ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Γ.' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ
ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1967

Δ 2 ΜΠΙ

Νικολάου (Νικόλαος Δ.)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Γ/Λ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Νικολάου (Νικόλαος Δ)

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου Διδάκτορος
καὶ τέως Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

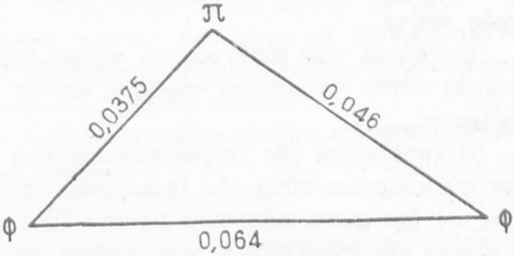
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1967

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. *Πρόβλημα.* **Δύο φάροι ἀπέχουσιν ἀλλήλων 6400 μέτρα. Κατά τινα στιγμὴν ἀπὸ τὸν ἕνα φάρον Φ ἐφάνη ὑπὸ γωνίαν 45⁰ ἡ ἀπόστασις πλοίου Π ἀπὸ τὸν ἄλλον φάρον Φ΄. Τὴν αὐτὴν δὲ στιγμὴν ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ τὸν Φ ἐφάνη ἀπὸ τὸν Φ΄ ὑπὸ γωνίαν 30⁰. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ ἕκαστον φάρον τὴν στιγμὴν ἐκείνην.**

Λύσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον πφφ΄ ὅμοιον πρὸς τὸ νοητὸν γωνον ΠΦΦ΄ ὑπὸ κλιμακα π.χ. 1 : 100 000 (σχ. 1). Μετροῦμεν ἔπειτα τὰς πλευρὰς φπ καὶ φ΄π αὐτοῦ. Ἔστω δὲ ὅτι (φπ) = 0,0375 μέτ. καὶ (φ΄π) = 0,046 μέτ. Κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Γεωμετρίας θὰ εἶναι :



Σχ. 1

$$(\text{ΦΠ}) = 0{,}0375 \times 100\,000 = 3\,750 \text{ μέτρα}$$

καὶ

$$(\text{Φ΄Π}) = 0{,}046 \times 100\,000 = 4\,600 \text{ μέτρα}$$

2. Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας. Ἡ προηγουμένη γραφικὴ λύσις τῶν τοιούτων προβλημάτων δίδει πολλάκις ἐξαγόμενον μὲ σημαντικὰ σφάλματα. Διότι τὰ κατασκευαζόμενα σχήματα καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῆς μετρήσεως διαφόρων στοιχείων αὐτῶν δὲν εἶναι πάντοτε ἀκριβῆ ἢ ἕνεκα ἀτελείας τῶν ὀργάνων, μὲ τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται ἢ καὶ ἕνεκα ἀδεξίας χρήσεως αὐτῶν.

Τὰ σφάλματα δὲ ταῦτα εἶναι σημαντικά, ὅταν γίνωνται κατασκευαὶ γωνιῶν καὶ ἐνισχύονται, ὅταν γίνηται χρῆσις ὁμοίων σχημάτων. Ἂν π.χ. τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς φπ εὑρεθῇ μὲ σφάλμα 0,01 μέτ. ἡ εὑρεθεῖσα ἀπόστασις (ΦΠ) θὰ ἔχῃ σφάλμα :

$$0{,}01 \cdot 100\,000 = 1\,000 \text{ μέτρα.}$$

Διὰ τὴν ἀποφυγὴν τοιούτων σφαλμάτων οἱ Μαθηματικοὶ ἐπενόησαν μέθοδον καθαρῶς λογιστικήν.

Δι᾽ αὐτῆς δύνανται νὰ ὑπολογίζωσι τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ ἐπαρκῆ δεδομένα. Εἰς τὸ προηγούμενον π.χ. πρόβλημα εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίζωνται ἀμέσως αἱ ζητούμεναι ἀποστάσεις (ΦΠ) καὶ (Φ'Π) χωρὶς νὰ γίνῃ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου φπφ'.

Ἡ ἔκθεσις τῶν μεθόδων τούτων ἀποτελεῖ τὸν σκοπὸν τῆς **Τριγωνομετρίας**. Ὥστε :

Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, ἂν δοθῶσιν ἐπαρκῆ στοιχεῖα πρὸς τοῦτο.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα ἀναλύεται εἰς τρίγωνα, ὁ σκοπὸς οὗτος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς πάντα τὰ εὐθύγραμμα σχήματα.

Ἡ χρησιμότης τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι μεγάλη. Διότι ὄχι μόνον συμπληρώνει αὕτη τὴν Γεωμετρίαν εἰς πολλὰ ζητήματα, ἀλλὰ λύει καὶ ζητήματα ἀπρόσιτα εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ὅπως π.χ. εἶναι ἡ εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως ἑνὸς ἀστέρος ἀπὸ τὴν Γῆν.

Διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὰς μεθόδους, μὲ τὰς ὁποίας ἡ Τριγωνομετρία ἐκτελεῖ τὸν σκοπόν της, πρέπει πρῶτον νὰ μάθωμεν μερικὰς προκαταρκτικὰς γνώσεις. Ταύτας ἐκθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ, ΤΟΞΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ.

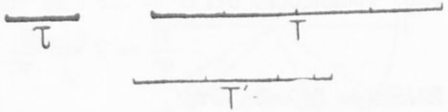
3. Μέτρησις εὐθυγράμμου τμήματος. Λόγος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς ἄλλο. Διὰ νὰ μετρήσωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα.

Τὸ ὡρισμένον τοῦτο εὐθύγραμμον τμῆμα λέγεται **μονάς.**

Ἀπὸ δὲ τὴν σύγκρισιν ταύτην προκύπτει εἷς ἀριθμός. Οὗτος λέγεται **μῆκος** τοῦ μετρηθέντος τμήματος καὶ φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τοῦτο.

Αἱ δὲ μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, λέγονται **μονάδες μήκους.**

Διεθνεῖς μονάδες μήκους εἶναι τὸ μέτρον καὶ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ.



Σχ. 2

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Τ (σχ. 2) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τ, ἂν ληφθῇ 4 φοράς. Δι' αὐτὸ τὸ Τ λέγεται **γινόμενον** τοῦ τ ἐπὶ 4, ἤτοι εἶναι:

$$T = \tau \cdot 4 \qquad (1)$$

Τὸ δὲ τ εἶναι $\frac{1}{4}$ τοῦ Τ.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Τ΄ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα ἴσα πρὸς τὸ τ, ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ.

Δι' αὐτὸ τὸ Τ΄ λέγεται γινόμενον τοῦ τ ἐπὶ $\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$.

Εἶναι δηλαδὴ $T' = \tau \cdot \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ (2)

Παρατηροῦντες ὅτι : $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ καὶ $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, καταλήγομεν εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Γινόμενον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἐξ αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὅπως ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ὁ ἀριθμὸς 4 τῆς ἄνω ἰσότητος (1) λέγεται **λόγος** τοῦ Τ πρὸς τὸ τ. Ὥστε :

Λόγος εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς ἄλλο λέγεται ὁ ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον εὐθύγραμμον τμῆμα διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον.

Ὁ λόγος τοῦ Τ πρὸς τὸ τ σημειοῦται οὕτω :

$$T : \tau \text{ ἢ } \frac{T}{\tau}$$

Ὁ λόγος εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς ἄλλο εἶναι ἀκέραιος ἢ κλάσμα, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα. Δύναται ὅμως νὰ εἶναι καὶ ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Οὕτως, ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ δ ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου, γνωρίζομεν ὅτι $\delta^2 = 2\alpha^2$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} = 2 \text{ καὶ } \frac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}$$

Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι :

Λόγος τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{2}$.

4. Μέτρησις καὶ μέτρον τόξου. Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν τόξον, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ἓν ὡρισμένον τόξον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς **μονὰς τῶν τόξων.**

Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης προκύπτει εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος λέγεται **μέτρον** τοῦ μετρηθέντος τόξου. Οὗτος φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ τόξον τοῦτο.

Τὸ μέτρον τόξου Τ σημειώνομεν συντόμως οὕτω : $\left(\overset{\frown}{T}\right)$.

5. Μονάδες τόξων. Συνήθεις μονάδες τόξων εἶναι αἱ ἑξῆς:

α′) *Ἡ μοῖρα* (^{0}), ἤτοι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας. Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτὰ* (′). Ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 *δεύτερα λεπτὰ* (″).

β′) *Ὁ βαθμός*, ἤτοι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτά*. Ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 100 *δεύτερα λεπτά*. Ἓν μέτρον π.χ. 25 βαθμῶν καὶ 35 πρώτων λεπτῶν σημειοῦται οὕτως: $25^{\gamma},35$.

γ′) *Τὸ ἀκτίνιον τόξον*, ἤτοι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Ἂν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος, α θὰ εἶναι καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀκτινίου τόξου. Ἑπομένως τὸ μέτρον τῆς περιφερείας εἶναι $2\pi\alpha : \alpha = 2\pi$ ἀκτίνια. Τῆς ἡμιπεριφερείας $\pi\alpha : \alpha = \pi$, τοῦ τετάρτου περιφερείας $\frac{\pi}{2}$ κ.τ.λ.

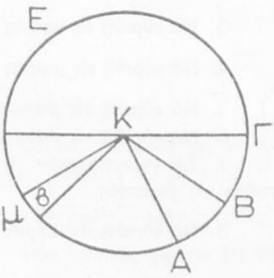
6. Σχέσεις τῶν μέτρων τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἔστωσαν δύο τόξα ΑΒ καὶ ΓΕΔ περιφερείας Κ (σχ. 3). Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ ΓΕΔ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ ΑΒ, ἤτοι

$$\widehat{\Gamma E\Delta} : \widehat{AB} = 6. \qquad (1)$$

Ἂν ἡ μονὰς μ τῶν τόξων χωρῇ λ φορὰς εἰς τὸ $\widehat{AB}$, εἰς τὸ $\widehat{\Gamma E\Delta}$ θὰ χωρῇ 6λ φοράς. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$(\widehat{\Gamma E\Delta}) = 6\lambda \text{ καὶ } (\widehat{AB}) = \lambda.$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι:



Σχ. 3

$$(\widehat{\Gamma E\Delta}) = (\widehat{AB}) \cdot 6 \text{ καὶ ἑπομένως } (\widehat{\Gamma E\Delta}) : (\widehat{AB}) = 6.$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) προκύπτει ἡ ἰσότης:

$$\widehat{\Gamma E\Delta} : \widehat{AB} = (\widehat{\Gamma E\Delta}) : (\widehat{AB}), \text{ ἤτοι:}$$

Ὁ λόγος ἑνὸς τόξου πρὸς ἄλλο ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ μέτρου τοῦ α′ πρὸς τὸ μέτρον τοῦ β′, ἂν ταῦτα μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἔστωσαν ἤδη μ, β, α τὰ μέτρα ἑνὸς τόξου ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἡμιπεριφέρεια $\widehat{\Gamma E\Delta}$ ἔχει μέτρα 180^0, 200^γ, π ἀκτίνια. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, θὰ εἶναι :

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{\Gamma E\Delta}} = \frac{\mu}{180}, \quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{\Gamma E\Delta}} = \frac{\beta}{200} \text{ καὶ } \frac{\widehat{AB}}{\widehat{\Gamma E\Delta}} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι :

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi} \qquad (2)$$

Διὰ τῶν σχέσεων τούτων, ἂν δοθῇ ἓν ἐκ τῶν τριῶν μέτρων τόξου, εὑρίσκομεν τὰ ἄλλα δύο. Ἂν π.χ. $\mu = 54^0$, εὑρίσκομεν ὅτι $\beta = 54 \cdot \frac{200}{180} = 60^\gamma$ καὶ $\alpha = 54 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{10}$ ἀκτίνια.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου 40^0 ἢ 30^0.
2. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου 60^0 ἢ 80^0.
3. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου 50^γ ἢ 30^γ.
4. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας καὶ βαθμοὺς τὸ μέτρον τόξου $\frac{3\pi}{2}$ ἀκτινίων.
5. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον $40^0\ 20'$.
6. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον τόξου $50^0\ 30'\ 40''$.
7. Τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τῶν Ἀθηνῶν εἶναι $37^0\ 58'\ 20''$. Νὰ ἐκτιμηθῇ τοῦτο εἰς βαθμούς.
8. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας καὶ βαθμοὺς τὸ μέτρον τόξου $\frac{5\pi}{8}$ ἀκτινίων.

7. Μέτρησις καὶ μέτρον γωνίας. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὴν πρὸς μίαν ὡρισμένην γωνίαν. Αὕτη λέγεται **μονὰς τῶν γωνιῶν**.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν προκύπτει εἷς ἀριθμός. Αὐτὸς λέγεται **μέτρον** τῆς μετρηθείσης γωνίας φανερώνει δὲ ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ γωνία αὕτη·

Τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας ΑΒΓ γράφεται οὕτω : $(\widehat{AB\Gamma})$. Ὡς μονὰς δὲ τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Οὕτως, ἂν μ εἶναι ἡ μονὰς τῶν τόξων (σχ. 3), μονὰς τῶν γωνιῶν θὰ εἶναι ἡ γωνία β.

Ἂν μονὰς μ εἶναι ἡ μοῖρα ἢ ὁ βαθμὸς ἢ τὸ ἀκτίνιον, ἡ μονὰς β τῶν γωνιῶν θὰ λέγηται ἀντιστοίχως γωνία μιᾶς μοίρας ἢ ἑνὸς βαθμοῦ ἢ ἑνὸς ἀκτινίου.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι :

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (ἢ εἰς ἴσους κύκλους) εἰς ἴσα τόξα βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐκ τούτου δὲ ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι :

Ἂν ἓν τόξον AB εἶναι **διπλάσιον, τριπλάσιον** κ.τ.λ. ἄλλου τόξου μ, καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AKB}$ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως **διπλασία, τριπλασία** κ.τ.λ. τῆς β (σχ. 3). Εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\widehat{AKB}}{\beta} = \frac{\widehat{AB}}{\mu} \quad \text{ἢ} \quad (\widehat{AKB}) = (\widehat{AB})$$

Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι ὑπὸ τὰς προηγουμένας προϋποθέσεις :

Τὸ μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ ἰσότητες 2 (§ 6) ἀληθεύουσι καὶ ἂν μ, β, α εἶναι μέτρα γωνίας.

Ἀσκήσεις

9. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια.

10. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ἡμισείας ὀρθῆς εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια.

11. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας, βαθμοὺς καὶ ἀκτίνια τὸ μέτρον $\frac{1}{4}$ ὀρθῆς γωνίας.

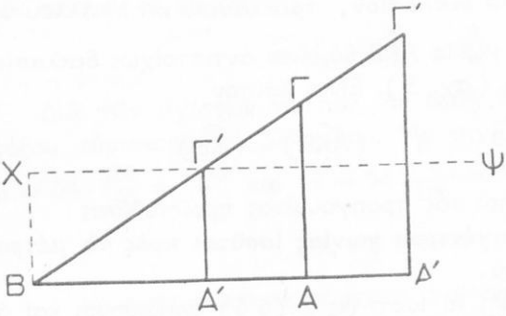
12. Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως τὸ μέτρον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν γράφει εἰς μίαν ὥραν ὁ δείκτης ἀκριβοῦς ὡρολογίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

1. ΗΜΙΤΟΝΟΝ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΣ ΑΥΤΟΥ

8. Λόγος μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ. Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4). Ἂν ἐκ σημείου Γ' τῆς εὐθείας ΒΓ φέρωμεν τὴν Γ'Α' κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, σχηματίζεται καὶ ἄλλο ὀρθογώνιον τρίγωνον Α'ΒΓ' τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ τὸ ΑΒΓ τὴν αὐτὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ' εἶναι ὅμοια, ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$\frac{\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΒΓ}} = \frac{\mathrm{Α'Γ'}}{\mathrm{ΒΓ'}} \qquad (1)$$



Σχ. 4

Ἀντιστρόφως : Ἂν ὁρισθῇ αὐθαιρέτως ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα Α'Γ', ἀχθῇ δὲ εὐθεῖα ΧΨ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ΑΒ ἴσην μὲ Α'Γ', καὶ τμηθῇ αὕτη εἰς σημεῖον Γ' ὑπὸ περιφερείας κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν ΑΓ, ΒΓ, Α'Γ' θὰ ἀληθεύῃ ἡ (1). Τὰ τρίγωνα δὲ ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ' θὰ εἶναι ὅμοια μὲ ὁμολόγους πλευρὰς τὰς ΑΓ, Α'Γ', καὶ διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ' εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ὅταν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ἔχωσι γων. Β = γων. Β' μὲ διαφόρους τὰς κορυφὰς Β, Β', πάλιν ἀληθεύει ἡ (1) καὶ ἀντιστρόφως. Ὥστε: Εἰς ὡρισμένην ὀξεῖαν γωνίαν Β ἀντιστοιχεῖ σταθερὸς λόγος $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΒΓ}}$ καὶ ἀντιστρόφως.

9. Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας. Ὁ σταθερὸς λόγος $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΒΓ}}$ λέγεται **ἡμίτονον** τῆς ὀξείας γωνίας Β.

Ἂν ἡ ὀξεῖα γωνία δὲν ἀνήκῃ εἰς τρίγωνον, κατασκευάζομεν τοιοῦτον, ἂν φέρωμεν ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Γενικῶς λοιπόν :

Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.

Τὸ ἡμίτονον γωνίας Β σημειώνομεν συντόμως οὕτως : ἡμ. Β.

10. Γεωμετρικὴ σημασία τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας. Ἂν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ λάβωμεν τμῆμα ΒΓ′ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα καὶ φέρωμεν τὴν Γ′Α′ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 4), θὰ εἶναι

$ἡμ\ Β = \frac{Α'Γ'}{ΒΓ'} = (\overline{Α'Γ'})$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Τὸ ἡμίτονον ὀξείας γωνίας εἶναι μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος, ἤτοι μῆκος στοιχείου ὁμοειδοῦς πρὸς τὰς πλευράς.

Ἀσκήσεις

13. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ὑποτείνουσαν 5 μέτ. καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 3 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

14. Αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσι μήκη 12 μέτ. ἡ μία καὶ 9 μέτ. ἄλλη. Νὰ εὕρητε τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

15. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\frac{3}{4}$ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὕρητε τὸ ἡμίτονον ἑκάστης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

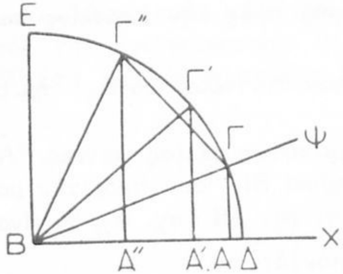
16. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει μῆκος 8 μέτ. ἡ δὲ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον ἑκάστης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

17. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας αὐτοῦ.

11. Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας μετὰ τῆς γωνίας. Ἔστω ὀξεῖα γωνία ΧΒΨ (σχ. 5). Ἐπὶ τῆς ΒΧ ὁρίζομεν τμῆμα ΒΔ ἴσον πρὸς τὴν μονάδα μήκους καὶ γράφομεν τεταρτημόριον ΔΕ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΔ. Ἐκ τῆς τομῆς Γ τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΨ φέρομεν τὴν ΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΧ.

Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι ἡμ$\widehat{XB\Psi}$ = ($\overline{ΑΓ}$). Ἂν δὲ ἡ γωνία γίνῃ $\widehat{XBΓ'}$, ἔπειτα $\widehat{XBΓ''}$ κ.τ.λ. θὰ εἶναι:

$$ἡμ\widehat{XBΓ'} = (\overline{Α'Γ'}), \quad ἡμ\widehat{XBΓ''} = (\overline{Α''Γ''}) \text{ κ.τ.λ.}$$



Σχ. 5

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν ἡ ὀξεῖα γωνία βαίνῃ συνεχῶς αὐξανομένη, καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτῆς βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον.

Ἐφ' ὅσον δὲ ἡ γωνία πλησιάζει πρὸς τὴν ὀρθήν, τὸ ἡμίτονον αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὴν μονάδα ΒΕ. Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι:

$$ἡμ\ 90^0 = 1.$$

Ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη γίνῃ μηδέν, τὸ τμῆμα ΑΓ ἐλαττούμενον καταντᾷ σημεῖον Δ. Δι' αὐτὸ δεχόμεθα ὅτι:

$$ἡμ\ 0^0 = 0.$$

Τὴν μεταβολὴν ταύτην συνοψίζομεν οὕτω:

$$\begin{array}{r|l} B & 0^0 \quad . \ . \ . \ . \ \nearrow \ . \ . \ . \ . \ 90^0 \\ ἡμ\,B & 0 \quad . \ . \ . \ . \ \nearrow \ . \ . \ . \ . \ \ 1 \end{array}$$

Σημείωσις. Τὸ πρὸς δεξιὰ καὶ ἄνω βέλος (↗) δεικνύει αὔξησιν.

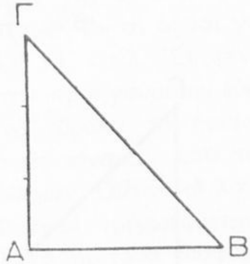
12. Κατασκευὴ ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι ἡμΒ = $\frac{3}{4}$. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν Β, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου, πρέπει ἡ Β νὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἀπέναντι πλευρὰν 3 μονάδων καὶ ὑποτείνουσαν 4 τοιούτων μονάδων. Οὕτως ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἑξῆς λύσιν.

Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας Α ὁρίζομεν τρία ἴσα διαδοχικὰ τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας. Ἔστω δὲ ΑΓ τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον τμῆμα (σχ. 6).

Ἔπειτα μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα τετραπλασίαν ἑνὸς τῶν ἴσων τμημάτων γράφομεν περιφέρειαν. Αὕτη τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν εἰς σημεῖον Β. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΒΓ καὶ σχηματίζομεν οὕτως ὀξεῖαν γωνίαν Β, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι, εἶναι ἡμ Β $= \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{3}{4}$.



Σχ. 6

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω ὅτι ἡμ ω $=$ 0,65 καὶ θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω.

Ἐπειδὴ ἡμ ω $= 0{,}65 = \frac{65}{100}$, ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ω θὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν 100 μονάδων καὶ ἀπέναντι πλευρὰν 65 τοιούτων μονάδων. Ἂν τὸ σχέδιόν μας δὲν χωρῇ τοιοῦτον τρίγωνον, κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν 100 : 10 αὐθαιρέτων μονάδων καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 65 : 10 = 6,5 τοιούτων μονάδων. Ἡ ἀπέναντι ταύτης γωνία Β θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι εἶναι ἡμΒ $= \frac{6{,}5}{10} = 0{,}65$.

Ἀσκήσεις

18. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν ἡμ ω $= \frac{1}{2}$.
19. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία φ, ἂν ἡμ φ $= \frac{5}{6}$.
20. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν ἡμ χ $= 0{,}25$.
21. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ψ, ἂν ἡμ ψ $= 0{,}125$.

13. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ 45^0.**

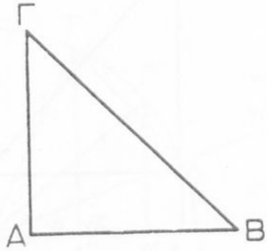
Λύσις. Ἂν Β $= 45^0$ (σχ. 7), τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές, $\beta = \gamma$. Κατὰ δὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, θὰ εἶναι $2\beta^2 = \alpha^2$. Ἐκ ταύτης ἕπεται κατὰ σειρὰν ὅτι :

$$2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1, \ \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \ \text{Ἄρα } \textbf{ἡμ } \mathbf{45^0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

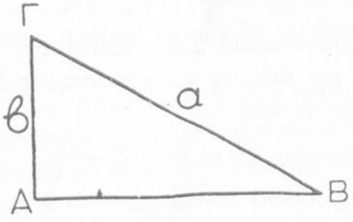
14. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ 30^0.**

Λύσις. Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 8), τὸ ὁποῖον ἔχει $B = 30^0$. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι :

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \cdot \quad \text{ὅθεν } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \quad \text{Ἄρα } \textbf{ημ } \mathbf{30^0} = \frac{1}{2} \cdot$$



Σχ. 7



Σχ. 8

15. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ $\mathbf{60^0}$.**

Λύσις. Ἂν $\Gamma = 60^0$, θὰ εἶναι $B = 30^0$ (σχ. 8) καὶ ἑπομένως $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Κατὰ δὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $\gamma^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \alpha^2$, ὅθεν $\gamma^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Εἶναι λοιπὸν **ἡμ $\mathbf{60^0}$** $= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Κατὰ ταῦτα, δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα τῆς σελίδος 14 οὕτως :

ω	0^0	. . ↗ .	30^0	. ↗ . .	45^0	. . ↗ .	60^0	. . ↗ .	90^0
ἡμ ω	0	. . ↗ .	$\frac{1}{2}$	. ↗ . .	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	. . ↗ .	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	. . ↗ .	1

Ἀσκήσεις

22. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 30^0 διὰ μεθόδου στηριζομένης εἰς τὴν ἰσότητα ἡμ $30^0 = \frac{1}{2}$.

23. Ἂν δοθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους α, νὰ γραφῇ ἄλλο μήκους $\alpha\sqrt{2}$ διὰ μεθόδου στηριζομένης εἰς τὴν ἰσότητα ἡμ $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

24. Ἂν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $B = 60^0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $2\beta = \alpha\sqrt{3}$.

16. Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου οἱασδήποτε ὀξείας γωνίας. Προηγουμένως εὕρομεν εὐκόλως τὸ ἡμίτονον τῶν γωνιῶν 30^0, 45^0, 60^0. διότι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἐνεθυμήθημεν μίαν ἁπλῆν σχέσιν μεταξὺ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου διάφορον τῆς $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Τοιαύτας ὅμως ἁπλᾶς σχέσεις δὲν γνωρίζομεν, ἂν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι τριγώνου εἶναι τυχοῦσαι π.χ. 35^0 ἢ 53^0 15′ κ.τ.λ. Ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ ἡμ 35^0 μὲ τὴν προηγουμένην εὐκολίαν. Ἐφρόντισαν ὅμως οἱ Μαθηματικοὶ νὰ εὕρωσι τὰ ἡμίτονα διαφόρων γωνιῶν καὶ νὰ διατάξωσιν αὐτὰ εἰς πίνακας, ἀπὸ τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν τὰ ἡμίτονα, τὰ ὁποῖα θέλομεν. Οὕτως οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες ὑπὸ τὴν ἐπικεφαλίδα «Φυσικοὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ» περιέχουσι μὲ προσέγγισιν 0,001 τὰ ἡμίτονα διαφόρων ὀξειῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι προχωροῦσιν ἀνὰ 30′. Δὲν θὰ ἐπιμείνωμεν ὅμως εἰς τὴν περιγραφὴν καὶ χρῆσιν αὐτῶν, διότι ἀντὶ τούτων θὰ χρησιμοποιῶμεν τὸν παρατιθέμενον ἐνταῦθα πίνακα Ι. Εἰς αὐτὸν τὰ ἡμίτονα ἀναγράφονται μὲ προσέγγισιν 0,00001, καὶ αἱ γωνίαι προχωροῦσιν ἀνὰ 10′. Ἑπομένως οὗτος εἶναι ἀκριβέστερος τῶν προηγουμένων.

Εἰς τὴν α′ ἐξ ἀριστερῶν σελίδα (σελ. 18) αἱ ἀκέραιαι μοῖραι τῶν γωνιῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν α′ στήλην καὶ βαίνουσιν αὐξανόμεναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω μέχρι τῶν 45^0.

Αἱ δεξιὰ τῆς στήλης ταύτης ἓξ ἄλλαι στῆλαι ἔχουσιν ἐπικεφαλίδας τοὺς ἀριθμοὺς 0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′. Τὸ δὲ ἡμίτονον μιᾶς γωνίας, π.χ. 32^0 20′, εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τοῦ ἀριθμοῦ 32 τῆς στήλης τῶν ἀκεραίων μοιρῶν καὶ τῆς στήλης, ἥτις ἔχει ἐπικεφαλίδα 20′. Εἶναι λοιπὸν ἡμ(32^0 20′) $= 0{,}53484$.

Τὰ δὲ ἡμίτονα τῶν μεγαλυτέρων τῶν 45^0 ὀξειῶν γωνιῶν εὑρίσκονται εἰς τὴν β′ σελίδα τοῦ πίνακος (σελ. 19). Εἰς αὐτὴν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τῶν μοιρῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην καὶ βαίνουσιν αὐξανόμενοι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Αἱ πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτῆς, ἓξ ἄλλαι στῆλαι φέρουσι κάτω τοὺς ἀριθμοὺς 10′, 20′, 30′, 40′, 50′, 60′.

Τὸ ἡμ(48^0 30′) π.χ. εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τοῦ ἀριθμοῦ 48 τῆς στήλης τῶν ἀκεραίων μοιρῶν καὶ τῆς στήλης, ἥτις κάτω φέρει τὸν ἀριθμὸν 30′. Εἶναι λοιπὸν ἡμ(48^0 30′) $= 0{,}74896$.

ΠΙΝΑΞ Ι. **ΗΜΙΤΟΝΟΝ**

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01454	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03200	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0.07266	0,07556	0,07846	0'08136	0,08426	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0·12764	0,13053	0,13341	0,13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	0,21359	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27556	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	65
25	0,42263	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45139	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52982	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68199	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	45
45	0,70711						
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Μοῖραι

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99995	0,99992	0,99988	89
1	0,99984	0,99980	0,99973	0,99965	0,99958	0,99950	88
2	0,99940	0,99928	0,99917	0,99905	0,99892	8,99878	87
3	0,99863	0,99848	0,99831	0,99814	0,99795	0,99776	86
4	0,99756	0,99735	0,99714	0,99692	0,99669	0,99644	85
5	0,99618	0,99594	0,99567	0,99539	0,99511	0,99482	84
6	0,99452	0,99421	0,99389	0,99357	0,99324	0,99289	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	80
10	0,98481	0,98429	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97629	0,97566	0,97502	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97099	76
14	0,97029	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	72
18	0,95106	0,95015	0,94921	0,94832	0,94739	0,94646	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91589	0,91472	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78979	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	49
41	0,75471	0,75279	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	48
42	0,74314	0,74119	0,73924	0,73728	0,73531	0,73332	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	45
45	0,70711						
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Μοῖραι

ΗΜΙΤΟΝΟΝ

Εἰς τὴν σελίδα ταύτην (σ. 19) δὲν ὑπάρχει στήλη, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὑποκάτω τὸν ἀριθμὸν 0′. Δι᾽ αὐτό, διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ ἡμ 73⁰, ἀναζητοῦμεν τὸ ἡμ(72⁰ 60′). Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἡμ } 73^0 = 0{,}95630.$$

Μὲ τοὺς πίνακας τούτους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἡμίτονον ὀξειῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα δὲν ἀναγράφονται εἰς αὐτούς. Ὡς παράδειγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα :

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμ(39⁰ 17′). Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι :

$$39^0\,10' < 39^0\,17' < 39^0\,20' \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$\text{ἡμ }(39^0\,10') < \text{ἡμ }(39^0\,17') < \text{ἡμ }(39^0\,20').$$

Ἔπειτα εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ὅτι :

$\Delta = \text{ἡμ }(39^0\,20') - \text{ἡμ }(39^0\,10') = 0{,}63383 - 0{,}63158 = 0{,}00225$· Βλέπομεν δηλ. ὅτι εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 0,00225.

Ἂν δὲ ἡ αὔξησις τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς γωνίας γίνῃ διπλασία, ἤτοι τὸ τόξον γίνῃ 39⁰ 30′, τὸ ἡμίτονον εἶναι 0,63608 καὶ

$$0{,}63608 - 0{,}63158 = 0{,}00450 = 0{,}00225.2,$$

ἤτοι καὶ ἡ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου διπλασιάζεται.

Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι εἰς τριπλασίαν αὔξησιν τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς γωνίας ἀντιστοιχεῖ τριπλασία αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου·

Παραδεχόμεθα λοιπὸν ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ ἡμιτόνου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν πρώτων λεπτῶν τοῦ μέτρου μιᾶς γωνίας.

Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Εἰς αὔξησιν 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις ἡμιτ. 0,00225.

» » 7′ » » » δ

καὶ εὑρίσκομεν $\delta = 0{,}00225 \cdot \frac{7}{10} = \frac{0{,}01575}{10} = 0{,}00157$ κατὰ προσέγγισιν.

Ἑπομένως ἡμ. (39⁰ 17′) = ἡμ. (39⁰ 10′) + 0,00157 = 0,63158 + 0,00157 = 0,63315.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} \text{ἡμ. }(39^0\,10') = 0{,}63158 \\ \text{διὰ } \Delta = 0{,}00225 \text{ εἶναι } \delta = \frac{7}{10}\cdot 0{,}00225 = \underline{0{,}00157} \\ \text{ἡμ. }(39^0\,17') = 0{,}63315 \end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ (28⁰ 34′ 30″).

Σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$ἡμ\,(28^0\,30') = 0{,}47716$$

$$διὰ\ \Delta = 0{,}00255\ εἶναι\ \delta = 0{,}00255 \cdot \frac{4{,}5}{10} = 0{,}0011475$$

$$ἢ\ \underline{0{,}00115}$$

$$καὶ\ ἡμ\,(28^0\,34'\,30'') = 0{,}47831$$

Ἀσκήσεις

25. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ(18⁰ 40′) καὶ τὸ ἡμ (42⁰ 10′).
26. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ(54⁰ 30′) καὶ τὸ ἡμ (78⁰ 40′).
27. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ50⁰ καὶ τὸ ἡμ80⁰.
28. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ(27⁰ 15′).
29. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ(46⁰ 30′).
30. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ(20⁰ 34′ 25″).
31. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ(67⁰ 45′ 40″).
32. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον γωνίας ἴσης πρὸς τὰ $\frac{7}{10}$ ὀρθῆς.
33. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον γωνίας ἴσης πρὸς τὰ $\frac{5}{8}$ ὀρθῆς.

17. Λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἐμάθομεν, ὅτι, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, δυνάμεθα τῇ βοηθείᾳ πινάκων νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Ἂν λοιπὸν π.χ. θέσωμεν $\chi = ἡμ\,(38^0\,52')$, θὰ εἶναι :

$$λογ\chi = λογἡμ\,(38^0\,52').$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν χ, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν λογἡμ (38⁰ 52′). Τοῦτον δὲ εὑρίσκομεν εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακας.

Οὗτοι ἔχουσι τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν εἰς τὸ ἄνω μέρος δύο παρακειμένων σελίδων, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μικρότερος τῶν 45⁰, εἰς τὸ κάτω δέ, ἂν εἶναι μεγαλύτερος τῶν 44⁰. Τὰ πρῶτα λεπτὰ ἀναγράφονται εἰς τὴν α′ πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην ἑκάστης σελίδος διὰ τὰς εἰς τὸ ἄνω μέρος ἀναγεγραμμένας μοίρας καὶ εἰς τὴν τελευταίαν στήλην διὰ τὰς ἄλλας. Προχωροῦσι δὲ ταῦτα ἀπὸ λεπτοῦ εἰς λεπτὸν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω εἰς τὴν δευτέραν.

Ὁ λογάριθμος ἡμ$(38^{0}\,52')$ εὑρίσκεται εἰς τὰς σελίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ὑπεράνω τὸν ἀριθμὸν 38^{0}, καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν $52'$, τῆς ἀριστερᾶς στήλης πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς παρακειμένης στήλης, ἥτις ἔχει ἐπικεφαλίδα Ἡμ. (ἡμίτονον).

Εἶναι λοιπὸν λογάριθμος ἡμ$(38^{0}\,52') = \bar{1},79762$.

Ὁ λογάριθμος ἡμ$(51^{0}\,18')$ εὑρίσκεται εἰς τὰς στήλας τῶν 51^{0}, κάτω, καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς στήλης, ἥτις φέρει κάτω συγκεκομμένην λέξιν Ἡμ. καὶ τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν $18'$ εἰς τὴν δεξιὰν στήλην πρώτων λεπτῶν.

Εἶναι λοιπὸν λογήμ$(51^{0}\,18') = \bar{1},89233$.

Πρέπει δὲ νὰ προσέξωμεν ὅτι τὰ δύο πρῶτα ψηφία ἑκάστου λογαρίθμου ἔχουσι γραφῆ εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης σελίδος. Νοοῦνται δὲ καὶ διὰ τοὺς μεταξὺ λογαρίθμους.

Ἂν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ἔχῃ καὶ δευτερόλεπτα, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἡμιτόνου $(38^{0}\,10'\,45'')$. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\begin{array}{rcccl} 38^{0}\,10' & < & 38^{0}\,10'\,45'' & < & 38^{0}\,11' \\ \text{ἡμ}(38^{0}\,10') & < & \text{ἡμ}(38^{0}\,10'\,45'') & < & \text{ἡμ}(38^{0}\,11') \ \text{καὶ} \\ \text{λογήμ}(38^{0}\,10') & < & \text{λογήμ}(38^{0}\,10'\,45'') & < & \text{λογήμ}(38^{0}\,11') \end{array}$$

Ἀπὸ δὲ τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} \text{λογήμ}(38^{0}\,11') = \bar{1},79111 \\ \text{λογήμ}(38^{0}\,10') = \bar{1},79095 \end{array}\right\} \Delta = 16 \text{ μον. τελ. δεκ. τάξ.}$$

Ἀπὸ τὸν πίνακα βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ $1'$ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς. Ὅθεν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν πρώτων λεπτῶν. Σκεπτόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς:

Εἰς αὔξησιν γωνίας κατὰ $60''$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις 16
» » » » $45''$ » » χ

καὶ εὑρίσκομεν $\chi = 16 \cdot \frac{45}{60} = 12$ μον. τελ. δεκ. τάξ.

38⁰

26	
1''	0,43
2	0,87
3	1,30
4	1,73
5	2,17
6	2,60
7	3,03
8	3,47
9	3,90

17	
1	0,28
2	0,57
3	0,85
4	1,13
5'	1,42
6	1,70
7	1,98
8	2,27
9	2,55

16	
1	0,27
2	0,53
3	0,80
4	1,07
5	1,33
6	1,60
7	1,87
8	2,13
9	2,40

15	
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	2.00
5	1,25
6	1,50
7	1,75
8	2,00
9	2,25

′	Ἡμ.	Δ	Ἐφ.	Δ	φ.	Συν.	Δ	
0	1,7 8934	16	$\bar{1}$,8 9281	26	$\bar{1}$,1 0719	$\bar{1}$,8 9653	10	60
1	8950	17	9307	26	0693	9643	10	59
2	8967	16	9333	26	0667	9633	9	58
3	8983	16	9359	26	0641	9624	10	57
4	8999	16	9385	26	0615	9614	10	56
5	9015	16	9411	26	0589	9604	10	55
6	9031	16	9437	26	0563	9594	10	54
7	9047	16	9463	26	0537	9584	10	53
8	9063	16	9489	26	0511	9574	10	52
9	9079	16	9515	26	0485	9564	10	51
10	9095	16	9541	26	0459	9554	10	50
11	9111	17	9567	26	0433	9544	10	49
12	9128	16	9593	26	0407	9534	10	48
13	9144	16	9619	26	0381	9524	10	47
14	9160	16	9645	26	0355	9514	10	46
15	9176	16	9671	26	0329	9504	9	45
16	9192	16	9697	26	0303	9495	10	44
17	9208	16	9723	26	0277	9485	10	43
18	9224	16	9749	26	0251	9475	10	42
19	9240	16	9775	26	0225	9465	10	41
20	9256	16	9801	26	0199	9455	10	40
21	9272	16	9827	26	0173	9445	10	39
22	9288	16	9853	26	0147	9435	10	38
23	9304	15	9879	26	0121	9425	10	37
24	9319	16	9905	26	0095	9415	10	36
25	9335	16	9931	26	0069	9405	10	35
26	9351	16	9957	26	0043	9395	10	34
27	9367	16	1,8 9983	26	0,1 0017	9385	10	33
28	9383	16	1,9 0009	26	0,0 9991	9375	11	32
29	9399	16	0035	26	9965	9364	10	31
30	$\bar{1}$,7 9415		$\bar{1}$,9 0061		0,0 9939	$\bar{1}$,8 9354		30
′	Συν.		Σφ.		Ἐφ.	Ἡμ.		

′	Ἡμ.	Δ	᾽Εφ.	Δ	Σφ.	Συν.	Δ	′
30	$\overline{1}$,7 9415	16	$\overline{1}$, 90061	25	0,0 9939	1,8 9354	10	**30**
31	9431	16	0086	26	9914	9344	10	29
32	9447	16	0112	26	9888	9334	10	28
33	9463	15	0138	26	9862	9324	10	27
34	9478	16	0164	26	9836	9314	10	26
35	9494	16	0190	26	9810	9304	10	25
36	9510	16	0216	26	9784	9294	10	24
37	9526	16	0224	26	9758	9284	10	23
38	9542	16	0268	26	9732	9274	10	22
39	9558	15	0294	26	9706	9264	10	21
40	9573	16	0320	26	9680	9254	10	**20**
41	9589	16	0346	25	9654	9244	11	19
42	9605	16	0371	26	9629	9233	10	18
43	9621	15	0397	26	9603	9223	10	17
44	9636	16	0423	26	9577	9213	10	16
45	9652	16	0449	26	9551	9203	10	15
46	9668	16	0475	26	9525	9193	10	14
47	9684	15	0501	26	9499	9183	10	13
48	9699	16	0527	26	9473	9173	11	12
49	9715	16	0553	25	9447	9162	10	11
50	9731	15	0578	26	9422	9152	10	**10**
51	9746	16	0604	26	9396	9142	10	9
52	9762	16	0630	26	9370	9132	10	8
53	9778	15	0656	26	9344	9122	10	7
54	9793	16	0682	26	9318	9112	11	6
55	9809	16	0708	26	9292	9101	10	5
56	9825	15	0734	26	9266	9091	10	4
57	9840	16	0759	25	9241	9081	10	3
58	9856	16	0785	26	9215	9071	11	2
59	9872	15	0811	26	9189	9060	10	1
60	1,7 9887		1.9 0837		0,0 9163	1,8 9050		**0**
′	Συν.		Σφ.		᾽Εφ.	Ἡμ.		′

26	
1″	0,43
2	0,87
3	1,30
4	1,73
5	2,17
6	2,60
7	3,03
8	3,47
9	3,90

25	
1	0,42
2	0,83
3	1,25
4	1,67
5	2,08
6	2,50
7	2,92
8	3,33
9	3,75

16	
1	0,27
2	0,53
3	0,80
4	1,07
5	1,33
6	1,60
7	1.87
8	2,13
9	2,40

15	
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
5	1,25
6	1,50
7	1,75
8	2,00
9	2,25

Ὥστε :

$$\begin{array}{rl} \text{λογήμ}(38^0\,10') & = \bar{1},79095 \\ \text{εἰς } 45'' \text{ αὔξ.} & = 0,00012 \\ \hline \text{λογήμ}(38^0\,10'\,45'') & = \bar{1},79107 \end{array}$$

Σημείωσις. Εἰς τὰς σελίδας τῶν $6^0 - 84^0$ οἱ πίνακες οὗτοι φέρουσιν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου μερικὰ πινακίδια.

Ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι διαφορῶν τῶν στηλῶν Δ. Διαιρεῖται δὲ ἕκαστον πινακίδιον εἰς δύο στήλας. Ἡ α΄ τούτων περιέχει τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι δηλοῦσι δεύτερα λεπτά. Ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους διαφορὰς τῶν λογαρίθμων.

Οὕτως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶναι Δ = 16 τὸ δὲ πινακίδιον μὲ ἐπικεφαλίδα 16 δηλοῖ ὅτι: Εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 4'' ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 1,07 μονάδας τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Εἰς αὔξησιν δὲ τοῦ τόξου κατὰ 40'' = 4''· 10 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 1,07 · 10 = 10.7. Εἰς αὔξησιν δὲ τοῦ τόξου κατὰ 5'' ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 1,33 μ.τ.δ.τ. Ἑπομένως εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 45'' = 40'' + 5'' ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 10,7 + 1,33 = 12,03 ἢ 12 κατὰ προσέγγισιν.

Τῇ βοηθείᾳ λοιπὸν τῶν πινακιδίων ἀποφεύγομεν τοὺς προηγουμένους ὑπολογισμοὺς τῆς αὐξήσεως τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου.

Ἀσκήσεις

34. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(12^0\,35')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ ἡμ$(12^0\,35')$.

35. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(58^0\,40')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ ἡμ$(58^0\,40')$.

36. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(34^0\,25'\,32'')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(34^0\,25'\,32'')$.

37. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμ$(67^0\,20'\,40'')$ καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(67^0\,20'\,40'')$.

38. Ἂν ἡμ$\chi = \frac{3}{4}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμχ.

39. Ἂν ἡμ$\omega = \frac{5}{7}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογήμω.

18. Εὕρεσις τοῦ μέτρου ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς. Ἔστω ἡμ$\chi = 0,42525$. Τὸ μέτρον τῆς γωνίας χ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὸν πίνακα Ι τοῦ βιβλίου τούτου σελ. (18 - 19) ὡς ἑξῆς :

Πρῶτον ἐνθυμούμεθα ὅτι ἡμ $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70711$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι $0,42525 < 0,70711$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι $\chi < 45^0$ καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 0,42525 εἰς τὴν α' ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος τούτου. Ὄντως δὲ εὑρίσκομεν αὐτὸν εἰς τὴν στήλην τῶν 10' καὶ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν 25^0. Εἶναι λοιπὸν $\chi = 25^0\,10'$.

Ἔστω ἀκόμη ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡμ $\omega = 0,93190$.

Ἐπειδὴ $0,93190 > 0,70711$, θὰ εἶναι $\omega > 45^0$.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν 0,93190 εἰς τὴν β' σελίδα τοῦ πίνακος. Βλέπομεν δὲ ὅτι μετὰ τὸν 0,93148 δὲν εὑρίσκεται 0,93190 ἀλλ' ὁ 0,93253. Εἶναι δηλ. $0,93148 < 0,93190 < 0,93253$ καὶ ἑπομένως $68^0\,40' < \omega < 68^0\,50'$. Ἤδη καταρτίζομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν :

Εἰς αὔξησιν ἡμιτόνου κατὰ 105 ἀντιστοιχεῖ αὔξ. γων. 10'
» » » » 42 » » » ψ

καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 10 \cdot \frac{42}{105} = 4'$. Εἶναι λοιπὸν $\omega = 68^0 44'$.

Τὴν εὕρεσιν τοῦ μέτρου ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν, μάλιστα ἀκριβέστερον, καὶ ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου τούτου. Οὕτως ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰσότητα εὑρίσκομεν ὅτι λογήμ $\omega = \overline{1},96937$. Τὸν ἀριθμὸν δὲ τοῦτον πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν εἰς τὰς στήλας τῶν ἡμιτόνων τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Διὰ τὴν εὔκολον ἀνεύρεσιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\text{λογήμ}45^0 = \overline{1},84949 < \overline{1},96937.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσι κάτω τὸ σύμβολον Ἡμ.

Οὕτως εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι $\omega = 68^0\,44'$.

Ἂν ἡμ $\chi = 0,772$,. θὰ εἶναι λογήμ $\chi = \overline{1},88762$. Καὶ

$$\overline{1},88761 < \overline{1},88762 < \overline{1},88772.$$

Οὕτω βλέπομεν, ὅτι $\Delta = 11$ καὶ $\delta = 1$.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{11}{1} = \frac{60''}{\psi}$ εὑρίσκομεν $\psi = \frac{60''}{11} = 5'',45$.

Ἑπομένως $\chi = 50^0\,32'\,5'',45$.

Ἀπὸ τὸν πίνακα Ι τοῦ βιβλίου τούτου (σελ. 18 - 19) εὑρίσκομεν $\chi = 50^{0}\, 32'\, 3'',24$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ὀλίγον διάφορον τοῦ προηγουμένου. Αἰτία τούτου εἶναι ὅτι εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τὰ τόξα προχωροῦσι ἀνὰ 1′, ἐν ᾧ εἰς τὸν πίνακα Ι ταῦτα προχωροῦσι ἀνὰ 10′. Οἱ πρῶτοι λοιπὸν πίνακες εἶναι ἀκριβέστεροι τοῦ Ι. Δι' αὐτό, ὅταν ἐπιδιώκωμεν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, πρέπει νὰ προτιμῶμεν νὰ ἐργαζώμεθα μὲ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας.

Ἀσκήσεις

40. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν ἡμ $\chi = 0{,}4$.
41. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν ημ $\omega = \frac{3}{5}$.
42. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία φ, ἂν ἡμ $\varphi = \frac{1}{2}$.
43. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν ἡμ $\chi = 0{,}35$.
44. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία ψ, ἂν ἡμ $\psi = 0{,}48$.

2. ΔΥΟ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

19. Δύο σχέσεις τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἔστω ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ὑποτείνουσαν (ΒΓ) = α καὶ καθέτους πλευρὰς (ΑΓ) = β καὶ (ΑΒ) = γ (σχ. 9).

Ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἡμῖν ἰσότητας :

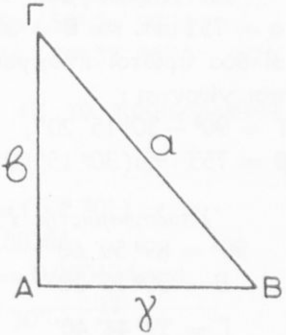
$$\text{ἡμ}B = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ ἡμ } \Gamma = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \textbf{ἡμ}\, \mathbf{B} \\ \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \textbf{ἡμ}\, \mathbf{\Gamma} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(1)}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.



Σχ. 9

20. Στοιχεῖα τριγώνου. Ἐπίλυσις τριγώνου. Τὰ διάφορα στοιχεῖα ἑκάστου τριγώνου διακρίνομεν εἰς **κύρια** καὶ εἰς **δευτερεύοντα** στοιχεῖα.

Αἱ πλευραί, αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὰ κύρια στοιχεῖα ἑκάστου τριγώνου. Ὅλα τὰ ἄλλα, π.χ. ὕψη, διάμεσοι, ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας κ.τ.λ., εἶναι δευτερεύοντα στοιχεῖα.

Ἐπίλυσις τριγώνου λέγεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κυρίων στοιχείων τριγώνου, ἂν δοθῶσιν ἐπαρκῆ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα αὐτοῦ.

Διὰ τῆς ἐπιλύσεως δηλαδὴ τῶν τριγώνων, ἐκπληροῦται ὁ σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας (§ 2).

Σημείωσις. Διὰ τῶν μεθόδων τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίζωνται καὶ δευτερεύοντα στοιχεῖα τῶν τριγώνων. Πρέπει ὅμως νὰ ἀναφέρωνται ρητῶς ποῖα τούτων ζητοῦνται.

Α'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

21. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ, π.χ. ἡ Β.**

Ἐπίλυσις. Εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Γ ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος

$$\Gamma = 90^0 - \mathrm{B}.$$

Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ ἀπὸ τὰς ἰσότητας :

$$\beta = \alpha \cdot \text{ἡμ}\,\mathrm{B} \text{ καὶ } \gamma = \alpha \cdot \text{ἡμ}\,\Gamma.$$

Τέλος εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἐκ τῆς ἰσότητος $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma$.

1ον Παράδειγμα. Ἂν π.χ. εἶναι :

$\alpha = 753$ μέτ. καὶ $\mathrm{B} = 30^0\,15'\,20''$, οἱ δύο πρῶτοι προηγούμενοι τύποι γίνονται :

$\Gamma = 90^0 - 30^0\,15'\,20''$,

$\beta = 753 \cdot \text{ἡμ}(30^0\,15'\,20'')$

Γνωστά,	*ἄγνωστα στοιχεῖα*
α, Β	Γ, β, γ, Ε

Τύποι ἐπιλύσεως

$\Gamma = 90^0 - \mathrm{B},\ \beta = \alpha\text{ἡμ}\mathrm{B},$

$\gamma = \alpha\text{ἡμ}\Gamma,\quad \mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma.$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$$\begin{array}{r} 90^0 = 89^0\,59'\,60'' \\ \mathrm{B} = 30^0\,15'\,20'' \\ \hline \Gamma = 59^0\,44'\,40'' \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς β

$$\begin{array}{r} \text{λογ}\beta = \text{λογ}753 + \text{λογἡμ}(30^0\,15'\,20'') \\ \text{λογ}753 = 2{,}87679 \\ \text{λογἡμ}(30^0\,15'\,20'') = \overline{1}{,}70231 \\ \hline \text{λογ}\beta = 2{,}57910 \\ \beta = 397{,}4 \text{ μέτ.} \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ

Ἡ ἰσότης $\gamma = \alpha\text{ἡμ}\,\Gamma$ γίνεται $\gamma = 753\,\text{ἡμ}(59^0\,44'\,40'')$

καὶ ἐπομένως $λογγ = λογ\,753 + λογἡμ\,(59^0\,44'\,40'')$

$$\begin{aligned} λογ\,753 &= 2{,}87679 \\ λογἡμ\,(59^0\,44'\,40'') &= \bar{1}{,}93641 \\ \hline λογγ &= 2{,}81320 \\ γ &= 650{,}43 \text{ μέτ.} \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε

$$Ε = \frac{1}{2}\,βγ, \qquad λογΕ = λογβ + λογγ - λογ2.$$

$$\begin{aligned} λογβ &= 2{,}57910 \\ λογγ &= 2{,}81320 \\ \hline \text{ἄθρ.} &= 5{,}39230 \\ λογ2 &= 0{,}30103 \\ \hline λογΕ &= 5{,}09127 \\ Ε &= 123\,386{,}11 \text{ τετρ. μέτρα} \end{aligned}$$

2ον Παράδειγμα. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει $α = 1465$ μέτρα καὶ $Β = 53^0\,26'\,30''$

Ἐπίλυσις. Κατὰ τὰ προηγούμενα, οἱ τύποι ἐπιλύσεως εἶναι $Γ = 90^0 - Β, \quad β = αἡμΒ, \quad γ = αἡμΓ \qquad (1)$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ

$$\begin{aligned} 90^0 &= 89^0\,59'\,60'' \\ Β &= 53^0\,26'\,30'' \\ \hline Γ &= 36^0\,33'\,30'' \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τῶν πλευρῶν β καὶ γ

Αἱ δύο τελευταῖαι ἰσότητες τῶν (1) γίνονται :

$$\begin{aligned} β &= 1465 \cdot ἡμ\,(53^0\,26'\,30'') \\ γ &= 1465 \cdot ἡμ\,(36^0\,33'\,30'') \qquad (2) \end{aligned}$$

Ἤδη δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἀλλὰ καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἀπὸ τὸν πίνακα Ι βλέπομεν ὅτι :

$$ἡμ\,(53^0\,20') < ἡμ\,(53^0\,26'\,30'') < ἡμ.(53^0\,30')$$

$$\text{ἢ} \quad 0{,}80212 < ἡμ\,(53^0\,26'\,30'') < 0{,}80386.$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι $0{,}80386 - 0{,}80212 = 0{,}000174$ καὶ

$$(53^0\,26'\,30'') - (53^0\,20') = 6'\,30'' = \frac{13'}{2}$$

Ἀπὸ δὲ τὴν διάταξιν

$$\begin{array}{ll} 10' & 0{,}00174 \\ \frac{13'}{2} & χ \end{array}$$

εὑρίσκομεν : $χ = 0{,}00174 \cdot \frac{13}{20} = 0{,}00113.$

Ἑπομένως ἡμ $(53^0\,26'\,30'') = 0{,}80212 + 0{,}00113 = 0{,}80325$.
Ἡ α' λοιπὸν τῶν (2) γίνεται :

$$\beta = 1465 \cdot 0{,}80325 = 1176{,}76125 \text{ μέτρα.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ $(36^0\,33'\,30'') = 0{,}59564$ καὶ ἑπομένως

$$\gamma = 1465 \cdot 0{,}59564 = 872{,}6126 \text{ μέτρα.}$$

Ἀσκήσεις

45. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 20$ μέτρα, $B = 42^0\,12'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

46. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 345$ μέτρα καὶ $\Gamma = 54^0\,20'\,45''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

47. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 1565$ μέτρα καὶ Γ = 56Υ ,25. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

48. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\alpha = 475{,}50$ μέτρα καὶ $B = \dfrac{3\pi}{8}$ ἀκτίνια. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

49. Ἡ διαγώνιος ΑΓ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἔχει μῆκος 0,60 μέτρα καὶ σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν ΑΒ γωνίαν $38^0\,25'$. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

50. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου ἔχει μῆκος 15 μέτρα, ἡ δὲ γωνία αὐτῆς μὲ τὴν μικροτέραν διαγώνιον εἶναι $\dfrac{3}{5}$ ὀρθῆς. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

51. Ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι 0,65 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τόξου $52^0\,35'$ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπ' αὐτῆς.

52. Ἓν κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος 0,25 μέτρου καὶ κλίσιν $26^0\,45'\,50''$ Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

53. Δύο δυνάμεις Δ καὶ Δ' ἐνεργοῦσιν εἰς σημεῖον Α ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἔχει ἔντασιν 15,6 χιλιογράμμων καὶ σχηματίζει γωνίαν $35^0\,20'$ μὲ τὴν Δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν δυνάμεων Δ καὶ Δ' καὶ ἡ γωνία τῆς συνισταμένης μὲ τὴν Δ'.

Β' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

22. *Πρόβλημα.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν π.χ. τὴν β.**

Ἐπίλυσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος :

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ εὑρίσκομεν τὴν κάθετον πλευρὰν γ. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος ἡμ $B = \frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν τὴν Β καὶ ἔπειτα τὴν Γ. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Γνωστά,	*ἄγνωστα στοιχεῖα*
α, β	γ, Β, Γ, Ε

Τύποι Ἐπιλύσεως

$$\gamma^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$
$$\text{ἡμ}B = \frac{\beta}{\alpha}$$
$$\Gamma = 90^0 - B$$
$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma.$$

Παράδειγμα. Ἔστω α = 15 964 μέτ. καὶ β = 11 465 μέτρα

Βοηθητικὸς πίναξ

$\alpha = 15\,964$
$\beta = 11\,465$
$\alpha + \beta = 27\,429$
$\alpha - \beta = 4\,499$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ

$\gamma^2 = 27\,429 . 4499$, ὅθεν :
$2\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\, 27429 + \lambda o\gamma\, 4499$ καὶ ἐπομένως :

$$\lambda o\gamma\gamma = \frac{\lambda o\gamma 27\,429 + \lambda o\gamma 4\,499}{2}$$

$\lambda o\gamma\ 27\,429 = 4{,}43821$
$\lambda o\gamma\ \ 4\,499 = 3{,}65312$
ἄθροισμα $= 8{,}09133$

$\lambda o\gamma\gamma = 4{,}04566$
$\gamma = 11\,108{,}72$ μέτρα.

Ὑπολογισμὸς τῆς Β

Ἐκ τῆς ἡμ$B = \frac{\beta}{\alpha}$ ἔπεται ὅτι :

$\lambda o\gamma\text{ἡμ}B = \lambda o\gamma\beta - \lambda o\gamma\alpha$
$\lambda o\gamma\beta = 4{,}05937$
$\lambda o\gamma\alpha = 4{,}20314$
$\lambda o\gamma\text{ἡμ}B = \bar{1}{,}85623$
$B = 45^0\,54'\,15''$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ

$90^0 = 89^0\,59'\,60''$
$B = 45^0\,54'\,15''$
$\Gamma = 44^0\ \ 5'\,45''$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε

Ἐκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\lambda o\gamma E = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\gamma - \lambda o\gamma 2.$$

$\lambda o\gamma\beta = 4{,}05937$
$\lambda o\gamma\gamma = 4{,}04566$
ἄθρ. $= 8{,}10503$

ἄθρ. $= 8{,}10503$
$\lambda o\gamma 2 = 0{,}30103$
$\lambda o\gamma E = 7{,}80400$
$E = 63\,680\,000$ τ.μ.

Ἀσκήσεις

54. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 15$ μέτρα καὶ $\beta = 6{,}4$ μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

55. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 165{,}7$ μέτρα καὶ $\beta = 74{,}20$ μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

56. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $(\mathrm{AB}) = (\mathrm{A\Gamma}) = 5$ μέτρα καὶ $(\mathrm{B\Gamma}) = 5{,}60$ μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν καὶ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ.

57. Εἷς ρόμβος ἔχει πλευρὰν 8 μέτρα καὶ μικροτέραν διαγώνιον 5,30 μέτρα. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν καὶ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου αὐτοῦ.

58. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἷς κύκλος ἀκτῖνος ρ φαίνεται ἀπὸ ἓν σημεῖον Α, ἂν $(\mathrm{KA}) = 2\rho$.

59. Ἓν κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος 0,75 μέτρα καὶ ὕψος 0,28 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις αὐτοῦ.

60. Εἷς κύκλος ἔχει ἀκτῖνα 0,80 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀπὸ χορδῆς του, ἥτις ἔχει μῆκος 0,60 μέτρου.

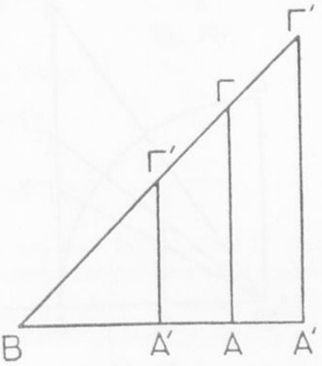
61. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ μία τούτων ἔχει ἔντασιν 25 χιλιογράμμων καὶ ἡ συνισταμένη αὐτῶν 40 χιλιογρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς ἄλλης καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς συνισταμένης μὲ τὰς δυνάμεις ταύτας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

1. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ. ΧΡΗΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

23. Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας. Ἔστω ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 10). Ἐκ τυχόντος σημείου Γ' τῆς εὐθείας ΒΓ φέρομεν τὴν Γ'Α' κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΑ.

Ἂν ἐργασθῶμεν, ὅπως ἀνωτέρω ἐν § 8, βεβαιούμεθα ὅτι: Διὰ τὴν σταθερὰν γωνίαν Β εἶναι: $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{Α'Γ'}}{\text{ΒΑ'}}$, δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ σημείου Γ' ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ. Καὶ ἀντιστρόφως: εἰς δοθέντα λόγον $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}}$ ἀντιστοιχεῖ σταθερὰ ὀξεῖα γωνία Β. Τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}}$ ὀνομάζομεν **ἐφαπτομένην** τῆς ὀξείας γωνίας Β. Ὥστε:



Σχ. 10

Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ.

Ἡ ἐφαπτομένη γωνίας Β σημειώνεται οὕτω: ἐφΒ.

Εἶναι λοιπὸν $\text{ἐφΒ} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}}$. Ὁμοίως $\text{ἐφΓ} = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}}$.

24. Γεωμετρικὴ σημασία τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας. Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 11). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀξείας γωνίας Β αὐτοῦ καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα μήκους γράφομεν τεταρτημόριον Α'Δ. Ἂν ἐκ τοῦ Α' ὑψώσωμεν τὴν Α'Γ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ προεκτείνωμεν τὴν ΒΓ, μέχρις οὗ τμήσῃ αὐτὴν εἰς τὸ Γ', σχηματίζεται νέον ὀρθογώνιον τρίγωνον Α'ΒΓ'. Κατὰ δὲ τὰ προηγούμενα εἶναι $\text{ἐφΒ} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{Α'Γ'}}{\text{ΒΑ'}}$.

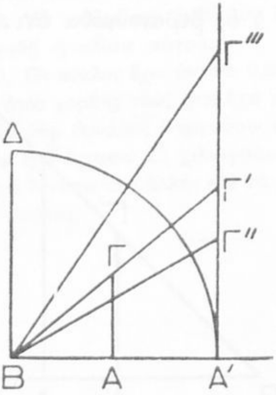
Ἐπειδὴ δὲ (ΒΑ′) = 1, θὰ εἶναι $\frac{Α'Γ'}{ΒΑ'}$ = (Α′Γ′). Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται ἐφΒ = (Α′Γ′). Οὕτω βλέπομεν ὅτι :

Ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος, ἤτοι μῆκος στοιχείου ὁμοειδοῦς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

25. Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας μετὰ τῆς γωνίας ταύτης. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχ. 11 ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι :

Αὐξανομένης τῆς ὀξείας γωνίας, τὰ ἀντίστοιχα μήκη (Α′Γ″), (Α′Γ′), (Α′Γ‴) κ.τ.λ. βαίνουσιν αὐξανόμενα. Ἡ αὔξησις δὲ αὕτη εἶναι ταχυτάτη, ὅταν ἡ γωνία πλησιάζῃ πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὅτε τὰ μήκη ταῦτα δύνανται νὰ ὑπερβῶσι πάντα ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μέγαν. Τείνουσι δηλαδὴ ταῦτα εἰς τὸ ἄπειρον καὶ δεχόμεθα ὅτι:

$$\text{ἐφ}90^0 = \infty$$



Σχ. 11

Ἀντιθέτως, ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη γίνῃ μηδέν, τὸ τμῆμα Α′Γ′ ἐλαττούμενον γίνεται σημεῖον Α′. Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι : ἐφ0^0 = 0.

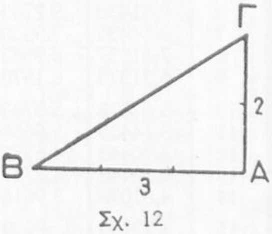
Ταῦτα συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

$$\begin{matrix} B \\ \text{ἐφ}B \end{matrix}\left\{\begin{matrix} 0^0 & \dots\dots & \nearrow & \dots\dots & 90^0 \\ 0 & \dots\dots & \nearrow & \dots\dots & \infty \end{matrix}\right.$$

26. Κατασκευὴ ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς. Ἂν ἐφΒ = 2, πρὸς κατασκευὴν τῆς γωνίας Β ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν διπλασίαν τῆς ἄλλης. Ἡ γωνία Β, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς, εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη.

Ἂν ἐφΒ = $\frac{2}{3}$, πρέπει ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας Α νὰ λάβωμεν δύο ἴσα διαδοχικὰ τμήματα· ἔστω δὲ ΑΓ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης τρία διαδοχικὰ τμήματα ἴσα πρὸς τὰ προηγούμενα· ἔστω δὲ ΑΒ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν (σχ. 12). Ἂν φέρωμεν τὴν ΒΓ, σχηματίζεται ἡ ζητουμένη γωνία Β. Διότι πράγματι εἶναι :

$$\text{ἐφ}Β = \frac{ΑΓ}{ΒΑ} = \frac{2}{3}.$$



Σχ. 12

Ἂν ἐφΒ $= 0{,}45 = \frac{45}{100}$, πρέπει ἡ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἔχῃ 45 τμήματα καὶ ἡ ἄλλη 100, πάντα ἴσα. Ἂν τὸ σχέδιόν μας δὲν χωρῇ, λαμβάνομεν 45 : 10 = 4,5 ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ 100 : 10 = 10 ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 4,5 γωνία Β εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι

$$\text{ἐφ}Β = \frac{4{,}5}{10} = \frac{45}{100} = 0{,}45.$$

Ἀσκήσεις

62. Αἱ κάθετοι πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσι μήκη 12 μέτρα ἡ μία καὶ 16 μέτρα ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

63. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει μῆκος 1,5 μέτρα, ἡ δὲ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ 1,2 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

64. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τετραπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

65. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ἔχουσα ἐφαπτομένην $\frac{1}{5}$.

66. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν ἐφ $ω = \frac{5}{6}$.

67. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν ἐφ $χ = 1{,}5$.

68. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ψ, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι ἐφ $ψ = 0{,}8$.

27. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη γωνίας 45^0, 30^0 καὶ 60^0.**

Λύσις. α΄) Ἂν $Β = 45^0$, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι ΑΒ = ΑΓ καὶ ἑπομένως $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = 1$.

ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι
0		343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,37060	31,24115	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47060	20,20655	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37595	3,34023	3,30524	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	65
25	2,14451	2,12832	2,11232	2,09654	2,08094	2,06553	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,63981	1,15715	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	46
44	1,03553	1,02952	1,02359	1,01761	1,01170	1,00583	45
45	1,00000						
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Μοῖραι

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

ΠΙΝΑΞ III. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02620	0,02910	0,03201	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04950	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	74
16	0,28675	0,28989	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33459	0,33783	0,34108	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35739	0,36068	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56952	0,57348	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,641·17	0,64528	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	54
36	0,72654	0,73099	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	52
38	0,78125	0,78598	0,79060	0,79544	0,80019	0,80498	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92169	0,92709	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	46
44	0,96569	0,97133	0,97699	0,98270	0,98843	0,99419	45
45	1,00000						
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Μοῖραι

ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Ἄρα $\mathbf{ἐφ45^0 = 1}$ (1)

β') Ἂν $Β = 30^0$, γνωρίζομεν ὅτι $β = \frac{α}{2}$. Κατὰ δὲ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $4β^2 = β^2 + γ^2$, ὅθεν $3β^2 = γ^2$ καὶ $\left(\frac{β}{γ}\right)^2 = \frac{1}{3}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται, ὅτι $\frac{γ}{β} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ἄρα $\mathbf{ἐφ30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ (2)

γ') Ἂν $Γ = 60^0$, θὰ εἶναι $ἐφ60^0 = \frac{γ}{β}$. Ἐπειδὴ δὲ $Β = 30^0$, θὰ εἶναι $3β^2 = γ^2$ καὶ ἑπομένως, $\frac{γ}{β} = \sqrt{3}$.

Θὰ εἶναι λοιπόν : $\mathbf{ἐφ60^0 = \sqrt{3}}$ (3)

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα τῆς σελ. 34 οὕτω :

Β	0^0	. . ↗ . .	30^0	. ↗	45^0	↗	60^0	. . ↗ . .	90^0
ἐφΒ	0	. ↗ . .	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	. ↗	1	. . ↗	$\sqrt{3}$	. . ↗ . .	∞

28. Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης οἱασδήποτε ὀξείας γωνίας. Τὴν ἐφαπτομένην οἱασδήποτε ὀξείας γωνίας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ εἰς τὰς σελ. 40 – 41 παρατιθεμένου πίνακος III. Ἡ περιγραφὴ καὶ χρῆσις αὐτοῦ εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ πίνακος I διὰ τὰ ἡμίτονα. Μόνον εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς ἀριστερᾶς σελίδος τοῦ πίνακος τούτου καὶ εἰς τὸ κάτω τῆς δεξιᾶς σελίδος ἀναγράφονται αἱ λέξεις ἐφαπτομένη ἀντὶ ἡμίτονον τοῦ I πίνακος. Ἀπὸ αὐτὸν εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι :

$$ἐφ\,(19^0\,20') = 0{,}35085, \quad ἐφ\,(47^0\,40') = 1{,}09770 \text{ κ.τ.λ.}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν $ἐφ(35^0\,26')$, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$35^0\,20 \;\langle\; 35^0\,26' \;\langle\; 35^0\,30'$$

καὶ $ἐφ\,(35^0\,20') \;\langle\; ἐφ(35^0\,26') \;\langle\; ἐφ\,(35^0\,30')$.

Ἐκ δὲ τῶν πινάκων βλέπομεν ὅτι :

$$ἐφ\,(35^0\,20') = 0{,}70891 \text{ καὶ } ἐφ\,(35^0\,30') = 0{,}71329$$

Αἱ δὲ προηγούμεναι ἀνισότητες γίνονται :

$$0{,}70891 \;\langle\; ἐφ\,(35^0\,26') \;\langle\; 0{,}71329.$$

Οὕτω διὰ $\delta = 30' - 20' = 10'$ εἶναι :

$$\Delta = 0{,}71329 - 0{,}70891 = 0{,}00438.$$

Μεθ' ὃ καταρτίζομεν τὴν διάταξιν :

$$\begin{array}{ll} 10' & 0{,}00438 \\ 6' & \chi \end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν :

$$\chi = 0{,}00438 \cdot \frac{6}{10} = 0{,}002628 \text{ ἢ } 0{,}00263 \text{ κατὰ προσέγγισιν.}$$

Εἶναι λοιπὸν ἐφ $(35^0\,26') = 0{,}70891 + 0{,}00263 = 0{,}71154$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐφ$(59^0\,37'\,20'')$ εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι :

$$\text{ἐφ}(59^0\,30') < \text{ἐφ}(59^0\,37'\,20'') < \text{ἐφ}(59^0\,40') \text{ ἢ}$$
$$1{,}69766 < \text{ἐφ}(59^0\,37'\,20'') < 1{,}70901.$$

Βλέπομεν οὕτως ὅτι $\Delta = 0{,}01135$ καὶ $\delta = 7'\,20'' = 7\frac{1'}{3} = \frac{22'}{3}$.

Ἐκ δὲ τῆς διατάξεως

$$\begin{array}{ll} 10' & 0{,}01135 \\ \frac{22'}{3} & \chi \end{array}$$

εὑρίσκομεν $\chi = 0{,}01135 \cdot \frac{22}{30} = 0{,}00832.$

Εἶναι λοιπὸν ἐφ$(59^0\,37'\,20'') = 1{,}69766 + 0{,}00832 = 1{,}70598$.

Ἀσκήσεις

69. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(12^0\,30')$ καὶ ἡ ἐφ $(73^0\,40')$.
70. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(42^0\,10')$ καὶ ἡ ἐφ$(67^0\,50')$.
71. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ50^0 καὶ ἡ ἐφ80^0.
72. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(18^0\,25')$ καὶ ἡ ἐφ$(53^0\,47')$
73. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(23^0\,43'\,30'')$.
74. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(48^0\,46'\,40'')$.
75. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη γωνίας ἴσης πρὸς $\frac{3}{10}$ ὀρθῆς γωνίας.
76. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη γωνίας ἴσης πρὸς $\frac{5}{8}$ ὀρθῆς γωνίας.

29. Λογάριθμος ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας. Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουσι καὶ στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσι τὴν συγκεκομμένην λέξιν Ἐφ. ἄνω διὰ τὰς μικροτέρας 45^0 γωνίας καὶ κάτω διὰ τὰς ἄλλας μέχρις 90^0.

Αὗται περιέχουσι τοὺς λογαρίθμους τῶν ἐφαπτομένων ὀξειῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα προχωροῦσιν ἀνὰ 1'.

Ἡ εὕρεσις δὲ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης δοθείσης ὀξείας, γωνίας γίνεται ὅπως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς (§ 17). Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$λογέφ(38^0\,22') = \overline{1},89853,$$
$$λογέφ(51^0\,20') = 0,09680,$$
$$λογέφ(51^0\,43') = 0,10277.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν $λογέφ(38^0\,51'\,42'')$, παρατηροῦμεν ὅτι $λογέφ(38^0\,51') < λογέφ(38^0\,51'\,42'') < λογέφ\,(38^0\,52')$ ἢ

$$\overline{1},90604 < λογέφ(38^0\,51'\,42'') < \overline{1},90630.$$

Οὕτω δὲ βλέπομεν ὅτι διὰ $δ = 60''$ εἶναι $Δ = 26$ μον. τελ. δεκ. τάξ. Μετὰ ταῦτα δὲ ἐκ τῆς διατάξεως $60''$ 26
$42''$ x

εὑρίσκομεν $x = 26 \cdot \dfrac{42}{60} = 18,2$ ἢ 18 μον. τελ. δεκ. τάξεως κατὰ προσέγγισιν.

Εἶναι λοιπόν :

$$λογέφ(38^0\,51'\,42'') = \overline{1},90604 + 0,00018 = \overline{1},90622.$$

Ὅταν δὲ γνωρίζωμεν τὸν λογέφω, εὑρίσκομεν καὶ τὴν ἐφω ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τῶν ἀριθμῶν. Οὕτως ἐκ τῆς ἰσότητος $λογέφ(38^0\,51'\,42'') = \overline{1},90622$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$έφ(38^0\,51'\,42'') = 0,80578.$$

Ἀσκήσεις

77. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $λογέφ(38^0\,12')$ καὶ ὁ $λογέφ(38^0\,42'\,30'')$ καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ $έφ(38^0\,12')$ καὶ ἡ $έφ(38^0\,42'\,30'')$.

78. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $λογέφ(51^0\,23')$ καὶ ὁ $λογέφ(51^0\,35'\,28'')$ καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ $έφ(51^0\,23')$ καὶ ἡ $έφ(51^0\,35'\,28'')$.

79. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $λογέφ(41^0\,57'\,35'')$ καὶ ὁ $λογέφ(48^0\,18'\,52'')$ καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ $έφ(41^0\,57'\,35'')$ καὶ ἡ $έφ(48^0\,18'\,52'')$.

80. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $λογέφ26^{γ},40$ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ $έφ26^{γ},40$.

81. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $λογέφ\dfrac{3π}{8}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ $έφ\dfrac{3π}{8}$.

82. Ἂν $έφx = \dfrac{2}{5}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογέφx.

83. Ἂν $έφ\,ω = 1,673$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογέφω.

84. Ἂν $έφ\,ψ = 0,347$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογέφψ.

30. Εὕρεσις τοῦ μέτρου ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς. α΄) Ἔστω ὅτι ἐφ$\chi = 0{,}41763$ καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.

Ταύτην εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν πίνακα ΙΙΙ τοῦ βιβλίου τούτου. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι $0{,}41763 < 1 =$ ἐφ45^0 καὶ συμπεραίνομεν ὅτι $\chi < 45^0$.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν 0,41763 εἰς τὴν α΄ σελίδα τοῦ πίνακος τούτου καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 22^0\,40'$.

Ἔστω ἀκόμη ὅτι ἐφ$\omega = 1{,}92098$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέτρου τῆς ὀξείας γωνίας ω, ἀναζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 1,92098 εἰς τὴν β΄ σελίδα τοῦ πίνακος καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\omega = 62^0\,30'$.

Ἂν ἐφ$\chi = 0{,}715$, εὑρίσκομεν εἰς τὴν α΄ σελίδα τοῦ πίνακος ὅτι :

$0{,}71329 < 0{,}715 < 0{,}71769$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι :

$35^0\,30' < \chi < 35^0\,40'$.

Εὐκόλως δὲ καταρτίζομεν τὴν διάταξιν
$$\begin{array}{ll} 0{,}00440 & 10' \\ \underline{0{,}00171} & \psi, \end{array}$$

ὅθεν $\psi = 10 \cdot \frac{171}{440} = 3'\,53''$. Εἶναι λοιπὸν $\chi = 35^0\,33'\,53''$.

β΄) Τὸ αὐτὸ ζήτημα λύομεν καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων.

Οὕτως ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἐφ$\chi = 0{,}715$ εὑρίσκομεν ὅτι λογἐφ$\chi =$ λογ$0{,}715 = \overline{1}{,}85431$.

Πρέπει τώρα νὰ ἀναζητήσωμεν αὐτὸν εἰς τὰς στήλας τῶν ἐφαπτομένων τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Δι' εὐκολίαν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι λογἐφ$45^0 =$ λογ$1 = 0$ καὶ ὅτι, ἂν $\chi < 45^0$, θὰ εἶναι ἐφ$\chi < 1$ καὶ λογἐφ$\chi < 0$. Ἂν δὲ $\chi > 45^0$ θὰ εἶναι λογἐφ$\chi > 0$. Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀρνητικὸν λογάριθμον $\overline{1}{,}85431$ εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσιν ἄνω τὸ σύμβολον Ἐφ.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι $\overline{1}{,}85407 < \overline{1}{,}85431 < \overline{1}{,}85434$

καὶ ἑπομένως : $35^0\,33' < \chi < 35^0\,34'$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς $\Delta = 27$ ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τῆς γωνίας κατὰ

60'', εἶναι δὲ δ = 24 μον. τελ. δεκ. τάξ. καταρτίζομεν τὴν διάταξιν :

27   60''

24   ψ καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 60 \cdot \frac{24}{27} = 53''$.

Εἶναι λοιπὸν $\chi = 35^0\,33'53''$.

Ἀσκήσεις

85. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν λογέφ χ = 1,89801.
86. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ω, ἂν λογέφ ω = 0,09396.
87. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ψ, ἀν έφ ψ = 0,532.
88. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν έφ χ = 1,103.
89. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας θ, ἂν έφ $\theta = \frac{10}{8}$.
90. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας, ω, ἂν ἐφ ω = 2,194.
91. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀκτίνια τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας, Ζ, ἂν ἐφ Ζ = 0,923.
92. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν ἐφ χ = 3,275.
93. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, ἂν ἐφ $\chi = \frac{12}{5}$.

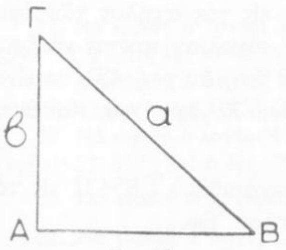
2. ΔΥΟ ΑΛΛΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

31. Δύο ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἐκ τῶν γνωστῶν (§ 23) ἰσοτήτων $\text{ἐφ}B = \frac{A\Gamma}{BA} = \frac{\beta}{\gamma}$, $\text{ἐφ}\Gamma = \frac{BA}{A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma\,\text{ἐφ}B \\ \gamma &= \beta\,\text{ἐφ}\Gamma \end{aligned} \qquad (2)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς εἰς ἐκείνην ἀντικειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.



Σχ. 13

Γ' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

32. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν εἶναι γνωσταὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ.**

'Επίλυσις. 'Εκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $\text{ἐφ}B = \frac{\beta}{\gamma}$ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Β καὶ εἶτα εὐκόλως τὴν Γ.

'Εκ δὲ τῆς $\text{ἡμ}\ B = \frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν α. Τέλος τὸ Ε εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Γνωστά,	*ἄγνωστα στοιχεῖα*
β, γ	Β, Γ, α, Ε

Τύποι ἐπιλύσεως

$$\text{ἐφ}\ B = \frac{\beta}{\gamma},\ \Gamma = 90^0 - B$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\beta},\ E = \frac{1}{2}\beta\gamma$$

Παράδειγμα. Ἔστω β = 3456 μέτρα καὶ γ = 1280 μέτρα.

'Υπολογισμὸς τῶν Β καὶ Γ

'Εκ τῆς $\text{ἐφ}B = \frac{\beta}{\gamma}$ ἔπεται ὅτι:

$$\begin{array}{l}
\text{λογἐφ}\ B = \text{λογ}\ \beta - \text{λογ}\ \gamma \\
\quad \text{λογ}\ \beta = 3{,}53857 \\
\quad \text{λογ}\ \gamma = 3{,}10721 \\
\hline
\text{λογἐφ}\ B = 0{,}43136 \\
\qquad B = 69^0 40' 36'' \\
\hline
\quad 90^0 = 89^0\ 59'\ 60'' \\
\qquad B = 69^0\ 40'\ 36'' \\
\hline
\qquad \Gamma = 20^0\ 19'\ 24''
\end{array}$$

'Υπολογισμὸς τῆς α

'Εκ τῆς $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ ἔπεται ὅτι:

$$\begin{array}{l}
\text{λογ}\alpha = \text{λογ}\beta - \text{λογἡμ}\ B, \\
\qquad \text{λογ}\ \beta = 3{,}53857 \\
\qquad \text{λογἡμ}B = \bar{1}{,}97208 \\
\hline
\quad .\ \text{λογ}\ \alpha = 3{,}56649 \\
\qquad\quad \alpha = 3685{,}41\ \text{μέτ.}
\end{array}$$

Κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ (§ 21 καὶ § 22) εὑρίσκομεν ὅτι:

Ε = 2 211 800 τ.μ.

'Ασκήσεις

94. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει β = 18 μέτ. καὶ γ = 12 μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

95. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει β = 256,25 μέτ. καὶ γ = 348 μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

96. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει β = 3168,45 μέτ. καὶ γ = 2825,50 μέτρα. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

97. Ἡ μία διαγώνιος ρόμβου ἔχει μῆκος 3,48 μέτ. ἡ δὲ ἄλλη 2,20 μετ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

98. Ὁ λόγος τοῦ ὕψους πρὸς τὴν βάσιν ὀρθογωνίου εἶναι $\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς διαγωνίου μὲ τὰς διαστάσεις αὐτοῦ.

99. Τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἀπέχει 8 μέτ. ἀπὸ χορδῆς 12 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ καὶ τὰ μέτρα τῶν εἰς τὴν χορδὴν ἀντιστοίχων τόξων.

100. Ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 940,50 τ.μ. καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 260,40 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τοῦτο.

101. Ἕκαστον ἀέτωμα τοῦ Παρθενῶνος εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 28,35 μέτ. καὶ ὕψος 3,46 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν.

Δ' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

33. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν εἶναι γνωστὴ μία κάθετος πλευρὰ καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.**

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι $β = 2347,5$ μέτ. καὶ $Β = 51^0\, 12'\, 38''$.

Ἐπίλυσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Γ εὐκόλως. Ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἰσότητα $γ = β$ ἐφ $Γ$ εὑρίσκομεν τὴν γ. Ἀπὸ δὲ τὴν ἰσότητα $α = \frac{β}{ἡμβ}$ εὑρίσκομεν τὴν α. Τέλος ἀπὸ τὰς ἰσότητας $Ε' = \frac{1}{2} βγ$ καὶ $γ = β$ ἐφ $Γ$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mathbf{Ε = \frac{1}{2} β^2 ἐφΓ}, \qquad (3)$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

Γνωστά, ἄγνωστα
στοιχεῖα
β, Β Γ,γ,α,Ε
Τύποι ἐπιλύσεως
$Γ = 90^0 - Β,\ γ = βἐφΓ$
$α = \frac{β}{ἡμΒ},\ Ε = \frac{1}{2} β^2ἐφΓ$

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ

$$\begin{array}{r} 90^0 = 89^0\, 59'\, 60'' \\ \underline{Β = 51^0\, 12'\, 38''} \\ Γ = 38^0\, 47'\, 22' \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ

Ἐκ τῆς $γ = β$ ἐφ $Γ$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\begin{array}{r} λογ\, γ = λογ\, β + λογ\, ἐφ\, Γ \\ λογ\, β = 3,37060 \\ \underline{λογἐφΓ = \bar{1},90511} \\ λογ\, γ = 3,27571, \\ γ = 1\,886,74 \text{ μέτ.} \end{array}$$

Ὑπολογισμὸς τῆς α

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογ}\alpha = \text{λογ}\,\beta - \text{λογἡμ}B,$$

$$\text{λογ}\,\beta = 3{,}37060$$

$$\text{λογἡμ}\,B = \bar{1}{,}89179$$

$$\text{λογ}\,\alpha = 3{,}47881$$

$$\alpha = 3011{,}71 \text{ μέτ.}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ E :

Ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta^2 \text{ἐφ}\Gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογ}E = 2\text{λογ}\beta + \text{λογἐφ}\Gamma - \text{λογ}2.$$

$$2\text{λογ}\,\beta = 6{,}74120$$

$$\text{λογἐφ}\,\Gamma = \bar{1}{,}90511$$

$$\text{ἄθροισμα} = 6{,}64631$$

$$\text{λογ}\,2 = 0{,}30103$$

$$\text{λογ}\,E = 6{,}34528$$

$$E = 2\,214\,526{,}32 \text{ τ.μ.}$$

Ἀσκήσεις

102. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\beta = 47$ μέτ. καὶ $B = 47^{0}$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

103. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\beta = 125$ μέτ. καὶ $\Gamma = 23^{0}\,45'\,22''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

104. Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 5,60 μέτ. ἡ δὲ διαγώνιος αὐτοῦ σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν γωνίαν $25^{0}34'\,44''$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς βάσεως, τῆς διαγωνίου καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

105. Μία χορδὴ κύκλου ἔχει μῆκος 1,65 μέτ., ἡ δὲ γωνία αὐτῆς μὲ τὴν εἰς τὸ ἄκρον της καταλήγουσαν ἀκτῖνα εἶναι $40^{0}\,18'\,38''$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς ταύτης καὶ τὰ μέτρα τῶν εἰς ταύτην ἀντιστοίχων τόξων.

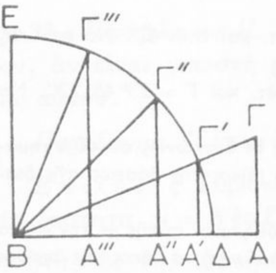
106. Τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι 0,80 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

107. Ἓν κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει ὕψος 1,80 μέτ. καὶ κλίσιν 20^{0}. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

34. Συνημίτονον ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἔστω ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ Γ΄Α΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀγομένη ἐκ τυχόντος σημείου Γ΄ τῆς εὐθείας ΒΓ (σχ. 14).



Σχ. 14

Ἂν ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τὴν § 8, βεβαιούμεθα ὅτι διὰ τὴν σταθερὰν γωνίαν Β εἶναι $\frac{\mathrm{B A}}{\mathrm{B \Gamma}} = \frac{\mathrm{B A'}}{\mathrm{B \Gamma'}}$, ἤτοι ὁ λόγος $\frac{\mathrm{B A}}{\mathrm{B \Gamma}}$ εἶναι σταθερός.

Καὶ ἀντιστρόφως: Εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\mathrm{B A}}{\mathrm{B \Gamma}}$ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη γωνία Β.

Τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον $\frac{\mathrm{B A}}{\mathrm{B \Gamma}}$ ὀνομάζομεν **συνημίτονον** τῆς γωνίας Β. Ὥστε:

Συνημίτονον ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκειται ἡ γωνία αὕτη, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

Τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας Β σημειώνομεν οὕτω: συν Β.

Εἶναι λοιπόν: $\qquad$ $\text{συν}\,\mathrm{B} = \frac{\mathrm{B A}}{\mathrm{B \Gamma}}.$

Ἂν δὲ γράψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔΕ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα μήκους ΒΕ, θὰ εἶναι (ΒΓ΄) = 1 καὶ

$$\text{συν}\,\mathrm{B} = \frac{\mathrm{B A}}{\mathrm{B \Gamma}} = \frac{\mathrm{B A'}}{\mathrm{B \Gamma'}} = (\mathrm{B A'}).$$

Εἶναι λοιπὸν τὸ συνΒ μῆκος εὐθ. τμήματος, δηλαδὴ μῆκος στοιχείου ὁμοειδοῦς πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

Ἀπὸ τὸ σχ. 14 βλέπομεν εὐκόλως ὅτι : Ἂν ἡ γωνία ΑΒΓ συνεχῶς αὐξανομένη γίνεται ΑΒΓ'', ΑΒΓ''' κ.τ.λ., τὸ συνημίτονον (ΒΑ) γίνεται ἀντιστοίχως (ΒΑ''), (ΒΑ''') κ.τ.λ.
Εἶναι δὲ (ΒΑ') 〉 (ΒΑ'') 〉 (ΒΑ''') κ.τ.λ. Ἤτοι:

Ἂν ἡ ὀξεῖα γωνία βαίνῃ αὐξανομένη, τὸ συνημίτονον αὐτῆς βαίνει ἐλαττούμενον.

Ὅταν δὲ ἡ γωνία πλησιάζῃ πρὸς τὴν ὀρθὴν ΑΒΕ, τὸ συνημίτονον αὐτῆς πλησιάζει πρὸς τὸ μηδέν. Κατ' ἀναλογίαν λοιπὸν δεχόμεθα ὅτι : $\text{συν}\ 90^0 = 0$

Ἀντιθέτως : Ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη γίνῃ 0, τὸ (ΒΑ') γίνεται (ΒΔ), ἤτοι 1. Δεχόμεθα λοιπὸν ὅτι : $\text{συν}\ 0^0 = 1$.

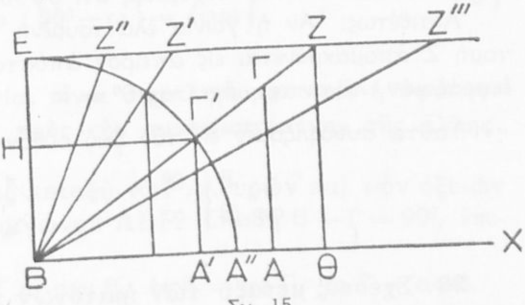
Τὴν μεταβολὴν ταύτην τοῦ συνημιτόνου γωνίας συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

$$\begin{matrix} B \\ \text{συν}\,B \end{matrix}\left\{\begin{matrix} 0^0 & \ldots\ldots & \nearrow & \ldots\ldots & 90^0 \\ 1 & \ldots\ldots & \searrow & \ldots\ldots & 0 \end{matrix}\right.$$

35. Συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας. Ἔστω ΑΒΓ ἐν ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 15). Ἐκ τυχόντος σημείου Γ' τῆς εὐθείας ΒΓ φέρομεν τὴν Γ'Α' κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ ἀποδεικνύομεν, ὅπως εἰς τὴν § 23, ὅτι διὰ σταθερὰν γωνίαν Β εἶναι :

$$\frac{BA'}{A'\Gamma'} = \frac{BA}{A\Gamma}$$

Καὶ ἀντιστρόφως : Εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{BA}{A\Gamma}$ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη ὀξεῖα γωνία Β.



Σχ. 15

Τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον $\frac{BA}{A\Gamma}$ ὀνομάζομεν **συνεφαπτομένην** τῆς ὀξείας γωνίας Β. Τὴν συνεφαπτομένην ταύτην σημειοῦμεν οὕτω : σφ Β.

Εἶναι λοιπὸν $\sigma\varphi\, \mathrm{B} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Gamma}}$. Ὁμοίως $\sigma\varphi\, \Gamma = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{BA}}$. Ὥστε :

Συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκειται ἡ γωνία αὕτη, πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κάθετον πλευράν.

Τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν τῆς σφ Β μανθάνομεν ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν τεταρτημόριον Α′′Ε μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα μήκους ΒΕ. Ἔστω δὲ Γ′ ἡ τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ Ζ ἡ τομὴ τῆς ΒΓ ὑπὸ τῆς εἰς τὸ Ε ἐφαπτομένης τοῦ τεταρτημορίου. Φέρομεν ἔπειτα τὰς Γ′Α′ καὶ Γ′Η καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ ΒΕ.

Ἤδη βλέπομεν εὐκόλως ὅτι : $\sigma\varphi\, \mathrm{B} = \frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{A'\Gamma'}} = \frac{\mathrm{H\Gamma'}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{BE}}$. Ἐπειδὴ δὲ ΒΕ εἶναι ἡ μονὰς μήκους ἐξ ὑποθέσεως, ἔπεται ὅτι $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{BE}} = (\mathrm{EZ})$ καὶ ἑπομένως : $\sigma\varphi\, \mathrm{B} = (\mathrm{EZ})$.

Ὁμοίως εἶναι $\sigma\varphi\, \widehat{\mathrm{ABZ'}} = (\mathrm{EZ'})$, $\sigma\varphi\, (\widehat{\mathrm{ABZ''}}) = (\mathrm{EZ''})$ κ.τ.λ.

Ὥστε, ἂν ἡ γωνία βαίνῃ αὐξανομένη καὶ πλησιάζῃ νὰ γίνῃ ὀρθή, ἡ συνεφαπτομένη ἐλαττοῦται καὶ πλησιάζει πρὸς τὸ μηδέν. Κατ' ἐπέκτασιν λοιπὸν δεχόμεθα, ὅτι $\sigma\varphi\, 90^0 = 0$

Ἀντιθέτως: Ἂν ἡ γωνία ἐλαττουμένη τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν, ἡ τομὴ Ζ ἀπομακρύνεται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ε. Τοῦτ ἐκφράζομεν λέγοντες, ὅτι : $\sigma\varphi\, 0^0 = \infty$

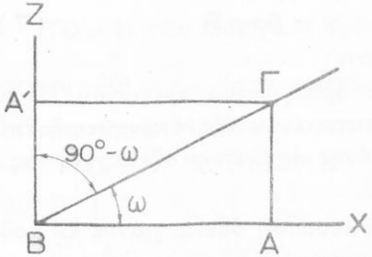
Ταῦτα συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

$$\begin{array}{r} \mathrm{B} \\ \sigma\varphi\ \mathrm{B} \end{array} \left\{ \begin{array}{lcccl} 0^0 & \dots\dots & \nearrow & \dots\dots & 90^0 \\ \infty & \dots\dots & \searrow & \dots\dots & 0 \end{array} \right.$$

36. **Σχέσεις μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων δύο συμπληρωματικῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ὡς καὶ μεταξὺ ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων αὐτῶν.** α′) Ἔστω μία ὀξεῖα γωνία ΧΒΓ, ἔχουσα μέτρον ω, καὶ ΓΒΖ ἡ συμπληρωματικὴ αὐτῆς, ἥτις ἔχει μέτρον $90^0 - \omega$ (σχ. 16). Ἐκ τυχόντος σημείου Γ τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτῶν φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΑ′ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΒΧ καὶ ΒΖ.

Βλέπομεν οὕτως ὅτι $\text{ἡμ}\ \omega = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$, $\text{συν}\ \omega = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}}$,

$$\text{συν}\ (90^0 - \omega) = \frac{\text{ΒΑ}'}{\text{ΒΓ}}, \quad \text{ἡμ}\ (90^0 - \omega) = \frac{\text{Α}'\text{Γ}}{\text{ΒΓ}}.$$



Σχ. 16

Ἐπειδὴ δὲ ΑΓ = ΒΑ' καὶ ΒΑ = Α'Γ, ἔπεται ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \textbf{συν}\ (90^0 - \omega) &= \textbf{ἡμ}\omega \\ \textbf{ἡμ}\ (90^0 - \omega) &= \textbf{συν}\omega \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, τὸ ἡμίτονον ἑκατέρας ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης.

β') Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σχ. 16 βλέπομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}\ \omega = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}}, \quad \text{σφ}\ \omega = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}}$$

$$\text{σφ}\ (90^0 - \omega) = \frac{\text{ΒΑ}'}{\text{Α}'\text{Γ}}, \quad \text{ἐφ}\ (90^0 - \omega) = \frac{\text{Α}'\text{Γ}}{\text{ΒΑ}'}.$$

Ἐκ τούτων δὲ συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἐφ}\ (90^0 - \omega) &= \textbf{σφ}\omega \\ \textbf{σφ}\ (90^0 - \omega) &= \textbf{ἐφ}\omega \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ὥστε:

Ἂν δύο ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, ἡ ἐφαπτομένη ἑκατέρας ἰσοῦται πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τῆς ἄλλης.

37. Ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ $\text{Β} + \text{Γ} = 90^0$, ἔπεται ὅτι:

$$\text{ἡμ}\ \text{Β} = \text{συν}\ \text{Γ}, \quad \text{ἡμ}\ \text{Γ} = \text{συν}\ \text{Β}, \quad \text{ἐφ}\ \text{Β} = \text{σφ}\ \text{Γ}, \quad \text{ἐφ}\ \text{Γ} = \text{σφ}\ \text{Β}.$$

Ἕνεκα τούτου αἱ γνωσταὶ (§ 19) σχέσεις :

$$\beta = \alpha\text{ἡμ}\ \text{Β}, \quad \gamma = \alpha\text{ἡμ}\ \text{Γ}$$

γίνονται :

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\textbf{συν}\ \textbf{Γ}, \quad \gamma = \boldsymbol{\alpha}\textbf{συν}\ \textbf{Β} \quad (6)$$

Ἐξ ὅλων τούτων βλέπομεν ὅτι :

α') Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον της ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ὀξείας

γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης εἰς ἐκείνην ὀξείας γωνίας.

Ὁμοίως αἱ γνωσταὶ (§ 31) σχέσεις :

$$β = γ\,\text{έφ}\,Β, \qquad γ = β\,\text{έφ}\,Γ$$

γίνονται :

$$\mathbf{β = γ\,σφ\,Γ}, \qquad \mathbf{γ = β\,σφ\,Β} \qquad (7)$$

Ἐξ ὅλων δὲ τούτων βλέπομεν ὅτι :

β΄) **Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης εἰς ἐκείνην ὀξείας γωνίας.**

38. *Πρόβλημα I.* **Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ἐκ τοῦ συνημιτόνου ἢ τῆς συνεφαπτομένης αὐτῆς.**

Λύσις. α΄) Ἂν π.χ. $συν\,ω = 0{,}56$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι $ἡμ\,Β = 0{,}56$ (§ 12).

Ἡ ὀξεῖα γωνία Γ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι ἐκ τῆς σχέσεως $Β + Γ = 90^0$ ἕπεται ὅτι $συν\,Γ = ἡμ\,Β = 0{,}56$.

β΄) Ἂν $σφ\,ω = 1{,}25$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν (§ 26) ὀρθογώνιον τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι $έφ\,Β = 1{,}25$. Εὐκόλως δὲ βεβαιούμεθα ὅτι ἡ ἄλλη ὀξεῖα Γ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀσκήσεις

108. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν $συνχ = \frac{2}{3}$.
109. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν $συνω = 0{,}45$.
110. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ψ, ἂν $συνψ = 0{,}34$.
111. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν $σφχ = \frac{2}{5}$.
112. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν $σφω = 0{,}6$.

39. *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνημίτονον καὶ ἡ συνεφαπτομένη γωνίας 45^0, 30^0, 60^0.**

Λύσις. α΄) Ἂν $ω = 45^0$, θὰ εἶναι καὶ $90^0 - ω = 45^0$ (σχ. 16). Ἑπομένως ἑκατέρα τῶν γνωστῶν (4) (§ 36) ἰσοτήτων γίνεται :

$$συν\,45^0 = ἡμ\,45^0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $ἡμ\,45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (§ 13), ἕπεται ὅτι καὶ $\mathbf{συν\,45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Ἐκ δὲ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων συν $3C^0$ = ἡμ 60^0, ἡμ $60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ἕπεται ὅτι : **συν** $\mathbf{30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Τέλος ἐκ τῶν ἰσοτήτων συν 60^0 = ἡμ 30^0, ἡμ $30^0 = \frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι **συν** $\mathbf{60^0 = \frac{1}{2}}$. Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα τῆς § 34 οὕτω:

$$\begin{array}{r} B \\ \text{συν } B \end{array}\left\{\begin{array}{lllllllll} 0^0 \dots & \nearrow & \dots 30^0 \dots & \nearrow & \dots 45^0 \dots & \nearrow & \dots 60^0 & \dots & 90^0 \\ 1 \dots & \searrow & \dots \frac{\sqrt{3}}{2} \dots & \searrow & \dots \frac{\sqrt{2}}{2} \dots & \searrow & \dots \frac{1}{2} & \dots & 0 \end{array}\right.$$

β΄) Διὰ ω = 45^0 ἡ γνωστὴ (§ 36,5) ἰσότης ἐφ (90^0 – ω) = σφ ω γίνεται σφ 45^0 = ἐφ 45^0. Ἐπειδὴ δὲ ἐφ 45^0 = 1 (§ 27), ἕπεται ὅτι καὶ **σφ** $\mathbf{45^0 = 1}$.

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἰσοτήτων σφ 30^0 = ἐφ 60^0 καὶ ἐφ $60^0 = \sqrt{3}$ (§ 27) εὑρίσκομεν ὅτι : **σφ** $\mathbf{30^0 = \sqrt{3}}$

Τέλος ἐκ τῶν ἰσοτήτων σφ 60^0 = ἐφ 30^0 καὶ ἐφ $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (§ 27) εὑρίσκομεν ὅτι : **σφ** $\mathbf{60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$. Κατὰ ταῦτα συμπληρώνομεν τὸν πίνακα τῆς § 35 οὕτω :

$$\begin{array}{r} B \\ \text{σφ } B \end{array}\left\{\begin{array}{lllllllll} 0^0 \dots & \nearrow & \dots 30^0 \dots\dots & & 45^0 \dots & \nearrow & \dots 60^0 \dots & \nearrow & \dots 90^0 \\ \infty \dots & \searrow & \dots \sqrt{3} \dots\dots & & 1 \dots & \searrow & \dots \frac{\sqrt{3}}{3} \dots & \searrow & \dots 0. \end{array}\right.$$

40. *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνημίτονον δοθείσης ὀξείας γωνίας.**

Λύσις (1ος τρόπος). Ὁ πίναξ I τοῦ βιβλίου τούτου περιέχει καὶ τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα προχωροῦσιν ἀνὰ 10΄.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀκεραίων μοιρῶν ἀναγράφονται εἰς τὴν α΄ στήλην τῆς β΄ σελίδος καὶ προχωροῦσιν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ἀπὸ 0^0 μέχρι 45^0. Συνεχίζονται δὲ εἰς τὴν τελευταίαν στήλην τῆς α΄ σελίδος ἀπὸ 45^0 μέχρις 89^0 ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.

Τὸ συνημίτονον γωνίας μικροτέρας 45^0, π.χ. 38^0 40΄, εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τῶν 38^0 μὲ τὴν στήλην, ἥτις φέρει ἄνω τὸν ἀριθμὸν 40΄.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι $συν(38^0\,40') = 0{,}78079$.

Τὸ δὲ συνημίτονον γωνίας μεγαλυτέρας 45^0, π.χ. $51^0\,20'$, εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τῶν 51^0 καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία φέρει κάτω τὸν ἀριθμὸν $20'$. Εἶναι λοιπὸν

$$συν\,(51^0\,20') = 0{,}62479.$$

Τὸ $συν(38^0\,27'\,30'')$ εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς :

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι :

$$38^0\,20' < 38^0\,27'\,30'' < 38^0\,30' \text{ καὶ ἑπομένως:}$$

$$συν(38^0\,20') > συν\,(38^0\,27'\,30'') > συν\,(38^0\,30') \text{ ἤ}$$

$$0{,}78442 > συν\,(38^0\,27'\,30'') > 0{,}78261$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ $10'$ ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ συνημιτόνου κατὰ

$$0{,}78442 - 0{,}78261 = 0{,}00181.$$

Κατ' ἀκολουθίαν πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἐλάττωσιν τοῦ συνημιτόνου , ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ $7'\,30''$ ἢ $\frac{15'}{2}$ 'Εκ τῆς διατάξεως δέ :

$10'$ $0{,}00181$

$\frac{15'}{2}$ $ψ$ εὑρίσκομεν $ψ = 0{,}00181 \cdot \frac{15}{20} = 0{,}00181 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}00136.$

Ἄρα $συν(38^0\,27'\,30'') = 0{,}78442 - 0{,}00136 = 0{,}78306.$

(2ος τρόπος). Ἂν θέσωμεν π.χ. $χ = συν(38^0\,27'\,30'')$, θὰ εἶναι

$$λοχ\,χ = λογσυν(38^0\,27'\,30'').$$

Ἂν δὲ εὕρωμεν τὸν $λογσυν(38^0\,27'\,30'')$, ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸν $χ$.

Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες, εἰς τοὺς ὁποίους περιέχονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων, περιέχουσι καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν συνημιτόνων τῶν ὀξειῶν γωνιῶν. Εὑρίσκονται δὲ οἱ λογάριθμοι οὗτοι εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουσι τὴν συγκεκομμένην λέξιν **συν** δηλ. συνημίτονον, ἄνω μὲν διὰ τὰς μικροτέρας τῶν 45^0 γωνίας, κάτω δὲ διὰ τὰς ἄλλας.

Τὰ πρῶτα λεπτὰ εὑρίσκονται εἰς τὰς αὐτὰς στήλας, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν διὰ τὰ ἡμίτονα καὶ διὰ τὰς ἐφαπτομένας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸν $λογσυν(38^0\,27'\,30'')$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι :

$38^0 27' \;<\; 38^0 27' 30'' \;<\; 38^0 28'$, ὅθεν
συν $(38^0 27') >$ συν $(38^0 27' 30'') >$ συν $(38^0 28')$, καὶ
λογσυν$(38^0 27') >$ λογσυν $(38^0 27' 30'') >$ λογσυν$(38^0 28')$ ἢ
$\bar{1},89385 >$ λογσυν $(38^0 27' 30'') > \bar{1},89375$.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 60'' ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου τοῦ συνημιτόνου κατὰ 10 μον. τελ. δεκ. τάξ. Εἰς δὲ αὔξησιν τοῦ μέτρου κατὰ 30'' θὰ ἀντιστοιχῇ ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 5 μον. τελ. δεκ. ταξ. Εἶναι λοιπὸν λογ χ = λογσυν $(38^0 27' 30'') = \bar{1},89380$ καὶ ἑπομένως :

χ = συν $(38^0 27' 30'') = 0,78306$.

(3ος τρόπος). Εὐκολώτερον λύομεν τὸ ζήτημα τοῦτο μὲ μόνον τοὺς γνωστοὺς μέχρι τοῦδε πίνακας τῶν ἡμιτόνων, ἂν εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης γωνίας. Οὕτω συν $(38^0 40')$ = ἡμ $(51^0 20') = 0,78079$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συν $(38^0 27' 30'')$ παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμ $(51^0 32' 30'') = 0,78306$.

Ἀσκήσεις

113. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν $(23^0 17')$ καὶ τὸ συν $(49^0 23')$.
114. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν $(35^0 15' 45'')$ καὶ τὸ συν $(62^0 12' 54'')$.
115. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν$43^{\gamma},6$ καὶ τὸ συν $\frac{3\pi}{8}$.

41. *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς.**

Λύσις. Ἔστω ὅτι συν χ = 0 82650 καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.

1ος τρόπος ἐκ τοῦ πίνακος I. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $0,82650 > 0,70711$ = συν 45^0 καὶ συμπεραίνομεν ὅτι $\chi < 45^0$.

Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν ἀριθμὸν 0,82650 εἰς τὴν β' σελίδα τοῦ πίνακος καὶ βλέπομεν ὅτι:

$0,82741 \;>\; 0,82650 \;>\; 0,82577$ ἢ
συν $(34^0 10') >$ συν χ $>$ συν $(34^0 20')$ καὶ ἑπομένως
$34^0 10' \;<\; \chi \;<\; 34^0 20'$.

Οὕτως εἰς ἐλάττωσιν τοῦ συνημιτόνου κατὰ 0,82741 – 0,82577 = 0,00164 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 10′. Θὰ ἀναζητήσωμεν ἤδη πόση αὔξησις τοῦ μέτρου ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐλάττωσιν τοῦ συνημιτόνου κατὰ 0,82741 – 0,82650 = 0,00091. Ἐκ τῆς διατάξεως:

$$\begin{array}{cc} 0{,}00164 & 10' \\ 0{,}00091 & \psi \\ \hline \end{array}$$

εὑρίσκομεν $\psi = 10' \cdot \dfrac{91}{164} = \dfrac{910}{164} = 5'\,33''.$

Ἑπομένως : $\chi = 34^0\,15'\,33''.$

2ος τρόπος ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ συν χ. Ἐπειδὴ καθ’ ὑπόθεσιν εἶναι συνχ = 0,82650, ἕπεται ὅτι λογσυνχ = $\overline{1},91724$.

Ἀναζητοῦντες τοῦτον εἰς τὰς στήλας τῶν συνημιτόνων τῶν λογαριθμικῶν πινάκων βλέπομεν ὅτι :

$\overline{1},91729 > \overline{1},91724 > \overline{1},91720$ ἢ
συν(34⁰ 15′) > συν χ > συν (34⁰ 16′), ὅθεν
34⁰ 15′ < χ < 34⁰ 16′

Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἐλάττωσιν τοῦ λογ. κατὰ 9 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ τόξου κατὰ 60″, καταρτίζομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

$$\begin{array}{cc} 9 & 60'' \\ 5 & \psi \\ \hline \end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 60'' \cdot \dfrac{5}{9} = 33''$

Εἶναι λοιπόν : $\chi = 34^0\,15'\,33''$

3ος τρόπος ἐκ τοῦ μέτρου τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας. Ἐπειδὴ συν χ = ἡμ (90⁰ – χ), ἕπεται ὅτι :

ἡμ (90⁰ – χ) = 0,82650

Καθ’ ἕνα δὲ τῶν γνωστῶν (§ 18) τρόπων εὑρίσκομεν ὅτι 90⁰ – χ = 55⁰ 44′ 27″ . Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι :

$$\chi = (89^0\,59'\,60'') - (55^0\,44'\,27'') = 34^0\,15'\,33''.$$

Ἀσκήσεις

116. Ἂν συνχ = 0,795, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.
117. Ἂν συνω = 0,4675, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ω.

118. Ἂν συνψ $= \frac{5}{7}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ψ.

119. Ἂν ἡμχ $= 0{,}41469$ καὶ συνψ $= 0{,}41469$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\chi + \psi$

120. Ἂν ἡμχ $= 0{,}92276$ καὶ συνψ $= 0{,}67321$, νὰ ἀποδειχθῇ ἄνευ πινάκων ὅτι $\chi + \psi > 90^0$.

42. *Πρόβλημα* Ι'. **Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ μέτρου αὐτῆς.**

Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν σφ$(38^0\,45'\,28'')$.

Λύσις. 1ος τρόπος ἐκ τοῦ πίνακος III. Ὁ πίναξ οὗτος περιέχει καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν ὀξειῶν γωνιῶν μὲ διάταξιν καὶ χρῆσιν ὁμοίαν πρὸς τὴν τοῦ πίνακος I διὰ τὰ συνημίτονα.

Οὕτως, ἐπειδὴ $38^0\,40' < 38^0\,45'\,28'' < 38^0\,50'$

ἕπεται ὅτι : σφ$(38^0\,40') >$ σφ$(38^0\,45'\,28'') >$ σφ$(38^0\,50')$

ἢ $1{,}24969 >$ σφ$(38^0\,45'\,28'') > 1{,}24227$.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 10' ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τῆς συνεφαπτομένης αὐτῆς κατὰ $1{,}24969 - 1{,}24227 = 0{,}00742$. Καταρτίζομεν λοιπὸν τὴν ἀκόλουθον. διάταξιν :

$$\begin{array}{cc} 10' & 0{,}00742 \\ 5\,\frac{28'}{60} & \psi \\ \hline \end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 0{,}00742 \cdot \frac{328}{600} = 0{,}00405$

Ἑπομένως σφ$(38^0\,45'\,28'') = 1{,}24969 - 0{,}00405 = 1{,}24564$.

2ος τρόπος ἐκ τοῦ λογαρίθμου τῆς συνεφαπτομένης. Ἂν θέσωμεν $\chi =$ σφ $(38^0\,45'\,28'')$, θὰ εἶναι λογχ $=$ λογσφ $(38^0\,45'\,28'')$.

Τοῦτον δὲ τὸν λογάριθμον εὑρίσκομεν ἀπὸ τοὺς πίνακας, τοὺς ὁποίους ἐχρησιμοποιήσαμεν ἕως τώρα διὰ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων, ἐφαπτομένων καὶ συνημιτόνων. Ἐργαζόμεθα δὲ ἀκριβῶς ὅπως καὶ διὰ τὰ συνημίτονα, ἀλλὰ μὲ τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἄνω ἢ κάτω τὴν συγκεκριμένην λέξιν Σφ, δηλαδὴ (συνεφαπτόμεναι).

Οὕτως εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἀνισότητας :

$$38^0\,45' < 38^0\,45'\,28'' < 38^0\,46'.$$

$$\text{σφ}(38^0\,45') > \text{σφ}(38^0\,45'\,28'') > \text{σφ}(38^0\,46')$$

$$\text{λογσφ}\,(38^0\,45') > \text{λογσφ}(38^0\,45'\,28'') > \text{λογσφ}\,(38^0\,46')$$

ἢ $0{,}09551 > \text{λογσφ}\,(38^0\,45'\,28'') > 0{,}09525$

Ἐκ δὲ τοῦ πινακιδίου 26 = (0,09551 – 0,09525) εὑρίσκομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ μέτρου τῆς γωνίας κατὰ 28″ ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου κατὰ 8,7 + 3,47 = 12,17 ἢ 12 κατὰ προσέγγισιν. Εἶναι λοιπὸν λογ χ = 0,09551 – 0,00012 = 0,09539. Ἑπομένως :

$$\chi = \text{σφ}(38^0\,45'\,28'') = 1{,}24563.$$

3ος τρόπος ἐκ τῆς ἐφαπτομένης τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας. Οὕτως, ἐπειδὴ σφ$(38^0\,45'\,28'')$ = ἐφ $(51^0\,14'\,32'')$ θὰ εἶναι λογσφ$(38^0\,45'\,28'')$ = λογἐφ $(51^0\,14'\,32'')$ κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις

121. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σφ$(15^0\,35')$ καὶ ἡ σφ$(62^0\,46')$.
122. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σφ$(27^0 32'\,50'')$ καὶ ἡ σφ$(70^0\,12'\,24'')$.
123. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σφ$30^\gamma,5$ καὶ ἡ σφ $\frac{2\pi}{5}$

43. *Πρόβλημα VI.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον μιᾶς ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς συνεφαπτομένης αὐτῆς.** Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος III τοῦ βιβλίου τούτου ἢ τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων. Ἐργαζόμεθα δὲ ἀκριβῶς ὅπως καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος IV (§ 41) μεταχειριζόμενοι τὰς στήλας τῶν συνεφαπτομένων ἀντὶ τῶν συνημιτόνων.

Οὕτως, ἂν σφ χ = 1,47860, θὰ εἶναι λογσφ χ = 0,16985 καὶ χ = $34^0\,4'\,15''$. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ μέτρον τῆς συμπληρωματικῆς γωνίας ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν ἐφαπτομένων. Διότι ἐφ$(90^0 - \chi)$ = σφ χ = 1,47860 καὶ λογἐφ$(90^0 - \chi)$=0,16985. $90^0 - \chi = 55^0\,55'\,45''$. Ἑπομένως χ = $34^0\,4'\,15''$.

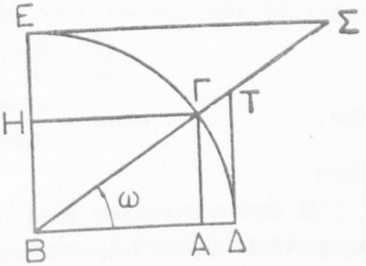
Ἀσκήσεις

124. Ἂν σφχ = 2,340, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας χ.
125. Ἂν σφω = 0,892, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ω.
126. Ἂν σφψ = $\frac{15}{9}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας ψ.
127. Ἂν σφχ = 1,34 καὶ ἐφψ = 0,658, νὰ ἀποδειχθῇ ἄνευ πινάκων ὅτι χ + ψ < 90^0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

44. Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὀξείας γωνίας. Τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον, ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἑκάστης ὀξείας γωνίας λέγονται **τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ** τῆς γωνίας ταύτης.



Σχ. 17

45. Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς ὀξείας γωνίας. α΄) Ἔστω ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ω τὸ μέτρον τῆς ὀξείας γωνίας Β αὐτοῦ (σχ. 17). Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι:

$$(\text{ΑΓ})^2 + (\text{ΒΑ})^2 = (\text{ΒΓ})^2.$$

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ (ΒΓ) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left(\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}}\right)^2 = 1$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \text{ἡμ}\,\omega$ καὶ $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΓ}} = \text{συν}\omega$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

$$(\text{ἡμ}\,\omega)^2 + (\text{συν}\omega)^2 = 1.$$

Ταύτην γράφομεν συνήθως οὕτω:

$$\mathbf{\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1} \qquad (8)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τῆς αὐτῆς γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

β΄) Ἂς λάβωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὡς μονάδα μήκους καὶ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ ἂς γράψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔΕ. Ἐμάθομεν ὅτι:

ἡμω = (ΑΓ), συνω = (ΒΑ), ἐφω = (ΔΤ) καὶ σφω = (ΕΣ). Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΒΤ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{(\Delta T)}{(A\Gamma)} = \frac{(B\Delta)}{(BA)} \text{ ἢ } \frac{\text{ἐφω}}{\text{ἡμω}} = \frac{1}{\text{συνω}}$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἐφω} = \frac{\text{ἡμω}}{\text{συνω}} \qquad (9)$$

Οὕτω βλέπομεν ὅτι:

Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου διὰ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς.

γ΄) Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΕΣ καὶ ΒΗΓ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{E\Sigma}{H\Gamma} = \frac{BE}{BH} \text{ ἢ } \frac{\text{σφω}}{\text{συνω}} = \frac{1}{\text{ἡμω}}$$

ὅθεν:

$$\text{σφω} = \frac{\text{συνω}}{\text{ἡμω}} \qquad (10)$$

Ὥστε:

Ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι πηλίκον τοῦ συνημιτόνου διὰ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς.

Πλὴν τῶν σχέσεων (8), (9), (10), οὐδεμία ἄλλη σχέσις μὴ ἀπορρέουσα ἀπὸ αὐτὰς ὑπάρχει μεταξὺ τῶν 4 τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς ὀξείας γωνίας. Διότι, ἂν ὑπῆρχε μία ἀκόμη, αὕτη μὲ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς θὰ ἀπετέλουν σύστημα 4 ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους τοὺς 4 τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς ω. Λύοντες δὲ τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν ὡρισμένην ἢ ὡρισμένας τιμὰς ἑκάστου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῆς γωνίας ω. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἐμάθομεν ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὀξείας γωνίας ω μεταβάλλονται, ἂν ἡ ω μεταβληθῇ.

Ἀπορρέουσιν ὅμως ἀπὸ αὐτὰς διάφοροι ἄλλαι σχέσεις. Ἂν π.χ. πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (9) καὶ (10), εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα:

$$\text{ἐφω} \cdot \text{σφω} = 1 \qquad (11)$$

Αἱ ἰσότητες (8) — (11) ἀληθεύουσι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν. Βραδύτερον θὰ μάθωμεν ὅτι αὗται ἀληθεύουσι διὰ πᾶν εἶδος γωνίας. Διὰ τοῦτο αὗται λέγονται **τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες**. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ γνωρίσωμεν καὶ ἄλλας τριγωνομετρικὰς ταυτότητας.

Ἀσκήσεις

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν ω ἀληθεύουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

128. $ἡμ^2ω = 1 - συν^2ω$ καὶ $συν^2ω = 1 - ἡμ^2ω$.

129. $1 + ἐφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω.}$.

130. $1 + σφ^2ω = \frac{1}{ἡμ^2ω.}$.

131. $σφ^2ω - συν^2ω = σφ^2ω \, . \, συν^2ω$.

132. $ἐφω + σφω = \frac{1}{ἡμω \cdot συνω}$.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ δύο τυχούσας ὀξείας γωνίας α καὶ β ἀληθεύουσιν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

133. $ἐφα \, . \, ἐφβ(σφα + σφβ) = ἐφα + ἐφβ$.

134. $σφα + σφβ = \frac{ἐφα + ἐφβ}{ἐφα \cdot ἐφβ}$

135. $\frac{σφα + σφβ}{ἐφα + ἐφβ} = \frac{1}{ἐφα \cdot ἐφβ}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

46. *Πρόβλημα 1.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν εἶναι γνωστὸν τὸ ἡμω.**

Λύσις. α΄) Εὕρεσις τοῦ συνω. Ἐκ τῆς ἰσότητος (8) (§ 45) εὑρίσκομεν ὅτι $συν^2 ω = 1 - ἡμ^2 ω$ καὶ ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι :

$$συνω = \sqrt{1 - ημ^2ω} \qquad (12)$$

Ἂν π.χ. εἶναι $ἡμω = \frac{4}{5}$, ἐκ τῆς (12) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$συνω = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

β΄) Εὕρεσις τῆς ἐφω. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (9) (§ 45) καὶ (12) εὑρίσκομεν ὅτι : $ἐφω = \frac{ἡμω}{\sqrt{1 - ἡμ^2ω}}$ **(13)**

Οὕτω διὰ $ἡμω = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ἡ (13) γίνεται :

$$ἐφω = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = \sqrt{3}.$$

γ') Εὕρεσις τῆς σφω. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (10) (§ 45) καὶ (12) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\textbf{σφω} = \frac{\sqrt{\textbf{1} - \textbf{ἡμ}^2\textbf{ω}}}{\textbf{ἡμω}} \qquad \textbf{(14)}$$

Οὕτω διὰ ἡμω $= \frac{1}{2}$ ἡ (14) γίνεται σφω$= \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Σημ. Αἱ τετρ. ρίζαι τῶν προηγουμένων τύπων ἐλήφθησαν θετικαί, διότι ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστης ὀξείας γωνίας εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

47. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζομεν τὸ συνω.**

Λύσις. Ἂν ἐργασθῶμεν ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν τοὺς τύπους :

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἡμω} &= \sqrt{\textbf{1} - \textbf{συν}^2\textbf{ω}} \\ \textbf{ἐφω} &= \frac{\sqrt{\textbf{1} - \textbf{συν}^2\textbf{ω}}}{\textbf{συνω}} \\ \textbf{σφω} &= \frac{\textbf{συνω}}{\sqrt{\textbf{1} - \textbf{συν}^2\textbf{ω}}} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(15)}$$

Οὕτως, ἂν συνω $= \frac{3}{5}$, εὑρίσκομεν :

$$\text{ἡμω} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5},\ \text{ἐφω} = \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{4},\ \text{σφω} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}} = \frac{3}{4}.$$

48. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἐφω.**

Λύσις α') Εὕρεσις τοῦ ἡμω καὶ τοῦ συνω. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο οὗτοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μόνοι ἄγνωστοι εἰς τὰς ἰσότητας :

$$\text{ἡμ}^2\text{ω} + \text{συν}^2\text{ω} = 1, \qquad \text{ἐφω} = \frac{\text{ἡμω}}{\text{συνω}}.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς β' εὑρίσκομεν ἡμω = συνω · ἐφω (1)

Ἕνεκα δὲ ταύτης ἡ α′ γίνεται :

$$\text{συν}^2ω\cdot\text{ἐφ}^2ω + \text{συν}^2ω = 1 \quad \text{ἢ} \quad (1 + \text{ἐφ}^2ω)\cdot\text{συν}^2ω = 1.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν κατὰ σειράν : καὶ

$$\text{συν}^2ω = \frac{1}{1+\text{ἐφ}^2ω} \tag{16}$$

καὶ

$$\text{συν}ω = \frac{1}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2ω}}, \tag{17}$$

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἀνωτέρω (1) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἡμ}ω = \frac{\text{ἐφ}\,ω}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2ω}} \tag{18}$$

Οὕτως, ἂν $\text{ἐφ}ω = \sqrt{3}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{συν}ω = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \text{ἡμ}ω = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (18) προκύπτει εὐκόλως καὶ ἡ ἰσότης :

$$\text{ἡμ}^2ω = \frac{\text{ἐφ}^2ω}{1+\text{ἐφ}^2ω} \tag{19}$$

τῆς ὁποίας πολλάκις κάμνομεν χρῆσιν.

β′) Εὕρεσις τῆς σφω. Ἐκ τῆς (11) εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι :

$$\text{σφ}ω = \frac{1}{\text{ἐφ}ω}.$$

Οὕτως, ἂν $\text{ἐφ}ω = \sqrt{3}$, θὰ εἶναι $\text{σφ}ω = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

49. *Πρόβλημα. IV.* **Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζωμεν τὴν σφω.**

Λύσις. α′) Εὕρεσις τοῦ συνω καὶ τοῦ ἡμω. Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς προηγουμένως λύοντες τὸ σύστημα :

$$\text{ἡμ}^2ω + \text{συν}^2ω = 1, \quad \text{σφ}ω = \frac{\text{συν}ω}{\text{ἡμ}ω}.$$

Ἀφήνομεν διὰ τοὺς μαθητὰς τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς ἐργασιας ταύτης καὶ ὑποδεικνύομεν τὴν ἑξῆς ἀκόμη μέθοδον.

Ἐκ τῆς (11) εὑρίσκομεν ὅτι $\text{ἐφ}ω = \dfrac{1}{\text{σφ}ω}$. Ἕνεκα ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι ἡ (16) γίνεται : $\text{συν}^2ω = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\text{σφ}^2ω}} = \dfrac{\text{σφ}^2ω}{1+\text{σφ}^2ω}$,

ὅθεν

$$\text{συν}ω = \frac{\text{σφ}ω}{\sqrt{1+\text{σφ}^2ω}} \tag{20}$$

Ὁμοίως ἡ (19) γίνεται : $ἡμ^2ω = \dfrac{\dfrac{1}{σφ^2ω}}{1 + \dfrac{1}{σφ^2ω}} = \dfrac{1}{1 + σφ^2ω}$

καὶ ἑπομένως : $$ἡμω = \frac{1}{\sqrt{1 + σφ^2ω}}, \qquad (21)$$

Οὕτως, ἂν $σφω = \sqrt{3}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$ἡμω = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad συνω = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

β') Εὕρεσις τῆς ἐφω. Ταύτην εὑρίσκομεν ἀμέσως ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $ἐφω = \dfrac{1}{σφω}$. Οὕτως, ἂν $σφω = \sqrt{3}$, θὰ εἶναι $ἐφω = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ἀσκήσεις

136. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $ἡμω = \dfrac{2}{5}$.

137. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $ἡμω = \dfrac{1}{2}$.

138. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $συνω = 0,5$.

139. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $συνω = \dfrac{2}{3}$

140. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $ἐφω = 1$.

141. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἂν $ἐφω = \sqrt{3}$.

142. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν $σφω = 1$.

143. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἂν $σφω = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

144. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν ω ἀληθεύει ἡ ἰσότης :

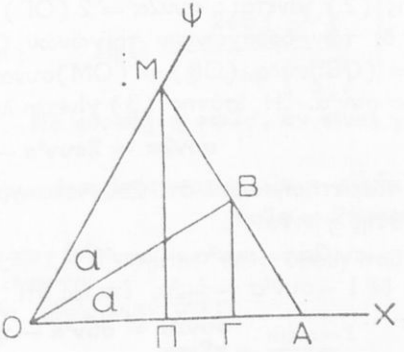
$$συν^2ω - ἡμ^2ω = \frac{1 - ἐφ^2ω}{1 + ἐφ^2ω}.$$

145. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ δύο τυχούσας ὀξείας γωνίας α καὶ β ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\dfrac{συν^2α - ἡμ^2β}{ἡμ^2α \cdot ἡμ^2β} = \dfrac{1 - ἐφ^2α \cdot ἐφ^2β}{ἐφ^2α \cdot ἐφ^2β}$

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

50. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ2α, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμα καὶ τὸ συνα, ὅταν 2α $<$ 90^0.**

Λύσις. Ἔστω ΧΟΨ τυχοῦσα ὀξεῖα γωνία, 2α τὸ μέτρον καὶ ΟΒ ἡ διχοτόμος αὐτῆς. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς τμήματα ΟΑ, ΟΜ ἴσα πρὸς τὴν μονάδα μήκους καὶ φέρομεν τὴν ΑΜ (σχ. 18). Αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς διχοτόμου εἰς τὸ μέσον Β καὶ καθέτως.



Σχ. 18

Εἶναι δηλαδὴ (ΑΒ) = (ΒΜ) καὶ $(\widehat{ABO}) = (\widehat{OBM}) = 90^0$. Ἂν δὲ φέρωμεν καὶ τὰς ΜΠ, ΒΓ καθέτους ἐπὶ τὴν ΟΑ, θὰ εἶναι :

$$(\text{ΠΜ}) = 2\,(\text{ΓΒ}) \qquad (1)$$

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΜ προκύπτει ὅτι :

$$(\text{ΠΜ}) = (\text{ΟΜ})\,\text{ἡμ}2α = \text{ἡμ}2α \qquad (2)$$

Ἀπὸ δὲ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΜΒ εὑρίσκομεν ὅτι (ΓΒ) = (ΟΒ)ἡμα, (ΟΒ) = (ΟΜ)συνα = συνα καὶ ἑπομένως

$$(\text{ΓΒ}) = \text{ἡμ}α \cdot \text{συν}α.$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ ἰσότης :

$$\text{ἡμ}2α = 2\text{ἡμ}α\text{συν}α \qquad (22)$$

Ἂν δὲ θέσωμεν 2α = ω, θὰ εἶναι $α = \frac{ω}{2}$ καὶ ἡ ἰσότης (22) γίνεται :

$$\text{ἡμ}ω = 2\text{ἡμ}\frac{ω}{2}\,\text{συν}\frac{ω}{2} \qquad (23)$$

51. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α, ἂν εἶναι γνωστὸν**

τὸ ἡμα καὶ τὸ συνα ἢ ὁ εἷς μόνον ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς τούτους ἀριθμούς, ὅταν $2α < 90^0$.

Λύσις. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΠΜ βλέπομεν ὅτι:

$$(ΟΠ) = (ΟΜ)\text{συν}2α = \text{συν}2α. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι $(ΟΠ) = (ΟΓ) - (ΠΓ)$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ $(ΠΓ) = (ΓΑ) = (ΟΑ) - (ΟΓ) = 1 - (ΟΓ)$,

ἡ σχέσις (2) γίνεται: $\text{συν}2α = 2(ΟΓ) - 1$ (3)

Ἐκ δὲ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΒΓ, ΟΒΜ, βλέπομεν ὅτι $(ΟΓ) = (ΟΒ)\text{συν}α$, $(ΟΒ) = (ΟΜ)\text{συν}α = \text{συν}α$ καὶ ἑπομένως: $(ΟΓ) = \text{συν}^2α$. Ἡ ἰσότης (3) γίνεται λοιπόν:

$$\boldsymbol{\text{συν}2α = 2\text{συν}^2α - 1} \qquad (24)$$

Ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι $2\text{συν}^2α = \text{συν}^2α + \text{συν}^2α$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:

$$\text{συν}2α = \text{συν}^2α + \text{συν}^2α - 1 = \text{συν}^2α - (1 - \text{συν}^2α)$$

Ἐπειδὴ δὲ $1 - \text{συν}^2α = \text{ἡμ}^2α$, ἕπεται ὅτι:

$$\boldsymbol{\text{συν}2α = \text{συν}^2α - \text{ἡμ}^2α} \qquad (25)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}^2α = 1 - \text{ἡμ}^2α$, ἡ ἰσότης (25) γίνεται:

$$\boldsymbol{\text{συν}2α = 1 - 2\text{ημ}^2α} \qquad (26)$$

Ἂν $2α = ω$, αἱ ἰσότητες (24), (25), (26), γίνονται κατὰ σειρὰν

$$\left.\begin{aligned}
\text{συν}ω &= 2\text{συν}^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1\\
\text{συν}ω &= \text{συν}^2\left(\frac{ω}{2}\right) - \text{ἡμ}^2\left(\frac{ω}{2}\right)\\
\text{συν}ω &= 1 - 2\text{ἡμ}^2\left(\frac{ω}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Διὰ τούτων ὁρίζομεν τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς ἢ μόνον τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς τριγωνομετρικοὺς τούτους ἀριθμούς.

52. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ2α, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἐφα, ὅταν $2α < 90^0$.**

Λύσις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας: $\text{ἡμ}2α = 2\text{ἡμ}α\text{συν}α$ καὶ

$\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\alpha$ διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἐφ}2\alpha = \frac{2\text{ἡμ}\alpha\text{συν}\alpha}{\text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\alpha}.$$

Ἂν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους διαιρέσωμεν διὰ $\text{συν}^2\alpha$, εὑρίσκομεν ὅτι:

Αὕτη διὰ $2\alpha = \omega$ γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} \text{ἐφ}2\alpha &= \frac{2\text{εφ}\alpha}{1 - \text{ἐφ}^2\alpha} \\ \text{ἐφ}\omega &= \frac{2\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1 - \text{ἐφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

53. *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ σφ2α, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ σφα, ὅταν $2\alpha < 90^0$.**

Λύσις. Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας $\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\alpha$
$\text{ἡμ}2\alpha = 2\text{ἡμ}\alpha\text{συν}\alpha$

εὑρίσκομεν ὅτι: $\frac{\text{συν}2\alpha}{\text{ἡμ}2\alpha} = \frac{\text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\alpha}{2\text{ἡμ}\alpha\text{συν}\alpha}$. Ἂν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους διαιρέσωμεν διὰ $\text{ἡμ}^2\alpha$, εὑρίσκομεν ὅτι:

Αὕτη διὰ $2\alpha = \omega$ γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} \text{σφ}2\alpha &= \frac{\text{σφ}^2\alpha - 1}{2\text{σφ}^2\alpha} \\ \text{σφ}\omega &= \frac{\text{σφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1}{2\text{σφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Ἀσκήσεις

146. Ἂν $\text{ἡμ}\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω.

147. Ἂν $\text{συν}\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ συνω καὶ τὸ ἡμω.

148. Ἂν $\text{ἐφ}\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφω καὶ ἡ σφω.

149. Ἂν $\text{σφ}\frac{\omega}{2} = \sqrt{3}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφω καὶ ἡ σφω.

54. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις. Ἡ ἰσότης $\text{ἡμ}\omega = \frac{1}{2}$ δὲν ἀληθεύει διὰ πᾶσαν γωνίαν ω.

Αὕτη λέγεται **τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις**. Ἐμάθομεν δὲ ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ $\omega = 30^0$, ἐφ ὅσον θεωροῦμεν, ὡς μέχρι τοῦδε, ὀξείας γωνίας. Καὶ ἡ ἰσότης $3ἐφχ - 5 = \frac{ἐφχ}{2}$ (1) εἶναι τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.

Ἂν δὲ πρὸς στιγμὴν θέσωμεν ἐφχ = ψ, αὕτη γίνεται $3ψ - 5 = \frac{ψ}{2}$ (2), ἤτοι ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις μὲ ἄγνωστον ψ.

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι ἡ (1) ἔχει ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς ἄγνωστον τὴν ἐφχ. Ἂν δὲ λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν ἐφχ, ὅπως λύομεν τὴν (2) πρὸς ψ, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν ἐφχ = 2. Ταύτην δὲ ἐμάθομεν (§ 30) νὰ λύωμεν, ἐφ' ὅσον περιοριζόμεθα εἰς ὀξείας γωνίας χ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύομεν πᾶσαν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν ἀλγεβρικῆς μορφῆς μὲ ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τῆς ἀγνώστου γωνίας. Ἐπὶ τοῦ παρόντος ὅμως θὰ ἀρκούμεθα εἰς τιμὰς τῆς ἀγνώστου γωνίας ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0.

Ἀσκήσεις

150. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας χ, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις 5ἡμχ=3.

151. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ὀξείας γωνίας ω, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις 2ἡμω + 1=2.

152. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις 9συνχ + 2=17συνχ−2, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ εἶναι καὶ $χ < 90^0$.

153. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6ἐφχ - \frac{1}{2} = \frac{12ἐφχ}{5} + 1$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὅρον.

154. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2ἐφχ + \frac{ἐφχ}{5} - 5 = \frac{ἐφχ}{4} - \frac{1}{8}$, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ εἶναι $χ < 90^0$.

Ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὅρον $χ < 90^0$ νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

155. $4συν^2χ - 4συνχ + 1 = 0$.

156. $15συν^2χ - 22συνχ + 8 = 0$.

157. $\frac{5σφχ}{2} - \frac{σφχ}{4} = \frac{9}{2}$.

158. $4σφ^2χ - 20σφχ + 25 = 0$.

ΠΙΝΑΞ ΤΥΠΩΝ Α' ΒΙΒΛΙΟΥ

Σχέσεις μέτρων τόξου ἢ γωνίας:

$$\frac{μ}{180} = \frac{β}{200} = \frac{α}{π}$$

Σχέσεις πλευρῶν καὶ γωνιῶν ὀρθ. τριγώνου:

$$\beta = \alpha\text{ἡμ}B = \alpha\text{συν}\Gamma \qquad \beta = \gamma\text{ἐφ}B = \gamma\text{σφ}\Gamma$$

$$\gamma = \alpha\text{ἡμ}\Gamma = \alpha\text{συν}B \qquad \gamma = \beta\text{ἐφ}\Gamma = \beta\text{σφ}B$$

'Εμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου : $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$, $E = \frac{1}{2}\beta^2\text{ἐφ}\Gamma$.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ συμπληρωματικῶν γωνιῶν : $\text{ἡμ}(90^0 - \omega) = \text{συν}\omega$, $\text{συν}(90^0 - \omega) = \text{ἡμ}\omega$, $\text{ἐφ}(90^0 - \omega) = \text{σφ}\omega$, $\text{σφ}(90^0 - \omega) = \text{ἐφ}\omega$.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0,

γωνία τ	ἡμτ	συντ	ἐφτ	σφτ
0^0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	1	0	∞	0

Σχέσεις τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς αὐτῆς ὀξείας γωνίας,

$$\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1, \qquad \text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}, \qquad \text{σφ}\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\text{ἡμ}\omega},$$

$$\text{ἐφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega = 1, \qquad \text{συν}\omega = \sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\omega}, \qquad \text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\omega}},$$

$$\text{σφ}\omega = \frac{\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2\omega}}{\text{ἡμ}\omega}, \qquad \text{ἡμ}\omega = \sqrt{1 - \text{συν}^2\omega}, \qquad \text{ἐφ}\omega = \frac{\sqrt{1 - \text{συν}^2\omega}}{\text{συν}\omega},$$

$$\text{σφ}\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\sqrt{1 - \text{συν}^2\omega}}. \qquad \text{ἡμ}^2\omega = \frac{\text{ἐφ}^2\omega}{1 + \text{ἐφ}^2\omega}, \qquad \text{συν}^2\omega = \frac{1}{1 + \text{ἐφ}^2\omega},$$

$$\text{ἡμ}\omega = \frac{\text{ἐφ}\omega}{\sqrt{1 + \text{ἐφ}^2\omega}}, \qquad \text{συν}\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ἐφ}^2\omega}}, \qquad \text{σφ}\omega = \frac{1}{\text{σφ}\omega},$$

$$\text{ἡμ}\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{σφ}^2\omega}}, \qquad \text{συν}\omega = \frac{\text{σφ}\omega}{\sqrt{1 + \text{σφ}^2\omega}}, \qquad \text{ἐφ}\omega = \frac{1}{\text{σφ}\omega},$$

$$\text{ἡμ}.2\alpha = \text{ἡμασυνα}, \qquad \text{ἡμ}\omega = 2\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\alpha = 2\text{συν}^2\alpha - 1 = 1 - 2\text{ἡμ}^2\alpha$$

$$\text{συν}\omega = \text{συν}^2\frac{\omega}{2} - \text{ἡμ}^2\frac{\omega}{2} = 2\text{συν}^2\frac{\omega}{2} - 1 = 1 - 2\text{ἡμ}^2\frac{\omega}{2}$$

$$\text{ἐφ}2\alpha = \frac{2\text{ἐφ}\alpha}{1 - \text{ἐφ}^2\alpha}, \qquad \text{ἐφ}\omega = \frac{2\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1 - \text{ἐφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\text{σφ}2\alpha = \frac{\text{σφ}^2\alpha - 1}{2\text{σφ}\alpha}, \qquad \text{σφ}\omega = \frac{\text{σφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1}{2\text{σφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α′ βιβλίου

159. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας τὸ μέτρον γωνίας ἑνὸς βαθμοῦ.

160. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας τὸ μέτρον τοῦ ἀκτινίου τόξου.

161. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν τὸ πρῶτον λεπτὸν τῆς μοίρας εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ τὸ πρῶτον λεπτὸν τοῦ βαθμοῦ.

162. Ἡ μία ὀξεῖα γωνία ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 25°20′. Νὰ εὑρεθῇ εἰς βαθμοὺς τὸ μέτρον τῆς ἄλλης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

163. Ἡ μία ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀκτίνια τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν γωνιῶν τούτων.

164. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\alpha = 3\beta$. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας **Β** αὐτοῦ.

165. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $B = \frac{2\pi}{5}$. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

166. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἂν $B = 57^{\gamma},5$.

167. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία χ, ἂν $4\text{ἡμ}\chi - 1 = \text{ἡμ}\chi + \frac{1}{2}$.

168. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία ω, ἂν $\text{ἐφ}^2\omega - 4\text{ἐφ}\omega + 4 = 0$.

169. Νὰ κατασκευασθῇ ὀξεῖα γωνία φ, ἂν $7\text{συν}^2\varphi - 12\text{συν}\varphi + 5 = 0$.

170. Ἂν $\text{συν}(90^0 - \chi) = 0,456$, νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ.

171. Ἂν $\text{σφ}(90^0 - \chi) = 2,50$, νὰ καταυκευασθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία χ.

172. Ἂν $\text{συν}(90^0 - \chi) = \frac{3}{5}$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς ὀξείας γωνίας χ.

173. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν ω εἶναι:

$$\frac{1}{\text{ἡμ}^2\omega} + \frac{1}{\text{συν}^2\omega} = \frac{1}{\text{ἡμ}^2\omega \cdot \text{συν}^2\omega.}.$$

174. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{\text{ἡμ}B + \text{συν}\Gamma}{\text{συν}B + \text{ἡμ}\Gamma} = \text{ἐφ}B$$

175. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{1}{\text{ἡμ}B} + \text{σφ}B = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

176. Ἂν $\omega + \varphi = 90^\circ$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\text{ἡμ}^2\omega + \text{ἡμ}^2\varphi$.

177. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\text{ἡμ}B + \text{συν}\Gamma = \frac{2\beta}{\alpha}.$$

178. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\text{ἡμ}^2B - \text{ἡμ}^2\Gamma = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2}.$$

179. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου ἔχῃ μῆκος 8 μέτρα.

180. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου ἔχει μῆκος 0,80 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου.

181. Ἓν σῶμα βάρους 25 χιλιογράμμων κυλίεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως $24^\circ40'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία κινεῖ αὐτὸ καὶ ἡ πίεσις, τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα τοῦτο ἐπιφέρει ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

182. Ἓν σῶμα 20 χιλιογράμμων διήνυσεν 0,85 μέτ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως $20^\circ30'40''$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τῆς βαρύτητος κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην.

183. Μία χορδὴ τόξου $56^\circ35'18''$ ἔχει μῆκος 0,68 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς χορδῆς.

184. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει ὕψος διπλάσιον τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς κλίσεως αὐτοῦ.

185. Ἡ Μηχανικὴ διδάσκει ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις, μὲ τὴν ὁποίαν κυλίεται ἓν σῶμα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως ω, εἶναι $981 \cdot \text{ἡμ}\omega$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἑκατοστόμετρα ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη, ἂν τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως αὐτοῦ.

186. Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν $\alpha = 1{,}35$ μέτ. καὶ $B = \frac{3\pi}{20}$ ἀκτίνια.

187. Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν $\alpha = 6{,}80$ μέτ. καὶ $\beta = 3{,}40$ μέτ.

188. Ἐκ τῆς Μηχανικῆς γνωρίζομεν ὅτι ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ἐλευθέρας τροχαλίας εἶναι $A = 2\Delta \cdot \text{συν}\,\frac{\omega}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις δυνάμεως Δ, μὲ τὴν ὁποίαν ἰσορροποῦμεν ἀντίστασιν $A = 30 \cdot \sqrt{2}$ χιλιογράμμων διὰ μέσου ἐλευθέρας τροχαλίας, ἂν ἡ γωνία ω τῶν νημάτων αὐτῆς εἶναι 90°.

189. Αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 0,30 μέτ. ἡ μία καὶ 0,40 μέτ. ἡ ἄλλη. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

190. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες $\text{ἡμ}\left(\frac{Α+Β}{2}\right)=\text{συν}\left(\frac{Γ}{2}\right)$, $\text{ἐφ}\left(\frac{Β+Γ}{2}\right)=\text{σφ}\left(\frac{Α}{2}\right)$.

191. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα: $\text{ἡμ}(90^0-ω)\text{συν}ω+\text{συν}(90^0-ω)\text{ἡμ}ω$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γωνίας ω.

192. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα: $\text{ἐφ}(90^0-ω)\text{ἐφ}ω$, $\text{σφ}(90^0-ω)\text{σφ}ω$.

193. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{3\text{ἐφ}χ-1}{\text{ἐφ}χ+1}=1$ διὰ $χ \langle 90^0$.

194. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{σφ}χ+\frac{1}{\text{σφ}χ-3}=5$ διὰ $χ \langle 90^0$.

195. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(2\text{συν}χ-3)^2=8\,\text{συν}χ$ διὰ $χ \langle 90^0$.

196. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3-\frac{\text{ἡμ}^4ω+1}{\text{ἡμ}^2ω}=\text{ἡμ}^2ω$ διὰ $ω \langle 90^0$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΜΒΛΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

55. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας. α') Ἔστω ω τὸ μέτρον ἀμβλείας γωνίας. Ἡ παραπληρωματικὴ γωνία αὐτῆς ἔχει μέτρον $180^0 - ω$ καὶ εἶναι ὀξεῖα γωνία. Κατὰ δὲ τὴν γνωστὴν (§ 50) ἰσότητα:

$$\text{ἡμ}ω = 2\text{ἡμ}\left(\frac{ω}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{ω}{2}\right) \qquad (1)$$

εἶναι

$$\text{ἡμ}(180^0 - ω) = 2\text{ἡμ}\left(90 - \frac{ω}{2}\right)\text{συν}\left(90^0 - \frac{ω}{2}\right)$$

$$= 2\text{ἡμ}\left(\frac{ω}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{ω}{2}\right) \qquad (2)$$

Ἡ ἰσότης (1) ἀπεδείχθη (§ 50), ἂν $ω < 90^0$· ἀληθεύει ὅμως καὶ διὰ $ω = 90^0$. Πράγματι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι:

$$2\text{ἡμ}\left(\frac{ω}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{ω}{2}\right) = 2\text{ἡμ}45^0\text{συν}45^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$= \text{ἡμ}90^0 = \text{ἡμ}ω.$$

Τῆς ἰσότητος (2) ἀμφότερα τὰ μέλη ἔχουσιν ἔννοιαν, διότι $(180^0 - ω) < 90^0$ καὶ $\frac{ω}{2} < 90^0$. Τῆς ἰσότητος ὅμως (1) τὸ πρῶτον μέλος δὲν ἔχει ἔννοιαν διὰ $ω > 90^0$. Διὰ νὰ ἀποκτήσῃ δὲ καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἔννοιαν, θὰ δεχθῶμεν ὅτι $\text{ἡμ}ω = \text{ἡμ}(180^0 - ω)$, ἐφ' ὅσον τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα.

Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

Ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας λέγεται τὸ ἡμίτονον τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.

Π.χ. $\text{ἡμ}150^0 = \text{ἡμ}30^0 = \frac{1}{2}$.

β′) Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὴν γνωστὴν (§ 50) ἰσότητα:

$$\text{συν}\omega = 2\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1$$

εἰς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $180^0 - \omega$, εὑρίσκομεν: $\text{συν}(180^0 - \omega)$

$$= 2\text{συν}^2\left(90^0 - \frac{\omega}{2}\right) - 1 = 2\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 = -\left(1 - 2\text{ἡμ}^2\frac{\omega}{2}\right) \qquad (3)$$

Ἐμάθομεν δὲ (§ 50) ὅτι, ἂν $\omega < 90^0$, εἶναι:

$$\left(1 - 2\text{ἡμ}^2\frac{\omega}{2}\right) = \text{συν}\omega \qquad (4)$$

Ἀληθεύει δὲ αὕτη καὶ διὰ $\omega = 90^0$, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι $1 - 2\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 = \text{συν}90^0 = \text{συν}\omega.$

Σκεπτόμενοι δὲ ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἡμιτόνου ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ πρέπῃ νὰ δεχθῶμεν ὅτι:
$\text{συν}(180^0 - \omega) = -\text{συν}\omega$ καὶ ἑπομένως: $\text{συν}\omega = -\text{συν}(180^0 - \omega)$.

Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

Συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας λέγεται τὸ ἀντίθετον συνημίτονον τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

197. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ120^0 καὶ τὸ συν120^0.

198. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ135^0 καὶ τὸ συν135^0.

199. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ$(95^0 20')$ καὶ τὸ συν$(117^0 30' 40'')$.

200. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν$(125^0 40')$ καὶ τὸ συν$(163^0 15' 40'')$.

201. Νὰ σχηματισθῇ ἀμβλεῖα γωνία ω, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\text{ἡμ}\omega = 0{,}55$.

202. Νὰ σχηματισθῇ γωνία φ, ἂν $\text{συν}\varphi = -\frac{3}{5}$.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις.

203. $\frac{\text{ἡμ}\chi}{2} - 3\text{ἡμ}\chi = -\frac{\text{ἡμ}\chi}{4} - \frac{3}{8}$.   204. $6\text{συν}\chi + \frac{1}{2} = \frac{\text{συν}\chi}{4} - \frac{19}{8}$.

56. Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου ἀμβλείας γωνίας ω. α′) Ἐπειδὴ $\text{ἡμ}\omega = \text{ἡμ}(180^0 - \omega)$, ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμω γίνεται ὅπως ἡ γνωστὴ ἤδη μεταβολὴ τοῦ ἡμ$(180^0 - \omega)$.

Συνοψίζομεν δὲ τὴν μεταβολὴν ταύτην εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

α΄) Μεταβολὴ ἡμω.

$$\begin{array}{r|l} \omega & 90^0\ldots\nearrow\ldots120^0\ldots\nearrow\ldots135^0\ldots\nearrow\ldots150^0\ldots\nearrow\ldots180^0 \\ 180^0-\omega & 90^0\ldots\searrow\ldots\ 60^0\ldots\searrow\ldots\ 45^0\ldots\searrow\ \cdots30^0\ldots\searrow\ldots\ldots0^0 \\ \text{ἡμω}=\text{ἡμ}(180^0-\omega) & 1\ldots\searrow\ldots\frac{\sqrt{3}}{2}\ldots\searrow\ldots\frac{\sqrt{2}}{2}\ldots\searrow\ \ldots\frac{1}{2}\ldots\searrow\ \ldots\ldots0 \end{array}$$

β΄) Ὁμοίως, ἐπειδὴ συνω = – συν(180⁰ – ω), ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ συνω γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τῆς γνωστῆς μεταβολῆς τοῦ συν(180⁰ – ω). Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι : Ἀπὸ δύο ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἔχων τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν. Οὕτω δὲ εὐκόλως καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

β΄) Μεταβολὴ συνω.

$$\begin{array}{r|l} \omega & 90^0.\nearrow.120^0..\nearrow..135^0..\nearrow..150^0.\nearrow..180^0 \\ (180^0-\omega) & 90^0.\searrow\ldots60^0\ldots\searrow\ldots.45^0..\searrow\ldots30^0\ldots\searrow\ldots..\ 0^0 \\ \text{συν}(180^0-\omega) & 0\ .\nearrow\ldots\frac{1}{2}..\nearrow\ldots.\frac{\sqrt{2}}{2}..\nearrow\ldots\frac{\sqrt{3}}{2}..\nearrow\ldots..1 \\ \text{συνω}=-\,\text{συν}(180^0-\omega) & 0\ .\searrow-\frac{1}{2}..\searrow.-\frac{\sqrt{2}}{2}..\searrow..-\frac{\sqrt{3}}{2}..\searrow\ldots-1 \end{array}$$

Ἀπὸ τὸν πίνακα τοῦτον βλέπομεν ὅτι τὸ συνημίτονον πάσης ἀμβλείας γωνίας εἶναι ἀρνητικόν.

57. Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας ω. α΄) Ἐπειδὴ 180⁰ – ω ⟨ 90⁰, γνωρίζομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}(180^0-\omega)=\frac{\text{ἡμ}(180^0-\omega)}{\text{συν}(180^0-\omega)}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡμ(180⁰ – ω) = ἡμω καὶ συν(180⁰ – ω) = – συνω (§ 55), θὰ εἶναι $\text{ἐφ}(180^0-\omega)=-\frac{\text{ἡμω}}{\text{συνω}}$. Σκεπτόμενοι δὲ ὡς προηγουμένως δεχόμεθα ὅτι $\frac{\text{ἡμω}}{\text{συνω}}=\text{ἐφω}$ καὶ ὅταν ω ⟩ 90⁰.

Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται ἐφ (180⁰ – ω) = – ἐφω, ὅθεν :

$$\text{ἐφω}=-\,\text{ἐφ}(180^0-\omega).$$

Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν :

Ἐφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας λέγεται ἡ ἀντίθετος ἐφαπτομένη τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.

$$\text{Π.χ. ἐφ}150^0=-\,\text{ἐφ}30=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

β') Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι $σφ(180^0-ω) = \frac{συν(180^0-ω)}{ἡμ(180^0-ω)} = -\frac{συνω}{ἡμω}$.

Σκεπτόμενοι δέ, ὡς προηγουμένως, δεχόμεθα ὅτι $\frac{συνω}{ἡμω} = σφω$ καὶ ἂν $ω > 90^0$. Οὕτω δὲ καταλήγομεν εἰς τὴν ἰσότητα:

$$σφω = -σφ(180^0-ω).$$

Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

Συνεφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας λέγεται ἡ ἀντίθετος συνεφαπτομένη τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας αὐτῆς.

Π.χ. $σφ150^0 = -σφ30^0 = -\sqrt{3}$.

Ἀσκήσεις

205. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $ἐφ135^0$ καὶ ἡ $σφ135^0$.

206. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $ἐφ120^0$ καὶ ἡ $σφ120^0$.

207. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $ἐφ(135^0 35')$ καὶ ἡ $ἐφ(98^0 12' 30'')$.

208. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $σφ(154^0 20')$ καὶ ἡ $σφ(162^0 20' 45'')$.

209. Νὰ σχηματισθῇ γωνία χ, ἂν $ἐφχ = -1{,}50$.

210. Νὰ σχηματισθῇ γωνία ω, ἂν $σφω = -0{,}85$.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

211. $\frac{ἐφχ}{3} - \frac{2}{5} = \frac{2ἐφχ}{8} - \frac{30}{40}$. 212. $3σφχ + \frac{σφχ}{2} = 2σφχ - \frac{3}{5}$.

58. Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης ἀμβλείας γωνίας. Ἂν σκεφθῶμεν ὅπως διὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἡμω καὶ συνω (§ 56), καταρτίζομεν τοὺς ἑξῆς πίνακας τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφω καὶ τῆς σφω, ἂν ἡ γωνία ω βαίνῃ αὐξανομένη ἀπὸ 90^0 ἕως 180^0.

ω	90^0	↗	120^0	↗	135^0	↗	150^0	↗	180^0
$180^0-ω$	90^0	↘	60^0	↘	45^0	↘	30^0	↘	0^0
$ἐφ(180^0-ω)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$	↘	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0
$ἐφω = -(180^0-ω)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{3}$	↗	-1	↗	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0

β′) Μεταβολὴ τῆς σφω

$$\begin{array}{r|l}
\omega & 90^0 \ldots \nearrow \ldots 120^0 \ldots \nearrow \ldots 135^0 \ldots \nearrow \ldots 150^0 \ldots \nearrow \ldots 180^0 \\
180^0-\omega & 90^0 \ldots \searrow \ldots 60^0 \ldots \searrow \ldots 45^0 \ldots \searrow \ldots 30^0 \ldots \searrow \ldots 0^0 \\
\sigma\varphi(180^0-\omega) & 0 \ldots \nearrow \ldots \frac{\sqrt{3}}{3} \ldots \nearrow \ldots 1 \ldots \nearrow \ldots \sqrt{3} \ldots \nearrow \ldots +\infty \\
\sigma\varphi\omega = -\sigma\varphi(180^0-\omega) & 0 \ldots \searrow \ldots -\frac{\sqrt{3}}{3} \ldots \searrow \ldots -1 \ldots \searrow \ldots -\sqrt{3} \ldots \searrow \ldots -\infty
\end{array}$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τούτους βλέπομεν ὅτι πᾶσα ἀμβλεῖα γωνία ἔχει ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην.

59. Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμβλείας γωνίας ω. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας ἡμω = ἡμ (180⁰ – ω) καὶ συνω = – συν(180⁰ – ω) (§ 55) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$ἡμ^2ω + συν^2ω = ἡμ^2(180^0 - ω) + συν^2(180^0 - ω).$$

Ἐπειδὴ δὲ $180^0 - ω < 90^0$, τὸ β′ μέλος εἶναι 1 (ἰσότης 8 § 45). Εἶναι λοιπὸν καὶ διὰ πᾶσαν ἀμβλεῖαν γωνίαν ω :

$$ἡμ^2ω + συν^2ω = 1 \qquad (1)$$

Ἐδέχθημεν δὲ χάριν τῆς γενικότητος ἀληθεῖς διὰ τὰς ἀμβλείας γωνίας καὶ τὰς ἰσότητας (9) καὶ (10) τῆς § 45, ἤτοι:

$$ἐφω = \frac{ἡμω}{συνω}, \qquad σφω = \frac{συνω}{ἡμω} \qquad (2)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὡς ὡρίσθησαν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀμβλείας γωνίας, συνδέονται μεταξύ των μὲ τὰς αὐτὰς σχέσεις (1) καὶ (2), μὲ τὰς ὁποίας συνδέονται καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας.

Ἂν δὲ σκεφθῶμεν, ὅπως καὶ διὰ τὰς ὀξείας γωνίας (§ 45), βεβαιούμεθα ὅτι, πλὴν τῶν σχέσεων τούτων, οὐδεμία ἄλλη σχέσις μὴ ἐξ αὐτῶν ἀπορρέουσα ὑφίσταται μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμβλείας γωνίας. Ἐξ αὐτῶν ὅμως ἀπορρέουσιν πολλαὶ ἄλλαι σχέσεις ὅπως καὶ διὰ τὰς ὀξείας γωνίας. Οὕτως ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$ἐφω \cdot σφω = 1.$$

Ἐπίσης, ἂν γνωρίζωμεν ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἀμβλείας γωνίας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ἄλλους. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα πως εἰς τὰς §§ 46 – 49 διὰ τὰς ὀξείας γωνίας. Μόνον πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη, ἡ συνεφαπτομένη καὶ τὸ συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ ἡμίτονον εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἑπομένως πρὸ τοῦ ριζικοῦ ἑκάστου σχετικοῦ τύπου πρέπει νὰ θέτωμεν τὸ κατάλληλον ἐκ τῶν σημείων + ἢ —, διὰ νὰ προκύπτῃ θετικὸν ἐξαγόμενον διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ ἀρνητικὸν δι' ἕκαστον τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Οὕτως, ἂν $90^0 < ω < 180^0$ καὶ $ημω = \frac{1}{2}$, θὰ εἶναι:

$$συνω = -\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad εφω = \frac{\frac{1}{2}}{-\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$σφω = \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$ Ἂν δὲ $90^0 < ω < 180^0$ καὶ $συνω = -\frac{1}{2}$,

Θὰ εἶναι: $$ημω = +\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$εφω = \frac{+\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \qquad σφω = \frac{-\frac{1}{2}}{+\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Σημείωσις. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ εἰς τὰς ἀσκήσεις 128 — 135 **ἀναγραφεῖσαι** τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες ἀληθεύουσι καὶ δι' ἀμβλείας γωνίας **καὶ** ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

Ἀσκήσεις

213. Ἂν $ημχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $90^0 < χ < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσι οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας χ.

214. Ἂν $συνφ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $90^0 < φ < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας φ.

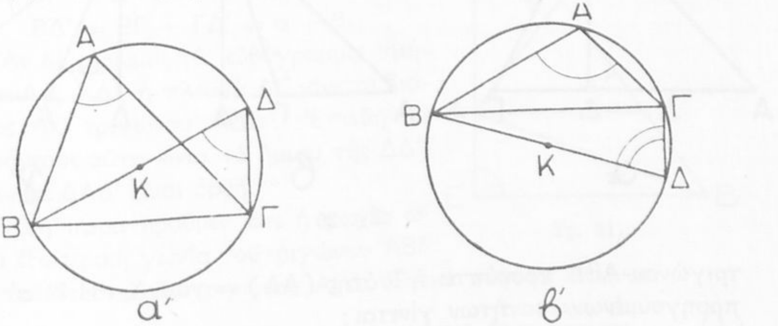
215. Ἂν $εφψ = -1$ καὶ $90^0 < ψ < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας ψ.

216. Ἂν $σφω = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $90^0 < ω < 180^0$ νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας ω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

60. Σχέσεις τῶν κυρίων στοιχείων οἱουδήποτε τριγώνου. α΄) Ἔστω ἐν τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας Κ (σχῆμα 19). Ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΒΔ



α΄ β΄

Σχ. 19

καὶ τὴν χορδὴν ΓΔ, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΔ. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι:

$$(\text{ΒΓ}) = (\text{ΒΔ})\text{ἡμ}\Delta \;\; \text{ἢ} \;\; \alpha = 2\,\text{R}\text{ἡμ}\Delta.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta = \text{Α}$ (σχ. 19α΄) ἢ $\Delta + \text{Α} = 180^0$ (σχ. 19β΄), ἕπεται ὅτι ἡμΔ=ἡμΑ, καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha}{\text{ἡμΑ}} = 2\text{R}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\frac{\beta}{\text{ἡμΒ}} = 2\,\text{R}$ καὶ $\frac{\gamma}{\text{ἡμΓ}} = 2\,\text{R}$. Ἄρα

$$\frac{\alpha}{\text{ἡμΑ}} = \frac{\beta}{\text{ἡμΒ}} = \frac{\gamma}{\text{ἡμΓ}} = 2\,\text{R} \qquad (30)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

1ον. Αἱ πλευραὶ παντὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

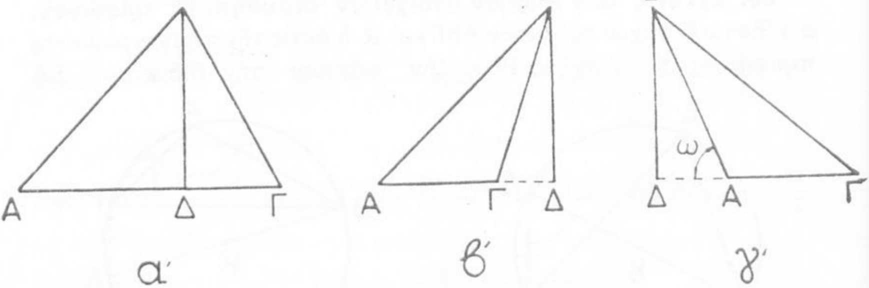
2ον. Ὁ λόγος ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

β΄) Ἔστω ΑΒΓ ἓν τυχὸν τρίγωνον καὶ ΒΔ ἓν ὕψος αὐτοῦ (σχῆμα 20). Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι:

α΄) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\,(A\Delta)$, ἂν $A < 90^0$ καὶ

β΄) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\,(A\Delta)$, ἂν $A > 90^0$.

Εἰς τὴν α΄ περίπτωσιν (σχῆμα 20 α΄, β΄,) ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ προκύπτει ἡ ἰσότης (ΑΔ) = γσυνΑ. Ἡ δὲ α΄ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων γίνεται:



Σχ. 20

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A \tag{1}$$

Εἰς δὲ τὴν β΄ περίπτωσιν (σχῆμα 20 γ΄) εἶναι (ΑΔ) = γσυνω = −γσυνΑ καὶ ἐκ τῆς β΄ τῶν ἄνω ἰσοτήτων προκύπτει πάλιν ἡ (1) Εἰς πᾶσαν λοιπὸν περίπτωσιν εἶναι:

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

καὶ

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A \\ \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma \end{aligned} \tag{31}$$

Ὥστε:

Τὸ τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τούτων.

γ΄) Ἔστω Ε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 20). Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι $E = \frac{1}{2}\beta(B\Delta)$. Ἐπειδὴ δὲ (ΒΔ) = γἡμΑ, αὐτη γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A \tag{32}$$

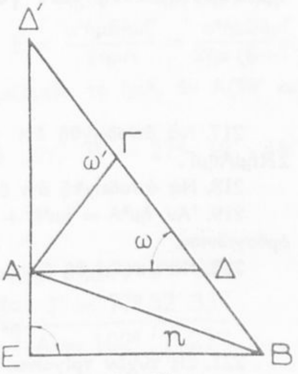
Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

δ') Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $ΒΓ > ΑΓ$ ἢ $α > β$ (σχ. 21). Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ὁρίζομεν τμήματα $ΓΔ = ΓΔ' = β$· οὕτω δὲ εἶναι $ΒΔ = ΒΓ - ΓΔ = α - β$ καὶ

$$ΒΔ' = ΒΓ + ΓΔ' = α + β.$$

Ἄν δὲ φέρωμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΔ', ἡ πλευρὰ ΑΓ γίνεται διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΔΔ'. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διάμεσος αὕτη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΔΔ', ἡ γωνία ΔΑΔ' εἶναι ὀρθή.



Σχ. 21.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ω' εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΔ. Ἕνεκα τούτου δὲ εἶναι:

$$ω' = Α + Β,\quad ω' = 2ω \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad ω = \frac{Α + Β}{2} \tag{1}$$

Ἄν δὲ φέρωμεν τὴν ΒΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, θὰ εἶναι:

$$Β + η = ω = \frac{Α + Β}{2},\ η = \frac{Α + Β}{2}. - Β = \frac{Α - Β}{2}$$

καὶ
$$\frac{ΕΑ}{ΕΔ'} = \frac{ΒΔ}{ΒΔ'} = \frac{α - β}{α + β} \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΕΑΒ, ΕΔ'Β βλέπομεν ὅτι $(ΕΑ) = (ΕΒ)εφη = (ΕΒ)εφ\left(\frac{Α - Β}{2}\right)$ καὶ $(ΕΔ') = (ΕΒ)εφ(Β + η)$

$= (ΕΒ)εφ\left(\frac{Α + Β}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι $\frac{ΕΑ}{ΕΔ'} = \frac{εφ\left(\frac{Α - Β}{2}\right)}{εφ\left(\frac{Α + Β}{2}\right)}$ καὶ ἕνεκα τῆς (2)

εἶναι:
$$\boldsymbol{\frac{α - β}{α + β} = \frac{εφ\left(\frac{Α - Β}{2}\right)}{εφ\left(\frac{Α + Β}{2}\right)}} \tag{33}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν τριγώνου πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν γωνιῶν τούτων.

Ἀσκήσεις

217. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος ΒΔ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς $2R$ἡμΑἡμΓ.

218. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι: $E = 2R^2$ἡμΑἡμΒἡμΓ.

219. Ἂν ἡμ^{2}Α = ἡμ^{2}Β + ἡμ^{2}Γ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

220. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{\text{εφ}A}{\text{εφ}B}.$$

221. Εἰς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ. Ἂν καλέσωμεν ω τὴν γωνίαν αὐτῆς μὲ τὴν ΑΒ καὶ φ μὲ τὴν ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι γἡμω—βἡμφ=0.

222. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\alpha=37$ μέτ, $\beta=13$ μέτ, $A-B=48^0 27' 20''$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία Γ αὐτοῦ.

Α΄ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

61. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν δοθῶσι μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι αὐτοῦ.**

Ἔστω π.χ. ὅτι δίδεται ἡ πλευρὰ α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ αὐτοῦ. Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $B + \Gamma < 180^0$, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν.

Ἐπίλυσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $A + B + \Gamma = 180^0$ ἕπεται ὅτι $A = 180^0 - (B + \Gamma)$.

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων

$\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\beta = \frac{\alpha\text{ημ}B}{\text{ημ}A}, \quad \gamma = \frac{\alpha\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}A}.$$

Γνωστὰ στοιχεῖα	*Ἄγνωστα στοιχεῖα*
α, Β, Γ	Α,β, γ, Ε

Ἐπειδὴ δὲ ἡμΑ = ἡμ(Β + Γ), αὗται γίνονται:

$$\beta = \frac{\alpha ἡμB}{ἡμ(B+\Gamma)}, \qquad \gamma = \frac{\alpha ἡμ\Gamma}{ἡμ(B+\Gamma)}$$

Τέλος ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta\gamma ἡμA$ καὶ τῶν προηγουμένων τιμῶν τῶν β καὶ γ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha^2 ἡμB\, ἡμ\Gamma}{2ἡμA} = \frac{\alpha^2 ἡμB ἡμ\Gamma}{2ἡμ(B+\Gamma)} \qquad (34)$$

Τύποι ἐπιλύσεως

$$A = 180^0 - (B+\Gamma),$$

$$\beta = \frac{\alpha ἡμB}{ἡμA} = \frac{\alpha ἡμB}{ἡμ(B+\Gamma)}$$

$$\gamma = \frac{\alpha ἡμ\Gamma}{ἡμA} = \frac{\alpha ἡμ\Gamma}{ἡμ(B+\Gamma)}$$

$$E = \frac{\alpha^2 ἡμB ἡμ\Gamma}{2ἡμA} = \frac{\alpha^2 ἡμB ἡμ\Gamma}{2ἡμ(B+\Gamma)}$$

Σημείωσις. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς μεταχειριζόμεθα τὸ ἡμA, ἂν $A (90^0$ καὶ τὸ ἡμ(B + Γ), ἂν $A \rangle 90^0$.

Παράδειγμα. Ἔστω $\alpha = 3475{,}6$ μέτ, $B = 27^0\ 12'\ 18''$ καὶ $\Gamma = 50^0\ 40'\ 15''$.

Ὑπολογισμὸς τῆς A

$B = 27^0\ 12'\ 18''$

$\Gamma = 50^0\ 40'\ 15''$

$B + \Gamma = 77^0\ 52'\ 33''$

$180^0 = 179^0\ 59'\ 60''$

$B + \Gamma = 77^0\ 52'\ 33''$

$A = 102^0\ 7'\ 27''$

Ὑπολογισμὸς τῶν β καὶ γ

$$\beta = \frac{\alpha ἡμB}{ἡμ(B+\Gamma)} \qquad \gamma = \frac{\alpha ἡμ\Gamma}{ἡμ(B+\Gamma)}$$

$λογ\beta = λογ\alpha + λογἡμB - λογἡμ(B+\Gamma),$

$λογ\gamma = λογ\alpha + λογἡμ\Gamma - λογἡμ(B+\Gamma)$

$λογ\alpha = 3{,}54103$

$λογἡμB = \overline{1}{,}66008$

$ἄθροισμα = 3{,}20211$

$λογἡμ(B+\Gamma) = \overline{1}{,}99021$

$λογ\beta = 3{,}21090$

$\beta = 1525{,}19$ μέτ.

$λογ\alpha = 3{,}54103$

$λογἡμ\Gamma = \overline{1}{,}88847$

$ἄθροισμα = 3{,}42950$

$λογἡμ(B+\Gamma) = \overline{1}{,}99021$

$λογ\gamma = 3{,}43929$

$\gamma = 2749{,}75$

Ὑπολογισμὸς τοῦ E.

$$2E = \frac{\alpha^2 ἡμB ἡμ\Gamma}{ἡμ(B+\Gamma)}$$

$λογ(2E) = 2λογ\alpha + λογἡμB + λογἡμ\Gamma - λογἡμ(B+\Gamma)$

$2λογ\alpha = 7{,}08206$

$λογἡμB = \overline{1}{,}66008$

$λογἡμ\Gamma = \overline{1}{,}88847$

$ἄθροισμα = 6{,}63061$

$ἄθροισμα = 6{,}63061$

$λογἡμ(B+\Gamma) = \overline{1}{,}99021$

$λογ(2E) = 6{,}64040$

$2E = 4\,369\,200$ τετ. μέτ.

$E = 2\,184\,600$ τετ. μέτ.

Ἀσκήσεις

223. Ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει α = 5 μέτ., Β = 25°20′ καὶ Γ = 32°53′. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

224. Ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει α = 265,6 μέτ, Β = 70°15′20″ καὶ Γ = 48° 44′ 40″. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

225. Ἕν τρίγωνον ἔχει β = 2 667,65 μέτ., Α = 58°15′30″ καὶ Β = 20°20′45″. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

226. Ἡ διαγώνιος ΑΓ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἔχει μῆκος 8 μέτ. καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν Α εἰς δύο γωνίας μὲ μέτρον 23° 15′ ἡ μία καὶ 50° 25′ ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

227. Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 0,7 μέτ. ἄγομεν χορδὴν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

228. Ἕν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν (ΒΓ) = 2,5 μέτ. καὶ Α = 116° 34′46″. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

229. Εἰς ἓν σημεῖον Α ἐνεργοῦσι δύο δυνάμεις ὑπὸ γωνίαν 64°20′40″. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἔχει ἔντασιν 45 χιλιογράμμων καὶ σχηματίζει μὲ τὴν μίαν συνιστῶσαν γωνίαν 48° 12′. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν δυνάμεων τούτων.

230. Ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει α = 0,85 μέτ. Β = 42°20′, Γ = 74°10′30″. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ΑΔ αὐτοῦ.

231. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μέτ. εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει Β = 56° 20′ 18″ καὶ Γ = 102° 10′ 24″. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

Β′ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

62. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν δοθῶσι δύο πλευραὶ καὶ ἡ γωνία, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς τούτων.**

Ἔστω π.χ. ὅτι δίδονται αἱ πλευραὶ α, β καὶ ἡ γωνία Α.

Ἐπίλυσις. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἡμ}B = \frac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\alpha}$$

Ἐκ ταύτης δὲ ὁρίζεται ἡ γωνία Β. Μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν καὶ τὴν Γ διὰ τῆς ἰσότητος Γ = 180° − (Α + Β).

Ἔπειτα ἐκ τῆς $\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma = \frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$ καὶ ὁρίζομεν τὴν γ. Τέλος ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

1ον Παράδειγμα. Ἔστω $α = 347$ μέτ., $β = 260$ μέτ. καὶ $A = 35^0$.

Γνωστὰ	*Ἄγνωστα*
στοιχεῖα	
α, β, Α	Β, Γ, γ, Ε,

Τύποι ἐπιλύσεως

$$\text{ἡμ}B = \frac{β\,\text{ἡμ}A}{α},$$

$$Γ = 180^0 - (A + B)$$

$$γ = \frac{α\,\text{ἡμ}Γ}{\text{ἡμ}A},\quad E = \frac{1}{2}αβ\,\text{ἡμ}Γ.$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β

$$\text{ἡμ}B = \frac{β\,\text{ἡμ}A}{α}$$

$$\text{λογἡμ}B = \text{λογ}β + \text{λογἡμ}A - \text{λογ}α.$$

$$\text{λογ}β = 2{,}41497$$

$$\text{λογἡμ}A = \overline{1}{,}75859$$

$$\text{ἄθροισμα} = 2{,}17356$$

$$\text{λογ}α = 2{,}54033$$

$$\text{λογἡμ}B = \overline{1}{,}63323$$

$$B = 25^0\,27'\,9''$$

καὶ

$$180^0 = 179^0\,59'\,60''$$

$$B = 25^0\,27'\,9''$$

$$B' = 154^0\,32'\,51''$$

Ἐπειδὴ ὅμως $154^0\,32'\,51'' + 35^0 = 189^0\,32'\,51'' > 180^0$, ἡ δευτέρα τιμὴ τῆς Β δὲν εἶναι δεκτή.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ

$$180^0 = 179^0\,59'\,60''$$

$$A + B = 60^0\,27'\,9''$$

καὶ

$$Γ = 119^0\,32'\,51''$$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ

Ἐκ τῆς $γ = \frac{α\,\text{ἡμ}Γ}{\text{ἡμ}A}$ ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογ}γ = \text{λογ}α + \text{λογἡμ}Γ - \text{λογἡμ}A$$

$$\text{λογ}α = 2{,}54033$$

$$\text{λογἡμ}Γ = \overline{1}{,}93949$$

$$\text{ἄθροισμα} = 2{,}47982$$

$$\text{λογἡμ}A = \overline{1}{,}75859$$

$$γ = 526{,}3 \text{ μέτ.}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε

Ἐκ τῆς $2E = αβ\,\text{ἡμ}Γ$, ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογ}(2E) = \text{λογ}α + \text{λογ}β + \text{λογἡμ}Γ$$

$$\text{λογ}α = 2{,}54033$$

$$\text{λογ}β = 2{,}41497$$

$$\text{λογἡμ}Γ = \overline{1}{,}93949$$

$$\text{λογ}(2E) = 4{,}89479$$

$$2E = 78\,486 \text{ τετ. μέτ.}$$

$$E = 39\,243 \text{ τετ. μέτ.}$$

2ον Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι $α = 300$ μέτ, $β = 456{,}75$ μέτ. καὶ $A = 34^0\,16'$.

Ἐργαζομενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $B = 59^0\,0'\,25'',7$ καὶ $B' = 120^0\,59'\,34'',3$. Ἐπειδὴ δὲ $B' + A < 180^0$, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ δύο αὗται τιμαὶ εἶναι δεκταί.

Εἰς ἑκάστην δὲ τούτων ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τῆς Γ, μία τῆς γ καὶ μία τοῦ Ε. Ταύτας ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς:

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς Γ

$A = 34^0\ 16'$

$B = 59^0\ 0'\ 25'',7$

$B' = 120^0\ 59'\ 34'',3$

$A+B = 93^0\ 16'\ 25'',7$

$A+B' = 155^0\ 15'\ 34'',3$

$180^0 = 179^0\ 59'\ 60''$

$A+B = 93^0\ 16'\ 25'',7$

$\Gamma = 86^0\ 43'\ 34'',3$

$A+B' = 155^0\ 15'\ 34'',3$

$\Gamma' = 24^0\ 44'\ 25'',7$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῆς γ. Ἐκ τῆς $\gamma = \frac{\alpha ἡμ\Gamma}{ἡμA}$, ἕπεται ὅτι:

$λογγ = λογα + λογἡμΓ - λογἡμA$

$λογα = 2,47712$

$λογἡμΓ = \overline{1},99929$

$ἄθροισμα = 2,47641$

$λογἡμA = \overline{1},75054$

$λογγ = 2,72587$

$γ = 531,95$ μέτ.

$λογγ' = λογα + λογἡμΓ' - λογἡμA$

$λογα = 2,47712$

$λογἡμΓ' = \overline{1},62171$

$ἄθροισμα = 2,09883$

$λογἡμA = \overline{1},75054$

$λογγ' = 2,34829$

$γ' = 222,995$ μέτ.

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τοῦ Ε. Ἐκ τῆς $2E = αβημΓ$ ἕπεται ὅτι:

$λογ(2E) = λογα + λογβ + λογἡμΓ$

$λογ(2E') = λογα + λογβ + λογἡμΓ'.$

$λογα = 2,47712$

$λογβ = 2,65968$

$λογἡμΓ = \overline{1},99929$

$λογ(2E) = 5,13609$

$2E = 136\ 800$ τετ. μέτ.

$E = 68\ 400$ τετ. μέτ.

$λογα = 2,47712$

$λογβ = 2,65968$

$λογἡμΓ' = \overline{1},62171$

$λογ(2E') = 4,75851$

$2E' = 57\ 347,14$ τ.μ.

$E' = 28\ 673,57$ τ.μ.

3ον Παράδειγμα. Ἔστω $α = 900$ μέτ, $β = 1\ 245$ μέτ. καὶ $A = 53^0\ 12'\ 20''$

Ὑπολογισμὸς τῆς Β.

Ἐκ τῆς $ἡμB = \frac{βἡμA}{α}$ ἕπεται ὅτι: $λογἡμB = λογβ + λογἡμA - λογα.$

$λογβ = 3,09517$

$λογἡμA = \overline{1},90352$

$ἄθροισμα = 2,99869$

$ἄθροισμα = 2,99869$

$λογα = 2,95424$

$λογἡμB = 0,04445$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι $\text{ἡμ}B > 1$, ὅπερ ἀδύνατον. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν δὲν ἔχει λύσιν.

Σημείωσις. Τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος τούτου ἐννοοῦμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Θέτοντες $\chi = \beta\text{ἡμ}A$ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{λογ}\chi = \text{λογ}\beta + \text{λογἡμ}A = 2{,}99869$, ὅθεν καὶ $\chi = \beta\text{ἡμ}A = 996{,}98 > \alpha$. Ἄρα $\text{ἡμ}B = \frac{\beta\text{ἡμ}A}{\alpha} > 1$, ὅπερ ἄτοπον.

Ἀσκήσεις

232. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\frac{\beta\text{ἡμ}A}{\alpha} = 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $B = 90^0$.

233. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι $\beta\text{ἡμ}A > \alpha$.

234. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 95{,}6$ μέτ, $\beta = 34{,}5$ μέτ. καὶ $A = 30^0 15' 28''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

235. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 500$ μέτ. $\beta = 640$ μέτ. καὶ $A = 40^0 20' 10''$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

236. Ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει $(AB) = 15{,}45$ μέτ., $(A\Gamma) = 25{,}50$ μέτ. καὶ $B = 112^0$. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

237. Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦσιν εἰς ἓν σημεῖον ὑπὸ γωνίαν, ἔχει ἔντασιν 30,35 χιλιογράμμων. Ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς ἔχει ἔντασιν 20,35 χιλιογράμμων, ἡ δὲ ἄλλη σχηματίζει μὲ τὴν συνισταμένην γωνίαν $\frac{2\pi}{9}$ ἀκτινίων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς β' δυνάμεως καὶ ἡ γωνία τῶν δυνάμεων τούτων.

Γ' ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

63. *Πρόβλημα III.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον, ἂν δοθῶσι δύο πλευραὶ αὐτοῦ καὶ ἡ γωνία αὐτῶν.**

Ἔστω ὅτι ἐδόθησαν αἱ πλευραὶ α, β καὶ ἡ γωνία Γ αὐτῶν καὶ ὅτι $\alpha > \beta$.

Γνωστά,	*Ἄγνωστα στοιχεῖα*
α, β, Γ,	Α, Β, γ, Ε

Ἐπίλυσις. Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἰσότητα :

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

καὶ ἐκ τῆς $\frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^0$ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι :

$$\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\text{σφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \qquad (1)$$

Τύποι ἐπιλύσεως

$$\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\text{σφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right),\ \gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A},\ E=\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma.$$

Ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $A-B$ καὶ ἔστω Δ ἡ τιμὴ αὐτῆς. Ἂν δὲ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$A-B=\Delta,\ A+B=180^0-\Gamma,$$

εὑρίσκομεν τὰ μέτρα A καὶ B τῶν ἀγνώστων γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Μετὰ ταῦτα ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}=\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$. Διὰ ταύτης δὲ ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος γ τῆς ἀγνώστου πλευρᾶς.

Τέλος δὲ διὰ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $E=\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι $\alpha=3475{,}6$ μέτ, $\beta=1625{,}2$ μέτ, $\Gamma=50^0\,40'\,15''$.

Ὑπολογισμὸς τῶν Α καὶ Β

Ἐκ τῆς $\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\text{σφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$ ἕπεται ὅτι:

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)=\text{λογ}(\alpha-\beta)+\text{λογσφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)-\text{λογ}\,(\alpha+\beta).$$

Βοηθητικὸς πίναξ

$\alpha = 3\,475{,}6$

$\beta = 1\,625{,}2$

$\alpha-\beta = 1\,850{,}4$

$\alpha+\beta = 5\,100{,}8$

$\Gamma = 50^0\,40'\,15''$

$\frac{\Gamma}{2} = 25^0\,20'\,\,7'',5$

$180^0 = 179^0\,59'\,60''$

$\Gamma = 50^0\,40'\,15''$

$A+B = 129^0\,19'\,45''$

$\text{λογ}(\alpha-\beta) = 3{,}26727$

$\text{λογσφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = 0{,}32472$

$\text{ἄθροισμα} = 3{,}59199$

$\text{λογ}(\alpha+\beta) = 3{,}70764$

$\text{λογἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \bar{1}{,}88435$

$\frac{A-B}{2} = 37^0\,27'\,34'',\,6$

$A-B = 74^0\,55'\,\,9'',\,2$

$A+B = 129^0\,19'\,45''$

$2A = 204^0\,14'\,54'',\,2$

$2B = 54^0\,\,24'\,35'',\,8$

$A=102^0\,7'\,27'',1,\qquad B=27^0\,12'\,17'',9$

Ὑπολογισμὸς τῆς γ

Ἐπειδὴ $\gamma = \frac{\alpha ἡμ\Gamma}{ἡμA}$, εἶναι: $λογ\gamma = λογ\alpha + λογἡμ\Gamma - λογἡμA$.

Βοηθητικὸς πίναξ

$$\begin{aligned} 180^0 &= 179^0\,59'\,60'' \\ A &= 102^0\;\;7'\,27'',1 \\ \hline 180^0 - A &= 77^0\;\;52'\,32'',9 \\ ἡμA &= ἡμ(77^0\,52'\,32'',9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} λογ\alpha &= 3,54103 \\ λογἡμ\Gamma &= \overline{1},88847 \\ \hline ἄθροισμα &= 3,42950 \\ λογἡμA &= \overline{1},99021 \\ \hline λογ\gamma &= 3,43929 \\ \gamma &= 2749,75 \text{ μέτ.} \end{aligned}$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ

Ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\alpha\beta ἡμ\Gamma$ εὑρίσκομεν $2E = \alpha\beta ἡμ\Gamma$ καὶ ἑπομένως:

$$\begin{aligned} λογ(2E) &= λογ\alpha + λογ\beta + λογἡμ\Gamma. \\ λογ\alpha &= 3,54103 \\ λογ\beta &= 3,21090 \\ λογἡμ\Gamma &= \overline{1},88847 \\ \hline λογ(2E) &= 6,64040 \\ 2E &= 4\,369\,200 \text{ τετ. μέτρα} \\ E &= 2\,184\,600 \text{ τετ. μέτρα.} \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις

238. Ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\beta = 300$ μέτ., $\gamma = 127$ μέτ. καὶ $A = 68^0 40'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

239. Ἕν τρίγωνον ἔχει $\alpha = 122,4$ μέτ., $\beta = 244,8$ μέτ. καὶ $\Gamma = 42^0 42' 42''$ Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

240. Ἕν τρίγωνον ἔχει $\beta = \frac{3}{4}$ μέτ., $\gamma = \frac{5}{12}$ μέτ. καὶ $A = 40^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

241. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ὑπὸ γωνίαν $45^0 20'$. Ἡ μία δὲ ἀπὸ αὐτὰς ἔχει μῆκος 30 μέτ. καὶ ἡ ἄλλη 15 μέτ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν, τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

242. Εἰς ἕνα κύκλον γράφομεν χορδὴν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ σημείου δὲ Α τῆς περιφερείας ἄγονται αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἄν $(AB) = 2\sqrt{3}$ μέτ. καὶ $(A\Gamma) = 4$ μέτ., νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

243. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσιν εἰς σημεῖον Α ὑπὸ γωνίαν $56^0 30'$. Ἡ δὲ μία ἀπὸ αὐτὰς ἔχει ἔντασιν 10 χιλιογράμμων καὶ ἡ ἄλλη 15 χιλιογράμμων. Νὰ εὑρεθῇ

ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτῆς μὲ τὰς συνιστώσας.

244. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\alpha = 100$ μέτ., $\beta = 79$ μέτ, $\Gamma = \frac{5\pi}{9}$ ἀκτίνια. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

245. Τὸ σχέδιον ἀγροῦ ὑπὸ κλίμακα 0,001 εἶναι τρίγωνον ἔχον $\alpha = 0,4$ μέτ., $\beta = 0,88$ μέτ. καὶ $\Gamma = 40^0 30'$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ τούτου.

246. Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις 10 χιλιογράμμων εἰς δύο συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐνεργῶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ αὐτήν. Η μία δὲ ἀπὸ αὐτὰς νὰ ἔχῃ ἔντασιν 6 χιλιογράμμων καὶ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 30^0 μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Δ′ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΜΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

64. *Πρόβλημα ΙΓ′.* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον, ἂν δοθῶσιν αἱ πλευραί αὐτοῦ.**

Ἐπίλυσις. Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A$ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$. Ἐκ ταύτης ὁρίζομεν τὴν Α. Ἔπειτα εὑρίσκεται εὐκόλως ἡ Β ἐξ ἀντιστοίχου ἰσότητος. Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A$.

Γνωστὰ	*Ἄγνωστα στοιχεῖα*	*Τύποι ἐπιλύσεως*
α, β, γ	A, B, Γ, E	$\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$, $\text{ἡμ}B = \frac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\alpha}$ $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A$.

Παράδειγμα. Ἔστω $\alpha = 5$ μέτ, $\beta = 8$ μέτ, $\gamma = 10$ μέτ.

Ὑπολογισμὸς τῆς Α

$$\begin{aligned}
\text{συν}A &= \frac{8^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{139}{160}.\\
\text{λογἡμ}(90^0 - A) &= \text{λογ}139 - \text{λογ}\,160\\
\text{λογ}139 &= 2,14301\\
\text{λογ}160 &= 2,20412\\
\hline
\text{λογἡμ}(90^0 - A) &= 1,93889\\
90^0 - A &= 60^0\,18'\,43''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ἡμ}(90^0 - A) &= \frac{139}{160}\\
A &= 90^0 - (60^0\,18'\,43'')\\
90^0 &= 89^0\,59'\,60''\\
&\ 60^0\,18'\,43''\\
\hline
A &= 29^0\,41'\,17''
\end{aligned}$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B$ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{25 + 100 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 10} = 0,61$ καὶ $B = 52^0 24'\,38''$

Τὸ μέτρον τῆς Γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε εὑρίσκουσιν ἤδη εὐκόλως οἱ μαθηταί. Ἡ Β δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἐκ τῆς σχέσεως: $ἡμB = \frac{βἡμA}{α}$ μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Α.

Σημείωσις. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἐπίπονος, ἰδίᾳ ὅταν τὰ δεδομένα εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί.

Β′ τρόπος. Ἂν θέσωμεν $α+β+γ=2τ$, γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὅτι $E=\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$. Ἀφ᾽ ἑτέρου ἐμάθομεν (§ 60 γ′) ὅτι $E=\frac{1}{2}βγἡμA$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἡμA=\frac{2}{βγ}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}.$$

Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Α περιοριζόμενοι εἰς τὴν ὀξεῖαν Α. Ἐκ δὲ τῶν γνωστῶν (§ 60 α′) ἰσοτήτων: $\frac{α}{ἡμA}=\frac{β}{ἡμB}=\frac{γ}{ἡμΓ}$ εὑρίσκομεν ὅτι $ἡμB=\frac{β}{α}ἡμA$, $ἡμΓ=\frac{γ}{α}ἡμA$. Διὰ τούτων δὲ ὑπολογίζομεν καὶ τὰς ἄλλας ὀξείας γωνίας Β καὶ Γ. Καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπέναντι τῶν μικροτέρων πλευρῶν, εὑρεθῇ ὅτι εἶναι μικρότερον τῶν 90^0, ἡ τρίτη γωνία πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ παραπλήρωμά της, διότι πρέπει νὰ εἶναι ἀμβλεῖα. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἀπὸ ἕνα τῶν ἀνωτέρω τύπων.

Βραδύτερον θὰ μάθωμεν καὶ ἄλλην συνήθως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην χρησιμοποιουμένην μέθοδον, τὴν κλασσικὴν λεγομένην.

Ἀσκήσεις

247. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $α=8$ μέτ, $β=9$ μέτ, $γ=10$ μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο

248. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $γ=12$ μέτρα, $α=16$ μέτ. καὶ διάμεσον (ΑΜ) $=20$ μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας Β αὐτοῦ.

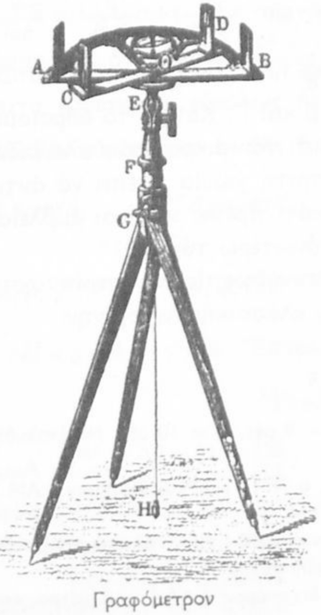
249. Τὰ μήκη α, β, γ, τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2,3, 4. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

250. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $γ=8$ μέτ, διχοτόμον (ΑΔ) $=6$ μέτρα καὶ (ΒΔ) $=4$ μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

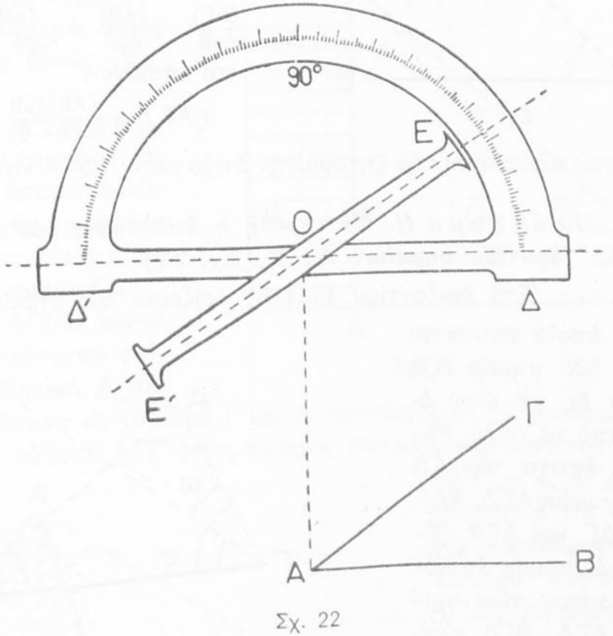
65. Γραφόμετρον. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν οἱ τοπογράφοι μεταχειρίζονται ἀκριβῆ ὄργανα, τὰ ὁποῖα γενικῶς λέγονται **γωνιόμετρα.** Ἓν τοιοῦτον ἀκριβέστατον ὄργανον εἶναι ὁ **Θεοδόλιχος,** τὸν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν εἰς τὸ μάθημα τῆς Κοσμογραφίας. Ἁπλούστερον δὲ γωνιομετρικὸν ὄργανον εἶναι τὸ **Γραφόμετρον.**



Γραφόμετρον

Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ μεταλλικὸν ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι διῃρημένη καὶ ἠριθμημένη ἀπὸ 0⁰ ἕως 180⁰. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΑΒ αὐτοῦ στηρίζονται καθέτως ἐπὶ τὸ ἡμικύκλιον δύο στελέχη. Δύο λεπτόταται σχισμαὶ κατὰ μῆκος τῶν στελεχῶν τούτων ὁρίζουσιν ἓν ἀμετάθετον σκοπευτικὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἡμικύκλιον. Ἕτερος κανὼν CD στρεπτὸς περὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἡμικυκλίου καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ φέρει εἰς τὰ ἄκρα του δύο στελέχη κάθετα ἐπὶ τὸν κανόνα τοῦτον. Λεπταὶ δὲ σχισμαὶ κατὰ μῆκος αὐτῶν ὁρίζουσιν ἄλλο κινητὸν σκοπευτικὸν ἐπίπεδον. Δι' ἀρθρωτικῆς βάσεως τὸ ἡμικύκλιον δύναται νὰ συμπίπτῃ μὲ οἱονδήποτε ἐπίπεδον (σχ. 22).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν γωνίαν ΒΑΓ θέτομεν τὸ ὄργανον οὕτως ὥστε τὸ ἡμικύκλιον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας, τὸ κέντρον Ο νὰ προβάλληται καθέτως εἰς τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας καὶ τὸ ἀμετάθετον σκοπευτικὸν ἐπίπεδον νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς μιᾶς πλευρᾶς ΑΒ τῆς γωνίας (σχ. 22). Στρέφομεν ἔπειτα τὸν κανόνα Ε΄Ε περὶ τὸ κέντρον Ο, μέχρις οὗ τὸ κινητὸν σκοπευτικὸν ἐπίπεδον λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΓ τῆς γωνίας. Τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΔΕ, τὸ ὁποῖον περιέχεται τότε μεταξὺ τῶν σκοπευτικῶν ἐπιπέδων, εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον μέτρον τῆς γωνίας ΒΑΓ.



Σχ. 22

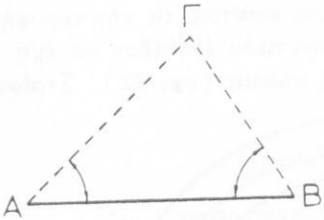
66. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις προσιτοῦ σημείου Α ἀπὸ ἄλλου ἀπροσίτου ἀλλ' ὁρατοῦ σημείου Γ** (σχ. 23).

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ Α ὁρίζομεν σημεῖον Β, ἀπὸ τοῦ ὁποίου φαίνονται τὰ Α καὶ Γ καὶ εἶναι δυνατὴ ἡ μέτρησις τῆς ἀποστάσεως ΑΒ μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας. Μετὰ τὴν μέτρησιν αὐτῆς τοποθετοῦντες τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανόν μας εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β μετροῦμεν τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΒΓ. Ἕνκκα δὲ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι

$$\frac{(\text{ΑΓ})}{\text{ἡμΒ}} = \frac{(\text{ΑΒ})}{\text{ἡμΓ}} = \frac{(\text{ΑΒ})}{\text{ἡμ}(\text{Α}+\text{Β})}$$

καὶ ἑπομένως

$$(\text{ΑΓ}) = \frac{(\text{ΑΒ})\,\text{ἡμΒ}}{\text{ἡμ}(\text{Α}+\text{Β})}.$$

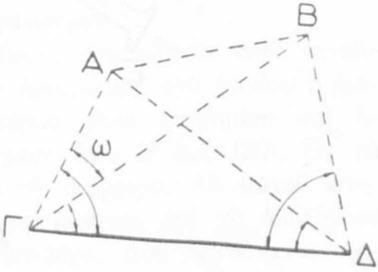


Σχ. 23

Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν τῶν Α καὶ Γ.

67. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπροσίτων ἀλλ' ὁρατῶν σημείων Α, Β** (Σχ. 24).

Λύσις. Ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ὁρίζομεν δύο σημεῖα Γ, Δ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα φαίνονται καὶ τὰ δύο σημεῖα Α,Β ἕκαστον δὲ νὰ εἶναι ὁρατὸν ἀπὸ τὸ ἄλλο. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν ΓΔ καὶ τὰς γωνίας ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΔΓΒ, ΒΔΓ καὶ ΑΓΒ. Ἔπειτα διὰ μερικῆς ἐπιλύσεως ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΓΔ, ΒΓΔ εὑρίσκομεν τὰ μήκη (ΑΓ) καὶ (ΓΒ). Οὕτω δὲ γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΒ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ καὶ τὴν γωνίαν ω. Ἐκ τούτου λοιπὸν εὑρίσκομεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ (§ 63).

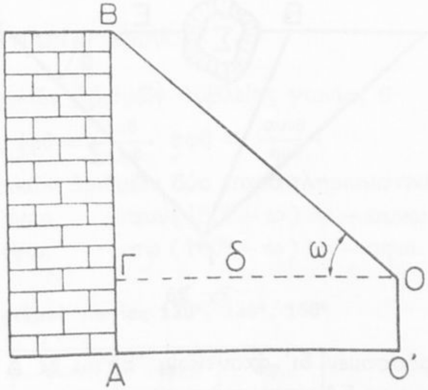


Σχ. 24

68. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι προσιτὴ** (Σχ. 25).

Λύσις. Ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ πύργου ὁρίζομεν καὶ μετροῦμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΟ' ἔστω δὲ (ΑΟ') = δ. Τοποθετοῦμεν ἔπειτα εἰς τὸ Ο' τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον ὕψους (ΟΟ') = υ καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΒΟΓ = ω τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖ-

νος ΟΒ μὲ τὴν ὁριζόντιον εὐθεῖαν ΟΓ. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι $(\Gamma B) = \delta \text{ ἐφ}\omega$ καὶ ἑπομένως:
$(AB) = \upsilon + (\Gamma B) = \upsilon + \delta \cdot \text{ἐφ}\omega$.



Σχ. 25

69. *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ΑΒ ἑνὸς ὄρους** (σχ. 26).

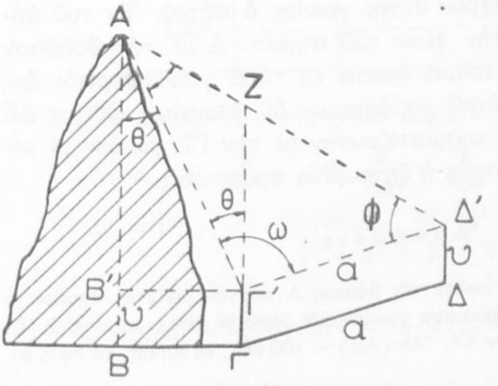
Λύσις. Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὁρίζεται τὸ ὕψος, χαράσσομεν καὶ μετροῦμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ.

Ἀπὸ δὲ τῶν ἄκρων τούτου πρέπει νὰ φαίνηται ἡ κορυφὴ Α τοῦ ὄρους. Ἔπειτα εἰς τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ τοποθετοῦμεν τὸ γωνιομετρικὸν ὄργανον, οὗ ἔστω $(\Gamma\Gamma') = \upsilon$, τὸ ὕψος. Μετροῦμεν μὲ αὐτὸ τὰς γωνίας $A\Delta'\Gamma', = \varphi$, $A\Gamma'\Delta' = \omega$ καὶ τὴν θ τῆς ΑΓ' μὲ τὴν κατακόρυφον ΓΖ. Ἐκ τοῦ τριγώνου δὲ ΑΓ'Δ', εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$(A\Gamma') = \frac{\alpha \text{ ἡμ}\varphi}{\text{ἡμ}(\varphi + \omega)}.$$

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒ'Γ' βλέπομεν ὅτι:

$$(AB') = (A\Gamma') \text{ συν}\theta = \frac{\alpha \text{ἡμ}\varphi \text{ συν}\theta}{\text{ἡμ}(\omega + \varphi)}$$



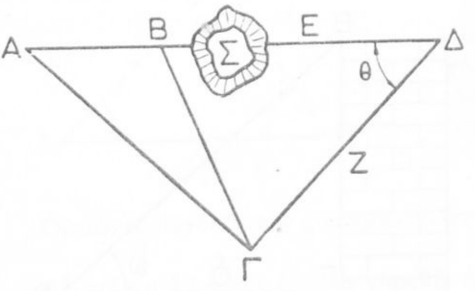
Σχ. 26

Μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι: $(AB) = (AB') + \upsilon$.

70. *Πρόβλημα V.* **Νὰ χαραχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐδάφους**

ἡ ὄπισθεν κωλύματος Σ προέκτασις μιᾶς εὐθείας ΑΒ (σχ. 28).

Λύσις. Μετροῦμεν μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας τὴν ἀπόστασιν ΑΒ δύο σημείων τῆς δοθείσης εὐθείας. Ἔπειτα τοποθετοῦμεν ὁρατὸν σῆμα εἰς σημεῖον Γ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φαίνονται τὰ σημεῖα Α, Β καὶ ὁ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ ὄπισθεν τοῦ Σ χῶρος. Πρὸς τὸν χῶρον τοῦτον κατευθύνομεν εὐθεῖαν ΓΖ, τὴν ὁποίαν χαράσσομεν δι' ἀκοντίων. Ἔστω δὲ Δ ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς ζητουμένης ΕΔ.



Σχ. 28

Μετροῦμεν ἔπειτα τὰς γωνίας ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΖ καὶ ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΓΔ τοῦ νοητοῦ τριγώνου ΑΓΔ καὶ τὸ μέτρον θ τῆς γωνίας Δ αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ μήκους δὲ (ΓΔ) ὁρίζομεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Δ μὲ τὴν βοήθειαν τῆς μετροταινίας. Τοποθετοῦμεν ἔπειτα εἰς τὸ Δ γωνιομετρικὸν ὄργανον καὶ τῇ βοηθείᾳ αὐτοῦ χαράσσομεν δι' ἀκοντίων εὐθεῖαν ΔΕ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Σ καὶ σχηματίζουσαν μὲ τὴν ΓΖ γωνίαν μὲ μέτρον θ. Ἡ ΕΔ εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη προέκτασις.

Ἀσκήσεις

251. Εἰς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς βάσεως Δ πύργου ὁρίζεται σημεῖον Α ἀπὸ τὸ ὁποῖον ὁ πύργος φαίνεται ὑπὸ γωνίαν 60°. Ἀπὸ δὲ ἄλλου σημείου Β τῆς εὐθείας ΔΑ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν 30°. Ἂν (ΑΒ) = 100 μέτ., νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ΔΓ τοῦ πύργου.

252. Δύο σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἀπέχουσιν ἀλλήλων 1000 μέτρα. Ἓν ἀπρόσιτον σημεῖον Π φαίνεται ἐξ ἀμφοτέρων ὑπὸ γωνίαν ὕψους 35°. Ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ Π ἀπὸ ἑκάστου τῶν Α καὶ Β φαίνεται ἐκ τοῦ ἄλλου ὑπὸ γωνίαν 60°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ Π ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῶν Α καὶ Β.

253. Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους κεῖνται ἀπ' εὐθείας καὶ τὰ Β, Γ

εἶναι ἀπρόσιτα. Ἐν τέταρτον σημεῖον Δ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους ἀπέχει 600 μέτρα τοῦ Α, φαίνεται δὲ ἐξ αὐτοῦ τὸ μὲν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν 42°, τὸ δὲ ΑΓ ὑπὸ γωνίαν 75°. Ἀπὸ δὲ τοῦ Α φαίνεται τὸ τμῆμα ΒΔ ὑπὸ γωνίαν 40°. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως ΒΓ.

ΠΙΝΑΞ ΤΥΠΩΝ Β΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμβλείας γωνίας θ:

$$\text{ἡμ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1,\ \text{ἐφ}\theta = \frac{\text{ἡμ}\theta}{\text{συν}\theta},\ \text{σφ}\theta = \frac{\text{συν}\theta}{\text{ἡμ}\theta}.$$

Σχέσεις τῶν τριγονωμετρικῶν ἀριθμῶν δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν: $\text{ἡμ}(180^0 - \omega) = \text{ἡμ}\omega,\quad \text{συν}(180^0 - \omega) = -\,\text{συν}\omega$

$$\text{ἐφ}(180^0 - \omega) = -\text{ἐφ}\omega,\quad \text{σφ}\ (180^0 - \omega) = -\ \text{σφ}\omega.$$

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ γωνίας 120°, 135°, 150°

γωνία	ἡμ.	συν.	ἐφ.	σφ.
120^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 180^0,\ \frac{\alpha}{\text{ἡμ}\mathrm{A}} = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma} = 2\mathrm{R},$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\mathrm{A},\quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\text{συν}\mathrm{B},$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\text{συν}\Gamma,$$

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\alpha\beta\text{ἡμ}\Gamma = \frac{1}{2}\beta\gamma\text{ἡμ}\mathrm{A} = \frac{1}{2}\alpha\gamma\text{ἡμ}\mathrm{B},\quad \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2}\right)}$$

$$\mathrm{E} = \frac{\alpha^2\text{ἡμ}\mathrm{B}\text{ἡμ}\Gamma}{2\text{ἡμ}\mathrm{A}} = \frac{\alpha^2\text{ἡμ}\mathrm{B}\text{ἡμ}\Gamma}{2\text{ἡμ}(\mathrm{B} + \Gamma)} = \frac{\beta^2\text{ἡμ}\mathrm{A}\text{ἡμ}\Gamma}{2\text{ἡμ}\mathrm{B}} = \frac{\beta^2\text{ἡμ}\mathrm{A}\text{ἡμ}\Gamma}{2\text{ἡμ}(\mathrm{A} + \Gamma)}$$

$$= \frac{\gamma^2\text{ἡμ}\mathrm{A}\text{ἡμ}\mathrm{B}}{2\text{ἡμ}\Gamma} = \frac{\gamma^2\text{ἡμ}\mathrm{A}\text{ἡμ}\Gamma}{2\text{ἡμ}(\mathrm{A} + \mathrm{B})}$$

$$\text{συν}\mathrm{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma},\quad \text{συν}\mathrm{B}\ \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma},\quad \text{συν}\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

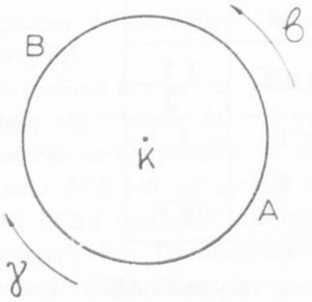
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΓΕΝΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΓΩΝΙΑΣ Ή ΤΟΞΟΥ

71. Θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ φορὰ ἐπὶ περιφερείας. Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Κ ἓν κινητὸν σημεῖον δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β ἢ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ γ (σχ. 28). Ἡ φορὰ τοῦ βέλους γ, καθ' ἣν κινοῦνται καὶ οἱ δεῖκται ὡρολογίου, λέγεται **ἀρνητικὴ φορά**, ἡ δὲ ἀντίθετος ταύτης φορὰ τοῦ βέλους β λέγεται **θετικὴ φορά**.



Σχ. 28

72. Ἀνύσματα - Ἄξων. Ἂς νοήσωμεν ὅτι ἓν κινητὸν σημεῖον κινεῖται ἐπὶ εὐθείας Χ'Χ καὶ μεταβαίνει ἐκ σημείου Α εἰς ἄλλο Β αὐτῆς (σχ. 29).

Ὁ δρόμος ΑΒ, τὸν ὁποῖον διανύει, λέγεται ἰδιαιτέρως **ἄνυσμα***. Τοῦτο ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Β καὶ φορὰν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β. Σημειώνεται δὲ οὕτως: $\overline{AB}$. Τὸ σύμβολον $\overline{BA}$ σημαίνει ἄνυσμα μὲ ἀρχὴν Β, τέλος Α καὶ φορὰν ἀντίθετον τῆς προηγουμένης. Διακρίνομεν δὲ τὴν μίαν φορὰν ἀπὸ τὴν ἄλλην ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ τῆς εὐθείας Χ'Χ ὁρίζομεν αὐθαιρέτως ἓν σημεῖον Ο ὡς ἀρχὴν καὶ ἓν ἄνυσμα ΟΘ. Τοῦτο λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους καὶ καλοῦμεν ἰδιαιτέρως **διευθύνον ἄνυσμα**.

Ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Θ φορὰ ὀνομάζεται **θετικὴ φορὰ** ἐπὶ τῆς

---

* Τὸ ἄνυσμα λέγεται συνήθως καὶ διάνυσμα.

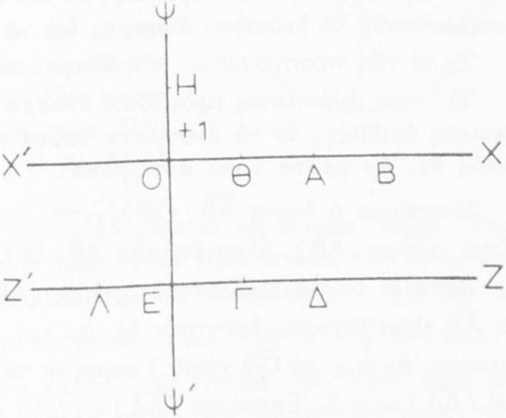
εὐθείας Χ΄Χ καὶ πάσης ἄλλης Ζ΄Ζ παραλλήλου πρὸς αὐτήν. Ἡ δὲ ἀντίθετος ταύτης φορὰ λέγεται **ἀρνητικὴ φορά**.

Πᾶσα εὐθεῖα Χ΄Χ ἢ Ζ΄Ζ, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὡρίσθη τὸ διευθύνον ἄνυσμα, λέγεται ἄξων.

Ἡ ἀρχὴ Ο διαιρεῖ τὸν ἄξονα εἰς τὸν **θετικὸν ἡμιάξονα** ΟΧ, ὅστις περιέχει τὸ ΟΘ, καὶ εἰς τὸν **ἀρνητικὸν ἡμιάξονα** ΟΧ΄.

Πᾶν ἄνυσμα, π.χ. τὸ ΑΒ, ἔχον θετικὴν φορὰν λέγεται **θετικὸν ἄνυσμα**. Ἂν δὲ ἔχῃ ἀρνητικὴν φορὰν ὡς τὸ $\overline{\Delta\Lambda}$, λέγεται **ἀρνητικὸν ἄνυσμα**.

Ἀνύσματα τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλων ἀξόνων λέγονται **ὁμόρροπα** μέν, ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν· **ἀντίρροπα** δέ, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετον φοράν.



Σχ. 29

Ἂν δὲ δύο ἢ περισσότερα ἀνύσματα τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλων ἀξόνων εἶναι ἐφαρμόσιμα, λέγονται **ὁμορρόπως ἴσα**, ἂν εἶναι ὁμόρροπα, **ἀντιρρόπως δὲ ἴσα**, ἂν εἶναι ἀντίρροπα.

Ἂν ὁ θετικὸς ἡμιάξων ΟΧ στραφῇ περὶ τὴν ἀρχὴν Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ κατὰ 90°, θὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν ΟΨ, τὸ δὲ $\overline{O\Theta}$ ἐπὶ τοῦ $\overline{OH}$. Τοῦτο λαμβάνεται ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ ἄξονος Ψ΄Ψ, ὅστις περιέχει αὐτό.

73. Μῆκος ἀνύσματος. Τὸ ἄνυσμα ΛΔ (σχ. 29) ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν ἀνυσμάτων ὁμορρόπως ἴσων πρὸς τὸ $\overline{AB}$. Λέγεται δὲ γινόμενον τοῦ ΑΒ ἐπὶ 3 εἶναι δηλαδὴ $\overline{\Lambda\Delta}=\overline{AB}\cdot 3$. Ὁμοίως $\overline{\Delta\Lambda}=\overline{BA}\cdot 3$. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ΔΛ λέγεται καὶ γινόμενον τοῦ ΑΒ ἐπὶ (-3), ἤτοι: $\overline{\Delta\Lambda}=\overline{AB}\cdot(-3)$. Κατὰ ταῦτα.

Τὸ γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν εἶναι ἄνυσμα ὁμόρ-

ροπον πρὸς αὐτό, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός, ἀντίρροπον δὲ πρὸς αὐτό, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.

Ἕνεκα τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος $\overline{\Lambda\Delta} = \overline{AB} \cdot 3$, ὁ 3 λέγεται λόγος τοῦ $\overline{\Lambda\Delta}$ πρὸς τὸ $\overline{AB}$, ἤτοι $\overline{\Lambda\Delta} : \overline{AB} = 3$. Ὁμοίως $\Delta\Lambda : BA = +3$ καὶ $\overline{\Delta\Lambda} : \overline{AB} = -3$. Ὥστε:

Λόγος ἀνύσματος πρὸς ἄλλο ἄνυσμα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ παραλλήλου ἄξονος, λέγεται ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον ἄνυσμα, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον.

Ἐκ δὲ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων βλέπομεν ὅτι:

Ὁ λόγος ἀνύσματος πρὸς ἄλλο ἄνυσμα παράλληλόν του εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἂν τὰ ἀνύσματα ταῦτα εἶναι ὁμόρροπα· ἀρνητικὸς δέ, ἂν ταῦτα εἶναι ἀντίρροπα.

Ἰδιαιτέρως ὁ λόγος $\overline{AB} : \overline{O\Theta}$ λέγεται **μῆκος** τοῦ $\overline{AB}$ καὶ σημειοῦται οὕτω: $(\overline{AB})$. Εἶναι δηλαδὴ $\overline{AB} : \overline{O\Theta} = (\overline{AB})$.

Κατὰ δὲ τὰ προηγούμενα ὁ ἀριθμὸς $(\overline{AB})$ θὰ εἶναι θετικός, ἂν τὸ $\overline{AB}$ εἶναι θετικόν, ἀρνητικὸς δέ, ἂν καὶ τὸ $\overline{AB}$ εἶναι ἀρνητικὸν ἄνυσμα. Ἂν π.χ. τὸ $\overline{O\Theta}$ χωρῇ 3 φορὰς εἰς τὸ $\overline{\Lambda\Delta}$, θὰ εἶναι $(\overline{\Lambda\Delta}) = 3$ καὶ $(\overline{\Delta\Lambda}) = -3$. Ἐπομένως $(\overline{\Lambda\Delta}) + (\overline{\Delta\Lambda}) = 0$.

Τὰ ἀνύσματα ΛΔ καὶ ΔΛ λέγονται **ἀντίθετα** ἀνύσματα.

74. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου. Ἂς νοήσωμεν ὅτι ἓν κινητὸν σημεῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἓν σημεῖον Α περιφερείας Ο καὶ κινούμενον ἐπ' αὐτῆς σταματᾷ εἰς τὸ Μ. Οὕτω τὸ κινητὸν διανύει τὸ τόξον ΑΒΜ. Ἂν δὲ κινηθῇ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ διανύσῃ ἄλλο τόξον ΑΒ'Μ (σχ. 30). Κατὰ ταῦτα:

Ἕκαστον τόξον θεωρεῖται ὡς δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει ἓν κινητὸν κατά τινα φοράν.

Χάριν τῆς γενικότητος ὀνομάζομεν τόξον καὶ τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον διανύει τὸ κινητόν. ἂν σταματήσῃ εἰς τὸ Μ κατὰ τὴν 2αν ἢ τὴν 3ην κτλ. ἄφιξιν εἰς αὐτό. Ὥστε:

Τόξον εἶναι τυχὼν δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει ἓν κινητὸν κινούμενον ἐπὶ περιφερείας κατά τινα φοράν.

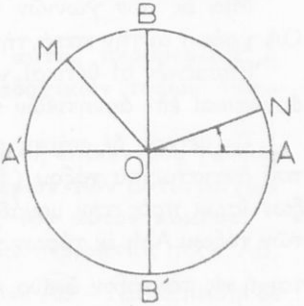
Τὸ σημεῖον Α, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἡ κίνησις, λέγεται ἀρ-

χή, τὸ δὲ Μ, εἰς τὸ ὁποῖον σταματᾷ, λέγεται **τέλος** τοῦ τόξου.

Ἡ ἀκτίς, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑνὸς τόξου, λέγεται **ἀρχική**, ἡ δὲ καταλήγουσα εἰς τὸ τέλος λέγεται **τελικὴ** ἀκτὶς τοῦ τόξου.

Ἡ φορὰ τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ λέγεται καὶ **φορὰ** τοῦ διανυομένου τόξου.

Τὰ τόξα δέ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν φοράν, λέγονται **θετικὰ** τόξα· τὰ δὲ ἔχοντα ἀρνητικὴν φορὰν τόξα λέγονται **ἀρνητικὰ** τόξα. Π.χ. τὸ ΑΒΜ εἶναι θετικόν, τὸ δὲ ΑΒ′Μ εἶναι ἀρνητικὸν **τόξον** (σχ. 30).



Σχ. 30

Ἡ μονὰς ΑΝ τῶν τόξων λαμβάνεται ὡς θετικὸν τόξον. Ἐπομένως τὰ μέτρα τῶν μὲν θετικῶν τόξων εἶναι θετικοί, τῶν δὲ ἀρνητικῶν εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί. Π.χ. τὸ τεταρτημόριον ΑΒ ἔχει μέτρον 90^0 ἢ $\frac{\pi}{2}$ ἀκτινίων, τὸ δὲ ΑΒ′ εἶναι -90^0 ἢ $-\frac{\pi}{2}$ ἀκτινίων.

Μετὰ τὴν γενίκευσιν ταύτην τῆς ἐννοίας τοῦ τόξου εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειρα θετικὰ καὶ ἄπειρα ἀρνητικὰ τόξα ΑΜ. Ἂν δὲ τ εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς τούτων, τὸ μέτρον, χ παντὸς ἄλλου τόξου ΑΜ εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν τ προστεθῇ ἓν πολλαπλάσιον τοῦ μέτρου μιᾶς θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς περιφερείας. Θὰ εἶναι δηλαδή:

$$\chi = \tau + 360^0 k \quad \text{ἢ} \quad \chi = \tau + 400^0 k \quad \text{ἢ} \quad \chi = \tau + 2k\pi \qquad (1)$$

ἂν k εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

75. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας. Ὅταν τὸ κινητὸν σημεῖον διανύσῃ τὸ τόξον ΑΒΜ, ἡ ἀκτὶς ΟΑ στρεφομένη περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν γωνίαν ΑΟΜ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒΜ. Ὅταν δὲ τὸ κινητὸν γράψῃ τὸ τόξον ΑΒ′Μ, ἡ ΟΑ θὰ γράψῃ τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν ΑΟΜ. Καὶ ὅταν τὸ σημεῖον Μ γράψῃ τὸ τόξον ΑΒΜΒ′ΑΜ, λέγομεν χάριν τῆς γενικότητος ὅτι καὶ ἡ ΟΑ γράφει πάλιν γωνίαν βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἡ ΟΑ λέγεται **ἀρχικὴ πλευρὰ** ἡ δὲ ΟΜ **τελικὴ πλευρὰ** πάσης τοιαύτης γωνίας. Σημειώνομεν δὲ μίαν τοιαύτην γωνίαν μὲ τὸ σύμβολον $\widehat{OA,OM}$.

Μία ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων λέγεται θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν ἡ ΟΑ γράφῃ αὐτὴν κατὰ τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν.

Ἑπομένως αἱ θετικαὶ γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ θετικῶν τόξων αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἐπὶ ἀρνητικῶν τόξων καὶ ἀντιστρόφως.

Τὸ μέτρον δὲ πάσης τοιαύτης γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου (§ 7). Διότι εἶναι φανερὸν ὅτι ἐξ ὅσων τόξων ἴσων πρὸς τὴν μονάδα ΑΝ ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ἓν τῶν τόξων ΑΜ, ἐκ τόσων γωνιῶν ΑΟΝ ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ εἰς τὸ τόξον ἐκεῖνο ΑΜ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{OA,OM}$.

76. Ἴσα καὶ ἀντίθετα τόξα ἢ γωνίαι. Μετὰ τὴν γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τῶν τόξων καὶ τῶν γωνιῶν οἱ ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωστοὶ ὁρισμοὶ τῆς ἰσότητος δύο τόξων ἢ δύο γωνιῶν δὲν ἐπαρκοῦσι. Τούτους γενικεύομεν ὡς ἑξῆς:.

Δύο γωνίαι ἢ δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἴσα, ἂν ἔχωσιν ἴσα μέτρα, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Δύο δὲ γωνίαι ἢ δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγονται ἀντίθετα, ἂν ἔχωσιν ἀντίθετα μέτρα, ὅταν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

77. Ἄθροισμα τόξων ἢ γωνιῶν καὶ διαφορὰ δύο τόξων ἢ δύο γωνιῶν. Ἕκαστον ἀπὸ τὰ τόξα ΑΝ, ΝΒ, ΒΜ (σχ. 30) ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου. Λέγονται δὲ ταῦτα διαδοχικὰ τόξα. Ἄθροισμα δὲ αὐτῶν εἶναι τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Μ καὶ μέτρον τὸ ἄθροισμα$(\widehat{AN})+(\widehat{NB})+(\widehat{BM})$ τῶν μέτρων τῶν τόξων τούτων. Ἂν π.χ. $(\widehat{AN})=1^0$, $(NB)=89^0$, $(\widehat{BM})=30^0$, ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ τόξον ΑΒΜ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον $1^0+89^0+30^0=120^0$.

Ἂν δὲ $(\widehat{AN})=361^0$, $(\widehat{NB})=89^0$, $(\widehat{BM})=390^0$, ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων ΑΜ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον

$361^0+89^0+390^0 = 840^0$. Καὶ ἂν $(\overset{\frown}{AN}) = -359^0$, $(\overset{\frown}{NB}) = 449^0$, $(\overset{\frown}{BM}) = -330^0$, ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἐκ τῶν τόξων AM τὸ ἔχον μέτρον $-359^0+449^0-330^0 = -240^0$.

Ἄθροισμα δὲ τυχόντων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς ἐκεῖνα.

Ἄθροισμα δὲ διαφόρων γωνιῶν λέγεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ἀντιστοίχων τόξων, ἂν αὗται γίνωσιν ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

Ἂν θεωρήσωμεν τὰ θετικὰ καὶ μικρότερα περιφερείας τόξα AB, AN, NB (σχ. 30), εἶναι φανερὸν ὅτι $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{NB}$. Ἐπειδὴ δὲ $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BN}$, ἕπεται ὅτι $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BN}$. Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι ἡ διαφορὰ $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{NB}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ μειωτέου $\overset{\frown}{AB}$ καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου τόξου $\overset{\frown}{NB}$.

Ἀπὸ τοῦτο ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν.

Διαφορὰ ἑνὸς τόξου ἀπὸ ἄλλο εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου.

Διαφορὰ δὲ γωνίας ἀπὸ ἄλλης εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων τῶν ἀντιστοίχων τόξων, ἂν γίνωσιν ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

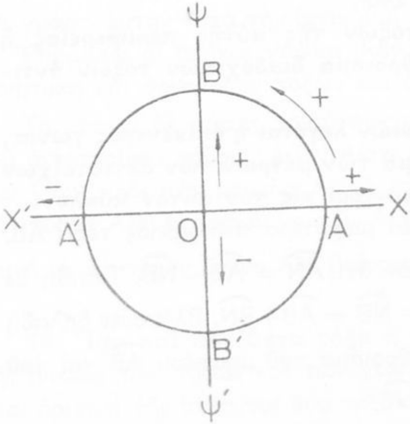
78. Τριγωνομετρικὸς κύκλος καὶ πρωτεύοντες ἄξονες αὐτοῦ. Χάριν ἁπλοποιήσεως τῶν διαφόρων ζητημάτων τὰ τόξα θεωροῦνται ὡς ἀνήκοντα εἰς περιφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς θεωρεῖται ὡς μονάς.

Πᾶσα τοιαύτη περιφέρεια λέγεται **τριγωνομετρικὴ περιφέρεια.** Ὁ δὲ ὑπ' αὐτῆς ὁριζόμενος κύκλος λέγεται ἐπίσης **τριγωνομετρικὸς κύκλος.**

Ἐπίσης διὰ τὴν εὐκολωτέραν συσχέτισιν τῶν τόξων καὶ τῶν στοιχείων αὐτῶν θεωροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ τόξα ἔχουσι κοινὴν ἀρχὴν ἓν σημεῖον A, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν αὐθαιρέτως (σχ. 31).

Ἡ ἀρχικὴ ἀκτὶς OA λαμβάνεται ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὴν ἄξονος X'X. Ὁ δὲ ἄξων οὗτος λέγεται ἰδιαιτέρως **ἄξων τῶν συνημιτόνων.**

Ἂν ἡ ἀκτὶς ΟΑ στραφῇ περὶ τὸ Ο κατὰ 90^0 καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀκτῖνος ΟΒ. Αὕτη λαμβάνεται ὡς διευθύνον ἄνυσμα τοῦ περιέχοντος αὐτὸ ἄξονος Ψ'Ψ. Οὗτος δὲ λέγεται ἰδιαιτέρως **ἄξων τῶν ἡμιτόνων**. Οἱ δύο δὲ οὗτοι κάθετοι ἄξονες Χ'Χ, Ψ'Ψ ὁμοῦ λέγονται **πρωτεύοντες ἄξονες** τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.



Σχ. 31

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι εἰς ἄλλην ἀρχὴν τόξων ἀντιστοιχεῖ ἄλλο ζεῦγος πρωτευόντων ἀξόνων.

Ἕκαστον ζεῦγος πρωτευόντων ἀξόνων διαιρεῖ τὴν τριγωνομετρικὴν περιφέρειαν εἰς 4 τεταρτημόρια. Ταῦτα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν λέγονται κατὰ σειρὰν **πρῶτον, δεύτερον, τρίτον, τέταρτον**, τεταρτημόριον. Οὕτω διὰ τὸ σύστημα πρωτευόντων τόξων Χ'Χ, Ψ'Ψ (σχ. 31) τὰ τεταρτημόρια ταῦτα κατὰ σειρὰν εἶναι ΑΒ, ΒΑ', Α'Β', Β'Α.

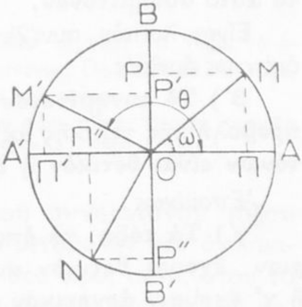
Ἀσκήσεις

254. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ 45^0 ἢ -45^0
255. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ 30^0 ἢ -30^0
256. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ 90^0 ἢ -90^0
257. Νὰ στραφῇ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων κατὰ 180^0 ἢ 270^0

79. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τυχόντος τόξου. Α') Ἐμάθομεν (§ 9) ὅτι, ἂν ω (σχ. 32) εἶναι τυχοῦσα ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΜ, εἶναι ἡμω$=\frac{\overline{ΠΜ}}{ΟΜ}$. Ἂν δὲ $(\overline{ΟΜ})=1$, ὁ προηγουμενος ὁρισμὸς γίνεται ἡμω $=(\overline{ΠΜ})$.

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{ΠΜ})=(\overline{ΟΡ})$, ἔπεται ὅτι: ἡμω $=(\overline{ΟΡ})=\overline{ΟΡ}:\overline{ΟΒ}$

Τὸ μῆκος τοῦτο ($\overline{OP}$) ὀνομάζομεν **ἡμίτονον** καὶ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου ΑΜ τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας ἥτις ἔχει κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας ω. Ἐπεκτείνομεν δὲ καὶ εἰς πᾶν ἐν γένει τόξον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν τριγωνομετρικῆς περιφερείας. Ὥστε:



Σχ. 32

Ἡμίτονον τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.

Τοῦ τυχόντος τόξου ΑΜ π.χ. ἡμίτονον εἶναι ὁ ἀριθμὸς ($\overline{OP}$), ἦτοι ὁ λόγος $\overline{OP} : \overline{OB}$. Ἐπίσης ἡμίτονον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΝ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ($\overline{OP''}$), ἤτοι $\overline{OP''} : \overline{OB}$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

α΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον.

Εἶναι λοιπὸν $\text{ἡμ}\,(2k\pi+\tau) = \text{ἡμ}\tau$, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

β΄) Τὸ ἡμίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἂν ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.

Ἑπομένως :

γ΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α΄ ἢ β΄ τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ γ΄ ἢ δ΄ τεταρτημόριον ἔχουσιν ἀρνητικὸν ἡμίτονον.

Β΄) Ὁμοίως τὸν ὁρισμὸν $\text{συν}\omega = (\overline{O\Pi}) = \overline{O\Pi} : \overline{OM} = \overline{O\Pi} : \overline{OA}$ ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας ω καὶ εἰς πᾶν ἐν γένει τόξον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν τριγωνομετρικῆς περιφερείας. Ὥστε.

Συνημίτονον τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

α΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον.

Εἶναι λοιπὸν συν$(2k\pi+\tau)=$ συντ, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

β΄) Τὸ συνημίτονον τόξου εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἂν ἡ προβολὴ τῆς τελικῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.

Ἑπομένως :

γ΄) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α΄ ἢ δ΄ τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὸν συνημίτονον. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β΄ ἢ γ΄ ἔχουσιν ἀρνητικὸν συνημίτονον.

80. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τυχούσης γωνίας. Προηγουμένως εἴπομεν ὅτι οἱ γνωστοὶ ὁρισμοὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ὀξείας γωνίας ω συμπίπτουσι κατ᾽ ἐπέκτασιν μὲ τοὺς ἀντιστοίχους ὁρισμοὺς τῶν ἀντιστοίχων τόξων.

Τὴν σύμπτωσιν ταύτην γενικεύομεν δίδοντες τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς:

α΄) Ἡμίτονον τυχούσης γωνίας λέγεται τὸ ἡμίτονον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.

β΄) Συνημίτονον τυχούσης γωνίας λέγεται τὸ συνημίτονον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.

Διὰ τοὺς λόγους τούτους ,ὅσα θὰ μάθωμεν διὰ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων, ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν εἰς αὐτά.

Ἀσκήσεις

258. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα $35^0, -35^0, 127^0, -127^0, 348^0, -348^0, 205^0, -205^0$ ἔχουσι θετικὸν καὶ ποῖα ἀρνητικὸν ἡμίτονον.

259. Νὰ διακρίνητε ποῖαι ἀπὸ τὰς γωνίας $175^0, -175^0, 292^0, -292^0, 100^0, -100^0$ ἔχουσι θετικὸν καὶ ποῖαι ἀρνητικὸν ἡμίτονον.

260. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα $\frac{\pi}{5}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}\ \frac{11\pi}{7}$ ἔχουσι θετικὸν καὶ ποῖα ἀρνητικὸν συνημίτονον.

261. Νὰ ὁρίσητε τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον καὶ θετικὸν συνημίτονον. Εἰς ποῖον δὲ τὰ ἔχοντα ἀρνητικοὺς καὶ τοὺς δύο τούτους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

262. Νὰ ὁρίσητε τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον καὶ ἀρνητικὸν συνημίτονον. Εἰς ποῖον δὲ τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀρνητικὸν ἡμίτονον καὶ θετικὸν συνημίτονον.

263. Νὰ εὕρητε τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῶν τόξων ἢ τῶν γωνιῶν 405^0 $(= 360^0 + 45^0)$, $750^0 = (360^0 \times 2 + 30^0)$, $510^0 = (360^0 + 150^0)$.

81. Μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου ἢ γωνίας. α΄) Ἂς παρακολουθήσωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀνύσματος ΟΡ (σχ. 32) ἢ τοῦ ΠΜ ὁμορρόπως ἴσου πρὸς αὐτό, ὅταν τὸ πέρας Μ τόξου ΑΜ διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Οὕτως εὐκόλως σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου τόξου τ, ἂν τοῦτο βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

τ	0^0	↗	90^0	↗	180^0	↗	270^0	↗	360^0
	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
ἡμτ	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

β΄) Ὁμοίως παρακολουθοῦντες τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀνύσματος ΟΠ σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου τόξου, ἂν τοῦτο βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

τ	0^0	↗	90^0	↗	180^0	↗	270^0	↗	360^0
	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
συντ	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

Ἂν τὸ τόξον ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς 360^0, τὸ πέρας Μ αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὰ αὐτὰ κατὰ σειρὰν σημεῖα. Ἑπομένως τὸ ἡμίτονον λαμβάνει τὰς εἰς τὸν ἀνωτέρω α΄ πίνακα ἀναγραφομένας τιμὰς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν. Τὸ δὲ συνημίτονον λαμβάνει τὰς εἰς τὸν β΄ πίνακα τιμὰς κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πινάκων βλέπομεν ὅτι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου εἶναι 1, ἡ δὲ ἐλαχίστη -1.

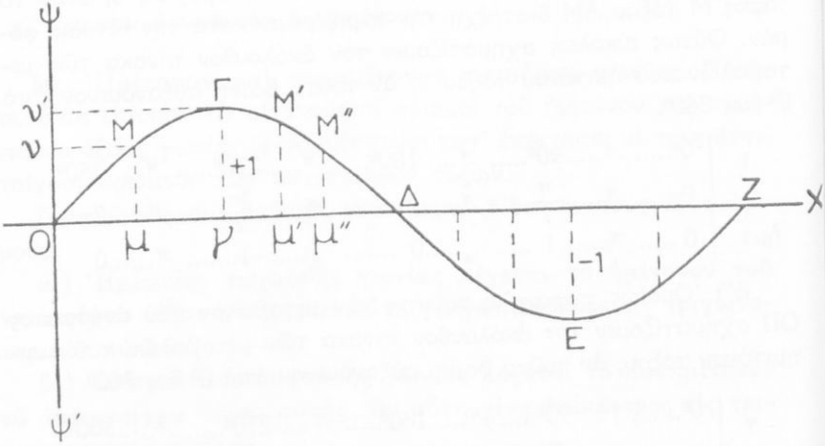
Εὐκόλως δὲ βεβαιούμεθα ὅτι τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἰσχύει καὶ δι᾽ ἀρνητικὰ τόξα, ἤτοι εἶναι γενικόν..

82. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἢ γωνίας. Τὰς ἀνωτέρω μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου τόξου αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἑξῆς :

Γράφομεν δύο καθέτους ἄξονας Χ'Χ, Ψ'Ψ τεμνομένους εἰς τὸ σημεῖον Ο (σχ. 33).

Ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ ὁρίζομεν ἄνυσμα Ομ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος $(\widehat{AM})$. Ἐπὶ δὲ τοῦ ΟΨ ὁρίζομεν ἄλλο ἄνυσμα Ον ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ $(\widehat{AM})$.

Ἔπειτα ἐκ τῶν ἄκρων μ καὶ ν τῶν ἀνυσμάτων τούτων φέρομεν



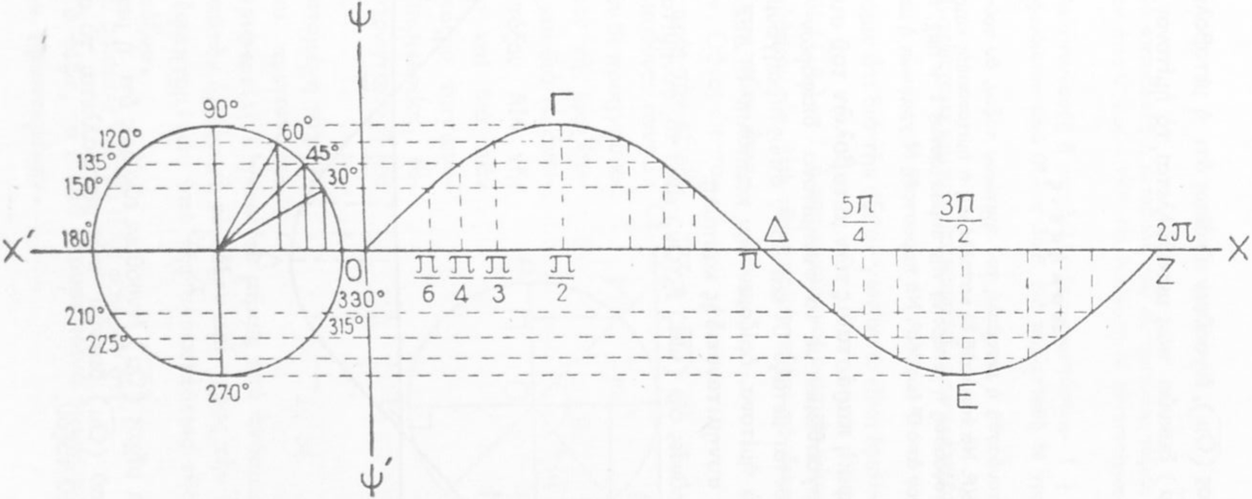
Σχ. 33

εὐθείας καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τοὺς ἄξονας Χ'Χ, Ψ'Ψ. Αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ζεῦγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν $(\overline{O\mu}) = (\widehat{AM})$ καὶ $(\overline{O\nu}) = ἡμ\,(\widehat{AM})$.

Ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως μὲ ἄλλα τόξα, ὁρίζομεν σειρὰν ἄλλων σημείων Γ, Μ', Μ'', Δ, Ε, Ζ κ.τ.λ., ὅπως λεπτομερέστερον φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 34 σελὶς 107.

Πάντα τὰ σημεῖα ταῦτα ἀποτελοῦσι μίαν καμπύλην ΟΓΔΕΖ, ἥτις λέγεται ἡμιτονοειδὴς καμπύλη.

Παρατηροῦντες ὅτι $(\overline{\mu M})$ ἢ $(\overline{O\nu})$ εἶναι ἡμίτονον τοῦ τόξου,


Ψ
Ψ′
X′
X
O
90°
60°
45°
30°
120°
135°
150°
180°
210°
225°
270°
315°
330°
Γ
Δ
E
Z
π/6
π/4
π/3
π/2
π
5π/4
3π/2
2π

Σχ. 34

ὅπερ ἔχει μῆκος ($\overline{O\mu}$), ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ ($\overline{M\mu}$) μετὰ τοῦ ($\overline{O\mu}$) δεικνύει πῶς μεταβάλλεται τὸ ἡμίτονον τόξου μετὰ τοῦ τόξου.

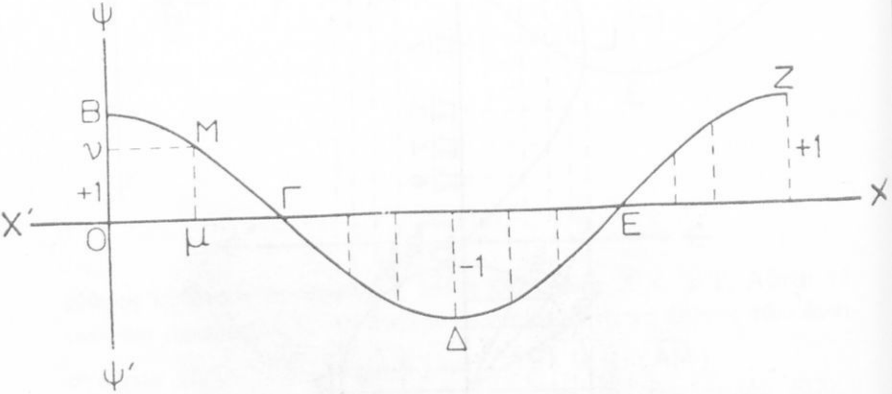
Ἀσκήσεις

264. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ ἡμιτόνου τόξου, ἂν τοῦτο ἐλαττοῦται ἀπὸ 0^0 ἕως -360^0. Νὰ ἐπεκταθῇ δὲ καταλλήλως ἡ ἡμιτονοειδὴς καμπύλη.

265. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς παραστάσεως $1 +$ ἡμχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

83. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου τόξου. Ἂν ἐργασθῶμεν μὲ τὰ συνημίτονα διαφόρων τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0, ὅπως προηγουμένως εἰργάσθημεν διὰ τὰ ἡμίτονα, ὁρίζομεν τὴν καμπύλην ΒΓΔΕΖ (σχ. 25). Αὐτὴ λέγεται **συνημιτονοειδὴς** καμπύλη.

Παρατηροῦντες ὅτι ($\overline{\mu M}$) ἢ ($\overline{O\nu}$) εἶναι τὸ συνημίτονον τόξου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος ($\overline{O\mu}$) ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ (μΜ) μετὰ τοῦ ($\overline{O\mu}$) δεικνύει πῶς μεταβάλλεται τὸ συνημίτονον τόξου μετὰ τοῦ τόξου.



Σχ. 35

Ἀσκήσεις

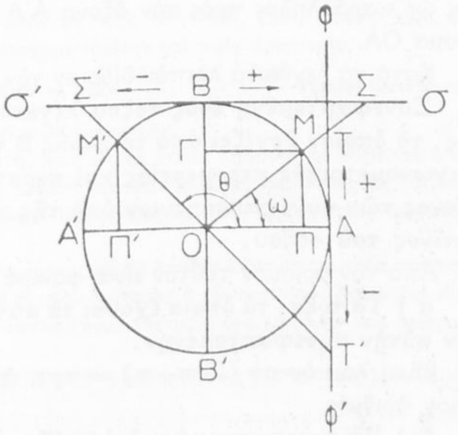
266. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ συνημιτόνου τόξου, ἂν τὸ τόξον βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ 0^0 ἕως -360^0. Νὰ ἐπεκταθῇ δὲ ἀντιστοίχως ἡ συνημιτονοειδὴς καμπύλη.

267. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς παραστάσεως $-1 +$ συνχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

84. Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τυχόντος τόξου.

Α′) Ἐμάθομεν ὅτι διὰ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω εἶναι εφω$= \frac{\overline{\mathrm{ΠΜ}}}{\overline{\mathrm{ΟΠ}}} = \frac{\overline{\mathrm{ΑΤ}}}{\overline{\mathrm{ΟΑ}}}$(σχ. 36). Ἂν δὲ $(\overline{\mathrm{ΟΑ}}) = 1$, ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς γίνεται εφω $= (\overline{\mathrm{ΑΤ}})$

Τὴν εὐθεῖαν φ′φ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ἄνυσμα ΑΤ, ὀνομάζομεν **ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων**. Οὗτος ὡς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Β′Β ἔχει διευθύνον ἄνυσμα τὸ ΟΒ. Τὸν δὲ προηγούμενον ὁρισμὸν τῆς εφω ἐπεκτείνομεν καὶ διὰ τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας ω καὶ διὰ πᾶν ἐν γένει τόξον τριγωνομετρικῆς περιφερείας, θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ 0^0. Ὥστε:



Σχ. 36.

Ἐφαπτομένη τυχόντος τόξου τριγωνομετρικῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν μὲ τὸ τόξον καὶ πέρας τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ὑπὸ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι:

α′) Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.

Εἶναι λοιπὸν ἐφ$(2k\pi+\tau) =$ ἐφτ, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

β') Ἡ ἐφαπτομένη τόξου ΑΜ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα ΑΤ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.

Ἐπομένως:

γ') Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α' ἢ γ' τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β' ἢ δ' τεταρτημόριον ἔχουσιν ἀρνητικὴν ἐφαπτομένην.

Β') Ὁμοίως τὸν γνωστὸν ὁρισμὸν σφω $= (\overline{\text{ΒΣ}})$ ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΜ τῆς γωνίας καὶ εἰς πᾶν ἐν γένει τόξον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ 0^0.

Πρὸς τοῦτο τὴν εὐθεῖαν σ'σ ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας καλοῦμεν **ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων**. Οὗτος ὡς παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Α'Α ἔχει τὸ αὐτὸ διευθύνον ἄνυσμα ΟΑ.

Κατὰ τὰ λεχθέντα λοιπὸν δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

Συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου λέγεται τὸ μῆκος τοῦ ἀνύσματος, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ πέρας Β τοῦ α' τεταρτημορίου τῆς τριγωνομετρικῆς περιφερείας καὶ περατοῦται εἰς τὴν τομὴν τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ὑπὸ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εἶναι φανερὰ τὰ ἑξῆς:

α') Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ὁμώνυμα ἄκρα, ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην.

Εἶναι λοιπὸν σφ $(2k\pi+\tau) =$ σφτ, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

β') Ἡ συνεφαπτομένη ἑνὸς τόξου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ ἄνυσμα ΒΣ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄνυσμα.

Ἐπομένως:

γ') Τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα λήγουσιν εἰς τὸ α' ἢ γ' τεταρτημόριον, ἔχουσι θετικὴν συνεφαπτομένην. Τὰ δὲ λήγοντα εἰς τὸ β' ἢ δ' τεταρτημόριον ἔχουσι ἀρνητικὴν συνεφαπτομένην.

85. Ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τυχούσης γωνίας. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίας ω (σχ. 36) συμπίπτει ἀντιστοίχως μὲ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τοῦ ἀντιστοίχου τόξου. Διὰ νὰ εἶναι ἡ σύμπτωσις αὕτη γενική, δίδομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

Ἐφαπτομένη τυχούσης γωνίας λέγεται ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς, ἂν ἡ γωνία αὕτη γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.

Συνεφαπτομένη τυχούσης γωνίας λέγεται ἡ συνεφαπτομένη τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἂν ἡ γωνία γίνῃ ἐπίκεντρος εἰς τριγωνομετρικὸν κύκλον.

Κατὰ ταῦτα πᾶν ὅ,τι γνωρίζομεν ἢ θὰ μάθωμεν διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην τῶν τόξων ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν συνεφαπτομένην τῶν γωνιῶν.

Ἀσκήσεις

268. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα 68^0, -68^0, 135^0, -145^0, 300^0, 125^0 ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην καὶ ποῖα ἀρνητικήν.

269. Νὰ διακρίνητε ποῖα ἀπὸ τὰ τόξα $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{9}$ ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην καὶ ποῖα ἀρνητικήν.

270. Νὰ ὁρίσητε τὰ τεταρτημόρια, εἰς τὰ ὁποῖα λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην καὶ θετικὴν συνεφαπτομένην. Καὶ ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀρνητικοὺς καὶ τοὺς δύο τούτους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

271. Νὰ ὁρίσητε τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην καὶ θετικὸν ἡμίτονον ἢ συνημίτονον. Καὶ ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον λήγουσι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι θετικὴν ἐφαπτομένην καὶ ἀρνητικὸν ἡμίτονον ἢ συνημίτονον.

272. Νὰ εὕρητε τὴν ἐφ (360^0k+45^0) καὶ τὴν σφ (360^0k+30^0), ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

273. Νὰ εὕρητε τὴν ἐφ $(2k\pi+\frac{\pi}{3})$ καὶ τὴν σφ $(2k\pi+\frac{\pi}{3})$, ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

86. Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξου. Παρακολουθοῦντες τὴν μεταβολὴν τοῦ $(\overline{\mathrm{AT}})$ καὶ τοῦ $(\overline{\mathrm{B}\Sigma})$ (σχ. 36), ὅταν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου ΑΜ διαγράφῃ τὸ α′ καὶ β′ τεταρτημόριον, καταλήγομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις εἶναι σύμπτυξις τῶν γνωστῶν πινάκων (§ § 25, 35, 58).

$$\begin{array}{r|ccccc} & 0^0 \ldots\ldots & \nearrow & \ldots\ldots 90^0 \ldots\ldots & \nearrow & \ldots\ldots 180^0 \\ \tau & 0 \ldots\ldots & \nearrow & \ldots\ldots \frac{\pi}{2} \ldots\ldots & \nearrow & \ldots\ldots \pi \\ \text{ἐφτ} & 0 \ldots\ldots & \nearrow & \ldots +\infty \mid -\infty \ldots & \nearrow & \ldots\ldots 0 \\ \text{σφτ} & \infty \ldots\ldots & \searrow & \ldots\ldots 0 \ldots\ldots & \searrow & \ldots\ldots -\infty \end{array}$$

Ἂν δὲ τὸ Μ διαγράφῃ τὸ γ′ τεταρτημόριον, ὁ ἀριθμὸς $(\overline{\text{ΑΤ}})$ βαίνει αὐξανόμενος μέχρι τοῦ $+\infty$, μεταπηδᾷ πάλιν εἰς τὸ $-\infty$ εὐθὺς ὡς τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Β′, ἐξακολουθεῖ αὐξανόμενος καὶ γίνεται 0, ὅταν τὸ Μ εὑρεθῇ εἰς τὴν ἀρχὴν Α.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $(\overline{\text{ΒΣ}})$ μεταπηδᾷ εἰς τὸ $+\infty$, εὐθὺς ὡς τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Α′. Ἔπειτα δὲ ἐξακολουθεῖ ἐλαττούμενος ὡς καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην κίνησιν τοῦ Μ. Ἐκ πάντων τούτων προκύπτει ὁ ἀκόλουθος πίναξ.

$$\begin{array}{r|ccccccccc} & 0^0 \ldots & \nearrow & \ldots 90^0 \ldots & \nearrow & \ldots 180^0 \ldots & \nearrow & \ldots 270^0 \ldots & \nearrow & \ldots 360^0 \\ \tau & 0 \ldots & \nearrow & \ldots \frac{\pi}{2} \ldots & \nearrow & \ldots \pi \ldots & \nearrow & \ldots \frac{3\pi}{2} \ldots & \nearrow & \ldots 2\pi \\ \text{ἐφτ} & 0 \ldots & \nearrow & . +\infty \mid -\infty & \nearrow & \ldots 0 \ldots & \nearrow & .. +\infty \mid -\infty . & \nearrow & \ldots 0 \\ \text{σφτ} & \infty \ldots & \searrow & \ldots 0 \ldots & \searrow & .. -\infty \mid +\infty . & \searrow & \ldots 0 \ldots & \searrow & \ldots -\infty \end{array}$$

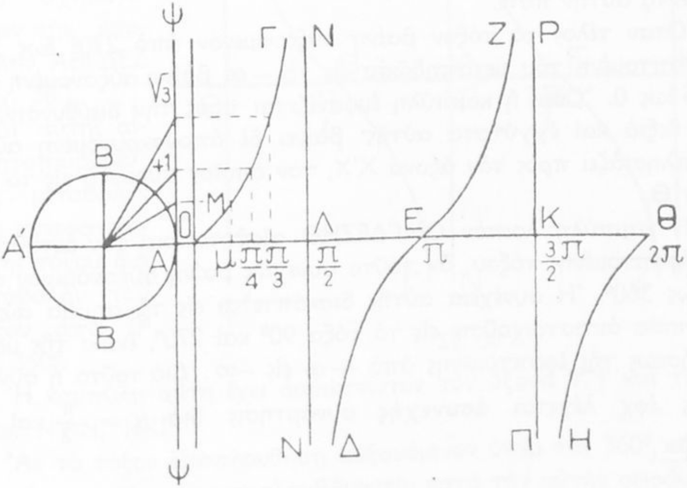
Ἂν δὲ τὸ τόξον τ ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς 360^0, τὸ πέρας Μ αὐτοῦ διέρχεται ἀπὸ τὰς αὐτὰς κατὰ σειρὰν θέσεις, ἕκαστος δὲ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἐφτ καὶ σφτ λαμβάνει τὰς προηγουμένας τιμὰς αὐτοῦ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

87. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης τόξου. Τὴν προηγουμένως σπουδασθεῖσαν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης τόξου αἰσθητοποιοῦμεν ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ′Χ (σχ. 37) ὁρίζομεν ἄνυσμα ΟΛ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος $\frac{\pi}{2}$ τεταρτημορίου τριγωνομετρικῆς περιφερείας, ἄνυσμα ΟΕ μήκους π, ἄλλο ΟΚ μήκους $\frac{3\pi}{2}$ καὶ ἄλλο ΟΘ μήκους 2π.

Εἰς τυχὸν τόξον μήκους $(\overline{\text{Ομ}}) < \frac{\pi}{2}$ ἀντιστοιχεῖ ἄνυσμα μΜ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ Χ καὶ ἔχον μῆκος ἴσον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου τούτου. Ἄν δὲ τὸ τόξον βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0, τὸ μῆκος του βαίνει αὐξανόμενον ἀπὸ 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$ καὶ τὸ ἄκρον μ τοῦ ἀνύσματος Ομ ἀπὸ τοῦ Ο πλησιάζει πρὸς τὸ Λ καὶ συμπίπτει μὲ αὐτό, ἂν τὸ τόξον γίνῃ 90^0.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ 0



Σχ. 37

ἕως + ∞, ἕπεται ὅτι τὰ ἀνύσματα μΜ βαίνουσιν αὐξανόμενα ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ + ∞. Τὰ ἄκρα δὲ Μ αὐτῶν ἀποτελοῦσι καμπύλην ΟΜΓ, ἥτις συνεχῶς ἀπομακρύνεται τῶν ἀξόνων Χ'Χ, Ψ'Ψ καὶ πλησιάζει ἀπαύστως πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ν'ΛΝ χωρὶς νὰ συναντᾷ αὐτὴν ποτέ.

Ἄν δὲ τὸ τόξον ὑπερβῇ κατ' ἐλάχιστον τὰς 90^0, τὸ μῆκος του γίνεται κατ' ἐλάχιστον μεγαλύτερον τοῦ $(\overline{ΟΛ})$ καὶ τὸ μ ἐμφανίζεται δεξιὰ τοῦ Λ καὶ ἐγγύτατα αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τότε ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ εἰς τὸ −∞, τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον Μ ἐμφανίζεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΟΨ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Χ'Χ, ἐγγύτατα τῆς εὐθείας Ν'ΛΝ καὶ δεξιὰ αὐτῆς. Ἔπειτα τοῦ τόξου αὐξανομένου ἀπὸ 90^0 ἕως 180^0 ἡ ἀρνητικὴ ἐφαπτομένη του βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ −∞ ἕως 0. Τὰ δὲ ἀντίστοιχα σημεῖα Μ ἀποτελοῦσι καμπύλην ΔΕ. Αὕτη συνεχῶς ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν Ν'ΛΝ καὶ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα Χ'Χ, τὸν ὁποῖον συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Τοῦ τόξου δὲ αὐξανομένου ἀπὸ 180^0 ἕως 270^0 ἡ ἐφαπτομένη του βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$. Ἑπομένως ἡ καμπύλη ἀπομακρύνεται τῶν εὐθειῶν Ν'ΛΝ, Χ'Χ καὶ ἀπαύστως πλησιάζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΠΡ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Χ'Χ εἰς τὸ Κ χωρὶς ὅμως νὰ συναντᾷ αὐτὴν ποτέ.

Ὅταν τέλος τὸ τόξον βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 270^0 ἕως 360^0 ἡ ἐφαπτομένη του μεταπηδῶσα εἰς τὸ $-\infty$ βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0. Ὅθεν ἡ καμπύλη ἐμφανίζεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ΚΠ, δεξιὰ καὶ ἐγγύτατα αὐτῆς· βαίνει δὲ ἀπομακρυνομένη αὐτῆς καὶ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα Χ'Χ, τὸν ὁποῖον συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Ἡ καμπύλη λοιπὸν ΟΜΓΔΕΖΗΘ αἰσθητοποιεῖ τὴν μεταβολὴν τῆς ἐφαπτομένης τόξου, ἂν τοῦτο συνεχῶς βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0. Ἡ συνέχεια αὐτῆς διακόπτεται εἰς τὰ σημεῖα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰ τόξα 90^0 καὶ 270^0, ἕνεκα τῆς μεταπηδήσεως τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ $+\infty$ εἰς $-\infty$. Διὰ τοῦτο ἡ συνάρτησις ἐφχ λέγεται **ἀσυνεχὴς** συνάρτησις διὰ $\chi = \frac{\pi}{2}$ καὶ διὰ $\chi = \frac{3\pi}{2}$.

Σημείωσις. Αἱ εὐθεῖαι Ν'ΛΝ καὶ ΠΚΡ λέγονται ἀσύμπτωτοι τῆς καμπύλης ταύτης.

Ἂν τὸ τόξον ἐξακολουθῇ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς 360^0, οἱ κλάδοι τῆς προηγουμένης καμπύλης ἐπαναλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

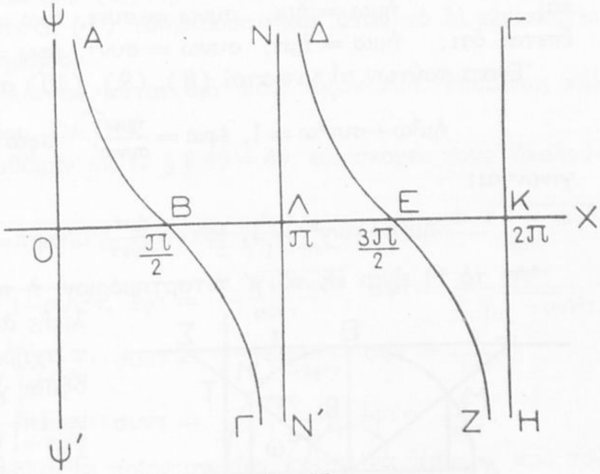
Ἀσκήσεις

274. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐφχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ 0^0 ἕως - 360^0. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

275. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\frac{1}{2}$ ἐφχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὕτη.

88. Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς συνεφαπτομένης τόξου. Ἂν ἐργασθῶμεν διὰ τὰς μεταβολὰς τῆς συνεφαπτομένης, ὅπως προηγουμένως διὰ τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης, σχηματίζομεν τὴν καμπύλην ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 38).

Δι' αὐτῆς αἰσθητοποιοῦμεν τὰς μεταβολὰς τῆς συνεφαπτομένης τόξου διὰ μεταβολὴν τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.



Σχ. 38

Ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει ἀσύμπτωτον τὸν ἄξονα Ψ'Ψ καὶ τὰς εὐθείας Ν'ΛΝ, ΗΚΓ.

Ἂν τὸ τόξον ἐξακολουθήσῃ αὐξανόμενον ὑπὲρ τὰς 360^0, οἱ κλάδοι τῆς καμπύλης ἐπαναμαλαμβάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν.

Ἀσκήσεις

276. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς σφχ, ἂν τὸ τόξον χ βαίνῃ ἐλαττούμενον ἀπὸ 0^0 ἕως -360^0. Νὰ παρασταθῇ δὲ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὐτη.

277. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως 2 σφχ, ἂν τὸ χ βαίνῃ αὐξανόμενον ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ αὐτη.

89. Διατήρησις τῶν σχέσεων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν οἱουδήποτε τόξου ἢ γωνίας. Ἔστω τ τὸ μέτρον ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τόξων ΑΜ (σχ. 39). Ἂν τὸ Μ εὑρίσκηται εἰς τὸ α' τεταρτημόριον, ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ αὐτοῦ σχηματίζει μὲ τὴν ΟΑ ὀξεῖαν γωνίαν ω, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ τόξου

ΑΜ. Ἔστω δὲ ε τὸ μέτρον αὐτοῦ καὶ $\tau = 2k\pi + \varepsilon$, ἂν k εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\varepsilon, \quad \text{συν}\tau = \text{συν}\varepsilon, \quad \text{ἐφ}\tau = \text{ἐφ}\varepsilon, \quad \text{σφ}\tau = \text{σφ}\varepsilon,$

καὶ $\text{ἡμ}\omega = \text{ἡμ}\varepsilon, \quad \text{συν}\omega = \text{συν}\varepsilon, \quad \text{ἐφ}\omega = \text{ἐφ}\varepsilon, \quad \text{σφ}\omega = \text{σφ}\varepsilon$

ἕπεται ὅτι: $\text{ἡμ}\omega = \text{ἡμ}\tau, \quad \text{συν}\omega = \text{συν}\tau, \quad \text{ἐφ}\omega = \text{ἐφ}\tau, \quad \text{σφ}\omega = \text{σφ}\tau$

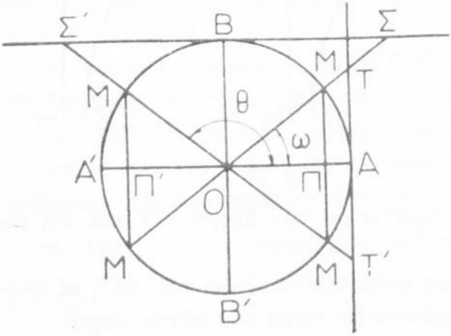
Ἕνεκα τούτων αἱ γνωσταὶ (8), (9), (10) σχέσεις:

$$\text{ἡμ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1, \quad \text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}, \quad \text{σφ}\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\text{ἡμ}\omega}$$

γίνονται:

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = 1, \quad \text{ἐφ}\tau = \frac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau}, \quad \text{σφ}\tau = \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau} \qquad (1)$$

Ἂν τὸ Μ εἶναι εἰς τὸ γ΄ τεταρτημόριον, ἡ προέκτασις τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου τ σχηματίζει μὲ τὴν ΟΑ ὀξεῖαν γωνίαν ω, ἥτις βαίνει ἐπὶ τόξου ε. Εἶναι δὲ $\text{ἡμ}\tau = (\overline{\Pi'M}) = -(\overline{\Pi M}) = -\text{ἡμ}\varepsilon$, $\text{συν}\tau = (\overline{O\Pi'}) = -(\overline{O\Pi}) = -\text{συν}\varepsilon$, $\text{ἐφ}\tau = (\overline{AT}) = \text{ἐφ}\varepsilon$ καὶ $\text{σφ}\tau = (\overline{B\Sigma}) = \text{σφ}\varepsilon$.



Σχ. 93

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = \text{ἡμ}^2\varepsilon + \text{συν}^2\varepsilon, \frac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau} = \frac{\text{ἡμ}\varepsilon}{\text{συν}\varepsilon}, \quad \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau} = \frac{\text{συν}\varepsilon}{\text{ἡμ}\varepsilon}.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἀληθεύουσιν αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες (1) διὰ τὸ τόξον ε, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = 1, \quad \frac{\text{ἡμ}\tau}{\text{συν}\tau} = \text{ἐφ}\varepsilon = \text{ἐφ}\tau, \quad \frac{\text{συν}\tau}{\text{ἡμ}\tau} = \text{σφ}\varepsilon = \text{σφ}\tau,$$

ἤτοι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀληθεύουσιν αἱ ἰσότητες (1).

Ἂν τὸ Μ εὑρίσκηται εἰς τὸ β΄ τεταρτημόριον, ἡ τελικὴ ἀκτὶς ΟΜ τοῦ τόξου τ σχηματίζει μὲ τὴν ΟΑ ἀμβλεῖαν γωνίαν θ, διὰ τὴν ὁποίαν ἐμάθομεν (§ 59) ὅτι:

$$\text{ἡμ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1, \quad \text{ἐφ}\theta = \frac{\text{ἡμ}\theta}{\text{συν}\theta}, \quad \text{σφ}\theta = \frac{\text{συν}\theta}{\text{ἡμ}\theta} \qquad (2)$$

Εἶναι δὲ $\text{ἡμ}τ = (\overline{Π'Μ}) = \text{ἡμ}θ$, $\quad \text{συν}τ = (\overline{ΟΠ'}) = \text{συν}θ$,
$\text{ἐφ}τ = (\overline{ΑΤ'}) = \text{ἐφ}θ$, $\quad \text{σφ}τ = (\overline{ΒΣ'}) = \text{σφ}θ$.

Ἐκ τούτων καὶ τῶν (2) προκύπτουσιν πάλιν αἱ (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ (1) ἀληθεύουσι καὶ ὅταν τὸ Μ εὑρίσκηται εἰς τὸ δ' τεταρτημόριον.

Ἀληθεύουσι λοιπὸν αὗται διὰ πᾶν τόξον ΑΜ, ἑπομένως καὶ διὰ πᾶσαν γωνίαν $\widehat{ΟΑ,ΟΜ}$.

Ἂν δὲ ἐργασθῶμεν ὡς ἐν § § 46 – 49, εὑρίσκομεν τοὺς ἀκολούθους τύπους:

α') $\text{συν}τ = \pm\sqrt{1 - \text{ἡμ}^2τ}$, $\text{ἐφ}τ = \dfrac{\text{ἡμ}τ}{\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2τ}}$, $\text{σφ}τ = \dfrac{\pm\sqrt{1-\text{ἡμ}^2τ}}{\text{ἡμ}τ}$.

β') $\text{ἡμ}τ = \pm\sqrt{1-\text{συν}^2τ}$, $\text{ἐφ}τ = \dfrac{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2τ}}{\text{συν}τ}$, $\text{σφ}τ = \dfrac{\text{συν}τ}{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2τ}}$.

γ') $\text{ἡμ}τ = \dfrac{\text{ἐφ}τ}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2τ}}$, $\text{συν}τ = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ἐφ}^2τ}}$, $\text{σφ}τ = \dfrac{1}{\text{ἐφ}τ}$.

δ') $\text{ἡμ}τ = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{σφ}^2τ}}$, $\text{συν}τ = \dfrac{\text{σφ}τ}{\pm\sqrt{1+\text{σφ}^2τ}}$, $\text{ἐφ}τ = \dfrac{1}{\text{σφ}τ}$.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν δὲ ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ θέσωμεν πρὸ τοῦ ριζικοῦ ἑκάστου τύπου, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον. Οὕτως, ἂν $90^0 < τ < 180^0$, θὰ εἶναι $\text{ἡμ}τ > 0$, οἱ δὲ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ ἀρνητικοί. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἀρνητικὰ ἐξαγόμενα ἐκ τῶν τύπων α', πρέπει πρὸ τῶν ριζικῶν αὐτῶν νὰ θέτωμεν τὸ –. Οὕτως, ἂν $\text{ἡμ}τ = \dfrac{1}{2}$, εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῶν ὅτι: $\text{συν}τ = -\sqrt{1-\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{ἐφ}τ = \frac{\dfrac{1}{4}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \text{σφ}τ = \frac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}}{\dfrac{1}{4}} = -\sqrt{3}.$$

Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ εἶναι $\text{ἡμ}τ = \dfrac{1}{2} > 0$ καὶ $0^0 < τ < 90^0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καὶ οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τ εἶναι θετικοί. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἐκ τῶν α' θετικὰ ἐξαγόμενα, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν θετικὰς τὰς ρίζας αὐτῶν. Οὕτως εὑρίσκομεν

$\text{συν}τ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{ἐφ}τ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{σφ}τ = \sqrt{3}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν τὸ σημεῖον ἑκάστου ριζικοῦ καὶ εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις. Ἐξηγεῖται δὲ οὕτω στοιχειωδῶς ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου πρὸ ἑκάστου ριζικοῦ εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων.

Ἀσκήσεις

278. Ἂν ἡμω $= \frac{3}{5}$ καὶ $90^0 < ω < 180^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου ω.

279. Ἂν ἡμω $= -\frac{4}{5}$ καὶ $180^0 < ω < 280^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

280. Ἂν συνω $= \frac{1}{2}$ καὶ $90^0 < ω < 180^0$ νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

281. Ἂν συνω $= \frac{3}{5}$ καὶ $270^0 < ω < 360^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

282. Ἂν ἐφω $= \frac{2}{5}$ καὶ $540^0 < ω < 630^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ω.

283. Ἂν σφτ $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $810^0 < τ < 900^0$, νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τ.

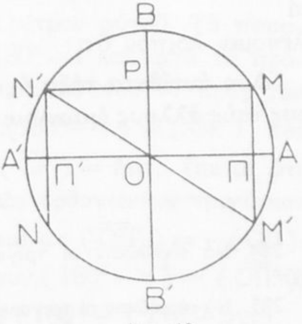
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΩΝ ΔΙ' ΑΠΛΗΣ ΣΧΕΣΕΩΣ

90. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο ἀντιθέτων τόξων. Ἔστω ἓν τόξον ΑΜ (σχ. 40) θετικὸν καὶ μικρότερον ἡμιπεριφερείας.

Ἂν δὲ ΑΜ΄ εἶναι τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ, θὰ εἶναι $\widehat{M'A} = \widehat{AM}$ καὶ ἑπομένως ἡ χορδὴ ΜΜ΄ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΑ΄. Τὰ δὲ ἄκρα Μ καὶ Μ΄ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΑ΄.

Ἂν δὲ ἓν τόξον ΑΑ΄Ν εἶναι μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας καὶ μικρότερον περιφερείας, καὶ τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ ΑΑ΄Ν΄ θὰ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας καὶ μικρότερον περιφερείας.



Σχ. 40

Ἐπειδὴ δὲ $|(\widehat{AA'N})| = |(\widehat{AA'N'})|$ καὶ $|(ABA')| = |(\widehat{AB'A'})|$, ἔπεται δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη ὅτι $|(\widehat{A'N})| = |(\widehat{A'N'})|$.

Τὰ ἀντίρροπα λοιπὸν τόξα Α΄Ν καὶ Α΄Ν΄ ὡς ἀπολύτως ἴσα εἶναι ἀντίθετα. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ μικρότερα ἡμιπεριφερείας, τὰ ἄκρα αὐτῶν Ν καὶ Ν΄ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν Α΄Α.

Ἂν τέλος ἓν τόξον ΑΜ περιέχῃ κ θετικὰς περιφερείας καὶ μέρος ΑΜ μικρότερον περιφερείας, τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ τόξον ΑΜ΄ θὰ περιέχῃ κ ἀρνητικὰς περιφερείας καὶ ἓν μέρος ΑΜ΄ ἀντίθετον τοῦ προηγουμένου ΑΜ. Τὰ ἄκρα λοιπὸν Μ καὶ Μ΄ θὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΑ΄ κατὰ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις.

Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο ἀντίθετα τόξα ἔχωσι κοινὴν ἀρχήν, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὴν κοινὴν ἀρχὴν αὐτῶν.

91. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο ἀντιθέτων τόξων.**

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΜ καὶ ΑΜ′ (σχ. 40) δύο ἀντίθετα τόξα, τ δὲ καὶ − τ τὰ μέτρα αὐτῶν. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ χορδὴ Μ′Μ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς Α′Α, ἤτοι εἶναι $(\overline{\mathrm{M}'\Pi}) = (\overline{\Pi\mathrm{M}})$ καὶ ἑπομένως $(\overline{\Pi\mathrm{M}'}) = -(\overline{\Pi\mathrm{M}})$.

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}(-\tau) = (\overline{\Pi\mathrm{M}'})$ καὶ $\text{ἡμ}\tau = (\overline{\Pi\mathrm{M}})$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ἕπεται ὅτι:} & \text{ἡμ}(-\tau) = -\text{ἡμ}\tau \\ \text{Εἶναι δὲ καὶ συν}(-\tau) = (\overline{\mathrm{O}\Pi}) = \text{συν}\tau\text{, δηλ.} & \text{συν}(-\tau) = \quad \text{συν}\tau \\ \text{Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:} & \text{ἐφ}(-\tau) = -\text{ἐφ}\tau \\ \text{καὶ} & \text{σφ}(-\tau) = -\text{σφ}\tau \end{array}\right\} \quad (36)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Δύο ἀντίθετα τόξα ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

284. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων -30^0, -45^0, -60^0.

285. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων:
$\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

286. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα:
α′) $\text{συν}\,(-\tau)\cdot\text{συν}\tau + \text{ἡμ}^2\tau$ β′) $\text{σφ}(-\tau)\cdot\text{ἐφ}\tau + 1$.

287. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀθροίσματα:
α′) $\text{ἡμ}\,(-\tau)\cdot\text{σφ}\tau + \text{συν}\tau$ β′) $\text{συν}\,(-\tau)\cdot\text{ἐφ}\,(-\tau) + \text{ἡμ}\tau$.

288. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τόξον τ εἶναι:
$\text{ἡμ}\tau \;\; \text{ἡμ}(-\tau) + \text{συν}^2\tau = 1 - 2\text{ἡμ}^2\tau$.

92. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο παραπληρωματικῶν τόξων. Δύο τόξα λέγονται **παραπληρωματικά,** ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν θετικὴν ἡμιπεριφέρειαν.

Ἂν ἑπομένως ἓν τυχὸν τόξον ΑΜ ἔχῃ μέτρον τ μοίρας, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ θὰ ἔχῃ μέτρον $180^0 - τ$. Ἐπειδὴ δὲ $180^0 - τ = (-τ) + 180^0$, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ εἶναι ἄθροισμα τοῦ τόξου ΑΜ′ ἀντιθέτου τοῦ δοθέντος τόξου ΑΜ καὶ μιᾶς θετικῆς ἡμιπεριφερείας Μ′ΑΒΝ′, ἤτοι λήγει εἰς σημεῖον Ν′ συμμετρικὸν τοῦ Μ′ πρὸς τὸ κέντρον Ο (σχ. 40). Ἐπειδὴ δὲ $N'\widehat{M}M' = 1$ ὀρθή, ἡ χορδὴ ΜΝ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΜ′ καὶ ἑπομένως παράλληλος πρὸς τὴν Α′Α. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο παραπληρωματικὰ τόξα ἔχωσι κοινὴν ἀρχὴν Α, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι ἄκρα μιᾶς χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον Α′Α.

93. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο παραπληρωματικῶν τόξων.**

Ἔστω ΑΜ ἓν τυχὸν τόξον καὶ τ τὸ μέτρον αὐτοῦ. Τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ τόξον ἔχει μέτρον $180^0 - τ$ καὶ κατὰ τὰ προηγούμενα λήγει εἰς τὸ σημεῖον Ν′ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸν ἄξονα Β′Β (σχ. 40). Ἑπομένως $ἡμ(180^0 - τ) = (\overline{OP})$ καὶ $συν(180^0 - τ) = (\overline{O\Pi'})$. Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{OP}) = ἡμτ$, ἕπεται ὅτι $ἡμ(180^0 - τ) = ἡμτ$. Ἕνεκα δὲ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΠΜ′ καὶ ΟΠ′Ν′ εἶναι ΟΠ′ = ΟΠ καὶ ἑπομένως $(\overline{O\Pi'}) = -(\overline{O\Pi})$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν ἰσοτήτων $συν(180^0 - τ) = (\overline{O\Pi'})$, $συντ = (\overline{O\Pi})$ προκύπτει ἡ ἰσότης $συν(180^0 - τ) = -συντ$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι:} & \mathbf{ἡμ(180^0-τ) = ἡμτ} \\ \text{καὶ} & \mathbf{συν(180^0-τ) = -συντ} \\ \text{Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι:} & \mathbf{ἐφ(180^0-τ) = -ἐφτ} \\ \text{καὶ} & \mathbf{σφ(180^0-τ) = -σφτ}\end{array}\right\}(36)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Δύο παραπληρωματικὰ τόξα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτῶν.

Ἀληθεύει δὲ ἡ ἰδιότης αὕτη καὶ διὰ τυχούσας παραπληρωματικὰς γωνίας. Ἑπομένως αἱ ἰσότητες (§ 55 καὶ § 57) εἶναι γενικαί.

Ἀσκήσεις

289. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $\pm 120^0$, $\pm 135^0$ $\pm 150^0$.

290. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:
ἡμ $(180^0 - \tau)$ ἡμτ $-$ συν $(180^0 - \tau)$ συντ.

291. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως: ἐφ $(\pi - \tau)$ σφτ $-$ σφ $(\pi - \tau)$ ἐφτ.

292. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:
ἐφ $(180^0 - \tau)$ συντ. $-$ σφ $(180^0 - \tau)$ἡμτ, ἂν ἡμτ $= \frac{1}{2}$ καὶ $0^0 < \tau < 90^0$

293. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις: $-$ σφ $(\pi - \tau)$ ἡμτ $-$ ἐφ $(\pi - \tau)$συντ

94. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν περάτων δύο συμπληρωματικῶν τόξων. Δύο τόξα λέγονται **συμπληρωματικά**, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα ἓν θετικὸν τεταρτημόριον.

Ἑπομένως, ἂν τυχὸν τόξον ΑΜ (σχ. 41 α) ἔχῃ μέτρον τ, τὸ συμπληρωματικὸν αὐτοῦ ΑΜ΄ θὰ ἔχῃ μέτρον $90^0 - \tau$.

Ἂν δὲ Δ΄ εἶναι τὸ μέσον τοῦ α΄ τεταρτημορίου, θὰ εἶναι:

$$\tau = (\widehat{AM}) = (\widehat{A\Delta}) + (\widehat{\Delta M})$$

$$\text{ἢ} \quad \tau = 45^0 + (\widehat{\Delta M}).$$

Ἑπομένως $(\widehat{AM'}) = 90^0 - \tau = 45^0 - (\widehat{\Delta M})$ ἢ $(\widehat{AM'}) = 45^0 + (\widehat{M\Delta})$.

Σχ. 41α

Ἐπειδὴ δὲ $(\widehat{AM'}) = (\widehat{A\Delta}) + (\widehat{\Delta M'}) = 45^0 + (\widehat{\Delta M'})$, ἕπεται ὅτι $\widehat{M\Delta} = \widehat{\Delta M'}$. Ἡ χορδὴ λοιπὸν ΜΜ΄ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς διαμέτρου Δ΄Δ, τὰ δὲ σημεῖα Μ, Μ΄ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς αὐτήν. Ὥστε:

Ἂν δύο συμπληρωματικὰ τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔχωσι κοινὴν ἀρχὴν Α, τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον, ἥτις διχοτομεῖ τὸ α΄ θετικὸν τεταρτημόριον ΑΒ.

95. *Πρόβλημα III.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο συμπληρωματικῶν τόξων.**

Λύσις. Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ (σχ. 41 β) καὶ ἡμτ $= (\overline{\Pi M})$, συντ $= (\overline{O\Pi})$. (1)

Κατὰ τὰ προηγούμενα τὸ τόξον $90^0 - τ$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ' συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν ΔΔ'. Θὰ εἶναι δὲ

$$\text{ἡμ}(90^0 - τ) = (\overline{Π'Μ'}),\quad \text{συν}(90^0 - τ) = (\overline{ΟΠ'}) \qquad (2)$$

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $\widehat{ΑΜ} = \widehat{Μ'Β}$ ἕπεται ὅτι $Α\widehat{Ο}Μ = Β\widehat{Ο}Μ' = Ο\widehat{Μ}Π'$ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΟΠΜ, ΟΠ'Μ' εἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο $Π'Μ' = ΟΠ$, $ΟΠ' = ΠΜ$. Ἂν δὲ τὰς πλευρὰς ταύτας θεωρήσωμεν ὡς ἀνύσματα, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μήκη $(\overline{Π'Μ'})$ καὶ $(\overline{ΟΠ})$ εἶναι ὁμόσημα, ἐπίσης δὲ ὁμόσημα εἶναι καὶ τὰ $(\overline{ΟΠ'})$ καὶ $(\overline{ΠΜ})$. Εἶναι λοιπὸν καὶ $(\overline{Π'Μ'}) = (\overline{ΟΠ})$, $(\overline{ΟΠ'}) = (\overline{ΠΜ})$.

Σχ. 41β

Ἕνεκα δὲ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (1) καὶ (2) αὗται γίνονται:

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{ἡμ}(90^0 - τ) = \textbf{συν}τ,\quad \textbf{συν}(90^0 - τ) = \textbf{ἡμ}τ \\ \textbf{ἐφ}(90^0 - τ) = \textbf{σφ}τ,\quad \textbf{σφ}(90^0 - τ) = \textbf{ἐφ}τ \end{array}\right| \quad (37)$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι: $\textbf{ἐφ}(90^0 - τ) = \textbf{σφ}τ$, $\textbf{σφ}(90^0 - τ) = \textbf{ἐφ}τ$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τόξα εἶναι συμπληρωματικά, τὸ ἡμίτονον ἑκατέρου ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἄλλου καὶ ἡ ἐφαπτομένη ἑκατέρου ἰσοῦται πρὸς τὴν συνεφαπτομένην τοῦ ἄλλου.

Ἀσκήσεις

294. Ἂν $\text{ἡμ}ω = \frac{1}{2}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ συν $(90^0 - ω)$.

295. Ἂν $Β + Γ = 90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{συν}^2Β + \text{συν}^2Γ = 1$.

296. Ἂν $Α + Β + Γ = 180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{ἡμ}\frac{Α+Β}{2} = \text{συν}\frac{Γ}{2},\quad \text{ἐφ}\frac{Α+Β}{2} = \text{σφ}\frac{Γ}{2},$$

$$\text{συν}\frac{Β+Γ}{2} = \text{ἡμ}\frac{Α}{2},\quad \text{σφ}\frac{Α+Γ}{2} = \text{ἐφ}\frac{Β}{2},$$

297. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ἐφ $(90^0 - α)$. ἐφα καὶ τῆς σφ $90^0)$ $- α) \cdot$ σφα.

298. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως: $ἡμ(90^0 - α)συνα + συν(90^0 - α)ἡμα$

299. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$ἐφ\left(\frac{π}{2} - τ\right) ἐφτ - σφ\left(\frac{π}{2} - τ\right) σφτ.$$

300. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἡμ(90^0 + τ) = συντ$ καὶ $συν(90^0 + τ) = -ἡμτ$.

301. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἐφ(90^0 + τ) = -σφτ$ καὶ $σφ(90^0 + τ) = -ἐφτ$.

302. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἡμ(90^0 + τ)ἡμτ + συν(90^0 + τ) συντ$.

303. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα: $σφ\left(\frac{π}{2} + ω\right) σφω - ἐφ\left(\frac{π}{2} - ω\right) ἐφω$.

96. *Πρόβλημα IV.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο τόξων, τὰ ὁποῖα διαφέρουσι κατὰ 180⁰.**

Σχ. 42

Λύσις. Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων AM (σχ. 42) Ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον MOM′, τὸ ἄθροισμα $180^0 + τ$ εἶναι μέτρον ἑνὸς ἀπὸ τὰ τόξα AM′. Εἶναι δὲ $ἡμ\,(180^0 + τ) = \overline{(Π'Μ')} = -\overline{(ΠΜ)}$, $συν(180^0 + τ) = \overline{(ΟΠ')} = -\overline{(ΟΠ)}$. Ἐπειδὴ δὲ $\overline{(ΠΜ)} = ἡμτ$ καὶ $\overline{(ΟΠ)} = συντ$,

ἕπεται ὅτι: $\mathbf{ἡμ(180^0 + τ) = -ἡμτ}$

καὶ. $\mathbf{συν(180^0 + τ) = -συντ}$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι: $\mathbf{ἐφ(180^0 + τ) = ἐφτ}$

καὶ $\mathbf{σφ(180^0 + τ) = σφτ}$ (38)

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τόξα διαφέρουσι κατὰ 180⁰, ἔχουσι τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις

304. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 225⁰ 210⁰, 240⁰.

305. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων -225^0, -210^0, -240.

306. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ (180^0 + τ) ἡμτ + συν (180^0 + τ)συντ.

307. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον ἐφ(π + τ) σφτ καὶ τὸ σφ (π + τ) ἐφτ.

308. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ ἐφ (π + τ) σφτ – σφ (π + τ) ἐφτ.

309. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ (π + τ) συν(π – τ) + συν(π + τ)ἡμ(π – τ).

310. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορά :
ἐφ(180^0 + ω) σφ(90^0 + ω) – ἐφ (180^0 – ω) σφ(90^0 – ω).

97. *Πρόβλημα V.* **Νὰ συγκριθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο τόξων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἄθροισμα 360^0.**

Λύσις. Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ (σχ. 43) καὶ χ τὸ μέτρον ἄλλου τόξου ΑΜ′. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $χ + τ = 360^0$ καὶ ἐπομένως:

$$χ = 360^0 - τ = (- τ) + 360^0.$$

Ἐκ ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μέτρα 360^0 – τ καὶ – τ, ἔχουσι κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα. Διὰ τοῦτο δὲ ἔχουσι καὶ τοὺς αὐτοὺς ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς. Θὰ εἶναι λοιπὸν (§91):

Σχ. 43

$$\left.\begin{aligned} &\text{ἡμ}(360^0-\tau)=-\text{ἡμ}\tau, \quad \text{συν}(360^0-\tau)=\text{συν}\tau,\\ &\text{ἐφ}(360^0-\tau)=-\text{ἐφ}\tau, \quad \text{σφ}(360^0-\tau)=-\text{σφ}\tau.\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τόξα ἔχωσιν ἄθροισμα 360^0, ταῦτα ἔχουσι τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

311. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 300^0, 315^0, 330^0.

312. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων -300^0, -315^0, -330^0.

313. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$ἡμ(360^0 - α)ἡμ(-α) + συν(360^0 - α)\ συν(-α).$$

314. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορά:

$$ἐφ(360^0 - α)σφ(180^0 + α) - σφ\ (360^0 - α)\ ἐφ(180^0 - α).$$

315. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$ἡμ\ (2π - τ)συν\left(\frac{π}{2} + τ\right) + συν\ (2π - τ)ἡμ\left(\frac{π}{2} + τ\right).$$

98. Ἀναγωγὴ τόξου εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον. α′) Ἔστω τόξον 106⁰ 30′, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ 90⁰ καὶ 180⁰. Θέλομεν δὲ νὰ εὕρωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς αὐτοῦ. Ἐπειδὴ οἱ πίνακες, τοὺς ὁποίους ἐμάθομεν, δὲν περιέχουσι τόξα μεγαλύτερα τῶν 90⁰, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν τὸ παραπληρωματικὸν τοῦ τόξου, ἤτοι 73⁰ 30′, καὶ ἐνθυμούμεθα ὅτι:

$$
\begin{aligned}
ἡμ\ (106^0\ 30') &= \quad ἡμ\ (73^0\ 30') = \quad 0{,}95882\\
συν(106^0\ 30') &= -συν(73^0\ 30') = -0{,}28402\\
ἐφ\ (106^0\ 30') &= -\ ἐφ\ (73^0\ 30') = -3{,}37594\\
σφ\ (106^0\ 30') &= -σφ\ (73^0\ 30') = -0{,}29621
\end{aligned}
$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 106⁰ 30′ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 73⁰ 30′, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ 0⁰ καὶ 90⁰. Ἡ ἐργασία αὕτη λέγεται **ἀναγωγὴ τοῦ τόξου 106⁰ 30′ εἰς τὸ α′ τεταρτημόριον.**

β′) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τόξου περιεχομένου μεταξὺ 180⁰ καὶ 270⁰, π.χ. τοῦ 203⁰ 20′. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ 180⁰ καὶ εὑρίσκομεν τόξον 23⁰20′. Ἔπειτα δέ, κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 96), εὑρίσκομεν ὅτι:

$$
\begin{aligned}
ἡμ\ (203^0\ 20') &= -\ ἡμ\ (23^0\ 20') = -0{,}39608\\
συν\ (203^0\ 20') &= -συν(23^0\ 20') = -0{,}91822\\
ἐφ\ (203^0\ 20') &= \quad ἐφ\ (23^0\ 20') = \quad 0{,}43136\\
σφ\ (203^0\ 20') &= \quad σφ\ (23^0\ 20') = \quad 2{,}31826
\end{aligned}
$$

γ′) Ἂν τόξον περιέχηται μεταξὺ 270⁰ καὶ 360⁰, π.χ. τὸ 297⁰ 10′ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν ὅτι 360⁰ − (297⁰ 10′) = 62⁰ 50′ καὶ ἐφαρμόζομεν τὰς γνωστὰς (§ 97) ἰσότητας. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$
\begin{aligned}
ἡμ\ (297^0\ 10') &= -\ ἡμ(62^0\ 50') = -0{,}88968\\
συν(297^0\ 10') &= \quad συν(62^0\ 50') = \quad 0{,}45658
\end{aligned}
$$

$$\text{ἐφ}\,(297^0\,10') = -\,\text{ἐφ}\,(62^0\,50') = -\,1{,}94858$$
$$\text{σφ}\,(297^0\,10') = -\,\text{σφ}\,(62^0\,50') = -\,0{,}51319$$

δ') Ἂν τόξον ὑπερβαίνῃ τὰς 360^0, π.χ. τὸ τόξον $1197^0\,30'$, ἡ ἀναγωγὴ γίνεται ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $1197^0\,30' = 360^0 \cdot 3 + 117^0\,30'$. Ἐπομένως:

$$\text{ἡμ}\,(1197^0\,30') = \text{ἡμ}\,(117^0\,30') = \text{ἡμ}\,(62^0\,30') = 0{,}88701$$
$$\text{συν}\,(1197^0\,30') = \text{συν}\,(117^0\,30') = -\,\text{συν}(62^0\,30') = -\,0{,}46175$$
$$\text{ἐφ}\,(1197^0\,30') = \text{ἐφ}\,(117^0\,30') = -\,\text{ἐφ}\,(62^0\,30') = -\,1{,}92098$$
$$\text{σφ}\,(1197^0\,30') = \text{σφ}\,(117^0\,30') = -\,\text{σφ}\,(62^0\,30') = -\,0{,}52057$$

ε') Ἂν τὸ τόξον εἶναι ἀρνητικόν, ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους τῆς § 91 καὶ ἀναγόμεθα εἰς μίαν τῶν προηγουμένων περιπτώσεων Οὕτως εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι:

$$\text{ἡμ}\,(-98^0\,20') = -\,\text{ἡμ}\,(98^0\,20') = -\,\text{ἡμ}\,(81^0\,40') = -\,0{,}98944,$$
$$\text{συν}\,(-98^0\,20') = \text{συν}\,(98^0\,20') = -\text{συν}(81^0\,40') = -\,0{,}14493 \;\text{κτλ.}$$

Ἀσκήσεις

316. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $132^0\,40'$ καὶ τοῦ τόξου $108^0\,25'$.

317. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $202^0\,20'$ καὶ τοῦ $228^0\,45'$.

318. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $285^0\,50'$ καὶ $305^0 35'$

319 Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $820^0\,40'$ καὶ $1382^0 25'$

320. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $-\,(167^0\;20')$, $-\,(265^0\,10')$ καὶ $-\,(298^0\,15')$

321. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $-\,(467^0\,50')$, $-\,(2572^0\,35')$ καὶ $-\,(2724^0\,30')$.

322. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\text{ἡμ}95^0 + \text{ἡμ}265^0$.

323. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\text{ἐφ}642^0 + \text{ἐφ}978^0$.

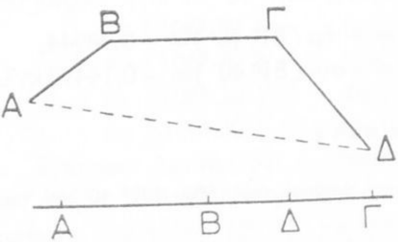
324. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\text{συν}\,820^0 + \text{συν}\,280^0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

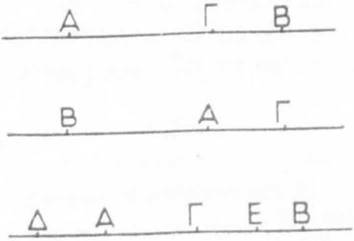
1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

99. Διαδοχικὰ ἀνύσματα καὶ συνισταμένη αὐτῶν. Ἕκαστον ἀπὸ τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου (σχ. 44). Ταῦτα λέγονται **διαδοχικὰ** ἀνύσματα.

Τὸ ἄνυσμα ΑΔ ἔχει ἀρχὴν μὲν τὴν ἀρχὴν Α τοῦ α' ἀνύσματος ΑΒ, τέλος δὲ τὸ τέλος Δ τοῦ τελευταίου ΓΔ. Τὸ ΑΔ λέγεται **συνισταμένη** ἢ **γεωμετρικὸν ἄθροισμα** τῶν ἀνυσμάτων τούτων.



Σχ. 44



Σχ. 45

Τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ (σχ. 44) εἶναι ὁμόρροπα καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος. Ἑπομένως τὰ μήκη $(\overline{AB})$, $(\overline{B\Gamma})$, $(\overline{A\Gamma})$ εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι: $(\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma}) = (\overline{A\Gamma})$ (1)

Ἂν δὲ τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β (σχ. 45), θὰ εἶναι:

$$(\overline{A\Gamma}) + (\overline{\Gamma B}) = (\overline{AB}).$$

Ἂν δὲ εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $(\overline{B\Gamma})$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\overline{A\Gamma}) + (\overline{\Gamma B}) + (\overline{B\Gamma}) = (\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma}).$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\overline{\Gamma B}) + (\overline{B\Gamma}) = 0$, προκύπτει πάλιν ἡ ἰσότης (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ.

Ἂν δὲ καὶ ἄλλα σημεῖα Δ, Ε κ.τ.λ. κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὲ τὰ Α, Β, Γ, θὰ εἶναι :

$$(\overline{\mathrm{AB}}) + (\overline{\mathrm{B}\Gamma}) + (\overline{\Gamma\Delta}) = (\overline{\mathrm{A}\Gamma}) + (\overline{\Gamma\Delta}) = (\overline{\mathrm{A}\Delta}),$$

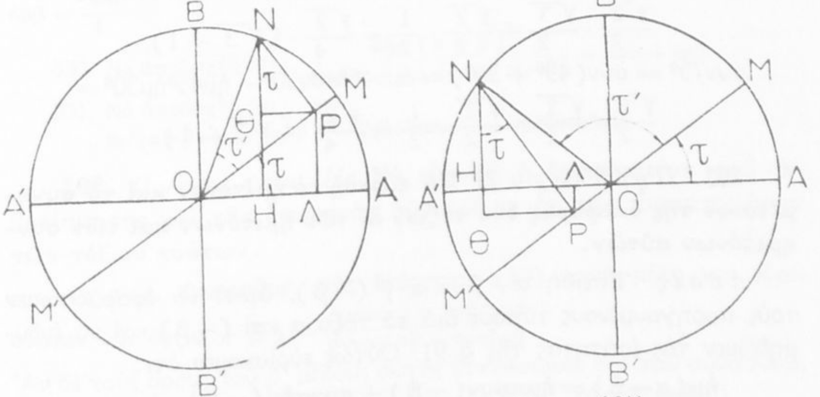
$$(\overline{\mathrm{AB}}) + (\overline{\mathrm{B}\Gamma}) + (\overline{\Gamma\Delta}) + (\overline{\Delta\mathrm{E}}) = (\overline{\mathrm{A}\Delta}) + (\overline{\Delta\mathrm{E}}) = (\overline{\mathrm{AE}})$$

κ.τ.λ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν διαδοχικῶν ἀνυσμάτων τοῦ αὐτοῦ ἄξονος ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

100. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων ἐκ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου αὐτῶν.**

Ἔστω α τὸ μέτρον ἑνὸς τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ καὶ β τί μέτρον ἑνὸς ἐκ τῶν τόξων ΜΝ (σχ. 46). Ἄθροισμα τούτων εἶνα ἐκεῖνο ἐκ τῶν τόξων ΑΝ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον α+β.



(α') (β')

Σχ. 46

Θέλομεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμ(α + β) καὶ τὸ συν(α + β), ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἡμα, συνα, ἡμβ, συνβ.

Λύσις. Θεωροῦμεν ὡς ἄξονα τῶν σηνημιτόνων τὸν Α'Α διὰ τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΝ καὶ τὸν Μ'Μ διὰ τὰ τὸξα ΜΝ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΝΡ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Μ'Μ, τὰς ΝΗ, ΡΛ καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα Α'Α καὶ τὴν ΡΘ παράλληλον πρὸς αὐτόν.

Ἂν δὲ τ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐλαχίστης θετικῆς γωνίας $\widehat{OA,OM}$ καὶ τ′ τὸ μέτρον τῆς ἐλαχίστης θετικῆς γωνίας $\widehat{OM,ON}$, θὰ εἶναι:

$$\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha, \qquad \text{συν}\tau = \text{συν}\alpha$$

$$\text{ἡμ}\beta = \text{ἡμ}\tau' = (\overline{PN}), \qquad \text{συν}\beta = \text{συν}\tau' = (\overline{OP}).$$

Γνωρίζομεν δὲ ἀφ' ἑτέρου ὅτι:

$$\begin{aligned} &\text{ἡμ}\,(\alpha+\beta) = (\overline{HN}) = (\overline{H\Theta}) + (\overline{\Theta N}) = (\overline{\Lambda P}) + (\overline{\Theta N}) \\ &\text{συν}(\alpha+\beta) = (\overline{OH}) = (\overline{O\Lambda}) + (\overline{\Lambda H}) = (\overline{O\Lambda}) - (\overline{\Theta P}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{PN\Theta} = \widehat{AOM} = \tau$, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΡΛ, ΝΡΘ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(\overline{\Lambda P}) = (\overline{OP})\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha\text{συν}\beta, \quad (\overline{O\Lambda}) = (\overline{OP})\text{συν}\tau = \text{συν}\alpha\text{συν}\beta.$$

$$(\overline{\Theta P}) = (\overline{PN})\text{ἡμ}\tau = \text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta, \quad (\overline{\Theta N}) = (\overline{PN})\,\text{συν}\tau = \text{ἡμ}\beta\text{συν}\alpha.$$

Ἕνεκα τούτων αἱ ἰσότητες (1) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἡμ}(\alpha+\beta) &= \textbf{ἡμ}\alpha\cdot\textbf{συν}\beta + \textbf{συν}\alpha\cdot\textbf{ἡμ}\beta \\ \textbf{συν}(\alpha+\beta) &= \textbf{συν}\alpha\cdot\textbf{συν}\beta - \textbf{ἡμ}\alpha\cdot\textbf{ἡμ}\beta \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Π.χ. $\text{ἡμ}75^0 = \text{ἡμ}(45^0+30^0) = \text{ἡμ}45^0\text{συν}30^0 + \text{συν}45^0\text{ἡμ}30^0 =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}+1).$$

$\text{συν}75^0 = \text{συν}(45^0+30^0) = \text{συν}45^0\text{συν}30^0 - \text{ἡμ}45^0\text{ἡμ}30^0 =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}-1).$$

101. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς δύο τόξων ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν.**

Λύσις. Ἐπειδὴ $\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς προηγουμένους τύπους διὰ τὰ τόξα α καὶ $(-\beta)$ καὶ νὰ ἐνθυμηθῶμεν τὰς ἰσότητας τῆς § 91. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἡμ}(\alpha-\beta) &= \textbf{ἡμ}\alpha\textbf{συν}(-\beta) + \textbf{συν}\alpha\textbf{ἡμ}(-\beta) \\ &= \textbf{ἡμ}\alpha\textbf{συν}\beta - \textbf{συν}\alpha\textbf{ἡμ}\beta, \\ \textbf{συν}(\alpha-\beta) &= \textbf{συν}\alpha\textbf{συν}(-\beta) - \textbf{ἡμ}\alpha\textbf{ἡμ}\,(-\beta) \\ &= \textbf{συν}\alpha\textbf{συν}\beta + \textbf{ἡμ}\alpha\textbf{ἡμ}\beta \end{aligned}\right| \qquad (41)$$

Π.χ. $\text{ἡμ}15^0 = \text{ἡμ}(45^0-30^0) = \text{ἡμ}45^0\text{συν}30^0 - \text{συν}45^0\text{ἡμ}30^0$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}-1).$$

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}15^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}+1)$.

Ἀσκήσεις

325. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ $(α + β)$, ἂν ἡμα $= \frac{3}{5}$, συνβ $= \frac{4}{5}$ καὶ $0^0 < α < 90^0$, $0^0 < β < 90^0$.

326. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ$(α + β)$ + ἡμ$(α - β)$, ἂν ἡμα $= \frac{3}{5}$ καὶ συνβ $= \frac{4}{5}$.

327. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα συν$(α + β)$ + συν$(α - β)$, ἂν συνα $= \frac{5}{8}$ καὶ συνβ $= -\frac{2}{9}$.

328. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ ἡμ$(α + β)$ − ἡμ$(α - β)$, ἂν ἡμβ $= \frac{5}{6}$, συνα $= \frac{2}{5}$

329. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ συν$(α - β)$ − συν $(α + β)$ ἂν ἡμα$=0{,}4$, ἡμβ $= \frac{3}{4}$

330. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\frac{2\text{ἡμ}\,(α + β)}{\text{συν}(α + β) + \text{συν}(α - β)} = \text{ἐφ}α + \text{ἐφ}β.$

331. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
$\text{ἡμ}^2(α+β) + \text{ἡμ}^2(α-β) = 2(\text{ἡμ}^2α\,\text{συν}^2β + \text{ἡμ}^2β\,\text{συν}^2α).$

102. *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων ἐκ τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων τούτων.**

Λύσις. Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (40) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ$(α + β) = \frac{\text{ἡμασυνβ} + \text{ἡμβσυνα}}{\text{συνασυνβ} - \text{ἡμαἡμβ}}$

Ἂν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ β΄ μέλους αὐτῆς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συνασυνβ, εὑρίσκομεν :

Ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν ταύτην διὰ τὰ τόξα α καὶ $(-β)$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἐφ}(α + β) &= \frac{\textbf{ἐφ}α + \textbf{ἐφ}β}{1 - \textbf{ἐφ}α\textbf{ἐφ}β} \\ \textbf{ἐφ}(α - β) &= \frac{\textbf{ἐφ}α - \textbf{ἐφ}β}{1 + \textbf{ἐφ}α\ \textbf{ἐφ}β} \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Ἀσκήσεις

332. Ἂν ἐφα $= 2$, ἐφβ $= 1{,}5$ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ$(α + β)$ καὶ ἡ ἐφ $(α - β)$.

333. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ75^0 καὶ ἡ ἐφ15^0. Ἐκ τούτων δὲ ἡ σφ75^0 καὶ ἡ σφ15^0.

334. Ἂν Α,Β,Γ, εἶναι γωνίαι τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
α΄) $\text{ἐφ}Α + \text{ἐφ}Β + \text{ἐφ}Γ = \text{ἐφ}Α\text{ἐφ}Β\text{ἐφ}Γ$.
β΄) $\text{σφ}Α\text{σφ}Β + \text{σφ}Β\text{σφ}Γ + \text{σφ}Γ\,\text{σφ}Α = 1$.

335. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\text{ἐφ}(45^0 - ω) = \dfrac{\text{συν}ω - \text{ἡμ}ω}{\text{συν}ω + \text{ἡμ}ω}$.

336. Ἂν $α + β + γ = 90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
α΄) $\text{ἐφ}α\text{ἐφ}β + \text{ἐφ}β\text{ἐφ}γ + \text{ἐφ}γ\text{ἐφ}α = 1$.
β΄) $\text{σφ}α + \text{σφ}β + \text{σφ}γ = \text{σφ}α\text{σφ}β\text{σφ}γ$.

337. Νὰ ὁρισθῇ ἡ $\text{σφ}(α + β)$ καὶ ἡ $\text{σφ}(α - β)$ συναρτήσει τῶν σφα καὶ σφβ.

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

103. *Πρόβλημα ΙΓ΄.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α ἐκ τοῦ ἡμα καὶ τοῦ συνα ἢ μόνον ἐκ τοῦ ἑνὸς τούτων.**

Λύσις. α΄) Ἂν εἰς τὴν γνωστὴν (40) ἰσότητα :

$$\text{συν}(α + β) = \text{συν}α\text{συν}β - \text{ἡμ}α\text{ἡμ}β$$

θέσωμεν α ἀντὶ β, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{συν}2α = \text{συν}^2α - \text{ἡμ}^2α \qquad (1)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ συν2α, ἂν γνωρίζωμεν τὸ συνα καὶ τὸ ἡμα. Π.χ. ἂν $\text{συν}α = \frac{1}{2}$, $\text{ἡμ}α = \frac{\sqrt{3}}{2}$, θὰ εἶναι :

$$\text{συν}2α = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

β΄) Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}^2α = 1 - \text{συν}^2α$, ἡ (1) γίνεται :

$$\text{συν}2α = 2\text{συν}^2α - 1 \qquad (2)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ συν2α, ἂν γνωρίζωμεν μόνον τὸ συνα. Οὕτως, ἂν $\text{συν}α = \frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι :

$$\text{συν}2α = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

γ΄) Ὁμοίως ἐκ τῆς (1) καὶ τῆς $\text{συν}\,α = 1 - \text{ἡμ}^2α$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{συν}2α = 1 - 2\text{ἡμ}^2α. \qquad (3)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ συν2α ἀπὸ μόνον τὸ ἡμα. Οὕτω διὰ $\text{ἡμ}α = \frac{\sqrt{3}}{2}$ εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι $\text{συν}2α = 1 - 2\,\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

Ἐμάθομεν λοιπὸν ὅτι :

$$\left.\begin{array}{c} \text{συν}2α = \text{συν}^2α - \text{ἡμ}^2α, \ \text{συν}2α = 2\text{συν}^2α - 1 \\ \text{συν}2α = 1 - 2\text{ἡμ}^2α \end{array}\right| \qquad (43)$$

104. *Πρόβλημα V.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ2α ἐκ τοῦ ἡμα καὶ τοῦ συνα ἢ μόνον ἐκ τοῦ ἡμα.**

Λύσις. α΄) Ἡ ἰσότης $ἡμ(α+β) = ἡμασυνβ + ἡμβσυνα$ διὰ $β = α$ γίνεται: $\mathbf{ἡμ2α = 2ἡμασυνα}$.

Ἂν π.χ. $ἡμα = \frac{1}{2}$, $συνα = \frac{\sqrt{3}}{2}$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἡμ2α = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

β΄) Ἐπειδὴ $συνα = \pm\sqrt{1-ἡμ^2α}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται: $\mathbf{ἡμ2α = \pm 2ἡμα\sqrt{1-ἡμ^2α}}$.

Διὰ ταύτης ὁρίζομεν τὸ ἡμ2α ἀπὸ μόνον τὸ ἡμα. Πρέπει ὅμως νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον 2α, διὰ νὰ θέτωμεν τὸ κατάλληλον ἀπὸ τὰ σημεῖα ±.

Π.χ. ἂν $ἡμα = \frac{\sqrt{3}}{2}$, καὶ $90^0 < 2α < 180^0$, θὰ εἶναι $ἡμ2α > 0$ καὶ ἑπομένως ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται $ἡμ2α = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ἂν ὅμως $180^0 < 2α < 270^0$, θὰ εἶναι $ἡμ2α < 0$, ἡ δὲ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται $ἡμ2α = -2\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι:

$$\mathbf{ἡμ2α = 2ἡμασυνα,\quad ἡμ2α = \pm 2ἡμα \cdot \sqrt{1-ἡμ^2α}} \qquad (44)$$

Σημείωσις. Ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἂν τὸ δοθὲν ἡμα εἶναι θετικόν, τὸ τόξον α θὰ λήγῃ εἰς τὸ α΄ ἢ τὸ β΄ τεταρτημόριον. Ἂν δὲ εἶναι $α = 360^0k + τ$ καὶ τὸ μικρότερον περιφερείας τόξον τ θὰ λήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὸ α. Ἐπειδὴ δὲ $2α = 360^0\ 2k + 2τ$, θὰ εἶναι $ἡμ2α = ἡμ2τ$. Καί, ἂν μὲν $0^0 < τ < 90^0$, θὰ εἶναι $0^0 < 2τ < 180^0$, ἑπομένως $ἡμ2τ > 0$ καὶ $ἡμ2α > 0$. Ἂν δὲ $90^0 < τ < 190^0$, θὰ εἶναι $180^0 < 2τ < 360^0$, ἑπομένως $ἡμ2τ < 0$ καὶ $ἡμ2α < 0$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἡμα εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $ἡμ2α > 0$ ἢ $ἡμ\,2α < 0$. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἐξήγησις καὶ ἂν $ἡμα < 0$.

105. *Πρόβλημα VI.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ2α ἐκ τῆς ἐφα.**

Λύσις. Ἡ ἰσότης $ἐφ(α+β) = \frac{ἐφα + ἐφβ}{1 - ἐφαἐφβ}$ διὰ $β = α$ γίνεται:

$$\mathbf{ἐφ2α = \frac{2ἐφα}{1 - ἐφ^2α}} \qquad (45)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ἐφ2α ἐκ τῆς ἐφα. Ἂν π.χ. εἶναι $ἐφα = \sqrt{3}$, εὑρίσκομεν ὅτι $ἐφ2α = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$.

Παρατήρησις. Ἂν εἰς τὰς ἰσότητας (43), (44) (45) θέσωμεν $2α = ω$ καὶ ἑπομένως $α = \frac{ω}{2}$, αὗται γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} συνω &= συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 2συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - 1 = 1 - 2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) \\ ἡμω &= 2ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)συν\left(\frac{ω}{2}\right) = \pm 2ἡμ\left(\frac{ω}{2}\right)\sqrt{1 - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \\ ἐφω &= \frac{2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1 - ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Ἀσκήσεις

338. Ἂν $συνα = \frac{3}{5}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ2α καὶ τὸ συν2α.

339. Ἂν $ἐφα = \frac{3}{5}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφ2α.

340. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἐφ(45^0 + α) - ἐφ(45^0 - α) = 2ἐφ2α$.

341. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $σφ2α = \frac{σφ^2α - 1}{2σφα}$.

342. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $σφα - ἐφα = 2σφ2α$.

343. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ἡμ2α = \frac{2}{ἐφα + σφα}$.

106. *Πρόβλημα VII.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω ἐκ τῆς** $ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)$.

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι $συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = συνω$. Ἐπειδὴ δὲ $συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) + ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 1$, ἕπεται ὅτι:

$$συνω = \frac{συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) - ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}{συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) + ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}.$$

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ $\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$,

εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \text{συν}\omega &= \frac{1-\text{ἐφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\text{ἐφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \\ \text{ἡμ}\omega &= \frac{2\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\text{ἐφ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}\right\} (47)$$

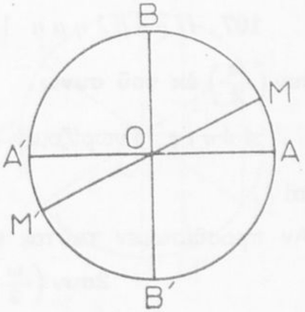
Ὁμοίως ἀπὸ τὴν $\text{ἡμ}\omega = 2\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

εὑρίσκομεν ὅτι :

Ἂν π.χ. $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{συν}\omega = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \text{ καὶ ἡμ}\omega = \frac{2\,.\,\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι οἱ δύο τύποι (47) εἶναι ρητοὶ πρὸς $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ ἑπομένως ἀπὸ ἑκάστην τιμὴν τῆς $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ προκύπτει μία μόνον τιμὴ τοῦ συνω καὶ μία τοῦ ἡμω. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς : Ἂν Μ εἶναι τὸ πέρας ἑνὸς τόξου τ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\text{ἐφτ} = \text{ἐφ}\,\frac{\omega}{2}$ τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Μ′ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸ κέντρον Ο (σχ. 48).



Σχ. 48

Εἰς τὴν α′ περίπτωσιν θὰ εἶναι $\frac{\omega}{2} = 360^0\,k + \tau = 2k\,180^0 + \tau$, εἰς δὲ τὴν β′ περίπτωσιν θὰ εἶναι $\frac{\omega}{2} = (2k+1)180^0 + \tau$. Δηλαδὴ τὸ $\frac{\omega}{2}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ τ καὶ ἑνὸς πολλαπλασίου τῶν 180⁰ ἀρτίου εἰς τὴν α′ περίπτωσιν καὶ περιττοῦ εἰς τὴν β′. Συγχωνεύοντες τὰ δύο ταῦτα πολλαπλάσια εἰς ἓν $180^0.\lambda$, εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\omega}{2} = 180^0\lambda + \tau$, ἔνθα λ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἄρτιος ἢ περιττός. Ἐκ ταύτης προκύπτει ἡ ἰσότης $\omega = 360^0.\lambda + 2\tau$. Ἀπὸ ταύτην βλέπομεν ὅτι πᾶν τόξον ω, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς, περατοῦται εἰς ἓν ὡρισμένον σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ 2τ. Ἑπομένως ἕκαστος τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τοῦ ω ἔχει μίαν τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Ἀσκήσεις

344. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{3}{5}$.

345. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμω καὶ τὸ συνω, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1{,}5$.

346. Ἂν $\left|\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right| < 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{συνω} > 0$.

347. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{ἡμω} > 0$, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) > 0$ καὶ $\text{ἡμω} < 0$, ἂν $\text{ἐφ}\left(\frac{\omega}{2}\right) < 0$.

348. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1 + \text{ἐφα} \,.\, \text{ἐφ}\, 2\alpha = \frac{1}{\text{συν}2\alpha}$.

3. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΗΜΙΣΕΟΣ ΤΟΞΟΥ

107. *Πρόβλημα VIII.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ τὸ $\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω.**

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= 1. \\ \text{καὶ} \qquad \text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \text{συνω} \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Ἂν προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$2\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 + \text{συνω} \qquad (48)$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συνω}}{2}}$.

Ἂν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς α' τῶν (1) ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα μέλη τῆς β', εὑρίσκομεν ὅτι : $2\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \text{συνω}$ (49)

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συνω}}{2}}$. Διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συνω}}{2}}, \quad \text{συν}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συνω}}{2}} \qquad (50)$$

εὑρίσκομεν τὸ ἡμ$\left(\frac{\omega}{2}\right)$ καὶ τὸ συν$\left(\frac{\omega}{2}\right)$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ συνω καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$. Π.χ. ἂν συνω $= \frac{1}{2}$ καὶ $270^0 < \frac{\omega}{2} < 360^0$, θὰ εἶναι: ἡμ$\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$ καὶ συν$\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου εἰς τοὺς τύπους (50) ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἂν συνω $= (\overline{O\Pi})$ (σχ. 48), τὸ τόξον ω θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Μ′. Ἂν δὲ $(\widehat{AM}) = \tau$, θὰ εἶναι $(\widehat{AM})' = -\tau$ καὶ $\omega = 360^0k + \tau$ εἰς τὴν α′ περίπτωσιν, $\omega = 360^0k - \tau$ εἰς τὴν β′ περίπτωσιν. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\omega}{2} = 180^0k \pm \frac{\tau}{2}$. Καὶ ἂν τὸ τόξον $\frac{\tau}{2}$ λήγῃ εἰς τὸ Ν, μέσον τοῦ $\widehat{AM}$, τὸ $\frac{\omega}{2}$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Ν ἢ εἰς τὸ Ν′, συμμετρικὸν τοῦ Ν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, δι᾿ ἀρτίας τιμὰς τοῦ k καὶ εἰς τὸ Ζ ἢ Ζ′, ἀντιστοίχως συμμετρικὰ τῶν Ν καὶ Ν′ πρὸς τὸ κέντρον, διὰ περιττὰς τιμὰς τοῦ k. Ἂν δὲ τὸ $\frac{\tau}{2}$ λήγῃ εἰς τὸ Ζ, τὸ $\frac{\omega}{2}$ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Ζ ἢ Ζ′ δι᾿ ἀρτίας τιμὰς τοῦ k καὶ εἰς τὸ Ν ἢ Ν′ διὰ περιττὰς τιμὰς αὐτοῦ. Ὅθεν ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν ἡμ $\frac{\omega}{2}$ καὶ συν $\frac{\omega}{2}$ ἄλλο σημεῖον θὰ ἔχῃ, ὅταν τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$ λήγῃ εἰς τὸ Ν, καὶ ἄλλο, ὅταν λήγῃ εἰς τὸ Ζ. Ὁμοίως ἕκαστος τούτων ἄλλο σημεῖον θὰ ἔχῃ διὰ $\frac{\omega}{2}$ λῆγον εἰς τὸ Ν′ καὶ ἄλλο διὰ $\frac{\omega}{2}$ λῆγον εἰς τὸ Ζ′.

Σχ. 48

108. *Πρόβλημα IX.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ $ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)$ ἐκ τοῦ συνω.**

Λύσις. Ἀπὸ τὰς προηγουμένας εὑρεθείσας ἰσότητας:

$$2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 1 - συνω, \quad 2συν^2\left(\frac{ω}{2}\right) = 1 + συνω$$

διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right) = \frac{1 - συνω}{1 + συνω} \qquad (51)$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι:

$$ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - συνω}{1 + συνω}} \qquad (52)$$

Διὰ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν $ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ συνω καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει τὸ τόξον $\frac{ω}{2}$. Ἂν π.χ. εἶναι $συνω = \frac{1}{2}$ καὶ $0^0 < \frac{ω}{2} < 90^0$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2-1}{2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σημείωσις. Ἡ παρουσία τοῦ διπλοῦ σημείου ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ τόξον $\frac{ω}{2}$ δύναται νὰ λήγῃ εἰς τὸ N ἢ τὸ Z εἰς μίαν περίπτωσιν καὶ εἰς τὸ N′ ἢ τὸ Z′ εἰς ἄλλην περίπτωσιν (σχ. 48), ὡς ἀνωτέρω (§ 107) ἐξηγήθη.

Ἀσκήσεις

349. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $ἡμ\frac{ω}{2}$, $συν\frac{ω}{2}$, $ἐφ\frac{ω}{2}$, ἂν $συνω = \frac{1}{4}$ καὶ $0^0 < \frac{ω}{2} < 90^0$.

350. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $22^0\,30'$.

351. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 15^0.

352. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $7^0\,30'$.

353. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου $\frac{ω}{2}$, ἂν $συνω = \frac{2}{3}$ καὶ $270^0 < \frac{ω}{2} < 360^0$.

354. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου $\frac{ω}{2}$, ἂν εἶναι $συνω = -0,5$ καὶ $0^0 < \frac{ω}{2} < 90^0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

1. Η ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΕΚ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

109. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεος ἑκάστης γωνίας τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰσότητα $2\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \text{συν}\omega$ εἰς τὴν γωνίαν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$2\text{ἡμ}^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \text{συν}A \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς γνωστῆς (31 § 60) ἰσότητος $\alpha_2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A$ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{συν}A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ ἡ (1) γίνεται :

$$2\text{ἡμ}^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{2\beta\gamma} =$$

$$\frac{(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)}{2\beta\gamma} \qquad (2)$$

Αν δὲ χάριν συντομίας θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$ καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς 2γ, εὑρίσκομεν ὅτι : $\alpha+\beta-\gamma = 2(\tau-\gamma)$. Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν 2β, εὑρίσκομεν ὅτι : $\alpha-\beta+\gamma = 2(\tau-\beta)$. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (2) γίνεται :

$$2\text{ἡμ}^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{4(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{2\beta\gamma} = \frac{2\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$$

Ἐκ ταύτης δέ, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $0^0 \langle \frac{A}{2} \langle 90^0$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἡμ}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}} \qquad \mathbf{(53)}$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος $2\text{συν}^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 + \text{συν}A$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{συν}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} \qquad \mathbf{(54)}$$

Π.χ. ἂν $\alpha = 4$ μέτ, $\beta = 5$ μέτ, $\gamma = 6$ μέτ, θὰ εἶναι :
$2\tau = 15,\ \tau = \frac{15}{2},\ \tau-\alpha = \frac{7}{2},\ \tau-\beta = \frac{5}{2},\ \tau-\gamma = \frac{3}{2}$ καὶ

$$ἡμ\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}{5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{5\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{1}{4\cdot 2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$συν\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}}{5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{15\ \ 7}{4\cdot 5\cdot 6}}=\sqrt{\frac{7}{4\cdot 2}}=\sqrt{\frac{14}{4\cdot 4}}=\frac{1}{4}\sqrt{14}.$$

κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι :

$$ἡμ\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}},\quad συν\left(\frac{B}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau\ (\tau-\beta)}{\alpha\gamma}}$$

$$ἡμ\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)}{\alpha\beta}},\quad συν\left(\frac{\Gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau\ (\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

110. *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμίσεος ἑκάστης γωνίας τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων :

$$ἡμ\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\beta\gamma}},\quad συν\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{\tau\ (\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι :

$$ἐφ\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau\ (\tau-\alpha)}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} ἐφ\left(\frac{B}{2}\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\gamma)}{\tau\ (\tau-\beta)}}\\ ἐφ\left(\frac{\Gamma}{2}\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)}{\tau\ (\tau-\gamma)}}\end{aligned}\right\}\qquad (55)$$

2. ΤΡΕΙΣ ΑΛΛΑΙ ΚΛΑΣΣΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

111. *Πρόβλημα I.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Λύσις. Γνωρίζομεν (§ 60γ΄) ὅτι $E=\frac{1}{2}$ βγἡμΑ. Ἐπειδὴ δὲ ἡμΑ $=2$ἡμ$\frac{A}{2}$συν$\frac{A}{2}$, αὕτη γίνεται $E=$ βγἡμ$\frac{A}{2}$συν$\frac{A}{2}$. Ἀπὸ αὐτὴν καὶ ἀπὸ τὰς προηγουμένας (§ 109) εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ ἡμ$\frac{A}{2}$ καὶ τοῦ συν$\frac{A}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\mathbf{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}\qquad (56)$$

Π.χ. τὸ προηγούμενον (§ 109) τρίγωνον ἔχει :

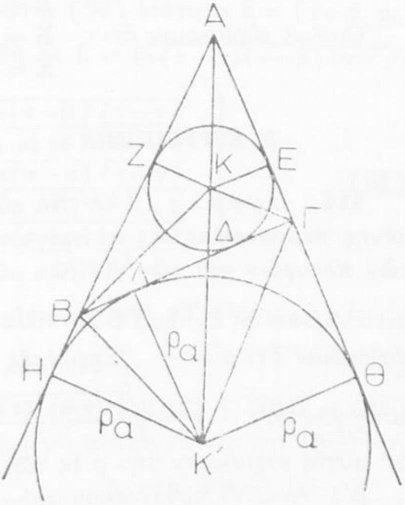
$$E = \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{7} \text{ τετ. μέτρα.}$$

112. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τὴν ἡμιπερίμετρον αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς αὐτό.**

Λύσις. Ἂν Κ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΓΚ, διαιροῦσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία τρίγωνα (σχ. 49). Εἶναι λοιπὸν Ε = (ΚΑΒ) + (ΚΒΓ) + (ΚΓΑ) (1) Ἐπειδὴ δὲ $(ΚΑΒ) = \frac{1}{2}(ΑΒ)\cdot(ΚΖ) = \frac{1}{2}γρ.$, $(ΚΒΓ) = \frac{1}{2}αρ$, $(ΚΓΑ) = \frac{1}{2}βρ$, ἡ (1) γίνεται : $Ε = \frac{1}{2}(α + β + γ)ρ$.

Δι' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῆς ρ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ. Συνήθως ὅμως δίδομεν εἰς αὐτὴν ἁπλουστέραν μορφήν, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι $α + β + γ = 2τ$. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\mathbf{E} = τρ \qquad (57)$$



Σχ. 49

113. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος μιᾶς τῶν παρεγγεγραμένων περιφερειῶν εἰς αὐτό.**

Λύσις. Ἔστω Κ' τὸ κέντρον καὶ $ρ_α$, ἡ ἀκτὶς τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, ἥτις εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας Α αὐτοῦ (σχ. 49). Ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας Κ'Α, Κ'Β, Κ'Γ, βλέπομεν ὅτι : Ε = (Κ'ΑΒ) + (Κ'ΑΓ) — (Κ'ΒΓ) (1)

Ἐπειδὴ $(K'AB) = \frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(K'H) = \frac{1}{2}\gamma\rho_\alpha$, $(K'A\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\rho_\alpha$, $(K'B\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha$, ἡ (1) γίνεται: $E = \frac{1}{2}\rho_\alpha(\beta+\gamma-\alpha)$.

Δι' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν του καὶ τῆς ρ_α. Ἂν ὅμως ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $\beta+\gamma-\alpha = 2(\tau-\alpha)$, δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν ἁπλουστέραν μορφήν:

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\tau-\alpha)\rho_\alpha, \\ \mathbf{E} &= (\tau-\beta)\rho_\beta \\ \mathbf{E} &= (\tau-\gamma)\rho_\gamma \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

3. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ρ, ρ_α, ρ_β ρ_γ, ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

114. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του ἢ ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.**

Λύσις. α') Ἐκ τῆς γνωστῆς (57 § 112) ἰσότητος $E = \tau\rho$ εὑρίσκομεν ὅτι $\rho = \frac{E}{\tau}$. Ἐπειδὴ δὲ $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ αὕτη γίνεται:

$$\rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau}} \quad (59)$$

Δι' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν ρ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

β') Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΕ (σχ. 49) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(KE) = (AE)\ \text{ἐφ}\frac{A}{2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $2(AE) + 2(B\Delta) + 2(\Gamma\Delta) = \alpha+\beta+\gamma = 2\tau$ καὶ $2(B\Delta) + 2(\Gamma\Delta) = 2\alpha$, ἕπεται ὅτι $(AE) = \tau - \alpha$.

Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται:

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

καὶ

$$\left.\begin{aligned} \rho &= (\tau-\alpha)\ \text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right) \\ \rho &= (\tau-\beta)\ \text{ἐφ}\left(\frac{B}{2}\right) \\ \rho &= (\tau-\gamma)\ \text{ἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Ἂν δὲ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ρ = (τ - α)\cdot\sqrt{\frac{(τ-β)(τ-γ)}{τ(τ-α)}} = \sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ}},$$

ἤτοι πάλιν τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (59).

115. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκτῖνες τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του ἢ ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν αὐτοῦ.**

Λύσις. α') Ἀπὸ τὴν γνωστὴν (58) ἰσότητα $Ε = (τ - α\ ρ_α$ εὑρίσκομεν ὅτι $ρ_α = \frac{Ε}{τ-α}$. Ἐπειδὴ δὲ $Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{αὕτη γίνεται:} & ρ_α = \sqrt{\dfrac{τ(τ-β)(τ-γ)}{(τ-α)}} \\ \text{Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:} & ρ_β = \sqrt{\dfrac{τ(τ-α)(τ-γ)}{(τ-β)}} \\ \text{καὶ} & ρ_γ = \sqrt{\dfrac{τ(τ-α)(τ-β)}{(τ-γ)}}\end{array}\right\}\qquad (61)$$

β') Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚ'Θ (σχ. 49) βλέπομεν ὅτι:

$$(Κ'Θ) = (ΑΘ)\cdot ἐφ\frac{Α}{2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ (ΑΘ) + (ΑΗ) = (ΑΓ) + (ΓΘ) + (ΑΒ) + (ΒΗ) = (ΑΓ) + (ΓΛ) + (ΑΒ) + (ΒΛ) ἢ $2(ΑΘ) = β + γ + α = 2τ$, ἔπεται ὅτι $(ΑΘ) = τ$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται:} & ρ_α = \mathbf{τ}\cdot\mathbf{ἐφ}\,\dfrac{\mathbf{Α}}{\mathbf{2}} \\ \text{Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:} & ρ_β = \mathbf{τ}\cdot\mathbf{ἐφ}\,\dfrac{\mathbf{Β}}{\mathbf{2}},\ \ ρ_γ = \mathbf{τ}\cdot\mathbf{ἐφ}\,\dfrac{\mathbf{Γ}}{\mathbf{2}}\end{array}\right\}\qquad (2)$$

Δι' αὐτῶν εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας ἀκτῖνας ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τούτων δὲ καὶ τῶν γνωστῶν ἰσοτήτων (55) εὑρίσκομεν πάλιν τὰς ἰσότητας (61).

4. ΜΙΑ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

116. *Πρόβλημα* **Νὰ ἐπιλυθῇ ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Ἐπίλυσις. Ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς τύπους (55) ὁρίζονται οἱ ἄγνωστοι $\frac{Α}{2}$, $\frac{Β}{2}$, $\frac{Γ}{2}$ καὶ ἐκ τούτων ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα μέτρα Α,Β,Γ τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ταχύτερον ὅμως γίνονται οἱ ὑπολογισμοὶ ὡς ἑξῆς :

Προηγουμένως εὕρομεν ὅτι $\rho = (\tau - \alpha)$ ἐφ$\frac{A}{2}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι : ἐφ$\frac{A}{2} = \frac{\rho}{\tau - \alpha}$. Ὁμοίως εἶναι ἐφ$\frac{B}{2} = \frac{\rho}{\tau - \beta}$, ἐφ$\frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{\tau - \gamma}$. Ἂν λοιπὸν ὑπολογισθῇ ἀρχικῶς ὁ λογρ, εὑρίσκονται εὐκόλως οἱ λογάριθμοι τῶν α΄ μελῶν τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ εἶτα οἱ ἄγνωστοι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$. Οὕτως ἐκ τῆς ἰσότητος (59) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\lambda o\gamma\rho = \frac{\lambda o\gamma(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma(\tau-\beta) + \gamma o\gamma(\tau-\gamma) - \lambda o\gamma\tau}{2}$$

Ἂν π.χ. εἶναι $\alpha = 4$ μέτ, $\beta = 5$ μέτ, $\gamma = 6$ μέτ, εὑρίσκομεν ὅτι :

$\lambda o\gamma(\tau - \alpha) = 0{,}54407$

$\lambda o\gamma(\tau - \beta) = 0{,}39794$

$\underline{\lambda o\gamma(\tau - \gamma) = 0{,}17609}$

ἄθροισμα $= 1{,}11810$

ἄθροισμα $= 1{,}11810$

$\underline{\lambda o\gamma\tau = 0{,}87506}$

διαφορὰ $= 0{,}24304$

$\lambda o\gamma\rho = 0{,}12152$

Ὑπολογισμὸς τοῦ μέτρου Α.

$\lambda o\gamma$ἐφ$\left(\frac{A}{2}\right) = \lambda o\gamma\rho - \lambda o\gamma(\tau - \alpha)$,

$\lambda o\gamma\rho = 0{,}12152$

$\underline{\lambda o\gamma(\tau - \alpha) = 0{,}54407}$

$\lambda o\gamma$ἐφ$\left(\frac{A}{2}\right) = \overline{1},57745$

$\frac{A}{2} = 20^0 42' 17'',37$

$A = 41^0 24' 34'',74$

Ὑπολογισμὸς τοῦ μέτρου Β.

$\lambda o\gamma$ἐφ$\left(\frac{B}{2}\right) = \lambda o\gamma\rho - \lambda o\gamma(\tau - \beta)$

$\lambda o\gamma\rho = 0{,}12152$

$\underline{\lambda o\gamma(\tau - \gamma) = 0{,}39794}$

$\lambda o\gamma$ἐφ$\left(\frac{B}{2}\right) = \overline{1},72358$

$\frac{B}{2} = 27^0 53' 8''$

$B = 55^0 46' 16''$

Ὑπολογισμὸς τοῦ μέτρου Γ.

$\lambda o\gamma$ἐφ$\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \lambda o\gamma\rho - \lambda o\gamma(\tau - \gamma)$

$\lambda o\gamma\rho = 0{,}12152$

$\underline{\lambda o\gamma(\tau - \gamma) = 0{,}17609}$

$\lambda o\gamma$ἐφ$\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \overline{1},94543$

$\frac{\Gamma}{2} = 41^0 24' 34'',6 \qquad \Gamma = 82^0 49' 9'',2$

Δοκιμή

$180^0 = 179^0 59' 60''$

$\underline{A + B + \Gamma = 179^0 59' 59'', 94}$

λάθος $= 0'',06$

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$2\lambda o \gamma E = \left[\lambda o \gamma(\tau-\alpha) + \lambda o \gamma(\tau-\beta) + \lambda o \gamma(\tau-\gamma)\right] + \lambda o \gamma \tau$$

$$\text{ἄθροισμα ἐντὸς ἀγκυλῶν} = 1{,}11810$$

$$\lambda o \gamma \tau = 0{,}87506$$

$$2\lambda o \gamma E = 1{,}99316$$

$$\lambda o \gamma E = 0{,}99658$$

$$E = 9{,}92125 \text{ τετ. μέτ.}$$

Ἀσκήσεις

355. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ρ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\alpha = 8$ μέτ, $\beta = 9$ μέτ, $\gamma = 10$ μέτ.

356. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς $\alpha = 347$ μέτ, $\beta = 247$ μέτ, $\gamma = 147$ μέτ. Νὰ εὑρεθῇ δὲ καὶ ἡ ρ_α αὐτοῦ.

357. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\tau-\alpha = 5{,}5$ μέτ. καὶ $A = 24^0\, 43'\, 46''$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ρ αὐτοῦ.

358. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ρ_α συναρτήσει τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ διὰ μεθόδου στηριζομένης εἰς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΚΕ καὶ ΑΚ΄Θ (σχ. 49).

359. Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $E = \tau(\tau-\alpha)$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον. Καὶ ἀντιστρόφως.

360. Ἓν τρίγωνον ἔχει περίμετρον 36 μέτ. καὶ $\rho_\alpha = \frac{6}{5}\sqrt{15}$ μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α.

117. Διάφοροι ἄλλαι μορφαὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου.

Ἐμάθομεν μέχρι τοῦδε τοὺς ἑξῆς τύπους, σχετικοὺς μὲ τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ :

$$E = \frac{\alpha^2 \acute{\eta}\mu B . \acute{\eta}\mu \Gamma}{2\acute{\eta}\mu A},\quad E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)\;(\tau-\beta)\;(\tau-\gamma)},\quad E = \tau\rho,$$

$$E = (\tau-\alpha)\,\rho_\alpha = (\tau-\beta)\,\rho_\beta = (\tau-\gamma)\,\rho_\gamma.$$

Πλὴν τούτων, ἀξιοσημείωτοι μορφαὶ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι καὶ αἱ ἀκόλουθοι :

α΄) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\acute{\eta}\mu A$, $\beta = 2R\acute{\eta}\mu B$, $\gamma = 2R\acute{\eta}\mu\Gamma$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\mathbf{E = 2R^2 \acute{\eta}\mu A \acute{\eta}\mu B \acute{\eta}\mu \Gamma} \qquad (63)$$

'Επειδὴ δὲ ἐκ τῆς $\alpha = 2R\,\text{ἡμ}A$ προκύπτει ὅτι $\text{ἡμ}A = \frac{\alpha}{2R}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται:
'Ομοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E = \alpha R\,\text{ἡμ}B\,\text{ἡμ}\Gamma} \\ \mathbf{E = \beta R\,\text{ἡμ}A\,\text{ἡμ}\Gamma} \\ \mathbf{E = \gamma R\,\text{ἡμ}A\,\text{ἡμ}B} \end{array}\right\} \qquad (64)$$

β') 'Από τὴν ἰσότητα $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τοῦ β' μέλους διὰ $\tau(\tau-\alpha)$ εὑρίσκομεν ὅτι: $E = \tau(\tau-\alpha)\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$, ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι:

'Ομοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E = \tau(\tau-\alpha)\,\text{ἐφ}\left(\frac{A}{2}\right)} \\ \mathbf{E = \tau(\tau-\beta)\,\text{ἐφ}\left(\frac{B}{2}\right)} \\ \mathbf{E = \tau(\tau-\gamma)\,\text{ἐφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)} \end{array}\right\} \qquad (65)$$

γ') 'Από τὰς ἰσότητας $E = \tau\rho$, $E = (\tau-\alpha)\rho_\alpha$, $E = (\tau-\beta)\rho_\beta$, $E = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$E^4 = \rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma \cdot \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) = \rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma E^2.$$

'Εκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν $E^2 = \rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma$ καὶ ἐπομένως:

$$\mathbf{E = \sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}} \qquad (66)$$

δ') 'Από τὰς ἰσότητας (62) εὑρίσκομεν ὅτι:

$\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma = \tau^3\text{ἐφ}\frac{A}{2}\text{ἐφ}\frac{B}{2}\text{ἐφ}\frac{\Gamma}{2}$, ὅθεν $\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma = \rho\tau^3\text{ἐφ}\frac{A}{2}\text{ἐφ}\frac{B}{2}\text{ἐφ}\frac{\Gamma}{2}$.
'Επειδὴ δὲ $\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma = E^2$ καὶ $\rho\tau = E$, ἕπεται ὅτι:

$$\mathbf{E = \tau^2\text{ἐφ}\frac{A}{2}\text{ἐφ}\frac{B}{2}\text{ἐφ}\frac{\Gamma}{2}} \qquad (67)$$

ε') 'Εκ τῆς ἰσότητος $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A$ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν

$$2E = \beta\gamma\,\text{ἡμ}A,\quad 2E\cdot\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = \alpha\beta\gamma.$$

'Επειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A} = 2R$, αὕτη γίνεται $4ER = \alpha\beta\gamma$ καὶ ἐπομένως

$$\mathbf{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}} \qquad (68)$$

118. *Πρόβλημα* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς ἓν τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν του.**

Λύσις. Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰσότητα $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \qquad (69)$$

Ἀσκήσεις

361. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $A = 53^0\, 7'\, 48''$, $B = 67^0\, 22'\, 48''$, $R = 8{,}125$ μέτ.

362. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\alpha = 13$ μέτ. $A = 53^0 7'\, 48''$, $\Gamma = 59^0\, 29'\, 24''$.

363. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\alpha = 37$ μέτ, $R = 20{,}04$μ, $B = 18^0\, 55'\, 29''$, $\Gamma = 93^0\, 41'\, 44''$.

364. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\tau = 21$ μέτ, $\tau - \alpha = 8$μ, $A = 53^0\, 7'\, 42''$.

365. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\tau = 160$ μέτ, καὶ $\rho = 11{,}28$ μέτ.

366. Ἓν τρίγωνον ἔχει $\rho = 9{,}6$ μέτ, $\rho_\alpha = 50$ μέτ, $\rho_\beta = 12{,}5$ μέτ, $\rho_\gamma = 12{,}5$μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

367. Ἓν τρίγωνον ἔχει $E = 8169$ τετ. μέτρα, $A = 77^0\, 19'\, 10''$, 6, $B = 5^0\, 43'\, 29''$, 3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

368. Ἓν τρίγωνον ἔχει $E = 1200$ τετ. μέτρα, $\alpha = 101$ μέτ, $\beta = 29$ μέτ. καὶ $\tau = 125$ μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ R αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΛΟΓΙΣΜΟΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

119. Χρησιμότης τῆς τροπῆς παραστάσεων εἰς ἄλλας λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\frac{1 - \text{συν}\chi}{1 + \text{συν}\chi}$, ἂν $\wedge = 18^0\,42'$.

Ἂν καλέσωμεν ψ τὴν ζητουμένην τιμήν, θὰ εἶναι :

$$\psi = \frac{1 - \text{συν}(18^0\,42')}{1 + \text{συν}(18^0\,42')}.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ συν$(18^0 42')$ καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς τὸ β' μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος. Ἐπειδὴ δὲ λογσυν$(18^0 42') =$ λογήμ$(71^0 18') = \overline{1},97645$, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν ὅτι συν$(18^0 42') = 0,94722$. Ἐπομένως $\psi = \frac{1 - 0,94722}{1 + 0,94722} = \frac{0,05278}{1,94722} = 0,02711$.

Ἂν ὅμως ἐνθυθηθῶμεν (51 § 108) ὅτι $\frac{1 - \text{συν}\chi}{1 + \text{συν}\chi} = \text{ἐφ}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$, βλέπομεν ὅτι $\psi = \text{ἐφ}^2(9^0 21')$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι λογψ $=$ 2λογἐφ$(9^0 21') = \overline{2},43314$ καὶ ἑπομένως : $\psi = 0,02711$.

Βλέπομεν οὕτως ὅτι κατὰ τὸν β' τρόπον εὑρέθη τὸ ζητούμενον μὲ ὀλιγωτέρας πράξεις. Κατωρθώθη δὲ τοῦτο, διότι ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀντικατεστάθη μὲ τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν ἐφ$^2(9^0 21')$, τῆς ὁποίας ὁ λογάριθμος εὑρέθη δι' ἀμέσου ἐφαρμογῆς τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τοῦ λογαρίθμου δυνάμεως.

Διὰ τοῦτο ἡ τελευταία αὕτη παράστασις λέγεται **λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων.**

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα τοῦτο βλέπομεν ὅτι εἶναι πολὺ χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν νὰ τρέπωμεν παραστάσεις εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους καὶ λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων. Διὰ τοῦτο εἰς τὰ ἀκόλουθα θὰ ἐκθέσωμεν πῶς γίνεται ἡ τροπὴ αὕτη τῶν συνηθεστέρων τριγωνομετρικῶν παραστάσεων.

120. *Πρόβλημα I.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις ἡμA ± ἡμB.**

Λύσις. Ἐμάθομεν (§ § 100, 101) ὅτι:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta) = \text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

$$\text{ἡμ}(\alpha-\beta) = \text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha$$

Ἂν δὲ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta) + \text{ἡμ}(\alpha-\beta) = 2\,\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta \tag{1}$$

Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰδίας ἰσότητας, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta) - \text{ἡμ}(\alpha-\beta) = 2\,\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha \tag{2}$$

Τώρα θέτομεν $\alpha+\beta = A$, $\alpha-\beta = B$ καὶ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\alpha = \frac{A+B}{2}$ καὶ $\beta = \frac{A-B}{2}$. Αἱ ἰσότητες λοιπὸν (1), (2) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἡμ}\mathbf{A} + \textbf{ἡμ}\mathbf{B} &= \mathbf{2}\,\textbf{ἡμ}\left(\frac{\mathbf{A+B}}{\mathbf{2}}\right)\textbf{συν}\left(\frac{\mathbf{A-B}}{\mathbf{2}}\right) \\ \text{καί:}\quad \textbf{ἡμ}\mathbf{A} - \textbf{ἡμ}\mathbf{B} &= \mathbf{2}\,\textbf{ἡμ}\left(\frac{\mathbf{A-B}}{\mathbf{2}}\right)\textbf{συν}\left(\frac{\mathbf{A+B}}{\mathbf{2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Τούτων δὲ τὰ β' μέλη εἶναι προφανῶς λογιστὰ διὰ τῶν λογαρίθμων.

121. *Πρόβλημα II.* **Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις** $\dfrac{\text{ἡμ}A - \text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B}$

Λύσις. Ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἰσότητας εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\frac{\text{ἡμ}A - \text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B} = \frac{2\,\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\,\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)} =$$

$$\frac{\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)} \cdot \frac{\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \text{σφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\text{σφ}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \dfrac{1}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\text{ἡμ}A-\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B}=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (71)$$

122. *Πρόβλημα III.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις 1 ± ἡμA.**

Λύσις. Ἐπειδὴ $1=\text{ἡμ}90^0$, ἕπεται ὅτι :

$$1+\text{ἡμ}A=\text{ἡμ}90^0+\text{ἡμ}A=2\text{ἡμ}\left(45^0+\frac{A}{2}\right)\text{συν}\left(45^0-\frac{A}{2}\right) \qquad (72)$$

Ταύτης τὸ β' μέλος εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων. Δίδομεν ὅμως εἰς αὐτὸ καὶ δύο ἀκόμη μορφάς. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\left(45^0+\frac{A}{2}\right)+\left(45^0-\frac{A}{2}\right)=90^0$$

καὶ συμπεραίνομεν ὅτι $\text{συν}\left(45^0-\frac{A}{2}\right)=\text{ἡμ}\left(45^0+\frac{A}{2}\right)$.

Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται :

$$1+\text{ἡμ}A=2\text{ἡμ}^2\left(45^0+\frac{A}{2}\right)=2\text{συν}^2\left(45^0-\frac{A}{2}\right) \qquad (73)$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι :

$$1-\text{ἡμ}A=2\text{ἡμ}^2\left(45^0-\frac{A}{2}\right)=2\text{συν}^2\left(45^0+\frac{A}{2}\right) \qquad (74)$$

123. *Πρόβλημα IV.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις συνA ± συνB.**

Λύσις. Ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἰσότητας :

$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta$$
$$\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta$$

ἐργαζόμενοι ὡς ἐν § 120 εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned}\text{συν}A+\text{συν}B&=2\text{συν}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ \text{καὶ}\quad \text{συν}A-\text{συν}B&=-2\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2}\right)\\ &=2\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{ἡμ}\left(\frac{B-A}{2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

124. *Πρόβλημα V.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις 1 ± συνA.**

Λύσις. Ἐπειδὴ $1=\text{συν}0^0$, ἕπεται ὅτι :

$$1 + \text{συν}A = \text{συν}0^0 + \text{συν}A = 2\text{συν}\left(\frac{0+A}{2}\right) \cdot \text{συν}\left(\frac{0-A}{2}\right)$$

$$= 2\text{συν}^2\left(\frac{A}{2}\right) \cdot$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $1 - \text{συν}A = 2\text{ἡμ}^2\left(\frac{A}{2}\right) \cdot$

Σημείωσις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰς ἰσότητας ταύτας ἀνεύρομεν καὶ ἄλλως (§ 107).

Ἀσκήσεις

369. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἡμ(38° 16′) + ἡμ(52° 24′) χωρὶς νὰ εὑρεθῶσι προηγουμένως οἱ προσθετέοι αὐτοῦ.

370. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ ἡμ(64° 40′ 20″) − ἡμ (28° 16′ 8″) χωρὶς νὰ εὑρεθῇ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος.

371. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα συν (18° 46′ 54″) + συν(40° 24′ 12″) χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν οἱ προσθετέοι αὐτοῦ.

372. Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως ἡ διαφορὰ συν (34° 16′ 36″) − συν (58° 18′ 44″).

373. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ παραστάσεις 1 ± ἡμ(26° 22′ 40″).

374. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ παραστάσεις 1 ± συν (32° 50′ 34″).

375. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ παραστάσεις ἡμ490° ± ἡμ 350°.

376. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$\text{ἡμ}B + \text{ἡμ}Γ = \sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{B-Γ}{2}\right)$ καὶ ὅτι $\text{ἡμ}B - \text{ἡμ}Γ = \sqrt{2}\,\text{ἡμ}\left(\frac{B-Γ}{2}\right)$.

377. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$\text{συν}B + \text{συν}Γ = \sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{B-Γ}{2}\right)$ καὶ $\text{συν}B - \text{συν}Γ = \sqrt{2}\,\text{ἡμ}\left(\frac{Γ-B}{2}\right)$

378. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις:

$$\text{συν}α + \text{συν}3α.$$

379. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{συν}ω + 2\text{συν}2ω + \text{συν}3ω = 4\text{συν}2ω\text{συν}^2\left(\frac{ω}{2}\right).$$

380. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις:

$$\text{ἡμ}α + \text{ἡμ}5α.$$

125. *Πρόβλημα VI.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις ἐφA ± ἐφB.**

Λύσις. α′) Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\text{ἐφ}A = \frac{\text{ἡμ}A}{\text{συν}A}$, $\text{ἐφ}B = \frac{\text{ἡμ}B}{\text{συν}B}$ εὑρίσκομεν ὅτι: $\text{ἐφ}A + \text{ἐφ}B = \frac{\text{ἡμ}A}{\text{συν}A} + \frac{\text{ἡμ}B}{\text{συν}B} = \frac{\text{ἡμ}A\text{συν}B + \text{συν}A\text{ἡμ}B}{\text{συν}A \cdot \text{συν}B}$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ ἡμ(Α+Β), ἕπεται ὅτι :

$$\text{ἐφ}A + \text{ἐφ}B = \frac{\text{ἡμ}(A+B)}{\text{συν}A \cdot \text{συν}B}$$

β΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}A - \text{ἐφ}B = \frac{\text{ἡμ}(A-B)}{\text{συν}A \cdot \text{συν}B} \qquad (76)$$

126. *Πρόβλημα VII.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις 1 ± ἐφΑ.**

Λύσις. Ἐπειδὴ $1 = \text{ἐφ}45^0$, ἕπεται ὅτι :

$$1 + \text{ἐφ}A = \text{ἐφ}45^0 + \text{ἐφ}A = \frac{\text{ἡμ}(45^0 + A)}{\text{συν}45^0 \ \text{συν}A} = \frac{\sqrt{2}\,\text{ἡμ}(45^0 + A)}{\text{συν}A}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$1 - \text{ἐφ}A = \frac{\sqrt{2}\,\text{ἡμ}(45^0 - A)}{\text{συν}A} \qquad (77)$$

Ἀσκήσεις

381. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἐφ(42⁰ 30΄) + ἐφ(34⁰ 40΄) καὶ ἡ διαφορὰ ἐφ(36⁰ 45΄) – ἐφ (11⁰ 45΄).

382. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 1 + ἐφ (120⁰ 30΄) καὶ ἡ διαφορὰ
1 – ἐφ(18⁰ 20΄).

383. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἐφ1120⁰ + ἐφ3635⁰.

384. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ ἐφ(–25⁰ 42΄) – ἐφ(– 45⁰).

385. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{ἐφ}\,B + \text{ἐφ}\Gamma = \frac{2}{\text{ἡμ}2B}.$$

386. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{ἐφ}B - \text{ἐφ}\Gamma = \frac{2\text{ἡμ}(B - \Gamma)}{\text{ἡμ}2B.}.$$

387. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις σφ Α + σφ Β.

388. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις $\frac{\text{ἐφ}A + \text{σφ}B}{\text{σφ}A + \text{σφ}B}$.

389. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\text{ἐφ}\frac{5\pi}{3} + \text{ἐφ}\frac{3\pi}{8}$ καὶ ἡ διαφορὰ

$$\text{ἐφ}\frac{4\pi}{3} - \text{ἐφ}(268^0\ 12').$$

127. *Πρόβλημα VIII.* **Νὰ γίνωσι λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις ἡμΑ ± συνΒ.**

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι συνΒ = ἡμ(90⁰ – Β) καὶ ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους (70 § 120). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \textbf{ἡμA} + \textbf{συνB} &= 2\textbf{ἡμ}\left(\frac{A-B}{2} + 45^0\right)\textbf{συν}\left(\frac{A+B}{2} - 45^0\right) \\ \textbf{ἡμA} - \textbf{συνB} &= 2\textbf{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2} - 45^0\right)\textbf{συν}\left(\frac{A-B}{2} + 45^0\right) \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Ἀσκήσεις

390. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἡμ(18^0\ 12'\ 40'') + συν(24^0\ 20'\ 30'')$.

391. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $ἡμ(72^0\ 24') - συν(106^0\ 30'\ 42'')$.

392. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἡμ\,\frac{3\pi}{8} + συν\,\frac{2\pi}{5}$ καὶ ἡ διαφορὰ

$$ἡμ\,\frac{4\pi}{7} - συν\,\frac{2\pi}{7}$$

393. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $ἡμ1925^0 + συν\,930^0$ καὶ ἡ διαφορὰ $συν\,1128^0 - ἡμ\,1656^0$.

128. Χρῆσις βοηθητικῆς γωνίας. Πολλαὶ παραστάσεις γίνονται λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων μὲ τὴν χρῆσιν βοηθητικῆς γωνίας. Αἱ συνηθέστεραι μορφαὶ τοιούτων παραστάσεων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

α′) Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\alpha + \beta$. Αὗται γίνονται λογισταὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους :

1ον. Εἶναι φανερὸν ὅτι $\alpha + \beta = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$. Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = ἐφ^2\omega$, εὑρίσκομεν ὅτι : $\alpha + \beta = \alpha(1 + ἐφ^2\omega) = \frac{\alpha}{συν^2\omega}$

2ον. Ἂν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = ἐφ\omega$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + ἐφ\omega) = \alpha\sqrt{2}\cdot\frac{ἡμ(45^0 + \omega)}{συν\omega} (\S\ 126).$$

3ον. Ἂν εἶναι $\beta \langle \alpha$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = συν\omega$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha + \beta = \alpha(1 + συν\omega) = 2\alpha συν^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

β′) Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\alpha - \beta$, *ἂν* $\alpha \rangle \beta$. Εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$ θέτομεν $\frac{\beta}{\alpha} = ἡμ^2\omega$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\alpha - \beta = \alpha(1 - ἡμ^2\omega) = \alpha\,συν^2\omega.$$

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θέσωμεν $\frac{\alpha}{\beta} = συν\omega$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$α - β = α(1 - συνω) = 2αἡμ_2\left(\frac{ω}{2}\right)$$

γ') Παραστάσεις τῆς μορφῆς $αἡμχ \pm βσυνχ$. Ἐξάγοντες τὸν α ἐκτὸς παρενθέσεως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$αἡμχ \pm βσυνχ = α\left(ἡμχ \pm \frac{β}{α} συνχ\right).$$

Ἔπειτα θέτομεν $\frac{β}{α} = ἐφω = \frac{ἡμω}{συνω}$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$αἡμχ + βσυνχ = α \cdot \frac{ἡμχσυνω \pm ἡμωσυνχ}{συνω} = \frac{αἡμ(χ \pm ω)}{συνω}.$$

δ') Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{α^2 + β^2}$. Ἐπειδὴ $α^2 + β^2 = α^2\left(1 + \frac{β^2}{α^2}\right)$ ἕπεται ὅτι $\sqrt{α^2 + β^2} = α\sqrt{1 + \frac{β^2}{α^2}}$. Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{β^2}{α^2} = ἐφ^2ω$, αὕτη (§ 89) γίνεται :

$$\sqrt{α^2 + β^2} = α\sqrt{1 + ἐφ^2ω} = \frac{α}{συνω}$$

ε') Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{α^2 - β^2}$, *ἂν* $α > β$. Εἰς τὴν ἰσότητα $\sqrt{α^2 - β^2} = α\sqrt{1 - \frac{β^2}{α^2}}$ θέτομεν $\frac{β^2}{α^2} = συν^2ω$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\sqrt{α^2 - β^2} = α\sqrt{1 - συν^2ω} = αἡμω.$$

Ἀσκήσεις

394. Ἂν λογα = 3,35892, λογβ = 2,75064, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα α + β καὶ ἡ διαφορὰ α − β, χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β.

395. Ἂν λογχ = 1,27964 καὶ λογψ = 0,93106, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\frac{χ - ψ}{χ + ψ}$.

396. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως : $\sqrt{2} + 2ἡμχ$ διὰ $χ = 48^0\,15'\,40''$.

397. Νὰ εὑρεθῇ ὀξεῖα γωνία χ διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι: $ἐφχ = \sqrt{2} + ἡμ20^0$.

129. Τροπὴ γινομένου τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $συν75^0 \,.\, συν15^0$, θέτομεν $χ = συν75^0 \,.\, συν15^0$.

Ἔπειτα λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ εὑρίσκομεν :

$$λογχ = λογσυν75^0 + λογσυν15^0 = \overline{1},39794.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 0{,}25$.

Ἂν ὅμως ἐνθυμηθῶμεν ὅτι :

$$2\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta = \text{συν}(\alpha+\beta) + \text{συν}(\alpha-\beta),$$

εὑρίσκομεν ὅτι :

$$2\chi = \text{συν}90^0 + \text{συν}60^0 = \frac{1}{2} \text{ καὶ ἑπομένως } \chi = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ὁμοίως, ἂν $\psi = \text{ἡμ}(67^0 30')\,.\,\text{ἡμ}(22^0 30')$, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$2\psi = 2\,\text{ἡμ}(67^0 30') \cdot \text{ἡμ}(22^0 30') = \text{συν}45^0 - \text{συν}90^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ καὶ}$$

ἑπομένως $\psi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα βλέπομεν ὅτι εἶναι χρήσιμος ἡ μετατροπὴ γινομένων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς ἀθροίσματα ἢ διαφορὰς τοιούτων.

Αἱ συνηθέστεραι τοιαῦται μετατροπαὶ γίνονται κατὰ τοὺς ἀκολούθους γνωστοὺς τύπους :

$$\begin{aligned}
2\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta &= \text{συν}(\alpha-\beta) + \text{συν}(\alpha+\beta)\\
2\,\text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta &= \text{συν}(\alpha-\beta) - \text{συν}(\alpha+\beta)\\
2\,\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta &= \text{ἡμ}(\alpha+\beta) + \text{ἡμ}(\alpha-\beta)\\
2\,\text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha &= \text{ἡμ}(\alpha+\beta) - \text{ἡμ}(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις

398. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα:
$\text{συν}(67^0 30')\,\text{συν}(22^0 30')$ καὶ $\text{ἡμ}15^0 \cdot \text{ἡμ}75^0$.

399. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ γινόμενα $\text{ἡμ}(82^0 30')\,\text{συν}(37^0 30')$ καὶ
$\text{συν}(52^0 30')\,\text{ἡμ}(7^0 30')$.

400. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασισς :
$\text{ἡμ}7\chi - 2\,\text{ἡμ}\chi\,(\text{συν}2\chi + \text{συν}4\chi + \text{συν}6\chi)$.

401. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις:
$\text{ἡμ}\,13\chi - 2\,\text{ἡμ}2\chi(\text{συν}3\chi + \text{συν}7\chi + \text{συν}11\chi)$.

402. Νὰ γίνῃ ἁπλουστέρα ἡ παράστασις.
$\text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}(\beta-\gamma) + \text{ἡμ}\beta\,\text{ἡμ}(\gamma-\alpha) + \text{ἡμ}\gamma\,\text{ἡμ}(\alpha-\beta)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

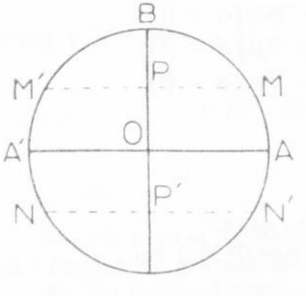
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

130. Ὁρισμὸς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως. Ἡ ἐξίσωσις ἡμχ = ἡμ35^0 ἀληθεύει διὰ χ = 35^0 καὶ διὰ χ = $180^0 - 35^0 = 145^0$. Ἐπειδὴ δὲ ἡμ$(360^0 + 35^0)$ = ἡμ35^0 καὶ ἡμ$(360^0 + 145^0)$ = ἡμ35^0, ἔπεται ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ

$$\left.\begin{aligned} &\text{ἔπεται ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ } χ = 360^0k + 35^0 \\ &\text{καὶ διὰ } χ = 360^0k + 145^0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός. Π.χ. διὰ k = 1, εὑρίσκομεν χ = 395^0 καὶ χ = 505^0 κ.τ.λ.



Σχ. 50

Μὲ οὐδεμίαν δὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ χ ἀληθεύει· διότι, ἂν Μ καὶ Μ΄ (σχ. 50) εἶναι τὰ πέρατα τῶν τόξων 35^0 καὶ 145^0, θὰ εἶναι ἡμ35^0 = ἡμ145^0 = (ΟΡ). Πᾶν δὲ τόξον λῆγον εἰς ἄλλο σημεῖον Ν ἔχει ἡμίτονον (ΟΡ΄) ≠ (ΟΡ).

Ἡ ἐξίσωσις ἡμχ = ἡμ35^0 λέγεται **τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις.** Οἱ δὲ τύποι (1) ἀποτελοῦσι τὴν λύσιν αὐτῆς.

Καὶ αἱ ἐξισώσεις 2ἡμχ = 1, συνχ + ἡμχ = 1, ἐφχ − 3 = 3σφχ εἶναι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις. Ὥστε:

Μία ἐξίσωσις λέγεται τριγωνομετρική, ἂν περιέχῃ ἕνα τοὐλάχιστον τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἀγνώστου τόξου ἢ γωνίας καὶ δὲν ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου τούτου.

Λύσις δὲ τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τύπου ἢ τύπων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους μόνον εὑρίσκομεν ὅσα θέλομεν τόξα ταὐτοποιοῦντα τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.

131. Εἴδη τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον.

α΄) *Ἁπλαῖ τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.* Οὕτως ὀνομάζονται αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι τὰς ἀκολούθους μορφάς:

$$\text{ἡμ}\chi = \text{ἡμ}\tau,\quad \text{συν}\chi = \text{συν}\tau,\quad \text{ἐφ}\chi = \text{ἐφ}\tau,\quad \text{σφ}\chi = \text{σφ}\tau,$$

$$\text{ἡμ}\chi = \alpha,\quad \text{συν}\chi = \alpha,\quad \text{ἐφ}\chi = \alpha,\quad \text{σφ}\chi = \alpha$$

ἢ καὶ τοιαύτας:

$$\text{ἡμ}\,(2\chi + 5^0) = \text{ἡμ}52^0,\quad \text{συν}\,(2\chi + 12^0) = \text{συν}\left(\frac{\chi}{2} - 30^0\right),$$

$$\text{ἐφ}\left(2\chi - \frac{\pi}{2}\right) = \text{ἐφ}\left(\chi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ κ.τ.λ.}$$

β΄) Ἡ ἐξίσωσις $5\text{συν}\chi + \frac{1}{2} = 3\text{συν}\chi + \frac{3}{2}$ ἔχει ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς ἄγνωστον τὸ συνχ. Αὕτη λυομένη πρὸς συνχ γίνεται $\text{συν}\chi = \frac{1}{2}$, ἤτοι γίνεται ἁπλῆς μορφῆς.

γ΄) Ὑπάρχουσι τέλος καὶ πολυπλοκώτεραι ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου ἢ καὶ συναρτήσεων αὐτοῦ. Τοιαῦται π.χ. εἶναι αἱ $\text{συν}2\chi - \text{συν}\frac{\chi}{2} = 0{,}924$, $\text{ἐφ}2\chi - \text{ἡμ}\chi = 0$ κ.τ.λ.

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ μάθωμεν πῶς λύονται αἱ ἁπλούστεραι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις.

132. Λύσις τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων ἁπλῆς μορφῆς.

α΄) Ἡ ἐξίσωσις $\text{ἡμ}\chi = \text{ἡμ}\tau$ ἀληθεύει διὰ $\chi = \tau$, διὰ $\chi = 180^0 - \tau$ ἢ διὰ $\chi = 360^0k + \tau$ καὶ διὰ $\chi = 360^0k + 180^0 - \tau$, ὡς ἐξηγήσαμεν προηγουμένως (§ 130). Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο πρῶται τιμαὶ τοῦ χ προέρχονται ἐκ τῶν δύο τελευταίων τύπων διὰ $k = 0$, ἕπεται ὅτι τὴν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀποτελοῦσιν οἱ τύποι:

$$\chi = 360^0k + \tau \text{ καὶ } \chi = 360^0k + 180^0 - \tau.$$

ἢ εἰς ἀκτίνια $\chi = 2k\pi + \tau$ καὶ $\chi = (2k + 1)\,\pi - \tau$.

Ἡ ἐξίσωσις $\text{ἡμ}\chi = \frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\text{ἡμ}\chi = \text{ἡμ}30^0$ καὶ ἀληθεύει διὰ

$\chi = 360^0k + 30^0$ καὶ διὰ $\chi = 360^0k + 180^0 - 30^0 = 360^0k + 150^0$

ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ καὶ διὰ $\chi = (2k + 1)\,\pi - \frac{\pi}{6}$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $ἡμ\chi = 0{,}45139$, εὑρίσκομεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων ὅτι $0{,}45139 = ἡμ(26^0 50')$.

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $ἡμ\chi = ἡμ(26^0 50')$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\chi = 360^0 k + 26^0 50'$.
καὶ διὰ $\chi = 360^0 k + 180^0 - (26^0 50') = 360^0 k + 153^0\ 10'$.

Ἀξιοσημείωτος εἶναι ἡ ἐξίσωσις $ἡμ\chi = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $ἡμ\chi = ἡμ0^0$ καὶ $ἡμ\chi = ἡμ180^0$. Ἀληθεύει ἑπομένως διὰ $\chi = 360^0 k + 0^0$ καὶ διὰ $\chi = 360^0 k + 180^0 - 0^0$
ἢ $\chi = 180^0 . 2k$ καὶ $\chi = 180^0(2k + 1)$.
Αὗται συγχωνεύονται εἰς τὴν $\chi = 180^0 \lambda$ ἢ $\chi = \lambda\pi$, ἂν λ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

β′) Ἡ ἐξίσωσις $συν\chi = συν\tau$ ἀληθεύει διὰ $\chi = \tau$. Ἐπειδὴ δὲ $συν(-\tau) = συν\tau$, ἀληθεύει καὶ διὰ $\chi = -\tau$. Κατ᾿ ἀκολουθίαν ἀληθεύει γενικῶς διὰ

$$\chi = 360^0 k \pm \tau \text{ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ } \chi = 2k\pi \pm \tau.$$

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $συν\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἐνθυμούμεθα ὅτι $\frac{\sqrt{2}}{2} = συν45^0$ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $συν\chi = συν45^0 = συν\frac{\pi}{4}$. Ἀληθεύει δὲ διὰ

$$\chi = 360^0 k \pm 45^0 \text{ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ } \chi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὴν ἐξίσωσιν $συν\chi = 0{,}94832$, εὑρίσκομεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πινάκων ὅτι $0{,}94832 = συν(18^0 30')$.

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $συν\chi = συν(18^0 30')$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\chi = 360^0 k \pm (18^0 30')$.

γ′) Ἡ ἐξίσωσις $ἐφ\chi = ἐφ\tau$ ἀληθεύει προφανῶς διὰ $\chi = \tau$ καὶ γενικῶς διὰ $\chi = 360^0 k + \tau$. Ἐπειδὴ δὲ $ἐφ(180^0 + \tau) = ἐφ\tau$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $ἐφ\chi = ἐφ(180^0 + \tau)$ καὶ ἀληθεύει γενικῶς διὰ $\chi = 360^0 k + 180^0 + \tau = 2 \cdot 180^0 k + 180^0 + \tau = 180^0(2k + 1) + \tau$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\chi = 360^0 k + \tau = 180^0 \cdot 2k + \tau$, δυνάμεθα νὰ συμπτύξωμεν τοὺς δύο τύπους εἰς τὸν $\chi = 180^0 \lambda + \tau$ ἢ εἰς ἀκτίνια $\chi = \lambda\pi + \tau$, ἂν λ εἶναι 0 ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἡ ἐξίσωσις $ἐφ\chi = 1 = ἐφ45^0$ ἀληθεύει διὰ

$$\chi = 180^0 \lambda + 45^0 \text{ ἢ διὰ } \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐφχ = 2,56064, εὑρίσκομεν πρῶτον ἀπὸ τοὺς πίνακας ὅτι 2,56064 = ἐφ(68⁰40′5″).

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν γίνεται ἐφχ = ἐφ(68⁰40′5″) καὶ ἀληθεύει διὰ

$$χ = 180^0λ + 68^040'5''.$$

δ′) Ἡ ἐξίσωσις ἐφχ = σφτ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\frac{1}{ἐφχ} = \frac{1}{ἐφτ}$ ἢ ἐφχ = ἐφτ καὶ ἔχει τὰς ρίζας αὐτῆς.

Ἀνακεφαλαίωσις

α′) Ἡ ἐξίσωσις ημχ = ἡμτ ἀληθεύει διὰ

$χ = 360^0k + τ$ καὶ διὰ $χ = 360^0k + 180^0 - τ$.

ἢ διὰ $χ = 2kπ + τ$ καὶ διὰ $χ = (2k + 1)π - τ$.

β′) Ἡ ἐξίσωσις συνχ = συντ ἀληθεύει διὰ

$χ = 360^0k \pm τ$ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $χ = 2kπ \pm τ$.

γ′) Ἡ ἐξίσωσις ἐφχ = ἐφτ ἀληθεύει διὰ

$χ = 180^0λ + τ$ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $χ = λπ + τ$.

δ′) Ἡ ἐξίσωσις σφχ = σφτ ἀληθεύει διὰ

$χ = 180^0λ + τ$ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ $χ = λπ + τ$.

Ἀσκήσεις

403. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

ἡμχ = ἡμ23⁰, συνχ = συν15⁰, ἐφχ = ἐφ54⁰, σφχ = σφ (37⁰ 20′).

404. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$ἡμχ = ἡμ\,\frac{3π}{8},\quad συνχ = συν\,\frac{π}{5},\quad ἐφχ = ἐφ\,\frac{7π}{12},\quad σφχ = σφ\,\frac{4π}{9}.$$

405. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$ἡμχ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad συνχ = \frac{1}{2},\quad ἐφχ = -1,\ σφχ = 0.$$

406. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις :

ἡμχ = 0,75, συνχ = 0,825, ἐφχ = 1,125, σφχ = 0,895.

407. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$συνχ = συν\left(\frac{χ}{2} - π\right),\quad ἐφ\left(\frac{χ}{3} - \frac{3π}{8}\right) = ἐφ\,2χ.$$

408. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$σφ\left(\frac{2χ}{5} + 30^0\right) = σφ\left(\frac{χ}{3} + 30^0\right),\quad ἡμ\,(2χ + 50^0) = ἡμ\,(χ + 25^0).$$

133. Λύσις τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων ἀλγεβρικῆς μορφῆς πρὸς ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν ἀγνώστου τόξου ἢ γωνίας. Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις :

$$2\text{συν}χ + 3 = \frac{\text{συν}χ}{2} + \frac{15}{4}.$$

Ἂν λύσωμεν αὐτὴν πρὸς συνχ, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\text{συν}χ = \frac{1}{2} = \text{συν}60^0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει διὰ

$$χ = 360^0 k \pm 60^0 \text{ ἢ εἰς ἀκτίνια διὰ } χ = 2kπ \pm \frac{π}{3}.$$

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}^2χ - (1 + \sqrt{3})\,\text{ἐφ}χ + \sqrt{3} = 0$. Ἂν λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν ἐφχ, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{ἐφ}χ = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3})}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow \sqrt{3} \end{matrix}$$

Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων :

$$\text{ἐφ}χ = 1 \text{ καὶ } \text{ἐφ}χ = \sqrt{3} \text{ ἢ } \text{ἐφ}χ = \text{ἐφ}\,\frac{π}{4} \text{ καὶ } \text{ἐφ}χ = \text{ἐφ}\frac{π}{3}.$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$χ = λπ + \frac{π}{4} \text{ καὶ } χ = λπ + \frac{π}{3}.$$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα βλέπομεν ὅτι ἡ λύσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀγνώστου, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς αὐτόν, ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἁπλῶν ἐξισώσεων.

Ἀσκήσεις

409. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:
$10\text{συν}χ - 1 = 6\text{συν}χ + 1,\ 2\text{συν}^2χ - 3\text{συν}χ + 1 = 0.$

410. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$3\text{ἡμ}χ + 2 = 7\text{ἡμ}χ - 2,\ \text{ἡμ}^2χ - \frac{3\text{ἡμ}χ}{2} \quad \frac{1}{2} = 0.$$

411. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$(\text{ἐφ}χ - 1)^2 - \text{ἐφ}^2χ = -3,\quad \text{ἐφ}^2χ - 3\text{ἐφ}χ = \sqrt{3}(\text{ἐφ}χ - 3).$$

412. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$\text{σφ}χ\,(\text{σφ}χ - 3) + 1 = 5\,(\text{σφ}χ - 3),\quad \text{ἐφ}χ + \frac{3\text{ἐφ}χ - 1}{5} = 1 - \frac{5\text{ἐφ}χ - 16}{3}.$$

413. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$(2\text{συν}\chi - 3)^2 - 8\text{συν}\chi = 0, \qquad \frac{1}{\text{ἡμ}^2\chi} - \frac{2}{\text{ἡμ}\chi} + 1 = 0.$$

134. Λύσις τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μορφῆς διαφόρου τῶν προηγουμένων. Ἡ λύσις τῶν τοιούτων ἐξισώσεων δὲν δύναται νὰ ὑπαχθῇ εἰς γενικὸν κανόνα ἕνεκα τῆς μεγάλης ποικιλίας αὐτῶν. Θὰ περιορισθῶμεν λοιπὸν εἰς μερικὰ παραδείγματα ἀπὸ τὰ ἁπλούστερα.

Παράδειγμα 1ον. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἡμχ — συνχ = 0.**
Λύσις. α′ τρόπος. Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$\text{ἡμ}\chi = \text{συν}\chi \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \text{συν}\chi.$$

Ἑπομένως (§ 132) ἀληθεύει διὰ $\chi = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \chi \quad \text{καὶ} \quad \chi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + \chi.$$

Ἐκ τῆς α′ τούτων προκύπτει $\chi = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (1). Ἐκ δὲ τῆς β′ προκύπτει $0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $k = \frac{1}{4}$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ k μόνον ἀκεραίας τιμὰς πρέπει νὰ λαμβάνῃ. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει μόνον διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ παρεχομένην ὑπὸ τῆς (1).

β′ τρόπος. Γνωρίζομεν ὅτι : $\text{ἡμ}\chi - \text{συν}\chi = \text{ἡμ}\chi - \text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$ $= 2\text{ἡμ}\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right)\text{συν}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\text{ἡμ}\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right)$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\text{ἡμ}\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = 0 = \text{ἡμ}0^0$. Ἀληθεύει δὲ (§ 132 α′) διὰ $\chi - \frac{\pi}{4} = \lambda\pi$, ὅθεν $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$.

γ′ τρόπος. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἂν ἦτο συνχ = 0, θὰ ἦτο καὶ ἡμχ = 0. Αἱ δύο ὅμως αὗται ἐξισώσεις δὲν συναληθεύουσι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ χ. Διότι τόξα, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι συνχ = 0, εἶναι τὰ λήγοντα εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ τῆς περιφερείας. Διὰ ταῦτα δὲ εἶναι ἡμχ = ± 1. Εἶναι λοιπὸν συνχ $\neq$ 0, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\frac{\text{ἡμ}\chi}{\text{συν}\chi} = 1$ ἢ $\text{ἐφ}\chi = 1 = \text{ἐφ}\frac{\pi}{4}$. Ἑπομένως (§ 132 γ'), ἀληθεύει διὰ $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}\cdot$

Παράδειγμα 2ον. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{ἡμ}\chi = \text{συν}2\chi$.**

Λύσις. α' τρόπος. Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \text{συν}2\chi$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\frac{\pi}{2} - \chi = 2k\pi \pm 2\chi$.

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\chi = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} = \frac{(1-4k)\pi}{6} \text{ καὶ } \chi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}\cdot$$

β' τρόπος. Γνωρίζομεν (§ 103) ὅτι $\text{συν}2\chi = 1 - 2\text{ἡμ}^2\chi$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2\text{ἡμ}^2\chi + \text{ἡμ}\chi - 1 = 0$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $\text{ἡμ}\chi = -1 = \text{ἡμ}\frac{3\pi}{2}$ καὶ ἂν $\text{ἡμ}\chi = \frac{1}{2} = \text{ἡμ}\frac{\pi}{6}\cdot$

Οὕτω τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν δύο τελευταίων ἁπλῆς μορφῆς ἐξισώσεων.

Παράδειγμα 3ον. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}\chi = \text{σφ}\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$**

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right) + \left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι $\text{σφ}\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right)$ Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν γίνεται $\text{ἐφ}\chi = \text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right)$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν

$$\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}, \text{ ὅθεν } \chi = \frac{(4\lambda + 1)\pi}{6}\cdot$$

Παράδειγμα 4ον. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\text{ἡμ}^2\chi - \text{συν}^2\chi = 2$**

Λύσις. Ἐπειδὴ $\text{ἡμ}^2\chi = 1 - \text{συν}^2\chi$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$2(1 - \text{συν}^2\chi) - \text{συν}^2\chi = 2 \text{ ἢ } \text{συν}^2\chi = 0.$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $\text{συν}\chi = 0 = \text{συν}\frac{\pi}{2}$ καὶ ἑπομένως

$$\chi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = \frac{(4k \pm 1)\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 5ον. **Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:**

$$4\text{συν}\chi - 8\text{συν}\left(\frac{\chi}{2}\right) + 6 = 0.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ $\text{συν}\chi = 2\text{συν}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - 1$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$4\text{συν}^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - 4\text{συν}\left(\frac{\chi}{2}\right) + 1 = 0.$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει διὰ $\text{συν}\frac{\chi}{2} = \frac{1}{2} = \text{συν}\,\frac{\pi}{3}$ καὶ ἑπομένως:

$$\frac{\chi}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{3}, \text{ ὅθεν } \chi = \frac{(6k \pm 1)2\pi}{3}.$$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα βλέπομεν ὅτι καὶ τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων ἁπλῆς μορφῆς. Ἡ ἀναγωγὴ αὕτη ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς γνωστῶν καὶ καταλλήλων ἑκάστοτε σχέσεων μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν διαφόρων τόξων.

Ἀσκήσεις

414. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$\text{ἡμ}\frac{\chi}{2} = \text{συν}\chi, \quad \text{ἡμ}\chi = \text{συν}\frac{\chi}{3}, \quad \text{ἐφ}\chi = \text{σφ}\frac{\chi}{4}.$$

415. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$\text{ἡμ}^2\chi - \text{συν}^2\chi = 0, \; 2\text{συν}\chi - 3\text{ἡμ}^2\chi = -2.$

416. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις: $3\text{ημ}^2\chi - \text{συν}^2\chi = 1, \; \text{συν}2\chi - \text{συν}^2\chi = 0.$

417. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{3\text{ἡμ}\chi - \text{συν}\chi}{\text{ἡμ}\chi + \text{συν}\chi} = 1.$

418. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}(\chi + 60^0) + \text{σφ}(60^0 - 3\chi) = 0.$

135. Μία κλασσικὴ τριγωνομετρικὴ ἐξίσωσις. Ὑπάρχουσι τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι λύονται μὲ εἰδικοὺς τρόπους ἐξαρτωμένους ἀπὸ τὴν μορφὴν ἑκάστης. Ἀπὸ αὐτὰς ἁπλούστεραι καὶ συνηθέστερον ἀπαντώμεναι εἶναι αἱ ἔχουσαι ἢ λαμβάνουσαι μίαν τῶν μορφῶν $\boldsymbol{\alpha\text{ἡμ}\chi \pm \beta\text{συν}\chi = \gamma}$.

Ταύτας λύομεν ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν τὰ μέλη αὐτῶν διὰ α καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις:

$$\text{ἡμ}\chi \pm \frac{\beta}{\alpha}\text{συν}\chi = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = \text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}$ (ω βοηθητικὸς ἄγνωστος), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$ἡμχ \pm \frac{ἡμω}{συνω} \cdot συν\, χ = \frac{γ}{α}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν:

$$ἡμχσυνω \pm ἡμωσυνχ = \frac{γ}{α} συνω,\ ἢ\ ἡμ(χ \pm ω) = \frac{γ}{α} συνω \quad (1).$$

Ἂν δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $ἐφω = \frac{β}{α}$ εὕρωμεν μίαν τιμὴν τοῦ ω, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰς (1) πρὸς ἄγνωστον τόξον $(χ \pm ω)$.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3ἡμχ + \sqrt{3}συνχ = 3$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$ἡμχ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot συνχ = 1.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\sqrt{3}}{3} = ἐφ\frac{π}{6}$, αὕτη γίνεται κατὰ σειράν:

$$ἡμχ + \frac{ἡμ\frac{π}{6}}{συν\frac{π}{6}} συνχ = 1, \quad ἡμχσυν\frac{π}{6} + ἡμ\frac{π}{6} συνχ = συν\frac{π}{6}$$

$$ἡμ\left(χ + \frac{π}{6}\right) = ἡμ\frac{π}{3}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$χ + \frac{π}{6} = 2kπ + \frac{π}{3} \quad καὶ \quad χ + \frac{π}{6} = (2k+1)π - \frac{π}{3}\ κτλ.$$

Ἀσκήσεις

419. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{3}ἡμχ + συνχ - 1 = 0$.

420. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $ἡμχ - συνχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

421. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συν3χ + ἡμ3χ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

422. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\sqrt{2}}{συνχ} - 1 = ἐφχ$.

423. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4ἡμχ + 5συνχ = 6$.

2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

136. *Πρόβλημα I.* **Τὸ ἡμίτονον τῆς μιᾶς ὀξείας γωνίας**

ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἡμιτόνου τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν ὀξειῶν τούτων γωνιῶν.

Λύσις. Τὰ ζητούμενα μέτρα Β καὶ Γ πρέπει νὰ ταὐτοποιῶσι τὰς δύο ἐξισώσεις : $B+\Gamma=90^0$, $\text{ἡμ}B = 2\text{ἡμ}\Gamma$.

Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἕνεκα τῆς α' ἐξισώσεως εἶναι $\text{ἡμ}\Gamma = \text{συν}B$. Ἡ δὲ β' ἐξίσωσις γίνεται $\text{ἡμ}B = 2\text{συν}B$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}B \neq 0$, αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $\text{ἐφ}B=2$. Τῇ βοηθείᾳ δὲ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ἐφ}B = \text{ἐφ}(63^0 26'5'',7).$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $B = 180^0\lambda+63^0 26'5'',7$. Ἐπειδὴ δὲ $0^0 < B < 90^0$, πρέπει νὰ εἶναι $\lambda = 0$ καὶ ἐπομένως

$$B = 63^0 26'5'',7 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = 90^0 - (63^0 26'5'',7) = 26^0 33'54'',3.$$

137. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῶσι δύο γωνίαι τριγώνου τῶν ὁποίων τὰ ἡμίτονα ἔχουσιν ἄθροισμα $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ καὶ διαφορὰν $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$**

Λύσις. Ἂν χ καὶ ψ εἶναι τὰ μέτρα τῶν ζητουμένων γωνιῶν, θὰ εἶναι:

$$\text{ἡμ}\chi + \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \text{καὶ } \text{ἡμ}\chi - \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Ἂν πρὸς στιγμὴν θεωρήσωμεν ὡς ἀγνώστους τὸ ἡμχ καὶ ἡμψ, τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει ἀλγεβρικὴν μορφὴν πρὸς τοὺς ἀγνώστους τούτους. Κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀλγέβρας προσθέτομεν καὶ εἶτα ἀφαιροῦμεν ταύτας κατὰ μέλη. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$2\text{ἡμ}\chi = \sqrt{2},\ 2\text{ἡμ}\psi = 1 \quad \text{ἢ τὸ}$$

$$\text{ἡμ}\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ἡμ}\frac{\pi}{4}, \qquad \text{ἡμ}\psi = \frac{1}{2} = \text{ἡμ}\frac{\pi}{6}$$

Ἡ πρώτη τούτων ἀληθεύει διὰ

$$\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{καὶ διὰ } \chi = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4},$$

ἡ δὲ β' διὰ $\psi = 2k'\pi + \frac{\pi}{6}$ καὶ διὰ $\psi = (2k'+1)\pi - \frac{\pi}{6}$.

Συνδυάζοντες ἕκαστον τύπον διὰ τὸν χ μὲ ἕκαστον διὰ τὸν ψ εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους γενικὰς λύσεις :

$$\left.\begin{aligned}\chi &= 2k\pi + \frac{\pi}{4}\\ \psi &= 2k'\pi + \frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\}(1) \qquad \left.\begin{aligned}\chi &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}\\ \psi &= 2k'\pi + \frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\chi &= 2k\pi + \frac{\pi}{4}\\ \psi &= (2k'+1)\pi - \frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\}(2) \qquad \left.\begin{aligned}\chi &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}\\ \psi &= (2k'+1)\pi - \frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\}(4)$$

Ἐπειδὴ ὅμως χ καὶ ψ εἶναι μέτρα γωνιῶν τριγώνου, πρέπει νὰ εἶναι $\chi + \psi < \pi, \chi > 0, \psi > 0$.

Ἀπὸ τὸ ζεῦγος(1) εὑρίσκομεν λοιπὸν δεκτὰς τιμὰς $\chi = \frac{\pi}{4}$, $\psi = \frac{\pi}{6}$ διὰ $k = k' = 0$. Ἀπὸ τὸ (2) οὐδεμίαν δεκτήν, ἀπὸ τὸ (3) εὑρίσκομεν $\chi = \frac{3\pi}{4}$, $\psi = \frac{\pi}{6}$ καὶ ἀπὸ τὸ (4) οὐδεμίαν.

138. Τριγωνομετρικὰ συστήματα. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προβλήματα βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουσ προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστημάτων μὲ μίαν τοὐλάχιστον τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν. Τὰ τοιαῦτα συστήματα λέγονται τριγωνομετρικὰ συστήματα. Τὰ προηγούμενα λοιπὸν συστήματα (§ § 136, 137) εἶναι τριγωνομετρικὰ συστήματα. Ὥστε:

Τριγωνομετρικὸν σύστημα λέγεται πᾶν σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν τοὐλάχιστον τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν.

Τὰ ἁπλούστερα καὶ συνηθέστερα τριγωνομετρικὰ συστήματα ἔχουσι δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους. Ταῦτα διακρίνομεν εἰς δύο εἴδη.

Τὸ α' εἶδος περιέχει μόνον μίαν τριγωνομετρικὴν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἀλγεβρική. Τοιοῦτον π.χ. εἶναι τὸ σύστημα τῆς § 136.

Τὸ β' εἶδος περιέχει δύο τριγωνομετρικὰς ἐξισώσεις ὅπως τὸ σύστημα τῆς § 137.

139. Λύσις τριγωνομετρικοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Διὰ τὴν λύσιν τοιούτου συστήματος δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἕνα ἄγνωστον διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως (§ 136) ἢ τῆς προσθέσεως (§ 137). Συνηθέστερον ὅμως λύομεν τὰ τοιαῦτα συστήματα μὲ εἰδικὰ τεχνάσματα τὰ ὁποῖα, ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν μορφὴν τῶν συστημάτων. Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα:

Παράδειγμα 1ον. **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :**

$$\chi - \psi = 15^0,\ \text{ἡμ}\chi + \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς α' ἐξισώσεως γνωρίζομεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀγνώστων, θὰ προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐκ τῆς β' ἐξισώσεως. Πρὸς τοῦτο ἐνθυμούμεθα ὅτι:

$$\text{ἡμ}\chi + \text{ἡμ}\psi = 2\text{ἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2}\,\text{συν}\,\frac{\chi-\psi}{2}.$$

Ἡ β' λοιπὸν ἐξίσωσις γίνεται:

$$2\text{ἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2}\,\text{συν}\,(\,7^0\,30'\,) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

ὅθεν:
$$\text{ἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2} = \frac{2.4142}{4\text{συν}\,(7^0 30')}.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι $\text{λογἡμ}\,\frac{\chi+\psi}{2} = \bar{1},78445$ καὶ ἐκ ταύτης

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right) = \text{ἡμ}\,(\,37^0 30'\,).$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $\frac{\chi+\psi}{2} = 360^0\text{k} + (\,37^0\,30'\,)$ καὶ ἂν

$\frac{\chi+\psi}{2} = 360^0\text{k} + 180^0 - (\,37^0\,30'\,) = 360^0\text{k} + 142^0\,30'.$

Ἄρα $\chi+\psi = 720^0\text{k}+75^0$ καὶ $\chi+\psi = 720^0\text{k}+285^0$.

Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν δύο ἀλγεβρικῶν συστημάτων:

$$\left.\begin{array}{l} \chi - \psi = 15^0 \\ \chi + \psi = 720^0\text{k} + 75^0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \chi - \psi = 15^0 \\ \chi + \psi = 720^0\text{k} + 285^0 \end{array}$$

Ἐκ τοῦ α' τούτων εὑρίσκομεν : $\chi = 360^0\text{k} + 45^0$

$$\psi = 360^0\text{k} + 30^0 \qquad (1)$$

Ἐκ δὲ τοῦ β' εὑρίσκομεν : $\chi = 360^0\text{k} + 150^0$

$$\psi = 360^0\text{k} + 135^0 \qquad (2)$$

Οὕτω διὰ $\text{k} = 0$ ἐκ μὲν τῶν (1) εὑρίσκομεν $\chi = 45^0$, $\psi = 30^0$, ἐκ δὲ τῶν (2) εὑρίσκομεν $\chi = 150^0$, $\psi = 135^0$ κ.τ.λ.

Παράδειγμα 2ον. **Νὰ λυθῇ τό σύστημα :**

$$\chi+\psi = 90^0,\ \text{ἡμ}\chi\cdot\text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Λύσις. Θὰ προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $\chi - \psi$ ἀπὸ τὴν β' ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $2ἡμχἡμψ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ $2ἡμχἡμψ = συν(χ - ψ) - συν(χ + ψ)$ ἢ ἕνεκα τῆς α′ $2ἡμχἡμψ = συν(χ - ψ)$, ἡ (1) γίνεται :

$$συν(χ - ψ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = συν\, 30^0.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι $χ - ψ = 360^0 k \pm 30^0$. Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν συστημάτων.

$$χ + ψ = 90^0, \quad χ - ψ = 360^0 k + 40^0 \text{ καὶ}$$
$$χ + ψ = 90^0, \quad χ - ψ = 360^0 k - 30^0.$$

Ἐκ τοῦ α′ τούτων εὑρίσκομεν.

$$χ = 180^0 k + 60^0, \quad ψ = -180^0 k + 30^0$$

Ἐκ δὲ τοῦ β′ εὑρίσκομεν $χ = 180^0 k + 30^0$, $ψ = -180^0 k + 60^0$.

Οὕτω διὰ $k = 0$ ἐκ τῆς α′ λύσεως εὑρίσκομεν $χ = 60^0$, $ψ = 30^0$ ἐκ τῆς β′, $χ = 30^0$, $ψ = 60^0$. Διὰ $k = 1$ ἐκ τῆς α′ εὑρίσκομεν $χ = 240^0$, $ψ = -150^0$ καὶ ἐκ τῆς β′, $χ = 210^0$, $ψ = -120^0$ κ.τ.λ.

Παράδειγμα 3ον. **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :**

$$\mathbf{ἐφχ + ἐφψ = 1 + \sqrt{3}, \quad ἐφχ \cdot ἐφψ = \sqrt{3}.}$$

Λύσις. Ἂν πρὸς στιγμὴν θεωρήσωμεν ὡς ἀγνώστους τὴν ἐφχ καὶ ἐφψ, οὗτοι εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$$k^2 - (1 + \sqrt{3})k + \sqrt{3} = 0$$

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν : $k = \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm (\sqrt{3} - 1)}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{3} \\ \searrow 1 \end{array}$

Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων:

$$ἐφχ = \sqrt{3} = ἐφ\frac{π}{3}, \quad ἐφψ = 1 = ἐφ\frac{π}{4} \text{ καὶ}$$
$$ἐφχ = 1 = ἐφ\frac{π}{4}, \quad ἐφψ = \sqrt{3} = ἐφ\frac{π}{3}$$

Λύοντες τὸ α′ εὑρίσκομεν $χ = λπ + \frac{π}{3}$, $ψ = λπ + \frac{π}{4}$, ἐκ δὲ τοῦ β′ τἀνάπαλιν $χ = λπ + \frac{π}{4}$, $ψ = λπ + \frac{π}{3}$.

Οὕτω διὰ $λ = 0$ εἶναι $χ = \frac{π}{3}$, $ψ = \frac{π}{4}$ ἢ τἀνάπαλιν $χ = \frac{π}{4}$

$\psi = \frac{\pi}{3}$. Διὰ $\lambda = 1$ εἶναι $\chi = \frac{4\pi}{3}$, $\psi = \frac{5\pi}{4}$ καὶ τἀνάπαλιν $\chi = \frac{5\pi}{4}$, $\psi = \frac{4\pi}{3}$ κ.τ.λ.

Παράδειγμα 4ον. **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\text{ἡμ}^2\chi + \text{ἐφ}^2\psi = \frac{3}{2}, \quad \text{ἡμ}\chi\text{ἐφ}\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Λύσις. Διπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς β' καὶ προσθέτοντες ἔπειτα κατὰ μέλη μὲ τὴν α' εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$(\text{ἡμ}\chi + \text{ἐφ}\psi)^2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2}$. Δι' ἀφαιρέσεως δὲ τῶν ἰδίων ἐξισώσεων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$(\text{ἡμ}\chi - \text{ἐφ}\psi)^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{2}$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$(\text{ἡμ}\chi + \text{ἐφ}\psi) = \pm\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ καὶ $\text{ἡμ}\chi - \text{ἐφ}\psi = \pm\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Οὕτω δὲ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀκολούθων συστημάτων:

$$\left.\begin{aligned} \text{ἡμ}\chi + \text{ἐφ}\chi &= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \text{ἡμ}\chi - \text{ἐφ}\psi &= \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \text{ἡμ}\chi + \text{ἐφ}\psi &= -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \text{ἡμ}\chi - \text{ἐφ}\psi &= \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{ἡμ}\chi + \text{ἐφ}\psi &= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \text{ἡμ}\chi - \text{ἐφ}\psi &= -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \text{ἡμ}\chi + \text{ἐφ}\psi &= -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \text{ἡμ}\chi - \text{ἐφ}\psi &= -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

Ἐκ τοῦ α' τούτων εὑρίσκομεν $2\text{ἡμ}\chi = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ καὶ $2\text{ἐφ}\psi = 2$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι: $\text{ἡμ}\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ἡμ}\frac{\pi}{4}$ καὶ $\text{ἐφ}\psi = 1 = \text{ἐφ}\frac{\pi}{4}$

$$\text{Ἄρα} \quad \left.\begin{aligned} \chi &= 2k + \frac{\pi}{4} \\ \psi &= \lambda\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \chi &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \\ \psi &= \lambda\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}\right|$$

Οὕτω πρὸς ἄσκησιν ἂς λύσωσιν οἱ μαθηταὶ καὶ τὰ ἄλλα τρία συστήματα.

Ἀσκήσεις

424. Νὰ λυθῇ τὸ στύστημα $\chi + \psi = 75^{0}$, $\text{ἡμ}\chi - \text{ἡμ}\psi = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

425. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 60^{0}$, $\text{συν}\chi + \text{συν}\psi = 0$.

426. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 30^{0}$, $\frac{\text{ἡμ}\chi}{\text{ἡμ}\psi} = \sqrt{3}$.

427. Νὰ λυθῇ τὸ σύστηαμ :

$$\text{συν}\chi - \text{συν}\psi = -\frac{1}{2}, \quad \text{συν}\chi + \text{συν}\psi = \frac{1}{2}.$$

428. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\text{ἡμ}\chi + \sqrt{3}\,\text{συν}\psi = 1, \ \text{ἡμ}\chi + \text{συν}\psi = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

429. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\text{συν}\chi + \text{συν}\psi = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \ \text{συν}\chi \cdot \text{συν}\psi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

430. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi + \psi = 90^{0}$, $\frac{\text{ἐφ}\chi}{\text{ἐφ}\psi} = 3$.

431. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 15^{0}$, $\text{συν}\chi \cdot \text{συν}\psi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

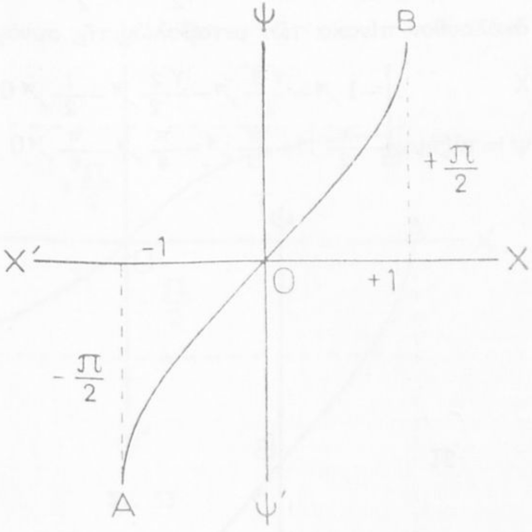
432. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi - \psi = 30^{0}$, $\text{ἐφ}\chi \,.\, \text{ἐφ}\psi = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

140. α') Ἡ συνάρτησις τόξῆμχ. Ἐμάθομεν ὅτι ἕκαστος τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τόξου μεταβάλλεται μεταβαλλομένου τοῦ τόξου. Ἕκαστος λοιπὸν τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς τόξου εἶναι συνάρτησις τοῦ τόξου.

Οὕτως ἂν χ = ἡμψ, ὁ χ εἶναι συνάρτησις τοῦ τόξου ψ. Ὁ δὲ ψ λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητή. *Ἀντιστρόφως:* Ἂν ὁ χ μεταβάλληται καὶ τὸ τόξον ψ μεταβάλλεται, ἤτοι καὶ τοῦτο εἶναι συνάρτησις τοῦ χ. Δηλ. τὸ τόξον εἶναι συνάρτησις τοῦ ἡμιτόνου του. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἡμίτονον εἶναι ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ τὸ τόξον ψ ἡ συνάρτησις. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι:



Σχ. 51

Τὸ ψ εἶναι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἡμίτονον τὸν ἀριθμὸν χ ἢ συντομώτερον ψ εἶναι τόξον ἡμιτόνου χ.

Τοῦτο παριστάνομεν διὰ τῆς ἰσότητος ψ = τόξῆμχ. (1)

Αὐτὴ ἡ συνάρτησις ψ λέγεται **ἀντίστροφος συνάρτησις** τῆς συναρτήσεως ἡμψ.

Μεταξὺ τῶν δύο συναρτήσεων ψ καὶ ἡμψ ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σπουδαία διαφορά. Ἡ συνάρτησις ἡμψ λαμβάνει μίαν ὡρισμένην τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ τόξου ψ.

Ἀντιστρόφως: Εἰς ἑκάστην τιμὴν α τοῦ χ ἀπὸ -1 ἕως $+1$ τὸ τόξον ψ λαμβάνει ἀπείρους τιμάς. Ἂν δὲ τ εἶναι μία τιμὴ τοῦ τόξου ψ, δηλαδὴ ἂν $ἡμτ = α$, αἱ τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι ρίζαι τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως $ἡμψ = ἡμτ$, ἤτοι:

$$ψ = 2k\pi + τ \text{ καὶ } ψ = (2k + 1)\pi - τ.$$

Ἂν χάριν ἁπλότητος ἐκ τῶν ἀπείρων τιμῶν θεωρήσωμεν μόνον τὰς περιεχομένας ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $\frac{\pi}{2}$, καταρτίζομεν εὐκόλως τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως ψ μετὰ τοῦ χ.

$$\begin{array}{l|l} χ & -1 \nearrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow -\frac{1}{2} \nearrow 0 \nearrow \frac{1}{2} \nearrow \frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow \frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow 1 \\ ψ = \text{τόξἡμ}χ & -\frac{\pi}{2} \nearrow -\frac{\pi}{3} \nearrow -\frac{\pi}{4} \nearrow -\frac{\pi}{6} \nearrow 0 \nearrow \frac{\pi}{6} \nearrow \frac{\pi}{4} \nearrow \frac{\pi}{3} \nearrow \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Σχ. 52

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΑΟΒ (σχ. 51).

141. β') Ἡ συνάρτησις τόξσυνχ. Ἂν $συνψ = χ$, ὁ χ εἶναι συνάρτησις τοῦ ψ λαμβάνουσα μίαν ὡρισμένην τιμὴν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ψ.

Ἀντιστρόφως: Τὸ τόξον ψ εἶναι συνάρτησις τοῦ χ, δηλ. τοῦ συνψ. Λέγομεν δὲ ὅτι ψ εἶναι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει **συν**ημίτονον τὸν ἀριθμὸν χ **καὶ** συντομώτερον, $ψ = \text{τόξσυν}χ$.

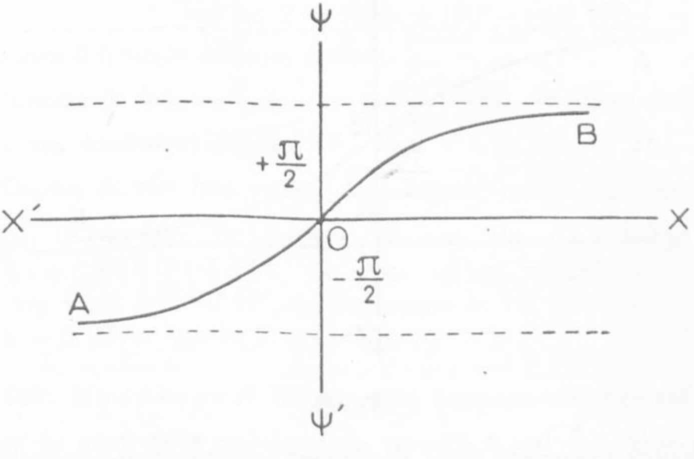
Ἡ συνάρτησις ψ λέγεται **ἀντίστροφος τῆς χ,** δηλ. τοῦ συνψ, καὶ λαμβάνει ἀπείρους τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ἀπὸ − 1 ἕως + 1.

Ἂν δὲ θεωρήσωμεν μόνον τὰς ἀπὸ 0 ἕως π τιμὰς αὐτῆς, καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

$$\begin{array}{l|ccccccccccccccccc} \chi & -1 & \nearrow & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \nearrow & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \nearrow & -\frac{1}{2} & \nearrow & 0 & \nearrow & \frac{1}{2} & \nearrow & \frac{\sqrt{2}}{2} & \nearrow & \frac{\sqrt{3}}{2} & \nearrow & 1 \\ \psi = \text{τόξσυν}\chi & \pi & \searrow & \frac{5\pi}{6} & \searrow & \frac{3\pi}{4} & \searrow & \frac{2\pi}{3} & \searrow & \frac{\pi}{2} & \searrow & \frac{\pi}{3} & \searrow & \frac{\pi}{4} & \searrow & \frac{\pi}{6} & \searrow & 0 \end{array}$$

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμέν διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ (σχ. 52).

142. γ') **Ἡ συνάρτησις τόξεφχ.** Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐφψ = χ ἕπεται ὅτι ψ = τόξεφχ, ἤτοι ψ εἶναι τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐφαπτομένην τὸν ἀριθμὸν χ.



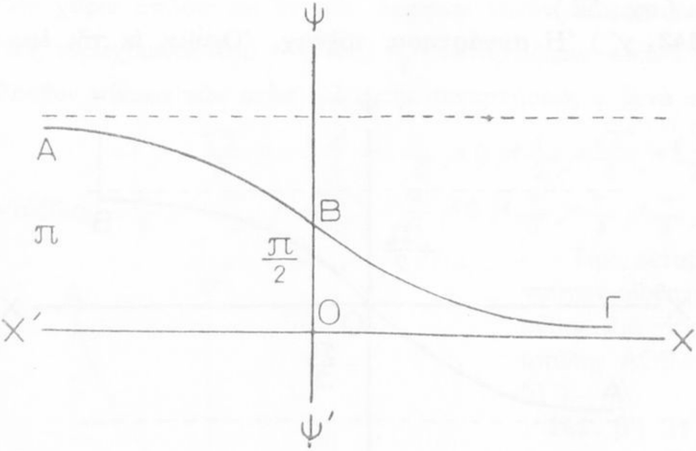
Σχ. 53

Ἡ συνάρτησις ψ λέγεται **ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς χ,** δηλαδὴ τῆς ἐφψ. Καὶ ἡ συνάρτησις αὕτη λαμβάνει ἀπείρους τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν α τοῦ χ. Ἂν δὲ θεωρήσωμεν μόνον τὰς μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{\pi}{2}$ τιμὰς αὐτῆς, καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

$$\begin{array}{l|ccccccccc} \chi & -\infty \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot\cdot -1 \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot 0 \cdot\cdot & 1 \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot +\infty \\ \psi = \text{τόξεφ}\chi & -\frac{\pi}{2} \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot -\frac{\pi}{4} \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot 0 \cdot\cdot & \frac{\pi}{4} \cdot\cdot & \nearrow & \cdot\cdot \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΑΟΒ (σχ. 53).

143. δ′) **Ἡ συνάρτησις τόξσφχ.** Τέλος ἐκ τῆς σφψ = χ ἕπεται ὅτι ψ = τόξσφχ, ἤτοι ἡ ψ εἶναι ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς χ, δηλ. τῆς σφψ. Καὶ ἡ συνάρτησις αὕτη ψ λαμβάνει ἀπείρους τιμὰς δι' ἑκάστην τιμὴν α τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ. Θεωροῦντες



Σχ. 54

ἐκ τούτων τὰς μεταξὺ 0 καὶ π καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

χ	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$
ψ = τόξσφχ	π	↘	$\frac{3\pi}{4}$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{4}$	↘	0

Τὴν μεταβολὴν ταύτην αἰσθητοποιοῦμεν διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ (σχ. 54).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

144. *Πρόβλημα I.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τόξημχ + τόξημψ ἂν τὰ ἐν αὐτῷ ἀναφερόμενα τόξα περιέχωνται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν οἱ προσθετέοι αὐτοῦ.**

Λύσις. Θέτομεν $Z = \text{τόξήμ}\chi + \text{τόξήμ}\psi$, $\text{τόξήμ}\chi = \alpha$, $\text{τόξήμ}\psi = \beta$. Ἑπομένως $Z = \alpha + \beta$, $\text{ήμ}\alpha = \chi$, $\text{ήμ}\beta = \psi$. Ἐκ τῆς α΄ τούτων εὑρίσκομεν: $\text{ήμ}Z = \text{ήμ}\alpha\text{συν}\beta + \text{ήμ}\beta\text{συν}\alpha = \chi\sqrt{1-\psi^2} + \psi\sqrt{1-\chi^2}$. Ἑπομένως

$$Z = \text{τόξήμ}(\chi\sqrt{1-\psi^2} + \psi\sqrt{1-\chi^2}).$$

Ἂν π.χ. $Z = \text{τόξήμ}\frac{1}{3} + \text{τόξήμ}\frac{2}{3}$ καὶ θέσωμεν $\chi = \text{τόξήμ}\frac{1}{3}$, $\psi = \text{τόξήμ}\frac{2}{3}$, θὰ εἶναι $Z = \chi + \psi$, $\text{ήμ}Z = \text{ήμ}\chi\text{συν}\psi + \text{ήμ}\psi\text{συν}\chi =$ $\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{4}{9}} + \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}\sqrt{5} + \frac{4}{9}\sqrt{2} = 0{,}87699 =$ $\text{ήμ}\,(61^0\,17')$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Αὕτη ἀληθεύει διὰ } Z = 360^0k + (61^0\,17') \\ \text{καὶ διὰ } Z = 360^0k + 180^0 - (61^0\,17')\end{array}\right\} \quad (1)$$

ἂν k εἶναι 0 ἢ τυχὸν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ήμ}\chi = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \text{ήμ}30^0$, ἔπεται ὅτι $\text{ήμ}\chi < \text{ήμ}30^0$ καὶ ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως $0^0 < \chi < 90^0$, εἶναι $0^0 < \chi < 30^0$ (2)

Ὁμοίως ἐκ τῶν $\text{ήμ}\psi = \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{ήμ}60^0$ καὶ $0^0 < \psi < 90^0$ ἔπεται ὅτι $0^0 < \psi < 60^0$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (2) ἔπεται ὅτι $0^0 < \chi + \psi < 90^0$ ἢ $0^0 < Z < 90^0$. Οἱ ὅροι οὗτοι πληροῦνται μόνον ὑπὸ τῆς τιμῆς $Z = 61^0\,17'$, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) διὰ $k = 0$. Εἶναι λοιπὸν $Z = 61^0\,17'$.

145. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τόξήμχ—τόξήμψ ἂν τὰ ἐν αὐτῇ τόξα περιέχωνται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, χωρὶς νὰ εὑρεθῇ χωριστὰ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς.**

Λύσις. Ὡς προηγουμένως, θέτομεν $Z = \text{τόξήμ}\chi - \text{τόξήμ}\psi$ $\text{τόξήμ}\chi = \alpha$, $\text{τόξήμ}\psi = \beta$ καὶ βλέπομεν ὅτι:

$$Z = \alpha - \beta, \quad \text{ήμ}\alpha = \chi, \quad \text{ήμ}\beta = \psi,$$

$$\text{ήμ}Z = \text{ήμ}\alpha\text{συν}\beta - \text{συν}\alpha\text{ήμ}\beta = \chi\sqrt{1-\psi^2} - \psi\sqrt{1-\chi^2}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν τὸ Z. Οὕτως, ἂν $Z = \text{τόξήμ}\frac{2}{5} - \text{τόξήμ}\frac{1}{5}$ καὶ θέσωμεν $\text{τόξήμ}\frac{2}{5} = \chi$, $\text{τόξήμ}\frac{1}{5} = \psi$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$Z = \chi - \psi, \; \text{ήμ}\chi = \frac{2}{5}, \;\; \text{ήμ}\psi = \frac{1}{5},$$

$$\text{ἡμ}Z = \text{ἡμ}\chi\,\text{συν}\psi - \text{ἡμ}\psi\,\text{συν}\chi = \frac{2}{5}\sqrt{1-\frac{1}{25}} - \frac{1}{5}\sqrt{1-\frac{4}{25}}$$

$$= \frac{2}{25}\sqrt{24} - \frac{1}{25}\sqrt{21} = \frac{4}{25}\sqrt{6} - \frac{1}{25}\sqrt{21} = \frac{5{,}21535}{25} = 0{,}20861 =$$

$\text{ἡμ}(12^0\,2'\,26'', 44)$. Καὶ ἐπειδὴ $0^0 < \chi - \psi < 90^0$, ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐννοοῦμεν ὅτι $Z = \chi - \psi = 12^0\,2'\,26'', 44$.

146. *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι τόξἐφ $\frac{1}{5}$ + τόξἐφχ $= \frac{\pi}{4}$.**

Λύσις. Θέτομεν τόξἐφ$\frac{1}{5} = \psi$, τόξἐφ$\chi = Z$ καὶ εὑρίσκομεν ἐφ$\psi = \frac{1}{5}$, ἐφ$Z = \chi$. Ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται: $\psi + Z = \frac{\pi}{4}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}(\psi + Z) = 1, \quad \frac{\text{ἐφ}\psi + \text{ἐφ}Z}{1 - \text{ἐφ}\psi\,\text{ἐφ}Z} = 1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\frac{1}{5} + \chi}{1 - \frac{\chi}{5}} = 1.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι: $\chi = \frac{2}{3}$.

Ἀσκήσεις

433. Νὰ εὑρεθῇ τόξον χ μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, διὰ τὸ ὁποῖον ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις τόξἡμ$0{,}4 = \chi$ ἢ τόξσυν$0{,}6 = \chi$ ἢ τόξἐφ$2 = \chi$.

434. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τόξἡμ$0{,}15$ − τόξἡμ$0{,}12$ διὰ τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

435. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι τόξἡμχ + 2τόξἡμ$\frac{2}{5}$ = τόξἡμ1, ἂν τὰ τόξα ταῦτα δὲν ὑπερβαίνωσι τὸ τόξον $\frac{\pi}{2}$.

436. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$ εἶναι

$$\text{τόξἡμ}\,\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2} = \text{τόξσυν}\,\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}.$$

437. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τόξα περιεχόμενα μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$ εἶναι

$$\text{τόξἡμ}\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}} = \text{τόξ ἐφ}\sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}.$$

438. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{τόξἡμ}\,\frac{1}{4}+\text{τόξἡμ}\,\frac{1}{5}=\text{τόξἡμ}\,\frac{\sqrt{15}+\sqrt{24}}{20}.$$

439. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\text{τόξἡμ}\,\frac{1}{3}+\text{τόξ ἡμ}\chi=\frac{\pi}{4}.$$

440. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς χ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\text{τόξἡμ}\chi+\text{τόξσυν}\sqrt{1-\chi^2}=0.$$

441. Ἂν $\text{τόξ ἡμ}\,\frac{\chi}{\sqrt{5}}+\text{τόξἡμ}\,\frac{\psi}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\chi^2+\psi^2=5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

442. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $B=\frac{3\pi}{8}$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀκτίνια τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

443. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $60^\gamma,54$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

444. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $\frac{(4\lambda+1)\pi}{4}$ κατὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ λ.

445. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων : $\frac{[(-1)^\nu\cdot 3+1]\pi}{3}$ κατὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ ν.

446. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς μιᾶς ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τριπλασία τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν ὀξειῶν τούτων γωνιῶν.

447. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΑΒ=ΑΓ καὶ εἶναι $2\text{ἡμ}2A=\sqrt{3}$. Νὰ ὁρισθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

448. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $\alpha=0,4$ μέτ. καὶ $\Gamma=2B$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

449. Ἂν $0^0<\tau<90^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{ἡμ}\tau=\frac{(\text{χορδ}2\tau)}{2}$.

450. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R εἶναι $\frac{R}{2}(-1+\sqrt{5})$. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἡμ 18^0 καὶ συν 18^0.

451. Δύο εὐθεῖαι Οχ καὶ Οψ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν $25^0\,20'$. Ἓν ἄνυσμα ΟΑ τοῦ ἄξονος Οψ ἔχει μῆκος 0,15 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα Οχ.

452. Ἓν ἄνυσμα ΟΒ ἄξονος Οψ ἔχει μῆκος 0,24 μέτ. καὶ προβολὴν μήκους 0,12 μέτ. ἐπὶ ἄλλον ἄξονα Οχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν ἀξόνων τούτων.

453. Νὰ ὁρισθῶσι τὰ σημεῖα τριγωνομετρικῆς περιφερείας, εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λήγωσι τόξα χ, διὰ νὰ εἶναι $\text{ἐφ}\chi=4\text{σφ}\chi$.

454. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

$\text{ἡμ}(2k\pi + \chi) = \text{συν}\chi$ καὶ $\text{ἐφ}\,[\,(2k+1)\,\pi + \chi\,] = \text{σφ}\chi$.

455. Νὰ λυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right) = \text{συν}\chi$.

456. Νὰ εὑρεθῆ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\text{συν}\tau + \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\text{ἡμ}\,(-\tau).$$

457. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\text{ἡμ}\omega + \text{σφ}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\text{συν}\omega = \text{ἡμ}\omega + \text{συν}\omega.$$

458. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι $\text{ἐφ}\,(270^\circ - \tau) = \text{σφ}\tau$, $\text{σφ}\,(270^\circ - \tau) = \text{ἐφ}\tau$, $\text{ἡμ}(270^\circ + \tau) = -\,\text{συν}\tau$, $\text{συν}(270^\circ + \tau) = \text{ἡμ}\tau$, $\text{ἡμ}(270^\circ - \tau) = -\,\text{συν}\tau$, $\text{συν}(270^\circ - \tau) = -\,\text{ἡμ}\tau$.

459. Νὰ εὑρεθῆ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\text{ἡμ}\,(270^\circ - \omega)\,\text{συν}(90^\circ + \omega) - \text{συν}\,(270^\circ + \omega)\,\text{ἡμ}\,(90^\circ - \omega).$$

460. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἄθροισμα $\text{ἐφ}282^\circ + \text{ἐφ}258^\circ$.

461. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἄθροισμα $\text{συν}\frac{5\pi}{9} + \text{συν}\frac{14\pi}{9}$.

462. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι: $\text{συν}(\alpha + \beta)\,\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\beta$. καὶ ὅτι: $\text{ἡμ}(\alpha + \beta)\,\text{ἡμ}\,(\alpha - \beta) = \text{ἡμ}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\beta$.

463. Ἂν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma + 2\text{συν}\alpha\text{συν}\beta\text{συν}\gamma = 1.$$

464. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι: $\text{ἐφ}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \text{σφ}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\text{συν}\alpha}$.

465. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι $\text{ἐφ}^2\,(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \text{ἡμ}2\alpha}{1 + \text{ἡμ}2\alpha}$.

466. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\text{ἐφ}2\alpha}{1 + \text{ἐφ}\alpha \cdot \text{ἐφ}2\alpha} = \text{ἡμ}2\alpha$.

467. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι $\text{ἐφ}\,\frac{\omega}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \text{ἐφ}^2\omega}}{\text{ἐφ}\omega.}$.

468. Νὰ ἁπλοποιηθῆ ἡ παράστασις $\frac{\text{ἡμ}\alpha + \text{ἡμ}3\alpha + \text{ἡμ}5\alpha}{\text{συν}\alpha + \text{συν}3\alpha + \text{συν}5\alpha}$

469. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις:

$1 + \text{ἐφ}^2\tau$ καὶ ἡ παράστασις $\frac{\text{ἡμ}^2\alpha - \text{ἡμ}^2\beta}{(\text{συν}\alpha + \text{συν}\beta)^2}$.

470. Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις $\text{σφ}^2\alpha - \text{ἐφ}^2\alpha$.

471. Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις $(\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B)^2 + (\text{συν}A + \text{συν}B)^2$.

472. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι $\frac{2\text{ἡμ}\alpha - \text{ἡμ}2\alpha}{2\text{ἡμ}\alpha + \text{ἡμ}2\alpha} = \text{ἐφ}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

473. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\frac{1}{\text{συν}\alpha} + \frac{1}{\text{ἡμ}\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\,\text{συν}(45^\circ - \alpha)}{\text{ἡμ}2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\,\text{ἡμ}\,(45^\circ + \alpha)}{\text{ἡμ}2\alpha}.$$

474. Νὰ εὑεθῆ ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν παραστάσεων:

$$1 \pm \text{ἐφ}5^0 \text{ καὶ τῆς } \frac{\text{ἐφ}42^0 + \text{ἐφ}25^0}{\text{σφ}42^0 + \text{σφ}\,25^0}.$$

475. Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις: $\text{σφ}\chi = \frac{1}{2}$, $\text{ἡμ}\chi = -\frac{5}{6}$, $\text{συν}\chi = -\frac{6}{10}$.

476. Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ παραστάσεις:

$$\frac{\text{ἡμ}(80^0\,15') - \text{ἡμ}\,(48^0\,25')}{\text{ἡμ}(80^0\,15') + \text{ἡμ}(48^0\,25')} \text{ καὶ } \frac{1+\text{ἡμ}(48^0\,15'\,30'')}{1-\text{ἡμ}(48^0\,15'\,30'')}.$$

477. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι:

$$\text{ἐφ}\frac{B}{2} = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}.$$

478. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$\text{ἐφ}\,2B = \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}.$$

479. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$\text{συν}(B - \Gamma) = \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}.$$

480. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$\text{συν}2B = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2}.$$

481. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι :

$$E = \frac{1}{4}\alpha^2\text{ἡμ}\,(2B).$$

482. Εὐθύγραμμον τμῆμα σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ΒΓ σχηματίζει γωνίαν 20° μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κατώτερον ἄκρον Β αὐτῆς. Μία ἁμαξοστοιχία διανύει αὐτὸ εἰς 3′ πρῶτα λεπτὰ μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἄκρου Γ ἀπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐκεῖνο ἐπίπεδον.

483. Ἡ Μηχανικὴ διδάσκει ὅτι ἓν σῶμα διανύει διάστημα $\frac{1}{2}\gamma t^2$ εἰς t δεύτερα λεπτὰ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως ω καὶ ὅτι $\gamma = 981\text{ἡμ}\omega$ δακτύλους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως 29° 25′, ἂν τοῦτο διανύηται εἰς 2 δευτερόλεπτα ὑπό τινος σώματος.

484. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $A = 30^0$, $B = 135^0$, $\gamma = 80$ ἑκατ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος (ΓΔ) αὐτοῦ.

485. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $B = 60^0$, $\Gamma = 45^0$ καὶ ὕψος (ΑΔ) = 5 μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

486. Μία πλευρὰ στέγης, εἶναι τριγωνικὴ μὲ κλίσιν 25°. Ἡ βάσις αὐτῆς ἔχει μῆκος 4,30 μέτ. καὶ εἶναι ὁριζόντιος. Ἡ δὲ κορυφὴ ἀπέχει 1,80 μέτ. ἀπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλευρᾶς ταύτης τῆς στέγης.

487. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ Ἡλίου τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν μία κατακόρυφος ράβδος μήκους 2,15 μέτ. ρίπτει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους σκιὰν 6,45 μέτ.

488. Μία κλίμαξ ἔχει 10 βαθμίδας. Ἑκάστη τούτων ἔχει πλάτος 0,30 μέτ. καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ὑπερκειμένην 0,18 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις τῆς κλίμακος ταύτης πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

489. Ἕν κεκλιμένον οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις (ΑΒ) = 25 μέτ, (ΑΔ) = 15 μέτ. Ἡ βάσις ΑΒ αὐτοῦ εἶναι ὁριζόντιος, ἡ δὲ ἀπέναντι πλευρὰ ΓΔ κεῖται 9 μέτ. ὑψηλότερον τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις τοῦ οἰκοπέδου τούτου.

490. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\text{συν}\left(\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}\right)}{\text{ἡμ}\frac{\text{Α}}{2}}.$$

491. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι :

$$\frac{\text{ἡμ}(\text{Α}-\text{Β})}{\text{ἡμ}(\text{Α}+\text{Β})}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}.$$

492. Νὰ γίνῃ λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ ἄθροισμα: ἡμ2Α + ἡμ2Β + ἡμ2Γ, ἂν Α, Β, Γ, εἶναι γωνίαι τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

493. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\beta\,\text{συν}\text{Β}+\gamma\,\text{συν}\text{Γ}=\alpha\,\text{συν}(\text{Β}-\text{Γ})$$

494. Ἂν ἡμΑ = 2ἡμΒσυνΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

495. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς αὐτοῦ.

496. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον δύο προσκειμένων πλευρῶν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

497. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 8 μέτρ. εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει $\text{Α} = 35^0\,15'$, $\text{Β} = 75^0\,30'$. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

498. Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῆς καθέτου τομῆς πλαγίου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 20, 16, 12 ἑκατ. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μέτρα τῶν διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ τετράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος τούτου.

499. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τούτου ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς κλίσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ἀληθεύῃ ἡ ἰδιότης αὕτη καὶ διὰ πᾶν ἄλλο εὐθύγ σχῆμα.

500. Ἡ ἀκμὴ κανονικοῦ τετραέδρου ΚΑΒ ἔχει μῆκος α μέτ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἀκμὴ ΚΑ μὲ τὴν ἕδραν ΑΒΓ.

501. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\text{Β} = 90^0 + \text{Γ}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\beta^2 + \gamma^2 = 4\text{R}^2$.

502. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα 9ἐφχ + ἐφψ = 4, 2σφχ + 4σφψ = 1.

503. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐφ2χ = 3ἐφχ.

504. Ἓν ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος 0,50 μέτ. καὶ ἀπομακρύνεται τῆς κατακορύφου ΟΑ κατὰ γωνίαν $2^0\,10'$ εἰς νέαν θέσιν ΟΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν θέσεων Α καὶ Β τοῦ σφαιριδίου.

505. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κατόπτρου καὶ μετὰ τὴν ἀνάκλασιν εἰσέρχεται εἰς τὸν ὀφθαλμὸν παρατηρητοῦ. Ὁ ὀφθαλμὸς

οὗτος ἀπέχει 0,38 μέτ. ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, ἡ δὲ ἐπ' αὐτὸ προβολή του ἀπέχει 0,15 μέτ. ἀπὸ τὸ σημεῖον προσπτώσεως τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς προσπτώσεως τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος.

506. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ δείκτης διαθλάσεως ἀπεσταγμένου ὕδατος 4°K πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $\frac{4}{3}$· Φωτεινὴ ἀκτὶς εἰσδύει ἐκ τοῦ ἀέρος εἰς τοιοῦτον ὕδωρ προσπίπτουσα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ὑπὸ γωνίαν 38° 12'. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς διαθλάσεως αὐτῆς.

507. Ἡ διαθλαστικὴ γωνία διαφανοῦς τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 90°. Φωτεινὴ μονόχρους ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ ὑπὸ γωνίαν 60° ἐξέρχεται διὰ τῆς ἄλλης ἕδρας ὑπὸ γωνίαν διαθλάσεως 60°. Νὰ εὑρεθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὕλης τοῦ πρίσματος πρὸς τὸν ἀέρα.

508. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς παραλλήλου τῆς Γῆς εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς Γῆς ὑποτιθεμένης σφαιρικῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος τοῦ παραλλήλου τούτου.

509. Πλοῖον Π πλέον πρὸς τὰ Ν—Α ἐφάνη κατά τινα στιγμὴν ἐκ σημείου Ο τῆς ἀκτῆς πρὸς τὰ Ν—Δ καὶ εἰς ἀπόστασιν (ΟΠ) = 30 χιλιόμ. Μετὰ ἰσοταχῆ πλοῦν 3 ὡρῶν, ἐφάνη πρὸς νότον εἰς θέσιν Π'. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ἡ ἀπόστασις (ΟΠ').

510. Παρατηρητὴς ὕψους 1,65 μέτ. ἱστάμενος εἰς τὴν ὄχθην λίμνης εἶδε κατά τινα στιγμὴν ἀεροπλάνον εἰς ὕψος 44° 30' ὑπὲρ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ ὀφθαλμοῦ του. Τὴν αὐτὴν δὲ στιγμὴν εἶδε τὸ εἴδωλον τοῦ ἀεροπλάνου ἐντὸς τῆς λίμνης εἰς βάθος 45° 30' ὑπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου τὴν στιγμὴν ἐκείνην.

511. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\text{τόξέφ}\alpha + \text{τόξέφ}\beta = \text{τόξέφ}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$, ἂν τὰ ἐν αὐτῇ ἀναφερόμενα τόξα περιέχωνται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$·

512. Ἂν $\text{ἡμ}A = \text{ἡμ}B$ καὶ $\text{συν}A = \text{συν}B$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A - B = 2k\pi$, ἂν k εἶναι μηδὲν ἢ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός.

513. Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\chi = \alpha\,\text{συν}\,\omega, \quad \psi = \beta\,\text{ἡμ}\,\omega.$$

514. Νὰ ἀπαλειφθῇ τὸ τόξον ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων: $\chi\,\text{συν}\,\omega = \alpha$· $\psi\,\text{ἐφ}\,\omega = \beta$. Ἔπειτα δὲ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων: $\chi = \alpha\,\text{συν}^3\omega$, $\psi = \beta\,\text{ἡμ}^3\omega$.

515. Ἂν εἶναι $\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B = \text{ἡμ}A\,\text{ἡμ}B$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\left(\text{συν}\frac{A-B}{2} - \text{ημ}\frac{A+B}{2}\right)^2 = 1.$$

516. Ἂν ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(B\Delta) : (\Delta\Gamma) = \text{ἡμ}\Gamma : \text{ἡμ}B$.

517. Ἂν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $A = \frac{\pi}{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

Ἂν δὲ $A = \frac{2\pi}{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \gamma\beta$.

518. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει $B = 25^0\ 30'$ καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος (ΑΔ) = 20 μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

519. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ὑποτείνουσαν $\alpha = 10$ μέτ. καὶ $\beta + \gamma = 12$ μέτ. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

520. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $2\tau = 35$ μέτ, $B = 45^0$, $\Gamma = 30^0$. Νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

521. Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 12 ἑκατ. Ἑκάστη δὲ πλευρὰ τῆς πυραμίδος εἶναι 20 ἑκατ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις ἑκάστης παραπλεύρου ἕδρας πρὸς τὴν βάσιν.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

147. Ἡ τριγωνομετρία ἐν σχέσει πρὸς τὴν Γεωμετρίαν καὶ τὴν Ἄλγεβραν.

α΄) Ἀπὸ τὴν μελέτην τοῦ στοιχειώδους τούτου βιβλίου Τριγωνομετρίας ἐμάθομεν ὅτι ἡ Τριγωνομετρία ἔχει ὡς κύριον σκοπὸν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου ἐξ ἐπαρκῶν δεδομένων εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις.

Ἐπιτυγχάνει δὲ τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ σκοποῦ τούτου διὰ τῆς ἐπινοήσεως τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας, δι᾽ ὧν κατορθώνει νὰ εὑρίσκῃ σχέσεις καὶ μεταξὺ ἑτεροειδῶν στοιχείων τῶν τριγώνων, π.χ. μεταξὺ πλευρῶν καὶ γωνιῶν κτλ.

Καὶ ἡ Γεωμετρία διδάσκει σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου, ἀλλὰ ἑκάστη τοιαύτη σχέσις συνδέει ὁμοειδῆ στοιχεῖα, π.χ. $Α+Β+Γ = 180^0$, $α^2 = β^2 + γ^2$. Κατὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ Τριγωνομετρία ὑπερέχει τῆς Γεωμετρίας καὶ εἰς τοῦτο ἀκριβῶς ὀφείλεται ἡ ἐπιτυχία τοῦ σκοποῦ τῆς Τριγωνομετρίας.

Ἀλλὰ διὰ τὴν ἐπινόησιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν ἡ Τριγωνομετρία ἀναχωρεῖ ἀπὸ γεωμετρικῶν ἀληθειῶν. Πολλάκις δὲ διὰ τὴν ἀνεύρεσιν σχέσεων μεταξὺ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ ἄλλων στοιχείων αὐτοῦ χρησιμοποιοῦμεν γεωμετρικὰς γνώσεις. Οὕτω διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἰσότητος $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ συνΑ$ στηρίζεται ἐπὶ τῆς γενικεύσεως τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, τὴν ὁποίαν δανείζεται ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν.

Ἀλλὰ καὶ ἀματαβλήτους γεωμετρικὰς ἀληθείας χρησιμοποιεῖ ἡ Τριγωνομετρία διὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τοῦ σκοποῦ της εἰς διαφόρους περιπτώσεις. Π.χ. διὰ τὴν ἐπίλυσιν ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν α καὶ β πλὴν τῆς τριγωνομετρικῆς σχέσεως $β = αημΒ$, χρησιμοποιεῖ καὶ τὰς γεωμετρικὰς σχέσεις $Β+Γ = 90^0$, $α^2 = β^2+γ^2$ καὶ $Ε = \frac{1}{2} βγ$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ Τριγωνομετρία εἶναι ἐπέκτασις τῆς Γεωμετρίας, τὴν ὁποίαν συμπληρώνει συντελοῦσα οὕτως εἰς τὴν λύσιν ζημτημάτων, τὰ ὁποῖα ἡ Γεωμετρία ἠδυνάτει νὰ λύσῃ ἄνευ τῆς ἐπεκτάσεώς ταύτης. Ἡ ἐπέκτασις δὲ αὕτη εἶναι φυσικὸν νὰ συντελῇ εἰς τὴν ἐπέκτασιν καὶ τοῦ κύκλου τῶν ἐφαρμογῶν. Οὕτω δὲ ἡ Τριγωνομετρία εὑρίσκει πολλαπλᾶς ἐφαρμογὰς οὐ μόνον εἰς καθαρῶς γεωμετρικὰ ζητήματα, ἀλλὰ καὶ εἰς ὅλας τὰς ἐφηρμοσμένας ἐπιστήμας, π.χ. τὴν Φυσικήν, Μηχανικήν, Γεωδαισίαν, Ἀστρονομίαν.

β΄) Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί. Αἱ σχέσεις λοιπὸν μεταξὺ πλευρῶν τριγώνου καὶ γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἀλγεβρικαὶ σχέσεις. Διὰ τοῦτο πολλοὶ ἀπὸ τοὺς μετασχηματισμοὺς αὐτῶν γίνονται κατὰ κανόνας τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ. Ὥστε ἡ Τριγωνομετρία χρησιμοποιεῖ καὶ τὰς ἀναγκαίας εἰς αὐτὴν ἀλγεβρικὰς γνώσεις. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως δὲ ταύτης ἡ Τριγωνομετρία ἀποτελεῖ ἐφαρμογὴν τῆς Ἀλγέβρας.

184. Σύντομος ἱστορικὴ ἐξέλιξις τῆς τριγωνομετρίας. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ἡ Τριγωνομετρία ἐφαρμόζεται πλὴν ἄλλων καὶ εἰς τὴν Ἀστρονομίαν. Ἡ σπουδὴ μάλιστα τῆς Ἀστρονομίας ὑπῆρξεν ἡ πρώτη ἀφορμὴ τῆς δημιουργίας τῆς Τριγωνομετρίας.

Οὕτως οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀστρονόμοι **Ἀρίσταρχος** (3ος αἰὼν π.Χ.) καὶ **Εὔδοξος** (400 π.Χ.), ἀναφέρονται ὡς ἀσχοληθέντες μὲ τριγωνομετρικὰ ζητήματα τῆς σφαιρικῆς ἰδίᾳ Τριγωνομετρίας, ζητήματα χρήσιμα εἰς αὐτοὺς διὰ τὰς ἀστρονομικὰς ἐργασίας των. Ὑπάρχει μάλιστα καὶ γνώμη ὅτι πρῶτος ὁ Εὔδοξος συνέταξε τριγωνομετρικὸν πίνακα.

Μετ᾽ αὐτοὺς πρῶτος ὁ μέγιστος ἀστρονόμος τῆς ἀρχαιότητος **Ἵππαρχος** (2ος αἰὼν π.Χ.) μετεχειρίσθη τριγωνομετρικὰς μεθόδους κατὰ τοὺς πολυαρίθμους ὑπολογισμούς, εἰς τοὺς ὁποίους ἦγον αὐτὸν αἱ ἀστρονομικαὶ ἀσχολίαι του.

Εἰς τὸν Ἵππαρχον ἀποδίδεται μία πραγματεία **«Περὶ τῶν χορδῶν τῶν τόξων κύκλου»**, εἰς 12 βιβλία. Αὕτη κατ᾽ οὐσίαν εἶναι τριγωνομετρικὴ πραγματεία, διότι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μετεχειρίζοντο τὰς χορδὰς τῶν διπλασίων τόξων, ἤτοι διπλᾶ ἡμίτονα τῶν ἡμίσεων τῶν τόξων.

Ὁ **Πτολεμαῖος** (2ος αἰὼν μ.Χ.) εἰς τὴν **Μαθηματικὴν Σύνταξιν** ἀναγράφει πίνακα τῶν μηκῶν τῶν χορδῶν τούτων ἀνὰ 15΄.

ΙΠΠΑΡΧΟΣ

Μέγας Ἕλλην ἀστρονόμος. Ἐγεννήθη ἐν Νικαίᾳ τῆς Βιθυνίας, ἀλλ᾿ ἐξετέλει τὰς παρατηρήσεις του εἰς τὴν νῆσον Ρόδον. Διὰ τοῦτο δὲ ἐθεωρήθη ὡς καταγόμενος ἐκ Δωδεκανήσου.

῾Ο πίναξ οὗτος ἀποδίδεται ὑπό τινων εἰς τὸν ῞Ιππαρχον. Εἰς τὸ αὐτὸ ἔργον τοῦ Πτολεμαίου ευρίσκεται ἡ πρώτη διασωθεῖσα μέχρις ἡμῶν τριγωνομετρικὴ πραγματεία.

Καὶ ὁ ᾿Αλεξανδρινὸς μαθηματικὸς **Μενέλαος** (1ος αἰὼν μ.Χ.) φέρεται ἀσχοληθεὶς εἰς ζητήματα σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας δι᾿ ἀστρονομικοὺς ἐπίσης σκοπούς.

῾Η ἀντικατάστασις τῶν χορδῶν διὰ τῶν ἡμιτόνων ἐγένετο κατ᾿ ἄλλους μὲν τὸν 15ον αἰῶνα μ.Χ. ὑπὸ τοῦ Βαυαροῦ **Purbach,** κατ᾿ ἄλλους δὲ 5 αἰῶνας ἐνωρίτερον ὑπὸ τοῦ Πρίγκιπος τῆς Συρίας **Mohamet-ben-Geber,** ὅστις εἶναι γνωστὸς μὲ τὸ λατινικὸν ὄνομα **Albatégnius.**

῾Ο **Purbach** συνέταξε τὸν πρῶτον ἐν Εὐρώπῃ τριγωνομετρικὸν πίνακα. Τὸν πίνακα τοῦτον ἐτελειοποίησεν ὁ Γερμανὸς ἀστρονόμος **Jean Muller** (1436 - 1476 μ.Χ.), ὁ ἐπονομαζόμενος **Regiomontanus.** Οὗτος εἰσήγαγε καὶ τὴν χρῆσιν τῆς ἐφαπτομένης καταρτίσας καὶ σχετικὸν πίνακα διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πολυαρίθμων ὑπολογισμῶν, εἰς τοὺς ὁποίους μετεχειρίζετο αὐτήν.

Αἱ τριγωνομετρικαὶ ἐργασίαι αὐτοῦ μόλις κατὰ τὸ ἔτος 1539 ἐδημοσιεύθησαν μὲ τὸν τίτλον **« Περὶ παντοειδῶν τριγώνων »** εἰς 5 βιβλία. ῏Ητο δὲ ἡ πραγματεία αὕτη μία πλήρης Τριγωνομετρία.

Σπουδαιοτάτην ὤθησιν εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν καὶ διαμόρφωσιν τῆς Τριγωνομετρίας ἔδωσεν ὁ Γάλλος **Francois Viète** (1540 – 1603 μ.Χ.). Οὗτος διὰ τῆς ἀγχινοίας του διεῖδε τὸ ἐσφαλμένον τοῦ Πτολεμαϊκοῦ συστήματος καὶ ἐπεχείρησε νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτό. ᾿Εδημοσίευσε λοιπὸν ἓν ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον **« Harmonicum Celesten »,** τὸ ὁποῖον θεωρεῖται σήμερον πεπλανημένον. Διὰ νὰ φθάσῃ ὅμως ὁ συγγραφεὺς εἰς τὸν ἐπιδιωκόμενον σκοπὸν ἔπρεπε πρὸ πάσης ἄλλης ἐργασίας νὰ ἀναμορφώσῃ τὴν Τριγωνομετρίαν. Οὕτω κατὰ τὸ 1579 ἐδημοσίευσεν ἓν ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον **«Μαθηματικὸς Κανών».** Εἰς αὐτὸ περιέχονται πίνακες ἐκτενέστεροι τῶν ἕως τότε ὑπαρχόντων καὶ κατάλληλοι κανόνες διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων. Οἱ πίνακες τοῦ ἔργου τούτου διὰ πρώτην φορὰν περιέχουσι τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν ἀνὰ λεπτόν. Εἰς ἄλλο ἔργον βραδύτερον ἀπέδειξε τύπους διὰ τὴν λύσιν τῶν ἐπιπέδων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων μὲ πολυάριθμα ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

FRANÇOIS VIÈTE

Ὁ **Viète** ἀπήλλαξε τὴν Τριγωνομετρίαν σχοινοτενῶν ἐκφωνήσεων καὶ ἀπέδειξε τύπους γενικοὺς καὶ συντόμους, οἱ ὁποῖοι καὶ ἤδη χρησιμοποιοῦνται. Ἰδιαιτέρως δὲ ἡ σφαιρικὴ Τριγωνομετρία τὰ μέγιστα ὠφελήθη ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ **Viète**.

Εἰς νεώτερον τρίτον ἔργον του ἔδωκε νέους τύπους, ὑπελόγισε τὸ ἡμ(νχ), συν(νχ), ἐφ(νχ) συναρτήσει ἀντιστοίχως τοῦ ἡμχ, συνχ, ἐφχ καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς χορδῆς τόξου νχ συναρτήσει τῆς χορδῆς τόξου χ.

Εἶναι ὅθεν ἐκ τούτων φανερὸν ὅτι ὁ **Viète** ἀνεμόρφωσε τελείως τὴν Τριγωνομετρίαν τῆς ἐποχῆς του.

Ἐπίκαιρον δὲ θεωροῦμεν νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ **Viète** εἶναι πατὴρ τῆς νεωτέρας Ἀλγέβρας, διότι αὐτὸς εἰσήγαγεν εἰς αὐτὴν τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων.

Κατὰ τὸ 1610 ὁ **Barthélemy Pitiscus** ἐξέδωκε πίνακα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων ἀνὰ 10'' καὶ μὲ 16 δεκαδικὰ ψηφία. Ὁ πίναξ οὗτος θεωρεῖται ὡς ἓν τῶν ἀξιοθαυμάστων μνημείων τῆς ἀνθρωπίνης ὑπομονῆς. Χρησιμεύει δὲ οὗτος καὶ σήμερον ἀκόμη διὰ τὸν ἔλεγχον τῶν συνήθων πινάκων.

Εὐθὺς δὲ ὡς ἐπενοήθησαν οἱ λογάριθμοι, ἐφηρμόσθησαν καὶ εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμούς. Κατὰ δὲ τὸ ἔτος 1626 μ.Χ. ἐξεδόθησαν εἰς Παρισίους οἱ πρῶτοι λογαριθμικοὶ πίνακες μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία.

Κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 17ου αἰῶνος ὁ Ὁλλανδὸς γεωμέτρης **Snellius** ὑπέδειξε καὶ πρῶτος ἐφήρμοσε μέθοδον διὰ τὴν μέτρησιν μεσημβρινοῦ τόξου. Αὕτη εἶναι γνωστὴ μὲ τὸ ὄνομα **Τριγωνισμὸς** καὶ ἀποτελεῖ μίαν τῶν ἀξιοθαυμάστων ἐφαρμογῶν τῆς Τριγωνομετρίας. Ἄνευ αὐτῆς καὶ τῶν ἀκριβῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐφαρμογῆς της ὑπὸ τοῦ Γάλλου **Picard**, ἴσως ὁ Νεύτων δὲν θὰ ἔφθανεν εἰς τὸν νόμον τῆς παγκοσμίου ἕλξεως.

Βραδύτερον μὲ τὴν τεραστίαν ἀνάπτυξιν τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως καὶ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν, αὕτη ἔλαβεν ἔκτασιν, τὴν ὁποίαν οὐδεὶς ἠδύνατο νὰ προΐδῃ. Αἱ δὲ ἐφαρμογαὶ αὐτῆς καὶ εἰς αὐτὸν ἀκόμη τὸν κύκλον τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν εἶναι πολυαριθμόταται.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΞΩΦΥΛΛΟΝ: ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗ ΛΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

[illegible]

ΟΕ
ΔΒ