

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΠΡΩΤΗΣ

ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

002  
ΚΛΣ  
ΣΤ3  
213

αθηνά '72

ΣΤ

69

714B

Μαργαρίτα, Αλφειά Εργαστήρι.

Μαρινάκης, Κλέων Έμμανουήλ

ΕΛΛΗΝΙΚΟΝ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΕΚΔΟΣΙΣ



Κλέωνος Έμμανουήλ Μαρινάκη

**ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ  
ΕΝΝΟΙΑΙ**

**Πλήρεις καί έπακριβεῖς όδηγίαι  
διά τήν διδασκαλίαν  
τῶν μαθηματικῶν  
εἰς τήν πρώτην τάξιν  
τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου**

ΑΘΗΝΑΙ 1972

502  
ΕΠΕ  
ΕΤΒ  
213

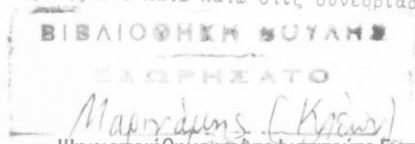
# Πώς ένας Πολιτικός Μηχανικός έγραψε ένα βιβλίο για τήν πρώτη τάξη του Δημοτικού

Πέρυσι τόν Μάρτιο πήρα από τήν Γαλλία μιά πρόσκληση πού μέ πληροφορούσε πώς ή χώρα αύτή ώργάνωνε στο Παρίσι, στο Μέγαρο του U.N. E.S.C.O., ένα συνέδριον τών διακρεπεστερών είδικών στους διαφόρους κλάδους τών επιστημών από τίς διάφορες χώρες και μου ζητούσαν νά πάω κι 'έγώ, νά λάβω μέρος στίς συζητήσεις και νά πω τήν γνώμη μου. Σκοπός του συνεδρίου ήταν ή εξέταση τών βασιικών προβλημάτων επιστήμης και τεχνολογίας πού άπασχολούν τήν άνθρωπότητα και ή ύποβολή και συζήτηση προτάσεων για τόν συντονισμό της δράσεως τών διαφόρων επιστημονικών οργανισμών ώστε ή επιστήμη και ή τεχνολογία νά εξυπηρετήσουν τόν κόσμο κατά τόν καλύτερο δυνατό τρόπο.

Βέβαια ό κάθε άνθρωπος έχει τόν έγωισμό του και του άρέση νά θεωρη τόν έαυτό του σπουδαίο, αλλά όπωσδήποτε ό δικός μου έγωισμός δέν έφθανε μέχρι του σημείου νά θεωρω τόν έαυτό μου τόσο σημαντικό. Έπίστεφα πως έπρόκειτο για παρεξήγηση και δέν έλαβα καν τόν κόπον νά άπαντήσω.

'Αλλά οί άνθρωποι της Γαλλίας και του UNESCO είχαν διαφορετική γνώμη. Μου έγραφε προσωπικά ό κ. HERSELIN ως εκπρόσωπος τών Γάλλων Μηχανικών και μου ζητούσε νά λάβω μέρος στο Συνέδριο. Τόν είδα σ' ένα ταξίδι μου στο Παρίσι και μου εξήγησε πως αύτή ή έπιμονή των για συμμετοχή μου στο Συνέδριον ώφείλετο άφ' ενός μέν στην καλή έντύπωση πού είχα δημιουργήσει στον UNESCO ως υπεύθυνος για τήν μετεκπαίδευση τών 'Αφρικανών Μηχανικών στο Τεχνικό Γραφείο μου στην Αθήνα, άφ' άλλου δέ στην φήμη πού είχε άρχισει ν' άποκτά τό 'Ελληνικόν 'Ινστιτούτον 'Εφαρμογής της 'Επιστήμης λόγω της φύσεως τών επιστημονικών άνακοινώσεων μου.

Κατόπιν αύτών σκέφθηκα ότι δέν έχανα τίποτε αν πήγαίνα στο Συνέδριο για νά παρακολουθήσω όλα αύτά πού θά είχαν νά πουν οί μεγάλοι σοφοί της Γης. Στο κάτω-κάτω στίς συνεδριάσεις λάμβαναν μέρος χίλιοι





ἐπιστήμονες. Ἀπό αὐτούς ἕνα μικρὸ ποσοστὸ μόνον θὰ ἐλάμβαναν μέρους<sup>-3-</sup> στίς συζητήσεις. Οἱ ὑπόλοιποι θὰ ἦταν ἀπλοὶ ἀκροαταί. Ἄς ἤμουν αὐτὸ ἐγὼ ἕνας ἀπὸ αὐτούς.

Τὰ πράγματα δὲν ἔγιναν ἔτσι. Ὅντως στὸ Συνέδριον ἔλαβαν μέρος χίλιοι εἰδικοὶ ἐπιστήμονες ἀπὸ ὅλες σχεδὸν τίς χώρες τῆς Γῆς, καὶ ἕνα ἀπὸ τὰ σοβαρότερα θέματα συζητήσεως ἦταν ἡ ὀργάνωση τῆς παιδείας. Δὲν θυμοῦμαι πῶς ἔγινε, ἀλλὰ τὸ γεγονὸς εἶναι ὅτι στὴν συζήτηση ἐπάνω στὸ θέμα αὐτὸ ἀπὸ τοὺς χίλιους συνέδρους πού παρακολούθησαν ἔλαβαν μέρος μόνον οἱ κ.κ. KLING, Καθηγητὴς εἰς τὴν Ε.Σ. τῶν Παρισίων, J. DONIO, Ἐπιστημονικὸς Διευθυντὴς τοῦ I.R.I.A., A. KIRCHBERGER, Διευθυντὴς τῆς Ο.Σ.Δ.Ε., J.-J. KESSIS, L. JOYEUX, WINTER, FREDERIKSEN, BOTEZ καὶ ὁ ὑποφαινόμενος, ἐνῶ ἀρχικὰ δὲν εἶχα καμμιά πρόθεση ν' ἀναμιχθῶ στὴν συζήτηση. Ἀλλὰ τὸ πῶς ἀναπάντεχο εἶναι πῶς ἐν συνεχείᾳ, χωρὶς καλὰ-καλὰ νὰ τὸ καταλάβω πῶς ἔγινε, βρέθηκα νὰ δέχωμαι τίς παρακλήσεις καὶ κατόπιν τίς πιέσεις ἐνός πλήθους ἐπιστημόνων ἀπὸ διάφορες χώρες πού μοῦ ζητοῦσαν νὰ γράψω ἕνα βιβλίον γιὰ τὴν διδασκαλία τῆς βάσεως τῶν μαθηματικῶν στὴν πρώτη τάξη τοῦ Δημοτικοῦ σχολείου, γιὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ στίς διάφορες αὐτὲς χώρες.

Προσπάθησα νὰ ξεφύγω ἀπαντώντας πῶς τέτοια βιβλία ὑπάρχουν πολλὰ καὶ καλὰ. Ἀλλὰ αὐτοὶ ἐπέμεναν καὶ συγκεκριμένα μοῦ ζητοῦσαν ἕνα βιβλίον τέτοιον πού ἀφ' ἐνός μὲν νὰ εἶναι στὰ παιδάκια στερεές καὶ πλήρεις τίς βασικὰς ἔννοιες τῶν σημερινῶν μαθηματικῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ παραλαμβάνη ἀπὸ τὴν γένεση τοῦ κάθε εἴδους μαθηματικῆς παρερμηνείας ἀπὸ αὐτὲς πού ταλαιπωροῦν τοὺς σημερινούς ἐπιστήμονες, καὶ πού τόσο παραστατικὰ περιγράφονται στίς ἐπιστημονικὰς ἀνακοινώσεις τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἰνστιτούτου Ἐφαρμογῆς τῆς Ἐπιστήμης.

Προσπάθησα καὶ πάλι νὰ ξεφύγω, λέγοντας πῶς γιὰ τὸ ἔργον αὐτὸ ὑπῆρχαν ἄλλοι ἐπιστήμονες πολὺ πιὸ σοφοί, ἔξυπνοι καὶ ἔμπειροι ἀπὸ ἐμένα. Αὐτοὶ ἐπέμεναν λέγοντας πῶς βέβαια ὑπῆρχαν πολλοὶ ἄριστοι ἐπιστήμονες στὸν κόσμον, ἀλλὰ ὅτι τὰ βιβλία μου καὶ οἱ ἀνακοινώσεις μου ἀποδεικνύουν πῶς εἶχα ζήσει ἀπὸ πολὺ κοντὰ καὶ γιὰ πολλὰ χρόνια τὰ σύγχρονα μαθηματικά καὶ στὴ θεωρητικὴ ἔρευνα καὶ στὴν ὑπεύθυνη ἐφαρμογὴ τους στὴ πράξη, καὶ πῶς μποροῦσα νὰ ἀπλοποιῶ τὰ δύσκολα προβλήματα ἔτσι πού ὁ καθένας νὰ μπορῇ νὰ τὰ καταλαβαίνει.

Εἴπαμε πολλὰ, ἐγὼ προσπαθώντας νὰ ξεφύγω, αὐτοὶ ἐπιμένοντας νὰ ἀναλάβω τὸ ἔργο πού μοῦ ζητοῦσαν. Στὸ τέλος μοῦ ὑποσχέθησαν πῶς ἂν

Εγώ εφρόντιζα να γράψω το βιβλίο αυτό, τότε και εκείνοι αναλαμβάνανε να φροντίσουν ο καθένας χωριστά να εφαρμοσθή το βιβλίο στη πατρίδα του αφού πρώτα περάση από τις αναγκαίες διατυπώσεις.

Μετά απ' αυτό δεν έπεμνα περισσότερα στην άρνηση μου. Στο κάτω-κάτω, όταν πρόκειται για τα μικρά παιδιά ο καθένας έχει επιτακτική υποχρέωση να κάνει ό,τι μπορεί για να τα βοηθήσει, γιατί το ωραιότερο και πολυτιμότερο πράγμα που υπάρχει σ' αυτόν τον κόσμο είναι το μικρό, αδύναμο, ζωντανό παιδάκι. Όταν πρόκειται για αυτό, ακόμη και το ανεπιτρεπτό γίνεται επιτρεπτό. Πώς λοιπόν εγώ μπορούσα να άρνηθώ περισσότερο ;

Το έργο αυτό άπαιτησε ένα ολόκληρο χρόνο, γιατί :

α) χρειάστηκε να το γράψω και να το ξαναγράψω πολλές φορές, ώσπου να γίνη αρκετά απλό για τους δασκάλους και τα παιδάκια χωρίς να χάνη τίποτε από την επιστημονική αυστηρότητά του, και

β) η δουλειά μου δεν είναι να γράψω βιβλία για τα παιδάκια, αλλά να κάνω όλα αυτά που απαιτεί το επάγγελμα του Πολιτικού Μηχανικού. Όλες τις εργασίμες ώρες πρέπει να τις διαθέτω για να κάνω ό,τι ακριβώς κάνουν και όλοι οι συνάδελφοί μου: σύνταξη μελετών, εκδόση άρθρων, επίβλεψη οικοδομών, κλπ., κλπ. Τις ελεύθερες ώρες μου τις διαθέτω όπως θέλω. Αντί να κάνω κάτι άλλο, έγραφα το βιβλίο για τα παιδάκια.

Τώρα το βιβλίο τελείωσε. Θα το στείλω στον UNESCO και οι αρμόδιοι εκεί ως φροντίσουν για την εφαρμογή του στις άλλες χώρες. Στην Ελλάδα για την εφαρμογή του βιβλίου θα φροντίση ο αδελφός μου που είναι Παιδίατρος. Αυτός είναι αρμόδιος γιατί μετά την άποφύτηση του από το Πανεπιστήμιον 'Αθηνών και την έξειδίκευση του στην παιδιατρική, συνέχισε τις σπουδές του στα Πανεπιστήμια του Λονδίνου, του Σέφληντ και του Έδιμβούργου για να έμβαθύνη στην ψυχολογική ανάπτυξη του παιδιού, δηλαδή στον τρόπο με τον οποίον το μικρό παιδί αναπτύσσεται και μαθαίνει. Έδιάλεξε τα τρία αυτά πανεπιστήμια, γιατί αυτά θεωρούνται τα πιο προηγμένα στον τομέα αυτόν. Συνεπώς αυτός ξέρει πως να δημιουργήση την κατάλληλην ατμόσφαιρα ώστε τα παιδιά χωρίς δυσκολία να παίξουν τα παιχνίδια που περιγράφονται στο βιβλίο αυτό. Και αν κάποιον ένα παιδί σκαλώση, πάλι αυτός ξέρει πως να το βοηθήση για να ξεπεράση αυτό το εμπόδιο.

Για το περιεχόμενο του βιβλίου δεν υπάρχουν επιφυλάξεις. Και εγώ

ὁ ἴδιος μελέτησα αὐτά τὰ πράγματα πολλά χρόνια σέ διάφορα πανεπιστή-  
μια, καί σέ πολλούς ἀνθρώπους, "Ἕλληνας καί ξένους, μέ μεγάλη μαθηματική  
μόρφωση καί πετρα τὰ ἔδειξα γιά νά μρῶ ποῦν τήν γνώμη τους. Εἶναι πράγ-  
ματα ἀπλά, καθαρά, φωτεινά, ἀνθρώπινα. Δέν ὑπάρχει τίποτε τό μυστηριώδες,  
καί τίποτε τό δογματικό.

Ὁ πίνακας περιεχομένων τοῦ βιβλίου ἀκολουθεῖ τά ἐπίσημα ἐγκεκριμέ-  
να σχολικά προγράμματα τῶν πιό προηγμένων χωρῶν καί προσθέτει λίγες ἀ-  
κόμα ἀπλές, ἀλλά βασικές γνώσεις. "Ὅσοι γνωρίζουν καλά τά ἄλλα βιβλία  
πού ὑπάρχουν ἐπάνω στοῦ ἴδιο θέμα θά ἀντιληφθοῦν ἀμέσως ὅτι ἡ διαφορά  
ἀνάμεσα σ' ἐκεῖνα καί σέ τοῦτο συνίσταται στοῦ ἐξῆς:

- σ' ἐκεῖνα, τό παιδάκι καλεῖται νά παρακολουθήσῃ ἀπλοποιημένη τήν  
σκέψη τοῦ μεγάλου. Κατά κάποιο τρόπο εἶναι σάν τά κλασσικά ἔργα μιᾶς  
φιλολογίας πού ἔχουν ἀπλοποιηθῆ γιά νά γίνουν προσιτά σέ ἀρχάριους  
μαθητάς τῆς γλώσσας τῆς φιλολογίας αὐτῆς. Π.χ. τό μυθιστόρημα Φεββέκα  
ἢ Τζέυν "Ἐρη γιά τούς μαθητάς τῶν ἀγγλικῶν. Φυσικά ὅσο κι' ἄν ἀπλοποι-  
ηθοῦν τά βιβλία αὐτά δέν παύουν νά εἶναι βιβλία γιά μεγάλους. Τό μόνο  
πού ἐπιτυγχάνει ἡ ἀπλοποίηση εἶναι νά τά κἀνη ἄνοστα.

- σ' αὐτό ἐδῶ τό βιβλίον, τό παιδάκι ὠθεῖται νά δημιουργήσῃ μόνο του  
τίς βασικές ἔννοιες τῶν μαθηματικῶν πού θέλομε ν' ἀφομοιώσῃ. Βρίσκει τά  
μαθηματικά μόνο του, παίζοντας, καί χρησιμοποιώντας γιά παράδειγμα τό  
πιό γνώριμο, κοντινό καί ἀγαπημένο του πράγμα: τόν ἴδιο τόν ἑαυτό του.  
Τά μαθηματικά δέν τοῦ ἐπιβάλλονται ἀπ' ἔξω σάν σκέψη ἑνός ἄλλου, ἀλλά  
βγαίνουν ἀπό μέσα του σάν γέννημα τοῦ ἑαυτοῦ του. "Ἔτσι τά μαθηματικά  
γίνονται ζωή. Τό παιδάκι μαθαίνει νά σκέπτεται μαθηματικά ὅπως μαθαί-  
νει ν' ἀναπνέῃ ἢ ὅπως μαθαίνει ν' ἀκούῃ ἢ ὅπως μαθαίνει νά βλέπῃ.

Αὐτό ἐπιτυγχάνει τό βιβλίον τοῦτο γιά τά παιδάκια. Ἡ μαθηματική  
σκέψη τούς γίνεται βίωμα, ἕνα μέρος τοῦ ἑαυτοῦ τους. Καί ἔτσι τίποτε  
πιά δέν μπορεῖ νά τά ἐμποδίσῃ νά προχωρήσουν σέ τόσον ἀνώτερες σπου-  
δές ὅσο σεῖς ἢ τό Κράτος μπορεῖτε νά τοῦς προσφέρετε. Αὐτό δέν θέλετε;  
Αὐτό δέν θέλει κάθε γονιός γιά τό παιδί του;

Πρὶν ἀπὸ δέκα ἔντε χρόνια ἕνας Πολιτικός Μηχανικός ἔκανε τὸ ἐξῆς πείραμα: "Ὅταν τὸν κάλεσαν νὰ διδάξῃ στοιχειώθῃ μηχανικὴ στὴ Σιβιτανίδειο Σχολὴ σὲ μιὰ τάξη ἀπὸ ἀνθρώπους ποικίλης ἡλικίας πού πολλοὶ τοὺς δὲν εἶχαν τελειώσει οὔτε τὸ δημοτικὸ σχολεῖο καὶ δὲν ἤξεραν νὰ γράψουν οὔτε τ' ὄνομα τοὺς, θεώρησε σκόπιμο νὰ ἐφαρμόσῃ ἕνα δικό του σύστημα διδασκαλίας ἐπὶ ἑξὶ μῆνες καὶ κατόπιν κάλεσε ἐμπροσώπου τοῦ Ὑπουργείου καὶ τῶν Μηχανικῶν σὲ δημόσια γραπτὴ καὶ προφορικὴ ἐξέταση αὐτῶν τῶν μαθητῶν. Στούς ἐμπροσώπους αὐτοὺς εἶπε μόνοι τοὺς νὰ δι-αλέξουν καὶ νὰ θέσουν σ' αὐτοὺς τοὺς μαθητὲς θέματα ἐξετάσεως παρόμοια μὲ ἑκεῖνα πού ἔμπαιναν στίς πτυχιακὲς ἐξετάσεις τῶν Μηχανικῶν. Ἔτσι καὶ ἔγινε. Οἱ ἴδιοι ἐμπροσώποι βαθμολόγησαν τίς γραπτὲς καὶ τίς προφορικὲς ἀπαντήσεις. Ὅλοι αὐτοὶ οἱ μαθητὲς προββάστηκαν στὸ μάθημα αὐτὸ μὲ ἀρίστα.

Ἀκολούθησε ἀναστάτωση. Οἱ μαθητὲς αὐτοὶ νόμισαν πῶς εἶχαν γίνεῖ Μηχανικοὶ. Πολλοὶ φαντάστηκαν πῶς μπορούσαν νὰ ἔχουν παράλογες ἀπαιτήσεις καὶ ἔγιναν ἀντιπαθητικοὶ στούς Μηχανικοὺς. Λίγοι μόνο εἶχαν τὴν φρόνηση νὰ χρησιμοποιοῦσαν τίς γνώσεις τοὺς μετρημένα, νὰ τίς ἐπεντείνουν καὶ νὰ ὠφεληθοῦν πραγματικά.

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ μὲ ἔκανε νὰ σκεφθῶ πολὺ. Μελέτησα πολλὰ βιβλία παιδαγωγικῆς, κουβέντιασα μὲ πολλοὺς εἰδικούς, ἔκανα δοκιμὲς καὶ πειράματα ἐπὶ πολλὰ χρόνια. Ἀπὸ τὰ πειράματα αὐτὰ τὰ σημαντικώτερα εἶναι ἡ μετεκπαίδευση τῶν Ἀφρικανῶν Μηχανικῶν καὶ οἱ Παγίδες τῆς Ὀξφόρδης.

Στούς Ἀφρικανοὺς Μηχανικοὺς ἐφάρμοσα ἕνα δικό μου σύστημα διδασκαλίας πού εἶχε πλήρη ἐπιτυχία, γιὰτὶ οἱ ἄνθρωποι αὐτοὶ σὲ σύντομο διάστημα ἀπέκτησαν καὶ κατόπιν διατήρησαν μιὰ θαυμάσια ἰκανότητα καὶ ἀπόδοση στὴ δουλειὰ τοὺς, ὅπως πιστοποιεῖται ἀπὸ ἐπίσημα ἔγγραφα.

Οἱ παγίδες τῆς Ὀξφόρδης ἦταν ἕνα πολὺ ιδιόρρυθμο πείραμα. Ἐπεχείρησα νὰ παρασύρω διαφόρους διασημοτάτους Καθηγητὰς τῶν Μαθηματικῶν ἢ τῆς Θεωρητικῆς Μηχανικῆς στὰ πανεπιστήμια τῶν Παρισίων ( Σορβόνη) καὶ κατόπιν συστηματικώτερα τῆς Ὀξφόρδης νὰ ἐφαρμόσουν, χωρὶς νὰ τὸ καταλάβουν, ἐντελῶς στραβά τὰ μαθηματικὰ στὴν μηχανικὴ. Ἔτσι καὶ ἔγινε. Οἱ διαπρεπέστατοι αὐτοὶ Μαθηματικοὶ παρασύρθηκαν νὰ χρησιμοποιήσουν τὰ μαθηματικὰ κατὰ τρόπον ἐντελῶς ἐσφαλμένο. Αὐτὸ ἔγινε γιὰτὶ δὲν πρόσεξαν ὅπως ἔπρεπε τὴν διαφορὰ πού ὑπάρχει ἀνάμεσα σὲ μιὰ μεταβλητὴ καὶ στὸ μέτρο τῆς. Ὅταν τοὺς ἐξήγησα τὴν διαφορὰ κατὰλαβαν καὶ παραδεχθῆκαν τὰ λάθῃ τους, ἀλλὰ τὰ εἶχαν πιά κάνει. Ὅλα τὰ σχετικὰ ἐπίσημα ἔγγραφα ὑπάρχουν στὸ Ἄρχεῖον μου, στὴ διάθεση τῶν πανεπιστημιακῶν ἐρευνητῶν. Μόλις μπορέσω νὰ βρῶ λίγο χρόνο θὰ τὰ ἐκδώσω γιὰ δημόσια γνῶση καὶ χρῆση.

Ὅλα αὐτὰ τὰ μακροχρόνια πειράματα μὲ ἀνθρώπους κάθε νοοτροπίας καὶ μορφώσεως μὲ ὠδήγησαν σὲ ὠριμένα στερεὰ συμπεράσματα πού τὰ ἔθεσα σάν βάση γι' αὐτὸ τὸ βιβλίον. Εἰδικώτερα, βάση τοῦ βιβλίου εἶναι οἱ ἐξῆς τρεῖς θεμελιώδεις ἀρχές:

Πρῶτῃ Ἀρχή: Δὲν προσφέρομε στὸ παιδί πρόωρες γνώσεις, ἀλλὰ καλλιεργοῦμε καὶ ἀναπτύσσομε τὴν σκέψη του.

Δηλαδή: δὲν τρέχουμε νὰ διδάξωμε στὸ παιδί σὲ ἡλικία ἑξὶ ἐτῶν μιὰ μέθοδο ὑπολογισμοῦ πού θὰ τὴν διδαχθῇ κανονικά σ' ἕνα συνηθισμένο σχολεῖο σὲ ἡλικία ἑννέα ἐτῶν. Π.χ. τοὺς τόκους.

Αυτό θα ήταν μία άψυχολόγητη ενέργεια, που θα είχε δύο άσχημα αποτελέσματα:

α) Όταν τό παιδάκι γνωρίζει από πριν αυτό που ο δάσκαλος παρουσιάζει στά άλλα παιδάκια σάν καινούργιο, δέν αντιτίεεται στόν κειρασμό νά κάνει επίδειξη γνώσεων καί πνεύματος καί στόν δάσκαλο καί στός συμμαθητάς του, νά υπερτιμήση τίς δυνάμεις καί τίς γνώσεις του καί νά αναπτύξη ένα κούψιον έγωισμό, καί

β) τό παιδάκι χαλαρώνει τήν προσοχή του γιά τήν παρακολούθηση τών μαθημάτων, χάνει τόν ρυθμό του μαθήματος καί τήν έπαφή μέ τούς συμμαθητάς καί τόν δάσκαλο, καί ζέροντας από πριν ένα από τά πέντε θέματα πού διδάσκει ο δάσκαλος κινδυνεύει νά άγνοήση τά άλλα τέσσαρα. Γι' αυτό πού μήν έκπλαγήτε αν ήθε παιδάκια μέ τέτοιες τμηματικές πρόωρες γνώσεις νά μένουν μετεξεταστέα ή άκόμα καί νά χάνουν τόν χρόνο τους στό σχολείο.

Γιά τούς λόγους αυτούς τό βιβλίο τουτο δέν προσφέρει στό παιδί πρόωρες γνώσεις, δέν τού λέει τίποτε άπ' αυτά πού θα τού πη άργότερα ο δάσκαλος του. Αλλά καλλιεργεί καί αναπτύσσει τήν σκέψη του. Τό παιδάκι γίνεται ίκανό νά άντιλαμβάνεται πιδ εύκολα, πιδ γρήγορα καί πιδ βαθείά αυτό πού θα τού πη ο δάσκαλος του σ' ένα οποιοδήποτε καλό σχολείο πού εφαρμόζει τό πρόγραμμα του Ύπουργείου. Κατά κάποιον τρόπον είναι ως εάν σ' ένα μυωπικό παιδί δίνουμε κατάλληλα γυαλιά γιά νά βλέπει καλά στόν Πίνακα. Δέν βάζουμε τό παιδάκι νά μάθη από πριν (πρόωρα) πη καλά στόν Πίνακα. Ο δάσκαλος στόν Πίνακα. Τού δίνουμε γυαλιά γιά νά αυτό πού θα γράψη ο δάσκαλος στόν Πίνακα. Μεί μόνη τήν διαφορά, δη εύκολα καί καλά αυτό πού θα γράψη ο δάσκαλος. Μεί μόνη τήν διαφορά, πώς άντί τά γυαλιά αυτά νά είναι γιά τά μάτια του είναι γιά τήν σκέψη του.

Λοιπόν, όπως τό παιδί σας, αν έχη μυωπία ή άστιγματισμό, δέν θέλετε νά τό αφήσετε χωρίς τά κατάλληλα γυαλιά, έτσι φροντίσατε νά δυναμώσετε καί τήν σκέψη του παιδιού σας μέ τά παιχνίδια πού περιγράφει αυτό τό βιβλίο.

Σκεφθείτε πόσο τρομερό πράγμα είναι νά αναγκάζετε ένα μυωπικό παιδάκι νά παρακολουθή αυτά πού γράφει ο δάσκαλος στόν Πίνακα. Πώς νά παρακολουθεί, άφου δέν βλέπει ; Έτσι τρομερό είναι καί νά αναγκάζετε τόν μαθητή νά παρακολουθή μαθηματικούς συλλογισμούς πού δέν τούς συλλαμβάνει γιατί δέν άφομοίωσε στήν ώρα του τίς βασικές άρχές τών μαθηματικών. Αυτό ζητούμε νά προλάβωμε.

Δεύτερη Άρχη : 'Η ανάπτυξη του παιδιού γίνεται μέσα στην ομάδα.

Δέν πιέζουμε τό παιδάκι νά στραφή στόν έαυτό του γιά νά φάξη εκεί μέσα νά βρη κάτι πού του ζητούμε. Είναι εντελώς άψυχολόγητο νά επιβάλουμε στό παιδάκι ένα τέτοιο έξαναγκασμό. Τό παιδάκι δέν μπορεί νά άυτοσυγκεντρωθί. Δέν είναι στοχαστής γιά νά βυθισθί στόν έαυτό του. Μή τό αναγκάζουμε σώνει καί καλά νά γίνη ψεύτικα, άνόητα, άστοχα έσωστραφής τύπος. Έχει καιρό γι' αυτό. Τό μικρό παιδάκι θέλει νά στραφή πρός τά έξω, νά άνοιχθί στόν κόσμο, νά παίξη μέ τά συνομήλικα του παιδάκια, γιατί αυτά τά συνομήλικα παιδάκια είναι ο δικός του κόσμος. Πάψετε λοιπόν νά αναγκάζετε τά παιδάκια νά σκύβουν στό τετράδιο μέ τήν καταβλητική νά αναγκάζετε τά παιδάκια νά σκύβουν στόν καθαρόν άέρα, στόν ήλιο, μέσα στε τά παιδάκια νά παίξουν έλεύθερα, στόν καθαρόν άέρα, στόν ήλιο, μέσα στή χλόη, δίπλα στό κύμα, καί μόνα τους, στόν δικό τους κόσμο, μαζί μέ τά άλλα παιδάκια πού τά νοιώθουν κοντά τους σάν όμοια μέ αυτά, νά βροθν στό παιχνίδι τήν χαρά τής ζωής καί τήν γνώση τής επιστήμης.

Όταν τά παιδάκια παίξουν έτσι, άνοίγουν τήν σκέψη τους στόν κόσμο όπως τά λουλούδια άνοίγουν τά πέταλα τους στόν ήλιο.

Πολλά είναι τὰ παιδάκια πού όταν τὰ αναγάξετε νά κλειστούν στόν έ-  
αυτό τους φαίνονται σάν αποβλακωμένα, σάν φάρια έξω από τό νερό. Αφή-  
στε τὰ παιδάκια νά ένεργοϋν όλα μαζί, καί τότε ή ζωηράδα, ή έξυπνάδα, ή  
φιλομάθεια τοϋ καθενός γίνεται πέντε, δέκα, είκοσι φορές μεγαλύτερη. Το  
κάθε παιδάκι αναζητά τὰ άλλα παιδάκια. Αυτός είναι ό κόσμος του. Καί σ'  
αυτόν τόν κόσμο ζει, αναπτύσσεται καί προοδεύει.

Παράλληλα, έτσι τό παιδί άποκτά αυτό γιά τό όποιοϋ έμετς οί σημερι-  
νοι άνθρωποι έχομε τήν μεγαλύτερη καί έπιτακτικότερη ανάγκη: τό αί-  
σθημα τής κοινωνικότητας, τήν άγάπη γιά τήν όμαδική συντονισμένη έργα-  
σία, τό νοιώσιμο τής άλληλοεξαρτήσεως μεταξύ μας.

Γι' αυτούς τούς λόγους, όλα τὰ παιχνίδια πού περιγράφονται στό βι-  
βλίο αυτό είναι όμαδικά. Το παιδί θ' άρχίση νά ζή μέσα στην όμάδα. Κατό-  
πιν, πολύ άργότερα, θά έχη όλον τόν καιρό νά κλειστή στόν έαυτό του. Καί  
μακάρι νά μή χρειασθί ποτέ νά κλεισθί στόν έαυτό του, αλλά νά έχη πάν-  
τα κάποιον δίπλα του γιά νά ζή, νά σκέπτεται, νά δρᾷ μαζί του. Αύτή τήν  
εϋχή τοϋ δίνομε. Καί σ' αυτόν τόν όρόμο θέλομε νά τό βάλωμε από τὰ πρῶ-  
τα βήματα του.

### Τρίτη Άρχή : Οί παραστάσεις νά είναι λιτές.

Μή ξεχνάμε πώς δέν έπιζητοϋμε νά μεταδώσωμε στό παιδάκι γνώσεις,  
άλλά νά τό κάνωμε νά αναπτύξη ένα σωστό τρόπο έπιστημονικής σκέψεως.  
Καί θέλομε αυτός ό τρόπος νά ριζώση βαθειά μέσα του, νά γίνει βίωμα, καί  
έπειτα δεύτερη φύση του. Γιά νά τό έπιτύχωμε αυτό είναι ανάγκη νά ανα-  
πτυχθί μέσα στό παιδί γι' αυτά τὰ πράγματα ό μηχανισμός τών έξηρητημένων  
άντανακλαστικῶν. Είναι γνωστό πώς γιά τόν σκοπόν αυτόν απαιτείται όπως  
όλες οί παραστάσεις πού κινοϋν τὰ έξηρητημένα άντανακλαστικά είναι κα-  
τά τό δυνατόν άπλές, λιτές.

Γι' αυτόν τόν λόγον στά παιχνίδια πού περιγράφωμε διατηροϋμε πάντοτε  
τήν πιό μεγάλη άπλότητα. Βασικό στοιχείο είναι τό ίδιο τό παιδάκι καί  
τά άλλα παιδάκια. Όπου είναι άναγκαίο νά χρησιμοποιήσωμε καί άλλα στοι-  
χεία, χρησιμοποιοϋμε άντικείμενα πάρα πολύ άπλά καί οικεία γιά τό παι-  
δάκι, όπως είναι οί κοϋκλες του, οί μπάλες του ή τὰ ρούχα του.

Όπου είναι άπολύτως άπαραίτητο βάζομε τό παιδάκι νά προφέρη άπλές  
λέξεις ή φράσεις γιά νά δημιουργήσωμε συνειρμό παραστάσεων γιά άργό-  
τερα. Κάθε άπόκλειση άπ' αύτήν τήν άπλότητα είναι έπιβλαβής, γιατί άνα-  
στέλλει ή καταστρέφει τόν μηχανισμόν τών έξηρητημένων άντανακλαστικῶν.

Δέν χρειαζόμαστε γιά τὰ παιδάκια άσκοπες πολυτέλειες. Χρειαζόμαστε  
νά τούς δώσωμε γερές βάσεις γιά νά σκέπτανται σωστά. Γι' αυτό είναι ά-  
νάγη τὰ παιχνίδια νά μείνουν τόσο άπλά, όπως τὰ περιγράφωμε. Αυτό δέν  
έμποδίζει πίσω από κάθε παιχνίδι νά κρύβεται ένας ολοκληρωτός κόσμος  
έπιστημονικής βιανόησεως.

# ΤΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ :

## Η ΣΕΙΡΑ καί Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ

-9-

### Πρώτη ομάδα: Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

- 1<sup>ο</sup> Παιχνίδι : 'Η έννοια του συνόλου  
2<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τά μεταβλητά καί τά άμετάβλητα σύνολα  
3<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Μονομελή καί κενά σύνολα  
4<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό ύποσύνολον  
5<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τά ίσα σύνολα  
6<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Θεώρημα - " Δύο σύνολα ίσα πρός τρίτον σύνολον είναι ίσα καί μεταξύ των " .  
7<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Θεώρημα - " Τό ύποσύνολον ύποσυνόλου δεδομένου συνόλου είναι ύποσύνολον του δεδομένου συνόλου " .  
8<sup>ο</sup> Παιχνίδι : 'Η άντιστοιχία  
9<sup>ο</sup> Παιχνίδι : 'Η άμφιμονοσήμαντος άντιστοιχία  
10<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τά ίσοδύναμα σύνολα. Θεώρημα - " Δύο σύνολα ίσοδύναμα πρός τρίτον είναι ίσοδύναμα καί μεταξύ των " .  
11<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τομή συνόλων  
12<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Θεώρημα - " 'Η τομή της τομής δύο συνόλων μέ τρίτον σύνολον είναι άνεξάρτητος της σειράς τμήσεως των τριών συνόλων " .  
13<sup>ο</sup> Παιχνίδι : 'Ενωσις συνόλων  
14<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Θεώρημα - " 'Η Ένωσις πολλών συνόλων είναι άνεξάρτητος άπό την τάξιν της ένοποιήσεως " .  
15<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Συμπληρωματικά Σύνολα

### Δεύτερη ομάδα: Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

- 1<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό άδρανές σταθερόν γραμμικόν πεδίον  
2<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό ένεργόν σταθερόν γραμμικόν πεδίον  
3<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό άδρανές κινητόν γραμμικόν πεδίον  
4<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό ένεργόν κινητόν γραμμικόν πεδίον  
5<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό άδρανές σταθερόν επίπεδον πεδίον  
6<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό ένεργόν σταθερόν επίπεδον πεδίον  
7<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό άδρανές κινητόν επίπεδον πεδίον  
8<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό ένεργόν κινητόν επίπεδον πεδίον  
9<sup>ο</sup> Παιχνίδι : 'Ομώνυμα καί έτερόνυμα πεδία  
10<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Διάσπασις πεδίου  
11<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Μερική άπομόνωσις πεδίου  
12<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Πλήρης άπομόνωσις πεδίου

### Τρίτη ομάδα: Η ΔΙΠΛΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- 1<sup>ο</sup> Παιχνίδι : 'Ο αριθμός δηλοῖ τάξιν  
2<sup>ο</sup> Παιχνίδι : 'Ο αριθμός δηλοῖ μέτρον

### Τέταρτη ομάδα: Η ΔΙΠΛΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

- 1<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό συμβατικόν μέτρον  
2<sup>ο</sup> Παιχνίδι : Τό ύποκειμενικόν μέτρον



## Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ἡ θεωρία τῶν συνόλων ἀποτελεῖ τὴν βάση τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν, καὶ κατὰ συνέπεια τὴν βάση γιὰ ὅλους τοὺς σημερινούς κλάδους τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς τεχνολογίας. Ἀλλὰ πρέπει νὰ τονίσωμε εὐθύς ἀπὸ τὴν ἀρχὴν κάτι τὸ βασικό: ἡ θεωρία τῶν συνόλων δὲν ἀποτελεῖ λογιστικὴ μέθοδος, δηλαδή τρόπον ὑπολογισμοῦ γιὰ νὰ βροῦμε ἕνα ἀριθμητικό ἢ ἀναλυτικό ἀποτέλεσμα, ἀλλὰ ἀποτελεῖ μεθοδολογία, δηλαδή τρόπο σκέψης.

Μὲ ἄλλα λόγια: ἡ θεωρία τῶν συνόλων ἀποτελεῖ μιὰ σειρά ἀπὸ κανόνες γιὰ τὸν σωστό, ἐπιστημονικό τρόπο σκέψης. Οἱ βασικότεροι ἀπὸ τοὺς κανόνες αὐτοὺς διδόνται στὰ δέκα πέντε παιχνίδια πού περιγράφουμε στίς ἐπόμενες σελίδες αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου.

Ἐκεῖνος πού μαθαίνει τοὺς κανόνες αὐτοὺς σὲ μεγάλη ἡλικία, ὅσο καλὰ κι' ἂν τοὺς μάθῃ, τὸ καλύτερο καὶ περισσότερο πού μπορεῖ νὰ περιμένῃ ἀπὸ αὐτὴ τὴν γνώση του, εἶναι νὰ μπορέσῃ νὰ τὴν χρησιμοποιήσῃ γιὰ νὰ κρίνῃ ἐκ τῶν ὑστερῶν ἂν κάποια ἐπιστημονικὴ θεωρία ἢ κάποια μέθοδος ὑπολογισμοῦ ἢ κάποια ἐπαγγελματικὴ ἐνέργεια τοῦ ἔγινε σωστά ἢ στραβά. Ἄν ὑπάρχει σφάλμα μπορεῖ νὰ τὸ βρῇ ἐκ τῶν ὑστερῶν καὶ ἴσως νὰ τὸ διορθώσῃ. Δυστυχῶς κατὰ κανόνα δὲν μπορεῖ νὰ προλάβῃ τὸ σφάλμα αὐτό.

Ἀντιθέτως, τὸ παιδάκι πού μαθαίνει τοὺς κανόνες αὐτοὺς ἀπὸ τὴν πρώτη ἀρχὴ πού διαμορφώνεται ἡ σκέψῃ του, καὶ ἀφομοιώνει τοὺς κανόνες αὐτοὺς ἔτσι πού νὰ τοὺς κἀνῃ βίωμα βαθειὰ ριζωμένο μέσα του, οὐσιαστικά δεύτερη φύση του, ἀποκτᾷ τὴν ἱκανότητα νὰ ἐφαρμόζῃ κάθε φορά αὐτόματα, θὰ ἔλεγα ἀσυναίσθητα, ὅλους αὐτοὺς τοὺς κανόνες μὲ τρόπο σωστό. Ἐτσι τὸ παιδάκι δὲν ἔχει πιά ἀνάγκη νὰ ἐλέγχῃ ἐκ τῶν ὑστερῶν τὰ σφάλματα πού ἔκανε στίς σκέψεις ἢ στίς ἐνέργειες του ἀπὸ στραβὸ τρόπο σκέψης. Ἐχει ἀπὸ μέσα του τὴν ἱκανότητα νὰ μὴ κἀνῃ τέτοιου εἴδους σφάλματα στίς σκέψεις καὶ στίς ἐνέργειές του.

Γι' αὐτὸ εἶναι ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη ἡ διδασκαλία τῆς θεωρίας τῶν συνόλων νὰ γίνεται στὰ παιδιὰ σὲ ὅσο τὸ δυνατό μικρότερη ἡλικία. Στὴν κεντρικὴν Εὐρώπῃ ἡ διδασκαλία αὐτὴ σήμερα γίνεται στὰ νηπιαγωγεῖα. Σ' ἐμᾶς ἐδῶ ἄς ἀρχίσῃ τώρα νὰ γίνεται ἀπὸ τὴν πρώτη τάξη τοῦ Δημοτικοῦ. Ὅσο γρηγορώτερα, τόσο καλύτερα.

Ἐπαναλαμβάνομε γιὰ μιὰ ἀκόμη φορά: ἡ θεωρία τῶν συνόλων ὅταν δι-

δάσκεται σε μεγάλη ηλικία φαίνεται σε πολλούς σαν κάτι τό άνοστο,κού-  
φιο καί άχρηστο γιατί μοναδική χρησιμότητα της είναι πιά ή εκ των ύ-  
στέρων άσκηση έλέγχου καί αυτοκριτικής.Οί περισσότεροι άνθρωποι δέν  
άγαπουν νάκάνουν ούτε αυτοέλεγχο ούτε αυτοκριτική.Γι' αυτό καί δέν νοι-  
ώθουν σε τί τούς χρησιμεύει ή θεωρία των συνόλων. Άπλως τήν θεωρούν  
σαν κάτι τό " μοντέρνα έπιστημονικό" για τό όποιον συζητοούν όπως κά-  
ποτε οί παλαιότεροι συζητοΰσαν για τόν χωρόχρονο του 'Αϊνστάιν.

Ή ίδια αυτή θεωρία των συνόλων,όταν διδάσκεται στα παιδιά σε πά-  
ρα πολύ μικρή ηλικία,έτσι πού νά άποτελέσει τήν αναλωίωτη βάση της δια-  
μορφώσεως της σκέψεως τους,δηλαδή έτσι πού ή έφαρμογή των κανόνων της  
θεωρίας αυτής νά άποκτήση πιά μέσα στό παιδί τόν μηχανισμό των έξηρ-  
τημένων άντανακλαστικών,τότε ή θεωρία αυτή γίνεται ό Πήγασος πού όδη-  
γεϊ τά παιδιά στην πρόοδο καί τήν ανάπτυξη.Κυριολεκτικά,έτσι ή θεωρία  
αυτή δίνει φτερά στη σκέψη τους.

Αυτός είναι ό σκοπός των δέκα πέντε παιχνιδιων πού δίνουμε στις έ-  
πόμενες σελίδες.

Γιά νά καταλάβετε καλά αυτή τήν μεγάλη σημασία της θεωρίας των συ-  
νόλων οās προτείνω ένα πολύ διασκεδαστικό σπόρ. Τό έξής: Όταν έχετε  
καιρό καί κέφι έρευνήσατε μιá θεωρία ή,άπλούστερα,άναλύσατε μιá συ-  
ζήτησι από τήν καθημερινή ζωή.Συχνά θά βρίσκετε πώς ό συγγραφεύς της  
θεωρίας ή οί άνθρωποι πού κουβέντιαζαν,έπαιξαν στραβά ένα ή καί περισ-  
σότερα από τά επόμενα δέκα πέντε παιχνίδια,καί φυσικά κατέληξαν σε  
στραβό συμπέρασμα.Αυτό δέν θά τό πάθαιναν ποτέ,αν από τήν πρώτη τοϋ  
δημοτικού είχαν μάθει νά παίζουν σωστά τά δέκα πέντε αυτά παιχνίδια.

## Πρῶτο Παιχνίδι

Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου

Ἡ δασκάλα μαζεύει τὰ παιδάκια τῆς τάξεως καί τὰ βάζει νά σταθοῦν ὅλα μαζί τὸ ἕνα κοντά στό ἄλλο.

Στέκεται μπροστά τους καί τοὺς λέει: - Ἔτσι μαζεμένα ὅλα μαζί τὰ παιδάκια τῆς τάξης, εἴσαστε ἕνα σύνολο. ΣΥΝΟΛΟ. Εἴσαστε τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν τῆς τάξης. Ἐπαναλάβετε ὅλα μαζί: τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν τῆς τάξης.

Τὰ παιδάκια ἐπαναλαμβάνουν ὅλα μαζί: τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν τῆς τάξης. Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει τὰ ἀγοράκια νά σταθοῦν ὅλα μαζί σὲ μιὰ ὁμάδα καί τὰ κοριτσάκια ὅλα μαζί σὲ μιὰ ἄλλη ξεχωριστὴ ὁμάδα.

Ἡ δασκάλα στέκεται μπροστά στὴν ὁμάδα τῶν ἀγοριῶν καί τοὺς ἐξηγεῖ: - Ἔτσι μαζεμένα ὅλα τὰ ἀγοράκια τῆς τάξης εἴσαστε ἕνα σύνολο. ΣΥΝΟΛΟ. Εἴσαστε τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν τῆς τάξης. Ἐπαναλάβετε ὅλα μαζί: τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν τῆς τάξης.

Τὰ ἀγοράκια ἐπαναλαμβάνουν ὅλα μαζί: - τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν τῆς τάξης. Ἡ δασκάλα στέκεται μπροστά στὴν ὁμάδα τῶν κοριτσιῶν καί τοὺς ἐξηγεῖ: - Ἔτσι μαζεμένα ὅλα τὰ κοριτσάκια τῆς τάξης εἴσαστε ἕνα σύνολο. ΣΥΝΟΛΟ. Εἴσαστε τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξης. Ἐπαναλάβετε ὅλα μαζί: τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξης.

Τὰ κοριτσάκια ἐπαναλαμβάνουν ὅλα μαζί: - τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξης.

Ἡ δασκάλα τοὺς λέει νά φτιάξουν τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς τάξης. Βοηθάει τὰ παιδάκια νά μαζευτοῦν ὅλα μαζί, ἀγοράκια καί κοριτσάκια. Καί τὰ βάζει νά ποῦν: - Εἴμαστε τὸ σύνολο τῆς τάξης.

Κατόπιν τοὺς λέει νά σχηματίσουν τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν τῆς τάξης καί τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξης. Βάζει τὴν πρώτη ὁμάδα νά πῇ: - Εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν τῆς τάξης, καί τὴν δεύτερη ὁμάδα νά πῇ: - Εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξης.

Τὸ παιχνίδι αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται ὅσες φορές χρειάζεται ὥσπου τὰ παιδάκια νά τὸ παίξουν μόνα τους χωρὶς λάθος.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει νά σταθοῦν ὅλα μαζί τὰ παιδάκια ποῦ φορᾶνε κόκκινα παπούτσια. Τὰ βάζει νά ποῦν: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν μὲ κόκκινα παπούτσια.

Ἡ δασκάλα βάζει ὅλα μαζί τὰ ἄλλα παιδάκια νά ποῦν: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν ποῦ δὲν φορᾶνε κόκκινα παπούτσια.

Ἡ δασκάλα βάζει νά σταθοῦν ὅλα μαζί τά παιδάκια πού φορᾶνε ἄσπρη μπλοῦζα. Τά βάζει νά ποῦν: - εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν πού φορᾶνε ἄσπρη μπλοῦζα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει ὅλα μαζί τά ἄλλα παιδάκια νά ποῦν: - εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν πού δέν φορᾶνε ἄσπρη μπλοῦζα.

Ἡ δασκάλα λέει σέ πέντε παιδάκια νά σηκώσουν τό χέρι τους. Κατόπιν βάζει τά παιδάκια αὐτά νά σταθοῦν ὅλα μαζί ἔχοντας πάντοτε σηκωμένο τό χέρι τους. Τά ρωτᾶει: ἐσεῖς τά παιδάκια πού ἔχετε τό χέρι σηκωμένο ποιό σύνολο εἴσαστε;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τά παιδάκια νά ποῦν: - εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν μέ σηκωμένο χέρι.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει ὅλα τά ἄλλα παιδάκια νά σταθοῦν μαζί καί τά ρωτᾶει: - ἐσεῖς πού δέν ἔχετε σηκωμένο χέρι ποιό σύνολο εἴσαστε;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τά παιδάκια νά ποῦν: - εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν χωρίς σηκωμένο χέρι.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τό παιχνίδι βάζοντας τώρα ἄλλα παιδάκια νά σηκώσουν καί τά δύο χέρια, ἔτσι πού νά σχηματισθῆ τό σύνολο τῶν παιδιῶν μέ τά δύο χέρια σηκωμένα καί τό σύνολο τῶν παιδιῶν χωρίς σηκωμένα χέρια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα δίνει σέ πέντε παιδιά νά κρατοῦν ἀπό μιά μπάλα στά χέρια τους. Τά βάζει νά ἀνακατευθοῦν μέ τά ἄλλα παιδιά καί κατόπιν λέει σέ ὅλα τά παιδάκια μαζί: - Νά μοῦ φτιάξετε τό σύνολο τῶν παιδιῶν πού ἔχουν μπάλα. Ποιό σύνολο κάνουν τά ἄλλα παιδιά;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τά παιδάκια νά σχηματίσουν τά δύο σύνολα καί νά ποῦν: εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν πού ἔχουν μπάλα, ἢ, εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν πού δέν ἔχουν μπάλα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τό ἴδιο παιχνίδι δίνοντας σέ ἄλλα ἐπτά παιδιά νά κρατᾶνε ἀπό μιά κοῦκλα.

Ἡ δασκάλα κάνει διάλειμμα.

Κατόπιν τό παιχνίδι ἐπαναλαμβάνεται μία, δύο, ... ὅσες φορές χρειάζεται ὥσπου τά παιδάκια νά τό παίξουν μόνα τους χωρίς λάθος.

## **Δεύτερο Παιχνίδι**

Τά μεταβλητά καί τά ἀμετάβλητα σύνολα

Ἡ δασκάλα μαζεύει ὅλα τά παιδάκια καί τοῦς ζητάει νά σχηματίσουν τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν τῆς τάξεως καί τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξεως. Ρωτᾶει ἕνα κοριτσάκι: - Μπορεῖς ἐσύ νά-πᾶς στό σύνολο τῶν

ἀγοριῶν τῆς τάξεως;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τὸ κοριτσάκι νὰ καταλάβῃ πῶς δὲν μπορεῖ νὰ πᾶν, γιατί αὐτὸ εἶναι κοριτσάκι, ἐνῶ στὸ ἄλλο σύνολο πηγαίνουν μόνον ἀγοράκια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα ρωτᾶει ἕνα ἀγοράκι-Μπορεῖς ἐσὺ νὰ πᾶς στὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξεως;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τὸ ἀγοράκι νὰ καταλάβῃ πῶς δὲν μπορεῖ νὰ πᾶν στὸ ἄλλο σύνολο, γιατί εἶναι ἀγοράκι, ἐνῶ στὸ ἄλλο σύνολο πηγαίνουν μόνο κοριτσάκια.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τὸ ἴδιο ἐρώτημα μὲ πολλά κοριτσάκια καὶ ἀγοράκια μέχρις ὅτου ὅλα τὰ παιδάκια καταλάβουν καλὰ πῶς τὸ κάθε παιδάκι εἶναι μόνιμα καὶ ὑποχρεωτικὰ τοποθετημένο σ' ἕνα σύνολο καὶ δὲν μπορεῖ νὰ ξεφύγῃ ἀπὸ αὐτό.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει σὲ πέντε παιδάκια νὰ σηκώσουν τὸ ἕνα χέρι τους καὶ νὰ πᾶνε ὅλα μαζί γιὰ νὰ σχηματίσουν τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν μὲ σηκωμένο χέρι.

Ἔτσι σχηματίζονται δύο σύνολα: τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν μὲ σηκωμένο χέρι, καὶ τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν χωρὶς σηκωμένο χέρι.

Ἡ δασκάλα ρωτᾶει σ' ἕνα ἀπὸ τὰ παιδάκια τοῦ συνόλου μὲ τὸ σηκωμένο χέρι: - μπορεῖς νὰ πᾶς στὸ ἄλλο σύνολο τῶν παιδιῶν χωρὶς σηκωμένο χέρι;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τὸ παιδάκι νὰ καταλάβῃ πῶς ἀρκεῖ νὰ κατεβάσῃ τὸ σηκωμένο χέρι του γιὰ νὰ μπορέσῃ νὰ πᾶν στὸ σύνολο τῶν παιδιῶν χωρὶς σηκωμένο χέρι.

Κατόπιν ἡ δασκάλα ρωτᾶει ἕνα ἀπὸ τὰ παιδάκια τοῦ συνόλου χωρὶς σηκωμένο χέρι: - ἐσὺ μπορεῖς νὰ πᾶς στὸ σύνολο τῶν παιδιῶν μὲ σηκωμένο χέρι;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τὸ παιδάκι νὰ καταλάβῃ πῶς ἀρκεῖ νὰ σηκώσῃ τὸ χεράκι του γιὰ νὰ μπορέσῃ νὰ πᾶν στὸ σύνολο τῶν παιδιῶν μὲ σηκωμένο χέρι.

Αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές ἔτσι πού τὰ παιδάκια νὰ καταλάβουν καλὰ πόσο εὐκόλο εἶναι νὰ περάσουν ἀπὸ τὸ ἕνα σύνολο στὸ ἄλλο.

Κατόπιν τὸ παιχνίδι ἐπαναλαμβάνεται μὲ τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν πού ἔχουν τὰ δύο χέρια τους σηκωμένα.

Γίνεται διάλειμμα.

‘Η δασκάλα δίνει σε πέντε παιδιά από μία μπάλα στο καθένα και βάζει όλα τα παιδάκια να σχηματίσουν τα δύο σύνολα: το σύνολο των παιδιών με μπάλα και το σύνολο των παιδιών χωρίς μπάλα.

Κατόπιν η δασκάλα ρωτάει ένα από τα παιδάκια του συνόλου χωρίς μπάλα: - Μπορείς να πᾶς στο σύνολο των παιδιών που έχουν μπάλα ;

‘Η δασκάλα βοηθάει το παιδάκι να καταλάβη πῶς για να πάη στο σύνολο των παιδιών που έχουν μπάλα οφείλει πρώτα να πείση ένα από τα παιδάκια που έχουν μπάλα να του δώση τήν μπάλα του ή ,άλλως, να βρῆ μία μπάλα.

Κατόπιν η δασκάλα ρωτάει ένα από τα παιδάκια του συνόλου που έχουν μπάλα: - Μπορείς να πᾶς στο σύνολο των παιδιών που δέν έχουν μπάλα;

‘Η δασκάλα βοηθάει το παιδάκι να καταλάβη πῶς για να πάη στο σύνολο των παιδιών χωρίς μπάλα ἀρκεί να ἐγκαταλείψη τήν μπάλα του.

“Όταν όλα τα παιδάκια καταλάβουν καλά το παιχνίδι με τήν μπάλα, η δασκάλα ἐπαναλαμβάνει με τόν ἴδιο τρόπο το παιχνίδι με τίς κουκλες. Γίνεται διάλειμμα.

‘Η δασκάλα βάζει τα παιδάκια να ἐπαναλάβουν το παιχνίδι μόνα τους πολλές φορές, ἔτσι που να μάθουν να τό παίζουν στήν ἐντέλεια. Με τόν τρόπον αὐτόν τα παιδάκια ἀρχίζουν οἰγά-οἰγά νά καταλαβαίνουν ὅτι :

- κάτι (ἢ κάποιος) ἀνήκει σ’ένα σύνολο, ὅταν ἔχει μία ἰδιότητα που τό ξεχωρίζει ἀπό τά ἄλλα πράγματα και που χαρακτηρίζει ὅλα ἐκεῖνα (ἢ ἐκείνους) που ἀνήκουν σ’αὐτό τό σύνολο,
- ὑπάρχουν ἰδιότητες που τίς ἀποκτᾶς ἢ τίς ἀποβάλλεις εὐκολα, ἔτσι που να μπορεῖς να μπῆς σ’ένα σύνολο ἢ να βγῆς ἀπό αὐτό, ἐνῶ ὑπάρχουν ἄλλες ἰδιότητες που δέν μπορεῖς να τίς ἀλλάξης και συνεπῶς δέν μπορεῖς να βγῆς ἀπό τό σύνολο ὅπου σε κατατάσσουν.

## Τρίτο Παιχνίδι

Μονομελῆ και κενά σύνολα

‘Η δασκάλα λέει σε τέσσαρα παιδάκια να σηκώσουν τό χέρι τους και κατόπιν καλεῖ ὅλα μαζί τα παιδάκια να σχηματίσουν τό σύνολο των παιδιών με σηκωμένο χέρι και τό σύνολο των παιδιών χωρίς σηκωμένο χέρι. Τα παιδιά σχηματίζουν τα δύο αὐτά σύνολα.

‘Η δασκάλα στέκεται μπροστά στα παιδάκια που σχηματίζουν τό σύνολο με τό σηκωμένο χέρι και ρωτάει ένα παιδάκι: - μπορείς να πᾶς στο σύνολο των παιδιών χωρίς σηκωμένο χέρι ;

Τό παιδάκι κατεβάζει τό χέρι του καί πάει στό άλλο σύνολο.

‘Η δασκάλα έπαναλαμβάνει τό ίδιο πράγμα μέ τό δεύτερο παιδάκι, καί κατόπιν καί μέ τό τρίτο παιδάκι.

“Έτσι τό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χεράκι έχει άπομείνει μέ ένα μόνο παιδί. Είναι ένα μονομελές σύνολο.

‘Η δασκάλα ρωτάει τά παιδάκια : - Πόσα σύνολα έχουμε ; καί τά βάζει νά άπαντήσουν : - “Έχουμε δύο σύνολα. Τό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι καί τό σύνολο τών παιδιών χωρίς σηκωμένο χέρι.

‘Η δασκάλα λέει καί στό τελευταίο παιδάκι τοῦ συνόλου μέ σηκωμένο χέρι νά πάη στό άλλο σύνολο. Κατόπιν πηγαίνει στήν ομάδα τών παιδιών καί λέει σ’ένα άπό αυτά: - ‘Έσύ πήγαμε στό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι.

‘Η δασκάλα βοηθάει τό παιδάκι νά καταλάβη πώς γιά νά πάη στό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι άρκεῖ νά σηκώσει τό χεράκι του. Δέν έχει σημασία ὅτι πρίν άπό αυτό δέν υπάρχει κανένα άλλο παιδάκι μέ σηκωμένο χέρι. Τό σύνολο στό ὁποῖον αναφερόμεθα εἶναι τό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι. Για νά πάη τό παιδάκι στό σύνολο αυτό άρκεῖ νά σηκώσει τό χεράκι του.

Προηγουμένως, ὅταν άκόμη δέν ὑπῆρχε κανένα παιδάκι μέ σηκωμένο χέρι, τό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι ἦταν ένα κενό σύνολο. “Όταν τό πρῶτο παιδάκι σήκωσε τό χέρι του, τό σύνολον αυτό ἔγινε μονομελές.

‘Η δασκάλα έπαναλαμβάνει τό ίδιο παιχνίδι μέ τό σύνολο τών παιδιών πού έχουν ένα χέρι σηκωμένο, ἢ τών παιδιών πού έχουν δύο χέρια σηκωμένα, τών παιδιών πού κρατοῦν μιá μπάλα καί τών παιδιών πού κρατᾶνε μιá κοῦκλα.

“Έτσι σιγά-σιγά τά παιδιά καταλαβαίνουν ὅτι ένα σύνολο μπορεί νά ὑπάρχει μόνο μέ τήν περιγραφή του ( π.χ. τό σύνολο τών παιδιών πού έχουν ένα χέρι σηκωμένο, τό σύνολο τών παιδιών πού τό καθένα τους κρατάει μιá κοῦκλα ) χωρίς νά εἶναι άνάγκη τό σύνολο αυτό νά περιέχει καί κάτι ἢ κάποιον. ‘Απλῶς αυτό σημαίνει πώς ἂν κάτι ἢ κάποιος άποκτήσῃ τήν χαρακτηριστική ιδιότητα πού περιγράφει τό σύνολο, τότε ανήκει στό σύνολο αυτό.



## Τέταρτο Παιχνίδι

-17-

Τό ύποσύνολο

‘Η δασκάλα βάζει δέκα παιδάκια ( άνακαίτεμένα άγοράκια καί κοριτσάκια) νά σηκώσουν τό χέρι τους.Τά βάζει νά σταθοϋν όλα μαζί καί νά ποϋνε:- Είμαστε τό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι.

Κατόπιν ή δασκάλα δίνει άπό μιά μπάλα στό καθένα σέ τέσσερα άπό τά παιδάκια αύτά καί τά βάζει νά ποϋνε: - Είμαστε τά παιδάκια μέ σηκωμένο χέρι πού κρατάμε μιά μπάλα.

Κατόπιν καί τά δέκα παιδάκια μαζί μέ σηκωμένο χέρι θά ποϋνε: - Είμαστε τό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι.

Καί τά τέσσερα άπό τά παιδάκια αύτά πού κρατοϋνε άπό μιά μπάλα θά προσθέσουν: - Είμαστε τό ύποσύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι πού κρατάμε μιά μπάλα.

Τά παιδάκια έπαναλαμβάνουν τίς φράσεις αύτές μέχρι πού νά τίς μάθουν καλά.

Κατόπιν ή δασκάλα πέρνει ένα άπό τά παιδάκια πού δέν έχουν τό χέρι τους σηκωμένο καί τό ρωτάει: - Δείξε μου όλα τά παιδάκια πού κάνουν τό σύνολο τών παιδιών μέ τό σηκωμένο χέρι.

Κατόπιν ή δασκάλα προσθέτει:- Τώρα δείξε μου όλα τά παιδάκια πού κάνουν τό ύποσύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι πού κρατάνε μιά μπάλα.

‘Η δασκάλα βοηθάει τό παιδάκι νά δώση σωστές άπαντήσεις.

‘Η δασκάλα έπαναλαμβάνει τό ίδιο πράγμα μέ καθένα άπό τά παιδάκια πού δέν έχουν σηκωμένο τό χεράκι τους, έτσι πού νά βεβαιωθη πως τό κάθε παιδάκι έχει καταλάβει καλά ποιοί άποτελοϋν τό σύνολο καί ποιοί τό ύποσύνολο.

Κατόπιν ή δασκάλα φέρνει καί άκουμπάει στά πόδια της τρεις μπάλες. Λέει σ’ένα άπό τά παιδάκια χωρίς σηκωμένο χέρι: - Πήγαινε νά μπης στό σύνολο τών παιδιών μέ σηκωμένο χέρι.

‘Η δασκάλα βοηθάει τό παιδάκι νά καταλάβη πως άρκει νά σηκώση τό χεράκι του καί νά πάη μέ τά παιδάκια πού έχουν σηκωμένο χέρι για νά άνήκη στό σύνολο αύτό.

Κατόπιν ή δασκάλα λέει σ’ένα δεϋτερο παιδάκι χωρίς σηκωμένο χέρι: -Εσύ νά πας στό ύποσύνολο τών παιδιών πού έχουν σηκωμένο χέρι καί κρατάνε μιά μπάλα.

‘Η δασκάλα βοηθάει τό παιδάκι νά καταλάβη πως άρκει νά πάρη μιά

μπάλα και νά σηκώσει τό χεράκι του για νά άνήκη στό ύποσύνολο πού του λέει ή δασκάλα.

Ή δασκάλα επαναλαμβάνει τό ίδιο πράγμα τρεις φορές.

Στήν τετάρτη επανάληψη δέν υπάρχει μπάλα για νά πάρη τό παιδάκι. Τότε ή δασκάλα του εξηγεί πως δέν μπορεί νά μηϊ στό ύποσύνολο τών παιδιών με σηκωμένο χεράκι πού κρατάνε μιά μπάλα. Μπορεί μόνο νά μηϊ στό σύνολο τών παιδιών πού έχουν τό χέρι τους σηκωμένο.

Ή δασκάλα επαναλαμβάνει τό παιχνίδι αυτό τόσες φορές όσες χρειάζεται για νά τό καταλάβουν καλά όλα τά παιδάκια. Ή δασκάλα κάθε φορά εναλλάσσει τά παιδάκια πού άνήκουν στό σύνολο και τό ύποσύνολο.

Κατόπιν ή δασκάλα επαναλαμβάνει τό ίδιο παιχνίδι, αλλά τά παιδάκια άντι για μιά μπάλα κρατάνε τώρα από μιά κοϋκλα. Έτσι έχουμε τό ύποσύνολο τών παιδιών με σηκωμένο χέρι πού τό καθένα τους κρατᾶ μιά κοϋκλα.

Και τό δεύτερο παιχνίδι επαναλαμβάνεται πολλές φορές, έτσι πού τά παιδάκια νά μάθουν νά τό παίξουν μόνα τους στην έντέλεια.

Κατόπιν ή δασκάλα βάζει όλα τά κοριτσάκια νά σηκώσουν τό χέρι τους, νά σταθούν όλα μαζί και νά πουν: -Είμαστε τό σύνολο τών κοριτσιών της τάξης με σηκωμένο χέρι.

Ή δασκάλα δίνει σε πέντε κοριτσάκια νά κρατάνε από μιά κοϋκλα τό καθένα και τά βάζει νά πουν όλα μαζί: - Είμαστε τό ύποσύνολο τών κοριτσιών της τάξης με σηκωμένο χέρι πού κρατᾶμε μιά κοϋκλα.

Ή δασκάλα φέρνει και άκουμπᾶ μιά κοϋκλα στά πόδια της. Λέει σ'ένα άγοράκι: - Μπορείς νά πᾶς στό ύποσύνολο αυτών πού έχουν τό χέρι τους σηκωμένο και κρατᾶνε μιά κοϋκλα ;

Ή δασκάλα βοηθάει τό παιδάκι νά καταλάβη πως δέν μπορεί νά πᾶ σ' αυτό τό ύποσύνολο επειδή θά σηκώσει τό χεράκι του και θά πάρη τήν κοϋκλα νά τήν κρατάη, γιατί τό ύποσύνολο αυτό άνήκει στό σύνολο τών κοριτσιών της τάξης, και αυτός είναι άγοράκι, δέν είναι κοριτσάκι.

Ή δασκάλα θά επαναλάβη τό ίδιο παιχνίδι με όλα τά άγοράκια.

Κατόπιν ή δασκάλα θά επαναλάβη τό ίδιο παιχνίδι άντίστροφα. Δηλαδή, θά βάλη όλα τά άγοράκια της τάξης νά σηκώσουν τό χεράκι τους και νά πουν όλα μαζί: -Είμαστε τό σύνολο τών άγοριών της τάξης πού έχουμε τό χέρι σηκωμένο.

Ή δασκάλα δίνει σε πέντε άγοράκια νά κρατάνε από μιά μπάλα και τά βάζει νά πουν: - Είμαστε τό ύποσύνολο τών άγοριών της τάξης με σηκω-

μένο χέρι πού κρατάμε μιὰ μπάλα.

Ἡ δασκάλα φέρνει καί ἀκουμπά στά πόδια της μιὰ μπάλα. Λέει σ' ἕνα κοριτσάκι: - Μπορεῖς νά πᾶς στό ὑποσύνολον αὐτῶν πού ἔχουν τό χέρι τους σηκωμένο καί κρατᾶνε μιὰ μπάλα ;

Ἡ δασκάλα βοηθάει τό κοριτσάκι νά καταλάβη πῶς δέν μπορεῖ νά πάη α' αὐτό τό ὑποσύνολο ἐπειδή θά σηκώσει τό χεράκι του καί θά πάρη νά κρατᾶ μιὰ μπάλα, γιὰτί τό ὑποσύνολον αὐτό ἀνήκει στά ἀγοράκια τῆς τάξεως, καί αὐτή εἶναι κοριτσάκι, δέν εἶναι ἀγοράκι.

Ἡ δασκάλα θά ἐπαναλάβη τό ἴδιο παιχνίδι μέ ὅλα τά κοριτσάκια. Κατόπιν τό παιχνίδι αὐτό θά ἐπαναληφθῇ ἀπό τήν ἀρχή πρῶτα μέ τά κοριτσάκια πού θά κρατᾶνε μπάλες καί μετὰ μέ τά ἀγοράκια πού θά κρατᾶνε κοῦκλες, καί μέ τήν ἐξῆς διαφορά ἀναφορικῶς μέ τό προηγούμενο: ὅτι τώρα ἀντί νά ἔχουμε παιδάκια χωρίς σηκωμένο χέρι θά ἔχουμε ἀντιστοίχως παιδάκια καθιστά, καί ἀντί τά παιδάκια νά σηκώνουν τό χέρι τους θά σηκώνονται ὄρθια τά ἴδια.

Τό παιχνίδι αὐτό πρέπει νά ἐπαναληφθῇ τόσες πολλές φορές ὥστε τά παιδάκια νά τό ἀφομοιώσουν ἐντελῶς καί νά τό παίξουν εἰχως σφάλμα.

Τό παιχνίδι αὐτό φαίνεται πάρα πολύ ἀπλό. Ἀλλά ἀποδεικνύεται ὅτι δέν εἶναι τόσο ἀπλό ὅσο φαίνεται, γιὰτί ἀλλοιῶς δέν ἐξηγεῖται πῶς συμβαίνει οἱ ἐνήλικες νά τό παίξουν τόσο συχνά ἐντελῶς στραβά. Σκεφθεῖτε λίγο, καί παντοῦ γύρω σας θά δεῖτε ἀμέτρητους ἀνθρώπους νά παίξουν τό παιχνίδι αὐτό καθημερινά στραβά χωρίς νά τό ἀντιλαμβάνονται.

Ὅταν τά παιδάκια μάθουν νά παίξουν τό παιχνίδι αὐτό σωστά ἀπό τά πρῶτα βήματα τους, ἔτσι πού οἱ ἀρχές τοῦ παιχνιδιοῦ νά τοῦς γίνουν δευτερῆ φύση, θά τό παίξουν σωστά σέ ὅλη τή ζωή τους. Κι' ὅταν αὐτό γενικευθῇ, τότε ἡ κοινωνία τῶν ἀνθρώπων καί ἡ ζωή θά ἀλλάξουν ὄφει.

Ἀποσαφηνίζομε ὅτι αὐτή ἡ δέσμευση τοῦ ὑποσυνόλου μέσα σ' ἕνα σύνολο, δέν ἀφορᾶ μονάχα τήν διαφορά ἀνάμεσα σ' ἀγοράκια καί κοριτσάκια. Εἶναι πολύ-πολύ γενικώτερη. Τά παιδάκια θά τό καταλάβουν αὐτό σιγά-σιγά.

## Πέμπτο Παιχνίδι

Τά ἴσα σύνολα

Ἡ δασκάλα λέει σ' ὅλα τά παιδάκια τῆς τάξεως πού εἶναι κοριτσάκια νά πάνε καί νά σταθοῦν στό δεξιό ἄκρο τῆς αἰθούσης.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει σ' ὅλα τά παιδάκια τῆς τάξεως πού ἔχουν κοριτσικό ὄνομα ( κοριτσικό ὄνομα ἔχουν μόνο τά κοριτσάκια) νά πάνε νά

σταθούνε στο άριστερό άκρο της αίθουσής. Τότε όλα τα κοριτσάκια της τάξεως φεύγουν από το δεξιό και πηγαίνουν στο άριστερό άκρο της αίθουσής.

Η δασκάλα επαναλαμβάνει το ίδιο παιχνίδι με το σύνολο των παιδιών που είναι αγόρια και με το σύνολο των παιδιών που έχουν άγορίστινο όνομα.

Κατόπιν η δασκάλα βλέπει ποιά κοριτσάκια φοράνε κόκκινα παπουτσάκια. Δίνει στο καθένα από αυτά να κρατάη μιά κοψίλα, και επαναλαμβάνει το παιχνίδι με το σύνολο των κοριτσιών που φοράνε κόκκινα παπούτσια και με το σύνολο των κοριτσιών που κρατάνε κοψίλα.

Η δασκάλα βλέπει ποιά αγοράκια φοράνε άσπρη μπλουζα. Δίνει στο καθένα από αυτά να κρατάη μιά μπάλα. Και επαναλαμβάνει το παιχνίδι με το σύνολο των αγοριών που φοράνε άσπρες μπλουζες και με το σύνολο των αγοριών που κρατάνε μπάλα.

Το παιχνίδι αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές, έτσι που τα παιδάκια να καταλάβουν πως όταν δυό σύνολα αποτελούνται από τα ίδια πράγματα που τα καλούμε με δυό διαφορετικά ονόματα γιατί προσέχουμε δυό διαφορετικά χαρακτηριστικά του κάθε πράγματος που έχουν όλα αυτά τά-πράγματα (π.χ. είναι κοριτσάκια ή έχουν κοριτσιόστινο όνομα, φοράνε κοκκινα παπουτσάκια ή κρατούν μιά μπάλα), τότε τα δυό αυτά σύνολα είναι ίσα.

## **Έκτο Παιχνίδι**

Δυό σύνολα ίσα προς τρίτον σύνολον είναι ίσα και μεταξύ των.

Η δασκάλα λέει στα παιδάκια της τάξεως: - Τά αγοράκια να πάνε και να σταθούνε όλα μαζί στο δεξιό άκρο της αίθουσής.

Όταν τά αγοράκια πηγαίνουν εκεί η δασκάλα τά ρωτάει: - Ποιό σύνολο σχηματίζετε; Και βοηθάει τά παιδάκια να πούνε: - Είμαστε το σύνολο των αγοριών της τάξεως.

Κατόπιν η δασκάλα λέει: - Όλα τά παιδάκια που έχουν άγορίστινο όνομα να πάνε να σταθούν στο άριστερό άκρο της αίθουσής.

Όταν τά αγοράκια πηγαίνουν εκεί η δασκάλα τά ρωτάει: - Ποιό σύνολο σχηματίζετε; Και τά βοηθάει να πούνε: - Είμαστε το σύνολο των παιδιών της τάξεως που έχουμε άγορίστινο όνομα.

Κατόπιν η δασκάλα λέει: - Όλα τά παιδάκια που έχουν άγορίστινο όνομα να έρθουν να τούς δώσω μιά μπάλα και μετά να πάνε να σταθούν στο δεξιό άκρο της αίθουσής.

"Όταν τὰ ἀγοράκια πηγαίνουν ἐκεῖ, ἡ δασκάλα τὰ ρωτᾷ: - Ποιό σύνολο σχηματίζετε ; Καί τὰ βοηθάει νά ποῦνε: - Εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν τῆς τάξεως πού κρατᾶμε ἀπό μιᾶ μπάλα τό καθένα.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τό ἴδιο παιχνίδι μέ τὰ κοριτσάκια, σχηματίζοντας τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξεως, κατόπιν τό σύνολον τῶν παιδιῶν πού ἔχουν κοριτσίστικα ὀνόματα καί τέλος τό σύνολο τῶν παιδιῶν πού τό καθένα κρατᾷ μιᾶ κοῦκλα στά χέρια του.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει στά παιδάκια: - Τά ἀγοράκια νά πᾶνε καί νά σταθοῦνε ὅλα μαζί στό δεξιό ἄκρο τῆς αἰθούσης.

"Όταν τὰ ἀγοράκια πηγαίνουν ἐκεῖ ἡ δασκάλα τὰ βάζει νά ποῦνε: - Εἴμαστε τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν τῆς τάξεως.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει: - "Όλα τὰ παιδάκια πού ἔχουν ἀγορίστικο ὄνομα νά πᾶνε νά σταθοῦν στό ἀριστερό ἄκρο τῆς αἰθούσης.

"Όταν τὰ παιδάκια πηγαίνουν ἐκεῖ, ἡ δασκάλα τὰ βάζει νά ποῦνε: - Εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν μέ ἀγορίστικο ὄνομα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει: - "Όλα τὰ ἀγοράκια πού φορᾶνε ἄσπρη μπλούζα νά πᾶνε νά σταθοῦν στό δεξιό ἄκρο τῆς αἰθούσης. Στά παιδάκια αὐτά δίνει ἀπό μιᾶ μπάλα στό καθένα καί τὰ βάζει νά ποῦνε: - Εἴμαστε τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν πού ἔχομε μιᾶ μπάλα.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τό ἴδιο παιχνίδι μέ τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν τῆς τάξεως, τό σύνολο τῶν παιδιῶν πού ἔχουν κοριτσίστικο ὄνομα καί τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν πού φορᾶνε κόκκινα παπούτσια καί πού τοῦς δίνει νά κρατᾶνε ἀπό μιᾶ κοῦκλα τό καθένα.

Κατόπιν ὀλοκληρο τό παιχνίδι ἐπαναλαμβάνεται ἀπό τήν ἀρχή. Ἔτσι ἔχομε πρῶτα τὰ σύνολα: ἀγοράκια - παιδάκια μέ ἀγορίστικο ὄνομα - παιδάκια μέ μπάλα. Ἡ δασκάλα βάζει τὰ ἀγοράκια πού κρατᾶνε στά χέρια τους τήν μπάλα νά ποῦνε ὅλα μαζί: - Δύο σύνολα ἴσα πρὸς τρίτον σύνολον εἶναι ἴσα καί μεταξύ των.

Κατόπιν ἔχομε τὰ σύνολα: κοριτσάκια - παιδάκια μέ κοριτσίστικο ὄνομα - παιδάκια μέ κοῦκλες. Ἡ δασκάλα βάζει τὰ κοριτσάκια πού κρατᾶνε στά χέρια τους μιᾶ κοῦκλα τό καθένα νά ποῦνε ὅλα μαζί: - Δύο σύνολα ἴσα πρὸς τρίτον σύνολον εἶναι ἴσα καί μεταξύ των.

Κατόπιν ἔχομε τὰ σύνολα: ἀγοράκια - παιδάκια μέ ἀγορίστικο ὄνομα - παιδάκια μέ ἄσπρη μπλούζα καί μπάλα. Ἡ δασκάλα βάζει τὰ ἀγοράκια πού κρατᾶνε στά χέρια τους τήν μπάλα νά ρωτήσουν ὅλα μαζί: - Πότε δύο σύνολα ἄνισα πρὸς τρίτο σύνολο εἶναι ἴσα μεταξύ των ;

Τέλος έχουμε τὰ σύνολα: κοριτσάκια-παιδάκια μέ κοριτσιίστικο ὄνομα-παιδάκια μέ κόκκινα παπούτσια καί κοῦκλες. Ἡ δασκάλα βάζει τὰ κοριτσάκια πού κρατᾶνε στά χέρια τους τήν κοῦκλα νά ρωτήσουν ὅλα μαζί:

- Πότε δύο σύνολα ἄνισα πρὸς τρίτον σύνολον εἶναι ἴσα μεταξύ των ;

Τὸ παιχνίδι αὐτό θά ἐπαναληφθῆ ὁλόκληρο ἄλλη μέρα καί μία, καί δύο, καί περισσότερες φορές ἔτσι πού τὰ παιδάκια νά μάθουν νά τὸ παίξουν στήν ἐντέλεια. Τὸ μόνο πού ζητοῦμε στήν πρώτη τοῦ Δημοτικοῦ εἶναι νά ἐντυπωθοῦν στό παιδάκι οἱ δύο αὐτές φράσεις: πρόταση - δύο σύνολα ἴσα πρὸς τρίτον σύνολον εἶναι ἴσα καί μεταξύ των. Ἐρώτηση - πότε δύο σύνολα ἄνισα πρὸς τρίτο σύνολο εἶναι ἴσα μεταξύ των ;

Εἰγά-σιγά τὸ παιδάκι θά ἀρχίσῃ νά νοιώθῃ τήν ἐρώτηση. Στήν ἐπομένη τάξη θά τὸ βοηθήσωμε νά βρῆ μόνο του τήν ἀπάντηση. Ἄλλὰ δέν θά τὸ βιάσωμε καθόλου νά τήν βρῆ νωρίτερα, γιατί ἡ ἀπάντηση αὐτῆ εἶναι τρομερὰ δύσκολη. Γιὰ νά τὸ ἀντιληφθῆτε δοκιμάστε νά ἀπαντήστε στήν ἐρώτηση αὐτῆ σωστά καί λιγόλογα.

## Ἑβδομο Παιχνίδι

Τὸ ὑποσύνολον ὑποσυνόλου δεδομένου συνόλου εἶναι ὑποσύνολον τοῦ δεδομένου συνόλου.

Ἡ δασκάλα φέρνει στήν τάξη καί ἀκουμπάει σ' ἕνα χαμηλὸ τραπεζάκι μπροστά της τόσες κοῦκλες καί τόσα μαντήλια γιὰ τὸν λαιμὸ ὅσα εἶναι τὰ κοριτσάκια, ἐπίσης τόσα καπελάκια καί τόσες μπάλες ὅσα εἶναι τὰ ἀγοράκια. Ἐπίσης φέρνει ἕνα κουτί καραμέλες καί ἕνα κουτί κουλουράκια.

(Ἐάν τὸ σχολεῖο εἶναι πολὺ φτωχό, ἡ δασκάλα γράφει ἀπὸ τήν προηγούμενη μέρα ἕνα σημειωματάκι καί τὸ δίνει στό κάθε παιδί, παραγγέλοντας στή μητέρα του τήν ἄλλη μέρα νά δέσῃ στό λαιμὸ τοῦ παιδιοῦ της ἕνα μαντήλι, ἂν εἶναι κοριτσάκι, ἢ νά τοῦ φορέσῃ ἕνα καπελάκι, ἂν εἶναι ἀγοράκι. Ἐπίσης ζητάει τίς καραμέλες καί τὰ κουλουράκια ἀπὸ μιὰ πλούσια μητέρα.)

Ἡ δασκάλα καλεῖ ἐπτά κοριτσάκια καί τοὺς δένει ὄμορφα-ὄμορφα ἕνα μαντήλι γύρω ἀπὸ τὸ λαιμὸ τους. Κατόπιν τὰ βάζει νά σταθοῦν ὅλα μαζί γιὰ νά θοῦνε καλὰ ὅλοι πῶς τὰ παιδάκια αὐτὰ φορᾶνε μαντήλι. Κατόπιν ἡ δασκάλα καλεῖ τέσσαρα ἀπὸ τὰ κοριτσάκια αὐτὰ καί τοὺς δίνει νά κρατᾶνε μιὰ κοῦκλα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει καθαρά καί δυνατά: - Τὰ κοριτσάκια πού φορᾶνε μαντήλι καί κρατᾶνε μιὰ κοῦκλα, νά ἔλθουν νά τοὺς δώσω ἀπὸ μιὰ καρα-

μέλα.

Τούς δίνει τήν καραμέλα.

Καί τά ἄλλα παιδάκια ζητᾶνε καραμέλες. Ἡ δασκάλα τούς ἐξηγεῖ: -Καραμέλα θά πάρουν μόνο τά κοριτσάκια πού φορᾶνε μαντήλι καί κρατᾶνε κοῦκλα. Τό λέει αὐτό καί τό ἐπαναλαμβάνει κυττάζοντας συγχρόνως τά μαντήλια καί τίς κοῦκλες πού βρίσκονται στό τραπεζάκι μπροστά της. "Όταν ἕνα ἀγοράκι πάη ν'ἀπλώση τό χεράκι του γιά νά πάρη ἕνα μαντήλι ἢ μιὰ κοῦκλα, ἡ δασκάλα τό ἀπρωθεῖ στοργικά ἐξηγώντας του :- 'Ἐσύ εἶσαι ἀγοράκι. Τά μαντήλια καί οἱ κοῦκλες εἶναι γιά τά κοριτσάκια." Ἐπειτα ἐσύ θά πάρης καπελάκι καί μπάλα καί θά παίξεις σωστά γιά νά σοῦ δώσω κουλουράκι." Ἐπειτα.

"Όταν ἕνα κοριτσάκι πάη ν'ἀπλώση τό χεράκι του γιά νά πάρη μιὰ κοῦκλα, ἡ δασκάλα τό ἀπρωθεῖ στοργικά ἐξηγώντας του: -Κοῦκλα μπορεῖ νά πάρη μόνο ὅποιο κοριτσάκι φοράει μαντήλι.

"Όταν ἕνα κοριτσάκι πάη ν'ἀπλώση τό χεράκι του γιά νά πάρη ἕνα μαντήλι, ἡ δασκάλα τό δίνει καί τό φοράει ὅτο λαιμό του πρόθυμα, λέγοντας καθαρά γιά νά τήν ἀκούσουν ὅλοι: - Κάθε κοριτσάκι μπορεῖ νά πάρη καί νά φορέση ἕνα μαντήλι. Τί θά κάνη ἔπειτα ;" Ἐπειτα τό κοριτσάκι πού φοράει μαντήλι μπορεῖ νά πάρη καί μιὰ κοῦκλα." Ἐπειτα στό κοριτσάκι πού φοράει μαντήλι καί κρατᾶει μιὰ κοῦκλα, ἐγώ θά δώσω μιὰ καραμέλα.

Στά τρία κοριτσάκια πού ἤδη φοροῦνε μαντήλι, ἡ δασκάλα ἐπιτρέπει εὐχαρίστως νά πάρουν κατ'εὐθεταν μιὰ κοῦκλα καί ἔπειτα τούς δίνει καραμέλα.

Τό παιχνίδι αὐτό συνεχίζεται μέχρις ὅτου ὅλα τά κοριτσάκια πάρουν καραμέλα περνώντας ἀπό τήν σωστή σειρά. Δηλαδή: πρῶτα θά φορῆσουν τό μαντήλι στό λαιμό, κατόπιν θά πάρουν στά χέρια τους τήν κοῦκλα καί κατόπιν θά τούς δοθῇ ἡ καραμέλα.

Στή συνέχεια ἡ δασκάλα καλεῖ ὀκτώ ἀγοράκια. Τούς φοράει καπελάκι. Τά βάζει νά σταθοῦν ὅλα μαζί γιά νά δοῦνε καλά ὅλοι πῶς τά παιδάκια αὐτά φορᾶνε καπελάκι. Κατόπιν ἡ δασκάλα καλεῖ πέντε ἀπό τά ἀγοράκια αὐτά καί τούς δίνει νά κρατᾶνε μιὰ μπάλα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει καθαρά καί θυνατά: - Τά ἀγοράκια πού φορᾶνε καπέλο καί κρατᾶνε μπάλα νά ἔλθουν νά τούς δώσω ἀπό ἕνα κουλουράκι. Τούς δίνει τό κουλουράκι.

Καί τά ἄλλα παιδάκια ζητᾶνε κουλουράκια. Ἡ δασκάλα τούς ἐξηγεῖ: -Κουλουράκι θά πάρουν μόνον τά ἀγοράκια πού φορᾶνε καπελάκι καί κρατᾶνε μπάλα. Τό λέει αὐτό καί τό ἐπαναλαμβάνει κυττάζοντας συγχρόνως τά κα-



πελάκια και τις μπάλες που βρίσκονται στο τραπεζάκι μπροστά της.

"Όταν ένα κοριτσάκι πάη ν' απλώση τό χεράκι του για νά πάρη ένα καπελάκι ή μιá μπάλα, ή δασκάλα τό άπωθεϊ στοργικά έξηγώντας του: - 'Εσύ είσαι κοριτσάκι. Τά καπέλα και οί μπάλες είναι για τά άγοράκια. 'Εσύ πήρες και μαντήλι και κουκλα και καραμέλα.

"Όταν ένα άγοράκι πάη ν' απλώση τό χεράκι του για νά πάρη μιá μπάλα, ή δασκάλα τό άπωθεϊ στοργικά έξηγώντας του: - Μπάλα μπορεί νά πάρη μόνον όποιο άγοράκι φοράει καπέλο.

"Όταν ένα άγοράκι πάη ν' απλώση τό χεράκι του για νά πάρη ένα καπέλο, ή δασκάλα τό δίνει και τοῦ τό φοράει πρόθυμα, λέγοντας καθαρά για νά τήν άκούσουν όλοι: - Κάθε άγοράκι μπορεί νά πάρη και νά φορέση ένα καπέλο. Τί θά κάνη έπειτα; "Επειτα τό άγοράκι που φοράει καπέλο μπορεί νά πάρη και μιá μπάλα." Επειτα στο άγοράκι που φοράει καπέλο και κρατάει μπάλα, έγω θά δώσω ένα κουλουράκι.

Ετά τρία άγοράκια που φοροῦνε ήδη καπέλο, ή δασκάλα έπιτρέπει εύχαρίστως νά πάρουν κατ'εύθεταν μιá μπάλα και έπειτα τούς δίνει ένα κουλουράκι.

Τό παιχνίδι αυτό συνεχίζεται μέχρις ότου όλα τά άγοράκια πάρουν κουλουράκι περνώντας από τήν σωστή σειρά. Δηλαδή: πρώτα θά φορέσουν τό καπελάκι, κατόπιν θά πάρουν τήν μπάλα και κατόπιν θά τούς δοθῆ τό κουλουράκι.

Τό παιχνίδι αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές έτσι που τά παιδάκια νά μάθουν νά τό παίζουν μόνα τους χωρίς λάθος.

Ετίς τελευταίες επαναλήψεις, όταν πιά τά παιδιά θά έχουν μάθει τήν τεχνική τοῦ παιχνιδιοῦ έτσι που νά μπορούν νά στρέφουν τήν προσοχή τους σέ άποστήθιση φράσεων, θά λένε και τίς έπόμενες φράσεις:

κάθε κοριτσάκι όταν φοράει τό μαντήλι: - μπαίνω στο ύποσύνολο τών κοριτσιών μέ μαντήλι, που κλείνεται στο σύνολο τών κοριτσιών.

κάθε κοριτσάκι όταν παίρνει τήν κουκλα: - μπαίνω στο ύποσύνολο τών κοριτσιών μέ κουκλα, που κλείνεται στο σύνολο τών κοριτσιών μέ μαντήλι.

Τότε τά άλλα κοριτσάκια που ήδη φοροῦνε μαντήλι και κρατάνε κουκλα, άπαντοῦν όλα μαζί (έν χορῶ): - τό ύποσύνολο τών κοριτσιών μέ μαντήλι κλείνεται στο σύνολο τών κοριτσιών. Καί τότε τό κοριτσάκι προσθέτει: "Έτσι μπήκα στο σύνολο τών κοριτσιών. Καί ή δασκάλα τοῦ δίνει μιá καραμέλα.

κάθε άγοράκι που φοράει τό καπέλο: - μπαίνω στο ύποσύνολο τών άγοριών

μέ καπέλο, πού κλείνεται στό σύνολο τῶν ἀγοριῶν.

κάθε ἀγοράκι ὅταν παίρνει τήν μπάλα: - μπαίνω στό ὑποσύνολο τῶν ἀγοριῶν μέ μπάλα, πού κλείνεται στό σύνολο τῶν ἀγοριῶν μέ καπέλο.

Τότε τά ἄλλα ἀγοράκια πού ἤδη φοροῦνε καπέλο καί κρατᾶνε μπάλα, ἀπαντοῦν ὅλα μαζί :- τό ὑποσύνολο τῶν ἀγοριῶν μέ καπέλο κλείνεται στό σύνολο τῶν ἀγοριῶν. Τό ἀγοράκι προσθέτει: - "Ἐτσι μῆμα στό σύνολο τῶν ἀγοριῶν. Καί ἡ δασκάλα τοῦ δίνει ἕνα κουλουράκι.

Τό μόνο πού ζητᾶμε ἀπό τά παιδάκια εἶναι νά μάθουν νά παίζουν σωστά μόνα τους αὐτό τό παιχνίδι. Σιγά-σιγά θά φθάσουν νά καταλάβουν τό νόημα του. Γιά τόν σκοπὸν αὐτόν θά πρέπει νά ἀποκτήσουν πολύ περισσότερες γνώσεις. Ἄλλά τό σ χ ῆ μ α ( ἄλλως : τόν τύπον ) τοῦ συλλογισμοῦ πρέπει νά τό ἀφομοιώσουν ὅσον τό δυνατόν νωρίτερα γιά νά χαραχθῆ βαθιά μέσα στό ἐγώ τους, ὥστε νά τοὺς γίνῃ δεύτερη φύση. Αὐτό τό σχῆμα εἶναι ἡ βάση τῶν μαθηματικῶν ἀποδείξεων σέ πάρα πολλές περιπτώσεις. Ὅποιος δέν καταλάβῃ καλά τό σχῆμα αὐτό κάνει πολύ χονδρά λάθη καί στήν δουλειά του καί στήν ζωή του. Δυστυχῶς αὐτό συμβαίνει πάρα πολύ συχνά, γιατί πολλοί ἄνθρωποι παίζουν στραβά αὐτό τό παιχνίδι. Τό πιό συνηθισμένο, μποροῦμε νά ποῦμε τό καθημερινό, σφάλμα τους εἶναι τό ἐξῆς: ἀντί γιά τόν σωστό τύπο συλλογισμοῦ πού ὀρίζει ὅτι τό ὑποσύνολο ὑποσυνόλου δεδομένου συνόλου εἶναι ὑποσύνολο τοῦ δεδομένου συνόλου, παρανοώντας θεωροῦν ὅτι ὅταν μερικά στοιχεῖα ἐνός ὑποσυνόλου περικλείωνται μέσα σ' ἕνα ἄλλο ὑποσύνολο μερικά στοιχεῖα τοῦ ὁποῖου περικλείωνται μέσα σ' ἕνα δεδομένο σύνολο, τότε τό πρῶτο ὑποσύνολο περικλείεται μέσα στό δεδομένο σύνολο.

Γιά τόν λόγον αὐτόν τό παιχνίδι τοῦτο πρέπει νά ἐπαναλαμβάνεται ὅπως ἀκριβῶς καθορίζομε, μέχρις ὅτου ὅλα τά παιδάκια μάθουν νά τό παίζουν μόνα τους χωρίς λάθος.

## Ὅγδοο Παιχνίδι

Ἡ ἀντιστοιχία

Ἡ δασκάλα βάζει ὅλα τά ἀγοράκια νά σταθοῦν σχηματίζοντας ἕνα κύκλο καί βλέποντας πρὸς τά ἔξω. Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει τά κοριτσάκια νά σταθοῦν σχηματίζοντας ἕνα κύκλον γύρω ἀπὸ τόν πρῶτο κύκλο τῶν ἀγοριῶν καί κυττάζοντας πρὸς τά μέσα. Ἐτσι τά ἀγοράκια ἀντικρύζουν τά κοριτσάκια.

Ἡ δασκάλα λέει σέ κάθε κοριτσάκι νά πιᾶσῃ τό χέρι ἐνός ἀγοριοῦ. Ἐπιτρέπεται δυὸ κοριτσάκια νά πιᾶσουν ἀπὸ ἕνα χεράκι τοῦ ἰδίου ἀγοριοῦ,

άλλά δεν επιτρέπεται ένα κοριτσάκι να πιάσει τὰ χέρια δυο αγοριών. 'Επιτρέπεται ένα αγοράκι (ή και περισσότερα) να μείνει με τὰ χέρια του ελεύθερα, χωρίς να τὸ πιάνη κανένα κοριτσάκι.

"Όλα τὰ παιδάκια καὶ στοὺς δύο κύκλους, ἔτσι με τὰ χέρια τους δεμένα, γυρίζουν γύρω-γύρω σάν σέ χορό. Καὶ συγχρόνως ἀπαγγέλουν :

τὰ κοριτσάκια :- εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν

τὰ αγοράκια :- εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν αγοριῶν

ὅλα μαζί :- φτιάχνουμε ἀντιστοιχία τῶν κοριτσιῶν στ'ἀγόρια.

Κατόπιν σταματοῦν.

Τὰ αγοράκια σχηματίζουν τὸν ἐξωτερικὸ καὶ τὰ κοριτσάκια τὸν ἐσωτερικὸ κύκλο. Πάλι κάθε αγοράκι πιάνει ἕνα μόνο κοριτσάκι. 'Επιτρέπεται δυο ἀγοράκια να πιάσουν τὸ ἴδιο κοριτσάκι.

"Όλα τὰ παιδάκια καὶ στοὺς δύο κύκλους, ἔτσι με τὰ χέρια τους πιασμένα, γυρίζουν γύρω-γύρω σάν σέ χορό, με φορά ἀντίθετη ἀπὸ ὅ,τι τὴν προηγούμενη φορά. Καὶ συγχρόνως ἀπαγγέλουν:

τὰ αγοράκια :- εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν αγοριῶν

τὰ κοριτσάκια :- εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν

ὅλα μαζί :- φτιάχνουμε ἀντιστοιχία τῶν αγοριῶν στὰ κορίτσια.

Τὸ παιχνίδι ἐπαναλαμβάνεται με συνεχῆ ἐναλλαγή ὥσπου νὰ τὸ μάθουν καλά ὅλα τὰ παιδάκια.

## Ἔννατο Παιχνίδι

Ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία

'Η δασκάλα παραγγέλλει ἀπὸ τὴν προηγουμένη μέρα στοὺς γονεῖς τῶν παιδιῶν νὰ δώσουν στά παιδάκια τους νὰ φέρουν ἀπὸ μιά φωτογραφία δική του καὶ τῆς μητέρας του (δηλαδή δύο φωτογραφίες τὸ κάθε παιδάκι).

'Η δασκάλα μαζεύει τὰ παιδάκια γύρω της καὶ ἀπλώνει μπροστά σ'ένα χαμηλο τραπέζι ἔτσι πού νὰ φαίνωνται συγχρόνως ὅλες, τίς φωτογραφίες τῶν παιδιῶν. Λέει στό κάθε παιδάκι νὰ βρῆ, νὰ πάρη στό χεράκι του καὶ νὰ κρατήσῃ φηλά τὴν δική του φωτογραφία.

'Η δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τὸ ἴδιο παιχνίδι με τίς φωτογραφίες τῶν μαμάδων τῶν παιδιῶν.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει στά παιδάκια νὰ πάη τὸ καθένα στὸν τοῖχο ὅπου κρέμονται τὰ παλτουδάκια τους γιὰ νὰ βρῆ καὶ νὰ πάρη τὸ καθένα τὸ δικό του παλτουδάκι. 'Εν συνεχεία ἡ δασκάλα ξανακρεμάει τὰ παλτά στὴν θέσι τους.

Ἡ δασκάλα λέει στά παιδάκια νά βγάλουν τό ἀριστερό παπουτσάκι τους καί νά πᾶνε νά τό βάλουν κάτω ἀκριβῶς ἀπό τό παλτουδάκι τους, πού εἶναι κρεμασμένο στόν τοῖχο.

Ἡ δασκάλα βάζει τά παιδάκια νά ἐπαναλάβουν τό παιχνίδι μέ τίς φωτογραφίες τους.

Κατόπιν τά στέλνει νά πᾶνε καί νά ξαναφορέσουν τό καθένα τό παπουτσάκι του.

Τό παιχνίδι αὐτό ἐπαναλαμβάνεται ἔτσι τρεῖς ἢ τέσσαρες φορές γιά νά τό μάθουν καλά τά παιδάκια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει πάλι τά παιδάκια νά σταθοῦν γύρω της καί ἀπλώνει τίς φωτογραφίες τους ἐπάνω στό τραπέζι.

Ἡ δασκάλα βάζει τά παιδάκια νά ποῦνε ὅλα μαζί: - Εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν τῆς τάξης.

Καί κατόπιν νά δείξουν τίς φωτογραφίες καί νά ποῦνε: - Εἶναι τό σύνολο τῶν φωτογραφιῶν μας.

Ὅταν ὅλα τά παιδάκια πάρουν τήν φωτογραφία τους λένε δυνατά:

τά ἀγοράκια	: - <u>ἀμφί</u>	(αὐτή ἡ λέξις εἶναι πολύ δύσκολη γιά νά τήν προφέρουν τά παιδάκια μονορούφι )
τά κοριτσάκια	: - <u>μονο</u>	
τά ἀγοράκια	: - <u>σήμαντος</u>	
ὅλα μαζί	: - <u>ἀντιστοιχία</u>	

καί ἡ δασκάλα προσθέτει: - ἀνάμεσα στό σύνολο τῶν παιδιῶν καί στό σύνολο τῶν φωτογραφιῶν τους.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει τά παιδάκια νά ξαναποῦν: - Εἴμαστε τό σύνολο τῶν παιδιῶν τῆς τάξης .

Τά βάζει νά δείξουν τά παλτουδάκια τους καί νά ποῦν: - Αὐτά εἶναι τό σύνολο τῶν παλτῶν μας.

Ὅταν ὅλα τά παιδάκια πάρουν καί κρατοῦν στά χέρια τους τό καθένα τό παλτουδάκι του, ἡ δασκάλα τά βάζει νά ποῦνε δυνατά:

τά κοριτσάκια	: - <u>ἀμφί</u>
τά ἀγοράκια	: - <u>μονο</u>
τά κοριτσάκια	: - <u>σήμαντος</u>
ὅλα μαζί	: - <u>ἀντιστοιχία</u>

καί ἡ δασκάλα προσθέτει: - ἀνάμεσα στό σύνολο τῶν παιδιῶν καί στό σύνολο τῶν παλτῶν τους.

Κατόπιν ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τό ἴδιο παιχνίδι μέ τίς φωτογραφίες τῶν μαμάδων καί κατόπιν μέ τά παπουτσάκια τῶν παιδιῶν.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει στά παιδάκια νά βάλουν τό καθένα τήν φωτογραφία του ἐπάνω στό παλτουδάκι του. Τά βάζει νά ποῦν:

τά ἀγοράκια : - ἀμφί

τά κοριτσάκια : - μονο

τά ἀγοράκια : - σήμαντος

ὅλα μαζί : - ἀντιστοιχία

καί ἡ δασκάλα προσθέτει : - ἀνάμεσα στό σύνολο τῶν φωτογραφιῶν τῶν παιδιῶν καί στό σύνολο τῶν παλτῶν τῶν παιδιῶν.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει ὅλες τίς φωτογραφίες ( τῶν παιδιῶν καί τῶν μαμάδων τους ) ἐπάνω στό τραπέζι ἔτσι πού νά φαίνωνται ὅλες καί λέει στά παιδάκια : - Νά βρῆτε καί νά βάλετε τήν μιὰ κοντά-κοντά στήν ἄλλη, τήν δική σας φωτογραφία καί τήν φωτογραφία τῆς μαμάς. "Ὅταν αὐτό γίνη, βάζει τά παιδάκια νά ποῦν:

τά ἀγοράκια : - ἀμφί

τά κοριτσάκια : - μονο

τά ἀγοράκια : - σήμαντος

ὅλα μαζί : - ἀντιστοιχία

καί ἡ δασκάλα προσθέτει : - ἀνάμεσα στό σύνολο τῶν φωτογραφιῶν τῶν παιδιῶν καί στό σύνολο τῶν φωτογραφιῶν τῶν μαμάδων τους.

Τό παιχνίδι αὐτό ἐπαναλαμβάνεται μέχρις ὅτου ὅλα τά παιδάκια μάθουν νά τό παίξουν χωρίς λάθος.

## Δέκατο Παιχνίδι

Τά ἰσοδύναμα σύνολα. Δύο σύνολα ἰσοδύναμα πρός τρίτον εἶναι ἰσοδύναμα καί μεταξύ των.

Ἡ δασκάλα ἔχει τίς φωτογραφίες τῶν παιδιῶν καί τῶν μαμάδων τους.

Ἀπλώνει ἐπάνω στό τραπέζι μπροστά στά παιδάκια τίς φωτογραφίες τους

Τά ρωτᾷ : - Βλέπει τό καθένα ἀπό οἷς τήν φωτογραφία του ;

Τά παιδάκια ἀπαντοῦν . - ναί

Τά ρωτᾷ : - εἶναι κανένα παιδάκι πού δέν βλέπει τήν φωτογραφία του ;

Τά παιδάκια ἀπαντοῦν : - ὄχι.

Ἐκπύρει καμμιά φωτογραφία παραπάνω ; ρωτᾷ ἡ δασκάλα.

Τά παιδάκια δέν ξέρουν τί νά ἀπαντήσουν. Ἡ δασκάλα τά βοηθάει, λέγοντας στό κάθε παιδάκι νά πάρη τήν φωτογραφία του καί νά τήν βάλῃ ἐπάνω στή φωτογραφία τῆς μαμάς του. "Ἐτσι φαίνεται καθαρά πῶς ὅλες οἱ φωτογραφίες μαμάδων εἶναι σκεπασμένες ἀπό φωτογραφίες παιδιῶν.

Ἡ δασκάλα τοῦς ἐξηγεῖ : - "Ἐτσι βλέπομε πῶς κάθε παιδάκι βρῆκε τήν

φωτογραφία του και τήν έβαλε πάνω στή φωτογραφία της μαμάς του.Καί δέν έμεινε καμμιά φωτογραφία ακούνητη.Λοιπόν αυτό σημαίνει πώς όλες οί φωτογραφίες δείχνουν παιδάκια τής τάξης."Αραγε σημαίνει αυτό ότι υπάρχουν τόσες φωτογραφίες όσα είναι καί τά παιδάκια ;

Τά παιδάκια δυσκολεύονται νά άπαντήσουν.Τότε ή δασκάλα τούς έξηγετ πώς,για νά τό βρουν,πρέπει τό κάθε παιδάκι νά πάρη τήν φωτογραφία του καί νά τήν κρατήση στό χεράκι του.

Τά παιδάκια τό κάνουν.

'Η δασκάλα τά ρωτάει:- 'Υπάρχει κανένα παιδάκι πού νά κρατάει δυό φο- ρές τήν φωτογραφία του; τρεις φορές ; Όχι ; Τώρα λοιπόν είμαστε σί- γουροι πώς υπάρχουν τόσες φωτογραφίες όσα είναι καί τά παιδάκια.Ούτε περισσότερες,ούτε λιγότερες.Λοιπόν,παιδάκια,πέστε μου: πόσες φωτογρα- φίες υπάρχουν ;

- ....

- Θά πήτε : στό σύνολο τών φωτογραφιών υπάρχουν τόσες φωτογραφίες ... Πέστε το.

Τά παιδάκια έπαναλαμβάνουν: - στό σύνολο τών φωτογραφιών υπάρχουν τό- σες φωτογραφίες

'Η δασκάλα προσθέτει: - όσα παιδάκια υπάρχουν στό σύνολο τών παιδιών. Πέστε το.

- "Όσα παιδάκια υπάρχουν στό σύνολο τών παιδιών.

'Η δασκάλα τά ρωτάει: - Ξέρετε πώς λέγονται αυτά τά δύο σύνολα πού τό ένα έχει τόσα πράγματα όσα καί τό άλλο; Λέγονται ίσοδύναμα σύνολα.Πέ- στε το.

- 'Ισοδύναμα σύνολα.

- Λοιπόν τό σύνολο τών φωτογραφιών τών παιδιών είναι ίσοδύναμο μέ τό σύνολο τών παιδιών.Πέστε το.

Τά παιδιά τό έπαναλαμβάνουν.

'Η δασκάλα τά ρωτάει: - Πόσες φωτογραφίες έχει τό σύνολο τών φωτογρα- φιών τών μαμάδων ;

- ....

- Πρίν από λίγο βάλαμε κάθε μιά φωτογραφία δική σας επάνω στή φωτο- γραφία τής μαμάς σας."Έμεινε καμμιά μαμά άσκέπαστη ;

- "Όχι.

- Έβήκε κάθε παιδάκι τήν φωτογραφία τήν δική του καί τής μαμάς του;

- Ναί.

- Πόσες είναι οι φωτογραφίες των μαμάδων ;
  - ....
  - "Όσες είναι και οι φωτογραφίες των παιδιών.Και πόσες είναι οι φωτογραφίες των παιδιών ;
  - .....
  - Οι φωτογραφίες των παιδιών είναι τόσες όσα είναι και τὰ παιδιά.Αυτό τό είδαμε πρίν.Τό θυμάστε ;
  - Ναί
  - Πόσες είναι λοιπόν οι φωτογραφίες των μαμάδων ;
  - ...
  - Οι φωτογραφίες των μαμάδων είναι τόσες,όσα είναι και τὰ παιδιά.Πέστε το.
  - Οι φωτογραφίες των μαμάδων είναι τόσες,όσα είναι και τὰ παιδιά.
  - Δηλαδή : τό σύνολο των φωτογραφιών των μαμάδων έχει τόσες φωτογραφίες,όσα είναι και τὰ παιδιά.
- ‘Η δασκάλα επαναλαμβάνει τό ίδιο παιχνίδι μέ τό σύνολο των παλτών, των δεξιων παπουτσιων και των παιδιων.Κατόπιν επαναλαμβάνει τό παιχνίδι μέ τό σύνολο:των φωτογραφιών των παιδιων,των παλτων και των παιδιων.
- Κατόπιν ολοκληρω τό παιχνίδι επαναλαμβάνεται τόσες φορές,όσες χρειάζεται για να μπορέσουν όλα τὰ παιδάκια να τό παίξουν μόνα τους χωρίς λάθος.

## ‘Ενδέκατο Παιχνίδι

### Τομή συνόλων

‘Η δασκάλα φωνάζει τὰ μισά κοριτσάκια της τάξεως και φοράει ένα μαντήλι στό λαιμό του καθενός από αυτά.Κατόπιν βάζει όλα τὰ παιδάκια να σταθούν σε τρεις ομάδες: όλα τὰ αγοράκια μαζί,όλα τὰ κοριτσάκια μέ μαντήλι στόν λαιμό μαζί, και όλα τὰ άλλα κοριτσάκια μαζί.

‘Η δασκάλα βάζει τὰ παιδάκια να πουν αντιστοιχως:

- είμαστε τό σύνολο των αγοριων
- είμαστε τό σύνολο των κοριτσιων μέ μαντήλι
- είμαστε τό σύνολο των κοριτσιων χωρίς μαντήλι

‘Η δασκάλα δίνει στα μισά παιδιά κάθε συνόλου να κρατουνε μιá μπάλα και στα υπόλοιπα παιδιά να κρατουνε μιá κοουκλα.

Κατόπιν ή δασκάλα λέει στα παιδιά:



Τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν μέ μαντῆλι νά καθίσουν στίς θέσεις των. Τά ἄλλα δύο σύνολα νά ἔρθουν ἐδῶ μπροστά, χωριστά τό καθένα.

Βάζει τό πρῶτο σύνολο νά πῆ: - εἴμαστε τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν  
βάζει τό δεύτερο σύνολο νά πῆ: - εἴμαστε τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν χωρίς μαντῆλι.

Ἡ δασκάλα λέει : - Καί, ἀπό τά δύο σύνολα, ὅλα τά παιδάκια πού φορᾶνε κόκκινα παπουτσάκια νά ἔλθουν ἐδῶ μπροστά μου.

Τά παιδάκια ἔρχονται μπροστά της. Ἡ δασκάλα τά βάζει νά ποῦν:

- Εἴμαστε ἡ τομῆ τῶν δύο συνόλων.

Κατόπιν ἡ δασκάλα λέει στά παιδάκια νά γυρίσουν στά ἀντίστοιχα σύνολα τους, καί κατόπιν λέει στά δύο αὐτά σύνολα νά ξαναγυρίσουν στήν ἀρχική θέση τους. Τά παιδάκια κρατοῦνε πάντα στά χέρια τους τήν μπάλα ἢ τήν κοῦκλα πού τούς εἶχε δώσει ἀρχικά ἡ δασκάλα.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει ἀκριβῶς τό ἴδιο παιχνίδι μέ τά δύο ἄλλα σύνολα. Δηλαδή: μέ τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν καί μέ τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν μέ μαντῆλι.

Κατόπιν ἐπαναλαμβάνεται πάλι τό ἴδιο παιχνίδι μέ τά σύνολα τῶν κοριτσιῶν μέ μαντῆλι καί τῶν κοριτσιῶν χωρίς μαντῆλι.

Τό παιχνίδι αὐτό ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές ἔτσι πού τά παιδάκια νά μάθουν νά τό παίζουν μόνα τους καί κάθε φορά νά λένε: - εἴμαστε ἡ τομῆ τῶν δύο συνόλων.

## Δωδέκατο Παιχνίδι

Ἡ τομῆ τῆς τομῆς δύο συνόλων μέ τρίτον σύνολο εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς σειρᾶς τμήσεως τῶν τριῶν συνόλων.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει μία φορά ἐξ ἀρχῆς ὀλόκληρο τό προηγούμενο παιχνίδι.

Κατόπιν ξαναρχίζει τό παιχνίδι ὡς ἑξῆς:

Καλεῖ τά παιδάκια πού κάνουν τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν καί τά παιδάκια πού κάνουν τό σύνολο τῶν κοριτσιῶν μέ μαντῆλι. Ἀπό τά δύο αὐτά σύνολα σχηματίζει τήν τομῆ τῶν παιδιῶν πού φορᾶνε κόκκινα παπουτσάκια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα φωνάζει τό τρίτον σύνολο, δηλαδή τά κοριτσάκια χωρίς μαντῆλι. Καλεῖ νά ἔλθουν μπροστά της τά παιδάκια ἀπό τό σύνολο αὐτό πού φορᾶνε κόκκινα παπουτσάκια καί κρατοῦνε στό χέρι τους μιά μπάλα.

Ὅμοίως ἀπό τήν τομῆ τῶν δύο προηγούμενων συνόλων καλεῖ νά ἔλθουν μπροστά της τά παιδάκια πού φορᾶνε κόκκινα παπουτσάκια καί κρατοῦνε στό χέρι τους μιά μπάλα. Ὅλα αὐτά τά παιδάκια τά βάζει νά σταθοῦνε

μαζί και να πούνε: - Είμαστε η τομή των τριών συνόλων. "Όλα φορᾶμε κόκκινα παουτσάκια και κρατᾶμε μπάλα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει τὰ παιδάκια νά ξαναγυρίσουν στήν ἀρχική θέση τους και τό παιχνίδι ἐπαναλαμβάνεται μέ τελική τομή τὰ παιδάκια πού φορᾶνε κόκκινα παουτσάκια και κρατᾶνε στό χέρι τους μιά κοῦκλα.

Τό παιχνίδι αὐτό ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές μέ τελική τομή ἄλλοτε τήν μία και ἄλλοτε τήν ἄλλη ἀπό τίς δύο προηγούμενες.Κάθε φορά γίνεται ἐναλλαγή τῶν συνόλων πού τέμνονται.Δηλαδή ἀρχικά τέμνεται ἄλλοτε τό πρῶτο σύνολο μέ τό δεύτερο,ἄλλοτε τό δεύτερο μέ τό τρίτο, και ἄλλοτε τό πρῶτο μέ τό τρίτο.Κατόπιν ἡ τομή τῶν δύο αὐτῶν τέμνεται μέ τό ὑπολοιπόμενο σύνολο.

Ἡ ἐπανάληψις γίνεται τόσες πολλές φορές ὅσες χρειάζεται, ὥστε ὅλα τὰ παιδάκια νά μάθουν νά παίζουσι τό παιχνίδι αὐτό μόνα τους χωρίς λάθος, και νά καταλάβουσι καλά πῶς μέ ὁποιαδήποτε σειρά και ἂν γίνη ἡ τομή τῶν συνόλων, πάντοτε στήν τομή τῶν παιδιῶν πού φορᾶνε κόκκινα παουτσάκια και κρατοῦνε κοῦκλα θά βρίσκωνται τὰ ἴδια παιδάκια. Τό ἴδιο και γιά τήν τομή τῶν παιδιῶν πού φορᾶνε κόκκινα παουτσάκια και κρατᾶνε μπάλα.

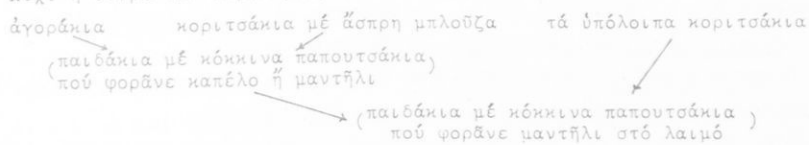
Κατόπιν ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τό ἴδιο παιχνίδι, ἀλλά αὐτή τήν φορά, ἀντί νά κυττάξῃ ποιά παιδάκια φορᾶνε κόκκινα παουτσάκια, κυττάζει ποιά παιδάκια φορᾶνε ἄσπρη μπλοῦζα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα μαζεῦει τίς μπάλες και τίς κοῦκλες. Δίνει στά μισά παιδάκια ( ἀγοράκια και κοριτσάκια ἀνακατεμένα ) νά φορέσουσι καπελάκι και στά μισά νά φορέσουσι μαντιλι γύρω ἀπό τόν λαιμό. Και ἐπαναλαμβάνει τό παιχνίδι γιά νά φθάσῃ στήν τελική τομή : παιδάκια πῶς φορᾶνε κόκκινα παουτσάκια και καπέλο , και ἔπειτα στήν τομή: παιδάκια πού φορᾶνε κόκκινα παουτσάκια και μαντιλι.

Ἐναντικειμενικός σκοπός εἶναι πάντοτε ὁ ἴδιος: μέ ὅποια σειρά και ἂν κάνωμε τήν τομή τῶν συνόλων, στήν τελική τομή θά βρίσκωνται πάντοτε τὰ ἴδια παιδιά. Αὐτό θά γίνη ἀντιληπτό μέ τίς πολλές-πολλές ἐπανάληψεις.

Ἐπιμείωσις: ἐννοεῖται ὅτι στήν περίπτωσι πού ἡ τελική τομή περιλαμβάνει τὰ παιδάκια πού φορᾶνε κόκκινα παουτσάκια και μαντιλι στό λαιμό, τὰ ἀρχικά τρία σύνολα εἶναι : τὰ ἀγοράκια, τὰ κοριτσάκια πού φορᾶνε ἄσπρη μπλοῦζα και τὰ κοριτσάκια πού ὄν φορᾶνε ἄσπρη μπλοῦζα. Ὁ ἴ-

βιος άρχικός διαχωρισμός γίνεται και στή περίπτωση που ή τελική τομή περικλείει τά παιδάκια που φοράνε κόκκινα παπουτσάκια και καπέλο. Π.χ. ή σειρά των τομών μπορεί νά είναι:



Ετήν πραγματικότητα δέν πρέπει νά μιλάμε για τομή δύο διαφορετικών συνόλων, αλλά για κοινό τμήμα δύο υποσυνόλων του αυτού συνόλου. Αυτό είναι μία λεπτή έννοια που άκόμα και πολλοί ένήλικες δέν τήν έχουν άφομοιώσει. Τά παιδάκια θά τήν άφομοιώσουν σιγά-σιγά. Γι' αυτό τό παιχνίδι τουτό πρέπει νά γίνεται με άυστηρή προσήλωση στόν τρόπο που περιγράφουμε.

## Δέκατο τρίτο Παιχνίδι

### Ένωσεις συνόλων

Ή δασκάλα καλεϊ όλα τά παιδάκια γύρω της και τά βάζει νά πουν όλα μαζί : - είμαστε τό σύνολο των παιδιών της τάξης.

Κατόπιν ή δασκάλα χωρίζει τά παιδάκια: τά αγοράκια πηγαίνουν δεξιά και λένε: - είμαστε τό σύνολο των άγοριών της τάξης. Τά κοριτσάκια πηγαίνουν άριστερά και λένε: - είμαστε τό σύνολο των κοριτσιών της τάξης.

Ή δασκάλα καλεϊ τά δύο σύνολα νά ένωθούν λέγοντας : - τό σύνολο των κοριτσιών νά ένωθη με τό σύνολο των άγοριών.

Τά παιδάκια πηγαίνουν όλα μαζί, άνακατείνονται και όλα μαζί λένε: - είμαστε ή ένωση των δύο συνόλων. Τό σύνολο των άγοριών και τό σύνολο των κοριτσιών. Είμαστε τό σύνολο των παιδιών της τάξης.

Ή δασκάλα βάζει τά αγοράκια νά καθήσουν. Βάζει όλα μαζί τά κοριτσάκια νά ξαναπούν: - είμαστε τό σύνολο των κοριτσιών της τάξης.

Κατόπιν ή δασκάλα χωρίζει τά κοριτσάκια σε δύο: σ' αυτά που φοράνε κόκκινα παπουτσάκια και στά άλλα. Βάζει τήν πρώτη ομάδα νά πουν: - είμαστε τό σύνολο των κοριτσιών με κόκκινα παπούτσια

και τήν άλλη ομάδα νά πουν: - είμαστε τό σύνολο των κοριτσιών χωρίς κόκκινα παπούτσια.

Ή δασκάλα καλεϊ όλα τά κοριτσάκια νά σταθούν μαζί άνακατεμένα και νά πουν: - είμαστε ή ένωση των δύο συνόλων. Τό σύνολο των κοριτσιών με κόκκινα παπούτσια και τό σύνολο των κοριτσιών χωρίς κόκκινα παπούτσια. Είμαστε τό σύνολο των κοριτσιών της τάξης.

Ή δασκάλα βάζει τά κοριτσάκια νά καθήσουν.

Ἡ δασκάλα καλεῖ τὰ ἀγοράκια καὶ τὰ ὀδηγεῖ νά ἐπαναλάβουν τὸ ἴδιο παιχνίδι.

Κατόπιν ἡ δασκάλα καλεῖ ὅλα τὰ παιδάκια, ἀγοράκια καὶ κοριτσάκια, πού φοροῦν ἄσπρη μπλουζα, νά ἔλθουν μπροστά της. Τὰ βάζει νά ποῦν ὅλα μαζί: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν μέ ἄσπρη μπλουζα.

Ἡ δασκάλα χωρίζει τὰ ἀγοράκια ἀπὸ τὰ κοριτσάκια. Βάζει τὰ ἀγοράκια νά ποῦν: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν μέ ἄσπρη μπλουζα.

Βάζει τὰ κοριτσάκια νά ποῦν: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν μέ ἄσπρη μπλουζα.

Ἡ δασκάλα καλεῖ ὅλα αὐτά τὰ παιδάκια νά σταθοῦν μαζί ἀνακατεμένα καὶ τὰ βάζει νά ποῦν: - εἴμαστε ἡ ἔνωση τῶν δύο συνόλων. Τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν μέ ἄσπρη μπλουζα καὶ τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν μέ ἄσπρη μπλουζα. Εἴμαστε τὸ σύνολο ὅλων τῶν παιδιῶν μέ ἄσπρη μπλουζα.

Τὸ παιχνίδι αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται ὥσπου νά τὸ μάθουν ὅλα τὰ παιδάκια. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν θά ἐντυπωθῆ ἐξ ἀρχῆς στὰ παιδάκια ὅτι ἐνώσμε μόνο σύνολα πού στὴν πραγματικότητα εἶναι ὑποσύνολα τοῦ ἰδίου συνόλου.

## Δέκατο τέταρτο Παιχνίδι

Ἡ ἔνωση πολλῶν συνόλων εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν τάξιν τῆς ἐνοποιήσεως.

Ἡ δασκάλα καλεῖ ὅλα τὰ παιδάκια γύρω της καὶ τὰ χωρίζει σὲ τρεῖς ὁμάδες:

τὰ ἀγοράκια / τὰ κοριτσάκια μέ μαντήλι / τὰ κοριτσάκια χωρὶς μαντήλι  
Βάζει τίς τρεῖς ὁμάδες νά ποῦν:

ἡ πρώτη - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν

ἡ δεύτερη - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν μέ μαντήλι

ἡ τρίτη - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν κοριτσιῶν χωρὶς μαντήλι

Ἡ δασκάλα βάζει τίς δύο πρώτες ὁμάδες νά ἐνωθοῦν καὶ νά ποῦν:

- εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν ἀγοριῶν καὶ τῶν κοριτσιῶν μέ μαντήλι.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει τὸ σύνολο αὐτὸ νά ἐνωθῆ μέ τὸ τρίτον σύνολο καὶ ὅλοι μαζί νά ποῦν: - εἴμαστε τὸ σύνολο ὅλων τῶν παιδιῶν τῆς τάξης.

Ἡ δασκάλα χωρίζει πάλι τὰ παιδάκια στίς τρεῖς ὁμάδες. Βάζει τὴν πρώτη ὁμάδα νά ἐνωθῆ μέ τὴν τρίτη. Καὶ κατόπιν τὸ σύνολον αὐτῶν μέ τὴν δεύτερη ὁμάδα. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐνοποιήσεως ἀποτελεῖ πάλι τὸ σύνολο ὅλων τῶν παιδιῶν τῆς τάξεως.

Τὸ παιχνίδι ἐπαναλαμβάνεται μέ πρώτην ἐνοποίησιν τῆς δευτέρας καὶ τρί-

της ομάδος και τελικὴν ἐνοποιήσιν τοῦ συνόλου αὐτῶν καὶ τῆς πρώτης ομάδος.

Ὅλα τὰ παιδάκια καταλαβαίνουν ὅτι καὶ εἰς τρεῖς φορές στὴν τελικὴν ομάδα βρίσκονται τὰ ἴδια παιδάκια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα καλεῖ πάλιν ὅλα τὰ παιδάκια μαζί καὶ τὰ χωρίζει σὲ τρεῖς ἄλλες ομάδες: τὰ ἀγοράκια μὲ καπελάκι, τὰ ἀγοράκια χωρὶς καπελάκι καὶ τὰ κοριτσάκια. Γίνεται ἕνα δεῦτερο παιχνίδι ἀνάλογο μὲ τὸ πρῶτο. Τοῦτο ἐπαναλαμβάνεται μία ἢ δύο φορές ἔτσι πού ὅλα τὰ παιδάκια νὰ καταλάβουν πῶς στὸ τελικὸ σύνολο βρίσκονται πάντοτε τὰ ἴδια παιδάκια, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν σειρά μὲ τὴν ὁποίαν ἔγινε ἡ ἐνοποίηση τῶν ἐπὶ μέρους ομάδων.

Τὸ βασικώτερο εἶναι νὰ καταλάβουν ὅλα τὰ παιδάκια ὅτι δὲν γίνεται ἔνωση ἀνεξαρτήτων συνόλων, ἀλλὰ μόνον ἔνωση ὑποσυνόλων τοῦ ἴδιου συνόλου.

## Δέκατο πέμπτο Παιχνίδι

### Συμπληρωματικὸ σύνολο

Ἡ δασκάλα βάζει ὅλα τὰ παιδάκια τῆς τάξεως νὰ καθίσουν στὶς θέσεις των καὶ νὰ ποῦν: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν παιδιῶν τῆς τάξης.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει τὰ μισὰ παιδάκια (ἀνακατεμένα) νὰ σταθοῦν ὄρθια ἐπὶ τόπου καὶ νὰ ποῦν: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν ὄρθιων παιδιῶν τῆς τάξης.

Τὰ ὑπόλοιπα παιδάκια πού κάθονται λένε: - εἴμαστε τὸ σύνολο τῶν καθισμένων παιδιῶν τῆς τάξης.

Ἡ δασκάλα ρωτᾷ ὅλα τὰ παιδάκια τὸ ἕνα μετὰ τὸ ἄλλο:

- Ἐσύ σέ ποιὸ σύνολο ἀνήκει; ἢ στὰ καθισμένα ἢ στὰ ὄρθια παιδιά;
- Στὰ καθισμένα παιδιά.
- Μπορεῖς ν' ἀνήκεις καὶ στὰ ὄρθια καὶ στὰ καθισμένα παιδιά;
- Ὁχι. Ἡ θά στέκωμαι ἢ θά κάθωμαι.
- Μπορεῖς νὰ μὴν ἀνήκης οὔτε στὰ καθισμένα, οὔτε στὰ ὄρθια παιδιά;
- Ὁχι. Ἡ θά στέκωμαι ἢ θά κάθωμαι. Δὲν γίνεται μήτε νὰ στέκωμαι μήτε νὰ κάθωμαι.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει εἰς ἴδιες ἐρωτήσεις σ' ὅλα τὰ παιδάκια. Κατόπιν τοὺς ἐξηγεῖ: - Τὸ καθένα ἀπὸ σὲς ἀνήκει ἀναγκαστικὰ σ' ἕνα ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ἀρχικοῦ συνόλου οὗτος: ἢ στὰ παιδάκια πού κάθονται ἢ στὰ παιδάκια πού στέκονται. Τὸ ἕνα μέρος συμπληρῶνει τὸ ἄλλο. Τὸ ἕνα μέρος λέγεται συμπλήρωμα τοῦ ἄλλου. Πέστε ὅλα μαζί: 'Αφ' ἀνήκω σ' ἕνα σύνολο, ἀναγκαστικὰ ἀνήκω σ' ἕνα ὑποσύνολο αὐτοῦ ἢ στὸ συμπλήρωμα του.

Πρός τό παρόν ἄρκει ἡ φράση αὐτή νά ἐντυπωθῆ στό παιδί. Ἀργότερα τό παιδί θά καταλάβῃ ὅλο τό νόημα της πού εἶναι πάρα πολύ βαθύ, γιατί ἄγει εἰς τόν τοῦ τρίτου ἀποκλεισμόν. Ἀλλά εἶναι ἕνα πράγμα πού τό παιδί πρέπει νά καταλάβῃ ἐξ ἀρχῆς: ὅτι συμπληρωματικά δέν μποροῦν νά εἶναι δύο ἀνεξάρτητα σύνολα, ἀλλά μόνο δύο ὑποσύνολα τοῦ ἰδίου συνόλου. Γι' αὐτό τό παιχνίδι πρέπει νά παίζεται πάντοτε ὅπως καθορίζομε, χωρίς ἀποκλίσεις.

## Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

Ἡ ἔννοια τοῦ Π Ε Δ Ι Ο Υ εἶναι βασική γιά ὅλες τίς ἐπιστήμες, ὅπου χρησιμοποιοῦνται μαθηματικά.

Μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου, ὅσο τό μυαλό τοῦ παιδιοῦ θά ὀριμάζη καί ἡ γνώσεις του θά αὐξάνουν, τόσο περισσότερο ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου θά πλαταίνη καί θά βαθαίνη. Πρός τό παρόν ἀρκεῖ νά ποῦμε ὅτι :  
πεδίων εἶναι ἕνα σύνολο θέσεων σέ κάθε μιὰ ἀπό τίς ὁποῖες κάποιος περιμένει κάτι γιά νά ἐνεργήση ἐπάνω του μέ κάποιο τρόπο.

Αὐτός ὁ ὀρισμός ἔχει ἔκφραση παιδική, ἀλλά εἶναι ἕνας σωστός πυρῆνας πού γύρω του σιγά-σιγά θά ἀναπτυχθῆ ὁ ἐπιστημονικός ὀρισμός τοῦ πεδίου. Τό παιδάκι θά προσθέτῃ σ' αὐτόν τόν ὀρισμό χωρίς νά ἀλλάξῃ τίποτε ἀπό τά κεκτημένα.

Στά παιδάκια δέν χρειάζεται νά ποῦμε αὐτόν τόν παιδικόν ὀρισμόν. Ἀπλῶς καί μόνον θά τά βάλωμε νά παίξουν. Καί αὐτό τό παιχνίδι τους θά εἶναι τό μάθημα τους. Τά παιδάκια θά ζ ο ῦ ν ε τίς βασικές ἔννοιες τῆς θεωρίας τῶν πεδίων, γιὰτί αὐτά τά ἴδια τά παιδάκια μέ τόν ἑαυτό τους θά δημιουργοῦν τά διάφορα εἴδη πεδίων καί θά ἐνεργοῦν ἀνάλογα. Ἔτσι ἡ γνώση τῶν πεδίων δέν θά εἶναι πιά μηχανική ἀποστήθιση, ἀλλά ζωντανή ἐμπειρία, ε ὕ χ ά ρ ι σ τ η : , ἀπό τά νηπιακά χρόνια.

### Πρῶτο Παιχνίδι

Τό ἀβρανές σταθερόν γραμμικόν πεδίων

Ἡ δασκάλα τοποθετεῖ τά παιδάκια τό ἕνα πίσω ἀπό τό ἄλλο. Δέν εἶναι ἀνάγκη ἡ γραμμή τους νά εἶναι εὐθεῖα. Μπορεῖ νά κἀνη διάφορες καμπύλες.

Ἡ δασκάλα ἐξηγεῖ στά παιδάκια ὅτι δέν πρέπει νά κουνηθοῦν ἀπό τήν θέση τους.

Ἡ δασκάλα κρατάει στά χέρια της μιὰ μεγάλη μπάλα. Προφέρει καθαρά τίς λέξεις Σ Τ Α Θ Ε Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Ο Π Ε Δ Ι Ο  
προσθέτει δυνατά Α Δ Ρ Α Ν Ε Σ

καί ἀπλώνει τά χέρια της μέ τήν μπάλα στό πρῶτο παιδάκι γιά νά τήν πάρῃ. Τά παιδάκι δέν πρέπει νά ἀπλώσῃ τά χεράκια του γιά νά πάρῃ τήν μπάλα γιὰτί ἂν τό κἀνη, τότε χάνει τό παιχνίδι. Τό παιδάκι ἀπαντᾷ:

ΑΔΡΑΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΕΔΙΟ καί μένει ἀκίνητο. Τό ἴδιο κά-

νει και τὸ δεύτερο παιδάκι, και τὸ τρίτο παιδάκι , κ.ο.κ. Ὅλα τὰ παιδάκια.

## Δεύτερο Παιχνίδι

Τὸ ἐνεργὸν σταθερὸν γραμμικὸν πεδίον

Πάλιν ἡ δασκάλα τοποθετεῖ τὰ παιδάκια τὸ ἓνα πρὶω ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πάλι δὲν εἶναι ἀνάγκη ἢ γραμμὴ τους νὰ εἶναι εὐθεῖα. Μπορεῖ νὰ κἀνη διάφορες καμπύλες.

Ἡ δασκάλα ἐξηγεῖ στὰ παιδάκια ὅτι πρέπει νὰ μὴ κουνηθοῦν ἀπὸ τὴν θέση τους.

Ἡ δασκάλα κρατᾶει στὰ χέρια της μιὰ μεγάλη μπάλα. Προφέρει καθαρά τίς λέξεις Σ Τ Α Θ Ε Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Ο Ι Ε Δ Ι Ο

προσθέτει δυνατὰ Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Ν

και ἀπλώνει τὰ χέρια της μὲ τὴν μπάλα στὸ πρῶτο παιδάκι γιὰ νὰ τὴν πάρη. Τὸ παιδάκι φωνάζει Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Π Ε Δ Ι Ο

και δίνει τὴν μπάλα στὸ δεύτερο παιδάκι. Τὸ δεύτερο παιδάκι ἐπαναλαμβάνει Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Π Ε Δ Ι Ο και δίνει τὴν μπάλα στὸ ἐπόμενο παιδάκι. Ἐκεῖνο κάνει τὸ ἴδιο , κ.ο.κ. μέχρι τὸ τελευταῖο παιδάκι.

Τὸ τελευταῖο τοῦτο παιδάκι φωνάζει ΣΤΑΘΕΡΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΕΝΕΡΓΟ ΠΕΔΙΟ ( ἂν πᾶη νὰ μπερδευτῆ, τὸ βοηθεῖ λίγο και ἡ δασκάλα ) και δίνει τὴν μπάλα στὸ παιδάκι πού στέκεται μπροστὰ του. Αὐτὸ φωνάζει πάλι Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Π Ε Δ Ι Ο και δίνει τὴν μπάλα στὸ μπροστινὸ παιδάκι. Τὸ ἴδιο ἐπαναλαμβάνεται μὲ κάθε παιδάκι μέχρις ὅτου ἡ μπάλα ξαναγυρίσῃ στὰ χέρια τῆς δασκάλας ἀπὸ τὸν ἴδιο δρόμο πού ἀκολούθησε ὅταν ἔφευγε ἀπὸ αὐτὴν.

Τὸ παιχνίδι αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές και μὲ διαφορετικὴ ἐναλλαγὴ μέχρις ὅτου τὰ παιδάκια μάθουν τέλεια ὅτι στὸ ἀδρανὲς πεδίον μένουν ἀδρανῆ, ἐνῶ στὸ ἐνεργὸν πεδίον ἐνεργοῦν γιὰ νὰ πάρουν και νὰ δώσουν τὴν μπάλα.

## Τρίτο Παιχνίδι

Τὸ ἀδρανὲς κινητὸν γραμμικὸν πεδίον

Ἡ δασκάλα τοποθετεῖ τὰ παιδάκια τὸ ἓνα πρὶω ἀπὸ τὸ ἄλλο. Τὸ κάθε παιδάκι ἀπλώνει τὸ χεράκι του και πιάνει σφικτὰ τὸν μπροστινὸ του ἀπὸ τὸν ὦμο. Ὅλα τὰ παιδάκια χρησιμοποιοῦν γιὰ τὸ πιάσιμο αὐτὸ τὸ δεξιὸ χέρι τους. Ἡ δασκάλα τους ἐξηγεῖ ὅτι θὰ περπατήσουν και θὰ τρέξουν, ἀλλὰ πρέπει πάντοτε νὰ κρατοῦν τὸν μπροστινὸ τους ἀπὸ τὸν ὦμο.



Ἡ δασκάλα μπαίνει στήν ἀρχή τῆς σειρᾶς τῶν παιδιῶν ἔτσι πού τό πρῶτο παιδάκι μέ τό δεξι χέρι του νά πιάνη τό δεξι χέρι τῆς δασκάλας. Στό ἀριστερό χέρι τῆς ἡ δασκάλα κρατάει ἕνα καλαθάκι.

Ἡ δασκάλα ἀρχίζει καί περπατάει ἄλλοτε σιγά καί ἄλλοτε γρήγορα. Μέ τόν ἴδιο ρυθμό παρασύρει καί τά παιδάκια νά περπατᾶνε.

Περπατώντας ἡ δασκάλα προσφέρει καθαρά τίς λέξεις

Κ Ι Ν Η Τ Ο                      Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Ο                      Π Ε Δ Ι Ο

προσθέτει δυνατά

Α Δ Ρ Α Ν Ε Σ

καί ἀπλώνει τό ἀριστερό χέρι τῆς μέ τό καλαθάκι στό πρῶτο παιδάκι γιά νά τό πάρη. Τό παιδάκι δέν πρέπει νά ἀπλώσῃ τό χεράκι του γιά νά πάρη τό καλαθάκι γιατί ἂν τό κἀνη, τότε χάνει τό παιχνίδι. Τό παιδάκι ἀπαντᾷ : ΑΔΡΑΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΙΝΗΤΟ ΠΕΔΙΟ καί κρατάει τό ἀριστερό χεράκι του μακριά ἀπό τό καλαθάκι. Τό ἴδιο κάνει καί τό δεύτερο παιδάκι, καί τό τρίτο παιδάκι, κ.ο.κ. ὅλα τά παιδάκια. Ἐνῶ γίνεται αὐτό, ἡ γραμμή τῶν παιδιῶν παραμένει ἀδιάσπαστη καί κινεῖται περπατώντας ἢ τρέχοντας.

## Τέταρτο Παιχνίδι

Τό ἐνεργόν κινήτὸν γραμμικὸν πεδίον

Πάλιν ἡ δασκάλα τοποθετεῖ τά παιδάκια τό ἕνα πίσω ἀπό τό ἄλλο. Τό κάθε παιδάκι ἀπλώνει τό χεράκι του καί πιάνει σφικτά τόν μπροστινὸ του ἀπό τόν ὦμο. Ὅλα τά παιδάκια χρησιμοποιοῦν γιά τό πιάσιμο αὐτό τό δεξι χέρι τους. Ἡ δασκάλα τοὺς ἐξηγεῖ πάλι ὅτι θά περπατήσουν καί θά τρέξουν, ἀλλά πρέπει πάντοτε νά κρατοῦν τόν μπροστινὸ τους ἀπό τόν ὦμο.

Πάλιν ἡ δασκάλα μπαίνει στήν ἀρχή τῆς σειρᾶς τῶν παιδιῶν ἔτσι πού τό πρῶτο παιδάκι μέ τό δεξι χεράκι του νά πιάνη τό δεξι χέρι τῆς δασκάλας. Στό ἀριστερό χέρι τῆς ἡ δασκάλα κρατάει ἕνα καλαθάκι.

Ἡ δασκάλα ἀρχίζει νά περπατάει ἄλλοτε σιγά καί ἄλλοτε γρήγορα. Περπατώντας ἡ δασκάλα προσφέρει καθαρά τίς λέξεις

Κ Ι Ν Η Τ Ο                      Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Ο                      Π Ε Δ Ι Ο

προσθέτει δυνατά

Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Ν

καί ἀπλώνει τό ἀριστερό χέρι τῆς μέ τό καλαθάκι στό πρῶτο παιδάκι γιά νά τό πάρη. Τό παιδάκι παίρνει τό καλαθάκι,

φωνάζει Ε Ν Ε Ρ Γ Ο                      Π Ε Δ Ι Ο

καί δίνει τό καλαθάκι στό δεύτερο παιδάκι. Τό δεύτερο παιδάκι ἐπιναλαμβάνει Ε Ν Ε Ρ Γ Ο                      Π Ε Δ Ι Ο καί δίνει τό καλαθάκι

στό επόμενο παιδάκι. Έκείνο κάνει το ίδιο, κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο παιδάκι. Το τελευταίο του το παιδάκι φωνάζει ΚΙΝΗΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΕΝΕΡΓΟ ΠΕΔΙΟ (άν πάη νά μπερδευτή, τό βοηθάει λίγο καί ή δασκάλα) καί δίνει τό καλαθάκι στό παιδάκι πού στέκεται μπροστά του. Αυτό φωνάζει πάλι Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Π Ε Δ Ι Ο καί δίνει τό καλαθάκι στό μπροστινό παιδάκι. Το ίδιο επαναλαμβάνεται μέ κάθε παιδάκι μέχρις ότου τό καλαθάκι ξαναγυρίση στά χέρια της δασκάλας από τόν ίδιον δρόμο πού ακολουθήσε όταν έφευγε από αυτήν. Ένώ γίνεται αυτό, ή γραμμή των παιδιών παραμένει αδιάσπαστη καί κινείται περπατώντας ή τρέχοντας.

Τό παιχνίδι αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές καί μέ διαφορετική έναλλαγή μέχρις ότου τά παιδάκια μάθουν τέλεια ότι στό άδρανές πεδίο ναί μέν περπατούν καί τρέχουν, αλλά αναφορικά μέ τό καλαθάκι άδρανοϋν, ένω στό ενεργό πεδίο πάλι τρέχουν καί περπατούν αλλά τώρα έπιπρόσθετα ενεργούν καί αναφορικά μέ τό καλαθάκι, για νά τό πάρουν καί νά τό δώσουν.

Όταν τά παιδάκια μάθουν καλά αυτό τό παιχνίδι, σταματοϋν, άνοιγουν τό καλαθάκι καί ή δασκάλα τούς μοιράζει τά γλυκά πού υπάρχουν. Εκεί μέσα για νά τό φάνε.

## Πέμπτο Παιχνίδι

Τό άδρανές σταθερόν επίπεδον πεδίου

Ή δασκάλα τοποθετεί τά παιδάκια σέ πέντε παράλληλες γραμμές. Σε κάθε γραμμή τό ένα παιδάκι στέκεται πίσω από τό άλλο. Ή γραμμές είναι εύθετες καί τά παιδάκια είναι στοιχισμένα.

Ή δασκάλα εξηγεί στά παιδάκια ότι δεν πρέπει νά κουνηθοϋν από τήν θέση τους.

Ή δασκάλα κρατάει στά χέρια της μιá μεγάλη μπάλα. Προφέρει καθαρά τίς λέξεις Σ Τ Α Θ Ε Ρ Ο Ε Π Ι Π Ε Δ Ο Π Ε Δ Ι Ο

προσθέτει δυνατά Α Δ Ρ Α Ν Ε Σ

καί άπλώνει τά χέρια της μέ τήν μπάλα σ' ένα από τό παιδάκια πού στέκονται στόν πρώτο στοίχο. Το παιδάκι δεν πρέπει νά άπλώση τά χέρια του για νά πάρη τήν μπάλα γιατί άν τό κάνει, τότε χάνει τό παιχνίδι. Το παιδάκι άπαντά: ΑΔΡΑΝΕΣ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΕΔΙΟ καί μένει ακίνητο. Το ίδιο κάνει κάθε παιδάκι στό όποιο ή δασκάλα πλησιάζει για νά τοϋ δώση τήν μπάλα.

## Έκτο Παιχνίδι

Τό ενεργόν σταθερόν επίπεδον πεδίων

Πάλιν ή δασκάλα τοποθετεί τά παιδάκια σέ πέντε παράλληλες γραμμές. Σέ κάθε γραμμή τό ένα παιδάκι στέκεται πίσω από τό άλλο. Ή γραμμές εἶναι εὐθείες καί τά παιδάκια εἶναι στοιχισμένα.

Ή δασκάλα ἐξηγεῖ στά παιδάκια ὅτι πρέπει νά μή κουνηθοῦν ἀπό τήν θέση τους.

Ή δασκάλα κρατάει στά χέρια της μιὰ μεγάλη μπάλα. Προφέρει καθαρά τίς λέξεις Σ Τ Α Θ Ε Ρ Ο Ε Π Ι Π Ε Δ Ο Π Ε Δ Ι Ο προσθέτει δυνατά Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Ν

καί ἀπλώνει τά χέρια της μέ τήν μπάλα στό πρώτο παιδάκι μιᾶς γραμμής γιά νά τήν πάρη. Τό παιδάκι φωνάζει Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Π Ε Δ Ι Ο καί δίνει τήν μπάλα σ'ένα ἀπό τά γειτονικά του παιδάκια, δηλαδή εἴτε αὐτό πού στέκεται δεξιά του, εἴτε αὐτό πού στέκεται ἀριστερά του, εἴτε αὐτό πού στέκεται πίσω του. Τό δεύτερο παιδάκι πού κέρνει τήν μπάλα ἐπαναλαμβάνει Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Π Ε Δ Ι Ο καί δίνει τήν μπάλα σ'ένα τρίτο παιδάκι ἀπό τά γειτονικά του. Ἐκεῖνο κάνει τό ἴδιο, κ.ο.κ. μέχρις ὅτου κάποιο ἀπό τά παιδάκια πού στέκονται στήν περίμετρο τῆς ομάδος προτιμήσῃ νά δώσῃ τήν μπάλα στήν δασκάλα.

Τό παιχνίδι αὐτό ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές καί μέ διαφορετική ἐναλλαγή μέχρις ὅτου τά παιδάκια μάθουν τέλεια ὅτι στό ἀδρανές πεδίων μένουν ἀδρανῆ, ἐνῶ στό ενεργόν πεδίων ενεργοῦν γιά νά πάρουν καί νά δώσουν τήν μπάλα καί τότε ή μπάλα περνᾷ ἀπό τό ένα παιδάκι ἀπό ἄλλο μέ πολλούς διαφορετικούς τρόπους.

Σημείωση: Τοῦτο ἐπιτρέπει εἰς τό παιδίον τήν ἐξ ἀρχῆς ἐκμάθησιν μιᾶς θεμελιώδους ιδιότητος τοῦ ἐπιπέδου μή-διατεταγμένου πεδίου: τήν ἀοριστίαν. Ἐν τῆς ἀναταραχῆς καί συγχύσεως ἥτις θά δημιουργεῖται ἐκάστοτε, τό παιδίον ἐξ ἑαυτοῦ θά ἀχθῆ εἰς τήν ἀνάγκην τῆς διατάξεως τοῦ πεδίου, τοῦθόπερ ἀποτελεῖ μιάν σημαντικωτάτην νοητικήν ἐνέργειαν. Οὕτως ή ἔννοια τοῦ διατεταγμένου πεδίου θά γεννηθῆ μόνη της ἐξ αὐτοῦ τοῦ ἴδιου τοῦ παιδίου ὡς τί τό ἐπάναγκες. Τοῦτο θά γίνῃ εἰς τήν ἐπομένην τάξιν.

## Ἑβδομο Παιχνίδι

Τό ἀδρανές κινητόν επίπεδον πεδίων

Πάλιν ή δασκάλα τοποθετεῖ τά παιδάκια σέ πέντε παράλληλες γραμμές. Σέ κάθε γραμμή τό ένα παιδάκι στέκεται πίσω ἀπό τό ἄλλο. Ή γραμμές

είναι εύθετες και τὰ παιδάκια είναι στοιχισμένα. 'Η δασκάλα κρατάει στο χέρι της ένα καλαθάκι.

'Η δασκάλα εξηγεί στα παιδάκια ότι μπορούν να άρχισουν να περπατούν και να τρέχουν όπως τους άρέσει, προσέχοντας μόνο να μή πέσουν τό ένα πάνω στο άλλο. Μαζί τους άρχίζει να περπατά και να τρέχη και η δασκάλα. Χωρίς να σταματήσει προφέρει καθαρά τίς λέξεις

Κ Ι Ν Η Τ Ο Ε Π Ι Π Ε Δ Ο Π Ε Δ Ι Ο

προσθέτει δυνατά Α Δ Ρ Α Ν Ε Σ

και άπλώνει τὰ χέρια της με τό καλαθάκι σ'ένα από τὰ παιδάκια. Τό παιδάκι δέν πρέπει να άπλώση τό χεράκι του για να πάρη τό καλαθάκι γιατί χάνει τό παιχνίδι. Τό παιδάκι άπαντά: ΑΔΡΑΝΕΣ ΠΕΔΙΟ και συνεχίζει τό τρέξιμο του. Τό ίδιο κάνει κάθε παιδάκι στο όποιο η δασκάλα πλησιάζει για να το δώση τό καλαθάκι. Φωνάζει : ΑΔΡΑΝΕΣ ΠΕΔΙΟ και συνεχίζει τό τρέξιμο του.

Σημείωση: 'Η κίνησης αυτή του επιπέδου πεδίου δημιουργεί τρομερή άνασφάλτισιν. 'Εξ αυτού τὰ παιδία μόνα των θά άχθουν εις τήν άνάγκην της διατεταγμένης κινήσεως του διατεταγμένου πεδίου. 'Η λεπτοτάτη αυτή μαθηματική έννοια, η όποια σήμερα προϋποθέτει ύψηλήν μαθηματικήν καλλιέργειαν, διά τὰ παιδία αυτά θά γεννηθῆ μόνη της ως μία άνάγκη του παιχιδίου των. Τοστο θά γίνη εις τήν επομένην τάξιν, δευτέραν του δημοτικού.

## "Ογδοο Παιχνίδι

Τό ενεργόν κινήτόν επίπεδον πεδίου

Πάλιν η δασκάλα τοποθετεί τὰ παιδάκια σε πέντε παράλληλες γραμμές. Σε κάθε γραμμή τό ένα παιδάκι στέκεται πίσω από τό άλλο. 'Η γραμμές είναι εύθετες και τὰ παιδάκια είναι στοιχισμένα. 'Η δασκάλα κρατάει πάλι στο χέρι της ένα καλαθάκι.

'Η δασκάλα εξηγεί στα παιδάκια ότι μπορούν να άρχισουν να περπατούν και να τρέχουν όπως τους άρέσει, προσέχοντας μόνο να μή πέσουν τό ένα πάνω στο άλλο. Μαζί τους άρχίζει να περπατά και να τρέχη και η δασκάλα. Χωρίς να σταματήσει προφέρει καθαρά τίς λέξεις

Κ Ι Ν Η Τ Ο Ε Π Ι Π Ε Δ Ο Π Ε Δ Ι Ο

προσθέτει δυνατά

Ε Ν Ε Ρ Γ Ο Ν

και άπλώνει τὰ χέρια της με τό καλαθάκι σ'ένα από τὰ παιδία. Τό παιδάκι φωνάζει ΕΝΕΡΓΟ ΠΕΔΙΟ πέρνει τό καλαθάκι και τό δίνει τό καλαθάκι σ'ένα από τὰ παιδάκια που βρίσκονται κοντά του. Τό δεύτερο παιδάκι πέρνει τό καλαθάκι, φωνάζει ΕΝΕΡΓΟ ΠΕΔΙΟ και δίνει τό κα-

λαθάκι σ' ένα τρίτο παιδάκι από αυτά που είναι κοντά του. Το παιχνίδι συνεχίζεται με τόν τρόπον αυτόν.

Είναι φανερό πώς το παιχνίδι αυτό πολύ γρήγορα θα καταλήξει σε γενική σύγχυση, άναταραχή, χάος: το ένα παιδάκι θα πέφτη επάνω στο άλλο, θα μαλλώνουν ποιό να πρωτοπάρη το καλαθάκι, το καλαθάκι θα πέσει από τα χεράκια τους, και ό,τι είναι εκεί μέσα θα κυλήση στο πάτωμα. Τότε ή δασκάλα με γέλιο λέει στα παιδάκια να σταματήσουν και να σκεφθούν πώς μπορούν να παίξουν το παιχνίδι αυτό χωρίς να πέφτουν το ένα επάνω στο άλλο, να τσακώνονται και να ρίχνουν το καλαθάκι.

Η δασκάλα ενθαρρύνει τα παιδάκια να σκεφθούν και να δοκιμάσουν μόνα τους ό,τι προτείνουν. Φυσικά τα παιδάκια δεν θα βρουν τρόπο να παίξουν όμορφα και ήσυχα: όλο θα πέφτουν το ένα επάνω στο άλλο, θα μαλλώνουν και θα ρίχνουν το καλαθάκι στο πάτωμα.

Μετά από λίγες σύντομες τέτοιες δοκιμές, ή δασκάλα διαλέγει δυό μόνο παιδάκια και τὰ καλεϊ να παίξουν το παιχνίδι μόνα τους με την δασκάλα. Τὰ δυό παιδάκια παίζουν όμορφα, και τὰ άλλα παρακολουθούν. Κατόπιν ή δασκάλα καλεϊ στο παιχνίδι κι' ένα τρίτο παιδάκι, έτσι που τὰ τρία παιδάκια να είναι τώρα ο Παύλος, ή 'Ελένη και ο Τάκης. Τὰ παιδάκια γρήγορα καταλήγουν στην συμφωνία (αν χρειασθῆ, βοηθάει λίγο και ή δασκάλα) ο Παύλος να δίνει το καλαθάκι στην 'Ελένη, ή 'Ελένη στον Τάκη, ο Τάκης στον Παύλο, κ.ο.κ. "Έτσι το παιχνίδι προχωράει όμορφα και ήσυχα. Τὰ άλλα παιδάκια παρακολουθούν. Πολύ πιθανόν, κάποιος αύριανός 'Αϊνστάϊν σε σημερινή μικρογραφία θα ξεπροβάλλη από την ομάδα των παιδιών που παρακολουθούν για να πῆ: - θα παίξω κι' εγώ! 'Εσύ Τάκη θα δίνεις το καλαθάκι σ' έμένα κι' εγώ θα το δίνω στον Παύλο.

Τό τέταρτο αυτό παιδάκι αναάλυψε μόνο του την αρχή της διατάξεως των πεδίων. "Ίσως ύπάρξη και ένα πέμπτο ή και ένα έκτο παιδάκι που να τό μιμηθούν. Η δασκάλα δεν επέμβαίνει στο παιχνίδι αυτό, ούτε παρεμβαίνει. 'Απλώς παρακολουθεί και τό αφήνει να σβύση μόνο του, γιατί τὰ παιδάκια παίζοντας μπήκαν μέσα στην περιοχή των πολύ-πολύ ύψηλων μαθηματικών, δηλαδή εις την θεωρίαν των διατεταγμένων κινουμένων πεδίων με έξηναγκασμένην κίνησην των σωματιων εν αυτοίς. Τό παιχνίδι αυτό θα τό συνεχίσουν πιο ώργανωμένα εις την έπομένη τάξη, ή έννοια θα ριζώση μέσα τους, σιγά-σιγά θα αναπτυχθῆ και πολύ άργότερα θα καταλάβουν σε ποιο μαθηματικό ύψος είχαν άνεβῆ από τὰ νηπιακά τους χοδ-

νια. 'Ενώ για τούς σημερινούς έπιστήμονες οί έννοιες αυτές είναι δύσκολες σάν νά προσπαθούμε νά αναπνεύσωμε κάτω από τό νερό, γιά τά παιδάκια αυτά όταν γίνουν έπιστήμονες θά είναι κάτι τό έντελώς φυσικό, κυριολεκτικά αυτονόητο, γιατί θά είναι οάν νά τό ήξεραν σχεδόν από πάντα. Τότε ή σκέψη τους θά κινεΐται μέσα στις έννοιες αυτές τόσο φυσικά καί άβίαστα, όσο φυσικά καί άβίαστα αναπνέομε σήμερα τόν καθαρόν άέρα χωρίς νά σκεπτόμαστε τί αναπνευστικές κινήσεις όφείλομε νά κάνωμε. "Όπως έμεις αναπνέομε άσυναίσθητα, έτσι άσυναίσθητα θά χειρίζονται καί τά παιδιά αυτά τίς ύψηλές μαθηματικές έννοιες όταν θά έλθη ή ώρα νά τίς χρειασθούμε.

## **Έννατο Παιχνίδι**

Όμώνυμα καί Έτερόνυμα πεδία

'Η δασκάλα χωρίζει τά άγοράκια από τά κοριτσάκια. Κατόπιν χωρίζει τά άγοράκια σέ δύο ομάδες. Όμοίως χωρίζει καί τά κοριτσάκια σέ δύο ομάδες. "Έτσι ή δασκάλα έχει σχηματίσει 4 ομάδες. Μέ κάθε μιá από τίς ομάδες αυτές σχηματίζει από ένα σταθερό γραμμικό πεδίο.

'Η δασκάλα πηγαίνει μπροστά σέ κάθε μιá από τίς 4 γραμμές γιά νά παίξει μέ τά παιδιά της γραμμής αυτής τό πρώτο καί τό δεύτερο παιχνίδι. 'Εν τω μεταξύ τά άλλα παιδιά παρακολουθούν.

'Ο άντικειμενικός σκοπός είναι νά καταλάβουν τά παιδιά ότι καί οί τέσσαρες ομάδες, όταν πάρνομε τήν κάθε μιá χωριστά, είναι μεταξύ τους όμοιες.

Κατόπιν ή δασκάλα κέρνει τίς δύο ομάδες τών άγοριών καί βάζει τήν μιá πίσω από τήν άλλη έτσι πού τό πρώτο παιδάκι της δεύτερης ομάδος νά έλθη πίσω από τό τελευταίο παιδάκι της πρώτης ομάδας.

'Η δασκάλα έξηγεΐ στά παιδάκια: ΑΥΤΟ ΗΟΥ ΕΓΙΝΕ ΤΩΡΑ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΕ ΟΓΚΟ.

Τά παιδάκια έπαναλαμβάνουν: ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΕ ΟΓΚΟ

'Η δασκάλα παίζει μέ τήν νέα όλική ομάδα τών άγοριών τό πρώτο καί τό δεύτερο παιχνίδι, μέ άντικειμενικό σκοπό τά παιδάκια νά καταλάβουν καλά πώς από τά δύο σταθερά γραμμικά πεδία έγινε ένα νέο σταθερό γραμμικό πεδίο, όμοιο μέ τά δύο προηγούμενα.

'Η δασκάλα ξαναχωρίζει πάλι τά άγοράκια στις δύο προηγούμενες ομάδες γιά νά ξαναφτιάξη τά δύο γραμμικά πεδία.

Κατόπιν ή δασκάλα έπαναλαμβάνει τό ίδιο παιχνίδι μέ τά κοριτσάκια.

‘Η δασκάλα κάνει διάλειμμα ἔτσι πού ὅλα τά παιδάκια, ἀγοράκια καί κοριτσάκια, νά ἀνακατευθοῦν. Κατόπιν ἡ δασκάλα τά καλεῖ νά ξαναφτιάξουν μόνα των τά 4 γραμμικά πεδία πού εἶχαν σχηματίσει προηγουμένως καί νά ἐπαναλάβουν τό ἴδιο παιχνίδι.

Τοῦτο ἐπαναλαμβάνεται μέχρις ὅτου τά παιδάκια μάθουν νά τό κάνουν τέλεια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα πέρνει τήν μιά ομάδα τῶν κοριτσιῶν καί τήν βάζει πίσω ἀπό τήν ομάδα τῶν ἀγοριῶν ἔτσι πού τό πρῶτο κοριτσάκι νά στέκεται πίσω ἀπό τό τελευταῖο ἀγοράκι.

‘Η δασκάλα λέει στά ἀγοράκια νά μείνουν ἀκούνητα, καί στά κοριτσάκια νά κάνουν μεταβολή ἐπί τόπου.

‘Η δασκάλα ἐξηγεῖ στά παιδάκια: στή λέξι ΕΝΕΡΓΟΝ τό πρῶτο παιδάκι θά πάρη τήν μπάλα, θά πῆ ΕΝΕΡΓΟΝ, θά γυρίση τό κεφαλάκι γιά νά δῆ κατάφατσα τό παιδάκι πού στέκεται πίσω του ἀ κ ο ὄ ν η τ ο , καί θά τοῦ δώση τήν μπάλα. Τό ἴδιο θά κἀνη καί τό δεύτερο παιδάκι, καί τό τρίτο, κ.ο.κ.

Τό παιχνίδι ἀρχίζει. ‘Η μπάλα περνᾷ ἀπό τό ἕνα ἀγοράκι στό ἄλλο, ἀλλά τό τελευταῖο ἀγοράκι δέν μπορεῖ νά δώση τήν μπάλα στό πρῶτο κοριτσάκι, γιατί ὅταν τό ἀγοράκι γυρίζη τό κεφαλάκι του δέν μπορεῖ νά δῆ κατάφατσα τό κοριτσάκι, ἐπειδὴ αὐτό βλέπει πρός τήν ἄλλη μεριά. Ἔτσι τό παιχνίδι σταματᾷ.

‘Η δασκάλα ξαναρχίζει τό παιχνίδι ἀπό τά κοριτσάκια. Πάλι τό τελευταῖο κοριτσάκι δέν μπορεῖ νά περάση τήν μπάλα στό πρῶτο ἀγοράκι καί το παιχνίδι σταματᾷ. Τότε ὅλα μαζί τά παιδάκια προφέρουν τίς λέξεις

Ε Τ Ε Ρ Ω Ν Υ Μ Α Π Ε Δ Ι Α

προσθέτουν δυνατά

Δ Ε Ν Π Ρ Ο Σ Τ Ι Θ Ε Ν Τ Α Ι

ἡ μία γραμμὴ τῶν κοριτσιῶν κἀει νά ἐνωθῆ μέ τήν ἄλλη γραμμὴ τῶν κοριτσιῶν, ὁμοίως ἡ μία γραμμὴ τῶν ἀγοριῶν κἀει νά ἐνωθῆ μέ τήν ἄλλη γραμμὴ τῶν ἀγοριῶν,

ὅλα τά παιδάκια προφέρουν τίς λέξεις

Ο Μ Ω Ν Υ Μ Α Π Ε Δ Ι Α

προσθέτουν δυνατά

Π Ρ Ο Σ Τ Ι Θ Ε Ν Τ Α Ι

καί συνεχίζουν τό παιχνίδι τους ὅπως περιγράφεται στό δεύτερο παιχνίδι.

# Δέκατο Παιχνίδι

## Διάσπασις πεδίου

Ἡ δασκάλα σχηματίζει ἕνα ΣΤΑΘΕΡΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ἀπό ἀγοράκια. Τοὺς ἐξηγεῖ ὅτι γιὰ νὰ μπορέσῃ ἕνα ἀγοράκι νὰ περάσῃ τὴν μπάλα στο ἀγοράκι πού στέκεται ἀπό πίσω του πρέπει ὁποσδήποτε τὸ πρῶτο ἀγοράκι στρέφοντας τὸ κεφάλαιόν του νὰ ἀντικρύσῃ κατὰφατσα τὸ πίσω του ἀγοράκι πού στέκεται ἀκούνητο. Ἀλλιῶς δέν πρέπει νὰ δώσῃ τὴν μπάλα. Κατόπιν ἡ δασκάλα ἀρχίζει νὰ παίξῃ μέ τὴν ὁμάδα αὐτὴ τὸ πρῶτο καί τὸ δεύτερο παιχνίδι.

Ἐπειτα ἡ δασκάλα καλεῖ ἕνα κοριτσάκι. Τοῦ λέει νὰ μῆ μέσα στὴν γραμμὴ τῶν ἀγοριῶν γιὰ νὰ τὴν κόψῃ καί νὰ κἀνῃ μεταβολὴν ἐπὶ τόπου, ἔτσι πού νὰ βλέπῃ σὲ διευθύνσιν ἀντίθετη ἀπὸ αὐτὴ ὅπου βλέπουν τὰ ἀγοράκια.

Ἡ δασκάλα καλεῖ τὰ παιδάκια νὰ παίξουν τὸ δεύτερο παιχνίδι.

Ἡ μπάλα σταματᾷ πάντοτε μπροστά στο κοριτσάκι. Τὸ κοριτσάκι φωνάζει

Δ Ι Α Σ Π Α Σ Ι Σ

καί τὸ παιχνίδι σταματᾷ.

Αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές μέχρις ὅτου ὅλα τὰ παιδάκια λάβουν μέρος στο παιχνίδι καί καταλάβουν καλά ὅτι ἡ διάσπασις σταματᾷ τὸ πέρασμα τῆς μπάλας.

Κατόπιν ἡ δασκάλα σχηματίζει ἕνα ΣΤΑΘΕΡΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ἀπό ἀγοράκια. Παίξει μαζί τους τὸ πέμπτον καί τὸ ἕκτον παιχνίδι.

Ἡ δασκάλα καλεῖ τὰ κοριτσάκια καί τοὺς λέει νὰ πᾶνε καί νὰ μποῦνε ἀνάμεσα στά ἀγοράκια ἔτσι πού ἡ μπάλα νὰ μπορεῖ νὰ περνᾷ ἀπὸ ἀγοράκι σὲ ἀγοράκι μόνον γιὰ μερικά ἀπὸ τὰ ἀγοράκια, ὄχι γιὰ ὅλα.

Ἡ δασκάλα βοηθεῖ τὸ κοριτσάκι νὰ πᾶνε καί νὰ σταθοῦνε μέσα στο πεδίου τῶν ἀγοριῶν μέ τέτοιο τρόπο, πού νὰ σχηματίζουν μιὰ συνεχῆ γραμμὴ ἔτσι πού νὰ χωρίζουν τὸ πεδίου τῶν ἀγοριῶν σὲ δύο μέρη. Ἡ δασκάλα ἐξηγεῖ σ' ὅλα τὰ παιδάκια ὅτι ἡ μπάλα δέν περνᾷ ἀπὸ ἀγοράκι σὲ κοριτσάκι. Ἀλλὰ ὅταν ἕνα ἀγοράκι ἀπλώσῃ τὰ χερᾶκια του μέ τὴν μπάλα πρὸς ἕνα κοριτσάκι, ἐκεῖνο φωνάζει

Δ Ι Α Σ Π Α Σ Ι Σ

καί δέν πέρνει τὴν μπάλα.

Τὸ παιχνίδι αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται μέχρις ὅτου τὰ παιδάκια μάθουν νὰ τὸ παίξουν μόνον τους χωρὶς λάθος.



# Ένδέκατο Παιχνίδι

-47-

## Μερική απομόνωση πεδίου

‘Η δασκάλα σχηματίζει ένα ΣΤΑΘΕΡΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΠΕΔΙΟΝ από άγοράκια. Παίζει μαζί τους τό πέμπτον καί ἕκτον παιχνίδι. Κατόπιν τούς ἐξηγεῖ ὅτι ἡ μπάλα δέν μπορεῖ νά περάσῃ ἀπό ἀγοράκι σέ κοριτσάκι.’ Ἀλλά ὅταν ἕνα ἀγοράκι ἀπλώσῃ τά χεράκια του μέ τήν μπάλα πρός ἕνα κοριτσάκι, αὐτό θά φωνάξῃ

### Α Π Ο Μ Ο Ν Ω Σ Ι Σ

καί θά μείνῃ ἀκούνητο.

‘Η δασκάλα ἀνάμεσα στίς γραμμές τῶν ἀγοριῶν τοποθετεῖ γραμμές κοριτσιῶν ἔτσι πού ἡ πρώτη γραμμή τοῦ πεδίου νά ἀποτελεῖται ἀπό ἀγοράκια, ἡ δευτέρα γραμμή τοῦ πεδίου νά ἀποτελεῖται ἀπό κοριτσάκια, ἡ τρίτη γραμμή ἀπό ἀγοράκια, ἡ τετάρτη ἀπό κοριτσάκια, κ.ο.κ.

‘Η δασκάλα δίνει τήν μπάλα στό πρῶτο ἀγοράκι μιᾶς γραμμῆς γιά νά ἀρχίσῃ τό ἕκτο παιχνίδι.

‘Η μπάλα διατρέχει τήν ἀντίστοιχη γραμμή τῶν ἀγοριῶν, ἀλλά δέν μπορεῖ νά ξεφύγῃ ἀπό τήν γραμμήν αὐτήν, γιατί μόλις κάποιο ἀγοράκι πάει νά δώσῃ τήν μπάλα στήν διπλανή γραμμή συναντᾷ ἐκεῖ ἕνα κοριτσάκι πού τοῦ φωνάζει

### Α Π Ο Μ Ο Ν Ω Σ Ι Σ

καί δέν πέρνει τήν μπάλα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα δίνει τήν μπάλα στό πρῶτο κοριτσάκι μιᾶς γραμμῆς. Πάλιν ἡ μπάλα διατρέχει τήν ἀντίστοιχη γραμμή τῶν κοριτσιῶν, ἀλλά δέν μπορεῖ νά περάσῃ σέ γειτονική γραμμή, γιατί μόλις κάποιο κοριτσάκι πάει νά δώσῃ τήν μπάλα στήν διπλανή γραμμή συναντᾷ ἐκεῖ ἕνα ἀγοράκι πού τοῦ φωνάζει

### Α Π Ο Μ Ο Ν Ω Σ Ι Σ

καί δέν πέρνει τήν μπάλα.

Τό παιχνίδι ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές γιά νά μάθουν τά παιδάκια νά τό παίξουν χωρίς λάθος καί νά καταλάβουν καλά πῶς ἕνα πεδίου διασπᾶται καί ἀπομονοῦται ἀπό ἕνα ἄλλο πεδίου.

# Δωδέκατο Παιχνίδι

## Πλήρης απομόνωση πεδίου

‘Η δασκάλα βάζει τά παιδάκια νά παίξουν πολλές φορές τό προηγούμενο παιχνίδι γιά νά τό μάθουν καλά.’ Ἐπειτα ρωτᾷ τά παιδάκια:

- Πώς πρέπει νά σταθῆτε γιά νά μή μπορεῖ κανένα παιδάκι νά δώση τήν μπάλα σέ ἄλλο ;

Ἡ δασκάλα ἀφήνει τά παιδάκια νά φάξουν μόνα τους καί νά δοκιμάσουν αὐτό πού προτείνουν. Κατόπιν ξαναβάζει τά παιδάκια νά σταθοῦν μέ τήν ἴδια σειρά καί τάξη πού εἶχαν στήν ἀρχή, δηλαδή στό ἐνδέκατο παιχνίδι.

Ἡ δασκάλα λέει στά παιδάκια πού εἶναι στόν δεῦτερο στίχο νά ἀλλάξουν θέσιν ἀνά δύο. Δηλαδή τό ἀγοράκι θά φύγη ἀπό τήν γραμμή τῶν ἀγοριῶν γιά νά πάρη τήν θέσι τοῦ διπλανοῦ κοριτσιοῦ στήν γραμμή τῶν κοριτσιῶν, καί τό ἀντίστοιχο κοριτσάκι θά ἔλθῃ στή θέση του.

Ἡ δασκάλα ἐπαναλαμβάνει τό ἴδιο γιά τά παιδάκια πού εἶναι στόν τέταρτον στίχον, στόν ἕκτον στίχον, κ.ο.κ.

Κατόπιν ἡ δασκάλα δίνει τήν μπάλα σ' ἓνα παιδάκι. Ἄν αὐτό εἶναι ἀγοράκι, ὅπουδήποτε κι' ἄν ἀπλώσῃ τά χεράκια του συναντᾷ κοριτσάκι πού τοῦ φωνάζει

Α Π Ο Μ Ο Ν Ω Σ Ι Σ

καί μένει ἀκίνητο. Ἄν αὐτό τό πρῶτο παιδάκι πού πήρε τήν μπάλα ἀπό τά χέρια τῆς δασκάλας εἶναι κοριτσάκι, ὅπουδήποτε κι' ἄν ἀπλώσῃ τά χεράκια του γιά νά δώση τήν μπάλα συναντᾷ ἀγοράκι πού τοῦ φωνάζει

Α Π Ο Μ Ο Ν Ω Σ Ι Σ

καί μένει ἀκίνητο.

Ἔτσι ἡ μπάλα μένει πάντοτε στό πρῶτο παιδάκι πού τήν πήρε ἀπό τήν δασκάλα του.

Τό παιχνίδι αὐτό ἐπαναλαμβάνεται μέχρις ὅτου τά παιδάκια μάθουν νά τό παίξουν μόνα τους χωρίς λάθος.

Μέ τά δώδεκα αὐτά παιχνίδια τά παιδάκια τῆς πρώτης τάξεως τοῦ δημοτικοῦ ἔχουν πάρει τās βάσεις τῆς θεωρίας τῶν πεδίων καί πολύ συχνά γνωρίζουν διά τά πεδία περισσότερα ἀπό πολλούς φοιτητάς τῆς φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου. Ἀλλά τό σπουδαιότερον εἶναι ὅτι τά παιδάκια αὐτά ἔχουν πλέον αὐτάς τās γνώσεις ὡς βιώματα. Δέν θά τās λησμονήσουν, οὔτε θά περιπέσουν εἰς σύγχυσιν περί αὐτάς. Ἀντιθέτως, ὅταν ἔλθῃ ἡ ἡμέρα ἐπάνω εἰς τās γνώσεις αὐτάς νά οἰκοδομήσουν θεωρίας καί μεθόδους ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν, τῆς μηχανικῆς ἢ τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, τό ἔργον τοῦτο θά εἶναι διά τοῦς ἀνθρώπους αὐτούς εὐχερῆς καί εὐχάριστον.

Εἰς τήν δευτέραν τάξιν τοῦ δημοτικοῦ, ἡ θεωρία τῶν πεδίων θά συμπληρωθῇ καί μέ ἄλλα νεώτερα παιχνίδια.

## Η ΔΙΠΛΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Είναι ανάγκη για τὸ παιδί νά ἐνοήση καθαρά ἐξ ἀρχῆς τήν διπλή σημασία τῶν ἀριθμῶν, γιατί ἡ σύγχυσις ἀνάμεσα στίς δύο αὐτές σημασίες ἀποτελεῖ ἀνυπερβλήτον ἐμπόδιο γιά τήν ὑπεύθυνη ἐφαρμογή τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν.

Δηλαδή: ὅταν λέμε "τρία" ἢ γράφουμε "3", αὐτή ἡ λέξη, αὐτό τὸ σύμβολο, σημαίνει μόνο τὸ ἕνα ἀπό δύο ἐντελῶς διαφορετικά πράγματα. Τὸ παιδί πρέπει νά μάθῃ ἀπὸ τήν ἀρχή νά διερωτᾶται αὐτόματα καί νά βρῖσκη σέ ποιό ἀπό τὰ δύο αὐτά πράγματα ἀναφέρεται ἡ λέξη τρία.

### Πρώτη σημασία

Ὁ ἀριθμὸς τρία σημαίνει ὅτι κάτι πού ἐξετάζομε γιά νά τοῦ δώσω-με τόν χαρακτηρισμόν αὐτόν, ἀποτελεῖται ἀπὸ "τρία" ἴσα καί ὅμοια πράγματα, πού τὸ καθένα τους εἶναι ὅμοιο καί ἴσο πρὸς κάτι πού ἔχο-με διαλέξει σάν μονάδα. Τότε αὐτὸ τὸ κάτι λέγεται μονάδα μετρήσεως καί τὸ "τρία" λέγεται "τὸ μέτρον τοῦ πράγματος πού ἐξετάζομεν, ἀναφορικά μέ αὐτὴ τήν μονάδα μετρήσεως".

Παραδείγματα: "Ὅταν λέμε "τρία κιλά βούτυρο", ἀναφερόμεθα σέ ἕνα πρᾶγμα πού ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ἴσα καί ὅμοια μέρη, πού τὸ καθένα ἔχει βάρος ἕνα κιλό καί εἶναι βούτυρο.

"Ὅταν λέμε "τρία μέτρα σύρμα" ἀναφερόμεθα σέ ἕνα κομμάτι σύρματος πού ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ἴσα καί ὅμοια πράγματα πού τὸ καθένα εἶναι ἕνα μέτρο ἀπὸ αὐτὸ τὸ σύρμα.

### Δεύτερη σημασία

Ἡ λέξις "τρία" ἔρχεται ἀμέσως μετὰ τήν λέξιν "δύο", ὅπως ἡ λέξις "δύο" ἔρχεται ἀμέσως μετὰ τήν λέξι "ἕνα". Τότε λέμε ὅτι "ἡ λέξις τρία ἀηλώνει μιά τάξη".

Παράδειγμα : Σέ ὅρα συνωστισμοῦ περιμένομε στήν οὐρά γιά νά μπού-με στό ἄσσανσέρ. Ἐνας μᾶς ρωτᾷ. Πόσες φορές ἀνέβηκε τὸ ἄσσανσέρ ἀπὸ τότε πού τὸ περιμένετε. Ἀπαντοῦμε: τρία. Ἡ ἐπομένη φορὰ πού θά ἀνεβῇ τὸ ἄσσανσέρ θά ἀντιστοιχεῖ στό τέσσαρα, ἢ μεθεπομένη στό πέντε, κ.ο.κ. Ἀλλά οὔτε αὐτὸ τὸ τρία, οὔτε αὐτὸ τὸ τέσσαρα, οὔτε αὐτὸ τὸ πέντε δηλώνει ἄλλο πού εἶναι τρεῖς ἢ τέσσαρες ἢ πέντε φορές ἴσο πρὸς κάτι ἄλλο πού ἔχομε πάρει σάν μονάδα.

Τὰ παιδῶν τῆς πρώτης τάξεως τοῦ δημοτικοῦ ἀντιλαμβάνονται τίς δύο διαφορετικές σημασίες τῶν ἀριθμῶν παίζονταξ τὰ ἐξῆς παιχνίδια:

## Πρώτο Παιχνίδι

Ο αριθμός ηηλοϊ τάξιν

Η δασκάλα χωρίζει τά παιδιιά σε δύο ομάδες.

Η δασκάλα τοποθετεί τά παιδάκια κάθε ομάδας Έτσι πού νά σχηματίσουν Ένα κύκλο: τό κάθε παιδάκι άκουμπά τά δυο χεράκια του στούς ώμους του παιδιού πού στέκεται μπροστά του.

Κατόπιν ή δασκάλα λέει σ' Ένα παιδάκι της μιās ομάδας νά προφέρει τόν άριθμόν "Ένα". Τό παιδάκι πού στέκεται μπροστά του θά προφέρει τόν άριθμόν "δύο". Τό παιδάκι πού στέκεται μπροστά άπό αυτό πού εΐπ δυο θά πη τρία. Ούτω καθ' έξης τό κάθε παιδάκι πού στέκεται μπροστά άπό έκείνο πού εΐπε Ένα άριθμόν θά πη τόν επόμενον άριθμόν.

Η δασκάλα κάνει τό ίδιο και στά παιδάκια πού σχηματίζουν την δευτέρα ομάδα.

Όταν ή δασκάλα διαπιστώσει ότι τά παιδάκια κατάλαβαν καλά πώς θά κάνουν την άρίθμηση, τούς λέει: - Καί οι δύο ομάδες θά αρχίσετε μαζί. θά κερδίσει εκείνη ή ομάδα πού θά φθάσει στον μεγαλύτερο άριθμό.

Τά παιδάκια αρχίζουν νά άριθμούν. Όταν μπερδεύονται στην άρίθμηση τούς βοηθάει λίγο ή δασκάλα. Έτσι τά παιδιιά καταλαβαίνουν ότι σ' αυτή την άρίθμηση δεν υπάρχει τέλος. Σε όποιον άριθμόν και άν φθάση ή μιá ομάδα, στον ίδιο άριθμό μπορεί νά φθάση και ή άλλη ομάδα και νά την ξεπεράσει.

Τό παιχνίδι αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές Έτσι πού τά παιδάκια νά άποκτήσουν εύχέρεια στην άρίθμηση και νά καταλάβουν πώς ή άρίθμηση αυτή δεν έχει τέλος. Τότε ή δασκάλα κάνει διάλειμμα και κατόπιν σχηματίζει πάλι δυο ομάδες παιδιών όπως προηγουμένως, αλλά αυτή την φορά οι δυο ομάδες είναι πολύ άνισες: στην μιá ομάδα υπάρχουν τέσσαρες ή πέντε φορές περισσότερα παιδιιά από όσα στην άλλη.

Τά παιδάκια αρχίζουν πάλι την άρίθμηση.

Και πάλι καμιά ομάδα δεν μπορεί νά ξεπεράσει την άλλη. Παραδείγματος χάριν, σε όποιον άριθμόν φθάση ή μεγάλη ομάδα φθάνει και ή μικρή ομάδα και την ξεπερνάει.

Έτσι τά παιδιιά καταλαβαίνουν γρήγορα πώς αυτού του είδους οι άριθμοί δεν έχουν τέλος, ούτε για μικρή ομάδα ούτε για μεγάλη.

## Δεύτερο Παιχνίδι

Ο αριθμός δηλού μέτρον

Η δασκάλα χωρίζει τά παιδιά σε δύο άνισες ομάδες και τά βάζει νά παίξουν τό προηγούμενο παιχνίδι.

Κατόπιν ή δασκάλα πέρνει κάθε ομάδα χωριστά και λέει στά παιδάκια νά καθήσουν στά καρεκλάκια τους βάζοντας τα τό ένα κοντά στό άλλο όπως θέλουν, δηλαδή σε μιá γραμμή ή σε ένα κύκλο ή σε τετράγωνο, κ.ο.κ.

Η δασκάλα εξηγεί στά παιδάκια πώς κάθε ένα θά λήη τόν επόμενο του αριθμού πού εἶπε τό προηγούμενο παιδάκι, και θά σηκώνεται. "Ετσι, τό πρώτο παιδάκι θά πῆ: ΕΝΑ, και θά σηκωθῆ. Τό επόμενο παιδάκι θά πῆ: ΔΥΟ, και θά σηκωθῆ. Τό επόμενο πάλι παιδάκι θά πῆ ΤΡΙΑ και θά σηκωθῆ. Ούτω καθ'έξῆς μέχρις ὅτου σηκωθοῦν ὅλα τά παιδάκια.

Η δασκάλα εξηγεί ὅτι τά ὄρθια παιδάκια δέν ἀνοίγουν τό στόμα τους νά πουν λέξη.

Η δασκάλα ἐπαναλαμβάνει μέ κάθε ομάδα τό παιχνίδι αὐτό ὅσες φορές χρειάζεται μέχρι πού τά παιδάκια νά τό μάθουν καλά.

Κατόπιν ή δασκάλα τούς λέει: Τώρα καθήστε μέ ὅποιο τρόπο θέλετε και ἀρχεῖστε νά σηκώνεστε μέ ὅποια σειρά θέλετε, ἔτσι πού τό τελευταῖο παιδάκι πού θά σηκωθῆ νά πῆ ὅσο γίνεται μεγαλύτερο ἀριθμό.

Τά παιδάκια πρέπει νά κάνουν πολλές δοκιμές. Κάθε φορά τό τελευταῖο παιδάκι πού θά σηκώνεται θά λήη τόν ἴδιον ἀριθμό. Πάντοτε τόν ἴδιον ἀριθμό. Τό ἴδιο γιά κάθε ομάδα. Καί τό παιδάκι ἀπό τήν μεγαλύτερη ομάδα θά λήη πάντοτε μεγαλύτερο ἀριθμό ἀπό τό τελευταῖο παιδάκι τῆς μικρότερης ομάδας.

Τό παιχνίδι αὐτό θά ἐπαναλαμβάνεται πολλές-πολλές φορές, μέ διαφορετικά άνισες κάθε φορά τίς δύο ομάδες και διαφορετική κατανομή τῶν παιδιῶν.

Τά παιδιά θά καταλάβουν πώς ὅταν ἀριθμοῦν μέ τόν τρόπον αὐτόν, ὅτι και νά κάνουν δέν μποροῦν νά ξεπεράσουν ένα ἀριθμόν, διαφορετικό κάθε φορά ἀνάλογα μέ τό πόσο μικρή ή μεγάλη εἶναι ή ομάδα, ἀλλά πάντοτε τόν ἴδιο γιά τήν ἴδια ομάδα.

Όταν τὰ παιδιὰ μάθουν καλὰ τὸ πρῶτο παιχνίδι καὶ ἐξ ἴσου καλὰ καὶ τὸ δεύτερο παιχνίδι, ἡ δασκάλα ἀνακατεύει τὰ δύο παιχνίδια.

Δηλαδή:

Πρῶτα ἐναλλάσσει τὸ παιχνίδι, βάζοντας τὰ παιδάκια νὰ παίξουν ὅλα μαζί στὴν σειρά τὸ πρῶτο παιχνίδι, τὸ δεύτερο παιχνίδι, δύο φορές τὸ πρῶτο παιχνίδι, μία φορά τὸ δεύτερο παιχνίδι, μία φορά τὸ πρῶτο παιχνίδι, τρεῖς φορές τὸ δεύτερο παιχνίδι.

Κατόπιν ἡ δασκάλα βάζει τὴν μιὰ ομάδα νὰ παίξῃ τὸ ἕνα παιχνίδι, καὶ τὴν ἄλλη ομάδα νὰ παίξῃ τὸ δεύτερο παιχνίδι. Δηλαδή, ἀπὸ τίς δύο ομάδες ὅπου θὰ ἔχῃ χωρίση τὰ παιδάκια, ἡ μιὰ ομάδα θὰ σχηματίσῃ κύκλον ὅπως στὸ πρῶτο παιχνίδι καὶ τὰ παιδιὰ θὰ ἀριθμοῦν συνέχεια τὸ ἕνα μετὰ τὸ ἄλλο, ἐνῶ ἡ ἄλλη ομάδα θὰ καθίσῃ καὶ τὰ παιδάκια θὰ ἀριθμοῦν καὶ θὰ σηκώνονται.

Ἡ δασκάλα θὰ βάζῃ ἕνα δελεαστικό ἔπαθλο (φροῦτα ἢ καραμέλες) γιὰ τὴν ομάδα πού θὰ φθάσῃ στὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν. θὰ δίνη τὸ βραβεῖο ἐπιδεικτικά, προκλητικά ( ὄχι ὅμως προσβλητικά ), γι' αὐτοὺς πού ἔχασαν.

Τὸ παιχνίδι αὐτό θὰ ἐπαναλαμβάνεται συνέχεια, μέχρις ὅτου τὰ παιδάκια πού θὰ χάνουν ( ἡ ομάδα τους κάθε φορά θὰ εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν προηγούμενη χαμένη ομάδα ) ἐπαναστατήσουν ἀγανακτισμένα γιὰ νὰ ἐξηγήσουν στὴν δασκάλα τους πῶς ἄλλου εἴδους ἀριθμοὶ εἶναι αὐτοὶ πού λένε τὰ παιδάκια πού σχηματίζουν κύκλο καὶ ἀριθμοῦν χωρίς τέλος, καὶ ἄλλου εἴδους ἀριθμοὶ εἶναι αὐτοὶ πού λένε τὰ παιδάκια ὅταν σηκώνονται ἕνα-ἕνα. Ἀγανακτισμένα θὰ τῆς ἐξηγήσουν πῶς οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ δὲν σημαίνουν τίποτε, εἶναι κούφιοι, ἄδριοι, πῶς καὶ αὐτὰ ἂν σταθοῦν καὶ ἀριθμίσουν μέ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ φθάσουν καὶ θὰ ξεπεράσουν ὄχι μιὰ ἀλλὰ πολλές φορές τὸν ἀριθμόν πού εἶπε ἡ ἄλλη ομάδα. Ἀγανακτισμένα θὰ τῆς ἐξηγήσουν πῶς οἱ δικοὶ τους ἀριθμοὶ εἶναι ἀληθινοὶ, δείχνουν πόσα εἶναι τὰ παιδάκια πού εἶναι στὴν ομάδα, καὶ δὲν μποροῦν οἱ ἀριθμοὶ νὰ γίνουν πιὸ μεγάλοι γιὰτί τὰ παιδάκια δὲν μποροῦν νὰ γίνουν πιὸ πολλά ἀπὸ αὐτὰ πού εἶναι. Καὶ πολὺ εὐγενικά τὰ ἀγανακτισμένα παιδάκια θὰ ζητήσουν ἀπὸ τὴν δασκάλα τους νὰ τοὺς δώσῃ τόσες καραμέλες, ὅσο ὁ ἀριθμὸς πού εἶπε τὸ τελευταῖο παιδάκι πού σηκώθηκε, γιὰτί τόσα ἀκριβῶς εἶναι καὶ τὰ παιδάκια.

Κανονικά αυτή ή άγανάκτηση πρέπει νά δημιουργηθῆ μόνη της αὐθόρμητα. Ἄλλά ἂν ἄργεῖ νά ἐκδηλωθῆ, βοηθάει λιγάκι καί ἡ δασκάλα. Ἡ δασκάλα βοηθάει νά ἐκδηλωθῆ ἡ άγανάκτησις σέ ἕνα ἢ δυό παιχνίδια.

Κατόπιν τά παιχνίδια ἐπαναλαμβάνονται μέ τήν ἐναλλασσομένη φορά, καί ἡ άδικία τῆς βραβεύσεως τονίζεται μέχρις ὅτου τά χαμένα παιδάκια άγανακτήσουν μόνα τους, αὐθόρμητα.

Τό παιχνίδι αὐτό θά ἐπαναληφθῆ ὅσες φορές χρειάζεται ὥστε τά παιδάκια ὅλα νά καταλάβουν καλά πόσο μεγάλη εἶναι ἡ διαφορά ανάμεσα στόν ἀριθμό πού δηλώνει τάξη καί στόν ἀριθμό πού δηλώνει μέτρον.

Ὄταν ἡ ομάδα ἔχει μονάδα μετρήσεως τό ἄτομο, ἀπό αὐτά πού τήν ἀποτελοῦν, ( ἢ, γιά νά μιλήσωμε στήν καινούργια γλώσσα τῶν μαθηματικῶν, αὐτήν πού θά μάθουν ἀπό τά πρῶτα βήματα τους καί τά ἴδια αὐτά παιδάκια, ὅταν μονάδα μετρήσεως ἑνός συνόλου εἶναι τό στοιχεῖον αὐτοῦ ) τότε τό μέτρον εἶναι πάντοτε ὠρισμένον καί σταθερόν.

Ἔτσι τά παιδάκια αὐτά παίζοντας θά καταλάβουν καί θά κάνουν βίωμα βαθειά ριζωμένο μέσα τους καί πού ἀποτελεῖ τό Α καί τό Ω τῶν μαθηματικῶν καί πού πάρα πολύς σοφός κόσμος δέν ἔχει καταλάβει ἀκόμα. Διηλαδῆ, πῶς:

οἱ ἀριθμοί πού δηλοῦν τάξιν εἶναι ἄπειροι

ἀλλά

οἱ ἀριθμοί πού δηλοῦν μέτρον εἶναι πεπερασμένοι.

## Η ΔΙΠΛΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

Γιά τόν επαγγελματία μαθηματικό ή μαθηματική σκέψη είναι μιá υποχρέωση επί αντίμισθία ή ένα παιχνίδι για αὐτοϊκανοποίηση.

Γιά τόν μηχανικό ή μαθηματική σκέψη είναι μιá φυσιολογική λειτουργία πού αναπτύσσεται ανάλογα μέ τίς ανάγκες του.

Γι'αὐτό υπάρχουν όλόκληροι τεράστιοι κλάδοι τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης πού γιά τόν μηχανικό είναι τόσο ἄχρηστοι, ὅσο τά ἀρχαῖα περσικά είναι ἄχρηστα γιά τούς βιομηχάνους. Ἐκ παραλλήλου, οἱ μηχανικοί ἔχουν ἀνάγκη ἀπό μαθηματικά πού κανεῖς ἐπαγγελματίας μαθηματικός δέν σκέφθηκε ἀκόμα νά ἀναζητήσει, νά ἀνακαλύψῃ, νά καλλιεργήσῃ καί νά ἀναπτύξῃ.

Θά κάνωμε μιá παρομοίωση: ὁ ἐπαγγελματίας μαθηματικός μοιάζει μέ ένα ἐξερευνητή πού πηγαίνει σέ μιá καινούργια περιοχὴ, μιá ἄγνωστη χώρα, γιά νά κάνῃ τούς χάρτες της: νά βρῇ καί νά σημειώσῃ πού εἶναι τά βουνά της καί τά περάσματα τους, τά ποτάμια της, οἱ λίμνες, τά φυσικά λιμάνια, καί τά χρήσιμα μεταλλεύματα της ἢ τά εὐφορα ἐδάφη της. Ὁ μηχανικός μοιάζει μέ τόν ἔμπορο πού ἔρχεται νά ἐκμεταλλευσθῇ ἢ τόν ἄποικο πού ἔρχεται νά ἀναπτύξῃ τήν νέα χώρα. Ἐχει ἀνάγκη ἀπό χάρτες.

Δυστυχῶς στήν ἐποχὴ μας συμβαίνει μιá ἀνωμαλία. Οἱ μηχανικοί ἀνακάλυψαν καινούργιες χῶρες, δηλαδή νέες περιοχές στήν ἐπιστήμη, καί πῆγαν σ'αὐτές σάν ἔμποροι καί σάν ἄποικοι, χωρίς νά ἔχουν προηγηθῇ μαθηματικοί γιά νά ἐξερευνήσουν τίς χῶρες αὐτές καί νά τίς χαρτογραφήσουν, δηλαδή χωρίς νά βροῦν καί νά ἀναπτύξουν τά ἀναγκαῖα καί κατάλληλα μαθηματικά γιά τίς νέες αὐτές ἐπιστημονικές περιοχές. Αὐτό δημιουργεῖ πολὺ μεγάλες δυσκολίες στούς μηχανικούς πού ἐκνευρίζομενοι ἀπό τά συνεχῆ ἐμπόδια πού συναντοῦν ξεσποῦν καί κατηγοροῦν τούς μαθηματικούς πῶς ἀντί νά χαρτογραφήσουν τίς νέες ἐπιστημονικές περιοχές κáθονται καί χαρτογραφοῦν τά σύννεφα στόν οὐρανό .

Ἐνα ἀπό τά σοβαρότερα θέματα πού ἀπασχολεῖ σήμερα τούς μηχανικούς στά μαθηματικά εἶναι ἡ ἔννοια καί ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ μέτρου. Οἱ μαθηματικοί γνωρίζουν, ἀντιλαμβάνονται καί χρησιμοποιοῦν ἕνα μέτρον: τό συμβατικόν.

Οἱ μηχανικοί ( Βλέπε : Πρακτικά Συνεδριάσεων τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἰνστιτούτου Ἐφαρμογῆς τῆς Ἐπιστήμης, Τεύχος 8ον, Μάϊος 1970 ) ἀνακάλυψαν



ὅτι στήν φύση ὑπάρχουν δύο μέτρα ἐντελῶς διαφορετικά: τό συμβατικό μέτρο καί τό ὑποκειμενικό μέτρο.

Τό συμβατικό μέτρο διακρίνεται πιά εὐκόλα καί γι' αὐτό εἶναι γνωστό σέ ὄλους ἀπό τά πανάρχαια χρόνια. Αὐτό χρησιμοποιοῦν οἱ μαθηματικοί, ἀκόμη καί ὅταν νομίζουν πῶς δέν χρησιμοποιοῦν κανένα μέτρον, ὅπως π.χ. εἰς τούς τοπολογικούς χώρους ( βλέπε : Πρακτικά Συνεδριάσεων τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἰνστιτούτου Ἐφαρμογῆς τῆς Ἐπιστήμης, Τεύχος 4ον καί 14ον ).

Τό ὑποκειμενικόν μέτρον ἦταν μέχρι σήμερα ἄγνωστο. Ὀλίγοι ἐπιστήμονες μόνο τό εἶχαν πλησιάσει διά τῆς διαισθήσεως καί πολλές χιλιάδες μηχανικῶν εἶχαν πέσει ἐπάνω του καί εἶχαν μπερδευτῆ πολύ ἄσχημα χωρίς νά μποροῦν νά τό διακρίνουν.

Ἔτσι τό ὑποκειμενικό μέτρο γιά τούς μηχανικούς ἦταν καί εἶναι ὅ,τι εἶναι γιά τά καράβια οἱ ὕφαλοι στήν εἴσοδο τῶν λιμανιῶν.

Γι' αὐτό εἶναι ἐπιτακτική ἀνάγκη ὅπως τά παιδιά μάθουν ἀπό ὅσο γίνεται μικρότερη ἡλικία νά διακρίνουν τό συμβατικό μέτρον ἀπό τό ὑποκειμενικό μέτρο, ὅπως εἶναι ἀνάγκη γιά τόν πλοίαρχο νά γνωρίζη ἀπό τήν πρώτη ὥρα πού πλησιάζει ἕνα λιμάνι πού τά νερά εἶναι βαθειά καί πού ὑπάρχουν ὕφαλοι.

Κάθε ἕνα ἀπό τά δύο διαφορετικά μέτρα εἶναι ἕνα κλειδί γιά ἕνα διαφορετικό θαυμάσιο κόσμον. Καί ὁ ἕνας κόσμος καί ὁ ἄλλος κόσμος εἶναι ἐξ ἴσου πραγματικοί.

Μέ παραβολικό τρόπο μποροῦμε νά ποῦμε πῶς ὁ κόσμος τοῦ συμβατικοῦ μέτρον ἀντιστοιχεῖ στήν φύση ἐπάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης, ὅπου ὑπάρχουν οἱ στερεές καί τά νησιά μέ τά βουνά τους, τά ποτάμια τους, τίς πόλεις μέ τούς ἀνθρώπους, καί τά δάση μέ τά ζῶα καί τά πουλιά. Ὁ κόσμος τοῦ ὑποκειμενικοῦ μέτρον ἀντιστοιχεῖ στήν φύση κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης. Ὅποιος ἔκανε θαλάσσιο κυνήγι ξέρεει ποιές ὀμορφιές ὑπάρχουν ἐκεῖ κάτω, ὀμορφιές πού οὔτε φαντάζονται αὐτοί πού δέν ἀνοιξαν ποτέ τά μάτια τους κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης. Τέτοιες καί μεγαλύτερες ὀμορφιές καί θησαυροί πολύτιμοι ὑπάρχουν καί μέσα στόν καινούργιο κόσμον πού κλειδί του εἶναι τό ὑποκειμενικό μέτρο. Ὅλες αὐτές οἱ ὀμορφιές, ὅλοι αὐτοί οἱ θησαυροί περιμένουν τά μικρά παιδάκια τοῦ νέου σχολείου γιά νά πᾶνε νά τά χαροῦν καί νά τά πάρουν. Σ' αὐτόν τόν καινούργιο κόσμον ὀδηγοῦμε τά παιδάκια.

## Πρῶτο Παιχνίδι

Τό συμβατικόν μέτρον

Τό παιχνίδι αὐτό γίνεται στήν αἴθουσα γυμναστικῆς τοῦ σχολείου.

Ἡ δασκάλα χαράζει μέ κιμωλία ἕνα κύκλο στό δάπεδο. Ὁ κύκλος αὐτός ἔχει ἀκτίνα ἕνα μέτρον.

Δίπλα στόν κύκλο ἡ δασκάλα χαράζει μέ κιμωλία μία εὐθεῖα γραμμή, μήκους ἐπτά μέτρων.

Ἡ δασκάλα ἔχει ἐτοιμάσει 6 πηχάκια, ἕνα μέτρο μακρῦ τό καθένα.

Μέ αὐτά τά πηχάκια ἡ δασκάλα μετράει τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου καί μεταφέρει τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως στήν εὐθεῖαν γραμμή. Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς:

- 1.-χαράζει στή περιφέρεια ἕνα σημάδι γιά νά δείχνη τήν ἀρχή.
- 2.-ἀκουμπάει τό πρῶτο πηχάκι μέ τήν μιά ἄκρη στό σημεῖον αὐτό καί μέ τήν ἄλλην ἄκρη πάλιν ἐπάνω στήν περιφέρεια.
- 3.-ἀκουμπάει τό δεύτερο πηχάκι μέ τήν μιά ἄκρη στό τέλος τοῦ πρώτου πήχεως καί μέ τήν ἄλλην ἄκρη πάλιν ἐπάνω στήν περιφέρεια.
- 4.-ἀκουμπάει τό τρίτο πηχάκι μέ τήν μιά ἄκρη στό τέλος τοῦ δευτέρου πήχεως καί μέ τήν ἄλλην ἄκρη πάλιν ἐπάνω στήν περιφέρεια.
- 5.-ἀνάλογα κάνει γιά τό τέταρτο, τό πέμπτο καί τό ἕκτο πηχάκι. Τό τέλος τοῦ ἕκτου πήχεως πέφτει ἐπάνω στήν ἀρχή τοῦ πρώτου πήχεως.

Ἡ δασκάλα ἐξηγεῖ στά παιδάκια πῶς αὐτό πού ἔγινε ἦταν τό μέτρημα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μέ μονάδα μετρήσεως τό μέτρο. Δηλαδή: εὐρήκαμε πόσα μέτρα χωρῶν στήν περιφέρεια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα πέρνει τά πηχάκια ἀπό τόν κύκλο καί τά ἀκουμπάει ἐπάνω στήν εὐθεῖα γραμμή, τό ἕνα πίσω ἀπό τό ἄλλο. Στό τέλος τοῦ ἕκτου πήχεως χαράζει ἕνα σημάδι.

Ἡ δασκάλα ἐξηγεῖ στά παιδάκια πῶς μέ τόν τρόπο πού μετρήθηκε ἡ περιφέρεια εὐρέθηκε πῶς τό μήκος της εἶναι ἴσο πρός τό μήκος πού ἔχει ἡ εὐθεῖα γραμμή ἀπό τήν ἀρχή της μέχρι τό σημάδι πού χάραξε ἡ δασκάλα.

Κατόπιν ἡ δασκάλα καλεῖ τά παιδάκια ἕνα-ἕνα νά ξανακάνουν μοναχά τους αὐτό τό μέτρημα. Ὅλα τά παιδάκια βρίσκουν τό ἴδιο μήκος.

Αυτό τό μέτρημα ἐπαναλαμβάνεται πολλές φορές, ἔτσι πού ὅλα τά παιδάκια νά καταλάβουν καλά πῶς τό πόσες φορές τά πηχάκια χωροῦνε μέσα στήν περιφέρεια δέν ἐξαρτᾶται ἀπό αὐτόν πού κάνει τό μέτρημα. Καί τά ἀγοράκια καί τά κοριτσάκια, καί οἱ φηλοί καί οἱ κοντοί, καί οἱ ἀδύνατοι καί οἱ χοντρούληδες, καί αὐτοί πού φοροῦνε γυαλιά καί αὐτοί πού δέν φοροῦνε, βρίσκουν πάντοτε τό ἴδιο ἀποτέλεσμα : ἴδιος ἀριθμός ἀπό πηχάκια χωράει μέσα στήν περιφέρεια καί ὅταν τά πηχάκια αὐτά τά βάζουμε ἐπάνω στήν ἴσια γραμμή τό ἕνα πίσω ἀπό τό ἄλλο φθάνουμε πάντοτε στό ἴδιο σημάδι.

Κατόπιν ἡ δασκάλα κόβει τά πηχάκια ἀκριβῶς στή μέση ἔτσι πού τό καθένα νά ἔχη μήκος μισό μέτρο. Καί ἀρχίζει πάλι τό μέτρημα ὅπως προηγουμένως. Τώρα θά βρῆ πῶς τό δεύτερο ἄκρο τοῦ δωδεκάτου μισομέτρου δέν φτάνει στήν ἀρχή τοῦ πρώτου μεσομέτρου. Περισεύει ἕνα κομμάτι ἀπό τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ἀλλά πάλι ὁλόκληρο μισόμετρο δέν χωράει στό κομμάτι τῆς περιφερείας πού μένει.

Ἡ δασκάλα ἐξηγεῖ στά παιδάκια πῶς αὐτό πού ἔγινε τώρα δείχνει πῶς τά 6 πηχάκια πού ἔσπασαν γιά νά γίνουν δώδεκα δέν φθάνουν πιά γιά νά σκεπᾶσουν ὅλο τόν κύκλο. Ἀλλά πάλι ἄν βάλουμε δέκα τρία πηχάκια, το τελευταῖο πηχάκι δέν χωράει ὁλόκληρο στό κομμάτι τοῦ κύκλου πού μένει ἀσκέπαστο.

Ἡ δασκάλα βάζει ὅλα τά παιδάκια νά κάνουν τήν καινούργια μέτρηση μέ τά ἴδια τά χεράκια τους γιά νά δοῦν καί νά καταλάβουν καλά πῶς τό ἀποτέλεσμα εἶναι τό ἴδιο πάντοτε γιά ὅλα τά παιδάκια.

Κατόπιν ἡ δασκάλα πέρνει ἀπό τόν κύκλο τά δώδεκα μισόμετρα καί τά ἀκουμπᾶει ἐπάνω στήν εὐθεῖα γραμμή, τό ἕνα πίσω ἀπό τό ἄλλο. Τό τέλος τοῦ δωδεκάτου κομματιοῦ φθάνει πάλιν ἀκριβῶς στό σημάδι πού ἡ δασκάλα εἶχε χαράξει προηγουμένως.

Ἡ δασκάλα ἐξηγεῖ στά παιδάκια πῶς αὐτό τό μέτρημα πού γίνεται τώρα δείχνει ὅτι τό μήκος τῆς περιφερείας εἶναι πιά μεγάλο ἀπό τήν ἀπόσταση ἀνάμεσα στήν ἀρχή τῆς ἴσιας γραμμῆς καί στό χαραγμένο σημάδι. Τά παιδάκια δυσκολεύονται νά καταλάβουν τί θέλει νά τοῦς πῆ.

Ἡ δασκάλα τά ἀφήνει λίγο νά σκεφθοῦν, τόσο ὅσο χρειάζεται γιά νά φουντώσῃ μέσα τους ἡ ἀπορία, ἀλλά ὄχι καί νά κουρασθοῦν.

Κατόπιν βγάζει ἀπό τήν τσέπη της ἕνα χοντρό σπάγγο καί τοῦς λέει :  
- Πόσο μεγάλο κομμάτι ἀπό αὐτόν τόν σπάγγο πρέπει νά κόψωμε γιά νά σκεπᾶσωμε ἀκριβῶς ὅλη τήν περιφέρεια, ἔτσι πού κανένα κομμάτι ἀπό τήν

περιφέρεια νά μή μείνη άσκεπαστο,άλλά καί καθόλου σπάγγος νά μή περισσέψη ;

Τά παιδάκια δέν μπορούν νά βροϋν μόνα τους τήν άπάντηση,έκτός κι 'άν άνάμεσα τους εΐναι κάποιος καινούργιος 'Αΐνσταΐν. 'Η δασκάλα τά άφήνει λίγο νά ποϋνε καί νά δοκιμάσουν διάφορες άστοχιές.Κατόπιν κόβει άπό τόν σπάγγο Ένα κομμάτι ΐσο πρός τήν άπόσταση άπό τήν άρχή τής ΐσιας γραμμής ώς τό χαραγμένο σημάδι.Μέ τόν σπάγγον αυτόν σκεπάζει τήν περιφέρεια.Ένα κομμάτι άπό τήν περιφέρεια μένει άσκεπαστο. 'Η δασκάλα έξηγεΐ στά παιδάκια πώς αυτό δείχνει ότι τό μήκος τής ΐσιας γραμμής ώς τό χαραγμένο σημάδι εΐναι μικρότερο άπό τό μήκος τής περιφερείας.

Κατόπιν ή δασκάλα βάζει έπάνω στήν ΐσια γραμμή Ένα άκόμα μισόμετρο, χαράζει Ένα καινούργιο σημάδι καί κόβει άπό τόν σπάγγο Ένα κομμάτι ΐσο πρός τήν άπόστασιν άνάμεσα στήν άρχή τής ΐσιας γραμμής καί στό καινούργιο σημάδι.Μέ τό καινούργιο αυτό κομμάτι τοϋ σπάγγου σκεπάζει τήν περιφέρεια."Ένα κομματάκι σπάγγος περισσεΐει.

'Η δασκάλα έξηγεΐ στά παιδάκια πώς αυτό σημαίνει πώς ή περιφέρεια Έχει μήκος μεγαλύτερο άπό τό μήκος τής ΐσιας γραμμής ώς τό παλαιό χαραγμένο σημάδι,άλλά πάλι ή περιφέρεια Έχει μήκος μικρότερο άπό τό μήκος τής ΐσιας γραμμής ώς τό καινούργιο σημάδι.Πόσο μεγάλο κομμάτι σπάγγου πρέπει λοιπόν νά κόψωμε Έτσι πού όταν μέ αυτό σκεπάζομε τήν περιφέρεια οΰτε νά λείπη,οΰτε νά περισσεΐει ;

'Η δασκάλα κάνει διάλειμμα.

Κατόπιν τό παιχνίδι άρχίζει πάλι άπό εκεί όπου τό μέτρημα γίνεται μέ τά μισόμετρα.Κάθε παιδάκι επαναλαμβάνει τό παιχνίδι ώς τό τέλος, μετρώντας καί μέ τούς δύο σπάγγους.Σέ κάθε παιδάκι ή δασκάλα θέτει πάντα τό ΐδιο έρώτημα: - Πόσο μεγάλο κομμάτι σπάγγου πρέπει λοιπόν νά κόψωμε Έτσι πού όταν τό βάλωμε έπάνω στήν περιφέρεια οΰτε νά λείπη,οΰτε νά περισσεΐει ;

"Όταν όλα τά παιδάκια επαναλάβουν τό παιχνίδι, Έτσι πού όλα νά τό καταλάβουν καλά,ή δασκάλα κόβει τά μισόμετρα άκριβώς στήν μέση Έτσι πού κάθε πηχάκι νά Έχη τώρα μήκος 25 έκατοστά.

Μέ τά νέα πηχάκια κάνει πάλι τό μέτρημα τής περιφερείας.Τό τέλος τοϋ εΐκοστού πέμπτου πήχεως πέφτει έπάνω στήν άρχή τοϋ πρώτου πήχεως. 'Η δασκάλα έξηγεΐ στά παιδάκια πώς τώρα χρειάζονται άκριβώς 25 πηχάκια γιά νά σκεπάσουν τήν περιφέρεια τοϋ κύκλου Έτσι πού οΰτε κομ-

μάτι από την περιφέρεια να μένη άσκέπαστο, ούτε πηχάκι να περισσέυη. Κατόπιν ή δασκάλα πέρνει τά 25 πηχάκια καί τά βάζει επάνω στην ίσια γραμμή, τό ένα πίσω από τό άλλο. Στο τέλος της τελευταίας πήχεως χαράζει ένα χαρακτηριστικό σημάδι.

Η δασκάλα ρωτάει τά παιδιά: - Πόσο μήκος έχει ή περιφέρεια;

Αν τά παιδάκια δέν μπορέσουν μόνα τους, τά βοηθάει να άπαντήσουν:

- Η περιφέρεια έχει μήκος ίσο προς τό μήκος της **Ίσιας** γραμμής ως τό (χαρακτηριστικό) σημάδι.

Η δασκάλα τά ρωτάει: - Γιατί;

Αν τά παιδάκια άπαντήσουν: - Γιατί τά ξυλάκια πού είναι επάνω στην ίσια γραμμή σκεπάζουν ακριβώς την περιφέρεια χωρίς να αφήνουν κανένα κομμάτι της άσκέπαστο, μά ούτε καί να περισσεύουν, - χάνουν τό παιχνίδι.

Η δασκάλα θά τους εξηγήση: - Όταν είχαμε τά πρώτα μεγάλα 6 πηχάκια, πάλι τά πηχάκια αυτά έσκέπαζαν ακριβώς την περιφέρεια χωρίς να αφήνουν κανένα κομμάτι της άσκέπαστο, μά ούτε καί να περισσεύουν. Άλλά είθαμε πώς ένα κομμάτι σπάγγο μέ μήκος ίσο προς τό μήκος των 6 αυτών πήχεων δέν φθάνει για να σκεπάση όλη την περιφέρεια. Δοικόν γιατί ό,τι δέν ήταν σωστό για τά 6 πηχάκια θά είναι σωστό για τά 25 πηχάκια;

Αν τά παιδάκια άπαντήσουν: - Γιατί πέρνω ένα κομμάτι σπάγγο ίσο μέ την άπόσταση από την άρχή της ίσιας γραμμής ως τό (χαρακτηριστικό) σημάδι, τό βάζω επάνω στην περιφέρεια καί βλέπω πώς την σκεπάζει όλόκληρη χωρίς να περισσέυη τίποτε - κερδίζουν τό παιχνίδι.

Τό παιχνίδι αυτό επαναλαμβάνεται μία, δύο, δέκα, είκοσι φορές μέχρις ότου όλα τά παιδάκια μάθουν να τό παίξουν μόνα τους όλόκληρο σωστά. Όχι από την πρώτη φορά, αλλά σιγά-σιγά, παίζοντας, τά παιδάκια θά καταλάβουν ότι:

Τό μέτρον ενός μεγέθους εξαρτάται από την μονάδα μετρήσεως καί είναι σταθερόν καί ώρισμένο όταν ή μονάδα μετρήσεως είναι ώρισμένη καί σταθερά, ανεξάρτητα από τό ποιός κάνει αυτή την μέτρησι.

καί

(μή άποδεδειγμένως πλήρεις) μαθηματικοί συλλογισμοί χωρίς πειραματικήν έδραίσωιν οδηγούν συχνά εις έσφαλμένα άποτελέσματα μετρήσεως.

θά περάσουν πολλά χρόνια και θά ἀποκτήση πολλές γνώσεις στό γυμνάσιο, στό πανεπιστήμιο, και πέρα από αυτό, τό κάθε παιδάκι, μέχρι πού νά καταλάβη sé όλο τό βάθος τους όλη τήν σπουδαιότητα πού έχουν αυτά τά δύο συμπεράσματα. Άλλά ως πού νά φτάση σ'αυτή τήν κατανόηση, τά δύο αυτά συμπεράσματα, βαθειά ριζωμένα μέσα του, και σχεδόν λησμωνημένα αλλά με τήν άόρατη παρουσία τους στό ύποσυνείδητο πάντοτε ζωντανή, θά προστατεύουν τό παιδί εις τούς συλλογισμούς του, μέσα στις σπουδές, στις έρευνες και στις επαγγελματικές εφαρμογές του, σαν δύο φύλακες άγγελοι.

Γι'αυτό όταν όλα τά παιδάκια μάθουν καλά αυτό τό παιχνίδι, ή δασκάλα θά κάνη και άλλα παρόμοια παιχνίδια με έλλείψεις, με παραβολές, με ύπερβολές, sé σκετρες και έπειτα με άλλες πιο μπερδεμένες γραμμές. Η πορεία και ή διάρθρωσις του παιχνιδιού είναι πάντοτε ή ίδια: μετρούμε με πηχάκια πού έπειτα τά κόβουμε στην μέση, κι'αυτά πάλι στην μέση, κι'έκείνα πάλι στη μέση, κ.ο.κ. , χρησιμοποιούμε κομμάτια από σπάγγο πού τό ένα δεν φτάνει και τό άλλο περισσεύει, και προχωρούμε με τόν ίδιο τρόπο, και πάλι, και πάλι, μέχρι πού ό σπάγγος πού μετριέται επάνω στην ίσια γραμμή νά σκεπάζη έντελώς χωρίς νά περισσεύει τήν μπερδεμένη καμπύλη , και κάθε φορά όλα τά παιδάκια, όλα τά παιδάκια, όλα, επαναλαμβάνουν τό ίδιο παιχνίδι.

Στό τέλος αυτή ή μέτρησις τούς γίνεται δεύτερη φύσις.

Στό επόμενο έτος, στην δεύτερη τάξη του Δημοτικού, με τόν ίδιο τρόπο θά μάθουν νά μετρούν τις επιφάνειες, και έπειτα τούς όγκους.

Και όταν κάποτε θά τούς μιλήσουν για ολοκληρώματα σαν νά πρόκειται για κάτι τό μυστηριώδες και καταπληκτικό, τά παιδάκια θά γελάσουν συγκαταβατικά και θά πουν στον καθηγητή τους πως αυτά ε ζ η σ α ν , έκαναν βίωμα βαθειά ριζωμένο μέσα τους, αυθόρμητα γεννημένο από τόν ίδιο τόν έαυτόν τους, τά ολοκληρώματα από τήν πρώτη τάξη του δημοτικού σχολείου. Και τότε τό περισπούδαστο μάθημα του καθηγητού θά είναι για τά παιδιά αυτά ένα διασκεδαστικό παιχνίδι, σαν επανάληψη ενός παιδικού τραγουδιού πού ή ήχώ του φθάνει από τά νηπιακά τους χρόνια.

## Δεύτερο Παιχνίδι

Τό υποκειμενικόν μέτρον

'Η δασκάλα χαράζει στό δάπεδο τῆς τάξεως ἕνα κύκλο μέ ἀκτίνα ἕνα μέτρο.' Ἐπάνω στόν κύκλο χαράζει ἕνα σημάδι.

'Η δασκάλα ἀπλώνει πρός τά παιδιά τά χέρια της, μαζεύει τά δάκτυλα της καί ἐκτείνει μόνο τοὺς δείκτας.

'Η δασκάλα στέκεται μέ τά δύο πόδια ἑπάνω στήν περιφέρεια, κοντά στό σημάδι πού χάραξε.

'Ανακάθεται.

Τά παιδάκια εἶναι ὄρθια μπροστά της, ἔξω ἀπό τόν κύκλο, καί τήν παρακολουθοῦν.

'Η δασκάλα ἀκουμπᾷ δυνατά τόν δείκτη τοῦ ἀριστεροῦ χεριοῦ της ἑπάνω στό χαραγμένο σημάδι. Μέ τόν δείκτη τοῦ ἄλλου χεριοῦ γράφει σιγά-σιγά τήν περιφέρεια, πλησιάζοντας πρός τό σημάδι.

Κυττάζει τά παιδάκια καί τοὺς λέει ἀργά καί μέ ἔμφαση γιά νά τοὺς ἐντυπωθοῦν τά λόγια της: - Πρέπει νά στέκω πάντοτε ἑπάνω στόν κύκλο, μέ τό ἕνα χέρι ἀπό τήν μιά πλευρά καί τό ἄλλο χέρι ἀπό τήν ἄλλη πλευρά τοῦ κορμιοῦ μου. Πῆτε το αὐτό ὅλοι μαζί.

Τά παιδάκια ὅλα μαζί ἐπαναλαμβάνουν τήν φράση τῆς δασκάλας:

- Στέκω πάντοτε ἑπάνω στόν κύκλο μέ τό ἕνα χέρι ἀπό τήν μιά πλευρά καί τό ἄλλο χέρι ἀπό τήν ἄλλη πλευρά τοῦ κορμιοῦ μου.

Κατόπιν ἡ δασκάλα συνεχίζει νά γράφει τήν περιφέρεια μέ τόν δείκτη τοῦ δεξιοῦ χεριοῦ της πλησιάζοντας πρός τόν δείκτη τοῦ ἀριστεροῦ χεριοῦ της πού ἀκουμπᾷ ἀκούνητος ἑπάνω στό χαραγμένο σημάδι.

Κυττάζει τά παιδάκια καί τοὺς λέει ἀργά καί μέ ἔμφαση: - Τά δύο δάκτυλα πλησιάζουν. 'Εγώ στέκω πάντοτε ἀνάμεσα τους. Πῆτε το :

Τά παιδάκια ὅλα μαζί ἐπαναλαμβάνουν:

- Τά δύο δάκτυλα πλησιάζουν. 'Εγώ στέκω πάντοτε ἀνάμεσα τους.

'Η δασκάλα στριμώχνεται ἑπάνω στό ἀριστερό χέρι της. Πλησιάζει τό δεξιό χέρι της στό πλευρό της. Τό σφίγγει ἑπάνω της. "Ἔτσι οἱ δύο δείκτες τῶν χερῶν της, πού πάντοτε ἀκουμποῦν ἑπάνω στήν περιφέρεια, πλησιάζουν μεταξύ τους ὅσο γίνεται περισσότερο.

'Η δασκάλα κυττάζει τά παιδάκια καί ρωτᾷ: - Τί νά κάνω γιά νά φέρω τά δάκτυλα μου πιό κοντά ;

Μερικά ἀπό τά παιδάκια τῆς λένε νά τραβηχθῆ πρός τά πίσω ἔτσι πού

νά βγῆ ἀπό τήν περιφέρεια, καί τότε ἀνεμπόδιστα νά πλησιάσῃ τά δάκτυλα της.

Ἡ δασκάλα τοὺς ἐξηγεῖ πῶς δέν μπορεῖ νά βγῆ ἀπό τήν περιφέρεια. Πρέπει τὸ κορμί της νά βρίσκεται πάντοτε ἀνάμεσα στά δύο χέρια της. Καί ξαναρωτᾷ τὰ παιδάκια : - Τί νά κάνω γιά νά φέρω τά δάκτυλα μου πιό κοντά ;

Τᾶ κυττάζει ἐρωτηματικά, περιμένει λίγο καί ἔπειτα λέει :

- Γιά νά φέρω τά δάκτυλα μου πιό κοντά μικραίνω, ζαρώνω, ζαρώνω.

Ἡ δασκάλα σφίγγεται ὅσο-μπορεῖ γιά νά ζαρῶσῃ. Τά δάκτυλα πλησιάζουν. Τά παιδιά παρακολουθοῦν.

Ἡ δασκάλα ξαναρωτᾷ : - Τώρα τί ἄλλο νά κάνω γιά νά φέρω τά δάκτυλα μου ἀκόμα πιό κοντά ;

Ἔνα παιδάκι τῆς λέει : - Ζάρωσε ἀκόμα :

Ἡ δασκάλα τοῦ ἀπαντᾷ : - "Ἐλα νά μέ βοηθήσῃς. Στάσου ἐσὺ ἐπάνω στό κύκλο. Βάλε τά δακτυλάκια σου ἐκεῖ πού ἔχω ἐγώ τά δικά μου." ἔτσι.

Ἡ δασκάλα τραβιέται πρὸς τά πίσω τοποθετώντας στήν θέση της τὸ παιδάκι.

Τοῦ λέει : - Τώρα ἐσὺ πού εἶσαι πιό μικρό ἀπό μένα μπορεῖς νά μαζέψῃς ἀκόμα τά χερράκια σου. Μάζεψε τα λοιπόν τραβώντας τὸ δάκτυλο σου ἐπάνω στή γραμμὴ ὅπως ἔκανα ἐγώ κρίν, γιατί τώρα ἐσὺ εἶσαι ἐδῶ ἀντὶ γιά μένα.

Τὸ παιδάκι μαζεύει τά χερράκια του. Τά δύο δάκτυλα πλησιάζουν.

Ἡ δασκάλα τοῦ λέει : - Ἀκόμα πιό κοντά. Σφίξου : Ζάρωσε.

Τὸ παιδάκι πάει νά τραβηχθῆ πρὸς τά πίσω γιά νά βγῆ ἀπό τήν περιφέρεια καί ἔτσι νά μπορέσῃ ἀνεμπόδιστα νά πλησιάσῃ περισσότερο τά δάκτυλα του.

Ἡ δασκάλα τὸ ἐμποδίζει. Τοῦ λέει : - "Οχι : πρέπει πάντοτε νά στένης ἐπάνω στή γραμμὴ, ἀνάμεσα στά δύο χέρια σου. Λοιπόν, σφίξου. Ζάρωσε." Τὸ παιδάκι προσπαθεῖ ὅσο μπορεῖ.

Ἡ δασκάλα κυττάζει τὸ πιό μικρόσωμο παιδάκι μέσα στήν τάξη. Τὸ ρωτᾷ : - "Εσὺ πού εἶσαι μικρότερο θέλεις νά βοηθήσῃς τὸ ἄλλο παιδάκι ; Τὸ πιό μικρόσωμο παιδάκι μπαίνει στή θέση τοῦ προηγουμένου. Τὸ παιχνίδι συνεχίζεται μέ τὸν ἴδιον τρόπο. Τὸ καινούργιο παιδάκι μαζεύει τά χερράκια του κι ὕστερα ζαρώνει ὅσο μπορεῖ.

Κατόπιν ἡ δασκάλα προτείνει στήν θέση τοῦ παιδιοῦ νά βάλουν μιά κοῦκλα.



Βάζουν μιιά κούκλα.Μαζεύουν τά χέρια της όπως ΐκανε ή δασκάλα,τό πρώτο παιδάκι,τό δεύτερο παιδάκι.

Ή δασκάλα ΐξηγει με ΐπιμονή: -ή κούκλα μπηκε στη θέση σου αντί για σένα. ΐίναι σαν να ΐσαι σύ.Μικραίνει αντί για σένα.

Όταν πλησιάσουν τά χέρια της πρώτης κούκλας όσο γίνεται,τήν αντι-καθιστούν από μιιά ΐλλη κούκλα πιό μικρή.

Ή δασκάλα ΐπαναλαμβάνει πάλι ακούραστα: - ή κούκλα μπηκε στην θέση τήν δική σου. ΐσαι σύ ή ΐδια πού ΐγινες πιό μικρή.

Τό ΐδιο πράγμα ΐπαναλαμβάνεται με πιό μικρή κούκλα,πιό μικρή κούκλα,ΐκόμα πιό μικρή κούκλα, ΐκόμα ΐκόμα πιό μικρή κούκλα.Καί ΐταν πιιά ή κούκλα ΐίναι τόσο μικρή πού οΐτε να πιάνεται,οΐτε να φαίνεται,τό παιχνίδι σταματάει.

Τό παιχνίδι αυτό ΐπαναλαμβάνεται μιιά,δύο,τρεις,δέκα,ΐκοσι,ΐκατό φορές ΐτσι πού όλα τά παιδιά να μάθουν στην ΐντέλεια και να τό παί-ζουν μόνο τους χωρίς λάθος από τήν ΐρχή ως τό τέλος.

Καί τό παιχνίδι αυτό θά ΐπαναλαμβάνεται, και θά ΐπαναλαμβάνεται, και θά ΐπαναλαμβάνεται μέχρις ΐτου τά παιδάκια τό ΐνα μετά τό ΐλλο φθάσουν όλα να πουνε στην δασκάλα τους: - Δέν χρειάζεται να σφιγγόμαστε και να ζαρώνουμε και να βάζουμε κούκλες μικρές,και πιό μικρές και ΐκόμα πιό μικρές.Αυτό τό ζάρωμα γίνεται και με τή φαντασία μας.Φανταζόμαστε πως γινόμαστε ΐλο και πιό μικρά παιδάκια,ΐλο και πιό μικρά παιδάκια,χωρίς να βγαίνωμε από τήν γραμμή του κύκλου, με τό ΐνα χέρι στο ΐνα πλευρό και τό ΐλλο χέρι στο ΐλλο πλευρό του κορμιού μας. ΐτσι ζαρώνομε ΐλο και πιό πολύ και γινόμαστε ΐλο και πιό μικρά παιδάκια,ΐλο και πιό μικρά παιδάκια και τά δάντυλα μας πλησιάζουν ΐλο και πιό πολύ τό ΐνα προς τό ΐλλο χωρίς ΐμετς να πά-φωμε να στέκομε ΐνάμεσα τους.

Ή δασκάλα τά ρωτάει: -ΐτσι πόσο πολύ μπορούν να πλησιάσουν τά δά-κτυλα σας ;

Καί τά παιδάκια ΐπαντούν : - Όσο θέλομε :

Κάθε παιδάκι πού λέει τς λέξεις αυτές περνάει μέσα από τό ΐπειρο-στό και μπαίνει μέσα σΐνα καινούργιο κόσμο. Με τήν πάροδο του χρό-νου, όσο τό μυαλό του θά ΐναπτύσσεται και οί γνώσεις του θά αυξά-νουν, τό παιδί ΐλο και περισσότερο θά ΐρχιση να διακρίνη,να καταλα-βαίνη και να καρποΐται τόν καινούργιο κόσμο πού του χαρίσαμε και ο-που ΐλάχιστοι ΐνθρωποι πριν από αυτό ΐΐχαν τήν ΐξαιρετική τύχη να ΐΐέλθουν.

## Αντί βιβλιογραφίας

Δέν κάθησα νά διαβάσω δέκα, εΐκοσι ή πενήντα βιβλία γιά νά γράψω τό Έργον αυτό ώστε τώρα νά μπορώ νά παραθέσω Ένα κατάλογο βιβλίων επάνω στό θέμα καί νά πώ πώς Έτσι υπάρχει στό Έργο μου τοϋτο αντίλη-  
θηκεν από τά βιβλία εκείνα. Τό Έργο τοϋτο εΐναι τό καταστάλαγμα μιās όλόκληρης ζωής, μάλλον θυελλώδους, πού τήν πέρασα σέ πολλά Πα-  
νεπιστήμια καί Πολυτεχνεία τής Εϋρώπης, σέ τεχνικά Γραφεία καί Έρ-  
γοτάξια σέ πολλές χώρες, σέ συνέδρια διεθνή καί τοπικά, σέ συζητήσεις  
μέ κάθε νοοτροπίας καί μορφώσεως ανθρώπους, σέ συμφωνίες, διαφωνίες  
καί διαπληκτισμούς. Τί νόημα Έχει λοιπόν νά παραθέσω Ένα κατάλογο  
από βιβλία όλιγώτερο ή περισσότερο καλά ; 'Αντί γι' αυτό κάνω κάτι  
άλλο πού τό θεωρώ πολύ πιο χρήσιμο. Δηλαδή : καθιστώ γνωστό στους  
ένδιαφερομένους Έτι στό 'Ινστιτούτο διαθέτω μιὰ πλούσια καί ενημε-  
ρωμένη βιβλιοθήκη επάνω στά θέματα αυτά. "Οποιος θέλει μπορεί νά Έρ-  
χεται εδώ καί νά μελετά. "Όταν Έχω χρόνο καί κέφι θά κάνω Έτι μπο-  
ρώ γιά νά τόν βοηθώ νά βρΐσκη καί νά καταλαβαΐνη αυτό πού ζητά.

Παράλληλα, Έποιος θέλει μπορεί νά Έλθη στό 'Ινστιτούτο γιά νά  
τοϋ δώσω δωρεάν δύο βιβλία μου επάνω σ' αυτά τά θέματα. Τό Ένα (στή  
γαλλική γλώσσα) εΐναι Ένα αναλυτικό λεξικό τών κυριωτέρων Έρων καί  
έννοιών τών μοντέρνων μαθηματικών. Τό άλλο ( στήν άγγλική) εΐναι ή  
θεωρητική ανάπτυξης τοϋ δευτέρου παιχιδιού τοϋ τετάρτου κεφαλαίου.

'Η καθ' οΐονδήποτε τρόπον αναπαραγωγή τοϋ βιβλίου αυτού,  
μετάφρασις, παράφρασις, κλπ., εν μέρει ή εν όλω, απαγορεύεται.  
COPYRIGHT 1972 διὰ Κλέωνα ΜΑΡΙΝΑΚΗ τοϋ Έμμανουήλ



0020560582

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής





FOTO-OFFSET

Σ. ΛΕΩΝΙΔΗΣ - & ΜΑΣΤΡΟΓΙΑΝΝΗΣ  
ΠΟΤΑΡΑ 39 ΑΘΗΝΑΙ - ΤΗΛ. 98.26.902

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής