κεφ.		τόκ.		ἔτος
	100	δίδουν	5	σὲ	1		100	δίδουν	5	σὲ	1
	50	»	5	»	2		100	»	10	»	2
κεφάλαιο—χρόνος=ἀντίστροφα						τόκος—χρόνος=ἀνάλογα					

γ) Ἑπομένως Χ (χρόνος) $= 1 \times \frac{100}{6.000} \times \frac{600}{5} =$

$$= \boxed{\frac{\overset{\text{τόκος}}{600 \times 100}}{\underset{\text{κεφάλαιο ἐπιτόκιο}}{6.000 \times 5}}} = \frac{60.000}{30.000} = 2 \text{ ἔτη.}$$

2. Σὲ πόσο χρόνο 5.000 δραχμὲς θὰ δώσουν τόκο 300 δραχμές, ἂν τοκίζωνται πρὸς 4%;

Λύσις

α) Κατάταξις:

κεφ.		τόκο		ἔτος
100 κεφ.	δίδουν	4	τόκο σὲ	1 ἔτος
5.000 »	»	300	» »	Χ

β) Σύγκρισις ποσῶν: Ἀπὸ τὸ παραπάνω πρόβλημα εἴδαμε, πώς:
α) κεφάλαιο—χρόνος=ποσὰ ἀντίστροφα
β) τόκος — χρόνος = » ἀνάλογα

γ) Ἑπομένως Χ (χρόνος) $= 1 \times \frac{100}{5.000} \times \frac{300}{4} =$

$$= \boxed{\frac{\overset{\text{τόκος}}{300 \times 100}}{\underset{\text{κεφάλαιο ἐπιτόκιο}}{5.000 \times 4}}} = \frac{30.000}{20.000} = \frac{3}{2} = 1 \text{ ἔτος } 6 \text{ μῆνες}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \text{ ἔτος } 6 \text{ μῆνες} \\ \times 12 & \\ \hline 12 \text{ μῆνες} & \\ = & \end{array}$$

3. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 1000 δραχμῶν τοκιζόμενο πρὸς 5%, θὰ δώσῃ τόκο 80 δραχμές;

Λύσις

α) Κατάταξις:

κεφ.		τόκο		ἔτος
100 κεφάλαιον	δίδουν	5	τόκο σὲ	1 ἔτος
1000 »	»	80	»	Χ

β) Σύγκρισις τῶν ποσῶν: Στὸ προηγούμενο πρόβλημα εἴδαμε, πώς:

α) κεφάλαιο—χρόνος=ποσὰ ἀντίστροφα.

β) τόκος—χρόνος=ποσὰ ἀνάλογα.

γ) Ἑπομένως Χ (χρόνος) $= 1 \times \frac{100}{1.000} \times \frac{80}{5} =$

$$= \boxed{\begin{array}{c}\text{τόκος} \\ \dfrac{80 \times 100}{1.000 \times 5} \\ \text{κεφάλαιο ἐπιτόκιο}\end{array}} = \frac{8.000}{5.000} = \frac{5}{8} = \mathbf{1} \text{ ἔτος 7 μῆνες 6 ἡμέρες}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \text{ ἔτος 7 μῆνες 6 ἡμέρες} \\ \times\ 12 & \\ \hline 36 & \text{μῆνες} \\ 1 & \\ \times\ 30 & \\ \hline 30 & \text{ἡμέρες} \\ = & \end{array}$$

Παρατηρήσεις

1. Καὶ στὰ 3 παραπάνω προβλήματα εἴχαμε ἄγνωστο τὸν χρόνο.
2. Λύοντάς τα ἐφθάσαμε στὶς πράξεις :

Α΄. Πρόβλημα : Χ (χρόνος) $= \boxed{\begin{array}{c}\text{τόκος} \\ \dfrac{600 \times 100}{6.000 \times 5} \\ \text{κεφαλ.} \quad \text{ἐπιτ.}\end{array}}$

Β΄. Πρόβλημα : Χ (χρόνος) $= \boxed{\begin{array}{c}\text{τόκος} \\ \dfrac{300 \times 100}{5.000 \times 4} \\ \text{κεφαλ.} \quad \text{ἐπιτ.}\end{array}}$

Γ΄. Πρόβλημα : Χ (χρόνος) $= \boxed{\begin{array}{c}\text{τόκος} \\ \dfrac{80 \times 100}{1.000 \times 5} \\ \text{κεφαλ.} \quad \text{ἐπιτ.}\end{array}}$

3. Ἀπὸ τὶς πράξεις αὐτὲς βλέπομε, ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸν χρόνο ἐπολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε μὲ

τὸ γινόμενο ***τῶν δύο ἄλλων ποσῶν*** (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

4. Παριστάνοντας κι ἐδῶ τὰ ποσὰ μὲ τὰ ἀρχικά τους γράμματα, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, ἔχομε.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τύπος}\\ \text{χρόνου}\end{array}\right\}\quad X = \frac{T \times 100}{K \times E}$$

5. Στὴν ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων στὰ κλάσματα, ἄν δὲν διαιρῆται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ὁ χρόνος εἶναι λιγώτερος ἀπὸ ἔτη. Τότε πολλαπλασιάζομε τὸν διαιρετέο ἐπὶ 12, γιὰ νὰ βροῦμε μῆνες. Ἂν πάλι ἔχωμεν ὑπόλοιπο, τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 30 γιὰ νὰ βροῦμε ἡμέρες καὶ συνεχίζομε τὴ διαίρεσι.

Προβλήματα διάφορα μὲ ἄγνωστο τὸν χρόνο

α) Λυόμενα ἀπὸ μνήμης

1. 100 δραχ. σὲ 1 ἔτος φέρουν τόκο 7 δραχ. Σὲ πόσο χρόνο θὰ φέρουν 14 δραχμές ; Σὲ πόσο 21, 35, 63 δραχμές ;

2. Σὲ πόσο χρόνο 400 δραχ. πρὸς 5 % φέρουν τόκο 25 δραχμές ;

3. Σὲ πόσο χρόνο 500 δραχ. πρὸς 8 % φέρουν τόκο 96 δραχμές ;

β) Λυόμενα γραπτῶς

1. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 6.000 δραχ. πρὸς 8 % ἔδωσε τόκο 1.440 δραχμές ;

2. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 8.000 δραχ. τοκιζόμενο πρὸς 6 % δίδει τόκο 200 δραχμές ;

3. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 60.000 δραχ. τοκιζόμενο πρὸς 5 % δίδει τόκο 800 δραχμές ;

4. Βοσκὸς πώλησε 78 πρόβατα πρὸς 350 δραχ. τὸ ἕνα. Τὰ χρήματα ποὺ πῆρε τὰ ἐτόκισε πρὸς 6 %, καὶ πῆρε ὕστερα ἀπὸ καιρὸ 475 δραχ. τόκο. Πόσο χρόνο ἐτόκισε τὰ χρήματά του ;

5. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο :

α) 3.000 δραχ. πρὸς 5 % ἔδωσε τόκο 400 δραχμὲς
β) 5.000 » » 6 % » » 290 »
γ) 7.000 » » 4 % » » 575 »
δ) 9.000 » » 7 % » » 800 »

6. Ἔμπορος ἐτόκισε 25.000 δρχ. πρὸς 8 %. Ὕστερα ἀπὸ καιρὸ πῆρε κεφάλαιο καὶ τόκο μαζὶ 27.000 δραχμές. Πόσο καιρὸ εἶχε τοκισμένα τὰ χρήματά του ;

7. **Σὲ πόσο χρόνο:**

α) 4.000 δρχ.	πρὸς	5 %	ἔγιναν	μὲ	τὸν	τόκο	μαζὶ	4.500	δρχ.
β) 7.000	» »	6 %	»	»	»	»	»	7.275	»
γ) 8.725	» »	8 %	»	»	»	»	»	9.500	»

8. **Κάνετε καὶ σεῖς 5 προβλήματα, στὰ ὁποῖα νὰ ζητῆται ὁ χρόνος.**

5. ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

Γραμμάτιον 9.540 δραχμῶν.

Μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι καὶ ὑποχρεοῦμαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Δημήτρ. Ντοῦζον ἢ εἰς διαταγήν του ἐννέα χιλιάδας πεντακοσίας τεσσαράκοντα δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἐμπορεύματα.

'Εν 'Αθήναις τῇ 10 'Απριλίου 1958

(ὑπογραφὴ 'Ανδρέας Παπανδρέου.

1. Διάβασε προσεκτικὰ τὸ νέο αὐτὸ γραμμάτιο.
2. Μαντεύετε, τί ἔχει γίνει;
3. Μήπως ἔχει διαφορὰ αὐτὸ τὸ γραμμάτιο ἀπὸ τὸ προηγούμενο, ποὺ εἴχαμε δῆ στὸν τόκο;
4. Ποῦ βρίσκετε τὴ διαφορά;
5. Γιατί δὲν ὑπόσχεται νὰ πληρώση ὁ κ. 'Ανδρ. Παπανδρέου στὸν κ. Δημ. Ντοῦζο 9.000, ἀλλὰ 9.540 δραχμές; μήπως οἱ 540 δραχμὲς σᾶς δίνουν ἀφορμὴ νὰ καταλάβετε τίποτε;
6. Μήπως ὑπάρχει καμμιὰ ἰδιαίτερη συμφωνία μεταξὺ τῶν κ. κ. Δημ. Ντούζου καὶ 'Ανδρ. Παπανδρέου, ποὺ δὲν φαίνεται στὸ γραμμάτιο;
7. Βρῆτε, πόσο τόκο φέρουν 9.000 δραχ. σὲ ἕνα χρόνο πρὸς 6 %.
8. Τί βλέπετε τώρα;

Α'. 'Εμπορικὰ Γραμμάτια—'Εξωτερικὴ ὑφαίρεσις Προεξόφλησις ('Εξαργύρωσις) γραμματίων

1. Οἱ ἔμποροι στὶς συναλλαγές τους ἔχουν μία εὐκολία. 'Ο ἀγοραστὴς ἀντὶ νὰ πληρώση τὴν ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ἀμέσως μὲ τὴν

παραλαβή του μπορεῖ νὰ δώσῃ στὸν πωλητὴ μία ἀπόδειξι, ποὺ λέγεται **ἐμπορικὸ γραμμάτιο** καὶ μοιάζει περίπου μὲ τὸ παραπάνω γραμμάτιο. Στὸ γραμμάτιο αὐτὸ γράφεται, πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος καὶ ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο θὰ πληρωθῆ — θὰ ἐξοφληθῆ — τὸ χρέος.

Ἔτσι καὶ ὁ κ. Ἀνδρέας Παπανδρέου, ποὺ πῆρε ἐμπορεύματα ἀπὸ τὸν κ. Δημήτριο Ντοῦζο ἀξίας 9.000 δραχμῶν (χωρὶς νὰ πληρώσῃ τίποτε μπροστὰ), ὑποχρεοῦται ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρόνο νὰ πληρώσῃ στὸ δανειστή του 9.540 δραχμές.

Οἱ 540 δραχμές, ὅπως βρήκατε πιὸ πάνω εἶναι ὁ τόκος τῶν 9.000 δραχμῶν πρὸς 6 % σὲ ἕνα ἔτος, ποὺ δίκαιο εἶναι νὰ πάρῃ ὁ κ. Ντοῦζος μιὰ καὶ ἔδωσε τὰ ἐμπορεύματά του, καὶ τὴν ἀξία τους θὰ τὴν πάρῃ ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρόνο.

Τὸ ποσόν, ποὺ γράφει ἐπάνω - ἐπάνω, τὸ ἐμπορικὸ γραμμάτιο λέγεται **ὀνομαστικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου.

Ἡ ἡμερομηνία, κατὰ τὴν ὁποία πρέπει νὰ πληρωθῆ τὸ χρέος, λέγεται **«ἡμέρα λήξεως»** τοῦ γραμματίου.

Τὸ παραπάνω γραμμάτιο εἶναι 9.540 δραχμῶν ὀνομαστικῆς ἀξίας καὶ ἔχει «ἡμέρα λήξεως», τὴν 10 Ἀπριλίου 1959.

2. Ὁ κ. Ντοῦζος κρατεῖ στὰ χέρια του τὸ παραπάνω ἐμπορικὸ γραμμάτιο. Σύμφωνα μ' ὅ,τι γράφει τὸ γραμμάτιο, στὶς 10 Ἀπριλίου 1959 (ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρόνο ἀπὸ τὴν ἡμέρα ὑπογραφῆς τοῦ γραμματίου) θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν κ. Παπανδρέου 9.540 δραχμές.

Ὁ κ. Ντοῦζος ὅμως 6 μῆνες μετὰ τὴν ὑπογραφὴ τοῦ γραμματίου (δηλ. στὶς 10 Ὀκτωβρίου 1958) βρέθηκε σὲ ἐξαιρετικὴ ἀνάγκη γιὰ χρήματα. Χρήματα δὲν εἶχε σὲ μετρητά. Εἶχε ὅμως τὸ γραμμάτιο. Τί νὰ ἔκανε ; Καταφεύγει σ' αὐτό. Οἱ Τράπεζες τὸ παίρνουν καὶ δίνουν χρήματα (τὸ ἐξαργυρώνουν).

Πόσα ὅμως χρήματα θὰ πάρῃ ; Ἂν ἔδινε τὸ γραμμάτιο τὴν ἡμέρα τῆς λήξεώς του (στὶς 10 Ἀπριλίου 1959) θὰ ἔπαιρνε 9.540 δραχμές, ὅσες δηλαδὴ θὰ τοῦ ἔδινε τὴν ἡμέρα ἐκείνη ὁ κ. Παπανδρέου. Ἀλλὰ τώρα θέλει νὰ τὸ ἐξωφλήσῃ πρωτύτερα — νὰ τὸ προεξοφλήσῃ — 6 μῆνες πρὶν νὰ λήξῃ.

Ἡ Τράπεζα θὰ ἀφαιρέσῃ ἀπὸ τὰς 9.540 δραχ. τὸν τόκο τῶν 6 μηνῶν (ποὺ μένουν ἀκόμη γιὰ νὰ λήξῃ τὸ γραμμάτιο) καὶ τὸ ὑπόλοιπο θὰ τὸ δώσῃ στὸν κ. Ντοῦζο δηλ. 9.540—270=9.270 δραχμές.

Σημ. Κάθε ἐμπορικὸ γραμμάτιο, πρὶν λήξη, κυκλοφορεῖ σὰν χρῆμα καὶ μεταβιβάζεται ἀπὸ τὸν ἕνα στὸν ἄλλο. Γραμμάτιο, ποὺ δὲν ἔχει τὶς λέξεις «εἰς διαταγὴν» δὲν μπορεῖ νὰ μεταβιβασθῆ σὲ ἄλλον. Ὅποιος μεταβιβάζει γραμμάτιο σ' ἄλλον γράφει πίσω στὸ γραμμάτιο τὰ ἑξῆς:

Πληρώσατε εἰς διαταγὴν τοῦ κ. .... (γράφει τὸ ὄνομα ἐκείνου στὸν ὁποῖο μεταβιβάζεται τὸ γραμμάτιο) δραχμὰς .... (ὅσες γράφει τὸ γραμμάτιο). Ἀπὸ κάτω γράφεται ἡ ἡμερομηνία καὶ ἡ ὑπογραφή του. Αὐτὸ λέγεται ***ὀπισθογράφησις***. Πιὸ πολὺ ἀπὸ τὸ γραμμάτιο οἱ ἔμποροι μεταχειρίζονται ***τὴν συναλλαγματική***. Ἡ συναλλαγματικὴ εἶναι ἔγγραφο μὲ τὸ ὁποῖον αὐτός, ποὺ δανείζει χρήματα ἢ ἐμπορεύματα μὲ πίστωσι, διατάσσει τὸν ὀφειλέτη του, ποὺ μένει στὴν ἴδια πόλι ἢ καὶ σὲ ἄλλη, νὰ πληρώση σὲ τρίτο πρόσωπο καὶ σὲ ὡρισμένο χρόνο τὸ χρηματικὸ ποσόν, ποὺ ἀναγράφεται στὸ ἔγγραφο (συναλλαγματική).

Στὴ Συναλλαγματικὴ γράφονται πάνω - κάτω τὰ ἑξῆς:

Ἐν Ἀθήναις τῇ .... Διὰ δραχ. ....

Μετὰ πεντήκοντα (50) ἡμέρας ἀπὸ σήμερον πληρώσατε εἰς διαταγὴν τοῦ κ. .... τὰς ἄνω .... δραχμάς.

Πρὸς τὸν κ. .... (ὄνομα πληρωτοῦ)

εἰς .... (κατοικία »)

ὑπογραφὴ (δανειστοῦ)

Τὸ ποσόν, ποὺ παίρνει ὁ κ. Ντοῦζος τώρα ἀπὸ τὴν Τράπεζα ὕστερα ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσι τοῦ τόκου τῶν 6 μηνῶν, δηλ. οἱ 9.270 δρχ. λέγεται **«παροῦσα ἀξία»** τοῦ γραμματίου ἢ **«πραγματικὴ ἀξία»**.

Ὁ χρόνος ἀπὸ τὴν **«ἡμέρα προεξοφλήσεως»** μέχρι τὴν ἡμέρα λήξεως τοῦ γραμματίου λέγεται ***«χρόνος προεξοφλήσεως»***.

Τὸ ποσόν, ποὺ ἀφαιρεῖ ἡ Τράπεζα ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ***εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας στὸν «χρόνο προεξοφλήσεως»*** καὶ λέγεται ***ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις*** (σκόντο, ἔκπτωσις).

Σημ. Τὸ ἐπιτόκιο ποὺ ὑπολογίζει κάθε φορὰ ἡ Τράπεζα στὴν ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσι δὲν εἶναι πάντοτε τὸ ἴδιο. Αὐτὸ τὸ κανονίζει τὸ κράτος μὲ νόμο καὶ λέγεται ***«ἐπιτόκιο προεξοφλήσεως»***. Ἔτσι ὁ καθένας δὲν παίρνει ὅ,τι θέλει, ὅταν βρίσκη τὸν ἄλλο στὴν ἀνάγκη νὰ προεξοφλῆ τὰ γραμμάτιά του, γιατὶ τιμωρεῖται ἀπὸ τὸν νόμο αὐστηρὰ ὡς τοκογλύφος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α΄) Ἄγνωστος ἡ ὑφαίρεσις καὶ ἡ παροῦσα ἀξία

1. Γραμμάτιο 7.000 δρχ. λήγει ὕστερα ἀπὸ 4 ἔτη. Προεξοφλεῖται σήμερα μὲ ἐπιτόκιο προεξοφλήσεως 5 %. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερική του ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία του;

Σκέψις

Ζητεῖται ***ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις*** δηλ. ὁ τόκος τῶν 7.000 δραχμῶν σὲ 4 ἔτη πρὸς 5% καὶ ἡ παροῦσα ἀξία, ποὺ βρίσκεται, ἂν ἀφαιρέσωμε τὴν ὑφαίρεσι ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία.

Πρέπει λοιπὸν νὰ βροῦμε τὸν τόκο τῶν 7.000 δρχ. σὲ 4 ἔτη πρὸς 5 % (ὑφαίρεσι) καὶ νὰ τὸν ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν παροῦσα.

Λύσις

$$T = \frac{K \times E \times X}{100} = \frac{7.000 \times 4 \times 5}{100} = \frac{140.000}{100} = 1400 \text{ (ἐξωτ. ὑφαίρεσις).}$$

7.000—1400=5.600 (παροῦσα ἀξία).

β΄) Ἄγνωστος ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία

2. Γραμμάτιο, ποὺ προεξωφλήθη (ἐξαργυρώθη) 8 μῆνες πρὶν νὰ λήξῃ πρὸς 6 % ἔδωσε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσι 90 δραχμές. Τί ὀνομαστικὴ ἀξία εἶχε;

Ζητεῖται ἐδῶ ἡ ***ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου*** δηλ. τὸ κεφάλαιο, ποὺ βρίσκεται μὲ τὸν γνωστὸ τύπο τοῦ κεφαλαίου, μὲ τὸν χρόνο μῆνες.

Λύσις

$$K = \frac{T \times 1.200}{X \times E} = \frac{90 \times 1.200}{8 \times 6} = \frac{108.000}{48} = 2.250 \text{ ὀνομ. ἀξία.}$$

γ) Ἄγνωστο τὸ ἐπιτόκιο

3. Γραμματιο 5.000 δραχ. προεξωφλήθη 3 ἔτη πρὶν νὰ λήξῃ ἀντὶ 4.400 δραχ.· μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ὑπελογίσθη ἡ ἐξωτερική του ὑφαίρεσις;

Σκέψις

Ζητοῦμε πρὸς ***ποιὸ ἐπιτόκιο*** οἱ 5.000 δραχ. σὲ 3 ἔτη ἔφεραν τόκο 600 δραχμές.

Λύσις

$$E = \frac{T \times 100}{K \times X} = \frac{600 \times 100}{5.000 \times 3} = \frac{60.000}{15.000} = 4\,\%.$$

δ Ἄγνωστος ὁ χρόνος

4. Γραμμάτιο 4.000 δραχ. προεξωφλήθη πρὸς 5 % καὶ ἔπαθε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις 800 δραχ. Ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο ἔληγε τὸ γραμμάτιο ;

Σκέψις

Ζητοῦμε σὲ ***πόσο χρόνο*** οἱ 4.000 δραχ. πρὸς 5 % ἔδωσαν τόκο 800 δραχμές.

Λύσις

$$X = \frac{T \times 100}{K \times E} = \frac{800 \times 100}{4.000 \times 5} = 4 \text{ ἔτη}.$$

Παρατηρήσεις

1. Ἀπὸ τὴ λύσι τῶν 4 παραπάνω προβλημάτων βλέπομε, ὅτι τὰ προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως δὲν ἔχουν διαφορὰ ἀπὸ τὰ προβλήματα τόκου.

2. Στὰ προβλήματα αὐτά, ὅταν λέμε ὑφαίρεσι, ἐννοοῦμε τόκο καὶ ὡς κεφάλαιο παίρνομε τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.

3. Γιὰ νὰ βροῦμε τὰ ἄλλα ποσὰ (ἐπιτόκιο, χρόνο) ἐφαρμόζομε τοὺς γνωστοὺς τύπους.

Διάφορα προβλήματα μὲ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσι

1. Γραμμάτιο 2 500 δραχ. προεξωφλήθη (ἐξαργυρώθη) 3 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες πρὶν νὰ λήξῃ πρὸς 4,5 %· ποιὰ ἡ ὑφαίρεσίς του ; ποιὰ ἡ παροῦσα του ἀξία ;

2. Ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο λήγει γραμμάτιο 4.750 δραχ., ποὺ προεξωφλήθη πρὸς 8 % καὶ ἔδωσε ὑφαίρεσι 120 δραχμῶν ;

3. Γραμμάτιο προεξωφλήθη 3 ἔτη καὶ 4 μῆνες πρὶν νὰ λήξῃ ἀντὶ 5.250 δραχ. μὲ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσι 750 δραχμές. Μὲ τί ἐπιτόκιο προεξωφλήθη ;

4. Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ πραγματικὴ ἀξία τῶν ἑξῆς γραμματίων ;

α) 1.500 δραχ. ποὺ προεξωφλήθη (ἐξαργυρώθη) 9 μῆνες πρὶν νὰ λήξῃ πρὸς 7 %.

β) 6.800 δραχ. ποὺ προεξωφλήθη (ἐξαργυρώθη) 2 μῆνες πρὶν νὰ λήξη πρὸς 6,5 %.

γ) 7.300 δραχ. ποὺ προεξωφλήθη (ἐξαργυρώθη) 3 ἔτη 7 μῆνες πρὶν νὰ λήξη πρὸς 5,8 %.

5. Ἀπὸ γραμμάτιο, ποὺ ἔληγε σὲ 6 μῆνες ἔγινε κράτησις 250 δραχ. πρὸς 8 %. Τί ὀνομαστικὴ ἀξία εἶχε τὸ γραμμάτιο ;

6. Σὲ πόσο χρόνο λήγει γραμμάτιο 2.850 δραχ. ποὺ προεξοφλεῖται (ἐξαργυρώνεται) σήμερα πρὸς 7,2 % καὶ δίνει ὑφαίρεσι 375 δραχ.;

7. Γραμμάτιο 5.600 δραχ. ἐξαργυρώνεται (προεξοφλεῖται) 3 μῆνες πρὶν νὰ λήξη πρὸς 9 %. Τί παροῦσα ἀξία ἔχει ;

8. Γραμμάτιο ποὺ ἔληγε στὶς 15 Δεκεμβρίου 1958 προεξωφλήθη (ἐξαργυρώθη) στὶς 15 Αὐγούστου 1958 πρὸς 10 % καί, ἔδωσε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσι 780 δραχ.· ποιά ἦταν ἡ ὀνομαστική του ἀξία ;

9. Μὲ τί ἐπιτόκιο ἐξαργυρώθη (προεξωφλήθη) γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 10.000 δραχ. ποὺ προεξωφλήθη 5 μῆνες πρὶν νὰ λήξη μὲ παροῦσα ἀξία 8.800 δραχμές ;

10. Γραμμάτιο 27.600 δραχ. προεξωφλήθη πρὸς 6 % καὶ ἔδωσε πραγματικὴ ἀξία 26.000 δραχμές. Ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο ἔληγε τὸ γραμμάτιο ;

11. Ἔμπορος ἐδανείσθη κεφάλαιο πρὸς 9 % καὶ ὑπέγραψε γραμμάτιο γιὰ 5.850 δραχ. ποὺ πρέπει νὰ τὰ πληρώση ὕστερα ἀπὸ 6 μῆνες. Τί κεφάλαιο ἐδανείσθη ;

12. Ποία εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 5 % γραμματίου 5.450 δραχ. ποὺ λήγει ὕστερα ἀπὸ 50 ἡμέρες ;

13. Ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου, ποὺ ἐξαργυρώθη πρὸς 6,3 %, 3 μῆνες καὶ 10 ἡμ. πρὶν νὰ λήξη, εἶναι 725 δραχ.· ποιὰ εἶναι ἡ ὀνομαστική του ἀξία ;

14. Ἔμπορος ἐπώλησε τὴν πρώτη Φεβρουαρίου 1956 ἐμπορεύματα ἀξίας 24.800 δραχ., μὲ τὴ συμφωνία τὴ μισὴ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων νὰ πάρη ἀμέσως (μπροστὰ) τὸ δὲ ὑπόλοιπο στὴν πρώτη Φεβρουαρίου 1958. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ἀμέσως, ἂν γίνη ὑφαίρεσις 6 % ;

15. Χρεωστοῦσε ἕνας νὰ πληρώση 3.575 δραχ. ὕστερα ἀπὸ 3 ἔτη 5 μῆνες, ἐπλήρωσε ὅμως ἐνωρίτερα τὸ χρέος του καὶ τοῦ ἔγινε ὑφαί-

ρεσις (ἔκπτωσις) πρὸς 5,6 % καὶ ἔδωσε 3.000 δραχμές. Πόσο πρὶν ἀπὸ τὴν προθεσμία «λήξεως» ἐπλήρωσε τὸ χρέος του ;

16. Ἔμπορος ὀφείλει νὰ πληρώση ὕστερα ἀπὸ 6 ἔτη 48.000 δραχ., ὁ δανειστής του ὅμως συμφωνεῖ νὰ πάρη ἀμέσως 40.000 δραχ. ἀντὶ γιὰ ὅλο τὸ χρέος. Μὲ τί ἐπιτόκιο γίνεται ἡ ὑφαίρεσις ;

6. ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Α) Προβλήματα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα

Παράδειγμα 1ον

Νὰ μοιραστοῦν 200 καρύδια σὲ τρία παιδιὰ ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία τους· τὸ πρῶτο παιδὶ εἶναι 2 ἐτῶν, τὸ δεύτερο 3 καὶ τὸ τρίτο 5 ἐτῶν.

Λύσις

Ἂν πάρη τὸ πρῶτο παιδὶ 2, τὸ δεύτερο 3 καὶ τὸ τρίτο 5 καρύδια καὶ τὰ τρία μαζὶ θὰ πάρουν 2+3+5=10 καρύδια.

Ἑπομένως :

τὸ α΄ παιδὶ	Στὰ 10 καρύδια παίρνει 2 » 200 » » X	ποσὰ ἀνάλογα

$$X = \boxed{2 \times \frac{200}{10}} = \frac{400}{10} = 40 \text{ καρύδια}$$

τὸ β΄ παιδὶ	Στὰ 10 καρύδια παίρνει 3 » 200 » » X	ποσὰ ἀνάλογα

$$X = \boxed{3 \times \frac{200}{10}} = \frac{600}{10} = 60 \text{ καρύδια}$$

τὸ γ΄ παιδὶ	Στὰ 10 καρύδια παίρνει 5 » 200 » » X	ποσὰ ἀνάλογα

$$X = \boxed{5 \times \frac{200}{10}} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ καρύδια}$$

Ὥστε θὰ πάρη τὸ α΄ παιδὶ	40	καρύδια
» β΄ »	60	»
» γ΄ »	100	»
Ἄθροισμα	200	»

Παράδειγμα 2ον

Οἱ Δ΄ Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξεις ἑνὸς σχολείου φύτεψαν στὸ σχολικό τους κῆπο σπόρους, ποὺ στοίχιζαν 200 δραχμές. Στὴν Δ΄ τάξι ἦταν 20, στὴν Ε΄ 12 καὶ στὴν ΣΤ΄ 8 παιδιά. Πόσα χρήματα θα δώση τὸ ταμεῖο κάθε τάξεις ;

Λύσις

Ἀφοῦ δὲν εἶναι ἴσοι μαθηταὶ καὶ στὶς τρεῖς τάξεις δὲν πρέπει νὰ πληρώσουν «ἐξίσου» (τὰ ἴδια λεπτὰ), ἀλλὰ σύμφωνα (ἀνάλογα) μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν παιδιῶν ποὺ ἔχει ἡ κάθε μιά.

Ὅλα τὰ παιδιὰ ἦταν $20+12+8=40$.

Καὶ τὰ 40 παιδιὰ πρέπει νὰ πληρώσουν 200 δραχμές.

Τὸ 1 παιδὶ θὰ πληρώση 40 φορὲς λιγώτερα, ἀπ᾽ ὅ,τι πλήρωσαν τὰ 40 παιδιά. Δηλ. $\frac{200}{40}$.

Τὰ 20 παιδιὰ θὰ πληρώσουν 20 φορὲς περισσότερα ἀπ᾽ ὅ,τι θὰ πληρώση τὸ ἕνα παιδί.

δηλ. $\boxed{12\times\frac{200}{40}} = 100$ δραχ.

Τὰ 12 παιδιὰ θὰ πληρώσουν 12 φορὲς περισσότερα ἀπ᾽ ὅ,τι πλήρωσε τὸ ἕνα παιδί.

δηλ. $\boxed{12\times\frac{200}{40}} = 60$ δραχ.

Τὰ 8 παιδιὰ θὰ πληρώσουν 8 φορὲς περισσότερα ἀπ᾽ ὅ,τι πλήρωσε τὸ ἕνα παιδί.

δηλ. $\boxed{8\times\frac{200}{40}} = 40$ δραχ.

Ἄθροισμα 200 δραχ.

Παρατηρήσεις

1. Καὶ στὰ δύο παραπάνω προβλήματα εἴχαμε νὰ μερίσωμε δύο

ἀριθμοὺς (τὰ 20 καρύδια καὶ τὶς 200 δραχ.) ὄχι σὲ ἴσα μέρη, ἀλλὰ σὲ μέρη :

α) ***Ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία*** τῶν παιδιῶν (στὸ α΄ πρόβλημα) καὶ β) ***ἀνάλογα μὲ τὸν ἀριθμὸ*** τῶν παιδιῶν κάθε τάξεως (στὸ β΄. πρόβλημα). Τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς τοὺς λέμε ***«μεριστέους»*** ἀριθμούς.

2. Γιὰ τὴ λύσι αὐτῶν τῶν προβλημάτων φθάσαμε στὶς ἑξῆς πράξεις :

α΄ πρόβλημα

Μεριστέος ἀριθμός : 20 καρύδια

α΄ παιδὶ (2 ἐτῶν) πῆρε $2 \times \frac{20}{10} = 4$ καρύδια

β΄ » (3 ἐ ν) » $3 \times \frac{20}{10} = 6$ »

γ΄ παιδὶ (5 ἐτῶν, πῆρε $5 \times \frac{20}{10} = 10$ καρύδια

10 ———— 20

β΄ πρόβλημα

«Μεριστέος» ἀριθμὸς 200 δραχμὲς

Δ΄ Τάξις (20 παιδιὰ) θὰ πληρώση : $20 \times \frac{200}{40} = 100$ δραχ.

Ε΄ » (12 ») » » : $12 \times \frac{200}{40} = 60$ δραχ.

ΣΤ΄ » (8 ») » » : $8 \times \frac{200}{40} = 40$ δραχ.

40 ———— 200 δραχ.

3. Παρατηροῦντες καλὰ τὶς παραπάνω πράξεις βγάζομε τὸ ἑξῆς συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ μερίσωμε ἕναν ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, τὸν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

β΄) Διάφορα προβλήματα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα

1. Τρία ἀδέλφια κληρονόμησαν 48.000 δραχ. ποὺ ἔπρεπε νὰ με-

ριστοῦν ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία τους. Τὸ πρῶτο ἦταν 6, τὸ δεύτερο 8 καὶ τὸ τρίτο 10 χρόνων. Πόσα χρήματα θὰ πάρη τὸ κάθε παιδί;

2. 3.200 ὀκ. σιτάρι πρέπει νὰ μοιραστοῦν τρεῖς γεωργοὶ ἀνάλογα μὲ τὸ σπόρο, ποὺ διέθεσε ὁ καθένας ὅταν ἔσπειραν συνεταιρικὰ τὸ χωράφι (σέμπροι, κολλῆγοι)· ὁ πρῶτος ἔβαλε 40, ὁ δεύτερος 50 καὶ ὁ τρίτος 70 ὀκ. σπόρο. Πόσο σιτάρι θὰ πάρη ὁ καθένας;

3. Δυὸ ἄνθρωποι μετέφεραν σιτάρι ἀπὸ ἕνα χωριὸ σὲ μιὰ πόλι καὶ πῆραν γιὰ ἀγώγια 1.200 δραχ., ποὺ πρέπει νὰ τὶς μοιράσουν ἀνάλογα μὲ τὸ βάρος, ποὺ μετέφεραν. Ὁ πρῶτος μετέφερε 80 ὀκ. καὶ ὁ δεύτερος 70 ὀκ. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ καθένας;

4. Τρεῖς βρύσεις γέμισαν μιὰ δεξαμενή, ποὺ χωροῦσε 1.500 ὀκάδες νερὸ σὲ 12 ὧρες. Ἡ μιὰ ἔτρεξε 2 ὧρες, ἡ ἄλλη 4 καὶ ἡ τρίτη 6 ὧρες. Πόσο νερὸ ἔτρεξε ἀπὸ τὴν κάθε μιά;

5. Τρεῖς οἰκογένειες μένουν μαζὶ σ' ἕνα σπίτι. Πληρώνουν τὸ φωτισμὸ ἀνάλονα μὲ τὰ ἄτομα κάθε οἰκογενείας· ἡ πρώτη οἰκογέκογένεια ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 ἄτομα, ἡ δεύτερη ἀπὸ 3 καὶ ἡ τρίτη ἀπὸ 6 ἄτομα. Πόσο θὰ πληρώση κάθε οἰκογένεια, ἂν αὐτὸ τὸ μῆνα ὁ λογαριασμὸς γιὰ τὸ φῶς εἶναι 120 δραχμές;

6. Δυὸ βοσκοὶ ἐνοικίασαν ἕνα λειβάδι μὲ 10.000 δραχμές. Ὁ ἕνας ἐβόσκησε 120 πρόβατα καὶ ὁ ἄλλος 40. Πόσα χρήματα θὰ πληρώση ὁ καθένας;

7. Οἱ δυό μεγάλες τάξεις ἑνὸς Σχολείου ἔκαμαν μιὰ ἐκδρομή. Στὴν ἐκδρομὴ πῆγαν 20 μαθηταὶ ἀπὸ τὴ μιὰ καὶ 40 ἀπὸ τὴν ἄλλη. Τὸ αὐτοκίνητο ζήτησε 200 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώση κάθε τάξις;

8. Δυὸ ἐργάτες ὤργωσαν ἕνα χωράφι καὶ πῆραν 3.200 δραχμές. Ὁ ἕνας ἐργάστηκε 6 ἡμέρες καὶ ὁ δεύτερος 4. Πόσες δραχ. θὰ πάρη ὁ καθένας;

9. Τέσσερες κτίστες εἰργάσθησαν σὲ μιὰ οἰκοδομή· ὁ πρῶτος εἰργάσθη 8 ἡμέρες, ὁ δεύτερος 5, ὁ τρίτος 4 καὶ ὁ τέταρτος 3· πληρώθηκαν ὅλοι μαζὶ καὶ πῆραν 2.880 δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ καθένας;

7 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Α') Παράδειγμα

Πρόβλημα 1ον

Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν χρήματα κι' ἔκαναν μιὰ ἐπιχείρησι· ὁ πρῶτος κατέθεσε 3.000 δραχμές, ὁ δεύτερος 5.000 καὶ ὁ τρίτος 2.000· ἐκέρδισαν στὸ τέλος τῆς ἐπιχειρήσεως 30.000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Πρόβλημα 2ον

Τρεῖς συνεταῖροι ἔκαναν μαζὶ μιὰ ἐπιχείρησι. Κατέθεσε καθένας τὸ αὐτό ποσόν· στὴν ἐπιχείρησι ὅμως ἔμειναν 4 ἔτη τὰ χρήματα τοῦ πρώτου, 6 ἔτη τοῦ δευτέρου καὶ 8 ἔτη τὰ χρήματα τοῦ τρίτου. Στὸ τέλος ἡ ἐπιχείρησις ἄφησε ζημία 2.700 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

Πρόβλημα 3ον

Ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρησι μὲ 90.000 δραχμές. Ὕστερα ἀπὸ 5 μῆνες πῆρε καὶ ἄλλο συνέταιρο, ποὺ κατέθεσε 60.000 δραχμές. 10 μῆνες ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν 2.000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ ὁ καθένας;

Β΄) Ἀσκήσεις

1. Προσέξτε νὰ καταλάβετε καλὰ καὶ τὰ 3 παραπάνω προβλήματα.
2. Τί διαφορὰ παρουσιάζουν μεταξύ τους;
3. Μὲ ποιὰ προβλήματα μοιάζουν;
4. Γιὰ προσπαθῆστε μόνοι σας νὰ τὰ λύσετε.
5. Ποῦ βρίσκετε δυσκολία;

Γ΄) Παρατηρήσεις

1. Καὶ στὰ 3 παραπάνω προβλήματα βλέπομε, ὅτι δυὸ ἢ περισσότεροι ἄνθρωποι κάνουν μαζὶ μιὰ ἐργασία (ἐπιχείρησι, συνεταιρισμό). Κάνουν, ὅπως λέμε, μιὰ ***ἑταιρεία.***

2. Γι᾿ αὐτὸ τὰ προβλήματα αὐτὰ λέγονται ***προβλήματα Ἑταιρείας.***

3. Στὰ προβλήματα Ἑταιρείας μᾶς ζητεῖται νὰ μοιραστοῦν οἱ συνεταῖροι τὰ κέρδη ἢ τὶς ζημίες τῶν ἐπιχειρήσεων, ποὺ ἔκαναν.

4. Λογικὸ εἶναι τὶς ζημίες καὶ τὰ κέρδη νὰ μὴ τὶς μοιραστοῦν «ἐξ ἴσου» οἱ συνεταῖροι, μιὰ καὶ δὲν κατέθεσαν τὰ ἴδια κεφάλαια ὅλοι τους ἢ δὲν ἔμειναν τὸν ἴδιο χρόνο τὰ κεφάλαιά τους στὴν ἐπιχείρησι.

5. Δίκαιο λοιπὸν εἶναι νὰ μοιραστοῦν (μεριστοῦν) τὰ κέρδη καὶ οἱ ζημίες:

α) **ἀνάλογα μὲ τὰ χρήματα,** ποὺ κατέθεσε ὁ καθένας τους καὶ β) **ἀνάλογα μὲ τὸ χρόνο,** ποὺ ἔμειναν τὰ χρήματα καθενὸς στὴν ἐπιχείρησι.

6. Ὕστερα ἀπ' ὅλα αὐτὰ φαίνεται πιὰ καθαρά, ὅτι τὰ προβλήματα Ἑταιρείας δὲν διαφέρουν καθόλου ἀπὸ τὰ προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

7. Σύμφωνα λοιπὸν μ' ὅ,τι ἐμάθαμε στὰ προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε στὰ παραπάνω προβλήματα:

Πρόβλημα 1ον

(Κεφάλαια διάφορα)

Σκέψις

Ἀφοῦ οἱ τρεῖς ἔμποροι δὲν κατέθεσαν τὰ ἴδια κεφάλαια καὶ τὸ κέρδος, ποὺ θὰ πάρη καθένας τους, δὲν θὰ εἶναι τὸ ἴδιο. Τὸ κέρδος πρέπει νὰ μοιραστῆ (νὰ μεριστῆ), **ἀνάλογα μὲ τὰ ποσά,** ποὺ κατέθεσε ὁ καθένας.

Τὸ κέρδος λοιπὸν 30.000 δραχ. θὰ μεριστῆ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3.000, 5.000 καὶ 2.000· 3.000+5.000+2000=10.000.

Λύσις

Ἑπομένως:

Κέρδος τοῦ α' $\frac{30.000 \times 3.000}{10.000} = 9.000$ δραχ.

Κέρδος τοῦ β' $\frac{30.000 \times 5.000}{10.000} = 15.000$ δραχ.

Κέρδος τοῦ γ' $\frac{30.000 \times 2.000}{10.000} = 6.000$ δραχ.

Ὁλικὸ κέρδος 30.000 δραχ.

Πρόβλημα 2ον

(Χρόνος διάφορος)

Σκέψις

Οἱ τρεῖς συνέταιροι κατέθεσαν τὰ ἴδια κεφάλαια· αὐτὰ ὅμως ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι διάφορο χρόνο (4 ἔτη τοῦ πρώτου, 6 τοῦ δευτέρου καὶ 8 τοῦ τρίτου).

Ἡ ζημία πρέπει νὰ μοιραστῇ (νὰ μεριστῇ) ***ἀνάλογα μὲ τὸ χρόνο***, ποὺ ἔμειναν τὰ λεπτὰ καθενὸς στὴν ἐπιχείρησι.

Ἡ ζημία λοιπὸν 2.700 δραχ. πρέπει νὰ μεριστῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4, 6 καὶ 8.

$$4 + 6 + 8 = 18$$

Λύσις

Ἑπομένως :

Ζημία α΄ $\dfrac{2700 \times 4}{8} =$ 600 δραχ.

Ζημία τοῦ β΄ $\dfrac{2700 \times 6}{18} =$ 900 δραχ.

Ζημία τοῦ γ΄ $\dfrac{2700 \times 8}{18} =$ 1.200 δραχ.

Συνολικὴ ζημία 2.700 δραχ.

Πρόβλημα 3ον

(Κεφάλαια καὶ χρόνος διάφορα)

Σκέψις

Σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα καὶ ***τὰ κεφάλαια***, ποὺ κατέθεσαν οἱ ἔμποροι καὶ ὁ ***χρονος***, ποὺ ἔμειναν τὰ κεφάλαια στὴν ἐπιχείρησι, εἶναι ***διάφορα***.

Ὁ πρῶτος κατέθεσε 190.000 δραχ. γιὰ 10 μῆνες καὶ ὁ δεύτερος 60.000 δραχ. διὰ 5 μῆνες.

Σκεπτόμεθα τώρα ὡς ἑξῆς :

Τὸ κέρδος, ποὺ θὰ ἔπαιρνε ὁ πρῶτος σὲ 10 μῆνες, γιὰ νὰ τὸ πάρη σὲ ***ἕνα μῆνα***, θὰ ἔπρεπε τὸ κεφάλαιο, ποὺ κατέθεσε (90.000 δρχ.) νὰ γίνη 10 φορὲς περισσότερο δηλ.

$$10 \times 90.000 = \underline{900.000} \text{ δραχ.}$$

Τὸ κέρδος τώρα, ποὺ θὰ ἔπαιρνε ὁ δεύτερος σὲ 5 μῆνες γιὰ νὰ τὸ πάρη σὲ ***ἕνα μῆνα***, θὰ ἔπρεπε τὸ κεφάλαιο, ποὺ κατέθεσε (60.000 δραχ.), νὰ γίνη 5 φορὲς περισσότερο δηλ.

$$5 \times 60.000 = \underline{300.000} \text{ δραχ.}$$

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο φθάσαμε σὲ πρόβλημα, ποὺ μόνο τὰ ***κεφάλαια εἶναι διάφορα***.

Ἑπομένως τὸ κέρδος 2.000 δραχ. πρέπει νὰ μεριστῇ εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 900.000 καὶ 300.000.

$$900.000 + 300.000 = 1.200.000 \text{ δραχ.}$$

Λύσις

Ἐπομένως :

Κέρδος τοῦ α΄.

$$\frac{2.000\times 900.000}{1.200.000}=\frac{1.800\,000000}{1.200.000}=1.500 \text{ δραχ.}$$

Κέρδος τοῦ β΄

$$\frac{2.000\times 300.000}{1.200.000}=\frac{600.000.000}{1.200.000}=\ 500 \text{ δραχ.}$$

Συνολικὸ κέρδος 2.000 δραχ.

Δ΄ Διάφορα προβλήματα Ἑταιρείας

1. Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν γιὰ μιὰ ἐπιχείρησι ὁ πρῶτος 2.000 δραχμές, ὁ δεύτερος 4.000 δραχ. καὶ ὁ τρίτος 6.000 δραχ. Ἐκέρδισαν στὸ τέλος 2.400 δραχμές. Πόσο θὰ πάρη ὁ καθένας;

2. Δύο ἔμποροι κατέθεσαν τὰ ἴδια χρήματα σὲ μιὰ ἐπιχείρησι. Τοῦ πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι. 6 μῆνες καὶ τοῦ β΄ 8 μῆνες. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησι ἐκέρδισαν 4.800 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας;

3. Δυὸ βοσκοὶ ἐνοικίασαν ἕνα λειβάδι μὲ 6.000 δραχμές· ὁ ἕνας ἐβόσκησε 300 πρόβατα 5 μῆνες καὶ ὁ ἄλλος 200 πρόβατα 7 μῆνες. Πόσο ἐνοίκιο θὰ πληρώση ὁ καθένας;

4. Δυὸ ἄνθρωποι συνεφώνησαν καὶ ἔκαμαν ἐμπορικὴ ἐπιχείρησι. Ὁ πρῶτος κατέθεσε 5.000 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος 6.000 δραχ. Τοῦ πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν στὴν ἐπιχείρησι 2 μῆνες καὶ τοῦ β΄ 3 μῆνες. Ἐκέρδισαν στὸ τέλος 1.400 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρη καθένας τους;

5. Ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρησι μὲ 3.000 δραχμές· Ὕστερα ἀπὸ 2 μῆνες πῆρε συνέταιρο μὲ 5.000 δραχ. καὶ ὕστερα ἀπὸ 3 μῆνες ἀπὸ τότε ποὺ πῆρε τὸ δεύτερο, πῆρε τρίτο μὲ 2.000 δραχ. Ὕστερα ἀπὸ ἕνα ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισαν τὴν ἐπιχείρησι βρῆκαν, ὅτι κέρδισαν 2.500 δραχμές· πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας;

6. Τρεῖς ἐργάτες ἔσκαψαν ἕνα ἀμπέλι καὶ πῆραν 1.000 δραχμές· ὁ πρῶτος εἰργάσθη 8 ἡμέρες, ὁ δεύτερος 7 καὶ ὁ τρίτος 5. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη καθένας τους;

7. Τρεῖς δανειστὲς εἶχαν δανείσει σὲ μιὰ ἐπιχείρησι, ὁ πρῶτος 3.000, ὁ δεύτερος 4.000 καὶ ὁ τρίτος 900 δραχμές· ἡ ἐπιχείρησι αὐτὴ «ἔπεσε ἔξω» καὶ ὁ ὀφειλέτης δὲν τοὺς ἐπέστρεψε τὰ χρήματά τους· ἔκαναν κατάσχεσι καὶ ἐπώλησαν τὰ ἐμπορεύματά του σὲ δημοπρασία ἀντὶ 10.000 δραχ. Πόσα χρήματα θὰ πάρη καθένας;

8. Δυὸ συνέταιροι εἶχαν καταθέσει μαζὶ 7.200 δραχ. καὶ ἄρχισαν μιὰ ἐπιχείρησι, ποὺ ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρόνο ἔδωκε κέρδος 2.400 δραχμές, ὁ πρῶτος πῆρε 1.600 δραχμές. Τί κεφάλαια εἶχε καταθέσει καθένας τους;

9. Ἕνας θεῖος ἔδωσε 600 δραχμὲς δῶρο τὴν πρωτοχρονιὰ στὰ δυὸ ἀνήψια του καὶ τοὺς εἶπε νὰ τὶς μοιράσουν μεταξύ τους ἀνάλογα μὲ τὴ ἡλικία τους. Τὸ ἕνα παιδὶ εἶναι 5 χρόνων καὶ τὸ ἄλλο 12. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη καθένα;

10. 4 κρεοπῶλαι πῆραν ἕνα βοσκὸ γιὰ τὰ πρόβατά τους καὶ τὸν πλήρωναν 900 δραχμὲς τὸ μῆνα· ὁ πρῶτος εἶχε 10, ὁ δεύτερος 15, ὁ τρίτος 18 καὶ ὁ τέταρτος 20 πρόβατα. Πόσα θὰ πληρώνη ὁ καθένας τὸ μῆνα;

11. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν μιὰ ἐπιχείρησι καὶ κατέθεσαν 2.500 ὁ πρῶτος, 4.000 χιλιάδες ὁ δεύτερος καὶ 3.000 δραχ. ὁ τρίτος καὶ ζημιώθηκαν στὸ τέλος 2.000 δραχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

12. Δυὸ ἔμποροι ἔκαμαν συνεταιρισμὸ καὶ κατέθεσαν τὰ ἴδια κεφάλαια. Τοῦ πρώτου τὸ κεφάλαιο ἔμεινε στὴν ἐπιχείρησι 8 μῆνες, καὶ τοῦ δευτέρου 10 μῆνες· κέρδισαν στὸ τέλος 1.600 δραχμές. Πόσο θὰ πάρη ὁ καθένας;

13. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε τὸ ἐμπόριό του μὲ 12.000 δραχμές. Ὕστερα ἀπὸ 3 μῆνες πῆρε καὶ ἄλλο συνέταιρο μὲ 8.000. Στὸ τέλος τοῦ χρόνου ζημιώθηκαν 2.400 δραχ. Πόσο θὰ πληρώση ὁ καθένας;

14. Γιὰ τὸ σκάψιμο ἑνὸς ἀμπελιοῦ πῆρε ἕνας 8 ἐργάτες· τὴν ἄλλη ἡμέρα πῆρε ἄλλους 6 καὶ τὴν ἄλλη ἄλλους 3, μὲ τὸ ἴδιο ἡμερομίσθιο ὅλους. Τὸ σκάψιμο τελείωσε σὲ 5 ἡμέρες καὶ πῆραν ὅλοι μαζὶ 2.400 δραχμές. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας;

15. Τρεῖς ἔμποροι εἶχαν καταθέσει σὲ μιὰ συνεταιρικὴ ἐπιχείρησι 60.00 δροχμές. Στὸ τέλος τοῦ χρόνου μοίρασον τὰ κέρδη καὶ πῆρε ὁ πρῶτος 2.000, ὁ δεύτερος 1.500 καὶ ὁ τρίτος 500 δραχμές. Πόσο κεφάλαιο εἶχε καταθέσει ὁ καθένας τους;

8. ΜΙΞΙΣ

Α' Παράδειγμα

Πρόβλημα 1ον

Παντοπώλης εἶχε 30 ὀκάδες λάδι «πρώτης ποιότητος» ποὺ τὸ πωλοῦσε 20 δραχμὲς τὴν ὀκά, καὶ 50 ὀκάδες «δευτέρας ποιότητος» ποὺ τὸ πωλοῦσε 16 δρχ. τὴν ὀκά. Πόσο πρέπει νὰ πωλῆ τὴν ὀκά, ἂν ἀναμίξη (ἀνακατέψη) τὶς δύο ποιότητες τὸ λάδι καὶ κάνει ἕνα μῖγμα 80 ὀκάδων ;

Πρόβλημα 2ον

Ἔχει ἕνας δύο εἴδη βουτύρου, τοῦ πρώτου εἴδους τὴν ὀκὰ τὴν πωλεῖ 60 δραχμές, καὶ τοῦ δευτέρου δρχ. 40. Πόσες ὀκάδες πρέπει νὰ πάρη ἀπὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κάνη μῖγμα 120 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκὰ νὰ πωλῆ 45 δραχμὲς καὶ νὰ πάρη τὰ ἴδια χρήματα, ποὺ θὰ ἔπαιρνε, ἂν πωλοῦσε χωριστὰ τὰ δύο εἴδη βουτύρου ;

Β'. Παρατηρήσεις

1. Καὶ στὰ δύο παραπάνω προβλήματα βλέπομε, ὅτι γίνεται ἀνάμιξις (ἀνακάτεμα) μὲ δύο ποιότητες τοῦ ἴδιου πράγματος (λαδιοῦ μὲ λάδι, βουτύρου μὲ βούτυρο).

2. Αὐτὸ τὸ κάνουν οἱ ἔμποροι, γιατὶ δὲν μποροῦν νὰ πωλήσουν **χωριστὰ κάθε ποιότητα**, γιατὶ οὔτε ἡ καλὴ ποιότητα πουλιέται εὔκολα **(ἐπειδὴ εἶναι πολὺ ἀκριβὴ) οὔτε ἡ κακή.**

3. Ἀναγκάζονται λοιπὸν νὰ ἀναμιγνύουν (ἀνακατεύουν) τὶς ποιότητες αὐτὲς καὶ νὰ κάνουν μῖγμα ***«μετρίας ποιότητος»*** καὶ ***«μετρίας ἀξίας»***, ὅπως λένε.

4. Τὰ προβλήματα αὐτὰ λέγονται προβλήματα «ἀναμίξεως» ἢ «μίξεως» καὶ ἡ μέθοδος ***μίξις.***

5. Τὰ προβλήματα «μίξεως», ὅπως φαίνεται στὰ δύο παραπάνω παραδείγματα, εἶναι δύο εἰδῶν.

α) Πρῶτο εἶδος

Στὸ πρῶτο πρόβλημα μᾶς δίδονται γιὰ ἀνάμιξι ***οἱ ποσότητες δύο ποιοτήτων λαδιοῦ***, ἡ ***«ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος»*** κάθε ποιότητος καὶ ***ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.*** Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λέμε, ὅτι εἶναι πρόβλημα ***«πρώτου εἴδους μίξεως»***.

Λύσις

Ἀπὸ τὶς	30	ὀκάδες	θὰ ἔπαιρνε	$30 \times 20 =$	600 δραχ.
» »	50	»	» »	$50 \times 16 =$	800 »
	80				1.400 δραχ.

Καὶ ἀπὸ τὰ δύο εἴδη θὰ ἔπαιρνε 1.400 δραχμές· τόσο πρέπει νὰ πάρῃ καὶ ἀπὸ τὶς 80 ὀκ. τοῦ μίγματος. Ὥστε πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκὰ τοῦ μίγματος $1400 : 80 = 17,5$ δραχ.

α) Δεύτερο εἶδος

Στὸ δεύτερο πρόβλημα μᾶς δίδονται ***οἱ τιμὲς τῆς μονάδος τῶν δύο ποιοτήτων*** βουτύρου καὶ μᾶς ***ζητεῖται πόσο θὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε ποιότητα βουτύρου, γιὰ νὰ κάνωμε μῖγμα ὡρισμένης ποσότητος μὲ ὡρισμένη τιμὴ*** (ποὺ βρίσκεται ἀνάμεσα στὶς τιμὲς τῶν δύο ποιοτήτων) καὶ νὰ μὴ ἔχωμε κέρδος ἢ ζημία.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λέμε ὅτι εἶναι ***«δευτέρου εἴδους μίξεως»***.

Λύσις

1. (α΄. τρόπος)

Κατάταξις:	α΄. 60 δρχ		5 δρχ.
Μεριστέος 120 ὀκ.		45	
	β΄. 40		15
			21

Δηλαδὴ στὴν κατάταξι γράφομε ἀνάμεσα στὶς δύο τιμές, ποὺ μᾶς δόθηκαν (60 καὶ 40) τὴν τιμὴ τοῦ μίγματος (45). Ἔπειτα στὰ δεξιὰ τῆς τιμῆς τοῦ πρώτου γράφομε ***τὴ διαφορὰ*** τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος καὶ τῆς τιμῆς τοῦ β΄ εἴδους καὶ δεξιὰ τῆς τιμῆς τοῦ β΄ εἴδους τὴ διαφορὰ τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος καὶ τῆς τιμῆς τοῦ πρώτου εἴδους. Τὶς 120 ὀκ. τώρα τοῦ μίγματος (μεριστέο ἀριθμὸ) θὰ τὶς μερίσωμε εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν διαφορῶν αὐτῶν $(5 + 15 = 20)$.

Ἀπὸ τὸ πρῶτο εἶδος θὰ πάρῃ: $\frac{120 \times 5}{20} = \frac{600}{20} = 30$ ὀκ.

» » δεύτερο » » » : $\frac{120 \times 15}{20} = \frac{1800}{20} = 90$ ὀκ.

Σύνολον 120 ὀκ.

(β'. τρόπος)

Κάθε ὀκὰ τοῦ πρώτου εἴδους ἔχει 60 δραχμές. Ἂν τὴν πωλῆ 45 δραχ. θὰ ζημιώνεται (θὰ χάνη) 15 δραχμές.

Κάθε ὀκὰ τοῦ δευτέρου εἴδους ἔχει 40 δραχμές. Ἂν τὴν πωλῆ 45 δραχ. θὰ κερδίζη 5 δραχμές.

Ὥστε: ἂν πάρη 5 ὀκάδες ἀπὸ τὸ πρῶτο εἶδος θὰ ζημιώνεται $5 \times 15 = 75$ δραχ. Ἂν πάρη 15 ὀκ. ἀπὸ τὸ δεύτερο εἶδος θὰ κερδίζη $15 \times 5 = 75$ δραχμές.

Ἂν πάρη δηλ. 5 ὀκ. ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ 15 ὀκ. ἀπὸ τὸ δεύτερο εἶδος, δὲν ἔχει οὔτε κέρδος οὔτε ζημία.

Ἑπομένως ἂν ἔκανε μῖγμα 20 ὀκάδων θὰ ἔπαιρνε 5 ὀκ. ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ 15 ὀκ. ἀπὸ τὸ δεύτερο εἶδος.

Γιὰ μῖγμα 20 ὀκ. παίρνει ἀπὸ τὸ α' εἶδος 5 ὀκ.
» » 120 » » » » » » X

$$X = 5 \times \frac{120}{20} = \frac{600}{20} = \frac{60}{2} = \quad 30 \text{ ὀκ.}$$

Γιὰ μῖγμα 20 ὀκ. παίρνει ἀπὸ τὸ β' εἶδος 15 ὀκ.
» » 120 » » » » » » X

$$X = 15 \times \frac{120}{20} = \frac{1.800}{20} = \frac{180}{2} = \quad 90 \text{ ὀκ.}$$

Σύνολον 120 ὀκ.

Γ' Διάφορα προβλήματα μίξεως

1. Κτηνοτρόφος ἀνέμιξε 25 ὀκ. βουτύρου τῶν 75 δραχμῶν καὶ 35 ὀκ. τῶν 50 δραχ. Πόσο θὰ πωλῆ τὴν ὀκὰ τοῦ μίγματος;

2. Ἀνέμιξε ἔμπορος δύο εἴδη οἰνοπνεύματος. Τὸ ἕνα ἦταν 80° (βαθμῶν) καὶ τὸ ἄλλο 60° (βαθμῶν)· θέλει νὰ κάνη οἰνόπνευμα 65° (βαθμῶν). Πόσο οἰνόπνευμα θὰ πάρη ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κάνη μῖγμα 80 ὀκάδων;

3. Παντοπώλης ἀνέμιξε 50 ὀκ. λίπος τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ ἤξιζε 30 δραχμές μὲ τετραπλάσιες ὀκάδες βουτύρου τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ ἤξιζε 75 δραχμές. Πόσο κοστίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μίγματος;

4. Παντοπώλης ἀγόρασε 400 ὀκάδες λάδι πρὸς 18 δραχ. τὴν ὀκὰ καὶ 150 ὀκ. ἄλλου πρὸς 15 δραχ. τὴν ὀκά· ἐξόδευσε γιὰ τὴ μεταφορά

του 10% ἐπὶ τῆς ἀξίας του· ὕστερα ἀνέμιξε τὰ δύο εἴδη. Πόσο πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκὰ τοῦ μίγματος;

5. Πόσο θὰ πωλῆται ἡ ὀκὰ μίγματος 400 ὀκάδων κρασιοῦ τῶν 7 δραχμῶν καὶ 50 ὀκάδων νεροῦ;

6. Πόσες ὀκάδες βούτυρο τῶν 60 δραχμῶν θὰ ἀναμίξωμε μὲ 75 ὀκ. τῶν 35 δραχ. γιὰ νὰ κάνωμε μῖγμα 150 ὀκάδων τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ νὰ στοιχίζη 40 δραχμές.

7. Πόσο γνήσιο κερὶ τῶν 120 δραχμῶν θὰ ἀναμίξωμε μὲ παραφίνη τῶν 30 δραχ. γιὰ νὰ κάνωμε μῖγμα 10 ὀκάδων τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ νά εἶναι 80 δραχμές;

8. Μὲ πόσες ὀκάδες νερὸ θὰ ἀναμίξωμε 300 ὀκάδες κρασὶ τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ στοιχίζει 9 δραχμὲς γιὰ νὰ κάνωμε μῖγμα τοῦ ὁποίου ἡ ὀκὰ θὰ στοιχίζη 7 δραχμές;

9. Καφεπώλης ἠθέλησε νὰ κάμη μῖγμα 250 ὀκ. ἀπὸ δύο εἴδη καφέ. Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἦταν 120 καὶ τοῦ ἄλλου 80 δραχμές. Πόσες ὀκαδες θὰ ἀνσμίξη ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κάμη μῖγμα τιμῆς 100 δραχμῶν.

10. Νὰ βρῆς τὴν τιμὴ τῆς ὀκᾶς στὰ παρακάτω μίγματα:

α) Καφές:	20	ὀκάδες	τῶν	90	δραχ.	καὶ	30	ὀκ.	τῶν	70 δραχ.
»	50	»	»	13	»	»	20	»	»	90 »
»	70	»	»	15	»	»	10	»	»	100 »
β) Κρασί:	25	»	»	9	»	»	75	»	»	7 »
»	35	»	»	12	»	»	45	»	»	9 »
»	50	»	»	10	»	»	30	»	»	8 »
γ) Βούτυρο	60	»	»	80	»	»	20	»	»	50 »
»	70	»	»	90	»	»	20	»	»	35 »

ΓΙΑ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

1. Κατὰ τὴν συγγραφὴ τῆς «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ» μας προσεπαθήσαμε νὰ προσεγγίσωμε τὴν φύσι, ἀντιληπτικότητα καὶ πνευματικὴ κατάστασι τῶν παιδιῶν.

2. Ἀποπειραθήκαμε νὰ δώσωμε στὰ παιδιὰ εὔληπτο, μεθοδικό, ἐπιστημονικὸ βοήθημα καὶ στὸν διδάσκοντα μεθοδικὴ καὶ ***κατὰ τὶς ἀπαιτήσεις τῆς Εἰδικῆς Διδακτικῆς τοῦ μαθήματος*** διάταξι καὶ διαπραγμάτευσι τῆς ὕλης. Πρὸς τὸν σκοπὸ αὐτόν :

α) Γιὰ τὴν θεραπεία τῆς ἀρχῆς τῆς αὐτενεργείας καὶ πρωτοβουλίας τοῦ παιδιοῦ δὲν δίδομε ἀβασάνιστα ἕτοιμους κανόνες καὶ ἔννοιες, ἀλλὰ τὶς βγάζομε ὕστερα ἀπὸ πρόταξι πολλῶν παραδειγμάτων.

β) Δὲν δίδομε πρὸς λύσι, ἀμέσως μετὰ τὴν ἐξάντλησι τοῦ σχετικοῦ «ἐπὶ μέρους» θέματος, προβλήματα (ὁπότε θὰ ἐλύοντο ἀπὸ τὰ παιδιὰ χωρὶς καμμιὰ καταβολὴ ἰδιαίτερης προσοχῆς καὶ αὐτενεργείας) ἀλλὰ μετὰ τὴν διαπραγμάτευσι ὅλων τῶν «ἐπὶ μέρους» κεφαλαίων μιᾶς ἑνότητος.

3. ***Διεπραγματεύθημεν στὴν ὕλη τῆς Ε΄ τάξεως καὶ τοὺς συμμιγεῖς*** ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι ἡ διδασκαλία τους στὰ μονοτάξια σχολεῖα δὲν γίνεται στὴν Δ΄ ἀλλὰ στὴν Ε΄ τάξι, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι ἡ ἀντιληπτικὴ ἱκανότης τῶν μαθητῶν τῆς Δ΄ τάξεως δὲν μπορεῖ νὰ ἀφομοιώση, ὕστερα ἀπὸ τὴν διδασκαλία τῶν δεκαδικῶν, τοὺς συμμιγεῖς.

4. Γενικὰ προσεπαθήσαμε νὰ δώσωμε στὰ παιδιὰ καὶ στὸ δάσκαλο ἕνα πραγματικὸ βοήθημα γιὰ νὰ γίνεται τὸ μάθημα εὐχάριστο στὰ πρῶτα καὶ ἄνετο στὸ δεύτερο.

5. Ἐλπίζομε ὅτι θὰ ἱκανοποιήση τὶς ἀξιώσεις τοῦ συναδελφικοῦ κόσμου, στὴν ὑποδοχὴ καὶ κρίσι τοῦ ὁποίου καὶ τὸ παραδίδομε.

ΟΙ ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ (ΤΑΞΙΣ Ε΄)

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ (ΤΑΞΙΣ ΣΤ΄)

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 3—7—1952

Δ)νσις Διδ. Βιβλίων
Ἀριθμ. Πρωτ. 61330

Πρὸς

Α. Ντοῦζον - Α. Παπανδρέου

Ἐνταῦθα

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 61452]12—6—52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου Ἐκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον **«Ἀριθμητικὴ καὶ προβλήματα»** *βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῶν* **μαθηματικῶν** *διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' καὶ ΣΤ' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν, ἀρχομένην ἀπὸ 1—9—52.*

Παρακαλοῦμεν ὅθεν ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφούμενος πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Ἐντ. Ὑπουργοῦ
Ὁ Δ]τὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Κοινοποίησις
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

Τιμᾶται Δρχ.