Π. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΥ

Παναγοπούλου

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΑΝΟΥ Δ. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΥ
Τέως ἐπιθεωρητοῦ τῶν δημοτικῶν σχολείων.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τὴν Ε΄. τάξιν τῶν Δημοτικῶν Σχολείων

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε. ΑΘΗΝΑΙ
4 – ΟΔΟΣ ΑΛΘΑΙΑΣ – 4

Κάθε ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

PRINTEDIN GREECE-1934
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α.Ε.

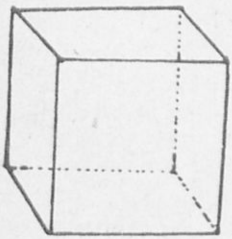
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΥΒΟΣ

Ἡ Φυσικὴ πειραματικὴ μᾶς διδάσκει ὅτι τὰ σώματα εἶναι στερεά, ὑγρὰ καὶ ἀέρια. Στερεὰ σώματα εἶναι οἱ λίθοι, τὰ ξύλα, ὁ σίδηρος, ὁ χρυσὸς κ.λ. Ὑγρὰ εἶναι τὸ ὕδωρ, τὸ γάλα, τὸ πετρέλαιον, τὸ οἰνόπνευμα κ. λ. Ἀέρια εἶναι ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ, τὸ ὑδρογόνον, τὸ ἀνθρακικὸν ὀξὺ κ.λ.

Τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον καὶ ὡρισμένον σχῆμα. Τὰ ὑγρὰ δὲν ἔχουν ὡρισμένον σχῆμα, ἀλλὰ λαμβάνουν τὸ σχῆμα τοῦ δοχείου, εἰς τὸ ὁποῖον περιέχονται. Παραμένουν δὲ πάντοτε εἰς τὸ βάθος τοῦ δοχείου. Τὰ ἀέρια δὲν ἔχουν ὡρισμένον σχῆμα, ἀλλὰ λαμβάνουν τὸ σχῆμα τοῦ ἀγγείου, εἰς τὸ ὁποῖον περιέχονται. Δὲν μένουν εἰς τὸ βάθος τοῦ δοχείου, ἀλλὰ τὸ γεμίζουν ὁλόκληρον καὶ τείνουν νὰ καταλάβουν πάντα κενὸν χῶρον.

Ἐκ τῶν στερεῶν σωμάτων ἄλλα ἔχουν κανονικὸν σχῆμα, ὅπως εἶναι οἱ κρύσταλλοι καὶ ἄλλα ἔχουν ἀκανόνιστον σχῆμα, ὅπως εἶναι οἱ ἀκατέργαστοι λίθοι, τὰ ἀκατέργαστα ξύλα κ.λ. Τὰ κανονικώτερα ἐκ τῶν στερεῶν σωμάτων εἶναι ὁ κύβος καὶ ἡ σφαῖρα, διότι ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τὰ τοποθετήσωμεν, τὴν αὐτὴν ὄψιν θὰ παρουσιάζουν.



Σχ. 1.

Τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν τρεῖς διαστάσεις, μῆκος, πλάτος, ὕψος. Καὶ εἰς ἄλλα μὲν σώματα τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος εἶναι διάφορα, εἰς τὸν κύβον ὅμως καὶ τὰ τρία εἶναι ἴσα (σχ. 1ον). Διὰ τοῦτο, ὅπως καὶ ἂν τοποθετήσωμεν τὸν κύβον, τὴν αὐτὴν ὄψιν θὰ παρουσιάζῃ.

***

Ἀσκήσεις. Ζητήσατε ἀπὸ τὸν διδάσκαλόν σας κύβον καὶ διάφορα ἄλλα γεωμετρικὰ σώματα. Τοποθετήσατε αὐτὰ εἰς διαφόρους στάσεις καὶ παρατηρήσατε ποίαν ὄψιν προυσιάζουν. Μετρήσατε μὲ μίαν κλωστὴν τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τοῦ κύβου. Μετρήσατε μὲ μίαν κλωστὴν τὸ μῆκος, τὸ πλάτος, καὶ ὕψος καὶ ἄλλων γεωμετρικῶν σωμάτων.

***

Ὅταν παρατηροῦμεν τὰ στερεὰ σώματα, βλέπομεν μόνον τὴν ἐξωτερικὴν αὐτῶν ὄψιν. Αὐτὴ ἡ ἐξωτερικὴ ὄψις τῶν στερεῶν σωμάτων λέγεται ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τὰ ἄκρα ἑκάστου στερεοῦ σώματος. Ἐπιφάνειαν ἔχουν καὶ τὰ ὑγρά. Ὅσον μέρος τοῦ ὑγροῦ εἶναι εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ δοχείου λέγεται ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ. Τὰ ἀέρια δὲν ἔχουν ἐπιφάνειαν.

Λαμβάνομεν μίαν κλωστὴν μὲ τὰς δύο χεῖρας μας καὶ τὴν τεντώνομεν. Ἂν τὴν βάλωμεν ἐπάνω εἰς μίαν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ κλωστὴ ἐφαρμόζει καθ' ὅλα τὰ σημεῖα της ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τὴν βάλωμεν. Ἂν τὴν βάλωμεν τεντωμένην εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐφάπτεται μόνον εἰς ἓν σημεῖον.

Ὅταν ἡ τεντωμένη κλωστὴ ἐφαρμόζῃ εἰς μίαν ἐπιφάνειαν καθ' ὅλα τὰ σημεῖα της καὶ καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται ἐπίπεδος.

Ὅταν ἡ τεντωμένη κλωστὴ ἐφαρμόζει μόνον εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, τότε ἡ ἐπιφάνεια λέγεται κυρτή. Ὑπάρχουν ἐπιφάνειαι, εἰς τὰς ὁποίας κατὰ μίαν διεύθυνσιν ἡ τεντωμένη κλωστὴ ἐφαρμόζει ὁλόκληρος. Δὲν δυνάμεθα ὅμως αὐτὰς τὰς ἐπιφανείας νὰ τὰς ὀνομάσωμεν ἐπιπέδους, διότι ἡ κλωστὴ ἐφαρμόζει μόνον κατὰ μίαν διεύθυνσιν. Τοιαῦται κυρταὶ ἐπιφάνειαι εἶναι τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου. Ἂν τὴν τεντωμένην κλωστὴν τὴν θέσωμεν κατὰ μῆκος τοῦ κυλίνδρου ἢ τοῦ κώνου, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει ὁλόκληρος. Ἂν ὅμως τῆς ἀλλάξωμεν ὀλίγον διεύθυνσιν, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει μόνον εἰς ἓν σημεῖον.

Ὁ κύβος ἔχει ἓξ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι λέγονται ἕδραι. Ἂν ἐφαρμόσωμεν χαρτὶ εἰς ἑκάστην ἕδραν τοῦ κύβου καὶ κατόπιν τὸ κόψωμεν ἀκριβῶς εἰς τὸ μέγεθος ἑκάστης ἕδρας, θὰ ἔχωμεν ἓξ χαρτία, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐντελῶς ἴσα. Αἱ ἕδραι λοιπὸν τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι.

Τὸ μέρος, ὅπου συναντῶνται δύο ἕδραι, λέγεται ἀκμή. Ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμάς. Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται τρεῖς ἕδραι λέγεται κορυφή. Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφάς.

***

Ἀσκήσεις. Ζητήσατε ἀπὸ τὸν διδάσκαλόν σας καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ σώματα καὶ παρατηρήσατε τὰς ἐπιφανείας των. Παρατηρήσατε τὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἄλλων στερεῶν σωμάτων. Παρατηρήσατε τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν διαφόρων ὑγρῶν. Πάρετε μίαν τεντωμένην κλωστὴν καὶ ἐφαρμόσατε αὐτὴν κατὰ διαφόρους διευθύνσεις εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ κύβου, τῆς σφαίρας, τοῦ κυλίνδρου, ἑνὸς μήλου, ἑνὸς αὐγοῦ, τοῦ πατώματος, τῆς ὑάλου κ.λ. Μετρήσατε τὰς ἕδρας ἑνὸς κυτίου σπίρτων, ἑνὸς κυτίου χαρτίνου. Μετρήσατε τὰς ἀκμὰς καὶ τὰς κορυφὰς διαφόρων γεωμετρικῶν σωμάτων.

***

Ἂν πάρωμεν ἕνα σπάγγον καὶ εἰς τὸ ἄκρον του δέσωμεν μίαν πέτραν καὶ τὴν ἀφήσωμεν ἐλευθέραν νὰ κρέμαται, ὁ σπάγγος θὰ λάβῃ μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν. Ἂν μετακινήσωμεν τὴν πέτραν πρὸς τὰ πλάγια, μετά τινας ταλαντεύσεις ὁ σπάγγος θὰ λάβῃ τὴν προτέραν κατεύθυνσιν. Ἡ κατεύθυνσις αὕτη τοῦ σπάγγου λέγεται κατακόρυφος.

Σχ. 2.

Ὁ σπάγγος μὲ τὸ βάρος εἰς τὸ κάτω μέρος λέγεται νῆμα τῆς στάθμης. (σχ. 2).

Τὸ νῆμα τῆς στάθμης τὸ μεταχειρίζονται οἱ κτίσται, διὰ νὰ κάμνουν τοὺς τοίχους κατακορύφους.

Ἂν παρατηρήσωμεν τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἑνὸς ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς δοχείου ἀκινήτου, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὕτη ἔχει ἀμετάβλητον διεύθυνσιν, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν στήσωμεν τὸ δοχεῖον. Ἂν ἀναταράξωμεν τὸ ὑγρὸν καὶ κατόπιν τὸ ἀφήσωμεν ἥσυχον, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνειά του θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν θέσιν της. Ἡ ἀμετάβλητος αὐτὴ διεύθυνσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τῶν ἠρεμούντων ὑγρῶν λέγεται ὁριζοντία.

Ἔχομεν λοιπὸν δύο ἀμεταβλήτους διευθύνσεις τὴν κατακόρυφον καὶ τὴν ὁριζοντίαν. Κατακόρυφον διεύθυνσιν ἔχουν οἱ τοῖχοι, ὁριζοντίαν τὰ πατώματα καὶ αἱ ὀροφαί. Πᾶσα γραμμὴ εὐθεῖα, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφος οὔτε ὁριζοντία λέγεται κεκλιμένη ἢ πλαγία.

Διὰ νὰ κάμνουν οἱ τεχνῖται κατακορύφους τοὺς τοίχους, ἔχουν τὸ νῆμα τῆς στάθμης. Διὰ νὰ κάμνουν τὰ πατώματα καὶ τὰς ὀροφὰς ὁριζοντίας, ἔχουν ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται ἀεροστάθμη. Αὐτὴ εἶναι εἷς σωλὴν ὑάλινος κλειστὸς καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη γεμάτος ὕδωρ χρωματισμένον. Μόνον ἐλάχιστον μέρος τούτου εἶναι κενόν. Ἀκριβῶς μία φυσαλὶς ἀέρος εἶναι ἐντός. Ὅταν ὁ σωλὴν ἔχῃ ὁριζοντίαν διεύθυνσιν, ἡ φυσαλὶς τοῦ ἀέρος εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ σωλῆνος.

Ἐὰν θέσωμεν ἕνα κύβον ἐπὶ τῆς τραπέζης, βλέπομεν ὅτι ἔχει μίαν ἕδραν ἐμπρός, μίαν ὀπίσω, μίαν δεξιά, μίαν ἀριστερά, μίαν ἄνω καὶ μίαν κάτω. Ἡ ἄνω ἕδρα ἑνώνεται μὲ τὴν δεξιὰν καὶ ἀριστεράν, μὲ τὴν ἐμπρὸς καὶ τὴν ὀπίσω, μὲ τὴν κάτω ὄχι. Ἡ δεξιὰ ἑνώνεται μὲ τὴν ἄνω καὶ κάτω, μὲ τὴν ἐμπρὸς καὶ ὀπίσω, μὲ τὴν ἀριστερὰν ὄχι.

Παίρνομεν ἓν χαρτόνιον μεγαλύτερον ἀπὸ μίαν ἕδραν τοῦ κύβου καὶ τὸ προσαρμόζομεν εἰς τὴν δεξιὰν ἕδραν του. Παίρνομεν ἄλλο καὶ τὸ προσαρμόζομεν εἰς τὴν ἀριστεράν. Τὰ δύο χαρτόνια προεξέχουν. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰ χαρτόνια αὐτά, οὐδέποτε θὰ συναντηθοῦν. Προσαρμόζομεν τὰ δύο χαρτόνια εἰς τὴν κάτω ἕδραν καὶ εἰς τὴν ἄνω καὶ βλέπομεν τὸ ἴδιον ὅτι ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν, δὲν συναντῶνται. Τὰ χαρτόνια εἶναι δύο ἐπιφάνειαι. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι αἱ δύο αὐταὶ ἐπιφάνειαι ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν, δὲν συναντῶνται. Ὅταν συμβαίνῃ τὸ τοιοῦτον, τότε αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ λέγονται παράλληλοι.

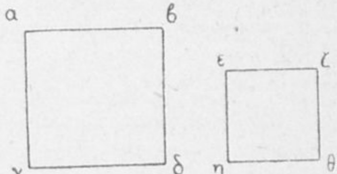
Λοιπὸν ἡ δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι παράλληλοι. Ἐπίσης ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω ἡ ἐμπρὸς καὶ ἡ ὀπίσω.

***

Ἀσκήσεις. Κάμετε μόνοι σας ἓν νῆμα τῆς στάθμης. Στήσατε εἰς τὸ ἔδαφος μίαν ράβδον κατακορύφως μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ νήματος τῆς στάθμης. Εὕρετε διάφορα σώματα τοποθετημένα κατακορύφως. Θέσατε ἕνα κύβον ἐπὶ τῆς τραπέζης καὶ εὕρετε ποῖαι ἕδραι καὶ ποῖαι ἀκμαὶ εἶναι κατακόρυφοι. Ζητήσατε ἀπὸ ἕνα ξυλουργὸν μίαν ἀεροστάθμην (ἀλφάδι) καὶ θέσατε αὐτὸ ἐπὶ τοῦ πατώματος καὶ τῆς τραπέζης. Τοποθετήσατε μίαν ράβδον ὁριζοντίως. Εὕρετε σώματα τοποθετημένα ὁριζοντίως. Θέσατε κύβον ἐπὶ τῆς τραπέζης καὶ εὕρετε ποῖαι ἕδραι καὶ ἀκμαὶ εἶναι ὁριζόντιαι. Εὕρετε ποῖαι ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι παράλληλοι. Πάρετε καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ σώματα καὶ εὕρετε ἐπιφανείας ὁριζοντίας, κατακορύφους, παραλλήλους. Εἰς ἓν δωμάτιον εὕρετε ἐπιφανείας κατακορύφους, ὁριζοντίας, παραλλήλους.

***

Παίρνομεν ἕνα κύβον καὶ θέτομεν αὐτὸν ἐπὶ λευκοῦ χάρτου. Μία ἕδρα τοῦ κύβου θὰ ἐφάπτεται τοῦ χάρτου. Μὲ ἓν μολυβδοκόνδυλον χαράσσομεν γραμμὰς γύρω ἀπὸ τὴν ἕδραν. Θὰ προκύψῃ τὸ σχῆμα (σχ. 3).



Σχ. 3.

Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται τετράγωνον. Ἐὰν κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ μὲ τὰς ἄλλας ἕδρας τοῦ κύβου, τὸ αὐτὸ σχῆμα θὰ προκύψῃ. Ὥστε τὸ τετράγωνον εἶναι τὸ σχῆμα ἑκάστης ἕδρας τοῦ κύβου.

Τὸ τετράγωνον ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 γραμμάς, αἱ ὁποῖαι λέγονται πλευραί. Ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, καὶ ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι. Ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου μία εἶναι κάτω, μία ἄνω, μία δεξιὰ καὶ μία ἀριστερά. Ἡ δεξιὰ πλευρὰ συναντᾶται μὲ τὴν ἄνω καὶ κάτω, ἡ ἄνω μὲ τὴν δεξιὰν καὶ ἀριστεράν. Ἡ ἀριστερὰ μὲ ποίας συναντᾶται; Ἡ κάτω πλευρὰ μὲ ποίας συναντᾶται; Ἡ ἄνω μὲ τὴν κάνω συναντῶται; Ἡ δεξιὰ μὲ τὴν ἀριστερὰν συναντῶνται;

Παίρνομεν μίαν τεντωνένην κλωστὴν μεγάλην καὶ τὴν ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς ἄνω πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Παίρνομεν ἄλλην μίαν ὁμοίαν καὶ τὴν ἐφαρμόζομεν εἰς τὴν κάτω πλευράν. Ἂν προεκτείνωμεν αὐτὰς τὰς κλωστάς, οὐδαμοῦ θὰ συναντηθοῦν. Αἱ τοιαῦται κλωσταὶ λέγονται π α ρ ά λ λ η λ ο ι. Ὥστε ἡ ἄνω καὶ ἡ κάτω πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλοι. Ποῖαι ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλοι;

***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Πάρετε κύβους διαφόρων μεγεθῶν καὶ κάμετε τὸ σχῆμα διαφόρων ἑδρῶν. Ἀποκόψατε διὰ ψαλιδίου διάφορα τετράγωνα. Πάρετε ἕνα κύβον καὶ κάμετε τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν ἑδρῶν του. Ἀποκόψατε ὅλα τὰ τετράγωνα ἑνὸς κύβου καὶ θέσατε αὐτὰ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Τί παρατηρεῖτε; Δείξατε εἰς τὰ θρανία, εἰς τὸ πάτωμα, εἰς τὰ τετράδια γραμμὰς παραλλήλους. Πῶς εἶναι αἱ γραμμαὶ τοῦ σιδηροδρόμου, τοῦ τράμ;

* * *

Τὸ τετράγωνον ἔχει 4 πλευρὰς ἴσας. Ἂν θέσωμεν τὰς πλευρὰς ταύτας τὴν μίαν κολλητὰ μὲ τὴν ἄλλην, θὰ ἀποτελέσωμεν μίαν γραμμήν, ἡ ὁποία εἶναι 4 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Ἡ γραμμὴ αὕτη λέγεται περίμετρος. Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πλευρῶν του.

Παίρνομεν μίαν λεπτὴν κλωστὴν καὶ τὴν τεντώνομεν. Ἂν

Σχ. 4.

ζωγραφήσωμεν εἰς τὸ χαρτὶ μὲ τὸ μολυβδοκόνδυμον τὸ σχῆμα τῆς κλωστῆς, αὐτὸ λέγεται εὐθεῖα γραμμή. (σχ. 4).

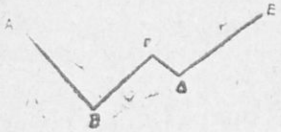
Τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας γραμμῆς λέγονται σημεῖα. Μεταξὺ δύο σημείων μόνον μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν.

Εἰς τὸ χαρτὶ φέρομεν εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ τὸν κανόνα (ρίγαν) καὶ μὲ τὸ μολυβδοκόνδυλον. Εἰς τὸ ἔδαφος ἡ εὐθεῖα γραμμὴ προσδιορίζεται διὰ δύο σημείων. Ἂν θέλωμεν νὰ φανῇ καλῶς εἰς τὸ ἔδαφος μία εὐθεῖα γραμμή, τότε μεταξὺ τῶν δύο σημείων τεντώνομεν ἕνα σπάγγον.

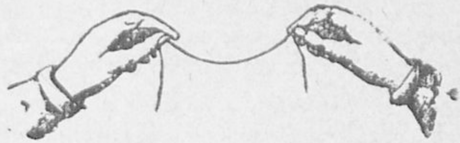
Ἔχομεν γράψει εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν. Ἂν θέλωμεν νὰ τὴν προεκτείνωμεν, θέτομεν τὸν κανόνα ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ σύρομεν μὲ τὸ μολυβδοκόνδυλον ἄλλην εὐθεῖαν συνέχειαν τῆς πρώτης. Ἔχομεν ἐμπήξει εἰς τὸ ἔδαφος δύο μεγάλα καρφία εἰς ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων. Ἐὰν τεντώσωμεν μεταξὺ τῶν καρφίων σπάγγον, ἔχομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἂν θέλωμεν νὰ τὴν προεκτείνωμεν, λαμβάνομεν ἄλλον σπάγγον μεγαλύτερον, τὸν τεντώνομεν ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον, ὥστε νὰ προεξέχῃ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ἂν λάβωμεν κλωστὴν καὶ τὴν κρατήσωμεν μὲ τὰς δύο χεῖρας μας χαλαρωμένην, τότε δὲν θὰ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀλλὰ καμπύλη (σχ. 6).

Ἂν λάβωμεν πολλὰς εὐθείας γραμμὰς καὶ τὰς ἑνώσωμεν κατὰ



Σχ. 5.



Σχ. 6.

τὰ ἄκρα εἰς τρόπον ὥστε νὰ μὴ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται τεθλασμένη (σχ. 5).

* * *

Ἀσκήσεις. Πάρετε ἓν τετράγωνον. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς του ἐφαρμόσατε κλωστὴν καὶ τὴν κόπτετε ἀκριβῶς ἴσην μὲ τὴν πλευράν. Τὸ ἴδιον κάμνετε καὶ μὲ τὰς ἄλλας πλευράς. Θέσατε κατόπιν τὰς 4 κλωστὰς τὴν μίαν συνέχειαν τῆς ἄλλης. Τί θὰ ἀποτελέσετε; Γράψατε εἰς τὸ χαρτὶ πολλὰς εὐθείας γραμμὰς μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ μολυβδοκόνδυλον. Ἐμπήξατε εἰς τὸ ἔδαφος διάφορα καρφία. Μεταξὺ τούτων τεντώσατε σπάγγους. Γράψατε εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ δεξιά. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Κάμετε μὲ σπάγγον εἰς τὸ ἔδαφος μίαν εὐθεῖαν. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ ἀριστερά. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ δεξιά. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ δεξιὰ ἄλλο τόσον, ὅσον εἶναι ἡ εὐθεῖα. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ τὸ ἥμισυ. Σχηματίσατε μὲ κλωστὴν καμπύλην γραμμήν. Σχηματίσατε ἐπὶ τοῦ χαρτίου τεθλασμένην γραμμήν. Σχηματίσατε μὲ σπάγγον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τεθλασμένην γραμμήν. Ζωγραφίσατε ἐπὶ τοῦ χαρτίου διαφόρους ἀκμὰς τοῦ κύβου. Τί εἶναι αὗται;

* * *

Εἴπομεν ὅτι τὸ μέρος ὅπου συναντῶνται δύο ἕδραι τοῦ κύβου λέγεται ἀκμή. Αἱ ἀκμαὶ εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ κύβου.

Παίρνομεν χαρτόνιον καὶ κόπτομεν ἐξ αὐτοῦ ἓν τεμάχιον ὅσον εἶναι μία ἕδρα τοῦ κύβου. Ἐπάνω εἰς αὐτὸ κόπτομεν ἄλλο ἓν ὅμοιον τεμάχιον. Ἔχομεν λοιπὸν δύο τετραγώνους ἐπιπέδους ἐπιφανείας. Ἑνώνομεν αὐτὰς κατὰ τὰ ἄκρα. Εἰς τὸ μέρος ὅπου ἑνώνονται, ἐξωτερικῶς ἔχομεν μίαν ἀκμήν. Τὸ ἐσωτερικὸν ὅμως μέρος τῆς ἑνώσεως δὲν δυνάμεθα νὰ τὸ ὀνομάσωμεν ἀκμήν. Αὐτὸ λέγεται γωνία. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἕδρας, λέγεται δίεδρος γωνία.

Εἰς τὸν κύβον αἱ δίεδροι γωνίαι δὲν φαίνονται, διότι εἶναι ἀπὸ μέσα καὶ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύβου δὲν φαίνεται. Εἰς τὸν κύβον βλέπομεν μόνον τὰς ἀκμάς. Ὅταν ὅμως εὑρισκώμεθα μέσα εἰς ἓν δωμάτιον, βλέπομεν τὰς γωνίας καὶ ὄχι τὰς ἀκμάς. Διέδρους γωνίας ἀποτελοῦν οἱ τοῖχοι μὲ τὸ πάτωμα καὶ τὴν ὀροφήν.

Ὅταν ἔχωμεν ἓν κυτίον χάρτινον ἢ ξύλινον κυβικόν, τότε δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ἐξωτερικῶς τὰς ἀκμὰς καὶ ἐσωτερικῶς τὰς γωνίας.

Τὸ μέρος, ὅπου συναντῶνται τρεῖς ἕδραι τοῦ κύβου, λέγεται κορυφή. Αἱ κορυφαὶ εὑρίσκονται ἐξωτερικῶς, ὅπως καὶ αἱ ἀκμαί. Τὸ ἐσωτερικὸν ὅμως τῆς κορυφῆς λέγεται καὶ αὐτὸ γωνία. Καὶ ἐπειδὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἕδρας, λέγεται τρίεδρος ἢ στερεὰ γωνία.

Αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ κύβου δὲν φαίνονται, διότι εὑρίσκονται ἐσωτερικῶς. Ὅταν ὅμως εὑρισκώμεθα εἰς ἓν δωμάτιον, βλέπομεν τὰς στερεὰς γωνίας καὶ ὄχι τὰς κορυφάς. Αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ δωματίου ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο τοίχους καὶ τὸ πάτωμα ἢ τὴν ὀροφήν.

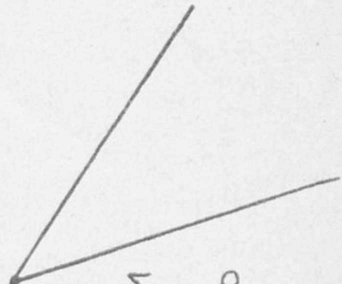
Εἰς ἓν κυτίον κυβικὸν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ἐξωτερικῶς τὰς κορυφὰς καὶ ἐσωτερικῶς τὰς στερεὰς γωνίας.

*
* *

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Μετρήσατε τὰς ἀκμὰς καὶ τὰς κορυφὰς τοῦ κύβου. Βάλετε τὸν δάκτυλόν σας εἰς ὅλας τὰς ἀκμὰς καὶ εἰς ὅλας τὰς κορυφάς. Μετρήσατε τὰς διέδρους γωνίας τοῦ δωματίου καὶ τὰς στερεὰς γωνίας. Βάλετε τὴν χεῖρα σας εἰς τὰς στερεὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν οἱ τοῖχοι μὲ τὸ πάτωμα. Διατὶ δὲν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν τὴν χεῖρα μας εἰς τὰς στερεὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν οἱ τοῖχοι μὲ τὴν ὀροφήν; Διατὶ δὲν δυνάμεθα νὰ βάλωμεν τὴν χεῖρα μας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ δωματίου; Πάρετε ἓν κυτίον κυβικὸν καὶ βάλετε τὸν δάκτυλόν σας εἰς ὅλας τὰς ἀκμάς, τὰς κορυφάς, τὰς διέδρους γωνίας καὶ τὰς στερεὰς γωνίας. Σχηματίσατε μὲ τετράγωνα χαρτόνια ἀκμάς, διέδρους γωνίας, κορυφὰς καὶ στερεὰς γωνίας. Μετρήσατε τὰς διέδρους καὶ τὰς στερεὰς γωνίας τοῦ κύβου.

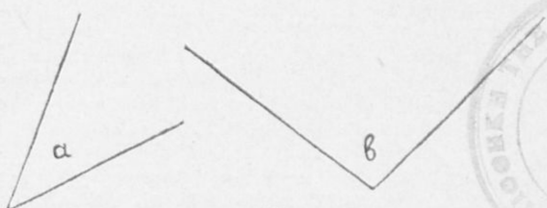
* * *

Εἴπομεν ὅτι, ὅταν συναντηθοῦν δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι, ἐξωτερικῶς θὰ σχηματισθῇ ἀκμὴ καὶ ἐσωτερικῶς δίεδρος γωνία. Καὶ ὅταν συναντῶνται δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ σχηματίζουν γωνίαν (σχῆμα 8). Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται αἱ δύο εὐθεῖαι, λέγεται κορυφὴ τῆς γωνίας. Αἱ γωνίαι εἶναι ἄλλαι μικρότεραι καὶ ἄλλαι μεγαλύτεραι. (σχῆμα 9). Ἡ γωνία β εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν γωνίαν α.



Σχ. 8

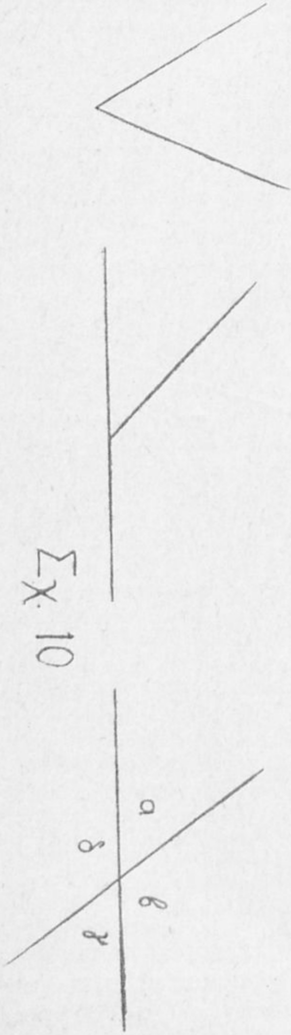
Ὅταν συναντῶνται δύο εὐθεῖαι, σχηματίζουν ἢ μίαν γωνίαν ἢ δύο ἢ τέσσαρας (σχ. 10). Αἱ γωνίαι αὐταὶ δὲν εἶναι πάντοτε ἴσαι μεταξύ των. Εἰς τὸ σχῆμα 10 ἡ γωνία α εἶναι μικροτέρα τῆς β καὶ ἡ γ μικροτέρα τῆς δ. Ὅταν συναντῶνται δύο εὐθεῖαι



Σχ. 9

καὶ σχηματίζουν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος καὶ τὸ ἄλλο δύο γωνίας ἴσας, αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται ὀρθαί, αἱ δὲ γραμμαὶ κάθετοι. (σχ. 11). Αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως ὀρθαί, αἱ δὲ γραμμαὶ κάθετοι.

Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι γραμμαί. Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου, εἶναι ὀρθαί. Αἱ γωνίαι τοῦ τετραγώνου εἶναι ὀρθαί, ἀφοῦ προκύπτουν ἀπὸ τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου καὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.



Σχ. 10

Γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται ὀξεῖα. Γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται ἀμβλεῖα. Εἰς τὸ σχῆμα 10 αἱ γωνίαι α καὶ γ εἶναι ὀξεῖαι. Αἱ γωνίαι β καὶ δ εἶναι ἀμβλεῖαι.

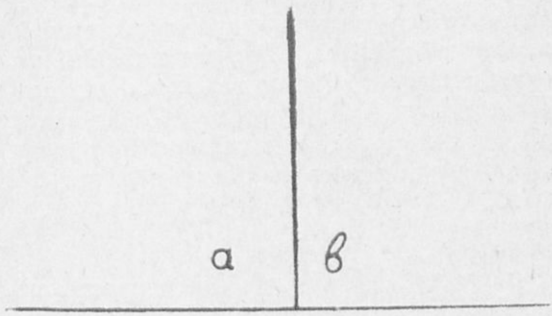
Ὅταν ἔχωμεν μίαν λεκάνην μὲ νερόν, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ἔχει ὁριζοντίαν διεύθυνσιν. Ἂν ἀπὸ ἐπάνω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ νεροῦ κρεμάσωμεν νῆμα τῆς στάθμης, τοῦτο θὰ ἔχῃ κατακόρυφον διεύθυνσιν. Ἡ κατακόρυφος καὶ ἡ ὁριζοντία συναντῶνται καὶ σχηματίζουν ἑκατέρωθεν γωνίας ὀρθάς.

*
* *

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Γράψατε εἰς τὸ χαρτὶ μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ μολυβδοκόνδυλον εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν μίαν γωνίαν, δύο, τέσσαρας. Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγους εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν μίαν γωνίαν, δύο τέσσαρας. Δείξατε εἰς τὸ δωμάτιον κατακορύφους διευθύνσεις. Δείξατε ὁριζοντίας διευθύνσεις. Δείξατε εἰς ποῖα μέρη συναντῶνται αἱ κατακόρυφοι διευθύνσεις μὲ τὰς ὁριζοντίας. Τί γωνίες σχηματίζουν ἐκεῖ; Δείξατε τὰς γωνίας αὐτάς. Μετρήσατε τὰς ὀρθὰς γωνίας τοῦ κύβου.

*
* *

῞Οπως μετροῦμεν τὸ βάρος μὲ τὰς ὀκάδας καὶ δράμια, τὸν χρόνον μὲ τὰς ὥρας, ἡμέρας, μῆνας κ.λ.. τοιουτοτρόπως μετροῦμεν καὶ τὰς εὐθείας γραμμὰς μὲ τὸ Γαλλικὸν μέτρον. Λέγεται Γαλλικόν, διότι εἰς τὴν Γαλλίαν καθωρίσθη. Τοῦτο διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται παλάμαι. Ἡ παλάμη διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται δάκτυλοι κοινῶς πόντοι. ῞Εκαστος δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται γραμμαί. Ἡ παλάμη εἶναι τὸ ἓν δέκατον



Σχ. 11

τοῦ μέτρου, ὁ δάκτυλος τὸ ἓν ἑκατοστὸν καὶ ἡ γραμμὴ τὸ ἓν χιλιοστόν.

Τὸ Γαλλικὸν μέτρον εἶναι μονὰς τοῦ μήκους, ὅπως ἡ ὀκᾶ εἶναι μονὰς τοῦ βάρους, ἡ ἡμέρα μονὰς τοῦ χρόνου, ἡ δραχμὴ μονὰς τῶν νομισμάτων. Εἰς τὴν Ἑλλάδα ὡς μονάδα τοῦ μήκους διὰ τὰ ὑφάσματα μεταχειριζόμεθα τὸν πῆχυν.

***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Πάρετε εἰς τὰς χεῖρας σας Γαλλικὸν μέτρον. Δείξατε μίαν παλάμην, ἕνα δάκτυλον, μίαν γραμμήν. Δείξατε τρεῖς παλάμας καὶ ἑπτὰ δακτύλους. Δείξατε πέντε παλάμας, ὀκτὼ δακτύλους καὶ ἓξ γραμμάς. Μετρήσατε μὲ τὸ Γαλλικὸν μέτρον τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς τραπέζης, τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ θρανίου, τοῦ δωματίου. Τοὺς προκύπτοντας ἀριθμοὺς γράφετε εἰς τὸ χαρτὶ ἢ εἰς τὸν πίνακα. Σύρατε εἰς τὸ τετράδιόν σας μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν μήκους μιᾶς παλάμης καὶ τεσσάρων δακτύλων. Σύρατε ἄλλην γραμμὴν μήκους ἑπτὰ δακτύλων. Προεκτείνατε τὴν δευτέραν γραμμὴν πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ τρεῖς δακτύλους. Σύρατε μίαν γραμμὴν ὀκτὼ δακτύλων. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ δύο δακτύλους καὶ ἑπτὰ γραμμάς. Σχηματίσατε ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μὲ σπάγγον δύο εὐθείας γραμμάς, τὴν μίαν τριῶν μέτρων καὶ ὀκτὼ παλαμῶν καὶ τὴν ἄλλην πέντε μέτρων καὶ ἓξ παλαμῶν. Προεκτείνατε τὴν πρώτην πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ τρεῖς παλάμας καὶ πέντε δακτύλους, Προεκτείνατε τὴν δευτέραν πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ δύο παλάμας καὶ ἐννέα δακτύλους. Σχηματίσατε ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μίαν εὐθεῖαν μὲ σπάγγον μήκους τεσσάρων μέτρων καὶ ὀκτὼ παλαμῶν. Προεκτείνατε αὐτὴν πρὸς τὰ δεξιὰ μὲν κατὰ πέντε παλάμας, πρὸς τὰ ἀριστερὰ δὲ κατὰ τρεῖς παλάμας καὶ ἑπτὰ δακτύλους. Πόσον γίνεται τότε ὅλον τὸ μῆκος τῆς εὐθείας; Γράψατε αὐτό.

***

Προβλήματα. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 4 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 4 μέτρα καὶ 8 παλάμας. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 4 μέτρα 7 παλάμαι καὶ 8 δάκτυλοι. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 32 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 28 μέτρα καὶ 20 παλάμας. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 28 μέτρα καὶ 20 παλάμας. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

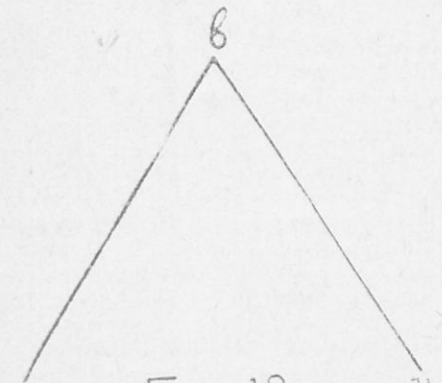
Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 36 μέτρα, 16 παλάμας καὶ 28 δακτύλους. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

***

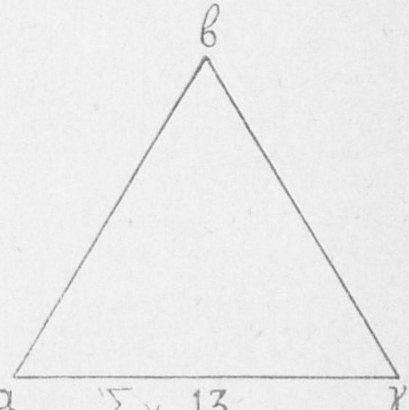
Διὰ νὰ σπουδάσωμεν καλῶς τὴν Γεωμετρίαν, μᾶς χρειάζονται τὰ ἑξῆς ἀπαραίτητα ὄργανα, εἷς κανὼν (ρίγα), ἓν ὑποδεκάμετρον, ἓν Γαλλικὸν μέτρον, δύο τρίγωνα ὀρθογώνια μὲ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου, εἷς διαβήτης καὶ ἓν μοιρογνωμόνιον. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ὀρθὴν καὶ δύο ὀξείας. Αἱ πλευραί, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου, εἶναι ἡ μία κάθετος ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ χάρτου καὶ σύρωμεν μὲ τὸ μολυβδοκόνδυλον γραμμὰς ἐπὶ τῇ βάσει τῶν καθέτων πλευρῶν, θὰ προκύψῃ ἐπὶ τοῦ χάρτου μία γωνία καὶ δύο γραμμαὶ κάθετοι.

Ἐπὶ τοῦ χάρτου φέρομεν καθέτους ὡς ἑξῆς. Σύρομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἔπειτα χωρὶς νὰ ἀποσύρωμεν τὸν κανόνα ἀπὸ τὴν θέσιν του, ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτὸν μίαν



Σχ. 12



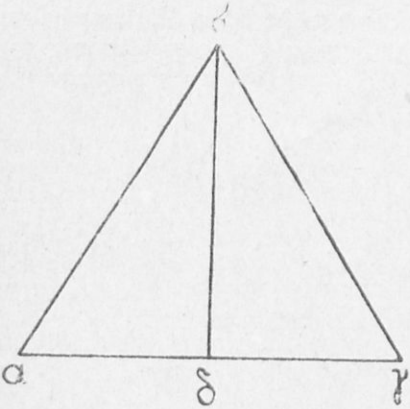
Σχ. 13

ἀπὸ τὰς δύο καθέτους τοῦ ὀρθογωνίου καὶ σύρομεν μὲ τὸ μολυβδοκόνδυλον γραμμὴν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἄλλης καθέτου. Ἂν ἀπομακρύνωμεν τὸν κανόνα καὶ τὸ τρίγωνον, βλέπομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου μίαν εὐθεῖαν, μίαν κάθετον ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν δύο γωνίας ὀρθάς.

Νὰ φέρωμεν καθέτους εἰς τὸ ἔδαφος εἶναι κάπως δυσκολώτερον. Διὰ νὰ κατανοηθῇ καλῶς πῶς γίνεται τοῦτο, εἶναι ἀνάγκη νὰ γράψωμεν μερικὰ ἄλλα προκαταρκτικά.

Ἔχομεν τεντώσει εἰς τὸ ἔδαφος ἕνα μακρὸν σπάγγον. Τοῦτο εἶναι μία εὐθεῖα γραμμή. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον τῆς εὐθείας αὐτῆς, παίρνομεν ἄλλον σπάγγον ἴσου μήκους καὶ τὸν διπλιάζομεν. Ἔπειτα, ὅπως εἶναι διπλός, τὸν τεντώνομεν, ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ ὅπου φθάσει ὁ διπλὸς σπάγγος, ἐκεῖ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας.

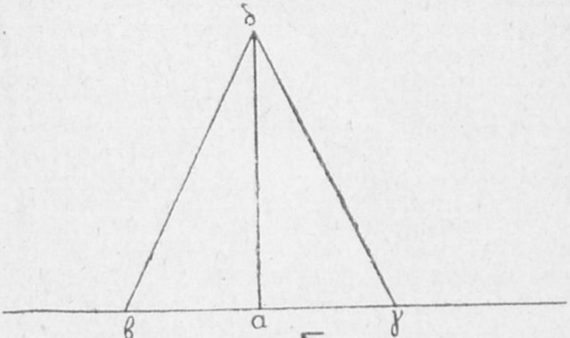
Παίρνομεν τὸν διπλὸν σπάγγον καὶ κρατοῦμεν σφικτὰ τὸ μέσον του. Δύο ἄλλοι μαθηταὶ ἀνοίγουν τὰ ἄκρα τοῦ σπάγγου, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 12. Αἱ γραμμαὶ αβ καὶ βγ εἶναι ἴσαι, διότι ὁ σπάγγος ἦτο διπλωμένος εἰς δύο ἴσα μέρη.



Σχ. 14

Προσαρμόζομεν μὲ καρφία εἰς τὸ ἔδαφος τὸν ἀνοικτὸν σπάγγον, ὅπως ἀκριβῶς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 12. Ἔπειτα ἀπὸ τὸ α ἕως γ τεντώνομεν ἄλλον σπάγγον, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 13. Τότε προκύπτει ἓν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ αβ εἶναι ἴση μὲ τὴν βγ. Τὸ τρίγωνον τοῦτο λέγεται ἰσοσκελές. Ἡ πλευρὰ αγ λέγεται βάσις· καὶ τὸ σημεῖον β λέγεται κορυφή.

Εὑρίσκομεν τὸ μέσον τῆς βάσεως αγ καὶ φέρομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 14, ἡ γραμμὴ βδ εἶναι κάθετος εἰς τὴν αγ καὶ αἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Συνάγομεν λοιπὸν τὸν κανόνα. «Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν κορυφὴν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεως εἶναι κάθετος εἰς τὴν βάσιν». Τεντώνομεν εἰς τὸ ἔδαφος ἕνα σπάγγον καὶ τοῦτο εἶναι μία εὐθεῖα γραμμή, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 15. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον α τῆς εὐθείας θέλομεν νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον. Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ α ἴσας ἀποστάσεις μέχρι τῶν σημείων β καὶ γ. Ἡ ἀπόστασις αβ εἶναι ἴση μὲ τὴν αγ. Ἔπειτα παίρνομεν ἕνα σπάγγον ἀρκετὰ μακρὸν καὶ τὸν διπλιάζομεν. Εἷς μαθητὴς πιάνει τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σπάγγου καὶ τὸ ἐφαρμόζει εἰς τὸ σημεῖον β, ἄλλος πιάνει τὸ ἄλλο ἄκρον καὶ τὸ ἐφαρμόζει εἰς τὸ σημεῖον γ. Τρίτος μαθητὴς κρατεῖ σφικτὰ τὸ μέσον τοῦ σπάγγου καὶ τὸν τεντώνει ἀνοικτὸν ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 15. Σχηματίζεται τοιουτοτρόπως ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ κορυφὴν τὸ δ μὲ βάσιν τὴν βγ καὶ μὲ μέσον τῆς βάσεως τὸ σημεῖον α. Ἂν τεντώσωμεν ἕνα σπάγγον ἀπὸ τὸ δ ἕως τὸ α, ἡ γραμμὴ δα εἶναι κάθετος εἰς τὴν βγ διότι τὸ τρίγωνον β δ γ εἶναι ἰσοσκελές, ἀφοῦ οἱ σπάγγοι β δ καὶ γ δ



Σχ. 15

εἶναι ἴσοι καὶ τὸ α εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεώς του. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τοὺς σπάγγους βδ καὶ γδ καὶ ἀφίνομεν τὸν σπάγγον δ α, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος εἰς πρώτην γραμμήν.

* * *

Ἀσκήσεις. Σύρατε γραμμὴν εἰς τὸ χαρτὶ μήκους 8 δακτύλων. Σημειώσατε τὸ μέρος ὅπου εἶναι 6 δάκτυλοι ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Εὕρετε κατόπιν τὸ μέσον τῆς γραμμῆς.

Σύρατε εἰς τὸ χαρτὶ εὐθεῖαν γραμμὴν μήκους 9 δακτύλων. Εὕρετε τὸ μέσον τῆς γραμμῆς αὐτῆς καὶ ἐκεῖ μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον φέρατε μίαν κάθετον μήκους 5 δακτύλων.

Σύρατε εἰς τὸ χαρτὶ εὐθεῖαν γραμμὴν μήκους 8 δακτύλων. Ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εὕρετε ποῦ εἶναι 6 δάκτυλοι καὶ ἐκεῖ φέρατε μίαν κάθετον 7 δακτύλων. Σύρατε εἰς τὸ χαρτὶ εὐθεῖαν γραμμὴν 7 δακτύλων. Ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ εὕρετε ποῦ εἶναι 2 δάκτυλοι καὶ 6 γραμμαὶ καὶ ἐκεῖ φέρατε μίαν κάθετον 5 δακτύλων καὶ 3 γραμμῶν.

Κάμετε μόνοι σας πολλὰς τοιαύτας ἀσκήσεις γραμμῶν καὶ καθέτων ἐπὶ τοῦ χάρτου διαφόρων μηκῶν.

Φέρατε εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μήκους 8 μέτρων. Εὕρετε τὸ μέσον τῆς γραμμῆς αὐτῆς. Φέρατε εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μήκους 9 μέτρων. Εὕρετε τὸ σημεῖον ὅπου εἶναι 5 μέτρα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Φέρατε εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μήκους 11 μέτρων.Εὕρετε τὸ σημεῖον ὅπου εἶναι 7 μέτρα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.

Φέρατε ὁμοίαν εὐθεῖαν μήκους 13 μέτρων καὶ εὕρετε τὸ σημεῖον, ὅπου εἶναι 7 μέτρα καὶ 8 δάκτυλοι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Φέρατε ὁμοίαν εὐθεῖαν μήκους 12 μέτρων. Εὕρετε τὸ σημεῖον ὅπου εἶναι 5 μέτρα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ σημειώσατε ἴσας ἀποστάσεις καὶ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο. Φέρατε ὁμοίαν εὐθεῖαν μήκους 13 μέτρων. Εὕρετε τὸ σημεῖον ὅπου εἶναι 7 μέτρα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου φέρατε μίαν κάθετον μήκους 5μέτρων.

Ἐπὶ ἄλλης ὁμοίας εὐθείας φέρατε κάθετον εἰς ὁποιονδήποτε σημεῖον θέλετε σεῖς.

Φέρατε ὁμοίαν εὐθεῖαν μήκους 15 μέτρων.Εἰς σημεῖον κείμενον 6 μέτρα ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ φέρατε κάθετον μήκους 5 μέτρων. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἰς σημεῖον κείμενον 6 μέτρα ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ φέρατε ἄλλην κάθετον πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μήκους 6 μέτρων.Σχηματίσατε μὲ σπάγγους πολλὰς εὐθείας γραμμὰς εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ἐπ' αὐτῶν φέρατε καθέτους ὅσας θέλετε.

* * *

Ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν μήκους 8 μέτρων καὶ θέλομεν νὰ κάμωμεν τὸ σχῆμα της εἰς τὸ χαρτί. Δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν 8 μέτρων. Θὰ κάμωμεν τὸ σχῆμα τῆς εὐθείας εἰς μικρότερον μέγεθος, ὅπως εἰς μικρότερον μέγεθος γίνονται καὶ αἱ φωτογραφίαι.

Ἀντὶ λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν καὶ εἰς τὸ χαρτὶ εὐθεῖαν μήκους 8 μέτρων, σχηματίζομεν εὐθεῖαν μήκους 8 δακτύλων, δηλαδὴ ἕκαστον μέτρον τοῦ ἐδάφους τὸ παριστάνομεν εἰς τὸ χαρτὶ μὲ ἕνα δάκτυλον.

Ἂν εἰς τὸ ἔδαφος ἔχωμεν εὐθεῖαν 15 μέτρων, εἰς τὸ χαρτὶ θὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ 15 δακτύλους. Τότε λέγομεν ὅτι κάμνομεν εἰς τὸ χαρτὶ σχήματα ὑπὸ κλίμακα. Καὶ ἐπειδὴ ὁ δάκτυλος εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου,λέγομεν ὅτι κάμνομεν σχήματα ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Ὑπὸ κλίμακα σχεδιάζονται οἱ γεωγραφικοὶ χάρται, τὰ σχέδια τῶν πόλεων, τῶν οἰκοδομῶν,τῶν οἰκοπέδων. κ.λ. Οἱ γεωγραφικοὶ χάρται δὲν σχεδιάζονται ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ, ἀλλὰ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, διότι τὰ σχεδιαζόμενα μέρη εἶναι πολὺ μεγάλα.

***

Ἀσκήσεις. Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος εὐθεῖαν γραμμὴν μήκους 9 μέτρων. Σχεδιάσατε αὐτὴν εἰςτὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος εὐθεῖαν 15 μέτρων. Κάμετε τὸ σχέδιόν της εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Εὕρετε εἰς τὴν εὐθεῖαν τοῦ ἐδάφους τὸ σημεῖον τὸ κείμενον εἰς ἀπόστασιν 6 μέτρων ἐκ δεξιῶν πρὸς ἀριστερά. Εὕρετε τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ εἰς τὸ χαρτί.

Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος εὐθεῖαν 10 μέτρων. Εἰς ἀπόστασιν 4 μέτρων ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ φέρατε κάθετον 6 μέτρων. Κάμετε εἰς τὸ χαρτὶ τὸ σχέδιον καὶ τῆς εὐθείας καὶ τῆς καθέτου ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος εὐθεῖαν μήκους 12 μέτρων. Εἰς κάθε 4 μέτρα ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς φέρετε ἀνὰ μίαν κάθετον μήκους 5 μέτρων. Κάμετε εἰς τὸ χαρτὶ τὸ σχέδιον καὶ τῆς εὐθείας καὶ τῶν καθέτων ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

***

Φέρομεν εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν μήκους 5 δακτύλων. Εἰς τὸ ἄκρον ταύτης φέρομεν κάθετον ἐπίσης 5 δακτύλων. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον φέρομεν ἄλλην κάθετον ἴσου μήκους. Ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον παράγεται εἶναι τετράγωνον,διότι ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

Φέρομεν εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μίαν εὐθεῖαν 5 μέτρων. Ἂν θέλωμεν εἰς τὸ ἄκρον ταύτης νὰ φέρωμεν κάθετον, προεκτείνομεν τὴν εὐθεῖαν, παίρνομεν ἑκατέρωθεν ἴσας ἀποστάσεις, σχηματίζομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ φέρομεν τὴν κάθετον.

Διὰ νὰ φέρωμεν καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον καθετον, κάμνομεν τὸ ἴδιον. Ἔχομεν εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας δύο καθέτους. Παίρνομεν καὶ ἀπὸ τὴν μίαν καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλην ἀπόστασιν 5 μέτρων καὶ ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον παράγεται, εἶναι τετράγωνον, διότι ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν λοιπὸν τετράγωνον εἰς τὸ ἔδαφος, παίρνομεν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, εἰς τὰ δύο ἄκρα της φέρομεν καθέτους ἴσας πρὸς τὴν εὐθεῖαν καὶ ἑνώνομεν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων.

***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ τετράγωνον μὲ πλευρὰν 6 δακτύλων. Σχηματίσατε ἄλλο τετράγωνον μὲ πλευρὰν 8 δακτύλων καὶ 6 γραμμῶν.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος τετράγωνον μὲ πλευρὰν 6 μέτρων. Σχηματίσατε ἕτερον μὲ πλευρὰν 9 μέτρων καὶ 7 δακτύλων.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος τετράγωνον μὲ πλευρὰν 7 μέτρων. Μεταφέρατε αὐτὸ εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Σχηματίσατε κατὰ βούλησιν τετράγωνα εἰς τὸ ἔδαφος καὶ μεταφέρατε αὐτὰ εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

***

Εἴπομεν ὅτι παράλληλοι γραμμαὶ λέγονται ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι δὲν συναντῶνται.

Φέρομεν εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν. Εἰς ἓν σημεῖον ταύτης φέρομεν μίαν κάθετον. Εἰς ἕτερον σημεῖον φέρομεν ἄλλην μίαν κάθετον πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, διότι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι. Ὥστε, ἂν θέλωμεν νὰ φέρωμεν δύο γραμμὰς παραλλήλους, φέρομεν δύο καθέτους εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

Φέρομεν εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μίαν εὐθεῖαν. Εἰς δύο σημεῖα τῆς εὐθείας ταύτης φέρομεν δύο καθέτους. Αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι εἶναι παράλληλοι.

***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Φέρατε μίαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ χάρτου. Εἰς δύο σημεῖα τῆς εὐθείας ταύτης, ἀπέχοντα 10 δακτύλους φέρατε δύο καθέτους μήκους 15 δακτύλων. Τί εἶναι αὐταὶ αἱ δύο κάθετοι;

Φέρατε δύο παραλλήλους εἰς τὸ χαρτὶ μήκους 20 δακτύλων καὶ νὰ ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 10 δακτύλους.

Φέρατε εἰς τὸ χαρτὶ τρεῖς παραλλήλους μήκους 30 δακτύλων ἑκάστη καὶ νὰ ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 10 ἑκατοστά.

Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μίαν εὐθεῖαν. Εἰς δύο σημεῖα ταύτης ἀπέχοντα 2 μέτρα φέρατε δύο καθέτους. Τί εἶναι αὐταὶ αἱ κάθετοι;

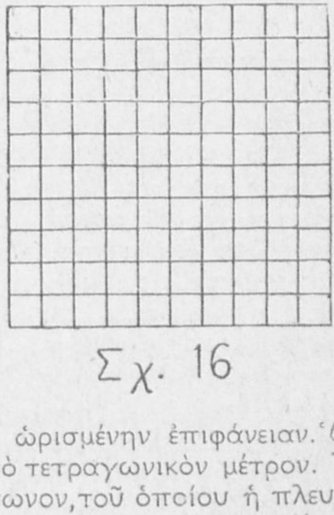
Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μίαν εὐθεῖαν. Εἰς τρία σημεῖα ταύτης ἀπέχοντα 1 μέτρον ἀπ' ἀλλήλων φέρατε καθέτους μήκους 5 μέτρων. Ἀφαιρέσατε τὸν σπάγγον, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὴν εὐθεῖαν. Αἱ τρεῖς κάθετοι τί εἶναι μεταξύ των;

Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον τρεῖς παραλλήλους γραμμὰς μήκους 6 μέτρων ἑκάστη καὶ νὰ ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 2 μέτρα.

Φέρατε εἰς τὸ χαρτὶ καὶ εἰς τὸ ἔδαφος πολλὰς παραλλήλους κατὰ βούλησιν.

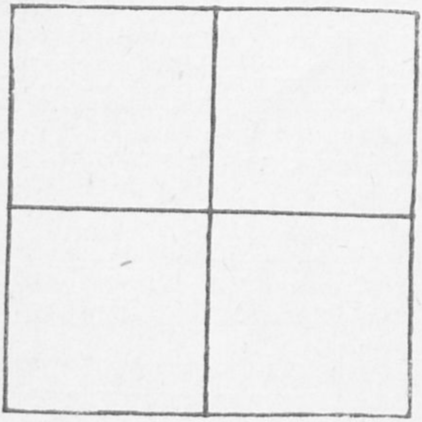
***

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ βάρος τῶν σωμάτων μεαχειριζόμεθα τὴν ὀκάν, ἡ ὁποία εἶναι καὶ αὐτὴ βάρος. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος, μεταχειριζόμεθα τὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ αὐτὸ μῆκος. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸν χρόνον, μεταχειριζόμεθα τὴν ἡμέραν, ἡ ὁποία καὶ αὐτὴ εἶναι χρόνος. Δὲν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸ βάρος μὲ τὴν ἡμέραν, οὔτε τὸ μῆκος μὲ τὴν δραχμήν. Διὰ νὰ μετρήσωμεν λοιπὸν τὰ διάφορα πράγματα, μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδας ἄλλα πράγματα ὅμοια μὲ αὐτά.



Σχ. 16

Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἑπομένως τὴν ἐπιφάνειαν τῶν σωμάτων, μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα μίαν ὡρισμένην ἐπιφάνειαν. Ὡς μονὰς τῆς ἐπιφανείας χρησιμεύει τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἓν μέτρον. Ὅπως τὸ γραμμικὸν μέτρον ἔχει ὑποδιαιρέσεις, τοιουτοτρόπως ἔχει καὶ τὸ τετραγωνικόν. Ἓν γραμμικὸν μέτρον ἔχει 10 παλάμας, ἓν τετραγωνικὸν ἔχει 100 παλάμας τετραγωνικάς. Πῶς γίνεται αὐτὸ ἀποδεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 16. Εἴπομεν ὅτι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἑνὸς μέτρου. Διαιροῦμεν ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τούτου εἰς 10 παλάμας καὶ ἑνώνομεν μὲ γραμμὰς τὰς ὑποδιαιρέσεις τῶν πλευρῶν, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 16. Βλέπομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου σχηματίζονται 100 μικρότερα τετράγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι μία τετραγωνικὴ παλάμη. Ὥστε βλέπομεν ὅτι ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει 100 τετραγωνικὰς παλάμας. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἑκάστη τετραγωνικὴ παλάμη ἔχει 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Ἓν τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει 10000 τετραγωνικοὺς δακτύλους.



Σχ. 17.

Ὅταν ἔχωμεν μίαν τετραγωνικὴν ἐπιφάνειαν μὲ πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου. Ὅταν ἔχωμεν ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 2 μέτρων, ἡ ἐπιφάνεια του θὰ εἶναι 4 τετραγωνικὰ μέτρα. Τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 17. Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι δύο μέτρα. Φέρομεν ἀπὸ κάθε μέτρον γραμμάς, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 17 καὶ βλέπομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ μεγάλου τετραγώνου σχηματίζονται 4 τετράγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἑνὸς μέτρου. Ἔχομεν ἑπομένως 4 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἂν πάρωμεν ἕτερον τετράγωνον μὲ πλευρὰν 3 μέτρων καὶ κάμωμεν τὸ ἴδιον, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἐντὸς τοῦ τετραγώνου θὰ σχηματισθοῦν 9 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἂν πάρωμεν ἄλλο τετράγωνον μὲ πλευρὰν 4 μέτρων, ἡ ἐπιφάνειά του θὰ εἶναι 16 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἡ ἐπιφάνεια λέγεται καὶ ἐμβαδόν.

Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πλευράν του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

***

Ἀσκήσεις. Σχηματίσατε ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἑνὸς μέτρου. Σημειώσατε εἰς ἑκάστην πλευρὰν ποῦ εἶναι παλάμη καὶ φέρετε μὲ σπάγγους γραμμὰς οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν ἐντὸς τοῦ μεγάλου τετραγώνου μικρότερα τετράγωνα, ὅπως φαίνονται εἰς τὸ σχῆμα 16. Μετρήσατε πόσα εἶναι τὰ μικρὰ αὐτὰ τετράγωνα. Ἡ πλευρὰ ἑκάστου μικροῦ τετραγώνου πόσον μῆκος ἔχει; Πῶς δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν ἕκαστον τῶν μικρῶν τούτων τετραγώνων;

Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ τετράγωνον μὲ πλευρὰν μιᾶς παλάμης. Σημειώσατε εἰς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τούτου ποῦ εἶναι δάκτυλοι καὶ φέρατε γραμμὰς εἰς τὸ τετράγωνον ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. 16. Μετρήσατε τὰ μικρὰ τετράγωνα πόσα εἶναι. Ἡ πλευρὰ ἑκάστου μικροῦ τετραγώνου πόσον μῆκος ἔχει; Πῶς δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν ἕκαστον μικρὸν τετράγωνον;

Σχηματίσατε ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μὲ σπάγγον ἓν τετραγωνικὸν μέτρον. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ μίαν τετραγωνικὴν παλάμην καὶ ἕνα τετραγωνικὸν δάκτυλον.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος ἓν μέγα τετράγωνον. Μετρήσατε τὴν πλευράν του καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

***

Προβλήματα. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 7 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 16 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 9 μέτρα καὶ 6 παλάμαι. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

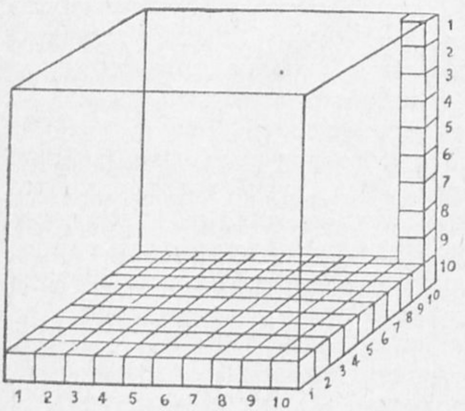
Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 36 μέτρα. Πόσον εἶναι ἡ πλευρά του καὶ πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 3 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του;

Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 4 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ἑδρῶν του, δηλαδὴ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου; Κάμετε μόνοι σας πολλὰ ὅμοια προβλήματα.

***

Τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν ὡρισμένον σχῆμα καὶ ὡρισμένον ὄγκον. Ὅπως μετροῦμεν τὸ βάρος, τὸ μῆκος καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῶν σωμάτων, οὕτω μετροῦμεν καὶ τὸν ὄγκον των. Πρὸς μέτρησιν τοῦ βάρους μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα ἄλλο βάρος, τὴν ὀκάν. Πρὸς μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα ἄλλην ἐπιφάνειαν, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Τοιουτοτρόπως καὶ πρὸς μέτρησιν τοῦ ὄγκου μεταχειριζόμεθα ἕνα ὡρισμένον ὄγκον ὡς μονάδα. Ὡς μονὰς τοῦ ὄγκου χρησιμεύει τὸ κυβικὸν μέτρον. Τοῦτο εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα εἶναι ἓν τετραγωνικὸν μέτρον καὶ ἐπομένως ἑκάστη ἀκμὴ ἓν μέτρον.



Σχ. 18.

Ὅπως τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει ὑποδιαιρέσεις οὕτως ἔχει καὶ τὸ κυβικόν. Ἓν τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει 100 τετραγωνικὰς παλάμας, ἓν κυβικὸν μέτρον ἔχει 1000 κυβικὰς παλάμας. Πῶς συμβαίνει αὐτὸ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 18. Παίρνομεν ἓν κυβικὸν μέτρον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι διηρημένη εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας. Ἡ κατακόρυφος ἀκμὴ τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἐπειδὴ εἶναι γραμμὴ ἑνὸς μέτρου, διαιρεῖται εἰς δέκα παλάμας. Ἐὰν πάρωμεν ἀπὸ τὴν βάσιν ὕψος μιᾶς παλάμης καὶ πλάτος ἐπίσης μιᾶς παλάμης, σχηματίζομεν κύβον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἐπιφάνεια εἶναι μία τετραγωνικὴ παλάμη. Κύβος μὲ ἕδραν μίαν τετραγωνικὴν παλάμην λέγεται κυβικὴ παλάμη. Εἰς τὸ κάτω λοιπὸν μέρος τοῦ κυβικοῦ μέτρου ἔχομεν μίαν σειρὰν ἀπὸ 100 κυβικὰς παλάμας. ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 18.

Ἐπειδὴ δὲ ὁλόκληρον τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει 10 τοιαύτας σειράς, ἕπεται ὅτι ὁλόκληρον τὸ κυβικὸν μέτρον θὰ ἔχῃ 1000 κυβικὰς παλάμας.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ μία κυβικὴ παλάμη θὰ ἔχῃ 1000 κυβικοὺς δακτύλους. Κυβικὸς δάκτυλος εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα εἶναι εἷς τετραγωνικὸς δάκτυλος. Ἓν κυβικὸν μέτρον ἔχει 1.000.000 κυβικοὺς δακτύλους.

***

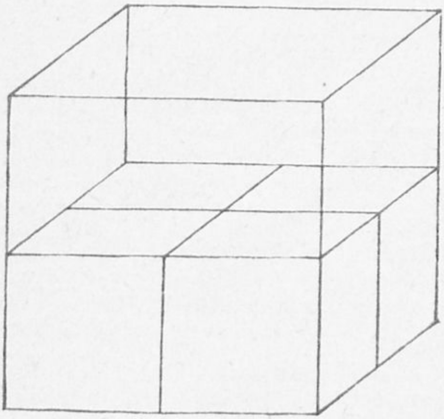
Ἀσκήσεις. Πηγαίνετε εἰς τὴν τρίεδρον γωνίαν τοῦ δωματίου, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὸ πάτωμα καὶ δύο τοίχους. Πάρετε ἀπὸ τὴν γωνίαν ἓν μέτρον καὶ πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πατώματος. Πάρετε ἓν μέτρον ὕψος καὶ εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν οἱ δύο τοῖχοι καὶ θὰ λάβετε μίαν ἰδέαν τῶν διαστάσεων τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Πάρετε χαρτόνι καὶ κόψατε ἐξ αὐτοῦ 6 τετραγωνικὰς παλάμας. Ἑνώσατε αὐτὰς κατὰ τὰ ἄκρα οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθῇ κύβος. Πῶς θὰ ὀνομασθῇ ὁ κύβος αὐτός; Πόσοι τοιοῦτοι κύβοι ἀποτελοῦν ἓν κυβικὸν μέτρον;

***

Ἐάν εἰς ἕνα κύβον ἡ ἀκμὴ εἶναι ἓν μέτρον, εἶναι φυσικὸν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου αὐτοῦ θὰ εἶναι ἓν κυβικὸν μέτρον, διότι ἀφοῦ ἡ ἀκμὴ εἶναι ἓν μέτρον, ἑκάστη ἕδρα του θὰ εἶναι ἓν τετραγωνικὸν μέτρον. Ἂν ὅμως εἰς ἄλλον κύβον ἡ ἀκμὴ εἶναι 2 μέτρα ὁ ὄγκος του δὲν θὰ εἶναι 2 κυβικὰ μέτρα, ἀλλὰ 8 διὰ τὸν ἑξῆς λόγον.

Ἀφοῦ ἡ ἀκμὴ εἶναι 2 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας εἶναι 4 τετραγωνικὰ μέτρα, διότι ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πλευράν του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της. Παρατηρήσατε τὸ σχῆμα 19. Εἶναι ὁ κύβος μὲ τὴν ἀκμὴν τῶν 2 μέτρων. Εἰς τὸ κάτω μέρος, ἂν πάρωμεν ἀπὸ τὴν βάσιν ὕψος ἑνὸς μέτρου, σχηματίζονται 4 κυβικὰ μέτρα, ὅπως φαίνονται εἰς τὸ σχῆμα 19. Εἰς τὸ ἐπάνω μέρος θὰ ἔχωμεν ἄλλα 4 κυβικὰ μέτρα. Ἐν ὅλῳ 8. Ὥστε, ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι 2 μέτρα, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 8 κυβικὰ μέτρα.

Ἔχομεν κύβον μὲ ἀκμὴν 2 γραμμικῶν μέτρων. Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας θὰ εἶναι 3χ3 9 τετραγωνικὰ μέτρα. Εἰς τὸ κάτω μέρος θὰ εἶναι 9 κυβικὰ μέτρα. Εἰς τὸ μέσον θὰ εἶναι ἄλλα 9 καὶ εἰς τὸ ἐπάνω μέρος ἄλλα 9. Ἐν ὅλῳ 27. Ὥστε ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι 3 μέτρα, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 27 κυβικὰ μέτρα.



Σχ. 19

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εὑρίσκεται, ἂν μετρήσωμεν τὴν ἀκμήν του καὶ τὴν πολλαπλασιάσωμεν τρεῖς φορὰς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

***

Προβλήματα. Ἑνὸς δωματίου κυβικοῦ ἡ ἀκμὴ εἶναι 4 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Εἰς ἓν μέρος ἔχομεν σωρεύσει πέτραν εἰς σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 5 μέτρων. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος; Ἂν ἕκαστον κυβικὸν μέτρον τῆς πέτρας τιμᾶται 50 δραχμάς, πόσον κοστίζει ὅλος ὁ σωρός;

Εἰς ἓν μέρος ἔχομεν σωρεύσει ἄμμον εἰς σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 3 μέτρων. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς ἄμμου; Ἓν κάρον χωρεῖ μισὸν κυβικὸν μέτρον. Πόσους δρόμους θὰ κάμη, διὰ νὰ μεταφέρη ὅλην τὴν ἄμμον;

Ἑνὸς κύβου ἡ ἀκμὴ εἶναι 3 μέτρα καὶ 3 παλάμαι. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

***

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κύβον, λαμβάνομεν 6 ἴσα τετράγωνα, ἀπο χαρτόνι καὶ τὰ ἑνώνομεν κατὰ τὰ ἄκρα μὲ λεπτὸν χαρτὶ καὶ κόλλαν. οὕτως ὥστε τὰ τετράγωνα νὰ μὴ εἶναι εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, ἀλλ' εἰς τὸ γνωστὸν σχῆμα τοῦ κύβου.

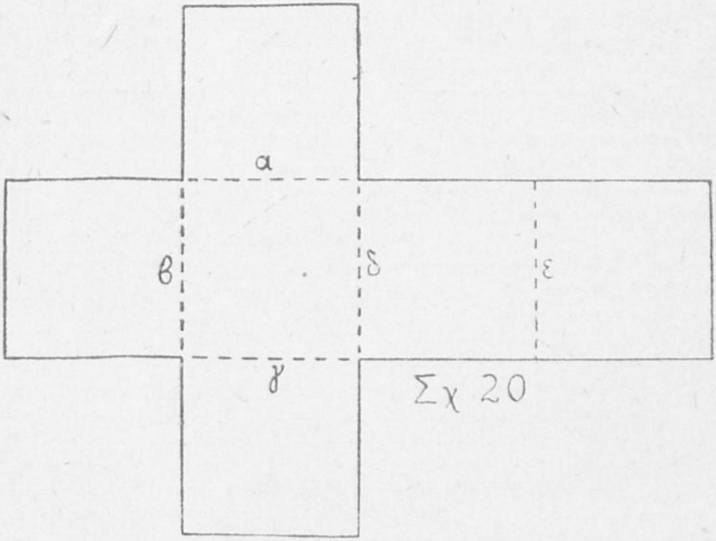
Καλύτερος τρόπος κατασκευῆς κύβου μὲ χαρτόνι εἶναι ὁ ἑξῆς.

Παίρνομεν χαρτόνι καὶ σχεδιάζομεν εἰς αὐτὸ ἴσα τετράγωνα, ὅπως φαίνονται εἰς τὸ σχῆμα 20. Τὰς γραμμὰς α, β, γ, δ καὶ ε.

χαράσσομεν μὲ μαχαιρίδιον, χωρὶς νὰ τὰς κόψωμεν ἐντελῶς Ἔπειτα διπλώνομεν τὸ χαρτόνι καὶ γίνεται κύβος.

Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κύβον ἐκ πηλοῦ· Πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει νὰ ἔχωμεν ἓν τετράγωνον ἀπὸ χαρτόνι, διὰ νὰ μετρῶμεν τὰς διαστάσεις ἑκάστης ἕδρας καὶ νὰ κάμνωμεν τὰς γωνίας ὀρθάς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζομεν καὶ κύβον ἐκ ξύλου.



Σχ 20

Πρὸς τοῦτο μᾶς χρειάζεται τὸ τετράγωνον ἀπὸ χαρτόνι καὶ εἷς πρίων.

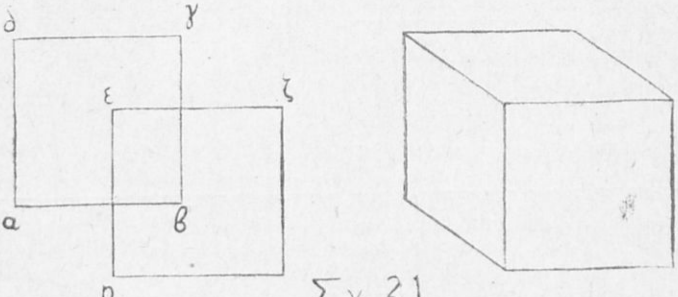
Καὶ ἀπὸ σύρμα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κύβον μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ χαρτόνι.

Δια νὰ ζωγραφίσωμεν κύβον, σχηματίζομεν εἰς τὸ χαρτὶ ἓν τετράγωνον. Ἔπειτα ἐπ' αὐτοῦ ζωγραφίζομεν ἕτερον τετράγωνον ἴσον, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 21. Ἔπειτα σβήνομεν τὰς γραμμὰς αβ καὶ βγ. Ἂν ἑνώσωμεν μὲ εὐθείας γραμμὰς τὰ σημεῖα γζ, δε, καὶ αη, ἔχομεν τὸ σχῆμα τοῦ κύβου.

* * *

Ἀσκήσεις. Κόψατε ἀπὸ χαρτόνι 6 ἴσα τετράγωνα μὲ πλευρὰν 6 δακτύλων καὶ κατασκευάσατε κύβον. Κατασκευά-

σατε ἀπὸ χαρτόνι μίαν κυβικὴν παλάμην κατὰ τὸ σχῆμα20.
Κατασκευάσατε ἀπὸ πηλὸν μίαν κυβικὴν παλάμην.
Κατασκευάσατε ἀπὸ κηρὸν ἕνα κυβικὸν δάκτυλον.
Κατασκευάσατε ἀπὸ σύρμα μίαν κυβικὴν παλάμην.
Πόσαι κυβικαὶ παλάμαι χωροῦν εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον;



Σχ 21

Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι χωροῦν εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην;
Πόσοι κυβικοὶ δάκτυλοι χωροῦν εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον;
Ζωγραφίσατε εἰς τὸ τετράδιόν σας κύβον μὲ ἀκμὴν 7 δακτύλων.
Ζωγραφίσατε κατὰ βούλησιν πολλοὺς κύβους.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τόσας ἕδρας, τόσας ἀκμάς, τόσας διέδρους γωνίας καὶ τόσας στερεὰς γωνίας καὶ κορυφὰς ὅσας καὶ ὁ κύβος. Ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαί.

Διαφέρει τοῦ κύβου ὅτι δὲν ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας του ἴσας, ἀλλὰ μόνον τὰς ἀπέναντι. Ἡ κάτω ἕδρα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἄνω, ἡ δεξιὰ ἴση μὲ τὴν ἀριστερὰν καὶ ἡ ἐμπροσθία ἴση μὲ τὴν ὀπισθίαν.

Ὅπως εἰς τὸν κύβον αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι παράλληλοι τοιουτοτρόπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι τὸ κυτίον τῶν σπίρτων, ἡ ρίγα, πολλὰ δωμάτια κλ.

***

Ἀσκήσεις. Πόσας ἕδρας ἔχει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; Πιάσατε μίαν μίαν μὲ τὴν χεῖρα σας καὶ μετρήσατε αὐτάς. Πόσας ἀκμὰς ἔχει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; Πιάσατε μίαν μίαν μὲ τὸν δάκτυλόν σας καὶ μετρήσατε αὐτάς. Δείξατε μὲ τὸν δάκτυλόν σας τὰς διέδρους γωνίας τοῦ δωματίου καὶ μετρήσατε αὐτάς. Διατὶ εἰς τὸ ξύλινον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον δὲν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν τὰς διέδρους γωνίας; Δείξατε εἰς τὸ δωμάτιον τὰς στερεὰς γωνίας καὶ μετρήσατε αὐτάς. Διατὶ εἰς τὸ ξύλινον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον δὲν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν τὰς στερεὰς γωνίας; Δείξατε εἰς τὸ ξύλινον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὰς κορυφάς. Διατὶ εὑρισκόμενοι ἐντὸς τοῦ δωματίου δὲν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν τὰς κορυφάς; Δείξατε καὶ εἰς τὸ ξύλινον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ εἰς τὸ δωμάτιον ὀρθὰς γωνίας. Δείξατε καὶ εἰς τὸ ξύλινον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ εἰς τὸ δωμάτιον τὰς ἀπέναντι ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους. Τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ τὸν κύβον; Κατὰ τί ὁμοιάζει πρὸς αὐτόν; Τοποθετήσατε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῆς τραπέζης οὕτως, ὥστε ἡ ἄνω ἕδρα νὰ εἶναι ὁριζοντία. Ποία ἄλλη θὰ εἶναι ὁριζοντία; Ποῖαι ἕδραι θὰ εἶναι κατακόρυφοι; Ποῖαι γραμμαὶ θὰ εἶναι ὁριζόντιαι; Ποῖαι κατακόρυφοι; Δείξατε αὐτάς. Μετρήσατε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον ὅλας τὰς ἀκμὰς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Σημειώσατε ποῖαι εἶναι ἴσαι. Νὰ εὕρετε εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ποῖαι γραμμαὶ εἶναι παράλληλοι. Εὕρετε εἰς αὐτὸ ποῖαι γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ σχηματιζόμεναι ἐκ δύο γραμμῶν. Μετρήσατε αὐτάς.

Εὕρατε πολλὰ ἀντικείμενα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

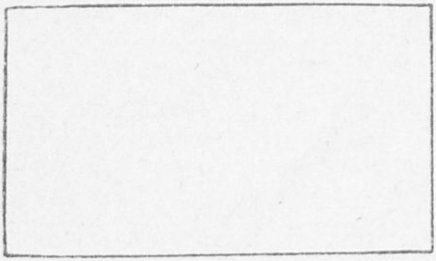
***

Παίρνομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ χαρτὶ μίαν τῶν ἑδρῶν του. Μὲ τὸ μολυβδοκόνδυλον χαράσσομεν γραμμὰς γύρω ἀπὸ τὴν ἕδραν αὐτήν. Θὰ παραχθῇ τὸ σχῆμα 22.

Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται ὀρθογώνιον.

Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν εἶναι ἡ εἰκὼν τῆς ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει 4 πλευρὰς καὶ τέσσαρας γωνίας ὀρθάς. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.



Σχ. 22

Περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους ὅλων τῶν πλευρῶν του.

***

Ἀσκήσεις. Πάρετε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἐφαρμόσατε εἰς τὸ χαρτὶ μίαν μίαν ὅλας τὰς ἕδρας του καὶ ζωγραφίσατε ταύτας. Εὕρετε κατόπιν ποῖα σχήματα εἶναι μεταξύ των ἴσα. Κόψατε ὅλα μὲ ἓν ψαλίδιον καὶ ἐφαρμόσατε τὰ ἴσα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ τὸ τετράγωνον; Κατὰ τί ὁμοιάζει μὲ αὐτό; Ἑνὸς ὀρθογωνίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 7 μέτρα. Πόσον εἶναι ἡ ἀπέναντι;

***

Προβλήματα. Ἑνὸς ὀρθογωνίου ἡ μεγάλη πλευρὰ εἶναι 8 μέτρα καὶ ἡ μικρὰ 5. Πόσον εἶναι ἡ περίμετρός του; Ἑνὸς ὀρθογωνίου ἡ μικρὰ πλευρὰ εἶναι 4 μέτρα καὶ ἡ μεγάλη διπλασία. Πόσον εἶναι ἡ περίμετρός του; Ἑνὸς ὀρθαγωνίου ἡ μεγάλη πλευρὰ εἶναι 12 μέτρα καὶ ἡ μικρὰ τὸ ἥμισυ. Πόσον εἶναι ἡ περίμετρός του; Ἔχομεν ἓν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μικρὰ πλευρὰ εἶναι 7 μέτρα καὶ ἡ μεγάλη 12. Ἔχομεν καὶ ἓν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μικρὰν πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου. Πόσον εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου; Πόσον ἡ τοῦ τετραγώνου; Ποία ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου;

Ἔχομεν ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 15 μέτρων, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ περιφράξωμεν μὲ σύρμα. Πόσα μέτρα σύρματος χρειαζόμεθα;

Ἂν θέλωμεν νὰ τὸ περιφράξωμεν μὲ 4 σύρματα παράλληλα εἰς ὕψος, πόσα μέτρα σύρματος χρειαζόμεθα; Ἔχομεν ἕνα κῆπον σχήματος ὀρθογωνίου. Ἡ μικρὰ πλευρά του εἶναι 27 μέτρα καὶ ἡ μεγάλη 46. Ἂν θέλωμεν νὰ τὸν περιφράξωμεν μὲ 4 σύρματα παράλληλα εἰς ὕψος, πόσα μέτρα σύρματος χρειαζόμεθα;

* * *

Εἴπομεν ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ὀρθαί, ἐπομένως αἱ πλευραί, αἱ ὁποῖαι τὰς σχηματίζουν εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εἰς τὸ χαρτὶ ὀρθογώνιον, χαράσσομεν μὲ τὸν κανόνα μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας αὐτῆς φέρομεν μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον δύο ἴσως καθέτους καὶ τὰς ἑνώνομεν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος μὲ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Διατὶ τὸ παραγόμενον σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον; Διατὶ αἱ δύο κάθετοι εἶναι παράλληλοι;

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον εἰς τὸ ἔδαφος, φέρομεν μὲ τὸν σπάγγον μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ταύτης φέρομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύο ἴσας καθέτους ὅπως καὶ εἰς τὸ τετράγωνον. Ἔπειτα ἑνώνομεν μὲ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν τὰ ἄκρα τῶν καθέτων εἰς τὸ ἐπάνω μέρος.

Διατὶ τὸ παραγόμενον σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον; Διατὶ αἱ δύο κάθετοι εἶναι παράλληλοι;

* * *

Ἀσκήσεις. Πάρετε ἕνα κύβον καὶ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐφαρμόσατε τὰς γωνίας τοῦ κύβου εἰς τὰς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τί παρατηρεῖτε; Πάρετε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ἐφαρμόσατε τὴν ὀρθὴν γωνίαν του εἰς ὅλας τὰς γωνίας τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τί παρατηρεῖτε;

Κατασκευάσατε εἰς τὸ χαρτὶ ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 7 δακτύλων καὶ μικρὰν πλευρὰν 5 δακτύλων. Κατασκευάσατε εἰς τὸ χαρτὶ ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 10 δακτύλων καὶ μικρὰν κατὰ τὸ ἥμισυ μικροτέραν.

Κατασκευάσατε εἰς τὸ χαρτὶ ὀρθογώνιον μὲ μικρὰν πλευρὰν 5 δακτύλων καὶ μὲ μεγάλην τριπλασίαν τῆς μικρᾶς.

Κατασκευάσατε εἰς τὸ χαρτὶ κατὰ βούλησιν 5 ὀρθογώνια.

Διὰ νὰ φέρωμεν εἰς τὸ ἔδαφος καθέτους εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς εὐθείας, τί πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν εὐθεῖαν; Διατὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς τὸ ἔδαφος;

Σχηματίσατε ὀρθογώνιον εἰς τὸ ἔδαφος μὲ μεγάλην πλευρὰν 5 μέτρων καὶ μὲ μικρὰν 3.

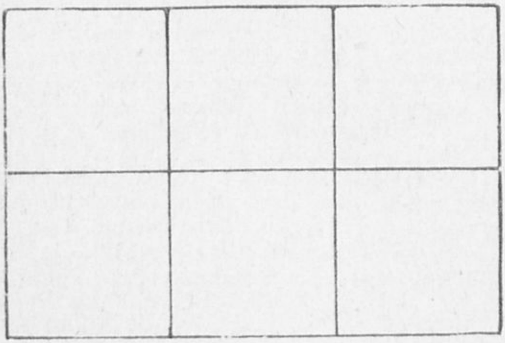
Σχηματίσατε ἕτερον ὀρθογώνιον μὲ μικρὰν πλευρὰν 4 καὶ μεγάλην διπλασίαν.

Σχηματίσατε εἰς τό ἔδαφος ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 9 καὶ μικρὰν κατά τὸ ἥμισυ μικροτέραν. Σχηματίσατε ἕτερον ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 7 μέτρα 6 παλάμας κάὶ 4 δακτύλους καὶ μὲ μικρὰν 4 μέτρα 3 παλάμας καὶ 8 δακτύλους.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος κατὰ βούλησιν 5 ὀρθογώνια.

***

Τὸ ὀρθογώνιον εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν μὲ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἂς πάρωμεν ἓν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη πλευρὰ εἶναι 3 μέτρα καὶ ἡ μικρὰ 2. Ἂς βάλωμεν σημεῖα εἰς ὅλας τὰς πλευράς, ὅπου εἶναι μέτρον καὶ ἂς ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ εὐθείας γραμμάς, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 23.



Σχ. 23

Βλέπομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου ἐσχηματίσθησαν 6 τετράγωνα, τῶν ὁποίων ἑκάστη πλευρὰ εἶναι ἓν μέτρον. Ἑπομένως ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου ἐσχηματίσθησαν 6 τεταγωνικὰ μέτρα. Ἂν λοιπὸν ἡ μία πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 3 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 2, τὸ ἐμβαδὸν του θὰ εἶναι 6 τετραγωνικὰ μέτρα.

Σχηματίζομεν ἄλλο ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευραν 5 μέτρα καὶ μὲ μικρὰν 3. Ἂν κάμωμεν τὸ ἴδιον, θὰ σχηματισθοῦν ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου 15 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ὥστε, ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, μετροῦμεν τὴν μεγάλην πλευρὰν καὶ τὴν μικρὰν καὶ τὰς πολλαπλασιάζομεν.

'Α σ κ ή σ ε ι ς. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ ἓν ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 7 δακτύλων καὶ μὲ μικρὰν 5. Βάλετε σημεῖα εἰς ὅλας τὰς πλευρὰς ὅπου εἶναι δάκτυλοι καὶ ἑνώσατε ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα μὲ εὐθείας γραμμάς, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 23 Μετρήσατε τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου.

Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ κατὰ βούλησιν ἄλλα 5 ὀρθογώνια καὶ κάμετε τὸ ἴδιον. Μετρήσατε ὅλα τὰ τετράγωνα, τὰ σχηματιζόμενα ἐντὸς τῶν ὀρθογωνίων.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 8 μέτρων καὶ μικρὰν 4. Βάλετε σημεῖα εἰς ὅλας τὰς πλευράς, ὅπου εἶναι μέτρον καὶ ἑνώσατε μὲ εὐθείας γραμμὰς ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 23. Μετρήσατε ὅλα τὰ τετράγωνα,τὰ σχηματιζόμενα ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου. Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ἄλλα 5 ὀρθογώνια κατὰ βούλησιν καὶ κάμετε τὸ ἴδιον. Μετρήσατε ὅλα τὰ τετράγωνα, τὰ σχηματιζόμενα ἐντὸς τῶν ὀρ-θογωνίων.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος τετράγωνον μὲ πλευρὰν 4 μέτρων. Μεταφέρατε αὐτὸ εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 9 μέτρων καὶ μικρὰν 5. Μεταφέρατε αὐτὸ εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Εὕρατε ἐπιφανείας σχήματος ὀρθογωνίου.

* * *

Π ρ ο β λ ή μ α τ α. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 3 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου;

Ἑνὸς τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 7,7 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του.

Ἑνὸς τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 5 μέτρα. Θέλομεν νὰ τὸ στρώσωμεν μὲ πλάκας τετραγωνικάς, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι μία παλάμη. Πόσας πλάκας θὰ χρειασθῶμεν;

Ἔχομεν ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 7 μέτρων καὶ θέλομεν νὰ τὸ στρώσωμεν μὲ σανίδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 3,5 καὶ πλάτος 0,07. Πόσας σανίδας χρειαζόμεθα;

Κάμετε μόνοι σας 5 ὅμοια προβλήματα μὲ πλάκας καὶ μὲ σανίδας.

Ἑνὸς ὀρθογωνίου ἡ μεγάλη πλευρὰ εἶναι 9 μέτρα καὶ ἡ μικρὰ 6. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἑνὸς ὀρθογωνίου ἡ μεγάλη πλευρὰ εἶναι 8,4 μέτρα καὶ ἡ μικρὰ 5,6. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν των;

Μετρήσατε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ πατώματος τῆς τραπέζης καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν των.

Ἔχομεν ἕνα τοῖχον σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 5 μέτρα καὶ ὕψος 4 καὶ θέλομεν νὰ τὸν ἀσβεστώσωμεν πρὸς 4 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσα χρήματα θὰ δώσωμεν;

Ἔχομεν αὐλὴν σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μεγάλην πλευρὰν 12,8 καὶ μικρὰν 5,6 καὶ θέλομεν νὰ τὴν στρώσωμεν μὲ πλάκας τετραγωνικάς, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 1 παλάμη. Πόσας πλάκας χρειαζόμεθα;

Μία οἰκία ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 9,8 καὶ πλάτος 7,9 καὶ θέλομεν νὰ τὴν πατώσωμεν πρὸς 21 δραχμὰς τὸ τεραγωνικὸν μέτρον. Πόσα χρήματα θὰ δώσωμεν;

Κάμετε μόνοι σας 5 προβλήματα πλακοστρώσεως καὶ 5 πατώματος.

Ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἡ κάτω ἕδρα ἔχει μῆκος 6 μέτρα καὶ πλάτος 4 καὶ ἡ δεξιὰ μῆκος 6 μέτρα καὶ ὕψος 3. Ἡ ἐμπροσθία ἔχει μῆκος 4 μέτρα καὶ ὕψος 3. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

Κάμετε μόνοι σας 5 ὅμοια προβλήματα.

Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ἑδρῶν τοῦ δωματίου.

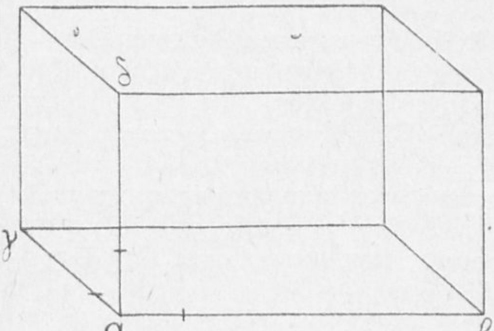
Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ μεγάλην πλευρὰν 28,35 καὶ μικρὰν 19,86 καὶ ἐπωλήθη πρὸς 74 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσα χρήματα κοστίζει;

Κάμετε 5 ὅμοια προβλήματα.

* * *

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον καὶ διὰ νὰ τὸν μετρήσωμεν, μεταχειριζόμεθα τὸ κυβικὸν μέτρον. Παίρνομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (σχ. 24), τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ αβ εἶναι 5 μέτρα, ἡ αγ 4 καὶ ἡ αδ 3. Παίρνομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον α 1 μέτρον καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ πρὸς τὰ ἄνω. Ἐὰν κόψωμεν τὸ τεμάχιον αὐτὸ οὕτως, ὥστε καὶ πρὸς τὰ μέσα νὰ εἶναι ἓν μέτρον, θὰ ἔχωμεν ἓν κυβικὸν μέτρον. Τοιαῦτα κυβικὰ μέτρα εἰς τὸ κάτω μέρος θὰ εἶναι 20.

Ἐπειδὴ θὰ ἔχωμεν τρεῖς σειρὰς ἀπὸ 20 κυβικὰ μέτρα, ὅλος ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι 60 κυβικὰ μέτρα. Αὐτὸ τὸ 60 ὅμως τὸ εὑρίσκομεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ μῆκος 5, τὸ πλάτος 4 καὶ τὸ ὕψος 3.



Σχ. 24

Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος ἢ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μὲ τὸ ὕψος.

***

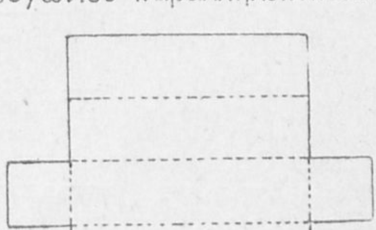
Ἀσκήσεις. Εὕρατε τὸν ὄγκον ὅλων τῶν δωματίων τοῦ σχολείου. Εὕρετε τὸν ὄγκον ἑνὸς ἑρμαρίου.

***

Προβλήματα. Ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ μῆκος εἶναι 7 μέτρα, τὸ πλάτος 5 καὶ τὸ ὕψος 4. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ μῆκος εἶναι 6,8, τὸ πλάτος, 3,9 καὶ τὸ ὕψος 2,6. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Κάμετε 5 ὅμοια προβλήματα.



Σχ. 25.

Ἔχομεν ἓν κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 1,27 μέτρα, τὸ πλάτος 0,76 καὶ τὸ ὕψος 0,58. Πόσας πλάκας σαποῦνι θὰ χωρέσῃ, ἂν ἑκάστη πλὰξ ἔχει μῆκος 0,09, πλάτος 0,05 καὶ ὕψος 0,03;

Κάμετε μόνοι σας 5 ὅμοια προβλήματα.

Μία δεξαμενὴ ἔχει μῆκος 4,5 μέτρα, πλάτος, 3,15 καὶ βάθος 2,87. Πόσας κυβικὰς παλάμας νεροῦ χωρεῖ;

Κάμετε μόνοι σας 5 ὅμοια προβλήματα.

* * *

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ χαρτόνι, κάμνομεν ἐπάνω εἰς αὐτὸ τὸ σχῆμα 25. Ὅπου εἶναι ἐσωτερικαὶ γραμμαὶ χαράσσομεν μὲ μαχαιρίδιον, χωρὶς νά τὰς κόπτωμεν τελείως καὶ ἔπειτα τὸ διπλώνομεν τὸ καρτόνι κατὰ τὰς τομάς.

Διὰ νὰ ζωγραφίσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, γράφομεν δύο ἴσα ὀρθογώνια τὸ ἓν ἐν μέρει ἐντὸς τοῦ ἄλλου καὶ ἑνώνομεν μὲ εὐθείας τὰς κορυφάς των, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 24.

***

Ἀσκήσεις. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι 5 ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα διαφόρων μεγεθῶν.

Κατασκευάσατε ἀπὸ πηλὸν 5 ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα διαφόρων μεγεθῶν.

Κατασκευάσατε ἀπὸ σύρμα ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Εἴπομεν ὅτι ἂν στήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ μία ἕδρα νὰ εἶναι ὁριζοντία, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ ὁριζοντία καὶ αἱ γύρω ἕδραι θὰ εἶναι κατακόρυφοι.

Εἶναι ὅμως ἓν ἄλλο σῶμα, τὸ ὁποῖον καθ' ὅλα ὁμοιάζει μὲ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἂν ὅμως τὸ στήσωμεν ὄρθιον οὕτως ὥστε ἡ κάτω ἕδρα νὰ εἶναι ὁριζοντία, αἱ γύρω ἕδραι δὲν θὰ εἶναι κατακόρυφοι, ἀλλὰ πλάγιαι. Διὰ τοῦτο λέγεται πλάγιον ἢ κεκλιμένον παραλληλεπίπεδον.

Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 6 ἕδρας. Αἱ ἀπέναντ ἕδραι του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἔχει τόσας ἀκμάς, κορυ φάς, διέδρους καὶ στερεὰς γωνίας ὅσας καὶ ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἀφοῦ αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Εἴπομεν ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ὀρθαί. Ἂν θέσωμεν ὅλας τὰς γωνίας τοῦ κύβου εἰς τὰς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅλαι ἐφαρμόζουν, διότι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι μεταξὺ των ἴσαι.

Ἐπίσης, ἂν λάβωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὴν θέσωμεν εἰς τὰς γωνίας τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, θὰ ἐφαρμόζῃ εἰς ὅλας.

Ἂν ὅμως πάρωμεν τὸν κύβον καὶ ἐφαρμόσωμεν τὰς γωνίας του εἰς τὰς γωνίας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἰς μερικὰς ἐξ αὐτῶν δὲν ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς ἡ ὀρθὴ γωνία τοῦ κύβου. Ἐξ αὐτῶν ἄλλαι εἶναι μικρότεραι τῆς ὀρθῆς καὶ ἄλλαι μεγαλύτεραι. Αἱ γωνίαι αἱ μικρότεραι τῆς ὀρθῆς λέγονται ὀξεῖαι καὶ αἱ μεγαλύτεραι λέγονται ἀμβλεῖαι. Ὥστε τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει καὶ ὀξείας γωνίας καὶ ἀμβλείας καὶ ὀρθαί.

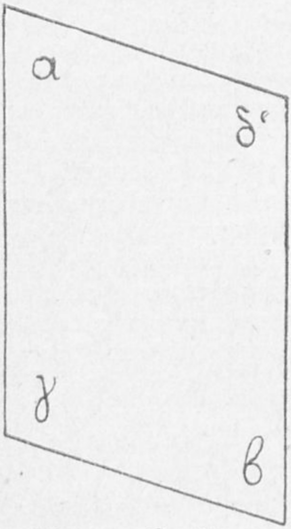
* * *

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Πάρετε ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον. Μετρήσατε τὰς ἕδρας του καὶ πιάσετε αὐτὰς μὲ τὴν χεῖρα σας. Δείξατε τὰς ὁριζοντίας ἕδρας. Δείξατε τὰς πλαγίας. Μετρήσατε αὐτάς. Μετρήσατε τὰς ἀκμάς, τὰς κορυφάς, τὰς διέδρους, τὰς στερεὰς γωνίας καὶ τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Δείξατε τὰς παραλλήλους ἀκμάς.

Πάρετε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ἐφαρμόσατε τὴν ὀρθὴν γωνίαν του εἰς ὅλας τὰς γωνίας τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Κατόπιν ἐφαρμόσατε ταύτην εἰς τὰς γωνίας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Μετρήσατε πόσαι ἐξ αὐτῶν οἶναι ὀρθαί. Εὕρετε ποῖαι καὶ πόσαι εἶναι ὀξεῖαι, ποῖαι καὶ πόσαι εἶναι ἀμβλεῖαι. Παρατηρήσατε αἱ ὀξεῖαι εἰς ποίαν θέσιν εὑρίσκονται πρὸς ἀλλήλας καὶ εἰς ποίαν αἱ ἀμβλεῖαι. Παρατηρήσατε εἰς ποίαν θέσιν εὑρίσκεται μία ὀξεῖα καὶ μία ἀμβλεῖα.

Ἐὰν ζωγραφίσωμεν ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου θὰ ἴδωμεν ὅτι μερικαὶ ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου. Αἱ ἄλλαι ἔχουν τὸ σχῆμα 26.

Ἂν πάρωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὴν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν γωνίαν α, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ὀρθὴ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἑπομένως ἡ γωνία α τοῦ σχήματος 26 εἶναι ὀξεῖα. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου εἰς τὴν γωνίαν, δ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ὀρθὴ εἶναι μικροτέρα. Ἑπομένως ἡ γωνία δ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἐάν κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὰς ἄλλας γωνίας γ, β, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ γ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ ἡ β ὀξεῖα.



Σχ 26

Τὸ σχῆμα λοιπὸν 26 ἔχει δύο γωνίας ὀξείας καὶ δύο ἀμβλείας. Αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Τὸ σχῆμα 26 λέγεται παραλληλόγραμμον.

***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Πάρετε ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον καὶ ζωγραφίσατε ὅλας τὰς ἕδρας του, ἐφαρμόζοντες μίαν μίαν εἰς τὸ χαρτί. Εὕρατε τί σχῆμα ἔχει καθεμία. Ἀποκόψατε μὲ ψαλίδιον τὰ σχήματα αὐτὰ καὶ ἐφαρμόσατε τὰ ἴσα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ζωγραφίσατε ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἰς χαρτόνι. Ἀποκόψατε τὰ σχήματα αὐτὰ καὶ συναρμολογήσατε πάλιν τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Πάρετε ἀπὸ τὰ σχήματα αὐτὰ τὸ παραλληλόγραμμον. Δείξατε τὰς ὀξείας γωνίας. Δείξατε καὶ τὰς ἀμβλείας. Ποίαν θέσιν ἔχουν πρὸς ἀλλήλας αἱ δύο ὀξεῖαι; Ποίαν αἱ δύο ἀμβλεῖαι; Ποίαν μία ὀξεῖα καὶ μία ἀμβλεῖα;

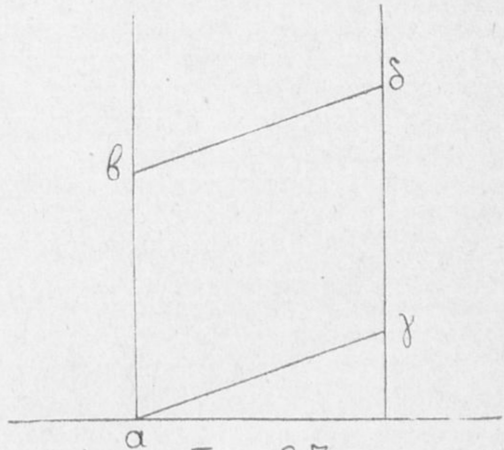
***

Εἴπομεν ὅτι διὰ νὰ σχεδιάσωμεν εἰς τὸ χαρτὶ ἓν τετράγωνον, φέρομεν πρῶτον εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ εἰς τὰ ἄκρα ταύτης δύο καθέτους ἴσας μὲ τὴν γραμμήν. Ἔπειτα ἑνώνομεν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τὰς καθέτους. Διὰ νὰ φέρωμεν τὰς καθέτους, μεταχειριζόμεθα τὸν κανόνα καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸ χαρτὶ ὀρθογώνιον, φέρομεν μίαν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὰ ἄκρα ταύτης δύο ἴσας καθέτους καὶ ἑνώνομεν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τὰς καθέτους. Ἐπίσης ἔχομεν μάθει ὅτι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.

Εἰς τὸ παραλληλογραμμον αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ γωνίαι ὅμως ὄχι ὀρθαί.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸ χαρτὶ παραλληλόγραμμον, φέρομεν πρῶτον μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ ἐπὶ ταύτης δύο καθέτους, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι. Ἔπειτα ἀπὸ τὰς δύο καθέτους παίρνομεν ἴσας ἀποστάσεις ὄχι ὅμως ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 27. Ἡ ἀπόστασις αβ εἶναι ἴση μὲ τὴν γδ. Ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ σημεῖα α μὲ τὸ γ καὶ τὸ β μὲ τὸ δ. Αἱ δύο εὐθεῖαι αβ καὶ γδ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἐπίσης καὶ αγ καὶ βδ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Αἱ γωνίαι εἶναι δύο ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι, ἑπομένως τὸ σχῆμα αγδβ εἶναι παραλληλόγραμμον. Τὰς περιττὰς γραμμὰς σβήνομεν καὶ μένει τὸ καθαρῶς παραλληλόγραμμον.



Σχ. 27

* * *

Ἀσκήσεις. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 7 δακτύλων καὶ ἕτερον μὲ πλευρὰν 6 δακτύλων.

Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 8 δακτύλων καὶ μὲ μικρὰν 5 καὶ ἕτερον μὲ μικρὰν πλευρὰν 6 καὶ μεγάλην 9.

Φέρατε εἰς τὸ χαρτὶ δύο παραλλήλους μήκους ἑκάστη 7 δακτύλων καὶ ἀποστάσεως ἀπ' ἀλλήλων 4. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ ἓν παραλληλόγραμμον κατὰ βούλησιν.

Σχηματίσατε παραλληλογραμμον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη μεγάλη πλευρὰ νὰ εἶναι 7 δακτύλων.
Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ 5 παραλληλόγραμμα κατὰ βούλησιν.

* * *

Ἔχομεν εἴπει ὅτι διὰ νὰ φέρωμεν εἰς τὸ ἔδαφος κάθετον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, εἶναι ἀνάγκη νὰ σχηματίσωμεν μὲ σπάγγον ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὴν κορυφήν του μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεως. Μέσον τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ πέσῃ ἡ κάθετος.
Παραλλήλους εἰς τὸ ἔδαφος σχηματίζομεν, ἐὰν φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.
Διὰ νὰ σχηματίσωμεν παραλληλόγραμμον εἰς τὸ ἔδαφος, φέρομεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας δύο καθέτους, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 27. Ἐπὶ τῶν δύο καθέτων λαμβάνομεν ἴσας ἀποστάσεις ὄχι ὅμως καὶ τὰς δύο ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς εὐθείας. Ἔπειτα ἑνώνομεν μὲ εὐθείας τὰ 4 σημεῖα α, γ, δ, β.
Τὸ παραγόμενον σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ γδ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καθὼς καὶ αἱ αγ καὶ βδ. Ἐκ τῶν γωνιῶν δύο εἶναι ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι.

***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος δύο παραλλήλους μήκους ἑκάστη 7 μέτρων. Ἡ μία νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴν ἄλλην 3 μέτρα καὶ 7 παλάμας.
Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη μεγάλη πλευρὰ νὰ εἶναι 6 μέτρα.
Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος 5 παραλληλόγραμμα κατὰ βούλησιν.

* * *

Εἴπομεν ὅτι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ ὀξεῖαι εἶναι μικρότεραι τῆς ὀρθῆς καὶ αἱ ἀμβλεῖαι μεγαλύτεραι.
Ὅπως μετροῦμεν τὰ βάρη, τὰ μήκη, τὰς ἐπιφανείας κ.λ. τοιουτοτρόπως μετροῦμεν καὶ τὰς γωνίας. Ὅσο μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἄνοιγμα μιᾶς γωνίας, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι αὕτη.
Τας γωνίας μετροῦμεν μὲ ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται μοιρογνωμόνιον (σχ. 28). Τοῦτο εἶναι ἓν ἡμικύκλιον, τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου ἑνοῦνται μὲ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Τὸ ἡμικύκλιον εἶναι διῃρημένον εἰς 180 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται μοῖραι. Τὸ μέσον τῆς εὐθείας λέγεται κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου.

Ὅταν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, ἐφαρμόζομεν τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, Τὴν μίαν πλευρὰν τῆς γωνίας ἐφαρμόζομεν εἴτε εἰς τὸ δεξιὸν μέρος τῆς εὐθείας τοῦ μοιρογνωμονίου εἴτε εἰς τὸ ἀριστερὸν καὶ παρατηροῦμεν ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δεικνύει τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας εἰς μοίρας.

Σχ. 28.

Ἂν μετρήσωμεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι 90 μοιρῶν δηλ. τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμικυκλίου ἢ τὸ τέταρτον τοῦ κύκλου. Μία ὀξεῖα γωνία θὰ εἶναι ὀλιγώτερον τῶν 90 μοιρῶν καὶ μία ἀμβλεῖα περισσότερον. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται πρῶτα λεπτά.

Τὰς μοίρας σημειώνομεν μὲ ἕνα ἀριθμὸν καὶ δεξιά του καὶ εἰς τὸ ἐπάνω μέρος σημειώνομεν ἓν μικρὸν μηδενικόν. Π.χ. 78ο σημαίνει 78 μοίρας. Τὰ πρῶτα λεπτὰ τῆς μοίρας σημειώνονται μὲ μίαν ὀξεῖαν. Π.χ. 38ο.45′ σημαίνει 38 μοίρας καὶ 45 πρῶτα λεπτά!

*
* *

Ἀσκήσεις. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ 5 ὀρθὰς γωνίας καὶ μετρήσατε αὐτὰς μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον.

Σχηματίσατε 5 ὀξείας γωνίας καὶ μετρήσατε αὐτάς.

Σχηματίσατε 5 ἀμβλείας καὶ μετρήσατε αὐτάς.

Σχηματίσατε ὀξείας γωνίας 45 μοιρῶν, 38, 29 καὶ 56.

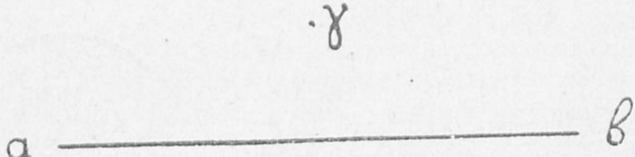
Σχηματίσατε ἀμβλείας 108, 125. 137, 149.

Σχηματίσατε παραλληλόγραμμον καὶ μετρήσατε, τὰς δύο ὀξείας καὶ τὰς δύο ἀμβλείας. Τί παρατηρεῖτε;

*
* *

Ἔχομεν μάθει πῶς φέρομεν καθέτους εἰς τὸ χαρτὶ εἰς σημεῖα, κείμενα, ἐπὶ τῆς εὐθείας. Τώρα θὰ μάθωμεν πῶς φέρομεν κάθετον εἰς εὐθεῖαν ἀπὸ σημείου, κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας.

Εἰς τὸ σχῆμα 29 ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν αβ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου γ κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας πρέπει νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς εὐθείας αβ ἐφαρμόζομεν μίαν ἐκ τῶν

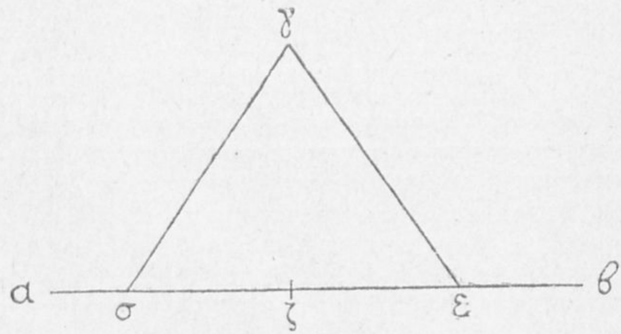


Σχ. 29

καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὴν ἄλλην κάθετον κανονίζομεν οὕτως, ὥστε νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου γ. Τότε σύρομεν μίαν εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ σημείου γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν αβ καὶ ἡ γραμμὴ αὐτὴ εἶναι κάθετος.

Ἐπίσης ἔχομεν μάθει πῶς φέρομεν καθέτους ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Τώρα θὰ μάθωμεν πῶς φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κάθετον εἰς εὐθεῖαν ἀπὸ σημείου, κειμένου ἐτρὸς τῆς εὐθείας.

Εἰς τὸ σχῆμα 29 ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα αβ εἶναι μὲ σπάγ-



Σχ. 30

γον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ πρόκειται νὰ φέρωμεν εἰς ταύτην μίαν κάθετον ἀπὸ τοῦ σημείου γ κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν δύο ἴσους σπάγγους ἀρκετὰ μακροὺς καὶ τὰ δύο ἄκρα τούτων ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ σημεῖον γ. Ἔπειτα τοὺς σπάγγους τοὺς τεντώνομεν πρὸς τὴν εὐθεῖαν αβ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ σχηματισθῇ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 30. Τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές, διότι καὶ οἱ δύο σπάγγοι εἶναι ἴσοι. Βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἡ δε. Ἐὰν πάρωμεν τὸ μέσον τῆς βάσεως ζ καὶ τὸ ἑνώσωμεν μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ τριγώνου γ, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι κάθετος. Ἑπομένως ἐφέραμεν κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν α β ἀπὸ τὸσημεῖον γ. Τοὺς σπάγγους γδ καὶ γε ἀφαιροῦμεν, διότι πλέον δὲν μᾶς χρειάζονται. Ἂν τὸ σημεῖον γ εἶναι πλησίον εἰς ἓν ἄκρον τῆς εὐθείας αβ, τότε τὴν εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ τὴν προεκτείνωμεν.

***

Ἀσκήσεις. Φέρατε εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν μήκους 8 δακτύλων. Βάλατε ἓν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας καὶ ἀπο τούτου φέρατε κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Φέρατε εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν μήκους μιᾶς παλάμης. Βάλετε δύο σημεῖα ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενα καὶ ἀπὸ τούτων φέρατε δύο καθέτους εἰς τὴν εὐθεῖαν.

Τί εἶναι πρὸς ἀλλήλας αὐτὰς αἱ δύο κάθετοι;

Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μίαν εὐθεῖαν μήκους 8 μέτρων. Βάλετε ἓν σημεῖον ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον καὶ ἀπὸ τούτου φέρατε κάθετον ἐπὶ τῆς εὐθείας.

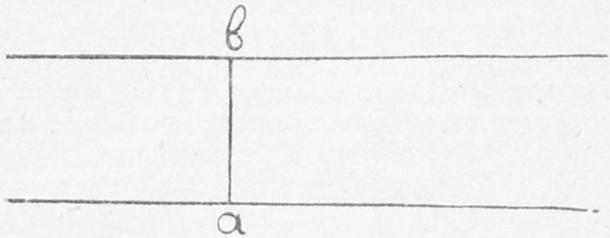
Φέρατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον μίαν εὐθεῖαν μήκους 12 μέτρων. Βάλετε δύο σημεῖα,κείμενα ἐκτὸς τῆς εὐθείας καὶ ἀπὸ τούτων φέρατε δύο καθέτους εἰς τὴν εὐθεῖαν. Τί εἶναι πρὸς ἀλλήλας αἱ δύο αὐταὶ κάθετοι.

Φέρατε κατὰ βούλησιν πολλὰς εὐθείας εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ἀπὸ σημείων, κειμένων ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν φέρατε καθέτους ἐπὶ τῶν εὐθειῶν.

***

Ἔχομεν δύο παραλλήλους γραμμὰς εἴτε εἰς τὸ χαρτὶ εἴτε εἰς τὸ ἔδαφος. Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰς δύο αὐτὰς παραλλήλους λέγεται ἀπόστασις τῶν παραλλήλων. Π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 31 ἔχομεν δύο παραλλήλους γραμμάς. Ἡ κάθετος αβ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων τούτων.

Γράφομεν εἰς τὸ χαρτόνι ἓν παραλληλόγραμμον, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 32. καὶ μὲ ἓν μαχαιρίδιον ἀποκόπτομεν ὁλόκληρον τὸ παραλληλόγραμμον. Αἱ δύο πλευραί του αβ καὶ γδ εἶναι παράλληλοι. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασίν των, φέρομεν μίαν κάθετον ἀπὸ τὸ σημεῖον γ πρὸς τὴν αβ. Ἡ κά-

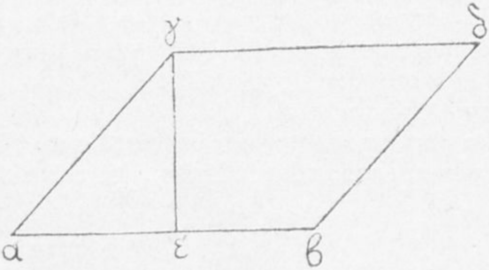


Σχ. 31

θετος γε εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων γραμμῶν αβ καὶ γδ.

Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, λέγεται καὶ ὕψος αὐτοῦ.

Επειτα χαράσσομεν μὲ μαχαιρίδιον τὴν γραμμὴν γε καὶ ἀποκόπτομεν τὸ τρίγωνον γαε. Τὸ τρίγωνον τοῦτο θέτομεν εἰς τὸ

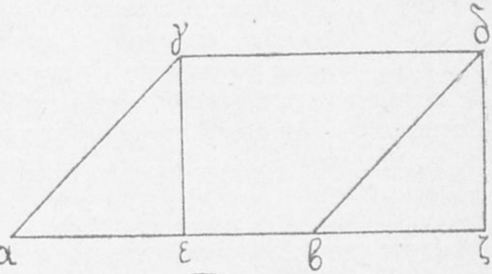


Σχ. 32

ἄλλο μέρος τοῦ παραλληλογράμμου οὕτως, ὥστε ἡ αε νὰ εἶναι συνέχεια τῆς εβ, ἡ αγ νὰ κολλήσῃ εἰς τὴν βδ καὶ τὸ σημεῖον γ εἰς τὸ δ, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 33. Τὸ τρίγωνον βδζ εἶναι τὸ τρίγωνον αγ΄ε, τὸ ὁποῖον μετεφέραμεν. Παράγεται τότε νέον σχῆμα ζεγδ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθογώνιον, διότι αἱ γωνίαι ε,γ,ζ καὶ δ εἶναι ὀρθαί.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, διότι ὅσον ἐκόψαμεν ἀπὸ τὸ ἀριστερὸν μέρος του τὸ ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸ δεξιόν. Ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον δυνάμεθα νὰ τὸ μεταβάλωμεν εἰς ὀρθογώνιον.

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἔχει μεγάλην πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν μεγάλην πλευρὰν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἡ μικρὰ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ γε, εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.



Σχ. 33

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον αγδβ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἔδαφος. Πρέπει νὰ φέρωμεν κάθετον ἀπὸ τὸ σημεῖον γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν αβ. Δηλαδὴ θέλομεν νὰ φέρωμεν εἰς μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἀπὸ σημείου, κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας. Γνωρίζομεν πῶς γίνεται τοῦτο. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου θὰ φέρωμεν τὴν κάθετον γε. Ἔπειτα προεκτείνομεν τὴν εβ τόσον, ὅσον εἶναι ἡ αε καὶ εἰς τὸ σημεῖον ζ φέρομεν κάθετον ἀπὸ τὸ δ. Διὰ νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ ζ πρέπει νὰ προεκτείνωμεν τὴν εζ. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τοὺς σπάγγους αγ καὶ δβ καὶ μένει τὸ ὀρθογώνιον γεζδ ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον.

*
* *

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Φέρατε εἰς τὸ χαρτὶ δύο παραλλήλους, καὶ εὕρατε τὴν ἀπόστασίν των. Σχηματίσατε εἰς χαρτόνι ἓν παραλληλόγραμμον. Μεταβάλετε τοῦτο εἰς ὀρθογώνιον. Σχηματίσατε 5 τοιαῦτα παραλληλόγραμμα καὶ μεταβάλετε ταῦτα εἰς ὀρθογώνια.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγους ἓν παραλληλόγραμμον. Μεταβάλετε τοῦτο εἰς ὀρθογώνιον. Σχηματίσατε 5 ἄλλα παραλληλόγραμμα καὶ μεταβάλετε ταῦτα εἰς ὀρθογώνια.

*
* *

Εἴπομεν ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον. Εἰς τὸ σχῆμα 33 τὸ παραλληλόγραμμον αβδγ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον γεζδ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν μεγάλην πλευράν του γδ μὲ τὴν μικρὰν γε. Ὅσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ ἡ πλευρὰ γδ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι καὶ πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου, ἡ δὲ γε εἶναι τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν μεγάλην πλευράν του, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν βάσιν, μὲ τὸ ὕψος του.

***

Ἀσκήσεις. Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος 5 παραλληλόγραμμα καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν των, χωρὶς νὰ τὰ μεταβάλετε εἰς ὀρθογώνια.

***

Εἴπομεν ὅτι τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει 6 ἕδρας. Ἐκ τούτων ἄλλαι ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ ἄλλαι παραλληλογράμμου. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν πρῶτον τῶν ὀρθογωνίων καὶ ἔπειτα τῶν παραλληλογράμμων καὶ τὰ προσθέτομεν.

***

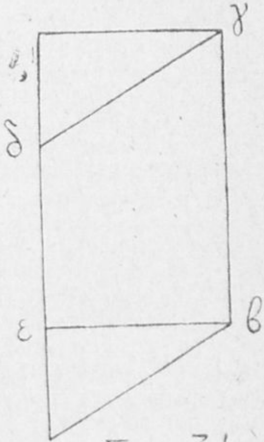
Ἀσκήσεις. Εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ὀρθογωνίων τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου; Εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν παραλληλογράμμων;

Πάρετε ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του εἰς τετραγωνικοὺς δακτύλους.

Διατὶ κανὲν δωμάτιον δὲν ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου;

***

Παίρνομεν ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ξύλινον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι ἔχουν σχῆμα παραλληλογράμμου καὶ 4 σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ τὸ στήνομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 34. Φέρομεν μίαν κάθετον ἐκ τοῦ σημείου β πρὸς τὴν αδ, τὴν βε. Ἔπειτα μὲ πρίονα ἀποκόπτομεν τὸ τεμάχιον τοῦ παραλληλεπιπέδου αβε καὶ τὸ προσθέτομεν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος. Παράγεται τότε ἓν νέον σῶμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Τοῦτο ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον, διότι ὅσον μέρος ἐκόψαμεν ἀπὸ τὸ κάτω μέρος τὸ ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸ ἐπάνω.



Σχ. 34

Ἔχομεν μάθει ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Ὅταν εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, γνωρίζομεν τὸν ὄγκον καὶ τοῦ κεκλιμένου. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου. Ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἡ βε, δηλαδὴ ἡ κάθετος ἡ ἑνώνουσα τὴν βάσιν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου μὲ τὴν ἀπέναντι ἕδραν. Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, φέρομεν μίαν κάθετον ἀπὸ τὴν βάσιν του πρὸς τὴν ἀπέναντι ἕδραν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μὲ τὴν κάθετον αὐτήν. Ἡ κάθετος ἡ ἑνώνουσα τὴν βάσιν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου μὲ τὴν ἀπέναντι ἕδραν λέγεται ὕψος του. Συντομώτερον λοιπὸν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος..

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ πλάγια παραλληλεπίπεδα μὲ 4 ἕδρας παραλληλόγραμμα καὶ δύο ὀρθογώνια καὶ ἄλλα, εἰς τὰ ὁποῖα καὶ αἱ 6 ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα. Καὶ εἰς αὐτὰ ὁ ὄγκος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος. Καὶ ἐπαναλαμβάνομεν, ὕψος λέγεται ἡ κάθετος ἡ ἑνώνουσα τὴν βάσιν μὲ τὴν ἀπέναντί της ἕδραν.

*
* *

Ἀσκήσεις. Πάρετε διάφορα πλάγια παραλληλεπίπεδα καὶ εὕρετε τὴν ὄγκον των εἰς κυβικοὺς δακτύλους.

* * *

Προβλήματα. Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 42 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος 5 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 27 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ ὁ ὄγκος του 108 κυβικὰ μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

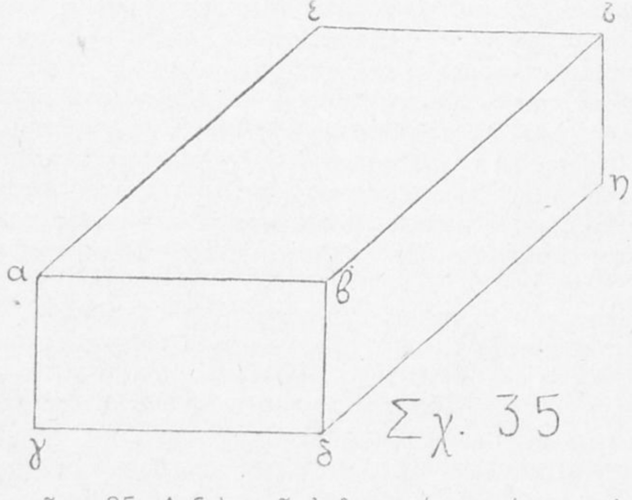
Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου ὁ ὄγκος του εἶναι 360 κυβικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 8 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως;

Ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον μὲ μεγάλην πλευρὰν 6 μέτρα καὶ μικρὰν 4. Τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι 3 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Κάμετε καὶ σεῖς πολλὰ ὅμοια προβλήματα.

* * *

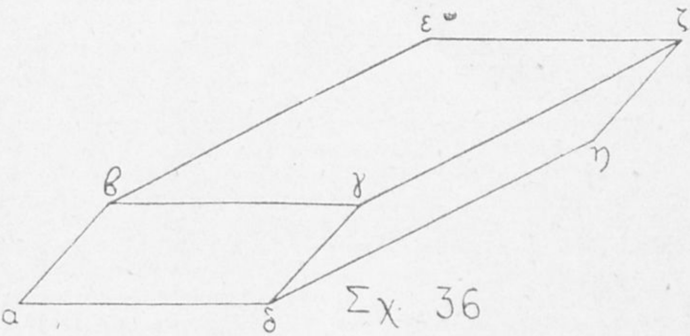
Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, γράφομεν εἰς τὸ χαρτὶ τὸ ὀρθογώνιον αβγδ ὅπως φαίνεται



Σχ. 35

εἰς τὸ σχῆμα 35. Δεξιὰ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου καὶ ὀλίγον ὑψηλότερον σχηματίζομεν ἥμισυ ὀρθογώνιον μὲ τὰς δύο πλευρὰς ἴσας μὲ τὰς τοῦ προηγουμένου. Αἱ δύο αὐταὶ πλευραὶ εἶναι αἱ εζ καὶ ζ η. Ἔπειτα ἑνώνομεν μὲ γραμμὰς τὰ σημεῖα εα, ζβ, καὶ ηδ. Τὸ παραγόμενον σχῆμα εἶναι σχῆμα τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Δυνάμεθα νὰ ἰχνογραφήσωμεν καὶ πλάγιον παραλληλεπίπεδον μὲ βάσιν παραλληλόγραμμον. Πρὸς τοῦτο γράφομεν εἰς τὸ χαρτὶ τὸ παραλληλόγραμμον αβγδ, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 36. Ἔπειτα δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω γράφομεν ἥμισυ

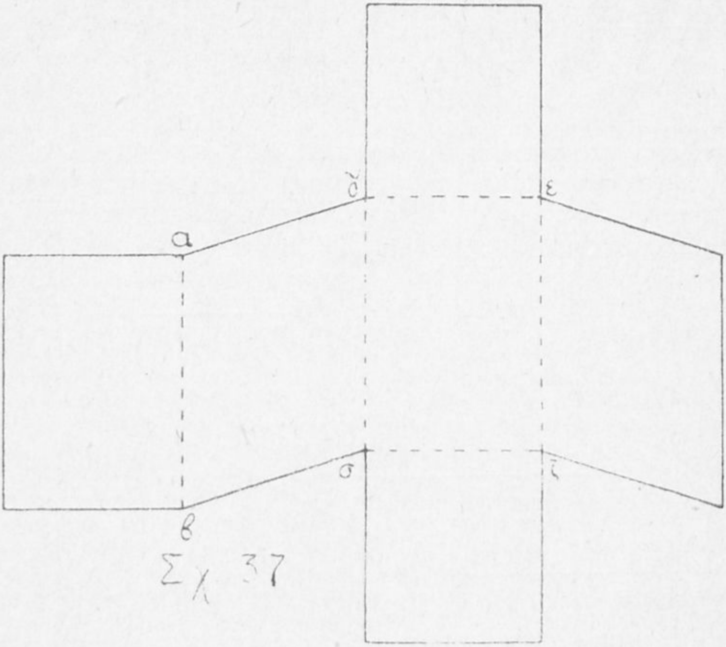


παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εζ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν βγ καὶ ἡ ζη ἴση μὲ τὴν γδ. Ἔπειτα ἑνώνομεν μὲ γραμμὰς τὰ σημεῖα εβ, γζ καὶ ηδ.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ χαρτόνι, ἰχνογραφοῦμεν εἰς αὐτὸ τὸ σχῆμα 37. Τὸ ἐπάνω καὶ τὸ κάτω ὀρθογώνιον πρέπει νὰ εἶναι ἴσα. Τὸ μεσαῖον ὀρθογώνιον καὶ τὸ ἀριστερὸν πρέπει ἐπίσης νὰ εἶναι ἴσα καὶ τὸ δεξιὸν παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ἀριστερὸν πρέπει ἐπίσης νὰ εἶναι ἴσα. Ἔπειτα μὲ μαχαιρίδιον χαράσσομεν τὰς γραμμὰς αβ, γδ, γε, εζ καὶ ζδ χωρὶς νὰ ἀποκόψωμεν τὸ καρτόνι καὶ τὸ διπλώνομεν κατὰ τὰς τομάς. Θὰ παραχθῇ πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἀπὸ πηλὸν πλάγιον παραλληλεπίπεδον, κατασκευάζομεν πρῶτον ἓν ἀπὸ χαρτόνι καὶ ἔπειτα κάμνομεν μὲ πηλὸν ὅμοιον μὲ τὰς αὐτὰς διαστάσεις.

* * *



Σχ 37

'Α σ κ ή σ ε ι ς. 'Ιχνογραφήσατε 5 πλάγια παραλληλεπίπεδα μὲ βάσιν ὀρθογώνιον. 'Ιχνογραφήσατε 5 ὅμοια μὲ βάσιν παραλληλόγραμμον.

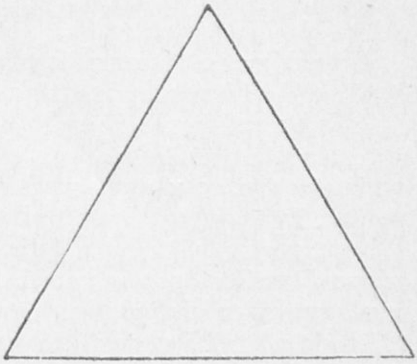
Κατασκευάσατε 5 πλάγια παραλληλεπίπεδα μὲ χαρτόνι καὶ 5 μὲ πηλόν.

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

'Ο κύβος, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχουν ἓξ ἕδρας καὶ αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ γεωμετρικὰ σώματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ἀπέναντι ἕδρας ἀλλ' ὅλαι συνδέονται ἀμέσως μεταξύ των. Τοιοῦτον σῶμα εἶναι ἡ τριγωνικὴ πυραμίς.

Ἡ βάσις τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνον καὶ ἐξ ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ ὑψοῦται μία ἕδρα τριγωνική. Αἱ τρεῖ τριγωνικαὶ ἕδραι ἑνοῦνται εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κορυφὴ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος. Ὥστε ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 ἕδρας τριγωνικάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι βάσις. Ἀκμὰς ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 6. Ἂν φέρωμεν μίαν κάθετον ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος, αὕτη λέγεται ὕψος.

Ἂν ἰχνογραφήσωμεν τὴν βάσιν τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, θὰ παραχθῇ τὸ σχῆμα 38. Αὐτὸ τὸ σχῆμα λέγεται τρίγωνον, διότι ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας. Καὶ τῶν ἄλλων τριῶν ἑδρῶν τὸ σχῆμα εἶναι τριγωνικόν.



Σχ. 38

Ὅλα τὰ τρίγωνα ἔχουν τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας, δὲν εἶναι ὅμως ὅλα ὅμοια. Ὑπάρχουν τρίγωνα ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας καὶ λέγονται ἰσόπλευρα. Ὑπάρχουν τρίγωνα, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ἴσας καὶ λέγονται ἰσοσκελῆ.

Σχ. 39

Ὑπάρχουν τρίγωνα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν καμμίαν πλευρὰν ἴσην μὲ ἄλλην καὶ λέγονται σκαλινά. Ὑπάρχουν τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ὀρθὴν καὶ τὰς ἄλλας δύο ὀξείας καὶ λέγονται ὀρθογώνια.

Εἰς τὸ σχῆμα 39 τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, τὸ ἄλλο ἰσοσκελές, τὸ ἄλλο σκαλινὸν καὶ τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ δεξιὰ ὀρθογώνιον.

***

Ἀσκήσεις. Εὕρετε εἰς τὸ σχολεῖον σας, εἰς τὴν οἰκίαν σας ἢ καὶ ἀλλοῦ τρίγωνα καὶ διακρίνατε τί εἴδους εἶναι ἕκαστον.

Καρφώσατε εἰς τὴν τράπεζαν τρεῖς καρφίτσας χωρὶς νὰ εἶναι καὶ αἱ τρεῖς εἰς εὐθεῖαν γραμμήν. Φέρατε γύρω γύρω ἀπὸ τὰς τρεῖς καρφίτσας κλωστήν. Θὰ παραχθῆ τοιουτοτρόπως τρίγωνον. Σχηματίσατε κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον πολλὰ τρίγωνα.

Σχηματίσατε μὲ σύρμα διάφορα τρίγωνα. Σχηματίσατε μὲ σύρμα ὅλα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων. Ὅσοι δὲν ἔχετε σύρμα σχηματίσατε αὐτὰ μὲ βοῦρλα.

Ἂν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοποθετήσωμεν κατακορύφως τὴν μίαν ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν, ἡ ἄλλη ποίαν διεύθυνσιν θὰ λάβη;

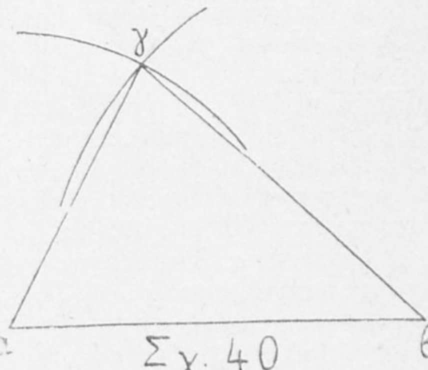
***

Εἴπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ἔχουν τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας. Ἂν μετρήσωμεν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς τρεῖς γωνίας ἑκάστου τριγώνου καὶ προσθέσωμεν τὰς μοίρας, θὰ ἴδωμεν ὅτι θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα 180 μοῖραι, δηλ. δύο ὀρθαί. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἂν μετρήσωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑκάστου τριγώνου, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον τῆς τρίτης πλευρᾶς. Δηλαδὴ δὲν δύναται νὰ ὑπάρξη τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 100 μέτρα, ἡ ἄλλη 8 καὶ ἡ ἄλλη 10, διότι αἱ δύο μικραὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναντηθοῦν καὶ νὰ σχηματίσουν γωνίαν.

Τώρα θὰ ἴδωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον εἰς τὸ χαρτὶ καὶ εἰς τὸ ἔδαφος.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸ χαρτὶ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 8 δακτύλους, ἡ ἄλλη 9 καὶ ἡ ἄλλη 7. Πρῶτον φέρομεν εἰς τὸ χαρτὶ μίαν γραμμὴν 9 δακτύλων, ὅσον εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρά, ἔπειτα λαμβάνομεν τὸν διαβήτην καὶ ἀνοίγομεν τὰ σκέλη του 8 δακτύλους καὶ ἀφοῦ στηρίξομεν τὸ ἓν σκέλος εἰς τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας, χαράσσομεν ὑπεράνω τῆς εὐθείας τόξον κύκλου, ὡς φαίνεται εἰς τό σχῆμα 40. Ἔπειτα ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου 7 δακτύλους καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν σκέλος εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς εὐθείας χαράσσομεν ἕτερον τόξον κύκλον, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα. Τὰ δύο τόξα συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον γ. Ἀπ' ἐκεῖ φέρομεν τὰς εὐθείας γα ἴσην μὲ 7 δακτύλους καὶ τὴν γβ ἴσην μὲ 7 δακτύλους καὶ τὸ τρίγωνον ἔγινεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸ ἔδαφος ἓν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 9 μέτρα, ἡ ἄλλη 8 καὶ ἡ ἄλλη 7. Φέρομεν πρῶτον μὲ σπάγγον μίαν εὐθεῖαν 9 μέτρων τὴν αβ (σχῆμα 40). Ἔπειτα λαμβάνομεν σπάγγον μήκους 8 μέτρων καὶ εἰς τὸ ἄκρον δένομεν μικρὸν ξύλον. Μὲ τεντωμένον τὸν σπάγγον χαράσσομεν εἰς τὸ ἔδαφος τόξον κύκλου ὑπεράνω τῆς εὐθείας, ὅπως ἐκάμαμεν καὶ μὲ τὸν διαβήτην. Ἔπειτα λαμβάνομεν ἄλλον σπάγγον μήκους 7 μέτρων καὶ δένομεν εἰς τὸ ἄκρον μικρὸν ξύλον. Μὲ τεντωμένον τὸν σπάγγον χαράσσομεν τόξον κύκλου ὑπεράνω τῆς εὐθείας. Τὰ δύο τόξα θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον γ. Ἀπ' ἐκεῖ μὲ σπάγγους φέρομεν τὰς εὐθείας γα καὶ γβ καὶ τὸ τρίγωνον ἔγινεν.



Σχ. 40

* * *

Ἀσκήσεις. Μετρήσατε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς γωνίας ἑνὸς τριγώνου καὶ προσθέσατε τὰς μοίρας. Κάμετε τὸ ἴδιον εἰς 5 ἄλλα διάφορα τρίγωνα. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 9 δακτύλους, ἡ ἄλλη 8 καὶ ἡ ἄλλη 6. Σχηματίσατε ἕτερον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 5 δακτύλους.

Σχηματίσατε κατὰ βούλησιν 5 τρίγωνα.

Δοκιμάσατε νὰ σχηματίσετε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 9 δακτύλους, ἡ ἄλλη 3 καὶ ἡ ἄλλη 4.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος τρίγωνον,τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 10 μέτρα, ἡ ἄλλη 9 καὶ ἡ ἄλλη 8.

Σχηματίσατε τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ νὰ εἶναι 8 μέτρα.

Σχηματίσατε κατὰ βούλησιν 5 τρίγωνα.

*
* *

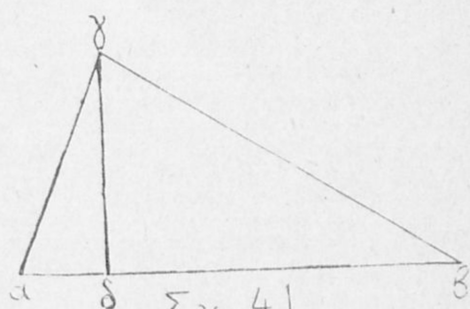
Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 15 μέτρα, ἡ ἄλλη 9 καὶ ἡ ἄλλη 2· Πῶς θὰ τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ;

Κατὰ πρῶτον θὰ χαράξωμεν εἰς τὸ χαρτὶ μίαν εὐθεῖαν 15 ἑκατοστῶν, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τὴν εὐθεῖαν τῶν 15 μέτρων. Ἔπειτα ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην 9 ἑκατοστὰ καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν σκέλος εἰς τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας γράφομεν τόξον κύκλου ὑπεράνω τῆς εὐθείας. Κατόπιν ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην 12 ἑκατοστὰ καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν σκέλος εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς εὐθείας γράφομεν τόξον κύκλου ὑπεράνω τῆς εὐθείας. Ἀπὸ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται τὰ δύο τόξα, φέρομεν εὐθείας εἰς τὰ ἄκρα τῆς πρώτης εὐθείας. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον τοῦ ἐδάφους ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μία ὁποιαδήποτε λέγεται βάσις τοῦ τριγώνου. Ἡ γωνία, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως, λέγεται κορυφή. Ἡ κάθετος, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν, λέγεται ὕψος τοῦ τριγώνου. Συνήθως εἰς τὰ τρίγωνα ὡς βάσιν λαμβάνομεν τὴν μεγαλυτέραν πλευράν.

Ἔχομεν εἰς τὸ χαρτὶ τὸ τρίγωνον αβγ (σχ. 41). Ὡς βάσιν του θὰ λάβωμεν τὴν αβ, ἐπειδὴ εἶναι μεγαλυτέρα. Ὕψος τοῦ τριγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ κάθετος, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον γ εἰς τὴν εὐθεῖαν αβ. Ἔχομεν ἐδῶ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἀπὸ σημείου, κειμένου ἐκτὸς εὐθείας, θὰ φέρωμεν κάθετον εἰς αὐτήν. Διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μίαν ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς τὴν εὐθεῖαν αβ καὶ τὴν ἄλλην κάθετον θὰ φέρωμεν οὕτως, ὥστε νὰ ἀκουμβᾷ εἰς τὸ σημεῖον γ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου. Ἔπειτα φέρομεν τὴν εὐθεῖαν γδ. Αὕτη εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, διότι εἶναι κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν.

Ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος ἓν τρίγωνον. Ὡς βάσιν του θὰ λάβωμεν τὴν μεγαλυτέραν πλευράν του. Ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία εἶναι ἡ κορυφή του. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος του, φέρομεν κάθετον ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν. Ἔχομεν ἐδῶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἀπὸ σημείου, κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας πρόκειται νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς αὐτήν. Γνωρίζομεν ὅτι τοῦτο θὰ γίνη μὲ τὴν βοήθειαν ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Δηλαδὴ θὰ πάρωμεν ἕνα σπάγγον ἀρκετὰ μακρόν, θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ ἓν ἄκρον του εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ τριγώνου καὶ θὰ τὸν τεντώσωμεν ἕως ὅτου τὸ ἄλλο ἄκρον του φθάση εἰς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου. Ἔπειτα τὸν ἴδιον σπάγγον τεντώνομεν πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας καὶ οὕτω σχηματίζεται ἐντὸς τοῦ πρώτου τριγώνου ἕτερον ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἑνώνομεν τὴν κορυφὴν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ ὁποία εἶναι κορυφὴ καὶ τοῦ πρώτου τριγώνου, μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεως. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ εἶναι κάθετος εἰς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου καὶ ἑπομένως τὸ ὕψος του.



Σχ 41

Ἂν ἡ βάσις τοῦ τριγώνου δὲν ἐπαρκῆ διὰ τὴν ἐργασίαν αὐτήν, τὴν προεκτείνομεν.

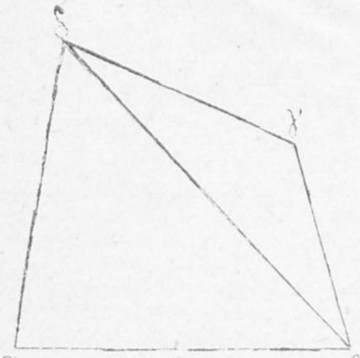
***

Ἀσκήσεις. Ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 12 μέτρα. Μεταφέρατε αὐτὸ εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 7 μέτρα, ἡ ἄλλη 9 καὶ ἡ ἄλλη 9. Μεταφέρατε τοῦτο εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος 5 τρίγωνα καὶ μεταφέρατε ταῦτα εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ 5 διάφορα τρίγωνα. Ὁρίσατε ποία εἶναι ἡ βάσις ἑκάστου καὶ ποία ἡ κορυφή του. Φέρατε τὸ ὕψος των.



Σχ 42

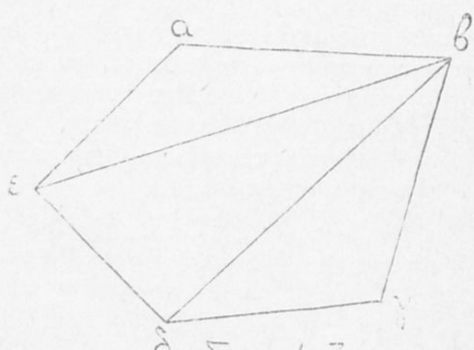
Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος 5 διάφορα τρίγωνα. Ὁρίσατε ποία θὰ εἶναι ἡ βάσις ἑκάστου καὶ ποία ἡ κορυφή του. Φέρατε τὸ ὕψος εἰς ἕκαστον τούτων.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του; Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

Ἔχομεν εἰς τὸ χαρτὶ ἐσχηματισμένον ἓν τρίγωνον ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Ἡ μία πλευρά του εἶναι 6 δακτύλους, ἡ ἄλλη 5 καὶ ἡ ἄλλη 8. Σχηματίσατε τοῦτο εἰς τὸ ἔδαφος ὑπὸ μεγέθυνσιν δηλ. ὅπως εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα.

Ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος δύο τρίγωνα μὲ κοινὴν βάσιν, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 42. Ἡ κοινὴ βάσις εἶναι ἡ δβ. Ἡ αδ εἶναι 9 μέτρα ἡ αβ 11. Ἡ γδ 10 καὶ ἡ γβ 10. Μεταφέρατε τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.



Σχ. 43

Ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος τρία τρίγωνα μὲ κοινὰς βάσεις, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 43. Τὰ τρίγωνα αεβ καὶ εδβ ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν εβ. Τὸ τρίγωνον δγβ ἔχει βάσιν τὴν πλευρὰν δβ. Ἡ εα εἶναι 5 μέτρα, ἡ αβ 10, ἡ εβ 12, ἡ εδ 6, ἡ δβ 11, ἡ βγ 5,5 καὶ ἡ δγ 6,5. Μεταφέρατε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Ἔχομεν εἰς τὸ χαρτὶ τὸ σχῆμα 42 ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ καὶ θέλομεν νὰ τὸ σχηματίσωμεν εἰς τὸ ἔδαφος ὑπὸ μεγέθυνσιν. Ἡ αδ εἶναι 8 δακτύλους, ἡ αβ 11, ἡ δβ 13, ἡ γδ 10 καὶ ἡ γβ 10. Σχηματίσατε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰς τὸ ἔδαφος, ὅπως εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα.

Ἔχομεν εἰς τὸ χαρτὶ τὸ σχῆμα 43. ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ καὶ θέλομεν νὰ τὸ σχηματίσωμεν εἰς τὸ ἔδαφος ὑπὸ μεγέθυνσιν. Ἡ εα εἶναι 5 δακτύλους, ἡ αβ 10, ἡ εβ 12, ἡ εδ 6, ἡ δβ 11, ἡ βγ 5,5, ἡ δγ 6,5. Σχηματίσατε τὰ τρία ταῦτα τρίγωνα εἰς τὸ ἔδαφος ὅπως εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα.

Ἔχετε τὰ σχήματα 42 καὶ 43 εἰς τὸ χαρτί. Φέρατε τὰ ὕψη ὅλων τῶν τριγώνων καὶ μετρήσατε πόσους δακτύλους καὶ γραμμὰς εἶναι ἕκαστον τούτων.

Ἔχετε τὰ σχήματα 42 καὶ 43 εἰς τὸ ἔδαφος. Φέρατε τὰ ὕψη ὅλων τῶν τριγώνων καὶ μετρήσατε πόσα μέτρα καὶ πόσους δακτύλους εἶναι ἕκαστον τούτων.

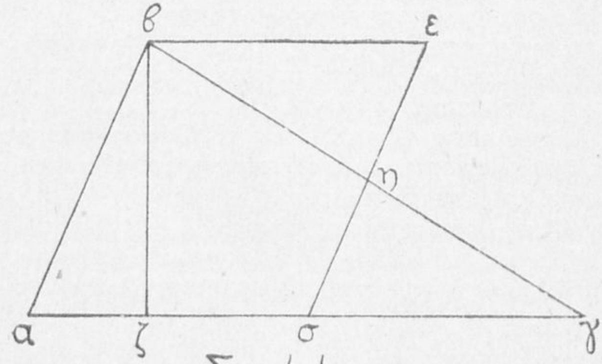
Ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος ἓν τρίγωνον. Ἡ μία πλευρά του εἶναι 9 μέτρα, ἡ ἄλλη 7 καὶ ἡ ἄλλη 11. Μεταφέρατε τοῦτο εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Εἰς τὸ τρίγωνον τοῦ χαρτιοῦ φέρατε τὸ ὕψος του. Μετρήσατε τὸ ὕψος εἰς δακτύλους καὶ γραμμάς. Πόσον θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἂν ἦτο πραγματικὸν εἰς τὸ ἔδαφος;

* * *

Παίρνομεν ἓν χαρτόνι καὶ ἐπ' αὐτοῦ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον αγβ (σχ. 44). Βάσις τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ αγ. Παίρνομεν τὸ μέσον τῆς βάσεως ταύτης τὸ σημεῖον δ. καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν τὴν γραμμὴν δε ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν αβ. Ἀποκόπτομεν μὲ μαχαιρίδιον τὸ τρίγωνον δηγ καὶ τὸ τοποθετοῦμεν ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα τὸ τρίγωνον βηε. Ἡ γραμμὴ βε εἶναι ἡ δγ. Τοιουτοτρόπως παράγεται νέον σχῆμα τὸ αβεδ, τὸ ὁποῖον εἶναι παραλληλόγραμμον. Τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει ἴσον ἐμβαδὸν μὲ τὸ τρίγωνον, διότι ὅσον ἐκόψαμεν ἀπὸ τὸ κάτω μέρος τοῦ τριγώνου τὸ ἐπροσθέσαμεν εἰς τὸ ἄνω. Ἐνθυμούμεθα ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ὕψος. Ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται ἡ κάθετος ἡ ἑνώνουσα δύο ἀπέναντι πλευράς.

Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον αβεδ βάσις εἶναι ἡ αδ καὶ ὕψος ἡ κάθετος βζ ἡ ἑνώνουσα τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς βε καὶ αδ. Ἑπομένως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αδ καὶ βζ, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἅμα γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, γνωρίζομεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, διότι εἶναι ἴσα, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ μεταβάλλομεν εἰς παραλληλόγραμμον κατὰ τὸν τρόπον, τὸν ὁποῖον



Σχ. 44

ἐξεθέσαμεν, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

Ὑπάρχει ὅμως τρόπος πολὺ ἁπλούστερος. Εἴπομεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὰ μήκη τῶν γραμμῶν αδ καὶ βζ. Ἀλλὰ ἡ αδ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, διότι τὸ δ εἶναι τὸ μέσον, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦτο εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ τὸ εὕρωμεν καὶ ἡ βζ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἀφοῦ τὸ σημεῖον β εἶναι κορυφή του καὶ ἡ βζ κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου εἰς τὴν βάσιν του. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, μᾶς χρειάζονται τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος του, πράγματα τὰ ὁποῖα δυνάμεθα εὐκόλως νὰ τὰ εὕρωμεν, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὸν κόπον νὰ μεταβάλωμεν τὸ τρίγωνον εἰς παραλληλόγραμμον.

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἑνὸς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 8 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 5, τὸ ἐμβαδὸν του θὰ εἶναι 4χ5 20 τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἀντὶ ὅμως νὰ πάρωμεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος, λαμβάνομεν ὁλόκληρον τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2, διότι 4χ5 = 20 καὶ 8χ5:2 = 20.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ἢ τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2.

***

Σχηματίσατε εἰς χαρτόνι 5 διάφορα τρίγωνα. Ἀποκόψατε αὐτὰ καὶ μεταβάλετε εἰς παραλληλόγραμμα. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 8. δακτύλους, ἡ ἄλλη 7 καὶ ἡ ἄλλη 6. Φέρατε τὸ ὕψος. Μετρήσατε τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἰς τετραγωνικοὺς δακτύλους.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 12 μέτρα, ἡ ἄλλη 9 καὶ ἡ ἄλλη 8. Φέρατε τὸ ὕψος καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν εἰς τετραγωνικὰ μέτρα.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 15 μέτρα, ἡ ἄλλη 10 καὶ ἡ ἄλλη 14. Μεταφέρατε τοῦτο εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Φέρατε εἰς τὸ χαρτὶ τὸ ὕψος του. Μετρήσατε τοῦτο πόσοι δάκτυλοι καὶ πόσαι γραμμαὶ εἶναι. Πόσον θὰ εἶναι τὸ ὕψος εἰς τὴν πραγματικότητα; Πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πραγματικοῦ τριγώνου;

Ἔχομεν εἰς τὸ χαρτὶ τρίγωνον ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Ἡ μία πλευρά του εἶναι 12 δάκτυλοι, ἡ ἄλλη 9 καὶ ἡ ἄλλη 11. Μεταφέρατε τοῦτο εἰς τὴν πραγματικότητα εἰς τὸ ἔδαφος. Εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

***

Π ρ ο β λ ή μ α τ α. Ἑνὸς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 8,40 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 7 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύσατε 5 ὅμοια προβλήματα.

Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία κάθετος εἶναι 13,60 καὶ ἡ ἄλλη 18 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύσατε 5 ὅμοια προβλήματα.

Ἑνὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 87 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ ἡ βάσις 12 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

Λύσατε 5 ὅμοια προβλήματα.

Ἑνὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 106 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος 8 μέτρα. Πόσον εἶναι ἡ βάσις του;

Λύσατε 5 ὅμοια προβλήματα.

***

Εἴπομεν ὅτι ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τρίγωνον καὶ γύρω τρεῖς ἕδρας τριγωνικάς, αἱ ὁποῖαι ἑνοῦνται εἰς τὴν κορυφήν.

Λαμβάνομεν ἄλλο σῶμα τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τρίγωνον,ὅπως καὶ ἡ τριγωνικὴ πυραμίς. Ἀπέναντι τῆς βάσεως δὲν ἔχει κορυφήν, ἀλλὰ ἕδραν ἴσην καὶ παράλληλον μὲ τὴν βάσιν. Γύρω ἔχει τρεῖς ἕδρας σχήματος ὀρθογωνίου. Τὸ σῶμα τοῦτο λέγεται τριγωνικὸν πρῖσμα.Διαφέρει ἀπὸ τὴν πυραμίδα κατὰ τοῦτο ὅτι ἔχει δύο ἕδρας τριγωνικὰς τὴν μίαν ἀπέναντι τῆς ἄλλης ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τρεῖς ἕδρας ὀρθογωνίους.

Εἴπομεν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου,πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκεται καὶ ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

Λαμβάνομεν ἓν τριγωνικὸν πρίσμα καὶ μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα, ποὺ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ὕψος εἰς τὴν πυραμίδα, λέγεται ἡ κάθετος, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν.

Τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τριγωνικὸν πρῖσμα εἶναι τὸ ἓν τρίτον τούτου. Ἑπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμεν διὰ 3.

***

Π ρ ο β λ ή μ α τ α. Ἔχομεν ἓν τριγωνικὸν πρῖσμα. Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του;

Εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶναι 6 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 4. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 7 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

Κάμετε 5 ὅμοια προβλήματα.

Εἰς μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα ἡ μία πλευρὰ τῆς βάσεως εἶνα 10 μέτρα. τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως εἶναι 7 μέτρα. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 8 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

Κάμετε 5 ὅμοια προβλήματα.

Ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 24 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ ὁ ὄγκος του 120 κυβικὰ μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος;

Κάμετε 5 ὅμοια προβλήματα.

Μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 36 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ ὁ ὄγκος της 60 κυβικὰ μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος της;

Κάμετε 5 ὅμοια προβλήματα.

***

Ἀσκήσεις. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας, ποὺ εἶναι ἀπέναντι τῆς βάσεως;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν ὀρθογωνίων ἑδρῶν τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος;

Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος;

Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τριγωνικῆς ἕδρας τῆς πυραμίδος;

Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος;

Πάρετε ἓν τριγωνικὸν πρίσμα καὶ εὕρετε τὸν ὄγκον του εἰς κυβικοὺς δακτύλους. Εὕρατε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του εἰς τετραγωνικοὺς δακτύλους.

Πάρετε μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα καὶ εὕρετε τὸν ὄγκον της εἰς κυβικοὺς δακτύλους. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της εἰς τετραγωνικοὺς δακτύλους.

***

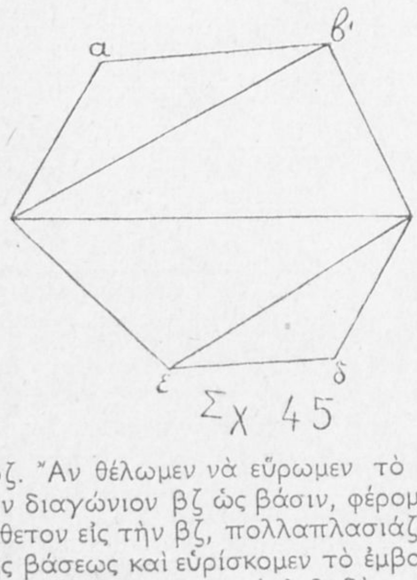
Εἴπομεν ὅτι ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἔχει σχῆμα τριγώνου. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ πυραμίδες, τῶν ὁποίων ἡ βάσις ἔχει σχῆμα τετραγώνου καὶ λέγονται τετραγωνικαὶ πυραμίδες. Ὑπάρχουν καὶ πυραμίδες, τῶν ὁποίων ἡ βάσις εἶναι πεντάγωνον ἢ ἑξάγωνον καὶ τότε αἱ πυραμίδες λέγονται πολυγωνικαί.

Ὅταν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον, ἡ πυραμὶς θὰ ἔχῃ γύρω 4 ἕδρας. Ὅταν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἔχει 5 πλευρὰς καὶ αἱ γύρω ἕδραι θὰ εἶναι 5. Ὅσαι λοιπὸν εἶναι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως, τόσαι θὰ εἶναι καὶ αἱ γύρω ἕδραι. Ὅλαι αὗται θὰ ἔχουν σχῆμα τριγωνικὸν καὶ θὰ συναντῶνται εἰς τὴν κορυφήν. Εἰς ὅλας τὰς πυραμίδας ὕψος λέγεται ἡ κάθετος, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν. Ὅταν ἡ κάθετος αὕτη πίπτει εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, ἡ πυραμὶς λέγεται κανονική.

Εἰς ὅλας τὰς πυραμίδας ὁ ὄγκος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιρέσωμεν διὰ 3.

* * *

Εἴπομεν ὅτι ὑπάρχουν πυραμίδες, τῶν ὁποίων ἡ βάσις εἶναι πολύγωνον. Τοιοῦτον πολύγωνον εἶναι τὸ σχῆμα 45, τὸ ὁποῖον ἔχει 6 πλευρὰς καὶ 6 γωνίας. Τὸ πολύγωνον τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς τρίγωνα, ἐὰν φέρωμεν γραμμὰς ἀπὸ τὴν μίαν γωνίαν εἰς τὴν ἄλλην. Αἱ γραμμαὶ αὗται λέγονται διαγώνιοι καὶ φαίνονται εἰς τὸ σχῆμα 45.



Σχ 45

Μὲ τὰς διαγωνίους τὸ πολύγωνον διηρέθη εἰς 4 τρίγωνα.

Ἂς πάρωμεν ἐκ τοῦ πολυγώνου τὸ τρίγωνον αβζ. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν του, λαμβάνομεν τὴν διαγώνιον βζ ὡς βάσιν, φέρομεν ἀπὸ τὴν κορυφὴν α μίαν κάθετον εἰς τὴν βζ, πολλαπλασιάζομεν τὸ ὕψος ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου αβζ. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου βζγ, λαμβάνομεν τὴν γζ ὡς βάσιν καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς β φέρομεν κάθετον εἰς τὴν βάσιν ζγ, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τοῦ ἄλλου τριγώνου βγζ.

Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ζγε, λαμβάνομεν τὴν ζγ, ὡς βάσιν καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ε φέρομεν κάθετον εἰς τὴν ζγ, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ζγε.

Ἔπειτα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εγδ, λαμβάνομεν ὡς βάσιν τὴν διαγώνιον εγ, φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς δ κάθετον εἰς τὴν εγ καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἂν θέλωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τοῦ πολυγώνου, προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, τὸ διαιροῦμεν εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων καὶ τὰ προσθέτομεν.

***

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Κάμετε εἰς τὸ χαρτὶ ἓν πολύγωνον μὲ 6 πλευρὰς καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν του εἰς τετραγωνικοὺς δακτύλους.

Κάμετε ἄλλο πολύγωνον μὲ 8 πλευρὰς καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

Κάμετε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον πολύγωνον μὲ 7 πλευρὰς καὶ εὕρατε τὸ ἐμβαδόν του.

Κάμετε ἄλλο μὲ 8 πλευρὰς καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν εἰς τὸ ἔδαφος τὸ πολύγωνον αβγδεζ (σχῆμα 45) καὶ θέλομεν νὰ τὸ μεταφέρωμεν εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Τὸ διαιροῦμεν πρῶτον εἰς τρίγωνα μὲ τὰς διαγωνίους καὶ μεταφέρομεν εἰς τὸ χαρτὶ πρῶτον τὸ τρίγωνον αβζ, ἔπειτα τὸ συνεχόμενον μὲ αὐτὸ τρίγωνον ζβζ, ἔπειτα τὸ συνεχόμενον μὲ αὐτὸ τρίγωνον ζεγ καὶ ἔπειτα τὸ συνεχόμενον μὲ αὐτὸ τρίγωνον εδγ. Πῶς μεταφέρονται τρίγωνα ἀπὸ τὸ ἔδαφος εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα, τὸ ἔχομεν μάθει καὶ τὸ ἐπαναλαμβάνομεν.

Διὰ νὰ μεταφέρωμεν τὸ τρίγωνον αβζ, μετροῦμεν τὴν ζβ καὶ τὴν γράφομεν εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν ζα καὶ ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην τόσους δακτύλους ὅσα μέτρα εἶναι ἡ ζα, δηλ. ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν σκέλος του χαράσσομεν τόξον κύκλου ὑπεράνω τῆς ζβ. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν αβ ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν σκέλος του εἰς τὸ σημεῖον β χαράσσομεν τόξον κύκλου ὑπεράνω τῆς ζβ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον, ὅπου συναντῶνται τὰ δύο τόξα, φέρομεν εὐθείας πρὸς τὸ ζ καὶ πρὸς τὸ β καὶ τὸ τρίγωνον ἔγινεν.

Διὰ νὰ μεταφέρωμεν τὸ τρίγωνον ζβγ, τὴν ζβ τὴν γνωρίζομεν πόσα μέτρα εἶναι καὶ τὴν ἔχομεν γράψει. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν βγ, ἀνοίγομεν τὴν διαβήτην ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ καὶ στηρίζοντες τὸ ἓν σκέλος του εἰς τὸ σημεῖον β χαράσσομεν τόξον κύκλου ὑπεράνω τῆς ζβ. Ἔπειτα μετροῦμεν τὴν ζγ καὶ κάμνομεν τὸ ἴδιον καὶ τὸ τρίγωνον ἔγινεν.

Καθ' ὅμοιον τρόπον μεταφέρομεν καὶ τὰ ἄλλα δύο τρίγωνα.

Ἀφοῦ μεταφέρομεν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ χαρτὶ διῃρημένον εἰς τρίγωνα, ἂν φέρωμεν μίαν κάθετον ἀπὸ τὸ σημεῖον α εἰς τὴν ζβ, ἔχομεν τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου αζβ εἰς τὸ χαρτί. Ἂν τὸ ὕψος τοῦτο τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 100, ἔχομεν τὸ ὕψος τοῦ πραγματικοῦ τριγώνου εἰς τὸ ἔδαφος

Τοιουτοτρόπως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνων, ὅταν τὰ ἔχωμεν εἰς τὸ χαρτί, χωρὶς νὰ τὰ μετρήσωμεν εἰς τὸ ἔδαφος. Ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὴν βάσιν των, νὰ τὴν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς κλίμακος, ὑπὸ τὴν ὁποίαν τὰ ἔχομεν μεταφέρει, νὰ μετρήσωμεν ἐπίσης τὸ ὕψος καὶ νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς κλίμακος καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

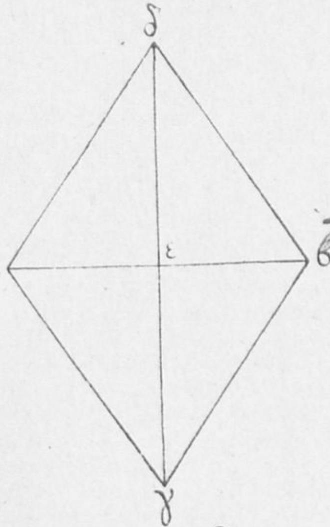
Καὶ ὅταν ἔχωμεν πολύγωνον εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν του, ἂν τὸ διαιρέσωμεν εἰς τρίγωνα καὶ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἑκάστου τριγώνου καὶ τὰ προσθέσωμεν ὅλα τὰ ἐμβαδά.

*
* *

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Κάμετε μὲ σπάγγον εἰς τὸ ἔδαφος 5 διάφορα πολύγωνα καὶ μεταφέρατε αὐτὰ εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τούτων τῶν πολυγώνων, χωρὶς νὰ τὰ μετρήσετε εἰς τὸ ἔδαφος.

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα σχηματίζομεν ἓν τρίγωνον ἰσόπλευρον μὲ τὴν κορυφὴν πρὸς τὰ κάτω, τὸ αβγ (σχῆμα 46). Εὑρίσκομεν τὸ μέσον τῆς βάσεως αβ καὶ τὸ ἑνώνομεν μὲ τὴν κορυφὴν γ. Ἔπειτα προεκτείνομεν τὴν γε πρὸς ἄνω μέχρι τοῦ σημείου δ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον δ φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰ σημεῖα α καὶ β.



Σχ. 46

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν μὲ χαρτόνι τριγωνικὴν πυραμίδα, γράφομεν εἰς τὸ χαρτόνι ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ αβγ. (σχ. 47). Εἰς τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς φέρομεν ἀπὸ μίαν κάθετον. Αἱ τρεῖς αὐταὶ κάθετοι πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἀπὸ τὰ ἄκρα τῶν καθέτων, δ,ε,ζ φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰ σημεῖα αβγ. Ἀποκόπτομεν μὲ μαχαιρίδιον τελείως τὸ σχῆμα ἀπὸ τὸ χαρτόνι. Τὰς εὐθείας αβ, αγ καὶ γβ χαράσσομεν βαθέως μὲ μαχαιρίδιον καὶ ἑνώνομεν πρὸς τὰ ἄνω τὰς κορυφὰς δ,ε,ζ.

*
* *

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς. Ἰχνογραφήσατε εἰς τὸ χαρτὶ 5 τριγωνικὰς πυραμίδας.

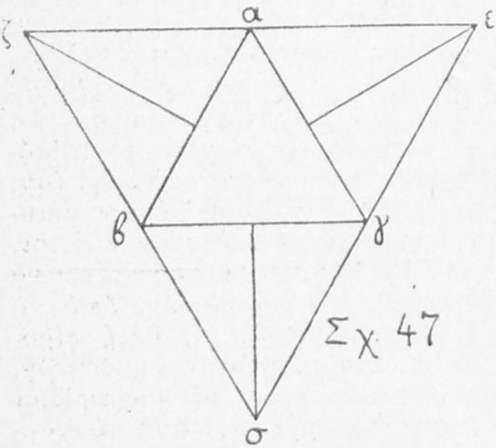
Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι 5 τριγωνικὰς πυραμίδας διαφόρων διαστάσεων.

Κατασκευάσατε ἀπὸ πηλὸν 5 τριγωνικὰς πυραμίδας τῶν αὐτῶν διαστάσεων μὲ τὰς χαρτίνας.

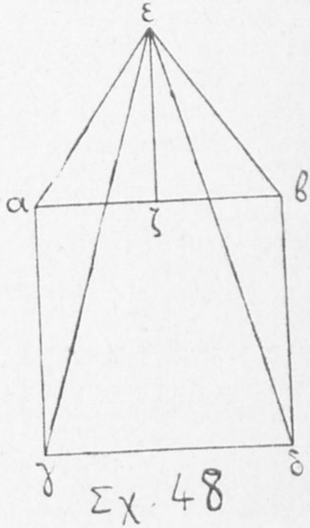
*
* *

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν τετραγωνικὴν πυραμίδα, σχηματίζομεν εἰς τὸ χαρτὶ ἓν τετράγωνον αβγδ (σχ. 48). Εἰς τὸ μέσον τῆς ἄνω πλευρᾶς αβ φέρομεν τὴν κάθετον εζ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον ε φέρομεν εὐθείας τὴν εα, εβ, εγ καὶ εδ. Σβήνομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας εζ καὶ αβ.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τετραγωνικὴν πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι, σχηματίζομεν ἐπάνω εἰς αὐτὸ τὸ τετράγωνον αβγδ. (σχ. 49). Εἰς τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς φέρομεν ἀπὸ μίαν κάθετον. Ὅλαι αἱ κάθετοι εκ, ζλ, θι καὶ ημ. πρέπει νὰ εἶναι ἴσοι.



Σχ 47



Σχ 48

Ἀπὸ τὰς κορυφὰς ε,θ, η καὶ ζ φέρομεν τὰς εὐθείας εα, θα, θδ, ηδ, ηγ, γζ καὶ ζβ. Ἀποκόπτομεν μὲ μαχαιρίδιον ὅλον τὸν σχῆμα καὶ χαράσσομεν βαθέως τὰς γραμμὰς αδ, δγ, γβ καὶ βα. Ἑνώνομεν ἔπειτα τὰς κορυφὰς ε,θ,η,ζ καὶ ἡ πυραμὶς ἔγινε.

***

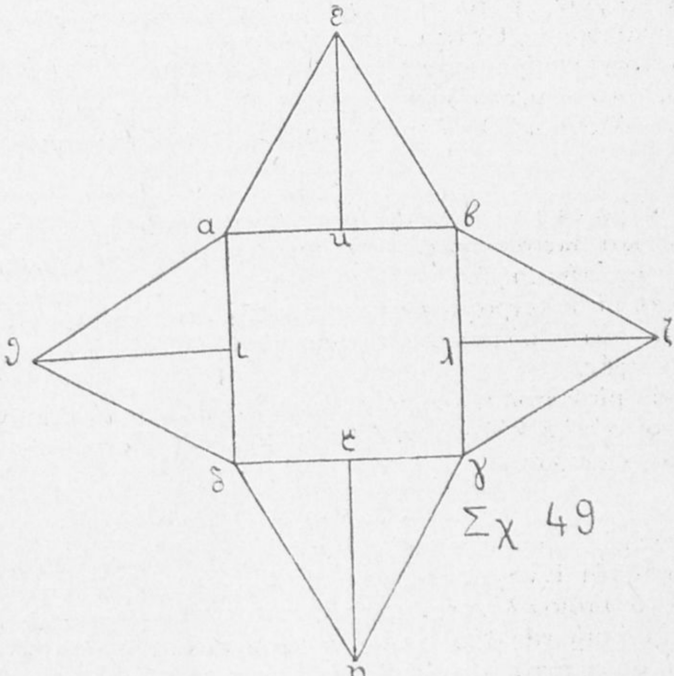
Ἀσκήσεις. Ἰχνογραφήσατε 5 τετραγωνικὰς πυραμίδας διαφόρων διαστάσεων.

Σχηματίσατε μὲ χαρτόνι 5 τετραγωνικὰς πυραμίδας διαφόρων διαστάσεων.

Σχηματίσατε μὲ πηλὸν 5 τετραγωνικὰς πυραμίδας τῶν αὐτῶν διαστάσεων μὲ τὰς χαρτίνας.

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

Ἔχομεν μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα ξυλίνην. Παίρνομεν ἕνα πρίονα καὶ τὴν κόπτομεν παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν ὀλίγον κάτω ἀπὸ τὴν κορυφήν. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ τομὴ θὰ ἔχη τὸ



Σχ 49

αὐτὸ σχῆμα μὲ τὴν βάσιν δηλ. θὰ εἶναι τριγωνική. Αἱ γύρω ἕδραι ὅμως δὲν θὰ ἔχουν σχῆμα τριγώνου.

Δυνάμεθα καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ κόψωμεν καὶ τετραγωνικὴν πυραμίδα καὶ πολυγωνικήν. Ἡ τομὴ πάντοτε θὰ ἔχη τὸ σχῆμα τῆς βάσεως. Αἱ γύρω ἕδραι δὲν θὰ ἔχουν πλέον τὸ σχῆμα τριγώνου.

Ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἀπεκόψαμεν τὴν κορυφὴν παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν λέγεται κόλουρος πυραμίς.

Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει μίαν βάσιν καὶ τρεῖς ἕδρας γύρω ἐν ὅλῳ 4 ἕδρας. Ἂν ὅμως τῆς κόψωμεν τὴν κορυφὴν καὶ τὴν κάμωμεν κόλουρον πυραμίδα, θὰ ἔχῃ ἄλλην μίαν ἕδραν, τὴν τομήν. Ἂν ἔχωμεν τετραγωνικὴν πυραμίδα, θὰ ἔχῃ μίαν βάσιν καὶ 4 ἕδρας γύρω, ἐν ὅλῳ 5. Ἂν ὅμως τὴν καταστήσωμεν κόλουρον πυραμίδα, θὰ ἔχῃ 6 ἕδρας,διότι προστίθεται καὶ ἡ τομή.

Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 6 ἀκμάς. Ἐὰν τὴν καταστήσωμεν κόλουρον, θὰ ἔχῃ 3 ἀκμὰς κάτω, 3 ἄνω καὶ 3 γύρω.

Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 κορυφάς, 3 κάτω καὶ μίαν ἐπάνω, ὅπου συναντῶνται αἱ τρεῖς ἕδραι. Ἐὰν τὴν καταστήσωμεν κόλουρον, θὰ ἔχῃ 3 κορυφὰς κάτω καὶ τρεῖς ἄνω.

*
* *

Ἀσκήσεις. Πάρετε μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα ἀπὸ πηλὸν καὶ καταστήσατε αὐτὴν κόλουρον. Μετρήσατε τὰς ἕδρας της, τὰς ἀκμάς, τὰς κορυφάς.

Πάρετε μίαν τετραγωνικὴν πυραμίδα ἀπὸ πηλὸν καὶ καταστήσατε αὐτὴν κόλουρον. Μετρήσατε τὰς ἕδρας, τὰς ἀκμὰς καὶ τὰς κορυφάς.

Πάρετε μίαν πολυγωνικὴν πυραμίδα ἀπὸ πηλὸν καὶ καταστήσατε αὐτὴν κόλουρον. Μετρήσατε τὰς ἕδρας, τὰς ἀκμὰς καὶ τὰς κορυφάς.

*
* *

Εἰς τὴν κόλουρον πυραμίδα, ἐὰν πάρωμεν μίαν ἀπὸ τὰς γύρω ἕδρας καὶ τὴν ἰχνογραφήσωμεν, θὰ ἴδωμεν ὅτι θὰ ἔχῃ τὸ σχῆμα 50, τὸ ὁποῖον λέγεται τραπέζιον. Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο ἡ αβ εἶναι μία ἀκμὴ τῆς βάσεως, καὶ ἡ γδ εἶναι μία ἀκμὴ τῆς τομῆς. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ τομὴ καὶ ἡ βάσις εἶναι παράλληλοι, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου γδ καὶ αβ εἶναι παράλληλοι, ὄχι ὅμως καὶ ἴσαι.

Αἱ πλευραὶ αγ καὶ βδ δὲν εἶναι παράλληλοι οὔτε καὶ ἴσαι πάντοτε.

Ἑπομένως τὸ τραπέζιον εἶναι τετράπλευρον μὲ δύο ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

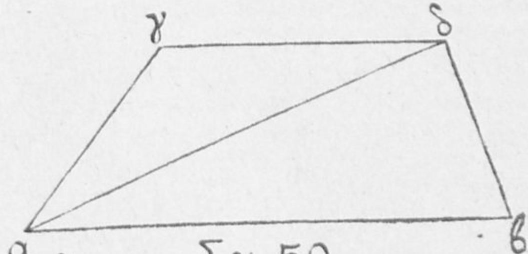
Ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου δύο εἶναι ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι. Τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν 4 γωνιῶν του εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθάς.

Τὸ τραπέζιον διαφέρει ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμον, διότι χει μόνον δύο πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὄχι ἴσας. Ἡ κάθετος ἡ ἑνώνουσα τὰς δύο παραλλήλους πλευρὰς τοῦ τραπεζίου λέγεται ὕψος αὐτοῦ.

Ἂν φέρωμεν μίαν διαγώνιον, τὸ τραπέζιον διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα, τὰ αγδ καὶ αδβ.

Ἂν θέλωμεν νὰ μεταφέρωμεν τὸ τραπέζιον εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα, μεταφέρομεν πρῶτον τὸ ἓν τρίγωνον καὶ ἔπειτα τὸ ἄλλο.

Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, εὑρί-



Σχ. 50

σκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων καὶ τὰ προσθέτομεν. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Μετροῦμεν τὰς δύο παραλλήλους πλευράς, τὰς προσθέτομεν, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος.

***

Ἀσκήσεις. Σχηματίσατε εἰς τὸ χαρτὶ 5 τραπέζια. Μετρήσατε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὰς γωνίας ἑκάστου καὶ εὕρετε πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα.

Σχηματίσατε εἰς τὸ ἔδαφος μὲ σπάγγον 5 τραπέζια διαφόρων μεγεθῶν. Μεταφέρατε αὐτὰ εἰς τὸ χαρτὶ ὑπὸ κλίμακα ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τραπεζίων εἰς τὸ χαρτὶ διὰ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν εἰς τρίγωνα.

Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἰδίων τραπεζίων μὲ τὸν δεύτερον τρόπον.

Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τραπεζίων τοῦ ἐδάφους καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

Εἰς τὴν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα ἔχομεν μίαν βάσιν τριγωνικήν, μίαν τομὴν τριγωνικὴν καὶ 3 ἕδρας σχήματος τραπεζίου. Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος;

Εἰς μίαν κόλουρον τετραγωνικὴν πυραμίδα ἔχομεν μίαν βάσιν τετράγωνον, μίαν τομὴν τετράγωνον καὶ 4 ἕδρας σχήματος τραπεζίου. Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος;

Εἰς μίαν πολυγωνικὴν πυραμίδα ἔχομεν μίαν βάσιν πολύγωνον, μίαν τομὴν πολύγωνον καὶ τόσας ἕδρας τραπεζοειδεῖς ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως. Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος;

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα, παίρνομεν χαρτόνι, ὅπως εἶναι εἰς τὸ σχῆμα 47 καὶ ἀποκόπτομεν ἀπὸ τὰς κορυφὰς δ ε ζ μὲ τὸ ψαλίδιον ἴσα καὶ κανονικὰ τεμάχια τριγωνικά. Ἐὰν διπλώσωμεν τὸ χαρτόνι, θὰ παραχθῇ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμίς.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἀπὸ χαρτόνι κόλουρον τετραγωνικὴν πυραμίδα, παίρνομεν χαρτόνι κατὰ τὸ σχῆμα 49, ἀποκόπτομεν μὲ τὸ ψαλίδιον ἴσα τριγωνικὰ τεμάχια ἀπὸ τὰς κορυφὰς ε, ζ, η, θ καὶ διπλώνομεν τὸ χαρτόνι.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευύσωμεν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα ἀπὸ πηλόν, τὴν κατασκευάζομεν κατὰ τὰς διαστάσεις τῆς χαρτίνης.

Ὁμοίως κατασκευάζομεν καὶ κόλουρον τετραγωνικὴν πυραμίδα.

*
* *

Ἀσκήσεις. Κατασκευάσατε ἀπὸ χαρτόνι 5 κολούρους τριγωνικὰς πυραμίδας καὶ 5 τετραγωνικάς. Κατασκευάσατε ἄλλας τόσας ἀπὸ πηλὸν τῶν αὐτῶν διαστάσεων.

Εὕρετε τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν τῶν πυραμίδων εἰς τετραγωνικοὺς δακτύλους.

*
* *

Προβλήματα. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος εἶναι 18,65 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος 6 μέτρα, πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι 78,50 κυβικὰ μέτρα. Ἀποκόπτομεν τὸν κορυφήν της καὶ τὴν καθιστῶμεν κόλουρον. Τὸ ἀποκοπὲν τμῆμα εἶναι πυραμίς. Ταύτης ὁ ὄγκος εἶναι 19 κυβικὰ μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος;

Ἔχομεν μίαν τετραγωνικὴν πυραμίδα. Ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι 5 μέτρα. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 6 μέτρα. Ἀποκόπτομεν τὴν κορυφὴν καὶ τὴν καθιστῶμεν κόλουρον. Ἡ ἀποκοπεῖσα μικρὰ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1 μέτρου. Τὸ ὕψος τῆς μικρᾶς πυραμίδος εἶναι 1 μέτρον. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ὅλης τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος; Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς ἀποκοπείσης μικρᾶς πυραμίδος; Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος;

Ἑνὸς τραπεζίου ἡ μία ἐκ τῶν παραλλήλων πλευρῶν εἶναι 17 μέτρα, ἡ ἄλλη 10 καὶ τὸ ὕψος 9 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου;

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 135,27 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν;

Κάμετε ἀπὸ 5 ὅμοια προβλήματα.

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Τὰ νέα Βοηθητικὰ

1. Π. Παναγοπούλου τέως επιθεωρ. Δημοτ. Σχολείων

		Δρχ.
1.	Παλαιὰ Διαθήκη	8,50
2.	Καινὴ Διαθήκη	8,50
3.	Ἐκκλησιαστικὴ Ἱστορία	8,50
4.	Κατήχησις καὶ Λειτουργικὴ	8,50
5.	Ἡρωϊκοὶ Χρόνοι (Ἱστορία 3ης τάξεως)	8,50
6.	Ἱστορία Ἀρχαίας Ἑλλάδος 4ης τάξεως	8,50
7.	Βυζαντινὴ Ἱστορία Ε΄. τάξεως	8,50
8.	Νέα Ἱστορία Στ΄. τάξεως	8,50
9.	Φυσικὴ Πειραματικὴ Ε΄ καὶ ΣΤ΄	8,50
10.	Γεωμετρία Ε΄	8,50
11.	» ΣΤ΄	8,50

2. Μιχ. Παπαμαύρου τέως Διευθυντοῦ Διδασκαλείου

12.	Ἀριθμητικὰ Προβλήματα Β΄.	6,50
13.	» » Γ΄.	9.—
14.	» » Δ΄.	9.—
15.	» » Ε΄. **ἄρτι ἐγκριθὲν** (1934—38)	
16.	» » ΣΤ΄	9.—
17.	» » Γ΄. Δ΄.	9.—
18.	» » Ε΄. ΣΤ΄.	9.
19.	Ζωολογία Ε΄ (ζῶα ξένων χωρῶν)	8,50
20.	Ζωολογία ΣΤ΄. (Γενικὰ γνωρίσματα ζώων)	8,50
21.	ΦυτολογίαΕ΄ (Ζῶα ξένων χωρῶν)	8,50
22.	Φυτολογία ΣΤ΄ (Γενικὰ γνωρίσματα φυτῶν)	8,50
23.	Γεωμετρία Ε΄ καὶ ΣΤ΄	

3. Μ. Παπαμαύρου—Π. Παναγοπούλου

24.	Ζωολογία διὰ τὴν 3ην καὶ 4ην τάξιν	8,50

4. Δ. Δημητράκου ἐπιμελείᾳ Δ. Τσαμασφύρου

25.	Γεωγραφία 3ης καὶ 4ης τάξεως (ἀνὰ τὴν Πατρίδα μας)	12.—
26.	» διὰ τὴν 5ην τάξιν	8,50
27.	» » » 6ην τάξιν	8,50

5. Θ. Θεοδωρίδου Δημοδιδασκάλου

28.	Χημεία	6,50
29.	Ὀρυκτολογία	6,50
30.	Φυσικὴ Πειραματικὴ	8,50

6. Ἰωάν. Γεωργοπούλου Γενικοῦ Ἐπιθεωρητοῦ

31.	Χημεία πρὸς χρῆσιν τῶν δημοδιδασκάλων καὶ μαθητῶν	10.—

7. Ἰωάννου Γαλάνη

32.	Γεωγραφία τῆς Ἑλλάδος τάξ. Δ΄	9.—

8. Βασιλείου Πετρούνια Καθηγητοῦ Γυμνασίου

33.	Ἐκκλησιαστικὴ Ἱστορία Ε΄-ΣΤ΄τάξ. **ἄρτι ἐγκριθεῖσα** (1934-38)	
34.	Παλαιὰ Διαθήκη	10.—
35.	Καινὴ Διαθήκη	10.—
36.	Κατήχησις-Λειτουργικὴ	10.—

9. Νικολάου Γκινοπούλου

37.	Ἱστορία τοῦ Νέου Ἑλληνισμοῦ ΣΤ΄ τάξ. **ἐγκριθεῖσα** (1934-38)	