μαθηματικά

α΄ λυκείου

ἄλγεβρα

...ΣΜΟΣ
...ΩΣ
...ΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1981

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α/Λ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄

ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

Γιά τή συγγραφή αὐτοῦ τοῦ βιβλίου συγκροτήθηκε μέ ὑπουργική ἀπόφαση ὁμάδα ἐργασίας, πού τήν ἀποτέλεσαν οἱ:

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗΣ . . . . *Σύμβουλος Β' ΚΕΜΕ*
Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ . . . . *Εἰσηγητής ΚΕΜΕ*
Ν. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ. Ε.*
Δ. Α. ΠΑΠΑΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ . . . . *Καθηγητής Μ. Ε.*
Α. ΠΑΠΑΜΙΚΡΟΥΛΗΣ . . . . *Καθηγητής Μ. Ε.*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό νέο ἀναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικῶν, πού ἤδη ἐφαρμόζεται σέ ὅλες τίς τάξεις τοῦ Γυμνασίου, ἐπεκτείνεται ἀπό τό σχολικό ἔτος 1979-80 στήν Α' Λυκείου. Ἕνα διδακτικό βιβλίο γιά τήν τάξη αὐτή πρέπει, συνεπῶς, νά εἶναι ἐναρμονισμένο μέ τά βιβλία τῆς νέας γυμνασιακῆς ὕλης, νά διαθέτει τήν αὐτοτέλεια πού ἀπαιτεῖ ἡ τάξη ἀφετηρίας ἑνός νέου κύκλου σπουδῶν, ὅπως εἶναι τό Λύκειο, καί νά διασφαλίζει τήν ἀπαραίτητη ὑποδομή γιά τήν ἀπρόσκοπτη ἐφαρμογή τοῦ προγράμματος τῶν ἑπόμενων τάξεων.

Γι' αὐτό, κατά τή συγγραφή αὐτοῦ τοῦ βιβλίου, ὁδηγό ἀποτέλεσαν δύο ἀπό τίς εἰδικότερες ἐπιδιώξεις τῆς διδασκαλίας Μαθηματικῶν στό Λύκειο, ὅπως διατυπώνονται στό νέο ἀναλυτικό πρόγραμμα: α) «νά ἐμπεδώσει καί νά διευρύνει σέ θεωρητικότερο ἐπίπεδο γνώσεις πού ἀπέκτησαν οἱ μαθητές στό Γυμνάσιο» καί β) «νά μυήσει καί νά ἐξοικειώσει τό μαθητή στή διαδικασία τῆς μαθηματικῆς ἀποδείξεως καί νά τοῦ ἀναπτύξει μαθηματική σκέψη».

Ἡ τελευταία αὐτή ἐπιδίωξη, μεταξύ ἄλλων, ὁριοθετεῖ καί τήν ὕλη τῆς Λογικῆς πού περιέχεται στό κεφ. 1. Πρόκειται γιά τό θεωρητικό ὑπόβαθρο πού χρειάζεται ὁ μαθητής γιά νά συνθέτει, νά ἀναλύει καί νά ἐλέγχει συλλογισμούς, δηλαδή νὰ συνειδητοποιεῖ κάθε φορά τό «πῶς συλλογίζεται». Στά ἑπόμενα κεφάλαια συνεχῶς δίνονται εὐκαιρίες γιά ἀναφορά σέ ἔννοιες καί μεθόδους πού περιέχονται στό κεφ. 1. Ἡ διδασκαλία, λοιπόν, αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου δέν ἀποτελεῖ αὐτοσκοπό, ἀλλά πρέπει νά ἀνταποκρίνεται στήν ἰδιομορφία του. Ἀρκεῖ στήν ἀρχή μιά γενική, σύντομη καί «πρακτική» ἐνημέρωση τῶν μαθητῶν γιά τό περιεχόμενό του, κυρίως μέ τά παραδείγματα καί τίς ἐφαρμογές του· ἡ πλήρης ἀφομοίωση ἐννοιῶν καί μεθόδων καί ἡ ἐξοικείωση μέ τό συμβολισμό θά γίνει βαθμιαῖα κατά τή διδασκαλία τῶν ἑπομένων.

Ἐξάλλου κάθε κεφάλαιο ἀρχίζει μέ σύντομο εἰσαγωγικό σημείωμα στό ὁποῖο ἐπισημαίνονται τά ἰδιαίτερα χαρακτηριστικά του καί πού ἀπευθύνεται κυρίως στό διδάσκοντα. Τό κεφάλαιο κλείνει μέ τίς **Ἀπαντήσεις καί Ὑποδείξεις γιά τή λύση τῶν Ἀσκήσεων** πού περιέχει. Ἐλάχιστες ἀπό τίς ὑποδείξεις αὐτές εἶναι ἀπαραίτητες στό μαθητή πού, ἔχοντας τή φιλοδοξία νά λύνει μόνος του χωρίς βοήθεια τίς ἀσκήσεις, ἔχει μεθοδικά μελετήσει καί κατανοήσει τήν ἀντίστοιχη θεωρητική ὕλη.

Τέλος, τό βιβλίο κλείνει μέ Παράρτημα πού περιέχει πλήρεις **Λύσεις τῶν Ἀσκήσεων.** Εἶναι αὐτονόητη ἡ σύσταση νά μήν καταφεύγει ὁ μαθητής σ' αὐτό παρά μόνο γιά σύγκριση μέ τή λύση πού ὁ ἴδιος ἔκανε καί πάντως ἀφοῦ ἔχει ἐξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας καί ἀφοῦ ἔλαβε ὑπόψη τήν ἀντίστοιχη ὑπόδειξη.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΟ	ΣΗΜΑΣΙΑ
$\mathbb{N}$	τό σύνολο $\{0,1,2,3,\ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{Z}$	τό σύνολο $\{0, \pm 1, \pm 2,\ldots\}$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν
$\mathbb{Q}$	τό σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{R}$	τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$	τά παραπάνω σύνολα χωρίς τό 0
$\mathbb{R}^*_+,\ \mathbb{R}^*_-$	τό σύνολο τῶν θετικῶν, τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
$\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-$	τό σύνολο τῶν θετικῶν, τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καί τό 0 (θετικῶν, ἀρνητικῶν μέ εὐρεία σημασία)
$\in,\ \notin$	ἀνήκει, δέν ἀνήκει
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$\Leftrightarrow$	ἰσοδυναμεῖ
$\wedge$	καί (σύζευξη)
$\vee$	ἤ (διάζευξη)
$\veebar$	ἤ...ἤ (ἀποκλειστική διάζευξη)
$\forall$	καθολικός ποσοδείκτης (γιά κάθε)
$\exists$	ὑπαρξιακός ποσοδείκτης (ὑπάρχει)
$\overline{p},\ \overline{p(x)}$	ἄρνηση τῶν p, p(x)
$<,\ >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leq,\ \geq$	μικρότερο ἤ ἴσο, μεγαλύτερο ἤ ἴσο
$\cap,\ \cup$	τομή, ἕνωση
$\subset,\ \subseteq$	γνήσιο ὑποσύνολο, ὑποσύνολο
$A \times B$	καρτεσιανό γινόμενο τῶν Α,Β
$x\sigma y$	τό (x,y) ἱκανοποιεῖ τή σχέση σ ἤ τό x σχετίζεται μέ τό y
$\sigma = (A,B,G)$	διμελής σχέση σ, Α σύνολο ἀφετηρίας, Β σύνολο ἀφίξεως, G γράφημα
σ^{-1}	ἡ ἀντίστροφη σχέση τῆς σ
G^{-1}	τό ἀντίστροφο γράφημα τοῦ G
$f(x)$	εἰκόνα τοῦ x ἤ τιμή τῆς f στό x
F_A	τό σύνολο ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Α
$\frac{1}{f}$	ἡ συμμετρική ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό συνάρτηση τῆς f.

1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ἡ Λογική ἐπί μακρούς αἰῶνες ἔμεινε στό σημεῖο σχεδόν πού τήν εἶχε ἀφήσει ὁ ἱδρυτής της, ὁ μεγάλος Ἀριστοτέλης (384-322 π.Χ.). Σημαντική πρόοδος στήν ἐπιστήμη αὐτή σημειώθηκε ἀπό τό 19ο αἰώνα, ὅταν τά μαθηματικά εἰσέβαλαν καί σ' αὐτό τόν τομέα τῆς γνώσεως.

Ἡ παρουσίαση ὁρισμένων βασικῶν ἐννοιῶν τῆς μαθηματικῆς Λογικῆς θά συμβάλει, ὥστε ὁ μαθητής τοῦ Λυκείου νά κατανοεῖ τή λογική δομή τῶν φράσεων πού χρησιμοποιεῖ καί ἔτσι νά ἀκριβολογεῖ κατά τή διατύπωση τῶν σκέψεών του, νά κάνει σωστή καί ἐπωφελή χρήση τοῦ συμβολισμοῦ καί νά συνειδητοποιεῖ τά στάδια μιᾶς ἀποδεικτικῆς πορείας γιά νά καταλήγει σέ λογικά συμπεράσματα συστηματοποιημένα καί ἀπρόσβλητα. Σ' αὐτό κυρίως ἀποβλέπει τό περιεχόμενο αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προτάσεις

1.1 Τό πρῶτο πράγμα πού χρειάζεται κανείς γιά μιά σωστή συνεννόηση εἶναι νά γνωρίζει τή σημασία τῶν λέξεων πού χρησιμοποιεῖ. Αὐτό εἶναι ἐντελῶς ἀπαραίτητο στά μαθηματικά, ὅπου ἐκτός ἀπό τό κοινό λεξιλόγιο χρησιμοποιοῦμε ἰδιαίτερη **ὁρολογία** καί **συμβολισμό** (π.χ. τούς *ὅρους* σύνολο, πολυώνυμο, ὁμοιοθεσία, τά *σύμβολα* $=$, $\in$, $>$ κτλ.). Παρανόηση τῆς σημασίας ἑνός ὅρου ἤ συμβόλου ὁδηγεῖ σέ σφάλματα. Π.χ. ἕνα τετράπλευρο μέ ἴσες πλευρές εἶναι **τετράγωνο**; $\varnothing = \{\varnothing\}$;

Κατά τήν ἀνάπτυξη ἑνός μαθηματικοῦ θέματος διατυπώνουμε «λογικές προτάσεις» χρησιμοποιώντας λέξεις καί σύμβολα. Μέ τόν ὅρο **λογική πρόταση** ἤ ἁπλά **πρόταση** θά ἐννοοῦμε κάθε φράση πού μέ βάση τό νοηματικό της περιεχόμενο μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ ἤ ὡς **ἀληθής (α)** ἤ ὡς **ψευδής (ψ)**. Ἕνας τέτοιος χαρακτηρισμός μιᾶς προτάσεως λέγεται **τιμή ἀλήθειας** ἤ ἁπλά **τιμή** τῆς προτάσεως. Προτάσεις π.χ. εἶναι οἱ ἑξῆς:

— Κάθε ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο (ἀληθής)

— Ὁ ἀριθμός 18 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 6 καί τοῦ 5 (ψευδής).

Ἀπό τίς προτάσεις πού χρησιμοποιοῦμε στά μαθηματικά βασικές εἶναι καί οἱ:

- προτάσεις πού ἐκφράζουν ἰσότητα, ὅπως π.χ. ἡ $\alpha = \beta$, πού σημαίνει ὅτι τά μαθηματικά ἀντικείμενα α καί β **συμπίπτουν**, δηλαδή ὅτι α καί β εἶναι ὀνόματα τοῦ ἴδιου ἀντικειμένου
- προτάσεις ὅπως ἡ $\alpha \in A$, πού εἶναι ἡ συμβολική γραφή τῆς «α εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α».

Ἀληθεῖς προτάσεις

1.2 Ἄν οἱ κάθετες πλευρές ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ἔχουν μήκη 3 cm καί 4 cm, ἡ ὑποτείνουσα θά ἔχει μῆκος 5 cm, ἐπειδή $5^2 = 3^2 + 4^2$ (πυθαγόρειο θεώρημα). Ἐπίσης εἶναι $13^2 = 5^2 + 12^2$. Ἡ φράση λοιπόν:
«Ὑπάρχουν τρεῖς φυσικοί ἀριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ τέτοιοι, ὥστε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$» εἶναι πρόταση ἀληθής.

Ἄν ἀντί $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ γράψουμε $\alpha^k = \beta^k + \gamma^k$, ἡ ἀντίστοιχη φράση γιά κάθε $k \geqslant 3$ εἶναι φυσικά καί αὐτή πρόταση. Ἀληθής ἤ ψευδής; Ἀπό τότε πού διατύπωσε τό πρόβλημα ὁ Γάλλος μαθηματικός Fermat (1601 – 1665), δέ δόθηκε ὡς σήμερα ἀπάντηση σ' αὐτό τό ἐρώτημα.

Ἡ προσπάθεια γιά νά διαπιστωθεῖ ἄν μιά πρόταση ἀληθεύει ἤ ὄχι εἶναι τό κύριο χαρακτηριστικό τῆς μαθηματικῆς ἐργασίας. Ἡ ἀλήθεια μιᾶς προτάσεως μπορεῖ νά προκύψει:

- ἄμεσα ἀπό ἕναν **ὁρισμό**, πού εἶναι πρόταση μέ τήν ὁποία καθορίζεται ἡ σημασία ἑνός νέου ὅρου. Π.χ. «*Ρόμβος* εἶναι κάθε τετράπλευρο μέ ἴσες πλευρές»
- ὡς *λογικὸ συμπέρασμα* ἀπό ἄλλες ἀληθεῖς προτάσεις, ὁπότε λέγεται **θεώρημα.**

Οἱ ἀληθεῖς προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει λογικά ἕνα θεώρημα μπορεῖ νά εἶναι καί αὐτές θεωρήματα τά ὁποῖα ἔχουν προκύψει ἀπό ἄλλες ἀληθεῖς προτάσεις καί αὐτές ἀπό ἄλλες κ.ο.κ. Ἔτσι θά πρέπει ὁρισμένες ἀρχικές προτάσεις νά τίς δεχτοῦμε ὡς ἀληθεῖς. Αὐτές οἱ προτάσεις στή μαθηματική γλώσσα λέγονται **ἀξιώματα.**

Ἁπλές καί σύνθετες προτάσεις

1.3 Ἡ πρόταση «ὁ ἀριθμός α εἶναι περιττός» εἶναι μιά **ἁπλή** πρόταση, μέ τήν ἔννοια ὅτι κανένα τμῆμα της δέν ἀρκεῖ γιά νά σχηματιστεῖ μιά ἄλλη πρόταση. Δέ συμβαίνει τό ἴδιο μέ τήν πρόταση

(1) «ὁ ἀριθμός α δέν εἶναι περιττός»,

γιατί παραλείποντας τή λέξη «δέν» ἔχουμε τήν προηγούμενη πρόταση μέ ἐντελῶς διαφορετικό νόημα.
Κάθε πρόταση πού δέν εἶναι ἁπλή θά τή λέμε **σύνθετη.** Ἐκτός ἀπό τήν (1) σύνθετες εἶναι καί οἱ προτάσεις:

(2) «τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο καί (τό ΑΒΓ εἶναι) ἰσοσκελές»

(3) «ὁ ἀριθμός α εἶναι ἄρτιος ἤ (ὁ α εἶναι) περιττός»

(4) «ἄν Α εἶναι πατέρας τοῦ Β, τότε Β εἶναι παιδί τοῦ Α»,

σέ καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες διακρίνουμε δύο προτάσεις συνδεδεμένες μέ τίς λέξεις «καί» στή (2), «ἤ» στήν (3), «ἄν...τότε» στήν (4).

Γενικά, μετασχηματίζοντας μιά πρόταση μέ χρησιμοποίηση τοῦ «δέν» ἤ συνδέοντας δύο ὁποιεσδήποτε (1) προτάσεις μέ τίς λέξεις «καί», «ἤ», «ἄν... τότε», δημιουργοῦμε νέες προτάσεις. Αὐτές τίς διαδικασίες παραγωγῆς νέων προτάσεων τίς λέμε **λογικές πράξεις.**
Διαδοχικές ἐφαρμογές περισσότερων λογικῶν πράξεων ὁδηγοῦν σέ συνθετότερες προτάσεις, ὅπως ἡ ἀκόλουθη:

---

(1) Θεωρητικά δέν ὑπάρχει κανένας περιορισμός γιά τό ποιές προτάσεις συνθέτουμε. Ἔτσι σύνθετες προτάσεις εἶναι καί οἱ «5 = 3 καί ἡ Ρώμη εἶναι πρωτεύουσα τῆς Ἰταλίας», ἤ ἀκόμη ἡ «ἄν 0 = 1, τότε ὁ Ὄλυμπος εἶναι βουνό», πού σχηματίζονται ἀπό προτάσεις, οἱ ὁποῖες δέ σχετίζονται νοηματικά μεταξύ τους. Θά ἀποφύγουμε νά ἀναφερόμαστε σέ τέτοιες προτάσεις.

(5) «ἄν τό τετράπλευρο τ εἶναι παραλληλόγραμμο **καί** οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τίς γωνίες του ἤ τέμνονται καθέτως, τότε τό τ εἶναι ρόμβος».

1.4 Γιά νά διερευνήσουμε τή «δομή» μιᾶς σύνθετης προτάσεως, χρησιμοποιοῦμε γράμματα γιά τίς προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες σχηματίζεται ἀδιαφορώντας γιά τό νοηματικό περιεχόμενό τους. Ἔτσι:

- Ἡ (1), πού προέρχεται ἀπό μετασχηματισμό μιᾶς προτάσεως p (ὁ α εἶναι περιττός) μέ χρήση τοῦ «δέν», μπορεῖ νά γραφτεῖ «**ὄχι** p».
- Οἱ (2), (3), (4) γράφονται ἀντίστοιχα: «p **καί** q», «p **ἤ** q» καί «**ἄν** p **τότε** q».
- Ἡ (5) γράφεται ὅπως καί ἡ (4): Ἄν p, τότε q.

Ἀλλά ἐδῶ ἡ πρόταση

p: «τό τετράπλευρο τ εἶναι παραλληλόγραμμο **καί** οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τίς γωνίες του ἤ τέμνονται καθέτως» εἶναι σύνθετη καί ἔχει μορφή «p_1 καί p_2». Ἐξάλλου ἡ πρόταση:

p_2: «οἱ διαγώνιοι τοῦ τ διχοτομοῦν τίς γωνίες του **ἤ** τέμνονται καθέτως» εἶναι σύνθετη καί ἔχει τή μορφή «p_2' ἤ p_2''».

Συνεπῶς ἡ (5) τελικά γράφεται:

$$\textbf{Ἄν } p_1 \textbf{ καί } (p_2' \textbf{ ἤ } p_2''), \textbf{ τότε } q$$

Ἀσκήσεις 1, 2, 3, 4.

Προτασιακοί τύποι (π.τ.)

1.5 Μέ τήν πρόταση «ὁ 7 εἶναι ἄρτιος» ἀποδίδουμε (λανθασμένα) μιά ἰδιότητα στόν 7. Αὐτή τήν ἰδιότητα μποροῦμε νά τήν ἀποδώσουμε καί σέ κάθε ἄλλο φυσικό ἀριθμό. Ὅλες οἱ προτάσεις πού θά προκύψουν ἔχουν κοινή μορφή καί καθεμιά μπορεῖ νά «ἀντιπροσωπευθεῖ» ἀπό τή φράση «ὁ x εἶναι ἄρτιος», ἀρκεῖ τό σύμβολο x νά σημαίνει κάθε φορά ἕνα συγκεκριμένο φυσικό ἀριθμό.

Γενικά, ἔστω Ω ἕνα σύνολο καί p (x) μιά φράση πού περιέχει τό σύμβολο x καί πού μετατρέπεται σέ πρόταση κάθε φορά πού τό x ἀντικαθίσταται μέ ἕνα συγκεκριμένο στοιχεῖο τοῦ Ω. Τότε ἡ p (x) λέγεται **προτασιακός τύπος** (π.τ.) μιᾶς **μεταβλητῆς** x (ὁρισμένος) **στό Ω** ἤ μέ **σύνολο ἀναφορᾶς τό Ω.**
Θά συμβολίζουμε p(α) τήν πρόταση πού προκύπτει ἀπό τόν p(x), ὅταν θέσουμε ὅπου x τό $\alpha \in \Omega$. Θά λέμε ὅτι οἱ προτάσεις p(α) **παράγονται** ἀπό τόν π.τ. p(x), ὅταν τό x **διατρέχει** τό Ω. Θά λέμε ἀκόμα ὅτι ἕνα $\alpha \in \Omega$ **ἐπαληθεύει** τόν p(x), ἄν ἡ p(α) εἶναι πρόταση ἀληθής.

Τό σύνολο τῶν $\alpha \in \Omega$ πού ἐπαληθεύουν ἕνα π.τ. p(x) ὀνομάζεται **σύνολο**

ἀλήθειας τοῦ $p(x)$ καὶ γράφεται $\{x \in \Omega : p(x)\}$ ἢ ἁπλὰ [1] $\{x : p(x)\}$. Π.χ. σύνολο ἀλήθειας τοῦ π.τ.:

- «ὁ x εἶναι ἄρτιος», $x \in \mathbb{N}$ εἶναι τό $\{0,2,4,\ldots\}$
- «$x \in A$» μέ $A \subseteq \Omega$ εἶναι τό A δηλ. $\{x : x \in A\} = A$
- «$x^2 = 4$», $x \in \mathbb{R}$ εἶναι τό $\{2, -2\}$.

1.6 Μποροῦμε νά σχηματίσουμε π.τ. $p(x,y)$ μέ δύο μεταβλητές $x \in A$ καί $y \in B$, ὅπως π.χ. «ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ y» ($A = B = \mathbb{R}$). Ἡ σύγχρονη ἀντικατάσταση τοῦ x μέ $\alpha \in A$ καί τοῦ y μέ $\beta \in B$ μετατρέπει τόν $p(x,y)$ σέ πρόταση $p(\alpha,\beta)$. Ἔτσι ὁ $p(x,y)$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς π.τ. μέ μεταβλητή τό ζεῦγος (x,y) καί σύνολο ἀναφορᾶς $A \times B$.

Ἄν ἕνα ζεῦγος (α,β) ἐπαληθεύει τόν $p(x,y)$, λέμε ὅτι τό $\alpha \in A$ **σχετίζεται** μέ τό $\beta \in B$. Ἐπειδή τά ζεύγη τῶν σχετιζόμενων στοιχείων εἶναι ὁρισμένα, συνηθίζουμε νά λέμε ὅτι ἕνας π.τ. δύο μεταβλητῶν $x \in A$ καί $y \in B$ *ὁρίζει μία διμελή σχέση ἀπό τό A στό B.* Οἱ πιό ἐνδιαφέροντες π.τ. ἔχουν τή μορφή $x \sigma y$, ὅπου σ εἶναι κάθε φορά ἕνα εἰδικό σύμβολο, πού **ἐκφράζει** τή διμελή σχέση. Π.χ. $x = y$, $x < y$, $x \parallel y$. Τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ π.τ. $x \sigma y$ λέγεται καί **γράφημα** τῆς σ.

Ὁμοίως οἱ π.τ. μέ περισσότερες μεταβλητές μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὅτι εἶναι π.τ. μέ μία μεταβλητή. Π.χ. ὁ π.τ. $x^2 + y^2 = z^2$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἔχει ὡς μεταβλητή τή (διατεταγμένη) τριάδα (x, y, z).

Σημείωση

Εἰδικότερα οἱ π.τ. πού ἐκφράζουν ἰσότητα, παράγουν δηλ. προτάσεις τῆς μορφῆς $\alpha = \beta$, λέγονται **ἐξισώσεις**, ἐνῶ ἐκεῖνοι πού ἐκφράζουν ἀνισότητα ($>$, $<$) λέγονται **ἀνισώσεις**.

Συνήθως ὅλες οἱ μεταβλητές, πού λέγονται **ἄγνωστοι**, μιᾶς ἐξισώσεως (ἤ ἀνισώσεως) διατρέχουν τό ἴδιο σύνολο Ω καί, ὅταν βρίσκουμε τό σύνολο ἀλήθειας πού εἶναι **τό σύνολο λύσεων** τῆς ἐξισώσεως, θά λέμε ὅτι **λύνουμε τήν ἐξίσωση στό Ω.**

Εἶναι φανερό ὅτι μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε καί σέ π. τύπους τίς λογικές πράξεις πού περιγράψαμε στήν § 1.3 καί νά δημιουργήσουμε νέους σύνθετους π. τ., ὅπως π.χ. «**ὄχι** $p(x)$», «$p(x)$ **καί** $q(x)$» κτλ.

Στά ἑπόμενα θά καθορίσουμε τήν ἀκριβή σημασία τῶν λέξεων «δέν (ὄχι)», «καί», «ἤ», «ἄν... τότε» — καί μερικῶν ἄλλων — ὅταν χρησιμοποιοῦνται ὡς **σύμβολα λογικῶν πράξεων** γιά τό σχηματισμό νέων σύνθετων προτάσεων ἤ π. τύπων.

Ἀσκήσεις 5,6,7.

---

(1) Στά ἑπόμενα θά ἐννοοῦμε ὅτι ἡ μεταβλητή διατρέχει τό Ω, κάθε φορά πού δέν ἀναφέρεται ρητά ἄλλο σύνολο ἀναφορᾶς.

ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Ἄρνηση

1.7 Μέ τήν πρόταση «ὁ α *δέν* εἶναι περιττός» ἐκφράζουμε ὅτι ὁ α **δέν ἔχει** τήν ἰδιότητα πού θά τοῦ ἀποδίδαμε μέ τήν πρόταση «ὁ α εἶναι περιττός». Ἔτσι οἱ δύο αὐτές προτάσεις ἔχουν πάντοτε διαφορετικές τιμές ἀλήθειας, εἶναι, ὅπως λέμε, **ἑτερότιμες.**

Γενικά, ἄν p εἶναι μιά ὁποιαδήποτε πρόταση, ἡ πρόταση «ὄχι p», συμβολικά $\sim p$ ἤ καί $\bar{\mathbf{p}}$, ὀνομάζεται **ἄρνηση** τῆς p καί εἶναι:

- ἀληθής, ἄν ἡ p εἶναι ψευδής,
- ψευδής, ἄν ἡ p εἶναι ἀληθής,

p	$\bar{p}$
α	ψ
ψ	α

ὅπως φαίνεται στόν ἀπέναντι πίνακα πού λέγεται **πίνακας ἀλήθειας τῆς** $\bar{p}$.

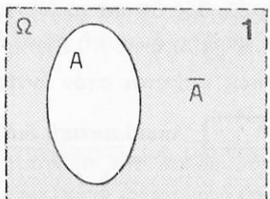
Σημείωση

Συνήθως, ὅταν μιά πρόταση ἐκφράζει μιά σχέση μέ τό σύμβολο σ, γιά τήν ἄρνησή της χρησιμοποιοῦμε τό $\not\sigma$.

Ἔτσι γράφουμε π.χ. $\alpha \neq \beta$, ἀντί γιά $\overline{\alpha = \beta}$ καί
$\alpha \notin A$, ἀντί γιά $\overline{\alpha \in A}$.

1.8 **Ἄρνηση π.τ.** Ἔστω p(x) ἕνας π.τ. (π.χ. ὁ x εἶναι περιττός). Ὁ π.τ. «ὄχι p(x)» (ὁ x δέν εἶναι περιττός), συμβολικά $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$, ὀνομάζεται **ἄρνηση** τοῦ p(x).

Ἔστω Α τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x). Τά στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἐπαληθεύουν τόν $\bar{p}(x)$ εἶναι ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού δέν ἐπαληθεύουν τόν p(x), δηλαδή δέν ἀνήκουν στό Α. Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τοῦ $\bar{p}(x)$ εἶναι τό $\bar{A}$, συμπληρωματικό τοῦ Α ὡς πρός Ω.



Σύζευξη

1.9 Ὅταν λέμε «τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο *καί* ἰσοσκελές», ἐννοοῦμε ὅτι **καί οἱ δύο** προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες σχηματίζεται – «τό ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο», «τό ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές»– εἶναι ἀληθεῖς.

Γενικά, ἄν p,q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «p καί q», συμβολικά $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$, ὀνομάζεται **σύζευξη** τῶν p,q καί χαρακτηρίζεται ὡς :

- ἀληθής, ἄν καί οἱ δύο προτάσεις p,q εἶναι ἀληθεῖς,
- ψευδής, σέ κάθε ἄλλη περίπτωση,

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

ὅπως δείχνει ὁ ἀπέναντι *πίνακας ἀλήθειας* τῆς $p \wedge q$.

1.10 **Σύζευξη π.τ.** Ὁ π.τ. «p(x) καί q(x)», ὁ ὁποῖος συμβολίζεται **p(x) ∧ q(x)**, ὀνομάζεται **σύζευξη** τῶν p(x), q(x).

Τά στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἐπαληθεύουν τόν p(x) ∧ q(x) εἶναι ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού ἐπαληθεύουν **καί τούς δύο** π.τ. p(x), q(x). Ἄν λοιπόν Α καί Β εἶναι τά σύνολα ἀλήθειας τῶν p(x) καί q(x) ἀντιστοίχως, τότε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x) ∧ q(x) ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά στοιχεῖα τῶν Α,Β, εἶναι δηλαδή ἡ τομή τους $A \cap B$.

Σημείωση

Ὅταν οἱ π.τ. εἶναι ἐξισώσεις ἤ ἀνισώσεις, χρησιμοποιοῦμε ἀντί τοῦ ὅρου «*σύζευξη*» τόν ὅρο «*σύστημα*».

Διάζευξη

1.11 Εἶναι γνωστό ὅτι κάθε ἀπόφοιτος Γυμνασίου δικαιοῦται νά δώσει ἐξετάσεις «στό Γενικό *ἤ* Τεχνικό Λύκειο» πού σημαίνει *ἤ μόνο* στό Γενικό *ἤ μόνο* στό Τεχνικό *ἤ καί στά δύο.* Μέ αὐτή τή σημασία χρησιμοποιεῖται στά μαθηματικά ἡ λέξη «ἤ», ὅταν συνδέει δύο προτάσεις. Ἔτσι π.χ., ὅταν λέμε ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση «$\alpha = 0$ ἤ $\beta = 0$», ἐννοοῦμε ὅτι ἀληθεύει μιά τουλάχιστον ἀπό τίς προτάσεις «$\alpha = 0$», «$\beta = 0$».

Γενικά, ἄν p, q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «p ἤ q», συμβολικά **p ∨ q**, ὀνομάζεται **διάζευξη** τῶν p, q καί χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν μιά τουλάχιστον ἀπό τίς p,q εἶναι ἀληθής,
- ψευδής, ἄν καί ἡ p καί ἡ q εἶναι ψευδεῖς,

ὅπως φαίνεται στόν ἀντίστοιχο *πίνακα ἀλήθειας*.

p	q	p ∨ q
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

1.12 **Ἀποκλειστική διάζευξη.** Μέ τίς προτάσεις p, q μποροῦμε νά σχηματίσουμε καί τήν πρόταση «ἤ μόνο p ἤ μόνο q», ἁπλούστερα «ἤ p ἤ q», πού ὀνομάζεται **ἀποκλειστική διάζευξη** τῶν p καί q καί συμβολίζεται **p $\underline{\vee}$ q.**
Ἡ πρόταση αὐτή χαρακτηρίζεται ὡς:

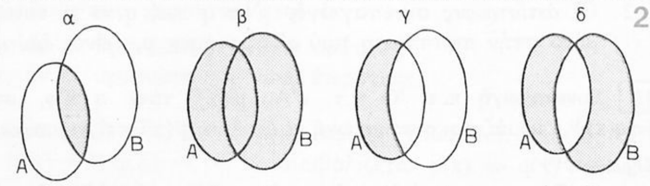
- ἀληθής, ὅταν οἱ προτάσεις p, q εἶναι ἑτερότιμες,
- ψευδής, ὅταν οἱ προτάσεις p, q εἶναι ὁμότιμες.

Ἄσκηση. Νά γίνει ὁ πίνακας ἀλήθειας τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως «ἤ p ἤ q».

1.13 **Διάζευξη π.τ.** Ὁ π.τ. «p(x) ἤ q(x)», συμβολικά **p(x) ∨ q(x)**, ὀνομάζεται **διάζευξη** τῶν p(x), q(x). Τά στοιχεῖα τοῦ Ω πού ἐπαληθεύουν τόν p(x) ∨ q(x) εἶναι ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού ἐπαληθεύουν ἕναν τουλάχιστον ἀπό τούς π.τ. p(x), q(x), δηλαδή ἐκεῖνα πού ἀνήκουν σέ ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά σύνολα ἀλήθειάς τους Α,Β. Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x) ∨ q(x) εἶναι ἡ ἕνωση $A \cup B$.

Πράξεις συνόλων. Ἔστω A καί B ὑποσύνολα τοῦ Ω. Ἀξιοσημείωτοι π.τ. εἶναι οἱ ἑξῆς:

- «$x \in A$ καί $x \in B$» μέ σύνολο ἀλήθειας τήν **τομή** $A \cap B$ (σχ. 2α)
- «$x \in A$ ἤ $x \in B$» » » » τήν **ἕνωση** $A \cup B$ (σχ. 2β)
- «$x \in A$ καί $x \notin B$» » » » τή **διαφορά** $A - B$ (σχ. 2γ)
- «ἤ $x \in A$ ἤ $x \in B$» » » » τή **συμμετροδιαφορά** $A \dot{+} B$ (σχ. 2δ).



2

A ∩ B **A ∪ B** **A — B** **$A \dot{+} B$**

Συνεπαγωγή

1.14 Ἔστω ν ἕνας φυσικός ἀριθμός. Ἀπό τήν ἀνισότητα $\nu > 10$ μποροῦμε, αὐξάνοντας τό α' μέλος κατά 1, νά καταλήξουμε «λογικά» στή $\nu+1 > 10$. Γιά νά ἐκφράσουμε ὅτι ἡ πρόταση $\nu > 10$ ἔχει ὡς λογική συνέπεια τή $\nu+1 > 10$, λέμε, *«ἄν* $\nu > 10$, *τότε* $\nu+1 > 10$», ἤ «ἡ $\nu > 10$ *συνεπάγεται* τή $\nu+1 > 10$» καί γράφουμε:

$$\nu > 10 \Rightarrow \nu+1 > 10. \tag{1}$$

Προτάσεις ὅπως ἡ (1) στά μαθηματικά χαρακτηρίζονται ὡς ἀληθεῖς, **ἀνεξάρτητα ἀπό τό ν,** γιατί ὁ χαρακτηρισμός «ἀληθής» ἀναφέρεται στή μετάβαση (ὅτι ἔγινε δηλαδή σωστά) ἀπό τήν *«ὑπόθεση»* $\nu > 10$ στό *«συμπέρασμα»* $\nu+1 > 10$. Πάντως, ὁποιος καί ἄν εἶναι ὁ ν, ἀποκλείεται ἡ περίπτωση νά ἔχουμε συγχρόνως ὑπόθεση ἀληθῆ καί συμπέρασμα ψευδές, ἐνῶ ὅλες οἱ ἄλλες περιπτώσεις μποροῦν νά παρουσιαστοῦν. Πράγματι:

γιά	$\nu = 11$	ἔχουμε	$11 > 10$ (α) $\Rightarrow 12 > 10$ (α)
»	$\nu = 10$	»	$10 > 10$ (ψ) $\Rightarrow 11 > 10$ (α)
»	$\nu = 9$	»	$9 > 10$ (ψ) $\Rightarrow 10 > 10$ (ψ).

Γενικά, ἄν p, q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «ἄν p, τότε q» συμβολικά «**p ⇒ q**»(1), ὀνομάζεται **συνεπαγωγή** μέ *ὑπόθεση* p καί *συμπέρασμα* q καί χαρακτηρίζεται ὡς:

(1) Διαβάζεται: «p συνεπάγεται q».

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

- ψευδής, ἄν ἡ p εἶναι ἀληθής καί ἡ q ψευδής,
- ἀληθής, σέ κάθε ἄλλη περίπτωση,

ὅπως δείχνει καί ὁ ἀντίστοιχος πίνακας ἀλήθειας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ἀπό τό διπλανό πίνακα ἀλήθειας συμπεραίνουμε ὅτι:

1. Ἡ $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής στίς περιπτώσεις πού ἡ p εἶναι ψευδής ἤ ἡ q εἶναι ἀληθής.
2. Οἱ *ἀντίστροφες* συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$ **συναληθεύουν** μόνο στήν περίπτωση πού οἱ προτάσεις p,q εἶναι *ὁμότιμες*.

1.15 **Συνεπαγωγή π. τ.** Ὁ π.τ. «Ἄν $p(x)$ τότε $q(x)$», συμβολικά $\mathbf{p(x) \Rightarrow q(x)}$(1), ὀνομάζεται **συνεπαγωγή** μέ *ὑπόθεση* $p(x)$ καί *συμπέρασμα* $q(x)$.

★ **Σημείωση** (2)

Τά στοιχεῖα πού ἐπαληθεύουν τόν $p(x) \Rightarrow q(x)$ εἶναι, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1, ἐκεῖνα ἀκριβῶς πού δέν ἐπαληθεύουν τόν $p(x)$ ἤ ἐπαληθεύουν τόν $q(x)$, δηλαδή ἀνήκουν στό $\overline{A}$, συμπληρωματικό τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ $p(x)$, ἤ στό B, σύνολο ἀλήθειας τοῦ $q(x)$. Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τῆς συνεπαγωγῆς $p(x) \Rightarrow q(x)$ εἶναι τό σύνολο $\overline{A} \cup B$.

Ἰσοδυναμία

1.16 Ἔστω α ἕνας φυσικός ἀριθμός. Ὅταν ὁ α δέν εἶναι μονοψήφιος, οἱ προτάσεις «$α > 9$» καί «$α+1 > 10$» εἶναι καί οἱ δυό ἀληθεῖς. Ὅταν ὁ α εἶναι μονοψήφιος, οἱ παραπάνω προτάσεις εἶναι καί οἱ δύο ψευδεῖς. Δηλαδή οἱ προτάσεις αὐτές εἶναι πάντοτε *ὁμότιμες*. Ἄρα σύμφωνα μέ τήν παρατ. 2 τῆς § 1.14 οἱ ἀντίστροφες συνεπαγωγές

$$α > 9 \Rightarrow α+1 > 10$$
$$α+1 > 10 \Rightarrow α > 9$$

ἀληθεύουν ἀνεξάρτητα ἀπό τόν α. Ἑπομένως ἀληθεύει καί ἡ σύζευξή τους «$α > 9 \Rightarrow α+1 > 10$ καί $α+1 > 10 \Rightarrow α > 9$», πού γράφεται ἁπλούστερα $α > 9 \Leftrightarrow α+1 > 10$.

Μέ αὐτή τή σημασία χρησιμοποιεῖται στά μαθηματικά τό σύμβολο $\Leftrightarrow$ ὅταν συνδέει δύο προτάσεις· δηλαδή ὡς σύζευξη δύο ἀντίστροφων συνεπαγωγῶν. Συγκεκριμένα:

Ἄν p,q εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε προτάσεις, ἡ πρόταση «$p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$» συμβολίζεται $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ καί διαβάζεται «p **ἄν καί μόνο ἄν** q» ἤ «p **ἰσοδυναμεῖ** μέ q» ἤ «ἡ p συνεπάγεται τήν q καί **ἀντιστρόφως**».

(1) Ἡ συνεπαγωγή αὐτή ἐκφράζεται καί ὡς ἑξῆς: «**ἀρκεῖ** $p(x)$ γιά νά εἶναι $q(x)$» ἤ «$p(x)$ εἶναι **ἱκανή** συνθήκη γιά τήν $q(x)$» καθώς καί «γιά νά εἶναι $p(x)$, **πρέπει** $q(x)$» ἤ «$q(x)$ εἶναι **ἀναγκαία** συνθήκη γιά τήν $p(x)$».

(2) Οἱ ἑνότητες μέ ἀστερίσκο μποροῦν νά μή διδάσκονται.

Ἡ $\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$ ὀνομάζεται **ἰσοδυναμία** τῶν p, q καί, ὅπως προκύπτει ἀπό τόν

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	α

πίνακα ἀλήθειάς της, χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν οἱ προτάσεις p,q εἶναι ὁμότιμες,
- ψευδής, ἄν οἱ προτάσεις p,q εἶναι ἑτερότιμες.

1.17 **Ἰσοδυναμία π.τ.** Ἔστω p(x) καί q(x) δύο π.τ. στό Ω. Ὁ π.τ. «$p(x) \Rightarrow q(x)$ καί $q(x) \Rightarrow p(x)$» συμβολίζεται $\mathbf{p(x) \Leftrightarrow q(x)}$ (1) καί ὀνομάζεται **ἰσοδυναμία** τῶν p(x), q(x).

Σημείωση

Ἄν Α,Β εἶναι τά σύνολα ἀλήθειας τῶν p(x), q(x), τότε (§1.15 Σημ.) σύνολο ἀλήθειας τοῦ $p(x) \Rightarrow q(x)$ εἶναι τό $\overline{A} \cup B$, σύνολο ἀλήθειας τοῦ $q(x) \Rightarrow p(x)$ εἶναι τό $\overline{B} \cup A$. Ἄρα σύνολο ἀλήθειας τοῦ $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ εἶναι (§ 1.10) τό $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$.

Γενίκευση συζεύξεως καί διαζεύξεως

1.18 Μέ ν προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ σχηματίζεται ἡ πρόταση «p_1 καί p_2 καί... καί p_ν», συμβολικά $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_\nu$, πού ὀνομάζεται σύζευξή τους καί χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν **ὅλες** οἱ $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ἀληθεῖς,
- ψευδής, ἄν **μιά τουλάχιστον** ἀπό τίς $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ψευδής.

Ὁμοίως μέ τίς παραπάνω προτάσεις σχηματίζεται καί ἡ διάζευξή τους «p_1 ἤ p_2 ἤ ... ἤ p_ν», συμβολικά $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_\nu$, πού χαρακτηρίζεται ὡς:

- ἀληθής, ἄν **μία τουλάχιστον** ἀπό τίς $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ἀληθής,
- ψευδής, ἄν **ὅλες** οἱ $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ εἶναι ψευδεῖς.

Σημείωση

Ἀνάλογα ὁρίζεται ἡ ἀποκλειστική διάζευξη «ἤ p_1 ἤ p_2 ἤ... ἤ p_ν» καθώς καί ἡ σύζευξη καί ἡ διάζευξη ν π. τύπων.

Ἀσκήσεις 8,9,10.

---

(1) Ἐκφράζεται (βλ. ὑποσημ. 1 § 1.15) καί ὡς ἑξῆς: «γιά νά εἶναι p(x), πρέπει καί ἀρκεῖ q(x)» ἤ «p(x) εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά τήν q(x)».

1.19 Ἡ πρόταση «τό γινόμενο κάθε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί 0 ἰσοῦται μέ 0» εἶναι μιά ἀληθής πρόταση, ἁπλή κατά τήν ἔννοια τῆς § 1.3. Ὅμως ἔχει πλούσιο νοηματικό περιεχόμενο· σημαίνει ὅτι ἀληθεύουν οἱ προτάσεις π.χ. $1 \cdot 0 = 0$, $\sqrt{2} \cdot 0 = 0$, $-0{,}75 \cdot 0 = 0$ καί γενικά ὅλες ὅσες παράγονται ἀπό τόν π.τ. $x \cdot 0 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Ἡ ἀρχική πρόταση λοιπόν μπορεῖ νά ἀναδιατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς: «Γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, εἶναι $x \cdot 0 = 0$», πού γράφεται συμβολικά

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 0 = 0.$$

Ὁ π.τ. $x \cdot 0 = 0$ λέγεται καθολικά ἀληθής.

Γενικά, θά λέμε ὅτι ἕνας π.τ. εἶναι **καθολικά ἀληθής**, ἤ ἁπλούστερα **ἀληθεύει** ἤ **ἰσχύει** (στό Ω), ὅταν τό σύνολο ἀλήθειάς του συμπίπτει μέ τό σύνολο ἀναφορᾶς του.

Τό σύμβολο ∀, πού ὀνομάζεται **καθολικός ποσοδείκτης**, χρησιμοποιεῖται στά μαθηματικά γιά νά δηλώνει ἄν ἕνας π.τ. εἶναι καθολικά ἀληθής ἤ ὄχι. Συγκεκριμένα:

Ἔστω $p(x)$ ἕνας π.τ. στό Ω μέ σύνολο ἀλήθειας Α. Ἡ πρόταση «γιά κάθε $x \in \Omega$, ἰσχύει (ἀληθεύει, εἶναι, ἔχουμε) $p(x)$», πού συμβολίζεται

$$\forall\, x \in \Omega, \quad p(x) \quad \text{ἤ} \quad \text{ἁπλούστερα} \quad \forall\, x,\ p(x)$$

χαρακτηρίζεται:

- ἀληθής, ἄν ὁ $p(x)$ εἶναι καθολικά ἀληθής, πού σημαίνει $A = \Omega$, δηλαδή ὅλες οἱ προτάσεις πού παράγονται ἀπό τόν $p(x)$ εἶναι ἀληθεῖς,
- ψευδής, ἄν $A \neq \Omega$, δηλαδή ἄν ἔστω καί μία ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις εἶναι ψευδής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ πρόταση $\forall x,\ x = x$ εἶναι ἀληθής (Ω: ὁποιοδήποτε σύνολο)
2. » $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0$ εἶναι ψευδής, ἀφοῦ π.χ. $2^2 - 1 = 0$ εἶναι ψευδής.
3. » $\forall\, x \in \{-1, 1\},\ x^2 - 1 = 0$ εἶναι ἀληθής
4. » $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x \neq x + 1$ εἶναι ψευδής
5. » $\forall\, x$, x εἶναι ἰσόπλευρο εἶναι ψευδής (Ω: σύνολο τῶν τριγώνων).

Σημείωση

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό σύνολο ἀναφορᾶς Ω τοῦ π.τ. $p(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό ν στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε ἡ πρόταση $\forall x,\ p(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή σύζευξη $p(\alpha_1) \wedge p(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge p(\alpha_\nu)$. Συνεπῶς ὁ καθολικός ποσοδείκτης ∀ μπορεῖ νά θεωρεῖται ὡς ἕνα σύμβολο γενικευμένης συζεύξεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἐπειδή ἕνας π.τ. $p(x,y)$ δύο μεταβλητῶν $x \in A$ καί $y \in B$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς π.τ. **μιᾶς** μεταβλητῆς, τοῦ ζεύγους (x,y) μέ

σύνολο ἀναφορᾶς τό $A \times B$ (§ 1.6), μποροῦμε νά σχηματίζουμε προτάσεις τῆς μορφῆς $\forall (x,y) \in A \times B,\ p(x,y)$ ἤ ἁπλούστερα $\forall (x,y),\ p(x,y)$, πού γράφεται καί $\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ p(x,y)$. Ὅταν $A=B=\Omega$, γράφουμε ἁπλούστερα

$$\forall x,y \in \Omega,\ p(x,y) \text{ ἤ } \forall x,\ \forall y,\ p(x,y).$$

Π.χ. $\forall x,y \in \mathbb{R},\quad x+y=y+x$ (ἀληθής)

$\forall x,\ \forall y,\quad x+2y=5$ (ψευδής)

2. Χαρακτηριστικό παράδειγμα π. τύπων πού εἶναι καθολικά ἀληθεῖς εἶναι οἱ γνωστές μας ταυτότητες στήν Ἄλγεβρα. Ὅταν λέμε π.χ. ὅτι οἱ $(x+1)^2=x^2+2x+1$, $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ *εἶναι ταυτότητες στό* $\mathbb{R}$, ἐννοοῦμε ὅτι ἀληθεύουν οἱ προτάσεις : $\forall x, (x+1)^2=x^2+2x+1$ καί $\forall x, \forall y, (x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

3. Πολλές φορές ἡ φραστική διατύπωση μιᾶς προτάσεως κρύβει τήν παρουσία τοῦ ποσοδείκτη $\forall$. Τότε μιά ἀναδιατύπωση εἶναι ἀπαραίτητη γιά νά ἀποδώσει τό ἀκριβές περιεχόμενό της. Π.χ. στήν Ἐπιπεδομετρία ἡ πρόταση «δύο εὐθεῖες κάθετες στήν ἴδια εὐθεία ε εἶναι παράλληλες» ἀναδιατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$\forall (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, ἄν ε_1 καί ε_2 εἶναι κάθετες στήν ε, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Συνεπαγωγές καθολικά ἀληθεῖς. Ἰσοδύναμοι π.τ.

1.20 Ὅπως τό προηγούμενο παράδειγμα πολλά θεωρήματα στά μαθηματικά ἔχουν τή μορφή $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$. Ἄν ἰσχύει (στό Ω) καί ἡ *ἀντίστροφη* συνεπαγωγή $q(x) \Rightarrow p(x)$, τότε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, δηλ. ἀληθεύει ἡ πρόταση $\forall x,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Στήν περίπτωση αὐτή οἱ π.τ. $p(x)$ καί $q(x)$ λέγονται **ἰσοδύναμοι**. Π.χ.

- Ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: «ἄν x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 9, τότε x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3», ἀλλά ὄχι καί ἡ ἀντίστροφή της ($x \in \mathbb{N}$).
- Οἱ π.τ. «x εἶναι ἰσοσκελές» καί «δύο γωνίες τοῦ x εἶναι ἴσες» εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τά σύνολα ἀλήθειας δύο ἰσοδύναμων π.τ. εἶναι ἴσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Εἴδη διμελῶν σχέσεων. Ἕνας π.τ. $p(x,y)$ δύο μεταβλητῶν $x \in \Omega$ καί $y \in \Omega$ ὁρίζει μιά **διμελή σχέση** σ στό Ω καί γράφεται $x \sigma y$. Ἡ σχέση σ λέγεται:

- **ἀνακλαστική**, ὅταν $\forall x,\ x\sigma x$
- **συμμετρική**, ὅταν ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $x\sigma y \Rightarrow y\sigma x$
- **ἀντισυμμετρική**, » » » $(x\sigma y$ καί $y\sigma x) \Rightarrow x=y$
- **μεταβατική**, » » » $(x\sigma y$ καί $y\sigma z) \Rightarrow x\sigma z$.

Ὅπως ἤδη γνωρίζουμε, μιά σχέση ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική λέγεται **σχέση ἰσοδυναμίας** (π.χ. ἰσότητα, παραλληλία εὐθειῶν, ὁμοιότητα τριγώνων), ἐνῶ μιά σχέση ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική καί μεταβατική λέγεται **σχέση διατάξεως** (π.χ. σχέση $\leq$ στό $\mathbb{R}$, διαιρετότητα στό $\mathbb{N}$).

Ὑπαρξιακός ποσοδείκτης

1.21 Πολλές φορές, πρίν ἀρχίσουμε τίς προσπάθειες γιά τή λύση ἑνός προβλήματος, εἶναι σκόπιμο νά θέτουμε τό ἐρώτημα ἄν **ὑπάρχει** τέτοια λύση. Ἔτσι π.χ. εἶναι ἄσκοπο νά προσπαθήσουμε νά βροῦμε ρίζες τῆς ἐξισώσεως $3x^8+5x^2+1=0$ στό $\mathbb{R}$. Οἱ ἰσότητες πού προκύπτουν ἀπ' αὐτή γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ $x \in \mathbb{R}$ ἔχουν α' μέλος θετικό ≥ 1 καί συνεπῶς εἶναι ὅλες ψευδεῖς. Ὁ π.τ. $3x^8+5x^2+1=0$ πού ἔχει σύνολο ἀλήθειας τό $\varnothing$ εἶναι **καθολικά ψευδής.** Ἀντίθετα ἡ ἐξίσωση $x+5=0$ **δὲν εἶναι** καθολικά ψευδής. Αὐτό διατυπώνεται μέ τήν πρόταση «ὑπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ὥστε $x+5=0$» πού γράφεται συμβολικά

$$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x+5=0.$$

Τό σύμβολο $\exists$, πού ὀνομάζεται **ὑπαρξιακός ποσοδείκτης**, χρησιμοποιεῖται γιά νά ἐκφράσει ἄν ἕνας π.τ. εἶναι καθολικά ψευδής ἤ ὄχι. Συγκεκριμένα:

Ἔστω $p(x)$ ἕνας π.τ. στό Ω μέ σύνολο ἀλήθειας A. Ἡ πρόταση «ὑπάρχει (ἕνα τουλάχιστο) $x \in \Omega$ τέτοιο, ὥστε (νά ἰσχύει, νά εἶναι) $p(x)$», πού συμβολίζεται:

$$\exists\, x \in \Omega,\ p(x) \quad \text{ἤ ἁπλούστερα} \quad \exists\, x,\ p(x)$$

χαρακτηρίζεται:

- ψευδής, ἄν ὁ $p(x)$ εἶναι καθολικά ψευδής, πού σημαίνει $A=\varnothing$, δηλαδή ἄν ὅλες οἱ προτάσεις πού παράγονται ἀπό τόν $p(x)$ εἶναι ψευδεῖς,
- ἀληθής, ἄν $A \neq \varnothing$, δηλαδή ἄν ἔστω καί μία ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις εἶναι ἀληθής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ πρόταση	$\exists\, x \in \mathbb{Z},\ 2x=-5$	εἶναι ψευδής	
2. »	$\exists\, x \in \mathbb{Q},\ 2x=-5$	εἶναι ἀληθής	
3. »	$\exists\, x\ ,\ x \neq x$	εἶναι ψευδής	(Ω: ὁποιοδήποτε σύνολο)
4. »	$\exists\, x \in \mathbb{N},\ 2x > 3x-2$	εἶναι ἀληθής	
5. »	$\exists\, x$, x εἶναι τραπέζιο	εἶναι ἀληθής	(Ω: σύνολο τῶν τετραπλεύρων.)

Σημείωση

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό σύνολο ἀναφορᾶς Ω τοῦ π.τ. $p(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό ν στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε ἡ πρόταση $\exists\, x,\ p(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή διάζευξη $p(\alpha_1) \vee p(\alpha_2) \vee \ldots \vee p(\alpha_\nu)$. Συνεπῶς ὁ ὑπαρξιακός ποσοδείκτης μπορεῖ νά θεωρεῖται ὡς ἕνα σύμβολο γενικευμένης διαζεύξεως.

Ἀρνήσεις

1.22 Τίς ἀρνήσεις τῶν προτάσεων $\forall x, p(x)$ καί $\exists x, p(x)$ θά τίς συμβολίζουμε $\overline{\forall x, p(x)}$ καί $\overline{\exists x, p(x)}$ ἀντιστοίχως. Ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει ὅτι ἀληθεύουν οἱ ἰσοδυναμίες:

$$\overline{\forall x, p(x)} \Leftrightarrow \exists x, \overline{p}(x) \quad (1)$$

$$\overline{\exists x, p(x)} \Leftrightarrow \forall x, \overline{p}(x). \quad (2)$$

Πράγματι τά δύο μέλη τῆς (1) εἶναι προτάσεις ὁμότιμες, ἐπειδή:

- Ἄν ἡ $\overline{\forall x, p(x)}$ εἶναι ἀληθής, τότε ἡ $\forall x, p(x)$ εἶναι ψευδής. Ἄρα (§ 1.5) ὑπάρχει x τέτοιο, ὥστε $p(x)$ εἶναι ψευδής, δηλαδή ἐπαληθεύει τόν $\overline{p}(x)$. Ἑπομένως ἡ $\exists x, \overline{p}(x)$ ἀληθεύει.
- Ἄν ἡ $\overline{\forall x, p(x)}$ εἶναι ψευδής, τότε ἡ $\forall x, p(x)$ εἶναι ἀληθής. Ἄρα κανένα x δέν ἐπαληθεύει τόν $\overline{p}(x)$ καί συνεπῶς ἡ $\exists x, \overline{p}(x)$ εἶναι ψευδής.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί ἡ ἰσοδυναμία (2).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ὅταν ἕνας π.τ. $p(x)$ δέν εἶναι καθολικά ἀληθής, δηλ. ὅταν ἀληθεύει ἡ $\overline{\forall x, p(x)}$, αὐτό δέ σημαίνει ὅτι εἶναι καθολικά ψευδής, δηλ. ὅτι $\forall x, \overline{p}(x)$, ἀλλά ἁπλῶς ὅτι $\exists x, \overline{p}(x)$.

Ἀσκήσεις 11,12,13,14.

ΛΟΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Ἔννοια τοῦ λογικοῦ τύπου (λ.τ.)

1.23 Στήν ἀλγεβρική παράσταση $\dfrac{x + yz}{z}$ εἶναι σημειωμένη μιά σειρά πράξεων ἀνάμεσα σέ ἀριθμούς πού παριστάνονται μέ γράμματα. Ἀνάλογη κατάσταση ἔχουμε στή Λογική.

Ὅταν, γιά νά συμβολίσουμε μιά πρόταση ἤ ἕναν π.τ., χρησιμοποιοῦμε γράμματα $p, q, r, \ldots$ πού παριστάνουν προτάσεις **ἤ καί π.τ.,** σημειώνοντας ἀνάμεσά τους μιά καθορισμένη σειρά λογικῶν πράξεων ($\overline{\ }$, $\wedge$, $\vee$, ...), τότε ἔχουμε μιά **λογική παράσταση** ἤ, ἀλλιῶς, ἕνα **λογικό τύπο** (λ.τ.). Τά γράμματα λέγονται **μεταβλητές** τοῦ λ.τ.

Ἔτσι, λ.τ. εἶναι π.χ. τά γράμματα $p, q, r, \ldots$, οἱ ἀρνήσεις $\overline{p}$, $\overline{(\overline{p})}$ ἤ $\overline{\overline{p}}\ldots$, οἱ $p \vee q$, $p \wedge q$, $(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \vee r)$, $[(p \Rightarrow r) \wedge (\overline{q} \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ κτλ.

Οἱ παρενθέσεις χρησιμοποιοῦνται, ὅπως καί στήν Ἄλγεβρα, γιά νά καθορίσουν μέ σαφήνεια τή σειρά τῶν πράξεων.
Ὅταν οἱ μεταβλητές ἑνός λ.τ. ἀντικατασταθοῦν μέ προτάσεις, ὁ λ.τ. μετατρέπεται σέ πρόταση, τῆς ὁποίας ἡ τιμή ἀλήθειας ἐξαρτᾶται φυσικά ἀπό τίς τιμές τῶν μεταβλητῶν του.
Ἄν ἐπισημάνουμε ποιές λογικές πράξεις καί **μέ ποιά σειρά** εἶναι σημειωμένες σ' ἕνα λ.τ., μποροῦμε νά ἐμφανίσουμε μέ πίνακα ἀλήθειας τίς τιμές του (α ἤ ψ) γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν του, ὅπως κάνουμε στούς ἑπόμενους πίνακες.
Στόν πίνακα Ι ἐμφανίζονται οἱ τιμές διάφορων λ. τύπων μιᾶς μεταβλητῆς.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

p	$p \Leftrightarrow p$	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \veebar \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$
1	2	3	4	5	6	7
α	α	ψ	α	α	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	α

Ἡ στήλη 2 συμπληρώθηκε κατά τήν § 1.16. Ἡ στήλη 3 παρεμβάλλεται, γιατί εἶναι ἀπαραίτητη γιά τή συμπλήρωση τῶν ἑπόμενων στηλῶν. Ἡ 4 συμπληρώθηκε ἀπό τήν 3, ἡ 5 καθώς καί ἡ 6 ἀπό τίς 1 καί 3 καί τέλος ἡ 7 ἀπό τίς 1 καί 4.
Στόν πίνακα ΙΙ ἐμφανίζονται οἱ τιμές λ.τύπων μέ δύο μεταβλητές.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
α	α	α	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α
α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α	ψ	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	ψ	α	α	ψ	α	α	α	α	α	α

Στίς στῆλες 1 καί 2 ἔχουμε τούς τέσσερις συνδυασμούς τιμῶν τῶν μεταβλητῶν p, q. Στόν πίνακα ἔχουν παρεμβληθεῖ οἱ στῆλες 3,5,7 γιά τή συμπλήρωση ἀντιστοίχως τῶν 4,6,8 καθώς καί οἱ στῆλες 9,10 γιά τή συμπλήρωση τῶν ὑπόλοιπων στηλῶν.
Τέλος ὁ πίνακας ΙΙΙ εἶναι ἕνα παράδειγμα πίνακα ἀλήθειας τοῦ λ.τ. τριῶν μεταβλητῶν: $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α
α	ψ	α	α	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	ψ	α	α
ψ	ψ	ψ	α	α	α	ψ	α	α

Ταυτολογίες

1.24 Ἀπό τούς πίνακες τῆς προηγούμενης παραγράφου διαπιστώνουμε ὅτι ὁρισμένοι λ.τ. ἔχουν σταθερή τιμή ἀλήθειας ἀνεξάρτητα ἀπό τίς τιμές τῶν μεταβλητῶν τους. Ἕνας λ.τ. πού γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν του ἔχει

τιμή : ↗ **α** ὀνομάζεται **ταυτολογία**
↘ **ψ** » **ἀντίφαση.**

Ταυτολογίες εἶναι οἱ λ.τ. πού ἐμφανίζονται στίς στῆλες 2, 5, 7 τοῦ πίνακα Ι (π.χ. ὁ $p \vee \bar{p}$) καί στή στήλη 9 τοῦ πίνακα ΙΙΙ. Ἀντιφάσεις εἶναι οἱ ἀρνήσεις τῶν προηγούμενων λ.τ. καθώς καί ὁ τύπος $p \wedge \bar{p}$ (στήλη 6 τοῦ πίνακα Ι). Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἄρνηση μιᾶς ἀντιφάσεως εἶναι ταυτολογία, ὅπως π.χ. ὁ $\overline{p \wedge \bar{p}}$.

1.25 **Ἰσοδύναμοι λ.τ.** Οἱ λ.τ. $p \Rightarrow q$ καί $\bar{p} \vee q$, ὅπως προκύπτει ἀπό τίς στῆλες 7 καί 13 τοῦ πίνακα ΙΙ, γιά κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τους ἔχουν ἴδια τιμή ἀλήθειας. Δύο λ.τ. μέ αὐτή τήν ἰδιότητα λέγονται **ἰσοδύναμοι.** Ἰσοδύναμοι λ.τ. εἶναι καί οἱ:

- p καί $\bar{\bar{p}}$ Πίνακας Ι, στ. 1 καί 4
- $p \Rightarrow q$ καί $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ » ΙΙ, » 7 » 14
- $\overline{p \vee q}$ καί $\bar{p} \wedge \bar{q}$ » ΙΙ, » 4 » 11
- $\overline{p \wedge q}$ καί $\bar{p} \vee \bar{q}$ » ΙΙ, » 6 » 12

Ἄν δύο λ.τ. T_1 καί T_2 εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε ὁ λ.τ. $T_1 \Leftrightarrow T_2$ εἶναι ταυτολογία. Ἔτσι ἀπό τά προηγούμενα ζεύγη ἰσοδύναμων λ.τ. ἔχουμε ἀντίστοιχες ταυτολογίες, π.χ. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ κτλ.

1.26 Ἄν σέ μιά ταυτολογία Τ ἀντικαταστήσουμε τίς μεταβλητές της μέ (ὁποιεσδήποτε) προτάσεις, τότε ἡ Τ μετατρέπεται σέ πρόταση ἀληθή. Ἄν πάλι ἀντικαταστήσουμε τίς μεταβλητές μέ π. τύπους, ἡ Τ μετατρέπεται σέ π.τ. $T(x)$ πού εἶναι καθολικά ἀληθής (ἀφοῦ γιά κάθε $x \in \Omega$ γίνεται ἀληθής πρόταση). Συνεπῶς ἀληθεύει ἡ πρόταση $\forall x, T(x)$. Ἔτσι π.χ. ἀπό τήν ταυτολογία $p \veebar \bar{p}$, δηλαδή «ἤ p ἤ $\bar{p}$», παράγονται ἀληθεῖς προτάσεις, ὅπως ἡ «ὁ ἀριθμός 853 ἤ διαιρεῖται μέ τό 11 ἤ δέ διαιρεῖται μέ τό 11» ἀλλά καί γενικές προτάσεις ὅπως οἱ: «$\forall x$, ἤ x εἶναι ἰσοσκελές, ἤ x δέν εἶναι ἰσοσκελές», «$\forall x, \forall y$, ἤ $x = y$ ἤ $x \neq y$» κτλ.

Ἐπειδή οἱ ταυτολογίες ἐκφράζουν ἀληθεῖς προτάσεις ἀνεξάρτητα ἀπό τίς μεταβλητές τους, ἀποτελοῦν νόμους τῆς Λογικῆς, πού μερικοί εἶναι γνωστοί μέ ἰδιαίτερες ὀνομασίες. Π.χ.

1. **Νόμος τῆς ταυτότητας** $p \Leftrightarrow p$
2. » » **διπλῆς ἀρνήσεως** $p \Leftrightarrow \bar{\bar{p}}$
3. » » **ἀποκλείσεως τρίτου** $p \veebar \bar{p}$
4. » » **ἀντιφάσεως** $\overline{p \wedge \bar{p}}$
5. » » **ἀντιθετοαντιστροφῆς** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
6. **Νόμοι de Morgan**

$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ καί γενικά $\overline{p \vee q \vee \ldots \vee r} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \ldots \wedge \bar{r}$

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ » » $\overline{p \wedge q \wedge \ldots \wedge r} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q} \vee \ldots \vee \bar{r}$

Δύο βασικοί κανόνες

1.27 Γιά τήν παραγωγή ἀληθῶν προτάσεων, ἐκτός ἀπό τίς ταυτολογίες, χρησιμοποιοῦμε συχνά τούς ἑπόμενους δύο ἁπλούς κανόνες:

α) Κανόνας ἀποσπάσεως (Κ. Ἀπ.). Ὅταν ἀληθεύουν μιά συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ καί ἡ πρόταση p, τότε ἀσφαλῶς ἀληθεύει καί ἡ q (§ 1.14). Εἰδικότερα, ἄν ἀληθεύουν οἱ προτάσεις $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ καί $p(\alpha)$, τότε, ἐπειδή ἀληθεύει ἡ $p(\alpha) \Rightarrow q(\alpha)$, θά ἀληθεύει καί ἡ $q(\alpha)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἀπό τίς προτάσεις «Οἱ γωνίες τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσες», δηλ. «$\forall x$, (x εἶναι ἰσοσκελές) $\Rightarrow$ (οἱ γωνίες τῆς βάσεως τοῦ x εἶναι ἴσες)» καί «Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ ΑΒ = ΑΓ» συμπεραίνουμε ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

β) Κανόνας ἀντικαταστάσεως (Κ. Ἀντ.). Ἄν σέ ἕνα λ.τ. P ἀντικαταστήσουμε ἕνα τμῆμα του πού εἶναι λ.τ. μέ ἰσοδύναμο λ.τ., προκύπτει λ.τ.

ἰσοδύναμος τοῦ P. Εἶναι φανερό γιατί ἡ τιμή ἀλήθειας τοῦ P δέν ἐπηρεάζεται ἀπό τήν ἀντικατάσταση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ λ.τ. $\overline{p \Rightarrow q}$ καί $p \wedge \overline{q}$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι, ἐπειδή $p \Rightarrow q$ εἶναι ἰσοδύναμος τοῦ $\overline{p} \vee q$ (§1.25), ὁ $\overline{p \Rightarrow q}$ θά εἶναι ἰσοδύναμος τοῦ $\overline{\overline{p} \vee q}$,

ἐπομένως καί τοῦ $\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}$ (Νόμος de Morgan)

ἄρα καί τοῦ $p \wedge \overline{q}$ (Νόμος διπλῆς ἀρνήσεως).

Ἀσκήσεις 15,16,17,18,19.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ

Ἡ ἀπόδειξη γενικά

1.28 Ἡ διαπίστωση ὅτι μιά πρόταση εἶναι ἀληθής, δηλαδή ὅτι εἶναι θεώρημα, γίνεται μέ τή βοήθεια ὁρισμῶν, ἀξιωμάτων ἤ καί ἄλλων θεωρημάτων μέ βάση τούς νόμους τῆς Λογικῆς.

Ἤδη ἔχουμε συναντήσει μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις, κατά τίς ὁποῖες, στηριζόμενοι σέ ἁπλούς ἀλλά ἀσφαλεῖς «λογικούς κανόνες», ἀπό ὁρισμένες ἀληθεῖς προτάσεις διατυπώσαμε νέες ἀληθεῖς προτάσεις. Τέτοιες περιπτώσεις εἶναι ἡ παραγωγή προτάσεων ἤ π.τ. πού ἀληθεύουν π.χ. ἀπό ταυτολογίες (§ 1.24) ἤ μέ ἐφαρμογή τοῦ κανόνα ἀποσπάσεως (Κ. Ἀπ.), τοῦ κανόνα ἀντικαταστάσεως (Κ. Ἀντ.), τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητας κτλ. Γιά παράδειγμα ἄς ὑποθέσουμε γνωστό ὅτι ἀληθεύουν οἱ προτάσεις:

(1) Οἱ γωνίες τῆς βάσεως κάθε ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσες

(2) Τό τρίγωνο ΑΒΓ δέν ἔχει ἴσες γωνίες.

Μποροῦμε τώρα νά διατυπώσουμε μιά σειρά ἀληθῶν προτάσεων ὡς ἑξῆς:

(3) $\forall x$, (x εἶναι ἰσοσκελές) $\Rightarrow$ (οἱ γωνίες τῆς βάσεως τοῦ x εἶναι ἴσες) [ἀναδιατύπωση τῆς (1)]

(4) Τό ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$ ἤ $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ἤ $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ [παράγεται ἀπό τήν (3)]

(5) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ καί $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A} \Rightarrow$ τό ΑΒΓ δέν εἶναι ἰσοσκελές [νόμος ἀντιθετοαντιστροφῆς καί de Morgan]

(6) Τό ΑΒΓ δέν εἶναι ἰσοσκελές $\Leftrightarrow$ τό ΑΒΓ εἶναι σκαληνό [ὁρισμός σκαληνοῦ τριγώνου]

(7) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ καί $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A}$ [ἀπό τήν (5) καί (6) μέ τόν
$\Rightarrow$ τό ΑΒΓ εἶναι σκαληνό Κ. 'Αντ.]

(8) $\widehat{A} \neq \widehat{B}$ καί $\widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma} \neq \widehat{A}$ [ἀναδιατύπωση τῆς (2)]

(9) Τό ΑΒΓ εἶναι σκαληνό [ἀπό τίς (7) καί (8) μέ τόν Κ. 'Απ.]

Ἡ σειρά τῶν 9 παραπάνω προτάσεων ἀποτελεῖ τήν *ἀπόδειξη* ὅτι ἀληθεύει ἡ (9). Γενικά ἡ **ἀπόδειξη** μιᾶς προτάσεως p συνίσταται στήν ἀναγραφή μιᾶς σειρᾶς ἀληθῶν προτάσεων πού καταλήγει στήν ἀποδεικτέα πρόταση p. Θά δοῦμε στά ἑπόμενα μερικές ἁπλές μεθόδους πού ἐφαρμόζουμε γιά τήν ἀπόδειξη τῶν μαθηματικῶν θεωρημάτων.

Εὐθεία ἀπόδειξη

1.29 Ἔστω ὅτι ἔχουμε νά ἀποδείξουμε μιά πρόταση τῆς μορφῆς $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$, δηλαδή ὅτι *ἰσχύει* ἡ συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ὅσα x ἐπαληθεύουν τόν π.τ. p(x) ἐπαληθεύουν καί τόν q(x). Ἀρχίζουμε λοιπόν μέ τήν ὑπόθεση **ὅτι p(x) εἶναι μιά ἀληθής πρόταση** καί κατασκευάζουμε μιά ἀπόδειξη τῆς q(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: «Τό τετράγωνο κάθε περιττοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι περιττός», πού ἀναδιατυπώνεται ὡς ἑξῆς:
$\forall x \in \mathbb{N}$, (x περιττός) $\Rightarrow$ (x^2 περιττός).

Ἀπόδειξη

(1) x περιττός [ὑπόθεση]
(2) Ὑπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ὥστε $x = 2\nu+1$ [ὁρισμός περιττοῦ]
(3) $x^2 = (2\nu+1)^2 = 4\nu^2+4\nu+1 = 2(2\nu^2+2\nu)+1$ [γνωστά ἀπό τήν Ἄλγεβρα]
(4) x^2 περιττός [ὁρισμός περιττοῦ]

Σημείωση

Εἶναι σύνηθες, ἰδιαίτερα στή Γεωμετρία, γιά τήν ἀπόδειξη τῆς q(x) νά βρίσκουμε π.τ. r(x), s(x),...,t(x) τέτοιους, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές $p(x) \Rightarrow r(x)$, $r(x) \Rightarrow s(x)$, $s(x) \Rightarrow \ldots t(x) \Rightarrow q(x)$, ὁπότε μέ διαδοχική ἐφαρμογή τοῦ Κ. 'Απ. ἀπό τήν ὑπόθεση p(x) ἔχουμε τήν r(x), στή συνέχεια τήν s(x)... τήν t(x) καί τέλος τήν q(x). Γράφουμε μιά τέτοια ἀπόδειξη ὡς ἑξῆς: $p(x) \Rightarrow r(x) \Rightarrow s(x) \ldots \Rightarrow t(x) \Rightarrow q(x)$ ἤ

$$\begin{aligned} p(x) &\Rightarrow r(x) \\ &\Rightarrow s(x) \\ &\ \ \ldots\ldots \\ &\Rightarrow t(x) \\ &\Rightarrow q(x). \end{aligned}$$

Ἀπαγωγή σέ ἄτοπο

1.30 Ἡ ἀπόδειξη μέ τή μέθοδο τῆς «ἀπαγωγῆς», ὅπως τήν ἔλεγαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, σέ ἄτοπο, συνίσταται στά ἀκόλουθα:

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p. Ἄν δέν ἀληθεύει ἡ p, θά ἀληθεύει ἡ ἄρνησή της $\overline{p}$. Ὑποθέτουμε λοιπόν ὅτι ἀληθεύει ἡ $\overline{p}$ καί συνδυάζουμε αὐτή τήν ὑπόθεση μέ ἄλλες ἀληθεῖς προτάσεις σέ μιά σωστή ἀποδεικτική διαδικασία, πού καταλήγει ὅμως σέ ἀντίφαση (ἄτοπο). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ ὑπόθεσή μας ($\overline{p}$ ἀληθεύει) δέν εὐσταθεῖ. Ἄρα ἀληθεύει ἡ p.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ὑποθέτουμε γνωστό ὅτι στό $\mathbb{R}$ ἰσχύουν τά ἑξῆς:

(1) $1 \neq 0$

(2) Ἄν $x \neq 0$, τότε ἡ x θετικός ἤ $-x$ θετικός ($-x$ εἶναι ἀντίθετος τοῦ x)

(3) $1 . x = x$

(4) $(-x) . (-y) = xy$

(5) Τό γινόμενο δύο θετικῶν εἶναι θετικό

Μέ τίς 5 αὐτές προτάσεις μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι: **«ὁ 1 εἶναι θετικός».**

Συνεχίζουμε μέ τήν ἄρνηση τῆς ἀποδεικτέας.

(6)	«ὁ 1 δέν εἶναι θετικός»	[ὑπόθεση ὅτι $\overline{p}$ ἀληθής]
(7)	ἤ 1 θετικός ἤ -1 θετικός	[ἀπό τίς (1) καί (2) μέ Κ. Ἀπ.]
(8)	ὁ -1 θετικός	[ἀποκλειστ. διάζευξη (§ 1.12)]
(9)	$(-1) . (-1)$ θετικός	[ἀπό τήν (5) καί (8)]
(10)	$(-1) . (-1) = 1 . 1$	[ἀπό τήν (4)]
	$= 1$	[ἀπό τήν (3)]
(11)	1 εἶναι θετικός	[ἀπό τίς (9) καί (10)]
(12)	«1 εἶναι θετικός» καί «1 δέν εἶναι θετικός» πού εἶναι **ἀντίφαση.**	[σύζευξη τῶν (6) καί (11)]

1.31 **Ἀπόδειξη συνεπαγωγῆς.** Ἔστω ὅτι ἔχουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει μιά συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$, δηλαδή ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση

$$\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x). \tag{α}$$

Ὑποθέτουμε, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ὅτι ἀληθεύει ἡ ἄρνησή της πού εἶναι (§ 1.22) $\exists x,\ \overline{p(x) \Rightarrow q(x)}$. Ἐπειδή ὅμως (§1.27 Ἐφ.) ὁ λ.τ. $\overline{p \Rightarrow q}$ εἶναι ἰσοδύναμος μέ $p \wedge \overline{q}$, ἡ ὑπόθεσή μας ἰσοδυναμεῖ μέ

$$\exists x,\ p(x) \wedge \overline{q}(x). \tag{β}$$

Ἀρκεῖ λοιπόν, ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ (β), δηλαδή ὅτι ὑπάρχει x πού ἐπαληθεύει τόν p(x) καί συγχρόνως δέν ἐπαληθεύει τόν q(x), νά καταλήξουμε σέ ἀντίφαση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι «Δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου κάθετες στήν ἴδια εὐθεία ε εἶναι παράλληλες».

Ἀπόδειξη

Ἡ πρόταση ἔχει τή μορφή $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$, ὅπου x εἶναι ζεῦγος εὐθειῶν.

(1) Ὑπάρχει ζεῦγος εὐθειῶν $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ πού εἶναι κάθετες στήν ἴδια εὐθεία ε **καί** δέν εἶναι παράλληλες [ἀληθεύει ἡ (β)]

(2) Οἱ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εἶναι κάθετες στήν ε [ὁρισμός συζεύξεως]
(3) Οἱ ε_1, ε_2 δέν εἶναι παράλληλες
(4) Οἱ ε_1, ε_2 τέμνονται σέ σημεῖο Ο [ἰσοδύναμη τῆς (3)]
(5) Ἀπό τό Ο ἄγονται δύο κάθετες στήν ε [ἀπό τή σύζευξη τῶν (2) καί (4)]
(6) Ἀπό τό Ο ἄγεται μία μόνο κάθετος στήν ε [γνωστό θεώρημα]
(7) Ἡ σύζευξη τῶν (5) καί (6) πού ἀποτελεῖ **ἀντίφαση.**

Ἀντιθετοαντιστροφή

1.32 Ἐπειδή οἱ λ.τ. $p \Rightarrow q$ καί $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅταν ἔχουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει μιά συνεπαγωγή, ἀποδεικνύουμε — ἄν αὐτό εἶναι εὐκολότερο — ὅτι ἰσχύει ἡ ἀντιθετοαντίστροφή της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: «Σέ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι σέ ἄνισες γωνίες βρίσκονται ἄνισες πλευρές».

Ἀπόδειξη

Ἡ πρόταση αὐτή ἀναδιατυπώνεται ὡς ἑξῆς: Ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:
«Ἄν δύο γωνίες τοῦ τριγώνου x εἶναι ἄνισες, τότε οἱ δύο (ἀπέναντι) πλευρές τοῦ x εἶναι ἄνισες».
Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
«Ἄν δύο πλευρές τοῦ x εἶναι ἴσες, τότε οἱ δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ x εἶναι ἴσες», ἡ ὁποία ἰσχύει, γιατί εἶναι μιά ἄλλη διατύπωση τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Διάκριση περιπτώσεων

1.33 Γιά νά ἀποδείξουμε μία πρόταση r, **ὅταν εἶναι γνωστό** ἕνα θεώρημα τῆς μορφῆς «p ἤ q», ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε τίς δύο συνεπαγωγές $p \Rightarrow r$ καί $q \Rightarrow r$. Ἡ μέθοδος στηρίζεται στό ὅτι ὁ λ.τ.

$$(p \Rightarrow r \text{ καί } q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \text{ ἤ } q) \Rightarrow r)$$

εἶναι ταυτολογία (§ 1.23 καί 1.24).

Ἔτσι ἡ ἀπόδειξη τῆς r εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

(1) ἡ παραπάνω ταυτολογία
(2) $p \Rightarrow r$ καί $q \Rightarrow r$ [τό ἀποδεικνύουμε]
(3) $(p$ ἤ $q) \Rightarrow r$ [ἀπό τίς (1) καί (2) μέ τόν Κ. Ἀπ.]
(4) p ἤ q [γνωστό θεώρημα]
(5) r [ἀπό τίς (3), (4) μέ τόν Κ. Ἀπ.]

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι στό $\mathbb{R}$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ἀπόδειξη

Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει: $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ (ἀντιθετοαντιστροφή). Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε γιά τήν εὐθεία ἀπόδειξη (§ 1.29) ὑποθέτουμε (1) $x \neq 0$ καί θά κατασκευάσουμε ἀπόδειξη τῆς $x^2 \neq 0$. Ἔχουμε:

(2) Ἄν $x \neq 0$, τότε (x θετικός ἤ $-x$ θετικός) [ὑποτίθεται γνωστό θεώρημα]
(3) x θετικός ἤ $-x$ θετικός [ἀπό τίς (1) καί (2) μέ τόν Κ. Ἀπ.]

Ἀρκεῖ τώρα νά ἀποδείξουμε τίς συνεπαγωγές:

(α) x θετικός $\Rightarrow x^2 \neq 0$ καί (β) $-x$ θετικός $\Rightarrow x^2 \neq 0$

Ἀπόδειξη τῆς (α)

x θετικός [ὑπόθεση]
(4) Τό γινόμενο δύο θετικῶν εἶναι θετικός [ὑποτίθεται γνωστό]
(5) $x^2 = x \cdot x$ θετικός $\neq 0$

Ἀπόδειξη τῆς (β)

$-x$ θετικός [ὑπόθεση]
(4) Τό γινόμενο δύο θετικῶν εἶναι θετικός [ὑποτίθεται γνωστό]
(5) $x^2 = (-x)(-x)$ θετικός $\neq 0$ [ὑποτίθεται γνωστό ὅτι $(-x)(-y) = xy$]

Ἀσκήσεις 20, 21, 22, 23, 24.

Ἐπαγωγή

1.34 Ὑπάρχουν π.τ. μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό $\mathbb{N}$ ἤ καί γενικότερα τό $\{\nu \in \mathbb{N} : \nu \geq \lambda\}$ πού εἶναι καθολικά ἀληθεῖς, ὅπως π.χ. «$\nu + 1 > \nu$», «τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές ($\nu \geq 3$) εἶναι $(2\nu - 4)$ ὀρθές» κ.ἄ.

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἕνας π.τ. $p(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι καθολικά ἀληθής, δηλαδή τήν πρόταση $\forall \nu, p(\nu)$.

Ἄν συμβολίσουμε ἁπλούστερα p_ν τόν π.τ. $p(\nu)$, ἔχουμε νά ἀποδείξουμε ὅλες τίς προτάσεις

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_\kappa, \ldots$$

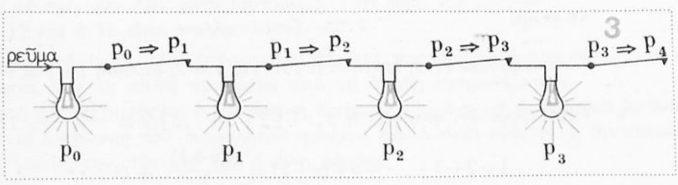
Ἀποδεικνύουμε **πρῶτα** τήν p_0. Τότε μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς ἑπόμενες μέ ἐπανειλημμένη ἐφαρμογή τοῦ Κ.Ἀπ. ὡς ἑξῆς:

Ἀποδεικνύουμε τήν $p_0 \Rightarrow p_1$, ὁπότε μέ τόν Κ.Ἀπ. προκύπτει ἡ p_1
Στή συνέχεια τήν $p_1 \Rightarrow p_2$, » » » » » » p_2
» » » $p_2 \Rightarrow p_3$, » » » » » » p_3
....
» » » $p_\kappa \Rightarrow p_{\kappa+1}$, » » » » » » $p_{\kappa+1}$

κ.ο.κ.

Σημείωση

Μιά ἐποπτική ἑρμηνεία αὐτῆς τῆς τεχνικῆς δίνεται στό σχῆμα 3. Οἱ λαμπτῆρες (προτάσεις) $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ἀνάβουν (ἀληθεύουν), ὅταν ὁ πρῶτος p_0



ἀνάβει (ἀληθεύει) καί ὅλοι οἱ ἐνδιάμεσοι «διακόπτες» (συνεπαγωγές) $p_0 \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2, \ldots$ κλείνουν τό κύκλωμα (εἶναι ἀληθεῖς).

Ἀλλά οἱ παραπάνω συνεπαγωγές $p_0 \Rightarrow p_1$, $p_1 \Rightarrow p_2, \ldots$, $p_\kappa \Rightarrow p_{\kappa+1}, \ldots$ εἶναι ὅλες οἱ προτάσεις πού παράγει ὁ π.τ. $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$. Ἔχουμε λοιπόν νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση $\forall \nu$, $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$. Ἡ πρόταση αὐτή, σύμφωνα μέ τήν § 1.29, ἀποδεικνύεται, ἄν, **ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση p_ν**, κατασκευάσουμε μιά ἀπόδειξη τῆς $p_{\nu+1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι $2^\nu > \nu$.

Ἀπόδειξη

- Ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότητα ἰσχύει γιά $\nu = 0$, γιατί $2^0 = 1 > 0$.
- Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ $2^\nu > \nu$, θά ἀποδείξουμε τήν $2^{\nu+1} > \nu+1$. Πράγματι εἶναι $2^{\nu+1} = 2 \cdot 2^\nu = 2^\nu + 2^\nu$ καί, ἐπειδή $2^\nu > \nu$ (ὑπόθεση) καί $2^\nu \geq 1$ (φανερό), θά ἔχουμε $2^{\nu+1} > \nu+1$, δηλαδή ἀληθεύει ἡ $p_{\nu+1}$.

Γενικότερα μποροῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει ἕνας π.τ. p_ν γιά κάθε $\nu \geq \lambda$. Ἀρκεῖ, ἀντί γιά τήν p_0, νά ἀποδείξουμε ἀρχικά ὅτι ἀληθεύει ἡ p_λ καί κατόπιν ἡ συνεπαγωγή $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$ $(\nu \geq \lambda)$.

Ἡ παραπάνω μέθοδος γιά τήν ἀπόδειξη ὅτι ἕνας π.τ. p_ν ἰσχύει στό $\mathbb{N}$, ἤ γενικότερα γιά κάθε φυσικό $\nu \geq \lambda$, ὀνομάζεται **ἐπαγωγή** καί συνοψίζεται ὡς ἑξῆς:

- Ἀποδεικνύουμε τήν πρόταση p_λ.
- Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν, κατασκευάζουμε ἀπόδειξη τῆς $p_{\nu+1}$ $(\nu \geq \lambda)$.

★ **1.35** **Παραλλαγές τῆς μεθόδου.** Ἀντί τῆς συνεπαγωγῆς $p_\nu \Rightarrow p_{\nu+1}$ (γιά $\nu \geq \lambda$) θά μπορούσαμε νά θεωρήσουμε τήν $p_{\nu-1} \Rightarrow p_\nu$ (γιά $\nu > \lambda$). Αὐτό σημαίνει ὅτι, ὑποθέτοντας ὅτι ἰσχύει ἡ $p_{\nu-1}$, ἀποδεικνύουμε τήν p_ν. Μία ἀκόμη ἐνδιαφέρουσα παραλλαγή τῆς μεθόδου εἶναι ἡ ἀπόδειξη τῆς p_ν μέ ὑπόθεση ὅτι ἀληθεύει ὄχι μόνο ἡ $p_{\nu-1}$ ἀλλά ὅλες οἱ προηγούμενες p_κ $(\lambda \leq \kappa < \nu)$. Μιά ἐφαρμογή αὐτῆς τῆς μεθόδου θά δοῦμε στό ἑπόμενο κεφάλαιο (§ 2.6).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$, εἶναι $1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.**

Ἀπόδειξη

- Ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu = 2$, δηλαδή $1+2 = \dfrac{2(2+1)}{2}$
- Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$. Τότε

$$1+2+3+\ldots+\nu+(\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + (\nu+1)$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)+2(\nu+1)}{2}$$

$$= \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}.$$ Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι «ὁ ἀριθμός τῶν σημείων τομῆς ν ($\nu \geq 2$) εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖες ἀνά δύο δέν εἶναι παράλληλες καί ἀνά τρεῖς δέ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, εἶναι $\frac{\nu^2-\nu}{2}$».**

Ἀπόδειξη

- Ἀποδεικνύουμε τήν πρόταση γιά $\nu = 2$, δηλαδή ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν σημείων τομῆς 2 μή παράλληλων εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου εἶναι $\frac{2^2-2}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$ (ἀληθής).
- Θεωροῦμε $\nu+1$ εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου τέτοιες, ὥστε ἀνά δύο νά μήν εἶναι παράλληλες καί ἀνά τρεῖς νά μή διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Ὑποθέτοντας ὅτι οἱ ν ἀπό αὐτές τέμνονται σέ $\frac{\nu^2-\nu}{2}$ σημεῖα, θά ἀποδείξουμε ὅτι ὅλες τέμνονται σέ $\frac{(\nu+1)^2-(\nu+1)}{2}$ σημεῖα. Δηλαδή σέ $\frac{\nu^2+2\nu+1-\nu-1}{2} = \frac{\nu^2+\nu}{2}$ σημεῖα.

Πράγματι, μιά εὐθεία ε ἀπό τίς $\nu+1$ τέμνει τίς ὑπόλοιπες ν εὐθεῖες σέ ν σημεῖα, πού εἶναι διαφορετικά ἀπό τά $\frac{\nu^2-\nu}{2}$ σημεῖα στά ὁποῖα τέμνονται οἱ ν ὑπόλοιπες εὐθεῖες. Ἔτσι ὁ ἀριθμός τῶν σημείων τομῆς τῶν $\nu+1$ εὐθειῶν εἶναι : $\nu + \frac{\nu^2-\nu}{2} = \frac{2\nu+\nu^2-\nu}{2} = \frac{\nu^2+\nu}{2}$.

Ἀσκήσεις 25,26,27,28,29,30,31,32.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω φράσεις εἶναι λογικές προτάσεις.
   α) Ὁ ἀριθμός 6 εἶναι πρῶτος.
   β) Ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος.
   γ) Ποῦ θά πᾶτε αὔριο;
   δ) Ἡ Κέρκυρα εἶναι νησί.
2. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις εἶναι ἁπλές καί ποιές σύνθετες.
   α) Ὁ ἀριθμός 10 δέν εἶναι πρῶτος.
   β) Ὁ ἀριθμός 24 εἶναι σύνθετος.
   γ) Ἄν τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο, τότε εἶναι καί ἰσογώνιο.
   δ) Ὁ 12 καί ὁ 18 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3.
3. Νά βρεῖτε τή δομή τῶν ἑπόμενων σύνθετων προτάσεων ἀντικαθιστώντας μέ γράμματα ὅλες τίς ἁπλές προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες σχηματίζονται.
   α) Ἄν ὁ α εἶναι ρητός καί ὁ β ἀκέραιος ἀριθμός, τότε ὁ $\alpha+\beta$ εἶναι ρητός ἀριθμός.
   β) Ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες ἤ διχοτομοῦν τίς γωνίες του, τότε τό ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.
   γ) Ἄν $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ ἤ $\beta \neq 0$.

δ) Ἂν ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5 καί τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, τότε καί ὁ β εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5 (α,β φυσικοί ἀριθμοί).

ε) Ἂν τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δέν εἶναι ρόμβος, τότε οἱ διαγώνιές του δέν εἶναι κάθετες ἤ δέ διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

στ) Ἂν δύο δεδομένοι ἀριθμοί α καί β εἶναι ἄρτιοι ἤ περιττοί, τότε τό ἄθροισμά τους εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

4. Ποιές ἀπό τίς προτάσεις τῆς ἀσκ. 3 ἔχουν τήν ἴδια δομή.

5. Στόν π. τ. «ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 καί τοῦ 4», μέ $x \in \{1,2,3,\ldots,24\}$, νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειάς του Α.

6. Νά βρεῖτε τό γράφημα τῆς σχέσεως πού ὁρίζεται ἀπό τόν π.τ. «ὁ x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ y» μέ $x \in \{1,3,5,7\}$ καί $y \in \{2,4,6\}$.

7. Νά λυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

α) $x+5=2$ στό $\mathbb{N}$, στό $\mathbb{Z}$

β) $2x=-5$ στό $\mathbb{Z}$, στό $\mathbb{Q}$

γ) $x^2=2$ στό $\mathbb{Q}$, στό $\mathbb{R}$

δ) $x^2=-4$ στό $\mathbb{R}$.

8. Δίνονται στό $\Omega=\{1,2,3,\ldots,20\}$ οἱ προτασιακοί τύποι:

$p(x)$: ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2

$q(x)$: ὁ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.

Νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τῶν π.τ.

$\overline{p}(x)$, $\overline{q}(x)$, $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$.

9. Ἔστω k καί λ φυσικοί ἀριθμοί τέτοιοι, ὥστε $k=\lambda+1$. Μέ τίς προτάσεις $k=\lambda+1$ καί $k=\lambda$ νά σχηματίσετε ὅλες τίς δυνατές συνεπαγωγές καί ἰσοδυναμίες καί νά βρεῖτε τίς τιμές τους (α ἤ ψ).

10. Νά γίνει ὁ πίνακας ἀλήθειας τῶν $p \wedge q \wedge r$ καί $p \vee q \vee r$.

11. Ἀναδιατυπῶστε τίς ἀκόλουθες προτάσεις μέ χρησιμοποίηση κατάλληλων ποσοδεικτῶν:

α) Μερικοί ἀκέραιοι εἶναι πρῶτοι.

β) Κάθε τετράπλευρο εἶναι ρόμβος.

γ) Ἂν ἕνα τρίγωνο ἔχει δύο ἴσες διαμέσους, τότε εἶναι ἰσοσκελές.

δ) Ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 4, ἄν καί μόνο ἄν λήγει σέ 0.

12. Διατυπῶστε σέ κανονική γλωσσική μορφή τίς ἀκόλουθες προτάσεις:

α) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2>0$

β) $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2<0$.

γ) $\forall x$, (οἱ διαγώνιες τοῦ x διχοτομοῦν τίς γωνίες του) $\Rightarrow$ (x εἶναι ρόμβος) [Ω: σύνολο τῶν παραλληλογράμμων].

δ) $\forall x$, (x εἶναι ἰσόπλευρο) $\Leftrightarrow$ (x εἶναι ἰσογώνιο) [Ω: σύνολο τῶν τριγώνων].

13. Διατυπῶστε προτάσεις ἰσοδύναμες μέ τίς ἀρνήσεις τῶν προτάσεων α,β τῶν ἀσκ. 12 καί 11.

14. Ἔστω $p(x)$ καί $q(x)$ δύο π.τ. στό Ω μέ σύνολα ἀλήθειας Α καί Β ἀντιστοίχως. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$, τότε $A \subseteq B$ καί ἀντιστρόφως.

15. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ταυτολογίες οἱ λ.τ.

α) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

β) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

16. Ἐπίσης οἱ λ.τ.

α) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

β) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

γ) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

δ) $(p \wedge q) \Rightarrow q$

ε) $p \Rightarrow (p \vee q)$

στ) $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$

ζ) $[p \wedge (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

η) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.

17. Ἐπίσης οἱ λ.τ.

α) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

β) $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

γ) $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$

δ) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ε) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

18. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ λ.τ. $\overline{p \Leftrightarrow q}$ καί $(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p})$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

19. Διατυπῶστε προτάσεις ἰσοδύναμες μέ τίς ἀρνήσεις τῶν προτάσεων γ,δ τῶν ἀσκήσεων 12 καί 11.

20. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ φυσικός ἀριθμός x εἶναι ἄρτιος, τότε καί ὁ x^2 εἶναι ἄρτιος.

21. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ x^2 εἶναι ἄρτιος $(x \in \mathbb{N})$, τότε καί ὁ x εἶναι ἄρτιος.

22. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ x^2 εἶναι περιττός $(x \in \mathbb{N})$, τότε καί ὁ x εἶναι περιττός.

23. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει ἄνισες διαγωνίους, τότε τό ΑΒΓΔ δέν εἶναι ὀρθογώνιο.

24. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ α εἶναι ἄρρητος καί ὁ ρ εἶναι ρητός, τότε οἱ ἀριθμοί: i) $\alpha+\rho$, ii) $\alpha-\rho$, iii) $\alpha\rho$, μέ $\rho \neq 0$ iv) $\alpha:\rho, (\rho \neq 0)$ v) $\rho-\alpha$ εἶναι ἄρρητοι.

25. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ εἶναι $1+3+5+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2$.

26. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ὁ ἀριθμός $\nu^3+2\nu$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.

27. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ εἶναι

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

28. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ εἶναι

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}.$$

29. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι $3^\nu \geq 1+2\nu$.

30. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $\nu \geq 2$ καί $\alpha \neq 1$ εἶναι

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}=\frac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}.$$

31. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ ν $(\nu \geq 3)$ πλευρές εἶναι $(2\nu-4)$ ὀρθές.

32. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου μέ ν $(\nu \geq 3)$ πλευρές εἶναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$.

1. Οἱ α,β,δ.
2. Ἁπλή ἡ β. Σύνθετες οἱ α,γ,δ.
3. **α)** Ἄν (p καί q), τότε r. **β)** Ἄν (p_1 ἤ p_2), τότε q.
   γ) Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q ἤ ὄχι r). **δ)** Ἄν (p καί q), τότε r.
   ε) Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q_1 ἤ ὄχι q_2). **στ)** Ἄν (p_1 καί p_2) ἤ (q_1 καί q_2), τότε r.
4. α καί δ, γ καί ε.
5. $A = \{12,24\}$.
6. $G = \{(3,2),(5,2),(5,4),(7,2),(7,4),(7,6)\}$.
7. Σύνολα λύσεων εἶναι ἀντιστοίχως:
   τῆς **α** στό $\mathbb{N}$ τό $\varnothing$, στό $\mathbb{Z}$ τό $\{-3\}$
   τῆς **β** στό $\mathbb{Z}$ τό $\varnothing$, στό $\mathbb{Q}$ τό $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$
   τῆς **γ** στό $\mathbb{Q}$ τό $\varnothing$, στό $\mathbb{R}$ τό $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ καί τῆς δ στό $\mathbb{R}$ τό $\varnothing$.
8. Νά βρεῖτε πρῶτα τά σύνολα ἀλήθειας τῶν p(x), q(x) καί νά ἐφαρμόσετε τίς § 1.8, 1.10, 1.13.
9. Νά παρατηρήσετε ὅτι ἡ $k = \lambda + 1$ εἶναι ἀληθής, ἐνῶ ἡ $k = \lambda$ εἶναι ψευδής.
10. Ἐπειδή ἀπό κάθε συνδυασμό τιμῶν τῶν p, q προκύπτουν δύο συνδυασμοί τιμῶν τῶν p,q,r, θά ἔχουμε τελικά 8 περιπτώσεις: (α,α,α), (α,α,ψ), (α,ψ,α), (α,ψ,ψ), (ψ,α,α), (ψ,α,ψ), (ψ,ψ,α), (ψ,ψ,ψ).
11. Στήν α χρησιμοποιῆστε τόν $\exists$ καί στίς ὑπόλοιπες τόν $\forall$.
12. Τό τετράγωνο ἑνός πραγματικοῦ μή μηδενικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικός κτλ.
13. Ἐφαρμόστε τήν § 1.22.
14. **α)** Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε $x \in A$ ἐπαληθεύει τήν q(x).
    β) Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $x \in A$ καί $x \notin A$.
15. **α)** Κατασκευάστε πίνακα ἀλήθειας πού νά περιέχει τίς στῆλες $p, p \wedge p, (p \wedge p) \Rightarrow p$.
    β) Ὁμοίως.
16. **α)** Κατασκευάστε πίνακα ἀλήθειας πού νά περιέχει τίς στῆλες $p \vee q$, $q \vee p$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.
    Γιά τίς **β,γ,δ,ε,στ,ζ,η** κατασκευάστε πίνακες ἀλήθειας μέ τίς ἀνάλογες στῆλες.
17. Ὁμοίως.
18. Ἐπειδή $p \Leftrightarrow q$ εἶναι $(p \Rightarrow q)$ καί $(q \Rightarrow p)$, ἐφαρμόστε τό Νόμο τοῦ De Morgan καί τήν ἐφαρμογή τῆς § 1.27.
19. Γιά τίς γ τῶν ἀσκ. 12 καί 11 ἐφαρμόστε τήν § 1.22 καί τήν ἐφαρμογή τῆς § 1.27.
    Γιά τίς δ τῶν ἀσκ. 12 καί 11 ἐφαρμόστε τήν § 1.22 καί τήν ἄσκ. 18.
20. Κάθε ἄρτιος φυσικός εἶναι τῆς μορφῆς 2ν ($\nu \in \mathbb{N}$).
21. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς καί τό παράδ. § 1.29.
22. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς καί τήν ἄσκηση 20.
23. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς καί τήν ἰδιότητα ὅτι οἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.
24. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο.
25. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 1 τῆς § 1.35.
26. Λάβετε ὑπόψη ὅτι $(\nu+1)^3+2(\nu+1) = \nu^3+2\nu+3(\nu^2+\nu+1)$.
27. Ὅπως ἡ ἐφαρμογή 1 τῆς § 1.35.
28. Ὁμοίως.
29. Λάβετε ὑπόψη ὅτι $3 \cdot 3^\nu = 3^\nu + 2 \cdot 3^\nu$ καί ὅτι $3^\nu \geqq 1$.
30. Ὅπως ἡ ἐφαρμογή 1 § 1.35.
31. Τό πολύγωνο μέ ν+1 πλευρές χωρίστε το σέ ἕνα τρίγωνο καί ἕνα ν-γωνο.
32. Λάβετε ὑπόψη τήν ὑπόδειξη τῆς ἀσκ. 31 καί ὅτι μία πλευρά τοῦ ν-γώνου γίνεται διαγώνιος τοῦ πολυγώνου μέ ν+1 πλευρές.

2 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟ ΣΩΜΑ

Οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων μέ πραγματικούς ἀριθμούς δέν εἶναι ἄγνωστες στό μαθητή πού ἀποφοίτησε ἀπό τό Γυμνάσιο. Τίς περισσότερες τίς ἔχει ἤδη χρησιμοποιήσει, ἄλλες συνειδητά ἄλλες ὄχι, στό λογισμό μέ τόν ὁποῖο ἔχει ἀσχοληθεῖ.

Ἡ ἐπανάληψή τους ἐδῶ δέν ἔχει μόνο χαρακτήρα ὑπομνήσεως. Ἐπιδιώκεται κυρίως νά διαπιστώσει ὁ μαθητής ὅτι ὁρισμένες ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές πού δεχόμαστε ὡς ἀξιώματα ἀρκοῦν γιά νά ἀποδειχθοῦν ὅλες οἱ ἄλλες, νά ἐπισημάνει τήν ἀλληλεξάρτησή τους καί νά συνειδητοποιήσει τήν παρουσία τους σέ κάθε βῆμα μιᾶς λογιστικῆς πορείας.

Παράλληλα τοῦ δίνεται ἡ εὐκαιρία μαζί μέ τή διδασκαλία τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας νά ἀσκηθεῖ στή μαθηματική ἀπόδειξη καί νά ἐφαρμόσει ὅ,τι ἔμαθε στό προηγούμενο κεφάλαιο.

Ἡ ἐπιλογή τῶν ἀξιωμάτων ἔγινε ἔτσι, ὥστε νά ἔχουμε τό πρῶτο παράδειγμα συνόλου μέ δομή ἀντιμεταθετικοῦ σώματος. Γενικά ἡ παρουσίαση τῶν ἑνοτήτων ἀποτελεῖ ἀπαραίτητη ὑποδομή γιά μελλοντικές γενικεύσεις.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ R

Γενικά

2.1 Εἴδαμε στό Γυμνάσιο πῶς, ξεκινώντας ἀπό τό σύνολο $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέ διαδοχικές *ἐπεκτάσεις*, καταλήγουμε στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πιό συγκεκριμένα, ἀφοῦ πρῶτα διαπιστώσαμε ὅτι οἱ ἐξισώσεις $x+\alpha=\beta$ καί $\alpha x=\beta$ δέν ἔχουν πάντοτε λύση στό $\mathbb{N}$, διευρύναμε τό $\mathbb{N}$ δημιουργώντας τό σύνολο $\mathbb{Z}$ τῶν ἀκεραίων, στό ὁποῖο ἡ $x+\alpha=\beta$ ἔχει πάντοτε λύση, καί στή συνέχεια κατασκευάσαμε τό σύνολο $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ὅπου καί ἡ $\alpha x=\beta$ μέ $\alpha\neq 0$ ἔχει πάντοτε λύση. Τέλος ἡ μετάβαση ἀπό τό $\mathbb{Q}$ στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπαγορεύτηκε ἀπό τήν ἀνάγκη νά ἔχει πάντοτε λύση ἡ ἐξίσωση $x^2=\theta$, μέ $\theta>0$. Ἔτσι εἶναι :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

Στό κεφάλαιο αὐτό, ἀφοῦ δεχθοῦμε τήν ὕπαρξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅπως κάνουμε καί στή Γεωμετρία γιά τίς ἔννοιες «σημεῖο», «εὐθεία» καί «ἐπίπεδο», θά ἀναφέρουμε τά ἀξιώματα καί τά θεωρήματα πού ἐκφράζουν τίς βασικές ἰδιότητες τῶν πράξεων στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Πρόσθεση

2.2 Μέ δύο ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y μπορεῖ νά ὁριστεῖ **μονοσήμαντα** ἕνας νέος πραγματικός ἀριθμός, τό **ἄθροισμά τους $x+y$**. Ἔτσι, ἄν σέ κάθε ζεῦγος (x, y) ἀντιστοιχίσουμε τό $x+y$, ὁρίζουμε μιά βασική πράξη στό σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τήν **πρόσθεση**. Ἀφοῦ λοιπόν σέ κάθε ζεῦγος ἀντιστοιχίζεται ἕνα **μοναδικό** ἄθροισμα, σέ ἴσα ζεύγη θά ἀντιστοιχίζονται ἴσα ἀθροίσματα. Ἔτσι, ἄν εἶναι $y=z$, τά ζεύγη (x,y) καί (x,z) εἶναι ἴσα· ἄρα καί $x+y=x+z$. Δηλαδή στό $\mathbb{R}$ ἰσχύει (1) ἡ συνεπαγωγή:

$$\boxed{y=z \;\Rightarrow\; x+y=x+z} \qquad (1)$$

Ἐπίσης, ἄν εἶναι $x=\alpha$ καί $y=\beta$, τά ζεύγη (x,y) καί (α,β) εἶναι ἴσα· ἄρα $x+y=\alpha+\beta$. Ὥστε στό $\mathbb{R}$ ἰσχύει καί ἡ συνεπαγωγή :

(1) Θυμίζουμε ὅτι ἡ ἔκφραση αὐτή σημαίνει ὅτι ἀληθεύει ἡ πρόταση:
$$\forall x, \forall y, \forall z,\quad y=z \Rightarrow x+y=x+z$$

$$\boxed{x = \alpha \quad \text{καί} \quad y = \beta \ \Rightarrow \ x+y = \alpha+\beta} \tag{2}$$

Οἱ προηγούμενες προτάσεις (1) καί (2) εἶναι οἱ γνωστοί μας «κανόνες»:

- **Ἄν στά μέλη μιᾶς ἰσότητας προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἰσότητα**
- **Ἄν προσθέσουμε ἰσότητες κατά μέλη, προκύπτει ἰσότητα**

Πολλαπλασιασμός

2.3 Ἡ δεύτερη βασική πράξη στό $\mathbb{R}$ εἶναι ὁ **πολλαπλασιασμός**. Μέ τήν πράξη αὐτή σέ κάθε ζεῦγος (x,y) πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχίζεται ἕνας **μοναδικός** πραγματικός ἀριθμός, **τό γινόμενό τους xy.** Ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς προσθέσεως, συμπεραίνουμε ὅτι στό $\mathbb{R}$ ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:

$$\boxed{y = z \ \Rightarrow \ xy = xz} \tag{3}$$

$$\boxed{x = \alpha \quad \text{καί} \quad y = \beta \ \Rightarrow \ xy = \alpha\beta} \tag{4}$$

οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στούς γνωστούς μας «κανόνες»:

- **Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἰσότητα**
- **Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἰσότητες κατά μέλη, προκύπτει ἰσότητα**

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

Ἀντιμεταθετικότητα

2.4 Ἡ πρόσθεση στό $\mathbb{R}$ εἶναι **ἀντιμεταθετική**. Αὐτή τή γνωστή μας ἰδιότητα δηλώνει τό ἑπόμενο ἀξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ Ι

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:

$$x+y = y+x$$

Προσεταιριστικότητα

2.5 Ἡ πρόσθεση στό $\mathbb{R}$ εἶναι **προσεταιριστική.** Δηλαδή δεχόμαστε ὅτι

ΑΞΙΩΜΑ II

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z εἶναι:**
> $$(x+y)+z = x+(y+z)$$

Γενίκευση ἀθροίσματος

2.6 Ὁρίζουμε ὡς ἄθροισμα $x_1+x_2+x_3$ τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2, x_3 τό $(x_1+x_2)+x_3$. Ὁπότε σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα II θά εἶναι:

$$x_1+x_2+x_3=(x_1+x_2)+x_3=x_1+(x_2+x_3).$$

Γενικότερα, γιά κάθε $\nu \geq 3$ ὁρίζουμε ὡς ἄθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τό ἄθροισμα $(x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu$. Δηλαδή εἶναι:

$$\mathbf{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_\nu = [\ldots[\,[(x_1+x_2)+x_3]+x_4]+\ldots+x_{\nu-1}]+x_\nu}$$

Ἀλλά μέ τούς ἴδιους προσθετέους καί χωρίς νά ἀλλάζουμε τή διάταξή τους θά μπορούσαμε νά σχηματίσουμε καί ἄλλα ἀθροίσματα, ὅπως π.χ. τό

$$x_1+[x_2+(x_3+x_4)]+x_5+\ldots+(x_{\nu-1}+x_\nu).$$

Ὅπως ἤδη γνωρίζουμε ἀπό τό Γυμνάσιο, ὅλα αὐτά τά ἀθροίσματα συμπίπτουν. Συγκεκριμένα ἀποδεικνύεται τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

> **Κάθε ἄθροισμα πού μπορεῖ νά σχηματιστεῖ μέ τούς προσθετέους $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ($\nu \geq 3$) πού λαμβάνονται μέ αὐτή τή διάταξη, ἰσοῦται μέ**
> $$\mathbf{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_\nu}$$

✶ **Ἀπόδειξη.** Ἡ πρόταση ἀληθεύει γιά $\nu=3$ (Ἀξ. II). Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει γενικά, ἀρκεῖ, ὑποθέτοντας ὅτι ἰσχύει γιά κάθε $k<\nu$, νά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $k=\nu$ (§1.35). Πράγματι ἕνα ὁποιοδήποτε ἄθροισμα μέ τούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ καταλήγει τελικά σέ ἄθροισμα δύο προσθετέων $\alpha+\beta$, ὅπου ὁ α σχηματίζεται ἀπό ὁρισμένους προσθετέους $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$ καί ὁ β ἀπό τούς ὑπόλοιπους $x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \ldots, x_\nu$. Ἐπειδή τό πλῆθος τῶν προσθετέων τόσο τοῦ α ὅσο καί τοῦ β δέν ὑπερβαίνει τό $\nu-1$, θά ἔχουμε σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση πού κάναμε

$$\alpha = x_1+x_2+\ldots+x_\lambda \qquad \text{καί}$$
$$\beta = x_{\lambda+1}+x_{\lambda+2}+\ldots+x_\nu$$
$$= (x_{\lambda+1}+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu = \beta'+x_\nu \quad (1)$$

---

(1) Οἱ εἰδικές περιπτώσεις $\alpha = x_1$, καί $\beta = x_\nu$, ὁπότε $\beta'=0$, δέ βλάπτουν τή γενικότητα τῆς ἀποδείξεως.

Ἄρα $\alpha+\beta = \alpha+[\beta'+x_\nu] = (\alpha+\beta')+x_\nu$ [προσεταιριστικότητα]

$= (x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1})+x_\nu$ [σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεσή μας]

$= x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1}+x_\nu$ [ὁρισμός ἀθροίσματος]

Ἐπίσης ἰσχύει τό

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Τό ἄθροισμα $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τή διάταξη τῶν προσθετέων του

Ἀπόδειξη. Μποροῦμε νά ἀντιμεταθέσουμε δύο διαδοχικούς προσθετέους. Πράγματι σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_\lambda+x_{\lambda+1}+\ldots+x_\nu &= x_1+x_2+\ldots+(x_\lambda+x_{\lambda+1})+\ldots+x_\nu \\ &= x_1+x_2+\ldots+(x_{\lambda+1}+x_\lambda)+\ldots+x_\nu \\ &= x_1+x_2+\ldots+x_{\lambda+1}+x_\lambda+\ldots+x_\nu. \end{aligned}$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι (1) ὁποιαδήποτε ἀναδιάταξη τῶν προσθετέων ἑνός ἀθροίσματος προκύπτει ἀπό ἀντιμεταθέσεις διαδοχικῶν προσθετέων.

Ἀπό τά προηγούμενα δύο θεωρήματα προκύπτει ὅτι

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε ἄθροισμα πού μπορεῖ νά σχηματιστεῖ μέ τούς ἀριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, μέ ὁποιαδήποτε διάταξη καί ἄν ληφθοῦν, μιά φορά ὁ καθένας, ἰσοῦται μέ $x_1+x_2+\ldots+x_\nu$

Οὐδέτερο στοιχεῖο

2.7 Ὁ ἀριθμός 0 χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα, πού τή δεχόμαστε ὡς ἀξίωμα

ΑΞΙΩΜΑ III

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x εἶναι
$$x+0 = x$$

Ἀπό τήν ἀντιμεταθετικότητα τῆς προσθέσεως προκύπτει ὅτι

$$x+0 = 0+x = x$$

Ὁ ἀριθμός 0 λοιπόν, ἐπειδή, ὅταν προστίθεται μέ ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό, δέν τόν μεταβάλλει, λέγεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τήν πρόσθεση. Μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἄλλος ἀριθμός δέν ἔχει αὐτή τήν ἰδιότητα. Γιατί, ἄν καί ὁ ἀριθμός θ ἦταν οὐδέτερο στοιχεῖο, τότε θά εἴχαμε:

(1) $0+\theta = \theta$ [ἐπειδή ὁ 0 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

(2) $0+\theta = 0$ [ἐπειδή ὁ θ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

---

(1) Ἡ ἀπόδειξη αὐτή ὑπερβαίνει τίς δυνατότητες τῆς τάξεως.

Τό ἄθροισμα ὅμως $0+\theta$ εἶναι μοναδικό. Συνεπῶς ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει $\theta=0$. Ἄρα

ΠΟΡΙΣΜΑ | **Ὁ ἀριθμός 0 εἶναι τό μοναδικό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση**

Ὕπαρξη ἀντιθέτου

2.8 Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί παρουσιάζουν μιά «συμμετρία» ὡς πρός τό μηδέν, ἡ ὁποία περιγράφεται ὡς ἑξῆς:

ΑΞΙΩΜΑ IV (1)

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x΄ τέτοιος, ὥστε

$$x+x'=0$$

Ἐπειδή ἡ πρόσθεση εἶναι ἀντιμεταθετική, θά εἶναι καί $x'+x=0$.
Οἱ ἀριθμοί x καί x΄ πού ἔχουν ἄθροισμα μηδέν λέγονται **ἀντίθετοι.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό ὑπάρχει ἕνας μόνο ἀντίθετός του

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι ἀντίθετος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x ἐκτός ἀπό τόν x΄ εἶναι καί ὁ x΄΄. Δηλαδή ἔχουμε $x+x'=0$ καί $x+x''=0$. Ἄρα:

$x'=x'+0$ [ὁ 0 οὐδέτερο στοιχεῖο]

$=x'+(x+x'')$ [ὁ x΄΄ ἀντίθετος τοῦ x, $x+x''=0$]

$=(x'+x)+x''$ [προσεταιριστικότητα]

$=0+x''$ [ὁ x΄ ἀντίθετος τοῦ x, $x+x'=0$]

$=x''$

Δηλαδή ὁ x΄ καί ὁ x΄΄ συμπίπτουν.
Ὁ μοναδικός ἀντίθετος τοῦ x συμβολίζεται **–x**. Ἄρα

$$x+(-x)=0 \qquad (1)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ἐξίσωση $x+\alpha=0$ ἔχει στό $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα τόν ἀριθμό $-\alpha$.
2. Ἀπό τήν ἰσότητα $0+0=0$ προκύπτει ὅτι ἀντίθετος τοῦ 0 εἶναι ὁ 0.
3. Τό σύμβολο $-(-x)$ παριστάνει τόν ἀντίθετο τοῦ $-x$. Ἀλλά μοναδικός ἀντίθετος τοῦ $-x$, ὅπως δείχνει ἡ (1), εἶναι ὁ x. Δηλαδή $\mathbf{-(-x) = x}$. Ὥστε ἔχουμε:

(1) Συμβολικά διατυπώνεται $\forall x\in\mathbb{R}, \exists x'\in\mathbb{R}, x+x'=0$ ἤ ἁπλούστερα $\forall x, \exists x', x+x'=0$. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ ποσοδεῖκτες $\forall$, $\exists$ δέν εἶναι ἀντιμεταθέσιμοι.

Ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀντιθέτου ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ἀντίθετος ἑνός ἀθροίσματος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων τῶν προσθετέων του. Δηλαδή**

$$-(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)=(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu).$$

'Αρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+[(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)]=0.$ Εἶναι:

$(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)+[(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)]=$

$=x_1+x_2+\ldots+x_\nu+(-x_1)+(-x_2)+\ldots+(-x_\nu)$ [Θεώρ. 1]

$=[x_1+(-x_1)]+[x_2+(-x_2)]+\ldots+[x_\nu+(-x_\nu)]$ [§ 2.6 Πόρ.]

$=0+0+\ldots+0$

$=0.$

2. **Ἄν $x=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)$ καί $y=\beta+\gamma+(-\alpha)$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ x καί y εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί.**

Πρέπει νά δείξουμε ὅτι $x+y=0$. Εἶναι:

$$\begin{aligned} x+y &= [\alpha+(-\beta)+(-\gamma)]+[\beta+\gamma+(-\alpha)] \\ &= \alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\beta+\gamma+(-\alpha) \\ &= [\alpha+(-\alpha)]+[\beta+(-\beta)]+[\gamma+(-\gamma)] \\ &= 0+0+0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

'Ασκήσεις 1,2,3,4.

Νόμος τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση

2.9 Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε ὅτι, ἄν διαγράψουμε ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας τόν ἴδιο προσθετέο, προκύπτει καί πάλι ἰσότητα. Αὐτή τήν ἰδιότητα τήν ἐκφράζουμε ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α, x, y ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\alpha+x=\alpha+y \Rightarrow x=y$$

'Απόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha+x=\alpha+y$. Ἔχουμε:

$\alpha+x=\alpha+y$ [ὑπόθεση

$(-\alpha)+(\alpha+x)=(-\alpha)+(\alpha+y)$ [προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τό $-\alpha$

$[(-\alpha)+\alpha]+x=[(-\alpha)+\alpha]+y$ [προσεταιριστικότητα

$0+x=0+y$ [ἄθροισμα ἀντιθέτων

$x=y$ [ὁ 0 οὐδέτερο στοιχεῖο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζουμε (§ 2.2), ἰσχύει καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή $x = y \Rightarrow \alpha + x = \alpha + y$, θά ἰσχύει στό $\mathbb{R}$ ἡ ἰσοδυναμία

$$\boxed{\alpha + x = \alpha + y \quad \Leftrightarrow \quad x = y}$$

Στήν παραπάνω ἰσοδυναμία στηρίζεται καί ὁ γνωστός «κανόνας»:

> **Ἄν ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως στό $\mathbb{R}$ διαγράψουμε τόν ἴδιο προσθετέο ἤ στά μέλη της προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἐξίσωση ἰσοδύναμη**

Ἡ ἀφαίρεση στό $\mathbb{R}$

2.10 Ὁ ὁρισμός τῆς ἀφαιρέσεως στό $\mathbb{R}$ στηρίζεται στό ἑπόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

> **Ἄν δοθοῦν δύο πραγματικοί ἀριθμοί α καί β, ὑπάρχει ἕνας μόνο πραγματικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε νά εἶναι**
> $$\beta + x = \alpha$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἐξίσωση $\beta + x = \alpha$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τίς ἑπόμενες:

$(-\beta)+(\beta+x) = (-\beta)+\alpha$ [προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τόν $-\beta$]

$[(-\beta)+\beta]+x = (-\beta)+\alpha$ [προσεταιριστικότητα]

$0+x = (-\beta)+\alpha$ [ἄθροισμα ἀντιθέτων]

$x = \alpha+(-\beta)$ [οὐδέτερο στοιχεῖο καί ἀντιμεταθετικότητα]

Μοναδική ρίζα τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἄρα καί τῆς ἀρχικῆς $\beta + x = \alpha$, εἶναι ὁ ἀριθμός $\boldsymbol{\alpha+(-\beta)}$ πού γράφεται ἁπλούστερα $\boldsymbol{\alpha-\beta}$ καί ὀνομάζεται **διαφορά τοῦ β ἀπό τόν α.** Ἔχουμε λοιπόν τήν ἰσοδυναμία

$$\beta + x = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha - \beta \tag{1}$$

Ἑπομένως ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ εἶναι ὁ μοναδικός ἀριθμός πού, ὅταν προστεθεῖ στό β, δίνει ἄθροισμα α, δηλαδή

$$\beta + (\alpha - \beta) = \alpha$$

Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία σέ κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (α,β) ἀντιστοιχίζεται ἡ διαφορά τους $\alpha-\beta$, λέγεται **ἀφαίρεση.**

Ἡ ἁπλούστερη γραφή $\alpha-\beta$ ἀντί τῆς $\alpha+(-\beta)$ υἱοθετεῖται καί γιά τό ἄθροισμα μέ περισσότερους προσθετέους. Ἔτσι π.χ. τό ἄθροισμα $\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\delta$ γράφεται $\alpha-\beta-\gamma+\delta$ καί σημαίνει $[(\alpha-\beta)-\gamma]+\delta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στήν ἰσοδυναμία (1) στηρίζεται ὁ γνωστός «κανόνας» τῆς μεταφορᾶς ἑνός ὅρου ἐξισώσεως ἀπό τό ἕνα μέλος της στό ἄλλο, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλαχθεῖ τό πρόσημό του.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha - 0 = \alpha$, $0 - \alpha = -\alpha$, $\alpha - \alpha = 0$.**

'Από τήν ἰσοδυναμία (1) ἔχουμε:

$$\begin{aligned} 0+\alpha = \alpha &\Leftrightarrow \alpha = \alpha - 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = \alpha - \alpha \\ &\Leftrightarrow 0 - \alpha = -\alpha \end{aligned}$$

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) = \alpha - \beta$.**

Ἄν $x = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$, τότε ἔχουμε

$$\begin{aligned} x = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) &\Leftrightarrow x+(\beta+\gamma) = \alpha+\gamma \\ &\Leftrightarrow x+\beta+\gamma = \alpha+\gamma \\ &\Leftrightarrow x+\beta = \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha-\beta \end{aligned}$$

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $-(x-y-z+\varphi) = -x+y+z-\varphi$.**

Εἶναι: $-(x-y-z+\varphi) = -[x+(-y)+(-z)+\varphi]$

$$= -x+[-(-y)]+[-(-z)]+(-\varphi) \quad [\S\, 2.8. \text{'Εφ. } 1]$$

$$= -x+y+z-\varphi$$

4. **Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα $A = (\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha-\beta-\kappa)+(-\kappa+\lambda)$.**

Εἶναι $A = \alpha-\beta+\gamma-\alpha+\beta+k-k+\lambda$

$$\begin{aligned} &= (\alpha-\alpha)+(-\beta+\beta)+(k-k)+\gamma+\lambda \\ &= 0+0+0+\gamma+\lambda \\ &= \gamma+\lambda \end{aligned}$$

'Ασκήσεις 5,6.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

'Αντιμεταθετικότητα

2.11 'Ο πολλαπλασιασμός στό $\mathbb{R}$ εἶναι **ἀντιμεταθετικός**. Αὐτή τή γνωστή μας ἰδιότητα δηλώνει τό ἑπόμενο ἀξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ V

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:

$$xy = yx$$

Προσεταιριστικότητα

2.12 Ὁ πολλαπλασιασμός στό $\mathbb{R}$ εἶναι **προσεταιριστικός.** Δηλαδή δεχόμαστε ὅτι

ΑΞΙΩΜΑ VI

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z εἶναι:**
>
> $$(xy)z = x(yz)$$

Γενίκευση γινομένου

2.13 Ὁρίζουμε ὡς γινόμενο $x_1x_2x_3$ τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2, x_3 τό $(x_1x_2)x_3$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα VI, θά εἶναι

$$x_1x_2x_3 = (x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3).$$

Γενικότερα, γιά κάθε $\nu \geq 3$ ὁρίζουμε ὡς γινόμενο $x_1x_2x_3\ldots x_\nu$ τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τό γινόμενο $(x_1x_2\ldots x_{\nu-1})x_\nu$. Δηλαδή εἶναι :

$$x_1x_2x_3\ldots x_\nu = [\ldots[[(x_1x_2)x_3]x_4]x_5\ldots x_{\nu-1}]x_\nu$$

Ἄν ἀκολουθήσουμε τήν ἴδια διαδικασία, ὅπως καί στήν πρόσθεση (§ 2.6), ἀποδεικνύεται ὅτι

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

> **Κάθε γινόμενο πού μπορεῖ νά σχηματιστεῖ μέ τούς ἀριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, μέ ὁποιαδήποτε διάταξη καί ἄν ληφθοῦν, μιά φορά ὁ καθένας, ἰσοῦται μέ $x_1x_2x_3\ldots x_\nu$**

Δυνάμεις

2.14 Ἄν α εἶναι πραγματικός ἀριθμός καί ν εἶναι **φυσικός ἀριθμός διάφορος τοῦ μηδενός,** ὁρίζουμε ὅτι

$$\alpha^\nu = \begin{cases} \alpha, & \text{ἄν } \nu = 1 \\ \alpha^{\nu-1}\alpha = \underbrace{\alpha\,\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\nu}, & \text{ἄν } \nu > 1 \end{cases}$$

Τό σύμβολο α^ν ὀνομάζεται **δύναμη** μέ **βάση** τό α καί **ἐκθέτη** τό ν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εἶναι φανερό (§ 2.3) ὅτι ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ καί γενικά γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ (ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά) ἡ

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$$

Γιά τίς δυνάμεις μέ ἐκθέτη φυσικό ἀριθμό διάφορο τοῦ μηδενός ἀποδεικνύεται ὅτι

ΘΕΩΡΗΜΑ 7

Ἄν α,β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί κ, λ φυσικοί ἀριθμοί διαφορετικοί ἀπό τό μηδέν, ἰσχύουν:

$$\alpha^\kappa \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$$
$$(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}$$
$$(\alpha\,\beta)^\kappa = \alpha^\kappa \beta^\kappa$$

Τό θεώρημα αὐτό εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς δυνάμεως καί τοῦ θεωρ. 6.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ τό γινόμενο $A = (-3x^2yz^3)\left(-\frac{2}{5}xy^5\right)(15x^5y^7z)$.**

Εἶναι $A = -3x^2yz^3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)xy^5\cdot 15x^5y^7z$

$= [(-3)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 15]\cdot(x^2xx^5)(yy^5y^7)(z^3z)$

$= 18x^8y^{13}z^4.$

2. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $B = (-2\alpha^2\beta\gamma^3)^3$ γιά $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.**

Εἶναι $B = (-2)^3(\alpha^2)^3\beta^3(\gamma^3)^3$

$= -8\alpha^6\beta^3\gamma^9$. Ὁπότε γιά $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=1$ θά ἔχουμε

$B = -8(-1)^6 2^3 1^9$

$= -8\cdot 1\cdot 8\cdot 1$

$= -64.$

Ἄσκηση 7.

Ἐπιμεριστικότητα

2.15 Τό ἑπόμενο ἀξίωμα συνδέει τόν πολλαπλασιασμό μέ τήν πρόσθεση:

ΑΞΙΩΜΑ VII

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z εἶναι

$$x\,(y+z) = xy+xz$$

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη, θά εἶναι:

$$(y+z)x = x(y+z) = xy+xz = yx+zx.$$

Ἔχουμε λοιπόν $x(y+z) = xy+xz$ καί $(y+z)x = yx+zx$, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι **ἐπιμεριστικός** ὡς πρός τήν πρόσθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8

Τό γινόμενο ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί τό μηδέν εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν. Δηλαδή

$$\forall x, \quad x \cdot 0 = 0$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι:

$y+0=y$ [ὁ 0 οὐδέτερο στοιχεῖο]

$x(y+0)=xy$ [πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη ἐπί x]

$xy+x0=xy$ [ἐπιμεριστικότητα]

$x0=0$ [νόμος τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση]

Οὐδέτερο στοιχεῖο

2.16 Ὁ ἀριθμός 1 χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα πού τή δεχόμαστε ὡς ἀξίωμα:

ΑΞΙΩΜΑ VIII

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x εἶναι

$$1\,x = x$$

Ἀπό τήν ἀντιμεταθετικότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτει ὅτι εἶναι

$$1\,x = x\,1 = x.$$

Ὁ ἀριθμός 1 λοιπόν, ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιαστεῖ μέ ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό, δέν τόν μεταβάλλει, λέγεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό.

Μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἄλλος ἀριθμός δέν ἔχει αὐτή τήν ἰδιότητα. Γιατί, ἄν καί ὁ ἀριθμός ε ἦταν οὐδέτερο στοιχεῖο, τότε θά εἴχαμε :

(1) $1\varepsilon = \varepsilon$ [ἐπειδή ὁ 1 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

(2) $1\varepsilon = 1$ [ἐπειδή ὁ ε εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο]

Τό γινόμενο ὅμως 1ε εἶναι μοναδικό. Συνεπῶς ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει $\varepsilon = 1$. Ἄρα

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ὁ ἀριθμός 1 εἶναι τό μοναδικό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό

ΘΕΩΡΗΜΑ 9

Ἄν ἕνας πραγματικός ἀριθμός πολλαπλασιαστεῖ ἐπί —1, δίνει τόν ἀντίθετό του. Δηλαδή

$$\forall x, \quad (-1)\,x = -x$$

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ $(-1)x$ εἶναι ἀντίθετος τοῦ x. Δηλαδή $(-1)x+x=0$. Εἶναι:

$$\begin{aligned}(-1)x+x &= (-1)x+1\,x && \text{[γιατί } 1\,x = x \text{ Ἀξ. VIII]}\\ &= [(-1)+1]x && \text{[ἐπιμεριστικότητα]}\\ &= 0x && \text{[ἄθροισμα ἀντιθέτων]}\\ &= 0 && \text{[Θεώρ. 8]}\end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:

1. $(-x)\,y = -xy$

2. $(-x)(-y) = xy$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha-\beta)\,\gamma = \alpha\gamma-\beta\gamma$.

Εἶναι: $$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\gamma &= [\alpha+(-\beta)]\gamma\\ &= \alpha\gamma+(-\beta)\gamma\\ &= \alpha\gamma+(-\beta\gamma)\\ &= \alpha\gamma-\beta\gamma.\end{aligned}$$

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$.

Εἶναι: $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) &= \alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)\\ &= \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta.\end{aligned}$$

3. Νά βρεθεῖ τό γινόμενο $A = (2x^2+3xy)(5xy-3x^2)$.

Εἶναι: $$\begin{aligned}A &= 2x^2\,5xy+2x^2(-3x^2)+3xy\,5xy+3xy\,(-3x^2)\\ &= 2.5x^2xy+2(-3)\,x^2\,x^2+3.5\,xxyy+3(-3)xx^2y\\ &= 10x^3y-6x^4+15x^2y^2-9x^3y\\ &= (10-9)x^3y-6x^4+15x^2y^2\\ &= x^3y-6x^4+15x^2y^2.\end{aligned}$$

4. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες:

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha.$$

Εἶναι: $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\\ &= \alpha\alpha+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta\beta\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2\\ &= \alpha^2+(1+1)\alpha\beta+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= [\alpha+(-\beta)]^2\\ &= \alpha^2+2\alpha(-\beta)+(-\beta)^2\\ &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) &= \alpha\alpha+\alpha(-\beta)+\beta\alpha+\beta(-\beta)\\ &= \alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^2\\
&= (\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2\\
&= \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+(2\gamma)(\alpha+\beta)+\gamma^2\\
&= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\gamma\alpha+2\gamma\beta\\
&= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha.
\end{aligned}
$$

5. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι:**

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\\
&(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\\
&\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\
&\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)
\end{aligned}
$$

Εἶναι:
$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)\\
&= \alpha^2\alpha+\alpha^2\beta+2\alpha\beta\alpha+2\alpha\beta\beta+\beta^2\alpha+\beta^2\beta\\
&= \alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \alpha^3+(1+2)\alpha^2\beta+(2+1)\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)^3 &= [\alpha+(-\beta)]^3\\
&= \alpha^3+3\alpha^2(-\beta)+3\alpha(-\beta)^2+(-\beta)^3\\
&= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha\alpha^2-\alpha\alpha\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\beta\,\alpha\beta+\beta\,\beta^2\\
&= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \alpha^3+\beta^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) &= [\alpha+(-\beta)][\alpha^2-\alpha(-\beta)+(-\beta)^2]\\
&= \alpha^3+(-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3.
\end{aligned}
$$

Ἀσκήσεις 8,9,10,11.

Ὕπαρξη ἀντιστρόφου

2.17 Συμπληρώνουμε τίς βασικές (1) ἰδιότητες τοῦ ℝ μέ τό ἑπόμενο

ΑΞΙΩΜΑ IX (2)

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x \neq 0$ ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x' τέτοιος, ὥστε**
> $$xx' = 1$$

Ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἀντιμεταθετικός, θά εἶναι καί

$$xx' = x'x = 1$$

Οἱ ἀριθμοί x καί x' πού ἔχουν γινόμενο 1 λέγονται **ἀντίστροφοι.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ὁ περιορισμός $x \neq 0$ εἶναι ἀπαραίτητος, γιατί ἀντίστροφος τοῦ 0 δέν ὑπάρχει, ἀφοῦ $\forall x,\ x \cdot 0 = 0 \neq 1$.

---

(1) Ἐννοοῦμε αὐτές πού διατυπώνονται μέ τά ἀξιώματα I–IX καί πού, ὅπως θά μάθουμε, ἐκφράζονται συνοπτικά μέ τήν πρόταση «τό ℝ εἶναι ἀντιμεταθετικό σῶμα».

(2) Συμβολικά $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists x' \in \mathbb{R},\ xx' = 1\ (\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό διαφορετικό ἀπό τό μηδέν ὑπάρχει ἕνας μόνο ἀντίστροφός του**

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι ἀντίστροφος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x $(x \neq 0)$ εἶναι ἐκτός ἀπό τό x′ καί ὁ x″. Δηλαδή εἶναι $xx' = 1$ καί $xx'' = 1$. Ἄρα

$$\begin{aligned} x' &= x'\,1 && [\text{ὁ } 1 \text{ οὐδέτερο στοιχεῖο}] \\ &= x'(xx'') && [\text{γιατί } xx'' = 1] \\ &= (x'x)\,x'' && [\text{προσεταιριστικότητα}] \\ &= 1\;x'' && [\text{γιατί } x'x = 1] \\ &= x'' && [\text{ὁ } 1 \text{ οὐδέτερο στοιχεῖο}] \end{aligned}$$

Δηλαδή οἱ x′ καί x″ συμπίπτουν.

Ὁ μοναδικός ἀντίστροφος τοῦ x $(x \neq 0)$ συμβολίζεται $\frac{1}{x}$. Ἔχουμε λοιπόν

$$x\,\frac{1}{x} = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ἐξίσωση $\alpha x = 1$, ὅταν $\alpha \neq 0$, ἔχει στό $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα τό $\frac{1}{\alpha}$.
2. Ἀπό τήν ἰσότητα $1 \cdot 1 = 1$ προκύπτει ὅτι ὁ ἀντίστροφος τοῦ 1 εἶναι ὁ 1.
3. Ἐπειδή $x\,\frac{1}{x} = 1 \neq 0$, εἶναι καί $\frac{1}{x} \neq 0$.
4. Τό σύμβολο $\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$ παριστάνει τόν ἀντίστροφο τοῦ $\frac{1}{x}$. Ἀλλά μοναδικός ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{x}$, ὅπως δείχνει ἡ (1), εἶναι ὁ x.

• Δηλαδή εἶναι $\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Ὥστε:

> **Ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἀντιστρόφου ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: Ὁ ἀντίστροφος ἑνός γινομένου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν ἀντιστρόφων τῶν παραγόντων του. Δηλαδή**

$$\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_\nu} = \frac{1}{x_1}\;\frac{1}{x_2}\;\ldots\;\frac{1}{x_\nu}.$$

'Αρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$(x_1x_2\ldots x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}\right)=1. \quad \text{Εἶναι:}$$

$$(x_1x_2\ldots x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}\right)=x_1x_2\ldots x_\nu\,\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_\nu}$$

$$=\left(x_1\,\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2\,\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_\nu\,\frac{1}{x_\nu}\right)=1.1\ldots 1=1.$$

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+y)\,\frac{1}{xy}$ $(xy\neq 0)$.

Εἶναι $(x+y)\frac{1}{xy}=x\,\frac{1}{xy}+y\,\frac{1}{xy}$ [ἐπιμεριστικότητα]

$=x\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\right)+y\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\right)$ [προηγούμενη ἐφαρμογή]

$=\left(x\,\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y}+\left(y\,\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}$ [προσεταιριστικότητα]

$=1\,\frac{1}{y}+1\,\frac{1}{x}$ [γινόμενο ἀντιστρόφων]

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11

> **Ἄν τό γινόμενο δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μηδέν, τότε ἕνας τουλάχιστον ἀπό αὐτούς εἶναι μηδέν. Δηλαδή**
> $\forall x,\ \forall y,\ xy=0\ \Rightarrow\ x=0\ \text{ἤ}\ y=0$

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι $xy=0$. Ἐπειδή εἶναι ἤ $x=0$ ἤ $x\neq 0$, ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε (§ 1.33) τήν «$x=0$ ἤ $y=0$» γιά $x\neq 0$, ἀφοῦ γιά $x=0$ αὐτή ἀληθεύει. Πράγματι, ἄν $x\neq 0$, τότε ὁρίζεται ὁ $\frac{1}{x}$ καί θά εἶναι

$\frac{1}{x}(xy)=\frac{1}{x}\cdot 0$ [πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη τῆς $xy=0$ ἐπί $\frac{1}{x}$]

$\left(\frac{1}{x}\,x\right)y=0$ [προσεταιριστικότητα]

$1\,y=0$ [γινόμενο ἀντιστρόφων]

$y=0$ [ὁ 1 οὐδέτερο στοιχεῖο]

Ὁπότε ἀληθεύει καί ἡ «$x=0$ ἤ $y=0$».

Τό ἀντίστροφο τοῦ θεωρήματος προκύπτει ἀπό τό θεώρ. 8. Ἄρα ἔχουμε

$$xy=0\ \Leftrightarrow\ x=0\ \text{ἤ}\ y=0$$

Γενικότερα ἰσχύει: $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu=0 \Leftrightarrow \alpha_1=0$ ἤ $\alpha_2=0$ ἤ…ἤ $\alpha_\nu=0$

ΠΟΡΙΣΜΑ | $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_\nu\neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1\neq 0$ **καί** $\alpha_2\neq 0$ **καί**… **καί** $\alpha_\nu\neq 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^2-1=0$.

Εἶναι $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$ ἤ $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ἤ $x=1$.

'Ασκήσεις 12,13,14,15,16.

Νόμος τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό

2.18 Ἡ ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α, x, y μέ $\alpha \neq 0$ ἰσχύει

$$\alpha x = \alpha y \Rightarrow x = y$$

'Απόδειξη

Εἶναι: $\alpha x = \alpha y$ [ὑπόθεση]

$\frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}(\alpha y)$ [πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη ἐπί $\frac{1}{\alpha}$]

$\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)y$ [προσεταιριστικότητα]

$1x = 1y$ [γινόμενο ἀντιστρόφων]

$x = y$ [ὁ 1 οὐδέτερο στοιχεῖο]

'Επειδή ὅμως γνωρίζουμε ὅτι ἰσχύει καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή γιά $\alpha \neq 0$, θά ἔχουμε τήν ἰσοδυναμία :

$$\boxed{\alpha x = \alpha y \Leftrightarrow x = y}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μέ ἐφαρμογή τῶν νόμων διαγραφῆς νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $3x+5=11$.

$3x+5=11 \Leftrightarrow 3x+5=6+5$

$\Leftrightarrow 3x=6$ [ν. διαγραφῆς στήν πρόσθεση]

$\Leftrightarrow 3x=3.2$

$\Leftrightarrow x=2$ [ν. διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό]

Διαίρεση

2.19 Ὁ ὁρισμός τῆς διαιρέσεως στό $\mathbb{R}$ στηρίζεται στό ἑπόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 13

> **Ἄν δοθοῦν δύο πραγματικοί ἀριθμοί α καί β μέ $\beta \neq 0$, ὑπάρχει ἕνας μόνο πραγματικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε νά εἶναι:**
>
> $$\beta x = \alpha$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε

$\beta x = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta}(\beta x) = \dfrac{1}{\beta}\alpha$ [πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη ἐπί $\dfrac{1}{\beta}$]

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\beta}\beta\right)x = \dfrac{1}{\beta}\alpha$ [προσεταιριστικότητα]

$\Leftrightarrow 1x = \dfrac{1}{\beta}\alpha$ [γινόμενο ἀντιστρόφων]

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\beta}\alpha$ [ὁ 1 οὐδέτερο στοιχεῖο]

Μοναδική ρίζα τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, ἄρα καί τῆς ἀρχικῆς $\beta x = \alpha$, εἶναι ὁ ἀριθμός $\dfrac{1}{\beta}\alpha$ πού γράφεται ἁπλούστερα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ἤ $\alpha : \beta$ καί ὀνομάζεται **πηλίκο** τοῦ α διά β. Ἔχουμε λοιπόν γιά $\beta \neq 0$ τήν ἰσοδυναμία

$$\beta x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta} \tag{1}$$

Ἑπομένως τό πηλίκο $\dfrac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ὁ μοναδικός ἀριθμός πού, ὅταν πολλαπλασιαστεῖ μέ τό β, δίνει γινόμενο α. Δηλαδή εἶναι

$$\beta\frac{\alpha}{\beta} = \alpha$$

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία σέ κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (α,β) μέ $\beta \neq 0$ ἀντιστοιχίζεται τό πηλίκο $\dfrac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **διαίρεση.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\dfrac{\alpha}{1} = \alpha$, $\dfrac{\alpha}{\alpha} = 1$ $(\alpha \neq 0)$.**

Ἀπό τήν ἰσοδυναμία $\beta x = \alpha \Leftrightarrow x = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ ἔχουμε

$1\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\alpha}{1}$ καί (ἄν $\alpha \neq 0$)

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{\alpha}{\alpha}.$

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $\beta \neq 0$ καί $\gamma \neq 0$, εἶναι

$$(1)\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \quad \text{καί} \quad (2)\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}.$$

(1) Ἄν $x = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$, θά ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες

$$x = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \Leftrightarrow (\beta\gamma)x = \alpha\gamma$$
$$\Leftrightarrow (\beta x)\gamma = \alpha\gamma$$
$$\Leftrightarrow \beta x = \alpha$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}. \quad \text{Ἄρα } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}.$$

(2) Σύμφωνα μέ τήν (1) εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\ \frac{1}{\gamma}}{\beta\ \frac{1}{\gamma}} = \frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}$$

3. Ἄν $y \neq 0$, εἶναι $-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$.

Εἶναι $-\frac{x}{y} = (-1)\ \frac{x}{y} = (-1)\left(x\ \frac{1}{y}\right) = [(-1)\ x]\ \frac{1}{y} = (-x)\frac{1}{y}$

$$= \frac{-x}{y} = \frac{(-1)\ (-x)}{(-1)y} = \frac{x}{-y}.$$

4. Ὅταν προσθέτουμε ὁμώνυμα κλάσματα, σχηματίζουμε ἕνα κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τόν ἴδιο.

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα $\frac{x}{z} + \frac{y}{z}$ $(z \neq 0)$.

Εἶναι $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{1}{z}\ x + \frac{1}{z}\ y$

$$= \frac{1}{z}\ (x+y) = \frac{x+y}{z}.$$

5. Ὅταν πολλαπλασιάζουμε δύο κλάσματα, σχηματίζουμε ἕνα κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν.

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό γινόμενο $\frac{x}{y}\ \frac{z}{\varphi}$ $(y\varphi \neq 0)$. Εἶναι

$$\frac{x}{y}\ \frac{z}{\varphi} = \left(\frac{1}{y}\ x\right)\left(\frac{1}{\varphi}\ z\right) = \frac{1}{y}\ x\ \frac{1}{\varphi}\ z \text{ (Θεωρ. 6)}$$

$$= \left(\frac{1}{y}\ \frac{1}{\varphi}\right)(xz) = \frac{1}{y\varphi}\ (xz) \text{ (§ 2.17 Ἐφαρ. 1)} = \frac{xz}{y\varphi}.$$

Παρατηρῆστε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\frac{x}{y}$ καί $\frac{y}{x}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

6. Ἄν α, β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ὅπου $\beta \neq 0$ καί ν εἶναι φυσικός ἀριθμός ≥ 1, θά εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου εἶναι $\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\beta$. Ἔτσι ἔχουμε

$$\alpha^\nu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\beta\right)^\nu \qquad [\S\ 2\cdot 14 \text{ παρατ.}]$$

$$\alpha^\nu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu \beta^\nu \qquad [\text{ὕψωση γινομένου σέ δύναμη}]$$

$$\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu. \qquad [\text{ὁρισμός πηλίκου}]$$

7. **Ἄν α,β,γ,δ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\delta \neq 0$, νά δειχθεῖ ὅτι**

$$(\alpha - \beta + \gamma):\delta = (\alpha:\delta) - (\beta:\delta) + (\gamma:\delta).$$

Εἶναι $(\alpha - \beta + \gamma) : \delta = (\alpha - \beta + \gamma)\,\frac{1}{\delta}$

$$= \alpha\frac{1}{\delta} - \beta\frac{1}{\delta} + \gamma\frac{1}{\delta}$$

$$= (\alpha : \delta) - (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$$

Ἀσκήσεις 17,18,19,20,21.

Δύναμη μέ ἐκθέτη ἀκέραιο

2.20 Ἄς προσπαθήσουμε νά βροῦμε τό πηλίκο $\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = x$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καί κ,λ φυσικοί διάφοροι τοῦ μηδενός.

Ἐξετάζουμε πρῶτα τήν περίπτωση $\kappa > \lambda$. Ἀφοῦ $\kappa > \lambda$, θά ὑπάρχει φυσικός $\nu \neq 0$ τέτοιος, ὥστε $\kappa = \lambda + \nu$ ἤ $\kappa - \lambda = \nu$. Ὁπότε θά ἔχουμε:

$$x = \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} \Leftrightarrow x\,\alpha^\lambda = \alpha^\kappa \Leftrightarrow x\alpha^\lambda = \alpha^{\lambda+\nu} \Leftrightarrow x\alpha^\lambda = \alpha^\lambda\,\alpha^\nu \Leftrightarrow x = \alpha^\nu = \alpha^{\kappa-\lambda}.$$

Ἔχουμε λοιπόν γιά $\kappa > \lambda$, $\quad \boldsymbol{\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}}$ (1)

Τί συμβαίνει τώρα, ὅταν $\kappa = \lambda$ ἤ $\kappa < \lambda$; Ἄς δοῦμε τίς δύο αὐτές περιπτώσεις χωριστά.

- Ἔστω $\kappa = \lambda$.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου εἶναι $\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\kappa} = 1$. (2)

Ἀλλά, ἄν θέλουμε νά ἰσχύει καί στήν περίπτωση αὐτή ἡ (1), θά ἔχουμε

$$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\kappa} = \alpha^{\kappa-\kappa} = \alpha^0. \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) προκύπτει ὅτι, γιά νά ἰσχύει ἡ (1) καί ὅταν $\kappa = \lambda$, θά πρέπει νά εἶναι $\quad \boldsymbol{\alpha^0 = 1}$

- Ἔστω $\kappa < \lambda$

Τότε θά ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός $\nu \neq 0$ τέτοιος, ὥστε $\lambda = \kappa + \nu$ ἤ $\lambda - \kappa = \nu$.

Ἄρα $x = \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} \Leftrightarrow x\alpha^\lambda = \alpha^\kappa \Leftrightarrow x\alpha^{\kappa+\nu} = \alpha^\kappa \Leftrightarrow x\alpha^\kappa \alpha^\nu = \alpha^\kappa \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha^\nu}$

Δηλαδή
$$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \frac{1}{\alpha^\nu}. \tag{4}$$

Ἄν ὅμως ὑποθέσουμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί στήν περίπτωση αὐτή, θά εἶναι
$$\frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda} = \alpha^{-\nu} \tag{5}$$

Ἀπό τίς (4) καί (5) προκύπτει ὅτι, γιά νά ἰσχύει ἡ (1) καί ὅταν $\kappa < \lambda$,

πρέπει νά εἶναι
$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

Μετά ἀπό τήν προηγούμενη ἀνάλυση ἐπεκτείνουμε τόν ὁρισμό δυνάμεως μὲ βάση $\alpha \neq 0$ ὡς ἑξῆς:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha \neq 0$ εἶναι:

1. $\alpha^0 = 1$

2. $\forall \nu \in \mathbb{N},\ \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἀπό τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ὁρίσαμε τό σύμβολο $\alpha^{-\nu}$, ὅταν ν φυσικός, προκύπτει ὅτι γιά ὁποιουσδήποτε φυσικούς κ καί λ καί γιά $\alpha \neq 0$ ἰσχύει

$$\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

Στό ἑπόμενο θεώρημα συνοψίζονται οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτη ἀκέραιο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 14

Ἄν α, β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί κ, λ εἶναι ἀκέραιοι, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ὅλα τά παρουσιαζόμενα σύμβολα ἔχουν νόημα, ἰσχύουν οἱ ἰσότητες

1. $\alpha^\kappa \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$

2. $\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$

3. $(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}$

4. $(\alpha\beta)^\kappa = \alpha^\kappa \beta^\kappa$

5. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}$

Ἀπόδειξη

1. Ἐξετάζουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) $\kappa > 0 \qquad \lambda > 0$. Ἔχει ἀποδειχθεῖ

β) $\kappa > 0 \qquad \lambda < 0$. Εἶναι $\alpha^{\kappa}\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa}\ \dfrac{1}{\alpha^{-\lambda}} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{-\lambda}} = \alpha^{\kappa-(-\lambda)} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

γ) $\kappa < 0$ καί $\lambda < 0$. Εἶναι $\alpha^{\kappa}\ \alpha^{\lambda} = \dfrac{1}{\alpha^{-\kappa}}\ \dfrac{1}{\alpha^{-\lambda}} = \dfrac{1}{\alpha^{-\kappa-\lambda}} = \dfrac{1}{\alpha^{-(\kappa+\lambda)}}$

$= \alpha^{\kappa+\lambda}$

δ) $\kappa = 0$ καί $\lambda \neq 0$. Εἶναι $\alpha^0\alpha^{\lambda} = 1\ \alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda} = \alpha^{\lambda+0}$

ε) $\kappa = \lambda = 0$. Εἶναι προφανής.

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καί οἱ ὑπόλοιπες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις

α) $\dfrac{-3x^2yz^{-2}}{4x^5yz}$, β) $(-3x^2y+6x^4y^3-9xy^7) : 8x^2y^4$

α) Εἶναι $\dfrac{-3x^2yz^{-2}}{4x^5yz} = (-3x^2yz^{-2})\ \dfrac{1}{4x^5yz}$

$= (-3x^2yz^{-2}) \cdot \left(\dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{x^5}\ \dfrac{1}{y}\ \dfrac{1}{z}\right) = (-3)x^2yz^{-2}\ \dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{x^5}\ \dfrac{1}{y}\ \dfrac{1}{z}$

$= \left[(-3)\ \dfrac{1}{4}\right]\ (x^2x^{-5})\,(yy^{-1})\,(z^{-2}z^{-1}) =$

$= \dfrac{-3}{4}\ x^{2-5}y^{1-1}z^{-2-1} = \dfrac{-3}{4}\ x^{-3}y^0z^{-3} = \dfrac{-3}{4}\ \dfrac{1}{x^3}\ 1\ \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{-3}{4x^3z^3}$.

β) Εἶναι $(-3x^2y+6x^4y^3-9xy^7):8x^2y^4=$

$= \dfrac{-3x^2y}{8x^2y^4} + \dfrac{6x^4y^3}{8x^2y^4} - \dfrac{9xy^7}{8x^2y^4} = \dfrac{-3}{8y^3} + \dfrac{3x^2}{4y} - \dfrac{9y^3}{8x}$.

Ἀσκήσεις 22,23.

Λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$

2.21 Ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται $\alpha x = -\beta$ (1). Ἑπομένως, ἄν $\alpha \neq 0$, μέ τό θεώρ. 13, ἡ ἐξίσωση (1) θά ἔχει μιά μοναδική ρίζα, τήν σύμφωνα $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ἄν ὅμως $\alpha = 0$, ἡ (1) γίνεται $0 \cdot x = -\beta$. Τότε, ἄν $\beta \neq 0$, δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός πού νά τήν ἐπαληθεύει, ἐνῶ ἄν $\beta = 0$, ἐπειδή θά εἶναι $0 \cdot x = 0$, ἐπαληθεύεται γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό.

Τά συμπεράσματα αὐτά συνοψίζονται στόν παρακάτω πίνακα.

Πίνακας λύσεων τῆς $\alpha x+\beta=0$	
$\alpha \neq 0$	ἡ ἐξίσωση ἔχει μιά μοναδική ρίζα, τή $x=-\frac{\beta}{\alpha}$
$\alpha=0$ καί $\beta \neq 0$	ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει καμιά ρίζα (εἶναι ἀδύνατη στό $\mathbb{R}$)
$\alpha=0$ καί $\beta=0$	ἡ ἐξίσωση ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό (εἶναι ταυτότητα στὸ $\mathbb{R}$)

Ἄν οἱ συντελεστές α καί β τῆς $\alpha x+\beta=0$ εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, τότε ἀμέσως μποροῦμε νά βροῦμε ποιά ἀπό τίς τρεῖς περιπτώσεις τοῦ προηγούμενου πίνακα ἰσχύει. Ἄν ὅμως οἱ συντελεστές α,β τῆς $\alpha x+\beta=0$ ἐκφράζονται μέ τή βοήθεια γραμμάτων, τότε, ἀνάλογα μέ τίς τιμές πού παίρνουν τά γράμματα αὐτά, μποροῦμε πάλι νά βροῦμε σέ ποιά ἀπό τίς τρεῖς περιπτώσεις τοῦ πίνακα ἀναγόμαστε.

Στή δεύτερη περίπτωση τά γράμματα, ἀπό τά ὁποῖα ἐξαρτῶνται οἱ συντελεστές α,β τῆς $\alpha x+\beta=0$, λέγονται **παράμετροι** καί ἡ ἐξίσωση **παραμετρική**, ὅπως π.χ. ἡ ἐξίσωση $(\lambda-1)x+\lambda^2-1=0$.

Ἔτσι στή λύση μιᾶς παραμετρικῆς ἐξισώσεως πρέπει νά προσδιορίσουμε τά σύνολα τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων, γιά τά ὁποῖα ἡ ἐξίσωση:

- ἔχει μιά ρίζα
- δέν ἔχει καμιά ρίζα (εἶναι ἀδύνατη)
- ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό (εἶναι ταυτότητα).

Στήν πρώτη ἀπό τίς περιπτώσεις αὐτές βρίσκουμε καί τή ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση** $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{2x-3}{6}-x$.

Ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}=\frac{2x-3}{6}-x \Leftrightarrow 6\left(\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{2}\right)=6\left(\frac{2x-3}{6}-x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x-3(2x+1)=2x-3-6x$$
$$\Leftrightarrow 2x-6x-3=2x-3-6x$$
$$\Leftrightarrow 2x-6x-2x+6x=-3+3$$
$$\Leftrightarrow 0x=0.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση, ἄρα καί ἡ ἀρχική, ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό, ἀφοῦ $\alpha=\beta=0$.

2. **Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση** $\lambda(\lambda-x)-3x=5(\lambda-x)-6$.

Μετασχηματίζουμε τήν ἐξίσωση ὡς ἑξῆς:

$$\lambda(\lambda-x)-3x=5(\lambda-x)-6 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda x-3x=5\lambda-5x-6$$
$$\Leftrightarrow -\lambda x-3x+5x=5\lambda-6-\lambda^2$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)x=-\lambda^2+5\lambda-6$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-2)x=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) $\lambda-2 \neq 0$, δηλ. $\lambda \neq 2$. Τότε ἡ τελευταία ἐξίσωση, ἑπομένως καί ἡ ἀρχική, ἔχει μιά μοναδική λύση, τή $x=\lambda-3$.

β) $\lambda-2=0$, δηλ. $\lambda=2$. Τότε ἡ ἐξίσωση παίρνει τή μορφή $0x=0$ καί ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x.

Ἀσκήσεις 24, 25.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων**
$(2x+3)(3y-1)=0$ καί $2x-3y+1=0$.

Ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$(2x+3)(3y-1)=0$ **καί** $2x-3y+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x+3=0$ **ἤ** $3y-1=0)$ **καί** $2x-3y+1=0$

$\Leftrightarrow (2x+3=0$ **καί** $2x-3y+1=0)$ **ἤ** $(3y-1=0$ **καί** $2x-3y+1=0)$

$\Leftrightarrow \left(x=-\dfrac{3}{2}\right.$ **καί** $\left.y=\dfrac{-2}{3}\right)$ **ἤ** $\left(y=\dfrac{1}{3}\right.$ **καί** $\left.x=0\right)$.

2. **Ἄν α,β,x,y εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**
$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha y-\beta x)^2$.

Εἶναι: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=$

$=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+2\alpha\beta xy)$

$=\alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2x^2-\beta^2y^2-2\alpha\beta xy$

$=\alpha^2y^2+\beta^2x^2-2\alpha\beta xy$

$=(\alpha y-\beta x)^2$.

3. **Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί $\alpha+\beta+\gamma=0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$.

4. **Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\alpha\beta\gamma \neq 0$ καί**
$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἔχουμε: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)=\alpha\beta\gamma \cdot 0$

$\Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$. Ἄρα

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2.0$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη 26,27,28,29,30.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι
$[-(-x)]+[-(-y)]+[-(x+y)]=0.$

2. Νά δειχθεῖ ὅτι $x+[-[-(-x)]]=0.$

3. Ἄν $x+y+z$ εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ $(-x)+(-y)+\omega$, νά δειχθεῖ ὅτι $z=-\omega$.

4. Ἄν $x=(\alpha+\beta)+[(-\gamma)+(-\delta)]$ καί $y=[(-\alpha)+\gamma]+[(-\beta)+\delta]$, νά δείξετε ὅτι οἱ x,y εἶναι ἀντίθετοι.

5. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω ἰσότητες
α) $(x+y)-z=(x-z)+y$
β) $(x-y)-z=x-(y+z)=(x-z)-y.$

6. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω συνεπαγωγές
α) $x\neq y\Rightarrow x-z\neq y-z$
β) $x=y$ **καί** $z=\varphi\Rightarrow x-z=y-\varphi.$

7. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα
$$A=\left(-\frac{6}{7}\alpha^2\beta\gamma^5\right)(2\alpha^4\beta^3\gamma^4)\left(-\frac{5}{6}\alpha\beta^2\gamma^5\right)$$
$B=(-3x^2yz^7)(4x^4y^3z)(-xy^5)$
$\Gamma=[(-2xy^2z^3)^3]^4.$

8. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες
α) $(x^2+3x)(x^2+6x+9)=x(x+3)^3$
β) $(x^2+y^2+xy)^2=x^2y^2+(x+y)^2(x^2+y^2).$

9. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι
$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma.$

10. Νά γίνουν οἱ πράξεις
α) $(x-1)^2(x+1)^2$ β) $(-7x+1)^2-(7x-3)^2$
γ) $(x^2-2\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$ δ) $(2\alpha\beta+\gamma)^2-(\gamma-\delta)^2$
ε) $(\alpha x+\beta y)^2-(\alpha x-\beta y)^2.$

11. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες
α) $(3x-2)[4x-3+2(x-1)+x+1]=(3x-2)(7x-4)$
β) $x^6-8=(x^2-2)(x^4+2x^2+4).$

12. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἰσότητα
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{xy}=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2y^2}\quad(xy\neq 0).$$

13. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι
α) $\frac{1}{x}(x+x^2)+\frac{1}{y}(y+y^2)+\frac{1}{z}(z+z^2)+(-x)+(-y)+(-z)=3\quad(xyz\neq 0)$
β) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\Leftrightarrow xy+yz+zx=0\quad(xyz\neq 0).$

14. Ἄν $(x+y)(x+z)=0$, νά δειχθεῖ ὅτι ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ y ἤ τοῦ z.

15. Νά βρεθεῖ ἀριθμός ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μέ τόν ἀντίστροφό του.

16. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις
α) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ β) $x^3-4x=0$ γ) $x^3-2x^2+x=0$
δ) $x^4-16=0$ ε) $(x-1)^2-(3-2x)^2=0.$

17. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες

α) $(x+y) : z = (x : z)+(y : z) \qquad (z \neq 0)$

β) $(x-y) : z = (x : z) - (y : z) \qquad (z \neq 0)$

γ) $(x\ y) : z = (x : z)\ y = x\ (y : z) \qquad (z \neq 0)$

δ) $(x : y) : z = x : (y\ z) = (x : z) : y \qquad (yz \neq 0).$

18. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες

α) $(xy) : x = y \qquad (x \neq 0)$

β) $(x : y)\ y = x \qquad (y \neq 0)$

γ) $x : (y\ z) = (x : y) : z \qquad (yz \neq 0).$

19. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσοδυναμίες

α) $x = y \Leftrightarrow x : z = y : z \quad (z \neq 0)$

β) $x \neq y \Leftrightarrow x : z \neq y : z \quad (z \neq 0).$

20. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες

α) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{x\varphi - yz}{y\varphi} \qquad (y\varphi \neq 0)$

β) $\dfrac{x}{y} : \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{x\varphi}{yz}. \qquad (y\varphi z \neq 0).$

21. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω ἰσοδυναμίες

α) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi = yz \qquad (x\varphi \neq 0)$

β) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x}{z} = \dfrac{y}{\varphi} \qquad (y\varphi z \neq 0)$

γ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{\varphi}{z} \qquad (xyz\,\varphi \neq 0)$

δ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{z+\varphi}{\varphi} \qquad (y\varphi \neq 0)$

ε) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{x+z}{y+\varphi} \qquad (y\varphi(y+\varphi) \neq 0)$

στ) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{\varphi} = \dfrac{\omega}{\rho} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{x+z+\omega}{y+\varphi+\rho} \qquad (y\varphi\rho(y+\varphi+\rho) \neq 0).$

22. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις

α) $5y^{-2}x^3z^0$ β) $\dfrac{2x^3y^{-2}}{3x^{-2}y^3}$ γ) $\dfrac{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}{(\gamma\delta)^{-1}}$ δ) $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ ε) $\dfrac{1+x^{-1}+x^{-2}}{1-x^{-3}}.$

23. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις

α) $\left(-\dfrac{3}{4}\,x^2y^{-5}z^5\right)^{-3}$ β) $\dfrac{-7xy^5z^3}{8x^4y^5z^2}$

γ) $\left(-\dfrac{2}{3}\,xy^3+4x^4y^2z-5x^3z^5\right) : \dfrac{5}{4}\,x^4y^3z^4.$

24. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

α) $(3x+5)^2-(9x^2-25)+6x+10 = 0$

β) $3x(2x-1)+1-4x^2-(2x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) = 0$

γ) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{2x-3}{6} - x$

δ) $(x-7)^2-2x+1 = x^2-3$

ε) $x+4 - \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{2x+3}{3}.$

25. Νά λυθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις

α) $(\lambda^2-9)x = \lambda^2+3\lambda$

β) $3(\lambda+1)x+4 = 2x+5(\lambda+1)$

γ) $(\lambda^2-1)x = \lambda\,(\lambda+1)\,(\lambda+2)$

δ) $(\lambda+2)x+4(2\lambda+1) = \lambda^2+4(x-1)$.

26. Νά λυθοῦν οἱ παραμετρικές ἐξισώσεις

α) $\lambda\,(x-1) = x+2\mu-7$

β) $\lambda(3x+\lambda)+7-2\lambda = \lambda^2+3(1+\mu x)$

γ) $(\lambda-\mu)x = \lambda^2-(\lambda+\mu)x$.

27. Ἀφοῦ ἀποδειχθεῖ ἡ συνεπαγωγή $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, νά παραγοντοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις

α) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

β) $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3$.

28. Ἄν $A = 2x+3y$, $B = x-2y$ καί $\Gamma = 3x-5y$, νά βρεθεῖ τό $A^2+B^2-\Gamma^2$ καί τό $AB+B\Gamma+\Gamma A$.

29. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$, νά ἀποδειχθεῖ ἡ συνεπαγωγή

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2.$$

30. Νά λυθοῦν τά συστήματα

α) $x^2-3y = 6$
$y^2 = 1$ στό $\mathbb{Q}$

β) $x+y = -13$
$(y-3)\,(y-5) = 0$ στό $\mathbb{R}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εἶναι γνωστό ὅτι $-(-x) = x$ καί $-(x+y) = (-x)+(-y)$.

2. Στήν ἐσωτερική ἀγγύλη ἔχουμε x.

3. Ἐπειδή εἶναι ἀντίθετοι, θά εἶναι $(x+y+z)+[(-x)+(-y)+\omega] = 0$ κτλ.

4. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $x+y = 0$.

5. Ἀρχίζουμε ἀπό τό πρῶτο μέλος, γράφουμε ἀντί $(x+y)-z = (x+y)+(-z)$ κτλ.

6. Γιά τήν **α** ὑποθέτουμε ὅτι γιά $x \neq y$ ἰσχύει $x-z = y-z$ (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο).
Γιά τήν **β** παρατηροῦμε $-z = -\varphi$.

7. Εἶναι $A = \frac{10}{7}\alpha^7\beta^6\gamma^{14}$ $\quad B = 12x^7y^9z^8$ $\quad$ καί $\Gamma = 4096x^{12}y^{24}z^{36}$.

8. **α)** Κάνουμε τίς πράξεις στό πρῶτο μέλος καί καταλήγουμε στό δεύτερο.
β) Ξεκινοῦμε ἀπό τό δεύτερο μέλος καί φτάνουμε στό πρῶτο.

9. Γράφουμε $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = (x+\alpha)[(x+\beta)(x+\gamma)]$, κάνουμε τίς πράξεις στήν ἀγγύλη κτλ.

10. **α)** x^4-2x^2+1 $\quad$ **β)** $4(7x-2)$ $\quad$ **γ)** $x^4-4\alpha x^2+5\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
δ) $(2\alpha\beta+2\gamma-\delta)(2\alpha\beta+\delta)$ $\quad$ καί **ε)** $4\alpha\beta xy$.

11. **α)** ἁπλή, **β)** χρησιμοποιοῦμε τήν ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

12. Ξεκινᾶμε ἀπό τό πρῶτο μέλος καί ἐφαρμόζουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα.

13. **α)** ἐφαρμόζουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα κτλ., **β)** πολλαπλασιάζουμε τήν πρώτη μέ xyz κτλ.

14. Ἀπό τήν $(x+y)(x+z) = 0$ προκύπτει $x+y = 0$ ἤ $x+z = 0$, ὁπότε ...

15. Ἄν x εἶναι ὁ ἀριθμός $(x \neq 0)$, θά εἶναι $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\,x = x\,\frac{1}{x}$ κτλ. Βρίσκουμε $x = \pm 1$.

16. Παραγοντοποιοῦμε τό πρῶτο μέλος καί ἐφαρμόζουμε τό θεώρ. 11. Εἶναι: **α)** $x = 1,2,3$ $\quad$ **β)** $x = 0, -2, 2$ $\quad$ **γ)** $x = 0,1$ $\quad$ **δ)** $x = -2,2$ $\quad$ καί **ε)** $x = 2, \frac{4}{3}$.

17. Μετασχηματίζουμε τά πηλίκα σέ γινόμενα.

18. Εἶναι **α)** $(x\ y) : x = (x\ y)\frac{1}{x} = xy\frac{1}{x} =$ κτλ. Ὁμοίως καί οἱ ἄλλες.

19. **α)** $x = y \Leftrightarrow x\frac{1}{z} = y\frac{1}{z} \Leftrightarrow \dots$ $\quad$ **β)** Μέθοδος ἀντιθετοαντιστροφῆς.

20. **α)** $\frac{x}{y} - \frac{z}{\varphi} = \frac{x\varphi}{y\varphi} - \frac{zy}{y\varphi} =$ κτλ.

β) $\frac{x}{y} : \frac{z}{\varphi} = \frac{x}{y}\,\frac{1}{\frac{z}{\varphi}} =$ κτλ.

21. **α)** Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη μέ $y\varphi$, **β)** ἐφαρμόζουμε τήν α, **γ)** ἐφαρμόζουμε τήν α, **δ)** προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τόν 1, **ε)** θέτουμε $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} = \lambda$ κτλ. **στ)** Ὅμοια μέ τήν ε.

22. **α)** $\frac{5x^3}{y^2}$ **β)** $\frac{2x^5}{3y^5}$ **γ)** $\frac{(\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha\beta}$ **δ)** $\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$ **ε)** $\frac{x}{x-1}$

23. **α)** $-\frac{64y^{15}}{27x^6z^{15}}$ **β)** $\frac{-7z}{8x^3}$ **γ)** $\frac{-8}{15x^3z^4} + \frac{16}{5yz^3} - \frac{4z}{xy^3}$

24. **α)** $x = -\frac{5}{3}$ **β)** $x = \frac{1}{2}$ **γ)** ἀδύνατη **δ)** $x = \frac{53}{16}$ **ε)** ἀδύνατη.

25. **α)** Γιά $\lambda \neq \pm 3$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = -3$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = 3$ εἶναι ἀδύνατη.
β) Γιά $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ ἔχει μιά ρίζα καί γιά $\lambda = -\frac{1}{3}$ εἶναι ἀδύνατη.
γ) Γιά $\lambda \neq \pm 1$ ἔχει μιά ρίζα γιά $\lambda = -1$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = 1$ εἶναι ἀδύνατη.
δ) Γιά $\lambda \neq 2$ ἔχει μιά ρίζα καί γιά $\lambda = 2$ εἶναι ἀδύνατη.

26. **α)** Γιά $\lambda \neq 1$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = 1$, $\mu = 3$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = 1$, $\mu \neq 3$ εἶναι ἀδύνατη.
β) Γιά $\lambda \neq \mu$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = \mu = 2$ εἶναι ταυτότητα καί γιά $\lambda = \mu \neq 2$ εἶναι ἀδύνατη.
γ) Γιά $\lambda \neq 0$ ἔχει μιά ρίζα, γιά $\lambda = 0$ εἶναι ταυτότητα.

27. Εἶναι $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = -\gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)^3 = -\gamma^3$ κτλ. **α)** $3(x-y)(y-z)(z-x)$ καί **β)** $3\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

28. $A^2+B^2-\Gamma^2 = -4x^2-12y^2+38xy$ καί $AB+B\Gamma+\Gamma A = 11x^2-11y^2-13xy$.

29. Ἐφαρμόζουμε τήν ἄσκηση 21(ε).

30. **α)** Ἀντικαθιστοῦμε τό y ἀπό τή πρώτη στή δεύτερη. Βρίσκουμε ($x=3$ **καί** $y=1$) **ἤ** ($x = -3$ **καί** $y = 1$). **β)** Εἶναι ($x = -16$ **καί** $y = 3$) **ἤ** ($x = -18$ **καί** $y=5$).

3 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ

Τό κεφάλαιο αὐτό ἀποτελεῖ συνέχεια καί συμπλήρωση τοῦ προηγούμενου. Μέ τήν εἰσαγωγή τῆς διατάξεως, πού εἶναι ὁ βασικός του ἄξονας, συμπληρώνεται ἡ δομή τοῦ συνόλου $\mathbb{R}$ ὡς διατεταγμένου σώματος.
Ἡ ἐπιλογή καί ὁ τρόπος παρουσιάσεως τῆς ὕλης διέπονται ἀπό τίς ἴδιες ἀρχές καί ἀποβλέπουν βασικά στούς ἴδιους στόχους μέ ἐκείνους τοῦ κεφαλαίου 2.
Ἐπιδιώκεται δηλαδή καί ἐδῶ νά ἐξοικειωθεῖ ὁ μαθητής μέ τόν τρόπο πού ἀναπτύσσεται ἕνα μαθηματικό θέμα (ρόλος τῶν ἀξιωμάτων, τῶν νόμων τῆς λογικῆς κτλ.) καί νά ἀσκηθεῖ στή μαθηματική ἀπόδειξη.
Ἐξάλλου ἡ κανονική ἀφομοίωση τῆς ὕλης αὐτῆς θά συμβάλει στό νά συμπληρώσει ὁ μαθητής τίς γνώσεις του πάνω στίς βάσεις τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ καί ἰδιαίτερα στά σημεῖα ἐκεῖνα πού ἡ παρουσία λαθῶν ἤ παρανοήσεων εἶναι συνήθης.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Γενικά

3.1 Δύο ὁποιοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί x καί y μποροῦν νά συγκριθοῦν συνδεόμενοι μέ τό σύμβολο τῆς **διατάξεως** $\leq$ (μικρότερο ἤ ἴσο). Δηλαδή ἰσχύει πάντοτε $\mathbf{x \leq y}$ **ἤ** $\mathbf{y \leq x}$.
Αὐτή τή γνωστή μας σχέση διατάξεως μποροῦμε νά τήν ὁρίσουμε καί νά τή μελετήσουμε, ἄν ξεκινήσουμε ἀπό μερικές γνωστές μας ἰδιότητες πού θά δεχθοῦμε ὡς ἀξιώματα, ὅπως κάναμε καί στό προηγούμενο κεφάλαιο γιά τίς πράξεις.

Θετικοί καί ἀρνητικοί ἀριθμοί

3.2 Εἴδαμε ὅτι γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀντίθετός του, ὁ $-x$. Εἶναι $x = -x$ μόνο ὅταν $x = 0$. Ἄρα, ἄν $\mathbb{R}^*$ εἶναι τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν **χωρίς τό 0**, τά στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{R}^*$ μποροῦν νά σχηματίσουν δυάδες $\{x, -x\}$ ἀντίθετων μή μηδενικῶν ἀριθμῶν. Θά δεχθοῦμε ὅτι σέ κάθε δυάδα ἕνας μόνο ἀπό τούς ἀντίθετους x, $-x$ χαρακτηρίζεται ὡς **θετικός πραγματικός ἀριθμός.**
Τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀριθμῶν θά τό συμβολίζουμε $\mathbb{R}^*_+$.
Πιό συγκεκριμένα θά δεχθοῦμε τά παρακάτω ἀξιώματα:

ΑΞΙΩΜΑ X

> **Ὑπάρχει ἕνα ὑποσύνολο $\mathbb{R}^*_+$ τοῦ $\mathbb{R}$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ νά ἰσχύει :**
> **ἤ $x = 0$ ἤ $x \in \mathbb{R}^*_+$ ἤ $-x \in \mathbb{R}^*_+$**

ΑΞΙΩΜΑ XI

> **Τό $\mathbb{R}^*_+$ εἶναι «κλειστό» ὡς πρός τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό. Δηλαδή ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές :**
> **1.** $x \in \mathbb{R}^*_+$ **καί** $y \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^*_+$
> **2.** $x \in \mathbb{R}^*_+$ **καί** $y \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow x\,y \in \mathbb{R}^*_+$

Ἀπό τό ἀξίωμα X προκύπτει ὅτι κάθε πραγματικός ἀριθμός $x \neq 0$ εἶναι:

- **ἤ** θετικός (ἄν $x \in \mathbb{R}^*_+$)
- **ἤ** ἀντίθετος θετικοῦ (ἄν $-x \in \mathbb{R}^*_+$), ὁπότε λέγεται **ἀρνητικός.**

Τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν θά τό συμβολίζουμε[1] $\mathbb{R}^*_-$.

Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ἀμέσως ὅτι καί τό $\mathbb{R}^*_-$ εἶναι «κλειστό» ὡς πρός τήν πρόσθεση, δηλαδή τό ἄθροισμα δύο ἀρνητικῶν εἶναι ἀρνητικός. Πράγματι, ἄν x καί y εἶναι ἀρνητικοί ἀριθμοί, τότε οἱ $-x$ καί $-y$ θά εἶναι θετικοί. Ὁπότε τό $(-x)+(-y)$ ἤ $-(x+y)$ εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἄρα ὁ $x+y$ θά εἶναι ἀρνητικός.

Ἀνισότητες

3.3 Μποροῦμε τώρα νά ὁρίσουμε στό $\mathbb{R}$ τίς γνωστές μας διμελεῖς σχέσεις «$>$» ἤ «$<$», τίς ὁποῖες ὀνομάζουμε **ἀνισότητες.**

Ἄν x καί y εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, θά λέμε ὅτι:

- **«Ὁ x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ y»** καί θά γράφουμε $x > y$, ὅταν ἡ διαφορά $x - y$ εἶναι θετικός ἀριθμός, καί
- **«Ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ y»** καί θά γράφουμε $x < y$, ὅταν $y > x$.

Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό ἰσχύουν στό $\mathbb{R}$ οἱ ἰσοδυναμίες:

$$(1)\quad \begin{array}{l} x > y \Leftrightarrow x - y \ \textbf{θετικός} \\ x < y \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow y - x \ \textbf{θετικός} \Leftrightarrow x - y \ \textbf{ἀρνητικός} \end{array}$$

Εἰδικότερα γιά $y = 0$ ἔχουμε

$$\begin{array}{l} x > 0 \Leftrightarrow x - 0 = x \quad \textbf{θετικός} \\ x < 0 \Leftrightarrow x - 0 = x \quad \textbf{ἀρνητικός} \end{array}$$

Δηλαδή οἱ θετικοί χαρακτηρίζονται ἀπό τό ὅτι εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 0, ἐνῶ οἱ ἀρνητικοί ἀπό τό ὅτι εἶναι μικρότεροι τοῦ 0.

Ἑπομένως οἱ ἰσοδυναμίες (1) γράφονται:

$$\begin{array}{l} x > y \Leftrightarrow x - y > 0 \\ x < y \Leftrightarrow x - y < 0 \end{array}$$

Νόμος τῆς τριχοτομίας

3.4 * Ἀποδεικνύουμε τό ἀκόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί y ἰσχύει:**
> $$\text{ἤ } x = y \quad \text{ἤ } x > y \quad \text{ἤ } x < y$$

(1) Ἐπίσης θά συμβολίζουμε:
$\mathbb{R}_+$: Τό σύνολο τῶν θετικῶν καί τοῦ 0.
$\mathbb{R}_-$: Τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν καί τοῦ 0.

'Απόδειξη. Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα X γιά τόν ἀριθμό $x-y$ θά ἔχουμε:

ἤ $x-y=0$, δηλαδή $x=y$

ἤ $x-y>0$, δηλαδή $x>y$

ἤ $-(x-y)>0$, ὁπότε $x-y<0$ δηλαδή $x<y$.

Τό θεώρημα αὐτό εἶναι γνωστό καί ὡς **«νόμος τῆς τριχοτομίας»**.

ΠΟΡΙΣΜΑ | **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἰσχύει: ἤ $x=0$ ἤ $x>0$ ἤ $x<0$**

'Αποδεικνύεται, ἄν θέσουμε στό παραπάνω θεώρημα $y=0$.

Κανόνας τῶν προσήμων

3.5 Γιά τό πρόσημο τοῦ γινομένου ἀποδεικνύεται τώρα ὁ γνωστός κανόνας:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

1. Τό γινόμενο δύο ὁμόσημων ἀριθμῶν εἶναι θετικός ἀριθμός

2. Τό γινόμενο δύο ἑτερόσημων ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός

'Απόδειξη

1. Ἄν $x>0$ καί $y>0$, συμπεραίνουμε ('Αξ. XI) ὅτι $xy>0$. Ἄν $x<0$ καί $y<0$, τότε $-x>0$ καί $-y>0$, ὁπότε $(-x)(-y)>0$. Ἄρα (§ 2.16 Πόρ.) $xy>0$.
2. Ἄν π.χ. $x>0$ καί $y<0$, τότε $x>0$ καί $-y>0$, ὁπότε $x(-y)>0$, ἤ (§ 2.16 Πόρ.) $-xy>0$. Ἄρα $xy<0$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. $xy>0 \Rightarrow x, y$ **ὁμόσημοι**
   $xy<0 \Rightarrow x, y$ **ἑτερόσημοι**
   ('Αποδεικνύονται μέ τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς).
2. $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2>0$
   ($\alpha^2=\alpha\alpha>0$ ὡς γινόμενο ὁμοσήμων).
3. $1>0$
   (Προκύπτει ἀπό τό προηγούμενο πόρισμα γιά $\alpha=1$).
4. $\alpha>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}>0, \alpha<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}<0$
   (Γιά $\alpha \neq 0$ εἶναι $\alpha\dfrac{1}{\alpha}=1>0$. Ἄρα, (Πορ. 1), οἱ $\alpha, \dfrac{1}{\alpha}$ εἶναι ὁμόσημοι).

5. $xy > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} > 0, \quad xy < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} < 0$

(Θεώρ. 2 καί Πόρ. 4)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν α, β εἶναι δύο πραγματικοί ἀριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$.**
Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ἡ διαφορά $(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$ εἶναι θετικός ἀριθμός. Πράγματι $(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 > 0$ σύμφωνα μέ τό Πόρ. 2.

2. **Ἄν $x > 1$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $x^3 > x^2 - x + 1$.**
Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $x^3-(x^2-x+1) > 0$. Εἶναι
$$\begin{aligned} x^3-(x^2-x+1) &= x^3-x^2+x-1 \\ &= x^2(x-1)+(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+1) > 0 \end{aligned}$$
γιατί $x-1 > 0$ ($x > 1$ ὑπόθεση) καί $x^2+1 > 0$ (ἄθροισμα θετικῶν).

Ἀσκήσεις 1,2,3.

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΣΤΟ ℝ

Μεταβατικότητα

3.6 Οἱ ἀνισότητες εἶναι **σχέσεις μεταβατικές**. Συγκεκριμένα ἀποδεικνύουμε τήν ἰδιότητα αὐτή γιά τή σχέση «>».

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή
$$x > y \text{ καί } y > z \Rightarrow x > z$$

Ἀπόδειξη. Εἶναι

$x > y$ καί $y > z \Rightarrow x-y > 0$ καί $y-z > 0$ [ὁρισμός]

$\Rightarrow^{(1)} (x-y)+(y-z) > 0$ [ἄθροισμα θετικῶν, Ἀξ. XI]

$\Rightarrow (x-y+y)-z > 0$ [προσεταιριστικότητα]

$\Rightarrow x-z > 0$ [ἄθροισμα ἀντιθέτων]

$\Rightarrow x > z$ [ὁρισμός]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἡ μεταβατικότητα τῆς σχέσεως «<» ἀποδεικνύεται κατά τόν ἴδιο τρόπο.

(1) Οἱ λοιπές συνεπαγωγές ἰσχύουν καί ἀντιστρόφως.

ΠΟΡΙΣΜΑ	**Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό ἀριθμό**

('Εφαρμόζοντας τό θεώρ. 3 γιά $y = 0$ ἔχουμε: $x > 0$ καί $0 > z \Rightarrow x > z$).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ἄν x,y εἶναι θετικοί καί α,β ἀρνητικοί ἀριθμοί, τότε εἶναι:

α) $x - \alpha + y - \beta > 0$ **καί** **β)** $(x - \alpha)(y - \beta) > 0$.

'Επειδή κάθε θετικός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό, θά ἔχουμε $x > \alpha$ καί $y > \beta$ ἤ $x - \alpha > 0$ καί $y - \beta > 0$. 'Επομένως καί τό ἄθροισμά τους καί τό γινόμενό τους εἶναι θετικοί ἀριθμοί ('Αξ. XI).

Ἡ φυσική διάταξη στό ℝ

3.7 Ὅπως εἶναι γνωστό, σημειώνουμε $x \leq y$ ἀντί γιά τή διάζευξη ($x = y$ **ἤ** $x < y$). 'Επίσης $x \geq y$ σημαίνει ($x = y$ **ἤ** $x > y$). 'Επειδή ὅμως καί ἡ ἰσότητα εἶναι μεταβατική, συμπεραίνουμε ὅτι τό θεώρημα 3 ἰσχύει καί ἄν ἀντί γιά τή σχέση «$>$» πάρουμε τή σχέση «$\geq$» ἤ τήν «$\leq$». Δηλαδή καί ἡ σχέση «$\leq$» ἤ ἡ «$\geq$» εἶναι **μεταβατική**. 'Ακόμη, ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι $x = x$, θά ἀληθεύει ἡ διάζευξη «$x = x$ **ἤ** $x < x$», δηλαδή ἡ $x \leq x$. Ἄρα ἡ σχέση «$\leq$» εἶναι καί **ἀνακλαστική**. Τέλος ἡ σχέση «$\leq$» εἶναι καί **ἀντισυμμετρική**, δηλαδή γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x,y ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$x \leq y \quad \textbf{καί} \quad y \leq x \;\Rightarrow\; x = y.$$

Πράγματι, ἔστω (§ 1.31) ὅτι ($x \leq y$ **καί** $y \leq x$) **καί** $x \neq y$. Τότε

$$(x \leq y \ \textbf{καί}\ y \leq x)\ \textbf{καί}\ x \neq y \Leftrightarrow \begin{cases} (x \leq y\ \textbf{καί}\ x \neq y)\ \textbf{καί} \\ (y \leq x\ \textbf{καί}\ x \neq y) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x < y)\ \textbf{καί}\ (y < x)$$

πού εἶναι ἄτοπο (Θεώρ. 1).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι, ἀφοῦ ἡ σχέση «$\leq$» εἶναι **ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρική** καί **μεταβατική**, θά εἶναι μιά **σχέση διατάξεως**. 'Επειδή μάλιστα ἰσχύει καί ὁ νόμος τῆς τριχοτομίας, θά εἶναι μιά σχέση **ὁλικῆς διατάξεως**. Ἡ σχέση διατάξεως «$\leq$» ὀνομάζεται **φυσική** διάταξη στό ℝ.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Γενικά

3.8 Μέ τόν ὅρο «διάταξη» θά ἐννοοῦμε τή φυσική διάταξη στό ℝ, δηλαδή τήν «$\leq$» ἤ τήν «$\geq$». Τά θεωρήματα πού ἀκολουθοῦν περιέχουν ἀνισότητες, ἀλλά ἰσχύουν καί στή περίπτωση πού οἱ ἀνισότητες ἀντικατασταθοῦν μέ ἰσότητες.

Ἑπομένως, ἀποδεικνύοντας τά θεωρήματα μέ τίς ἀνισότητες, ($>$ ἤ $<$), ἀποδεικνύουμε ταυτόχρονα καί τά ἀντίστοιχα θεωρήματα τῶν διατάξεων ($\geq$ ἤ $\leq$) (ὅπως ἔγινε π.χ. μέ τήν ἀπόδειξη τῆς μεταβατικότητας τῆς διατάξεως § 3.7).

Διάταξη καί πρόσθεση

3.9 Τούς γνωστούς κανόνες γιά τήν πρόσθεση ἑνός ἀριθμοῦ καί στά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητας καθώς καί γιά τήν πρόσθεση ὁμόστροφων ἀνισοτήτων κατά μέλη διατυπώνουμε καί ἀποδεικνύουμε ὡς ἑξῆς :

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y, z, α, β ἰσχύουν:

1. $x > y \;\Leftrightarrow\; x+z > y+z$

2. $x > y$ **καί** $\alpha > \beta \;\Rightarrow\; x+\alpha > y+\beta$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

1. $x+z > y+z \quad \Leftrightarrow (x+z)-(y+z) > 0$ [ὁρισμός]

$\Leftrightarrow x+z-y-z > 0$ [ἀντίθετος ἀθροίσματος]

$\Leftrightarrow x-y > 0$ [ἄθροισμα ἀντιθέτων]

$\Leftrightarrow x > y$ [ὁρισμός]

2. $x > y$ καί $\alpha > \beta \quad \Rightarrow x-y > 0$ καί $\alpha-\beta > 0$ [ὁρισμός]

$\Rightarrow x-y+\alpha-\beta > 0$ [ἄθροισμα θετικῶν, Ἀξ. XI]

$\Rightarrow (x+\alpha)-(y+\beta) > 0$ [ἀντίθετος ἀθροίσματος]

$\Rightarrow x+\alpha > y+\beta$ [ὁρισμός]

Ἡ συνεπαγωγή, $x > y$ καί $\alpha > \beta \Rightarrow x+\alpha > y+\beta$, γενικεύεται γιά ὁσεσδήποτε ὁμόστροφες ἀνισότητες. Δηλαδή ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά ὅτι ἰσχύει :

$$\alpha_1 > \beta_1 \text{ καί } \alpha_2 > \beta_2 \text{ καί } \ldots \alpha_\nu > \beta_\nu \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu > \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu$$

Διάταξη καί πολλαπλασιασμός

3.10 Τούς γνωστούς κανόνες γιά τόν πολλαπλασιασμό τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητας μέ τόν ἴδιο ἀριθμό διατυπώνουμε καί ἀποδεικνύουμε ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α, x, y ἰσχύει:

1. $x > y$ **καί** $\alpha > 0 \;\Rightarrow\; \alpha x > \alpha y$

2. $x > y$ **καί** $\alpha < 0 \;\Rightarrow\; \alpha x < \alpha y$

'Απόδειξη. Έχουμε

1. $x > y$ καί $\alpha > 0$ $\Rightarrow x-y > 0$ καί $\alpha > 0$ [όρισμός]
$\Rightarrow \alpha(x-y) > 0$ [γινόμενο θετικῶν, 'Αξ. XI]
$\Rightarrow \alpha x - \alpha y > 0$ [ἐπιμεριστικότητα]
$\Rightarrow \alpha x > \alpha y$ [όρισμός]

2. $x > y$ καί $\alpha < 0$ $\Rightarrow x - y > 0$ καί $\alpha < 0$ [όρισμός]
$\Rightarrow \alpha(x - y) < 0$ [γινόμενο ἑτεροσήμων]
$\Rightarrow \alpha x - \alpha y < 0$ [ἐπιμεριστικότητα]
$\Rightarrow \alpha x < \alpha y$ [όρισμός]

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. **Ἄν ἀλλάξουμε τά πρόσημα τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητας, προκύπτει ἑτερόστροφη ἀνισότητα** (Θεώρ. 5 γιά $\alpha = -1$).

2. **Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητας μέ τόν ἴδιο ἀριθμό α ($\alpha \neq 0$), προκύπτει ἀνισότητα ὁμόστροφη, ἄν ὁ α εἶναι θετικός, καί ἑτερόστροφη, ἄν ὁ α εἶναι ἀρνητικός**
$\left(\text{Θεώρ. 5, ἄν ἀντικαταστήσουμε τό α μέ } \frac{1}{\alpha}\right)$.

3. **Γιά $\alpha > 0$ ἰσχύει $x > y \Leftrightarrow \alpha x > \alpha y$**
Γιά $\alpha < 0$ ἰσχύει $x > y \Leftrightarrow \alpha x < \alpha y$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

Γιά ὁποιουσδήποτε θετικούς ἀριθμούς α,β,x,y ἰσχύει:
$$x > \alpha \text{ καί } y > \beta \Rightarrow xy > \alpha\beta$$

'Απόδειξη. Εἶναι $x > \alpha$ καί $y > 0 \Rightarrow xy > \alpha y$ [Θεώρ. 5] (1)
$y > \beta$ καί $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha y > \alpha\beta$ (2)

'Από τίς (1) καί (2) ἔχουμε $xy > \alpha\beta$ (μεταβατική ἰδιότητα).
'Αποδεικνύεται μέ τή μέθοδο τῆς ἐπαγωγῆς ὅτι, ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καί $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ εἶναι θετικοί ἀριθμοί, ἰσχύει:

$$\alpha_1 > \beta_1 \text{ καί } \alpha_2 > \beta_2 \text{ καί } \ldots \text{ καί } \alpha_\nu > \beta_\nu \Rightarrow \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu > \beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu$$

Διάταξη καί δυνάμεις

3.11 Τό ἑπόμενο θεώρημα ἀναφέρεται στή διάταξη δυνάμεων πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ ἐκθέτες ἀκέραιους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7

> **Ἄν x καί y εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ν ἀκέραιος $\neq 0$, ἰσχύουν:**
> **1. Ἄν $\nu > 0$, τότε $x > y \Leftrightarrow x^{\nu} > y^{\nu}$**
> **2. Ἄν $\nu < 0$, τότε $x > y \Leftrightarrow x^{\nu} < y^{\nu}$**
> **3. $x = y \Leftrightarrow x^{\nu} = y^{\nu}$**

Ἀπόδειξη

1. Ἀπό τή γενίκευση τοῦ θεωρήματος 6 γιά $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{\nu} = x$ καί $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{\nu} = y$ ἔχουμε:

$$x\,x \ldots x > y\,y \ldots y, \text{ δηλαδή } x > y \Rightarrow x^{\nu} > y^{\nu}.$$

2. Ἄν $\nu < 0$, θά εἶναι $-\nu > 0$, ὁπότε σύμφωνα μέ τό προηγούμενο: $x^{-\nu} > y^{-\nu}$ δηλ. $\frac{1}{x^{\nu}} > \frac{1}{y^{\nu}}$. Ἐπειδή ὅμως $x^{\nu}y^{\nu} > 0$, θά εἶναι:

$$x^{\nu}y^{\nu}\frac{1}{x^{\nu}} > x^{\nu}y^{\nu}\frac{1}{y^{\nu}} \quad \text{ἤ} \quad x^{\nu} < y^{\nu}.$$

3. Ἡ $x = y \Rightarrow x^{\nu} = y^{\nu}$ προκύπτει ἀπό τήν παρατήρηση τῆς § 2.14. Οἱ ἀντίστροφες συνεπαγωγές ἀποδεικνύονται μέ τή μέθοδο τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο (§ 1.30).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. **Ἄν $\nu > 0$, τότε** $x > 1 \Rightarrow x^{\nu} > 1$, $0 < x < 1 \Rightarrow x^{\nu} < 1$

2. **Ἄν $\nu < 0$, τότε** $x > 1 \Rightarrow x^{\nu} < 1$, $0 < x < 1 \Rightarrow x^{\nu} > 1$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:**

α) $xy > 0$ **καί** $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

β) $xy < 0$ **καί** $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

α) Ἐπειδή $xy > 0$, ἡ $x < y$ γίνεται $\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}$ ἤ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

β) Ἐπειδή $xy < 0$, ἡ $x < y$ γίνεται $\frac{x}{xy} > \frac{y}{xy}$ ἤ $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

2. **Ἐπίσης οἱ συνεπαγωγές:**

α) $\alpha > \beta$ **καί** $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

β) **α,β θετικοί καί** $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

γ) **α,β ἀρνητικοί καί** $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$

α) $\alpha > \beta$ καί $\gamma < \delta \Rightarrow \alpha > \beta$ καί $-\gamma > -\delta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \delta$

β) $\alpha > \beta$ καί $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha\alpha > \beta\beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$

γ) $\alpha > \beta \Rightarrow -\alpha < -\beta \Rightarrow (-\alpha)^2 < (-\beta)^2 \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$.

3. **Ἂν α, β, x θετικοί καί $\alpha < \beta$, τότε εἶναι $\dfrac{\alpha+x}{\beta+x} > \dfrac{\alpha}{\beta}$.**

Ἐπειδή $\beta(\beta+x)$ εἶναι θετικός ἀριθμός, θά ἔχουμε

$$\frac{\alpha+x}{\beta+x} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta(\beta+x)\,\frac{\alpha+x}{\beta+x} > \beta(\beta+x)\,\frac{\alpha}{\beta}.$$
$$\Leftrightarrow \beta(\alpha+x) > (\beta+x)\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta+\beta x > \alpha\beta+\alpha x$$
$$\Leftrightarrow \beta x > \alpha x$$
$$\Leftrightarrow \beta > \alpha \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

4. **Γιά κάθε $\alpha > 0$ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} \geq 2$.**

Εἶναι: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right) \geq 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+1 \geq 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0 \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

Ἡ ἰσότητα ἰσχύει, ὅταν $\alpha = 1$.

5. **Ἂν κ, λ εἶναι ἀκέραιοι θετικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:**

α) $x > 1$ **καί** $\kappa > \lambda \Rightarrow x^{\kappa} > x^{\lambda}$

β) $0 < x < 1$ **καί** $\kappa > \lambda \Rightarrow x^{\kappa} < x^{\lambda}$

α) Ἐπειδή $k > \lambda$, ἄν θέσουμε $k = \lambda + \nu$, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι $x^{\lambda+\nu} > x^{\lambda}$ ἤ $x^{\lambda}x^{\nu}-x^{\lambda} > 0$ ἤ $x^{\lambda}(x^{\nu}-1) > 0$. Ἡ ἀνισότητα αὐτή ἰσχύει, ἐπειδή x^{λ} εἶναι θετικός ($x > 0$) καί $x^{\nu}-1$ θετικός (§ 3.11 Πόρ.).

β) Ἀποδεικνύεται ὅπως καί ἡ (α).

6. **Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β ἰσχύει**

$$\alpha^2+\beta^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Ἂν $\alpha \neq 0$ ἤ $\beta \neq 0$, τότε $\alpha^2+\beta^2 > 0$ [ἀντιθετοαντιστροφή]

Γενικότερα ἰσχύει:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0.$$

7. **Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς α, β, γ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$

Εἶναι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \geq 0.$$

Ἡ τελευταία ἰσχύει, ἄρα ἰσχύει καί ἡ πρώτη.

8. **Γιά τούς θετικούς ἀριθμούς x καί y εἶναι:**

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$$

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (x+y)\,\frac{x+y}{xy} \geq 4$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-4xy \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad \text{πού εἶναι προφανής.}$$

Ἀσκήσεις 4,5,6,7,8.

3.12 Γιά νά λύσουμε τήν ἀνίσωση $\alpha x + \beta > 0$ (1)
προσπαθοῦμε νά τή μετασχηματίσουμε σέ ἄλλη ἰσοδύναμή της ἁπλούστερης μορφῆς, χρησιμοποιώντας τίς γνωστές ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων. Ἔτσι, ἄν στά μέλη τῆς (1) προσθέσουμε τόν ἀντίθετο τοῦ β, θά ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\alpha x+\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta > 0-\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha x > -\beta \qquad (2)$$

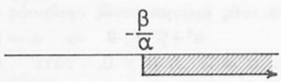
Ἡ τελευταία ἰσοδυναμία ἐκφράζει τό γνωστό μας κανόνα μεταφορᾶς ἑνός ὅρου ἀπό τό ἕνα μέλος μιᾶς ἀνισότητας στό ἄλλο.
Γιά νά λύσουμε λοιπόν τήν (1), ἀρκεῖ νά λύσουμε τή (2).
Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

- $\alpha > 0$, ὁπότε καί $\frac{1}{\alpha} > 0$. Ἑπομένως θά ἔχουμε (§ 3.10 Πορ. 3)

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha x) > \frac{1}{\alpha}(-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad x > -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Δηλαδή ἡ (2), ἄρα καί ἡ (1), ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό μεγαλύτερο τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

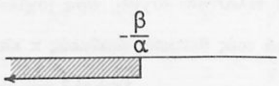


- $\alpha < 0$, ὁπότε καί $\frac{1}{\alpha} < 0$. Ἑπομένως θά ἔχουμε (§ 3.10 Πορ. 3)

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha x) < \frac{1}{\alpha}(-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Δηλαδή ἡ (2), ἄρα καί ἡ (1), ἀληθεύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό μικρότερο τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$.



- $\alpha = 0$. Τότε ἡ $\alpha x > -\beta$ γίνεται $0x > -\beta$. Ἑπομένως:
ἄν $-\beta < 0$, δηλαδή $\beta > 0$, ἡ (2) ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, ἐνῶ
ἄν $-\beta > 0$, δηλαδή $\beta < 0$, ἡ (2) δέν ἔχει λύση (εἶναι ἀδύνατη).

Σημείωση

Ἡ ἀνίσωση $\alpha x+\beta < 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $-\alpha x-\beta > 0$. Δηλαδή ἀνάγεται σέ ἀνίσωση τῆς μορφῆς (1).

1. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση** $\frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{4} > 1 + \frac{x-1}{2}$.

Εἶναι : $\frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{4} > 1 + \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\left(\frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{4}\right) > 12\left(1 + \frac{x-1}{2}\right)$ [πολ/σμός μέ τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν]

$\Leftrightarrow 4(x-3)-3(x-2) > 12+6(x-1)$ [ἐπιμεριστικότητα]

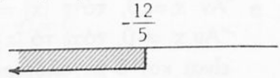
$\Leftrightarrow 4x - 12 - 3x + 6 > 12 + 6x - 6$

$\Leftrightarrow 4x - 3x - 6x > 12 - 6 + 12 - 6$ [μεταφορά ὅρων]

$\Leftrightarrow -5x > 12$

$\Leftrightarrow x < -\frac{12}{5}$ [διαίρεση μέ ἀρνητικό ἀριθμό]

Στό διπλανό σχῆμα παριστάνεται τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως.



2. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις**

$$x - 2 \geq 0 \quad \text{καί} \quad 5x - 8 \leq 3x.$$

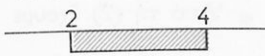
Εἶναι:

$(x-2 \geq 0$ καί $5x - 8 \leq 3x) \Leftrightarrow (x \geq 2$ καί $5x-3x \leq 8)$

$\Leftrightarrow (x \geq 2$ καί $2x \leq 8)$

$\Leftrightarrow (x \geq 2$ καί $x \leq 4)$.

Στό διπλανό σχῆμα παριστάνεται τό σύνολο στό ὁποῖο συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις.



Ἔννοια διαστήματος

3.13 Στήν προηγούμενη ἐφαρμογή (2) εἴδαμε ὅτι οἱ δύο ἀνισώσεις $x-2 \geq 0$ καί $5x - 8 \leq 3x$ συναληθεύουν στό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ x πού ἱκανοποιοῦν τή διπλή ἀνίσωση $2 \leq x \leq 4$.
Τό σύνολο αὐτό ὀνομάζεται πιό σύντομα **κλειστό διάστημα** ἀπό τό 2 ὥς τό 4 καί συμβολίζεται $[2, 4]$. Εἶναι λοιπόν

$$x \in [\alpha,\beta] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

Ἄν τώρα ἀπό τό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ παραλείψουμε τά ἄκρα του α καί β, προκύπτει τό ἀντίστοιχο **ἀνοικτό διάστημα** πού συμβολίζεται (α,β). Δηλαδή εἶναι:

$$x \in (\alpha,\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < x < \beta$$

Τέλος, ἄν ἀπό τό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ παραλείψουμε μόνο τό α ἤ μόνο τό β, προκύπτουν ἀντιστοίχως **τό ἀνοικτό ἀριστερά** διάστημα $(\alpha,\beta]$ ἤ τό **ἀνοικτό δεξιά** διάστημα $[\alpha,\beta)$. Δηλαδή εἶναι:

$$\chi \in (\alpha,\beta] \Leftrightarrow \alpha < x \leq \beta \quad \text{καὶ} \quad x \in [\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq x < \beta$$

Ἀσκήσεις 9, 10.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ὁρισμός

3.14 Ἄν x εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός, ἡ **ἀπόλυτη τιμή** του συμβολίζεται μέ $|x|$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ἄν } x \geq 0 \\ -x & \text{ἄν } x \leq 0 \end{cases}$$

Ἄμεσες συνέπειες

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἀπόλυτης τιμῆς συμπεραίνουμε ἀμέσως τά ἑξῆς:

- Ἄν $x = 0$, τότε $|x| = 0$.
  Ἄν $x \neq 0$, τότε τό $|x|$ εἶναι τό **θετικό** στοιχεῖο τῆς δυάδας $\{x, -x\}$ πού εἶναι καί **ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς x καὶ $-x$** (§ 3.6 Πόρ.).
  Ἄρα ἔχουμε:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 0 \iff |x| = 0 \\ |x| \geq x \quad \text{καί} \quad |x| \geq -x \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

- Ἀπό τή (2) ἔχουμε $x \leq |x|$ καί $-|x| \leq x$, δηλαδή

$$\boxed{-|x| \leq x \leq |x|} \qquad (3)$$

- Τό $|x|$ ἤ τό $|-x|$ εἶναι τό ἴδιο θετικό στοιχεῖο τῆς δυάδας $\{x, -x\}$. ἤ τό 0. Ἑπομένως

$$\boxed{|-x| = |x| \geq 0} \qquad (4)$$

- Γιά τή δύναμη $|x|^2$ ἔχουμε:

$$|x|^2 = |x|\,|x| = \begin{cases} x\,x = x^2 & \text{ἄν } x \geq 0 \\ (-x)\,(-x) = x^2 & \text{ἄν } x \leq 0 \end{cases}$$

Ἑπομένως $\boxed{|x|^2 = x^2}$ (5)

ΘΕΩΡΗΜΑ 8

> **Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x καί α ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:**
> $$|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$$

Ἀπόδειξη

- Ἀποδεικνύουμε πρῶτα ὅτι $|x| \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.

  Ἀπό τήν $|x| \leq \alpha$ ἔχουμε καί $-|x| \geq -\alpha$, ἀλλά σύμφωνα μέ τήν (3) εἶναι καί $-|x| \leq x \leq |x|$, ὁπότε $-\alpha \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq \alpha$.

  Ἄρα $-\alpha \leq x \leq \alpha$.
- Ἀντιστρόφως, $-\alpha \leq x \leq \alpha \Rightarrow |x| \leq \alpha$, γιατί ἄν ἦταν $|x| > \alpha$, τότε ἤ $x > \alpha$ (ἄτοπο) ἤ $-x > \alpha$, ὁπότε $x < -\alpha$ (ἄτοπο).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις α) $|x| = \alpha$ καί β) $|x| = |\alpha|$.**

   α) Ἄν $\alpha > 0$, ἔχουμε

   $|x| = \alpha \Leftrightarrow |x|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x+\alpha) = 0$

   $\Leftrightarrow (x - \alpha = 0 \text{ ἤ } x + \alpha = 0) \Leftrightarrow x = \pm\alpha.$

   Ἄν $\alpha < 0$, ἔχουμε $|x| = \alpha < 0$ πού εἶναι ἀδύνατο.

   Ἄν $\alpha = 0$, τότε $|x| = 0$ καί $x = 0$.

   β) $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow |x|^2 = |\alpha|^2 \Leftrightarrow x^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x = \pm\alpha.$

2. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις α) $|x-3| = 4$ καί β) $|3x+8| = 23$.**

   α) Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα εἶναι:

   $|x-3| = 4 \Leftrightarrow (x-3) = \pm 4 \Leftrightarrow (x-3 = 4 \text{ ἤ } x-3 = -4)$

   $\Leftrightarrow (x = 7 \text{ ἤ } x = -1)$

   β) Ὁμοίως βρίσκουμε $x = 5$ ἤ $x = -\dfrac{31}{3}$.

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $xyz \neq 0$, τότε $\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{y}{|y|} + \dfrac{z}{|z|} \leq 3$.**

   Ἀπό τίς ἀνισότητες $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, $z \leq |z|$ προκύπτουν ἀντίστοιχα οἱ ἀνισότητες:

   $\dfrac{x}{|x|} \leq 1$, $\dfrac{y}{|y|} \leq 1$, $\dfrac{z}{|z|} \leq 1$. Ὁπότε, ἄν τίς προσθέσουμε κατά μέλη, θά ἔχουμε:

   $$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} \leq 1+1+1 = 3.$$

4. **Ἄν $|x| \leq 2$, $|y| \leq 3$ καί $|z| \leq 5$, νά δείξετε ὅτι $-10 \leq x+y+z \leq 10$.**

   Σύμφωνα μέ τό θεώρημα 8 εἶναι

   $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

   $|y| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 3$

   $|z| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq z \leq 5$

   ὁπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, ἔχουμε

   $-2-3-5 \leq x+y+z \leq 2+3+5$, δηλ. $-10 \leq x+y+z \leq 10$.

Ἀσκήσεις 11,12.

Ἀπόλυτη τιμή ἀθροίσματος

3.15 Γιά τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποδεικνύουμε τό παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 9

> **Γιά όποιουσδήποτε πραγματικούς άριθμούς x καί y εἶναι**
> $$|x+y| \leq |x|+|y|$$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ γνωστή ἰδιότητα (§ 3.14, (3)) ἔχουμε γιά τούς x,y:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

καί μέ πρόσθεση κατά μέλη $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$. Ἄρα (Θεώρ. 8) ἔχουμε καί $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Γενικότερα ἀποδεικνύεται μέ τή μέθοδο τῆς ἐπαγωγῆς ὅτι:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$$

Ἀπόλυτη τιμή γινομένου

3.16 Γιά τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ γινομένου ἰσχύει τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 10

> **Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους. Δηλαδή**
> $$\forall x,\ \forall y,\quad |xy| = |x|\,|y|$$

Ἀπόδειξη. Ἄν ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς εἶναι μηδέν, ἡ ἰσότητα προφανῶς ἰσχύει. Διακρίνουμε τώρα τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

$$\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = x \\ |y| = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = xy = |xy|, \text{ ἐπειδή } xy>0$$

$$\left.\begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = -x \\ |y| = -y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = (-x)(-y) = xy = |xy|, \text{ ἐπειδή } xy>0$$

$$\left.\begin{matrix} x>0 \\ y<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = x \\ |y| = -y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = x(-y) = -xy = |xy|, \text{ ἐπειδή } xy<0$$

$$\left.\begin{matrix} x<0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = -x \\ |y| = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x||y| = (-x)y = -xy = |xy|, \text{ ἐπειδή } xy<0.$$

Ἐπαγωγικά ἀποδεικνύεται ὅτι $|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu| = |\alpha_1|\,|\alpha_2|\ldots|\alpha_\nu|$.

Συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας εἶναι:

ΠΟΡΙΣΜΑ

> **Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y ($y \neq 0$) ἰσοῦται μέ τό πηλίκο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους. Δηλαδή εἶναι:**
> $$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}^*,\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\left(\text{Πράγματι εἶναι : } \left|\frac{x}{y}\right| |y| = \left|\frac{x}{y}\, y\right| = |x|\right)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $|x - y| \leq |x| + |y|$ καί νά ἐξεταστεῖ πότε ἰσχύει ἡ ἰσότητα.**

Εἶναι $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.
Ἔστω τώρα ὅτι $|x - y| = |x| + |y|$, τότε θά εἶναι:

$$\begin{aligned} |x-y| = |x|+|y| &\Leftrightarrow |x-y|^2 = (|x|+|y|)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = |x|^2+|y|^2+2|x||y| \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy = x^2+y^2+2|xy| \\ &\Leftrightarrow -xy = |xy|. \end{aligned}$$

Γιά νά ἰσχύει ἡ τελευταία, ἐπειδή $|xy| \geq 0$, θά πρέπει νά εἶναι $xy \leq 0$, δηλαδή οἱ x, y νά εἶναι ἑτερόσημοι ἤ ὁ ἕνας τουλάχιστο νά εἶναι 0.

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $x^2 + |xy| + |-x|y + y|-y| = (|x| + |y|)(|x| + y)$.**

Εἶναι:

$$\begin{aligned} x^2+|xy|+|-x|y+y|-y| &= |x|^2+|x||y|+|x|y+y|y| \\ &= |x|\,(|x|+|y|)+y(|x|+|y|) \\ &= (|x|+|y|)\,(|x|+y). \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις 13,14,15.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $|x - 2| \leq 6$.**

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι: } |x-2| \leq 6 &\Leftrightarrow -6 \leq x-2 \leq 6 \\ &\Leftrightarrow -6+2 \leq x \leq 6+2 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 8 \\ &\Leftrightarrow x \in [-4,8]. \end{aligned}$$

Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική λύση τῆς ἀνισώσεως.

2. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $|x| \geq \theta$, ὅπου θ θετικός.**

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι: } |x| \geq \theta &\Leftrightarrow |x|^2 \geq \theta^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-\theta^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\theta)\,(x+\theta) \geq 0. \end{aligned}$$

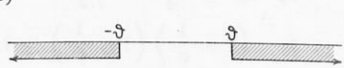
Γιά νά ἰσχύει ἡ τελευταία, θά πρέπει οἱ $x-\theta$ καί $x+\theta$ νά εἶναι ὁμόσημοι. Ἄρα θά εἶναι:

ἤ $x-\theta \geq 0$ **καί** $x+\theta \geq 0$ δηλαδή $x \geq \theta$
ἤ $x-\theta \leq 0$ **καί** $x+\theta \leq 0$ δηλαδή $x \leq -\theta$.

Ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$|x| \geq \theta \Leftrightarrow (x \leq -\theta \;\; \text{ἤ} \;\; x \geq \theta)$$

Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική λύση τῆς ἀνισώσεως.

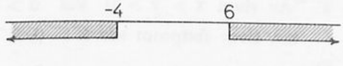


3. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $|x - 1| \geq 5$.**

Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἐφαρμογή εἶναι:

$$\begin{aligned} |x-1| \geq 5 &\Leftrightarrow (x-1 \leq -5 \;\; \text{ἤ} \;\; x-1 \geq 5) \\ &\Leftrightarrow (x \leq -4 \;\; \text{ἤ} \;\; x \geq 6) \end{aligned}$$

Ἡ γραφική λύση τῆς ἀνισώσεως παριστάνεται στό διπλανό σχῆμα.



4. Ἂν $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ καί ν φυσικός μεγαλύτερος τοῦ 1, τότε εἶναι:

$$(1+\alpha)^{\nu} > 1+\nu\alpha \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε τήν ἀνισότητα μέ τή μέθοδο τῆς ἐπαγωγῆς. Ἡ ἀνισότητα ἰσχύει γιά $\nu = 2$. Πράγματι

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha.$$

Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ (1) ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $(1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha$.

Ἔχουμε: $(1+\alpha)^{\nu} > 1+\nu\alpha \Rightarrow (1+\alpha)^{\nu}(1+\alpha) > (1+\nu\alpha)(1+\alpha)$

$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+\alpha+\nu\alpha+\nu\alpha^2$$

$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha+\nu\alpha^2$$

$$\Rightarrow (1+\alpha)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\alpha.$$

Ἐξετάστε τίς περιπτώσεις: $\alpha = -1$, $\alpha = 0$, $\nu = 0$, $\nu = 1$.

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη 16,17,18,19,20,21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν οἱ συνεπαγωγές:

α) $\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) < 0$

β) $x > 0$ καί $y > 0 \Rightarrow x^3+y^3 \geq x^2y+xy^2$

γ) $x > 2 \Rightarrow x^3 > 2x^2-x+2$.

2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν:

α) $(x+y)^2 \geq 4xy$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq \alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)$

γ) $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 2\alpha(\beta+\gamma)$.

3. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ συνεπαγωγή

$x < 1 < y \Rightarrow xy-x-y+1 < 0$.

4. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν :

α) $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1} \leq 1$

β) $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \dfrac{\alpha}{1+\alpha} + \dfrac{\beta}{1+\beta}$, ὅπου α,β εἶναι θετικοί.

5. Ἂν $x < z$ καί $0 < y < \omega$, τότε εἶναι $x - \dfrac{1}{y} < z - \dfrac{1}{\omega}$.

6. Ἂν α καί β εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί $\alpha+\beta = 1$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι:

α) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4}$

β) $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right) \geq 9$.

7. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύουν:

α) $\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta > \alpha-\beta$

β) $0 < \alpha < \beta$ καί $0 < \gamma < \delta \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\delta} < \dfrac{\beta}{\gamma}$.

8. Ἂν εἶναι $x > y > 0$ καί $\alpha > \beta > 0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $x^k\beta^{\lambda} > y^k\alpha^{\lambda}$, ὅταν k,λ εἶναι ἀκέραιοι καί $k > 0$, $\lambda < 0$.

9. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\lambda x > x+2$ β) $\frac{x-\lambda}{2} + \frac{2x+3}{4} > \frac{\lambda x}{6}$

γ) $\frac{\lambda (x-2)}{2} - \frac{2x-\lambda}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$.

10. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

α) $2x+3 > x$
$x-5 < 4$

β) $x(x+2) - (x+1)x > 2$
$2x(x-1) < x(2x-3)+3$

11. Ἄν εἶναι $\alpha < \beta < \gamma$, νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση
$A = 3|\alpha-\beta| + 2|\beta-\gamma| - 4|\gamma-\alpha|$.

12. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{3|x|+1}{2} + \frac{2|x|-1}{3} = \frac{|x|+2}{4}$

β) $(2|x|-5) - (4|x|-3) = 7|x|-1$

γ) $|3x-1| = |x-3|$.

13. Ἄν εἶναι $|x-y| < \alpha$ καί $|y-\omega| < \alpha$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $|x-\omega| < 2\alpha$.

14. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:
$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ καί νά ἐξεταστεῖ πότε ἰσχύουν οἱ ἰσότητες
α) $||x|-|y|| = |x+y|$ β) $|x+y| = |x|+|y|$

15. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $xy \neq 0$, θά εἶναι

$$\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2.$$

16. Ἄν α,β,γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί λ,μ,ν θετικοί, νά ἀποδείξετε τή συνεπαγωγή

$$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \frac{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}{\lambda+\mu+\nu} < \gamma.$$

17. Ἄν $x \geq y > 0$, νά συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί
$\frac{x-y}{x+y}$ καί $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

18. Ἄν $\alpha+\beta = 1$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$

β) $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2}$

γ) $\alpha^4+\beta^4 \geq \frac{1}{8}$.

19. Ἄν εἶναι $(2x-3y+1)^2+(3x-5y+2)^2 = 0$, νά προσδιοριστοῦν οἱ ἀριθμοί x καί y.

20. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $2x-1 \leq x \leq \frac{x+3}{2}$

β) $(3x-2)(x-2) = 0$
$2x-4 \leq -3x$.

21. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\frac{2|x|-3}{4} < \frac{|x|+1}{3}$

β) $3(|x|-1)+2(|x|-2) > 2$.

1. **α)** Εἶναι $\alpha-\beta > 0$, $\beta-\gamma > 0$ καί $\gamma-\alpha < 0$.
β) Ἀποδεικνύουμε ὅτι: $(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2) \geq 0$.
γ) Ἀποδεικνύουμε ὅτι: $x^3-(2x^2-x+2) > 0$.

2. **α)** Ἀποδεικνύουμε ὅτι: $(x+y)^2-4xy \geq 0$.
β) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2-[\alpha(\beta+\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)] \geq 0$.
γ) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι: $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha(\beta+\gamma) \geq 0$ ἤ $(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2 \geq 0$.

3. Εἶναι $xy-x-y+1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) < 0\ldots$

4. **α)** Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό θετικό α^2+1.
β) Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό $(1+\alpha+\beta)(1+\alpha)(1+\beta)$.

5. $0 < y < \omega \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{\omega} \Rightarrow -\frac{1}{y} < -\frac{1}{\omega}$ κτλ.

6. **α)** Στήν $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ θέτουμε ὅπου β τό $1-\alpha$ καί κάνουμε τίς πράξεις.
β) Κάνουμε τίς πράξεις καί ἐφαρμόζουμε τήν (α).

7. **α)** $\beta > 0 \Rightarrow \beta > -\beta$ κτλ. **β)** Πολλαπλασιάζουμε τίς ἀνισότητες $\alpha < \beta$ καί $\gamma < \delta$ κατά μέλη καί διαιροῦμε τά μέλη τῆς ἀνισότητας πού θά προκύψει μέ τό θετικό $\gamma\delta$.

8. Ἐφαρμόζουμε τά Θεωρ. 7, 6.

9. **α)** Φέρνουμε τήν ἀνίσωση στή μορφή $x(\lambda-1) > 2$ καί διακρίνουμε τίς περιπτώσεις $\lambda-1 > 0$, $\lambda-1 < 0$ καί $\lambda-1 = 0$.
β) Μετά τίς πράξεις ἔχουμε $2x(6-\lambda) > 6\lambda-9$. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις $6-\lambda > 0$, $6-\lambda < 0$ καί $6-\lambda = 0$.
γ) Φέρνουμε τήν ἀνίσωση στή μορφή $5x(\lambda-1) < 8\lambda-4$ κτλ.

10. **α)** $-3 < x < 9$, **β)** $2 < x < 3$.

11. Παρατηροῦμε ὅτι $\alpha-\beta < 0$, $\beta-\gamma < 0$, $\gamma-\alpha > 0$, ὁπότε $A = \alpha+\beta-2\gamma$.

12. **α)** Ἄν θεωρήσουμε ἄγνωστο τό $|x|$, βρίσκουμε $|x| = \frac{4}{23}$ ἤ $x = \pm\frac{4}{23}$.
β) Ὁμοίως βρίσκουμε $|x| = -\frac{1}{9}$, πού ἀπορρίπτεται.
γ) Ἔχουμε $3x-1 = \pm(x-3)$ (§ 3.14 Ἐφαρ. 1 (β)).

13. Προσθέτουμε τίς ἀνισότητες κατά μέλη καί ἐφαρμόζουμε τό θεώρημα 9.

14. $||x|-|y|| \leq |x+y| \Leftrightarrow ||x|-|y||^2 \leq |x+y|^2 \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x||y| \leq x^2+y^2+2xy$ κτλ. Τό ἴσον ἰσχύει, ὅταν $xy \leq 0$. Ἡ ἄλλη ἀνισότητα ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

15. Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό θετικό $|x||y|$.

16. Πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τῆς ἀνισότητας, πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε, μέ τό θετικό $\lambda+\mu+\nu$ καί μετά ἀποδεικνύουμε ὅτι $\mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$ κτλ.

17. Βρίσκουμε τό πρόσημο τῆς διαφορᾶς $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

18. **α)** Εἶναι ἡ ἄσκ. 6(α). **β)** Εἶναι: $\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \geq \frac{1}{2}$ κτλ.
γ) Ὑψώνουμε τήν προηγούμενη στό τετράγωνο καί ὅπου $\alpha\beta$ θέτουμε τό $\frac{1}{4}$.

19. Θά εἶναι $2x-3y+1 = 0$ καί $3x-5y+2 = 0$ κτλ.

20. **α)** $x \leq 1$ **β)** Εἶναι $\left(x = \frac{2}{3}\right.$ **ἤ** $\left. x = 2\right)$ **καί** $x \leq \frac{4}{5}$. Ἄρα $x = \frac{2}{3}$.

21. **α)** Εἶναι $|x| < \frac{13}{2}$ ἤ $-\frac{13}{2} < x < \frac{13}{2}$ (§ 3.15 Ἐφ. 1).
β) Εἶναι $|x| > \frac{9}{5}$, ἄρα $x < -\frac{9}{5}$ ἤ $x > \frac{9}{5}$ (§ 3.15 Ἐφ. 2).

4 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς σχέσεως καί εἰδικότερα τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι ἀπό τίς βασικότερες μαθηματικές ἔννοιες, ἐμφανίζεται στό σχολικό πρόγραμμα ἀπό τή Β′ κιόλας τάξη τοῦ Γυμνασίου. Σ' αὐτή θεμελιώνεται καί ἕνα σημαντικό τμῆμα τοῦ προγράμματος τῆς Γ′ Γυμνασίου.

Στό κεφάλαιο αὐτό δέν ἐπιδιώκεται ἁπλῶς μιά ἐπανάληψη, ἀπαραίτητη φυσικά, τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν. Ἡ ὑποδομή τοῦ γυμνασιακοῦ προγράμματος ἐπιτρέπει μιά αὐστηρότερη καί βαθύτερη προσέγγισή τους καθώς καί τή λεπτομερέστερη μελέτη τους.

Ἐξάλλου ὁ ὁρισμός τῶν πράξεων στό σύνολο τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ὁδηγεῖ ἀβίαστα τό μαθητή στό νά παραλληλίσει τή δομή αὐτοῦ τοῦ συνόλου μέ τή δομή τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού μελέτησε στό κεφάλαιο 2.

Τέλος ἡ παρουσίαση τῆς ὕλης δίνει τήν εὐκαιρία στό μαθητή νά ἐπαναλάβει, νά ἐμπεδώσει καί νά διευρύνει ἕνα ἐνδιαφέρον τμῆμα γνώσεων, κυρίως ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ, πού περιλάμβανε ἡ γυμνασιακή διδασκαλία.

ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ἔννοια διμελοῦς σχέσεως

4.1 Ὅλες οἱ διμελεῖς σχέσεις πού συναντήσαμε ὥς τώρα ἔχουν εἰσαχθεῖ μέ τή βοήθεια προτασιακῶν τύπων μέ δύο μεταβλητές. Κάθε φορά δηλαδή πού εἴχαμε ἕναν τέτοιο προτασιακό τύπο λέγαμε ὅτι **«ὁρίζει μιά διμελή σχέση»**, χωρίς νά ἔχουμε δώσει ὁρισμό τῆς ἔννοιας τῆς διμελοῦς σχέσεως. Αὐτόν τόν ὁρισμό διατυπώνουμε παρακάτω.

Ὅταν δίνεται ἕνας προτασιακός τύπος $p(x,y)$ μέ δύο μεταβλητές, τότε εἶναι ἐντελῶς καθορισμένα τρία σύνολα:

- Τό σύνολο A πού διατρέχει ἡ μεταβλητή x.
- Τό σύνολο B πού διατρέχει ἡ μεταβλητή y.
- Τό σύνολο ἀλήθειας G, ὑποσύνολο τοῦ $A \times B$ μέ στοιχεῖα ἐκεῖνα ἀκριβῶς τά ζεύγη (x,y) πού ἐπαληθεύουν τόν προτασιακό τύπο.

Ἔτσι $(x,y) \in G$ σημαίνει ὅ,τι καί $p(x,y)$. Δηλαδή ἰσχύουν

$$\boxed{\begin{array}{lcl} (x,y) \in G & \Leftrightarrow & p(x,y) \\ (x,y) \notin G & \Leftrightarrow & \overline{p}(x,y) \end{array}}$$

Ἀντιστρόφως, ἄν δοθοῦν τά σύνολα A, B καί ἕνα ὑποσύνολο G τοῦ $A \times B$, ὁρίζεται ὁ προτασιακός τύπος $(x,y) \in G$ μέ $x \in A$, $y \in B$, τοῦ ὁποίου τό σύνολο ἀλήθειας εἶναι ἀκριβῶς τό G.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι ἐκεῖνο πού ὁρίζει ἕνας προτασιακός τύπος εἶναι ἡ διατεταγμένη τριάδα (A,B,G) καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν δοθεῖ ἡ (A,B,G), ὑπάρχει π.τ. – ὁ $(x,y) \in G$ – ἀπό τόν ὁποῖο αὐτή ἀκριβῶς ἡ τριάδα καθορίζεται.

Εἶναι λοιπόν εὔλογο νά ταυτίσουμε τή διμελή σχέση πού, ὅπως λέμε, ὁρίζει ἕνας προτασιακός τύπος μέ τήν τριάδα (A,B,G) δίνοντας τόν παρακάτω ὁρισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἔστω τά σύνολα A καί B. Ὀνομάζουμε διμελή σχέση (ἀντιστοιχία) ἀπό τό A στό B κάθε τριάδα (A,B,G), ὅπου G εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $A \times B$

Τά A καί B ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **σύνολο ἀφετηρίας** καί **σύνολο ἀφίξεως** καί τό G **γράφημα** τῆς σχέσεως.

Γιά τά ζεύγη (x,y) πού ἀνήκουν στό γράφημα G μιᾶς σχέσεως σ γράφουμε συνήθως x σ y καί λέμε ὅτι:

«τὸ (x,y) ἱκανοποιεῖ τή σχέση σ» ἤ ὅτι μέ τή σ:
«τό x σχετίζεται μέ τό y» ἤ
«στό x ἀντιστοιχίζεται τό y» ἤ
«τό y εἶναι ἀντίστοιχο τοῦ x».

Ὅταν γιά τόν καθορισμό μιᾶς διμελοῦς σχέσεως **ἀπό** τό A **στό** B δίνεται ἕνας προτασιακός τύπος p (x,y) ἐννοεῖται πάντοτε $x \in A$ καί $y \in B$. Ἔτσι τά ζεύγη (x,y) τῶν σχετιζόμενων στοιχείων, ἄρα καί τό G, εἶναι ἐντελῶς καθορισμένα.

Ἄν στή διμελή σχέση (A,B,G) εἶναι $A = B$, τότε λέμε ὅτι ἔχουμε μιά διμελή σχέση (μέσα) **στό** σύνολο A.

Ἰσότητα διμελῶν σχέσεων

4.2 Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς διμελοῦς σχέσεως προκύπτει ὅτι δύο διμελεῖς σχέσεις εἶναι ἴσες (ταυτίζονται), ἄν ἔχουν ἴδιο σύνολο ἀφετηρίας, ἴδιο σύνολο ἀφίξεως καί ἴδιο γράφημα.

Ἀντιστροφή διμελῶν σχέσεων

4.3 Ἔστω (A,B,G) μιά διμελής σχέση σ. Τό σύνολο τῶν ζευγῶν (y, x), γιά τά ὁποῖα $(x,y) \in G$, λέγεται **ἀντίστροφο γράφημα** τοῦ G καί συμβολίζεται G^{-1}. Εἶναι συνεπῶς:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{G} \Leftrightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbf{G}^{-1} \text{ καί } \mathbf{G}^{-1} \subseteq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Ἄρα ὁρίζεται μιά διμελής σχέση ἀπό τό B στό A, ἡ (B, A, G^{-1}), ἡ ὁποία ὀνομάζεται **ἀντίστροφη** τῆς σ καί συμβολίζεται $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$.

Ὅταν μιά σχέση σ ὁρίζεται ἀπό ἕνα π.τ. p(x,y), ὁ **ἴδιος** π.τ. ὁρίζει καί τά ζεύγη (y,x) τοῦ G^{-1} πού ἱκανοποιοῦν τήν ἀντίστροφη σχέση $\sigma^{-1} = (B,A,G^{-1})$. Ἐπειδή ὅμως συνηθίζουμε νά παριστάνουμε μέ x τή μεταβλητή τοῦ συνόλου ἀφετηρίας καί μέ y τή μεταβλητή τοῦ συνόλου ἀφίξεως, τά ζεύγη τοῦ G^{-1} ὁρίζονται μέ τή μορφή (x,y), ἄν στόν p(x,y) πού ὁρίζει τή σ ἐναλλάξουμε τά γράμματα x καί y. Ἔτσι ὁ «ἀνάστροφος» τύπος πού προκύπτει, τόν ὁποῖο ἄς συμβολίσουμε p(y,x) μέ $x \in B$ καί $y \in A$, ὁρίζει τή σ^{-1}.

1. **Δίνονται τά σύνολα $A = \{8, 18, 32\}$ καί $B = \{-4, 0, 4, 6\}$ καί ἡ σχέση σ ἀπό τό A στό B πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y^2 = 2x$.**

α) Νά βρεθεῖ τό γράφημα G τῆς σ.

β) Νά βρεθεῖ ἡ ἀντίστροφη σχέση σ^{-1}.

α) Πρέπει νά βροῦμε ἐκεῖνα τά ζεύγη (x,y) γιά τά ὁποῖα $y^2=2x$.

Ἄν $x = 8$, τότε $y^2 = 2\cdot 8$ ἤ $y = \pm 4$.

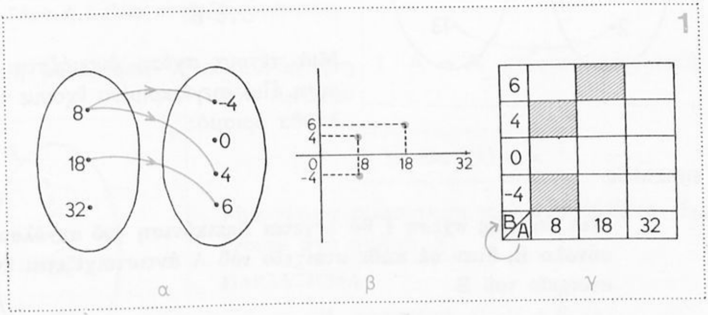
Ἄν $x = 18$, τότε $y^2 = 2\cdot 18$ ἤ $y = \pm 6$.

Ἄν $x = 32$, τότε $y^2 = 2 \cdot 32$ ἤ $y = \pm 8$.

Ἐπειδή ὅμως $-6 \notin B$, καί $\pm 8 \notin B$, τό γράφημα τῆς σχέσεως σ θά εἶναι:

$$G = \{(8, -4), (8,4), (18,6)\}.$$

Στό σχῆμα 1 παριστάνεται ἡ σχέση σ μέ *βελοειδές διάγραμμα* (1α), μέ *καρτεσιανό διάγραμμα* (1β) καί μέ *πίνακα διπλῆς εἰσόδου* (1γ).

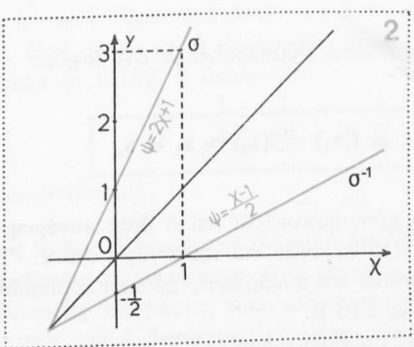


6		▨	
4	▨		
0			
-4	▨		
B/A	8	18	32

β) Τό ἀντίστροφο γράφημα εἶναι $G^{-1} = \{(-4,8), (4,8), (6,18)\}$, ὁπότε ἡ ἀντίστροφη σχέση εἶναι $\sigma^{-1} = (B, A, G^{-1})$.

2. **Ἔστω μιά διμελής σχέση σ στό R μέ τύπο $y = 2x + 1$. Νά βρεθεῖ ἡ σχέση σ^{-1} καί νά γίνουν τά καρτεσιανά διαγράμματα τῶν σχέσεων σ καί σ^{-1}.**

Ἡ σ^{-1} θά εἶναι μιά σχέση στό R μέ τύπο $x = 2y + 1$ ἤ $y=\frac{x-1}{2}$.

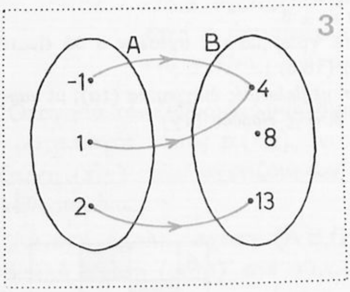


Στό σχῆμα 2 παριστάνονται τά καρτεσιανά διαγράμματα τῶν σχέσεων σ σ^{-1}, τά ὁποῖα εἶναι εὐθεῖες συμμετρικές ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔννοια συναρτήσεως

4.4 Στό σχῆμα 3 ἔχουμε τό βελοειδές διάγραμμα μιᾶς σχέσεως ἀπό τό σύνολο A στό B, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y = 3x^2+1$.



Εἰδικότερα σ' αὐτή τή σχέση παρατηροῦμε ὅτι:

- **Ὅλα** τά στοιχεῖα τοῦ A σχετίζονται μέ στοιχεῖα τοῦ B καί
- Ὁποιοδήποτε στοιχεῖο τοῦ A ἔχει **ἕνα μοναδικό** ἀντίστοιχο στό B.

Μιά τέτοια σχέση ὀνομάζεται **ἀπεικόνιση.** Πιό συγκεκριμένα ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μιά διμελής σχέση f θά λέγεται ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου A στό σύνολο B, ὅταν σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχίζεται ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ B

Τό σύνολο ἀφετηρίας A λέγεται καί **πεδίο ὁρισμοῦ** τῆς ἀπεικονίσεως. Μιά ἀπεικόνιση f τοῦ A στό B συμβολίζεται $f: A \to B$. Τό μοναδικό $y \in B$, πού εἶναι ἀντίστοιχο ἑνός στοιχείου $x \in A$, συμβολίζεται $\mathbf{f(x)}$ καί λέγεται **εἰκόνα** τοῦ x. Γράφουμε λοιπόν

$$\mathbf{y = f(x)}$$

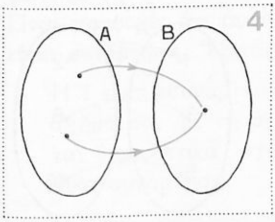
Ἄρα τό γράφημα τῆς f ἀποτελεῖται ἀπό ζεύγη τῆς μορφῆς $\mathbf{(x, f(x))}$ μέ $\mathbf{x \in A}$.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἀπεικονίσεως συμπεραίνουμε ὅτι ἰσχύει:

$$\boxed{\forall\, x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2} \qquad (1)$$

Ἀντί τοῦ ὅρου ἀπεικόνιση χρησιμοποιεῖται καί ὁ ὅρος **συνάρτηση.** Στήν περίπτωση αὐτή ἡ εἰκόνα f(x) λέγεται καί **τιμή** τῆς **f στό** x. Ἔτσι, μιά ἀπεικόνιση τοῦ A στό B λέγεται καί συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό A, ἤ *ὁρισμένη* στό A, καί *μέ τιμές* στό B.
Τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς f τό συμβολίζουμε **f (A)**. Εἶναι φανερό ὅτι $\mathbf{f(A) \subseteq B}$.

4.5 **Σταθερή συνάρτηση.** Μιά συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **σταθερή** μέ τιμή c, ὅταν



$$\forall x \in A,\ f(x) = c$$

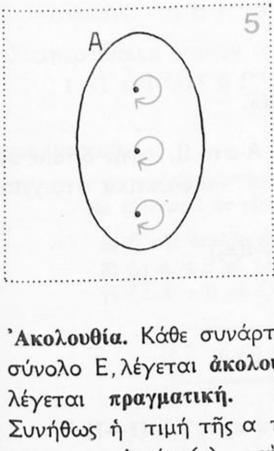
Τέτοια συνάρτηση ἔχουμε στό σχῆμα 4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω ἡ συνάρτηση $f: \{-2,0,2\} \to \mathbb{R}$ μέ $f(x) = x^3 - 4x + 3$.

Ἔχουμε $f(-2) = 3$, $f(0) = 3$ καί $f(2) = 3$. Δηλαδή γιά κάθε $x \in \{-2,0,2\}$ εἶναι $f(x) = 3$. Ἄρα ἡ f εἶναι σταθερή συνάρτηση.

Ταυτοτική συνάρτηση. Μιά συνάρτηση $f: A \to A$ λέγεται **ταυτοτική** στό A, ὅταν



$$\forall x \in A,\ f(x) = x$$

Μιά τέτοια συνάρτηση, πού συμβολίζεται I_A, ἔχουμε στό σχῆμα 5.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἡ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μέ $f(x) = (x+1)^2 - (x^2 + x + 1)$ εἶναι ταυτοτική στό $\mathbb{R}$, ἀφοῦ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - x - 1 = x.$$

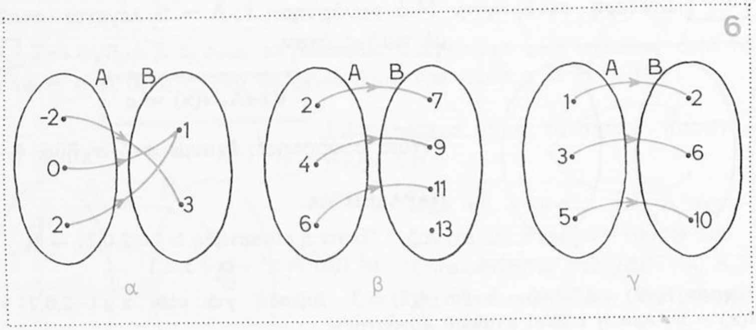
Ἀκολουθία. Κάθε συνάρτηση α, ὁρισμένη στό $\mathbb{N}^*$ (ἤ $\mathbb{N}$) μέ τιμές σέ ἕνα σύνολο E, λέγεται **ἀκολουθία** στοιχείων τοῦ E. Ἄν $E \subseteq \mathbb{R}$, ἡ ἀκολουθία λέγεται **πραγματική**.
Συνήθως ἡ τιμή τῆς α πού ἀντιστοιχίζεται στό φυσικό ἀριθμό ν γράφεται α_ν, ἀντί $\alpha(\nu)$, καί ἡ ἀκολουθία συμβολίζεται $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ ἤ συντομότερα (α_ν). Π.χ. ἡ ἀκολουθία

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^\nu}, \ldots$$

Εἴδη συναρτήσεων

4.6 Στό σχῆμα 6 ἔχουμε τά βελοειδή διαγράμματα τριῶν διμελῶν σχέσεων. Καθεμιά ἀπό τίς σχέσεις αὐτές, ὅπως φαίνεται ἀμέσως ἀπό τό ἀντίστοιχο βελοειδές διάγραμμα, εἶναι μιά συνάρτηση τοῦ A στό B, γιατί σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχίζεται ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ B.
Εἰδικότερα παρατηροῦμε ὅτι:

● Στό σχῆμα 6α ἔχουμε μιά συνάρτηση f, στήν ὁποία **κάθε** στοιχεῖο



τοῦ Β εἶναι εἰκόνα ἑνός τουλάχιστο στοιχείου τοῦ Α. Δηλαδή εἶναι:

$$\boxed{\mathbf{f(A) = B}}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **«συνάρτηση ἐπί»**.

● Στό σχῆμα 6β ἔχουμε μιά συνάρτηση f τοῦ Α στό Β, στήν ὁποία σέ διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ Α ἀντιστοιχίζονται **διαφορετικά** στοιχεῖα τοῦ Β. Δηλαδή εἶναι:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

καί σύμφωνα μέ τήν (1) τῆς § 4.4 θά εἶναι:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **«συνάρτηση ἕνα πρός ἕνα (1—1)»**[1].

● Στό σχῆμα 6γ ἔχουμε μιά συνάρτηση f, στήν ὁποία **κάθε** στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι εἰκόνα **ἑνός** καί **μόνο** στοιχείου τοῦ Α. Δηλαδή εἶναι:

1. $f(A) = B$ καί
2. $\forall x_1, x_2 \in A,\ \ x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ἡ συνάρτηση αὐτή λοιπόν εἶναι **«συνάρτηση 1—1 καί ἐπί»**.

---

(1) Λέγεται καί ἀμφιμονοσήμαντη ἤ ἀμφιμονότιμη.

4.7 'Επειδή μιά συνάρτηση f τοῦ A στό B εἶναι μιά διμελής σχέση, σύμφωνα μέ τήν § 4.3 ὁρίζεται καί ἡ ἀντίστροφη σχέση f^{-1} ἀπό τό B στό A. Εἶναι προφανές ὅτι, ἄν ἡ f **δέν** εἶναι ἐπί ἤ **δέν** εἶναι 1—1, τότε ἡ f^{-1} **δέν εἶναι συνάρτηση.** 'Εξετάζουμε ἀκόμα τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

- 'Η f εἶναι «συνάρτηση ἐπί». Τότε εἶναι δυνατό, ὅπως φαίνεται καί στό σχῆμα 6α, μέ τή σχέση f^{-1} σέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ B νά ἀντιστοιχίζονται διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ A. 'Επομένως ἡ f^{-1} μπορεῖ νά μήν εἶναι συνάρτηση.
- 'Η f εἶναι «συνάρτηση 1—1». Τότε εἶναι δυνατό (Σχ. 6β) νά ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ B πού νά μήν εἶναι ἀντίστοιχο κάποιου στοιχείου τοῦ A. 'Επομένως πάλι ἡ f^{-1} μπορεῖ νά μὴν εἶναι συνάρτηση.
- 'Η f εἶναι «συνάρτηση 1—1 καὶ ἐπί». Τότε (Σχ. 6γ) μέ τή σχέση f^{-1} σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ B ἀντιστοιχίζεται ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ A, πού σημαίνει ὅτι ἡ f^{-1} εἶναι συνάρτηση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι **μόνο στήν περίπτωση ποὺ ἡ f εἶναι «συνάρτηση 1—1 καί ἐπί» ἡ f^{-1} εἶναι ἐπίσης συνάρτηση καί μάλιστα 1—1 καί ἐπί.**

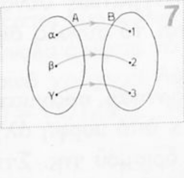
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά ἐξεταστεῖ ἄν εἶναι συναρτήσεις οἱ ἀντίστροφες σχέσεις τῶν συναρτήσεων:

α) f_1 **τῆς ὁποίας τό βελοειδές διάγραμμα παριστάνεται στό σχ. 7.**

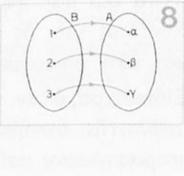
β) $f_2: A \to B$ **μέ** $f_2(x) = 2x + 1$, $A = \{0,2,3\}$, **καί** $B = \{1,5,7\}$.

γ) $f_3: A \to B$ **μέ** $f_3(x) = x^2 + 1$, $A = \{1, -1, 3\}$, **καί** $B = \{2, 10\}$.



7

α) 'Η f_1 εἶναι συνάρτηση 1—1 καί ἐπί. Ἄρα ἡ f_1^{-1} εἶναι συνάρτηση ὁρισμένη στό B καί μέ τιμές στό A ἐπίσης 1—1 καί ἐπί. Στό σχῆμα 8 παριστάνεται τό βελοειδές διάγραμμα τῆς f_1^{-1}.



8

β) Θά πρέπει νά ἐξετάσουμε ἄν $f_2(A) = B$ καί $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$. Εἶναι $f_2(0) = 1$, $f_2(2) = 5$ καί $f_2(3) = 7$. Ἄρα $f(A) = \{1,5,7\} = B$ καί γιά $x_1 \neq x_2$, εἶναι $f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$. Ἄρα ἡ f_2^{-1} εἶναι συνάρτηση.

γ) 'Ομοίως ἔχουμε $f_3(1) = 2$, $f_3(-1) = 2$, $f_3(3) = 10$. Ἄρα $f(A) = B$. Γιά τά διαφορετικά ὅμως στοιχεῖα 1 καί −1 ἔχουμε $f_3(1) = f_3(-1) = 2$. 'Επομένως ἡ f_3 δέν εἶναι συνάρτηση.

'Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔννοια τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως

4.8 Ἄν στή συνάρτηση $f : A \to B$ εἶναι

- $B \subseteq \mathbb{R}$, ἡ f λέγεται **πραγματική συνάρτηση.**
- $A \subseteq \mathbb{R}$, ἡ f λέγεται συνάρτηση **πραγματικῆς μεταβλητῆς.**

Ἄν $A \subseteq \mathbb{R}$ καί $B \subseteq \mathbb{R}$, ἡ f εἶναι πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἔστω A τό σύνολο τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως. Ἄν ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε μαθητή τό βάρος του, θά ἔχουμε μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό A.
2. Ἡ συνάρτηση f, ἡ ὁποία στό $x \in \mathbb{R}$ ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό $f(x) = 4x^3-3x^2+5x+1$, εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς.
3. Ἡ πρόσθεση στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία σέ κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ἀντιστοιχίζει τό ἄθροισμά τους $x+y$, εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό $\mathbb{R}^2$.
4. Ὁ πολλαπλασιασμός στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπίσης μιά πραγματική συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}^2$, ἡ ὁποία σέ κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ἀντιστοιχίζει τό γινόμενο $xy \in \mathbb{R}$.
5. Ἡ συνάρτηση f, ἡ ὁποία στό $x \in [-4,3]$ ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{ἄν } -4 \leq x \leq -1 \\ 2, & \text{ἄν } -1 < x \leq 1 \\ -2x+1, & \text{ἄν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

εἶναι μιά πραγματική συνάρτηση ὁρισμένη στό $[-4, 3]$.

Ἀπό δῶ καί πέρα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ πραγματικές συναρτήσεις. Συνήθως γιά τίς συναρτήσεις αὐτές δέν ἀναφέρεται τό σύνολο ἀφίξεως B καί τότε ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι τό $\mathbb{R}$.

Εἰδικότερα, ὅταν πρόκειται γιά πραγματική συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς, συνήθως δίνεται ἡ τιμή της f(x) στό x ὑπό μορφή ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καί δέν ἀναφέρεται οὔτε τό πεδίο ὁρισμοῦ της. Στήν περίπτωση αὐτή πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f θά ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι πάλι τό $\mathbb{R}$, **ἐκτός ἀπό τά στοιχεῖα του γιά τά ὁποῖα ἡ f(x) δέν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ**. Ἔτσι π.χ. ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^2+1$ εἶναι ὁρισμένη στό $\mathbb{R}$. Εἶναι δηλαδή $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ἐνῶ ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = \dfrac{3+5x}{x}$ εἶναι ὁρισμένη στό $\mathbb{R}^*$, ἀφοῦ τό πηλίκο $\dfrac{3+5x}{x}$ δέν ὁρίζεται γιά $x = 0$. Εἶναι λοιπόν $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.

Πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε καταχρηστικά τήν ἔκφραση «ἡ συνάρτηση $y = f(x)$» ἐννοώντας τή συνάρτηση f πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y = f(x)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων:**

f_1 μέ $f_1(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, f_2 μέ $f_2(x) = \dfrac{x+1}{x^3-4x^2+3x}$ καί

f_3 μέ $f_3(x) = 4x^3+3x^2+5x+1$.

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι τό «εὐρύτερο» ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$, στό ὁποῖο ἡ $f_1(x)$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Αὐτό συμβαίνει μόνο, ὅταν $x^2-1 \neq 0$ ἤ $x \neq \pm 1$. Ἑπομένως τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Γιά τήν f_2 θά πρέπει $x^3-4x^2+3x \neq 0$ ἤ $x(x-1)(x-3) \neq 0$ ἤ $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 3$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_2 εἶναι τό $\mathbb{R} - \{0,1,3\}$.
Ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι $f_3(x)$ πραγματικός ἀριθμός, συμπεραίνουμε ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_3 εἶναι ὁλόκληρο τό $\mathbb{R}$.

2. **Γιά τή συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ νά βρεθοῦν:**

α) Τό πεδίο ὁρισμοῦ της A
β) Τά ζεύγη $(0, f(0))$ $(1, f(1))$, $(-1, f(-1))$.

α) Θά πρέπει $x^2-5x+6 \neq 0$ ἤ $(x-2)(x-3) \neq 0$ ἤ $x \neq 2$, $x \neq 3$. Ἄρα $A = \mathbb{R} - \{2,3\}$.

β) Γιά $x = 0$ εἶναι $f(0) = -\dfrac{1}{6}$, ὁπότε $\left(0, f(0)\right) = \left(0, -\dfrac{1}{6}\right)$

» $x = 1$ » $f(1) = 0$ » $(1, f(1)) = (1,0)$

» $x = -1$ » $f(-1) = -\dfrac{1}{6}$ » $\left(-1, f(-1)\right) = \left(-1, -\dfrac{1}{6}\right)$.

Ἀπό αὐτά μόνο τά ζεύγη μποροῦμε νά συμπεράνουμε ὅτι ἡ f^{-1} δέν εἶναι συνάρτηση;

Ἴσες συναρτήσεις

4.9 Ἔστω δύο συναρτήσεις f_1 καί f_2. Γιά νά εἶναι $f_1 = f_2$, ἐπειδή ἔχουν κοινό σύνολο ἀφίξεως τό $\mathbb{R}$, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν κοινό πεδίο ὁρισμοῦ A καί κοινό γράφημα. Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά κάθε $x \in A$ πρέπει νά εἶναι $(x, f_1(x)) = (x, f_2(x))$. Ἄρα ἔχουμε:

$$\boxed{f_1 = f_2 \Leftrightarrow \forall x \in A, \quad f_1(x) = f_2(x)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x^2 + 1$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^4 + 1$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό $A = \{-1,0\}$. Παρατηροῦμε ὅτι $f_1(-1) = f_2(-1) = 2$ καί $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Δηλαδή γιά κάθε $x \in A$, $f_1(x) = f_2(x)$. Ἄρα $f_1 = f_2$.
Ἄν ὅμως πάρουμε ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τό $A' = \{1,0,2\}$, παρατηροῦμε ὅτι $f_1(2) \neq f_2(2)$. Ἄρα στή περίπτωση αὐτή οἱ συναρτήσεις δέν εἶναι ἴσες.

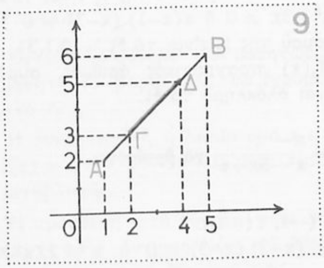
Περιορισμός καί ἐπέκταση συναρτήσεως

4.10 Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1, f_2 ὁρισμένες στὰ A_1, A_2 ἀντιστοίχως μὲ $A_1 \subset A_2$. Ἂν γιά κάθε $x \in A_1$ εἶναι $f_1(x) = f_2(x)$, τότε:

ἡ f_1 λέγεται **περιορισμός** τῆς f_2 στὸ A_1 καί
ἡ f_2 λέγεται **ἐπέκταση** τῆς f_1 στό A_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x+1$, $x \in [2,4]$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x+1$, $x \in [1,5]$. Παρατηροῦμε ὅτι $[2,4] \subset [1,5]$ καί γιά κάθε $x \in [2,4]$ εἶναι $f_1(x) = f_2(x) = x+1$. Ἄρα ἡ f_1 εἶναι ἕνας περιορισμός τῆς f_2 στό $[2,4]$ καί ἡ f_2 μιά ἐπέκταση τῆς f_1 στό $[1,5]$.



Στό σχῆμα 9 ἡ γραφική παράσταση τῆς f_1 εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς f_2 εἶναι τό τμῆμα AB.

Ἀσκήσεις 6,7,8.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά

4.11 Ἔστω A τό σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς B' τάξεως ἑνός Λυκείου οἱ ὁποῖοι πῆραν μέρος στίς πανελλήνιες ἐξετάσεις τοῦ Ἰουνίου καί

f ἡ συνάρτηση, ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει στό μαθητή $x \in A$ τόν ἀριθμό $f(x)$ τῶν μονάδων πού πῆρε στό μάθημα τῆς Φυσικῆς,

g ἡ συνάρτηση, ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει στό μαθητή $x \in A$ τόν ἀριθμό $g(x)$ τῶν μονάδων πού πῆρε στό μάθημα τῆς Χημείας.

Τότε μποροῦμε νά σχηματίσουμε μιά νέα συνάρτηση h, ἡ ὁποία σέ κάθε μαθητή $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό ἄθροισμα $f(x)+g(x)$ τῶν μονάδων στά μαθήματα Φυσικῆς καί Χημείας. Θά εἶναι λοιπόν $h(x) = f(x)+g(x)$.
Ἡ συνάρτηση h λέγεται **ἄθροισμα** τῶν f καί g.

Ἔστω τώρα A ἕνα σύνολο αὐτοκινήτων καί

f ἡ συνάρτηση, ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει σέ κάθε αὐτοκίνητο $x \in A$ τόν ἀριθμό $f(x)$ τῶν χιλιομέτρων πού διανύει τό αὐτοκίνητο αὐτό κατά μέσο ὅρο τήν ἡμέρα,

g ἡ συνάρτηση, ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει σέ κάθε αὐτοκίνητο $x \in A$ τόν ἀριθμό $g(x)$ τῶν ἡμερῶν πού κινήθηκε τό αὐτοκίνητο αὐτό κατά τό μήνα Μάιο.

Τότε μποροῦμε νά σχηματίσουμε μιά νέα συνάρτηση h, ἡ ὁποία σέ κάθε αὐτοκίνητο $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τόν ἀριθμό $f(x)g(x)$ τῶν χιλιομέτρων πού ἔχει διανύσει τό μήνα Μάιο. Θά εἶναι λοιπόν $h(x) = f(x)\, g(x)$.

Ἡ συνάρτηση h λέγεται **γινόμενο** τῶν συναρτήσεων f καί g.

Στά ἑπόμενα **θεωροῦμε** τό σύνολο τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ A, πού τό συμβολίζουμε $\mathbb{F}_A$, καί στό ὁποῖο ὁρίζουμε τίς παρακάτω πράξεις.

Πρόσθεση συναρτήσεων

4.12 **Ὁρισμός.** Ἄν f_1 καί f_2 εἶναι δύο συναρτήσεις τοῦ $\mathbb{F}_A$, τότε ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία σέ κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό $f_1(x)+f_2(x)$ λέγεται **ἄθροισμα** τῶν f_1 καί f_2 καί συμβολίζεται f_1+f_2. Δηλαδή εἶναι

$$\boxed{\forall x \in A,\ \ (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)} \qquad (1)$$

Γενικότερα, ἄν ἡ f_1 ὁρίζεται στό A_1 καί ἡ f_2 στό A_2, τότε ἡ f_1+f_2 ὁρίζεται μέ τήν (1) στό σύνολο $A=A_1 \cap A_2$.

Ὡς ἄθροισμα ν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}, f_\nu$ γιά κάθε φυσικό $\nu > 2$ ὁρίζεται τό ἄθροισμα τῶν συναρτήσεων $(f_1+f_2+\ldots+f_{\nu-1})$ καί f_ν.

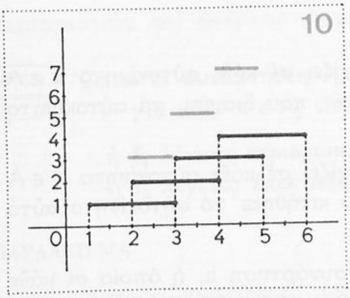
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = \frac{x}{2}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$. Τό ἄθροισμά τους εἶναι ἡ συνάρτηση f_1+f_2, ἡ ὁποία στό x ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(x) &= f_1(x)+f_2(x)\\ &= \frac{x}{2} + x\\ &= \frac{3x}{2}.\end{aligned}$$

2. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 καί f_2 ὁρισμένες ἀντιστοίχως στά $[1,5]$ καί $[2,6]$

$$\text{μέ } f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x \in [1,3] \\ 3, & \text{ἄν } x \in (3,5] \end{cases} \qquad \text{καί } f_2(x) = \begin{cases} 2, & \text{ἄν } x \in [2,4] \\ 4, & \text{ἄν } x \in (4,6] \end{cases}$$



Τό ἄθροισμά τους εἶναι ἡ συνάρτηση f_1+f_2, ὁρισμένη στό [2,5], ἡ ὁποία στό x ἀντιστοιχίζει τόν πραγματικό ἀριθμό

$$(f_1+f_2)(x)=\begin{cases} 1+2=3, & \text{ἄν } x\in[2,3] \\ 3+2=5, & \text{ἄν } x\in(3,4] \\ 3+4=7, & \text{ἄν } x\in(4,5] \end{cases}$$

Οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων f_1, f_2, f_1+f_2 δίνονται στό σχῆμα 10.

4.13 **Ἰδιότητες.** Ἔστω f_1, f_2 καί f_3 τρεῖς συναρτήσεις τοῦ F_A. Τότε, ἐπειδή γιά κάθε $x\in A$ οἱ $f_1(x)$, $f_2(x)$ καί $f_3(x)$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, θά εἶναι:

$$\forall x\in A, \quad f_1(x)+f_2(x)=f_2(x)+f_1(x).$$

Τό $f_1(x)+f_2(x)$ ὅμως εἶναι ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f_1+f_2 στό x, ἐνῶ τό $f_2(x)+f_1(x)$ εἶναι ἡ τιμή τῆς f_2+f_1 στό x. Εἶναι λοιπόν

$$\forall x\in A, \quad (f_1+f_2)(x)=(f_2+f_1)(x)$$

πού σημαίνει
$$\mathbf{f_1+f_2=f_2+f_1} \tag{1}$$

Δηλαδή ἡ πρόσθεση τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων εἶναι **ἀντιμεταθετική.**

Ὁμοίως ἔχουμε $\forall x\in A, \; [f_1(x)+f_2(x)]+f_3(x)=f_1(x)+[f_2(x)+f_3(x)]$

πού σημαίνει
$$\mathbf{(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)} \tag{2}$$

Δηλαδή ἡ πρόσθεση στό F_A εἶναι καί **προσεταιριστική.**

Ἔστω τώρα **ω** ἡ συνάρτηση τοῦ F_A, γιά τήν ὁποία ἔχουμε, γιά κάθε $x\in A$, $\omega(x)=0$. Τότε, ἄν f εἶναι μιά ὁποιαδήποτε συνάρτηση τοῦ F_A, θά ἔχουμε:

$$\forall x\in A, \quad f(x)+\omega(x)=\omega(x)+f(x)=f(x)$$

δηλαδή
$$\mathbf{f+\omega=\omega+f=f.} \tag{3}$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση ω θά εἶναι τό **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τήν πρόσθεση στό F_A.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα ἄν γιά κάθε συνάρτηση f τοῦ F_A ὑπάρχει μιά ἄλλη συνάρτηση f^* τοῦ F_A τέτοια, ὥστε νά εἶναι

$$\mathbf{f+f^*=\omega} \tag{4}$$

Ἀπό τήν (4) προκύπτει ὅτι:

$$\forall x\in A, \quad f(x)+f^*(x)=\omega(x)=0 \quad \text{ἤ} \quad f^*(x)=-f(x).$$

Ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι ὑπάρχει ἡ f^* καί εἶναι μοναδική. Ἡ f^* πού ἔχει τήν ἰδιότητα (4) λέγεται **ἀντίθετη** τῆς f καί συμβολίζεται **−f**.

Τό ἄθροισμα $f+(-g)$ τό λέμε **διαφορά** τῆς g ἀπό τήν f, τό συμβολίζουμε $\mathbf{f-g}$ καί γιά κάθε $x\in A$ εἶναι $\mathbf{(f-g)(x)=f(x)-g(x)}$.

1. **Ἂν f, g εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $-(f+g) = -f-g$.**

Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις $-(f+g)$ καί $-f-g$ γιά κάθε $x \in A$ ἔχουν τήν ἴδια τιμή. Ἡ τιμή τῆς $-(f+g)$ στό x εἶναι $[-(f+g)](x) = -[(f+g)(x)] = -[f(x)+g(x)]$, ἐνῶ τῆς $-f-g$ εἶναι

$$\begin{aligned}(-f-g)(x) &= [(-f)+(-g)](x)\\ &= (-f)(x)+(-g)(x)\\ &= -f(x)-g(x)\\ &= -[f(x)+g(x)],\ \text{δηλαδή ἴση μέ } [-(f+g)](x).\end{aligned}$$

2. **Ἂν f_1 μέ $f_1(x) = (x-1)^2-(x-1)(x+2)$**
f_2 μέ $f_2(x) = (x-1)^2-(x^2-4x+3)$
f_3 μέ $f_3(x) = 1-x$
εἶναι τρεῖς συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι $f_1+f_2 = f_3$.

Ἔχουμε
$$\begin{aligned}f_1(x)+f_2(x) &= [(x-1)^2-(x-1)(x+2)]+[(x-1)^2-(x^2-4x+3)]\\ &= x^2-2x+1-x^2-x+2+x^2-2x+1-x^2+4x-3\\ &= 1-x.\end{aligned}$$

Ἄρα ἔχουμε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x)+f_2(x) = f_3(x)$. Δηλαδή $f_1+f_2 = f_3$.

3. **Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = (x-1)^2$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $[1,4]$**
f_2 μέ $f_2(x) = (x+1)^2$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $[2,5]$
f_3 μέ $f_3(x) = x^2+x-5$ καί πεδίο ὁρισμοῦ τό $[6,9]$.
Ὁρίζονται οἱ συναρτήσεις f_1+f_2, f_2+f_3 καί f_1+f_3;

Ἡ συνάρτηση f_1+f_2 ὁρίζεται στήν τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2, δηλαδή στό διάστημα $[2,4]$ καί εἶναι

$$\forall x \in [2,4], \qquad f_1(x)+f_2(x) = (x-1)^2+(x+1)^2 = 2x^2+2.$$

Οἱ συναρτήσεις f_2+f_3 καί f_1+f_3 δέν ὁρίζονται, γιατί ἡ τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f_2, f_3 καί τῶν f_1, f_3 εἶναι τό $\varnothing$.

Ἀσκήσεις 9,10,11.

Πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί συνάρτηση

4.14 Ἔστω f μιά συνάρτηση τοῦ F_A. Τότε, γιά κάθε $x \in A$ εἶναι $f(x)+f(x) = 2f(x)$. Δηλαδή στό x μέ τή συνάρτηση $f+f$ ἀντιστοιχίζεται τό $2f(x)$. Τή συνάρτηση $f+f$ τή συμβολίζουμε μέ $2f$ καί τήν ὀνομάζουμε γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐπί τήν f.
Γενικότερα, ἄν $f \in F_A$ καί $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ἡ συνάρτηση πού στό $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό $\lambda f(x)$ ὀνομάζεται **γινόμενο τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ λ ἐπί τή συνάρτηση f** καί συμβολίζεται μέ λf.
Εἶναι λοιπόν:

$$\boxed{\forall x \in A, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)}$$

4.15 **Ἰδιότητες.** Ἄν κ,λ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί f,g συναρτήσεις τοῦ F_A, τότε ἰσχύουν:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & k(\lambda f) = (k\lambda) f \\ 2. & (k+\lambda) f = kf + \lambda f \\ 3. & k(f+g) = kf + kg \\ 4. & 1 f = f \end{array}}$$

Γιά νά ἀποδείξουμε π.χ. ὅτι $\kappa(\lambda f) = (\kappa\lambda)f$, ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις αὐτές γιά κάθε $x \in A$ ἔχουν τήν ἴδια τιμή. Πράγματι:
Ἡ τιμή τῆς $\kappa(\lambda f)$ στό x εἶναι

$$[\kappa(\lambda f)]\,(x) = \kappa[(\lambda f)\,(x)] = \kappa\,[\lambda\, f(x)]$$

ἐνῶ τῆς $(\kappa\lambda)f$ εἶναι: $[(\kappa\lambda)f](x) = (\kappa\lambda)f(x)$.
Ἐπειδή ὅμως κ,λ καί f(x) εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ἔχουμε:

$$\forall\, x \in A, \qquad \kappa[(\lambda f(x)] = (\kappa\lambda)\, f(x).$$

Μέ παρόμοιο τρόπο ἀποδεικνύονται καί οἱ ἄλλες ἰδιότητες.

Ἀσκήσεις 12, 13, 14.

Πολλαπλασιασμός συναρτήσεων

4.16 **Ὁρισμός.** Ἄν f_1 καί f_2 εἶναι δύο συναρτήσεις τοῦ F_A, τότε ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία σέ κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχίζει τό $f_1(x) \cdot f_2(x)$ λέγεται γινόμενο τῶν συναρτήσεων f_1 καί f_2 καί συμβολίζεται $f_1 f_2$. Δηλαδή εἶναι:

$$\boxed{\forall x \in A, \quad (f_1 f_2)\,(x) = f_1(x) f_2(x)} \qquad (1)$$

Γενικότερα, ἄν ἡ f_1 ὁρίζεται στό A_1 καί ἡ f_2 στό A_2, τότε ἡ $f_1 f_2$ ὁρίζεται μέ τήν (1) στό σύνολο $A = A_1 \cap A_2$.

Ὡς γινόμενο ν συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}, f_\nu$ γιά κάθε φυσικό $\nu > 2$ ὁρίζεται τό γινόμενο τῶν συναρτήσεων $(f_1 f_2 \ldots f_{\nu-1})$ καί f_ν.
Τό γινόμενο ν ἴσων συναρτήσεων $f\,f\,f \ldots f$ τό συμβολίζουμε f^ν. Ἑπομένως θά εἶναι

$$\begin{aligned} \forall\, x \in A, \quad (f^\nu)\,(x) &= (ff\ldots f)\,(x) \\ &= f(x)\, f(x) \ldots f(x) \\ &= [f(x)]^\nu. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x^2-1$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^2+1$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$. Τό γινόμενό τους εἶναι ἡ συνάρτηση f_1f_2 μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$, ἡ ὁποία σέ κάθε x ἀντιστοιχίζει τό $(f_1f_2)(x) = f_1(x)\, f_2(x) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$.

4.17. **Ἰδιότητες.** Ἄν f_1, f_2, f_3 εἶναι τρεῖς συναρτήσεις τοῦ F_A, τότε ἔχουμε γιά κάθε $x \in A$,

$$f_1(x)\, f_2(x) = f_2(x)\, f_1(x)$$

$$[f_1(x)\,[f_2(x)\, f_3(x)] = [f_1(x) f_2(x)] f_3(x) \quad \text{καί}$$

$$[f_1(x)+f_2(x)]\, f_3(x) = f_1(x)\, f_3(x)+f_2(x)\, f_3(x)$$

πού σημαίνει ἀντιστοίχως:

$$\mathbf{f_1f_2=f_2f_1} \tag{1}$$

$$\mathbf{f_1(f_2f_3)=(f_1f_2)f_3} \tag{2}$$

$$\mathbf{(f_1+f_2)f_3=f_1f_3+f_2f_3.} \tag{3}$$

Δηλαδή ὁ πολλαπλασιασμός στό F_A εἶναι πράξη **ἀντιμεταθετική**, **προσεταιριστική** καί **ἐπιμεριστική** ὡς πρός τήν πρόσθεση.

Ἔστω τώρα **u** ἡ συνάρτηση τοῦ F_A, γιά τήν ὁποία: $\forall\, x \in A,\ u(x) = 1$. Τότε, ἄν f εἶναι μιά ὁποιαδήποτε συνάρτηση τοῦ F_A, θά ἔχουμε

$$\forall\, x \in A, \quad f(x)u(x) = u(x)\, f(x) = f(x)$$

Δηλαδή
$$\mathbf{f\,u = u\,f = f.} \tag{4}$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση u θά εἶναι τό **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό F_A.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα ἄν γιά μιά συνάρτηση f τοῦ F_A ὑπάρχει συνάρτηση f^* τέτοια, ὥστε νά εἶναι

$$\mathbf{ff^* = u} \tag{5}$$

Γιά νά ἰσχύει ἡ (5), πρέπει καί ἀρκεῖ

$$\forall\, x \in A, \quad f(x)\, f^*(x) = u(x) = 1. \tag{6}$$

Ἑπομένως ἡ f^* ὑπάρχει στό F_A **μόνο ὅταν** $\forall\, x \in A,\ f(x) \neq 0$, ὁπότε ἀπό τήν (6) θά ἔχουμε $f^*(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ f^* λέγεται **συμμετρική** τῆς f ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό. Γενικότερα, περιορίζοντας τό πεδίο ὁρισμοῦ A τῆς f στό $A' = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$, μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά συνάρτηση, πού τή συμβολίζουμε (1) $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}$, μέ τιμή στό $x \in A'$ τό $\dfrac{1}{f(x)}$.

---

(1) Ἀποφεύγουμε τό συμβολισμό f^{-1} ἀντί τοῦ $\dfrac{1}{f}$, γιατί σέ αὐτό τό σύμβολο δίνουμε, ὅπως μάθαμε, ἄλλη σημασία.

Προσοχή: Όταν ὑπάρχει στό F_A ἡ συμμετρική f^* τῆς f, τότε εἶναι $A'=A$ καί $f^* = \frac{1}{f}$. Π.χ. γιά τή συνάρτηση f τοῦ $F_{\mathbb{R}}$ μὲ $f(x) = x-1$ δὲν ὑπάρχει ἡ συμμετρική της f^* στό $F_{\mathbb{R}}$, ἐπειδή $f(1)=0$, ἐνῶ ἡ συνάρτηση $\frac{1}{f}$ ὁρίζεται στό $\mathbb{R}' = \mathbb{R} - \{1\}$ καὶ εἶναι

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x-1}.$$

Ἔστω τώρα οἱ συναρτήσεις f,g μὲ πεδία ὁρισμοῦ A καὶ B ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ ἡ $\frac{1}{g}$ ὁρίζεται στό $B' = \{x \in B : g(x) \neq 0\}$, θά ὁρίζεται (§ 4.16) καί ἡ συνάρτηση $f\frac{1}{g}$ στό σύνολο $A \cap B'$. Ἡ συνάρτηση αὐτή συμβολίζεται $\frac{f}{g}$ καί λέγεται **πηλίκο** τῆς f διά g.

Εἶναι λοιπόν

$$\forall x \in A \cap B', \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x)\frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἔτσι ὅπως ὁρίστηκαν οἱ πράξεις στό σύνολο F_A ἔχουν ὅλες «σχεδόν» τίς ἰδιότητες τῶν ἀντίστοιχων πράξεων στό $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα ἔχουν τίς ἰδιότητες πού διατυπώνονται μὲ τά ἀξιώματα I – VIII (Κεφ. 2) καθώς καί μέ τά **θεωρήματα** πού προκύπτουν ἀπό αὐτά τά ἀξιώματα. Ἡ βασική ἰδιότητα τοῦ ἀξ. IX καί τά σχετικά μέ αὐτό θεωρήματα πού ἰσχύουν στὸ $\mathbb{R}$ **δέν** ἰσχύουν στό F_A.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν f, g εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι εἶναι**

• $\frac{1}{fg} = \frac{1}{f}\,\frac{1}{g}$, **ὅταν** $\forall x \in A$, **(** $f(x) \neq 0$ **καί** $g(x) \neq 0$**).**

Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι γιά κάθε $x \in A$ εἶναι $\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x)$.

Ἔχουμε: $$\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \frac{1}{(fg)(x)} = \frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x) = \left[\left(\frac{1}{f}\right)(x)\right]\left[\left(\frac{1}{g}\right)(x)\right] = \frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)} \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) καί (2) προκύπτει ὅτι γιά κάθε $x \in A$:

$$\left(\frac{1}{fg}\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\,\frac{1}{g}\right)(x). \qquad \text{Δηλαδή } \frac{1}{fg} = \frac{1}{f}\,\frac{1}{g}.$$

2. **Ἔστω οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x^2-2$, $x \in [2,7]$ καί g μέ $g(x) = 5x^3-3x^2+2$, $x \in [3,9]$. Νά ὁριστεῖ τό γινόμενό τους.**

Ἡ συνάρτηση fg ὁρίζεται στήν τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f καί g, δηλαδή στό διάστημα $[3,7]$ καί εἶναι γιά κάθε $x \in [3,7]$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^2-2)(5x^3-3x^2+2) \\ &= 5x^5-3x^4-10x^3+8x^2-4. \end{aligned}$$

3. **Ἔστω οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x^2-5x+6$, καί g μέ $g(x) = x^2-2x$. Νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση $\frac{f}{g}$.**

Ἐπειδή $x^2-2x=x(x-2)$, γιά κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0,2\}$ εἶναι $g(x) \neq 0$. Ἄρα τό πηλίκο $\frac{f}{g}$ ὁρίζεται στό $\mathbb{R} - \{0,2\}$ καί εἶναι

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x} = \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)} = \frac{x-3}{x}.$$

Ἀσκήσεις 15,16,17,18,19,20,21.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔννοια πολυωνυμικῆς συναρτήσεως

$\boxed{4.18}$ **Ὁρισμός.** Ὀνομάζουμε **πολυωνυμική συνάρτηση** μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς x κάθε συνάρτηση f μέ

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_\nu$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί ν φυσικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οἱ συναρτήσεις: f_1 μέ $f_1(x) = 5x+1$

f_2 μέ $f_2(x) = \frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{3}{5}x-2$

f_3 μέ $f_3(x) = 2x^6-3x^4+\sqrt{2}\,x^3-6$

εἶναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνονται οἱ πολυωνυμικές συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = x^2-3x+2$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^3-x$. Νά ὁριστοῦν οἱ f_1+f_2 καί $f_1 f_2$.**

Ἔχουμε
$$\begin{aligned} (f_1+f_2)(x) &= f_1(x)+f_2(x) = (x^2-3x+2)+(x^3-x) \\ &= x^2-3x+2+x^3-x \\ &= x^3+x^2-4x+2 \\ (f_1f_2)(x) &= f_1(x)f_2(x) = (x^2-3x+2)(x^3-x) \\ &= x^5-3x^4+2x^3-x^3+3x^2-2x \\ &= x^5-3x^4+x^3+3x^2-2x. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τόσο τό ἄθροισμα f_1+f_2 ὅσο καί τό γινόμενο f_1f_2 τῶν δύο πολυωνυμικῶν συναρτήσεων f_1, f_2 εἶναι ἐπίσης πολυωνυμικές συναρτήσεις.

2. **Δίνονται οἱ πολυωνυμικές συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = 2x^2-3x$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x+5$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $3f_1-2f_2$ καί $2f_1+5f_2$.**

Ἔχουμε
$$\begin{aligned}(3f_1-2f_2)(x) &= (3f_1)(x) - (2f_2)(x) = 3f_1(x) - 2f_2(x)\\ &= 3(2x^2-3x) - 2(x+5) = 6x^2-11x-10\\ (2f_1+5f_2)(x) &= (2f_1)(x) + (5f_2)(x) = 2f_1(x)+5f_2(x)\\ &= 2(2x^2-3x)+5(x+5)\\ &= 4x^2-x+25.\end{aligned}$$

Ἀνάπτυγμα καί παραγοντοποίηση

4.19 Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε μιά πολυωνυμική συνάρτηση h καί ὑπάρχουν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις f καί g τέτοιες, ὥστε νά εἶναι

$$\mathbf{h = f\,g}$$

Τότε θά λέμε ὅτι ἡ fg εἶναι μιά **παραγοντοποιημένη μορφή** τῆς h, ἐνῶ ἡ h εἶναι ἡ **ἀναπτυγμένη μορφή** ἤ τό **ἀνάπτυγμα** τῆς fg.

Ἄν π.χ. εἶναι
h μέ $h(x) = x^2-1$
f μέ $f(x) = x+1$
g μέ $g(x) = x-1$

τότε, ἐπειδή $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, ἡ h εἶναι τό ἀνάπτυγμα τῆς fg καί ἡ fg εἶναι μιά παραγοντοποιημένη μορφή τῆς h.

Στό Γυμνάσιο μελετήσαμε διάφορες περιπτώσεις παραγοντοποιήσεως ἑνός πολυωνύμου καί εἴδαμε ὅτι δέν ὑπάρχει μιά γενική μέθοδος, ἡ ὁποία νά ἐφαρμόζεται σέ κάθε περίπτωση. Ὁπωσδήποτε, ὅμως, ἡ παραγοντοποίηση ἑνός πολυωνύμου διευκολύνεται μέ τή χρησιμοποίηση τῶν γνωστῶν ταυτοτήτων

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2\\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha-\beta)^2\\ \alpha^2 - \beta^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\\ \alpha^3 - \beta^3 &= (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\end{aligned}$$

οἱ ὁποῖες ἀληθεύουν, ὅταν τά α,β εἶναι ὁποιοιδήποτε πραγματικοί ἀριθμοί ἤ ὁποιεσδήποτε πραγματικές **συναρτήσεις**. (Βλ. § 4.17 Παρατ.).

Ὅπως γνωρίζουμε, ἡ παραγοντοποίηση εἶναι ἕνα βασικό «ἐργαλεῖο» στόν ἀλγεβρικό λογισμό. Εἴδαμε π.χ. στό λογισμό τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ὅτι ἡ παραγοντοποίηση εἶναι χρήσιμη στόν προσδιορισμό τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως καί στήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων. Ἐπίσης, ὅπως θά δοῦμε στήν § 4.21, ἄν f εἶναι μιά πολυωνυμική συνάρτηση καί ὑπάρχουν πολυωνυμικές συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ τέτοιες, ὥστε

$$f = f_1\,f_2 \ldots f_\nu$$

τότε ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ ἤ τῆς ἀνισώσεως $f(x)>0$ γίνεται ἁπλούστερη. Γιά τούς λόγους αὐτούς θά ὑπενθυμίσουμε τήν παραγοντοποίηση ἑνός πολυωνύμου δίνοντας μερικά παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἔστω $f(x)=(9x^2-1)(2x+3)-(4x^2-9)(3x+1)$.
Ἐπειδή εἶναι $9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$
$4x^2-9=(2x+3)(2x-3)$
θά εἶναι
$$\begin{aligned} f(x) &= (3x+1)(3x-1)(2x+3)-(2x+3)(2x-3)(3x+1) \\ &= (3x+1)(2x+3)\,[(3x-1)-(2x-3)] \\ &= (3x+1)(2x+3)(x+2). \end{aligned}$$

2. Ἔστω $f(x)=x^6-64$.
Ἔχουμε
$$\begin{aligned} f(x) &= x^6-2^6=(x^3)^2-(2^3)^2 \\ &= (x^3+2^3)(x^3-2^3) \\ &= (x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4). \end{aligned}$$

3. Ἄν εἶναι $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$ καί λ ἕνας πραγματικός ἀριθμός τέτοιος, ὥστε $f(\lambda)=0$, τότε εἶναι $f(x)=(x-\lambda)\,g(x)$, ὅπου $g(x)$ τό πηλίκο τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $x-\lambda$. Ἄν π.χ $f(x)=x^3-5x^2+3x+1$, ἐπειδή $f(1)=1^3-5.1^2+3.1+1=0$, θά εἶναι $f(x)=(x-1)\,(x^2-4x-1)$, ὅπου $g(x)=x^2-4x-1$ εἶναι τό πηλίκο τοῦ $f(x)$ διά $x-1$.

Ἀσκήσεις 22, 23, 24.

Ἔννοια ρητῆς συναρτήσεως

4.20 **Ὁρισμός.** Ἔστω f καί g δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις καί A τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως $g(x)=0$. Ἡ συνάρτηση $\mathbf{h}$ μέ $\mathbf{h}(x)=\dfrac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{g}(x)}$ εἶναι ὁρισμένη στό σύνολο $\mathbb{R}-A$ καί λέγεται **ρητή συνάρτηση.** Δηλαδή **ρητή συνάρτηση εἶναι τό πηλίκο δύο πολυωνυμικῶν συναρτήσεων.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{5x+1}{x-6}$ εἶναι ρητή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}-\{6\}$.

2. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{3x-7}{x^2-4}$ εἶναι ρητή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

3. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{5}{x^2+1}$ εἶναι ἐπίσης ρητή συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$.

1. **Δίνονται οἱ συναρτήσεις**

$$f_1 \text{ μέ } f_1(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \qquad \text{καί} \qquad f_2 \text{ μέ } f_2(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}.$$

Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις f_1+f_2 καί f_1f_2.

Ἡ f_1 εἶναι ὁρισμένη στό $\mathbb{R}-\{-2, 2\}$ καί ἡ f_2 στό $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

Ἄρα οἱ f_1+f_2 καί f_1f_2 εἶναι ὁρισμένες στό σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,1,2\}$.

Ἡ τιμή τῆς f_1+f_2 στό x εἶναι:

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = \frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x+2}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} + \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-1)+(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1+x^2+4x+4}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$

Ἐπίσης

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)\, f_2(x) = \frac{x-1}{x^2-4}\,\frac{x+2}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-2)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Προσοχή: Τό γινόμενο f_1f_2 ὁρίζεται στό $\mathbb{R}-\{-2,1,2\}$, πού εἶναι ἡ τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2, καί ὄχι στό $\mathbb{R}-\{2\}$, στό ὁποῖο ἔχει νόημα τό $\frac{1}{(x-2)^2}$.

2. **Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τῶν παρακάτω συναρτήσεων:**

$$f_1 \text{ μέ } f_1(x) = \frac{x^2}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{1+x} \quad \text{καί}$$

$$f_2 \text{ μέ } f_2(x) = \frac{x+3}{x}\,\frac{2}{x^2-2x}\,\frac{x-2}{x^2-9}.$$

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι $A = \mathbb{R}-\{-1, +1\}$. Ἄρα γιά κάθε $x \in A$ ἔχουμε

$$f_1(x) = \frac{x^2}{1-x} + \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{-x^2}{x-1} + \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x^2(x+1)+2x-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-x^2(x+1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-(x+1)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -x-1.$$

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_2 εἶναι τό σύνολο $A = \mathbb{R}-\{-3,0,2,3\}$.

Ἄρα γιά κάθε $x \in A$ ἔχουμε

$$f_2(x) = \frac{x+3}{x}\,\frac{2}{x^2-2x}\,\frac{x-2}{x^2-9}$$

$$= \frac{x+3}{x}\,\frac{2}{x(x-2)}\,\frac{x-2}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+3)(x-2)}{x\,x(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{2}{x^2(x-3)}.$$

3. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-4}$. Νά βρεθεῖ α) τό πεδίο ὁρισμοῦ της A καί β) τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\frac{1}{f}$.

α) Γιά νά ὁρίζεται ἡ f, θά πρέπει $x^2-4\neq 0$, δηλαδή $x\neq \pm 2$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι $A=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

β) Ἡ $\frac{1}{f}$ ὁρίζεται στό σύνολο $A'=\{x\in A:\ f(x)\neq 0\}$. Πρέπει λοιπόν $\frac{x^3-x}{x^2-4}\neq 0$. Αὐτό συμβαίνει μόνο, ὅταν $x^3-x\neq 0$, δηλαδή ὅταν $x\neq 0$ καί $x\neq\pm 1$. Ἄρα A' εἶναι τό $A-\{-1,0,1\}$, δηλαδή τό $\mathbb{R}-\{-2,-1,0,1,2\}$.

4. Δίνονται οἱ συναρτήσεις

f μέ $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ καί g μέ $g(x)=x+\frac{1}{x}$. Νά ὁριστεῖ ἡ $h=\frac{f}{g}$.

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν f καί g εἶναι τό $\mathbb{R}^*$ καί ἐπιπλέον $g(x)=\frac{x^2+1}{x}\neq 0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Ἄρα ἡ $\frac{f}{g}$ ὁρίζεται στό $\mathbb{R}^*$ καί εἶναι

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x^3-1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{x^3-1}{x^2+1}.$$

Ἀσκήσεις 25,26,27,28,29,30.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Ἐφαρμογές στή λύση ἐξισώσεων

4.21 Ἄς πάρουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις f καί g. Τό ὑποσύνολο S τοῦ $\mathbb{R}$, γιά τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ἰσχύει

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

εἶναι τό **σύνολο λύσεων** τῆς ἐξισώσεως (1).
Μέ ἄλλα λόγια ὁ $x_0\in\mathbb{R}$, εἶναι **λύση** ἤ **ρίζα** τῆς (1), ἄν οἱ συναρτήσεις f καί g ἔχουν τήν ἴδια τιμή στό x_0, δηλαδή ἄν $f(x_0)=g(x_0)$.
Ἄς δοῦμε τώρα μερικές ἐφαρμογές ἐπιλύσεως ἐξισώσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x)=2x-6$, f_2 μέ $f_2(x)=x^2-4$ καί f_3 μέ $f_3(x)=x^2+1$. Νά βρεθεῖ τό σύνολο λύσεων τῆς $f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)=0$.**

Εἶναι $f_1(x)f_2(x)f_3(x)=0 \Leftrightarrow (f_1(x)=0$ ἤ $f_2(x)=0$ ἤ $f_3(x)=0)$
$\Leftrightarrow (2x-6=0$ ἤ $x^2-4=0$ ἤ $x^2+1=0)$.

Ἀπό τήν $2x-6=0$ παίρνουμε $x=3$. Ἑπομένως τό σύνολο λύσεων τῆς $f_1(x)=0$ εἶναι τό $S_1=\{3\}$.

Ἀπό τήν $x^2-4=0$ παίρνουμε $x=\pm2$. Ἑπομένως τό σύνολο λύσεων τῆς $f_2(x)=0$ εἶναι τό $S_2=\{-2,+2\}$.

Γιά τήν $x^2+1=0$ παρατηροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x πού νά τήν ἐπαληθεύει, γιατί τό ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν x^2 καί 1 εἶναι θετικός ἀριθμός. Ἑπομένως τό σύνολο λύσεων τῆς $f_3(x)=0$ εἶναι $S_3=\varnothing$.

Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς $f_1(x)f_2(x)f_3(x)=0$ εἶναι (§ 1.13) $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\{-2,2,3\}$.

2. **Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ** $f(x)=\dfrac{x-5}{2(x-4)}+\dfrac{4}{x^2-16}$ **καί g μέ** $g(x)=\dfrac{2x+11}{2(x+4)}$. **Νά βρεθεῖ τό σύνολο λύσεων τῆς f(x) = g(x).**

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $A_1=\mathbb{R}-\{-4,4\}$ καί τῆς g εἶναι τό $A_2=\mathbb{R}-\{-4\}$. Ἄρα τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ τους εἶναι τό $A=A_1\cap A_2=\mathbb{R}-\{-4,4\}$, ὁπότε γιά κάθε $x\in A$ ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$
\begin{aligned}
f(x)=g(x) &\Leftrightarrow \frac{x-5}{2(x-4)}+\frac{4}{(x^2-16)}=\frac{2x+11}{2(x+4)}\\
&\Leftrightarrow (x+4)(x-5)+8=(x-4)(2x+11)\\
&\Leftrightarrow x^2+4x-32=0\\
&\Leftrightarrow (x+8)(x-4)=0.\\
&\Leftrightarrow (x+8=0 \ \text{ἤ} \ x-4=0)\\
&\Leftrightarrow (x=-8 \ \text{ἤ} \ x=4).
\end{aligned}
$$

Ἡ τιμή ὅμως $x=4$ ἀπορρίπτεται, γιατί δέν ἀνήκει στό σύνολο A.
Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς $f(x)=g(x)$ εἶναι $S=\{-8\}$.

3. **Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση** $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x+1}{2-x}=\dfrac{3}{x^2-3x+2}+4$.

Εἶναι $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωση ὁρίζεται στό σύνολο $A=\mathbb{R}-\{1,2\}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Εἶναι}\quad \frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{2-x}=\frac{3}{x^2-3x+2}+4 &\Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}+4\\
&\Leftrightarrow 2x(x-2)+(x+1)(x-1)=3+4(x-1)(x-2)\\
&\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\\
&\Leftrightarrow (x-2)(x-6)=0\\
&\Leftrightarrow (x-2=0 \ \text{ἤ} \ x-6=0)\\
&\Leftrightarrow (x=2 \ \text{ἤ} \ x=6).
\end{aligned}
$$

Ἐπειδή $2\notin A$, ἡ τιμή $x=2$ ἀπορρίπτεται. Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως εἶναι τό $S=\{6\}$.

Ἀσκήσεις 31,32,33.

Ἐφαρμογές στή λύση ἀνισώσεων

4.22 Ἔστω οἱ πολυωνυμικές συναρτήσεις f, g καί E τό σύνολο λύσεων τῆς $g(x)=0$. Τότε στό σύνολο $\mathbb{R}-E$ ὁρίζεται ἡ ἀνίσωση

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \quad (1) \qquad \text{καθώς καί ἡ} \quad \frac{f(x)}{g(x)}<0 \quad (2)$$

Γιά τήν (1) ἔχουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)\,g(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) > 0 \textbf{ καί } g(x) > 0] \textbf{ ἤ } [f(x) < 0 \textbf{ καί } g(x) < 0]$$

ὁπότε, ἄν $S_1 = \{x : f(x) > 0 \textbf{ καί } g(x) > 0\}$, $S_2 = \{x : f(x) < 0 \textbf{ καί } g(x) < 0\}$, τότε τό σύνολο λύσεων τῆς (1) εἶναι (§ 1.13) τό $S = S_1 \cup S_2$.

Γιά τήν (2) παρατηροῦμε ὅτι $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-f(x)}{g(x)} > 0$. Ἑπομένως ἡ λύση τῆς (2) ἀνάγεται στή λύση τῆς (1).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση** $\frac{x-2}{x-1} > 0$.

Ἡ ἀνίσωση ὁρίζεται στό σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$ καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἔχουμε $\frac{x-2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) > 0$

$$\Leftrightarrow [x-2 > 0 \textbf{ καί } x-1 > 0] \textbf{ ἤ } [x-2 < 0 \textbf{ καί } x-1 < 0]$$

ὁπότε $S_1 = \{x : x > 2 \textbf{ καί } x > 1\}$ καί $S_2 = \{x : x < 2 \textbf{ καί } x < 1\}$ ἤ $S_1 = \{x : x > 2\}$ καί $S_2 = \{x : x < 1\}$. Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως εἶναι $S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2 \textbf{ ἤ } x < 1\}$.

2. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση** $\frac{2x}{x+1} > 3$.

Ἡ ἀνίσωση ὁρίζεται στό σύνολο $\mathbb{R} - \{-1\}$ καί εἶναι

$$\frac{2x}{x+1} > 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 3(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x+3)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow -(x+3)(x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+3 < 0 \textbf{ καί } x+1 > 0)] \textbf{ ἤ } [(x+3 > 0 \textbf{ καί } x+1 < 0).]$$

Ὁπότε $S_1 = \{x : x+3 < 0 \textbf{ καί } x+1 > 0\} = \{x : x < -3 \textbf{ καί } x > -1\} = \varnothing$ καί $S_2 = \{x : x+3 > 0 \textbf{ καί } x+1 < 0\} = \{x : x > -3 \textbf{ καί } x < -1\} = (-3,-1)$.
Ἄρα σύνολο λύσεων εἶναι τό $S = S_1 \cup S_2 = \varnothing \cup (-3,-1) = (-3,-1)$.

Ἀσκήσεις 34,35.
Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη 36,37,38,39,40,41,42,43.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ἄν } x \leq 0 \\ 5x-4, & \text{ἄν } x > 0. \end{cases}$

Νά βρεθοῦν οἱ f(3), f(−2), f(0).

2. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{ἄν } x < 0 \\ \alpha x + 3, & \text{ἄν } 0 \leq x < 1 \\ \beta x^2 + 2, & \text{ἄν } x \geq 1 \end{cases}$

Νά βρεθοῦν τά α καί β, ἄν εἶναι $f(-1) = f(1)$ καί $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ καί νά ὑπολογιστεῖ τό ἄθροισμα $f(2) - 2f\left(\frac{1}{4}\right) + f(-2)$.

3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^3 - x + 5$, $x \in \{-1, 0, 1\}$ εἶναι σταθερή συνάρτηση.

4. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^3 - 8x$, $x \in \{-3, 0, 3\}$ εἶναι ταυτοτική συνάρτηση.

5. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x) = 2x^2 + 1$, $x \in \{1, 2, 3\}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^2 + 2$, $x \in \{-1, 1, 2, 3\}$. Νά βρεθοῦν οἱ f_1^{-1} καί f_2^{-1} καί νά ἐξεταστεῖ ἄν εἶναι συναρτήσεις.

6. Νά βρεθοῦν τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν παρακάτω συναρτήσεων καί νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τους:

α) f_1 μέ $f_1(x) = \dfrac{x+4}{(2x+5)^2 - (x+1)^2}$

β) f_2 μέ $f_2(x) = \dfrac{(6x + 8x^2)(x+3)}{2(4x^3 + 16x^2 + 12x)}$

γ) f_3 μέ $f_3(x) = \dfrac{(x+2)(2x+1)^2 - 16(x+2)}{(2x+5)(7-x) + 4x^2 - 25}$

δ) f_4 μέ $f_4(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9} + \dfrac{12 - 4x}{x^2 - 6x + 9}$.

7. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = x + 2$ καί g μέ $g(x) = x^2 + 2$ μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ $E = \{0, 1\}$. Νά δειχθεῖ:
α) $f = g$ **β)** $f \neq g$, ἄν ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τους πάρουμε τό $\mathbb{R}$.

8. Γιά τή συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$ νά βρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ της καί νά δειχθεῖ ὅτι εἶναι ταυτοτική.

9. Γιά τίς συναρτήσεις f, g, h τοῦ F_A νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f = g \Leftrightarrow f + h = g + h$.

10. Δίνονται οἱ σταθερές συναρτήσεις f μέ $f(x) = 3$ καί g μέ $g(x) = 7$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $-3f+5g$.

11. Δίνονται οἱ συναρτήσεις:

f_1 μέ $f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & x \in [1,5] \\ 2x - 1 & x \notin [1,5] \end{cases}$ καί f_2 μέ $f_2(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [3,7] \\ -x^2 - 2x + 5 & x \notin [3,7]. \end{cases}$

Νά ὁριστεῖ ἡ $f_1 + f_2$ καί νά βρεθοῦν τά διαστήματα στά ὁποῖα εἶναι σταθερή.

12. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $k(f+g) = kf + kg$, ὅταν $k \in \mathbb{R}$ καί f, g συναρτήσεις τοῦ F_A. Ἐφαρμογή γιά $k = -1$.

13. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x) = 2x + 5$ καί g μέ $g(x) = x + 4$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $f+g$, $3f \pm 2g$.

14. Δίνονται οἱ σταθερές συναρτήσεις f μέ $f(x) = 5$ καί g μέ $g(x) = 7$. Νά ὁριστοῦν οἱ συναρτήσεις $5f \pm 7g$.

15. Ἄν f, g εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι $(-f)g = -fg$.

16. Ἄν f, g, h εἶναι συναρτήσεις τοῦ F_A, νά δειχθεῖ ὅτι
$$f = g \Rightarrow fh = gh.$$

17. Ἄν f μέ $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$, νά βρεθεῖ:

α) τό πεδίο ὁρισμοῦ της A

β) Τό σύνολο A′ στὸ ὁποῖο ὁρίζεται ἡ $\frac{1}{f}$.

18. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x)=x+1$ καί f_2 μέ $f_2(x)=x^2-1$. Νά ὁριστοῦν οἱ συνάρτησεις $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$ καί $\frac{f_1}{f_2}$.

19. Δίνονται οἱ συναρτήσεις f μέ $f(x)=x^3-x^2-2x$ καί g μέ $g(x)=x^2-2x$. Νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

20. Ἄν f_1, f_2, f_3, f_4 εἶναι συναρτήσεις μέ $f_1(x)=(2x+3)^3-1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=x+2$ καί $f_4(x)=2x+3$, νά δειχθεῖ ὅτι $f_1=2f_2(4f^2{}_3-f_4)$.

21. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f στό x

$$f(x)=(x-1)^3-2(x+1)^2+(x^2-x+1)^2-(x^2+1).$$

22. Ἄν α,β,γ εἶναι ὁποιεσδήποτε πραγματικές συναρτήσεις, νά δειχθεῖ ὅτι

α) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

23. Νά παραγοντοποιηθεῖ τό πολυώνυμο $f(x)=x^3-2x^2-9x+18$.

24. Νά παραγοντοποιηθοῦν τά πολυώνυμα α) $f_1(x)=(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3$ καί β) $f_2(x)=(x^2-4)^2-4(x^2-5x+6)^2$.

25. Δίνονται οἱ συναρτήσεις

f_1 μέ $f_1(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ καί f_2 μέ $f_2(x)=\frac{5x-4}{(x-1)(x+3)}$.

Νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση f_1+f_2.

26. Ἄν f_1 μέ $f_1(x)=\frac{3x+2}{x(x-1)}$ καί f_2 μέ $f_2(x)=\frac{4}{x(x-2)}$, νά ὁριστεῖ ἡ συνάρτηση f_1+f_2.

27. Ἔστω οἱ συναρτήσεις f_1 μέ $f_1(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ καί f_2 μέ $f_2(x)=\frac{5x-4}{x^2-4x+3}$.

Νά ὁριστεῖ τό ἄθροισμα f_1+f_2 καί τό γινόμενο f_1f_2.

28. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως f στό x, $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}-\frac{6}{x^2+2x-3}$.

29. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τῶν συναρτήσεων f_1 καί f_2 στό x:

$$f_1(x)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2x}} \quad \text{καί} \quad f_2(x)=\frac{9x^2-4\alpha^2}{\frac{x-\alpha}{\alpha-2x}-1}.$$

30. Δίνεται ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-3)(x+2)}$. Νά ὁριστεῖ ἡ συμμετρική της.

31. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$

β) $(x-1)^2(x^2-4)(x^2+2)=0$

γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0$

32. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $x^3+3x^2+3x+1=0$

β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0$

γ) $2x^3-2x=x^2-1$

33. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x^2-2x}=0$

β) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2(x+2)}$.

34. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)}\geq 0$

β) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+3}\leq 0$.

35. Νά βρεθεῖ γιά ποιές τιμές τοῦ x συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

$$1<\frac{1+x}{1-x}<2.$$

36. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ τιμές τῶν συναρτήσεων f_1 καί f_2 στό x,

$$f_1(x)=\frac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{\alpha}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\alpha}} \quad \text{καί} \quad f_2(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}.$$

37. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{2-x}=\dfrac{1}{x+2}$

β) $\dfrac{x^2}{x+1}+1=\dfrac{1}{x+1}+2x$.

38. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{x-3}\geq 0$ β) $\dfrac{x+2}{2x-3}\leq 0$ γ) $\dfrac{3x-1}{x+3}>0$.

39. Ἄν $f_1(x)=(x-2)^2(2x+1)-(2-x)^2(2x-5)$

$f_2(x)=\dfrac{2x^2-10x+12}{x^2-2x-3}$

$f_3(x)=(x^2-4)(x+1)+(2-x)(x^2-1)$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f_1=f_2f_3$ γιά $x\neq -1,3$.

40. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις

$$5 > \frac{2x-1}{x+3} > 3.$$

41. Θεωροῦμε τή συνάρτηση f πού ἀπεικονίζει κάθε φυσικό ἀριθμό στό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του διά 3.

α) Νά βρεθεῖ τό σύνολο τιμῶν τῆς f.

β) Νά βρεθοῦν οἱ τιμές f(8), f(18), f(19) καί f(22).

γ) Νά ἐπαληθεύσετε μέ παραδείγματα ὅτι, ἄν γιά δύο φυσικούς α,β μέ α > β συμβαίνει f(α) = f(β), τότε f(α–β) = 0.

δ) Ὁμοίως νά ἐπαληθεύσετε ὅτι, ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}$ καί f(α) = f(β) = 0, τότε f(α+β) = 0, f(αγ) = 0, f(α+γ) = f(γ).

42. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ καί $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ πού ὁρίζονται ἀντίστοιχα ἀπό τούς τύπους:

$$f(\nu) = (-1)^{\nu}.2+(-1)^{\nu+1}.3 \quad \text{καί} \quad g(\nu) = \begin{cases} -1, & \text{ἄν } \nu \text{ ἄρτιος} \\ 1, & \text{ἄν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$$

εἶναι ἴσες. Στή συνέχεια νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$ ἰσχύει $g(k)+g(k+1) = 0$.

43. Ἄν f_1 μέ $f_1(x) = x^2+2x+1$ καί f_2 μέ $f_2(x) = x^2-1$ εἶναι δύο πραγματικές συναρτήσεις, νά δειχθεῖ ὅτι $(f_1^4-f_2^4)(x) = 8x\,(x^2+1)\,f_1^2(x)$.

1. Εἶναι $f(3) = 5 \cdot 3 - 4 = 11$, $f(-2) = -(-2)^2 = -4$, $f(0) = -(0)^2 = 0$.

2. Εἶναι $f(-1) = (-1-1)^2 = 4$, $f(1) = \beta \cdot 1^2 + 2 = \beta + 2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{9}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \frac{1}{2} + 3$. Ἄρα $4 = \beta + 2$, καί $\frac{9}{4} = \frac{\alpha}{2} + 3$ κτλ.

3. Βρίσκουμε $f(-1) = f(0) = f(1)$.

4. Βρίσκουμε $f(-3) = -3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 3$.

5. Τό γράφημα G_1 τῆς f_1 εἶναι $G_1 = \{(1,3), (2,9), (3,19)\}$, ἄρα ἡ f_1 εἶναι «1 — 1 καί ἐπί» τοῦ $\{1,2,3\}$ στό $\{3,9,19\}$ καί ἡ f_1^{-1} εἶναι συνάρτηση μέ γράφημα τό $G_1^{-1} = \{(3,1), (9,2), (19,3)\}$. Ἡ f_2^{-1} δέν εἶναι συνάρτηση.

6. Παραγοντοποιοῦμε τούς παρονομαστές καί ἐξαιροῦμε ἀπό τό $\mathbb{R}$ τίς τιμές πού τούς μηδενίζουν. Ἔτσι ἡ f_1 ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$ κτλ.

7. α) Εἶναι $f(0) = g(0) = 2$ καί $f(1) = g(1) = 3$.
β) Ἐπειδή δέν εἶναι $f(x) = g(x)$ γιά κάθε πραγματικό x.

8. Εἶναι $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \neq 0$, ὅταν $x \in \mathbb{R} - \{1,2\}$, καί

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = x \text{ γιά } x \in \mathbb{R} - \{1,2\}.$$

9. Εἶναι: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

10. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3 + 7 = 10$ κτλ.

11. Εἶναι γιά $x < 1$ $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = (2x-1) + (-x^2 - 2x + 5) = -x^2 + 4$ κτλ.

12. Εἶναι $(k(f+g))(x) = (kf + kg)(x) = (kf)(x) + (kg)(x) = kf(x) + kg(x)$ κτλ.

13. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ κτλ.

14. $(5f \pm 7g)(x) = (5f)(x) \pm (7g)(x) = 5f(x) \pm 7g(x)$ κτλ.

15. Ἀποδεικνύουμε ὅτι $((-f)g)(x) = (-fg)(x)$.

16. Ἀποδεικνύουμε ὅτι $f(x) = g(x) \Rightarrow (fh)(x) = (gh)(x)$.

17. α) $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Ἄρα $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.
β) Θά πρέπει ἀκόμη $f(x) \neq 0$, δηλαδή $x - 3 \neq 0$ ἤ $x \neq 3$. Ἄρα $A' = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

18. Θά πρέπει $f_1(x) \neq 0$ καί $f_2(x) \neq 0$, δηλ. $x \neq -1, 1$. Ὁπότε γιά κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ εἶναι $\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)(x) = \left(\frac{1}{f_1}\right)(x) + \left(\frac{1}{f_2}\right)(x)$

$$= \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)} \text{ κτλ.}$$

19. Θά πρέπει $g(x) \neq 0$, ὁπότε $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

20. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $f_1(x) = 2f_2(x)\,(4f_3^2(x) - f_4(x))$.

21. Μετά τίς πράξεις ἔχουμε $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 3$.

22. α) Κάνουμε τίς πράξεις στό β' μέλος καί καταλήγουμε στό πρῶτο.
β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3=[(\alpha+\beta)+\gamma]^3= \dots$

23. Ἐπειδή $f(2)=0$, τό $f(x)$ θά διαιρεῖται μέ τό $x-2$ κτλ.

24. α) Παρατηροῦμε ὅτι $(x-1)+(x-2)+(3-2x)=0$ καί ἐφαρμόζουμε τήν 22(α).
β) Τό $f_2(x)$ εἶναι διαφορά τετραγώνων.

25. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι $\mathbb{R}-\{2\}$, καί τῆς f_2 τό $\mathbb{R}-\{-3,1\}$. Ὁπότε γιά κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-3,1,2\}$ εἶναι $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)= \dots$

26. Ὅμοια μέ τήν (25).

27. Ὅμοια μέ τήν (25).

28. Μετά τίς πράξεις ἔχουμε $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+3)}$.

29. Μετά τίς πράξεις στά σύνθετα κλάσματα ἔχουμε $f_1(x)=\dfrac{2(x-2)}{x}$ καί $f_2(x)=(3x+2\alpha)(\alpha-2x)$.

30. Ἄν g ἡ συμμετρική της, θά εἶναι $g=\dfrac{1}{f}$ μέ $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ κτλ.

31. α) Πρέπει νά εἶναι $(x+2=0$ **καί** $x^2+5x+6=0)$ κτλ.
β) $x=1$ ἤ $x=\pm 2$ ἀφοῦ $x^2+2\neq 0$.
γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-(x-1)(x-3)=0$ κτλ.

32. α) $x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow (x^3+1)+3x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0$ κτλ.
β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(x-1)(x+1)=0$ κτλ.
γ) $2x^3-2x=x^2-1 \Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1)=0$ κτλ.

33. α) $\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{8}{x(x-2)}=0$. Πρέπει $x(x-2)\neq 0$. Βρίσκουμε $x=\pm 2$.
Ἡ $x=2$ ἀπορρίπτεται.
β) Εἶναι $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Βρίσκουμε $x=-1$, πού ἀπορρίπτεται, καί $x=-3$.

34. α) $\dfrac{(x+1)^3}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow [(x+1)^3(x-2)\geq 0$ **καί** $x\neq 2)] \Leftrightarrow [(x+1)^2(x+1)(x-2)\geq 0$ καί $x\neq 2] \Leftrightarrow [(x+1)(x-2)\geq 0$ **καί** $x\neq 2] \Leftrightarrow (x\leq -1$ **ἤ** $x>2)$.
β) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x+3}\leq 0 \Leftrightarrow [(x-1)^2(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x\neq -3]$
$\Leftrightarrow x-1=0$ **ἤ** $[(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x\neq -3]$ κτλ.

35. $1<\dfrac{1+x}{1-x}<3 \Leftrightarrow \left(1<\dfrac{1+x}{1-x}\right.$ **καί** $\left.\dfrac{1+x}{1-x}<3\right)$ κτλ.

36. Κάνουμε τίς πράξεις στά σύνθετα κλάσματα καί ἔχουμε
$f_1(x)=x+\alpha \qquad f_2(x)=x^2$.

37. α) Εἶναι $\dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{x+2}$ μέ $x\neq \pm 2$ κτλ. Βρίσκουμε $x=0$ ἤ $x=-2$ πού ἀπορρίπτεται. β) Ὅμοια βρίσκουμε $x=0$.

38. α) Ὅμοια μέ τήν (34 β) β) $\frac{x+2}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \{(x+2)(2x-3) \leq 0$ καί $x \neq \frac{3}{2}\} \ldots$ γ) $\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+3) > 0 \ldots$

39. Θά ἀποδείξουμε ὅτι $f_1(x) = f_2(x)f_3(x)$ γιά $x \neq -1,3$.

40. Ὅμοια μέ τήν (35).

41. α) Τά διαφορετικά ὑπόλοιπα εἶναι οἱ 0,1,2. Ἄρα τό σύνολο τιμῶν τῆς f εἶναι τό $\{0,1,2\}$.

β) Θά βροῦμε τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων 8 : 3, 18 : 3 κτλ.

γ) Παίρνουμε τά ζευγάρια $\alpha = 28$, $\beta = 25$, ἤ $\alpha = 38$ $\beta = 32$ κτλ.

δ) Παίρνουμε $\alpha = 12$, $\beta = 18$ καί $\gamma = 5$...

42. Ἐξετάζουμε τίς 2 περιπτώσεις $\nu =$ ἄρτιος καί $\nu =$ περιττός. Ἄν $k =$ ἄρτιος, τότε $k+1 =$ περιττός κτλ.

43. Εἶναι $(f_1^4-f_2^4)(x) = f_1^4(x)-f_2^4(x) = [f_1^2(x)+f_2^2(x)]\,[f_1^2(x) - f_2^2(x)] = \ldots$ Θέτουμε $f_1(x) = (x+1)^2$ καί $f_2(x) = (x-1)(x+1)$.

5 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μέ τό ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ συμπληρώνεται τό ἀξιωματικό σύστημα τῆς θεωρίας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό ὁποῖο ἀναπτύχθηκε στά κεφάλαια 2 καί 3, καί ὑπογραμμίζεται ἡ ἐξάρτηση ἀπό τό ἀξίωμα αὐτό μερικῶν θεμελιωδῶν προτάσεων πού ἦταν ὥς τώρα «αὐτονόητες», ὅπως π.χ. ἡ ὕπαρξη ρίζας ἤ δεκαδικῶν προσεγγίσεων ἑνός ἀριθμοῦ. Δίνεται ἔτσι ἡ εὐκαιρία νά ἐπισημανθεῖ ἡ διαφορά τοῦ ℝ ἀπό τό ℚ ὡς πρός τήν πληρότητα πού χαρακτηρίζει τό πρῶτο καί ὄχι τό δεύτερο.
Ἐξάλλου ἡ ἔννοια τῆς ρίζας ἑνός ἀριθμοῦ καθώς καί ἡ χρησιμοποίηση τοῦ ριζικοῦ μόνο γιά τούς μή ἀρνητικούς εἰσάγονται κατά τρόπο πού συντελεῖ στήν ἁπλή παρουσίαση τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων μέ ριζικά καί τῆς ἐπιλύσεως τῆς διώνυμης ἐξισώσεως στό ℝ. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἀποφεύγεται ἡ περιπτωσιολογία πού ὁδηγεῖ συχνά σέ σύγχυση ἤ καί σέ λάθη, ἐνῶ ὑπάρχει ἐναρμόνιση μέ τήν ἔννοια ρίζας μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ πού θά διδαχθεῖ ἀργότερα. Τέλος εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως μέ ρητό ἐκθέτη ὡς ἕνα ἀκόμη παράδειγμα «τοῦ μηχανισμοῦ τῆς γενικεύσεως», πού τόσο εὔστοχα λειτουργεῖ στά μαθηματικά.

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΥ

Ἀριθμοί μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία

5.1 Σέ προηγούμενες τάξεις συναντήσαμε ἀριθμούς σέ δεκαδική μορφή μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία. Ἡ γραφή ἀριθμῶν σέ μιά τέτοια μορφή στηρίζεται σέ ὁρισμένες «παραδοχές», πού εἶναι καιρός νά ἀναλύσουμε.

- Τί ἐννοοῦμε π.χ. γράφοντας $\alpha = 3{,}6666\ldots$;

Ἀσφαλῶς ἐννοοῦμε ἕναν ἀριθμό μεταξύ 3 καί 4, ἀκριβέστερα μεταξύ 3,6 καί 3,7 ἤ ἀκόμα 3,66 καί 3,67... ἤ 3,66...6 καί 3,66...7 κ.ο.κ. Αὐτές οἱ ὅλο καί ἀκριβέστερες δεκαδικές προσεγγίσεις τοῦ α μέ ἔλλειψη καί μέ ὑπεροχή σχηματίζουν μιά ἀκολουθία διαστημάτων

$$[3\,,4],\ [3{,}6\,,3{,}7],\ [3{,}66\,,3{,}67],\ldots,\ [3{,}\underbrace{66\ldots6}_{k\ \text{ψηφία}}\,,\ 3{,}\underbrace{66\ldots7}_{k\ \text{ψηφία}}], \qquad (1)$$

τῶν ὁποίων τό πλάτος (δηλαδή ἡ διαφορά τῶν ἄκρων τους) εἶναι

$$1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ldots,\ \frac{1}{10^k},\ldots, \text{ καί διαρκῶς μικραίνει.}$$

Ἡ γραφή λοιπόν $\alpha = 3{,}666\ldots$ σημαίνει ὅτι δεχόμαστε τά ἑξῆς:

1. ὑπάρχει ἀριθμός α, κοινό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων τῆς ἀκολουθίας (1)
2. ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι **μοναδικός** καί συμβολίζεται (μέ βάση τίς προσεγγίσεις του μέ ἔλλειψη) 3,666...

- Στίς ἴδιες παραδοχές στηρίζεται καί ἡ μετατροπή τοῦ 3,666... σέ ρητό, γνωστή ἀπό τό Γυμνάσιο. Πράγματι, ἀπό τίς ἀνισότητες:

$$\begin{aligned}
3 &< \alpha < 4\\
3{,}6 &< \alpha < 3{,}7\\
3{,}66 &< \alpha < 3{,}67\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
3{,}66\ldots6 &< \alpha < 3{,}66\ldots7\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

μέ πρόσθεση στά μέλη τους τοῦ 33 (= 36–3) ἤ μέ πολλαπλασιασμό τῶν μελῶν τους ἐπί 10 (§ 3.9 καί § 3.10) προκύπτει ὅτι τόσο ὁ $33+\alpha$ ὅσο καί ὁ 10α ἀνήκουν στά διαστήματα

$$[36\,,37],\ [36{,}6\,,36{,}7],\ldots,\ [36{,}66\ldots6\,,\ 36{,}66\ldots7],\ldots \qquad (2)$$

πού τό πλάτος τους εἶναι πάλι $1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ldots,\ \frac{1}{10^k},\ldots$ Δεχόμενοι λοιπόν ὅτι τά διαστήματα αὐτά ἔχουν ἕνα καί μοναδικό κοινό στοιχεῖο πού τό γράφουμε 36,666..., θά ἔχουμε

$$36{,}66\ldots = 33+\alpha = 10\alpha, \quad \text{ἄρα} \quad \alpha = \frac{33}{9}.$$

- Μέ τήν ἴδια ἔννοια ὁ ἀριθμός 2,59999... εἶναι τό μοναδικό κοινό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων

$$[2\,,\,3],\ [2{,}5\,,\,2{,}6],\ [2{,}59\,,\,2{,}6],\ldots,\ [2{,}599\ldots9\,,\,2{,}6] \qquad (3)$$

δηλαδή ὁ ἀριθμός 2.6.

- Τέλος, ἀναζητώντας τή θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2=2$ στό $\mathbb{R}$, τήν ὁποία συμβολίζουμε $\sqrt{2}$, βρίσκουμε τίς δεκαδικές προσεγγίσεις της:

μέ ἔλλειψη : 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421,...

μέ ὑπεροχή: 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422,...

Γράφουμε λοιπόν $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

Γενικά μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἕνας «ἀπειροψήφιος δεκαδικός» ρητός ἤ ἄρρητος εἶναι **τό μοναδικό κοινό στοιχεῖο** τῶν κλειστῶν διαστημάτων πού ὁρίζουν οἱ δεκαδικές προσεγγίσεις του.

Ἄσκηση 1.

Ἀξίωμα κιβωτισμοῦ

5.2 Τά διαστήματα πού σχηματίζονται ἀπό τίς δεκαδικές προσεγγίσεις ἑνός ἀριθμοῦ, ὅπως εἴδαμε στά παραδείγματα τῆς § 5.1, ἔχουν τά ἑξῆς χαρακτηριστικά:

- Καθένα περιέχεται σέ ὅλα τά προηγούμενα
- Τό πλάτος τους «μικραίνει ὅσο θέλουμε», δηλαδή μπορεῖ νά γίνει μικρότερο ἀπό κάθε δεδομένο ἀριθμό ὁσοδήποτε μικρό (π.χ. ἀπό τόν $\frac{1}{\mu}$, μέ ὁσοδήποτε μεγάλο $\mu \in \mathbb{N}^*$).

Διαστήματα μέ τίς παραπάνω ἰδιότητες ὀνομάζονται κιβωτισμένα. Πιό συγκεκριμένα: Τά **κλειστά** διαστήματα τῆς ἀκολουθίας

$$[\alpha_0,\beta_0],\quad [\alpha_1,\beta_1],\ldots,[\alpha_\nu,\beta_\nu]\ldots$$

ὀνομάζονται **κιβωτισμένα**, ὅταν ἔχουν τίς ἀκόλουθες δύο ἰδιότητες:

1. $\forall\, \nu \in \mathbb{N}^*,\ [\alpha_\nu,\, \beta_\nu] \subseteq [\alpha_{\nu-1},\, \beta_{\nu-1}]$
2. Ἄν δοθεῖ ἕνας φυσικός ἀριθμός μ (ὁσοδήποτε μεγάλος), τότε ὑπάρχει διάστημα τῆς ἀκολουθίας μέ πλάτος μικρότερο τοῦ $\frac{1}{\mu}$. Δηλαδή

$$\forall\, \mu \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N},\ \beta_\nu - \alpha_\nu \leqslant \frac{1}{\mu}$$

Διατυπώνουμε τώρα γενικότερα τίς «παραδοχές» πού κάναμε γιά τά διαστήματα τῶν ἀκολουθιῶν τῆς § 5.1 μέ τό ἀκόλουθο *«ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ»*.

ΑΞΙΩΜΑ XII	**Γιά κάθε ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων ὑπάρχει ἕνα μοναδικό κοινό στοιχεῖο τους**

Ἔτσι, κάθε ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων **ὁρίζει** ἕναν πραγματικό ἀριθμό (τό κοινό τους στοιχεῖο).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τά διαστήματα τῆς ἀκολουθίας

$$[0, 1], \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[0, \frac{1}{\nu}\right], \ldots$$

εἶναι κιβωτισμένα $\left(\alpha_\nu = 0,\ \beta_\nu = \frac{1}{\nu},\ \beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\right)$ μέ κοινό στοιχεῖο τό 0.

Παρατηρῆστε ὅτι τά κιβωτισμένα διαστήματα εἶναι **κλειστά.** Π.χ. ἄν ἀπό τά προηγούμενα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{\nu}\right]$ ἐξαιρέσουμε τό 0, προκύπτουν τά ἀνοικτά ἀριστερά διαστήματα $\left(0, \frac{1}{\nu}\right]$, τά ὁποῖα δέν μπορεῖ νά ἔχουν κοινό στοιχεῖο.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδη

5.3 Ὁ μεγάλος Ἕλληνας μαθηματικός Ἀρχιμήδης χρησιμοποίησε σέ πολλές περιπτώσεις τήν πρόταση, γνωστή **ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδη:** *«Γιά ὁποιουσδήποτε ἀριθμούς $\alpha > 0$ καί $\beta > 0$ ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός ν τέτοιος, ὥστε $\nu\beta > \alpha$».*

Ἐπειδή $\beta > 0$, εἶναι $\nu\beta > \alpha \Leftrightarrow \nu > \frac{\alpha}{\beta}$. Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε τήν πρόταση τοῦ Ἀρχιμήδη μέ τήν ἑξῆς γενικότερη διατύπωση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1	**Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό, ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερός του, δηλαδή** $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \exists\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu > \alpha$

Ἀπόδειξη. Ἡ πρόταση εἶναι προφανής γιά $\alpha \leq 0$. Ἔστω λοιπόν $\alpha > 0$. Ὑποθέτουμε (§ 1.30) ὅτι ἀληθεύει ἡ ἄρνηση τοῦ θεωρήματος πού εἶναι (§ 1.22) ἡ ἑξῆς: «Ὑπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος, ὥστε γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, νά εἶναι $\nu \leq \alpha$».

Ἄρα (§ 3.11 Ἐφ. 1) $\forall\ \nu \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\nu}$. Συνεπῶς $\frac{1}{\alpha} \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right]$, δηλαδή ὁ $\frac{1}{\alpha}$ ἀνήκει σέ ὅλα τά διαστήματα:

$$\left[0, \frac{1}{1}\right], \left[0, \frac{1}{2}\right], \ldots, \left[0, \frac{1}{\nu}\right], \ldots$$

τά ὁποῖα, ὅπως εἴπαμε (§ 5.2 Παραδ.) εἶναι κιβωτισμένα μέ μοναδικό κοινό στοιχεῖο τό 0. Ἄρα θά πρέπει $\frac{1}{\alpha} = 0$, πού εἶναι **ἄτοπο** (§ 2.17 Παρ. 3).

Γιά κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, εἶναι $-\alpha \in \mathbb{R}$ καί ὑπάρχει $\nu > -\alpha$. Ἐπειδή $\nu > -\alpha \Leftrightarrow -\nu < \alpha$ ἔχουμε:

ΠΟΡΙΣΜΑ | $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \ \exists\ \nu \in \mathbb{N}^*,\ \ -\nu < \alpha$

Διαστήματα μέ ἄκρα $+\infty$, $-\infty$

5.4 Γιά κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, τό σύνολο $\{x : x > \alpha\}$, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα περιέχει ὁπωσδήποτε ἕνα φυσικό ἀριθμό $\nu > \alpha$, ἄρα καί ἄλλο $\nu_1 > \nu$ καί ἄλλο μεγαλύτερο τοῦ ν_1 κ.ο.κ. Τό σύνολο αὐτό, τό ὁποῖο συνεπῶς δέν εἶναι κενό οὔτε μπορεῖ νά ἔχει μέγιστο στοιχεῖο, τό συμβολίζουμε ὡς διάστημα μέ συμβολικό δεξιό ἄκρο $+\infty$ (σύν ἄπειρο). Γράφουμε λοιπόν

$$\{x : x > \alpha\} = (\alpha, +\infty)$$

Ἐπίσης γράφουμε $\{x : x \geqslant \alpha\} = [\alpha, +\infty)$

Ὁμοίως τό σύνολο $\{x : x < \alpha\}$, τό ὁποῖο ὅπως προκύπτει ἀπό τό πόρισμα τῆς § 5.3 δέν ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, τό συμβολίζουμε ὡς διάστημα μέ συμβολικό ἀριστερό ἄκρο $-\infty$:

$$\{x : x < \alpha\} = (-\infty, \alpha)$$

Ἐπίσης $\{x : x \leqslant \alpha\} = (-\infty, \alpha]$

Τέλος τό $\mathbb{R}$, πού εἶναι ἕνωση τῶν διαστημάτων $[\alpha, +\infty)$ καί $(-\infty, \alpha]$, γράφεται καί ὡς διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Δεκαδικές προσεγγίσεις ἀριθμοῦ

5.5 Μποροῦμε τώρα νά **ἀποδείξουμε** ὅτι γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό α ὁρίζονται **μονοσήμαντα** οἱ δεκαδικές του προσεγγίσεις (μονάδας, δεκάτου,..., $\frac{1}{10^\nu}$, ...). Ἀρχίζοντας ἀπό τίς προσεγγίσεις ἀκέραιας μονάδας, ἄς ἀποδείξουμε πρῶτα ὅτι ὁ α περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, δηλαδή ὅτι ὑπάρχει ἕνας **μοναδικός** ἀκέραιος k_0 τέτοιος, ὥστε νά εἶναι

$$k_0 \leqslant \alpha < k_0 + 1 \tag{1}$$

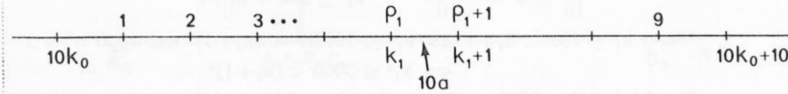
★ **Ἀπόδειξη** Ἄν $\alpha \in \mathbb{Z}$, τότε $k_0 = \alpha$. Ὑποθέτουμε λοιπόν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, ὁπότε

- ἄν $\alpha > 0$, ἀρκεῖ νά λάβουμε ὡς k_0+1 τό μικρότερο φυσικό ἀριθμό ἀπό ἐκείνους πού ὑπερβαίνουν τόν α (§ 5.3 Θεώρ.).
- ἄν $\alpha < 0$, τότε ὁ k_0 εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς ἀκέραιους πού εἶναι μικρότεροι τοῦ α (§ 5.3 Πόρ.).

Ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι

$$10\,k_0 \leqslant 10\alpha < 10k_0+10 \tag{2}$$

Ἀλλά, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, ὁ 10α περιέχεται καί μεταξύ δύο **διαδοχικῶν** ἀκεραίων k_1 καί k_1+1. Ἄρα ὁ k_1 θά εἶναι (σχ. 1) ἕνας ἀπό



1

τούς ἀκέραιους $10k_0,\ 10k_0+1, \ldots, 10k_0+9$. Δηλαδή ὑπάρχει ἕνας μονοψήφιος ρ_1 τέτοιος, ὥστε

$$k_1 = 10\,k_0+\rho_1 \leqslant 10\alpha < k_1+1 \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{k_1}{10} = k_0+\frac{\rho_1}{10} \leqslant \alpha < \frac{k_1+1}{10} \tag{3}$$

Γενικότερα γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε $k_\nu \leqslant 10^\nu\alpha < k_\nu+1$, δηλαδή $\dfrac{k_\nu}{10^\nu} \leqslant \alpha < \dfrac{k_\nu+1}{10^\nu}$.

Ἀποδεικνύουμε ὅπως προηγουμένως (ἄν ἀντί γιά τούς k_0, k_1 πάρουμε τούς $k_{\nu-1}$, k_ν), ὅτι ὑπάρχει ἕνας μονοψήφιος ρ_ν τέτοιος, ὥστε

$$k_\nu = 10k_{\nu-1}+\rho_\nu, \text{ ὁπότε ἔχουμε}$$

$$\frac{k_\nu}{10^\nu} = \frac{k_{\nu-1}}{10^{\nu-1}} + \frac{\rho^\nu}{10^\nu} = k_0+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{10^2}+\cdots+\frac{\rho_\nu}{10^\nu} \tag{4}$$

Ἄν $\alpha = \dfrac{k_\nu}{10^\nu}$, τότε ὁ α εἶναι δεκαδικός μέ ν δεκαδικά ψηφία (εἰδικά γιά $\nu = 0$, ὁ α εἶναι ἀκέραιος). Διαφορετικά

- ὁ $\dfrac{k_\nu}{10^\nu}$ εἶναι ἡ προσέγγιση $\dfrac{1}{10^\nu}$ μέ ἔλλειψη τοῦ α.
- ὁ $\dfrac{k_\nu+1}{10^\nu}$ εἶναι ἡ προσέγγιση $\dfrac{1}{10^\nu}$ μέ ὑπεροχή τοῦ α.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οἱ δεκαδικές αὐτές προσεγγίσεις (μονάδας, δεκάτου, ..., $\dfrac{1}{10^\nu}$, ...) τοῦ α, ὅπως προκύπτει ἀπό τίς (3) καί (4), σχηματίζουν ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων, ἡ ὁποία ὁρίζει ἀκριβῶς τόν α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μέ τή γνωστή διάταξη τῆς διαιρέσεως 17 : 6 βρίσκουμε τίς δεκαδικές προσεγγίσεις τοῦ $\alpha = -\dfrac{17}{6}$

μέ ὑπεροχή τίς:	-2	$-2{,}8$	$-2{,}83$	$-2{,}833$
μέ ἔλλειψη τίς:	-3	$-2{,}9$	$-2{,}84$	$-2{,}834$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ἄν $\alpha^3 = 3$, νά βρεθοῦν οἱ προσεγγίσεις $\dfrac{1}{10}$ τοῦ ἀριθμοῦ α.

Πρέπει νά ὁρίσουμε τόν ἀκέραιο k_1 ὥστε :

$$\frac{k_1}{10} \leq \alpha < \frac{k_1+1}{10} \quad \text{ἤ} \quad k_1 \leq 10\alpha < k_1+1$$

Ἀλλά $k_1 \leq 10\alpha < k_1+1 \Leftrightarrow k_1^3 \leq 1000\alpha^3 < (k_1+1)^3$ καί ἀφοῦ $\alpha^3 = 3$

$$\Leftrightarrow k_1^3 \leqslant 3000 < (k_1+1)^3$$

Ἐπειδή ὁ $14^3 < 3000 < 15^3$, θά εἶναι $k_1 = 14$ καί οἱ ζητούμενες προσεγγίσεις εἶναι $\dfrac{k_1}{10} = 1{,}4$ (μέ ἔλλειψη) καί $\dfrac{k_1+1}{10} = 1{,}5$ (μέ ὑπεροχή).

Ἄσκηση 2.

Ἡ μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων

5.6 Ἔστω τ ἕνα (εὐθύγραμμο) τμῆμα. Εἶναι γνωστό πῶς ὁρίζεται στή Γεωμετρία, γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν, τό τμῆμα ντ, τό τμῆμα $\dfrac{1}{\nu}\tau$ πού γράφεται $\dfrac{\tau}{\nu}$, συνεπῶς καί τό τμῆμα $\mu \cdot \dfrac{\tau}{\nu}$ $(\mu \in \mathbb{N},\ \nu \in \mathbb{N}^*)$ πού γράφεται $\dfrac{\mu}{\nu}\tau$ καί λέγεται **γινόμενο** τοῦ τ ἐπί τόν ρητό $\dfrac{\mu}{\nu}$. Ὁ ὁρισμός τοῦ γινομένου λτ καί στήν περίπτωση πού ὁ λ εἶναι ἄρρητος στηρίζεται σέ προτάσεις ἀνάλογες πρός τά ἀξιώματα τοῦ Ἀρχιμήδη καί τοῦ κιβωτισμοῦ, πού ἰσχύουν καί στή Γεωμετρία. Συγκεκριμένα ἰσχύουν τά ἑξῆς :

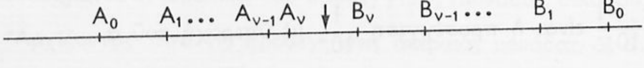
1. **Ἄν σ καί τ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμα τμήματα (τό τ μή μηδενικό), ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός ν τέτοιος, ὥστε $\nu\tau > \sigma$.**

Ἐξάλλου τά τμήματα :

$$A_0B_0,\ A_1B_1, \ldots,\ A_\nu B_\nu, \ldots \qquad (1)$$

μιᾶς εὐθείας λέγονται **κιβωτισμένα**, ὅταν

- $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$, ὅλα τά σημεῖα τοῦ $A_\nu B_\nu$ εἶναι σημεῖα τοῦ $A_{\nu-1}B_{\nu-1}$.



- Ἄν δοθεῖ ἕνα τμῆμα ε ὁσοδήποτε μικρό, ὑπάρχει τμῆμα τῆς ἀκολουθίας (1) μικρότερο τοῦ ε.

Ἔχουμε λοιπόν τήν πρόταση:

2. **Γιά κάθε ἀκολουθία κιβωτισμένων τμημάτων ὑπάρχει ἕνα μοναδικό κοινό σημεῖο τους.**

5.7 **Γινόμενο τμήματος ἐπί πραγματικό ἀριθμό.** Θά ὁρίσουμε τώρα τό γινόμενο λτ, ὅταν λ εἶναι θετικός πραγματικός ἀριθμός καί μάλιστα ἄρρητος. Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία πού σχηματίζουν οἱ δεκαδικές προσεγγίσεις τοῦ λ (§ 5.5 Παρατ.)

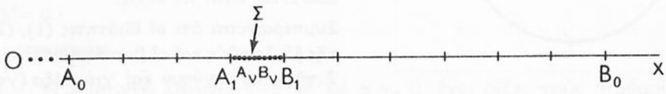
$$[k_0, k_0+1], \left[\frac{k_1}{10}, \frac{k_1+1}{10}\right], \left[\frac{k_2}{100}, \frac{k_2+1}{100}\right], \ldots, \left[\frac{k_\nu}{10^\nu}, \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\right], \ldots \qquad (\alpha)$$

Σέ μιά ἡμιευθεία Οx ὁρίζουμε τά σημεῖα $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ ἔτσι, ὥστε

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad OA_\nu = \frac{k_\nu}{10^\nu}\tau$$

καί τά σημεῖα $B_0, B_1, B_2, \ldots B_\nu$ ἔτσι, ὥστε

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad OB_\nu = \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\tau$$



Ἐπειδή τά διαστήματα τῆς (α) εἶναι κιβωτισμένα, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε(1) ὅτι καί τά τμήματα A_0B_0, A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_\nu B_\nu$ εἶναι ἐπίσης κιβωτισμένα. Ἑπομένως ὑπάρχει ἕνα μοναδικό κοινό σημεῖο Σ ὅλων τῶν τμημάτων $A_\nu B_\nu$. Τό **τμῆμα ΟΣ ὁρίζεται ὡς τό γινόμενο λτ.**

Γιά τό γινόμενο λτ ἀποδεικνύονται (1) οἱ ἑξῆς βασικές ἰδιότητες ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$):

$$(\lambda+\mu)\tau = \lambda\tau+\mu\tau \qquad (1)$$

$$\lambda(\tau+\sigma) = \lambda\tau+\lambda\sigma \qquad (2)$$

$$\lambda(\mu\tau) = (\lambda\mu)\tau \qquad (3)$$

5.8 **Λόγος δύο τμημάτων.** Ἔστω τ καί σ δύο τμήματα (τ μή μηδενικό). Τότε μέ βάση τό ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδη ἀποδεικνύεται, ὅπως ἀκριβῶς στήν § 5.5, ὅτι ὑπάρχει ἕνας μοναδικός **φυσικός** k_0 τέτοιος, ὥστε

$$k_0\,\tau \leqslant \sigma < (k_0+1)\tau$$

καί γενικότερα ὅτι, γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ὑπάρχει ἕνας k_ν τέτοιος, ὥστε

$$\frac{k_\nu}{10^\nu}\tau \leqslant \sigma < \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\tau$$

Τά διαστήματα

$$[k_0, k_0+1], \ldots, \left[\frac{k_\nu}{10^\nu}, \frac{k_\nu+1}{10^\nu}\right], \ldots$$

εἶναι κιβωτισμένα. Ἄρα (§ 5.2) ὁρίζουν ἕναν πραγματικό ἀριθμό λ. Τότε σύμφωνα μέ τήν § 5.7 εἶναι $\sigma = \lambda\tau$. Ὁ λ λέγεται **λόγος** τοῦ **σ** πρός τό **τ,** συμβολικά $\lambda = \dfrac{\sigma}{\tau}$.

Ἄν τό τ λαμβάνεται ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τμημάτων (μονάδα μήκους), ὁ λ λέγεται **μέτρο** (μῆκος) τοῦ σ.

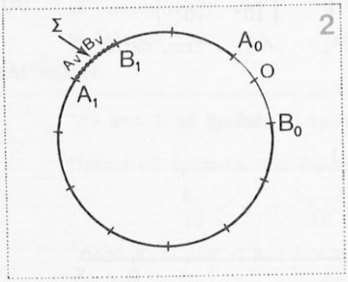
Ἀποδεικνύονται οἱ ἑξῆς βασικές ἰδιότητες:

1. **Τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο τμημάτων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τους.**
2. **Ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους** (ὡς πρός κοινή μονάδα μετρήσεως).

---

(1) Ἡ ἀπόδειξη παραλείπεται.

5.9 Ἐπειδή οἱ προτάσεις 1 καί 2 τῆς § 5.6 ἰσχύουν καί γιά τόξα (ἤ γωνίες), τό γινόμενο τόξου ἐπί πραγματικό ἀριθμό καί ὁ λόγος δύο τόξων ὁρίζονται ὅπως οἱ ἀντίστοιχες ἔννοιες γιά τά τμήματα. Γιά τόν ὁρισμό τοῦ λτ π.χ., ὅταν τ εἶναι τόξο κύκλου καί λ ἄρρητος, ὁρίζουμε στόν **κύκλο** τό σημεῖο O καί μέ τίς προσεγγίσεις τοῦ λ τά σημεῖα A_ν καί B_ν γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τά κιβωτισμένα τόξα $\widehat{A_\nu B_\nu}$ ὁρίζουν τό μοναδικό σημεῖο Σ καί εἶναι $\lambda\tau = \widehat{O\Sigma}$.



Συμπεραίνεται ὅτι οἱ ἰδιότητες (1), (2), (3) τῆς § 5.7 καθώς καί οἱ βασικές ἰδιότητες 1 καί 2 τῆς § 5.8 ἰσχύουν καί γιά τόξα (γωνίες).

Τετραγωνική ρίζα

5.10 Ἔστω **α** πραγματικός ἀριθμός καί ἡ ἐξίσωση $x^2 = \alpha$ στό $\mathbb{R}$. Κάθε ρίζα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λέγεται **τετραγωνική ρίζα** τοῦ **α**. Εἶναι φανερό ὅτι:

- Ἄν $\alpha < 0$, ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει καμιά ρίζα, ἀφοῦ $\forall\, x,\ x^2 \geqslant 0$.
- Ἄν $\alpha = 0$, μοναδική ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ 0, ἀφοῦ $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ἄς ἐξετάσουμε ἄν ἡ ἐξίσωση $x^2 = \alpha$ ἔχει ρίζες στήν περίπτωση $\alpha > 0$. Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ρ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως, τότε καί ὁ $-\rho$ εἶναι ἐπίσης ρίζα της, ἀφοῦ $x^2 = (-x)^2$. Ἀρκεῖ λοιπόν στήν περίπτωση αὐτή νά βρεθοῦν οἱ θετικές ρίζες, **ἄν ὑπάρχουν.**

Ἀποδεικνύεται σχετικά τό ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha \geqslant 0$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός $x \geqslant 0$ τέτοιος, ὥστε**
>
> $$x^2 = \alpha$$

Ὁ ἀριθμός αὐτός συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$.

Ἀπόδειξη

Ἀποδεικνύουμε πρῶτα ὅτι ὑπάρχει ἕνας μοναδικός φυσικός ἀριθμός ρ_0 τέτοιος, ὥστε

$$\rho_0^2 \leqslant \alpha < (\rho_0 + 1)^2$$

Εἰδικά, ἄν $\alpha = 0$, τότε $\rho_0 = 0$.

Σύμφωνα μέ τήν § 5.3, ὑπάρχει φυσικός $\mu > \alpha \geqslant 0$. Ἄρα $\mu \geqslant 1$ καί $\mu^2 \geqslant \mu > \alpha$. Δηλαδή ὑπάρχουν φυσικοί ἀριθμοί τῶν ὁποίων **τό τετράγωνο** ὑπερβαίνει τόν α. Τόν μικρότερο ἀπό αὐτούς παίρνουμε ὡς $\rho_0 + 1$.

Γενικότερα γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀκέραιος ρ_ν τέτοιος, ὥστε νά εἶναι

$$\left(\frac{\rho_\nu}{10^\nu}\right)^2 \leq \alpha < \left(\frac{\rho_\nu + 1}{10^\nu}\right)^2 \qquad (1)$$

Πράγματι, ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη τῆς $\rho_\nu^2 \leqslant 10^{2\nu}\alpha < (\rho_\nu+1)^2$ ἤ, ἄν θέσουμε $10^{2\nu}\alpha = \beta$, τῆς $\rho^2_\nu \leqslant \beta \leqslant (\rho_\nu+1)^2$, ἀπό τήν ὁποία σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ὁρίζεται ὁ μοναδικός φυσικός ρ_ν.

Οἱ ἀριθμοί $\alpha_\nu = \frac{\rho_\nu}{10^\nu}$ καί $\beta_\nu = \frac{\rho_\nu+1}{10^\nu}$ σχηματίζουν γιά $\nu \in \mathbb{N}$, διαστήματα $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ κιβωτισμένα, τά ὁποῖα συνεπῶς ὁρίζουν ἕναν ἀριθμό x. Ἄρα εἶναι:

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \alpha_\nu \leqslant x \leqslant \beta_\nu$$

συνεπῶς καί (§ 3.11)

$$\alpha_\nu^2 \leqslant x^2 < \beta_\nu^2 \tag{2}$$

Ἀλλά καί τά διαστήματα $[\alpha_\nu^2, \beta_\nu^2]$, ἀποδεικνύεται (1) ὅτι εἶναι κιβωτισμένα.
Τό μοναδικό κοινό στοιχεῖο αὐτῶν τῶν διαστημάτων, λόγω τῆς (1), εἶναι ὁ α, καί, λόγω τῆς (2), ὁ x^2.
Ἄρα $\mathbf{x^2 = \alpha}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ἐξίσωση λοιπόν $x^2 = \alpha$, μέ $\alpha > 0$, ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς $\sqrt{\alpha}$ (θετική τετραγωνική ρίζα) καί $-\sqrt{\alpha}$ (ἀρνητική τετραγωνική ρίζα).
2. Γιά νά εἶναι ἡ $\sqrt{\alpha}$ ρητός, πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ α νά εἶναι τετράγωνο ρητοῦ.

Διάκριση $\mathbb{Q}$ καί $\mathbb{R}$

5.11 Τά ἀξιώματα I - IX τοῦ κεφαλαίου 2 καί X, XI τοῦ κεφαλαίου 3 ἰσχύουν εἰδικότερα καί στό σύνολο $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ἀλλά τό ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ πού δεχόμαστε γιά πραγματικούς ἀριθμούς δέν ἰσχύει στό σύνολο $\mathbb{Q}$. Δηλαδή ὑπάρχει ἀκολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων ρητῶν ἀριθμῶν, ἀλλά δέν ὑπάρχει **ρητός** πού νά εἶναι κοινό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων. Πράγματι, ἄν ἴσχυε τό ἀξίωμα τοῦ κιβωτισμοῦ στό $\mathbb{Q}$, θά μπορούσαμε, ἐπαναλαμβάνοντας ὅσα εἴπαμε στήν § 5.10, νά ἀποδείξουμε ὅτι γιά **κάθε** ρητό α ὑπάρχει ρητός x τέτοιος, ὥστε $x^2 = \alpha$. Ἀλλά αὐτό δέν ἰσχύει, ἀφοῦ π.χ. ἡ ἐξίσωση $x^2 = 2$ δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{Q}$, ὅπως ἤδη ξέρουμε ἀπό τό Γυμνάσιο.
Ἡ διάκριση λοιπόν $\mathbb{Q}$ καί $\mathbb{R}$ ἀφορᾶ τίς ἰδιότητες πού προκύπτουν ὡς συνέπειες τοῦ ἀξιώματος τοῦ κιβωτισμοῦ καί πού συνεπῶς ἰσχύουν στό $\mathbb{R}$ ἀλλά ὄχι στό $\mathbb{Q}$.

ΡΙΖΕΣ ΤΑΞΕΩΣ ν

Ὁρισμός

5.12 Γενικεύοντας ὅσα εἴπαμε στήν § 5.10 θά ὀνομάσουμε **ρίζα τάξεως ν** (νιοστή ρίζα) τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ($\nu \in \mathbb{N}^*$) κάθε ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^\nu = \alpha$.

---

(1) Ἡ ἀπόδειξη παραλείπεται.

Μέ τή μέθοδο πού ἀκολουθήσαμε στήν § 5.10 μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι, γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \neq 0$, ἰσχύει τό ἑξῆς

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $\alpha \geqslant 0$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός $x \geqslant 0$ τέτοιος, ὥστε**
> $$x^{\nu} = \alpha$$

Ὁ **μή ἀρνητικός** αὐτός ἀριθμός συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Ἔτσι, ἡ $\sqrt{\alpha}$ (§ 5.10) εἶναι ἡ $\sqrt[2]{\alpha}$, ἐνῶ τό σύμβολο $\sqrt[1]{\ }$ δέ χρησιμοποιεῖται, ἀφοῦ $\alpha^1 = \alpha$ καί συνεπῶς $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$.

Τονίζουμε ὅτι τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἔχει νόημα **μόνο ὅταν** $\alpha \geqslant 0$ καί μέ αὐτή τή σημασία θά χρησιμοποιεῖται στά ἑπόμενα.

Εἰδικότερα ἐπειδή $0^{\nu} = 0$ εἶναι $\sqrt[\nu]{0} = 0$ καί συνεπῶς γιά $\alpha > 0$ ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι ἀριθμός **θετικός** (θετική νιοστή ρίζα τοῦ α).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἐπειδή π.χ. $5^3 = 125$ καί $\dfrac{25}{9} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$ θά εἶναι :
$$\sqrt[3]{125} \overset{(1)}{=} 5 \text{ καί } \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$
2. Ἐπειδή $\alpha^2 = (-\alpha)^2 = |\alpha|^2$ καί $|\alpha| \geqslant 0$, θά εἶναι $\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{(-\alpha)^2} = |\alpha|$.
3. Εἶναι $\alpha^6 = (\alpha^2)^3$, $\alpha^6 \geqslant 0$ καί $\alpha^2 \geqslant 0$. Ἄρα $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^2$.
Ἐπίσης $\alpha^6 = (\alpha^3)^2 = (-\alpha^3)^2$. Ἄρα : $\sqrt{\alpha^6} = |\alpha^3| = |\alpha|^3$.
4. Ὁμοίως $\sqrt[4]{81\alpha^4\beta^8} = \sqrt[4]{(3\alpha\beta^2)^4} = |3\alpha\beta^2| = 3|\alpha|\beta^2$,
$$\sqrt[3]{\frac{1}{8x^3}} = \frac{1}{2x}, \quad \sqrt{\frac{x^4}{2y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}\,|y|}.$$

Ἄμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ

5.13 Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα συνάγεται ἀμέσως ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, μέ $\alpha \geqslant 0$, ἔχει στό $\mathbb{R}_+$, μιά μοναδική ρίζα, τήν $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Ἄρα

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt[\nu]{\alpha} \geqslant 0 \qquad (1)$$
$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \qquad (2)$$

(1) Οἱ ρίζες τρίτης τάξεως ὀνομάζονται κυβικές.

καί ἀκόμη $\boxed{\forall\, x, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \ x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}}$ (3)

Ἐξάλλου ἀπό τό θεώρημα 7 τῆς § 3.11 προκύπτει ὅτι:

$$\boxed{\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,\quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}} \tag{4}$$

Εἰδικότερα ἐπειδή $\sqrt[\nu]{1} = 1$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\quad 0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < 1 \tag{5}$$

$$\text{καί}\quad \alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > 1 \tag{6}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι : $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$.**

Εἶναι $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{1+3-2\sqrt{3}} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 1\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} =$
$= |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1.$

2. **Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση : $A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1+x)^2}$.**

Εἶναι $A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1+x)^2} = |x-1| + |1+x|$. Ἀλλά

- ἄν $x \leqslant -1$, τότε καί $x < 1$. Ὁπότε (§ 3.4) θά ἔχουμε :

$x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow |x+1| = -x-1$
$x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| = -x+1$

Ἄρα $A = -x-1-x+1 = -2x$. Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι:

- ἄν $-1 < x \leqslant 1$, τότε $A = 2$
- ἄν $x > 1$, τότε $A = 2x$.

3. **Νά δειχθεῖ ὅτι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$.**

Εἶναι $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2 \Leftrightarrow 2+\sqrt{2} < 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 4$,
πού εἶναι ἀληθής.

4. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**

α) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x}$ **β)** $\sqrt[4]{4-x} = \sqrt[4]{1+2x}$.

α) Πρέπει νά εἶναι $x-3 \geqslant 0$ **καί** $2x \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant 3$.
Γιά $x \geqslant 3$ ὅμως ἔχουμε:

$\sqrt{x-3} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 = (\sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow x-3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$
πού ἀπορρίπτεται, ἀφοῦ $-3 < 3$.

β) Πρέπει νά εἶναι $4-x \geqslant 0$ **καί** $2x+1 \geqslant 0$ ἤ $x \leqslant 4$ **καί** $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Ὅταν ὅμως $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$, ἔχουμε

$\sqrt[4]{4-x} = \sqrt[4]{1+2x} \Leftrightarrow (\sqrt[4]{4-x})^4 = (\sqrt[4]{1+2x})^4 \Leftrightarrow 4-x = 1+2x \Leftrightarrow x = 1$
πού εἶναι λύση παραδεκτή.

Ἀσκήσεις 3, 4, 5, 6.

Ρίζα ἄλλης ρίζας

5.14 Ἔστω $\alpha \geqslant 0$ καί μ,ν δύο θετικοί φυσικοί ἀριθμοί. Ἐπειδή $\sqrt[\nu]{\alpha} \geqslant 0$, θά ὁρίζεται ἡ μ τάξεως ρίζα του, δηλαδή ὁ ἀριθμός $x = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}$. Ἀλλά τότε σύμφωνα μέ τήν (3) τῆς § 5.13 εἶναι

$$x = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} \Leftrightarrow x^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow (x^{\mu})^{\nu} = \alpha$$
$$\Leftrightarrow x^{\mu\nu} = \alpha$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$$

Δηλαδή

$$\boxed{\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}}} = \sqrt[\mu\nu]{\boldsymbol{\alpha}}} \qquad \textbf{(1)}$$

Ἐπίσης ἔχουμε γιά $\mu, \nu, k \in \mathbb{N}^*$, ἄν $\alpha^k \geqslant 0$

$$\sqrt[\mu\nu]{\boldsymbol{\alpha}^{k\nu}} = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{(\boldsymbol{\alpha}^k)^{\nu}}} = \sqrt[\mu]{\boldsymbol{\alpha}^k} \qquad \textbf{(2)}$$

Π.χ. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{8^2}$

Γινόμενο ριζῶν

5.15 Ἔστω ὅτι α,β εἶναι μή ἀρνητικοί ἀριθμοί καί $\nu \in \mathbb{N}^*$. Τότε ὁρίζονται οἱ ρίζες $\sqrt[\nu]{\alpha}$, καί $\sqrt[\nu]{\beta}$ καί εἶναι:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} \qquad \text{[δύναμη γινομένου]}$$
$$= \alpha\beta \qquad \text{[βάσει τῆς (2) τῆς § 5.13]}$$

- Ἄρα ἀπό τήν (3) τῆς § 5.13 ἔχουμε:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}}\,\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha\beta}}} \qquad \textbf{(1)}$$

- Ἀπό τήν (1), ἐπειδή εἶναι $\alpha = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}$, ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}} \qquad (2)$$

- Γενικότερα, ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$, τότε ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά ὅτι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdots\sqrt[\nu]{\alpha_\nu}=\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu} \qquad (3)$$

Ἡ (3), ὅταν $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\alpha_\nu$ δίνει:

$$\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^k=\sqrt[\nu]{\alpha^k}} \qquad (4)$$

- Ἐξάλλου, ἐπειδή

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}$$

θά εἶναι

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}} \qquad (5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{6\cdot 15}=\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5}=3\sqrt{10}$.
2. $\sqrt{57600}=\sqrt{576\cdot 100}=10\sqrt{2^6\cdot 3^2}=10\cdot 2^3\cdot 3=240$.
3. $\sqrt{\alpha^7\cdot\beta\cdot\gamma^5}=\sqrt{(\alpha^3\gamma^2)^2\cdot\alpha\beta\gamma}=\alpha^3\gamma^2\sqrt{\alpha\beta\gamma}\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+)$.
4. $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}=\sqrt[3]{5^2-(\sqrt{17})^2}=\sqrt[3]{25-17}=\sqrt[3]{8}=2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα :**

α) $\mathbf{A}=\sqrt{48}-\sqrt{8}+\sqrt{72}-\sqrt{243}$.

β) $\mathbf{B}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$

γ) $\Gamma=\sqrt[6]{\alpha}\sqrt[12]{\alpha^7}\sqrt[15]{\alpha^2}$.

α) Εἶναι :

$$A=\sqrt{4^2\cdot 3}-\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{6^2\cdot 2}-\sqrt{9^2\cdot 3}=4\sqrt{3}-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-9\sqrt{3}$$

$$=(4-9)\sqrt{3}+(6-2)\sqrt{2}=-5\sqrt{3}+4\sqrt{2}.$$

β) Είναι $B=(\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{3}((\sqrt{3})^2-1)((\sqrt{2})^2-1)=\sqrt{6}\,2\cdot 1=2\sqrt{6}$$

γ) Μετασχηματίζουμε πρῶτα τά ριζικά σέ ἄλλα ἰσοδύναμα ἴδιας τάξεως. Ἔτσι σύμφωνα μέ τήν 2 τῆς § 5.14 θά ἔχουμε:

$$\sqrt[6]{\alpha}=\sqrt[6\cdot 10]{\alpha^{1\cdot 10}}=\sqrt[60]{\alpha^{10}}\qquad \sqrt[12]{\alpha^7}=\sqrt[12\cdot 5]{\alpha^{7\cdot 5}}=\sqrt[60]{\alpha^{35}}\qquad \sqrt[15]{\alpha^2}=\sqrt[15\cdot 4]{\alpha^{4\cdot 2}}=\sqrt[60]{\alpha^{8}}.$$

Ἑπομένως (§ 5.15) ἔχουμε:

$$\sqrt[6]{\alpha}\cdot\sqrt[12]{\alpha^7}\cdot\sqrt[15]{\alpha^2}=\sqrt[60]{\alpha^{10}}\cdot\sqrt[60]{\alpha^{35}}\cdot\sqrt[60]{\alpha^{8}}=\sqrt[60]{\alpha^{53}}.$$

2. **Νά μετασχηματιστοῦν τά κλάσματα σέ ἰσοδύναμα χωρίς ριζικά στόν παρονομαστή:** $\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}},\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}$

Είναι $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta}\sqrt[3]{\beta^2}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta^3}}=\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$$

3. **Νά ἁπλοποιηθεῖ τό ἄθροισμα:** $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$

Ἔστω x τό ἄθροισμα αὐτό. Τότε:

$$x^2=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})+2\sqrt{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}$$
$$=8+2\sqrt{16-15}=8+2=10.\ \text{Ἄρα } x=\sqrt{10}$$

Ἀσκήσεις ***7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.***

Ἡ ἐξίσωση $x^\nu=\alpha$ στό $\mathbb{R}$

5.16 Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις

- $\alpha=0$. Τότε μοναδική ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ 0 ($x^\nu=0\Leftrightarrow x=0$).
- $\alpha>0$. Τότε (§ 5.12) μοναδική θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμός $\sqrt[\nu]{\alpha}$ (θετική νιοστή ρίζα τοῦ α).

  Ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι καί ὁ ἀρνητικός $-\sqrt[\nu]{\alpha}$, ἐπειδή $(-x)^\nu=x^\nu$

  Ἄν ὁ ν εἶναι περιττός, ἐπειδή $x<0\Rightarrow x^\nu<0$, ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει ἀρνητική ρίζα.

● $\alpha < 0$. Τότε ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει θετική ρίζα, ἀφοῦ $x > 0 \Rightarrow x^\nu > 0$.

Ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, δέν ἔχει οὔτε ἀρνητική ρίζα, ἀφοῦ $x^\nu = (-x)^\nu$

Ἄν ὁ ν εἶναι περιττός, ἡ ἐξίσωση γράφεται ἰσοδύναμα

$$-x^\nu = -\alpha \Leftrightarrow (-x)^\nu = -\alpha \Leftrightarrow -x = \sqrt[\nu]{-\alpha} \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}\ ^{(1)}$$

Συνοψίζουμε τά συμπεράσματα στόν πίνακα:

α	ν	Ρίζες τῆς $x^\nu = \alpha$
$\alpha = 0$		0
$\alpha > 0$	ἄρτιος	$\sqrt[\nu]{\alpha}$ καί $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
	περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$
$\alpha < 0$	ἄρτιος	—
	περιττός	$-\sqrt[\nu]{-\alpha}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ ἐξίσωση $x^2 = 64$ ($\alpha > 0$ καί ν ἄρτιος) ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς

$$\sqrt{64} = 8 \quad \text{καί} \quad -\sqrt{64} = -8.$$

2. Ἡ ἐξίσωση $x^4 = -16$ ($\alpha < 0$ καί ν ἄρτιος) δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.

3. Ἡ ἐξίσωση $x^3 = = -343$ ($\alpha < 0$ καί ν περιττός) ἔχει ρίζα τόν $-\sqrt[3]{343} = -7$.

4. Ἡ ἐξίσωση $8x^3 - 125$, πού γράφεται $x^3 = \frac{125}{8}$ ($\alpha > 0$ καί ν περιττός),

ἔχει ρίζα τόν $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά λυθεῖ ἡ διώνυμη ἐξίσωση $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0$ μέ $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, $k > \lambda$ καί $\alpha \neq 0$.

Εἶναι $\alpha x^k + \beta x^\lambda = 0 \Leftrightarrow x^\lambda\left(x^{k-\lambda} + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ἤ $x^{k-\lambda} + \frac{\beta}{\alpha} = 0$.

Ἡ τελευταία εἶναι τῆς μορφῆς $x^\nu = \alpha$.

Π.χ. $2x^5 - 16x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ἤ $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0$ ἤ $x = 2$.

(1) Στή βιβλιογραφία τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ χρησιμοποιεῖται καί γιά τήν περίπτωση περιττῆς τάξεως ρίζας ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, δηλαδή χρησιμοποιεῖται π.χ. ἡ γραφή $\sqrt[3]{-8}$ ἀντί τῆς $-\sqrt[3]{8}$.

5.17 Στή § 2.20 ἐπεκτείναμε τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως καί στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης εἶναι ἀκέραιος. Τώρα μποροῦμε νά δώσουμε νόημα καί σέ σύμβολα $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἄν $\alpha > 0$ καί μ, ν ἀκέραιοι $\neq 0$, τά ὁποῖα θά ὀνομάσουμε *«δυνάμεις μέ ρητό ἐκθέτη»*.

Ἄν ἕνα τέτοιο σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἔχει νόημα δυνάμεως τοῦ α, θά πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός (ἀφοῦ $\alpha > 0$) καί ἐπιπλέον νά ἰσχύει

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\nu} = \alpha^{\mu}$$

Συνεπῶς $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ θά εἶναι ἡ θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^{\nu} = \alpha^{\mu}$. Ἀλλά ἡ θετική ρίζα τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.
Ἐπεκτείνουμε λοιπόν τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως μέ θετική βάση θέτοντας:

$$\boxed{\textbf{γιά}\ \ \alpha > 0 \ \ \textbf{καί}\ \ \mu, \nu \in \mathbb{Z}^*, \quad \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Ἀπό τήν (2) τῆς § 5.14 προκύπτει ὅτι $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[k\nu]{\alpha^{k\mu}} = \alpha^{\frac{k\mu}{k\nu}}$, ἰδιότητα πού δικαιολογεῖ τόν ὅρο *«ρητός ἐκθέτης»*.
Ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων τοῦ θεωρήματος 14 τῆς § 2.20 ἰσχύουν καί στήν περίπτωση πού οἱ ἐκθέτες εἶναι ρητοί.

Π.χ. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu']{\alpha^{\mu'}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}} \cdot \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu'\nu}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}\alpha^{\mu'\nu}} =$

$$= \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'+\mu'\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\nu'+\mu'\nu}{\nu\nu'}} = \alpha^{\frac{\mu\nu'}{\nu\nu'} + \frac{\mu'\nu}{\nu\nu'}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'}}$$

Ἀσκήσεις 18, 19, 20, 21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιούς ρητούς παριστάνουν οἱ ἀριθμοί :
   α) 0,3232...32... **β)** 2,34545...45... **γ)** −32,52699...9...

2. Νά βρεθοῦν οἱ προσεγγίσεις $\frac{1}{10}$ τοῦ ἀριθμοῦ x, ἄν
   α) $x^2 = 7$ **β)** $x^3 = 5$

3. Νά βρεθοῦν οἱ ρίζες:
   α) $\sqrt[3]{216}$, **β)** $\sqrt[4]{625}$, **γ)** $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}$, **δ)** $\sqrt{0{,}0009}$, **ε)** $\sqrt[3]{\frac{64x^6y^9}{125}}$

4. Νά βρεθοῦν γιά $x \in \mathbb{R}$ οἱ τιμές τῶν:

α) $A = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ β) $B = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(3-x)^2}$

5. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt{36x^4 + 12x^2 + 1}$, β) $\sqrt{\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{9}{25}}$, γ) $\sqrt{\dfrac{x^4}{25y^2} + 1 + \dfrac{25y^2}{4x^4}}$

6. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1}$ γ) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

β) $4 - \sqrt{x-2} = 0$ δ) $\sqrt{-3x+5} = \sqrt{x-7}$

7. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}}$ β) $\sqrt[9]{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^3}$ γ) $\sqrt[8]{(\sqrt{5} - 2)^4}$

8. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $\sqrt{19600}$ β) $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 343}$ γ) $\sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 3125}$

9. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8}$ β) $\sqrt{108x^5y^6}$ γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$ δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}}$

10. Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:

α) $\sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \sqrt[15]{\alpha^4}$ β) $\sqrt[12]{\alpha^7} \cdot \sqrt[20]{\alpha^3} \cdot \sqrt[15]{\alpha^2}$ γ) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{6}}$

11. Νά βρεθοῦν τά πηλίκα:

α) $\sqrt[12]{\alpha^5} : \sqrt[4]{\alpha}$ β) $\sqrt[9]{\alpha^8} : \sqrt[6]{\alpha^5}$ γ) $\sqrt[15]{3^{10}} : \sqrt[10]{3^3}$

12. Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$ γ) $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54}$

β) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50}$ δ) $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500}$

13. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ριζικά:

α) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ β) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ γ) $\sqrt{54 + 14\sqrt{5}}$

14. Νά μετασχηματιστοῦν τά παρακάτω κλάσματα σέ ἄλλα ἰσοδύναμα μέ ρητό παρονομαστή

α) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ β) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ γ) $\dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}$ δ) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

15. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{3}}$ β) $(2 - \sqrt{3})^{-3} + (2 + \sqrt{3})^{-3}$

16. Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

17. Ἔστω α, α', β, β' ρητοί ἀριθμοί. Ἄν οἱ β, β' εἶναι θετικοί, ἀλλά ὄχι τετράγωνα ρητῶν, νά δειχθεῖ ὅτι

$$\alpha+\sqrt{\beta}=\alpha'+\sqrt{\beta'} \Rightarrow \alpha=\alpha' \ \textit{καί} \ \beta=\beta'$$

18. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $27^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{2,5}$ β) $(6,25)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

19. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τοῦ

$$A=\left[\alpha^{-\frac{3}{2}}\beta\,(\alpha\beta^{-2})^{-\frac{1}{2}}(\alpha^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3 \quad \text{γιά} \quad \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{καί} \quad \beta=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

20. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha+\beta$

β) $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)=\alpha-\beta$

21. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $\left(7^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)$

β) $-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)$

γ) $2\sqrt{6}\left(3^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}+12^{\frac{1}{2}}\right)$

δ) $\left(5\cdot 6^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(5\cdot 6^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)^2$

1. **α)** Ὁ ζητούμενος ρητός προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση $32+x=100x$, δηλαδή εἶναι ὁ $x=\frac{32}{99}$.

β) Ὁμοίως ἀπό τήν ἐξίσωση (Βλ. Μαθηματικά Β' Γυμνασίου)

$1000x-10x=2345-23$ καί εἶναι ὁ $\frac{129}{55}$.

γ) $-32{,}527$.

2. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν Ἐφαρμογή τῆς § 5.5 καί βρίσκουμε ὡς προσεγγίσεις:

α) 2,6 (μέ ἔλλειψη) καί 2,7 (μέ ὑπεροχή).

β) Ὁμοίως 1,7 καί 1,8.

3. **α)** 6 **β)** 5 **γ)** $\frac{5}{8}$ **δ)** 0,03 **ε)** $\frac{4x^2y^3}{5}$

4. **α)** Εἶναι : $A=\begin{cases} 1, & \text{ἄν } x>0 \\ -1, & \text{ἄν } x<0 \end{cases}$

β) Ἄν $x \leqslant 1$, εἶναι $B=-2x+4$

Ἄν $1<x\leqslant 3$, εἶναι $B=2$

Ἄν $x>3$, εἶναι $B=2x-4$.

5. **α)** $6x^2+1$ **β)** $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{5}$ **γ)** $\left|\frac{x^2}{5y}+\frac{5y}{2x^2}\right|$

6. **α)** $x=4$ **β)** $x=18$ **γ)** Ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση. **δ)** Ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση.

7. **α)** $\sqrt{2}$ **β)** $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **γ)** $\sqrt{\sqrt{5}-2}$

8. **α)** 140 **β)** 84 **γ)** 30

9. **α)** $2|\alpha|\beta^2$ **β)** $6x^2|y|^3\sqrt{3x}$ **γ)** $\sqrt[20]{3^{13}}$ **δ)** $\sqrt[12]{\alpha^2|\beta|}$

10. **α)** $\sqrt[3]{\alpha^2}$ **β)** $\sqrt[15]{\alpha^{13}}$ **γ)** $\sqrt[30]{2^9\cdot 3^4}$

11. **α)** $\sqrt[6]{\alpha}$ **β)** $\sqrt[18]{\alpha}$ **γ)** $\sqrt[30]{3^{11}}$

12. **α)** $3\sqrt{2}$ **β)** $2\sqrt{2}$ **γ)** $-5\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{3}$ **δ)** $8\sqrt{5}$

13. **α)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **β)** $\sqrt{5}-2$ **γ)** $7+\sqrt{5}$

14. **α)** $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$ **β)** $2-\sqrt{3}$ **γ)** $-2x^2+2x\sqrt{x^2+1}-1$ **δ)** $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$

15. α) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ β) 52

16. Ἂν x εἶναι ἡ ζητούμενη διαφορά, βρίσκουμε ὅτι $x^2 = 4$ (Βλ. § 5.15 Ἐφ. 3).

17. Νά ὑψώσετε στό τετράγωνο τά μέλη τῆς $\alpha - \alpha' + \sqrt{\beta'} = \sqrt{\beta}$ καί νά λάβετε ὑπόψη τήν παρατήρηση 2 τῆς § 5.10.

18. α) 1 β) $10\sqrt{10}$.

19. Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε $A = \alpha^{-4}\beta^{6}$, ὁπότε γιά $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καί $\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

εἶναι $A = 1$.

20. α) Θέτουμε $\alpha^{\frac{1}{3}} = k$, $\beta^{\frac{1}{3}} = \lambda$ κτλ.

β) Ὁμοίως.

21. α) $x-1$ β) $-2\alpha\sqrt{\beta} + 2\beta\sqrt{\alpha}$ γ) $18\sqrt{2} - 24$ δ) $20\sqrt{30}$.

6 ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στό κεφάλαιο αὐτό εἰσάγονται οἱ βασικές ἔννοιες τῆς Τριγωνομετρίας.

Μέ βάση ὅσα ἀναφέρονται στό προηγούμενο κεφάλαιο γιά τή μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων καί τόξων ἤ γωνιῶν, τά ὁποῖα ἐδῶ ἐπιτρέπουν θεωρητικά τόν ὁρισμό τῶν συστημάτων ἀναφορᾶς, τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τόξου καί τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς κυκλικῆς συναρτήσεως.

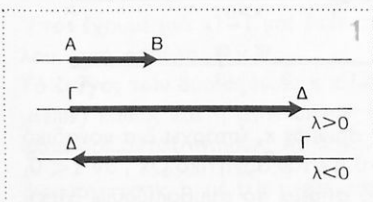
Ὁ ὁρισμός τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων στηρίζεται στήν «κανονική» ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbb{R}$ στόν τριγωνομετρικό κύκλο, τῆς ὁποίας χαρακτηριστικό εἶναι ὅτι διατηρεῖ τό μῆκος. Ἔτσι ὑπογραμμίζεται τό γεγονός ὅτι οἱ κυκλικές συναρτήσεις εἶναι συναρτήσεις πραγματικῆς μεταβλητῆς, ἐνῶ οἱ βασικές σχέσεις ἀνάμεσά τους καθώς καί τά πρῶτα συμπεράσματα ἀπό τή μελέτη τους (πρόσημο, τιμές σέ ὁρισμένα x κτλ.) παρουσιάζονται ὡς ἄμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ.

Ἡ γενικότητα τῆς ἔννοιας τῆς κυκλικῆς συναρτήσεως, σέ σύγκριση μέ τή γνωστή ἀπό τό Γυμνάσιο ἔννοια τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ ὀξείας γωνίας, ὑπογραμμίζεται τόσο μέ τή θεωρητική συσχέτισή τους ὅσο καί μέ τίς ἐφαρμογές. Αὐτή ἄλλωστε ἡ γενικότητα διέπει καί τά θέματα πού ἀκολουθοῦν: τήν εὕρεση τῶν βασικῶν σχέσεων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τόξων, τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα εἶναι πολλαπλάσιο τεταρτοκυκλίου, καθώς καί τή μελέτη τῶν βασικῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Ἀλγεβρική τιμή διανύσματος

6.1 Ὅπως εἶναι γνωστό, δύο **παράλληλα** διανύσματα εἶναι ἤ **ὁμόρροπα** (ἔχουν τήν ἴδια φορά), ἤ **ἀντίρροπα** (ἔχουν ἀντίθετη φορά). Ὅταν ἡ φορά ἑνός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ χαρακτηριστεῖ (αὐθαίρετα) ὡς **θετική,** ὁπότε ἡ φορά τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἡ **ἀρνητική,** τότε καί ἡ φορά κάθε ἄλλου διανύσματος πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς εὐθείας AB εἶναι καθορισμένη. Λέμε ὅτι ἡ εὐθεία AB (ὅπως καί κάθε παράλληλός της) εἶναι **προσανατολισμένη.** Συνήθως, τά σημεῖα A καί B ἐκλέγονται ἔτσι, ὥστε τό τμῆμα AB νά λαμβάνεται ὡς μονάδα μετρήσεως. Τότε τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, μέ θετική φορά, λέγεται **μοναδιαῖο.**



Ὅταν δοθοῦν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καί ἕνας πραγματικός ἀριθμός λ, ὁρίζουμε ὡς **γινόμενο** $\lambda\overrightarrow{AB}$, τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τό ὁποῖο εἶναι (σχ. 1):

- ὁμόρροπο τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἄν $\lambda > 0$
- ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἄν $\lambda < 0$ καί τέτοιο, ὥστε (§ 5.7) $\Gamma\Delta = |\lambda| AB$.

Ἀντιστρόφως, ὅταν δοθοῦν δύο παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε ὁρίζεται ἕνας μοναδικός πραγματικός ἀριθμός λ τέτοιος, ὥστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$. Πράγματι, ἔστω k ὁ λόγος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΓΔ πρός τό AB (§ 5.8). Τότε $\Gamma\Delta = k\,AB$ καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα:

- ἄν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ὁμόρροπα, τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = k\,\overrightarrow{AB}$ καί $\lambda = k$
- ἄν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίρροπα, τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -k\,\overrightarrow{AB}$ καί $\lambda = -k$.

Ὁ ἀριθμός λ λέγεται λόγος τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ πρός τό $\overrightarrow{AB}$.

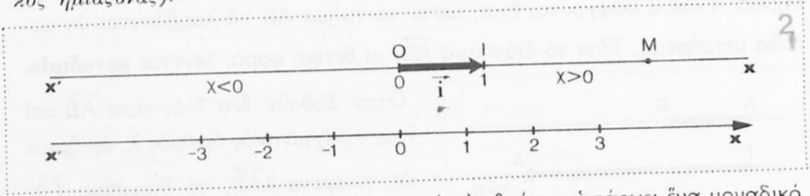
Ὅταν τό $\overrightarrow{AB}$ εἶναι **μοναδιαῖο,** τότε ὁ λόγος λ λέγεται **ἀλγεβρική τιμή** τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί σημειώνεται $\mathbf{\overline{\Gamma\Delta}}$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἰδιότητες (1), (2) καί (3) τῆς § 5.7 ἰσχύουν καί γιά τό γινόμενο διανύσματος ἐπί πραγματικό ἀριθμό. Ἀποδεικνύονται ἐπίσης οἱ ἀκόλουθες βασικές ἰδιότητες:

1. Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο παράλληλων διανυσμάτων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν.
2. Ὁ λόγος δύο παράλληλων διανυσμάτων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν (ὡς πρός κοινό μοναδιαῖο διάνυσμα).

Ἄξονας

6.2 Ἕνας **ἄξονας** μέ **ἀρχή** O εἶναι μιά εὐθεία x΄x στήν ὁποία ἔχει ὁριστεῖ ἐκτός ἀπό τό σημεῖο O καί ἕνα ἄλλο σημεῖο I, ὥστε τό διάνυσμα $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ νά λαμβάνεται ὡς **μοναδιαῖο.** Ἔτσι σέ κάθε σημεῖο M τοῦ ἄξονα ἀντιστοιχίζεται ἡ ἀλγεβρική τιμή $x=\overline{OM}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, πού ὀνομάζεται **τετμημένη** τοῦ M. Ἡ τετμημένη τοῦ O εἶναι μηδέν καί τοῦ I εἶναι 1. Στά σημεῖα τοῦ ἡμιάξονα Ox, ὁ ὁποῖος περιέχει τό I, ἀντιστοιχοῦν θετικές τετμημένες (*θετικός ἡμιάξονας*), ἐνῶ στά σημεῖα τοῦ Ox΄ ἀρνητικές (*ἀρνητικός ἡμιάξονας*).

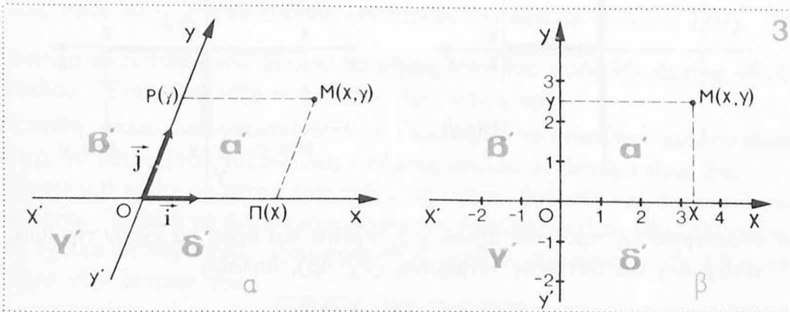


Ἀντιστρόφως, ἄν δοθεῖ ἕνας πραγματικός ἀριθμός x, ὑπάρχει ἕνα μοναδικό σημεῖο M στό θετικό ἡμιάξονα Ox, ἄν $x>0$ ἤ στόν ἀρνητικό Ox΄, ἄν $x<0$, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι x. Αὐτό τό σημεῖο τό συμβολίζουμε **M(x).** Ἔτσι ἔχουμε μιά «1–1 καί ἐπί» ἀπεικόνιση τοῦ ἄξονα x΄x, ὡς σημειοσυνόλου, στό ℝ. Ὅταν δίνεται τό σημεῖο O καί τό μοναδιαῖο διάνυσμα $\vec{i}$, τότε ὁρίζεται πλήρως ὁ ἄξονας x΄x μέ ἀρχή O, καθώς καί ἡ ἀπεικόνισή του στό ℝ, πού περιγράψαμε προηγουμένως. Θά λέμε τότε ὅτι ἔχουμε ὁρίσει ἕνα **σύστημα ἀναφορᾶς** στήν εὐθεία x΄x, πού τό γράφουμε $(O,\vec{i})$ ἤ ἁπλά μέ τό σύμβολο Ox, τοῦ **θετικοῦ** ἡμιάξονα. (Τότε τό $\vec{i}$ ὑπονοεῖται, ὅπως π.χ. ὅταν ἔχει προκαθοριστεῖ ἡ μονάδα μήκους).

Καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς στό ἐπίπεδο

6.3 Ἔστω x΄x, y΄y δύο τεμνόμενοι ἄξονες μέ κοινή ἀρχή O καί μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ ἀντιστοίχως καί M ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τους (σχ. 3α). Ἀπό τό M φέρνουμε παράλληλες πρός τούς ἄξονες y΄y, x΄x, οἱ ὁποῖες τέμνουν τούς ἄξονες x΄x, y΄y ἀντιστοίχως στά σημεῖα Π καί P. Ἄν x εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ Π στόν x΄x καί y ἡ τετμημένη τοῦ P στόν y΄y, τότε στό σημεῖο M ἀντιστοιχίζεται ἕνα συγκεκριμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό (x, y).

Οἱ x, y λέγονται **συντεταγμένες** καί εἰδικότερα ὁ x **τετμημένη** καί ὁ y **τεταγμένη** τοῦ σημείου M.
Ἀντιστρόφως σέ κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν (x, y) ἀντιστοιχίζεται ἕνα μοναδικό σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μέ συντεταγμένες x, y, τό σημεῖο τομῆς δύο εὐθειῶν : Ἐκείνης πού ἄγεται ἀπό τό σημεῖο Π(x) τοῦ ἄξονα x′x παραλλήλως πρός τόν ἄξονα y′y καί ἐκείνης πού ἄγεται ἀπό τό σημεῖο P(y) τοῦ y′y παραλλήλως πρός τόν x′x. Αὐτό τό σημεῖο συμβολίζεται **M(x, y).**



Ἔτσι ἔχουμε μιά «1—1 καί ἐπί» ἀπεικόνιση τοῦ ἐπιπέδου, ὡς σημειοσυνόλου, στό σύνολο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Τό ζεῦγος τῶν δύο ἀξόνων x′x (*ἄξονας τετμημένων*) καί y′y (*ἄξονας τεταγμένων*) καθώς καί ἡ ἀπεικόνιση τοῦ ἐπιπέδου στό $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ πού περιγράψαμε ὁρίζονται πλήρως, ἄν δοθοῦν ἡ κοινή τους ἀρχή O καί τά μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, μέ $\vec{i} \nparallel \vec{j}$. Θά λέμε τότε ὅτι ἔχουμε ὁρίσει ἕνα **καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς** στό ἐπίπεδο, πού τό γράφουμε $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ἤ Oxy (ὅταν π.χ. ἔχει προκαθοριστεῖ ἡ μονάδα μήκους).
Ἔστω Oxy ἕνα καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς. Τό σύνολο τῶν σημείων M(x, y) γιά τά ὁποῖα εἶναι:

- $x = 0$, εἶναι ἡ εὐθεία y′y
- $y = 0$, εἶναι ἡ εὐθεία x′x.

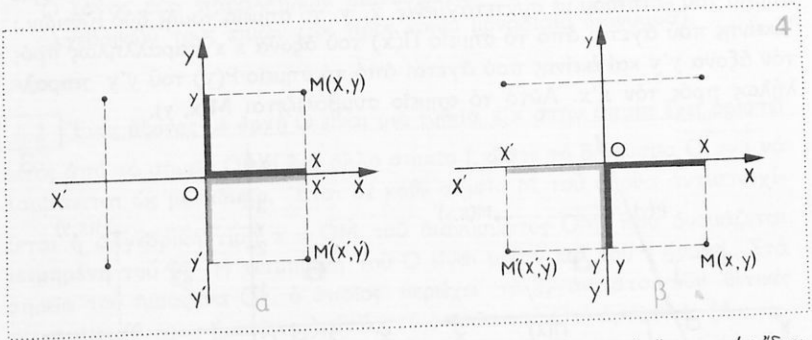
Ἐξάλλου τά σύνολα τῶν σημείων M(x, y) γιά τά ὁποῖα ($x > 0$ **καί** $y > 0$), ($x < 0$ **καί** $y > 0$), ($x < 0$ **καί** $y < 0$), ($x > 0$ **καί** $y < 0$), ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **α′, β′, γ′, δ′ τεταρτημόρια.**

Ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς

6.4 Ἕνα καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς τοῦ ὁποίου οἱ ἄξονες τέμνονται καθέτως καί τά μοναδιαῖα διανύσματά τους ὁρίζονται ἀπό ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα λέγεται **ὀρθοκανονικό** (σχ. 3β).
Ἔστω Oxy ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς καί M(x, y), M′(x′, y′) δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Γιά νά εἶναι τά σημεῖα αὐτά:

● συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα x′x, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν τήν ἴδια τετμημένη καί ἀντίθετες τεταγμένες (σχ. 4α), δηλαδή

$$x = x' \quad \textbf{καί} \quad y = -y'$$



● συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα y′y, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν τήν ἴδια τεταγμένη καί ἀντίθετες τετμημένες (σχ. 4β), δηλαδή

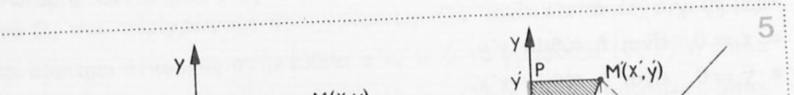
$$x = -x' \quad \textbf{καί} \quad y = y'$$

● συμμετρικά ὡς πρός τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχουν ἀντίθετες τετμημένες καί ἀντίθετες τεταγμένες (σχ. 5α), δηλαδή

$$x = -x' \quad \textbf{καί} \quad y = -y$$

● συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Ox, Oy, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν ἰσότητα τῶν ὀρθογώνιων τριγώνων ΟΠΜ καί ΟΡ′Μ′ (σχ. 5β), πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ τετμημένη τοῦ καθενός νά εἶναι ἴση μέ τήν τεταγμένη τοῦ ἄλλου, δηλαδή

$$x = y' \quad \textbf{καί} \quad y = x'$$



Σημείωση

Στά ἑπόμενα, ὅπου ἀναφερόμαστε σέ σύστημα ἀναφορᾶς χωρίς ἄλλη διευκρίνιση, θά ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι ὀρθοκανονικό.

Μονάδες μετρήσεων τόξων (γωνιῶν)

6.5 Ὡς μονάδες γιά τή μέτρηση τῶν τόξων ἐκτός ἀπό τή **μοίρα** (1^0), πού εἶναι τό $\frac{1}{360}$ τοῦ κύκλου, χρησιμοποιοῦνται καί ὁ **βαθμός** (grade, 1^g), ἴσος πρός τό $\frac{1}{400}$ τοῦ κύκλου, καί κυρίως τό **ἀκτίνιο** (radian, 1^{rad}). Τό ἀκτίνιο εἶναι τόξο, τοῦ ὁποίου τό **μῆκος** εἶναι ἴσο πρός τήν ἀκτίνα ρ τοῦ κύκλου. Ἔτσι, ἕνα τόξο **α ἀκτινίων** ἔχει μῆκος **αρ.**

Ἐπειδή, ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τή Γεωμετρία, τό μῆκος τοῦ κύκλου εἶναι 2πρ, τό μέτρο (τοῦ τόξου) ἑνός πλήρους κύκλου σέ ἀκτίνια εἶναι 2π.

Ἔστω μ,β καί α τά μέτρα ἑνός τόξου σέ μοῖρες, βαθμούς καί ἀκτίνια ἀντιστοίχως. Ἐπειδή τά ἀντίστοιχα μέτρα τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι 180, 200 καί π, θά ἔχουμε ὡς λόγο τοῦ τόξου πρός τό ἡμικύκλιο, σύμφωνα μέ τήν § 5.9, τό λόγο τῶν μέτρων τους:

$$\boxed{\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}} \qquad (1)$$

Οἱ τύποι (1) χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἀλλαγή τῆς μονάδας μετρήσεως. Ἔτσι π.χ. ἕνα τόξο 18^0 εἶναι $\frac{18\pi}{180} = \frac{\pi}{10}^{rad}$ ἤ $\frac{18 \cdot 200}{180} = 20^g$.

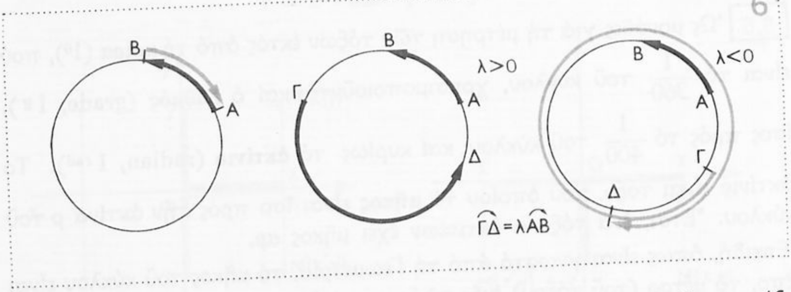
Ὡς μέτρο μιᾶς γωνίας ὁρίζεται, ὅπως εἶναι γνωστό, τό μέτρο τοῦ τόξου στό ὁποῖο βαίνει ἡ γωνία, ὅταν αὐτή καταστεῖ ἐπίκεντρη.

Ἀλγεβρική τιμή (προσανατολισμένου) τόξου

6.6 Ἄν Α καί Β εἶναι σημεῖα κύκλου, ὑπάρχουν ἄπειρα τόξα μέ ἄκρα Α καί Β. Ἀπό ἕνα συγκεκριμένο τόξο $\widehat{AB}$, π.χ. ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχεῖ σέ κυρτή ἐπίκεντρη γωνία καί πού εἶναι μοναδικό (ὅταν τά Α καί Β δέν εἶναι ἀντιδιαμετρικά) ὁρίζονται δύο τόξα ἀντίθετης φορᾶς. Τό $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$ πού ἔχει ἀρχή τό Α καί πέρας τό Β καί τό $\overset{\frown}{\mathbf{BA}}$ πού ἔχει ἀρχή τό Β καί πέρας τό Α. Τά τόξα αὐτά, ὅπως καί κάθε τόξο πού ἔχει ἀρχή καί πέρας, λέγονται **προσανατολισμένα**.

Ὅταν ἡ φορά τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ χαρακτηριστεῖ (αὐθαίρετα) ὡς **θετική,** ὁπότε ἡ φορά τοῦ $\overset{\frown}{BA}$ εἶναι **ἀρνητική,** τότε ἡ φορά κάθε ἄλλου τόξου προσανατολισμένου εἶναι καθορισμένη. Λέμε τότε ὅτι ὁ κύκλος εἶναι **προσανατολισμένος.**

Ἄν τά Α καί Β ἔχουν ἐκλεγεῖ ἔτσι, ὥστε τό $\overset{\frown}{AB}$ νά εἶναι ἡ μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων, τότε τό ἀντίστοιχο προσανατολισμένο τόξο θετικῆς φορᾶς λέγεται **μοναδιαῖο.**



- Ὡς **γινόμενο** ἑνός τόξου $\overrightarrow{AB}$ ἐπί πραγματικό ἀριθμό λ ὁρίζεται τόξο *ὁμόρροπο*, (ἄν $λ > 0$) ἤ *ἀντίρροπο* (ἄν $λ < 0$), τοῦ $\overrightarrow{AB}$ μέ μέτρο $|λ|\widehat{AB}$.
- Ἐξάλλου, ἄν δοθοῦν δύο τόξα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{Γ\Delta}$ τοῦ κύκλου, ἀποδεικνύεται, ὅπως καί στήν § 6.1, ὅτι ὑπάρχει ἕνας μοναδικός ἀριθμός λ τέτοιος, ὥστε $\overrightarrow{Γ\Delta} = λ\,\overrightarrow{AB}$. Ὁ ἀριθμός λ λέγεται **λόγος** τοῦ $\overrightarrow{Γ\Delta}$ πρός τό $\overrightarrow{AB}$. Ἄν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι μοναδιαῖο τόξο, τότε ὁ λ λέγεται **ἀλγεβρική τιμή** τοῦ $\overrightarrow{Γ\Delta}$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἰδιότητες (1), (2), (3) τῆς § 5.7 ἰσχύουν καί γιά τό γινόμενο προσανατολισμένου τόξου ἐπί πραγματικό ἀριθμό.

Ἀποδεικνύονται ἀκόμη οἱ ἰδιότητες:

1. Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο προσανατολισμένων τόξων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν.
2. Ὁ λόγος δύο προσανατολισμένων τόξων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀλγεβρικῶν τους τιμῶν (ὡς πρός κοινό μοναδιαῖο τόξο).

Τριγωνομετρικός κύκλος

6.7 Στά ἑπόμενα ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει καθοριστεῖ ἡ μονάδα γιά τή μέτρηση τοῦ μήκους εὐθύγραμμων τμημάτων ἤ καί τόξων.

Ἔστω **C** ἕνας προσανατολισμένος κύκλος μέ ἀκτίνα ἴση μέ τή μονάδα μήκους (μοναδιαῖος), στόν ὁποῖο ἐκλέγουμε (αὐθαιρέτως) ἕνα σημεῖο A.

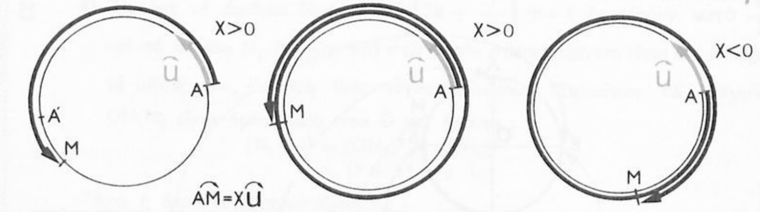
Ὁ **C** λέγεται **τριγωνομετρικός** κύκλος μέ **ἀρχή** τό A. Ἄν $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ εἶναι τό μοναδιαῖο τόξο στόν **C**, τότε γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x, ὁρίζεται τό τόξο $\overrightarrow{AM} = x\cdot\overrightarrow{\mathbf{u}}$, δηλαδή τό προσανατολισμένο τόξο μέ ἀρχή A, τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρική τιμή εἶναι x (σχ. 7).

Ἔτσι ὁρίζεται μιά ἀπεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbf{C}$, μέ τήν ὁποία σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$

ἀντιστοιχίζεται τό πέρας τοῦ παραπάνω τόξου $\overset{\frown}{AM}$. Ἡ ἀπεικόνιση ἐξαρτᾶται φυσικά ἀπό τήν ἐκλογή τῆς μονάδας μετρήσεως τῶν τόξων. Ἔτσι, τό σημεῖο A', ἀντιδιαμετρικό τοῦ A (σχ. 7), εἶναι εἰκόνα τοῦ ἀριθμοῦ:

- 180, ἄν ὡς μονάδα λαμβάνεται ἡ μοίρα
- 200, ἄν ὡς μονάδα λαμβάνεται ὁ βαθμός
- π, ἄν ὡς μονάδα λαμβάνεται τό ἀκτίνιο.

7



Ἐπειδή ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνός τόξα πού ἔχουν ἀρχή τό A καί πέρας τό M, θά ὑπάρχουν καί περισσότεροι τοῦ ἑνός πραγματικοί ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μέ τήν f ἀπεικονίζονται στό σημεῖο M. Ἄρα ἡ f εἶναι ἀπεικόνιση «ἐπί» ἀλλά ὄχι «1—1».

Κανονική ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbb{R}$ στόν C

6.8 Τήν ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbb{R}$ στόν τριγωνομετρικό κύκλο **C**, πού περιγράψαμε στήν § 6.7, θά τή λέμε **κανονική,** ὅταν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων λαμβάνεται τό ἀκτίνιο. Τό χαρακτηριστικό τῆς κανονικῆς ἀπεικονίσεως, πού θά συμβολίζουμε μέ **φ**, εἶναι ὅτι κάθε πραγματικός ἀριθμός x ἀπεικονίζεται στό πέρας τόξου x ἀκτινίων, τοῦ ὁποίου δηλαδή τό μῆκος εἶναι $|x|$. Ἔτσι οἱ ἀριθμοί $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, δηλαδή οἱ ἀριθμοί $k.2\pi$ μέ $k \in \mathbb{Z}$, ἀπεικονίζονται ὅλοι στό σημεῖο A.

Γενικότερα, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται[1] στό M, τότε ὁ ἀριθμός $x' = x + k \cdot 2\pi$ ἀπεικονίζεται στό πέρας τόξου πού εἶναι ἄθροισμα (§ 6.6, Ἰδιοτ. 1) τοῦ $\overset{\frown}{AM}$ καί k κύκλων, δηλαδή στό ἴδιο σημεῖο M.

Ἀντιστρόφως, ἔστω x καί x' δύο πραγματικοί ἀριθμοί μέ κοινή εἰκόνα τό σημεῖο M. Τότε τά δύο τόξα $\overset{\frown}{AM}$ μέ ἀλγεβρικές τιμές x καί x' θά διαφέρουν κατά ἀκέραιο ἀριθμό κύκλων. Ἄρα οἱ ἀριθμοί x καί x' διαφέρουν κατά $k.2\pi$ ἤ $2k\pi$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι γιά νά ἀπεικονίζονται μέ τήν φ

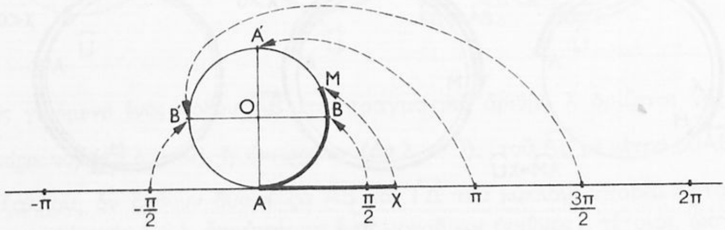
(1) Στά ἑπόμενα ὅπου ἀναφερόμαστε σέ ἀπεικόνιση, χωρίς ἄλλη διευκρίνιση, θά ἐννοοῦμε τήν **κανονική** ἀπεικόνιση φ.

δύο ἀριθμοί x, x′ στό ἴδιο σημεῖο $M \in \mathbb{C}$, πρέπει καί ἀρκεῖ νά διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ 2π. Δηλαδή

$$M = \varphi(x) = \varphi(x') \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z},\ \ x' = x + 2k\pi$$

Μιά ἐποπτική παράσταση τῆς κανονικῆς ἀπεικονίσεως φ δίνεται μέ τό σχῆμα 8. Στόν ἄξονα μέ ἀρχή Α, πού ἐφάπτεται στόν τριγωνομετρικό κύκλο $\mathbb{C}$, ἔχει ἀπεικονιστεῖ τό $\mathbb{R}$, ἔτσι ὥστε ἡ φ «ὑλοποιεῖται», ἄν κάθε ἡμιάξονας «περιτυλιχτεῖ» γύρω ἀπό τόν $\mathbb{C}$.

8



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ὁ ἀριθμός π ἀπεικονίζεται στό Α′, ἀντιδιαμετρικό τοῦ Α. Ἄρα ὅλοι οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ὅλα τά περιττά πολλαπλάσια τοῦ π καί μόνο αὐτά, ἀπεικονίζονται στό Α′.
   Ἐπίσης, ὅπως εἴδαμε, οἱ ἀριθμοί $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή τά ἄρτια πολλαπλάσια τοῦ π, ἀπεικονίζονται στό Α.

2. Ὁ ἀριθμός $\frac{\pi}{2}$ ἀπεικονίζεται στό σημεῖο Β, πού εἶναι τό μέσο τοῦ θετικοῦ ἡμικυκλίου $\overset{\frown}{AA'}$. Ἄρα ἀπεικονίζονται στό Β ὅλοι οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Ὁ ἀριθμός $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\text{ἤ ὁ } -\frac{\pi}{2}\right)$ ἀπεικονίζεται στό Β′, ἀντιδιαμετρικό τοῦ Β. Ἄρα στό Β′ ἀπεικονίζονται ὅλοι οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Σημείωση

Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως τόξων ληφθεῖ ἡ μοίρα (βαθμός), τότε ὅλα τά παραπάνω συμπεράσματα ἰσχύουν, ἀρκεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ὁ π μέ 180 (ἤ 200).
Π.χ. οἱ ἀριθμοί k.360+90 (ἤ k.400+100) ἀπεικονίζονται στό σημεῖο Β.

1. **Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τῶν σημείων τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου στά ὁποῖα ἀπεικονίζονται οἱ ἀριθμοί : α) $2k\pi+\theta$ καί $(2k+1)\pi+\theta$.**

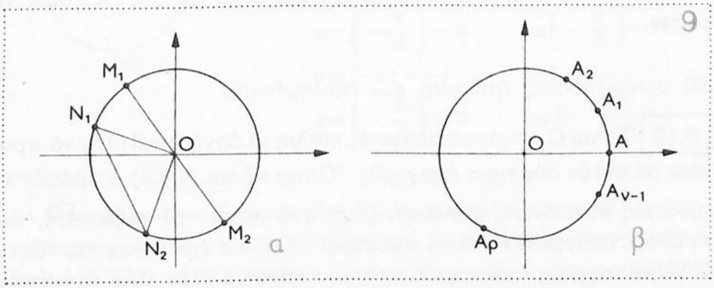
β) $2k\pi+\theta$ καί $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+\theta$.

α) Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί $2k\pi+\theta$ καί $(2k+1)\pi+\theta$ διαφέρουν κατά π, τά σημεῖα M_1, M_2 στά ὁποῖα αὐτοί ἀπεικονίζονται (σχ. 9α) θά εἶναι ἄκρα ἑνός τόξου μέ μῆκος π, δηλαδή θά εἶναι ἀντιδιαμετρικά. Ἑπομένως ἡ ἀπόστασή τους θά εἶναι ἴση μέ 2.

β) Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί $2k\pi+\theta$ καί $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+\theta$ διαφέρουν κατά $\frac{\pi}{2}$ καί τά σημεῖα N_1, N_2 (σχ. 9α) στά ὁποῖα ἀπεικονίζονται εἶναι ἄκρα τόξου μέ μῆκος $\frac{\pi}{2}$, δηλαδή ἑνός τεταρτοκυκλίου. Ἑπομένως τό τρίγωνο ON_1N_2 εἶναι ὀρθογώνιο στό O καί ἔχουμε :

$$(N_1N_2)^2 = (ON_1)^2 + (ON_2)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασή τους εἶναι $\sqrt{2}$.



2. **Ποιῶν ἀριθμῶν οἱ εἰκόνες πάνω στόν τριγωνομετρικό κύκλο εἶναι κορυφές κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου μιά κορυφή εἶναι ἡ ἀρχή A τοῦ κύκλου.**

Ἔστω ὅτι τό κανονικό πολύγωνο ἔχει ν πλευρές. Τότε οἱ κορυφές του χωρίζουν τό μοναδιαῖο κύκλο σέ ν ἴσα τόξα μέ μῆκος $\frac{2\pi}{\nu}$. Ἄρα (σχ. 9β)

στό	$A = A_0$	ἀπεικονίζεται	ὁ	ἀριθμός	0
στό	A_1	»	»	»	$\frac{2\pi}{\nu}$
»	A_2	»	»	»	$2\cdot\frac{2\pi}{\nu}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	A_ρ	»	»	»	$\rho\cdot\frac{2\pi}{\nu}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	$A_{\nu-1}$	»	»	»	$(\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}$

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί εἶναι τῆς μορφῆς $2k\pi+\rho\frac{2\pi}{\nu}$, μέ $k\in\mathbb{Z}$ καί $\rho = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$.

Ἀσκήσεις 1, 2, 3.

Σύστημα ἀναφορᾶς προσαρτημένο στόν C

6.9 Μέ τόν τριγωνομετρικό κύκλο C, πού ἔχει ἀρχή τό σημεῖο A, συνδέεται ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς Oxy (σχ. 10), πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

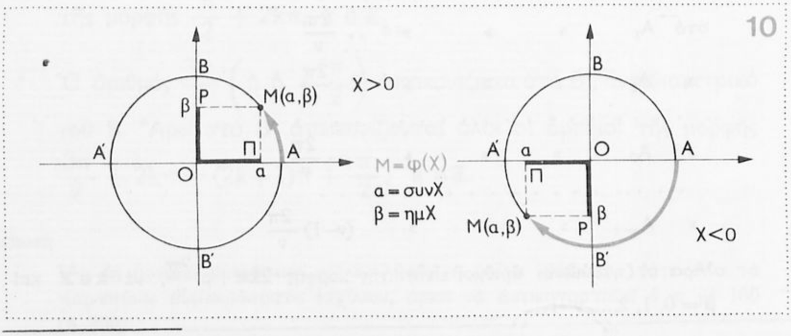
- Ἡ ἀρχή O εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου.
- Τό μοναδιαῖο διάνυσμα στόν ἄξονα x′x εἶναι τό $\overrightarrow{OA}$.
- Τό μοναδιαῖο διάνυσμα στόν ἄξονα y′y εἶναι τό $\overrightarrow{OB}$, ὅπου B εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ $\frac{\pi}{2}$ (κατά τήν κανονική πάντοτε ἀπεικόνιση φ).

Θά λέμε ὅτι τό Oxy εἶναι τό *προσαρτημένο* στόν τριγωνομετρικό κύκλο σύστημα ἀναφορᾶς.
Ὁ ἄξονας x′x λέγεται ἄξονας τῶν **συνημιτόνων** καί ὁ y′y ἄξονας τῶν **ἡμιτόνων.**

Οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο καί συνημίτονο

6.10 Ἔστω C ὁ τριγωνομετρικός κύκλος μέ ἀρχή A καί Oxy τό προσαρτημένο σέ αὐτόν σύστημα ἀναφορᾶς. Ὅπως εἴδαμε (§ 6.8) ὁ ἀριθμός x μέ τήν κανονική ἀπεικόνιση φ ἀπεικονίζεται στό πέρας τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$, πού εἶναι προσανατολισμένο κατά τό πρόσημο τοῦ x καί ἔχει μῆκος $|x|$. Ἔστω (α,β) οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου M, ὡς πρός τό Oxy. Ἄν ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$ τήν τετμημένη α τοῦ σημείου $M = \varphi(x)$, τότε ὁρίζεται μιά **πραγματική** συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς, πού ὀνομάζεται **συνημίτονο** καί συμβολίζεται **συν** (1). Εἶναι δηλαδή (σχ. 10)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \textbf{συν}x^{(1)} = \textbf{τετμημένη } \alpha \textbf{ τοῦ } \varphi(x)$$



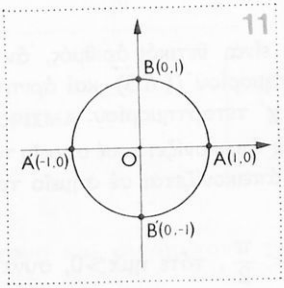
(1) ἤ **cos** (cosinus). Γράφουμε συνx ἀντί συν(x).

Ὁμοίως ὁρίζουμε τή συνάρτηση **ἡμίτονο**, συμβολικά **ημ** (1), μέ τήν ὁποία σέ κάθε $x \in \mathbb{R}$, ἀντιστοιχίζεται ἡ τεταγμένη β τοῦ σημείου $M = \varphi(x)$. Εἶναι δηλαδή

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \eta\mu x = \text{τεταγμένη } \beta \text{ τοῦ } \varphi(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οἱ ἀριθμοί $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, -\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$ ἀπεικονίζονται μέ τήν ἀπεικόνιση φ (σχ. 11) στά σημεῖα. $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$, $B'(0, -1)$, A, B', A', B ἀντιστοίχως. Ἑπομένως ἔχουμε:



$$\sigma\upsilon\nu 0 = 1 \qquad \eta\mu 0 = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu\, \pi = -1 \qquad \eta\mu\pi = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu\, 2\pi = 1 \qquad \eta\mu\, 2\pi = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu\,(-\pi) = -1 \qquad \eta\mu(-\pi) = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \eta\mu\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ τετμημένη α καί ἡ τεταγμένη β ὅλων τῶν σημείων τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί τοῦ διαστήματος $[-1, 1]$. Ἄρα οἱ συναρτήσεις συνημίτονο καί ἡμίτονο παίρνουν τιμές στό $[-1, 1]$.
   Εἶναι δηλαδή

$$\boxed{\forall x, \quad \begin{aligned} -1 \leqslant \sigma\upsilon\nu x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \eta\mu x \leqslant 1 \end{aligned}}$$

2. Στήν § 6.8 εἴδαμε ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοί x καί $2k\pi + x$ ἀπεικονίζονται στό ἴδιο σημεῖο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.
   Ἄρα ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως συνημίτονο στό x εἶναι ἴδια μέ τήν τιμή της στό $2k\pi + x$. Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τή συνάρτηση ἡμίτονο. Δηλαδή ἔχουμε:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{aligned} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(2k\pi + x) \\ \eta\mu x = \eta\mu(2k\pi + x) \end{aligned}}$$

(1) ἤ **sin** (sinus). Γράφουμε ημx ἀντί ημ(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\eta\mu 17\pi = \eta\mu(8.2\pi+\pi) = \eta\mu\pi = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu(-27\pi) = \sigma\upsilon\nu[2(-13)\pi-\pi] = \sigma\upsilon\nu(-\pi) = -1$$

$$\eta\mu\left(\frac{25\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(12\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(6\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\,\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(9\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4.2\pi+\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\,\frac{3\pi}{2} = 0$$

Πρόσημο ημx καί συνx

6.11 Ἀφοῦ τό συνx εἶναι τετμημένη, θά εἶναι θετικός ἀριθμός, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ α′ ἤ δ′ τεταρτημορίου (§ 6.3) καί ἀρνητικός, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ β′ ἤ γ′ τεταρτημορίου.

Ὁμοίως τό ημx εἶναι θετικός ἀριθμός, ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ α′ ἤ β′ τεταρτημορίου καί ἀρνητικός ἄν ὁ x ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ γ′ ἤ δ′. Ἔτσι θά ἔχουμε (σχ. 12):

- Ἄν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε ημx>0, συνx>0
- Ἄν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, τότε ημx>0, συνx<0
- Ἄν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, τότε ημx<0, συνx<0
- Ἄν $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, τότε ημx$<0$, συνx$>0$

Τό βασικό Θεώρημα

6.12 Οἱ τιμές τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο στό x δέν εἶναι ἀνεξάρτητες. Θά ἀποδείξουμε ὅτι:

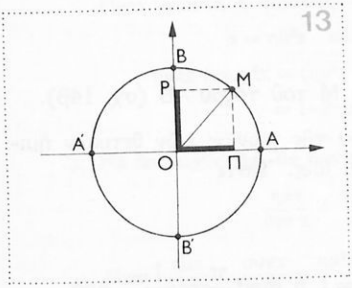
ΘΕΩΡΗΜΑ 1

> **Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἰσχύει:**
> $$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$ (1)

---

(1) Γράφουμε $\eta\mu^2 x$ ἀντί τοῦ $(\eta\mu x)^2$ καί $\sigma\upsilon\nu^2 x$ ἀντί $(\sigma\upsilon\nu x)^2$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω Μ ἡ εἰκόνα τοῦ x στόν τριγωνομετρικό κύκλο καί Π, Ρ οἱ ὀρθές προβολές τοῦ Μ στούς ἄξονες συνημιτόνων καί ἡμιτόνων ἀντιστοίχως. Τότε ἔχουμε:



$$\text{συν}x = \overline{ΟΠ} \quad \text{καί} \quad \text{ημ}x = \overline{ΟΡ}$$

Ἐξάλλου $(ΟΠ)^2 + (ΟΡ)^2 = (ΟΜ)^2$

ἤ $(\overline{ΟΠ})^2 + (\overline{ΟΡ})^2 = 1$

Ἄρα $\text{συν}^2x + \text{ημ}^2x = 1.$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x εἶναι

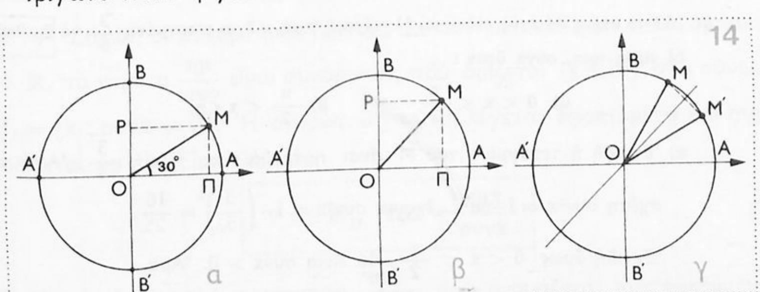
1. $\text{ημ}^2x = 1 - \text{συν}^2x$

2. $\text{συν}^2x = 1 - \text{ημ}^2x$

Ἡμίτονο καί συνημίτονο τῶν ἀριθμῶν $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$

6.13 Οἱ ἀριθμοί αὐτοί ἀπεικονίζονται στό α′ τεταρτημόριο καί συνεπῶς τό ἡμίτονο καί συνημίτονό τους εἶναι θετικοί ἀριθμοί. Συγκεκριμένα:

1. Ὁ ἀριθμός $\frac{\pi}{6}$ ἀπεικονίζεται στό πέρας Μ τόξου 30^0 (σχ. 14α) καί ἄν Π εἶναι ἡ προβολή τοῦ Μ στόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΠΟΜ ἡ γωνία $\widehat{O}$ εἶναι 30^0.



Ἄρα $(ΠΜ) = \frac{1}{2}(ΟΜ) = \frac{1}{2}$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\text{ημ}\frac{\pi}{6} = (ΠΜ) = \frac{1}{2}$$

καί (§ 6.12 Πορ.) $συν^2 \frac{\pi}{6} = 1 - ημ^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ἄρα

$$συν \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Ὁ ἀριθμός $\frac{\pi}{4}$ ἀπεικονίζεται στό μέσο Μ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (σχ. 14β). Ἄρα τό Μ εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων καί οἱ συντεταγμένες του εἶναι ἴσες. Ὥστε

$$συν \frac{\pi}{4} = ημ \frac{\pi}{4}$$

καί (§ 6.12 Θεώρ.) $συν^2 \frac{\pi}{4} + συν^2 \frac{\pi}{4} = 1$ ἤ $συν^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$. Ἄρα

$$ημ \frac{\pi}{4} = συν \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Γιά τόν ἀριθμό $\frac{\pi}{3}$ μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ $\frac{\pi}{6}$. Ἀλλά μποροῦμε νά παρατηρήσουμε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\frac{\pi}{3}$ καί $\frac{\pi}{6}$ ἀπεικονίζονται στά σημεῖα Μ καί Μ', συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων (σχ. 14γ). Ἄρα (§ 6.4) ἔχουμε:

$$συν \frac{\pi}{3} = ημ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$ημ \frac{\pi}{3} = συν \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν τό πέρας Μ ἑνός τόξου μέ ἀλγεβρική τιμή x ἔχει τεταγμένη $\frac{3}{5}$, νά βρεθοῦν οἱ τιμές ημx, συνx ὅταν :**

α) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **β)** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

α) Ἐπειδή ἡ τεταγμένη τοῦ Μ εἶναι ημx, θά εἶναι $ημx = \frac{3}{5}$. Ἀπό τή σχέση $συν^2x = 1 - ημ^2x$ ἔχουμε $συν^2x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Ἐπειδή ὅμως $0 < x < \frac{\pi}{2}$, θά εἶναι $συνx > 0$. Ἄρα

$$συν\,x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

β) Ὁμοίως, ἐπειδή $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, θά εἶναι $συνx < 0$. Ἄρα

$$συν\,x = -\frac{4}{5}.$$

2. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**

$$ημ^4x + συν^4x = 1 - 2\,ημ^2x συν^2x$$

Εἶναι γνωστή ἡ ταυτότητα στό $\mathbb{R}$ $α^2+β^2=(α+β)^2-2αβ$. Ἑπομένως γιά

$$α = ημ^2x \quad \text{καί} \quad β = συν^2x \text{ ἔχουμε:}$$

$$\begin{aligned} ημ^4x+συν^4x &= (ημ^2x+συν^2x)^2 - 2ημ^2xσυν^2x \\ &= 1 - 2ημ^2x\,συν^2x \end{aligned}$$

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν $ημx\,συνx \neq 0$, τότε**

$$\frac{ημx}{συν\,x} + \frac{συν\,x}{ημ\,x} = \frac{1}{ημ\,x\,συν\,x}.$$

Εἶναι $\dfrac{ημx}{συνx} + \dfrac{συνx}{ημx} = \dfrac{ημ^2x+συν^2x}{ημx\,συνx} = \dfrac{1}{ημx\,συνx}$.

4. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ**

$$f(x) = 2\,(ημ^6x + συν^6x) - 3(ημ^4x + συν^4x)$$

εἶναι σταθερή.

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι } f(x) &= 2[(ημ^2x+συν^2x)^3 - 3ημ^2xσυν^2x(ημ^2x+συν^2x)] \\ &\quad -3[(ημ^2x+συν^2x)^2 - 2ημ^2x\,συν^2x] \\ &= 2(1-3ημ^2xσυν^2x) - 3\,(1-2ημ^2xσυν^2x) \\ &= 2-6\,ημ^2x\,συν^2x - 3 + 6ημ^2xσυν^2x \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις 4, 5, 6, 7, 8.

Οἱ συναρτήσεις ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη

6.14 Ἐπειδή οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο καί συνημίτονο ἔχουν πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$, τό πηλίκο $\dfrac{ημ}{συν}$ εἶναι συνάρτηση πού ὁρίζεται (§ 4.17) στό σύνολο $\mathbb{R}_1 = \{x : συνx \neq 0\}$. Ἡ συνάρτηση αὐτή λέγεται **ἐφαπτομένη** καί συμβολίζεται **εφ** (1). Εἶναι λοιπόν

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_1, \quad εφx = \frac{ημx}{συνx}} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ὁρίζεται καί ἡ συνάρτηση $\dfrac{συν}{ημ}$, πού ὀνομάζεται **συνεφαπτομένη,** συμβολικά **σφ** (2).

(1) ἤ **tg** (**tangente**). Γράφουμε εφx ἀντί εφ(x)

(2) ἤ **ctg** (**cotangente**). Γράφουμε σφx ἀντί σφ(x).

Πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι τό $\mathbb{R}_2 = \{x : \eta\mu x \neq 0\}$. Ἑπομένως

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_2, \quad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} \qquad (2)$$

Οἱ συναρτήσεις ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη λέγονται **κυκλικές** ἤ **τριγωνομετρικές** συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἀπό τό παράδειγμα τῆς σελ. 39 προκύπτει ὅτι:

$$\varepsilon\varphi 0 = \varepsilon\varphi(\pm\pi) = \varepsilon\varphi 2\pi = \sigma\varphi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\varphi\left(\pm\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{0}{\pm 1} = 0.$$

Στούς ἀριθμούς $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$ δέν ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη καί στούς 0, $\pm\pi$, 2π ἡ συνεφαπτομένη.

2. Σύμφωνα μέ τήν § 6.13 ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οἱ τιμές τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στό 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, συνοψίζονται στόν πίνακα:

x	ημx	συνx	εφx	σφx
0	0	1	0	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0

Μνημονικός κανόνας. Ἡ στήλη τοῦ ημx προκύπτει ἀπό τόν τύπο $\frac{\sqrt{k}}{2}$ γιά $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$\boxed{6.15}$ Τό **γινόμενο** τῶν συναρτήσεων **εφ** καί **σφ** ὁρίζεται (§ 4.16) στό σύνολο $\mathbb{R}_3 = \mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2 = \{x : \eta\mu x \, \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ καί εἶναι:

$$\varepsilon\varphi x \, \sigma\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = 1. \quad \text{Ὥστε}$$

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon\varphi x \, \sigma\varphi x = 1}}$$

Σημείωση

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = 0$ ἐπαληθεύεται ἀπό ὅσα x ἀπεικονίζονται στά σημεῖα Β ἤ Β' τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, δηλαδή ἀπό τούς ἀριθμούς (§ 6.8, Παρατ. 2, 3) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ καί $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, πού εἶναι τά ἄρτια ἤ περιττά πολλαπλάσια τοῦ π αὐξημένα κατά $\frac{\pi}{2}$.

Συνεπῶς τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εφ εἶναι ἀκριβέστερα:

$$\mathbb{R}_1 = \left\{x : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ἐπίσης ἡ ἐξίσωση $\eta\mu x = 0$ ἐπαληθεύεται ἀπό ὅσα x ἀπεικονίζονται στά σημεῖα Α ἤ Α' τοῦ C, δηλαδή ἀπό τούς ἀριθμούς (§ 6.8, Παρατ. 1) τῆς μορφῆς $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ἄρα $\qquad \mathbb{R}_2 = \{x : x \neq k\pi\}$.

Τέλος, ἀποδεικνύεται ὅτι $\mathbb{R}_3 = \left\{x : \ x \neq k\frac{\pi}{2}\right\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἀπό τήν § 6.10 προκύπτει γιά τήν ἐφαπτομένη ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_1$, (δηλ. $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$) εἶναι:

$$\varepsilon\varphi(2k\pi + x) = \frac{\eta\mu(2k\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(2k\pi + x)} = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x.$$

Ἀνάλογα, ἔχουμε γιά τή συνεφαπτομένη ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ (δηλ. $x \neq k\pi$):

$$\sigma\varphi(2k\pi + x) = \sigma\varphi x.$$

2. Εἶναι προφανές ὅτι οἱ ἀριθμοί εφx καί σφx εἶναι ὁμόσημοι. Εἰδικότερα, γιά νά εἶναι:

- $\varepsilon\varphi x > 0$ καί $\sigma\varphi x > 0$

πρέπει καί ἀρκεῖ τά ημx καί συνx νά εἶναι ὁμόσημα, δηλαδή ὁ x νά ἀπεικονίζεται στό α' ἤ γ' τεταρτημόριο.

- $\varepsilon\varphi x < 0$ καί $\sigma\varphi x < 0$

πρέπει καί ἀρκεῖ τά ημx καί συνx νά εἶναι ἑτερόσημα, δηλαδή ὁ x νά ἀπεικονίζεται στό β' ἤ δ' τεταρτημόριο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\text{εφ}\,\frac{19\pi}{3} = \text{εφ}\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{εφ}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{σφ}\left(-\frac{22\pi}{5}\right) = \text{σφ}\left(-2\cdot 2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \text{σφ}\left(-\frac{2\pi}{5}\right) < 0$$

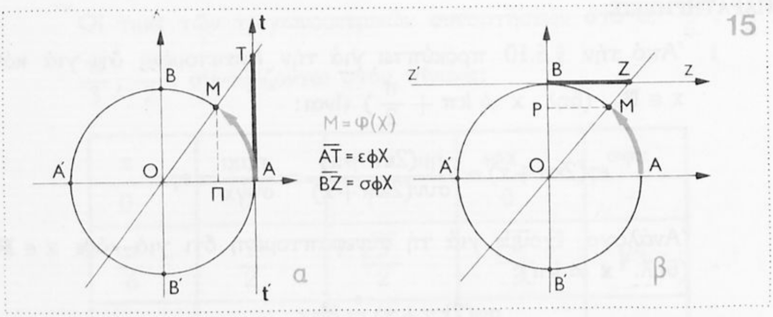
Ἄξονες ἐφαπτομένων καί συνεφαπτομένων

6.16 Ἔστω tt′ ὁ ἄξονας πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή Α τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου **C** καί εἶναι παράλληλος[1] πρός τόν ἄξονα y′y τῶν ἡμιτόνων. Ἄν Μ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ ἀριθμοῦ x στόν **C** μέ τήν κανονική ἀπεικόνιση καί Τ ἡ τομή τῆς εὐθείας ΟΜ μέ τόν ἄξονα tt′, τότε ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΠΜ καί ΟΑΤ προκύπτει ὅτι εἶναι (σχ. 15α):

$$\frac{AT}{OA} = \frac{\Pi M}{O\Pi} \quad \text{ἤ} \quad (AT) = \frac{(\Pi M)}{(O\Pi)} = \frac{|\text{ημ}x|}{|\text{συν}x|} = |\text{εφ}x| \quad \text{ἤ} \quad |\overline{AT}| = |\text{εφ}x|$$

Ἀλλά οἱ ἀριθμοί εφx καί $\overline{AT}$ εἶναι ὁμόσημοι, θετικοί, ὅταν τό Μ εἶναι στό α′ ἤ γ′ τεταρτημόριο καί ἀρνητικοί, ὅταν τό Μ εἶναι στό β′ ἤ δ′ τεταρτημόριο.

Ἄρα εφx $= \overline{AT}$, δηλαδή ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι ἴση μέ τήν τετμημένη τοῦ Τ στόν ἄξονα tt′.
Γι᾽ αὐτό ὁ ἄξονας tt′ λέγεται **ἄξονας τῶν ἐφαπτομένων.**



Ἔστω z′z ὁ ἄξονας μέ ἀρχή τό Β παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων. Τότε, ὅπως καί προηγουμένως, ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν Ζ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τοῦ ἄξονα z′z καί τῆς εὐθείας ΟΜ (σχ. 15β), θά εἶναι

$$\text{σφ}x = \overline{BZ}$$

Δηλαδή ἡ συνεφαπτομένη τοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι ἴση μέ τήν τετμημένη τοῦ Ζ στόν ἄξονα z′z, πού λέγεται **ἄξονας τῶν συνεφαπτομένων.**

---

(1) Θά θεωροῦμε πάντοτε ὅτι τά μοναδιαῖα διανύσματα σέ παράλληλους ἄξονες εἶναι τά ἴδια.

6.17 Ἀπό τήν $ημ^2x + συν^2x = 1$ ἔχουμε γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ $(συν\,x \neq 0)$

$$\frac{ημ^2x}{συν^2x} + 1 = \frac{1}{συν^2x} \quad ἤ \quad \boxed{1 + εφ^2x = \frac{1}{συν^2x}} \tag{1}$$

Ὁμοίως γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ $(ημx \neq 0)$ ἔχουμε:

$$1 + \frac{συν^2x}{ημ^2x} = \frac{1}{ημ^2x} \quad ἤ \quad \boxed{1 + σφ^2x = \frac{1}{ημ^2x}} \tag{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**

α) $συν^2x = \dfrac{1}{1+εφ^2x}$, **β)** $ημ^2x = \dfrac{εφ^2x}{1+εφ^2x}$.

α) Ἀπό τήν $1 + εφ^2x = \dfrac{1}{συν^2x}$ ἔχουμε : $συν^2x = \dfrac{1}{1+εφ^2x}$.

β) Ἀπό τήν $ημ^2x + συν^2x = 1$, ἄν θέσουμε $συν^2x = \dfrac{1}{1+εφ^2x}$, παίρνουμε :

$$ημ^2x + \frac{1}{1+εφ^2x} = 1 \quad ἤ \quad ημ^2x(1+εφ^2x) + 1 = 1 + εφ^2x \quad ἤ$$

$$ημ^2x = \frac{εφ^2x}{1+εφ^2x}.$$

2. **Ἄν εἶναι $εφx = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ καί $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στό x.**

Εἶναι $συν^2x = \dfrac{1}{1+εφ^2x} = \dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{9}} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$,

ὁπότε, ἐπειδή $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, θά εἶναι :

$$συνx = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ημ^2x = \frac{εφ^2x}{1+εφ^2x} = \frac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\dfrac{3}{9}}{1+\dfrac{3}{9}} = \frac{\dfrac{3}{9}}{\dfrac{12}{9}} = \frac{1}{4}$$

ὁπότε, ἐπειδή $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, θά εἶναι :

$$ημx = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad καί \quad σφx = \frac{1}{εφx} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}.$$

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι**

α) $\dfrac{εφθ+σφω}{εφω+σφθ}=\dfrac{εφθ}{εφω}$ β) $εφ^2θ-ημ^2θ=εφ^2θημ^2θ$.

α) Ἔχουμε $\dfrac{εφθ+σφω}{εφω+σφθ}=\dfrac{εφθ+\dfrac{1}{εφω}}{εφω+\dfrac{1}{εφθ}}=\dfrac{\dfrac{εφθ\,εφω+1}{εφω}}{\dfrac{εφθ\,εφω+1}{εφθ}}=\dfrac{εφθ}{εφω}$.

β) $εφ^2θ-ημ^2θ=\dfrac{ημ^2θ}{συν^2θ}-ημ^2θ=\dfrac{ημ^2θ-ημ^2θ\,συν^2θ}{συν^2θ}$

$=\dfrac{ημ^2θ(1-συν^2θ)}{συν^2θ}=\dfrac{ημ^2θ}{συν^2θ}ημ^2θ=εφ^2θ\,.\,ημ^2θ$.

Ἀσκήσεις 9, 10, 11, 12, 13.

Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξου ἤ γωνίας

6.18 Ἔστω α ἕνας πραγματικός ἀριθμός καί $\overset{\frown}{AM}$ τό τόξο α ἀκτινίων στόν τριγωνομετρικό κύκλο **C**. Οἱ ἀριθμοί συνα καί ημα, δηλαδή οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ, λέγονται ἀντιστοίχως **συνημίτονο** καί **ἡμίτονο** τοῦ $\overset{\frown}{AM}$ καθὼς καὶ κάθε ἄλλου **τόξου** ἤ **γωνίας** α ἀκτινίων.
Ἔτσι ἔχουμε

$$συν\overset{\frown}{AM}=\text{τετμημένη τοῦ } M=συνα$$

$$ημ\overset{\frown}{AM}=\text{τεταγμένη τοῦ } M=ημα$$

Ἐπίσης οἱ εφα καί σφα λέγονται **ἐφαπτομένη** καί **συνεφαπτομένη** κάθε τόξου ἤ γωνίας α ἀκτινίων.
Τό ἡμίτονο, τό συνημίτονο, ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη ἑνός τόξου (γωνίας) ω λέγονται καί **τριγωνομετρικοί ἀριθμοί** τοῦ τόξου ἢ τῆς γωνίας ω.
Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν 0^0–90^0 δίνονται στό τέλος τοῦ βιβλίου.
Ἐξάλλου, ἐπειδή ἕνα τόξο (ἤ γωνία), πού ἡ ἀλγεβρική του τιμή σέ μοῖρες, βαθμούς ἤ ἀκτίνια εἶναι ἀντιστοίχως μ,β,α, γράφεται συνήθως $μ^0$, $β^g$, $α^{rad}$ θά εἶναι π.χ.

$$συνμ^0=συνβ^g=συνα^{rad}=συνα,\quad εφμ^0=εφα \text{ κτλ.}$$

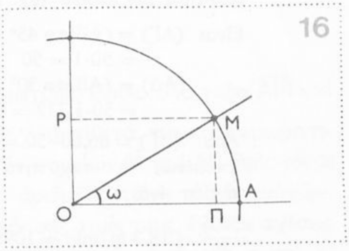
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$ημ30^0=ημ\dfrac{π}{6}=\dfrac{1}{2}$, $συν30^0=συν\dfrac{π}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $ημ60^0=ημ\dfrac{π}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$συν60^0=συν\dfrac{π}{3}=\dfrac{1}{2}$, $συν(-270^0)=συν\left(-\dfrac{3π}{2}\right)=0$, $ημ(-270^0)=1$,

$εφ(1845^0)=εφ(5\cdot360^0+45^0)=εφ45^0=1$.

6.19 Οἱ ὁρισμοί τῆς προηγούμενης παραγράφου ὄχι μόνο δέν ἀναιροῦν ἀλλά γενικεύουν τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς γιά ὀξεῖες γωνίες πού εἴχαμε δώσει στό Γυμνάσιο.



Πράγματι γιά τό συνημίτονο π.χ. μιᾶς ὀξείας γωνίας ω:

- Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού εἴχαμε δώσει στό Γυμνάσιο, κατασκευάζουμε ένα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΠΜ (σχ. 16) καί ἔχουμε:

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{ὑποτείνουσα}} = \frac{ΟΠ}{ΟΜ}$$

ἤ, ἄν ὡς μονάδα μήκους ληφθεῖ τό τμῆμα ΟΜ, συνω = (ΟΠ).

- Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δίνουμε τώρα, θεωροῦμε τόν τριγωνομετρικό κύκλο κέντρου Ο, τοῦ ὁποίου ἀρχή Α εἶναι τό σημεῖο τομῆς του μέ τήν ευθεία ΟΠ. Τότε, ἐπειδή ἡ γωνία ω καί τό ἀντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{ΑΜ}$ ἔχουν ἴδια ἀλγεβρική τιμή, θά ἔχουμε:

$$συνω = συν\,\overset{\frown}{ΑΜ} = \text{τετμημένη τοῦ } Μ = (ΟΠ)$$

Ἔτσι, οἱ δύο αὐτοί ὁρισμοί τοῦ συνημιτόνου ὁδηγοῦν στό ἴδιο ἀποτέλεσμα. Τό ἴδιο ἀποδεικνύεται καί γιά τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ημω, εφω καί σφω.

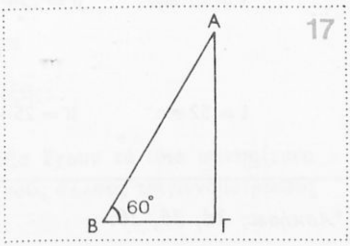
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Γενικότερα γιά **ὁποιοδήποτε** τόξο $\overset{\frown}{ΑΜ}$, ἄν (ΟΜ) = 1, εἶναι (σχ. 16) $\overline{ΟΠ} = συν\overset{\frown}{ΑΜ}$ καί $\overline{OP} = ημ\overset{\frown}{ΑΜ}$. Ἄρα, ἄν ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου ἔχει μῆκος (ΟΜ) = ρ, θά εἶναι

$$\mathbf{\overline{ΟΠ} = ρσυν\overset{\frown}{ΑΜ}} \text{ καί } \mathbf{\overline{OP} = ρημ\overset{\frown}{ΑΜ}}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἕνας παρατηρητής Β (σχ. 17), πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση 10 m ἀπό τή βάση Γ ἑνός πύργου, βλέπει τήν κορυφή Α τοῦ πύργου ὑπό γωνία 60°. Νά βρεθεῖ τό ὕψος τοῦ πύργου.**

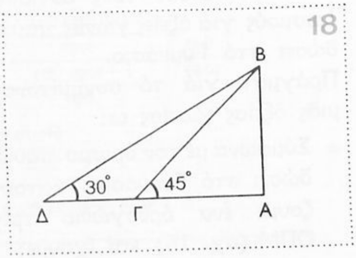


Εἶναι $εφ\,Β = \frac{(ΑΓ)}{(ΒΓ)}$, ὁπότε :

(ΑΓ) = (ΒΓ) εφ Β.

Ἄρα $(ΑΓ) = 10\,εφ\,60^0 =$
$= 10 \times \sqrt{3} = 10 \times 1{,}732 =$
$= 17{,}32$ m.

2. Ἕνας πλοίαρχος παρατηρεῖ ἀπό τό πλοῖο του πού κατευθύνεται πρός τήν ἀκτή τήν κορυφή ἑνός φάρου ΑΒ, πού ἔχει ὕψος 50 m. Ἄν ἡ γωνία ὕψους μεταβάλλεται σέ χρόνο 2 min ἀπό 30^0 στό σημεῖο Δ σέ 45^0 στό Γ ποιά εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ πλοίου (σχ. 18);



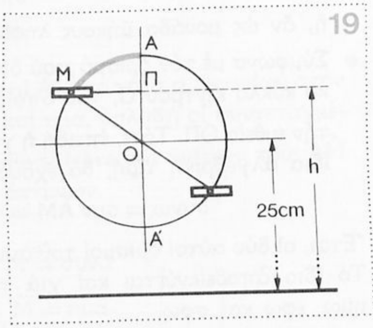
Εἶναι $(\text{ΑΓ}) = (\text{ΑΒ})\sigma\varphi\, 45^0 =$
$= 50 \cdot 1 = 50$

$(\text{ΑΔ}) = (\text{ΑΒ})\sigma\varphi\, 30^0 =$
$= 50 \cdot 1{,}732 = 86{,}60$

Ἄρα $(\text{ΔΓ}) = 86{,}60 - 50 = 36{,}60$·
Ἑπομένως ἡ ταχύτητα τοῦ πλοίου εἶναι:

$$\frac{36{,}6}{2} = 18{,}3 \text{ m/min} = 1098 \text{ m/h}$$

3. Ἔστω Μ ἡ θέση τοῦ ποδιοῦ σέ ἕνα πετάλι ποδηλάτου (σχ. 19) κέντρου Ο μέ ΟΜ = 10 cm. Ἄν τό ὕψος τοῦ Ο ἀπό τό ἔδαφος εἶναι 25 cm καί τό πετάλι, ἀρχίζοντας ἀπό τό Α μέ σταθερή ταχύτητα, συμπληρώνει μιά πλήρη περιστροφή σέ 4 sec, νά βρεθεῖ τό ὕψος τῆς θέσεως τοῦ ποδιοῦ ἀπό τό ἔδαφος, 2, 3, 25, 52 sec μετά τή διέλευσή του ἀπό τό Α.



Ἐπειδή σέ 1 sec τό Μ διαγράφει τόξο $\frac{\pi}{2}$, σέ t sec θά διαγράφει τόξο $t \cdot \frac{\pi}{2}$.

Ἐξάλλου τό ὕψος τοῦ πεταλιοῦ θά εἶναι $h = 25 + \overline{\text{ΟΠ}}$.

Ἄρα (§ 6.19 Παρατ.) θά εἶναι:

$$h = 25 + 10\,\sigma\upsilon\nu\, t\,\frac{\pi}{2}.$$

Ἔτσι μετά ἀπό:

$t = 2$ sec $\quad h = 25 + 10\,\sigma\upsilon\nu\,\pi = 25 + 10(-1) = 15$

$t = 3$ sec $\quad h = 25 + 10\sigma\upsilon\nu\, 3\frac{\pi}{2} = 25 + 10 \cdot 0 = 25$

$t = 25$ sec $\quad h = 25 + 10\,\sigma\upsilon\nu 25\frac{\pi}{2} = 25 + 10\sigma\upsilon\nu\left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$= 25 + 10\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 25.$

$t = 52$ sec $\quad h = 25 + 10\,\sigma\upsilon\nu\; 52\,\frac{\pi}{2} = 25 + 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(26\pi) =$
$= 25 + 10 \cdot 1 = 35$

Ἀσκήσεις ***14, 15, 16.***

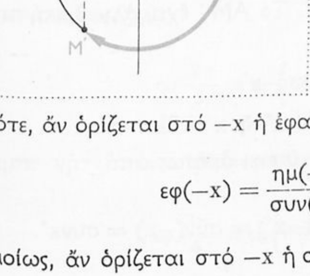
ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΞΩΝ ΜΕ ΕΙΔΙΚΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ Ή ΔΙΑΦΟΡΑ

Γενικά

6.20 Στά ἑπόμενα θεωροῦμε στόν τριγωνομετρικό κύκλο δύο τόξα $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM}'$ πού βρίσκονται σέ εἰδική σχέση (εἶναι π.χ. ἀντίθετα, παραπληρωματικά κτλ.) καί μέ βάση τήν ἀμοιβαία θέση τῶν σημείων Μ καί Μ' βρίσκουμε ἀντίστοιχη σχέση τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων αὐτῶν. Αὐτό σημαίνει ὅτι, ἄν x καί x' εἶναι οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους, ἔχουμε σχέσεις τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων στούς ἀριθμούς x καί x' σέ ὁρισμένες ἀξιοσημείωτες περιπτώσεις, ὅπως π.χ. ὅταν ὁ x' εἶναι $-x$, $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ κτλ.

Ἀντίθετα τόξα

6.21 Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί x καί $x' = -x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές τῶν ἀντίθετων τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM}'$ (σχ 20). Τά σημεῖα Μ καί Μ' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων καί συνεπῶς ἔχουν (§ 6.4) τήν ἴδια τετμημένη καί ἀντίθετες τεταγμένες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$



$$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$$

ὁπότε, ἄν ὁρίζεται στό $-x$ ἡ ἐφαπτομένη, δηλαδή ἄν $x \in \mathbb{R}_1$, θά εἶναι

$$\varepsilon\varphi(-x) = \frac{\eta\mu(-x)}{\sigma\upsilon\nu(-x)} = \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\varepsilon\varphi x$$

Ὁμοίως, ἄν ὁρίζεται στό $-x$ ἡ συνεφαπτομένη, δηλαδή ἄν $x \in \mathbb{R}_2$, θά εἶναι

$$\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$$

Τά παραπάνω τά διατυπώνουμε καί ὡς ἑξῆς:

> **Τά ἀντίθετα τόξα ἔχουν τό ἴδιο συνημίτονο καί ἀντίθετους τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

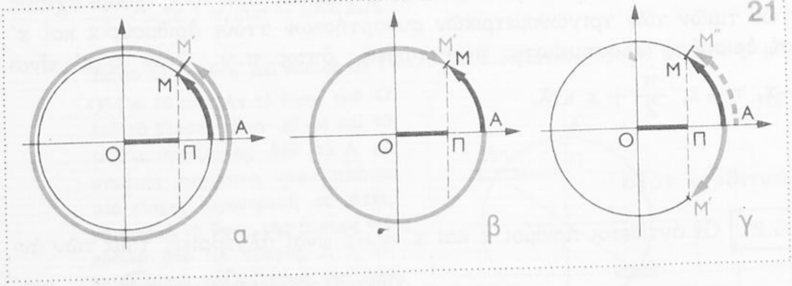
$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \qquad \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(-45^0)=-\varepsilon\varphi 45^0=-1$$

Τόξα μέ τό ἴδιο συνημίτονο

6.22 Ἔστω $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα μέ τό ἴδιο συνημίτονο καί x καί x' οἱ ἀλγεβρικές τους τιμές. Ἐπειδή εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x'$$



τά πέρατα M καί M' ἔχουν ἴδια τετμημένη. Ἄρα

- ἤ συμπίπτουν (σχ. 21α, β), ὁπότε (§ 6.8)

$$\exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x=2k\pi+x'$$

- ἤ εἶναι συμμετρικά (σχ 21γ) ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων.
  Ἔστω $\overset{\frown}{AM''}$ τό ἀντίθετο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM'}$. Τό $\overset{\frown}{AM''}$ ἔχει ἀλγεβρική τιμή $-x'$ καί πέρας τό σημεῖο M. Συνεπῶς

$$\exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x=2k\pi-x'$$

Ὥστε $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x' \Rightarrow \exists\, k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi+x'$ **ἤ** $x=2k\pi-x'$.

Ἀλλά καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν παρατήρηση 2 τῆς § 6.10, ἀφοῦ

$$\sigma\upsilon\nu(2k\pi+x')=\sigma\upsilon\nu x' \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu(2k\pi-x')=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x'.$$

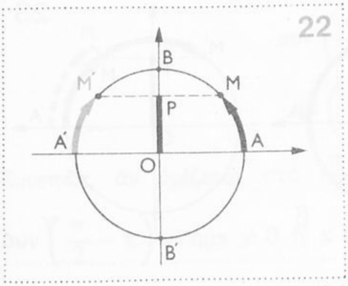
Ἄρα ἔχουμε τελικά τήν ἰσοδυναμία

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\, x=\sigma\upsilon\nu\, x' \Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x=2k\pi+x' \quad \text{ἤ} \quad x=2k\pi-x'}}$$

Παραπληρωματικά τόξα

6.23 Οἱ ἀριθμοί x καί $\pi-x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές τῶν παραπληρωματικῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ ἀντιστοίχως. Ἐπειδή ὅμως $\pi-x=\pi+(-x)$, τό $\overset{\frown}{AM'}$

θά εἶναι ἄθροισμα (§ 6.6 'Ιδιότ.1) τοῦ ἡμικυκλίου $\overset{\frown}{ABA'}$ καί ἑνός τόξου $\overset{\frown}{A'M'}$



ἀντίθετου τοῦ $\overset{\frown}{AM}$ (σχ. 22). Συνεπῶς τά σημεῖα M καί M' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων, ἔχουν δηλαδή (§ 6.4) ἴδια τεταγμένη καί ἀντίθετες τετμημένες.

Ἄρα θά εἶναι, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x.$$

Ἑπομένως, ἄν ὁρίζεται στό $\pi - x$ ἡ ἐφαπτομένη, δηλαδή ἄν $x \in \mathbb{R}_1$, θά εἶναι:

$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = \frac{\eta\mu(\pi - x)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - x)} = \frac{\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x} = -\varepsilon\varphi x$$

Ὁμοίως, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ θά εἶναι:

$$\sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi x.$$

Δηλαδή:

> **Τά παραπληρωματικά τόξα ἔχουν τό ἴδιο ἡμίτονο καί ἀντίθετους τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\, 150^0 = \sigma\upsilon\nu(180^0 - 30^0) = -\sigma\upsilon\nu 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

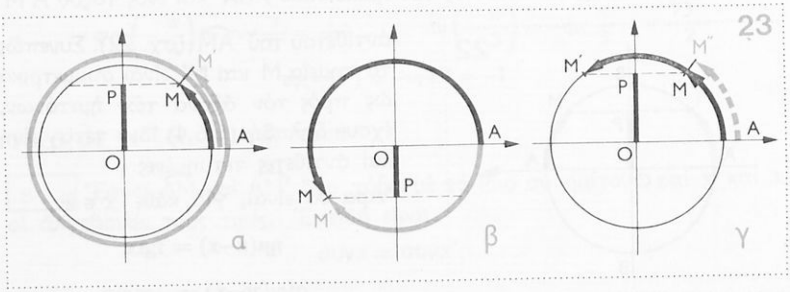
$$\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1.$$

Τόξα μέ τό ἴδιο ἡμίτονο

6.24 Ἔστω $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα μέ τό ἴδιο ἡμίτονο καί x καί x' οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους. Ἐπειδή εἶναι

$$\eta\mu x = \eta\mu x'$$

τά πέρατα Μ καί Μ′ ἔχουν τήν ἴδια τεταγμένη. Ἄρα



- ἤ συμπίπτουν (σχ. 23α, β), ὁπότε (§ 6.8),

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x'$$

- ἤ εἶναι συμμετρικά (σχ. 23γ) ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων.

Ἔστω $\overset{\frown}{AM''}$ τό παραπληρωματικό τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM'}$. Τό $\overset{\frown}{AM''}$ ἔχει ἀλγεβρική τιμή $\pi - x'$ καί πέρας τό Μ. Συνεπῶς

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \pi - x' = (2k+1)\pi - x'$$

Ὥστε $\quad \eta\mu x = \eta\mu x' \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi + x'$ ἤ $x = (2k+1)\pi - x'$

Ἀλλά καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει ἀμέσως ἀπό τήν παρατήρηση 2 τῆς § 6.10, ἀφοῦ

$$\eta\mu(2k\pi + x') = \eta\mu x' \text{ καί } \eta\mu[(2k+1)\pi - x'] = \eta\mu(\pi - x') = \eta\mu x'$$

Ἄρα ἔχουμε τελικά τήν ἰσοδυναμία:

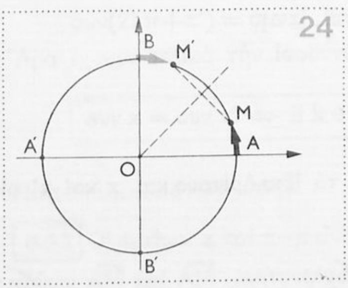
$$\boxed{\boldsymbol{\eta\mu\, x = \eta\mu\, x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + x' \text{ ἤ } x = (2k+1)\pi - x'}}$$

Συμπληρωματικά τόξα

6.25 Οἱ ἀριθμοί x καί $\frac{\pi}{2} - x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές ἀντιστοίχως τῶν συμπληρωματικῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ (σχ. 24). Ἐπειδή ὅμως

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + (-x),$$

τό τόξο $\overset{\frown}{AM'}$ εἶναι ἄθροισμα (§ 6.6 Ἰδιότ. 1) τοῦ τεταρτοκυκλίου $\overset{\frown}{AB}$ καί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{BM'}$, πού εἶναι ἀντίθετο πρός τό $\overset{\frown}{AM}$.



Ἑπομένως τά σημεῖα Μ καί Μ' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων. Ἄρα (§ 6.4) γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$$

Συνεπῶς, ἄν ὁρίζεται στό $\frac{\pi}{2}-x$ ἡ ἐφαπτομένη, δηλαδή ἄν εἶναι

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x \neq 0$ ἤ $x \in \mathbb{R}_2$, τότε θά ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\sigma\varphi x$$

Ὁμοίως, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ εἶναι: $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x.$

Δηλαδή:

> **Στά συμπληρωματικά τόξα, τό ἡμίτονο τοῦ καθενός ἰσοῦται μέ τό συνημίτονο τοῦ ἄλλου καί ἡ ἐφαπτομένη τοῦ καθενός ἰσοῦται μέ τή συνεφαπτομένη τοῦ ἄλλου**

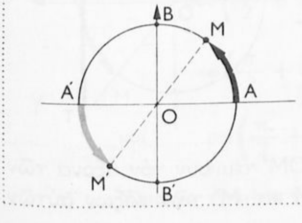
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\eta\mu\frac{\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\, 72^0=\varepsilon\varphi(90^0-18^0)=\sigma\varphi 18^0>0.$$

Τόξα πού ἔχουν διαφορά π

6.26 Οἱ ἀριθμοί x καί $\pi+x$ εἶναι ἀλγεβρικές τιμές ἀντιστοίχως τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ (σχ. 25). Τό $\overset{\frown}{AM'}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἡμικυκλίου $\overset{\frown}{ABA'}$ καί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A'M'}$ πού εἶναι τόξο ἴσο πρός τό $\overset{\frown}{AM}$. Ἑπομένως τά σημεῖα Μ καί Μ' εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἑπομένως (§ 6.4) ἔχουν ἀντίθετες τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες.



25

Ἄρα, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\eta\mu(\pi+x) = -\eta\mu x$

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Ὁπότε, ἄν ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη στό $\pi+x$, δηλαδή ἄν

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \;\; \text{ἤ} \;\; x \in \mathbb{R}_1$$

θά ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\pi+x) = \frac{\eta\mu(\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(\pi+x)} = \frac{-\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x$$

Ὁμοίως, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}_2$, εἶναι

$$\sigma\varphi(\pi+x) = \sigma\varphi x$$

Δηλαδή:

> **Τά τόξα πού ἔχουν διαφορά π ἔχουν ἀντίθετο ἡμίτονο καί συνημίτονο, ἐνῶ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη καί συνεφαπτομένη**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

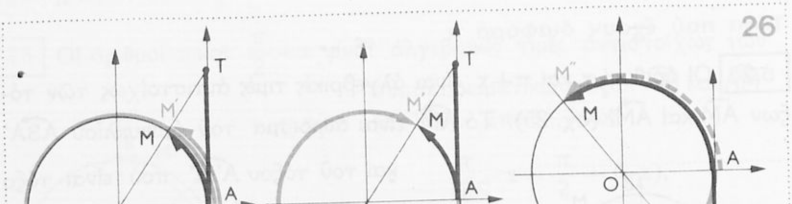
$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\,(225^0) = \varepsilon\varphi\,(180^0+45^0) = \varepsilon\varphi\,45^0 = 1.$$

Τόξα μέ τήν ἴδια ἐφαπτομένη ἤ συνεφαπτομένη

6.27 Ἔστω $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$ δύο τόξα μέ τήν ἴδια ἐφαπτομένη (ἤ συνεφαπτομένη) καί x, x' οἱ ἀλγεβρικές τους τιμές.

Ἐπειδή εἶναι $\qquad \varepsilon\varphi x' = \varepsilon\varphi x$



τά σημεῖα T, T', στά ὁποῖα οἱ εὐθεῖες OM καί OM' τέμνουν τόν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων, συμπίπτουν. Ἄρα τά πέρατα M καί M' τῶν τόξων αὐτῶν

● ἤ συμπίπτουν (σχ. 26α, β), ὁπότε (§ 6.8)

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2\kappa\pi + x' \tag{1}$$

● ἤ τό M′ εἶναι συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ἔστω $\widehat{AM''}$ τό τόξο $\widehat{AM'} + \widehat{ABA'}$. Τό τόξο $\widehat{AM''}$ ἔχει ἀλγεβρική τιμή $\pi + x'$ καί πέρας τό M. Ἄρα

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + (\pi + x') = (2k+1)\pi + x' \tag{2}$$

Ἡ (1) καί (2) συνοψίζονται στήν: $\exists\, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad x = \lambda\pi + x'$

Ὥστε $\qquad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x' \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad x = \lambda\pi + x'$

Ἀλλά καί ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει ἀπό τήν παρατήρηση 2 τῆς § 6.10 ἀφοῦ

$$\varepsilon\varphi\,(\lambda\pi + x') = \begin{cases} \varepsilon\varphi(2k\pi + x') = \varepsilon\varphi x', & \text{ἄν } \lambda \text{ ἄρτιος} \\ \varepsilon\varphi[(2k+1)\pi + x'] = \varepsilon\varphi(\pi + x') = \varepsilon\varphi x', & \text{ἄν } \lambda \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Ὥστε τελικά ἔχουμε τήν ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi + x'}$$

Ὁμοίως γιά τήν συνεφαπτομένη ἔχουμε:

$$\boxed{\sigma\varphi x = \sigma\varphi x' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi + x'}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων πού ἔχουν διαφορά $\frac{\pi}{2}$.

Ἔχουμε $\quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\,\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sigma\varphi(-\theta) = -\sigma\varphi\theta$$

καί $\qquad \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\varepsilon\varphi\theta$

Ὁμοίως εἶναι π. χ. $\qquad \varepsilon\varphi 120^\circ = \varepsilon\varphi(90^\circ + 30^\circ) = -\,\sigma\varphi\, 30^\circ = -\sqrt{3}$.

2. **Νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων πού ἔχουν ἄθροισμα $\frac{3\pi}{2}$.**

Ἔχουμε $ημ\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=ημ\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=-ημ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-συν\,\theta$.

$$συν\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=συν\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=-συν\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-ημ\,\theta$$

$$εφ\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=εφ\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=εφ\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=σφ\,\theta.$$

καί $σφ\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)==εφ\,\theta.$

Ὁμοίως εἶναι π.χ. $ημ\,210^0=ημ\,(270^0-60^0)=-συν\,60^0=-\frac{1}{2}$.

3. **Νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων πού ἔχουν διαφορά $\frac{3\pi}{2}$.**

Ἔχουμε $ημ\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=ημ\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right]=-συν(-\theta)=-συν\,\theta$

$$συν\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=συν\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right]=-ημ(-\theta)=ημ\,\theta$$

$$εφ\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=εφ\left[\frac{3\pi}{2}-(-\theta)\right]=σφ\,(-\theta)=-σφ\,\theta$$

καί $σφ\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-εφ\theta.$

Ὁμοίως εἶναι π.χ. $συν\,300^0=συν\,(270^0+30^0)=ημ\,30^0=\frac{1}{2}$.

Σημείωση

Γιά τήν ἀπομνημόνευση τῶν σχέσεων τῶν προηγούμενων ἐφαρμογῶν 1, 2, 3 καθώς καί τῶν § 6.21, 6.23, 6.25 καί 6.26 χρησιμοποιεῖται ὁ ἑπόμενος μνημονικός κανόνας:

Ὅταν δύο τόξα ἔχουν ἄθροισμα ἤ διαφορά 0, π, 2π ἔχουν ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς, ἐνῶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα ἤ διαφορά $\frac{\pi}{2}$ ἤ $\frac{3\pi}{2}$ οἱ τριγωνομετρικοί τους ἀριθμοί ἐναλλάσσονται (ημ μέ συν καί εφ μέ σφ). Τό πρόσημο, γιά τό τόξο πού ἔχει μορφή $\lambda\pi\pm\theta$ ἤ $\lambda\frac{\pi}{2}\pm\theta$, καθορίζεται ἀπό τό τεταρτημόριο στό ὁποῖο λήγει, ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

4. **Γιά τίς συναρτήσεις**

f μέ $f(x)=2\,συν^2x+3\,συν\,x-1$ καί

g μέ $g(x)=5\,ημ^2x-2\,ημx+3$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f(x)=f(-x)$ καί $g(x)=g(\pi-x)$.

Είναι $f(-x) = 2\,συν^2(-x) + 3\,συν\,(-x) - 1$

$$= 2\,συν^2 x + 3\,συν\,x - 1$$

$$= f(x)$$

$$g\,(\pi - x) = 2\,ημ^2(\pi - x) - 2ημ(\pi - x) + 3$$

$$= 2ημ^2 x - 2ημx + 3$$

$$= g(x)$$

5. **Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις**

$$A = \frac{2ημ(\pi-\theta) + συν\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 2ημ(2\pi - \theta)}{ημ\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 3συν\,(\pi - \theta) + συν(2\pi - \theta)}$$

$$B = \frac{εφ(90^0 + \theta)συν(270^0 + \theta)ημ(180^0 + \theta)}{ημ(180^0 - \theta)συν(360^0 + \theta)σφ(270^0 - \theta)}$$

Είναι: $A = \dfrac{2ημ\theta + ημ\theta - 2(-ημ\theta)}{συν\,\theta - 3(-συν\theta) + συν\,\theta} = \dfrac{5\,ημ\,\theta}{5\,συν\theta} = εφ\,\theta.$

$$B = \frac{σφ(-\theta)[-συν(90^0 + \theta)](-ημ\theta)}{ημ\,\theta\,συν\,\theta\,σφ(90^0 - \theta)} = \frac{-σφ\theta\,ημ\theta(-ημ\theta)}{ημ\,\theta\,συν\theta\,εφ\theta}$$

$$= \frac{σφ\,\theta\,ημ\theta\,ημ\,\theta}{ημ\theta\,συν\theta\,εφ\theta} = \frac{σφ\theta}{εφ\theta} \cdot \frac{ημ\theta}{συν\theta} = \frac{σφ\theta}{εφ\theta} \cdot εφ\theta = σφ\theta.$$

Ἀσκήσεις *17, 18, 19, 20.*

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ἔννοια τῆς τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως

6.28 Ἄν μιά ἐξίσωση περιλαμβάνει τιμές τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ἐξαρτώμενες ἀπό τούς ἀγνώστους, τότε ἡ ἐξίσωση αὐτή λέγεται **τριγωνομετρική**.

Π.χ. τριγωνομετρικές εἶναι οἱ ἐξισώσεις

$$συνx + συν2x + συν\,3x = 0$$

$$ημ\,(συν\,x) = 1$$

$$ημ^2x - συν\,x = 1$$

$$ημ\,x = συν\,2x$$

$$εφ\,x = εφ\,(\pi - x).$$

Ἡ ἐξίσωση $x^2 - 2(συνα ημα)x + ημ^2α = 0$, μέ ἄγνωστο x, δέν εἶναι τριγωνομετρική.

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ μορφές τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων ποικίλουν. Ἡ ἐπίλυση ὅμως πολλῶν ἀπό αὐτές ἀνάγεται στήν ἐπίλυση τῶν ἁπλῶν μορφῶν πού ἐξετάζονται στά ἑπόμενα.

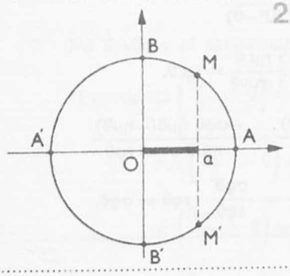
Ἡ ἐξίσωση συνx = α

6.29 Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή δέν ἔχει λύση, ὅταν $\alpha > 1$ ἤ $\alpha < -1$, δηλαδή ὅταν $|\alpha| > 1$, ἐπειδή (§ 6.10, Παρατ. 1)

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \text{συν}x \leqslant 1.$$

Ὑποθέτουμε λοιπόν $|\alpha| \leqslant 1$.

Στήν περίπτωση αὐτή ὑπάρχουν σημεῖα Μ καί Μ′ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου μέ τετμημένη α (σχ. 27).



27

Οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι προφανῶς οἱ ἀλγεβρικές τιμές ὅλων τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{AM'}$. Ἄν θ εἶναι μιά ἀπό αὐτές, δηλαδή ἄν συνθ = α, τότε ἡ ἐξίσωση συνx = α γράφεται

$$\text{συν}x = \text{συν}\,\theta$$

καί σύμφωνα μέ τήν § 6.22, ὅλες οἱ ρίζες της δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\mathbf{x = 2k\pi \pm \theta}, \quad \text{γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ } k \in \mathbb{Z}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τήν ἐξίσωση $2\text{συν}x - \sqrt{2} = 0$ ἔχουμε $\text{συν}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ καί ἐπειδή $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}\dfrac{\pi}{4}$,

ἡ ἐξίσωση γίνεται $\text{συν}x = \text{συν}\dfrac{\pi}{4}$. Αὐτή ἔχει λύσεις τίς

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ἡ ἐξίσωση ημx = α

6.30 Ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει λύση **μόνο** ἄν $|\alpha| \leqslant 1$.

Στήν περίπτωση αὐτή ἔστω θ μιά ρίζα της. Ἐπειδή ημθ = α, ἡ ἐξίσωση ημx = α, γράφεται

$$\text{ημ}x = \text{ημ}\theta$$

καί σύμφωνα μέ τήν § 6.24 ὅλες οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{2k\pi + \theta} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{(2k+1)\pi - \theta} \end{aligned}\right\} \text{ γιά } k \in \mathbb{Z}.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τήν ἐξίσωση $2\,ημx-1=0$ ἔχουμε $ημx=\frac{1}{2}$. Εἶναι ὅμως $\frac{1}{2}=ημ\frac{\pi}{6}$.

Ἄρα $ημx=ημ\frac{\pi}{6}$, ὁπότε

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad \text{καί}$$

$$x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ἡ ἐξίσωση εφx = α

6.31 Ἄν θ εἶναι ἕνας ἀριθμός τέτοιος, ὥστε $εφθ=α$, ἡ ἐξίσωση $εφx=α$ γράφεται

$$εφx=εφθ$$

ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν § 6.27, ὅλες οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{x=k\pi+\theta, \quad \text{γιά } k\in\mathbb{Z}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τήν ἐξίσωση $εφ\,x-\sqrt{3}=0$ ἔχουμε $εφx=\sqrt{3}$ καί ἐπειδή $\sqrt{3}=εφ\frac{\pi}{3}$, εἶναι $εφx=εφ\frac{\pi}{3}$, ὁπότε οἱ λύσεις εἶναι

$$x=k\pi+\frac{\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Σημείωση

Ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $σφx=β$.

- ἄν $β\neq 0$, ἀνάγεται στή λύση τῆς $\frac{1}{εφx}=β$ ἤ $εφx=\frac{1}{β}$
- ἄν $β=0$, λύσεις τῆς $σφx=β$ εἶναι οἱ ἀλγεβρικές τιμές ὅλων τῶν τόξων πού λήγουν στό Β ἤ Β', δηλαδή $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Π.χ. ἡ ἐξίσωση $σφx=1$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $εφx=1$.
Οἱ λύσεις της εἶναι λοιπόν

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις**

α) $(2ημx+1)^2-4(1-ημx)(2\,ημx+1)=0$

β) $συν\,2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **μέ** $x\in[0,2\pi]$.

α) Είναι

$$(2\eta\mu x+1)^2-4(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x+1)=0 \Leftrightarrow (2\eta\mu x+1)(2\eta\mu x+1-4+4\eta\mu x)=0$$
$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x+1)(6\eta\mu x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x+1=0) \text{ ἤ } (6\eta\mu x-3)=0)$$
$$\Leftrightarrow \left(\eta\mu x=-\frac{1}{2}\right) \text{ ἤ } \left(\eta\mu x=\frac{1}{2}\right)$$

Ἀπό τίς δύο τελευταῖες ἐξισώσεις ἔχουμε:

$\eta\mu x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Ἄρα $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$

ἤ $x=(2k\pi+1)\pi+\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$

$\eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}$

Ἄρα $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$

ἤ $x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$

β) Εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}.$$

Ἄρα $2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ καί $x=k\pi\pm\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ἐπειδή $x\in[0,2\pi]$ θά ἔχουμε $0\leqslant k\pi\pm\frac{\pi}{8}\leqslant 2\pi$.

- Ἀπό τήν $0\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant 2\pi$ εἶναι $0\leqslant k+\frac{1}{8}\leqslant 2$ ἤ $-\frac{1}{8}\leqslant k\leqslant\frac{15}{8}$,

  ἄρα $k=0$ ἤ 1. Γιά $k=0$ ἔχουμε $x=\frac{\pi}{8}$ καί

  γιά $k=1$ ἔχουμε $x=\pi+\frac{\pi}{8}$

- Ἀπό τήν $0\leqslant k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant 2\pi$ εἶναι $0\leqslant k-\frac{1}{8}\leqslant 2$ ἤ $\frac{1}{8}\leqslant k\leqslant\frac{17}{8}$,

  ἄρα $k=1$ ἤ 2.

  Γιά $k=1$ ἔχουμε $x=\pi-\frac{\pi}{8}$ καί

  γιά $k=2$ ἔχουμε $x=2\pi-\frac{\pi}{8}$

Ἄρα οἱ λύσεις στό $[0,2\pi]$ εἶναι $\frac{\pi}{8}$, $\pi+\frac{\pi}{8}$, $\pi-\frac{\pi}{8}$, $2\pi-\frac{\pi}{8}$

2. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\, x$

β) $\varepsilon\varphi^2 x-\sigma\varphi^2 x=0$

α) Εἶναι:

$$\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\, x \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Ἄρα $$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \qquad (1)$$

ἤ $\quad 2x + \frac{\pi}{6} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} + x \qquad (2)$

Ἀπό τή (1) ἔχουμε $\quad 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ἤ $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$.

Ἀπό τή (2) ἔχουμε $\quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ἤ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$.

β) Εἶναι

$$\varepsilon\varphi^2 x - \sigma\varphi^2 x = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x)(\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x = 0) \text{ ἤ } (\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = 0)$$
$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x) \text{ ἤ } (\varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi x)$$

Ἀπό τήν $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x$ ἔχουμε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Ἄρα

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἀπό τήν $\varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi x$ ἔχουμε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Ἄρα

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} + x \quad \text{ἤ} \quad 0x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$ πού εἶναι ἀδύνατη.

3. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις**

$$\text{συν } x^0 = \frac{1}{2}, \quad \text{ημ } x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{καί} \quad \text{εφ } x^0 = -\sqrt{3}.$$

Ἐπειδή $\frac{1}{2} = \text{συν } 60^0$, οἱ λύσεις τῆς συν $x^0 = \frac{1}{2}$ δίνονται ἀπό τούς τύπους $x^0 = k\cdot 360^0 \pm 60^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ὁμοίως οἱ λύσεις τῆς ημ$x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ημ } 45^0$ δίνονται ἀπό τούς τύπους

$$x^0 = k\cdot 360^0 + 45^0, \quad x^0 = (2k+1)180^0 - 45^0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

καί οἱ λύσεις τῆς εφ $x^0 = -\sqrt{3} = \text{εφ}(-30^0)$ εἶναι $x^0 = k\cdot 180^0 - 30^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ἀσκήσεις 21, 22, 23.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιῶν ἀριθμῶν οἱ εἰκόνες στόν τριγωνομετρικό κύκλο σχηματίζουν:
α) κανονικό ἑξάγωνο β) ἰσόπλευρο τρίγωνο.

2. Ποιῶν ἀριθμῶν οἱ εἰκόνες στόν τριγωνομετρικό κύκλο ὁρίζουν χορδές παράλληλες
α) πρός τή διάμετρο ΑΑ' β) πρός τή διάμετρο ΒΒ'.

3. Νά βρεῖτε τίς εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$, στόν τριγωνομετρικό κύκλο. Τί παρατηρεῖτε;

4. Ἄν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ καί τό ἀντίστοιχο τόξο ἔχει πέρας Μ $\left(-\frac{5}{13}, y\right)$, νά βρεθεῖ ὁ y καί ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως

$$A = \frac{(2\text{ημ}x - 3\text{συν}x) - (\text{ημ}^2 x - \text{συν}^2 x)}{2\text{ημ}x \text{ συν}x}$$

5. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $ημ\frac{23π}{5} = ημ\frac{3π}{5}$, $συν\frac{-28π}{5} = συν\frac{2π}{5}$, $ημ\left(-\frac{30π}{7}\right) = ημ\frac{12π}{7}$

6. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

α) $ημ^6x + συν^6x = 1 - 3\,ημ^2x\,συν^2x$

β) $ημ^4x - συν^4x = 1 - 2συν^2x$

γ) $ημ^2xσυν^2φ - ημ^2φσυν^2x = ημ^2x - ημ^2φ$

δ) $\frac{ημx}{1+συνx} + \frac{1+συνx}{ημx} = \frac{2}{ημx}$.

7. Νά δειχθεῖ ὅτι δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε $ημx = 0$ **καί** $συνx = 0$.

8. Οἱ ἀριθμοί $\frac{12}{13}$ καί $-\frac{5}{13}$ εἶναι δυνατόν νά εἶναι τιμές στό ἴδιο x τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο ἀντιστοίχως;
Σέ ποιό τεταρτημόριο καταλήγει τό ἀντίστοιχο τόξο;

9. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως

$$A = \frac{ημx + συνx}{εφx + σφx}, \quad \text{ὅταν } x = \frac{π}{3}, \frac{π}{4}, \frac{π}{6}.$$

10. Νά βρεθοῦν οἱ $εφ\left(-\frac{23π}{6}\right)$ καί $σφ\frac{17π}{4}$.

11. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $A = \dfrac{ημ\frac{13π}{6} + συν\left(-\frac{15π}{4}\right)}{εφ\frac{19π}{3} + σφ\frac{13π}{6}}$

12. Ἄν $ημx = \frac{12}{15}$ καί $0 < x < \frac{π}{2}$, νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως

$$A = \frac{2εφx - 3συνx + 2σφx}{5ημx}.$$

13. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

α) $σφx + εφx = \frac{1}{ημxσυνx}$ $\quad (ημx\,συνx \neq 0)$

β) $ημxσυνx(1+εφx)(1+σφx) = 1 + 2ημxσυνx$.

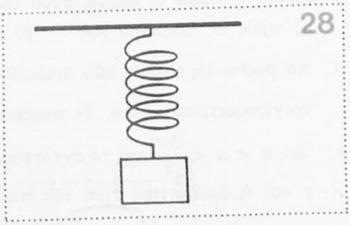
14. Ἕνα σῶμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στό ἄκρο ἑνός ἐλατηρίου. Τό ὕψος του h cm σέ χρόνο t sec δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$h = 50 + 20\,ημ\,t\,\frac{π}{4}.$$

Νά βρεθεῖ

α) Τό ὕψος του σέ 1, 2, 4, 6, 9 sec

β) Τό μέγιστο καί ἐλάχιστο ὕψος.



15. Τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται τό ἕνα ἀνατολικά καί τό ἄλλο δυτικά ἑνός πύργου ΓΔ. Ἄν οἱ γωνίες ὕψους τοῦ Δ ἀπό τά σημεῖα Α καί Β εἶναι ἀντιστοίχως α καί β, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ὕψος τοῦ πύργου εἶναι :

$$υ = \frac{(AB)}{σφ\,α + σφ\,β}.$$

16. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $A = 120^0$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι :

α) $εφ\,B = \dfrac{β\sqrt{3}}{β+2γ}$ καί **β)** $α^2 = β^2+γ^2+βγ$.

17. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ :

α) $ημA = ημ\,(B+Γ)$ $\qquad συνA = -συν(B+Γ)$

$ημ\,\dfrac{A}{2} = συν\,\dfrac{B+Γ}{2}$ $\qquad συν\,\dfrac{A}{2} = ημ\,\dfrac{B+Γ}{2}$

β) Τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μέ $\dfrac{1}{2}\,αβ\,ημΓ$

γ) Ἄν $A = 90^0$, τότε $ημ^2B+ημ^2Γ = 1$.

18. Γιά τίς συναρτήσεις

f μέ $f(x) = 2συν^2x+3ημx\,συνx+5ημ^2x+1$

g μέ $g(x) = 2εφx - 3σφx+2$ καί

φ μέ $φ(x) = 4εφx+4σφx-1$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f(x) = f(π+x)$, $g(x) = g(π+x)$

$$φ(x) = φ\left(\frac{π}{2} - x\right) = φ(π+x) = φ\left(\frac{3π}{2} - x\right).$$

19. Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) $ημ\,(270^0+θ)+ημ\,(180^0+θ))+ημ\,(90^0+θ)+ημ\,θ = 0$

β) $εφ\,1^0\,εφ\,2^0\,εφ\,3^0\ldots\,εφ\,89^0= 1$

γ) Ἄν $-90^0<θ<90^0$, τότε $ημ(180^0-θ)σφ(90^0-θ)>2-2συν\,θ$.

20. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση

$$A = \frac{εφ(π-θ)\,συν(2π+θ)\,συν\left(\dfrac{π}{2} + θ\right)}{ημ(π+θ)\,συν(-θ)\,σφ\left(\dfrac{π}{2} - θ\right)}$$

21. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\eta\mu^2 2x - \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu^2 3x + \eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

22. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\varepsilon\varphi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi x$

β) $\eta\mu 5x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

23. Νά λυθοῦν στό διάστημα $[0, 2\pi]$ οἱ ἐξισώσεις:

α) $2\eta\mu 3x = \sqrt{2}$

β) $3\varepsilon\varphi\, 2x = \sqrt{3}$.

1. **α)** Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ στόν τριγωνομετρικό κύκλο εἶναι κορυφές κανονικοῦ ἑξαγώνου.

   β) Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ στόν τριγωνομετρικό κύκλο εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου.

2. **α)** Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $(2k+1)\pi-x$, $k \in \mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τή διάμετρο ΑΑ'.

   β) Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $2k\pi-x$, $k \in \mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τή διάμετρο ΒΒ'.

3. Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{\pi}{6}$ καθώς καί τῶν $\frac{11\pi}{6}$ καί $\frac{5\pi}{6}$ εἶναι σημεῖα ἀντιδιαμετρικά. Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{7\pi}{6}$ συμπίπτουν κτλ.

4. Εἶναι $\text{συν}\, x = -\frac{5}{13}$, $y = \text{ημ}x = -\frac{12}{13}$ καί $A = -\frac{59}{30}$.

5. **α)** Εἶναι $\frac{23\pi}{5} = 4\pi + \frac{3\pi}{5}$.

   β) Εἶναι $-\frac{28\pi}{5} = -6\pi + \frac{2\pi}{5}$.

   γ) Εἶναι $-\frac{30\pi}{7} = -6\pi + \frac{12\pi}{7}$.

6. **α)** Τό $\text{ημ}^6x + \text{συν}^6x$ νά γραφεῖ $(\text{ημ}^2x)^3 + (\text{συν}^2x)^3$ καί νά γίνει χρήση τῆς ταυτότητας $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ καί τῆς $\text{ημ}^2x + \text{συν}^2x = 1$.

   β) Παρατηρῆστε ὅτι τό πρῶτο μέλος τῆς ταυτότητας εἶναι διαφορά τετραγώνων.

   γ) Τό $\text{συν}^2\varphi$ νά γραφεῖ $1-\text{ημ}^2\varphi$, τό συν^2x νά γραφεῖ $1-\text{ημ}^2x$ καί νά γίνουν οἱ πράξεις στό α' μέλος τῆς ἰσότητας.

   δ) Κάνουμε τίς πράξεις στό πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητας καί καταλήγουμε στό δεύτερο.

7. Ἄν $\text{ημ}x = 0$ καί $\text{συν}x = 0$, τότε $\text{ημ}^2x = 0$ καί $\text{συν}^2x = 0$.

8. Οἱ ἀριθμοί $\frac{12}{13}$ καί $\frac{-5}{13}$ μπορεῖ νά εἶναι τιμές τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο στόν ἴδιο ἀριθμό x.

9. Γιά $x = \frac{\pi}{3}$, βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}$

   Γιά $x = \frac{\pi}{4}$, βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   Γιά $x = \frac{\pi}{6}$, βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{8}$

10. Ὁ ἀριθμός $-\frac{23\pi}{6}$ νά γραφεῖ $-\frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$, ἐνῶ ὁ ἀριθμός $\frac{17\pi}{4}$ νά γραφεῖ $\frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$.

11. Εἶναι $\eta\mu \frac{13\pi}{6} = \eta\mu\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ κτλ.

Βρίσκουμε $A = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+1)}{12}$.

12. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{9}{15}$, $\varepsilon\varphi x = \frac{4}{3}$, $\sigma\varphi x = \frac{3}{4}$ καί $A = \frac{71}{120}$.

13. **α)** Κάνουμε τίς πράξεις στό πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητας καί καταλήγουμε στό δεύτερο.

β) Ὁμοίως.

14. **α)** Τό ὕψος τοῦ σώματος σέ 1, 2, 4, 6, 9 sec εἶναι ἀντιστοίχως 64,14 cm, 70 cm, 50 cm, 30 cm, 64,14 cm.

β) Τό μέγιστο ὕψος εἶναι 70 cm καί τό ἐλάχιστο 50 cm.

15. Παρατηρῆστε ὅτι $\upsilon = (A\Gamma)\,\varepsilon\varphi\,\alpha = (B\Gamma)\,\varepsilon\varphi\,\beta$.

16. Ἄν Δ εἶναι ἡ προβολή τοῦ Γ στήν ΑΒ, τότε $\varepsilon\varphi\, B = \frac{(\Gamma\Delta)}{(B\Delta)}$.

17. **α)** Οἱ γωνίες Α καί Β+Γ εἶναι παραπληρωματικές

β) Τό ὕψος υ_α ἰσοῦται μέ $\beta\,\eta\mu\Gamma$.

γ) Οἱ γωνίες Β καί Γ εἶναι συμπληρωματικές.

18. Εἶναι $f(x+\pi) = 2\,\sigma\upsilon\nu^2(x+\pi) + 3\eta\mu(x+\pi)\sigma\upsilon\nu(x+\pi) + 5\eta\mu^2(x+\pi) + 1$ κτλ.

$g(x+\pi) = 2\varepsilon\varphi(x+\pi) - 3\sigma\varphi(x+\pi) + 2$ κτλ.

$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\,\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1$ κτλ.

$\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 4\,\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 4\,\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1$ κτλ.

19. **α)** Εἶναι $\eta\mu(270^\circ + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\,\theta$, $\eta\mu(180^\circ + \theta) = -\eta\mu\theta$ κτλ.

β) Παρατηρῆστε ὅτι τά τόξα 1° καί 89°, 2° καί 88° κ.ο.κ. εἶναι συμπληρωματικά.

γ) Ἐπειδή $\sigma\upsilon\nu\,\theta > 0$, ἡ ἀνισότητα εἶναι ἰσοδύναμη τῆς $(1 - \sigma\upsilon\nu\,\theta)^2 > 0$.

20. Βρίσκουμε $A = -1$.

21. **α)** $\eta\mu^2 2x - \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\eta\mu 2x + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]\left[\eta\mu 2x - \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \eta\mu 2x + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ἤ $\eta\mu 2x - \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ κτλ.

β) Ὁμοίως.

22. **α)** $\varepsilon\varphi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ κτλ.

β) $\eta\mu 5x = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \eta\mu 5x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right)$ κτλ.

23. **α)** Γράφεται ἰσοδύναμα $\eta\mu 3x = \eta\mu \frac{\pi}{4}$. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν Ἐφαρμογή 1β τῆς § 6.31.

β) Ὁμοίως.

7 ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στό κεφάλαιο αὐτό γίνεται ἡ μελέτη βασικῶν συναρτήσεων πού ὁ μαθητής ἔχει ἤδη συναντήσει στά γυμνασιακά μαθήματα. Γιά τή συμπλήρωση τῶν γνώσεών του ἐκείνων σημαντικό ρόλο θά παίξει ἡ ἔννοια τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς συναρτήσεως, ἐπειδή μέ αὐτή, πού ὥς τώρα ἦταν ἕνα ἁπλό σύνολο σημείων, θά ἑρμηνευθοῦν ἐποπτικά βασικές ἔννοιες, ὅπως ἡ μονοτονία, ἡ περιοδικότητα, ἡ ἀρτιότητα καί ἄλλες ἰδιότητες τῶν συναρτήσεων.

Ἡ μελέτη διευκολύνεται μέ τή συστηματική χρησιμοποίηση τῆς ἔννοιας τοῦ λόγου μεταβολῆς μιᾶς συναρτήσεως καθώς καί τῆς ἀλλαγῆς τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, πού ἐπιτρέπει τήν ἀναγωγή σέ γνωστές ἁπλές μορφές συναρτήσεων.

Ἐκτός ἀπό τό λόγο μεταβολῆς, πού ἀποτελεῖ προεισαγωγή στήν ἔννοια τῆς παραγώγου, εἰσάγονται εὐκαιριακά καί ὁρισμένες ἁπλές περιπτώσεις ὁρίου συναρτήσεως, ἀκροτάτων κτλ., πού ἀποτελοῦν μιά πρώτη ἐπαφή τοῦ μαθητῆ μέ θέματα πού θά μελετήσει βαθύτερα καί ἐκτενέστερα σέ μεγαλύτερη τάξη.

ΜΕΛΕΤΗ
ΒΑΣΙΚΩΝ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ γίνεται ἡ μελέτη βασικῶν συναρτήσεων, ποὺ ὁ μαθητὴς ἔχει ἤδη συναντήσει στὰ γυμνασιακὰ μαθήματα. Γιὰ τὴ σχεδίαση τῶν γραφικῶν τους παραστάσεων [illegible] ἡ ἔννοια τῆς μονοτονίας, τῶν ἀκροτάτων, [illegible] σε, θὰ ἐφαρμοσθοῦν ἐκτενέστερα βασικὲς ἔννοιες, ὅπως ἡ μονοτονία, ἡ περιοδικότητα, τὰ ἀκρότατα καὶ ἄλλες ἰδιότητες τῶν συναρτήσεων.

Ἡ μελέτη ἀναφέρεται μὲ τὴ συστηματικὴ χρησιμοποίηση τῆς ἔννοιας τοῦ λόγου μεταβολῆς μιᾶς συναρτήσεως καθὼς καὶ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, ποὺ ἐπιτρέπει τὴν ἀναγωγὴ σὲ γνωστὲς βασικὲς μορφὲς συναρτήσεων.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ λόγο μεταβολῆς, ποὺ ἀποτελεῖ κεντρικὴ ἔννοια τῆς παραγράφου, εἰσάγονται ἐπίσης γενικὰ καὶ ἀσυμπτώτες ἄλλες περιπτώσεις, ὅπως συναρτήσεις ἀκεραίου κτλ., ποὺ ἀποτελοῦν μιὰ πρώτη ἐπαφὴ τοῦ μαθητῆ μὲ θέματα ποὺ θὰ μελετήσει βαθύτερα καὶ ἐκτενέστερα σὲ μεγαλύτερη τάξη.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Γραφική παράσταση συναρτήσεως καί ἡ ἐξίσωσή της

$\boxed{7.1}$ Ἔστω f μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ A. Γιά κάθε $x \in A$ ὁρίζεται τό ζεῦγος $(x, f(x))$, πού ἀνήκει στό γράφημα G τῆς f. Ἄν λοιπόν θεωρήσουμε στό ἐπίπεδο ἕνα καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς, τότε κάθε ζεῦγος $(x, y) \in G$ μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ ἕνα σημεῖο $M(x, y)$, τοῦ ὁποίου συντεταγμένες εἶναι ἀκριβῶς οἱ x καί y.

Τό σύνολο $\mathscr{C}$ τῶν σημείων $M(x, y)$, γιά τά ὁποῖα $(x, y) \in G$, λέγεται **γραφική παράσταση** τῆς συναρτήσεως f. Εἶναι λοιπόν:

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow M(x, y) \in \mathscr{C}$$

Ἐπειδή τά στοιχεῖα τοῦ G εἶναι τῆς μορφῆς $(x, f(x))$, εἶναι προφανές ὅτι ἕνα σημεῖο M ἀνήκει στή γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ τῆς f, ἄν καί μόνο ἄν τό ζεῦγος (x, y) τῶν συντεταγμένων του ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση

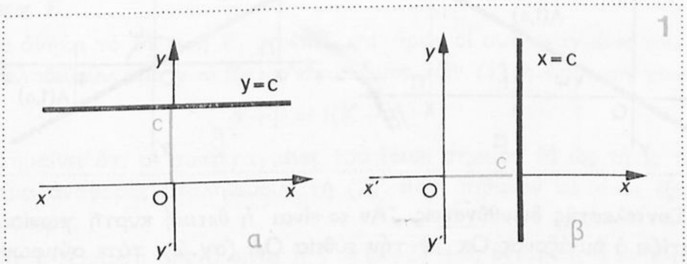
$$y = f(x) \quad (x \in A).$$

Ἡ γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ προσδιορίζεται λοιπόν ἀπό τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως $y = f(x)$, πού λέγεται καί **ἐξίσωση τῆς** $\mathscr{C}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἡ γραφική παράσταση τῆς σταθερῆς συναρτήσεως μέ τιμή c ἔχει ἐξίσωση $y = c$, πού ἐπαληθεύεται ἀπό ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς (x, c). Εἶναι λοιπόν ἡ παράλληλος πρός τόν ἄξονα $x'x$, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο A (0,c) (σχ. 1α).

Γιά $c = 0$ ἔχουμε $y = 0$ πού εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ ἄξονα $x'x$.



Σημείωση

Γενικότερα μιά ἐξίσωση μέ μεταβλητές x, y λέγεται καί ἐξίσωση τοῦ συνόλου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ἐπαληθεύουν αὐτή τήν ἐξίσωση. Π.χ. ἡ $x^2 + y^2 = 1$ εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ μοναδιαίου κύκλου (§ 6.12).

Ἐπίσης τό σύνολο τῶν σημείων μέ συντεταγμένες (c, y) ἔχει ὡς ἐξίσωση τήν $x = c$ καί εἶναι εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα $y'y$ (Σχ. 1β). Γιά $c = 0$ ἔχουμε $x = 0$, πού εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ ἄξονα $y'y$. Ἐδῶ, ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα, ἡ ἐξίσωση δέν εἶναι τῆς μορφῆς $y = f(x)$. Ἄρα ἔχουμε ἐξίσωση σημειοσυνόλου πού δέν εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως.

7.2 Γραφική παράσταση τῆς f μέ f(x) = αx. Ἡ ζητούμενη γραφική παράσταση $\mathcal{C}$ ἔχει ἐξίσωση $y = \alpha x$ καί περιέχει προφανῶς τήν ἀρχή $O(0, 0)$ τῶν ἀξόνων.

Ἄν $\alpha = 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $y = 0$ καί ἡ $\mathcal{C}$ εἶναι (§ 7.1, Παράδ.) ἡ εὐθεία $x'x$. Ὑποθέτουμε $\alpha \neq 0$. Τότε:

Ἐκτός ἀπό τό O καί τό σημεῖο $A(1, \alpha)$ ἀνήκει στή $\mathcal{C}$ (σχ. 2). Γιά κάθε ἄλλο σημεῖο της $M(x,y)$ ἔχουμε $x \neq 0$ καί

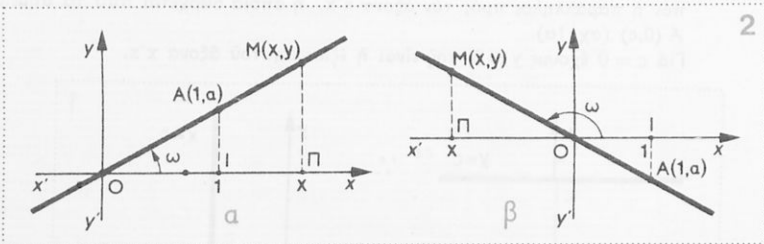
$$y = \alpha x, \quad \text{ἤ} \quad \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{1} \tag{1}$$

Ἔστω I καί Π οἱ προβολές τῶν A καί M ἀντιστοίχως στόν ἄξονα $x'x$. Ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι τά τρίγωνα OIA καί OΠM εἶναι ὅμοια. Οἱ ἡμιευθεῖες OM καί OA ἤ συμπίπτουν ἤ εἶναι ἀντικείμενες, ἐπειδή, λόγω τῆς (1):

- ἄν $\alpha > 0$, τό M ἔχει συντεταγμένες ὁμόσημες καί βρίσκεται στό α', ὅπως τό A, ἤ στό γ' τεταρτημόριο (σχ. 2α).
- ἄν $\alpha < 0$, τό M ἔχει συντεταγμένες ἑτερόσημες καί βρίσκεται στό β' ἤ στό δ', ὅπως τό A, τεταρτημόριο (σχ. 2β).

Ἄρα τό M εἶναι σημεῖο τῆς εὐθείας OA.

Ἀντιστρόφως οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου M τῆς OA ἐπαληθεύουν τήν (1). Συνεπῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς f εἶναι ἡ εὐθεία OA.



7.3 Συντελεστής διευθύνσεως. Ἄν ω εἶναι ἡ *θετική* κυρτή γωνία πού σχηματίζει ὁ ἡμιάξονας Ox μέ τήν εὐθεία OA (σχ. 2), τότε σύμφωνα μέ τίς § 6.18 καί 6.16 ἔχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \overline{IA}$, δηλαδή

$$\varepsilon\varphi\,\omega = \alpha \tag{2}$$

Ἡ εφω, δηλαδή ὁ α, καθορίζει πλήρως τή διεύθυνση τῆς εὐθείας καί λέγεται **συντελεστής διευθύνσεως** τῆς εὐθείας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

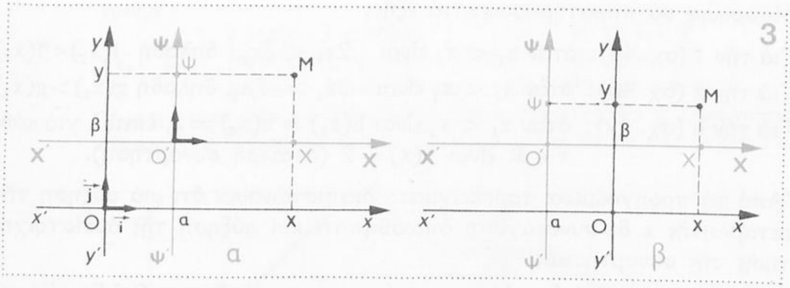
1. Ἡ (2) ἰσχύει καί ὅταν $\alpha = 0$, ὁπότε $\omega = 0$.

2. Εἶναι $0 \leq \omega < \pi$ μέ $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, γιατί γιά $\omega = \frac{\pi}{2}$ ἡ εὐθεία συμπίπτει μέ τόν ἄξονα $y'y$, πού δέν εἶναι γραφική παράσταση συναρτήσεως (§ 7.1 Σημ.).

Ἀλλαγή συστήματος ἀναφορᾶς

7.4 Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο μέ συντεταγμένες (x, y) ὡς πρός τό καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς Oxy (σχ. 3). Ἄν ἀλλάξουμε σύστημα ἀναφορᾶς, τότε προφανῶς τό **ἴδιο** σημεῖο Μ ἔχει **ἄλλες** συντεταγμένες. Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τό σύστημα $O'X\Psi$ μέ ἀρχή $O'(\alpha, \beta)$ καί ἄξονες παράλληλους (1) πρός τούς ἄξονες τοῦ πρώτου συστήματος. Ἄν (X, Ψ) εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ Μ ὡς πρός τό νέο σύστημα ἀναφορᾶς, τότε ἔχουμε:

$$x = X + \alpha \quad \text{καί} \quad y = \Psi + \beta \tag{1}$$



Αὐτή τήν ἀλλαγή τῶν συντεταγμένων ἀξιοποιοῦμε σέ ὁρισμένες περιπτώσεις, γιά νά ἀπλουστεύσουμε τήν ἐξίσωση $y = f(x)$ μιᾶς γραφικῆς παραστάσεως $\mathcal{C}$.

Γιά νά ἀνήκει τό Μ στή $\mathcal{C}$, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ συντεταγμένες του x, y, νά ἐπαληθεύουν τήν $y = f(x)$. Λόγω ὅμως τῶν (1) ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$\Psi + \beta = f(X + \alpha) \tag{2}$$

πού σημαίνει ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ **ἴδιου** σημείου Μ ὡς πρός τό νέο σύστημα ἀναφορᾶς ἐπαληθεύουν τή (2) πού πιθανόν νά εἶναι ἐξίσωση ἁπλούστερη.

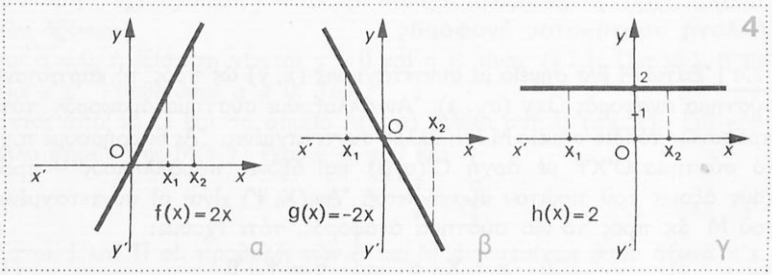
Π.χ. ἄν ἡ ἐξίσωση τῆς $\mathcal{C}$ εἶναι ἡ $y = (x-2)^2 + 3$, θέτοντας $y = \Psi + 3$ καί $x = X + 2$, ἔχουμε τήν $\Psi = X^2$ πού ἐπαληθεύεται ἀπό τίς συντεταγμένες τῶν σημείων τῆς $\mathcal{C}$ ὡς πρός σύστημα ἀναφορᾶς μέ ἄξονες παράλληλους πρός τούς ἀρχικούς καί διερχόμενους ἀπό τό σημεῖο $O'(2, 3)$.

(1) Τό $O'X\Psi$ ὁρίζεται ἀπό τό O' καί τά μοναδιαῖα διανύσματα τοῦ Oxy.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Μονότονες συναρτήσεις

7.5 Στό σχῆμα 4 ἔχουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων f μέ $f(x) = 2x$, g μέ $g(x) = -2x$ καί h μέ $h(x) = 2$.



Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε τά ἑξῆς:

Γιά τήν f (σχ. 4α): ὅταν $x_1 < x_2$ εἶναι $2x_1 < 2x_2$, δηλαδή $f(x_1)<f(x_2)$

Γιά τήν g (σχ. 4β): ὅταν $x_1 < x_2$ εἶναι $-2x_1 > -2x_2$, δηλαδή $g(x_1)>g(x_2)$

Γιά τήν h (σχ. 4γ): ὅταν $x_1 < x_2$ εἶναι $h(x_1) = h(x_2) = 2$, ἐπειδή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ εἶναι $h(x) = 2$ (σταθερή συνάρτηση).

Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα διαπιστώνουμε ὅτι μιά αὔξηση τῆς μεταβλητῆς x δέ συνεπάγεται ὁπωσδήποτε καί αὔξηση τῆς ἀντίστοιχης τιμῆς τῆς συναρτήσεως.

Οἱ ἑπόμενοι ὁρισμοί ἀναφέρονται στό συσχετισμό τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν μεταβλητῆς καί συναρτήσεως.

Μιά συνάρτηση f, μέ πεδίο ὁρισμοῦ A, λέγεται:

- **Γνησίως αὔξουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **Αὔξουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- **Γνησίως φθίνουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **Φθίνουσα,** ὅταν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Γενικότερα μιά συνάρτηση λέγεται **μονότονη,** ὅταν εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα, καί **γνησίως μονότονη,** ὅταν εἶναι γνησίως αὔξουσα ἤ γνησίως φθίνουσα.

Συνήθως ἐξετάζουμε μιά συνάρτηση σέ κατάλληλα ὑποσύνολα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της, σέ καθένα ἀπό τά ὁποῖα παρουσιάζει ἕνα συγκεκριμένο εἶδος μονοτονίας.

Ἄν ὁ περιορισμός (§ 4.10) τῆς f σέ ἕνα ὑποσύνολο A′ τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της A εἶναι συνάρτηση γνησίως αὔξουσα (αὔξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα), τότε λέμε ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα (αὔξουσα, γνησίως φθίνουσα, φθίνουσα) **στό A'**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Μιά σταθερή συνάρτηση f εἶναι καί αὔξουσα καί φθίνουσα, ἀφοῦ γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$ μέ $x_1 < x_2$ εἶναι $f(x_1) = f(x_2)$.
2. Ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = x+1$ εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\mathbb{R}$, ἐπειδή $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+1 < x_2+1$, δηλαδή $g(x_1) < g(x_2)$.
3. Ἡ h μέ $h(x) = 2-x^3$ εἶναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι:

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ [§ 3.11 Θεωρ. 7]

$x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < 0 < x_2^3$

$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow (-x_1)^3 > (-x_2)^3 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$.

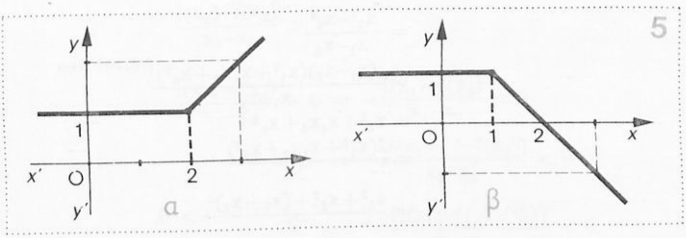
Ἄρα σέ κάθε περίπτωση, ἄν $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3$ ἤ $-x_1^3 > -x_2^3$ ἤ $2-x_1^3 > 2-x_2^3$, δηλαδή $h(x_1) > h(x_2)$.

4. Γιά τή συνάρτηση σ μέ $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x < 2 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 2 \end{cases}$

ἔχουμε :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma(x_1) = 1 = \sigma(x_2), & \text{ἄν } x_1, x_2 < 2 \\ \sigma(x_1) = x_1 - 1 < x_2 - 1 = \sigma(x_2), & \text{ἄν } x_1, x_2 \geqslant 2 \\ \sigma(x_1) = 1 = 2-1 \leqslant x_2 - 1 = \sigma(x_2), & \text{ἄν } x_1 < 2 \leqslant x_2 \end{cases}$$

Ἄρα ἡ σ εἶναι αὔξουσα. Εἰδικότερα ἡ σ εἶναι σταθερή γιά $x < 2$ καί γνησίως αὔξουσα γιά $x \geqslant 2$. Ἡ γραφική παράστασή της δίνεται στό σχῆμα 5 α.



Ὁμοίως διαπιστώνουμε ὅτι ἡ συνάρτηση φ μέ

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x < 1 \\ 2-x, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

εἶναι φθίνουσα. Ἡ γραφική παράστασή της δίνεται στό σχῆμα 5 β.

Λόγος μεταβολῆς συναρτήσεως

7.6 Ἔστω f μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ A καί x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ A. Ὁ λόγος

$$\boxed{\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

λέγεται **λόγος μεταβολῆς** τῆς συναρτήσεως f μεταξύ τῶν x_1 καί x_2.

Μπορούμε νά παρατηρήσουμε ὅτι, ἄν ἡ συνάρτηση εἶναι μονότονη σέ ἕνα σύνολο $B \subseteq A$, τότε ὁ λόγος μεταβολῆς της μεταξύ δύο ὁποιωνδήποτε στοιχείων τοῦ B διατηρεῖ σταθερό πρόσημο. Πράγματι, ἄν ἡ f εἶναι π.χ. γνησίως αὔξουσα, τότε γιά κάθε $x_1, x_2 \in B$ ἔχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

πού σημαίνει ὅτι οἱ ἀριθμοί $x_1 - x_2$ καί $f(x_1) - f(x_2)$ εἶναι ὁμόσημοι. Συνεπῶς ἔχουμε (1) $\lambda > 0$. Ἀλλά καί ἀντιστρόφως, ἄν γιά κάθε $x_1, x_2 \in B$ εἶναι $\lambda > 0$, τότε οἱ ἀριθμοί $x_1 - x_2$ καί $f(x_1) - f(x_2)$ εἶναι ὁμόσημοι. Ἄρα ἔχουμε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ὁπότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι γιά νά εἶναι ἡ f:

- γνησίως αὔξουσα στό B, πρέπει καί ἀρκεῖ: $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda > 0$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, γιά νά εἶναι ἡ f:

- γνησίως φθίνουσα στό B, πρέπει καί ἀρκεῖ $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda < 0$
- σταθερή » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda = 0$
- αὔξουσα » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda \geqslant 0$
- φθίνουσα » » » » » $\forall\, x_1, x_2 \in B, \quad \lambda \leqslant 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τή συνάρτηση f μέ $f(x) = x^3 + 1$ ἔχουμε:

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{(x_1^3+1)-(x_2^3+1)}{x_1-x_2} \\ &= \frac{x_1^3-x_2^3}{x_1-x_2} \\ &= \frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{x_1-x_2} \\ &= x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \\ &= \frac{2(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{2} \\ &= \frac{x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2}{2} > 0.\end{aligned}$$

Ἄρα γιά κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ εἶναι $\lambda > 0$ καί ἑπομένως ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐξεταστεῖ ἡ μονοτονία τῶν συναρτήσεων:**

α) f μέ $f(x) = 2x^2 + 1$

β) g μέ $g(x) = 2x - |3 - x|$.

α) Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως f εἶναι:

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} &= \frac{(2x_1^2+1)-(2x_2^2+1)}{x_1-x_2} \\ &= \frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2} \\ &= 2(x_1+x_2).\end{aligned}$$

(1) Ἐννοεῖται ὅτι $x_1 \neq x_2$ ὥστε νά ὁρίζεται ὁ λ.

Τό πρόσημο τοῦ λ μένει σταθερό στό καθένα ἀπό τά σύνολα $\mathbb{R}_-$ καί $\mathbb{R}_+$
Πράγματι:

- ἄν $x_1 < x_2 \leqslant 0$, τότε $x_1 + x_2 < 0$, ἄρα $\lambda < 0$. Ἡ συνάρτηση λοιπόν εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}_-$.
- ἄν $0 \leqslant x_1 < x_2$, τότε $x_1 + x_2 > 0$, ἄρα $\lambda > 0$ καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\mathbb{R}_+$

β) Γιά τή συνάρτηση g, ἐπειδή $|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{ἄν } x \leqslant 3 \\ x-3, & \text{ἄν } x \geqslant 3 \end{cases}$, ἔχουμε:

$$g(x) = \begin{cases} 3x-3, & \text{ἄν } x \leqslant 3 \\ x+3, & \text{ἄν } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Ἄρα

- ἄν $x_1 < x_2 \leqslant 3$, ἔχουμε $\lambda = \dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{(3x_1-3)-(3x_2-3)}{x_1-x_2}$
$$= \frac{3(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = 3 > 0.$$

Ἄρα ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $x \leqslant 3$.

- ἄν $3 \leqslant x_1 < x_2$, ἔχουμε $\lambda = 1 > 0$. Ἄρα ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $x \geqslant 3$.

2. **Ἄν στό σύνολο A ἡ συνάρτηση f εἶναι γνησίως αὔξουσα, τότε ἡ —f εἶναι γνησίως φθίνουσα.**

Ἐπειδή ἡ f εἶναι αὔξουσα, γιά κάθε $x_1, x_2 \in A$, θά εἶναι:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$$

καί ἐπειδή

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \Rightarrow -\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-f(x_1)-[(-f(x_2)]}{x_1-x_2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(-f)(x_1)-[(-f)(x_2)]}{x_1-x_2} < 0,$$

συμπεραίνουμε ὅτι ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $-f$ εἶναι ἀρνητικός, δηλαδή ἡ $-f$ εἶναι γνησίως φθίνουσα.

3. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν μία συνάρτηση f εἶναι γνησίως μονότονη, τότε εἶναι συνάρτηση 1—1.**

Θά πρέπει νά δείξουμε (§ 4.6) ὅτι, ἄν x_1, x_2 εἶναι τιμές τῆς μεταβλητῆς x, τότε:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad (1)$$

Πράγματι, ἄς ὑποθέσουμε $x_1 \neq x_2$ καί ἔστω $x_1 < x_2$. Ἐπειδή ἡ f εἶναι γνησίως μονότονη γιά $x_1 < x_2$, θά εἶναι **ἤ** $f(x_1) < f(x_2)$ **ἤ** $f(x_1) > f(x_2)$, δηλαδή γιά $x_1 \neq x_2$ εἶναι πάντοτε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ἄρα ἰσχύει ἡ (1).

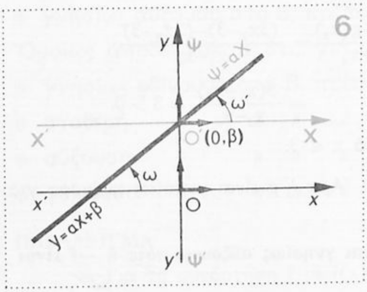
Ἀσκήσεις 1, 2, 3.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \alpha x + \beta$

7.7 Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ λέγεται **ὁμοπαραλληλική** συνάρτηση. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ τῆς γραφικῆς της παραστάσεως ὡς πρός σύστημα ἀναφορᾶς Oxy γράφεται:

$$y - \beta = \alpha x \qquad (1)$$

Ἄν θέσουμε $x = X$ καί $y = \Psi + \beta$, ἡ (1) γίνεται $\Psi = \alpha X$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή, ὡς πρός νέο σύστημα ἀναφορᾶς τό $O'X\Psi$ (§ 7.4), πού ἔχει ἀρχή τό $O'(0,\beta)$ καί ἄξονες $X'X$, $\Psi'\Psi$, παράλληλους ἀντιστοίχως πρός τούς $x'x$, $y'y$, εἶναι (§ 7.2) ἐξίσωση εὐθείας ε (σχ. 6), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό O' καί ἔχει συντελεστή διευθύνσεως $\alpha = \varepsilon\varphi\omega'$. Συνεπῶς καί ἡ $y = \alpha x + \beta$ εἶναι ὡς πρός τό Oxy ἐξίσωση τῆς εὐθείας ε, πού τέμνει τόν Oy στό σημεῖο $(0, \beta)$. Ὁ συντελεστής διευθύνσεώς της εἶναι $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\omega' = \alpha$.



Γιά $y = 0$, εἶναι $x = \dfrac{-\beta}{\alpha}$, δηλαδή ἡ ε τέμνει τόν ἄξονα $x'x$ στό σημεῖο $\left(\dfrac{-\beta}{\alpha}, 0\right)$.

Ἐξάλλου ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f εἶναι

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1 + \beta - \alpha x_2 - \beta}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha$$

Δηλαδή ὁ λ εἶναι **σταθερός** καί μάλιστα ἴσος μέ τό συντελεστή διευθύνσεως τῆς εὐθείας.

Ἄρα ἔχουμε (§ 7.6):

- ἄν $\alpha > 0$, ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα,
- ἄν $\alpha < 0$, ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα,
- ἄν $\alpha = 0$, ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή.

Σημείωση

Ἄν γιά μιά συνάρτηση f ὁ λόγος μεταβολῆς λ εἶναι σταθερός, ἔστω $\lambda = \alpha$, τότε ἡ συνάρτηση εἶναι ὁμοπαραλληλική μέ συντελεστή διευθύνσεως α.

Πράγματι ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν x καί 0 εἶναι $\alpha = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Ἄρα $f(x) = \alpha x + f(0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \frac{2}{3}x - 5$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, γιατί $\alpha = \frac{2}{3} > 0$, ἐνῶ ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = -x + 6$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, γιατί $\alpha = -1 < 0$.

Εἰδικότερα γιά $\beta = 0$ ἔχουμε τή γνωστή μας συνάρτηση f μέ $f(x) = \alpha x$, πού λέγεται **γραμμική** συνάρτηση καί ἡ ὁποία παρουσιάζει τό ἴδιο εἶδος μονοτονίας μέ τήν προηγούμενη. Ἐπιπλέον ἡ συνάρτηση αὐτή ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. $f(x_1 + x_2) = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$, δηλαδή $\mathbf{f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)}$
2. $f(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$, δηλαδή $\mathbf{f(\lambda x) = \lambda f(x)}$

Συνθῆκες παραλληλίας καί καθετότητας

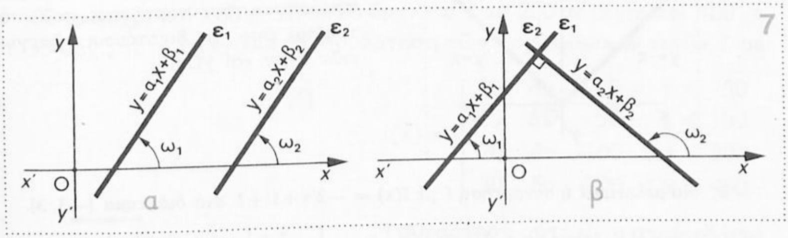
7.8 Ἔστω ε_1, ε_2 δύο εὐθεῖες (σχ. 7) μέ ἀντίστοιχες ἐξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ καί $y = \alpha_2 x + \beta_2$ καί ω_1, ω_2 οἱ (θετικές κυρτές) γωνίες τοῦ ἡμιάξονα Ox μέ τίς εὐθεῖες αὐτές. Τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$

$\Leftrightarrow$ εφω_1 = εφω_2, ἀφοῦ $0 \leqslant \omega_1, \omega_2 < \pi$ (§ 6.27)

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ (§ 7.3).

Ἄρα ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη παραλληλίας τῶν εὐθειῶν $y = \alpha_1 x + \beta_1$ καί $y = \alpha_2 x + \beta_2$ εἶναι ἡ

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$$



Ἄν οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 (σχ. 7β) εἶναι κάθετες, τότε, ὑποθέτοντας $0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2}$ θά εἶναι $\omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega_1$, καί ἀντιστρόφως.

Ἄρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega_1$

$\Leftrightarrow$ εφω_2 = εφ$\left(\frac{\pi}{2} + \omega_1\right)$, ἀφοῦ $\frac{\pi}{2} < \omega_2 < \pi$, (§ 6.27)

$\Leftrightarrow$ εφω_2 = $-$σφω_1

$\Leftrightarrow$ εφ$\omega_2 = -\dfrac{1}{\text{εφ}\omega_1}$

$\Leftrightarrow$ εφω_1 εφ$\omega_2 = -1$.

Ἑπομένως ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη καθετότητας τῶν εὐθειῶν $y = \alpha_1 x + \beta_1$ καί $y = \alpha_2 x + \beta_2$ εἶναι ἡ

$$\boxed{\alpha_1 \alpha_2 = -1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = 2x + 3$ καί $y = 2x - 1$ εἶναι παράλληλες, γιατί $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, ἐνῶ οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = \frac{2}{3}x + 1$ καί $y = -\frac{3}{2}x + 7$ εἶναι κάθετες, γιατί $\alpha_1\alpha_2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

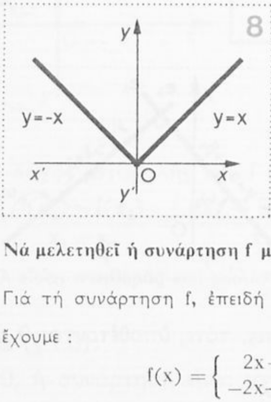
1. **Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = |x|$.**

Γιά τή συνάρτηση f εἶναι:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ἄν} \quad x \leqslant 0 \\ x, & \text{ἄν} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ὅταν $x \leqslant 0$, ἐπειδή $\alpha = -1 < 0$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ὅταν $x \geqslant 0$, ἐπειδή $\alpha = 1 > 0$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.



Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν x'Oy καί yOx.

2. **Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -2|x+1| + 1$ στό διάστημα $[-3, 3]$.**

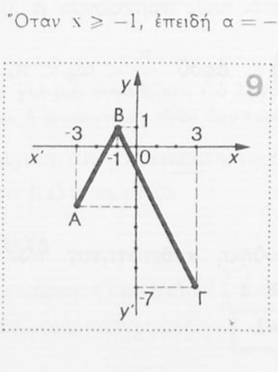
Γιά τή συνάρτηση f, ἐπειδή $|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ἄν} \quad x \geqslant -1 \\ -(x+1), & \text{ἄν} \quad x \leqslant -1, \end{cases}$

ἔχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{ἄν} \quad x \leqslant -1 \\ -2x - 1, & \text{ἄν} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$$

Ὅταν $x \leqslant -1$, ἐπειδή $\alpha = 2 > 0$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Ὅταν $x \geqslant -1$, ἐπειδή $\alpha = -2 < 0$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα.



Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού ἀποτελεῖται ἀπό τά δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καί BΓ.

3. **Νά ἐξετάσετε γιά ποιές τιμές τοῦ λ οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις**

$$y = (\lambda-1)x+5 \quad \text{καί} \quad y = (2\lambda+1)x+7 \qquad \text{εἶναι :}$$

α) παράλληλες καί β) κάθετες.

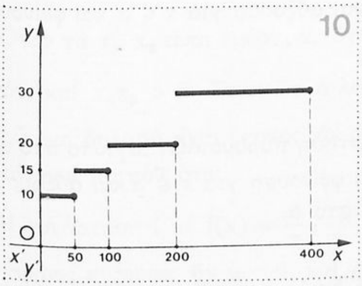
α) Γιά νά εἶναι οἱ εὐθεῖες παράλληλες, θά πρέπει νά εἶναι $\alpha_1 = \alpha_2$, δηλαδή $\lambda-1 = 2\lambda+1$ ἤ $\lambda = -2$.

β) Γιά νά εἶναι κάθετες, θά πρέπει $\alpha_1\alpha_2 = -1$, δηλαδή $(\lambda-1)(2\lambda+1) = -1$ ἤ $2\lambda^2-\lambda = 0$ ἤ $\lambda(2\lambda-1) = 0$, ὁπότε $\lambda = 0$ ἤ $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ἀσκήσεις 4, 5, 6, 7.

Συνάρτηση μονότονη κατά τμήματα

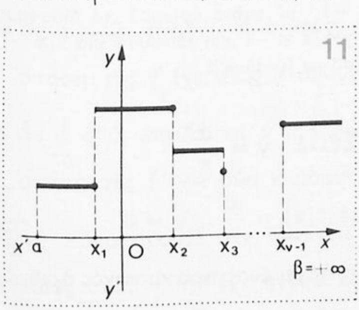
7.9 Ἔστω ὅτι τό ταχυδρομικό τέλος σέ δραχμές ἑνός δέματος βάρους x γραμμαρίων εἶναι f(x). Ἄν γιά δέματα βάρους μέχρι καί 50 gr τό τέλος αὐτό εἶναι 10 δρχ., πάνω ἀπό 50 gr μέχρι καί 100 gr εἶναι 15 δρχ., πάνω ἀπό 100 gr μέχρι καί 200 gr εἶναι 20 δρχ. καί ἀπό 200 gr μέχρι καί 400 gr εἶναι 30 δρχ., τότε θά ἔχουμε τή συνάρτηση τῶν *ταχυδρομικῶν τελῶν* f μέ



$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{ἄν} \quad 0 < x \leqslant 50 \\ 15, & \text{ἄν} \quad 50 < x \leqslant 100 \\ 20, & \text{ἄν} \quad 100 < x \leqslant 200 \\ 30, & \text{ἄν} \quad 200 < x \leqslant 400. \end{cases}$$

Ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι σταθερή στό καθένα ἀπό τά διαστήματα (0, 50], (50, 100], (100, 200], (200, 400] καί λέγεται **κλιμακωτή** συνάρτηση (σχ. 10).

Γενικότερα ἔστω f μιά συνάρτηση ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα μέ ἄκρα α καί β. Ἡ f θά λέγεται **κλιμακωτή** συνάρτηση, ἄν ὑπάρχουν ἀριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ τέτοιοι, ὥστε

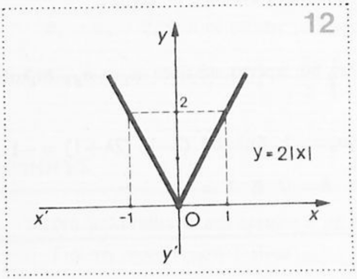


$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

καί ἡ f εἶναι σταθερή σέ κάθε ἀνοικτό ὑποδιάστημα (x_k, x_{k+1}) γιά $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$ (σχ. 11).

Ἄν γενικότερα ἡ f εἶναι **μονότονη** σέ καθένα ἀπό τά διαστήματα (x_k, x_{k+1}), τότε θά λέγεται **μονότονη κατά τμήματα.**

Π.χ. ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = 2|x|$ (σχ. 12) εἶναι μονότονη κατά τμήματα, ἀφοῦ:



- γιά $x \geq 0$ εἶναι $f(x) = 2x$, ἑπομένως ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $[0, +\infty)$.
- γιά $x \leq 0$ εἶναι $f(x) = -2x$, ἑπομένως ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $(-\infty, 0]$.

Ἄσκηση 8.

Μέγιστο καί ἐλάχιστο συναρτήσεως

7.10 Ἔστω f μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ A. Θά λέμε ὅτι ἡ f παρουσιάζει:

- **μέγιστο** στό $\alpha \in A$, ὅταν $\forall\, x \in A,\ f(x) \leq f(\alpha)$
- **ἐλάχιστο** στό $\alpha \in A$, ὅταν $\forall\, x \in A,\ f(x) \geq f(\alpha)$.

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι αὔξουσα γιά $x \leq \alpha$ καί φθίνουσα γιά $x \geq \alpha$, τότε:

$$x < \alpha \Leftrightarrow f(x) \leq f(\alpha)$$
$$\alpha < x \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(x),$$

δηλαδή $\forall\, x \in A,\ f(x) \leq f(\alpha)$ καί ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στό α. Ὁμοίως διαπιστώνουμε ὅτι, ἄν ἡ f εἶναι φθίνουσα γιά $x \leq \alpha$ καί αὔξουσα γιά $x \geq \alpha$, τότε παρουσιάζει ἐλάχιστο στό α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = |x|$ (§ 7.8 Ἐφ. 1), εἶναι φθίνουσα γιά $x \leq 0$ καί αὔξουσα γιά $x \geq 0$. Ἄρα παρουσιάζει ἐλάχιστο στό 0 ἴσο μέ $f(0) = 0$.
2. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -2|x+1|+1$, μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $[-3, 3]$ (§ 7.8 Ἐφ. 2), εἶναι αὔξουσα γιά $x \leq -1$ καί φθίνουσα γιά $x \geq -1$. Ἄρα παρουσιάζει μέγιστο στό -1 ἴσο μέ $f(-1) = 1$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \frac{\alpha}{x}$

Γενική μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$

7.11 Παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $x \neq 0$ ὑπάρχει ἕνας πραγματικός ἀριθμός $y = \frac{\alpha}{x} \neq 0$ πού εἶναι εἰκόνα τοῦ x. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}^*$.

Ἐξάλλου, ἄν $y = 0$, θά ἔχουμε $0 \cdot x = \alpha \neq 0$, ἑπομένως δέν ὑπάρχει $x \in \mathbb{R}^*$ πού νά ἔχει ὡς εἰκόνα τό 0. Ἄν ὅμως εἶναι $y \neq 0$, τότε ὑπάρχει πάντοτε ἕνας μοναδικός πραγματικός ἀριθμός $x = \dfrac{\alpha}{y} \neq 0$ πού ἔχει ὡς εἰκόνα τόν y. Ἑπομένως, ἄν περιορίσουμε τό σύνολο ἀφίξεως τῆς f στό $\mathbb{R}^*$, ἡ f εἶναι μιά συνάρτηση **1–1 καί ἐπί** τοῦ $\mathbb{R}^*$ στό $\mathbb{R}^*$. Ἑπομένως ὁρίζεται καί ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση f^{-1}, ἡ ὁποία σέ κάθε $y \in \mathbb{R}^*$ ἀντιστοιχίζει τόν ἀριθμό $\dfrac{\alpha}{y} \in \mathbb{R}^*$. Εἶναι δηλαδή

$$\mathbf{f = f^{-1}}.$$

Σημείωση

Κάθε συνάρτηση f, πού είναι ἴση μέ τήν ἀντίστροφή της f^{-1}, λέγεται **ἐνελικτική.**

Ἔστω τώρα x_1, x_2 δύο ὁποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές τοῦ x. Τότε ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν x_1, x_2 θά εἶναι :

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{\alpha}{x_1} - \dfrac{\alpha}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{-\alpha(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-\alpha}{x_1 x_2}.$$

Ὅταν τά x_1, x_2 εἶναι ὁμόσημα, ὅταν δηλαδή $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_-$ ἤ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, τότε καί $x_1 x_2 > 0$. Συνεπῶς ὁ λόγος μεταβολῆς $\dfrac{-\alpha}{x_1 x_2}$ ἔχει τό πρόσημο τοῦ $-\alpha$, δηλαδή εἶναι θετικός, ἄν $\alpha < 0$, καί ἀρνητικός, ἄν $\alpha > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι :

Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ στά ὑποσύνολα $\mathbb{R}^*_-$ καί $\mathbb{R}^*_+$ εἶναι **γνησίως αὔξουσα, ἄν $\alpha < 0$,** καί **γνησίως φθίνουσα, ἄν $\alpha > 0$.**

Ἐξάλλου

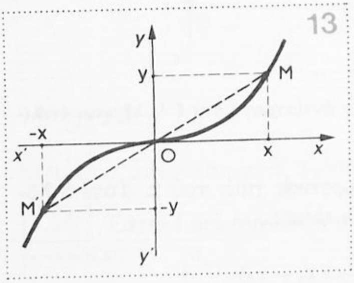
- ἄν $\alpha > 0$, ἐπειδή οἱ x καί $y = \dfrac{\alpha}{x}$ εἶναι ὁμόσημοι, ἡ γραφική παράσταση τῆς f ἔχει δύο κλάδους στό **α′ καί γ′** τεταρτημόριο.
- ἄν $\alpha < 0$, ἐπειδή οἱ x καί $y = \dfrac{\alpha}{x}$ εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ γραφική παράσταση τῆς f ἔχει δύο κλάδους στό **β′ καί δ′** τεταρτημόριο.

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι $f(-x) = \dfrac{\alpha}{-x} = -\dfrac{\alpha}{x} = -f(x)$. Δηλαδή στούς **ἀντίθετους x** καί **−x** ἡ f ἔχει **ἀντίθετες** τιμές. Εἶναι, ὅπως θά λέμε, μιά **περιττή** συνάρτηση.

7.12 **Περιττή συνάρτηση.** Θά λέμε ὅτι μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $A \subseteq \mathbb{R}$ εἶναι **περιττή**, ὅταν

$$\boxed{\forall\, x \in A, \quad f(-x) = -f(x)}$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό προκύπτει ὅτι, ἄν $\mathcal{C}$ εἶναι ἡ γραφική παράσταση μιᾶς περιττῆς συναρτήσεως καί $M(x, y) \in \mathcal{C}$, τότε $-y = -f(x) = f(-x)$. Ἄρα καί τό $M'(-x, -y)$, συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τό O (§ 6.4), εἶναι σημεῖο τῆς $\mathcal{C}$.



Μέ ἄλλα λόγια ἡ γραφική παράσταση (σχ. 13) μιᾶς περιττῆς συναρτήσεως ἔχει κέντρο συμμετρίας τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἡ συνάρτηση $f(x) = x^3$ εἶναι περιττή στό $\mathbb{R}$, γιατί

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Ἐπίσης ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = ημx$ εἶναι περιττή, γιατί

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = ημ(-x) = -ημx = -f(x)$.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \frac{1}{x}$

7.13 Ἐπειδή $α = 1 > 0$, ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι (§ 7.11) γνησίως φθίνουσα στά διαστήματα $(-\infty, 0)$ καί $(0, +\infty)$. Ἡ γραφική της παράσταση περιέχει τά σημεῖα π.χ. $M(1, 1)$, $N\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ ἄρα (§ 7.12) καί τά σημεῖα $M'(-1, -1)$, $N'\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, $P\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$.

Ἄς δοῦμε τώρα πῶς συμπεριφέρεται ἡ συνάρτηση αὐτή γιά *πολύ μικρές* καί *πολύ μεγάλες* τιμές τοῦ $|x|$.

α) Μελέτη γιά «πολύ μικρές» τιμές τοῦ $|x|$.

Ἔστω ὅτι ὁ x παίρνει τίς θετικές τιμές $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{100000}, \ldots$ Τότε οἱ ἀντίστοιχες τιμές $\frac{1}{x}$ τῆς συναρτήσεως θά εἶναι 10, 100, 100000,...

Γεννιέται τώρα τό ἐρώτημα: Μποροῦμε νά βροῦμε μιά τιμή τοῦ $\frac{1}{x}$ ὁσοδήποτε μεγάλη θέλουμε; Μέ ἄλλα λόγια, ἄν δοθεῖ ἕνα θετικός ἀριθμός Α, ὁσοδήποτε μεγάλος, ὑπάρχει θετική τιμή τοῦ x τέτοια, ὥστε νά εἶναι $\frac{1}{x} > A$; Ἔχουμε λοιπόν νά λύσουμε στό $\mathbb{R}_+^*$ τήν ἀνίσωση

$$\frac{1}{x} > A \tag{1}$$

πού εἶναι ἰσοδύναμη τῆς $1 > xA$ ἤ τῆς $x < \frac{1}{A}$.

Ἄρα λύσεις τῆς (1) ὑπάρχουν καί τό σύνολό τους εἶναι τό διάστημα $\left(0, \frac{1}{A}\right)$, τοῦ ὁποίου τό πλάτος ἐλαττώνεται, ὅσο τό Α αὐξάνει, ἐπειδή (§ 3.11. Εφ. 1α)

$$A < A' \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{A'}$$

Ὥστε ἡ τιμή $\frac{1}{x}$ τῆς συναρτήσεως γίνεται ὅσο θέλουμε μεγάλη, ἀρκεῖ ὁ *θετικός* x νά παίρνει τιμές «ἀρκετά κοντά» στό μηδέν.

Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό $+\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ θετικές τιμές.

Ὁμοίως διαπιστώνουμε ὅτι, ὁσοδήποτε μεγάλος καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός $A > 0$, ὑπάρχει *ἀρνητική* τιμή τοῦ x, τέτοια ὥστε $\frac{1}{x} < -A$. Πράγματι, σύνολο λύσεων τῆς $\frac{1}{x} < -A$ στό $\mathbb{R}_-^*$ εἶναι τό διάστημα $\left(-\frac{1}{A}, 0\right)$.

Λέμε λοιπόν ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό $-\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ ἀρνητικές τιμές.

β) Μελέτη γιά «πολύ μεγάλες» τιμές τοῦ $|x|$.

Ἄν ὁ x παίρνει π.χ. τίς τιμές 10, 100, 1000000,... ὁ $\frac{1}{x}$ παίρνει τίς τιμές $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000000}, \ldots$ Ἀποδεικνύεται ὅτι μποροῦμε νά βροῦμε θετική τιμή τῆς συναρτήσεως ὅσο μικρή θέλουμε. Δηλαδή, ἄν δοθεῖ ἕνας θετικός ἀριθμός ε, ὁσοδήποτε μικρός, ὑπάρχει θετική τιμή τοῦ x τέτοια, ὥστε $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Πράγματι γιά $x > 0$,

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < x\varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

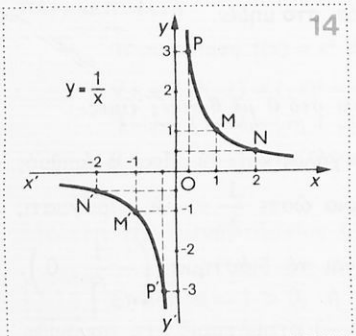
Ἄρα λύσεις ὑπάρχουν καί τό σύνολό τους εἶναι τό διάστημα $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$, τοῦ ὁποίου τό ἄκρο $\frac{1}{\varepsilon}$ αὐξάνει, ὅσο τό ε μικραίνει. Ὥστε ἡ τιμή $\frac{1}{x}$ τῆς συναρτήσεως γίνεται ὅσο θέλουμε μικρή, ἀρκεῖ ὁ *θετικός* x νά παίρνει τιμές «ἀρκετά μεγάλες». Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό 0, ὅταν ὁ x τείνει στό $+\infty$.

Ὁμοίως διαπιστώνουμε ὅτι, ὁσοδήποτε μικρός καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός ε, ὑπάρχει *ἀρνητική* τιμή τοῦ x τέτοια, ὥστε $\frac{1}{x} > -\varepsilon$.

Λέμε τότε ὅτι

ὁ $\frac{1}{x}$ τείνει στό 0, ὅταν ὁ x τείνει στό $-\infty$.



Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = \frac{1}{x}$ δίνεται στό σχῆμα 14 καί λέγεται **ὑπερβολή.**
Ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους, πού βρίσκονται στό α΄ καί γ΄ τεταρτημόριο καί εἶναι συμμετρικοί ὡς πρός τήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων. Οἱ εὐθεῖες x΄x καί yy΄, λέγονται **ἀσύμπτωτες** τῆς ὑπερβολῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

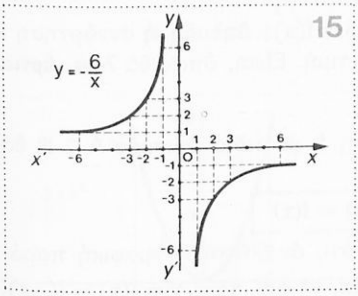
Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -\frac{6}{x}$.

Ἐπειδή $\alpha = -6 < 0$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στά διαστήματα $(-\infty, 0)$ καί$(0, +\infty)$ καί ἡ γραφική της παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους συμμετρικούς ὡς πρός τήν ἀρχή O. Ἄν τώρα ἐργαστοῦμε ὅπως στήν § 7.13, βρίσκουμε ὅτι ἡ τιμή $-\frac{6}{x}$ τῆς συναρτήσεως τείνει

στό $-\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ θετικές τιμές

στό $+\infty$, ὅταν ὁ x τείνει στό 0 μέ ἀρνητικές τιμές

στό 0, ὅταν ὁ x τείνει στό $+\infty$ ἤ $-\infty$.



Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως δίνεται στό σχῆμα 15, καί εἶναι, ὅπως καί στήν προηγούμενη ἐφαρμογή, ὑπερβολή. Ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους, πού βρίσκονται ὅμως στό β' καί στό δ' τεταρτημόριο.

7.14 Ἀπό τήν προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ὅτι γενικότερα ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$, εἶναι ὑπερβολή μέ κέντρο συμμετρίας τό O(0, 0) καί ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες x'x καί y'y.

Ἀσκήσεις *9, 10.*

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $y = \alpha x^2$

Γενική μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

7.15 Ἡ συνάρτηση αὐτή ὁρίζεται γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ἐπειδή $f(0) = 0$, ἡ γραφική της παράσταση περιέχει τό σημεῖο O(0, 0).
Ὁ λόγος μεταβολῆς της εἶναι

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^2 - \alpha x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha(x_1 + x_2).$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

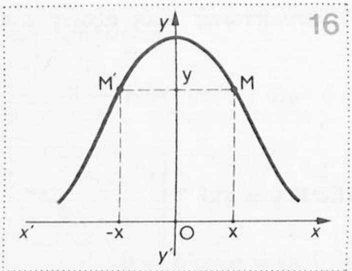
- $\alpha > 0$. Τότε, ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, εἶναι $\lambda < 0$, ἐνῶ ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, εἶναι $\lambda > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι **φθίνουσα στό** $\mathbb{R}_-$ καί **αὔξουσα στό** $\mathbb{R}_+$ (γνησίως). Ἑπομένως (§ 7.10) ἡ f παρουσιάζει **ἐλάχιστο** $f(0) = 0$.
  Ἐξάλλου, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, εἶναι $f(x) \geqslant 0$ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς f βρίσκεται στό **α' καί β'** τεταρτημόριο.
- $\alpha < 0$. Τότε, ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$, εἶναι $\lambda > 0$, ἐνῶ ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ εἶναι $\lambda < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι **αὔξουσα στό** $\mathbb{R}_-$ καί **φθίνουσα στό** $\mathbb{R}_+$. Ἑπομένως (§ 7.10) ἡ f παρουσιάζει **μέγιστο** $f(0) = 0$.
  Ἐξάλλου, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, εἶναι $f(x) \leqslant 0$ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς f βρίσκεται στό **γ' καί δ'** τεταρτημόριο.

Ἀκόμη ἔχουμε ὅτι $f(-x) = \alpha(-x)^2 = \alpha x^2 = f(x)$. Δηλαδή ἡ συνάρτηση f στούς **ἀντίθετους** x καί −x, ἔχει τήν **ἴδια** τιμή. Εἶναι, ὅπως θά λέμε, **ἄρτια** συνάρτηση.

7.16 **Ἄρτια συνάρτηση.** Μιά συνάρτηση f μέ πεδίο ὁρισμοῦ $A \subseteq \mathbb{R}$ θά λέμε ὅτι εἶναι **ἄρτια**, ὅταν

$$\boxed{\forall\, x \in A, \quad f(-x) = f(x)}$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συνάγεται ὅτι, ἄν $\mathscr{C}$ εἶναι ἡ γραφική παράσταση μιᾶς ἄρτιας συναρτήσεως f καί $M(x, y) \in \mathscr{C}$, τότε $y = f(x) = f(-x)$. Ἄρα καί τό $M'(-x, y)$, συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τόν ἄξονα $y'y$ (§ 6.4), εἶναι σημεῖο τῆς $\mathscr{C}$, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἡ $\mathscr{C}$ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα $y'y$ (σχ. 16).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^4$ εἶναι ἄρτια, γιατί

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.

2. Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \text{συν}x$ εἶναι ἄρτια, γιατί (§ 6.21)

   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \text{συν}(-x) = \text{συν}x$.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = x^2$

7.17 Σύμφωνα μέ τήν § 7.15 (περίπτ. $\alpha > 0$), ἡ συνάρτηση αὐτή θά εἶναι φθίνουσα στό $\mathbb{R}_-$ καί αὔξουσα στό $\mathbb{R}_+$ καί παρουσιάζει ἐλάχιστο ἴσο μέ $f(0) = 0$. Ἡ γραφική της παράσταση περιέχει τά σημεῖα π.χ. $M(1, 1)$, $N(2, 4)$, $P\left(2\frac{1}{2},\ 6\frac{1}{4}\right)$. Ἄρα (§ 7.16) καί τά σημεῖα $M'(-1, 1)$, $N'(-2, 4)$, $P'\left(-2\frac{1}{2},\ 6\frac{1}{4}\right)$.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα πῶς μεταβάλλεται ἡ τιμή x^2 τῆς συναρτήσεως γιά «πολύ μεγάλες» τιμές τοῦ $|x|$.

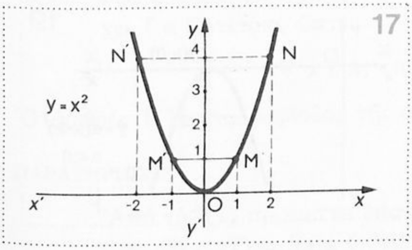
Ἔστω A ἕνας ὁσοδήποτε μεγάλος θετικός ἀριθμός. Τότε (§ 5.10) ὑπάρχει $\alpha > 0$, ὥστε νά εἶναι $\alpha^2 = A$. Ἑπομένως:

$$\begin{aligned} x^2 > A &\Leftrightarrow x^2 > \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow |x| > \alpha \\ &\Leftrightarrow x > \alpha \ \textbf{ἤ}\ x < -\alpha. \end{aligned}$$

Ἔτσι, γιά κάθε $x \in (-\infty, -\alpha)$ ἤ $x \in (\alpha, +\infty)$ τό $x^2 \in (A, +\infty)$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὁ x^2 γίνεται ὅσο θέλουμε μεγάλος ἀρκεῖ νά πάρουμε τόν x ἀπολύτως ἀρκετά μεγάλο. Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι:

τό x^2 τείνει στό $+\infty$, ὅταν τό x τείνει στό $-\infty$ ἤ τό $+\infty$.

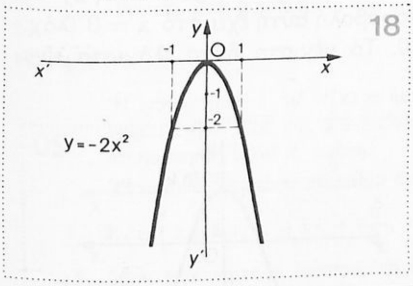


Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $y = x^2$ δίνεται στό σχῆμα 17 καί λέγεται **παραβολή** μέ **κορυφή** τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα $y'y$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = -2x^2$.

Ἐπειδή $-2 < 0$, ἡ συνάρτηση αὐτή (§ 7.15) εἶναι αὔξουσα στό $(-\infty, 0)$ καί φθίνουσα στό $(0, +\infty)$. Ἑπομένως ἡ f ἔχει μέγιστο στό $x = 0$, πού εἶναι $f(0) = 0$. Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στή § 7.17, καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι, ὅταν x τείνει στό $+\infty$ ἤ στό $-\infty$, τότε τό $-2x^2$ τείνει στό $-\infty$.



Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν $y'y$, δίνεται στό σχῆμα 18.

7.18 Ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει γενικότερα ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f μέ

$$f(x) = \alpha x^2, \quad \alpha \neq 0 \tag{1}$$

εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν $y'y$. Ἡ παραβολή αὐτή παρουσιάζει στό O μέγιστο, ἄν $\alpha<0$ καί ἐλάχιστο, ἄν $\alpha>0$.

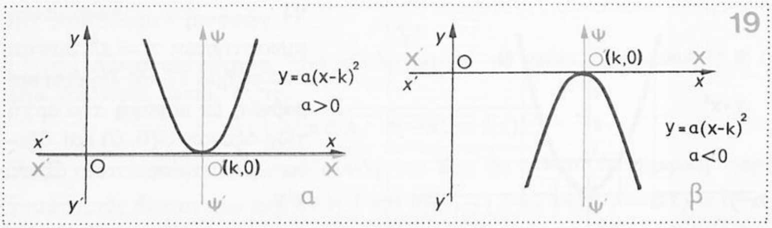
Ἡ γραφική παράσταση τῆς f μέ $f(x) = \alpha(x-k)^2$, $\alpha \neq 0$

7.19 Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $y = \alpha(x-k)^2$, ἄν θέσουμε $x-k = X$ καί $y = \Psi$, γίνεται:

$$\Psi = \alpha X^2 \tag{1}$$

Ἡ (1) ὅμως, ὡς πρός νέο σύστημα ἀναφορᾶς τό O΄XΨ (§ 7.4) πού ἔχει ἀρχή

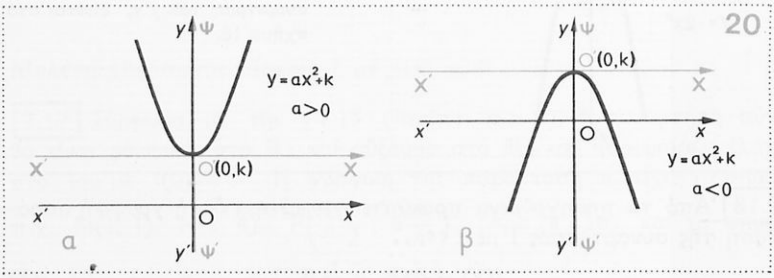
O'(k, 0) καί ἄξονες X'X, Ψ'Ψ ἀντιστοίχως παράλληλους πρός τούς x'x, y'y, εἶναι (§ 7.18) ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό O' καί ἄξονα συμμετρίας τόν Ψ'Ψ (σχ. 19). Ἑπομένως καί ἡ $y = \alpha(x-k)^2$, ὡς πρός τό Oxy, εἶναι



ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο O'(k,0) καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x = k$. Ἡ παραβολή αὐτή ἔχει στό $x = k$ ἐλάχιστο, ἄν $\alpha > 0$ καί μέγιστο, ἄν $\alpha < 0$. Τό μέγιστο ἤ τό ἐλάχιστο εἶναι $f(k) = \alpha(k-k)^2 = 0$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς f μέ $f(x) = \alpha x^2 + k$

7.20 Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν § 7.19, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ $y = \alpha x^2 + k$ εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο O'(0, k) καί ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα y'y. Ἡ παραβολή αὐτή ἔχει στό $x = 0$ ἐλάχιστο, ἄν $\alpha > 0$ καί μέγιστο, ἄν $\alpha < 0$. Τό μέγιστο ἤ τό ἐλάχιστο εἶναι $f(0) = \alpha 0^2 + k = k$.



Ἀσκήσεις 11, 12.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Περιοδικές συναρτήσεις

7.21 Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Ἐπειδή γιά κάθε $k \in \mathbb{Z}$ εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\,(x + 2k\pi),$$

θά ἔχουμε $\sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\,(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x + 2.2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x + 3.2\pi) = \dots$

Μιά τέτοια συνάρτηση λέγεται **περιοδική συνάρτηση.**

Γενικότερα:

Μιά συνάρτηση f, ορισμένη στό A, λέγεται **περιοδική,** ὅταν ὑπάρχει $T \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ὥστε:

$$\forall\ x \in A, \quad f(x+T) = f(x) \tag{1}$$

Ὁ ἀριθμός T λέγεται **περίοδος** τῆς συναρτήσεως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἀπό τήν (1) προκύπτει ἐπαγωγικά ὅτι, ἄν $x \in A$, γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ εἶναι $f(x+\nu T) = f(x)$, δηλαδή καί ὁ νT εἶναι περίοδος. Ἀλλά καί ὁ $-\nu T$ εἶναι περίοδος, ἀφοῦ $f(x) = f(x-\nu T+\nu T) = f(x-\nu T)$.

Ἑπομένως, ἄν γιά τή μελέτη τῆς μεταβολῆς τῆς f περιοριστοῦμε σέ ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $[\alpha, \alpha+T]$, οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως ἐπαναλαμβάνονται σέ κάθε διάστημα $[\alpha+kT, \alpha+(k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ἄρα ἡ μελέτη μιᾶς περιοδικῆς συναρτήσεως ἀρκεῖ νά γίνει στό διάστημα $[\alpha, \alpha+T]$, ὅπου T ἡ μικρότερη θετική περίοδος, πού λέγεται καί **βασική.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \eta\mu x$ εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π, γιατί $\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu x$ καί ὁ 2π εἶναι ὁ μικρότερος θετικός ἀριθμός, γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει αὐτή ἡ σχέση.

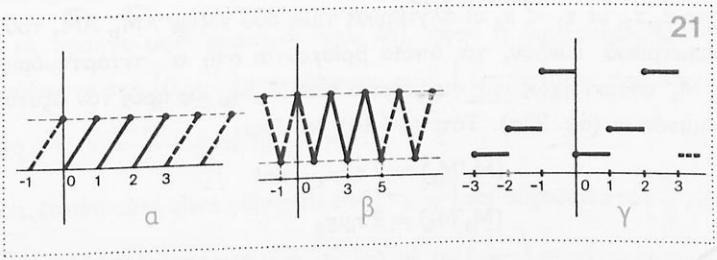
Ἐπίσης, ἄν $\mathbb{R}_1$ εἶναι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ἐφαπτομένη εἶναι

$$\mathbb{R}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}:\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\,(x+\pi) = \varepsilon\varphi x.$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη εἶναι περιοδική στό $\mathbb{R}_1$ μέ περίοδο π.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ ἡ (βασική) περίοδος τῶν συναρτήσεων τῶν ὁποίων οἱ γραφικές παραστάσεις δίνονται στό παρακάτω σχῆμα**



Οἱ συναρτήσεις τοῦ σχήματος ἔχουν περιόδους 1 (21α), 2 (21β) καί 3(21γ).

2. **Νά βρεθεῖ ἡ περίοδος τῶν συναρτήσεων:**
f μέ $f(x) = ημ5x$ ἤ γενικότερα ημλx, συνλx, εφλx, σφλx.

Ἔστω T μία περίοδος. Τότε θά εἶναι $f(x+T) = f(x)$. Ὁπότε:

$$ημ\,5(x+T) = ημ\,5x$$

$$5(x+T) = 2k\pi + 5x \quad (1)$$

$$\text{ἤ} \quad 5(x+T) = (2k+1)\pi - 5x \quad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε $T = \frac{2k\pi}{5}$ καί γιά $k=1$, $T = \frac{2\pi}{5}$.

Πράγματι εἶναι
$$f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = ημ\,5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = ημ\,(5x + 2\pi) = ημ\,5x = f(x).$$

Ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$5T = (2k+1)\pi - 10x$$

$$T = \frac{(2k+1)\pi - 10x}{5}.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε τιμή τοῦ x ἔχουμε καί διαφορετική τιμή τοῦ T. Ἄρα ὁ T δέν εἶναι σταθερός. Ἑπομένως δέν μπορεῖ νά εἶναι περίοδος.

Γενικότερα γιά τήν συνάρτηση f μέ $f(x) = ημλx$, περίοδος εἶναι ὁ $\frac{2\pi}{|\lambda|}$, γιά τήν g μέ $g(x) = συνλx$, εἶναι ὁ $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ καί γιά τίς συναρτήσεις φ μέ $\varphi(x) = εφλx$ καί h μέ $h(x) = σφλx$ εἶναι ὁ $\frac{\pi}{|\lambda|}$.

Ἀσκήσεις 13, 14, 15.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως ἡμίτονο

7.22 Ἐπειδή ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π, θά μελετήσουμε τή μεταβολή της στό διάστημα [0, 2π].

Ἔστω x_1, x_2, μέ $x_1 < x_2$ οἱ ἀλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τά ὁποῖα βρίσκονται στό α' τεταρτημόριο καί M_1', M_2' ἀντιστοίχως τά συμμετρικά τῶν M_1, M_2, ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων (σχ. 22α). Τότε (§ 6.10) θά εἶναι:

$$(M_1'M_1) = 2\,ημx_1 \quad \text{καί}$$

$$(M_2'M_2) = 2\,ημx_2 \quad (1)$$

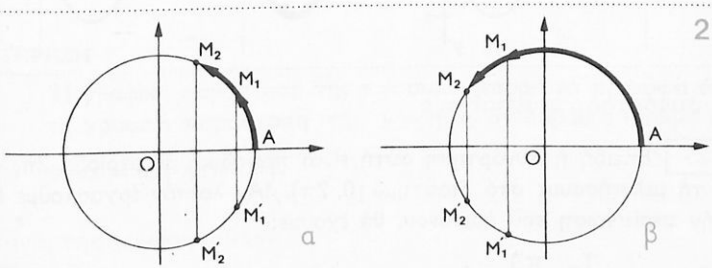
Ἔχουμε ὅμως

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Leftrightarrow \text{τόξο } M_1'M_1 < \text{τόξο } M'_2M_2 \\ &\Leftrightarrow \text{χορδή } M'_1M_1 < \text{χορδή } M'_2M_2 \\ &\Leftrightarrow (M_1'M_1) = (M_2'M_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

ὁπότε ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει ὅτι:

$$\forall\ x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \text{ημ}x_1 < \text{ημ}x_2$$

δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



22

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

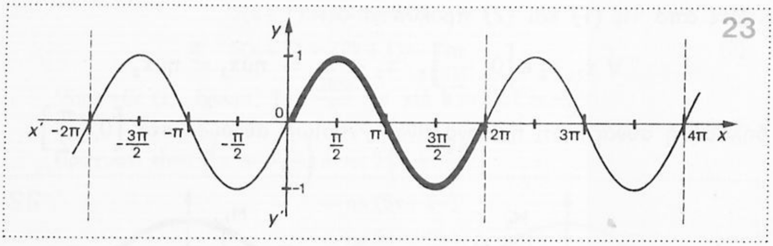
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε (σχ. 22β) $x_1 < x_2 \Rightarrow \text{ημ}x_1 > \text{ημ}x_2$, δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow \text{ημ}x_1 > \text{ημ}x_2$, δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow \text{ημ}x_1 < \text{ημ}x_2$, δηλαδή ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι, ἀφοῦ ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι αὔξουσα στό $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ καί φθίνουσα στό $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, θά παρουσιάζει μέγιστο στό $x = \frac{\pi}{2}$ ἴσο μέ $\text{ημ}\frac{\pi}{2} = 1$.

Ὁμοίως, ἐπειδή αὐτή εἶναι φθίνουσα στό $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ καί αὔξουσα στό $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, θά παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x = \frac{3\pi}{2}$ ἴσο μέ $\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Τέλος, ἐπειδή ημ(−x) = −ημx ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι περιττή, ὁπότε ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Τά προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 23



Ἡ συνάρτηση συνημίτονο

7.23 Ἐπειδή ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π, ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα [0, 2π]. Ἄν λοιπόν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν περίπτωση τοῦ ἡμιτόνου, θά ἔχουμε:

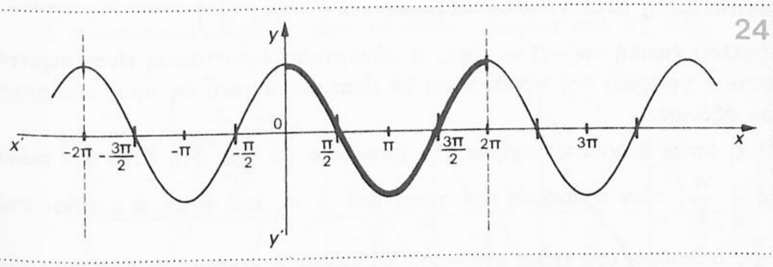
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν$x_1 >$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν$x_1 >$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **φθίνουσα στό** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν $x_1 <$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$,
- ἄν $x_1, x_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ συν$x_1 <$ συνx_2, δηλαδή ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι, ἀφοῦ ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι φθίνουσα στό $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ καί αὔξουσα στό $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, θά παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x = \pi$, ἴσο μέ συνπ $= -1$.

Τέλος, ἐπειδή συν(−x) = συνx, ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι ἄρτια συνάρτηση, ὁπότε ἡ γραφική της παράσταση εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα y'y.

Τά προηγούμενα συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 24.

24



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἡ γραφική παράσταση τῆς $y = συνx$ μπορεῖ νά προκύψει ἀπό τή γραφική παράσταση τῆς $y = ημx$, ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι $συνx = ημ\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη

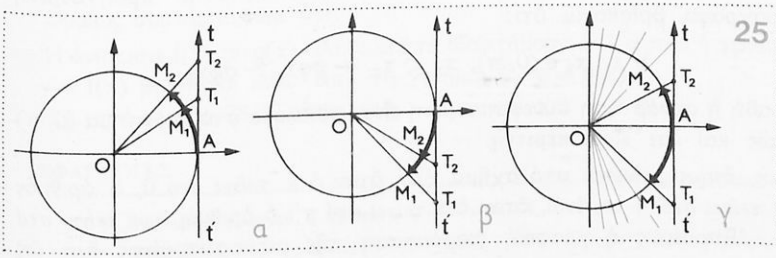
7.24 Ἐπειδή εἶναι $εφ(x+\pi) = εφx$, ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη εἶναι περιοδική μέ περίοδο π. Ἐπομένως ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ἀφοῦ ὅπως εἴδαμε (§ 6.14) ἡ συνάρτηση δέν ὁρίζεται γιά $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Ἔστω x_1, x_2, μέ $x_1 < x_2$, οἱ ἀλγεβρικές τιμές δύο τόξων $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 25), τά ὁποῖα ἀνήκουν στό α' ἤ δ' τεταρτημόριο. Τότε (§ 6.16) θά εἶναι:

$$εφx_1 = \overline{AT}_1$$
$$εφx_2 = \overline{AT}_2 .$$

Εἶναι ὅμως $\overline{AT}_1 < \overline{AT}_2$, ἄρα καί $εφx_1 < εφx_2$.

25

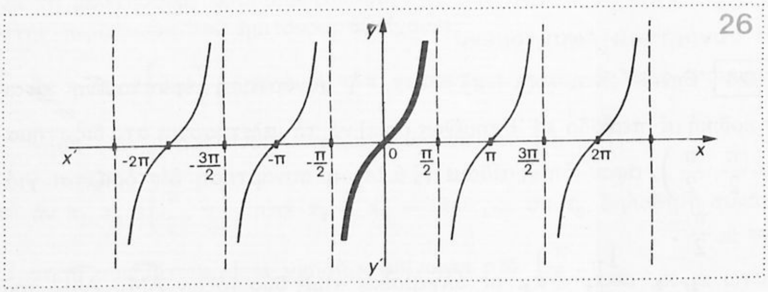


Ἑπομένως, ἄν $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ εφ$x_1 <$ εφx_2, δηλαδή ἡ ἐφαπτομένη εἶναι γνησίως **αὔξουσα στό** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ἐξάλλου, ἐπειδή εφ$(-x) = -$εφx, ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη εἶναι **περιττή**, ὁπότε ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι συμμετρική ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Τέλος, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 25γ μποροῦμε νά λέμε ὅτι, ὅταν ὁ x *τείνει στό* $+\frac{\pi}{2}$, τότε ὁ ἀριθμός εφx *τείνει στό* $+\infty$, ἐνῶ ὅταν ὁ x *τείνει στό* $-\frac{\pi}{2}$, ὁ ἀριθμός εφx *τείνει στό* $-\infty$. Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐφαπτομένης ἔχει ὡς ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$ καί περνάει ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων O, ἀφοῦ εἶναι εφ$0 = 0$.

Τά παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 26.



Ἡ συνάρτηση συνεφαπτομένη

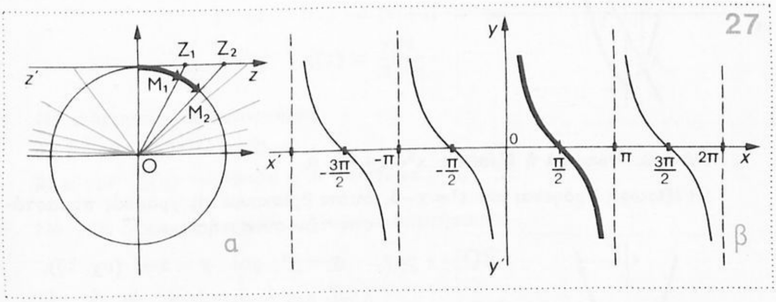
7.25 Ἐπειδή εἶναι σφ$(x+\pi) =$ σφx, ἡ συνάρτηση συνεφαπτομένη εἶναι περιοδική μέ περίοδο π. Ἑπομένως ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα $(0, \pi)$, ἀφοῦ ὅπως εἴδαμε (§ 6.14) ἡ συνάρτηση αὐτή δέν ὁρίζεται γιά $x = 0, \pi$. Ἄν τώρα ἐργαστοῦμε ὅπως στήν προηγούμενη παράγραφο, βρίσκουμε ὅτι:

$$\forall\, x_1, x_2 \in (0, \pi),\ x_1 < x_2 \Rightarrow \text{σφ}x_1 > \text{σφ}x_2$$

δηλαδή ἡ συνάρτηση συνεφαπτομένη εἶναι **φθίνουσα** στό διάστημα $(0, \pi)$ καθώς καί ὅτι εἶναι **περιττή.**

Τέλος, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 27α, ὅταν ὁ x *τείνει στό* 0, ὁ ἀριθμός σφx *τείνει στό* $+\infty$, ἐνῶ, ὅταν ὁ x *τείνει στό* π, ὁ ἀριθμός σφx *τείνει στό* $-\infty$. Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς συνεφαπτομένης ἔχει ὡς ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = 0$, $x = \pi$ καί περνάει ἀπό τό σημεῖο $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ἀφοῦ εἶναι $\sigma\varphi \frac{\pi}{2} = 0$.

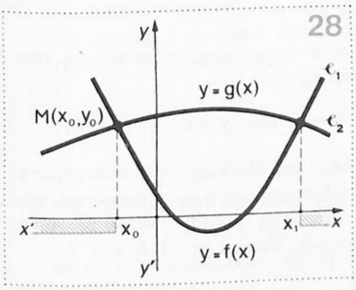
Τά συμπεράσματα αὐτά παριστάνονται γραφικά στό σχ. 27β.



Ἀσκήσεις ***16, 17.***

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ

7.26 Οἱ ρίζες μιᾶς ἐξισώσεως $f(x) = g(x)$ (§ 4.29) μποροῦν νά προσδιοριστοῦν μέ τή βοήθεια γραφικῶν παραστάσεων. Πράγματι οἱ ἐξισώσεις



$$y = f(x)$$
$$y = g(x)$$

ὁρίζουν δύο συναρτήσεις f καί g μέ ἀντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, ἔστω $\mathscr{C}_1$ καί $\mathscr{C}_2$. Ἄν $M(x_0, y_0)$ εἶναι κοινό σημεῖο τῶν $\mathscr{C}_1$ καί $\mathscr{C}_2$, τότε $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$, δηλαδή ὁ x_0 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = g(x)$.

Ἀντιστρόφως, γιά κάθε ρίζα x_0 τῆς $f(x) = g(x)$ ἔχουμε $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ δηλαδή $M(x_0, y_0) \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$. Ὥστε οἱ **τετμημένες** τῶν σημείων τομῆς, ἄν ὑπάρχουν, τῶν $\mathscr{C}_1$ καί $\mathscr{C}_2$ θά εἶναι **οἱ ρίζες** τῆς ἐξισώσεως $f(x) = g(x)$.

Ὁμοίως συμπεραίνουμε ὅτι:

Ἡ ἀνίσωση $f(x) > g(x)$ ἀληθεύει στά διαστήματα ἐκεῖνα πού ἡ γραμμή $\mathscr{C}_1$ $y = f(x)$ βρίσκεται *πάνω* ἀπό τή γραμμή $\mathscr{C}_2$ $y = g(x)$.

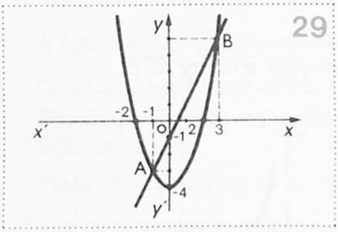
Π.χ. στό σχῆμα 28 ἀληθεύει γιά $x < x_0$ καί γιά $x > x_1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2 - 4 = 2x - 1$.**

Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ καί

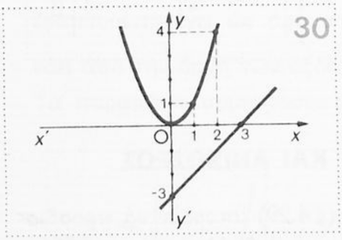
$y = 2x - 1$ πού εἶναι παραβολή καί εὐθεία ἀντιστοίχως (σχ. 29).



Αὐτές τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β μέ τετμημένες -1 καί 3, πού εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 4 = 2x - 1$.

2. **Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἐξίσωση $x^2 - x + 3 = 0$.**

Ἡ ἐξίσωση γράφεται καί $x^2 = x - 3$, ὁπότε βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων

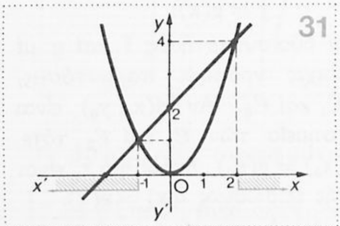


$$y = x^2 \quad \text{καί} \quad y = x - 3 \text{ (σχ. 30).}$$

Αὐτές δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο, ἄρα ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση.

3. **Νά λυθεῖ γραφικά ἡ ἀνίσωση $x^2 - x - 2 > 0$.**

Ἡ ἀνίσωση γράφεται $x^2 > x + 2$. Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων



$$y = x^2 \quad \text{καί} \quad y = x + 2 \quad \text{(σχ. 31).}$$

Ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει στά διαστήματα ὅπου ἡ παραβολή $y = x^2$ βρίσκεται πάνω ἀπό τήν εὐθεία $y = x + 2$. Αὐτό συμβαίνει, ὅταν $x < -1$ ἤ $x > 2$.

Ἀσκήσεις 18, 19.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Γιά τίς συναρτήσεις:

$$f \text{ μέ } f(x) = x^3 + 5x^2 + 6 \qquad \text{καί}$$

$$g \text{ μέ } g(x) = \frac{1}{x^2} + 2x + 5$$

νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος μεταβολῆς γιά τά ζεύγη τῶν τιμῶν $(-1, 2)$, $(3, 5)$.

2. Νά ἐξεταστεῖ στό R_+^* ἡ μονοτονία τῆς συναρτήσεως:

$$f \quad \text{μέ} \quad f(x) = \frac{1}{x^3} + 1$$

3. Νά ἐξεταστεῖ ἡ μονοτονία τῶν συναρτήσεων:

$$f \quad \text{μέ} \quad f(x) = |x| + |1-x| - x$$

$$g \quad \text{μέ} \quad g(x) = \frac{x-1}{|x-1|}.$$

4. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = |x-2| - x$

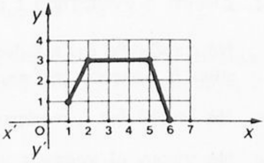
β) g μέ $g(x) = -2-3x$ στό διάστημα $[-5, +5]$.

5. Νά γίνει γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

α) f μέ $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{ἄν } -3 \leq x \leq -2 \\ 1, & \text{ἄν } -2 < x < 2 \\ 3-x, & \text{ἄν } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

β) g μέ $g(x) = \begin{cases} 2, & \text{ἄν } 1 \leq x < 2 \\ 3x-4, & \text{ἄν } 2 \leq x < 3 \\ -3x+14, & \text{ἄν } 3 \leq x < 4 \\ 2, & \text{ἄν } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$

6. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή $f(x)$ τῆς συναρτήσεως f τῆς ὁποίας ἡ γραφική παράσταση δίνεται στό διπλανό σχῆμα.



7. Νά προσδιοριστεῖ ὁ λ, ὥστε οἱ εὐθεῖες

$$y = (2\lambda+1)x+3 \quad \text{καί} \quad y = (5\lambda-1)x-2$$

α) νά εἶναι παράλληλες καί **β)** νά εἶναι κάθετες.

8. Τά ταχυδρομικά τέλη γιά μιά ταχυδρομική ἐπιταγή καθορίζονται ἀπό τό διπλανό πίνακα. Νά γίνει γραφική παράσταση τῆς ἀντίστοιχης συναρτήσεως.

Ἐπιταγή σέ δραχμές	Τέλη σέ δραχμές
1– 200	10
201– 500	20
501– 1.000	29
1.001– 2.000	35
2.001– 3.000	41
3.001– 4.000	47
4.001– 5.000	53
5.001–10.000	60
10.001–20.000	75
ΣΤΟΙΧΕΙΑ τῶν ΕΛΤΑ 7.12.79	

9. Νά δειχθεῖ ὅτι εἶναι περιττές οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = \frac{1}{x} + εφx$

β) g μέ $g(x) = x^3 + ημx$

10. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις

α) f μέ $f(x) = \frac{2}{x}$ **β)** g μέ $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ **γ)** φ μέ $φ(x) = \frac{2x-4}{x+1}$.

11. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = \frac{x^2}{2}$ **β)** φ μέ $φ(x) = (x-3)^2$ καί

γ) g μέ $g(x) = \frac{-x^2}{3} + 1$

12. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ἄρτιες οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = αx^4 + βx^2 + γ$ **β)** g μέ $g(x) = x^2 + συνx$.

13. Νά βρεθεῖ ἡ περίοδος τῶν συναρτήσεων

α) f μέ $f(x) = ημ\, 3x$ **β)** g μέ $g(x) = ημ\frac{x}{2}$ **γ)** φ μέ $φ(x) = συν\frac{x}{3}$.

14. Δίνεται ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x \text{ ἄρτιος} \\ 0, & \text{ἄν } x \text{ περιττός.} \end{cases}$

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ f εἶναι περιοδική συνάρτηση, νά βρεθεῖ ἡ περίοδός της καί νά γίνει ἡ γραφική της παράσταση.

15. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = ημ\,(x^2-2x+5)$ δέν εἶναι περιοδική.

16. Νά γίνουν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων:

α) f μέ $f(x) = ημ\, 2x$ **β)** g μέ $g(x) = 3συν\frac{x}{2} - 1$

γ) φ μέ $φ(x) = εφ\left(x - \frac{π}{4}\right) + 1$.

17. Νά ἀποδείξετε μέ τή βοήθεια τῶν γραφικῶν παραστάσεων τίς σχέσεις:

α) $συν\left(x + \frac{π}{2}\right) = -ημx$ **β)** $ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) = συνx$.

18. Νά λυθοῦν γραφικά οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{4}{x} = x$ **β)** $x^2 = |x|$ **γ)** $x^2 - 4 = -\frac{3}{x}$.

19. Νά λυθοῦν γραφικά οἱ ἀνισώσεις:

α) $|x| > 5$ **β)** $\frac{1}{x} > x^2$.

1. Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν -1 καί 2 εἶναι $\lambda = 8$ καί μεταξύ τῶν 3 καί 5 εἶναι $\lambda = 89$.

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ τῶν -1 καί 2 εἶναι $\lambda = \frac{7}{4}$ καί μεταξύ τῶν 3 καί 5 εἶναι $\lambda = \frac{442}{225}$.

2. Γιά τή συνάρτηση f ἔχουμε: $\lambda = -\frac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2}{x_1^3x_2^3} < 0$.

Ἄρα ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}_+^*$.

3. Γιά τή συνάρτηση f ἔχουμε : $f(x) = \begin{cases} -3x+1, & \text{ἄν } x < 0 \\ 1-x, & \text{ἄν } 0 \leqslant x < 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$

Ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα γιά $x < 1$ καί γνησίως αὔξουσα γιά $x \geqslant 1$.

Ἡ g εἶναι σταθερή ἴση μέ -1 γιά $x < 1$ καί ἴση μέ 1 γιά $x > 1$.

4. Γιά τή συνάρτηση f εἶναι :

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{ἄν } x < 2 \\ -2, & \text{ἄν } x \geqslant 2, \end{cases} \quad \text{κτλ.}$$

Ἡ συνάρτηση g εἶναι ὁμοπαραλληλική, γνησίως φθίνουσα στό $[-5, +5]$.

5. **α)** Βρίσκουμε τή μονοτονία τῆς συναρτήσεως f σέ κάθε διάστημα καί μετά κάνουμε τή γραφική της παράσταση. Ἐργαζόμαστε δηλαδή ὅπως στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 7.8.

β) Ὁμοίως.

6. Ἡ f εἶναι αὔξουσα στό $[1,2)$, σταθερή στό $[2,5)$ καί φθίνουσα στό $[5,6]$. Ἡ τιμή τῆς f στό x εἶναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{ἄν } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{ἄν } 2 \leq x < 5 \\ -3x+8, & \text{ἄν } 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

7. Οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες, ὅταν $\lambda = \frac{2}{3}$ καί κάθετες, ὅταν $\lambda = 0$ ἤ $\lambda = \frac{7}{10}$.

8. Ἐργαζόμαστε ὅπως στή § 7.9.

9. **α)** Γιά τήν f ἰσχύει :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_1^*,\ f(-x) = \frac{1}{-x} + \text{εφ}(-x) \ \text{κτλ.}$$

β) Ὁμοίως.

10. **α)** Εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$

β) Εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = 2$ καί $y = 1$

γ) Εἶναι $\varphi(x) = 2 - \frac{6}{x+1}$ κτλ.

11. α) Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή τῆς § 7.17.

β) Ἡ συνάρτηση εἶναι τῆς μορφῆς f μέ $f(x) = \alpha(x-k)^2$, μέ $\alpha = 1$ καί $k = 3$.

γ) Ἡ συνάρτηση εἶναι τῆς μορφῆς f μέ $f(x) = \alpha x^2 + k$, μέ $\alpha = -\frac{1}{3}$ καί $k = 1$.

12. α) Γιά τήν f ἰσχύει: $\forall\ x,\ f(-x) = \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^2 + \gamma$ κτλ.

β) Ὁμοίως.

13. α) Ἡ περίοδος τῆς f εἶναι $\frac{2\pi}{3}$

β) Ἡ περίοδος τῆς g εἶναι $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

γ) Ἡ περίοδος τῆς φ εἶναι $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

14. Ἡ συνάρτηση f εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2.

15. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 7.21.

16. α) Ἡ f εἶναι περιοδική μέ περίοδο π (§ 7.21, Ἐφ. 2)

β) Θέτουμε $y = \Psi - 1$ καί $x = X$ καί ἔχουμε $\Psi = 3\sigma\upsilon\nu\frac{X}{2}$

γ) Θέτουμε $y = \Psi + 1$ καί $x = X + \frac{\pi}{4}$ κτλ.

17. α) Παρατηροῦμε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τοῦ $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ καί $-\eta\mu x$ συμπίπτουν.

β) Παρατηροῦμε ὅτι οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ καί $\sigma\upsilon\nu x$ συμπίπτουν.

18. α) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \frac{4}{x}$ καί $y = x$.

Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τους εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x^2$ καί $y = |x|$ κτλ.

γ) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ καί $y = -\frac{3}{x}$ κτλ.

19. α) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = |x|$ καί $y = 5$ κτλ.

β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \frac{1}{x}$ καί $y = x^2$ κτλ.

8 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

Ἡ ἀνάπτυξη τῶν θεμάτων ἀπό τήν παραδοσιακή Ἄλγεβρα πού περιλαμβάνει τό κεφάλαιο αὐτό, χαρακτηρίζεται ἀπό θεωρία, περιορισμένη στίς ἀπόλυτα βασικές γνώσεις, ὅπως ἀναφέρονται στό νέο ἀναλυτικό πρόγραμμα, καί ἀπό ποικιλία ἐφαρμογῶν. Μιά τέτοια παρουσίαση, χωρίς νά εἶναι ἐκτεταμένη ὅπως ἄλλοτε, δέν χάνει τήν πληρότητά της καί ἀνταποκρίνεται στήν ἐπιδίωξη ἐκσυγχρονισμοῦ τῆς ὕλης. Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἀποτελεῖ ἐμβάθυνση καί ἐπέκταση γνώσεων πού ἤδη ἔχει ὁ μαθητής (π. χ. λύση δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως, συστήματα κτλ.).

Ἡ ἐπεξεργασία κύριων θεμάτων τοῦ κεφαλαίου στηρίζεται στίς μορφές πού μπορεῖ νά πάρει τό δευτεροβάθμιο τριώνυμο ἀνάλογα μέ τό πρόσημο τῆς διακρίνουσάς του. Παράλληλα ἐπισημαίνεται ἡ σημασία τοῦ προσήμου τοῦ τριωνύμου γιά τίς ἀνισώσεις β΄ βαθμοῦ καθώς καί γιά τή θέση ἀριθμοῦ ὡς πρός τίς ρίζες τοῦ τριωνύμου.

Τό τελευταῖο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου ἀποτελεῖ ἕνα ἀπαραίτητο συμπλήρωμα, σέ θεωρητικότερη βάση, γιά τά συστήματα ἐξισώσεων ἁπλῆς μορφῆς.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Γενικά

8.1 Κάθε ἐξίσωση μέ ἄγνωστο $x \in \mathbb{R}$ πού ἔχει ἤ μπορεῖ νά πάρει τή μορφή

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

ὅπου α, β, γ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\alpha \neq 0$, λέγεται **ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ** στό $\mathbb{R}$. Οἱ ἀριθμοί α, β, γ λέγονται **συντελεστές** τῆς ἐξισώσεως. Παραδείγματα ἐξισώσεων β' βαθμοῦ δίνονται στόν ἀκόλουθο πίνακα.

Ἐξίσωση	Συντελεστές		
	α	β	γ
$\sqrt{2}\,x^2 - x = 0$	$\sqrt{2}$	-1	0
$\frac{x^2}{2} + x = \sqrt{3}\,x + 1$	$\frac{1}{2}$	$1-\sqrt{3}$	-1
$\lambda x^2 - \lambda x + \lambda\mu = x^2 - \mu x$	$\lambda - 1 \neq 0$	$\mu - \lambda$	$\lambda\mu$
$\alpha^2 x^2 + \beta x + \alpha^2 = x^2 + \alpha x - \beta^2$	$\alpha^2 - 1 \neq 0$	$\beta - \alpha$	$\alpha^2 + \beta^2$

Γιά νά λύσουμε μιά δευτεροβάθμια ἐξίσωση, ἀρκεῖ νά τή μετασχηματίσουμε, μέ παραγοντοποίηση τοῦ πρώτου μέλους της, σέ ἰσοδύναμη τῆς μορφῆς $A(x)B(x) = 0$, ὅπου $A(x)$, $B(x)$ εἶναι πρωτοβάθμιοι παράγοντες. Γιατί τότε ἡ λύση της ἀνάγεται στή λύση τῶν πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων $A(x) = 0$ καί $B(x) = 0$, ἀφοῦ $A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ἤ $B(x) = 0$. Τή μέθοδο αὐτή, πού εἶναι γνωστή ἀπό τά γυμνασιακά μαθήματα καί πού ἤδη ἔχουμε ἐφαρμόσει (§ 4.21 ἐφ. 1), θά θυμίσουμε μέ τά ἀκόλουθα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἔστω ἡ ἐξίσωση $\sqrt{2}\,x^2 - 3x = 0$ (1)

Ἐπειδή $\sqrt{2}\,x^2 - 3x = x(\sqrt{2}\,x - 3)$, ἔχουμε :

$(1) \Leftrightarrow (x = 0$ ἤ $\sqrt{2}\,x - 3 = 0) \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ἤ } x = \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Ἡ ἐξίσωση λοιπόν ἔχει ρίζες : 0 καί $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Γενικότερα ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x=0$ $(\alpha\neq 0)$ ἔχει ρίζες: 0 καί $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ (πού συμπίπτουν στό 0, ἄν $\beta=0$).

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωση $\qquad (x+2)^2-5=0 \qquad (2)$

Εἶναι $(x+2)^2-5=(x+2)^2-(\sqrt{5})^2=(x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5})$. Ἄρα:

$$(2) \Leftrightarrow (x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5})=0 \Leftrightarrow (x+2-\sqrt{5}=0 \text{ ἤ } x+2+\sqrt{5}=0)$$

$$\Leftrightarrow (x=-2+\sqrt{5} \text{ ἤ } x=-2-\sqrt{5})$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο λύνεται γενικότερα ἡ ἐξίσωση

$$(x+k)^2-\lambda=0 \qquad (3)$$

- Ἄν $\lambda\geq 0$, τότε $(x+k)^2-\lambda=(x+k)^2-(\sqrt{\lambda})^2$ καί

  $(3) \Leftrightarrow (x+k-\sqrt{\lambda}=0$ ἤ $x+k+\sqrt{\lambda}=0)$.

  Ἡ ἐξίσωση λοιπόν ἔχει ρίζες $-k+\sqrt{\lambda}$ καί $-k-\sqrt{\lambda}$ (οἱ ὁποῖες ἄν $\lambda=0$ συμπίπτουν στήν $-k$).

- Ἄν $\lambda<0$, τότε $-\lambda=|\lambda|>0$ καί ἡ (3) γίνεται $(x+k)^2+|\lambda|=0$, μέ πρῶτο μέλος θετικό γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.

3. Ἡ ἐξίσωση $\qquad x^2-3x+2=0 \qquad (4)$

μπορεῖ νά ἀναχθεῖ στήν προηγούμενη μορφή $(x+k)^2-\lambda=0$, ἀρκεῖ νά παρατηρήσουμε ὅτι τό x^2-3x, πού γράφεται $x^2-2\cdot\dfrac{3}{2}x$, περιέχει τούς δύο ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$.

Ἄρα $\quad x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ καί

$$x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα $\left(\text{γιά } k=-\dfrac{3}{2} \text{ καί } \lambda=\dfrac{1}{4}\right)$, βρίσκουμε ὡς ρίζες τῆς (4) τούς ἀριθμούς 2 καί 1.

Λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

8.2 Ἔστω ἡ ἐξίσωση

$$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\neq 0.} \qquad \textbf{(1)}$$

Ἄν διαιρέσουμε τά μέλη της μέ α, ἡ (1) παίρνει τήν ἰσοδύναμη μορφή

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \qquad (2)$$

ὁπότε, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στό παράδειγμα 3 τῆς §8.1, θά ἔχουμε:

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.\quad \text{Ἄρα:}$$

$$\begin{aligned}x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}&=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\\&=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\quad \text{καί θέτοντας } \boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}\\&=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\qquad(3)\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

1. $\boldsymbol{\Delta\geqslant 0}$, ὁπότε $\Delta=(\sqrt{\Delta})^2$, καί ἡ (3) γράφεται:

$$\begin{aligned}x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}&=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\\&=\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\\&=\left(x+\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\qquad(4)\end{aligned}$$

$$\text{Ἄρα}\quad x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=0\ \text{ἤ}\ x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=0\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ \text{ἤ}\ x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right).$$

Δηλαδή ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\quad\text{καί}\quad\rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Συντομότερα γράφουμε

$$\boxed{\boldsymbol{\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}}\qquad\textbf{(5)}$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

Ἐπειδή $\rho_1=\rho_2\Leftrightarrow\sqrt{\Delta}=-\sqrt{\Delta}\Leftrightarrow 2\sqrt{\Delta}=0\Leftrightarrow\sqrt{\Delta}=0\Leftrightarrow\Delta=0$, θά εἶναι καί $\rho_1\neq\rho_2\Leftrightarrow\Delta\neq 0$.

Δηλαδή εἰδικότερα:

- Ἄν $\Delta>0$, ἡ ἐξίσωση ἔχει **δύο ρίζες ἄνισες.**

• Ἄν $\Delta = 0$, τότε οἱ ρίζες τοῦ τύπου (5) συμπίπτουν καί λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει μιά **ρίζα διπλή**, τήν $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

2. $\mathbf{\Delta < 0}$, ὁπότε $\frac{-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0$. Τότε, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν (3), τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι θετικό γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπῶς ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

στό $\mathbb{R}$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό πρόσημο τοῦ ἀριθμοῦ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, πού λέγεται **διακρίνουσα** τῆς ἐξισώσεως.

Τά προηγούμενα συμπεράσματα συνοψίζονται στόν παρακάτω πίνακα.

Ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	
$\mathbf{\Delta > 0}$	Δύο ἄνισες ρίζες $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
$\mathbf{\Delta = 0}$	Μία ρίζα διπλή $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$
$\mathbf{\Delta < 0}$	Δέν ἔχει ρίζα στό $\mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Γιά τήν ἐξίσωση $3x^2 - 15x + 18 = 0$ εἶναι $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 3 \cdot 18 = 225 - 216 = 9$, ὁπότε οἱ ρίζες της εἶναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{6} = \frac{15 \pm 3}{6} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \rho_1 = \frac{15+3}{6} = 3 \\ \searrow \ \rho_2 = \frac{15-3}{6} = 2 \end{array}$$

2. Γιά τήν ἐξίσωση $x^2 - 6x + 9 = 0$ εἶναι $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, ὁπότε

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3.$$

3. Γιά τήν ἐξίσωση $2x^2 - 3x + 10 = 0$ εἶναι $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -71 < 0$, ὁπότε αὐτή δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἄν οἱ συντελεστές α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι, τότε εἶναι $-\alpha\gamma > 0$ ἄρα καί $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζες ἄνισες.

2. Ἄν ὁ συντελεστής β ἔχει τή μορφή $2\beta'$ (π.χ ἄν εἶναι ἄρτιος), τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\beta')^2 - 4\alpha\gamma = 4\beta'^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta'^2 - \alpha\gamma) = 4\Delta'$, ὅπου

$$\Delta' = \beta'^2 - \alpha\gamma$$

Στήν περίπτωση αὐτή ὁ τύπος (5) γράφεται ἁπλούστερα

$$\boxed{\rho_{1,2} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\Delta'}}{\alpha}} \qquad (5')$$

3. Ἐπειδή Δ καί Δ′ εἶναι ὁμόσημοι, τά συμπεράσματα τοῦ παραπάνω πίνακα ἰσχύουν, ἄν ἀντί Δ, παίρνουμε τήν ἁπλοποιημένη μορφή Δ′.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**

α) $\sqrt{2}\,x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2})x + \sqrt{5} = 0$ **β)** $(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha^2\beta\, x + \alpha^2\beta^2 = 0,\ \alpha \neq \pm\beta$

α) Ἔχουμε $\Delta = [-(\sqrt{5} + \sqrt{2})]^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

Ἄρα οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \pm \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} \pm (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \end{cases}$$

β) Ἔχουμε
$$\begin{aligned} \Delta' &= (\alpha^2\beta)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)\alpha^2\beta^2 \\ &= \alpha^4\beta^2 - \alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^4 \\ &= \alpha^2\beta^4. \end{aligned}$$

Ἄρα οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$\rho_{1,2} = \frac{\alpha^2\beta \pm \sqrt{\alpha^2\beta^4}}{(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{\alpha^2\beta \pm \alpha\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)}$$

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha \pm \beta)}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}. \end{cases}$$

2. **Νά ἐξεταστεῖ πόσες ρίζες ἔχουν οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:**

α) $x^2 - sx - 1 = 0$ **β)** $\alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = 0,\ \alpha \neq 0$ **γ)** $\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 1 + \alpha^2\beta^2 = 0,\ \alpha \neq 0.$

Ἔχουμε:

α) $\Delta = s^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = s^2 + 4 > 0$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει δύο ρίζες ἄνισες. Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε ἄν παρατηρήσουμε ὅτι οἱ συντελεστές α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι (§ 8.2 παρατ. 1).

β) $\Delta' = \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει μιά ρίζα διπλή, τήν $\rho = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha}$.

γ) $\Delta' = \alpha^2 - \alpha^2(1+\alpha^2\beta^2) = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha^4\beta^2 = -\alpha^4\beta^2$. Συνεπῶς, ἀφοῦ $\alpha \neq 0$, ἄν καί $\beta \neq 0$, θά εἶναι $\Delta' < 0$ καί ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει ρίζες στό $\mathbb{R}$.

Ἄν $\beta = 0$, τότε $\Delta' = 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει τή διπλή ρίζα $\rho = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$.

3. **Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :**

α) $4\,\sigma\upsilon\nu^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$

β) $x^2 - 7|x| - 18 = 0$.

α) Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = y$ (1), ὁπότε ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$4y^2 - 2(\sqrt{3}+1)y + \sqrt{3} = 0$ μέ $y \in [-1, +1]$.

$$\text{Ἔχουμε}\quad \Delta' = (\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3}-1)^2.$$

Ἄρα ἔχουμε :

$$\rho_{1,2} = \frac{(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1) \pm (\sqrt{3}-1)}{4} =$$

$$= \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{4} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

γιά $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἤ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$. Ἑπομένως $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$,

γιά $y = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ ἤ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$. Ἑπομένως $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

β) Ἐπειδή $|x|^2 = x^2$ (§ 3.14), ἡ ἐξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| - 18 = 0$ καί, ἄν θέσουμε $|x| = y$ (2), τότε ἔχουμε :

$$y^2 - 7y - 18 = 0 \quad \text{μέ} \quad y \in \mathbb{R}_+ .$$

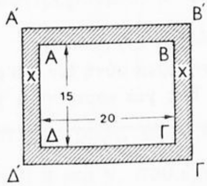
Εἶναι $\Delta = 49 + 72 = 121$ καί

$$\rho_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} \begin{cases} \rho_1 = 9 \\ \rho_2 = -2 \end{cases}$$

Ἡ $\rho_2 = -2$ ἀπορρίπτεται, ἐπειδή $-2 \notin \mathbb{R}_+$, ὁπότε ἀπό τήν (2) ἔχουμε: γιά $y = 9$, $|x| = 9$, ὁπότε $x = \pm 9$ (§ 3.14 ἐφαρ. 1).

4. **Γύρω ἀπό μιά πισίνα ΑΒΓΔ (σχ. 1) μέ διαστάσεις 15 m καί 20 m θέλουμε νά σχηματίσουμε μιά πράσινη περιμετρική ζώνη μέ ἐμβαδό 200 m² καί σταθερό πλάτος. Νά βρεθεῖ τό πλάτος αὐτῆς τῆς ζώνης.**

Ἔστω x τό πλάτος τῆς ζώνης ($x > 0$). Τότε τό ὀρθογώνιο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἔχει διαστάσεις $20+2x$, $15+2x$ καί ἐμβαδό $(20+2x)(15+2x)$. Τό ἐμβαδό τῆς πράσινης ζώνης βρίσκεται, ἄν ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἀφαιρέσουμε τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓΔ πού εἶναι



$$15 \cdot 20 = 300 \text{ m}^2.$$

Ἑπομένως ἔχουμε :

$$(20+2x)(15+2x)-300 = 200$$

ἤ $$4x^2+70x-200 = 0.$$

Οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι -20 καί $2{,}5$. Ἄρα τό πλάτος τῆς ζώνης πρέπει νά εἶναι $2{,}5$ m (ἡ ἀρνητική λύση -20 ἀπορρίπτεται).

5. **Νά βρεθεῖ ὁ χρόνος τῆς κατακόρυφης πτώσεως ἑνός σώματος, ἄν γνωρίζουμε ὅτι κατά τό τελευταῖο δευτερόλεπτο τό σῶμα διέτρεξε διάστημα ἴσο μέ τά τρία τέταρτα τοῦ ὁλικοῦ διαστήματος.**

Ἔστω ΑΒ τό ὁλικό διάστημα καί ΓΒ τό διάστημα πού διανύει τό σῶμα στό τελευταῖο δευτερόλεπτο. Ἄν t sec εἶναι ὁ χρόνος τῆς πτώσεως ($t > 1$) γιά τό διάστημα ΑΒ, τότε γιά τό διάστημα ΑΓ θά εἶναι $t-1$.

Ὅπως ξέρουμε ὅμως ἀπό τή Φυσική, τό διάστημα s τό ὁποῖο διανύει ἕνα σῶμα πού πέφτει κατακόρυφα μέ ἀρχική ταχύτητα μηδέν σέ χρόνο t εἶναι $s = \frac{1}{2}gt^2$, ὅπου $g = 10 \text{ m/sec}^2$. Ἑπομένως, ἐπειδή εἶναι ΑΒ–ΑΓ=ΓΒ, ἔχουμε:

$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}gt^2,$$

$$t^2-(t-1)^2 = \frac{3}{4}t^2$$

$$3t^2-8t+4 = 0.$$

Οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι 2 καί $\frac{2}{3}$. Ἄρα ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναι 2 sec. (Ἡ τιμή $\frac{2}{3}$ sec ἀπορρίπτεται, γιατί σύμφωνα μέ τό πρόβλημα ὁ ὁλικός χρόνος εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἕνα δευτερόλεπτο).

6. **Γιά ποιές τιμές τοῦ λ οἱ παρακάτω ἐξισώσεις ἔχουν ἴσες ρίζες:**

α) $\lambda x^2-(\lambda-1)x+2\lambda-2 = 0$

β) $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda^2-2\lambda+1 = 0$

γ) $\lambda x^2-3(\lambda-3)x-(2\lambda+10) = 0.$

Γιά νά ἔχουν οἱ ἐξισώσεις ἴσες ρίζες, θά πρέπει $\Delta = 0$ (ἤ $\Delta' = 0$).

α) $\Delta = (\lambda-1)^2-4\lambda(2\lambda-2) = -7\lambda^2+6\lambda+1$

Θά πρέπει λοιπόν $-7\lambda^2+6\lambda+1 = 0$. Ἄν λύσουμε τήν ἐξίσωση αὐτή, βρίσκουμε $\lambda = 1$ καί $\lambda = -\dfrac{1}{7}$.

β) $\Delta' = (\lambda-1)^2-(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$ γιά κάθε τιμή τοῦ λ. Ἄρα γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ λ ἡ ἐξίσωση θά ἔχει ἴσες ρίζες.

γ) $\Delta = 9(\lambda-3)^2+4\lambda(2\lambda+10) = 17\lambda^2-14\lambda+81$.

Θά πρέπει $17\lambda^2-14\lambda+81 = 0$. Ἡ ἐξίσωση ὅμως αὐτή δέν ἔχει ρίζες στό $\mathbb{R}$. Συνεπῶς ἡ ἀρχική ἐξίσωση δέν ἔχει ρίζες ἴσες γιά καμιά τιμή τοῦ λ.

Ἀσκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Ἄθροισμα καί γινόμενο ριζῶν

8.3 Ἔστω ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ μέ $\alpha \neq 0$ καί $\Delta \geqslant 0$, πού, ὅπως εἴδαμε, ἔχει ὡς ρίζες τούς ἀριθμούς:

$$\rho_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad \rho_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Τότε θά εἶναι:

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta+\sqrt{\Delta})(-\beta-\sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Δηλαδή $\boxed{\rho_1+\rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}}$ **(1)** καί $\boxed{\rho_1\rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}}$ **(2)**

Ἔτσι μέ τίς σχέσεις (1) καί (2) μποροῦμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο τῶν ριζῶν μιᾶς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως, χωρίς προηγουμένως νά τή λύσουμε.

Ἄν π.χ. ρ_1 καί ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $2x^2-5x+1=0$, (τῆς ὁποίας $\Delta > 0$), θά ἔχουμε:

$$\rho_1+\rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{καί} \quad \rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

8.4 **Ἀξιοσημείωτη ἐφαρμογή.** Ὅταν δίνεται τό ἄθροισμα s δύο ἀριθμῶν καί τό γινόμενό τους p, μποροῦμε νά βροῦμε τούς ἀριθμούς αὐτούς. Πράγματι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί x καί y, **ἄν** ὑπάρχουν, θά εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$(\omega-x)(\omega-y)=0$$

πού εἶναι δευτεροβάθμια, μέ ἄγνωστο ω. Ἀλλά

$$(\omega-x)(\omega-y)=0 \Leftrightarrow \omega^2-(x+y)\omega+xy=0$$
$$\Leftrightarrow \omega^2-s\omega+p=0.$$

Ἡ τελευταία ἔχει ρίζες, μόνο ὅταν $\Delta=s^2-4p \geqslant 0$.

Π.χ. οἱ ἀριθμοί x καί y, πού ἔχουν ἄθροισμα 18 καί γινόμενο 65, εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-18\omega+65=0$. Πράγματι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι οἱ ἀριθμοί (§ 8.2)

$$\frac{9\pm\sqrt{9^2-65}}{1}=9\pm\sqrt{16}=9\pm4, \text{ δηλαδή } 13 \text{ καί } 5.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νά ἐκφρασθοῦν μέ τή βοήθεια τῶν συντελεστῶν α,β,γ τά ἀθροίσματα $\rho_1^2+\rho_2^2$ καί $\rho_1^3+\rho_2^3$.**

Εἶναι $$\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2$$
$$=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

καί $$\rho_1^3+\rho_2^3=(\rho_1+\rho_2)^3-3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)$$
$$=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3-3\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$
$$=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}.$$

2. **Ἄν ρ_1 καί ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+6=0$, νά ὑπολογιστοῦν, χωρίς νά βρεθοῦν οἱ ρίζες, οἱ παραστάσεις:**

α) $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}$ **β)** $\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2}+\dfrac{\rho_2^2}{\rho_1}$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση $x^2-5x+6=0$ ἔχουμε $\rho_1+\rho_2=5$, $\rho_1\rho_2=6$, ὁπότε εἶναι:

α) $$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{5}{6}$$

β) $$\frac{\rho_1^2}{\rho_2}+\frac{\rho_2^2}{\rho_1}=\frac{\rho_1^3+\rho_2^3}{\rho_1\rho_2}=\frac{(\rho_1+\rho_2)^3-3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}=\frac{5^3-3\cdot6\cdot5}{6}=\frac{35}{6}.$$

3. **Ἀπό τά ζεύγη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ σταθερό ἄθροισμα νά βρεθοῦν ἐκεῖνοι πού ἔχουν μέγιστο γινόμενο.**

Ἔστω x,y οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, k τό σταθερό ἄθροισμά τους καί p τό γινόμενό τους. Τότε ἔχουμε:

$$x+y=k \quad \text{καί} \quad xy=p.$$

Ἄρα (§ 8.4) οἱ x,y εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-k\omega+p=0$ (1)

Ἐπειδή ὅμως $x,y\in\mathbb{R}$, πρέπει ἡ διακρίνουσα τῆς (1) νά εἶναι μεγαλύτερη ἤ ἴση μέ τό μηδέν. Δηλαδή

$$\Delta=k^2-4p\geqslant 0 \quad \text{ἤ} \quad p\leq\frac{k^2}{4}.$$

Δηλαδή ἡ μεγαλύτερη τιμή τοῦ p εἶναι ἡ $\frac{k^2}{4}$. Τότε ὅμως

$\Delta=k^2-4\frac{k^2}{4}=k^2-k^2=0$, ὁπότε οἱ ρίζες εἶναι ἴσες, $x=y=\frac{k}{2}$.

Π.χ. Τό γινόμενο $x^2(8-x^2)$, ἐπειδή τό ἄθροισμα $x^2+(8-x^2)=8$ εἶναι σταθερό, γίνεται μέγιστο, ὅταν $x^2=8-x^2$ ἤ $2x^2=8$ καί $x=\pm 2$.

Ἀσκήσεις 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Πρόσημο ριζῶν

8.5 Ἡ διακρίνουσα, τό γινόμενο καί τό ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, μᾶς δίνουν τή δυνατότητα νά προσδιορίζουμε τό πρόσημο τῶν ριζῶν της ρ_1 καί ρ_2 χωρίς νά τή λύνουμε.

Ἐξετάζουμε πρῶτα τό πρόσημο τοῦ $\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἄν εἶναι:

- $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\alpha}<0}$, τότε, ἐπειδή οἱ α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι (§ 8.2 Παρατ. 1), ἡ ἐξίσωση ἔχει δύο ρίζες ἄνισες, οἱ ὁποῖες εἶναι καί ἑτερόσημες, ἀφοῦ τό γινόμενό τους $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι ἀρνητικό.
- $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\alpha}=0}$, τότε $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}=0$, ὁπότε ἡ μία ρίζα τουλάχιστον, ἔστω ἡ ρ_1, θά εἶναι μηδέν καί ἡ ἄλλη θά εἶναι $\rho_2=\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}$.
- $\boldsymbol{\frac{\gamma}{\alpha}>0}$, τότε ἡ ἐξίσωση ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$, μόνο ἄν $\Delta\geqslant 0$. Στήν περίπτωση αὐτή οἱ ρίζες εἶναι ὁμόσημες, θετικές ὅταν $\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}>0$, καί ἀρνητικές ὅταν $\rho_1+\rho_2=\frac{-\beta}{\alpha}<0$.

Τά παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στόν ἀκόλουθο πίνακα.

Πρόσημα τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μέ $\rho_1 \leqslant \rho_2$	
$\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$	ρίζες ἑτερόσημες $\rho_1<0<\rho_2$
$\dfrac{\gamma}{\alpha}=0$	οἱ ρίζες εἶναι 0 καί $\dfrac{-\beta}{\alpha}$
$\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$ καί $\Delta \geqslant 0$	$\begin{cases} \dfrac{-\beta}{\alpha}>0 & \text{δύο ρίζες θετικές } 0<\rho_1 \leqslant \rho_2 \\ \dfrac{-\beta}{\alpha}<0 & \text{δύο ρίζες ἀρνητικές } \rho_1 \leqslant \rho_2<0 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἡ ἐξίσωση $5x^2+7x-6=0$ ἔχει ρίζες ἄνισες καί ἑτερόσημες, γιατί εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}=-\dfrac{6}{5}<0$.

Ἡ ἐξίσωση $-x^2+3x=0$ ἔχει ρίζες 0 καί $\dfrac{-\beta}{\alpha}=-\dfrac{3}{-1}=3$, γιατί εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{0}{-1}=0$.

Ἡ ἐξίσωση $x^2-7x+10=0$ ἔχει δύο ρίζες θετικές ἄνισες, γιατί εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{10}{1}=10>0$, $\Delta=49-4\cdot1\cdot10=9>0$ καί $\dfrac{-\beta}{\alpha}=7>0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, γιά τίς ὁποῖες ἡ ἐξίσωση $x^2-2x+\lambda+2=0$ ἔχει α) 2 ρίζες ἑτερόσημες β) 2 ρίζες θετικές καί ἄνισες γ) 2 ρίζες ἀρνητικές.**

Εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\lambda+2}{1}=\lambda+2$, $\Delta'=1-(\lambda+2)=-\lambda-1$, $\dfrac{-\beta}{\alpha}=2$.

α) Πρέπει νά εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$ ἤ $\lambda+2<0$. Ἄρα $\lambda<-2$.

β) Πρέπει νά εἶναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$ **καί** $\Delta'>0$, ἀφοῦ $\dfrac{-\beta}{\alpha}=2>0$. Ἑπομένως πρέπει $\lambda+2>0$ **καί** $-\lambda-1>0$, δηλαδή: $\lambda>-2$ **καί** $\lambda<-1$, ἄρα $-2<\lambda<-1$.

γ) Πρέπει νά είναι $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καί $\Delta' > 0$ καί $\frac{-\beta}{\alpha} < 0$. Ἐπειδή ὅμως $\frac{-\beta}{\alpha} = 2 > 0$, δέν ὑπάρχει τιμή τοῦ λ, γιά νά ἔχουμε δύο ρίζες ἀρνητικές.

2. **Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ μέ $\alpha\beta\gamma \neq 0$ καί ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς $x_1(x-x_2)^2+x_2(x-x_1)^2 = 0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν οἱ x_1, x_2 εἶναι ἑτερόσημες, τότε καί οἱ $\rho_1\, \rho_2$ εἶναι ἑτερόσημες.**

Ἡ ἐξίσωση $x_1(x-x_2)^2+x_2(x-x_1)^2 = 0$ μετά τίς πράξεις γίνεται

$$(x_1+x_2)x^2-4x_1x_2x+x_1x_2(x_1+x_2) = 0$$

καί ἐπειδή ἀπό τήν πρώτη ἐξίσωση ἔχουμε $x_1+x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ καί $x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$,

θά εἶναι $\quad -\alpha\beta x^2-4\alpha\gamma x-\beta\gamma = 0.$

Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση αὐτή ρίζες ἑτερόσημες, πρέπει καί ἀρκεῖ

$$\frac{-\beta\gamma}{-\alpha\beta} < 0 \quad ἤ \quad \frac{\gamma}{\alpha} < 0.$$

Αὐτό ὅμως ἰσχύει, γιατί ἡ $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ ἔχει ρίζες ἑτερόσημες.

3. **Ἄν k, λ, μ εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου, νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση**

$$kx^2-2(\lambda+\mu)x+k = 0$$

ἔχει δύο ρίζες θετικές καί ἄνισες.

Θά πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ **καί** $\Delta' > 0$ **καί** $\frac{-\beta}{\alpha} > 0$. Δηλαδή

$$\frac{k}{k} > 0 \quad \textbf{καί} \quad (\lambda+\mu)^2-k^2 > 0 \quad \textbf{καί} \quad \frac{2(\lambda+\mu)}{k} > 0 \quad ἤ$$

$$1 > 0 \ \textbf{καί} \ (\lambda+\mu-k)(\lambda+\mu+k) > 0 \quad \textbf{καί} \quad k(\lambda+\mu) > 0.$$

Οἱ ἀνισότητες αὐτές ἀληθεύουν, γιατί οἱ k, λ, μ εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί $\lambda+\mu > k$ ἤ $\lambda+\mu-k > 0$, ἐπειδή κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἀσκήσεις 14, 15, 16.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου δεύτερου βαθμοῦ

8.6 Τό πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, μέ $\alpha \neq 0$, ὀνομάζεται **τριώνυμο δεύτερου βαθμοῦ.** Οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ λέγονται καί **ρίζες τοῦ τριωνύμου** καί ἡ διακρίνουσα $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$ **διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου.** Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου προφανῶς ὑπάρχουν, ὅταν $\Delta \geqslant 0$.

Ἀπό τή λύση τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως (§ 8.2) $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ προκύπτουν διάφορες μορφές τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἔτσι ἀπό τήν (3) τῆς § 8.2 ἔχουμε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \tag{1}$$

Εἰδικότερα

- Ἄν $\Delta>0$, καί ρ_1,ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες του, τότε ἀπό τήν (4), λόγω τῶν (5) τῆς § 8.2, ἔχουμε $x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}x+\dfrac{\gamma}{\alpha}=(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, ἄρα

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2) \tag{2}$$

- Ἄν $\Delta=0$, τότε $\rho_1=\rho_2=\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, ὁπότε ἔχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \tag{3}$$

- Ἄν $\Delta<0$, τότε ἡ (1) γράφεται καί

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right] \tag{4}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Γιά τό τριώνυμο $f(x)=2x^2-6x+4$, πού ἔχει ρίζες $\rho_1=1$ καί $\rho_2=2$, ἔχουμε:
$$f(x)=2(x-1)\,(x-2).$$

2. Ἡ τιμή τοῦ λ, γιά τήν ὁποία τό τριώνυμο $f(x)=3x^2-2x+2\lambda-1$ παίρνει τή μορφή (3), βρίσκεται ἀπό τήν ἰσότητα:
$$\Delta'=0 \quad \text{ἤ} \quad 1-3(2\lambda-1)=0 \quad \text{ἤ} \quad 6\lambda-4=0 \quad \text{ἤ} \quad \lambda=\frac{2}{3}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά παραγοντοποιηθοῦν τά τριώνυμα:**

α) $f(x)=x^2-(k+\lambda+2)x+2(k+\lambda)$

β) $g(x)=(x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2-(x+6)^2$.

α) Βρίσκουμε τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$. Εἶναι

$$\rho_{1,2}=\frac{k+\lambda+2\pm\sqrt{(k+\lambda+2)^2-8(k+\lambda)}}{2}=\frac{k+\lambda+2\pm\sqrt{(2-k-\lambda)^2}}{2}$$

$$=\frac{k+\lambda+2\pm(2-k-\lambda)}{2} \begin{cases} \nearrow \rho_1=\dfrac{k+\lambda+2+2-k-\lambda}{2}=2 \\ \searrow \rho_2=\dfrac{k+\lambda+2-2+k+\lambda}{2}=k+\lambda. \end{cases}$$

Ἄρα εἶναι
$$\begin{aligned} f(x)&=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)\\ &=(x-2)(x-k-\lambda). \end{aligned}$$

β) Εἶναι $g(x) = x^2+6x+9+x^2+8x+16+x^2+10x+25-x^2-12x-36$
$= 2x^2+12x+14$.

Βρίσκουμε τίς ρίζες τῆς $g(x)=0$, οἱ ὁποῖες εἶναι

$$\rho_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-2\cdot 14}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{-6\pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \rho_1 = -3+\sqrt{2} \\ \searrow \rho_2 = -3-\sqrt{2} \end{array}$$

Ἄρα εἶναι $g(x) = 2(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2})$.

2. **Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:**

α) $\dfrac{x^2-(k+\lambda)x+k\lambda}{x^2-(1+\lambda)x+\lambda}$, **β)** $\dfrac{x^2-3kx+2k^2}{x^2-4k^2}$.

Παραγοντοποιοῦμε τούς ὅρους κάθε κλάσματος καί ἔχουμε:

α) $\dfrac{x^2-(k+\lambda)x+k\lambda}{x^2-(1+\lambda)x+\lambda} = \dfrac{(x-k)(x-\lambda)}{(x-1)(x-\lambda)} = \dfrac{x-k}{x-1}$.

β) $\dfrac{x^2-3kx+2k^2}{x^2-4k^2} = \dfrac{(x-2k)(x-k)}{(x-2k)(x+2k)} = \dfrac{x-k}{x+2k}$.

3. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο**

$$f(x) = x^2-(6\lambda-3)x+9\lambda^2-8$$

εἶναι τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου τό ὁποῖο καί νά προσδιοριστεῖ.

Γιά νά εἶναι τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, ἐπειδή $\alpha=1$, θά πρέπε
$\Delta=0$. Δηλαδή $(6\lambda-3)^2-4(9\lambda^2-8)=0$ ἤ $\lambda = \dfrac{41}{36}$.

Γιά $\Delta=0$ τό τριώνυμο γίνεται:

$$f(x) = \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(x+\frac{-(6\lambda-3)}{2}\right)^2$$

καί γιά $\lambda=\dfrac{41}{36}$, $f(x) = \left(x-\dfrac{6\cdot\frac{41}{36}-3}{2}\right)^2 = \left(x-\dfrac{23}{12}\right)^2$.

• *Ἀσκήσεις 17, 18, 19.*

Πρόσημο τριωνύμου

8.7 Ἔστω f ἡ πολυωνυμική συνάρτηση, μέ τιμή στό x τό τριώνυμο

$$f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma.$$

Θά ἐξετάσουμε τό πρόσημο τοῦ $f(x)$ γιά τίς διάφορες τιμές τῆς μεταβλητῆς x.
Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

1. **Δ > 0.** Τότε τό τριώνυμο, πού ἔχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 ἄνισες, γράφεται (§ 8.6)

$$f(x) = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

Ὑποθέτοντας $\rho_1 < \rho_2$ ἔχουμε:

- Προφανῶς $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$
- Γιά $x < \rho_1 < \rho_2$ εἶναι $x-\rho_1 < 0$ **καί** $x-\rho_2 < 0$, ὁπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) > 0$.

  Ἄρα τό τριώνυμο εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α.
- Γιά $\rho_1 < \rho_2 < x$ εἶναι $x-\rho_1 > 0$ **καί** $x-\rho_2 > 0$, ὁπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) > 0$.

  Ἄρα τό τριώνυμο εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α.
- Γιά $\rho_1 < x < \rho_2$ ἔχουμε $x-\rho_1 > 0$ **καί** $x-\rho_2 < 0$, ὁπότε $(x-\rho_1)(x-\rho_2) < 0$.

  Ἄρα τό τριώνυμο εἶναι **ἑτερόσημο** τοῦ α.

2. **$\Delta = 0$.** Τότε τό τριώνυμο (§ 8.6) γράφεται

$$f(x) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Ἄρα μηδενίζεται γιά $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$, ἐνῶ γιά κάθε $x \neq \frac{-\beta}{2\alpha}$, ἐπειδή $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 > 0$, εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α.

3. **$\Delta < 0$.** Τότε ἀπό τή σχέση (4) τῆς § 8.6 ἔχουμε:

$$f(x) = \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

καί ἐπειδή $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geqslant 0$ καί $\frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0$, ἡ παράσταση $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}$ εἶναι πάντοτε θετική καί τό τριώνυμο εἶναι **ὁμόσημο** τοῦ α γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ἀπό τά προηγούμενα συμπεραίνουμε ὅτι:

> **Τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι ἑτερόσημο τοῦ α μόνο στήν περίπτωση πού εἶναι $\Delta > 0$ καί ὁ x παίρνει τιμές πού βρίσκονται μεταξύ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἔστω ξ ἕνας πραγματικός ἀριθμός. Τότε, ἐξετάζοντας τήν τιμή τῆς f στό ξ, δηλαδή τήν $f(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma$, ἔχουμε τίς περιπτώσεις:

- $\mathbf{f(\xi) = 0}$. Τότε ὁ ξ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$
- $\mathbf{\alpha f(\xi) < 0}$, δηλαδή ὁ $f(\xi)$ εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α. Τότε τό τριώνυμο ἔχει δύο ρίζες ἄνισες ρ_1, ρ_2 μεταξύ τῶν ὁποίων βρίσκεται ὁ ἀριθμός ξ.
- $\mathbf{\alpha f(\xi) > 0}$, δηλαδή ὁ $f(\xi)$ εἶναι ὁμόσημος τοῦ α. Τότε, **ἄν** ὑπάρχουν οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2 καί εἶναι $\rho_1 < \rho_2$, τό $\xi \notin [\rho_1, \rho_2]$. Στή περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά διακρίνουμε ποιά ἀπό τίς περιπτώσεις $\xi < \rho_1$ ἤ $\xi > \rho_2$ ἔχουμε, ἄν συγκρίνουμε τόν ξ μέ τό ἡμιάθροισμα $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$, ἐπειδή εἶναι πάντοτε $\rho_1 < \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} < \rho_2$.

2. Ἄν γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς ξ_1, ξ_2 ἰσχύει $\mathbf{f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) < 0}$, τότε οἱ ἀριθμοί $f(\xi_1)$ καί $f(\xi_2)$ εἶναι ἑτερόσημοι. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἕνας ἀπό τούς $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α. Ἐπομένως (Παρατ. 1) ἕνας μόνο ἀπό τούς ξ_1, ξ_2 βρίσκεται μεταξύ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $f(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ἔστω τό τριώνυμο $-x^2 + 6x - 9$. Ἐπειδή $\Delta' = 3^2 - (-1)(-9) = 9 - 9 = 0$, τό τριώνυμο ἔχει τή διπλή ρίζα $\rho = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = 3$ καί εἶναι ὁμόσημο τοῦ α, δηλαδή ἀρνητικό γιά κάθε $x \neq 3$, ἐνῶ γιά $x = 3$ μηδενίζεται.

Τό τριώνυμο $2x^2 - 16x + 30$, ἐπειδή $\Delta' = 8^2 - 2 \cdot 30 = 4 > 0$, εἶναι ἑτερόσημο τοῦ $\alpha = 2$, δηλαδή ἀρνητικό γιά τίς τιμές τοῦ x πού βρίσκονται μεταξύ τῶν ριζῶν του 3 καί 5. Ἐπομένως γιά $3 < x < 5$ εἶναι ἀρνητικό καί γιά $x < 3$ ἤ $x > 5$ θετικό.

Τά συμπεράσματα αὐτά συνοψίζονται στούς παρακάτω πίνακες

$\Delta = 0$	x	$-\infty$		3		$+\infty$
	$-x^2+6x-9$		$-$	0	$-$	

$\Delta > 0$	x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
	$2x^2-16x+30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἄν α,β,γ εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου, τότε τό τριώνυμο**

$$f(x) = \beta^2x^2+(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x+\gamma^2, \quad \beta \neq 0$$

εἶναι θετικό γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x.

Γιά νά εἶναι τό τριώνυμο πάντοτε θετικό, δηλαδή ὁμόσημο τοῦ συντελεστῆ β^2 γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$. Εἶναι:

$$\begin{aligned}\Delta &= (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2-4\beta^2\gamma^2\\ &= [\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+2\beta\gamma][\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-2\beta\gamma]\\ &= [(\beta+\gamma)^2-\alpha^2]\,[(\beta-\gamma)^2-\alpha^2]\\ &= (\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)\,(\beta-\gamma+\alpha)\,(\beta-\gamma-\alpha).\end{aligned}$$

Ἐπειδή α,β,γ εἶναι πλευρές τριγώνου, θά εἶναι

$\alpha+\beta+\gamma > 0$ [ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν]

$\beta+\gamma-\alpha > 0$ $[\beta+\gamma > \alpha]$

$\beta-\gamma+\alpha > 0$ $[\beta+\alpha > \gamma]$

$\beta-\gamma-\alpha < 0$ $[\beta < \alpha+\gamma]$

Ἄρα μόνο ὁ τελευταῖος παράγοντας εἶναι ἀρνητικός καί ἑπομένως $\Delta < 0$.

2. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο $f(x) = x^2-x+\lambda-1$ εἶναι γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ θετικό καί γιά ποιές τιμές τῶν λ καί x τό τριώνυμο γίνεται ἀρνητικό.**

Ἐπειδή $\alpha = 1 > 0$, γιά νά εἶναι τό τριώνυμο πάντοτε θετικό, δηλαδή ὁμόσημο τοῦ α, θά πρέπει νά εἶναι $\Delta < 0$. Ἑπομένως:

$$1-4(\lambda-1) < 0 \quad \text{ἤ} \quad \lambda > \frac{5}{4}.$$

Τό τριώνυμο γίνεται ἀρνητικό, δηλαδή ἑτερόσημο τοῦ α, ὅταν $\Delta > 0$ καί ὁ x παίρνει τιμές μεταξύ τῶν ριζῶν. Δηλαδή

ὅταν $1-4(\lambda-1) > 0$ ἤ $\lambda < \frac{5}{4}$ καί (ἐπειδή οἱ ρίζες εἶναι

$\frac{1+\sqrt{5-4\lambda}}{2}, \frac{1-\sqrt{5-4\lambda}}{2}$), $\quad \frac{1-\sqrt{5-4\lambda}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5-4\lambda}}{2}$

3. **Νά ἀποδειχθεῖ, χωρίς νά χρησιμοποιηθεῖ ἡ διακρίνουσα, ὅτι τά τριώνυμα:**

α) $f(x) = (x-k)(x-\lambda)+(x-\lambda)(x-\mu)+(x-\mu)(x-k) \quad (k < \lambda < \mu)$

β) $g(x) = (x-k)(x-\lambda)+p(x-k)+q(x-\lambda) \quad (k \neq \lambda, \ pq > 0)$

ἔχουν ρίζες ἄνισες.

α) Μετά τίς πράξεις ἔχουμε: $\quad$ ὁπότε $\alpha = 3 > 0$.

$$f(x) = 3x^2-2(k+\lambda+\mu)x+k\lambda+\lambda\mu+\mu k,$$

Ἐξάλλου ἀπό τήν ἀρχική μορφή τοῦ f(x) εἶναι $f(\lambda) = (\lambda-\mu)(\lambda-k) < 0$, ἐπειδή $k < \lambda < \mu$. Ἄρα $\alpha f(\lambda) < 0$.

Συνεπῶς (§ 8.7, Παρατ. 1) τό τριώνυμο ἔχει ρίζες ἄνισες.

β) Ἔχουμε $g(k) = q(k-\lambda), \quad g(\lambda) = p(\lambda-k),$ ἄρα

$$g(k)\cdot g(\lambda) = -pq(k-\lambda)^2 < 0.$$

Συνεπῶς (§ 8.7 Παρατ. 2) τό τριώνυμο ἔχει ρίζες ἄνισες.

4. **Νά βρεθεῖ ἡ μέγιστη καί ἐλάχιστη τιμή τοῦ κλάσματος :**

$$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$$

γιά πραγματικές τιμές τοῦ x.

Θέτουμε $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=y$. Τότε θά εἶναι :

$$x^2-3x+4=y(x^2+3x+4) \qquad \text{ἤ}$$

$$(y-1)x^2+3(y+1)x+4(y-1)=0.$$

Ἀφοῦ ὁ x εἶναι πραγματικός ἀριθμός, θά πρέπει $\Delta \geqslant 0$, δηλαδή:

$$9(y+1)^2-16(y-1)^2 \geqslant 0$$

$$\text{ἤ} \qquad -7y^2+50y-7 \geqslant 0.$$

Ἐπειδή τό τριώνυμο $-7y^2+50y-7$ ἔχει $\alpha=-7<0$ καί ρίζες τίς $\frac{1}{7}$, 7 θά γίνεται θετικό, δηλαδή ἑτερόσημο τοῦ α, ὅταν $\frac{1}{7} \leqslant y \leqslant 7$.

Ἄρα ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ κλάσματος εἶναι $\frac{1}{7}$ καί ἡ μέγιστη 7.

5. **Νά συγκριθοῦν οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου:**

α) $f(x)=3x^2-5x-7$ μέ τόν ἀριθμό 2

β) $g(x)=x^2-6x+8$ μέ τόν ἀριθμό 5.

α) Ἐπειδή $\alpha=3>0$ καί $f(2)=-5$, ἔχουμε $\alpha f(2)<0$.

Ἄρα τό f(x) ἔχει ρίζες x_1, x_2 ἄνισες καί ὁ ἀριθμός 2 βρίσκεται μεταξύ τους, δηλαδή $x_1<2<x_2$.

β) Ἐπειδή $\alpha=1>0$ καί $g(5)=3>0$, ἔχουμε $\alpha g(5)>0$. Ἐπειδή ἀκόμη εἶναι $\Delta'=9-8=1>0$, τό τριώνυμο ἔχει ρίζες ἄνισες καί ἑπομένως ὁ ἀριθμός 5 βρίσκεται ἐκτός τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν.

Γιά νά διαπιστώσουμε ἄν ὁ ἀριθμός 5 εἶναι μικρότερος ἀπό τή μικρότερη ἤ μεγαλύτερος ἀπό τή μεγαλύτερη ρίζα, τόν συγκρίνουμε μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν $\frac{-\beta}{2\alpha}$ πού βρίσκεται πάντοτε μεταξύ τῶν ριζῶν.

Εἶναι $\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{6}{2\cdot 1}=3$ καί ἐπειδή $\rho_1<3<\rho_2$ καί $5>3$ θά εἶναι $5>\rho_2$.

Ἀσκήσεις 20, 21, 22, 23, 24.

Ἀνισώσεις δεύτερου βαθμοῦ

8.8 Μιά ἀνίσωση δεύτερου βαθμοῦ μέ ἄγνωστο $x \in \mathbb{R}$ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \quad \text{ἤ} \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0 \quad (\alpha \neq 0).$$

Γιά νά λύσουμε μιά τέτοια ἀνίσωση, πρέπει νά βροῦμε τίς τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γίνεται ἀντιστοίχως θετικό ἤ ἀρνητικό. Ἄρα ἡ λύση μιᾶς ἀνισώσεως δεύτερου βαθμοῦ ἀνάγεται στήν εὕρεση τοῦ προσήμου τοῦ τριωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $-x^2+6x-8>0$. Ἐδῶ ζητοῦμε τίς τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο $-x^2+6x-8$ εἶναι θετικό, δηλαδή ἑτερόσημο τοῦ $\alpha=-1$. Ἐπειδή ὅμως $\Delta'=9-(-1)(-8)=1>0$, τό τριώνυμο $-x^2+6x-8$ εἶναι ἑτερόσημο τοῦ $\alpha=-1$ γιά τιμές τοῦ x πού εἶναι μεταξύ τῶν ριζῶν του 2 καί 4, ὅπως φαίνεται καί στόν παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπῶς τό σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως εἶναι τό διάστημα (2, 4).

2. $x^2-6x+10>0$. Ἐδῶ ζητοῦμε τίς τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες τό τριώνυμο εἶναι θετικό, δηλαδή ὁμόσημο τοῦ $\alpha=1$. Ἐπειδή ὅμως εἶναι $\Delta'=9-10=-1<0$, τό τριώνυμο εἶναι πάντοτε ὁμόσημο τοῦ α καί συνεπῶς ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3. $4x^2-12x+9<0$. Ἔχουμε $\Delta'=36-4\cdot 9=0$. Ἄρα τό τριώνυμο ἔχει διπλή ρίζα τήν $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ καί εἶναι ὁμόσημο τοῦ $\alpha=4$, δηλαδή θετικό, γιά κάθε $x\neq\frac{3}{2}$. Συνεπῶς ἡ ἀνίσωση δέν ἔχει λύση.

4. Στό παράδειγμα 1, ἄν εἴχαμε τήν $-x^2+6x-8\geqslant 0$, τότε στό σύνολο λύσεων θά πρέπει νά ὑπάρχουν καί οἱ τιμές τοῦ x, οἱ ὁποῖες μηδενίζουν τό τριώνυμο, δηλαδή οἱ ρίζες του.

Συνεπῶς ἐδῶ τό σύνολο λύσεων εἶναι τό κλειστό διάστημα [2, 4].

Ἀνισώσεις εἰδικῆς μορφῆς

8.9 Γιά νά λύσουμε ἀνισώσεις τῆς μορφῆς

$$A(x).B(x).\Gamma(x)\ldots Q(x)\lesseqgtr 0 \qquad (1)$$

ὅπου $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)\ldots Q(x)$ πολυώνυμα πρώτου ἤ δεύτερου βαθμοῦ ὡς πρός x, βρίσκουμε τό πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά καί μετά προσδιορίζουμε τό πρόσημο τοῦ γινομένου $A(x).B(x).\Gamma(x)\ldots Q(x)$, ὅπως φαίνεται στό ἑπόμενο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω ἡ ἀνίσωση

$$(3x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)<0.$$

Βρίσκουμε τό πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά. Ἔτσι ἔχουμε:

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		$+$	0	$+$	

Τοποθετοῦμε στή συνέχεια σέ ἕναν κοινό ἄξονα τίς ρίζες τῶν παραγόντων καί σχηματίζουμε τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, ὁ ὁποῖος δίνει καί τό πρόσημο τοῦ γινομένου

$$\Gamma = (5x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{3}$		3		4		$+\infty$
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-6x+9		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
Γ		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$		$-$	

Βλέπουμε ὅτι τό γινόμενο $\Gamma = (3x-7)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)$ εἶναι ἀρνητικό γιά $-1 < x < \frac{7}{3}$ καί γιά $x > 4$. Συνεπῶς ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει γιά $-1 < x < \frac{7}{3}$ ἤ $4 < x$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ἐπειδή εἶναι $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) \gtrless 0,$

τό σύνολο λύσεων τῆς κλασματικῆς ἀνισώσεως $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0$ εἶναι τό ἴδιο μέ τό σύνολο λύσεων τῆς $A(x)B(x) \gtrless 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά λυθεῖ ἡ ἀνίσωση** $\frac{x^3-5x^2+6x}{x+1} < 0$.

Ἡ ἀνίσωση ὁρίζεται στό $\mathbb{R}-\{-1\}$ καί εἶναι :

$$\frac{x^3-5x^2+6x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3-5x^2+6x) < 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2-5x+6) < 0.$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, ἔχουμε:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Σχηματίζουμε λοιπόν τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα πού μᾶς δίνει τό πρόσημο τοῦ γινομένου

$$\Gamma = x(x+1)(x^2-5x+6)$$

x	$-\infty$	-1		0		2		3	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2-5x+6	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
Γ	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ἄρα ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει, ὅταν

$$-1 < x < 0 \quad \text{ἤ} \quad 2 < x < 3.$$

2. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:**

$$\mathbf{x^2-3x+2 > 0}$$
$$\mathbf{x^2-5x-50 < 0}$$
$$\mathbf{x^2-2x-15 > 0.}$$

Βρίσκουμε τό πρόσημο κάθε τριωνύμου χωριστά:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-5		10	$+\infty$
$x^2-5x-50$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$x^2-2x-15$	$+$	0	$-$	0	$+$

Τά συμπεράσματα αὐτά τά συνοψίζουμε στόν ἑπόμενο πίνακα :

x	$-\infty$	-5		-3		1		2		5		10	$+\infty$
x^2-3x+2	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x^2-5x-50$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x^2-2x-15$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$

Οἱ ἀνισώσεις συναληθεύουν, ὅταν τά τριώνυμα εἶναι, κατά τ' σειρά πού δόθηκαν, θετικό, ἀρνητικό, θετικό $(+, -, +)$, πού συμβαίνει στίς στῆλες τῶν διαστημάτων $(-5, -3)$ καί $(5, 10)$. Δηλαδή, ὅταν

$$-5 < x < -3 \quad \text{ἤ} \quad 5 < x < 10.$$

3. **Νά βρεθεῖ γιά ποιές τιμές τοῦ λ ἡ ἀνίσωση**

$$(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$$

ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γιά νά εἶναι τό τριώνυμο $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6$ πάντοτε θετικό, θά πρέπει $\Delta'<0$ καί $\alpha>0$, δηλαδή νά συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις

$$\left.\begin{aligned}(2\lambda-3)^2-(\lambda-2)(5\lambda-6)&<0\\ \lambda-2&>0\end{aligned}\right\} \quad \text{ἤ} \quad \left.\begin{aligned}-\lambda^2+4\lambda-3&<0\\ \lambda-2&>0.\end{aligned}\right\}$$

Ἔχουμε τόν πίνακα

λ	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$-\lambda^2+4\lambda-3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\lambda-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

ἀπό τόν ὁποῖο προκύπτει ὅτι οἱ ἀνισώσεις συναληθεύουν γιά $\lambda>3$.

Ἄρα ἡ ἀνίσωση $(\lambda-2)x^2+2(2\lambda-3)x+5\lambda-6>0$ ἀληθεύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ὅταν $\lambda>3$.

Ἀσκήσεις 25, 26, 27, 28, 29.

Μελέτη τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$

8.10 Ἔστω $\mathscr{C}$ ἡ γραφική παράσταση τῆς f ὡς πρός σύστημα ἀναφορᾶς Oxy. Τότε ἡ ἐξίσωση $y=f(x)$ τῆς $\mathscr{C}$, σύμφωνα μέ τήν (1) τῆς § 8.6, γράφεται:

$$y=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha} \tag{1}$$

$$\text{ἤ} \quad y+\frac{\Delta}{4\alpha}=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Ἄν τώρα θέσουμε $x=X+\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ καί $y=\Psi+\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$, ἡ (1) γίνεται

$$\Psi=\alpha X^2 \tag{2}$$

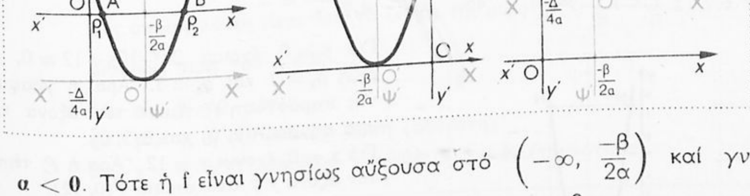
ὡς πρός νέο σύστημα ἀναφορᾶς τό O'XΨ (§ 7.4), πού ἔχει ἀρχή τό $O'\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}, \dfrac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ καί ἄξονες X'X, Ψ'Ψ, ἀντιστοίχως παράλληλους πρός τούς x'x, y'y.

Ἡ (2) ὅμως (§ 7.8) εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς, ἡ ὁποία ἔχει κορυφή τό O' καί ἄξονα συμμετρίας τόν Ψ'Ψ. Ἑπομένως καί ἡ (1) ὡς πρός τό ἀρχικό σύστημα Oxy θά εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία Ψ'Ψ μέ ἐξίσωση $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$. Ἔτσι, ἄν λάβουμε ὑπόψη τά συμπεράσματα τῆς § 7.15 καί ἀναχθοῦμε συγχρόνως στό ἀρχικό σύστημα ἀναφορᾶς Oxy, θά ἔχουμε τά ἑξῆς:

1. $\alpha > 0$. Τότε ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Ἄρα στό $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει (§ 7.10) ἐλάχιστο, πού εἶναι ἴσο μέ $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$. Γιά $x = 0$ ἔχουμε $y = \gamma$ καί τό $y = 0$, ὅταν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἄρα ἡ $\mathscr{C}$ τέμνει τόν Oy στό σημεῖο $\Gamma(0, \gamma)$ καί τόν Ox στά σημεῖα πού ἔχουν ὡς τετμημένες τίς ρίζες ρ_1, ρ_2 τῆς $f(x) = 0$. Ἑπομένως ὁ ἄξονας τῶν τετμημένων ἔχει μέ τή $\mathscr{C}$:

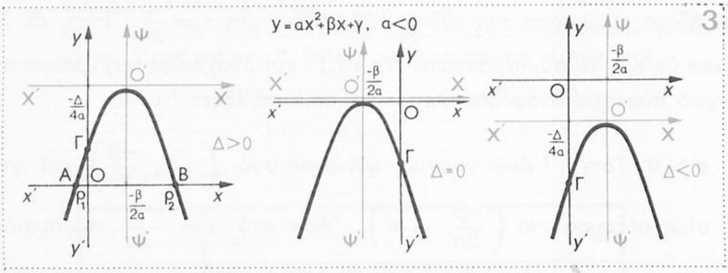
- Δύο κοινά σημεῖα, τά $A(\rho_1, 0)$ καί $B(\rho_2, 0)$, ἄν $\Delta > 0$.
- Ἕνα κοινό σημεῖο, τό $O'\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, 0\right)$, ἄν $\Delta = 0$.
- κανένα κοινό σημεῖο, ἄν $\Delta < 0$.

Τά παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 2.



2. $\alpha < 0$. Τότε ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ καί γνησίως φθίνουσα στό $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. Ἄρα στό $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει μέγιστο, πού εἶναι ἴσο μέ $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha}$. Ἡ γραφική παράσταση $\mathscr{C}$ τῆς f τέμνει ὅπως καί στήν περίπτωση 1 τόν Oy στό σημεῖο $\Gamma(0, \gamma)$ καί

τόν Ox στά σημεῖα πού ἔχουν ὡς τετμημένη τίς ρίζες τῆς $f(x) = 0$. Τά παραπάνω συμπεράσματα παριστάνονται γραφικά στό σχῆμα 3.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ἀπό τήν προηγούμενη ἀνάλυση (σχ. 2 καί 3) προκύπτουν τά ἑξῆς:

1. Τό τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι ἑτερόσημο τοῦ α, ὅταν $\Delta > 0$ καί $\rho_1 < x < \rho_2$.
2. Ἡ παραβολή μέ ἐξίσωση $y = \alpha x^2$ εἶναι «ἴση» μέ τήν παραβολή πού ἔχει ἐξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Οἱ δύο παραβολές διαφέρουν μόνο ὡς πρός τή θέση τῆς κορυφῆς τους.

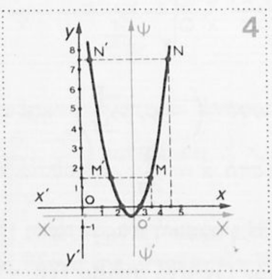
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά μελετηθεῖ ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$.

Ἐπειδή $\alpha = 2 > 0$ καί $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{5}{2}$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

Ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x = \dfrac{5}{2}$, πού εἶναι:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4\alpha} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{4\cdot 2\cdot 12 - 10^2}{4\cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$



Γιά $y = 0$, ἔχουμε $2x^2 - 10x + 12 = 0$, μέ ρίζες $\rho_1 = 2$ καί $\rho_2 = 3$. Ἄρα ἡ γραφική της παράσταση $\mathcal{C}$ τέμνει τόν ἄξονα $x'x$ στά σημεῖα A(2, 0) καί B(3, 0).

Γιά $x = 0$, ἔχουμε $y = 12$. Ἄρα ἡ $\mathcal{C}$ τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο Γ(0, 12).

Ἐπειδή $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{5}{2}$, ἡ $\mathcal{C}$ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x = \dfrac{5}{2}$.

Στή $\mathcal{C}$ ἀνήκουν π.χ. καί τά σημεῖα M καί N μέ συντεταγμένες ἀντιστοίχως (Παρ. 2)

$$x = \frac{5}{2} + 1 = 3{,}5\,, \qquad y = -\frac{1}{2} + 2 . 1^2 = 1{,}5$$

καί $\quad x = \dfrac{5}{2} + 2 = 4{,}5\,, \qquad y = -\dfrac{1}{2} + 2 . 2^2 = 7{,}5.$

καθώς καί τά συμμετρικά τους M′, N′ ὡς πρός τήν εὐθεία $x = \dfrac{5}{2}$.

Μέ τά παραπάνω συμπεράσματα κατασκευάζουμε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (σχ. 4).

Ἄσκηση 30.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ἐξισώσεις μέ περισσότερους ἀπό ἕναν ἀγνώστους

8.11 Στά ἑπόμενα ἀναφερόμαστε σέ ἐξισώσεις μέ δύο ἤ περισσότερους ἀγνώστους $x, y, \ldots, z$ (§ 1.6 Σημ.) πού εἶναι μεταβλητές **πραγματικές.** Κάθε τέτοια ἐξίσωση, ἐπειδή μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ ἰσοδύναμη μέ δεύτερο μέλος 0, παίρνει τή μορφή $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$. Συνήθως τό πρῶτο μέλος $\sigma(x, y, \ldots, z)$ εἶναι πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές καί ὁ βαθμός του **ὡς πρός τούς ἀγνώστους** λέγεται καί **βαθμός τῆς ἐξισώσεως.** Π.χ. ἡ ἐξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ εἶναι α′ βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους. Ἡ ἐξίσωση $xy + zx = 2z + 3$ εἶναι β′ βαθμοῦ μέ τρεῖς ἀγνώστους κ.ο.κ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\quad \alpha x + \beta y = \gamma \qquad$ **(1)**

- Ἄν ἕνας ἀπό τούς συντελεστές α, β εἶναι διαφορετικός ἀπό τό 0, π.χ. ὁ β, ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη τῆς

$$y = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\, x$$

  τῆς ὁποίας λύσεις εἶναι ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς $\left(x, \dfrac{\gamma}{\beta} - \dfrac{\alpha}{\beta} x\right)$ γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ $x \in \mathbb{R}$.

- Ἄν $\alpha = \beta = 0$, τότε:
  ἄν $\gamma \neq 0$, ἡ (1) δέν ἔχει λύση (ἀδύνατη)
  ἄν $\gamma = 0$, ἡ (1) ἀληθεύει γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (ταυτότητα).

Συστήματα ἐξισώσεων

8.12 Ἕνα σύστημα ἐξισώσεων εἶναι **σύζευξη** ἐξισώσεων (§ 1.10 Σημ.). Ἡ ἐπίλυσή του, δηλαδή ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων πού ἐπαληθεύουν **ὅλες** τίς ἐξισώσεις του, γίνεται μέ κατάλληλη μετατροπή του σέ

ἄλλα ἰσοδύναμα συστήματα καί τελικά σέ σύστημα μέ λύσεις γνωστές. Γι' αὐτή τή μετατροπή συχνά ἀντικαθιστοῦμε μιά ἐξίσωση τοῦ συστήματος μέ ἄλλη ἰσοδύναμή της (Κ. 'Αντ. § 1.27).
Εἰδικότερα, ὅπως εἶναι γνωστό καί ἀπό τά γυμνασιακά μαθήματα, ἐφαρμόζουμε κυρίως τίς ἀκόλουθες μεθόδους.

Μέθοδος ἀντικαταστάσεως.

Λύνουμε μιά ἐξίσωση $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$ τοῦ συστήματος ὡς πρός ἕναν ἄγνωστο, π.χ. τόν x, δηλαδή τή μετατρέπουμε σέ ἰσοδύναμη τῆς μορφῆς $x = \sigma_1(y, \ldots, z)$ καί ἀντικαθιστοῦμε σέ ἄλλη ἐξίσωσή του $\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$ τό x μέ $\sigma_1(y, \ldots, z)$.

Τά συστήματα π.χ.

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \begin{cases} x = \sigma_1(y) \\ \varphi(\sigma_1(y), y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Πράγματι, γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ εἶναι $\sigma(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \sigma_1(\beta)$.
Ἄν λοιπόν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1), ἔχουμε $\{\alpha = \sigma_1(\beta)$ **καί** $\varphi(\alpha, \beta) = 0\}$. Ἄρα $\varphi(\sigma_1(\beta), \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ (2).
'Αντιστρόφως, ἄν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (2), εἶναι $\{\alpha = \sigma_1(\beta)$ **καί** $\varphi(\sigma_1(\beta), \beta) = 0\}$. Ἄρα $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1).

Μέθοδος ἀντίθετων συντελεστῶν.

'Από τίς ἐξισώσεις $\sigma(x, y, \ldots, z) = 0$ καί $\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$ τοῦ συστήματος σχηματίζουμε ἕνα *γραμμικό συνδυασμό* τους

$$\lambda\sigma(x, y, \ldots, z) + \mu\varphi(x, y, \ldots, z) = 0$$

μέ *συντελεστές* $\lambda, \mu \neq 0$, μέ τόν ὁποῖο ἀντικαθιστοῦμε μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις αὐτές.

Τά συστήματα π.χ.

$$\begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \begin{cases} \sigma(x, y) = 0 \\ \lambda\sigma(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Πράγματι, ἄν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1), ἔχουμε $\sigma(\alpha, \beta) = 0$ **καί** $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Ἄρα $\lambda\sigma(\alpha, \beta) + \mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ συστήματος (2). 'Αντιστρόφως, ἄν (α, β) εἶναι λύση τοῦ (2), ἔχουμε $\sigma(\alpha, \beta) = 0$ **καί** $\lambda\sigma(\alpha, \beta) + \mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Ἄρα $\mu\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί ἐπειδή $\mu \neq 0$, εἶναι $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ καί τό (α, β) εἶναι λύση τοῦ (1).

Συνήθως οἱ συντελεστές λ καί μ ἐκλέγονται ἔτσι, ὥστε στήν ἐξίσωση $\lambda\sigma(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0$ νά μηδενίζεται ὁ συντελεστής τοῦ ἑνός ἀπό τούς ἀγνώστους.

Νά λυθεῖ τό σύστημα:

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & (1) \\ 2x+y-z=5 & (2) \\ x-y-2z=1 & (3) \end{cases}$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν (1) μέ τό γραμμικό συνδυασμό τῶν (1) καί (3) πού ἔχει συντελεστές -1 καί 1, δηλαδή μέ τήν ἐξίσωση

$$y-5z=1 \qquad (1^*)$$

Ἐπίσης ἀντικαθιστοῦμε τήν (2) μέ τό γραμμικό συνδυασμό τῶν (1) καί (2) πού ἔχει συντελεστές -2 καί 1, δηλαδή μέ τήν ἐξίσωση

$$5y-7z=5 \qquad (2^*)$$

Μποροῦμε τώρα νά λύσουμε τό σύστημα τῶν (1*) καί (2*) μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἔχουμε δηλαδή

$$\begin{cases} y-5z=1 \\ 5y-7z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1 \\ 5y-7z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1 \\ 5\cdot(5z+1)-7z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=5z+1 \\ 25z+5-7z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1 \\ 18z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5z+1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Ὁπότε ἀπό τήν (1) παίρνουμε

$$x=2\cdot1-3\cdot0=2.$$

Ἄρα ἡ λύση τοῦ συστήματος εἶναι (2, 1, 0).

Συστήματα ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους

8.13 Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma & (1) \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' & (2) \end{cases}$$

Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. Οἱ συντελεστές α, β, α΄, β΄ εἶναι ὅλοι 0. Τότε (§ 8.11 Ἐφ.)

1. ἄν ἕνας ἀπό τούς γ, γ' εἶναι διαφορετικός ἀπό τό 0, τότε μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις του, ἄρα καί τό σύστημα, δέν ἔχει λύση.
2. ἄν $\gamma=\gamma'=0$, τό σύστημα ἀληθεύει γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

II. Ἕνας τουλάχιστο ἀπό τούς α, β, α΄, β΄ δέν εἶναι 0, π.χ. $\alpha \neq 0$.

Λύνουμε τό σύστημα μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως:

Ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα:

$$x=\frac{\gamma-\beta y}{\alpha} \qquad (3)$$

καί ἀντικαθιστώντας τό x στήν (2) ἔχουμε

$$\alpha'\left(\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}\right)+\beta' y=\gamma' \qquad \text{ἤ}$$

$$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)y=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \qquad (4)$$

ὁπότε (§ 2.21):

1. ἄν $\alpha\beta'-\alpha'\beta \neq 0$, ἔχουμε $\quad y=\dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ (5)

καί ἀπό τήν (3) βρίσκουμε $\quad x=\dfrac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ (6)

2. ἄν $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$, τότε:

i. ἄν $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \neq 0$, ἡ (4) δέν ἔχει λύση, ἄρα οὔτε καί τό σύστημα ἔχει λύση

ii. ἄν $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$, ἡ (4) ἀληθεύει γιά κάθε $y \in \mathbb{R}$, ὁπότε τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις (τά ζεύγη $\left(\dfrac{\gamma-\beta y}{\alpha}, y\right)$, πού προκύπτουν ἀπό τήν (3)).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στά ἴδια συμπεράσματα θά καταλήγαμε, ἄν ὑποθέταμε $\alpha' \neq 0$. Ἐξάλλου ὑποθέτοντας $\beta \neq 0$ ἤ $\beta' \neq 0$ καί ἐργαζόμενοι ὁμοίως καταλήγουμε σέ παρόμοια συμπεράσματα (Στίς περιπτώσεις, **II**2, i καί ii ἀντί γιά $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$ ἐμφανίζεται ὁ ἀριθμός $\gamma\beta'-\gamma'\beta$).

2. Ὁ ἀριθμός $\mathbf{D}=\boldsymbol{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ μπορεῖ νά παρασταθεῖ σχηματικά $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ καί λέγεται **ὁρίζουσα** τῶν α, β, α′ β′. Ὁμοίως θέτουμε

$$\mathbf{D}_1=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\boldsymbol{\gamma\beta'-\gamma'\beta} \text{ καί } \mathbf{D}_2=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}=\boldsymbol{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ἔστω καί μιά ἀπό τίς ὁρίζουσες D, D_1, D_2 δέν εἶναι 0, τότε ὁπωσδήποτε ἕνας ἀπό τούς α, α′, β, β′ δέν εἶναι 0 (Περίπτ. **II**).

Εἰδικότερα:

- ἄν $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ (Περίπτ. **II**1), τό σύστημα ἔχει τή μοναδική λύση, σύμφωνα μέ τίς (5) καί (6),

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{D}_1}{\mathbf{D}} \quad \text{καί} \quad \mathbf{y}=\frac{\mathbf{D}_2}{\mathbf{D}}$$

- ἄν $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ καί $(\mathbf{D}_1\neq\mathbf{0}$ ἤ $\mathbf{D}_2\neq\mathbf{0})$ (Περίπτ. **II**2i), τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

Γιά τίς ἄλλες εἰδικότερες περιπτώσεις πού μελετήσαμε εἶναι $\mathbf{D}=\mathbf{D}_1=\mathbf{D}_2=\mathbf{0}$ καί τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις ἐκτός τῆς περιπτώσεως **I**1: $\alpha=\beta=\alpha'=\beta'=0$ καί γ ἤ $\gamma' \neq 0$ πού τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιά τό σύστημα $\begin{cases} \lambda x-y=\lambda^2 \\ x-\lambda y=\lambda^4 \end{cases}$

Ἔχουμε: $D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\alpha\beta'-\alpha'\beta=\lambda(-\lambda)-1(-1)=-\lambda^2+1=-(\lambda+1)(\lambda-1)$

$$D_1=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\gamma\beta'-\gamma'\beta=-\lambda\lambda^2-(-1)\lambda^4=-\lambda^3+\lambda^4=\lambda^3(\lambda-1)$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=\lambda\lambda^4-1.\lambda^2=\lambda^5-\lambda^2=\lambda^2(\lambda^3-1)=$$
$$=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

Είναι $D=0 \Leftrightarrow -\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow (\lambda=1$ ἤ $\lambda=-1)$

Ἄρα:

- ἄν $\lambda \neq 1$ **καί** $\lambda \neq -1$, τό σύστημα ἔχει μιά λύση, τήν

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{\lambda^3(\lambda-1)}{-(\lambda+1)(\lambda-1)}=-\frac{\lambda^3}{\lambda+1}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{-(\lambda+1)(\lambda-1)}=-\frac{\lambda^2(\lambda^2+\lambda+1)}{\lambda+1}$$

- ἄν $\lambda=1$, τότε $D=D_1=D_2=0$ καί τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις. Πράγματι γιά $\lambda=1$ τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

πού εἶναι ἰσοδύναμο μέ τήν $x-y=1$.

Ἄρα λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι ὅλα τά ζεύγη τῆς μορφῆς $(x, x-1)$.

- ἄν $\lambda=-1$, τότε $D=0$ καί $D_2 \neq 0$, καί τό σύστημα δέν ἔχει λύση. Πράγματι γιά $\lambda=1$ τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -x-y=1 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x+y=-1 \\ x+y=1, \end{matrix}$$

πού προφανῶς δέν ἔχει λύση (ἀδύνατο).

Ἀξιοσημείωτες ἐφαρμογές

8.14 Γιά τή λύση τῶν συστημάτων πού ἀκολουθοῦν, ἐφαρμόζονται βασικά οἱ μέθοδοι ἀντικαταστάσεως καί γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῆς § 8.12. Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις εἰσάγονται «βοηθητικοί ἄγνωστοι», μέ ἐξισώσεις πού ἐκφράζουν ἁπλή ἐξάρτηση τῶν βοηθητικῶν μέ τούς ἀρχικούς ἀγνώστους τοῦ συστήματος. Ἔτσι ἡ εὕρεση τῶν τιμῶν τῶν βοηθητικῶν ἀγνώστων ὁδηγεῖ ἄμεσα στή λύση τοῦ συστήματος.

1. **Νά λυθεῖ τό σύστημα:**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5} & (1) \\ 2x-5y+6z=38 & (2) \end{cases}$$

Ἄν $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5}=t$, θά εἶναι $x=2t,\quad y=3t,\ z=5t$ (3)

καί ἡ (2) γίνεται

$$2.2t-5.3t+6.5t=38 \Leftrightarrow 4t-15t+30t=38 \Leftrightarrow 19t=38 \Leftrightarrow t=2,$$

ὁπότε ἀπό τίς (3) ἔχουμε:

$$x=2.2=4,\quad y=3.2=6,\quad z=5.2=10.$$

2. **Νά λυθεῖ τό σύστημα :**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\dfrac{1}{6} & (1) \\ x+y=5 & (2) \end{cases}$$

Προφανῶς πρέπει $xy \neq 0$, ὁπότε, ἄν $\frac{x}{y} = t$ (3)

ἡ (1) γίνεται $t + \frac{1}{t} = 2\frac{1}{6} \Leftrightarrow 6t^2-13t+6 = 0 \Leftrightarrow \left(t = \frac{2}{3} \text{ ἤ } t = \frac{3}{2}\right)$

καί λόγω τῆς (3), $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ἤ $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ (4)

Ἑπομένως, ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν (1) μέ τήν (4), τό ἀρχικό σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \text{ ἤ } \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \\ x+y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ x+y = 5 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \\ x+y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ x+y = 5 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x+y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}y+y = 5 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}y+y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ y = 3 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

3. **Νά λυθεῖ τό σύστημα:**

$$\begin{cases} 2x^2-3y^2-2x+y = 30 \\ x-y = 3 \end{cases}$$

Ἔχουμε:

$$\begin{cases} 2x^2-3y^2-2x+y = 30 \\ x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3y^2-2x+y = 30 \\ x = 3+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3+y)^2-3y^2-2(3+y)+y = 30 \\ x = 3+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2+11y-18 = 0 \\ x = 3+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \text{ ἤ } y = 2 \\ x = 3+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

4. **Νά λυθεῖ τό σύστημα:** $\begin{cases} x^2+y^2 = 625 \\ x+y = 35 \end{cases}$

Εἶναι $\begin{cases} x^2+y^2 = 625 \\ x+y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy = 625 \\ x+y = 35 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 35^2-2xy = 625 \\ x+y = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 300 \\ x+y = 35 \end{cases}$$

Στό τελευταῖο σύστημα οἱ ἄγνωστοι x καί y εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$\omega^2-35\omega+300 = 0$$

Εἶναι $\omega_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225-1200}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2}$ $\begin{array}{l} \nearrow \omega_1 = 20 \\ \searrow \omega_2 = 15 \end{array}$

Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι ($x = 20$ **καί** $y = 15$) ἤ ($x = 15$ **καί** $y = 20$).

Ἀσκήσεις 31, 32, 33, 34.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

α) $1 - \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{1-x} - 6$ β) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$ γ) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$

δ) $\frac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2} - \frac{\beta^2}{(x+\beta)^2} = 0, \quad \alpha \neq \pm\beta$ ε) $|2x+6| = -x^2+x-4$

2. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ ἐξισώσεις

α) $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu\nu = 0$

β) $(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)\,x^2 + 6\beta^2 x - (\alpha^2-\alpha\beta-2\beta^2) = 0$

γ) $\alpha x^2 - (\alpha+2\beta)\,x + \beta = 0$

ἔχουν πάντοτε ρίζες στό $\mathbb{R}$.

3. Ἄν $\alpha^2+\beta^2 < \gamma^2$ καί $\beta \neq 0$, νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση $(\alpha^2+\beta^2)x^2 - 2\alpha\gamma x - \beta^2 + \gamma^2 = 0$ δέν ἔχει ρίζες στό $\mathbb{R}$.

4. Δίνονται οἱ ἐξισώσεις

$$x^2 + (\alpha-3\beta)x + \alpha\beta = 0$$
$$x^2 + (\alpha-5\beta)x + 4\beta^2 = 0$$

Νά δειχθεῖ ὅτι, ἄν ἡ μία ἀπό αὐτές ἔχει ρίζες ἴσες, τότε θά ἔχει καί ἡ ἄλλη ρίζες ἴσες.

5. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

α) $4\,\eta\mu^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\eta\mu x + \sqrt{3} = 0$

β) $\varepsilon\varphi^2 x - (\sqrt{3}+1)\varepsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$

γ) $(x+1)^2 - 9\,|x+1| - 10 = 0$

6. Στίς παρακάτω ἐξισώσεις γιά ποιές τιμές τοῦ λ ἔχουμε: 1) ρίζες ἄνισες. 2) ρίζες ἴσες 3) καμία ρίζα.

α) $8x^2 - (\lambda-1)x - \lambda - 7 = 0$ β) $\lambda x^2 + (\lambda-1)x - 2\lambda = 0$

7. Δίνεται ἡμικύκλιο διαμέτρου ΑΒ μήκους 2α. Ἐπάνω στήν ΑΒ νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Γ τέτοιο ὥστε, ἄν κατασκευάσουμε μέσα στό ἡμικύκλιο ΑΒ ἡμικύκλια μέ διαμέτρους ΑΓ καί ΒΓ, ἡ ἐπιφάνεια πού περιέχεται μεταξύ αὐτῶν νά εἶναι ἰσοδύναμη μέ κύκλο ἀκτίνας $\frac{\alpha}{2}$.

8. Ἄν x_1 καί x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 2x + (\lambda-1) = 0$, νά βρεθεῖ ὁ λ ἔτσι, ὥστε νά ἔχουμε

$$3x_1^3 + 8x_1x_2^2 + 8x_1^2x_2 + 3x_2^3 = 192.$$

9. Ἂν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τῆς ὁποίας οἱ ρίζες εἶναι $\rho_1=\frac{x_1}{x_2}$ καί $\rho_2=\frac{x_2}{x_1}$.

10. Ποιά ἡ μέγιστη καί ποιά ἡ ἐλάχιστη θερμοκρασία σέ μιά πόλη, ἄν τό ἄθροισμά τους εἶναι $+4^0$ C καί τό γινόμενό τους -12^0 C.

11. Νά δειχθεῖ ὅτι ἀπό τά ζεύγη τῶν θετικῶν ἀριθμῶν πού ἔχουν σταθερό γινόμενο, ἐλάχιστο ἄθροισμα ἔχουν αὐτοί πού εἶναι ἴσοι.

12. Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα πού ἔχουν σταθερή περίμετρο, τό τετράγωνο ἔχει τό μέγιστο ἐμβαδό.

13. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τοῦ k, ὅταν ἡ μιά ρίζα τῆς ἐξισώσεως $4x^2+kx+6=0$ εἶναι ἴση μέ -2. Τό ἴδιο γιά τήν ἐξίσωση $x^2-3x+k^2-7k=0$.

14. Νά βρεθεῖ τό πρόσημο τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων:

α) $2x^2-7x-13=0$ β) $6x^2+5x+1=0$ γ) $7x^2-5x=0$

15. Νά βρεθεῖ τό πρόσημο τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως:

$$3x^2-7x-k^2=0$$

16. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ, ὥστε ἡ ἐξίσωση $x^2-3x+\lambda-1=0$ νά ἔχει

α) δύο ρίζες ἑτερόσημες β) δύο ρίζες ἴσες γ) δύο ρίζες θετικές.

17. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα

α) $\frac{(x^2-\alpha^2)(x^2+\alpha^2)}{2x^2+\alpha x-3\alpha^2}$ β) $\frac{(x-\alpha)^2-\beta^2}{x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2}$ γ) $\frac{(x^2+3x-4)^2-(x^2-x)^2}{(x^3-1)-(x^2+x-2)}$

18. Γιά ποιές τιμές τοῦ λ τά τριώνυμα

α) $f(x)=x^2-6\lambda x+9\lambda^2-3\lambda+5$

β) $g(x)=4x^2-(3\lambda-1)x+\lambda^2-2$

γίνονται τετράγωνα πρωτοβάθμιων πολυωνύμων.

19. Γιά ποιές τιμές τοῦ λ τό τριώνυμο $x^2-5x+\lambda^2$ εἶναι ἴσο μέ $(x-1)(x-4)$.

20. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά $\beta\neq\gamma$ τό τριώνυμο $f(x)=x^2-(\beta+\gamma)x+\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2$ εἶναι πάντοτε θετικό.

21. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ τό κλάσμα $\frac{x^2+5x+10}{-x^2+6x-9}$ παίρνει ἀρνητικές τιμές.

22. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τιμῶν τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}$.

23. Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x καί y, ἄν $x^2+y^2=6x-8y$.

24. Νά συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί 1 καί 4 μέ τίς ρίζες τοῦ τριωνύμου $f(x)=2x^2-8x+4$ χωρίς νά βρεθοῦν οἱ ρίζες του.

25. Νά λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

α) $(1-x)(x^2-10x+21)(-x^2+x-5) < 0$

β) $\dfrac{(x-1)(x^2-9x+20)}{x^2-x+1} > 0$

γ) $|-x^2+x-4| > 2x+6.$

26. Νά λυθοῦν τά συστήματα

α) $\begin{aligned} x-2 &> 0 \\ 6x^2+5x+1 &> 0 \\ -x^2+5x-6 &< 0 \end{aligned}$

β) $\begin{aligned} &\frac{x-1}{2x+1} > 0 \\ &(x^2-4)(x^2+2x+4) < 0 \end{aligned}$

27. Γιά ποιά τιμή τοῦ λ ἡ ἐξίσωση $x^2-2(\lambda-3)x+\lambda^2-1=0$ ἔχει

α) δύο ρίζες ἀρνητικές β) δύο ρίζες ἑτερόσημες γ) δύο ρίζες ἀντίστροφες.

28. Νά δειχθεῖ ὅτι δέν μπορεῖ νά εἶναι $2 < \dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)} < 6$.

29. Νά ὁριστεῖ ὁ x, ὥστε οἱ ἀριθμοί x^2+x+1, $2x+1$ καί x^2+1 νά εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου.

30. Νά μελετηθοῦν οἱ συναρτήσεις:

α) f μέ $f(x) = 3x^2+5x+2$

β) f μέ $f(x) = -x^2+3x-4$

γ) f μέ $f(x) = 4x^2-4x+1$.

31. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y = 2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y = 12 \end{cases}$

β) $\begin{cases} (1-\lambda)x-2\lambda y = 2 \\ 2\lambda x+(\lambda-1)y = \lambda-4 \end{cases}$

32. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+xy = 6 \\ 2x+3y = 7 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 2x^2+3y^2-4x+y = 14 \\ 2y-x = 2 \end{cases}$

33. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+y^2 = 73 \\ xy = 24 \end{cases}$

β) $\begin{cases} x+y+xy = 23 \\ xy(x+y) = 120 \end{cases}$

34. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y = 62 \\ x^2-y^2+x-y = 50 \end{cases}$

β) $\begin{cases} xy = \dfrac{2}{3} \\ yz = \dfrac{1}{15} \\ zx = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

1. α) Πρέπει $x-1 \neq 0$. Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $x^2-7x+6=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες τή $\rho_1=1$, πού ἀπορρίπτεται καί τή $\rho_2=6$, πού εἶναι δεκτή.

β) Πρέπει $(x-5)(x+5) \neq 0$, δηλαδή $x \neq \pm 5$. Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $x^2-100=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες $\rho_1=10$ καί $\rho_2=-10$.

γ) Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἐξίσωση: $(\alpha^2-\beta^2)x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$, ἡ ὁποία, ὅταν $\alpha=\pm\beta$, εἶναι πρωτοβάθμια μέ ρίζα $x=0$. Ὅταν $\alpha \neq 0$ καί $\alpha \neq \pm\beta$, ἔχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ καί $\rho_2=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

δ) Πρέπει $(x-\alpha)(x-\beta) \neq 0$, δηλαδή $x \neq \alpha$ καί $x \neq -\beta$. Μετά τίς πράξεις βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $(\alpha-\beta)x^2+2\alpha\beta x=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες $\rho_1=0$, $\rho_2=-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

ε) Ἄν εἶναι $x \geqslant -3$, ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x^2+x+10=0$, πού δέν ἔχει ρίζες. Ἄν εἶναι $x \leqslant -3$, ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x^2-3x-2=0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζες

$\rho_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ καί $\rho_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, πού ἀπορρίπτονται.

2. Βρίσκουμε τή διακρίνουσα κάθε ἐξισώσεως καί ἀποδεικνύουμε ὅτι εἶναι μεγαλύτερη ἤ ἴση μέ τό μηδέν.

3. Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\Delta=4\beta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)<0$.

4. Οἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν ἴσες διακρίνουσες.

5. α) Ἄν θέσουμε ημ$x=y$, ἔχουμε: $4y^2-2(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ μέ $y \in [-1,+1]$ κτλ.

β) Ἄν θέσουμε εφ$x=y$, ἔχουμε: $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ κτλ.

γ) Ἐπειδή εἶναι $(x+1)^2=|x+1|^2$ (§ 3.14), ἄν θέσουμε $|x+1|=y$, ἔχουμε: $y^2-9y-10=0$ $y \in \mathbb{R}_+$ κτλ.

6. α) Ἄν $\lambda \neq -15$, ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες. Ἄν $\lambda=-15$, ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἴσες.

β) Ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες γιά κάθε τιμή τοῦ λ.

7. Ἄν θέσουμε $\text{ΑΓ}=x$, τότε εἶναι $\text{ΒΓ}=2\alpha-x$, ὁπότε καταλήγουμε στήν ἐξίσωση $x^2-2\alpha x+\alpha^2=0$.

8. Ἔχουμε $3(x_1^3+x_2^3)+8x_1x_2(x_1+x_2)=192$ ἤ

$$3(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+8x_1x_2(x_1+x_2)=192.$$

Στήν παράσταση αὐτή θέτουμε $x_1+x_2=2$ καί $x_1x_2=\lambda-1$ κτλ.

9. Ἔχουμε $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καί $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, ὁπότε εἶναι:

$$\rho_1+\rho_2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2} \text{ καί } \rho_1\rho_2=\frac{x_1x_2}{x_2x_1}=1 \text{ κτλ.}$$

10. Ἡ μέγιστη καί ἡ ἐλάχιστη θερμοκρασία θά εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως

$$x^2-4x-12=0.$$

11. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 3 τῆς § 8.4.

12. Ὁμοίως μέ τήν 11.

13. Ἡ πρώτη ἐξίσωση, ἐπειδή ἔχει ρίζα τό -2, γίνεται $4(-2)^2+k(-2)+6=0$. Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καί γιά τή δεύτερη ἐξίσωση.

14. Ἐργαζόμαστε ὅπως στά παραδείγματα τῆς § 8.5.

15. Ἐξετάζουμε τό πρόσημο τοῦ $\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

16. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 1 τῆς § 8.5.

17. Παραγοντοποιοῦμε τόν ἀριθμητή καί τόν παρονομαστή κάθε κλάσματος μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

18. Πρέπει ἡ διακρίνουσα κάθε τριωνύμου νά εἶναι ἴση μέ μηδέν.

19. Εἶναι $x^2-5x+\lambda^2=(x-\rho_1)(x-\rho_2)=(x-1)(x-4)$ κτλ.

20. Εἶναι $\alpha=1>0$ καί $\Delta<0$.

21. Εἶναι $x^2+5x+10>0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$ καί $-x^2+6x-9<0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$.

22. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 4 τῆς § 8.7

23. Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση πρῶτα μέ ἄγνωστο τόν x, ὁπότε πρέπει $\Delta\geqslant 0$ καί βρίσκουμε $-9\leqslant y\leqslant 1$. Ὁμοίως καί γιά τόν y.

24. Βρίσκουμε ὅτι $2f(1)<0$ κτλ.

25. **α)** Ἐξετάζουμε τό πρόσημο καθενός παράγοντα κτλ.

β) Ἐπειδή εἶναι $x^2-x+1>0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $(x-1)(x^2-9x+20)>0$.

γ) Ἐπειδή γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$ $-x^2+x-4<0$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $-(-x^2+x-4)>2x-6$.

26. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 8.9.

27. **α)** Πρέπει $\dfrac{\gamma}{\alpha}>0,\ \Delta>0,\ -\dfrac{\beta}{\alpha}<0$

β) Πρέπει $\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$

γ) Πρέπει $\Delta>0,\ \dfrac{\gamma}{\alpha}=1$

28. Θέτουμε $y=\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ καί ἀποδεικνύουμε ὅτι $y\notin(2,6)$.

29. Ὁ x εἶναι ἡ λύση τοῦ συστήματος τῶν ἀνισώσεων

$$x^2+x+1 < (2x+1)+(x^2+1)$$
$$2x+1 < (x^2+x+1)+(x^2+1)$$
$$x^2+1 < (x^2+x+1)+(2x+1).$$

30. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν ἐφαρμογή τῆς § 8.10.

31. **α)** Γιά $\lambda \neq -1$ καί $\lambda \neq 4$ τό σύστημα ἔχει τή λύση $x = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$, $y = \frac{6}{\lambda+1}$

Γιά $\lambda = -1$ τό σύστημα δέν ἔχει λύση

Γιά $\lambda = 4$ τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις.

β) Γιά $\lambda \neq -1$ καί $\lambda \neq \frac{1}{3}$ τό σύστημα ἔχει τή λύση

$$x = \frac{2(\lambda^2-3\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}, \quad y = \frac{-\lambda^2+\lambda-4}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}$$

Γιά $\lambda = -1$ ἤ $\lambda = \frac{1}{3}$ τό σύστημα εἶναι ἀδύνατο.

32. **α)** Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$(x = 2 \textbf{ καί } y = 1) \textbf{ ἤ } \left(x = -9 \textbf{ καί } y = \frac{25}{3}\right)$$

β) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$(x = 2 \textbf{ καί } y = 2) \textbf{ ἤ } \left(x = -\frac{20}{11} \textbf{ καί } y = \frac{1}{11}\right)$$

33. **α)** Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:
$(x = 8$ **καί** $y = 3)$ **ἤ** $(x = 3$ **καί** $y = 8)$ **ἤ** $(x = -8$ **καί** $y = -3)$
ἤ $(x = -3)$ **καί** $y = -8)$

β) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$(x = 5 \textbf{ καί } y = 3) \textbf{ ἤ } (x = 3 \textbf{ καί } y = 5) \textbf{ ἤ } \left(x = \frac{15+\sqrt{193}}{2}, \quad y = \frac{15-\sqrt{193}}{2}\right)$$

$$\textbf{ἤ } \left(x = \frac{15-\sqrt{193}}{2} \textbf{ καί } y = \frac{15+\sqrt{193}}{2}\right)$$

34. **α)** Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι: $(x=-8$ **καί** $y=-3)$ **ἤ** $(x=-8$ **καί** $y = 2)$ **ἤ**
$(x = 7$ **καί** $y=-3)$ **ἤ** $(x = 7$ **καί** $y = 2)$

β) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\left(x = 2 \textbf{ καί } y = \frac{1}{3} \textbf{ καί } z = \frac{1}{5}\right) \textbf{ ἤ } \left(x = -2 \textbf{ καί } y = -\frac{1}{3} \textbf{ καί } z = -\frac{1}{5}\right)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εἶναι οἱ: α (ψευδής), β (ἀληθής), δ (ἀληθής). Ἡ γ δέν εἶναι λογική πρόταση.

2. Ἁπλή ἡ β. Σύνθετες εἶναι οἱ α (ὄχι p), γ(ἄν p_1 τότε q) καί δ (p καί q).

3. **α)** Ἔχουμε:
p: ὁ α εἶναι ρητός ἀριθμός.
q: ὁ β εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.
r: τό ἄθροισμα α+β εἶναι ρητός ἀριθμός.
Ἄρα: Ἄν (p καί q), τότε r.

β) Ἡ πρόταση p: «Οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες ἤ διχοτομοῦν τίς γωνίες του» εἶναι σύνθετη καί ἔχει μορφή p_1 ἤ p_2, ὅπου:
p_1: οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες.
p_2: οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομοῦν τίς γωνίες του.
q: τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.
Ἄρα: Ἄν (p_1 ἤ p_2), τότε q.

γ) Ἔχουμε: p: $\alpha\beta = 0$ q: $\alpha = 0$ r: $\beta = 0$
Ἄρα: Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q ἤ ὄχι r).

δ) Ἔχουμε:
p: ὁ α εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.
q: τό ἄθροισμα α+β εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.
r: ὁ β εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5.
Ἄρα: Ἄν (p καί q), τότε r.

ε) p: τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.
q_1: οἱ διαγώνιές του εἶναι κάθετες.
q_2: οἱ διαγώνιές του διχοτομοῦν τίς γωνίες του.
Ἄρα: Ἄν ὄχι p, τότε (ὄχι q_1 ἤ ὄχι q_2).

στ) Ἔχουμε:
p_1: ὁ α εἶναι ἄρτιος ἀριθμός
p_2: ὁ β εἶναι ἄρτιος ἀριθμός
q_1: ὁ α εἶναι περιττός ἀριθμός
q_2: ὁ β εἶναι περιττός ἀριθμός
r: τό ἄθροισμα α+β εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.
Ἄρα: Ἄν (p_1 καί p_2) ἤ (q_1 καί q_2), τότε r.

4. α καί δ, γ καί ε.

5. $A = \{12,24\}$.

6. $G = \{(3,2), (5,2), (5,4), (7,2), (7,4), (7,6)\}$.

7. Βλέπε ὑποδείξεις.

8. Τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ p(x) εἶναι τό $\{2,4,6,\ldots,20\}$ καί τοῦ q(x) τό $\{5,10,15,20\}$.
Ἄρα τά σύνολα ἀλήθειας τῶν $\overline{p}(x)$, $\overline{q}(x)$, $p(x) \wedge q(x)$ καί $p(x) \vee q(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά:
$\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$
$\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19\}$
$\{10,20\}$
$\{2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18,20\}$.

9. Ἔστω p: $k = \lambda + 1$ καί q : $k = \lambda$. Ἐπειδή ἡ p εἶναι ἀληθής καί ἡ q εἶναι ψευδής, οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $q \Rightarrow q$ εἶναι ἀντιστοίχως (α), (ψ), (α), (α). Ἐπίσης οἱ ἰσοδυναμίες $p \Leftrightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$, $q \Leftrightarrow p$, $q \Leftrightarrow q$ εἶναι (α), (ψ), (ψ), (α).

10. Σύμφωνα μέ τήν § 1.18 θά ἔχουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα ἀλήθειας

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$	$p \vee q \vee r$
α	α	α	α	α
α	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ

11. α) $\exists\ x \in \mathbb{Z}$, x εἶναι πρῶτος (ἀληθής).
β) $\forall x$, x εἶναι ρόμβος [Ω: τό σύνολο τῶν τετραπλεύρων] (ψευδής).
γ) $\forall x$, (δύο διάμεσοι τοῦ x εἶναι ἴσες) $\Rightarrow$ (τό x εἶναι ἰσοσκελές) [Ω: τό σύνολο τῶν τριγώνων] (ἀληθής).
δ) $\forall\ x \in \mathbb{N}$, (x διαιρεῖται μέ τό 4) $\Leftrightarrow$ (x λήγει σέ 0) (ψευδής).

12. α) Τό τετράγωνο ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μή μηδενικοῦ εἶναι θετικός ἀριθμός (ἀληθής).
β) Ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό τετράγωνο εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός (ψευδής).
γ) Ἄν οἱ διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομοῦν τίς γωνίες του, τότε αὐτό εἶναι ρόμβος (ἀληθής).
δ) Ἄν οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσες, τότε τό τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο καί ἀντιστρόφως.

13. Γιά τίς προτάσεις α καί β τῆς ἀσκ. 12 ἔχουμε (§ 1.22):
α) $\exists\ x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \not> 0$, δηλ. $\exists\ x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \leq 0$ (ψευδής).
β) $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x^2 \not< 0$, δηλ. $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ (ἀληθής).
Ὁμοίως γιά τίς προτάσεις α καί β τῆς ἀσκ. 11 ἔχουμε: (Βλ. Ἀσκ. 11).
α) $\forall\ x \in \mathbb{Z}$, x δέν εἶναι πρῶτος, δηλ. κάθε ἀκέραιος δέν εἶναι πρῶτος (ψευδής).
β) $\exists$ x, x δέν εἶναι ρόμβος, δηλ. ὑπάρχει τετράπλευρο πού δέν εἶναι ρόμβος (ἀληθής).

14. α) Γιά κάθε $x \in A$ ἡ $p(x)$ εἶναι ἀληθής. Καί ἀφοῦ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$, θά εἶναι καί ἡ $q(x)$ ἀληθής, ἄρα θά εἶναι καί $x \in B$, δηλ. $A \subseteq B$.
β) Ἀντιστρόφως ἄν:
i) $x \in A$, τότε $x \in B$ καί οἱ $p(x)$ καί $q(x)$ εἶναι ἀληθεῖς.
Ἄρα καί ἡ $p(x) \Rightarrow q(x)$ εἶναι ἀληθής.
ii) $x \notin A$, τότε $p(x)$ ψευδής. Ἄρα ἡ $p(x) \Rightarrow q(x)$ ἀληθής.
Συνεπῶς $\forall x$, $p(x) \Rightarrow q(x)$.

15. α)

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \Rightarrow p$
α	α	α
ψ	ψ	α

β)

p	$p \vee p$	$p \vee p \Rightarrow p$.
α	α	α
ψ	ψ	α

16. α)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

β)

$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
α	α	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α

γ)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
α	α	α	α
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α

δ)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow q$
α	α	α	α
α	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	α

ε)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
α	α	α	α
α	ψ	α	α
ψ	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α

στ)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	α	α	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α

ζ)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \Rightarrow p$
α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

η)

$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$
α	α	α
ψ	α	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	α

17. α)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α	α	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	α	α	α	α	α

β)

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$	$[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α	α	α
α	ψ	α	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	α	α	α	α
ψ	ψ	α	ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

γ)

$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	α

δ)

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
α	α	α	α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	α	α	α	α	α	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

ε)

$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
α	α	α	α	α	α
α	α	ψ	α	α	α
α	ψ	α	α	α	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α

18 Ἐπειδή $p \Leftrightarrow q$ εἶναι $(p \Rightarrow q)$ καί $(q \Rightarrow p)$, ὁ λ.τ. $\overline{p \Leftrightarrow q}$ εἶναι ἰσοδύναμος (Νόμος De Morgan) μέ $\overline{p \Rightarrow q}$ ἤ $\overline{q \Rightarrow p}$ καί σύμφωνα μέ τήν ἐφαρμογή τῆς § 1.27 εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν λ.τ. $(p \wedge \overline{q})$ ἤ $(q \wedge \overline{p})$.

19. Γιά τήν πρόταση γ τῆς ἀσκ. 12 παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς συνεπαγωγῆς πού περιέχει εἶναι ἰσοδύναμη (§ 1.27 Ἐφ.) μέ: «Οἱ διαγώνιες τοῦ x διχοτομοῦν τίς γωνίες του καί τό x δέν εἶναι ρόμβος». Ἄρα ἡ ἄρνηση τῆς γ ἰσοδυναμεῖ (§ 1.22) μέ: $\exists$ **x**, οἱ διαγώνιες τοῦ x διχοτομοῦν τίς γωνίες του καί τό x δέν εἶναι ρόμβος (ψευδής).

Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς γ τῆς ἀσκ. 11 ἰσοδυναμεῖ μέ:
«Ὑπάρχει τρίγωνο μέ δύο ἴσες διαμέσους τό ὁποῖο δέν εἶναι ἰσοσκελές (ψευδής)».
Ἐφαρμόζοντας ὁμοίως τήν ἄσκηση 18, ἡ ἄρνηση τῆς δ τῆς ἀσκ. 12 ἰσοδυναμεῖ μέ:
$\exists$ x, (x εἶναι ἰσόπλευρο καί δέν εἶναι ἰσογώνιο) ἤ (x εἶναι ἰσογώνιο καί δέν εἶναι ἰσόπλευρο) (ψευδής).

Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς δ τῆς ἀσκ. 11 εἶναι ἰσοδύναμη μέ:
«Ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός πού διαιρεῖται μέ τό 4 καί δέ λήγει σέ 0 ἤ λήγει σέ μηδέν καί δέ διαιρεῖται μέ τό 4» (ἀληθής).

20. Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ x εἶναι ἄρτιος. Τότε $x=2\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ καί $x^2= xx=(2\nu)\,(2\nu)=2(2\nu^2)$. Ἄρα ὁ x^2 ἄρτιος.

21. Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
x περιττός $\Rightarrow$ x^2 περιττός, ἡ ὁποία ἰσχύει (§ 1.29 Παράδ.).

22. Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
x ἄρτιος $\Rightarrow$ x^2 ἄρτιος, ἡ ὁποία ἰσχύει (Ἄσκ. 20).

23. Ἡ ἀντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή εἶναι:
ΑΒΓΔ ὀρθογώνιο $\Rightarrow$ ΑΒΓΔ ἔχει ἴσες διαγωνίους, ἡ ὁποία ἰσχύει.

24. i) Ὑποθέτουμε ὅτι $\alpha+\rho = \omega$, ρητός. Τότε ἔχουμε
$\alpha = \omega-\rho$, ἄρα α ρητός, ὡς διαφορά δύο ρητῶν (ἄτοπο).
Ἄρα $\alpha+\rho$ ἄρρητος.

ii) Ὅμοια.

iii) Ὑποθέτουμε $\alpha\rho = \omega$ ρητός. Τότε, ἐπειδή $\rho\neq 0$, ἔχουμε

$\alpha = \dfrac{\omega}{\rho}$, ἄρα α ρητός, ὡς πηλίκο δύο ρητῶν (ἄτοπο).
Ἄρα $\alpha\rho$ ἄρρητος.

iv) Ὅπως ἡ iii.

v) Ὅπως ἡ i.

25. Ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu = 2$, ἐπειδή $1+3 = 2^2$.
Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $1+3+\ldots+(2\nu-1) = \nu^2$.
Τότε
$$\begin{aligned}1+3+\ldots+(2\nu-1)+[2(\nu+1)-1] &= \nu^2+[2(\nu+1)-1]\\ &= \nu^2+2\nu+2-1\\ &= \nu^2+2\nu+1\\ &= (\nu+1)^2.\end{aligned}$$
Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

26. Ἰσχύει γιά $\nu = 2$, ἐπειδή $3^3+2.3 = 27+6 = 33 =$ πολ 3.
Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $\nu^3+2\nu =$ πολ 3.
Τότε
$$\begin{aligned}(\nu+1)^3+2(\nu+1) &= \nu^3+3\nu^2+3\nu+1+2\nu+2\\ &= \nu^3+2\nu+3(\nu^2+\nu+1)\\ &= \text{πολ } 3+\text{πολ } 3 = \text{πολ } 3.\end{aligned}$$
Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

27. Ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu=2$, ἐπειδή

$$1^2+2^2=\frac{2(2+1)\,(2.2+1)}{6}.$$

Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6}$.

Τότε $1^2+2^2+\ldots+\nu^2+(\nu+1)^2=\dfrac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)}{6}+(\nu+1)^2$

$$=\frac{\nu(\nu+1)\,(2\nu+1)+6(\nu+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(\nu+1)\,[\nu(2\nu+1)+6(\nu+1)]}{6}$$

$$=\frac{(\nu+1)\,(2\nu^2+\nu+6\nu+6)}{6}$$

$$=\frac{(\nu+1)\,(2\nu^2+7\nu+6)}{6}$$

$$=\frac{(\nu+1)\,(\nu+2)\,(2\nu+3)}{6}$$

$$=\frac{(\nu+1)\,(\nu+2)\,[2(\nu+1)+1]}{6}.$$

Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

28. Ἡ ἰσότητα ἰσχύει γιά $\nu=2$, ἐπειδή

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3} \qquad \text{(ἀληθής).}$$

Ὑποθέτουμε ὅτι ἀληθεύει ἡ p_ν: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{\nu}{\nu+1}$.

Τότε

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+1)\,(\nu+2)}=\frac{\nu}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)\,(\nu+2)}$$

$$=\frac{\nu^2+2\nu+1}{(\nu+1)\,(\nu+2)}$$

$$=\frac{\nu+1}{\nu+2}.$$

Ἄρα ἀποδείχτηκε ἡ $p_{\nu+1}$.

29. Ἰσχύει γιά $\nu=0$, γιατί $3^0\geq 1+2.0$.
Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ $3^\nu\geq 1+2\nu$, θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ $3^{\nu+1}\geq 1+2(\nu+1)$.
Πράγματι εἶναι:
$3^{\nu+1}=3.3^\nu=3^\nu+2.3^\nu\geq 1+2\nu+2.1=1+2(\nu+1)$.

30. Ἡ ἀποδεικτέα ἰσχύει γιά $\nu=2$, γιατί

$$1+\alpha=\frac{\alpha^2-1}{\alpha-1}=\frac{(\alpha+1)\,(\alpha-1)}{\alpha-1}=\alpha+1 \quad (\alpha\neq 1\Rightarrow \alpha-1\neq 0).$$

Ὑποθέτοντας ὅτι ἀληθεύει ἡ $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}=\dfrac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1}$, (1)

θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει ἡ

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}+\alpha^\nu=\frac{\alpha^{\nu+1}-1}{\alpha-1}.$$

Πράγματι, προσθέτοντας τό α^{ν} καί στά δύο μέλη τῆς (1), ἔχουμε:

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}-1}{\alpha-1}+\alpha^{\nu}$$

$$=\frac{\alpha^{\nu}-1+\alpha^{\nu}(\alpha-1)}{\alpha-1}$$

$$=\frac{\alpha^{\nu}-1+\alpha^{\nu+1}-\alpha^{\nu}}{\alpha-1}=\frac{\alpha^{\nu+1}-1}{\alpha-1}.$$

Δηλαδή ἀληθεύει ἡ $p_{\nu+1}$.

31. Ἀποδεικνύουμε τήν πρόταση γιά $\nu=3$, δηλ. ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ τρεῖς πλευρές (τριγώνου) εἶναι $2.3-4=2$ ὀρθές (ἀληθής). Ὑποθέτοντας τώρα ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι $2\nu-4$ ὀρθές, θά δείξουμε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός πολυγώνου μέ $\nu+1$ πλευρές εἶναι $2(\nu+1)-4$ ὀρθές. Ἄν χωρίσουμε τό πολύγωνο μέ τίς $\nu+1$ πλευρές σ' ἕνα ν-γωνο καί ἕνα τρίγωνο, τότε τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ $(\nu+1)$–γώνου θά εἶναι $2\nu-4+2=2(\nu+1)-4$ ὀρθές. Δηλ. ἀληθεύει ἡ $p_{\nu+1}$.

32. Γιά $\nu=3$ εἶναι $\frac{3(3-3)}{2}=0$ (ἀληθής).

Ὑποθέτοντας ὅτι τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$, θά ἀποδείξουμε ὅτι τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου μέ $\nu+1$ πλευρές εἶναι:

$$\frac{(\nu+1)\,(\nu+1-3)}{2}=\frac{(\nu+1)\,(\nu-2)}{2}.$$

Ἄν χωρίσουμε τό $(\nu+1)$–γωνο σ' ἕνα ν–γωνο καί ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ κοινή πλευρά τή ΒΓ, τότε τό πλῆθος τῶν διαγωνίων του εἶναι:

$\frac{\nu\,(\nu-3)}{2}$ τοῦ ν–γώνου

1 ἡ κοινή πλευρά ΒΓ τοῦ ν–γώνου καί τριγώνου.

$\nu-2$ οἱ διαγώνιες πού ἄγονται ἀπό τήν κορυφή Α.

Ἄρα τό ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι:

$$\frac{\nu\,(\nu-3)}{2}+1+\nu-2=\frac{\nu\,(\nu-3)}{2}+\nu-1=\frac{\nu\,(\nu-3)+2(\nu-1)}{2}=\frac{\nu^2-3\nu+2\nu-2}{2}$$

$$=\frac{\nu^2-\nu-2}{2}=\frac{\nu^2-2\nu+\nu-2}{2}=\frac{\nu(\nu-2)+(\nu-2)}{2}=\frac{(\nu+1)\,(\nu-2)}{2}.$$ Ἀληθεύει δηλ. ἡ $p_{\nu+1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Εἶναι $[-(-x)]+[-(-y)]+[-(x+y)]=x+y+(-x)+(-y)=[x+(-x)]+$ $+[y+(-y)]=0$.

2. Ἐπειδή $-(-x)=x$, εἶναι $x+[-[-(-x)]]=x+(-x)=0$.

3. Ἐπειδή εἶναι ἀντίθετοι, θά ἔχουμε $x+y+z+(-x)+(-y)+\omega=0$ ἤ $[x+(-x)]+$ $[y+(-y)]+z+\omega=0$ ἤ $0+0+z+\omega=0$ ἤ $z+\omega=0$. Ἡ τελευταία μᾶς λέει ὅτι z καί ω εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, δηλαδή $z=-\omega$.

4. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $x+y=0$. Εἶναι $x+y=(\alpha+\beta)+[(-\gamma)+(-\delta)]+[(-\alpha)+$ $+\gamma]+[(-\beta)+\delta]=\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)+(-\alpha)+\gamma+(-\beta)+\delta = [\alpha+(-\alpha)]+$ $+[\beta+(-\beta)]+[\gamma+(-\gamma)]+[\delta+(-\delta)]=0+0+0+0=0$.

5. α) $(x+y)-z=(x+y)+(-z)=[x+(-z)]+y=(x-z)+y$
β) $(x-y)-z=[x+(-y)]+(-z)=x+[(-y)+(-z)]=x-(y+z)$
$(x-y)-z=[x+(-y)]+(-z)=[x+(-z)]+(-y)=(x-z)-y.$

6. α) Ἔστω ὅτι ἰσχύει: $x \neq y$ καί $x-z=y-z$. Τότε θά εἶναι:
$x-z=y-z \Rightarrow [x+(-z)]+z=[y+(-z)]+z \Rightarrow x+[(-z)+z]=y+[(-z)+z]$
$\Rightarrow x+0=y+0 \Rightarrow x=y$ πού εἶναι ἄτοπο.
β) $x=y$ καί $z=\varphi \Rightarrow x=y$ καί $-z=-\varphi \Rightarrow x+(-z)=y+(-\varphi) \Rightarrow x-z=y-\varphi.$

7. $A=-\dfrac{6}{7}\ \alpha^2\beta\gamma^5 2\alpha^4\beta^3\gamma^4\left(-\dfrac{5}{6}\right)\alpha\beta^2\gamma^5=\left\{\left(-\dfrac{6}{7}\right).2\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right\}$
$(\alpha^2\alpha^4\alpha)\ (\beta\beta^3\beta^2)\ (\gamma^5\gamma^4\gamma^5)=\left\{2.\left(-\dfrac{6}{7}\right)\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right\}\alpha^7\beta^6\gamma^{14}=\dfrac{10}{7}\alpha^7\beta^6\gamma^{14}.$
$B=(-3)x^2yz^7 4x^4y^3z(-1)xy^5=[(-3).4(-1)](x^2x^4x)\ (yy^3y^5)\ (z^7z)$
$=[4(-3)\ (-1)]\ x^7\ y^9\ z^8=12x^7y^9z^8.$
$\Gamma=[[(-2)xy^2z^3)]^3]^4=[(-2)xy^2z^3]^{12}=(-2)^{12}x^{12}(y^2)^{12}(z^3)^{12}=4096\ x^{12}\ y^{24}\ z^{36}.$

8. α) Εἶναι: $(x^2+3x)\ (x^2+6x+9)=x^2x^2+x^26x+x^29+3xx^2+3x6x+3x9$
$=x^4+6x^3+9x^2+3x^3+18x^2+27x=x^4+9x^3+27x^2+27x=$
$=x(x^3+9x^2+27x+27)=x(x+3)^3.$
β) Εἶναι: $x^2y^2+(x+y)^2(x^2+y^2)=x^2y^2+(x^2+y^2+2xy)\ (x^2+y^2)=$
$x^2y^2+x^4+x^2y^2+x^2y^2+y^4+2x^3y+2xy^3=x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3$
$=(x^2)^2+(y^2)^2+(xy)^2+2x^2y^2+2y^2(xy)+2(xy)x^2=(x^2+y^2+xy)^2.$

9. $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=(x+\alpha)[(x+\beta)(x+\gamma)]=(x+\alpha)\ (x^2+\gamma x+\beta x+\beta\gamma)=$
$=x^3+\gamma x^2+\beta x^2+\beta\gamma x+\alpha x^2+\alpha\gamma x+\alpha\beta x+\alpha\beta\gamma=x^3+(\alpha x^2+\beta x^2+\gamma x^2)+(\alpha\beta x$
$+\beta\gamma x+\gamma\alpha x)+\alpha\beta\gamma=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma.$

10. α) $(x-1)^2(x+1)^2=[(x-1)(x+1)]^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$
β) $(-7x+1)^2-(7x-3)^2=[(-7x+1)+(7x-3)][(-7x+1)-(7x-3)]$
$=(-7x+1+7x-3)(-7x+1-7x+3)=-2(-14x+4)=4(7x-2)$
γ) $(x^2-2\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2=x^4-4\alpha x^2+4\alpha^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=x^4-4\alpha x^2+5\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
δ) $(2\alpha\beta+\gamma)^2-(\gamma-\delta)^2=[(2\alpha\beta+\gamma)+(\gamma-\delta)]\ [(2\alpha\beta+\gamma)-(\gamma-\delta)]=$
$=(2\alpha\beta+\gamma+\gamma-\delta)\ (2\alpha\beta+\gamma-\gamma+\delta)=(2\alpha\beta+2\gamma-\delta)\ (2\alpha\beta+\delta)$
ε) $(\alpha x+\beta y)^2-(\alpha x-\beta y)^2=[(\alpha x+\beta y)+(\alpha x-\beta y)]\ [(\alpha x+\beta y)-(\alpha x-\beta y)]=$
$=(\alpha x+\beta y+\alpha x-\beta y)\ (\alpha x+\beta y-\alpha x+\beta y)=2\alpha x.2\beta y=4\alpha\beta xy.$

11. α) $(3x-2)\ [4x-3+2(x-1)+x+1]=(3x-2)\ (4x-3+2x-2+x+1)=$
$=(3x-2)\ (7x-4)$
β) $x^6-8=(x^2)^3-2^3=(x^2-2)\ [(x^2)^2+x^2.2+2^2]=(x^2-2)\ (x^4+2x^2+4).$

12. Ἀπό τό πρῶτο μέλος ἔχουμε $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{1}{xy}=\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)y+\right.$
$\left.\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{y}\right\}\dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}=\left(xy+\dfrac{1}{x}\ y+x\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}$
$=xy\ \dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\ y\ \dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}+x\ \dfrac{1}{y}\ \dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}\ \dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{y}$

$$=\left(x\,\frac{1}{x}\right)\left(y\,\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{x}\right)\left(y\,\frac{1}{y}\right)+\left(x\,\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\,\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\,\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2y^2}.$$

13. α) Εἶναι:

$$\frac{1}{x}(x+x^2)+\frac{1}{y}(y+y^2)+\frac{1}{z}(z+z^2)+(-x)+(-y)+(-z)=$$

$$\frac{1}{x}\,x+\frac{1}{x}\,xx+\frac{1}{y}\,y+\frac{1}{y}\,yy+\frac{1}{z}\,z+\frac{1}{z}\,zz-x-y-z=$$

$$1+x+1+y+1+z-x-y-z=3.$$

β) Εἶναι: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=(xyz).0$

$$\Leftrightarrow xyz\,\frac{1}{x}+xyz\,\frac{1}{y}+xyz\,\frac{1}{z}=0$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0.$$

14. Ἀπό τό θεώρημα 11 ἔχουμε: $(x+y)(x+z)=0 \Rightarrow x+y=0$ ἤ $x+z=0$. Ἀπό τήν ἰσότητα $x+y=0$ προκύπτει ὅτι ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ y καί ἀπό τήν $x+z=0$ ὅτι ὁ x εἶναι ἀντίθετος τοῦ z.

15. Ἄν $x\ (x\neq 0)$ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, θά ἔχουμε: $x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xx=x\,\frac{1}{x}$ $\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ἤ $x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ ἤ $x=-1$.

16. α) $(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ἤ $x-2=0$ ἤ $x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ ἤ $x=2$ ἤ $x=3$.

β) $x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ἤ $x-2=0$ ἤ $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ ἤ $x=2$ ἤ $x=-2$.

γ) $x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ἤ $x-1=0$ $\Leftrightarrow x=0$ ἤ $x=1$.

δ) $x^4-16=0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ἤ $x+2=0$ ἤ $x^2+4=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ἤ $x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ἤ $x=-2$. (Εἶναι πάντοτε $x^2+4\neq 0$).

ε) $(x-1)^2-(3-2x)^2=0 \Leftrightarrow [(x-1)+(3-2x)][(x-1)-(3-2x)]=0 \Leftrightarrow$

$(2-x)(3x-4)=0 \Leftrightarrow 2-x=0$ ἤ $3x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ἤ $x=\frac{4}{3}$.

17. α) $(x+y):z=(x+y)\,\frac{1}{z}=x\,\frac{1}{z}+y\,\frac{1}{z}=(x:z)+(y:z)$

β) $(x-y):z=[x+(-y)]\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}+(-y)\frac{1}{z}=x\frac{1}{z}-y\frac{1}{z}=(x:z)-(y:z)$

γ) $(xy):z=(xy)\,\frac{1}{z}=x\,y\,\frac{1}{z}=\left(x\,\frac{1}{z}\right)y=(x:z)y.$

$(xy):z=xy\,\frac{1}{z}=x\left(y\frac{1}{z}\right)=x(y:z).$

δ) $(x:y):z=\left(x\,\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}=x\left(\frac{1}{y}\,\frac{1}{z}\right)=x\,\frac{1}{yz}=x:(yz).$

$(x:y):z=\left(x\,\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z}=x\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{z}=\left(x\,\frac{1}{z}\right)\frac{1}{y}=(x:z):y$

18. α) $(xy) : x = (xy)\ \frac{1}{x} = xy\ \frac{1}{x} = \left(x\ \frac{1}{x}\right)y = 1y = y$

β) $(x : y)y = \left(x\ \frac{1}{y}\right)y = xy\ \frac{1}{y} = x\left(y\ \frac{1}{y}\right) = x1 = x$

γ) $x : (yz) = x\ \frac{1}{yz} = x\left(\frac{1}{y}\ \frac{1}{z}\right) = \left(x\frac{1}{y}\right)\frac{1}{z} = (x : y) : z.$

19. α) $x = y \Leftrightarrow x\frac{1}{z} = y\ \frac{1}{z} \Leftrightarrow x : z = y : z$ (Θεώρ. 12).

β) Ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τῆς ἀντιθετοαντιστροφῆς ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε $\overline{x : z \neq y : z} \Leftrightarrow \overline{x \neq y}$, δηλαδή $x : z = y : z \Leftrightarrow x = y$ πού ἰσχύει (Ἄσκ. 19α).

20. α) Εἶναι $\frac{x}{y} - \frac{z}{\varphi} = \frac{x\varphi}{y\varphi} + \left(\frac{-zy}{\varphi y}\right) = \frac{1}{y\varphi}\ x\varphi + \frac{1}{y\varphi}(-zy) = \frac{1}{y\varphi}\ [x\varphi + (-zy)]$

$= \frac{1}{y\varphi}\ (x\varphi - yz) = \frac{x\varphi - yz}{y\varphi}.$

β) $\frac{x}{y} : \frac{z}{\varphi} = \frac{x}{y}\ \frac{1}{\frac{z}{\varphi}} = \frac{x}{y}\ \frac{\varphi}{z} = \frac{x\varphi}{yz}.$

21. α) $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow y\varphi\ \frac{x}{y} = y\varphi\ \frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi\left(y\ \frac{x}{y}\right) = y\left(\varphi\frac{z}{\varphi}\right) \Leftrightarrow \varphi x = yz$

β) $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi = yz \Leftrightarrow x\varphi\ \frac{1}{z\varphi} = yz\ \frac{1}{z\varphi} \Leftrightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{\varphi}$

γ) $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow x\varphi = yz \Leftrightarrow x\varphi\frac{1}{xz} = yz\ \frac{1}{xz} \Leftrightarrow \frac{\varphi}{z} = \frac{y}{x}$

δ) $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + 1 = \frac{z}{\varphi} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{y} = \frac{z}{\varphi} + \frac{\varphi}{\varphi}$

$\Leftrightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{z+\varphi}{\varphi}$

ε) Ἔστω $\frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi} = \lambda$. Τότε $\frac{x}{y} = \lambda \Leftrightarrow x = y\lambda$ (1) καί $\frac{z}{\varphi} = \lambda \Leftrightarrow$ $z = \varphi\lambda$ (2). Ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε $x + z = y\lambda + \varphi\lambda = (y+\varphi)\lambda$

ἤ $\frac{x+z}{y+\varphi} = \lambda = \frac{x}{y} = \frac{z}{\varphi}$

στ) Ὅπως καί ἡ ε.

22. α) $5y^{-2}x^3z^0 = 5\ \frac{1}{y^2}\ x^3 1 = 5x^3\ \frac{1}{y^2} = \frac{5x^3}{y^2}$

β) $\frac{2x^3\ y^{-2}}{3x^{-2}y^3} = \frac{2}{3}\ \frac{x^3}{x^{-2}}\ \frac{y^{-2}}{y^3} = \frac{2}{3}\ x^{3-(-2)}y^{-2-3} = \frac{2}{3}\ x^5y^{-5} = \frac{2x^5}{3y^5}$

γ) $= \frac{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}{(\gamma\delta)^{-1}} = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\gamma\delta}} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\frac{1}{\gamma\delta}} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} : \frac{1}{\gamma\delta} = \frac{(\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha\beta}$

δ) $\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = \dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\dfrac{x+y}{xy}} = \dfrac{xy(x^2+y^2)}{x^2y^2(x+y)} = \dfrac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$

ε) Θέτουμε $x^{-1}=y$, ὁπότε $x^{-2}=y^2$ καί $x^{-3}=y^3$. Ἔχουμε:

$$\frac{1+x^{-1}+x^{-2}}{1-x^{-3}} = \frac{1+y+y^2}{1-y^3} = \frac{1+y+y^2}{(1-y)\,(1+y+y^2)} = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

23. α) $\left(-\dfrac{3}{4}x^2y^{-5}z^5\right)^{-3} = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-3} x^{-6}y^{15}z^{-15} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^3}\dfrac{1}{x^6}\,y^{15}\dfrac{1}{z^{15}}$

$$= -\frac{64y^{15}}{27x^6z^{15}}$$

β) $\dfrac{-7xy^5z^3}{8x^4y^5z^2} = \dfrac{-7}{8}\,x^{-3}y^0z^1 = -\dfrac{7}{8}\,\dfrac{1}{x^3}\,1\,z = -\dfrac{7z}{8x^3}$

γ) $= -\dfrac{\dfrac{2}{3}xy^3}{\dfrac{5}{4}x^4y^3z^4} + \dfrac{4x^4y^2z}{\dfrac{5}{4}x^4y^3z^4} - \dfrac{5x^3z^5}{\dfrac{5}{4}x^4y^3z^4} = -\dfrac{8}{15x^3z^4} + \dfrac{16}{5yz^3} - \dfrac{4z}{xy^3}.$

24. α) $(3x+5)^2-(9x^2-25)+6x+10=0 \Leftrightarrow 9x^2+30x+25-9x^2+25+6x+10=0$

$\Leftrightarrow 36x+60=0 \Leftrightarrow 36x=-60 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$

β) $3x(2x-1)+1-4x^2-(2x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 6x^2-3x+1-4x^2-2x^2+x$

$-3x+\dfrac{3}{2}=0 \Leftrightarrow -10x+5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

γ) $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2x+1}{2}=\dfrac{2x-3}{6}-x \Leftrightarrow 6\left(\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2x+1}{2}\right)=6\left(\dfrac{2x-3}{6}-x\right)$

$\Leftrightarrow 2(x+2)-3(2x+1)=2x-3-6x \Leftrightarrow 0x=-4$ (ἀδύνατη).

δ) Βρίσκουμε $x=\dfrac{53}{16}$. ε) Γίνεται $0x=-6$ (ἀδύνατη).

25. α) Ἄν $\lambda^2-9\neq 0$ ἤ $\lambda\neq\pm 3$, ἔχει μιά ρίζα, τήν $x=\dfrac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda^2-9}=\dfrac{\lambda(\lambda+3)}{(\lambda+3)\,(\lambda-3)}$

$=\dfrac{\lambda}{\lambda-3}$. Ἄν $\lambda=-3$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα. Ἄν $\lambda=3$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0.x=18$, δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

β) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $3\lambda x+3x-2x=5\lambda+5-4$ ἤ $(3\lambda+1)x=5\lambda+1$. Ἄν $3\lambda+1\neq 0$, ἤ $\lambda\neq-\dfrac{1}{3}$ ἔχει μιά ρίζα, τήν $x=\dfrac{5\lambda+1}{3\lambda+1}$. Ἄν $3\lambda+1=0$ ἤ $\lambda=-\dfrac{1}{3}$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=-\dfrac{2}{3}$, δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

γ) Ἄν $\lambda^2-1\neq 0$ ἤ $\lambda\neq\pm 1$, ἔχουμε ρίζα τήν $x=\dfrac{\lambda(\lambda+2)}{\lambda-1}$. Ἄν $\lambda=-1$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα. Ἄν $\lambda=1$, ἔχουμε $0x=6$, δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

δ) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $(\lambda-2)x=\lambda^2-8\lambda-8$. Ἄν $\lambda-2\neq0$, ἤ $\lambda\neq2$ ἔχει μιά ρίζα, τήν $x = \frac{\lambda^2-8\lambda-8}{\lambda-2}$. Ἄν $\lambda-2=0$ ἤ $\lambda=2$, τότε γίνεται $0x=-20$ (ἀδύνατη).

26. α) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $(\lambda-1)x=\lambda+2\mu-7$. Ἄν $\lambda-1\neq0$, ἤ $\lambda\neq1$ ἔχει μιά ρίζα, τήν $x=\frac{\lambda+2\mu-7}{\lambda-1}$. Ἄν $\lambda=1$, τότε τό δεύτερο μέλος γίνεται $2\mu-6$ τό ὁποῖο μηδενίζεται, ὅταν $\mu=3$. Ἔτσι, ὅταν $\lambda=1$ καί $\mu=3$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα. Ἐνῶ, ὅταν $\lambda=1$, $\mu\neq3$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=2\mu-6\neq0$ δηλαδή εἶναι ἀδύνατη.

β) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $3(\lambda-\mu)x=2\lambda-4$. Ἄν $\lambda-\mu\neq0$, ἤ $\lambda\neq\mu$ ἔχει μιά ρίζα, τήν $x=\frac{2(\lambda-2)}{3(\lambda-\mu)}$. Ἄν $\lambda=\mu=2$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$, δηλαδή εἶναι ταυτότητα καί ἄν $\lambda=\mu\neq2$, εἶναι ἀδύνατη.

γ) Ἡ ἐξίσωση γίνεται $2\lambda x=\lambda^2$. Ἄν $\lambda\neq0$, ἡ ἐξίσωση ἔχει μία ρίζα, τήν $x=\frac{\lambda}{2}$.

Ἄν $\lambda=0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0x=0$ καί εἶναι ταυτότητα.

27. Εἶναι: $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-\gamma$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3\\
&\Rightarrow \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3\\
&\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\
&\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(-\gamma)\\
&\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma
\end{aligned}$$

α) Ἐπειδή $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$, θά εἶναι σύμφωνα μέ τά παραπάνω: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

β) Εἶναι $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)=\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta+\gamma\alpha-\beta\gamma=0$. Ἄρα ἔχουμε $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3=3\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

28. Ἀφοῦ πάρουμε τά ἀναπτύγματα σύμφωνα μέ τίς γνωστές ταυτότητες, βρίσκουμε: $A^2+B^2-\Gamma^2=-4x^2-12y^2+38xy$ καί $AB+B\Gamma+\Gamma A=11x^2-11y^2-13xy$.

29. Ἀπό τήν ἄσκηση 21(ε) ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Ὁπότε εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Ἄν τίς πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, παίρνουμε $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$. Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$.

30. α) Ἀπό τήν $y^2=1$ ἔχουμε $y=\pm1$. Ὁπότε γιά $y=1$ ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γίνεται $x^2-3=6$ ἤ $x^2=9$, δηλαδή $x=\pm3$. Ἐνῶ γιά $y=-1$ θά ἔχουμε $x^2+3=6$ ἤ $x^2=3$, πού εἶναι ἀδύνατη στό $\mathbb{Q}$. Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι ($x=3$ **καί** $y=1$) **ἤ** ($x=-3$ **καί** $y=1$).

β) Ἔχουμε $(y-3)(y-5)=0\Leftrightarrow y-3=0$ **ἤ** $y-5=0\Leftrightarrow y=3$ **ἤ** $y=5$. Γιά $y=3$ ἡ πρώτη δίνει $x=-16$ καί γιά $y=5$ δίνει $x=-18$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. α) $\alpha>\beta>\gamma\Rightarrow\alpha-\beta>0$ καί $\beta-\gamma>0$ καί $\gamma-\alpha<0\Rightarrow(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)<0$

β) Ἀρκεῖ $(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2)\geq0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\geq0\Leftrightarrow(x+y)(x^2-xy+y^2-xy)\geq0\Leftrightarrow(x+y)(x^2-2xy+y^2)\geq0$ $\Leftrightarrow(x+y)(x-y)^2\geq0$ πού ἰσχύει ἀφοῦ $x+y>0$ καί $(x-y)^2\geq0$.

γ) 'Αρκεῖ $x^3-(2x^2-x+2)>0$ (1). 'Αλλά (1) $\Leftrightarrow x^3-2x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x^2(x-2) + (x-2)>0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+1)>0$ πού ἰσχύει ἀφοῦ $x-2>0$ καί $x^2+1>0$

2. α) $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-4xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ πού ἰσχύει.

β) 'Αρκεῖ $(\alpha+\beta+\gamma)^2-\alpha(\beta+\gamma-\alpha)-\beta(\gamma+\alpha-\beta)-\gamma(\alpha+\beta-\gamma) \geq 0$ (1).
'Αλλά (1) $\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma+\alpha^2-\beta\gamma-\alpha\beta+\beta^2-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 0$ πού ἰσχύει.

γ) 'Αρκεῖ $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha(\beta+\gamma) \geq 0$(1). 'Αλλά (1) $\Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2 \geq 0$, πού ἰσχύει.

3. $x<1<y \Leftrightarrow (x-1<0$ **καί** $y-1>0)$. 'Αλλά $xy-x-y+1<0 \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)<0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)<0$, πού ἀληθεύει, ἀφοῦ $x-1$ καί $y-1$ εἶναι ἑτερόσημοι.

4. α) 'Επειδή $\alpha^2+1>0$, εἶναι: $\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow (\alpha^2+1)\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \leq \alpha^2+1$
$\Leftrightarrow 2\alpha \leq \alpha^2+1 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2+1-2\alpha \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-1)^2$, πού ἀληθεύει.

β) 'Αφοῦ α,β θετικοί, θά εἶναι καί $1+\alpha$, $1+\beta$, $1+\alpha+\beta$ θετικοί. Ἄρα:
$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\beta)\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} < \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\beta) \Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(\alpha+\beta) < \alpha(1+\beta)(1+\alpha+\beta)+\beta(1+\alpha)(1+\alpha+\beta) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 < \alpha+\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$
$\Leftrightarrow 0<2\alpha\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ πού ἰσχύει, ἀφοῦ α,β εἶναι θετικοί.

5. $0<y<\omega \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{\omega} \Rightarrow -\frac{1}{y} < -\frac{1}{\omega}$. Τήν τελευταία ἀνισότητα προσθέτουμε κατά μέλη μέ τήν $x<z$ καί ἔχουμε: $x-\frac{1}{y} < z-\frac{1}{\omega}$.

6. α) Εἶναι $\beta=1-\alpha$, ὁπότε: $\alpha\beta \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha(1-\alpha) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha-\alpha^2 \leq \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow 4\alpha-4\alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1+4\alpha^2-4\alpha \Leftrightarrow 0 \leq (1-2\alpha)^2$, πού εἶναι ἀληθής.

β) Εἶναι: $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta} \geq 9$
$\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta} \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1+1}{\alpha\beta} \geq 9-1 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha\beta} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{2}{8} \geq \alpha\beta$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \alpha\beta$, πού ἀποδείχτηκε (Ἄσκ. 6α).

7. α) $\beta>0 \Leftrightarrow \beta>-\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta>\alpha-\beta$.

β) 'Επειδή α,β,γ,δ εἶναι θετικοί, θά ἔχουμε: $\alpha<\beta$ καί $\gamma<\delta \Rightarrow \alpha\gamma<\beta\delta$
$\Rightarrow \frac{\alpha\gamma}{\gamma\delta} < \frac{\beta\delta}{\gamma\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\gamma}$.

8. 'Επειδή x,y θετικοί μέ $x>y$ καί $k>0$, εἶναι $x^k>y^k>0$. (1)
'Επίσης ἐπειδή $\alpha>\beta>0$ καί $\lambda<0$, εἶναι $\beta^\lambda>\alpha^\lambda>0$. (2)
Πολλαπλασιάζουμε τίς (1) καί (2) κατά μέλη καί ἔχουμε: $x^k\beta^\lambda>y^k\alpha^\lambda$.

9. α) Εἶναι: $\lambda x > x+2 \Leftrightarrow \lambda x - x > 2 \Leftrightarrow (\lambda-1)x > 2.$

i) Γιά $\lambda-1>0$ ἤ $\lambda>1$ ἔχουμε $x > \frac{2}{\lambda-1}$.

ii) Γιά $\lambda-1=0$ ἤ $\lambda=1$ ἔχουμε τήν $0x>2$ πού δέν ἔχει λύση.

iii) Γιά $\lambda-1<0$ ἤ $\lambda<1$ ἔχουμε $x<\frac{2}{\lambda-1}$ ἐπειδή διαιροῦμε μέ ἀρνητικό.

β) Ἐπειδή Ε.Κ.Π $(2,4,6)=12$, ἔχουμε: $12\left(\frac{x-\lambda}{2}+\frac{2x+3}{4}\right)>\frac{\lambda x}{6}\cdot 12$

$\Leftrightarrow 6(x-\lambda)+3(2x+3)>2\lambda x \Leftrightarrow 6x-6\lambda+6x+9>2\lambda x \Leftrightarrow 12x-2\lambda x>6\lambda-9$

$\Leftrightarrow 2(6-\lambda)x>6\lambda-9.$

i) Γιά $6-\lambda>0$ ἤ $\lambda<6$ ἔχουμε $x>\frac{6\lambda-9}{2(6-\lambda)}$.

ii) Γιά $6-\lambda=0$ ἤ $\lambda=6$ ἔχουμε τήν $2x.0>36-9$, πού δέν ἔχει λύση.

iii) Γιά $6-\lambda<0$ ἤ $\lambda>6$ ἔχουμε $x<\frac{6\lambda-9}{2(6-\lambda)}$.

γ) Ἐπειδή Ε.Κ.Π $(2,5,10)=10$, ἔχουμε: $10\left(\frac{\lambda(x-2)}{2}-\frac{2x-\lambda}{5}\right)<10\left(\frac{x}{10}-\frac{2}{5}\right)$

$\Leftrightarrow 5\lambda(x-2)-2(2x-\lambda)<x-4 \Leftrightarrow 5\lambda x-10\lambda-4x+2\lambda<x-4$

$\Leftrightarrow 5\lambda x-4x-x<10\lambda-2\lambda-4 \Leftrightarrow 5\lambda x-5x<8\lambda-4 \Leftrightarrow 5(\lambda-1)x<4(2\lambda-1).$

i) Γιά $\lambda-1>0$ ἤ $\lambda>1$ ἔχουμε $x<\frac{4(2\lambda-1)}{5(\lambda-1)}$.

ii) Γιά $\lambda-1=0$ ἤ $\lambda=1$ ἔχουμε τήν $5x\,.\,0<4$, πού ἀληθεύει.

iii) Γιά $\lambda-1<0$ ἤ $\lambda<1$ ἔχουμε $x>\frac{4(2\lambda-1)}{5(\lambda-1)}$.

10. α) $(2x+3>x$ **καί** $x-5<4) \Leftrightarrow (2x-x>-3$ **καί** $x<5+4)$

$\Leftrightarrow (x>-3$ **καί** $x<9) \Leftrightarrow -3<x<9.$

β) $(x(x+2)-(x+1)x>2$ **καί** $2x(x-1)<x(2x-3)+3)$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-x^2-x>2$ **καί** $2x^2-2x<2x^2-3x+3)$

$\Leftrightarrow (x>2$ **καί** $2x^2-2x-2x^2+3x<3) \Leftrightarrow (x>2$ **καί** $x<3)$

$\Leftrightarrow 2<x<3.$

11. $\alpha<\beta<\gamma \Leftrightarrow (\alpha-\beta<0$ **καί** $\beta-\gamma<0$ **καί** $\gamma-\alpha>0)$. Ἄρα:

$|\alpha-\beta|=-(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$, $|\beta-\gamma|=-(\beta-\gamma)=\gamma-\beta$ καί $|\gamma-\alpha|=\gamma-\alpha$.

Ὁπότε: $A=3(\beta-\alpha)+2(\gamma-\beta)-4(\gamma-\alpha)=3\beta-3\alpha+2\gamma-2\beta-4\gamma+4\alpha=\alpha+\beta-2\gamma.$

12. α) Ἐπειδή Ε.Κ.Π $(2,3,4)=12$, εἶναι:

$12\left(\frac{3|x|+1}{2}+\frac{2|x|-1}{3}\right)=\frac{|x|+2}{4}\cdot 12 \Leftrightarrow 6(3|x|+1)+4(2|x|-1)=3(|x|+2)$

$\Leftrightarrow 18|x|+6+8|x|-4=3|x|+6 \Leftrightarrow 18|x|+8|x|-3|x|=-6+4+6$

$\Leftrightarrow 23|x|=4 \Leftrightarrow |x|=\frac{4}{23} \Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{23}$

β) $(2|x|-5)-(4|x|-3)=7|x|-1 \Leftrightarrow 2|x|-5-4|x|+3=7|x|-1$

$\Leftrightarrow 2|x|-4|x|-7|x|=5-3-1 \Leftrightarrow -9|x|=1 \Leftrightarrow |x|=-\frac{1}{9}$ ἀδύνατον ἀφοῦ $|x|\geq 0$.

Ἄρα ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση.

γ) Γνωρίζουμε ὅτι, ἄν $|x|=|\alpha|$, τότε $x=\pm\alpha$. Ἄρα θά εἶναι:

$|3x-1|=|x-3| \Leftrightarrow 3x-1=\pm(x-3)$. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

i) $3x-1=x-3 \Leftrightarrow 3x-x=1-3 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1.$

ii) $3x-1=-(x-3) \Leftrightarrow 3x-1=-x+3 \Leftrightarrow 3x+x=1+3 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1.$

13. Προσθέτουμε κατά μέλη τίς ἀνισότητες $|x-y| < \alpha$ καί $|y-\omega| < \alpha$ καί ἔχουμε: $|x-y|+|y-\omega| < 2\alpha$ (1). Ἐπειδή ὅμως $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ γιά $\alpha = x-y$ καί $\beta = y-\omega$, θά εἶναι: $|(x-y)+(y-\omega)| \leq |x-y|+|y-\omega|$ $\Rightarrow |x-\omega| \leq |x-y|+|y-\omega|$. (2)
Ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε: $|x-\omega| < 2\alpha$.

14. Θά ἀποδείξουμε πρῶτα τήν ἀνισότητα $||x|-|y|| \leq |x+y|$ (1). Ἐπειδή καί τά δύο μέλη της εἶναι θετικοί ἀριθμοί, θά εἶναι: (1) $\Leftrightarrow ||x|-|y||^2 \leq |x+y|^2$ $\Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x||y| \leq x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow$
$x^2+y^2-2|xy| \leq x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow -2|xy| \leq 2xy \Leftrightarrow |xy| \geq -xy$ πού ἰσχύει.
Ἀπό τίς προηγούμενες ἰσοδυναμίες προκύπτει ὅτι, γιά νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα $||x|-|y|| = |x+y|$, πρέπει $|xy| = -xy$, πού ἰσχύει ὅταν $xy \leq 0$. Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἀποδεικνύεται καί ἡ ἀνισότητα $|x+y| \leq |x|+|y|$. Τό ἴσον ἰσχύει, ὅταν $xy \geq 0$.

15. Ἐπειδή $|x|\,|y| > 0$, εἶναι: $\left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right| \geq 2 \Leftrightarrow |x|\,|y| \left(\dfrac{|x|}{|y|} + \dfrac{|y|}{|x|}\right)$ $\geq 2|x|\,|y| \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2 \geq 2|x|\,|y| \Leftrightarrow |x|^2+|y|^2-2|x|\,|y| \geq 0 \Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \geq 0$, πού εἶναι ἀληθής.

16. Ἐπειδή οἱ λ,μ,ν εἶναι θετικοί, θά εἶναι καί ὁ $\lambda+\mu+\nu$ θετικός. Ἄρα ἡ ἀνισότητα πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀνισότητα: $(\lambda+\mu+\nu)\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma < (\lambda+\mu+\nu)\gamma$ (1). Ἀλλά (1)$\Leftrightarrow \lambda\alpha+\mu\alpha+\nu\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma <$ $< \lambda\gamma+\mu\gamma+\nu\gamma \Leftrightarrow (\lambda\alpha+\mu\alpha+\nu\alpha < \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ **καί** $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma < \lambda\gamma+\mu\gamma+\nu\gamma)$ $\Leftrightarrow (\mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$ (2) **καί** $\lambda\alpha+\mu\beta < \lambda\gamma+\mu\gamma$ (3)).
Ἡ (2) ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:
$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow (\alpha < \beta$ **καί** $\alpha < \gamma) \Rightarrow (\mu\alpha < \mu\beta$ **καί** $\nu\alpha < \nu\gamma) \Rightarrow \mu\alpha+\nu\alpha < \mu\beta+\nu\gamma$.
Ὁμοίως γιά τήν (3) ἔχουμε $(\alpha < \beta < \gamma) \Rightarrow (\alpha < \gamma$ **καί** $\beta < \gamma)$ $\Rightarrow (\lambda\alpha < \lambda\gamma$ **καί** $\mu\beta < \mu\gamma) \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta < \lambda\gamma+\mu\gamma$.

17. Εἶναι $\dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{(x-y)(x^2+y^2)-(x+y)(x^2-y^2)}{(x+y)(x^2+y^2)}$

$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2)+(x+y)(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2-x^2-y^2-2xy)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(y-x)2xy}{(x+y)(x^2+y^2)} \leq 0$$

ἀφοῦ $x \geq y > 0$. Ἄρα $\dfrac{x-y}{x+y} \leq \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Ἄν $x=y$, ἰσχύει τό ἴσον.

18. **α)** Εἶναι τό πρῶτο ἐρώτημα τῆς 6.

β) $\alpha^2+\beta^2 \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1-2\alpha\beta \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2} \geq 2\alpha\beta$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \geq \alpha\beta$ πού εἶναι ἡ (α).

γ) Ἀποδείξαμε ὅτι $\alpha^2+\beta^2 \geq \dfrac{1}{2}$ (1). Ἀλλά: (1)$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2)^2 \geq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+$ $2\alpha^2\beta^2 \geqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+2(\alpha\beta)^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ (2). Ἄν $\alpha\beta > 0$ καί στή (2) ἀντί τοῦ $\alpha\beta$ θέσουμε τό $\dfrac{1}{4}$, ἡ ἀνισότητα ἐνισχύεται καί ἔχουμε: $\alpha^4+\beta^4+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow \alpha^4+\beta^4 \geqslant \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} \Rightarrow \alpha^4+\beta^4 \geqslant \dfrac{1}{8}$. Ἄν $\alpha\beta \leqslant 0$, θά εἶναι $\alpha \geqslant 1$ ἤ $\beta \geqslant 1$ (ἀφοῦ $\alpha+\beta = 1$) καί ἡ ἀποδεικτέα εἶναι προφανής.

19. Σύμφωνα μέ τήν § 3.11, Ἐφ. 6 πρέπει νά εἶναι
$(2x-3y+1=0$ **καί** $3x-5y+2=0)$ (1).

Ἀλλά: $(1) \Leftrightarrow (2x-3y=-1$ **καί** $3x-5y=-2) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $3\,\frac{3y-1}{2}$
$-5y=-2) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $3(3y-1)-10y=-4) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $9y-3-10y=$
$-4) \Leftrightarrow (x=\frac{3y-1}{2}$ **καί** $y=1) \Leftrightarrow (x=1$ **καί** $y=1)$.

20. α) $\left(2x-1 \leq x \leq \frac{x+3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(2x-1 \leq x\right.$ **καί** $\left.x \leq \frac{x+3}{2}\right) \Leftrightarrow (2x-x \leq 1$
καί $2x-x \leq 3) \Leftrightarrow (x \leq 1$ **καί** $x \leq 3) \Leftrightarrow x \leq 1$.

β) $[(3x-2)\ (x-2)=0$ **καί** $2x-4 \leq -3x)] \Leftrightarrow [(3x-2=0$ ἤ $x-2=0)$
καί $2x+3x \leq 4] \Leftrightarrow [(x=\frac{2}{3}$ ἤ $x=2)$ **καί** $x \leq \frac{4}{5})]$. Ἄρα $x=\frac{2}{3}$.

21. α) $\frac{2|x|-3}{4} < \frac{|x|+1}{3} \Leftrightarrow 12\,\frac{2|x|-3}{4} < 12\,\frac{|x|+1}{3} \Leftrightarrow 3(2|x|-3) < 4(|x|+1)$
$\Leftrightarrow 6|x|-9 < 4|x|+4 \Leftrightarrow 6|x|-4|x| < 9+4 \Leftrightarrow 2|x| < 13 \Leftrightarrow |x| < \frac{13}{2}$
$\Leftrightarrow -\frac{13}{2} < x < \frac{13}{2}$.

β) $3(|x|-1)+2(|x|-2) > 2 \Leftrightarrow 3|x|-3+2|x|-4 > 2 \Leftrightarrow 5|x| > 3+4+2 \Leftrightarrow 5|x| > 9$
$\Leftrightarrow |x| > \frac{9}{5} \Leftrightarrow \left(x < -\frac{9}{5}\right.$ ἤ $\left.x > \frac{9}{5}\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Ἐπειδή $3 > 0$ εἶναι $f(3)=5.3-4=15-4=11$. Γιά $x=-2$ καί $x=0$ ἔχουμε:
$f(-2)=-(-2)^2=-4$ καί $f(0)=-0^2=0$.

2. Εἶναι $f(-1)=(-1-1)^2=4$, $f(1)=\beta.1^2+2=\beta+2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2$
$=\frac{9}{4}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha\,\frac{1}{2}+3=\frac{\alpha}{2}+3$, $f(2)=\beta.2^2+2=4\beta+2$,
$f\left(\frac{1}{4}\right)=\alpha\,\frac{1}{4}+3=\frac{\alpha}{4}+3$ καί $f(-2)=(-2-1)^2=9$.
Ἄρα ἐπειδή $f(-1)=f(1)$, ἔχουμε $4=\beta+2$ ἤ $\beta=2$. Ὁμοίως
ἐπειδή $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$, ἔχουμε $\frac{9}{4}=\frac{\alpha}{2}+3$ ἤ $9=2\alpha+12$ ἤ $\alpha=-\frac{3}{2}$.
Ὁπότε $f(2)-2f\left(\frac{1}{4}\right)+f(-2)=4\beta+2-2\left(\frac{\alpha}{4}+3\right)+9=4\beta+2-\frac{\alpha}{2}-6+9$
$=4\beta-\frac{\alpha}{2}+5=4.2-\frac{-\frac{3}{2}}{2}+5=8+\frac{3}{4}+5=13\,\frac{3}{4}$.

3. Εἶναι $f(-1)=(-1)^3-(-1)+5=-1+1+5=5$, $f(0)=0^3-0+5=5$ καί $f(1)=$
$=1^3-1+5=5$.

4. Εἶναι $f(-3)=(-3)^3-8(-3)=-27+24=-3$, $f(0)=0$ καί $f(3)=3^3-8.3=$
$=27-24=3$.

5. Βρίσκουμε τά γραφήματα G_1, G_2 τῶν f_1 καί f_2. Εἶναι: $f_1(1)=3$, $f_1(2)=9$ καί $f_1(3)=19$. Ἄρα $G_1=\{(1,3),\ (2,9),\ (3,19)\}$ καί ἐπειδή $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$, ἡ f_1^{-1} εἶναι συνάρτηση μέ γράφημα $G_1^{-1}=\{(3,1),\ (9,2),\ (19,3)\}$.

Ὁμοίως $f_2(-1)=3$, $f_2(1)=3$, $f_2(2)=6$ καί $f_2(3)=11$. Ἄρα $G_2=\{(-1,3),\ (1,3),\ (2,6),\ (3,11)\}$ καί ἐπειδή τά -1 καί 1 ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα τό 3, ἡ f_2^{-1} δέν εἶναι συνάρτηση καί ἔχει γράφημα $G_2^{-1}=\{(3,-1),(3,1),\ (6,2),\ (11,3)\}$.

6. **α)** Πρέπει $(2x+5)^2-(x+1)^2 \neq 0$. (1). Ἀλλά $(1) \Leftrightarrow [(2x+5)-(x+1)][(2x+5)+(x+1)] \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5-x-1)\ (2x+5+x+1) \neq 0 \Leftrightarrow (x+4)\ (3x+6) \neq 0 \Leftrightarrow 3(x+4)\ (x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (x+4 \neq 0$ **καί** $x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq -4$ **καί** $x \neq -2)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-4,-2\}$ καί $f_1(x) = \dfrac{x+4}{3(x+4)\ (x+2)} = \dfrac{1}{3(x+2)}$.

β) Πρέπει $4x^3+16x^2+12x \neq 0$ (1). Ἀλλά $(1) \Leftrightarrow 4x(x^2+4x+3) \neq 0 \Leftrightarrow 4x(x+1)\ (x+3) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x+1 \neq 0$ **καί** $x+3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x \neq -1$ **καί** $x \neq -3)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,-1,0\}$ καί $f_2(x) = \dfrac{(6x+8x^2)\ (x+3)}{2.4x(x+1)\ (x+3)}$ ἤ $f_2(x) = \dfrac{2x(3+4x)\ (x+3)}{4.2x(x+1)\ (x+3)}$ ἤ $f_2(x) = \dfrac{4x+3}{4(x+1)}$.

γ) Πρέπει $(2x+5)\ (7-x)+4x^2-25 \neq 0$ (1). Ἀλλά $(1) \Leftrightarrow (2x+5)\ (7-x)+(2x-5)\ (2x+5) \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5)\ (7-x+2x-5) \neq 0 \Leftrightarrow$

$(2x+5)\ (x+2) \neq 0 \Leftrightarrow (2x+5 \neq 0$ **καί** $x+2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq -\dfrac{5}{2}$ **καί**

$x \neq -2)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_3 εἶναι τό $\mathbb{R}-\left\{-2,\ -\dfrac{5}{2}\right\}$ καί

$f_3(x) = \dfrac{(x+2)\ [(2x+1)^2-16]}{(2x+5)\ (x+2)}$ ἤ $f_3(x) = \dfrac{(x+2)\ [(2x+1)+4]\ [(2x+1)-4]}{(2x+5)\ (x+2)}$

ἤ $f_3(x) = \dfrac{(x+2)\ (2x+5)\ (2x-3)}{(2x+5)\ (x+2)} = 2x-3$.

δ) Πρέπει $(x^2-9 \neq 0$ **καί** $x^2-6x+9 \neq 0)$ (1). Ἀλλά $(1) \Leftrightarrow [(x+3)\ (x-3) \neq 0$ **καί** $(x-3)^2 \neq 0] \Leftrightarrow (x-3 \neq 0$ **καί** $x+3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 3$ **καί** $x \neq -3)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_4 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,+3\}$ καί

$$f_4(x) = \frac{(x-5)\ (x+3)}{(x-3)\ (x+3)} + \frac{-4(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{x-5}{x-3} - \frac{4}{x-3} = \frac{x-9}{x-3}.$$

7. **α)** Εἶναι $f(0)=0+2=2$, $f(1)=1+2=3$, $g(0)=0^2+2=2$, $g(1)=1^2+2=3$. Ἄρα $\forall\ x \in E$, $f(x)=g(x)$, ὁπότε $f=g$.

β) Ἐπειδή $x+2 \neq x^2+2$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$, συμπεραίνουμε ὅτι δέν εἶναι $f(x)=g(x)$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ἄρα $f \neq g$.

8. Πρέπει $x^2-3x+2 \neq 0$ (1). Ἀλλά $(1) \Leftrightarrow (x-1)\ (x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1 \neq 0$ **καί** $x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 1$ **καί** $x \neq 2)$. Ἄρα πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}-\{1,2\}$ καί $f(x) = \dfrac{x(x-1)\ (x-2)}{(x-1)\ (x-2)} = x$, δηλαδή ἡ f εἶναι ταυτοτική συνάρτηση.

9. Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς $f(x)$, $g(x)$ καί $h(x)$ ἰσχύει:
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ ἤ
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (f+h)\ (x)=(g+h)\ (x)$. Ἄρα: $f=g \Leftrightarrow f+h=g+h$.

10. Ἔχουμε $(f+g)\ (x)=f(x)+g(x)=3+7=10$, $(f-g)\ (x)=f(x)-g(x)=-4$ καί $(-3f+5g)\ (x)=-3f(x)+5g(x)=-3.3+5.7=-9+35=26$.

11. Ἐπειδή $(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$ ἔχουμε:

γιά $x < 1$ $(f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(-x^2-2x+5) = -x^2+4$

γιά $1 \leq x < 3$ $(f_1+f_2)(x) = (x^2+2x+3)+(-x^2-2x+5) = 8$

γιά $3 \leq x \leq 5$ $(f_1+f_2)(x) = (x^2+2x+3)+(x-1) = x^2+3x+2$

γιά $5 < x \leq 7$ $(f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(x-1) = 3x-2$

γιά $7 < x$ $(f_1+f_2)(x) = (2x-1)+(-x^2-2x+5) = -x^2+4.$

Ἄρα:

$$(f_1+f_2)(x) = \begin{cases} -x^2+4 & x < 1 \text{ ἤ } x > 7 \\ 8 & x \in [1,3) \\ x^2+3x+2 & x \in [3,5] \\ 3x-2 & x \in (5,7] \end{cases}$$

καί εἶναι σταθερή στό διάστημα $[1,3)$.

12. Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς k, $f(x)$, $g(x)$ ἰσχύει: $kf(x)+kg(x) = k[f(x)+g(x)]$ καί ἐπειδή $f(x)+g(x) = (f+g)(x)$ θά εἶναι: $kf(x)+kg(x) = k(f+g)(x)$. Ἄρα $kf+kg = k(f+g)$.
Γιά $k = -1$ ἔχουμε: $-(f+g) = -f-g$.

13. Εἶναι $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (2x+5)+(x+4) = 3x+9$

$(3f+2g)(x) = (3f)(x)+(2g)(x) = 3f(x)+2g(x) = 3(2x+5)+2(x+4)$
$= 6x+15+2x+8 = 8x+23$ καί

$(3f-2g)(x) = (3f)(x)-(2g)(x) = 3f(x)-2g(x) = 3(2x+5)-2(x+4)$
$= 6x+15-2x-8 = 4x+7.$

14. Εἶναι $(5f+7g)(x) = (5f)(x)+(7g)(x) = 5f(x)+7g(x) = 5.5+7.7 = 74$
καί $(5f-7g)(x) = 5f(x)-7g(x) = 25-49 = -24.$

15. Εἶναι $((-f)g)(x) = (-f)(x)\,g(x) = -f(x)\,g(x)$ καί
$(-fg)(x) = -f(x)\,g(x)$. Ἄρα $(-f)g = -f\,g$.

16. Γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς $f(x)$, $g(x)$ καί $h(x)$ ἰσχύει:
$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)\,h(x) = g(x)\,h(x)$. Ἄρα καί $f = g \Rightarrow fh = gh$.

17. **α)** Πρέπει $x+1 \neq 0$ ἤ $x \neq -1$. Ἄρα $A = \mathbb{R}-\{-1\}$
β) Πρέπει ἀκόμη καί $f(x) \neq 0$ ἤ $x-3 \neq 0$ ἤ $x \neq 3$. Ἄρα $A' = \mathbb{R}-\{-1,3\}$

18. Πρέπει $(f_1(x) \neq 0$ **καί** $f_2(x) \neq 0)$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow (x+1 \neq 0$ **καί** $x^2-1 \neq 0)$ $\Leftrightarrow [x+1 \neq 0$ **καί** $(x+1)(x-1) \neq 0] \Leftrightarrow (x+1 \neq 0$ **καί** $x-1 \neq 0) \Leftrightarrow$ $(x \neq -1$ **καί** $x \neq 1)$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$ εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

καί $$\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)(x) = \frac{1}{f_1(x)}+\frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{x-1+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}.$$

Ὅμοια γιά τήν $\frac{f_1}{f_2}$ πρέπει $f_2(x) \neq 0$ (1). Ὅμως (1) $\Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow$ $(x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -1$ **καί** $x \neq 1)$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\frac{f_1}{f_2}$ εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ καί $$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}.$$

19. Πρέπει $g(x) \neq 0$ (1). Ἀλλά (1)$\Leftrightarrow x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0$ **καί** $x \neq 2)$. Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\frac{f}{g}$ εἶναι τό $\mathbb{R}-\{0,2\}$ καί $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3-x^2-2x}{x^2-2x} = \frac{x(x^2-x-2)}{x(x-2)}$

$$= \frac{x(x-2)(x+1)}{x(x-2)} = x+1.$$

20. Ἀρκεῖ νά δείξουμε τήν ἀντίστοιχη ἰσότητα γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ καί $f_4(x)$. Δηλ. τήν ἰσότητα $(2x+3)^3-1 = 2(x+1)[4(x+2)^2-(2x+3)]$ ἤ τήν $[(2x+3)-1][(2x+3)^2+(2x+3)+1] = 2(x+1)[4(x^2+4x+4)-2x-3]$ ἤ τήν $(2x+2)(4x^2+12x+9+2x+3+1) = 2(x+1)(4x^2+16x+16-2x-3)$ ἤ τήν $2(x+1)(4x^2+14x+13) = 2(x+1)(4x^2+14x+13)$ πού εἶναι προφανής.

21. Ἐκτελοῦμε τίς πράξεις καί ἔχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3-3x^2+3x-1-2(x^2+2x+1)+(x^4+x^2+1-2x^3+2x^2-2x)-x^2-1 \\ &= x^3-3x^2+3x-1-2x^2-4x-2+x^4+x^2+1-2x^3+2x^2-2x-x^2-1 \\ &= x^4-x^3-3x^2-3x-3. \end{aligned}$$

22. **α)** Θά κάνουμε πράξεις σ τό β΄ μέλος καί θά καταλήξουμε στό α΄.

Ἔτσι ἔχουμε: $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma] \\ &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) \\ &= \alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma-\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta+\beta^3+\beta\gamma^2-\alpha\beta^2-\alpha\beta\gamma-\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma \\ &\quad +\gamma^3-\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma^2-\beta\gamma^2 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

β) Ἔχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)^3 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^3 = (\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)[\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2] \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2) \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)[\alpha(\beta+\gamma)+\gamma(\beta+\gamma)] \\ &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha). \end{aligned}$$

23. Ἐπειδή $f(2)=0$, τό $f(x)$ διαιρεῖται μέ τό $x-2$ καί ἄν κάνουμε τή διαίρεση, βρίσκουμε πηλίκο x^2-9. Ἄρα $f(x) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$.

Τό $f(x)$ παραγοντοποιεῖται καί πιό ἁπλά ὡς ἑξῆς:

$f(x) = x^2(x-2)-9(x-2) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$.

24. **α)** Ἀπό τήν ἄσκ. 22α παρατηροῦμε ὅτι, ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε καί $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = 0$ ἤ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Ἔχουμε τώρα $(x-1)+(x-2)+(3-2x) = x-1+x-2+3-2x = 0$. Ἄρα $f(x) = (x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3 = 3(x-1)(x-2)(3-2x)$.

β) Εἶναι

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)^2-4(x^2-5x+6)^2 \\ &= [(x-2)(x+2)]^2-4[(x-2)(x-3)]^2 \\ &= (x-2)^2(x+2)^2-4(x-2)^2(x-3)^2 \\ &= (x-2)^2[(x+2)^2-4(x-3)^2] \\ &= (x-2)^2[(x+2)-2(x-3)][(x+2)+2(x-3)] \\ &= (x-2)^2(8-x)(3x-4). \end{aligned}$$

25. Τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2 εἶναι ἀντιστοίχως $\mathbb{R}-\{2\}$ καί $\mathbb{R}-\{-3,1\}$.
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1+f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,1,2\}$ καί $(f_1+f_2)(x)$

$$=f_1(x)+f_2(x)=\frac{3x+1}{x-2}+\frac{5x-4}{(x-1)(x+3)}=\frac{(3x+1)(x-1)(x+3)+(5x-4)(x-2)}{(x-2)(x-1)(x+3)}$$

$$=\ldots=\frac{3x^3+12x^2-21x+5}{(x-2)(x-1)(x+3)}.$$

26. Τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2 εἶναι ἀντιστοίχως $\mathbb{R}-\{0,1\}$ καί $\mathbb{R}-\{0,2\}$.
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f_1+f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ καί $(f_1+f_2)(x)$

$$=f_1(x)+f_2(x)=\frac{3x+2}{x(x-1)}+\frac{4}{x(x-2)}=\frac{(3x+2)(x-2)+4(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\ldots=\frac{3x^2-8}{x(x-1)(x-2)}.$$

27. Τά πεδία ὁρισμοῦ τῶν f_1 καί f_2 εἶναι ἀντιστοίχως $\mathbb{R}-\{2\}$ καί $\mathbb{R}-\{1,3\}$.
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν f_1+f_2 καί f_1f_2 εἶναι τό $\mathbb{R}-\{1,2,3\}$ καί

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=\frac{3x+1}{x-2}+\frac{5x-4}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{(3x+1)(x-1)(x-3)+(5x-4)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\ldots=\frac{3x^3-6x^2-9x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)=\frac{3x+1}{x-2}\,\frac{5x-4}{(x-1)(x-3)}=\frac{(3x+1)(5x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

28. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-3,-1,1\}$ στό ὁποῖο εἶναι $x^2-1\neq 0$ καί $x^2+2x-3\neq 0$. Ἄρα γιά $x\in\mathbb{R}-\{-3,-1,1\}$

εἶναι $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}-\dfrac{6}{x^2+2x-3}=\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{6}{(x+3)(x-1)}$

$$=\frac{(x+2)(x+3)-6(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\ldots=\frac{x}{(x+1)(x+3)}.$$

29. Εἶναι $f_1(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2x}}=\dfrac{\dfrac{x^3-8}{2x^3}}{\dfrac{4+x^2+2x}{4x^2}}=\dfrac{4x^2(x-2)(x^2+2x+4)}{2x^3(x^2+2x+4)}$

$$=\frac{2(x-2)}{x}$$

$$f_2(x)=\frac{9x^2-4\alpha^2}{\dfrac{x-\alpha}{\alpha-2x}-1}=\frac{(3x-2\alpha)(3x+2\alpha)}{\dfrac{x-\alpha-\alpha+2x}{\alpha-2x}}=\frac{(3x-2\alpha)(3x+2\alpha)(\alpha-2x)}{3x-2\alpha}$$

$$=(3x+2\alpha)(\alpha-2x).$$

30. Πρέπει $(x-3)(x+2)\neq 0$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow$ ($x-3\neq 0$ **καί** $x+2\neq 0$) $\Leftrightarrow$ ($x\neq 3$ **καί** $x\neq -2$).
Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f εἶναι τό $\mathbb{R}-\{-2,3\}$.
Ἐπειδή ὅμως $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $x^2+1\neq 0$, τό $\mathbb{R}-\{-2,3\}$ θά εἶναι καί πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $g=\dfrac{1}{f}$ μέ $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2+1}$.

31. α) Σύμφωνα μέ τήν § 3.11 Ἐφ. 6, ἡ ἐξίσωση $(x+2)^2+(x^2+5x+6)^2=0$ ἰσοδυναμεῖ μέ $(x+2=0$ **καί** $x^2+5x+6=0)$ (1). Ἀλλά (1) $\Leftrightarrow (x+2=0$ **καί** $(x+2)(x+3)=0) \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

β) $(x-1)^2(x^2-4)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x+2)(x^2+2)=0$ (1). Ἀλλά ἐπειδή $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2+2 \neq 0$ θά εἶναι: (1) $\Leftrightarrow (x-1=0$ ἤ $x-2=0$ ἤ $x+2=0)$ $\Leftrightarrow (x=1$ ἤ $x=2$ ἤ $x=-2)$.

γ) $(x-3)^2-(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-(x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow$ $(x-3)[(x-3)-(x-1)]=0 \Leftrightarrow (x-3)(-2)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

32. α) $x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow (x^3+1)+3x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1+3x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+1)=0$ $\Leftrightarrow (x+1)^3=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

β) $(x-1)^2+(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1+x+1)=0$ $\Leftrightarrow (x-1)\,2x=0 \Leftrightarrow (x-1=0$ ἤ $x=0) \Leftrightarrow (x=1$ ἤ $x=0)$.

γ) $2x^3-2x=x^2-1 \Leftrightarrow 2x^3-2x-(x^2-1)=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-1)-(x^2-1)=0$ $\Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1=0$ ἤ $x+1=0$ ἤ $2x-1=0) \Leftrightarrow \left(x=1 \text{ ἤ } x=-1 \text{ ἤ } x=\frac{1}{2}\right)$.

33. α) $\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x^2-2x}=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}-\frac{8}{x(x-2)}=0$ (1). Πρέπει: $x(x-2)\neq 0$ ἤ $(x\neq 0$ **καί** $x\neq 2)$. Ἡ (1) $\Leftrightarrow (x-2)^2+4x-8=0 \Leftrightarrow$ $(x-2)^2+4(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2+4)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$ καί ἐπειδή $x-2\neq 0$ θά εἶναι $x+2=0$, δηλαδή $x=-2$.

β) $\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{2(x+2)} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{2(x+2)}$. (1)
Πρέπει $(x+1)(x+2)\neq 0$ (2). Ἀλλά (2)$\Leftrightarrow(x+1\neq 0$ **καί** $x+2\neq 0)$ $\Leftrightarrow(x\neq -1$ **καί** $x\neq -2)$.

Ὁπότε: (1) $\Leftrightarrow 2-2(x+2)=(x+1)^2 \Leftrightarrow 2-2x-4=x^2+2x+1$ $\Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=0$ καί ἐπειδή $x+1\neq 0$, θά εἶναι $x+3=0$, δηλαδή $x=-3$.

34. α) $\frac{(x+1)^3}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow [(x+1)^3(x-2)\geq 0$ **καί** $x-2\neq 0]$ $\Leftrightarrow [(x+1)^2(x+1)(x-2)\geq 0$ **καί** $x-2\neq 0]$ (1). Ἀλλά $(x+1)^2\geq 0$ ὁπότε: (1) $\Leftrightarrow [(x+1)(x-2)\geq 0$ **καί** $x-2\neq 0] \Leftrightarrow [(x+1\geq 0$ **καί** $x-2>0)$ ἤ $(x+1\leq 0$ **καί** $x-2<0)]$ $\Leftrightarrow [(x\geq -1$ **καί** $x>2)$ ἤ $(x\leq -1$ **καί** $x<2)] \Leftrightarrow (x>2$ ἤ $x\leq -1)$.

β) $\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+3}\leq 0 \Leftrightarrow [(x-1)^2(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x+3\neq 0]$ (1).
Ἐπειδή ὅμως εἶναι $(x-1)^2\geq 0$, ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μέ $(x=1)$ ἤ $[(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x+3\neq 0]$.
Ἀλλά $[(x+1)(x+3)\leq 0$ **καί** $x+3\neq 0]$ $\Leftrightarrow (x+1\leq 0$ **καί** $x+3>0)$ (2) ἤ $(x+1\geq 0$ **καί** $x+3<0)$ (3).
Τό σύστημα (3) εἶναι ἀδύνατο, ἀφοῦ πάντα $x+3>x+1$, **ἐνῶ** τό (2) $\Leftrightarrow (x\leq -1$ καί $x>-3) \Leftrightarrow -3<x\leq -1$. Ἄρα ἡ λύση τῆς ἀνισώσεως εἶναι: $-3<x\leq -1$ ἤ $x=1$.

35. $1 < \frac{1+x}{1-x} < 2 \Leftrightarrow \left(1 < \frac{1+x}{1-x} \text{ καί } \frac{1+x}{1-x} < 2\right) \Leftrightarrow \left(0 < \frac{1+x}{1-x} - 1 \text{ καί } \frac{1+x}{1-x} - 2 < 0\right)$

$$\Leftrightarrow \left(0 < \frac{1+x-(1-x)}{1-x} \text{ καί } \frac{1+x-2(1-x)}{1-x} < 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(0 < \frac{2x}{1-x} \text{ καί } \frac{3x-1}{1-x} < 0\right)$$

$$\Leftrightarrow [x(1-x) > 0 \text{ καί } (3x-1)(1-x) < 0] \quad (1)$$

Εἶναι: $x(1-x) > 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \text{ καί } 1-x > 0) \text{ ἤ } (x < 0 \text{ καί } 1-x < 0)]$

$$\Leftrightarrow [(x > 0 \text{ καί } x < 1) \text{ ἤ } (x < 0 \text{ καί } x > 1)]$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad (2)$$

Εἶναι: $(3x-1)(1-x) < 0 \Leftrightarrow [(3x-1 < 0 \text{ καί } 1-x > 0) \text{ ἤ } (3x-1 > 0 \text{ καί } 1-x < 0)]$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(x < \frac{1}{3} \text{ καί } x < 1\right) \text{ ἤ } \left(x > \frac{1}{3} \text{ καί } x > 1\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ ἤ } x > 1 \quad (3)$$

Οἱ (2) καί (3) συναληθεύουν γιά $0 < x < \frac{1}{3}$.

36. Εἶναι: $f_1(x) = \dfrac{\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{\alpha}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\alpha}} = \dfrac{\dfrac{x^3+\alpha^3}{\alpha x^2}}{\dfrac{\alpha^2 - \alpha x + x^2}{\alpha x^2}} = \dfrac{x^3+\alpha^3}{\alpha^2 - \alpha x + x^2}$

$$= \frac{(x+\alpha)(x^2 - \alpha x + \alpha^2)}{\alpha^2 - \alpha x + x^2} = x + \alpha.$$

$$f_2(x) = \frac{x}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x-1}}} = \frac{x}{1 - \dfrac{1}{\dfrac{x-1+1}{x-1}}} = \frac{x}{1 - \dfrac{x-1}{x}}$$

$$= \frac{x}{\dfrac{x-x+1}{x}} = \frac{x^2}{1} = x^2.$$

37. α) $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x-1}{2-x} = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{x+2} \quad (1)$

Πρέπει νά εἶναι $(x-2)(x+2) \neq 0$, δηλαδή $(x-2 \neq 0$ **καί** $x+2 \neq 0)$ ἤ $(x \neq 2$ **καί** $x \neq -2)$.

Ὁπότε ἔχουμε: $(1) \Leftrightarrow 2x + (x-1)(x+2) = x - 2 \Leftrightarrow 2x + (x-1)(x+2) - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 + (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(1+x-1) = 0.$

$\Leftrightarrow (x+2)x = 0$ καί ἐπειδή $x+2 \neq 0$, θά εἶναι $x = 0$.

β) $\frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{1}{x+1} + 2x \quad (1)$. Πρέπει $x+1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$, ὁπότε ἔχουμε: $(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 + 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2x(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) - 2x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2x) = 0.$

$\Leftrightarrow (x+1)(-x) = 0$ καί ἐπειδή $x+1 \neq 0$, θά εἶναι $x = 0$.

38. α) $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow [(x-2)^2(x+1)(x-3) \geq 0$ καί $x-3 \neq 0]$ (1).

Ἐπειδή ὅμως εἶναι $(x-2)^2 \geq 0$, ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μέ $(x=2)$ ἤ $[(x+1)(x-3) \geq 0$ καί $x-3 \neq 0]$.

Ἀλλά: $[(x+1)(x-3) \geq 0$ καί $x-3 \neq 0]$

$\Leftrightarrow [x+1 \geq 0$ καί $x-3 > 0)$ ἤ $(x+1 \leq 0$ καί $x-3 < 0)]$

$\Leftrightarrow [(x \geq -1$ καί $x > 3)$ ἤ $(x \leq -1$ καί $x < 3)]$

$\Leftrightarrow (x > 3$ ἤ $x \leq -1)$

β) $\frac{x+2}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow [(x+2)(2x-3) \leq 0$ καί $2x-3 \neq 0]$

$\Leftrightarrow [x+2 \leq 0$ καί $2x-3 > 0)$ ἤ $(x+2 \geq 0$ καί $2x-3 < 0)]$

$\Leftrightarrow \left[\left(x \leq -2 \text{ καί } x > \frac{3}{2}\right) \text{ ἤ } \left(x \geq -2 \text{ καί } x < \frac{3}{2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow -2 \leq x < \frac{3}{2}$.

γ) $\frac{3x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow [(3x-1 > 0$ καί $x+3 > 0)$ ἤ

$(3x-1 < 0$ καί $x+3 < 0)$

$\Leftrightarrow \left[\left(x > \frac{1}{3} \text{ καί } x > -3\right) \text{ ἤ } \left(x < \frac{1}{3} \text{ καί } x < -3\right)\right]$

$\Leftrightarrow \left(x > \frac{1}{3} \text{ ἤ } x < -3\right)$.

39. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι $f_1(x) = f_2(x)f_3(x)$ γιά $x \neq -1, 3$.

Εἶναι $f_1(x) = (x-2)^2(2x+1) - (x-2)^2(2x-5)$

$= (x-2)^2[(2x+1)-(2x-5)] = 6(x-2)^2$.

$$f_2(x) = \frac{2(x^2-5x+6)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2(x-2)}{x+1}$$

$f_3(x) = (x+2)(x-2)(x+1) - (x-2)(x-1)(x+1)$

$= (x-2)(x+1)[(x+2)-(x-1)] = 3(x-2)(x+1)$.

Ἄρα $f_2(x)f_3(x) = \frac{2(x-2)}{x+1}\,3(x-2)(x+1) = 6(x-2)^2 = f_1(x)$.

40. $5 > \frac{2x-1}{x+3} > 3 \Leftrightarrow \left(5 > \frac{2x-1}{x+3} \text{ καί } \frac{2x-1}{x+3} > 3\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \frac{2x-1}{x+3} - 5 \text{ καί } \frac{2x-1}{x+3} - 3 > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \frac{2x-1-5(x+3)}{x+3} \text{ καί } \frac{2x-1-3(x+3)}{x+3} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 > \frac{-3x-16}{x+3} \text{ καί } \frac{-x-10}{x+3} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(0 < \frac{3x+16}{x+3} \text{ καί } \frac{x+10}{x+3} < 0\right)$

$\Leftrightarrow [0 < (3x+16)(x+3)$ καί $(x+10)(x+3) < 0]$ (1)

Εἶναι: $(3x+16)(x+3) > 0 \Leftrightarrow [(3x+16 > 0$ καί $x+3 > 0)$ ἤ $(3x+16 < 0$ καί $x+3 < 0)] \Leftrightarrow \left\{\left(x > -\frac{16}{3} \text{ καί } x > -3\right) \text{ ἤ } \left(x < -\frac{16}{3} \text{ καί } x < -3\right)\right\}$

$\Leftrightarrow \left(x > -3 \text{ ἤ } x < -\frac{16}{3}\right)$. (1)

Είναι: $(x+10)(x+3) < 0 \Leftrightarrow (x+10 > 0$ **καί** $x+3 < 0)$ (ἐπειδή εἶναι $x+10 > x+3$)

$\Leftrightarrow (x > -10$ **καί** $x < -3)$

$\Leftrightarrow -10 < x < -3$ (2)

Οἱ (1) καί (2) συναληθεύουν γιά $-10 < x < -\dfrac{16}{3}$.

41. α) Ἐπειδή ὅλα τά διαφορετικά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων εἶναι οἱ ἀριθμοί 0,1,2, συμπεραίνουμε ὅτι τό σύνολο τιμῶν τῆς f εἶναι τό $\{0,1,2\}$.

β) Τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων 2 : 3, 18 : 3, 19 : 3 καί 22 : 3 εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀριθμοί 2,0,1,1. Ἄρα θά ἔχουμε:
$f(2) = 2$, $f(18) = 0$, $f(19) = 1$ καί $f(22) = 1$.

γ) Ἄν πάρουμε $\alpha = 28$ καί $\beta = 25$, θά ἔχουμε $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 1$ καί $f(\alpha-\beta) = f(28-25) = f(3) = 0$.

δ) Ἄν πάρουμε $\alpha = 12$, $\beta = 18$ καί $\gamma = 5$, θά ἔχουμε:
$f(\alpha) = f(12) = 0$ καί $f(\beta) = f(18) = 0$ καί $f(\alpha+\beta) = f(12+18) = f(30) = 0$.
Ἐπίσης $f(\alpha\gamma) = f(12.5) = f(60) = 0$ καί $f(\alpha+\gamma) = f(12+5) = f(17) = 2 = f(5) = f(\gamma)$.

42. Ἄν $\nu = 2\rho$ μέ $\rho \in \mathbb{N}$ ἰσχύει: $f(2\rho) = (-1)^{2\rho}.2+(-1)^{2\rho+1}.3 = 2-3 = -1$ καί $g(2\rho) = -1$. Δηλαδή $f(\nu) = g(\nu)$ γιά κάθε ν ἄρτιο (1).
Ἔστω τώρα $\nu = 2\rho+1$ μέ $\rho \in \mathbb{N}$, τότε $f(2\rho+1) = (-1)^{2\rho+1}.2+(-1)^{2\rho+2}.3 = -2+3 = 1$ καί $g(2\rho+1) = 1$. Ἄρα $f(\nu) = g(\nu)$ γιά κάθε ν περιττό (2).
Ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε $\forall\, x \in \mathbb{N}, f(\nu) = g(\nu)$. Ἄρα $f = g$.
Ἄν $k = 2\rho$, τότε $g(k)+g(k+1) = g(2\rho)+g(2\rho+1) = -1+1 = 0$.
Ἄν $k = 2\rho+1$, τότε $g(k)+g(k+1) = g(2\rho+1) + g(2\rho+2) = 1-1 = 0$
Ἄρα $g(k)+g(k+1) = 0$ γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$.

43. Εἶναι $f_1(x) = (x+1)^2$ καί $f_2(x) = (x-1)(x+1)$. Ἑπομένως ἔχουμε:

$$
\begin{aligned}
(f_1{}^4-f_2{}^4)(x) &= f_1{}^4(x)-f_2{}^4(x) = [f_1{}^2(x)-f_2{}^2(x)]\,[f_1{}^2(x)+f_2{}^2(x)] \\
&= [f_1(x)-f_2(x)]\,[f_1(x)+f_2(x)]\,[f_1{}^2(x)+f_2{}^2(x)] \\
&= [(x+1)^2-(x-1)(x+1)]\,[(x+1)^2+(x-1)(x+1)]\,[(x+1)^4+ \\
&\quad +(x-1)^2(x+1)^2] \\
&= (x+1)\,[(x+1)-(x-1)]\,(x+1)\,[(x+1)+(x-1)]\,(x+1)^2 \\
&\quad [(x+1)^2+(x-1)^2] \\
&= (x+1)^4(x+1-x+1)\,(x+1+x-1)\,(x^2+2x+1+x^2-2x+1) \\
&= (x+1)^4\;\; 2(2x)\,(2x^2+2) = (x+1)^4\, 4x2(x^2+1) \\
&= 8x(x^2+1)f_1{}^2(x).
\end{aligned}
$$

1. α) Ἄν $x = 0{,}3232\ldots32\ldots$, θά εἶναι $100x = 32{,}3232\ldots32\ldots = 32+x$ ἤ $x = \frac{32}{99}$.

β) Ἄν $x = 2{,}34545\ldots45\ldots$, θά εἶναι $10x = 23{,}4545\ldots45\ldots$ καί $1000x = 2345{,}4545\ldots45\ldots$ Ἄρα $1000x-10x = 2345-23$ ἤ $x = \frac{129}{55}$.

γ) Ὁ ἀριθμός $-32{,}52699\ldots9\ldots$ εἶναι τό μοναδικό στοιχεῖο τῶν διαστημάτων: $[-32{,}527,\ -32{,}526],\ [-32{,}527,\ -32{,}5269],\ldots$ $[-32{,}527,\ -32{,}52699\ldots9\ldots],\ldots$, δηλαδή ὁ ἀριθμός $-32{,}527$.

2. α) Ἄν x εἶναι ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ 7, τότε $x^2 = 7$. Ἔστω k_1 ἕνας ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε $\frac{k_1}{10} \leqslant x < \frac{k_1+1}{10}$ ἤ $k_1 \leqslant 10x < k_1+1$. Ἐπειδή ὅμως

$k_1 \leqslant 10x < k_1+1 \Longleftrightarrow k_1^2 \leqslant 100\,x^2 < (k+1)^2$ καί $100x^2 = 100.7 = 700$, οἱ διαδοχικοί ἀκέραιοι k_1, k_1+1 εἶναι οἱ 26 καί 27, ἀφοῦ $26^2 \leqslant 700 < 27^2$. Ἑπομένως ἡ ζητούμενη προσέγγιση εἶναι $\frac{k_1}{10} = 2{,}6$ (μέ ἔλλειψη) καί $\frac{k_1+1}{10} = \frac{26+1}{10} = 2{,}7$ (μέ ὑπεροχή).

β) Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως παραπάνω, βρίσκουμε ὅτι ἡ ζητούμενη προσέγγιση $\frac{1}{10}$ εἶναι $\frac{17}{10} = 1{,}7$ (μέ ἔλλειψη) καί $\frac{17+1}{10} = 1{,}8$ (μέ ὑπεροχή).

3. Εἶναι: α) $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$, β) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$, γ) $\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{8}\right)^3} = \frac{5}{8}$,

δ) $\sqrt{0{,}0009} = \sqrt{\left(\frac{3}{100}\right)^2} = \frac{3}{100}$, ε) $\sqrt[3]{\frac{64x^6y^9}{125}} = \frac{4x^2y^3}{5}$.

4. α) Εἶναι $A = \frac{|x|}{x}$. Ἄρα

$$A = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x > 0 \\ -1, & \text{ἄν } x < 0 \end{cases}$$

β) Εἶναι $A = |x-1|+|x-3|$, ὁπότε:

- ἄν $x \leqslant 1$, τότε $x-1 \leqslant 0$ καί $x-3 \leqslant 0$. Ἄρα $B = -(x-1)-(x-3) = -2x+4$.
- ἄν $1 < x \leqslant 3$, τότε $x-1 > 0$ καί $x-3 \leqslant 0$. Ἄρα $B = x-1-x+3 = 2$
- ἄν $x > 3$, τότε $x-1 > 0$ καί $x-3 > 0$. Ἄρα $B = x-1+x-3 = 2x-4$.

5. Ἔχουμε:

α) $\sqrt{36x^4+12x^2+1} = \sqrt{(6x^2+1)^2} = 6x^2+1$, ἀφοῦ $6x^2+1 > 0$

β) $\sqrt{\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{5}$,

ἀφοῦ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{5} > 0$

γ) $\sqrt{\frac{x^4}{25y^2} + 1 + \frac{25y^2}{4x^4}} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{5y} + \frac{5y}{2x^2}\right)^2} = \left|\frac{x^2}{5y} + \frac{5y}{2x^2}\right|$.

6. α) Πρέπει νά είναι $x+3 \geq 0$ **καί** $2x-1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq \frac{1}{2}$. Γιά $x \geq \frac{1}{2}$ ὅμως ἔχουμε:

$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x+3 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 4$, πού εἶναι λύση παραδεκτή.

β) Πρέπει νά εἶναι $x-2 \geq 0$ ἤ $x \geq 2$. Γιά $x \geq 2$ ὅμως ἔχουμε:

$4-\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 16 = x-2 \Leftrightarrow x = 18$, πού εἶναι λύση παραδεκτή.

γ) Πρέπει νά εἶναι $x-2 \geq 0$ **καί** $2x+3 \geq 0$, δηλαδή $x \geq 2$. Γιά $x \geq 2$ ὅμως ἔχουμε: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x-2 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -5$ πού ἀποκλείεται, ἀφοῦ $-5<2$.

δ) Πρέπει νά εἶναι $-3x+5 \geq 0$ **καί** $x-7 \geq 0$, δηλαδή $x \leq \frac{5}{3}$ **καί** $x \geq 7$. Οἱ ἀνισώσεις ὅμως αὐτές δέ συναληθεύουν γιά καμιά τιμή τοῦ x. Ἄρα ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη.

7. Ἔχουμε:

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$

β) $\sqrt[9]{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

γ) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4} = \sqrt{\sqrt{5}-2}$

8. Εἶναι:

α) $\sqrt{19600} = \sqrt{4 \cdot 49 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 7 \cdot 10 = 140$

β) $\sqrt[3]{27 \cdot 64 \cdot 343} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{7^3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

γ) $\sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 3125} = \sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{243}\,\sqrt[5]{3125} = \sqrt[5]{2^5}\,\sqrt[5]{3^5}\,\sqrt[5]{5^5} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$

9. Ἔχουμε:

α) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8} = \sqrt[4]{(2\alpha\beta^2)^4} = 2|\alpha|\beta^2$

β) $\sqrt{108x^5y^6} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 x^5 y^6} = 2 \cdot 3x^2|y^3|\,\sqrt{3x} = 6x^2|y|^3\sqrt{3x}$

γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{3^5\sqrt[5]{3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^{26}}}} = \sqrt[40]{3^{26}} = \sqrt[20]{3^{13}}$

δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha\sqrt[4]{\beta^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{\alpha^4\beta^2}}} = \sqrt[24]{\alpha^4\beta^2} = \sqrt[12]{\alpha^2|\beta|}$

10. Είναι:

α) $\sqrt[5]{\alpha^2}\,\sqrt[15]{\alpha^4} = \sqrt[15]{\alpha^6}\,\sqrt[15]{\alpha^4} = \sqrt[15]{\alpha^{10}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$

β) $\sqrt[12]{\alpha^7}\,\sqrt[20]{\alpha^3}\,\sqrt[15]{\alpha^2} = \sqrt[60]{\alpha^{35}\,\alpha^9\,\alpha^8} = \sqrt[60]{\alpha^{52}} = \sqrt[15]{\alpha^{13}}$

γ) $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[5]{\dfrac{1}{6}} = \sqrt[30]{2^{15}\,3^{10}\,\dfrac{1}{6^6}} = \sqrt[30]{\dfrac{2^{15}\,3^{10}}{2^6 . 3^6}} = \sqrt[30]{2^9\,3^4}$

11. Έχουμε:

α) $\sqrt[12]{\alpha^5} : \sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[12]{\alpha^5} : \sqrt[12]{\alpha^3} = \sqrt[12]{\alpha^{5-3}} = \sqrt[6]{\alpha}$

β) $\sqrt[9]{\alpha^8} : \sqrt[6]{\alpha^5} = \sqrt[18]{\alpha^{16} : \alpha^{15}} = \sqrt[18]{\alpha}$

γ) $\sqrt[15]{3^{10}} : \sqrt[10]{3^3} = \sqrt[30]{3^{20} : 3^9} = \sqrt[30]{3^{11}}$

12. Έχουμε:

α) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{2^2 . 2} + \sqrt{2^4 . 2} - \sqrt{3^2 . 2} = 2\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

β) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} = 12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

γ) $-\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{54} = -\sqrt[3]{2^3 . 2} + \sqrt[3]{5^3 . 3} - \sqrt[3]{3^3 . 2} = -2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{2}$

$= -5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3}$

δ) $8\sqrt{20} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{500} = 8\sqrt{2^2 \cdot 5} + 3\sqrt{2^4 \cdot 5} - 2\sqrt{5 \cdot 10^2} = (16 + 12 - 20)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

13. Είναι:

α) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3 + 2 - 2\sqrt{3} . \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

β) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{4 + 5 - 2 . 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$

γ) $\sqrt{54 + 14\sqrt{5}} = \sqrt{49 + 5 + 2 . 7\sqrt{5}} = \sqrt{(7 + \sqrt{5})^2} = 7 + \sqrt{5}$

14. Έχουμε:

α) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$

β) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}$

γ) $\dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{(x - \sqrt{x^2 + 1})^2}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})} = \dfrac{x^2 + x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - x^2 - 1}$

$= -2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1} - 1$

δ) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$$

15. Ἔχουμε:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{8-3} + \dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{8-3} = \dfrac{2\sqrt{8}}{5} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

β) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3} = \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3} + \dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3} =$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3}{[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^3} = \frac{2\cdot 2^3+6\cdot 2\cdot(\sqrt{3})^2}{1} = 16+36 = 52.$$

16. Ἄν $x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$, τότε θά ἔχουμε:

$x^2 = 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = 8-2\sqrt{16-12} = 4$. Καί ἐπειδή $x > 0$, $x = \sqrt{4} = 2$.

17. Ἔστω $\alpha \neq \alpha'$. Τότε θά εἶναι $\alpha + \sqrt{\beta} = \alpha' + \sqrt{\beta'} \Rightarrow$

$\sqrt{\beta} = \alpha' - \alpha + \sqrt{\beta'} \Rightarrow (\sqrt{\beta})^2 = (\alpha'-\alpha+\sqrt{\beta'})^2 \Rightarrow$

$\sqrt{\beta'} = \dfrac{\beta-\beta'-(\alpha'-\alpha)^2}{2(\alpha'-\alpha)}$. Ἄρα $\sqrt{\beta'}$ ρητός ὡς πηλίκο δύο ρητῶν. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο. Ἑπομένως $\alpha = \alpha'$, ὁπότε καί $\beta = \beta'$.

18. Εἶναι:

α) $27^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{2,5} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{27^5}} \cdot \sqrt{3^5} = \dfrac{1}{\sqrt{3^5}} \cdot \sqrt{3^5} = 1$

β) $(6,25)^{-\frac{3}{4}} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{100}{625}\right)^3} \cdot 5^3 = \sqrt[4]{\left(\dfrac{10}{25}\right)^6} \cdot 5^3 = \sqrt{\dfrac{10^3}{5^6}} \cdot 5^3 = 10\sqrt{10}.$

19. Εἶναι:

$$A = \left(\alpha^{-\frac{3}{2}}\beta\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\beta\,\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(\alpha^{-2}\beta^2\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \alpha^{-6}\beta^6\alpha^2 = \alpha^{-4}\beta^6.$$

Ὁπότε γιά $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ καί $\beta = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ἔχουμε:

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^4 \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^6} = \frac{2^4}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2} = 1.$$

20. Ἂν θέσουμε $\alpha^{\frac{1}{3}}=k$, $\beta^{\frac{1}{3}}=\lambda$, θά ἔχουμε:

α) $(k+\lambda)(k^2-k\lambda+\lambda^2)=k^3+\lambda^3=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha+\beta$

β) $(k-\lambda)(k^2+k\lambda+\lambda^2)=k^3-\lambda^3=\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(\beta^{\frac{1}{3}}\right)^3=\alpha-\beta.$

21. Ἔχουμε:

α) $\left(7^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)=\left[\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-1^2\right]$

$=(7-6)(x-1)=x-1$

β) $-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)=-2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}+2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}=-2\alpha\sqrt{\beta}+2\beta\sqrt{\alpha}$

γ) $2\sqrt{6}\left(3^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}+12^{\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{6}\,(\sqrt{3}-2\sqrt{6}+\sqrt{12})=$

$=2\sqrt{18}-4.6+2\sqrt{6.12}=6\sqrt{2}-24+12\sqrt{2}=18\sqrt{2}-24$

δ) $\left(5.6^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(5.6^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)^2=$

$=5^2.6+5+2.5.6^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}-\left(5^2.6+5-2.5.6^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}\right)=20\sqrt{30}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

1. α) Ἔστω τό κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Οἱ κορυφές του χωρίζουν τόν τριγωνομετρικό κύκλο (μέ ἀρχή Α) σέ 6 ἴσα τόξα, μέ μῆκος $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. Ἑπομένως,

στό Α ἀπεικονίζονται οἱ ἀριθμοί $0+2k\pi$

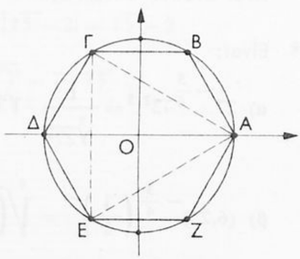
» Β » » » $\frac{\pi}{3}+2k\pi$

» Γ » » » $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

» Δ » » » $\pi+2k\pi$

» Ε » » » $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

» Ζ » » » $\frac{5\pi}{3}+2k\pi$



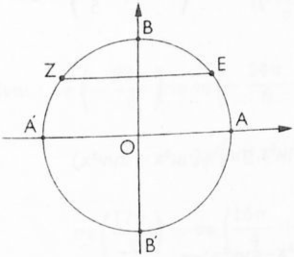
β) Οἱ κορυφές τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΓΕ χωρίζουν τόν τριγωνομετρικό κύκλο σέ 3 ἴσα τόξα μέ μῆκος $\frac{2\pi}{3}$. Ἑπομένως,

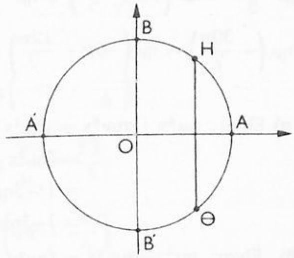
στό Α ἀπεικονίζονται οἱ ἀριθμοί $0+2k\pi$

» Γ » » » $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

» Ε » » » $\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

2. **α)** Ἔστω ἡ χορδή ΕΖ // ΑΑ΄. Ἄν στό σημεῖο Ε ἀπεικονίζεται ὁ ἀριθμός x, τότε στό Ζ θά ἀπεικονίζεται ὁ π−x.



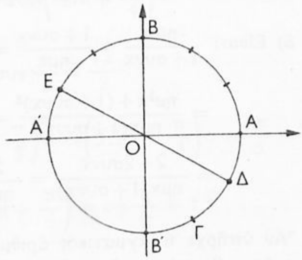


Ἄρα οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $2k\pi+\pi-x$, $k\in\mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τόν ἄξονα ΑΑ΄.

β) Ὁμοίως, ἔστω ἡ χορδή ΗΘ // ΒΒ΄, ὁπότε, ἄν στό σημεῖο Η ἀπεικονίζεται ὁ ἀριθμός x, τότε στό Θ θά ἀπεικονίζεται ὁ −x.

Ἄρα οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $2k\pi+x$ καί $2k\pi-x$, $k\in\mathbb{Z}$ ὁρίζουν χορδές παράλληλες πρός τόν ἄξονα ΒΒ΄.

3. Οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{3}$ καί $-\frac{\pi}{3}$ συμπίπτουν στό σημεῖο Γ, τῶν ἀριθμῶν $\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{7\pi}{6}$ στό σημεῖο Ε καί τῶν ἀριθμῶν $-\frac{\pi}{6}$ καί $\frac{11\pi}{6}$ στό σημεῖο Δ.



Ἄρα οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν:

$\frac{5\pi}{6}$ καί $-\frac{\pi}{6}$ εἶναι τά ἀντιδιαμετρικά σημεῖα Ε καί Δ

$-\frac{7\pi}{6}$ καί $\frac{11\pi}{6}$ εἶναι τά ἀντιδιαμετρικά σημεῖα Ε καί Δ.

4. Ἀφοῦ τό σημεῖο Μ ἔχει συντεταγμένες $-\frac{5}{13}$, y, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\text{συν}x=-\frac{5}{13} \quad \text{καί} \quad \text{ημ}x=y.$$

Ἄρα $\text{ημ}^2x=1-\text{συν}^2x=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$ καί ἐπειδή εἶναι $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ ἔχουμε $\text{ημ}x=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$.

Ἄν τώρα ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές τῶν συνx καί ημx στήν παράσταση Α, θά ἔχουμε:

$$A=\frac{\left[2\left(-\frac{12}{13}\right)-3\left(-\frac{5}{13}\right)\right]-\left[\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(-\frac{5}{13}\right)^2\right]}{2\left(-\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)}=-\frac{59}{30}.$$

5. Είναι :

$$\eta\mu\frac{23\pi}{5}=\eta\mu\left(4\pi+\frac{3\pi}{5}\right)=\eta\mu\frac{3\pi}{5},\quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{-28\pi}{5}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-6\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5},$$

$$\eta\mu\left(-\frac{30\pi}{7}\right)=\eta\mu\left(-6\pi+\frac{12\pi}{7}\right)=\eta\mu\frac{12\pi}{7}.$$

6. **α)** Είναι: $\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x=(\eta\mu^2x)^3+(\sigma\upsilon\nu^2x)^3$

$$=(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)^3-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)$$
$$=1^3-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x\,.\,1$$
$$=1-3\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu^2x$$

β) Είναι: $\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x=(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)\,(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x)=$

$$=1\cdot(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x)$$
$$=\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x$$
$$=1-\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x$$
$$=1-2\sigma\upsilon\nu^2x$$

γ) Είναι: $\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2\varphi-\eta\mu^2\varphi\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2x(1-\eta\mu^2\varphi)-\eta\mu^2\varphi(1-\eta\mu^2x)$

$$=\eta\mu^2x-\eta\mu^2x\eta\mu^2\varphi-\eta\mu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi\,\eta\mu^2x=\eta\mu^2x-\eta\mu^2\varphi.$$

δ) Είναι: $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\dfrac{\eta\mu x\,.\,\eta\mu x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}+\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}$

$$=\frac{\eta\mu^2x+(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{\eta\mu^2x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}$$

$$=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{2}{\eta\mu x}$$

7. Ἄν ὑπῆρχε πραγματικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε $\eta\mu x=0$ **καί** $\sigma\upsilon\nu x=0$, τότε $\eta\mu^2x=0$ **καί** $\sigma\upsilon\nu^2x=0$, ὁπότε $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=0$, πού εἶναι ἄτοπο, γιατί $\forall\, x,\ \eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$.

8. Ἐπειδή $\left(\dfrac{12}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}+\dfrac{25}{169}=1$, οἱ ἀριθμοί $\dfrac{12}{13}$ καί $\dfrac{-5}{13}$ μπορεῖ νά εἶναι τιμές τῶν συναρτήσεων ἡμίτονο καί συνημίτονο στόν ἴδιο ἀριθμό x καί ἐπειδή οἱ $\dfrac{12}{13}$ καί $\dfrac{-5}{13}$ εἶναι ἑτερόσημοι, τό ἀντίστοιχο τόξο θά λήγει στό β′ ἤ γ′ τεταρτημόριο.

9. Γιά $x=\dfrac{\pi}{3}$ ἔχουμε : $A=\dfrac{\eta\mu\dfrac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}}{\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3}+\sigma\varphi\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}}{\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)}{8}$

Γιά $x=\dfrac{\pi}{4}$ ἔχουμε : $A=\dfrac{\eta\mu\dfrac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}}{\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}+\sigma\varphi\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Γιά $x=\frac{\pi}{6}$ ἔχουμε : $A=\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}+\sigma\varphi\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)}{8}.$

10. Εἶναι : $\varepsilon\varphi\left(-\frac{23\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\left(-\frac{24\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\left(-4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\varepsilon\varphi\left(-2\cdot2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{17\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sigma\varphi\left(2\cdot2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=1.$$

11. Εἶναι : $\eta\mu\frac{13\pi}{6}=\eta\mu\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(-2.2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{18\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(3.2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\varphi\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

Ἄρα: $A=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+1)}{12}$

12. Εἶναι: $\sigma\upsilon\nu^2x=1-\eta\mu^2x=1-\left(\frac{12}{15}\right)^2=1-\frac{144}{225}=\frac{81}{225}$ καί ἐπειδή εἶναι $0<x<\frac{\pi}{2}$,

θά εἶναι $\sigma\upsilon\nu\,x=\sqrt{\frac{81}{225}}=\frac{9}{15}$, ὁπότε $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{4}{3}$ καί $\sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=\frac{3}{4}$.

Ἑπομένως

$$A=\frac{2\cdot\frac{4}{3}-3\frac{9}{15}+2\cdot\frac{3}{4}}{5\cdot\frac{12}{15}}=\frac{71}{120}.$$

13. **α)** Εἶναι $\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}$$

β) Εἶναι : $\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x(1+\epsilon\varphi x)\ (1+\sigma\varphi x) =$

$$= \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ (1+\epsilon\varphi x+\sigma\varphi x+\epsilon\varphi x\ \sigma\varphi x)$$
$$= \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ (1+\epsilon\varphi x+\sigma\varphi x+1)$$
$$= \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ (2+\epsilon\varphi x+\sigma\varphi x)$$
$$= 2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ \epsilon\varphi x+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\varphi x$$
$$= 2\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\ x\ \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$
$$= 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+1 = 1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$$

14. α) Γιά $t=1$ εἶναι $h = 50+20\ \eta\mu\frac{\pi}{4} = 50+20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 64,14$ cm

$t=2$ εἶναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 2\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\frac{\pi}{2} = 70$ cm

$t=4$ εἶναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 4\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\ \pi = 50$ cm

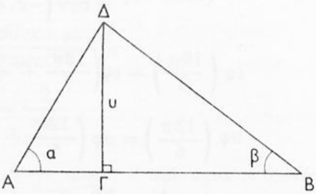
$t=6$ εἶναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 6\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\frac{3\pi}{2} = 30$ cm

$t=9$ εἶναι $h = 50+20\ \eta\mu\ 9\frac{\pi}{4} = 50+20\ \eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = 64,14$ cm.

β) Τό μέγιστο ὕψος εἶναι 70 cm καί τό ἐλάχιστο 30 cm.

15. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ ἔχουμε $\upsilon = (A\Gamma)\epsilon\varphi\ \alpha$ ἤ

$$(A\Gamma) = \upsilon\ \sigma\varphi\ \alpha \qquad (1)$$



Ὁμοίως ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ ἔχουμε $\upsilon = (B\Gamma)\epsilon\varphi\ \beta$ ἤ

$$(B\Gamma) = \upsilon\ \sigma\varphi\ \beta \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (1) καί (2) βρίσκουμε

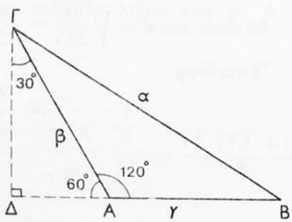
$(A\Gamma)+(B\Gamma) = \upsilon\ (\sigma\varphi\ \alpha+\sigma\varphi\ \beta)$ ἤ

$$\upsilon = \frac{(BA)}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}.$$

16. α) Ἄν Δ εἶναι ἡ ὀρθή προβολή τῆς κορυφῆς Γ στήν πλευρά ΑΒ, τότε ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ θά ἔχουμε:

$$(\Delta A) = \beta\eta\mu 30^0 = \frac{\beta}{2} \text{ καί}$$

$$(\Delta\Gamma) = \beta\eta\mu 60^0 = \frac{\beta\sqrt{3}}{2}.$$



Ἑπομένως ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ θά ἔχουμε:

$$\epsilon\varphi B = \frac{(\Gamma\Delta)}{(B\Delta)} = \frac{\frac{\beta\sqrt{3}}{2}}{\gamma+\frac{\beta}{2}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{2\gamma+\alpha}.$$

β) Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ ἔχουμε:

$$\alpha^2 = \left(\gamma+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta\sqrt{3}}{2}\right) = \gamma^2+\frac{\beta^2}{4}+\beta\gamma+\frac{3\beta^2}{4} = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma.$$

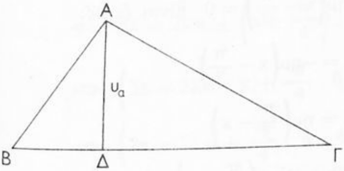
17. α) Εἶναι $A+B+\Gamma=180^0$ καί $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^0$. Ἄρα

$$\eta\mu A=\eta\mu[180^0-(B+\Gamma)]=\eta\mu(B+\Gamma)$$

$$\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu[180^0-(B+\Gamma)]=-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$$

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\eta\mu\left(90^0-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$$



β) Εἶναι $\upsilon_\alpha=\beta\,\eta\mu\,\Gamma$. Ἄρα τό ἐμβαδόν τοῦ ΑΒΓ εἶναι:

$$E=\frac{1}{2}\,\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\,\alpha\,\beta\,\eta\mu\Gamma.$$

γ) Ἐπειδή $A=90^0$, θά εἶναι $B+\Gamma=90^0$ καί $\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu(90^0-\Gamma)=\eta\mu\Gamma$. Ἑπομένως ἡ βασική σχέση $\eta\mu^2B+\sigma\upsilon\nu^2B=1$ γίνεται $\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma=1$.

18. Εἶναι: $f(\pi+x)=2\,\sigma\upsilon\nu^2(\pi+x)+3\eta\mu(\pi+x)\sigma\upsilon\nu(\pi+x)+5\eta\mu^2(\pi+x)+1$

$$=2(-\sigma\upsilon\nu x)^2+3(-\eta\mu x)\,(-\sigma\upsilon\nu x)+5(-\eta\mu x)^2+1$$

$$=2\sigma\upsilon\nu^2x+3\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+5\eta\mu^2x+1=f(x)$$

$$g(\pi+x)=2\,\varepsilon\varphi(\pi+x)-3\sigma\varphi(\pi+x)+2$$

$$=2\,\varepsilon\varphi x-3\sigma\varphi x+2=g(x)$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=4\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1$$

$$=4\,\sigma\varphi x+4\varepsilon\varphi x-1=\varphi(x)$$

$$\varphi(\pi+x)=4\varepsilon\varphi(\pi+x)+4\sigma\varphi(\pi+x)-1$$

$$=4\varepsilon\varphi x+4\sigma\varphi x-1=\varphi(x)$$

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=4\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+4\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-1$$

$$=4\sigma\varphi x+4\varepsilon\varphi x-1=\varphi(x)$$

19. α) Εἶναι: $\eta\mu(270^0+\theta)+\eta\mu(180^0+\theta)+\eta\mu(90^0+\theta)+\eta\mu\theta$

$$=-\sigma\upsilon\nu\theta+(-\eta\mu\theta)+\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta=0.$$

β) Εἶναι $\varepsilon\varphi 1^0\varepsilon\varphi 2^0\varepsilon\varphi 3^0\cdots\varepsilon\varphi 89^0=(\varepsilon\varphi 1^0\;\varepsilon\varphi 89^0)(\varepsilon\varphi 2^0\;\varepsilon\varphi 88^0)\cdots(\varepsilon\varphi 45^0\;\sigma\varphi 45^0)$

$$=(\varepsilon\varphi 1^0\sigma\varphi 1^0)(\varepsilon\varphi 2^0\sigma\varphi 2^0)\cdots(\varepsilon\varphi 45^0\sigma\varphi 45^0).$$

$$=1.1.1\ldots 1=1$$

γ) Ἐπειδή $\eta\mu(180^0-\theta)=\eta\mu\theta$, $\sigma\varphi(90^0-\theta)=\varepsilon\varphi\theta$ καί $\sigma\upsilon\nu\theta>0$, θά ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες :

$$\eta\mu(180^0-\theta)\sigma\varphi(90^0-\theta)>2-2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta\,\varepsilon\varphi\theta>2-2\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta>2\sigma\upsilon\nu\theta-2\sigma\upsilon\nu^2\theta \Leftrightarrow 1-2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta>0 \Leftrightarrow (1-\sigma\upsilon\nu\theta)^2>0,$$

πού εἶναι ἀληθής.

20. Εἶναι:

$$A=\frac{\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu(\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta)\,\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{-\varepsilon\varphi\theta\sigma\upsilon\nu\theta(-\eta\mu\theta)}{-\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\varepsilon\varphi\theta}=-1.$$

21. α) Έχουμε:

$$ημ^2 2x - ημ^2\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[ημ2x + ημ\left(x - \frac{π}{3}\right)\right]\left[ημ2x - ημ\left(x - \frac{π}{3}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow ημ2x + ημ\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0 \text{ ή } ημ2x - ημ\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0$$ Είναι όμως:

$$ημ2x + ημ\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow ημ2x = -ημ\left(x - \frac{π}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow ημ2x = ημ\left[-\left(x - \frac{π}{3}\right)\right] \Leftrightarrow ημ2x = ημ\left(\frac{π}{3} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[2x = 2kπ + \frac{π}{3} - x, \text{ ή } 2x = (2k+1)π - \left(\frac{π}{3} - x\right), \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[3x = 2kπ + \frac{π}{3} \text{ ή } x = (2k+1)π - \frac{π}{3}, \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x = \frac{2π}{3}k + \frac{π}{9} \text{ ή } x = (2k+1)π - \frac{π}{3}, \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x = \frac{(6k+1)π}{9} \text{ ή } x = \frac{2(3k+1)π}{3}, \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$ημ2x - ημ\left(x - \frac{π}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow ημ2x = ημ\left(x - \frac{π}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[2x = 2kπ + x - \frac{π}{3} \text{ ή } 2x = (2k+1)π - \left(x - \frac{π}{3}\right), \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x = 2kπ - \frac{π}{3} \text{ ή } 3x = (2k+1)π + \frac{π}{3}, \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x = \frac{(6k-1)π}{3} \text{ ή } x = \frac{2(3k+2)π}{9}, \ k \in \mathbb{Z}\right]$$

β) Επειδή $ημ^2\left(x + \frac{π}{4}\right) = 1 - συν^2\left(x + \frac{π}{4}\right)$ η εξίσωση γράφεται:

$$συν^2 3x - συν^2\left(x + \frac{π}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[συν3x + συν\left(x + \frac{π}{4}\right)\right]\left[συν3x - συν\left(x + \frac{π}{4}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[συν3x + συν\left(x + \frac{π}{4}\right) = 0 \text{ ή } συν3x - συν\left(x + \frac{π}{4}\right) = 0\right].$$

Είναι όμως:

$$συν3x + συν\left(x + \frac{π}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow συν\left(x + \frac{π}{4}\right) = -συν(3x)$$

$$\Leftrightarrow συν\left(x + \frac{π}{4}\right) = συν(π - 3x) \Leftrightarrow x + \frac{π}{4} = 2kπ \pm (π - 3x) \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{π}{4} = 2kπ + π - 3x \text{ ή } x + \frac{π}{4} = 2kπ - π + 3x, \ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(4x = 2kπ + π - \frac{π}{4} \text{ ή } -2x = 2kπ - π - \frac{π}{4}, \ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{kπ}{2} + \frac{π}{4} - \frac{π}{16} \text{ ή } x = -kπ + \frac{π}{2} + \frac{π}{8}, \ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{8k\pi + 3\pi}{16} \quad \text{ἤ} \quad x = -\frac{8k\pi - 5\pi}{16}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}3x - \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}\,3x = \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \pm \left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(3x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \quad \text{ἤ} \quad 3x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ἤ} \quad 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = k\pi + \frac{\pi}{8} \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{16}, \; k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{(8k+1)\pi}{8} \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{(8k-1)\pi}{16}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

22. α) Εἶναι: $\text{εφ}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{σφ}x \Leftrightarrow \text{εφ}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

β) Εἶναι: $\text{ημ}5x = \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \text{ημ}5x = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}5x = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[5x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - x \quad \text{ἤ} \quad 5x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{6} - x\right), \quad k \in \mathbb{Z}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{(12k+1)\pi}{36} \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{(12k+5)\pi}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}\right).$$

23. α) Ἐπειδή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ημ}\,\frac{\pi}{4}$, ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$\text{ημ}3x = \text{ημ}\,\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ἤ} \quad 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{(8k+1)\pi}{12} \quad (1) \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{(8k+3)\pi}{12} \quad (2) \quad k \in \mathbb{Z}\right).$$

Πρέπει ὅμως νά εἶναι $0 \leqslant \frac{(8k+1)\pi}{12} \leqslant 2\pi$ ἤ $-1 \leqslant k \leqslant \frac{23}{8}$.

Ἄρα πρέπει $k = 0,1,2$. Ἑπομένως οἱ ρίζες τῆς (1) στό διάστημα $[0, 2\pi]$ θά εἶναι $\frac{\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}$ καί $\frac{17\pi}{12}$.

Ὁμοίως πρέπει νά εἶναι:

$0 \leqslant \frac{(8k+3)\pi}{12} \leqslant 2\pi$ ἤ $-\frac{3}{8} \leqslant k \leqslant \frac{21}{8}$. Ἄρα πρέπει $k = 0, 1, 2$. Ἑπομένως οἱ ρίζες τῆς (2) στό διάστημα $[0,2\pi]$ θά εἶναι $\frac{\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$ καί $\frac{19\pi}{12}$.

β) Ἐπειδή $\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{εφ}\,\frac{\pi}{6}$, ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$\text{εφ}\,2x = \text{εφ}\,\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{(6k+1)\pi}{12},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Πρέπει ὅμως νά εἶναι $0 \leqslant \frac{(6k+1)\pi}{12} \leqslant 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$ ἤ $-\frac{1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{23}{6}$.

Ἄρα πρέπει $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Ἑπομένως οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως στό διάστημα $[0,\ 2\pi]$ θά εἶναι:

$\frac{\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$ καί $\frac{19\pi}{12}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ τῶν x_1, x_2 εἶναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1^3+5x_1^2+6)-(x_2^3+5x_2^2+6)}{x_1-x_2} = \frac{x_1^3-x_2^3+5(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+5(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)[x_1^2+x_1x_2+x_2^2+5(x_1+x_2)]}{x_1-x_2} = (x_1+x_2)^2-x_1x_2+5(x_1+x_2).$$

Ἄρα ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ -1, 2 εἶναι:

$$\lambda = (-1+2)^2-(-1)\cdot 2+5(-1+2) = 1+2+5 = 8.$$

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς f μεταξύ 3 καί 5 εἶναι:

$$\lambda = (3+5)^2-3.5+5(3+5) = 8^2-15+5.8 = 64-15+40 = 89.$$

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ τῶν x_1, x_2 εἶναι:

$$\lambda = \frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2}+2x_1+5\right)-\left(\frac{1}{x_2^2}+2x_2+5\right)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{1}{x_1^2}+2x_1-\frac{1}{x_2^2}-2x_2}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}-2(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)\left(-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}+2\right)}{x_1-x_2} = 2-\frac{x_1+x_2}{x_1^2x_2^2}.$$

Ἄρα ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ -1, 2 εἶναι:

$$\lambda = 2-\frac{-1+2}{(-1)^2\cdot 2^2} = 2-\frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

Ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς g μεταξύ 3, 5 εἶναι:

$$\lambda = 2-\frac{3+5}{3^2\cdot 5^2} = 2-\frac{8}{225} = \frac{442}{225}.$$

2. Ἄν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*_+$, τότε ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως f μεταξύ τῶν x_1, x_2 θά εἶναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^3}+1\right)-\left(\frac{1}{x_2^3}+1\right)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{1}{x_2^3}+1-\frac{1}{x_2^3}-1}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_1^3}-\frac{1}{x_2^2}}{x_1-x_2} = \frac{\frac{x_2^3-x_1^3}{x_1^3x_2^3}}{x_1-x_2} = -\frac{x_2^3-x_1^3}{x_1^3x_2^3(x_1-x_2)} = \frac{(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)}{x_1^3x_2^3(x_1-x_2)}$$

$$= -\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^3x_2^3} < 0,$$ ἀφοῦ γιά $0 < x_1 < x_2$ εἶναι $\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^3x_2^3} > 0$.

Ἄρα ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}^*_+$.

3. Γιά τή συνάρτηση f, ἐπειδή

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ἄν } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{ἄν } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{καί} \quad |1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{ἄν } x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

ἔχουμε: $$f(x) = \begin{cases} -3x+1, & \text{ἄν } x \leqslant 0 \\ 1-x, & \text{ἄν } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ἄρα

- $x_1 < x_2 \leqslant 0$, ἔχουμε $\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(-3x_1+1)-(-3x_2+1)}{x_1-x_2}$

$$= \frac{-3x_1+1+3x_2-1}{x_1-x_2} = \frac{-3(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = -3 < 0$$

καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα

- ἄν $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, ἔχουμε

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(1-x_1)-(1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{1-x_1-1+x_2}{x_1-x_2} = \frac{-(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = -1 < 0$$

καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.

- ἄν $1 \leqslant x_1 < x_2$, ἔχουμε $\lambda = \frac{(x_1-1)-(x_2-1)}{x_1-x_2} = \frac{x_1-1-x_2+1}{x_1-x_2} = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_2} = 1 > 0$

καί ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Γιά τή συνάρτηση g, ἐπειδή $|x-1| = \begin{cases} 1-x, & \text{ἄν } x \leqslant 1 \\ x-1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$

ἔχουμε: $$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{ἄν } x \leqslant 1 \\ 1, & \text{ἄν } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Ἄρα ἡ g εἶναι σταθερή γιά $x \leqslant 1$ καί γιά $x \geqslant 1$.

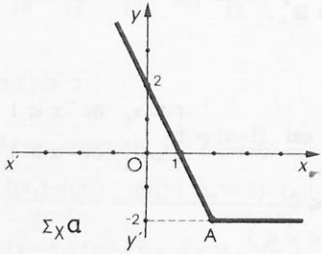
4. α) Γιά τή συνάρτηση f, ἐπειδή $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & \text{ἄν } x \leqslant 2 \\ x-2, & \text{ἄν } x \geqslant 2 \end{cases}$,

ἔχουμε: $$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{ἄν } x \leqslant 2 \\ -2, & \text{ἄν } x \geqslant 2 \end{cases}$$

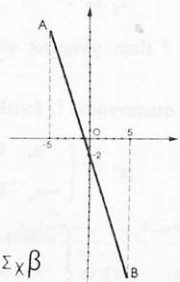
Δηλαδή ἡ f εἶναι τῆς μορφῆς $f(x) = \alpha x + \beta$ καί ἔχουμε :

- ἄν $x \leqslant 2$, τότε $\alpha = -2$. Ἄρα ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα,
- ἄν $x \geqslant 2$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ f εἶναι σταθερή.

Στό σχῆμα α ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς f, πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή A.



Σχ α



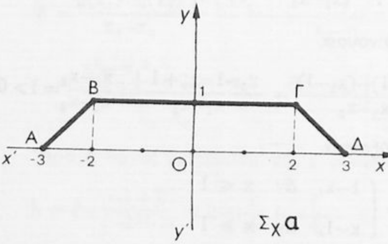
Σχ β

β) Ἡ συνάρτηση g εἶναι ὁμοπαραλληλική μέ $\alpha = -3 < 0$. Ἄρα εἶναι γνησίως φθίνουσα γιά κάθε $x \in [-5, +5]$. Στό σχῆμα β ἔχουμε τή γραφική παράσταση τῆς g, πού ἀποτελεῖται ἀπό τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB.

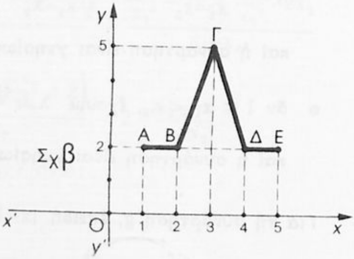
5. α) Ἡ συνάρτηση f εἶναι τῆς μορφῆς $f(x) = \alpha x + \beta$ καί ἔχουμε:

- ἄν $-3 \leqslant x \leqslant -2$, τότε $\alpha = 1 > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα
- ἄν $-2 < x < 2$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή
- ἄν $2 \leqslant x \leqslant 3$, τότε $\alpha = -1 < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς f δίνεται στό σχῆμα α καί ἀποτελεῖται ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα AB, BΓ καί ΓΔ.



Σχ α



Σχ β

β) Ἡ συνάρτηση g εἶναι τῆς μορφῆς $f(x) = \alpha x + \beta$ καί ἔχουμε:

- ἄν $1 \leqslant x < 2$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή
- ἄν $2 \leqslant x < 3$, τότε $\alpha = 3 > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα

- ἄν $3 \leqslant x < 4$, τότε $\alpha = -3 < 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα
- ἄν $4 \leqslant x < 5$, τότε $\alpha = 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή.

Ἡ γραφική της παράσταση, πού δίνεται στό σχῆμα β, ἀποτελεῖται ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καί ΔΕ.

6. Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα (σελ. 99), οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων Α, Β, Γ καί Δ εἶναι ἀντιστοίχως (1, 1), (2, 3), (5, 3) καί (6, 0), ἐνῶ ἡ γραφική παράσταση ἀποτελεῖται ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ καί ΓΔ. Ἀπό τό σχῆμα ἀκόμη διαπιστώνεται ὅτι ἡ συνάρτηση, πού εἶναι προφανῶς τῆς μορφῆς f μέ $f(x) = \alpha x + \beta$, εἶναι γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $[1, 2]$, σταθερή στό $[2, 5]$ καί γνησίως φθίνουσα στό $[5, 6]$.

Γιά τόν καθορισμό τῶν α καί β χρησιμοποιοῦμε τό γεγονός ὅτι ἡ ΑΒ διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α(1,1) καί Β(2,3), ὁπότε ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \alpha + \beta \\ 3 = 2\alpha + \beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = 2\alpha + 2\beta \\ 3 = 2\alpha + \beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{καί } (\alpha = 2 \textbf{ καί } \beta = -1)$$

Ἄρα στό $[1,2]$ ἡ τιμή $f(x)$ τῆς συναρτήσεως εἶναι:

$$f(x) = 2x - 1.$$

Ὁμοίως γιά τό ΓΔ, ἐπειδή Γ(5,3) καί Δ(6,0) ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 5\alpha + \beta \\ 0 = 6\alpha + \beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\alpha = -3 \textbf{ καί } \beta = 18).$$

Ἄρα ἡ τιμή τῆς f στό x εἶναι: $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{ἄν } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3, & \text{ἄν } 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ -3x+18, & \text{ἄν } 5 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$

7. **α)** Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο εὐθειῶν $y = \alpha_1 x + \beta_1$ (1) καί $y = \alpha_2 x + \beta_2$ (2) εἶναι $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ἐδῶ ἔχουμε: $\alpha_1 = 2\lambda + 1$ καί $\alpha_2 = 5\lambda - 1$.

Ἄρα $2\lambda + 1 = 5\lambda - 1 \Leftrightarrow 2\lambda - 5\lambda = -1 - 1 \Leftrightarrow -3\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

β) Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη καθετότητας τῶν εὐθειῶν (1) καί (2) εἶναι:

$$\alpha_1 \alpha_2 = -1$$

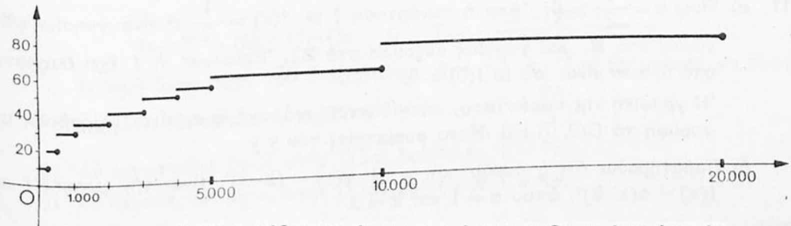
Ἄρα $(2\lambda + 1)(5\lambda - 1) = -1 \Leftrightarrow 10\lambda^2 + 5\lambda - 2\lambda - 1 = -1$

$$\Leftrightarrow 10\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(10\lambda + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \textbf{ ἤ } \lambda = -\frac{3}{10}\right)$$

8. Ἡ γραφική παράσταση αὐτῆς τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι μιά κλιμακωτή συνάρτηση, δίνεται στό παρακάτω σχῆμα.



9. **α)** Ἡ f ὁρίζεται στό σύνολο $\mathbb{R}_1 - \{0\} = \mathbb{R}_1^*$ καί ἰσχύει:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_1^*,\ f(-x) = \frac{1}{-x} + \varepsilon\varphi(-x) = -\frac{1}{x} - \varepsilon\varphi x = -\left(\frac{1}{x} + \varepsilon\varphi x\right) = -f(x).$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι περιττή στό $\mathbb{R}_1^*$.

β) Γιά τή g ἰσχύει:

$$\forall\, x,\ g(-x) = (-x)^3 + \eta\mu(-x) = -x^3 - \eta\mu x = -(x^3 + \eta\mu x) = -g(x)$$

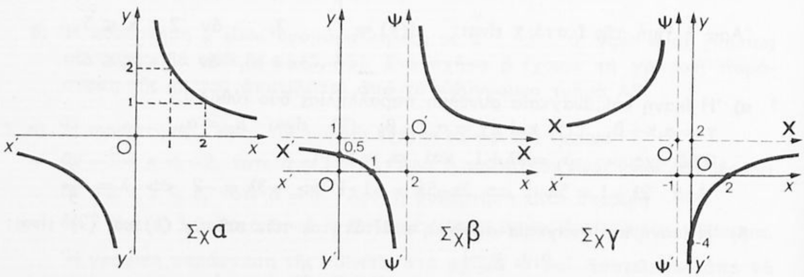
Ἄρα ἡ συνάρτηση εἶναι περιττή.

10. **α)** Ἡ συνάρτηση εἶναι τῆς μορφῆς $y = \dfrac{\alpha}{x}$ μέ $\alpha = 2 > 0$.

Ἄρα (§ 7.14) ἡ γραφική της παράσταση θά εἶναι ὑπερβολή (σχ. α) μέ κέντρο συμμετρίας τό O(0, 0) καί ἀσύμπτωτες τούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$.

β) Ἄν θέσουμε $y - 1 = \Psi$ καί $x - 2 = X$, ἡ $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ (1) γίνεται $\Psi = \dfrac{1}{X}$ (2).

Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς (1) θά εἶναι (§ 7.14 καί 7.13) ὑπερβολή μέ κέντρο τό O′(2, 1) καί ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = 2$ καί $y = 1$. Ἡ ὑπερβολή αὐτή τέμνει τούς ἄξονες $x'x$ καί $y'y$ ἀντιστοίχως στά σημεῖα (1, 0) καί $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ (σχ. β).



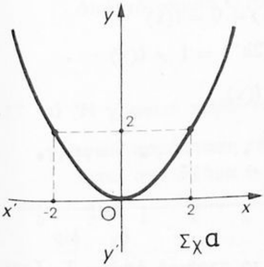
γ) Ἡ ἐξίσωση $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$ γράφεται $y = \dfrac{2(x+1)-6}{x+1} = 2 - \dfrac{6}{x+1}$. Ὁπότε, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν 10 β, βρίσκουμε ὅτι ἡ γραφική παράσταση τῆς φ εἶναι ὑπερβολή μέ ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες $x = -1$ καί $y = 2$ καί κέντρο τό (−1 2). Ἡ ὑπερβολή αὐτή (σχ. γ) τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό (0, −4) καί τόν $x'x$ στό (2, 0).

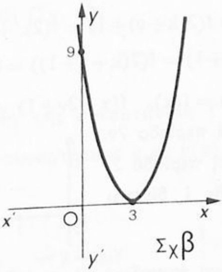
11. **α)** Εἶναι $\alpha = \dfrac{1}{2} > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\mathbb{R}_-$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\mathbb{R}_+$. Ἑπομένως ἡ f ἔχει ἐλάχιστο στό 0, πού εἶναι ἴσο μέ $f(0) = 0$.

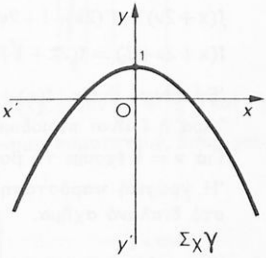
Ἡ γραφική της παράσταση, πού δίνεται στό σχῆμα α, εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό O(0, 0) καί ἄξονα συμμετρίας τόν $y'y$.

β) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση φ μέ $\varphi(x) = (x-3)^2$ εἶναι τῆς μορφῆς f μέ $f(x) = \alpha(x-k)^2$, ὅπου $\alpha = 1$ καί $k = 3$.

Ἄν λοιπόν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν § 7.19, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ $y = (x-3)^2$ εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο $O'(3,0)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x = 3$. Ἡ παραβολή αὐτή, ἐπειδή $\alpha = < 0$, ἔχει ἐλάχιστο στό $x = 3$, πού εἶναι ἴσο μέ $f(3) = (3-3)^2 = 0$. Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται στό σχῆμα β.







γ) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 1$, εἶναι τῆς μορφῆς f μέ

$f(x) = \alpha x^2 + k$, ὅπου $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ καί $k = 1$.

Ἄν λοιπόν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν § 7.20, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 1$ εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς μέ κορυφή τό σημεῖο $O'\ (0,\ 1)$ καί ἄξονα συμμετρίας τόν $y'y$. Ἡ παραβολή αὐτή, ἐπειδή $\alpha = -\dfrac{1}{3} < 0$, ἔχει μέγιστο στό $x = 0$ πού εἶναι ἴσο μέ $f(0) = -\dfrac{1}{3}\cdot 0^2 + 1 = 1$. Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται στό σχῆμα γ.

12. α) Γιά τήν f ἰσχύει: $\forall x,\ f(-x) = \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^2 + \gamma = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = f(x)$

Ἄρα ἡ f εἶναι ἄρτια συνάρτηση.

β) Γιά τήν g ἰσχύει: $\forall x,\ g(-x) = (-x)^2 + \text{συν}(-x) = x^2 + \text{συν}x = g(x)$.

Ἄρα ἡ g εἶναι ἄρτια συνάρτηση.

13. α) Ἔστω T ἡ περίοδος τῆς συναρτήσεως f. Τότε θά εἶναι: $f(x+T) = f(x)$

ὁπότε: $f(x+T) = f(x) \Rightarrow \text{ημ}\,3(x+T) = \text{ημ}3x$

$$\Rightarrow 3(x+T) = 2k\pi + 3x \qquad (1)$$

$$\text{ἤ}\quad 3(x+T) = (2k+1)\pi - 3x \qquad (2)$$

Ἀπό τήν (1) γιά $k = 1$ ἔχουμε $T = \dfrac{2\pi}{3}$. Ἀπό τήν (2) ἔχουμε

$$3x + 3T = (2k+1)\pi - 3x \quad \text{ἤ} \quad T = \frac{(2k+1)\pi - 6x}{3}$$

Ἡ τιμή ὅμως αὐτή τοῦ T ἐξαρτᾶται ἀπό τό x. Ἄρα δέν μπορεῖ νά εἶναι περίοδος. Ἑπομένως ἡ περίοδος τῆς f εἶναι $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

β) Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν (13α), βρίσκουμε $T = 4\pi$

γ) Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως στήν (13α), βρίσκουμε $T = 6\pi$.

14. Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ὁ x εἶναι ἄρτιος, εἶναι δηλαδή τῆς μορφῆς $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, θά εἶναι:

$$f(x+2\nu) = f(2k+2\nu) = f(2(k+\nu)) = f(2k') = 1 = f(x)$$

$$f(x+2\nu+1) = f(2k+2\nu+1) = f(2(k+\nu)+1) = f(2k'+1) = 0 \neq f(x),$$

ἐνῶ, ἄν ὁ x εἶναι περιττός, εἶναι δηλαδή τῆς μορφῆς $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, θά εἶναι

$$f(x+2\nu) = f(2k+1+2\nu) = f(2(k+\nu)+1) = f(2k'+1) = 0 = f(x)$$

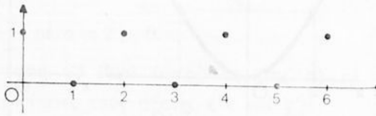
$$f(x+2\nu+1) = f(2k+1+2\nu+1) = f(2(k+\nu+1)) = f(2k'') = 1 \neq f(x).$$

Ἑπομένως εἶναι: $f(x)+2\nu) = f(x)$, $f(x+2\nu+1) \neq f(x)$.

Ἄρα ἡ f εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2ν.

Γιά $\nu = 1$ ἔχουμε τή βασική περίοδο 2.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς f δίνεται στό διπλανό σχῆμα.



15. Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι περιοδική μέ περίοδο τό σταθερό ἀριθμό T. Τότε ἔχουμε:

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \eta\mu[(x+T)^2-2(x+T)+5] = \eta\mu(x^2-2x+5)$$

$$\Rightarrow (x+T)^2-2(x+T)+5 = 2k\pi + x^2-2x+5 \qquad (1)$$

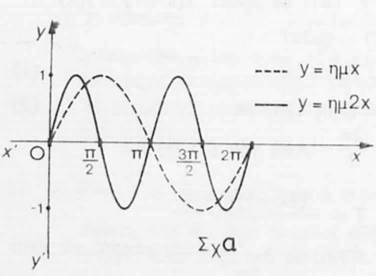
$$\text{ἤ } (x+T)^2-2(x+T)+5 = (2k+1)\pi-(x^2-2x+5) \qquad (2)$$

Ἀπό τή σχέση (1) ἤ (2) παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε τιμή τοῦ x ἔχουμε καί διαφορετική τιμή τοῦ T. Ἄρα ὁ T δέν εἶναι σταθερός. Ἑπομένως δέν μπορεῖ νά εἶναι περίοδος καί συνεπῶς ἡ f δέν μπορεῖ νά εἶναι περιοδική συνάρτηση.

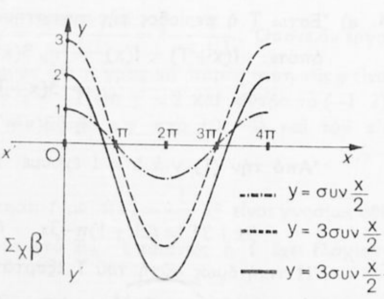
16. **α)** Παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $y = \eta\mu 2x$ εἶναι περιοδική μέ περίοδο π (§ 7.21 Ἐφαρ. 2). Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται στό σχῆμα α.

β) Κάνουμε διαδοχικά τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$, $3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$, $3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-1$ (σχ. β).

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίοδος τῆς $y = \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$ εἶναι 4π.



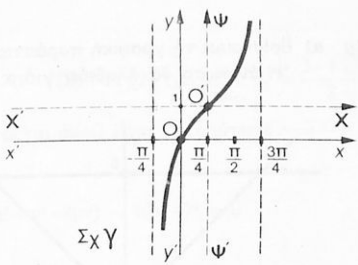
Σχα



Σχβ

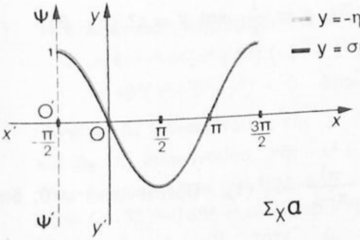
γ) Ἄν κάνουμε τόν μετασχηματισμό $x-\frac{\pi}{4} = X$ καί $y-1 = \Psi$, ἡ $y = \varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ (1) γίνεται $\Psi = \varepsilon\varphi X$. Ἄρα ἡ γραφική παράσταση τῆς (1) (§ 7.4 καί 7.24) ἔχει ἀσύμπτωτες τίς εὐθεῖες

$x = \frac{3\pi}{4}$ καί $x = -\frac{\pi}{4}$, κέντρο συμμετρίας τό $O'\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ καί περνάει ἀπό τό σημεῖο O (0, 0) (Σχ. γ).

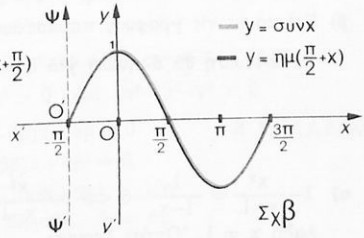


Σχ γ

17. α) Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \text{συν}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ καί ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως g μέ $g(x) = -\text{ημ}x$ συμπίπτουν, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα α.



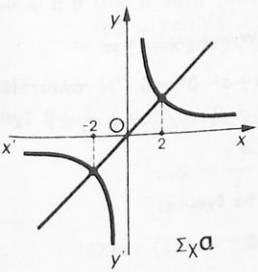
Σχ α



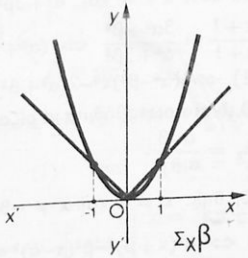
Σχ β

β) Ἡ γραφική παράσταση τῆς f μέ $f(x) = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ καί τῆς g μέ $g(x) = \text{συν}x$ συμπίπτουν, ὅπως διαπιστώνεται στό σχῆμα β.

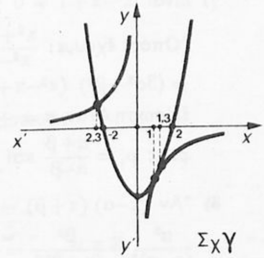
18. α) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = \frac{4}{x}$ καί $y = x$. Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τους, δηλαδή οἱ -2, $+2$ (σχ. α), εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.



Σχ α



Σχ β

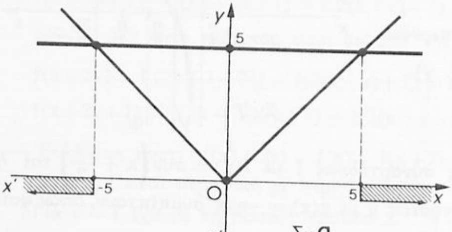


Σχ γ

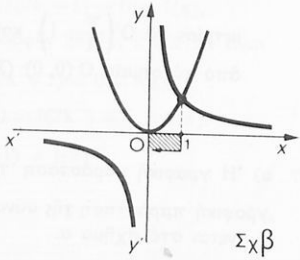
β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $y = x^2$ καί $y = |x|$ (σχ. β). Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς τους, δηλαδή οἱ -1, $+1$, εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

γ) Βρίσκουμε τή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων $y = x^2 - 4$ καί $y = -\frac{3}{x}$ (σχ. γ). Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τομῆς της εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

19. **α)** Βρίσκουμε τή γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων $y = |x|$ καί $y=5$ (σχ. α).
Ἡ ἀνίσωση θά ἀληθεύει γιά $x < -5$ ἤ $x > 5$.



Σχα



Σχβ

β) Βρίσκουμε τίς γραφικές παραστάσεις τῶν $y = \dfrac{1}{x}$ καί $y = x^2$ (σχ. β).
Ἡ ἀνίσωση θά ἀληθεύει γιά $0 < x < 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

1. **α)** $1-\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{1-x} - 6 \Leftrightarrow 1-\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{-1}{x-1} - 6$ (1). Πρέπει $x-1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$. Ὁπότε ἔχουμε:

(1) $\Leftrightarrow (x-1)-x^2 = -1-6(x-1) \Leftrightarrow -x^2+7x-6 = 0$.

Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἔχει ρίζες $\rho_1 = 1$, πού ἀπορρίπτεται, καί $\rho_2 = 6$.

β) $\dfrac{x+5}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{10}{3}$ (1). Πρέπει $x-5 \neq 0$ καί $x+5 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 5$ καί $x \neq -5$

Τότε ἔχουμε: (1) $\Leftrightarrow 3(x+5)^2+3(x-5)^2 = 10(x+5)(x-5)$

$\Leftrightarrow 4x^2-400 = 0 \Leftrightarrow x^2-100 = 0$, ὁπότε $\rho_1 = 10$ καί $\rho_2 = -10$.

γ) Εἶναι $x^2-x+1 \neq 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ καί $\alpha^2+3\beta^2 \neq 0$, ὅταν $\alpha \neq 0$ ἤ $\beta \neq 0$.

Ὁπότε ἔχουμε: $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \dfrac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2} \Leftrightarrow (\alpha^2+3\beta^2)(x^2+x+1) =$

$= (3\alpha^2+\beta^2)(x^2-x+1) \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2 = 0$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση, ὅταν $\alpha = \pm\beta$, εἶναι πρωτοβάθμια μέ ρίζα $x = 0$ καί, ὅταν $\alpha \neq \pm\beta$, ἔχει ρίζες $\rho_1 = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ καί $\rho_2 = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

δ) Ἄν $(x-\alpha)(x+\beta) \neq 0$, δηλ. $x \neq \alpha$ καί $x \neq -\beta$, θά ἔχουμε:

$\dfrac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2} - \dfrac{\beta^2}{(x+\beta)^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2(x+\beta)^2-\beta^2(x-\alpha)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)x^2+2\alpha\beta(\alpha+\beta)x = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)x^2+2\alpha\beta x = 0$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἔχει ρίζες $\rho_1 = 0$ καί $\rho_2 = -\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta}$.

ε) Ἄν $2x+6 \geqslant 0$ ἤ $x \geqslant -3$, ἔχουμε:

$$2x+6 = -x^2+x-4 \Leftrightarrow x^2+x+10 = 0 \quad (1).$$

Ἡ (1) δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{R}$, ἀφοῦ $\Delta = 1^2-4.1.10 = -39 < 0$.

"Αν $2x+6<0$ ή $x<-3$, έχουμε:

$-(2x+6)=-x^2+x-4 \Leftrightarrow x^2-3x-2=0$ (2). Ἡ (2) ἔχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$

καί $\rho_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, οἱ ὁποῖες ἀπορρίπτονται, ἀφοῦ εἶναι μεγαλύτερες τοῦ -3.

2. α) Ἡ ἐξίσωση ἔχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4(\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu\nu)=4(\mu^2+\nu^2-2\mu\nu)=4(\mu-\nu)^2\geqslant 0$$

β) Ἡ ἐξίσωση ἔχει διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta&=9\beta^4+(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)(\alpha^2-\alpha\beta-2\beta^2)\\&=9\beta^4+[(\alpha^2-2\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2]=9\beta^4+\alpha^4+4\beta^4-4\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\\&=9\beta^4+\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta^2+4\beta^4=(3\beta^2-\alpha^2)^2+\alpha^2\beta^2+4\beta^4\geqslant 0\end{aligned}$$

γ) Ἡ ἐξίσωση ἔχει διακρίνουσα

$$\Delta=(\alpha+2\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+4\beta^2\geqslant 0.$$

3. Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$\begin{aligned}\Delta&=4\alpha^2\gamma^2-4(\alpha^2+\beta^2)(-\beta^2+\gamma^2)=4\alpha^2\gamma^2-4(-\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2-\beta^4+\beta^2\gamma^2)\\&=4\beta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)<0 \quad \text{ἀφοῦ} \quad \beta^2>0 \quad \text{καί} \quad \alpha^2+\beta^2-\gamma^2<0.\end{aligned}$$

4. "Αν εἶναι Δ_1 ἡ διακρίνουσα τῆς $x^2+(\alpha-3\beta)x+\alpha\beta=0$ (1)

καί Δ_2 ἡ διακρίνουσα τῆς $x^2+(\alpha-5\beta)x+4\beta^2=0$, (2)

τότε ἔχουμε: $\Delta_1=(\alpha-3\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2-10\alpha\beta+9\beta^2$ καί

$\Delta_2=(\alpha-5\beta)^2-16\beta^2=\alpha^2-10\alpha\beta+9\beta^2$, δηλαδή $\Delta_1=\Delta_2$.

Ὁπότε, ἄν $\Delta_1=0$, τότε $\Delta_2=0$ καί ἀντιστρόφως.

5. α) "Αν θέσουμε ημ$x=y$, τότε ἡ ἐξίσωση γίνεται

$4y^2-2(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ μέ $y\in[-1,1]$. Αὐτή ἔχει ρίζες

$$\begin{aligned}\rho_{1,2}&=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2-4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}}{4}\\&=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4}\\&=\frac{\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}-1)}{4}\left\langle\begin{array}{l}\rho_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2ex]\rho_2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Τώρα ἔχουμε νά λύσουμε τίς τριγωνομετρικές ἐξισώσεις

$$\text{ημ}x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \text{ημ}x=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Ἀλλά: $(1)\Leftrightarrow \text{ημ}x=\text{ημ}\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\\[2ex]x=(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$

Ἐπίσης: $(2)\Leftrightarrow \text{ημ}x=\text{ημ}\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\\[2ex]x=(2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$

β) "Αν θέσουμε εφ$x=y$, ἔχουμε: $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3}=0$ μέ ρίζες $\rho_1=1$ καί $\rho_2=\sqrt{3}$.

Ἄρα $\varepsilon\varphi x = 1$ (1) ἤ $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ (2).

Ἀλλά: $(1) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$ καί

$(2) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$

γ) Ἄν θέσουμε $|x+1| = y$, τότε ἔχουμε:

$$(x+1)^2 - 9|x+1| - 10 = 0 \Leftrightarrow |x+1|^2 - 9|x+1| - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 9y - 10 = 0,\quad y \in \mathbb{R}_+ \qquad (1)$$

Ἡ (1) ἔχει ρίζες $\rho_1 = -1$, πού ἀπορρίπτεται, καί $\rho_2 = 10$.

Ἄρα ἔχουμε: $|x+1| = 10 \Leftrightarrow x+1 = \pm 10 \Leftrightarrow (x+1 = 10$ ἤ $x+1 = -10)$ $\Leftrightarrow (x = 9$ ἤ $x = -11)$.

6. α) Ἄν Δ ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως, ἔχουμε:

$\Delta = (\lambda-1)^2 + 32(\lambda+7) = \lambda^2 + 30\lambda + 225 = (\lambda+15)^2$.

Ἄν τώρα $\lambda \neq -15$, εἶναι $\Delta > 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες, ἐνῶ ἄν $\lambda = -15$, εἶναι $\Delta = 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἴσες.

β) Ἄν Δ ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως, ἔχουμε:

$\Delta = (\lambda-1)^2 + 8\lambda^2 > 0$, γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ἄρα ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἄνισες.

7. Ἄν θέσουμε $A\Gamma = x$, τότε εἶναι $B\Gamma = 2\alpha - x$, ὁπότε ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\frac{\pi\alpha^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{2\alpha-x}{2}\right)^2}{2} = \pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi\alpha^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{\pi(2\alpha-x)^2}{8} = \frac{\pi\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

8. Ἐπειδή $x_1 + x_2 = 2$ καί $x_1x_2 = \lambda - 1$, ἔχουμε:

$$3x_1^3 + 8x_1x_2 + 8x_1^2x_2 + 3x_2^3 = 192 \Leftrightarrow 3(x_1^3 + x_2^3) + 8x_1x_2(x_1+x_2) = 192$$
$$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2\right] + 8x_1x_2(x_1+x_2) = 192$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot 2[4 - 3(\lambda-1)] + 8(\lambda-1)\cdot 2 = 192$$
$$\Leftrightarrow 24 - 18\lambda + 18 + 16\lambda - 16 = 192 \Leftrightarrow -2\lambda = 166 \Leftrightarrow \lambda = -83.$$

9. Θά βροῦμε τό $\rho_1 + \rho_2$ καί τό $\rho_1\rho_2$. Ἔχουμε:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} =$$

$= \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}$ καί $\rho_1\rho_2 = \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1} = 1$. Ἄρα ἡ ζητούμενη ἐξίσωση εἶναι

ἡ $x^2 - \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}x + 1 = 0$ ἤ $\alpha\gamma x^2 - (\beta^2 - 2\alpha\gamma)x + \alpha\gamma = 0$.

10. Ἄν ρ_1 ἡ ἐλάχιστη καί ρ_2 ἡ μέγιστη θερμοκρασία, τότε εἶναι $\rho_1 + \rho_2 = +4$ καί $\rho_1\rho_2 = -12$. Ἄρα οἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 4x - 12 = 0$. Ὁπότε $\rho_1 = -2$ καί $\rho_2 = 6$.

11. Ἄν x,y δύο τέτοιοι ἀριθμοί, k τό σταθερό γινόμενό τους καί λ τό ἄθροισμά τους, τότε θά εἶναι: $x + y = \lambda > 0$ καί $xy = k > 0$. Ἄρα οἱ x, y εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2 - \lambda\omega + k = 0$, τῆς ὁποίας ἡ διακρίνουσα $\Delta = \lambda^2 - 4k$ πρέπει νά εἶναι μεγαλύτερη ἤ ἴση τοῦ μηδενός.

Δηλαδή $\lambda^2 - 4k \geqslant 0$ ἤ $\lambda^2 \geqslant 4k$ ἤ $\lambda \geqslant 2\sqrt{k}$. Ἑπομένως ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ λ εἶναι τό $2\sqrt{k}$. Τότε ὅμως $\Delta = 0$ καί ἡ ἐξίσωση ἔχει ρίζες ἴσες, δηλαδή $x = y$.

12. Ἄν x,y εἶναι οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου μέ σταθερή περίμετρο 2λ, τότε θά εἶναι $x+y=\lambda$. Ἑπομένως τό ἐμβαδόν του $E = xy$ γίνεται μέγιστο, ὅταν $x = y = \frac{\lambda}{2}$.

13. Ἐπειδή τό -2 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $4x^2+kx+6=0$, θά εἶναι:
$4(-2)^2+k(-2)+6=0 \Leftrightarrow 16-2k+6=0 \Leftrightarrow 2k=22 \Leftrightarrow k=11.$
Ὁμοίως γιά τή δεύτερη ἐξίσωση ἔχουμε:
$(-2)^2-3(-2)+k^2-7k=0 \Leftrightarrow 4+6+k^2-7k=0 \Leftrightarrow k^2-7k+10=0$
$\Leftrightarrow (k=2 \text{ ἤ } k=5).$

14. α) Γιά τήν ἐξίσωση $2x^2-7x-13=0$ ἔχουμε $\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{13}{2} < 0$, ἄρα αὐτή ἔχει δύο ρίζες ἑτερόσημες.

β) Γιά τήν ἐξίσωση $6x^2+5x+1=0$ ἔχουμε:
$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{6} > 0, \quad \Delta = 5^2-4\cdot6\cdot1 = 1 > 0$ καί $\frac{-\beta}{\alpha} = -\frac{5}{6} < 0.$
Ἄρα αὐτή ἔχει δύο ρίζες ἄνισες ἀρνητικές.

γ) Γιά τήν ἐξίσωση $7x^2-5x=0$ ἔχουμε:
$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{0}{7} = 0.$ Ἄρα οἱ ρίζες της εἶναι 0 καί $\frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-5)}{7} = \frac{5}{7}.$

15. Ἔχουμε $\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{k^2}{3}.$
Ἄν $k=0$, τότε $\rho_1 = 0$ καί $\rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{3}.$
Ἄν $k \neq 0$, τότε $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωση ἔχει δύο ρίζες ἑτερόσημες.

16. α) Πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} = \lambda-1 < 0$ ἤ $\lambda < 1.$

β) Πρέπει $\Delta = 9-4(\lambda-1) = 0$ ἤ $13-4\lambda = 0$ ἤ $\lambda = \frac{13}{4}.$

γ) Ἐπειδή $\frac{-\beta}{\alpha} = 3 > 0$, πρέπει νά εἶναι $\left(\frac{\gamma}{\alpha} > 0 \textbf{ καί } \Delta > 0\right)$ ἤ
$(\lambda-1 > 0 \textbf{ καί } 13-4\lambda > 0)$ ἤ $\left(\lambda > 1 \textbf{ καί } \lambda < \frac{13}{4}\right)$, δηλαδή $1 < \lambda < \frac{13}{4}.$

17. α) Ἐπειδή οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $2x^2+\alpha x-3\alpha^2$ εἶναι $\rho_1 = -\frac{3\alpha}{2}$ καί $\rho_2 = \alpha$, θά εἶναι: $2x^2+\alpha x-3\alpha^2 = 2\left(x+\frac{3\alpha}{2}\right)(x-\alpha) = (2x+3\alpha)(x-\alpha)$. Ἄρα

$$\frac{(x^2-\alpha^2)(x^2+\alpha^2)}{2x^2+\alpha x-3\alpha^2} = \frac{(x-\alpha)(x+\alpha)(x^2+\alpha^2)}{(2x+3\alpha)(x-\alpha)} = \frac{(x+\alpha)(x^2+\alpha^2)}{(2x+3\alpha)}.$$

β) Ὁμοίως $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2 = (x-\alpha+\beta)(x-\alpha-\beta)$. Ἄρα

$$\frac{(x-\alpha)^2-\beta^2}{x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2} = \frac{(x-\alpha-\beta)(x-\alpha+\beta)}{(x-\alpha+\beta)(x-\alpha-\beta)} = 1.$$

γ) Ὁμοίως ἔχουμε:

$$\frac{(x^2+3x-4)^2-(x^2-x)^2}{(x^3-1)-(x^2+x-2)} = \frac{[(x+4)(x-1)]^2-[x(x-1)]^2}{(x-1)(x^2+x+1)-(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-1)^2[(x+4)^2-x^2]}{(x-1)(x^2+x+1-x-2)} = \frac{(x-1)^2(x+4+x)(x+4-x)}{(x-1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{(x-1)^2\cdot 8(x+2)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{8(x+2)}{x+1}.$$

18. α) Ἔχουμε $\alpha = 1 > 0$.

Ἄρα, γιά νά εἶναι τό τριώνυμο τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, πρέπει νά εἶναι

$$\Delta = (3\lambda)^2 - (9\lambda^2 - 3\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{3}.$$

β) Ὁμοίως πρέπει

$$\Delta = (3\lambda - 1)^2 - 16(\lambda^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow -7\lambda^2 - 6\lambda + 33 = 0 \Leftrightarrow 7\lambda^2 + 6\lambda - 33 = 0.$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση ἔχουμε $\lambda = \frac{-3 \pm 4\sqrt{15}}{7}$.

19. Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου

$$x^2 - 5x + \lambda^2, \text{ τότε θά εἶναι } x^2 - 5x + \lambda^2 = (x - \rho_1)(x - \rho_2).$$

Ἄρα, γιά νά εἶναι $x^2 - 5x + \lambda^2 = (x-1)(x-4)$, πρέπει $\rho_1 = 1$ καί $\rho_2 = 4$. Εἶναι ὅμως $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda^2$. Ὁπότε $1 \cdot 4 = \lambda^2$ ἤ $\lambda^2 = 4$ ἤ $\lambda = \pm 2$.

20. Ἐπειδή στό τριώνυμο $f(x) = x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2$ εἶναι $\alpha = 1 > 0$, γιά νά εἶναι $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, πρέπει $\Delta < 0$. Ἀλλά $\Delta = (\beta + \gamma)^2 - 4(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2) = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma - 4\beta^2 + 4\beta\gamma - 4\gamma^2 = -3\beta^2 - 3\gamma^2 + 6\beta\gamma = -3(\beta - \gamma)^2 < 0$ (ἀφοῦ $\beta \neq \gamma$).

21. Ἔχουμε: $\dfrac{x^2 + 5x + 10}{-x^2 + 6x - 9} = \dfrac{x^2 + 5x + 10}{-(x-3)^2}$.

Ἀλλά τό τριώνυμο $x^2 + 5x + 10$ ἔχει $\alpha = 1 > 0$ καί $\Delta = 25 - 40 = -15 < 0$.

Ἄρα $x^2 + 5x + 10 > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ἐπίσης $-(x-3)^2 < 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$. Ἑπομένως $\dfrac{x^2 + 5x + 10}{-(x-3)^2} < 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

22. Ἄν λ μιά τιμή τῆς f, τότε θά εἶναι:

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 6x + 8} = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = \lambda x^2 - 6\lambda x + 8\lambda$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)x^2 - 6(\lambda - 1)x + 8\lambda - 5 = 0 \quad (1).$$

Ἐπειδή ὅμως $x \in \mathbb{R}$, πρέπει ἡ (1) νά ἔχει ρίζες πραγματικές. Ἄν $\lambda = 1$, ἡ (1) εἶναι ἀδύνατη. Ἄν $\lambda \neq 1$, πρέπει $\Delta \geqslant 0$. Ὁπότε:

$$3^2(\lambda - 1)^2 - (\lambda - 1)(8\lambda - 5) \geqslant 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)[9(\lambda - 1) - (8\lambda - 5)] \geqslant 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 1 \text{ ἤ } \lambda \geqslant 4).$$

23. Ἰσχύει: $x^2 + y^2 = 6x - 8y \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0 \quad (1)$

Ἐπειδή $x \in \mathbb{R}$, πρέπει ἡ (1) μέ ἄγνωστο τόν x νά ἔχει $\Delta \geqslant 0$. Ὁπότε:

$3^2 - (y^2 + 8y) \geqslant 0 \Leftrightarrow -y^2 - 8y + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow y^2 + 8y - 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow -9 \leqslant y \leqslant 1$.

Ὁμοίως: $x^2 + y^2 = 6x - 8y \Leftrightarrow y^2 + 8y + x^2 - 6x = 0 \quad (1)$

Ἐπειδή $y \in \mathbb{R}$, πρέπει πάλι $\Delta \geqslant 0$. Ὁπότε:

$4^2 - (x^2 - 6x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x + 16 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 8$

24. Ἐπειδή $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4 = -2$ καί $\alpha = 2$, εἶναι $\alpha f(1) = -4 < 0$. Ἄρα τό f(x) ἔχει δύο ἄνισες ρίζες καί ὁ ἀριθμός 1 βρίσκεται μεταξύ τῶν ριζῶν. Ἑπομένως, ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ δύο ρίζες μέ $\rho_1 \leq \rho_2$, θά ἔχουμε: $\rho_1 < 1 < \rho_2$ (1).

Ἐπειδή ἀκόμη $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 4 = 4 > 0$, ὁ ἀριθμός 4 δέν ἀνήκει στό διάστημα (ρ_1, ρ_2) καί λόγῳ τῆς (1) ἔχουμε: $\rho_1 < 1 < \rho_2 < 4$.

25. **α)** Γιά τό πρόσημο τοῦ $1-x$ ἔχουμε

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

Γιά τό πρόσημο τοῦ $x^2-10x+21$, ἐπειδή αὐτό ἔχει ρίζες $\rho_1=3$ καί $\rho_2=7$, ἔχουμε:

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2-10x+21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ἐπειδή τέλος ἡ διακρίνουσα τοῦ $-x^2+x-5$ εἶναι $\Delta=-19<0$, θά ἔχουμε: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x^2+x-5<0$.

Στή συνέχεια κατασκευάζουμε τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, ὁ ὁποῖος δίνει τό σημεῖο τοῦ γινομένου : $(1-x)(x^2-10x+21)(-x^2+x-5)$

x	$-\infty$		1		3		7		$+\infty$
$1-x$		$+$		$-$		$-$		$-$	
$(x^2-10x+21)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$(-x^2+x-5)$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$(1-x)(x^2-10x+21)$ $(-x^2+x-5)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Ἄρα ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει, ὅταν $x<1$ ἤ $3<x<7$.

β) Ἐπειδή εἶναι $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2-x+1>0$ (ἔχει $\Delta<0$), ἰσχύει:

$$\frac{(x-1)(x^2-9x+20)}{x^2-x+1}>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-9x+20)>0 \quad (1)$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως προηγουμένως, ἔχουμε τόν παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα, ὁ ὁποῖος δίνει τό πρόσημο τοῦ γινομένου $(x-1)(x^2-9x+20)$.

x	$-\infty$		1		4		5		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2-9x+20$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2-9x+20)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει, ὅταν $1<x<4$ ἤ $x>5$.

γ) Ἐπειδή ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου $-x^2+x-4$ εἶναι $\Delta=1-16=-15<0$, θά εἶναι: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x^2+x-4<0$ Ἄρα ἰσχύει:

$$|-x^2+x-4|>2x+6 \Leftrightarrow -(-x^2+x-4)>2x+6 \Leftrightarrow x^2-x+4-2x-6>0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-2>0 \quad (1).$$

Τό τριώνυμο x^2-3x-2 ἔχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ καί $\rho_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ καί ἐπομένως ἡ (1) ἀληθεύει, ὅταν $x<\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ ἤ $x>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

26. **α)** Βρίσκουμε τό πρόσημο τῶν $x-2$, $6x^2+5x+1$ καί $-x^2+5x-6$ γιά $x \in \mathbb{R}$ καί κατασκευάζουμε τόν παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x^2+5x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x^2+5x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Τό σύστημά μας ἀληθεύει, ὅταν $x > 3$.

β) Ἐπειδή ἡ διακρίνουσα τοῦ x^2+2x+4 εἶναι $\Delta = -12 < 0$, θά εἶναι, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+4 > 0$. Ἑπομένως ἔχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x+1} > 0 \\ (x^2-4)(x^2+2x+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+1) > 0 \\ x^2-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1 > 0 \\ x^2-4 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Τώρα κατασκευάζουμε τόν παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	

Τό σύστημα (1) ἀληθεύει, ὅταν τό πρῶτο πολυώνυμο εἶναι θετικό (+) καί τό δεύτερο πολυώνυμο ἀρνητικό (−), δηλαδή ὅταν $-2 < x < -\frac{1}{2}$ ἤ $1 < x < 2$.

27. **α)** Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση δύο ρίζες ἀρνητικές, πρέπει νά ἰσχύουν:

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha} > 0,\ \Delta > 0,\ -\frac{\beta}{\alpha} < 0\right) \Leftrightarrow (\lambda^2-1 > 0,\ (\lambda-3)^2-(\lambda^2-1) < 0,\ 2(\lambda-3) < 0)$$

$\Leftrightarrow (\lambda^2-1 > 0,\ -6\lambda+10 > 0,\ \lambda-3 < 0)$ καί ἀπό τόν πίνακα

λ	$-\infty$		-1		1		$\frac{10}{6}$		3		$+\infty$
λ^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-6\lambda+10$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\lambda-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

ἔχουμε: $\lambda < -1$ ἤ $1 < \lambda < \frac{10}{6}$.

β) Πρέπει $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ ἤ $\lambda^2-1 < 0$. Ὁπότε ἀπό τόν προηγούμενο πίνακα ἔχουμε $-1 < \lambda < 1$.

γ) Πρέπει: $(\Delta > 0$ **καί** $\frac{\gamma}{\alpha} = 1) \Leftrightarrow (-6\lambda+10 > 0$ **καί** $\lambda^2-1 = 1)$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda < \frac{10}{6} \text{ καί } \lambda = \pm\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}.$$

28. Θέτουμε $\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}=y$ (1) καί θά ἀποδείξουμε ὅτι: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ y \notin (2, 6)$.

Πράγματι ἔχουμε:

$(1) \Leftrightarrow x^2+2x-11=2xy-6y \Leftrightarrow x^2+2(1-y)x+6y-11=0 \quad (2)$

Ἐπειδή $x \in \mathbb{R}$, πρέπει, ἄν Δ ἡ διακρίνουσα τῆς (1), νά ἰσχύει:

$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow (1-y)^2-(6y-11) \geqslant 0 \Leftrightarrow y^2-2y+1-6y+11 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow y^2-8y+12 \leqslant 0 \Leftrightarrow (y \leqslant 2$ ἤ $y \geqslant 6)$. Ἄρα $y \notin (2, 6)$.

29. Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί x^2+x+1, $2x+1$, x^2+1 εἶναι μέτρα πλευρῶν τριγώνου, θά πρέπει

$$\begin{cases} x^2+x+1 < (2x+1)+(x^2+1) \\ 2x+1 \quad\; < (x^2+x+1)+(x^2+1) \\ x^2+1 \quad\; < (x^2+x+1)+(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 2x^2-x+1>0 \\ 3x+1>0 \end{cases}$$

ὁπότε ἀπό τόν πίνακα

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-x+1$		$+$		$+$		$+$	
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$	

ἔχουμε $x > -\frac{1}{3}$.

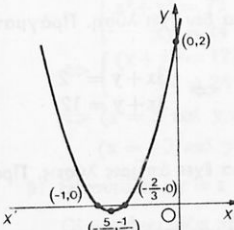
30. **α)** Ἐπειδή $\alpha=3>0$ καί $-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{5}{6}$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty, -\frac{5}{6}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(-\frac{5}{6}, \infty\right)$. Ἄρα ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x=-\frac{5}{6}$ (σχ. α), πού εἶναι ἴσο μέ

$$f\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{-\Delta}{4\alpha}=\frac{4\cdot3\cdot2-5^2}{4\cdot3}=-\frac{1}{12}.$$

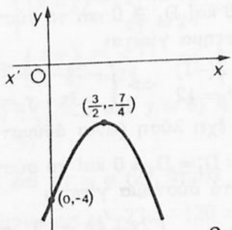
Γιά $x=0$ εἶναι $y=2$ καί γιά $y=0$ ἔχουμε:

$$3x^2+5x+2=0 \text{ μέ ρίζες } \rho_1=-1,\quad \rho_2=-\frac{2}{3}.$$

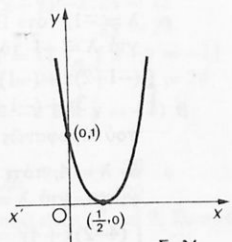
Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, πού εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x=-\frac{5}{6}$, τέμνει τόν ἄξονα x΄x στά σημεῖα $(-1, 0)$, $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ καί τόν y΄y στό σημεῖο $(0, 2)$.



Σχα



Σχβ



Σχγ

β) Ἐπειδή $\alpha=-1<0$ καί $\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-3}{2(-1)}$, ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)$ καί γνησίως φθίνουσα στό $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$ (σχ. β). Ἄρα ἡ συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στό $x=\frac{3}{2}$, πού εἶναι ἴσο μέ

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4(-1)(-4)-3^2}{4(-1)}=-\frac{7}{4}.$$

Γιά $x=0$ ἔχουμε $y=-4$, ἐνῶ $-x^2+3x-4\neq 0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ἑπομένως ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό $\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{4}\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x=\frac{3}{2}$, τέμνει μόνο τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο $(0,-4)$.

γ) Ἐπειδή $\alpha=4>0$ καί $\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{4}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}$, ἡ f εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ καί γνησίως αὔξουσα στό $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ (σχ. γ). Ἄρα ἡ συνάρτηση παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $x=\frac{1}{2}$, πού εἶναι ἴσο μέ

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\Delta}{4\alpha}=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}=\frac{4\cdot 4\cdot 1-(-4)^2}{4\cdot 4}=\frac{16-16}{16}=0.$$

Γιά $y=0$ ἔχουμε $4x^2-4x+1=0$, μέ ρίζες $\rho_1=\rho_2=\frac{1}{2}$ καί γιά $x=0$, ἔχουμε $y=1$.

Ἄρα ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία εἶναι παραβολή μέ κορυφή τό $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ καί ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία $x=\frac{1}{2}$, τέμνει τόν ἄξονα $y'y$ στό σημεῖο $(0,\ 1)$.

31. α) Ἔχουμε $D=\alpha\beta'-\alpha'\beta=(\lambda-2)(\lambda+2)-3\lambda=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$

$D_1=\beta'\gamma-\beta\gamma'=(\lambda+2)2\lambda-12\lambda=2\lambda^2-8\lambda=2\lambda(\lambda-4)$

$D_2=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=(\lambda-2)\cdot 12-3\cdot 2\lambda=6\lambda-24=6(\lambda-4)$

Εἶναι $D=0\Leftrightarrow(\lambda_1=-1$ ἤ $\lambda_2=4)$. Ἄρα:

- ἄν $\lambda\neq-1$ καί $\lambda\neq 4$, τό σύστημα ἔχει μιά λύση, τήν

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}\quad \text{καί}\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{6}{\lambda+1}$$

- $\lambda=-1$, τότε $D=0$ καί $D_1\neq 0$ καί τό σύστημα δέν ἔχει λύση. Πράγματι, γιά $\lambda=-1$ τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}(-1-2)x+(-1)y=2(-1)\\ 3x+(-1+2)y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-y=-\ 2\\ 3x+y=12\end{cases}\Leftrightarrow\quad \begin{matrix}3x+y=\ 2\\ 3x+y=12\end{matrix}$$

πού προφανῶς δέν ἔχει λύση (εἶναι ἀδύνατο).

- ἄν $\lambda=4$, τότε $D=D_1=D_2=0$ καί τό σύστημα ἔχει ἄπειρες λύσεις. Πράγματι, γιά $\lambda=4$ τό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}(4-2)x+4y=4.2\\ 3x+(4+2)y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=\ 8\\ 3x+6y=12\end{cases}$$ πού εἶναι ἰσοδύναμο μέ τήν $x+2y=4$.

β) Ἔχουμε: $D = (1-\lambda)(\lambda-1) - (-2\lambda)(2\lambda) = -(\lambda-1)^2 + 4\lambda^2 = (\lambda+1)(3\lambda-1)$

$D_1 = (\lambda-1)2-(-2\lambda)(\lambda-4) = 2\lambda-2+2\lambda^2-8\lambda = 2(\lambda^2-3\lambda-1)$

$D_2 = (1-\lambda)(\lambda-4)-4\lambda = -\lambda^2+5\lambda-4-4\lambda = -\lambda^2+\lambda-4$

Εἶναι $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(3\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda_1 = -1 \text{ ἤ } \lambda_2 = \dfrac{1}{3}\right)$. Ἄρα:

- ἄν $\lambda \neq -1$ καί $\lambda \neq \dfrac{1}{3}$, τό σύστημα ἔχει μιά λύση, τήν

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{2(\lambda^2-3\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda-1)} \quad \textbf{καί} \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-\lambda^2+\lambda-4}{(\lambda+1)(3\lambda-1)}$$

- ἄν $\lambda = -1$ ἤ $\lambda = \dfrac{1}{3}$, εἶναι $D_1 \neq 0$ καί $D_2 \neq 0$ καί τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

32. α) Ἔχουμε:

$$\begin{cases} x^2+xy = 6 \\ 2x+3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy = 6 \\ y = \dfrac{7-2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2+x\,\dfrac{7-2x}{3} = 6 \\ y = \dfrac{7-2x}{3} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+7x-2x^2 = 18 \\ y = \dfrac{7-2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2+7x-18 = 0 \\ y = \dfrac{7-2x}{3} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ἤ } x = -9 \\ y = \dfrac{7-2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (x = 2 \textbf{ καί } y = 1) \text{ ἤ } \left(x = -9 \textbf{ καί } y = \frac{25}{3}\right).$$

β) Ἔχουμε:

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2-4x+y = 14 \\ 2y-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3y^2-4x+y = 14 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-2)^2+3y^2-4(2y-2)+y = 14 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(4y^2-8y+4)+3y^2-8y+8+y = 14 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2-16y+8+3y^2-8y+8+y-14 = 0 \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y^2-23y+2 = 0 \\ x = 2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ ἤ } y = \dfrac{1}{11} \\ x = 2y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \textbf{ καί } y = 2) \text{ ἤ } \left(x = -\frac{20}{11} \textbf{ καί } y = \frac{1}{11}\right)$$

33. α) Ἔχουμε:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 73 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy = 73 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2.24 = 73 \\ xy = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 121 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 11 \\ xy = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 11 \\ xy = 24 \end{cases} \text{ ἤ } \begin{cases} x+y = -11 \\ xy = 24 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x = 8 \textbf{ καί } y = 3)$ ἤ $(x = 3 \textbf{ καί } y = 8)$ ἤ $(x = -8 \textbf{ καί } y = -3)$ ἤ $(x = -3 \textbf{ καί } y = -8)$

β) Θέτουμε $x+y = z$ (1) καί $xy = \varphi$ (2), ὁπότε ἔχουμε $\begin{array}{l} \varphi+z = 23 \\ \varphi z = 120 \end{array}$

Οἱ φ, z εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-23\omega+120 = 0$ πού εἶναι 15 καί 8. Συνεπῶς ἔχουμε $(\varphi = 15$ **καί** $z = 8)$ ἤ $(\varphi = 8$ **καί** $z = 15)$

Ὁπότε ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτουν τά συστήματα

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 8 \\ xy &= 15 \end{aligned}\right\} \ (3) \quad \text{καί} \quad \left.\begin{aligned} x+y &= 15 \\ xy &= 8 \end{aligned}\right\} \ (4)$$

Ἀπό τό σύστημα (3) βρίσκουμε $(x = 5 \ \textbf{καί} \ y = 3)$ ἤ $(x = 3 \ \textbf{καί} \ y = 5)$

Ἀπό τό σύστημα (4) βρίσκουμε $\left(x = \frac{15+\sqrt{193}}{2} \ \textbf{καί} \ y = \frac{15-\sqrt{193}}{2}\right)$ ἤ

$$\left(x = \frac{15-\sqrt{193}}{2} \ \textbf{καί} \ y = \frac{15+\sqrt{193}}{2}\right)$$

34. α) Προσθέτουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καί ἔχουμε:
$2x^2+2x = 112 \Leftrightarrow 2x^2+2x-112 = 0 \Leftrightarrow x^2+x-56 = 0 \Leftrightarrow (x = -8$ ἤ $x = 7)$
Ἀφαιροῦμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καί ἔχουμε:
$2y^2+2y = 12 \Leftrightarrow 2y^2+2y-12 = 0 \Leftrightarrow y^2+y-6 = 0 \Leftrightarrow (y = -3$ ἤ $y = 2)$
Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:
$(x = -8 \ \textbf{καί} \ y = -3)$ ἤ $(x = -8 \ \textbf{καί} \ y = 2)$ ἤ $(x = 7 \ \textbf{καί} \ y = -3)$ ἤ
$(x = 7 \ \textbf{καί} \ y = 2)$

β) Πολλαπλασιάζουμε τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$x^2y^2z^2 = \frac{4}{225} \Leftrightarrow xyz = \pm\frac{2}{15} \Leftrightarrow xyz = \frac{2}{15} \ (1) \quad \text{ἤ} \quad xyz = -\frac{2}{15} \ (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τήν (1) μέ καθεμιά ἐξίσωση παίρνουμε:

$$z = \frac{1}{5}, \ y = \frac{1}{3}, \ x = 2.$$

Ὁμοίως ἀπό τήν (2) παίρνουμε:

$$z = -\frac{1}{5}, \ y = -\frac{1}{3}, \ x = -2.$$

Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\left(x = 2 \ \textbf{καί} \ y = \frac{1}{3} \ \textbf{καί} \ z = \frac{1}{5}\right) \text{ ἤ } \left(x = -2 \ \textbf{καί} \ y = -\frac{1}{3} \ \textbf{καί} \ z = -\frac{1}{5}\right)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ	ΓΩΝΙΑ	ημ	συν	εφ
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.036
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.072
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.111
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.150
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.192
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0,7771	0,6293	1,235
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	7.7880	0.6157	1.280
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.327
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.376
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.428
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.483
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.540
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.600
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.664
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.732
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.804
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.881
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.963
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.050
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.145
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.246
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.356
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.475
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.605
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.747
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.904
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.078
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.271
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.487
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2586	3.732
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.011
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.332
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.705
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.145
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.671
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.314
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.115
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.514
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.43
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.30
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.08
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.64
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.29
45°	0.7071	0.7071	1.000				

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΚΔΟΣΗ Γ' 1981 (I) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 150.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 3501/13-11-80

ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ Α.Ε.

ΟΕ
ΔΒ