ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Γ΄ Τεχνικοῦ Λυκείου

ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Γεωργίου Ἰ. Γαλιώτου
ΦΥΣΙΚΟΥ ΗΛΕΚ. ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Ἀποστόλου Π. Ἀτματζίδη
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΟΥ Η/Υ

1954

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

ΧΡΥΣΟΥΝ ΜΕΤΑΛΛΙΟΝ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ

Ὁ Εὐγένιος Εὐγενίδης, ὁ ἱδρυτής καί χορηγός τοῦ «Ἱδρύματος Εὐγενίδου», πολύ νωρίς πρόβλεψε καί σχημάτισε τήν πεποίθηση ὅτι ἡ ἄρτια κατάρτιση τῶν τεχνικῶν μας, σέ συνδυασμό μέ τήν ἐθνική ἀγωγή, θά ἦταν ἀναγκαῖος καί ἀποφασιστικός παράγοντας τῆς προόδου τοῦ Ἔθνους μας.

Τήν πεποίθησή του αὐτή ὁ Εὐγενίδης ἐκδήλωσε μέ τή γενναιόφρονα πράξη εὐεργεσίας, νά κληροδοτήσει σεβαστό ποσό γιά τή σύσταση Ἱδρύματος πού θά εἶχε σκοπό νά συμβάλλει στήν τεχνική ἐκπαίδευση τῶν νέων τῆς Ἑλλάδας.

Ἔτσι τό Φεβρουάριο τοῦ 1956 συστήθηκε τό «Ἵδρυμα Εὐγενίδου», τοῦ ὁποίου τήν διοίκηση ἀνέλαβε ἡ ἀδελφή του κυρία Μαριάνθη Σίμου, σύμφωνα μέ τήν ἐπιθυμία τοῦ διαθέτη.

Ἀπό τό 1956 μέχρι σήμερα ἡ συμβολή τοῦ Ἱδρύματος στήν τεχνική ἐκπαίδευση πραγματοποιεῖται μέ διάφορες δραστηριότητες. Ὅμως ἀπ' αὐτές ἡ σημαντικότερη, πού κρίθηκε ἀπό τήν ἀρχή ὡς πρώτης ἀνάγκης, εἶναι ἡ ἔκδοση βιβλίων γιά τούς μαθητές τῶν τεχνικῶν σχολῶν.

Μέχρι σήμερα ἐκδόθηκαν 150 τόμοι βιβλίων, πού ἔχουν διατεθεῖ σέ πολλά ἑκατομμύρια τεύχη, καί καλύπτουν ἀνάγκες τῶν Κατώτερων καί Μέσων Τεχνικῶν Σχολῶν τοῦ Ὑπ. Παιδείας, τῶν Σχολῶν τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἀπασχολήσεως Ἐργατικοῦ Δυναμικοῦ (ΟΑΕΔ) καί τῶν Δημοσίων Σχολῶν Ἐμπορικοῦ Ναυτικοῦ.

Μοναδική φροντίδα τοῦ Ἱδρύματος σ' αὐτή τήν ἐκδοτική του προσπάθεια ἦταν καί εἶναι ἡ ποιότητα τῶν βιβλίων, ἀπό ἄποψη ὄχι μόνον ἐπιστημονική, παιδαγωγική καί γλωσσική, ἀλλά καί ἀπό ἄποψη ἐμφανίσεως, ὥστε τό βιβλίο νά ἀγαπηθεῖ ἀπό τούς νέους.

Γιά τήν ἐπιστημονική καί παιδαγωγική ποιότητα τῶν βιβλίων, τά κείμενα ὑποβάλλονται σέ πολλές ἐπεξεργασίες καί βελτιώνονται πρίν ἀπό κάθε νέα ἔκδοση.

Ἰδιαίτερη σημασία ἀπέδωσε τό Ἵδρυμα ἀπό τήν ἀρχή στήν ποιότητα τῶν βιβλίων ἀπό γλωσσική ἄποψη, γιατί πιστεύει ὅτι καί τά τεχνικά βιβλία, ὅταν εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα ἄρτια καί ὁμοιόμορφη ἀλλά καί κατάλληλη γιά τή στάθμη τῶν μαθητῶν, μποροῦν νά συμβάλλουν στήν γλωσσική διαπαιδαγώγηση τῶν μαθητῶν.

Ἔτσι μέ ἀπόφαση πού πάρθηκε ἤδη ἀπό τό 1956 ὅλα τά βιβλία τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Τεχνίτη, δηλαδή τά βιβλία γιά τίς Κατώτερες Τεχνικές Σχολές, ὅπως ἀργότερα καί γιά τίς Σχολές τοῦ ΟΑΕΔ, εἶναι γραμμένα σέ γλώσσα δημοτική μέ βάση τήν γραμματική τοῦ Τριανταφυλλίδη, ἐνῶ ὅλα τά ἄλλα βιβλία εἶναι γραμμένα στήν ἁπλή καθαρεύουσα. Ἡ γλωσσική ἐπεξεργασία τῶν βιβλίων γίνεται ἀπό φιλολόγους τοῦ Ἱδρύματος καί ἔτσι ἐξασφαλίζεται ἡ ἑνιαία σύνταξη καί ὁρολογία κάθε κατηγορίας βιβλίων.

Ἡ ποιοτητα τοῦ χαρτιοῦ, τό εἶδος τῶν τυπογραφικῶν στοιχείων, τά σωστά σχήματα καί ἡ καλαίσθητη σελιδοποίηση, τό ἐξώφυλλο καί τό μέγεθος τοῦ βιβλίου περιλαμβάνονται καί αὐτά στίς φροντίδες τοῦ Ἱδρύματος.

Τό Ἵδρυμα θεώρησε ὅτι εἶναι ὑποχρέωσή του, σύμφωνα μέ τό πνεῦμα τοῦ ἱδρυτή του, νά θέσει στήν διάθεση τοῦ Κράτους ὅλη αὐτή τήν πείρα του τῶν 20 ἐτῶν, ἀναλαμβάνοντας τήν ἔκδοση τῶν βιβλίων καί γιά τίς νέες Τεχνικές καί Ἐπαγγελματικές Σχολές καί τά νέα Τεχνικά καί Ἐπαγγελματικά Λύκεια, σύμφωνα μέ τά Ἀναλυτικά Προγράμματα τοῦ Κ.Ε.Μ.Ε.

Τά χρονικά περιθώρια γι' αὐτή τήν νέα ἐκδοτική προσπάθεια ἦταν πολύ περιορισμένα καί ἴσως γι' αὐτό, ἰδίως τά πρῶτα βιβλία αὐτῆς τῆς σειρᾶς, νά παρουσιάσουν ἀτέλειες στή συγγραφή ἤ στήν ἐκτύπωση, πού θά διορθωθοῦν στή νέα τους ἔκδοση. Γι' αὐτό τό σκοπό ἐπικαλούμαστε τήν βοήθεια ὅλων ὅσων θά χρησιμοποιήσουν τά βιβλία, ὥστε νά μᾶς γνωστοποιήσουν κάθε παρατήρησή τους γιά νά συμβάλλουν καί αὐτοί στή βελτίωση τῶν βιβλίων.

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ 1954

Γ' ΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΓΑΛΙΩΤΟΥ
ΦΥΣΙΚΟΥ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ
ΔΙΠΛΩΜ. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΡΙΣΙΩΝ

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ Π. ΑΤΜΑΤΖΙΔΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΟΥ Η/Υ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Κ.Α.Τ.Ε.Ε. ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΑΘΗΝΑ
1981

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό βιβλίο αὐτό ἀπευθύνεται στούς μαθητές τῆς Γ΄ τάξεως τῶν ἐπαγγελματικῶν Λυκείων καί ἔχει γραφεῖ σύμφωνα μέ τό ἀναλυτικό πρόγραμμα τοῦ ΚΕΜΕ. Ἡ ὕλη του καλύπτει θέματα δομῆς καί λειτουργίας τῶν ψηφιακῶν καί ἀναλογικῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν καί συμπληρώνει συγχρόνως τήν ὕλη τῆς Β΄ τάξεως μέ τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ συμπληρώματος ἑνός ἀριθμοῦ καί τῆς χρησιμοποιήσεώς του ἀπό τούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές γιά τήν ἐκτέλεση τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

Καταβλήθηκε ἰδιαίτερη προσπάθεια ὥστε τά διάφορα θέματα νά ἀναπτυχθοῦν μέ ἁπλότητα καί ἱκανοποιητική λεπτομέρεια καί σύμφωνα μέ τίς τελευταῖες μέχρι τίς ἡμέρες μας τεχνολογικές ἐξελίξεις. Πιστεύομε ὅτι τό βιβλίο αὐτό θά ἀποτελέσει ἕνα εὔκολο καί χρήσιμο βοήθημα γιά τούς μαθητές σέ θέματα δομῆς καί λειτουργίας τῶν Η/Υ.

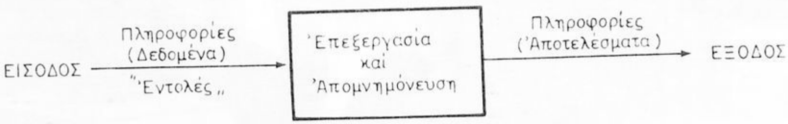
Εὐχαριστοῦμε τήν Ἐπιτροπή Ἐκδόσεων τοῦ Ἱδρύματος Εὐγενίδου πού φρόντισε γιά τήν ὅσο τό δυνατό ἄρτια παρουσίαση τοῦ βιβλίου. Ἰδιαίτερα εὐχαριστοῦμε τόν καθηγητή τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Γεώργιο Φιλοκύπρου πού εἶχε τήν καλωσύνη νά διεξέλθει ὑπομονετικά τά χειρόγραφα καί νά βοηθήσει αἰσθητά στήν πραγματοποίηση τοῦ σκοποῦ στόν ὁποῖο ἀποβλέπει τό περιεχόμενο τοῦ βιβλίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

0.1 Τί εἶναι ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής.

Οἱ ἠλεκτρονικοί ὑπολογιστές (computers) χρησιμοποιοῦνται σήμερα σέ κάθε ἀνθρώπινη δραστηριότητα γιά τή διεκπεραίωση διαφόρων ἐργασιῶν. Παραδείγματος χάρη οἱ λογαριασμοί τοῦ τηλεφώνου, τοῦ νεροῦ καί τοῦ ἠλεκτρικοῦ ἐκδίδονται καί ἐκτυπώνονται μέ ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή. Ἀκόμα οἱ κρατήσεις θέσεων στό ἀεροπλάνο, ὅταν πρόκειται νά ταξιδέψομε, ἡ πρόβλεψη τοῦ καιροῦ, ἡ αὐτόματη καθοδήγηση τῶν πυραύλων, ὁ αὐτόματος ἔλεγχος παραγωγῆς σέ ἐργοστάσια (π.χ. βιομηχανία παραγωγῆς χαρτιοῦ, ἠλεκτρικῆς ἐνέργειας κλπ.) γίνονται σήμερα μέ τή χρησιμοποίηση ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Ὁ σημερινός ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής δέχεται δεδομένα ὑπό μορφή ἀριθμητικῶν καί ἀλφαβητικῶν πληροφοριῶν, τά ὁποῖα ἐπεξεργάζεται μέ «ἐντολές» μέ τίς ὁποῖες τόν τροφοδοτοῦμε. Τό ἰδιαίτερο χαρακτηριστικό, πού τούς ξεχωρίζει ἀπό ἄλλες διατάξεις πού ἐκτελοῦν ὑπολογισμούς (π.χ. λογαριθμικός κανόνας, ταμιακή μηχανή κλπ.) εἶναι ὅτι πέρα ἀπό τά δεδομένα, ἀπομνημονεύει καί τίς ἐντολές πού τοῦ δίνομε μέ τίς ὁποῖες θά τά ἐπεξεργασθεῖ. Ἡ ὅλη ἐπεξεργασία μετά τήν εἰσαγωγή τῶν δεδομένων καί τῶν ἐντολῶν γίνεται αὐτόματα καί χωρίς τήν ἐπέμβασή μας. Συνοπτικό διάγραμμα τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ δίνεται στό σχῆμα 0.1α.

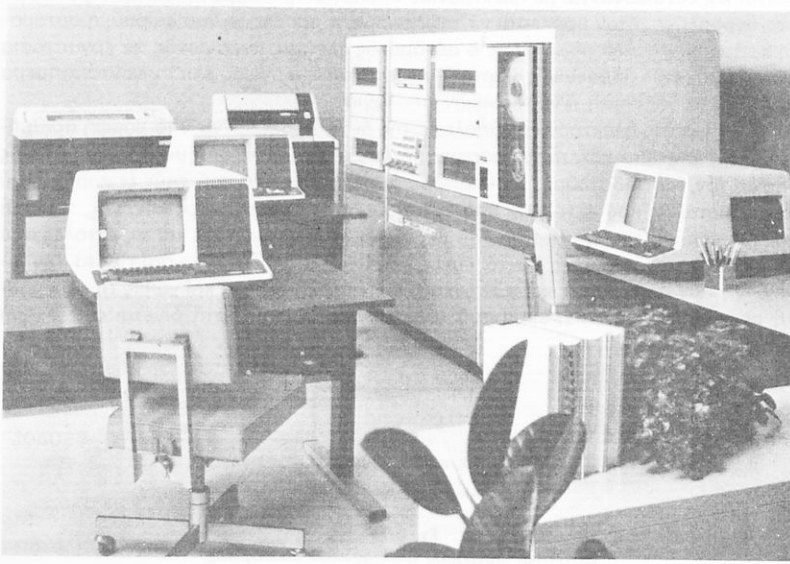


Σχ. 0.1α.
Συνοπτικό διάγραμμα ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ.

Ἕνας σύγχρονος ηλεκτρονικός ὑπολογιστής ἀποτελεῖται ἀπό ἠλεκτρικά καλώδια, τρανζίστορ, ἀντιστάσεις, πυκνωτές (συχνά σέ μορφή ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων) συνδεσμολογημένα ἔτσι ὥστε νά ἀποτελοῦν μεγαλύτερες ἠλεκτρονικές διατάξεις. Οἱ διατάξεις αὐτές συγκροτοῦν μεγαλύτερες μονάδες, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ κεντρική μονάδα ὑπολογισμῶν, ἡ κεντρική μνήμη, ἡ μονάδα ἐλέγχου κλπ. Μέ συνδυασμό τῶν στοιχείων πού ἀναφέραμε μέ ἠλεκτρομηχανικά στοιχεῖα (κινητῆρες, ἀντλίες κενοῦ κλπ.) συγκροτοῦνται μονάδες ὅπως ἡ μονάδα μαγνητικῆς ταινίας, ὁ ἀναγνώστης διατρήτων δελτίων, ἡ μονάδα μαγνητικοῦ δίσκου κλπ. Οἱ μονάδες αὐτές συνδέονται μεταξύ τους ἠλεκτρικά μέ καλώδια καί συγκροτοῦν ἕνα μεγαλύτερο καί πλῆρες σύστημα πού τό ὀνομάζομε σύστημα ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ ἤ ἁπλά ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή (computer system ἤ computer).

Ἕνα τέτοιο σύστημα μπορεῖ νά δεχθεῖ ἕνα μεγάλο ἀριθμό δεδομένων στήν εἴσοδό του, νά τά ἐπεξεργασθεῖ μέ μεγάλη ταχύτητα (π.χ. ὁ χρόνος προσθέσεως δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν εἶναι τῆς τάξεως τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ τοῦ δευτερολέπτου - μsec) καί νά μᾶς δώσει τά ἀποτελέσματα στήν ἔξοδό του εἴτε τυπωμένα σέ χαρτί μέ ταχύτητα περίπου 60 - 3000 χαρακτῆρες / sec εἴτε ὑπό μορφή σχεδίου ἐκτυπώσεως σέ χαρτί ἤ σέ ὀθόνη ἤ ἄλλη μορφή.

Τό μέγεθος ἑνός σύγχρονου ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ ποικίλλει. Μπορεῖ νά εἶναι μία μικρή ἐπιτραπέζια συσκευή, ἀλλά μπορεῖ ἐπίσης νά εἶναι καί ἕνα συγκρότημα διατάξεων (μονάδων), πού συνεργάζονται μεταξύ τους ὅπως μιά ἑνιαία μηχανή. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ ὑπολογιστής μπορεῖ νά καταλαμβάνει ἕνα χῶρο περίπου 20 ὥς 450 m^2. Στά σχήματα 0.1β καί 0.1γ παριστάνονται χαρακτηριστικοί τύποι συγχρόνων ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

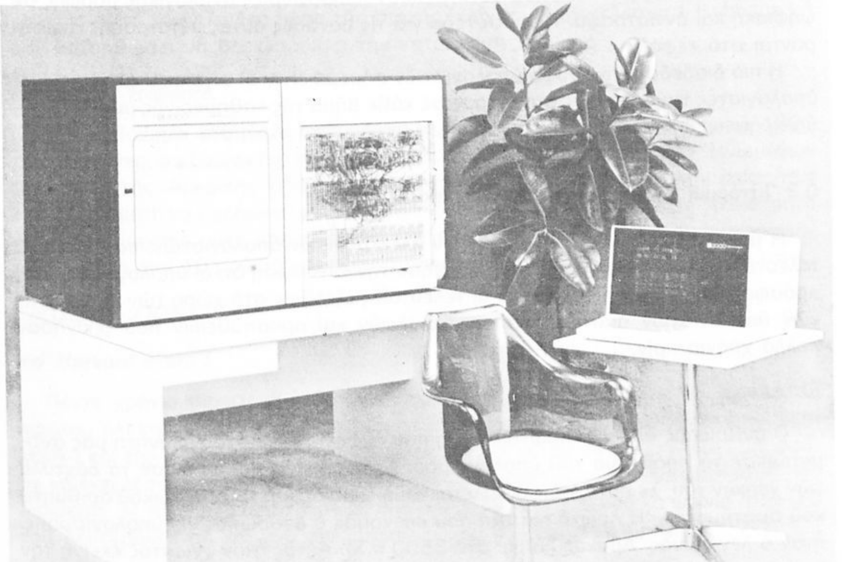


Σχ. 0.1β.

Οἱ ὑπολογιστές τῶν σχημάτων 0.1β καί 0.1γ εἶναι ψηφιακοί ὑπολογιστές. Στό σχῆμα 0.1δ παριστάνεται ἕνας σύγχρονος ἀναλογικός ὑπολογιστής.

Πῶς λειτουργεῖ ὅμως ἕνας σύγχρονος ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής; Σέ γενικές γραμμές μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι αὐτός ἀπό κατασκευῆς δέχεται καί ἀναγνωρίζει ἕναν ὁρισμένο ἀριθμό ἐντολῶν. Γιά τήν ἐπίλυση ἑνός προβλήματος ἤ γενικότερα γιά τή διεκπεραίωση μιᾶς ἐργασίας μέ ὑπολογιστή, τόν τροφοδοτοῦμε μέ τά δεδο-

Σχ. 0.1γ.



Σχ. 0.1δ.

μένα τοῦ προβλήματος καί ἕνα ὁρισμένο σύνολο ἐντολῶν τό ὁποῖο τόν καθοδηγεῖ πῶς νά λειτουργήσει γιά τήν ἐπίλυση ἑνός προβλήματος. Τό σύνολο αὐτό τῶν ἐντολῶν τό ὀνομάζομε «πρόγραμμα» τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συγκεκριμένου προβλήματος.

0.2 Τύποι ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Οἱ ἠλεκτρονικοί ὑπολογιστές πού ἀναφέραμε ὀνομάζονται ***ψηφιακοί ὑπολογιστές*** (digital computers). Σέ αὐτούς οἱ ἀριθμοί παριστάνονται μέ ἕνα σύνολο ψηφίων συνήθως στό δυαδικό ἀριθμητικό σύστημα.

Μιά ἄλλη κατηγορία ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν εἶναι οἱ ***ἀναλογικοί ὑπολογιστές*** (analog computers). Σέ αὐτούς ἡ ἀναπαράσταση ἑνός ἀριθμοῦ γίνεται μέ τήν τιμή ἑνός ἀνάλογου φυσικοῦ μεγέθους, συνήθως μιᾶς ἠλεκτρικῆς τάσεως ἤ ρεύματος ἤ ἀκόμα τοῦ μήκους.

Οἱ ἀναλογικοί ὑπολογιστές χρησιμοποιοῦνται συνήθως γιά τή γρήγορη ἐπίλυση διαφορικῶν ἐξισώσεων ὅταν δέ θέλομε μεγάλη ἀκρίβεια στή λύση. Ἀναλογικός ὑπολογιστής μπορεῖ νά θεωρηθεῖ καί ὁ λογαριθμικός κανόνας.

Μία τρίτη κατηγορία εἶναι οἱ ***μικτοί*** ἤ ***ὑβριδικοί ὑπολογιστές*** (hybrid computers). Οἱ ὑπολογιστές αὐτοί ἀποτελοῦν συνδυασμό τῶν ψηφιακῶν καί ἀναλογικῶν ἔτσι ὥστε νά συνδυάζονται τά πλεονεκτήματα κάθε κατηγορίας. Ὁ συνδυασμός αὐτός γίνεται μέ εἰδικές μονάδες πού μετατρέπουν πληροφορίες ἀναλογικῆς μορφῆς σέ ψηφιακή καί ἀντίστροφα. Περισσότερα γιά τίς μονάδες αὐτές μετατροπῆς ἀναφέρονται στό κεφάλαιο 9.

Ἡ πιό διαδεδομένη μορφή ὑπολογιστῶν σήμερα εἶναι οἱ ψηφιακοί ἠλεκτρονικοί ὑπολογιστές τούς ὁποίους συναντᾶμε σέ κάθε βῆμα τῆς καθημερινῆς μας ζωῆς (ἐπιχειρήσεις, ἐργαστήρια, ὀργανισμούς, ἐκπαιδευτικά ἱδρύματα κλπ.).

0.3 Ἱστορική ἐξέλιξη ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Ἡ μεγάλη πρόοδος στόν τομέα τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, πού ἔγινε τά τελευταῖα 20 περίπου χρόνια, δημιούργησε τήν ἐντύπωση ὅτι οἱ ὑπολογιστές εἶναι πρόσφατη ἀνακάλυψη. Ἀντίθετα οἱ τελευταῖες ἐξελίξεις στό χῶρο τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν ἀποτελοῦν συνέχεια ἰδεῶν καί προσπαθειῶν πού ξεκίνησαν πολλά χρόνια πρίν.

α) Ἄβακας.

Ὁ ἄνθρωπος ἀπό τήν πρώτη στιγμή πού ἐμφανίσθηκε στόν πλανήτη μας ἀντιμετώπισε τό πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ. Στήν ἀρχή χρησιμοποίησε τά δάχτυλα τῶν χεριῶν του. Σέ αὐτό ἴσως ὀφείλεται καί ἡ ἐπικράτηση τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος. Ἡ πρώτη διάταξη πού ἐπενόησε ὁ ἄνθρωπος γιά ὑπολογισμούς. ἦταν ὁ λεγόμενος Ἄβακας (γύρω στό 3500 π.Χ). Αὐτός ἦταν γνωστός ἐκείνη τήν ἐποχή στήν Ἀσία καί τή Μέση Ἀνατολή καί ἔμοιαζε μέ τό γνωστό μας ἀριθμητήριο.

Μετακινώντας τίς χάνδρες πού εἶχε μπορούσαμε νά σχηματίσομε ἀριθμούς καί νά ἐκτελέσομε στοιχειώδεις ἀριθμητικές πράξεις πάνω σέ αὐτούς.

β) Λογαριθμικός κανόνας.

Χρειάσθηκε νά περάσουν άρκετοί αιώνες χωρίς καμιά βελτίωση στά ύπολογιστικά μέσα γιά νά φθάσομε έτσι στίς άρχές τοῦ 17ου αιώνα πού έχομε τήν έμφάνιση τοῦ γνωστοῦ μας λογαριθμικοῦ κανόνα.

γ) Μηχανή τοῦ Pascal.

Τήν ϊδια περίπου εποχή καί συγκεκριμένα τό 1642 ό μεγάλος Pascal, στήν προσπάθειά του νά βοηθήσει στούς ύπολογισμούς τόν πατέρα του, πού ήταν έφοριακός, κατασκεύασε μιά μηχανή μέ όδοντωτούς τροχούς στήν περιφέρεια τῶν όποίων έτοποθέτησε τούς άριθμούς. Ή μηχανή τοῦ Pascal μποροῦσε νά κάνει πρόσθεση καί άφαίρεση. Ή ϊδια μηχανή βελτιώθηκε τό 1694, άπό τό Γερμανό μαθηματικό Leibnitz. Ή νέα μηχανή τώρα μποροῦσε νά έκτελέσει καί τίς δύο άλλες άριθμητικές πράξεις, δηλαδή τόν πολλαπλασιασμό καί τή διαίρεση.

δ) Μηχανή Babbage.

Άπό τότε έχομε μιά συνεχή προσπάθεια γιά βελτίωση τῶν ύπολογιστικῶν μηχανῶν μέ ούσιαστικό σταθμό τό 1835. Τή χρονιά αύτή ό Άγγλος Babbage σχεδίασε ένα νέο τύπο ύπολογιστικῆς μηχανῆς, τήν περίφημη «Άναλυτική μηχανή». Ή μηχανή αύτή μποροῦσε νά άπομνημονεύει πληροφορίες καί όδηγίες γιά έπεξεργασία τῶν πληροφοριῶν αύτῶν. Δυστυχῶς όμως ή κατασκευή της ήταν πρακτικά άνέφικτη μέ τά τεχνολογικά μέσα τῆς έποχῆς έκείνης μέ άποτέλεσμα ό Babbage νά μήν κατορθώσει νά όλοκληρώσει τήν κατασκευή της.

ε) Μηχανή Hollerith.

Έτσι φθάνομε στό τέλος τοῦ περασμένου αιώνα καί συγκεκριμένα τό 1880 πού ή άνάγκη έπεξεργασίας τῶν άποτελεσμάτων τῆς άπογραφῆς τῶν Ήνωμένων Πολιτειῶν τῆς Άμερικῆς, όδήγησε τόν ύπάλληλο τῆς στατιστικῆς ύπηρεσίας τῶν Η.Π.Α Hollerith νά σχεδιάσει καί νά κατασκευάσει μία μηχανή μέ βάση τό διάτρητο δελτίο. Ή μηχανή αύτή μποροῦσε νά έπεξεργασθεῖ τά δεδομένα τῆς άπογραφῆς σέ 3 χρόνια άντί 10 πού θά χρειαζόντουσαν μέ τά μέσα πού ύπῆρχαν μέχρι τότε.

ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΑΙΩΝΑΣ.

στ) Harvard Marc I.

Πέντε χρόνια άργότερα καί συγκεκριμένα τό 1944 έχομε τήν έμφάνιση τοῦ πρώτου ήλεκτρομηχανικοῦ ύπολογιστικοῦ συστήματος πού όνομάσθηκε Harvard Mark I καί εἶχε διαστάσεις 15 μέτρα μῆκος καί 2,4 μέτρα ϋψος. Ό Mark I μποροῦσε νά έκτελέσει τίς 4 βασικές πράξεις: πρόσθεση, άφαίρεση, πολλαπλασιασμό καί διαίρεση. Ή ταχύτητα προσθέσεως δύο άριθμῶν μέ 23 δεκαδικά ψηφία ήταν 0,3 τοῦ δευτερολέπτου καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 4,5 δευτερόλεπτα.

ζ) Eniac.

Ό Eniac (1944 - 46) άποτελεῖ βελτιωμένη μορφή τοῦ Mark I. Περιεῖχε 10.000 ήλεκτρονικές λυχνίες καί κατανάλωνε ίσχύ 150 kW. Χαρακτηριστικά τῆς ταχύτητας τοῦ Eniac ἦταν ὅτι μποροῦσε νά ἐκτελέσει σέ 2 ὧρες ὑπολογισμούς πού 100 φυσικοί θά χρειαζόντουσαν 1 χρόνο νά κάνουν μέ τό χέρι.

η) Γενεές ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Μέ βελτιώσεις στά ὑπάρχοντα μέχρι τότε ὑπολογιστικά συστήματα φθάνομε στή δεκαετία 1950 - 1960 πού χαρακτηρίζεται ὡς ἡ δεκαετία τῶν συγχρόνων ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Ἀρχικά χρησιμοποιήθηκαν ἀποκλειστικά ἠλεκτρονικές λυχνίες, ἀντιστάσεις, πυκνωτές κλπ. Οἱ ἠλεκτρονικοί ὑπολογιστές πού εἶναι κατασκευασμένοι μέ αὐτό τόν τρόπο λέμε ὅτι ἀνήκουν στή «πρώτη γενεά».

Στή συνέχεια οἱ ἠλεκτρονικές λυχνίες ἀντικατασταθήκανε μέ τρανζίστορς μέ ἀποτέλεσμα τόν περιορισμό τοῦ ὄγκου καί τῆς ἰσχύος πού καταναλώνει ὁ ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής καί μέ παράλληλη αὔξηση τῆς ταχύτητας καί πιστότητάς του. Οἱ ὑπολογιστές οἱ κατασκευασμένοι μέ βάση διακριτά ἠλεκτρονικά στοιχεῖα ὅπως πυκνωτές, ἀντιστάσεις, τρανζίστορς κλπ. λέμε ὅτι ἀνήκουν στή «δεύτερη γενεά». Μέ τήν πρόοδο τῆς τεχνολογίας χρησιμοποιοῦνται στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές τά ὁλοκληρωμένα κυκλώματα μέ ἀκόμα μεγαλύτερο περιορισμό τοῦ μεγέθους καί τῆς ἰσχύος πού καταναλώνουν καί μέ παράλληλα σημαντική αὔξηση τῆς ταχύτητας καί πιστότητάς τους. Ἠλεκτρονικοί ὑπολογιστές κατασκευασμένοι μέ ὁλοκληρωμένα κυκλώματα λέμε ὅτι ἀνήκουν στήν «τρίτη γενεά».

θ) Μικροϋπολογιστές.

Στίς ἀρχές τῆς τρέχουσας δεκαετίας καί συγκεκριμένα τό 1971 ἔχομε τήν ἐμφάνιση τῶν «μικροεπεξεργαστῶν» (microprocessors). Ἕνας μικροεπεξεργαστής σήμερα εἶναι ἕνα ὁλοκληρωμένο κύκλωμα διαστάσεων 1,3 cm × 1,3 cm περίπου, τό ὁποῖο μπορεῖ νά περιλαμβάνει πάνω ἀπό 20.000 ἠλεκτρονικά στοιχεῖα (τρανζίστορς, πυκνωτές κλπ.). Οἱ μικροεπεξεργαστές χαρακτηρίζονται σήμερα ἀπό τή μεγάλη πιστότητα λειτουργίας τους, τό χαμηλό τους κόστος καί τόν πάρα πολύ μικρό χῶρο πού καταλαμβάνουν. Στήν τεχνική τῶν μικροεπεξεργαστῶν ὀφείλεται ἡ ἐμφάνιση τῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν τσέπης (calculators) καί τῶν ψηφιακῶν ρολογιῶν πού ὅλοι μας σχεδόν χρησιμοποιοῦμε.

Ἄν συνδέσομε τούς παραπάνω μικροεπεξεργαστές μέ μονάδες ὅπως μαγνητικό δίσκο, τηλέτυπο, ὀθόνη μέ πληκτρολόγιο, ἐκτυπωτή κλπ., δημιουργοῦμε ἕνα σύστημα ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ πού τό ὀνομάζομε «μικροϋπολογιστή» (microcomputer).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (ΠΡΟΣΘΗΚΕΣ)

1.1 Γενικά.

Ἀπό τήν προηγούμενη τάξη τοῦ Λυκείου μᾶς εἶναι γνωστά τά ἀκόλουθα:

— Τά διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως (δεκαδικό, δυαδικό, ὀκταδικό, δεκαεξαδικό κλπ.).
— Οἱ βασικές ἰδιότητες τῶν συστημάτων αὐτῶν.
— Οἱ ἀριθμητικές πράξεις στά συστήματα αὐτά.

Στή συνέχεια, ἀφοῦ δώσομε μερικά παραδείγματα, μέ τίς τέσσερεις πράξεις στό δυαδικό σύστημα, γιά νά ἐπαναφέρομε τά παραπάνω στή μνήμη μας, θά ὁλοκληρώσομε τό κεφάλαιο τοῦ δυαδικοῦ συστήματος μέ τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ συμπληρώματος ἑνός ἀριθμοῦ. Ἡ ἔννοια αὐτή μᾶς εἶναι ἀπαραίτητη γιά τήν παράσταση τῶν προσημασμένων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Παραδείγματα τῶν 4 πράξεων τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.

α) Πρόσθεση.

$$
\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Δυαδικός}} & & \underline{\text{Δεκαδικός}} \\
\begin{array}{r} 001101 \\ +\underline{100101} \\ 110110 \end{array} & \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \\ \end{array} & \left(\begin{array}{r} 13 \\ +\underline{37} \\ 50 \end{array}\right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Δυαδικός}} & & \underline{\text{Δεκαδικός}} \\
\begin{array}{r} 1010 \\ +\underline{101} \\ 1111 \end{array} & \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \\ \end{array} & \left(\begin{array}{r} 10 \\ +\underline{5} \\ 15 \end{array}\right)
\end{array}
$$

β) Ἀφαίρεση.

$$
\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Δυαδικός}} & & \underline{\text{Δεκαδικός}} \\
\begin{array}{r} 10110 \\ -\underline{01010} \\ 01100 \end{array} & \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \\ \end{array} & \left(\begin{array}{r} 22 \\ -\underline{10} \\ 12 \end{array}\right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Δυαδικός}} & & \underline{\text{Δεκαδικός}} \\
\begin{array}{r} 1011 \\ -\underline{1000} \\ 0011 \end{array} & \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \\ \end{array} & \left(\begin{array}{r} 11 \\ -\underline{8} \\ 3 \end{array}\right)
\end{array}
$$

γ) Πολλαπλασιασμός.

```
Δυαδικός              Δεκαδικός

    11011                27
  ×   101              ×  5
  -------              ----
    11011                ‖
   00000 +               ‖
  11011                  ⇓
 --------
 10000111               135
```

δ) Διαίρεση.

```
     Δυαδικός                 Δεκαδικός

     11110 | 101    ⟺       30 | 5
   −  101  |-----            00 |---
     ----- | 110                | 6
     0101  |
   −  101  |
    -----  |
    00000  |
```

Στά παραπάνω παραδείγματα παρατηροῦμε ὅτι ἡ πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται ἀπό διαδοχικές ὀλισθήσεις * καί προσθέσεις, καί ἡ διαίρεση ἀπό διαδοχικές ὀλισθήσεις καί ἀφαιρέσεις. Μέ τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ συμπληρώματος καί τήν ἀναπαράσταση τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μέ τά συμπληρώματά τους, ἡ ἀφαίρεση μετατρέπεται σέ πρόσθεση. Ἔτσι καταλήγομε νά ἐκτελοῦμε καί τίς 4 πράξεις μέσω τῆς προσθέσεως.

1.2 Συμπλήρωμα Ἀριθμοῦ.

1.2.1 Συμπλήρωμα ψηφίου.

Καλοῦμε συμπλήρωμα ψηφίου α_i ἑνός ἀριθμητικοῦ συστήματος βάσεως β καί τό συμβολίζομε μέ $\overline{\alpha}_i$ τό ψηφίο $\overline{\alpha}_i = (\beta - 1) - \alpha_i$ (1.1)

Ἐπειδή τό (β − 1) εἶναι τό μεγαλύτερο ψηφίο τοῦ συστήματος βάσεως β ὁ ὁρισμός μπορεῖ νά διατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς: «Καλοῦμε συμπλήρωμα ψηφίου α_i συστήματος βάσεως β τή διαφορά τοῦ ψηφίου α_i ἀπό τό μεγαλύτερο ψηφίο τοῦ συστήματος βάσεως β΄΄».

Παραδείγματα.

1) Τό συμπλήρωμα τοῦ ψηφίου 6 στό δεκαδικό σύστημα εἶναι:

$$\overline{6} = (10 - 1) - 6 = 9 - 6 = 3$$

---

* Ὀλίσθηση εἶναι ἡ μετακίνηση ἑνός δυαδικοῦ ἀριθμοῦ πρός τά δεξιά ἤ ἀριστερά.

2) Τό συμπλήρωμα τῶν ψηφίων 1 καί 0 στό δυαδικό σύστημα εἶναι:

$$\overline{1} = (2-1) - 1 = 0$$

$$\overline{0} = (2-1) - 0 = 1$$

Δηλαδή τά δύο ψηφία τοῦ δυαδικοῦ συστήματος εἶναι τό ἕνα συμπλήρωμα τοῦ ἄλλου.

1.2.2 Συμπλήρωμα ἀριθμοῦ N βάσεως β, (N_β), ὡς πρός β.

Ἔστω ὁ ἀριθμός N_β μέ n ἀκέραια ψηφία καί m κλασματικά. Ὀνομάζομε συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ N_β ὡς πρός β καί τό συμβολίζομε μέ $\overline{N_\beta}$ τόν ἀριθμό:

$$\overline{N_\beta} = \beta^n - N_\beta \tag{1.2}$$

Παραδείγματα.

1) Τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_{10} = 219{,}25$ ὡς πρός 10 εἶναι:

$$\overline{N_{10}} = 10^3 - 219{,}25 = 780{,}75$$

2) Τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 110111$ ὡς πρός 2 εἶναι:

$$\overline{N_2} = 2^6 - 110111 = 64^* - 110111 = 1000000 - 110111 = 001001$$

3) Τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 11011$ ὡς πρός 2 εἶναι:

$$\overline{N_2} = 2^5 - 11011 = 32^{**} - 11011 = 100000 - 11011 = 00101$$

4) Τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 110101{,}0110$ ὡς πρός 2 εἶναι:

$$\overline{N_2} = 2^6 - 110101{,}0110 = 1000000 - 110101{,}0110 = 001010{,}1010$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό καί τά παραδείγματα συνεπάγεται εὔκολα ὁ ἑξῆς κανόνας συμπληρώσεως ἀριθμοῦ N_2 ὡς πρός 2.

«Προχωροῦμε ἀρχίζοντας ἀπό τό λιγότερο σημαντικό ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ N_2, μέχρις ὅτου συναντήσομε γιά πρώτη φορά ψηφίο 1 ἀφήνοντας τά ψηφία αὐτά τοῦ N_2 ὅπως ἔχουν (συμπεριλαμβάνεται καί τό πρῶτο 1). Τά ψηφία τά ὁποῖα ἀκολουθοῦν τά συμπληρώνομε, δηλαδή γράφομε 0 ὅπου 1 καί 1 ὅπου 0».

1.2.3 Συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ N_β ὡς πρός (β — 1).

Ἔστω ὁ ἀριθμός N_β μέ n ἀκέραια καί m κλασματικά ψηφία. Ὀνομάζομε συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ N_β ὡς πρός (β — 1) καί τό συμβολίζομε μέ $\underline{N_\beta}$ τόν ἀριθμό:

$$\underline{N_\beta} = \beta^n - N_\beta - \beta^{-m} \tag{1.3}$$

---

* Μετατρέπομε τόν ἀριθμό 64 κατά τά γνωστά σέ δυαδικό ἀριθμό.

** Μετατρέπομε τόν ἀριθμό 32 κατά τά γνωστά σέ δυαδικό ἀριθμό.

Παραδείγματα.

1) Τό σύμπληρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_{10} = 219{,}25$ ὡς πρός 9, δηλαδή $(10 - 1)$ εἶναι:

$$\underline{N_{10}} = 10^3 - 219{,}25 - 10^{-2} = 780{,}74.$$

2) Τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 110101{,}0110$ ὡς πρός 1 εἶναι:

$$\underline{N_2} = 2^6 - 110101{,}0110 - 2^{-4} = 001010{,}1001$$

3) Τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 110101$ ὡς πρός 1 εἶναι:

$$\underline{N_2} = 2^6 - 110101 - 10^0 = 64 - 110101 - 1 = 1000000 - 110100 = 001010$$

4) Τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 110110101$ ὡς πρός 1 εἶναι:

$$\underline{N_2} = 2^9 - 110110101 - 10^0 = 1000000000 - 110110101 - 1 = 001001010$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό (1.3) γιά τό συμπλήρωμα ἑνός ἀριθμοῦ ὡς πρός 1 συνεπάγεται ὁ παρακάτω πρακτικός κανόνας: «Τά ψηφία τοῦ $\underline{N_\beta}$ εἶναι τά συμπληρώματα τῶν ἀντιστοίχων ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ N_β».

Μέ ἄλλα λόγια, ὅπου ὁ ἀριθμός $\underline{N_\beta}$ ἔχει τό ψηφίο «1» ὁ N_β θά ἔχει τό ψηφίο «0» καί ὅπου $\underline{N_\beta}$ ἔχει ψηφίο τό «0» ὁ N_β θά ἔχει «1».

Παραδείγματα.

$$1)\ N_2 = 0110110101 \Longleftrightarrow \underline{N_2} = 1001001010$$

$$2)\ N_2 = 1001010 \Longleftrightarrow \underline{N_2} = 0110101$$

καί παραστατικά:

$$\begin{array}{rccccccc}
\text{Ἀριθμός } N_2 = & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\text{Συμπλήρωμα } \underline{N_2} = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\text{(ὡς πρός 1)} & & & & & & &
\end{array}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1.2) καί (1.3) συνεπάγεται ὅτι:

$$\overline{N_\beta} = \underline{N_\beta} + 1 \tag{1.4}$$

$$\text{ἤ} \quad \overline{N_2} = \underline{N_2} + 1 \text{ στό δυαδικό σύστημα}$$

Ἀπό τή σχέση (1.4) ἔχομε ὅτι τό συμπλήρωμα ὡς πρός 2 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό συμπλήρωμα ὡς πρός 1 κατά μία μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως. Ἀπό τήν παρατήρηση αὐτή ὁδηγούμασθε στήν ἑξῆς μέθοδο εὑρέσεως τοῦ συμπληρώματος ὡς πρός 2.

Στήν ἀρχή βρίσκομε τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρός 1 καί μετά αὐξάνομε τό ἀποτέλεσμα κατά μία μονάδα προσθέτοντάς το στό ψηφίο τῆς τελευταίας τάξεως αὐτοῦ σύμφωνα μέ τή σχέση (1.4).

Παραδείγματα.

1) Νά ὑπολογισθεῖ τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 110111$ ὡς πρός 2.

$$\underline{N_2} = 001000 \text{ καί } \overline{N_2} = \underline{N_2} + 1 = 001000 + 1 = 001001$$

$$\text{ἄρα } \boxed{\overline{N_2} = 001001}$$

2) Νά ὑπολογισθεῖ τό συμπλήρωμα τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 = 0110110101$ ὡς πρός 2.

$$\underline{N_2} = 1001001010 \text{ καί}$$

$$\overline{N_2} = \underline{N_2} + 1 = 1001001010 + 1 = 1001001011$$

$$\text{ἄρα } \boxed{\overline{N_2} = 1001001011}$$

3) Νά ὑπολογισθεῖ τό συμπλήρωμα τοῦ συμπληρώματος τοῦ ἀριθμοῦ $N_2 =$ $= 1010101010$ ὡς πρός 2.

$$\underline{N_2} = 0101010101 \text{ καί}$$

$$\overline{N_2} = \underline{N_2} + 1 = 0101010101 + 1 = 0101010110$$

$$\left(\underline{\overline{N_2}} = 1010101001 \text{ συμπλήρωμα τοῦ } \underline{N_2} \text{ ὡς πρός 2}\right)$$

ἤ σύμφωνα μέ τήν (1.4)

$$\overline{\overline{N_2}} = \underline{\overline{N_2}} + 1 = 1010101001 + 1 = 1010101010 = N_2$$

$$\text{ἄρα } \overline{\overline{N_2}} = N_2$$

Ὥστε: «Τό συμπλήρωμα τοῦ συμπληρώματος ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός».

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα παρατηροῦμε ὅτι ὁ ὑπολογισμός τοῦ συμπληρώματος ἑνός ἀριθμοῦ N_β ὡς πρός 1 εἶναι πάρα πολύ εὔκολος ὅπως τό συμπλήρωμα ὡς πρός 2.

1.3 Παράσταση προσημασμένων ἀριθμῶν.

Στά προηγούμενα ἐξετάσθηκε ἡ παράσταση τῆς ἀπόλυτης τιμῆς καθώς καί οἱ πράξεις στίς ἀπόλυτες τιμές τῶν δυαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ παράσταση προσημασμένων ἀριθμῶν, ὅπως εἶναι γνωστό, γίνεται στήν περίπτωση τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, μέ τή χρησιμοποίηση τοῦ προσήμου + γιά τούς θετικούς ἀριθμούς καί τοῦ προσήμου − γιά τούς ἀρνητικούς ἀριθμούς. Ἡ παράσταση τῶν προσημασμένων δυαδικῶν ἀριθμῶν μπορεῖ ἀσφαλῶς νά γίνει μέ παρόμοιο τρόπο. Στούς ἠλεκτρονικούς ὅμως ὑπολογιστές ἡ παράσταση προσηρμασμένων ἀριθμῶν γίνεται ὅπως θά δοῦμε παρακάτω.

1.3.1 Λέξη ὑπολογιστή.

Στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές οἱ ἀριθμοί παριστάνονται μέ ἕνα πλῆθος ψηφίων τό ὁποῖο εἶναι καθορισμένο γιά κάθε τύπο ὑπολογιστῆ.

Ἕνας ἀριθμός πού ἐκφράζεται μέ τό πλῆθος αὐτό τῶν ψηφίων λέμε ὅτι ἀποτελεῖ μία ΛΕΞΗ τοῦ ὑπολογιστῆ. Ὁ ἀριθμός τῶν ψηφίων μιᾶς λέξεως λέγεται ΜΗΚΟΣ τῆς λέξεως (Μ.Λ).

Ὅταν σέ ἕναν ὑπολογιστή εἰσάγεται ἀριθμός μέ πλῆθος ψηφίων μικρότερα ἀπό τό μῆκος τῆς λέξεως τοῦ ὑπολογιστῆ συμπληρώνομε τόν ἀριθμό κατάλληλα μέ μηδενικά. Π.χ. σέ ἕναν ὑπολογιστή μήκους 6 δεκαδικῶν ψηφίων ὁ ἀριθμός 1543 γράφεται ὡς 001543.

1.3.2 Παράσταση Προσημασμένου Μεγέθους (ΠΠΜ).

Κατά τήν ΠΠΜ χρησιμοποιοῦμε ὡς πρόσημο τό πλέον σημαντικό ψηφίο τῆς λέξεως τοῦ ὑπολογιστῆ. Τά ὑπόλοιπα ψηφία τῆς λέξεως παριστάνουν τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα.

α) Οἱ ἀριθμοί $N_{10} = -28$ παριστάνονται σέ ὑπολογιστή μήκους λέξεως 8 δυαδικῶν ψηφίων ὑπό ΠΠΜ ὡς:

$$N_{10} = +28 \Longleftrightarrow 00011100$$

$$N_{10} = -28 \Longleftrightarrow 10011100$$

β) Ὁ ἀριθμός $N_{10} = 0$ παριστάνεται σέ ὑπολογιστή Μ.Λ. 8 δυαδικῶν ψηφίων ὑπό ΠΠΜ ὡς:

$$N_{10} = 0 \Longleftrightarrow 00000000$$

$$N_{10} = 0 \Longleftrightarrow 10000000,$$

δηλαδή στήν ΠΠΜ ἔχομε δύο παραστάσεις τοῦ 0, τό -0 καί τό $+0$.

1.3.3 Παράσταση Προσημασμένου Συμπληρώματος τοῦ 2 (ΠΠΣ2).

Κατά τήν ΠΠΣ2 λέξη ὑπολογιστῆ ἡ ὁποία ἔχει μῆκος n δυαδικῶν ψηφίων χρησιμοποιεῖται γιά νά παραστήσομε 2^{n-1} θετικούς ἀριθμούς στούς ὁποίους περιλαμβάνεται καί τό 0 καί 2^{n-1} ἀρνητικούς ἀριθμούς. Οἱ θετικοί ἀριθμοί ἐκφράζονται μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τους καί οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί ἐκφράζονται μέ τό συμπλήρωμα ὡς πρός 2 τῆς ἀπόλυτης τιμῆς τους.

Ὕστερα ἀπό αὐτό ὅλοι οἱ θετικοί ἀριθμοί ἔχουν τό πλέον σημαντικό ψηφίο τῆς λέξεως τοῦ ὑπολογιστῆ, τό 0, ἐνῶ ὅλοι οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί ἔχουν τό ψηφίο 1. Ἐπομένως κατά τήν ΠΠΣ2 τό πλέον σημαντικό ψηφίο τῆς λέξεως τοῦ ὑπολογιστῆ παίζει τό ρόλο «ψηφίο πρόσημο».

Παραδείγματα.

α) Οἱ ἀριθμοί $N_{10} = +27$ καί $N_{10} = -27$ παριστάνονται σέ ὑπολογιστή μήκους λέξεως 8 δυαδικῶν ψηφίων ὑπό ΠΠΣ2 ὡς:

$$N_{10} = +27 \Longleftrightarrow \text{ΠΠΣ2} = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0011011}}$$

$$N_{10} = -27 \Longleftrightarrow \text{ΠΠΣ2} = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1100101}}$$

Ἡ παράσταση τοῦ $N_{10} = -27$ προκύπτει διά συμπληρώσεως ὡς πρός 2 τοῦ $N_{10} = +27$.

β) Ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν $N_{10} = +35$ καί $N_{10} = -35$.

$$N_{10} = +35 \iff \text{ΠΠΣ2} = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0100011}}$$

$$N_{10} = -35 \iff \text{ΠΠΣ2} = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1011101}}$$

γ) Οἱ ἀριθμοί ΠΠΣ2 $N_2 = 01101011$ καί ΠΠΣ2 $N_2 = 10101101$ νά τραποῦν σέ δεκαδικούς.

Ἐπειδή ὁ ΠΠΣ2 $N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{1101011}}$ εἶναι θετικός γιατί, τό πλέον σημαντικό ψηφίο του εἶναι τό 0, ἡ μετατροπή του σέ δεκαδικό γίνεται εὔκολα κατά τά γνωστά:

$$N_2 = \underline{0}\ \underline{1101011} = +(1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0) =$$
$$= +(64 + 32 + 8 + 2 + 1) = +107$$

Ἀλλά ὁ ἀριθμός ΠΠΣ2 $N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{0101101}}$ εἶναι ἀρνητικός, γιατί τό πλέον σημαντικό ψηφίο εἶναι τό 1, τήν ἀπόλυτη τιμή του βρίσκομε συμπληρώνοντας τό N ὡς πρός 2.

$$N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{0101101}} = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1010011}} = -(1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 +$$
$$+ 1.2^0) = -(64 + 16 + 2 + 1) = -83$$

1.3.4 Παράσταση Προσημασμένου Συμπληρώματος τοῦ 1 (ΠΠΣ1).

Κατά τήν ΠΠΣ1 ἡ λέξη ὑπολογιστῆ μήκους n δυαδικῶν ψηφίων χρησιμοποιεῖται γιά τήν παράσταση 2^{n-1} θετικῶν ἀριθμῶν καί 2^{n-1} ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Οἱ θετικοί ἀριθμοί ἐκφράζονται μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τους, ἐνῶ οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί ἐκφράζονται μέ τό συμπλήρωμα τοῦ 1 τῆς ἀπόλυτης τιμῆς. Ὅλοι οἱ θετικοί ἀριθμοί ἔχουν ὡς πλέον σημαντικό ψηφίο τῆς λέξεως τοῦ ὑπολογιστῆ τό 0 καί ὅλοι οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί τό 1. Καί ἐδῶ, ὅπως παρατηροῦμε, τό πλέον σημαντικό ψηφίο τῆς λέξεως τοῦ ὑπολογιστῆ παίζει τό ρόλο «ψηφίο πρόσημο».

Παραδείγματα.

α) Οἱ ἀριθμοί $N_{10} = +27$ καί $N_{10} = -27$ παριστάνονται σέ ὑπολογιστή μήκους λέξεως 8 δυαδικῶν ψηφίων ἀπό ΠΠΣ1 ὡς:

$$N_{10} = +27 \iff \text{ΠΠΣ1 } N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0011011}}$$

$$N_{10} = -27 \iff \text{ΠΠΣ1 } N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1100100}}$$

Ἡ παράσταση τοῦ $N_{10} = -27$ προκύπτει μέ συμπλήρωση ὡς πρός 1 τοῦ $N_{10} = +27$.

β) Ὁμοίως τῶν ἀριθμῶν $N_{10} = +35$ καί $N_{10} = -35$.

$$N_{10} = +35 \iff \text{ΠΠΣ1 } N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{0100011}}$$

$N_{10} = -35 \iff$ ΠΠΣ1 $N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{1011100}}$

γ) Οἱ ἀριθμοί ΠΠΣ1 $N_2 = 01101011$ καί ΠΠΣ1 $N_2 = 10101101$ νά τραποῦν σέ δεκαδικούς.

Ἐπειδή ὁ $N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{1101011}}$ εἶναι θετικός τότε ὁ ἀντίστοιχος δεκαδικός βρίσκεται κατά τά γνωστά:

$$N_2 = \underline{\underline{0}}\ \underline{\underline{1101011}} = +(1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0) =$$
$$= +(64 + 32 + 8 + 2 + 1) = +107$$

Ὁ $N_2 = \underline{\underline{1}}\underline{\underline{0101101}}$ εἶναι ἀρνητικός γιατί τό πλέον σημαντικό ψηφίο του εἶναι τό 1. Τήν ἀπόλυτη τιμή του βρίσκομε συμπληρώνοντάς τον πρός 1.

$$N_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{\underline{0101101}} = \underline{1}\ \underline{\underline{1010010}} = -(1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 +$$
$$+ 0.2^0) = -(64 + 16 + 2) = -82$$

1.3.5 Πράξεις στούς προσημασμένους δυαδικούς ἀριθμούς.

Στήν προηγούμενη τάξη τοῦ Λυκείου ἔχομε διδαχθεῖ τήν ἐκτέλεση τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων πάνω στίς ἀπόλυτες τιμές τῶν δυαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀπό τίς 4 αὐτές πράξεις οἱ σπουδαιότερες εἶναι ἡ πρόσθεση καί ἡ ἀφαίρεση. Ὁ πολλαπλασιασμός δυαδικῶν ἀριθμῶν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ, ὅπως ἔχομε ἀναφέρει καί στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, ὡς σύνολο προσθέσεων καί ὀλισθήσεων, ἐνῶ ἡ διαίρεση ὡς σύνολο ἀφαιρέσεων, προσθέσεων καί ὀλισθήσεων. Ἡ πρόσθεση καί ἡ ἀφαίρεση ἀπολύτων τιμῶν δυαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι πράξεις τελείως διαφορετικές μεταξύ τους. Καί ὅμως, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω, μέ τή χρησιμοποίηση τῶν προσημασμένων ἀριθμῶν ὑπό μορφή ΠΠΣ2 ἤ ΠΠΣ1 δέν ἀπαιτεῖται ἀφαίρεση ἀπολύτων τιμῶν. Ὅλες οἱ ἀριθμητικές πράξεις ἐκτελοῦνται μέσω προσθέσεων, συμπληρώσεων καί ὀλισθήσεων.

1.3.6 Ἐφαρμογές μέ δυαδικούς ἀριθμούς ὑπό ΠΠΣ2.

α) Δίνονται οἱ ἀριθμοί $X_{10} = +27$ καί $Y_{10} = -43$ καί ζητεῖται νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σέ ὀκταψήφιο ὑπολογιστή μέ ΠΠΣ2.

$X_{10} = +27 \iff$ ΠΠΣ2 $X_2 = \underline{0}\ \underline{0011011}$

$\underline{Y_{10} = -43} \iff$ $\underline{\text{ΠΠΣ2}\quad Y_2 = 1\ 1010101}$

$X_{10} + Y_{10} = -16 \iff$ ΠΠΣ2 $(X_2 + Y_2) = \underline{1}\ \underline{1110000}$

Ἡ παράσταση $\underline{1}\ \underline{1110000}$ προκύπτει μέ συμπλήρωση ὡς πρός 2 τοῦ $Y_{10} = +43$.

Τό ἐξαγόμενο ἔχει σημαντικό ψηφίο 1, δηλαδή εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός. Γιά νά βροῦμε τήν ἀπόλυτή του τιμή βρίσκομε τό συμπλήρωμά του ὡς πρός 2.

Έτσι έχομε:

00010000, δηλαδή τό άποτέλεσμα είναι ό δυαδικός άριθμός − 16.

β) Δίνονται οί άριθμοί $X_{10} = -27$ καί $Y_{10} = +43$ καί ζητεΐται ό άριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σέ όκταψήφιο ύπολογιστή μέ ΠΠΣ2.

$X_{10} = -27 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $\qquad X_2 = \underline{\underline{1}}\ \underline{1100101}$

$+$

$\underline{Y_{10} = +43 \Longleftrightarrow \text{ΠΠΣ2}} \qquad \underline{Y_2 = \underline{\underline{0}}\ 0101011}$

κρατούμενο 1
τελευτ. βαθμίδας

$X_{10} + Y_{10} = +16 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $(X_2 + Y_2) = \underline{\underline{0}}\ \underline{0010000}$

Ή παραπάνω παράσταση $X_2 = \underline{1}\ \underline{1100101}$ προκύπτει μέ συμπλήρωση ώς πρός 2 τοῦ $X_{10} = +27$. Όπως γίνεται ή πρόσθεση τό κρατούμενο τῆς τελευταίας βαθμίδας δέν λαμβάνεται ύπόψη καί παραλείπεται άπό τόν ύπολογιστή.

γ) Δίνονται οί άριθμοί $X_{10} = -27$ καί $Y_{10} = -43$ καί ζητεΐται ό άριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σέ όκταψήφιο ύπολογιστή μέ ΠΠΣ2.

$X_{10} = -27 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 : $\qquad X_2 = \underline{1}\ \underline{1100101}$

$+$

$\underline{Y_{10} = -43} \Longleftrightarrow \underline{\text{ΠΠΣ2 :}} \qquad \underline{Y_2 = \underline{1}\ 1010101}$

κρατούμενο 1
τελευταίας βαθμίδας

$X_{10} + Y_{10} = -70 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ2 $(X_2 + Y_2) = \underline{\underline{1}}\ \underline{0111010}$

Όπως καί παραπάνω τό κρατούμενο τῆς τελευταίας βαθμίδας δέν λαμβάνεται ύπόψη. Τό άποτέλεσμα είναι άρνητικό, γιατί έχει τό πλέον σημαντικό ψηφίο, 1. Ή άπόλυτη τιμή του είναι κατά τά γνωστά 01000110. Δηλαδή τό άποτέλεσμα είναι ό δεκαδικός άριθμός − 70.

1.3.7 Έφαρμογές μέ δυαδικούς άριθμούς ύπό ΠΠΣ1.

α) Δίνονται οί άριθμοί $X_{10} = +27$ καί $Y_{10} = -43$ καί ζητεΐται ό άριθμός $X_{10} + Y_{10}$ σέ όκταψήφιο ύπολογιστή μέ ΠΠΣ1.

$X_{10} = +27 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ1 : $X_2 = \underline{0}\ \underline{0011011}$

$+$

$\underline{Y_{10} = -43} \Longleftrightarrow \underline{\text{ΠΠΣ1 : } Y_2 = \underline{\underline{1}}\ 1010100}$

$X_{10} + Y_{10} = -16 \Longleftrightarrow$ ΠΠΣ1 : $(X_2 + Y_2) = \underline{1}\ \underline{1101111}$

Ἡ παράσταση $Y_2 = \underline{11010100}$ προκύπτει διά συμπληρώσεως ὡς πρός 1 τοῦ $Y_{10} = +\ 43$.

Τό ἐξαγόμενο 11101111 ἔχει τό πλέον σημαντικό ψηφίο 1. Δηλαδή εἶναι ἀρνητικός. Γιά νά βροῦμε τήν ἀπόλυτή του τιμή βρίσκομε τό συμπλήρωμά του ὡς πρός 1. Ἔτσι ἔχομε: 00010000, δηλαδή τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὁ δεκαδικός ἀριθμός − 16.

β) Δίνονται οἱ ἀριθμοί $X_{10} = -\ 27$ καί $Y_{10} = +\ 43$ καί ζητεῖται τό ἄθροισμά των $(X_{10} + Y_{10})$ σέ ὀκταψήφιο ὑπολονιστή ὑπό ΠΠΣ1.

$$X_{10} = -\ 27 \iff \text{ΠΠΣ1} : X_2 = \underline{1}\ \underline{1100100}$$

$$+$$

$$\underline{Y_{10} = +\ 43} \iff \underline{\text{ΠΠΣ1} : Y_2 = \underline{0}\ 0101011}$$

$$X_{10}+Y_{10} = +\ 16 \iff \text{κρατούμενο 1 τελευτ. βαθμίδας} \leftarrow 00001111$$

$$\underline{\qquad\qquad 1\ +}$$

$$00010000$$

Τό κρατούμενο τῆς τελευταίας βαθμίδας τό προσθέτομε στό λιγότερο σημαντικό ψηφίο τοῦ ἀποτελέσματος ὁπότε ἔχομε ὡς ἀποτέλεσμα τό 00010000, δηλαδή τό δεκαδικό ἀριθμό 16.

γ) Δίνονται οἱ ἀριθμοί $X_{10} = -\ 27$ καί $Y_{10} = -\ 50$ καί ζητεῖται τό ἄθροισμά τους σέ ὀκταψήφιο ὑπολογιστῆ ὑπό ΠΠΣ1.

$$X_{10} = -\ 27 \iff \text{ΠΠΣ1} : X_2 = \underline{1}\ \underline{1100100}$$

$$\underline{Y_{10} = -\ 50} \iff \underline{\text{ΠΠΣ1} : Y_2 = \underline{1}\ \underline{1001101}}$$

$$X_{10} + Y_{10} = -\ 77 \iff \text{ΠΠΣ1} : (X_2 + Y_2) = 1 \leftarrow 10110001$$

$$\underline{\qquad\qquad 1\ +}$$

$$\underline{1}\underline{0110010}$$

Ὅπως καί παραπάνω τό κρατούμενο τῆς τελευταίας βαθμίδας τό προσθέτομε στό λιγότερο σημαντικό ψηφίο τοῦ ἀποτελέσματος, γιά νά βροῦμε τό τελικό ἐξαγόμενο.

Ἀπό τά παραπάνω εἶναι φανερό ὅτι, ὅταν προσθέτομε ἀριθμούς στό ΠΠΣ1 κάθε φορά πού ὑπάρχει κρατούμενο στήν τελευταία βαθμίδα (ὑπερχείλιση – over – flow) τό προσθέτομε στό λιγότερο σημαντικό ψηφίο τοῦ ἀποτελέσματος γιά νά βροῦμε τό τελικό ἐξαγόμενο.

Ἡ διαδικασία αὐτή λέγεται «ἀνακύκλωση τῆς ὑπερχειλίσεως» (end around carry) καί γίνεται αὐτόματα ἀπό τόν ὑπολογιστή.

1.3.8 Πολλαπλασιασμός καί Διαίρεση δυαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν προσημασμένων ἀριθμῶν γίνεται μέ διαδοχικές προσθέσεις καί ὀλισθήσεις καί τό ἀποτέλεσμα βγαίνει μέ τό σωστό πρόσημο. Ἐννοεῖται ὅτι ὅταν ἐργαζόμασθε στό ΠΠΣ2 κάθε ὑπερχείλιση κατά τήν ἐκτέλεση τῆς προσθέσεως ἑνός μερικοῦ γινομένου δέν λαμβάνεται ὑπόψη, ἐνῶ ὅταν ἐργαζόμασθε στό ΠΠΣ1 κάνομε ἀνακύκλωση τῆς ὑπερχειλίσεως. Ἡ πρόσθεση τῶν μερικῶν γινομένων γίνεται καθώς αὐτά δημιουργοῦνται μέ τίς διαδοχικές ὀλισθήσεις. Αὐτό γίνεται γιατί ὁ ὑπολογιστής ἐκτελεῖ τήν πρόσθεση μόνο δύο ἀριθμῶν.

Ἀνάλογα ἰσχύουν καί γιά τή διαίρεση.

1.4 Ἀσκήσεις.

1. Νά βρεθοῦν τά συμπληρώματα ὡς πρός 2 καί 1 τῶν δυαδικῶν ἀριθμῶν:

$$1010101,\ 1{,}110101,\ 011100,\ 000001$$

2. Δίνονται οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί:

$$-1001,\ -00111,\ 0{,}1101,\ -10{,}00101$$

Νά γραφοῦν μέ τή μορφή ΠΠΣ2 καί ΠΠΣ1.

3. Δίνονται οἱ δυαδικοί ἀριθμοί:
$X_2 = 01010$ καί $Y_2 = 10010$ ὑπό ΠΠΣ2.
Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα $X_2 + Y_2$ καί νά ἐλεγχεῖ τό ἀποτέλεσμα τῶν ἀντιστοίχων δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Τό ἴδιο νά γίνει γιά τά ζεύγη ἀριθμῶν:

α) $X_2 = 11010,\ Y_2 = 10010$

β) $X_2 = 11010,\ Y_2 = 00010$

γ) $X_2 = 01010,\ Y_2 = 00010$

Νά ἐπαναληφθεῖ ἡ ἄσκηση 3 ἄν θεωρηθεῖ ὅτι οἱ ἀριθμοί X_2 καί Y_2 εἶναι ὑπό ΠΠΣ1.

4. Δίνονται οἱ ἀριθμοί $X_2 = -29$ καί $Y_{10} = -52$ καί ζητεῖται τό ἄθροισμά των σέ ὀκταψήφιο ὑπολογιστή ὑπό ΠΠΣ2 καί ὑπό ΠΠΣ1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE - ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΥΝΟΛΩΝ - ΑΛΓΕΒΡΑ ΛΟΓΙΚΗΣ

2.1 Γενικά.

Στούς Ἠλεκτρονικούς Ὑπολογιστές οἱ ἀριθμοί παριστάνονται μέ στοιχεῖα πού ἔχουν δύο καταστάσεις. Τά στοιχεῖα αὐτά καλοῦνται «Δίτιμα στοιχεῖα». Οἱ δύο καταστάσεις τῶν στοιχείων αὐτῶν ἀντιστοιχοῦν πρός τά ψηφία 1 καί 0 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος. Χρησιμοποιοῦνται ὡς δίτιμα στοιχεῖα, οἱ ἠλεκτρονόμοι, οἱ κρυσταλλοδίοδοι καί κρυσταλλοτρίοδοι λυχνίες.

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ὁ Ἠλεκτρονικός Ὑπολογιστής ἀποτελεῖται ἀπό κυκλώματα διτίμων στοιχείων. Γιά τήν κατανόηση τῶν λειτουργιῶν τῶν παραπάνω κυκλωμάτων χρησιμοποιεῖται ἡ ἄλγεβρα τοῦ Boole (Ἄγγλος Μαθηματικός ὁ ὁποῖος γεννήθηκε τό 1815 καί πέθανε τό 1864), ἡ ἄλγεβρα τῶν συνόλων καί ἡ ἄλγεβρα τῆς λογικῆς.

2.2 Ἀξιώματα τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole.

Γιά νά μπορέσομε νά ἀναπτύξομε τήν ἄλγεβρα τοῦ Boole, χρησιμοποιοῦμε ὡς σύμβολα τίς πράξεις «+», «.» καί «—», τό σύμβολο «=», καί τήν κλάση Ε, πού τήν θεωροῦμε ὅτι περιέχει τά στοιχεῖα Α, Β, Γ, ... Τά ἀξιώματα τῆς Ἄλγεβρας τοῦ Boole εἶναι γνωστά ὡς ἀξιώματα τοῦ Huttington καί εἶναι τά ἑξῆς:

Ἀξίωμα Πρῶτο.

1α) Ἄν Α καί Β εἶναι δύο στοιχεῖα πού ἀνήκουν στήν κλάση Ε, τότε καί τό στοιχεῖο (Α + Β) ἀνήκει στήν κλάση Ε.

1β) Ἄν Α καί Β ἀνήκουν στό Ε, τότε καί τό στοιχεῖο (Α . Β) ἀνήκει στό Ε.

Ἀξίωμα Δεύτερο.

2α) Ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο 0 πού ἀνήκει στό Ε. Τό στοιχεῖο αὐτό ὀνομάζεται μηδενικό στοιχεῖο καί εἶναι τέτοιο ὥστε:

$$A + 0 = A \text{ γιά κάθε } A \text{ τῆς } E$$

2β) Ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο 1 πού ἀνήκει στό Ε, καλούμενο μοναδιαῖο στοιχεῖο, τέτοιο ὥστε:

$$A \,.\, 1 = A$$ γιά κάθε Α τῆς Ε

Ἀξίωμα Τρίτο.

3α) Γιά κάθε ζεῦγος στοιχείων Α καί Β πού ἀνήκουν στό Ε ἔχομε:

$$A + B = B + A$$

3β) Γιά κάθε ζεῦγος στοιχείων Α καί Β πού ἀνήκουν στό Ε ἔχομε:

$$A \,.\, B = B \,.\, A$$

Ἀξίωμα Τέταρτο.

4α) Γιά κάθε τριάδα στοιχείων Α,Β,Γ πού ἀνήκουν στό Ε ἔχομε:

$$A + (B \,.\, \Gamma) = (A + B) \,.\, (A + \Gamma)$$

4β) Γιά κάθε τριάδα στοιχείων Α, Β, Γ πού ἀνήκουν στό Ε ἔχομε:

$$A \,.\, (B + \Gamma) = A \,.\, B + A \,.\, \Gamma$$

Ἀξίωμα Πέμπτο.

Γιά κάθε στοιχεῖο Α τῆς Ε ὑπάρχει πάντοτε ἕνα στοιχεῖο $\overline{A}$ τῆς Ε τέτοιο ὥστε:

5α) $$A + \overline{A} = 1$$

5β) $$A \,.\, \overline{A} = 0$$

Ἀξίωμα Ἕκτο.

Στό Ε ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεῖα Α καί Β τέτοια ὥστε:

$$A \neq B$$

Παρατηροῦμε ὅτι μεταξύ τους τά ἀξιώματα πού τά χαρακτηρίζομε μέ δείκτη α καί β ὑπάρχει ἕνας «δυισμός» ἄν ἀντικαταστήσομε τήν πράξη (+) μέ τή δυική της (.) καί τό στοιχεῖο 1 (ἤ 0) μέ τό δυικό του 0 (ἤ 1).

Π.χ. στό ἀξίωμα 5α ($A + \overline{A} = 1$) ἄν ἀντικαταστήσομε τό «+» μέ τό «.» καί τό 1 μέ τό 0, βρίσκομε ὅτι:

$A \,.\, \overline{A} = 0$ πού εἶναι ἀκριβῶς τό 5β.

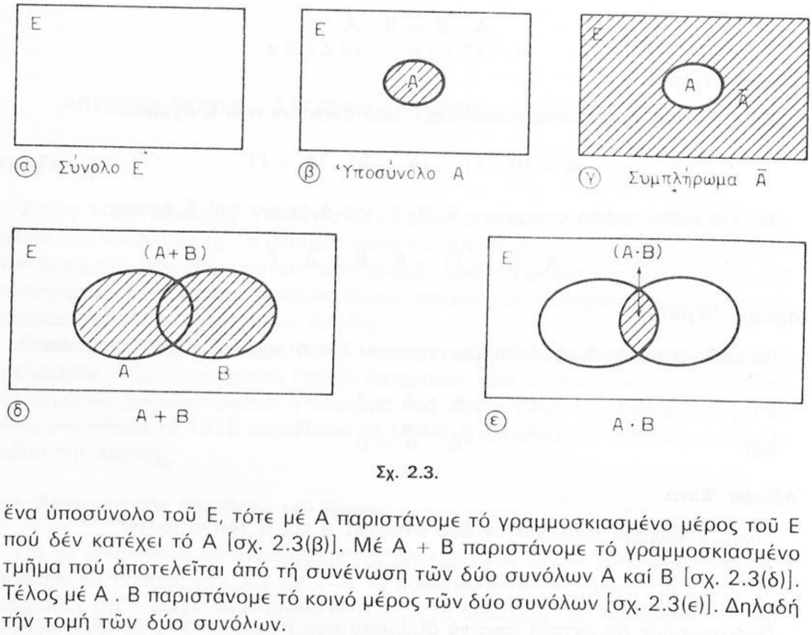
Ἡ ἰδιότητα αὐτή τῆς δυικότητας εἶναι χρήσιμη γιά τήν κατασκευή καί ἀπόδειξη τῶν θεωρημάτων.

2.3 Ἄλγεβρα συνόλων.

2.3.1 Διαγράμματα Venn.

Στήν ἄλγεβρα τῶν συνόλων ἡ κλάση Ε παριστάνει ἕνα βασικό σύνολο καί τά στοιχεῖα Α, Β, Γ... παριστάνουν ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου Ε.

Τό σύνολο «+» τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole παριστάνει τήν «ἕνωση» συνόλων, τό σύμβολο «.» τήν «τομή» συνόλων, τό σύμβολο «–» τό «συμπλήρωμα δοθέντος συνόλου ὡς πρός τό βασικό σύνολο E» καί τό «=» τήν «ἰσότητα» συνόλων. Ἐπίσης τό μοναδιαῖο στοιχεῖο παριστάνει τό βασικό σύνολο E καί τό μηδενικό στοιχεῖο τό κενό σύνολο. Τό βασικό σύνολο E μπορεῖ ἐπίσης νά παριστάνει ἕνα σύνολο σημείων τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα στοιχεῖα βρίσκονται μέσα σέ ἕνα ὀρθογώνιο [σχ. 2.3(α)]. Τό ὑποσύνολο A ἤ B μπορεῖ νά παρασταθεῖ ὡς ἕνα σύνολο σημείων τοῦ E τά ὁποῖα περικλείονται μέσα σέ μία κλειστή γραμμή [σχ. 2.3(α)(β)]. Ἄν A εἶναι



Σχ. 2.3.

ἕνα ὑποσύνολο τοῦ E, τότε μέ A παριστάνομε τό γραμμοσκιασμένο μέρος τοῦ E πού δέν κατέχει τό A [σχ. 2.3(β)]. Μέ A + B παριστάνομε τό γραμμοσκιασμένο τμῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τή συνένωση τῶν δύο συνόλων A καί B [σχ. 2.3(δ)]. Τέλος μέ A . B παριστάνομε τό κοινό μέρος τῶν δύο συνόλων [σχ. 2.3(ε)]. Δηλαδή τήν τομή τῶν δύο συνόλων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.3.1.
Ἀντιστοιχία τῆς ἄλγεβρας Boole καί τῆς ἄλγεβρας Συνόλων

Ἄλγεβρα Boole	Ἄλγεβρα Συνόλων
0	Ø (Κενό σύνολο)
1	E (Βασικό σύνολο)
+	∪ (Ἕνωση συνόλων)
.	∩ (Τομή συνόλων)
$\overline{p}$	p′ (Συμπλήρωμα συνόλου)

Τά παραπάνω διαγράμματα τοῦ σχήματος καλοῦνται «διαγράμματα Venn». Στά διαγράμματα Venn δύο σύνολα Α καί Β εἶναι ἴσα ὅταν κατέχουν ἀκριβῶς τήν ἴδια περιοχή τοῦ Ε.

2.3.2 Σχέση μεταξύ ἄλγεβρας τοῦ Boole καί ἄλγεβρας συνόλων.

Ὁ πίνακας 2.3.1 μᾶς δίνει τήν ἀντιστοιχία τῶν συμβόλων μεταξύ τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole καί τῆς ἄλγεβρας τῶν συνόλων.

2.4 Ἄλγεβρα Λογικῆς — Πίνακες Ἀληθείας.

Στήν ἄλγεβρα τῆς λογικῆς ἡ κλάση Ε παριστάνει τό σύνολο ὅλων τῶν δυνατῶν προτάσεων καί τά Α, Β, Γ, ... παριστάνουν τίς προτάσεις. Κάθε πρόταση, ὅπως π.χ. «Τό χιόνι εἶναι ἄσπρο», «Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντός τριγώνου εἶναι 180°», «Τό 5 εἶναι ἄρτιος» θεωρεῖται ὅτι μπορεῖ νά εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.

Ἄν μιά πρόταση «Α» εἶναι ἀληθής, λέμε ὅτι ἔχει τιμή 1 καί γράφομε $A = 1$, ἀντίθετα ἄν εἶναι ψευδής λέμε ὅτι ἔχει τιμή 0 καί γράφομε $A = 0$. Ὅταν ἔχομε δύο προτάσεις Α καί Β εἶναι δυνατόν καί οἱ δύο νά εἶναι ἀληθεῖς ἤ καί οἱ δύο ψευδεῖς ἤ ἡ Α ἀληθής καί ἡ Β ψευδής ἤ ἡ Α ψευδής καί ἡ Β ἀληθής.

Ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς ἤ ψευδεῖς τότε λέμε ὅτι οἱ προτάσεις εἶναι ἴσες.

Οἱ τέσσερεις αὐτές περιπτώσεις δίνονται παραστατικά ἀπό τόν πίνακα 2.4.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.1.

Προτάσεις	
Α	Β
0	0
0	1
1	0
1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.2.

Προτάσεις		
Α	Β	Γ
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Ἀπό τον τελευταῖο αὐτόν συνδυασμό εἶναι προφανές ὅτι ἄν ἔχομε τρεῖς προτάσεις Α, Β, Γ θά ἔχομε 8 δυνατές περιπτώσεις (πίνακας 2.4.2). Γενικά γιά n προτάσεις θά ἔχομε 2^n δυνατές περιπτώσεις συνδυασμῶν τῶν τιμῶν των.

Στήν ἄλγεβρα τῆς λογικῆς τό σύμβολο «+» παριστάνει τό λογικό «Η», τό σύμβολο «.» παριστάνει τό λογικό «ΚΑΙ», τό σύμβολο «—» τό λογικό «ΟΧΙ» καί τό σύμβολο «=» τήν ἰσότητα τῶν προτάσεων.

Ἡ πρόταση (A + B) εἶναι ψευδής μόνον ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις εἶναι ψευδεῖς (πίνακας 2.4.3). Ἡ πρόταση (A . B) (πίνακας 2.4.4) εἶναι ἀληθινή ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις εἶναι ἀληθινές. Τέλος ἡ πρόταση $\overline{A}$ εἶναι ἀληθής ὅταν ἡ A εἶναι ψευδής καί ψευδής ὅταν ἡ A εἶναι ἀληθής (πίνακας 2.4.5).

Ὅταν σέ ἕναν πίνακα πού περιλαμβάνονται ὅλοι οἱ δυνατοί συνδυασμοί τιμῶν γιά ἕνα ἀριθμό προτάσεων καί δίνεται γιά κάθε συνδυασμό ἡ τιμή μιᾶς παραστάσεως ἡ ὁποία περιλαμβάνει μία ἤ περισσότερες ἀπό αὐτές τίς προτάσεις καλεῖται «ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ» αὐτῶν τῶν προτάσεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.3.

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.4.

A	B	A . B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.5.

A	$\overline{A}$
0	1
0	1
1	0
1	0

Ἡ ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν συμβόλων τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole καί ἄλγεβρας τῆς λογικῆς δίνεται ἀπό τόν πίνακα 2.4.6.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.6.

Ἄλγεβρα Boole	Ἄλγεβρα λογικῆς
«+»	«Η»
«.»	«ΚΑΙ»
«—»	«ΟΧΙ»

Θεωρήματα ἄλγεβρας Boole.

Μετά τήν εἰσαγωγή τῶν ἀξιωμάτων πού ἔχομε ἤδη ἀναφέρει στήν παράγραφο 2.2 ὑπάρχουν πολλά εἴδη θεωρημάτων τά ὁποῖα προέρχονται ἀπό αὐτά, μερικά τῶν ὁποίων ἀναφέρομε παρακάτω.

Ἡ ἀπόδειξη τῶν θεωρημάτων αὐτῶν εἶναι δυνατόν νά γίνει μέ τά προαναφερθέντα ἀξιώματα, μέ τά διαγράμματα Venn, μέ τούς πίνακες ἀληθείας καί μέ τά κυκλώματα τῶν διακοπτῶν.

Τά σπουδαιότερα ἀπό τά θεωρήματα αὐτά εἶναι:

1. Θεώρημα μοναδικότητας.

α) Τό στοιχεῖο 1 εἶναι μοναδικό.

β) Τό στοιχεῖο 0 εἶναι μοναδικό.

γ) Τό $\overline{A}$ τοῦ A εἶναι μοναδικό.

2. Θεώρημα διπλῆς ἀρνήσεως.

$\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A$

3. Θεώρημα τοῦ De Morgan.

α) $\overline{(A + B)} = \overline{A} \, . \, \overline{B}$

β) $\overline{(A \, . \, B)} = \overline{A} + \overline{B}$

4. Θεώρημα συμπληρώματος.

α) $A + \overline{A} = 1$

β) $A \, . \, \overline{A} = 0$

5. Θεώρημα αὐτοενώσεως καί αὐτοτομῆς.

α) $A + A = A$

β) $A \, . \, A = A$

6. Θεώρημα κυριαρχικότητας.

α) $A + 1 = 1$

β) $A \, . \, 0 = 0$

7. Θεώρημα ἀπορροφητικότητας.

α) $A \, . \, (A + B) = A$

β) $A + (A \, . \, B) = A$

8. Θεώρημα ἀντιμεταθέσεως.

α) $A + B = B + A$

β) $A \, . \, B = B \, . \, A$

9. Θεώρημα προσεταιρισμοῦ.

α) $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$

β) $A \, . \, (B \, . \, \Gamma) = (A \, . \, B) \, . \, \Gamma$

10. Θεώρημα ἐπιμερισμοῦ.

α) $A \, . \, (\overline{A} + B) = A \, . \, B$

β) $A + \overline{A} \, . \, B = A + B$

11. Θεωρήματα μηδενός καί μονάδας.

α) $A + 0 = A$

β) $A \,.\, 1 = A$

καί

α) $A + 1 = 1$

β) $A \,.\, 0 = 0$

Στά παραπάνω θεωρήματα τά α καί β ἀποτελοῦν δυικά θεωρήματα.

Πράγματι, ἄν ἀποδείξομε ἕνα θεώρημα, ἀμέσως μποροῦμε νά κατασκευάσομε τό δυικό του θεώρημα, ἄν ἀντικαταστήσομε τήν πράξη «+» μέ τήν πράξη «.» καί ἀντίστροφα καθώς καί τό 0 (ἤ 1) μέ τό 1 (ἤ 0) καθώς καί ἄν ἀντικαταστήσομε κάθε στοιχεῖο μέ τό συμπλήρωμά του.

2.4.1 Ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων μέ τή βοήθεια τῶν ἀξιωμάτων.

Θεώρημα Πρῶτο.

α) Ἔστω ὅτι ὑπάρχουν δύο στοιχεῖα y_1 καί y_2 γιά τά ὁποῖα ἰσχύουν: $A \,.\, y_1 = A$ καί $A \,.\, y_2 = A$ γιά κάθε A. Ἄν στήν πρώτη θέσομε ὅπου $A = y_2$ καί στή δεύτερη ὅπου $A = y_1$, τότε ἔχομε:

$$y_2 \,.\, y_1 = y_2 \quad \text{καί} \quad y_1 \,.\, y_2 = y_1$$

Ἀλλά μέ βάση τό ἀξίωμα 3β τῆς παραγράφου 2.2 ἔχομε: $y_2 = y_1$

β) Ἔστω ὅτι ὑπάρχουν δύο στοιχεῖα x_1 καί x_2 γιά τά ὁποῖα ἰσχύουν $A + x_1 = A$ καί $A + x_2 = A$. Ἄν θέσομε ὅπου $A = x_2$ στήν πρώτη καί $A = x_1$ στή δεύτερη ἰσότητα, τότε ἔχομε:

$$x_2 + x_1 = x_2 \quad \text{καί} \quad x_1 + x_2 = x_1$$

Ἀλλά μέ βάση τό ἀξίωμα 3β τῆς παραγράφου 2.2 ἔχομε: $x_2 = x_1$

γ) Ἔστω ὅτι τό A ἔχει δύο συμπληρώματα τό $\overline{A}_1$ καί $\overline{A}_2$ ὥστε $A + \overline{A}_1 = A + \overline{A}_2 = 1$ καί $A \,.\, \overline{A}_1 = A \,.\, \overline{A}_2 = 0$. Τότε θά ἔχομε:

$$\overline{A}_2 = 1 \,.\, \overline{A}_2 = (A + \overline{A}_1) \,.\, \overline{A}_2 = A\overline{A}_2 + \overline{A}_1 \,.\, \overline{A}_2$$
$$= 0 + \overline{A}_1 \,.\, \overline{A}_2 = \overline{A}_1 \,.\, A + \overline{A}_1 \,.\, \overline{A}_2$$
$$= \overline{A}_1 \,(A + \overline{A}_2) = \overline{A}_1 \,.\, 1 = \overline{A}_1$$

Ἄρα $\overline{A}_2 = \overline{A}_1$.

Ἀπό τήν τελευταία σχέση συνάγεται ὅτι ὑπάρχει ἕνα μόνο συμπλήρωμα τοῦ A.

Θεώρημα Δεύτερο.

Ἀπό τίς γνωστές σχέσεις $A + \overline{A} = 1$ καί $A \,.\, \overline{A} = 0$ συνεπάγεται ὅτι ἕνα συμπλήρωμα τοῦ $\overline{A}$ ἰσοῦται μέ τό A. Δηλαδή $(\overline{\overline{A}}) = A$.

Θεώρημα Τρίτο.

Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τοῦ De Morgan ἀρκεῖ νά δείξομε ὅτι:

$$(A + B) + \overline{A} \, . \, \overline{B} = 1 \text{ καί } (A + B) \, . \, (\overline{A} \, . \, \overline{B}) = 0$$

α) $(A + B) + \overline{A} \, . \, \overline{B} = [(A + B) + \overline{A}] \, . \, [(A + B) + \overline{B}] = [(A + \overline{A}) + B] \, .$
$[(B + \overline{B}) + A] = (1 + B) \, . \, (1 + A) = 1 \, . \, 1 = 1.$

β) $(A + B) \, . \, (\overline{A} \, . \, \overline{B}) = A \, . \, (\overline{A} \, . \, \overline{B}) + B \, . \, (\overline{A} \, . \, \overline{B}) = (A \, . \, \overline{A}) \, . \, \overline{B} + (B \, . \, \overline{B}) \, .$
$\overline{A} = 0 \, . \, \overline{B} + 0 \, . \, \overline{A} = 0 + 0 = 0$

Θεώρημα Τέταρτο.

α) $\underline{A + A \, . \, B = A.}$

Ἔχομε: $A + A \, . \, B = A \, . \, 1 + A \, . \, B = A \, . \, (1 + B) = A \, . \, 1 = A$

β) $\underline{A \, . \, (A + B) = A.}$

Ἔχομε: $A \, . \, (A + B) = A \, . \, A + A \, . \, B = A + A \, . \, B = A$

Θεώρημα Πέμπτο.

α) $\underline{A + A = A.}$

Ἔχομε: $A + A = (A + A) \, . \, 1 = (A + A) \, . \, (A + \overline{A}) = A + A \, . \, \overline{A} = A + 0 = A$

β) $\underline{A \, . \, A = A.}$

Ὁμοίως: $A \, . \, A = A \, . \, A + 0 = A \, . \, A + A \, . \, \overline{A} = A \, (A + \overline{A}) = A \, . \, 1 = A$

Θεώρημα Ἕκτο.

α) $\underline{A + 1 = 1.}$

Ἔχομε: $A + 1 = (A + 1) \, . \, 1 = (A + 1) \, . \, (A + \overline{A}) = A + \overline{A} + 1 = A + \overline{A} = 1$

β) $A \, . \, 0 = 0.$

Ὁμοίως: $A \, . \, 0 = A \, . \, (A \, . \, \overline{A}) = (A \, . \, A) \, . \, \overline{A} = A \, . \, \overline{A} = 0$

Ἄν χρησιμοποιήσομε τά ἀξιώματα τῆς παραγράφου 2.2 μποροῦμε νά ἀποδείξομε καί τά ὑπόλοιπα θεωρήματα.

Ἄσκηση.

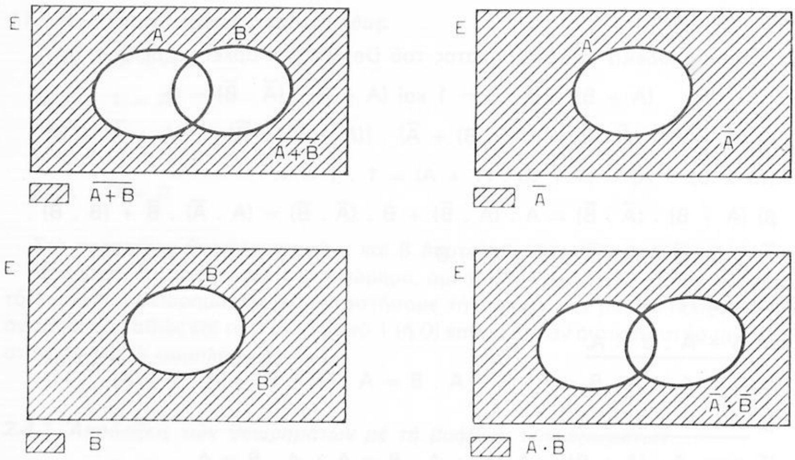
Νά ἀποδειχθοῦν τά ὑπόλοιπα θεωρήματα μέ τή βοήθεια τῶν ἀξιωμάτων.

2.4.2 *Ἀπόδειξη θεωρημάτων μέ τά διαγράμματα τοῦ Venn.*

Ἡ ἀπόδειξη ἑνός θεωρήματος μέ τή βοήθεια τοῦ διαγράμματος Venn ἐπιτυγχάνεται μέ τήν ταύτιση τῶν ἐπιφανειῶν πού καλύπτουν οἱ παραστάσεις κάθε μέλους μιᾶς ἰσότητας.

α) Θεώρημα τοῦ De Morgan.

Ἀπό τά διαγράμματα τοῦ σχήματος 2.4α διαπιστώνεται ὅτι οἱ γραμμοσκιασμέ-



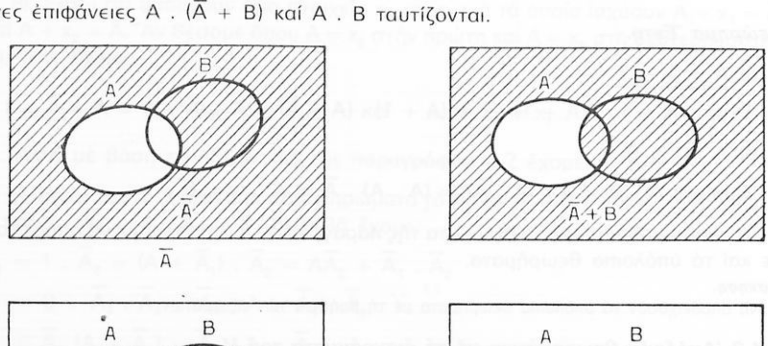
Σχ. 2.4α.

νες ἐπιφάνειες $\overline{A + B}$ καί $\overline{A}\ .\ \overline{B}$ εἶναι ἴδιες.

Ἄρα $\overline{A + B} = \overline{A}\ .\ \overline{B}$

β) Θεώρημα τοῦ ἐπιμερισμοῦ.

Ἀπό τά διαγράμματα τοῦ σχήματος 2.4β διαπιστώνομε ὅτι οἱ γραμμοσκιασμένες ἐπιφάνειες A . ($\overline{A}$ + B) καί A . B ταυτίζονται.

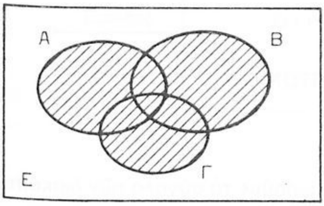


Σχ. 2.4β.

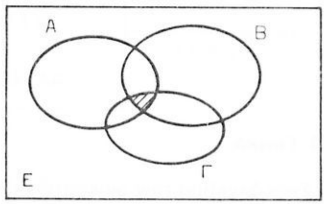
Ἄρα $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

γ) Θεώρημα τοῦ προσεταιρισμοῦ (σχ. 2.4γ).

Ἡ ἕνωση καί ἡ τομή τριῶν συνόλων εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τή σειρά τῆς ἑνώσεως ἤ τομῆς τῶν συνόλων. Ἡ ἀπόδειξη θεωρημάτων μέ τούς πίνακες ἀληθείας καί μέ τά κυκλώματα τῶν διακοπτῶν ἀναφέρεται στό κεφάλαιο 3.



$A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$



$A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$

Σχ. 2.4γ.

2.5 Ἀσκήσεις.

α) Μέ τή βοήθεια τῶν ἀξιωμάτων τῆς παραγράφου 2.2 καί τῶν θεωρημάτων τῆς παραγράφου 2.4 νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω λογικές ταυτότητες:

1) $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$

2) $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

3) $(A + B)\,(\overline{A} + \Gamma) = \overline{A} \cdot B + A \cdot \Gamma$

4) $A \cdot B + \overline{A} \cdot \Gamma = (\overline{A} + B) \cdot (A + \Gamma)$

β) Μέ τή βοήθεια τοῦ ἀξιώματος 3 τῆς παραγράφου 2.2 καί τοῦ θεωρήματος 6 τῆς παραγράφου 2.4 νά ἀποδείξετε τίς παρακάτω ταυτότητες πάνω στά στοιχεῖα 0 καί 1:

$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$

γ) Μέ τή βοήθεια τοῦ διαγράμματος Venn νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν θεωρημάτων τῆς παραγράφου 2.4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΔΙΑΚΟΠΤΩΝ

3.1 Γενικά.

Στήν ἄλγεβρα τῶν διακοπτῶν ὡς κλάση Ε θεωροῦμε τό σύνολο τῶν διακοπτῶν Α, Β, Γ, . . . ἑνός συστήματος.

Στήν ἀρχή ἡ ἄλγεβρα τοῦ Boole ἀφοροῦσε περιγραφές προτάσεων τῶν ὁποίων οἱ ἀπαντήσεις ἦταν ἀληθινές ἤ ψεύτικες.

Ἀργότερα ὅμως ὁ E. Shannon (1916) τήν ἐχρησιμοποίησε στήν ἀνάλυση τῶν ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων πολλῶν ἐπαφῶν ὅπως π.χ. στά τηλεφωνικά κυκλώματα τά ὁποῖα ἦταν δυνατό νά εἶναι ἀνοικτά ἤ κλειστά.

Ἡ ἄλγεβρα τοῦ Boole βρίσκει μεγάλη ἐφαρμογή στούς Η/Υ. Συγκρινόμενη με τή συνηθισμένη (κλασική) ἄλγεβρα εἶναι πολύ ἁπλή. Ὅπως εἴδαμε στήν ἄλγεβρα οἱ μεταβλητές λαμβάνουν μόνοι δύο τιμές 0 ἤ 1. Τέτοιες μεταβλητές λέγονται ***δίτιμα στοιχεῖα*** ἤ ***λογικές μεταβλητές*** ἤ ***μεταβλητές τοῦ Boole***.

Μέ τούς ἀριθμούς 0 καί 1 μπορεῖ νά γίνει μιά ἀντιστοιχία μέ κύκλωμα ἀνοικτό ή κλειστό, ἤ ἀκόμα μέ ἐσφαλμένη ἤ ἀληθινή κατάσταση ἑνός κυκλώματος, γιατί οἱ καταστάσεις αὐτές ἀπό τή φύση τους εἶναι δυαδικές.

Γιά νά ἀποδείξομε μερικά βασικά θεωρήματα στήν ἄλγεβρα τοῦ Boole, θά χρησιμοποιήσομε ὁρισμένα κυκλώματα μέ διακόπτες.

Ὅταν σέ ἕνα κύκλωμα ὁ διακόπτης Α π.χ. εἶναι ἀνοικτός, τότε λέμε ὅτι ἔχει τιμή $A = 0$, ἄν ὅμως εἶναι κλειστός, τότε λέμε ὅτι ἔχει τιμή $A = 1$. Ὅπως γνωρίζομε ὑπάρχουν κυκλώματα πού ἔχουν τούς διακόπτες σέ παράλληλη θέση καί κυκλώματα πού ἔχουν τούς διακόπτες σέ σειρά.

Ὅταν θά ἔχομε ἕνα κύκλωμα μέ διακόπτες σέ παράλληλη θέση, τότε τό κύκλωμα θά καλεῖται καί κύκλωμα «Η» καί θά τό συμβολίζομε μέ τήν πράξη «+», ἐνῶ τό κύκλωμα μέ διακόπτες σέ σειρά θά καλεῖται κύκλωμα «ΚΑΙ» καί θά τό συμβολίζομε μέ τήν πράξη «.».

Στή συνέχεια περιγράφομε συνδυασμούς τέτοιων διακοπτῶν.

3.2 Κυκλώματα διακοπτῶν.

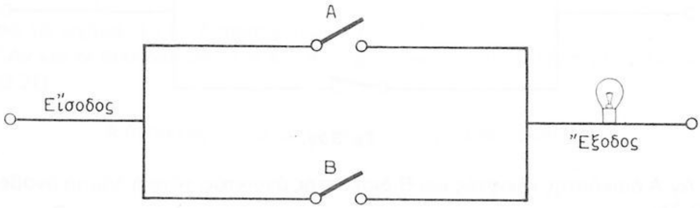
3.2.1 Κύκλωμα «Η» ἤ κύκλωμα ἐν παραλλήλῳ.

Ἀπό τό σχῆμα 3.2α διαπιστώνομε ὅτι:

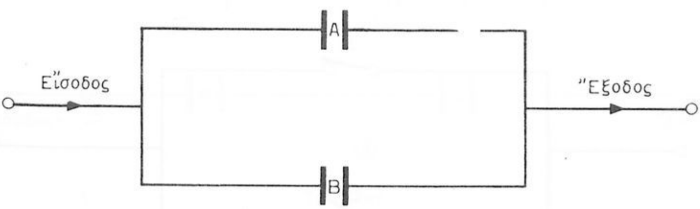
α) Ἄν καί οἱ δύο διακόπτες Α καί Β εἶναι ἀνοικτοί, τότε ἡ λάμπα δέν ἀνάβει (σχ. 3.2β).

A ἀνοικτός + B ἀνοικτός = Λάμπα δέν ἀνάβει

0 + 0 = 0



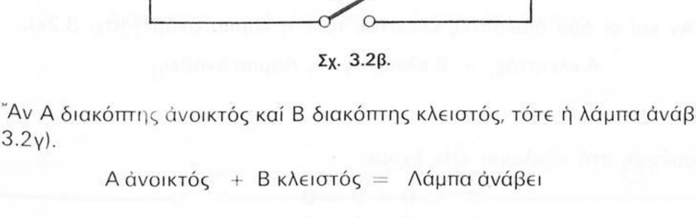
(α)



(β)

Σχ. 3.2α.

Παράσταση τοῦ κυκλώματος «Η». Τά (α) καί (β) συμβολίζουν τό ἴδιο κύκλωμα. Μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό ἕνα ἤ τό ἄλλο*.



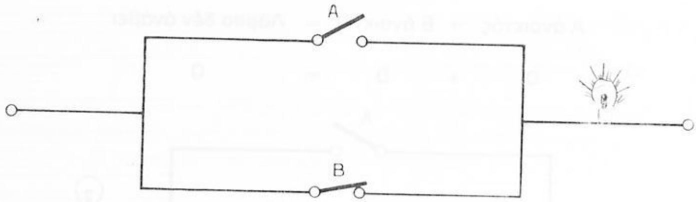
Σχ. 3.2β.

β) Ἄν A διακόπτης ἀνοικτός καί B διακόπτης κλειστός, τότε ἡ λάμπα ἀνάβει (σχ. 3.2γ).

A ἀνοικτός + B κλειστός = Λάμπα ἀνάβει

0 + 1 = 1

* Στό σχῆμα 3.2α οἱ διακόπτες παριστάνονται κατά γενικό τρόπο ἀνεξάρτητα ἄν αὐτοί εἶναι ἀνοικτοί ἤ κλειστοί. Μέ A συμβολίζομε διακόπτη κλειστό καί μέ $\overline{A}$ διακόπτη ἀνοικτό ἤ καί ἀντιστρόφως.

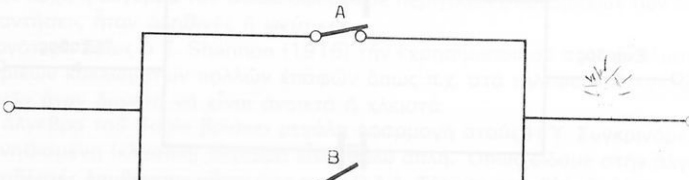


Σχ. 3.2γ.

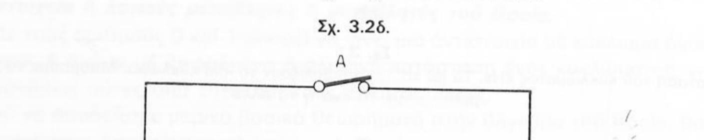
γ) Ἄν Α διακόπτης κλειστός καί Β διακόπτης ἀνοικτός, τότε ἡ λάμπα ἀνάβει (σχ. 3.2δ).

Α κλειστός + Β ἀνοικτός = Λάμπα ἀνάβει

1 + 0 = 1



Σχ. 3.2δ.



Σχ. 3.2ε.

δ) Ἄν καί οἱ δύο διακόπτες κλειστοί, τότε ἡ λάμπα ἀνάβει (σχ. 3.2ε).

Α κλειστός + Β κλειστός = Λάμπα ἀνάβει

1 + 1 = 1

Ἐπομένως στό κύκλωμα «Η» ἔχομε:

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 1

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ συνδυασμοί αὐτοί τῶν τιμῶν εἶναι οἱ ἴδιοι μέ τόν πίνακα ἀληθείας 2.4.1 τῆς παραγράφου 2.4.

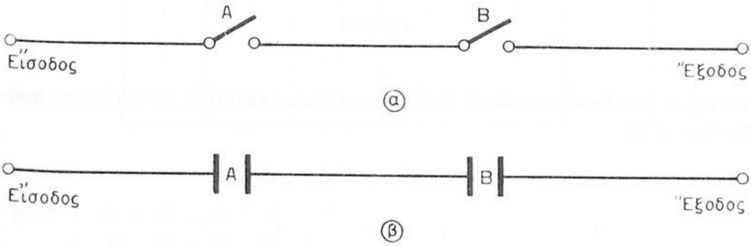
3.2.2 Κύκλωμα «ΚΑΙ» — Διακόπτες σέ σειρά.

Ἀπό τό σχῆμα 3.2ζ διαπιστώνομε ὅτι:

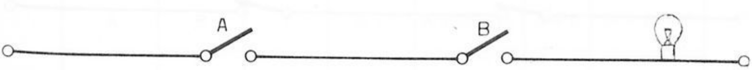
α) Ἄν καί οἱ δύο διακόπτες Α καί Β εἶναι ἀνοικτοί, τότε ἡ λάμπα δέν ἀνάβει (σχ. 3.2ζ).

Α ἀνοικτός . Β ἀνοικτός = Λάμπα δέν ἀνάβει

0 0 = 0



Σχ. 3.2στ.
Παράσταση τοῦ κυκλώματος «ΚΑΙ». Τά (α) καί (β) εἶναι συμβολισμοί γιά τό ἴδιο κύκλωμα. Μποροῦμε νά χρησιμοποιήσομε τό ἕνα ἤ τό ἄλλο.

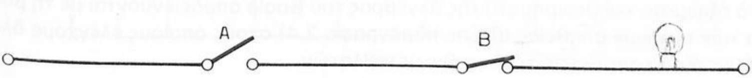


Σχ. 3.2ζ.

β) Ἄν διακόπτης Α ἀνοικτός καί Β κλειστός τότε ἡ λάμπα δέν ἀνάβει (σχ. 3.2η).

Α ἀνοικτός . Β κλειστός = Λάμπα δέν ἀνάβει

0 1 = 0



Σχ. 3.2η.

γ) Ἂν διακόπτης Α κλειστός καί Β ἀνοικτός, ἡ λάμπα δέν ἀνάβει (σχ. 3.2θ).

Α κλειστός · Β ἀνοικτός = Λάμπα δέν ἀνάβει

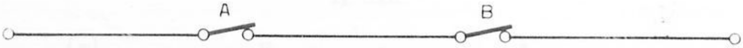
1 · 0 = 0

Σχ. 3.2θ.

δ) Ἂν καί οἱ δύο διακόπτες Α καί Β εἶναι συγχρόνως κλειστοί, τότε ἡ λάμπα ἀνάβει (σχ. 3.2ι).

Α κλειστός · Β κλειστός = Λάμπα ἀνάβει

1 · 1 = 1



Σχ. 3.2ι.

Συνεπῶς στό κύκλωμα «ΚΑΙ» ἔχομε:

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

3.3 Πίνακες Ἀληθείας.

Τά ἀξιώματα καί θεωρήματα τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole ἀποδεικνύονται μέ τή βοήθεια τῶν πινάκων ἀληθείας (βλέπε παράγραφο 2.4) στούς ὁποίους ἐλέγχομε ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις τιμῶν τῶν μεταβλητῶν.

Παραδείγματα.

α) $A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A$

Ἀπό τόν πίνακα 3.3.1 φαίνεται ὅτι οἱ στῆλες A + B, B + A, A · B, B · A σέ ὅλες τίς περιπτώσεις εἶναι:

$$A + B = B + A \text{ καί } A \cdot B = B \cdot A$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.1.

A	B	A + B	B + A	A · B	B · A
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

β) $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
$A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.2.

A	B	Γ	B + Γ	A + (B + Γ)	A + B	(A + B) + Γ
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Ἀπό τόν πίνακα 3.3.2 διαπιστώνεται ὅτι $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.3.

A	B	Γ	B · Γ	A · (B · Γ)	A · B	(A · B) · Γ
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Ἀπό τόν πίνακα 3.3.3 διαπιστώνεται ὅτι $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$.

γ) $A + (B \cdot \Gamma) = (A + B) \cdot (A + \Gamma)$
$A \cdot (B + \Gamma) = (A \cdot B) + (A \cdot \Gamma)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.4.

A	B	Γ	B · Γ	A + (B · Γ)	A + B	A + Γ	(A + B) · (A + Γ)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.5.

Α	Β	Γ	Β + Γ	Α · (Β + Γ)	Α · Β	Α · Γ	(Α · Β) + (Α · Γ)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Ἀπό τούς πίνακες 3.3.4 καί 3.3.5 διαπιστώνεται ὅτι σέ ὅλες τίς περιπτώσεις ἔχομε:

$$Α + (Β \cdot Γ) = (Α + Β) \cdot (Α + Γ)$$
$$Α \cdot (Β + Γ) = (Α \cdot Β) + (Α \cdot Γ)$$

δ) $Α + 0 = Α$ $\qquad$ $Α + 1 = 1$

$Α \cdot 1 = Α$ $\qquad$ $Α \cdot 0 = 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.6.

Α	0	Α + 0
0	0	0(= Α)
1	0	1(= Α)

Α	1	Α · 1
0	1	0(= Α)
1	1	1(= Α)

Α	1	Α + 1
0	1	1
1	1	1

Α	0	Α · 0
0	0	0
1	0	0

ε) $Α + \overline{Α} = 1$ $\qquad$ $Α . \overline{Α} = 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.7.

Α	$\overline{Α}$	$Α + \overline{Α}$
0	1	1
1	0	1

Α	$\overline{Α}$	$Α \cdot \overline{Α}$
0	1	0
1	0	0

στ) $(\overline{A + B}) = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} + \overline{B}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3.8.

A	B	A + B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	A · B	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Ἀπό τόν πίνακα 3.3.8 ἔχομε:

$(\overline{A + B}) = \overline{A} \cdot \overline{B}$ καί $(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} + \overline{B}$

Ἀσκήσεις.

Μέ τή βοήθεια τῶν πινάκων ἀληθείας, νά ἀποδείξετε τήν ἀλήθεια τῶν παρακάτω παραστάσεων.

— $AB + \overline{A}B + A\overline{B} = \overline{A} + B$

— $AB\Gamma + A\Gamma + B\Gamma = A + B + \Gamma$

— $AB + \Gamma\overline{B} + A\Gamma = AB + \overline{B}\Gamma$

3.4 Ἁπλοποιήσεις Λογικῶν Παραστάσεων.

Δίνεται ὁ πίνακας 3.4.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4.1.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}.B$	$A+\overline{A}.B$	A + B
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

Ἀπό τόν πίνακα 3.4.1 πού μᾶς δίνει τήν ἰσότητα $A + \overline{A} . B = A + B$ (1) διαπιστώνομε ὅτι σέ κάθε ἀλγεβρική παράσταση ἀντιστοιχεῖ καί ἕνας πίνακας ἀληθείας. Ἀπό τόν πίνακα διαπιστώνομε ὅτι κάθε παράσταση μπορεῖ νά δοθεῖ μέ ἁπλούστερη μορφή καί νά εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀρχική της παράσταση. Γιά νά βροῦμε τήν ἁπλοποιημένη μορφή μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως χρησιμοποιοῦμε ἐκτός ἀπό τούς πίνακες ἀληθείας τά ἀξιώματα καί θεωρήματα τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole.

Ἡ μέθοδος αὐτή ἁπλοποιήσεως καλεῖται ἀλγεβρική.

Μέ τήν ἁπλοποίηση αὐτή ἡ ἄλγεβρα τοῦ Boole γίνεται ἀπαραίτητο ἐφόδιο γιά τήν κατασκευή ἁπλουστέρων λογικῶν κυκλωμάτων.

Παρακάτω δίνομε ἁπλοποιήσεις ὁρισμένων παραστάσεων μέ τή βοήθεια τῶν ἀξιωμάτων καί τῶν θεωρημάτων τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole. Ἐκτός ἀπό τήν παραπάνω μέθοδο, ὑπάρχουν καί ἄλλοι τρόποι ἁπλοποιήσεως παραστάσεων ὅπως π.χ. οἱ πίνακες Karnaugh μέ τούς ὁποίους δέν θά ἀσχοληθοῦμε τώρα.

Ἀσκήσεις.

Α΄ ὁμάδα.

α) Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις $A + \overline{A} . B$

Ἀπόδειξη.

Ἔχομε $A + \overline{A} . B = (A + \overline{A})\ (A + \Gamma) =$ Θεώρημα ἐπιμερισμοῦ.

$= 1 \cdot (A + B) =$ Θεώρημα συμπληρώματος

$= A + B$

Ἄρα ἡ παράσταση $A + \overline{A} . B$ ἔλαβε τήν ἰσοδύναμη μορφή $A . B$

β) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση $A . B + \Gamma . \overline{B} + A . \Gamma$

$A . B + \Gamma . \overline{B} + A . \Gamma = (A . B) . 1 + (\Gamma . \overline{B}) . 1 + (A . \Gamma) . 1 =$

$= (A . B)\ (\Gamma + \overline{\Gamma}) + (\Gamma . \overline{B})\ (A + \overline{A}) + (A . \Gamma)\ (B + \overline{B})$

$= AB\Gamma + AB\overline{\Gamma} + A\overline{B}\Gamma + \overline{A}\overline{B}\Gamma + AB\Gamma + A\overline{B}\Gamma$

$= AB\Gamma + AB\overline{\Gamma} + A\overline{B}\Gamma + \overline{A}\overline{B}\Gamma$

$= AB\ (\Gamma + \overline{\Gamma}) + \overline{B}\Gamma\ (A + \overline{A})$

$= AB . 1 + \overline{B} . \Gamma . 1$

$= A . B + \overline{B} . \Gamma$

γ) $AB + \Gamma\overline{B}$

$AB + \Gamma\overline{B} = AB + \Gamma\overline{B} + A\Gamma$ (μέ βάση τό παράδειγμα β)

$= AB + \Gamma\overline{B} + A\Gamma + B\overline{B}$ διότι $B . \overline{B} = 0$ (παράγρ. 2.2, ἀξίωμα 5)

$= A\ (B + \Gamma) + \overline{B}\ (B + \Gamma)$

$= (A + \overline{B})\ (B + \Gamma)$

δ) $(A + B)\ (B + \Gamma)\ (\Gamma + A) =$;

$(A + B)\ (B + \Gamma)\ (\Gamma + A) = [(A + B)\ (B + \Gamma)]\ (\Gamma + A)$

$= (B + A\Gamma)\ (\Gamma + A)$

$= B\Gamma + BA + A\Gamma\Gamma + AA\Gamma =$

$= B\Gamma + BA + A\Gamma + A\Gamma$

$= B\Gamma + BA + A\Gamma$

$= B\Gamma + AB + A\Gamma$

ε) $\overline{(A\overline{B} + \overline{A}B)} = \overline{(A \cdot \overline{B})} \cdot \overline{(\overline{A} \cdot B)} = (\overline{A} + \overline{\overline{B}}) \cdot (\overline{\overline{A}} + \overline{B})$

$= (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$

$= A\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + BA + B\overline{B} =$

$= 0 + \overline{A}\overline{B} + AB + 0$

$= \overline{A}\overline{B} + AB$

Β΄ ὁμάδα.

α) Νά ἁπλοποιήσετε τή λογική παράσταση:

$(A + \overline{A}B)\,(A + B)$

β) Ὁμοίως τήν παράσταση:

$\overline{\overline{A}\,(B + \overline{\Gamma})} \cdot (A + \overline{B} + \Gamma) \cdot \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{\Gamma})}$

γ) Ὁμοίως $A\overline{B} + AB \cdot (A + B)$

δ) Ὁμοίως $\overline{A}B\Gamma + AB\overline{\Gamma} + AB\Gamma + \overline{A}B$

ε) Ὁμοίως $(\overline{A} + AB)\,(\overline{A} + B)$

στ) Ὁμοίως $\overline{(A\overline{B} + \overline{A}B)}$

3.5 Εὕρεση τῆς Λογικῆς παραστάσεως ὅταν δίνεται τό κύκλωμα διακοπτῶν.

Ἔχομε ἤδη ἐξετάσει κυκλώματα διακοπτῶν τῆς μορφῆς «Η» (διακόπτες ἐν παραλλήλω) καί κυκλώματα τῆς μορφῆς «ΚΑΙ» (διακόπτες σέ σειρά). Στούς Η/Υ χρησιμοποιοῦμε ἐκτός ἀπό τά ἁπλά κυκλώματα «Η», «ΚΑΙ» καί σύνθετα κυκλώματα τά ὁποῖα εἶναι συνδυασμός τῶν ἁπλῶν κυκλωμάτων «Η, ΚΑΙ» ἀκριβῶς ἴδια μέ ἐκεῖνα πού χρησιμοποιοῦνται γιά τή λειτουργία τηλεφώνων.

Θεωροῦμε ὅτι κάθε διακόπτης ἀποτελεῖ μιά μεταβλητή τοῦ Boole καί μάλιστα ὅπως ἔχομε ἀναφέρει σέ προηγούμενο κεφάλαιο, ὁρίζομε ὅτι ὁ κλειστός διακόπτης (διακόπτης πού ἐπιτρέπει τή διέλευση ρεύματος) ἔχει τήν τιμή 1 καί ὁ ἀνοικτός διακόπτης (διακόπτης πού δέν ἐπιτρέπει τή διέλευση ρεύματος) τήν τιμή 0. Ἄρα κάθε συνδυασμός διακοπτῶν ἀντιστοιχεῖ σέ μιά παράσταση τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole. Παρακάτω ἀναφέρομε παραδείγματα μέ τά ὁποῖα φαίνεται αὐτή ἡ ἀντιστοιχία.

Ἀσκήσεις.

Α΄ ὁμάδα.

α) Δίνεται τό κύκλωμα διακοπτῶν τοῦ σχήματος 3.5α. Νά γραφεῖ ἡ ἀλγεβρική παράσταση τοῦ Boole.

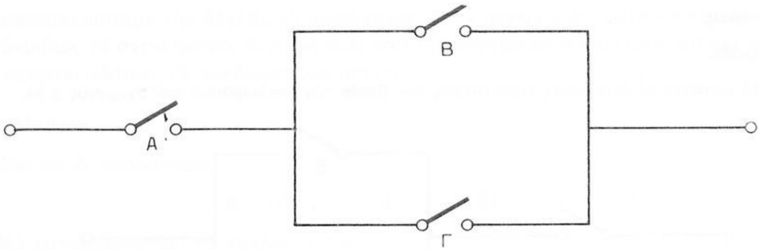
Ἀπάντηση.

Ἐπειδή οἱ διακόπτες Β καί Γ βρίσκονται σέ παράλληλη θέση καί ἀποτελοῦν κύκλωμα «Η», συνδέονται μεταξύ τους ὡς $(B + \Gamma)$. Τέλος ὁ διακόπτης Α καί ὁ ὅρος $(B + \Gamma)$ βρίσκονται σέ σειρά, ἀποτελοῦν τό κύκλωμα «ΚΑΙ» καί συνδέονται μεταξύ τους ὡς $A \cdot (B + \Gamma)$. Ἄρα ἡ ζητούμενη ἀλγεβρική παράσταση τοῦ κυκλώματος εἶναι $A \cdot (B + \Gamma)$.

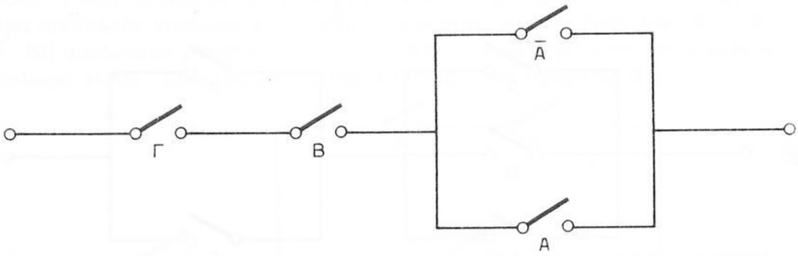
β) Δίνεται τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 3.5β. Νά γραφεῖ ἡ ἀλγεβρική του παράσταση.

Ἀπάντηση.

Οἱ διακόπτες Α καί $\overline{A}$ ἀποτελοῦν τό κύκλωμα «Η». Ἄρα συνδέονται μεταξύ τους μέ τήν πράξη



Σχ. 3.5α.



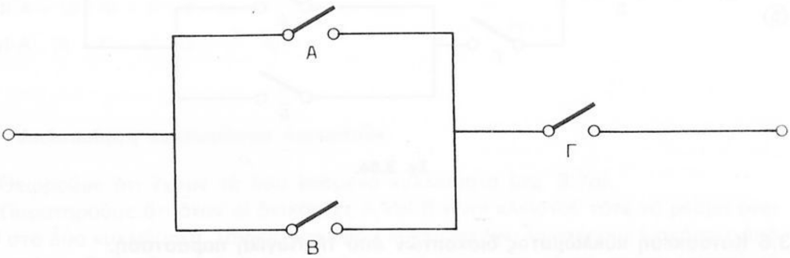
Σχ. 3.5β.

+ (A + $\overline{A}$). Οἱ διακόπτες Γ, Β καί ($\overline{A}$ + A) ἀποτελοῦν κύκλωμα «ΚΑΙ» καί συνδέονται μέ τήν πράξη «.». Συνεπῶς ἔχομε Γ . Β . ($\overline{A}$ + A) πού εἶναι καί ἡ ζητούμενη ἀλγεβρική παράσταση.

γ) Δίνεται τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 3.5γ. Νά γραφεῖ ἡ ἀλγεβρική του παράσταση.

Ἀπάντηση.

Οἱ διακόπτες Α, Β ἀποτελοῦν τό κύκλωμα «Η». Συνεπῶς συνδέονται μεταξύ τους μέ τήν πράξη (A + B). Ὁ διακόπτης Γ μέ τούς διακόπτες (A + B) ἀποτελεῖ κύκλωμα «ΚΑΙ». Ἑπομένως θά ἔχομε (A + B) . Γ πού ἀποτελεῖ καί τή ζητούμενη ἀλγεβρική ἐξίσωση τοῦ Boole.

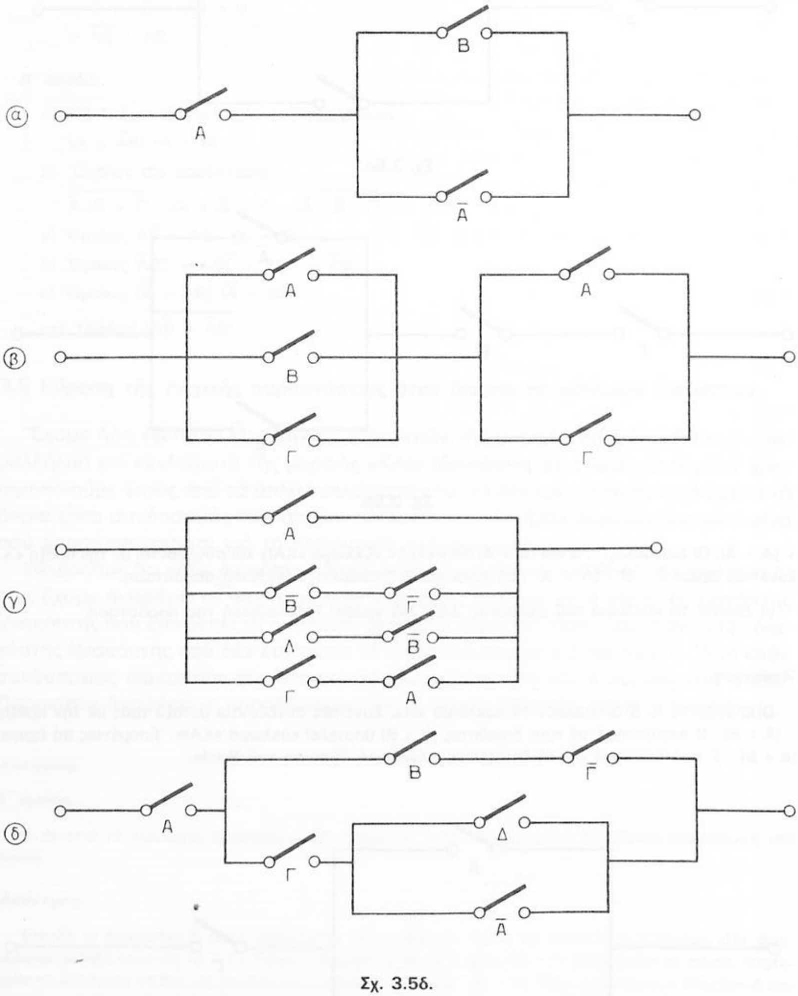


Σχ. 3.5γ.

Ἀσκήσεις.

Β΄ ὁμάδα.

Νά γραφοῦν οἱ ἀλγεβρικές παραστάσεις τοῦ Boole τῶν κυκλωμάτων τοῦ σχήματος 3.5δ.



Σχ. 3.5δ.

3.6 Κατασκευή κυκλώματος διακοπτῶν ἀπό τή Λογική παράσταση.

Ἔχομε ἐξετάσει στήν προηγούμενη παράγραφο πώς μποροῦμε ἀπό τό κύκλωμα νά κατασκευάσομε τήν ἀλγεβρική παράσταση. Στήν παράγραφο αὐτή θά ἐξετάσομε ἀκριβῶς τό ἀντίστροφο. Δηλαδή πῶς ἀπό τήν ἀλγεβρική παράσταση μποροῦμε νά κατασκευάσομε τό κύκλωμα διακοπτῶν.

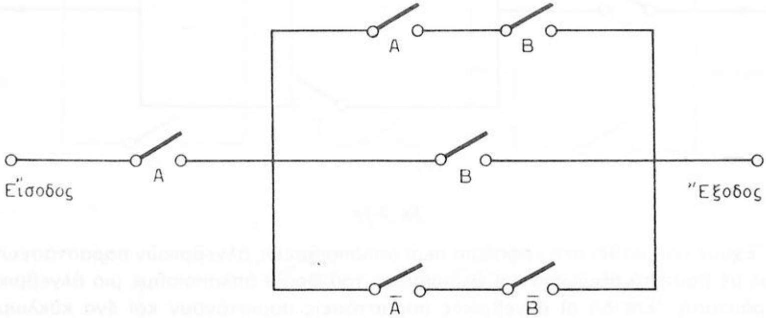
Παράδειγμα.

Δίνεται ἡ παράσταση:

$$A \,.\, [(A \,.\, B) + B + (\overline{A} \,.\, \overline{B})]$$

Νά κατασκευασθεῖ τό κύκλωμά της.

Παρατηροῦμε ὅτι στούς ὅρους $(A \,.\, B)$ καί $(\overline{A} \,.\, \overline{B})$ οἱ μεταβλητές A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ συνδέονται μεταξύ τους μέ τήν πράξη «.». Συνεπάγεται ὅτι ἀποτελοῦν ἁπλά κυκλώματα «ΚΑΙ». Ἐπίσης οἱ ὅροι $(A \,.\, B)$, B, $(\overline{A} \,.\, \overline{B})$ συνδέονται μεταξύ τους μέ τήν πράξη «+». Ἄρα ἀποτελοῦν κύκλωμα «Η». Τέλος ὁ διακόπτης A καί ὁ ὅρος $[(A \,.\, B) + B + (\overline{A} \,.\, B)]$ συνδέονται μεταξύ τους μέ τήν πράξη «.». Συνεπάγεται ὅτι ἀποτελοῦν νέο κύκλωμα «ΚΑΙ». Ἑπομένως θά ἔχομε τή μορφή τοῦ σχήματος 3.6.



Σχ. 3.6.

Ἀσκήσεις.

Νά κατασκευασθοῦν τά κυκλώματα τῶν παρακάτω ἀλγεβρικῶν παραστάσεων τοῦ Boole:

α) $(A \,.\, B) + [(\Gamma + B) \,.\, \overline{B}]$

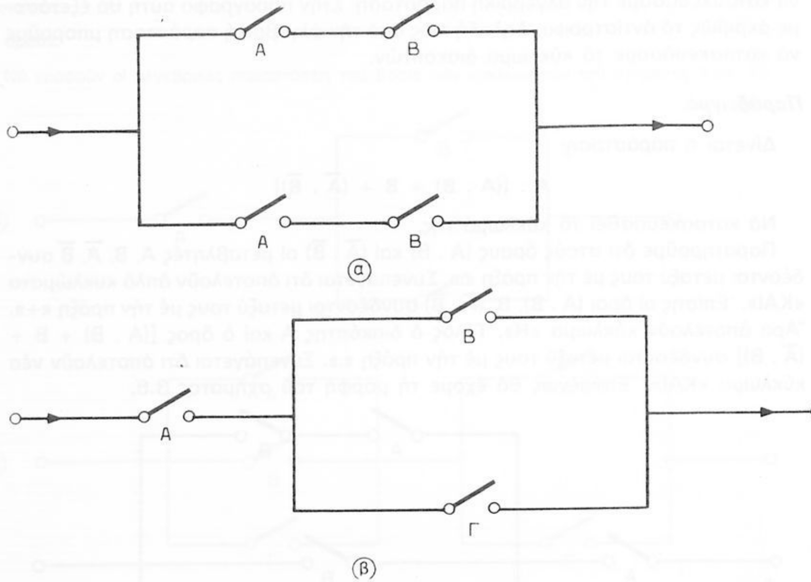
β) $A + (B \,.\, \overline{A}) + (\Gamma \,.\, \overline{B} \,.\, A) + \overline{\Gamma}$

γ) $A \,.\, [B + \Gamma + \Delta] \,.\, [E + (\overline{\Gamma} \,.\, \overline{A})]$

3.7 Ἀπλοποίηση κυκλωμάτων διακοπτῶν.

Θεωροῦμε ὅτι ἔχομε τά δύο ἑπόμενα κυκλώματα (σχ. 3.7α).

Παρατηροῦμε ὅτι ὅταν οἱ διακόπτες A καί B εἶναι κλειστοί, τότε τό ρεῦμα ρέει καί στά δύο κυκλώματα. Τό δεύτερο ὅμως κύκλωμα ἔχει λιγότερους διακόπτες ἀπό τό πρῶτο. Συνεπῶς τό δεύτερο κύκλωμα σέ σύγκριση μέ τό πρῶτο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἁπλοποιημένο κύκλωμα γιατί λειτουργεῖ μέ λιγότερους διακόπτες.



Σχ. 3.7α.

Ἔχομε ἤδη μάθει στό κεφάλαιο περί ἁπλοποιήσεως ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, πῶς μέ βάση τά ἀξιώματα καί θεωρήματα τοῦ Boole ἁπλοποιοῦμε μιά ἀλγεβρική παράσταση. Ἐπειδή οἱ ἀλγεβρικές παραστάσεις παριστάνουν καί ἕνα κύκλωμα διακοπτῶν, μποροῦμε χρησιμοποιώντας τίς μεθόδους ἐκεῖνες νά ἀναπτύξομε καί νά ἐφαρμόσομε καί τή μέθοδο τῆς ἁπλοποιήσεως καί στά κυκλώματα τῶν διακοπτῶν. Ἡ μέθοδος τῆς ἁπλοποιήσεως ἔχει μεγάλη σπουδαιότητα, γιατί ἔχει σχέση μέ τόν περιορισμό τῶν διακοπτῶν μέσα σέ ἕνα κύκλωμα καί κατά συνέπεια χαμηλό κόστος κατασκευῆς τῶν κυκλωμάτων.

Γιά νά ἁπλοποιήσομε ἕνα κύκλωμα πού μᾶς δίνεται ἐργαζόμασθε ὡς ἑξῆς:

— Γράφομε τήν ἀλγεβρική παράσταση τοῦ Boole γιά τό κύκλωμα.
— Ἁπλοποιοῦμε τήν προηγούμενη παράσταση μέ τή χρησιμοποίηση τῶν ἀξιωμάτων καί θεωρημάτων τοῦ Boole.
— Προσδιορίζομε τό κύκλωμα τῶν διακοπτῶν σέ συνδυασμό μέ τόν ἁπλοποιημένο τύπο.

Παράδειγμα.

α) Δίνεται τό κύκλωμα διακοπτῶν τοῦ σχήματος 3.7β.
Ζητεῖται ἡ σχεδίαση τοῦ ἁπλοποιημένου κυκλώματος.

Ἀπάντηση.

Ἡ ἀλγεβρική παράσταση τοῦ δοθέντος κυκλώματος εἶναι:

$$(A + B) \cdot (\overline{A} + \Gamma) \cdot (B + \Gamma)$$

Ἀπλοποιοῦμε τήν παράσταση πού βρήκαμε ὡς ἑξῆς:

$(A + B) \cdot (\overline{A} + \Gamma) \cdot (B + \Gamma) =$

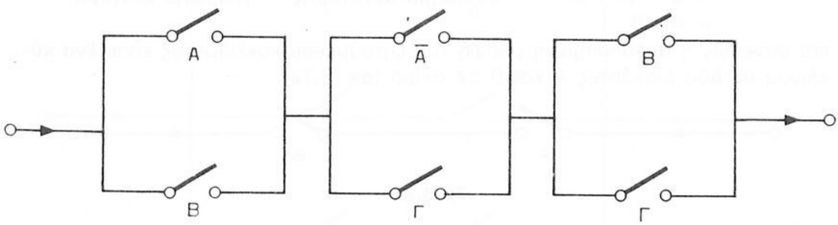
$(A + B) \cdot (B + \Gamma) \cdot (\overline{A} + \Gamma) =$ Ἀξίωμα ἀντιμεταθέσεως [παράγρ. 2.2(3ο)]

$(B + A) \cdot (B + \Gamma) \cdot (\overline{A} + \Gamma) =$ Ἀξίωμα ἀντιμεταθέσεως [παράγρ. 2.2(3ο)]

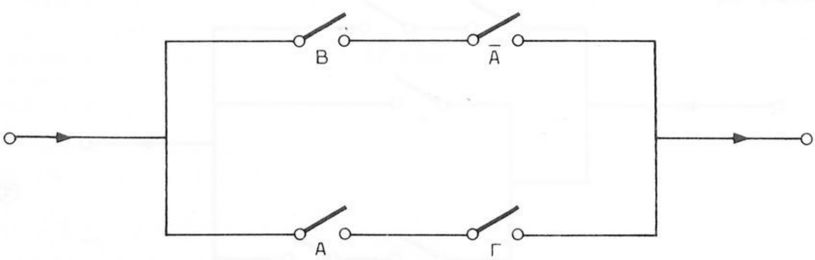
$(B + A) \cdot (B + \Gamma) \cdot (\overline{A} + \Gamma) \cdot (\overline{A} + A) =$ Θεώρημα συμπληρώματος [παράγρ. 2.4(4ο)]

$[B + (A \cdot \Gamma)] \cdot [\overline{A} + (A \cdot \Gamma)] =$ Θεώρημα ἐπιμερισμοῦ [παράγρ. 2.4(10ο)]

$(B \cdot \overline{A}) + (A \cdot \Gamma) =$ Θεώρημα ἐπιμερισμοῦ [παράγρ. 2.4(10ο)]



Σχ. 3.7β.



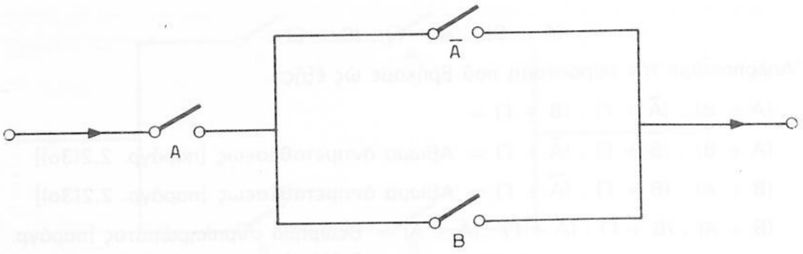
Σχ. 3.7γ.

Ἀπό τήν τελευταία παράσταση κατασκευάζομε τό ζητούμενο κύκλωμα. Ὁ ὅρος $B \cdot \overline{A}$ εἶναι τό ἁπλό κύκλωμα «ΚΑΙ» Ὁμοίως ὁ ὅρος $A \cdot \Gamma$ εἶναι τό ἁπλό κύκλωμα «ΚΑΙ», ἐνῶ τό $(B \cdot \overline{A}) + (A \cdot \Gamma)$ εἶναι τό κύκλωμα «Η» τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευή του εἶναι αὐτή πού φαίνεται στό σχῆμα 3.7γ.

Τό τελευταῖο κύκλωμα εἶναι τό ζητούμενο ἁπλοποιημένο κύκλωμα. Συγκρινόμενο μέ τό ἀρχικό παρατηροῦμε ὅτι ἔχει δύο διακόπτες λιγότερους.

β) Δίνεται τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 3.7δ.

Ζητεῖται νά σχεδιάσετε τήν ἁπλοποιημένη μορφή τοῦ κυκλώματος.



Σχ. 3.7δ.

Ἀπάντηση.

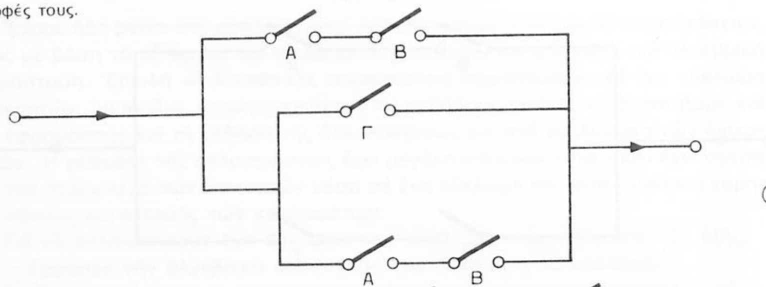
$$
\begin{aligned}
A\,.\,(A+B) &= (A\,.\,\bar{A}) + (A\,.\,B) && \text{Θεώρημα ἐπιμερισμοῦ [παράγρ. 2.4(10ο)]}\\
&= 0 + (A\,.\,B) && \text{Θεώρημα αὐτοτομῆς [παράγρ. 2.4(5ο)]}\\
&= A\,.\,B
\end{aligned}
$$

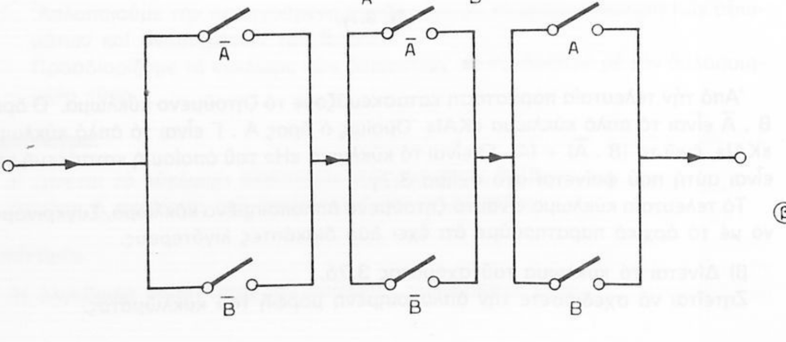
καί συνεπῶς ἡ ἁπλοποιημένη μορφή τοῦ ζητούμενου κυκλώματος εἶναι ἕνα κύκλωμα μέ δύο διακόπτες Α καί Β σέ σειρά (σχ. 3.7ε).

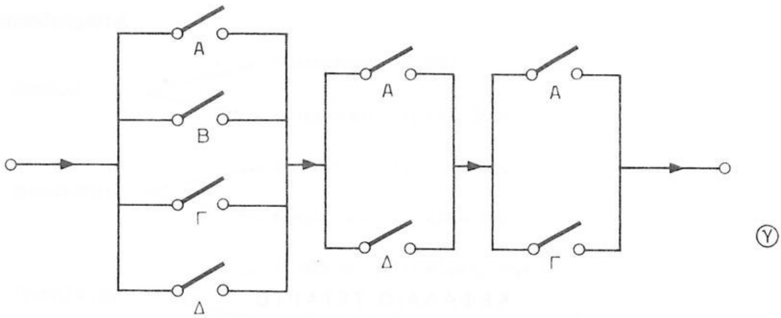
Σχ. 3.7ε.

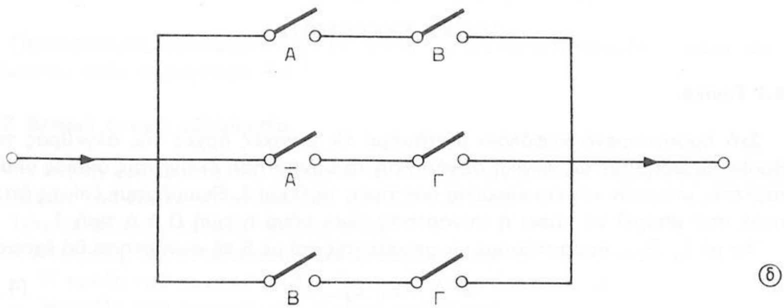
Ἀσκήσεις.

Δίνονται τά παρακάτω κυκλώματα (σχ. 3.7στ καί 3.7ζ) διακοπτῶν καί ζητοῦνται οἱ ἁπλοποιημένες μορφές τους.









Σχ. 3.7στ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΛΟΓΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

4.1 Γενικά.

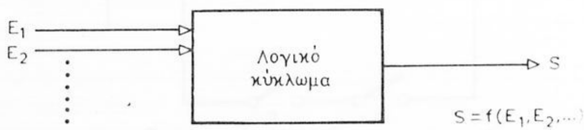
Στό προηγούμενο κεφάλαιο ἐξετάσαμε τίς βασικές ἀρχές τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole. Θεωρήσαμε ὡς λογική συνάρτηση τή συνάρτηση ἐκείνη τῆς ὁποίας οἱ μεταβλητές μποροῦν νά πάρουν μόνο δύο τιμές, τίς 0 καί 1. Θεωρήσαμε ἐπίσης ὅτι οἱ τιμές πού μπορεῖ νά πάρει ἡ συνάρτηση εἶναι μόνο ἡ τιμή 0 ἤ ἡ τιμή 1.

Ἄν μέ E_1, E_2,... παραστήσομε τίς μεταβλητές καί μέ S τή συνάρτηση θά ἔχομε:

$$S = f\,(E_1,\ E_2,\ldots\ ) \tag{4.1}$$

Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσομε ἠλεκτρονικά κυκλώματα, τά ὁποῖα πραγματοποιοῦν λογικές συναρτήσεις.

Οἱ μεταβλητές E_1, E_2,... τῆς συναρτήσεως (4.1) θά εἶναι εἴσοδοι τοῦ λογικοῦ κυκλώματος καί ἡ S θά εἶναι ἡ ἔξοδος τοῦ κυκλώματος. Στό σχῆμα 4.1 δίνεται συμβολικά ἕνα λογικό κύκλωμα.



Σχ. 4.1.
Λογικό κύκλωμα.

Φυσικά οἱ εἴσοδοι τοῦ κυκλώματος μποροῦν νά πάρουν μόνον τίς τιμές 0 ἤ 1 καί ἡ ἔξοδος ἐπίσης μπορεῖ νά πάρει τήν τιμή 0 ἤ 1. Ἕνας πίνακας στόν ὁποῖο περιλαμβάνονται ὅλοι οἱ δυνατοί συνδυασμοί τῶν τιμῶν τῶν εἰσόδων ἑνός λογικοῦ κυκλώματος μαζί μέ τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς ἐξόδου του λέγεται Πίνακας Ἀληθείας τοῦ λογικοῦ κυκλώματος.

Τά διάφορα στοιχεῖα πού ἀποτελοῦν ἕνα λογικό κύκλωμα θά τά ἐξετάζομε σέ δύο χαρακτηριστικές ὁριακές καταστάσεις στίς ὁποῖες μποροῦν νά λειτουργήσουν, ἀδιαφορώντας γιά τίς ἐνδιάμεσες καταστάσεις λειτουργίας τους.

Παραδείγματα.

α) Δίοδος — κατάσταση 1η ἄγει
— κατάσταση 2η δέν ἄγει

β) Διακόπτης — κατάσταση 1η ἀνοικτός
— κατάσταση 2η κλειστός

γ) Τρανζίστορ — κατάσταση 1η κόρος (ἄγει)
— κατάσταση 2η ἀποκοπή (δέν ἄγει)

Περισσότερες λεπτομέρειες γιά τίς ὁριακές αὐτές καταστάσεις λειτουργίας ἀναφέρονται στήν παράγραφο 4.4.1.

4.2 Βασικά λογικά κυκλώματα.

Τά λογικά κυκλώματα ποῦ μποροῦν νά ἐκτελέσουν βασικές λογικές πράξεις τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole τά ὀνομάζομε ΠΥΛΕΣ (GATES).

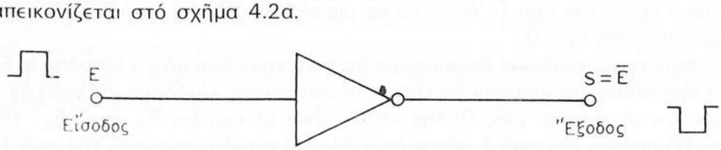
Τέτοιες βασικές λογικές πράξεις εἶναι:

— Ἡ πράξη τῆς ἀντιστροφῆς ἤ συμπληρώματος.
— Ἡ πράξη τοῦ λογικοῦ «ΚΑΙ» (λογικός πολλαπλασιασμός).
— Ἡ πράξη τοῦ λογικοῦ «Η» (λογική πρόσθεση).

Οἱ πύλες ἀποτελοῦν τά βασικότερα λογικά κυκλώματα, συνδυασμός τῶν ὁποίων μᾶς ἐπιτρέπει τήν κατασκευή πολυπλοκοτέρων λογικῶν κυκλωμάτων. Μερικά ἀπό αὐτά θά μελετήσομε παρακάτω.

4.2.1 Ἀντιστροφέας (Inverter) ἤ πύλη ΟΧΙ (NOT GATE).

Τό κύκλωμα αὐτό ἐκτελεῖ τήν πράξη τῆς ἀντιστροφῆς καί τό λογικό του σύμβολο ἀπεικονίζεται στό σχῆμα 4.2α.



Σχ. 4.2α.
Λογικό σύμβολο ἀντιστροφέα.

Ὁ πίνακας 4.2.1 εἶναι ὁ πίνακας ἀληθείας τοῦ ἀντιστροφέα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.1.
Πίνακας ἀληθείας τοῦ ἀντιστροφέα

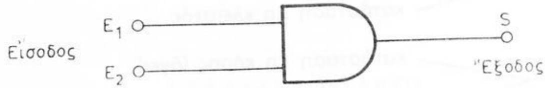
E	S
1	0
0	1

$\Longrightarrow \quad S = \overline{E}, \quad \overline{S} = E$

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας φαίνεται ὅτι ὅταν ἡ εἴσοδος Ε τοῦ κυκλώματος ἔχει τήν τιμή 1, ἡ ἔξοδος ἔχει τήν τιμή 0 καί ἀντίστροφα.

4.2.2 Πύλη «ΚΑΙ» (AND GATE).

Τό κύκλωμα αὐτό ἐκτελεῖ τήν πράξη τοῦ λογικοῦ πολλαπλασιασμοῦ (λογικό ΚΑΙ) καί τό λογικό του σύμβολο ἀπεικονίζεται στό σχῆμα 4.2β.



Σχ. 4.2β.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΚΑΙ».

Ὁ πίνακας 4.2.2 εἶναι ὁ πίνακας ἀληθείας τῆς πύλης «ΚΑΙ».

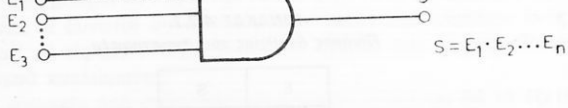
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.2.
Πίνακας ἀληθείας τῆς πύλης «ΚΑΙ»

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\Longrightarrow S = E_1 . E_2$

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας φαίνεται ὅτι ἡ ἔξοδος ἔχει τιμή 1 μόνο ὅταν καί οἱ δύο οἱ εἴσοδοι ἔχουν τήν τιμή 1. Ἄν ἔστω καί μία εἴσοδος παίρνει τιμή 0, τότε ἡ ἔξοδος παίρνει καί αὐτή τιμή 0.

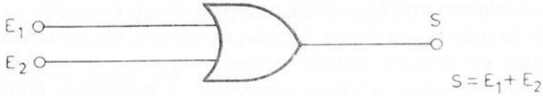
Στό παραπάνω κύκλωμα θεωρήσαμε ὅτι ὑπάρχουν δύο μόνον εἴσοδοι, οἱ E_1 καί E_2. Τά ἴδια πράγματα ἰσχύουν ἄν εἴχαμε περισσότερες εἰσόδους. Δηλαδή ἄν ὑποθέσομε ὅτι οἱ εἴσοδοι μιᾶς Πύλης «ΚΑΙ» εἶναι οἱ εἴσοδοι E_1, E_2,... E_n, τότε ἡ ἔξοδος θά παίρνει τήν τιμή 1 μόνον ὅταν ὅλες οἱ εἴσοδοι παίρνουν τήν τιμή 1 (σχ. 4.2γ).



Σχ. 4.2γ.
Πύλη «ΚΑΙ» μέ n εἰσόδους.

4.2.3 Πύλη «Η» (OR GATE).

Τό κύκλωμα αὐτό ἐκτελεῖ τήν πράξη τῆς λογικῆς προσθέσεως (λογικό Η) καί τό λογικό του σύμβολο παριστάνεται στό σχῆμα 4.2δ.



Σχ. 4.2δ.
Λογικό σύμβολο πύλης «Η».

Ὁ πίνακας 4.2.3 εἶναι ὁ πίνακας ἀληθείας τοῦ κυκλώματος «Η».

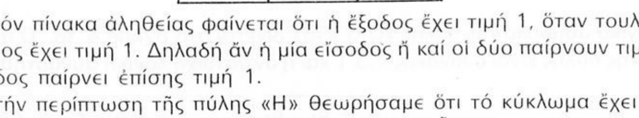
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.3.
Πίνακας ἀληθείας πύλης «Η»

E_1	E	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\Longrightarrow$ $S = E_1 + E_2$

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας φαίνεται ὅτι ἡ ἔξοδος ἔχει τιμή 1, ὅταν τουλάχιστον μία εἴσοδος ἔχει τιμή 1. Δηλαδή ἄν ἡ μία εἴσοδος ἤ καί οἱ δύο παίρνουν τιμή 1, τότε ἡ ἔξοδος παίρνει ἐπίσης τιμή 1.

Καί στήν περίπτωση τῆς πύλης «Η» θεωρήσαμε ὅτι τό κύκλωμα ἔχει δύο εἰσόδους. Τά ἴδια πράγματα ἰσχύουν ἄν τό κύκλωμα εἶχε περισσότερες εἰσόδους. Δηλαδή ἄν θεωρήσομε ἕνα κύκλωμα μέ n εἰσόδους τίς E_1, E_2,... E_n, τότε ἡ ἔξοδος θά ἔχει τήν τιμή 1, ὅταν τουλάχιστον μία εἴσοδος ἔχει τιμή 1. Στό σχῆμα 4.2ε ἀπεικονίζεται ἕνα τέτοιο κύκλωμα.



Σχ. 4.2ε.
Πύλη «Η» μέ n εἰσόδους.

Παρατήρηση.

Ὁ ἀριθμός τῶν εἰσόδων μιᾶς πύλης δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀπεριόριστος ἀλλά κυμαίνεται συνήθως μεταξύ 2-5 καί ἐξαρτᾶται ἀπό τά στοιχεῖα πού ἀποτελοῦν τήν πύλη καί τά ἄλλα λογικά κυκλώματα μέ τά ὁποῖα συνεργάζεται ἡ πύλη.

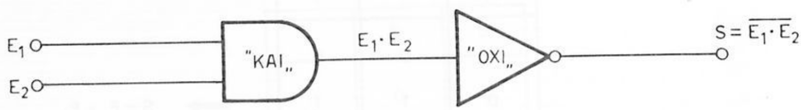
4.3 Ἄλλα λογικά κυκλώματα.

Τά λογικά κυκλώματα ποῦ ἐξετάσαμε προηγουμένως, ἐκτελοῦν τίς βασικές λογικές πράξεις τῆς ἄλγεβρας τοῦ Boole, δηλαδή τίς πράξεις τῆς ἀντιστροφῆς, τῆς λογικῆς προσθέσεως καί λογικοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Μποροῦμε νά συνδεσμολογήσομε κατάλληλα τά παραπάνω βασικά λογικά κυκλώματα καί νά κατασκευάσομε ἄλλα λογικά κυκλώματα, πολύ χρήσιμα καί μέ πολλές ἐφαρμογές στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές. Τέτοια κυκλώματα εἶναι τά παρακάτω.

4.3.1 Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» (NAND GATE).

Τό κύκλωμα αὐτό ἀποτελεῖ συνδυασμό μιᾶς πύλης «ΚΑΙ» καί μιᾶς πύλης «ΟΧΙ». Συγκεκριμένα, ἄν στήν ἔξοδο μιᾶς πύλης «ΚΑΙ» συνδέσομε μία πύλη «ΟΧΙ» τότε τό κύκλωμα πού προκύπτει (σχ. 4.3α), τό ὀνομάζομε πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ».



Σχ. 4.3α.
Συνδεσμολογία πύλης «ΚΑΙ» καί πύλης «ΟΧΙ» (Nand).

Τό λογικό σύμβολο τῆς πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ» δίνεται στό σχῆμα 4.3β. Ὁ πίνακας ἀληθείας τῆς πύλης εἶναι ὁ πίνακας 4.3.1 καί ἡ ἀντίστοιχη λογική συνάρτηση εἶναι ἡ:

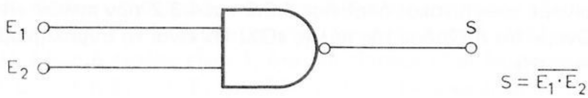
$$S = \overline{E_1 \,.\, E_2}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.1.
Πίνακας ἀληθείας πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ»

E_1	E_2	$S = \overline{E_1 \,.\, E_2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\Longrightarrow \quad S = \overline{E_1 \,.\, E_2} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$

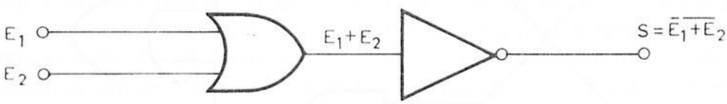
Ἄν συγκρίνομε τούς πίνακες ἀληθείας 4.2.2 καί 4.3.1 τῶν πυλῶν «ΚΑΙ» καί «ΟΧΙ ΚΑΙ» διαπιστώνομε ὅτι ἡ ἔξοδος τῆς πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ» εἶναι τό συμπλήρωμα τῆς ἐξόδου τῆς πύλης «ΚΑΙ».



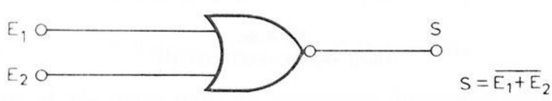
Σχ. 4.3β.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΟΧΙ ΚΑΙ».

4.3.2 Πύλη «ΟΧΙ Η» (NOR GATE).

Τό κύκλωμα αὐτό ἀποτελεῖ συνδυασμό μιᾶς πύλης «Η» καί μιᾶς πύλης «ΟΧΙ». Συγκεκριμένα, ἄν στήν ἔξοδο μιᾶς πύλης «Η» συνδέσομε μιά πύλη «ΟΧΙ» τότε τό κύκλωμα ποῦ προκύπτει (σχ. 4.3γ), τό ὀνομάζομε πύλη «ΟΧΙ Η».



Σχ. 4.3γ.
Συνδεσμολογία πύλης «Η» καί πύλης «ΟΧΙ» (Nand).



Σχ. 4.3δ.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΟΧΙ Η».

Τό λογικό σύμβολο τῆς πύλης «ΟΧΙ Η» δίνεται στό σχῆμα 4.3δ. Ὁ πίνακας ἀληθείας τῆς πύλης εἶναι ὁ πίνακας 4.3.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.2.
Πίνακας ἀληθείας πύλης «ΟΧΙ Η»

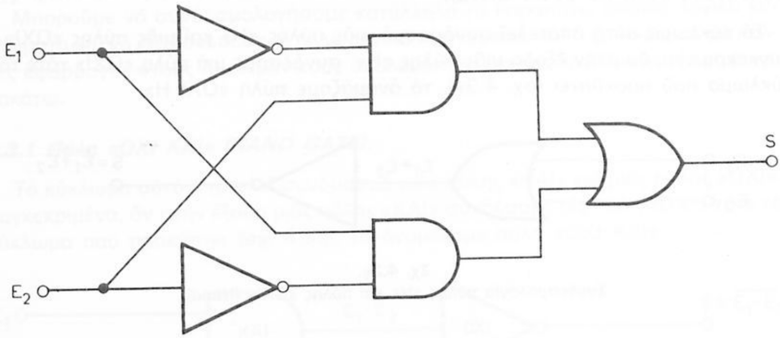
E_1	E_2	$S = \overline{E_1 + E_2}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$\Longrightarrow \quad S = \overline{E_1 + E_2} = \overline{E}_1 \,.\, \overline{E}_2$$

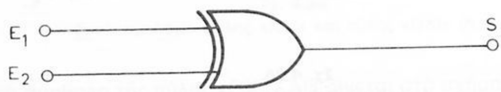
Ἂν συγκρίνομε τούς πίνακας ἀληθείας 4.2.3 καί 4.3.2 τῶν πυλῶν «Η» καί «ΟΧΙ Η», διαπιστώνομε ὅτι ἡ ἔξοδος τῆς πύλης «ΟΧΙ Η» εἶναι τό συμπλήρωμα τῆς ἐξόδου τῆς πύλης «Η».

4.3.3 Πύλη ἀποκλειστικοῦ «Η» (EXCLUSIVE OR GATE).

Τό κύκλωμα αὐτό ἀποτελεῖ συνδυασμό τῶν τριῶν βασικῶν πυλῶν. Δηλαδή τῶν πυλῶν «ΚΑΙ», «ΟΧΙ» καί «Η». Ἡ συνδεσμολογία παριστάνεται στό σχῆμα 4.3ε.



Σχ. 4.3ε.
Πύλη «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η».



$S = E_1 \oplus E_2$

Σχ. 4.3στ.
Λογικό σύμβολο πύλης «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η».

Τό λογικό σύμβολο «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η» δίνεται στό σχῆμα 4.3στ. Ὁ πίνακας ἀληθείας τῆς πύλης εἶναι ὁ πίνακας 4.3.3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.3.
Πίνακας ἀληθείας πύλης «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η»

E_1	E_2	$S = E_1 \oplus E_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\Longrightarrow \quad S = E_1 \oplus E_2 = E_1 \cdot \overline{E}_2 + \overline{E}_1 \cdot E_2$

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας φαίνεται ὅτι ἡ ἔξοδος τῆς πύλης «ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟΥ Η» παίρνει τήν τιμή 1 στήν περίπτωση πού μόνο μία ἀπό τίς εἰσόδους ἔχει τήν τιμή 1. Μέ ἄλλα λόγια ἡ ἔξοδος εἶναι 1, ὅταν οἱ εἴσοδοι εἶναι διαφορετικές, δηλαδή:

$E_1 = 0$, $E_2 = 1$ ἤ $E_1 = 1$, $E_2 = 0$. Ὅταν οἱ δύο εἴσοδοι εἶναι ἴδιες, δηλαδή $E_1 = E_2 = 0$ ἤ $E_1=E_2=1$, ἡ ἔξοδος εἶναι 0.

4.4 Πραγματοποίηση λογικῶν κυκλωμάτων.

4.4.1 Γενικά.

Ὅπως ἔχομε ἀναφέρει, τά λογικά κυκλώματα πραγματοποιοῦνται μέ παθητικά ἤ ἐνεργά ἠλεκτρονικά στοιχεῖα (ἀντιστάσεις, πυκνωτές, δίοδοι, τρανζίστορ κλπ.). Στήν εἴσοδο τῶν κυκλωμάτων αὐτῶν ἐφαρμόζονται ἠλεκτρικές τάσεις ἤ ρεύματα καί ἡ ἔξοδός τους εἶναι ἐπίσης ἠλεκτρική τάση ἤ ρεῦμα. Δηλαδή στήν πράξη οἱ μεταβλητές μας εἶναι τάσεις ἤ ρεύματα. Στό κείμενό μας θά θεωροῦμε ὡς μεταβλητές τίς ἠλεκτρικές τάσεις. Ἐπειδή οἱ μεταβλητές πρέπει νά εἶναι δίτιμες (γιατί εἶναι λογικές μεταβλητές) θά θεωροῦμε ὅτι ἡ τάση στίς εἰσόδους καί στήν ἔξοδο τῶν κυκλωμάτων αὐτῶν παίρνει μόνο δύο δυνατές τιμές*, π.χ. + 5 Volt, − 5 Volt η 0 Volt, + 3 Volt. Τίς τιμές αὐτές τίς ἀντιστοιχοῦμε στό 0 καί 1. Συνήθως τό λογικό 1 ἀντιστοιχοῦμε στό μεγαλύτερο δυναμικό καί τό λογικό 0 στό χαμηλότερο.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{ccc} +5 \text{ Volt} \Rightarrow «1» & & 3 \text{ Volt} \Rightarrow «1» \\ & ἤ & \\ -5 \text{ Volt} \Rightarrow «0» & & 0 \text{ Volt} \Rightarrow «0» \end{array}$$

Ἄν ὁρίσομε μέ τόν τρόπο αὐτό τήν ἀντιστοιχία δυναμικῶν (τάσεων) καί λογικῶν 0 καί 1, τότε λέμε ὅτι ἐργαζόμασθε μέ ΘΕΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ.

Ἀντίθετα, ἄν ἀντιστοιχήσομε τό λογικό 0 στό ὑψηλότερο δυναμικό καί τό λογικό 1 στό χαμηλότερο, π.χ.:

$$\begin{array}{ccc} +5 \text{ Volt} \Rightarrow «0» & & +3 \text{ Volt} \Rightarrow «0» \\ & ἤ & \\ -5 \text{ Volt} \Rightarrow «1» & & 0 \text{ Volt} \Rightarrow «1» \end{array}$$

τότε λέμε ὅτι ἐργαζόμασθε μέ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ.

Μερικές φορές τό μεγαλύτερο δυναμικό τό συμβολίζομε μέ τό γράμμα H (High Level) καί τό χαμηλότερο μέ τό L (Lower Level).

Ὅταν μιλᾶμε γιά θετικά ἤ ἀρνητικά δυναμικά (ἤ τάσεις), πάντοτε ἀναφερόμασθε ὡς πρός μία στάθμη δυναμικοῦ, π.χ. τῆς γῆς πού θεωρεῖται 0 Volt.

Τά διαγράμματα τοῦ σχήματος 4.4α ἀπεικονίζουν παραστατικά τίς ἔννοιες τῆς θετικῆς καί ἀρνητικῆς λογικῆς.

Τά λογικά κυκλώματα μποροῦν νά κατασκευασθοῦν, ἀπό ἠλεκτρονικά στοιχεῖα, (ἀντιστάσεις, πυκνωτές, διόδους, τρανζίστορς) συνδεσμολογημένα εἴτε ὡς διακρι-

---

(*) Οἱ τιμές αὐτές καθορίζονται ἀπό τόν κατασκευαστή καί ἀναφέρονται στίς προδιαγραφές τῶν κυκλωμάτων.

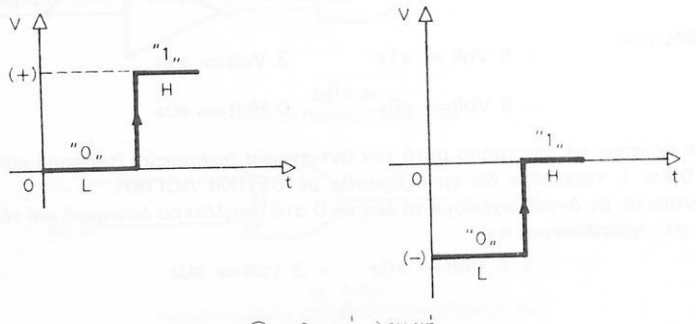
τά στοιχεῖα εἴτε ὡς ὁλοκληρωμένα κυκλώματα (πάνω σέ ἕνα πολύ μικρό κομμάτι κρυστάλλου πυριτίου). Τά τελευταῖα παρουσιάζουν ἀρκετά πλεονεκτήματα καί γι' αὐτό τό λόγο σήμερα χρησιμοποιοῦνται σχεδόν κατ' ἀποκλειστικότητα γιά τήν πραγματοποίηση τῶν λογικῶν κυκλωμάτων.

Πρίν ἐξετάσομε πῶς μποροῦμε νά πραγματοποιήσομε τά βασικά λογικά κυκλώματα (πύλες) μέ διακριτά ἠλεκτρονικά στοιχεῖα ἤ ὁλοκληρωμένα κυκλώματα, θά ἐξετάσομε βασικά στοιχεῖα γιά τή λειτουργία τῶν ἡμιαγωγῶν. Αὐτό θά μᾶς βοηθήσει πολύ στό νά καταλάβομε γρήγορα καί σωστά τήν πραγματοποίηση καί λειτουργία τῶν πυλῶν καί γενικότερα τῶν λογικῶν κυκλωμάτων.

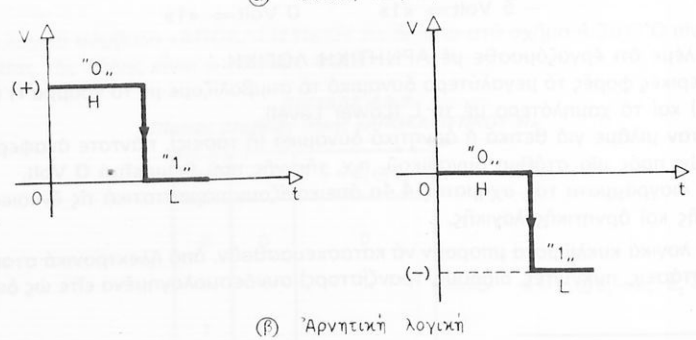
4.4.2 Βασικές ἰδιότητες ἡμιαγωγῶν.

α) Δίοδος (DIODE).

Ὅταν ἡ τάση τῆς ἀνόδου εἶναι θετικότερη ἀπό τήν τάση τῆς καθόδου, ἡ δίοδος εἶναι πολωμένη κατά τήν «ὀρθή φορά» (Forward Biased) καί ἄγει. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ δίοδος παρουσιάζει πρακτικά μηδενική ἀντίσταση καί ἔτσι οὐσιαστικά ἐνεργεῖ ὡς ἕνας κλειστός διακόπτης [σχ. 4.4β(α)].



ⓐ θετική λογική



ⓑ Ἀρνητική λογική

Σχ. 4.4α.
Διαγράμματα ΘΕΤΙΚΗΣ καί ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ Λογικῆς.

Ὅταν ἡ τάση ἀνόδου εἶναι μικρότερη ἀπό τήν τάση καθόδου, τότε ἡ δίοδος εἶναι πολωμένη κατά τήν «ἀνάστροφη φορά» (Reserve Biased) καί δέν ἄγει. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ δίοδος παρουσιάζει πολύ μεγάλη ἀντίσταση (θεωρητικά ἄπειρη — ἰδανική δίοδος) καί ἐνεργεῖ ὡς ἀνοικτός διακόπτης [σχ. 4.4β(β)].

(α) Πόλωση κατά τήν ὀρθή φορά — Διακόπτης κλειστός

(β) Πόλωση κατά τήν ἀνάστροφη φορά – Διακοπτης ανοικτος

Σχ. 4.4β.
Δίοδος. α) Πόλωση κατά τήν ὀρθή φορά. β) Πόλωση κατά τήν ἀντίστροφη φορά.

β) Τρανζίστορ.

Τά τρανζίστορ μέ ἐφαρμογή καταλλήλων τάσεων στήν εἴσοδό τους, μποροῦν νά λειτουργήσουν ὡς διακόπτες, ὅπως ἡ δίοδος πού εἴδαμε προηγουμένως.

Τά τρανζίστορ ὅταν χρησιμοποιοῦνται σέ λογικά κυκλώματα φροντίζομε ὥστε νά λειτουργοῦν σέ δύο περιοχές :

— Τήν περιοχή ἀποκοπῆς (μή ἀγώγιμο) ἤ
— τήν περιοχή κόρου (ἀγώγιμη).

Ἔτσι συμπεριφέρονται ὡς δικατάστατα στοιχεῖα καί μποροῦμε νά κάνομε παρόμοια ἀντιστοιχία μέ αὐτή τῆς διόδου. Ἀμέσως παρακάτω θά ἐξετάσομε λεπτομερέστερα τούς δύο τύπους τρανζίστορ PNP καί NPN.

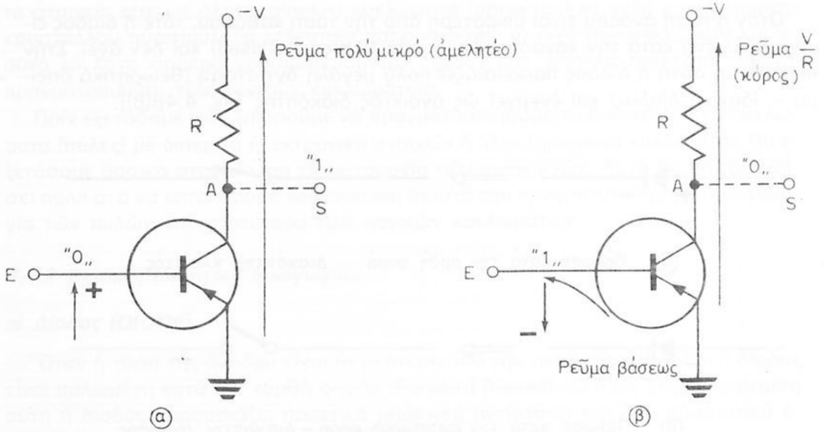
Transistor PNP.

Ἔστω ἕνα τρανζίστορ τύπου PNP τό ὁποῖο εἶναι συνδεσμολογημένο ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 4.4γ.

Οἱ δύο καταστάσεις λειτουργίας πού ἀναφέραμε προηγουμένως καί πού μᾶς ἐνδιαφέρουν εἶναι:

α) Ὅταν ἡ βάση εἶναι στό ἴδιο ἤ θετικότερο δυναμικό μέ ἐκεῖνο τοῦ ἐκπομποῦ [σχ. 4.4γ(α)] μεταξύ ἐκπομποῦ καί συλλέκτη κυκλοφορεῖ ἕνα πολύ μικρό ρεῦμα τῆς τάξεως τῶν μA. Τό ρεῦμα αὐτό εἶναι πρακτικά ἀμελητέο καί λέμε ὅτι τό τρανζίστορ βρίσκεται στήν κατάσταση ἀποκοπῆς καί συμπεριφέρεται ὡς ἀνοικτός διακόπτης. Ἑπομένως τό δυναμικό στό συλλέκτη (σημεῖο Α) θά εἶναι τό δυναμικό τῆς πηγῆς, δηλαδή — V volt.

Ἄρα $\qquad S = -V$ volt$\Rightarrow$ «1»



Κατάσταση ἀποκοπῆς – Διακόπτης ἀνοιχτός (δέν ἄγει)

Κατάσταση κόρου – Διακόπτης κλειστός (ἄγει)

Σχ. 4.4γ.
Transistor τύπου PNP.

β) Ὅταν ἡ βάση ὁδηγηθεῖ σέ δυναμικό ἀρνητικότερο ἀπό ἐκεῖνο τοῦ ἐκπομποῦ μεταξύ ἐκπομποῦ καί συλλέκτη κυκλοφορεῖ ρεῦμα I τοῦ ὁποίου ἡ τιμή καθορίζεται μόνο ἀπό τήν τιμή τοῦ δυναμικοῦ τῆς πηγῆς — V volt καί ἀπό τήν ἀντίσταση R ($I = \frac{V}{R}$). Τότε λέμε ὅτι τό τρανζίστορ βρίσκεται στήν κατάσταση κόρου. Τό δυναμικό στό σημεῖο A γίνεται πρακτικά 0 Volt.

Ἄρα S = 0 Volt ⟹ «0»

Παρόμοια εἶναι καί ἡ συμπεριφορά τοῦ τρανζίστορ τύπου NPN πού παριστάνεται στό σχῆμα 4.4δ.

4.4.3 Πραγματοποίηση πυλῶν.

α) Πύλη «ΚΑΙ» μέ διόδους.

Τό κύκλωμα στό σχῆμα 4.4ε παριστάνει μιά πύλη «ΚΑΙ».

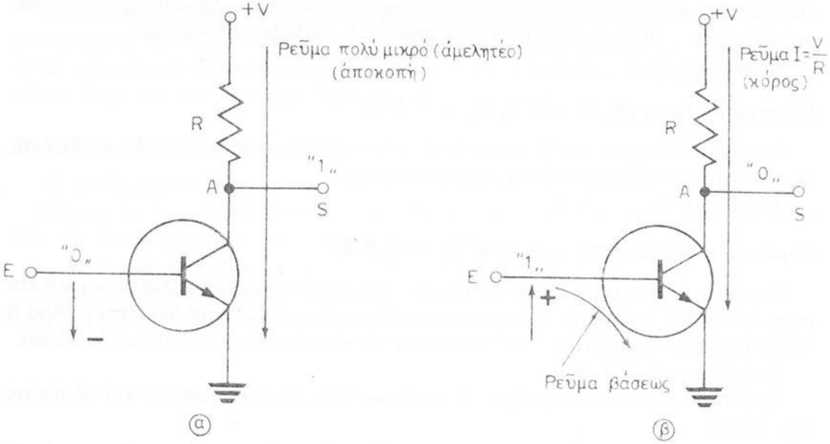
Εὔκολα διαπιστώνομε ὅτι τό κύκλωμα αὐτό λειτουργεῖ ὡς πύλη «ΚΑΙ». Θεωροῦμε ὅτι:

— Ἡ ἀντιστοιχία εἶναι + 5 Volt ⟹ «1», — 5 Volt ⟹ «0» (θετική λογική).
— Οἱ δίοδοι εἶναι ἰδανικές καί
— ἡ τάση τροφοδοτήσεως τοῦ κυκλώματος εἶναι + 5 Volt.

Δεδομένου ὅτι τό κύκλωμα ἔχει δύο εἰσόδους, εἶναι δυνατόν νά ἐμφανισθοῦν σέ αὐτές 4 συνδυασμοί τάσεων (σημάτων εἰσόδου):

$E_1 = -5$ V, $E_2 = -5$ V $E_1 = +5$ V, $E_2 = -5$ V

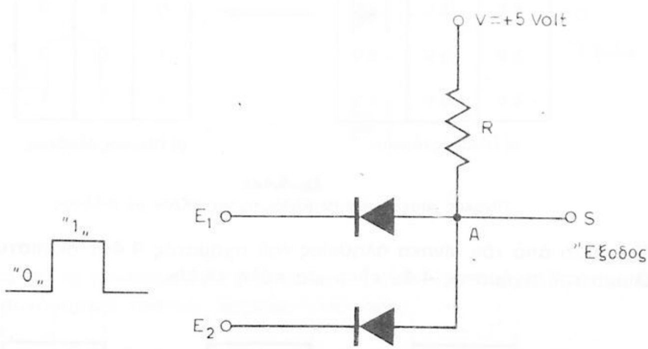
$E_1 = -5$ V, $E_2 = +5$ V $E_1 = +5$ V, $E_2 = +5$ V



Κατάσταση ἀποκοπῆς - Διακόπτης ἀνοικτός

Κατάσταση κόρου - Διακόπτης κλειστός

Σχ. 4.4δ.
Transistor τύπου NPN.



Σχ. 4.4ε.
Πύλη «ΚΑΙ» μὲ διόδους.

Περίπτωση Πρώτη ($E_1 = -5$ V, $E_2 = -5$ V).

Στὴν περίπτωση αὐτὴ οἱ δίοδοι (κύκλωμα τοῦ σχήματος 4.4ε) εἶναι πολωμένες κατὰ τὴν ὀρθὴ φορά. Συνεπῶς ἄγουν καὶ ***συμπεριφέρονται*** ὡς κλειστοὶ διακόπτες. Ἄρα ἡ τάση τῶν − 5 V ἐμφανίζεται στὸ σημεῖο Α, δηλαδὴ στὴν ἔξοδο.

Ἑπομένως: S = − 5 V.

Περίπτωση Δεύτερη ($E_1 = -5$ V, $E_2 = +5$ V).

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ μία δίοδος εἶναι πολωμένη κατὰ τὴν ὀρθὴ φορὰ (δίοδος εἰσόδου E_1). Συνεπῶς ἄγει καί συμπεριφέρεται ὡς κλειστός διακόπτης. Ἄρα ἡ τάση πάλι τῶν − 5 V ἐμφανίζεται στό σημεῖο A, δηλαδή στήν ἔξοδο.

Ἑπομένως: S = − 5 V.

Περίπτωση Τρίτη (E_1 = + 5 V, E_2 = − 5 V).

Στήν περίπτωση αὐτή πάλι ἡ μία δίοδος ἄγει (δίοδος εἰσόδου E_2). Συνεπῶς ἔχομε τά ἴδια ἀποτελέσματα ὅπως προηγουμένως.

Ἑπομένως: S = − 5 V.

Περίπτωση Τέταρτη (E_1 = + 5 V, E_2 = + 5 V).

Στήν περίπτωση αὐτή καί οἱ δύο δίοδοι δέν ἄγουν (ἔχουν τό ἴδιο δυναμικό καί στήν ἄνοδο καί στήν κάθοδο) καί συμπεριφέρονται ὡς ἀνοικτοί διακόπτες. Ἄρα ἡ τάση τροφοδοτήσεως τῶν + 5 V ἐμφανίζεται στό σημεῖο A, δηλαδή στήν ἔξοδο.

Ἑπομένως: S = + 5 V.

Ἀπό τά παραπάνω μποροῦμε νά φτιάξομε τούς πίνακες τάσεων καί ἀληθείας (σχ. 4.4στ).

E_1	E_2	S
− 5 V	− 5 V	− 5 V
− 5 V	+ 5 V	− 5 V
+ 5 V	− 5 V	− 5 V
+ 5 V	+ 5 V	+ 5 V

α) Πίνακας τάσεων

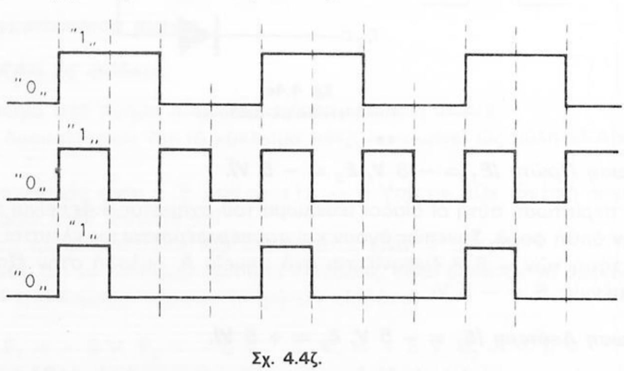
− 5 V ≡ «0»
+ 5 V ≡ «1»
$\Longrightarrow$

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

β) Πίνακας ἀληθείας

Σχ. 4.4στ.
Πίνακες τάσεων καί ἀληθείας πύλης «ΚΑΙ» μέ διόδους.

Πράγματι ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας τοῦ σχήματος 4.4στ διαπιστώνεται ὅτι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 4.4ε εἶναι μία πύλη «ΚΑΙ».



Σχ. 4.4ζ.
Κυματομορφές εἰσόδου - ἐξόδου πύλης «ΚΑΙ».

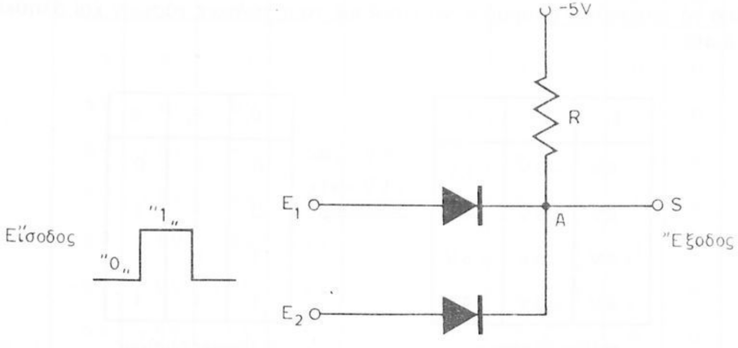
Ἔστω ὅτι στίς εἰσόδους E_1 καί E_2 τοῦ κυκλώματος «ΚΑΙ», ἐφαρμόζονται οἱ κυματομορφές E_1 καί E_2. Τότε ἡ κυματομορφή στήν ἔξοχή θά ἔχει τή μορφή S (σχ. 4.4ζ) γιατί, ἀφοῦ τό κύκλωμά μας εἶναι πύλη «ΚΑΙ» θά ἔχομε στήν ἔξοδο S⇒ «1» μόνον ὅταν καί στίς δύο εἰσόδους ἔχομε ταυτόχρονα «1».

β) Πύλη «Η» μέ διόδους.

Τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 4.4η παριστάνει μιά πύλη «Η».

Μποροῦμε εὔκολα νά διαπιστώσομε ὅτι τό κύκλωμα αὐτό λειτουργεῖ ὡς πύλη «Η», ἄν ὅπως καί στήν πύλη «ΚΑΙ» θεωρήσομε ὅτι:

— Ἡ ἀντιστοιχία εἶναι + 5 V⇒ «1», — 5 V⇒ «0».
— Οἱ δίοδοι εἶναι ἰδανικές καί
— ἡ τάση τροφοδοτήσεως εἶναι — 5 V.



Σχ. 4.4η.
Πύλη «Η» μέ διόδους.

Δεδομένου ὅτι τό κύκλωμα ἔχει δύο εἰσόδους εἶναι δυνατόν νά ἐμφανισθοῦν σέ αὐτές 4 συνδυασμοί τάσεων (σημάτων εἰσόδου):

$E_1 = -5$ V, $E_2 = -5$ V $\qquad E_1 = +5$ V, $E_2 = -5$ V

$E_1 = -5$ V, $E_2 = +5$ V $\qquad E_1 = +5$ V, $E_2 = +5$ V

Περίπτωση Πρώτη ($E_1 = -5$ V, $E_2 = -5$ V).

Στήν περίπτωση αὐτή, οἱ δίοδοι (κύκλωμα σχήματος 4.4η) εἶναι πολωμένες κατά τήν ἀνάστροφη φορά. Συνεπῶς δέν ἄγουν καί συμπεριφέρονται ὡς ἀνοικτοί διακόπτες. Ἄρα ἡ τάση τροφοδοτήσεως — 5 V, ἐμφανίζεται στό σημεῖο Α, δηλαδή στήν ἔξοδο.

Ἑπομένως: S = — 5 V.

Περίπτωση Δεύτερη ($E_1 = -5$ V, $E_2 = +5$ V).

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ μία δίοδος εἶναι πολωμένη κατά τήν ὀρθή φορά (δίοδος εἰσόδου E_2). Συνεπῶς ἄγει καί συμπεριφέρεται ὡς κλειστός διακόπτης. Ἄρα ἡ τάση πάλι τῶν + 5 V ἐμφανίζεται στό σημεῖο Α, δηλαδή στήν ἔξοδο.

Ἐπομένως: S = + 5 V.

Περίπτωση Τρίτη (E_1 = + 5 V, E_2 = − 5 V).

Στήν περίπτωση αὐτή πάλι ἡ μία δίοδος ἄγει (δίοδος εἰσόδου E_1). Συνεπῶς ἔχομε τά ἴδια ἀποτελέσματα ὅπως προηγουμένως.

Ἐπομένως: S = + 5 V.

Περίπτωση Τέταρτη (E_1 = + 5 V, E_2 = + 5 V).

Στήν περίπτωση αὐτή καί οἱ δύο οἱ δίοδοι εἶναι πολωμένες κατά τήν ὀρθή φορά. Συνεπῶς ἄγουν καί συμπεριφέρονται ὡς κλειστοί διακόπτες.

Ἐπομένως: S = + 5 V.

Ἀπό τά παραπάνω μποροῦμε νά φτιάξομε τούς πίνακες τάσεων καί ἀληθείας (σχ. 4.4θ).

E_1	E_2	S
− 5 V	− 5 V	− 5 V
− 5 V	+ 5 V	+ 5 V
+ 5 V	− 5 V	+ 5 V
+ 5 V	+ 5 V	+ 5 V

α) Πίνακας τάσεων

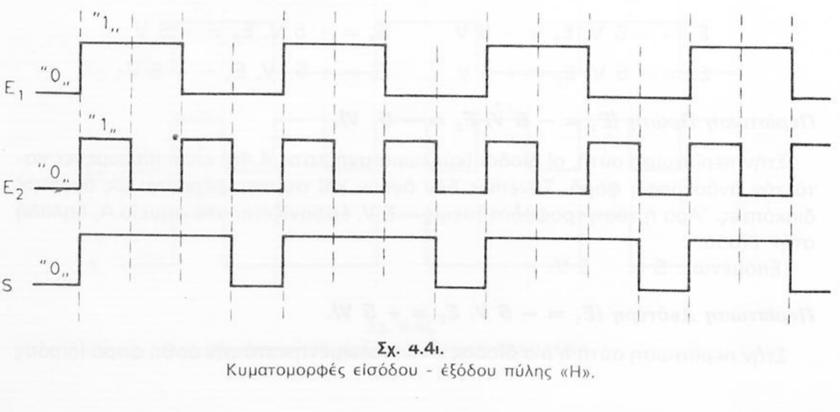
− 5 V ≡ «0»
+ 5 V ≡ «1»

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

β) Πίνακες ἀληθείας

Σχ. 4.4θ.
Πίνακες τάσεως καί ἀληθείας τύπου «Η» μέ διόδους.

Πράγματι ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας τοῦ σχήματος 4.4θ διαπιστώνεται ὅτι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 4.4η εἶναι μία πύλη «Η».



Σχ. 4.4ι.
Κυματομορφές εἰσόδου - ἐξόδου πύλης «Η».

Ἔστω ὅτι στίς εἰσόδους E_1 καί E_2 τοῦ κυκλώματος «ΚΑΙ», ἐφαρμόζονται οἱ κυματομορφές E_1 καί E_2. Τότε ἡ κυματομορφή στήν ἔξοδο θά ἔχει τή μορφή S (σχ. 4.4ζ) γιατί, ἀφοῦ τό κύκλωμά μας εἶναι πύλη «ΚΑΙ» θά ἔχομε στήν ἔξοδο S ⇒ «1» μόνον ὅταν καί στίς δύο εἰσόδους ἔχομε ταυτόχρονα «1».

Παρατηρήσεις.

α) Στά δύο κυκλώματα πού ἐξετάσαμε παραπάνω, θεωρήσαμε ὅτι εἴχαμε δύο εἰσόδους. Τά ἴδια ἀκριβῶς ἰσχύουν σέ περίπτωση πού εἴχαμε τρεῖς ἤ περισσότερες εἰσόδους. Π.χ. σέ κύκλωμα «ΚΑΙ» μέ τρεῖς εἰσόδους θά εἴχαμε διαφορετικούς συνδυασμούς ὅπως φαίνεται στούς πίνακες τάσεων καί ἀληθείας τοῦ σχήματος 4.4ια, πού ἀντιστοιχοῦν σέ κύκλωμα «ΚΑΙ» μέ τρεῖς εἰσόδους.

E_1	E_2	E_3	S
−5 V	−5 V	−5 V	−5 V
−5 V	−5 V	+5 V	−5 V
−5 V	+5 V	−5 V	−5 V
−5 V	+5 V	+5 V	−5 V
+5 V	−5 V	−5 V	−5 V
+5 V	−5 V	+5 V	−5 V
+5 V	+5 V	−5 V	−5 V
+5 V	+5 V	+5 V	+5 V

−5 V ≡ «0»
+5 V ≡ «1»
⟹

E_1	E_2	E_3	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Σχ. 4.4ια.
Πίνακες τάσεων καί ἀληθείας κυκλώματος «ΚΑΙ» μέ τρεῖς εἰσόδους.

β) Τά λογικά κυκλώματα μέ διόδους πού ἐξετασαμε μποροῦν νά λειτουργήσουν κατά τόν ἴδιο τρόπο, ἄν χρησιμοποιούσαμε τίς τάσεις E_1 = + 5 Volt καί E_2 = 0 Volt. Ἡ τάση τροφοδοσίας στήν περίπτωση αὐτή πρέπει νά εἶναι γιά τήν πύλη «ΚΑΙ» + 5 Volt καί γιά τήν πύλη «Η» 0 Volt.

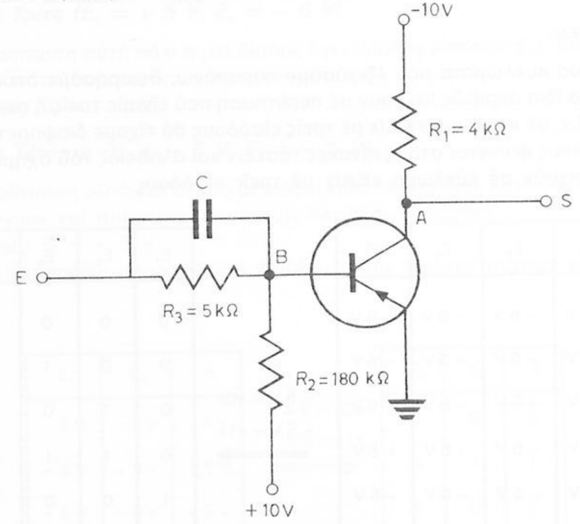
γ) Ἀντιστροφέας (Inverter).

Τό κύκλωμα πού φαίνεται στό σχῆμα 4.4ιβ ἐκτελεῖ τήν πράξη τῆς ἀντιστροφῆς καί ὀνομάζεται πύλη «ΟΧΙ» ἤ ἀντιστροφέας (Inverter).

Μποροῦμε εὔκολα νά διαπιστώσομε ὅτι τό κύκλωμα αὐτό ἐκτελεῖ τήν πράξη τῆς ἀντιστροφῆς ἄν θεωρήσομε τήν ἀντιστοιχία 0 Volt ⇒ «0» καί − 10 Volt ⇒ «1».

Περίπτωση Πρώτη (E = 0 Volt).

Ἄν στήν εἴσοδο ἐφαρμόσομε μιά τάση 0 Volt, οἱ ἀντιστάσεις R_2 καί R_3 ἐνεργοῦν ὡς διαιρέτες τάσεως μεταξύ τῶν 0 καί + 10 Volt καί ἡ τάση στή βάση (σημεῖο Β) θά εἶναι ἐλαφρῶς θετική. Μέ αὐτές τίς συνθῆκες τό τρανζίστορ βρίσκεται στήν κατάσταση ἀποκοπῆς. Συνεπῶς δέν ἄγει καί τό σημεῖο Α ὁδηγεῖται στήν τάση τῶν −10 Volt δηλαδή S = «1».



Σχ. 4.4ιβ.
Ἀντιστροφέας.

Περίπτωση Δεύτερη (E = −10 Volt).

Ἄν στήν εἴσοδο ἐφαρμόσομε μιά τάση −10 Volt, ἡ τάση στή βάση τοῦ τρανζίστορ (σημεῖο Β) γίνεται ἀρνητική ὡς πρός τόν ἐκπομπό καί τό τρανζίστορ ὁδηγεῖται στήν κατάσταση κόρου. Τό δυναμικό τοῦ σημείου Α θά εἶναι 0 Volt (δηλαδή ἐκεῖνο τοῦ ἐκπομποῦ). Ἄρα S = «0». Συνεπῶς γιά τούς πίνακες τάσεων καί ἀληθείας θά ἔχομε (σχ. 4.4ιγ).

E	S
0 V	−10 V
−10 V	0 V

0 V = «0»

−10 V = «1»

⟹

E	S
0	1
1	0

Σχ. 4.4ιγ.
Πίνακες τάσεων καί ἀληθείας ἀντιστροφέα.

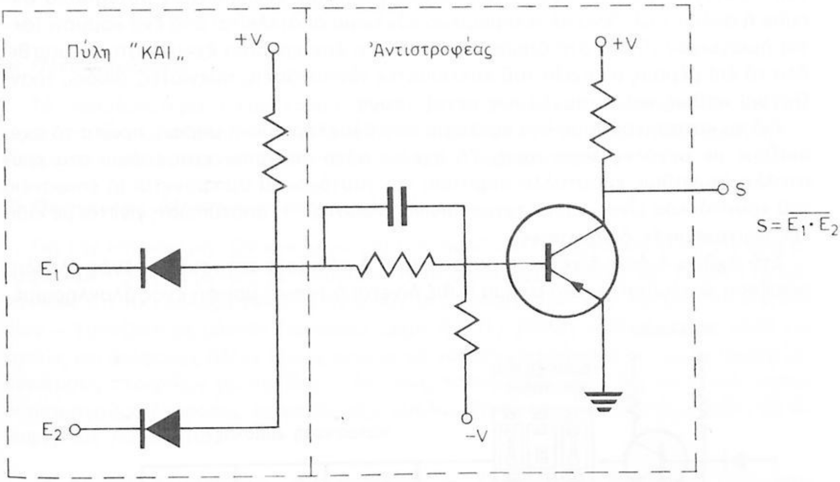
Ἀπό τούς παραπάνω πίνακες διαπιστώνομε ὅτι ἡ ἔξοδος εἶναι πάντοτε συμπλήρωμα τῆς εἰσόδου ($S = \bar{E}$). Δηλαδή τό κύκλωμά μας ἐκτελεῖ τή λογική πράξη τῆς ἀντιστροφῆς.

Παρατήρηση.

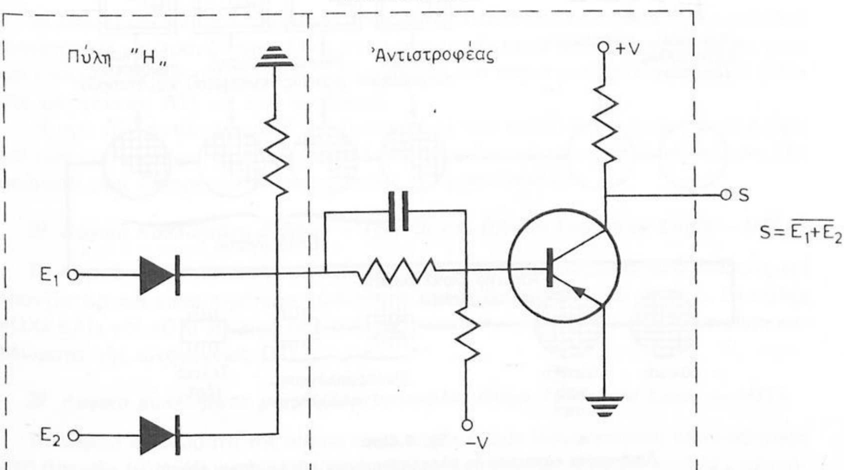
῾Ο πυκνωτής C δίνει στό κύκλωμα τή δυνατότητα νά ἀνταποκρίνεται σέ γρήγορες ἐναλλαγές 0 καί 1 στήν εἴσοδό του (ἡ τιμή τοῦ πυκνωτῆ κυμαίνεται μεταξύ 40-200 pF).

δ) Πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ» καί «ΟΧΙ Η».

῎Αν στήν ἔξοδο μιᾶς πύλης «ΚΑΙ» συνδέσομε ἕναν ἀντιστροφέα, τότε τό κύκλωμα πού προκύπτει εἶναι μία πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» (σχ. 4.4ιδ).



Σχ. 4.4ιδ.
Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ».



Σχ. 4.4ιε.
Πύλη «ΟΧΙ Η».

Ἐπίσης, ἄν συνδέσομε ἕναν ἀντιστροφέα στήν ἔξοδο μιᾶς πύλης «Η», τό κύκλωμα πού προκύπτει εἶναι μιά πύλη «ΟΧΙ Η» (σχ. 4.4ιε).

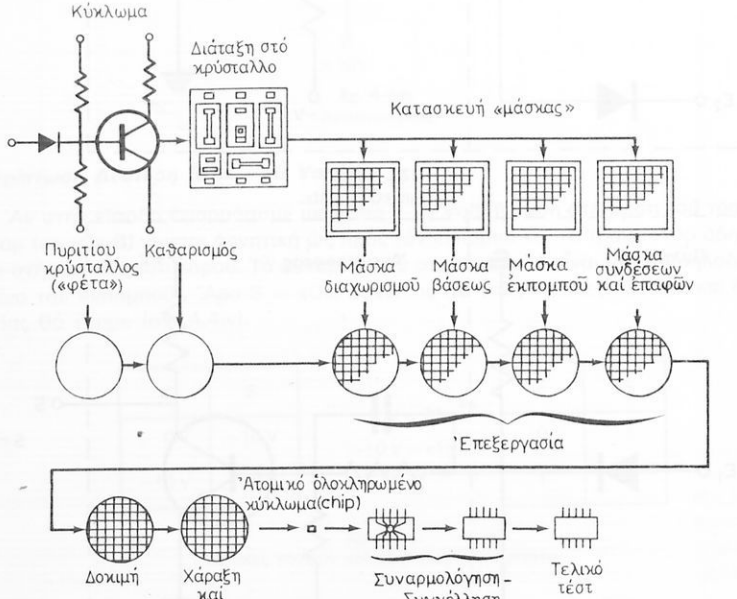
4.4.4 Πραγματοποίηση μέ ὁλοκληρωμένα κυκλώματα.

Μέχρι πρίν ἀπό μερικά χρόνια, ὅλα τά κυκλώματα πού ἀναφέραμε προηγουμένως κατασκευάζονταν ἀπό διακριτά ἠλεκτρονικά στοιχεῖα, ὅπως π.χ. εἶναι οἱ ἀντιστάσεις, πυκνωτές, τρανζίστορ, δίοδοι κλπ.

Σήμερα, τά κυκλώματα αὐτά καθώς καί πολλά ἄλλα, πιό πολύπλοκα ἀκόμα, κατασκευάζονται μέ τήν τεχνική τῶν ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων (Integrated Circuits ἤ ἁπλῶς I.C). Ἕνα ὁλοκληρωμένο κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα κομμάτι (φέτα) ἡμιαγωγοῦ (Chip) στό ὁποῖο μέ κατάλληλη ἐπεξεργασία ἔχουν κατασκευασθεῖ ὅλα τά ἐπί μέρους στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος (ἀντιστάσεις, πυκνωτές, δίοδοι, τρανζίστορ) καθώς καί οἱ συνδέσεις μεταξύ τους.

Γιά νά κατασκευάσομε ἕνα κύκλωμα ὑπό ὁλοκληρωμένη μορφή, πρῶτα τό σχεδιάζομε μέ μεγάλες διαστάσεις. Τό σχέδιο αὐτό ἀποτυπώνεται ἐπάνω στό κρύσταλλο (συνήθως κρύσταλλο πυριτίου) καί ταυτόχρονα σμικρύνεται (ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κρυστάλλου εἶναι μερικά τετραγωνικά χιλιοστά). Ἡ ἀποτύπωση γίνεται μέ εἰδικές φωτοχημικές διαδικασίες.

Στό σχῆμα 4.4ιστ δίνεται παραστατικά ἡ διαδικασία κατασκευῆς ἑνός ὁλοκληρωμένου κυκλώματος. Στό σχῆμα 4.4ιζ δίνεται ἡ τυπική μορφή ἑνός ὁλοκληρωμέ-



Σχ. 4.4ιστ.
Διαδικασία κατασκευῆς ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων (ἀρχή).

νου κυκλώματος στό τέλος τῆς πιό πάνω διαδικασίας. Δηλαδή ὅπως τό ἀγοράζομε σήμερα στό ἐμπόριο (διαστάσεις 0,5 × 1,5 cm περίπου).

Σχ. 4.4ιζ.
Ὁλοκληρωμένο κύκλωμα (τελική μορφή).

α) Πλεονεκτήματα.

Τά σπουδαιότερα πλεονεκτήματα είναι ἡ μεγάλη μείωση διαστάσεων καί βάρους, σημαντική αὔξηση τῆς πιστότητας (Reliability) καί τῆς ταχύτητας, χαμηλή κατανάλωση ἰσχύος καί τό σημαντικότερο πολύ χαμηλή τιμή.

β) Οἰκογένειες ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων.

Γιά τήν κατασκευή τῶν κυκλωμάτων τῶν πυλῶν «ΟΧΙ ΚΑΙ» καί «ΟΧΙ Η» πού ἀναφέραμε προηγουμένως, χρησιμοποιοῦνται δίοδοι καί τρανζίστορ. Γι αὐτό τό λόγο λέμε ὅτι τά κυκλώματα αὐτά ἀνήκουν στήν οἰκογένεια τῶν κυκλωμάτων «Διόδων — Τρανζίστορ» (Diode Transistor Logic ἤ DTL). Πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ» καί «ΟΧΙ Η» καθώς καί διάφορες ἄλλες πύλες μποροῦμε νά κατασκευάσομε καί μέ ἄλλους συνδυασμούς στοιχείων (ἀντιστάσεις, διόδους, τρανζίστορ κλπ). Μέ αὐτό τόν τρόπο δημιουργοῦμε διάφορες «οἰκογένειες» κυκλωμάτων, μερικές ἀπό τίς ὁποῖες θά ἀναφέρομε παρακάτω.

1) Λογικά Κυκλώματα Ἀντιστάσεων — Τρανζίστορ (Resistor Transistor Logic — RTL).

Τά λογικά κυκλώματα τῆς οἰκογένειας αὐτῆς κατασκευάζονται ἀποκλειστικά ἀπό ἀντιστάσεις καί τρανζίστορ. Εἶναι ἁπλά στό σχεδιασμό καί στήν κατασκευή τους καί ἐπιπλέον ἔχουν μικρό κόστος. Τό σχῆμα 4.4ιη παριστάνει μία πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» τῆς οἰκογένειας RTL μέ δύο εἰσόδους.

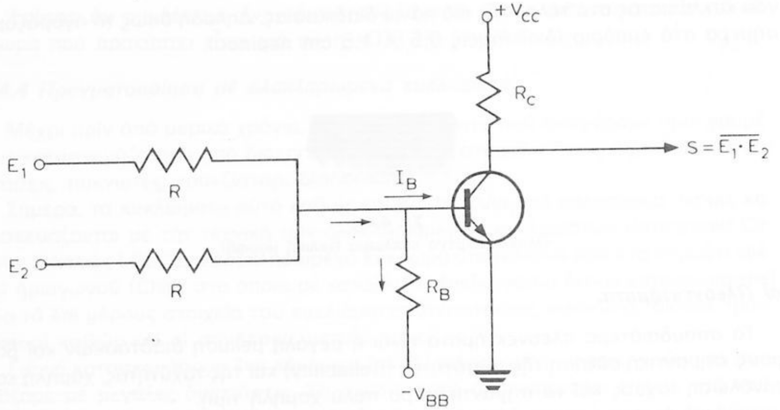
Ἡ τιμή τῶν ἀντιστάσεων R ἐκλέγεται μέ τέτοιο τρόπο ὥστε μόνον ὅταν ἡ τιμή καί τῶν δύο εἰσόδων E_1 καί E_2 εἶναι 1, νά ὁδηγεῖται τό τρανζίστορ στόν κόρο. (Τά ρεύματα πού διαρρέουν τίς ἀντιστάσεις R προστίθενται).

2) Λογικά Κυκλώματα Διόδων — Τρανζίστορ (Diode Transistor Logic — DTL).

Τά λογικά κυκλώματα τῆς οἰκογένειας αὐτῆς κατασκευάζονται ἀπό διόδους καί τρανζίστορ καί εἶναι λιγότερο εὐαίσθητα στούς θορύβους ἀπό τά RTL. Οἱ πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ» καί «ΟΧΙ Η» πού παριστάνονται στά σχήματα 4.4ιδ καί 4.4ιε εἶναι κυκλώματα τῆς οἰκογένειας DTL.

3) Λογικά κυκλώματα μέ μεγάλο κατώφλιο (High Threshold Logic — HTL).

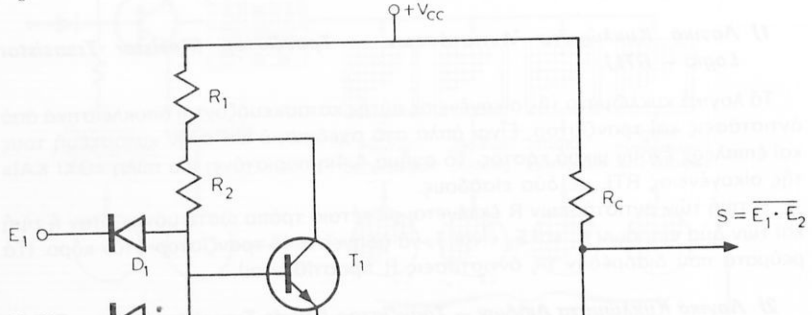
Τά λογικά κυκλώματα τῆς οἰκογένειας αὐτῆς ἔχουν ἱκανοποιητική «ἀναισθησία» στό θόρυβο (τῆς τάξεως τῶν 7 Volt) καί εἶναι κατάλληλα μόνο γιά χαμηλές συχνό-



Σχ. 4.4ιη.
Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» τῆς οἰκογένειας RTL μέ δύο εἰσόδους.

τητες. Τά κυκλώματα αὐτά χρησιμοποιοῦνται σέ βιομηχανικές ἐφαρμογές ὅπου ἡ ὕπαρξη κινητήρων, αὐτοματισμῶν κλπ. δημιουργοῦν ὑψηλή στάθμη θορύβου.

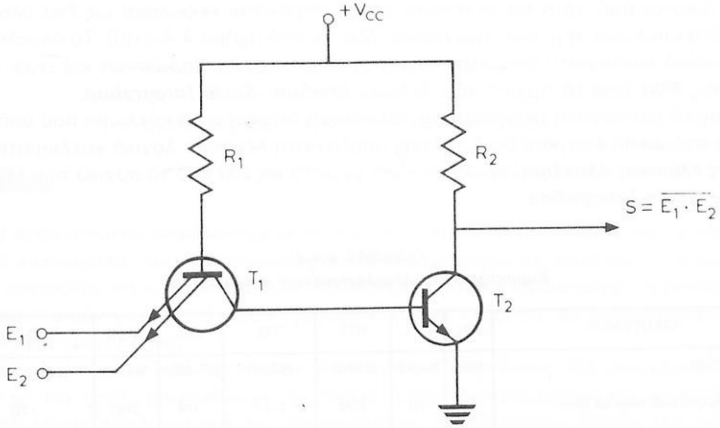
Τό σχῆμα 4.4ιθ παριστάνει μιά πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» τῆς οἰκογένειας HTL μέ δύο εἰσόδους. Ἀπό τό σχῆμα μποροῦμε εὔκολα νά καταλάβομε ὅτι πρόκειται οὐσιαστικά γιά μιά πύλη DTL στήν ὁποία ἔχει προστεθεῖ ἡ δίοδος Zener D γιά νά καθορίσει τό κατώφλιο καί τό τρανζίστορ T_1 καί γιά νά ἐνισχύσει τήν ἔξοδο τήν διόδων D_1 καί D_2.



Σχ. 4.4ιθ.
Πύλη «ΟΧΙ ΚΑΙ» τῆς οἰκογένειας HTL μέ δύο εἰσόδους.

4) Λογικά κυκλώματα Τρανζίστορ — Τρανζίστορ (Transistor — Transistor Logic — TTL ή T^2L).

Τά λογικά κυκλώματα τῆς οἰκογένειας αὐτῆς εἶναι παρόμοια μέ τά κυκλώματα τῆς οἰκογένειας DTL μέ τή διαφορά ὅτι εἶναι ταχύτερα. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἄν ἀντί γιά τίς διόδους (σχ. 4.4ιδ καί 4.4ιε) χρησιμοποιήσομε ἕνα τρανζίστορ μέ πολλαπλό ἐκπομπό, τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευή εἶναι εὔκολη ὑπό ὁλοκληρωμένη μορφή. Τό σχῆμα 4.4κ παριστάνει μία πύλη «ΚΑΙ» τῆς οἰκογένειας TTL μέ δύο εἰσόδους. Τά λογικά κυκλώματα TTL εἶναι σήμερα τά πιό διαδεδόμενα.



Σχ. 4.4κ.
Πύλη «ΚΑΙ» τῆς οἰκογένειας TTL μέ δύο εἰσόδους.

γ) Ἄλλες Οἰκογένειες Λογικῶν Κυκλωμάτων.

Στά προηγούμενα ἐξετάσαμε στοιχειωδῶς τίς κυριότερες οἰκογένειες λογικῶν κυκλωμάτων. Ἐκτός ἀπό αὐτές ὑπάρχουν καί οἱ παρακάτω:

— Λογικά κυκλώματα μέ συνδεδεμένο ἐκπομπό (Emitter Coupled Logic - ECL ἤ Current Mode Logic - CML).
— Λογικά κυκλώματα Μετάλλου — Ὀξειδίου — Ἡμιαγωγοῦ (Metal - Oxide Semiconductor Logic — MOS).
— Λογικά κυκλώματα ἐγχύσεως ρεύματος (Integrated Injection Logic - I^2L).
— Λογικά κυκλώματα Μετάλλου — Ὀξειδίου — Ἡμιαγωγοῦ μέ συμπληρωματικά στοιχεῖα (Complementary Metal — Oxide — Semiconductor Logic — CMOS).

Γιά νά χρησιμοποιήσομε τά λογικά κυκλώματα πού ἀναφέραμε παραπάνω, σέ μία ἐφαρμογή δέν πρέπει νά ἀναμίξομε τίς οἰκογένειες γιατί συνήθως δέν ὑπάρχει μεταξύ τους συμβιβαστότητα στά χαρακτηριστικά τῆς λειτουργίας τους. Τά χαρακτηριστικά αὐτά εἶναι:

— Ταχύτητα λειτουργίας.
— Ἀναισθησία στό θόρυβο.
— Ἱκανότητα ἑνός κυκλώματος νά ὁδηγήσει ἄλλα (Fan — In, Fan — Out).

— Τάση τροφοδοτήσεως.
— Ἰσχύς καταναλώσεως τοῦ κυκλώματος.
— Περιοχή θερμοκρασίας γιά ἀσφαλή λειτουργία.
— Κόστος.

Ἡ ἐκλογή τῆς κατάλληλης οἰκογένειας γιά κάθε ἐφαρμογή γίνεται μέ βάση τά παραπάνω χαρακτηριστικά. Στό πίνακα 4.4.1 συνοψίζονται τά κυριότερα χαρακτηριστικά τῶν βασικῶν οἰκογενειῶν ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων.

Σήμερα κατασκευάζονται καί παρουσιάζονται στό ἐμπόριο πολύπλοκα λογικά κυκλώματα ὅπως π.χ. ἀθροιστές, ἀποκωδικοποιητές, καταχωρητές, ἀπαριθμητές κλπ. (μερικά ἀπό αὐτά θά μελετήσομε στά παρακάτω κεφάλαια) ὡς ἕνα ὁλοκληρωμένο κύκλωμα, ἡ μορφή τοῦ ὁποίου δίνεται στό σχῆμα 4.4ιστ(β). Τά ὁλοκληρωμένα αὐτά κυκλώματα ὀνομάζονται ***μέσης κλίμακας ὁλοκληρώσεως*** καί εἶναι γνωστά ὡς ***MSI*** ἀπό τά ἀρχικά τῶν λέξεων ***Medium Scale Integration.***

Λογικά κυκλώματα περισσότερο πολύπλοκα ὅπως π.χ. τό κύκλωμα πού ὑπάρχει μέσα στό μικρό ἐπιτραπέζιο ἤ τσέπης ὑπολογιστή λέγονται λογικά κυκλώματα ***μεγάλης κλίμακας ὁλοκληρώσεως*** καί εἶναι γνωστά ὡς ***LSI*** ἀπό τά ἀρχικά τῶν λέξεων ***Large Scale Integration.***

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4.1.
Χαρακτηριστικά ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ	RTL	DTL	HTL	TTL	ECL	MOS	CMOS
Βασική πύλη	NOR	NAND	NAND	NAND	OR-NOR	NAND	NOR ἤ NAND
Καθυστέρηση ἀνά πύλη σέ nsec	10	30	100	6-12	1-4	300	70
Συχνότητα λειτουργίας Flip-Flop σέ MHZ	10	12-30	44	15-60	60-500	2	5
Αναισθησία στό θόρυβο	μικρή	καλή	ἐξαιρετική	ἀρκετά καλή	μικρή	μικρή	πολύ καλή
Ἰσχύς ἀνά πύλη σέ mW	10	8-12	50	10-20	40-50	0,2-10	0,01 γιά στατική λειτουργία σέ 1MHZ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ

5.1 Γενικά.

Στό προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τίς πύλες, πού ἀποτελοῦν καί τά πλέον βασικά κυκλώματα. Χρησιμοποιώντας καί συνδεσμολογώντας κατάλληλα τίς πύλες αὐτές μποροῦμε νά κατασκευάσομε πιό σύνθετα λογικά κυκλώματα, τα ὁποῖα νά πραγματοποιοῦν μία λογική σχέση μεταξύ εἰσόδου - ἐξόδου, νά πραγματοποιοῦν δηλαδή μιά συνάρτηση.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσομε τίς λογικές συναρτήσεις. Θά μελετήσομε τό τρόπο μέ τόν ὁποῖο μποροῦμε νά τίς παραστήσομε διαγραμματικά καί νά σχεδιάσομε τό λογικό κύκλωμα πού τίς πραγματοποιεῖ. Θά ἐξετάσομε ἐπίσης τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο μποροῦμε νά τίς ἁπλοποιήσομε.

Μέ τήν ἁπλοποίηση καταλήγομε σέ μιά συνάρτηση ἁπλούστερη ἀπό αὐτή πού μᾶς δόθηκε καί ἰσοδύναμή της. Ἡ συνάρτηση αὐτή μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ μέ κύκλωμα ἁπλούστερο ἀπό αὐτό πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἀρχική συνάρτηση.

5.2 Λογικές συναρτήσεις – Πίνακας ἀληθείας.

Λογική μεταβλητή (ἤ μεταβλητή τοῦ Boole) εἶναι ἡ μεταβλητή πού παίρνει μόνο δύο τιμές, τήν 0 ἤ 1. Τίς λογικές μεταβλητές τίς συμβολίζομε μέ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα A, B, C, D, E, ..., X, Y, Z.

Κάθε συνάρτηση μέ μία ἤ περισσότερες λογικές μεταβλητές λέγεται λογική συνάρτηση (ἤ συνάρτηση τοῦ Boole). Αὐτή συμβολίζεται μέ ἕνα μικρό γράμμα f, g, h, συνήθως τό f. Παίρνει καί αὐτή μόνο δύο τιμές, τήν 0 ἤ 1. Π.χ. ἡ f (A, B) εἶναι μία λογική συνάρτηση μέ δύο μεταβλητές τίς A καί B.

Ἡ τιμή μιᾶς λογικῆς συναρτήσεως ἐξαρτᾶται ἀπό τίς τιμές πού παίρνουν οἱ μεταβλητές της. Ὅταν μᾶς δίδεται μία λογική συνάρτηση μποροῦμε νά κατασκευάσομε ἕναν πίνακα, ὁ ὁποῖος νά μᾶς δίνει τήν τιμή τῆς συναρτήσεως γιά ὅλους τούς δυνατούς συνδυασμούς τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τους. Ὁ πίνακας αὐτός λέγεται Πίνακας Ἀληθείας τῆς λογικῆς συναρτήσεως. Π.χ. ὁ πίνακας ἀληθείας τῆς λογικῆς συναρτήσεως μέ δύο μεταβλητές A καί B $f(A, B) = \overline{A}B + A\overline{B}$ δίνεται στό πίνακα 5.2.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2.1.

Πίνακας ἀληθείας τῆς συναρτήσεως f (A, B) καί τοῦ συμπληρώματός της $\overline{f}$ (A, B)

A	B	f (A, B)	$\overline{f}$ (A, B)
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Στίς πρῶτες δύο στῆλες δίδονται, κατά αὔξουσα δυαδική τάξη, ὅλοι οἱ δυνατοί συνδυασμοί τῶν τιμῶν τῶν A καί B. Στήν τρίτη καί τέταρτη στήλη δίδονται ἀντιστοίχως οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως f (A, B) καί τά συμπληρώματά της, δηλαδή τῆς $\overline{f}$ (A, B). Ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f (A, B), γιά ἕνα δεδομένο συνδυασμό τιμῶν τῶν A καί B, βρίσκεται ἄν ἀντικαταστήσομε τίς ἀντίστοιχες τιμές τους στή συνάρτηση f (A, B). Π.χ. ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f (A, B) γιά A = 1 καί B = 0 (δηλ. $\overline{A} = 0$ καί B = 1) εἶναι:

$$f\,(A,\,B) = 0\,.\,0 + 1\,.\,1 = 0 + 1 = 1$$

Ἀπό τόν παραπάνω πίνακα ἀληθείας διαπιστώνομε εὔκολα ὅτι f (A, B) = 1 ὅταν:

$$\left.\begin{array}{lccc} & A = 0 & \text{καί} & B = 1 \\ \text{ἤ} & A = 1 & \text{καί} & B = 0 \end{array}\right\}$$

Οἱ σχέσεις ὅμως αὐτές μποροῦν νά γραφοῦν:

$$\left.\begin{array}{ccc} \overline{A} = 1 & \text{καί} & B = 1 \\ A = 1 & \text{καί} & \overline{B} = 1 \end{array}\right\}$$

ἤ μποροῦν ἀκόμα νά γραφοῦν ὡς λογικά γινόμενα:

$$\overline{A}\,.\,B = 1 \qquad \text{ἤ} \qquad A\,.\,\overline{B} = 1$$

Δεδομένου ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά λογικά αὐτά γινόμενα (ἤ ὁ ἀντίστοιχος συνδυασμός τῶν τιμῶν τῶν A καί B) δίνουν στή συνάρτηση τήν τιμή 1, ἡ συνάρτηση μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τό λογικό ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν λογικῶν γινομένων. Δηλαδή:

$$f\,(A,\,B) = \overline{A}B + A\overline{B} \tag{5.1}$$

Ἀπό τά παραπάνω βλέπομε ὅτι:

Ὅταν δίδεται μία συνάρτηση μποροῦμε νά φτιάξομε ἕναν πίνακα ἀληθείας, ὁ ὁποῖος νά δίνει τήν τιμή τῆς συναρτήσεως γιά ὅλους τούς δυνατούς συνδυασμούς τιμῶν τῶν μεταβλητῶν της καί ἀντίστροφα, ὅταν δίδεται ἕνας πίνακας ἀληθείας μποροῦμε νά βροῦμε μία συνάρτηση πού ἀντιστοιχεῖ στόν πίνακα αὐτό.

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας 5.2.1 διαπιστώνομε εὔκολα ὅτι γιά τούς συνδυασμούς τιμῶν:

$$\left.\begin{array}{lccc} & A = 0 & \text{καί} & B = 0 \\ \text{ἤ} & A = 1 & \text{καί} & B = 1 \end{array}\right\}$$

οἱ ὁποῖοι μποροῦν νά γραφοῦν:

$$\left.\begin{array}{ccc} A = 0 & \text{καί} & B = 0 \\ \overline{A} = 0 & \text{καί} & \overline{B} = 0 \end{array}\right\}$$

ἡ συνάρτηση f (A, B) παίρνει τήν τιμή 0.

Οἱ παραπάνω ὅμως σχέσεις μποροῦν νά γραφοῦν ὡς λογικά ἀθροίσματα τῶν A καί B. Δηλαδή:

$$A + B = 0 \quad \text{ἤ} \quad \overline{A} + \overline{B} = 0$$

Δεδομένου δέ ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά λογικά αὐτά ἀθροίσματα κάνει τήν τιμή τῆς συναρτήσεως 0 καί τό λογικό της γινόμενο θά κάνει τήν τιμή τῆς συναρτήσεως 0. Δηλαδή:

$$f\,(A,\,B) = (A + B)\,.\,(\overline{A} + \overline{B}) \tag{5.2}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή μπορεῖ νά γραφεῖ:

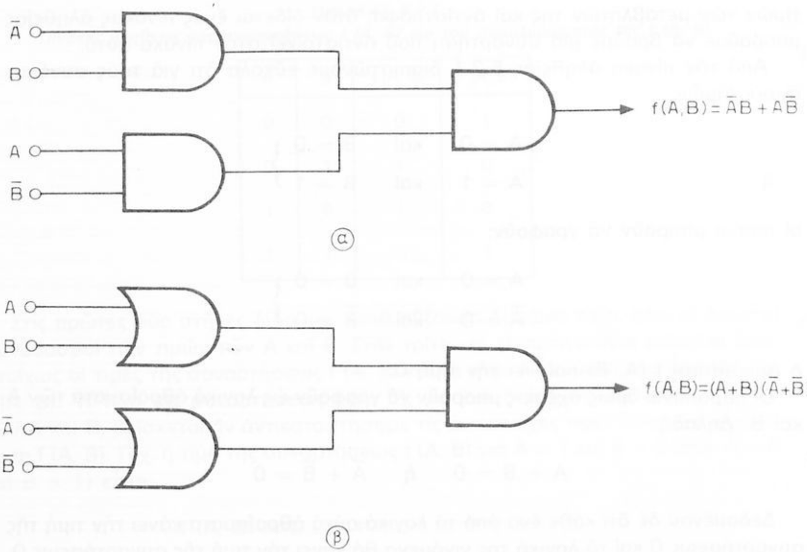
$$\begin{aligned} f\,(A,\,B) &= (A + B)\,.\,(\overline{A} + \overline{B}) && \text{ἤ} \\ &= A\,.\,\overline{A} + A\overline{B} + \overline{A}B + B\overline{B} && \text{ἤ} \\ &= 0 + A\overline{B} + \overline{A}B + 0 && \text{ἤ} \\ &= A\,.\,\overline{B} + \overline{A}B && \text{ἤ} \\ &= \overline{A}B + A\overline{B} \end{aligned}$$

Δηλαδή ἡ μορφή τῆς συναρτήσεως πού εἴχαμε στή (5.1).

Ἀπό τά παραπάνω βλέπομε ὅτι στόν ἀρχικό πίνακα ἀληθείας ἀντιστοιχοῦν δύο λογικές συναρτήσεις, οἱ ὁποῖες παίρνουν τίς ἴδιες τιμές γιά τούς διάφορους συνδυασμούς τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τους. Οἱ συναρτήσεις πού ἔχουν τόν ἴδιο πίνακα ἀληθείας λέγονται ἰσοδύναμες.

Σέ κάθε λογική συνάρτηση ἀντιστοιχεῖ ἕνα λογικό κύκλωμα πού τήν πραγματοποιεῖ. Ἰσοδύναμες λογικές συναρτήσεις ἀντιστοιχοῦν σέ ἰσοδύναμα λογικά κυκλώματα. Στίς ἰσοδύναμες λογικές συναρτήσεις (5.1) καί (5.2) ἀντιστοιχοῦν τά λογικά κυκλώματα (σχ. 5.2), τά ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα.

Γενικά σέ δεδομένη λογική συνάρτηση ὑπάρχει μιά ἀπειρία ἄλλων συναρτήσεων, οἱ ὁποῖες εἶναι ἰσοδύναμες μέ αὐτή. Φυσικό εἶναι συνεπῶς νά προσπαθήσει κανείς νά βρεῖ τήν ἁπλούστερη ἡ ὁποία θά ὁδηγήσει στήν κατασκευή τοῦ ἁπλού-



Σχ. 5.2.
Λογικά κυκλώματα συναρτήσεων (α) f $(A,B) = \overline{A}B + A\overline{B}$ καί (β) f $(A,B) = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})$.

στερου λογικοῦ καί συνεπῶς ἠλεκτρονικου κυκλώματος πού τήν πραγματοποιεῖ.

Στίς ἑπόμενες παραγράφους θά ἐξετάσομε τόν τρόπο ἁπλοποιήσεως μιᾶς συναρτήσεως χρησιμοποιώντας τήν ἀλγεβρική μέθοδο (χρησιμοποίηση ἀξιωμάτων καί θεωρημάτων Boole) καί τή μέθοδο τοῦ Karnaugh.

5.3 Ἐλάχιστοι καί μέγιστοι ὅροι.

Ἔστω δύο λογικές μεταβλητές A καί B. Ὅλα τά λογικά γινόμενα πού σχηματίζονται ἀπό τίς λογικές αὐτές μεταβλητές καί τά συμπληρώματά τους, δηλαδή τά $A \cdot B$, $\overline{A} \cdot B$, $A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$, λέγονται «ἐλάχιστοι ὅροι» τῶν μεταβλητῶν A καί B.

Γενικότερα, οἱ ἐλάχιστοι ὅροι τῶν μεταβλητῶν A, B, C,..., E εἶναι ὅλα τά λογικά γινόμενα $A \cdot B \cdot C \ldots E$, $\overline{A} \cdot B \cdot C \ldots E$,... $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \ldots \overline{E}$ τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν, ὅπου κάθε μεταβλητή μπορεῖ νά ἐμφανίζεται ἡ ἴδια ἤ τό συμπλήρωμά της.

Μέ παρόμοιο τρόπο ὁρίζονται οἱ μέγιστοι ὅροι δύο ἤ περισσοτέρων μεταβλητῶν, ὡς λογικά ἀθροίσματα τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν καί τῶν συμπληρωμάτων τους.

Π.χ. οἱ ὅροι $(A + B)$, $(\overline{A} + B)$, $(A + \overline{B})$ καί $(\overline{A} + \overline{B})$ εἶναι οἱ μέγιστοι ὅροι δύο μεταβλητῶν A καί B.

Ἄς θεωρήσομε δύο μεταβλητές A καί B. Στόν πίνακα 5.3.1 δίδονται ὅλοι οἱ συνδυασμοί τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν μέ αὔξουσα δυαδική τάξη καθώς καί οἱ ἀντίστοιχες τιμές κάθε ἐλάχιστου καί μέγιστου ὅρου τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3.1.

Πίνακας ἐλαχίστων καί μεγίστων ὅρων δύο μεταβλητῶν A, B

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A.B$	$\bar{A}.B$	$A.\bar{B}$	$\bar{A}.\bar{B}$	$A+B$	$\bar{A}+B$	$A+\bar{B}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0

Ἀπό τόν πίνακα αὐτό βλέπομε ὅτι:

α) Κάθε ὅρος εἶναι μία συνάρτηση ἡ ὁποία παίρνει τήν τιμή 1 μόνο γιά ἕνα συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν πού περιλαμβάνει. Π.χ. ὁ ἐλάχιστος ὅρος $A . B$ παίρνει τήν τιμή 1 μόνο γιά $A = 1$ καί $B = 0$.

Παρατηροῦμε ἀκόμα οτι, ἄν σέ ἕνα ἐλάχιστο ὅρο ἀντικαταστήσομε τή μεταβλητή μέ 1 καί τό συμπλήρωμά της μέ 0, π.χ. στόν ὅρο $A . \bar{B}$ μέ τό 1 0 (ἕνα μηδέν ὄχι δέκα), ἔχομε τό συνδυασμό τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν A καί B γιά τίς ὁποῖες καί μόνο ὁ ὅρος ἔχει τήν τιμή 1.

β) Κάθε μέγιστος ὅρος εἶναι μία συνάρτηση ἡ ὁποία ἔχει τήν τιμή 0 μόνο γιά ἕνα συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν πού περιλαμβάνει. Π.χ. ὁ μέγιστος ὅρος $A + \bar{B}$ παίρνει τιμή 0 μόνο γιά $A = 0$ καί $B = 1$.

Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι, ἄν σέ ἕνα μέγιστο ὅρο ἀντικαταστήσομε τή μεταβλητή μέ 1 καί τό συμπλήρωμά της μέ 0, π.χ. στόν ὅρο $A + \bar{B}$ μέ τό $1 + 0$ (ἕνα ἤ μηδέν καί ὄχι ἕνα σύν μηδέν), ἔχομε τό συνδυασμό τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν A καί B γιά τίς ὁποῖες καί μόνο ὁ ὅρος ἔχει τήν τιμή 0.

γ) Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας 5.2.1 πού παριστάνει τή συνάρτηση f (A, B), βλέπομε ὅτι ἡ συνάρτηση ἔχει τήν τιμή 1 γιά δύο συνδυασμούς τιμῶν τῶν μεταβλητῶν της A, B τόν 0 1 ἤ 1 0. Μποροῦμε ἑπομένως νά θεωρήσομε ὅτι αὐτή εἶναι τό λογικό ἄθροισμα τῶν ἐλαχίστων ὅρων πού ἀντιστοιχοῦν στό συνδυασμό αὐτό. Δηλαδή:

$$F\,(A,\ B) = \bar{A} . B + A . \bar{B}$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἔχομε:

$$f\,(A,\ B) = (\bar{A} + \bar{B}) . (A + B)$$

Ἀπό τά παραπάνω βλέπομε ὅτι, ὅταν μᾶς δίδεται ὁ πίνακας ἀληθείας μιᾶς συναρτήσεως μποροῦμε νά ἐκφράσομε τή συνάρτηση ὡς λογικό ἄθροισμα ἐλαχίστων ὅρων τῶν μεταβλητῶν της πού ἀντιστοιχοῦν στούς συνδυασμούς τιμῶν τους γιά τούς ὁποίους ἡ συνάρτηση ἔχει τήν τιμή 1 ἤ ὡς λογικό γινόμενο μεγίστων όρων τῶν μεταβλητῶν της πού ἀντιστοιχοῦν στούς συνδυασμούς τιμῶν τους γιά τούς ὁποίους ἡ συνάρτηση ἔχει τήν τιμή 0.

Γενικά ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα:

1) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητῶν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ ἕνα καί μόνο μέ ἕνα λογικό ἄθροισμα 2^n ἐλαχίστων ὅρων τῶν n αὐτῶν μεταβλητῶν. Δηλαδή:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \, E_i$$

ὅπου E_i οἱ ἐλάχιστοι ὅροι καί a_i οἱ «χαρακτηριστικοί ἀριθμοί» τῆς λογικῆς συναρτήσεως καί ἔχουν τίς τιμές 0 ἤ 1.

2) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητῶν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ ἕνα καί μόνο μέ ἕνα λογικό γινόμενο 2^n μεγίστων ὅρων τῶν n μεταβλητῶν. Δηλαδή:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (a_i + M_i)$$

ὅπου M_i εἶναι οἱ μέγιστοι ὅροι καί a_i οἱ «χαρακτηριστικοί ἀριθμοί» τῆς συναρτήσεως.

Μέ τρεῖς μεταβλητές μποροῦμε νά σχηματίσομε 8 ἐλάχιστους καί 8 μέγιστους ὅρους, οἱ ὁποῖοι δίδονται στόν πίνακα 5.3.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3.2.

Πίνακας ἐλαχίστων καί μεγίστων ὅρων τριῶν μεταβλητῶν

A	B	C	Ἐλάχιστοι Ὅροι	Μέγιστοι Ὅροι
0	0	0	$E_0 = \overline{A} . \overline{B} . \overline{C}$	$M_0 = A + B + C$
0	0	1	$E_1 = \overline{A} . \overline{B} . C$	$M_1 = A + B + \overline{C}$
0	1	0	$E_2 = \overline{A} . B . \overline{C}$	$M_2 = A + \overline{B} + C$
0	1	1	$E_3 = \overline{A} . B . C$	$M_3 = A + \overline{B} + \overline{C}$
1	0	0	$E_4 = A . \overline{B} . \overline{C}$	$M_4 = \overline{A} + B + C$
1	0	1	$E_5 = A . \overline{B} . C$	$M_5 = \overline{A} + B + \overline{C}$
1	1	0	$E_6 = A . B . \overline{C}$	$M_6 = \overline{A} + \overline{B} + C$
1	1	1	$E_7 = A . B . C$	$M_7 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

Στόν πίνακα 5.3.3 δίδονται οἱ τιμές ἀληθείας ὅλων τῶν ἐλαχίστων ὅρων τριῶν μεταβλητῶν A, B, C. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἐλάχιστος ὅρος ἔχει τιμή 1 μόνο γιά ἕνα συνδυασμό τιμῶν τῶν A, B, C.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.3.3.
Πίνακας ἀληθείας τῶν ἐλαχίστων ὅρων τριῶν μεταβλητῶν

A	B	C	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	$\bar{A}.\bar{B}.C$	$\bar{A}.B.\bar{C}$	$\bar{A}.B.C$	$A.\bar{B}.\bar{C}$	$A.\bar{B}.C$	$A.B.\bar{C}$	$A.B.C$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Γενικά μέ n μεταβλητές σχηματίζονται 2^n ἐλάχιστοι καί 2^n μέγιστοι ὅροι.

5.4 Θεωρήματα ἐπάνω στίς λογικές συναρτήσεις.

Στήν παράγραφο αὐτή θά διατυπώσομε μερικά βασικά θεωρήματα ἐπάνω στίς λογικές συναρτήσεις χωρίς νά προχωρήσομε στήν ἀπόδειξή τους, γιατί αὐτό ξεπερνᾶ τά ὅρια τοῦ βιβλίου αὐτοῦ.

Θεώρημα Πρῶτο.

α) Τό λογικό γινόμενο δύο ἐλαχίστων ὅρων, διαφορετικῶν μεταξύ τους, εἶναι 0. Δηλαδή:

$$E_i\, E_j = 0 \quad \text{διά} \quad i \neq j$$

β) Τό λογικό ἄθροισμα δύο μεγίστων ὅρων, διαφορετικῶν μεταξύ τους, εἶναι 1. Δηλαδή:

$$M_i + M_j = 1 \quad \text{διά} \quad i \neq j$$

Θεώρημα Δεύτερο.

α) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητῶν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ ἕνα καί μόνο μέ ἕνα λογικό ἄθροισμα 2^n ἐλαχίστων ὅρων τῶν n αὐτῶν μεταβλητῶν. Δηλαδή:

$$f\,(A_1, A_2, \dots A_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\ E_i$$

ὅπου E_i οἱ ἐλάχιστοι ὅροι καί a_i οἱ «χαρακτηριστικοί ἀριθμοί» τῆς λογικῆς συναρτήσεως καί ἔχουν τίς τιμές 0 ἤ 1.

β) Κάθε λογική συνάρτηση n μεταβλητῶν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ ἕνα καί μόνο μέ ἕνα λογικό γινόμενο 2^n μεγίστων ὅρων τῶν n μεταβλητῶν. Δηλαδή:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (a_i + M_i)$$

ὅπου M_i οἱ μέγιστοι ὅροι καί a_i εἶναι καί πάλι οἱ «χαρακτηριστικοί ἀριθμοί» τῆς συναρτήσεως.

Μέ τό Δεύτερο θεώρημα μποροῦμε νά σχηματίσομε τήν ἔκφραση μιᾶς συναρτήσεως ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας.

Θεώρημα Τρίτο.

Τό λογικό ἄθροισμα τῶν 2^n διαφορετικῶν ἐλαχίστων ὅρων καί τό λογικό γινόμενο τῶν 2^n διαφορετικῶν μεγίστων ὅρων n μεταβλητῶν ἰσοῦται μέ 1 καί 0 ἀντιστοίχως. Δηλαδή:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} E_i = 1 \quad \text{καί} \quad \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

Θεώρημα Τέταρτο.

Ὁποιοσδήποτε ἐλάχιστος ὅρος μιᾶς συναρτήσεως n μεταβλητῶν ἰσοῦται μέ τό λογικό γινόμενο $2^n - 1$ μεγίστων ὅρων καί, ἀντιστοίχως, ὁποιοσδήποτε μέγιστος ὅρος ἰσοῦται μέ τό λογικό ἄθροισμα $2^n - 1$ ἐλαχίστων. Δηλαδή:

$$E_\kappa = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2^n-1} M_i \qquad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, (2^n - 1)$$

καί

$$M_\kappa = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2^n-1} E_i \qquad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, (2^n - 1)$$

Θεώρημα Πέμπτο.

Τό πλῆθος τῶν διαφορετικῶν συναρτήσεων n μεταβλητῶν εἶναι 2^n.

5.5 Διαγράμματα Veitch — Χάρτης Karnaugh.

Ἡ παράσταση τῶν ἐλαχίστων (καί μεγίστων) ὅρων μπορεῖ νά γίνει εὔκολα μέ τά διαγράμματα Veitch (Βάϊτς), ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.5α.

$\bar{A}$	$\bar{A}$
A	A

(α)

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}.\bar{B}$	$\bar{A}.B$
A	$A.\bar{B}$	$A.B$

(β)

	$\bar{B}.\bar{C}$	$\bar{B}.C$	$B.\bar{C}$	$B.C$
$\bar{A}$	$\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	$\bar{A}.\bar{B}.C$	$\bar{A}.B.\bar{C}$	$\bar{A}.B.C$
A	$A.\bar{B}.\bar{C}$	$A.\bar{B}.C$	$A.B.\bar{C}$	$A.B.C$

(γ)

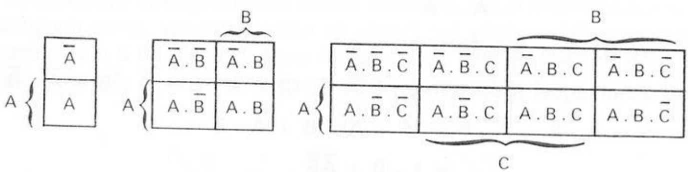
Σχ. 5.5α.
Διαγράμματα Veitch τῶν ἐλαχίστων ὅρων μιᾶς (α), δύο (β) καί τριῶν (γ) μεταβλητῶν.

Στήν περίπτωση μιᾶς μεταβλητῆς ἔχομε μόνο δύο ὅρους A καί $\overline{A}$, τοποθετημένους κατακορύφως [σχ. 5.5α(α)].

Στήν περίπτωση δύο μεταβλητῶν, ὅπου ἔχομε τέσσερεις ἐλάχιστους ὅρους τοποθετοῦμε τίς τιμές τῆς A κατακορύφως καί τίς τιμές τῆς B ὁριζοντίως [σχ. 5.5α(β)]. Μέ συνδυασμό τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν προκύπτουν οἱ τέσσερεις ἐλάχιστοι ὅροι.

Στήν περίπτωση τριῶν μεταβλητῶν A, B καί C, ὅπου ἔχομε ὀκτώ ἐλάχιστους ὅρους, τοποθετοῦμε τήν A κατακορύφως ὅπως προηγουμένως καί τούς ἐλάχιστους ὅρους τῶν δύο ἄλλων μεταβλητῶν B, C ὁριζοντίως. Μέ συνδυασμό αὐτῶν προκύπτουν οἱ ὀκτώ ἐλάχιστοι ὅροι τῶν A, B καί C [σχ. 5.5α(γ)].

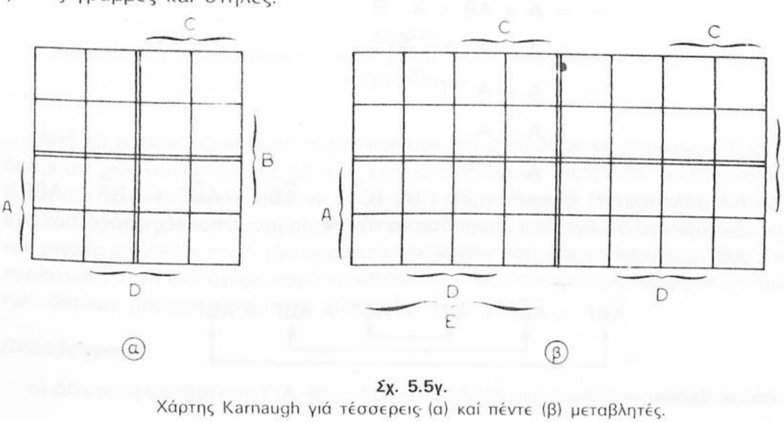
Γιά νά παραστήσομε τούς ἐλάχιστους (καί μέγιστους) ὅρους μποροῦμε νά χρησιμοποιήσομε ἐπίσης τό χάρτη τοῦ Karnaugh. Ὁ χάρτης αὐτός προκύπτει ἀπό τά διαγράμματα Veitch, ἄν ἀνακατατάξομε τά τετραγωνίδιά τους (σχ. 5.5β). Στίς περιπτώσεις τῆς μιᾶς ἤ δύο μεταβλητῶν δέν ὑπάρχουν διαφορές στήν παράσταση τῶν ἐλαχίστων ὅρων μέ τά διαγράμματα Veitch ἤ τό χάρτη τοῦ Karnaugh. Οἱ διαφορές τους ἀρχίζουν ἀπό τήν περίπτωση τῶν τριῶν μεταβλητῶν καί πάνω.



Σχ. 5.5β.
Χάρτες τοῦ Karnaugh πού ἀντιστοιχοῦν στά διαγράμματα Veitch τοῦ σχήματος 5.5α.

Οἱ γραμμές ἤ οἱ στῆλες πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἀγκύλες περιέχουν τίς μεταβλητές πού δείχνονται ἀπό τίς ἀγκύλες, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες περιέχουν τά συμπληρώματά τους.

Στό σχῆμα 5.5γ δίνονται οἱ χάρτες τοῦ Karnaugh γιά τίς περιπτώσεις τεσσάρων καί πέντε μεταβλητῶν. Γι' αὐτούς ἰσχύουν οἱ παραπάνω παρατηρήσεις ὅσον ἀφορᾶ τίς γραμμές καί στῆλες.



Σχ. 5.5γ.
Χάρτης Karnaugh γιά τέσσερεις (α) καί πέντε (β) μεταβλητές.

Στήν παράγραφο πού ἀκολουθεῖ (5.6) θά ἐξετάσομε πῶς χρησιμοποιοῦμε τό χάρτη τοῦ Karnaugh γιά νά ἁπλοποιήσομε μιά λογική συνάρτηση.

5.6 Ἁπλοποίηση λογικῶν συναρτήσεων.

5.6.1 Ἀλγεβρική μέθοδος.

Γιά νά ἁπλοποιήσομε μιά συνάρτηση ἀλγεβρικά χρησιμοποιοῦμε τά θεωρήματα πού ἀναφέραμε στό κεφάλαιο 2, παράγραφο 2.4. Παρακάτω θά ἀναφέρομε μερικά παραδείγματα τά ὁποῖα θά μᾶς δείξουν πῶς μποροῦμε νά ἁπλοποιήσομε μιά λογική συνάρτηση χρησιμοποιώντας ἀλγεβρική μέθοδο.

Παραδείγματα.

α) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση $f\,(A,\ B,\ C) = A + A\,.\,\overline{B} + \overline{A}\,.\,B$

$$A + A\,.\,\overline{B} + \overline{A}B = (A + A\,.\,\overline{B}) + \overline{A}\,.\,B$$

$$= A + \overline{A}\,.\,B$$

$$= A + B$$

Ἄρα $f\,(A,\ B,\ C) = A + B$

β) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση $f\,(A,\ B,\ C) = \overline{A}\,.\,B + A\,.\,B + \overline{A}\,.\,\overline{B}$

$$\overline{A}\,.\,B + A\,.\,B + \overline{A}\,.\,\overline{B} = (\overline{A} + A)\,.\,B + \overline{A}\,.\,\overline{B}$$

$$= 1\,.\,B + \overline{A}\overline{B}$$

$$= B + \overline{A}\,.\,\overline{B}$$

$$= B + \overline{A}$$

Ἄρα $F\,(A,\ B,\ C) = B + \overline{A}$

γ) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση $f\,(A,\ B,\ C) = (A + B)\,(A + \overline{B})$

$$(A + B)\,(A + \overline{B}) = A\,.\,A + A\,.\,B + A\,.\,\overline{B} + B\,.\,\overline{B}$$

$$= A + AB + A\,.\,\overline{B}$$

$$= A + A\,(B + \overline{B})$$

$$= A + A\,.\,1$$

$$= A + A$$

$$= A$$

δ) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση $f\,(A,\ B,\ \Gamma) = \overline{A}B\Gamma + A\overline{B}\Gamma + AB\overline{\Gamma} + AB\Gamma$. Δεδομένου ὅτι ἕνα ὅρο μποροῦμε νά τόν θεωρήσομε πολλές φορές, π.χ. τόν $AB\Gamma$, ἡ συνάρτησή μας γράφεται:

$$\overline{A}B\Gamma + A\overline{B}\Gamma + AB\overline{\Gamma} + AB\Gamma + AB\Gamma + AB\Gamma$$

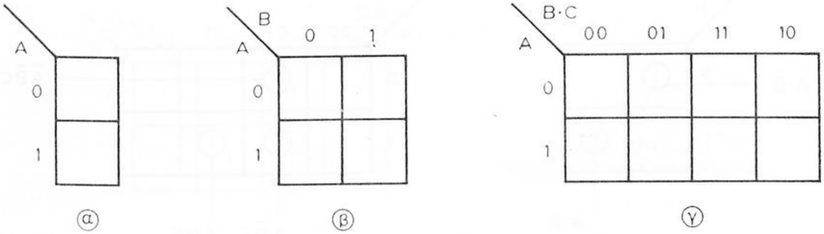
ὁπότε ἔχομε:

$= B\Gamma\ (\overline{A} + A) + A\Gamma\ (\overline{B} + B) + AB\ (\overline{\Gamma} + \Gamma)$
$= B\Gamma\ .\ 1 + A\Gamma\ .\ 1 + AB\ .\ 1$
$= B\Gamma + A\Gamma + AB$

Ἡ ἀλγεβρική μέθοδος πού χρησιμοποιήσαμε πάρα πάνω γιά τήν ἁπλοποίηση μιᾶς λογικῆς συναρτήσεως, ἐφαρμόζεται εὔκολα στή περίπτωση ἁπλῶν συναρτήσεων. Ὅταν ὅμως θέλομε νά ἁπλοποιήσομε πολύπλοκες συναρτήσεις, ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι πολύ δύσκολη καί κοπιαστική. Στίς περιπτώσεις αὐτές χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο Karnaugh πού στηρίζεται στό χάρτη Karnaugh τόν ὁποῖο ἐξετάσαμε στήν προηγούμενη παράγραφο.

5.6.2 Μέθοδος Karnaugh.

Ὅπως ἀναφέραμε στά προηγούμενα, κάθε λογική συνάρτηση μπορεῖ νά παρασταθεῖ ὡς ἄθροισμα τῶν ἐλαχίστων ὅρων της. Κάθε ἐλάχιστος ὅρος ὅμως μπορεῖ νά παρασταθεῖ στό χάρτη τοῦ Karnaugh. Ἄν σέ ἕνα χάρτη Karnaugh, θέσομε 1 στίς θέσεις τῶν ἐλαχίστων ὅρων τῆς συναρτήσεως καί 0 στούς ὑπόλοιπους παίρνομε τήν παράσταση τῆς συναρτήσεως στό χάρτη τοῦ Karnaugh. Γιά νά μποροῦμε ὅμως νά περάσομε εὔκολα ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας μιᾶς συναρτήσεως στό χάρτη τοῦ Karnaugh αὐτῆς, χρησιμοποιοῦμε τή μορφή τοῦ χάρτη τοῦ Karnaugh ποῦ δίδεται στό σχῆμα 5.6α. Σέ αὐτή ὅπου ἔχομε A, B, C κλπ. θέτομε στή θέση τους 1 καί ὅπου ἔχομε $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ κλπ. θέτομε στή θέση τους 0.

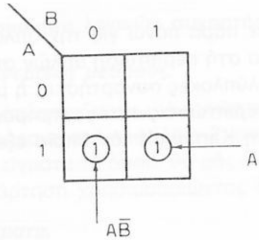


Σχ. 5.6α.
Ἁπλοποιημένη μορφή χάρτου Karnaugh γιά τίς περιπτώσεις μιᾶς (α), δύο (β) καί τριῶν (γ) μεταβλητῶν.

Ἀπό τά παραπάνω εὔκολα συμπεραίνομε ὅτι μποροῦμε νά περάσομε ἀπό τήν ἔκφραση μιᾶς συναρτήσεως μέ τούς ἐλάχιστους ὅρους της ἤ ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας αὐτῆς, στήν παράστασή της στό χάρτη τοῦ Karnaugh. Ἀντίστροφα, ὅταν μᾶς δίδεται ὁ χάρτης τοῦ Karnaugh μιᾶς συναρτήσεως, μποροῦμε εὔκολα νά βροῦμε τόν πίνακα ἀληθείας της ἤ τήν παράστασή της μέ τούς ἐλάχιστους ὅρους της. Στήν περίπτωση αὐτή δέν ἔχομε παρά νά ἀθροίσομε τούς ἐλάχιστους ὅρους στίς θέσεις τῶν ὁποίων ὑπάρχει πάνω στό χάρτη 1.

Παραδείγματα.

α) Δίνεται ἡ συνάρτηση $f(A, B) = A\overline{B} + AB$. Αὐτή περιλαμβάνει τούς ἐλάχιστους ὅρους $A\bar{B}$ καί AB. Ἡ παράστασή της στό χάρτη τοῦ Karnaugh δίδεται στό σχῆμα 5.6β.



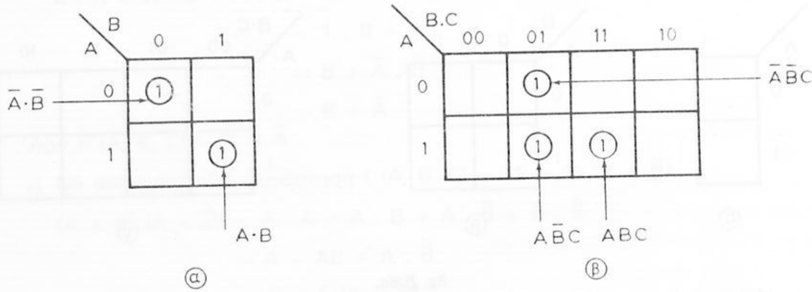
Σχ. 5.6β.
Παράσταση τῆς λογικῆς συναρτήσεως (A, B) = A . B + A . B στό χάρτη τοῦ Karnaugh.

β) Νά παρασταθοῦν οἱ παρακάτω λογικές συναρτήσεις στό χάρτη τοῦ Karnaugh.

(1) $f(A, B) = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

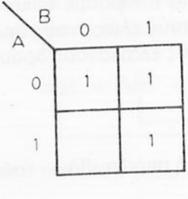
(2) $f(A, B) = ABC + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$

Ἡ συνάρτηση $f(A, B) = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$ παριστάνεται ὅπως στό σχῆμα 5.6γ(α) καί ἡ $f(A, B) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ ὅπως στό σχῆμα 5.6γ(β).



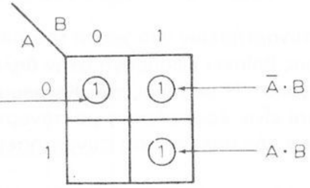
Σχ. 5.6γ.
Παράσταση λογικῶν συναρτήσεων στό χάρτη Karnaugh.

γ) Νά εὑρεθεῖ ἡ λογική συνάρτηση τῆς ὁποίας ἡ παράστασή της στό χάρτη τοῦ Karnaugh δίδεται ἀπό τό σχῆμα 5.6δ.



Σχ. 5.6δ.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως.

Τά 1 πού ὑπάρχουν στά τετραγωνίδια τοῦ χάρτη τοῦ Karnaugh (σχ. 5.6δ) ἀντιστοιχοῦν στούς ἐλάχιστους ὅρους $\overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot B$ καί $A \cdot B$ (σχ. 5.6ε).



Σχ. 5.6ε.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως γιά τό παράδειγμα (γ) τῆς παραγράφου 5.6.2. (Παράσταση ἰδίων ἐλαχίστων ὅρων).

Ἄν λάβομε ὑπόψη μας τό θεώρημα 2 τῆς παραγράφου 5.4, ἡ ζητούμενη συνάρτηση εἶναι:

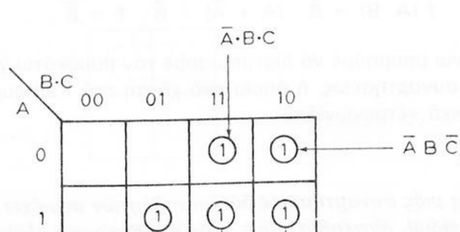
$$f\,(A,\,B) = \overline{A}\,.\,\overline{B} + \overline{A}\,.\,B + A\,.\,B$$

δ) Νά εὑρεθεῖ ἡ λογική συνάρτηση τῆς ὁποίας ἡ παράσταση στό χάρτη τοῦ Karnaugh δίδεται ἀπό τό σχῆμα 5.6στ.

A \ B·C	00	01	11	10
0			1	1
1		1	1	1

Σχ. 5.6στ.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅπως στό παράδειγμα (γ) ἔχομε (σχ. 5.6ζ):



Σχ. 5.6ζ.
Χάρτης Karnaugh συναρτήσεως γιά τό παράδειγμα (δ) τῆς παραγράφου 5.6.2. (Παράσταση ἰδίων ἐλαχίστων ὅρων).

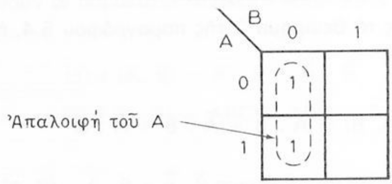
῾Ομοίως· ὅπως στό παράδειγμα (γ) ἔχομε:

$$f\ (A,\ B,\ C) = A\ .\ \overline{B}\ .\ C + A\ .\ B\ .\ C + A\ .\ B\ .\ \overline{C} + \overline{A}\ .\ B\ .\ C + \overline{A}\ .\ B\ .\ \overline{C}$$

῾Η παράσταση τῶν συναρτήσεων στό χάρτη τοῦ Karnaugh, μέ τούς ἐλάχιστους (ἤ μέγιστους) ὅρους τους βρίσκει ἐφαρμογή στήν ἁπλοποίηση τῶν συναρτήσεων αὐτῶν εὔκολα καί γρήγορα. ῾Η μέθοδος τοῦ Karnaugh στηρίζεται στίς ἰδιότητες τοῦ ὁμώνυμου χάρτη καί εἶναι ἐφαρμόσιμη γιά συναρτήσεις μέχρι καί 6 μεταβλητῶν. ᾿Εμεῖς θά ἐξετάσομε τήν ἁπλοποίηση συναρτήσεων μέ δύο, τρεῖς καί τέσσερεις μεταβλητές.

῎Εστω ἡ συνάρτηση δύο μεταβλητῶν $f\ (A,\ B) = A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}$.

Αὐτή παριστάνεται στό χάρτη τοῦ Karnaugh (σχ. 5.6η):



Σχ. 5.6η.
Παράσταση τῆς f (A, B) = AB + AB στό χάρτη Karnaugh.

῾Η συνάρτηση ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἐλάχιστους ὅρους πού βρίσκονται σέ γειτονικά τετραγωνίδια μέ κοινή τετμημένη καί διαφορετική τεταγμένη. ῾Η κοινή τετμημένη 1 ὀφείλεται στό ὅτι καί οἱ δύο οἱ ἐλάχιστοι ὅροι περιέχουν τόν παράγοντα $\overline{B}$ καί ἡ διαφορετική τεταγμένη στό ὅτι ὁ ἕνας ὅρος περιέχει τή μεταβλητή A (πού ἀντιστοιχεῖ σέ τεταγμένη 1) καί ὁ ἄλλος ὅρος περιέχει τή συμπληρωματική της $\overline{A}$ (πού ἀντιστοιχεῖ σέ τεταγμένη 0).

῎Αν βγάλομε ἔξω ἀπό τήν παρένθεση τόν κοινό παράγοντα $\overline{B}$ ἡ συνάρτηση γράφεται:

$$f\ (A,\ B) = \overline{B}\ .\ (A + \overline{A}) = \overline{B}\ .\ 1 = \overline{B}$$

᾿Από τά παραπάνω μποροῦμε νά διατυπώσομε τόν παρακάτω γενικό κανόνα ἁπλοποιήσεως μιᾶς συναρτήσεως, ἡ ὁποία στό χάρτη τοῦ Karnaugh περιέχει δύο γειτονικά 1 (γειτονικά τετραγωνίδια).

Κανόνας Karnaugh.

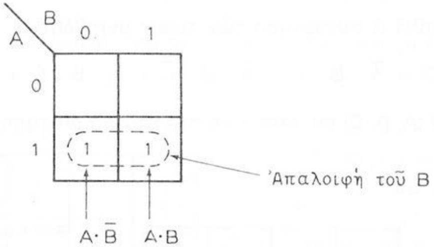
- ***῎Αν ἡ παράσταση μιᾶς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν περιέχει δύο γειτονικά 1 (γειτονικά τετραγωνίδια), ἀντικαθιστοῦμε τούς ἀντίστοιχους ἐλάχιστους ὅρους μέ ἕναν, στόν ὁποῖο δέν ὑπάρχει ἡ μεταβλητή πού ἀλλάζει τιμή ἀπό τό ἕνα τετραγωνίδιο στό ἄλλο.***

Παραδείγματα.

α) Νά ἁπλοποιηθεῖ μέ τή μέθοδο τοῦ Karnaugh ἡ συνάρτηση:

$$f\,(A,\ B) = A\ .\ B + A\ .\ \overline{B}$$

Ἡ συνάρτηση παριστάνεται στό χάρτη τοῦ Karnaugh ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.6θ.



Σχ. 5.6θ.
Ἀπλοποίηση τῆς συναρτήσεως f (A, B) = A . B + A . B

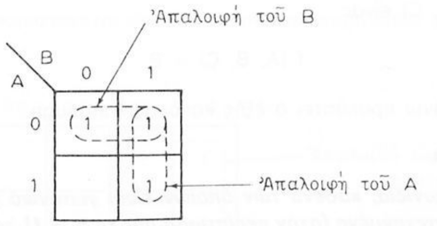
Κλείνομε μέσα σέ διακεκομμένη γραμμή τά δύο γειτονικά 1. Ἡ μεταβλητή πού ἀλλάζει τιμή εἶναι ἡ B. Ἄρα ἀντικαθιστοῦμε τούς δύο ἐλάχιστους ὅρους τῆς συναρτήσεως μέ ἕνα καί παραλείπομε τή μεταβλητή B (πού ἀλλάζει τιμή). Ἑπομένως:

$$f\,(A,\ B) = A$$

β) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση:

$$f\,(A,\ B) = \overline{A}\ .\ \overline{B} + \overline{A}\ .\ B + A\ .\ B$$

Ἡ συνάρτηση παριστάνεται στό χάρτη τῆς Karnaugh ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.6ι.



Σχ. 5.6ι.
Ἀπλοποίηση τῆς συναρτήσεως f (A, B) = $\overline{A}\ .\ \overline{B} + \overline{A}\ .\ B + A\ .\ B$.

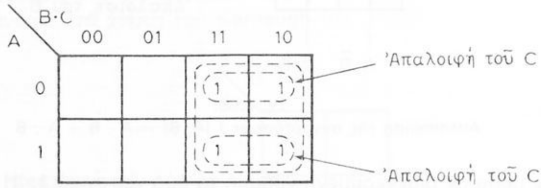
Προφανῶς, ἄν χρησιμοποιήσομε περισσότερες φορές ἕνα ἐλάχιστο ὅρο ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως δέν ἀλλάζει. Ἄρα μποροῦμε, σύμφωνα μέ αὐτά πού ἀναφέραμε προηγουμένως, νά ἀπαλείψομε τή μεταβλητή B ἀντικαθιστώντας τούς δύο γειτονικούς ὅρους $\overline{A}\ .\ \overline{B}$, $\overline{A}B$ μέ τόν $\overline{A}$ καί στή συνέχεια νά ἀπαλείψομε τή μεταβλητή A ἀντικαθιστώντας τούς δύο γειτονικούς ὅρους $\bar{A} \cdot B$, $A \cdot B$ μέ τό B. Ἔτσι ἡ ἁπλοποιημένη μορφή τῆς συναρτήσεως εἶναι:

$$f(A, B) = \bar{A} + B$$

γ) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση τῶν τριῶν μεταβλητῶν:

$$f(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

Ἡ συνάρτηση f (A, B, C) παριστάνεται στό χάρτη Karnaugh, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.6ια.



Σχ. 5.6ια.
Ἁπλοποίηση συναρτήσεως τριῶν μεταβλητῶν.

Ἄν ἁπλοποιήσομε τό C, τά πάνω τετραγωνίδια ἀντιστοιχοῦν στόν ὅρο $\bar{A}B$ ἐνῶ τά κάτω ἀντιστοιχοῦν στόν ὅρο AB. Ἄρα ἡ συνάρτηση ἁπλοποιεῖται ὡς ἑξῆς:

$$f(A, B, C) = \bar{A}B + AB$$

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι πού ἀπόμειναν, ἔχουν κοινό παράγοντα τό B, ἐνῶ ἡ μεταβλητή A ἀλλάζει τιμή. Τοῦτο φαίνεται στό χάρτη τοῦ Karnaugh ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ μεταβλητή B διατηρεῖ σταθερή τιμή 1 καί στούς τέσσερεις ὅρους. Ἄν ἁπλοποιήσομε συνεπῶς καί τή μεταβλητή B, βρίσκομε τελικά ὅτι ἡ ἁπλοποιημένη μορφή τῆς f (A, B, C) εἶναι:

$$f(A, B, C) = B$$

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὁ ἑξῆς κανόνας Karnaugh.

Κανόνας Karnaugh.

Ὅταν 4 τετραγωνίδια, καθένα τῶν ὁποίων εἶναι γειτονικό δύο ἄλλων, ἔχουν κοινή μόνο μία συντεταγμένη (στήν περίπτωσή μας τή B = 1), τότε οἱ τέσσερεις ἐλάχιστοι ὅροι τῶν τριῶν μεταβλητῶν μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν μέ ἕνα καί μόνο ὅρο, μέ μοναδική μεταβλητή τήν κοινή μεταβλητή (στήν περίπτωσή μας τή B).

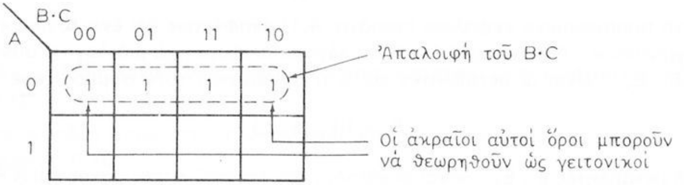
Ὁ παραπάνω κανόνας ἰσχύει καί γιά τήν περίπτωση τεσσάρων τετραγωνιδίων πού εἶναι διατεταγμένα σέ σειρά (σχ. 5.6ιβ) γιατί καί στήν περίπτωση αὐτή ἔχομε μόνο μία κοινή στυντεταγμένη καί κάθε τετραγωνίδιο εἶναι γειτονικό τῶν δύο ἄλλων (δεδομένου ὅτι τά ἀκραῖα τετραγωνίδια πρός τά ἀριστερά καί δεξιά θεωροῦνται ὡς γειτονικά ἀλλάζει τιμή μόνο ἡ μία μεταβλητή ἄν περάσομε ἀπό τό ἕνα τετράγωνο στό ἄλλο).

Παραδείγματα.

α) Νά άπλοποιηθεΐ ή συνάρτηση:

$$f\,(A,\ B,\ C) = \bar{A}\,.\,\bar{B}\,.\,\bar{C} + \bar{A}\,.\,\bar{B}\,.\,C + \bar{A}\,.\,B\,.\,C + \bar{A}\,.\,B\,.\,\bar{C}$$

Ἡ συνάρτησή μας παριστάνεται στό χάρτη τοῦ Karnaugh ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.6ιβ.



Σχ. 5.6ιβ.
Ἀπλοποίηση συναρτήσεως τριῶν μεταβλητῶν στήν περίπτωση 4 τετραγωνιδίων σέ σειρά.

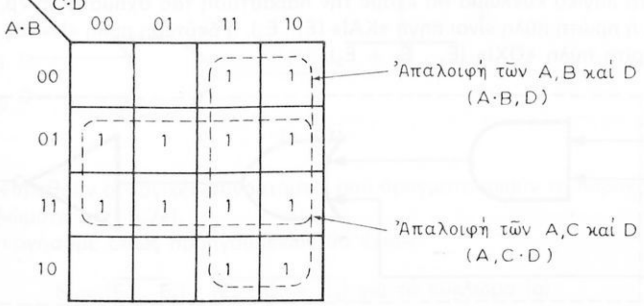
Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά ἀντικαταστήσομε τούς 4 γειτονικούς ὅρους αὐτῆς, μέ ἕνα μόνο μέ μοναδική μεταβλητή τήν κοινή μεταβλητή $\bar{A}$. Ἄρα:

$$f\,(A,\ B,\ C) = \bar{A}$$

β) Νά άπλοποιηθεῖ ή συνάρτηση μέ τέσσερεις μεταβλητές:

$$\begin{aligned} f\,(A,\ B,\ C,\ D) = {} & A.B.C.D + A.B.C.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D + A.\bar{B}.C.D + \bar{A}.B.C.D \\ & + A.B. + \bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.C.D \\ & + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D}. \end{aligned}$$

Ἡ συνάρτηση παριστάνεται στό χάρτη τοῦ Karnaugh ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.6ιγ.



Σχ. 5.6ιγ.
Ἀπλοποίηση συναρτήσεως μέ τέσσερεις μεταβλητές.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση περιέχει ὀκτώ τετραγωνίδια (ὁριζόντιο ὀρθογώνιο μέ διακεκομμένη γραμμή) μέ κοινή συντεταγμένη τή $B = 1$ καί ὀκτώ τετραγωνίδια (κάθετο ὀρθογώνιο μέ διακεκομμένη γραμμή) μέ κοινή συντεταγμένη $C = 1$.

Ἄρα ἡ συνάρτηση ἰσοῦται μέ $B + C$. Δηλαδή:

$$f\,(A, B, C, D) = B + C$$

5.7 Σχεδιασμός λογικῶν κυκλωμάτων.

Στό προηγούμενο κεφάλαιο (παράγρ. 4.1) ἀναφέραμε ὅτι ἕνα λογικό κύκλωμα πραγματοποιεῖ, ἤ ἱκανοποιεῖ ὅπως θά λέγαμε διαφορετικά μιά λογική συνάρτηση. Ἄν E_1, E_2,... εἶναι οἱ μεταβλητές καί S ἡ συνάρτηση τότε συμβολίζομε:

$$S = f(E_1, E_2, \ldots)$$

Οἱ μεταβλητές E_1, E_2,... εἶναι οἱ εἴσοδοι τοῦ λογικοῦ κυκλώματος καί S ἡ ἔξοδος τοῦ λογικοῦ κυκλώματος.

Χρησιμοποιώντας ὡς μονάδες λογικῶν κυκλωμάτων τίς πύλες πού ἐξετάσαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο, μποροῦμε νά σχεδιάσομε σύνθετα λογικά κυκλώματα, τά ὁποῖα νά πραγματοποιοῦν (ἱκανοποιοῦν) μιά λογική συνάρτηση. Ἀντίστροφα, ὅταν μᾶς δίνεται ἕνα λογικό κύκλωμα, μποροῦμε νά βροῦμε τή συνάρτηση πού πραγματοποιεῖ (ἱκανοποιεῖ), δηλαδή τή λογική σχέση πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στήν ἔξοδο καί εἴσοδό του.

Στά παρακάτω θά ἀναφέρομε μερικά παραδείγματα καί γιά τίς δύο περιπτώσεις, δηλαδή:

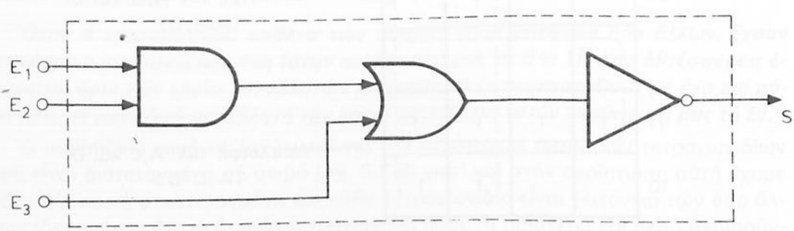
1) Ὅταν μᾶς δίνεται τό λογικό κύκλωμα θά βροῦμε τή λογική σχέση (λογική συνάρτηση) πού ὑπάρχει μεταξύ εἰσόδου - ἐξόδου καί

2) ὅταν μᾶς δίνεται μία λογική σχέση μεταξύ εἰσόδου - ἐξόδου (λογική συνάρτηση) νά σχεδιάσομε τό ἀντίστοιχο λογικό κύκλωμα.

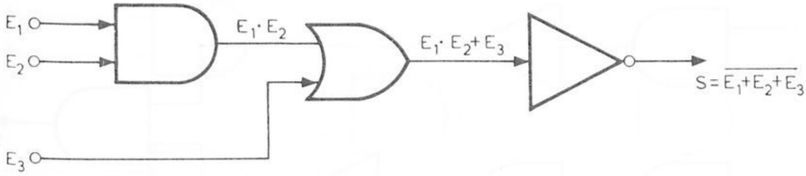
Παραδείγματα.

α) Νά εὐρεθεῖ ἡ λογική συνάρτηση πού πραγματοποιεῖ τό παρακάτω λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7α).

Γιά τό λογικό κύκλωμα θά ἔχομε τήν παράσταση τοῦ σχήματος 5.7β, δεδομένου ὅτι ἡ πρώτη πύλη εἶναι πηγή «ΚΑΙ» ($E_1 \,.\, E_2$), ἡ δεύτερη πύλη «Η» ($E_1 \,.\, E_2 + E_3$) καί ἡ τρίτη πύλη «ΟΧΙ» ($\overline{E_1 \,.\, E_2 + E_3}$).



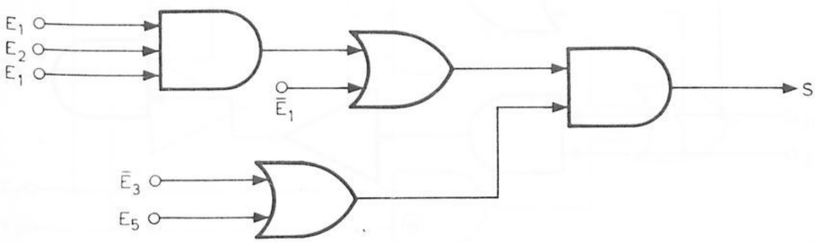
Σχ. 5.7α.
Λογικό κύκλωμα γιά παράδειγμα (1).



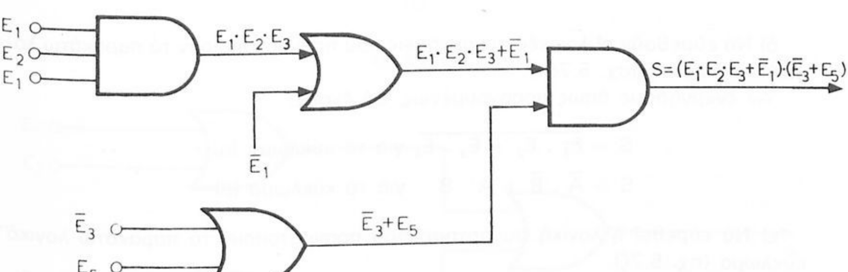
Σχ. 5.7β.

β) Νά εὑρεθεῖ ἡ λογική συνάρτηση πού πραγματοποιεῖ τό παρακάτω λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7γ).

Ἄν σκεφθοῦμε ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα θά ἔχομε τήν παράσταση τοῦ σχήματος 5.7δ.



Σχ. 5.7γ.



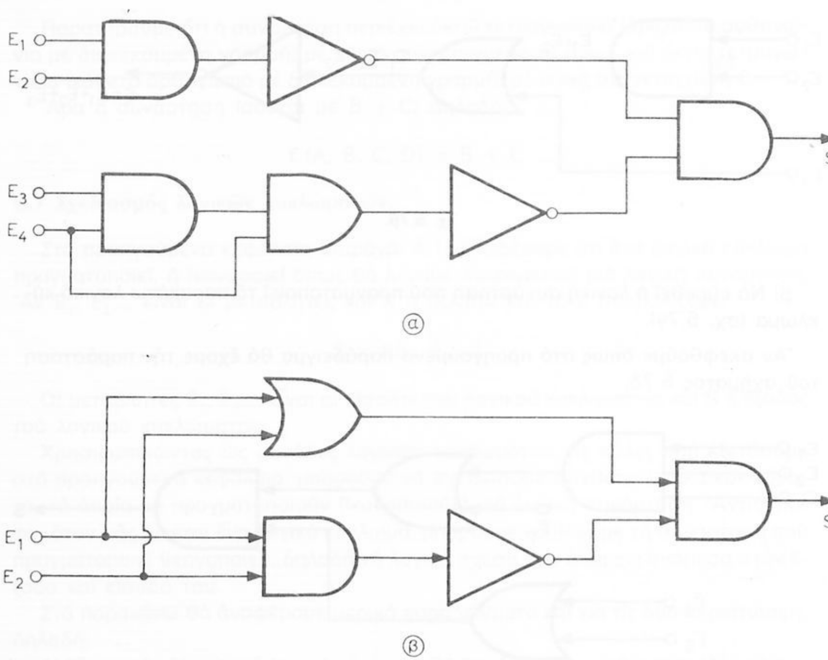
Σχ. 5.7δ.

γ) Νά εὑρεθοῦν οἱ λογικές συναρτήσεις πού πραγματοποιοῦν τά παρακάτω λογικά κυκλώματα (σχ. 5.7ε).

Ἄν ἐνεργήσομε ὅπως προηγουμένως θά ἔχομε:

$S = (\overline{E_1 \,.\, E_2}) \,.\, (\overline{E_3 \,.\, E_4 + E_4})$ γιά τό κύκλωμα (α)

$S = (\overline{E_1 \,.\, E_2}) \,.\, (E_1 + E_2)$ γιά τό κύκλωμα (β)



Σχ. 5.7ε.

δ) Νά εὑρεθοῦν οἱ λογικές συναρτήσεις που πραγματοποιοῦν τά παρακάτω λογικά κυκλώματα (σχ. 5.7στ).

Ἄν ἐνεργήσομε ὅπως προηγουμένως, θά ἔχομε:

$$S = \overline{E_1 \, . \, E_2 + E_3 \, . \, E_4} \quad \text{γιά τό κύκλωμα (α)}$$

$$S = \overline{A} \, . \, \overline{B} + A \, . \, B \quad \text{γιά τό κύκλωμα (β)}$$

ε) Νά εὑρεθεῖ ἡ λογική συνάρτηση πού πραγματοποιεῖ τό παρακάτω λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7ζ).

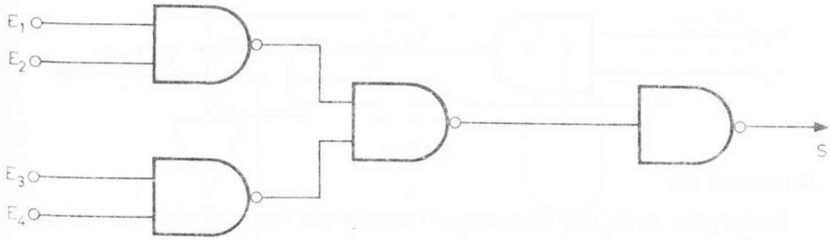
Ἄν ἐνεργήσομε ὅπως προηγουμένως, θά ἔχομε:

$$S = (E_1 + E_2) \, . \, (E_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3)$$

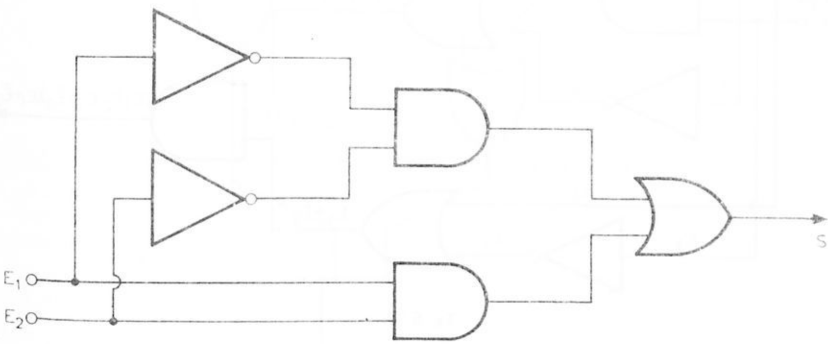
στ) Νά σχεδιασθοῦν τά λογικά κυκλώματα πού πραγματοποιοῦν τίς παρακάτω λογικές συναρτήσεις:

α) $E_1 \, . \, E_3 + E_2$

β) $(E_1 \, . \, E_2 \, . \, E_3 + \overline{E}_1) \, (E_1 + \overline{E}_3)$

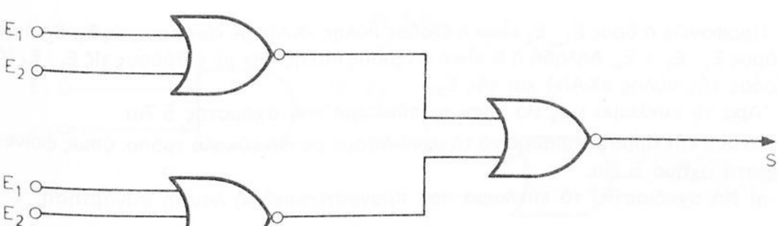


(α)



(β)

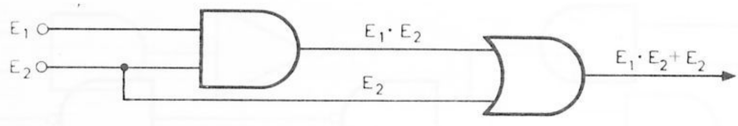
Σχ. 5.7στ.



Σχ. 5.7ζ.

Συνάρτηση (α).

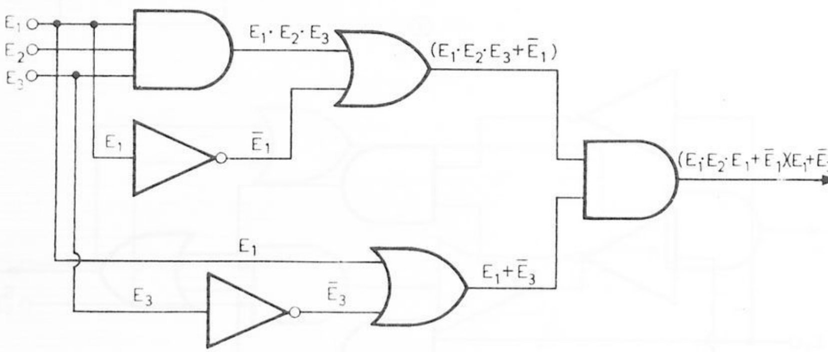
Προφανῶς οἱ E_1, E_2 εἶναι εἴσοδοι μιᾶς πύλης «ΚΑΙ» ἐνῶ ἡ ἔξοδος τῆς πύλης «ΚΑΙ» καί ἡ E_2 εἶναι εἴσοδοι μιᾶς πύλης «Η» (σχ. 5.7η).



Σχ. 5.7η.

Συνάρτηση (β).

Σκεφτόμενοι ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα ἔχομε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5.7θ.



Σχ. 5.7θ.

Τό ἴδιο κύκλωμα μποροῦμε νά τό σχεδιάσομε μέ πιό εὔκολο τρόπο, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.7ι.

ζ) Νά σχεδιασθεῖ τό λογικό κύκλωμα πού πραγματοποιεῖ τή λογική συνάρτηση:

$$S = E_1 \,.\, E_3 + E_2$$

Προφανῶς ὁ ὅρος $E_1 \,.\, E_3$ εἶναι ἡ ἔξοδος πύλης «ΚΑΙ» μέ εἰσόδους τίς E_1, E_3, ἐνῶ ὁ ὅρος $E_1 \,.\, E_3 + E_2$, δηλαδή ἡ S εἶναι ἡ ἔξοδος πύλης «Η» μέ εἰσόδους τίς $E_1 \,.\, E_3$ (ἡ ἔξοδος τῆς πύλης «ΚΑΙ») καί τῆς E_2.

Ἄρα τό κύκλωμά μας θά εἶναι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5.7ια.

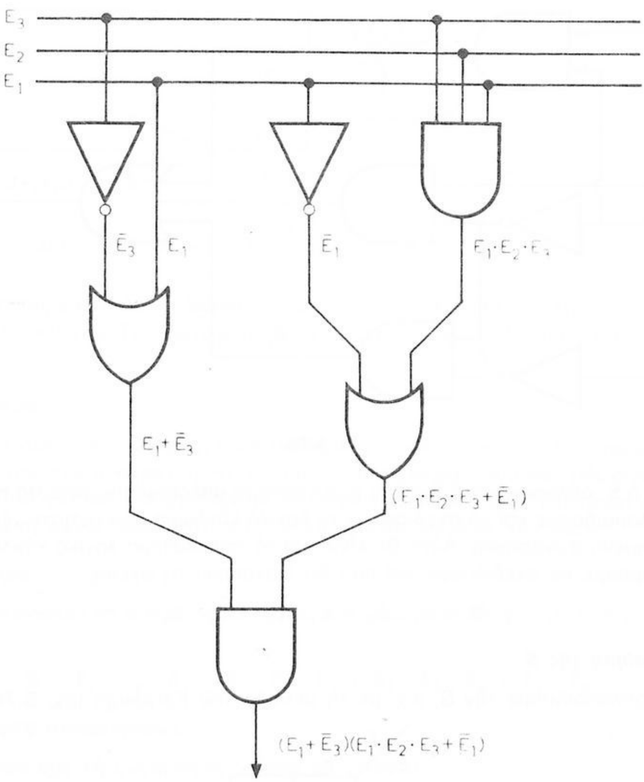
Τό ἴδιο κύκλωμα μποροῦμε νά τό σχεδιάσομε μέ πιό εὔκολο τρόπο, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 5.7ια.

η) Νά σχεδιασθεῖ τό κύκλωμα πού πραγματοποιεῖ τή λογική συνάρτηση:

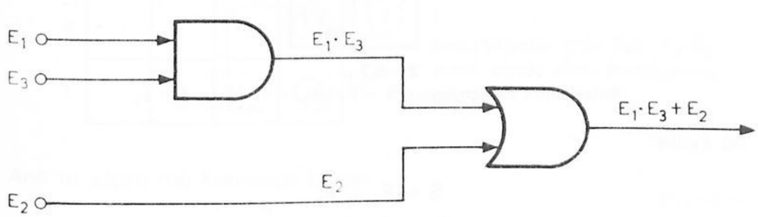
$$S = E_1 \,.\, E_2 + E_1 \,.\, \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \,.\, \bar{E}_2$$

Ἄν ἐνεργήσομε ὅπως προηγουμένως, θά ἔχομε τό λογικό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5.7ιβ.

Τό λογικό κύκλωμα πού σχεδιάσαμε παραπάνω (σχ. 5.7ιβ), δέν γνωρίζομε ἄν εἶναι τό ἁπλούστερο πού θά μπορούσαμε νά σχεδιάσομε, δηλαδή, ἄν ἀντιστοιχεῖ στήν ἁπλούστερη ἰσοδύναμη συνάρτηση τῆς $S = E_1 \,.\, E_2 + E_1 \,.\, \bar{E}_2 + \bar{E}_1 \,.\, \bar{E}_2$. Ὅπως ἀναφέραμε καί στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ (παράγρ. 5.2), ὅταν δίνεται μιά

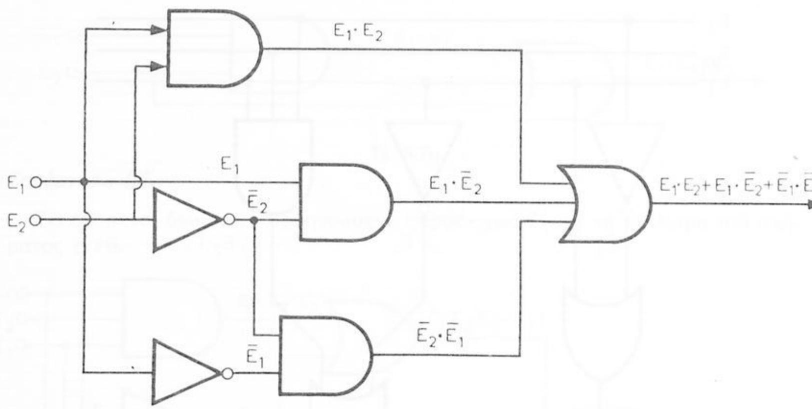


Σχ. 5.7ι.



Σχ. 5.7ια.

συναρτηση, τό ἁπλούστερο λογικό κύκλωμα ἀντιστοιχεῖ στήν ἁπλούστερη ἰσοδύναμη συνάρτηση τῆς δοθείσης συναρτήσεως. Ἄρα γιά νά διαπιστώσομε ἄν πράγματι τό κύκλωμα πού σχεδιάσαμε εἶναι τό ἁπλούστερο πού θά μπορούσαμε νά σχεδιάσομε, πρέπει νά ἐξετάσομε ἄν ἡ συνάρτηση πού μᾶς δίνεται, στήν περίπτω-



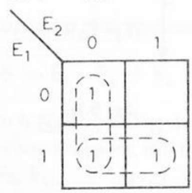
Σχ. 5.7ιβ.

ση μας ἡ S, ἀπλοποιεῖται ἤ ὄχι. Ἄν ἡ συνάρτηση ἀπλοποιεῖται, τότε θά πρέπει νά τήν ἀπλοποιήσομε καί νά σχεδιάσομε τό λογικό κύκλωμα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἀπλοποιημένη συνάρτηση. Αὐτό θά εἶναι καί τό ἀπλούστερο λογικό κύκλωμα πού θά μποροῦμε νά σχεδιάσομε καί πού θά ἱκανοποιεῖ τή σχέση:

$$S = E_1 \, . \, E_2 + E_1 \, . \, \overline{E}_2 + \overline{E}_1 \, . \, \overline{E}_2$$

Ἀπλοποίηση τῆς S.

Ἄν ἀπλοποιήσομε τήν S, π.χ. μέ τή μέθοδο τοῦ Karnaugh (σχ. 5.7ιγ).



Σχ. 5.7ιγ.

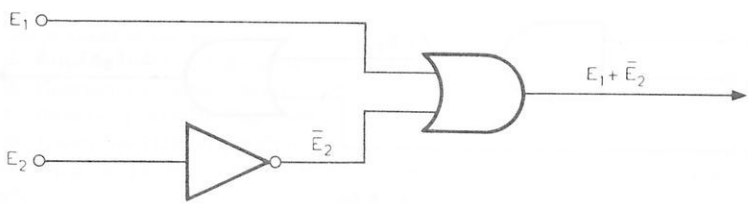
Ἀπλοποίηση συναρτήσεως $S = E_1 \, . \, E_2 + E_1 \, . \, E_2 + \overline{E}_1 \, . \, \overline{E}_2$

θά ἔχομε:

$$S = E_1 + \overline{E}_2$$

Ἡ συνάρτηση πού προέκυψε $(E_1 + \overline{E}_2)$, εἶναι ἡ ἀπλούστερη ἰσοδύναμη τῆς συναρτήσεως $S = E_1 \, . \, E_2 + E_1 \, . \, \overline{E}_2 + \overline{E}_1 \, . \, \overline{E}_2$. Ἄρα τό λογικό κύκλωμα πού ἀντιστοιχεῖ σέ αὐτή θά εἶναι τό ἀπλούστερο λογικό κύκλωμα πού μποροῦμε νά σχεδιάσομε γιά τή δοθεῖσα συνάρτησή μας S. Τό κύκλῶμα αὐτό εἶναι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5.7ιδ.

Ἄν συγκρίνομε τό λογικό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5.7ιδ μέ ἐκεῖνο τοῦ σχήματος



Σχ. 5.7ιδ.
Ἁπλοποιημένο λογικό κύκλωμα τῆς $S = E_1 . E_2 + E_1 . \overline{E}_2 + \overline{E}_1 . \overline{E}_2$.

5.7ιβ μποροῦμε εὔκολα νά διαπιστώσομε ὅτι πράγματι τό πρῶτο εἶναι πολύ πιό ἁπλό ἀπό τό δεύτερο. Τό πρῶτο χρησιμοποιεῖ 2 πύλες ἐνῶ τό δεύτερο χρησιμοποιεῖ 6.

Συμπέρασμα.

Ἄν μᾶς δοθεῖ μιά συνάρτηση καί θέλομε νά σχεδιάσομε τό ἁπλούστερο λογικό κύκλωμα πού τήν πραγματοποιεῖ, ἁπλοποιοῦμε τή συνάρτηση πού μᾶς δίνεται, ἄν ἁπλοποιεῖται φυσικά, καί σχεδιάζομε τό λογικό κύκλωμα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἁπλοποιημένη συνάρτηση, γιατί αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη πρός τήν ἀρχική.

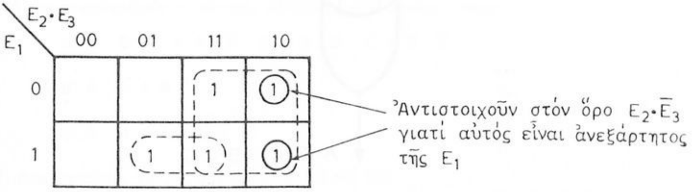
Παράδειγμα.

Νά σχεδιασθεῖ τό ἁπλούστερο λογικό κύκλωμα πού ἀντιστοιχεῖ στή συνάρτηση:

$$S = \overline{E}_1 . E_2 . E_3 + E_1 . \overline{E}_2 . E_3 + E_1 . E_2 . E_3 + E_2 . \overline{E}_3$$

Ἁπλοποίηση συναρτήσεως.

Ἁπλοποιοῦμε τή συνάρτηση S κατά τά γνωστά:

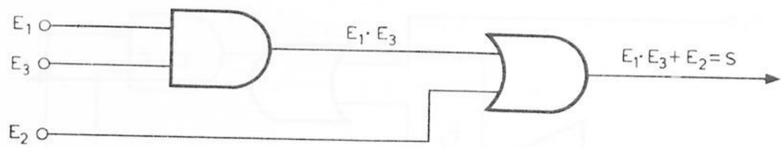


Ἀπό τό χάρτη τοῦ Karnaugh ἔχομε:

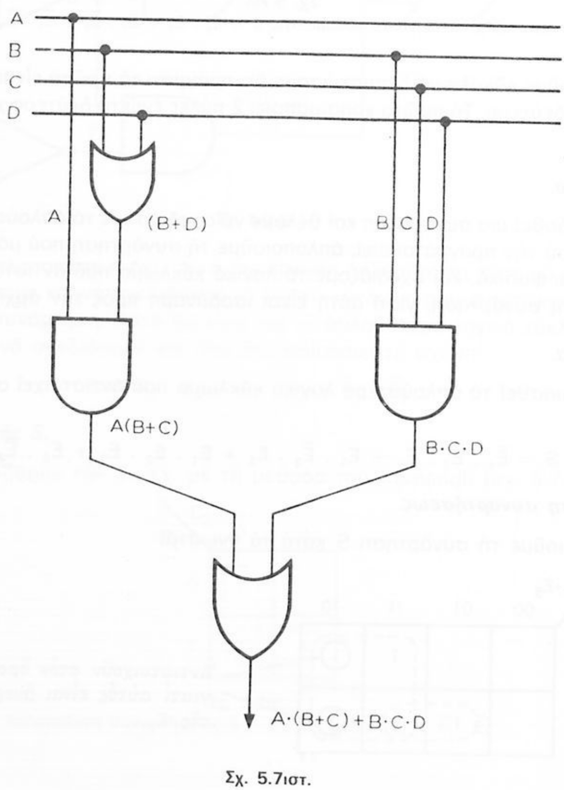
$$S = E_1 . E_3 + E_2$$

Σχεδιασμός τοῦ λογικοῦ κυκλώματος.

Τό κύκλωμα πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἁπλοποιημένη συνάρτηση $S = E_1 . E_3 + E_2$ εἶναι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 5.7ιε.



Σχ. 5.7ιε.



Σχ. 5.7ιστ.

Παράδειγμα.

Νά σχεδιασθεῖ τό λογικό κύκλωμα μιᾶς κλειδαριᾶς τοῦ χρηματοκιβωτίου μιᾶς Τράπεζας, τό ὁποῖο ἔχει θέσεις γιά διαφορετικά κλειδιά πού ἔχουν ἀνά ἕνα ὁ Διευθυντής, ὁ Ὑποδιευθυντής, ὁ Ταμίας καί ὁ βοηθός Ταμίας τῆς Τράπεζας, ἔτσι ὥστε νά ἀνοίγει μόνο:

— Ὅταν εἶναι παρών ὁ Διευθυντής καί ὁ Ταμίας ἤ ὁ βοηθός Ταμίας ἤ
— ὅταν εἶναι παρών ὁ Ὑποδιευθυντής, ὁ Ταμίας καί ὁ βοηθός Ταμίας.

Ἂν παραστήσομε μέ:

A: Παρουσία (κλειδί) Διευθυντοῦ.

B: Παρουσία (κλειδί) Ὑπ/ντοῦ.

C: Παρουσία (κλειδί) Ταμία καί

D: Παρουσία (κλειδί) βοηθοῦ Ταμία,

τότε σύμφωνα μέ τό πρόβλημα τό χρηματοκιβώτιο θά ἀνοίγει μόνο ἄν εἶναι παρόντες:

1) Διευθυντής ΚΑΙ Ταμίας Ἤ Διευθυντής ΚΑΙ βοηθός Ταμίας Ἤ.

2) Ὑποδιευθυντής ΚΑΙ Ταμίας ΚΑΙ βοηθός Ταμίας.

Οἱ λογικές αὐτές προτάσεις γράφονται στήν ἄλγεβρα τοῦ Boole:

1) $\underbrace{A \cdot C}_{\substack{\text{ΚΑΙ} \\ \text{(Λογικό)}}} \underbrace{+}_{\substack{\text{Η} \\ \text{(Λογικό)}}} \underbrace{A \cdot D}_{\substack{\text{ΚΑΙ} \\ \text{(Λογικό)}}} \longrightarrow A \cdot (C + D)$

ἤ

2) $B \underbrace{\cdot}_{\substack{\text{ΚΑΙ} \\ \text{(Λογικό)}}} C \underbrace{\cdot}_{\substack{\text{ΚΑΙ} \\ \text{(Λογικό)}}} D$

Καί οἱ δύο μαζί ὡς μία λογική σχέση γράφονται:

$$A \cdot (C + D) + B \cdot C \cdot D$$

Τό λογικό κύκλωμα πού ἀντιστοιχεῖ σέ αὐτή τή σχέση (συνάρτηση) εἶναι τό ζητούμενο λογικό κύκλωμα (σχ. 5.7ιστ).

5.8 Ἀσκήσεις.

1. Νά κατασκευασθοῦν οἱ πίνακες ἀληθείας τῶν συναρτήσεων:

α) $\overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C + B \cdot \overline{C}$

β) $A \cdot C + B$

γ) $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot (C + B)$

Τί συμπεραίνετε γιά τίς συναρτήσεις (α) καί (β);

2. Νά γραφοῦν οἱ ἐλάχιστοι καί μέγιστοι ὅροι τεσσάρων μεταβλητῶν A, B, C, D.

3. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω λογικές σχέσεις:

α) $(A + \overline{B}C)(\overline{A}B + C) = AC + \overline{B}C$

β) $A\overline{B} + BC + AC = A\overline{B} + BC$

γ) $(A + B)(\overline{A} + C) = AC + \overline{A}B$

4. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παρακάτω συναρτήσεις:

α) $AB + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\overline{B}$

β) $E_1E_3 + E_1 \cdot \overline{E}_3E_2 + E_2 \cdot E_3 + \overline{E}_2 \cdot \overline{E}_3$

γ) $E_1 \cdot E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 + \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2$

5. Νά γραφεῖ ἡ ἁπλούστερη συνάρτηση πού ἀντιστοιχεῖ στούς παρακάτω χάρτες τοῦ Karnaugh (σχ. 5.8):

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1		1		1

A \ B·C				
	1			1
		1		1

Σχ. 5.8.

6. Νά σχεδιασθεῖ τό ἁπλούστερο λογικό κύκλωμα πού ἀντιστοιχεῖ στή συνάρτηση:

$$S = E_1 \cdot \overline{E}_2 \cdot E_3 + E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 + \overline{E}_1 \cdot E_2 \cdot E_3 + E_1 \cdot E_2 \cdot \overline{E}_3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΠΟΛΥΔΟΝΗΤΕΣ

6.1 Γενικά.

Στό προηγούμενο κεφάλαιο έξετάσαμε τίς «πύλες» πού άποτελοῦν τά άπλούστερα λογικά κυκλώματα καί εἴδαμε πῶς μποροῦμε μέ αὐτές νά πραγματοποιήσομε όποιοδήποτε λογικό κύκλωμα.

Στά λογικά κυκλώματα ή τιμή τῆς έξόδου σέ κάθε χρονική στιγμή, ἐξαρτᾶται ἀπό τίς τιμές τῶν εἰσόδων τους κατά τήν ἴδια χρονική στιγμή. Τέτοια κυκλώματα δέν εἶναι κατάλληλα γιά ἀπομνημόνευση, γιατί μόλις ἀλλάξει ή εἴσοδός τους, ἀλλάζει καί ή ἔξοδος ἀνεξάρτητα ἀπό τήν προηγούμενη τιμή της. Στούς ψηφιακούς ὅμως ήλεκτρονικούς ὑπολογιστές χρειάζονται κυκλώματα, στά ὁποῖα νά μποροῦμε νά ἀπομνημονεύσομε ἕνα δυαδικό ψηφίο (0 ἤ 1). Δηλαδή χρειάζονται κυκλώματα τά ὁποῖα μποροῦν νά βρεθοῦν σέ δύο δυνατές καταστάσεις (τίς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦμε στό 0 καί 1) καί τά ὁποῖα νά ἔχουν τίς παρακάτω ἰδιότητες:

α) Γιά ὁρισμένο συνδυασμό τῶν τιμῶν τῶν εἰσόδων τους νά μποροῦν νά παραμένουν στήν κατάσταση 0 ἤ 1. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό κύκλωμα ἀπομνημονεύει (ἀποθηκεύει) τό 0 ἤ 1.

β) Γιά ὁρισμένο συνδυασμό τῶν τιμῶν τῶν εἰσόδων τους νά μποροῦν νά τεθοῦν στήν κατάσταση 0 ἤ 1, ἀνεξάρτητα ἀπό τήν κατάσταση στήν ὁποία ἦταν προηγουμένως.

Ἠλεκτρονικά κυκλώματα μέ τά παραπάνω χαρακτηριστικά τά ὀνομάζομε πολυδονητές δύο σταθερῶν καταστάσεων (Bistable Multivibrators) ἤ Φλίπ - Φλόπ (Flip - Flop). Ἡ δεύτερη ὀνομασία Φλίπ - Φλόπ, ἐπικράτησε διεθνῶς καί αὐτή θά χρησιμοποιήσομε στό βιβλίο αὐτό.

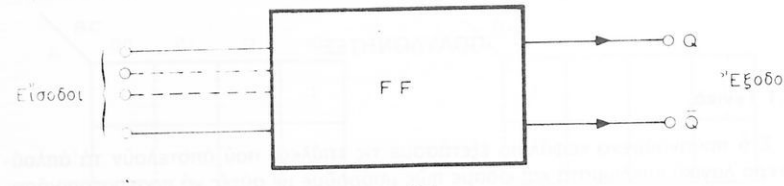
Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσομε ἐπίσης καί ἄλλα παρόμοια καί χρήσιμα κυκλώματα, ὄχι ὅμως μέ δύο σταθερές καταστάσεις. Τά κυκλώματα αὐτά τά ὀνομάζομε ἐπίσης πολυδονητές καί εἶναι:

— Ὁ πολυδονητής μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως (Monostable Multivibrator).
— Ὁ ἀσταθής πολυδονητής (Astable Multivibrator) καί
— τό κύκλωμα «σκανδάλης» Schmitt (Schmitt Trigger).

Ὅταν μιλᾶμε γιά πολυδονητές ἀναφερόμασθε συνήθως στά τρία αὐτά κυκλώματα.

Ὅλα τά κυκλώματα πού ἀναφέραμε παραπάνω, μποροῦμε νά τά κατασκευάσομε μέ διακριτά ἠλεκτρονικά στοιχεῖα (ἀντιστάσεις, πυκνωτές, διόδους, τρανζίστορς κλπ.) ἤ χρησιμοποιώντας τήν τεχνική τῶν ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων. Σήμερα κατασκευάζονται σχεδόν ἀποκλειστικά μέ τή δεύτερη μέθοδο καί ἔχουν μεγάλη ἐφαρμογή στήν κατασκευή τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν καί γενικότερα τῶν ψηφιακῶν ἠλεκτρονικῶν διατάξεων.

Κάθε Φλίπ - Φλόπ ἔχει δύο ἐξόδους πού εἶναι συμπληρωματικές μεταξύ τους. Γιά νά τίς διακρίνομε χρησιμοποιοῦμε συνήθως ἕνα γράμμα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου καί τοῦ συμπληρώματός του. Στό βιβλίο αὐτό θά χρησιμοποιήσομε τό γράμμα Q καί τό συμπλήρωμά του $\overline{Q}$. Στό σχῆμα 6.1 παριστάνεται τό λογικό σύμβολο ἑνός Φλίπ - Φλόπ. Στό τέλος τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θά ἐξετάσομε πῶς καί ἀπό ποιά στοιχεῖα ἀποτελεῖται ἕνα Φλίπ - Φλόπ.



Σχ. 6.1.
Λογικό σύμβολο Φλίπ - Φλόπ.

Ὅταν:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ἔξοδος } Q \longrightarrow «1» \\ \text{Ἔξοδος } \overline{Q} \longrightarrow «0»\end{array}\right\}$$

λέμε ὅτι τό Φλίπ - Φλόπ βρίσκεται ἤ τοποθετήθηκε στήν κατάσταση 1, ἐνῶ ὅταν:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ἔξοδος } Q \longrightarrow «0» \\ \text{Ἔξοδος } \overline{Q} \longrightarrow «1»\end{array}\right\}$$

λέμε ὅτι τό Φλίπ - Φλόπ βρίσκεται ἤ τοποθετήθηκε στήν κατάσταση 0.

Δηλαδή ἡ ***μία ἔξοδος*** τοῦ Φλίπ - Φλόπ καί συγκεκριμένα ἡ ἔξοδος Q χαρακτηρίζει τήν κατάστασή του, δηλαδή:

— Ὅταν Q ⟶ «1», τό Φλίπ - Φλόπ βρίσκεται στήν κατάσταση 1 καί
ὅταν Q ⟶ «0», τό Φλίπ - Φλόπ βρίσκεται στήν κατάσταση 0.

Τά Φλίπ - Φλόπ εἶναι ἀπό τά βασικά κυκλώματα πού συναντᾶμε στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές καί χρησιμοποιοῦνται γιά ἀπομνημόνευση πληροφοριῶν (ἀποθήκευση), κατασκευή εἰδικῶν κυκλωμάτων, ὅπως εἶναι οἱ καταχωρητές (Registers) καί οἱ μετρητές (Counters).

Παρατήρηση.

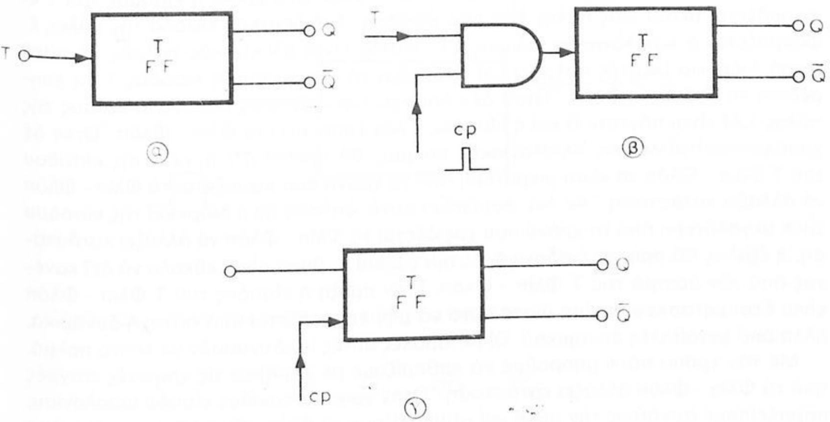
Στό λογικό σύμβολο τοῦ Φλίπ - Φλόπ τοῦ σχήματος 6.1 θεωρήσαμε ὅτι αὐτό ἔχει ἕναν ἀριθμό εἰσόδων. Στήν πράξη ὑπάρχουν, ὅπως θά δοῦμε στήν ἑπόμενη παράγραφο, τύποι Φλίπ - Φλόπ μέ μία, δύο ἤ τρεῖς εἰσόδους. Ἐπίσης στίς περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμε καί μία ἐπί πλέον εἴσοδο ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται γιά λόγους χρονισμοῦ. Τήν εἴσοδο αὐτή ὀνομάζουμε «ὡρολόγιο» (Clock) καί τήν παριστάνομε μέ τό CP (Clock Pulse). Γι' αὐτή θά μιλήσομε παρακάτω.

6.2 Φλίπ - Φλόπ (Flip - Flop).

Τά Φλίπ - Φλόπ κατατάσσονται σέ διάφορες κατηγορίες ἀνάλογα μέ τόν ἀριθμό τῶν εἰσόδων τους καί τόν τρόπο πού ἀλλάζουν κατάσταση. Στήν παράγραφο αὐτή θά ἐξετάσομε τά βασικότερα καί πιό χρήσιμα ἀπό αὐτά.

6.2.1 Τ Φλίπ - Φλόπ (T Flip - Flop ἤ Trigger Flip - Flop).

Τό Τ Φλίπ - Φλόπ ἔχει μία εἴσοδο καί ὅπως ὅλα τά Φλίπ - Φλόπ δύο ἐξόδους ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἄλλης. Τό Τ Φλίπ - Φλόπ ἀλλάζει κατάσταση, ὅταν ἡ εἴσοδός του πάρει τήν τιμή 1, ἐνῶ ὅταν ἡ εἴσοδός του πάρει τήν τιμή 0 ἡ κατάστασή του παραμένει ἀμετάβλητη. Στό σχῆμα 6.2α φαίνεται τό σύμβολο τοῦ Τ Φλίπ - Φλόπ καί στόν πίνακα 6.2.1 ὁ πίνακας ἀληθείας του.



Σχ. 6.2α.
Τ Φλίπ - Φλόπ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.1.
Πίνακας ἀληθείας Τ Φλίπ - Φλόπ

Εἴσοδος Τ	Παλιά κατάσταση Q_n	Νέα κατάσταση Q_{n+1}	
0	0	0	
0	1	1	← $\bar{T}Q_n$
1	0	1	← $T\bar{Q}_n$
1	1	0	

Ἀπό τόν παραπάνω πίνακα ἀληθείας προκύπτει ἡ σχέση:

$$Q_{n+1} = \bar{T}Q_n + T\bar{Q}_n \qquad (6.2)$$

ὅπου Q_n ἡ παλιά ἐγκατάσταση τοῦ Φλίπ - Φλόπ καί Q_{n+1} ἡ κατάσταση τοῦ Φλίπ - Φλόπ μετά τήν ἐφαρμογή «0» ἤ «1» στήν εἴσοδό του Τ.

Ἡ σχέση (6.2) λέγεται ***χαρακτηριστική ἐξίσωση*** τοῦ Φλίπ - Φλόπ.

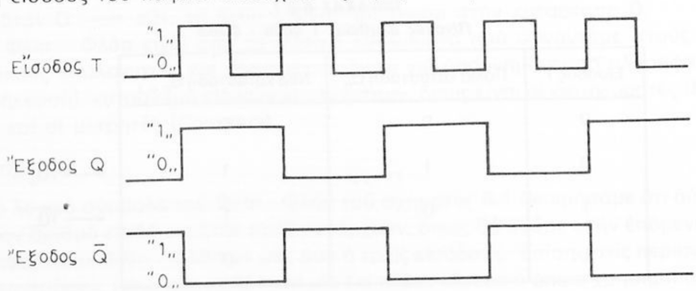
Παρατηρήσεις.

α) Παρατηροῦμε ὅτι ὅταν στήν εἴσοδο τοῦ Φλίπ - Φλόπ ἐφαρμοσθεῖ σῆμα πού ἀντιστοιχεῖ στό λογικό 1 ἡ ἔξοδός του ἄν ἦταν 0 θά γίνει 1, ἐνῶ ἄν ἦταν 1, θά γίνει 0. Ὅταν στήν εἴσοδό του ἐφαρμοσθεῖ σῆμα πού ἀντιστοιχεῖ στό λογικό 0 ἡ ἔξοδός του ἄν ἦταν 0 θά μείνει 0, ἐνῶ ἄν ἦταν 1, θά μείνει 1. Δηλαδή ὅταν ἡ εἴσοδός του εἶναι 0, τό Τ Φλίπ - Φλόπ «ἀπομνημονεύει» τήν προηγούμενη κατάστασή του, ἐνῶ ὅταν ἡ εἴσοδός του εἶναι 1 τό Τ Φλίπ - Φλόπ ἀλλάζει κατάσταση.

β) Στό σχῆμα 6.2α(β) δίνεται ἕνα Τ Φλίπ - Φλόπ στό ὁποῖο ἡ εἴσοδός του Τ ἐφαρμόζεται μέσω μιᾶς πύλης ΚΑΙ δύο εἰσόδων. Στή δεύτερη εἴσοδο τῆς πύλης ἐφαρμόζεται ὁ ὡρολογιακός παλμός CP. Αὐτός εἶναι ἠλεκτρικός παλμός μέ πολύ μικρή διάρκεια (λεπτός παλμός) καί καθορίζει τή στιγμή πού ἡ εἴσοδος Τ θά ἐπηρεάσει τό Τ Φλίπ - Φλόπ. Ὅταν δέν ὑπάρχει ὡρολογιακός παλμός, ἡ ἔξοδος τῆς πύλης ΚΑΙ εἶναι πάντοτε 0 καί ἡ εἴσοδος Τ δέν ἐπηρεάζει τό Φλίπ - Φλόπ. Ὅταν δέ χρησιμοποιεῖται λεπτός ὡρολογιακός παλμός, θά πρέπει ἡ διάρκεια τῆς εἰσόδου τοῦ Τ Φλίπ - Φλόπ νά εἶναι μικρότερη ἀπό τό χρόνο πού χρειάζεται τό Φλίπ - Φλόπ νά ἀλλάξει κατάσταση. Ἄν δέν συμβαίνει αὐτό, δηλαδή ἄν ἡ διάρκεια τῆς εἰσόδου εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό χρόνο πού χρειάζεται τό Φλίπ - Φλόπ νά ἀλλάξει κατάσταση, ἡ ἔξοδος θά παίρνει διαδοχικά τίς τιμές 0 καί 1, ὅπως εἶναι εὔκολο νά δεῖ κανένας ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ Τ Φλίπ - Φλόπ. Στήν πράξη ἡ εἴσοδος τοῦ Τ Φλίπ - Φλόπ εἶναι ἔτσι κατασκευασμένη ὥστε αὐτό νά μήν ἐπηρεάζεται ἀπό συνεχῆ δυναμικά, ἀλλά ἀπό μεταβολές δυναμικοῦ. Οἱ μεταβολές αὐτές ἰσοδυναμοῦν μέ λεπτό παλμό.

Μέ τόν τρόπο αὐτό μποροῦμε νά καθορίζομε μέ ἀκρίβεια τίς χρονικές στιγμές πού τό Φλίπ - Φλόπ ἀλλάζει κατάσταση. Ὅταν χρησιμοποιοῦμε εἴσοδο ὡρολογίου, παραλείπομε συνήθως τήν πύλη καί συμβολίζομε τό Φλίπ - Φλόπ ὅπως στό σχῆμα 6.2α(γ).

Στό σχῆμα 6.2β ἀπεικονίζονται οἱ κυματομορφές ἐξόδου τοῦ Τ Φλίπ - Φλόπ ὅταν ἡ εἴσοδός του παίρνει διαδοχικά τίς τιμές «0» ἤ «1».



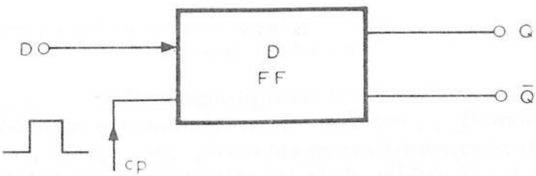
Σχ. 6.2β.
Κυματομορφές εἰσόδου — ἐξόδου σέ Τ Φλίπ - Φλόπ.

6.2.2 D Φλίπ - Φλόπ (D Flip - Flop ἤ Delay Flip - Flop).

Τό D Φλίπ - Φλόπ εἶναι ἐπίσης ἕνα Φλίπ - Φλόπ μιᾶς εἰσόδου (σχ. 6.2γ). Ὁ πίνακας ἀληθείας του εἶναι ὁ πίνακας 6.2.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.2.
Πίνακας ἀληθείας D Φλίπ - Φλόπ

D	Q_n	Q_{n+1}	
0	0	0	
0	1	0	
1	0	1	$\longrightarrow D\overline{Q}_n$
1	1	1	$\longrightarrow DQ_n$



Σχ. 6.2γ.
D Φλίπ - Φλόπ.

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας προκύπτει ἡ σχέση:

$$Q_{n+1} = D\overline{Q}_n + DQ_n$$

ἤ $$Q_{n+1} = D(\overline{Q}_n + Q_n)$$

ἤ $$Q_{n+1} = D \qquad (6.2)$$

δεδομένου ὅτι $\overline{Q}_n + Q_n = 1$

Ἀπό τή χαρακτηριστική ἐξίσωση τοῦ Φλίπ - Φλόπ,

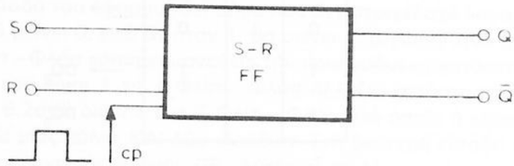
$$Q_{n+1} = D,$$

παρατηροῦμε ὅτι η πληροφορία πού ἐφαρμοζεται στήν εἴσοδό του μεταφέρεται στό Φλίπ - Φλόπ ἀνεξάρτητα ἀπό τήν προηγούμενη κατάστασή του. Συνήθως ἡ μεταφορά πραγματοποιεῖται μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ ὡρολογιακοῦ παλμοῦ στήν εἴσοδό του. Αὐτό μᾶς ἐπιτρέπει νά μεταφέρομε τήν πληροφορία ἀπό τήν εἴσοδό του στό Φλίπ - Φλόπ (Q, Q), ὅταν ἐμεῖς τό θέλομε, δηλαδή τή χρονική στιγμή πού τό ἀπαιτεῖ ἡ λειτουργία τοῦ κυκλώματος ἤ γενικότερα τῆς διατάξεως στήν ὁποία ἀνήκει τό Φλίπ - Φλόπ.

Ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες τοῦ D Φλίπ - Φλόπ εὔκολα συμπεραίνομε ὅτι τοῦτο μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ εἴτε γιά καθυστέρηση τῆς πληροφορίας πού ἐφαρμόζεται στήν εἴσοδό του καί ἡ ὁποία ἐμφανίζεται στήν ἔξοδό του μόνο ὅταν ἐφαρμοσθεῖ ὁ ὡρολογιακός παλμός, εἴτε γιά ἐναποθήκευση ἤ μεταφορά πληροφορίας.

6.2.3 S - R Φλίπ - Φλόπ (Set - Reset Flip - Flop).

Τό S - R Φλίπ - Φλόπ ἔχει δύο εἰσόδους, τήν S (Set = Βάζω) καί R (Reset = Βγάζω). Στό σχῆμα 6.2δ φαίνεται τό σύμβολο τοῦ S - R Φλίπ - Φλόπ καί ὁ πίνακας ἀληθείας πού περιγράφει τή λειτουργία εἶναι ὁ πίνακας 6.2.3.



Σχ. 6.2δ.
S - R Φλίπ - Φλόπ.

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας 6.2.3 διαπιστώνομε τά ἑξῆς:

α) Ἡ κατάσταση Q_{n+1} τοῦ Φλίπ - Φλόπ ἐξαρτᾶται ἀπό τίς εἰσόδους S καί R, ἀλλά καί ἀπό τήν προηγούμενη κατάστασή του Q_n.

β) Ὅταν R = S = 0, τό Φλίπ - Φλόπ δέν ἀλλάζει κατάσταση, δηλαδή ἀπομνημονεύει τήν προηγούμενη κατάσταση.

Ὅταν S = 1 καί R = 0, τό Φλίπ - Φλόπ παίρνει τήν κατάσταση 1 ἀνεξάρτητα ἀπό τήν προηγούμενη κατάστασή του. Δηλαδή, ὅταν θέλομε νά ἐγγράψομε στό Φλίπ - Φλόπ τό 1 πρέπει νά θέσομε S = 1 καί R = 0.

Ὅταν R = 1 καί S = 0, τό Φλίπ - Φλόπ παίρνει τήν κατάσταση 0 ἀνεξάρτητα ἀπό τήν προηγούμενη κατάστασή του. Δηλαδή ὅταν θέλομε νά ἐγγράψομε στό Φλίπ - Φλόπ τό 0 (Reset), πρέπει νά θέσομε R = 1 καί S = 0.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.3.
Πίνακας ἀληθείας S - R Φλίπ - Φλόπ

R	S	Q_n	Q_{n+1}	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\longrightarrow \bar{R} . \bar{S} . Q_n$
0	1	0	1	$\longrightarrow \bar{R} . S . \bar{Q}_n$
0	1	1	1	$\longrightarrow \bar{R} . S . Q_n$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	;	
1	1	1	;	

γ) Ἄν ἐφαρμόσομε ταυτοχρόνως καί στίς δύο εἰσόδους R, S πληροφορίες λογικοῦ — 1, δηλαδή R = S = «1», τότε ἡ κατάσταση τοῦ Φλίπ - Φλόπ Q_{n+1} γίνεται ἀπροσδιόριστη καί τή συμβολίζομε μέ ἕνα ἐρωτηματικό (;). Γι' αὐτό τό λόγο ἡ συνθήκη R = S = «1» ἀπαγορεύεται (δηλαδή πρέπει νά εἶναι R = 1 καί S = 0 ἤ R = 0 καί S = 1. Αὐτό τό ἐκφράζομε μέ τή λογική σχέση $R \cdot S = 0$). Αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ κατασκευαστής τοῦ κυκλώματος ἤ διατάξεως πού ἀνήκει τό R - S Φλίπ - Φλόπ, πρέπει νά ἔχει σχεδιάσει τό κύκλωμα ἤ διάταξη μέ τέτοιο τρόπο ὥστε ποτέ νά μή φθάνουν στήν εἴσοδο τοῦ Φλίπ - Φλόπ συγχρόνως δύο σήματα λογικοῦ 1. Ἄν τοῦτο συμβεῖ, τότε ὑπάρχει κάποια βλάβη στό κύκλωμα ἤ τή διάταξη.

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας μποροῦμε ἐπίσης νά ἔχομε τή χαρακτηριστική ἐξίσωση τοῦ Φλίπ - Φλόπ, πού εἶναι:

$$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q + \bar{R} \cdot S \cdot \bar{Q}_n + \bar{R} \cdot S \cdot Q_n \quad \text{μέ} \quad R \cdot S = 0$$

Ἡ σχέση αὐτή μπορεῖ νά μετασχηματισθεῖ ὡς ἑξῆς:

$$Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + \bar{R}S\,(\bar{Q}_n + Q_n)$$

$$\text{ἤ} \quad Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + \bar{R}S \qquad \text{ἐπειδή} \quad \bar{Q}_n + Q_n = 1$$

$$\text{ἤ} \quad Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + \bar{R}S + RS, \qquad \text{ἐπειδή} \quad R \cdot S = 0$$

$$\text{ἤ} \quad Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + S\,(\bar{R} + R) \qquad \text{ἐπειδή} \quad \bar{R} + R = 1$$

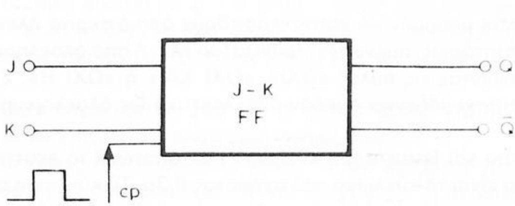
$$\text{ἤ} \quad Q_{n+1} = \bar{R} \cdot \bar{S} \cdot Q_n + S$$

$$\text{ἤ} \quad Q_{n+1} = \bar{R} \cdot Q_n + S \qquad \text{μέ} \quad S \cdot R = 0$$

$$\text{δηλ.} \quad Q_{n+1} = S + \bar{R}Q \qquad \text{μέ} \quad S \cdot R = 0 \tag{6.3}$$

6.2.4 J - K Φλίπ - Φλόπ (J - K Flip Flop).

Τό J - K Φλίπ - Φλόπ (σχ. 6.2ε) ἔχει ἐπίσης δύο εἰσόδους, τήν J καί K καί ἀποτελεῖ συνδυασμό τῶν προηγουμένων Φλίπ - Φλόπ. Ἐπίσης, ὅπως μποροῦμε εὔκολα νά διαπιστώσομε ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας του 6.2.4, τό Φλίπ - Φλόπ αὐτό, σέ ἀντίθεση μέ τό RS Φλίπ - Φλόπ ἐπιτρέπει τήν ταυτόχρονη ἐφαρμογή στήν εἴσοδό



Σχ. 6.2ε.
J - K Φλίπ - Φλόπ.

του λογικοῦ 1, δηλαδή τή συνθήκη J = K = «1». Στήν περίπτωση αὐτή τό Φλίπ - Φλόπ ἀλλάζει κατάσταση

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2.4.
Πίνακας ἀληθείας τοῦ J - K Φλίπ - Φλόπ

J	K	Q_n	Q_{n+1}	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\longrightarrow \overline{J}\,.\,\overline{K}\,.\,Q_n$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\longrightarrow J\,.\,\overline{K}\,.\,\overline{Q}_n$
1	0	1	1	$\longrightarrow J\,.\,\overline{K}\,.\,Q_n$
1	1	0	1	$\longrightarrow J\,.\,K\,.\,\overline{Q}_n$
1	1	1	0	

Ἀπό τόν πίνακα ἀληθείας 6.2.4 ἔχομε:

$$Q_{n+1} = \overline{J}\,.\,\overline{K}\,.\,Q_n + J\,.\,\overline{K}\,.\,\overline{Q}_n + J\,.\,\overline{K}\,.\,Q_n + J\,.\,K\,.\,\overline{Q}_n$$

ἤ $\quad Q_{n+1} = \overline{K}\,.\,Q_n + J\,.\,Q_n, \qquad$ ἀφοῦ $J + \overline{J} = 1 \quad$ καί $\quad K + \overline{K} = 1$

ἤ $$Q_{n+1} = \overline{K}\,.\,Q_n + J\,.\,Q_n \tag{6.4}$$

Τό J - K Φλίπ - Φλόπ εἶναι ἀπό τά Φλίπ - Φλόπ που χρησιμοποιοῦνται συχνότερα στά κυκλώματα τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

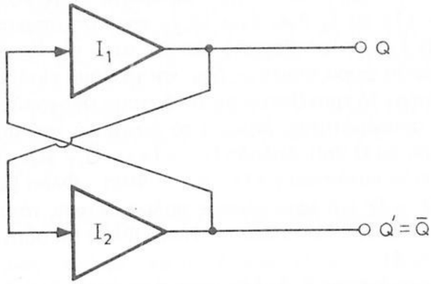
Ἐκτός ἀπό τά Φλίπ - Φλόπ τά ὁποῖα ἀναφέραμε ὑπάρχουν καί ἄλλα, ὅπως τό R - S - T, τό Master - Slave κλπ., καθώς καί συνδυασμοί ὅλων τῶν τύπων. Δέν θά τά ἀναφέρομε ὅμως, γιατί εἶναι ἔξω ἀπό τά ὅρια καί τόν προορισμό τοῦ βιβλίου μας.

6.3 Πραγματοποίηση Φλίπ - Φλόπ.

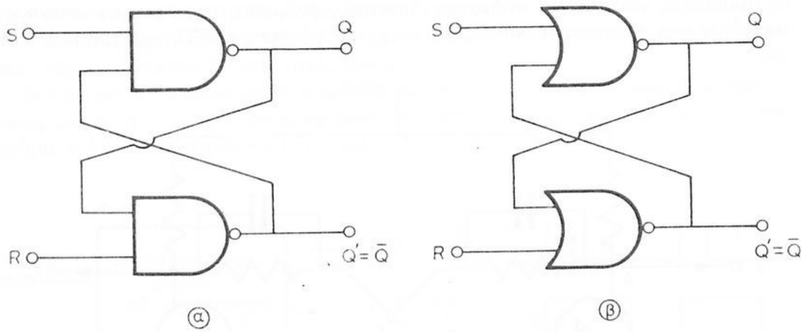
Τά Φλίπ - Φλόπ μποροῦν νά κατασκευασθοῦν ἀπό διακριτά ἠλεκτρονικά στοιχεία, δηλαδή ἀντιστάσεις, πυκνωτές, τρανζίστορ κλπ. ἤ ἀπό ὁλοκληρωμένα κυκλώματα χρησιμοποιώντας τίς πύλες «ΟΧΙ», «ΟΧΙ ΚΑΙ» ἤ «ΟΧΙ Η». Σήμερα ὅλα τά Φλίπ - Φλόπ κατασκευάζονται σχεδόν ἀποκλειστικά ὡς ὁλοκληρωμένα κυκλώματα.

Τό ἁπλούστερο καί βασικότερο κύκλωμα πού ἀποτελεῖ τό «κύτταρο» κάθε τύπου Φλίπ - Φλόπ εἶναι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6.3α. Τό κύκλωμα αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἀντιστροφεῖς, πού εἶναι συνδεσμολογημένοι ἔτσι ὥστε ἡ ἔξοδος τοῦ ἑνός νά εἶναι εἴσοδος τοῦ ἄλλου.

Ἄν Q = 0, ἐπειδή αὐτό ἀποτελεῖ εἴσοδο τοῦ κυκλώματος I_2, θά εἶναι Q΄ = 1. Ἄν



Σχ. 6.3α.
Κύκλωμα στοιχειώδους Φλίπ - Φλόπ.



Σχ. 6.3β.
α) S - R Φλίπ - Φλόπ μέ πύλες NAND. β) S - R Φλίπ - Φλόπ μέ πύλες NOR.

συμβαίνει αὐτό, τό Φλίπ - Φλόπ θά παραμείνει στήν κατάσταση αὐτή δεδομένου ὅτι στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6.3α δέν ἔχει εἴσοδο.

Ἀντίστοιχα, ἄν $Q = 1$ θά εἶναι $Q' = 0$. Εἶναι ἀδύνατο τό κύκλωμα αὐτό νά βρεθεῖ στήν κατάσταση $Q = 0$, $Q' = 0$ ἤ $Q = 1$, $Q' = 1$. Δηλαδή στό κύκλωμα αὐτό εἶναι $Q' = \bar{Q}$.

Στό σχῆμα 6.3β(α) δίνεται τό S - R Φλίπ - Φλόπ κατασκευασμένο μέ πύλες NAND καί στό σχῆμα 6.3β(β) τό ἴδιο Φλίπ - Φλόπ μέ πύλες NOR. Εἶναι εὔκολο νά ἐπαληθεύσει κανείς τόν πίνακα ἀληθείας τοῦ S-R Φλίπ - Φλόπ γιά τά κυκλώματα αὐτά.

Στό σχῆμα 6.3γ παριστάνεται ἕνα R - S Φλίπ - Φλόπ, κατασκευασμένο ἀπό διακριτά ἠλεκτρονικά στοιχεῖα, ὅπως ἤδη ἀναφέραμε.

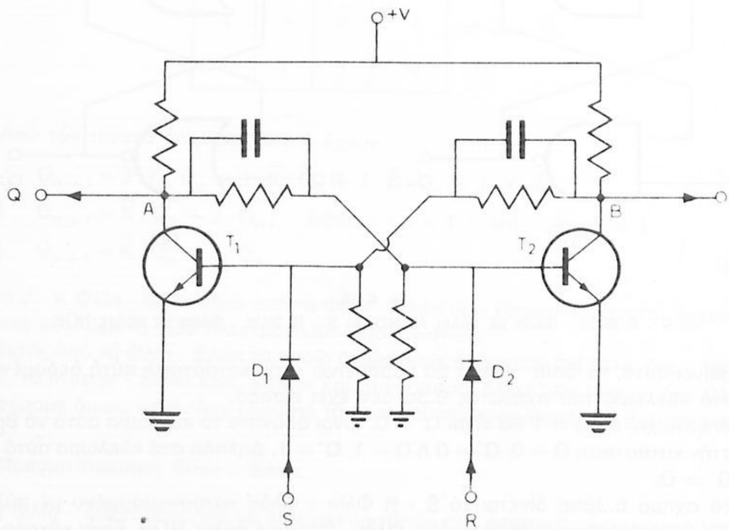
Οἱ δύο καταστάσεις τοῦ παραπάνω Φλίπ - Φλόπ ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

— Τρανζίστορ T_1 σέ ἀποκοπή (cut off) καί τρανζίστορ T_2 σέ κατάσταση ἀγωγιμότητας (on).
— Τρανζίστορ T_1 σέ κατάσταση ἀγωγιμότητας (on) καί τρανζίστορ T_2 σέ ἀποκοπή (cut off).

Ἄν ὑποθέσομε ὅτι τό Φλίπ - Φλόπ βρίσκεται στήν κατάσταση Ο, δηλαδή Q = «Ο» καί $\overline{Q}$ = «1» τό T_1 ἄγει ἐνῶ τό T_2 εἶναι σέ ἀποκοπή.

Ἄν ἐφαρμόσομε ἕνα παλμό θετικῆς τάσεως στήν εἴσοδο S ἡ δίοδος εἶναι πολωμένη κατά τήν ὀρθή φορά, συνεπῶς ἄγει καί τό σῆμα εἰσόδου ἐφαρμόζεται στή βάση τοῦ T_1 καί ὁδηγεῖ τό τρανζίστορ σέ κατάσταση ἀποκοπῆς, ἐνῶ τό T_2 μεταβαίνει σέ κατάσταση ἀγωγιμότητας, δηλαδή τό δυναμικό τοῦ σημείου Α εἶναι + V Volt, ἐνῶ τοῦ Β περίπου Ο Volt, δηλαδή Q = «1» καί $\overline{Q}$ = «Ο». Ἑπομένως τό Φλίπ - Φλόπ μεταβαίνει στήν κατάσταση «1». Ἄν τό Φλίπ - Φλόπ βρίσκεται στήν κατάσταση 1 (Q = 1, Q′ = 0) καί ἐφαρμόσομε παλμό θετικῆς τάσεως στήν εἴσοδο R, εὔκολα μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι τελικά τό Φλίπ - Φλόπ θά ὁδηγηθεῖ στήν κατάσταση Ο (Q = 0, Q′ = 1).

Τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 6.3γ δέν μπορεῖ νά βρεθεῖ σέ ἄλλη κατάσταση ἀπό αὐτές πού περιγράψαμε. Πράγματι, τή στιγμή πού τό συνδέομε μέ τήν τάση τροφοδοσίας τό δυναμικό στά σημεῖα Α καί Β δέν μπορεῖ νά εἶναι ἀκριβῶς τό ἴδιο. Αὐτό συμβαίνει, γιατί πάντα ὑπάρχουν διαφορές ἀνάμεσα στίς τιμές ἀντιστάσεων πού εἶναι ἴσες ὀνομαστικά καθώς καί στίς παραμέτρους τρανζίστορ τοῦ ἴδιου τύπου.



Σχ. 6.3γ.
S - R Φλίπ - Φλόπ (ἠλεκτρονικό κύκλωμα).

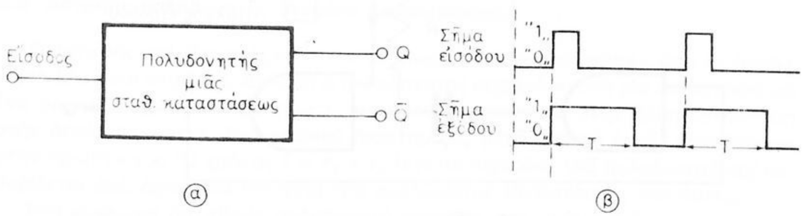
Ἔστω ὅτι τό δυναμικό στό σημεῖο Β εἶναι θετικότερο ἀπό τό δυναμικό στό σημεῖο Α. Ἑπομένως τό ρεῦμα πού διαρρέει τό τρανζίστορ T_1 (ρεῦμα ἐκπομποῦ συλλέκτη) θά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ἀντίστοιχο ρεῦμα τοῦ τρανζίστορ T_2. Αὐτό θά ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν ἐλάττωση τοῦ δυναμικοῦ στό σημεῖο Α καί τήν αὔξηση τοῦ δυναμικοῦ στό σημεῖο Β, πράγμα πού συνεπάγεται ἀκόμα μεγαλύτερη αὔξηση τοῦ ρεύματος τοῦ τρανζίστορ T_1 καί ἐλάττωση τοῦ ρεύματος τοῦ τρανζίστορ T_2

κ.ο.κ. Ἔτσι τελικά τό τρανζίστορ T_2 ὁδηγεῖται στήν ἀποκοπή ὁπότε τό δυναμικό στό σημεῖο Β παίρνει τήν τιμή + V Volt (λογικό 1), ἐνῶ τό τρανζίστορ T_1 ὁδηγεῖται στόν κόρο ὁπότε τό δυναμικό στό σημεῖο Α γίνεται 0 Volt (λογικό 0). Ἄν ἀντίθετα τήν ὥρα πού τό συνδέομε στήν τάση, τό δυναμικό στό σημεῖο Β εἶναι γιά τούς λόγους πού ἀναφέραμε, μικρότερο ἀπό τό δυναμικό στό σημεῖο Α, θά καταλήξει μέ τήν ἴδια διαδικασία νά εἶναι τό δυναμικό στό σημεῖο Β 0 Volt (λογικό 0) καί στό σημεῖο Α + V Volt (λογικό 1).

6.4 Πολυδονητής μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως (Monostable Multivibrator).

Ὁ πολυδονητής μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως, εἶναι ἕνα κύκλωμα πού ἔχει σχεδιασθεῖ κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε νά ἔχει μία μόνο σταθερή κατάσταση λειτουργίας. Τό κύκλωμα παραμένει στήν κατάσταση αὐτή, ἐφ' ὅσον δέν ἐφαρμόζεται κατάλληλο σῆμα στήν εἴσοδό του. Μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ κατάλληλου σήματος (παλμοῦ) στήν εἴσοδό του, τό κύκλωμα ἀλλάζει κατάσταση, στήν ὁποία παραμένει γιά ἕνα ὁρισμένο χρονικό διάστημα T. Ὁ χρόνος αὐτός καθορίζεται ἀπό τίς ἀντιστάσεις καί τούς πυκνωτές τοῦ κυκλώματος.

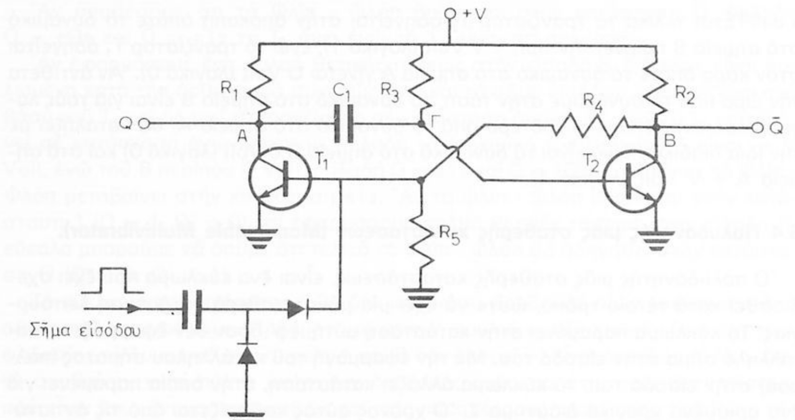
Στό σχῆμα 6.4α φαίνεται τό σύμβολο τοῦ πολυδονητῆ μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως μέ τίς ἀντίστοιχες κυματομορφές (σήματα) εἰσόδου καί ἐξόδου, ἐνῶ στό σχῆμα 6.4β τό ἠλεκτρονικό κύκλωμα τοῦ πολυδονητῆ.



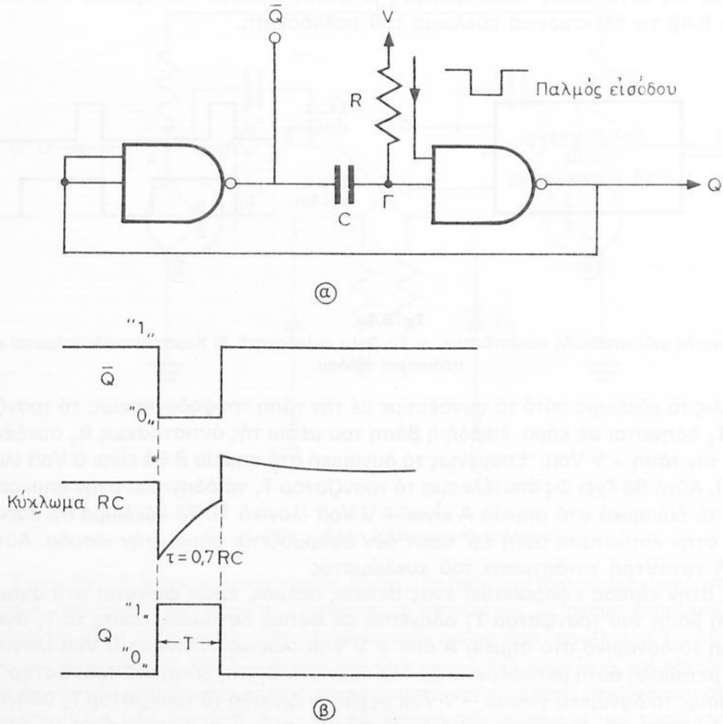
Σχ. 6.4α.
Πολυδονητής μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως. α) Σύμβολο πολυδονητῆ. β) Κυματομορφές (σήματα) εἰσόδου καί ἐξόδου.

Μόλις τό κύκλωμα αὐτό τό συνδέσομε μέ τήν τάση τροφοδοτήσεως, τό τρανζίστορ T_2 ὁδηγεῖται σέ κόρο, ἐπειδή ἡ βάση του μέσω τῆς ἀντιστάσεως R_3 συνδέεται μέ τήν τάση + V Volt. Ἑπομένως τό δυναμικό στό σημεῖο Β θά εἶναι 0 Volt (λογικό 0). Αὐτό θά ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τό τρανζίστορ T_1 νά ὁδηγηθεῖ στήν ἀποκοπή ὁπότε τό δυναμικό στό σημεῖο Α εἶναι + V Volt (λογικό 1). Τό κύκλωμα θά παραμείνει στήν κατάσταση αὐτή ἐφ' ὅσον δέν ἐφαρμόζεται σῆμα στήν εἴσοδο. Αὐτή εἶναι ἡ «σταθερή κατάσταση» τοῦ κυκλώματος.

Ἄν στήν εἴσοδο ἐφαρμοσθεῖ ἕνας θετικός παλμός, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 6.4β, ἡ βάση τοῦ τρανζίστορ T_1 ὁδηγεῖται σέ θετικό δυναμικό, ὁπότε τό T_1 ἄγει, δηλαδή τό δυναμικό στό σημεῖο Α ἀπό + V Volt (λογικό 1) γίνεται 0 Volt (λογικό 0). Ἡ μεταβολή αὐτή μεταφέρεται μέ τόν πυκνωτή C_1 στή βάση τοῦ τρανζίστορ T_2 τῆς ὁποίας τό δυναμικό γίνεται − V Volt περίπου. Δηλαδή τό τρανζίστορ T_2 ὁδηγεῖται στήν ἀποκοπή. Στή συνέχεια ὁ πυκνωτής C_1 πού εἶναι φορτισμένος μέ τάση



Σχ. 6.4β.
Πολυδονητὴς μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως (ἠλεκτρονικὸ κύκλωμα).



Σχ. 6.4γ.
Πολυδονητὴς μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως μὲ πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ». α) Λογικὸ κύκλωμα. β) Κυματομορφές.

— V Volt, ἀρχίζει νά ἐκφορτίζεται μέσω τῆς ἀντιστάσεως R_3 πού εἶναι συνδεδεμένη μέ τάση τροφοδοσίας + V Volt. Ὅταν τό δυναμικό τοῦ σημείου Γ (βάση τοῦ τρανζίστορ T_2) γίνει λίγο μεγαλύτερο ἀπό 0 Volt, τό τρανζίστορ T_2 ὁδηγεῖται καί πάλι στόν κόρο, ὁπότε τό τρανζίστορ T_1 ὁδηγεῖται στήν ἀποκοπή. Ἡ ἐκφόρτιση αὐτή τοῦ πυκνωτῆ C_1 ἀπό τήν τάση – V Volt στήν τάση 0 Volt περίπου χρειάζεται ἕνα χρονικό διάστημα τό ὁποῖο ἐξαρτᾶται ἀπό τήν τιμή τοῦ πυκνωτῆ C_1 καί τήν τιμή τῆς ἀντιστάσεως R_3. Γιά πολλά πρακτικά κυκλώματα πολυδονητῶν μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως ὁ χρόνος αὐτός τ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι: $\tau \approx 0{,}7\, R_3\, C_1$. Στήν πράξη μποροῦμε νά ἐπιτύχομε τιμές τοῦ τ ἀπό μερικά μsec μέχρι μερικά msec.

Ἑπομένως, ὅταν ἐφαρμοσθεῖ ὁ παλμός στήν εἴσοδο, ἀλλάζει ἡ κατάσταση τοῦ κυκλώματος. Τό κύκλωμα θά παραμείνει στή νέα κατάσταση γιά ὁρισμένο χρόνο τ καί θά ἐπανέλθει στή σταθερή του κατάσταση. Ὁ πολυδονητής μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως χρησιμοποιεῖται γιά μετατροπή κυματομορφῶν, χρονισμό καί δημιουργία καθυστερήσεων.

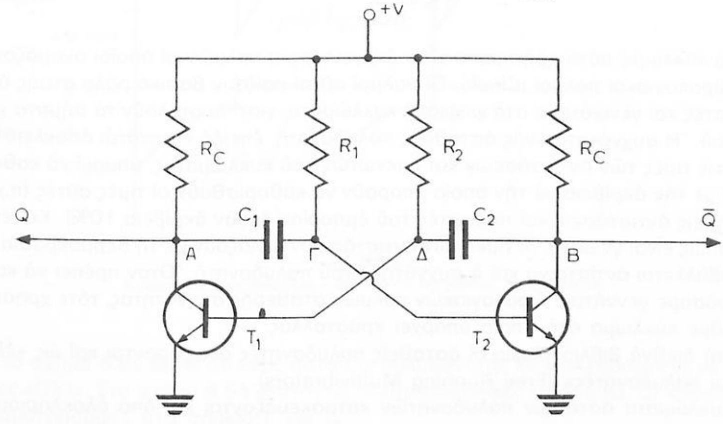
Κυκλώματα πολυδονητῶν κατασκευάζονται καί ἀπό ὁλοκληρωμένα λογικά κυκλώματα πού περιέχουν πύλες «ΟΧΙ», «ΟΧΙ ΚΑΙ» ἤ «ΟΧΙ Η».

Στό σχῆμα 6.4γ(α) παριστάνεται ἕνας πολυδονητής μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως, κατασκευασμένος μέ δύο πύλες «ΟΧΙ ΚΑΙ». Στό σχῆμα 6.4γ(β) παριστάνονται οἱ κυματομορφές ἐξόδου (Q, Q) καθώς καί ἡ κυματομορφή στό σημεῖο Γ. [Ὁ πολυδονητῆς μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως λέγεται καί (μονοδονητής)].

6.5 Ἀσταθής πολυδονητής (Astable Multivibrator).

Ὁ ἀσταθής πολυδονητής εἶναι ἕνα κύκλωμα μέ δύο καταστάσεις ἀπό τίς ὁποῖες καμιά δέν εἶναι σταθερή. Δηλαδή ὁ πολυδονητής παραμένει στή μία κατάσταση γιά ἕνα ὁρισμένο χρονικό διάστημα τ_1 καί ὕστερα μεταπίπτει στήν ἄλλη κατάσταση στήν ὁποία παραμένει ἕνα χρονικό διάστημα τ_2 μετά ἀπό τό ὁποῖο ἐπανέρχεται στήν πρώτη κ.ο.κ. Ὁ χρόνος $T = \tau_1 + \tau_2$ λέγεται περίοδος τοῦ πολυδονητῆ καί καθορίζεται ἀπό ὁρισμένα στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος (ἀντιστάσεις, πυκνωτές).

Ἕνα κύκλωμα ἀσταθοῦς πολυδονητῆ φαίνεται στό σχῆμα 6.5α.



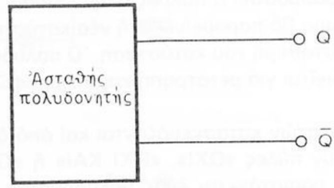
Σχ. 6.5α.
Ἀσταθής πολυδονητής - ἠλεκτρονικό κύκλωμα.

Στό σχῆμα 6.5β, φαίνεται τό σύμβολό του. Μποροῦμε νά ἐξηγήσομε τή λειτουργία τοῦ κυκλώματος αὐτοῦ μέ τρόπο ἀνάλογο μέ αὐτόν πού χρησιμοποιήσαμε γιά τόν πολυδονητή μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως.

Γιά πολλά πρακτικά κυκλώματα ἀσταθῶν πολυδονητῶν οἱ χρόνοι τ_1 καί τ_2 ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι:

$$\tau_1 \simeq 0,7\ R_1C_1 \quad \text{καί} \quad \tau_2 \simeq 0,7\ R_2C_2$$

$$\text{ὁπότε } T \cong 0,7\ (R_1C_1 + R_2C_2)$$



Σχ. 6.5β.
Σύμβολο ἑνός ἀσταθοῦς πολυδονητή.

Ἡ συχνότητα τοῦ κυκλώματος f εἶναι:

$$f = \frac{1}{T} \simeq \frac{1}{0,7\ R_1C_1 + 0,7\ R_2C_2}$$

ἤ

$$f = \frac{1}{T} \simeq \frac{1,4}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

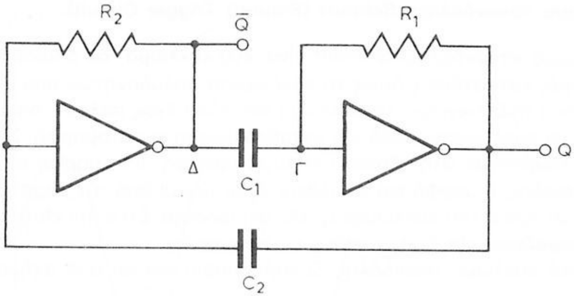
Στήν περίπτωση τοῦ $R_1 = R_2 = R$ καί $C_1 = C_2 = C$, ἔχομε:

$$f \simeq \frac{0,7}{RC}$$

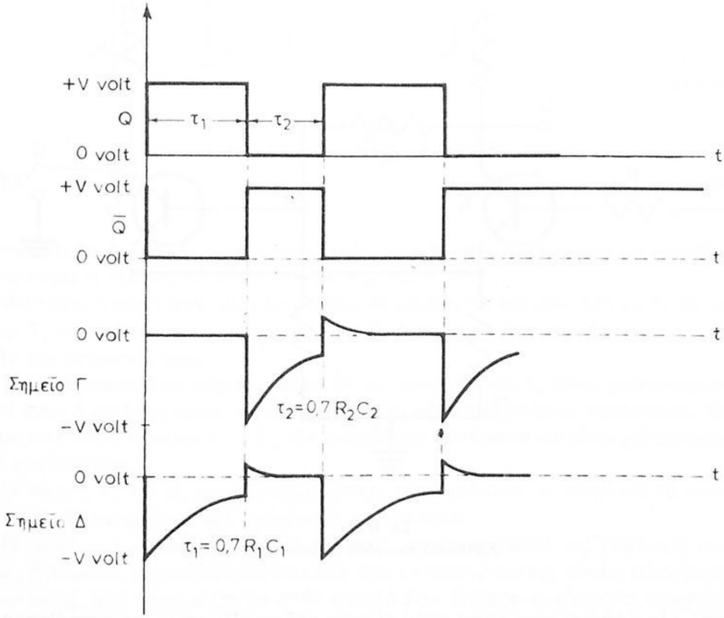
Τό κύκλωμα αὐτό χρησιμοποιεῖται ὡς γεννήτρια παλμῶν οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται καί ὡρολογιακοί παλμοί (Clock). Οἱ παλμοί αὐτοί παίζουν βασικό ρόλο στούς ὑπολογιστές καί γενικότερα στά ψηφιακά κυκλώματα, γιατί ἀποτελοῦν τά σήματα χρονισμοῦ. Ἡ συχνότητα ἑνός ἀσταθοῦς πολυδονητῆ, ἐπειδή ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπό τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων καί πυκνωτῶν τοῦ κυκλώματος, μπορεῖ νά καθορισθεῖ μέ τήν ἀκρίβεια μέ τήν ὁποία μποροῦν νά καθορισθοῦν οἱ τιμές αὐτές (π.χ. οἱ συνήθεις ἀντιστάσεις καί πυκνωτές τοῦ ἐμπορίου ἔχουν ἀκρίβεια 10%). Καί ἐπειδή, ὅπως εἶναι γνωστό, οἱ τιμές τῶν ἀντιστάσεων ἀλλάζουν μέ τή θερμοκρασία, θά μεταβάλλεται ἀντίστοιχα καί ἡ συχνότητα τοῦ πολυδονητῆ. Ὅταν πρέπει νά κατασκευάσομε γεννήτρια ὡρολογιακῶν παλμῶν σταθερῆς συχνότητας, τότε χρησιμοποιοῦμε κύκλωμα στό ὁποῖο ὑπάρχει κρύσταλλος.

Στή διεθνή βιβλιογραφία οἱ ἀσταθεῖς πολυδονητές ἀναφέρονται καί ὡς «ἐλεύθεροι πολυδονητές» (Free Running Multivibrators).

Κυκλώματα ἀσταθῶν πολυδονητῶν κατασκευάζονται καί ἀπό ὁλοκληρωμένα λογικά κυκλώματα πού περιέχουν πύλες «ΟΧΙ», «ΟΧΙ ΚΑΙ» καί «ΟΧΙ Η».



Σχ. 6.5γ.
Ἀσταθής πολυδονητής μέ πύλες «ΟΧΙ».



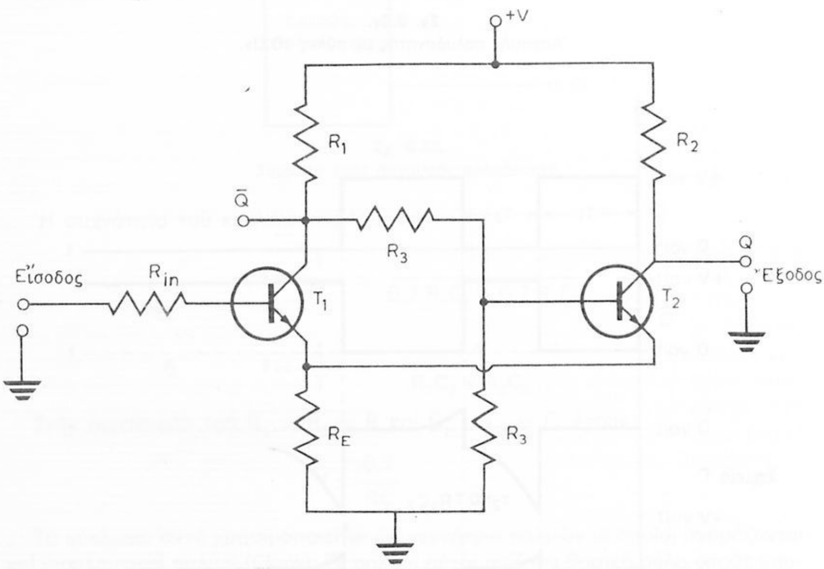
Σχ. 6.5δ.
Κυματομορφές βάσεως - συλλέκτη ἀσταθοῦς πολυδονητῆ.

Στό σχῆμα 6.5γ φαίνεται ἕνας ἀσταθής πολυδονητής κατασκευασμένος μέ δύο πύλες «ΟΧΙ». Στό σχῆμα 6.5δ φαίνονται οἱ κυματομορφές ἐξόδου (Q, $\bar{Q}$) καθώς καί οἱ κυματομορφές στά σημεῖα Γ καί Δ.

6.6 Κύκλωμα «σκανδάλης» Schmitt (Schmitt Trigger Circuit).

Τό κύκλωμα «σκανδάλης» Schmitt εἶναι ἕνα κύκλωμα τοῦ ὁποίου ἡ ἔξοδος ἔχει δύο σταθερές καταστάσεις ὅπως τά κυκλώματα πολυδονητῶν πού ἐξετάσαμε. Τό σῆμα εἰσόδου πού διεγείρει τό κύκλωμα δέν εἶναι ἕνας παλμός, ὅπως εἴδαμε στά προηγούμενα κυκλώματα, ἀλλά μία μεταβαλλόμενη κυματομορφή. Σέ ὅλες τίς περιπτώσεις λαμβάνομε στήν ἔξοδο μιά κυματομορφή, ὑπό μορφή παλμῶν, τῆς ὁποίας ἡ περίοδος, ἡ μορφή καί τό πλάτος ἐξαρτῶνται ἀπό τήν κυματομορφή εἰσόδου καί τά στοιχεῖα τοῦ κυκλώματος. Θά θεωρήσομε ὅτι στήν εἴσοδο τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται μία ἡμιτονοειδής κυματομορφή.

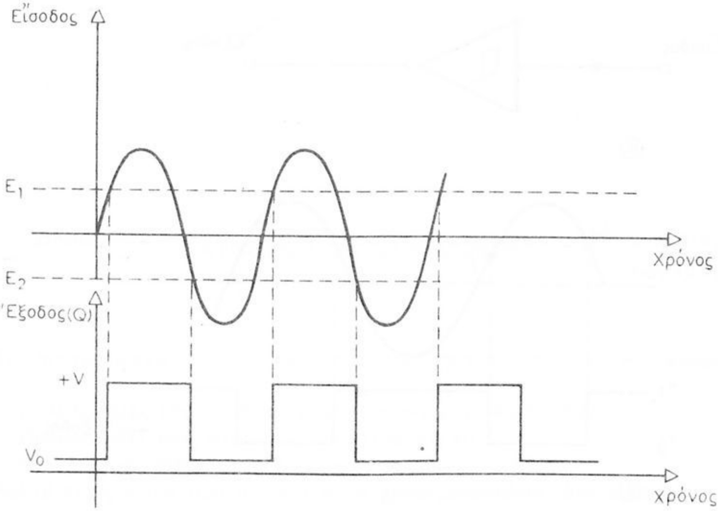
Τό βασικό κύκλωμα σκανδάλης Schmitt παριστάνεται στό σχῆμα 6.6α.



Σχ. 6.6α.
Κύκλωμα σκανδάλης Schmitt.

Ὅταν δέν ἐφαρμόζεται τάση στήν εἴσοδο τοῦ κυκλώματος, τό τρανζίστορ T_1 βρίσκεται σέ κατάσταση ἀποκοπῆς, ἄρα δέν ἄγει, ἐνῶ τό τρανζίστορ T_2 ὁδηγεῖται στήν κατάσταση ἀγωγιμότητας. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ τάση στήν ἔξοδο εἶναι ἴση μέ V_0 (σχ. 6.6β — Κυματομορφές κυκλώματος Schmitt).

Ἄν τώρα ἐφαρμόσομε μία ἡμιτονοειδή τάση στήν εἴσοδο καί αὐτή αὐξανόμενη πάρει τήν τιμή E_1, τότε τό T_1 ἀρχίζει νά ἄγει. Ἡ τάση στό συλλέκτη του ἐλαττώνεται μέ ἀποτέλεσμα τό τρανζίστορ T_2 νά ἄγει ἀκόμα λιγότερο καί ἔτσι ἡ πτώση τάσεως στήν ἀντίσταση R_E νά γίνεται συνεχῶς μικρότερη καί τό T_1 νά γίνεται



Σχ. 6.6β.
Κυματομορφές εἰσόδου - ἐξόδου κυκλώματος Schmitt.

περισσότερο ἀγώγιμο. Αὐτό ὁδηγεῖ τελικά τό T_2 στήν κατάσταση ἀποκοπῆς μέ ἀποτέλεσμα ἡ ἔξοδος νά εἶναι ἴση μέ τήν τάση $+V$.

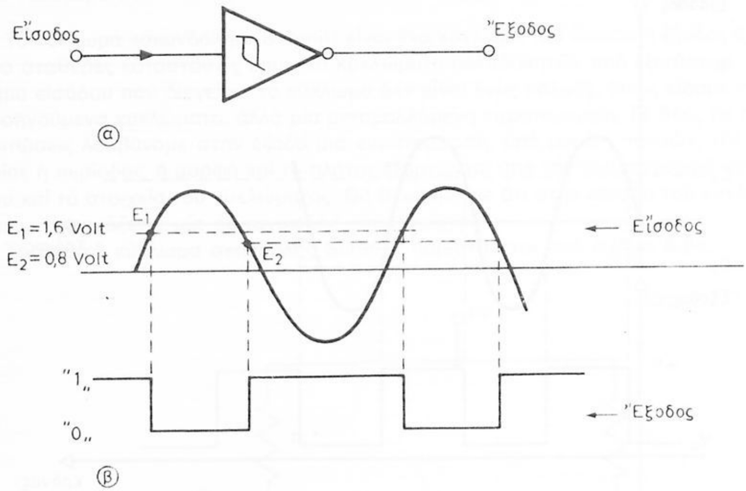
Ἄν τώρα ἡ τάση στήν εἴσοδο ἀρχίζει νά μειώνεται καί γίνει ἴση μέ E_2 τό τρανζίστορ T_1 ὁδηγεῖται σέ ἀποκοπή, ἐνῶ τό T_2 ἀρχίζει νά ἄγει καί ὁδηγεῖται γρήγορα στήν κατάσταση κόρου.

Ἀπό τά παραπάνω παρατηροῦμε ὅτι οἱ τάσεις E_1 καί E_2 εἶναι χαρακτηριστικές, γιατί ὅταν ἡ εἴσοδος πάρει τίς τιμές αὐτές, τό κύκλωμα ἀλλάζει κατάσταση. Τή διαφορά αὐτή τῶν τάσεων $E_1 - E_2$ τήν ὀνομάζομε ***ὑστέρηση*** καί εἶναι χαρακτηριστική τοῦ κυκλώματος.

Οἱ τάσεις E_1 καί E_2 ὀνομάζονται τάσεις «κατωφλίου», γι' αὐτό καί τό κύκλωμα Schmitt τό ὀνομάζομε καί «κύκλωμα κατωφλίου».

Τό κύκλωμα «σκανδάλης» τοῦ Schmitt χρησιμοποιεῖται ὡς κύκλωμα συγκρίσεως ἤ λήψεως τετραγωνικῶν παλμῶν ἀπό μεταβαλλόμενες τάσεις (συνήθως ἡμιτονοειδεῖς), πού ἐφαρμόζονται στήν εἴσοδό του. Σήμερα κυκλώματα «σκανδάλης» Schmitt κατασκευάζονται σχεδόν ἀποκλειστικά ἀπό ὁλοκληρωμένα κυκλώματα. Π.χ. τό ὁλοκληρωμένο κύκλωμα SN7414. Ὅπως φαίνεται ἡ ἔξοδος τοῦ κυκλώματος αὐτοῦ εἶναι ἀντεστραμμένη, δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου του εἶναι «Ο» ὅταν ἡ τάση εἰσόδου εἶναι μεγαλύτερη ἀπό E_1 καί εἶναι «1» ὅταν ἡ τάση εἰσόδου του εἶναι E_2.

Στό σχῆμα 6.6γ(α) παριστάνεται τό σύμβολο τοῦ κυκλώματος σκανδάλης Schmitt. Στά σχήματα 6.6γ(β) καί 6.6γ(γ) παριστάνονται οἱ κυματομορφές εἰσόδου - ἐξόδου τοῦ ὁλοκληρωμένου κυκλώματος SN7414 πού περιέχει ἕξι κυκλώματα σκανδάλης Schmitt.



Σχ. 6.6γ.
Κύκλωμα σκανδάλης Schmitt μέ ὁλοκληρωμένα κυκλώματα. α) Σύμβολο. β) Κυματομορφές εἰσόδου καί ἐξόδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΚΑΤΑΧΩΡΗΤΕΣ — ΑΠΑΡΙΘΜΗΤΕΣ

7.1 Γενικά.

Στό προηγούμενο κεφάλαιο ἐξετάσαμε τούς πολυδονητές καί τούς διακρίναμε σέ:

— Πολυδονητές δύο σταθερῶν καταστάσεων (ἤ Φλίπ - Φλόπ).
— Πολυδονητές μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως καί
— πολυδονητές ἀσταθεῖς ἤ ἐλεύθερης ταλαντώσεως.

Καί οἱ τρεῖς τύποι τῶν πολυδονητῶν χρησιμοποιοῦνται στά κυκλώματα πού συγκροτοῦν ἕναν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή. Συγκεκριμένα: οἱ πολυδονητές δύο σταθερῶν καταστάσεων χρησιμοποιοῦνται στά κυκλώματα πού ἀποθηκεύουν πληροφορίες (καταχωρητές). Οἱ πολυδονητές μιᾶς σταθερῆς καταστάσεως χρησιμοποιοῦνται γιά τήν παραγωγή σημάτων ἤ μορφοποίηση σημάτων καί οἱ ἀσταθεῖς ἤ ἐλεύθερης ταλαντώσεως πολυδονητές χρησιμοποιοῦνται γιά τήν παραγωγή σημάτων χρονισμοῦ τά ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα γιά τή λειτουργία ὅλων σχεδόν τῶν κυκλωμάτων πού συγκροτοῦν ἕναν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσομε διάφορους τύπους καταχωρητῶν.

7.2 Καταχωρητές (Registers).

Ὅταν θέλομε νά ἀποθηκεύσομε ἕνα δυαδικό ψηφίο (bit) μποροῦμε νά χρησιμοποιήσομε τό δικατάστατο στοιχεῖο Φλίπ - Φλόπ. Ὅταν θέλομε νά ἀποθηκεύσομε πληροφορία πού περιλαμβάνει περισσότερα ἀπό ἕνα δυαδικά ψηφία χρειαζόμαστε τόσα Φλίπ - Φλόπ ὅσα εἶναι καί τά δυαδικά ψηφία τῆς πληροφορίας. Τό σύνολο τῶν Φλίπ - Φλόπ πού χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ἀποθήκευση τῆς πληροφορίας αὐτῆς λέμε ὅτι ἀποτελεῖ ἕναν «καταχωρητή». Τό πλῆθος τῶν Φλίπ - Φλόπ ποῦ περιλαμβάνει ἕνα καταχωρητής, δηλαδή τό πλῆθος τῶν δυαδικῶν ψηφίων ποῦ μπορεῖ νά ἀποθηκεύσει λέγεται μῆκος τοῦ καταχωρητῆ. Ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής ἔχει πάντοτε μεγάλο πλῆθος ἀπό καταχωρητές, τῶν ὁποίων τό μῆκος εἶναι συνήθως ἴσο μέ τό μῆκος (πλῆθος δυαδικῶν ψηφίων) τῆς λέξεως τοῦ ὑπολογιστῆ.

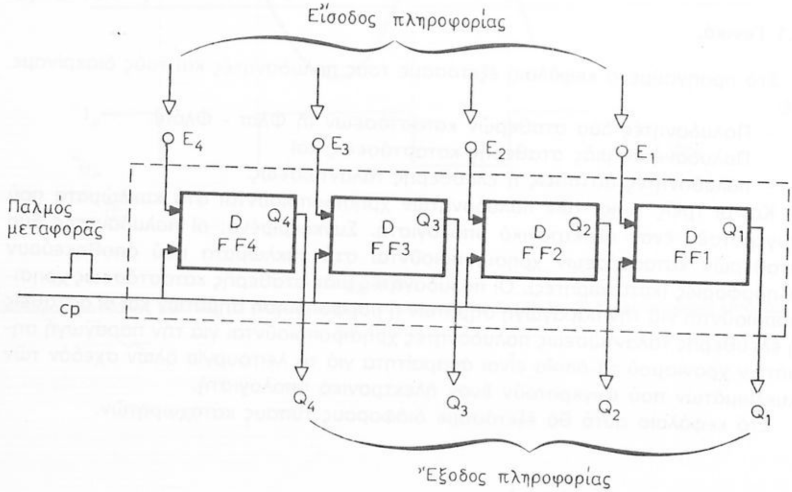
Τούς καταχωρητές τούς διακρίνομε συνήθως στίς ἑξῆς κατηγορίες:

7.2.1 Στατικός καταχωρητής.

Ὁ στατικός καταχωρητής εἶναι ἕνας καταχωρητής στόν ὁποῖο ἀποθηκεύομε μία πληροφορία τήν ὁποία μποροῦμε νά τήν πάρομε ἀργότερα.

Στό σχῆμα 7.2α ἀπεικονίζεται ἕνας στατικός καταχωρητής ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό Φλίπ - Φλόπ τύπου D. Στή συγκεκριμένη περίπτωση ὁ καταχωρητής ἀποτελεῖται ἀπό 4 Φλίπ - Φλόπ, δηλαδή ἔχει μῆκος 4.

Ἡ πληροφορία πού θέλομε νά ἀποθηκεύσομε 4 Bit στήν προκειμένη περίπτωση, εφαρμόζεται στήν εἴσοδο τοῦ καταχωρητῆ, δηλαδή στά E_1, E_2, E_3, E_4 ἀντιστοίχως. Ὅπως ἤδη γνωρίζομε ἀπό τή λειτουργία τοῦ D Flip - Flop (παράγρ. 6.2) ἡ πληροφορία ποῦ ἐφαρμόσαμε στά E_1, E_2, E_3, E_4 θά ἐμφανισθεῖ στά Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ὅταν ἐφαρμοσθεῖ ὁ ὡρολογιακός παλμός CP. Ὁ παλμός αὐτός λέγεται στήν περίπτωσή μας «παλμός μεταφορᾶς», γιατί μεταφέρει τήν κατάσταση τῆς εἰσόδου κάθε Φλίπ - Φλόπ τοῦ καταχωρητῆ στήν ἀντίστοιχη ἔξοδο.

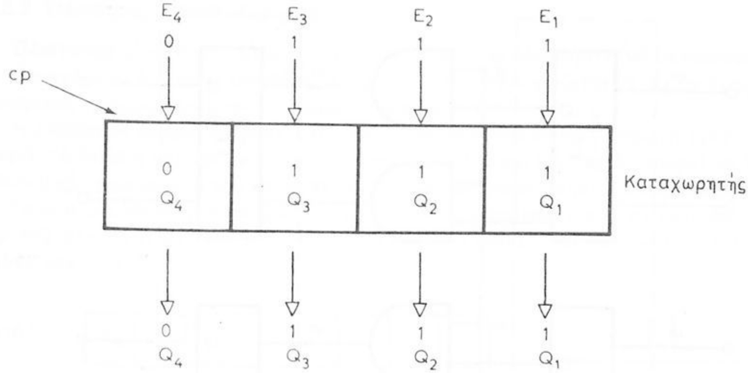


Σχ. 7.2α.
Στατικός καταχωρητής 4 Bit.

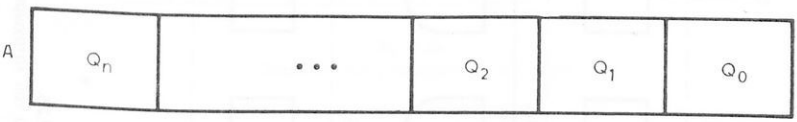
Ἄν ὑποθέσομε ὅτι στήν εἴσοδο τοῦ καταχωρητῆ ἐφαρμόζεται ἡ πληροφορία 0111, δηλαδή $E_4 = 0$, $E_3 = 1$, $E_2 = 1$ καί $E_1 = 1$, τότε τό περιεχόμενο τοῦ καταχωρητῆ μετά τήν ἐφαρμογή τῶν παλμῶν μεταφορᾶς θά εἶναι 0111, δηλαδή $Q_4 = 0$, $Q_3 = 1$, $Q_2 = 1$, $Q_1 = 1$. Τοῦτο φαίνεται παραστατικά στό διάγραμμα τοῦ σχήματος 7.2β.

Γιά νά ὀνομάσομε τούς καταχωρητές, χρησιμοποιοῦμε γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἤ λατινικοῦ ἀλφαβήτου, π.χ. A, B, Γ, κλπ. ἤ A, B, C, κλπ. Συμβολικά ἕνας καταχωρητής παριστάνεται μέ μία σειρά τετραγώνων ἤ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων. Π.χ. ἕνας καταχωρητής A πού μπορεῖ νά ἀποθηκεύσει μία πληροφορία n δυαδικῶν ψηφίων παριστάνεται συμβολικά ὅπως στό διάγραμμα τοῦ σχήματος 7.2γ.

Ἐπίσης χρησιμοποιοῦμε τήν ἔκφραση ὅτι τό περιεχόμενο τοῦ καταχωρητῆ A εἶναι $a_{n-1} \dots a_2\ a_1\ a_0$ ὅταν στό πρῶτο ἀπό δεξιά (a_0 — λιγότερο σημαντικό ψηφίο)



Σχ. 7.2β.
Ἀποθήκευση τῆς πληροφορίας 0111 στόν καταχωρητή.



Σχ. 7.2γ.
Συμβολικό διάγραμμα καταχωρητῆ n Bit.

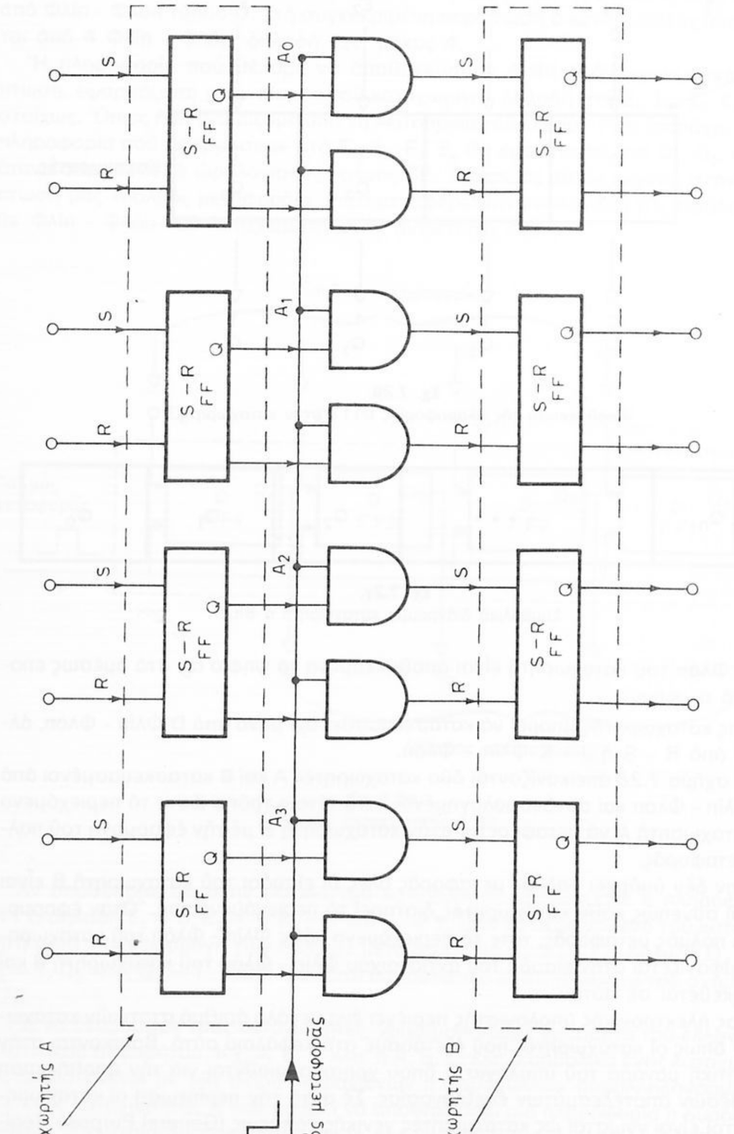
Φλίπ - Φλόπ τοῦ καταχωρητῆ εἶναι ἀποθηκευμένο τό ψηφίο α_0, στό ἀμέσως επομενο τό α_1 κ.ο.κ.

Ἕνας καταχωρητής μπορεῖ νά κατασκευασθεῖ ὄχι μόνο ἀπό D Φλίπ - Φλόπ, ἀλλά καί ἀπό R - S ἤ J - K Φλίπ - Φλόπ.

Στό σχῆμα 7.2δ ἀπεικονίζονται δύο καταχωρητές A καί B κατασκευασμένοι ἀπό R-S Φλίπ - Φλόπ καί συνδεσμολογημένοι κατά τέτοιο τρόπο ὥστε τό περιεχόμενο τοῦ καταχωρητῆ A νά μεταφέρεται στόν καταχωρητή B μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ παλμοῦ μεταφορᾶς.

Ὅταν δέν ὑπάρχει παλμός μεταφορᾶς ὅλες οἱ εἴσοδοι τοῦ καταχωρητῆ B εἶναι «0» καί συνεπῶς κάθε καταχωρητής διατηρεῖ τό περιεχόμενό του. Ὅταν ἐφαρμοσθεῖ ὁ παλμός μεταφορᾶς, τότε τό περιεχόμενο κάθε Φλίπ - Φλόπ τοῦ καταχωρητῆ A ἐμφανίζεται στήν εἴσοδο τοῦ ἀντίστοιχου Φλίπ - Φλόπ τοῦ καταχωρητῆ B καί ἀποθηκεύεται σέ αὐτόν.

Ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής περιέχει ἕνα μεγάλο ἀριθμό στατικῶν καταχωρητῶν ὅπως οἱ καταχωρητές πού ἐξετάσαμε στό κεφάλαιο αὐτό. Βρίσκονται στήν ἀριθμητική μονάδα τοῦ ὑπολογιστῆ ὅπου χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἀποθήκευση ἐνδιαμέσων ἀποτελεσμάτων ἐπεξεργασίας. Σέ αὐτή τήν περίπτωση οἱ καταχωρητές αὐτοί εἶναι γνωστοί ὡς καταχωρητές γενικῆς χρήσεως (General Purpose Registers). Στούς νεώτερους ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ὁλόκληρη ἡ μνήμη τους ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα σύνολο στατικῶν καταχωρητῶν (ὑπολογιστές μέ ἡμιαγωγική μνήμη — Κεφάλαιο 8).



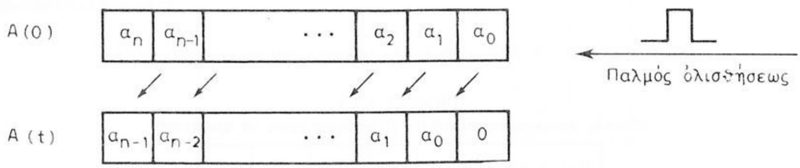
Σχ. 7.2δ.
Μεταφορά τοῦ περιεχομένου τοῦ καταχωρητῆ Α στό Β.

7.2.2 Ὀλισθητής (Shift Register).

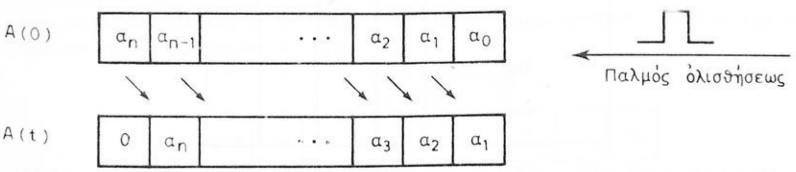
Ὀλισθητής εἶναι ἕνας καταχωρητής πού μπορεῖ νά ὀλισθήσει (νά μετακινήσει) τό περιεχόμενό του κατά μία θέση, κάθε φορά πού ἐφαρμόζεται σέ αὐτόν ἕνας ἐξωτερικός παλμός τόν ὁποῖο ὀνομάζομε παλμό ὀλισθήσεως.

Ἡ ὀλίσθηση μπορεῖ νά γίνει ἀνάλογα μέ τήν κατασκευή του, πρός τά ἀριστερά ἤ πρός τά δεξιά ἤ καί πρός τίς δύο κατευθύνσεις. Ὅταν ὁ ὀλισθητής μπορεῖ νά ὀλισθαίνει τό περιεχόμενό του καί πρός τίς δύο κατευθύνσεις λέγεται «ἀμφίδρομος».

Ὅταν ἡ ὀλίσθηση γίνεται πρός τά ἀριστερά, τό τελευταῖο πρός τά ἀριστερά ψηφίο τοῦ ὀλισθητῆ χάνεται ἐνῶ τό πρῶτο πρός τά δεξιά ψηφίο ἀντικαθίσταται μέ μηδέν (σχ. 7.2ε).



Σχ. 7.2ε.
Ὀλίσθηση πρός τά ἀριστερά μία θέση.

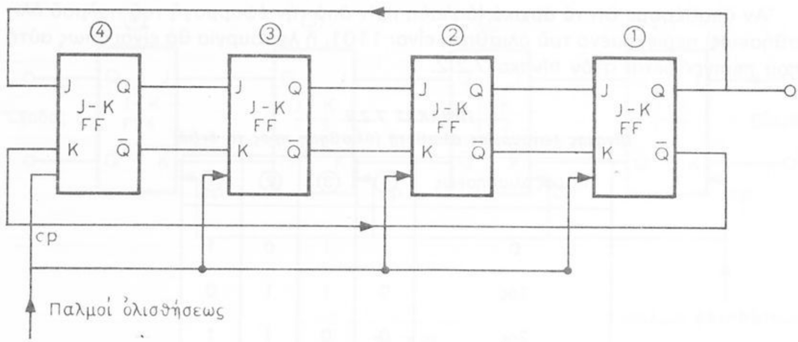


Σχ. 7.2στ.
Ὀλίσθηση πρός τά δεξιά μιά θέση.

Ὅταν ἡ ὀλίσθηση γίνεται πρός τά δεξιά, τό τελευταῖο πρός τά δεξιά ψηφίο τοῦ ὀλισθητῆ χάνεται ἐνῶ τό τελευταῖο πρός τά ἀριστερά ψηφίο ἀντικαθίσταται μέ 0 (σχ. 7.2στ).

Ἕνας τύπος ὀλισθητῆ κατασκευασμένος ἀπό J - K Φλίπ - Φλόπ ἀπεικονίζεται στό σχῆμα 7.2ζ.

Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 7.2ζ στίς εἰσόδους τοῦ FF1 Φλίπ-Φλόπ ἐφαρμόζομε J = 0 καί K = 1. Εἶναι φανερό ὅτι μέ τόν πρῶτο παλμό ὀλισθήσεως τό περιεχόμενο τοῦ κάθε Φλίπ - Φλόπ θά μεταφερθεῖ στό διπλανό του, ἐνῶ τό περιεχόμενο τοῦ FF1 θά γίνει «0» καί τό περιεχόμενο τοῦ FF4 θά χαθεῖ. Προφανῶς μετά τήν ἐφαρμογή 4 παλμῶν ὀλισθήσεως τό περιεχόμενο ὅλων τῶν Φλίπ - Φλόπ θά γίνει 0. Στόν πίνακα 7.2.1 δίνονται τά διαδοχικά στάδια ὀλισθήσεως τοῦ ἀριθμοῦ 1101 πού ὑποθέτομε ὅτι ὑπῆρχε ἀρχικά στόν καταχωρητή.



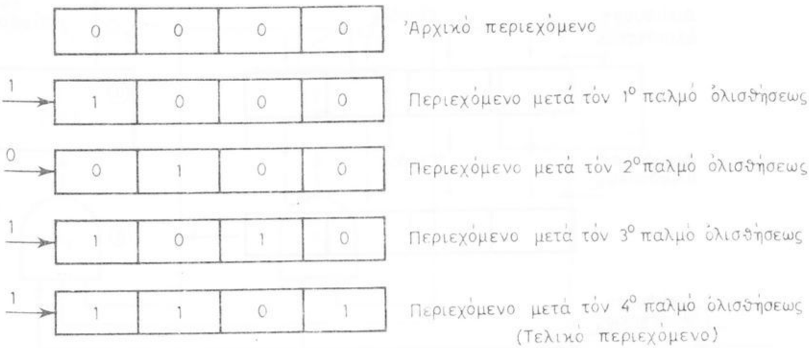
Σχ. 7.2ι.
Κυκλικός όλισθητής (όλίσθηση πρός τά δεξιά καί κυκλική).

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2.3.
Πίνακας λειτουργίας κυκλικοῦ όλισθητῆ

Παλμοί όλισθήσεως	④	③	②	①
0	1	1	0	1
1ος	1	1	1	0
2ος	0	1	1	1
3ος	1	0	1	1
4ος	1	1	0	1

Εἶναι φανερό ὅτι μετά τόν τέταρτο παλμό, τό περιεχόμενο τοῦ όλισθητῆ εἶναι τό ἴδιο μέ τό ἀρχικό.

Τό ἀρχικό περιεχόμενο ἑνός όλισθητῆ μπορεῖ νά τοποθετηθεῖ στά Φλίπ - Φλόπ ἀπό τά όποῖα ἀποτελεῖται ὅπως στούς στατικούς καταχωρητές, δηλαδή ταυτόχρονη εἴσοδος σέ ὅλα τά Φλίπ - Φλόπ. Σέ αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι ἔχομε παράλληλη εἴσοδο τῆς πληροφορίας (Parallel Input). Μπορεῖ ἐπίσης νά τοποθετηθεῖ μέ διαδοχικές όλισθήσεις, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 7.2ια ὅπου δίνεται ἡ εἴσοδος πού ἐφαρμόζομε στό Φλίπ - Φλόπ ἀνώτερης τάξεως καί τό ἀντίστοιχο κάθε φορά (γιά κάθε όλίσθηση) περιεχόμενο τοῦ όλισθητῆ γιά τήν εἰσαγωγή τοῦ ἀριθμοῦ 1011. Εἶναι φανερό ὅτι τό τελικό περιεχόμενο τοῦ όλισθητῆ θά εἶναι 1011, ἀνεξάρτητα ἀπό τό ἀρχικό του περιεχόμενο. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἔχομε διαδοχική εἴσοδο (Serial Input) τῆς πληροφορίας στόν όλισθητή.



Σχ. 7.2ια.
Διαδοχική εἰσαγωγή πληροφορίας στόν ὀλισθητή.

Τό περιεχόμενο ἑνός ὀλισθητῆ τό παίρνομε μέ τούς ἑξῆς τρόπους:
— Ταυτόχρονη λήψη τοῦ περιεχομένου ὅλων τῶν Φλίπ-Φλόπ τοῦ ὀλισθητῆ. Σέ αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι ἔχομε παράλληλη ἔξοδο (Parallel Output).
— Λήψη τοῦ περιεχομένου διαδοχικά ἀπό ἕνα Φλίπ - Φλόπ τοῦ ὀλισθητῆ (συνήθως τοῦ τελευταίου). Σέ αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι ἔχομε διαδοχική ἔξοδο (Serial Output).

Εἶναι φανερό ὅτι σέ ἕνα ὀλισθητή μποροῦμε νά ἔχομε:
— Παράλληλη εἴσοδο — παράλληλη ἔξοδο.
— Παράλληλη εἴσοδο — διαδοχική ἔξοδο.
— Διαδοχική εἴσοδο — παράλληλη ἔξοδο.
— Διαδοχική εἴσοδο — διαδοχική ἔξοδο.

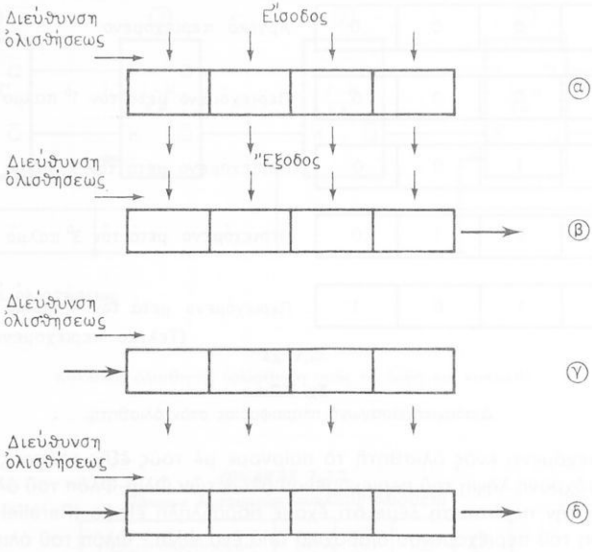
Ὀλισθητές μέ παράλληλη εἴσοδο = παράλληλη ἔξοδο χρησιμοποιοῦνται στήν ἀριθμητική μονάδα τῶν ὑπολογιστῶν (ὀλίσθηση ἑνός δυαδικοῦ ἀριθμοῦ πρός τά δεξιά ἰσοδυναμεῖ σέ διαίρεση διά 2, ἐνῶ ὀλίσθηση πρός τά ἀριστερά ἰσοδυναμεῖ μέ πολλαπλασιασμό ἐπί 2).

Ὀλισθητές μέ παράλληλη εἴσοδο — διαδοχική ἔξοδο χρησιμοποιοῦνται ὅταν θέλομε νά διαβιβάσομε μία πληροφορία πολλῶν διαδοχικῶν ψηφίων ἀπό ἕνα καλώδιο, π.χ. ἐκπομπή στήν τηλετυπία.

Ὀλισθητές μέ διαδοχική εἴσοδο — παράλληλη ἔξοδο χρησιμοποιοῦνται γιά τή λήψη πληροφορίας πολλῶν διαδοχικῶν ψηφίων πού διαβιβάσθηκε μέσα ἀπό ἕνα καλώδιο, π.χ. λήψη στήν τηλετυπία.

Ὀλισθητές μέ διαδοχική εἴσοδο — διαδοχική ἔξοδο χρησιμοποιοῦνται γιά τήν εἰσαγωγή καθυστερήσεως σέ μετάδοση μιᾶς πληροφορίας ἤ κυματομορφῆς στίς μονάδες ἐλέγχου τῶν ὑπολογιστῶν καί σέ ἄλλες περιπτώσεις. Τήν εἰσαγωγή καθυστερήσεως τή βλέπομε ἀπό τό σχῆμα 7.2ια ὅπου εἶναι φανερό ὅτι τό περιεχόμενο τοῦ τελευταίου Φλίπ - Φλόπ τοῦ ὀλισθητῆ γίνεται ἴδιο μέ τό περιεχόμενο τοῦ πρώτου μετά ἀπό 4 παλμούς ὀλισθήσεως.

Στό σχῆμα 7.2ιβ δίνονται τά σύμβολα τοῦ ὀλισθητῆ γιά τίς διάφορες περιπτώσεις πού ἐξετάσαμε.



Σχ. 7.2ιβ.
Συμβολα ὀλισθητῶν. α) Μέ παράλληλη εἴσοδο - παράλληλη ἔξοδο. β) Παράλληλη εἴσοδο - διαδοχική ἔξοδο. γ) Διαδοχική εἴσοδο - παράλληλη ἔξοδο. δ) Διαδοχική εἴσοδο - διαδοχική ἔξοδο.

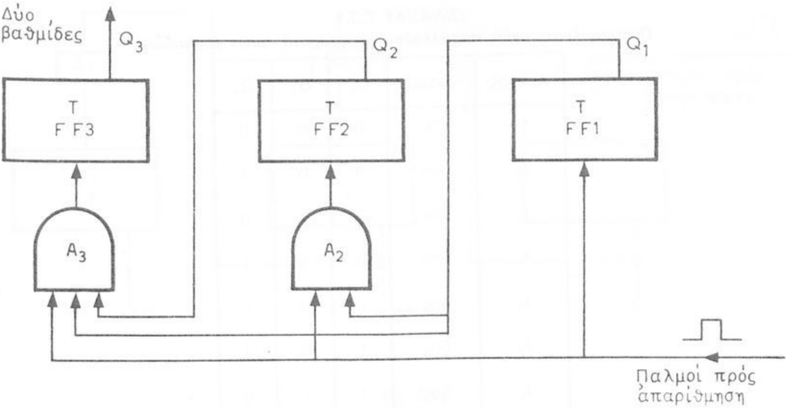
7.3 Ἀπαριθμητές (Counters).

Ἀπαριθμητής εἶναι ἕνας καταχωρητής ὁ ὁποῖος μπορεῖ νά μεταβάλλει τό περιεχόμενό του κατά μία μονάδα, κάθε φορά πού στήν εἴσοδό του δέχεται ἕνα κατάλληλο παλμό. Ὅταν ὁ ἀπαριθμητής αὐξάνει τό περιεχόμενό του, λέμε ὅτι ἀπαριθμεῖ κατά τήν ὀρθή φορά ἤ ὅτι ἀπαριθμεῖ πρός τά πάνω (Up Counter). Ὅταν ἐλαττώνει τό περιεχόμενό του, λέμε ὅτι ἀπαριθμεῖ κατά τήν ἀνάστροφη φορά ἤ ὅτι ἀπαριθμεῖ πρός τά κάτω (Down Counter). Ὅταν ὁ ἀπαριθμητής μπορεῖ νά μετράει καί πρός τά πάνω καί πρός τά κάτω (μέ ἐξωτερική ἐπιλογή) λέγεται «ἀμφίδρομος ἀπαριθμητής» (Up-Down Counter). Εἶναι ἐπίσης δυνατόν ἕνας ἀπαριθμητής κατά τή διάρκεια τῆς ἀπαριθμήσεως τό περιεχόμενό του νά μή μεταβάλλεται κατά μία μονάδα, ἀλλά κατά ἕνα μεγαλύτερο ἀριθμό. Ὁ ἀπαριθμητής αὐτός λέγεται «ἀπαριθμητής ἅλματος».

Εἶναι δυνατόν ἕνας ἀπαριθμητής νά μετράει στό δυαδικό σύστημα, ὁπότε ὁ ἀπαριθμητής λέγεται «δυαδικός», εἶναι ὅμως δυνατόν νά μετράει στό δεκαδικό σύστημα μέ κωδικοποίηση BCD, ὁπότε ὁ ἀπαριθμητής λέγεται «δεκαδικός ἀπαριθμητής» ἤ «ἀπαριθμητής BCD».

7.3.1 Παράλληλος δυαδικός ἀπαριθμητής.

Στό σχῆμα 7.3α παριστάνεται ἕνας ἀπαριθμητής τριῶν βαθμίδων. Ἡ κάθε βαθμίδα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα Τ Φλίπ - Φλόπ. Οἱ παλμοί πρός ἀπαρίθμηση ἐφαρμόζον-

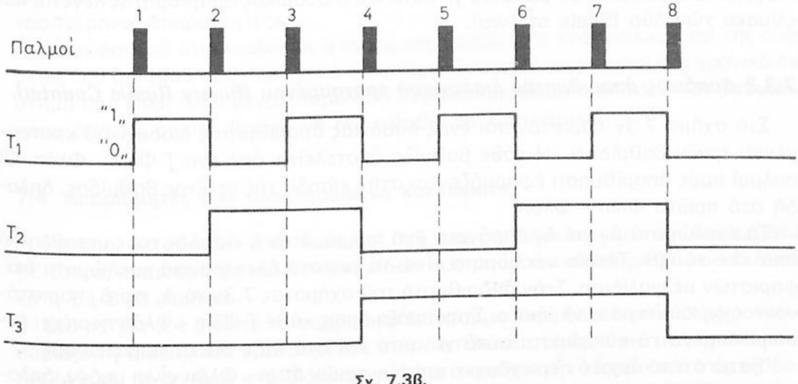


Σχ. 7.3α.
Παράλληλος δυαδικός ἀπαριθμητής (σύγχρονος).

ται ἀπ' εὐθείας στήν εἴσοδο τῆς πρώτης βαθμίδας, δηλαδή στό πρῶτο Φλίπ - Φλόπ καί μέσω τῶν ἀντιστοίχων πυλῶν A_2, A_3 στίς ἄλλες δύο βαθμίδες.

Ἔστω ὅτι τό ἀρχικό περιεχόμενο καί τῶν τριῶν Φλίπ - Φλόπ εἶναι «0», δηλαδή $Q_1 = Q_2 = Q_3 =$ «0». Κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ πρώτου παλμοῦ στήν εἴσοδό του τό T_1 θά ἀλλάξει κατάσταση καί θά γίνει $T_1 =$ «1» (δηλαδή $Q_1 = 1$), ἐνῶ τά T_2 καί T_3 θά παραμείνουν ὅπως ἔχουν λόγῳ τῆς παρουσίας τῶν πυλῶν ΚΑΙ, A_2 καί A_3 τῶν ὁποίων ἡ μιά εἴσοδός τους εἶναι «0». Κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ δεύτερου παλμοῦ, τά T_1 καί T_2 θά ἀλλάξουν κατάσταση, δηλαδή θά γίνουν $T_1 =$ «0» καί $T_2 =$ «1», ἐνῶ τό T_3 θά παραμείνει στήν ἀρχική του κατάσταση, δηλαδή $T_3 =$ «0» (λόγω τῆς πύλης ΚΑΙ A_3).

Συνεχίζοντας τήν ἐφαρμογή τῶν παλμῶν, θά πάρομε διαδοχικά ὅλους τούς τριψήφιους δυαδικούς ἀριθμούς ὅπως φαίνεται στό πίνακα 7.3.1.



Σχ. 7.3β.
Χρονική παράσταση τῆς μεταβολῆς τῶν καταστάσεων τῶν T_1, T_2, T_3 τοῦ ἀπαριθμητῆ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3.1.
Πίνακας λειτουργίας παράλληλου ἀπαριθμητῆ τριῶν βαθμίδων

Χρόνος	Παλμοί	Q_1	Q_2	Q_3
t_0	0	0	0	0
t_1	1ος	0	0	1
t_2	2ος	0	1	0
t_3	3ος	0	1	1
t_4	4ος	1	0	0
t_5	5ος	1	0	1
t_6	6ος	1	1	0
t_7	7ος	1	1	1
t_8	8ος	0	0	0

Ὅταν φθάσομε στόν ἀριθμό 111 καί ἐφαρμοσθεῖ ὁ ἑπόμενος παλμός καί τά τρία Φλίπ - Φλόπ θά ἀλλάξουν κατάσταση, δηλαδή θά πάρομε τόν ἀριθμό 000.

Στόν παραπάνω ἀπαριθμητή ὁ παλμός εἰσόδου (παλμός πρός ἀπαρίθμηση) ἐφαρμόζεται σέ ὅλες τίς βαθμίδες του καί γι' αὐτό ὀνομάζεται «παράλληλος ἀπαριθμητής». Ὁ ἀπαριθμητής αὐτός ὀνομάζεται καί «σύγχρονος ἀπαριθμητής».

Ἡ χρονική μεταβολή τῶν καταστάσεων T_1, T_2, T_3 τῶν Φλίπ - Φλόπ τοῦ ἀπαριθμητῆ δίνεται στόν πίνακα 7.3.1 καί στό διάγραμμα τοῦ σχήματος 7.3β.

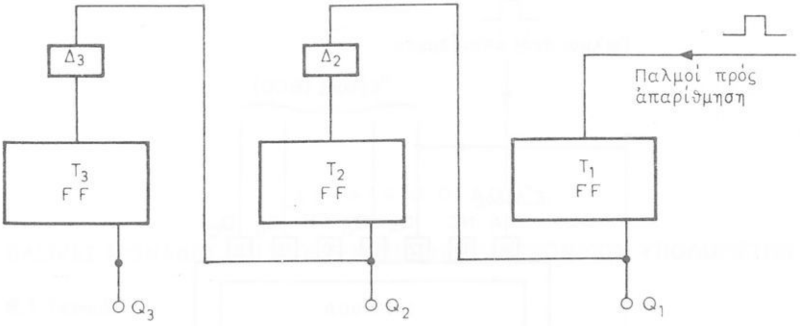
Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τό σχῆμα 7.3β ἡ ἔξοδος κάθε Φλίπ - Φλόπ εἶναι μιά κυματομορφή «τετραγωνικῶν παλμῶν». Ἡ συχνότητα τῶν παλμῶν αὐτῶν ὑποδιπλασιάζεται ἀπό βαθμίδα σέ βαθμίδα γι' αὐτό καί ὁ δυαδικός ἀπαριθμητής λέγεται καί κλίμακα τῶν δύο (Scale of Two).

7.3.2 Δυαδικός ἀπαριθμητής διαδοχικοῦ κρατουμένου (Binary Ripple Counter).

Στό σχῆμα 7.3γ παριστάνεται ἕνας δυαδικός ἀπαριθμητής διαδοχικοῦ κρατουμένου τριῶν βαθμίδων. Ἡ κάθε βαθμίδα ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα T Φλίπ - Φλόπ. Οἱ παλμοί πρός ἀπαρίθμηση ἐφαρμόζονται στήν εἴσοδο τῆς πρώτης βαθμίδας, δηλαδή στό πρῶτο Φλίπ - Φλόπ.

Τά κυκλώματα Δ_2 καί Δ_3 παράγουν ἕνα παλμό, ὅταν ἡ εἴσοδός τους μεταβληθεῖ ἀπό «1» σέ «0». Τέτοια κυκλώματα εἶναι τά γνωστά ἠλεκτρονικά κυκλώματα διαφοριστῶν μέ ψαλίδιση. Στόν ἀπαριθμητή τοῦ σχήματος 7.3γ τά Δ_2 καί Δ_3 παριστάνονται ὡς ἰδιαίτερα κυκλώματα. Στήν πράξη ὅμως κάθε T Φλίπ - Φλόπ περιέχει ἐνσωματωμένα τά κυκλώματα αὐτά γι' αὐτό καί στό ἑξῆς θά τά παραλείπομε.

Ἔστω ὅτι τό ἀρχικό περιεχόμενο καί τῶν τριῶν Φλίπ - Φλόπ εἶναι μηδέν, δηλαδή $Q_1 = Q_2 = Q_3 =$ «0». Κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ πρώτου παλμοῦ, τό T_1 θά ἀλλάξει



Σχ. 7.3γ.
Δυαδικός άπαριθμητής διαδοχικοῦ κρατουμένου.

κατάσταση ἀπό 0 σέ 1 ὁπότε τά κυκλώματα $Δ_2$ καί $Δ_3$ δέ θά δώσουν παλμούς καί τά Φλίπ - Φλόπ T_2 καί T_3 θά παραμείνουν ὅπως ἔχουν.

Κατά τήν ἐφαρμογή τοῦ δεύτερου παλμοῦ τό T_1 θά ἀλλάξει κατάσταση ἀπό 1 σέ 0, τό $Δ_2$ θά δώσει παλμό ὁ ὁποῖος θά μεταβάλλει τήν κατάσταση τοῦ T_2 ἀπό 0 σέ 1 καί τό T_3 θά παραμείνει ὅπως ἔχει, δηλαδή 0. Συνεχίζοντας κατά τόν τρόπο αὐτό θά λάβομε διαδοχικά ὅλους τούς τριψήφιους δυαδικούς ἀριθμούς. Ὅταν λάβομε τόν ἀριθμό 111, ἡ ἐφαρμογή τοῦ ἑπόμενου παλμοῦ θά ὁδηγήσει τό T_1 ἀπό τήν κατάσταση 1 στήν κατάσταση 0, τό $Δ_2$ θά δώσει παλμό πού θά ὁδηγήσει τό T_2 ἀπό 1 σέ 0 καί τέλος τό $Δ_3$ θά ὁδηγήσει τό T_3 στήν κατάσταση 0.

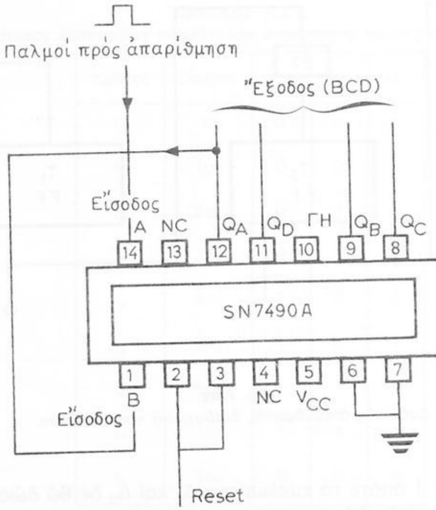
Παρατηροῦμε ὅτι τό κρατούμενο πού προέκυψε μετά τόν τελευταῖο παλμό δημιούργησε νέο κρατούμενο στή δεύτερη βαθμίδα τό ὁποῖο διήγειρε τήν τρίτη βαθμίδα. Γιά τό λόγο αὐτό ἀπαριθμητές ὅπως τοῦ σχήματος 7.3γ λέγονται «ἀπαριθμητές διαδοχικοῦ κρατουμένου». Οἱ ἀπαριθμητές τοῦ τύπου αὐτοῦ λέγονται καί «ἀσύγχρονοι ἀπαριθμητές».

Εἶναι φανερό ὅτι μεταξύ τῆς στιγμῆς τῆς ἐφαρμογῆς ἑνός παλμοῦ καί τῆς αὐξήσεως τοῦ ἀριθμοῦ πού περιέχει ὁ ἀπαριθμητής κατά 1 μεσολαβεῖ ἕνα χρονικό διάστημα πού εἶναι τόσο μεγαλύτερο ὅσο μεγαλύτερο εἶναι τό πλῆθος τῶν βαθμίδων μέσα ἀπό τίς ὁποῖες πρέπει νά προωθηθεῖ τό κρατούμενο.

7.4 Ἀπαριθμητές ἀπό ὁλοκληρωμένα κυκλώματα.

Σήμερα διατίθενται στό ἐμπόριο ὑπό μορφή ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων (IC Chips) ἀπαριθμητές πολλῶν βαθμίδων πού μποροῦν νά ἀπαριθμοῦν στό δυαδικό ἤ σέ BCD κώδικα.

Στό σχῆμα 7.4 δίνεται τό συμβολικό διάγραμμα ἑνός δεκαδικοῦ ἀσύγχρονου ἀπαριθμητῆ διαδοχικοῦ κρατουμένου πού διατίθεται στό ἐμπόριο μέ τήν ὀνομασία SN7490A. Οἱ ἀριθμοί στό διάγραμμα ἀντιστοιχοῦν στήν εἴσοδο καί στίς ἐξόδους (ποδαράκια) τοῦ ἀπαριθμητῆ αὐτοῦ.



Παλμοί πρός άπαρίθμηση
Έξοδος (BCD)
Είσοδος
A
NC
Q_A
Q_D
ΓΗ
Q_B
Q_C
14
13
12
11
10
9
8
SN7490A
1
2
3
4
5
6
7
B
NC
V_{CC}
Είσοδος
Reset

Σχ. 7.4.

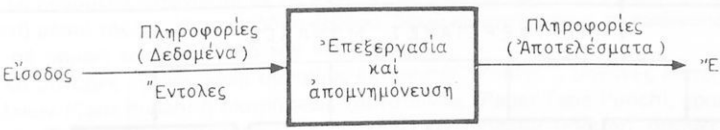
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

8.1 Γενικά.

Ὅπως ἤδη ἔχομε ἀναφέρει στήν εἰσαγωγή, ὁ ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής εἶναι ἕνα σύστημα ἐπεξεργασίας ἀλφαριθμητικῶν δεδομένων. Ἐκτός ἀπό τά δεδομένα αὐτά εἰσάγονται στόν ὑπολογιστή καί οἱ ἐντολές μέ βάση τίς ὁποῖες θά γίνει ἡ ἐπεξεργασία τῶν δεδομένων. Τά ἀποτελέσματα τῆς ἐπεξεργασίας τῶν δεδομένων δίνονται ἀπό τόν ὑπολογιστή μέ ἀλφαριθμητική ἤ ἄλλη (π.χ. γραφική) μορφή. Ἡ ὅλη ἐπεξεργασία μετά τήν εἰσαγωγή τῶν δεδομένων καί τῶν ἐντολῶν στόν ὑπολογιστή γίνεται αὐτόματα. Αὐτό μᾶς λέει ὅτι ὁ ὑπολογιστής ἐκτός ἀπό τήν ἱκανότητα ἐπεξεργασίας (π.χ. ἐκτελέσεως πράξεων) διαθέτει καί τήν ἱκανότητα νά ἀπομνημονεύει τά δεδομένα καί τίς ἐντολές πού εἰσάγονται σ' αὐτόν.

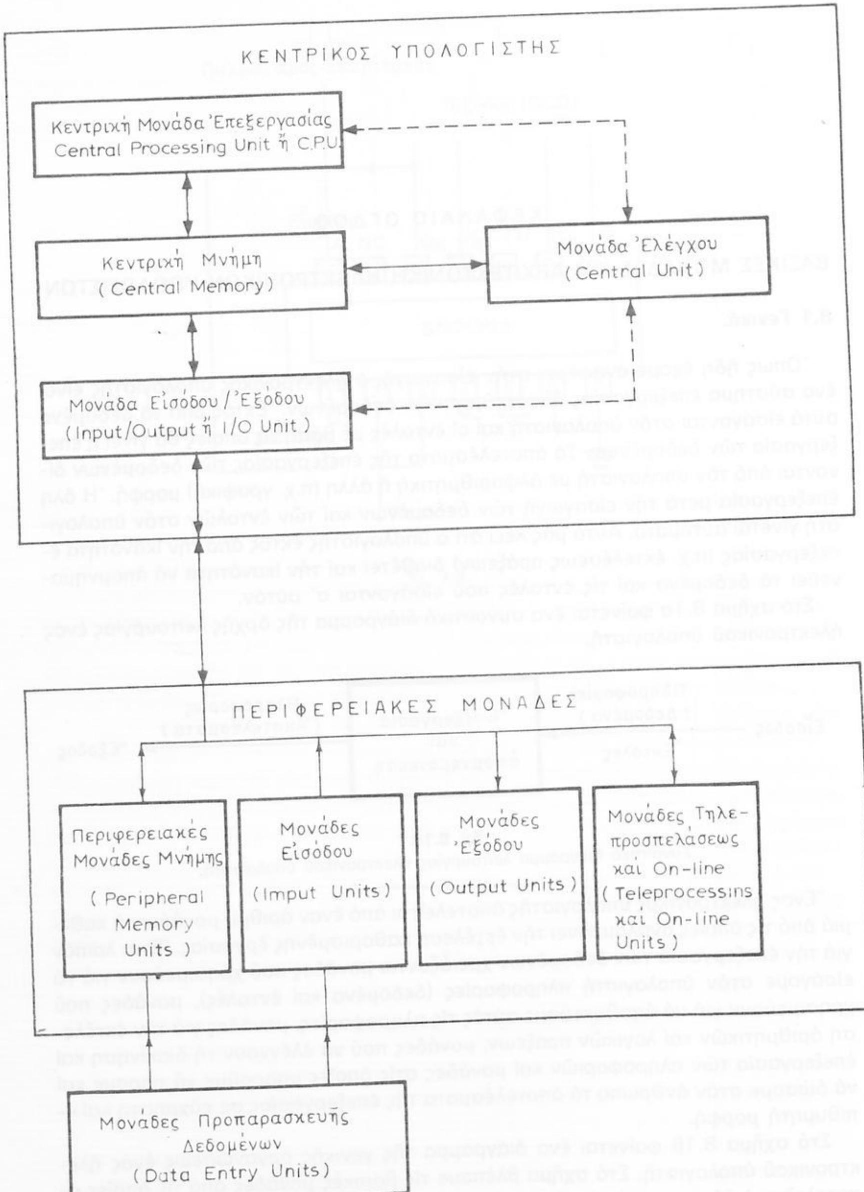
Στό σχῆμα 8.1α φαίνεται ἕνα συνοπτικό διάγραμμα τῆς ἀρχῆς λειτουργίας ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ.



Σχ. 8.1α.
Συνοπτικό διάγραμμα λειτουργίας ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ.

Ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής ἀποτελεῖται ἀπό ἕναν ἀριθμό μονάδων ἡ καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες ἀναλαμβάνει τήν ἐκτέλεση καθορισμένης ἐργασίας. Ἔτσι λοιπόν γιά τήν ἐπεξεργασία τῶν δεδομένων χρειάζονται μονάδες πού χρησιμεύουν γιά νά εἰσάγομε στόν ὑπολογιστή πληροφορίες (δεδομένα καί ἐντολές), μονάδες πού χρησιμεύουν γιά νά ἀποθηκεύομε αὐτές τίς πληροφορίες, μονάδες γιά τήν ἐκτέλεση ἀριθμητικῶν καί λογικῶν πράξεων, μονάδες πού νά ἐλέγχουν τή διακίνηση καί ἐπεξεργασία τῶν πληροφοριῶν καί μονάδες στίς ὁποῖες μποροῦμε νά πάρομε καί νά δώσομε στόν ἄνθρωπο τά ἀποτελέσματα τῆς ἐπεξεργασίας σέ εὔχρηστη καί ἐπιθυμητή μορφή.

Στό σχῆμα 8.1β φαίνεται ἕνα διάγραμμα τῆς γενικῆς ὀργανώσεως ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ. Στό σχῆμα βλέπομε τίς βασικές μονάδες ἀπό τίς ὁποῖες ἀποτελεῖται ὁ ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής καί πῶς αὐτές συνδέονται μεταξύ τους. Οἱ ἁπλές συνεχεῖς γραμμές δείχνουν διακίνηση πληροφοριῶν, ἐνῶ οἱ διακεκομμένες



Σχ. 8.1β.
Γενική ὀργάνωση ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστή.

διακίνηση σημάτων ἐλέγχου. Τά βέλη δείχνουν γενικά τή φορά διακινήσεως τῶν πληροφοριῶν καί τῶν σημάτων ἐλέγχου.

Τά στοιχεῖα πού πρόκειται νά ἐπεξεργασθεῖ ὁ ὑπολογιστής καί οἱ ἐντολές εἰσέρχονται σ' αὐτόν ἀπό τή μονάδα εἰσόδου-ἐξόδου καί καταλήγουν στή μνήμη του. Ἡ ἐπεξεργασία τῶν στοιχείων γίνεται στή μονάδα ἐπεξεργασίας μέ βάση τίς ἐντολές. Οἱ ἐντολές ἀπό τή μνήμη διαβιβάζονται στή μονάδα ἐλέγχου πού ρυθμίζει τή διακίνηση τῶν πληροφοριῶν μέσα στόν ὑπολογιστή καί τή λειτουργία τῶν διαφόρων μονάδων του. Τά ἀποτελέσματα τῆς ἐπεξεργασίας ἀποθηκεύονται στή μνήμη τοῦ ὑπολογιστῆ ἀπ' ὅπου στέλνονται μέσω τῆς μονάδας εἰσόδου - ἐξόδου στήν ἔξοδο ἤ χρησιμοποιοῦνται ὡς ἐνδιάμεσα στοιχεῖα γιά παραπέρα ἐπεξεργασία.

Οἱ περιφερειακές μονάδες μνήμης συμπληρώνουν τήν κεντρική μνήμη τῆς ὁποίας τό κόστος εἶναι ὑψηλό καί ἡ χωρητικότητα περιορισμένη. Οἱ πιό συνήθεις περιφερειακές μονάδες μνήμης εἶναι οἱ μαγνητικοί δίσκοι, μαγνητικές δισκέττιες (μίνι-δίσκοι), μαγνητικές ταινίες, μαγνητικές κασέτες, μαγνητικά τύμπανα κλπ. Τό περιεχόμενο τῶν περιφερειακῶν μονάδων μνήμης μπορεῖ νά εἶναι δεδομένα ἤ ἐντολές ἤ καί τά δύο. Οἱ περιφερειακές μονάδες μνήμης μποροῦν νά ἀποθηκεύουν μεγάλες ποσότητες δεδομένων, π.χ. μερικές δεκάδες ἤ ἑκατοντάδες ἑκατομμύρια λέξεων, ἀλλά εἶναι βραδύτερες ἀπό τήν κεντρική μνήμη.

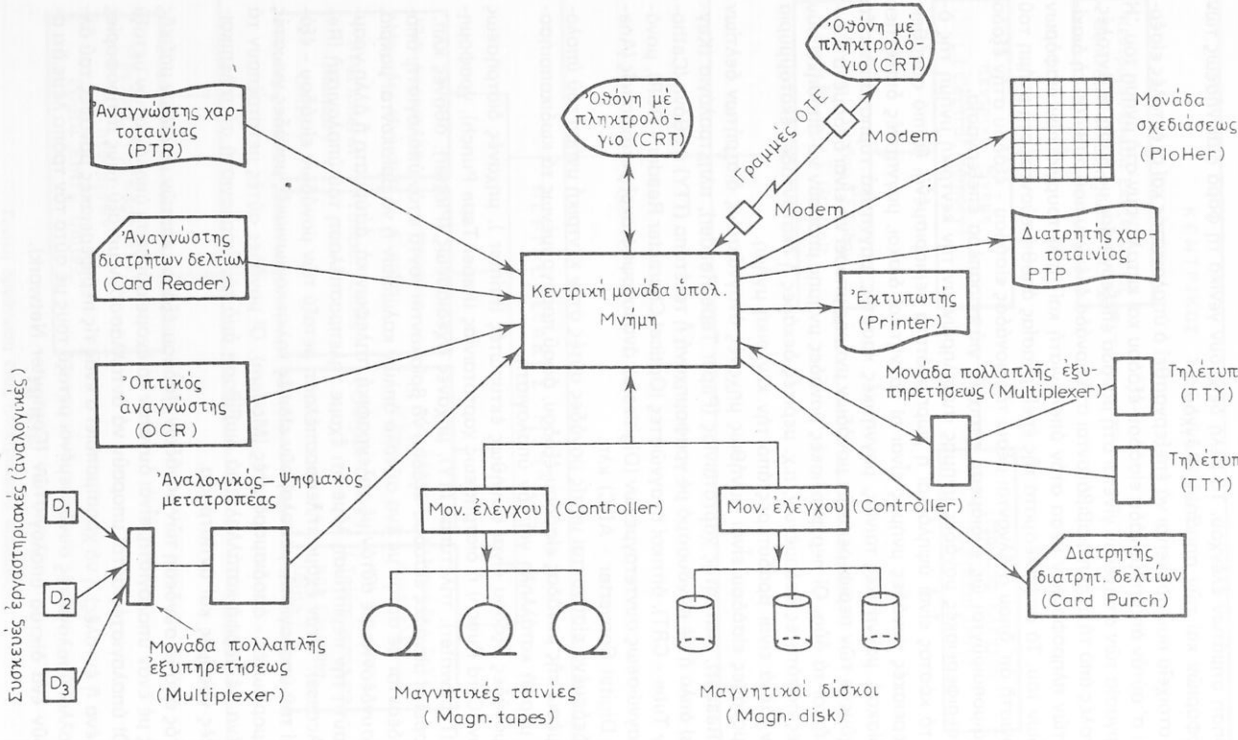
Οἱ μονάδες εἰσόδου εἶναι συνήθως μηχανές ἀναγνώσεως διατρήτων δελτίων (Card Reader), διατρητής χαρτοταινίας (Paper Tape Reader), πληκτρολόγια (Keyboards) ἁπλά ἤ σέ συνδυασμό μέ γραφομηχανή ἤ τελέτυπο (TTY) ἤ ὀθόνη (Cathode Ray Tube - CRT), ὀπτικοί ἀναγνῶστες (Optical Character Reader - OCR), μονάδες ἀναγνώσεως συντεταγμένων (Digitizers), ἀναλογοψηφιακοί μετατροπεῖς (Analog to Digital Converter - ADC) κλπ.

Τά δεδομένα εἰσάγονται μέ τίς μονάδες αὐτές στήν κεντρική μνήμη τοῦ ὑπολογιστῆ μέσω τῆς μονάδας εἰσόδου-ἐξόδου, ἀφοῦ προηγουμένως τά κωδικοποιήσομε σέ μορφή κατάλληλη γιά τόν ὑπολογιστή.

Οἱ μονάδες ἐξόδου εἶναι συνήθως ἐκτυπωτές (Printer), μηχανές διατρήσεως δελτίων (Card Punch) ἤ διατρήσεως χαρτοταινίας (Paper Tape Punch), γραφομηχανές (Typewriter), τηλέτυπα (TTY), μηχανές σχεδιάσεως (Plotter), ὀθόνες κλπ.

Μπορεῖ οἱ μονάδες εἰσόδου-ἐξόδου νά βρίσκονται κοντά στόν ὑπολογιστή, ὁπότε συνδέονται μέ αὐτόν μέ ἕνα σύνολο ἁπλῶν καλωδίων ἤ νά βρίσκονται μακριά, ὁπότε συνδέονται μέ αὐτόν μέ τηλεγραφική, τηλεφωνική, ἀσύρματη ἤ ἄλλη γραμμή. Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι ἔχομε τηλεπροσπέλαση τοῦ ὑπολογιστῆ (Remote Access). Ὅταν ἔχομε τηλεπροσπέλαση μεταξύ τῶν μονάδων εἰσόδου - ἐξόδου καί τοῦ ὑπολογιστῆ, μεσολαβοῦν εἰδικές τηλεπικοινωνιακές μονάδες γνωστές ὡς διαμορφωτές - ἀποδιαμορφωτές (Modem). Οἱ μονάδες αὐτές μετατρέπουν τά δεδομένα σέ μορφή κατάλληλη γιά διαβίβαση ἀπό τόν ὑπολογιστή σέ τηλεπικοινωνιακές γραμμές καί ἀντίστροφα.

Ἐκτός ἀπό τή σύνδεση τῶν μονάδων εἰσόδου-ἐξόδου καί τῶν μονάδων μαζικῆς μνήμης μέ ἕναν ὑπολογιστή, εἶναι δυνατόν νά ἔχομε σύνδεση ὑπολογιστῶν μεταξύ τους. Οἱ ὑπολογιστές αὐτοί μποροῦν νά ἀνταλλάσσουν μεταξύ τους πληροφορίες (δεδομένα ἤ ἐντολές) ἤ νά χρησιμοποιεῖ ὁ ἕνας τίς περιφερειακές μονάδες τοῦ ἄλλου. Πολλοί ὑπολογιστές συνδεδεμένοι μεταξύ τους μέ αὐτό τόν τρόπο λέμε ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα δίκτυο ὑπολογιστῶν (Computer Network).



Σχ. 8.1γ.
Διάγραμμα ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ μέ τίς βασικές του περιφερειακές μονάδες.

Γιά τήν προετοιμασία τῶν δεδομένων γιά εἰσαγωγή τους στόν ὑπολογιστή, χρησιμοποιοῦμε μηχανές προπαρασκευῆς δεδομένων (ἤ προετοιμασίας δεδομένων) ὅπως εἶναι διατρητική μηχανή δελτίων (Card Punch) ἤ διατρητική μηχανή χαρτοταινίας (Paper Tape Punch) ἤ μηχανές ἀπ' εὐθείας ἐγγραφῆς σέ μαγνητικό δίσκο ἤ μαγνητική ταινία (Key to Disk, Key to Tape). Οἱ τελευταῖες εἶναι οἱ πιό διαδομένες σήμερα καί ἐκτοπίζουν συνεχῶς τίς διατρητικές μηχανές. Οἱ μηχανές ἀπ' εὐθείας ἐγγραφῆς μπορεῖ νά εἶναι συνδεδεμένες μέ τόν ὑπολογιστή καί νά χρησιμοποιοῦν ἕναν ἀπό τούς μαγνητικούς δίσκους ἤ μιά ἀπό τίς μαγνητικές ταινίες του.

Στό σχῆμα 8.1γ φαίνεται τό διάγραμμα ἑνός ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ μέ τίς βασικές του περιφερειακές μονάδες.

8.2 Μονάδα κεντρικῆς μνήμης.

8.2.1 Γενικά.

Ἡ κεντρική μνήμη διαθέτει ἕναν ἀριθμό (συνήθως μερικές δεκάδες χιλιάδες) ***θέσεων*** στίς ὁποῖες ἀποθηκεύονται δεδομένα ἤ ἐντολές. Σέ καθεμιά θέση μπορεῖ νά ἀποθηκευθεῖ ἕνας χαρακτήρας ἤ λέξη. Κάθε θέση χαρακτηρίζεται ἀπό ἕναν ἀριθμό πού λέγεται ***διεύθυνση*** τῆς θέσεως. Ὅταν πρόκειται νά εἰσαχθεῖ ἕνας χαρακτήρας ἤ λέξη στή μνήμη, πρέπει νά καθορισθεῖ ἡ διεύθυνση στήν ὁποία θά γραφεῖ. Ἐπίσης ὅταν πρόκειται νά πάρομε ἀπό τή μνήμη (δηλαδή νά διαβάσομε ἀπό τή μνήμη) πρέπει νά καθορίσομε τή διεύθυνση στήν ὁποία βρίσκεται τό δεδομένο.

Ἡ κεντρική μνήμη ἑνός ὑπολογιστῆ χαρακτηρίζεται μέ βάση:

α) ***Τά φυσικά στοιχεῖα*** στά ὁποῖα ἀποθηκεύονται τά δεδομένα. Τά πιό συνηθισμένα στοιχεῖα εἶναι οἱ μαγνητικοί δακτύλιοι (ἤ πυρῆνες) καί οἱ ἡμιαγωγοί μέ τή μορφή ὁλοκληρωμένων κυκλωμάτων. Τελευταῖα ἔχουν ἀναπτυχθεῖ μνῆμες μαγνητικῶν φυσαλίδων (Magnetic Bubble Memories) καί μνῆμες φορτισμένων στοιχείων (Charge Coupled Devises — CCD).

β) ***Τό χρόνο*** πού ἀπαιτεῖται γιά τήν ἐγγραφή ἤ τήν ἀνάγνωση δεδομένων. Ὁ χρόνος αὐτός ὀνομάζεται κύκλος μνήμης (Memory Cycle) καί εἶναι τῆς τάξεως τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ τοῦ δευτερολέπτου (μsec).

γ) ***Τή χωρητικότητα.*** Χωρητικότητα μιᾶς μνήμης εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν θέσεων πού διαθέτει ἡ μνήμη. Μονάδα χωρητικότητας εἶναι τό Kilo-Byte (K-Byte ἤ KB) ἤ ἡ Kilo-λέξη (K-Word ἤ KW). $1KB = 2^{10}$ Byte $= 1024$ Byte. Ἐπίσης $1\ KW = 2^{10}$ Word $= 1024$ Word.

Π.χ. ὅταν λέμε ὅτι ἡ χωρητικότητα τῆς μνήμης ἑνός ὑπολογιστῆ εἶναι 64KB, σημαίνει ὅτι ἡ μνήμη τοῦ ὑπολογιστῆ αὐτοῦ διαθέτει $64 \times 1024 = 65.536$ Byte. Χρησιμοποιεῖται ἐπίσης ἡ μονάδα Mega-Byte $= 2^{20}$ Byte $= 2^{10}$ K Byte (ὁμοίως καί γιά Mega-word).

8.2.2 Μνήμη μαγνητικῶν δακτυλίων (Core Memory).

Ὁ τύπος αὐτός τῆς μνήμης ἐξετάσθηκε στή Β' τάξη τοῦ Λυκείου (Τ. Καλβουρίδη, Ἠλεκτρονικοί Ὑπολογιστές, σσ. 74 - 80).

Μιά μνήμη μαγνητικῶν δακτυλίων συγκρατεῖ τό περιεχόμενό της καί ὅταν διακοπεῖ τό ρεῦμα μέ τό ὁποῖο τροφοδοτεῖται ὁ ὑπολογιστής. Δηλαδή ἡ μνήμη τῶν μαγνητικῶν δακτυλίων εἶναι μία «μή πτητική» (non Volitile) μνήμη. Αὐτό εἶναι σημαντικό πλεονέκτημα, γιατί οἱ μικροδιακοπές (βυθίσεις) τοῦ ἠλεκτρικοῦ δικτύου οἱ ὁποῖες συμβαίνουν συχνά κατά τή διάρκεια λειτουργίας τοῦ ὑπολογιστῆ, δέν ἐπηρεάζουν τό περιεχόμενο τῆς μνήμης του.

Παρ' ὅλο πού στήν κατασκευή μνημῶν μαγνητικῶν δακτυλίων ἔχει σημειωθεῖ σημαντική πρόοδος, τό μέγεθός τους εἶναι σχετικά μεγάλο. Ἐπίσης ἀπαιτοῦν μεγάλα ρεύματα γιά τή μαγνήτιση καί ἀπομαγνήτιση τῶν δακτυλίων καί ἔχουν σχετικά μικρή ταχύτητα λειτουργίας καί μεγάλο κόστος κατασκευῆς. Γι' αὐτό στούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές τελευταίου τύπου ἡ μνήμη μαγνητικῶν δακτυλίων ἔχει πρακτικά ἐγκαταλειφθεῖ.

8.2.3 Μνήμη ἀπό ἡμιαγωγούς.

Ἡ μνήμη ἀπό ἡμιαγωγούς χρησιμοποιεῖται σήμερα εὐρύτατα σέ ὅλους σχεδόν τούς τύπους τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Τά κύρια χαρακτηριστικά της εἶναι οἱ πολύ μικρές διαστάσεις της, π.χ. 16.000 θέσεις (16 KByte) μνήμης βρίσκονται σέ ἕνα ὁλοκληρωμένο κύκλωμα διαστάσεων περίπου 2 mm × 2 mm, τό χαμηλό της κόστος καί ἡ μεγάλη ταχύτητά του, 20 - 200 n/sec.

Ὑπάρχουν διάφοροι τύποι μνήμης ἡμιαγωγῶν ἀπό τούς ὁποίους οἱ βασικότεροι εἶναι:

α) Μνήμη τυχαίας προσπελάσεως (Random Access Memory — RAM).

β) Μνήμη μόνο ἀναγνώσεως (Read Only Memory — ROM).

γ) Προγραμματιζόμενη μνήμη μόνο ἀναγνώσεως (Programmamble Read Only Memory — PROM).

δ) Ἐπαναπρογραμματιζόμενη μνήμη μόνο ἀναγνώσως (Erasable Programmamble Read Only Memory — EPROM).

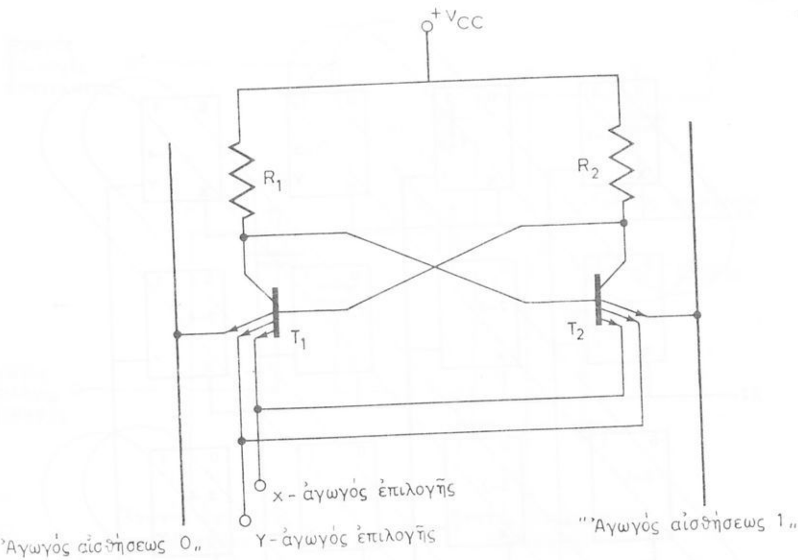
α) Μνήμη τυχαίας προσπελάσεως (RAM).

Μνήμη τυχαίας προσπελάσεως λέγεται ἡ μνήμη στήν ὁποία μποροῦμε νά γράψομε σέ ὁποιαδήποτε διεύθυνσή της καί νά διαβάσομε τό περιεχόμενο ὁποιασδήποτε διευθύνσεώς της. Πολλές φορές ἡ μνήμη αὐτή στή βιβλιογραφία ἀναφέρεται ὡς μνήμη ἀναγνώσεως καί ἐγγραφῆς (Read and Write Memory).

Αὐτή ἡ μνήμη τῶν ἡμιαγωγῶν διακρίνεται σέ ***στατική (Static)*** καί ***δυναμική (Dynamic)***.

Ἡ ***στατική RAM*** χρησιμοποιεῖ ἕνα Φλίπ - Φλόπ, γιά τήν ἀποθήκευση ἑνός δυαδικοῦ ψηφίου (Bit). Δηλαδή μιά στατική ἡμιαγωγική μνήμη RAM ἀποτελεῖται ἀπό τόσα Φλίπ-Φλόπ ὅσα εἶναι τά δυαδικά ψηφία πού μπορεῖ νά ἀποθηκεύσει. Στό σχῆμα 8.2α παριστάνεται ἕνα Φλίπ-Φλόπ τῆς οἰκογένειας TTL πού χρησιμοποιεῖ δύο τρανζίστορ T_1 καί T_2 πολλαπλοῦ ἐκπομποῦ καί δύο ἀντιστάσεις R_1 καί R_2. Τό Φλίπ-Φλόπ αὐτό ἀποτελεῖ «τό κύτταρο» (Cell) τῆς στατικῆς μνήμης καί ὅπως ἀναφέραμε παραπάνω, μποροῦμε νά ἀπομνημονεύσομε σέ αὐτό ἕνα δυαδικό ψηφίο.

Ἔστω ὅτι οἱ ἀγωγοί ἐπιλογῆς x καί y (σχ. 8.2α) εἶναι σέ χαμηλό δυναμικό (δυναμικό 0 Volt). Ἄν τό Φλίπ-Φλόπ ἔχει ἀποθηκευμένη τήν πληροφορία 1 τό τρανζίστορ T_2 θά ἄγει καί τό τρανζίστορ T_1 θά βρίσκεται σέ ἀποκοπή, δηλαδή θά περνάει ρεῦμα μόνο μέσα ἀπό τό τρανζίστορ T_2 πρός τή γῆ μέσα ἀπό τούς ἀγωγούς ἐπιλογῆς. Ἀντίθετα ἄν στά Φλίπ-Φλόπ εἶναι ἀποθηκευμένη ἡ πληροφορία 0 θά περνάει ρεῦμα μέσα ἀπό τό τρανζίστορ T_1 πρός τή γῆ μέσα ἀπό τούς ἀγωγούς ἐπιλογῆς.



Σχ. 8.2α.
Στατική μνήμη RAM γιά τήν ἀποθήκευση ἑνός δυαδικοῦ ψηφίου (Bit).

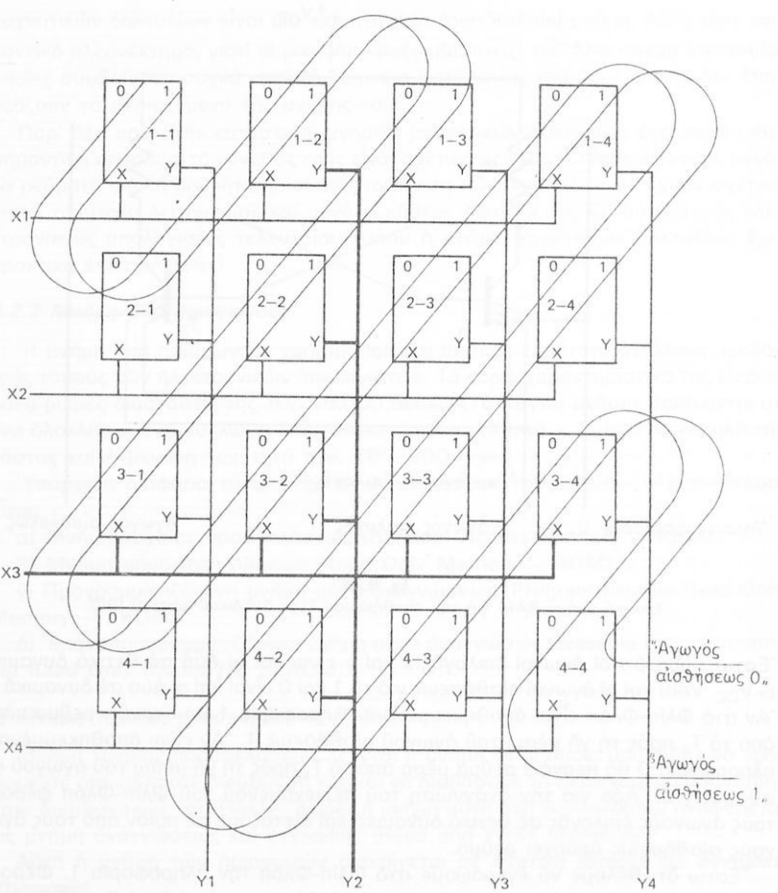
Ἔστω τώρα ὅτι οἱ ἀγωγοί ἐπιλογῆς x καί y εἶναι καί οἱ δυό σέ θετικό δυναμικό (+V_{CC} Volt) καί οἱ ἀγωγοί αἰσθήσεως γιά τό 1 καί 0 εἶναι καί οἱ δύο σέ δυναμικό 0. Ἄν στά Φλίπ-Φλόπ εἶναι ἀποθηκευμένη ἡ πληροφορία 1 θά περνάει ρεῦμα μέσα ἀπό τό T_2 πρός τή γῆ μέσω τοῦ ἀγωγοῦ αἰσθήσεως 1. Ἄν εἶναι ἀποθηκευμένη ἡ πληροφορία 0 θά περνάει ρεῦμα μέσα ἀπό τό T_1 πρός τή γῆ μέσω τοῦ ἀγωγοῦ αἰσθήσεως 0. Ἄρα γιά τήν ἀνάγνωση τοῦ περιεχομένου τοῦ Φλίπ-Φλόπ φέρομε τούς ἀγωγούς ἐπιλογῆς σέ θετικό δυναμικό καί ἐξετάζομε σέ ποιόν ἀπό τούς ἀγωγούς αἰσθήσεως ὑπάρχει ρεῦμα.

Ἔστω ὅτι θέλομε νά ἐγγράψομε στό Φλίπ-Φλόπ τήν πληροφορία 1. Φέρομε τούς δύο ἀγωγούς ἐπιλογῆς καί τόν ἀγωγό αἰσθήσεως γιά τό 0 σέ θετικό δυναμικό, ἐνῶ τόν ἀγωγό αἰσθήσεως γιά τό 1 σέ χαμηλό δυναμικό (0 Volt).

Τότε περνάει ρεῦμα μόνο ἀπό τό τρανζίστορ T_2 καί τόν ἀγωγό «αἰσθήσεως 1». Ἄν θέλομε τό Φλίπ-Φλόπ νά γράψει τήν πληροφορία 0, φέρομε σέ θετικό δυναμικό τούς δύο ἀγωγούς ἐπιλογῆς καί τόν ἀγωγό αἰσθήσεως 1.

Στό σχῆμα 8.2β φαίνεται ἕνα σύνολο ἀπό $4 \times 4 = 16$ Φλίπ-Φλόπ πού σχηματίζουν μία μνήμη 16 Bit. Μέ χοντρές γραμμές ἀπεικονίζεται πῶς ἐπιλέγομε μέ τούς ἀγωγούς x,y ἕνα συγκεκριμένο Φλίπ-Φλόπ. Εἶναι φανερό ὅτι ἄν φέρομε τούς ἀγωγούς ἐπιλογῆς x_3 καί ψ_2 σέ θετικό δυναμικό, θά ἐμφανισθεῖ τό περιεχόμενο τοῦ Φλίπ-Φλόπ 3 - 2 σέ ἕναν ἀπό τούς δύο ἀγωγούς αἰσθήσεως.

Στατικές μνῆμες κατασκευάζονται καί μέ Φλίπ-Φλόπ πού περιέχουν τρανζίστορ ἄλλων οἰκογενειῶν, π.χ. τῆς οἰκογένειας μετάλλου ἡμιαγωγοῦ (Metal Oxyde Surface MOS).

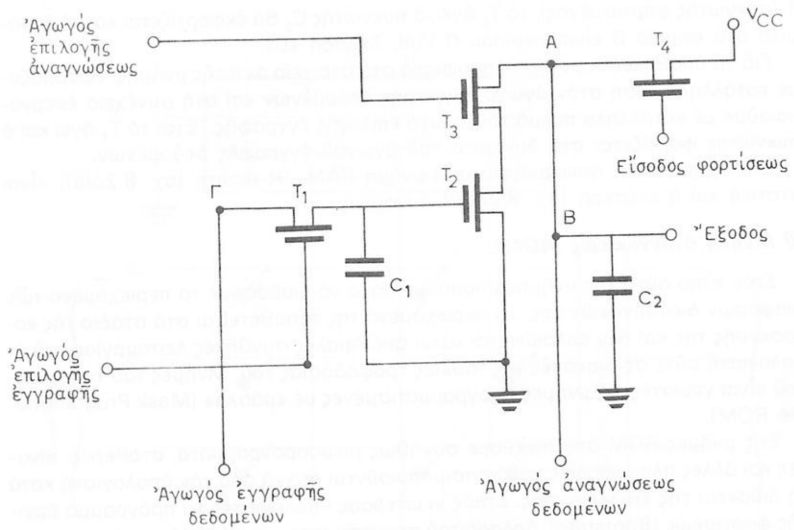


Σχ. 8.2β.

Οἱ στατικές μνῆμες πού κατασκευάζονται μέ τόν τρόπο πού ἀναφέραμε, ἔχουν τό χαρακτηριστικό ὅτι διατηροῦν τό περιεχόμενό τους ὅσο χρόνο ἐφαρμόζεται σέ αὐτές ἡ τάση τροφοδοτήσεως. Ὅταν διακοπεῖ ἡ τάση τροφοδοτήσεως τά δεδομένα χάνονται. Ὅταν μιά μνήμη ἔχει τήν ἰδιότητα αὐτή λέμε ὅτι εἶναι «πτητική» (Volatile) μνήμη.

Ὅταν σέ ἕνα ὑπολογιστή δέν θέλομε νά χάνομε τό περιεχόμενο τῆς μνήμης του κατά τίς διακοπές τοῦ ἠλεκτρικοῦ δικτύου, χρησιμοποιοῦμε συσσωρευτές οἱ ὁποῖοι τροφοδοτοῦν αὐτόματα τόν ὑπολογιστή ὅταν διακοπεῖ ἡ τάση τοῦ δικτύου.

Στή δυναμική RAM ἡ πληροφορία ἀποθηκεύεται ὡς φορτίο σέ ἕναν πυκνωτή. Ἐπειδή οἱ πυκνωτές δέν μποροῦν νά συγκρατήσουν τό φορτίο τους ἐπ᾽ ἄπειρον

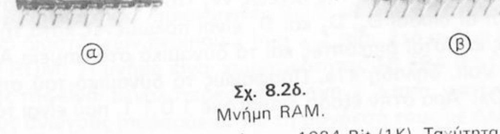


Σχ. 8.2γ.
Στοιχεῖο δυναμικῆς μνήμης.

χρειάζεται ἀνανέωση (Refresh) τῶν φορτίων κατά περιοδικά διαστήματα, συνήθως 1 - 3 msec.

Στό σχῆμα 8.2γ παριστάνεται ἕνα κύκλωμα στοιχείου δυναμικῆς μνήμης στό ὁποῖο μποροῦμε νά ἀποθηκεύσομε ἕνα δυαδικό ψηφίο. Σέ αὐτό φαίνεται ὁ πυκνωτής C_1 στόν ὁποῖο ἀποθηκεύεται τό φορτίο. Τά τρανζίστορ T_1, T_2, T_3 καί T_4 εἶναι τύπου μετάλλου - ἡμιαγωγοῦ (MOS).

Γιά νά διαβάσομε τό περιεχόμενο τοῦ στοιχείου τῆς δυναμικῆς αὐτῆς μνήμης, φορτίζομε τόν πυκνωτή C_2 ἐφαρμόζοντας κατάλληλη τάση στήν εἴσοδο φορτίσεως (τρανζίστορ T_4). Τό δυναμικό στό σημεῖο A εἶναι τώρα V_{CC} Volt. 'Εφαρμόζομε στόν ἀγωγό ἐπιλογῆς ἀναγνώσεως κατάλληλο δυναμικό, ὥστε τό τρανζίστορ T_3 νά μπορεῖ νά ἄγει. ῎Αν ἔχομε ἀποθηκεύσει στό στοιχεῖο τό Bit 0 (πυκνωτής μή φορτισμένος), τό T_2 δέν ἄγει καί τό δυναμικό τοῦ σημείου B (ἔξοδος) θά συνεχίζει νά εἶναι V_{CC}, δηλαδή «1». ῎Αν ἔχομε ἀποθηκεύσει στό στοιχεῖο τό Bit



Σχ. 8.2δ.
Μνήμη RAM.

α) Στατική RAM τύπος MM 74C930 χωρητικότητας 1024 Bit (1K). Ταχύτητα προσπελάσεως 240 nanosec. β) Δυναμική RAM τύπος MM 5280 χωρητικότητας 4096 Bit (4K). Ταχύτητα προσπελάσεως 200 nanosec.

1 (πυκνωτής φορτισμένος), τό T_2 ἄγει, ὁ πυκνωτής C_2 θά ἐκφορτίζεται καί τό δυναμικό στό σημεῖο Β εἶναι περίπου 0 Volt, δηλαδή «0».

Γιά νά ἀποθηκεύσομε μία πληροφορία στό στοιχεῖο ἀντί τῆς μνήμης, ἐφαρμόζομε κατάλληλη τάση στόν ἀγωγό ἐγγραφῆς δεδομένων καί στή συνέχεια ἐνεργοποιοῦμε μέ κατάλληλο παλμό τόν ἀγωγό ἐπιλογῆς ἐγγραφῆς. Ἔτσι τό T_1 ἄγει καί ὁ πυκνωτής φορτίζεται στό δυναμικό τοῦ ἀγωγοῦ ἐγγραφῆς δεδομένων.

Στό σχῆμα 8.2δ ἀπεικονίζεται μιά μνήμη RAM. Ἡ πρώτη [σχ. 8.2δ(α)] εἶναι στατική καί ἡ δεύτερη [σχ. 8.2δ(β)] δυναμική.

β) Μνήμη ἀναγνώσεως (ROM).

Στόν τύπο αὐτό τῆς μνήμης μποροῦμε μόνο νά διαβάσομε τό περιεχόμενο τῶν διαφόρων διευθύνσεών της. Τό περιεχόμενό της τοποθετεῖται στό στάδιο τῆς κατασκευῆς της καί δέν ἀλλοιώνεται κάτω ἀπό ὁμαλές συνθῆκες λειτουργίας τοῦ ὑπολογιστῆ οὔτε σέ διακοπές τῆς τάσεως τροφοδοσίας του. Μνῆμες τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι γνωστές ὡς μνῆμες προγραμματισμένες μέ «μάσκα» (Mask Programmable ROM).

Στίς μνῆμες ROM ἀποθηκεύομε συνήθως μικροπρογράμματα, σταθερές, πίνακες καί ἄλλες πληροφορίες πού χρησιμοποιοῦνται συχνά ἀπό τόν ὑπολογιστή κατά τή διάρκεια τῆς ἐπεξεργασίας. Στούς νεώτερους ὑπολογιστές τό πρόγραμμα ἀρχικῆς φορτίσεως (Bootstrap), δηλαδή τοῦ προγράμματος πού ἐπιτρέπει τή μεταφορά στή μνήμη τοῦ ἐποπτεύοντος (λειτουργικοῦ) συστήματος τοῦ ὑπολογιστῆ, εἶναι πάντοτε γραμμένο σέ ROM.

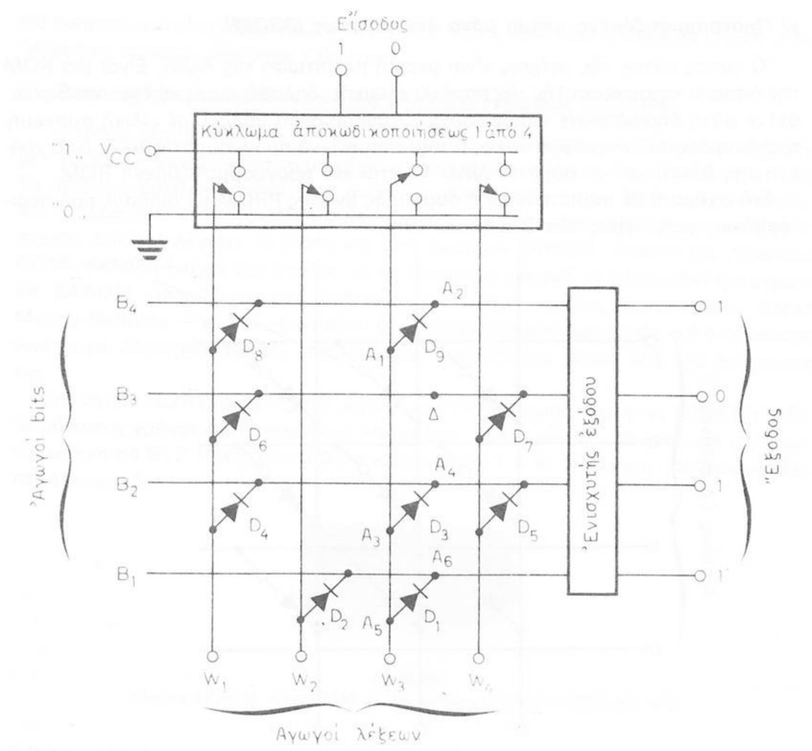
Στό σχῆμα 8.2ε παριστάνεται ἡ δομή μιᾶς ROM μέ διόδους.

Ἡ ROM τοῦ προηγούμενου σχήματος εἶναι μιά μνήμη τεσσάρων λέξεων W_1, W_2, W_3, W_4 καί κάθε λέξη ἔχει 4 ψηφία (Bit) B_1, B_2, B_3, B_4. Ἡ μνήμη εἶναι κατασκευασμένη ἔτσι, ὥστε τό περιεχόμενό της νά εἶναι:

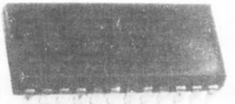
$$\begin{array}{cl} \text{Bit λέξεων}\left\{\begin{array}{l} B_4 \rightarrow \\ B_3 \rightarrow \\ B_2 \rightarrow \\ B_1 \rightarrow \end{array}\right. & \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \end{array} \\ & \underbrace{\begin{array}{cccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{array}}_{\text{Λέξεις}} \end{array}$$

Γιά νά διαβάσομε τό περιεχόμενο μιᾶς λέξεως τῆς ROM ἐνεργοποιοῦμε μέσω τοῦ κωδικοποιητῆ τὸν ἀγωγό πού ἀντιστοιχεῖ στή λέξη αὐτή. Π.χ. γιά νά διαβάσομε τή λέξη W_3, ἐφαρμόζομε στήν εἴσοδο τή δυαδική μορφή 1 0 πού ἀποκωδικοποιεῖται καί ἐνεργοποιεῖ τόν ἀγωγό τῆς λέξεως W_3 (τό δυναμικό τοῦ ἀγωγοῦ γίνεται V_{CC} → «1»). Ἔτσι οἱ δίοδοι D_9, D_3 καί D_1 εἶναι πολωμένες κατά τήν ὀρθή φορά, ἄρα ἐνεργοῦν ὡς κλειστοί διακόπτες καί τά δυναμικά στά σημεῖα A_2, A_4 καί A_6 ἰσοῦνται μέ V_{CC} Volt, δηλαδή «1». Προφανῶς τό δυναμικό τοῦ σημείου Δ εἶναι 0 Volt, δηλαδή «0». Ἄρα στήν ἔξοδο διαβάζομε 1 0 1 1, πού εἶναι τό περιεχόμενο τῆς λέξεως W_3.

Οἱ δίοδοι τοῦ σχήματος μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν μέ τρανζίστορ εἴτε κοινά (διπολικά) εἴτε τρανζίστορ μετάλλου-ἡμιαγωγοῦ (MOS).



Σχ. 8.2ε.
Μνήμη ROM μέ διόδους 16 Bit (4 λέξεις × 4 Bit).



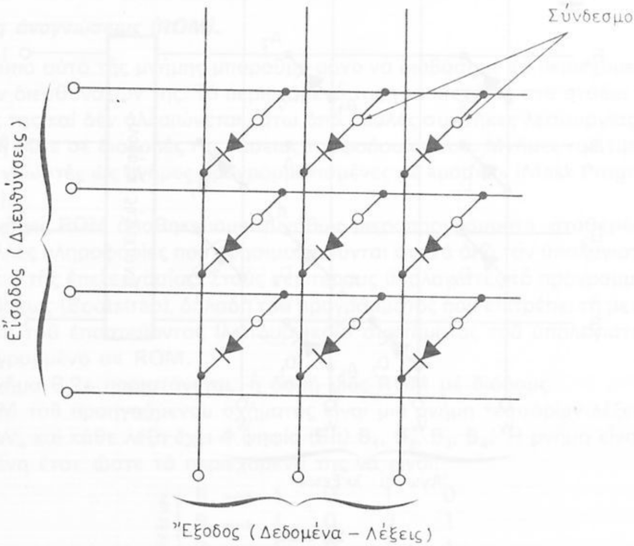
Σχ. 8.2στ.
Μνήμη ROM τύπος MM 52116 χωρητικότητας 16384 Bit (16K).

Σήμερα κατασκευάζονται ἡμιαγωγικές ROM μέ χωρητικότητα μέχρι 64KB σέ ἕνα κρύσταλλο διαστάσεων περίπου 2 mm × 2 mm. Στό σχῆμα 8.2στ ἀπεικονίζεται μία μνήμη ROM. Ἡ μνήμη εἶναι χωρητικότητας 16.384 Bit (16K). Οἱ ἐξωτερικές διαστάσεις της εἶναι μεγαλύτερες ἀπό 2 mm × 2 mm, γιατί πρέπει νά ὑπάρχει χῶρος γιά τούς ἀγωγούς (ποδαράκια) γιά τή σύνδεσή τους μέ ἄλλα κυκλώματα. Ἡ ταχύτητα προσπελάσεως τῆς μνήμης αὐτῆς εἶναι 300 nanosec καί εἶναι ὀργανωμένη σέ 2048 λέξεις τῶν 8 Bit ἡ καθεμιά (2048 × 8).

γ) Προγραμματιζόμενη μνήμη μόνο ἀναγνώσεως (PROM).

Ὁ τύπος αὐτός τῆς μνήμης εἶναι μερική περίπτωση τῆς ROM. Εἶναι μιά ROM τήν ὁποία ὁ κατασκευαστής τήν παρέχει «λευκή», δηλαδή χωρίς νά ἔχει ἀποθηκευθεῖ σ' αὐτή ὁποιαδήποτε πληροφορία. Ἡ μνήμη αὐτή μπορεῖ, μέ εἰδική συσκευή, πού ὀνομάζεται προγραμματιστής (Programmer), νά προγραμματισθεῖ ἀπό τό χρήστη της (User) καί γι' αὐτό τό λόγο λέγεται καί προγραμματιζόμενη ROM.

Στό σχῆμα 8.2ζ παριστάνεται ἡ δομή μιᾶς μνήμης PROM μέ διόδους πού περιλαμβάνει τρεῖς λέξεις τῶν 3 ψηφίων (Bit).



Σχ. 8.2ζ.
Μνήμη PROM μέ διόδους (E × 3 Bit).

Σχ. 8.2η.
Μνήμη PROM τύπος DM 74S573 χωρητικότητας 4096 Bit (4K).

Στή φάση τοῦ προγραμματισμοῦ της μέ τήν εἰδική συσκευή, οἱ σύνδεσμοι καταστρέφονται (καίγονται), ὁπότε ἀποθηκεύεται τό 0 ἤ παραμένουν, ὁπότε ἀποθηκεύεται τό 1. Οἱ δίοδοι τοῦ σχήματος μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν μέ τρανζίστορ κυρίως τύπου MOS.

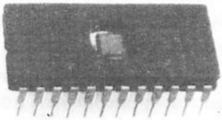
Στό σχῆμα 8.2η ἀπεικονίζεται μιά μνήμη PROM. Ἡ μνήμη εἶναι χωρητικότητας 4096 Bit (4K). Ὁ μέγιστος χρόνος προσπελάσεως αὐτῆς τῆς μνήμης εἶναι

60 nanosec καί εἶναι ὀργανωμένη σέ 1024 λέξεις τῶν 4 Bit ἡ καθεμιά (1024 × 4). Ἡ μνήμη προγραμματίζεται ἠλεκτρικά.

δ) Ἐπαναπρογραμματιζόμενη μνήμη μόνο ἀναγνώσεως (EPROM).

Ὁ τύπος αὐτός τῆς μνήμης εἶναι μία PROM στήν ὁποία μποροῦμε νά «σβήσομε» (Erase → Erasable) τό περιεχόμενό της καί νά γράψομε (ἀποθηκεύσομε) νέο. Τό σβήσιμο αὐτό μπορεῖ νά γίνει ἀνάλογα μέ τόν τύπο της μέ ὑπεριώδη ἀκτινοβολία ἤ ἠλεκτρικά ἄν ἐφαρμόσομε στήν εἴσοδό της ὑψηλή τάση. Στήν πρώτη περίπτωση ἡ ROM λέγεται EPROM καί στή δεύτερη EAROM (Electrically Alterable ROM), δηλαδή μνήμη τῆς ὁποίας τό περιεχόμενο μπορεῖ νά ἀλλοιωθεῖ ἠλεκτρικά. Τό EAROM ὀνομάζεται στή βιβλιογραφία μνήμη κυρίως ἀναγνώσεως (Read Mostly Memory – RMN). Ἐννοεῖται ὅτι ὁ ἐπαναπρογραμματισμός καί ὅταν ἀκόμα γίνεται μέ ἠλεκτρικό τρόπο, ἀπαιτεῖ πολύ περισσότερο χρόνο ἀπό τήν ἀνάγνωσή της.

Στό σχῆμα 8.2θ ἀπεικονίζεται μιά μνήμη EPROM χωρητικότητας 4096 Bit (4K). Ὁ μέγιστος χρόνος προσπελάσεως τῆς μνήμης αὐτῆς εἶναι 1,25 μsec καί εἶναι ὀργανωμένη σέ 512 λέξεις τῶν 8 Bit ἡ καθεμιά (512 × 8). Ἡ μνήμη προγραμματίζεται ἠλεκτρικά.



Σχ. 8.2θ.
Μνήμη EPROM τύπου MM 4204 μέ χωρητικότητα 4096 Bit (4K).

8.3 Μονάδα ἐπεξεργασίας.

Στή μονάδα ἐπεξεργασίας μεταφέρονται ἀπό τή μνήμη τοῦ ὑπολογιστῆ δεδομένα γιά νά ἐκτελεσθοῦν μέ αὐτά πράξεις. Οἱ πράξεις αὐτές μπορεῖ νά εἶναι:

— Ἀριθμητικές, ὅπως πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, προσαύξηση (αὔξηση ἑνός ἀριθμοῦ κατά 1).

— Λογικές πράξεις, πράξεις μεταξύ ἀντιστοίχων ψηφίων λέξεων, ὅπως «ΚΑΙ», «Η» καί «ΟΧΙ».

— Πράξεις μετασχηματισμοῦ καί ἀνακατατάξεως λέξεων, ὅπως π.χ. ἡ ὀλίσθηση.

Οἱ πράξεις αὐτές ἐκτελοῦνται μέ διαδοχική ἐκτέλεση ἁπλουστέρων θεμελιωδῶν λειτουργιῶν, ὅπως εἶναι ἡ πρόσθεση, ἡ ὀλίσθηση καί οἱ βασικές λογικές πράξεις «ΚΑΙ», «Η» καί «ΟΧΙ». Π.χ. ὁ πολλαπλασιασμός δύο ἀριθμῶν ἐκτελεῖται μέ διαδοχικές ὀλισθήσεις, συγκρίσεις καί προσθέσεις. Ἡ ἀφαίρεση ἑνός ἀριθμοῦ ἀπό ἕναν ἄλλο ἐκτελεῖται μέ συμπλήρωση τοῦ δεύτερου καί πρόσθεση. Γιά τό λόγο αὐτό στήν ἀριθμητική μονάδα ὑπάρχουν μονάδες οἱ ὁποῖες μποροῦν νά ἐκτελέσουν τίς θεμελιώδεις αὐτές λειτουργίες. Ἔτσι:

α) Ἡ πρόσθεση ἐκτελεῖται στό «Συσσωρευτή». Ὁ συσσωρευτής εἶναι ἕνας καταχωρητής ὁ ὁποῖος προσθέτει τούς ἀριθμούς πού τοῦ δίνονται διαδοχικά καί συγκρατεῖ τό ἑκάστοτε ἄθροισμα.

β) Ἡ ὀλίσθηση ἐκτελεῖται μέ τούς ὀλισθητές. Ὁ ὀλισθητής, ὅπως ἤδη ἔχομε ἀναφέρει στό κεφάλαιο 7, εἶναι ἕνας καταχωρητής ὁ ὁποῖος μπορεῖ νά ὀλισθήσει (μετακινήσει δεξιά ἤ ἀριστερά) τό περιεχόμενό του κατά μία θέση.

γ) Οἱ λογικές πράξεις ἐκτελοῦνται μέ μεταφορά τῶν ἀριθμῶν σέ καταχωρητές πού ἐπικοινωνοῦν μεταξύ τους μέσω λογικῶν κυκλωμάτων, τῶν ὁποίων ἡ ἔξοδος δίνει τό ἀποτέλεσμα.

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ ἀριθμητική μονάδα ἀποτελεῖται ἀπό ἕναν ἀριθμό καταχωρητῶν πού ἐπικοινωνοῦν μεταξύ τους μέσω ἐλεγχομένων ὁδῶν. Ἕνας ἤ περισσότεροι ἀπό τούς καταχωρητές αὐτούς μποροῦν νά δεχθοῦν ἀπ' εὐθείας δεδομένα ἀπό τόν καταχωρητή δεδομένων τῆς μνήμης, ἀλλά καί νά δώσουν σ' αὐτόν ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι εἶναι τό ἀποτέλεσμα πράξεων. Ἡ ἐπικοινωνία τῶν καταχωρητῶν μεταξύ τους καθώς ἐπίσης καί ἡ ἐπικοινωνία τους μέ τόν καταχωρητή δεδομένων τῆς μνήμης καθορίζεται καί ἐλέγχεται ἀπό τή μονάδα ἐλέγχου τοῦ ὑπολογιστῆ. Π.χ. γιά τήν ἐκτέλεση τῆς προσθέσεως ἀριθμῶν ἡ μονάδα ἐλέγχου δίνει τίς παρακάτω ἐντολές:

1) Μεταφορά τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ἀπό τήν ἀντίστοιχη θέση τῆς μνήμης στό συσσωρευτή.

2) Μεταφορά τοῦ δεύτερου ἀριθμοῦ ἀπό τή μνήμη στό συσσωρευτή, ὁπότε γίνεται καί πρόσθεση τοῦ ἀριθμοῦ στόν ἀριθμό ὁ ὁποῖος ἤδη ὑπάρχει.

3) Συνέχιση τῆς προσθέσεως καί ἄλλων ἀριθμῶν ἤ μεταφορά τοῦ περιεχομένου τοῦ συσσωρευτῆ στή μνήμη.

Σημειώνεται ὅτι ἐκτός ἀπό τούς ἀπαραίτητους καταχωρητές (συσσωρευτής, ὀλισθητές) καί τά λογικά κυκλώματα, ἡ ἀριθμητική μονάδα ἑνός ὑπολογιστῆ μπορεῖ νά περιλαμβάνει ἕναν ἀριθμό καταχωρητῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι γνωστοί ὡς καταχωρητές γενικῆς χρήσεως (General Purpose Registers) καί οἱ ὁποῖοι χρησιμεύουν γιά τήν ἀποθήκευση ἀριθμῶν πού ἐξάγονται ὡς ἐνδιάμεσα ἀποτελέσματα διαφόρων πράξεων. Μέ αὐτό τόν τρόπο ἡ ἐκτέλεση τῶν πράξεων ἐπιταχύνεται σημαντικά, γιατί τά ἐνδιάμεσα ἀποτελέσματα δέν χρειάζεται νά ἀποθηκευθοῦν στή μνήμη τῆς ὁποίας ἡ ταχύτητα προσπελάσεως εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα τῶν καταχωρητῶν.

8.4 Μονάδα ἐλέγχου καί χρονισμοῦ.

Ἡ μονάδα ἐλέγχου ρυθμίζει τή λειτουργία ὅλων τῶν τμημάτων τοῦ ὑπολογιστῆ. Στή μονάδα ἐλέγχου μεταφέρονται ἀπό τή μνήμη διαδοχικά οἱ ἐντολές τοῦ προγράμματος πού πρόκειται νά ἐκτελεσθεῖ. Ἀνάλογα μέ τήν ἐντολή πού διαβιβάζεται στή μονάδα ἐλέγχου, ἐνεργοποιοῦνται τά κυκλώματα ἐκεῖνα τῆς μονάδας τά ὁποῖα καθορίζουν τή διαδοχή τῶν λειτουργιῶν τῶν διαφόρων τμημάτων τοῦ ὑπολογιστῆ ἔτσι, ὥστε νά ἐκτελεσθεῖ ἡ ἐντολή. Στή μονάδα ἐλέγχου περιλαμβάνονται τά ἑξῆς:

α) Καταχωρητής ἐντολῶν.

Ὅπως ἤδη ἀναφέραμε στήν παράγραφο 8.1 στή μνήμη τοῦ ὑπολογιστῆ διαβιβάζονται καί ἀποθηκεύονται δεδομένα καί ἐντολές. Μέ τίς ἐντολές καθορίζεται ὁ τρόπος ἐπεξεργασίας τῶν δεδομένων καί οἱ θέσεις στίς ὁποῖες βρίσκονται τά δεδομένα πού πρόκειται νά ἐπεξεργασθοῦν. Στόν καταχωρητή ἐντολῶν καταχωρεῖται τό τμῆμα ἐκεῖνο τῆς ἐντολῆς τό ὁποῖο καθορίζει τόν τρόπο ἐπεξεργασίας, π.χ. ἐκτέλεση ἀριθμητικῆς ἤ ἄλλης πράξεως, δηλαδή ὁ κώδικας ἐντολῆς.

β) Καταχωρητής διευθύνσεων ἐντολῶν.

Στόν καταχωρητή αὐτό καταχωρεῖται ἡ διεύθυνση τῆς ἐντολῆς πού πρόκειται νά ἐκτελεσθεῖ. Συνήθως ὁ καταχωρητής αὐτός εἶναι ἕνας ἀπαριθμητής ἔτσι, ὥστε αὐξάνοντας τό περιεχόμενό του κατά 1 νά βρίσκεται ἡ διεύθυνση τῆς ἑπόμενης ἐντολῆς. Ἡ διεύθυνση αὐτή μεταφέρεται στόν καταχωρητή διευθύνσεων τῆς μνήμης γιά νά κληθεῖ ἡ ἑπόμενη ἐντολή. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις πού ἡ ἑπόμενη ἐντολή ἔχει διεύθυνση ἡ ὁποία δέν ἀκολουθεῖ τή διεύθυνση τῆς ἐκτελούμενης ἐντολῆς. Αὐτό συμβαίνει ὅταν ἐκτελοῦνται ἐντολές ἐλέγχου, οἱ ὁποῖες καθορίζουν ἕνα ἅλμα πού τίς περισσότερες φορές ἐξαρτᾶται ἀπό τό ἀποτέλεσμα μιᾶς συγκρίσεως. Στίς περιπτώσεις αὐτές τό περιεχόμενο τοῦ καταχωρητῆ διευθύνσεων ἐντολῶν αὐξάνεται ἤ ἐλαττώνεται ὅσο καθορίζει ἡ ἐντολή ἐλέγχου, δηλαδή ὅσο εἶναι τό ἀπαιτούμενο ἅλμα.

γ) Ἀποκωδικοποιητής ἐντολῶν.

Ὁ ἀποκωδικοποιητής ἐντολῶν εἶναι ἕνα λογικό κύκλωμα τό ὁποῖο ἀποκωδικοποιεῖ τόν κώδικα τῆς ἐντολῆς. Κάθε ἐντολή ἐνεργοποιεῖ μιά ἤ περισσότερες ἀπό τίς ἐξόδους τοῦ ἀποκωδικοποιητῆ. Κατά αὐτό τόν τρόπο καθορίζονται τά κυκλώματα τῆς μονάδας ἐλέγχου πού πρέπει νά λειτουργήσουν γιά νά ἐκτελεσθεῖ ἡ ἐντολή.

δ) Καταχωρητές δεικτῶν.

Τό περιεχόμενο τῶν καταχωρητῶν αὐτῶν καθορίζει μία μεταβολή διευθύνσεως. Ἡ διεύθυνση αὐτή εἶναι διεύθυνση δεδομένου ἤ ἐντολῆς.

ε) Κυκλώματα χρονισμοῦ.

Γιά νά ἐκτελεσθεῖ μιά ἐντολή χρειάζεται μετακίνηση λέξεων ἀπό ἕναν καταχωρητή σέ ἕναν ἄλλο. Π.χ. γιά τήν πρόσθεση δύο ἀριθμῶν, χρειάζεται ἡ διαδοχική μεταφορά τους στό συσσωρευτή, γιά τόν πολλαπλασιασμό δύο ἀριθμῶν χρειάζεται νά πραγματοποιηθεῖ ἕνας ἀριθμός διαδοχικῶν ὀλισθήσεων καί προσθέσεων. Ἡ διαδοχή τῶν λειτουργιῶν οἱ ὁποῖες εἶναι ἀπαραίτητο νά πραγματοποιηθοῦν γιά τήν ἐκτέλεση κάθε ἐντολῆς καί ὁ καθορισμός τῆς χρονικῆς στιγμῆς στήν ὁποία κάθε λειτουργία θά πραγματοποιηθεῖ, καθορίζεται ἀπό εἰδικά κυκλώματα χρονισμοῦ, δηλαδή κυκλώματα τά ὁποῖα δίνουν ἠλεκτρικούς παλμούς σέ ἀκριβῶς προσδιορισμένες χρονικές στιγμές.

Τά κυκλώματα χρονισμοῦ ὁδηγοῦνται ἀπό μία κεντρική πηγή ὡρολογιακῶν παλμῶν ἡ ὁποία ὀνομάζεται «ρολόι τοῦ ὑπολογιστῆ» (Computer Clock). Συνήθως τό ρολόι αὐτό εἶναι ἕνας ταλαντωτής τοῦ ὁποίου ἡ συχνότητα διατηρεῖται σταθερή μέ τή χρήση κρυστάλλου. Τά κυκλώματα χρονισμοῦ περιλαμβάνουν ἀπαριθμητές μέ τούς ὁποίους πετυχαίνομε ὑποπολλαπλασιασμό τῆς συχνότητας τοῦ ρολογιοῦ (βλέπε παράγραφο 7.3) καί μονοδονητές γιά τόν καθορισμό χρονικῶν διαστημάτων.

στ) Κυκλώματα ἐλέγχου.

Τά κυκλώματα αὐτά εἶναι, συνήθως, ἀπαριθμητές ἤ συγκριτές μέ τούς ὁποίους παρακολουθεῖται ὁ ἀριθμός τῶν στοιχειωδῶν βημάτων γιά νά καθορισθεῖ τό τέλος διαφόρων λειτουργιῶν.

8.5 Μονάδα εἰσόδου - ἐξόδου.

Ὁ ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής ἐπικοινωνεῖ μέ τό περιβάλλον του μέ τή μονάδα εἰσόδου-ἐξόδου. Τό περιβάλλον ἑνός ὑπολογιστῆ εἶναι οἱ πηγές ἀπό τίς ὁποῖες ὁ ὑπολογιστής δέχεται πληροφορίες ἤ οἱ ἀποδέκτες στούς ὁποίους ὁ ὑπολογιστής δίνει πληροφορίες. Πηγές καί ἀποδέκτες πληροφοριῶν μποροῦν νά εἶναι ὁ ἄνθρωπος, ἕνας ἄλλος ὑπολογιστής, ἕνα σύστημα τοῦ ὁποίου τή λειτουργία ἐλέγχει ὁ ὑπολογιστής, π.χ. ἕνα μηχάνημα παραγωγῆς χαρτιοῦ σέ ἕνα ἐργοστάσιο.

Ἐπειδή ἡ ταχύτητα λειτουργίας τοῦ ὑπολογιστῆ εἶναι πολύ μεγαλύτερη ἀπό τήν ταχύτητα λειτουργίας τῶν περιφερειακῶν μονάδων (1 - 20 φορές περίπου), ἡ ἀπ' εὐθείας ἐπικοινωνία ὑπολογιστῆ - περιφερειακῶν εἶναι ἀσύμφορη, γιατί σ' αὐτή θά χρησιμοποιούσαμε μόνο μικρό μέρος ἀπό τίς δυνατότητες τοῦ ὑπολογιστῆ. Γι' αὐτό τό λόγο στή μονάδα εἰσόδου - ἐξόδου τοῦ ὑπολογιστῆ περιλαμβάνονται εἰδικά κυκλώματα πού ὀνομάζονται ***διόρυγες*** ἤ ***δίαυλοι*** (Channels). Τά κυκλώματα αὐτά ἐξομαλύνουν τή διαφορά ταχύτητας μεταξύ ὑπολογιστῆ καί περιφερειακῶν. Ὅταν ὁ ὑπολογιστής πρόκειται νά ἐπικοινωνήσει μέ μία περιφερειακή μονάδα, ἀναθέτει σέ μιά ἀπό τίς διώρυγες τήν ἐκτέλεση τῆς ἐργασίας, ἐνῶ ὁ ὑπολογιστής ἀπασχολεῖται μέ τήν ἐκτέλεση ἄλλων ἐργασιῶν. Μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι οἱ διώρυγες οἱ ἴδιες ἀποτελοῦν μικρούς ὑπολογιστές, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀποστολή τή μεταφορά πληροφοριῶν ἀπό καί πρός τίς περιφερειακές μονάδες καί τόν ἔλεγχο τῆς λειτουργίας τους. Μιά διώρυγα μπορεῖ νά ἐξυπηρετεῖ πολλές περιφερειακές μονάδες.

Ἐκτός ἀπό τίς διώρυγες πού ἀναφέραμε παραπάνω καί πού κατασκευάζονται γιά νά ἐξυπηρετήσουν τίς περιφερειακές μονάδες, ὑπάρχουν καί διώρυγες γιά εἰδικούς σκοπούς, π.χ. διώρυγες γιά ἄμεση προσπέλαση τῆς μνήμης (Direct Memory Access - DMA), οἱ διώρυγες τηλεπικοινωνίας κλπ. Οἱ πρῶτες χρησιμοποιοῦνται ὅταν ἡ ταχύτητα λήψεως ἤ ἀποστολῆς πληροφοριῶν ἀπό τόν ὑπολογιστή θέλομε νά εἶναι πολύ μεγάλη καί οἱ δεύτερες γιά τήν ἐπικοινωνία τοῦ ὑπολογιστῆ μέ περιφερειακές μονάδες ἤ ἄλλους ὑπολογιστές μέσω τηλεπικοινωνιακῶν γραμμῶν (τηλεφωνικές, τηλεγραφικές, ἀσύρματες κλπ.).

Ὅπως ἤδη ἔχομε ἀναφέρει, οἱ περιφερειακές μονάδες χρησιμεύουν γιά τήν εἰσαγωγή καί λήψη πληροφοριῶν ἀπό τόν ἄνθρωπο, καθώς καί γιά τήν ἀποθήκευση ἐνδιαμέσων ἀποτελεσμάτων (περιφερειακή μνήμη, ὅπως π.χ. μαγνητικοί δίσκοι, ταινίες κλπ.).

Ἡ συνεργασία κάθε περιφερειακῆς μονάδας μέ τή μονάδα εἰσόδου-ἐξόδου τοῦ ὑπολογιστῆ πραγματοποιεῖται μέ μιά εἰδική μονάδα ἡ ὁποία ὀνομάζεται μονάδα ἐλέγχου (Controller) τῆς περιφερειακῆς μονάδας. Π.χ. ἡ συνεργασία ἑνός ἐκτυπωτῆ μέ τή μονάδα εἰσόδου-ἐξόδου πραγματοποιεῖται μέ μιά μονάδα πού ὀνομάζεται ***μονάδα ἐλέγχου*** τοῦ ἐκτυπωτῆ. Ἡ μονάδα ἐλέγχου ἑνός περιφερειακοῦ πληροφορεῖ τόν ὑπολογιστή γιά τήν κατάσταση τοῦ περιφερειακοῦ, π.χ. ἄν αὐτό εἶναι ἐλεύθερο νά δώσει ἤ νά πάρει πληροφορίες.

8.6 Περιφερειακές μονάδες.

Ὅπως ἀναφέραμε στά προηγούμενα, ἕνας ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής εἶναι ἕνα σύστημα πού δέχεται πληροφορίες στήν εἴσοδό του, τίς ἐπεξεργάζεται καί μᾶς δίνει τά ἀποτελέσματά τους στήν ἔξοδο.

Οἱ εἰσαγόμενες πληροφορίες, ἀφοῦ προηγουμένως ἐγγραφοῦν σέ κωδικοποιημένη μορφή πάνω σέ κάποιο φορέα, π.χ. διάτρητο δελτίο ἤ χαρτοταινία, μαγνητικό δίσκο ἤ ταινία κλπ., εἰσάγονται στόν ὑπολογιστή μέσω εἰδικῶν μονάδων τίς ὁποῖες ὀνομάζομε ***μονάδες εἰσόδου.***

Μετά τήν ἐπεξεργασία τά ἀποτελέσματα τά παίρνομε σέ εἰδικές ἐπίσης μονάδες, π.χ. σέ ἕνα φύλλο χαρτί (ἐκτυπωτής), σέ ἕνα χαρτί σχεδίου (Plotter) κλπ. Τίς μονάδες αὐτές τίς ὀνομάζομε ***μονάδες ἐξόδου.***

Τίς μονάδες εἰσόδου καί τίς μονάδες ἐξόδου τίς ὀνομάζομε γενικά ***περιφερειακές μονάδες*** ἤ μέ μία λέξη ***περιφερειακά τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ.***

Δέν θά ἀναφέρομε λεπτομέρειες γιά τίς μονάδες αὐτές, γιατί περιγράφονται στό βιβλίο τοῦ κ. Καλβουρίδη Ἠλεκτρονικοί Ὑπολογιστές (σσ. 29 - 74) τό ὁποῖο διδάσκεται στή Β΄ τάξη Λυκείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

9.1 Γενικά.

Ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, τούς ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές τούς κατατάσσομε σέ δύο βασικές κατηγορίες: τούς Ἀναλογικούς (Analogue) καί τούς ψηφιακούς (Digital). Οἱ μικτοί ἤ ὑβριδικοί (Hybrid) δέν ἀποτελοῦν παρά συνδυασμό τῶν δύο αὐτῶν κατηγοριῶν.

Οἱ ἀναλογικοί ὑπολογιστές χρησιμοποιοῦνται βασικά γιά τή λύση διαφορικῶν ἐξισώσεων καί γενικότερα γιά τήν ἐπίλυση διαφόρων μαθηματικῶν προβλημάτων. Ἐπίσης χρησιμοποιοῦνται γιά τή μελέτη διαφόρων φυσικῶν συστημάτων* μέ τή μέθοδο τῆς ἐξομοιώσεως (Simulation). Στή δεύτερη περίπτωση κατασκευάζομε τό μοντέλο τοῦ συστήματος πού θέλομε νά μελετήσομε καί πού μπορεῖ νά εἶναι π.χ. ἕνα ἁπλό ἠλεκτρικό κύκλωμα. Οἱ ἐξισώσεις πού περιγράφουν τό μοντέλο συμπίπτουν ἤ ἔχουν τήν ἴδια μορφή μέ τό ὑπό μελέτη φυσικό σύστημα. Ἔτσι μελετοῦμε τό μοντέλο τοῦ συστήματος ἀντί τό ἴδιο τό φυσικό σύστημα, δεδομένου ὅτι τίς περισσότερες φορές εἶναι πολύ δύσκολη, ἄν ὄχι ἀδύνατη ἡ ἀπ' εὐθείας μελέτη τοῦ ἴδιου τοῦ συστήματος.

Ἐδῶ θά ἀναφέρομε δύο παραδείγματα πού θά μᾶς βοηθήσουν νά κατανοήσομε καλύτερα τή σπουδαιότητα τῶν ἀναλογικῶν κυκλωμάτων ἀπό τά ὁποῖα ἀποτελεῖται ἕνας ἀναλογικός ὑπολογιστής καί ἐπίσης τή σπουδαιότητα τῆς μεθόδου τῆς ἐξομοιώσεως.

Παράδειγμα 1.

Θεωροῦμε τό ἠλεκτρικό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.1α, ὅπου V_1, V_2 εἶναι οἱ τάσεις εἰσόδου του, V_S ἡ τάση ἐξόδου καί G ἡ ἐνίσχυση τοῦ ἐνισχυτῆ τῆς τάσεως V_0 στό σημεῖο Β.

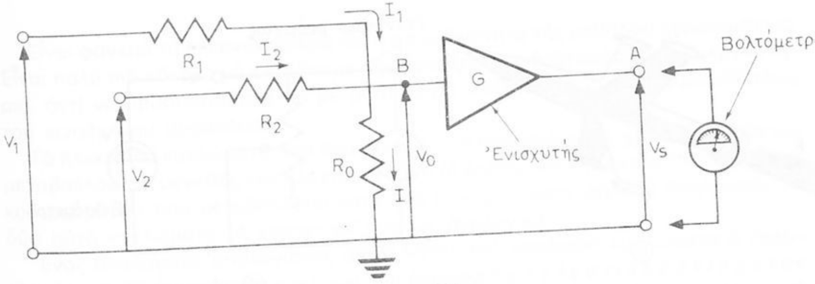
Ἀπό τό νόμο τοῦ Ohm ἔχομε:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2} \qquad \text{καί} \qquad I = \frac{V_0}{R_0}$$

Ἐπειδή ὅμως $I = I_1 + I_2$, ἔχομε:

$$\frac{V_0}{R_0} = \frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_2 - V_0}{R_2}$$

* Ὅταν λέμε φυσικό σύστημα ἐννοοῦμε ἕνα ὁποιοδήποτε ὑπαρκτό σύστημα, π.χ. ἕνας πυρηνικός ἀντιδραστήρας, ἕνας κινούμενος πύραυλος, ἕνα ἀεροπλάνο, μιά ἐγκατάσταση ραντάρ κλπ.



Σχ. **9.1α.**
Ἠλεκτρικό κύκλωμα πού κάνει πρόσθεση.

$$V_0\left(1+\frac{R_0}{R_1}+\frac{R_0}{R_2}\right)=\frac{R_0}{R_1}V_1+\frac{R_0}{R_2}V_2 \qquad (9.1)$$

ἤ

Ἄν δεχθοῦμε ὅτι οἱ ἀντιστάσεις R_1, R_2 εἶναι πολύ μεγαλύτερες ἀπό τήν R_0, δηλαδή $R_0/R_1 << 1$ καί $R_0/R_2 << 1$, ἡ ποσότητα $R_0/R_1 + R_0/R_2$ εἶναι ἐπίσης πολύ μικρότερη ἀπό τή μονάδα (δηλαδή: $R_0/R_1 + R_0/R_2 << 1$) καί συνεπῶς ἀμελητέα ὡς πρός τή μονάδα, τότε ἡ σχέση (9.1) γίνεται:

$$V_0=\frac{R_0}{R_1}V_1+\frac{R_0}{R_2}V_2 \qquad (9.1\alpha)$$

Δεδομένου ὅτι λόγω ἐνισχυτῆ ἔχομε: $V_S = GV_0$, ἄρα $V_0 = V_S/G$ ὅπου G ἡ πραγματοποιούμενη ἐνίσχυση ἡ (9.1α) γράφεται:

$$V_S=\frac{GR_0}{R_1}V_1+\frac{GR_0}{R_2}V_2 \qquad (9.2)$$

Ἄν διαλέξομε ἔτσι τίς ἀντιστάσεις R_0, R_1, R_2 καί τόν ἐνισχυτή, ὥστε νά ἔχομε $GR_0/R_1 = GR_0/R_2 = 1$ (π.χ. $R_0 = 100\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 1\ M\Omega$ καί $G = 10^4$), ἡ σχέση (9.2) γράφεται:

$$V_S = V_1 + V_2$$

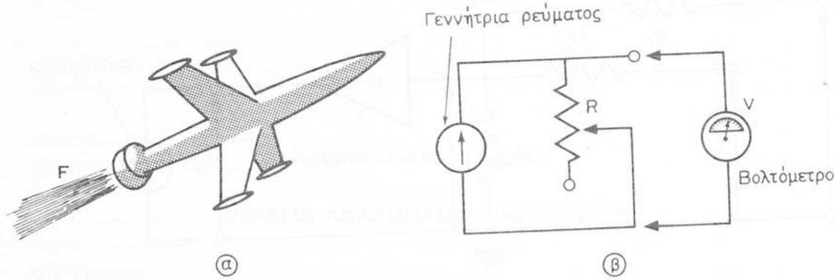
Δηλαδή, ἄν στήν εἴσοδο τοῦ κυκλώματός μας (σχ. 9.1α) θέσομε $V_1 = 5$ Volt καί $V_2 = 8$ Volt, ἡ ἔνδειξη στήν ἔξοδο, δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου V_S θά ἰσοῦται μέ 13 Volt, πού εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τάσεων V_1 καί V_2. Μέ ἄλλα λόγια τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.1α εἶναι ἕνα κύκλωμα πού πραγματοποιεῖ τήν ἀριθμητική πράξη τῆς προσθέσεως.

Παρατήρηση.

Στήν πράξη, τό παραπάνω κύκλωμα εἶναι πιό πολύπλοκο, ἀλλά στό παράδειγμά μας δέν θά μποῦμε σέ λεπτομέρειες, γιατί δέν μᾶς ἐνδιαφέρουν τή στιγμή αὐτή.

Παράδειγμα 2.

Θεωροῦμε ἕναν πύραυλο μάζας $m = 5$ μονάδες μάζας [σχ. 9.1β(α)] κινούμενο



Σχ. 9.1β.
α) Κινούμενος πύραυλος (φυσικό σύστημα). β) Ἠλεκτρικό κύκλωμα (μοντέλο).

μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 80$ μονάδες ἐπιταχύνσεως.

Γνωρίζομε ἀπό τή Φυσική ὅτι ἡ δύναμη προωθήσεως τοῦ πυραύλου δίνεται ἀπό τό νόμο τοῦ Νεύτονα σύμφωνα μέ τόν ὁποῖο:

$$F = m \cdot \gamma \tag{9.3}$$

Θεωροῦμε ἐπίσης ἕνα ἠλεκτρικό κύκλωμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τή γεννήτρια ρεύματος καί τό ποτενσιόμετρο μεταβλητῆς ἀντιστάσεως R [σχ. 9.1β(β)]. Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Ohm ἡ τάση V εἶναι:

$$V = I \cdot R \tag{9.4}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (9.3) καί (9.4) παρατηροῦμε ὅτι:

Ἡ ***δύναμη*** προωθήσεως τοῦ πυραύλου = Μάζα τοῦ πυραύλου × Ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου.

Ἡ ***τάση*** στά ἄκρα τοῦ ποτενσιομέτρου = Ἔνταση ρεύματος × Ἀντίσταση τοῦ ποτενσιομέτρου.

Δηλαδή οἱ παραπάνω σχέσεις (9.3) καί (9.4) πού χαρακτηρίζουν τή συμπεριφορά τῶν συστημάτων κινούμενος πύραυλος - ἠλεκτρικό κύκλωμα εἶναι τῆς ἴδιας μορφῆς. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τά δύο συστήματα εἶναι ἀνάλογα καί μποροῦμε νά ἐπωφεληθοῦμε ἀπό τή σχέση αὐτή μεταξύ τῶν δύο συστημάτων, ὥστε μελετώντας τό ἕνα νά μποροῦμε νά βγάλομε συμπεράσματα γιά τή συμπεριφορά τοῦ ἄλλου. Πράγματι, ἄν ρυθμίσομε τό ποτενσιόμετρο στό ἠλεκτρικό κύκλωμα ἔτσι, ὥστε ἡ ἀντίστασή του R νά ἔχει τιμή 80 καί τή γεννήτρια ρεύματος νά δίνει ρεῦμα ἐντάσεως 5 A, θά παρατηρήσομε ὅτι τό βολτόμετρο θά μᾶς δείξει αὐτόματα τήν ἔνδειξη 400, ὅση δηλαδή εἶναι ἡ δύναμη F προωθήσεως τοῦ κινούμενου πυραύλου.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι μέ μιά γεννήτρια ρεύματος, ἕνα ποτενσιόμετρο καί ἕνα βολτόμετρο, μποροῦμε νά κατασκευάσομε ἕνα ἠλεκτρικό κύκλωμα, τό ὁποῖο μελετώντας το νά μποροῦμε νά βγάλομε συμπεράσματα γιά τή συμπεριφορά τοῦ κινούμενου πυραύλου.

Μέ ἄλλα λόγια τό ἠλεκτρικό κύκλωμα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς μοντέλο τοῦ συστήματος κινούμενος πύραυλος πού ἀποτελεῖ προφανῶς τό φυσικό σύστημα (ἐξομοίωση).

Εἶναι φανερά τά πλεονεκτήματα καί ἡ σπουδαιότητα τῆς μεθόδου ἐξομοιώσεως. Εἶναι πολύ πιό εὔκολο νά διαβάσομε τήν ἔνδειξη ἑνός βολτομέτρου στό ἐργαστήριο, ἀντί νά προσπαθήσομε νά μετρήσομε ἀπ' εὐθείας τή δύναμη προωθήσεως τοῦ κινούμενου πυραύλου.

Τά ἠλεκτρικά κυκλώματα πού ἀναφέραμε στά παραδείγματα, χρησιμοποιοῦν ὡς μεταβαλλόμενο μέγεθος τήν ἠλεκτρική τάση (ἤ ἐπίσης καί τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος) πού μεταβάλλεται κατά ἕνα συνεχή τρόπο, δηλαδή ἀναλογικό. Τά δύο αὐτά κυκλώματα τά χαρακτηρίζομε ὡς ἀναλογικά.

Ἕνας ἀναλογικός ὑπολογιστής ἀποτελεῖται ἀπό παρόμοια κυκλώματα ἤ πολυπλοκότερα. Τό βασικότερο κύκλωμά του ὀνομάζεται ***τελεστικός ἐνισχυτής*** (Operational Amplifier). Τή λειτουργία καί τίς βασικές ἐφαρμογές τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ θά ἐξετάσομε στήν ἑπόμενη παράγραφο.

9.2 Τελεστικός ἐνισχυτής.

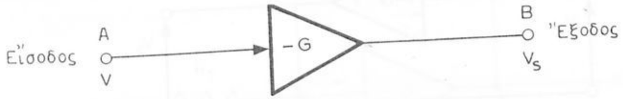
Ὁ τελεστικός ἐνισχυτής ἀποτελεῖ, ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, τό βασικότερο κύκλωμα ἑνός ἀναλογικοῦ ὑπολογιστῆ.

Ὁ τελεστικός ἐνισχυτής εἶναι ἕνας ἠλεκτρονικός ἐνισχυτής μέ ἄμεση σύζευξη καί μέ πολύ ὑψηλή ἐνίσχυση (ἀπολαβή).

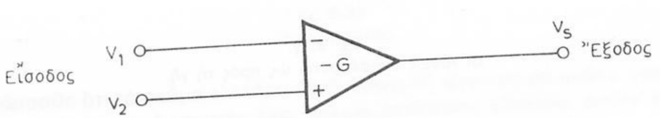
Τό συμβολικό διάγραμμα ἑνός τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ φαίνεται στό σχῆμα 9.2α. ὅπου: V ἡ τάση εἰσόδου.

V_S ἡ τάση ἐξόδου καί

G ἡ ἀπολαβή τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ.



Σχ. 9.2α.
Συμβολικό διάγραμμα τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ.



Σχ. 9.2β.
Συμβολικό διάγραμμα τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ μέ δύο εἰσόδους.

Ἡ τάση εἰσόδου V καί ἡ τάση ἐξόδου V_S συνδέονται μέ τή σχέση:

$$V_S = -GV \tag{9.5}$$

Τό ἀρνητικό σημεῖο ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ἡ ἔξοδος τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ ἔχει ἀντίθετο πρόσημο ἀπό ἐκεῖνο τῆς εἰσόδου. Δηλαδή ὁ τελεστικός ἐνισχυτής «ἀναστρέφει» τό σῆμα εἰσόδου.

Ὁ τελεστικός ἐνισχυτής μπορεῖ νά ἔχει δύο εἰσόδους. Στήν περίπτωση αὐτή ἐνισχύει τή διαφορά τῶν τάσεων πού ἐφαρμόζονται στήν εἴσοδό του. Τό συμβολικό του διάγραμμα στήν περίπτωση αὐτή δίνεται στό σχῆμα 9.2β.

ὅπου: V_1, V_2 οἱ τάσεις εἰσόδου.

V_S ἡ τάση ἐξόδου καί

G ἡ ἀπολαβή τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ.

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ τάση ἐξόδου συνδέεται μέ τίς τάσεις εἰσόδου μέ τή σχέση:

$$V_S = -G\,(V_1 - V_2) \tag{9.6}$$

Χαρακτηριστικά τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ.

Τά κυριότερα χαρακτηριστικά ἑνός τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ εἶναι τά ἑξῆς:

— Λειτουργεῖ μέ συνεχεῖς τάσεις.

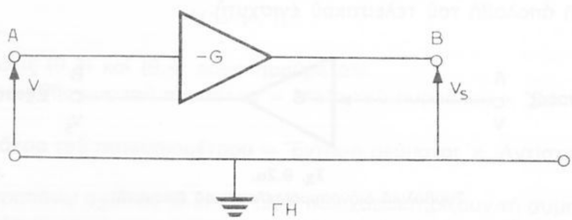
— Ἡ ἀπολαβή του G εἶναι πάρα πολύ ὑψηλή (τῆς τάξεως 10^3 - 10^8).

— Ἡ ἀντίσταση εἰσόδου εἶναι πολύ μεγάλη καί πρακτικά θεωρεῖται ὅτι ἔχει τιμή ἄπειρη.

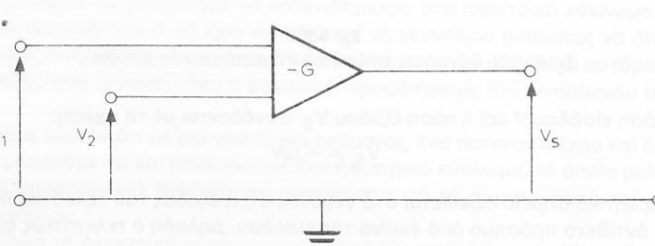
— Ἡ ἀντίσταση ἐξόδου εἶναι πολύ μικρή καί πρακτικά θεωρεῖται ὅτι ἔχει τιμή μηδέν.

Παρατηρήσεις.

α) Οἱ τάσεις εἰσόδου καί στίς δύο παρακάτω περιπτώσεις τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ ἀναφέρονται ὡς πρός τή γῆ, πού χάρη ἁπλότητας τήν παραλείπομε (σχ. 9.2γ καί 9.2δ).



Σχ. 9.2γ.
Οἱ τάσεις ἀναφέρονται ὡς πρός τή γῆ.



Σχ. 9.2δ.
Οἱ τάσεις ἀναφέρονται ὡς πρός τή γῆ.

β) Ἐπειδή ἡ ἀπολαβή G εἶναι πολύ μεγάλη, ἡ τάση στό σημεῖο A γιά πρακτικές τιμές τῆς τάσεως στό σημεῖο B (συνήθως τῆς τάξεως τῶν 10 Volt) εἶναι πολύ μικρή καί πρακτικά θεωρεῖται μηδενική. Γιά τό λόγο αὐτό τό σημεῖο αὐτό A θεωρεῖται σημεῖο γειώσεως καί ὀνομάζεται συμβατικό σημεῖο γειώσεως ἤ «ὑπερβατική γῆ». Στά ἑπόμενα θά παραλείπομε τήν ἀναφορά τῶν τάσεων ὡς πρός τή γῆ.

Ἡ χρησιμότητα τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ θεωρεῖται θεμελιακή, γιατί ἄν συνδέσομε στήν εἴσοδό του καί μεταξύ εἰσόδου - ἐξόδου κατάλληλες ἀντιστάσεις καί πυκνωτές, ὁ τελεστικός ἐνισχυτής μπορεῖ νά ἐκτελέσει διάφορες ἀριθμητικές πράξεις, π.χ. πρόσθεση, ἀφαίρεση, ὁλοκλήρωση κλπ.

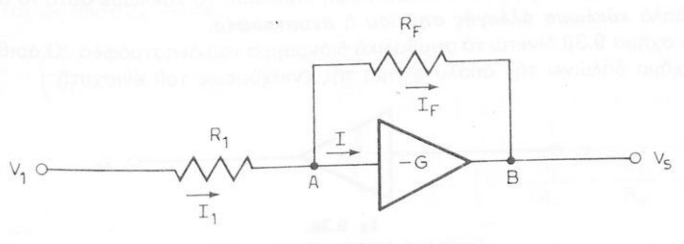
Στην ἑπόμενη παράγραφο θά ἀναφέρομε καί θά ἐξετάσομε μερικές ἀπό τις πλέον βασικές ἐφαρμογές τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ.

9.3 Ἐφαρμογές τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ.

Στήν παράγραφο αὐτή θά ἐξετάσομε μερικά ἀπό τά βασικά κυκλώματα τοῦ τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ.

9.3.1 Κύκλωμα ἀλλαγῆς σημείου — Ἀναστροφέας (Inverter).

Θεωροῦμε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.3α ὅπου R_1 εἶναι ἡ ἀντίσταση εἰσόδου καί R_F ἡ ἀντίσταση ἀνασυζεύξεως. Ἄν V_1 εἶναι ἡ τάση εἰσόδου καί V_S ἡ τάση ἐξόδου καί ἐφαρμόσομε τό νόμο τοῦ Kirchhoff στόν κόμβο A, θά ἔχομε: $I_1 = I + I_F$.



Σχ. 9.3α.
Ἀναστροφέας.

Δεχόμασθε ὅτι τό ρεῦμα εἰσόδου I τοῦ ἐνισχυτῆ εἶναι ἴσο μέ μηδέν, γιατί, ὅπως εἴπαμε, ὁ τελεστικός ἐνισχυτής ἔχει ἄπειρη ἀντίσταση εἰσόδου, ὁπότε ἔχομε:

$$I_1 = I_F$$

Δηλαδή:
$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} = \frac{V_A - V_S}{R_F}$$

Ἐπειδή ὅμως $V_S = -GV_A$ καί ἑπομένως $V_A = -V_S/G$ ἀντικαθιστώντας στήν προηγούμενη σχέση ἔχομε:

$$\frac{V_S}{V_1} = -\frac{R_F}{R_1}\left[\frac{1}{1+\dfrac{1}{G}\left(1+\dfrac{R_F}{R_1}\right)}\right] \tag{9.7}$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ ἀπολαβή G εἶναι πολύ μεγάλη, δηλαδή:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{G}\left(1+\frac{R_F}{R_1}\right)} \simeq 1$$

ἡ (9.7) γίνεται:

$$\frac{V_S}{V_1} = -\frac{R_F}{R_1}$$

ἤ

$$V_S = -\frac{R_F}{R_1} V_1 \qquad (9.8)$$

ἤ ἄν θέσομε $R_F / R_1 = K$, τότε:

$$V_S = -KV_1 \qquad (9.9)$$

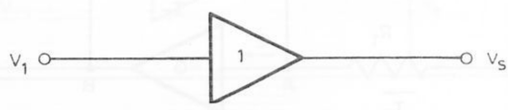
Ἄν διαλέξομε ἔτσι τίς R_F, R_1, ὥστε $R_F = R_1$, ὁπότε $K = 1$, ἔχομε:

$$V_S = -V_1$$

Δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου εἶναι ἴση καί ἀντίθετου σημείου τῆς τάσεως εἰσόδου.

Μέ ἄλλα λόγια ἔχομε ἕνα κύκλωμα μέ τό ὁποῖο μποροῦμε νά κάνομε ἀλλαγή σημείου τοῦ σήματος εἰσόδου (ἀναστροφή σημείου). Τό κύκλωμα αὐτό τό ὀνομάζομε ἁπλά ***κύκλωμα ἀλλαγῆς σημείου*** ἤ ***ἀναστροφέα.***

Στό σχῆμα 9.3β δίνεται τό συμβολικό διάγραμμα τοῦ ἀναστροφέα. Ὁ ἀριθμός 1 στό σχῆμα δηλώνει τήν ἀπόλυτη τιμή τῆς ἐνισχύσεως τοῦ ἐνισχυτῆ.



Σχ. 9.3β.
Συμβολικό διάγραμμα ἀναστροφέα.

Παρατήρηση.

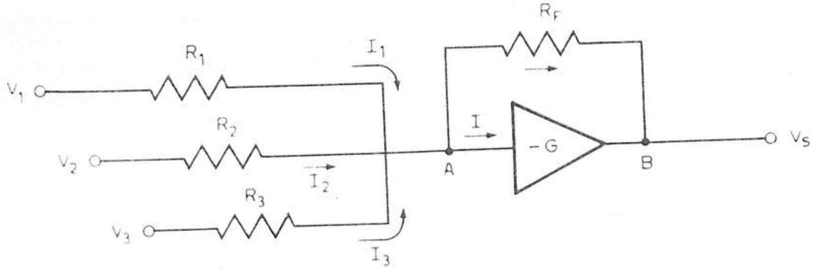
Ἀπό τή σχέση (9.9), $V_S = -K \cdot V_1$, ὅπου $K = \frac{R_F}{R_1}$ παρατηροῦμε ὅτι, ἄν $R_F \neq R_1$, τό κύκλωμά μας ἐκτός ἀπό τήν ἀλλαγή σημείου πού πραγματοποιεῖ στήν τάση εἰσόδου, πολλαπλασιάζει τήν τάση μέ τή σταθερά K.

Δηλαδή στήν περίπτωση αὐτή ἔχομε ἕνα κύκλωμα πού πραγματοποιεῖ τήν ἀριθμητική πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

9.3.2 Κύκλωμα προσθέσεως ἤ ἀθροιστής (Summing Amplifier).

Θεωροῦμε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.3γ, ὅπου R_1, R_2, R_3 εἶναι οἱ ἀντιστάσεις εἰσόδου καί R_F ἡ ἀντίσταση ἀνασυζεύξεως. Ἄν V_1, V_2, V_3 εἶναι οἱ ἀντίστοιχες τάσεις εἰσόδου καί ἐφαρμόσομε τό νόμο τοῦ Kirchhoff στόν κόμβο A, θά ἔχομε:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I + I_F$$



Σχ. 9.3γ.
Ἀθροιστής.

Ἐπειδή ὅπως εἴπαμε $I = 0$, ἔχομε:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_F$$

ἤ
$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \frac{V_3 - V_A}{R_3} = \frac{V_A - V_S}{R_F} \qquad (9.10)$$

Ἐπειδή $V_S = -GV_A$ ἤ $V_A = -V_S/G$ ἀντικαθιστώντας στήν (9.10) καί ἐπιλύοντας ὡς πρός V_S ἔχομε:

$$V_S = -\left(\frac{R_F}{R_1} . V_1 + \frac{R_F}{R_2} . V_2 + \frac{R_F}{R_3} . V_3\right) \times \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{G}\left(1 + \frac{R_F}{R_1} + \frac{R_F}{R_2} + \frac{R_F}{R_3}\right)}\right) \qquad (9.11)$$

Ἐπειδή ἡ ἀπολαβή G εἶναι πολύ μεγάλη, ὁ δεύτερος παράγοντας τῆς σχέσεως (9.11) ἰσοῦται μέ τή μονάδα (κατά μεγάλη προσέγγιση προφανῶς), ὁπότε ἡ σχέση αὐτή γίνεται:

$$V_S = -\left(\frac{R_F}{R_1} . V_1 + \frac{R_F}{R_2} . V_2 + \frac{R_F}{R_3} . V_3\right)$$

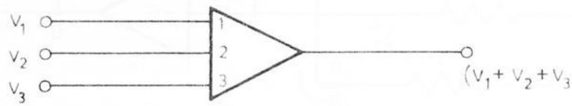
ἤ ἄν θέσομε $K_1 = \frac{R_F}{R_1}$, $K_2 = \frac{R_F}{R_2}$ καί $K_3 = \frac{R_F}{R_3}$ τότε

$$V_S = -(K_1 . V_1 + K_2 . V_2 + K_3 . V_3) \qquad (9.11α)$$

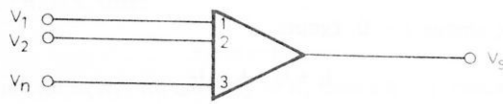
Ἄν διαλέξομε τίς ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3 καί R_F ἔτσι ὥστε $R_1 = R_2 = R_3 = R_F$ θά ἔχομε:

$$V_S = -(V_1 + V_2 + V_3) \qquad (9.12)$$

Δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου εἶναι ἴση καί ἀντίθετου σημείου μέ τό ἄθροισμα τῶν τάσεων εἰσόδου. Συνεπῶς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.3γ εἶναι ἕνα κύκλωμα πού πραγματοποιεῖ τήν ἀριθμητική πράξη τῆς προσθέσεως. Εἶναι ἕνας ἀθροιστής. Στό σχῆμα 9.3δ δίνεται τό συμβολικό διάγραμμα ἑνός ἀθροιστῆ μέ τρεῖς εἰσόδους.



Σχ. 9.3δ.
Συμβολικό διάγραμμα ἀθροιστῆ μέ τρεῖς εἰσόδους.



Σχ. 9.3ε.
Συμβολικό διάγραμμα ἀθροιστῆ μέ n εἰσόδους.

Παρατήρηση.

Στό κύκλωμά μας θεωρήσαμε τρεῖς μόνο ἀντιστάσεις εἰσόδου. Μέ τόν ἴδιο τρόπο θά μπορούσαμε νά ἐργασθοῦμε μέ τέσσερις ἤ περισσότερες ἀντιστάσεις. Π.χ. ἄν θεωρήσομε n ἀντιστάσεις εἰσόδου τίς R_1, R_2... R_n καί ἔστω V_1, V_2... V_n οἱ ἀντίστοιχες τάσεις εἰσόδου, θά ἔχομε:

$$V_S = -\left(\frac{R_F}{R_1} V_1 + \frac{R_F}{R_2} V_2 + \ldots + \frac{R_F}{R_n} V_n\right)$$

ἤ ἄν

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R_F$$

$$V_S = -(V_1 + V_2 + \ldots + V_n) \qquad (9.13)$$

Τό συμβολικό διάγραμμα τοῦ ἀθροιστῆ φαίνεται στό σχῆμα 9.3ε. Ἐάν τό κύκλωμα πραγματοποιεῖ καί ἐνίσχυση, τότε τό συμβολικό διάγραμμα τοῦ ἀθροιστῆ θά εἶναι τό διάγραμμα τοῦ σχήματος 9.3στ, ὅπου K_1, K_2...K_n εἶναι οἱ συντελεστές ἐνισχύσεως.

Σχ. 9.3στ.
Συμβολικό διάγραμμα ἀθροιστῆ μέ ἐνίσχυση.

9.3.3 *Κύκλωμα πολλαπλασιασμοῦ μέ σταθερά $K \leqslant 1$. Ποτενσιόμετρα.*

Στό κύκλωμα τοῦ ἀθροιστῆ εἴδαμε ὅτι γιά τή τάση ἐξόδου εἴχαμε:

$$V_S = -(K_1 . V_1 + K_2 . V_2 + K_3 . V_3),$$

ὅπου K_1, K_2 καί K_3 εἶναι σταθερές (συντελεστές) ἴσες ἀντίστοιχα μέ R_F / R_1, R_F / R_2 καί R_F / R_3.

Παρουσιάζεται ὅμως τό ἐρώτημα: πῶς μποροῦμε νά δημιουργήσομε συντελεστές μιᾶς ὁποιασδήποτε ἐπιθυμητῆς τιμῆς, ἀφοῦ οἱ ἀντιστάσεις πού κυκλοφοροῦν στό ἐμπόριο ἔχουν καθορισμένες τιμές;

Αὐτό τό πετυχαίνομε μέ τή χρήση ποτενσιομέτρων. Ἄς θεωρήσομε τό ποτενσιόμετρο τοῦ σχήματος 9.3ζ. Ἄν δεχθοῦμε ὅτι τό ρεῦμα ἐξόδου I εἶναι μηδέν, τότε ἔχομε:

$$I_1 = I_2$$

ἤ

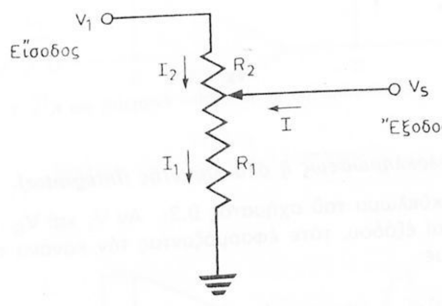
$$\frac{V_1 - V_S}{R_2} = \frac{V_S}{R_1}$$

ἤ

$$V_S = \frac{R_1}{R_1 + R_2} . V_1$$

ἤ

$$V_S = K . V_1 \quad \text{ὅπου} \quad K = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \leqslant 1$$

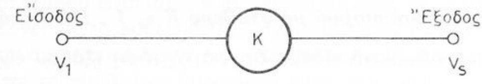


Σχ. 9.3ζ.
Ποτενσιόμετρο γιά δημιουργία συντελεστῆ.

Παρατηροῦμε συνεπῶς ὅτι μέ τή χρησιμοποίηση ἑνός ποτενσιομέτρου μποροῦμε νά δημιουργήσομε μιά σταθερά (ἕνα συντελεστή) μιᾶς ἐπιθυμητῆς τιμῆς. Ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς ἐξαρτᾶται ἀπό τίς τιμές τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_2 καί εἶναι μικρότερη ἤ ἴση μέ τή μονάδα: $K \leqslant 1$.

Τό συμβολικό διάγραμμα τοῦ κυκλώματος πολλαπλασιασμοῦ μέ μία σταθερά $K \leqslant 1$ παριστάνεται στό σχῆμα 9.3η.

Στήν περίπτωση πού θέλομε ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς K νά εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή

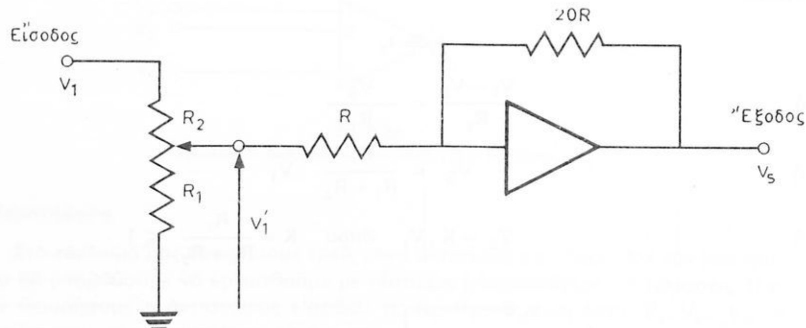


Σχ. 9.3η.
Συμβολικό διάγραμμα κυκλώματος πολλαπλασιασμοῦ μέ σταθερά $K \leqslant 1$.

μονάδα, $K > 1$, χρησιμοποιοῦμε ἕνα ποτενσιόμετρο, ὅπως προηγουμένως, σέ συνδυασμό μέ ἕνα κύκλωμα τελεστικοῦ ἐνισχυτῆ, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 9.3θ.

Ἀπό τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.3θ ἔχομε:

$$V_S = -20\,V_1' = -KV_1, \quad \text{ὅπου} \quad 0 \leqslant K \leqslant 20$$



Σχ. 9.3θ.
Ποτενσιόμετρο μέ τελεστικό ἐνισχυτή γιά $K > 1$.

9.3.4 Κύκλωμα ὁλοκληρώσεως ἤ ὁλοκληρωτῆς (Integrator).

Θεωροῦμε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.3ι. Ἄν V_1 καί V_S εἶναι ἀντίστοιχα οἱ τάσεις εἰσόδου καί ἐξόδου, τότε ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα τοῦ Kirchhoff στόν κόμβο Α, θά ἔχομε:

$$I_1 = I_F + I$$

Ἐπειδή $I = 0$, τότε:

$$I_1 = I_F$$

ἤ
$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} = C_F \, \frac{d\,(V_A - V_S)}{dt}$$

ἤ ἀφοῦ
$$V_S = -GV_A \rightarrow V_A = -\frac{V_S}{G}$$

ἤ $$V_1 + \frac{V_S}{G} = -R_1C_F \frac{d}{dt}\left(V_S + \frac{V_S}{G}\right)$$

ἤ ἀφοῦ τό G ἔχει μεγάλες τιμές, θά ἔχομε:

$$V_1 = -R_1C_F \frac{dV_S}{dt} \tag{9.14}$$

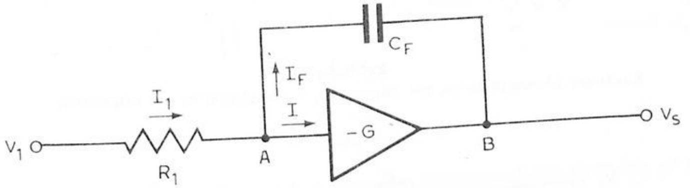
ἤ ἄν ὁλοκληρώσομε τήν (9.14) ἀπό t = 0 ὥς t = t τότε :

$$V_S(t) = -\frac{1}{R_1C_F}\int_0^t V_1(t)dt + V_S(0) \tag{9.15}$$

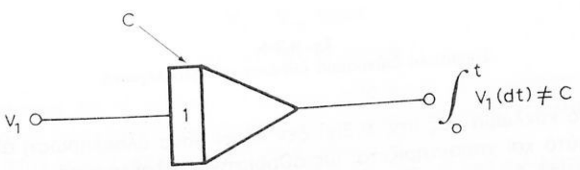
ὅπου V_S (0) ἡ σταθερά ὁλοκληρώσεως. Ἡ σταθερά αὐτή εἶναι ἡ ἀρχική τιμή τῆς τάσεως ἐξόδου. Ἄν δεχθοῦμε $V_S(0) = 0$, ἡ προηγούμενη σχέση (9.15) γίνεται:

$$V_S(t) = -\frac{1}{R_1C_F}\int_0^t V_1(t)\,dt \tag{9.16}$$

Δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου V_S τοῦ κυκλώματος τοῦ σχήματος 9.3θ εἶναι ἴση μέ τό ὁλοκλήρωμα τῆς τάσεως εἰσόδου πολλαπλασιασμένο μέ τή σταθερά $-1/R_1C_F$. Γι' αὐτό τό λόγο τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.3ι τό λέμε κύκλωμα ὁλοκληρώσεως ἤ ἁπλά ὁλοκληρωτῆ.



Σχ. 9.3ι.
Κύκλωμα ὁλοκληρώσεως ἤ ὁλοκληρωτής.

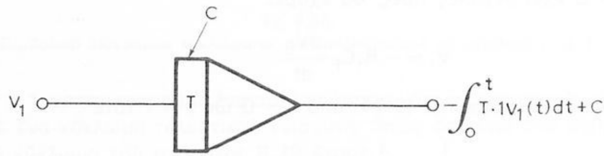


Σχ. 9.3ια.
Συμβολικό διάγραμμα ὁλοκληρωτῆ.

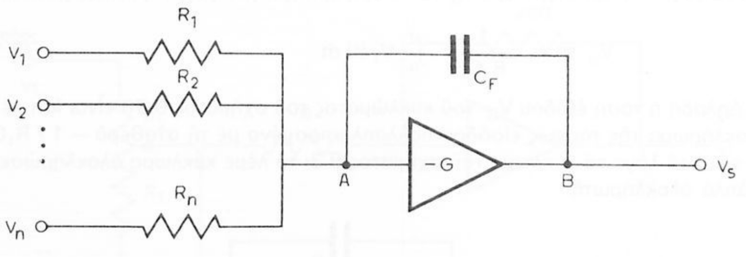
Στό σχῆμα 9.3ια δίνεται τό συμβολικό διάγραμμα ἑνός ὁλοκληρωτῆ καί στό σχῆμα 9.3ιβ δίνεται τό συμβολικό διάγραμμα ἑνός ὁλοκληρωτῆ μέ ἐνίσχυση, ὅπου C εἶναι ἡ σταθερά ὁλοκληρώσεως καί χαρακτηρίζει τίς ἀρχικές συνθῆκες.

Ἄν στήν εἴσοδο τοῦ παραπάνω κυκλώματος ὁλοκληρώσεως συνθέσομε περισσότερες ὠμικές ἀντιστάσεις (σχ. 9.3ιγ), τότε ἡ σχέση (9.16) γίνεται:

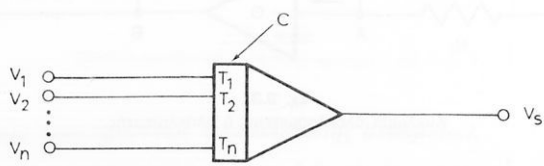
$$V_S(t) = -\frac{1}{R_1 C_F}\int_0^t V_1(t)\,dt - \frac{1}{R_2 C_F}\int_0^t V_2(t)\,dt - \ldots - \frac{1}{R_n C_F}\int_0^t V_n(t)\,dt + V_S(0)$$



Σχ. 9.3ιβ.
Συμβολικό διάγραμμα ὁλοκληρωτῆ μέ ἐνίσχυση.



Σχ. 9.3ιγ.
Κύκλωμα ὁλοκληρώσεως καί ἀθροίσεως ἤ ὁλοκληρωτής καί ἀθροιστής.



Σχ. 9.3ιδ.
Συμβολικό διάγραμμα ἀθροιστικοῦ ὁλοκληρωτῆ.

Δηλαδή τό κύκλωμά μας (σχ. 9.3ιγ) δέν κάνει μόνο ὁλοκλήρωση ἀλλά καί ἄθροιση γι' αὐτό καί χαρακτηρίζεται ὡς ἀθροιστικός ὁλοκληρωτής.

Τό συμβολικό διάγραμμα τοῦ ἀθροιστικοῦ ὁλοκληρωτῆ φαίνεται στό σχῆμα 9.3ιδ.

ὅπου $T_1 = -\dfrac{1}{R_1 C_F}$, $T_2 = -\dfrac{1}{R_2 C_F}$ ..., $T_n = -\dfrac{1}{R_n C_F}$ εἶναι σταθερές (συντελεστές) πού χαρακτηρίζουν τή λαμβανόμενη ἐνίσχυση καί C ἡ σταθερά ὁλοκληρώσεως $V_S(0)$ πού χαρακτηρίζει τίς ἀρχικές συνθῆκες.

9.3.5 Κύκλωμα διαφορίσεως ἤ διαφοριστής (Differentiator).

Θεωροῦμε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.3ιε. Ἂν V_1 καί V_S εἶναι ἀντίστοιχα οἱ τάσεις εἰσόδου καί ἐξόδου καί ἐφαρμόσομε τόν κανόνα τοῦ Kirchhoff στόν κόμβο Α, θά ἔχομε:

$$I_1 = I + I_F$$

Ἀφοῦ, $I = 0$, ἔχομε:

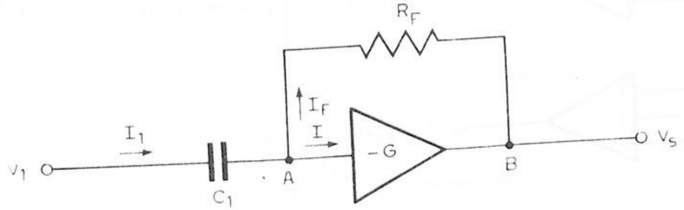
$$I_1 = I_F$$

ἤ

$$C_1 \frac{d\,(V_1 - V_A)}{dt} = \frac{V_A - V_S}{R}$$

ἤ ἀφοῦ $V_S = -GV_A$ καί G πολύ μεγάλο, θά ἔχομε:

$$V_S = -RC_1 \frac{dV_1}{dt} \qquad (9.17)$$



Σχ. 9.3ιε.
Κύκλωμα διαφοριστή.

Δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου τοῦ κυκλώματος τοῦ σχήματος 9.3ιε εἶναι ἴση μέ τήν παράγωγο τῆς τάσεως εἰσόδου, πολλαπλασιασμένη μέ τή σταθερά $-RC_1$. Γι αὐτό τό λόγο τό κύκλωμα αὐτό τό λέμε κύκλωμα διαφορίσεως ἤ ἁπλά διαφοριστή.

Ἂν θεωρήσομε ὅτι ἡ V_1 στήν εἴσοδο εἶναι μία ἡμιτονική τάση, δηλαδή

$$V_1 = V_m \text{ ημ}\omega t,$$

ἔχομε

$$V_S = -RC\,\omega \text{ συν}\omega t$$

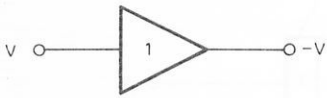
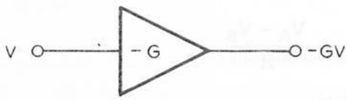
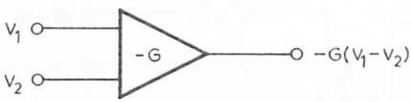
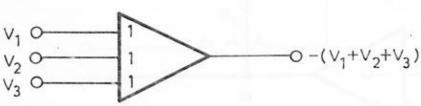
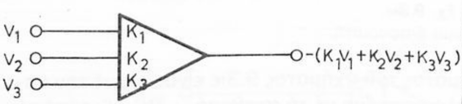
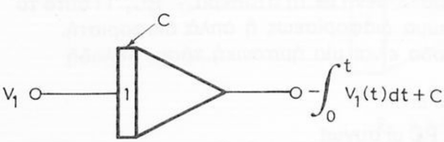
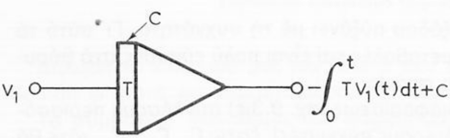
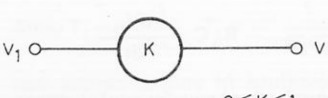
Παρατηροῦμε ὅτι τό πλάτος τῆς ἐξόδου αὐξάνει μέ τή συχνότητα. Γι' αὐτό τό κύκλωμα αὐτό ἐνισχύει τίς ἀπότομες μεταβολές καί εἶναι πολύ εὐπαθές στό θόρυβο. Ἔτσι στήν πράξη χρησιμοποιεῖται σπάνια.

Ἂν στήν εἴσοδο τοῦ κυκλώματος διαφορίσεως (σχ. 9.3ιε) συνδέσομε περισσότερες χωρητικές ἀντιστάσεις (περισσότερους πυκνωτές), ἔστω $C_1, C_2 \ldots C_n$ τότε θά ἔχομε:

$$V_S\,(t) = -R_1 C_1 \frac{dV_1}{dt} - R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt} - \ldots - R_n C_n \frac{dV_n}{dt}$$

Στόν Πίνακα 9.3.1 δίνονται τά σύμβολα τῶν βασικῶν ἀναλογικῶν κυκλωμάτων πού ἐξετάσαμε στό κεφάλαιο αὐτό.

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.3.1.
ΣΥΜΒΟΛΙΚΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ (Ή ΑΠΛΩΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ) ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

<table>
<tr><th>ΣΥΜΒΟΛΟ</th><th>ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Ἀναστροφέας</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Τελεστικός ἐνισχυτής</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Τελεστικός ἐνισχυτής δύο εἰσόδων</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ἀθροιστής</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ἀθροιστής μέ ἐνίσχυση</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ὀλοκληρωτής</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ὀλοκληρωτής μέ ἐνίσχυση</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Πολλαπλασιαστής μέ σταθερά (συντελεστή) πού εἶναι μικρότερη ἀπό τή μονάδα</td></tr>
</table>

9.4 Εἰδικά ἀναλογικά κυκλώματα.

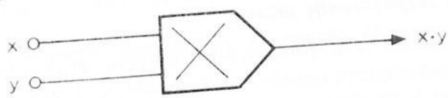
Ὅπως ἤδη ἀναφέραμε στά προηγούμενα, ὁ τελεστικός ἐνισχυτής ἀποτελεῖ τό κυριότερο κύκλωμα ἑνός ἀναλογικοῦ ὑπολογιστῆ. Ἐκτός ὅμως ἀπό τό βασικό αὐτό κύκλωμα ἕνας ἀναλογικός ὑπολογιστής χρησιμοποιεῖ καί ἄλλα εἰδικά κυκλώματα, π.χ. κυκλώματα πού μποροῦν νά πραγματοποιοῦν τίς πράξεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τῆς διαιρέσεως, ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ρίζας κλπ. Ἐπίσης χρησιμοποιεῖ κυκλώματα παραγωγῆς συναρτήσεων.

Στά ἑπόμενα θά ἀναφέρομε μερικές βασικές ἔννοιες γιά τά κυκλώματα πολλαπλασιασμοῦ (ἤ ἁπλῶς πολλαπλασιαστές) καί τίς ἐφαρμογές τους, κυκλώματα διαιρέσεως (ἤ διαιρέτες) καί κυκλώματα ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ρίζας.

9.4.1 *Πολλαπλασιαστές (Multipliers).*

Ὑπάρχουν βασικά δύο τύποι πολλαπλασιαστῶν: Οἱ ἠλεκτρονικοί (Electronic Multipliers) καί οἱ σερβοπολλαπλασιαστές (Servo Multipliers).

Οἱ ἠλεκτρονικοί πολλαπλασιαστές εἶναι περισσότερο γρήγοροι καί περισσότερο ἀκριβεῖς ἀπό τούς σερβοπολλαπλασιαστές. Τό συμβολικό διάγραμμα ἑνός πολλαπλασιαστῆ φαίνεται στό σχῆμα 9.4α.

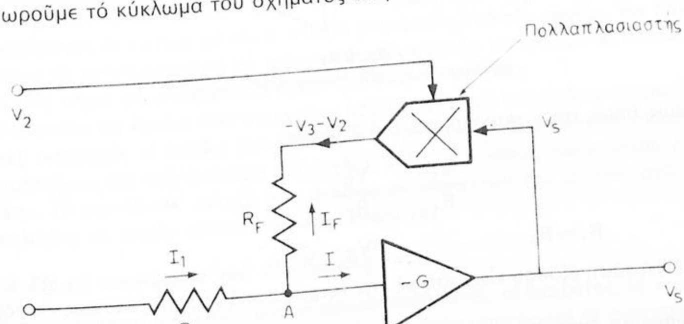


Σχ. 9.4α.
Συμβολικό διάγραμμα πολλαπλασιαστῆ.

Τόν πολλαπλασιαστή μποροῦμε νά τόν χρησιμοποιήσομε σέ συνδυασμό μέ ἕναν τελεστικό ἐνισχυτή καί νά κατασκευάσομε ἄλλα κυκλώματα ὅπως τό κύκλωμα διαιρέσεως ἤ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ρίζας.

9.4.2 *Κύκλωμα διαιρέσεως.*

Θεωροῦμε τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.4β ὅπου στόν κλάδο ἀνασυζεύξεως ἔ-



Σχ. 9.4β.
Κύκλωμα διαιρέσεως.

χομε τοποθετήσει ἕνα πολλαπλασιαστή. Ἄν ἐφαρμόσομε τό νόμο τοῦ Kirchhoff στόν κόμβο A θά ἔχομε:

$$I_1 = I + I_F$$

Δεδομένου ὅτι δεχόμασθε $I = 0$, τότε $I_1 = I_F$ καί

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_S \cdot V_2}{R_F}$$

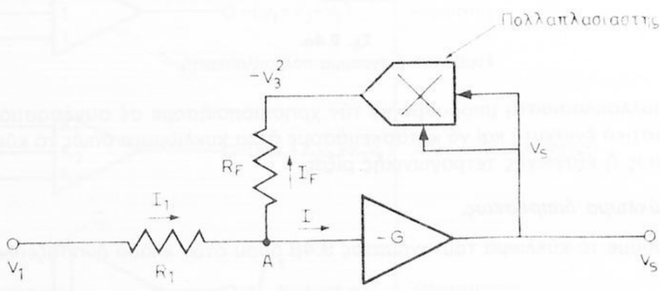
ἤ
$$V_S = \frac{R_F}{R_1} \cdot \frac{V_1}{V_2}$$

ἤ ἄν $R_F = R_1$
$$V_S = \frac{V_1}{V_2}$$

Δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου εἶναι ἴση μέ τό πηλίκο τῶν τάσεων V_1, V_2 στήν εἴσοδο τοῦ κυκλώματος τοῦ σχήματος 9.4β.

9.4.3 Κυκλώματα τετραγωνικῆς ρίζας.

Τό κύκλωμα ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ρίζας φαίνεται στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.4γ.



Σχ. 9.4γ.
Κύκλωμα ἐξαγωγῆς τετραγωνικῆς ρίζας.

Ὁμοίως ὅπως στήν παράγραφο 9.4.2 ἔχομε:

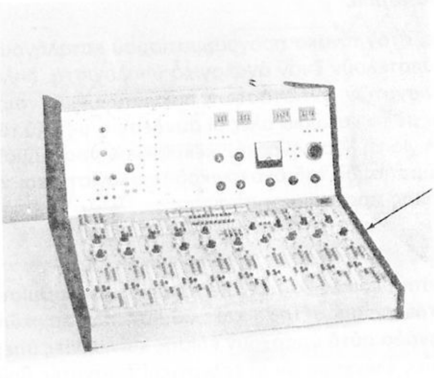
$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_S^2}{R_F}$$

ἤ ἄν $R_1 = R_F$
$$V_S = \sqrt{V_1}$$

Δηλαδή ἡ τάση ἐξόδου εἶναι ἴση μέ τήν τετραγωνική ρίζα τῆς τασεως εἰσόδου.

9.5 Ὀργάνωση ἑνός ἀναλογικοῦ ὑπολογιστῆ.

Στήν παράγραφο αὐτή θά περιγράψομε περιληπτικά τήν ὀργάνωση ἑνός ἀναλο-



Σχ. 9.4δ.

γικοῦ ὑπολογιστῆ καί τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο συνεργάζονται οἱ διάφορες μονάδες πού τόν ἀποτελοῦν γιά τή λύση ἑνός προβλήματος. Τά κύρια στοιχεῖα καί οἱ κύριες μονάδες πού συγκροτοῦν ἕναν ἀναλογικό ὑπολογιστή εἶναι:

9.5.1 Τελεστικοί ἐνισχυτές. Ἀντιστάσεις. Πυκνωτές. Ποτενσιόμετρα.

Ὁ τελεστικός ἐνισχυτής ἀποτελεῖ τό βασικότερο στοιχεῖο ἑνός ἀναλογικοῦ ὑπολογιστῆ. Μέ αὐτόν μποροῦμε νά ἐκτελέσομε πρόσθεση ἤ ἀφαίρεση σημάτων, πολλαπλασιασμό ἑνός σήματος μέ μία σταθερά καί ἐπίσης ὁλοκλήρωση ἤ διαφόριση σημάτων. Μέ τίς πράξεις αὐτές καί μέ τή βοήθεια τῶν πολλαπλασιαστῶν μποροῦμε νά λύσομε διαφορικές ἐξισώσεις (γραμμικές ἤ μή). Ἕνας ἀναλογικός ὑπολογιστής ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα σύνολο τελεστικῶν ἐνισχυτῶν, οἱ περισσότεροι ἀπό τούς ὁποίους διαθέτουν πολλές εἰσόδους.

Ἕνας ἀναλογικός ὑπολογιστής φέρει ἐπίσης μία σειρά ἀπό ἀντιστάσεις (μέ τίς ὁποῖες πετυχαίνομε ποικίλες ἐνισχύσεις) καί ἕνα σύνολο πυκνωτῶν τούς ὁποίους χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ὁλοκλήρωση σημάτων.

Μέ τά ποτενσιόμετρα πού φέρει ὁ ἀναλογικός ὑπολογιστής μποροῦμε νά πολλαπλασιάσομε ἕνα σῆμα μέ μία σταθερά μικρότερη ἀπό τή μονάδα. Ἄν ὅμως συνδυάσομε τά ποτενσιόμετρα μέ τελεστικούς ἐνισχυτές, μποροῦμε νά πολλαπλασιάσομε ἕνα σῆμα μέ σταθερά μεγαλύτερη ἀπό τή μονάδα.

Οἱ εἴσοδοι καί ἔξοδοι τῶν στοιχείων πού ἀναφέραμε παραπάνω τερματίζουν σέ εἰδικές ὑποδοχές οἱ ὁποῖες βρίσκονται σ' ἕναν πίνακα πού λέγεται πίνακας προγραμματισμοῦ καί πού φαίνεται στό σχῆμα 9.4δ. Ὁ πίνακας αὐτός ἀναφέρεται παρακάτω. Οἱ συνδέσεις μεταξύ τῶν διαφόρων στοιχείων τοῦ ὑπολογιστῆ γίνονται μέ καλώδια τά ὁποῖα εἰσάγονται στίς ὑποδοχές.

9.5.2 Εἰδικά κυκλώματα τοῦ ὑπολογιστῆ.

Στά κυκλώματα αὐτά ἀνήκουν οἱ πολλαπλασιαστές, οἱ διαιρέτες, τό κύκλωμα ὑπολογισμοῦ τετραγωνικῆς ρίζας κλπ. Οἱ πολλαπλασιαστές καί οἱ διαιρέτες χρησιμοποιοῦνται ἀντίστοιχα γιά τόν πολλαπλασιασμό καί τή διαίρεση σημάτων, ἐνῶ τό κύκλωμα ὑπολογισμοῦ τετραγωνικῆς ρίζας γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τετραγωνικῆς ρίζας.

9.5.3 Πίνακας προγραμματισμοῦ.

Ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, στόν πίνακα προγραμματισμοῦ καταλήγουν οἱ ἀκροδέκτες τῶν στοιχείων πού ἀποτελοῦν ἕναν ἀναλογικό ὑπολογιστή, δηλαδή οἱ ἀκροδέκτες τῶν τελεστικῶν ἐνισχυτῶν, ἀντιστάσεων, πυκνωτῶν, ποτενσιομέτρων κλπ. Στόν πίνακα αὐτό γίνονται μέ τά καλώδια ὅλες οἱ συνδέσεις μεταξύ τῶν διαφόρων στοιχείων τοῦ ὑπολογιστῆ γιά τή λύση ἑνός συγκεκριμένου προβλήματος. Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται προγραμματισμός τοῦ ἀναλογικοῦ ὑπολογιστῆ καί γι' αὐτό καί ὁ πίνακας ὀνομάσθηκε πίνακας προγραμματισμοῦ.

9.5.4 Μονάδα ἐλέγχου.

Στή μονάδα αὐτή γίνονται μερικές βασικές λειτουργίες καί ρυθμίσεις ὅπως π.χ. ρύθμιση τῶν ποτενσιομέτρων, τοποθέτηση καί ρύθμιση τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν (ὁλοκλήρωση) κλπ. Στή μονάδα αὐτή ὑπάρχουν ἐπίσης καί λυχνίες ὑπερφορτίσεως τῶν ἐνισχυτῶν μέ τίς ὁποῖες ἐλέγχομε ἄν οἱ τελεστικοί ἐνισχυτές βρίσκονται στό δυναμικό κόρου. Γενικά μέ τή μονάδα αὐτή καθορίζομε καί ἐλέγχομε τίς διάφορες λειτουργίες τίς ὁποῖες μπορεῖ νά πραγματοποιήσει ἕνας ἀναλογικός ὑπολογιστής.

9.5.5 Μονάδα τροφοδοσίας.

Ἡ μονάδα αὐτή παρέχει στούς τελεστικούς ἐνισχυτές καί στίς ὑπόλοιπες μονάδες τίς τάσεις πού ἀπαιτοῦνται γιά τή λειτουργία τοῦ ἀναλογικοῦ ὑπολογιστῆ.

Στό σχῆμα 9.4δ ἀπεικονίζεται ἕνας ἀναλογικός ὑπολογιστής ὁ ὁποῖος κατασκευάστηκε στό Κ.Π.Ε. Δημόκριτος.

9.6 Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.

Δίνεται τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.6α ὅπου $V_1 = 1{,}0$ Volt, $V_2 = 0{,}5$ Volt, $V_3 = -1{,}0$ Volt, $V_4 = 1{,}2$ Volt καί $V_5 = -0{,}9$ Volt. Ἐπίσης $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 2\ k\Omega$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τάση ἐξόδου V_S.

Ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα τοῦ Kirchhoff στόν κόμβο Α, θά ἔχομε:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = I_6$$

ἤ
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_4}{R_4} + \frac{V_5}{R_5} = \frac{V_S}{R_6}$$

ἤ
$$V_S = -V_1\frac{R_6}{R_1} + V_2\frac{R_6}{R_2} + V_3\frac{R_6}{R_3} + V_4\frac{R_6}{R_4} + V_5\frac{R_6}{R_5}$$

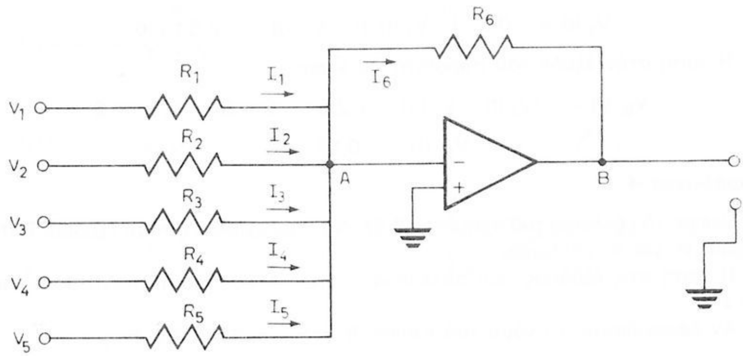
ἤ ἀντικαθιστώντας τίς παραπάνω τιμές.

$$V_S = -[5 + 2{,}5 - 5 + 6 - 4{,}5] = 4{,}0 \text{ Volt}$$

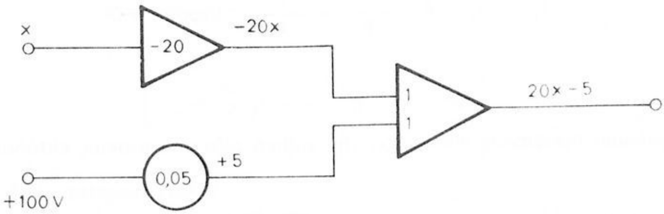
Παράδειγμα 2.

Νά σχεδιασθεῖ ἕνα ἀναλογικό κύκλωμα γιά τήν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως: $y = 20x - 5$.

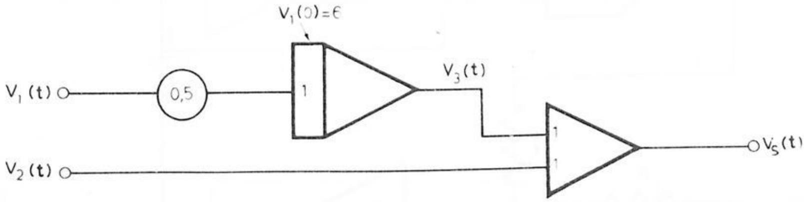
Τό δεύτερο μέλος τῆς ἐξισώσεώς μας, δηλαδή τό $20x - 5$ περιέχει τούς ὅρους



Σχ. 9.6α.
Κύκλωμα γιά παράδειγμα 1.



Σχ. 9.6β.
Κύκλωμα γιά παράδειγμα 2.



Σχ. 9.6γ.
Κύκλωμα γιά παράδειγμα 3.

20x καί − 5, οἱ ὁποῖοι προστιθέμενοι μᾶς δίνουν τήν τιμή τῆς y. Θά πρέπει λοιπόν νά δημιουργήσομε τούς ὅρους 20x καί −5 καί στή συνέχεια νά τούς προσθέσομε. Τό κύκλωμα πού μᾶς ζητεῖται ὅπως εὔκολα μπορεῖ νά ἀντιληφθεῖ κανείς, εἶναι τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.6β.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται τό ἀναλογικό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.6γ. Ἐάν V_1 (t) = 5 Volt μέ ἀρχική συνθήκη V_1 (0) = 6 Volt καί V_2 (t) = 3 t μέ ἀρχική συνθήκη V_2 (t) = 0 Volt, ζητεῖται νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἔξοδος V_S τῆς κυκλώματος.

Ἡ τάση στήν ἔξοδο τοῦ ὁλοκληρωτῆ θά εἶναι:

$$V_3(t) = -0{,}5 \int_0^t V_1(t)\,dt - V_1(0) = -2{,}5\,t - 6$$

Ἡ τάση στήν ἔξοδο τοῦ ἀθροιστῆ θά εἶναι:

$$V_S(t) = -[V_3(t) + V_2(t)] = +2{,}5\,t + 6 - 3\,t = 0{,}5\,t + 6$$

$$V_S(t) = -0{,}5\,t + 6$$

Παράδειγμα 4.

Δίνεται τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.6δ. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τάση ἐξόδου. Τί συμπεραίνετε γιά τό κύκλωμα;

Ἡ τάση στίς ἐξόδους τῶν πολλαπλασιαστῶν 1 καί 2 ἀντίστοιχα θά εἶναι z^2 καί z^3.

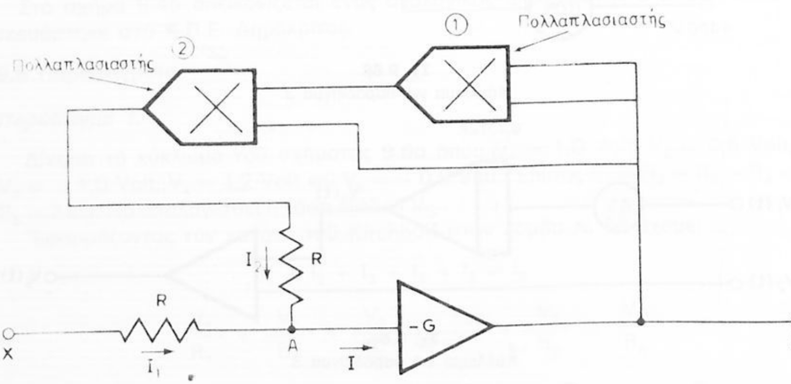
Ἄν ἐφαρμόσομε τό νόμο τοῦ Kirchhoff στόν κόμβο Α, θά ἔχομε:

$$I_1 + I_2 = I$$

ἤ $\quad I_1 = -I_2 \quad$ ἤ $\quad \dfrac{x}{R} = \dfrac{z^3}{R} \quad$ (ἀφοῦ $I = 0$)

ἤ $\quad z^3 = x \quad$ ἤ $\quad z = \sqrt[3]{x}$

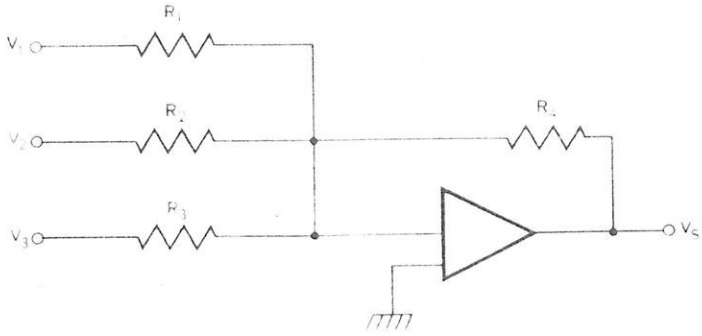
Τό κύκλωμα προφανῶς ὑπολογίζει τήν κυβική ρίζα τῆς τάσεως εἰσόδου.



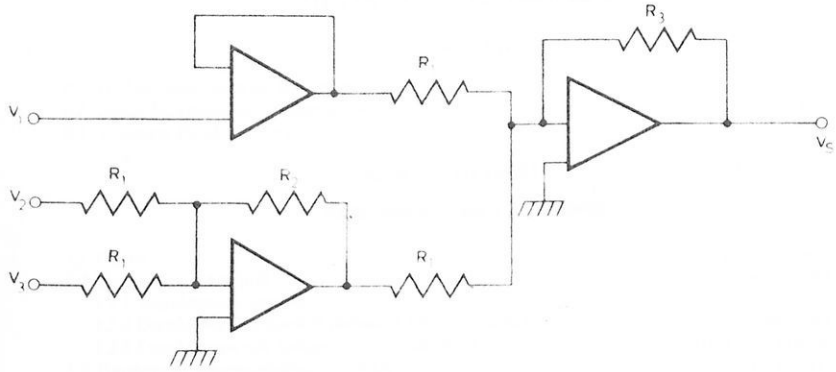
Σχ. 9.6δ.

9.7 Ἀσκήσεις.

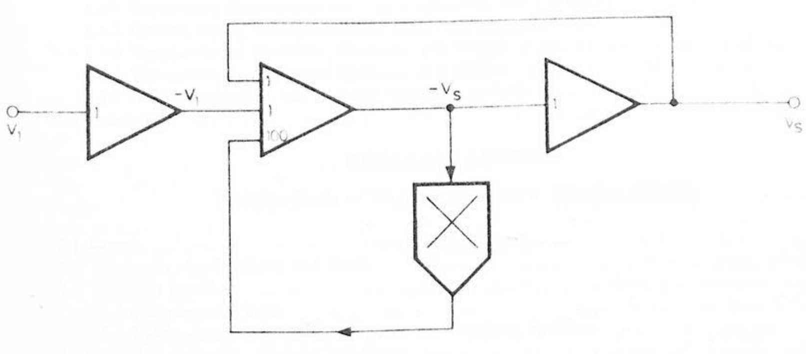
1. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τάση ἐξόδου V_S στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.7α. Δίνεται $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 5$ kΩ, $R_3 = 20$ kΩ, $R_4 = 20$ kΩ, $V_1 = 0{,}02$ Volt, $V_2 = 0{,}22$ Volt καί $V_3 = 1{,}0$ Volt.
2. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τάση ἐξόδου V_S στό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.7β. Δίνεται $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 50$ kΩ καί $R_3 = 100$ kΩ, $V_1 = 2{,}2$ Volt, $V_2 = 0{,}05$ Volt καί $V_3 = 0{,}1$ Volt.
3. Δίνεται τό ἀναλογικό κύκλωμα τοῦ σχήματος 9.7γ. Νά εὑρεθεῖ ἡ V_S. Τί συμπεραίνετε γιά τό κύκλωμα;



Σχ. 9.7α.



Σχ. 9.7β.



Σχ. 9.7γ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Ἀριθμητικά συστήματα (προσθῆκες)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ἄλγεβρα Boole — Ἄλγεβρα Συνόλων — Ἄλγεβρα Λογικῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Ἄλγεβρα διακοπτῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Λογικά κυκλώματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Λογικές συναρτήσεις — 'Απλοποίηση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Πολυδονητές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

Καταχωρητές — 'Απαριθμητές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

Βασικές μονάδες καί ἀρχιτεκτονική ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ

Στοιχεῖα ἀναλογικῶν ὑπολογιστῶν

ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ