ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Β. ΣΤΑΪΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Σταΐκου, Βασίλειος.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΣΤΑΪΚΟΥ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1972

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ν. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗ — Β. ΣΤΑΪΚΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. ΟΡΟΛΟΓΙΑ - ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

1.1 Σύμβολα. Κάθε λέξις τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμεθα, εἶναι τὸ *σύμβολον* μιᾶς ἐννοίας. Τὰς διαφόρους μαθηματικὰς ἐννοίας παριστῶμεν ὄχι μόνον μὲ *λέξεις* ἀλλὰ καὶ μὲ ἄλλα *σύμβολα* π.χ. μὲ ἁπλᾶ γράμματα ἢ ἄλλα γραφικὰ σήματα καὶ συνδυασμοὺς αὐτῶν. Π.χ.

«ἡ εὐθεῖα ΑΒ», «ὁ ἀριθμὸς 5», «$\overrightarrow{AB}$», «$\alpha x+\beta=0$», «$\sqrt{\alpha}$».

1.2 Ἰσότης. Δύο σύμβολα x καὶ y δύναται νὰ παριστοῦν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἢ καὶ ἐννοίας, αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ἀπὸ μίαν ὡρισμένην ἔποψιν ταυτόσημοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν $x=y$, χρησιμοποιοῦντες τὸ σύμβολον $=$ τῆς *ἰσότητος*. Ἡ ἄρνησις τοῦ $x=y$ παρίσταται μὲ $x\neq y$ (τὸ σύμβολον $\neq$ ἀναγιγνώσκεται «διάφορον τοῦ»). Π.χ.

$$5=5,\ 5=2+3,\ \text{ημ}\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}=\frac{20}{30},\ 3\neq 4.$$

1.3 Σύνολα - Στοιχεῖα. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις μία ἔννοια δύναται νὰ νοῆται ὡς *σύνολον* ὡρισμένων καὶ διακεκριμένων ἄλλων ἐννοιῶν τῶν *στοιχείων* του. Π.χ. μία εὐθεῖα ὡς σύνολον τῶν σημείων της, μία τάξις ὡς σύνολον τῶν μαθητῶν της κ.ο.κ. Ἀλλὰ καὶ ἓν σύνολον δύναται νὰ εἶναι στοιχεῖον ἄλλου συνόλου. Π.χ. μία εὐθεῖα στοιχεῖον μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας, μία τάξις στοιχεῖον ἑνὸς Σχολείου *θεωρουμένου* ὡς σύνολον τάξεων κ.λ.π. Ἀξιοσημείωτα σύνολα ἀριθμῶν μὲ τὰ ὁποῖα ἤδη ἔχομεν ἀσχοληθῆ εἶναι τὰ σύνολα :

N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν
N_0 τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς
Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (σχετικῶν ἀκεραίων)
Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν
R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
R^+ τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
R_0^+ τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν
C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Τὴν ἔκφρασιν «τὸ x εἶναι στοιχεῖον τοῦ E» γράφομεν $x \in E$ (ἢ καί: $E \ni x$, ὁπότε καὶ ἀναγιγνώσκομεν «ἐκ τοῦ συνόλου E τὸ στοιχεῖον x») χρησιμοποιοῦντες τὸ σύμβολον $\in$ τοῦ *ἀνήκειν εἰς σύνολον*. Τὴν ἄρνησιν αὐτῆς θὰ συμβολίζωμεν μὲ $x \notin E$ (ἢ καί : $E \not\ni x$) καὶ γενικῶς τὴν ἄρνησιν τῆς ἐννοίας τὴν ὁποίαν παριστᾶ ἓν σύμβολον θὰ σημειώνωμεν διὰ διαγραφῆς τούτου μὲ μίαν γραμμήν.

Παρατήρησις. Ἀντὶ τοῦ ὅρου στοιχεῖον χρησιμοποιεῖται ἰσοδυνάμως καὶ ὁ ὅρος σημεῖον καὶ μάλιστα οὗτος εἶναι λίαν ἐπιτυχὴς εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνόλου R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ συνόλου C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τὰ στοιχεῖα τῶν ὁποίων, ὡς ἤδη γνωρίζομεν, παρίστανται διὰ τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας ἢ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀντιστοίχως.

1.4 Προτασιακὸς τύπος - Συνθήκη. Εἰς τὰ Μαθηματικὰ χρησιμοποιοῦνται συχνὰ ἐκφράσεις ὡς αἱ ἀκόλουθοι :

« x εἶναι ἀκέραιος »

« x εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον »

« x διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν 10 »

« $x \in E$ »,

αἱ ὁποῖαι καὶ ἀποδίδουν ὡρισμένας ἰδιότητας εἰς τὸ x.

Ἐκφράσεις περιέχουσαι ἓν σύμβολον x, ὡς αἱ ἀνωτέρω, χαρακτηρίζονται, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῶν μαθημάτων τῶν προηγουμένων τάξεων, διὰ τοῦ ὅρου *προτασιακὸς τύπος περιέχον ἓν σύμβολον* x. Ἂν εἰς ἕνα προτασιακὸν τύπον p(x), περιέχοντα ἓν σύμβολον x, ἀντικαταστήσωμεν τὸ σύμβολον x μὲ ἓν *συγκεκριμένον* στοιχεῖον α ἤ, ὡς λέγομεν, τὸ x λάβῃ ὡς τιμὴν τὸ α, τότε, ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ προτασιακὸς τύπος καθίσταται πρότασις τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ p(α). Π.χ.

$p(x)$: Ὁ x εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς

$p(2)$: Ὁ 2 εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς (ἀληθὴς)

$p\left(\frac{3}{4}\right)$: Ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς (ψευδής).

Συνήθως εἰς ἕνα προτασιακὸν τύπον p(x) ὑποτίθεται ὅτι τὸ x λαμβάνει ὡς τιμὰς τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συγκεκριμένου συνόλου E, ἤτοι ὡς λέγομεν, τό x *διατρέχει* τὸ E. Τότε τὸ x καλεῖται *μεταβλητή*, ὁ δὲ προτασιακὸς τύπος *συνθήκη εἰς τὸ E*. Οὕτως, ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 - x + 2 = 0,$$

ἡ ὁποία εἶναι προτασιακὸς τύπος (διατί;) γράφεται μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ x εἶναι ἀριθμός. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις αὕτη μία συνθήκη εἰς ἓν σύνολον ἀριθμῶν π.χ. τὸ R ἢ τὸ C.

Ἂν p(x) εἶναι μία συνθήκη εἰς τὸ σύνολον E, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι *ἓν στοιχεῖον* α *τοῦ* E *πληροῖ τὴν συνθήκην ταύτην* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πρότασις p(α) εἶναι ἀληθής. Ἂν ἐπὶ πλέον κάθε στοιχεῖον τοῦ E πληροῖ τὴν συνθήκην p(x), τότε ἡ συνθήκη αὕτη καλεῖται *ταυτότης εἰς τὸ* E. Οὕτω :

« Ὁ x εἶναι φυσικὸς ἀριθμός» εἶναι ταυτότης εἰς τὸ N

« $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$» εἶναι ταυτότης εἰς τυχὸν σύνολον ἀριθμῶν

« $x^2 + 1 \geqslant 1$» εἶναι ταυτότης εἰς τὸ R.

Ἐπίσης, ἂν $p(x)$ καὶ $q(x)$ εἶναι συνθῆκαι εἰς τὸ σύνολον Ε, θὰ λέγωμεν ὅτι *ἡ συνθήκη* $p(x)$ *συνεπάγεται τὴν συνθήκην* $q(x)$ καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $p(x) \Rightarrow q(x)$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν κάθε στοιχεῖον τοῦ Ε τὸ ὁποῖον πληροῖ τὴν $p(x)$ πληροῖ καὶ τὴν $q(x)$.

Αἱ συνθῆκαι $p(x)$ καὶ $q(x)$ καλοῦνται *ἰσοδύναμοι* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $p(x) \Rightarrow q(x)$ καὶ $q(x) \Rightarrow p(x)$. Τὴν ἰσοδυναμίαν τῶν συνθηκῶν $p(x)$ καὶ $q(x)$ συμβολίζομεν μὲ $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ καὶ ἀναγιγνώσκομεν «ἡ συνθήκη $p(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $q(x)$». Ἂν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἡ ἰσοδυναμία $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ δύο συνθηκῶν ὑφίσταται ἐξ ὁρισμοῦ, τότε χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$, δηλαδὴ γράφομεν $p(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} q(x)$.

1.5 Ἄλγεβρα συνόλων. Κατὰ τὴν ἐπεξεργασίαν ἑνὸς μαθηματικοῦ θέματος, κατὰ κανόνα, ὑπεισέρχονται ἀποκλειστικῶς τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Ω, τὸ ὁποῖον καλεῖται *βασικὸν σύνολον*. Π.χ. εἰς μὲν διάφορα προβλήματα τῆς Ἀλγέβρας ἔχομεν ἤδη θεωρήσει ὡς βασικὸν σύνολον τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἰς δὲ τὴν ἐπεξεργασίαν ὡρισμένων γεωμετρικῶν προβλημάτων ὡς βασικὸν σύνολον Ω ἔχομεν θεωρήσει τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐπιπέδων σχημάτων.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σύνολα μὲ στοιχεῖα ἐκ τοῦ βασικοῦ συνόλου Ω. Ὡς γνωστόν, λέγομεν ὅτι *τὸ σύνολον* Α *εἶναι ὑποσύνολον τοῦ* Β καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $A \subseteq B$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *ἡ συνθήκη* $x \in A$ *συνεπάγεται τὴν* $x \in B$. Συντόμως :

$$A \subseteq B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ἐπίσης ἡ *ἰσότης* δύο συνόλων καὶ ἡ ἔννοια τοῦ *γνησίου ὑποσυνόλου* (συμβολιζομένη μὲ $\subset$) ὁρίζονται, ὡς γνωστόν, ὡς κάτωθι :

$$A = B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \text{ καὶ } B \subseteq A$$

$$A \subset B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \text{ καὶ } A \neq B.$$

Μία συνθήκη $p(x)$ εἰς τὸ βασικὸν σύνολον Ω ὁρίζει τὸ σύνολον S ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ Ω, τὰ ὁποῖα πληροῦν ταύτην. Τοῦτο παριστῶμεν μὲ $\{x \in \Omega : p(x)\}$, ἤτοι $S = \{x \in \Omega : p(x)\}$. Π.χ. ἂν $\Omega = R$, ἡ συνθήκη $x^2 - 1 = 0$ ὁρίζει τὸ σύνολον $S = \{x \in R : x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$. Ἄλλα ἀξιοσημείωτα ὑποσύνολα τοῦ R ὁριζόμενα ὑπὸ συνθηκῶν εἶναι τὰ ἀκόλουθα, γνωστὰ ὡς διαστήματα τοῦ R :

1. Ἀνοικτὸν διάστημα μὲ ἄκρα α, β (α < β) :

$$(\alpha, \beta) = \{x \in R : \alpha < x < \beta\}$$

2. Κλειστὸν διάστημα μὲ ἄκρα α, β (α < β) :

$$[\alpha, \beta] = \{x \in R : \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$$

3. Ἀνοικτὸν ἀριστερά, κλειστὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα α, β (α < β) :

$$(\alpha, \beta] = \{x \in R : \alpha < x \leqslant \beta\}$$

4. Κλειστὸν ἀριστερά, ἀνοικτὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα α, β (α < β) :

$$[\alpha, \beta) = \{x \in R : \alpha \leqslant x < \beta\}$$

5. *Ἀπέραντον ἀριστερά, ἀνοικτὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρον* β :

$$(-\infty, \beta) = \{ x \in R : x < \beta \}$$

6. *Ἀπέραντον ἀριστερά, κλειστὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρον* β :

$$(-\infty, \beta] = \{ x \in R : x \leqslant \beta \}$$

7. *Ἀπέραντον δεξιά, ἀνοικτὸν ἀριστερὰ διάστημα μὲ ἄκρον* α :

$$(\alpha, +\infty) = \{ x \in R : \alpha < x \}$$

8. *Ἀπέραντον δεξιά, κλειστὸν ἀριστερὰ διάστημα μὲ ἄκρον* α :

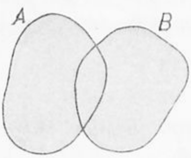
$$[\alpha, +\infty) = \{ x \in R : \alpha \leqslant x \}$$

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι καὶ κάθε ὑποσύνολον S ἑνὸς βασικοῦ συνόλου Ω δύναται νὰ παρασταθῇ, ὡς ἀνωτέρω, διὰ μιᾶς συνθήκης, τῆς συνθήκης $x \in S$. Οὕτως ἔχομεν $S = \{ x \in \Omega : x \in S \}$.

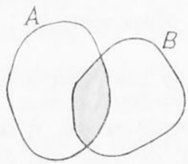
Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς βασικοῦ συνόλου Ω συμβολίζομεν μὲ $\mathscr{P}(\Omega)$. Εἰς τοῦτο ὁρίζονται, ὡς γνωστόν, αἱ πράξεις $\cup$, $\cap$, $-$ ὑπὸ τῶν τύπων :

$$A \cup B = \{ x \in \Omega : x \in A \text{ ἢ } x \in B \}$$
$$A \cap B = \{ x \in \Omega : x \in A \text{ καὶ } x \in B \}$$
$$A - B = \{ x \in \Omega : x \in A \text{ καὶ } x \notin B \}.$$

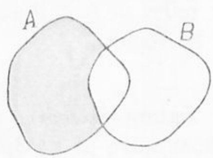
Μία ἐποπτικὴ ἑρμηνεία τῶν πράξεων τούτων δίδεται εἰς τὰ κάτωθι σχήματα :



Σχ. 1 $A \cup B$



Σχ. 2 $A \cap B$



Σχ. 3 $A - B$

Τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ διαφορὰ $A - A$, ὅπου A τυχὸν ὑποσύνολον τοῦ Ω. Ἐπίσης τὸ συμπλήρωμα A^c ἑνὸς συνόλου A, ὑποσυνόλου τοῦ βασικοῦ συνόλου Ω, ὁρίζεται, ὡς γνωστόν, ὡς ἡ διαφορὰ $\Omega - A$, ἤτοι

$$A^c = \Omega - A = \{ x \in \Omega : x \notin A \}.$$

Μεταξὺ τῶν πράξεων $\cup$, $\cap$, $-$ ὑφίστανται οἱ κάτωθι τύποι (ταυτότητες εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$), γνωστοὶ εἰς ἡμᾶς ἐκ τῶν μαθημάτων τῶν προηγουμένων τάξεων:

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
$(A - B) \cup B = A \cup B$	$(A - B) \cap B = \varnothing$

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$

1.6 Ζεῦγος – Καρτεσιανὸν γινόμενον. Ἓν στοιχεῖον α διδόμενον ὡς *πρῶτον* καὶ ἓν στοιχεῖον β διδόμενον ὡς *δεύτερον* σχηματίζουν ἓν νέον στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον γράφεται (α, β) καὶ καλεῖται *ζεῦγος* (διατεταγμένον). Τὰ στοιχεῖα α καὶ β τοῦ ζεύγους καλοῦνται *πρώτη* καὶ *δευτέρα*, ἀντιστοίχως, *συντεταγμένη* (ἢ *προβολή*) τοῦ ζεύγους.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τοῦ ζεύγους συνάγεται ὅτι δύο ζεύγη εἶναι ἴσα, ὅταν ὄχι μόνον σχηματίζονται ἀπὸ τὰ ἴδια στοιχεῖα, ἀλλὰ τὰ στοιχεῖα αὐτὰ δίδονται καὶ μὲ τὴν αὐτὴν διαδοχήν, δηλαδὴ

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ καὶ } \beta = \delta.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται μία (διατεταγμένη) τριὰς $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ἢ μία νιὰς $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$.

Παραδείγματα :

1. Ἓν κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν α καὶ παρονομαστὴν β δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ζεῦγος (α, β).

2. Εἷς μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\alpha + \beta i$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ζεῦγος (α, β).

3. Εἷς ἀγὼν μεταξὺ δύο ὁμάδων α καὶ β δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ζεῦγος (α, β) ἢ (β, α) ἀναλόγως τοῦ ἐὰν διεξάγεται εἰς τὴν ἕδραν τῆς α ἢ τῆς β ἀντιστοίχως.

Ἔστωσαν τώρα δύο σύνολα Α καὶ Β. Τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν (α, β) μὲ $\alpha \in A$ καὶ $\beta \in B$ γράφεται $A \times B$ καὶ καλεῖται *καρτεσιανὸν γινόμενον τοῦ* Α *ἐπὶ τοῦ* Β. Ἤτοι :

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A \text{ καὶ } y \in B \}.$$

Ὁμοίως ὁρίζεται τὸ γινόμενον $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu$ ὡς τὸ σύνολον τῶν νιάδων $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ μὲ $\alpha_\kappa \in A_\kappa$ διὰ κάθε $\kappa \in \{ 1, 2, \ldots, \nu \}$ (ἤ, ὡς λέγομεν, καὶ ἄλλως: διὰ κάθε $\kappa = 1, 2 \ldots, \nu$). Εἰδικώτερον τὸ $A \times A$ συμβολίζεται μὲ A^2, τὸ $A \times A \times A$ μὲ A^3 κ.ο.κ.

Τὸ σύνολον Δ τῶν ζευγῶν (α, α) μὲ $\alpha \in A$ καλεῖται *διαγώνιος* τοῦ A^2. Προφανῶς $\Delta \subseteq A^2$.

Παραδείγματα :

1. $A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$, $B = \{ 1, 2 \}$

$A \times B = \{ (\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2) \}$

$B \times A = \{ (1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma) \} \neq A \times B$.

2. Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολον τῶν ποδοσφαιρικῶν ὁμάδων, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς ἓν πρωτάθλημα, τότε τὸ σύνολον τῶν ἀγώνων τοῦ πρωταθλήματος εἶναι $A^2 - \Delta$, ἐφ' ὅσον τὸ πρωτάθλημα διεξάγεται εἰς δύο γύρους (διατί;).

Παρατήρησις. Μία ἔκφρασις περιέχουσα δύο σύμβολα x καὶ y δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς περιέχουσα ἓν σύμβολον, τὸ ζεῦγος (x, y). Π.χ. αἱ ἐκφράσεις:

« Τὸ κλάσμα $\frac{x}{y}$ εἶναι ἀνάγωγον »

« Ὁ x διαιρεῖ τὸν y »

« $x^2 + 2y^2 = 2$ »

καλοῦνται *προτασιακοὶ τύποι περιέχοντες δύο σύμβολα* x *καὶ* y καὶ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς προτασιακοὶ τύποι περιέχοντες ἕν σύμβολον, τὸ ζεῦγος (x,y). Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζονται καὶ προτασιακοὶ τύποι περιέχοντες τρία σύμβολα ἢ καὶ περισσότερα (πεπερασμένα) τοιαῦτα.

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΙ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

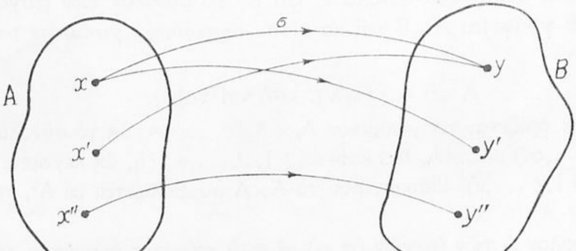
2.1 Ἀντιστοιχία. Δύο στοιχεῖα τοῦ αὐτοῦ ἢ διαφορετικῶν συνόλων δύναται νὰ συνδέωνται λογικῶς, νὰ συσχετίζωνται. Π.χ. ὅταν λέγωμεν «τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν 100m²» συσχετίζομεν ἕν *τρίγωνον* μὲ ἕνα *ἀριθμόν*, ἢ ὅταν λέγωμεν «ὁ ἀριθμὸς 25 εἶναι τετράγωνον τοῦ 5» συσχετίζομεν δύο *ἀριθμοὺς* κ.ο.κ. Κατωτέρω ἐξετάζομεν τοιαύτας συσχετίσεις στοιχείων δύο συνόλων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἀναγκαίως διαφορετικά.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο μὴ κενὰ σύνολα καὶ εἷς συγκεκριμένος τρόπος (π.χ. εἷς κανὼν ἢ μία διαδικασία) μὲ τὸν ὁποῖον εἶναι δυνατὸν τουλάχιστον ἕν $x \in A$ νὰ συσχετίζεται μὲ ἓν ἢ περισσότερα $y \in B$. Θὰ λέγωμεν τότε ὅτι ὡρίσθη μία *ἀντιστοιχία* ἢ *ἀπεικόνισις* σ ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β. Θὰ σημειώνωμεν δὲ

$\sigma : A \rightarrow B$ διὰ τὰ σύνολα

$x \xrightarrow{\sigma} y$ διὰ τὰ συσχετιζόμενα στοιχεῖα.

Μία ἐποπτικὴ ἑρμηνεία τῆς ἀπεικονίσεως δίδεται εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα :



Σχ. 4

Τὸ σύνολον Α καλεῖται *σύνολον ἀφετηρίας* τῆς σ. Τὸ σύνολον Β καλεῖται *σύνολον ἀφίξεως* τῆς σ, ἡ δὲ ἔκφρασις $x \xrightarrow{\sigma} y$ (ἡ ὁποία εἶναι ἡ συμβολικὴ μορφὴ τοῦ τρόπου, βάσει τοῦ ὁποίου καθορίζονται τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα) καλεῖται *τύπος τῆς* σ. Ἡ ἔκφρασις $x \xrightarrow{\sigma} y$ ἀναγιγνώσκεται «τὸ x ἀντιστοιχίζεται (ἢ ἀπεικονίζεται) διὰ τῆς σ εἰς τὸ y» ἢ «τὸ y εἶναι ἀντίστοιχον (ἢ εἰκὼν) τοῦ x διὰ τῆς σ».

Ὅλα τὰ στοιχεῖα $x \in A$, τὰ ὁποῖα ἔχουν (τουλάχιστον ἓν) ἀντίστοιχον $y \in B$, ἀποτελοῦν ἓν σύνολον $\mathscr{D}(\sigma)$ τὸ ὁποῖον καλεῖται *πεδίον ὁρισμοῦ (domain)* τῆς ἀντιστοιχίας σ. Εἶναι λοιπόν :

$$\mathscr{D}(\sigma) = \{ x \in A : \exists\ y \in B \text{ μὲ } x \xrightarrow{\sigma} y \} \subseteq A \text{ (1)}$$

(1) «∃...» σημαίνει «ὑπάρχει (τουλάχιστον ἕν)...».

Όλα τὰ στοιχεῖα $y \in B$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίστοιχα ἑνὸς (τουλάχιστον) $x \in A$, ἀποτελοῦν ἓν σύνολον $\mathscr{R}(\sigma)$ τὸ ὁποῖον καλεῖται *πεδίον τιμῶν (range)* τῆς ἀντιστοιχίας σ. Εἶναι λοιπόν.

$$\mathscr{R}(\sigma) = \{ y \in B : \exists\, x \in A \text{ μὲ } x \xrightarrow{\sigma} y \} \subseteq B.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ τῆς ἀντιστοιχίας ἰσχύει $\mathscr{D}(\sigma) \neq \varnothing$ καὶ $\mathscr{R}(\sigma) \neq \varnothing$ (διατί;).

Όλα τὰ ζεύγη (x, y) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $x \xrightarrow{\sigma} y$ ἀποτελοῦν ἓν σύνολον S_σ, ὑποσύνολον τοῦ $\mathscr{D}(\sigma) \times \mathscr{R}(\sigma)$ ἄρα καὶ τοῦ $A \times B$, τὸ ὁποῖον καλεῖται *γράφημα (graph)* τῆς ἀντιστοιχίας σ. Εἶναι λοιπόν :

$$S_\sigma = \{ (x, y) \in A \times B : x \xrightarrow{\sigma} y \} \neq \varnothing.$$

Ὥστε κάθε ἀντιστοιχία $\sigma : A \longrightarrow B$ ἔχει ἓν γράφημα $S_\sigma \subseteq A \times B$, ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως κάθε μὴ κενὸν σύνολον S, ὑποσύνολον τοῦ $A \times B$ ὁρίζει μίαν ἀντιστοιχίαν σ_S μὲ τύπον :

$$x \xrightarrow{\sigma_S} y \Leftrightarrow (x, y) \in S$$

καὶ ἡ ὁποία ἔχει γράφημα τὸ S, ἤτοι $S_{\sigma_S} = S$ (διατί;).

Παραδείγματα :

1. $A = B = \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{\sigma} y \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$.

$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = 2y^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \leqslant 1 \Rightarrow \mathscr{D}(\sigma) \subseteq [-1, 1]$. Ἀλλὰ καὶ $[-1, 1] \subseteq \mathscr{D}(\sigma)$, διότι ἂν $x \in [-1, 1]$, τότε ὑπάρχει y, π.χ. $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{2}}$ μὲ $x \xrightarrow{\sigma} y$ (διατί ;). Ἄρα $\mathscr{D}(\sigma) = [-1, 1]$.

$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2y^2 = x^2 \geqslant 0 \Rightarrow y^2 \leqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathscr{R}(\sigma) \subseteq \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right]$. Ἀλλὰ καὶ $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right] \subseteq \mathscr{R}(\sigma)$, διότι ἂν $y \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right]$, τότε ὑπάρχει x, π.χ. $x = \sqrt{1 - 2y^2}$, μὲ $x \xrightarrow{\sigma} y$ (διατί;). Ἄρα $\mathscr{R}(\sigma) = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right]$.

2. $A = B = \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{\sigma} y \Leftrightarrow (x^2 + 1)y^2 - x^2 = 0$.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε $x \in \mathbb{R}$ ὑπάρχει y, π.χ. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, μὲ $x \xrightarrow{\sigma} y$ (διατί;). Ἄρα $\mathscr{D}(\sigma) = \mathbb{R}$.

$(x^2 + 1)y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} < 1 \Rightarrow \mathscr{R}(\sigma) \subseteq (-1, 1)$. Ἀλλὰ καὶ $(-1, 1) \subseteq \mathscr{R}(\sigma)$, διότι ἂν $y \in (-1, 1)$, τότε ὑπάρχει x, π.χ. $x = \dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$, μὲ $x \xrightarrow{\sigma} y$ (διατί;). Ἄρα $\mathscr{R}(\sigma) = (-1, 1)$.

3. $A = B = \mathbb{R}$, $x \xrightarrow{\sigma} y \Leftrightarrow (y^2 + 1)\, x^2 - y^2 = 0$.
Ἰσχύουν $\mathscr{D}(\sigma) = (-1, 1)$ καὶ $\mathscr{R}(\sigma) = \mathbb{R}$ (διατί;).

4. $A = B = R,\ x \overset{\sigma}{\rightarrow} y \Leftrightarrow x + y < 1$.

'Ισχύουν $\mathscr{D}(\sigma) = R$ καὶ $\mathscr{R}(\sigma) = R$ (διατί;).

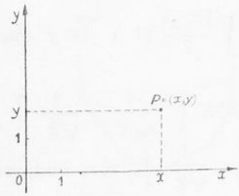
Ἐπειδὴ $\mathscr{D}(\sigma) \subseteq A$ καὶ $\mathscr{R}(\sigma) \subseteq B$ μεταχειριζόμεθα εἰδικώτερον τὰς ἐκφράσεις «ἀντιστοιχία *τοῦ* A...» (ἀντὶ *ἐκ τοῦ*), ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι $\mathscr{D}(\sigma) = A$ καὶ «ἀντιστοιχία... *ἐπὶ τοῦ* B», ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι $\mathscr{R}(\sigma) = B$. Οὕτως ἡ ἀντιστοιχία

τοῦ παραδείγματος 2 εἶναι *τοῦ* R *εἰς τὸ* R

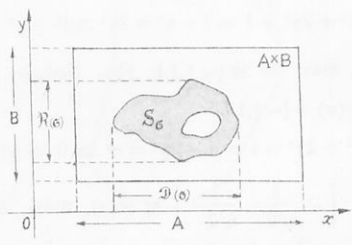
τοῦ παραδείγματος 3 εἶναι *ἐκ τοῦ* R *ἐπὶ τοῦ* R

τοῦ παραδείγματος 4 εἶναι *τοῦ* R *ἐπὶ τοῦ* R.

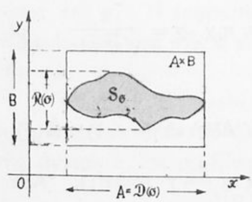
Γεωμετρικὴ (ἢ γραφικὴ) παράστασις ἀντιστοιχίας. Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τόσον τὸ σύνολον ἀφετηρίας μιᾶς ἀντιστοιχίας $\sigma : A \rightarrow B$, ὅσον καὶ τὸ σύνολον ἀφίξεως αὐτῆς εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ γράφημα S_σ αὐτῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν (x, y), τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστόν, παρίστανται διὰ σημείων P τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. 5. Οὕτω τὸ γράφημα S_σ παρίσταται δι' ἑνὸς σημειοσυνόλου τοῦ ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 6), τὸ ὁποῖον καλεῖται *γεωμετρικὴ* (ἢ *γραφικὴ*) *παράστασις* τῆς ἀντιστοιχίας σ ἢ ἀκόμη καὶ *διάγραμμα* τῆς σ.



Σχ. 5

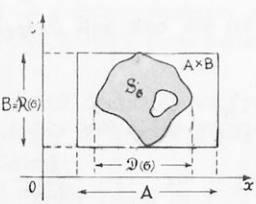


Σχ. 6



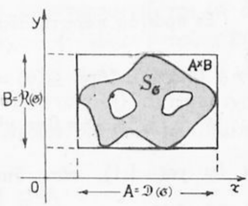
Σχ. 7

ἀντιστοιχία τοῦ A *εἰς τὸ* B



Σχ. 8

ἀντιστοιχία ἐκ τοῦ A *ἐπὶ τοῦ* B



Σχ. 9

ἀντιστοιχία τοῦ A *ἐπὶ τοῦ* B

Ἀντίστροφος ἀντιστοιχία. Ἔστω ἡ ἀντιστοιχία $\sigma : A \longrightarrow B$ τῆς ὁποίας τὸ γράφημα εἶναι

$$S_\sigma = \{ (x, y) \in A \times B : x \xrightarrow{\sigma} y \} \neq \varnothing.$$

Δι' ἐναλλαγῆς τῆς διαδοχῆς τῶν στοιχείων τοῦ ζεύγους (x, y) προκύπτει τὸ ἀκόλουθον ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $B \times A$

$$S^* = \{ (y, x) \in B \times A : (x, y) \in S_\sigma \},$$

τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι ἐπίσης μὴ κενὸν σύνολον.

Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω τὸ σύνολον S^* ὁρίζει μίαν ἀντιστοιχίαν ἐκ τοῦ B εἰς τὸ A μὲ τύπον :

$$y \xrightarrow{\sigma_{S^*}} x \Leftrightarrow (y, x) \in S^*.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(y,x) \in S^* \Leftrightarrow (x, y) \in S_\sigma \Leftrightarrow x \xrightarrow{\sigma} y$, θὰ ἰσχύῃ καὶ

$$y \xrightarrow{\sigma_{S^*}} x \Leftrightarrow x \xrightarrow{\sigma} y.$$

Ἂν λοιπὸν ἓν σημεῖον x ἀντιστοιχίζεται διὰ τῆς σ εἰς τὸ y, τότε τὸ τελευταῖον τοῦτο διὰ τῆς σ_{S^*} ἀντιστοιχίζεται πάλιν εἰς τὸ x. Ἡ ἀντιστοιχία σ_{S^*} καλεῖται *ἀντίστροφος ἀντιστοιχία* τῆς σ καὶ συμβολίζεται μὲ σ^{-1}. Ὥστε

$$x \xrightarrow{\sigma} y \Leftrightarrow y \xrightarrow{\sigma^{-1}} x.$$

Ἄρα ἡ ἀντιστοιχία σ^{-1} ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ πεδίον τιμῶν τῆς σ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σ, δηλαδὴ ἰσχύουν

$$\mathscr{D}(\sigma^{-1}) = \mathscr{R}(\sigma) \text{ καὶ } \mathscr{R}(\sigma^{-1}) = \mathscr{D}(\sigma).$$

Παρατήρησις. Συνήθως, ὅταν πρόκειται νὰ μελετηθῇ μεμονωμένως ἡ σ^{-1}, ἐναλλάσσομεν τὰ x καὶ y μεταξύ των, δηλαδὴ θεωροῦμεν $x \in B$ καὶ $y \in A$, ὥστε τὸ x νὰ συμβολίζῃ πάντοτε τυχὸν στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἀφετηρίας. Ἤτοι $x \xrightarrow{\sigma^{-1}} y$ (καὶ ἰσοδυνάμως $y \xrightarrow{\sigma} x$).

Παραδείγματα :

1. Ἡ ἀντίστροφος ἀντιστοιχία τῆς ἀντιστοιχίας τοῦ παραδείγματος 1 δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x \xrightarrow{\sigma^{-1}} y \Leftrightarrow y^2 + 2x^2 = 1.$$

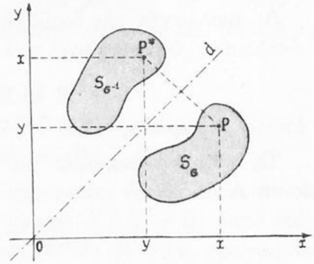
2. Ἡ ἀντίστροφος ἀντιστοιχία τῆς ἀντιστοιχίας τοῦ παραδείγματος 2 εἶναι ἡ ἀντιστοιχία τοῦ παραδείγματος 3.

3. Ἡ ἀντίστροφος ἀντιστοιχία τῆς ἀντιστοιχίας τοῦ παραδείγματος 4 εἶναι ἡ ἰδία.

Ἐπειδή, ἐξ ὁρισμοῦ τῆς ἀντιστρόφου ἀντιστοιχίας, εἶναι προφανὴς ἡ ἰσοδυναμία

$$(x, y) \in S_\sigma \Leftrightarrow (y, x) \in S_{\sigma^{-1}}$$

καὶ ἐπειδή, ὅταν πρόκειται περὶ γραφημάτων εἰς τὸ R^2, τὰ σημεῖα $P=(x, y)$ καὶ $P^*=(y, x)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν πρώτην διχοτόμον d τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων (βλ. Σχ. 10), τὰ διαγράμματα τῶν ἀντιστοιχιῶν σ καὶ σ^{-1} θὰ εἶναι ἐπίσης *συμμετρικὰ* ὡς πρὸς τὴν d.



Σχ. 10.

Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, διὰ κάθε ἀντιστοιχία σ ἰσχύει

$$x \xrightarrow{\sigma} y \Leftrightarrow y \xrightarrow{\sigma^{-1}} x$$

καὶ ἑπομένως διὰ τὴν ἀντίστροφον ἀντιστοιχίαν σ^{-1} τῆς σ θὰ ἰσχύῃ

$$y \xrightarrow{\sigma^{-1}} x \Leftrightarrow x \xrightarrow{(\sigma^{-1})^{-1}} y,$$

ὅπου $(\sigma^{-1})^{-1}$ εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς σ^{-1}. Ἄρα ἰσχύει καὶ

$$x \xrightarrow{\sigma} y \Leftrightarrow x \xrightarrow{(\sigma^{-1})^{-1}} y,$$

δηλαδὴ ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀντιστρόφου μιᾶς ἀντιστοιχίας σ εἶναι ἡ ἰδία ἡ σ. Συντόμως γράφομεν

$$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma.$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἑρμηνεύεται γεωμετρικῶς τῇ βοηθείᾳ τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον d (βλ. Σχ. 10) τῶν διαγραμμάτων τῶν ἀντιστοιχιῶν σ καὶ σ^{-1} (διατί;).

2.2 Συνάρτησις. Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀπὸ τὰς θεμελιώδεις μαθηματικὰς ἐννοίας. Τὴν ὁρίζομεν ὡς εἰδικὴν ἀντιστοιχίαν.

Μία ἀντιστοιχία f τοῦ A εἰς τὸ B καλεῖται *συνάρτησις* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν κάθε $x \in A$ ἔχῃ ἓν καὶ *μοναδικὸν* ἀντίστοιχον $y \in B$. Θὰ λέγωμεν τότε ὅτι *ἡ* f *εἶναι συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ* A *καὶ τιμὰς εἰς τὸ* B ἢ *ἡ* f *εἶναι μονοσήμαντος ἀντιστοιχία (ἢ μονοσήμαντος ἀπεικόνισις) τοῦ* A *εἰς τὸ* B καὶ θὰ γράφωμεν

$$f: A \longmapsto B \quad \text{ἢ} \quad A \ni x \xrightarrow{f} y \in B.$$

Τὸ y, ἀντίστοιχον (εἰκὼν) τοῦ x διὰ τῆς f, λέγεται καὶ *τιμὴ τῆς* f *εἰς τὸ* x, συμβολίζεται δὲ καὶ μὲ $f(x)$. Γράφομεν τότε :

$$y = f(x).$$

Ἄρα ἡ ἔκφρασις $y=f(x)$ εἶναι ἄλλη μορφὴ τοῦ $x \xrightarrow{f} y$, δηλαδὴ *ὁ τύπος τῆς* f. Τὸ $x \in A$ λέγεται *ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ* τῆς f, τὸ δὲ $y \in B$ *ἐξηρτημένη μεταβλητὴ* τῆς f.

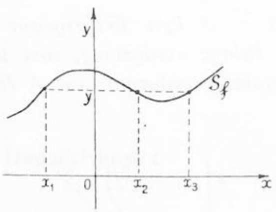
Ἂν $B=R$, τότε ἡ f λέγεται *πραγματικὴ συνάρτησις*. Ἂν δὲ ἐπὶ πλέον ἰσχύη καὶ $A \subseteq R$, τότε αὕτη λέγεται *πραγματικὴ συνάρτησις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς* (διὰ τὸ διάγραμμα μιᾶς τοιαύτης συναρτήσεως βλ. Σχ. 11). Π.χ. διὰ τοῦ τύπου $R \ni x \xrightarrow{f} x^2$ ὁρίζεται μία πραγματικὴ συνάρτησις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Ὁμοίως καὶ διὰ τοῦ τύπου $x \xrightarrow{f} \sqrt{1-x^2}$ ὁρίζεται μία πραγματικὴ συνάρτησις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα $[-1,1]$. Ἀντιθέτως παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν ἀντιστοιχιῶν τῶν παραδειγμάτων τῆς προηγουμένης § 2.1 οὐδεμία εἶναι συνάρτησις (διατί;).

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς $f : A \longmapsto B$, δηλαδὴ τὸ πεδίον τιμῶν $\mathscr{R}(f)$ αὐτῆς συμβολίζεται καὶ μὲ $f(A)$, ἤτοι :

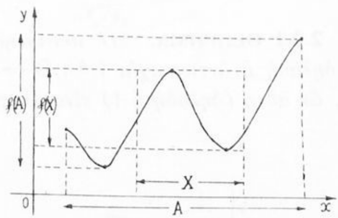
$$f(A) = \{\, y \in B : \exists\, x \in A \text{ μὲ } y = f(x) \,\}.$$

Γενικώτερον, ἂν $X \subseteq A$, τότε μὲ $f(X)$ συμβολίζομεν τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς f εἰς τὰ διάφορα στοιχεῖα τοῦ X (βλ. καὶ Σχ. 12), ἤτοι :

$$f(X) = \{\, y \in B : \exists\, x \in X \text{ μὲ } y = f(x) \,\}.$$



Σχ. 11 $\quad x \xrightarrow{f} y$



Σχ. 12

Ἀντίστροφος συνάρτησις. Ἔστω μία συνάρτησις $f : A \longmapsto B$. Ἀφοῦ ἡ f εἶναι ἀντιστοιχία τοῦ A εἰς τὸ B, ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος *ἀντιστοιχία* $f^{-1} : B \longrightarrow A$ καὶ μάλιστα, ὡς γνωστόν, ἰσχύουν :

$$\mathscr{D}(f^{-1}) = \mathscr{R}(f) \text{ καὶ } \mathscr{R}(f^{-1}) = \mathscr{D}(f) = A.$$

Ἂν ἡ ἀντιστοιχία $f^{-1} : B \longrightarrow A$ εἶναι ἐπίσης συνάρτησις, τότε αὕτη καλεῖται *ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς* f, ὁπότε θὰ πρέπει νὰ ἰσχύουν :

1) $\mathscr{D}(f^{-1}) = B$, ἄρα $\mathscr{R}(f) = B$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ f πρέπει νὰ εἶναι ἀντιστοιχία *ἐπὶ τοῦ* B, δηλαδὴ κάθε $y \in B$ νὰ εἶναι ἀντίστοιχον διὰ τῆς f ἑνὸς $x \in A$.

2) Κάθε $y \in B$ νὰ ἔχῃ διὰ τῆς f^{-1} ἓν καὶ *μοναδικὸν* ἀντίστοιχον $x \in A$, ἄρα ἐκεῖνο ἀκριβῶς τοῦ ὁποίου ἀντίστοιχον διὰ τῆς f εἶναι τὸ y.

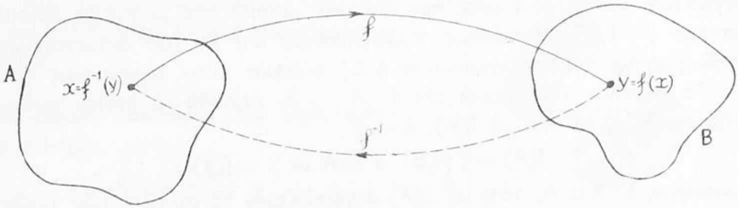
Ὥστε, ἂν ἡ ἀντιστοιχία f^{-1} εἶναι συνάρτησις, τότε κάθε $y \in B$ εἶναι ἀντίστοιχον διὰ τῆς f ἑνὸς καὶ *μοναδικοῦ* $x \in A$, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ (διατί;), $f(A) = B$ καὶ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \in A,\ x_2 \in A \\ x_1 \neq x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Μία συνάρτησις f πληροῦσα τὴν συνθήκην ταύτην καλεῖται *ἀμφιμονο-*

σήμαντος συνάρτησις (ἢ ἀπεικόνισις) τοῦ A ἐπὶ τοῦ B. Τότε, βεβαίως, καὶ ἡ f^{-1} εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις τοῦ B ἐπὶ τοῦ A (διατί ;) Ἰσχύει φυσικὰ ἡ ἰσοδυναμία τῶν τύπων (βλ. Σχ. 13) :

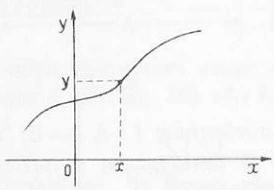
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$



Σχ. 13

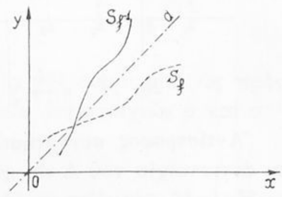
Ἀπεδείχθη λοιπὸν ἀνωτέρω τὸ ἀκόλουθον θεώρημα

2.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἡ συνάρτησις* $f : A \longmapsto B$ *ἔχει ἀντίστροφον συνάρτησιν, δηλαδὴ ἡ ἀντιστοιχία* $f^{-1} : B \rightarrow A$ *εἶναι ἐπίσης συνάρτησις, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν αὐτὴ (δηλαδὴ ἡ* f*) εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις τοῦ* A *ἐπὶ τοῦ* B.



Σχ. 14

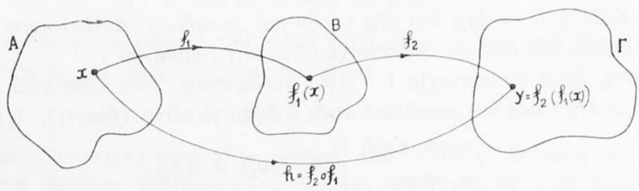
ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις



Σχ. 15

ἀντίστροφος συνάρτησις

Σύνθεσις συναρτήσεων. Ἔστωσαν δύο συναρτήσεις $f_1 : A \longmapsto B$ καὶ $f_2 : B \longmapsto \Gamma$. Διὰ διαδοχικῆς ἀπεικονίσεως ἀφ' ἑνὸς μὲν ἑνὸς στοιχείου $x \in A$ διὰ τῆς f_1, ἀφ'



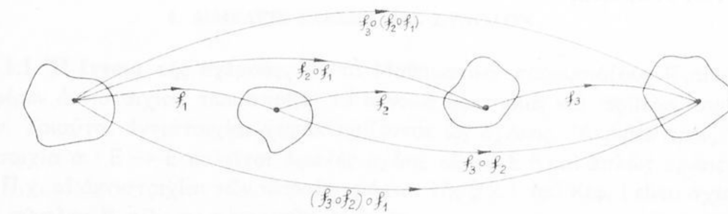
Σχ. 16

ἑτέρου δὲ τῆς εἰκόνος του $f_1(x) \in B$ διὰ τῆς f_2 ἀντιστοιχίζεται εἰς τὸ $x \in A$ ἕν στοιχεῖον $y = f_2(f_1(x)) \in \Gamma$ (βλ. Σχ. 16). Ἡ ἀντιστοιχία $h: A \to \Gamma$ μὲ $x \xrightarrow{h} f_2(f_1(x))$ εἶναι μία συνάρτησις (διατί;), ἡ ὁποία καλεῖται *σύνθεσις τῶν συναρτήσεων* f_1 *καὶ* f_2 καὶ συμβολίζεται μὲ $f_2 \circ f_1$, ἤτοι $h = f_2 \circ f_1$. Ὁ τύπος τῆς h εἶναι λοιπὸν $y = h(x) = f_2(f_1(x))$.

Ἡ πρᾶξις τῆς συνθέσεως συναρτήσεων εἶναι *προσεταιριστική*, δηλαδὴ ἰσχύει

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$$

ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ κάτωθι σχήματος.



Σχ. 17

Παραδείγματα :

1. $f_1(x) = 2x + 3$, $x \in R$ καὶ $f_2(x) = \eta\mu x$, $x \in R$. Ἡ σύνθεσις $f_2 \circ f_1$ αὐτῶν ἔχει τύπον $x \xrightarrow{f_2 \circ f_1} \eta\mu(2x + 3)$.

2. $f_1(x) = x^2 + 1$, $x \in R$ καὶ $f_2(x) = \sqrt{x}$, $x \in R_0^+$. Ἡ σύνθεσις $f_2 \circ f_1$ αὐτῶν ἔχει τύπον $x \xrightarrow{f_2 \circ f_1} \sqrt{x^2 + 1}$.

3. $f_1(x) = |x|$, $x \in R$ καὶ $f_2(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \in R_0^+$. Ἡ σύνθεσις $f_2 \circ f_1$ αὐτῶν ἔχει τύπον $x \xrightarrow{f_2 \circ f_1} \sqrt[4]{|x|}$.

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1 Δείξατε ὅτι εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ ἰσχύουν :
1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ 2) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

3.2 Δείξατε ὅτι εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ ἰσχύουν :
1) $\Omega^c = \varnothing$ 2) $\varnothing^c = \Omega$ 3) $(A^c)^c = A$ 4) $A \cup A^c = \Omega$ 5) $A \cap A^c = \varnothing$

3.3 Δείξατε ὅτι εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ ἰσχύουν (τύποι τοῦ de Morgan) :
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ καὶ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3.4 Εὕρετε τὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ τὸ πεδίον τιμῶν τῶν ἀντιστοιχιῶν σ : $R \longrightarrow R$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν :

1) $y^2 = x$ 2) $y = x^3$ 3) $y = x^2 + 1$ 4) $3x + 2y = 1$
5) $x^2 + y^3 = 1$ 6) $x < y$ 7) $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 8) $x^2 < y < x^2 + 1$

3.5 Ποῖαι εἶναι αἱ ἀντίστροφοι ἀντιστοιχίαι τῶν ἀντιστοιχιῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 3.4 ;

3.6 Ποῖαι ἐκ τῶν ἀντιστοιχιῶν τῆς ἀσκήσεως 3.4 εἶναι συναρτήσεις καὶ ποῖαι δὲν εἶναι;

3.7 Διὰ τὰς συναρτήσεις ἐκ τῶν ἀντιστοιχιῶν τῆς ἀσκήσεως 3.4 ποῖαι ἔχουν ἀντιστρόφους συναρτήσεις·

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΔΟΜΑΙ

1. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ

1.1 Ἡ ἔννοια τῆς σχέσεως. Εἰς τὰ Μαθηματικὰ παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον ἀντιστοιχίαι, τῶν ὁποίων τὰ σύνολα ἀφετηρίας καὶ ἀφίξεως συμπίπτουν. Τοιαῦται ἀντιστοιχίαι χαρακτηρίζονται ὡς *σχέσεις*. Ἀκριβέστερον, μία ἀντιστοιχία $\sigma : E \rightarrow E$ καλεῖται *διμελὴς σχέσις εἰς τὸ* Ε ἢ καὶ ἁπλῶς *σχέσις εἰς τὸ* Ε. Π.χ. αἱ ἀντιστοιχίαι τῶν παραδειγμάτων τῆς § 2.1 τοῦ Κεφ. Ι εἶναι σχέσεις εἰς τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς σχέσεως $\sigma : E \rightarrow E$ ὁ τύπος αὐτῆς γράφεται συνήθως μὲ $x\sigma y$ ἀντὶ $x \xrightarrow{\sigma} y$, ἤτοι

$$x\sigma y \Leftrightarrow x \xrightarrow{\sigma} y$$

καὶ ἀναγιγνώσκομεν τοῦτον «x εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ y».

Παραδείγματα :

Ε: *τυχὸν μὴ κενὸν σύνολον*

1. $x\sigma_1 y \Leftrightarrow$ x καὶ y συμβολίζουν τὸ αὐτὸ στοιχεῖον τοῦ Ε (Συντόμως : $x = y$)

$E = \mathbf{N}$

2. $x\sigma_2 y \Leftrightarrow$ ὁ x διαιρεῖ τὸν y (Συντόμως : $x|y$).

3. $x\sigma_3 y \Leftrightarrow$ τὸ κλάσμα $\frac{x}{y}$ εἶναι ἀνάγωγον

4. $x\sigma_4 y \Leftrightarrow$ ἡ διαφορὰ $x - y$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 (Συντόμως : $x = y \mod 5$)

$E = \mathbf{R}$

5. $x\sigma_5 y \Leftrightarrow$ ὁ x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ y (Συντόμως : $x > y$)

6. $x\sigma_6 y \Leftrightarrow$ ὁ x εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ y (Συντόμως : $x \leqslant y$)

Ε: *τὸ σύνολον τῶν ἀνθρώπων*

7. $x\sigma_7 y \Leftrightarrow$ ὁ x εἶναι πατὴρ τοῦ y

8. $x\sigma_8 y \Leftrightarrow$ x καὶ y φοιτοῦν εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν

E: *τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου*

9. $x\sigma_9 y \iff$ ἡ x εἶναι κάθετος πρὸς τὴν y (Συντόμως: $x \perp y$)

10. $x\sigma_{10} y \iff$ x καὶ y ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν (Συντόμως: $x \parallel y$)

$E = \mathscr{P}(\Omega)$

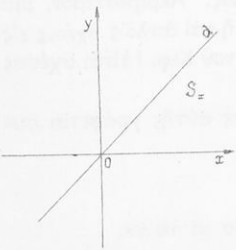
11. $x\sigma_{11} y \iff$ τὸ x εἶναι ὑποσύνολον τοῦ y (Συντόμως: $x \subseteq y$)

Παρατηροῦμεν ὅτι δι' ὡρισμένας ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἔχουν καθιερωθῇ εἰδικὰ σύμβολα. Οὕτως:

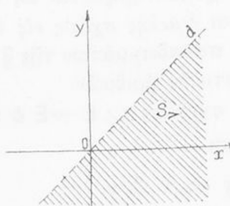
ἀντί : $\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_5, \ \sigma_6, \ \sigma_9, \ \sigma_{10}, \ \sigma_{11}$

γράφομεν ἀντιστοίχως : $=, \ |, \ >, \ \leqslant, \ \perp, \ \|, \ \subseteq$.

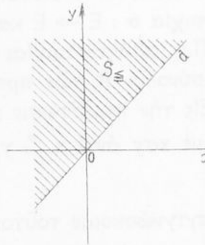
Αἱ σχέσεις $=$, $>$ καὶ $\leqslant$, ὡς σχέσεις εἰς τὸ R, ἔχουν διαγράμματα, τὰ ὁποῖα δίδονται εἰς τὰ κάτωθι σχήματα :



Σχ. 18



Σχ. 19



Σχ. 20

1.2 Βασικαὶ κατηγορίαι σχέσεων. Ἕνεκα τῆς σπουδαιότητος μερικῶν ἰδιοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς σχέσεις, διακρίνομεν τὰς κατωτέρω βασικὰς κατηγορίας σχέσεων :

Ἀνακλαστικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον E καλεῖται *ἀνακλαστικὴ* (ἢ *αὐτοπαθὴς*) τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

(A) $$x\sigma x \quad \forall \ x \in E$$ (1).

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ζεῦγος (x, x) εἶναι στοιχεῖον τοῦ γραφήματος S_σ καὶ μάλιστα διὰ κάθε $x \in E$, δηλαδὴ ἡ διαγώνιος Δ τοῦ E^2 εἶναι ὑποσύνολον τοῦ S_σ. Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον εἶναι ἀληθές, καθ' ὅσον

$$\Delta \subseteq S_\sigma \ \Rightarrow \ (x, x) \in S_\sigma \ \forall \ x \in E \ \Rightarrow \ x\sigma x \ \forall \ x \in E.$$

Ὥστε

$$\sigma \text{ εἶναι ἀνακλαστικὴ} \iff \Delta \subseteq S_\sigma.$$

Αἱ σχέσεις σ_1, σ_2, σ_4, σ_6, σ_8, σ_{10} καὶ σ_{11} τῶν παραδειγμάτων τῆς προηγουμένης § 1.1 εἶναι ἀνακλαστικαί.

---

(1) «$\forall$...» σημαίνει «διὰ κάθε...»

Συμμετρικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον Ε καλεῖται *συμμετρικὴ* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

(Σ) $$x\sigma y \Rightarrow y\sigma x.$$

Τοῦτο συνεπάγεται τὴν ἰσοδυναμίαν $x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma x$ (διατί;) καὶ ἐπειδὴ $x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma^{-1}x$, θὰ ἰσχύῃ $y\sigma x \Leftrightarrow y\sigma^{-1}x$, ἤτοι $\sigma = \sigma^{-1}$. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, $\sigma = \sigma^{-1}$ συνεπάγεται ὅτι $x\sigma y \Leftrightarrow x\sigma^{-1}y \Leftrightarrow y\sigma x$. Ὥστε ἰσχύει

$$\sigma \textit{ εἶναι συμμετρικὴ} \Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τῶν παραδειγμάτων τῆς προηγουμένης § 1.1, αἱ σ_1, σ_3, σ_4, σ_8, σ_9 καὶ σ_{10} εἶναι συμμετρικαί.

Ἀντισυμμετρικαὶ σχέσεις. Μία σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον Ε καλεῖται *ἀντισυμμετρικὴ* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

(Α – Σ) $$x\sigma y \textit{ καὶ } y\sigma x \Rightarrow x = y.$$

Οὕτως, ἐκ τῶν σχέσεων τῶν παραδειγμάτων τῆς προηγουμένης § 1.1, αἱ σχέσεις σ_1, σ_2, σ_6 καὶ σ_{11} εἶναι ἀντισυμμετρικαί.

Μεταβατικαὶ σχέσεις. Μιὰ σχέσις σ εἰς τὸ σύνολον Ε καλεῖται *μεταβατικὴ* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

(Μ) $$x\sigma y \textit{ καὶ } y\sigma z \Rightarrow x\sigma z.$$

Οὕτως, ἐκ τῶν σχέσεων τῶν παραδειγμάτων τῆς προηγουμένης § 1.1, αἱ σ_1, σ_2, σ_4, σ_5, σ_6, σ_8, σ_{10} καὶ σ_{11} εἶναι μεταβατικαί.

2. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΙ - ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

2.1 Ἰσοδυναμία. Μία σχέσις εἰς τὸ σύνολον Ε, ἡ ὁποία εἶναι :

(Α) ἀνακλαστική, (Σ) συμμετρικὴ καὶ (Μ) μεταβατικὴ

καλεῖται *ἰσοδυναμία* (ἢ *σχέσις ἰσοδυναμίας*) *εἰς τὸ* Ε.

Μία ἰσοδυναμία συμβολίζεται συνήθως μὲ $\sim$ ἢ $\simeq$ ἢ καὶ $\equiv$.

Παραδείγματα :

1. Ἡ ἰσότης εἶναι μία ἰσοδυναμία.

2. Ἡ ὁμοιότης εἰς ἓν σύνολον τριγώνων εἶναι μία ἰσοδυναμία, διότι :

(Α) Πᾶν τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς ἑαυτό.

(Σ) Ἂν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α΄Β΄Γ΄, τότε καὶ τὸ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

(Μ) Ἂν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α΄Β΄Γ΄ καὶ τοῦτο εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α΄΄Β΄΄Γ΄΄, τότε καὶ τὸ ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α΄΄Β΄΄Γ΄΄.

3. Ἡ παραλληλία μὲ εὐρεῖαν σημασίαν ($\|$), καθὼς καὶ αἱ σχέσεις σ_4, σ_8 τῆς § 1.1 εἶναι ἰσοδυναμίαι.

4. Ἔστω τὸ σύνολον $E = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Ὁρίζομεν εἰς τὸ $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ τὴν σχέσιν σ διὰ τοῦ τύπου

$$(\mu, \nu)\sigma(\mu', \nu') \Leftrightarrow \mu + \nu' = \mu' + \nu.$$

Π.χ. $(3,5)\sigma(7,9)$, διότι $3 + 9 = 7 + 5$, ἐνῷ $(6, 3)\not\sigma(5, 4)$, διότι $6 + 4 \neq 5 + 3$.

Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι μία ἰσοδυναμία, καθ' ὅσον ἰσχύουν :

(A) Οἱονδήποτε ζεῦγος (μ,ν) εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ πρὸς ἑαυτό, ἤτοι $(\mu,\nu)\sigma(\mu,\nu)$, διότι $\mu+\nu=\mu+\nu$.

(Σ) Ἂν τὸ (μ,ν) εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ (μ',ν'), τότε καὶ τὸ (μ',ν') εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ (μ,ν). Πράγματι·

$$(\mu,\nu)\sigma(\mu',\nu') \Leftrightarrow \mu+\nu'=\mu'+\nu \Leftrightarrow \mu'+\nu=\mu+\nu' \Leftrightarrow (\mu',\nu')\sigma(\mu,\nu).$$

(M) Ἂν τὸ (μ,ν) εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ (μ',ν') καὶ τοῦτο μὲ τὸ (μ'',ν''), τότε καὶ τὸ (μ,ν) εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸν (μ'',ν''). Πράγματι·

$$\left.\begin{matrix}(\mu,\nu)\ \sigma(\mu',\nu')\\(\mu',\nu')\sigma(\mu'',\nu'')\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\mu+\nu'=\mu'+\nu\\ \mu'+\nu''=\mu''+\nu'\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\mu+\nu')+(\mu'+\nu'')=(\mu'+\nu)+(\mu''+\nu') \Longleftrightarrow$$

$\mu+\nu''=\mu''+\nu \Longleftrightarrow (\mu,\nu)\sigma(\mu'',\nu'')$. Ὥστε

$$\left.\begin{matrix}(\mu,\nu)\sigma(\mu',\nu')\\(\mu',\nu')\sigma(\mu'',\nu'')\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\mu,\nu)\sigma(\mu'',\nu'').$$

2.2 Κλάσεις ἰσοδυναμίας - Σύνολον πηλίκον. Ἔστω $\sim$ μία ἰσοδυναμία εἰς τὸ σύνολον Ε. Κάθε στοιχεῖον $\alpha\in E$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἑαυτὸ $(\alpha\sim\alpha)$ καὶ ἐνδεχομένως πρὸς ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Ε. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Ε, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ α καλεῖται *κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ* α. Αὕτη συμβολίζεται συνήθως μὲ $[\alpha]$ ἢ Α ἢ κλ(α) (πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως ἀπαιτεῖται, ἐνίοτε, ὅπως γράφωμεν, ἀντιστοίχως, καὶ $[\alpha]_\sim$ ἢ $A_\sim$ ἢ $\kappa\lambda_\sim(\alpha)$, ἵνα δηλώσωμεν τὴν ἰσοδυναμίαν $\sim$, ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν θεωρεῖται ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ α).

Παρατηροῦμεν ὅτι :

1. *Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι μὴ κενὰ σύνολα.*

Πράγματι· ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κλάσεως ἑνὸς στοιχείου α, προκύπτει ὅτι αὕτη περιέχει τουλάχιστον τὸ α.

2. *Αἱ κλάσεις δύο ἰσοδυνάμων στοιχείων ταυτίζονται.*

Πράγματι· ἂν $\alpha\sim\beta$, τότε $x\in A \Leftrightarrow x\sim\alpha$, ὅπου Α εἶναι ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ α. Ἑπομένως, λόγῳ τῆς μεταβατικότητος τῆς $\sim$, $(x\sim\alpha$ καὶ $\alpha\sim\beta) \Rightarrow x\sim\beta \Leftrightarrow x\in B$, ὅπου Β εἶναι ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ β. Ὥστε $A\subseteq B$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ $B\subseteq A$ (διατί;). Ἄρα $A=B$.

3. *Αἱ κλάσεις δύο μὴ ἰσοδυνάμων στοιχείων οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν, ἤτοι, ὡς λέγομεν αὗται εἶναι ξέναι.*

Πράγματι· ἂν $\alpha\nsim\beta$, τότε αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας Α,Β αὐτῶν εἶναι ξέναι, διότι ἄλλως θὰ ὑπῆρχε $x\in A\cap B$, ὁπότε βεβαίως $x\in A \Leftrightarrow \alpha\sim x$ καὶ $x\in B \Leftrightarrow x\sim\beta$. Ἀλλά, λόγῳ τῆς μεταβατικότητος τῆς $\sim$, $(\alpha\sim x$ καὶ $x\sim\beta) \Rightarrow \alpha\sim\beta$, ὅπερ ἄτοπον.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας εἶναι μὴ κενὰ ὑποσύνολα τοῦ Ε, ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο καὶ ἐπὶ πλέον κάθε στοιχεῖον τοῦ Ε εἶναι κατατεταγμένον εἰς μίαν κλάσιν. Ἄρα ἡ ἰσοδυναμία ὁρίζει μίαν *διαμέρισιν* τοῦ Ε.

Τὸ σύνολον τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας καλεῖται *σύνολον πηλίκον τοῦ* E *διὰ τῆς* $\sim$ καὶ συμβολίζεται μὲ $E/\sim$.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν E τὸ σύνολον, τῶν μαθητῶν ἑνὸς Γυμνασίου καὶ ἡ ἰσοδυναμία $\sim$ εἰς τὸ E, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{Οἱ μαθηταὶ } x \text{ καὶ } y \text{ φοιτοῦν εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν.}$$

Ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ μαθητοῦ α εἶναι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα τὸν α καὶ τοὺς συμμαθητάς του, δηλαδὴ εἶναι ἡ τάξις μαθητῶν εἰς τὴν ὁποίαν φοιτᾶ. Τὸ E διαμερίζεται λοιπὸν εἰς τάξεις μαθητῶν, δηλαδὴ τὸ σύνολον πηλίκον $E/\sim$ εἶναι ἐδῶ τὸ σύνολον τῶν τάξεων τοῦ Γυμνασίου.

3. ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ

3.1 Ἡ ἔννοια τῆς διατάξεως. Μία σχέσις εἰς τὸ σύνολον E, ἡ ὁποία εἶναι:
(A) ἀνακλαστική, (A – Σ) ἀντισυμμετρικὴ καὶ (M) μεταβατικὴ
καλεῖται *διάταξις* (ἢ *σχέσις διατάξεως*) *εἰς τὸ* E.

Μία διάταξις συμβολίζεται συνήθως μὲ $\prec$. Ἂν ἓν στοιχεῖον α τοῦ E εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν $\prec$ μὲ στοιχεῖον β αὐτοῦ, δηλαδὴ $\alpha \prec \beta$, τότε λέγομεν ὅτι «α προηγεῖται τοῦ β» ἢ ἰσοδυνάμως «β ἕπεται τοῦ α».

Τὸ σύνολον E εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει ὁρισθῆ μία διάταξις $\prec$ καλεῖται τότε *διατεταγμένον σύνολον* (ὡς πρὸς τὴν $\prec$). Ἀκριβέστερον τὸ διατεταγμένον σύνολον παρίσταται διὰ τοῦ ζεύγους $(E, \prec)$.

Παραδείγματα :

1. Ἡ σχέσις $\leqslant$ εἶναι μία διάταξις εἰς τὸ **R**, διότι ἰσχύουν :
(A) $\alpha \leqslant \alpha$, διότι $\alpha = \alpha$.
(A – Σ) Ἂν $\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \alpha$, τότε εἶναι καὶ $\alpha = \beta$
(M) Ἂν $\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \gamma$, τότε εἶναι καὶ $\alpha \leqslant \gamma$
Ὥστε τὸ σύνολον **R** εἶναι διατεταγμένον ὡς πρὸς τὴν σχέσιν $\leqslant$.

2. Ὁμοίως ἡ σχέσις $\subseteq$ εἶναι μία διάταξις εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ (διατί;).

3. Ἡ σχέσις σ_2 (|) τῆς § 1.1 εἶναι μία διάταξις εἰς τὸ **N**, διότι ἰσχύουν :
(A) $\alpha \mid \alpha$
(A – Σ) Ἂν $\alpha|\beta$ καὶ $\beta|\alpha$, τότε ὑπάρχουν φυσικοὶ ἀριθμοὶ κ καὶ λ μὲ $\beta = \kappa\alpha$ καὶ $\alpha = \lambda\beta$, ἄρα $\beta = \kappa(\lambda\beta) = (\kappa\lambda)\beta$ καὶ ἑπομένως $\kappa\lambda = 1$, δηλαδὴ $\kappa = \lambda = 1$, ἤτοι $\alpha = \beta$
(M) Ἂν $\alpha|\beta$ καὶ $\beta|\gamma$, τότε ὑπάρχουν φυσικοὶ ἀριθμοὶ κ καὶ λ μὲ $\beta = \kappa\alpha$ καὶ $\gamma = \lambda\beta$, ἄρα $\gamma = \lambda(\kappa\alpha) = (\lambda\kappa)\alpha$, δηλαδὴ $\alpha|\gamma$.

Παρατήρησις. Μία μεταβατικὴ σχέσις εἰς τὸ σύνολον E καλεῖται καὶ γνησία διάταξις εἰς τὸ E. Οὕτω π.χ. ἡ σχέσις $<$ εἰς τὸ **R** εἶναι μία *γνησία διάταξις* εἰς τὸ **R**, ἐνῷ αὕτη δὲν εἶναι διάταξις εἰς τὸ **R** (διατί;). Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν σχέσιν τοῦ γνησίου ὑποσυνόλου $\subset$ εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ (διατί;).

Ἂν $\prec$ εἶναι μία διάταξις εἰς τὸ E, τότε, δυνάμει ταύτης, ὁρίζεται μία σχέσις $\prec^*$ εἰς τὸ E ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x \prec^* y \Leftrightarrow x \prec y \text{ καὶ } x \neq y,$$

ἡ ὁποία δὲν εἶναι διάταξις εἰς τὸ E, ἀλλὰ μία γνησία διάταξις εἰς αὐτὸ (διατί;).

3.2 Ὀλική, μερικὴ διάταξις. Ἔστω $\prec$ μία διάταξις εἰς τὸ Ε. Δύο στοιχεῖα α, β τοῦ Ε καλοῦνται *συγκρίσιμα* (διὰ τῆς $\prec$), τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ $\alpha \prec \beta$ ἢ $\beta \prec \alpha$. Οὕτω π.χ. οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ 1, $\sqrt{2}$ εἶναι συγκρίσιμοι (διὰ τῆς $\leqslant$), διότι ἰσχύει $1 \leqslant \sqrt{2}$. Γενικῶς παρατηροῦμεν ὅτι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β εἶναι συγκρίσιμοι, δηλαδὴ ἰσχύει $\alpha \leqslant \beta$ ἢ $\beta \leqslant \alpha$. Μία διάταξις εἰς τὸ Ε, ὡς π.χ. ἡ $\leqslant$ εἰς τὸ R, διὰ τὴν ὁποίαν *οἱαδήποτε* στοιχεῖα τοῦ Ε εἶναι συγκρίσιμα καλεῖται *ὁλικὴ* ἢ *γραμμικὴ διάταξις* εἰς τὸ Ε. Μία διάταξις εἰς τὸ Ε, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ὁλικὴ διάταξις, καλεῖται *μερικὴ διάταξις* εἰς τὸ Ε. Εἰς τὴν περίπτωσιν μερικῆς διατάξεως εἰς τὸ Ε ὑπάρχουν βεβαίως στοιχεῖα τοῦ Ε, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι συγκρίσιμα ὡς πρὸς τὴν ὑπ' ὄψιν διάταξιν.

Παραδείγματα :

1. Εἰς τὸ σύνολον Ε ὅλων τῶν κύκλων ὁρίζεται μία σχέσις διατάξεως $\prec$ ὑπὸ τοῦ τύπου

$x \prec y \Leftrightarrow$ ἀκτὶς τοῦ x μικρότερη ἢ ἴση τῆς ἀκτῖνος τοῦ y.

Αὕτη εἶναι μία σχέσις ὁλικῆς διατάξεως εἰς τὸ Ε (διατί;).

2. Ἡ διάταξις $\subseteq$ εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ (ὅταν τὸ Ω ἔχῃ τουλάχιστον δύο στοιχεῖα) εἶναι μία μερικὴ διάταξις εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$, διότι ἂν Α εἶναι μὴ κενὸν καὶ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Ω, τότε τὰ Α καὶ A^c δὲν εἶναι συγκρίσιμα (διατί;).

3. Ἡ σχέσις διατάξεως σ_2 (|) τοῦ παραδείγματος 3 τῆς § 3.1 εἶναι προφανῶς μία μερικὴ διάταξις εἰς τὸ N.

4. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΣΥΝΟΛΟΝ

4.1 Ἐσωτερικὴ πρᾶξις. Ἀπὸ τὰ πρῶτα χρόνια τῆς σχολικῆς ζωῆς, ὁ μαθητὴς ἐξοικειώνεται μὲ τὰς καλουμένας πράξεις, ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀριθμῶν. Ἀργότερον εἶναι εἰς θέσιν νὰ ὑψώνῃ ἀριθμὸν εἰς δύναμιν, νὰ εὑρίσκῃ τὴν ἕνωσιν ἢ τὴν τομὴν δύο συνόλων κ.λ.π. Κοινὸν χαρακτηριστικὸν ὅλων αὐτῶν τῶν «πράξεων» εἶναι ὅτι ἐκκινοῦμεν ἀπὸ *δύο* στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου διὰ νὰ καταλήξωμεν διὰ μιᾶς διαδικασίας (ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὴν συγκεκριμένην πρᾶξιν) εἰς ἓν *τρίτον* στοιχεῖον (τὸ καλούμενον ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως) τοῦ αὐτοῦ συνόλου. Οὕτω π.χ. ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 5 διὰ μὲν τῆς διαδικασίας τῆς προσθέσεως καταλήγομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 8, διὰ δὲ τῆς διαδικασίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸν 15. Ἐπειδὴ εἰς ὡρισμένας πράξεις ἀλλάσσει τὸ ἀποτέλεσμα ὅταν ἁπλῶς καὶ μόνον ἐναλλάξωμεν τὴν διαδοχὴν τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα τὸ δημιουργοῦν, ὅπως π.χ. εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο θὰ θεωροῦμεν ὅτι εἰς μίαν πρᾶξιν ἐκκινοῦμεν ἀπὸ *ζεῦγος* στοιχείων εἰς τὸ ὁποῖον καὶ ἀντιστοιχίζομεν ἓν τρίτον στοιχεῖον, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἀκόλουθον γενικὸν ὁρισμόν :

Μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκ τοῦ $E \times E = E^2$ εἰς τὸ Ε καλεῖται *ἐσωτερικὴ πρᾶξις* ἢ ἁπλῶς *πρᾶξις εἰς τὸ* Ε. Ἂν διὰ μιᾶς πράξεως $*$ εἰς τὸ Ε τὸ ζεῦζος $(\alpha, \beta) \in E^2$ ἀντιστοιχίζεται εἰς τὸ στοιχεῖον $\gamma \in E$, τότε τοῦτο εἶναι βεβαίως μονοσημάντως ὡρισμένον καὶ καλεῖται *ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως* $*$ *ἐπὶ τῶν* α, β συμβολίζεται δὲ μὲ $\alpha * \beta$, ἤτοι $\gamma = \alpha * \beta$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὅπου ὑπάρχει τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως $*$ ἐπὶ τῶν α, β λέγομεν ἰσοδυνάμως καὶ ὅτι *ἡ πρᾶξις* $\alpha * \beta$ *εἶναι ἐπιτρεπτή*.

Πρὸς συμβολισμὸν διαφόρων πράξεων χρησιμοποιοῦνται καὶ σύμβολα ὡς π.χ. τὰ $+$, $\cdot$, $\circ$, $\blacksquare$, $\triangle$, $\blacktriangle$ κ.λ.π.

Διὰ τὰς πράξεις πρόσθεσις $(+)$ καὶ ἀφαίρεσις $(-)$ εἰς τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν παρατηροῦμεν ὅτι διὰ μὲν τῆς προσθέσεως κάθε ζεῦγος (α, β) φυσικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχίζεται εἰς ἕνα καὶ μοναδικὸν φυσικὸν ἀριθμόν, τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β, π.χ. $3 + 5 = 8$, $7 + 9 = 16$ κ.ο.κ., δηλαδὴ ἡ πρόσθεσις εἶναι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ N^2 εἰς τὸ N. Ἀντιθέτως ἡ ἀφαίρεσις *δὲν* εἶναι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ N^2 εἰς τὸ N, διότι εἰς τὸ ζεῦγος $(7, 10)$ δὲν ἀντιστοιχίζεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως φυσικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ $(7 - 10) \notin N$. Πρὸς διάκρισιν τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων λέγομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶναι μία πρᾶξις ἐπὶ τοῦ N, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι μία μερικὴ πρᾶξις εἰς τὸ N.

Γενικῶς μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ E^2 εἰς τὸ E καλεῖται (ἐσωτερική) πρᾶξις *ἐπὶ* τοῦ E, ἐνῷ μία (ἐσωτερική) πρᾶξις εἰς τὸ E, ἡ ὁποία *δὲν* εἶναι πρᾶξις *ἐπὶ* τοῦ E καλεῖται *μερικὴ πρᾶξις* εἰς τὸ E.

Παραδείγματα :

1. Ὁ πολλαπλασιασμὸς $(\cdot)$ εἶναι πρᾶξις *ἐπὶ* τοῦ **N**, διότι διὰ κάθε ζεῦγος $(\alpha, \beta) \in N^2$ ὑπάρχει ἓν καὶ μοναδικὸν *γινόμενον* $\alpha \cdot \beta \in N$. Ἀντιθέτως ἡ διαίρεσις $(:)$ εἶναι *μερικὴ* πρᾶξις εἰς τὸ **N**, διότι $(3:5) \notin N$.

2. Ἡ «ὕψωσις εἰς δύναμιν», διὰ τὴν ὁποίαν ἀντὶ $\alpha * \beta$ γράφομεν α^β εἶναι πρᾶξις ἐπὶ τοῦ **N**, διότι διὰ κάθε $(\alpha, \beta) \in N^2$ εἶναι καὶ $\alpha^\beta \in N$. Ἀντιθέτως αὕτη εἶναι μερικὴ πρᾶξις εἰς τὸ σύνολον Q τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διότι ἡ πρᾶξις $(-2)^{\frac{1}{2}}$ δὲν εἶναι ἐπιτρεπτή.

3. Ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ συνόλων εἶναι πράξεις ἐπὶ τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$.

4. Ἂν $\mathscr{F}_A$ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν συναρτήσεων μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ A καὶ τιμὰς εἰς τὸ A, τότε ἡ σύνθεσις συναρτήσεων (Πρβλ. § 2.2 τοῦ Κεφ. I) εἶναι πρᾶξις *ἐπὶ* τοῦ $\mathscr{F}_A$, διότι διὰ κάθε ζεῦγος συναρτήσεων $(f, g) \in \mathscr{F}_A^2$ ἡ σύνθεσις $f \circ g \in \mathscr{F}_A$.

Παρατήρησις. Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ R ἔχει τὴν ἰδιότητα : τὸ γινόμενον δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπίσης φυσικὸς ἀριθμός. Ἡ ἰδιότης αὕτη δὲν ὑφίσταται διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς διαιρέσεως εἰς τὸ R, διότι τὸ πηλίκον $3:5$ δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός. Τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζομεν λέγοντες ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι *κλειστὴ* εἰς τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως *δὲν* εἶναι κλειστὴ εἰς τὸ N. Γενικῶς μία πρᾶξις $*$ εἰς τὸ σύνολον E καλεῖται *κλειστὴ* εἰς ἓν ὑποσύνολον A τοῦ E τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ζεῦγος (α, β) στοιχείων τοῦ A τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως $\alpha * \beta$ ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὸ A.

'Αντιμεταθετικαὶ πράξεις. Μία πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ Ε καλεῖται *ἀντιμεταθετική* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :

(Α) $\qquad \alpha * \beta = \beta * \alpha \quad \forall\ \alpha \in E$ καὶ $\beta \in E$.

Οὕτω :

1. Ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τοῦ R εἶναι πράξεις ἀντιμεταθετικαί.

2. Ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ ἐπὶ τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$ εἶναι ὁμοίως ἀντιμεταθετικαὶ πράξεις.

3. Ἀντιθέτως ἡ «ὕψωσις εἰς δύναμιν» ἐπὶ τοῦ N δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ πρᾶξις, διότι π.χ. $2^3 \neq 3^2$.

Προσεταιριστικαὶ πράξεις. Μία πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ Ε καλεῖται *προσεταιριστική* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :

(Π) $\qquad (\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma) \quad \forall \quad \alpha \in E,\ \beta \in E$ καὶ $\gamma \in E$.

Οὕτω π.χ. ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τοῦ R ὡς ἐπίσης ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ ἐπὶ τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$ εἶναι πράξεις προσεταιριστικαί, ἐνῷ ἀντιθέτως ἡ «ὕψωσις εἰς δύναμιν» ἐπὶ τοῦ N δὲν εἶναι, διότι

$$(2 * 1) * 3 = (2^1)^3 = 8 \quad \text{καὶ} \quad 2 * (1 * 3) = 2^{(1^3)} = 2,$$

δηλαδὴ $(2 * 1) * 3 \neq 2 * (1 * 3)$.

Γενικαὶ παρατηρήσεις. Μὲ $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3$ συμβολίζομεν τὸ $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$, ἤτοι $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 = (\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$. Ὁμοίως ὁρίζομεν $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4 = (\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3) * \alpha_4$ καὶ γενικῶς $\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_{\nu-1} * \alpha_\nu = (\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_{\nu-1}) * \alpha_\nu$.

1. Ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι προσεταιριστικὴ δυνάμεθα π.χ. εἰς τὸ $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4 * \alpha_5$ νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσαδήποτε *διαδοχικὰ* στοιχεῖα μὲ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως ἐπὶ αὐτῶν. Οὕτω π.χ. $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4 * \alpha_5 = (\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3) * \alpha_4 * \alpha_5 = \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3) * \alpha_4 * \alpha_5 = \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4) * \alpha_5$.

2. Ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική, τότε δυνάμεθα π.χ. εἰς τὸ $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4 * \alpha_5$:

α) Νὰ ἀντιμεταθέσωμεν δύο *οἱαδήποτε* στοιχεῖα. Π.χ. τὰ διαδοχικὰ α_3 καὶ α_4, διότι $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4 * \alpha_5 = \alpha_1 * \alpha_2 * (\alpha_3 * \alpha_4) * \alpha_5 = \alpha_1 * \alpha_2 * (\alpha_4 * \alpha_3) * \alpha_5 = \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_4 * \alpha_3 * \alpha_5$ τὰ μὴ διαδοχικὰ α_2 καὶ α_5 δι' ἐπανηλειμμένης ἀντιμεταθέσεως διαδοχικῶν ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4 * \alpha_5 = \alpha_1 * \alpha_3 * \alpha_2 * \alpha_5 * \alpha_4 = \alpha_1 * \alpha_3 * \alpha_5 * \alpha_2 * \alpha_4 = \alpha_1 * \alpha_5 * \alpha_3 * \alpha_4 * \alpha_2.$$

β) Νὰ ἀντικαταστήσωμεν *οἱαδήποτε* στοιχεῖα μὲ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως ἐπὶ αὐτῶν, διότι δυνάμεθα πρῶτον νὰ τὰ καταστήσωμεν διαδοχικά.

3. Τὸ $\underbrace{\alpha * \alpha * \ldots * \alpha}_{\nu \text{ φορές}}$ γράφομεν συντόμως $*^\nu\alpha$. Εἰδικῶς τὰ $+^\nu\alpha$ καὶ $\cdot^\nu\alpha$ παριστῶμεν ἀντιστοίχως μὲ $\nu\alpha$ καὶ α^ν, ἤτοι $+^\nu\alpha = \nu\alpha$ καὶ $\cdot^\nu\alpha = \alpha^\nu$.

Οὐδέτερον στοιχεῖον πράξεως. Ἔστω $*$ μία πρᾶξις εἰς τὸ σύνολον Ε. Ἓν στοιχεῖον $\omega \in E$ καλεῖται *οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς* $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ :

(Ο) $\qquad \omega * \alpha = \alpha * \omega = \alpha \quad \forall\ \alpha \in E$.

Οὕτω :

Οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $+$ ἐπὶ τοῦ R εἶναι τὸ 0

» » τοῦ $\cdot$ ἐπὶ τοῦ R εἶναι τὸ 1

» » τῆς $\cup$ ἐπὶ τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$ εἶναι τὸ $\varnothing$

» » τῆς $\cap$ ἐπὶ τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$ εἶναι τὸ Ω.

Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον μιᾶς πράξεως εἶναι *μονοσημάντως* ὡρισμένον. Πράγματι· ἂν ἡ πρᾶξις $*$ ἔχῃ δύο οὐδέτερα στοιχεῖα τὰ ω καὶ ω', τότε ἀφ' ἑνὸς μὲν $\omega * \omega' = \omega'$, διότι τὸ ω εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $*$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $\omega * \omega' = \omega$, διότι καὶ τὸ ω' εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $*$. Ἄρα $\omega = \omega'$.

Συμμετρικὰ στοιχεῖα ὡς πρὸς πρᾶξιν. Ἔστω $*$ μία πρᾶξις εἰς τὸ E, ἡ ὁποία ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ ω. Δύο στοιχεῖα α, β τοῦ E καλοῦνται *συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν* $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$(\Sigma) \qquad \alpha * \beta = \beta * \alpha = \omega.$$

Τὸ α λέγεται τότε *συμμετρικὸν τοῦ* β *ὡς πρὸς τὴν* $*$ καὶ ἰσοδύναμως τὸ β λέγεται *συμμετρικὸν τοῦ* α *ὡς πρὸς τὴν* $*$. Οὕτω :

1. Συμμετρικὸν τοῦ $\alpha \in R$ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν εἶναι ὁ ἀντίθετός του $-\alpha \in R$.

2. Ἂν $\alpha \in R - \{0\}$, τότε τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶναι ὁ ἀντίστροφός του $\frac{1}{\alpha} \in R - \{0\}$.

3. Συμμετρικὸν ἑνὸς μὴ κενοῦ συνόλου $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ ὡς πρὸς τὴν ἕνωσιν δὲν ὑπάρχει. Ὁμοίως δὲν ὑπάρχει καὶ συμμετρικὸν ἑνὸς γνησίου ὑποσυνόλου τοῦ Ω ὡς πρὸς τὴν τομὴν (διατί;).

Ὁμαλὸν στοιχεῖον ὡς πρὸς πρᾶξιν. Ἔστω $*$ μία πρᾶξις ἐπὶ τοῦ E. Ἓν στοιχεῖον α καλεῖται *ὁμαλὸν* ἢ *ἁπλοποιήσιμον ὡς πρὸς τὴν* $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε $x \in E$ καὶ $y \in E$ ἰσχύουν :

$$\alpha * x = \alpha * y \Rightarrow x = y \quad \text{καὶ} \quad x * \alpha = y * \alpha \Rightarrow x = y.$$

Οὕτως ὡς πρὸς μὲν τὴν πρόσθεσιν κάθε στοιχεῖον $\alpha \in R$ εἶναι ὁμαλόν, ὡς πρὸς δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν κάθε στοιχεῖον $\alpha \in R - \{0\}$ εἶναι ὁμαλόν, ἐνῷ ἀντιθέτως τὸ 0 δὲν εἶναι ὁμαλόν, διότι π.χ.

$$0 \cdot 3 = 0 \cdot 5 \not\Rightarrow 3 = 5.$$

Ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις ὡς πρὸς ἄλλην. Ἔστωσαν δύο πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου E. Ἡ πρᾶξις $*$ καλεῖται *ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν* $\blacksquare$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε $\alpha \in E$, $\beta \in E$ καὶ $\gamma \in E$ ἰσχύουν :

$$(E) \quad \alpha * (\beta \blacksquare \gamma) = (\alpha * \beta) \blacksquare (\alpha * \gamma) \text{ καὶ } (\beta \blacksquare \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \blacksquare (\gamma * \alpha).$$

Παρατήρησις. Ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, τότε προφανῶς ἰσχύει

$$\alpha * (\beta \blacksquare \gamma) = (\alpha * \beta) \blacksquare (\alpha * \gamma) \Leftrightarrow (\beta \blacksquare \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \blacksquare (\gamma * \alpha)$$

καὶ ἑπομένως μία ἀντιμεταθετικὴ πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ E εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\blacksquare$ (ἐπὶ τοῦ E) τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$\alpha * (\beta \blacksquare \gamma) = (\alpha * \beta) \blacksquare (\alpha * \gamma) \quad \forall \ \alpha \in E, \beta \in E \text{ καὶ } \gamma \in E.$$

Οὕτω :

1. Ἐπὶ τοῦ R ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν οὗτος εἶναι ἀντιμεταθετικὴ πρᾶξις, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἰσχύει

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad \forall \quad \alpha\in R,\ \beta\in R \text{ καὶ } \gamma\in R.$$

Ἀντιθέτως ἡ πρόσθεσις δὲν εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, διότι $2+(3\cdot 5)\neq(2+3)\cdot(2+5)$.

2. Ἐπὶ τοῦ $\mathscr{P}(\Omega)$ ἡ ἕνωσις εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν τομήν, διότι αὕτη εἶναι ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἰσχύει

$$A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma) \quad \forall \quad A\in\mathscr{P}(\Omega),\ B\in\mathscr{P}(\Omega) \text{ καὶ } \Gamma\in\mathscr{P}(\Omega).$$

Ὁμοίως καὶ ἡ τομὴ εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν ἕνωσιν, διότι αὕτη εἶναι ἐπίσης ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἰσχύει

$$A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma) \quad \forall \quad A\in\mathscr{P}(\Omega),\ B\in\mathscr{P}(\Omega) \text{ καὶ } \Gamma\in\mathscr{P}(\Omega).$$

4.2 Ἐξωτερικὴ πρᾶξις. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἔχομεν συναντήσει «πράξεις» αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ στοιχείων ἀνηκόντων εἰς διαφορετικὰ σύνολα μὲ ἀποτέλεσμα ἀνῆκον εἰς τὸ ἓν ἐκ τῶν συνόλων τούτων. Π.χ. τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἑνὸς πολυωνύμου ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ὅπου τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἐπίσης ἓν πολυώνυμον. Τὰς πράξεις αὐτάς, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰς τοιαύτας τῆς προηγουμένης παραγράφου, ὀνομάζομεν *ἐξωτερικὰς* πράξεις. Ἀκριβέστερον ἡ ἔννοια τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

Ἔστωσαν δύο μὴ κενὰ σύνολα Λ καὶ Ε. Μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις (συνάρτησις) τοῦ $\Lambda\times E$ εἰς τὸ Ε καλεῖται *ἐξωτερικὴ πρᾶξις ἐπὶ τοῦ* Ε καὶ συμβολίζεται συνήθως μὲ $\cdot$. Οὕτω διὰ μιᾶς ἐξωτερικῆς πράξεως $\cdot$ κάθε ζεῦγος $(\lambda,x)\in\Lambda\times E$ ἀντιστοιχίζεται εἰς ἓν καὶ μοναδικὸν στοιχεῖον $y\in E$, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἀποτέλεσμα τῆς (ἐξωτερικῆς) πράξεως ἐπὶ τῶν στοιχείων λ, x καὶ συμβολίζεται μὲ $\lambda\cdot x$, ἤτοι

$$y=\lambda\cdot x.$$

Συνήθως τὸ σύμβολον $\cdot$ παραλείπεται, δηλαδὴ γράφομεν λx καὶ ἐννοοῦμεν $\lambda\cdot x$, ὡς συμβαίνει διὰ κάθε πρᾶξιν συμβολιζομένην μὲ $\cdot$.

Παραδείγματα :

1. Ὁ πολλαπλασιασμὸς διανύσματος τοῦ χώρου ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν εἶναι μία ἐξωτερικὴ πρᾶξις εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $\Lambda=R$ καὶ Ε εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου.

2. $\Lambda=R$, $E=\mathscr{F}(A,R)$ τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ μὴ κενὸν σύνολον Α. Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ συναρτήσεως ἐπὶ ἀριθμόν, ἡ ὁποία διὰ $(\lambda,f)\in R\times\mathscr{F}(A,R)$ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$g=\lambda\cdot f \iff g(x)=\lambda f(x) \quad \forall \quad x\in A$$

εἶναι προφανῶς μία ἐξωτερικὴ πρᾶξις ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}(A,R)$.

Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ E ἐκτὸς τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως · καὶ μίαν ἐσωτερικὴν πρᾶξιν $*$ Θὰ λέγωμεν ὅτι *ἡ ἐξωτερικὴ πρᾶξις · εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν (ἐσωτερικήν) πρᾶξιν* $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$\lambda(x * y) = (\lambda x) * (\lambda y) \quad \forall\ \lambda \in \Lambda,\ x \in E \text{ καὶ } y \in E.$$

Π.χ. ἐπὶ τοῦ συνόλου E τῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου ὁρίζονται, ὡς γνωστόν, δύο πράξεις, μία ἐξωτερική, ὁ πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ διανύσματος ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν καὶ μία ἐσωτερική, ἡ πρόσθεσις $(+)$ διανυσμάτων, διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύει

$$\lambda(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda\vec{V}_1 + \lambda\vec{V}_2 \quad \forall\ \lambda \in R,\ \vec{V}_1 \in E \text{ καὶ } \vec{V}_2 \in E.$$

Οὕτως, ὁ πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν εἶναι ἐπιμεριστικὴ πρᾶξις ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων τοῦ χώρου.

5. ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ.

5.1 Ἡ ἔννοια τοῦ ἰσομορφισμοῦ. Εἴδομεν εἰς τὴν § 2.2 τοῦ Κεφ. I ὅτι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις (συνάρτησις) f ἑνὸς μὴ κενοῦ συνόλου A ἐπὶ ἑνὸς ἄλλου ἐπίσης μὴ κενοῦ συνόλου A' παρέχει τὴν εὐχέρειαν ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ «μεταβαίνωμεν» ἀπὸ ἓν στοιχεῖον $x \in A$ εἰς ἓν ἀκριβῶς στοιχεῖον $x' \in A'$, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ τῆς ἀντιστρόφου f^{-1} νὰ «ἐπιστρέφωμεν» ἀπὸ τὸ x' εἰς τὸ x. Τοῦτο ἔχει ἀξιοποιηθῆ καταλλήλως, ὅταν τὰ σύνολα A καὶ A' εἶναι ἐφωδιασμένα μὲ πράξεις.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ὅτι $*$ εἶναι μία (ἐσωτερική) πρᾶξις ἐπὶ τοῦ A. Τότε ὁρίζεται καὶ ἐπὶ τοῦ A' μία πρᾶξις $\blacksquare$ ὡς κατωτέρω :

$$\begin{tikzcd}
\alpha' \arrow[d, "f^{-1}"] & \blacksquare & \beta' \arrow[d, "f^{-1}"] & \underset{\text{ὁρσ}}{=} & \gamma' \\
\alpha & * & \beta & = & \gamma \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

δηλαδὴ διὰ τυχόντα α', β' ἐν A' θεωροῦμεν τὰ ἀντίστοιχα α, β αὐτῶν ἐν A διὰ τῆς ἀντιστρόφου f^{-1}, ὁπότε τὸ ἀποτέλεσμα γ τῆς πράξεως $*$ ἐπὶ τῶν α, β ἀντιστοιχίζεται διὰ τῆς f εἰς τὸ $\gamma' \in A'$, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὡς τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως $\blacksquare$ ἐπὶ τῶν α', β'.

Πολλάκις συμβαίνει ἡ πρᾶξις $\blacksquare$ νὰ εἶναι ἁπλουστέρα τῆς $*$ καὶ ἐκμεταλλευόμενοι τοῦτο νὰ ἐκτελοῦμεν τὴν $*$ ἐμμέσως διὰ τῆς $\blacksquare$ ὡς κατωτέρω :

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[d, "f"] & * & \beta \arrow[d, "f"] & = & \gamma \\
\alpha' & \blacksquare & \beta' & = & \gamma' \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

δηλαδὴ εὑρίσκομεν πρῶτον τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα α', β' ἐν A' τῶν α, β διὰ τῆς f καὶ ἀκολούθως τὸ ἀποτέλεσμα γ' τῆς $\blacksquare$ ἐπὶ τούτων, ὁπότε τὸ ἀντίστοιχον τοῦ γ' διὰ τῆς ἀντιστρόφου f^{-1} εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα γ τῆς $*$ ἐπὶ τῶν α, β.

Οὕτω π.χ. ἂν A εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $1\overbrace{0\,0\ldots0}^{\nu\ \text{μηδενικά}}$ μὲ πρᾶξιν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ $A' = N$, τότε

$$\begin{array}{ccccc} 1\overbrace{00000}^{5\ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\alpha}} & & 1\overbrace{0000}^{4\ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\alpha}} & = & 1\ \overbrace{000000000}^{9\ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\alpha}} \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \uparrow f^{-1} \\ 5 & + & 4 & = & 9 \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ὁρισμόν :

Ἔστωσαν δύο μὴ κενὰ σύνολα E καὶ E′ ἐπὶ τῶν ὁποίων θεωροῦμεν ἀντιστοίχως τὰς (ἐσωτερικὰς) πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$. Μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ E ἐπὶ τοῦ E′ καλεῖται *ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις* $*$ *καὶ* $\blacksquare$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$f(x * y) = f(x) \blacksquare f(y) \ \forall \ x \in E \text{ καὶ } y \in E.$$

Ἂν ὑπάρχῃ εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ E ἐπὶ τοῦ E′, ὡς ἀνωτέρω, τότε τὰ σύνολα E καὶ E′ καλοῦνται *ἰσόμορφα ὡς πρὸς τὰς πράξεις* $*$ *καὶ* $\blacksquare$.

Παραδείγματα :

1. $E = R^+$ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν μὲ πρᾶξιν $\cdot$.
$E' = R$ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πρᾶξιν $+$,

$f = \lambda o\gamma$ (ὁ δεκαδικὸς λογάριθμος) : $R^+ \ni x \xrightarrow{f} \lambda o\gamma x \in R$.

Ἡ $f = \lambda o\gamma$ εἶναι, ὡς γνωστόν, ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ R^+ ἐπὶ τοῦ R καὶ μάλιστα ἰσχύει

$$\lambda o\gamma(xy) = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y,$$

δηλαδὴ ὁ λογ εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις $\cdot$ καὶ $+$.

Οὕτω διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ γινομένου αβ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

$$\text{Διὰ χρήσεως λογαριθμικῶν πινάκων} \dashrightarrow \begin{array}{ccccc} \alpha & & \beta & = & \alpha\beta \\ \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow & \dashrightarrow & \uparrow \\ \lambda o\gamma\alpha & + & \lambda o\gamma\beta & = & \lambda o\gamma(\alpha\beta), \end{array}$$

δηλαδὴ ἓν γινόμενον εὑρίσκεται δι᾽ ἁπλῆς προσθέσεως.

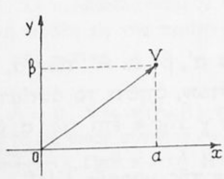
Ὁμοίως, ἐπειδὴ ὁ λογ εἶναι ἐπίσης εἷς ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις : καὶ $-$ (διατί;), ἓν πηλίκον εὑρίσκεται δι᾽ ἁπλῆς ἀφαιρέσεως.

Τὰ ἀνωτέρω ἐξηγοῦν τὴν εὐρυτάτην χρῆσιν εἰς τὴν πρακτικὴν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων καὶ τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος.

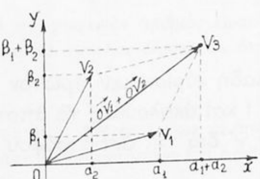
2. $E = C$ τὸ σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μὲ πρᾶξιν $+$,

E′ : τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐχόντων ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν O τῶν ἀξόνων μὲ πρᾶξιν $+$,

$f : C \to E'$ διὰ τῆς ὁποίας ἀντίστοιχον τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha + \beta i$ εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OV}$ μὲ συντεταγμένας α, β.



Σχ. 21



Σχ. 22

Ἡ f εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως μιγαδικῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς προσθέσεως διανυσμάτων (διατί;).

5.2 Βασικὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν ἰσομορφισμῶν. Ἂν f εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ E ἐπὶ τοῦ E′ ὡς πρὸς τὰς πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$, τότε ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα :

5.2.1. *Ἡ f^{-1}, ἀντίστροφος τῆς f, εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ E′ ἐπὶ τοῦ E ὡς πρὸς τὰς πράξεις $\blacksquare$ καὶ $*$.*

Πράγματι· ἡ f^{-1}, ὡς ἀντίστροφος ἀμφιμονοσημάντου ἀπεικονίσεως, εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις (συνάρτησις) τοῦ E′ ἐπὶ τοῦ E (Πρβλ. § 2.2 τοῦ Κεφ. I). Ἂν τώρα x' καὶ y' εἶναι τυχόντα στοιχεῖα τοῦ E′, τότε ταῦτα διὰ τῆς συναρτήσεως f^{-1} ἀντιστοιχίζονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ στοιχεῖα x καὶ y τοῦ E, ἤτοι

$$x = f^{-1}(x') \text{ καὶ } y = f^{-1}(y') \quad \text{ἢ} \quad \text{ἰσοδυνάμως} : x' = f(x) \text{ καὶ } y' = f(y).$$

Ἑπομένως, ἐπειδὴ ἡ f εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$, θὰ ἔχωμεν

$$x' \blacksquare y' = f(x) \blacksquare f(y) = f(x * y),$$

ἄρα καὶ

$$f^{-1}(x' \blacksquare y') = f^{-1}(f(x * y)) = x * y = f^{-1}(x') * f^{-1}(y'),$$

ἤτοι

$$f^{-1}(x' \blacksquare y') = f^{-1}(x') * f^{-1}(y') \ \forall \ x' \in E' \text{ καὶ } y' \in E',$$

δηλαδὴ ἡ f^{-1} εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς τοῦ E′ ἐπὶ τοῦ E ὡς πρὸς τὰς πράξεις $\blacksquare$ καὶ $*$.

5.2.2 *Ἡ πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ E εἶναι ἀντιμεταθετικὴ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πρᾶξις $\blacksquare$ ἐπὶ τοῦ E′ εἶναι ἀντιμεταθετική.*

Πράγματι· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀντιμεταθετικότης τῆς $*$ συνεπάγεται τὴν ἀντιμεταθετικότητα τῆς $\blacksquare$, διότι τὸ ἀντίστροφον προκύπτει τότε ἐκ τούτου καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος 5.2.1, ἡ f^{-1} εἶναι ἐπίσης ἰσομορφισμός.

Ἔστωσαν λοιπὸν δύο τυχόντα στοιχεῖα x' καὶ y' τοῦ E′. Ταῦτα διὰ τῆς f^{-1} ἀντιστοιχίζονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ στοιχεῖα x καὶ y τοῦ E, ἤτοι

$$x = f^{-1}(x') \text{ καὶ } y = f^{-1}(y') \quad \text{ἢ} \quad \text{ἰσοδυνάμως} : x' = f(x) \text{ καὶ } y' = f(y),$$

ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ f εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$, θὰ ἔχωμεν

$$x' \blacksquare y' = f(x) \blacksquare f(y) = f(x * y).$$

Ἀλλά, λόγῳ καὶ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τῆς $*$, ἰσχύει

$$f(x * y) = f(y * x) = f(y) \blacksquare f(x) = y' \blacksquare x'.$$

Ἄρα $$x' \blacksquare y' = y' \blacksquare x' \ \forall \ x' \in E \text{ καὶ } y' \in E',$$

δηλαδὴ καὶ ἡ πρᾶξις $\blacksquare$ εἶναι ἀντιμεταθετική.

5.2.3 *Ἡ πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ E εἶναι προσεταιριστικὴ τότε καὶ μόνον τότε,* *ἂν ἡ πρᾶξις $\blacksquare$ ἐπὶ τοῦ Ε′ εἶναι προσεταιριστική.*

Πράγματι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ προσεταιριστικότης τῆς $*$ συνεπάγεται τὴν προσεταιριστικότητα τῆς $\blacksquare$.

Ἔστωσαν λοιπὸν τυχόντα στοιχεῖα x′, y′ καὶ z′ τοῦ Ε′. Ταῦτα διὰ τῆς f^{-1} ἀντιστοιχίζονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ στοιχεῖα x, y καὶ z τοῦ Ε, ἤτοι

$$x = f^{-1}(x'),\ y = f^{-1}(y') \text{ καὶ } z = f^{-1}(z')$$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$x' = f(x),\quad y' = f(y) \text{ καὶ } z' = f(z),$$

ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ f εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$, θὰ ἔχωμεν

$$(x' \blacksquare y') \blacksquare z' = (f(x) \blacksquare f(y)) \blacksquare f(z) = f(x * y) \blacksquare f(z) = f((x * y) * z).$$

Ἀλλά, λόγῳ καὶ τῆς προσεταιριστικότητος τῆς $*$, ἰσχύει

$$f((x * y) * z) = f(x * (y * z)) = f(x) \blacksquare f(y * z) = f(x) \blacksquare (f(y) \blacksquare f(z)) =$$
$$= x' \blacksquare (y' \blacksquare z').$$ Ἄρα

$$(x' \blacksquare y') \blacksquare z' = x' \blacksquare (y' \blacksquare z') \quad \forall \quad x' \in E',\ y' \in E' \text{ καὶ } z' \in E',$$

δηλαδὴ καὶ ἡ πρᾶξις $\blacksquare$ εἶναι προσεταιριστική.

5.2.4 *Ἂν ἡ πρᾶξις $*$ ἐπὶ τοῦ Ε ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ ω, τότε καὶ ἡ πρᾶξις $\blacksquare$ ἐπὶ τοῦ Ε′ ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ $f(\omega) = \omega' \in E'$.*

Πράγματι· ἔστω x′ τυχὸν στοιχεῖον τοῦ Ε′ καὶ ἔστω x τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ διὰ τῆς f^{-1}, ἤτοι $x = f^{-1}(x')$ ἢ ἰσοδυνάμως $x' = f(x)$. Ἐπειδὴ τὸ ω εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς $*$ θὰ ἰσχύουν

$$\omega * x = x \quad \text{καὶ} \quad x * \omega = x,$$

ὁπότε, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ f εἶναι εἷς ἰσομορφισμὸς ὡς πρὸς τὰς πράξεις $*$ καὶ $\blacksquare$, θὰ ἔχωμεν ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν

$$x' = f(x) = f(\omega * x) = f(\omega) \blacksquare f(x) = f(\omega) \blacksquare x',$$

ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ

$$x' = f(x) = f(x * \omega) = f(x) \blacksquare f(\omega) = x' \blacksquare f(\omega),$$

ἤτοι

$$f(\omega) \blacksquare x' = x' \quad \text{καὶ} \quad x' \blacksquare f(\omega) = x' \quad \forall\ x' \in E',$$

δηλαδὴ τὸ $\omega' = f(\omega)$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς πράξεως $\blacksquare$.

6. ΟΜΑΣ.

6.1 Ἡ ἔννοια τῆς ὁμάδος. Παρετηρήσαμεν ἤδη ὅτι πράξεις ὁριζόμεναι εἰς διαφορετικὰ σύνολα ἔχουν κοινὰς ἰδιότητας π.χ. ἡ πρόσθεσις εἰς τὸ R καὶ ἡ τομὴ εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ εἶναι πράξεις ἀντιμεταθετικαί, προσεταιριστικαί, ἔχουν οὐδέτερον στοιχεῖον κ.λ.π. Τὸ φαινόμενον τοῦτο εἶναι σύνηθες εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ ὡδήγησεν εἰς τὴν κατάταξιν τοιούτων συνόλων (εἰς τὰ ὁποῖα ὁρίζονται πράξεις μὲ κοινὰς ἰδιότητας) εἰς κατηγορίας μὲ ἰδιαιτέραν ὀνομασίαν.

Ἔστωσαν ἓν μὴ κενὸν σύνολον Ε καὶ $*$ μία (ἐσωτερική) πρᾶξις ἐπὶ τούτου. Τὸ Ε καλεῖται *ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν* $*$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

(Π) *ἡ πρᾶξις* $*$ *εἶναι προσεταιριστική*

(Ο) *ἡ πρᾶξις* $*$ *ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον* $\omega \in E$

(Σ) *κάθε στοιχεῖον τοῦ* Ε *ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν* $*$.

Ἂν ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι ἐπὶ πλέον καὶ ἀντιμεταθετική, τότε ἡ ὁμὰς Ε καλεῖται, εἰδικώτερον, *ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς* ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $*$.

Παρατηρήσεις :

1. *Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον* ω *τῆς* $*$ *εἶναι μοναδικὸν* (Πρβλ. § 4.1).

2. *Τὸ συμμετρικὸν τυχόντος στοιχείου* $\alpha \in E$ *ὡς πρὸς τὴν* $*$ *εἶναι ἐπίσης μοναδικόν.* Πράγματι· ἂν β καὶ γ εἶναι συμμετρικὰ τοῦ α ὡς πρὸς τὴν $*$, τότε θὰ ἔχωμεν

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha = \omega \quad \text{καὶ} \quad \alpha * \gamma = \gamma * \alpha = \omega,$$

ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ $*$ εἶναι προσεταιριστική, θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\beta = \beta * \omega = \beta * (\alpha * \gamma) = (\beta * \alpha) * \gamma = \omega * \gamma = \gamma.$$

Τὸ μοναδικὸν συμμετρικὸν τοῦ α ὡς πρὸς τὴν $*$ παριστῶμεν συνήθως μὲ $\hat{\alpha}$.

Παραδείγματα :

1. Τὸ σύνολον Ζ τῶν ἀκεραίων εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, διότι :

(Π) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \;\; \forall \; \alpha \in Z, \beta \in Z$ καὶ $\gamma \in Z$ (προσεταιριστικότης),

(Ο) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \;\; \forall \; \alpha \in Z$, δηλαδὴ τὸ 0 $(0 \in Z)$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως.

(Σ) $\alpha + (-\alpha) = 0 \;\; \forall \; \alpha \in Z$, δηλαδὴ κάθε ἀκέραιος α ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν τὸν ἐπίσης ἀκέραιον $-\alpha$.

Ἀντιθέτως τὸ σύνολον Ζ δὲν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, διότι, ἂν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι προσεταιριστικὸς καὶ ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 1 $(1 \in Z)$, ἐν τούτοις κάθε ἀκέραιος, διάφορος τῶν -1 καὶ 1, δὲν ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐν Ζ (διατί;).

2. Τὸ σύνολον Α τῶν ἀρτίων ἀκεραίων εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, διότι ἡ πρόσθεσις εἶναι προσεταιριστική, ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 0 $(0 \in A)$ καὶ κάθε ἄρτιος α ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν τὸν ἐπίσης ἄρτιον $-\alpha$.

Ἀντιθέτως τὸ σύνολον Α τῶν ἀρτίων δὲν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, διότι δὲν ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐν Α (διατί;).

3. Τὸ σύνολον Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, διότι ἡ πρόσθεσις εἶναι προσεταιριστική, ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 0 $(0 \in Q)$ καὶ κάθε ρητὸς α ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν τὸν ἐπίσης ρητὸν $-\alpha$.

Ἐπίσης τὸ σύνολον $Q^* = Q - \{0\}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν τῶν διαφόρων τοῦ 0 εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι προσεταιριστικός, ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 1 $(1 \in Q^*)$ καὶ κάθε ρητὸς $\alpha \neq 0$ ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸν ἐπίσης ρητὸν $\frac{1}{\alpha} \neq 0$.

4. Τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν. Ὁμοίως τὸ σύνολον $R^* = R - \{0\}$ εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν.

5. Ἔστωσαν $E = \{0, 1, 2\}$ καὶ $*$ μία πρᾶξις ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ πίνακος :

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

δηλαδὴ $\begin{cases} 0 * 0 = 0, & 1 * 0 = 1, & 2 * 0 = 2 \\ 0 * 1 = 1, & 1 * 1 = 2, & 2 * 1 = 0 \\ 0 * 2 = 2, & 1 * 2 = 0, & 2 * 2 = 1 \end{cases}$

Εὐκόλως προκύπτει ὅτι ἡ πρᾶξις $*$ εἶναι προσεταιριστική, ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 0 καὶ ὅτι τὰ στοιχεῖα 1 καὶ 2 εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν $*$, δηλαδὴ ὅτι τὸ σύνολον E εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $*$.

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ὁμάδων ἀποτελοῦν ἀντιμεταθετικὰς ὁμάδας (διατί;).

6.2 Βασικὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὁμάδων. Ἂν E εἶναι μία ὁμὰς μὲ πρᾶξιν $*$, τότε ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα :

6.2.1 *Κάθε στοιχεῖον* $\alpha \in E$ *εἶναι ἁπλοποιήσιμον (ὁμαλόν).*

Πράγματι· ἂν $\alpha * x = \alpha * y$, τότε, ἐπειδὴ ὑπάρχει τὸ συμμετρικὸν $\hat{\alpha}$ τοῦ α ὡς πρὸς τὴν $*$, θὰ ἔχωμεν

$$\hat{\alpha} * (\alpha * x) = \hat{\alpha} * (\alpha * y)$$

καὶ λόγῳ τῆς ἐπιμεριστικότητος τῆς πράξεως $*$,

$$(\hat{\alpha} * \alpha) * x = (\hat{\alpha} * \alpha) * y \quad \text{ἢ} \quad \omega * x = \omega * y \quad \text{ἢ} \quad x = y.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $\alpha * x = \alpha * y \Rightarrow x = y$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι $x * \alpha = y * \alpha \Rightarrow x = y$. Ἄρα τὸ στοιχεῖον α εἶναι ἁπλοποιήσιμον.

6.2.2 *Ἂν* α, β *εἶναι τυχόντα στοιχεῖα ἐν* E, *τότε τόσον ἡ ἐξίσωσις* $x * \beta = \alpha$, *ὅσον καὶ ἡ ἐξίσωσις* $\beta * x = \alpha$ *ἔχει μίαν μοναδικὴν λύσιν ἐν* E.

Πράγματι· (i) $x * \beta = \alpha \Leftrightarrow (x * \beta) * \hat{\beta} = \alpha * \hat{\beta}$, διότι τὸ β κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα 6.2.1 εἶναι ἁπλοποιήσιμον. Ἀλλά, λόγῳ τῆς προσεταιριστικότητος τῆς $*$, $(x * \beta) * \hat{\beta} = x * (\beta * \hat{\beta}) = x * \omega = x$. Ἄρα

$$x * \beta = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha * \hat{\beta}.$$

(ii) Ὁμοίως: $\beta * x = \alpha \Leftrightarrow \hat{\beta} * (\beta * x) = \hat{\beta} * \alpha \Leftrightarrow (\hat{\beta} * \beta) * x = \hat{\beta} * \alpha$ $\Leftrightarrow \omega * x = \hat{\beta} * \alpha \Leftrightarrow x = \hat{\beta} * \alpha$.

6.2.3 *Ἂν* α, β *εἶναι τυχόντα στοιχεῖα ἐν* E, *τότε τὸ συμμετρικὸν τοῦ* $\alpha * \beta$ *εἶναι τὸ* $\hat{\beta} * \hat{\alpha}$, *ἤτοι* $\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\beta} * \hat{\alpha}$.

Πράγματι· λόγῳ τῆς προσεταιριστικότητος τῆς $*$, ἰσχύει ἀφ' ἑνὸς μὲν $(\alpha * \beta) * (\hat{\beta} * \hat{\alpha}) = \alpha * (\beta * (\hat{\beta} * \hat{\alpha})) = \alpha * ((\beta * \hat{\beta}) * \hat{\alpha}) = \alpha * (\omega * \hat{\alpha}) =$ $= \alpha * \hat{\alpha} = \omega$, ἀφ' ἑτέρου δέ,

$(\hat{\beta} * \hat{\alpha}) * (\alpha * \beta) = \hat{\beta} * (\hat{\alpha} * (\alpha * \beta)) = \hat{\beta} * ((\hat{\alpha} * \alpha) * \beta) = \hat{\beta} * (\omega * \beta) =$
$= \hat{\beta} * \beta = \omega$. Ἄρα

$$\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\beta} * \hat{\alpha}.$$

Γενικώτερον, ἂν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι τυχόντα στοιχεῖα ἐν Ε, τότε τὸ συμμετρικὸν τοῦ $\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_{\nu-1} * \alpha_\nu$ εἶναι τὸ $\hat{\alpha}_\nu * \hat{\alpha}_{\nu-1} * \ldots * \hat{\alpha}_2 * \hat{\alpha}_1$.

Δυνάμεθα τώρα, τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος 6.2.2, νὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ τοῦ Ε καὶ μίαν πρᾶξιν $\hat{*}$ «συμμετρικήν» τῆς $*$ διὰ τῆς ὁποίας εἰς κάθε ζεῦγος (α, β) ἀντιστοιχίζεται ἡ μοναδικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως $x * \beta = \alpha$, δηλαδὴ τὸ στοιχεῖον $\alpha * \hat{\beta}$. Τουτέστιν· ἡ πρᾶξις $\hat{*}$ ἐπὶ τοῦ Ε ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\alpha \hat{*} \beta = \alpha * \hat{\beta}.$$

Τὴν πρᾶξιν $*$ μιᾶς ὁμάδος Ε συχνὰ συμβολίζομεν μὲ $+$ καὶ τὴν καλοῦμεν *πρόσθεσιν* ἢ μὲ $\cdot$ καὶ τὴν καλοῦμεν *πολλαπλασιασμόν*. Τότε συμβολίζομεν ἀντιστοίχως

τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον μὲ	0 (*μηδὲν*)	ἢ	1 (*μονὰς*)
τὸ συμμετρικὸν τοῦ α μὲ	$-\alpha$ (*ἀντίθετον τοῦ α*)	ἢ	$\frac{1}{\alpha}$ καὶ α^{-1} (*ἀντίστροφον τοῦ α*)
τὴν συμμετρικὴν πρᾶξιν $\hat{*}$ μὲ	$-$ (*ἀφαίρεσις*)	ἢ	$:$ (*διαίρεσις*).

6.2.4 *Εἰς μίαν ὁμάδα* Ε *μὲ πρᾶξιν* $+$ *ἢ* $\cdot$ *ἰσχύουν, ἀντιστοίχως, διὰ κάθε* $\alpha \in E$, $\beta \in E$ *καὶ* $\gamma \in E$ *τὰ κάτωθι :*

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ — **1.'** $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

2. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ — **2.'** $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$

3. $\alpha + (-\alpha) = 0$ — **3.'** $\alpha \frac{1}{\alpha} = 1$

4. $-(-\alpha) = \alpha$ — **4.'** $1/\frac{1}{\alpha} = \alpha$

5. $-0 = 0$ — **5.'** $\frac{1}{1} = 1$

6. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ — **6.'** $\alpha : \beta = \alpha \frac{1}{\beta}$

7. $-(\alpha + \beta) = (-\beta) + (-\alpha) = -\beta - \alpha$ — **7.'** $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} : \alpha$

8. $-(\alpha - \beta) = -[\,\alpha + (-\beta)\,] =$
$= -(-\beta) + (-\alpha) = \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha$ — **8.'** $\frac{1}{\alpha:\beta} = \frac{1}{\alpha \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\frac{1}{\beta}}\,\frac{1}{\alpha} = \beta \frac{1}{\alpha} = \beta:\alpha$

9. $\gamma + (\alpha - \beta) = \gamma + [\alpha + (-\beta)] =$
$= (\gamma + \alpha) + (-\beta) = (\gamma + \alpha) - \beta$ — **9.'** $\gamma(\alpha : \beta) = \gamma(\alpha \frac{1}{\beta}) = (\gamma\alpha)\frac{1}{\beta} =$
$= (\gamma\alpha) : \beta$

10. $\gamma-(\alpha+\beta)=\gamma+[-(\alpha+\beta)]=$

$=\gamma+[(-\beta)+(-\alpha)]=$

$=[\gamma+(-\beta)]+(-\alpha)=(\gamma-\beta)-\alpha$

11. $\gamma-(\alpha-\beta)=\gamma+(\beta-\alpha)=$

$=(\gamma+\beta)-\alpha.$

10.′ $\gamma:(\alpha\beta)=\gamma\,\dfrac{1}{\alpha\beta}=$

$=\gamma\left(\dfrac{1}{\beta}\,\dfrac{1}{\alpha}\right)$

$=\left(\gamma\,\dfrac{1}{\beta}\right)\dfrac{1}{\alpha}=(\gamma:\beta):\alpha$

11.′ $\gamma:(\alpha:\beta)=\gamma\,(\beta:\alpha)=(\gamma\beta):\alpha.$

7* ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ

7.1 Ἡ ἔννοια τοῦ δακτυλίου. Ἔστωσαν Ε ἓν μὴ κενὸν σύνολον καὶ $*$, ▪ δύο πράξεις ἐπὶ τούτου. Τὸ σύνολον Ε καλεῖται *δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις* $*$ *καὶ* ▪ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ Ε εἶναι *ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν* $*$ καὶ ἐπὶ πλέον ἡ πρᾶξις ▪ εἶναι *προσεταιριστικὴ* καὶ *ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν* $*$.

Ἂς συμβολίσωμεν, ὡς συνήθως, τὰς πράξεις $*$ καὶ ▪ μὲ $+$ καί $\cdot$ ἀντιστοίχως, ὁπότε εἰς ἕνα δακτύλιον Ε (ὡς πρὸς τὰς πράξεις $+$ καί $\cdot$) διὰ κάθε α, β καὶ γ ἰσχύουν :

(Α)	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	————
(Π)	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
(Ο)	$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$	————
(Σ)	$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$	————

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$
$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$$

Ἂν ἡ πρᾶξις $\cdot$ εἶναι ἐπίσης ἀντιμεταθετική, τότε ὁ δακτύλιος Ε καλεῖται *ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος* ὡς πρὸς τὰς πράξεις $+$ καὶ $\cdot$. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ δακτυλίου δὲν ἀπαιτεῖ τὴν ὕπαρξιν οὐδετέρου στοιχείου τῆς πράξεως $\cdot$ (μονάδος), εἰς τὰς περιπτώσεις ὅμως, ὅπου τοῦτο ὑπάρχει λέγομεν ὅτι *ὁ δακτύλιος* Ε *ἔχει μονάδα.*

Παραδείγματα :

1. Τὸ σύνολον Α τῶν ἀρτίων ἀκεραίων εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν (χωρὶς μονάδα), διότι ἀφ' ἑνὸς μέν, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ παράδειγμα 2 τῆς § 6.1, τὸ Α εἶναι μία ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι, ὡς γνωστόν, ἀντιμεταθετικός, προσεταιριστικὸς καὶ ἐπὶ πλέον ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

2. Τὸ σύνολον Ζ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ μάλιστα μὲ μονάδα, διότι ἀφ' ἑνὸς μέν, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ παράδειγμα 1 τῆς § 6.1 τὸ Ζ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὁ πολλαπλασιασμός, ὁ ὁποῖος ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸν ἀριθμὸν 1 ($1 \in Z$), εἶναι, ὡς γνωστόν, ἀντιμεταθετικός, προσεταιριστικὸς καὶ ἐπὶ πλέον ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

3. Ὁμοίως τὰ σύνολα Q τῶν ῥητῶν καὶ R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντιμεταθετικοὶ δακτύλιοι ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ μάλιστα ἀμφότεροι ἔχουν μονάδα.

7.2 Βασικὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν δακτυλίων. Ἂν E εἶναι εἷς δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις $+$ καὶ $\cdot$, τότε, ἐκτὸς τῶν θεωρημάτων τῆς § 6.2 τῶν ἀφορώντων εἰς τὴν *πρόσθεσιν*, ἰσχύουν καὶ τὰ κάτωθι :

1. $\alpha 0 = 0\alpha = 0$,

διότι: $\alpha(\beta + 0) = \alpha\beta + \alpha 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha 0 \Rightarrow \alpha 0 = 0$

$(\beta + 0)\alpha = \beta\alpha + 0\alpha \Leftrightarrow \beta\alpha = \beta\alpha + 0\alpha \Rightarrow 0\alpha = 0.$

2. $\alpha(-\beta) = (-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$,

διότι: $0 = \alpha 0 = \alpha[\beta + (-\beta)] \Leftrightarrow 0 = \alpha\beta + \alpha(-\beta) \Rightarrow \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$

$0 = 0\beta = [\alpha + (-\alpha)]\beta \Leftrightarrow 0 = \alpha\beta + (-\alpha)\beta \Rightarrow (-\alpha)\beta = -(\alpha\beta).$

3. $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$ *καὶ* $(\beta - \gamma)\alpha = \beta\alpha - \gamma\alpha$,

διότι: $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha[\beta + (-\gamma)] = \alpha\beta + \alpha(-\gamma) = \alpha\beta + (-\alpha\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$

$(\beta - \gamma)\alpha = [\beta + (-\gamma)]\alpha = \beta\alpha + (-\gamma)\alpha = \beta\alpha + (-\gamma\alpha) = \beta\alpha - \gamma\alpha.$

4. $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\kappa) =$

$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \ldots + \alpha_1\beta_\kappa + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_2\beta_\kappa + \ldots +$

$+ \alpha_\nu\beta_1 + \alpha_\nu\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\kappa.$

5. *Ἂν ὁ δακτύλιος* E *εἶναι ἀντιμεταθετικός, τότε ἰσχύει καὶ ὁ τύπος τοῦ διωνύμου, ἤτοι* :

$$(\alpha + \beta)^\nu =$$

$$= \alpha^\nu + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu-2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \beta^\nu =$$

$$= \alpha^\nu + \nu\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \nu\alpha\beta^{\nu-1} + \beta^\nu.$$

8* ΣΩΜΑ

8.1 Ἡ ἔννοια τοῦ σώματος. Ἔστω E εἷς *ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος* ὡς πρὸς τὰς πράξεις $+$ καί $\cdot$. Ὁ δακτύλιος E καλεῖται *σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις* $+$ *καὶ* $\cdot$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ σύνολον $E^* = E - \{0\}$ εἶναι (ἀντιμεταθετικὴ) ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\cdot$, ὁπότε εἰς ἓν σῶμα E διὰ κάθε α, β καὶ γ ἰσχύουν :

(Α)	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
(Π)	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
(Ο)	$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$	$\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$
(Σ)	$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$	$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1,\ \alpha \neq 0$

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Ὅλα τὰ ἀνωτέρω εἶναι ἄμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ σώματος πλὴν τῆς $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$, ἡ ὁποία κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ σώματος ἰσχύει μόνον διὰ

$\alpha \in E^*$, δηλαδὴ διὰ $\alpha \neq 0$. Ἀποδεικνύεται ὅμως ὅτι ἰσχύει καὶ $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, διότι διὰ $\alpha \neq 0$ (π.χ. ὡς α δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ 1 καθ' ὅσον $1 \in E^*$, ἤτοι $1 \neq 0$) ἔχομεν :

$$0 \cdot 1 = (\alpha - \alpha)1 = \alpha 1 - \alpha 1 = \alpha - \alpha = 0$$
$$1 \cdot 0 = 1(\alpha - \alpha) = 1\alpha - 1\alpha = \alpha - \alpha = 0.$$

Παραδείγματα :

1. Τὸ σύνολον Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι σῶμα ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν κατὰ τὸ παράδειγμα 3 τῆς § 7.1 εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, ἀφ' ἑτέρου δὲ κατὰ τὸ παράδειγμα 3 τῆς § 6.1 τὸ σύνολον $Q^* = Q - \{0\}$ εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν.

2. Ὁμοίως τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι σῶμα ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν (διατί;).

3. Τὸ σύνολον Z τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν εἶναι σῶμα (ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν), διότι, ἂν καὶ τὸ Z εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος. Παράδειγμα 1 τῆς § 6.1), τὸ $Z^* = Z - \{0\}$ δὲν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν καθ' ὅσον δὲν ὑπάρχει, ἐν γένει, ὁ ἀντίστροφος ἑνὸς ἀκεραίου ἐν Z π.χ. τοῦ 2.

8.2 Βασικὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν σωμάτων. Ἂν E εἶναι ἓν σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις + καὶ $\cdot$, τότε ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

1. *Ὅλα τὰ θεωρήματα τοῦ δακτυλίου ὡς πρὸς τὰς πράξεις + καὶ* $\cdot$ (§7.2).

2. *Ὅλα τὰ θεωρήματα τῆς ὁμάδος ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν* $\cdot$ (§6.2) *μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ στοιχεῖα ἀνήκουν εἰς τὸ* $E^* = E - \{0\}$, *δηλαδὴ εἶναι* $\neq 0$.

3. $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ἢ $\beta = 0$.

Πράγματι· (i) $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ἢ $\beta = 0$, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$(\alpha\beta = 0 \text{ καὶ } \alpha \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha\beta) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\beta = 0 \Rightarrow 1\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0,$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ $(\alpha\beta = 0$ καὶ $\beta \neq 0) \Rightarrow \alpha = 0$ (διατί;).

(ii) $(\alpha = 0$ ἢ $\beta = 0) \Rightarrow \alpha\beta = 0$,

διότι : $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 0\beta = 0$

$\beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta = \alpha 0 = 0.$

8.3 Διατεταγμένον σῶμα. Ἔστωσαν τὸ σῶμα R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) καὶ τὸ ὑποσύνολόν του R^+ τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὡς γνωστὸν ἰσχύουν :

(i) Διὰ κάθε $x \in R$ ἰσχύει ἀκριβῶς μία ἐκ τῶν κάτωθι συνθηκῶν :

$$x = 0 \quad \text{ἢ} \quad x \in R^+ \quad \text{ἢ} \quad -x \in R^+$$

(ii) $$\left.\begin{matrix} x \in R^+ \\ y \in R^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x + y) \in R^+ \text{ καὶ } (xy) \in R^+,$$

δηλαδὴ τὸ R^+ εἶναι κλειστὸν ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν.

Σώματα μὲ τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας τοῦ σώματος R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν χαρακτηρίζονται διὰ τοῦ ὅρου *διατεταγμένα σώματα*. Ἀκριβέστερον ἓν σῶμα E (ὡς πρὸς τὰς πράξεις + καὶ ·) καλεῖται *ὁλικῶς διατεταγμένον* ἢ καὶ ἁπλῶς *διατεταγμένον* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἓν ὑποσύνολον E^+ τούτου τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύουν :

(i) Διὰ κάθε $x \in E$ ἰσχύει ἀκριβῶς μία ἐκ τῶν κάτωθι συνθηκῶν :

$$x = 0 \quad \text{ἢ} \quad x \in E^+ \quad \text{ἢ} \quad -x \in E^+$$

(ii)
$$\left.\begin{array}{l} x \in E^+ \\ y \in E^+ \end{array}\right\} \Rightarrow (x+y) \in E^+ \text{ καὶ } (xy) \in E^+$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ E^+ καλοῦνται *θετικὰ στοιχεῖα* τοῦ διατεταγμένου σώματος E τὰ δὲ ἀντίθετα τούτων *ἀρνητικά*.

Παράδειγμα : Ἐκτὸς τοῦ σώματος R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ σῶμα Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι διατεταγμένον, διότι διὰ τὸ ὑποσύνολόν του Q^+ τῶν θετικῶν ρητῶν ἰσχύουν :

(i) Διὰ κάθε ρητὸν ἀριθμὸν x ἰσχύει ἀκριβῶς μία ἐκ τῶν κάτωθι συνθηκῶν :

$$x = 0 \quad \text{ἢ} \quad x \in Q^+ \quad \text{ἢ} \quad -x \in Q^+$$

(ii)
$$\left.\begin{array}{l} x \in Q^+ \\ y \in Q^+ \end{array}\right\} \Rightarrow (x+y) \in Q^+ \text{ καὶ } (xy) \in Q^+.$$

Διάταξις καὶ διατεταγμένον σῶμα. Ἂν ἓν σῶμα E εἶναι διατεταγμένον μὲ σύνολον θετικῶν στοιχείων τὸ E^+, τότε ὁρίζεται εἰς τὸ E καὶ μία ὁλικὴ διάταξις $\prec$ διὰ τοῦ τύπου :

$$x \prec y \Leftrightarrow (y-x) \in E_0^+ = E^+ \cup \{0\}.$$

Πράγματι·

(A) $\quad x \prec x$, διότι $(x-x) = 0 \in E_0^+$.

(A – Σ) Ἂν $x \prec y$ καὶ $y \prec x$, τότε $x = y$,

διότι, ἂν $x \neq y$, τότε $[(y-x) \in E_0^+$ καὶ $(x-y) \in E_0^+] \Rightarrow [(y-x) \in E^+$ καὶ $(x-y) \in E^+]$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν συνθήκην (i) τοῦ διατεταγμένου σώματος.

(M) Ἂν $x \prec y$ καὶ $y \prec z$, τότε καὶ $x \prec z$,

διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ $x = y$ ἢ $y = z$ τοῦτο εἶναι προφανές, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ $x \neq y$ καὶ $y \neq z$ ἔχομεν

$$(x \prec y \text{ καὶ } y \prec z) \Rightarrow [(y-x) \in E^+ \text{ καὶ } (z-y) \in E^+],$$

τὸ ὁποῖον, λόγῳ τῆς συνθήκης (ii) τοῦ διατεταγμένου σώματος, συνεπάγεται ὅτι $(y-x)+(z-y) = (z-x) \in E^+$, ἄρα καὶ $(z-x) \in E_0^+$, δηλαδὴ $x \prec z$.

Εἰς τὸ διατεταγμένον σῶμα R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν π.χ., ἡ διάταξις $\leqslant$ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$x \leqslant y \Leftrightarrow (y-x) \in R_0^+.$$

9*. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

9.1 Ὁ δακτύλιος τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων. Ἔστω $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A, R)$

τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν μὴ κενὸν σύνολον A. Ἂν α εἶναι εἷς πραγματικὸς ἀριθμός, τότε τὴν συνάρτησιν, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει κάθε $x \in A$ εἰς τὸν ἀριθμὸν α, συμβολίζομεν πάλιν μὲ α καὶ λέγομεν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α, *ἡ σταθερὰ συνάρτησις* α (ἐπὶ τοῦ A). Οὕτω π.χ. γράφοντες $5 \in \mathscr{F}$ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ σταθερὰ συνάρτησις 5 (ἐπὶ τοῦ A) ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{F}$.

Θὰ ὁρίσωμεν κατωτέρω ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}$ δύο (ἐσωτερικάς) πράξεις, τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν.

Πρόσθεσις. Ἂν f καὶ g εἶναι δύο τυχόντα στοιχεῖα τοῦ $\mathscr{F}$, δηλαδὴ δύο συναρτήσεις, τότε διὰ τοῦ τύπου :

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

ὁρίζεται μία νέα πραγματικὴ συνάρτησις s μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ A, δηλαδὴ $s \in \mathscr{F}$. Τὴν συνάρτησιν αὐτὴν καλοῦμεν *ἄθροισμα* τῶν f καὶ g καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ $f + g$, ἤτοι $s = f + g$.

Ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}$ πρᾶξις + τῆς προσθέσεως πληροῖ τὰ κάτωθι :

1. *Εἶναι ἀντιμεταθετική*, διότι, ἂν $s' = g + f$, τότε θὰ εἶναι

$$s(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = s'(x) \quad \forall \; x \in A.$$

Ἄρα $s = s'$, δηλαδὴ

(A) $$f + g = g + f$$

2. *Εἶναι προσεταιριστική*, διότι, ἂν $s = (f + g) + h$ καὶ $s' = f + (g + h)$, τότε θὰ εἶναι

$$s(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g + h)(x) = s'(x) \quad \forall \; x \in A.$$

Ἄρα $s = s'$, δηλαδὴ

(Π) $$(f + g) + h = f + (g + h)$$

3. *Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως καὶ εἶναι τοῦτο ἡ σταθερὰ συνάρτησις* 0 *(ἐπὶ τοῦ* A*)*, διότι

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0 = f(x) \quad \forall \; x \in A,$$

ἄρα, λόγῳ καὶ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τῆς προσθέσεως,

(O) $$f + 0 = 0 + f = f \quad \forall \; f \in \mathscr{F}.$$

4. *Διὰ κάθε* $f \in \mathscr{F}$ *ὑπάρχει ἀντίθετος συνάρτησις* $-f$ *(συμμετρικὸν στοιχεῖον τῆς f ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν) καὶ εἶναι αὕτη ἡ συνάρτησις, ἡ ὁποία τὸ* $x \in A$ *ἀντιστοιχίζει εἰς τὸ* $-f(x)$, *δηλαδὴ*

$$(-f)(x) = -f(x) \quad \forall \; x \in A.$$

Πράγματι·

$$f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall \; x \in A,$$

ἄρα, λόγῳ καὶ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τῆς προσθέσεως,

(Σ) $$f + (-f) = (-f) + f = 0 \quad \forall \; f \in \mathscr{F}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται λοιπὸν ὅτι (Πρβλ. § 6.1): *τὸ σύνολον $\mathscr{F}$ ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν σύνολον Α εἶναι μία ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν + τῆς προσθέσεως.*

Πολλαπλασιασμός. Ὁμοίως ὁρίζομεν τὸ *γινόμενον* τῆς συναρτήσεως $f\in\mathscr{F}$ ἐπὶ τὴν συνάρτησιν $g\in\mathscr{F}$, ὡς τὴν συνάρτησιν p τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$p(x) = f(x)\cdot g(x).$$

Ταύτην συμβολίζομεν μὲ $f\cdot g$, ἤτοι $p = f\cdot g$.

Ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}$ πρᾶξις $\cdot$ τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ* εἶναι, ὡς εὐκόλως συνάγεται, *ἀντιμεταθετική, προσεταιριστικὴ* καὶ *ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν*, δηλαδὴ ἰσχύουν :

(Α) $\quad fg = gf$

(Π) $\quad (fg)h = f(gh)$

(Ε) $\quad f(g+h) = fg + fh.$

Ὥστε λοιπὸν (Πρβλ. § 7.1) *τὸ σύνολον $\mathscr{F}$ ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν σύνολον Α εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις + καὶ $\cdot$.*

Παρατηρήσεις :

1. Ἐπειδὴ τὸ $\mathscr{F}$ εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, ὁρίζεται ἑπομένως καὶ ἡ πρᾶξις τῆς *ἀφαιρέσεως* ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}$ ὡς συνήθως διὰ τοῦ τύπου

$$f - g = f + (-g).$$

2. *Ὁ δακτύλιος $\mathscr{F}$ ἔχει μονάδα*, δηλαδὴ ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ μάλιστα τοῦτο εἶναι ἡ σταθερὰ συνάρτησις 1, διότι διὰ τυχοῦσαν συνάρτησιν $f\in\mathscr{F}$ ἰσχύει

$$f(x)1 = 1f(x) = f(x) \quad \forall \quad x\in A.$$

Ἄρα

$$f\,1 = 1f = f \quad \forall \quad f\in\mathscr{F}.$$

3. Ἂν f εἶναι μία συνάρτησις εἰς τὸ $\mathscr{F}^* = \mathscr{F} - \{0\}$, τότε μὲ $\dfrac{1}{f}$ συμβολίζομεν τὴν συνάρτησιν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Ἡ συνάρτησις $\dfrac{1}{f}$ δὲν ἀνήκει ἐν γένει εἰς τὸ $\mathscr{F}^*$, διότι αὐτὴ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $B = \{x\in A : f(x)\neq 0\}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α. Ἂν ὅμως $B = A$, δηλαδὴ $f(x)\neq 0$, $\forall$ $x\in A$, τότε ἡ συνάρτησις $\dfrac{1}{f}\in\mathscr{F}^*$ καὶ εἶναι τὸ συμμετρικὸν στοιχεῖον τῆς f ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\frac{1}{f}(x)\,f(x) = \frac{1}{f(x)}\,f(x) = 1 \quad \forall \quad x\in A,$$

δηλαδὴ

$$\frac{1}{f}\,f = f\,\frac{1}{f} = 1,$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ ἂν g εἶναι ἐπίσης συμμετρικὸν στοιχεῖον τῆς f, τότε $fg = 1$, δηλαδὴ

$$f(x)\, g(x) = 1 \quad \forall \; x \in A \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \forall \; x \in A.$$

Ἄρα $g = \dfrac{1}{f}$.

4. *Ὁ δακτύλιος* $\mathscr{F}$ *δὲν εἶναι σῶμα* (ὡς πρὸς τὰς πράξεις + καί ·) διότι τὸ $\mathscr{F}^* = \mathscr{F} - \{0\}$ δὲν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, καθ' ὅσον δὲν ὑπάρχει ἐν γένει συμμετρικὸν στοιχεῖον ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, π.χ. διὰ τὴν συνάρτησιν $f \in \mathscr{F}^*$, ἡ ὁποία εἰς ἓν ὡρισμένον $x_0 \in A$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0, ἐνῷ διὰ κάθε $x \in A$ διάφορον τοῦ x_0 λαμβάνει τὴν τιμὴν 5.

9.2 Ὁ δακτύλιος τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων. Μία πραγματικὴ συνάρτησις p μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς διδομένη δι' ἑνὸς τύπου τῆς μορφῆς

$$p(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, καλεῖται *πολυωνυμικὴ συνάρτησις* μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Τὸ σύνολον $\mathscr{F}_\pi$ ὅλων τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς εἶναι προφανῶς ὑποσύνολον τοῦ συνόλου $\mathscr{F} = \mathscr{F}(R, R)$ ὅλων τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}$ εἶναι πράξεις κλεισταὶ εἰς τὸ ὑποσύνολον $\mathscr{F}_\pi$ τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων, διότι, ὡς εἶναι γνωστόν, τόσον τὸ ἄθροισμα ὅσον καὶ τὸ γινόμενον δύο πολυωνυμικῶν συναρτήσεων εἶναι ἐπίσης πολυωνυμικὴ συνάρτησις.

Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως, δηλαδὴ ἡ σταθερὰ συνάρτησις 0, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ ἡ σταθερὰ συνάρτησις 1, εἶναι πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις, ἤτοι $0 \in \mathscr{F}_\pi$ καὶ $1 \in \mathscr{F}_\pi$. Ἐπίσης, ἡ ἀντίθετος συνάρτησις $-p$ μιᾶς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως p εἶναι καὶ αὐτὴ πολυωνυμικὴ συνάρτησις.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι εἰς τὸ ὑποσύνολον $\mathscr{F}_\pi$ τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων πληροῦνται ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως + καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ · τῆς προηγουμένης § 9.1. Ἑπομένως: *τὸ σύνολον* $\mathscr{F}_\pi$ *ὅλων τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς εἶναι εἷς ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ μάλιστα ὁ δακτύλιος οὗτος ἔχει μονάδα.* Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι τὸ σύνολον $\mathscr{F}_\pi$ τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων ἀποτελεῖ ἕνα ἀντιμεταθετικὸν *ὑποδακτύλιον* τοῦ δακτυλίου $\mathscr{F}$ τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων, ὁ ὁποῖος ἔχει μονάδα.

9.3 Τὸ σῶμα τῶν ρητῶν συναρτήσεων. Μία πραγματικὴ συνάρτησις r μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς διδομένη δι' ἑνὸς τύπου τῆς μορφῆς

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

ὅπου p καὶ q εἶναι πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς μὲ τὴν q διάφορον τῆς σταθερᾶς συναρτήσεως 0, καλεῖται *ρητὴ συνάρτησις* μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς, συμβολίζεται δὲ καὶ μὲ $\frac{p}{q}$, ἤτοι $r = \frac{p}{q}$.

Αἱ πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις εἶναι καὶ ρηταί, διότι, ὡς προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τῆς ρητῆς συναρτήσεως, ἡ πολυωνυμικὴ συνάρτησις p συμπίπτει μὲ τὴν ρητὴν συνάρτησιν $\frac{p}{1}$. Ὥστε τὸ σύνολον $\mathcal{F}_\pi$ τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου $\mathcal{F}_\rho$ τῶν ρητῶν συναρτήσεων.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τὰς ρητὰς συναρτήσεις r_1, r_2, r_3 τὰς διδομένας ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν τύπων :

$$r_1(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1}, \quad r_2(x) = \frac{x}{x^2 - x}, \quad r_3(x) = \frac{1}{x - 1}.$$

Τὰ πεδία ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως

$$\mathcal{D}(r_1) = R, \qquad \mathcal{D}(r_2) = R - \{\,0,1\,\}, \qquad \mathcal{D}(r_3) = R - \{\,1\,\}.$$

Διὰ τὰς συναρτήσεις r_2 καὶ r_3 παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν τομὴν $\mathcal{D}(r_1) \cap \mathcal{D}(r_2) = R - \{\,0,1\,\}$ τῶν πεδίων ὁρισμοῦ των συμπίπτουν, δηλαδὴ ἰσχύει

$$r_2(x) = \frac{x}{x^2 - x} = \frac{1}{x - 1} = r_3(x) \quad \forall \quad x \in R - \{\,0,1\,\}$$

ἤ ἰσοδυνάμως :

$$x\,(x - 1) = 1(x^2 - x) \quad \forall \quad x \in R.$$

Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι αἱ ρηταὶ συναρτήσεις r_2 καὶ r_3 εἶναι *ἰσοδύναμοι* ἤ *ἴσαι*. Γενικῶς, ἄν $r = \frac{p}{q}$ καὶ $r' = \frac{p'}{q'}$ εἶναι τυχοῦσαι ρηταὶ συναρτήσεις, θὰ λέγωμεν ὅτι αὗται εἶναι *ἴσαι* καὶ θὰ γράφωμεν $r = r'$ τότε καὶ μόνον τότε, ἄν ἰσχύῃ $pq' = p'q$, ἤτοι :

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} pq' = p'q.$$

Οὕτω π.χ., ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, $r_2 = r_3$, ἐνῷ ἀντιθέτως, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, $r_1 \neq r_2$ καὶ $r_1 \neq r_3$.

Ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι τὰ πεδία ὁρισμοῦ τῶν ρητῶν συναρτήσεων r_1,r_2 καὶ r_3 εἶναι διαφορετικά, δηλαδὴ αἱ ρηταὶ συναρτήσεις δὲν ἔχουν κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ, ὡς συμβαίνει διὰ τὰς πολυωνυμικὰς συναρτήσεις. Ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σύνολον $\mathcal{F}_\rho$ τῶν ρητῶν συναρτήσεων ὡς ὑποσύνολον τοῦ συνόλου $\mathcal{F}$ τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κάποιο (συγκεκριμένον) κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τοῦ $\mathcal{F}_\rho$, ὡς ὡρίσαμεν αὐτὰς εἰς τὴν § 9.1 ἐπὶ τοῦ συνόλου $\mathcal{F}$. Αἱ πράξεις αὗται ὁρίζονται ἐπὶ τοῦ $\mathcal{F}_\rho$ ὡς ἑξῆς :

Πρόσθεσις. *Ἄθροισμα* δύο ρητῶν συναρτήσεων $\frac{p_1}{q_1}$ καὶ $\frac{p_2}{q_2}$ καλεῖται ἡ ρητὴ ἐπίσης συνάρτησις $\frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$, ἤτοι :

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}.$$

Ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα πρᾶξις τῆς *προσθέσεως* ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}_\rho$ πληροῖ τὰ κάτωθι :

1. *Εἶναι ἀντιμεταθετική*, διότι, ἂν $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ καὶ $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ εἶναι τυχοῦσαι ρηταὶ συναρτήσεις, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} = \frac{p_2q_1 + p_1q_2}{q_2q_1} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_1}{q_1},$$

ἤτοι

$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1.$$

2. *Εἶναι προσεταιριστική*, διότι, ἂν $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ καὶ $r_3 = \frac{p_3}{q_3}$ εἶναι τυχοῦσαι ρηταὶ συναρτήσεις, θὰ ἔχωμεν

$$\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} + \frac{p_3}{q_3} = \frac{(p_1q_2 + p_2q_1)q_3 + p_3q_1q_2}{q_1q_2q_3} =$$

$$= \frac{p_1q_2q_3 + (p_2q_3 + p_3q_2)q_1}{q_1q_2q_3} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2q_3 + p_3q_2}{q_2q_3} = \frac{p_1}{q_1} + \left(\frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3}\right),$$

ἤτοι

$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3).$$

3. *Ὑπάρχει τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως καὶ εἶναι τοῦτο ἡ σταθερὰ συνάρτησις* 0 ($0 \in \mathscr{F}_\rho$, ὡς πολυωνυμικὴ συνάρτησις), διότι, διὰ τυχοῦσαν ρητὴν συνάρτησιν $r = \frac{p}{q}$, ἰσχύει

$$\frac{p}{q} + 0 = \frac{p}{q} + \frac{0}{1} = \frac{p1 + 0q}{q1} = \frac{p}{q},$$

ἄρα, λόγῳ καὶ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τῆς προσθέσεως,

(Ο) $$r + 0 = 0 + r = r \quad \forall \quad r \in \mathscr{F}_\rho.$$

4. *Διὰ κάθε ρητὴν συνάρτησιν* $r = \frac{p}{q}$ *ὑπάρχει ἀντίθετος ρητὴ συνάρτησις* $-r$ *καὶ εἶναι αὕτη ἡ* $\frac{-p}{q}$, διότι

$$r + (-r) = \frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{pq + (-p)q}{q^2} = \frac{0}{q^2} = 0,$$

ἄρα, λόγῳ καὶ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τῆς προσθέσεως,

(Σ) $$r + (-r) = (-r) + r = 0 \quad \forall \quad r \in \mathscr{F}_\rho.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται λοιπὸν ὅτι (Πρβλ. § 6.1) *τὸ σύνολον* $\mathscr{F}_\rho$ *τῶν ρητῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς εἶναι μία ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν* + *τῆς προσθέσεως.*

Πολλαπλασιασμός. *Γινόμενον* δύο ρητῶν συναρτήσεων $\frac{p_1}{q_1}$ καὶ $\frac{p_2}{q_2}$ καλεῖται ἡ ρητὴ ἐπίσης συνάρτησις $\frac{p_1p_2}{q_1q_2}$, ἤτοι

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}.$$

Ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}_\rho$ πρᾶξις · τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι, ὡς εὐκόλως συνάγεται, *ἀντιμεταθετική, προσεταιριστικὴ* καὶ *ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν*, δηλαδὴ διὰ τυχούσας ρητὰς συναρτήσεις r_1, r_2, r_3 ἰσχύουν :

(Α) $\quad r_1 r_2 = r_2 r_1$

(Π) $\quad (r_1 r_2) r_3 = r_1 (r_2 r_3)$

(Ε) $\quad r_1 (r_2 + r_3) = r_1 r_2 + r_1 r_3.$

Ὥστε λοιπὸν (Πρβλ. § 7.1) *τὸ σύνολον $\mathscr{F}_\rho$ τῶν ρητῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις + καὶ ·.*

Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι :

1. *Ὑπάρχει τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (μονὰς) καὶ εἶναι τοῦτο ἡ σταθερὰ συνάρτησις* 1 ($1 \in \mathscr{F}_\rho$, ὡς πολυωνυμικὴ συνάρτησις), διότι, διὰ τυχοῦσαν ρητὴν συνάρτησιν $r = \frac{p}{q}$, ἰσχύει

$$r1 = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1} = \frac{p1}{q1} = \frac{p}{q} = r,$$

ἄρα, λόγῳ καὶ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ,

$$r1 = 1r = r \quad \forall \quad r \in \mathscr{F}_\rho.$$

2. *Διὰ κάθε ρητὴν συνάρτησιν* $r = \frac{p}{q}$ *διάφορον τῆς σταθερᾶς συναρτήσεως* 0, *δηλαδὴ* $r \in \mathscr{F}_\rho^* = \mathscr{F}_\rho - \{0\}$ *ὑπάρχει συμμετρικὸν στοιχεῖον* $\frac{1}{r}$ *ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ εἶναι τοῦτο ἡ ρητὴ συνάρτησις* $\frac{q}{p}$, διότι

$$r\frac{1}{r} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{qp} = \frac{pq}{pq} = \frac{1}{1} = 1,$$

ἄρα, λόγῳ καὶ τῆς ἀντιμεταθετικότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ,

$$r\frac{1}{r} = \frac{1}{r}r = 1 \quad \forall \quad r \in \mathscr{F}_\rho^* = \mathscr{F}_\rho - \{0\}.$$

Ὥστε λοιπὸν *τὸ σύνολον $\mathscr{F}_\rho^* = \mathscr{F}_\rho - \{0\}$ εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν* καὶ ἑπομένως (Πρβλ. § 8.1) *τὸ σύνολον $\mathscr{F}_\rho$ ὅλων τῶν ρητῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς ἀποτελεῖ σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

9.4 Διανυσματικὸς χῶρος. Ὡς εἴδομεν, τόσον εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δακτυλίου ὅσον καὶ τοῦ σώματος, ὁρίζονται δύο πράξεις + καί · ἀμφότεροι *ἐσωτερικαί*. Εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὅμως παρουσιάζονται συχνὰ καὶ σύνολα ἐφωδιασμένα μὲ μίαν *ἐσωτερικὴν* πρᾶξιν + καὶ μίαν *ἐξωτερικὴν* πρᾶξιν · . Π.χ. ἐπὶ τοῦ συνόλου ὅλων *τῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου* ἔχουν ὁρισθῆ ἡ ἐσωτερικὴ πρᾶξις τῆς *προσθέσεως* καὶ ἡ ἐξωτερικὴ τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν* (Πρβλ. παράδειγμα 1, § 4.2). Ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῶν μαθημάτων προηγουμένων τάξεων διὰ τυχόντα διανύσματα $\vec{V}, \vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ καὶ τυχόντας πραγματικοὺς ἀριθμοὺς λ,μ, ἰσχύουν :

πρόσθεσις	*πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν*
$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$	$\lambda(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda\vec{V}_1 + \lambda\vec{V}_2$
$\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$	$(\lambda + \mu)\vec{V} = \lambda\vec{V} + \mu\vec{V}$
$\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{V} = \vec{V}$	$\lambda(\mu\vec{V}) = (\lambda\mu)\vec{V}$
$\vec{V} + (-\vec{V}) = (-\vec{V}) + \vec{V} = \vec{0}$	$1\vec{V} = \vec{V}.$
(ἀντιμεταθετικὴ ὁμάς)	

Ἐπίσης ἐπὶ τοῦ συνόλου $\mathscr{F}_\pi$ τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων, ἐκτὸς τῆς (ἐσωτερικῆς) πράξεως τῆς *προσθέσεως*, δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ μία ἐξωτερικὴ πρᾶξις, *ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμόν*, ὡς ἑξῆς : ἂν p εἶναι μία πολυωνυμικὴ συνάρτησις μὲ $p(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καὶ $\lambda \in R$, τότε *γινόμενον τῆς* p *ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν* λ καλεῖται ἡ πολυωνυμικὴ συνάρτησις q ἡ διδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου $q(x) = (\lambda\alpha_\nu)x^\nu + (\lambda\alpha_{\nu-1})x^{\nu-1} + \ldots + (\lambda\alpha_0)$, ἤτοι $q = \lambda p$.

Παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τοῦ συνόλου $\mathscr{F}_\pi$ ὅτι, διὰ τυχούσας πολυωνυμικὰς συναρτήσεις $p, p_1, p_2\ p_3$ καὶ τυχόντας πραγματικοὺς ἀριθμοὺς λ,μ ἰσχύουν :

πρόσθεσις	*πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν*
$p_1 + p_2 = p_2 + p_1$	$\lambda(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2$
$p_1 + (p_2 + p_3) = (p_1 + p_2) + p_3$	$(\lambda + \mu)p = \lambda p + \mu p$
$p + 0 = 0 + p = p$	$\lambda(\mu p) = (\lambda\mu)p$
$p + (-p) = (-p) + p = 0$	$1p = p$

Αἱ μὲν ἰδιότητες τῆς προσθέσεως εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὅτι, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 9.2, τὸ $\mathscr{F}_\pi$ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, αἱ δὲ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν συνάγονται εὐκόλως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐξωτερικῆς ταύτης πράξεως.

Τὰ ἀνωτέρω σύνολα, τῶν διανυσμάτων τοῦ χώρου καὶ τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς, εἰς τὰ ὁποῖα, ὡς εἴδομεν, αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχουν κοινὰς ἰδιότητας ὡς ἀνωτέρω, ὀνομάζονται *διανυσματικοὶ χῶροι*. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι ἂν τὰ λ,μ περιορισθοῦν εἰς τὸ σῶμα Q τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν, τότε αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν διατηροῦνται. Πρὸς διάκρισιν τοῦ ἂν τὰ λ,μ θεωροῦνται εἰς τὸ σῶμα Q τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν ἢ εἰς τὸ σῶμα R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, λέγομεν π.χ. ὅτι τὸ σύνολον F_π τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων εἶναι εἷς *διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω τοῦ σώματος* Q ἢ τὸ $\mathscr{F}_\pi$ εἶναι εἷς *διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω τοῦ σώματος* R.

Γενικῶς, ἂν Λ εἶναι ἓν σῶμα (ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) καὶ E εἶναι ἓν μὴ κενὸν σύνολον ἐφωδιασμένον μὲ δύο πράξεις, μίαν ἐσωτερικὴν τὴν *πρόσθεσιν* καὶ μίαν ἐξωτερικὴν τὸν *πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ στοιχεῖον τοῦ* Λ, θὰ λέγωμεν ὅτι *τὸ* E *εἶναι εἷς διανυσματικὸς χῶρος ὑπερ-*

άνω τοῦ σώματος Λ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ Ε εἶναι *ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν* καὶ διὰ κάθε x, y ἐν Ε καὶ λ,μ ἐν Λ ἰσχύουν :

$$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$$
$$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$$
$$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$$
$$1x=x.$$

10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10.1 Εὕρετε τὰς ἀνακλαστικάς, συμμετρικάς, ἀντισυμμετρικὰς καὶ μεταβατικὰς σχέσεις $\sigma : R \to R$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν :

1) $x^2-y^2=0$ 2) $x^2+y^2=1$ 3) $x+y\leqslant 0$
4) $x^2-y^2=$ πολ. 10 5) $xy\geqslant 0$ 6) $x^2-xy\leqslant 0$.

Ποῖαι ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων εἶναι ἰσοδυναμίαι;

10.2 Δείξατε ὅτι ἡ ἰσότης εἰς ἓν σύνολον Ε εἶναι ἡ μόνη σχέσις, ἡ ὁποία εἶναι ταυτοχρόνως ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ ἀντισυμμετρική.

10.3 Ἔστωσαν μία εὐθεῖα D καὶ ἓν σημεῖον P αὐτῆς. Ἐξ ὁρισμοῦ λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον $A\in D-\{P\}$ εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ σημεῖον $B\in D-\{P\}$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ P δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB, ἤτοι

$$A\sigma B \Leftrightarrow AB\cap\{P\}=\varnothing.$$

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία καὶ εὕρετε τὸ σύνολον πηλίκον $(D-\{P\})/\sigma$.

10.4 Ἔστωσαν ἐπίπεδον Ε καὶ εὐθεῖα D αὐτοῦ. Ἐξ ὁρισμοῦ λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον $A\in E-D$ εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ σημεῖον $B\in E-D$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB δὲν τέμνει τὴν εὐθεῖαν D, ἤτοι

$$A\sigma B \Leftrightarrow AB\cap D=\varnothing.$$

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία καὶ εὕρετε τὸ σύνολον πηλίκον $(E-D)/\sigma$.

10.5 Ἔστωσαν E_1 καὶ E_2 δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα. Ἐξ ὁρισμοῦ λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον $A\in(E_1\cup E_2)^c$ εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ σημεῖον $B\in(E_1\cup E_2)^c$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB δὲν τέμνει τὰ ἐπίπεδα E_1 καὶ E_2, ἤτοι

$$A\sigma B \Leftrightarrow AB\cap(E_1\cup E_2)=\varnothing.$$

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία καὶ εὕρετε τὸ σύνολον πηλίκον $(E_1\cup E_2)^c/\sigma$.

10.6 Ἔστωσαν ἐπίπεδον Ε καὶ σημεῖον P αὐτοῦ. Ἐξ ὁρισμοῦ λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον $A\in E-\{P\}$ εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ τὸ σημεῖον $B\in E-\{P\}$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ σημεῖα P, A, B κεῖνται ἐπὶ εὐθείας.

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία καὶ εὕρετε τὸ σύνολον πηλίκον $(E-\{P\})/\sigma$.

10.7 Ἔστω εὐθεῖα D. Ἐξ ὁρισμοῦ λέγομεν ὅτι τυχὸν σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς D εὑρίσκεται εἰς τὴν σχέσιν σ μὲ σημεῖον B μὴ κείμενον ἐπίσης ἐπὶ τῆς D τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ εὐθεῖα D καὶ τὰ σημεῖα A, B κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία καὶ εὕρετε τὸ σύνολον πηλίκον D^c/σ.

10.8 Ἔστω εἰς τὸ σύνολον $Z\times(Z-\{0\})$ ἡ σχέσις σ, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(\alpha,\beta)\sigma(\alpha',\beta') \Leftrightarrow \alpha\beta'=\alpha'\beta.$$

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις σ εἶναι μία ἰσοδυναμία καὶ εὕρετε τὰς κλάσεις ἰσοδυναμίας τῶν στοιχείων $(1,3)$, $(0,7)$, $(-5, 8)$, $(2,4)$ καὶ $(3, -2)$.

10.9 Δείξατε ὅτι :

1) ἡ σχέσις $\geqslant$ εἰς τὸ $\mathbf{R}$ εἶναι μία ὁλικὴ διάταξις.

2) ἡ σχέσις $\supseteq$ τοῦ ὑπερσυνόλου εἰς τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ (ὅταν τὸ Ω ἔχῃ τουλάχιστον δύο στοιχεῖα) εἶναι μία μερικὴ διάταξις.

10.10 Δείξατε ὅτι, ἂν $\prec$ εἶναι μία διάταξις εἰς ἓν σύνολον Ε, τότε διὰ τοῦ τύπου

$$x \succ y \Leftrightarrow y \prec x$$

ὁρίζεται ἐπίσης μία διάταξις $\succ$ εἰς τὸ Ε καλουμένη *δυϊκὴ διάταξις τῆς* $\prec$.

Ἐπὶ πλέον δείξατε ὅτι, ἂν μὲν ἡ $\prec$ εἶναι ὁλικὴ διάταξις, τότε καὶ ἡ δυϊκή της $\succ$ εἶναι ἐπίσης ὁλικὴ διάταξις, ἂν δὲ ἡ $\prec$ εἶναι μερικὴ διάταξις, τότε καὶ ἡ $\succ$ εἶναι ἐπίσης μερικὴ διάταξις. Δι᾽ ἐφαρμογῆς τούτων ἀποδείξατε ἐκ νέου τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

10.11 Εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν τὴν σχέσιν $\prec$ ὡς ἑξῆς :

Ἔστωσαν δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha + \beta i$ καὶ $\gamma + \delta i$. Τότε, ἂν μὲν $\alpha < \gamma$, γράφομεν $\alpha + \beta i \prec \gamma + \delta i$, ἂν δὲ $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta \leqslant \delta$, γράφομεν ἐπίσης $\alpha + \beta i \prec \gamma + \delta i$. Συντόμως :

$$\alpha + \beta i \prec \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha < \gamma \text{ ἢ } (\alpha = \gamma \text{ καὶ } \beta \leqslant \delta).$$

Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις αὕτη εἶναι μία ὁλικὴ διάταξις εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία καλεῖται συνήθως *λεξικογραφικὴ διάταξις* εἰς τὸ $\mathbf{C}$.

10.12 Ἔστωσαν αἱ πράξεις $*$, $\blacksquare$, $\blacktriangle$, $\square$ καὶ Δ εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων :

$$x * y = 2x + y, \quad x \blacksquare y = x + y^2, \quad x \blacktriangle y = xy^2, \quad x \square y = x - 2y, \quad x \Delta y = \frac{x}{y^2+1}.$$

Ποῖαι ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων εἶναι πράξεις ἐπὶ τοῦ $\mathbf{N}$ καὶ ποῖαι εἶναι μερικαὶ πράξεις εἰς τὸ $\mathbf{N}$;

10.13 Ἔστωσαν αἱ πράξεις $*$, $\blacksquare$, $\blacktriangle$, $\square$ καὶ Δ εἰς τὸ $\mathbf{R}$, αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων :

$$x * y = x + y + 3, \quad x \blacksquare y = x^2 + y^2, \quad x \blacktriangle y = 4xy, \quad x \square y = x^2 y, \quad x \Delta y = x^3 y^3.$$

Ποῖαι ἐκ τῶν ἀνωτέρω πράξεων εἶναι κλεισταὶ εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{A}$ τῶν ἀρτίων ἀκεραίων;

10.14 Ποῖαι ἐκ τῶν πράξεων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι

1) ἀντιμεταθετικαί; 2) προσεταιριστικαί; 3) ἐπιμεριστικαὶ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν; 4) ἐπιμεριστικαὶ ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν;

10.15 Ποῖαι ἐκ τῶν πράξεων τῆς ἀσκήσεως 10.13 ἔχουν οὐδέτερον στοιχεῖον; Εὕρετε τὰ συμμετρικὰ στοιχεῖα ὡς πρὸς τὰς πράξεις ταύτας.

10.16 Δείξατε ὅτι τὰ σύνολα $\mathbf{R}$ καὶ $\mathbf{C}_0$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\alpha + 0i$ εἶναι ἰσόμορφα τόσον ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς προσθέσεως μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὅσον καὶ πρὸς τὰς πράξεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ πολλαπλασιασμοῦ μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁμοίως δείξατε ὅτι καὶ τὰ σύνολα $\mathbf{R}$ καὶ $\mathbf{C}^0$ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $0 + \alpha i$, εἶναι ἰσόμορφα ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς προσθέσεως μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

10.17 Δείξατε ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐπὶ τοῦ $\mathbf{N}_0$ $(\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\})$ εἶναι προσεταιριστική, ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸ 0, ἀλλὰ τὸ $\mathbf{N}_0$ δὲν εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

10.18 Δείξατε ὅτι :

1) Τὸ σύνολον C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.

2) Τὸ $C^* = C - \{0\}$ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν.

3)* Τὸ C εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

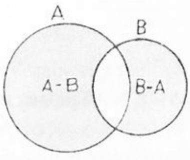
4)* Τὸ C εἶναι σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

10.19* Δείξατε ὅτι τὸ σῶμα C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι διατεταγμένον σῶμα.

10.20 Ἐπὶ τοῦ συνόλου $\mathscr{P}(\Omega)$ $(\Omega \neq \varnothing)$ θεωροῦμεν τὴν πρᾶξιν $\dotplus$ τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A),$$

ἡ ὁποία καλεῖται *συμμετρικὴ διαφορά*.



$A \dotplus B$

Δείξατε ὅτι :

1) Τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν συμμετρικὴν διαφοράν, ἤτοι

(Α) $A \dotplus B = B \dotplus A$

(Π) $A \dotplus (B \dotplus \Gamma) = (A \dotplus B) \dotplus \Gamma$

(Ο) $A \dotplus \varnothing = \varnothing \dotplus A = \varnothing$

(Σ) $A \dotplus A = \varnothing$.

2)* Τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ εἶναι ἀντιμεταθετικὸς δακτύλιος ὡς πρὸς τὰς πράξεις $\dotplus$ καὶ $\cap$.

3)* Ἂν τὸ Ω ἔχῃ τουλάχιστον δύο στοιχεῖα, τότε τὸ $\mathscr{P}(\Omega)$ δὲν εἶναι σῶμα ὡς πρὸς τὰς πράξεις $\dotplus$ καὶ $\cap$.

10.21* Ἔστωσαν τὸ σύνολον $\mathscr{F} = \mathscr{F}(A, \mathbf{R})$ τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον A καὶ αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως (ἐσωτερική) ἐπὶ τοῦ $\mathscr{F}$ καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν (ἐξωτερική), ὡς αὗται ὡρίσθησαν ἀντιστοίχως εἰς τὴν § 9.1 καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 2 τῆς § 4.2. Δείξατε ὅτι τὸ σύνολον $\mathscr{F}$ (ὡς πρὸς τὰς πράξεις ταύτας) εἶναι εἷς διανυσματικὸς χῶρος ὑπεράνω τοῦ σώματος $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐξετάσατε ἰδιαιτέρως τὰς περιπτώσεις, ὅπου $A = \{1, 2\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $A = \{1, 2, \ldots, \nu\}$.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

Β. ΣΤΑΪΚΟΥ

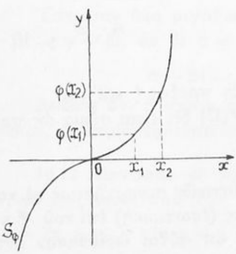
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. ΜΟΝΟΤΟΝΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1 Αὔξουσαι καὶ φθίνουσαι συναρτήσεις. Ἡ συνάρτησις φ μὲ $\varphi(x) = x^3$ διατηρεῖ προφανῶς τὴν φυσικὴν διάταξιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1{}^3 < x_2{}^3 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2).$$



Σχ. 23 $\varphi : y = x^3$

Γενικῶς μία πραγματικὴ συνάρτησις f μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς διατηροῦσα, ὡς καὶ ἡ φ, τὴν φυσικὴν διάταξιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλεῖται *γνησίως αὔξουσα*. Ἀκριβέστερον διὰ μίαν συνάρτησιν $f : A \mapsto R$ μὲ $A \subseteq R$ ὁρίζομεν :

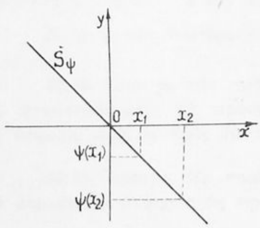
Ἡ συνάρτησις f καλεῖται *γνησίως αὔξουσα* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν A ἰσχύῃ

$$(1) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ὁμοίως ἡ συνάρτησις f καλεῖται *γνησίως φθίνουσα* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν A ἰσχύῃ

$$(2) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Π.χ. ἡ συνάρτησις ψ μὲ $\psi(x) = -x$ εἶναι γνησίως φθίνουσα συνάρτησις.



Σχ. 24 $\psi : y = -x$

Ἂν αἱ (1), (2) ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν

$$(1') \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

$$(2') \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2),$$

τότε λέγομεν εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν τῆς (1′) ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι *αὔξουσα*, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τῆς (2′) ὅτι ἡ f εἶναι *φθίνουσα*, ἤτοι :

Ἡ συνάρτησις f καλεῖται *αὔξουσα* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν A ἰσχύῃ

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Ἡ συνάρτησις f καλεῖται *φθίνουσα* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν A ἰσχύῃ

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Ἐπίσης λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις f εἶναι *γνησίως μονότονος* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν αὕτη εἶναι γνησίως αὔξουσα ἢ γνησίως φθίνουσα. Ἀντιστοίχως δὲ λέγομεν ὅτι ἡ f εἶναι *μονότονος*, ἂν αὕτη εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα. Διὰ νὰ δηλώσωμεν τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας μιᾶς συναρτήσεως χρησιμοποιοῦμεν τὰ κάτωθι σύμβολα :

$$f \Uparrow \ \text{ἢ} \ f \nearrow \Leftrightarrow f \ \text{εἶναι γνησίως αὔξουσα}$$
$$f \Downarrow \ \text{ἢ} \ f \searrow \Leftrightarrow f \ \text{εἶναι γνησίως φθίνουσα}$$
$$f \uparrow \ \text{ἢ} \ f \nearrow \Leftrightarrow f \ \text{εἶναι αὔξουσα}$$
$$f \downarrow \ \text{ἢ} \ f \searrow \Leftrightarrow f \ \text{εἶναι φθίνουσα.}$$

Ἂν ἡ συνάρτησις f εἶναι σταθερά, δηλαδὴ κάθε $x \in A$ ἀπεικονίζεται διὰ τῆς f εἰς τὸν αὐτὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν ἢ τὸ αὐτὸ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ $\mathscr{R}(f)$ αὐτῆς εἶναι ἓν μονομελὲς σύνολον, τότε, προφανῶς, ἡ f εἶναι ταυτοχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἡ συνάρτησις f εἶναι ταυτοχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα θὰ ἔχωμεν διὰ x_1, x_2 ἐν A $(x_1 \neq x_2)$ ὅτι $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδὴ ὅτι ἡ f εἶναι σταθερὰ συνάρτησις. Πράγματι· διὰ $x_1 < x_2$, ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (διότι $f \uparrow$), ἀφ' ἑτέρου δὲ $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (διότι $f \downarrow$), ἤτοι $f(x_1) = f(x_2)$. Ὁμοίως διὰ $x_2 < x_1$, ἔχομεν $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ (διότι $f \uparrow$) καὶ $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ (διότι $f \downarrow$), ἤτοι πάλιν $f(x_1) = f(x_2)$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι :

1.1.1 *Ἡ συνάρτησις* $f\colon A \mapsto R$ $(A \subseteq R)$ *εἶναι σταθερὰ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ* f *εἶναι ταυτοχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα.*

Ἄς μελετήσωμεν τώρα ὡς πρὸς τὴν μονοτονίαν τὴν πραγματικὴν συνάρτησιν ω μὲ $\omega(x) = \dfrac{1}{x}$, ἡ ὁποία προφανῶς ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $R - \{0\}$.

Ἂν δεχθῶμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ω εἶναι φθίνουσα, δηλαδὴ ὅτι

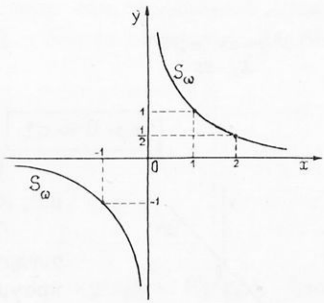
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \omega(x_1) \geqslant \omega(x_2),$$

τότε διὰ $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ καταλήγομεν εἰς τὸ ἄτοπον $-1 = \omega(-1) \geqslant \omega(1) = 1$.

Ὁμοίως, ἂν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ω εἶναι αὔξουσα, δηλαδὴ ὅτι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \omega(x_1) \leqslant \omega(x_2),$$

τότε διὰ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ καταλήγομεν εἰς τὸ ἄτοπον $1 = \omega(1) \leqslant \omega(2) = \dfrac{1}{2}$.



Σχ. 25 $\omega\colon\ y = \dfrac{1}{x}$

Ὥστε ἡ συνάρτησις ω δὲν εἶναι μονότονος. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι, ἂν περιορισθῶμεν διὰ x_1, x_2 ἐν $(-\infty, 0)$, ἰσχύει

$$(3) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \omega(x_1) = \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} = \omega(x_2),$$

ἤτοι πληροῦται ἡ συνθήκη γνησίως φθινούσης συναρτήσεως ἐν $(-\infty, 0)$ λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὅτι ἡ συνάρτησις ω εἶναι γνησίως φθίνουσα ἐν $(-\infty, 0)$.

Ὁμοίως καὶ διὰ x_1, x_2 ἐν $(0, +\infty)$ ἰσχύει ἡ (3) καὶ λέγομεν ἀναλόγως ὅτι ἡ ω εἶναι γνησίως φθίνουσα ἐν $(0, +\infty)$.

Γενικῶς, ἂν διὰ τὴν συνάρτησιν f ἰσχύῃ ἡ (2) διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν B, ὅπου B εἶναι ἓν μὴ κενὸν ὑποσύνολον τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ A αὐτῆς, τότε λέγομεν ὅτι ἡ f εἶναι *γνησίως φθίνουσα ἐν* B καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $f \overset{\vee}{\downarrow} B$.

Ὁμοίως λέγομεν ὅτι ἡ f εἶναι *γνησίως αὔξουσα ἐν* B, ἂν ἡ (1) ἰσχύῃ διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν B· ὡς ἐπίσης καὶ ὅτι ἡ f εἶναι *αὔξουσα ἐν* B ἢ *φθίνουσα* ἐν B, ἂν ἡ (1′) ἢ (2′) ἀντιστοίχως ἰσχύῃ διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν B. Χρησιμοποιοῦμεν δὲ τοὺς συμβολισμοὺς $f \underset{\wedge}{\uparrow} B$, $f \uparrow B$ καὶ $f \downarrow B$, ἵνα δηλώσωμεν ἀντιστοίχως ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐν B, αὔξουσα ἐν B καὶ φθίνουσα ἐν B.

Π.χ. ἡ συνάρτησις ἡμίτονον, συντόμως ημ, εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐν $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ καὶ γνησίως φθίνουσα ἐν $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Γενικώτερον, ἂν κ ἀκέραιος ἰσχύει

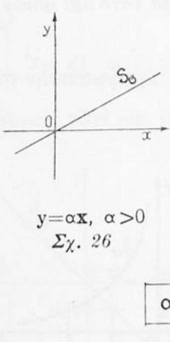
$$\eta\mu \underset{\wedge}{\uparrow} \left[2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right] \text{ καὶ } \eta\mu \overset{\vee}{\downarrow} \left[2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, (2\kappa+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

1.2 Τὸ μονότονον καὶ ἡ σύνθεσις συναρτήσεων. Ἡ πραγματικὴ συνάρτησις σ μὲ $\sigma(x) = \alpha x$, ὅπου α σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0 εἶναι γνησίως μονότονος καὶ μάλιστα διὰ μὲν $\alpha > 0$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, διότι

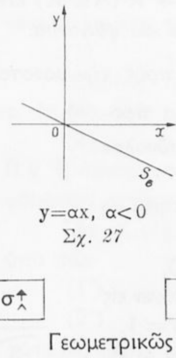
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 < \alpha x_2 \Rightarrow \sigma(x_1) < \sigma(x_2),$$

διὰ δὲ $\alpha < 0$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 > \alpha x_2 \Rightarrow \sigma(x_1) > \sigma(x_2).$$



$y = \alpha x$, $\alpha > 0$
Σχ. 26



$y = \alpha x$, $\alpha < 0$
Σχ. 27

Ἤτοι :

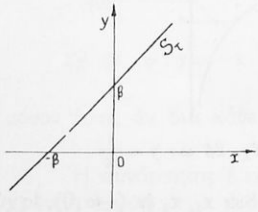
$$\boxed{\alpha > 0 \Rightarrow \sigma \underset{\wedge}{\uparrow}} \qquad \boxed{\alpha < 0 \Rightarrow \sigma \overset{\vee}{\downarrow}}$$

Γεωμετρικῶς ἡ συνάρτησις σ παρίσταται διὰ μιᾶς εὐθείας ὡς εἰς τὰ σχήματα 26 καὶ 27.

Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίσης καὶ τὴν πραγματικὴν συνάρτησιν τ μὲ $\tau(x) = x + \beta$, ὅπου β σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμός. Ἡ συνάρτησις τ εἶναι γνησίως αὔξουσα, διότι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + \beta < x_2 + \beta \Rightarrow \tau(x_1) < \tau(x_2).$$

Τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως τ εἶναι ἡ εὐθεῖα τοῦ σχήματος 28, ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων $(-\beta, 0)$ καὶ $(0, \beta)$.



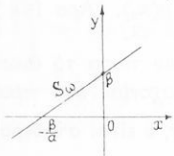
$y = x + \beta$ $(\beta > 0)$
Σχ. 28

Ἂν τώρα $\omega = \tau \circ \sigma$ εἶναι ἡ σύνθεσις τῶν συναρτήσεων σ καὶ τ, δηλαδὴ ἡ συνάρτησις ἡ διδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\omega(x) = \tau(\sigma(x)) = \alpha x + \beta,$$

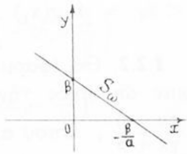
ὅπου α, β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha \neq 0$, τότε παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύουν :

$\alpha > 0 \Rightarrow \omega \stackrel{\uparrow}{\wedge}$	$\alpha < 0 \Rightarrow \omega \stackrel{\vee}{\downarrow}$



ω: $y = \alpha x + \beta$, $\alpha > 0$

Σχ. 29 $(\beta > 0)$



ω: $y = \alpha x + \beta$, $\alpha < 0$

Σχ. 30 $(\beta > 0)$

διότι διὰ μὲν $\alpha > 0$,

$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta \Rightarrow$

$\omega(x_1) < \omega(x_2)$,

διὰ δὲ $\alpha < 0$

$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta > \alpha x_2 + \beta \Rightarrow \omega(x_1) > \omega(x_2)$.

Τὸ διάγραμμα τῆς συνθέσεως ω τῶν συναρτήσεων σ καὶ τ εἶναι ἡ εὐθεῖα τῶν σχημάτων 29 καὶ 30, ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ καὶ $(0, \beta)$.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν $\alpha > 0$ ἡ σύνθεσις ω τῆς γνησίως αὐξούσης συναρτήσεως σ καὶ τῆς ἐπίσης γνησίως αὐξούσης συναρτήσεως τ εἶναι ὁμοίως γνησίως αὔξουσα συνάρτησις, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $c < 0$ ἡ σύνθεσις ω τῆς γνησίως φθινούσης συναρτήσεως σ καὶ τῆς γνησίως αὐξούσης συναρτήσεως τ εἶναι γνησίως φθίνουσα συνάρτησις.

Γενικῶς, ἂν $g : A \mapsto B$, $f : B \mapsto R$ εἶναι πραγματικαὶ συναρτήσεις (Α, Β ὑποσύνολα τοῦ R), τότε ὁρίζεται, ὡς γνωστόν, ἡ σύνθεσις αὐτῶν $f \circ g : A \mapsto R$, ἰσχύει δὲ τὸ κάτωθι θεώρημα.

1.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστω ὅτι αἱ συναρτήσεις g καὶ f εἶναι γνησίως μονότονοι. Τότε, ἂν μὲν ἀμφότεροι εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μονοτονίας, ἡ σύνθεσις $f \circ g$ αὐτῶν εἶναι γνησίως αὔξουσα συνάρτησις, ἂν δὲ αὗται εἶναι διαφορετικοῦ εἴδους μονοτονίας, ἡ σύνθεσις $f \circ g$ αὐτῶν εἶναι γνησίως φθίνουσα συνάρτησις. Ἀκριβέστερον ἰσχύουν τὰ κάτωθι :*

a) $\left.\begin{matrix} f \stackrel{\uparrow}{\wedge} \\ g \stackrel{\uparrow}{\wedge} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \circ g \stackrel{\uparrow}{\wedge}$	b) $\left.\begin{matrix} f \stackrel{\vee}{\downarrow} \\ g \stackrel{\uparrow}{\wedge} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \circ g \stackrel{\vee}{\downarrow}$
c) $\left.\begin{matrix} f \stackrel{\vee}{\downarrow} \\ g \stackrel{\vee}{\downarrow} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \circ g \stackrel{\uparrow}{\wedge}$	d) $\left.\begin{matrix} f \stackrel{\uparrow}{\wedge} \\ g \stackrel{\vee}{\downarrow} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \circ g \stackrel{\vee}{\downarrow}$

Ἀπόδειξις: a) $x_1 < x_2 \overset{g \stackrel{\uparrow}{\wedge}}{\Longrightarrow} g(x_1) < g(x_2) \overset{f \stackrel{\uparrow}{\wedge}}{\Longrightarrow} f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, ἤτοι $x_1 < x_2 \Rightarrow f \circ g(x_1) < f \circ g(x_2)$. Ἄρα $f \circ g \stackrel{\uparrow}{\wedge}$.

b) $x_1 < x_2 \overset{g \stackrel{\uparrow}{\wedge}}{\Longrightarrow} g(x_1) < g(x_2) \overset{f \stackrel{\vee}{\downarrow}}{\Longrightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2))$, ἤτοι $x_1 < x_2 \Rightarrow f \circ g(x_1) > f \circ g(x_2)$. Ἄρα $f \circ g \stackrel{\vee}{\downarrow}$.

c) $x_1 > x_2 \overset{g \stackrel{\vee}{\downarrow}}{\Longrightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{f \stackrel{\vee}{\downarrow}}{\Longrightarrow} f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, ἤτοι

$x_1 < x_2 \Rightarrow f\circ g(x_1) < f\circ g(x_2)$. Ἄρα $f\circ g \uparrow$.

d) $x_1 < x_2 \overset{g\downarrow}{\Longrightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2))$, ἤτοι
$x_1 < x_2 \Rightarrow f\circ g(x_1) > f\circ g(x_2)$. Ἄρα $f\circ g \downarrow$.

1.2.2. Θὰ ἐφαρμόσωμεν τώρα τὸ ἀνωτέρω θεώρημα 1.2.1. διὰ νὰ μελετήσωμεν ὡς πρὸς τὴν μονοτονίαν τὴν πραγματικὴν συνάρτησιν w μὲ $w(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\gamma \neq 0$. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς w εἶναι τὸ σύνολον $R - \left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$ καὶ ὅτι ἐπὶ πλέον ἰσχύει

$$w(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma\left(x + \dfrac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha\left(x + \dfrac{\delta}{\gamma}\right) - \dfrac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta}{\gamma\left(x + \dfrac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2\left(x + \dfrac{\delta}{\gamma}\right)},$$

ἤτοι

$$(4) \qquad y = w(x) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{c}{x + \dfrac{\delta}{\gamma}},$$

ὅπου ἐτέθη $c = -\dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} = -\dfrac{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}}{\gamma^2}$.

Εἶναι προφανές, ἐκ τοῦ τύπου (4), ὅτι διὰ $c = 0$ (δηλαδὴ $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = 0$) ἡ w εἶναι σταθερὰ συνάρτησις, ἤτοι

$$\boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow w \text{ σταθερά}}$$

Διὰ $c \neq 0$ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ w εἶναι σύνθεσις ἁπλῶν τινῶν συναρτήσεων g_1, g_2, g_3, g_4 μὲ $g_1(x) = x + \dfrac{\delta}{\gamma}$, $g_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $g_3(x) = cx$ καὶ $g_4(x) = \dfrac{\alpha}{\gamma} + x$, ἤτοι $w = g_4\circ(g_3\circ(g_2\circ g_1))$. Ἑπομένως, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 1.2.1:

περίπτωσις $c > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \uparrow \\ g_2 \downarrow (-\infty, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow g_2\circ g_1 \downarrow \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2\circ g_1 \downarrow \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_3 \uparrow \end{array}\right\} \Rightarrow g_3\circ(g_2\circ g_1) \downarrow \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_3\circ(g_2\circ g_1) \downarrow \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_4 \uparrow \end{array}\right\} \Rightarrow w \downarrow \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

περίπτωσις $c < 0$:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \underset{\wedge}{\uparrow} \\ g_2 \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow g_2 \circ g_1 \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2 \circ g_1 \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_3 \overset{\vee}{\downarrow} \end{array}\right\} \Rightarrow g_3 \circ (g_2 \circ g_1) \underset{\wedge}{\uparrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_3 \circ (g_2 \circ g_1) \underset{\wedge}{\uparrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_4 \underset{\wedge}{\uparrow} \end{array}\right\} \Rightarrow w \underset{\wedge}{\uparrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right).$$

Ἤτοι :

$$\boxed{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow w \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)} \qquad \boxed{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow w \underset{\wedge}{\uparrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καί :

$$\boxed{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow w \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)} \qquad \boxed{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow w \underset{\wedge}{\uparrow} \left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)}$$

Τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα σχετικῶς μὲ τὴν μονοτονίαν δύναται νὰ ἐξαχθοῦν καὶ ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν ὁρισμῶν γνησίως αὐξούσης καὶ γνησίως φθινούσης συναρτήσεως.

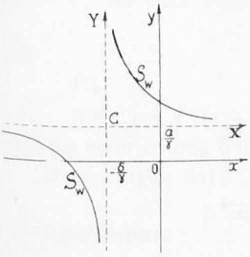
Διάγραμμα τῆς συναρτήσεως w. Ἂν θέσωμεν

$$X = x + \frac{\delta}{\gamma}, \quad Y = y - \frac{\alpha}{\gamma},$$

τότε ὁ τύπος (4) δίδει

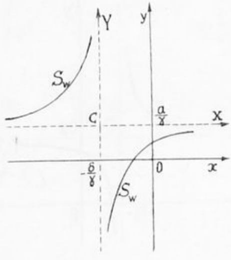
$$Y = \frac{c}{X}, \quad c = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\gamma^2}.$$

Οἱ ἄξονες x, y μετατίθενται παραλλήλως εἰς τοὺς X, Y μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον $C = \left(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$. Τὸ διάγραμμα τῆς w δίδεται εἰς τὰ κάτωθι σχήματα :



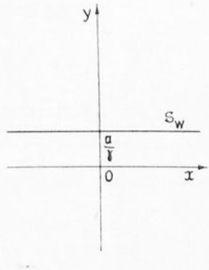
$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} < 0$$

Σχ. 31



$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} > 0$$

Σχ. 32



$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

Σχ. 33

Παραδείγματα :

1. $w(x) = \dfrac{2x+8}{x+3}$

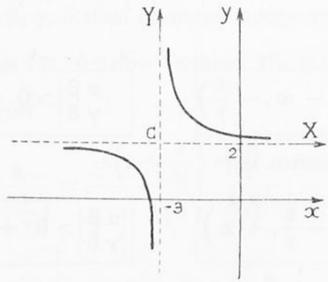
$y = w(x) = 2 + \dfrac{2}{x+3}$

$C = (-3,2)$

Βοηθητικοί υπολογισμοί

$$\frac{2x+8}{x+3} = \frac{2}{1} + \frac{c}{x+\frac{3}{1}}$$

$$x=0: \quad \frac{8}{3} = 2 + \frac{c}{3} \Rightarrow 8 = 6 + c \Rightarrow c = 2$$



Σχ. 34 $\quad w: y = \dfrac{2x+8}{x+3}$

$w \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty, -3)$ *καί* $w \overset{\vee}{\downarrow} (-3, +\infty)$.

2. $w(x) = \dfrac{5x+3}{2x+3}$

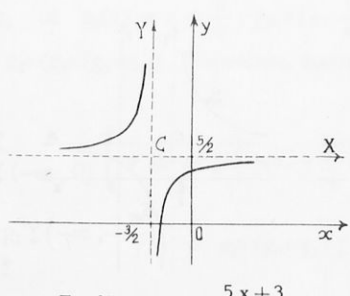
$y = w(x) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{-\frac{9}{4}}{x+\frac{3}{2}}$

$C = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

Βοηθητικοί υπολογισμοί

$$\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{5}{2} + \frac{c}{x+\frac{3}{2}}$$

$$x=0: \frac{3}{3} = \frac{5}{2} + \frac{c}{\frac{3}{2}} \Rightarrow 1 - \frac{5}{2} = \frac{2}{3}c \Rightarrow c = -\frac{9}{4}$$



Σχ. 35 $\quad w: y = \dfrac{5x+3}{2x+3}$

$w \underset{\wedge}{\uparrow} \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ *καί* $w \underset{\wedge}{\uparrow} \left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

1.3 Τὸ μονότονον καὶ ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις. Ἔστω $f: A \mapsto B$ ($A \subseteq R$, $B \subseteq R$) μία γνησίως μονότονος συνάρτησις τοῦ A ἐπὶ τοῦ B. Αὕτη εἶναι τότε καὶ ἀμφιμονοσήμαντος, δηλαδὴ διὰ κάθε x_1, x_2 ἐν A ἰσχύει

(5) $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Πράγματι· δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος, ὅτι $x_1 < x_2$ (εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, δηλαδὴ $x_1 > x_2$, ἐναλλάσσομεν τὸν ρόλον τῶν x_1, x_2), ὁπότε θὰ ἰσχύῃ

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ ἂν } f \overset{\uparrow}{\wedge} \text{ ἢ } f(x_1) > f(x_2), \text{ ἂν } f \underset{\downarrow}{\vee}.$$

Ἄρα πάντοτε ἰσχύει ἡ (5) καὶ ἑπομένως ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις τοῦ A ἐπὶ τοῦ B.

Κατὰ τὸ θεώρημα 2.2.1 τοῦ Κεφ. I ὑπάρχει καὶ ἡ ἀντίστροφος τῆς γνησίως μονοτόνου συναρτήσεως f. Ἀκριβέστερον ἰσχύει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

1.3.1. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἂν* $f: A \mapsto B$ *εἶναι μία γνησίως μονότονος συνάρτησις τοῦ* A *ἐπὶ τοῦ* B, *τότε ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις* f^{-1} *αὐτῆς καὶ μάλιστα ἰσχύουν :*

$$\boxed{f \overset{\uparrow}{\wedge} \Rightarrow f^{-1} \overset{\uparrow}{\wedge}} \qquad \boxed{f \underset{\downarrow}{\vee} \Rightarrow f^{-1} \underset{\downarrow}{\vee}}$$

Ἀπόδειξις. Ἡ ὕπαρξις τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως f^{-1} ἔχει ἤδη ἀποδειχθῆ ἀνωτέρω. Πρὸς ἀπόδειξιν καὶ τῶν λοιπῶν συμπερασμάτων τοῦ θεωρήματος διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις :

a) $f \overset{\uparrow}{\wedge}$ *καὶ* f^{-1} *ὄχι* $\overset{\uparrow}{\wedge}$. Ἐπειδὴ ἡ f^{-1} δὲν εἶναι γνησίως αὔξουσα, ὑπάρχουν x_1, x_2 εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ B αὐτῆς μὲ

$$x_1 < x_2 \quad \text{καὶ} \quad f^{-1}(x_1) \geqslant f^{-1}(x_2).$$

Ἀλλὰ

$$\left.\begin{array}{l} f \overset{\uparrow}{\wedge} \\ f^{-1}(x_1) \geqslant f^{-1}(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(f^{-1}(x_1)) \geqslant f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 \geqslant x_2,$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι $x_1 < x_2$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $f \overset{\uparrow}{\wedge} \Rightarrow f^{-1} \overset{\uparrow}{\wedge}$.

b) $f \underset{\downarrow}{\vee}$ *καὶ* f^{-1} *ὄχι* $\underset{\downarrow}{\vee}$. Ὁμοίως, ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἐπειδὴ ἡ f^{-1} δὲν εἶναι γνησίως φθίνουσα ὑπάρχουν x_1, x_2 ἐν B μὲ

$$x_1 < x_2 \quad \text{καὶ} \quad f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2).$$

Ἀλλὰ

$$\left.\begin{array}{l} f \underset{\downarrow}{\vee} \\ f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(f^{-1}(x_1)) \geqslant f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 \geqslant x_2,$$

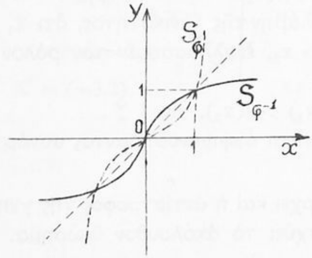
τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπίσης ἄτοπον.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $f \underset{\downarrow}{\vee} \Rightarrow f^{-1} \underset{\downarrow}{\vee}$.

Παραδείγματα :

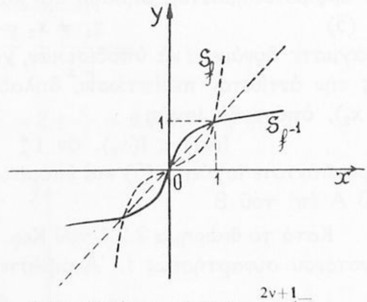
1. Ἡ πραγματικὴ συνάρτησις φ μὲ $\varphi(x) = x^3$ (βλ. Σχ. 23) εἶναι ὡς γνωστὸν γνησίως αὔξουσα, ἄρα καὶ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς συνάρτησις φ^{-1} τῆς ὁποίας ὁ τύπος εἶναι $\varphi^{-1} = \sqrt[3]{x}$

εἶναι ἐπίσης γνησίως αὔξουσα καὶ μάλιστα τὸ διάγραμμα αὐτῆς (βλ. Σχ. 36) εἶναι συμμετρικόν, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων, τοῦ διαγράμματος τῆς φ.



$\varphi: y = x^3$; $\varphi^{-1}: y = \sqrt[3]{x}$.

Σχ. 36



$f: y = x^{2\nu+1}$; $f^{-1}: y = \sqrt[2\nu+1]{x}$.

Σχ. 37

2*. Γενικώτερον, ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x^{2\nu+1}$ (ν φυσικὸς ἀριθμός) εἶναι γνησίως αὔξουσα, διότι $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2\nu+1} < x_2^{2\nu+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Ὁμοίως καὶ ἡ ἀντίστροφος f^{-1} αὐτῆς, τῆς ὁποίας ὁ τύπος εἶναι $f^{-1}(x) = \sqrt[2\nu+1]{x}$, εἶναι ἐπίσης γνησίως αὔξουσα. Τὰ διαγράμματα τῶν συναρτήσεων f καὶ f^{-1} εἶναι βεβαίως συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων (βλ. Σχ. 37).

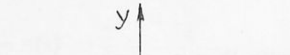
2. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

2.1 Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον συναρτήσεως. Διὰ τὴν συνάρτησιν φ μὲ $\varphi(x) = 1 - x^2$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$\varphi(x) = 1 - x^2 \leqslant 1 = \varphi(0) \quad \forall \ x \in R,$$

δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τῆς φ οὐδέποτε ὑπερβαίνουν τὴν τιμήν της εἰς τὸ 0, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν φ(0). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ φ παρουσιάζει μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον 0, τὴν δὲ τιμήν της φ(0) καλοῦμεν μεγίστην τιμὴν τῆς φ. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ φ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἀριστερὰ τοῦ 0 καὶ ἀκριβέστερον ἐν $(-\infty, 0]$, διότι ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow 1 - x_1^2 < 1 - x_2^2 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2),$$



Σχ. 38 $\varphi: y = 1 - x^2$
φ παρουσιάζει μέγιστον εἰς τὸ 0.

ὡς ἐπίσης καὶ ὅτι αὕτη εἶναι γνησίως φθίνουσα δεξιὰ τοῦ 0, διότι

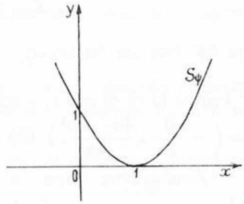
$$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 \Rightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2).$$

Τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως φ δίδεται εἰς τὸ Σχ. 38.

Ἀναλόγως διὰ τὴν συνάρτησιν ψ μὲ $\psi(x) = (x-1)^2$ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\psi(x) = (x-1)^2 \geqslant 0 = \psi(1) \quad \forall \ x \in R,$$

δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως ψ ὑπερβαίνουν τὴν τιμὴν ψ(1) αὐτῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις ψ παρουσιάζει ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον 1, τὴν δὲ τιμὴν της ψ(1) καλοῦμεν ἐλαχίστην τιμὴν αὐτῆς. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ψ εναι γνησίως φθίνουσα ἐν $(-\infty, 1]$, δηλαδὴ ἀριστερὰ τοῦ 1 καὶ γνησίως αὔξουσα ἐν $[1, +\infty)$, δηλαδὴ δεξιά τοῦ 1. Τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως ψ δίδεται εἰς τὸ Σχ. 39.



Σχ. 39 $\psi : y = (x-1)^2$
ψ παρουσιάζει ἐλάχιστον εἰς τὸ 1

Γενικῶς διὰ μίαν συνάρτησιν $f: A \mapsto R$ $(A \subseteq R)$ λέγομεν ὅτι παρουσιάζει *μέγιστον* (ἢ *ὁλικὸν μέγιστον*) εἰς ἕν σημεῖον $x_0 \in A$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall \quad x \in A.$$

Τὴν τιμὴν $f(x_0)$ καλοῦμεν τότε *μεγίστην τιμὴν* (ἢ *ὁλικὸν μέγιστον*) τῆς f.

Ὁμοίως λέγομεν ὅτι ἡ f παρουσιάζει *ἐλάχιστον* (ἢ *ὁλικὸν ἐλάχιστον*) εἰς ἕν σημεῖον $x_0 \in A$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$f(x) \geqslant f(x_0) \quad \forall \quad x \in A.$$

Τὴν τιμὴν $f(x_0)$ καλοῦμεν τότε *ἐλαχίστην τιμὴν* (ἢ *ὁλικὸν ἐλάχιστον*) τῆς f.

Ἐφαρμογαί :

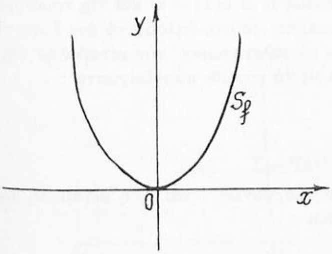
1. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \alpha x^2$ $(\alpha \in R - \{0\})$. Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

περίπτωσις $\alpha > 0$

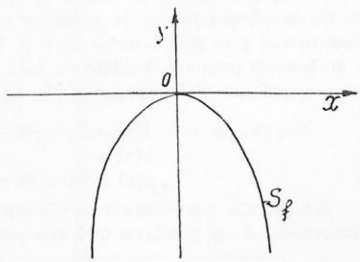
Ἡ f παρουσιάζει *ἐλάχιστον* εἰς τὸ 0, διότι
$f(x) = \alpha x^2 \geqslant 0 = f(0) \ \forall \ x \in R$.
$f \downarrow (-\infty, 0]$, διότι
$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow \alpha x_1^2 > \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
$f \uparrow [0, +\infty)$, διότι
$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1^2 < \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

περίπτωσις $\alpha < 0$

Ἡ f παρουσιάζει *μέγιστον* εἰς τὸ 0, διότι
$f(x) = \alpha x^2 \leqslant 0 = f(0) \ \forall \ x \in R$.
$f \uparrow (-\infty, 0]$, διότι
$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow \alpha x_1^2 < \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
$f \downarrow [0, +\infty)$, διότι
$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1^2 > \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



Σχ. 40 $f: y = \alpha x^2, \ \alpha > 0$



Σχ. 41 $f: y = \alpha x^2, \ \alpha < 0.$

2. *Ἡ τριώνυμος συνάρτησις δευτέρου βαθμοῦ* f μὲ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, *ὅπου* α, β, γ *πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ* $\alpha \neq 0$.

Ἐν πρώτοις ἰσχύει

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x\right) + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right),$$

ὁπότε, ἂν τεθῇ

$$X = x + \frac{\beta}{2\alpha} \text{ καὶ } Y = y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha},$$

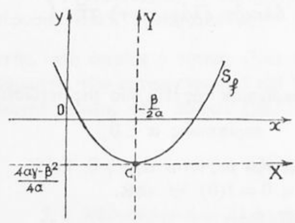
τότε ἀφ' ἑνὸς μὲν θὰ ἰσχύῃ

$$Y = \alpha X^2,$$

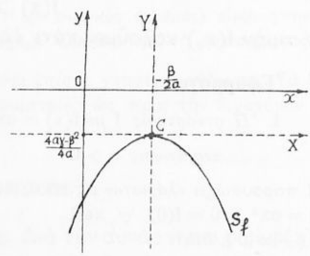
ἀφ' ἑτέρου δὲ οἱ ἄξονες x, y θὰ μεταφερθοῦν παραλλήλως εἰς τοὺς X, Y μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον $C = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}\right)$ (βλ. κατωτέρω Σχ. 42 καὶ 43).

Λαμβάνοντες τώρα ὑπ' ὄψιν τὸ προηγούμενον παράδειγμα, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι :

περίπτωσις $\alpha > 0$	*περίπτωσις* $\alpha < 0$
ἡ f παρουσιάζει ἐλάχιστον εἰς τὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$	ἡ f παρουσιάζει μέγιστον εἰς τὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$
$f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καὶ $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$	$f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καὶ $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.



Σχ. *42* f: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$



Σχ. *43* f: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha < 0$.

3. *Ἡ διτετράγωνος τριώνυμος συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, *ὅπου* α, β, γ *πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ* $\alpha \neq 0$. Ἡ μελέτη τῆς διτετραγώνου τριωνύμου συναρτήσεως f βασίζεται ἐπὶ τῆς θεωρήσεως ταύτης ὡς συνθέσεως τῆς συναρτήσεως h μὲ $h(x) = x^2$ καὶ τῆς τριωνύμου συναρτήσεως g μὲ $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Χρησιμοποιοῦντες τοῦτο, δηλαδὴ τὸ ὅτι $f = g \circ h$, ἐν συνδυασμῷ μετὰ τοῦ θεωρήματος 1.2.1, δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν τὴν μεταβολὴν τῆς f καὶ νὰ χαράξωμεν τὸ διάγραμμα αὐτῆς, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παράδειγμα 1.
$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$$
$$h(x) = x^2$$
$$g(x) = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x-1)^2 - 3.$$

Δυνάμει τῶν συμπερασμάτων τῶν προηγουμένων ἐφαρμογῶν 1 καὶ 2, ἡ μεταβολὴ τῶν συναρτήσεων h καὶ g δίδεται ὑπὸ τῶν κάτωθι πινάκων :

x		0	
h(x)	↘	0	↗

x		1	
g(x)	↘	−3	↗

Ἐπειδὴ $f(x) = g(h(x))$, πρέπει νὰ μελετήσωμεν τὴν συνάρτησιν f, ὡς πρὸς τὴν μονοτονίαν, εἰς τὰ ὑποδιαστήματα τῶν $(-\infty, 0]$, καὶ $[0, +\infty)$ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ h πληροῖ τὰς συνθήκας

$$h(x) = x^2 \leqslant 1 \text{ καὶ } h(x) = x^2 \geqslant 1,$$

ἤτοι εἰς τὰ διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0,1]$ καὶ $[1, +\infty)$.

(i) Εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, -1]$, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου πίνακος, ἡ συνάρτησις h εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἄρα

$$h(x) = x^2 \geqslant (-1)^2 = 1 \quad \forall \; x \in (-\infty, -1],$$

δηλαδὴ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς h ἀνήκουν εἰς τὸ διάστημα $[1, +\infty)$, ὅπου, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ δευτέρου πίνακος, ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα 1.2.1, ἡ σύνθεσις $g \circ h$, δηλαδὴ ἡ συνάρτησις f, εἶναι *γνησίως φθίνουσα ἐν* $(-\infty, -1]$.

(ii) Εἰς τὸ διάστημα $[-1, 0]$, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου πίνακος, ἡ συνάρτησις h εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἄρα

$$h(x) = x^2 \leqslant (-1)^2 = 1 \quad \forall \; x \in [-1, 0],$$

δηλαδὴ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς h ἀνήκουν εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, 1]$, ὅπου, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ δευτέρου πίνακος, ἡ g εἶναι ἐπίσης γνησίως φθίνουσα. Ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα 1.2.1, ἡ σύνθεσις $f = g \circ h$, εἶναι *γνησίως αὔξουσα ἐν* $[-1, 0]$.

(iii) Ὁμοίως εἰς τὸ διάστημα $[0,1]$ ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ πρώτου πίνακος, ἡ συνάρτησις h εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἄρα

$$h(x) = x^2 \leqslant 1^2 = 1 \quad \forall \; x \in [0, 1],$$

δηλαδὴ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς h ἀνήκουν εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, 1]$, ὅπου ἡ g εἶναι γνησίως φθίνουσα. Ἄρα ἡ σύνθεσις $f = g \circ h$ εἶναι *γνησίως φθίνουσα ἐν* $[0,1]$.

(iv) Τέλος, εἰς τὸ διάστημα $[1, +\infty)$ ἡ συνάρτησις h εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἄρα

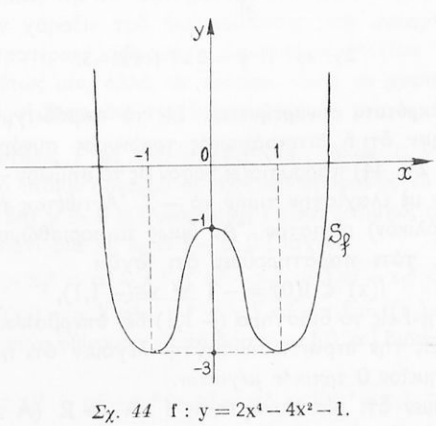
$$h(x) = x^2 \geqslant 1^2 = 1 \quad \forall \; x \in [1, +\infty),$$

δηλαδὴ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς h ἀνήκουν εἰς τὸ διάστημα $[1, +\infty)$, ὅπου, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ δευτέρου πίνακος, ἡ g εἶναι ἐπίσης γνησίως αὔξουσα. Ἄρα ἡ σύνθεσις $f = g \circ h$ εἶναι *γνησίως αὔξουσα ἐν* $[1, +\infty)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὁ κάτωθι πίναξ μεταβολῆς τῆς f.

x		−1		0		1	
f(x)	↘	−3	↗	−1	↘	−3	↗

περίπτωσις $\alpha\beta < 0$



Σχ. 44 $f: y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.

Παράδειγμα 2. $f(x) = 2x^4 + 4x^2 - 3$

$$h(x) = x^2$$
$$g(x) = 2x^2 + 4x - 3 \doteq 2(x+1)^2 - 5.$$

Οἱ πίνακες μεταβολῆς τῶν συναρτήσεων h καὶ g εἶναι οἱ κάτωθι:

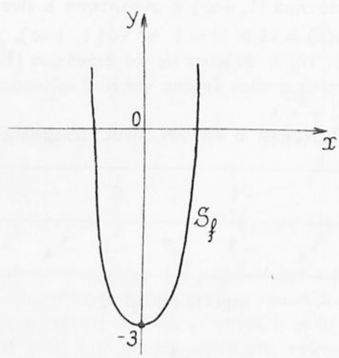
x		0	
h(x)	↘	0	↗

x		−1	
g(x)	↘	−5	↗

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πινάκων μεταβολῆς τῶν συναρτήσεων h καὶ g, δυνάμει καὶ τοῦ θεωρήματος 1.2.1, συνάγεται εὐκόλως ὁ κάτωθι πίναξ μεταβολῆς τῆς διτετραγώνου τριωνύμου συναρτήσεως $f = g \circ h$.

x		0	
f(x)	↘	−3	↗

περίπτωσις $\alpha\beta \geqslant 0$



Σχ. 45 f: $y = 2x^4 + 4x^2 - 3$.

2.2 Τοπικὰ ἀκρότατα συναρτήσεως. Εἰς τὸ παράδειγμα 1 τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς 3 εἴδομεν ὅτι ἡ διτετράγωνος τριώνυμος συνάρτησις f μὲ $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$ (βλ. Σχ. 44) παρουσιάζει τόσον εἰς τὸ σημεῖον -1 ὅσον καὶ εἰς τὸ 1 (ὁλικὸν) ἐλάχιστον μὲ ἐλαχίστην τιμὴν τὸ -3. Ἀντιθέτως ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν παρουσιάζει (ὁλικὸν) μέγιστον. Ἂν ὅμως περιορισθῶμεν εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-1,1)$, τότε παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$f(x) \leqslant f(0) = -1 \quad \forall \ x \in (-1,1),$$

δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τῆς f εἰς τὸ διάστημα $(-1,1)$ δὲν ὑπερβαίνουν τὴν τιμὴν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον 0. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει εἰς τὸ σημεῖον 0 *τοπικὸν μέγιστον*.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις $f : A \mapsto R$ $(A \subseteq R)$ παρουσιάζει *τοπικὸν μέγιστον* εἰς ἓν σημεῖον $x_0 \in A$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἓν *ἀνοικτὸν* διάστημα (a, b) περιέχον τὸ x_0 καὶ περιεχόμενον εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ A τῆς f, ἤτοι $x_0 \in (a, b) \subseteq A$, τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$f(x) \leqslant f(x_0) \ \forall \ x \in (a, b).$$

Τὴν τιμὴν $f(x_0)$ καλοῦμεν τότε *τοπικῶς μεγίστην τιμὴν* (ἢ *τοπικὸν μέγιστον*) τῆς f.

Ὁμοίως λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει *τοπικὸν ἐλάχιστον* εἰς ἓν σημεῖον $x_0 \in A$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἓν *ἀνοικτὸν* διάστημα $(a, b) \subseteq A$ περιέχον τὸ x_0 καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$f(x) \geqslant f(x_0) \ \forall \ x \in (a, b).$$

Τὴν τιμὴν $f(x_0)$ καλοῦμεν τότε *τοπικῶς ἐλαχίστην τιμὴν* (ἢ *τοπικὸν ἐλάχιστον*) τῆς f.

Ὅταν μία συνάρτησις f παρουσιάζῃ εἰς ἓν σημεῖον x_0 τοπικὸν μέγιστον ἢ τοπικὸν ἐλάχιστον,τότε λέγομεν ὅτι αὕτη παρουσιάζει εἰς τὸ σημεῖον x_0 *τοπικὸν ἀκρότατον*. Π.χ. ἡ διτετράγωνος τριώνυμος συνάρτησις f μὲ $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$ (βλ. Σχ. 44) παρουσιάζει εἰς τὰ σημεῖα $-1, 0, 1$ τοπικὰ ἀκρότατα. Ἀκριβέστερον αὕτη παρουσιάζει εἰς τὰ σημεῖα $-1, 1$ (ὁλικόν) ἐλάχιστον καὶ εἰς τὸ σημεῖον 0 τοπικὸν μέγιστον.

3. ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

3.1 Ἡ μελέτη μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς συνίσταται εἰς τὴν τοπικὴν (κατὰ διαστήματα) μελέτην τῆς μονοτονίας αὐτῆς, τὸν καθορισμὸν τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη παρουσιάζει τοπικὰ ἀκρότατα καὶ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀκροτάτων τιμῶν αὐτῆς, ἤτοι τῶν τοπικῶς μεγίστων καὶ τοπικῶς ἐλαχίστων τιμῶν της. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω στοιχείων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς μελέτης μιᾶς συναρτήσεως, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς τὴν ὑπ' ὄψιν συνάρτησιν, ἤτοι νὰ χαράξωμεν τὸ διάγραμμα αὐτῆς. Εἰς τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματος μιᾶς συναρτήσεως διευκολύνει πολὺ ὁ ἐκ τῶν προτέρων καθορισμὸς ὡρισμένων σημείων τοῦ διαγράμματος ἐκλεγόμενα αὐθαιρέτως μέν, ἀλλὰ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ χαρακτηρίζουν τὸ διάγραμμα καθ' ὅλην, εἰ δυνατόν, τὴν ἔκτασίν του.

3.2 Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, ὅπου α, γ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha > 0$. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς εἶναι προφανῶς τὸ κλειστὸν διάστημα $[-\alpha, \alpha]$. Ἐπίσης διὰ $\gamma > 0$ ἡ συνάρτησις f εἶναι γνησίως αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $[-\alpha, 0]$, διότι διὰ x_1, x_2 ἐν $[-\alpha, 0]$ ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow \alpha^2 - x_1^2 < \alpha^2 - x_2^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - x_1^2} < \sqrt{\alpha^2 - x_2} \Rightarrow$$
$$f(x_1) = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_1^2} < \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_2^2} = f(x_2),$$

ἐνῷ αὕτη εἶναι γνησίως φθίνουσα εἰς τὸ δάστημα $[0, \alpha]$ διότι διὰ x_1, x_2 ἐν $[0, \alpha]$ ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow \alpha^2 - x_1^2 > \alpha^2 - x_2^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - x_1^2} > \sqrt{\alpha^2 - x_2^2} \Rightarrow$$
$$f(x_1) = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_1^2} > \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_2^2} = f(x_2).$$

Ὁμοίως διὰ $\gamma < 0$ ἔχομεν $f \downarrow [-\alpha, 0]$ καὶ $f \uparrow [0, \alpha]$.

Ὅθεν ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως f δίδεται ὑπὸ τῶν πινάκων :

x	$-\alpha$		0		α
f(x)	0	↗	$\gamma\alpha$	↘	0

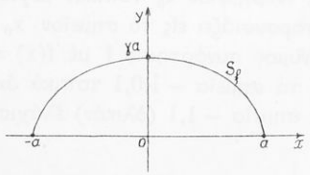
$\gamma > 0$

x	$-\alpha$		0		α
f(x)	0	↘	$\gamma\alpha$	↗	0

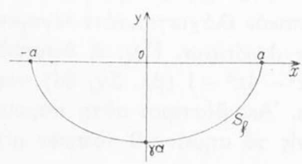
$\gamma < 0$

Προφανῶς ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει εἰς τὸ σημεῖον 0 εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν $\gamma > 0$ μέγιστον μὲ μεγίστην τιμὴν $\gamma\alpha$, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $\gamma < 0$ ἐλάχιστον μὲ ἐλαχίστην τιμὴν $\gamma\alpha$.

Τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως f δίδεται εἰς τὰ κάτωθι σχήματα:



Σχ. 46 $f: y = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x^2},\ \gamma > 0$



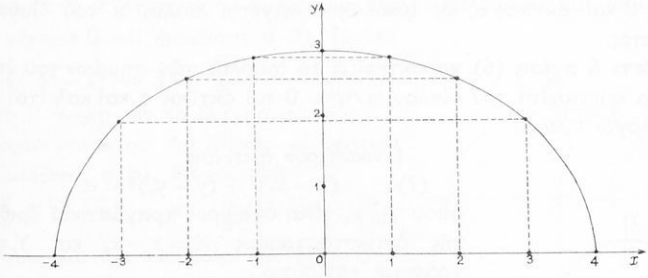
Σχ. 47 $f: y = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x^2},\ \gamma < 0$

Πρὸς ἀκριβεστέραν χάραξιν τοῦ διαγράμματος μιᾶς συναρτήσεως σχεδιάζομεν πρῶτον ὡρισμένα σημεῖα τοῦ διαγράμματος, τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζουν αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν ἔκτασίν του. Οὕτω π.χ. εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν διὰ $\alpha = 4,\ \gamma = \frac{3}{4}$ χαράσσομεν τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ τῇ βοηθείᾳ ἀφ' ἑνὸς μὲν τοῦ πίνακος μεταβολῆς αὐτῆς

x	-4		0		4
f(x)	0	↗	3	↘	0

ἀφ' ἑτέρου δὲ τοῦ κατωτέρω πίνακος, ὁ ὁποῖος δίδει τὰς συντεταγμένας ὡρισμένων σημείων τοῦ διαγράμματος.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0	$\frac{3\sqrt{7}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{15}}{4}$	3	$\frac{3\sqrt{15}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{7}}{4}$	0
Κατὰ προσέγγισιν									
f(x)	0	1,98	2,60	2,90	3	2,90	2,60	1,98	0

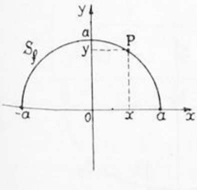


$\Sigma\chi.$ 48 $\mathrm{f}: \mathrm{y} = \frac{3}{4}\sqrt{16-\mathrm{x}^2}$.

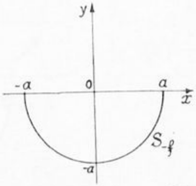
Εἰδικαὶ περιπτώσεις :

3.2.1. $\gamma = 1$, *δηλαδὴ* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{\alpha^2 - \mathrm{x}^2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν ὡς διάγραμμα τῆς f τὸ ἄνω ἡμικύκλιον κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος α. Πράγματι· ἀφ' ἑνὸς μέν, δυνάμει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, τυχὸν σημεῖον $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τοῦ διαγράμματος τῆς f πληροῖ τὴν σχέσιν $\mathrm{OP}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{x}^2 + (\sqrt{\alpha^2-\mathrm{x}^2})^2 = \mathrm{x}^2 + (\alpha^2 - \mathrm{x}^2) = \alpha^2$, ἄρα ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου τοῦ διαγράμματος τῆς f ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων εἶναι σταθερὰ ἴση μὲ α. Ἀφ' ἑτέρου δὲ τυχὸν σημεῖον $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τοῦ ἄνω ἡμικυκλίου (ἄρα $\mathrm{y} \geqslant 0$) εἶναι σημεῖον τοῦ διαγράμματος τῆς f καθ' ὅσον, δυνάμει πάλιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος,

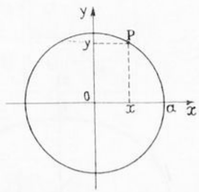
$$\alpha^2 = \mathrm{OP}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \Rightarrow \mathrm{y}^2 = \alpha^2 - \mathrm{x}^2 \Rightarrow \mathrm{y} = \sqrt{\alpha^2 - \mathrm{x}^2} = \mathrm{f}(\mathrm{x}).$$



$\Sigma\chi.$ 49 $\mathrm{f}: \mathrm{y} = \sqrt{\alpha^2 - \mathrm{x}^2}$



$\Sigma\chi.$ 50 $-\mathrm{f}: \mathrm{y} = -\sqrt{\alpha^2 - \mathrm{x}^2}$



$\Sigma\chi.$ 51 $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \alpha^2$

Προφανῶς τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως $-\mathrm{f}$ εἶναι τὸ κάτω ἡμικύκλιον κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος α (βλ. Σχ. 50). Ἄρα ὁ κύκλος κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος α εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν διαγραμμάτων τῶν συναρτήσεων f καὶ $-\mathrm{f}$. Τυχὸν σημεῖον $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τοῦ κύκλου κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος α ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν

(6) $$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \alpha^2,$$

ὡς εὐκόλως συνάγεται ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως τυχὸν σημεῖον $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν (6) κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος α, ὡς εὐκόλως συνάγεται πάλιν ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

Ὥστε ἡ σχέσις (6) χαρακτηρίζει τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ κύκλου κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος α καὶ καλεῖται *ἐξίσωσις* τοῦ ἐν λόγῳ κύκλου.

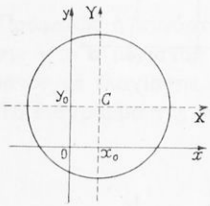
Γενικώτερον ἡ σχέσις

$$(7) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2,$$

ὅπου x_0, y_0 εἶναι σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $X = x - x_0$ καὶ $Y = y - y_0$ γράφεται καὶ οὕτω

$$X^2 + Y^2 = \alpha^2,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν $C = (x_0, y_0)$ τῶν νέων ἀξόνων X, Y καὶ ἀκτῖνος α (βλ. Σχ. 52). Ἡ ἀνωτέρω σχέσις (7) καλεῖται *ἐξίσωσις* τοῦ κύκλου κέντρου $C = (x_0, y_0)$ καὶ ἀκτῖνος α.

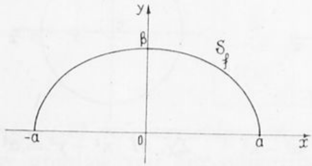


Σχ. 52 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\alpha^2$

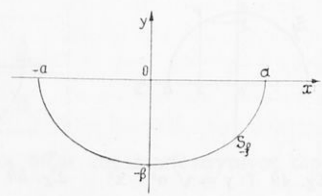
3.2.2 $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$, *δηλαδὴ* $f(x) = \dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, *ὅπου ἐκτὸς τοῦ* α *καὶ τὸ* β *εἶναι θετικὸς ἀριθμός*. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ πίναξ μεταβολῆς τῆς f εἶναι

x	$-\alpha$		0		α
f(x)	0	↗	β	↘	0

Τὰ διαγράμματα τῆς f καὶ τῆς $-f$ δίδονται εἰς τὰ κάτωθι σχήματα :



Σχ. 53 $f: y = \dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$



Σχ. 54 $-f: y = -\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$

Τὴν ἕνωσιν τῶν ἀνωτέρω διαγραμμάτων τῶν συναρτήσεων f καὶ $-f$ καλοῦμεν *ἔλλειψιν μὲ κέντρον* 0 *καὶ ἡμιάξονας* α, β.

Τυχὸν σημεῖον $P = (x, y)$ τῆς ἐν λόγῳ ἐλλείψεως ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν

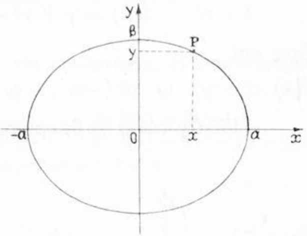
$$(8) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

διότι, ἂν μὲν τὸ P ἀνήκῃ εἰς τὸ διάγραμμα τῆς f (καλούμενον καὶ *ἄνω ἡμιέλλειψις μὲ κέντρον* 0 *καὶ ἡμιάξονας* α, β), ἔχομεν

$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2) \Rightarrow (8),$

ἂν δὲ τὸ P ἀνήκῃ εἰς τὸ διάγραμμα τῆς $-f$ (καλούμενον καὶ *κάτω ἡμιέλλειψις μὲ κέντρον* 0 *καὶ ἡμιάξονας* α, β), ἔχομεν πάλιν

$y = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2) \Rightarrow (8).$



Σχ. 55 $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

ἔλλειψις μὲ κέντρον 0 *καὶ ἡμιάξονας* α, β

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν δι' ἓν σημεῖον $P = (x, y)$ ἱκανοποιεῖται ἡ (8), τότε τὸ P εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, διότι

$\left.\begin{matrix}(8)\\ y \geqslant 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \Rightarrow$

P ἀνήκει εἰς τὸ διάγραμμα τῆς f

$\left.\begin{matrix}(8)\\ y < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \Rightarrow$ P ἀνήκει εἰς τὸ διάγραμμα τῆς $-f$·

Ἡ σχέσις (8) χαρακτηρίζει τὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως μὲ κέντρον 0 καὶ ἡμιάξονας α, β καὶ καλεῖται *ἐξίσωσις* τῆς ἐν λόγῳ ἐλλείψεως.

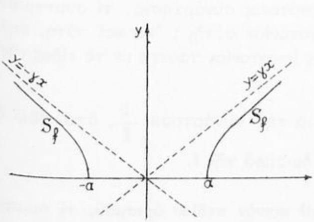
3.3 Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \gamma\sqrt{x^2 - \alpha^2}$, ὅπου α, γ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha > 0$. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς εἶναι προφανῶς ἡ ἕνωσις τῶν διαστημάτων $(-\infty, \alpha]$ καὶ $[\alpha, +\infty)$. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν προηγουμένην § 3.2 συνάγεται εὐκόλως ὅτι ὁ πίναξ μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως f ἔχει ὡς κάτωθι :

x		$-\alpha$	α	
f(x)	↘	0	0	↗

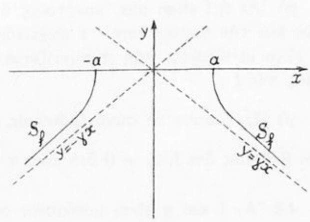
$\gamma > 0$

x		$-\alpha$	α	
f(x)	↗	0	0	↘

$\gamma < 0$



Σχ. 56 $f : y = \gamma\sqrt{x^2 - \alpha^2}, \gamma > 0$



Σχ. 57 $f : y = \gamma\sqrt{x^2 - \alpha^2}, \gamma < 0.$

Εἰς τὴν χάραξιν τῶν διαγραμμάτων τῶν ἀνωτέρω σχημάτων 56 καὶ 57 διεὐκολύνουν καὶ αἱ εὐθεῖαι μὲ ἐξισώσεις $y = \gamma x$ καὶ $y = -\gamma x$, διότι, π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν $\gamma > 0$ ἔχομεν

$$f(x) = \gamma \sqrt{x^2 - \alpha^2} = \gamma\,|x|\,\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{x^2}} < \gamma\,|x|$$

ἄρα καὶ

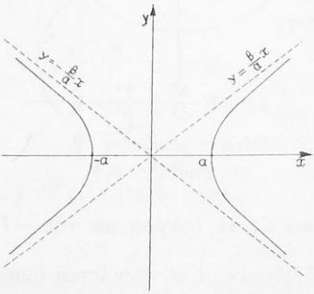
$f(x) < -\gamma x \ \forall\ x \in (-\infty\,, -\alpha\,]$ ὡς ἐπίσης καὶ $f(x) < \gamma x \ \forall\ x \in [\,\alpha, +\infty)$.

Εἰδικῶς τώρα ἂν θεωρήσωμεν τὰ διαγράμματα τῶν συναρτήσεων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$, ὅπου ἐκτὸς τοῦ α καὶ τὸ β εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τότε τὴν ἕνωσιν αὐτῶν (βλ. Σχ. 58) καλοῦμεν *ὑπερβολήν*.

Ἡ σχέσις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{9}$$

ὡς εὐκόλως συνάγεται, κατ᾽ ἀναλογίαν καὶ πρὸς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλλείψεως, χαρακτηρίζει τὰ σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς καὶ καλεῖται *ἐξίσωσις* αὐτῆς.



Σχ. 58 $\quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

ὑπερβολή

Τὰς εὐθείας μὲ ἐξισώσεις $y = \frac{\beta}{\alpha}\,x$ καὶ $y = -\frac{\beta}{\alpha}\,x$, αἱ ὁποῖαι διευκολύνουν τὴν χάραξιν τῆς ὑπερβολῆς μὲ ἐξίσωσιν τὴν (9) καλοῦμεν *ἀσυμπτώτους* αὐτῆς.

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 α) Μελετήσατε ὡς πρὸς τὴν μονοτονίαν τὰς συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων :

1) $f(x) = x^3 + 1$ $\qquad$ 2) $f(x) = -x^3 - 1$

3) $f(x) = x^2 + 1,\ x \geqslant 0$ $\qquad$ 4) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},\ x \geqslant 0$

β) Ἂν ἡ f εἶναι μία μονότονος ἢ γνησίως μονότονος συνάρτησις, τί συμπεραίνεται γενικῶς διὰ τὴν συνάρτησιν $-f$ σχετικῶς μὲ τὴν μονοτονίαν αὐτῆς ; Ἂν καὶ αὕτη, δηλαδὴ ἡ $-f$ εἶναι μονότονος, πῶς συσχετίζεται τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας ταύτης μὲ τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας τῆς f ;

γ) Ἐξετάσατε τὸ αὐτὸ ἐρώτημα, ὡς ἐν β), διὰ τὴν συνάρτησιν $\frac{1}{f}$, ὅπου ἐδῶ ὑποτίθεται βεβαίως ὅτι $f(x) \neq 0$ διὰ κάθε x τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς f.

4.2 Ἂν f καὶ g εἶναι μονότονοι συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ, τὶ συμπεραίνεται, ὡς πρὸς τὴν μονοτονίαν, διὰ τὸ ἄθροισμα $f + g$ καὶ τὸ γινόμενον fg αὐτῶν;

4.3 Μελετήσατε καὶ παραστήσατε γεωμετρικῶς τὰς συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων :

1) $f(x) = \frac{3x+1}{2x+5}$ 2) $f(x) = \frac{1}{x+7}$ 3) $f(x) = \frac{x+2}{8x+1}$

4) $f(x) = \frac{x}{3x+2}$ 5) $f(x) = \frac{3x+2}{x}$ 6) $f(x) = \frac{7x+2}{5x+1}$

4.4 Μελετήσατε καὶ παραστήσατε γεωμετρικῶς τὰς συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων:

1) $f(x) = 3x^2 + 2$ 2) $f(x) = -4x^3 + 1$ 3) $f(x) = 2x^4 - 1$

4) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 5) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ 6) $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$

7) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ 8) $f(x) = -2x^4 + 3x^2 + 5$

4.5 Χαράξατε τὰς ἐλλείψεις μὲ ἐξισώσεις:

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 2) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 3) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

4) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$ 6) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 3$

4.6 Χαράξατε τὰς ὑπερβολὰς μὲ ἐξισώσεις:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 2) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 3) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

4) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 8$ 5) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 4$ 6) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 4$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1.1 Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας. Γνωρίζομεν ἤδη (Κεφ. Ι, § 2.2) τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως ὡς μιᾶς μονοσημάντου ἀπεικονίσεως f ἑνὸς συνόλου Α εἰς ἕνα σύνολον Β (Α,Β ὑποτίθενται μὴ κενά). Γράφομεν δὲ

$$f : A \mapsto B \text{ ἢ καὶ ἄλλως } A \ni x \to f(x) \in B$$

καὶ λέγομεν ὅτι ἡ f εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Α καὶ τιμὰς εἰς τὸ Β.

Κατὰ ταῦτα μία συνάρτησις α μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς εἰς τὸ Β θὰ συμβολισθῇ οὕτω :

$$\alpha : N \mapsto B \text{ ἢ καὶ ἄλλως } N \ni \nu \to \alpha(\nu) \in B.$$

Κάθε συνάρτησις ὡς ἡ ἀνωτέρω α καλεῖται *μία ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου* Β. Εἰδικῶς, ἂν $B \subseteq R$ ἡ ἀκολουθία α καλεῖται *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν.*

Ὥστε : *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κάθε συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον* N *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς εἰς τὸ σύνολον* R *τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ* N *εἰς τὸ* R.

Εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἀκολουθίας α συνηθίζομεν ὅπως τὴν τιμὴν $\alpha(\nu)$ αὐτῆς συμβολίζομεν μὲ α_ν γράφοντες τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ν ὡς κάτω δείκτην τοῦ α. Αἱ τιμαὶ μιᾶς ἀκολουθίας α καλοῦνται ὅροι αὐτῆς καὶ δυνάμεθα νὰ τοὺς καταχωρίσωμεν εἰς ἕνα πίνακα ὡς κάτωθι :

1	2	3	...	ν	...
α_1	α_2	α_3	...	α_ν	...

εἰς τὸν ὁποῖον παραλείπεται συνήθως ἡ πρώτη γραμμὴ καὶ γράφονται μόνον οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας, ἤτοι :

(1) $$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ldots, \ \alpha_\nu, \ \ldots$$

Ὁ ὅρος α_1 καλεῖται πρῶτος ὅρος τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας, ὁ α_2 δεύτερος ὅρος καὶ γενικῶς ὁ α_ν νιοστὸς ὅρος αὐτῆς.

Ἔχει ἐπικρατήσει ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἀκολουθίας α παρίσταται αὕτη διὰ τῶν ὅρων της ὡς ἐν (1). Λέγομεν δὲ τότε «*ἡ ἀκολουθία* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$» ἢ καὶ ἄλλως «*ἡ ἀκολουθία* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$». Συντομώτερον ἡ ἀκολουθία (1) παρίσταται καὶ οὕτω :

$$\alpha_\nu, \ \nu \in N \text{ ἢ καὶ ἄλλως } \alpha_\nu, \ \nu = 1,2,\ldots$$

Παραδείγματα :

1. ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι ἡ ἀκολουθία

$$1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ν, ἤτοι $\alpha_\nu = \nu$.

2. ἡ ἀκολουθία

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$$

τῆς ὁποίας ὁ νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{\nu}$, ἤτοι $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$.

3. ἡ ἀκολουθία

$$1, 4, 9, \ldots \nu^2, \ldots$$

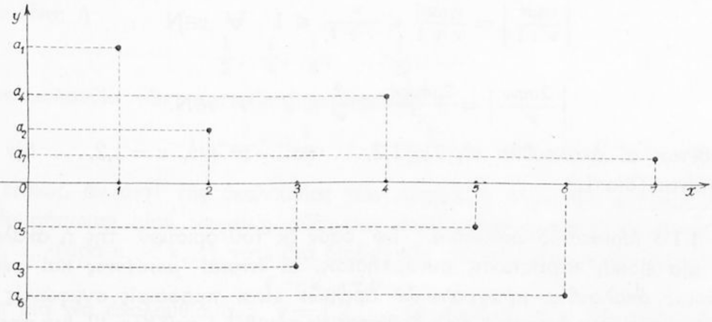
4. ἡ ἀκολουθία

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^\nu \frac{1}{\nu}, \ldots$$

1.1.1 *Γεωμετρικὴ παράστασις ἀκολουθίας.* Ἔστω α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ γράφημα S_α αὐτῆς εἶναι τότε τὸ σύνολον

$$\{(1,\alpha_1), (2,\alpha_2), \ldots, (\nu,\alpha_\nu), \ldots\}.$$

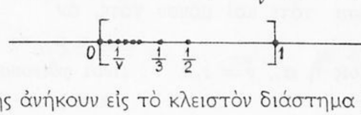
Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις (τὸ διάγραμμα) αὐτοῦ ἢ ὡς ἄλλως λέγομεν τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ἀποτελεῖται ἀπὸ μεμονωμένα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα 59.



Σχ. 59

1.1.2 *Φραγμένη ἀκολουθία.* Διὰ τὴν ἀκολουθίαν $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$0 \leqslant \alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \leqslant 1 \quad \forall \quad \nu \in N$$



ἤτοι ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ταύτης ἀνήκουν εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $[0,1]$, λέγομεν δὲ ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη εἶναι *φραγμένη*.

Γενικῶς : *μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *καλεῖται φραγμένη τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ* γ *καὶ* δ *τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἰσχύῃ*

(2) $$\gamma \leqslant \alpha_\nu \leqslant \delta \quad \forall \quad \nu \in N$$

Ἂν τώρα θ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος τῶν $|\gamma|$ καὶ $|\delta|$, τότε ἡ (2) συνεπάγεται ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\alpha_\nu \leqslant \delta \leqslant |\delta| \leqslant \theta \quad \forall \quad \nu \in N$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\alpha_\nu \geqslant \gamma \geqslant -|\gamma| \geqslant -\theta \quad \forall \quad \nu \in N$$

Ἄρα, ἰσχύει τότε

(3) $$-\theta \leqslant \alpha_\nu \leqslant \theta \quad \forall \quad \nu \in N$$

ἢ ἰσοδυνάμως

(4) $$|\alpha_\nu| \leqslant \theta \quad \forall \quad \nu \in N.$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (4), τότε προφανῶς ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2\ldots$ εἶναι φραγμένη, διότι ἡ (4) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (3). Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι :

Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu = 1,2\ldots$ εἶναι φραγμένη τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς θ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$|\alpha_\nu| \leqslant \theta \quad \forall \quad \nu \in N.$$

Ὁ ἀριθμὸς θ καλεῖται τότε *φράγμα* τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$

Φραγμέναι ἀκολουθίαι εἶναι π.χ. αἱ $\frac{\nu\eta\mu\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ $\frac{2\sigma\upsilon\nu\nu}{\nu^3}$, $\nu = 1,2,\ldots$, διότι ἰσχύουν

$$\left|\frac{\nu\eta\mu\nu}{\nu+1}\right| = \frac{\nu|\eta\mu\nu|}{\nu+1} \leqslant \frac{\nu}{\nu+1} \leqslant 1 \quad \forall \quad \nu \in N$$

καὶ

$$\left|\frac{2\sigma\upsilon\nu\nu}{\nu^3}\right| = \frac{2\,|\sigma\upsilon\nu\nu|}{\nu^3} \leqslant \frac{2}{\nu^3} \leqslant 2 \quad \forall \quad \nu \in N.$$

Ἀντιθέτως αἱ ἀκολουθίαι ν^3, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ $-\nu^2+\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ δὲν εἶναι φραγμέναι (διατί;).

1.1.3 *Μονότονος ἀκολουθία.* Ἐφ' ὅσον ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ της ἡ ἀκολουθία εἶναι μία εἰδικὴ περίπτωσις συναρτήσεως, αἱ ἔννοιαι *μονότονος* καὶ *γνησίως μονότονος* ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι προφανεῖς συμφώνως πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ὁρισμοὺς τοὺς δοθέντας εἰς τὴν § 1.1 τοῦ Κεφ. III, διὰ πραγματικὰς συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Ἀκριβέστερον μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι *αὔξουσα* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu \leqslant \alpha_\mu.$$

Ὁμοίως ἡ α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι *φθίνουσα* τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu \geqslant \alpha_\mu.$$

Κατ' ἀναλογίαν, ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2\ldots$ εἶναι μὲν *γνησίως αὔξουσα*, ἂν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu < \alpha_\mu,$$

εἶναι δὲ *γνησίως φθίνουσα*, ἂν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu > \alpha_\mu.$$

Π.χ. ἡ ἀκολουθία ν^2, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, διότι

$$\nu < \mu \;\Rightarrow\; \nu^2 < \mu^2,$$

ἐνῷ ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2\ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$\nu < \mu \;\Rightarrow\; \frac{1}{\nu} > \frac{1}{\mu}.$$

1.2 Ἡ ἔννοια τῆς ὑπακολουθίας. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ Ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν 2ν, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε διὰ διαδοχικῆς ἀντιστοιχίσεως ὡς κατωτέρω

$$\nu \to 2\nu \to \alpha_{2\nu}$$

ὁρίζεται μία νέα ἀκολουθία $\alpha_{2\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία

$$\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6,\ \ldots\ \alpha_{2\nu},\ \ldots$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐκείνους τοὺς ὅρους τῆς α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄρτιον δείκτην. Ἡ νέα αὕτη ἀκολουθία καλεῖται *ὑπακολουθία* τῆς α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ μάλιστα *ὑπακολουθία τῶν ἀρτίων δεικτῶν.*

Ὁμοίως δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ἡ *ὑπακολουθία τῶν περιττῶν δεικτῶν* τῆς α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, ὡς ἡ ἀκολουθία

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ldots,\ \alpha_{2\nu-1},\ldots$$

Π.χ. ἂν $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε ἡ μὲν ὑπακολουθία τῶν ἀρτίων δεικτῶν εἶναι ἡ

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ldots,\ \frac{1}{2\nu},\ldots$$

ἡ δὲ ὑπακολουθία τῶν περιττῶν δεικτῶν εἶναι ἡ

$$-1,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ \ldots,\ -\frac{1}{2\nu-1},\ldots$$

Γενικῶς, ἂν ἀντὶ τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀρτίων ἢ περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν θεωρήσωμεν μίαν γνησίως αὔξουσαν ἀκολουθίαν φυσικῶν ἀριθμῶν κ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ (ἄρα $\kappa_\nu < \kappa_{\nu+1}$), τότε διὰ διαδοχικῆς ἀντιστοιχίσεως ὡς κατωτέρω

$$\nu \to \kappa_\nu \to \alpha_{\kappa_\nu}$$

ὁρίζεται μία νέα ἀκολουθία α_{κ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ (ἡ σύνθεσις $\alpha \circ \kappa$ τῶν ἀκολουθιῶν (συναρτήσεων) κ καὶ α), δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία

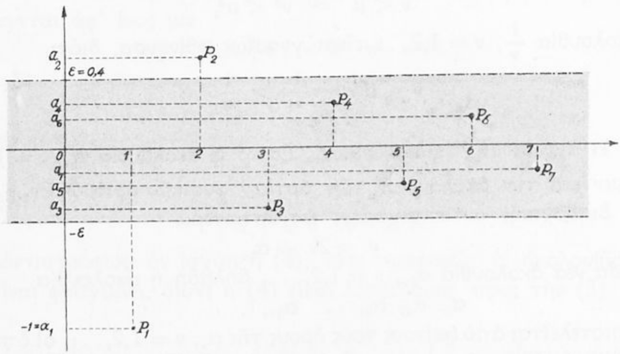
$$\alpha_{\kappa_1},\ \alpha_{\kappa_2},\ \alpha_{\kappa_3},\ldots,\ \alpha_{\kappa_\nu},\ \ldots$$

ἡ ὁποία καλεῖται *ὑπακολουθία* τῆς α_ν, $\nu = 1,2\ldots$

1.3. Μηδενικαὶ ἀκολουθίαι. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ldots,\ (-1)^\nu \frac{1}{3},\ldots$$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τὸ διάγραμμα αὐτῆς (βλ. Σχ. 60), ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν ε π.χ. τὸν $\varepsilon = 0{,}4$ καὶ τὰς εὐθείας μὲ ἐξισώσεις $y = \varepsilon$ καὶ $y = -\varepsilon$, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μίαν *ταινίαν.*



Σχ. 60

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω Σχ. 60 ὅτι τὰ σημεῖα P_1 καὶ P_2 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ταινίας, ἐνῷ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου $\nu = 3$ καὶ *πέραν* ἀντίστοιχα σημεῖα, ἤτοι τὰ σημεῖα P_3, P_4, $P_5, \ldots$ εὑρίσκονται ὅλα ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ τεταγμέναι τούτων, ἤτοι οἱ ὅροι α_3, α_4, α_5, $\ldots$ τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας κεῖνται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$, ἤτοι

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0 = 3 \qquad (\varepsilon = 0{,}4)$$

ἢ ἰσοδυνάμως

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0 = 3.$$

Ἂν τώρα λάβωμεν ἕνα ἄλλον θετικὸν ἀριθμὸν ε π.χ. τὸν $\varepsilon = 0{,}16$ (μικρότερον τοῦ προηγουμένου) καὶ ἐπαναλάβωμεν τὰ ἀνωτέρω τότε καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ σημεῖα P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 καὶ P_6 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ἀντιστοίχου ταινίας, ἐνῷ τὰ σημεῖα P_7, P_8, $P_9, \ldots$ εὑρίσκονται ἐντὸς τῆς ἐν λόγῳ ταινίας, δηλαδὴ αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τούτων, ἤτοι οἱ ὅροι α_7, α_8, $\alpha_9, \ldots$ τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας κεῖνται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$, ἤτοι ἰσχύει

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0 = 7 \qquad (\varepsilon = 0{,}16)$$

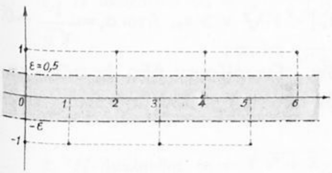
ἢ ἰσοδυνάμως

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0 = 7.$$

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ ἂν λάβωμεν ὡς ε οἱονδήποτε θετικὸν ἀριθμόν, μόνον ποὺ δι' ἕκαστον ε ἀλλάσσει ὁ δείκτης ν_0 (ἀνωτέρω εἴδομεν ὅτι διὰ $\varepsilon = 0{,}4$ ἔχομεν ὡς ν_0 τὸ 3, ἐνῷ διὰ $\varepsilon = 0{,}16$, τὸ 7).

Τὴν ἐν λόγῳ ἀκολουθίαν, α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ $\alpha_\nu = (-1)^\nu \, \dfrac{1}{\nu}$, ἡ ὁποία πληροῖ τὰ ἀνωτέρω, χαρακτηρίζομεν ὡς *μηδενικὴν ἀκολουθίαν.*

Ἀντιθέτως αἱ ἀκολουθίαι $\beta_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ $\gamma_\nu = \dfrac{1-(-1)^\nu}{2}$, $\nu = 1,2,\ldots$ δὲν πληροῦν τὰ ἀνωτέρω (βλ. Σχ. 61 καὶ 62) καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς μηδενικαὶ ἀκολουθίαι.



$\Sigma\chi$. 61

$\Sigma\chi$. 62

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha_\nu, \nu = 1,2,\ldots$ *καλεῖται μηδενικὴ ἀκολουθία καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ* $\alpha_\nu \to 0$ *ἢ καὶ ἄλλως* $\lim \alpha_\nu = 0$ *τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχῃ δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ *(ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ* ε*) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ*

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

Συντόμως :

$$\boxed{\alpha_\nu \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : \; |\alpha_\nu| < \varepsilon \; \forall \nu \geqslant \nu_0}$$

Παραδείγματα :

1. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2\ldots$ *εἶναι μηδενική,* διότι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται ἐδῶ νὰ ληφθῇ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\dfrac{1}{\varepsilon}$, τοιοῦτος, ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\nu \geqslant \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu| = \frac{1}{\nu} \leqslant \frac{1}{\nu_0},$$

ἀφ' ἑτέρου δέ, λόγῳ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ν_0,

$$\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon.$$

Ἄρα ἰσχύει $|\alpha_\nu| < \varepsilon \;\forall\; \nu \geqslant \nu_0$. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \left(\text{ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ } \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}\right) : |\alpha_\nu| < \varepsilon \;\forall\; \nu \geqslant \nu_0, \text{ ἤτοι } \alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

2. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu = 1,2,\ldots$ *εἶναι μηδενική,* διότι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται νὰ ληφθῇ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$, τοιοῦτος, ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\nu \geqslant \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\nu_0}},$$

ἀφ' ἑτέρου δέ, λόγῳ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ν_0,

$$\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} < \varepsilon.$$

Ἄρα ἰσχύει $|\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0(\varepsilon) \left(\text{ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ } \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}\right) : |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0, \text{ ἤτοι } \alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0.$$

1.3.1. *Ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν.* Γνωρίζομεν ἤδη ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προηγουμένης τάξεως τὰς κάτωθι ἰδιότητας τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν :

1. $$\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow |\alpha_\nu| \to 0$$

Αὕτη συνεπάγεται καὶ τὴν

$$\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow -\alpha_\nu \to 0 \text{ (διατί;)}$$

2. $$\alpha_\nu \to 0 \Rightarrow \alpha_{\kappa_\nu} \to 0,$$

ὅπου α_{κ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι τυχοῦσα ὑπακολουθία τῆς α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδὴ *κάθε ὑπακολουθία μηδενικῆς ἀκολουθίας εἶναι ἐπίσης μηδενικὴ ἀκολουθία.*

3. $$\alpha_\nu \to 0 \Rightarrow \alpha_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots \textit{ εἶναι φραγμένη.}$$

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει ὡς ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ παραδείγματος $\alpha_\nu = (-1)^\nu$ (διατί;).

4. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to 0.$$

5. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots \textit{ φραγμένη}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \to 0.$$

Αὕτη μετὰ τῆς ἰδιότητος 3 συνεπάγονται τὴν

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \to 0 \text{ (διατί;).}$$

6. $$\left.\begin{array}{l}\xi \in R\\ \alpha_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \xi\alpha_\nu \to 0.$$

Αὕτη μετὰ τῆς ἰδιότητος 4 συνεπάγονται τὴν

$$\left.\begin{array}{l}\xi \in R,\ \alpha_\nu \to 0\\ \eta \in R,\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu \to 0 \text{ (διατί;).}$$

Εἰδικῶς διὰ $\xi = 1$ καὶ $\eta = -1$, προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu - \beta_\nu \to 0.$$

7. $$\left.\begin{array}{l}|\alpha_\nu| \leqslant |\beta_\nu| \ \forall \ \nu \in N\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to 0.$$

8. $$\alpha_\nu \to 0 \Rightarrow \sqrt{|\alpha_\nu|} \to 0.$$

'Εφαρμογαί :

1. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu^2+\nu+2}$, $\nu = 1,2,\ldots$ *εἶναι μηδενική.* Πράγματι·

$$|\alpha_\nu| = \frac{\nu}{\nu^2+\nu+2} \leqslant \frac{\nu}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} \quad \forall \ \nu \in N$$

αὶ ἐπειδὴ $\frac{1}{\nu} \to 0$ ἕπεται, δυνάμει τῆς ἰδιότητος 7, ὅτι καὶ $\frac{\nu}{\nu^2+\nu+2} \to 0.$

2. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^3+2} - \sqrt{\nu^3+1}$, $\nu = 1, 2\ldots$ *εἶναι μηδενική.* Πράγματι·

$$|\alpha_\nu| = \sqrt{\nu^3+2} - \sqrt{\nu^3+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu^3+2}+\sqrt{\nu^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{\nu^3}+\sqrt{\nu^3}} = \frac{1}{2\nu\sqrt{\nu}} < \frac{1}{\nu} \ \forall \ \nu \in N$$

αὶ ἐπειδὴ $\frac{1}{\nu} \to 0$, κατὰ τὴν ἰδιότητα 7, εἶναι καὶ ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^3+2} - \sqrt{\nu^3+1}$, $= 1, 2,\ldots$ μηδενική.

3. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1,2\ldots$ *μὲ* ω *σταθερὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν καὶ* $|\omega| < 1$ *ἵναι μηδενική.* Πράγματι·

Διὰ $\omega = 0$ εἶναι προφανές.

Διὰ $\omega \neq 0$, ἔχομεν $0 < |\omega| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|\omega|} > 1$. Ἄρα $\frac{1}{|\omega|} = 1 + \theta$, $\theta > 0$ καὶ ἐπομένως

$$|\alpha_\nu| = |\omega|^\nu = \frac{1}{(1+\theta)^\nu} \quad \forall \ \nu \in N. \tag{5}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν γνωστὴν ἀνισότητα τοῦ *Bernoulli*, ἤτοι τὴν ἀνισότητα

$$(1+\theta)^\nu \geqslant 1 + \nu\theta \text{ (ἀπόδειξις διὰ τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου),}$$

ἔχομεν

$$(1+\theta)^\nu > \nu\theta \quad \forall \quad \nu \in N,$$

ὁπότε ἡ (5) δίδει

$$|\alpha_\nu| < \frac{1}{\nu\theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\nu} \quad \forall \quad \nu \in N.$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $\frac{1}{\nu} \to 0$, δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων 6 καὶ 7, προκύπτει ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ $(0 < |\omega| < 1)$ εἶναι μηδενική.

Π.χ. αἱ ἀκολουθίαι $\frac{1}{2^\nu}$, $\nu = 1, 2,\ldots$, $\frac{1}{3^\nu}$, $\nu = 1, 2,\ldots$ καὶ $\frac{1}{10^\nu}$, $\nu = 1, 2,\ldots$ εἶναι ὅλαι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι.

1.4 Συγκλίνουσαι ἀκολουθίαι. Διὰ τὴν ἀκολουθίαν $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2,\ldots$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει $\alpha_\nu - 1 = \frac{1}{\nu}$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - 1$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ ἀκολουθία $\frac{\nu+1}{\nu}$ $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι «*μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν* l» ἢ ἄλλως «*τείνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν* l» καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $\alpha_\nu \to l$ ἢ $\lim \alpha_\nu = l$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu - l$, $\nu = 1,2,\ldots$, *δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία*

$$\alpha_1 - l, \ \alpha_2 - l, \ \alpha_3 - l, \ldots, \ \alpha_\nu - l, \ \ldots$$

εἶναι μηδενική. Τὸν ἀριθμὸν l καλοῦμεν *ὅριον* ἢ *ὁριακὴν τιμὴν* τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ Συντόμως :

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = l \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \alpha_\nu - l \longrightarrow 0}$$

Γνωρίζομεν ἤδη ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προηγουμένης τάξεως ὅτι ἡ ὁριακὴ τιμὴ ἀκολουθίας εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένη, δηλαδὴ ἰσχύει

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l_1 \\ \lim \alpha_\nu = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow l_1 = l_2 \text{ (διατί;).}$$

1.4.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἂν* α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι.*

(i) $\lim \alpha_\nu = l$

(ii) *Διὰ κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχει δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ *(ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ* ε*) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ* $|\alpha_\nu - l| < \varepsilon$ *διὰ κάθε* $\nu \geqslant \nu_0$.

*Ἀπόδειξις.** (i) $\Rightarrow$ (ii). Πράγματι· $\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim(\alpha_\nu - l) = 0$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας, σημαίνει ὅτι

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ |\alpha_\nu - l| < \varepsilon\ \ \forall\ \nu \geqslant \nu_0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Πράγματι· δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας ἡ πρότασις (ii) σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - l$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικὴ καὶ τοῦτο συνεπάγεται τὴν (i).

Παρατήρησις. Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν $\dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἡ ὁποία, ὡς γνωστόν, συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1, τότε παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία $\dfrac{\nu+11}{\nu+10}$, $\nu = 1, 2,\ldots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία

$$\frac{12}{11},\ \frac{13}{12},\ \frac{14}{13},\ \ldots,$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς $\dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ διαγραφῆς τῶν δέκα πρώτων ὅρων αὐτῆς, ἐπίσης συγκλίνει καὶ μάλιστα πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1, διότι

$$\left|\frac{\nu+11}{\nu+10} - 1\right| = \frac{1}{\nu+10} < \frac{1}{\nu} \longrightarrow 0.$$

Γενικῶς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συγκλινούσης ἀκολουθίας συνάγεται εὐκόλως ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ νὰ εἶναι μία ἀκολουθία συγκλίνουσα διατηρεῖται καὶ μετὰ τὴν διαγραφὴν ἑνὸς *πεπερασμένου* πλήθους ὅρων αὐτῆς καὶ μάλιστα ἡ ὁριακὴ τιμὴ παραμένει ἀμετάβλητος.

1.4.2 *Ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν.* Γνωρίζομεν ἤδη ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προηγουμένης τάξεως τὰς κάτωθι ἰδιότητας τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν :

1. $\alpha_\nu \to l \Rightarrow |\alpha_\nu| \to |l|$

2. $\alpha_\nu \to l \Rightarrow \alpha_{\kappa_\nu} \to l,$

ὅπου α_{κ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μία ὑπακολουθία τῆς α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$; δηλαδὴ ***κάθε ὑπακολουθία συγκλινούσης ἀκολουθίας εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα ἀκολουθία μὲ τὴν αὐτὴν ὁριακὴν τιμήν.***

3. $\alpha_\nu \to l \Rightarrow \alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι φραγμένη.*

Τί συμπεραίνετε περὶ τοῦ ἀντιστρόφου ;

4. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to l_1\\ \beta_\nu \to l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to l_1 + l_2.$$

5. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to l_1\\ \beta_\nu \to l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \beta_\nu \to l_1 l_2.$$

Αὕτη συνεπάγεται τὴν

$$\left.\begin{array}{l}\xi \in R\\ \alpha_\nu \to l\end{array}\right\} \Rightarrow \xi\alpha_\nu \to \xi l \text{ (διατί;)},$$

ἡ ὁποία, δυνάμει τῆς (4), συνεπάγεται καὶ τὴν

$$\left.\begin{array}{l}\xi \in R,\ \alpha_\nu \to l_1\\ \eta \in R,\ \beta_\nu \to l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu \to \xi l_1 + \eta l_2.$$

Εἰδικῶς, διὰ $\xi = 1$ καὶ $\eta = -1$, προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to l_1\\ \beta_\nu \to l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu - \beta_\nu \to l_1 - l_2.$$

6. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to l \neq 0\\ \alpha_\nu \neq 0\ \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_\nu} \to \frac{1}{l}.$$

Αὕτη μετὰ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος 5 συνεπάγονται καὶ τὴν

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to l_1 \neq 0\\ \beta_\nu \to l_2\\ \alpha_\nu \neq 0\ \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} \to \frac{l_2}{l_1}.$$

7. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to l_1\\ \beta_\nu \to l_2\\ \alpha_\nu \leqslant \beta_\nu\ \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \leqslant l_2.$$

8. $$\left.\begin{array}{l}\beta_\nu \to l\\ \gamma_\nu \to l\\ \beta_\nu \leqslant \alpha_\nu \leqslant \gamma_\nu\ \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to l.$$

9. $$\alpha_\nu \to l \Rightarrow \sqrt{|\alpha_\nu|} \to \sqrt{|l|}.$$

Ἐφαρμογαί :

1. $\lim \dfrac{\nu^2 + 3\nu + 5}{4\nu^2 + 1} = \dfrac{1}{4}$. Πράγματι·

$$\frac{\nu^2 + 3\nu + 5}{4\nu^2 + 1} = \frac{\nu^2\left(1 + \frac{3}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}\right)}{\nu^2\left(4 + \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}}{4 + \frac{1}{\nu^2}}.$$

Αἱ ἀκολουθίαι ὅμως $\frac{3}{\nu} = 3\frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2\ldots$, $\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ $\frac{5}{\nu^2} = 5\frac{1}{\nu^2}$, $\nu = 1, 2\ldots$ εἶναι ὅλαι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι. Ἑπομένως

$$\lim\left(1 + \frac{3}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}\right) = 1 + 0 + 0 = 1 \text{ καὶ } \lim\left(4 + \frac{1}{\nu^2}\right) = 4 + 0 = 4.$$

Ἄρα, δυνάμει τῆς ἰδιότητος 6 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, ἔχομεν

$$\lim \frac{\nu^2 + 3\nu + 5}{4\nu^2 + 1} = \lim \frac{1 + \frac{3}{\nu} + \frac{5}{\nu^2}}{4 + \frac{1}{\nu^2}} = \frac{1}{4}.$$

2. $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$, *ὅπου α σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός*. Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

i) $\alpha = 1$. Εἶναι προφανές.

ii) $\alpha > 1$. Θέτομεν $\delta_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} - 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\delta_\nu \to 0$. Πράγματι ἔχομεν $\sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \delta_\nu$, ἤτοι

(6) $$\alpha = (1 + \delta_\nu)^\nu.$$

Ἐπειδὴ $\delta_\nu > 0$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$, δυνάμει τῆς ἀνισότητος τοῦ *Bernoulli*, θὰ ἔχωμεν καὶ $(1 + \delta_\nu)^\nu \geqslant 1 + \nu\delta_\nu$, ὁπότε ἡ (6) δίδει

$$\alpha \geqslant 1 + \nu\delta_\nu > \nu\delta_\nu.$$

Ἄρα

$$0 < \delta_\nu < \frac{\alpha}{\nu} \to 0,$$

τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν ἰδιότητα 8 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, συνεπάγεται ὅτι $\delta_\nu \to 0$.

iii) $\alpha < 1$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν $\frac{1}{\alpha} > 1$ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν $\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha}} \to 1$, ἤτοι $\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}} \to 1$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τῆς ἰδιότητος 6 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, συνεπάγεται ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha} \to \frac{1}{1} = 1$.

1.4.3 *Τὸ μονότονον καὶ ἡ σύγκλισις ἀκολουθίας — Ὁ ἀριθμὸς e.* Ἂς θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν ἀκολουθίαν $\frac{\nu - 1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, ἤτοι τὴν

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}, \ldots$$

καὶ δεύτερον τὴν ἀκολουθίαν ν^2, $\nu = 1,2,\ldots$, ἤτοι τὴν ἀκολουθίαν

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ \nu^2, \ldots$$

Δι' ἀμφοτέρας παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι αὔξουσαι καὶ μάλιστα γνησίως αὔξουσαι ἀκολουθίαι. Ἐκ τούτων ὅμως μόνον ἡ πρώτη, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη (διατί;). Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη συγκλίνει καὶ μάλιστα $\lim \frac{\nu - 1}{\nu} = 1$, ἐνῷ ἀντιθέτως ἡ ν^2, $\nu = 1,2,\ldots$, ἡ ὁποία δὲν εἶναι φραγμένη, δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν (διατί;).

Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ αὔξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$

συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει γενικῶς διὰ κάθε αὔξουσαν καὶ φραγμένην ἀκολουθίαν. Ἀκριβέστερον δεχόμεθα τὸ ἀκόλουθον ἀξίωμα:

Ἀξίωμα. *Ἄν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μία μονότονος καὶ φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε αὕτη συγκλίνει πρὸς κάποιον πραγματικὸν ἀριθμόν.*

Ὁ ἀριθμὸς e. Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\nu},$$

δηλαδὴ τὴν ἀκολουθίαν

$$2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{65}{24}, \frac{163}{60}, \ldots$$

Χάριν συντομίας, εἰς τὸν τύπον τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἰσάγομεν τὸ σύμβολον $\nu!$ (ν παραγοντικόν), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὡς κάτωθι :

$$1! = 1,\ 2! = (1!)2 = 1\cdot 2,\ 3! = (2!)3 = 1\cdot 2\cdot 3 \quad \text{καὶ} \quad \text{ἐπαγωγικῶς}$$

$$\nu! = ((\nu-1)!)\nu = 1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu.$$

Ἔχομεν λοιπὸν

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ μάλιστα γνησίως αὔξουσα, διότι, ἂν $\nu < \mu$, τότε

$$\alpha_\mu - \alpha_\nu =$$

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \frac{1}{(\nu+1)!} + \ldots + \frac{1}{\mu!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\nu+1)!} + \ldots + \frac{1}{\mu!} > 0, \text{ ἤτοι } \alpha_\nu < \alpha_\mu.$$

Ἐπὶ πλέον ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι φραγμένη, διότι ὡς εὐκόλως συνάγεται

$$\frac{1}{1!} \leqslant \frac{1}{2^0},\quad \frac{1}{2!} \leqslant \frac{1}{2^1},\quad \frac{1}{3!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \leqslant \frac{1}{2^2}$$

καὶ γενικῶς

$$\frac{1}{\nu!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots\nu} \leqslant \frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{\nu-1 \text{ φορές}}} = \frac{1}{2^{\nu-1}},$$

ὁπότε καὶ

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} \leqslant 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu-1}}\right),$$

τὸ ὁποῖον, δυνάμει τοῦ τύπου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, δίδει

$$0 < \alpha_\nu \leqslant 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^\nu}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{\nu-1}} < 3 \ \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Ὥστε λοιπὸν ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ φραγμένη καὶ ἑπομένως, δυνάμει τοῦ τεθέντος ἀνωτέρω ἀξιώματος, αὕτη συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον παριστῶμεν εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν διὰ τοῦ e, ἤτοι

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}\right).$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μᾶς δίδουν προσεγγίσεις τοῦ ἀριθμοῦ e. Π.χ. ὁ ὅρος $\alpha_4 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24}$ δίδει τὴν προσέγγισιν $e \simeq 2{,}708$, ὁ ὅρος $\alpha_5 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60}$ δίδει τὴν προσέγγισιν $e \simeq 2{,}716$, ὁ δὲ ὅρος $\alpha_6 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$ $= \frac{1957}{720}$ δίδει ἀκριβεστέραν προσέγγισιν, τὴν

$$\boxed{e \simeq 2{,}718}$$

2. ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ $+\infty$ καὶ $-\infty$. ΕΠΙΤΡΕΠΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗ ΠΡΑΞΕΙΣ

2.1 Τὰ σύμβολα $+\infty$ καὶ $-\infty$. Μία μὴ φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, διότι ἄλλως, δηλαδὴ ἂν αὕτη συνέκλινε πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, τότε, κατὰ τὴν ἰδιότητα 3 τῶν συγκλίνουσῶν ἀκολουθιῶν, θὰ ἦτο φραγμένη, ὅπερ ἄτοπον. Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ μὴ φραγμένη ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι καὶ αὔξουσα, ὡς π.χ. ἡ ν^2, $\nu = 1,2,\ldots$, λέγομεν ὅτι αὕτη «*ἀπειρίζεται θετικῶς*» ἢ «*συγκλίνει πρὸς τὸ* $+\infty$» ἢ ἀκόμη «*τείνει πρὸς τὸ* $+\infty$» (τὸ σύμβολον $+\infty$ ἀναγιγνώσκεται «*σὺν ἄπειρον*»).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐξούσης καὶ μὴ φραγμένης ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδὴ ἀπειριζομένης θετικῶς ἀκολουθίας, ἂν ε εἶναι εἷς θετικὸς ἀριθμός, τότε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\alpha_{\nu_0} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Πράγματι· ἂν τοῦτο δὲν ἴσχυε, τότε θὰ ἦτο

$$\alpha_\nu \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \in N$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα,

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_\nu \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \in N,$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ θὰ ἦτο φραγμένη, ὅπερ ἄτοπον.

Τώρα, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα, ἔχομεν

$$\nu \geqslant \nu_0 \ \Rightarrow \ \alpha_\nu \geqslant \alpha_{\nu_0}$$

καὶ δυνάμει τῆς (7),

$$\nu \geqslant \nu_0 \ \Rightarrow \ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ τὴν αὔξουσαν καὶ μὴ φραγμένην ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ἰσχύει :

Διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, δηλαδὴ διὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι πλέον φυσικὸν νὰ δώσωμεν τὸν κάτωθι γενικὸν ὁρισμὸν περὶ τῆς συγκλίσεως ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ $+\infty$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι: ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ «*ἀπειρίζεται θετικῶς*» ἢ ἄλλως «*συγκλίνει πρὸς τὸ* $+\infty$» ἢ ἀκόμη «*τείνει πρὸς τὸ* $+\infty$», καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha_\nu \to +\infty$ ἢ $\lim \alpha_\nu = +\infty$, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *διὰ κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχῃ δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (*ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ* ε) *τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ* $\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ *διὰ κάθε* $\nu \geqslant \nu_0$. Συντόμως:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = +\infty \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : \ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall \nu \geqslant \nu_0}$$

Παραδείγματα:

1. *Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν* ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *ἀπειρίζεται θετικῶς*, ἤτοι $\nu \to +\infty$ (διατί;).

2. *Ἡ ἀκολουθία* $\nu^2 + 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία*

$$2,\ 5,\ 10, \ldots,\ \nu^2 + 1, \ldots$$

ἀπειρίζεται θετικῶς. Πράγματι· διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὡς $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\varepsilon}$, ὁπότε, ἐπειδὴ $\nu^2 + 1 > \nu$, θὰ ἔχωμεν

$$\nu^2 + 1 > \nu \geqslant \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

Ὥστε: διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὡς τοιοῦτος εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\varepsilon}$) τοιοῦτος, ὥστε

$$\nu^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0,$$

ἤτοι $\nu^2 + 1 \to +\infty$.

Ἡ ἀκολουθία $-\nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία

$$-1,\ -4,\ -9, \ldots,\ -\nu^2, \ldots$$

εἶναι προφανῶς φθίνουσα καὶ μὴ φραγμένη. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι αὕτη ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς. Ἀξίζει νὰ παρατηρήσωμεν ἐδῶ ὅτι ἡ ἀντίθετος ἀκολουθία, δηλαδὴ ἡ $-(-\nu^2)$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἀπειρίζεται θετικῶς.

Γενικῶς θὰ λέγωμεν ὅτι: ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ «*ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς*» ἢ ἄλλως «*συγκλίνει πρὸς τὸ* $-\infty$» ἢ ἀκόμη «*τείνει πρὸς τὸ* $-\infty$» καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha_\nu \to -\infty$ ἢ $\lim \alpha_\nu = -\infty$ (τὸ σύμβολον $-\infty$ ἀναγιγνώσκεται «*πλὴν ἄπειρον*») τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *ἡ ἀντίθετος ἀκολουθία* $-\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *ἀπειρίζεται θετικῶς.* Συντόμως :

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = -\infty \iff \lim(-\alpha_\nu) = +\infty}$$

Ἰσχύουν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

2.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν, $\nu = 1, 2,\ldots$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχῃ δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ *(ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ* ε*) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ*

$$\alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \geqslant \nu_0.$$

Ἀπόδειξις. $\lim \alpha_\nu = -\infty \Leftrightarrow \lim(-\alpha_\nu) = +\infty \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\colon -\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall \nu \geqslant \nu_0 \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\colon \alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon} \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0$.

2.1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι* α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *καὶ* β_ν, $\nu = 1, 2,\ldots$ *μὲ* $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu$ *διὰ κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$. *Τότε ἰσχύουν:*

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = +\infty \ \Rightarrow \lim \beta_\nu = +\infty} \quad \textit{καὶ} \quad \boxed{\lim \beta_\nu = -\infty \ \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty}$$

Ἀπόδειξις. $\lim \alpha_\nu = +\infty \ \Rightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\colon \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0$ καὶ τοῦτο μετὰ τῆς $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu \ \forall \ \nu \in \mathrm{N}$ συνεπάγονται ὅτι

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\colon \ \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0 \Rightarrow \lim \beta_\nu = +\infty\,.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι : $\lim \alpha_\nu = +\infty \ \Rightarrow \lim \beta_\nu = +\infty$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὐκόλως ἐξάγεται (πῶς;) καὶ ὅτι $\lim \beta_\nu = -\infty \ \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty$.

Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω εἰς τὸ παράδειγμα 2, ἡ ἀκολουθία $\nu^2 + 1$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἀπειρίζεται θετικῶς. Τοῦτο δυνάμεθα πλέον νὰ συμπεράνωμεν ἀμέσως, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, τῆς σχέσεως $\nu < \nu^2 + 1 \ \forall \ \nu \in \mathrm{N}$ καὶ τοῦ ὅτι $\nu \to +\infty$. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος συνάγονται εὐκόλως ὅτι $\nu^2 - \nu + 1 \to +\infty$, $-\nu^3 \to -\infty$ καὶ $-\nu^2 + 2\nu - 2 \to -\infty$.

2.1.3 *Τὰ σύμβολα* $-\infty$, $+\infty$ *καὶ ἡ διάταξις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.* Ὡς γνωστὸν διὰ συγκλινούσας ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει (§ 1.4.2, ἰδιότητος 7)

$$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = l_1, \ l_1 \in \mathrm{R} \\ \lim \beta_\nu = l_2, \ l_2 \in \mathrm{R} \\ \alpha_\nu \leqslant \beta_\nu \ \forall \ \nu \in \mathrm{N} \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \leqslant l_2,$$

τὸ ὁποῖον παίζει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν τεχνικὴν τῶν ἀποδείξεων πολλῶν θεωρημάτων τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ ὁρίσωμεν διάταξιν εἰς τὸ σύνολον $\mathrm{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ τὸ ἀνωτέρω καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις, ὅπου ἡ μία ἢ καὶ αἱ δύο ὁριακαὶ τιμαὶ l_1, l_2 εἶναι ἓν τῶν συμβόλων $-\infty$ καὶ $+\infty$. Πράγματι· ἂν δεχθῶμεν τοῦτο, θὰ ἔχωμεν

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l,\ l\in \mathrm{R}\\ \lim \beta_\nu = +\infty\\ \alpha_\nu \leqslant \beta_\nu\ \forall\ \nu\in \mathrm{N}\end{array}\right\} \Rightarrow l \leqslant +\infty$$

καὶ ἐπειδή, ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ $+\infty$ δὲν εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς θὰ πρέπει νὰ ὁρίσωμεν

$$\boxed{l < +\infty \quad \forall\ l\in \mathrm{R}}$$

Ὁμοίως ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ ὁρίσωμεν

$$\boxed{-\infty < l\ \forall\ l\in \mathrm{R}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{-\infty < +\infty}$$

2.2 * Ἐπιτρεπταὶ καὶ μὴ πράξεις μεταξὺ τῶν συμβόλων $-\infty$, $+\infty$ καὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ σύνολον $\mathrm{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ δύναται νὰ ὁρισθοῦν, ὡς μερικαὶ πράξεις, ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς (ὡς ἐπίσης ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις) εἰς τρόπον, ὥστε νὰ μὴν ὁδηγούμεθα εἰς ἀντιφάσεις. Αἱ πράξεις αὗται ὁρίζονται ὡς ἐπεκτάσεις τῶν ἀντιστοίχων πράξεων εἰς τὸ R. Πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν πράξεων τούτων θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to +\infty\\ \beta_\nu \to x,\ x\in \mathrm{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to +\infty .$$

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, δυνάμει τῆς ἰδιότητος 3 τῆς § 1.4.2, ἡ ἀκολουθία β_ν εἶναι φραγμένη, δηλαδὴ ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμὸς θ τοιοῦτος, ὥστε $|\beta_\nu| \leqslant \theta$ διὰ κάθε $\nu\in \mathrm{N}$, ἤτοι

(8) $$-\theta \leqslant \beta_\nu \leqslant \theta \quad \forall \quad \nu\in \mathrm{N}.$$

Ἔστω τώρα τυχὸν θετικὸς ἀριθμὸς ε καὶ ἔστω $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{1+\theta\varepsilon}$, ὁπότε

$$\alpha_\nu \to +\infty \Rightarrow \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon^*):\ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} \quad \forall\ \nu \geqslant \nu_0.$$

Ἑπομένως, δυνάμει τῆς (8), θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\alpha_\nu + \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} - \theta = \frac{1+\theta\varepsilon}{\varepsilon} - \theta = \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0$ (ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ε^*, ἄρα καὶ ἐκ τοῦ ε): $\alpha_\nu + \beta_\nu > \dfrac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu \geqslant \nu_0$,

ἤτοι ὅτι $\alpha_\nu + \beta_\nu \to +\infty$.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀνωτέρω ἀποδειχθείσης ἰδιότητος δυνάμεθα νὰ δικαιολογήσωμεν ὡς ἐπιτρεπτὴν τὴν πρᾶξιν $+\infty + x$ ὡς ἐπίσης καὶ τὴν $x + (+\infty)$ (διότι $\alpha_\nu + \beta_\nu \to +\infty \Leftrightarrow \beta_\nu + \alpha_\nu \to +\infty$) καὶ μάλιστα νὰ ὁρίσωμεν

$$+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty .$$

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω στηριζόμενοι ἐπὶ ἰδιοτήτων τῶν ἀκολουθιῶν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὰς διαφόρους ἐπιτρεπτὰς πράξεις ὡς κατωτέρω :

Ἰδιότητες	*Ἐπιτρεπταὶ πράξεις*
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to +\infty \\ \beta_\nu \to x, x\in R\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to +\infty$	$+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty \quad \forall x\in R$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to -\infty \\ \beta_\nu \to x, x\in R\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to -\infty$ (διατί;)	$(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty \quad \forall x\in R$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to +\infty \\ \beta_\nu \to +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to +\infty$ (διατί;)	$+\infty + (+\infty) = +\infty$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to -\infty \\ \beta_\nu \to -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to -\infty$ (διατί;)	$-\infty + (-\infty) = -\infty$
$\alpha_\nu \to -\infty \Rightarrow (-\alpha_\nu) \to +\infty$ (ἐξ ὁρισμοῦ)	$-(-\infty) = +\infty$
$\alpha_\nu \to +\infty \Rightarrow (-\alpha_\nu) \to -\infty$	$-(+\infty) = -\infty$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to +\infty \\ \beta_\nu \to x, x>0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \to +\infty$ (διατί;)	$(+\infty)x = x(+\infty) = +\infty \quad \forall x>0$, ἄρα $(+\infty)(+\infty) = +\infty$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to -\infty \\ \beta_\nu \to x, x>0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \to -\infty$ (διατί;)	$(-\infty)x = x(-\infty) = -\infty \quad \forall x>0$, ἄρα $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to +\infty \\ \beta_\nu \to x, x<0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \to -\infty$ (διατί;)	$(+\infty)x = x(+\infty) = -\infty \quad \forall x<0$, ἄρα $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to -\infty \\ \beta_\nu \to x, x<0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu \to +\infty$ (διατί;)	$(-\infty)x = x(-\infty) = +\infty \quad \forall x<0$, ἄρα $(-\infty)(-\infty) = +\infty$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to x, x\in R \\ \beta_\nu \to +\infty \\ \beta_\nu \neq 0 \ \forall \nu\in N\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to 0$ (διατί;)	$\dfrac{x}{+\infty} = 0 \quad \forall x\in R$
$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to x, x\in R \\ \beta_\nu \to -\infty \\ \beta_\nu \neq 0 \ \forall \nu\in N\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \to 0$ (διατί;)	$\dfrac{x}{-\infty} = 0 \quad \forall x\in R.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐπιτρεπτῶν πράξεων συνάγεται ὅτι καὶ ἡ πρᾶξις $+\infty - (-\infty)$, δηλαδὴ ἡ $+\infty + (-(-\infty))$ εἶναι ἐπιτρεπτή, διότι $-(-\infty) = +\infty$ καὶ ἑπομένως $+\infty - (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$. Ὥστε $+\infty - (-\infty) = +\infty$. Ὁμοίως συνάγεται καὶ $-\infty - (+\infty) = -\infty$.

Ἀντιθέτως ἡ πρᾶξις $+\infty - (+\infty)$ δὲν ὁρίζεται ὡς ἐπιτρεπτή, διότι ἂν $\alpha_\nu \to +\infty$ καὶ $\beta_\nu \to +\infty$, τότε ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\nu = 1,2,\cdots$ δὲν συγκλίνει πάντοτε πρὸς τὸ μηδὲν ἢ ἄλλον μονοσημάντως ὡρισμένον ἀριθμὸν ἢ ἀκόμη πρὸς ἓν τῶν συμβόλων $-\infty$, $+\infty$. Πράγματι· ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $\alpha_\nu = \nu^2 + \nu \to +\infty$ καὶ $\beta_\nu = \nu^2 \to +\infty$, ὁπότε $\alpha_\nu - \beta_\nu = \nu \to +\infty$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $\alpha_\nu = \nu^2 + \frac{1}{\nu} \to +\infty$ καὶ $\beta_\nu = \nu^2 \to +\infty$, ὁπότε $\alpha_\nu - \beta_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$.

Κατ' ἀναλογίαν, δὲν ὁρίζονται ὡς ἐπιτρεπταὶ καὶ αἱ κάτωθι πράξεις (διατί;).

Μὴ ἐπιτρεπταὶ πράξεις

$$+\infty - (+\infty),\quad -\infty + (+\infty),\quad 0(+\infty),\quad 0(-\infty),\quad (+\infty)0,\quad (-\infty)0,\quad \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\frac{-\infty}{-\infty},\ \frac{+\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty},\ \frac{+\infty}{0},\ \frac{-\infty}{0},\ \frac{0}{0} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{0},\ \alpha \in R.$$

2.3 Γενικὴ παρατήρησις. Ἡ παράστασις $\frac{\mu+1}{\mu\nu}$, ὅπου μ καὶ ν φυσικοὶ ἀριθμοί, διὰ μὲν μ σταθερὸν ὁρίζει μίαν ἀκολουθίαν τὴν $\alpha_\nu = \frac{\mu+1}{\mu\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἤτοι τὴν

$$\frac{\mu+1}{\mu},\ \frac{\mu+1}{2\mu},\ \frac{\mu+1}{3\mu},\ \ldots,\ \frac{\mu+1}{\nu\mu},\ldots,$$

ἡ ὁποία συγκλίνει καὶ μάλιστα $\lim \alpha_\nu = \lim \frac{\mu+1}{\mu\nu} = 0$.

Ἂν ὅμως θεωρήσωμεν τὸ ν σταθερόν, τότε ἡ παράστασις $\frac{\mu+1}{\mu\nu}$ ὁρίζει μίαν ἄλλην ἀκολουθίαν τὴν $\beta_\mu = \frac{\mu+1}{\mu\nu}$, $\mu = 1,2,\ldots$, ἤτοι τὴν

$$\frac{2}{\nu},\ \frac{3}{2\nu},\ \frac{4}{3\nu},\ldots,\ \frac{\mu+1}{\mu\nu},\ldots,$$

ἡ ὁποία ἐπίσης συγκλίνει καὶ μάλιστα $\lim \beta_\mu = \lim \frac{\mu+1}{\mu\nu} = \frac{1}{\nu}$.

Πρὸς διάκρισιν τοῦ ποίαν ἀκολουθίαν ἐκ τῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ἢ β_μ, $\mu = 1,2,\ldots$ θεωροῦμεν εἰς τὸ $\lim \frac{\mu+1}{\mu\nu}$, γράφομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν $\lim\limits_{\nu} \frac{\mu+1}{\mu\nu}$ διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, δηλαδὴ διὰ τὴν ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1,2,\cdots$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $\lim\limits_{\mu} \frac{\mu+1}{\mu\nu}$ διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἀκολουθίας β_μ, $\mu = 1,2,\cdots$. Ὥστε ἔχομεν

$$\lim_{\nu} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \lim_{\mu} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = \frac{1}{\nu}.$$

Γράφομεν ἐπίσης ἰσοδυνάμως καὶ

$$\frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\nu]{} 0\ ,\quad \frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\mu]{} \frac{1}{\nu}.$$

Ἀντὶ τῶν συμβόλων $\lim\limits_{\nu}$ ἢ $\xrightarrow[\nu]{}$ χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης καὶ τὰ σύμβολα $\lim\limits_{\nu\to\infty}$ ἢ $\xrightarrow[\nu\to\infty]{}$. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἰσοδυνάμως

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = 0,\quad \lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = \frac{1}{\nu}$$

ἢ ἀκόμη

$$\frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0\ ,\quad \frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} \frac{1}{\nu}.$$

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1 Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1, 2 \cdots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων εἶναι φραγμέναι καὶ ποῖαι δὲν εἶναι ;

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu + 100}{\nu + 10}$ 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 + 20}{\nu + 100}$ 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu\eta\mu 5\nu}{\nu^2 + 1}$

4) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^3 + \eta\mu\nu}{\nu}$ 5) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{2^\nu}$ 6) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2}{2\nu + \eta\mu^2\nu}$

3.2 Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι μονότονοι καὶ ποῖαι δὲν εἶναι ; Καθορίσατε καὶ τὸ εἶδος μονοτονίας διὰ τὰς μονοτόνους ἐξ αὐτῶν.

3.3 Δώσατε τρεῖς διαφόρους ὑπακολουθίας δι' ἑκάστην ἐκ τῶν εἰς τὴν ἄσκησιν 3.1 ἀκολουθιῶν.

3.4 Δείξατε ὅτι αἱ ἀκολουθίαι α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων εἶναι ὅλαι μηδενικαί

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu^3 + 5\nu + 2}$ 2) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu + 5} - \sqrt{\nu}$ 3) $\alpha_\nu = \dfrac{1 + \sqrt{\nu}}{\nu^2}$

4) $\alpha_\nu = \nu\left(\sqrt{\nu^3 + 2} - \nu^{\frac{3}{2}}\right)$ 5) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu\, 7\nu}{\sqrt{\nu}}$ 6) $\alpha_\nu = \nu^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\nu^4 + 2} - \nu^2\right)$.

3.5 Ὑπολογίσατε τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων:

1) $\alpha_\nu = \sqrt{1 + \dfrac{a}{\nu}}$, $a \in R^+$ 2) $\alpha_\nu = \dfrac{1 + 2 + \ldots + \nu}{\nu^2}$

3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^3 - 3\nu + 2}{5\nu^3 + \nu + 4}$ 4) $\alpha_\nu = \sqrt{(\nu + a)(\nu + b)} - \nu$, $a \in R^+$, $b \in R^+$

5) $\alpha_\nu = \nu\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{a}{\nu}}\right)$, $a \in R^+$ 6) $\alpha_\nu = \dfrac{a^\nu}{\nu!}$, $a \in R^+$

3.6 Ὑπολογίσατε τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^5 + 7\nu}{\nu^3 + 2\nu + 5}$ 2) $\alpha_\nu = -2^\nu \dfrac{\nu^3 + 7}{(\nu + 1)^3}$ 3) $\alpha_\nu = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{\nu}$

3.7 Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ὁριακὰς τιμάς :

1) $\lim\limits_{\mu} \dfrac{\mu\nu^2}{\nu^2 + 1}$ 2) $\lim\limits_{\nu} \dfrac{\mu\nu^2}{\nu^2 + 1}$ 3) $\lim\limits_{\mu} \dfrac{\mu^3\nu^2}{\mu\nu^3 + \nu^2\mu^2}$

4) $\lim\limits_{\nu} \dfrac{\mu^3\nu^2}{\mu\nu^3 + \nu^2\mu^2}$ 5) $\lim\limits_{\mu} \dfrac{2^{\mu\nu}\,\mu\nu^2}{\mu\nu + \nu^2}$ 6) $\lim\limits_{\nu} \dfrac{2^{\mu\nu}\,\mu\nu^2}{\mu\nu + \nu^2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΔΙΑ $x \to +\infty$

1.1 Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἠσχολήθημεν μὲ τὴν σύγκλισιν ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι, ὡς εἴδομεν, ἀποτελοῦν μίαν ἁπλουστάτην περίπτωσιν πραγματικῶν συναρτήσεων. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐπεκτείνωμεν τὰς ἐννοίας τῆς συγκλίσεως καὶ τῆς ὁριακῆς τιμῆς διὰ πραγματικὰς συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς καὶ κατὰ πρῶτον θὰ πράξωμεν τοῦτο διὰ πραγματικὰς συναρτήσεις ὡρισμένας τουλάχιστον εἰς ἓν ἀπέραντον διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$, ὅπου α σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ διὰ συναρτήσεις f μὲ $(\alpha, +\infty) \subseteq \mathscr{D}(f)$.

1.2 Μηδενικαὶ συναρτήσεις διὰ $x \to +\infty$. Ὡς γνωστὸν ἰσχύουν $\nu \to +\infty$ καὶ $\frac{1}{\nu} \to 0$ καὶ μάλιστα ἡ δευτέρα τούτων εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης, ὡς ἄλλωστε καὶ γενικώτερον ἰσχύει

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu > 0 \ \ \forall \ \ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x_\nu} \to 0,$$

διότι $x_\nu \to +\infty \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\colon\ x_\nu > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall\ \nu \geqslant \nu_0$ καὶ τοῦτο δεδομένου ὅτι $x_\nu > 0\ \ \forall\ \ \nu \in N$, συνεπάγεται ὅτι

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\colon \left|\frac{1}{x_\nu}\right| = \frac{1}{x_\nu} < \varepsilon\ \ \forall\ \ \nu \geqslant \nu_0, \text{ ἤτοι } \frac{1}{x_\nu} \to 0.$$

Τὴν ἰδιότητα (1) ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ εἶναι *μηδενικὴ διὰ* $x \to +\infty$ (τὸ σύμβολον $x \to +\infty$ ἀναγιγνώσκεται «x *τεῖνον πρὸς τὸ* $+\infty$») καὶ γράφομεν $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ ἢ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Γενικῶς, ἂν f εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$, θὰ λέγωμεν ὅτι «*ἡ συνάρτησις* f *εἶναι μηδενικὴ διὰ* $x \to +\infty$» καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ ἢ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *μὲ* $x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall\ \nu \in N$ *καὶ* $x_\nu \to +\infty$ *ἰσχύῃ* $f(x_\nu) \to 0$. Συντόμως :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left(\left.\begin{matrix} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty) \ \forall \nu \in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_\nu) \to 0 \right)}$$

Παραδείγματα:

1. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3x}$, $x \in (0, +\infty)$ *εἶναι μηδενικὴ διὰ* $x \to +\infty$.

Πράγματι· ἂν x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία θετικῶν ὅρων μὲ $x_\nu \to +\infty$, τότε ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τιμῶν $f(x_\nu) = \dfrac{x_\nu + 1}{x_\nu^2 + 3x_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν $f(x_\nu) = \dfrac{\dfrac{1}{x_\nu} + \dfrac{1}{x_\nu^2}}{1 + \dfrac{3}{x_\nu}}$, ἀφ' ἑτέρου δέ, λόγῳ τῆς (1), $\dfrac{1}{x_\nu} \to 0$, ὁπότε καὶ $\dfrac{3}{x_\nu} \to 0$, $\dfrac{1}{x_\nu^2} \to 0$ καὶ ἑπομένως

$$f(x_\nu) \to \frac{0+0}{1+0} = 0 .$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε ἀκολουθία θετικῶν ὅρων $x_\nu, \nu = 1,2,\ldots$ μὲ $x_\nu \to +\infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τιμῶν τῆς συναρτήσεως f, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu)$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική.

2. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$ *εἶναι μηδενικὴ διὰ* $x \to +\infty$. Πράγματι· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἂν $x_\nu, \nu = 1,2\ldots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία θετικῶν ὅρων μὲ $x_\nu \to +\infty$, τότε ἡ ἀκολουθία τιμῶν $f(x_\nu) = \dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική. Πρὸς τοῦτο ἔστω τυχὸν θετικὸς ἀριθμὸς ε, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$x_\nu \to +\infty \Rightarrow \text{διὰ τὸν } \varepsilon^2 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon^2) : x_\nu > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0,$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ $x_\nu > 0 \ \forall \ \nu \in N$, συνεπάγεται ὅτι

$$\frac{1}{x_\nu} < \varepsilon^2 \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0, \text{ δηλαδὴ } \frac{1}{\sqrt{x_\nu}} < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε, δηλαδὴ διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης ν_0 (ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\frac{1}{\sqrt{x_\nu}} < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0,$$

ἤτοι ὅτι $\dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}} \to 0$

1.3 Συγκλίνουσαι συναρτήσεις διὰ $x \to +\infty$. Διὰ τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$ παρατηροῦμεν ὅτι $f(x) - 3 = \dfrac{1}{x}$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις $f - 3$ εἶναι μηδενικὴ διὰ $x \to +\infty$. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀκολουθιῶν λέγομεν καὶ ἐδῶ ὅτι ἡ συνάρτησις f συγκλίνει διὰ $x \to +\infty$ πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις f ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$ *«συγκλίνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* l*»* ἢ ἄλλως *«τείνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* l*»* καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$ ἢ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *ἡ συνάρτησις* $f - l$ *εἶναι μηδενικὴ διὰ* $x \to +\infty$. Συντόμως :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(x) - l \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Τὸν ἀριθμὸν l καλοῦμεν *ὅριον* ἢ *ὁριακὴν τιμὴν* τῆς συναρτήσεως f διὰ $x \to +\infty$.

Ἀποδεικνύεται τώρα ὅτι διὰ μίαν συνάρτησιν f ὡρισμένην τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$ ἰσχύει τὸ κάτωθι :

1.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἡ συνάρτησις* f *συγκλίνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* l *τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *μὲ* $x_\nu \in (\alpha, +\infty)$ $\forall \nu \in N$ *καὶ* $x_\nu \to +\infty$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x) = l$.

Συντόμως :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\left. \begin{array}{l} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall\, \nu \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l \right)}$$

Ἀπόδειξις. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \left(\left. \begin{array}{l} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall \nu \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \right.$

$$\left. \Rightarrow \lim (f(x_\nu) - l) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\left. \begin{array}{l} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall\, \nu \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l \right).$$

Παραδείγματα :

1. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x + 5}{5x^2 + 15x}$, $x \in (0, +\infty)$ *συγκλίνει* διὰ $x \to +\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* $\dfrac{1}{5}$. Πράγματι·

$$f(x) - \frac{1}{5} = \frac{x^2 + 8x + 5}{5x^2 + 15x} - \frac{1}{5} = \frac{x + 1}{x^2 + 3x}.$$

Ἀλλά, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ παράδειγμα 1 τῆς προηγουμένης § 1.2, ἰσχύει $\dfrac{x + 1}{x^2 + 3x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ἄρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 8x + 5}{5x^2 + 15x} = \dfrac{1}{5}$.

2. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}}{2\sqrt{x} + 5}$, $x \in (0, +\infty)$ *συγκλίνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* $\dfrac{1}{2}$. Πράγματι· ἂν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία θετικῶν ὅρων μὲ $x_\nu \to +\infty$,

τότε ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu) = \dfrac{\sqrt{x_\nu} + \dfrac{3}{x_\nu}}{2\sqrt{x_\nu} + 5}$, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\dfrac{1}{2}$, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν $f(x_\nu) = \dfrac{1 + \dfrac{3}{x_\nu}\dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}}}{2 + \dfrac{5}{\sqrt{x_\nu}}}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $\dfrac{3}{x_\nu} \to 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}} \to 0$ καὶ $\dfrac{5}{\sqrt{x_\nu}} \to 0$ καὶ ἑπομένως $f(x_\nu) \to \dfrac{1 + 0 \cdot 0}{2 + 0} = \dfrac{1}{2}$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι διὰ κάθε ἀκολουθίαν θετικῶν ὅρων x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ $x_\nu \to +\infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τιμῶν τῆς συναρτήσεως f, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{2}$. Ἄρα, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος 1.3.1., ἰσχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}}{2\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{2}.$$

1.3.2* *Ἀπειριζόμεναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς συναρτήσεις διὰ* $x \to +\infty$. Διὰ τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = x^2$ παρατηροῦμεν ὅτι ἂν x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $x_\nu \to +\infty$, τότε καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τιμῶν $f(x_\nu) = x_\nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀπειρίζεται θετικῶς, διότι

$$f(x_\nu) = x_\nu^2 = x_\nu \cdot x_\nu \to (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x^2$ ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ $x \to +\infty$.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις f ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$ «*ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ* $x \to +\infty$» ἢ ἄλλως «*συγκλίνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸ* $+\infty$» ἢ ἀκόμη «*τείνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸ* $+\infty$» καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ἢ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *μὲ* $x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall \nu \in N$ *καὶ* $x_\nu \to +\infty$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x_\nu) = +\infty$. Συντόμως :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \underset{\text{ορσ}}{\iff} \left(\left. \begin{matrix} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall \nu \in N \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = +\infty \right)}$$

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀκολουθιῶν θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις f «*ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x \to +\infty$» ἢ ἄλλως «*συγκλίνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸ* $-\infty$» ἢ ἀκόμη «*τείνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸ* $-\infty$» καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ ἢ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ $\lim (-f(x)) = +\infty$ Συντόμως :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \underset{\text{ορσ}}{\iff} \lim_{x \to +\infty} (-f(x)) = +\infty}$$

Π.χ. ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \dfrac{-x^2 + x}{3x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ $x \to +\infty$. Πράγματι·

$$-f(x) = \frac{x^2 - x}{3x + 1},\ x \in (0, +\infty)$$

καὶ διὰ τυχοῦσαν ἀκολουθίαν x_ν, $\nu = 1,2, \cdots$ θετικῶν ὅρων μὲ $x_\nu \to +\infty$ ἰσχύει

$$-f(x_\nu) = \frac{x_\nu^2 - x_\nu}{3x_\nu + 1} = \frac{x_\nu - 1}{3 + \dfrac{1}{x_\nu}} \to \frac{+\infty - 1}{3+0} = +\infty,$$

ἄρα $\lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = +\infty$ καὶ ἑπομένως $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 + x}{3x+1} = -\infty$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται τώρα εὐκόλως ὅτι τὸ θεώρημα 1.3.1 ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ ὁριακὴ τιμὴ l εἶναι ἓν τῶν συμβόλων $+\infty$, $-\infty$. Ἀκριβέστερον ἰσχύει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

1.3.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἡ συνάρτησις* f *συγκλίνει διὰ* $x \to +\infty$ *πρὸς τὸ* l ($l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) *τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *μὲ* $x_\nu \in (\alpha, +\infty)$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ *καὶ* $x_\nu \to +\infty$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x_\nu) = l$. *Συντόμως :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l,\\ l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\left.\begin{array}{l} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l\right)}$$

Ἀπόδειξις. Ἡ περίπτωσις $l \in \mathbb{R}$ εἶναι προφανὴς ἐκ τοῦ θεωρήματος 1.3.1, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ περίπτωσις $l = +\infty$ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀπειριζομένης θετικῶς διὰ $x \to +\infty$ συναρτήσεως. Ἡ ἀπομένουσα περίπτωσις $l = -\infty$ συνάγεται εὐκόλως ὡς ἑξῆς :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \lim(-f(x)) = +\infty \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \left(\left.\begin{array}{l} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow\right.$$

$$\left.\lim(-f(x_\nu)) = +\infty \right) \Leftrightarrow \left(\left.\begin{array}{l} x_\nu \to +\infty \\ x_\nu \in (\alpha, +\infty)\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = -\infty\right).$$

2. ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΔΙΑ $x \to -\infty$

2.1 Α. Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν f μὲ $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$, $x \in (-\infty, 0)$ διὰ τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν ὅτι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to -\infty \\ x_\nu < 0\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_\nu) = \frac{x_\nu + 1}{3x_\nu - 2} = \frac{1 + \dfrac{1}{x_\nu}}{3 - \dfrac{2}{x_\nu}} \to \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$, $x \in (-\infty, 0)$ συγκλίνει διὰ $x \to -\infty$ πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\dfrac{1}{3}$ καὶ γράφομεν $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{3x-2} = \dfrac{1}{3}$.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις f ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty, \alpha)$ «*συγκλίνει διὰ* $x \to -\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* l» ἢ ἄλλως «*τείνει διὰ* $x \to -\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* l» καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} l$

ἢ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1,2,\dots$ *μὲ* $x_\nu \in (-\infty, \alpha)\ \forall\ \nu \in N$ *καὶ* $x_\nu \to -\infty$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x_\nu) = l$. Συντόμως :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left(\left.\begin{matrix} x_\nu \to -\infty \\ x_\nu \in (-\infty, \alpha)\ \forall\ \nu\in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l \right)}$$

Τὸν ἀριθμὸν l καλοῦμεν *ὅριον* ἢ *ὁριακὴν τιμὴν* τῆς συναρτήσεως f διὰ $x \to -\infty$.

B* Αἱ ἔννοιαι τῆς θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς ἀπειριζομένης συναρτήσεως διὰ $x \to -\infty$ ὁρίζονται κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν περίπτωσιν $x \to +\infty$. Ἀκριβέστερον, ἂν f εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty, \alpha)$, τότε ὁρίζομεν :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left(\left.\begin{matrix} x_\nu \to -\infty \\ x_\nu \in (-\infty, \alpha)\ \forall\ \nu\in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = +\infty \right)}$$

καὶ

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to-\infty} (-f(x)) = +\infty}$$

ὁπότε, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ θεώρημα 1.3.3, ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l, \\ l \in R \cup \{-\infty, +\infty\} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left(\left.\begin{matrix} x_\nu \to -\infty \\ x_\nu \in (-\infty, \alpha)\ \forall\ \nu\in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l \right)}$$

Παραδείγματα :

1. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+x}$, $x \in (-\infty, -1)$ *συγκλίνει διὰ* $x \to -\infty$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* 3. Πράγματι· ἂν x_ν, $\nu = 1,2\dots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $x_\nu < -1\ \forall\ \nu \in N$ καὶ $x_\nu \to -\infty$, τότε

$$f(x_\nu) = \frac{3x_\nu^2+1}{x_\nu^2+x_\nu} = \frac{3+\dfrac{1}{x_\nu^2}}{1+\dfrac{1}{x_\nu}} \to \frac{3+0}{1+0} = 3,$$

διότι $\dfrac{1}{x_\nu} \to 0$ καὶ $\dfrac{1}{x_\nu^2} \to 0$ (διατί;). Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\left.\begin{matrix} x_\nu \to -\infty \\ x_\nu < -1\ \forall\ \nu \in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \frac{3x_\nu^2+1}{x_\nu^2+x_\nu} = 3,$$

ἤτοι ὅτι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+x} = 3.$

2.* *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$, $x \in (-\infty, 0)$ *ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ* $x \to -\infty$. Πράγματι· ἂν x_ν, $\nu = 1,2,\dots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία ἀρνητικῶν ὅρων μὲ $x_\nu \to -\infty$, τότε

$$f(x_\nu)=\sqrt{x_\nu^2-x_\nu}=\sqrt{x_\nu^2\left(1-\frac{1}{x_\nu}\right)}=|x_\nu|\sqrt{1-\frac{1}{x_\nu}}=-x_\nu\sqrt{1-\frac{1}{x_\nu}}\to$$

$$\to-(-\infty)\sqrt{1-0}=-(-\infty)\,1=+\infty,$$

ἤτοι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu\to-\infty \\ x_\nu<0\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\sqrt{x_\nu^2-x_\nu}=+\infty,$$

δηλαδὴ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$

3.* *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x)=x\sqrt{x^2-x}$, $x\in(-\infty,\,0)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x\to-\infty$. Πράγματι· ἂν x_ν, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία ἀρνητικῶν ὅρων μὲ $x_\nu\to-\infty$, τότε

$$f(x_\nu)=x_\nu\sqrt{x_\nu^2-x_\nu}\to(-\infty)(+\infty)=-\infty,$$

ἤτοι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu\to-\infty \\ x_\nu<0\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\}\Rightarrow \lim x_\nu\sqrt{x_\nu^2-x_\nu}=-\infty,$$

δηλαδὴ $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{x^2-x}=-\infty$.

3. ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΔΙΑ $x\to x_0$

3.1. Σύγκλισις συναρτήσεως διὰ $x\to x_0+0$. Διὰ τὴν συνάρτησιν g μὲ $g(x)=x+\sqrt{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} x_\nu\to1 \\ x_\nu>1\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\}\Rightarrow g(x_\nu)=x_\nu+\sqrt{x_\nu-1}\to1+\sqrt{1-1}=1.$$

Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν h μὲ $h(x)=\dfrac{1}{x-5}$, $x\in(5,+\infty)$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$(3)\qquad \left.\begin{array}{l} x_\nu\to5 \\ x_\nu>5\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\}\Rightarrow h(x_\nu)=\frac{1}{x_\nu-5}\to+\infty,$$

διότι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu\to5 \\ x_\nu>5\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\}\Rightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon):\ 0<x_\nu-5<\varepsilon\ \forall\ \nu\geqslant\nu_0$$

$$\Rightarrow\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon):\ h(x_\nu)=\frac{1}{x_\nu-5}>\frac{1}{\varepsilon}\ \forall\ \nu\geqslant\nu_0,$$

ἤτοι ὅτι $\lim h(x_\nu)=+\infty$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, τὴν μὲν ἰδιότητα (2) ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ συνάρτησις g μὲ $g(x)=x+\sqrt{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ συγκλίνει διὰ $x\to1+0$ πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 καὶ γράφομεν $\lim\limits_{x\to1+0}(x+\sqrt{x-1})=1$, τὴν δὲ ἰδιότητα (3) ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ συνάρτησις h μὲ $h(x)=\dfrac{1}{x-5}$, $x\in(5,+\infty)$ ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ $x\to5+0$ ἢ συγκλίνει διὰ $x\to5+0$ πρὸς τὸ $+\infty$ καὶ γράφομεν $\lim\limits_{x\to5+0}\dfrac{1}{x-5}=$ $=+\infty$.

Γενικῶς, ἂν f εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς (x_0, β), ὅπου $x_0 \in R$, θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη «*συγκλίνει διὰ* $x \to x_0 + 0$ *πρὸς τὸ* l» ἢ ἄλλως «*τείνει διὰ* $x \to x_0 + 0$ *πρὸς τὸ* l,», ὅπου $l \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x \to x_0+0]{} l$ ἢ $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = l$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *μὲ* $x_\nu \in (x_0, \beta)$ $\forall \nu \in N$ *καὶ* $x_\nu \to x_0$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x_\nu) = l$. Συντόμως :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = l, \\ l \in R \cup \{-\infty, +\infty\} \end{array}\right\} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left(\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in (x_0, \beta) \ \forall \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l \right)}$$

Τὸ l καλοῦμεν *ὅριον* ἢ *ὁριακὴν τιμὴν* τῆς συναρτήσεως f διὰ $x \to x_0 + 0$.

Ἂν $l = 0$, τότε ἡ συνάρτησις f καλεῖται *μηδενικὴ διὰ* $x \to x_0 + 0$. Ἐπίσης εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $l = -\infty$ λέγομεν καὶ ὅτι ἡ συνάρτησις f *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x \to x_0 + 0$, ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $l = +\infty$ λέγομεν ὅτι αὕτη *ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ* $x \to x_0 + 0$.

Παραδείγματα:

1. *Ἡ συνάρτησις* f μὲ $f(x) = (x-1)^2 + \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$, $x \in (0, +\infty)$ *συγκλίνει διὰ* $x \to +0$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* 1 ($+0$ τίθεται συνήθως ἀντὶ τοῦ $0+0$). Πράγματι· ἂν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι τυχοῦσα μηδενικὴ ἀκολουθία θετικῶν ὅρων, ἔχομεν

$$f(x_\nu) = (x_\nu - 1)^2 + \sqrt{\frac{x_\nu}{x_\nu^2+1}} \to (0-1)^2 + \sqrt{\frac{0}{0^2+1}} = 1.$$

Ἄρα $\lim\limits_{x \to +0} \left((x-1)^2 + \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}} \right) = 1.$

2. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, $x \in (1, +\infty)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x \to 1 + 0$. Πράγματι·

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 1 \\ x_\nu > 1 \quad \forall \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{1}{1-x_\nu^2} = -\infty \quad (\text{διατί;})$$

καὶ ἑπομένως $f(x_\nu) = \dfrac{x_\nu}{1-x_\nu^2} = x_\nu \dfrac{1}{1-x_\nu^2} \to 1 \cdot (-\infty) = -\infty$. Ἄρα $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x}{1-x^2} = -\infty$.

3.2 Σύγκλισις συναρτήσεως διὰ $x \to x_0 - 0$. Διὰ τὴν συνάρτησιν g μὲ $g(x) = x + \sqrt{1-x}$, $x \in (-\infty, 1)$ παρατηροῦμεν, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν (2), ὅτι ἰσχύει

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 1 \\ x_\nu < 1 \ \forall \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow g(x_\nu) = x_\nu + \sqrt{1-x_\nu} \to 1 + \sqrt{1-1} = 1.$$

Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν h μὲ $h(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \in (-\infty, 5)$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 5 \\ x_\nu < 5 \ \forall \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow h(x_\nu) = \frac{1}{x_\nu - 5} \to -\infty,$$

διότι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 5 \\ x_\nu < 5 \;\forall\, \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\; \varepsilon > 0\; \exists\; \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\; 0 < 5 - x_\nu < \varepsilon \;\forall\; \nu \geqslant \nu_0$$

$$\Rightarrow \forall\; \varepsilon > 0\; \exists\; \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\; \frac{1}{5 - x_\nu} > \frac{1}{\varepsilon} \;\;\forall\;\; \nu \geqslant \nu_0,$$

δηλαδὴ $\lim \dfrac{1}{5 - x_\nu} = +\infty$, ἄρα $\lim \dfrac{1}{x_\nu - 5} = -\infty$.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζομεν λέγοντες ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ συνάρτησις g μὲ $g(x) = = x + \sqrt{1 - x}$, $x \in (-\infty, 1)$ συγκλίνει διὰ $x \to 1 - 0$ πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 καὶ γράφομεν $\lim\limits_{x \to 1-0} (x + \sqrt{1 - x}) = 1$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι ἡ συνάρτησις h μὲ $h(x) = = \dfrac{1}{x - 5}$, $x \in (-\infty, 5)$ ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ $x \to 5 - 0$ ἢ συγκλίνει διὰ $x \to 5 - 0$ πρὸς τὸ $-\infty$ καὶ γράφομεν $\lim\limits_{x \to 5-0} \dfrac{1}{x - 5} = -\infty$.

Γενικῶς, ἂν f εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς (α, x_0), ὅπου $x_0 \in R$, θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη «*συγκλίνει διὰ* $x \to x_0 - 0$ *πρὸς τὸ* l» ἢ ἄλλως «*τείνει διὰ* $x \to x_0 - 0$ *πρὸς τὸ* l», ὅπου $l \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x \to x_0 - 0]{} l$ ἢ $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = l$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν *διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *μὲ* $x_\nu \in (\alpha, x_0) \;\forall\; \nu \in N$ *καὶ* $x_\nu \to x_0$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x_\nu) = l$. Συντόμως :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = l \\ l \in R \cup \{-\infty, +\infty\} \end{array}\right\} \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \left(\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in (\alpha, x_0) \;\forall\; \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l \right)}$$

Τὸ l καλοῦμεν *ὅριον* ἢ *ὁριακὴν τιμὴν* τῆς συναρτήσεως f διὰ $x \to x_0 - 0$.

Ἂν $l = 0$, τότε ἡ συνάρτησις f καλεῖται *μηδενικὴ διὰ* $x \to x_0 - 0$. Ἐπίσης εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $l = -\infty$ λέγομεν καὶ ὅτι ἡ συνάρτησις f *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x \to x_0 - 0$, ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $l = +\infty$ λέγομεν ὅτι αὕτη *ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ* $x \to x_0 - 0$.

Παραδείγματα :

1. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = (x + 2)^2 + \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$, $x \in (-1, 0)$ *συγκλίνει διὰ* $x \to -0$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* 4 (-0 τίθεται συνήθως ἀντὶ τοῦ $0 - 0$). Πράγματι· ἂν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι τυχοῦσα μηδενικὴ ἀκολουθία μὲ $x_\nu \in (-1, 0)$ $\forall$ $\nu \in N$, ἔχομεν

$$f(x_\nu) = (x_\nu + 2)^2 + \sqrt{\frac{-x_\nu}{1 - x_\nu^2}} \to (0 + 2)^2 + \sqrt{\frac{0}{1 - 0^2}} = 4.$$

Ἄρα $\lim\limits_{x \to -0} \left((x + 2)^2 + \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}} \right) = 4$.

2. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x \to -0$. Πράγματι·

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 0 \\ x_\nu < 0 \ \forall\ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): \ 0 < -x_\nu < \varepsilon \ \ \forall \ \nu \geqslant \nu_0 \Rightarrow$$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): -\dfrac{1}{x_\nu} > \dfrac{1}{\varepsilon}\ \forall \nu \geqslant \nu_0$, δηλαδὴ $\lim\left(-\dfrac{1}{x_\nu}\right) = +\infty$, ἄρα $\lim \dfrac{1}{x_\nu} = -\infty$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 0 \\ x_\nu < 0 \ \forall\ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{1}{x_\nu} = -\infty, \text{ ἤτοι } \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$ *ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ* $x \to 1-0$.

Πράγματι· ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 1 \\ x_\nu \in (-1,1) \ \forall\ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1-x_\nu^2} \to +\infty \text{ (διατί;)},$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2} = x_\nu \frac{1}{1-x_\nu^2} \to 1(+\infty) = +\infty.$$

Ἄρα $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{1-x^2} = +\infty$.

3.3. Σύγκλισις συναρτήσεως διὰ $x \to x_0$. Ἂν θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν f ὡρισμένην τουλάχιστον εἰς ἓν σύνολον τῆς μορφῆς $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε δι' αὐτὴν δύναται προφανῶς νὰ ὁρισθῇ τόσον ἡ ἔννοια τῆς συγκλίσεως διὰ $x \to x_0 + 0$ ὅσον καὶ διὰ $x \to x_0 - 0$.

Π.χ. διὰ $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ἔχομεν

$$\lim_{x \to +0} \frac{x}{|x|} = 1 \text{ καὶ } \lim_{x \to -0} \frac{x}{|x|} = -1 \text{ (διατί;)}$$

Ἐπίσης διὰ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ἔχομεν,

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \text{ καὶ } \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \text{ (διατί;)}$$

Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν παρατηροῦμεν ὅτι

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1}$$

καὶ ἐκφράζομεν τοῦτο λέγοντες ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ συγκλίνει διὰ $x \to 1$ πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2.

Γενικῶς, ἂν f εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν σύνολον τῆς μορφῆς $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ὅπου $x_0 \in R$, θὰ λέγωμεν ὅτι αὐτὴ «*συγκλίνει διὰ* $x \to x_0$ *πρὸς τὸ* l» ἢ ἄλλως «*τείνει διὰ* $x \to x_0$ *πρὸς τὸ* l», ὅπου $l \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ ἢ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Συντόμως :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l,\\ l\in R\cup\{-\infty\,,\,+\infty\}\end{array}\right\}\ \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)=l=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Τὸ l καλοῦμεν *ὅριον* ἢ *ὁριακὴν τιμὴν* τῆς συναρτήσεως f διὰ $x\to x_0$.

Ἂν $l=0$, τότε ἡ συνάρτησις f καλεῖται *μηδενικὴ διὰ* $x\to x_0$. Ἐπίσης εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $l=-\infty$ λέγομεν καὶ ὅτι ἡ συνάρτησις f *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x\to x_0$, ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $l=+\infty$ λέγομεν ὅτι αὔτη *ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ* $x\to x_0$.

Παραδείγματα :

1. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x\in(-\infty\,,2)\cup(2,+\infty)$ *συγκλίνει διὰ* $x\to 2$ *πρὸς τὸν ἀριθμὸν* -1. Πράγματι·

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=x-3\ \forall\ x\in R-\{2\}.$$

Ἀλλὰ τότε προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\lim\limits_{x\to 2+0}(x-3)=-1=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-3)$, δηλαδὴ

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-5x+6}{x-2}\text{, ἤτοι }\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1.$$

2. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(-\infty\,,0)\cup(0,+\infty)$ *ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ* $x\to 0$. Πράγματι· ἐν πρώτοις ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l}x_\nu\to 0\\ x_\nu>0\ \forall\,\nu\in N\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{1}{x_\nu}\to+\infty\quad(\text{διατί;})$$

καὶ ἑπομένως $\dfrac{1}{{x_\nu}^2}=\dfrac{1}{x_\nu}\cdot\dfrac{1}{x_\nu}\to(+\infty)(+\infty)=+\infty$, ἤτοι $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l}x_\nu\to 0\\ x_\nu<0\ \forall\,\nu\in N\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{1}{x_\nu}\to-\infty\ (\text{διατί;})$$

καὶ ἑπομένως $\dfrac{1}{{x_\nu}^2}=\dfrac{1}{x_\nu}\cdot\dfrac{1}{x_\nu}\to(-\infty)(-\infty)=+\infty$, ἤτοι $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Ἄρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

3.* *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$, $x\in(-\infty\,,0)\cup(0,+\infty)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς διὰ* $x\to 0$. Πράγματι· ἐν πρώτοις ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l}x_\nu\to 0\\ x_\nu>0\ \forall\,\nu\in N\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{x_\nu-1}{{x_\nu}^2}=\frac{1}{x_\nu}\left(1-\frac{1}{x_\nu}\right)\to(+\infty)(1-(+\infty))=(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

καὶ ἑπομένως $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x-1}{x^2}=-\infty$.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 0 \\ x_\nu < 0 \ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_\nu - 1}{x_\nu^2} = \frac{1}{x_\nu}\left(1 - \frac{1}{x_\nu}\right) \to (-\infty)(1-(-\infty)) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

καὶ ἑπομένως $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{x-1}{x^2} = -\infty$. Ἄρα $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = -\infty$.

Σχετικῶς μὲ τὴν σύγκλισιν διὰ $x \to x_0$, $x_0 \in R$ ἰσχύει τὸ ἀκόλουθον βασικὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον τοῦ θεωρήματος 1.3.3 τοῦ ἀφορόντος εἰ τὴν σύγκλισιν διὰ $x \to +\infty$.

3.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστω f μία συνάρτησις ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν σύνολον τῆς μορφῆς* $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$, $x_0\in R$. *Ἡ συνάρτησις* f *συγκλίνει διὰ* $x\to x_0$ *πρὸς τὸ* l ($l\in R\cup\{-\infty, +\infty\}$) *τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *μὲ* $x_\nu\in(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)\ \forall\ \nu\in N$ *καὶ* $x_\nu \to x_0$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x_\nu) = l$. *Συντόμως* :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l, \\ l\in R\cup\{-\infty, +\infty\} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left(\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu\in(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l\right)}$$

Ἀπόδειξις. Α) Ἔστω $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Ἂς θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ $x_\nu\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)\ \forall\ \nu\in N$ καὶ $x_\nu \to x_0$ διὰ τὴν ὁποίαν διακρίνομεν τὰς κάτωθι τρεῖς περιπτώσεις :

1. *Ἰσχύει* $x_\nu < x_0$ *δι᾽ ἓν πεπερασμένον πλῆθος δεικτῶν*. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην διὰ διαγραφῆς τῶν ὅρων τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν σχέσιν $x_\nu < x_0$ προκύπτει μία ἀκολουθία y_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $y_\nu\in(x_0, \beta)\ \forall\ \nu\in N$ καὶ ἐπὶ πλέον, δυνάμει τῆς παρατηρήσεως τῆς § 1.4 τοῦ Κεφ. IV, $y_\nu \to x_0$. Ἄρα, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, ἰσχύει $\lim f(y_\nu) = l$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τῆς αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω παρατηρήσεως, συνεπάγεται ὅτι $\lim f(x_\nu) = l$.

2. *Ἰσχύει* $x_\nu > x_0$ *δι᾽ ἓν πεπερασμένον πλῆθος δεικτῶν*. Ἐντελῶς ἀναλόγως πρὸς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν συνάγεται καὶ ἐδῶ ὅτι ἰσχύει $\lim f(x_\nu) = l$ (ἀπόδειξις;).

3. *Οὐδεμία τῶν περιπτώσεων* 1 *ἢ* 2 *ἰσχύει*. Διὰ διαγραφῆς τῶν ὅρων τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν σχέσιν $x_\nu < x_0$ προκύπτει μία ὑπακολουθία x_{κ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $x_{\kappa_\nu}\in(x_0,\beta)$ $\forall\ \nu\in N$ καὶ ἐπὶ πλέον $x_{\kappa_\nu} \to x_0$ (Ἰδιότης 2, § 1.4.2 τοῦ Κεφ. IV). Ἄρα, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, ἰσχύει

$$\lim f(x_{\kappa_\nu}) = l. \tag{4}$$

Ὁμοίως διὰ διαγραφῆς τῶν ὅρων τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν σχέσιν $x_\nu > x_0$ προκύπτει μία ὑπακολουθία x_{μ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει $x_{\mu_\nu} \in (\alpha, x_0)$ $\forall$ $\nu \in N$ καὶ $x_{\mu_\nu} \to x_0$. Ἄρα, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, ἰσχύει καὶ

$$(5) \qquad \lim f(x_{\mu_\nu}) = l.$$

Ἀνωτέρω διεσπάσαμεν τὴν ἀκολουθίαν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἰς δύο ὑποκολουθίας της τὰς x_{κ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ x_{μ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν ἀντιστοίχως αἱ (4) καὶ (5). Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει καὶ $\lim f(x_\nu) = l$.

Ὥστε καὶ εἰς τὰς τρεῖς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἐδείχθη ὅτι $\lim f(x_\nu) = l$, δηλαδὴ ὅτι ἡ σχέσις $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ συνεπάγεται τὴν

$$(6) \qquad \left. \begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \ \forall \ \nu \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

Β) Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (6). Τότε αὕτη προφανῶς συνεπάγεται ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν

$$\left. \begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in (x_0, \beta) \ \forall \ \nu \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l, \text{ ἤτοι } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = l,$$

ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ

$$\left. \begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in (\alpha, x_0) \ \forall \ \nu \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l, \text{ ἤτοι } \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = l.$$

Ἄρα ἡ (6) συνεπάγεται τὴν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

4*. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

4.1 Ἔστωσαν $\sigma \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ καὶ f μία συνάρτησις ὡρισμένη τουλάχιστον εἰς ἓν σύνολον $U(\sigma)$ τῆς μορφῆς:

$$\begin{array}{l} (\alpha, \sigma) \cup (\sigma, \beta), \text{ ἂν } \sigma \in R \\ (\alpha, +\infty), \text{ ἂν } \sigma = +\infty \\ (-\infty, \alpha), \text{ ἂν } \sigma = -\infty. \end{array}$$

Εἰς τὰ προηγούμενα ἐδάφια ἔχει ὁρισθῇ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἡ ἔννοια $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = l$, ὅπου $l \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Τὸ l καλεῖται τότε *ὅριον* ἢ *ὁριακὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως* f διὰ $x \to \sigma$.

Ὡς εἴδομεν ἤδη ἡ σύγκλισις μιᾶς συναρτήσεως διὰ $x \to \sigma$ χαρακτηρίζεται πάντοτε ἐκ τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν πρὸς τὸ σ καὶ τοῦτο ἄλλοτε μὲν ἐξ ὁρισμοῦ (Πρβλ. π.χ. § 1.2), ἄλλοτε δὲ ὑπὸ θεωρημάτων (Πρβλ. π.χ. θεωρήματα 1.3.3 καὶ 3.3.1).Σχετικῶς ἰσχύει δι᾽ ὅλας τὰς περιπτώσεις τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

4.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἡ συνάρτησις* f *συγκλίνει διὰ* $x \to \sigma$ *πρὸς τὸ* l ($l \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$) *τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ἀκολουθίαν* x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ *μὲ* $x_\nu \in U(\sigma)$ $\forall$ $\nu \in N$ *καὶ* $x_\nu \to \sigma$ *ἰσχύῃ* $\lim f(x_\nu) = l$. *Συντόμως :*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l,\\ l\in R\cup\{-\infty,+\infty\}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left(\left.\begin{array}{l}x_\nu\to\sigma\\ x_\nu\in U(\sigma)\ \forall\ \nu\in N\end{array}\right\}\Rightarrow \lim f(x_\nu)=l\right)$$

Ἀπόδειξις. Διὰ $\sigma=+\infty$, τὸ θεώρημα τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ θεώρημα 1.3.3. Ὁμοίως καὶ διὰ $\sigma=-\infty$, τὸ θεώρημα πάλιν ἰσχύει (Πρβλ. § 2.1). Τέλος, διὰ $\sigma\in R$, τὸ θεώρημα συμπίπτει μὲ τὸ θεώρημα 3.3.1.

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος τούτου ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ διὰ τὰς συγκλινούσας συναρτήσεις ἀνάλογοι ἰδιότητες πρὸς ἐκείνας τῶν ἀκολουθιῶν. Πρὶν ὅμως διατυπώσωμεν κατωτέρω τὰς ἰδιότητας τῶν συγκλινουσῶν συναρτήσεων θὰ ὁρίσωμεν πρῶτον τὴν ἔννοιαν τῆς *φραγμένης συναρτήσεως*, ἡ ὁποία συνδέεται μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς συγκλίσεως συναρτήσεως, ὡς ἀκριβῶς συμβαίνει καὶ μὲ τὰς ἀκολουθίας (Πρβλ. ἰδιότητες 3 καὶ 5 τῆς § 1.3.1., ὡς ἐπίσης καὶ ἰδιότητα 3 τῆς § 1.4.2 τοῦ Κεφ. IV).

Μία συνάρτησις f, ὡς ἀνωτέρω, καλεῖται *φραγμένη εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ* σ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς θ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$|f(x)|\leqslant\theta\ \ \forall\ \ x\in U(\sigma).$$

Τὸ θ καλεῖται τότε *φράγμα τῆς* f *εἰς τὴν περιοχὴν* τοῦ σ.

Π.χ. ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ εἶναι φραγμένη τόσον εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ $+\infty$, ὅσον καὶ τοῦ $-\infty$, διότι ἰσχύει ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\ \ \forall\ \ x\in(1,+\infty),$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\ \ \forall\ \ x\in(-\infty,-1).$$

Ὁμοίως αὕτη εἶναι φραγμένη καὶ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ 2, διότι ἰσχύει

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\ \ \forall\ \ x\in(1,2)\cup(2,+\infty).$$

Ἀντιθέτως αὕτη δὲν εἶναι φραγμένη εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ 0 (διατί;).

4.1.2 *Δυνάμει τοῦ θεωρήματος* 4.1.1 *ἀποδεικνύονται αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν συναρτήσεων ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅπως αἱ σημειούμεναι ἐπὶ τῶν ὁριακῶν τιμῶν πράξεις εἶναι ἐπιτρεπταί.*

1. $\left.\begin{array}{l}f \text{ φραγμένη εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ } \sigma\\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)g(x)=0.$

2. $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=0\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)|=0\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to\sigma}(-f(x))=0.$

3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=0 \\ |f(x)|\leqslant|g(x)|\ \forall\ x\in U(\sigma)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=0.$

4. $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)|=\begin{cases}|l|, & \text{ἂν } l\in R \\ +\infty, & \text{ἂν } l=+\infty \text{ ἢ } -\infty.\end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l,\ l\in R \Rightarrow f$ *εἶναι φραγμένη εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ* σ.

6. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}(f(x)+g(x))=l_1+l_2$

7. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)g(x)=l_1\, l_2.$

Αὕτη μετὰ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος 6 συνεπάγονται καὶ τὴν

$$\left.\begin{array}{l}\xi\in R,\ \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \eta\in R,\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}(\xi f(x)+\eta g(x))=\xi l_1+\eta l_2.$$

Εἰδικῶς διὰ $\xi=1$ καὶ $\eta=-1$, προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}(f(x)-g(x))=l_1-l_2.$$

8. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l\neq 0 \\ f(x)\neq 0\ \forall\ x\in U(\sigma)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{l}.$

Αὕτη μετὰ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος 7 συνεπάγονται καὶ τὴν

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1\neq 0 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2 \\ f(x)\neq 0\ \forall\ x\in U(\sigma)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{l_2}{l_1}.$$

9. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2 \\ f(x)\leqslant g(x)\ \forall\ x\in U(\sigma)\end{array}\right\} \Rightarrow l_1\leqslant l_2.$

10. $\left.\begin{array}{l}f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)\ \ \forall\ \ x\in U(\sigma) \\ \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l,\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim h(x)=l.$

11. $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt{|f(x)|}=\begin{cases}\sqrt{|l|}, & \text{ἂν } l\in R \\ +\infty, & \text{ἂν } l=+\infty \text{ ἢ } -\infty.\end{cases}$

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.1 Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ὁριακὰς τιμάς :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^5+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu 5x}{x^3+7}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\eta\mu x}{x^2+1}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

5.2 Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ὁριακὰς τιμάς :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4+3x^2+7}{x^4-x^2+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+\alpha)}-x)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+5x+2}-2x)$

4)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+7x}{3x^2+1}$ 5)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-x^3}{5x^2+1}$ 6)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^9-x^8}{x^4+8x^3+7}$

7)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-x^7}{x^6+7}$ 8)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-x^2}{x^2+2}$ 9)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-x^5}{7x^2+2}$

5.3 Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ὁριακὰς τιμάς :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\eta\mu x}{x^3+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x}{-x^3+8}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$

5.4 * Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ὁριακὰς τιμάς :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{2x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x+7}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7}{x^4+2}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-x^3}{x^2+3x+4}$

5.5 Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ὁριακὰς τιμάς :

1) $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{x^2-2x+4}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x^2-2x+4}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to2+0} \dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to2-0} \dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x^2+2}{|x|x}$ 6) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{x^2+2}{|x|x}$

5.6 Ὁμοίως ὑπολογίσατε τὰς ὁριακὰς τιμάς :

1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^4-4}{x^2-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+2x-3}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-5x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^\lambda-1}{x^\mu-1}$ (λ,μ φυσικοὶ ἀριθμοί) 5) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{5x^3-3\sqrt{2}x^2-4x}{x^2-2}$

6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3+1}{x^2}$ 7) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+6x}{x^2+2x+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-1}{|x|}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

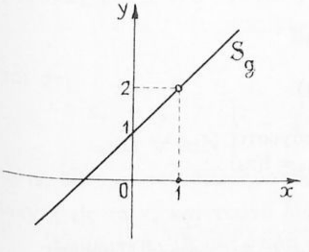
1.1. Αἱ θεωρούμεναι καὶ εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον συναρτήσεις εἶναι ὅλαι πραγματικαὶ συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Διὰ τὴν συνάρτησιν g μὲ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{ἂν } x \neq 1 \\ 0, & \text{ἂν } x = 1 \end{cases}$ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \neq 0 = g(1)$$

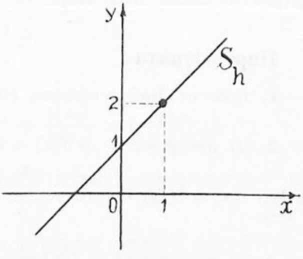
Ἀντιθέτως διὰ τὴν συνάρτησιν h μὲ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{ἂν } x \neq 1 \\ 2, & \text{ἂν } x = 1 \end{cases}$ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 = h(1).$$



Σχ. 63

g *εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς τὸ* 1



Σχ. 64

h *εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ* 1

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις h εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον 1 (Σχ. 64), ἐνῷ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις g εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον 1 (Σχ. 63).

Γενικῶς διὰ μίαν συνάρτησιν f μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα Δ λέγομεν ὅτι αὕτη εἶναι *συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον* $x_0 \in \Delta$, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Παρατήρησις. Ἂν τὸ x_0 εἶναι τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τοῦ διαστήματος Δ, τότε εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν διὰ τοῦ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ἐννοοῦμεν τὸ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, ἐνῷ ἂν τὸ x_0 εἶναι τὸ δεξιὸν ἄκρον τοῦ διαστήματος Δ, ἐννοοῦμεν τὸ $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Ἂν ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς κάθε σημεῖον τοῦ διαστήματος Δ, τότε λέγομεν ὅτι αὕτη *εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ Δ* ἢ ἁπλῶς, *εἶναι συνεχής*.

1.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $x_0\in\Delta$ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε ἀκολουθίαν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ $x_\nu\in\Delta\ \forall\ \nu\in N$ καὶ $x_\nu\to x_0$ ἰσχύει* $\lim f(x_\nu) = f(x_0)$. *Συντόμως :*

$$f \text{ συνεχὴς εἰς τὸ } x_0\in\Delta \iff \left(\left.\begin{matrix} x_\nu\to x_0 \\ x_\nu\in\Delta\ \ \forall\ \ \nu\in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = f(x_0) \right)$$

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ ὅτι ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $x_0\in\Delta$ σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Τοῦτο πάλιν, ἂν τὸ x_0 εἶναι ἄκρον τοῦ διαστήματος Δ, σημαίνει, ἐξ ὁρισμοῦ, ὅτι (Πρβλ. § 3.1 καὶ § 3.2 τοῦ Κεφ. V).

$$(1)\qquad \left.\begin{matrix} x_\nu\to x_0 \\ x_\nu\in\Delta\ \forall\ \nu\in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = f(x_0).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ σημεῖον $x_0\in\Delta$ δὲν εἶναι ἄκρον τοῦ διαστήματος Δ, τότε ἡ ἰσοδυναμία τῆς σχέσεως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ καὶ τῆς (1) συνάγεται ἐκ τοῦ θεωρήματος 3.3.1 τοῦ Κεφ. V.

Παραδείγματα :

1. *Κάθε σταθερὰ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς* (διατί;)

2. *Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x$ εἶναι συνεχής.* Πράγματι·

$$x_\nu\to x_0 \Rightarrow f(x_\nu) = x_\nu\to x_0 = f(x_0).$$

Ἄρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε x_0.

3. *Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = \alpha x^\kappa$ (κ φυσικὸς ἀριθμός) εἶναι συνεχής.* Πράγματι·

$$x_\nu\to x_0 \Rightarrow f(x_\nu) = \alpha x_\nu{}^\kappa \to \alpha x_0{}^\kappa = f(x_0) \text{ (διατί;)}$$

Ἄρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε x_0.

4. *Ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = |x|$ εἶναι συνεχής.* Πράγματι· κατὰ τὴν ἰδιότητα 1 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν (§ 1.4.2 τοῦ Κεφ. IV) ἔχομεν

$$x_\nu\to x_0 \Rightarrow |x_\nu|\to|x_0| \Rightarrow f(x_\nu)\to f(x_0).$$

Ἄρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε x_0.

1.2. Ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων. Εἰς τὰ κατωτέρω θεωρήματα δίδονται μερικαὶ βασικαὶ ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

1.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ *Ἔστωσαν* f *καὶ* g *συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα* Δ. *Ἂν αἱ* f *καὶ* g *εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, τότε τόσον τὸ ἄθροισμα* $f+g$ *ὅσον καὶ τὸ γινόμενον* fg *αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις. Ἂν δὲ ἐπὶ πλέον* $g(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \Delta$, *τότε καὶ τὸ πηλίκον* $\frac{f}{g}$ *εἶναι συνεχὴς συνάρτησις.*

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις f καὶ g εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον x_0 τοῦ διαστήματος Δ, θὰ ἰσχύῃ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Ἑπομένως διὰ τὴν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ $x_\nu \in \Delta \ \forall \ \nu \in N$ καὶ $x_\nu \to x_0$ θὰ ἰσχύῃ

$$(2) \qquad \lim f(x_\nu) = f(x_0) \quad \text{καὶ} \quad \lim g(x_\nu) = g(x_0),$$

ἄρα

$$\lim (f(x_\nu) + g(x_\nu)) = f(x_0) + g(x_0) \quad \text{καὶ} \quad \lim f(x_\nu) g(x_\nu) = f(x_0) g(x_0).$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in \Delta \ \forall \ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(x_\nu) = f(x_\nu) + g(x_\nu) \to f(x_0) + g(x_0)$$

καὶ

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in \Delta \ \forall \ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow (fg)(x_\nu) = f(x_\nu) g(x_\nu) \to f(x_0) g(x_0) = (fg)(x_0),$$

ἄρα, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 1.1.1, προκύπτει ὅτι αἱ συναρτήσεις $f+g$ καὶ fg εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ x_0 καὶ τοῦτο διὰ κάθε $x_0 \in \Delta$.

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν καὶ $g(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \Delta$, τότε, ἐκ τῆς (2) καὶ τοῦ ὅτι προφανῶς $g(x_\nu) \neq 0 \ \forall \ \nu \in N$, προκύπτει ὅτι

$$\lim \frac{f(x_\nu)}{g(x_\nu)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

ἤτοι ὅτι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in \Delta \ \forall \ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x_\nu) = \frac{f(x_\nu)}{g(x_\nu)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0),$$

ὁπότε, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 1.1.1, προκύπτει ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις $\frac{f}{g}$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ x_0 καὶ τοῦτο διὰ κάθε $x_0 \in \Delta$.

Ἐφαρμογή. Ὡς μία ἁπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει ὅτι κάθε πολυωνυμικὴ συνάρτησις εἶναι συνεχής, ὡς ἄθροισμα μονωνύμων συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ παράδειγμα 3, εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις. Ἐπίσης καὶ αἱ ρηταὶ συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, διότι μία ρητὴ συνάρτησις εἶναι πηλίκον πολυωνυμικῶν συναρτήσεων, δηλαδὴ συνεχῶν συναρτήσεων.

1.2.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις* $g: \Delta \to A$ *καὶ* $f: A \to R$, *ὅπου* A *καὶ* Δ *εἶναι διαστήματα. Τότε, ὡς γνωστόν, ὁρίζεται ἡ σύνθεσις* $h = f \circ g$ *αὐτῶν διὰ τοῦ τύπου* $h(x) = f(g(x))$, $x \in \Delta$ *καὶ μάλιστα ἰσχύει*

$$\left.\begin{array}{r} f \ \textit{συνεχὴς} \\ g \ \textit{συνεχὴς} \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g \ \textit{συνεχής}.$$

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν σημεῖον $x_0 \in \Delta$ καὶ x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ τυχοῦσα ἀκολουθία μὲ $x_\nu \in \Delta$ $\forall$ $\nu \in N$ καὶ $x_\nu \to x_0$. Τότε, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις g εἶναι συνεχής, ἔχομεν $\lim g(x_\nu) = g(x_0)$. Ἐπίσης, λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς f, ἔχομεν ὅτι

$$\lim g(x_\nu) = g(x_0) \Rightarrow \lim f(g(x_\nu)) = f(g(x_0)).$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ἂν f καὶ g εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, τότε

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in \Delta \ \forall\, \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim h(x_\nu) = h(x_0),$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ σύνθεσις $h = f \circ g$ τῶν g καὶ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον x_0 καὶ τοῦτο διὰ κάθε $x_0 \in \Delta$.

Παραδείγματα :

1. *Ἡ συνάρτησις* h *μὲ* $h(x) = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ (α *θετικὸς ἀριθμὸς*) *εἶναι συνεχής*. Τοῦτο προκύπτει εὐκόλως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος 1.2.2, καθ' ὅσον ἡ συνάρτησις h δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθεσις δύο συναρτήσεων g καὶ f μὲ $g(x) = \alpha^2 - x^2$, $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ καὶ $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x < +\infty$, αἱ ὁποῖαι εἶναι συνεχεῖς (διατί;).

2. *Ἡ συνάρτησις* h *μὲ* $h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^2+1}}$ *εἶναι συνεχής*. Πράγματι· ἡ συνάρτησις h δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθεσις δύο συναρτήσεων g καὶ f μὲ $g(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ καὶ $f(x) = \sqrt[3]{x}$, αἱ ὁποῖαι εἶναι συνεχεῖς (διατί;).

2. ΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Ἡ συνάρτησις ἡμίτονον εἶναι συνεχής. Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ἰσχύει ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ τύπος

$$\text{ημ}x - \text{ημ}x_0 = 2\,\text{ημ}\,\frac{x - x_0}{2}\,\text{συν}\,\frac{x + x_0}{2},$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$|\,\text{ημ}t\,| \leqslant |\,t\,| \quad \text{καὶ} \quad |\,\text{συν}t\,| \leqslant 1 \quad \forall \ t \in R.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$(3) \qquad |\,\text{ημ}x - \text{ημ}x_0\,| = 2\left|\text{ημ}\frac{x - x_0}{2}\right| \left|\text{συν}\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\,\frac{|\,x - x_0\,|}{2} \cdot 1 = |x - x_0|.$$

Ἂν τώρα x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $x_\nu \to x_0$, τότε ἡ (3) δίδει

$$|\,\text{ημ}x_\nu - \text{ημ}x_0\,| \leqslant |\,x_\nu - x_0\,| \to 0,$$

ἤτοι $\text{ημ}x_\nu - \text{ημ}x_0 \to 0$, δηλαδὴ $\lim \text{ημ}x_\nu = \text{ημ}x_0$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $x_\nu \to x_0 \Rightarrow \lim \text{ημ}x_\nu = \text{ημ}x_0$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε x_0, ἤτοι ὅτι ἡ συνάρτησις ημ εἶναι συνεχής.

Ἂς μελετήσωμεν τώρα τὴν συνάρτησιν ἡμίτονον. Δι' αὐτὴν εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ὅτι εἶναι *περιοδικὴ μὲ περίοδον* 2π, δηλαδὴ ἰσχύει

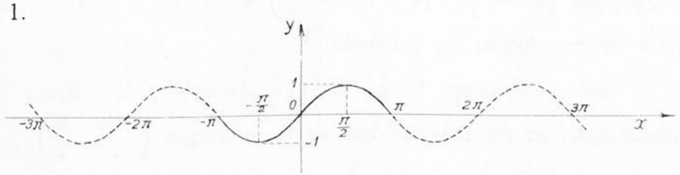
$$\text{ημ}(x + 2\pi) = \text{ημ}x \quad \forall \quad x \in R.$$

Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ μελετήσωμεν ταύτην εἰς ἓν διάστημα μήκους 2π π.χ. εἰς τὸ διάστημα $[-\pi, \pi]$. Ἡ μεταβολὴ τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως ημ εἰς τὸ διάστημα

$[-\pi, \pi]$ δίδεται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
ημx	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου ἐμφαίνεται ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $-\frac{\pi}{2}$ ἡ συνάρτησις ημ παρουσιάζει ἐλάχιστον ἴσον μὲ -1, ἐνῷ εἰς τὸ σημεῖον $\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει μέγιστον ἴσον μὲ 1. Γενικῶς αὕτη παρουσιάζει εἰς τὰ σημεῖα $2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$, $\kappa=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ἐλάχιστον ἴσον μὲ -1 καὶ εἰς τὰ σημεῖα $2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ μέγιστον ἴσον μὲ 1.



Σχ. 65 y = ημx.

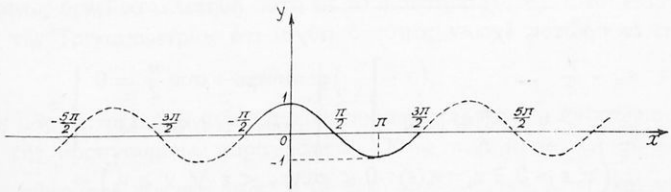
2.2 Ἡ συνάρτησις συνημίτονον εἶναι συνεχής. Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ἰσχύει

$$(4) \qquad \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \quad \forall \ x \in R$$

καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις συνημίτονον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθεσις τῶν συνεχῶν συναρτήσεων g μὲ $g(x)=\frac{\pi}{2}-x$ καὶ ημ, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 1.2.2, συνεπάγεται τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως συν.

Ἡ συνάρτησις συνημίτονον εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδον 2π ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ τύπου (4) ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει καὶ ὁ κάτωθι πίναξ μεταβολῆς αὐτῆς εἰς τὸ διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
συνx	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



Σχ. 66 y = συνx.

Ἡ συνάρτησις συνημίτονον παρουσιάζει εἰς τὸ σημεῖον 0 μέγιστον ἴσον μὲ 1, ἐνῷ εἰς τὸ σημεῖον π ἐλάχιστον ἴσον μὲ -1. Γενικῶς αὕτη παρουσιάζει εἰς τὰ σημεῖα $2\kappa\pi$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ μέγιστον ἴσον μὲ 1 καὶ εἰς τὰ σημεῖα $(2\kappa+1)\pi$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ἐλάχιστον ἴσον μὲ -1.

2.3 Ἡ συνάρτησις ἐφαπτομένη εἶναι συνεχής. Ἡ συνάρτησις εφ ὁρίζεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ καὶ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐξαιρέσει τῶν ριζῶν τῆς συναρτήσεως συν, δηλαδὴ τῶν ἀριθμῶν $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ἡ συνάρτησις εφ ὡς πηλίκον συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 1.2.1, συνεχὴς εἰς κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $\left(\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ (\kappa+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Διὰ τὴν συνάρτησιν ταύτην ἰσχύει ὡς γνωστόν

$$\varepsilon\varphi(x+\pi) = \varepsilon\varphi x \ \forall\ x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\quad \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ τὴν μελετήσωμεν εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ἡ συνάρτησις εφ *εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐν* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Πράγματι· ἀφ' ἑνὸς μὲν ἔχομεν ημ $\uparrow\!\!\wedge \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ καὶ συν $\vee\!\!\downarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, τὰ ὁποῖα συνεπάγονται ὅτι

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \\ 0 < \sigma\upsilon\nu x_2 < \sigma\upsilon\nu x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi x_1 < \varepsilon\varphi x_2,$$

ἤτοι ὅτι εφ $\uparrow\!\!\wedge \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ἀφ' ἑτέρου δέ, ἐπειδὴ ἡ εφ εἶναι περιττὴ συνάρτησις, δηλαδὴ ἰσχύει $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi(-x)$, ἔχομεν

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon\varphi(-x_2) < \varepsilon\varphi(-x_1) \Rightarrow$$
$$\varepsilon\varphi x_1 < \varepsilon\varphi x_2, \text{ ἤτοι } \varepsilon\varphi \uparrow\!\!\wedge \left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right].$$

Ἐπίσης διὰ τὴν συνάρτησιν εφ ἰσχύουν

$$\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \varepsilon\varphi x = +\infty \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2} + 0} \varepsilon\varphi x = -\infty}$$

Πράγματι· ἐν πρώτοις ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < x_\nu < \frac{\pi}{2} \forall\ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu x_\nu \to \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x_\nu > 0 \ \forall\ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \colon 0 < \sigma\upsilon\nu x_\nu < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqslant \nu_0\right) \Rightarrow$$

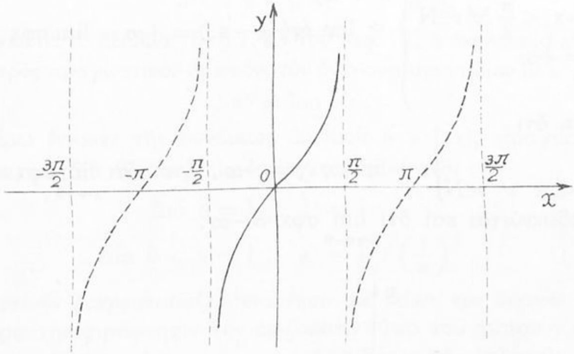
$$\left(\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): \frac{1}{\text{συν}x_\nu} > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall\ \nu \geqslant \nu_0\right) \Rightarrow \frac{1}{\text{συν}x_\nu} \to +\infty .$$

Ὥστε λοιπὸν ἰσχύει

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < x_\nu < \frac{\pi}{2}\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{ημ}x_\nu \to \text{ημ}\,\frac{\pi}{2} = 1 \\ \frac{1}{\text{συν}x_\nu} \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{εφ}x_\nu = \text{ημ}x_\nu\ \frac{1}{\text{συν}x_\nu} \to 1\cdot(+\infty) = +\infty, \text{ ἤτοι ὅτι } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \text{εφ}x = +\infty .$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ὅτι $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \text{εφ}x = -\infty$.



Σχ. 67 y = εφx.

2.4 Ἡ συνάρτησις συνεφαπτομένη εἶναι συνεχής. Ἡ συνάρτησις σφ ὁρίζεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου $\text{σφ}x = \frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}$ καὶ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐξαιρέσει τῶν ριζῶν τῆς συναρτήσεως ημ, δηλαδὴ τῶν ἀριθμῶν κπ, κ = 0, ± 1, ± 2,... Ἡ συνάρτησις σφ ὡς πηλίκον συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 1.2.1, συνεχὴς εἰς κάθε διάστημα τῆς μορφῆς (κπ, (κ + 1)π), κ = 0, ± 1, ± 2,... Διὰ τὴν συνάρτησιν ταύτην ἰσχύει ὡς γνωστὸν

$$\text{σφ}(x+\pi) = \text{σφ}x\ \forall\ x \neq \text{κ}\pi,\ \text{κ} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ μελετηθῇ αὕτη εἰς τὸ διάστημα (0, π). Εἶναι ἐπίσης γνωστὸν ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος

$$\text{σφ}x = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ὁ ὁποῖος μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μελετήσωμεν τὴν σφ στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν συμπερασμάτων τῆς προηγουμένης παραγράφου. Οὕτω π.χ. ἡ σφ, ὡς σύνθεσις τῆς γνησίως φθινούσης συναρτήσεως g μὲ $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $x\in(0, \pi)$ καὶ τῆς γνησίως αὐξούσης ἐν $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συναρτήσεως εφ, εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα 1.2.1 τοῦ Κεφ. III, γνησίως φθίνουσα ἐν $(0, \pi)$. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι

$$\boxed{\lim_{x\to+0} \sigma\varphi x = +\infty \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x\to\pi-0} \sigma\varphi x = -\infty}$$

Πράγματι· ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 0 \\ 0 < x_\nu < \pi \ \forall\, \nu\in N \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x_\nu \to \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x_\nu < \frac{\pi}{2} \ \forall\ \nu\in N, \end{array}\right.$$

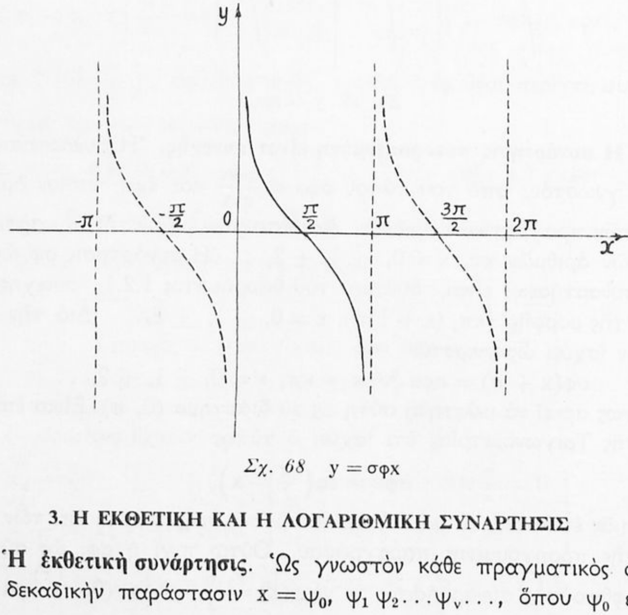
ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x_\nu \to \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x_\nu < \frac{\pi}{2} \ \forall\, \nu\in N \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \varepsilon\varphi x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x_\nu\right) = +\infty \Rightarrow \lim \sigma\varphi x_\nu = +\infty .$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to 0 \\ 0 < x_\nu < \pi \ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \sigma\varphi x_\nu = +\infty , \text{ ἤτοι ὅτι } \lim_{x\to+0} \sigma\varphi x = +\infty .$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι $\lim\limits_{x\to\pi-0} \sigma\varphi x = -\infty$.



Σχ. 68 $y = \sigma\varphi x$

3. Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ

3.1 Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις. Ὡς γνωστὸν κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς x ἔχει μίαν δεκαδικὴν παράστασιν $x = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_\nu \ldots$, ὅπου ψ_0 εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots$ εἶναι ψηφία, δηλαδὴ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μὲ $0 \leqslant \psi_\nu \leqslant 9 \;\forall\; \nu \in N$. Ἡ ἀκολουθία $r_\nu = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μία αὔξουσα ἀκολουθία ῥητῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν x. Ἐπὶ πλέον ἡ ἀκολουθία r_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη διότι, ὡς γνωστόν, ἰσχύει

$$(5) \qquad \psi_0 \leqslant \psi_\nu \leqslant \psi_0 + 1 \quad \forall \; \nu \in N.$$

Ἂν θεωρήσωμεν τώρα καὶ ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν $a > 1$, τότε, ἐπειδὴ ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως αὐτοῦ εἰς ῥητὸν ἀριθμὸν εἶναι γνωστή, ὁρίζεται ἡ ἀκολουθία

$$a^{r_1},\ a^{r_2}, \ldots,\ a^{r_\nu}, \ \ldots \ ,$$

ἡ ὁποία μάλιστα εἶναι γνησίως αὔξουσα καὶ ἐπὶ πλέον φραγμένη, διότι, λόγῳ καὶ τῆς (5), ἰσχύει

$$a^{\psi_0} \leqslant a^{r_\nu} \leqslant a^{\psi_0+1} \;\forall\; \nu \in N.$$

Ἑπομένως, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς § 1.4.3 τοῦ Κεφ. IV, ἡ ἀκολουθία a^{r_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ a^x, ἤτοι ὁρίζομεν

$$a^x = \lim a^{r_\nu}\,.$$

Τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ $a > 1$ εἰς πραγματικὸν ἀριθμὸν ἐπεκτείνομεν καὶ διὰ $0 < a \leqslant 1$, ὁρίζοντες ὡς κάτωθι :

$$\text{Διὰ } a = 1 : \quad 1^x = 1$$

$$\text{Διὰ } 0 < a < 1 : \quad a^x = 1 \Big/ \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

Ἐκθετικὴν (exponential) συνάρτησιν μὲ βάσιν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν a καλοῦμεν τώρα τὴν συνάρτησιν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου $y = a^x$. Ταύτην συμβολίζομεν μὲ $\exp_a$, ἤτοι $\exp_a x = a^x$. Εἰδικῶς τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν e (§ 1.4.3, Κεφ. IV), δηλαδὴ τὴν συνάρτησιν $\exp_e$ συμβολίζομεν ἁπλούστερον μὲ exp καὶ καλοῦμεν ταύτην ἁπλῶς *ἐκθετικὴν συνάρτησιν*.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $\exp_a$ προκύπτει εὐκόλως ὅτι αὕτη ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον R^+ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, ἑπομένως ἰσχύει

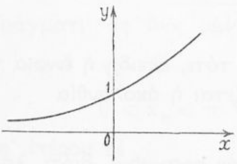
$$a^x > 0 \quad \forall \quad x \in R.$$

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις $\exp_a$ εἶναι μονότονος καὶ συνεχὴς συνάρτησις καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι ἰσχύουν τὰ κάτωθι

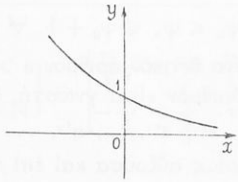
$a > 1$	$\exp_a \uparrow$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ *καὶ* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
$a = 1$	$\exp_a$ *σταθερὰ ἴση μὲ* 1
$0 < a < 1$	$\exp_a \downarrow$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ *καὶ* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Εἰδικῶς διὰ $a = e > 1$, ἔχομεν ὅτι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις exp εἶναι γνησίως αὔξουσα καὶ μάλιστα ἰσχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Διὰ τὴν ἐκθετικὴν ταύτην συνάρτησιν ἀποδεικνύεται ἐπίσης καὶ ὁ τύπος

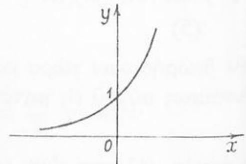
$$(6) \qquad e^x \geqslant 1 + x \quad \forall \quad x \in \mathrm{R}.$$



Σχ. 69 $y = a^x,\ a > 1$



Σχ. 70 $y = a^x,\ 0 < a < 1$



Σχ. 71 $y = e^x$

Τέλος, διὰ τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν $\exp_a$ ἀποδεικνύονται καὶ αἱ κάτωθι χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{καὶ} \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

αἱ ὁποῖαι εἰς τὴν περίπτωσιν ρητῶν ἐκθετῶν εἶναι ἤδη γνωσταὶ ἐκ τῶν μαθημάτων προηγουμένων τάξεων.

3.2. Ἡ λογαριθμικὴ συνάρτησις. Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις $\exp_a$ διὰ $a \neq 1$ εἶναι γνησίως μονότονος καὶ ἑπομένως (θεώρημα 1.3.1 τοῦ Κεφ. III) ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος ταύτης, ἡ ὁποία καλεῖται *λογάριθμος ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀριθμὸν* a καὶ συμβολίζεται μὲ $\log_a$. Ἡ συνάρτησις $\log_a$ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον R^+ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ταύτης προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

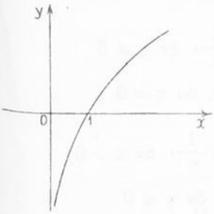
Εἰδικῶς ἡ συνάρτησις $\log_e$ καλεῖται *φυσικὸς λογάριθμος* καὶ συμβολίζεται ἁπλούστερον μὲ log.

Ἡ συνάρτησις $\log_a$, ὡς ἀντίστροφος γνησίως μονοτόνου συναρτήσεως, εἶναι ἐπίσης *γνησίως μονότονος* καὶ μάλιστα διὰ $a > 1$ εἶναι *γνησίως αὔξουσα*, ἐνῷ διὰ $0 < a < 1$ εἶναι *γνησίως φθίνουσα* (θεώρημα 1.3.1 τοῦ Κεφ. III). Ἐπὶ πλέον ἀποδεικνύεται ὅτι αὕτη εἶναι *συνεχὴς* ὡς ἐπίσης καὶ ὅτι ἰσχύουν τὰ κάτωθι

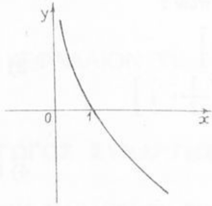
$a > 1$	$\log_a \nearrow$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ *καὶ* $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = -\infty$
$0 < a < 1$	$\log_a \searrow$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ *καὶ* $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = +\infty$

Εἰδικῶς, ἐπειδὴ $e > 1$, ὁ φυσικὸς λογάριθμος εἶναι γνησίως αὔξουσα συνάρτησις μὲ $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to+0} \log x = -\infty$. Ἐπίσης διὰ τὸν φυσικὸν λογάριθμον ἰσχύει καὶ ὁ τύπος

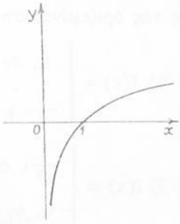
(7) $\log x \leqslant x-1 \quad \forall \quad x \in R^+$



Σχ. 72 $y = \log_a x, \; a > 1$



Σχ. 73 $y = \log_a x, \; 0 < a < 1$



Σχ. 74 $y = \log x$

Τέλος, διὰ τὸν λογάριθμον $\log_a$ ἀποδεικνύονται καὶ αἱ κάτωθι χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \; \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \text{ καὶ } \log_a x^y = y \log_a x.$$

3.3 Ἀξιοσημείωτοι ἰδιότητες. Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω ἰσχύει

$$y = \log_a x \iff a^y = x \quad (a \neq 1),$$

ἐκ τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ $a^0 = 1$ καὶ $a^1 = a$, συμπεραίνομεν ὅτι

(8) $$\boxed{\log_a 1 = 0 \;\textit{καὶ}\; \log_a a = 1 \;(a \neq 1)}$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\log_a$ εἶναι ἀντίστροφος τῆς $\exp_a$, ἰσχύει προφανῶς

$$a^{\log_a x} = x$$

καὶ εἰδικῶς διὰ $a = e$ ἰσχύει

$$e^{\log x} = x$$

ὁπότε συνάγομεν ὅτι $a^x = \left(e^{\log a}\right)^x = e^{x \log a}$, ἤτοι

(9) $$\boxed{a^x = e^{x \log a}}$$

Ἐπίσης $\log x = \log a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log a$, ἤτοι

(10) $$\boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad (a \neq 1)}$$

Ἄλλοι ἀξιοσημείωτοι τύποι εἶναι ἐπίσης καὶ οἱ κάτωθι :

(11) $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$ (12) $$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1}$$

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 Μελετήσατε ὡς πρὸς τὴν συνέχειαν καὶ παραστήσατε γεωμετρικῶς τὰς συναρτήσεις τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τῶν τύπων :

1) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ ἂν } x\in\left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2}+x, \text{ ἂν } x\in\left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ ἂν } x\neq 0 \\ 0, \text{ ἂν } x=0 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, \text{ ἂν } x\neq 0 \\ 0, \text{ ἂν } x=0 \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{1}{x}, \text{ ἂν } x>0 \\ x, \text{ ἂν } x\leqslant 0 \end{cases}$

5)* $f(x)=\begin{cases} x^2\,\eta\mu\frac{1}{x}, \text{ ἂν } x\neq 0 \\ 0, \text{ ἂν } x=0 \end{cases}$ 6)* $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\,\eta\mu\frac{1}{x}, \text{ ἂν } x\neq 0 \\ 0, \text{ ἂν } x=0 \end{cases}$

4.2 Δείξατε ὅτι αἱ συναρτήσεις αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων εἶναι συνεχεῖς :

1) $f(x)=\sigma\upsilon\nu(x^2+3x)$ 2) $f(x)=\sigma\upsilon\nu\sqrt{1-x^2}$ 3) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu 3x)$

4) $f(x)=\eta\mu\,\frac{x^2-1}{x^4+1}$ 5) $f(x)=\frac{x^2+3x}{2+\eta\mu x^3}$ 6) $f(x)=\sigma\upsilon\nu(x^2+\varepsilon\varphi 3x)$

7) $f(x)=2^{5x+\eta\mu x}(1+\varepsilon\varphi x)$ 8) $f(x)=\log(1+x^2\,\eta\mu^4 x)$ 9) $f(x)=3^{x\varepsilon\varphi(x^2+1)}$

4.3* Στηριζόμενοι εἰς τὸν τύπον (6) δείξατε ὅτι ἰσχύουν :

$$1\leqslant\frac{e^x-1}{x}\leqslant e^x\ \forall\ x\in(0,+\infty) \text{ καὶ } e^x\leqslant\frac{e^x-1}{x}\leqslant 1\ \forall\ x\in(-\infty\ ,0),$$

δυνάμει τῶν ὁποίων δείξατε τὸν τύπον (11).

4.4* Ὁμοίως στηριζόμενοι εἰς τὸν τύπον (7) δείξατε ὅτι ἰσχύουν :

$$\frac{1}{x}\leqslant\frac{\log x}{x-1}\leqslant 1\ \forall\ x\in(1,+\infty) \text{ καὶ } 1\leqslant\frac{\log x}{x-1}\leqslant\frac{1}{x}\ \forall\ x\in(0,1),$$

δυνάμει τῶν ὁποίων δείξατε τὸν τύπον (12).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

1.1 Αἱ θεωρούμεναι εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον συναρτήσεις εἶναι ὅλαι πραγματικαὶ συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆςμεταβλη τῆς. Ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως εἶναι, ὅπως καὶ ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας συναρτήσεως, συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς συγκλίσεως.

Ἔστω f μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα Δ καὶ ἔστω $x_0 \in \Delta$. Τότε διὰ τοῦ τύπου

$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in \Delta - \{x_0\}$$

ὁρίζεται μία συνάρτησις g_{x_0}, ἡ ὁποία καλεῖται *πηλίκον διαφορῶν τῆς* f *εἰς τὸ σημεῖον* x_0. Ἂν ὑπάρχῃ τὸ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, δηλαδὴ τὸ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ καὶ εἶναι τοῦτο πραγματικὸς ἀριθμός, τότε λέγομεν ὅτι «*ἡ συνάρτησις* f *παραγωγίζεται εἰς τὸ σημεῖον* x_0» ἢ ἄλλως «*ὑπάρχει ἡ παράγωγος* (ἀκριβέστερον *ἡ πρώτη παράγωγος*) *τῆς* f *εἰς τὸ σημεῖον* x_0». Τὴν ὁριακὴν ταύτην τιμὴν καλοῦμεν τότε *παράγωγον* (ἀκριβέστερον *πρώτην παράγωγον*) τῆς f εἰς τὸ σημεῖον x_0 καὶ μάλιστα συμβολίζομεν ταύτην μὲ $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$ ἢ $(f(x))'_{x=x_0}$ ἢ ἀκόμη $f'(x_0)$.

Συντόμως :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἂν τὸ x_0 εἶναι τὸ ἀριστερὸν ἄκρον τοῦ διαστήματος Δ, τότε εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ἐννοοῦμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν διὰ $x \to x_0 + 0$, ἐνῷ ἂν τὸ x_0 εἶναι τὸ δεξιὸν ἄκρον τοῦ διαστήματος Δ ἐννοοῦμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν διὰ $x \to x_0 - 0$.

2) Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ὕπαρξις τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως εἰς ἓν σημεῖον συνεπάγεται τὴν συνέχειαν ταύτης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο (Πρβλ. κατωτέρω ἰδιότητα 1.5.1).

Παραδείγματα :

1. *Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σταθερᾶς συναρτήσεως* c, ἤτοι $f(x) = c$, ἔχομεν

$$(c)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0,$$

ἤτοι $$(c)'_{x=x_0} = 0.$$

καὶ μάλιστα ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει προφανῶς διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x_0, γράφομεν δὲ
$$(c)' = 0.$$

2. *Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου* $f(x) = x$, ἔχομεν
$$(x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$
ἤτοι
$$(x)'_{x=x_0} = 1$$
καὶ μάλιστα ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x_0, γράφομεν δὲ ἐπίσης
$$(x)' = 1.$$

3. *Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου* $f(x) = x^2$, ἔχομεν
$$(x^2)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0,$$
ἤτοι
$$(x^2)'_{x=x_0} = 2x_0$$
καὶ μάλιστα ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x_0, γράφομεν δὲ ὁμοίως
$$(x^2)' = 2x$$
καὶ λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις f μὲ $f(x) = x^2$ παραγωγίζεται εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της καὶ μάλιστα εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν τὴν συνάρτησιν g μὲ $g(x) = 2x$ καλοῦμεν παράγωγον τῆς f.

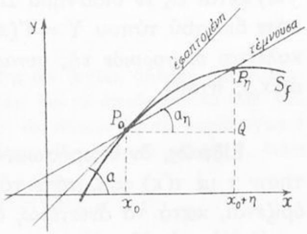
Γενικῶς, ἂν διὰ μίαν συνάρτησιν f μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα Δ ὑπάρχῃ ἡ (πρώτη) παράγωγος αὐτῆς διὰ κάθε $x \in \Delta$, τότε ὁ τύπος
$$y = f'(x)$$
ὁρίζει μίαν συνάρτησιν f′, ἡ ὁποία ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ ἐπίσης τὸ διάστημα Δ καὶ τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *παράγωγον* (ἀκριβέστερον *πρώτην παράγωγον*) τῆς f ἐν Δ ἢ ἁπλῶς (*πρώτην*) *παράγωγον τῆς* f. Ταύτην συμβολίζομεν καὶ μὲ $\frac{df}{dx}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ὁρίζεται ἡ (πρώτη) παράγωγος f′ τῆς συναρτήσεως f λέγομεν ὅτι «*ἡ συνάρτησις* f *παραγωγίζεται* ἐν Δ» ἢ ἁπλῶς «*ἡ συνάρτησις* f *παραγωγίζεται*».

Ἂν ἡ συνάρτησις f παραγωγίζεται, τότε εἶναι δυνατὸν νὰ παραγωγίζεται καὶ ἡ συνάρτησις f′ εἰς ἕν σημεῖον $x_0 \in \Delta$, ὁπότε, ἂν τοῦτο συμβαίνῃ, τὴν παράγωγον $(f'(x))'_{x=x_0}$ καλοῦμεν δευτέραν παράγωγον τῆς f εἰς τὸ σημεῖον x_0 καὶ συμβολίζομεν ταύτην μὲ $f''(x_0)$ ἢ $\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0}$ ἢ ἀκόμη μὲ $(f(x))''_{x=x_0}$. Ἂν τώρα ὑπάρχῃ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς f εἰς κάθε σημεῖον $x \in \Delta$, τότε ὁ τύπος
$$y = f''(x)$$
ὁρίζει μίαν συνάρτησιν f″ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἐπίσης τὸ διάστημα Δ, ἡ ὁποία καλεῖται *δευτέρα παράγωγος τῆς* f *ἐν* Δ ἢ ἁπλῶς *δευτέρα παράγωγος τῆς* f. Ταύτην συμβολίζομεν καὶ μὲ $\frac{d^2f}{dx^2}$. Π.χ.
$$(x^2)''_{x=x_0} = (2x)'_{x=x_0} = 2,$$

διότι $$(2x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2x-2x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 2 = 2.$$
Ἄρα ὑπάρχει ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x)=x^2$ καὶ εἶναι αὕτη ἡ σταθερὰ συνάρτησις 2.

Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζομεν τὴν τρίτην παράγωγον μιᾶς συναρτήσεως f ὡς τὴν παράγωγον τῆς δευτέρας παραγώγου αὐτῆς καὶ ἐπαγωγικῶς τὴν νιοστὴν παράγωγον $f^{(\nu)}$ αὐτῆς διὰ τοῦ τύπου
$$f^{(\nu)} = (f^{(\nu-1)})',\ \nu = 2,3,\ldots,$$
ὅπου μὲ $f^{(\mu)}$ συμβολίζομεν τὴν μιοστὴν παράγωγον τῆς f. Ἐπίσης διὰ τὴν νιοστὴν παράγωγον $f^{(\nu)}$ χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ σύμβολον $\frac{d^\nu f}{dx^\nu}$.

1.2 Γεωμετρικὴ σημασία τῆς παραγώγου. Ἔστω f μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα Δ καὶ ἔστω $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ἓν σημεῖον τοῦ διαγράμματος αὐτῆς. Ἂν θεωρήσωμεν καὶ ἓν ἄλλον σημεῖον $P_\eta = (x_0+\eta,\ f(x_0+\eta))$ τοῦ διαγράμματος ὡς καὶ τὴν διὰ τῶν σημείων P_0, P_η διερχομένην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία καλεῖται τέμνουσα διὰ τοῦ P_0 εὐθεῖα τὸ διάγραμμα τῆς f, τότε ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς τεμνούσης, δηλαδὴ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας α_η, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου
$$\varepsilon\varphi\alpha_\eta = \frac{QP_\eta}{P_0Q} = \frac{f(x_0+\eta)-f(x_0)}{\eta},$$



Σχ. 75

ἡ δὲ ἐξίσωσις τῆς τεμνούσης εἶναι
$$(\tau) \qquad y - f(x_0) = \frac{f(x_0+\eta)-f(x_0)}{\eta}(x-x_0).$$
Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ $\lim_{\eta\to 0}\frac{f(x_0+\eta)-f(x_0)}{\eta}$ δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχει ἡ παράγωγος $f'(x_0)$ τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον x_0, τότε ὁρίζεται ὡς ὁριακὴ ἐξίσωσις τῆς (τ) διὰ $\eta \to 0$ μία ἐξίσωσις εὐθείας
$$(\varepsilon) \qquad y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$
διερχομένης ἐκ τοῦ σημείου $P_0 = (x_0, f(x_0))$ καὶ ἐχούσης συντελεστὴν κατευθύνσεως τὴν $f'(x_0)$, ἤτοι (βλ. Σχ. 75)
$$\varepsilon\varphi\alpha = f'(x_0).$$

Τὴν εὐθεῖαν ταύτην ὁρίζομεν ὡς τὴν *ἐφαπτομένην εὐθεῖαν τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον P_0.*

1.3 Κινηματικὴ σημασία τῆς παραγώγου. Ἔστω ὅτι ἡ θέσις x ὑλικοῦ σημείου κινουμένου ἐπὶ εὐθείας ἐκφράζεται συναρτήσει τοῦ χρόνου t, ἤτοι
$$x = f(t),\ t\in\Delta = [t_0, t_1] \text{ (ἓν χρονικὸν διάστημα).}$$

Τὸ πηλίκον διαφορῶν $\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}$ εἰς τὴν χρονικὴν στιγμὴν $\tau\in[t_0,t_1]$ ἐκφράζει τὴν *μέσην ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα μετα-*

ξὺ τῶν στιγμῶν τ *καὶ* t. Τὴν ὁριακὴν τιμὴν τῆς μέσης ταύτης ταχύτητος διὰ $t \to \tau$ ὁρίζομεν ὡς τὴν *(στιγμιαίαν) ταχύτητα* $\upsilon(\tau)$ *τοῦ ὑλικοῦ σημείου κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν* τ, ἤτοι ὁρίζομεν

$$\upsilon(\tau) = \lim_{t \to \tau} \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} = f'(\tau).$$

Ἂν τώρα ἡ στιγμιαία ταχύτης $\upsilon(t)$ ὁρίζεται διὰ κάθε χρονικὴν στιγμὴν $t \in [t_0, t_1]$, τότε τὸ πηλίκον διαφορῶν $\frac{\upsilon(t) - \upsilon(\tau)}{t - \tau}$ ἐκφράζει τὴν *μέσην ἐπιτάχυνσιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα μεταξὺ τῶν στιγμῶν* τ *καὶ* t. Τὴν ὁριακὴν τιμὴν τῆς μέσης ταύτης ἐπιταχύνσεως διὰ $t \to \tau$ ὁρίζομεν ὡς τὴν *(στιγμιαίαν) ἐπιτάχυνσιν* $\gamma(\tau)$ *κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν* τ, ἤτοι ὁρίζομεν

$$\gamma(\tau) = \lim_{t \to \tau} \frac{\upsilon(t) - \upsilon(\tau)}{t - \tau} = \upsilon'(\tau) = f''(\tau).$$

1.4 * Διαφορικὸν συναρτήσεως. Ἔστω f μία συνάρτησις, ἡ ὁποία παραγωγίζεται εἰς ἓν διάστημα Δ. Ἂν x_0 εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος Δ, τότε διὰ τοῦ τύπου $Y = f'(x_0)X$ ὁρίζεται μία (γραμμικὴ) συνάρτησις, ἡ ὁποία καλεῖται *διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* f *εἰς τὸ σημεῖον* x_0 καὶ συμβολίζεται μὲ $df(x_0)$, ἤτοι :

$$X \xrightarrow{df(x_0)} Y = f'(x_0)X.$$

Εἰδικῶς, ἂν θεωρήσωμεν τὴν ταυτοτικὴν συνάρτησιν, δηλαδὴ τὴν συνάρτησιν τ μὲ $\tau(x) = x$, τότε τὸ διαφορικὸν $d\tau(x) = dx$ αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον x, ὁρίζεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὡς ἡ συνάρτησις ἡ διδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου $Y = \tau'(x)X = 1 \cdot X = X$, ἤτοι

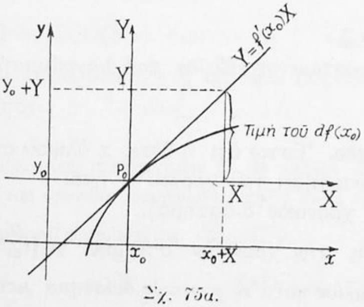
$$X \xrightarrow{dx} Y = X$$

καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις $f'(x_0)dx$ ἔχει τύπον $Y = f'(x_0)X$, δηλαδὴ αὕτη συμπίπτει μὲ τὸ διαφορικὸν $df(x_0)$. Ἄρα ἰσχύει ὁ τύπος

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx,}$$

ὁ ὁποῖος καὶ δικαιολογεῖ τὸν συμβολισμὸν $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$ τῆς παραγώγου ὡς πηλίκον διαφορικῶν.

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ διαφορικοῦ $df(x_0)$ τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ x_0 δίδεται εἰς τὸ ἔναντι Σχ. 75α, ὅπου ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων X, Y εἶναι τὸ σημεῖον $P_0 = (x_0, f(x_0))$.



Σχ. 75α.

Ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω εἰς τυχὸν σημεῖον $x_0 \in \Delta$ ὁρίζεται τὸ διαφορικὸν $df(x_0)$ τῆς f εἰς τὸ x_0, δηλαδὴ ὁρίζεται μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις μὲ τύπον :

$$\Delta \ni x \to df(x),$$

ἡ ὁποία εἰς τὸ τυχὸν $x \in \Delta$ ἀπεικονίζει μίαν συνάρτησιν, τὸ διαφορικὸν $df(x)$ τῆς f εἰς τὸ σημεῖον x. Τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην καλοῦμεν *διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως* f καὶ συμβολίζομεν μὲ df, ἤτοι :

$$\Delta \ni x \xrightarrow{df} df(x).$$

1.5 Ἰδιότητες τῶν παραγώγων. Ἔστωσαν δύο συναρτήσεις f καὶ g μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα Δ. Τότε ἰσχύουν τὰ κάτωθι:

1.5.1 *Ἂν ἡ συνάρτησις* f *παραγωγίζεται ἐν* Δ, *τότε αὕτη εἶναι συνεχὴς συνάρτησις.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν σημεῖον $x_0 \in \Delta$. Ἔχομεν τότε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \quad \forall \quad x \in \Delta - \{ x_0 \}$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

ἤτοι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον x_0 τοῦ διαστήματος Δ.

Παρατήρησις. Τὸ ἀντίστροφον τῆς ἰδιότητος ταύτης δὲν ἰσχύει, δηλαδὴ μία συνάρτησις δύναται νὰ εἶναι συνεχής, ἀλλὰ νὰ μὴ παραγωγίζεται. Τοῦτο ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ παραδείγματος τῆς συναρτήσεως f μὲ $f(x) = |x|$, ἡ ὁποία, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ παράδειγμα 4 τῆς § 1.1 τοῦ Κεφ. VI, εἶναι συνεχής. Αὕτη ὅμως δὲν παραγωγίζεται εἰς τὸ σημεῖον 0, διότι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ ἂν } x > 0 \\ -1, \text{ ἂν } x < 0 \end{cases}$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1, \quad \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

Ἄρα δὲν ὑπάρχει τὸ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, δηλαδὴ ἡ συνάρτησις f δὲν παραγωγίζεται εἰς τὸ σημεῖον 0.

1.5.2 *Ἂν αἱ συναρτήσεις* f *καὶ* g *παραγωγίζωνται ἐν* Δ, *τότε παραγωγίζονται καὶ αἱ συναρτήσεις* f + g *καὶ* f − g *καὶ μάλιστα ἰσχύουν*

$$(f + g)' = f' + g' \quad \textit{καὶ} \quad (f - g)' = f' - g'.$$

Ἀπόδειξις. Ἂν x_0 εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος Δ, τότε ἔχομεν

$$\frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

καὶ ἑπομένως

$$(f(x) + g(x))'_{x = x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$+ \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

ἤτοι $(f(x) + g(x))'_{x = x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε $x_0 \in \Delta$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $(f + g)' = f' + g'$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὁ ἀντίστοιχος τύπος διὰ τὴν διαφοράν.

Εἰδικῶς, ἂν g εἶναι ἡ σταθερὰ συνάρτησις c, ἰσχύει

$$(f+c)' = f' \text{ (διατί;).}$$

1.5.3 *Ἂν αἱ συναρτήσεις f καὶ g παραγωγίζωνται ἐν Δ, τότε παραγωγίζεται καὶ τὸ γινόμενον fg καὶ μάλιστα ἰσχύει*

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Ἀπόδειξις. Ἂν x_0 εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος Δ, τότε ἔχομεν

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{[f(x)g(x) - f(x_0)g(x)] + [f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ g παραγωγίζεται ἐν Δ, λόγῳ τῆς 1.5.1, αὕτη εἶναι συνεχὴς καὶ ἑπομένως $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$(f(x)g(x))'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

καὶ τοῦτο διὰ κάθε $x_0 \in \Delta$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Εἰδικῶς, ἂν g εἶναι ἡ σταθερὰ συνάρτησις c, ἰσχύει

$$(cf)' = cf' \text{ (διατί;).}$$

1.5.4. *Ἂν αἱ συναρτήσεις f καὶ g παραγωγίζωνται ἐν Δ καὶ ἰσχύῃ* $g(x) \neq 0 \ \forall\ x \in \Delta$, *τότε παραγωγίζεται καὶ τὸ πηλίκον* $\frac{f}{g}$ *καὶ μάλιστα ἰσχύει*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Εἰδικῶς, ἂν f εἶναι ἡ σταθερὰ συνάρτησις 1, ἰσχύει

(1) $$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν πρῶτον τὴν (1). Ἂν x_0 εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος Δ, ἔχομεν

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)} \frac{1}{g(x)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ g παραγωγίζεται ἐν Δ, λόγῳ τῆς 1.5.1, αὕτη εἶναι συνεχὴς καὶ ἑπομένως $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, ἄρα $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = -\frac{1}{g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)} \frac{1}{g(x_0)} g'(x_0) =$$

$$= -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

καὶ τοῦτο διὰ κάθε $x_0 \in \Delta$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἰσχύει ἡ (1).

Τώρα, δυνάμει τῆς (1) καὶ τῆς 1.5.3, ἔχομεν

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\,\frac{1}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

1.6 Αἱ παράγωγοι στοιχειωδῶν τινων συναρτήσεων.

1.6.1 $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ $(\nu = 2,3,\ldots)$.

Διὰ $\nu = 2$ ἔχομεν ἤδη ὑπολογίσει ὅτι $(x^2)' = 2x = 2x^{2-1}$, δηλαδὴ ὁ ἐν λόγῳ τύπος ἰσχύει. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ τύπου τούτου εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ὅτι ἰσχύει $(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}$, ὁπότε, δυνάμει τῆς 1.5.3, θὰ ἰσχύῃ

$$(x^{\kappa+1})' = (x \cdot x^\kappa)' = (x)'x^\kappa + x(x^\kappa)' = 1 \cdot x^\kappa + x\kappa x^{\kappa-1} = (\kappa+1)x^\kappa.$$

Ὥστε δεχόμενοι ὅτι ὁ τύπος 1.6.1 ἰσχύει διὰ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν κ $(\kappa \geqslant 2)$ ἐδείξαμεν ὅτι οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ φυσικὸν ἀριθμὸν $\kappa + 1$. Ἄρα ὁ τύπος 1.6.1. ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu \geqslant 2$.

1.6.1′ $\left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}}$, $x \neq 0$ (*ν φυσικὸς ἀριθμός*).

Διὰ $\nu = 1$ ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει, διότι, δυνάμει τῆς (1), ἔχομεν

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^{1+1}}.$$

Διὰ $\nu \geqslant 2$, δυνάμει τόσον τῆς (1) ὅσον καὶ τοῦ τύπου 1.6.1, ἔχομεν

$$\left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = -\frac{(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = -\frac{\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}}.$$

1.6.2 $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

Κατὰ πρῶτον ἀποδεικνύομεν τὸν τύπον $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$. Ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι γνωστὴ ἡ ἀνισότης $\eta\mu y < y < \varepsilon\varphi y$ $\forall$ $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ἡ ὁποία γράφεται ἰσοδυνάμως καὶ οὕτω :

$$\sigma\upsilon\nu y < \frac{\eta\mu y}{y} < 1 \;\; \forall \;\; y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἀνισότης ἰσχύει καὶ διὰ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, διότι

$$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow -y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(-y) < \frac{\eta\mu(-y)}{-y} < 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu y < \frac{\eta\mu y}{y} < 1.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$(2) \qquad \sigma\upsilon\nu y < \frac{\eta\mu y}{y} < 1 \;\; \forall \;\; y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ἐπειδὴ τὸ συνημίτονον εἶναι συνεχὴς συνάρτησις ἔχομεν $\lim\limits_{y\to 0} \sigma\upsilon\nu y = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ καὶ ὁ τύπος (2) δίδει τότε $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τώρα τοῦ τύπου 1.6.2 θεωροῦμεν τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν x_0, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{ημx - ημx_0}{x - x_0} = \frac{2ημ\frac{x-x_0}{2}\,συν\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \frac{ημ\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\,συν\frac{x+x_0}{2}$$

καὶ ἐπειδὴ ἀφ᾽ ἑνὸς μέν, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{ημ\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ $\lim\limits_{x\to x_0} συν\dfrac{x+x_0}{2} = συν\dfrac{x_0+x_0}{2} = συνx_0$ (λόγῳ τῆς συνεχείας τοῦ συνημιτόνου), θὰ ἔχωμεν

$$(ημx)'_{x=x_0} = 1 \cdot συνx_0 = συνx_0$$

καὶ τοῦτο διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x_0, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $(ημx)' = συνx$.

1.6.3 $(συνx)' = -ημx$.

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἔχομεν

$$(συνx)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{συνx - συνx_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-2ημ\frac{x-x_0}{2}\,ημ\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$= -\lim_{x\to x_0}\frac{ημ\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\lim_{x\to x_0}ημ\frac{x+x_0}{2} = -1.\,ημ\frac{x_0+x_0}{2} = -ημx_0.$$

1.6.4. $(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2x} = 1 + εφ^2x,\ x \neq κπ + \dfrac{π}{2}\quad (κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ τύπου τούτου ἐπιτυγχάνεται δι᾽ ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος 1.5.4.

$$(εφx)' = \left(\frac{ημx}{συνx}\right)' = \frac{(ημx)'συνx - ημx(συνx)'}{συν^2x} = \frac{συνx συνx - ημx\,(-ημx)}{συν^2x} =$$

$$= \frac{συν^2x + ημ^2x}{συν^2x} = \frac{1}{συν^2x}.$$

1.6.5. $(σφx)' = -\dfrac{1}{ημ^2x} = -(1 + σφ^2x),\ x \neq κπ\ (κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

$$(σφx)' = \left(\frac{συνx}{ημx}\right)' = \frac{(συνx)'\,ημx - συνx\,(ημx)'}{ημ^2x} = \frac{(-ημx)\,ημx - συνxσυνx}{ημ^2x} =$$

$$= -\frac{ημ^2x + συν^2x}{ημ^2x} = -\frac{1}{ημ^2x}.$$

1.6.6. $(e^x)' = e^x$.

Ἔχομεν

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = \frac{e^{(x-x_0)+x_0} - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0},$$

ὁπότε, ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον (11) τῆς § 3.3. τοῦ Κεφ. VI ἰσχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$, θὰ ἔχωμεν καὶ

$$(e^x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = e^{x_0}\,.\,1 = e^{x_0}$$

καὶ τοῦτο διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x_0, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $(e^x)' = e^x$.

1.6.7 $(\log x)' = \frac{1}{x}, \; x \in (0, +\infty)$.

Έχομεν

$$\frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{\log \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \, \frac{\log \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1},$$

ὁπότε, ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον (12) τῆς § 3.3. τοῦ Κεφ. VI ἰσχύει

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\log \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1} = 1$, θὰ ἔχωμεν καὶ

$$(\log x)'_{x = x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0}$$

καὶ τοῦτο διὰ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν x_0, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον (10) τῆς § 3.3. τοῦ Κεφ. VI ἰσχύει

$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ $(a \neq 1)$, θὰ ἔχωμεν

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\log a} \, (\log x)' = \frac{1}{\log a} \, \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log a}$$

Ὥστε ἰσχύει, γενικώτερον, ὁ κάτωθι τύπος

1.6.7′ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}, \; x \in (0, +\infty) \; (a \neq 1)$.

1.7. Παραγώγισις συνθέτου συναρτήσεως. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῆς εἶναι ἐν γένει λίαν ἐπίπονος καὶ πρακτικῶς εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἀδύνατος. Αἱ ἰδιότητες τῶν παραγώγων καὶ οἱ τύποι οἱ δοθέντες εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους 1.5 καὶ 1.6 δύναται νὰ ἐφαρμοσθοῦν καταλλήλως διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν παραγώγων καὶ ἄλλων στοιχειωδῶν συναρτήσεων, ὡς π.χ.

$$(\log x + \varepsilon\varphi x)' = (\log x)' + (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \; x \in R^+ \text{ καὶ } x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$(\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ἐν τούτοις, τοῦτο εἰς πολλὰς περιπτώσεις στοιχειωδῶν συναρτήσεων δὲν εἶναι δυνατόν, ὡς π.χ. διὰ τὴν συνάρτησιν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου $y = \sigma\upsilon\nu\,(2x + 3)$, τῆς ὁποίας ὅμως δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν (σχετικῶς εὐκόλως) τὴν παράγωγον δι' ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ ὁρισμοῦ ὡς ἑξῆς :

$$(\sigma\upsilon\nu(2x + 3))'_{x = x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sigma\upsilon\nu\,(2x + 3) - \sigma\upsilon\nu\,(2x_0 + 3)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-2\eta\mu\,(x - x_0)\,\eta\mu\,(x + x_0 + 3)}{x - x_0}$$

$$= -2 \lim_{x \to x_0} \frac{\eta\mu\,(x - x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} \eta\mu(x + x_0 + 3) = -2 \cdot 1 \;\; \eta\mu(x_0 + x_0 + 3) =$$

$= -2\eta\mu\,(2x_0 + 3)$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν x_0. Ἄρα.

$$(\sigma\upsilon\nu(2x + 3))' = -2\eta\mu(2x + 3).$$

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις τῆς ὁποίας ὑπελογίσαμεν τὴν παράγωγον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ σύνθεσις δύο συναρτήσεων, τῆς συναρτήσεως g μὲ $g(x) = 2x + 3$ καὶ τοῦ συνημιτόνου, αἱ παράγωγοι τῶν ὁποίων ὑπολογίζονται εὐκόλως δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων καὶ τῶν τύπων τῶν παραγράφων 1.5 καὶ 1.6. Εἶναι λοιπὸν φυσικὸν νὰ ἀναζητηθῇ κάποια σχέσις μεταξὺ τῆς παραγώγου τῆς συνθέτου συναρτήσεως καὶ τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι συνθέτουν ταύτην. Ἡ σχέσις αὕτη δίδεται εἰς τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

1.7.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις* $g: \Delta \mapsto A$ *καὶ* $f: A \mapsto R$, *ὅπου* A *καὶ* Δ *εἶναι διαστήματα, αἱ ὁποῖαι ὑποθέτομεν ὅτι παραγωγίζονται. Τότε ἡ σύνθεσις* $h = f \circ g$ *αὐτῶν (ἡ ὁποία ὡς γνωστὸν ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου* $h(x) = f(g(x))$, $x \in \Delta$*) παραγωγίζεται ἐπίσης καὶ μάλιστα ἰσχύει*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

*Ἀπόδειξις.** Ἔστω $x_0 \in \Delta$. Ἂς θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἀκολουθίαν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ $x_\nu \in \Delta - \{x_0\}$ $\forall$ $\nu \in N$ διὰ τὴν ὁποίαν διακρίνομεν τὰς κάτωθι τρεῖς περιπτώσεις :

1. $g(x_\nu) = g(x_0)$ *δι' ἓν πεπερασμένον πλῆθος δεικτῶν.* Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην διὰ διαγραφῆς τῶν ὅρων τῆς x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν σχέσιν $g(x_\nu) = g(x_0)$ προκύπτει μία ἀκολουθία y_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $y_\nu \to x_0$ (Πρβλ. παρατήρησιν § 1.4. τοῦ Κεφ. IV) καὶ

$$g(y_\nu) \neq g(x_0) \ \forall \ \nu \in N,$$

ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{h(y_\nu) - h(x_0)}{y_\nu - x_0} = \frac{h(y_\nu) - h(x_0)}{g(y_\nu) - g(x_0)} \cdot \frac{g(y_\nu) - g(x_0)}{y_\nu - x_0} =$$

$$= \frac{f(g(y_\nu)) - f(g(x_0))}{g(y_\nu) - g(x_0)} \cdot \frac{g(y_\nu) - g(x_0)}{y_\nu - x_0}.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $f'(g(x_0))$ καὶ $g'(x_0)$, εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι ἰσχύουν καὶ

$$\lim \frac{f(g(y_\nu)) - f(g(x_0))}{g(y_\nu) - g(x_0)} = f'(g(x_0)), \quad \lim \frac{g(y_\nu) - g(x_0)}{y_\nu - x_0} = g'(x_0).$$

Ἑπομένως $\lim \dfrac{h(y_\nu) - h(x_0)}{y_\nu - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$ καί, δυνάμει τῆς παρατηρήσεως τῆς § 1.4. τοῦ Κεφ. IV, ἰσχύει ἐπίσης

$$\lim \frac{h(x_\nu) - h(x_0)}{x_\nu - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0). \tag{3}$$

2. $g(x_\nu) \neq g(x_0)$ *δι' ἓν πεπερασμένον πλῆθος δεικτῶν.* Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην διὰ διαγραφῆς τῶν ὅρων τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν σχέσιν $g(x_\nu) \neq g(x_0)$ προκύπτει μία ἀκολουθία y_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $y_\nu \to x_0$ καὶ

$$g(y_\nu) = g(x_0) \ \forall \ \nu \in N,$$

ὁπότε ἔχομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν

$$g'(x_0) = \lim \frac{g(y_\nu) - g(x_0)}{y_\nu - x_0} = \lim \frac{0}{y_\nu - x_0} = 0,$$

ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\lim \frac{h(y_\nu)-h(x_0)}{y_\nu - x_0} = \lim \frac{f(g(y_\nu)) - f(g(x_0))}{y_\nu - x_0} = \lim \frac{f(g(x_0)) - f(g(x_0))}{y_\nu - x_0} = 0$$

καὶ ἐπομένως, κατὰ τὴν παρατήρησιν τῆς § 1.4 τοῦ Κεφ. IV, ἰσχύει ἐπίσης

$$\lim \frac{h(x_\nu)-h(x_0)}{x_\nu - x_0} = 0.$$

Τώρα διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύει ὁ τύπος (3).

3. *Οὐδεμία τῶν περιπτώσεων* 1 ἢ 2 *ἰσχύει*. Διὰ διαγραφῆς τῶν ὅρων τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν σχέσιν $g(x_\nu) = g(x_0)$ προκύπτει μία ὑπακολουθία x_{κ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $x_{\kappa_\nu} \to x_0$ (ἰδιότης 2, § 1.4.2 τοῦ Κεφ. IV) καὶ $g(x_{\kappa_\nu}) \neq g(x_{\kappa 0})$ $\forall$ $\nu \in N$. Διὰ τὴν ὑπακολουθίαν ταύτην, ἀκριβῶς ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν 1, προκύπτει ὅτι

$$(4) \qquad \lim \frac{h(x_{\kappa_\nu}) - h(x_0)}{x_{\kappa_\nu} - x_0} = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

Ὁμοίως διὰ διαγραφῆς τῶν ὅρων τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν σχέσιν $g(x_\nu) \neq g(x_0)$ προκύπτει μία ὑπακολουθία x_{μ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς ἰσχύει $x_{\mu_\nu} \to x_0$ καὶ $g(x_{\mu_\nu}) = g(x_0)$ $\forall$ $\nu \in N$. Διὰ τὴν ὑπακολουθίαν ταύτην ἀκριβῶς ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν 2 προκύπτει ὅτι

$$(5) \qquad \lim \frac{h(x_{\mu_\nu}) - h(x_0)}{x_{\mu_\nu} - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Ἀνωτέρω διεσπάσαμεν τὴν ἀκολουθίαν x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἰς δύο ὑπακολουθίας της τὰς x_{κ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ x_{μ_ν}, $\nu = 1,2,\ldots$ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν αἱ (4) καὶ (5). Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει καὶ ὁ τύπος (3).

Ὥστε καὶ εἰς τὰς τρεῖς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἐδείχθη ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος (3), δηλαδὴ ὅτι

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu \to x_0 \\ x_\nu \in \Delta - \{x_0\}\ \forall\ \nu \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{h(x_\nu) - h(x_0)}{x_\nu - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

ἤτοι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0) \text{ ἢ } h'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν $x_0 \in \Delta$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad \forall \quad x \in \Delta.$$

Ἐφαρμογαί :

1. $(\text{συν}(2x+3))' = (-\text{ημ}(2x+3))\,(2x+3)' = -\text{ημ}(2x+3)\cdot 2 = -2\text{ημ}(2x+3)$.
Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο εἴχομεν καταλήξει καὶ προηγουμένως δι' ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου.

2. $(a^x)' = a^x \log a$.
Κατὰ τὸν τύπον (9) τῆς § 3.3 τοῦ Κεφ. VI ἔχομεν $a^x = e^{x\log a}$ καὶ ἐπομένως

$$(a^x)' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}\,(x\log a)' = e^{x\log a} \log a = a^x \log a.$$

3. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $x \in (0, +\infty)$.
Ὁμοίως ἔχομεν $x^a = e^{a\log x}$ καὶ ἐπομένως

$$(x^a)' = (e^{a\log x})' = e^{a\log x}\,(a\log x)' = e^{a\log x}\, a(\log x)' = x^a\, a\, \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Εἰδικῶς διὰ $a = \frac{1}{2}$ λαμβάνομεν

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \text{ ἤτοι } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. $(\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Πράγματι· $(\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Γενικώτερον ἰσχύει ὁ τύπος

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{(διατί;)}$$

Πίναξ τῶν παραγώγων τῶν κυριωτέρων στοιχειωδῶν συναρτήσεων

f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x	a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\log a}$
ημx	συνx	συνx	− ημx
εφx	$\frac{1}{\text{συν}^2x}$	σφx	$-\frac{1}{\text{ημ}^2x}$

2. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

2.1 Ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου ἐξυπηρετεῖ τὰ μέγιστα εἰς τὴν μελέτην μιᾶς συναρτήσεως ὄχι μόνον διότι δυνάμεθα νὰ καταρτίσωμεν ταχύτερον τὸν πίνακα μεταβολῆς αὐτῆς, ἀλλὰ καὶ διότι μέσῳ τῆς παραγώγου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν λεπτομερέστερα στοιχεῖα διὰ τὴν συμπεριφορὰν τοῦ διαγράμματος ταύτης καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ. Τὰ ἀκολουθοῦντα θεωρήματα ἑρμηνεύουν τὸν ρόλον τῆς παραγώγου εἰς τὴν μελέτην συναρτήσεως.

2.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἂν ἡ συνάρτησις f παραγωγίζεται εἰς ἓν σημεῖον* x_0 *καὶ παρουσιάζει τοπικὸν ἀκρότατον εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, τότε ἰσχύει* $f'(x_0) = 0$.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει τοπικὸν μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον x_0 (ἡ περίπτωσις τοπικοῦ ἐλαχίστου ἀποδεικνύεται ἀναλόγως). Ἔχομεν τότε ὅτι ὑπάρχει ἓν ἀνοικτὸν διάστημα (a,b) μὲ $x_0 \in (a,b) \subseteq \mathscr{D}(f)$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall \quad x \in (a, b).$$

Οὕτω

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \;\; \forall \;\; x \in (x_0, b) \text{ καὶ } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \;\; \forall \;\; x \in (a, x_0),$$

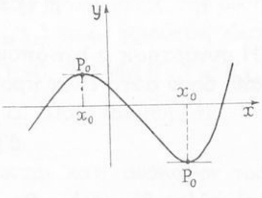
ὁπότε ἐπειδὴ ἡ f παραγωγίζεται εἰς τὸ σημεῖον x_0, θὰ ἔχωμεν τόσον

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \text{ ὅσον καὶ } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

δηλαδὴ $f'(x_0) = 0$.

Τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δὲν ἰσχύει. Ἡ ἰσότης $f'(x_0) = 0$ δυνατὸν νὰ ὑφίσταται, χωρὶς ἡ συνάρτησις f νὰ παρουσιάζῃ ἓν τοπικὸν ἀκρότατον εἰς τὸ σημεῖον x_0. Τοῦτο π.χ. συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$ (διατί;) (βλ. Σχ. 23, Κεφ. III).

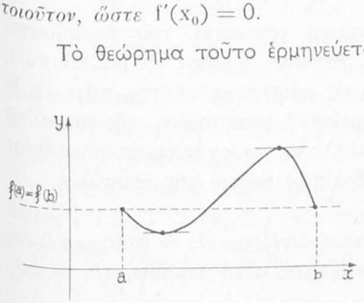
Γεωμετρικῶς ἡ ὕπαρξις ἑνὸς τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον x_0 σημαίνει (εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ συνάρτησις παραγωγίζεται εἰς τὸ x_0) ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $P_0 = (x_0, f(x_0))$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x (βλ. Σχ. 76).



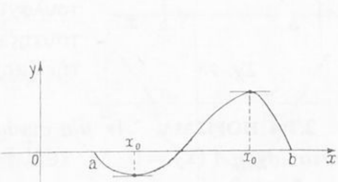
Σχ. 76

2.1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ *τοῦ Rolle. Ἔστω f μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν κλειστὸν διάστημα [a, b], ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς καὶ ἐπὶ πλέον παραγωγίζεται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα (a,b). Τότε, ἂν f(a) = f(b), ὑπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τοιοῦτον, ὥστε $f'(x_0) = 0$.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἑρμηνεύεται γεωμετρικῶς (βλ. Σχ. 77α) ὡς ἑξῆς : ἂν



Σχ. 77α



Σχ. 77β.

μία καμπύλη (δηλαδὴ τὸ διάγραμμα μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως) ἔχουσα ἐφαπτομένη εἰς κάθε σημεῖον της τέμνεται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x εἰς δύο τουλάχιστον σημεῖα, τότε εἰς ἓν τουλάχιστον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ταύτης εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Εἰδικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου f(a) = f(b) = 0, ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ θεωρήματος τούτου δίδεται εἰς τὸ Σχ. 77β.

Τὸ ἀκολουθοῦν θεώρημα ἀποτελεῖ μίαν γενίκευσιν τοῦ θεωρήματος τοῦ *Rolle* εἶναι δὲ γνωστὸν ὡς *θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ* ἢ ἀκόμη ὡς *θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων.*

2.1.3. ΘΕΩΡΗΜΑ . *Ἔστω f μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν κλειστὸν* *διάστημα* $[a, b]$, *ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς καὶ ἐπὶ πλέον παραγωγίζεται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα* (a, b). *Τότε ὑπάρχει* $x_0 \in (a, b)$ *τοιοῦτον, ὥστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ἀπόδειξις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ θεωρήματος τοῦ *Rolle* ἐφαρμοζομένου διὰ τὴν συνάρτησιν g μὲ

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x - a)\,\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

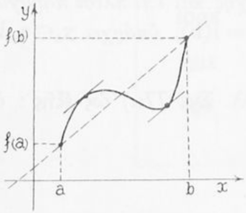
Ἡ συνάρτησις g ἱκανοποιεῖ πράγματι τὰς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ *Rolle*, καθ' ὅσον αὕτη εἶναι προφανῶς συνεχής, παραγωγίζεται ἐν (a, b) καὶ μάλιστα

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ἐπὶ πλέον δὲ $g(a) = 0 = g(b)$. Ἑπομένως ὑπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$g'(x_0) = -f'(x_0) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

$$\text{ἤτοι } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Σχ. 78

Ἡ γεωμετρικὴ σημασία τοῦ θεωρήματος τούτου (βλ. Σχ. 78) εἶναι ἡ ἑξῆς : ἂν μία καμπύλη ἔχῃ ἐφαπτομένη εἰς κάθε σημεῖον της, τότε εἰς ἓν τουλάχιστον σημεῖον ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ταύτης εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν ἄκρων τῆς καμπύλης.

2.1.4 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν μία συνάρτησις f παραγωγίζεται εἰς ἓν διάστημα Δ καὶ μάλιστα ἰσχύῃ $f'(x) = 0 \;\; \forall \;\; x \in \Delta$, τότε ἡ συνάρτησις αὕτη λαμβάνει εἰς τὸ διάστημα Δ σταθερὰν τιμήν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω x^* ἓν σταθερὸν σημεῖον τοῦ διαστήματος Δ καὶ x τυχὸν ἄλλο σημεῖον τοῦ διαστήματος τούτου. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ ὑπάρχει σημεῖον x_0 τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} = f'(x_0) = 0, \text{ ἄρα } f(x) = f(x^*) \;\; \forall \;\; x \in \Delta.$$

2.1.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν αἱ συναρτήσεις f καὶ g παραγωγίζωνται εἰς τὸ διάστημα Δ καὶ μάλιστα ἰσχύῃ $f'(x) = g'(x) \;\; \forall \;\; x \in \Delta$, τότε αἱ συναρτήσεις f καὶ g διαφέρουν κατὰ μίαν σταθεράν, δηλαδὴ ἰσχύει $f(x) = g(x) + c \;\; \forall \;\; x \in \Delta$.*

Ἀπόδειξις. Διὰ τὴν συνάρτησιν $h = f - g$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \;\; \forall \;\; x \in \Delta$ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ πόρισμα 2.1.4, ἡ h λαμβάνει εἰς τὸ διάστημα Δ σταθερὰν τιμήν, ἔστω c. Ἄρα $f(x) = g(x) + c \;\; \forall \;\; x \in \Delta$.

2.1.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἂν ἡ συνάρτησις* f *παραγωγίζεται εἰς ἓν διάστημα* Δ, *τότε ἰσχύουν τὰ κάτωθι*

$f'(x) > 0 \ \forall x \in \Delta \Rightarrow f \underset{\wedge}{\uparrow} \Delta$	$f'(x) < 0 \ \forall x \in \Delta \Rightarrow f \overset{\vee}{\downarrow} \Delta$
$f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \Delta \Rightarrow f \uparrow \Delta$	$f'(x) \leqslant 0 \ \forall x \in \Delta \Rightarrow f \downarrow \Delta$

Ἀπόδειξις. Ἔστω $f'(x) > 0 \ \forall x \in \Delta$. Τότε, ἂν x_1, x_2 εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ διαστήματος Δ μὲ $x_1 < x_2$, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ, ὅτι ὑπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$ τοιοῦτον, ὥστε $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, ἄρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) > 0$, δηλαδὴ $f(x_1) < f(x_2)$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα ἐν Δ. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in \Delta \Rightarrow f \underset{\wedge}{\uparrow} \Delta.$$

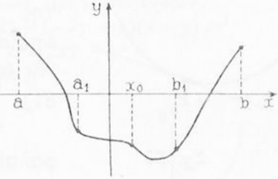
Τὰ ὑπόλοιπα συμπεράσματα τοῦ θεωρήματος ἐξάγονται κατ' ἀνάλογον τρόπον.

2.1.7 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστω* f *μία συνάρτησις διὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ἡ δευτέρα παράγωγος εἰς τὸ διάστημα* (a, b) *καὶ εἶναι αὕτη συνεχής. Τότε, ἂν* $x_0 \in (a,b)$ *μὲ* $f'(x_0) = 0$, *ἰσχύουν :*

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ *ἡ* f *παρουσιάζει τοπικὸν μέγιστον εἰς τὸ* x_0

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ *ἡ* f *παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον εἰς τὸ* x_0.

Ἀπόδειξις. Ἡ συνέχεια τῆς δευτέρας παραγώγου f'' καὶ ἡ ἀνισότης $f''(x_0) < 0$ συνεπάγονται (βλ. Σχ. 79) ὅτι ὑπάρχει διάστημα (a_1, b_1) μὲ $x_0 \in (a_1, b_1) \subseteq (a, b)$ καὶ $f''(x) < 0 \ \forall x \in (a_1, b_1)$ (ἀπόδειξις;).



Σχ. 79

Ἄρα, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος 2.1.6, $f' \overset{\vee}{\downarrow} (a_1, b_1)$ καὶ ἑπομένως

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f' \overset{\vee}{\downarrow} (a_1, x_0] \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) \geqslant f(x_0) = 0 \ \forall x \in (a_1, x_0] \Rightarrow$$

$$f \uparrow (a_1, x_0] \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0] \ \forall x \in (a_1, x_0].$$

Ὁμοίως

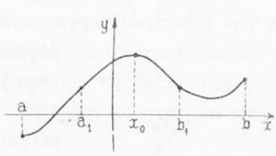
$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f' \overset{\vee}{\downarrow} [x_0, b_1) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) \leqslant f'(x_0) = 0 \ \forall x \in [x_0, b_1) \Rightarrow f \downarrow [x_0, b_1) \Rightarrow$$

$$f(x_0) \geqslant f(x) \ \forall x \in [x_0, b_1).$$

Ὥστε ἐδείχθη (βλ. Σχ. 80) ὅτι ἰσχύει

$$f(x) \leqslant f(x_0) \ \forall x \in (a_1, b_1),$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ f παρουσιάζει τοπικὸν μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον x_0.



Σχ. 80

Ἡ περίπτωσις $f''(x_0) > 0$ συνάγεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προηγουμένου συμπεράσματος διὰ τὴν συνάρτησιν $-f$ διὰ τὴν ὁποίαν προφανῶς θὰ ἰσχύῃ $(-f)'(x_0) = -f'(x_0) = 0$ καὶ $(-f)''(x_0) = -f''(x_0) < 0$, ὁπότε ἡ

$-f$ θὰ παρουσιάζῃ τοπικὸν μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον x_0, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ f παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον εἰς τὸ x_0 (διατί;).

Ἐφαρμογή. Ἂς μελετήσωμεν τώρα εἰς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω τὴν διτετράγωγον τριώνυμον συνάρτησιν f μὲ $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$, τὴν ὁποίαν ἐμελετήσαμεν καὶ εἰς τὴν § 2.1 (ἐφαρμογὴ 3, παραδ. 1) τοῦ Κεφ. III (βλ. Σχ. 44).

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον τῆς f, ἤτοι

$$f'(x) = (2x^4)' - (4x^2)' - 0 = 8x^3 - 8x = 8x\,(x^2 - 1)$$
$$f''(x) = (8x^3)' - (8x)' = 24x^2 - 8.$$

Αἱ ρίζαι τῆς πρώτης παραγώγου f' εἶναι -1, 0, 1 διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν

$$f''(-1) = 24 - 8 = 16 > 0, \quad f''(0) = -8 < 0 \quad \text{καὶ} \quad f''(1) = 16 > 0$$

καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα 2.1.7, ἡ f παρουσιάζει τοπικὸν ἐλάχιστον εἰς τὰ σημεῖα -1 καὶ 1 καὶ τοπικὸν μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον 0.

Ἐπίσης συνάγονται εὐκόλως καὶ τὰ κάτωθι :

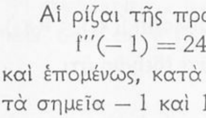
$$f'(x) < 0 \ \forall\ x \in (-\infty, -1) \ \text{καὶ} \ \forall\ x \in (0,1)$$
$$f'(x) > 0 \ \forall\ x \in (-1,0) \ \text{καὶ} \ \forall\ x \in (1, +\infty),$$

τὰ ὁποῖα, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 2.1.6, συνεπάγονται τὰ ἑξῆς :

$$f \downarrow (-\infty, -1), \quad f \uparrow (-1,0), \quad f \downarrow (0,1) \ \text{καὶ} \ f \uparrow (1, +\infty),$$

δηλαδὴ τὰ συμπεράσματα τοῦ πίνακος μεταβολῆς τῆς f τῆς § 2.1 τοῦ Κεφ. III.

2.2 Κυρταὶ καὶ κοῖλαι συναρτήσεις. Ἔστω μία συνάρτησις f μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα Δ, ἡ ὁποία παραγωγίζεται ἐν Δ. Τότε, ὡς γνωστόν, ὑπάρχει ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ διαγράμματός της. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως f κεῖται ἄνωθεν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον P_0 αὐτοῦ (βλ. Σχ. 81).



Σχ. 81

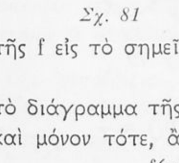
Ἐπειδή, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 1.2 τοῦ παρόντος κεφαλαίου, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ διαγράμματος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον $P_0 = (x_0, f(x_0))$ εἶναι ἡ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

τὸ διάγραμμα τῆς f κεῖται ἄνωθεν τῆς ἐφαπτομένης του εἰς τὸ σημεῖον P_0 τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0 \quad \forall \ x \in \Delta - \{x_0\}.$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν, ὅπου ἡ τελευταία σχέσις ἰσχύει διὰ τυχὸν $x_0 \in \Delta$, λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι *κυρτὴ ἐν* Δ ἢ ἁπλῶς *κυρτή*.



Σχ. 82

Ἀναλόγως, ἂν δεχθῶμεν ὅτι τὸ διάγραμμα τῆς f κεῖται κάτωθεν τῆς ἐφαπτομένης του εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον P_0 αὐτοῦ (βλ. Σχ. 82) θὰ καταλήξωμεν, ὁμοίως, εἰς τὸ ὅτι τοῦτο συμβαίνει τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ τυχὸν $x_0 \in \Delta$ ἰσχύῃ

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0 \ \forall \ x \in \Delta - \{x_0\}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ f εἶναι *κοίλη* ἐν Δ ἢ ἁπλῶς *κοίλη*.

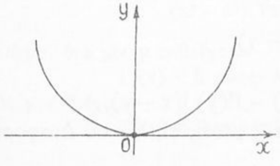
Ὥστε :

f *κυρτὴ ἐν* Δ $\underset{\text{ορσ}}{\iff}$ $f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) > 0 \ \forall \ x, y$ *ἐν* Δ *μὲ* $x \neq y$

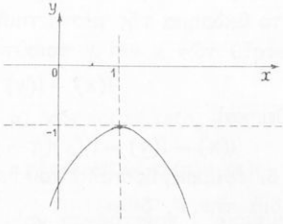
f *κοίλη ἐν* Δ $\underset{\text{ορσ}}{\iff}$ $f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) < 0 \ \forall \ x, y$ *ἐν* Δ *μὲ* $x \neq y$

Παραδείγματα :

1. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = x^2$ *εἶναι κυρτή*. Πράγματι· ἔχομεν
$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) = x^2 - y^2 - 2y(x - y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y^2 = x^2 - 2xy + y^2 =$
$= (x - y)^2 > 0 \ \forall \ x \neq y$ (βλ. Σχ. 83).



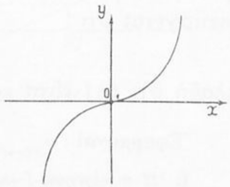
Σχ. 83 $y = x^2$



Σχ. 84 $y = -x^2 + 2x - 2$.

2. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ *εἶναι κοίλη*. Πράγματι· ἔχομεν
$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) = -x^2 + 2x - 2 - (-y^2 + 2y - 2) - (-2y + 2)(x - y) =$
$-x^2 + 2x - 2 + y^2 - 2y + 2 + 2yx - 2x - 2y^2 + 2y = -x^2 + 2xy - y^2 =$
$= -(x - y)^2 < 0 \ \forall \ x \neq y$ (βλ. Σχ. 84).

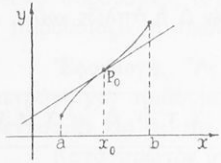
3. *Ἡ συνάρτησις* f μὲ $f(x) = x^3$ *εἶναι κοίλη ἐν* $(-\infty, 0)$ *καὶ κυρτὴ ἐν* $(0, +\infty)$. Πράγματι· ἔχομεν
$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) = x^3 - y^3 - 3y^2(x - y) =$
$(x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3y^2(x - y) = (x - y)(x^2 + xy - 2y^2) =$
$= (x - y)^2(x + 2y)$
καὶ ἑπομένως
$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) < 0 \ \forall \ x, y$ ἐν $(-\infty, 0)$ μὲ $x \neq y$
καὶ
$f(x) - f(y)f'(y) - (x - y) > 0 \ \forall \ x, y$ ἐν $(0, +\infty)$ μὲ $x \neq y$.



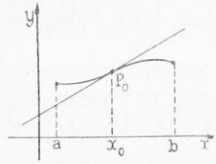
Σχ. 85 $y = x^3$

Εἰς τὸ τελευταῖον ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὑπ' ὄψιν συνάρτησις εἶναι κοίλη ἀριστερὰ τοῦ 0 καὶ κυρτὴ δεξιὰ τοῦ 0 (βλ. Σχ. 85), ἐκφράζομεν δὲ τοῦτο λέγοντες ὅτι ἡ συνάρτησις *παρουσιάζει καμπὴν εἰς τὸ* 0.

Γενικῶς λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις f μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἓν ἀνοικτὸν διάστημα (a, b) *παρουσιάζει καμπὴν εἰς τὸ σημεῖον* $x_0 \in (a, b)$ τότε καὶ μόνον τότε,



Σχ. 86



Σχ. 87

ἂν αὐτὴ εἶναι κοίλη ἐν (a, x_0) καὶ κυρτὴ ἐν (x_0, b) ἢ ἂν εἶναι κυρτὴ ἐν (a, x_0) καὶ κοίλη ἐν (x_0, b) (βλ. Σχ. 86 καὶ 87). Τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον $P_0 = (x_0, f(x_0))$ τοῦ διαγράμματος τῆς συναρτήσεως καλεῖται τότε *σημεῖον καμπῆς* αὐτοῦ.

2.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστω f μία συνάρτησις διὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ἡ δευτέρα παράγωγος εἰς τὸ διάστημα* (a, b). *Τότε ἰσχύουν :*

$$f''(x) > 0 \quad \forall \quad x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ κυρτὴ ἐν } (a, b)$$
$$f''(x) < 0 \quad \forall \quad x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ κοίλη ἐν } (a, b).$$

Ἀπόδειξις. Ἂν x, y εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ διαστήματος (a, b) μὲ $x \neq y$, τότε κατὰ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ ὑπάρχει σημεῖον x_0 μεταξὺ τῶν x καὶ y τοιοῦτον, ὥστε

$$f(x) - f(y) = f'(x_0)(x - y),$$

ὁπότε ἰσχύει καὶ

$$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) = [\, f'(x_0) - f'(y)\,](x - y),$$

τὸ ὁποῖον, δι' ἐφαρμογῆς πάλιν τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ διὰ τὴν f', δίδει

$$(6) \qquad f(x) - f(y) - f'(y)\,(x - y) = f''(y_0)(x_0 - y)(x - y),$$

ὅπου τὸ y_0 κεῖται μεταξὺ τῶν x_0 καὶ y.

Ἐπειδὴ τὸ x_0 κεῖται μεταξὺ τῶν x καὶ y, ἰσχύει $(x_0 - y)(x - y) > 0$. Ἑπομένως, ἡ σχέσις (6) εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν $f''(x) > 0 \ \forall \ x \in (a,b)$ συνεπάγεται ὅτι

$$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) > 0,$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ f εἶναι κυρτὴ ἐν (a, b), εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (a,b)$ συνεπάγεται ὅτι

$$f(x) - f(y) - f'(y)\,(x - y) < 0,$$

δηλαδὴ ὅτι ἡ f εἶναι κοίλη ἐν (a, b).

Ἐφαρμογαί :

1. *Ἡ συνάρτησις f μὲ* $f(x) = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $\alpha > 0$ *εἶναι κοίλη διὰ* $\gamma > 0$ *καὶ κυρτὴ διὰ* $\gamma < 0$. Πράγματι· ἔχομεν

$$f'(x) = \gamma \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\,(\alpha^2 - x^2)' = \gamma \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - x^2}}\,(-2x) = -\gamma \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

καὶ

$$f''(x) = -\gamma \frac{(x)'\sqrt{\alpha^2 - x^2} - x\left(\sqrt{\alpha^2 - x^2}\right)'}{\alpha^2 - x^2} = -\gamma \frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2} - x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{\alpha^2 - x^2}}}{\alpha^2 - x^2} =$$

$$= -\gamma \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - x^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Ἑπομένως, διὰ μὲν $\gamma > 0$ ἔχομεν

$$f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (-\alpha, \alpha), \text{ ἄρα f κοίλη ἐν } (-\alpha, \alpha),$$

διὰ δὲ $\gamma < 0$ ἔχομεν

$$f''(x) < 0 \ \forall \ x \in (-\alpha, \alpha), \text{ ἄρα f κυρτὴ ἐν } (-\alpha, \alpha)$$

(βλ. Σχ. 46 καὶ 47, § 3.2 τοῦ Κεφ. III).

2. *Ἡ συνάρτησις f μὲ* $f(x) = \gamma\sqrt{x^2 - \alpha^2}$, $\alpha > 0$, *διὰ* $\gamma > 0$ *εἶναι κοίλη τόσον ἐν* $(-\infty, -\alpha)$ *ὅσον καὶ ἐν* $(\alpha, +\infty)$, *ἐνῷ διὰ* $\gamma < 0$ *εἶναι κυρτὴ τόσον ἐν* $(-\infty, -\alpha)$ *ὅσον καὶ ἐν* $(\alpha, +\infty)$, (Βλ. Σχ. 56 καὶ 57, § 3.3 τοῦ Κεφ. III). Πράγματι· ἔχομεν

$$f'(x) = \gamma \frac{(x^2 - \alpha^2)'}{2\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \gamma \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \gamma \frac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}$$

καὶ

$$f''(x) = \gamma \frac{(x)'\sqrt{x^2 - \alpha^2} - x(\sqrt{x^2 - \alpha^2})'}{x^2 - \alpha^2} = \gamma \frac{\sqrt{x^2 - \alpha^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}}{x^2 - \alpha^2} =$$

$$= -\gamma \frac{\alpha^2}{(x^2 - \alpha^2)\sqrt{x^2 - \alpha^2}}.$$

Ἑπομένως, διὰ μὲν $\gamma > 0$ ἔχομεν

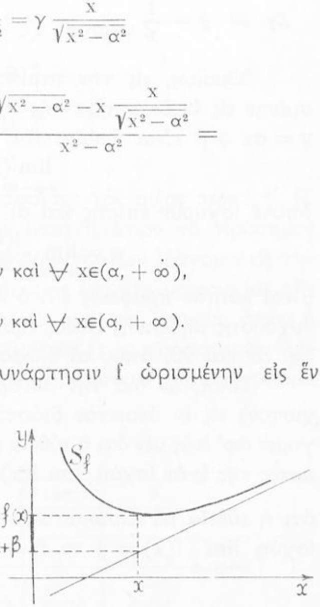
$$f''(x) < 0 \text{ τόσον } \forall \ x \in (-\infty, -\alpha) \text{ ὅσον καὶ } \forall \ x \in (\alpha, +\infty),$$

διὰ δὲ $\gamma < 0$ ἔχομεν

$$f''(x) > 0 \text{ τόσον } \forall \ x \in (-\infty, -\alpha) \text{ ὅσον καὶ } \forall \ x \in (\alpha, +\infty).$$

2.3 Ἀσύμπτωτοι. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν f ὡρισμένην εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$. Μία εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $y = \alpha x + \beta$ καλεῖται *ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος τῆς* f (βλ. Σχ. 88), ἂν ἰσχύῃ

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0.$$



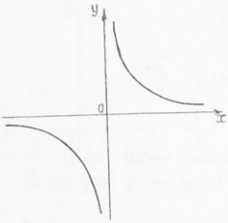
Σχ. 88

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτουν οἱ τύποι: $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ καὶ $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x)$. Πράγματι· ὁ τύπος $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x)$ εἶναι προφανής, ἐνῷ ὁ ἄλλος συνάγεται οὕτω :

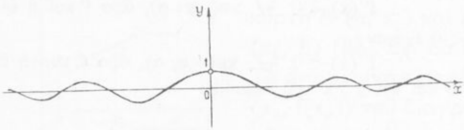
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \alpha\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - \alpha x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x} = \frac{\beta}{+\infty} = 0$$

ἤτοι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται εὐκόλως ὅτι ὁ ἄξων τῶν x, δηλαδὴ ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $y = 0$ $(\alpha = \beta = 0)$, εἶναι ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος τυχούσης μηδενικῆς συναρτήσεως διὰ $x \to +\infty$. Π.χ. τοῦτο ἐμφαίνεται εἰς τὰ Σχ. 89 καὶ 90 διὰ τὰς συναρτήσεις τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τῶν τύπων $y = \dfrac{1}{x}$ καὶ $y = \dfrac{1}{x}\eta\mu x$, αἱ ὁποῖαι ὡς γνωστὸν εἶναι μηδενικαὶ διὰ $x \to +\infty$.



$\Sigma\chi.$ 89 $y = \dfrac{1}{x}$



$\Sigma\chi.$ 90 $y = \dfrac{1}{x}\eta\mu x$

Ὁμοίως, εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ὑποθέτομεν τὴν συνάρτησιν f ὡρισμένην εἰς ἓν διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty, \alpha)$, λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $y = \alpha x + \beta$ *εἶναι ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος τῆς* f, ἂν ἰσχύῃ

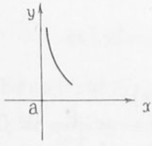
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0,$$

ὁπότε ἰσχύουν ἐπίσης καὶ οἱ τύποι :

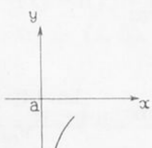
$$\alpha = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - \alpha x\big) \quad (\text{διατί;}).$$

Εἶναι λοιπὸν προφανὲς ὅτι ὁ ἄξων τῶν x εἶναι ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος τυχούσης μηδενικῆς συναρτήσεως διὰ $x \to -\infty$. Π.χ. τοῦτο ἐμφαίνεται εἰς τὰ Σχ. 89 καὶ 90, ὅπου αἱ θεωρούμεναι συναρτήσεις εἶναι μηδενικαὶ διὰ $x \to -\infty$.

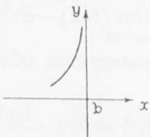
Τέλος, ἂν διὰ τὴν συνάρτησιν f ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ὡρισμένη (τουλάχιστον) εἰς ἓν ἀνοικτὸν διάστημα (a, b) (a, b πραγματικοὶ ἀριθμοί), τότε λέγομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $x = a$ εἶναι *ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος τῆς* f, ἂν ἰσχύῃ $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$ (βλ. Σχ. 91 καὶ 92), ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $x = b$ εἶναι *ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος τῆς* f ἂν ἰσχύῃ $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ ἢ $-\infty$ (βλ. Σχ. 93 καὶ 94).



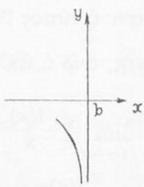
$\Sigma\chi.$ 91



$\Sigma\chi.$ 92



$\Sigma\chi.$ 93



$\Sigma\chi.$ 94

Π.χ. εἰς τὸ Σχ. 89 ὁ ἄξων τῶν y εἶναι ἀσύμπτωτος τοῦ διαγράμματος (διατί;), ἐνῷ ἀντιθέτως εἰς τὸ Σχ. 90 τοῦτο δὲν συμβαίνει.

2.4 Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν μελέτην συναρτήσεως. Τὰ ἀνωτέρω ἐξαχθέντα συμπεράσματα μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ μελετήσωμεν μίαν συνάρτησιν τῇ βοηθείᾳ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας της παραγώγου ἐξετάζοντες μόνον τὴν μεταβολὴν τοῦ προσήμου αὐτῶν. Οὕτως, ὄχι μόνον δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τοπικῶς (κατὰ διαστήματα) τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας (ἐκ τοῦ προσήμου τῆς πρώτης παραγώγου κατὰ τὸ θεώρημα 2.1.6) ἀλλὰ καὶ τὸ ἂν ἡ συνάρτησις εἶναι κυρτὴ ἢ κοίλη (ἐκ τοῦ προσήμου τῆς δευτέρας παραγώγου κατὰ τὸ θεώρημα 2.2.1). Ἐπίσης ὁ καθορισμὸς τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις παρουσιάζει τοπικὰ ἀκρότατα ἢ καμπὴν εἶναι εὐχερής, ὁ δὲ καθορισμὸς τῶν ἀσυμπτώτων διευκολύνει εἰς τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματός της. Εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα παραδείγματα γίνεται σαφὴς ἡ τεχνικὴ τῆς μελέτης μιᾶς συναρτήσεως.

2.4.1 *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = \frac{1}{2} x^2 (x-3)$. Ἔχομεν :

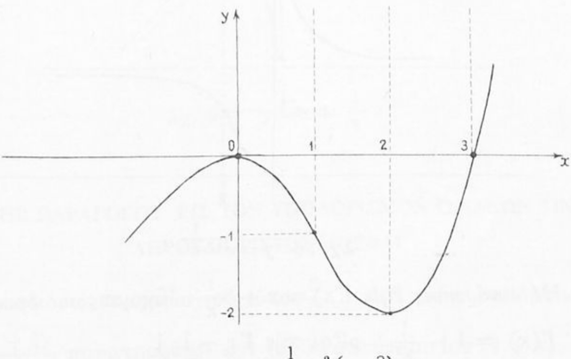
$f(x) = \frac{1}{2} x^2 (x-3)$ · ρίζαι τῆς f : 0, 3

$f'(x) = \frac{3}{2} x (x-2)$ · ρίζαι τῆς f′ : 0, 2

$f''(x) = 3 (x-1)$ · ρίζα τῆς f″: 1.

Σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα διατάσσοντες τὰς ρίζας τῶν f, f′, f″ ἐπὶ ἄξονος καὶ σημειοῦμεν ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων διαστημάτων τὸ πρόσημον τῶν συναρτήσεων, f′, f″ καὶ f. Τέλος, ἐκ τῶν στοιχείων τούτων ἐξάγομεν εἰς τὴν τελευταίαν γραμμὴν τοῦ πίνακος τὰ συμπεράσματά μας ἐπὶ τῆς μονοτονίας τῆς f καὶ τοῦ ἂν αὕτη εἶναι κυρτὴ ἢ κοίλη. Σημειοῦμεν δὲ καὶ τὰ σημεῖα, ὅπου ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει καμπὴν (κ), τοπικὸν μέγιστον (τ.μ) καὶ τοπικὸν ἐλάχιστον (τ.ε). Κάτωθεν ἀκριβῶς τοῦ πίνακος τούτου χαράσσομεν τὸ διάγραμμα τῆς συναρτήσεως (βλ. Σχ. 95).

	$-\infty$	0		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+		+
$f''(x)$	−		−	0	+		+		+
$f(x)$	−	0	−	-1	−	-2	−	0	+
	↗ Κοίλη	τ.μ	↘ Κοίλη	κ	↘ Κυρτή	τ.ε	↗ Κυρτή		↗ Κυρτή



Σχ. 95 $y = \frac{1}{2} x^2 (x-3)$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως δὲν ὑπάρχουν ἀσύμπτωτοι (διατί;).

2.4.2*. *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Ἔχομεν :

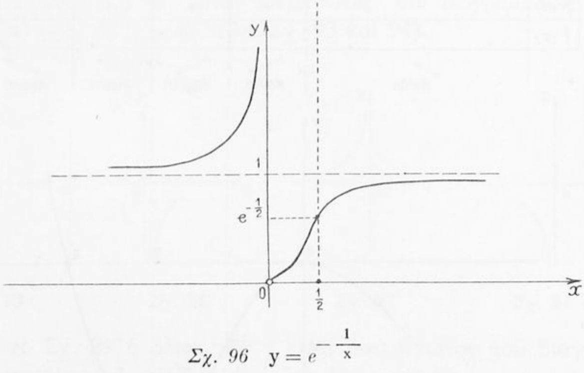
$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \quad \text{καὶ} \quad f''(x) = \frac{1-2x}{x^4}\, e^{-\frac{1}{x}} \quad (\text{διατί;})$$

Ἐπίσης $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x \to +\infty} x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ καὶ

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $y = 0x + 1 = 1$ εἶναι ἀσύμπτωτος (διὰ $x \to -\infty$ εὑρίσκομεν πάλιν τὴν αὐτὴν ἀσύμπτωτον).

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις f δὲν εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ σημεῖον 0, ἡ γνῶσις τῶν ὁριακῶν τιμῶν $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$ καὶ $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ διευκολύνει εἰς τὴν χάραξιν τοῦ διαγράμματος. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἀποδεικνύεται $\lim\limits_{x \to -0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ καὶ $\lim\limits_{x \to +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, ἄρα καὶ ὁ ἄξων τῶν y εἶναι ἀσύμπτωτος (Βλ. Σχ. 96).

	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+		+
$f''(x)$	+		+	0	−
$f(x)$	+		+		+
	κυρτή		κυρτή	K	κοίλη



Σχ. 96 $y = e^{-\frac{1}{x}}$

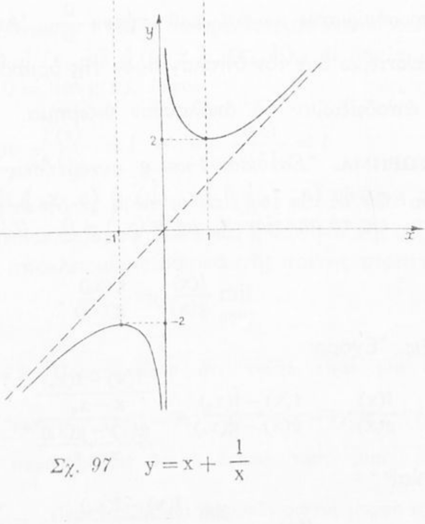
2.4.3 *Ἡ συνάρτησις* f *μὲ* $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Ἔχομεν :

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. ρίζαι τῆς f': −1, 1

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

Ἐπίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$ Ἄρα ἡ εὐθεῖα μὲ ἐξίσωσιν $y=1\cdot x+0=x$ εἶναι ἀσύμπτωτος (διὰ $x\to-\infty$ εὑρίσκομεν πάλιν τὴν αὐτὴν ἀσύμπτωτον). Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις f δὲν εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ 0, ὑπολογίζομεν τὰς ὁριακὰς τιμὰς $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=$ $=0+(-\infty)=-\infty$ καὶ $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0+(+\infty)=+\infty$. Ἄρα καὶ ὁ ἄξων τῶν y εἶναι ἀσύμπτωτος.

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	-2	$-$		$+$	2	$+$	
		Κοίλη	τ.μ	Κοίλη		Κυρτή	τ.ε	Κυρτή	



Σχ. 97 $\quad y=x+\dfrac{1}{x}$

3. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΕΙΣ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΤΙΜΩΝ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΙ ΜΟΡΦΑΙ

3.1 Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Διὰ τὴν συνάρτησιν h μὲ $h(x)=\dfrac{\log(1+x)}{e^x-1}$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει τόσον $\lim\limits_{x\to0}\log(1+x)=\log 1=0$ ὅσον καὶ $\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)=e^0-1=0$ καὶ ἑπομένως πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ὁριακῆς τιμῆς $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1}$ δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)}$ (ἡ πρᾶξις $\frac{0}{0}$, ὡς γνωστόν, δὲν εἶναι ἐπιτρεπτή). Ἐν τούτοις, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὁριακὴν ταύτην τιμὴν ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\log(1+x)}{e^x-1} = \frac{\log(1+x)-\log 1}{e^x-e^0} = \frac{\dfrac{\log(1+x)-\log 1}{x}}{\dfrac{e^x-e^0}{x}} \quad \forall\ x > -1 \text{ μὲ } x \neq 0$$

καὶ ἑπομένως

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)-\log 1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^0}{x}} = \frac{(\log(1+x))'_{x=0}}{(e^x)'_{x=0}} = \frac{\dfrac{1}{1+0}}{e^0} = 1.$$

Ὁριακαὶ τιμαὶ ὡς ἡ ἀνωτέρω, δηλαδὴ ὁριακαὶ τιμαὶ τῆς μορφῆς :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

καλοῦνται *ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου* $\frac{0}{0}$. Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν τεχνικήν, ὡς ἀνωτέρω διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ὁριακῆς τιμῆς $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1}$, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

3.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστωσαν* f *καὶ* g *συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν σύνολον τῆς μορφῆς* $(a, x_0]$ *ἢ* $[x_0, b)$ *ἢ* $(a, x_0] \cup [x_0, b) = (a, b)$, *αἱ ὁποῖαι παραγωγίζονται, εἰς τὸ σημεῖον* x_0 *μὲ* $g'(x_0) \neq 0$. *Τότε, ἂν* $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, *ἰσχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}, \quad x \neq x_0,$$

ὁπότε ἰσχύει καὶ

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Σημείωσις : Ἀνωτέρω εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ τῶν f καὶ g εἶναι τῆς μορφῆς $(a, x_0]$ διὰ τοῦ συμβόλου $\lim\limits_{x\to x_0}$ ἐννοοῦμεν τὸ $\lim\limits_{x\to x_0-0}$. Ἀναλόγως εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ τῶν f καὶ g εἶναι τῆς μορφῆς $[x_0, b)$ διὰ τοῦ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ἐννοοῦμεν τὸ $\lim\limits_{x\to x_0+0}$.

'Εφαρμογαί :

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}=1$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$. Ἔχομεν $(x)'=1$ καὶ $(1-e^{-x})'=0-e^{-x}(-x)'=-e^{-x}(-1)=e^{-x}$, ὁπότε κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα λαμβάνομεν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}=\dfrac{(x)'_{x=0}}{(1-e^{-x})'_{x=0}}=\dfrac{1}{e^{-0}}=\dfrac{1}{1}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\text{συν}x}{x-\pi}=0$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$. Ἔχομεν $(1-\text{συν}x)'=0-(-\text{ημ}x)=\text{ημ}x$ καὶ $(x-\pi)'=1-0=1$, ὁπότε κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα λαμβάνομεν $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\text{συν}x}{x-\pi}=\dfrac{(1-\text{συν}x)'_{x=\pi}}{(x-\pi)'_{x=\pi}}=\dfrac{\text{ημ}\pi}{1}=$ $=\dfrac{0}{1}=0.$

Ἐκτὸς τοῦ θεωρήματος 3.1.1 γνωστοῦ εἰς τὴν βιβλιογραφίαν ὡς κανόνος τοῦ *de l' Hospital* ἰσχύει καὶ τὸ κάτωθι θεώρημα.

3.1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστωσαν* f *καὶ* g *συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν σύνολον τῆς μορφῆς* (a, x_0) *ἢ* (x_0, b) *ἢ* $(a, x_0)\cup(x_0, b)$, *αἱ ὁποῖαι παραγωγίζονται. Τότε, ἂν* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, *ἰσχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο τὸ x_0 δύναται νὰ εἶναι καὶ ἓν τῶν συμβόλων $+\infty$ ἢ $-\infty$, ὁπότε τὸ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ τῶν f καὶ g θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $(a, +\infty)$ ἢ $(-\infty, b)$ ἀντιστοίχως, ἀποκλειομένης φυσικὰ τῆς τρίτης περιπτώσεως.

'Εφαρμογαί :

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^{-x}+x-1}=2$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$. Ἔχομεν $(x^2)'=2x$, $(e^{-x}+x-1)'=e^{-x}(-x)'+1-0=$ $e^{-x}(-1)+1=1-e^{-x}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὁριακὴ τιμὴ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2)'}{(e^{-x}+x-1)'}=$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{1-e^{-x}}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}$ εἶναι ἐπίσης μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$, ἡ ὁποία μάλιστα ὑπελογίσθη εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐφαρμογὴν 1. Ἄρα κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα 3. 1. 2 ἰσχύει

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^{-x}+x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2)'}{(e^{-x}+x-1)'}=2\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{-x}}=2\cdot1=2.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\text{ημ}x}{x^2}=0$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$. Ἔχομεν $(x-\text{ημ}x)'=1-\text{συν}x$, $(x^2)'=2x$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὁριακὴ τιμὴ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-\eta\mu x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2x}$ εἶναι ἐπίσης μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$. Αὕτη, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 3.1.1, ὑπολογίζεται ὅτι εἶναι ἴση μὲ $\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'_{x=0}}{(2x)'_{x=0}} = \dfrac{\eta\mu 0}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$, ἤτοι ἰσχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-\eta\mu x)'}{(x^2)'} = 0$. Ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα 3.1.2 λαμβάνομεν καὶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\eta\mu x}{x^2} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}} = -1$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} \log\dfrac{x-1}{x} = \log\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}\right) = \log 1 = 0$, ὡς ἐπίσης καὶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, δηλαδὴ ἡ ὁριακὴ τιμὴ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}$ εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$ καὶ ἑπομένως, δυνάμει τοῦ θεωρήματος 3.1.2, ἔχομεν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log\frac{x-1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x-1}\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{0-1} = -1.$$

3.2 Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Ὁριακαὶ τιμαὶ τῆς μορφῆς:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

καλοῦνται *ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου* $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Ἀπροσδιορίστους μορφὰς τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀκολούθου θεωρήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ θεώρημα 3.1.2.

3.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστωσαν* f *καὶ* g *συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν σύνολον τῆς μορφῆς* (a, x_0) *ἢ* (x_0, b) *ἢ* $(a, x_0)\cup(x_0, b)$, *αἱ ὁποῖαι παραγωγίζονται. Τότε, ἂν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *ἰσχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται ἐπίσης τὸ x_0 νὰ εἶναι ἓν τῶν συμβόλων $+\infty$ ἢ $-\infty$.

Ἐφαρμογαί :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ

τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ (διατί;). Ἄρα, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος 3.2.1, ἔχομεν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\log x}=-\infty$. Παρατηροῦμεν ὅτι $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\log x}=-\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}$ καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι ἡ ὁριακὴ τιμὴ $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}$ εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ (διατί ;). Ἄρα ἔχομεν

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{(-\log x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

καὶ ἐπομένως

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log x}=-\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}=-(+\infty)=-\infty\ .$$

3.3* Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τῶν τύπων $+\infty-(+\infty)$ καὶ $0\,(+\infty)$.

3.3.1 *Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου* $+\infty-(+\infty)$ εἶναι ὁριακαὶ τιμαὶ τῆς μορφῆς :

$$\lim_{x\to x_0}[\,f(x)-g(x)\,],\quad \text{ὅπου}\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty=\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Αἱ ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου τούτου ἀνάγονται εἰς τοιαύτας τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Πράγματι· ἂν $F=\frac{1}{f}$ καὶ $G=\frac{1}{g}$ τότε παρατηροῦμεν ὅτι

$$\lim_{x\to x_0}\left[\,f(x)-g(x)\,\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{F(x)}-\frac{1}{G(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{G(x)-F(x)}{F(x)G(x)}$$

ὁπότε ἐπειδὴ

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0 \text{ καὶ } \lim_{x\to x_0}=G(x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{1}{+\infty}=0,$$

συνάγομεν ὅτι ἡ ὁριακὴ τιμὴ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{G(x)-F(x)}{F(x)G(x)}$ εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$.

Παράδειγμα : $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x^2)}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$. Πράγματι·

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\log(1+x^2)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\log(1+x^2)}{x^2\log(1+x^2)}$$

. καὶ ἡ τελευταία αὕτη ὁριακὴ τιμὴ εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$ (διατί;). Ἄρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\log(1+x^2)}{x^2\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\log(1+x^2))'}{(x^2\log(1+x^2))'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}x^2}{\frac{2x}{1+x^2}\left(x^2+(1+x^2)\log(1+x^2)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+(1+x^2)\log(1+x^2)}\left(\text{ἀπροσδιόριστος μορφὴ } \frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(x^2+(1+x^2)\log(1+x^2))'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x(2+\log(1+x^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\log(1+x^2)}=$$

$$=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

3.3.2 *Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου* $0(+\infty)$ εἶναι ὁριακαὶ τιμαὶ τῆς μορφῆς :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x), \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x)=0 \text{ καὶ } \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty.$$

Αἱ ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου τούτου ἀνάγονται εἰς τοιαύτας τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$ καὶ ἐνίοτε τοῦ τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ (διατί;).

Παράδειγμα : $\lim_{x\to+0} x\log x=0$. Πράγματι· $\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=$

$-\lim_{x\to+0}\frac{-\log x}{\frac{1}{x}}$, ὅπου ἡ τελευταία ὁριακὴ τιμὴ εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ καὶ ἑπομένως $\lim_{x\to+0}\frac{-\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{(-\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0} x=0.$

Ἄρα καὶ $\lim_{x\to+0} x\log x=-\lim_{x\to+0}\frac{-\log x}{\frac{1}{x}}=-0=0.$

3.4* Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τῶν τύπων 0^0, $(+\infty)^0$ καὶ $1^{+\infty}$.

3.4.1 *Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου* 0^0 εἶναι ὁριακαὶ τιμαὶ τῆς μορφῆς :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x)=0=\lim_{x\to x_0} g(x).$$

3.4.2 *Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου* $(+\infty)^0$ εἶναι ὁριακαὶ τιμαὶ τῆς μορφῆς :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \text{ καὶ } \lim_{x\to x_0} g(x)=0.$$

3.4.3 *Ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ τοῦ τύπου* $1^{+\infty}$ εἶναι ὁριακαὶ τιμαὶ τῆς μορφῆς :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x)=1 \text{ καὶ } \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty.$$

῞Ολαι αἱ ἀνωτέρω ἀπροσδιόριστοι μορφαὶ ἀνάγονται εἰς τὴν τοιαύτην τοῦ τύπου 0 $(+\infty)$. Πράγματι· ὡς γνωστὸν (Πρβλ. τύπον (9), § 3.3 τοῦ Κεφ. VI) ἰσχύει

$$[\,f(x)\,]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

καὶ λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως ἐφαρμόζεται ὁ τύπος

$$\lim_{x\to x_0} [\,f(x)\,]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\log f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log f(x)}$$

καὶ ἑπομένως ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log f(x)$, ἡ ὁποία εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι (ἢ ἀνάγεται εὐκόλως) μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $0(+\infty)$ (διατί;).

Παραδείγματα :

1. $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου 0^0. Ἔχομεν

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\log x} = xe^0 = 1,$$

διότι, ὡς ὑπελογίσθη εἰς τὴν § 3.3.2, $\lim\limits_{x\to+0} x\log x = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $(+\infty)^0$. Ἔχομεν

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1,$$

διότι, ὡς ὑπελογίσθη εἰς τὴν § 3.2, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to+0} (\text{συν}x)^{\frac{1}{x}} = 1$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $1^{+\infty}$. Ἔχομεν

$$\lim_{x\to+0} (\text{συν}x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}\log\text{συν}x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\text{συν}x} = e^0 = 1,$$

διότι

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\text{συν}x = \lim_{x\to+0}\frac{\log\text{συν}x}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log\text{συν}x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\text{συν}x}(\text{συν}x)'}{1} =$$

$$= -\lim_{x\to+0}\text{εφ}x = -\text{εφ}0 = 0.$$

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 Ὑπολογίσατε τὰς (πρώτας) παραγώγους τῶν συναρτήσεων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων :

1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 2) $f(x) = x^2(x+1)^3$ 3) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$

4) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+1}$ 5) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x^4-1}$ 6) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\log x$

7) $f(x)=\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ 8) $f(x)=x^2\,\varepsilon\varphi x+\dfrac{1}{x}$ 9) $f(x)=3\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{x}{x^2+1}$

4.2 Ὁμοίως ὑπολογίσατε τὰς παραγώγους τῶν συναρτήσεων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων :

1) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

3) $f(x)=\sqrt{x^4+3x^2+1}$ 4) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

7) $f(x)=\sigma\upsilon\nu(3x+2)$ 8) $f(x)=\eta\mu(3x+2)$

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 3x}$ 10) $f(x)=\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x-1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}$

11) $f(x)=3\eta\mu^4 x+2\sigma\upsilon\nu^2 x+1$ 12) $f(x)=\sqrt{\varepsilon\varphi^2 x+1}$

13) $f(x)=\dfrac{2\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu(2x+3)}$ 14) $f(x)=\log\eta\mu x+x^x$

15) $f(x)=(x^3+x)^x+\log(x^2+1)$ 16) $f(x)=(\eta\mu x)^{\log x}$

17) $f(x)=x^{x^2+1}+2^{\sqrt{x}}$ 18) $f(x)=\varepsilon\varphi x^x$.

4.3 Εὕρετε τὰ τοπικὰ ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων :

1) $f(x)=\eta\mu(2x+3)$ 2) $f(x)=x^4-2x^2+5$ 3) $f(x)=\eta\mu\,\dfrac{1}{x}$.

4.4 Δείξατε ὅτι μεταξὺ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων μὲ σταθερὰν περίμετρον τὸ τετράγωνον ἔχει τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν.

4.5 Δείξατε ὅτι μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων μὲ σταθερὰν περίμετρον καὶ σταθερὰν βάσιν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν.

4.6 Δείξατε ὅτι μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων μὲ σταθερὰν περίμετρον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν.

4.7 Δείξατε ὅτι

$$f \text{ κυρτὴ ἐν } \Delta \Leftrightarrow -f \text{ κοίλη ἐν } \Delta.$$

4.8 Δείξατε ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς μὲ ἐξίσωσιν $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ (Πρβλ. § 3.3 τοῦ Κεφ. ΙΙΙ) εἶναι καὶ ἀσύμπτωτοι τῶν συναρτήσεων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν τύπων $f_1(x)=\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ καὶ $f_2(x)=-\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$.

4.9 Μελετήσατε καὶ παραστήσατε γεωμετρικῶς τὰς συναρτήσεις τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων :

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3$ 2) $f(x) = x(x^2 - 4)$

3) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 2$ 4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

4.10 Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ἀπροσδιορίστους μορφάς :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\alpha} - 1}{x - 1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x^2 - 1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha x}{\varepsilon\varphi\beta x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta\mu x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \eta\mu x}{x^3}$

4.11 Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ἀπροσδιορίστους μορφάς :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x + \log x}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\log (x - 1)}{x^3 + x - 10}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\log(x^2 - 8)}{x^2 + x - 12}$

4.12 * Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ἀπροσδιορίστους μορφάς :

1) $\lim\limits_{x\to +0} \sqrt{x}\log x$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2} - 0} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\varepsilon\varphi x$ 3) $\lim\limits_{x\to 1+0} \left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

4.13 * Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι ἀπροσδιορίστους μορφάς :

1) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\eta\mu x}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\log x)2^{-x}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. ΑΟΡΙΣΤΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1.1 Παράγουσα καὶ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα. Ἔστωσαν f καὶ F συναρτήσεις μὲ κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ ἓν διάστημα Δ. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις F εἶναι μία *παράγουσα* ἢ ἄλλως *ἓν ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς* f *ἐν* Δ τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ F παραγωγίζεται καὶ ἰσχύῃ

$$F'(x) = f(x) \quad \forall \quad x \in \Delta.$$

Ἂν F εἶναι μία παράγουσα τῆς f ἐν Δ, τότε συμβολίζομεν τοῦτο γράφοντες

$$\int f(x)dx = F(x), \; x \in \Delta$$

(τὸ σύμβολον $\int f(x)dx$ ἀναγιγνώσκεται «ὁλοκλήρωμα $f(x)dx$»).

Ὥστε λοιπὸν

$$\int f(x)dx = F(x), \; x \in \Delta \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} F'(x) = f(x) \quad \forall \quad x \in \Delta.$$

Π.χ. ἡ συνάρτησις συν ἔχει παράγουσα τὴν συνάρτησιν ημ, διότι, ὡς εἶναι ἤδη γνωστόν, $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. Ἄρα $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x$, ὡς ἐπίσης καὶ $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$, ὅπου c σταθερά, διότι καὶ ἡ συνάρτησις ημ + c εἶναι μία παράγουσα τῆς συναρτήσεως συν (διατί ;). Αἱ συναρτήσεις τῆς μορφῆς ημ + c εἶναι καὶ αἱ μόναι παράγουσαι τῆς συναρτήσεως συν, καθ' ὅσον ἰσχύει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα.

1.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἂν* F *καὶ* G *εἶναι δύο παράγουσαι τῆς συναρτήσεως* f *ἐν* Δ, *τότε αὗται διαφέρουν κατὰ μίαν σταθεράν.*

Ἀπόδειξις. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγούσης ἰσχύουν

$$F'(x) = f(x) \quad \forall \quad x \in \Delta \quad \text{καὶ} \quad G'(x) = f(x) \quad \forall \quad x \in \Delta.$$

Ἄρα $F'(x) = G'(x) \; \forall \; x \in \Delta$ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ πόρισμα 2.1.5 τοῦ Κεφ. VII, ἰσχύει $F = G + c$.

Παραδείγματα : Δι' ἐφαρμογῆς τῶν τύπων τῶν παραγώγων συνάγονται εὐκόλως οἱ ἀκόλουθοι τύποι :

1. $\int 0 dx = c$. Πράγματι· τοῦτο ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ $(c)' = 0$, τὸ ὁποῖον ὡς γνωστὸν ἰσχύει.

2. $\int a dx = ax$. Πράγματι· τοῦτο ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν γνωστὸν τύπον $(ax)' = a$.

3. $\int x^\nu dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$ $(\nu = 1,2, \cdots)$. Πράγματι· $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)' = \frac{(x^{\nu+1})'}{\nu+1} = \frac{(\nu+1)\,x^\nu}{\nu+1} = x^\nu$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)' = x^{\nu}$, τὸ ὁποῖον ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ $\int x^{\nu}dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$.

4. $\int \frac{dx}{x^{\nu}} = -\frac{1}{(\nu-1)\,x^{\nu-1}}$ $(\nu = 2,3,\ldots)$. Πράγματι· $\left(-\frac{1}{(\nu-1)x^{\nu-1}}\right)' =$

$$= -\frac{1}{\nu-1}\left(\frac{1}{x^{\nu-1}}\right)' = -\frac{1}{\nu-1}\left(-\frac{(x^{\nu-1})'}{(x^{\nu-1})^2}\right) = \frac{(\nu-1)x^{\nu-2}}{(\nu-1)x^{2(\nu-1)}} = \frac{1}{x^{2(\nu-1)-(\nu-2)}} = \frac{1}{x^{\nu}}.$$

5. $\int \frac{dx}{x} = \log x$ $(x > 0)$. Πράγματι· $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

6. $\int x^{a}dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ $(a \neq -1)$. Πράγματι·

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{(x^{a+1})'}{a+1} = \frac{(a+1)x^{a}}{a+1} = x^{a}.$$

7. $\int$ συν$x\,dx =$ ημx (ἐδείχθη ἤδη ἀνωτέρω).

8. $\int$ ημ$x\,dx = -$ συνx. Πράγματι· $(-$ συν$x)' = -(-$ ημ$x) =$ ημx.

9. $\int \frac{dx}{\text{συν}^2 x} =$ εφx. Πράγματι· $(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$.

10. $\int \frac{dx}{\text{ημ}^2 x} = -$ σφx. Πράγματι· $(-\text{σφ}x)' = -\left(-\frac{1}{\text{ημ}^2 x}\right) = \frac{1}{\text{ημ}^2 x}$.

11. $\int e^{x}dx = e^{x}$. Πράγματι· $(e^{x})' = e^{x}$.

12. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\log a}$ $(a \neq 1)$. Πράγματι· $\left(\frac{a^{x}}{\log a}\right)' = \frac{(a^{x})'}{\log a} = \frac{a^{x}\log a}{\log a} = a^{x}$.

Πίναξ ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων τῶν κυριωτέρων στοιχειωδῶν συναρτήσεων

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^{ν}	$\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$	$\frac{1}{x^{\nu}}$ $(\nu \geqslant 2)$	$-\frac{1}{(\nu-1)\,x^{\nu-1}}$
x^{a} $(a \neq -1)$	$\frac{x^{a}}{a+1}$	$\frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$\log x$
ημx	$-$ συνx	συνx	ημx
$\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$	$-$ σφx	$\frac{1}{\text{συν}^2 x}$	εφx
e^{x}	e^{x}	a^{x}	$\frac{a^{x}}{\log a}$

1.2 Γενικοὶ τύποι ὁλοκληρώσεως. Αἱ εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θεωρούμεναι συναρτήσεις ὑποτίθεται, ὅπου χρειάζεται, ὅτι ἔχουν παράγωγον.

1.2.1 $\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Πράγματι· κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος, ἔχομεν

$$(\int[f(x)+g(x)]dx)' = f(x)+g(x) = (\int f(x)dx)' + (\int g(x)dx)',$$

τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω τύπον.

Παράδειγμα :

$$\int(x+e^x)dx = \int xdx + \int e^x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + e^x = \frac{x^2}{2} + e^x.$$

1.2.2 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

Πράγματι· $(\int af(x)dx)' = af(x) = a(\int f(x)dx)' = (a\int f(x)dx)'.$

Παραδείγματα :

1. $\int ax^\nu dx = a\int x^\nu dx = a\,\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1} = \dfrac{a}{\nu+1}\,x^{\nu+1}.$

2. (εἰς συνδιασμὸν μετὰ τοῦ τύπου 1.2.1) $\int(a_0 + a_1x + .. + a_\kappa x^\kappa)dx =$
$= \int a_0 dx + \int a_1 x dx + \ldots + \int a_\kappa x^\kappa dx = a_0 x + \dfrac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{a_\kappa}{\kappa+1}x^{\kappa+1}.$

1.2.3 *Ὁ τύπος τῆς κατὰ παράγοντας ὁλοκληρώσεως :*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Πράγματι· $(\int(x)g'(x)dx)' = f(x)g'(x) = [\,f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\,]$
$- f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - (\int f'(x)g(x)dx)'.$

Εἰδικῶς διὰ $g(x) = x$ ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον τύπον

1.2.3' $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$

Παραδείγματα :

1. $\int \log x dx = x\log x - \int x(\log x)'dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - \int dx = x\log x - x =$
$= x(\log x - 1).$

2. $\int x\log x dx = \displaystyle\int \frac{x^2}{2}\log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int\frac{x^2}{2}(\log x)'dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$
$= \dfrac{x^2}{2}\log x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int xdx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}(2\log x - 1) = \frac{x^2}{4}(\log x^2 - 1)$, ἤτοι

$$\int x\log x dx = \frac{x^2}{4}(\log x^2 - 1).$$

3. $\int e^x ημx dx = \int(e^x)'ημx dx = e^x ημx - \int e^x(ημx)'dx = e^x ημx - \int e^x συνx dx =$
$= e^x ημx - \int(e^x)'συνx dx = e^x ημx - [\,e^x συνx - \int e^x(συνx)'dx\,] = e^x ημx - e^x συνx +$
$+ \int e^x(-ημx)dx = e^x(ημx - συνx) - \int e^x ημx dx.$ Ὥστε ἐδείχθη ὅτι

$$\int e^x ημx dx = e^x(ημx - συνx) - \int e^x ημx dx,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὐκόλως συνάγεται ὅτι

$$\int e^x ημx dx = e^x\,\frac{ημx - συνx}{2}$$

1.2.4 *Ὁ τύπος τῆς ὁλοκληρώσεως δι' ἀντικαταστάσεως :*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = [\,\int f(y)dy\,]_{y=g(x)},$$

ὅπου εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τοῦ τύπου ἐννοοῦμεν ὅτι μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $\int f(y)dy$ ὀφείλομεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ y μὲ τὸ g(x).

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ τύπου τούτου θέτομεν $F(y) = \int f(y)dy$ (ἄρα $F'(y) = f(y)$), ὁπότε ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι

$$F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)dx$$

Τοῦτο πράγματι ἰσχύει, διότι κατὰ τὸ θεώρημα 1.7.1 τοῦ Κεφ. VII περὶ παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Παραδείγματα:

1. $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} \int \sigma\upsilon\nu(\alpha x + \beta) \cdot \alpha dx = \frac{1}{\alpha} \int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta) \cdot (\alpha x+\beta)'dx =$

$= \frac{1}{\alpha}[\int \sigma\upsilon\nu y dy]_{y=\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}[\eta\mu y]_{y=\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x + \beta)$, $(\alpha \neq 0)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \log|x|$. Ὡς γνωστὸν ἰσχύει $\int \frac{dx}{x} = \log x$, $x \in (0, +\infty)$. Διὰ $x \in (-\infty, 0)$, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{-x}(-1)dx = \int \frac{1}{-x}(-x)'dx = \left[\int \frac{1}{y}dy\right]_{y=-x} = [\log y]_{y=-x} =$$

$= \log(-x)$, $x \in (-\infty, 0)$.

Οἱ δύο τύποι ὁλοκληρώσεως

$$\int \frac{dx}{x} = \log x, \ x \in (0, +\infty) \ \text{καὶ} \ \int \frac{dx}{x} = \log(-x), \ x \in (-\infty, 0)$$

ἑνοποιοῦνται εἰς τὸν $\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ (διατί;).

3. $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(2x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{y}dy\right]_{y=1+x^2} = \frac{1}{2}[\log|y|]_{y=1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \log\sqrt{1+x^2}$.

4. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος τούτου θέτομεν

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{x-2}$$

καὶ ὑπολογίζομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ α, β, γ ὡς ἑξῆς:

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης ἐπὶ $(x-1)^2(x-2)$ λαμβάνομεν

$$1 = \alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-2) + \gamma(x-1)^2$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις

$$1 = (\alpha+\gamma)x^2 + (-3\alpha+\beta-2\gamma)x + (2\alpha-2\beta+\gamma)$$

καὶ τοῦτο διὰ κάθε $x \in R$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι

$$(\alpha+\gamma = 0, \ -3\alpha+\beta-2\gamma = 0, \ 2\alpha-2\beta+\gamma = 1).$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $(\alpha = -1, \ \beta = -1, \ \gamma = 1)$ (διατί;) καὶ ἑπομένως ἰσχύει

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Ἄρα

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = -\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2}.$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{1}{x-1}(x-1)'\,dx = \left[\int \frac{dy}{y}\right]_{y=x-1} = \left[\log|y|\right]_{y=x-1} = \log|x-1|$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{1}{(x-1)^2}(x-1)'\,dx = \left[\int \frac{dy}{y^2}\right]_{y=x-1} = \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=x-1} = -\frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{1}{x-2}(x-2)'\,dx = \left[\int \frac{dy}{y}\right]_{y=x-2} = \left[\log|y|\right]_{y=x-2} = \log|x-2|.$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = -\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \log|x-2| = \frac{1}{x-1} + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος ἰσχύει εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων $(-\infty, 1)$, $(1,2)$ καὶ $(2, +\infty)$.

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \int \frac{1}{\sqrt{x+2}}(x+2)'dx = \left[\int \frac{dy}{\sqrt{y}}\right]_{y=x+2} = \left[\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy\right]_{y=x+2} =$$

$$= \left|\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_{y=x+2} = \left[2\sqrt{y}\right]_{y=x+2} = 2\sqrt{x+2}.$$

6. $$\int \text{εφ}x\,dx = \int \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\,dx = -\int \frac{1}{\text{συν}x}(\text{συν}x)'dx = -\left[\int \frac{dy}{y}\right]_{y=\text{συν}x} =$$

$$= -\left[\log|y|\right]_{y=\text{συν}x} = -\log|\text{συν}x|.$$

7. $\int e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}(-1)dx = -\int e^{-x}(-x)'dx = -\left[\int e^y dy\right]_{y=-x} = -\left[e^y\right]_{y=-x} = -e^{-x}$

8*. $\int e^{-x}x^\nu dx = \nu!\,e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}\right)$ $(\nu = 0,1,2,\ldots)$. Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ὑπολογίζομεν τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναγωγικῆς μεθόδου, ὡς ἑξῆς :

Διὰ $\kappa > 0$ ἔχομεν :

$$I_\kappa(x) = \int e^{-x}x^\kappa dx = -\int x^\kappa(e^{-x})'dx = -x^\kappa e^{-x} + \int e^{-x}(x^\kappa)'dx = -x^\kappa e^{-x} + \kappa\int e^{-x}x^{\kappa-1}\,dx =$$
$$= -x^\kappa e^{-x} + \kappa I_{\kappa-1}(x),$$

ἤτοι

$$I_\kappa(x) = -x^\kappa e^{-x} + \kappa I_{\kappa-1}(x),$$

ὁπότε διὰ $\kappa = 1,2,\ldots,\nu$ λαμβάνομεν :

(σ_1)	$I_1(x) = -xe^{-x} + I_0(x)$	$\frac{1}{1!}$
(σ_2)	$I_2(x) = -x^2e^{-x} + 2I_1(x)$	$\frac{1}{2!}$
(σ_3)	$I_3(x) = -x^3e^{-x} + 3I_2(x)$	$\frac{1}{3!}$
$\vdots$	. . . .	$\vdots$
(σ_κ)	$I_\kappa(x) = -x^\kappa e^{-x} + \kappa I_{\kappa-1}(x)$	$\frac{1}{\kappa!}$
$\vdots$	. . . .	$\vdots$
(σ_ν)	$I_\nu(x) = -x^\nu e^{-x} + \nu I_{\nu-1}(x)$	$\frac{1}{\nu!}$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἐπὶ τὸν δεξιὰ ἑκάστης ἀναγεγραμμένον ἀριθμὸν $\left(\text{π.χ. τῆς σχέσεως } (\sigma_\kappa) \text{ ἐπὶ τὸν } \frac{1}{\kappa!}\right)$ καὶ κατόπιν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη αὐτῶν προκύπτει (ἀφοῦ γίνουν αἱ κατάλληλοι ἁπλοποιήσεις) ὅτι

$$\frac{1}{\nu!} I_\nu(x) = I_0(x) - \frac{x}{1!} e^{-x} - \frac{x^2}{2!} e^{-x} - \ldots - \frac{x^\nu}{\nu!} e^{-x}$$

καὶ ἐπειδή, ὡς ἤδη ὑπελογίσθη εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, $I_0(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$, θὰ ἔχωμεν

$$I_\nu(x) = \int e^{-x} x^\nu dx = -\nu!\, e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!}\right).$$

1.3 Ἀσκήσεις.

1.3.1 Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἀόριστα ὁλοκληρώματα :

1) $\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$ 2) $\int \frac{x^2 - x + 4}{(x^2-1)(x+2)} dx$ 3) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{(x-1)(x+3)} dx.$

1.3.2 Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἀόριστα ὁλοκληρώματα :

1) $\int \sqrt{2x+3}\, dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ 3) $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx.$

1.3.3 Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἀόριστα ὁλοκληρώματα :

1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$ 2) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}} dx$ 3) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}\, dx$

1.3.4 Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἀόριστα ὁλοκληρώματα :

1) $\int \sigma\varphi x dx$ 2) $\int e^{-5x}dx$ 3) $\int x e^{-5x}dx$

4) $\int e^x \sigma\upsilon\nu x dx$ 5) $\int \eta\mu^2 x dx$ 6) $\int \varepsilon\varphi^2 x dx$

1.3.5 Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἀόριστα ὁλοκληρώματα :

1) $\int \eta\mu\kappa x\, \eta\mu\nu x dx$ 2) $\int \eta\mu\kappa x\, \sigma\upsilon\nu\nu x dx$ 3) $\int \sigma\upsilon\nu\kappa x\, \sigma\upsilon\nu\nu x dx,$

ὅπου κ, ν φυσικοὶ ἀριθμοί.

(Χρησιμοποιήσατε ἀντιστοίχως τοὺς τύπους :

$$\eta\mu\kappa x\, \eta\mu\nu x = \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\kappa-\nu)x - \sigma\upsilon\nu(\kappa+\nu)x],$$

$$\eta\mu\kappa x\, \sigma\upsilon\nu\nu x = \frac{1}{2}[\eta\mu(\kappa+\nu)x + \eta\mu(\kappa-\nu)x],$$

$$\sigma\upsilon\nu\kappa x\, \sigma\upsilon\nu\nu x = \frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(\kappa+\nu)x + \sigma\upsilon\nu(\kappa-\nu)x]).$$

1.3.6* Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἀόριστα ὁλοκληρώματα :

1) $\int (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)\sqrt{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}\, dx$ 2) $\int \frac{\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} dx$ 3) $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{(x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2} dx$

4) $\int \frac{x\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2} dx$ 5) $\int \left(\frac{x}{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}\right)^2 dx$

1.3.7 Εὕρετε ἀναγωγικοὺς τύπους διὰ τὰ ὁλοκληρώματα :

1) $\int \eta\mu^\nu x dx$ 2) $\int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$ (ν φυσικὸς ἀριθμός)

Τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων τούτων ὑπολογίσατε τὰ ὁλοκληρώματα $\int ημ^4 x dx$ καὶ $\int συν^4 x dx$.

1.3.8 * Εὕρετε ἀναγωγικὸν τύπον διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int \log^\nu x dx$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ καὶ τῇ βοηθείᾳ τούτου ὑπολογίσατε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int \log^3 x dx$.

2. ΩΡΙΣΜΕΝΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

2.1 Ὁρισμὸς καὶ ἰδιότητες. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν f ὡρισμένην εἰς ἕν διάστημα Δ, ἡ ὁποία ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι συνεχὴς καὶ ἔχει παράγουσα ἐν Δ (1). Ἄν α, β εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ Δ, τότε ἡ διαφορὰ

$$F(\beta) - F(\alpha),$$

ὅπου F εἶναι μία παράγουσα τῆς f, εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τῆς παραγούσης F. Πράγματι· κατὰ τὸ θεώρημα 1.1.1, τυχοῦσα παράγουσα G τῆς f διαφέρει τῆς F κατὰ μίαν σταθεράν, ἤτοι $G = F + c$ καὶ ἑπομένως

$$G(\beta) - G(\alpha) = (F(\beta) + c) - (F(\alpha) + c) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Τὴν διαφορὰν $F(\beta) - F(\alpha)$ καλοῦμεν *ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τῆς* f *ἀπὸ* α *ἕως* β καὶ παριστῶμεν τοῦτο μὲ $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, ἤτοι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

(τὸ σύμβολον $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ἀναγιγνώσκεται «ὁλοκλήρωμα f(x)dx ἀπὸ α ἕως β»).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος συνάγονται ἀμέσως τὰ ἑξῆς :

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$$

καὶ

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Τὴν διαφορὰν $F(\beta) - F(\alpha)$ παριστῶμεν συνήθως καὶ μὲ $[\,F(x)\,]_\alpha^\beta$, ἤτοι $[\,F(x)\,]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$. Κατὰ ταῦτα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = [F(x)]_\alpha^\beta = [\,\int f(x)dx\,]_\alpha^\beta.$$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ἐξαρτᾶται τόσον ἀπὸ τὴν συνάρτησιν f ὅσον καὶ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς α, β, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται *ἄκρα ὁλοκληρώσεως*. Ἀντιθέτως τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν x, δηλαδὴ τοῦτο δὲν ἀλλάσσει ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν μεταβλητὴν x ὑπὸ μιᾶς ἄλλης, ἤτοι ἰσχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

---

(1) Ἀποδεικνύεται εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν ὅτι ἡ συνέχεια τῆς f συνεπάγεται τὴν ὕπαρξιν παραγούσης αὐτῆς.

Παραδείγματα :

1. $\int_{\alpha}^{\beta} a dx = a(\beta - \alpha)$.

Πράγματι· $\int_{\alpha}^{\beta} a dx = [\int a dx]_{\alpha}^{\beta} = [ax]_{\alpha}^{\beta} = a\beta - a\alpha = a(\beta - \alpha)$.

2. $\int_{0}^{1} x dx = \frac{1}{2}$.

Πράγματι· $\int_{0}^{1} x dx = [\int x dx]_{0}^{1} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$.

3. $\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Πράγματι· $\int_{0}^{1} x^2 dx = [\int x^2 dx]_{0}^{1} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

4. $\int_{0}^{\pi/2} \eta\mu x dx = 1$.

Πράγματι· $\int_{0}^{\pi/2} \eta\mu x dx = [\int \eta\mu x dx]_{0}^{\pi/2} = [-\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{\pi/2} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu 0 = -0 + 1 = 1$.

5. $\int_{1}^{2} \log x dx = \log 4 - 1$.

Πράγματι· δυνάμει τοῦ ἐν 1.2.3 παραδείγματος 1, ἔχομεν

$$\int_{1}^{2} \log x dx = [x(\log x - 1)]_{1}^{2} = 2(\log 2 - 1) - 1(\log 1 - 1) = 2\log 2 - 2 + 1 = \log 4 - 1.$$

6. $\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx = \log\sqrt{2}$.

Πράγματι· δυνάμει τοῦ ἐν 1.2.4 παραδείγματος 3, ἔχομεν

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\int \frac{x}{1+x^2} dx\right]_{0}^{1} = \left[\log\sqrt{1+x^2}\right]_{0}^{1} = \log\sqrt{1+1^2} - \log\sqrt{1+0^2} =$$
$$= \log\sqrt{2}.$$

2.1.1 *Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος συνάγονται εὐκόλως (ἀπόδειξις;) οἱ κάτωθι τύποι :*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a f(x) dx = a \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

2.1.2 *Ἂν α, β, γ εἶναι σημεῖα τοῦ διαστήματος Δ, τότε ἰσχύει ὁ τύπος*

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Πράγματι ἂν F εἶναι μία παράγουσα τῆς f, τότε προφανῶς ἔχομεν

$$[F(\gamma) - F(\alpha)] + [F(\beta) - F(\gamma)] = F(\beta) - F(\alpha),$$

δηλαδὴ τὸν ἀνωτέρω τύπον.

2.1.3 *Ἰσχύει ὁ τύπος (γνωστὸς ὡς τύπος τῆς μέσης τιμῆς)*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(x_0)(\beta-\alpha),$$

ὅπου x_0 *ἓν κατάλληλον σημεῖον τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος* (α, β).

Πράγματι· ἂν F εἶναι μία παράγουσα τῆς f (ἤτοι $F'(x) = f(x)\ \forall\ x\in\Delta$), τότε, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ (θεώρημα 2.1.3 τοῦ Κεφ. VII), ὑπάρχει $x_0\in(\alpha, \beta)$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ

$$F(\beta) - F(\alpha) = F'(x_0)(\beta-\alpha) = f(x_0)(\beta-\alpha),$$

δηλαδὴ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(x_0)(\beta-\alpha).$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου τῆς μέσης τιμῆς συνάγονται (ἀπόδειξις;) τὰ κάτωθι :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha<\beta\\ f(x)\geqslant 0\ \forall\ x\in[\alpha,\beta]\end{array}\right\}\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx\geqslant 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha<\beta\\ f(x)\geqslant g(x)\ \forall\ x\in[\alpha,\beta]\end{array}\right\}\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx\ \geqslant\ \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

2.1.4 *Ἰσχύει ἐπίσης καὶ ὁ τύπος*

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(y)dy.$$

Πράγματι· ἂν F εἶναι μία παράγουσα τῆς f, τότε, κατὰ τὸν ἐν 1.2.4 τύπον τῆς δι' ἀντικαταστάσεως ὁλοκληρώσεως, λαμβάνομεν

$$\int_\alpha^\beta f(g(x)g'(x)dx = \Big[\int f(g(x))g'(x)dx\Big]_\alpha^\beta = \Big[\,[f(y)dy\,]_{y=g(x)}\Big]_\alpha^\beta =$$

$$=\Big[\,[F(y)]_{y=g(x)}\Big]_\alpha^\beta = [\,F(g(x))\,]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(y)dy.$$

Ἐφαρμογή: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx.$

Πράγματι· $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\eta\mu^2 x}\,(\eta\mu x)'dx =$

$$= \int_{\eta\mu(-\frac{\pi}{2})}^{\eta\mu\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Δυνάμεθα τώρα, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τούτου, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ ὡς ἑξῆς :

Ὑπολογίζομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int \sigma\upsilon\nu 2x\,(2x)'dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\Big[\int \sigma\upsilon\nu y dy\Big]_{y=2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\Big[\eta\mu y\Big]_{y=2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x =$$

$$= \frac{1}{4}(2x + \eta\mu 2x),$$

ἤτοι

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{1}{4}(2x + \eta\mu 2x).$$

Ἐν συνεχείᾳ, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω ἀποδειχθέντος τύπου, λαμβάνομεν ὅτι

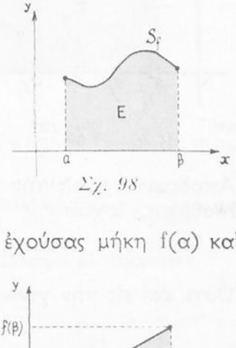
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^2 x dx = \Big[\frac{1}{4}(2x+\eta\mu 2x)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{4}(\pi + \eta\mu\pi) - \frac{1}{4}(-\pi + \eta\mu(-\pi)) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{2},$$

ἤτοι ὑπελογίσθη ὅτι

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

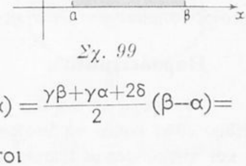
2.2 Τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα ὡς ἐμβαδόν. Ἔστω f μία συνάρτησις ὡρισμένη καὶ συνεχὴς εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $[\alpha, \beta]$ μὲ $f(x) \geqslant 0 \ \forall\, x \in [\alpha, \beta]$. Ἔστω ἐπὶ πλέον Ε τὸ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τῆς f, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν εὐθειῶν μὲ ἐξισώσεις $x = \alpha$ καὶ $x = \beta$ (βλ. Σχ. 98), ἤτοι
$E =$ διάγραμμα $\{(x, y) \colon \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.



Σχ. 98

Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ f εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις δηλαδὴ $f(x) = \gamma x + \delta$. Τότε τὸ χωρίον Ε εἶναι ἓν τραπέζιον (βλ. Σχ. 99) μὲ βάσεις (παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y) ἐχούσας μήκη $f(\alpha)$ καὶ $f(\beta)$ καὶ μὲ ὕψος ἔχον μῆκος $\beta - \alpha$. Οὕτως ἡ τιμὴ (Ε) τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου Ε εἶναι

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha).$$



Σχ. 99

Ἐξ ἄλλου τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}(\gamma x + \delta)dx = \Big[\frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta x\Big]_{\alpha}^{\beta} =$$

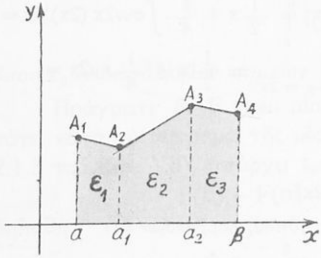
$$= \frac{1}{2}\gamma\beta^2 + \delta\beta - \Big(\frac{1}{2}\gamma\alpha^2 + \delta\alpha\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma(\beta^2 - \alpha^2) + \delta(\beta - \alpha) = \Big(\frac{1}{2}\gamma(\beta+\alpha) + \delta\Big)(\beta - \alpha) = \frac{\gamma\beta + \gamma\alpha + 2\delta}{2}(\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{(\gamma\alpha + \delta) + (\gamma\beta + \delta)}{2}(\beta - \alpha) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha), \text{ ἤτοι}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (E).$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει γενικώτερον καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ f εἶναι μία *πολυγωνικὴ συνάρτησις*, δηλαδὴ μία συνάρτησις τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα εἶναι μία πολυγωνικὴ γραμμὴ π.χ. ἡ $A_1 A_2 A_3 A_4$ τοῦ Σχ. 100. Ἔχομεν τότε



Σχ. 100

$$(E) = (\varepsilon_1) + (\varepsilon_2) + (\varepsilon_3)$$

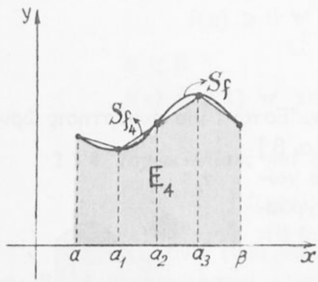
$$\int_\alpha^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\beta} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

ἤτοι πάλιν

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (E).$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει δι' οἱονδήποτε πλῆθος πλευρῶν τῆς ὑπ' ὄψιν πολυγωνικῆς γραμμῆς.

Ἂς ἐπανέλθωμεν τώρα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς τυχούσης συναρτήσεως f. Διὰ διαμερίσεως τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[\alpha, \beta]$ εἰς ν ἴσα μέρη ὁρίζεται μία πολυγωνικὴ συνάρτησις f_ν προσεγγίζουσα τὴν f ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ Σχ. 101 διὰ $\nu = 4$. Ἂν καλέσωμεν E_ν τὸ ἀντίστοιχον χωρίον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ f_ν (δηλαδὴ $E_\nu =$ διάγραμμα $\{(x,y): \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ 0 \leqslant y \leqslant f_\nu(x)\}$), τότε καλοῦμεν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου E τὸ $\lim (E_\nu)$ (ἄν, βεβαίως, τοῦτο ὑπάρχῃ καὶ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός), ἤτοι



Σχ. 101

$$(E) = \lim (E_\nu) = \lim \int_\alpha^\beta f_\nu(x)dx.$$

Ἀποδεικνύεται εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν ὅτι, ὑπὸ τὰς τεθείσας ἀνωτέρω ὑποθέσεις, ἰσχύει

$$\lim \int_\alpha^\beta f_\nu(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Ὥστε καὶ εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ἰσχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (E).$$

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος στηρίζεται εἰς τὴν ἰδέα τῆς προσεγγίσεως τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ ὁποῖον περικλείει μία καμπύλη, ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ ὁποῖον περικλείει μία ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὴν πολυγωνικὴ γραμμή. Ἡ ἰδέα αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, ὁ ὁποῖος ἐφήρμοσεν ταύτην εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ χωρίου.

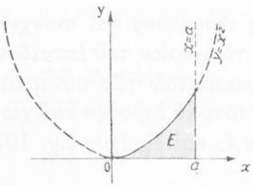
Παραδείγματα :

1. $f(x) = x^2$, $x \in [0, \alpha]$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἀντίστοιχον χωρίον E τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ διαγράμματος τῆς f, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς εὐθείας μὲ ἐξίσωσιν $x = \alpha$ (βλ. Σχ. 102). Ἔχομεν :

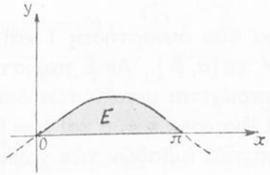
$$(E) = \int_0^\alpha x^2 dx = \left[\int x^2 dx \right]_0^\alpha = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{\alpha^3}{3}.$$

2. $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0,\pi]$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἀντίστοιχον χωρίον E τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης καὶ τοῦ διαστήματος $[0,\pi]$ (βλ. Σχ. 103). Ἔχομεν

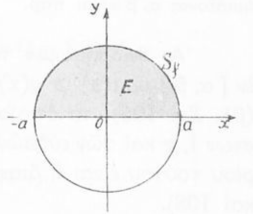
$$(E) = \int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = -(-1)+1 = 2.$$



Σχ. 102



Σχ. 103



Σχ. 104

3. *Ἐμβαδὸν ἐσωτερικοῦ κύκλου ἀκτῖνος α.* Ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἐπίπεδον χωρίον E τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ διαγράμματος τῆς f μὲ $f(x) = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (βλ. Σχ. 104). Ἔχομεν

$$(E) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\, dx = \alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \left(\frac{x}{\alpha}\right)' dx =$$

$$= \alpha^2 \int_{-\frac{\alpha}{\alpha}}^{\frac{\alpha}{\alpha}} \sqrt{1 - y^2}\, dy = \alpha^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

καὶ ἐπειδή, ὡς ὑπελογίσθη ἐν 2.1.4 (ἐφαρμογή), $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$, θὰ ἔχωμεν $(E) = \frac{\pi\alpha^2}{2}$.

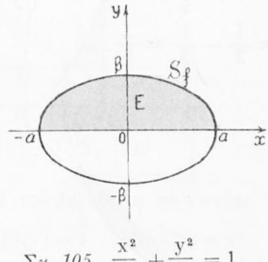
Ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου ἀκτῖνος α θὰ εἶναι $2(E) = 2\,\frac{\pi\alpha^2}{2} = \pi\alpha^2$.

4. *Ἐμβαδὸν ἐσωτερικοῦ ἐλλείψεως.* Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἔλλειψιν μὲ ἐξίσωσιν $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, δηλαδὴ τὴν ἔλλειψιν μὲ κέντρον 0 καὶ ἡμιάξονας α, β. Ἔστω δὲ E τὸ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ διαγράμματος τῆς f μὲ $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (βλ. Σχ. 105). Ἔχομεν τότε

$$(E) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \beta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\, dx =$$

$$= \alpha\beta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \left(\frac{x}{\alpha}\right)' dx = \alpha\beta \int_{-\alpha/\alpha}^{\alpha/\alpha} \sqrt{1 - y^2}\, dy =$$

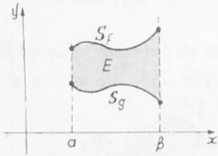
$$\alpha\beta \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$



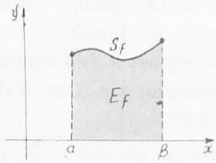
Σχ. 105 $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

καὶ ἐπειδή, ὡς ὑπελογίσθη ἐν 1.2.4 (ἐφαρμογή), $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$, θὰ ἔχωμεν $(E) = \frac{\pi\alpha\beta}{2}$. Ἑπομένως ἡ τιμή, τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἐλλείψεως μὲ κέντρον 0 καὶ ἡμιάξονας α, β εἶναι παβ.

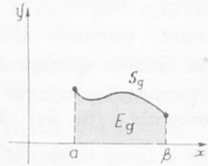
Ἂς θεωρήσωμεν τώρα δύο συναρτήσεις f καὶ g ὡρισμένας καὶ συνεχεῖς ἐν $[\alpha, \beta]$ μὲ $f(x) \geqslant g(x)\ \forall\ x \in [\alpha, \beta]$. Ἂν E παριστᾶ τὸ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 106), τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν διαγραμμάτων τῶν συναρτήσεων f, g καὶ τῶν εὐθειῶν μὲ ἐξισώσεις $x = \alpha$ καὶ $x = \beta$, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τούτου εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν χωρίων E_f καὶ E_g (βλ. Σχ. 107 καὶ 108).



Σχ. 106



Σχ. 107



Σχ. 108

Ὥστε ἔχομεν

$$(E) = (E_f) - (E_g) = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx,$$

ἤτοι

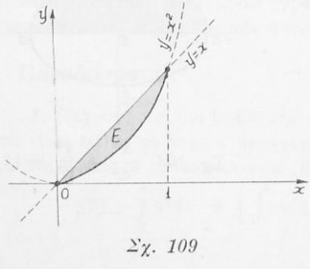
$$(E) = \int_\alpha^\beta [\, f(x) - g(x)\,]\, dx.$$

Παραδείγματα :

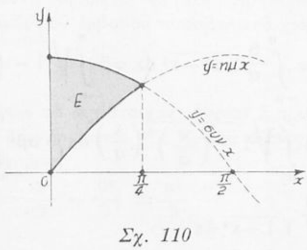
1. $f(x) = x$ *καὶ* $g(x) = x^2$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου E τοῦ ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 109) εἶναι

$$(E) = \int_0^1 (x - x^2)dx = \Big[\int (x - x^2)dx \Big]_0^1 = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \Big(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \Big) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$



Σχ. 109



Σχ. 110

2. $f(x) = συνx$ *καὶ* $g(x) = ημx$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς συνημιτονοειδοῦς καμπύλης, τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν y (βλ. Σχ. 110) εἶναι

$$(E) = \int_0^{\pi/4} (συνx - ημx)dx = \left[\int (συνx - ημx)dx \right]_0^{\pi/4} = \left[ημx + συνx \right]_0^{\pi/4} =$$

$$= ημ\frac{\pi}{4} + συν\frac{\pi}{4} - (ημ0 + συν0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0+1) = \sqrt{2} - 1,$$

ἤτοι

$$(E) = \sqrt{2} - 1.$$

2.3 Ἀσκήσεις

2.3.1 Δείξατε ὅτι :

1) $\int_{-\pi}^{\pi} ημκx\, ημνx dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} συνκx\, συννx dx$ (κ,ν φυσικοί, $κ \neq ν$)

2) $\int_{-\pi}^{\pi} ημκx\, συννx dx = 0$ (κ, ν φυσικοί)

3) $\int_{-\pi}^{\pi} ημ^2κx dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} συν^2κx dx$ (κ φυσικός)

2.3.2 Δείξατε ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύουν :

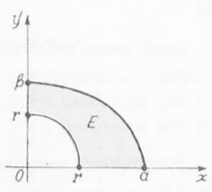
1) $\int_0^{\pi/2} ημ^{2ν}x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2ν-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2ν)} \cdot \frac{\pi}{2}$ 2) $\int_0^{\pi/2} ημ^{2ν+1}x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2ν)}{3 \cdot 5 \cdots (2ν+1)}$.

2.3.3 Ὑπολογίσατε τὰ ὡρισμένα ὁλοκληρώματα :

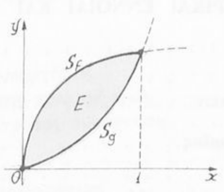
1) $\int_0^{\pi/2} συν^{2ν}x dx$ 2) $\int_0^{\pi/2} συν^{2ν+1}x dx$,

ὅπου ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός.

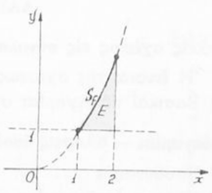
2.3.4 Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς ἐλλείψεως μὲ ἐξίσωσιν $\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = 1$, τοῦ κύκλου κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος r ($r \leqslant α$ καὶ $r \leqslant β$) καὶ τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων (βλ. Σχ. 111).



Σχ. 111



Σχ. 112



Σχ. 113

2.3.5 Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν διαγραμμάτων τῶν συναρτήσεων f καὶ g μὲ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ καὶ $g(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (βλ. Σχ. 112).

2.3.6 Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ διαγράμματος τῆς f μὲ $f(x) = x^{3/2}$ καὶ τῶν εὐθειῶν μὲ ἐξισώσεις $y = 1$, $x = 2$ (βλ. Σχ. 113).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΠΕΡΙ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΔΟΜΑΙ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΣΥΓΚΛΙΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς 23 Εἰς τὴν παρατήρησιν:

Ἀντί: Μία μεταβατικὴ σχέσις εἰς τὸ σύνολον Ε καλεῖται καὶ γνησία διάταξις εἰς τὸ Ε.

Γράφε: Μία μεταβατικὴ σχέσις $\prec^*$ εἰς τὸ σύνολον Ε καλεῖται γνησία διάταξις εἰς τὸ Ε τότε καὶ μόνον τότε, ἂν $x \prec^* y \Rightarrow x \neq y$.

» 24 Εἰς τὸ παράδειγμα 1:

Ἀντί: Εἰς τὸ σύνολον Ε ὅλων τῶν κύκλων...

Γράφε: Εἰς ἓν σύνολον Ε ὁμοκέντρων κύκλων ἑνὸς ἐπιπέδου...

» 46 7ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀντί: $\mathbf{E}_\pi$

Γράφε: $\mathscr{F}_\pi$

» 51 11ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω:

Ἀντί: ..πεδίον ὁρισμοῦ $\mathscr{R}(f)$...

Γράφε: ...πεδίον τιμῶν $\mathscr{R}(f)$...

» 53 5ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀντί: a) $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} g(x_1) < g(x_2)$....

Γράφε: a) $x_1 < x_2 \overset{g\uparrow}{\Longrightarrow} g(x_1) < g(x_2)$...

Τελευταῖος στίχος:

Ἀντί: $x_1 > x_2$...

Γράφε: $x_1 < x_2$...

» 55 Εἰς τὸ σχῆμα 33:

Ἀντί: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} - 0$ Γράφε: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$

» 57 τελευταῖος στίχος:

Ἀντί: $\varphi^{-1} = \sqrt[3]{x}$ Γράφε: $y = \sqrt[3]{x}$

» 63 6ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀντί: $\ldots < \sqrt{\alpha^2 - x_2} \Rightarrow$ Γράφε: $\ldots < \sqrt{\alpha^2 - x_2^2} \Rightarrow$

» 73 4ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀντί: $(-1)^\nu \frac{1}{3}$ Γράφε: $(-1)^\nu \frac{1}{\nu}$

» 76 3ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω

Ἀντί: $\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ Γράφε: $\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$

» 91 11ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω:

Ἀντί: $\lim f(x) = l$ Γράφε: $\lim f(x_\nu) = l$

» 107 14ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω:

Ἀντί: $\ldots \longrightarrow f(x_0) + g(x_0)$

Γράφε: $\ldots \longrightarrow f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$

» 113 Εἰς τὸν τύπον (5):

Ἀντί: $\Psi\nu$

Γράφε: r_ν

» 117 12ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω:

Ἀ ν τ ί! $\lim_{x\to x_0} g(x)$

Γ ρ ά φ ε: $\lim_{x\to x_0} g_{x_0}(x)$

» 127 9ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω:

Ἀ ν τ ί: $g(x_{k_0})$

Γ ρ ά φ ε: $g(x_0)$

» 131 13ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀ ν τ ί: $f'(x) \geqq f(x_0) = 0$

Γ ρ ά φ ε: $f'(x) \geqq f'(x_0) = 0$

12ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀ ν τ ί: $f(x) \leqq f(x_0]$

Γ ρ ά φ ε: $f(x) \leqq f(x_0)$

» 135 4ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω:

Ἀ ν τ ί: $f''(x) < 0$

Γ ρ ά φ ε: $f''(x) > 0$

» 141 Ἡ εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος ἐφαρμογὴ νὰ γραφῇ οὕτω:

2. $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi} = 0$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι μία ἀπροσδιόριστος μορφὴ τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Ἔχομεν $(1+\sigma\upsilon\nu x)' = 0 + (-\eta\mu x) = -\eta\mu x$ καὶ $(x-\pi)' = 1-0=1$, ὁπότε κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα λαμβάνομεν $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi} = \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'_{x=\pi}}{(x-\pi)'_{x=\pi}}$

$= \frac{-\eta\mu\pi}{1} = \frac{-0}{1} = 0.$

» 150 15ος στίχος ἐκ τῶν ἄνω:

Ἀ ν τ ί: $\left(\int (x)g'(x)dx\right)' = \ldots$

Γ ρ ά φ ε: $\left(\int f(x)g'(x)dx\right)' = \ldots$

13ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀ ν τ ί: $\int \frac{x^2}{2} \log x dx$

Γ ρ ά φ ε: $\int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx$

» 156 7ος στίχος ἐκ τῶν κάτω:

Ἀ ν τ ί: $\ldots\left[\left[f(y)dy\right]_{y=g(x)}\right]_\alpha^\beta =$

Γ ρ ά φ ε: $\ldots\left[\left[\int f(y)dy\right]_{y=g(x)}\right]_\alpha^\beta =$

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ΄. 1972 (V) - ΑΝΤ. 40.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2257/18-4-72

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΥΤΣΗΣ - ΒΙΒΛΙΟΔ. Ι. ΚΑΜΠΑΝΑΣ Α.Ε.
ΣΧΕΔΙΑΓΡΑΦΗΣΙΣ: ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΑΓΓΕΛΙΔΟΥ

ΟΕ
ΔΒ