ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β/Α = 66

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ἡ ἀρίθμηση ἀναφέρεται σέ παραγράφους

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ Α' ΚΑΙ Β' ΒΙΒΛΙΟΥ

ΒΙΒΛΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΟΡΘΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΕΜΒΑΔΑ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΒΙΒΛΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΤΟ

ΒΙΒΛΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ Α′ ΚΑΙ Β′ ΒΙΒΛΙΟΥ

1. 'Ορισμοί. Γεωμετρικό πρόβλημα λέγεται μιά πρόταση στήν όποία ζητεῖται ἡ κατασκευή ἑνός γεωμετρικοῦ σχήματος μέ προκαθορισμένες ἰδιότητες. Π.χ. ἡ πρόταση «νά κατασκευαστεῖ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μέ βάση 4 cm καί ὕψος 5 cm» ἀποτελεῖ ἕνα γεωμετρικό πρόβλημα.

Λύση τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος λέγεται ἡ διαδικασία μέ τήν ὁποία κατασκευάζουμε τό ζητούμενο σχῆμα.

Γεωμετρική λύση ἤ γεωμετρική κατασκευή ἑνός προβλήματος λέγεται αὐτή πού γίνεται μέ τή χρήση μόνο τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, δηλαδή μέ τόν **κανόνα** καί τό **διαβήτη.**

'Απόδειξη τοῦ προβλήματος λέγεται ἡ λογική σειρά τῶν σκέψεων, ἡ ὁποία στηρίζεται πάνω σέ γνωστές γεωμετρικές προτάσεις (ἀξιώματα καί γνωστά θεωρήματα) καί μᾶς βεβαιώνει ὅτι τό σχῆμα πού κατασκευάσαμε εἶναι τό ζητούμενο.

Διερεύνηση τοῦ προβλήματος λέγεται ὁ ἔλεγχος τῶν συνθηκῶν, τίς ὁποῖες πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τά γνωστά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος (οἱ προκαθορισμένες ἰδιότητες), ὥστε τό πρόβλημα νά ἔχει λύση.

Στοιχειώδη γεωμετρικά προβλήματα πού λύνονται μέ μόνη τή χρήση τοῦ κανόνα εἶναι τά ἑπόμενα :

i) Νά κατασκευαστεῖ εὐθεία πού νά περνάει ἀπό δύο γνωστά σημεῖα.

ii) Νά κατασκευαστεῖ ἡμιευθεία πού εἶναι γνωστή ἡ ἀρχή της καί ἕνα ἄλλο σημεῖο της.

iii) Νά κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα πού εἶναι γνωστά τά ἄκρα του.

"Ενα στοιχειῶδες πρόβλημα πού λύνεται μέ μόνη τή χρήση τοῦ διαβήτη εἶναι π.χ. τό ἑξῆς :

Νά κατασκευαστεῖ κύκλος μέ γνωστό κέντρο καί γνωστή ἀκτίνα.

'Επίσης ὁ διαβήτης μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ καί γιά τή μεταφορά εὐθύγραμμων τμημάτων.

Μέ τό συνδυασμό τῶν πιό πάνω στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, πού θά τίς θεωροῦμε γνωστές, μποροῦμε νά λύσουμε πιό σύνθετα γεωμετρικά προβλήματα.

Ὁρισμένο λέγεται τό γεωμετρικό πρόβλημα πού ἔχει μιά τουλάχιστο λύση ἤ, γενικότερα, πεπερασμένο πλῆθος λύσεων.

Ἀδύνατο λέγεται τό γεωμετρικό πρόβλημα πού δέν ἔχει γεωμετρική λύση. Π.χ. ἀδύνατα γεωμετρικά προβλήματα εἶναι τά ἑξῆς :

i) Νά τριχοτομηθεῖ μιά δεδομένη γωνία.

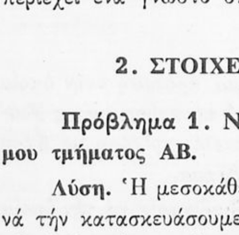
ii) Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο μέ πλευρές 2α, 3α, 6α.

Ἀόριστο λέγεται τό γεωμετρικό πρόβλημα πού ἔχει ἄπειρο πλῆθος γεωμετρικῶν λύσεων. Π.χ. τό πρόβλημα : «νά κατασκευαστεῖ εὐθεία πού νά περιέχει ἕνα γνωστό σημεῖο».

2. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1. Νά κατασκευαστεῖ ἡ μεσοκάθετος γνωστοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Λύση. Ἡ μεσοκάθετος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι εὐθεία καί γιά νά τήν κατασκευάσουμε, ἀρκεῖ νά βροῦμε δύο σημεῖα της. Χρησιμοποιοῦμε τήν ἰδιότητά της, ὅτι τά σημεῖα της καί μόνο αὐτά ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος. Μέ κέντρο λοιπόν τό σημεῖο Α καί ἀκτίνα $R > \frac{AB}{2}$ γράφουμε κυκλικό τόξο (σχ. 1). Τό ἴδιο κάνουμε μέ κέντρο τό Β καί τήν ἴδια ἀκτίνα R. Τά δύο κυκλικά τόξα τέμνονται σέ δύο σημεῖα Γ καί Δ. Φέρνουμε τώρα τήν εὐθεία ΓΔ, πού εἶναι ἡ ζητούμενη μεσοκάθετος.



Σχ. 1

Ἀπόδειξη. Στήν ἀρχή παρατηροῦμε ὅτι τά δύο κυκλικά τόξα ὁπωσδήποτε τέμνονται, γιατί ἀπό τή σχέση $R > \frac{AB}{2}$ συμπεραίνουμε ὅτι $AB < 2R$ ἤ $0 < AB < 2R$ ἤ $R - R < AB < R + R$, δηλαδή ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων, στούς ὁποίους ἀνήκουν τά τόξα, περιέχεται μεταξύ τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων τους. Τότε ἔχουμε : $ΓA = ΓB = R$ καί $ΔA = ΔB = R$. Ἄρα τόσο τό Γ ὅσο καί τό Δ ἀνήκουν στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ, τήν ὁποία καί καθορίζουν.

Διερεύνηση. Οἱ προηγούμενες κατασκευές εἶναι πάντοτε δυνατές γιά ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Ἄρα τό πρόβλημα ἔχει πάντοτε μιά λύση.

Πρόβλημα 2. Νά βρεθεῖ τό μέσο ἑνός γνωστοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

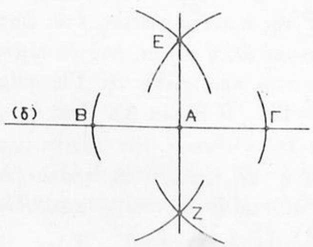
Λύση. Τό πρόβλημα αὐτό ἀνάγεται στό προηγούμενο. Ἡ μεσοκάθετος ΓΔ τοῦ τμήματος ΑΒ τέμνει τό ΑΒ στό σημεῖο Μ, πού εἶναι καί τό μέσο του (σχ. 1).

Πρόβλημα 3. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού ἀνήκει σέ εὐθεία (δ) νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία κάθετη στὴ (δ).

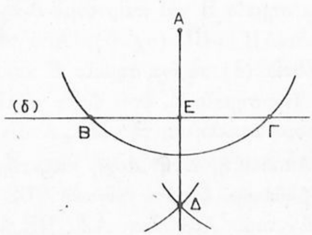
Λύση. Μέ κέντρο τό σημεῖο Α καί μέ μιά ὁποιαδήποτε ἀκτίνα γράφουμε ἕναν κύκλο, ὁ ὁποῖος τέμνει τήν εὐθεία (δ) σέ δύο σημεῖα Β καί Γ (σχ. 2). Ἔτσι εἶναι ΑΒ = ΑΓ, δηλαδή τό Α εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΒΓ. Ἀρκεῖ λοιπόν τώρα νά φέρουμε τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΓ. Αὐτή ἀσφαλῶς θά περνάει ἀπό τό Α καί θά εἶναι κάθετη στήν εὐθεία (δ). Τό πρόβλημα λοιπόν αὐτό ἀνάγεται στό πρόβλημα 1.

Πρόβλημα 4. Ἀπό σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ εὐθεία (δ) νά κατασκευαστεῖ εὐθεία κάθετη στή (δ).

Λύση. Μέ κέντρο τό Α γράφουμε κυκλικό τόξο πού νά τέμνει τήν εὐθεία (δ) σέ δύο σημεῖα Β καί Γ. Ἤδη τό Α ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος



Σχ. 2



Σχ. 3

ΒΓ (σχ. 3), ἀφοῦ ἀπό τήν κατασκευή εἶναι ΑΒ = ΑΓ. Ἀρκεῖ ἑπομένως νά βρεθεῖ καί ἕνα δεύτερο σημεῖο Δ τῆς μεσοκαθέτου (πρόβλημα 1). Τότε ἡ ΑΔ εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεία.

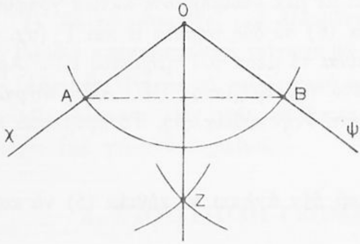
Πρόβλημα 5. Νά διχοτομηθεῖ μία γωνία $\widehat{\chi O \psi}$.

Λύση. Πάνω στίς πλευρές Οχ καί Οψ τῆς γωνίας παίρνουμε δύο ἴσα τμήματα ΟΑ = ΟΒ (σχ. 4). Τότε, ὅπως ξέρουμε, στό ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΒ θά εἶναι καί διχοτόμος τῆς γωνίας του $\widehat{AOB}$. Τῆς μεσοκαθέτου μάλιστα αὐτῆς γνωρίζουμε ἤδη ἕνα σημεῖο, τό Ο. Ἀρκεῖ λοιπόν νά βροῦμε καί ἕνα δεύτερο σημεῖο της Ζ. Αὐτό τό βρίσκουμε στήν τομή δύο κυκλικῶν τόξων, πού τά γράφουμε μέ κέντρα τά Α καί Β καί μέ τήν ἴδια ἀκτίνα (πρόβλημα 1). Ἡ ΟΖ εἶναι ἡ ζητούμενη διχοτόμος.

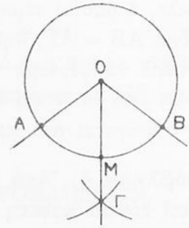
Πρόβλημα 6. Νά διχοτομηθεῖ ἕνα κυκλικό τόξο $\widehat{AB}$.

Λύση. Ἀρκεῖ νά διχοτομηθεῖ ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$ (σχ. 5). Ἡ διχοτόμος θά τέμνει τό τόξο σέ ἕνα σημεῖο Μ, πού θά εἶναι καί τό μέσο του. Τό πρόβλημα ἀνάγεται στό προηγούμενο.

Πρόβλημα 7. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία πού νά διέρχεται ἀπό ὁρισμένο σημεῖο Α καί νά εἶναι παράλληλη μέ γνωστή εὐθεία (δ).



Σχ. 4



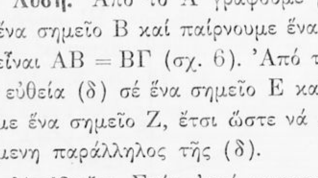
Σχ. 5

Λύση. Ἀπό τό Α γράφουμε μιά εὐθεία πού νά τέμνει τήν εὐθεία (δ) σέ ἕνα σημεῖο Β καί παίρνουμε ἕνα σημεῖο Γ τῆς πρώτης εὐθείας, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΒ = ΒΓ (σχ. 6). Ἀπό τό Γ γράφουμε ἄλλη εὐθεία, πού νά τέμνει τήν εὐθεία (δ) σέ ἕνα σημεῖο Ε καί, ἀκόμη, στήν προέκταση τῆς ΓΕ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ζ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΓΕ = ΕΖ. Ἡ εὐθεία ΑΖ εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος τῆς (δ).

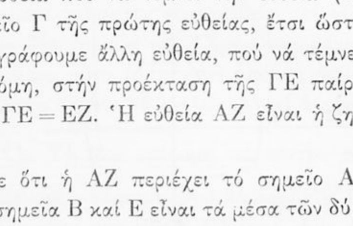
Ἀπόδειξη. Στήν ἀρχή παρατηροῦμε ὅτι ἡ ΑΖ περιέχει τό σημεῖο Α. Μετά βλέπουμε ὅτι στό τρίγωνο ΑΓΖ τά σημεῖα Β καί Ε εἶναι τά μέσα τῶν δύο πλευρῶν του. Ἄρα εἶναι ΑΖ//ΒΕ ἤ ΑΖ//(δ).

Διερεύνηση. Πάντοτε ὑπάρχει μία λύση, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τό σημεῖο Α δέν ἀνήκει στήν εὐθεία (δ).

Πρόβλημα 8. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ νά διαιρεθεῖ σέ ν ἴσα τμήματα.



Σχ. 6



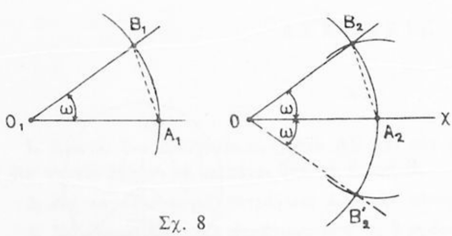
Σχ. 7

Λύση. Ἀπό τό ἄκρο Α τοῦ τμήματος ΑΒ φέρνουμε μιά ἡμιευθεία καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τά σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{\nu-1}A\nu$ (σχ. 7 μέ $\nu = 4$). Τώρα τό τμῆμα AA_ν ἔχει ἀπό τήν κατασκευή του διαιρεθεῖ σέ ν ἴσα τμήματα. Φέρνουμε τήν εὐθεία BA_ν καί ἀπό τά σημεῖα A_1, A_2, A_3,... φέρνουμε παράλληλες τῆς BA_ν. Αὐτές τέμνουν τό τμῆμα AB στά σημεῖα Γ_1, Γ_2, ..., $\Gamma_{\nu-1}$ πού διαιροῦν τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB σέ ν ἴσα τμήματα.

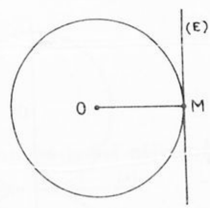
Ἀπόδειξη. Ἐπειδή εἶναι $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{\nu-1}A_\nu$ καί $A_1\Gamma_1 // A_2\Gamma_2 // A_3\Gamma_3 // \ldots // A_\nu B$, θά εἶναι καί $A\Gamma_1 = \Gamma_1\Gamma_2 = \ldots = \Gamma_{\nu-1}B$.

Πρόβλημα 9. Νά κατασκευαστεῖ μιά γωνία ἴση μέ δεδομένη γωνία ω.

Λύση. Τή δεδομένη γωνία ω τήν κάνουμε ἐπίκεντρη γράφοντας κυκλικό τόξο μέ κέντρο τήν κορυφή τῆς γωνίας καί ἀκτίνα R (σχ. 8). Τό τόξο αὐτό τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας στά σημεῖα A_1 καί B_1. Μέ κέντρο τώρα τήν ἀρχή O μιᾶς ἡμιευθείας Ox καί μέ τήν ἴδια ἀκτίνα R γράφουμε κυκλικό τόξο



Σχ. 8



Σχ. 9

πού τέμνει τήν ἡμιευθεία Ox στό σημεῖο A_2. Μετά, μέ κέντρο τό σημεῖο A_2 καί μέ ἀκτίνα ἴση μέ τή χορδή A_1B_1 πού ὁρίζεται πάνω στή δεδομένη γωνία ω, γράφουμε κυκλικό τόξο πού τέμνει τό τόξο (O, R) σέ δύο σημεῖα B_2 καί B'_2. Ἡ γωνία $B_2\widehat{O}A_2$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

Ἀπόδειξη. Τά τόξα $\widehat{A_1B_1}$ καί $\widehat{A_2B_2}$ εἶναι ἴσα, ἀφοῦ ἔχουν ἴσες ἀκτίνες (ἀνήκουν σέ ἴσους κύκλους) καί ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτά ἴσες χορδές. Τότε ὅμως καί οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες τους θά εἶναι ἴσες, δηλαδή $A_2\widehat{O}B_2 = \omega$.

Διερεύνηση. Ἡ δεύτερη γωνία $A_2\widehat{O}B'_2$ πού προκύπτει ἀπό τήν κατασκευή, δέν ἀποτελεῖ δεύτερη λύση τοῦ προβλήματος, γιατί εἶναι συμμετρική τῆς $A_2\widehat{O}B_2$ ὡς πρός τή διάκεντρο OA_2 καί συνεπῶς ἴση μέ αὐτή. Ἄρα τό πρόβλημα δέχεται μία μόνο λύση.

Πρόβλημα 10. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία πού νά εἶναι ἐφαπτομένη ἑνός δεδομένου κύκλου (O, R) σέ ἕνα σημεῖο του M.

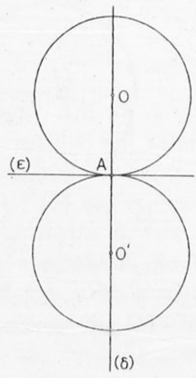
Λύση. Ἐπειδή ἡ ἐφαπτομένη ἑνός κύκλου εἶναι κάθετη στήν ἀκτίνα πού ἀντιστοιχεῖ στό σημεῖο ἐπαφῆς καί ἀντιστρόφως, εἶναι ἀρκετό νά φέρουμε εὐθεία (ε) κάθετη στήν ἀκτίνα OM στό σημεῖο M (σχ. 9) Ἑπομένως τό πρόβλημα ἀνάγεται στό πρόβλημα 3. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι φανερή. Λύση ὑπάρχει πάντοτε μία.

Πρόβλημα 11. Δίνεται μία εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο της Α. Νά κατασκευαστεῖ ἕνας κύκλος μέ γνωστή ἀκτίνα R ὁ ὁποῖος νά ἐφάπτεται μέ τήν (ε) στό σημεῖο της Α.

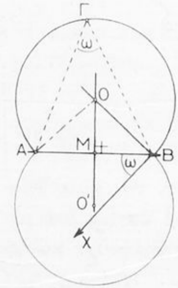
Λύση. Ἀπό τό σημεῖο Α φέρνουμε εὐθεία (δ) κάθετη στήν (ε) καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ο τέτοιο, ὥστε νά εἶναι ΟΑ = R (σχ. 10). Ὁ κύκλος μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα R εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξη. Πραγματικά ὁ κύκλος πού κατασκευάσαμε εἶναι ὁ ζητούμενος, γιατί ἔχει τή δεδομένη ἀκτίνα R καί ἐφάπτεται μέ τήν εὐθεία (ε) στό σημεῖο της Α, ἐπειδή ἡ ἀκτίνα του ΟΑ εἶναι κάθετη στήν εὐθεία (ε).

Διερεύνηση. Μποροῦμε πάνω στήν εὐθεία (δ) νά πάρουμε καί δεύτερο σημεῖο Ο′, ἀντίστοιχο τοῦ Ο καί τέτοιο ὥστε νά εἶναι Ο′Α = R. Τότε ὁ κύκλος (Ο′, R), γιά τούς ἴδιους λόγους, ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες τοῦ προβλήματος· ἐπομένως αὐτός ὁ κύκλος ἀποτελεῖ δεύτερη λύση.



Σχ. 10



Σχ. 11

Παρατήρηση. Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι πρόβλημα θέσεως (ἀντίθετα μέ τό πρόβλημα 9 πού ἦταν πρόβλημα μεγέθους), γιατί ἔπρεπε ἕνας γνωστός κύκλος μέ ἀκτίνα R νά τοποθετηθεῖ σέ κατάλληλη θέση ὡς πρός τήν εὐθεία (ε). Γι' αὐτό οἱ δύο κύκλοι μέ κέντρα τά Ο καί Ο′, ἄν καί εἶναι ἴσοι, θεωροῦνται δύο ἀνεξάρτητες λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 12. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τόξο μέ δεδομένα ἄκρα Α καί Β, πού νά δέχεται δεδομένη γωνία ω.

Λύση. Στό ἕνα ἄκρο τοῦ τμήματος ΑΒ, ἔστω στό Β, κατασκευάζουμε ἡμιευθεία Βx πού νά σχηματίζει μέ τό τμῆμα ΑΒ γωνία ω (σχ. 11). Ἀπό τό σημεῖο Β φέρνουμε εὐθεία κάθετη στή Βx· φέρνουμε ἐπίσης καί τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ. Οἱ δύο αὐτές τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο. Μέ κέντρο τώρα τό O καί ἀκτίνα τήν OB γράφουμε τό τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ πού δέν περιέχεται μέσα στή γωνία ω. Τό τόξο αὐτό εἶναι τό ζητούμενο.

'Απόδειξη. 'Η ἡμιευθεία Bx ἐφάπτεται στόν κύκλο (O,OB), γιατί εἶναι κάθετη στό ἄκρο τῆς ἀκτίνας του OB. "Αρα ἡ γωνία $\widehat{ABx} = \omega$ εἶναι ἴση μέ τή γωνία $\widehat{\Gamma}$ τήν ἐγγεγραμμένη στό τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$, ἀφοῦ ἡ $\widehat{ABx}$ σχηματίζεται ἀπό τή χορδή AB καί τήν ἐφαπτομένη Bx τοῦ κύκλου.

Διερεύνηση. 'Η συμμετρία ὡς πρός ἄξονα τήν AB μᾶς ἐξασφαλίζει ὡς δεύτερη λύση καί ἕνα ἄλλο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ πού εἶναι ἴσο μέ τό πρῶτο καί ἔχει τά ἴδια ἄκρα. Τό κέντρο του O' εἶναι συμμετρικό τοῦ O ὡς πρός τήν AB.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

1. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB καί μία εὐθεία (ε). Νά βρεθεῖ πάνω στήν (ε) ἕνα σημεῖο M πού νά ἰσαπέχει ἀπό τά A καί B.

2. Νά κατασκευαστεῖ τετράγωνο ἀπό τήν πλευρά του α.

3. Νά κατασκευαστεῖ τετράγωνο ἀπό τή διαγώνιό του δ.

4. Νά κατασκευαστεῖ ἰσόπλευρο τρίγωνο ἀπό τήν πλευρά του λ.

5. Δίνεται κύκλος μέ ἄγνωστο κέντρο. Νά βρεθεῖ τό κέντρο του.

6. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί μιά εὐθεία (ε). Νά κατασκευαστεῖ τό συμμετρικό τοῦ ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία (ε).

7. Νά κατασκευαστεῖ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος ἑνός δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ

8. Νά κατασκευαστεῖ ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος ἑνός δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ.

9. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ καί μιά εὐθεία (ε). Νά βρεθεῖ πάνω στήν (ε) ἕνα σημεῖο Α τέτοιο, ὥστε στό τρίγωνο ΑΒΓ τό ὕψος υ_α νά εἶναι δεδομένο.

10. Δίνεται μιά γωνία $\widehat{xOy}$. Νά βρεθεῖ μέσα σ' αὐτή ἕνα σημεῖο Σ πού οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας νά εἶναι α.

11. "Ενα εὐθύγραμμο τμῆμα AB νά διαιρεθεῖ σέ πέντε ἴσα τμήματα.

12. Πάνω σ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB νά βρεθεῖ σημεῖο Γ τέτοιο, ὥστε τό τμῆμα ΑΓ νά εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ΒΓ.

13. Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$. Νά κατασκευαστεῖ ἡμιευθεία Oz τέτοια, ὥστε ἡ Oy νά εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{xOz}$.

14. Νά κατασκευαστεῖ ἐφαπτομένη ἑνός κύκλου (O, R), παράλληλη μέ μιά δεδομένη εὐθεία (δ).

15. Νά κατασκευαστεῖ γωνία i) 60°, ii) 30°, iii) 45°.

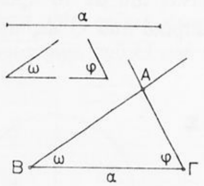
16. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τόξο μέ γνωστά ἄκρα A καί B πού νά δέχεται γωνία 45°.

17. Νά κατασκευαστεῖ τόξο μέ γνωστά ἄκρα A καί B πού νά δέχεται γωνία 75°.

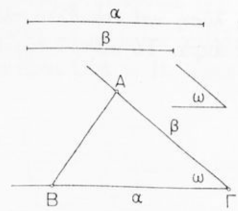
3. ΑΠΛΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Πρόβλημα 13. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\widehat{\mathrm{B}} = \omega$ καί $\widehat{\Gamma} = \varphi$ (δηλαδή ἀπό μιά πλευρά καί τίς προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες).

Λύση. Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε τμῆμα $\mathrm{B}\Gamma = \alpha$ (σχ. 12). Μέ κορυφές τά σημεῖα Β καί Γ καί μέ μιά πλευρά τή ΒΓ κατασκευάζουμε πρός τό



Σχ. 12



Σχ. 13

ἴδιο μέρος τῆς ΒΓ γωνίες ἴσες μέ ω καί φ ἀντιστοίχως. Οἱ ἄλλες πλευρές τῶν γωνιῶν αὐτῶν τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Α. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

'Απόδειξη. Εἶναι φανερή, γιατί τό τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τήν κατασκευή του ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνηση. 'Υπάρχει μία λύση, ὅταν οἱ ἄλλες πλευρές τῶν γωνιῶν $\widehat{\mathrm{B}}$ καί $\widehat{\Gamma}$ (ἐκτός ἀπό τή ΒΓ·) τέμνονται στό σημεῖο Α. Αὐτό ἐξασφαλίζεται ἀπό τή συνθήκη $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} < 2\llcorner$ ἤ $\omega + \varphi < 2\llcorner$.

Πρόβλημα 14. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, β καί $\widehat{\Gamma} = \omega$ (δηλαδή ἀπό δύο πλευρές καί τήν περιεχόμενη σ' αὐτές γωνία).

Λύση. Μέ κορυφή ἕνα σημεῖο Γ κατασκευάζουμε γωνία ἴση μέ τή δεδομένη γωνία ω (σχ. 13). Πάνω στίς πλευρές της παίρνουμε τμήματα $\Gamma\mathrm{B} = \alpha$, $\Gamma\mathrm{A} = \beta$ καί φέρνουμε τήν ΑΒ. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

'Απόδειξη. Εἶναι ἄμεση, γιατί τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνηση. 'Υπάρχει πάντοτε μιά λύση, ὅταν $\widehat{\Gamma} < 2\llcorner$.

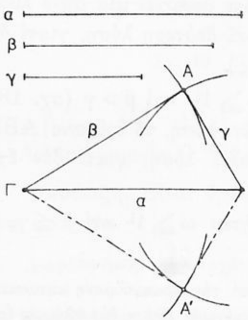
Πρόβλημα 15. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, β καί γ (δηλαδή ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του).

Λύση. Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε ἕνα τμῆμα ΒΓ $= \alpha$ (σχ. 14). Μέ κέντρα τά σημεῖα Β καί Γ καί μέ ἀκτίνες γ καί β ἀντιστοίχως γράφουμε κυκλικά τόξα. ῎Αν τά τόξα αὐτά τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Α, ὁρίζεται τό τρίγωνο ΑΒΓ, πού εἶναι καί τό ζητούμενο.

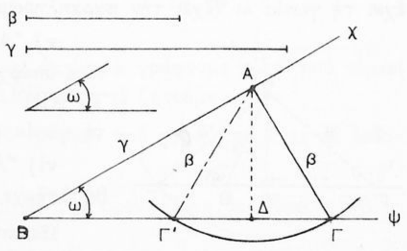
᾿Απόδειξη. Τό τρίγωνο ΑΒΓ, εἶναι τό ζητούμενο γιατί ἀπό τήν κατασκευή του ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνηση. ῾Η δυνατότητα κατασκευῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐξασφαλίζεται ἀπό τή γνωστή συνθήκη $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$. Τό δεύτερο σημεῖο Α′ τῆς τομῆς τῶν δύο κυκλικῶν τόξων δίνει ἄλλο τρίγωνο Α′ΒΓ, πού ὅμως δέν ἀποτελεῖ δεύτερη λύση τοῦ προβλήματος, γιατί τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′ΒΓ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή ΒΓ καί ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Πρόβλημα 16. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται οἱ πλευρές β καί γ καί ἡ γωνία $\widehat{B} = \omega$, πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τήν πλευρά του β.



Σχ. 14



Σχ. 15

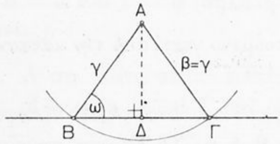
Λύση. Μέ κορυφή ἕνα σημεῖο Β κατασκευάζουμε γωνία $x\widehat{B}y = \omega$ καί πάνω στήν πλευρά της Βx παίρνουμε τμῆμα ΒΑ $= \gamma$ (σχ. 15). Μέ κέντρο τό Α καί ἀκτίνα β γράφουμε τόξο, πού τέμνει τή Βy σέ ἕνα σημεῖο Γ. Φέρνουμε καί τήν ΑΓ καί ἔτσι κατασκευάζουμε τό ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ.

᾿Απόδειξη. Εἶναι ἄμεση, γιατί τό τρίγωνο ΑΒΓ, ἀπό τήν κατασκευή του, ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα.

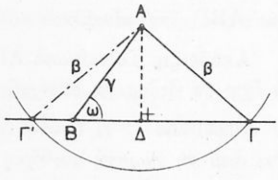
Διερεύνηση. Φέρνουμε τήν ΑΔ $\perp$ Βy. Τό τόξο (Α, β) γιά νά τέμνει τή Βy πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\beta \geqq$ ΑΔ. Μέ τήν προϋπόθεση αὐτή διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις.

i) ῎Αν εἶναι $\omega < 1^{L}$ καί $\beta =$ ΑΔ, τότε τό τόξο (Α, β) θά ἐφάπτεται στή Βy στό Δ καί ἑπομένως τό Γ θά ταυτίζεται μέ τό Δ. Στήν περίπτωση αὐτή λοιπόν ὑπάρχει μιά λύση, δηλαδή τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ.

ii) Ἄν εἶναι $\omega < 1^{\llcorner}$ καί $A\Delta < \beta < \gamma$ (σχ. 15), τό τόξο (A,β) τέμνει τή By σέ δύο σημεῖα Γ καί Γ′ καί ἑπομένως ὑπάρχουν δύο διαφορετικά



Σχ. 16

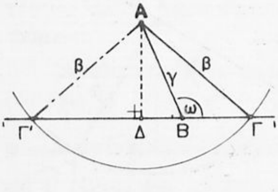


Σχ. 17

τρίγωνα, τά ΑΒΓ καί ΑΒΓ′, πού ἔχουν τά δεδομένα στοιχεῖα. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε δύο λύσεις.

iii) Ἄν εἶναι $\omega < 1^{\llcorner}$ καί $\beta = \gamma$ (σχ. 16), τότε ὑπάρχει μία μόνο λύση, δηλαδή τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).

iv) Ἄν εἶναι $\omega < 1^{\llcorner}$ καί $\beta > \gamma$ (σχ. 17), τότε ὑπάρχει μία μόνο λύση, τό τρίγωνο ΑΒΓ. Τό τρίγωνο ΑΒΓ′ δέν ἀποτελεῖ δεύτερη λύση, γιατί δέν ἔχει τή γωνία ω (ἔχει τήν παραπληρωματική της).



Χχ. 18

v) Ἄν εἶναι $\omega \geqq 1^{\llcorner}$ καί $\beta > \gamma$ (σχ. 18), τότε ὑπάρχει μία μόνο λύση, τό τρίγωνο ΑΒΓ. Τὸ ΑΒΓ′ δέν ἀποτελεῖ λύση, γιατί δέν ἔχει τή γωνία ω.

vi) Ἄν τέλος ἦταν $\omega \geqq 1^{\llcorner}$ καί $\beta \leqq \gamma$, δέ θά ὑπῆρχε λύση.

Παρατήρηση. Ἀπό τήν προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ὅτι, ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρές ἴσες καί μία γωνία ἴση, πού ὅμως δέν περιέχεται μεταξύ ἴσων πλευρῶν, δέν εἶναι βέβαιο ὅτι αὐτά εἶναι ἴσα, γιατί, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν περίπτωση ii τῆς διερευνήσεως, ὑπάρχουν δύο ἄνισα τρίγωνα μέ τά προκαθορισμένα στοιχεῖα. Ἄν ὅμως ἐπιπλέον ἔχουμε καί τήν πληροφορία ὅτι ἡ πλευρά, πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τή γνωστή γωνία, εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ἄλλη γνωστή πλευρά (περιπτώσεις iv καί v), τότε βεβαιωνόμαστε ὅτι τά τρίγωνα εἶναι ἴσα. Γιατί ἕνα μόνο τρίγωνο ὑπάρχει μέ τά στοιχεῖα αὐτά.

Συμπληρωματικά ἑπομένως μποροῦμε νά δώσουμε καί ἕνα ἀπόμα κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων, τό ἑξῆς :

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα, ἄν ἔχουν $A\Gamma = A'\Gamma' = \beta$, $AB = A'B' = \gamma$, $\widehat{B} = \widehat{B'} = \omega$ καί $\beta \geqq \gamma$.

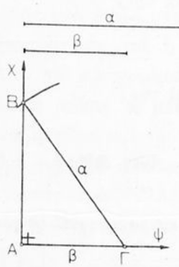
4. ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Πρόβλημα 17. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 1^{\llcorner})$ ἀπό τίς κάθετες πλευρές του β καί γ.

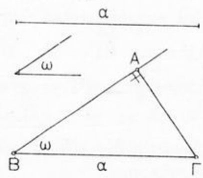
Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι κατασκευή τριγώνου ἀπό δύο πλευρές καί τήν περιεχόμενη σ' αὐτές γωνία (πρόβλημα 14) καί ἡ λύση του θεωρεῖται γνωστή.

Πρόβλημα 18. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{\llcorner}$) ἀπό τήν ὑποτείνουσά του α καί τήν κάθετη πλευρά του β.

Λύση. Πάνω στήν πλευρά Αy μιᾶς ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{A}y$ παίρνουμε τμῆμα



Σχ. 19



Σχ. 20

ΑΓ = β (σχ. 19). Μέ κέντρο τό Γ καί ἀκτίνα α γράφουμε τόξο, πού τέμνει τήν Αx στό σημεῖο Β. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

'Απόδειξη. Εἶναι ἄμεση γιατί τό τρίγωνο πού προκύπτει ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνηση. Ὑπάρχει μία λύση, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι εἶναι $\alpha > \beta$.

Πρόβλημα 19. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{\llcorner}$) ἀπό τήν κάθετη πλευρά του β καί τή γωνία $\widehat{\Gamma} = \omega$.

Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι κατασκευή τριγώνου ἀπό μία πλευρά καί τίς προσκείμενες σ' αὐτή γωνίες καί ἡ λύση του θεωρεῖται γνωστή (πρόβλημα 13).

Παρατήρηση. Στό προηγούμενο πρόβλημα (19) ἀνάγεται καί ἡ κατασκευή ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{\llcorner}$) ἀπό τήν κάθετη πλευρά του β καί τή γωνία του $\widehat{B} = \varphi$. Γιατί τότε εἶναι γνωστή καί ἡ γωνία του $\widehat{\Gamma} = 1^{\llcorner} - \varphi$.

Πρόβλημα 20. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{\llcorner}$) ἀπό τήν ὑποτείνουσά του α καί τή γωνία του $\widehat{B} = \omega$.

Λύση. Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε ἕνα τμῆμα ΒΓ = α καί στό ἄκρο του Β κατασκευάζουμε γωνία ω μέ μία πλευρά τή ΒΓ (σχ. 20). 'Από τό Γ φέρνουμε τήν κάθετο στήν ἄλλη πλευρά τῆς γωνίας, πού τήν τέμνει στό σημεῖο Α. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Ἀπόδειξη. Τό ὀρθογώνιο τρίγωνο πού κατασκευάστηκε εἶναι τό ζητούμενο, γιατί ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνηση. Πάντοτε ὑπάρχει μιά λύση, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι εἶναι $\omega < 1^{\text{L}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

18. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του:

i) $\text{ΒΓ} = \alpha$, $\widehat{\text{Β}} = 30^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$.

ii) $\text{ΒΓ} = \alpha$, $\widehat{\text{Β}} = 60^\circ$, $\widehat{\Gamma} = \omega$ (διερεύνηση).

19. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του:

i) $\text{ΑΒ} = \lambda$, $\text{ΒΓ} = 2\lambda$, $\widehat{\text{Β}} = 75^\circ$.

ii) $\text{ΑΒ} = \frac{3\lambda}{2}$, $\text{ΒΓ} = \frac{4\lambda}{3}$, $\widehat{\text{Β}} = 45^\circ$, ὅπου τό λ εἶναι δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα.

20. Δίνονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα λ καί μ. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του:

i) $\alpha = \frac{5\lambda}{4}$, $\beta = 2\lambda$, $\gamma = \frac{3\lambda}{2}$.

ii) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = \mu$ (διερεύνηση).

21. Δίνονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα λ καί μ. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{\text{Α}} = 1^{\text{L}})$ ἀπό τά στοιχεῖα του:

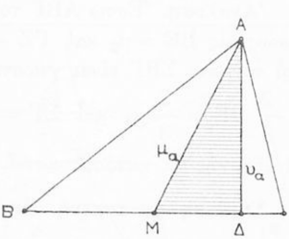
i) $\beta = 3\lambda$, $\gamma = \frac{5\lambda}{3}$.

ii) $\alpha = 2\lambda$, $\beta = 3\mu$.

iii) $\beta = 4\lambda$, $\widehat{\Gamma} = 15^\circ$.

iv) $\alpha = 2\lambda$, $\widehat{\text{Β}} = 75^\circ$.

5. Ἡ ἀναλυτική μέθοδος. Κάθε γεωμετρική κατασκευή θά θεωρεῖται δυνατή, ὅταν ἀνάγεται στίς στοιχειώδεις γεωμετρικές κατασκευές πού ἐκθέσαμε στά προηγούμενα. Πολλές φορές ὅμως συμβαίνει νά εἶναι δύσκολο νά ἀνακαλύψουμε τήν ἀκολουθία τῶν στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, μέ τίς ὁποῖες θά φτάσουμε ἀπό τά δεδομένα στοιχεῖα στό ζητούμενο σχῆμα. Γι' αὐτό θεωροῦμε ὅτι τό πρόβλημα ἐπιδέχεται τουλάχιστο μιά λύση καί κατασκευάζουμε ἕνα σχῆμα, πού ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει τίς προκαθορισμένες ἰδιότητες. Ἔπειτα προσπαθοῦμε νά συνδέσουμε τά βασικά στοιχεῖα τοῦ σχήματος μέ τά δεδομένα στοιχεῖα, ἔχοντας βάση τίς γνωστές γεωμετρικές προτάσεις (ἀξιώματα καί θεωρήματα). Ἡ ἐργασία αὐτή εἶναι συνήθως (ὄχι πάντοτε) εὐκολότερη καί λέγεται **ἀνάλυση.** Ὁ ἀντίστροφος δρόμος της πού λέγεται **σύνθεση,** εἶναι αὐτός πού θά μᾶς ὁδηγήσει ἀπό τά δεδομένα στοιχεῖα στό ζητούμενο σχῆμα. Γιά νά εἶναι ὅμως αὐτό δυνατό, θά πρέπει οἱ συνθῆκες, πού μᾶς ὁδηγοῦν ἀπό τό ζητούμενο σχῆμα στά δεδομένα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, νά εἶναι ἀντιστρεπές, δηλαδή νά εἶναι ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες. Ἄν αὐτό τό διαπιστώνουμε κάθε φορά στήν ἀνάλυση, τότε ἡ ἀπόδειξη, ὅτι πραγματικά κατασκευάσαμε τό ζητούμενο σχῆμα, θά ἦταν λογικά περιττή. Ἐπειδή ὅμως δέν εἶναι πάντοτε εὔκολο νά ἐλέγχουμε ἄν οἱ συνθῆκες, πού ὁδήγησαν ἀπό τό ζητούμενο σχῆμα στά δεδομένα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, εἶναι καί ἱκανές, γι' αὐτό στήν ἀνάλυση ἐργαζόμαστε μόνο μέ ἀναγκαῖες συνθῆκες, καί ὕστερα ἀπό τήν κατασκευή τοῦ ζητούμενου σχήματος εἶναι ἀπαραίτητη πιά ἡ ἀπόδειξη.



Σχ. 21

Ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει ὅτι **ἡ ἀνάλυση εἶναι ἡ μέθοδος μέ τήν ὁποία ἀναζητοῦμε** τόν τρόπο ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος. Ἡ ἀνάλυση ἐφαρμόζεται μέ ἐπιτυχία ὄχι μόνο στίς γεωμετρικές κατασκευές, ἀλλά καί σέ ἀποδείξεις θεωρημάτων σέ διαφόρους κλάδους τῶν μαθηματικῶν.

Ἡ ἀξία τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου, ὡς μεθόδου τῆς ἀναζητήσεως, θά φανεῖ μέ τά ἑπόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, μ_α, υ_α.

Ἀνάλυση. Ἔστω ὅτι κατασκευάσαμε τό ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 21) πού ἔχει τή βάση του $ΒΓ = \alpha$, τή διάμεσο $ΑΜ = \mu_\alpha$ καί τό ὕψος $ΑΔ = \upsilon_\alpha$. Τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ μπορεῖ ἐξαρχῆς νά κατασκευαστεῖ, γιατί εἶναι γνωστή ἡ ὑποτείνουσά του ΑΜ καί ἡ πλευρά του ΑΔ.

Σύνθεση - κατασκευή. Κατασκευάζουμε τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ ἀπό τά στοιχεῖα του $ΑΜ = \mu_\alpha$, $ΑΔ = \upsilon_\alpha$, καί $\widehat{Δ} = 1^{\llcorner}$. Ἔτσι ἔχουμε ἤδη ἐντοπίσει τήν κορυφή Α τοῦ ζητούμενου τριγώνου ΑΒΓ. Τίς κορυφές Β καί Γ θά τίς ἀναζητήσουμε καί θά τίς ἐντοπίσουμε πάνω στήν εὐθεία ΜΔ, ἑκατέρωθεν τοῦ Μ καί σέ ἀπόσταση $\frac{\alpha}{2}$ ἀπ' αὐτό. Ἔτσι κατασκευάζουμε τό τρίγωνο ΑΒΓ.

Ἀπόδειξη. Εἶναι φανερό ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα, ἀφοῦ εἶναι $ΒΓ = ΒΜ + ΜΓ = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, ἔχει τή διάμεσο $ΑΜ = \mu_\alpha$ καί τό ὕψος $ΑΔ = \upsilon_\alpha$.

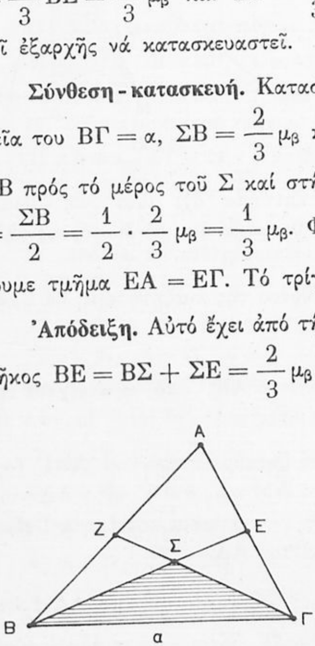
Διερεύνηση. Ὑπάρχει πάντοτε μιά λύση τοῦ προβλήματος, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι εἶναι $\upsilon_\alpha \leqq \mu_\alpha$. Στήν περίπτωση πού $\upsilon_\alpha = \mu_\alpha$, τό τρίγωνο ΑΒΓ θά εἶναι ἰσοσκελές μέ $ΑΒ = ΑΓ$.

Παράδειγμα 2. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, μ_β, μ_γ.

Ἀνάλυση. Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο μέ βάση $ΒΓ = \alpha$ καί διαμέσους τίς $ΒΕ = \mu_\beta$ καί $ΓΖ = \mu_\gamma$, πού τέμνονται στό σημεῖο Σ (σχ. 22). Στό τρίγωνο ΣΒΓ εἶναι γνωστές καί οἱ τρεῖς πλευρές του $ΒΓ = \alpha$, $ΣΒ = \frac{2}{3} ΒΕ = \frac{2}{3}\mu_\beta$ καί $ΣΓ = \frac{2}{3} ΓΖ = \frac{2}{3}\mu_\gamma$. Τότε τό τρίγωνο αὐτό μπορεῖ ἐξαρχῆς νά κατασκευαστεῖ.

Σύνθεση - κατασκευή. Κατασκευάζουμε τό τρίγωνο ΣΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $ΒΓ = \alpha$, $ΣΒ = \frac{2}{3}\mu_\beta$ καί $ΣΓ = \frac{2}{3}\mu_\gamma$. Προεκτείνουμε τό τμῆμα ΣΒ πρός τό μέρος τοῦ Σ καί στήν προέκτασή του παίρνουμε τμῆμα $ΣΕ = \frac{ΣΒ}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\mu_\beta = \frac{1}{3}\mu_\beta$. Φέρνουμε τή ΓΕ καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τμῆμα $ΕΑ = ΕΓ$. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο.

Ἀπόδειξη. Αὐτό ἔχει ἀπό τήν κατασκευή του τή $ΒΓ = \alpha$. Ἡ ΒΕ ἔχει μῆκος $ΒΕ = ΒΣ + ΣΕ = \frac{2}{3}\mu_\beta + \frac{1}{3}\mu_\beta = \mu_\beta$ καί εἶναι διάμεσος, γιατί εἶναι $ΕΑ = ΕΓ$. Ἡ εὐθεία ΣΓ τέμνει τήν ΑΒ στό Ζ. Τό σημεῖο Σ τῆς διαμέσου ΒΕ, ἀφοῦ ἀπέχει ἀπό τήν κορυφή Β ἀπόσταση ἴση μέ τά $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΕ, εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου. Ἄρα εἶναι σημεῖο, πού ἀνήκει καί στή διάμεσο πού φέρεται ἀπό τό Γ. Δηλαδή ἡ ΓΖ εἶναι διάμεσος καί ἐπιπλέον εἶναι $ΓΣ = \frac{2}{3}\mu_\gamma$, ἄρα $ΓΖ = \mu_\gamma$.



Σχ. 22

Διερεύνηση. Τό τρίγωνο ΑΒΓ μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ ἄν μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ τό τρίγωνο ΣΒΓ. Τό τρίγωνο ὅμως ΣΒΓ κατασκευάζεται ἄν :

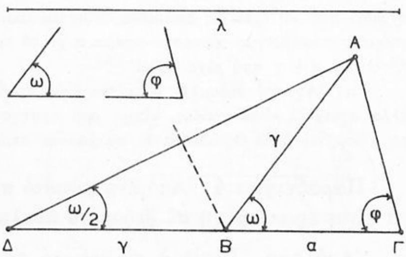
$$|ΣΒ - ΣΓ| < ΒΓ < ΣΒ + ΣΓ \quad ἤ$$

$$\left|\frac{2}{3}\mu_\beta - \frac{2}{3}\mu_\gamma\right| < \alpha < \frac{2}{3}\mu_\beta + \frac{2}{3}\mu_\gamma \iff$$

$$\left|\mu_\beta - \mu_\gamma\right| < \frac{3}{2}\alpha < \mu_\beta + \mu_\gamma.$$

Παράδειγμα 3. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{B} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καί ἀπό τό ἄθροισμα λ τῶν πλευρῶν του α καί γ.

Ἀνάλυση. Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο (σχ. 23), τό ὁποῖο ἔχει $\widehat{B} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καί $\alpha + \gamma = \lambda$. Γιά νά χρησιμοποιηθεῖ τό δεδομένο ἄθροισμα λ, προεκτείνουμε τήν πλευρά ΓΒ πρός τό μέρος τοῦ Β καί στήν προέκταση παίρνουμε τμῆμα $B\Delta = BA = \gamma \Rightarrow \Gamma\Delta = \alpha + \gamma = \lambda$. Τό τρίγωνο ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές καί ἐπομένως εἶναι



Σχ. 23

(1) $$B\widehat{\Delta}A = B\widehat{A}\Delta.$$

Ἡ γωνία $\widehat{B} = \omega$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπειδή εἶναι ἐξωτερική τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ, εἶναι $\omega = B\widehat{\Delta}A + B\widehat{A}\Delta$. Ἐξαιτίας τῆς (1) ἡ τελευταία σχέση γράφεται $\omega = 2B\widehat{\Delta}A \Rightarrow B\widehat{\Delta}A = \frac{\omega}{2}$. Ἄρα τό τρίγωνο ΑΓΔ μπορεῖ ἐξαρχῆς νά κατασκευαστεῖ ἀπό τά στοιχεῖα του $\Gamma\Delta = \lambda$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καί $\widehat{\Delta} = \frac{\omega}{2}$.

Σύνθεση - κατασκευή. Κατασκευάζουμε τό τρίγωνο ΑΓΔ ἀπό τά γνωστά στοιχεῖα του $\Gamma\Delta = \lambda$, $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καί $\widehat{\Delta} = \frac{\omega}{2}$. Ἡ κατασκευή τοῦ ζητούμενου τριγώνου ΑΒΓ ἐξαρτᾶται πιά ἀπ' τήν εὕρεση τῆς ἄγνωστης κορυφῆς του Β. Ἐπειδή ὅμως τό τρίγωνο ΑΒΔ πρέπει νά εἶναι ἰσοσκελές, ἡ κορυφή Β θά ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΔ. Ἡ τομή τῆς μεσοκαθέτου αὐτῆς καί τῆς ΓΔ θά εἶναι ἡ κορυφή Β.

Ἀπόδειξη. Τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει τή γωνία $\widehat{\Gamma} = \varphi$. Ἐπειδή ἀκόμη τό Β εἶναι σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΔ, ἔχουμε $AB = B\Delta$. Ἄρα $B\Gamma + AB = B\Gamma + B\Delta = \Gamma\Delta = \lambda$. Ἀκόμη εἶναι $A\widehat{B}\Gamma = B\widehat{\Delta}A + B\widehat{A}\Delta = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega \Rightarrow \widehat{B} = \omega$. Ἔτσι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο, ἀφοῦ ἔχει τά δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνηση. Τό πρόβλημα ἔχει πάντοτε μιά λύση, ὅταν $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 2^{L}$ ἤ $\omega + \varphi < 2^{L}$.

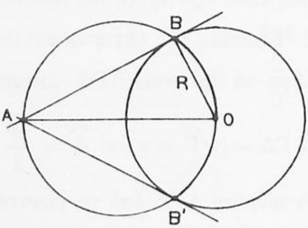
Παρατηρήσεις:

i) Ὅταν σ' ἕνα πρόβλημα κατασκευῆς ἔχουμε στά δεδομένα στοιχεῖα τό ἄθροισμα (ἤ τή διαφορά) εὐθυγράμμων τμημάτων, φροντίζουμε στήν ἀνάλυση νά κάνουμε ἕνα σχῆμα, πού νά ἔχει ὡς δεδομένο στοιχεῖο του τό ἄθροισα (ἤ τή διαφορά). Στό προηγούμενο παράδειγμα κατασκευάσαμε π.χ. τό τρίγωνο ΑΔΓ μέ πλευρά ΔΓ ἴση μέ τό ἄθροισμα $\alpha + \gamma$ πού εἶχε δοθεῖ.

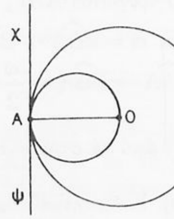
ii) Ἄν στά δεδομένα στοιχεῖα ἑνός προβλήματος ὑπάρχει ἕνα μόνο μῆκος καί τά ἄλλα στοιχεῖα εἶναι γωνίες, ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, κατά τή διερεύνηση τό μῆκος αὐτό δέ θά ὑπόκειται σέ κανένα περιορισμό μεγέθους.

Παράδειγμα 4. Ἀπό ἕνα γνωστό σημεῖο νά κατασκευαστεῖ εὐθεία πού νά εἶναι ἐφαπτομένη σέ δεδομένο κύκλο.

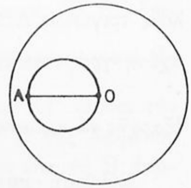
Ἀνάλυση. Ἔστω Α τό γνωστό σημεῖο καί (Ο, R) ὁ δεδομένος κύκλος (σχ. 24). Τό πρόβλημα ἀνάγεται στόν προσδιορισμό τοῦ σημείου ἐπαφῆς Β. Μιά πρώτη συνθήκη πού πρέπει τό σημεῖο αὐτό νά ἱκανοποιεῖ, εἶναι νά βρίσκεται πάνω στόν κύκλο (Ο, R). Μιά δεύτερη συνθήκη, εἶναι ἡ γωνία $\widehat{ABO}$,



Σχ. 24



Σχ. 25



Σχ. 26

νά εἶναι ὀρθή. Ἀπ' αὐτή συμπεραίνουμε πώς τό ἄγνωστο σημεῖο Β πρέπει νά βρίσκεται πάνω σέ κύκλο μέ διάμετρο τήν ΑΟ.

Σύνθεση - κατασκευή. Γράφουμε κύκλο μέ διάμετρο τήν ΑΟ, πού τέμνει τόν κύκλο (Ο, R) σέ ἕνα σημεῖο Β. Ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη.

Ἀπόδειξη. Ἡ ΑΒ ἐφάπτεται στόν κύκλο (Ο, R), γιατί εἶναι κάθετη στό ἄκρο Β τῆς ἀκτίνας ΟΒ, καί εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη, γιατί περνάει ἀπό τό γνωστό σημεῖο Α.

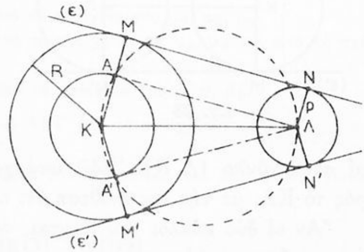
Διερεύνηση. Ἄν τό σημεῖο Α βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κύκλο (Ο, R), οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινά σημεῖα τά Β καί Β'. Ἄρα ὑπάρχουν δύο λύσεις καί αὐτές εἶναι οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί ΑΒ'.

Ἄν τό Α εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου (Ο, R) (σχ. 25), οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικά στό σημεῖο Α καί τότε ὑπάρχει μιά μόνο λύση. Εἶναι ἡ κάθετος ἀπό τό Α στήν ΑΟ.

Ἄν, τέλος, τό Α βρίσκεται μέσα στόν κύκλο (Ο, R) (σχ. 26), οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο καί τότε δέν ὑπάρχει λύση.

Παράδειγμα 5. Νά κατασκευαστεῖ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη δύο δεδομένων κύκλων (Κ, R) καί (Λ, ρ).

Ἀνάλυση. Θεωροῦμε τό πρόβλημα λυμένο καί ὅτι ΜΝ εἶναι ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τῶν δύο δεδομένων κύκλων, ὅπου Μ καί Ν εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς (σχ. 27). Ὑποθέτουμε ἀκόμα ὅτι εἶναι $R > \rho$. Φέρνουμε τίς ΚΜ καί ΛΝ, πού προφανῶς εἶναι κάθετες στή ΜΝ καί ἀπό τό Λ φέρνουμε τήν ΛΑ//ΜΝ. Τότε θά εἶναι ΛΑ⊥ΚΜ, ἐνῶ ἀπό τό ὀρθογώνιο ΑΜΝΛ πού σχηματίζεται ἔχουμε ΑΜ = ΛΝ = ρ. Τώρα στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ ξέρουμε τήν ὑποτείνουσα ΚΛ = δ, πού εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν δύο γνωστῶν κατά θέση καί μέγεθος κύκλων, καί τή μιά ἀπό τίς κάθετες πλευρές του ΚΑ = = ΚΜ — ΑΜ = R — ρ. Ἄρα τό τρίγωνο αὐτό μπορεῖ ἐξαρχῆς νά κατασκευαστεῖ.



Σχ. 27

Σύνθεση - κατασκευή. Κατασκευάζουμε τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΚΑΛ ἀπό τά στοιχεῖα του ΚΛ = δ, ΚΑ = R — ρ καί $\widehat{A} = 1^{L}$. Προεκτείνουμε τήν ΚΑ, πού τέμνει τόν κύκλο (Κ, R) στό σημεῖο Μ. Ἐπομένως τό σημεῖο Α βρίσκεται μεταξύ τῶν Κ καί Μ, ἀφοῦ εἶναι ΚΑ = R — ρ < R = ΚΜ. Τώρα ἀπό τό Μ φέρνουμε εὐθεία (ε) κάθετη στήν ΚΑΜ, πού εἶναι καί ἡ ζητούμενη κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων.

Ἀπόδειξη. Ἡ εὐθεία (ε) εἶναι προφανῶς ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Κ, R), ἀφοῦ εἶναι κάθετη στό ἄκρο Μ τῆς ἀκτίνας του ΚΜ. Ἀπό τό Λ φέρνουμε τή ΛΝ ⊥ (ε) καί τότε τό τετράπλευρο ΑΜΝΛ εἶναι ὀρθογώνιο, γιατί ἔχει τρεῖς ὀρθές γωνίες στίς κορυφές του Α, Μ καί Ν. Ἄρα:

(1) $$AM = \Lambda N.$$

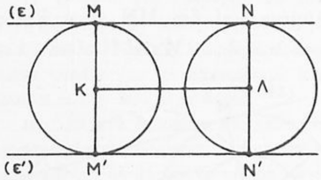
Ἀλλά εἶναι ΑΜ = ΚΜ — ΚΑ = R — (R — ρ) = ρ. Ἐπομένως, ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι ΛΝ = ρ, δηλαδή τό σημεῖο Ν ἀνήκει στόν κύκλο (Λ,ρ). Τότε ἡ εὐθεία (ε) εἶναι ἐφαπτομένη καί στόν κύκλο (Λ,ρ), ἀφοῦ εἶναι κάθετη στό ἄκρο Ν τῆς ἀκτίνας του ΛΝ.

Διερεύνηση. Ἡ λύση ἐξασφαλίστηκε ἀπό τήν ὕπαρξη τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΚΑΛ, πού εἶναι δυνατή μέ τήν προϋπόθεση ὅτι εἶναι

$$K\Lambda > KA \quad \text{ἤ} \quad \delta > R - \rho.$$

Τότε μάλιστα ὑπάρχει καί δεύτερη λύση, ἡ εὐθεία Μ'Ν' πού εἶναι συμμετρική τῆς ΜΝ ὡς πρός τή διάκεντρο ΚΛ.

Θά ἐξετάσουμε τώρα ἰδιαίτερα τό ἐνδεχόμενο $R = \rho$, δηλαδή ὅταν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι (σχ. 28). 'Από τό Κ φέρνουμε εὐθεία κάθετη στήν ΚΛ, πού τέμνει τόν κύκλο (Κ, R) στό σημεῖο Μ. 'Η παράλληλος τῆς ΚΛ ἀπό τό Μ εἶναι ἡ ζητούμενη κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη. 'Η ἀπόδειξη εἶναι φανερή, γιατί ἡ εὐθεία αὐτή, ἀφοῦ ἀπέχει ἀπό τό Λ ἀπόσταση $ΛΝ = ΚΜ = R$, ἐφάπτεται καί στόν κύκλο (Λ, R). 'Εδῶ ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις συμμετρικές ὡς πρός τό ΚΛ, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι οἱ δύο κύκλοι δέν ταυτίζονται.



Σχ. 28

"Αν οἱ δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε τό πρόβλημα εἶναι ἀόριστο, δηλαδή δέχεται ἄπειρες λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

22. Νά κατασκευαστοῦν γωνίες :
i) $22^0\,30'$, ii) $67^0\,30'$, iii) 105^0, iv) 135^0, v) 150^0.

23. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A}$, β καί τή διχοτόμο δ_α τῆς γωνίας $\widehat{A}$. 'Εφαρμογή : $\widehat{A} = 60^0$, $\beta = 4$ cm καί $\delta_\alpha = 3$ cm.

24. Νά κατασκευαστεῖ παραλληλόγραμμο ἀπό τή μία πλευρά του α καί τίς δύο διαγωνίους του δ καί δ'.

25. Νά κατασκευαστεῖ ρόμβος ἀπό τίς διαγωνίους του δ καί δ'.

26. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, μ_α, μ_β.

27. Νά κατασκευαστεῖ ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) ἀπό τό ὕψος του υ_α καί ἀπό τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτό κύκλου.

28. Νά κατασκευαστεῖ ἰσόπλευρο τρίγωνο ἀπό τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

29. Νά κατασκευαστεῖ ρόμβος ἀπό τή μιά διαγώνιό του δ καί ἀπό τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτόν κύκλου.

30. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, υ_α.

31. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του β, γ, υ_α.

32. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο πού δίνονται τά μέσα Κ, Λ, Μ τῶν τριῶν πλευρῶν του.

33. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ καί $\beta + \gamma = \lambda$.

34. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\widehat{B}$ καί $\beta + \gamma = \lambda$.

35. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A} = 1L$, $\widehat{B}$ καί $\alpha + \gamma = \lambda$.

36. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A} = 1L$, $\widehat{B}$ καί $\alpha + \beta = \lambda$.

Β'.

37. Νά κατασκευαστεῖ παραλληλόγραμμο, τοῦ ὁποίου δίνεται μία πλευρά, μία διαγώνιος καί ἡ γωνία τῶν διαγωνίων

38. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο, ὅταν ξέρουμε τήν περίμετρό του 2λ καί τή διαγώνιό του δ.

39. Νά κατασκευαστεῖ τετράγωνο ἀπό τό ἄθροισμα λ τῆς πλευρᾶς καί τῆς διαγωνίου του.

40. Νά κατασκευαστεῖ τετράγωνο ἀπό τή διαφορά λ τῆς πλευρᾶς καί τῆς διαγωνίου του.

41. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του μ_α, μ_β, μ_γ.

42. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του υ_α, μ_α καί ἀπό τή σχέση $\alpha = 2\beta$, πού συνδέει τίς δύο πλευρές του.

43. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του β, γ, μ_α.

44. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A} = 1L$, α καί τή διαφορά $\beta - \gamma = \lambda$.

45. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τήν περίμετρό του 2τ καί τίς γωνίες του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

6. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

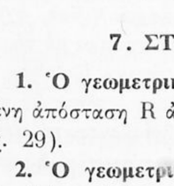
Ξέρουμε ἤδη τήν ἔννοια καί τόν ὁρισμό τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου ἀπό τήν προηγούμενη τάξη. Οἱ γεωμετρικοί τόποι πού μέχρι τώρα ἔχουμε γνωρίσει, λέγονται στοιχειώδεις γεωμετρικοί τόποι καί τούς ἔχουμε χρησιμοποιήσει καί στίς γεωμετρικές κατασκευές. Τούς συνοψίζουμε στά ἑπόμενα καί στό ἑξῆς θά τούς θεωροῦμε ὁπωσδήποτε γνωστούς.

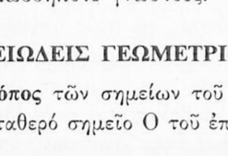
7. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

1. Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου πού ἀπέχουν ὁρισμένη ἀπόσταση R ἀπό σταθερό σημεῖο O τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὁ κύκλος (O, R) (σχ. 29).

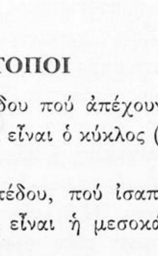
2. Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, πού ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα ἑνός γνωστοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, εἶναι ἡ μεσοκάθετος (δ) τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 30).

3. Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἀπό τά ὁποῖα ἕνα γνωστό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπό δεδομένη γωνία φ, εἶναι τά δύο κυκλικά τόξα $\widehat{AMB}$ καί $\widehat{AM'B}$ μέ κοινά ἄκρα τά Α καί Β, τά ὁποῖα δέχονται γωνία φ (σχ. 31).





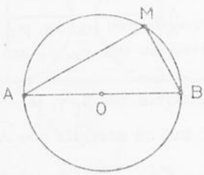
Σχ. 30



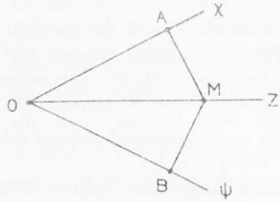
Σχ. 31

Ἰδιαίτερα σημειώνουμε τήν περίπτωση πού ἡ γωνία φ εἶναι ὀρθή. Τότε ὁ γεωμετρικός τόπος εἶναι κύκλος μέ διάμετρο τό τμῆμα ΑΒ (σχ. 32).

4. Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων, πού βρίσκονται μέσα σέ γνωστή



Σχ. 32



Σχ. 33

γωνία $x\widehat{O}y$ καί ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές της, εἶναι ἡ διχοτόμος ΟΖ τῆς γωνίας (σχ. 33).

8. Γενικός τρόπος ἐργασίας. Στά θέματα τῶν γεωμετρικῶν τόπων, κατά κανόνα μᾶς δίνεται ἡ ἰδιότητα πού ἔχουν τά σημεῖα τοῦ τόπου καί ζητεῖται ὁ προσδιορισμός του.

Στούς γεωμετρικούς τόπους, μέ τούς ὁποίους θά ἀσχοληθοῦμε, σχεδόν πάντοτε μποροῦμε ἀπό τήν ἀρχή νά σχηματίσουμε μιά ἰδέα σχετικά μέ τή μορφή τους κατασκευάζοντας τρία σημεῖα μέ τή χαρακτηριστική ἰδιότητα τοῦ τόπου. Ἄν αὐτά συμβαίνει νά βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, ὁ τόπος θά εἶναι ἡ εὐθεία αὐτή ἤ κάποιο τμῆμα της. Ἄν ὅμως αὐτά δέ βρίσκονται σέ εὐθεία, τότε ὁ τόπος θά εἶναι ὁ κύκλος, τόν ὁποῖο ὁρίζουν τά τρία σημεῖα, ἤ κάποιο τόξο του. Ἡ διαπίστωση αὐτή ἁπλῶς θά καθοδηγήσει τή σκέψη καί τήν προσοχή μας στήν εὕρεση τοῦ ζητούμενου τόπου, χωρίς αὐτό νά ἀποτελεῖ καί ἀπόδειξη.

Στήν ἀναζήτηση ἑνός γεωμετρικοῦ τόπου ἡ ἀνάλυση εἶναι ἡ μέθοδος, πού χρησιμοποιεῖται σχεδόν ἀποκλειστικά. Ἔστω (Τ) ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος καί f ἡ χαρακτηριστική ἰδιότητα τῶν σημείων του. Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Μ τοῦ τόπου καί ἐπεξεργαζόμαστε κατάλληλα τήν ἰδιότητά του f συσχετίζοντας τό σημεῖο αὐτό μέ τά σταθερά στοιχεῖα τοῦ προβλήματος. Ἔτσι ἀνακαλύπτουμε ὅτι τό σημεῖο αὐτό, ἐξαιτίας τῆς ἰδιότητάς του f, ἀνήκει σέ κάποιο σχῆμα (σημειοσύνολο) (Σ). Τό γεγονός ὅτι τό σημεῖο Μ τοῦ τόπου (Τ) ἀνήκει στό σχῆμα (Σ), μᾶς πείθει ὅτι ὅλα τά σημεῖα τοῦ τόπου (Τ) ἀνήκουν στό σχῆμα (Σ). Ἄρα θά εἶναι :

$$(1) \qquad (\mathrm{T}) \subseteqq (\Sigma)$$

Αὐτό ὅμως δέ σημαίνει ὅτι ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι ὅλο τό σχῆμα (Σ). Εἶναι ἀπαραίτητο νά ἐξετάσουμε καί τό ἀντίστροφο, δηλαδή ἄν κάθε σημεῖο τοῦ σχήματος (Σ) ἔχει τή χαρακτηριστική ἰδιότητα f τῶν σημείων τοῦ τόπου, δηλαδή ἄν ἀνήκει στόν τόπο (T). Ἔτσι παίρνουμε ἕνα σημεῖο N τοῦ (Σ) καί ἐξετάζουμε ἄν αὐτό ἔχει τήν ἰδιότητα f. Ἄν αὐτό συμβαίνει, τότε ὅλα τά σημεῖα τοῦ σχήματος (Σ) ἀνήκουν στόν τόπο (T), δηλαδή εἶναι

(2) $$(\Sigma) \subseteq (T).$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει ὅτι $(T) = (\Sigma)$, δηλαδή ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι τό σχῆμα (Σ).

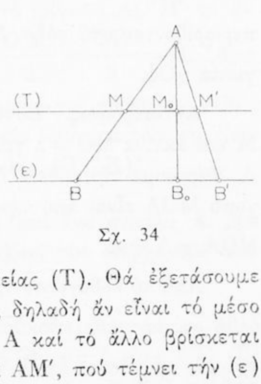
Ἐξετάζοντας ὅμως ἀντίστροφα τό θέμα μπορεῖ πολλές φορές νά διαπιστώσουμε ὅτι ὑπάρχουν σημεῖα N τοῦ σχήματος (Σ), πού δέν ἔχουν τήν ἰδιότητα f. Αὐτά πρέπει νά ἐξαιρεθοῦν ἀπό τόν τόπο (T), πού ἀναγκαστικά θά περιοριστεῖ σ' ἕνα τμῆμα (Σ_1) τοῦ (Σ).

Στήν πράξη ὁ περιορισμός τοῦ τόπου (T) σ' ἕνα τμῆμα (Σ_1) τοῦ σχήματος (Σ), γίνεται μέ μιά προσεκτική διερεύνηση τῶν οριακῶν θέσεων, ἄν ὑπάρχουν, τίς ὁποῖες μπορεῖ νά πάρουν τά σημεῖα τοῦ τόπου (T) μέσα στό σχῆμα (Σ).

Ἡ διερεύνηση αὐτή θά ἦταν λογικά περιττή, ἄν στήν ἀνάλυση χρησιμοποιούσαμε μόνο ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες· ἀλλ' αὐτό δέν εἶναι πάντοτε εὔκολο. Γι' αὐτό στήν ἀνάλυση χρησιμοποιοῦμε ἀναγκαῖες μόνο συνθῆκες καί κατόπιν μέ τήν ἀντίστροφη ἐξέταση τοῦ θέματος καί τή διερεύνηση τῶν οριακῶν θέσεων τῶν σημείων τοῦ τόπου ἐλέγχουμε ἄν αὐτές οἱ ἀναγκαῖες συνθῆκες εἶναι καί ἱκανές.

Παράδειγμα 1. Δίνεται μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο A, πού δέν ἀνήκει σ' αὐτή. Ἄν B εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς (ε), νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AB.

Ἀνάλυση. Ἔστω M τό μέσο τοῦ τμήματος AB (σχ. 34). Ἀπό τό A φέρνουμε τήν $AB_0 \perp (\varepsilon)$ καί ἔστω M_0 τό μέσο τοῦ τμήματος AB_0. Ἡ εὐθεία MM_0 εἶναι παράλληλη πρός τήν (ε), ἀφοῦ περνάει ἀπό τά μέσα M καί M_0 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ABB_0. Ἄρα εἶναι κάθετη στό τμῆμα AB_0 καί μάλιστα στό μέσο του. Ἀφοῦ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόπου βρίσκεται πάνω σ' αὐτή τή συγκεκριμένη εὐθεία (T), ὅλα τά σημεῖα τοῦ τόπου ἀνήκουν στήν (T).



Σχ. 34

Ἀντιστρόφως. Ἔστω M′ ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας (T). Θά ἐξετάσουμε ἄν αὐτό ἔχει τήν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου, δηλαδή ἄν εἶναι τό μέσο κάποιου τμήματος, πού τό ἕνα ἄκρο του εἶναι τό A καί τό ἄλλο βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία (ε). Φέρνουμε λοιπόν τήν εὐθεία AM′, πού τέμνει τήν (ε) στό σημεῖο B′. Στό τρίγωνο AB_0B' ἡ M_0M', πού περνάει ἀπό τό μέσο M_0

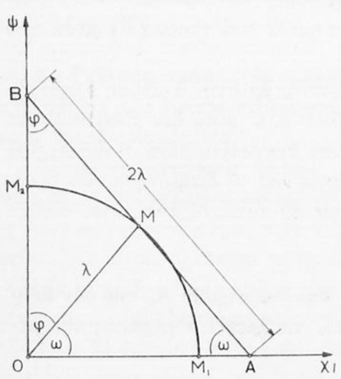
τῆς AB_0, εἶναι καί παράλληλη πρός τή B_0B'. Ἄρα τό M' εἶναι ὁπωσδήποτε τό μέσο τῆς AB', δηλαδή τό M' ἀνήκει στό ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Τότε ὁ τόπος εἶναι ἡ εὐθεία (T).

Ὁριακά σημεῖα τοῦ τόπου δέν ὑπάρχουν, γιατί τό B μπορεῖ νά ἔχει ὁποιαδήποτε θέση πάνω στήν ἀπέραντη εὐθεία (ε) καί ἀντίστοιχα πρός αὐτό, τό M μπορεῖ νά ἔχει ὁποιαδήποτε θέση πάνω στήν ἀπέραντη εὐθεία (T).

Παράδειγμα 2. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB ἔχει σταθερό μῆκος 2λ καί τά ἄκρα του μετατοπίζονται ὁμαλά πάνω στίς δύο πλευρές μιᾶς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου M τοῦ τμήματος AB.

Ἀνάλυση. Τά ἄκρα A καί B τοῦ τμήματος $AB = 2\lambda$ βρίσκονται πάνω στίς πλευρές Oχ καί Oψ ἀντιστοίχως τῆς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$ (σχ. 35). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι M εἶναι τό μέσο τοῦ AB, δηλαδή ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου. Ἐπειδή τό τρίγωνο AOB εἶναι ὀρθογώνιο στό O καί ἡ OM εἶναι ἡ διάμεσός του πρός τήν ὑποτείνουσα, ἔχουμε

$$OM = \frac{AB}{2} \quad \text{ἤ} \quad OM = \frac{2\lambda}{2} = \lambda.$$



Σχ. 35

Τό σημεῖο λοιπόν M ἀπέχει σταθερή ἀπόσταση λ ἀπό τό σημεῖο O καί ἐπομένως ἀνήκει σέ κύκλο μέ κέντρο τό O καί ἀκτίνα λ.

Διερεύνηση. Ἐπειδή τό τμῆμα AB βρίσκεται μέσα στήν ὀρθή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$, ἄρα καί τό μέσο του εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς γωνίας. Τότε τά σημεῖα τοῦ τόπου περιορίζονται στό τόξο $\overset{\frown}{M_1M_2}$ τοῦ κύκλου (O,λ), πού βρίσκεται μέσα στή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω M ἕνα σημεῖο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{M_1M_2}$. Μέ κέντρο τό M καί ἀκτίνα $MO = \lambda$ γράφουμε ἕνα τόξο, πού τέμνει τήν Oχ σέ ἕνα σημεῖο A. Φέρνουμε τήν εὐθεία MA, πού τέμνει τήν Oψ σέ ἕνα σημεῖο B. Τό τρίγωνο MOA εἶναι ἀπό τήν κατασκευή του ἰσοσκελές μέ $MO = MA = \lambda$. Ἄρα $\widehat{MOA} = \widehat{A} = \omega$.

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο AOB ἔχουμε $\widehat{B} = \varphi = 1^{\llcorner} - \omega$, ἐνῶ ἀπό τήν ὀρθή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ προκύπτει ὅτι $\widehat{BOM} = 1^{\llcorner} - \omega$. Ἀπό τίς δύο τελευταῖες σχέσεις προκύπτει ὅτι $\widehat{B} = \widehat{BOM}$ καί ἐπομένως τό τρίγωνο OMB εἶναι ἰσοσκελές μέ $MO = MB = \lambda$.

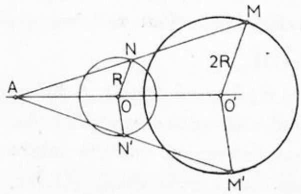
Τώρα, ἀπό τά δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα συμπεραίνουμε ὅτι $MA = MO = MB = \lambda$. Ἄρα τὸ M εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος AB $= 2\lambda$, δηλαδή τό ὁποιοδήποτε σημεῖο M τοῦ τόξου $\widehat{M_1M_2}$ εἶναι σημεῖο τοῦ τόπου.

Ἀπό τά προηγούμενα προκύπτει πώς ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι τό τέταρτο $\widehat{M_1M_2}$ τοῦ κύκλου (O,λ) μέ ὁριακά σημεῖα τά M_1 καί M_2.

Παεάδειγμα 3. Δίνεται ἕνας κύκλος (O, R) καί ἕνα σημεῖο A. Ἄν N εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου (O,R), φέρνουμε τήν εὐθεία NA καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε ἕνα σημεῖο M τέτοιο, ὥστε νά εἶναι NM = NA. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M, ὅταν τό N διαγράφει τόν κύκλο.

Ἀνάλυση. Ἔστω M ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου, δηλαδή $NM = NA$ (σχ. 36). Φέρνουμε τήν ἀκτίνα NO καί ἀπό τό M τήν παράλληλο τῆς NO, πού τέμνει τήν AO στό σημεῖο O′. Στό τρίγωνο AMO′ ἡ NO εἶναι παράλληλη πρός τήν MO′ καί περνάει ἀπό τό μέσο N τῆς πλευρᾶς AM. Ἄρα θά περνάει καί ἀπό τό μέσο τῆς πλευρᾶς AO′, δηλαδή $AO' = 2AO$. Τότε τό σημεῖο O′ εἶναι γνωστό καί σταθερό. Ἐπιπλέον ἡ NO θά εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς MO′, δηλαδή

$$NO = \frac{MO'}{2} \Rightarrow MO' = 2NO = 2R.$$



Σχ. 36

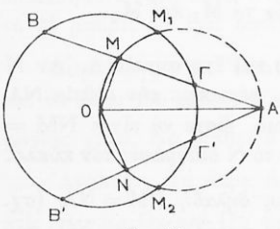
Ὥστε τό ὁποιοδήποτε σημεῖο M τοῦ τόπου ἀπέχει σταθερή ἀπόσταση 2R ἀπό τό σταθερό σημεῖο O′ καί ἑπομένως θά βρίσκεται πάνω στόν κύκλο (O′,2R).

Ἀντιστρόφως. Ἔστω M′ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου (O′, 2R). Φέρνουμε τήν AM′ καί ἀπό τό μέσο O τῆς AO′ φέρνουμε εὐθεία παράλληλη πρός τή M′O′, πού τέμνει τήν AM′ στό σημεῖο N′. Τότε στό τρίγωνο AO′M′ τό N′ εἶναι τό μέσο τῆς AM′ καί ἐπιπλέον εἶναι $ON' = \frac{O'M'}{2} = \frac{2R}{2} = R$. Ἄρα τό N′ ἀνήκει στόν κύκλο (O,R) καί ἐπειδή εἶναι μέσο τοῦ τμήματος AM′, ἔπεται ὅτι τό σημεῖο M′ τοῦ κύκλου (O′,2R) ἔχει τήν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου. Ἄρα ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ὁ κύκλος (O′,2R).

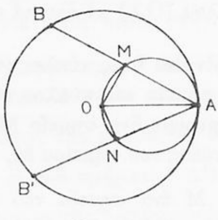
Παράδειγμα 4. Δίνεται ἕνας κύκλος (O,R) καί ἕνα σημεῖο A. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, πού διέρχονται ἀπό τό σημεῖο A (ὅταν προεκταθοῦν, ἄν χρειαστεῖ).

Ἀνάλυση. Ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο M τοῦ τόπου, δηλαδή τό μέσο μιᾶς χορδῆς ΒΓ τοῦ κύκλου (O,R), πού περνάει ἀπό τό σημεῖο A (σχ. 37). Τό τμῆμα OM εἶναι κάθετο στή χορδή, γιατί τό O εἶναι κέντρο τοῦ κύκλου. Ἄρα τό σταθερό τμῆμα ΟΑ φαίνεται ἀπό τό σημεῖο Μ τοῦ τόπου ὑπό ὀρθή γωνία καί ἑπομένως τό σημεῖο Μ ἀνήκει σέ κύκλο μέ διάμετρο τήν ΟΑ.

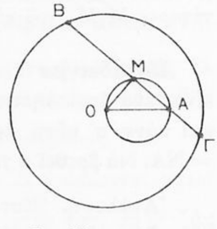
Διερεύνηση. i) Ἄν τό σημεῖο Α εἶναι ἔξω ἀπό τόν κύκλο (Ο,R), ὁ κύκλος μέ διάμετρο τήν ΟΑ τέμνει τόν κύκλο (Ο,R) σέ δύο σημεῖα M_1 καί M_2



Σχ. 37



Σχ. 38



Σχ. 39

(σχ. 37). Τά σημεῖα τοῦ ζητούμενου γ. τόπου πρέπει νά βρίσκονται μέσα στόν κύκλο, ἀφοῦ εἶναι τά μέσα χορδῶν του. Ἄρα αὐτά εἶναι σημεῖα τοῦ τόξου

$M_1\widehat{O}M_2$.

ii) Ἄν τό σημεῖο Α βρίσκεται πάνω στόν κύκλο (Ο,R) (σχ. 38) ἤ εἶναι μέσα στόν κύκλο (σχ. 39), ὅλα τά σημεῖα τοῦ κύκλου μέ διάμετρο τήν ΟΑ εἶναι ἐσωτερικά γιά τόν κύκλο (Ο,R), μέ ἐξαίρεση τό σημεῖο Α, ἄν αὐτό εἶναι πάνω στόν κύκλο (Ο,R), Ἄρα τά σημεῖα τοῦ τόπου ἀνήκουν στόν κύκλο μέ διάμετρο τήν ΟΑ.

Ἀντιστρόφως. Παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ν τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρο τήν ΟΑ, ἐσωτερικό ὅμως γιά τόν κύκλο (Ο,R). Φέρνουμε τή ΝΑ πού τέμνει τόν κύκλο (Ο,R) σέ δύο σημεῖα Β′ καί Γ′. Ἡ ΟΝ εἶναι κάθετη στή Β′Γ′, γιατί τό τρίγωνο ΟΝΑ, ἐπειδή εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ ἡμικύκλιο, εἶναι ὀρθογώνιο στό Ν. Τότε ὅμως τό Ν θά εἶναι τό μέσο τῆς χορδῆς Β′Γ′, γιατί ἡ κάθετος ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου στή χορδή Β′Γ′ περνάει ἀπό τό μέσο της.

Ἄρα ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι τό ἐσωτερικό [γιά τόν κύκλο (Ο,R)] τμῆμα τοῦ κύκλου μέ διάμετρο τήν ΟΑ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

46. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων πού ἀπέχουν σταθερή ἀπόσταση α ἀπό δεδομένη εὐθεία (ε).

47. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο δεδομένες παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2).

48. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, πού περνοῦν ἀπό δύο σταθερά σημεῖα Α καί Β.

49. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων πού ἐφάπτονται σέ ὁρισμένο σημεῖο Α μιᾶς γνωστῆς εὐθείας.

50. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν Α τῶν τριγώνων ΑΒΓ πού ἔχουν σταθερή κατά θέση καί μέγεθος βάση α καί σταθερή κατά μέγεθος διάμεσο μ_α.

51. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν κ. βάρους τῶν τριγώνων τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

52. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, πού σχηματίζονται, ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς βάσεως ΒΓ χαραχθοῦν παράλληλες πρός τίς δύο ἄλλες πλευρές του.

53. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων πού ἐφάπτονται στίς πλευρές μιᾶς δεδομένης γωνίας.

54. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν συμμετρικῶν γνωστοῦ σημείου Α ὡς πρός τίς εὐθεῖες πού περνοῦν ἀπό σταθερό σημεῖο Ο.

55. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἀπό τά ὁποῖα ἕνας κύκλος φαίνεται ὑπό δεδομένη γωνία ω.

56. Ἡ πλευρά ΒΓ ἑνός μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ διατηρεῖται σταθερή κατά θέση καί μέγεθος ἐνῶ ἡ γωνία του $\widehat{A}$ διατηρεῖται σταθερή μόνο κατά μέγεθος. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του.

57. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῶν χορδῶν δεδομένου κύκλου πού ἔχουν γνωστό μῆκος λ.

58. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί ἕνα σημεῖο Α. Ἄν Κ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου, νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΚ, ὅταν τό Κ διαγράφει τόν κύκλο.

Β΄.

59. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ = ΑΓ. Πάνω στίς πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ θεωροῦμε δύο σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΔ = ΓΕ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήμστος ΔΕ.

60. Δίνεται ἕνας κύκλος καί μιά διάμετρός του ΑΒ. Φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε χορδή ΑΓ καί στήν προέκτασή της παίρνουμε τμῆμα ΓΜ = ΓΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

61. Ἡ πλευρά α ἑνός μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερή κατά θέση καί μέγεθος, ἐνῶ ἡ γωνία του $\widehat{A}$ παραμένει σταθερή μόνο κατά μέγεθος. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου καθεμιᾶς ἀπό τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ.

62. Δίνεται εὐθεία (ε) καί δύο σταθερά σημεῖα της Α καί Β. Δύο μεταβλητοί κύκλοι ἐφάπτονται στήν (ε) στά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως καί μεταξύ τους στό σημεῖο Μ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

63. Δίνεται ἕνας κύκλος μέ κέντρο Ο καί μιά σταθερή διάμετρός του ΑΟΒ. Φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκτίνα ΟΓ καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τμῆμα ΟΜ = ΓΔ, ὅπου εἶναι ΓΔ ⊥ ΑΒ. Βά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γεωμετρικές κατασκευές

Α΄.

64. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του γ, $\widehat{B}$, δ_α.

65. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\widehat{B}$ καί τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.

66. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ καί τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του.

67. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\widehat{B}$, υ_β.

68. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Μ. Ἀπό τό Μ νά χαραχθεῖ εὐθεία, πού νά τέμνει τίς παράλληλες, ἔτσι ὥστε τό τμῆμα της μέσα στή ζώνη τῶν παραλλήλων νά ἔχει δεδομένο μῆκος λ.

69. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A}$, δ_α, υ_α.

70. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A} = 1L$, $\widehat{B}$ καί $\alpha - \gamma = \lambda$.

71. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{A} = 1L$, α καί $\beta + \gamma = \lambda$.

72. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{B}$, υ_α καί $\alpha + \beta = \lambda$.

73. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, υ_β καί $\beta + \gamma = \lambda$.

74. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Νά κατασκευαστεῖ εὐθεία παράλληλη πρός τή ΒΓ πού νά τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΔ = ΓΕ.

75. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\widehat{A} = \omega$ καί υ_β.

76. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, υ_β, υ_γ.

77. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, υ_α καί $\widehat{B} = \varphi$.

78. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, μ_α, υ_β.

79. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του $\widehat{B} = \varphi$, υ_α, μ_γ.

Β΄.

80. Νά κατασκευαστεῖ τό μέγιστο ἰσόπλευρο τρίγωνο, πού οἱ τρεῖς πλευρές του νά περνοῦν ἀπό τίς κορυφές γνωστοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

81. Ἀπό τό ἕνα ἀπό τά κοινά σημεῖα Α δύο τεμνόμενων κύκλων νά φέρετε εὐθεία, πού νά τέμνει τούς κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ, ἔτσι ὥστε τό τμῆμα ΒΓ νά ἔχει γνωστό μῆκος α.

82. Νά κατασκευαστεῖ τραπέζιο τοῦ ὁποίου δίνονται μία ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές, οἱ δύο διαγώνιοι καί ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

83. Νά κατασκευαστεῖ τραπέζιο τοῦ ὁποίου δίνονται μιά γωνία, οἱ δύο διαγώνιοι καί ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

Γεωμετρικοί τόποι

84. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο φέρνουμε μιά τέμνουσα ΑΒΓ τοῦ κύκλου καί ἀπό τό μέσο Ι τῆς χορδῆς ΒΓ φέρνουμε κάθετο στή χορδή καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τμῆμα ΙΜ = ΙΑ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

85. Δίνεται κύκλος καί σταθερή χορδή ΑΒ. Ἄν Γ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου, κατασκευάζουμε τό παραλληλόγραμμο ΓΑΒΔ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος α) τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου, β) τῆς τέταρτης κορυφῆς του Δ.

86. Ἡ πλευρά ΑΒ ἑνός μεταβλητοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διατηρεῖται σταθερή κατά θέση καί μέγεθος, ἐνῶ οἱ πλευρές ΑΔ καί ΒΓ καί ἡ διαγώνιος ΑΓ διατηροῦνται σταθερές μόνο κατά μέγεθος. Ζητεῖται νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου ΒΔ, καί ὁ γ. τόπος τοῦ τμήματος, πού ἔχει ἄκρα τά μέσα τῶν διαγωνίων.

87. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί μία σταθερή χορδή του ΑΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου καθεμιᾶς ἀπό τίς διαγωνίους τῶν τραπεζίων, πού εἶναι ἐγγεγραμμένα στόν κύκλο καί ἔχουν ὡς μεγαλύτερη βάση τή δεδομένη χορδή ΑΒ.

88. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1L$) σταθεροῦ μεγέθους, μεταβάλλει ὁμαλά τή θέση του στό ἐπίπεδό του, ἔτσι ὥστε οἱ κορυφές του Β καί Γ νά βρίσκονται πάνω σέ δύο κάθετες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) ἀντιστοίχως. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου.

89. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί μιά σταθερή διάμετρός του ΑΒ. Φέρνουμε μιά χορδή ΒΓ καί στήν προέκτασή της παίρνουμε τμῆμα ΓΔ = ΓΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν ΑΓ καί ΟΔ.

90. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Μέ κέντρο τήν κορυφή Α καί μέ μιά ἀκτίνα μικρότερη ἀπό τήν ΑΒ γράφουμε κύκλο, ἐνῶ ἀπό τά σημεῖα Β καί Γ φέρνουμε τίς μή συμμετρικές ἐφαπτόμενες, πού τέμνονται στό σημεῖο Μ. α) Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ. β) Πάνω στή ΜΒ παίρνουμε τμῆμα ΜΝ = ΜΓ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ν.

91. Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1L$). Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο τῆς ὑποτείνουσάς του ΒΓ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε κάθετο στήν ὑποτείνουσα, πού τέμνει τίς εὐθεῖες ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔΕ.

92. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί ἕνα σημεῖο του Α. Θεωροῦμε μιά τυχαία χορδή ΑΒ καί ἀπ' τό Ο φέρνουμε τήν παράλληλο τῆς ΑΒ, πού τέμνει τήν ἐφαπτομένη ἀπ' τό Β στό σημεῖο Μ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

ΒΙΒΛΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΕΤΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

9. Τά γεωμετρικά μεγέθη. Μέγεθος γενικά λέγεται καθετί, πού ἐπιδέχεται αὔξηση ἤ ἐλάττωση. Γεωμετρικά μεγέθη λέγονται τά μεγέθη, πού ἐξετάζονται ἀπό τή γεωμετρία. Τέτοια εἶναι τά εὐθύγραμμα τμήματα, οἱ γωνίες, τά κυκλικά τόξα, οἱ ἐπιφάνειες κλειστῶν ἐπίπεδων σχημάτων, οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν κ.ἄ.

Τά γεωμετρικά μεγέθη τά χωρίζουμε σέ κατηγορίες ἤ σύνολα ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ὅπως π.χ. τό σύνολο τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ἤ τό σύνολο τῶν τόξων ἴσων κύκλων κτλ.

Στά προηγούμενα ὁρίσαμε τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως στά σύνολα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, τῶν γωνιῶν καί τῶν τόξων ἴσων κύκλων, καθώς ἐπίσης τόν πολλαπλασιασμό καί τή διαίρεση μέ φυσικό ἀριθμό καί τόν πολλαπλασιασμό μέ ρητό. Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι καί τό γινόμενο γεωμετρικοῦ μεγέθους μέ ἄρρητο ἀριθμό ὑπάρχει καί εἶναι μέγεθος ὁμοειδές πρός τό ἀρχικό.

★ Πραγματικά, ἄν α εἶναι ἕνας ἄρρητος ἀριθμός, εἶναι γνωστό ὅτι αὐτός ἔχει ἕνα δεκαδικό ἀνάπτυγμα μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία, πού δέν ἐμφανίζουν καμιά περιοδικότητα. Ἔστω λοιπόν $\alpha = \Psi_0, \Psi_1\Psi_2\Psi_3 \ldots \Psi_\nu \ldots$ τό δεκαδικό ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ α, ὅπου Ψ_0 εἶναι οἱ ἀκέραιες μονάδες του καί $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$ τά ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ του ἀναπτύγματος. Κατασκευάζουμε τήν ἀκολουθία τῶν ρητῶν ἀριθμῶν

$$(1) \qquad \alpha_0 = \Psi_0,\ \alpha_1 = \Psi_0{,}\Psi_1,\ \alpha_2 = \Psi_0{,}\Psi_1\Psi_2, \ldots,\ \alpha_\nu = \Psi_0{,}\Psi_1\Psi_2\ldots\Psi_\nu, \ldots$$

Ἡ ἀκολουθία (1) τῶν ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνει στόν ἀριθμό α, δηλαδή εἶναι :

$$(2) \qquad \lim_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \alpha \qquad \text{(lim σημαίνει ὅριο).}$$

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι Α εἶναι ἕνα γεωμετρικό μέγεθος (π.χ. εὐθύγραμμο τμῆμα). Ἀπό τήν ἀκολουθία (1) κατασκευάζουμε τήν ἀκουλοθία :

$$(3) \qquad A \cdot \alpha_0,\ A \cdot \alpha_1,\ A \cdot \alpha_2, \ldots,\ A \cdot \alpha_\nu, \ldots$$

πού ἔχει ἔννοια ἀκολουθίας ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν.

Ἡ ἀκολουθία (3), ἐξαιτίας τῆς σχέσεως (2), ἀποδεικνύεται ὅτι συγκλίνει σέ ὁμοειδές μέγεθος πρός τό Α, πού συμβολίζεται μέ $A \cdot \alpha$ καί λέγεται γινόμενο τοῦ γεωμετρικοῦ μεγέθους Α μέ τόν ἄρρητο ἀριθμό α.

Παράδειγμα. Ἔστω Α ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα καί $\alpha = \sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ ἕνας ἄρρητος ἀριθμός. Κατασκευάζουμε τήν ἀκολουθία

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 1{,}4,\ \alpha_2 = 1{,}41,\ \alpha_3 = 1{,}414,\ \alpha_4 = 1{,}4142,\ \alpha_4 = 1{,}41421\ldots$$

πού συγκλίνει στόν ἀριθμό $\sqrt{2}$ καί ἔπειτα κατασκευάζουμε τήν ἀκολουθία εὐθύγραμμων τμημάτων.

$$A \cdot 1,\ A \cdot 1{,}4,\ A \cdot 1{,}41,\ A \cdot 1{,}414,\ A \cdot 1{,}4142,\ A \cdot 1{,}41421, \ldots$$

πού συγκλίνει στό εὐθύγραμμο τμῆμα $A \cdot \sqrt{2}$.

10. Λόγος ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὁμοειδή γεωμετρικά μεγέθη Α καί Β, ὅπου τό Α δέν εἶναι μηδενικό. Μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι (βλέπε παρακάτω ἀπόδειξη γιά τά εὐθύγραμμα τμήματα) πάντοτε ὑπάρχει μή ἀρνητικός ἀριθμός ρ, τέτοιος ὥστε νά εἶναι $A\rho = B$. Ὁ ἀριθμός ρ λέγεται **λόγος** τοῦ μεγέθους Β πρός τό ὁμοειδές μέγεθος Α καί γράφουμε

$$\rho = \frac{B}{A}.$$

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ὁ ἀριθμός μέ τόν ὁποῖο πρέπει νά πολλαπλασιάσουμε τό ἕνα ἀπ' αὐτά γιά νά πάρουμε τό ἄλλο.

★ **Ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδη. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο μή μηδενικά εὐθύγραμμα τμήματα τέτοια ὥστε $A < B$, ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός ν, τέτοιος ὥστε νά εἶναι $\nu A > B$.**

Τό ἀξίωμα αὐτό, πού μπορεῖ νά γενικευθεῖ καί γιά ὁποιαδήποτε ὁμοειδή γεωμετρικά μεγέθη στά ὁποῖα ἔχει ὁριστεῖ ἡ σχέση διατάξεως, διατυπώνεται καί ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀκολουθία τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων $A, 2A, 3A, \ldots, \nu A \ldots$ εἶναι αὔξουσα καί μή φραγμένη.

Θεώρημα. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα ὅπου τό Α δέν εἶναι μηδενικό, ὑπάρχει πάντοτε ἕνας πραγματικός καί μή ἀρνητικός ἀριθμός ρ, τέτοιος ὥστε νά εἶναι $A \cdot \rho = B$.

Ἀπόδειξη. i) Ἔστω ὅτι τό τμῆμα Β εἶναι μηδενικό, δηλαδή $B = 0$. Τότε θά εἶναι $A \cdot 0 = 0$, ἄρα τό θεώρημα ἰσχύει γιά $\rho = 0$.

ii) Ἄν $A = B$, τότε θά εἶναι $A \cdot 1 = B$, δηλαδή τό θεώρημα ἰσχύει γιά $\rho = 1$.

iii) Ἔστω $A < B$. Κατασκευάζουμε τήν ἀκολουθία τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων

(1) $$A, 2A, 3A, \ldots, \nu A, \ldots$$

ἡ ὁποία, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο ἀξίωμα, εἶναι αὔξουσα καί μή φραγμένη. Ἄρα ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός k, τέτοιος ὥστε νά εἶναι:

$$k \cdot A \leqq B < (k+1)A.$$

α) Ἄν στήν προηγούμενη σχέση ἰσχύει τό =, τότε αὐτή γράφεται $k \cdot A = B$, δηλαδή τό θεώρημα ἰσχύει γιά $\rho = k$.

β) Ἄν εἶναι $k \cdot A < B < (k+1)A$, δηλαδή ἄν τό Β περιέχεται στό ἀνοιχτό διάστημα $(k \cdot A, (k+1)A)$, τό ὁποῖο ἔχει πλάτος Α, τότε διχοτομοῦμε τό διάστημα αὐτό καί παίρνουμε τά δύο διαστήματα:

(2) $$\left((k \cdot A,\ k \cdot A + \frac{A}{2}\right), \qquad \left(k \cdot A + \frac{A}{2} \quad (k+1)A\right)$$

πού τό καθένα τους ἔχει πλάτος $\frac{A}{2}$. Δύο εἶναι τά πιθανά ἐνδεχόμενα, δηλαδή:

α_1) Τό τμῆμα Β συμπίπτει μέ τό $k \cdot A + \frac{A}{2}$, δηλαδή $B = k \cdot A + \frac{A}{2}$ ἤ $B = \frac{2k+1}{2} \cdot A$, ὁπότε τό θεώρημα ἰσχύει γιά $\rho = \frac{2k+1}{2}$.

β_1) Τό τμῆμα Β περιέχεται σέ ἕνα ἀπό τά δύο διαστήματα (2), ἔστω στό πρῶτο. Τότε διχοτομοῦμε πάλι αὐτό καί παίρνουμε δύο διαστήματα :

$$(3) \qquad \left(k \cdot A,\ k \cdot A + \frac{A}{4}\right), \qquad \left(k \cdot A + \frac{A}{4},\ k \cdot A + \frac{A}{2}\right)$$

πού τό καθένα ἔχει πλάτος $\frac{A}{4} = \frac{A}{2^2}$.

Ὅπως καί προηγουμένως, δύο εἶναι τά πιθανά ἐνδεχόμενα, δηλαδή :

α_2) Τό τμῆμα Β συμπίπτει μέ τό τμῆμα $k \cdot A + \frac{A}{4}$, δηλαδή εἶναι $B = k \cdot A + \frac{A}{4}$ ἤ $B = \frac{4k+1}{4} \cdot A$. Τότε τό θεώρημα ἰσχύει γιά $\rho = \frac{4k+1}{4}$.

β_2) Τό τμῆμα Β περιέχεται σέ ἕνα ἀπό τά διαστήματα (3). Τότε διχοτομοῦμε πάλι τό διάστημα, στό ὁποῖο περιέχεται τό Β, καί παίρνουμε δύο διαστήματα μέ πλάτος $\frac{A}{8} = \frac{A}{2^3}$ κ.ο.κ.

Ἡ ἴδια σκέψη ἄν ἐπαναληφθεῖ ν φορές, θά περιορίσει τό τμῆμα Β μεταξύ δύο διαστημάτων μέ διαφορά πλάτους $A/2^\nu$, ἄν στό μεταξύ τό Β δέν ἔχει συμπέσει μ' ἕνα ἀπό τά σημεῖα πού διχοτομοῦν τά προηγούμενα διαστήματα. Τότε, ὅταν τό ν τείνει στό ἄπειρο, διαπιστώνουμε ὅτι τό τμῆμα Β περιορίζεται μεταξύ δύο διαστημάτων (τμημάτων) μέ διαφορά μηδενικοῦ πλάτους. Ἄρα τό Β συμπίπτει μέ τά ταυτιζόμενα ἄκρα τοῦ μηδενικοῦ αὐτοῦ διαστήματος, τά ὁποῖα ὁπωσδήποτε ἐκφράζονται ἀπ' τό στοιχεῖο Α, πού πολλαπλασιάζεται μέ κάποιον ἀριθμητικό συντελεστή. Αὐτός ἀκριβῶς ὁ συντελεστής εἶναι ὁ ἀριθμός ρ.

11. Μέτρο τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὁμοειδή γεωμετρικά μεγέθη Α καί Μ. Μέτρο τοῦ μεγέθους Α μέ μονάδα μετρήσεως τό μέγεθος Μ ὀνομάζουμε τό λόγο

$$(1) \qquad \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\rho}$$

τοῦ μεγέθους Α πρός τό ὁμοειδές μέγεθος Μ. Ἄρα τό μέτρο ρ ἑνός γεωμετρικοῦ μεγέθους εἶναι πραγματικός καί μή ἀρνητικός ἀριθμός, πού ἐκφράζει τή σχέση τοῦ μεγέθους Α πρός τή μονάδα μετρήσεως Μ. Πραγματικά ἀπό τή σχέση (1) παίρνουμε $A = \rho M$, ἀπό τήν ὁποία γίνεται φανερό ὅτι μέ τήν ἐπανάληψη ρ φορές τῆς μονάδας μετρήσεως Μ παίρνουμε τό Α.

Ἡ ἐκλογή τῆς μονάδας μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετη.

12. Μονάδες μετρήσεως τῶν μέχρι τώρα γνωστῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Οἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ὅπως ἀναφέραμε προηγουμένως, πάρθηκαν αὐθαίρετα, πάντως εἶναι καθορισμένες καί διεθνῶς παραδεκτές.

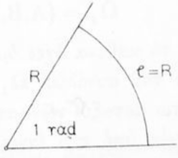
Γιά τή μέτρηση τοῦ μήκους χρησιμοποιεῖται τό μέτρο (σύμβολο 1 m). Αὐτό εἶναι ἡ ἀπόσταση μεταξύ δύο χαραγῶν πάνω σ' ἕναν κανόνα ἀπό ἰριδιοῦχο λευκόχρυσο, πού φυλάγεται στό διεθνές γραφεῖο μέτρων καί σταθμῶν στίς Sèvres τῆς Γαλλίας. Ἡ μονάδα αὐτή τοῦ μήκους λέγεται πώς εἶναι τό 1/40 000 000 τοῦ μήκους τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς. Ἀλλά στήν 11η διεθνή συνδιάσκεψη γιά τό μέτρο, πού ἔγινε τό 1960, ἀποφασίστηκε νά προσδιορίζεται τό μῆκος του σύμφωνα μέ ὁρισμένο μῆκος κύματος φωτός, πού παραμένει σταθερό, ἐνῶ ὁ μεταλλικός κανόνας ἐπηρεάζεται ἀπό τίς θερμοκρασίες τοῦ περιβάλλοντος. Ἔτσι τό μέτρο ἀντιστοιχεῖ σέ 1.650.763,73 μήκη κύματος σέ κενό τῆς πορτοκαλόχρωμης γραμμῆς τοῦ ἰσότοπου 86 τοῦ στοιχείου «κρυπτόν».

Ἐκτός ἀπό τό μέτρο, πού εἶναι ἡ βασική μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους, χρησιμοποιοῦνται τά πολλαπλάσια καί ὑποπολλαπλάσιά του, ἀπό τά ὁποῖα τά κυριότερα εἶναι τό χιλιόμετρο 1 km = 1000 m, τό ἑκατοστόμετρο 1 cm = $\frac{1}{100}$ m, τό χιλιοστόμετρο 1 mm = $\frac{1}{1000}$ m.

Γιά τή μέτρηση τῶν γωνιῶν ἔχουμε τίς ἀκόλουθες μονάδες :

i) **Ἡ μοίρα** (σύμβολο 1°). Εἶναι ἴση μέ τό 1/360 τῆς πλήρους γωνίας (1 πλήρης γωνία = $4^{\llcorner}$). Ἡ μοίρα ὑποδιαιρεῖται σέ 60 πρῶτα λεπτά (60′) καί τό κάθε λεπτό σέ 60 δεύτερα (60″).

ii) **Ὁ βαθμός** (σύμβολο 1^{g}). Εἶναι τό 1/400 τῆς πλήρους γωνίας καί ὑποδιαιρεῖται κατά τό δεκαδικό σύστημα.



Σχ. 40

iii) **Τό ἀκτίνιο** (σύμβολο 1 rad). Εἶναι ἐκείνη ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἄν καταστεῖ ἐπίκεντρη, δέχεται τόξο πού τό μῆκος του l εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος R τῆς ἀκτίνας μέ τήν ὁποία γράφτηκε (σχ. 40).

Σέ ἄλλο κεφάλαιο θά ἀποδειχθεῖ ὅτι μιά πλήρης γωνία ἔχει 2π ἀκτίνια, ὅπου π = 3,14159. . . εἶναι ἀριθμός ἀσύμμετρος. Τό ἀκτίνιο ὑποδιαιρεῖται κατά τό δεκαδικό σύστημα καί εἶναι περίπου ἴσο μέ $57^{\circ}\ 17'\ 44', 8$.

Ἀντίστοιχα πρός τίς μονάδες μετρήσεως τῶν γωνιῶν ὁρίζονται καί οἱ μονάδες μετρήσεως τῶν τόξων ἴσων κύκλων δηλαδή :

i) **Ἡ μοίρα,** ἴση μέ τό 1/360 τοῦ κύκλου.

ii) **Ὁ βαθμός,** ἴσος μέ τό 1/400 τοῦ κύκλου.

iii) **Τό ἀκτίνιο,** ἴσο μέ τό 1/2π τοῦ κύκλου.

13. Σύμμετρα γεωμετρικά μεγέθη ὀνομάζονται δύο ὁμοειδή γεωμετρικά μεγέθη Α καί Β, ἄν εἶναι πολλαπλάσια ἑνός ὁμοειδοῦς πρός αὐτά μεγέθους Γ. Δηλαδή ἄν εἶναι :

$$A = \mu \cdot \Gamma \quad \text{καί} \quad B = \nu \cdot \Gamma$$

ὅπου οἱ ἀριθμοί μ καί ν εἶναι ἀκέραιοι.

Τότε λέμε ὅτι τά μεγέθη A καί B ἔχουν **κοινό μέτρο** καί ἐννοοῦμε ὅτι τά μέτρα τῶν A καί B μέ μονάδα μετρήσεως τό ὁμοειδές μέγεθος Γ εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί μ καί ν.

14. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους, ὅταν αὐτά μετρηθοῦν μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως.

'Απόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὁμοειδῆ γεωμετρικά μεγέθη A καί B, πού τά μέτρα τους εἶναι α καί β, ὅταν αὐτά μετρηθοῦν μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως M. Τότε θά εἶναι $A = \alpha M$, $B = \beta M$, ὁπότε $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\alpha M}{\beta M} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{M}{M} =$ $= \dfrac{\alpha}{\beta}$, γιατί εἶναι $\dfrac{M}{M} = 1$. Ἄρα $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

15. 'Αναλογίες καί ἰδιότητές τους. Ἄς θεωρήσουμε δύο σύνολα γεωμετρικῶν μεγεθῶν.

$$\Omega_1 = \{A, B, \Gamma, \ldots, X, \ldots\} \quad \text{καί} \quad \Omega_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi, \ldots\}$$

πού τό καθένα ἔχει ὁμοειδῆ γεωμετρικά μεγέθη, χωρίς ἀναγκαστικά τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_1 νά εἶναι ὁμοειδῆ πρός τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ω_2. Ἔστω μεταξύ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ὑπό τήν ἔννοια

$$\begin{array}{cccc} A, & B, & \Gamma, \ldots & X \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha, & \beta, & \gamma, \ldots & \chi \ldots \end{array}$$

(π.χ. ἐπίκεντρες γωνίες καί ἀντίστοιχα πρός αὐτές τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου). Τήν ἀντιστοιχία αὐτή θά τή λέμε **ἀναλογία**, τότε καί μόνο τότε, ὅταν ὁ λόγος $\dfrac{A}{B}$ δύο ὁποιωνδήποτε στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathbf{\Omega_1}$ εἶναι ἴσος μέ τό λόγο $\dfrac{\alpha}{\beta}$ τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathbf{\Omega_2}$, δηλαδή ὅταν εἶναι:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}. \tag{1}$$

Στή σχέση αὐτή τά γεωμετρικά στοιχεῖα A, B καί α, β λέγονται **ὅροι** τῆς ἀναλογίας. Τά A καί β λέγονται **ἄκροι ὅροι** καί τά B καί α **μέσοι ὅροι.**

Ἡ σχέση (1) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἰσότητα ἀριθμητικῶν κλασμάτων (§ 14) καί συνεπῶς ἄν ἀντί γιά τά μεγέθη χρησιμοποιήσουμε τά μέτρα τους, τότε ἰσχύουν οἱ γνωστές ἀπό τήν Ἄλγεβρα ἰδιότητες τῶν ἴσων κλασμάτων. 'Από αὐτές ὑπενθυμίζουμε τίς σπουδαιότερες, πού εἶναι οἱ ἑξῆς:

i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$

ii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

iii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$

iv) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \ldots + \kappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda}$.

Παρατήρηση. Ἄν στίς προηγούμενες ἀναλογίες ἀντί γιά τά μέτρα τους θεωρήσουμε τά ἴδια τά γεωμετρικά μεγέθη πρέπει νά προσέξουμε στίς ἰδιότητες, ἔτσι ὥστε, ὅπου ὑπάρχουν ἀθροίσματα (ἤ διαφορές), οἱ προσθετέοι νά εἶναι γεωμετρικά στοιχεῖα τοῦ ἴδιου συνόλου, γιά νά ἔχουν νόημα οἱ πράξεις.

16. Μέση ἀνάλογος δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν A καί B ὀνομάζεται ἕνα ὁμοειδές πρός αὐτά μέγεθος M, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{B}} \Longleftrightarrow \mathbf{M}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Τότε ἡ ἀναλογία λέγεται καί συνεχής.

17. Τέταρτη ἀνάλογος τριῶν ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν A, B, καί Γ λέγεται ἕνα ὁμοειδές πρός αὐτά γεωμετρικό μέγεθος T, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{T}$$

(Τό T ἔχει τήν τέταρτη θέση στήν ἀναλογία).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

93. Ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\frac{3\alpha + 2\beta}{\beta} = \frac{3\gamma + 2\delta}{\delta}$. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\beta} = \frac{\kappa\gamma + \lambda\delta}{\delta}$ ὅπου κ, λ ἀριθμητικοί συντελεστές.

94. Ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νά ἀποδειχτεῖ ὅτι: $\frac{3\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\mu\alpha + \nu\beta} = \frac{\kappa\gamma + \lambda\delta}{\mu\gamma + \nu\delta}$, ὅπου κ, λ, μ, ν, ἀριθμητικοί συντελεστές.

95. Ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

96. Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 1, 2, 4 νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 7.

97. Ἄν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\frac{5\alpha_1 - 7\beta_1 + 3\gamma_1}{5\alpha_2 - 7\beta_2 + 3\gamma_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

98. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν εἶναι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \ldots = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ τότε $\frac{\kappa\alpha_1 + \lambda\beta_1 + \ldots + \nu\rho_1}{\kappa\alpha_2 + \lambda\beta_2 + \ldots + \nu\rho_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ὅπου κ, λ, . . ., ν ἀριθμητικοί συντνεστές.

99. Ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι : $\frac{\alpha}{\delta} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ (*)

18. Θεώρημα. Ἄν δύο εὐθεῖες (ε) καί (ε′) τέμνονται ἀπό τρεῖς τουλάχιστο παράλληλες εὐθεῖες, τά τμήματα τῆς (ε) πού περιέχονται μεταξύ τῶν παραλλήλων εἶναι ἀνάλογα πρός τά ἀντίστοιχα τμήματα τῆς (ε′) πού περιέχονται μεταξύ τῶν ἴδιων παραλλήλων.

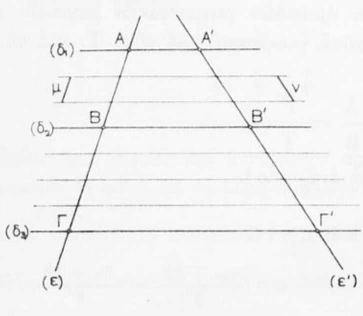
Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες (ε) καί (ε′) τοῦ ἐπιπέδου πού τέμνονται ἀπό τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες (δ_1), (δ_2) καί (δ_3) στά σημεῖα Α καί Α′, Β καί Β′, Γ καί Γ′ (σχ. 41). Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}.$$

i) Ἄν τά τμήματα ΑΒ καί ΒΓ πάνω στήν εὐθεία (ε) εἶναι σύμμετρα, ὑπάρχει εὐθύγραμμο τμῆμα μ καί δύο φυσικοί ἀριθμοί k καί λ τέτοιοι ὥστε νά εἶναι:

(1) $AB = k\mu$ καί $B\Gamma = \lambda\mu$.

Διαιροῦμε τό τμῆμα ΑΒ σέ k τμήματα ἴσα μέ τό μ καί τό ΒΓ σέ λ τμήματα ἴσα μέ τό μ. Ἀπό τά διαιρετικά σημεῖα φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς δεδομένες παράλληλες. Αὐτές τέμνουν τήν εὐθεία (ε′) καί ὁρίζουν πάνω σ' αὐτή k + λ ἴσα τμήματα πού τό μῆκος τοῦ καθενός ἄς εἶναι ν. Τότε θά εἶναι :



Σχ. 41

(2) $A'B' = k\nu$ καί $B'\Gamma' = \lambda\nu$.

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε :

(*) Θαλῆς (ὁ Μιλήσιος, ΣΤ′ π.χ. αἰώνας). Πῆγε στήν Αἴγυπτο καί μέτρησε τό ὕψος τῶν πυραμίδων ἀπό τή σκιά τους. Φέρνει τή γεωμετρία στήν Ἑλλάδα, ἱδρύει στή Μίλητο τήν Ἰωνική Σχολή καί πλουτίζει τήν ἐπιστήμη μέ πολλά θεωρήματα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας καί τῶν ὅμοιων τριγώνων μέ βάση τό σπουδαιότερο θεώρημα τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς γεωμετρίας, τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ.

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{k\mu}{\lambda\mu}=\frac{k}{\lambda} \quad \text{καί} \quad \frac{A'B'}{B'\Gamma'}=\frac{k\nu}{\lambda\nu}=\frac{k}{\lambda}.$$

Ἄρα ἀποδείχθηκε ὅτι:

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{B\Gamma}}=\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{B'\Gamma'}}.$$

ii) Ἄν τά τμήματα AB καί BΓ εἶναι ἀσύμμετρα, ὁ λόγος $\frac{AB}{B\Gamma}$ θά εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός καί ἡ προσεγγιστική τιμή του ὁποιασδήποτε τάξεως, πού θά εἶναι ρητός ἀριθμός, θά εἶναι ἴση μέ τήν προσεγγιστική τιμή τοῦ λόγου $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ τῆς ἴδιας τάξεως. Παίρνουμε τά ὅρια τῶν ἴσων λόγων, ὅταν ἡ προσέγγιση γίνει ἄπειρης τάξεως, ὁπότε θά ἔχουμε τήν ἀκριβή τιμή τῶν λόγων αὐτῶν, καί βρίσκουμε :

(3) $$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{B\Gamma}}=\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{B'\Gamma'}}.$$

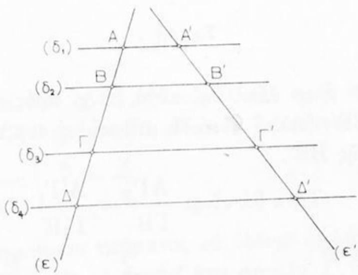
iii) Ἄν οἱ εὐθεῖες (ε) καί (ε΄) τέμνονται ἀπό τέσσερις παράλληλες εὐθεῖες $(\delta_1)//(\delta_2)//(\delta_3)//(\delta_4)$ στά σημεῖα A καί A′, B καί B′, Γ καί Γ′, Δ καί Δ′ ἀντιστοίχως (σχ. 42), τότε θά εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'} \quad \text{καί} \quad \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}.$$

Πολλαπλασιάζουμε αὐτές τίς σχέσεις κατά μέλη καί ἔχουμε :

$$\frac{AB}{B\Gamma}\cdot\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}\cdot\frac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}.$$ Ἄρα

εἶναι : $$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{\Gamma\Delta}}=\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{\Gamma'\Delta'}}.$$



Σχ. 42

Παρατήρηση. Ἀπό τήν ἀναλογία (3) παίρνουμε :

$$\frac{AB+B\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A'B'+B'\Gamma'}{B'\Gamma'} \quad \text{ἤ} \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{A'\Gamma'}{B'\Gamma'}.$$

Μέ ἴδιο τρόπο βρίσκουμε $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{A'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'}$, $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{A'\Delta'}{A'B'}$ καί γενικά ὁποιαδήποτε τμήματα πού ὁρίζονται ἀπό τίς παράλληλες πάνω στήν εὐθεία (ε), εἶναι ἀνάλογα πρός τά ἀντίστοιχα τμήματα τῆς εὐθείας (ε΄).

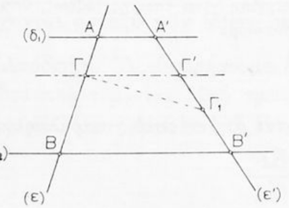
19. Θεώρημα (ἀντίστροφο τοῦ προηγούμενου). Ἄς θεωρήσουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες $(\delta_1)//(\delta_2)$ καί δύο ἄλλες εὐθεῖες (ε) καί (ε΄) πού τέμνουν τίς παράλληλες στά σημεῖα A καί A΄, B καί B΄ ἀντιστοίχως. Ἄν Γ

καί Γ′ εἶναι σημεῖα τῶν τμημάτων ΑΒ καί Α′Β′ ἀντιστοίχως τέτοια, ὥστε νά εἶναι

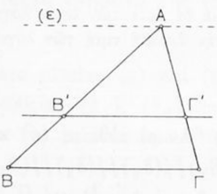
$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma B}} = \frac{\mathrm{A'\Gamma'}}{\mathrm{\Gamma'B'}},$$

τότε ἡ εὐθεία ΓΓ′ εἶναι παράλληλη πρός τίς (δ_1) καί (δ_2).

Ἀπόδειξη. Ἄν ἡ ΓΓ′ δέν εἶναι παράλληλη πρός τίς (δ_1) καί (δ_2), φέρνουμε ἀπό τό Γ τήν παράλληλη πρός αὐτές, πού τέμνει τό τμῆμα Α′Β′ στό σημεῖο π.χ. Γ_1 (σχ. 43). Τό Γ_1 θά εἶναι σημεῖο τοῦ τμήματος Α′Β′, γιατί



Σχ. 43



Σχ. 44

ἄν ἦταν ἔξω ἀπ' αὐτό, π.χ. πρός τό μέρος τοῦ Β′, ἡ $\Gamma\Gamma_1$ θά ἔτεμνε τή ΒΒ′. Ἀλλά αὐτό δέ μπορεῖ νά συμβαίνει γιατί ἡ $\Gamma\Gamma_1$ θεωρήθηκε παράλληλη τῆς ΒΒ′.

Τότε θά εἶναι $\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma B}} = \dfrac{\mathrm{A'\Gamma_1}}{\mathrm{\Gamma_1 B'}}$. Ἀπό τή σχέση αὐτή καί τή δεδομένη παίρνουμε:

$$\frac{\mathrm{A'\Gamma'}}{\mathrm{\Gamma'B'}} = \frac{\mathrm{A'\Gamma_1}}{\mathrm{\Gamma_1B'}} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\mathrm{A'\Gamma'} + \mathrm{\Gamma'B'}}{\mathrm{\Gamma'B'}} = \frac{\mathrm{A'\Gamma_1} + \mathrm{\Gamma_1B'}}{\mathrm{\Gamma_1B'}} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{\Gamma'B'}} = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{\Gamma_1B'}}.$$

Ἄρα $\mathrm{\Gamma'B'} = \mathrm{\Gamma_1B'}$ κι ἑπομένως τό Γ′ ταυτίζεται μέ τό Γ_1. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο γιατί τά Γ′ καί Γ_1 τά ὑποθέσαμε διαφορετικά σημεῖα. Ἑπομένως πρέπει νά εἶναι ἡ ΓΓ′ παράλληλη πρός τίς (δ_1) καί (δ_2).

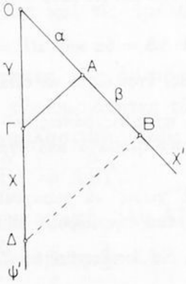
Πόρισμα. Ἄν μιά εὐθεία παράλληλη πρός τή βάση ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Β′ καί Γ′ ἀντιστοίχως, τότε εἶναι $\dfrac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{B'B}} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma'}}{\mathrm{\Gamma'\Gamma}}$ καί ἀντιστρόφως.

Πραγματικά, ἀρκεῖ νά θεωρήσουμε μία εὐθεία (ε) παράλληλη πρός τή ΒΓ ἀπό τήν κορυφή Α καί νά ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ γιά τίς παράλληλες (ε)//Β′Γ′//ΒΓ, πού τέμνονται ἀπό τίς ΑΒ καί ΑΓ (σχ. 44). Ἀπό τήν προηγούμενη ἀναλογία βρίσκουμε καί τήν $\dfrac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma'}}{\mathrm{A\Gamma}}$.

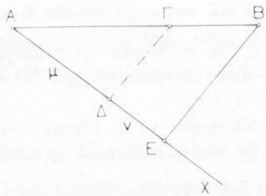
20. Πρόβλημα 1. Κατασκευή τέταρτης ἀναλόγου. Ἂν δοθοῦν τρία εὐθύγραμμα τμήματα α, β καί γ, νά κατασκευαστεῖ τμῆμα x πού νά τό συνδέει μέ τά δεδομένα τμήματα ἡ σχέση :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}.$$

Λύση. Ἔστω μιά γωνία $x'\widehat{O}y'$. Πάνω στή μιά πλευρά της Ox' παίρνουμε διαδοχικά τά τμήματα $OA = \alpha$, $AB = \beta$ καί πάνω στήν Oy' τό τμῆμα $O\Gamma = \gamma$



Σχ. 45



Σχ. 46

(σχ. 45). Ἔπειτα φέρνουμε τήν ΑΓ καί ἀπό τό Β τήν παράλληλο πρός τήν ΑΓ, πού τέμνει τήν Oy' στό σημεῖο Δ. Τό τμῆμα ΓΔ εἶναι τό ζητούμενο x, γιατί κατά τό προηγούμενο πόρισμα εἶναι : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.

21. Πρόβλημα 2. Διαίρεση εὐθύγραμμου τμήματος σέ δεδομένο λόγο. Πάνω σ' ἕνα δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Γ (ἐνδιάμεσο τῶν Α καί Β), τέτοιο ὥστε νά εἶναι :

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu}$$

ὅπου μ/ν εἶναι γνωστός λόγος.

Λύση. Ἀπό τό Α φέρνουμε μιά ἡμιευθεία Αx. Πάνω σ' αὐτήν παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα $A\Delta = \mu$ καί $\Delta E = \nu$ (σχ. 46). Φέρνουμε τήν ΕΒ καί ἀπό τό Δ τήν παράλληλο πρός τήν ΕΒ, πού τέμνει τήν ΑΒ στό σημεῖο Γ. Τό σημεῖο Γ εἶναι τό ζητούμενο, γιατί $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{A\Delta}{\Delta E} = \frac{\mu}{\nu}$.

Παρατήρηση. Μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ ὁ λόγος δύο εὐθύγραμμων τμημάτων, πού βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία μπορεῖ νά μεταφερθεῖ μέ παράλληλες εὐθεῖες στό λόγο ἀντίστοιχων πρός αὐτά εὐθύγραμμων τμημάτων πάνω σέ ὁποιαδήποτε ἄλλη εὐθεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

100. Τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3) ἀπέχουν : οἱ δύο πρῶτες μεταξύ τους ἀπόσταση 2α καί ἡ δεύτερη ἀπό τήν τρίτη ἀπόσταση 5α. Μιά ἄλλη εὐθεία τίς τέμνει στά σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως καί εἶναι $ΑΒ = 3\alpha$. Νά ὑπολογιστεῖ τό τμῆμα ΒΓ.

101. Ἄν στίς εὐθεῖες τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως εἶναι $ΑΓ = 21\alpha$, νά ὑπολογιστεῖ τό τμῆμα ΒΓ.

102. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει $ΑΒ = 9\lambda$ καί $ΑΓ = 15\lambda$. Ἀπό τό κέντρο βάρους του Κ φέρνουμε εὐθεία παράλληλη πρός τή ΒΓ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Νά ὑπολογιστοῦν τά τμήματα ΑΔ καί ΓΕ.

103. Δίνεται ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) μέ $ΑΔ = 6\alpha$ καί $ΒΓ = 4\alpha$. Πάνω στίς ΑΔ καί ΒΓ παίρνουμε σημεῖα Ε καί Ζ ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $ΑΕ = \frac{3\alpha}{2}$ καί $ΒΖ = \alpha$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

104. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ νά διαιρεθεῖ σέ τρία τμήματα ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 1, 3, 5.

105. Νά βρεθεῖ τό κ. βάρους ἑνός τριγώνου ΑΒΓ χωρίς νά χαραχθεῖ διάμεσος.

106. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ εὐθεία, πού ὁρίζεται ἀπό τήν κορυφή Β καί ἀπό τό μέσο Ε τῆς διαμέσου ΑΔ, τέμνει τήν ΑΓ στό σημεῖο Ζ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\frac{ΖΑ}{ΖΓ} = \frac{1}{2}$.

107. Μία εὐθεία παράλληλη πρός τή διάμεσο ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τίς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ στά σημεῖα Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΑΗ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

108. Ἀπό τό μέσο Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε μιά εὐθεία, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΖΑ}{ΖΓ}$.

109. Ἀπό ἕνα σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΔΕ//ΒΓ. Ἀπό τό Ε φέρνουμε ΕΖ//ΑΒ καί ἀπό τό Ζ τή ΖΗ//ΓΑ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΗΒ}{ΗΑ}$.

110. Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἡ παράλληλος πρός τή ΒΓ ἀπό τό Α τέμνει τή ΒΔ στό Ε καί ἡ παράλληλος πρός τή ΔΓ ἀπό τό Ε τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΒΖ//ΑΔ.

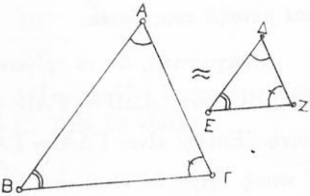
ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

22. Ὁρισμός. Δύο τρίγωνα λέγονται ὅμοια, ὅταν εἶναι ἰσογώνια, δηλαδή ὅταν ἔχουν τίς γωνίες τους ἴσες μία πρός μία.

Ἡ σχέση τῆς ὁμοιότητας δύο τριγώνων ΑΒΓ καί ΔΕΖ πού ἔχουν $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$, $\widehat{Β} = \widehat{Ε}$ καί $\widehat{Γ} = \widehat{Ζ}$ (σχ. 47) συμβολίζεται μέ

$$(1) \qquad \overset{\Delta}{ΑΒΓ} \approx \overset{\Delta}{ΔΕΖ}.$$

Ὁμόλογες πλευρές δύο ὅμοιων τριγώνων λέγονται αὐτές, πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες γωνίες. Στά προηγούμενα ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ τά τρία ζεύγη ὁμόλογων πλευρῶν εἶναι τά (ΑΒ, ΔΕ), (ΒΓ, ΕΖ) καί (ΓΑ, ΖΔ). Χρήσιμο εἶναι στή συμβολική ἀναγραφή (1) δύο ὅμοιων τριγώνων οἱ κορυφές, στίς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν ἴσες γωνίες, νά ἀναγράφονται μέ τήν ἴδια σειρά. Ἔτσι, ἀπό τή σχέση (1) καί μόνο χωρίς νά ἀνατρέξουμε στό σχῆμα, μποροῦμε νά διακρίνουμε τίς ἴσες γωνίες τῶν δύο τριγώνων καθώς καί τίς ὁμόλογες πλευρές τους.



Σχ. 47

Ἰδιότητες τῆς ὁμοιότητας. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁμοιότητας τῶν τριγώνων προκύπτουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

i) **Ἀνακλαστική.** Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὅμοιο πρός τόν ἑαυτό του, δηλαδή $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

ii) **Συμμετρική.** Ἄν $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$, τότε θά εἶναι καί $\overset{\Delta}{\Delta EZ} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

iii) **Μεταβατική.** Ἄν $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$ καί $\overset{\Delta}{\Delta EZ} \approx \overset{\Delta}{H\Theta I}$, τότε θά εἶναι καί $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{H\Theta I}$.

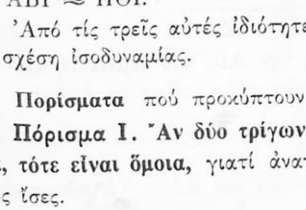
Ἀπό τίς τρεῖς αὐτές ἰδιότητες ἡ σχέση τῆς ὁμοιότητας χαρακτηρίζεται ὡς σχέση ἰσοδυναμίας.

Πορίσματα πού προκύπτουν ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁμοιότητας:

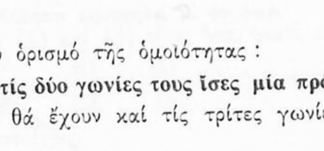
Πόρισμα I. Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν τίς δύο γωνίες τους ἴσες μία πρός μία, τότε εἶναι ὅμοια, γιατί ἀναγκαστικά θά ἔχουν καί τίς τρίτες γωνίες τους ἴσες.

Πόρισμα II. Ἄν ἡ μία ὀξεία γωνία ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἴση μέ τή μία ὀξεία γωνία ἑνός ἄλλου ὀρθογώνιου τριγώνου, τά τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα III. Ἄν δύο ἰσοσκελή τρίγωνα ἔχουν τίς γωνίες τῶν κορυφῶν τῶν ἴσων πλευρῶν τους ἴσες, ἤ μία ἀπό τίς γωνίες τῶν βάσεων τους ἴσες, τά τρίγωνα εἶναι ὅμοια (σχ. 48).



Σχ. 48



Σχ. 49

Πόρισμα IV. Τό ὕψος πρός τήν ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου χωρίζει τό τρίγωνο σέ δύο ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα ὅμοια πρός τό ἀρχικό καί μεταξύ τους ὅμοια.

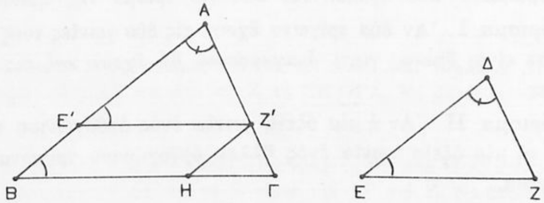
Πραγματικά, ἄν τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στό Α (σχ. 49) καί $\mathrm{A\Delta} \perp \mathrm{B\Gamma}$, τότε $\mathrm{A\overset{\Delta}{\Delta}B} \approx \mathrm{\Gamma\overset{\Delta}{A}B}$ γιατί εἶναι ὀρθογώνια καί ἔχουν τή γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ κοινή. Ἐπίσης εἶναι $\mathrm{\Gamma\overset{\Delta}{\Delta}A} \approx \mathrm{\Gamma\overset{\Delta}{A}B}$ γιατί εἶναι ὀνθογώνια καί ἔχουν τή γωνία $\widehat{\Gamma}$ κοινή. Ἄρα θά εἶναι καί $\mathrm{A\overset{\Delta}{\Delta}B} = \mathrm{\Gamma\overset{\Delta}{\Delta}A}$.

23. Θεώρημα. Δύο ὅμοια τρίγωνα ἔχουν τίς ὁμόλογες πλευρές τους ἀνάλογες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathrm{A\overset{\Delta}{B}\Gamma} \approx \mathrm{\Delta\overset{\Delta}{E}Z}$ (σχ. 50). Πάνω στήν πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμῆμα $\mathrm{AE'} = \mathrm{\Delta E}$ καί ἀπό τό Ε′ φέρνουμε παράλληλο πρός τή ΒΓ, πού τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ′. Τότε εἶναι $\mathrm{A\overset{\Delta}{E'}Z'} = \mathrm{\Delta\overset{\Delta}{E}Z}$, γιατί ἔχουν $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta}$ $\widehat{\mathrm{E}}' = \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{E}}$ καί $\mathrm{AE'} = \mathrm{\Delta E}$. Ἄρα $\mathrm{AZ'} = \mathrm{\Delta Z}$ καί $\mathrm{E'Z'} = \mathrm{EZ}$ καί τότε (§ 19, πόρ.) εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE'}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AZ'}} \Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{\Delta E}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Delta Z}}.$$

Ἀπό τό Ζ′ φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΑΒ, πού τέμνει τή ΒΓ στό



Σχ. 50

σημεῖο Η. Τότε τό τετράπλευρο Ε′Ζ′ΗΒ εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἄρα $\mathrm{BH} = \mathrm{E'Z'} = \mathrm{EZ}$. Ἑπομένως θά ἔχουμε :

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AZ'}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{BH}} \Rightarrow \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Delta Z}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}}.$$

Τώρα ἀπό τίς δεύτερες σχέσεις (1) καί (2) συμπεραίνουμε ὅτι :

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{\Delta E}} = \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Delta Z}} = \frac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{EZ}}.$$

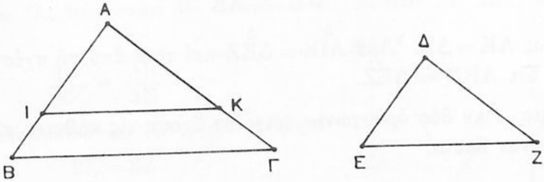
24. Θεώρημα (ἀντίστροφο τοῦ προηγούμενου). Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν τίς πλευρές τους ἀνάλογες, εἶναι ὅμοια.

᾿Απόδειξη. ῎Ας θεωρήσουμε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ (σχ. 51) πού ἔχουν

(1) $$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}.$$

Πάνω στήν ΑΒ παίρνουμε τμῆμα ΑΙ = ΔΕ καί ἀπό τό Ι φέρνουμε παράλληλο πρός τή ΒΓ, πού τέμνει τήν ΑΓ στό Κ. Τότε θά εἶναι :

(2) $$\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{AIK},$$



Σχ. 51

γιατί εἶναι ἰσογώνια. ῎Αρα, κατά τό προηγούμενο θεώρημα, θά εἶναι :

(3) $$\frac{AB}{AI} = \frac{A\Gamma}{AK} = \frac{B\Gamma}{IK}.$$

᾿Αλλά τά πρῶτα μέλη τῶν σχέσεων (1) καί (3) εἶναι ἴσα, γιατί εἶναι ΑΙ = ΔΕ. Τότε θά εἶναι καί $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{A\Gamma}{AK}$ καί $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{IK}$. ᾿Απ᾿ αὐτές προκύπτει ὅτι ΔΖ = ΑΚ καί ΕΖ = ΙΚ ἀντιστοίχως.

῾Επομένως εἶναι $\overset{\Delta}{\Delta EZ} = \overset{\Delta}{AIK}$ καί τότε ἀπό τή σχέση (2) παίρνουμε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.

Παρατήρηση. ῾Ο λόγος δύο ὁμόλογων πλευρῶν δύο ὅμοιων τριγώνων λέγεται **λόγος ὁμοιότητας** τῶν τριγώνων.

25. Θεώρημα. ῎Αν μία γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση μέ μία γωνία ἄλλου τριγώνου καί οἱ πλευρές πού περιέχουν τή γωνία τοῦ πρώτου τριγώνου, εἶναι ἀνάλογες πρός τίς πλευρές πού περιέχουν τήν ἴση γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου, τά τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

᾿Απόδειξη. ῎Ας θεωρήσουμε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ (σχ. 51), γιά τά ὁποῖα εἶναι :

(1) $$\widehat{A} = \widehat{\Delta} \text{ καί } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

Πάνω στήν ΑΒ παίρνουμε τμῆμα ΑΙ = ΔΕ καί φέρνουνε ΙΚ//ΒΓ. Τότε εἶναι φανερό ὅτι :

(2) $$\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}} \approx \overset{\triangle}{\mathrm{AIK}}$$

καί έπομένως

(3) $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AI}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AK}}.$$

Τά πρῶτα μέλη τῶν ἀναλογιῶν (1) καί (3) εἶναι ἴσα, γιατί ὑποθέσαμε ὅτι $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{AI}$. Ἄρα θά εἶναι καί :

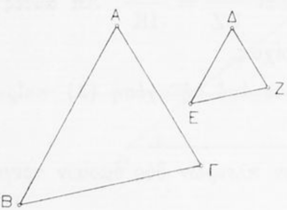
$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Delta\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AK}}$$

και έπομένως $\mathrm{AK} = \Delta\mathrm{Z}$. Ἄρα $\overset{\triangle}{\mathrm{AIK}} = \overset{\triangle}{\Delta\mathrm{EZ}}$ καί τότε ἀπό τή σχέση (2), συμπεραίνουμε ὅτι $\mathrm{AB\Gamma} \approx \Delta\mathrm{EZ}$.

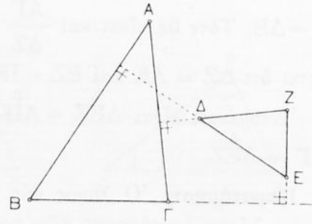
Πόρισμα. Ἄν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τίς κάθετες πλευρές τους ἀνάλογες, εἶναι ὅμοια.

26. Θεώρημα. Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία ἤ κάθετες μία πρός μία, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ, πού ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία (σχ. 52) ἤ κάθετες μία πρός μία (σχ. 53). Τότε τά πιθανά ἐνδεχόμενα εἶναι τά ἑξῆς :



Σχ. 52



Σχ. 53

i) $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Delta} = 2^{\llcorner}$, $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{E}} = 2^{\llcorner}$, $\widehat{\Gamma} + \widehat{\mathrm{Z}} = 2^{\llcorner}$

ii) $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{E}} = 2^{\llcorner}$, $\widehat{\Gamma} + \widehat{\mathrm{Z}} = 2^{\llcorner}$

iii) $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{E}}$, $\widehat{\Gamma} + \widehat{\mathrm{Z}} = 2^{\llcorner}$

iv) $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{E}}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{Z}}$

Τό ἐνδεχόμενο (i) δέν μπορεῖ νά συμβαίνει, γιατί τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καί τῶν δύο τριγώνων θά ἦταν $6^{\llcorner} > 4^{\llcorner}$.

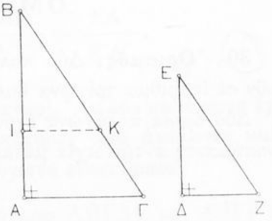
Τό ἐνδεχόμενο (ii) δέν μπορεῖ νά συμβαίνει, γιατί τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καί τῶν δύο τριγώνων θά ἦταν $4^{\llcorner} + \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Delta} > 4^{\llcorner}$.

Τό ἐνδεχόμενο (iii) μπορεῖ νά συμβαίνει μόνο ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{Z}} = 1^{\llcorner}$, γιατί οἱ δύο προηγούμενες ἰσότητες $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ καί $\widehat{B} = \widehat{E}$ συνεπάγονται καί τήν $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Τότε ὅμως τά τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐπειδή εἶναι ἰσογώνια.

Τέλος, τό ἐνδεχόμενο (iv) δέν ἔχουμε λόγους νά τό ἀποκλείσουμε, συνεπῶς αὐτό εἶναι τό μόνο πού μπορεῖ νά συμβαίνει (ἡ περίπτωση iii εἶναι μερική περίπτωση τῆς iv). Ἄρα τότε τά δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

27. Θεώρημα. Ἄν σέ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ὁ λόγος τῶν ὑποτεινουσῶν εἶναι ἴσος μέ τό λόγο δύο κάθετων πλευρῶν, τά τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ (σχ. 54), γιά τά ὁποῖα εἶναι



Σχ. 54

(1) $$\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta E}.$$

Πάνω στήν ὑποτείνουσα ΒΓ παίρνουμε τμῆμα

(2) $$BK = EZ$$

καί φέρνουμε ΚΙ//ΓΑ. Τότε εἶναι φανερό ὅτι :

(3) $$\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{IBK} \text{ καί ἑπομένως :}$$

(4) $$\frac{B\Gamma}{BK} = \frac{AB}{IB}.$$

Στίς ἀναλογίες (1) καί (4) τά πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα ἐξαιτίας τῆς σχέσεως (2). Ἄρα θά εἶναι καί τά δεύτερα μέλη τους ἴσα, δηλαδή $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AB}{IB}$.

Ἀπ' αὐτή προκύπτει ἡ

(5) $$IB = \Delta E.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (5) προκύπτει ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΒΚ καί ΔΕΖ εἶναι ἴσα καί ἐξαιτίας τῆς (3) ἔχουμε $AB\Gamma \approx \Delta EZ$.

28. Ἀνακεφαλαίωση τῶν περιπτώσεων ὁμοιότητας τῶν τριγώνων. Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα θεωρήματα δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν :

i) Δύο γωνίες ἴσες μία πρός μία.

ii) Τίς πλευρές τους ἀνάλογες.

iii) Μία γωνία ἴση πού περιέχεται μεταξύ ἀναλόγων πλευρῶν.

iv) Τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία.

v) Τίς πλευρές τους κάθετες μία πρός μία.

Εἰδικά γιά τά ὀρθογώνια τρίγωνα ἰσχύει ἐπιπλέον ἡ πρόταση :

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν μία ὀξεία γωνία τους ἴση ἤ δύο πλευρές ἀνάλογες μέ τήν ἔννοια κάθετο πρός κάθετο πλευρά ἤ ὑποτείνουσα πρός ὑποτείνουσα.

29. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὅμοιων τριγώνων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῆς ὁμοιότητάς τους.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὅμοια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ (σχ. 55) καί ἔστω λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητάς τους, δηλαδή:

$$(1)\quad \lambda = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1\Gamma_1}{A_2\Gamma_2} = \frac{B_1\Gamma_1}{B_2\Gamma_2} = \frac{A_1B_1 + A_1\Gamma_1 + B_1\Gamma_1}{A_2B_2 + A_2\Gamma_2 + B_2\Gamma_2} = \frac{2\tau_1}{2\tau_2},$$

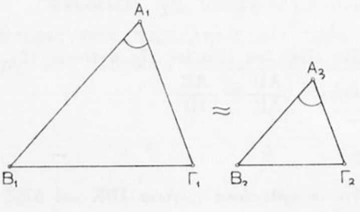
ὅπου $2\tau_1$ καί $2\tau_2$ οἱ περίμετροι τῶν τριγώνων $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ ἀντιστοίχως.

Πόρισμα. Ἄν οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου πολλαπλασιαστοῦν μέ ἕναν ἀριθμό λ, τότε καί ἡ περίμετρός του πολλαπλασιάζεται μέ τόν λ.

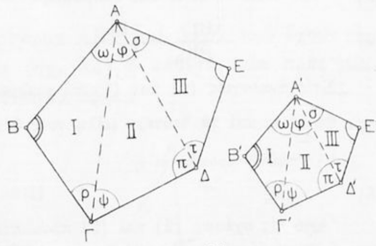
ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

30. Ὁρισμός. Δύο πολύγωνα λέγονται ὅμοια ὅταν μποροῦν νά χωριστοῦν σέ ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια ἀνά δύο καί ὁμοίως τοποθετημένα (σχ. 56).

Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμό πλευρῶν, ὑπάρχει καί ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν κορυφῶν, τῶν γωνιῶν καί τῶν πλευρῶν



Σχ. 55



Σχ. 56

τους, ὅπως ἐκείνη πού ὑπάρχει στά ὅμοια τρίγωνα. Ὅλα τά ζεύγη ἀντίστοιχων στοιχείων λέγονται **ὁμόλογα.** Γιά τό συμβολισμό τῶν ὅμοιων πολυγώνων χρησιμοποιοῦμε τό ἴδιο σύμβολο ≈ πού χρησιμοποιήσαμε γιά τά ὅμοια τρίγωνα.

31. Θεώρημα. Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν τίς ὁμόλογες γωνίες τους ἴσες μία πρός μία καί τίς ὁμόλογες πλευρές τους ἀνάλογες.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τά ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καί Α′Β′Γ′Δ′Ε′ (σχ. 56), πού τά ἔχουμε χωρίσει σέ ζεύγη ὅμοιων τριγώνων, δηλαδή,

$$(\mathrm{I})\quad A\overset{\Delta}{B}\Gamma = A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'$$

$$(\mathrm{II})\quad A\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta = A'\overset{\Delta}{\Gamma'}\Delta'$$

$$(\mathrm{III})\quad A\overset{\Delta}{\Delta}E = A'\overset{\Delta}{\Delta'}E'.$$

i) Τότε ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ἔχουμε $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{E} = \widehat{E'}$ ἐνῶ οἱ γωνίες

$\widehat{A}$, $\widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Delta}$ τοῦ ἑνός πολυγώνου εἶναι ἴσες μέ τίς ἀντίστοιχες $\widehat{A'}$, $\widehat{\Gamma'}$ καί $\widehat{\Delta'}$ τοῦ ἄλλου πολυγώνου, ἀφοῦ αὐτές ἀναλύονται σέ ἀθροίσματα ἴσων γωνιῶν.

ii) Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα (I) ἔχουμε:

(1) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'},$$

ἐνῶ ἀπό τά ἐπίσης ὅμοια τρίγωνα (II) καί (III) ἔχουμε ἀντιστοίχως:

(2) $$\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} \quad \text{καί} \quad \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει ὅτι

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A'B'}} = \frac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{B'\Gamma'}} = \frac{\mathbf{\Gamma\Delta}}{\mathbf{\Gamma'\Delta'}} = \frac{\mathbf{\Delta E}}{\mathbf{\Delta'E'}} = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{E'A'}}.$$

32. Θεώρημα (ἀντίστροφο τοῦ προηγούμενου). Ἄν δύο πολύγωνα ἔχουν τίς γωνίες τους ἴσες μία πρός μία καί τίς πλευρές τους ἀνάλογες καί τά στοιχεῖα αὐτά ἔχουν τήν ἴδια διάταξη, τά πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε πάλι τά πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καί Α'Β'Γ'Δ'Ε' (σχ. 56) πού ὑποθέτουμε ὅτι ἔχουν:

(1) $$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'},\ \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'},\ \widehat{E} = \widehat{E'} \text{ καί}$$

(2) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι αὐτά μποροῦν νά χωριστοῦν σέ τρίγωνα ὅμοια καί ὁμοίως τοποθετημένα. Φέρνουμε τίς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ καί Α'Γ', Α'Δ' καί παρατηροῦμε ὅτι εἶναι:

(I) $$\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma',$$

γιατί ἔχουν μιά γωνία ἴση πού περιέχεται σέ ἀνάλογες πλευρές. Τότε θά εἶναι:

(3) $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}.$$

Ἀκόμα ἔχουμε:

(4) $$A\widehat{\Gamma}\Delta = A'\widehat{\Gamma'}\Delta'$$

γιατί εἶναι διαφορές ἴσων γωνιῶν. Ἄρα ἀπό τίς σχέσεις (2), (3) καί (4) προκύπτει ὅτι:

(II) $$\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta} \approx A'\overset{\Delta}{\Gamma'}\Delta',$$

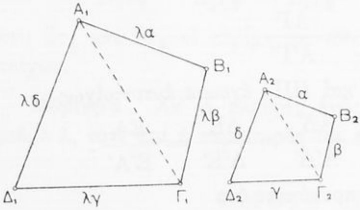
γιατί ἔχουν μιά γωνία ἴση πού περιέχεται σέ ἀνάλογες πλευρές.

Μέ ἴδιο τρόπο συμπεραίνουμε ὅτι

(III) $$A\overset{\Delta}{\Delta}E \approx A'\overset{\Delta}{\Delta'}E'.$$

'Επομένως τά δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

Σημείωση. Ὁ λόγος δύο ὁμόλογων πλευρῶν δύο ὅμοιων πολυγώνων λέγεται λόγος ὁμοιότητας τῶν πολυγώνων.



Σχ. 57

33. Θεώρημα. **Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὅμοιων πολυγώνων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῆς ὁμοιότητας τῶν πολυγώνων.**

'Απόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὅμοια πολύγωνα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \approx A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ (σχ. 57) καί ἄς συμβολίσουμε μέ α, β, γ καί δ τίς πλευρές τοῦ $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$. Ἄν ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητας εἶναι λ, τότε οἱ πλευρές τοῦ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ θά εἶναι ἀντιστοίχως οἱ λα, λβ, λγ καί λδ. Ἄρα ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν δύο πολυγώνων θά εἶναι :

$$\frac{A_1B_1 + B_1\Gamma_1 + \Gamma_1\Delta_1 + \Delta_1A_1}{A_2B_2 + B_2\Gamma_2 + \Gamma_2\Delta_2 + \Delta_2A_2} = \frac{\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + \lambda\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} =$$

$$= \frac{\lambda(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} = \lambda$$

δηλαδή ἴσος μέ τό λόγο τῆς ὁμοιότητάς τους.

μέχρι εδώ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

111. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων, στά ὁποῖα χωρίζεται ἕνα τετράπλευρο ἀπό τίς διαγώνιους του, εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου.

112. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου διαιρεῖ κάθε διαγώνιο σέ μέρη ἀνάλογα πρός τίς βάσεις του.

113. 'Από τήν κορυφή Β ἑνός τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε εὐθεία ΒΔ πού τέμνει τήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΑΓ στό σημεῖο Δ καί ἔτσι ὥστε νά εἶναι $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{A}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $B\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta\Gamma$.

114. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τά ὕψη ΑΔ καί ΒΕ. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο νά ἀποδειχθεῖ ὅτι α) $HA \cdot H\Delta = HB \cdot HE$ καί β) $\Gamma A \cdot \Gamma E = \Gamma B \cdot \Gamma\Delta$.

115. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1$L) φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ καί ἀπό τό Δ φέρνουμε $\Delta E \perp AB$. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$.

116. Οἱ βάσεις ἑνός τραπεζίου ἔχουν μήκη α καί 3α καί οἱ μή παράλληλες πλευρές του β καί 2β. Ἄν οἱ μή παράλληλες πλευρές τέμνονται στό σημεῖο Ο, νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου πού ἔχει κορυφή τό σημεῖο Ο καί βάση τή μεγαλύτερη ἀπό τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

117. Ἔστω ἕνας κύκλος (O,R) καί ΑΒ μιά χορδή του. Στό σημεῖο Β φέρνουμε ἐφαπτομένη (ε) καί ἀπό τό Α φέρνουμε τήν $A\Gamma \perp (\varepsilon)$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι $AB^2 = 2R \cdot A\Gamma$.

118. Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ γράφουμε τή διαγώνιο ΑΓ. "Αν Ε καί Ζ εἶναι τά κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ καί ΑΔΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $EZ // = \frac{B\Delta}{3}$.

119. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφές τριγώνου ὅμοιου πρός τό ΑΒΓ.

120. 'Από ἕνα σημεῖο Α τῆς πλευρᾶς Οx μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}y$ φέρνουμε κάθετο ΑΒ στήν ἄλλη πλευρά της. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ λόγος $\frac{AB}{AO}$ εἶναι σταθερός (ἀνεξάρτητος ἀπό τή θέση τοῦ Α).

121. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ διχοτόμος ΑΔ τέμνει τόν περιγεγραμμένο κύκλο στό σημεῖο Ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι α) $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$, β) $EB^2 = EA \cdot E\Delta$.

122. 'Από τήν κορυφή Α ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε μιά εὐθεία, πού τέμνει τήν πλευρά ΒΓ στό σημεῖο Δ καί τόν περιγαγραμμένο κύκλο στό σημεῖο Ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $AB^2 = A\Delta \cdot AE$.

123. Νά ἀποδείξετε ὅτι δύο παραλληλόγραμμα, πού ἔχουν μία γωνία ἴση ἤ παραπληρωματική καί τίς προσκείμενες πλευρές ἀνάλογες εἶναι ὅμοια.

124. "Αν οἱ διαγώνιοι δύο παραλληλογράμμων εἶναι ἀνάλογες καί σχηματίζουν ἴσες γωνίες, νά ἀποδείξετε ὅτι αὐτά εἶναι ὅμοια.

125. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση ὁποιουδήποτε σημείου ἑνός κύκλου ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς μιᾶς ἐφαπτομένης εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξύ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καί τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπό τήν ἐφαπτομένη.

126. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. "Αν Δ καί Ε εἶναι σημεῖα τῆς πλευρᾶς ΒΓ τέτοια, ὥστε νά εἶναι $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}E$, καί Ζ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῆς ΑΔ μέ τόν περιγεγραμμένο κύκλο, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\beta\gamma = AE \cdot AZ$.

Β΄.

127. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 1\llcorner$. "Αν ΑΔ εἶναι τό ὕψος του, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

128. "Εστω Ε ἕνα σημεῖο τῆς διαγωνίου ΒΔ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τήν ΑΕ, πού τέμνει τίς ΒΓ καί ΓΔ στά σημεῖα Ζ καί Η ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $AE^2 = EZ \cdot EH$.

129. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί ὁ περιγεγραμμένος κύκλος του. Φέρνουμε τή διάμετρο ΑΔ, πού τέμνει τή ΒΓ στό Ε, καί ἀπό τό Ε φέρνουμε τίς $EZ \perp AB$ καί $EH \perp A\Gamma$. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ZH // B\Gamma$.

130. Σέ κάθε τρίγωνο νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ κάθε κορυφή καί τά ἴχνη τῶν δύο ὑψῶν ἀπό τίς ἄλλες κορυφές εἶναι κορυφές τριγώνου ὅμοιου πρός τό τρίγωνο αὐτό.

131. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου διχοτομεῖ τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού φέρεται ἀπό αὐτό τό σημεῖο παράλληλο πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου, καί ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς μή παράλληλες πλευρές τοῦ τραπεζίου.

132. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό σημεῖο τομῆς τῶν μή παράλληλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου διχοτομεῖ τό τμῆμα πού φέρεται ἀπό αὐτό τό σημεῖο παράλληλο πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου καί ἔχει τά ἄκρα του στίς προεκτάσεις τῶν διαγωνίων.

133. 'Από ἕνα σημεῖο Σ, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕνα δεδομένο κύκλο, φέρνουμε τά ἐφαπτόμενα τμήματα ΣΑ καί ΣΒ καί μία τέμνουσα ΣΓΔ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι $A\Gamma \cdot B\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$.

134. "Αν α καί β εἶναι οἱ βάσεις ἑνός τραπεζίου, νά ὑπολογιστεῖ τό τμῆμα πού φέρεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων παράλληλο πρός τίς βάσεις καί ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς μή παράλληλες πλευρές.

135. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τά ὕψη του ΑΔ, ΒΕ καί ΓΖ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ΔΒ · ΔΓ = ΔΕ · ΔΖ.

136. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἀπόσταση ὁποιουδήποτε σημείου ἑνός κύκλου ἀπό μιά χορδή του εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξύ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπό τίς ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου στά ἄκρα τῆς χορδῆς.

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

34. 'Ορισμοί. Δίνεται ἕνα σταθερό σημεῖο Ο καί ἕνας θετικός ἀριθμός k. Τότε :

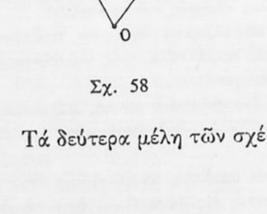
i) 'Ομόρροπη ὁμοιοθεσία εἶναι ὁ σημειακός μετασχηματισμός ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Α σ' ἕνα σημεῖο Α΄ τῆς ἡμιευθείας ΟΑ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΟΑ΄ = k · ΟΑ.

ii) 'Αντίρροπη ὁμοιοθεσία εἶναι ὁ σημειακός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Α σ' ἕνα σημεῖο Α΄ τῆς ἀντίθετης ἡμιευθείας πρός τήν ΟΑ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΟΑ΄ = k · ΟΑ.

Τό σημεῖο Ο λέγεται κέντρο ἤ πόλος τῆς ὁμοιοθεσίας καί ὁ ἀριθμός k λέγεται λόγος της. Μιά ὁμοιοθεσία μέ κέντρο ἕνα σημεῖο Ο καί λόγο k συμβολίζεται : F(O,k). Ἄν μέ τήν ὁμοιοθεσία αὐτή ἕνα σημεῖο Α ἀπεικονίζεται σ' ἕνα σημεῖο Α΄, συμβολικά γράφουμε :

$$A \xrightarrow{F(O,k)} A'.$$

35. Θεώρημα. Ἕνα προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα $\overrightarrow{AB}$ ἀπεικονίζεται μέ μία ὁμόρροπη (ἀντιστοίχως ἀντίρροπη) ὁμοιοθεσία F(O,k), σ' ἕνα ὁμόρροπα (ἀντιστοίχως ἀντίρροπα) προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα A_1B_1, τέτοιο ὥστε νά εἶναι $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (ἀντιστοίχως $\overrightarrow{A_1B_1} = -k \cdot \overrightarrow{AB}$).



Σχ. 58

'Απόδειξη. i) Ἄν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπη, θά ἔχουμε (σχ. 58) :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= k \cdot \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB_1} &= k \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OA}} &= k \\ \frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{OB}} &= k \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

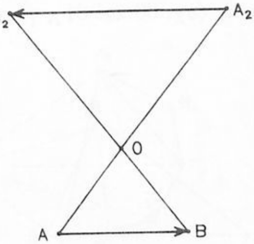
Τά δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (1) εἶναι ἴσα, ἄρα θά εἶναι καί

$$\frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{OB}}.$$

Τότε $\overset{\Delta}{OA_1B_1} \approx \overset{\Delta}{OAB}$, γιατί ἔχουν ἐπίσης καί τή γωνία τους στό O κοινή. Ἄρα $\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OA}}$ καί ἀπό τήν (1) ἔχουμε $\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{AB}} = k \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} =$ $= k \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ (γιατί εἶναι $k > 0$).

ii) Ἄν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀντίρροπη, θά ἔχουμε (σχ. 59):

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OA_2} &= -k \cdot \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB_2} &= -k \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \frac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA}} &= -k \\ \frac{\overrightarrow{OB_2}}{\overrightarrow{OB}} &= -k \end{aligned} \quad (2)$$



Σχ. 59

Τά δεύτερα μέλη τῶν σχέσεων (2) εἶναι ἴσα, ἄρα θά εἶναι καί $\dfrac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA}} = \dfrac{\overrightarrow{OB_2}}{\overrightarrow{OB}}$,

ἑπομένως $\overset{\Delta}{OA_2B_2} \approx \overset{\Delta}{OAB}$, γιατί ἔχουν καί τίς γωνίες τους στό O ἴσες ὡς κατακορυφήν. Ἄρα $\dfrac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA}}$ καί ἀπό τή (2) προκύπτει $\dfrac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{AB}} = -k$ $\Rightarrow \overrightarrow{A_2B_2} = -k \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A_2B_2} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$ (γιατί εἶναι $-k < 0$).

36. Θεώρημα. Ἄν δύο προσανατολισμένα τμήματα εἶναι παράλληλα (ὁμόρροπα ἤ ἀντίρροπα), ὑπάρχει ὁμοιοθεσία μέ τήν ὁποία τό ἕνα ἀπεικονίζεται στό ἄλλο.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τά ὁμόρροπα τμήματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ (σχ. 58). Φέρνουμε τίς AA_1 καί BB_1 πού γενικά τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο O. Τότε εἶναι προφανῶς $\overset{\Delta}{OAB} \approx \overset{\Delta}{OA_1B_1}$ καί ἀπ' αὐτό $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$ καί ἄν ὀνομάσουμε $\dfrac{A_1B_1}{AB} = k$, τότε $OA_1 = k \cdot OA$ καί $OB_1 = k \cdot OB$, σχέσεις πού εἶναι χαρακτηριστικές τῆς ὁμοιοθεσίας $F(O,k)$.

Ἐξαίρεση ἀποτελεῖ τό ἐνδεχόμενο $AB = A_1B_1$, γιατί τότε οἱ εὐθεῖες AA_1 καί BB_1 θά εἶναι παράλληλες. Συμβατικά δεχόμαστε ὅτι αὐτές θά τέμνονται στό ἄπειρο καί ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας θά εἶναι $k = 1$.

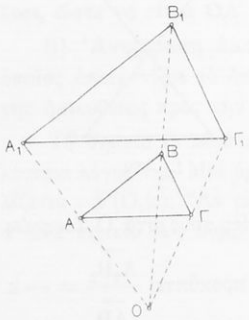
Μέ ἴδιο τρόπο γιά τά ἀντίρροπα τμήματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_2B_2}$ (σχ. 59) ἔχουμε:

$$\overset{\Delta}{OAB} \approx \overset{\Delta}{OA_2B_2} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB_2}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{AB}} = -k \Rightarrow \overrightarrow{OA}_2 = -k \cdot \overrightarrow{OA} \text{ καί}$$

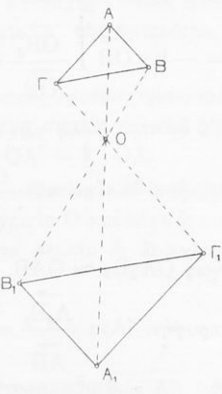
$$\overrightarrow{OB}_2 = -k \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow A \xrightarrow{F(O,-k)} A_2 \text{ καί } B \xrightarrow{F(O,-k)} B_2.$$

37. Θεώρημα. Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἀπεικονίζεται μέ μιά ὁμοιοθεσία F(O,k) σέ τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ ὅμοιος πρός τό ΑΒΓ μέ λόγο ὁμοιότητας k.

'Απόδειξη. Τό θεώρημα ἰσχύει γιά ὁμόρροπη καί γιά ἀντίρροπη ὁμοιοθεσία (σχ. 60 καί 61), γιατί (§ 34) καί στίς δύο περιπτώσεις εἶναι :



Σχ. 60



Σχ. 61

$$A_1B_1 = k \cdot AB,\ B_1\Gamma_1 = k \cdot B\Gamma,\ \Gamma_1A_1 = k \cdot \Gamma A \Rightarrow$$
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma} = \frac{\Gamma_1A_1}{\Gamma A} = k \Rightarrow \overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} \approx \overset{\Delta}{AB\Gamma}.$$

Τό θεώρημα ἐπεκτείνεται καί γιά τυχαῖο πολύγωνο ΑΒΓ...Ν πού, μέ ὁμοιοθεσία F(O,k), ἀπεικονίζεται σέ ὅμοιο πολύγωνο $A_1B_1\Gamma_1...N_1$ (σχ. 62) μέ λόγο ὁμοιότητας k. 'Η ἀπόδειξη γίνεται ἄν διαιρέσουμε σέ τρίγωνα τό πολύγωνο ΑΒΓ...Ν μέ διαγωνίους ἀπό τήν κορυφή Α.

★ 38. Θεώρημα. Ἄν δύο ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία, ὑπάρχει ὁμοιοθεσία ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τό ἕνα πάνω στό ἄλλο.

'Απόδειξη. i_α). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καί $A_1B_1\Gamma_1$ ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία καί ὁμόρροπες (σχ. 63). Ἄν εἶναι $\lambda \neq 1$ ὁ λόγος ὁμοιότητας, οἱ εὐθεῖες AA_1 καί BB_1 τέμνονται σέ σημεῖο O τέτοιο, ὥστε

$$\overset{\Delta}{OAB} = \overset{\Delta}{OA_1B_1}.$$

Ἄρα :

(1) $$\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \lambda.$$

Ὁμοίως οἱ εὐθεῖες BB_1 καί $\Gamma\Gamma_1$ τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο O_1 τέτοιο, ὥστε

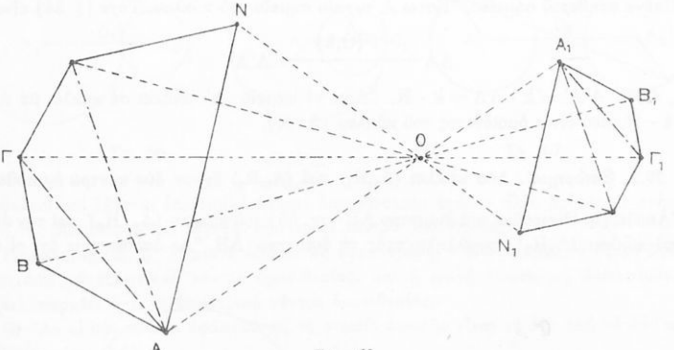
$$O_1B\Gamma \approx O_1B_1\Gamma_1.$$

Ἄρα :

$$\frac{O_1B}{O_1B_1} = \frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1} = \lambda. \qquad (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι :

$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{O_1B}{O_1B_1} \text{ ἤ } \frac{OB}{OB_1 - OB} = \frac{O_1B}{O_1B_1 - O_1B} \text{ ἤ } \frac{OB}{BB_1} = \frac{O_1B}{BB_1} \text{ ἄρα } OB = O_1B$$



Σχ. 62

ἀπ' τήν ὁποία ἔπεται ὅτι $O \equiv O_1$, δηλαδή τά σημεῖα O καί O_1 ταυτίζονται, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ B. Τότε θά εἶναι καί

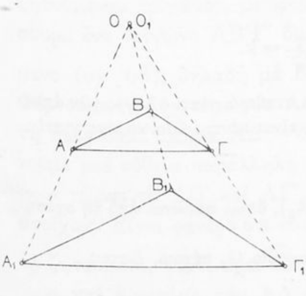
$$OA = \lambda \cdot OA_1, \quad OB = \lambda \cdot OB_1, \quad O\Gamma = \lambda \cdot O\Gamma_1$$

δηλαδή ὑπάρχει ὁμοιοθεσία $F\ (O,\lambda)$ ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τό $A_1B_1\Gamma_1$ πάνω στό $AB\Gamma$.

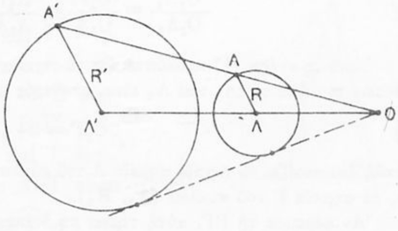
Ἄν εἶναι $\lambda = 1$ τά τετράπλευρα ABB_1A_1 καί $B\Gamma\Gamma_1B_1$ θά εἶναι παραλληλόγραμμα, ὁπότε

$$AA_1 // BB_1 // \Gamma\Gamma_1.$$

Τότε πάλι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία, πού τό κέντρο της ἔχει ἀπομακρυνθεῖ στό ἄπειρο.



Σχ. 63



Σχ. 64

iβ) 'Ομοίως μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ τό θεώρημα καί ὅταν οἱ πλευρές τῶν ὅμοιων τριγώνων εἶναι ἀντίρροπες.

ii) Τό θεώρημα ὁμοίως μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ καί γιά δύο ὅμοια πολύγωνα πού ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία, γιατί αὐτά μποροῦν νά χωριστοῦν μέ διαγωνίους ἀπό δύο ὁμόλογες κορυφές τους σέ ὅμοια τρίγωνα καί ὁμοίως τοποθετημένα μέ τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία (σχ. 62). 'Η ἀπόδειξη παραλείπεται.

★ 39.1. Θεώρημα. Τό ὁμοιόθετο ἑνός κύκλου εἶναι κύκλος.

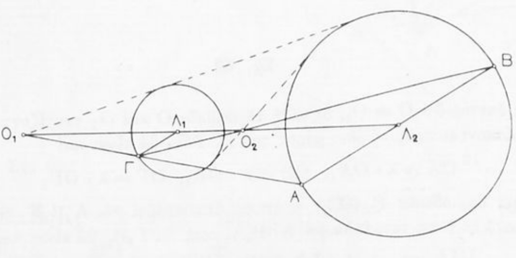
'Απόδειξη. Ἔστω (Λ, R) κύκλος καί $F(O,k)$ μία ὁμοιοθεσία (σχ. 64). Ἄν Λ' εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Λ κατά τήν ὁμοιοθεσία $F(O, k)$, τὸ Λ' εἶναι σταθερό σημεῖο ἐπειδή εἶναι εἰκόνα σταθεροῦ σημείου. Ἔστω A τυχαῖο σημεῖο τοῦ κύκλου. Τότε (§ 34) εἶναι

$$\Lambda A \xrightarrow{F(O,k)} \Lambda' A'$$

τέτοιο, ὥστε $\Lambda'A' = k \cdot \Lambda A = k \cdot R$. Ἄρα τό σημεῖο A' ἀνήκει σέ κύκλο μέ ἀκτίνα $R' = k \cdot R$, πού εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ κύκλου (Λ, R).

★ 39.2. Θεώρημα. Δύο κύκλοι (Λ_1,R_1) καί (Λ_2,R_2) ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας.

'Απόδειξη. Θεωροῦμε μιά διάμετρο AB (σχ. 65) τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) καί τήν ἀκτίνα $\Lambda_1\Gamma$ τοῦ κύκλου $(\Lambda_1 R_1)$ παράλληλη πρός τή διάμετρο AB. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ ἀκτί-



Σχ. 65

νες $\Lambda_2 A$ καί $\Lambda_1\Gamma$ εἶναι καί ὁμόρροπες. Τότε ἀφοῦ $R_1 \neq R_2$ ἡ $A\Gamma$ τέμνει τήν προέκταση τῆς διακέντρου $\Lambda_1\Lambda_2$ σέ ἕνα σημεῖο O_1, τέτοιο ὥστε :

$$(1) \qquad \frac{O_1\Lambda_1}{O_1\Lambda_2} = \frac{O_1\Gamma}{O_1 A} = \frac{\Lambda_1\Gamma}{\Lambda_2 A} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$

'Από τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι τό σημεῖο O_1 εἶναι σταθερό, γιατί ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπό τά Λ_1 καί Λ_2 εἶναι σταθερός καί τέλος εἶναι κέντρο ὁμοιοθεσίας γιατί :

$$(2) \qquad O_1\Gamma = k \cdot O_1 A,$$

δηλαδή ἀπεικονίζει τό τυχαῖο σημεῖο A τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2), ὅπως φαίνεται ἀπό τή σχέση (2), σέ σημεῖο Γ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1).

Ἄν φέρουμε τή $B\Gamma$, αὐτή τέμνει τή διάκεντρο σέ σημεῖο O_2 τέτοιο, ὥστε :

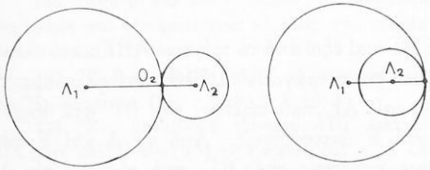
$$(3) \qquad \frac{O_2\Lambda_1}{O_2\Lambda_2} = \frac{O_2\Gamma}{O_2 B} = \frac{\Lambda_1\Gamma}{\Lambda_2 B} = \frac{R_1}{R_2} = k.$$

Ἀπό αὐτή προκύπτει ὅτι τό σημεῖο O_2 εἶναι σταθερό, γιατί ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του ἀπό τά Λ_1 καί Λ_2 εἶναι σταθερός καί τέλος εἶναι κέντρο ὁμοιοθεσίας, γιατί :

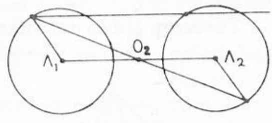
$$O_2\Gamma = k \cdot O_2B \tag{4}$$

δηλαδή ἀπεικονίζει μέ τή σχέση (4) τό ὁποιοδήποτε σημεῖο B τοῦ κύκλου (Λ_2, R_2) σέ σημεῖο Γ τοῦ κύκλου (Λ_1, R_1).

Συμπέρασμα. Δύο ὁποιοιδήποτε κύκλοι ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας, πού βρίσκονται πάνω στήν εὐθεία τῆς διακέντρου. Τό ἕνα ἀπ' αὐτά βρίσκεται μεταξύ τῶν δύο κέντρων



Σχ. 66



Σχ. 67

τῶν κύκλων καί λέγεται ἐσωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας, ἐνῶ τό ἄλλο βρίσκεται στήν προέκταση τῆς διακέντρου καί λέγεται ἐξωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας.

Παρατηρήσεις. i) Ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων (ὅταν ὑπάρχει) περνάει ἀπό τό ἐξωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας, καί ἡ κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη (ἄν ὑπάρχει), περνάει ἀπό τό ἐσωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας.

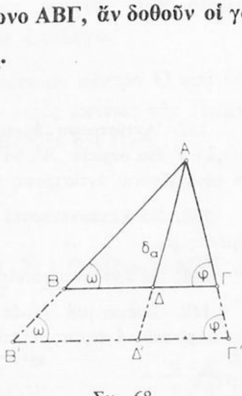
ii) Ἄν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται, τό σημεῖο ἐπαφῆς εἶναι τό ἕνα ἀπό τά δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας (σχ. 66).

iii) Ἄν εἶναι $R_1 = R_2$, τό ἐξωτερικό κέντρο ὁμοιοθεσίας ἀπομακρύνεται στό ἄπειρο καί τό ἐσωτερικό βρίσκεται στό μέσο τῆς διακέντρου (σχ. 67).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

40. Παράδειγμα 1. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ, ἄν δοθοῦν οἱ γωνίες του $\widehat{B} = \omega$, καί $\widehat{\Gamma} = \varphi$ καί ἡ διχοτόμος του δ_α.

Λύση. Ἀφοῦ γνωρίζουμε δύο γωνίες τοῦ ζητούμενου τριγώνου, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒ'Γ' ὅμοιο πρός τό ζητούμενο (σχ. 68), δηλαδή μέ $\widehat{B'} = \omega$ καί $\widehat{\Gamma'} = \varphi$. Φέρνουμε τή διχοτόμο του ΑΔ' καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τμῆμα $A\Delta = \delta_\alpha$. Ἀπό τό Δ φέρνουμε μιά εὐθεία παράλληλη πρός τή Β'Γ', ἡ ὁποία τέμνει τίς ΑΒ' καί ΑΓ' στά Β καί Γ ἀντιστοίχως. Εἶναι φανερό ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο, γιατί ἔχει $\widehat{B} = \widehat{B'} = \omega$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} = \varphi$ καί διχοτόμο τήν $A\Delta = \delta_\alpha$.



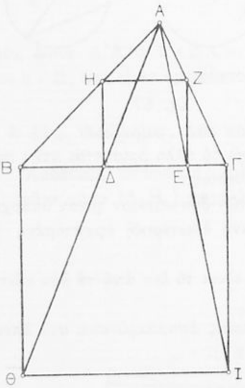
Σχ. 68

Λύση ὑπάρχει πάντα μία, μέ τόν ὅρο νά εἶναι $\omega + \varphi < 2^{L}$.

Παράδειγμα 2. **Σέ δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ νά ἐγγραφεῖ τετράγωνο, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρά νά βρίσκεται στή ΒΓ.**

'Ανάλυση. Ἔστω ὅτι στό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ἐγγραφεῖ τό τετράγωνο ΔΕΖΗ (σχ. 69) μέ τήν πλευρά ΔΕ στή ΒΓ. Ἡ ὁμοιοθεσία μέ κέντρο τό Α καί λόγο $\mathrm{k} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AH}}$ ἀπεικονίζει τήν ΗΖ πάνω στή ΒΓ καί τό τετράγωνο ΗΖΕΔ στό τετράγωνο ΒΓΙΘ, τό ὁποῖο μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ ἀπό τήν ἀρχή.

Σύνθεση. Πάνω στήν πλευρά ΒΓ καί ἔξω ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε τό τετράγωνο ΒΓΙΘ καί φέρνουμε τίς ΑΘ καί ΑΙ, πού τέμνουν τή ΒΓ στά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Ἀπό τά Δ καί Ε φέρνουμε καθέτους στή ΒΓ, πού τέμνουν τίς ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Η καί Ζ ἀντιστοίχως. Τό τετράπλευρο ΔΕΖΗ εἶναι τό ζητούμενο τετράγωνο.



Σχ. 69

'Απόδειξη. Ἐπειδή ΔΗ//ΒΘ, ΔΕ//ΘΙ, ΕΖ//ΓΙ, ἔπεται ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία μέ κέντρο τό Α καί λόγο $\mathrm{k}' = \dfrac{1}{\mathrm{k}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}$ ἀπεικονίζει τά σημεῖα Β,Θ,Ι,Γ στά Η,Δ,Ε,Ζ, ἀντιστοίχως.

Ἄρα :

$$\mathrm{B\Theta I\Gamma} \xrightarrow{F(A,k')} \mathrm{H\Delta EZ} \Rightarrow \mathrm{B\Theta I\Gamma} \approx \mathrm{H\Delta EZ}$$

καί ἐπειδή τό ΒΘΙΓ εἶναι ἀπό τήν κατασκευή του τετράγωνο, ἔπεται ὅτι καί τό ΗΔΕΖ εἶναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

137. 'Αντίστροφη ὁμοιοθεσία. Ἄν ἕνα σημεῖο Α ἀπεικονίζεται μέ μιά ὁμοιοθεσία F(O,k) σ' ἕνα σημεῖο Α', νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχει ὁμοιοθεσία F(O,k') μέ τό ἴδιο κέντρο (πού λέγεται ἀντίστροφη τῆς πρώτης) καί πού ἀπεικονίζει τό Α' στό Α.

138. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν δίνονται τά στοιχεῖα του $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ καί ἡ διάμεσος μ_α.

139. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τίς γωνίες του $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ καί τό ὕψος υ_α.

140. Δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}y$ καί ἕνα σημεῖο Α ἐσωτερικό της. Νά φέρετε ἀπό τό Α εὐθεία, πού νά τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας στά σημεῖα Β καί Γ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

141. Δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}y$ καί ἕνα σημεῖο Σ. Νά φέρετε ἀπό τό Σ εὐθεία, πού νά τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας στά σημεῖα Α καί Β ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΣΒ = 3ΣΑ.

142. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου του κύκλου καί νά εἶναι ὅμοιο πρός ἄλλο δεδομένο τρίγωνο.

143. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου καί νά εἶναι ὅμοιο πρός ἄλλο δεδομένο τρίγωνο.

144. Δίνεται ἕνας κύκλος (Κ, R) καί ἕνα σημεῖο Σ. Νά φέρετε ἀπό τό Σ εὐθεία πού νά τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Α καί Β ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΣΒ = 2ΣΑ.

145. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,R), μία εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Σ. Νά φέρετε ἀπό τό Σ εὐθεία πού νά τέμνει τήν (ε) στό σημεῖο Α καί τόν κύκλο (Ο,R) στό Β ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΣΒ = 3ΣΑ.

146. Ἀπό τό ἕνα κοινό σημεῖο Α δύο τεμνόμενων κύκλων (Κ,R) καί (Λ,ρ) νά φέρετε εὐθεία πού νά τέμνει τούς κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ ἀντιστοίχως ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΑΒ = 2ΑΓ.

147. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ νά ἐγγραφεῖ παραλληλόγραμμο ὅμοιο πρός δεδομένο παραλληλόγραμμο (βλ. παράδ. 2 § 40).

148. Ἕνα μεταβλητό τρίγωνο ΑΒΓ διατηρεῖ σταθερή τήν πλευρά του ΒΓ = α κατά θέση καί μέγεθος καί τή διάμεσο ΒΔ = μ_β κατά μέγεθος. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς του Α.

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

41. Ὁρισμός. Ἐπίπεδη δέσμη εὐθειῶν λέγεται τό σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, πού περνοῦν ἀπό ἕνα σημεῖο Ο.

Τό σημεῖο αὐτό λέγεται **κέντρο** τῆς δέσμης. Οἱ εὐθεῖες τῆς δέσμης λέγονται **ἀκτίνες** της.

Ἐπίπεδη δέσμη εὐθειῶν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ καί τό σύνολο τῶν παράλληλων πρός ὁρισμένη διεύθυνση εὐθειῶν. Τότε τό κέντρο τῆς δέσμης ἔχει ἀπομακρυνθεῖ στό ἄπειρο.

Θεώρημα τῆς δέσμης. Τρεῖς ἤ περισσότερες ἀκτίνες μιᾶς δέσμης ὁρίζουν πάνω σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες τμήματα ἀνάλογα.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε μιά ἐπίπεδη δέσμη εὐθειῶν μέ κέντρο Ο καί δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (ε΄), πού τέμνονται ἀπό τρεῖς ἀκτίνες τῆς δέσμης στά σημεῖα Α,Β,Γ, καί Α΄,Β΄,Γ΄ ἀντιστοίχως. Θά δείξουμε ὅτι εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

Ἀπό τά δύο ζεύγη ὅμοιων τριγώνων (σχ. 70, 71) $\overset{\triangle}{OAB} \approx \overset{\triangle}{OA'B'}$ καί $\overset{\triangle}{OB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{OB'\Gamma'}$ παίρνουμε ἀντιστοίχως :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad \text{καί} \quad \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Αὐτές ἔχουν τά δεύτερα μέλη τους ἴσα.

Ἄρα θά εἶναι καί :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}.$$

Ὁμοίως μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ καί γιά δέσμη μέ περισσότερες ἀκτίνες.

42. Θεώρημα. Ἄν τρεῖς ἤ περισσότερες εὐθεῖες τέμνουν δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (ε′) στά σημεῖα Α, Β, Γ, καί Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$, τότε οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι ἀκτίνες μιᾶς καί μόνο δέσμης, δηλαδή περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο ἤ εἶναι παράλληλες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω Ο τό κοινό σημεῖο τῶν ΑΑ′ καί ΒΒ′ (σχ. 70). Τότε εἶναι $\overset{\Delta}{OAB} \approx \overset{\Delta}{OA'B'}$, ἄρα :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}. \tag{2}$$

Ἄν Ο′ εἶναι τό κοινό σημεῖο τῶν ΒΒ′ καί ΓΓ′, τότε εἶναι $O'\overset{\Delta}{B\Gamma} \approx O'\overset{\Delta}{B'\Gamma'}$, ἄρα :

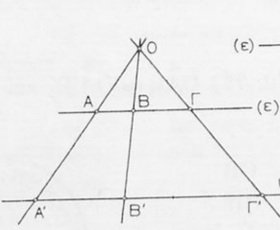
$$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{O'B}{O'B'}. \tag{3}$$

Ἀπό τήν ὑπόθεση $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ καί τίς σχέσεις (2) καί (3) συνάγεται ὅτι:

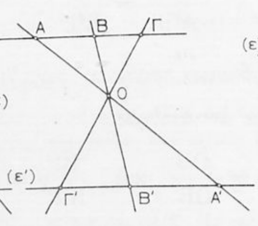
$$\frac{OB}{OB'} = \frac{O'B}{O'B'} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{OB}{OB' - OB} = \frac{O'B}{O'B' - O'B} \quad \text{ἤ} \quad \frac{OB}{BB'} = \frac{O'B}{BB'}.$$

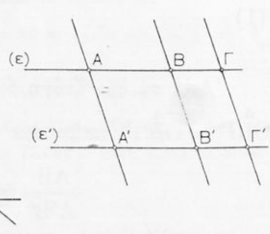
Ἀπ' αὐτήν τήν ἀναλογία συμπεραίνουμε ὅτι ΟΒ = Ο′Β, δηλαδή τά σημεῖα Ο καί Ο′ συμπίπτουν. Ἄρα οἱ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο, δηλαδή εἶναι ἀκτίνες μιᾶς καί μόνο δέσμης.



Σχ. 70



Σχ. 71



Σχ. 72

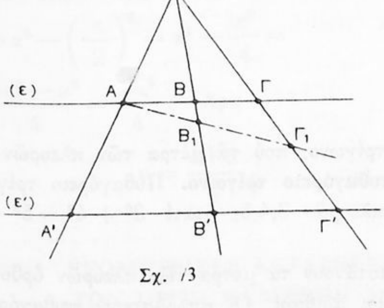
Ἂν εἶναι $AA'//BB'$, τό τετράπλευρο $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμο (σχ. 72), ἑπομένως $AB = A'B'$. Τότε ἡ ὑπόθεση (1) γράφεται:

$$1 = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

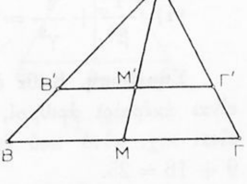
καί ἀπ' αὐτή συμπεραίνουμε ὅτι $B\Gamma = B'\Gamma'$. Ἄρα καί τό $B\Gamma\Gamma'B'$ εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἑπομένως $BB'//\Gamma\Gamma'$, δηλαδή $AA'//BB'//\Gamma\Gamma'$.

43. Θεώρημα. Ἂν τρεῖς ἀκτίνες μιᾶς δέσμης μέ κέντρο Ο τέμνονται ἀπό δύο εὐθεῖες (ε) καί (ε′) στά σημεῖα Α,Β,Γ, καί Α′,Β′,Γ′ ἀντιστοίχως καί εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$, οἱ εὐθεῖες (ε) καί (ε′) εἶναι παράλληλες.

Ἀπόδειξη. Ἂν οἱ (ε) καί (ε′) δέν εἶναι παράλληλες (σχ. 73), φέρνουμε ἀπό τό Α τήν $AB_1\Gamma_1//A'B'\Gamma'$ καί τότε, κατά τό θεώρημα 42 θά εἶναι:
$\frac{AB_1}{A'B'} = \frac{B_1\Gamma_1}{B'\Gamma'} \Longleftrightarrow \frac{AB_1}{B_1\Gamma_1} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ (1). Ἀπό τήν ὑπόθεση ὅμως ἔχουμε
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Longleftrightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ (2). Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2), πού ἔχουν τά δεύτερα μέλη τους ἴσα, συνάγεται ὅτι $\frac{AB_1}{B_1\Gamma_1} = \frac{AB}{B\Gamma}$. Ἀπ' αὐτή προκύπτει ὅτι (Θ. Θαλῆ) $BB_1//\Gamma\Gamma_1$, πού εἶναι ἄτοπο, γιατί οἱ BB_1 καί



Σχ. 73



Σχ. 74

$\Gamma\Gamma_1$, ὅπως τίς ὑποθέσαμε, τέμνονται στό Ο. Ἄρα κατ' ἀνάγκη πρέπει νά εἶναι $AB\Gamma//A'B'\Gamma'$ ἤ (ε)//(ε′).

Πόρισμα. Ἂν σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος, κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα $B'\Gamma'//B\Gamma$, πού ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ, διχοτομεῖται ἀπό τή διάμεσο ΑΜ.

Πραγματικά εἶναι: $\frac{BM}{B'M'} = \frac{\Gamma M}{\Gamma'M'}$ καί, ἐπειδή $BM = M\Gamma$, ἄρα καί $B'M' = \Gamma'M'$ (σχ. 74).

Ἄρα $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{\Gamma B}{\Gamma A} \Longleftrightarrow \dfrac{\gamma}{\upsilon_\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow$

$$\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha .$$

51. Θεώρημα. Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^L$) ἰσχύει ἡ μετρική σχέση $\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha{}^2}$.

Ἀπόδειξη.

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2\gamma^2} + \frac{\beta^2+\gamma^2}{(\beta\gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{(\alpha\upsilon_\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2\cdot\upsilon_\alpha{}^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha{}^2}.$$

52. Ἀνακεφαλαίωση τῶν μετρικῶν σχέσεων γιά τά ὀρθογώνια τρίγωνα.

Ἄν ΑΒΓ εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ πλευρές α, β, γ καί ΑΔ = υ εἶναι τό ὕψος του πρός τήν ὑποτείνουσα, ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

i) $\beta^2 = \alpha\cdot\Delta\Gamma$, $\gamma^2 = \alpha\cdot\Delta B$.

ii) $\dfrac{\beta^2}{\gamma^2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$.

iii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ καί ἀπ' αὐτήν προκύπτουν οἱ :
$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ καί $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

iv) $\upsilon_\alpha{}^2 = \Delta B\cdot\Delta\Gamma$.

v) $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$.

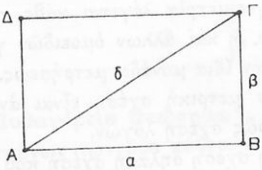
vi) $\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha{}^2}$.

Σημείωση. Κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού τά μέτρα τῶν πλευρῶν το εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, λέγεται **πυθαγόρειο τρίγωνο.** Πυθαγόρειο τρίγων εἶναι π.χ. αὐτό πού ἔχει μέτρα πλευρῶν 3,4,5, γιατί $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftarrow$ $9 + 16 = 25$.

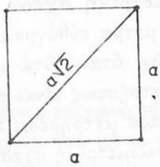
Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού παριστάνουν τά μέτρα τῶν πλευρῶν ὀρθογω νίου τριγώνου, λέγονται πυθαγόρειοι ἀριθμοί. Οἱ ἁπλούστεροι πυθαγόρει ἀριθμοί εἶναι 3, 4, 5.

Ὑπάρχουν ἄπειροι πυθαγόρειοι ἀριθμοί πού συνδέονται μέ τή σχέ $(\mu^2-\nu^2)^2 + (2\mu\nu)^2 = (\mu^2+\nu^2)^2$, ὅπου μ καί ν εἶναι ὁποιοιδήποτε ἀκ ραιοι ἀριθμοί. Ἄν π.χ. στήν προηγούμενη σχέση θέσουμε μ = 5 καί ν = βρίσκουμε τούς πυθαγόρειους ἀριθμούς $5^2 - 2^2 = 21$, $2\cdot 5\cdot 2 = 20$ καί 5^2 $+ 2^2 = 29$, δηλαδή τούς 21, 20, 29. Πράγματι εἶναι $21^2 + 20^2 = 29^2$ $441 + 400 = 841$.

53. Διαγώνιος ὀρθογωνίου μέ διαστάσεις α καί β. Ἔστω ὀρθ γώνιο ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις α καί β (σχ. 78). Φέρνουμε τή διαγώνιο $ΑΓ = δ$



Σχ. 78



Σχ. 79

καί ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε: $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ἤ $δ^2 = α^2 + β^2$ ἤ $\mathbf{δ = \sqrt{α^2 + β^2}}$.

Πόρισμα. Ἡ διαγώνιος ἑνός τετραγώνου μέ πλευρά α ἰσοῦται μέ $α\sqrt{2}$ (σχ. 79).

54. Ὕψος ἰσόπλευρου τριγώνου μὲ πλευρά α. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α (σχ. 80). Φέρνουμε τό ὕψος του $ΑΔ = υ$, τό ὁποῖο τέμνει τή ΒΓ στό μέσο της, ὁπότε

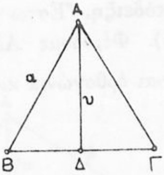
$ΒΔ = \frac{α}{2}$.

Τότε, ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε: $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$ ἤ

$$υ^2 = α^2 - \left(\frac{α}{2}\right)^2 = α^2 - \frac{α^2}{4} =$$

$$= \frac{4α^2 - α^2}{4} = \frac{3α^2}{4}.$$ Ἄρα

$$\mathbf{υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}}.$$



Σχ. 80

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

55. i) Νά κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x = \sqrt{α^2 + β^2}$, ὅπου τά α καί β εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἡ δεδομένη σχέση γράφεται $x^2 = α^2 + β^2$, ἀπό τήν ὁποία φαίνεται ὅτι τό x μπορεῖ νά εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογώνιου τριγώνου μέ κάθετες πλευρές τά τμήματα α καί β. Τό τρίγωνο κατασκευάζεται (σχ. 81).

ii) Νά κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x = \sqrt{α^2 - β^2}$, $α > β$.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

46. Μετρική σχέση γενικά στή γεωμετρία λέγεται κάθε σχέση πού συνδέει τά μέτρα εὐθύγραμμων τμημάτων, ἤ καί ἄλλων ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ὅταν αὐτά μετροῦνται μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως. Ἐπειδή ἡ μονάδα μετρήσεως εἶναι αὐθαίρετη, κάθε μετρική σχέση εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή μονάδα μετρήσεως καί εἶναι καθαρῶς σχέση λόγων.

Κάθε γεωμετρική σχέση εἶναι μετρική σχέση δηλαδή σχέση πού ἀληθεύει γιά ὁποιαδήποτε μονάδα μετρήσεως, καί εἶναι ὁμογενής ὡς πρός τά μήκη πού περιέχει. Ὅλα τά γεωμετρικά θεωρήματα καταλήγουν σέ ὁμογενεῖς γεωμετρικές σχέσεις.

Ἄν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα, ἡ σχέση $2(\alpha)(\beta) = (\gamma)^2$ πού ἀναφέρεται στά μέτρα (α), (β), (γ) τῶν τμημάτων, εἶναι μετρική σχέση ὁμογενής δεύτερου βαθμοῦ καί πιό ἁπλά θά γράφεται $2\alpha\beta = \gamma^2$. Ἡ σχέση $3\alpha^2 + \beta = \gamma^3$ δέν εἶναι μετρική σχέση, γιατί δέν εἶναι ὁμογενής.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

47. Θεώρημα. Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ καθεμιά ἀπό τίς πλευρές του εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτείνουσας καί τῆς προβολῆς της πάνω στήν ὑποτείνουσα.

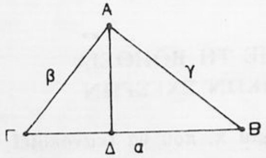
Ἀπόδειξη. Ἔστω ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 1^L)$ μέ πλευρές α,β,γ (σχ. 76). Φέρνουμε ΑΔ ⊥ ΒΓ. Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΑΓ εἶναι ὅμοια γιατί εἶναι ὀρθογώνια καί ἔχουν τή $\widehat{\Gamma}$ κοινή.

Ἄρα:

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \Longleftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta\Gamma}{\beta} \Longleftrightarrow$$

(1) $\boldsymbol{\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma}$,

ὅπου ΔΓ εἶναι ἡ προβολή τῆς πλευρᾶς β πάνω στήν ὑποτείνουσα.



Σχ. 76

Ὁμοίως εἶναι $AB\Gamma \approx \Delta BA \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\Delta B}{\gamma} \Longleftrightarrow$

(2) $\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B}$.

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν δύο κάθετων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν προβολῶν τους πάνω στήν ὑποτείνουσα.

Πράγματι, ἄν τίς σχέσεις (1) καί (2) τοῦ προηγούμενου θεωρήματος τίς διαιρέσουμε κατά μέλη, παίρνουμε :

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}.$$

48. Πυθαγόρειο Θεώρημα *. Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο κάθετων πλευρῶν του εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας.

᾿Απόδειξη. Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 76) ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε :

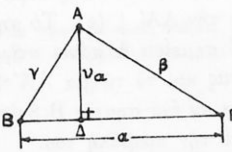
$$\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma \quad \text{καί} \quad \gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B.$$

Τίς προσθέτουμε κατά μέλη, καί παίρνουμε : $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha(\Delta\Gamma + \Delta B)$. ᾿Αλλά $\Delta\Gamma + \Delta B = \Gamma B = \alpha$. ῎Αρα ἡ προηγούμενη σχέση γράφεται :

$$\boldsymbol{\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2}.$$

49. Θεώρημα. Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο τό ὕψος πρός τήν ὑποτείνουσα εἶναι μέσο ἀνάλογο τῶν δύο τμημάτων, στά ὁποῖα αὐτό διαιρεῖ τήν ὑποτείνουσα.

᾿Απόδειξη. ῎Εστω ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 1^{L})$ καί $A\Delta = \upsilon_\alpha$ τό ὕψος του πρός τήν ὑποτείνουσα (σχ. 77). Τό ὕψος διαιρεῖ τό τρίγωνο ΑΒΓ σέ δύο ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Delta A B} \approx \overset{\Delta}{\Delta \Gamma A}$, γιατί τό καθένα ἀπ' αὐτά εἶναι ὅμοιο πρός τό τρίγωνο ΑΒΓ. ᾿Από τήν ὁμοιότητα παίρνουμε τήν ἀναλογία :



Σχ. 77

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} \Longleftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma \quad \text{ἤ}$$

$$\boldsymbol{\upsilon_\alpha{}^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma}.$$

50. Θεώρημα. Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 1^{L})$ ἰσχύει ἡ μετρική σχέση $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$.

᾿Απόδειξη. Φέρνουμε τό ὕψος $A\Delta = \upsilon_\alpha$ καί παρατηροῦμε ὅτι $\overset{\Delta}{BA\Delta} \approx \overset{\Delta}{B\Gamma A}$, γιατί εἶναι ὀρθογώνια καί ἔχουν τή γωνία $\widehat{B}$ κοινή.

(*) **Πυθαγόρας** (γεννήθηκε στή Σάμο γύρω στό 580 π.Χ.). Ταξίδεψε στήν Αἴγυπτο καί τίς ᾿Ινδίες καί μετά ἀποσύρθηκε στήν ᾿Ιταλία, ὅπου ἵδρυσε τή περίφημη Σχολή του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

149. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα Κ καί Λ τῶν βάσεων ἑνός τραπεζίου περνάει ἀπό τό κοινό σημεῖο Ε τῶν διαγωνίων καί ἀπό τό κοινό σημεῖο Ζ τῶν μή παράλληλων πλευρῶν.

150. Ἄν οἱ ἀκτίνες μιᾶς δέσμης μέ κέντρο Ο τέμνουν δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (ε΄) στά Α καί Α΄, Β καί Β΄, Γ καί Γ΄... ἀντιστοίχως ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ διαγώνιοι τῶν τραπεζίων ΑΑ΄Β΄Β, ΒΒ΄Γ΄Γ, ΓΓ΄Δ΄Δ,... τέμνονται σέ σημεῖα, τά ὁποῖα βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία πού εἶναι παράλληλη πρός τίς (ε) καί (ε΄).

151. Φέρνουμε δύο παράλληλες πρός τή διαγώνιο ΑΓ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, πού τέμνουν τίς πλευρές του στά Ε, Θ καί Η, Ζ ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΕΖ καί ΗΘ τέμνονται πάνω στή ΒΔ.

152. Ἀπό ἕνα σημεῖο Δ τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλο πρός τή διάμεσο ΑΜ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $ΔΕ + ΔΖ$ εἶναι σταθερό.

153. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί ἔστω Ε ἕνα σημεῖο τῆς διαγωνίου ΒΔ. Ἀπό τό Ε φέρνουμε ἀπό μία παράλληλο πρός τίς πλευρές του, πού τέμνουν τίς ΑΒ καί ΓΔ στά Ζ καί Η ἀντιστοίχως καί τίς ΑΔ καί ΒΓ στά Ι καί Θ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι : α) ΖΘ//ΗΙ, καί β) οἱ ΙΖ καί ΗΘ τέμνονται πάνω στή ΒΔ.

154. Δίνεται ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί ἔστω Ε ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς ΑΒ. Ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλο τῆς ΒΓ, πού τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ, καί ἀπό τό Ζ φέρνουμε παράλληλο τῆς ΓΔ, πού τέμνει τήν ΑΔ στό Η. Νά ἀποδείξετε ὅτι :

α) $ΑΕ \cdot ΔΗ = ΒΕ \cdot ΑΗ$, καί β) ΕΗ//ΒΔ.

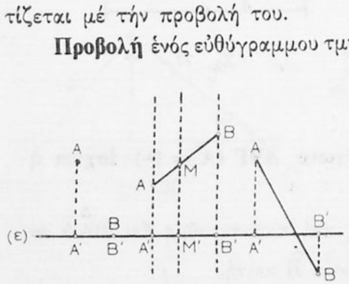
155. Δίνονται δύο εὐθεῖες $(ε_1)$, $(ε_2)$ καί ἕνα σημεῖο Α. Οἱ $(ε_1)$ καί $(ε_2)$ τέμνονται, ἀλλά τό σημεῖο τομῆς τους δέ βρίσκεται μέσα στό πεδίο σχεδιάσεως. Νά φέρετε εὐθεία ἀπό τό Α πού νά περνάει καί ἀπό τό κοινό σημεῖο τῶν $(ε_1)$ καί $(ε_2)$.

ΟΡΘΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ

44. Ὁρισμοί. Παίρνουμε ἕνα σημεῖο Α καί μιά εὐθεία (ε) (σχ. 75). Φέρνουμε τήν $ΑΑ' \perp (ε)$. Τό σημεῖο Α΄ πάνω στήν (ε) λέγεται (ὀρθή) **προβολή** τοῦ σημείου Α πάνω στήν εὐθεία (ε). Ἡ εὐθεία (ε) λέγεται **προβολικός ἄξονας** καί τό τμῆμα ΑΑ΄ λέγεται **προβάλλουσα** τοῦ σημείου Α.

Ἔτσι ἄν ἕνα σημεῖο Β βρίσκεται πάνω στόν προβολικό ἄξονα, τότε ταυτίζεται μέ τήν προβολή του.

Προβολή ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ πάνω σέ ἄξονα (ε) λέγεται τό σύνολο τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος ΑΒ πάνω στόν ἄξονα (ε).



Σχ. 75

45. Θεώρημα. Ἡ προβολή εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ πάνω σέ εὐθεία (ε) εἶναι τμῆμα Α΄Β΄ μέ ἄκρα τίς προβολές τῶν ἄκρων τοῦ ΑΒ πάνω στήν (ε).

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τίς προβολές Α΄ καί Β΄ τῶν ἄκρων Α καί Β τοῦ τμήματος ΑΒ πάνω στήν εὐθεία (ε) (σχ. 75) Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ὁποιοδήποτε σημεῖο M τοῦ τμήματος AB, προβάλλεται σέ σημεῖο M′ τοῦ τμήματος A′B′ καί ἀντιστρόφως ὅτι τό τυχαῖο σημεῖο M′ τοῦ τμήματος A′B′, εἶναι ἡ προβολή πάνω στήν εὐθεία (ε) ἑνός σημείου M τοῦ τμήματος AB.

Ἔστω M′ ἡ προβολή ἑνός σημείου M τοῦ τμήματος AB· πάνω στήν εὐθεία (ε). Οἱ εὐθεῖες AA′, BB′ καί MM′ εἶναι παράλληλες γιατί εἶναι κάθετες πάνω στήν ἴδια εὐθεία (ε). Τό σημεῖο M, ἀφοῦ ἀνήκει στό τμῆμα AB, βρίσκεται μέσα στή ζώνη τῶν παραλλήλων AA′ καί BB′. Ἄρα καί ἡ MM′ θά βρίσκεται μέσα στή ζώνη τῶν παραλλήλων AA′ καί BB′. Ἑπομένως ἡ MM′ θά τέμνει τό τμῆμα A′B′ σέ σημεῖο M′, δηλαδή ἡ προβολή M′ τοῦ M πάνω στήν εὐθεία (ε) εἶναι σημεῖο τοῦ τμήματος A′B′.

Ὁμοίως μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ καί τό ἀντίστροφο, δηλαδή ἄν M′ εἶναι σημεῖο τοῦ τμήματος A′B′, ἡ κάθετος ἀπ' αὐτό στήν εὐθεία (ε), ὡς παράλληλος πρός τίς AA′ καί BB′, θά τέμνει τό τμῆμα AB σέ ἕνα σημεῖο M. Ἄρα τό σημεῖο M′ εἶναι ἡ προβολή ἑνός σημείου M τοῦ τμήματος AB.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

156. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ προβολές δύο ἴσων καί παράλληλων τμημάτων πάνω στήν ἴδια εὐθεία εἶναι ἴσες.

157. Ἄν A′B′ εἶναι ἡ προβολή τμήματος AB πάνω σέ εὐθεία (ε), νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $AB \geqq A'B' \geqq 0$. Πότε ἰσχύει τό πρῶτο ἴσον καί πότε τό δεύτερο;

158. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος προβάλλεται στό μέσο τῆς προβολῆς του πάνω σέ μιά εὐθεία.

159. Ἄν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB προβάλλεται πάνω σέ τρεῖς εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3) στά A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ἀντιστοίχως νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων A_1B_1 A_2B_2 καί A_3B_3 διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Β′.

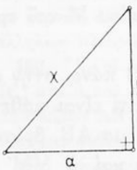
160. Ἄν τά μέσα K καί Λ τῶν πλευρῶν AB καί AΓ τριγώνου ABΓ προβάλλονται πάνω σέ εὐθεία (ε) στό ἴδιο σημεῖο, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ προβολή τῆς πλευρᾶς BΓ πάνω στήν (ε) εἶναι μηδενική.

161. Ἄν τά μέσα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου προβάλλονται πάνω σέ δεδομένη εὐθεία στό ἴδιο σημεῖο, νά ἀποδείξετε ὅτι καί τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται σέ ἕνα σημεῖο. Ἄν τά μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται στό ἴδιο σημεῖο, νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου προβάλλονται ἑκατέρωθεν τοῦ προηγούμενου σημείου σέ ἴσες ἀποστάσεις.

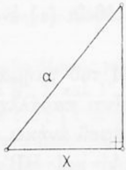
162. Ἀπό δεδομένο σημεῖο Σ νά φέρετε μιά εὐθεία (ε), πάνω στήν ὁποία οἱ προβολές τῶν κορυφῶν τριγώνου ABΓ νά ὁρίζουν δύο ἴσα τμήματα.

163. Ἀπό δεδομένο σημεῖο Σ νά φέρετε μιά εὐθεία, πάνω στήν ὁποία οἱ προβολές τῶν κορυφῶν τριγώνου ABΓ νά ὁρίζουν δύο διαδοχικά τμήματα, πού τό ἕνα νά εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ἄλλο.

Ἡ δεδομένη σχέση γράφεται $x^2 = \alpha^2 - \beta^2$, ἀπό τήν ὁποία φαίνεται ὅτι τό x μπορεῖ νά εἶναι ἡ μία κάθετη πλευρά ὀρθογώνιου τριγώνου μέ ὑποτείνουσα α καί τήν ἄλλη κάθετη β. Τό τρίγωνο κατασκευάζεται (σχ. 82).



Σχ. 81



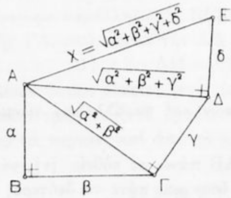
Σχ. 82

iii) Νά κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$, ὅπου α,β,γ καί δ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

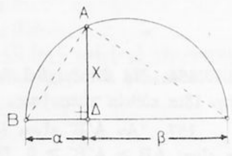
Ἡ δεδομένη σχέση γράφεται :

$$x^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό ἄθροισμα $\alpha^2 + \beta^2$ μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό $A\Gamma^2$ (σχ. 83), ὅπου ΑΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογώνιου τριγώνου μέ κάθετες πλευρές τίς α καί β. Μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τό



Σχ. 83



Σχ. 84

ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \gamma^2$ μέ τό $A\Delta^2$ καί τό $A\Delta^2 + \delta^2$ μέ τό AE^2. Ἀπό τό σχῆμα φαίνεται τότε ὅτι εἶναι :

$$x^2 = AE^2 = A\Delta^2 + \delta^2 = A\Gamma^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Σημείωση. Μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \varepsilon^2 + \zeta^2}$, ὅταν δίνεται καθορισμένο πλῆθος εὐθύγραμμων τμημάτων α, β, . . ., ε, ζ.

iv) Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}$, ὅπου α, β, γ καί δ εἶναι δεδομένα τμήματα τέτοια, ὥστε $\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 > 0$.

Ἡ δεδομένη σχέση μπορεῖ νά γραφτεῖ :

$$x^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - (\beta^2 + \delta^2) \quad \text{ἤ} \quad x^2 = \lambda^2 - \mu^2,$$

ὅπου τά εὐθύγραμμα τμήματα λ καί μ ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις $\lambda^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ καί $\mu^2 = \beta^2 + \delta^2$ καί κατασκευάζονται ὅπως στήν περίπτωση (i). Τότε πιά μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ καί τό x ὅπως στήν περίπτωση (ii).

v) Κατασκευή μέσης ἀναλόγου.

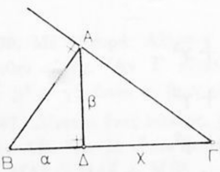
Νά κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x^2 = \alpha\beta$, ὅπου α καί β εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Παρατηροῦμε ὅτι (§ 49) τό x μπορεῖ νά εἶναι τό ὕψος τριγώνου πού φέρεται ἀπό τήν ὀρθή γωνία καί διαιρεῖ τήν ὑποτείνουσα σέ δύο τμήματα μέ μήκη α καί β. Γιά τήν κατασκευή παίρνουμε πάνω σέ μιά εὐθεία διαδοχικά τμήματα $ΒΔ = \alpha$ καί $ΔΓ = \beta$ (σχ. 84) καί μέ διάμετρο τή ΒΓ γράφουμε ἡμικύκλιο. Ἀπό τό Δ φέρνουμε κάθετο στή ΒΓ, πού τέμνει τό ἡμικύκλιο στό Α. Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιο ($\widehat{A} = 1^{\llcorner}$). Ἑπομένως τό ζητούμενο τμῆμα εἶναι τό $x = ΑΔ$, τό ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x^2 = \alpha\beta$.

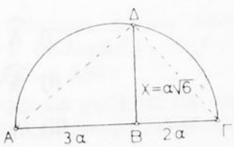
vi) Νά κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $\alpha x = \beta^2$, ὅπου α καί β εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἄν β εἶναι τό ὕψος ὀρθογώνιου τριγώνου πρός τήν ὑποτείνουσα καί α εἶναι τό ἕνα ἀπό τά τμήματα, στά ὁποῖα τό ὕψος αὐτό διαιρεῖ τήν ὑποτείνουσα (σχ. 85), τότε τό x θά εἶναι τό ἄλλο.

Κατασκευάζουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ($\widehat{Δ} = 1^{\llcorner}$) μέ κάθετες πλευρές τίς α καί β. Ἀπό τήν κορυφή Α φέρνουμε κάθετο στήν ὑποτείνουσά του ΑΒ,



Σχ. 85



Σχ. 86

πού τέμνει τή ΒΔ στό σημεῖο Γ. Τό τμῆμα ΓΔ εἶναι τό ζητούμενο, δηλαδή $ΓΔ = x$, γιατί κατά τήν § 49 ἱκανοποιεῖ τή δεδομένη σχέση $\alpha \cdot ΓΔ = \beta^2$.

vii) Νά κατασκευαστεῖ εὐθύγραμμο τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x = \alpha\sqrt{6}$, ὅπου τό α εἶναι δεδομένο τμῆμα.

Ἡ δεδομένη σχέση γράφεται $x^2 = 6\alpha^2$ ἤ $x^2 = 3\alpha \cdot 2\alpha$. Ἡ κατασκευή εἶναι ὅμοια μέ ἐκείνη τῆς περιπτώσεως (v) καί φαίνεται στό σχῆμα 86.

56. Πρόβλημα. **Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα x τέτοιο, ὥστε :**

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$$

ὅπου τό α εἶναι δεδομένο τμῆμα καί $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι δεδομένος ἀριθμητικός λόγος.

ἀπό τούς ὁποίους μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τά μήκη τῶν διαμέσων ἑνός τριγώνου, ὅταν γνωρίζουμε τά μήκη τῶν πλευρῶν του.

60. Δεύτερο θεώρημα τῆς διαμέσου. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \mathrm{M\Delta}$$

(μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $\beta \geqq \gamma$), ὅπου Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ καί Δ ἡ προβολή τοῦ Α πάνω στή ΒΓ.

'Απόδειξη. Ἔστω τό τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\beta \geqq \gamma$ (σχ. 91). Τότε θά εἶναι (§ 58 καί § 57) :

$$\beta^2 = \mu_\alpha{}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2 + 2\mathrm{M\Gamma} \cdot \mathrm{M\Delta}$$
$$\gamma^2 = \mu_\alpha{}^2 + \mathrm{MB}^2 - 2\mathrm{MB} \cdot \mathrm{M\Delta}.$$

Ἄν τίς ἀφαιρέσουμε αὐτές κατά μέλη, καί ἐπειδή $\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma} = \dfrac{\alpha}{2}$, ἔχουμε

$$\beta^2 - \gamma^2 = 4\mathrm{MB} \cdot \mathrm{M\Delta} = 4\,\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{M\Delta} \quad \text{ἤ}$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \mathrm{M\Delta}.$$

61. Βασικό κριτήριο γιά τό εἶδος γωνίας ἑνός τριγώνου. Ἀπό τά προηγούμενα θεωρήματα καί ἀπό τό Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ὅτι σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ

$$\text{i)}\ \widehat{\mathrm{A}} < 1^{\llcorner} \iff \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$

$$\text{ii)}\ \widehat{\mathrm{A}} = 1^{\llcorner} \iff \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$\text{iii)}\ \widehat{\mathrm{A}} > 1^{\llcorner} \iff \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2.$$

Τά ἀντίστροφα μποροῦν ν' ἀποδειχθοῦν μέ τήν ἀπαγωγή σέ ἄτοπο δηλαδή : Ἄν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, ἀποκλείονται τά ἐνδεχόμενα $\widehat{\mathrm{A}} = 1^{\llcorner}$ ἤ $\widehat{\mathrm{A}} > 1^{\llcorner}$, γιατί ἀπ' αὐτά ἕπεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ἤ $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ἀντιστοίχως. Ἄρα θά εἶναι $\widehat{\mathrm{A}} < 1^{\llcorner}$. Ὁμοίως καί γιά τίς (ii) καί (iii).

Εὐνόητο εἶναι ὅτι σ' ἕνα τρίγωνο μέ γνωστές πλευρές τό κριτήριο ἐφαρμόζεται μόνο γιά τή μεγαλύτερη πλευρά, γιατί ἄν τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο ἤ ἀμβλυγώνιο, αὐτό θά συμβαίνει στή γωνία πού εἶναι ἀπέναντι ἀπό τή μεγαλύτερη πλευρά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

187. Ν' ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τραπέζιο τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μή παράλληλων πλευρῶν του σύν τό διπλάσιο γινόμενο τῶν δύο βάσεων.

188. Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε παράλληλο τῆς ΒΓ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδείξετε ὅτι $BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma \cdot \Delta E$.

189. Σέ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) συνδέουμε τήν κορυφή Α μέ ἕνα σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B \cdot \Delta\Gamma$.

190. Ἕνα τρίγωνο ἔχει πλευρές α, β, γ καί γωνία $\widehat{A} = 120^{\circ}$. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

191. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἑνός παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

192. Ἑνός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οἱ διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. Ν' ἀποδείξετε ὅτι $|AB^2 - A\Delta^2| = |\Gamma B^2 - \Gamma\Delta^2|$.

193. Νά βρεθεῖ τό εἶδος τῶν γωνιῶν τριγώνου ΑΒΓ, τό ὁποῖο ἔχει πλευρές

i) $\alpha = 3\lambda,\ \beta = 4\lambda,\ \gamma = 6\lambda$.

ii) $\alpha = \lambda,\ \beta = \dfrac{\lambda}{2},\ \gamma = \dfrac{2\lambda}{3}$

iii) $\alpha = 8\lambda,\ \beta = 15\lambda,\ \gamma = 17\lambda$

iv) $\alpha = 7\lambda,\ \beta = 6\lambda,\ \gamma = 8\lambda$.

Β΄.

194. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαμέσων ἑνός τριγώνου ἰσοῦται μέ τά 3/4 τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του.

195. Ἄν Μ εἶναι τό κέντρο βάρους ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι :

$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3}.$$

196. Μέ πλευρά $AB = \gamma$ κατασκευάζουμε δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΕ ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἄν Γ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $\Gamma\Delta^2 + \Gamma E^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, ὅπου α, β, γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

197. Δίνεται ἕνας κύκλος, μιά διάμετρός του ΑΒ καί μιά χορδή του ΓΔ παράλληλη πρός τήν ΑΒ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διαμέτρου ΑΒ, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2$.

198. Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρά α. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ν' ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2$ εἶναι σταθερό.

199. Διαιροῦμε τήν ὑποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ σέ τρία ἴσα τμήματα $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$ καί φέρνουμε τίς ΑΔ καί ΑΕ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $A\Delta^2 + AE^2 + \Delta E^2 = \dfrac{2\alpha^2}{3}$.

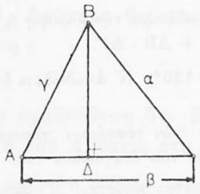
200. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέση $MA^2 + MB^2 = k^2$, ὅπου Α, Β εἶναι σταθερά σημεῖα καί k δεδομένο τμῆμα.

201. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε κυρτό τεοράπλευρο τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του, αὐξημένο κατά τό τετραπλάσιο τετράγωνο τοῦ τμήματος πού ἔχει ἄκρα τά μέσα τῶν διαγωνίων του.

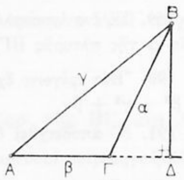
202. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο, τοῦ ὁποίου δίνονται ἡ πλευρά α, τό ὕψος υ_α καί τό ἄθροισμα $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

203. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ἀπό τά α, υ_β καί $\beta^2 + \gamma^2 = k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

i) Τό σημεῖο Δ βρίσκεται πάνω στήν πλευρά ΑΓ. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} < 90^0$ καί



Σχ. 88



Σχ. 89

ii) Τό σημεῖο Δ βρίσκεται στή προέκταση τῆς ΑΓ (σχ. 89). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\widehat{\Gamma} > 90^0$.

'Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ παίρνουμε :

(1) $$\alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2.$$

Στήν περίπτωση (i) εἶναι $\Gamma\Delta = \beta - A\Delta$, ἐνῶ στήν περίπτωση (ii) εἶναι $\Gamma\Delta = A\Delta - \beta$. Καί στίς δύο ὅμως περιπτώσεις εἶναι :

$$\Gamma\Delta^2 = (\beta - A\Delta)^2 = (A\Delta - \beta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

(2) $$\alpha^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta + \Delta B^2.$$

'Αλλά ἐπειδή $A\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, ἡ (2) γράφεται :

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta.}$$

58. Θεώρημα. Σέ κάθε ἀμβλυγώνιο τρίγωνο τό τετράγωνο τῆς πλευρᾶς, πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τήν ἀμβλεία γωνία, εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, αὐξημένο κατά τό διπλάσιο γινόμενο τῆς μιᾶς ἀπ' αὐτές ἐπί τήν προβολή τῆς ἄλλης πάνω στήν πρώτη.

'Απόδειξη. Ἔστω τό τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{A} > 90^0$ (σχ. 90). Φέρνουμε τή $B\Delta \perp A\Gamma$ καί θά δείξουμε ὅτι εἶναι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

'Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ παίρνουμε

(1) $$\alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2.$$

'Αλλά $\Gamma\Delta = \beta + A\Delta$ ἤ $\Gamma\Delta^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2$.

Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

(2) $$\alpha^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta^2 + A\Delta^2 + \Delta B^2$$

καί ἐπειδή $A\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2$, ἡ (2) γράφεται :

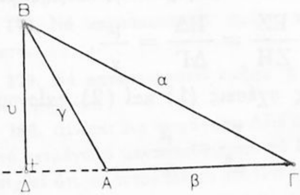
$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.}$$

59. Πρῶτο θεώρημα τῆς διαμέσου. **Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέση**

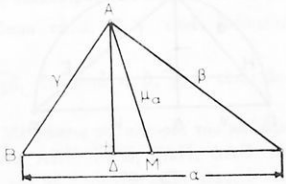
$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + \frac{\alpha^2}{2},$$

ὅπου μ_α ἡ διάμεσος ἀπό τό Α.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 91) καί ΑΔ τό ὕψος του. Μέ τή διάμεσο ΑΜ τό τρίγωνο χωρίζεται σέ δύο ἄλλα τρίγωνα ΑΜΒ καί ΑΜΓ.



Σχ. 90



Σχ. 91

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\widehat{ΑΜΓ} > 90^0$. Τότε θά εἶναι $\widehat{ΑΜΒ} < 90^0$ καί ἀπό τά δύο προηγούμενα θεωρήματα θά ἔχουμε:

(1) $$\beta^2 = \mu_\alpha{}^2 + ΜΓ^2 + 2ΜΓ \cdot ΜΔ$$

(2) $$\gamma^2 = \mu_\alpha{}^2 + ΜΒ^2 - 2ΜΒ \cdot ΜΔ.$$

Προσθέτουμε τίς σχέσεις αὐτές κατά μέλη καί γνωρίζοντας ὅτι εἶναι $ΜΒ = ΜΓ = \frac{\alpha}{2}$ παίρνουμε:

(3) $$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + 2ΜΒ^2 \quad ἤ$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad ἤ$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + \frac{\alpha^2}{2}.$$

Σημείωση. Σέ πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμε καί τή μορφή (3).

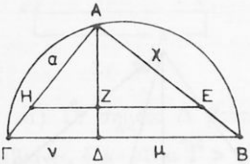
Παρατήρηση 1. Ἀπό τόν προηγούμενο τύπο τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου, μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων α, β καί γ, μποροῦμε νά πάρουμε ἀντιστοίχως τούς τύπους:

$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2\mu_\beta{}^2 + \frac{\beta^2}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma{}^2 + \frac{\gamma^2}{2}.$$

Παρατήρηση 2. Ἀπό τούς τρεῖς προηγούμενους τύπους μποροῦμε νά πάρουμε καί τούς τύπους:

$$4\mu_\alpha{}^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2, \quad 4\mu_\beta{}^2 = 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2,$$
$$4\mu_\gamma{}^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$$

Κατασκευή. Μέ διάμετρο $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = μ + ν$ γράφουμε ἡμικύκλιο καί ἀπό τό Δ φέρνουμε κάθετο στή ΒΓ, πού τέμνει τό ἡμικύκλιο στό Α. Πάνω στήν ΑΓ παίρνουμε τμῆμα $ΑΗ = α$ καί φέρνουμε τήν $ΗΖΕ // ΓΔΒ$ (σχ. 87). Τό τμῆμα $ΑΕ = x$ εἶναι τό ζητούμενο.



Σχ. 87

'Απόδειξη. Γνωρίζουμε ὅτι (§ 47. πορ.):

$$(1) \qquad \frac{ΑΕ^2}{ΑΗ^2} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ} \quad ἤ \quad \frac{x^2}{α^2} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ}.$$

'Αλλά, κατά τό θεώρημα τῆς δέσμης, εἶναι:

$$(2) \qquad \frac{ΕΖ}{ΖΗ} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{μ}{ν}.$$

'Από τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε:

$$\frac{x^2}{α^2} = \frac{μ}{ν}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

164. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο οἱ δύο κάθετες πλευρές του εἶναι 15 cm καί 20 cm. Νά βρεθοῦν ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου, οἱ προβολές τῶν κάθετων πλευρῶν του πάνω στήν ὑποτείνουσα καί τό ὕψος του ἀπό τήν ὀρθή γωνία.

165. Οἱ προβολές τῶν κάθετων πλευρῶν ἑνός ὀρθογ. τριγώνου πάνω στήν ὑποτείνουσα εἶναι 2 cm καί 8 cm. Νά βρεθοῦν τό ὕψος ἀπό τήν ὀρθή γωνία καί οἱ κάθετες πλευρές τοῦ τριγώνου.

166. Νά βρεθοῦν οἱ πλευρές ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου πού ἔχει περίμετρο 84 cm καί ὑποτείνουσα 37 cm.

167. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ἑνός τυχαίου τριγώνου εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τους πάνω στήν τρίτη πλευρά.

168. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 1∟$) φέρνουμε ἀπό τό μέσο Δ τῆς ΑΒ κάθετο ΔΕ στήν ὑποτείνουσα. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ΕΓ^2 - ΕΒ^2 = ΑΓ^2$.

169. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει κάθετες τίς διαγωνίους του ΑΓ καί ΒΔ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι $ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΒΓ^2 + ΑΔ^2$.

170. Δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}y = 45^0$ καί ἕνα σημεῖο Μ στό ἐσωτερικό της. 'Από τό Μ φέρνουμε εὐθεία κάθετη στήν Ox, πού τήν τέμνει στό σημεῖο Α, ἐνῶ τήν Oy τήν τέμνει στό σημεῖο Β. Νά ἀποδείξετε ὅτι $ΑΒ^2 + ΑΜ^2 = ΟΜ^2$.

171. Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ καί ἕνα σημεῖο Ε στό ἐσωτερικό του. Ἄν συνδέσουμε τό Ε μέ τίς κορυφές τοῦ ὀρθογωνίου, ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ΕΑ^2 + ΕΓ^2 = ΕΒ^2 + ΕΔ^2$.

172. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα x, πού νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $x^2 = α^2 + β^2 + γ^2$, ὅπου τά α, β, γ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

173. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = α\sqrt{30}$, ὅπου τό α εἶναι δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα.

174. Δίνεται ἕνα τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ. 'Από ἕνα σημεῖο Γ τοῦ τόξου $\widehat{ΑΒ}$ φέρνουμε

$ΓΕ \perp ΟΑ$ πού τέμνει τή διχοτόμο τῆς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{AOB}$ στό σημεῖο Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ΓΕ^2 + ΔΕ^2 = ΟΑ^2$.

175. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \alpha\sqrt{3} + \beta\sqrt{5}$, ὅπου τά α καί β εἶναι δεδομένα τμήματα.

Β΄.

176. Ν' ἀποδείξετε ὅτι ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη δύο κύκλων, πού ἐφάπτονται ἐξωτερικά, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξύ τῶν διαμέτρων τῶν δύο κύκλων.

177. Νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς καί τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης δύο κύκλων πού ἔχουν ἀκτίνες α καί 4α, ἄν ἡ διάκεντρος τῶν κύκλων εἶναι 6α.

178. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta\gamma}$, ὅπου τά α, β, γ εἶναι δεδομένα τμήματα.

179. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma\delta}$, ὅπου τά α, β, γ, δ εἶναι δεδομένα τμήματα.

180. Δίνεται ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλευρά α. Μέ βάσεις τίς πλευρές του καί ἔξω ἀπό τό τετράγωνο κατασκευάζουμε τά ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά του.

181. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\gamma\delta}$, ὅπου τά α, β, γ, δ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

182. Δίνονται δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) πού τέμνονται καθέτως. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, πού τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό τίς εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) παραμένει σταθερό.

183. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα $x = \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2}$, ὅπου α, β, γ εἶναι δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

184. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί δύο ὁποιεσδήποτε χορδές του πού τέμνονται καθέτως στό σημεῖο Μ. Ἄν α, β, γ, δ εἶναι τά τμήματα στά ὁποῖα διαιροῦνται οἱ χορδές ἀπό τό Μ, ν' ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ εἶναι σταθερό.

185. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί ἕνα σταθερό σημεῖο Σ στό ἐσωτερικό του. Δύο μεταβλητές χορδές ΑΣΒ καί ΓΣΔ περνοῦν ἀπό τό Σ καί τέμνονται καθέτως. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΓΔ^2$ εἶναι σταθερό.

186. Νά κατασκευαστοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα x καί y πού νά ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις $x^2 + y^2 = \alpha^2$ καί $xy = \beta^2$, ὅπου τά α καί β εἶναι δεδομένα τμήματα.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

57. Θεώρημα. Σέ κάθε τρίγωνο τό τετράγωνο μιᾶς πλευρᾶς, πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό ὀξεία γωνία, εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἐλαττωμένο κατά τό διπλάσιο γινόμενο τῆς μιᾶς ἀπ' αὐτές ἐπί τήν προβολή τῆς ἄλλης πάνω στήν πρώτη.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο εἶναι $\widehat{A} < 90^0$ (σχ. 88). Φέρνουμε τή $ΒΔ \perp ΑΓ$ καί θά δείξουμε ὅτι εἶναι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot ΑΔ.$$

Θά διακρίνουμε δύο περιπτώσεις δηλαδή :

204. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει $MA^2 - MB^2 = k^2$, ὅπου Α, Β εἶναι σταθερά σημεῖα καί k δεδομένο τμῆμα.

205. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ἀπό τά α, $υ_α$ καί $β^2 - γ^2 = k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

206. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ἀπό τά α, $μ_α$ καί $β^2 - γ^2 = k^2$ ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

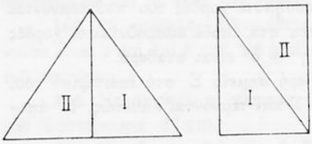
ΕΜΒΑΔΑ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

62. 'Ορισμός. Μιά θεμελιώδης ἔννοια, πού συνδέεται ἄμεσα μέ ὁποιοδήποτε κλειστό ἐπίπεδο σχῆμα, εἶναι ἡ ἔννοια τῆς ἐκτάσεώς του πάνω στό ἐπίπεδο. Ἡ ἔκταση ἀκριβῶς αὐτή λέγεται **ἐμβαδό** τοῦ σχήματος.

63. Ἰσεμβαδικά ἤ **ἰσοδύναμα** λέγονται δύο σχήματα, ὅταν ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.

Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχημάτων εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας, δηλαδή εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική.

Γιά τό συμβολισμό τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνός πολυγώνου ΑΒΓ...Ν, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό σύμβολο (ΑΒΓ...Ν) ἤ ἁπλῶς Ε, ὅταν εἶναι γνωστό ποῦ ἀναφέρεται αὐτό.



Σχ. 92

64. 'Αξιώματα γιά τά ἐμβαδά τῶν σχημάτων.

i) Δύο ἴσα σχήματα εἶναι ἰσεμβαδικά.

ii) Ἄν δύο σχήματα ἀποτελοῦνται ἀπό ἴσα ἤ ἰσεμβαδικά τμήματα ἕνα πρός ἕνα, τότε εἶναι ἰσεμβαδικά (σχ. 92).

iii) Ἄν σέ ἰσεμβαδικά σχήματα προσθέσουμε ἰσεμβαδικά σχήματα, προκύπτουν ἰσεμβαδικά σχήματα.

ΕΜΒΑΔΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

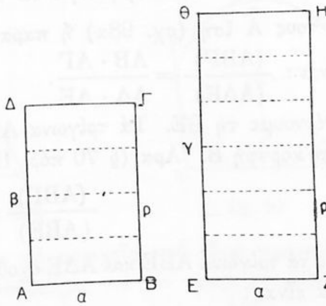
65. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων μέ μία ἀπό τίς διαστάσεις τους ἴση ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἄλλων διαστάσεών τους.

'Απόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ μέ διαστάσεις $AB = α$, $AΔ = β$ καί $EZ = α$, $EΘ = γ$ (σχ. 93). Ἄν συμβολίσουμε μέ $E(α,β)$ καί $E(α,γ)$ τά ἐμβαδά τους ἀντιστοίχως θά δείξουμε ὅτι $\frac{E(α,β)}{E(α,γ)} = \frac{β}{γ}$.

"Ας ὑποθέσουμε ὅτι ὁ λόγος τῶν διαστάσεων β καί γ ἰσοῦται μέ κάποιο ἀριθμητικό κλάσμα μ/ν δηλαδή

(1) $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

'Απ' αὐτό προκύπτει ὅτι μποροῦμε νά διαιρέσουμε τήν πλευρά $A\Delta = \beta$ σέ μ τμήματα ἴσα πρός ρ, δηλαδή $\beta = \mu\rho$, καί τήν πλευρά $E\Theta = \gamma$ νά τή διαιρέσουμε σέ ν τμήματα ἴσα πρός ρ δηλαδή $\gamma = \nu\rho$. Τότε θά εἶναι πράγματι $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\mu\rho}{\nu\rho} = \dfrac{\mu}{\nu}$.



Σχ. 93

'Από τά διαιρετικά σημεῖα πάνω στίς πλευρές ΑΔ καί ΕΘ φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς βάσεις ΑΒ καί ΕΖ ἀντιστοίχως τῶν ὀρθογωνίων. Τότε τά δύο ὀρθογώνια διαιροῦνται σέ μ καί ν ἀντιστοίχως στοιχειώδη ἴσα ὀρθογώνια μέ διαστάσεις (α, ρ) καί ἔστω Ε(α,ρ) τό στοιχειῶδες ἐμβαδό καθενός ἀπ' αὐτά. Εἶναι φανερό πώς θά ἔχουμε γιά τά ἐμβαδά τῶν ἀρχικῶν ὀρθογωνίων:

$$E(\alpha,\beta) = \mu \cdot E(\alpha,\rho) \text{ καί } E(\alpha,\gamma) = \nu \cdot E(\alpha,\rho) \Rightarrow \frac{E(\alpha,\beta)}{(E\alpha,\gamma)} = \frac{\mu \cdot E(\alpha,\rho)}{\nu \cdot E(\alpha,\rho)} = \frac{\mu}{\nu}$$

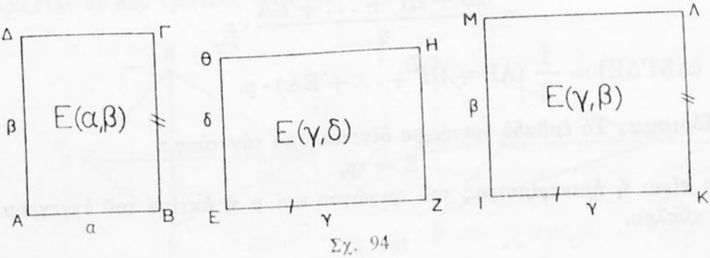
καί ἐξαιτίας τῆς σχέσεως (1) ἡ τελευταία γίνεται:

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\alpha,\gamma)} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Σημείωση. Τό θεώρημα μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ καί ὅταν τά τμήματα ΑΔ καί ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρα. 'Η ἀπόδειξη παραλείπεται.

66. Θεώρημα. 'Ο λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν γινομένων τῶν διαστάσεών τους.

'Απόδειξη. "Ας θεωρήσουμε δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ μέ διαστάσεις (α,β) καί (γ,δ) ἀντιστοίχως (σχ. 94).



Σχ. 94

73. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τριγώνων, πού ἔχουν μιά γωνία ἴση ἤ παραπληρωματική εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, οἱ ὁποῖες περιέχουν τήν ἴση ἤ τήν παραπληρωματική γωνία.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΕ, πού ἔχουν τή γωνία τους $\widehat{A}$ ἴση (σχ. 98α) ἤ παραπληρωματική (σχ. 98β). Θά δείξουμε ὅτι εἶναι : $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE}$.

Φέρνουμε τή ΒΕ. Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒΕ ἔχουν τό ἴδιο ὕψος ΒΖ ἀπό τήν κορυφή Β. Ἄρα (§ 70 πόρ. III) θά εἶναι :

(1) $$\frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} = \frac{A\Gamma}{AE}.$$

Ὁμοίως τά τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΔΕ ἔχουν ἀπό τήν κορυφή Ε τό ἴδιο ὕψος ΕΗ. Ἄρα θά εἶναι :

(2) $$\frac{(ABE)}{(A\Delta E)} = \frac{AB}{A\Delta}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τίς σχέσεις (1) καί (2) κατά μέλη καί παίρνουμε :

$$\frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} \cdot \frac{(ABE)}{(A\Delta E)} = \frac{A\Gamma}{AE} \cdot \frac{AB}{A\Delta} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A\Delta \cdot AE}.$$

ΕΜΒΑΔΑ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

74. Θεώρημα. Τό ἐμβαδό πολυγώνου περιγεγραμμένου σέ κύκλο, ἰσοῦται μέ τό ἡμιγινόμενο τῆς περιμέτρου του ἐπί τήν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔΕ ἕνα πολύγωνο, περιγεγραμμένο σέ κύκλο (Ο,ρ) (σχ. 99). Φέρνουμε τίς ΟΑ, ΟΒ..., ΟΕ. Τότε θά εἶναι :

$$(AB\Gamma\Delta E) = (OAB) + (OB\Gamma) + \ldots + (OEA) =$$
$$= \frac{1}{2} AB \cdot \rho + \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \rho + \ldots + \frac{1}{2} EA \cdot \rho =$$
$$= \frac{AB + B\Gamma + \ldots + EA}{2} \cdot \rho.$$

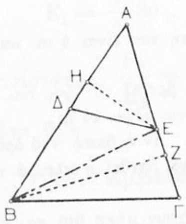
Ἄρα $(AB\Gamma\Delta E) = \dfrac{1}{2}(AB + B\Gamma + \ldots + EA) \cdot \rho$.

Πόρισμα. Τό ἐμβαδό τριγώνου δίνεται ἀπό τόν τύπο :

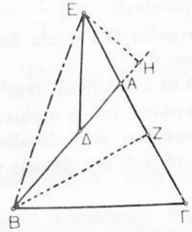
$$E = \tau\rho,$$

ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου καί ρ ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

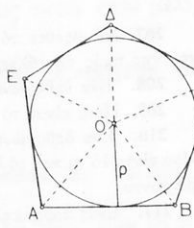
75. 'Εμβαδό όποιουδήποτε πολυγώνου. Γιά νά ύπολογίσουμε τό έμβαδό ένός όποιουδήποτε πολυγώνου, τό άναλύουμε σέ άθροισμα ή διαφορά



Σχ. 98α



Σχ. 98β



Σχ. 99

άλλων γνωστών έμβαδών, άνάλογα μέ τά στοιχεία πού είναι γνωστά κάθε φορά. Στά έπόμενα κάνουμε μερικές ύποδείξεις γιά τόν τρόπο έργασίας :

i) Τριγωνισμός μέ διαγωνίους άπό μιά κορυφή (σχ. 100).

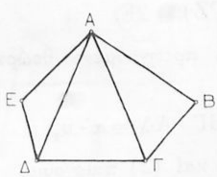
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ).$$

ii) Τριγωνισμός μέ διαίρεση τοῦ πολυγώνου σέ τρίγωνα μέ κοινή κορυφή γνωστό σημεῖο Ο (σχ. 101).

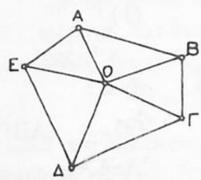
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΟΑΒ) + (ΟΒΓ) + \dots + (ΟΕΑ).$$

iii) Διαίρεση τοῦ πολυγώνου σέ όρθογώνια τρίγωνα καί τραπέζια (σχ. 102).

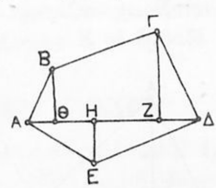
$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΘ) + (ΒΓΖΘ) + (ΓΔΖ) + (ΔΕΗ) + (ΕΑΗ)$$



Σχ. 100



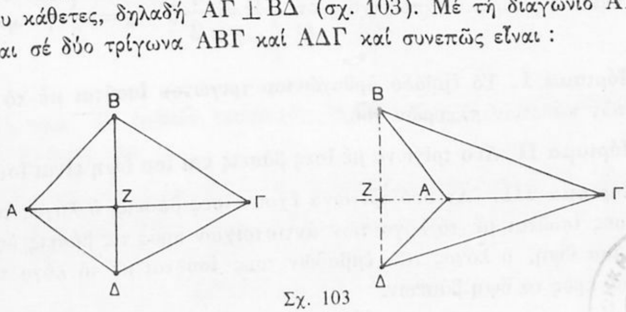
Σχ. 101



Σχ. 102

76. Θεώρημα. Τό έμβαδό κάθε τετραπλεύρου, πού έχει κάθετες διαγωνίους, είναι ίσο μέ τό ήμιγινόμενό τους.

'Απόδειξη. Ἂς πάρουμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πού έχει τίς διαγωνίους του κάθετες, δηλαδή $ΑΓ \perp ΒΔ$ (σχ. 103). Μέ τή διαγώνιο ΑΓ αύτό χωρίζεται σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΓ καί συνεπῶς είναι :



Σχ. 103

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

207. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό ὀρθογωνίου πού ἡ μία διάστασή του εἶναι 4 m καί ὁ λόγος της πρός τήν ἄλλη διάσταση εἶναι 0,5.

208. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει βάση 8 m καί ἐμβαδό 36m². Νά βρεθεῖ τό ὕψος του.

209. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό τετραγώνου, πού ἡ περίμετρός του εἶναι 44 m;

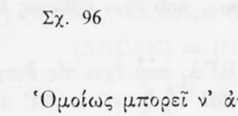
210. Ἕνα ὀρθογώνιο καί ἕνα τετράγωνο εἶναι ἰσεμβαδικά. Ἄν ἡ βάση τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 45 m καί τό ὕψος του εἶναι τά 4/9 τῆς βάσεώς του, νά βρεθεῖ ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου.

211. Ἑνός παραλληλογράμμου οἱ δύο προσκείμενες πλευρές ἔχουν μήκη 6m καί 8m καί σχηματίζουν γωνία 60⁰. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του.

70. Ἐμβαδό τριγώνου. Θεώρημα. Τό ἐμβαδό κάθε τριγώνου ἰσοῦται μέ τό ἡμιγινόμενο μιᾶς πλευρᾶς του ἐπί τό ἀντίστοιχο πρός αὐτήν ὕψος.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 96) καί $ΑΔ = υ_α$ τό ὕψος του πού ἀντιστοιχεῖ στήν πλευρά ΒΓ = α. Ἀπό τά Α καί Γ φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς πλευρές ΒΓ καί ΒΑ ἀντιστοίχως, πού τέμνονται σέ σημεῖο Ζ καί ἔτσι σχηματίζεται τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΖ. Εἶναι γνωστό ὅτι τό παραλληλόγραμμο χωρίζεται μέ καθεμιά ἀπ' τίς διαγωνίους του σέ δύο ἴσα τρίγωνα. Τότε θά εἶναι ΑΒΓ = ΓΖΑ καί ἄν θέσουμε (ΑΒΓ) = Ε, παίρνουμε :

(1) $$(ΑΒΓΖ) = 2Ε.$$



Σχ. 96

Ἀλλά, κατά τό προηγούμενο θεώρημα, εἶναι :

(2) $$(ΑΒΓΖ) = ΒΓ \cdot ΑΔ = α \cdot υ_α.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε

$$2Ε = α \cdot υ_α \quad ἤ$$

$$\mathbf{Ε = \frac{1}{2} α \cdot υ_α.}$$

Ὁμοίως μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι : $Ε = \frac{1}{2} β \cdot υ_β = \frac{1}{2} γ \cdot υ_γ.$

Πόρισμα Ι. Τό ἐμβαδό ὀρθογώνιου τριγώνου ἰσοῦται μέ τό ἡμιγινόμενο τῶν κάθετων πλευρῶν του.

Πόρισμα ΙΙ. Δύο τρίγωνα μέ ἴσες βάσεις καί ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

Πόρισμα ΙΙΙ. Ἄν δυό τρίγωνα ἔχουν ἴσες βάσεις, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων πρός τίς βάσεις ὑψῶν. Ἄν ἔχουν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων πρός τά ὕψη βάσεων.

Γιά τήν ἀπόδειξη ἄς θεωρήσουμε δύο τρίγωνα μέ ἴσες βάσεις β καί μέ ὕψη υ_1 καί υ_2. Ἄν E_1 καί E_2 εἶναι τά ἐμβαδά τους, θά ἔχουμε :

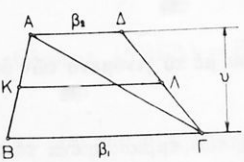
$E_1 = \frac{1}{2}\beta\upsilon_1$, $E_2 = \frac{1}{2}\beta\upsilon_2$. Διαιροῦμε τίς σχέσεις αὐτές κατά μέλη καί παίρνουμε : $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$. Ὁμοίως μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ἡ πρόταση μέ τά ἴσα ὕψη.

71. Ἐμβαδό ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά α. Τό ὕψος ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά α ἰσοῦται πρός $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (§ 54). Ἄρα τό ἐμβαδό του εἶναι :

$$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \text{ἤ} \quad \mathbf{E} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

72. Ἐμβαδό κυρτοῦ τραπεζίου. Θεώρημα. Τό ἐμβαδό κάθε κυρτοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεών του ἐπί τό ὕψος του.

Ἀπόδειξη. Σ' ἕνα κυρτό τραπέζιο ΑΒΓΔ πού οἱ βάσεις του εἶναι $B\Gamma = \beta_1$ καί $A\Delta = \beta_2$ καί υ τό ὕψος του (σχ. 97), φέρνουμε τή διαγώνιο ΑΓ, μέ τήν ὁποία τό τραπέζιο χωρίζεται σέ δύο τρίγωνα. Ἄν ὀνομάσουμε Ε τό ἔμβαδό τοῦ τραπεζίου, ἔχουμε :



Σχ. 97

$$(1) \qquad E = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma).$$

Ἀλλά τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΓ ἔχουν τό ἴδιο ὕψος υ καί βάσεις τίς β_1 καί β_2 ἀντιστοίχως· ἐπομένως :

$$(2) \qquad (AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta_1 \cdot \upsilon \quad \text{καί} \quad (A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\beta_2 \cdot \upsilon.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει :

$$(3) \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \cdot \upsilon.$$

Πόρισμα. Τό ἐμβαδό τραπεζίου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς διαμέσου του ἐπί τό ὕψος του.

Πράγματι, ἄν εἶναι ΚΛ = δ ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου, γνωρίζουμε ὅτι εἶναι $K\Lambda = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$. Τότε ὁ τύπος (3) γράφεται :

$$E = K\Lambda \cdot \upsilon \quad \text{ἤ} \quad E = \delta\upsilon.$$

"Αν συμβολίσουμε μέ $E(\alpha,\beta)$ καί $E(\gamma,\delta)$ τά ἐμβαδά τους, θά δείξουμε ὅτι $\dfrac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\delta)}=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$.

Κατασκευάζουμε ἕνα βοηθητικό ὀρθογώνιο ΙΚΛΜ παίρνοντας γιά διαστάσεις του μία ἀπό τό καθένα ἀπό τά δύο πρῶτα, δηλαδή μέ διαστάσεις β καί γ. Ἑπομένως μέ $E(\gamma,\beta)$ θά συμβολίσουμε τό ἐμβαδό του. Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε :

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\beta)}=\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{καί} \quad \frac{E(\gamma,\beta)}{E(\gamma,\delta)}=\frac{\beta}{\delta}.$$

Πολλαπλασιάζουμε αὐτές τίς σχέσεις κατά μέλη καί παίρνουμε :

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\beta)}\cdot\frac{E(\gamma,\beta)}{E(\gamma,\delta)}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{E(\alpha,\beta)}{E(\gamma,\delta)}=\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

67. Μονάδες μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ θεωρία καί ἡ πράξη ἀπόδειξαν ὅτι οἱ πιό κατάλληλες καί οἱ πιό εὔχρηστες μονάδες μετρήσεως τῶν ἐμβαδῶν εἶναι οἱ τετραγωνικές μονάδες, δηλαδή τά ἐμβαδά τετραγώνων, πού ἡ πλευρά τους εἶναι ἴση μέ τή μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Κατ' ἀναλογία πρός τίς μονάδες μετρήσεως τῶν μηκῶν θά ἔχουμε ὡς βασική μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν τό τετραγωνικό μέτρο ($1m^2$) καί τά πολλαπλάσια καί ὑποπολλαπλάσιά του.

68. Θεώρημα. Τό ἐμβαδό ὀρθογωνίου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν διαστάσεών του.

Ἀπόδειξη. Παίρνουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ἐμβαδῶν ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 1. Τότε θά εἶναι $E(1,1)=1$ τετραγωνική μονάδα. Κατά τό θεώρημα 66 θά εἶναι :

$$\frac{E(\alpha,\beta)}{E(1,1)}=\frac{\alpha\beta}{1\cdot 1}=\alpha\beta.$$

"Αρα : $E(\alpha,\beta)=\alpha\beta\cdot E(1,1)$ ἤ $E(\alpha,\beta)=\alpha\beta$ τετραγωνικές μονάδες, ὅπου $E(\alpha,\beta)$ εἶναι τό ἐμβαδό ὀρθογωνίου μέ διαστάσεις α καί β καί $E(1,1)$ τό ἐμβαδό τῆς τετραγωνικῆς μονάδας.

Γενικά γιά τό ἐμβαδό Ε ὀρθογωνίου μέ διαστάσεις α καί β, ἔχουμε τόν τύπο :

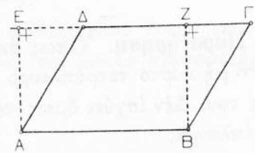
$$\mathbf{E=\alpha\beta}.$$

Πόρισμα. Τό ἐμβαδό τετραγώνου μέ πλευρά α ἰσοῦται πρός α^2.

Παρατήρηση: Ἀπό τόν προηγούμενο τύπο $E=\alpha\beta$ τοῦ ἐμβαδοῦ ὀρθογωνίου, προκύπτει ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ σέ τετραγωνικές μονάδες ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν τμημάτων α καί β, ὅταν αὐτά μετρηθοῦν μέ τήν ἴδια μονάδα μετρήσεως.

69. 'Εμβαδό παραλληλογράμμου. Θεώρημα. Τό ἐμβαδό παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο μιᾶς πλευρᾶς του ἐπί τό ἀντίστοιχο πρός αὐτήν ὕψος.

'Απόδειξη. Ἄς πάρουμε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 95). Φέρνουμε τίς $ΑΕ \perp ΓΔ$ καί $ΒΖ \perp ΓΔ$. Τότε εἶναι τριγ. $ΑΕΔ =$ τριγ. ΒΖΓ, γιατί εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν τίς $ΑΔ = ΒΓ$, ὡς ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου καί τίς $ΑΕ = ΒΖ$, ὡς παράλληλα τμήματα μεταξύ παραλλήλων. Ἄρα θά ἔχουν ἐμβαδά ἴσα, δηλαδή



Σχ. 95

$$(ΑΕΔ) = (ΒΖΓ).$$

Τότε θά εἶναι :

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖΔ) + (ΒΖΓ) = (ΑΒΖΔ) + (ΑΕΔ) = (ΑΒΖΕ).$$

'Αλλά τό ΑΒΖΕ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἑπομένως εἶναι $(ΑΖΒΕ) = ΑΒ \cdot ΑΕ$. Τότε ἡ τελευταία σχέση γράφεται :

$$(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΑΕ.$$

Θέτουμε $(ΑΒΓΔ) = Ε$, $ΑΒ = β$, $ΑΕ = υ$ καί παίρνουμε τόν τύπο

$$\mathbf{Ε = βυ}.$$

δηλαδή τό ἐμβαδό παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς βάσης του ἐπί τό ἀντίστοιχο πρός αὐτήν ὕψος.

Πόρισμα Ι. Δύο παραλληλόγραμμα μέ ἴσες βάσεις καί ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

Πόρισμα ΙΙ. Ἄν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν ἴσες βάσεις, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντιστοίχων στίς βάσεις ὑψῶν. Καί ἄν ἔχουν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.

Γιά τήν ἀπόδειξη ἄς θεωρήσουμε δύο παραλληλόγραμμα μέ ἴσες βάσεις β καί ὕψη $υ_1$ καί $υ_2$. Τότε τά ἐμβαδά τους θά εἶναι $Ε_1 = βυ_1$ καί $Ε_2 = βυ_2$, συνεπῶς $\frac{Ε_1}{Ε_2} = \frac{βυ_1}{βυ_2} = \frac{υ_1}{υ_2}$. 'Ομοίως μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ἡ πρόταση καί στήν περίπτωση τῶν ἴσων ὑψῶν.

$$(1) \qquad (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{A\Delta\Gamma}).$$

Τά τρίγωνα αὐτά ἔχουν κοινή τή βάση ΑΓ καί ὕψη τά ΒΖ καί ΔΖ ἀντιστοίχως, ὅπου Ζ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων.

Τότε ἀπό τήν (1) παίρνουμε:

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{BZ} + \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{\Delta Z} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot(\mathrm{BZ}+\mathrm{\Delta Z}) = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta} \quad \text{ἤ}$$

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}.$$

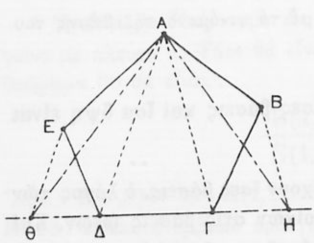
Παρατήρηση. Ὅπως ἀποδείχθηκε, τό προηγούμενο θεώρημα ἰσχύει καί γιά τό μή κυρτό τετράπλευρο τοῦ σχήματος 97 πού ἔχει κάθετες τίς διαγωνίους του. Δέν ἰσχύει ὅμως τό θεώρημα γιά τά μή κυρτά καί διασταυρούμενα τετράπλευρα.

Πόρισμα. Ἄν ἕνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους δ_1, καί δ_2, τό ἐμβαδό του δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\mathrm{E} = \frac{\delta_1\cdot\delta_2}{2}.$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

77. Πρόβλημα. Ἕνα κυρτό πολύγωνο νά μετασχηματιστεῖ σέ ἄλλο ἰσεμβαδικό, πού νά ἔχει μιά πλευρά λιγότερη.



Σχ. 104

Λύση. Ἄς θεωρήσουμε τό κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 104). Μποροῦμε νά τό μετασχηματίσουμε σέ ἄλλο ἰσεμβαδικό, πού νά ἔχει τέσσερες πλευρές, ὡς ἑξῆς: Φέρνουμε τή διαγώνιο ΑΓ καί ἀπό τήν κορυφή Β φέρνουμε τήν ΒΗ // ΑΓ, πού τέμνει τήν προέκταση τῆς ΔΓ στό Η. Τέλος φέρνουμε τήν ΑΗ. Τό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσεμβαδικό μέ τό τετράπλευρο ΑΗΔΕ. Πραγματικά εἶναι:

$$(1) \qquad (\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{AH\Gamma}),$$

γιατί ἔχουν τήν ἴδια βάση ΑΓ καί ἴσα ὕψη, ἀφοῦ εἶναι ΒΗ // ΑΓ. Στά μέλη τῆς ἰσότητας (1) προσθέτουμε τό (ΑΓΔΕ), δηλαδή

$$(\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{A\Gamma\Delta E}) = (\mathrm{AH\Gamma}) + (\mathrm{A\Gamma\Delta E}) \quad \text{ἤ}$$

$$(\mathbf{AB\Gamma\Delta E}) = (\mathbf{AH\Delta E}).$$

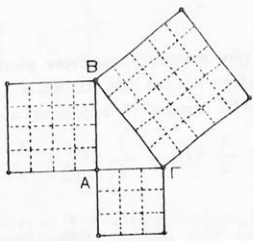
Παρατήρηση. "Αν φέρουμε τή διαγώνιο ΑΔ, τίς ΕΘ // ΑΔ καί τήν ΑΘ, μέ ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι (ΑΗΔΕ) = (ΑΗΘ). "Ετσι τελικά εἶναι :

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta E}) = (\mathrm{AH\Delta E}) = (\mathrm{AH\Theta}),$$

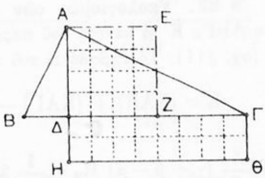
δηλαδή τό δοσμένο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ μετασχηματίστηκε στό ἰσεμβαδικό τρίγωνο ΑΗΘ.

78. Τό γινόμενο δύο εὐθύγραμμων τμημάτων ὡς γεωμετρικό μέγεθος. Μετά τήν εἰσαγωγή τῆς ἔννοιας τοῦ ἐμβαδοῦ τό γινόμενο δύο εὐθύγραμμων τμημάτων παίρνει ὑπόσταση γεωμετρικοῦ μεγέθους καί συγκεκριμένα ὑπόσταση ἐμβαδοῦ.

"Ετσι, ἡ βασική σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος, ἡ ὁποία ἀναφέρεται στά ὀρθογώνια τρίγωνα, παίρνει τήν ἔννοια σχέσεως ἐμβα-



Σχ. 105

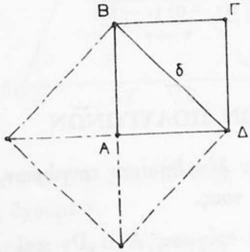


Σχ. 106

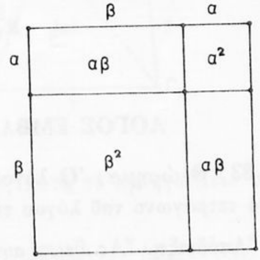
δῶν τετραγώνων πού κατασκευάζονται μέ πλευρές τίς πλευρές τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου (σχ. 105).

'Επίσης, ἡ γνωστή σχέση ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα $\upsilon_\alpha{}^2 = \mathrm{\Delta B \cdot \Delta\Gamma}$ (σχ. 106) δηλώνει ὅτι τό τετράγωνο ΑΔΖΕ ἔχει ἐμβαδό ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ΔΓΘΗ μέ διαστάσεις ΓΔ καί ΔΗ = ΔΒ.

Καί ἡ γνωστή σχέση $\delta = \alpha\sqrt{2}$, πού συνδέει τή διαγώνιο δ ἑνός τετρα-



Σχ. 107



Σχ. 108

Πόρισμα ΙΙ. Ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου σέ τρίγωνο δίνεται ἀπό τόν τύπο $\mathbf{R = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}}$.

Πραγματικά, ἀπό τόν προηγούμενο τύπο παίρνουμε $\mathbf{R = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4E}}$ καί, ἐπειδή εἶναι (§ 79) $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἕπεται ὅτι :

$$\mathbf{R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}}.$$

★ **81. Ὑπολογισμός τῆς ἀκτίνας τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου σέ τρίγωνο.** Γνωρίζουμε ὅτι (§ 74, πόρ.) τό ἐμβαδό τριγώνου εἶναι $\mathbf{E = \tau \cdot \rho}$. Ἀπ' αὐτό τόν τύπο παίρνουμε :

$$\mathbf{\rho = \frac{E}{\tau}} \quad \text{ἤ} \quad \rho = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau}$$

$$\text{ἤ} \quad \mathbf{\rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}}.$$

★ **82. Ὑπολογισμός τῶν ἀκτίνων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.** Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ, Κ τό κέντρο τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου στή πλευρά α καί R_α ἡ ἀκτίνα του (σχ. 111). Τό ἐμβαδό Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ ὡς ἑξῆς :

$$E = (KAB) + (KA\Gamma) - (KB\Gamma) = \frac{1}{2}\gamma R_\alpha + \frac{1}{2}\beta R_\alpha - \frac{1}{2}\alpha R_\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha)R_\alpha = \frac{1}{2}\,2(\tau-\alpha)R_\alpha = (\tau-\alpha)R_\alpha \quad \text{ἤ} \quad E = (\tau-\alpha)R_\alpha \quad \text{ἄρα}$$

$$\mathbf{R_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}} \quad \text{ἤ}$$

$$R_\alpha = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau-\alpha} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \mathbf{R_\alpha = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}}.$$

Μέ ἴδιο τρόπο παίρνουμε :

$$\mathbf{R_\beta = \frac{E}{\tau-\beta} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau-\beta}}}$$

$$\text{καί} \quad \mathbf{R_\gamma = \frac{E}{\tau-\gamma} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau-\gamma}}}$$

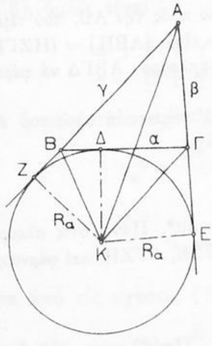
ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

83. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὅμοιων τριγώνων ἰσοῦται μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους.

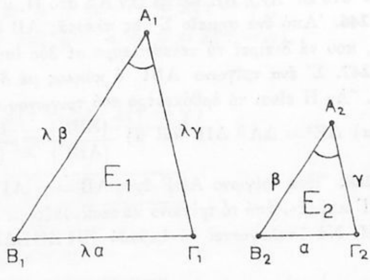
Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὅμοια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ (σχ. 112). Ἄν λ εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητάς τους καί α, β, γ, εἶναι οἱ πλευρές τοῦ $A_2B_2\Gamma_2$, τότε λα, λβ, λγ θά εἶναι οἱ πλευρές τοῦ $A_1B_1\Gamma_1$. Ἐπειδή τά δύο τρίγωνα ἔχουν $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ τά ἐμβαδά τους E_1 καί E_2 θά ἱκανοποιοῦν τή σχέση :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1\Gamma_1}{A_2B_2 \cdot A_2\Gamma_2} = \frac{\lambda\gamma \cdot \lambda\beta}{\gamma \cdot \beta} = \lambda^2 \text{ ἤ}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2.$$



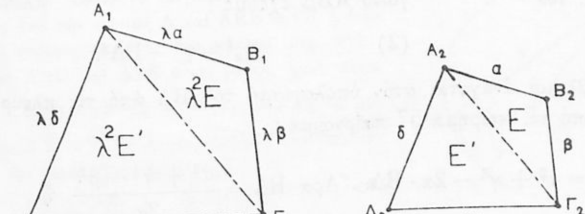
Σχ. 111



Σχ. 112

84. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὅμοιων πολυγώνων ἰσοῦται μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὅμοια πολύγωνα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1 \approx A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$. Μέ διαγωνίους ἀπό δύο ὁμόλογες κορυφές τά διαιροῦμε σέ ζεύγη ὅμοιων τριγώνων, δηλαδή $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 \approx A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$ (σχ. 113) καί $A_1\overset{\Delta}{\Gamma_1}\Delta_1 \approx A_2\overset{\Delta}{\Gamma_2}\Delta_2$.



Σχ. 113

Ἄν εἶναι λ ὁ λόγος ὁμοιότητας τῶν πολυγώνων, κατά τό προηγούμενο θεώρημα θά ἔχουμε :

$$\lambda^2 = \frac{(A_1B_1\Gamma_1)}{(A_2B_2\Gamma_2)} = \frac{(A_1\Gamma_1\Delta_1)}{(A_2\Gamma_2\Delta_2)} = \frac{(A_1B_1\Gamma_1) + (A_1\Gamma_1\Delta_1)}{(A_2B_2\Gamma_2) + (A_2\Gamma_2\Delta_2)} = \frac{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}{(A_2B_2\Gamma_2\Delta_2)}.$$

243. Ἀπό τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου φέρνουμε ἀπό μιά παράλληλο πρός τήν ἄλλη διαγώνιο καί ἔστω ὅτι αὐτές τέμνονται στό Ο. Ἄν συνδέσουμε τό Ο μέ τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ν' ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο διαιρεῖται σέ τέσσερα ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

244. Ἄν Ο εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος πού ἔχει ἄκρα τά μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καί συνδέσουμε αὐτό μέ τίς κορυφές τοῦ τετραπλεύρου, ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι : $(\mathrm{OAB}) + (\mathrm{O\Gamma\Delta}) = (\mathrm{OA\Delta}) + (\mathrm{OB\Gamma})$.

245, Πάνω στήν πλευρά ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου της Μ παίρνουμε τμήματα ΜΔ = ΜΕ. Ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΑΒ, πού τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ. Ἄν ἡ ΒΖ τέμνει τήν ΑΕ στό Η, ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $(\mathrm{ABH}) = (\mathrm{HZ\Gamma E})$.

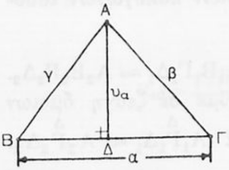
246. Ἀπό ἕνα σημεῖο Σ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δεδομένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ νά φέρετε εὐθεία, πού νά διαιρεῖ τό τετράπλευρο σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη.

247. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ὁ κύκλος μέ διάμετρο τή ΒΓ τέμνει τό ὕψος του ΑΔ στό Ε. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ν' ἀποδείξετε ὅτι :

α) $\Delta E^2 = \Delta A \cdot \Delta H$ καί β) $\dfrac{(\mathrm{EB\Gamma})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \dfrac{(\mathrm{HB\Gamma})}{(\mathrm{EB\Gamma})}$.

248. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ καί $\widehat{A} = 30^0$. Πάνω στίς πλευρές ΑΒ, ΑΓ καί ἔξω ἀπό τό τρίγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ καί φέρνουμε τήν ΕΗ. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό (ΒΓΖΗΕΔΒ).

79. Ἐμβαδό τριγώνου ἀπό τίς πλευρές του. Πρόβλημα. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό Ε τριγώνου ΑΒΓ ἀπό τίς πλευρές του α, β καί γ.



Σχ. 109

Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{B} < 1^{\llcorner}$ (σχ. 109). Φέρνουμε τό ὕψος $A\Delta = \upsilon_\alpha$ καί ἔχουμε :

(1) $$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha.$$

Ἀρκεῖ νά ὑπολογιστεῖ τό ὕψος υ_α ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ἔχουμε :

(2) $$\upsilon_\alpha{}^2 = \gamma^2 - B\Delta^2.$$

Τό πρόβλημα ἀνάγεται στόν ὑπολογισμό τοῦ ΒΔ ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου. Ἀπό τό θεώρημα 57 παίρνουμε :

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta. \text{ Ἄρα } B\Delta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \text{ ἤ}$$

(3) $$B\Delta^2 = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2}.$$

Ἀπό τή σχέση (3) ἡ (2) γράφεται :

$$\upsilon_\alpha{}^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) \cdot (2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2)}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{[(\alpha+\gamma)^2 - \beta^2] \cdot [\beta^2 - (\alpha-\gamma)^2]}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{(\alpha+\gamma+\beta)\ (\alpha+\gamma-\beta)\ (\beta+\alpha-\gamma)\ (\beta-\alpha+\gamma)}{4\alpha^2}.$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι:

$$\alpha+\beta+\gamma = 2\tau, \text{ ἕπεται } \alpha+\beta-\gamma = 2(\tau-\gamma),$$
$$\alpha-\beta+\gamma = 2(\tau-\beta) \text{ καί } \beta-\alpha+\gamma = 2(\tau-\alpha).$$

Τότε ἡ τελευταία σχέση γράφεται:

$$\upsilon_\alpha{}^2 = \frac{2\tau \cdot 2(\tau-\alpha) \cdot 2(\tau-\beta) \cdot 2(\tau-\gamma)}{4\alpha^2} \quad \text{ἤ}$$

(4) $$\upsilon_\alpha = \frac{2\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}}{\alpha}.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (4) προκύπτει

$$\mathbf{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}.$$

Ὁ τύπος αὐτός τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνός τριγώνου **ἀπό τίς πλευρές** του εἶναι γνωστός ὡς **τύπος τοῦ Ἥρωνα.**

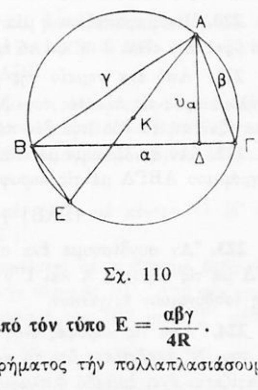
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ

★ 80. Θεώρημα. Σέ κάθε τρίγωνο τό γινόμενο τῶν δύο πλευρῶν του ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου ἐπί τό ὕψος, τό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ στήν τρίτη πλευρά του.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό τρίγωνο ΑΒΓ, $ΑΔ = \upsilon_\alpha$, τό ὕψος του ἀπό τήν κορυφή Α καί $ΑΚΕ = 2R$ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου (σχ. 110). Τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΑΒΕ εἶναι ὅμοια, γιατί εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{ΑΒΕ} = 1^{L}$ ὡς ἐγγεγραμμένη σέ ἡμικύκλιο) καί ἔχουν $\widehat{Γ} = \widehat{Ε}$, ὡς ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο. Ἀπό τήν ὁμοιότητα παίρνουμε:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\gamma}{\upsilon_\alpha} = \frac{2R}{\beta}.$$

Ἄρα $\quad \boldsymbol{\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha}.$



Σχ. 110

Πόρισμα Ι. Τό ἐμβαδό κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται ἀπό τόν τύπο $\mathbf{E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.

Πραγματικά, ἄν τή σχέση τοῦ προηγούμενου θεωρήματος τήν πολλαπλασιάσουμε ἐπί α, παίρνουμε:

$$\alpha\beta\gamma = 2R\alpha\upsilon_\alpha \text{ ἤ } \alpha\beta\gamma = 2R \cdot 2E. \text{ Ἄρα } \mathbf{E} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}.$$

γώνου μέ τή πλευρά του α καί ή όποία γράφεται καί $\delta^2 = 2\alpha^2$, δηλώνει ότι τό τετράγωνο, πού κατασκευάζεται μέ πλευρά τή διαγώνιο τοῦ τετραγώνου εἶναι διπλάσιο ἀπό τό τετράγωνο (βλ. καί σχῆμα 107).

Γενικά κάθε όμογενής σχέση δεύτερου βαθμοῦ, ὡς πρός τό μῆκος, ἑρμηνεύεται ὡς σχέση ἐμβαδῶν. Ἕνα ἀκόμα παράδειγμα εἶναι ἡ γνωστή ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὅπου τά α καί β εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα· αὐτή παριστάνει σχέση ἐμβαδῶν, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 108.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

212. Νά βρεθεῖ τό ὕψος ἑνός τριγώνου, πού ἀντιστοιχεῖ σέ πλευρά 5m, ἄν τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου εἶναι 10m^2.

213. Ὀρθογώνιου τριγώνου οἱ δύο κάθετες πλευρές εἶναι 3m καί 4m. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του καί τό ὕψος πρός τήν ὑποτείνουσα.

214. Τρίγωνο καί ὀρθογώνιο ἔχουν ἴσες βάσεις καί εἶναι ἰσεμβαδικά. Νά βρεθεῖ σχέση πού νά συνδέει τά ἀντίστοιχα ὕψη τους.

215. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων, πού ἔχουν κορυφή ἕνα σημεῖο τῆς περιμέτρου ἑνός παραλληλογράμμου καί βάσεις τίς διαγωνίους του, ἔχουν σταθερό ἄθροισμα.

216. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τριγώνου, τοῦ ὁποίου οἱ δύο πλευρές εἶναι 12m καί 8 m, καί σχηματίζουν γωνία 30^0 ἤ 150^0. Νά συγκρίνετε καί νά αἰτιολογίσετε τά ἀποτελέσματα στίς δύο περιπτώσεις.

217. Ν' ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο μία διάμεσος τό διαιρεῖ σέ δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

218. Νά διαιρεθεῖ ἕνα τρίγωνο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεῖες πού φέρονται ἀπό μιά κορυφή του.

219. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τραπεζίου, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι 4 m καί 6 m καί ἡ ἀπόστασή τους εἶναι 3 m.

220. Ἑνός τραπεζίου ἡ μία βάση εἶναι τριπλάσια ἀπό τήν ἄλλη. Νά βρεθοῦν αὐτές, ἄν τό ὕψος του εἶναι 3 m καί τό ἐμβαδό του 12 m^2.

221. Ἀπό ἕνα σημεῖο τῆς μιᾶς διαγωνίου ἑνός παραλληλογράμμου φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς πλευρές του. Ν' ἀποδείξετε ὅτι ἀπό τά τέσσερα παραλληλόγραμμα πού σχηματίζονται, τά δύο πού δέν περιέχουν τμήματα τῆς διαγωνίου αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμα.

222. Ἄν συνδέσουμε μέ εὐθύγραμμα τμήματα ἕνα σημεῖο Σ ἐσωτερικό ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μέ τίς κορυφές του, ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι :

$$(\Sigma AB) + (\Sigma\Gamma\Delta) = (\Sigma A\Delta) + (\Sigma B\Gamma).$$

223. Ἄν συνδέσουμε ἕνα σημεῖο Σ τῆς διαγωνίου ΒΔ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μέ τίς κορυφές Α καί Γ ν' ἀποδείξετε ὅτι τό παραλληλόγραμμο διαιρεῖται σέ δύο ζεύγη ἰσοδύναμων τριγώνων.

224. Ἀπό τίς κορυφές ἑνός τετραπλεύρου φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς διαγωνίους του. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό περιγεγραμμένο στό τετράπλευρο παραλληλόγραμμο πού σχηματίζεται ἔχει ἐμβαδό διπλάσιο ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τετραπλεύρου.

225. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τά δύο τρίγωνα, πού ἔχουν κοινή κορυφή τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου καί βάσεις τίς μή παράλληλες πλευρές του εἶναι ἰσοδύναμα.

226. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ ἔχουν $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta}$ καί $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{E}} = 2\mathrm{L}$. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Delta\mathrm{Z}}$.

227. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. 'Από ἕνα σημεῖο Μ φέρνουμε καθέτους στίς ΑΒ καί ΑΓ καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα ΜΔ = ΑΒ καί ΜΕ = ΑΓ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι (ΑΒΓ) = (ΜΔΕ).

228. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = 48 m καί ΑΓ = 12 m. Νά βρεθεῖ τό μῆκος καθεμιᾶς ἀπό τίς ἴσες πλευρές ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσοδύναμου πρός αὐτό, πού ἡ γωνία τῶν ἴσων πλευρῶν του ἰσοῦται μέ τή γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

229. Δίνεται τό τρίγωνο ΑΒΓ. 'Από ἕνα σημεῖο Ο ἐσωτερικό τοῦ ΑΒΓ φέρνουμε καθέτους στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα ΟΔ = ΑΒ, ΟΕ = ΒΓ, ΟΖ = ΓΑ ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι (ΔΕΖ) = 3(ΑΒΓ).

Β'.

230. Νά διαιρεθεῖ τετράγωνο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεῖες ἀπό μιά κορυφή του.

231. Νά διαιρεθεῖ παραλληλόγραμμο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεῖες ἀπό μιά κορυφή του.

232. Νά διαιρεθεῖ παραλληλόγραμμο σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη μέ εὐθεία ἀπό ἕνα σημεῖο Σ τῆς περιμέτρου του.

233. Ἄν συνδέσουμε τό κέντρο βάρους ἑνός τριγώνου μέ τίς κορυφές του, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό διαιρεῖται σέ τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

234. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό παραλληλόγραμμο μέ κορυφές τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου ἔχει ἐμβαδό ἴσο μέ τό μισό ἐμβαδό τοῦ τετραπλεύρου.

235. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό ἐμβαδό τραπεζίου ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῆς μιᾶς ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του ἐπί τήν ἀπόσταση τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπ' αὐτή.

236. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί σημεῖο Ο, πού δέ βρίσκεται μέσα στή γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ οὔτε μέσα στήν κατακορυφή της. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι (ΟΑΓ) = (ΟΑΒ) + + (ΟΑΔ).

237. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές του κατά κυκλική σειρά καί στήν κάθε προέκταση παίρνουμε τμήματα ΑΓ' = ΑΓ, ΒΑ' = ΒΑ, ΓΒ' = ΓΒ. Νά ἐκφραστεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' ἀπό τό ἐμβαδό Ε τοῦ ΑΒΓ.

238. Ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τίς πλευρές του κατά κυκλική σειρά καί στήν κάθε προέκταση παίρνουμε τμήματα ΑΔ' = ΑΔ, ΒΑ' = ΒΑ, ΓΒ' = ΓΒ, ΔΓ' = ΔΓ. α) Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό Α'Β'Γ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμο. β) νά ἐκφραστεῖ τό ἐμβαδό τοῦ Α'Β'Γ'Δ' ἀπό τό ἐμβαδό Ε τοῦ ΑΒΓΔ.

239. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο σέ κύκλο μέ κέντρο Ο. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΑΔ) + (ΟΒΓ).

240. Ἕνα δεδομένο κυρτό πεντάγωνο νά μετασχηματιστεῖ σέ ἰσοδύναμο ὀρθογώνιο.

241. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Σ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. 'Από τήν κορυφή Α φέρνουμε εὐθεία (ε) $\perp$ ΑΣ καί ἀπό τά Β καί Γ φέρνουμε τίς ΒΒ' καί ΓΓ' κάθετες στήν (ε). Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{A\Sigma}\cdot\mathrm{B'\Gamma'}$.

242. Δίνεται ὀξυγώνιο τρίγωνο καί ὁ περιγεγραμμένος του κύκλος. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό κυρτό ἑξάγωνο πού ἔχει κορυφές τίς κορυφές τοῦ τριγώνου καί τά ἀντιδιαμετρικά τους σημεῖα, ἔχει ἐμβαδό διπλάσιο ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

249. Ἕνα τρίγωνο ἔχει πλευρές 25 cm, 52 cm, 63 cm. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό του.

250. Ἑνός παραλληλογράμμου οἱ δύο προσκείμενες πλευρές ἔχουν μήκη 9 cm καί 10 cm καί ἡ μία διαγώνιος εἶναι 17 cm. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του.

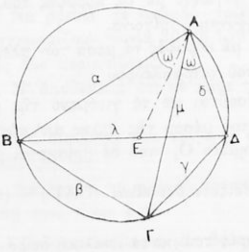
251. Τό ἐμβαδό ἑνός τριγώνου ἰσοῦται μέ $\tau(\tau - \alpha)$. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

252. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδό 90 cm². Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ὕψους ΑΔ, πού τό διαιρεῖ σέ δύο τμήματα μέ λόγο 2/1, φέρνουμε παράλληλο τῆς ΒΓ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Ε καί Ζ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΕΖ.

253. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 17$ cm, $\beta = 8$ cm, $\gamma = 15$ cm. i) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ὀρθογώνιο ii) Φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος $\dfrac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})}$.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

★ 85. Πρῶτο Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Σέ κάθε ἐγγράψιμο τετράπλευρο τό γινόμενο τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.



Σχ. 114

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό ἐγγράψιμο σέ κύκλο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τό ὁποῖο ἔχει πλευρές $\mathrm{AB} = \alpha$, $\mathrm{B\Gamma} = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta\mathrm{A} = \delta$ καί διαγωνίους $\mathrm{B\Delta} = \lambda$ καί $\mathrm{A\Gamma} = \mu$. Θά δείξουμε ὅτι εἶναι :

$$\mathrm{B\Delta} \cdot \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AB} \cdot \Gamma\Delta + \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta} \quad \text{ἤ}$$
$$\lambda\mu = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Μέ πλευρά τήν ΑΒ καί κορυφή Α κατασκευάζουμε γωνίαν $\widehat{\mathrm{BAE}} = \widehat{\Gamma\mathrm{A}\Delta} = \omega$, (σχ. 114), ὅπου Ε εἶναι ἡ τομή τῆς ΑΕ καί τῆς διαγωνίου ΒΔ. Τότε θά εἶναι τριγ. ΑΒΕ ≈ τριγ. ΑΓΔ, γιατί ἔχουν $\widehat{\mathrm{BAE}} = \widehat{\Gamma\mathrm{A}\Delta} = \omega$ ἀπό τήν κατασκευή τους καί $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{A}\Gamma\Delta}$ ὡς ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο. Ἄρα θά εἶναι :

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{BE}}{\Gamma\Delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\mathrm{BE}}{\gamma}. \quad \text{Ἄρα} \quad \mu \cdot \mathrm{BE} = \alpha\gamma.$$

Ἐπίσης ἔχουμε τρίγ. ΑΒΓ ≈ τριγ. ΑΕΔ, γιατί ἔχουν $\widehat{\mathrm{BA\Gamma}} = \widehat{\mathrm{EA\Delta}} = \omega + \widehat{\mathrm{EA\Gamma}}$ καί $\widehat{\mathrm{B\Gamma A}} = \widehat{\mathrm{E\Delta A}}$, ὡς ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο. Ἄρα θά εἶναι :

$$)2) \qquad \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{E\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A\Delta}} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\mathrm{E\Delta}} = \frac{\mu}{\delta}. \quad \text{Ἄρα :} \quad \mu \cdot \mathrm{E\Delta} = \beta\delta.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς τελευταῖες ἀπό τίς ἰσότητες (1) καί (2) καί βρίσκουμε $\mu(\mathrm{BE} + \mathrm{E\Delta}) = \alpha\gamma + \beta\delta$ καί, ἐπειδή εἶναι $\mathrm{BE} + \mathrm{E\Delta} = \mathrm{B\Delta} = \lambda$, ἡ τελευταία ἰσότητα γράφεται :

$$\boldsymbol{\lambda\mu = \alpha\gamma + \beta\delta}.$$

* **86. Δεύτερο Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. Σέ κάθε ἐγγράψιμο τετράπλευρο ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἰσοῦται μέ τό λόγο τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, πού συντρέχουν στά ἄκρα τῆς κάθε διαγωνίου.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό ἐγγράψιμο σέ κύκλο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τό ὁποῖο ἔχει πλευρές $ΑΒ = α$, $ΒΓ = β$, $ΓΔ = γ$, $ΔΑ = δ$ καί διαγωνίους $ΒΔ = λ$ καί $ΑΓ = μ$ (σχ. 114). Θά δείξουμε ὅτι εἶναι :

$$\frac{λ}{μ} = \frac{αβ + γδ}{αδ + βγ}.$$

Γνωρίζουμε ὅτι (§ 80, πόρ. I) εἶναι :

$$(1) \qquad (ΑΒΔ) = \frac{λαδ}{4R} \quad καί$$

$$(2) \qquad (ΓΒΔ) = \frac{λβγ}{4R},$$

ὅπου R ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου στό ΑΒΓΔ.

Προσθέτουμε τίς σχέσεις (1) καί (2) κατά μέλη καί παίρνουμε :

$$(3) \qquad (ΑΒΓΔ) = \frac{λ(αδ + βγ)}{4R}.$$

Ἐπίσης ἔχουμε :

$$(4) \qquad (ΒΑΓ) = \frac{μαβ}{4R} \quad καί \quad (ΔΑΓ) = \frac{μγδ}{4R}.$$

Προσθέτουμε αὐτές κατά μέλη καί παίρνουμε :

$$(5) \qquad (ΑΒΓΔ) = \frac{μ(αβ + γδ)}{4R}.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (5) παίρνουμε :

$$λ(αδ + βγ) = μ(αβ + γδ) \quad ἤ \quad \frac{λ}{μ} = \frac{αβ + γδ}{αδ + βγ}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

254. Σέ ἕναν κύκλο ἐγγράφουμε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ μικρότερου τόξου $\widehat{ΒΓ}$, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι $ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ$.

255. Δίνεται ἕνας κύκλος (O, R) καί τρία σημεῖα του Α, Β, Γ. Ἄν εἶναι $ΑΒ = α$, $ΒΓ = β$, νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τῆς χορδῆς ΑΓ ἀπό τά α, β, καί R.

256. Σ' ἕνα κυρτό ἐγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίνονται τά μήκη τῶν τεσσάρων πλευρῶν του α, β, γ, δ. Νά ὑπολογιστοῦν τά μήκη τῶν διαγωνίων του.

Β΄.

257. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Ἕνας κύκλος πού περνάει ἀπό τήν κορυφή Α τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΔ στά σημεῖα Ε καί Η ἀντιστοίχως καί τή διαγώνιο ΑΓ στό σημεῖο Ζ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι :

$$ΑΒ \cdot ΑΕ + ΑΔ \cdot ΑΗ = ΑΓ \cdot ΑΖ.$$

258. Πάνω στίς πλευρές δεδομένης γωνίας $x\widehat{A}y$ παίρνουμε δύο τμήματα ΑΜ καί ΑΝ πού συνδέονται μέ τή σχέση $α.ΑΜ + β.ΑΝ = λ^2$, ὅπου α, β καί λ εἶναι δεδομένα τμήματα. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ κύκλος, ὁ περιγεγραμμένος στό τρίγωνο ΑΜΝ περνάει ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο (βλ. ἄσκ. 257).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

87. Θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ ἐσωτερική διχοτόμος μιᾶς γωνίας τριγώνου τέμνει τήν ἀπέναντι πλευρά σέ δύο μέρη ἀνάλογα πρός τίς προσκείμενες πλευρές τοῦ τριγώνου καί ἀντιστρόφως.

Ἄν ΑΔ εἶναι ἡ ἐσωτερική διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι $\dfrac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν κορυφή Β φέρνουμε παράλληλο πρός τή διχοτόμο ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τήν προέκταση τῆς ΓΑ στό Ε (σχ. 115). Τότε, κατά τό Θ. 19, πόρ. θά εἶναι:

(1) $$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}.$$

Ἀλλά, ἐπειδή ΕΒ // ΑΔ, ἔχουμε $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ καί $\widehat{E} = \widehat{A_2}$ καί, ἐπειδή εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ θά εἶναι καί $\widehat{B_1} = \widehat{E}$, δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές καί ἐπομένως ΑΕ = ΑΒ. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

(2) $$\boldsymbol{\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}}.$$

Ἀντιστρόφως: Ἔστω ὅτι στό τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέση (2). Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Φέρνουμε τήν ΒΕ // ΑΔ καί παίρνουμε τήν ἀναλογία (1). Οἱ σχέσεις (1) καί (2) ἔχουν τά πρῶτα μέλη τους ἴσα. Ἄρα θά εἶναι καί

$$\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \text{ καί ἐπομένως } AE = AB.$$

Ὥστε τό τρίγωνο ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές καί συνεπῶς $\widehat{B_1} = \widehat{E}$. Ἀλλά ἀπό τίς ΒΕ // ΑΔ ἔχουμε:

$$\widehat{B_1} = \widehat{A_1} \text{ καί } \widehat{E} = \widehat{A_2}. \text{ Ἄρα } \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

καί ἐπομένως ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

Παρατήρηση: Ἡ προηγούμενη ἀναλογία (2) γράφεται:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}, \text{ ἤ } \frac{\Delta B}{\Delta B + \Delta \Gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}, \text{ ἤ } \frac{\Delta B}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

Ἄρα: $\Delta B = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta + \gamma}$. Ὁμοίως βρίσκουμε $\Delta \Gamma = \dfrac{\alpha\beta}{\beta + \gamma}$.

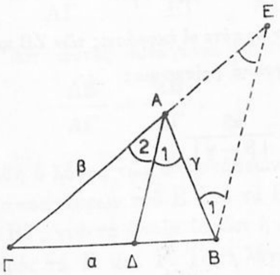
88. Θεώρημα τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου. Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν προέκταση τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς σέ σημεῖο τοῦ ὁποίου οἱ ἀποστάσεις ἀπό τά ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἶναι ἀνάλογες πρός τίς προσκείμενες πλευρές τοῦ τριγώνου καί ἀντιστρόφως.

Ἄν AZ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$, θά δείξουμε ὅτι εἶναι $\dfrac{ZB}{Z\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$.

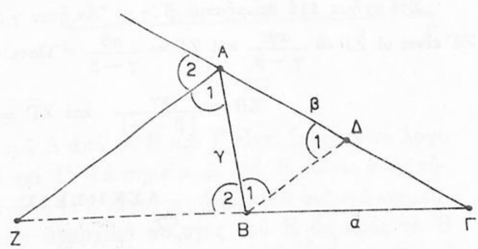
Ἀπόδειξη. Φέρνουμε τήν $B\Delta // AZ$ (σχ. 116). Τότε, κατά τό Θ. 19 πόρ. ἔχουμε:

$$\frac{ZB}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}. \tag{1}$$

Ἀλλά ἀπό τίς $AZ // B\Delta$ ἔχουμε $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καί $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$ καί, ἐπειδή



Σχ. 115



Σχ. 116

εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἔπεται ὅτι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$, δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα $A\Delta = AB$. Τότε ἡ ἀναλογία (1) γίνεται:

$$\frac{\mathbf{ZB}}{\mathbf{Z\Gamma}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A\Gamma}}.$$

Ἀντιστρόφως: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι στό τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἀναλογία (2). Θά δείξουμε ὅτι ἡ AZ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{A}$. Φέρνουμε τήν $B\Delta // AZ$. Τότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία (1). Οἱ σχέσεις (1) καί (2) ἔχουν τά πρῶτα μέλη τους ἴσα. Ἄρα θά εἶναι καί

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}, \quad \text{καί ἑπομένως} \quad A\Delta = AB.$$

Ὥστε τό τρίγωνο ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα εἶναι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$. Ἀλλά ἀπό τίς $B\Delta // AZ$ ἔχουμε:

$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ καί $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_2$. Ἄρα $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, δηλαδή ἡ AZ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A.

Παρατηρήσεις. i) Τό σημεῖο Z βρίσκεται πρός τό μέρος τῆς μικρότερης πλευρᾶς (σχ. 116). Πραγματικά, ἔστω $\beta > \gamma$, τότε $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ ἤ $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = \varphi > 0$. Ἡ γωνία A_1, ἐπειδή εἶναι τό μισό τῆς ἐξωτερικῆς τῆς A, ἰσοῦται μέ

$\dfrac{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}{2}$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\widehat{A}_1+\widehat{B}_2<2^{\llcorner}$, ὅπου $\widehat{B}_2$ εἶναι ἡ ἐξωτερική τῆς $\widehat{B}$. $\widehat{A}_1+\widehat{B}_2=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}{2}+2^{\llcorner}-\widehat{B}=2^{\llcorner}-\dfrac{\widehat{B}-\widehat{\Gamma}}{2}=2^{\llcorner}-\dfrac{\varphi}{2}<2^{\llcorner}$.

ii) Ὑπολογισμός τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ζ ἀπό τά Β καί Γ :

$$\frac{ZB}{Z\Gamma}=\frac{\gamma}{\beta} \quad ἤ \quad \frac{ZB}{Z\Gamma-ZB}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma} \quad ἤ \quad \frac{ZB}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma}.$$

Ἄρα : $ZB=\dfrac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$. Ὁμοίως βρίσκουμε $Z\Gamma=\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$.

Στό σχῆμα 116 θεωρήσαμε $\beta>\gamma$. Ἄν ἦταν $\gamma>\beta$, τότε οἱ ἐκφράσεις τῶν ΖΒ καί ΖΓ εἶναι οἱ $ZB=\dfrac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta}$ καί $Z\Gamma=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma-\beta}$. Ὥστε γενικά βρίσκουμε :

$$ZB=\frac{\alpha\gamma}{|\beta-\gamma|} \quad \text{καί } Z\Gamma=\frac{\alpha\beta}{|\beta-\gamma|}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

259. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τίς ὁποῖες σχηματίζει ἡ διάμεσος ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ μέ τή πλευρά ΒΓ, τέμνουν τίς δύο ἄλλες πλευρές στά Ε καί Ζ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΕΖ // ΒΓ.

260. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = 7,5 cm, ΒΓ = 8 cm, καί ΑΓ = 4,5 cm. Νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν τμημάτων, στά ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ἀπό τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$.

261. Στό τρίγωνο τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τοῦ τμήματος μέ ἄκρα τά σημεῖα, στά ὁποῖα οἱ δύο διχοτόμοι τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (ἐσωτερική καί ἐξωτερική) τέμνουν τή ΒΓ.

262. Ἕνα τρίγωνο ἔχει πλευρές 3α, 4α, 5α. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τῶν σημείων, στά ὁποῖα τέμνουν τή μικρότερη πλευρά ἡ ἐσωτερική καί ἡ ἐξωτερική διχοτόμος τῆς ἀπέναντι γωνίας.

263. Τέσσερις ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή ἕνα σημεῖο Ο σχηματίζουν διαδοχικές γωνίες ἴσες μέ 45° ἡ καθεμιά. Τέμνουμε αὐτές μέ εὐθεία ΑΒΓΔ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΟΑ = ΟΔ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $AB^2=A\Delta\cdot B\Gamma$.

Β΄.

264. Ἄν εἶναι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, ν' ἀποδείξετε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέση $B\Delta\cdot \Gamma E\cdot ZA=\Gamma\Delta\cdot BZ\cdot AE$.

265. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, Η, Θ, Κ εἶναι τά σημεῖα, στά ὁποῖα οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τέμνουν ἀντιστοίχως τίς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του, ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $HB\cdot \Theta\Gamma\cdot KA=H\Gamma\cdot \Theta A\cdot KB$.

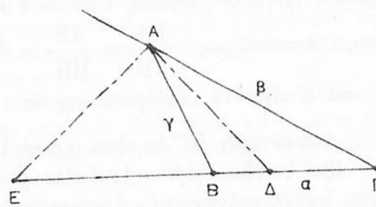
266. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A}=90^\circ)$ ἔχει $\widehat{B}=15^\circ$ καί $AB=\lambda$. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἄλλες πλευρές του.

267. Ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γνωστές οἱ πλευρές α, β, γ. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου, τό ὁποῖο ἔχει κορυφές τά σημεῖα, στά ὁποῖα οἱ ἐσωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του τέμνουν τίς πλευρές του.

89. Ἁρμονική διαίρεση τμήματος σέ δεδομένο λόγο.

Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 117), ΑΔ καί ΑΕ εἶναι οἱ δύο διχοτόμοι τῆς γωνίας $\widehat{A}$ (ἐσωτερική καί ἐξωτερική), γνωρίζουμε ἀπ' τά δύο θεωρήματα τῶν διχοτόμων ὅτι:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma} \quad \text{καί} \quad \frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$



Σχ. 117

Ἀπ' αὐτές συνάγεται ὅτι:

$$(1) \qquad \frac{\boldsymbol{\Delta B}}{\boldsymbol{\Delta \Gamma}}=\frac{\boldsymbol{EB}}{\boldsymbol{E\Gamma}},$$

δηλαδή ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ Δ ἀπό τά Β καί Γ εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ε ἀπό τά Β καί Γ. Τά σημεῖα Δ καί Ε πάνω στήν εὐθεία ΒΓ, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέση (1), λέγονται **ἁρμονικά συζυγή** σημεῖα ὡς πρός τά Β καί Γ. Τό Δ λέγεται **ἁρμονικό συζυγές** τοῦ Ε ὡς πρός τά Β καί Γ, ὁμοίως καί τό Ε εἶναι τό ἁρμονικό συζυγές τοῦ Δ ὡς πρός τά Β καί Γ. Ἡ τετράδα τῶν σημείων Ε, Β, Δ, Γ λέγεται **ἁρμονική τετράδα σημείων** ἤ **ἁρμονική σημειοσειρά**. Ὁ λόγος $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}$ λέγεται λόγος τομῆς τοῦ τμήματος ΒΓ. Ἐπίσης λέμε ὅτι τό τμῆμα ΒΓ ἔχει **διαιρεθεῖ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ λόγο** $\frac{\boldsymbol{\Delta B}}{\boldsymbol{\Delta \Gamma}}$.

Παρατήρηση. Ὅταν λέμε πώς ἕνα τμῆμα ΒΓ ἔχει διαιρεθεῖ ἀπό ἕνα σημεῖο Δ σέ λόγο ρ, ἐννοοῦμε ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\rho$ καί ὄχι $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta B}=\rho$.

90. Θεώρημα. Ἄν τά Δ καί Ε εἶναι ἁρμονικά συζυγή, ὡς πρός τά Β καί Γ, τότε καί τά Β καί Γ εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Δ καί Ε.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ὑπόθεση ἕπεται ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{EB}{E\Gamma}$. Ἀπό τή σχέση αὐτή παίρνουμε τήν ἀναλογία $\frac{\Delta B}{EB}=\frac{\Delta \Gamma}{E\Gamma}$ ἤ $\frac{B\Delta}{BE}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$, καί ἀπ' αὐτή προκύπτει πώς τά Β καί Γ εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Δ καί Ε.

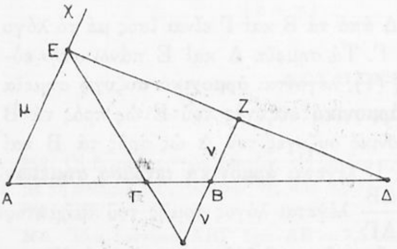
91. Πρόβλημα. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ νά διαιρεθεῖ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ δεδομένο λόγο μ/ν.

Λύση. Ἀπό τό Α φέρνουμε μιά ἡμιευθεία **Αx**, πάνω στήν ὁποία παίρνουμε τμῆμα $AE = \mu$ (σχ. 118). Ἀπό τό B φέρνουμε εὐθεία παράλληλη τῆς Ax καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτή ἑκατέρωθεν τοῦ B τμήματα $BZ = BH = \nu$. Φέρνουμε τίς EH καί EZ, πού τέμνουν τήν AB στά ζητούμενα σημεῖα Γ καί Δ.

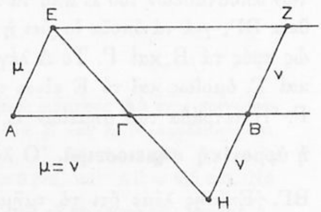
Ἀπόδειξη. Μέ τίς παράλληλες AE καί HBZ σχηματίζονται δύο ζεύγη ὁμοίων τριγώνων, δηλαδή $\Gamma\overset{\Delta}{A}E \approx \Gamma\overset{\Delta}{B}H$ καί $\Delta\overset{\Delta}{A}E \approx A\overset{\Delta}{B}Z$. Ἀπ' αὐτά παίρνουμε ἀντιστοίχως: $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{AE}{BH} = \dfrac{\mu}{\nu}$ καί $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{AE}{BZ} = \dfrac{\mu}{\nu}$. Ἄρα τά Γ καί Δ εἶναι τά ζητούμενα σημεῖα.

Διερεύνηση. i) Ἄν εἶναι $\mu/\nu \neq 1$, ὁπότε $\mu \neq \nu$, τό πρόβλημα ἔχει λύση.

ii) Ἄν εἶναι $\mu/\nu = 1$, ὁπότε $\mu = \nu$ (σχ. 119) τό τετράπλευρο ABZE εἶναι παραλληλόγραμμο καί συνεπῶς ἡ EZ δέ δίνει σημεῖο Δ πάνω στήν AB,



Σχ. 118



Σχ. 119

ἐνῶ ἡ EH δίνει τό Γ στό μέσο τοῦ τμήματος AB. Συμβατικά δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει λύση, μέ τή διευκρίνηση ὅτι τό Δ ἔχει ἀπομακρυνθεῖ στό ἄπειρο.

iii) Ὑπάρχει μία μόνο λύση τοῦ προβλήματος, δηλαδή τά σημεῖα Γ καί Δ πάνω στήν εὐθεία AB εἶναι μονοσήμαντα (κατά ἕνα μόνο τρόπο) ὁρισμένα. Πραγματικά ἀπό τή σχέση $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{\mu}{\nu}$ παίρνουμε $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma A + \Gamma B} = \dfrac{\mu}{\mu + \nu}$ ἤ $\dfrac{\Gamma A}{AB} = \dfrac{\mu}{\mu + \nu}$ ἤ $\Gamma A = AB \cdot \dfrac{\mu}{\mu + \nu}$, δηλαδή τό σημεῖο Γ πάνω στό τμῆμα AB ἀπέχει σταθερή ἀπόσταση ἀπό τό A καί ἐπομένως εἶναι μονοσήμαντα ὡρισμένο. Ὁμοίως καί γιά τό Δ (σχ. 118) τό ὁποῖο βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τμῆμα AB καί πάνω στήν ἡμιευθεία AB, ἀφοῦ εἶναι $\mu > \nu$, παίρνουμε: $\dfrac{\Delta A}{\Delta B} = \dfrac{\mu}{\nu}$ ἤ $\dfrac{\Delta A}{\Delta A - \Delta B} = \dfrac{\mu}{\mu - \nu}$ ἤ $\dfrac{\Delta A}{AB} = \dfrac{\mu}{\mu - \nu}$ ἤ $\Delta A = AB \cdot \dfrac{\mu}{\mu - \nu}$, δηλαδή τό σημεῖο Δ τῆς ἡμιευθείας AB ἀπέχει σταθερή ἀπόσταση ἀπό τό A καί ἐπομένως εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

268. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τίς ΒΕ καί ΓΖ κάθετες στή διχοτόμο ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά Ε καί Ζ εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Α καί Δ.

269 Δίνεται ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες στά ἄκρα Α καί Β τῆς διαμέτρου καί ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἡμικυκλίου φέρνουμε ἄλλη ἐφαπτομένη πού τέμνει αὐτές στά σημεῖα Γ καί Δ καί τήν προέκταση τῆς ΑΒ στό Ε. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα Μ καί Ε εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Γ καί Δ.

270. 'Από ἕνα σημεῖο Ο φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες ΟΑ καί ΟΒ σέ ἕναν κύκλο καί τή διάμετρο ΓΔ, πού ὅταν προεκταθεῖ περνάει ἀπό τό Ο. "Αν ἡ χορδή ΑΒ τέμνει τή ΓΔ στό σημεῖο Ε νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά Ο καί Ε εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Γ καί Δ.

271. Σ' ἕναν κύκλο δίδεται μία διάμετρος ΑΒ καί χορδή ΓΔ κάθετος στήν ΑΒ. Οἱ εὐθεῖες ΜΓ καί ΜΔ πού ἑνώνουν τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ κύκλου μέ τά Γ καί Δ τέμνουν τήν ΑΒ στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά Ε καί Ζ εἶναι ἁρμονικά συζυγή ὡς πρός τά Α καί Β.

272. Δίνεται κύκλος μέ κέντρο Κ καί διάμετρος ΑΒ. Πάνω στήν προέκταση τῆς διαμέτρου ΑΒ παίρνουμε σημεῖο Ε καί ἀπό τό Ε φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες ΕΗ καί ΕΘ καί τή χορδή ΗΘ πού τέμνει τή διάμετρο ΑΒ στό Δ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι : α) τό ΕΚ εἶναι ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν ΕΑ καί ΕΒ, β) τό ΕΗ εἶναι ὁ γεωμετρικός μέσος (ἤ μέσος ἀνάλογος) τῶν ΕΑ καί ΕΒ καί γ) τό ΕΔ εἶναι ὁ ἁρμονικός μέσος τῶν ΕΑ καί ΕΒ.

Σημ. "Αν Α, Γ, Η εἶναι κατά σειράν ὁ ἀριθμητικός μέσος, ὁ γεωμετρικός μέσος καί ὁ ἁρμονικός μέσος δύο τμημάτων λ καί μ, τότε εἶναι γνωστό ἀπό τήν ἄλγεβρα ὅτι εἶναι :

$$A = \frac{\lambda + \mu}{2}, \quad \Gamma^2 = \lambda\mu, \quad H = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

273. Δίνεται εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί σημεῖο Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Νά βρεθεῖ τό ἁρμονικό συζυγές τοῦ Γ ὡς πρός τά Α καί Β, ὅταν τό Γ i) εἶναι ἔξω ἀπό τό τμῆμα ΑΒ καί ii) ἀνήκει στό τμῆμα ΑΒ.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ (*)

92. Πρόβλημα. Νά βρεθεῖ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό δύο δοσμένα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

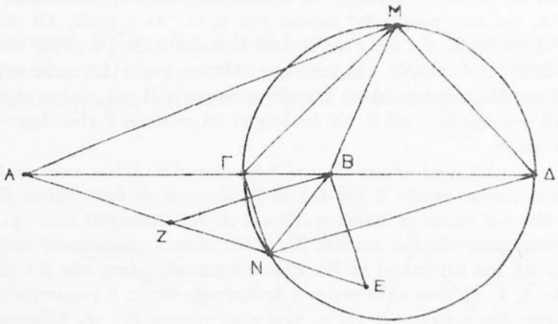
Λύση. Θεωροῦμε δύο δεδομένα σημεῖα Α καί Β καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ τόπου μέ τήν ἰδιότητα :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}. \tag{1}$$

(*) **'Απολλώνιος** (γεννήθηκε περίπου τό 247 π.Χ.). Μελέτησε τή γεωμετρία τῆς Θέσεως δηλαδή τῆς μορφῆς καί τῆς σχέσεως τῶν σχημάτων. Σ' αὐτόν ὀφείλεται τό ἔργο περί κωνικῶν σέ ὀκτώ βιβλία. 'Απ' αὐτά ἑπτά σώθηκαν. Τό ὄγδοο ἀποκαταστάθηκε ἀπό τόν ἀστρονόμο Halley τό 1646, βάσει πληροφοριῶν τοῦ Πάππου. Τό ἔργο του ἦταν ἡ αἰτία νά τοῦ δοθεῖ ἡ ἐπωνυμία τοῦ κατεξοχήν γεωμέτρη (Μέγας γεωμέτρης).

Διχοτομοῦμε ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά τή γωνία $\widehat{M}$ τοῦ τριγώνου ΜΑΒ καί ἄς ὀνομάσουμε Γ καί Δ ἀντιστοίχως τά σημεῖα, στά ὁποῖα οἱ διχοτόμοι τέμνουν τήν ΑΒ (σχ. 120). Τότε ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ ἔχει μεταφερθεῖ μέ τίς διχοτόμους πάνω στήν ΑΒ, δηλαδή :

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu} \ (\S\ 87) \ \text{καί} \ \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu} \ (\S\ 88).$$



Σχ. 120

Τά σημεῖα Γ καί Δ εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένα καί ἐπιπλέον εἶναι ἁρμονικά συζυγή τῶν Α καί Β μέ λόγο τομῆς $\frac{\mu}{\nu}$. 'Ακόμα εἶναι $\Gamma\widehat{M}\Delta = 1^{\llcorner}$, ἐπειδή σχηματίζεται ἀπό τήν ἐσωτερική καί ἐξωτερική διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{M}$. Ἄρα τό Μ βρίσκεται πάνω σέ κύκλο μέ διάμετρο τή ΓΔ.

'Αντίστροφα. Ἔστω Ν ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Θά δείξουμε ὅτι εἶναι $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

'Από τό Β φέρνουμε τίς $BE \parallel \Gamma N$ καί $BZ \parallel \Delta N$. Τότε, ἐπειδή $\Gamma\widehat{N}\Delta = 1^{\llcorner}$, θά εἶναι καί $E\widehat{B}Z = 1^{\llcorner}$. 'Από τίς παράλληλες ὅμως ἔχουμε :

(2) $$\frac{NA}{NE} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{καί}$$

(3) $$\frac{NA}{NZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) προκύπτει ἡ

$$\frac{NA}{NE} = \frac{NA}{NZ}.$$

Ἀπ' αὐτή παίρνουμε $NE = NZ$, δηλαδή τό N εἶναι τό μέσο τοῦ EZ καί, ἐπειδή τό τρίγωνο EBZ εἶναι ὀρθογώνιο, ἕπεται ὅτι :

$$NE = NB = NZ. \tag{4}$$

Τότε ἡ σχέση (2) ἐξαιτίας τῆς (4) γράφεται :

$$\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι ὁ κύκλος μέ διάμετρο τή $\Gamma\Delta$.

Κατασκευή. Ὅταν δοθοῦν τά A, B καί ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, διαιροῦμε ἁρμονικά τό τμῆμα AB ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ λόγο μ/ν ὅπως στό πρόβλημα 91, καί βρίσκουμε τά Γ καί Δ. Μέ διάμετρο τή $\Gamma\Delta$ γράφουμε τόν κύκλο.

Σημείωση. Ἄν εἶναι $\frac{\mu}{\nu} = 1$, τότε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, πού ἰσαπέχουν ἀπό τά σημεῖα A καί B, δηλαδή ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AB. Τοῦτο ἐξηγεῖται καί μέ τήν προηγούμενη κατασκευή, γιατί τό Γ θά ἦταν τό μέσο τοῦ τμήματος AB, ἐνῶ τό Δ θά εἶχε ἀπομακρυνθεῖ στό ἄπειρο. Ἄρα ὁ κύκλος μέ διάμετρο τή $\Gamma\Delta$ θά εἶχε ἄπειρη ἀκτίνα, ἐπομένως θά ἦταν εὐθεία πού θά περνοῦσε ἀπό τό μέσο τοῦ AB καί θά ἦταν καί κάθετος στήν AB.

Ὁ προηγούμενος γεωμετρικός τόπος λέγεται **ἀπολλώνιος κύκλος,** ἀπό τό ὄνομα τοῦ Ἕλληνα μαθηματικοῦ Ἀπολλώνιου πού πρῶτος μελέτησε τό θέμα.

Γενικά ἀπολλώνιος κύκλος ὡς πρός τά σημεῖα A καί B, λέγεται κάθε κύκλος μέ διάμετρο $\Gamma\Delta$, ὅπου τά Γ καί Δ εἶναι ἁρμονικά συζυγή τῶν A καί B. Ἐπομένως ὑπάρχουν ἄπειροι ἀπολλώνιοι κύκλοι ὡς πρός δύο σημεῖα A καί B. Γιά νά ὁριστεῖ ἕνας ἀπ' αὐτούς, ὅταν δοθοῦν τά A καί B, χρειάζεται νά δοθεῖ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$, ἤ ἕνα ἀπό τά σημεῖα Γ καί Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

274. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἀπό τά στοιχεῖα του α, μ_α καί τό λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

275. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο $AB\Gamma$ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\widehat{A} = \omega$ καί τό λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

276. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο $AB\Gamma$ ἀπό τά στοιχεῖα του α, υ_α καί τό λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

277. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο $AB\Gamma$ ἀπό τά στοιχεῖα του α, $\widehat{B}$ καί τό λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

278. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1L$) ἀπό τά στοιχεῖα του β καί τό λόγο $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.

279. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα του α, δ_α καί τό λόγο $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

Β΄.

280. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα α, $\beta^2 - \gamma^2 = \lambda^2$, ὅπου τό λ εἶναι γνωστό τμῆμα, καί τό σημεῖο Δ στό ὁποῖο ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τέμνει τή ΒΓ.

281. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἀπό τά ὁποία δύο γνωστοί κύκλοι (C_1) καί (C_2) φαίνονται ὑπό ἴσες γωνίες.

282. Δίνονται πάνω σέ μιά εὐθεία διαδοχικά τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νά βρεθεῖ σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε νά εἶναι $\widehat{AMB} = \widehat{BM\Gamma} = \widehat{\Gamma M\Delta}$.

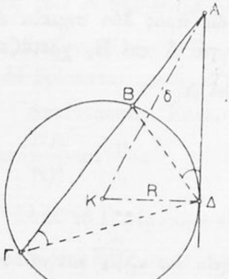
ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ

93. Θεώρημα. Ἔστω κύκλος (Κ, R) καί σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου του. Ἄν ἀπό τό Α θεωρήσουμε μιά εὐθεία, πού νά τέμνει τόν κύκλο στά Β καί Γ, τό γινόμενο ΑΒ · ΑΓ εἶναι σταθερό, δηλαδή τό ἴδιο γιά ὁποιαδήποτε τέμνουσα.

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις δηλαδή :

i) Τό σημεῖο Α βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κύκλο (Κ, R) (σχ. 121). Φέρνουμε καί τήν ἐφαπτομένη ΑΔ καί τίς ΔΒ καί ΔΓ. Τότε παρατηροῦμε ὅτι :

$$\overset{\Delta}{AB\Delta} = \overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$$



Σχ. 121

γιατί ἔχουν τή γωνία $\widehat{A}$ κοινή καί $\widehat{A\Delta B} = \widehat{\Gamma}$ (ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη). Ἄρα θά εἶναι :

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \text{ ἤ}$$

$$(1) \qquad AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2.$$

Ἀλλά τό μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ΑΔ εἶναι ὁρισμένο καί ἀνεξάρτητο ἀπό τή θέση τῆς τέμνουσας ΑΒΓ. Ἄρα ἀπό τή σχέση (1), συνάγεται ὅτι τό γινόμενο ΑΒ · ΑΓ εἶναι σταθερό.

Τή σχέση (1) μπορoῦμε νά τή μετασχηματίσουμε φέρνοντας τήν $AK = \delta$ καί τήν ἀκτίνα $K\Delta = R$. Τότε, ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΔΚ παίρνουμε :

$$A\Delta^2 = \delta^2 - R^2 \text{ καί ἡ σχέση (1) γράφεται :}$$

$$\mathbf{AB \cdot A\Gamma = \delta^2 - R^2.}$$

ii) Τό Α βρίσκεται μέσα στόν κύκλο (Κ, R). Ἔστω ΑΒΓ μιά τέμνουσα πού περνάει ἀπό τό Α (σχ. 122). Φέρνουμε καί τή διάμετρο ΔΕ πού περνάει ἀπό τό Α, καί τίς ΒΔ καί ΓΕ. Τότε παρατηροῦμε ὅτι εἶναι :

$$\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}},$$

γιατί ἔχουν τίς γωνίες τους $\widehat{\mathrm{A}}$ ἴσες, ὡς κατακορυφήν, καί $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{E}}$, ὡς ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$. Ἄρα θά εἶναι :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Gamma}} \quad \text{ἤ}$$

(2) $$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{AE}.$$

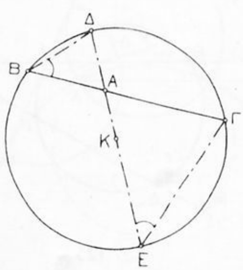
Ἀλλά εἶναι :

(4) $$\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{AE} = (\mathrm{R} - \delta)(\mathrm{R} + \delta) = \mathrm{R}^2 - \delta^2$$

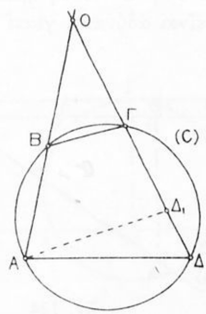
ὅπου ΑΚ = δ. Ἄρα ἡ σχέση (2) γράφεται :

$$\mathbf{AB \cdot A\Gamma = R^2 - \delta^2},$$

δηλαδή τό γινόμενο ΑΒ · ΑΓ εἶναι σταθερό.



Σχ. 122



Σχ. 123

94. Ὁρισμός. Δύναμη σημείου Α ὡς πρός κύκλο (Κ,R) λέγεται τό σταθερό γινόμενο ΑΒ · ΑΓ, ὅπου τά Β καί Γ εἶναι κοινά σημεῖα τοῦ κύκλου καί μίας εὐθείας πού περνάει ἀπό τό Α.

Ἡ δύναμη τοῦ Α ὡς πρός τόν κύκλο (Κ, R) συμβολίζεται μέ $\mathfrak{D}\mathrm{A}/(\mathrm{K},\mathrm{R})$.

Ἄν τό Α εἶναι ἔξω ἀπό τόν κύκλο, εἶναι $\mathfrak{D}\mathrm{A}/(\mathrm{K},\mathrm{R}) = \delta^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{A\Delta}^2$ (σχ. 121), ὅπου δ = ΚΑ καί ΑΔ τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ἀπό τό Α.

Ἄν τό Α εἶναι μέσα στόν κύκλο, εἶναι $\mathfrak{D}\mathrm{A}/(\mathrm{K},\mathrm{R}) = \mathrm{R}^2 - \delta^2$.

Τέλος, ἄν τό Α βρίσκεται πάνω στόν κύκλο, εἶναι δ = R καί οἱ προηγούμενες σχέσεις δίνουν $\mathfrak{D}\mathrm{A}/(\mathrm{K},\mathrm{R}) = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}^2 = 0$, δηλαδή γιά σημεῖο τοῦ κύκλου ἡ δύναμη εἶναι μηδενική.

95. Θεώρημα. Ἔστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί Ο τό σημεῖο τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καί ΓΔ. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ὥστε αὐτό νά εἶναι ἔγγράψιμο σέ κύκλο, εἶναι :

$$\mathbf{OA \cdot OB = O\Gamma \cdot O\Delta}.$$

Ἀπόδειξη. i) Εἶναι ἀναγκαία. Πραγματικά, ἄν τό ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (C) (σχ. 123), τότε τό καθένα ἀπό τά γινόμενα ΟΑ · ΟΒ καί ΟΓ · ΟΔ παριστάνει τή δύναμη τοῦ σημείου Ο πρός τόν κύκλο (C), ἐπομένως εἶναι :

$$(1) \qquad \mathrm{OA \cdot OB = O\Gamma \cdot O\Delta}.$$

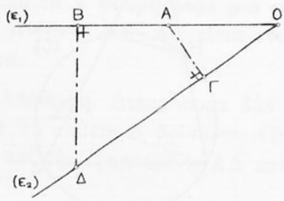
ii) Εἶναι ἱκανή. Ἐνῶ ἰσχύει ἡ σχέση (1), ἄς ὑποθέσουμε πώς τό ΑΒΓΔ δέν εἶναι ἐγγράψιμο. Τότε γράφουμε τόν κύκλο, πού ὁρίζουν τά σημεῖα Α, Β, Γ καί ἔστω ὅτι αὐτός τέμνει τήν ΟΓ στό Δ_1. Ἄρα τό $\mathrm{AB\Gamma\Delta_1}$ εἶναι ἐγγράψιμο. Τότε θά εἶναι :

$$(2) \qquad \mathrm{OA \cdot OB = O\Gamma \cdot O\Delta_1}.$$

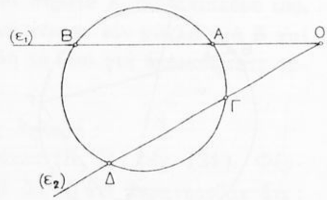
Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει ὅτι :

$$(3) \qquad \mathrm{O\Delta_1 = O\Delta}.$$

Ἄς σημειωθεῖ ὅτι τό Δ_1 βρίσκεται στήν ἡμιευθεία ΟΓ, γιατί, ἄν ἦταν πάνω στήν ἀντίθετη ἡμιευθεία, τό Ο θά ἦταν ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κύκλου, πού εἶναι ἀδύνατο, γιατί τό Ο βρίσκεται στήν προέκταση τῆς χορδῆς ΑΒ καί



Σχ. 124



Σχ. 125

ἐπομένως ἔξω ἀπό τόν κύκλο. Ἄρα, ἀπό τή σχέση (3) ἔπεται ὅτι τό Δ_1 συμπίπτει μέ τό Δ. Ἑπομένως τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

Μέ ἴδιο τρόπο μπορεῖ ν' **ἀποδειχθεῖ** καί τό παρακάτω θεώρημα :

96. Θεώρημα. Ἔστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί Θ τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του ΑΓ καί ΒΔ. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ὥστε αὐτό νά εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο, εἶναι :

$$\mathrm{\Theta A \cdot \Theta\Gamma = \Theta B \cdot \Theta\Delta}.$$

97. Μεταφορά γινομένου. Σέ πολλά γεωμετρικά θέματα χρειάζεται νά μεταφερθεῖ ἕνα γινόμενο ΟΑ · ΟΒ ἀπό μιά εὐθεία (ε_1) στήν ὁποία βρίσκονται τά σημεῖα Ο, Α, Β, σέ ἄλλη εὐθεία (ε_2), ἡ ὁποία ὅμως περνάει ἀπ' τό Ο. Αὐτό γίνεται μέ τούς δύο παρακάτω τρόπους.

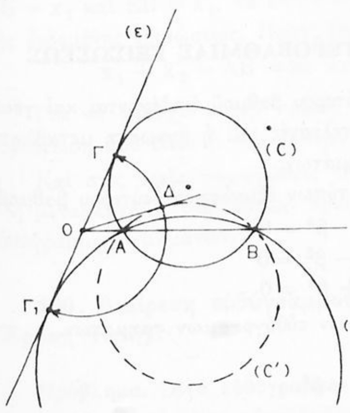
i) Ἀπό τό Α φέρνουμε τήν $\mathrm{A\Gamma} \perp (\varepsilon_2)$ καί ἀπό τό Β φέρνουμε τήν $\mathrm{B\Delta} \perp (\varepsilon_1)$ (σχ. 124). Τότε εἶναι ΟΑ · ΟΒ = ΟΓ · ΟΔ γιατί τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο.

ii) Γράφουμε ἕναν κύκλο πού νά περνάει ἀπό τά Α καί Β, καί νά τέμνει τήν (ε_2) στά σημεῖα Γ καί Δ (σχ. 125). Τότε εἶναι ΟΑ · ΟΒ = ΟΓ · ΟΔ.

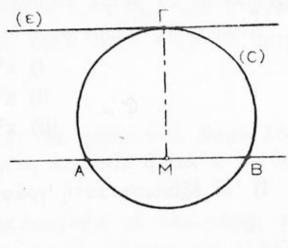
98. Πρόβλημα. Νά γραφεῖ κύκλος πού νά περνάει ἀπό δύο γνωστά σημεῖα καί νά ἐφάπτεται σέ δεδομένη εὐθεῖα.

Ἀνάλυση. Ἔστω A καί B τά γνωστά σημεῖα καί (ε) δεδομένη εὐθεία (σχ. 126). Ὑποθέτουμε ὅτι τό πρόβλημα ἔχει λυθεῖ καί ἔστω (C) ὁ ζητούμενος κύκλος, πού ἐφάπτεται στήν (ε) στό σημεῖο Γ. Ὁ κύκλος (C) προσδιορίζεται ἀπό τά σημεῖα A, B καί Γ. Ἀρκεῖ νά βρεθεῖ λοιπόν ἡ θέση τοῦ Γ πάνω στήν (ε). Θεωροῦμε τό σημεῖο O τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (ε) καί AB, τό ὁποῖο εἶναι σαφῶς καθορισμένο. Τότε θά εἶναι (§ 93).

$$(1) \qquad OA \cdot OB = O\Gamma^2.$$



Σχ. 126



Σχ. 127

Σύνθεση - Κατασκευή. Γράφουμε ἕνα βοηθητικό κύκλον (C′) μέ μόνη ἀπαίτηση νά περνάει ἀπό τά A καί B. Ἀπό τό O φέρνουμε τήν ἐφαπτομένη OΔ. Τότε εἶναι:

$$(2) \qquad OA \cdot OB = O\Delta^2.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει ὅτι:

$$(3) \qquad O\Gamma = O\Delta.$$

Μεταφέρουμε τότε τό μῆκος OΔ στό OΓ πάνω στήν εὐθεία (ε) καί ἀπό τά A, B καί Γ γράφουμε τόν κύκλο (C), πού εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξη. Πραγματικά, ἀπό τίς (2) καί (3) προκύπτει ὅτι:

$$OA \cdot OB = O\Gamma^2.$$

Ἐπομένως ἡ OΓ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (C).

Διερεύνηση. Ἀφοῦ οἱ εὐθεῖες (ε) καί AB δέν εἶναι παράλληλες, ὑπάρχει πάντοτε τό σημεῖο O καί, ἄν αὐτό εἶναι ἔξω ἀπό τό τμῆμα AB, ὑπάρχουν πάντοτε δύο λύσεις, δηλ. οἱ κύκλοι (C) καί (C_1), πού προσδιορίζονται ἀπό τίς τριάδες τῶν σημείων A, B, Γ καί A, B, Γ_1, ὅπου τά Γ καί Γ_1 τά παίρνουμε ἑκατέρωθεν τοῦ O πάνω στήν εὐθεία (ε).

Ἄν ΑΒ // (ε), ὑπάρχει μιά λύση, ὁ κύκλος (C) (σχ. 127), πού προσδιορίζεται ἀπό τά σημεῖα Α, Β, Γ ὅπου τό Γ εἶναι ἡ τομή τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ μέ τήν (ε).

Ἄν τέλος τό σημεῖο Ο τῆς τομῆς τῶν ΑΒ καί (ε) ἦταν ἐσωτερικό τοῦ τμήματος ΑΒ, δέ θά ὑπῆρχε λύση, γιατί τότε τό Ο θά ἦταν ἐσωτερικό καί τοῦ βοηθητικοῦ κύκλου (C′), ἐπομένως δέ θά ἦταν δυνατό νά φέρουμε ἀπ' αὐτό τό σημεῖο τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ΟΔ, ὥστε κατόπι νά προσδιορίσουμε τό Γ πάνω στήν εὐθεία (ε).

Νά ἐξετάσετε τήν περίπτωση στήν ὁποία τό Ο συμπίπτει μέ τό Α ἤ τό Β.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ

99. Ὁρισμένοι τύποι ἐξισώσεων δεύτερου βαθμοῦ ἐπιδέχονται καί γεωμετρική λύση, ὅταν δεχτοῦμε ὅτι οἱ συντελεστές καί ἡ ἄγνωστη μεταβλητή παριστάνουν τά μέτρα εὐθύγραμμων τμημάτων.

Δίνουμε τή γεωμετρική λύση τριῶν τύπων ἐξισώσεων δεύτερου βαθμοῦ.

i) $x^2 + 2\alpha x - \beta^2 = 0$

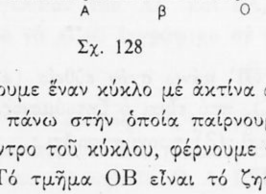
ii) $x^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$

iii) $x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$

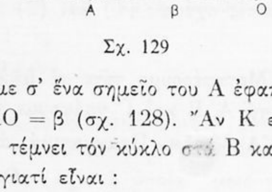
ὅπου τά α καί β εἶναι τά μέτρα δεδομένων εὐθύγραμμων τμημάτων.

i) Ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται :

$$x(x + 2\alpha) = \beta^2.$$



Σχ. 128



Σχ. 129

Γράφουμε ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα α καί φέρνουμε σ' ἕνα σημεῖο του Α ἐφαπτομένη, πάνω στήν ὁποία παίρνουμε τμῆμα ΑΟ = β (σχ. 128). Ἄν Κ εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου, φέρνουμε τήν ΟΚ, πού τέμνει τόν κύκλο στά Β καί Γ.

Τό τμῆμα ΟΒ εἶναι τό ζητούμενον x, γιατί εἶναι :

$$OB \cdot O\Gamma = OA^2 \quad \text{ἤ}$$
$$x(x + 2\alpha) = \beta^2.$$

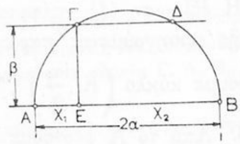
ii) Ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται :

$$x(x - 2\alpha) = \beta^2.$$

Ἡ κατασκευή εἶναι ἴδια μέ τήν προηγουμένη (σχ. 129), ἀλλ' ἐδῶ τό τμῆμα **x** εἶναι τό ΟΓ. Πραγματικά εἶναι :

$$ΟΓ \cdot ΟΒ = ΟΑ^2 \quad ἤ \quad x(x - 2\alpha) = \beta^2.$$

iii) $x^2 - 2\alpha x + \beta^2 = 0$. Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν x_1 καί x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως, θά ἔχουμε $x_1 + x_2 = 2\alpha$ καί $x_1 x_2 = \beta^2$. Τότε κατασκευάζουμε ἡμικύκλιο μέ διάμετρο $ΑΒ = 2\alpha$ καί φέρνουμε εὐθεία παράλληλη τῆς διαμέτρου σέ ἀπόσταση β (σχ. 130). Αὐτή ἔστω ὅτι τέμνει τό ἡμικύκλιο στά Γ καί Δ. Ἀπό τό Γ φέρνουμε τή $ΓΕ \perp ΑΒ$ καί τότε πάνω στήν ΑΒ ὁρίζονται δύο τμήματα $ΑΕ = x_1$ καί $ΕΒ = x_2$, τά ὁποῖα εἶναι οἱ ρίζες τῆς δεδομένης ἐξισώσεως. Πραγματικά εἶναι:



Σχ. 130

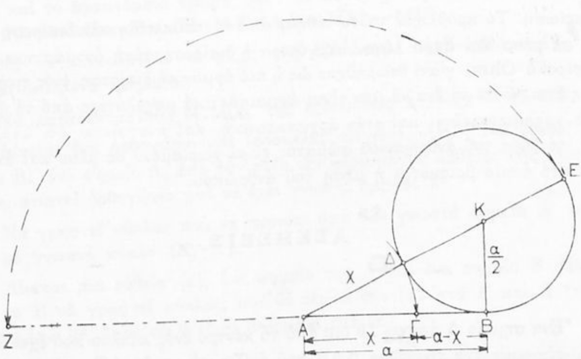
$$x_1 + x_2 = ΑΒ = 2\alpha \text{ καί } x_1 x_2 = ΓΕ^2 = \beta^2 \ (\S\ 49).$$

Γιά νά ὑπάρχει λύση, πρέπει προφανῶς νά εἶναι $\beta \leqq \alpha$, ὁπότε στήν περίπτωση πού εἶναι $\beta = \alpha$ ἔχουμε $x_1 = x_2 = \alpha$.

Καί στίς τρεῖς περιπτώσεις οἱ συντελεστές α, β, καθώς καί ἡ ἄγνωστη μεταβλητή x, θεωρήθηκαν ἀριθμοί θετικοί, ἀφοῦ παριστάνουν τά μέτρα εὐθύγραμμων τμημάτων.

100. Διαίρεση εὐθύγραμμου τμήματος σέ μέσο καί ἄκρο λόγο (Χρυσή τομή).

Πρόβλημα. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα νά διαιρεθεῖ σέ δύο μέρη, πού τό μεγαλύτερο νά εἶναι μέσο ἀνάλογο τοῦ μικρότερου μέρους καί ὁλόκληρου τοῦ τμήματος.



Σχ. 131

Λύση. Ἔστω $ΑΒ = \alpha$ τό μῆκος τοῦ δεδομένου εὐθύγραμμου τμήματος καί Γ τό ζητούμενο σημεῖο διαιρέσεως (σχ. 131). Ἄν ὀνομάσουμε τό μῆκος τοῦ μεγαλύτερου τμήματος $ΑΓ = x$, τότε θά εἶναι $ΓΒ = α - x$ καί θά πρέπει νά ἰσχύει ἡ σχέση : $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$ ἤ

(1) $$x^2 = α(α - x).$$

Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ καί ἀνάγεται στή μορφή (i) τῆς προηγούμενης παραγράφου. Ἡ κατασκευή εἶναι ἡ ἴδια, δηλαδή γράφουμε κύκλο $\left(K, \frac{α}{2}\right)$, πού ἐφάπτεται στό τμῆμα $ΑΒ = α$ στό ἄκρο του Β. Ἀπό τό Α φέρνουμε τή διάμετρο ΑΔΚΕ. Τότε τό μῆκος ΑΔ εἶναι τό ζητούμενο μῆκος x, γιατί εἶναι : $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἤ $x(x + α) = α^2$, ἡ ὁποία γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ ἤ $x^2 = α(α - x)$. Ἡ τελευταία εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν ἐξίσωση (1). Μεταφέρουμε τότε τό μῆκος ΑΔ στό ΑΓ πάνω στό τμῆμα $ΑΒ = α$ καί ἔτσι πραγματοποιοῦμε τή διαίρεση τοῦ ΑΒ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο, δηλαδή $ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ$.

Παρατηρήσεις i) Τή σχέση $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ μποροῦμε νά τή γράψουμε καί ὡς ἑξῆς: $(ΑΕ - ΔΕ) \cdot ΑΕ = ΑΒ^2$ ἤ $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΔΕ + ΑΒ^2$ καί ἐπειδή εἶναι $ΔΕ = ΑΒ$, ἔχουμε $ΑΕ^2 = ΑΕ \cdot ΑΒ + ΑΒ^2 = ΑΒ \cdot (ΑΕ + ΑΒ)$. Ἄν πάρουμε πάνω στή ΒΑ (πρός τό μέρος τοῦ Α) τμῆμα $ΑΖ = ΑΕ$, βρίσκουμε $ΑΖ^2 = ΒΑ \cdot ΒΖ$. Ἔτσι καί τό σημεῖο Ζ διαιρεῖ τήν ΑΒ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο, μέ τήν ἔννοια τῆς ἐξωτερικῆς διαιρέσεως.

ii) Οἱ ρίζες τῆς ἐξιώσσεως $x^2 = α(α - x)$ ἤ $x^2 + αx - α^2 = 0$ εἶναι : $x_1 = \frac{-α + α\sqrt{5}}{2}$ καί $x_2 = \frac{-α - α\sqrt{5}}{2}$. Ἀπό τίς δύο αὐτές ρίζες ἡ x_1 εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ ΑΓ καί ἡ x_2 εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ ΑΖ, δηλαδή $(ΑΓ) = \frac{α(\sqrt{5} - 1)}{2}$ καί $(ΑΖ) = \frac{-α(\sqrt{5} + 1)}{2}$.

Σημείωση. Τό πρόβλημα τοῦτο τέθηκε ἀπό τόν Εὐκλείδη σάν **διαίρεση εὐθύγραμμου τμήματος σέ μέσο καί ἄκρο λόγο.** Ἀργότερα ἡ διαίρεση αὐτή ὀνομάστηκε **χρυσή τομή,** ὅπως ἀναφέρει ὁ Ohm, γιατί θεωρήθηκε ὡς ἡ πιό ἁρμονική διαίρεση ἑνός τμήματος σέ δύο ἄνισα μέρη ἔτσι, ὥστε τό ἕνα νά μήν εἶναι ἀντιαισθητικά μεγαλύτερο ἀπό τό ἄλλο. Ἡ διαίρεση αὐτή χρησιμοποιεῖται καί στήν ἀρχιτεκτονική, καί πιστεύεται ὅτι ὑπάρχει καί στή φύση· π.χ. τό ὕψος τοῦ ἀνθρώπινου σώματος εἶναι χωρισμένο σέ μέσο καί ἄκρο λόγο ἀπό τό σημεῖο στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ μέση τοῦ ἀνθρώπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

283. Ἕνα σημεῖο Δ ἀπέχει 10 cm ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλου πού ἔχει ἀκτίνα 8 cm. Ἀπό τό Δ φέρνουμε τήν τέμνουσα ΔΑΒ πού ὁρίζει τή χορδή $ΑΒ = 6$ cm. Νά βρεθεῖ τό μῆκος ΔΒ.

284. Δίνεται ἕνας κύκλος μέ ἀκτίνα 8 cm καί σημεῖο Α, πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο 12 cm. Φέρνουμε ἀπό τό Α εὐθεία πού τέμνει τόν κύκλο κατά χορδή $ΒΓ = 2$ cm. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς ΑΓ.

285. Δίνεται ἕνας κύκλος μέ ἀκτίνα $R = 12$ cm καί ἕνα σημεῖο Ε, πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο 6 cm. Φέρνουμε τή χορδή ΑΕΒ, πού ἔχει μῆκος 21 cm. Νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν τμημάτων ΑΕ καί ΕΒ.

286. Μέσα σ' ἕναν κύκλο πού ἔχει ἀκτίνα 13 m παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ, πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο 11 m καί φέρνουμε τήν ΑΔΒ. Ἄν τό τμῆμα ΔΒ εἶναι τριπλάσιο ἀπό τό ΑΔ, νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ.

287. Δύο κύκλοι τέμνονται στά Α καί Β. Ἀπό ἕνα σημεῖο Σ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρνουμε δύο εὐθεῖες ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία τέμνει τόν ἕναν κύκλο στά Γ καί Δ καί ἡ ἄλλη τό δεύτερο κύκλο στά Ε καί Ζ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τετράπλευρο μέ κορυφές τά σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ εἶναι ἐγγράψιμο.

288. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο (C) φέρνουμε τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ΜΑ καί μία τέμνουσα ΜΒΓ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB}{M\Gamma}$.

Β΄.

289. Δίνεται μιά γωνία $\widehat{xOy}$ καί δύο σημεῖα Α καί Β πάνω στήν Οx. Νά βρεθεῖ σημεῖο Μ τῆς Οy τέτοιο, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{AMB}$ νά εἶναι ἡ μεγαλύτερη δυνατή.

290. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Σ ἔξω ἀπό τή ζώνη τους. Νά φέρετε κάθετη ΑΒ πρός τίς παράλληλες ἔτσι, ὥστε ἡ γωνία ΑΣΒ νά εἶναι ἡ μεγαλύτερη δυνατή.

291. Δίνονται δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Α. Ζητεῖται νά γραφτεῖ κύκλος πού νά περνάει ἀπό τό Α καί νά ἐφάπτεται στίς (ε_1) καί (ε_2).

292. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί ἕνα σταθερό σημεῖο του Α. Πάνω σέ μιά εὐθεία (ε) πού νά περνάει ἀπό τό Α παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ι τέτοιο, ὥστε νά εἶναι $IA \cdot IB = k^2$, ὅπου Β εἶναι τό δεύτερο σημεῖο τομῆς τῆς (ε) μέ τόν (Ο, R) καί k δεδομένο τμῆμα. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

293. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο (C) φέρνουμε τή διάμετρο ΜΒΑ καί τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ΜΓ. Ἡ κάθετος στή ΜΑ ἀπό τό Μ τέμνει τήν ΑΓ στό Δ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $A\Gamma \cdot A\Delta = MA^2 - M\Gamma^2$.,

294. Νά κατασκευαστοῦν οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 2\lambda x = 12\mu^2$, ὅπου τά λ καί μ εἶναι δεδομένα τμήματα.

295. Νά κατασκευαστοῦν οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 8x + 15 = 0$.

296. Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Νά βρεθεῖ πάνω στήν ὑποτείνουσα ΒΓ ἕνα σημεῖο Δ, ἀπό τό ὁποῖο, ἄν φέρουμε τίς κάθετες στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ, νά σχηματιστεῖ ὀρθογώνιο πού νά ἔχει γνωστό ἐμβαδό λ^2.

297. Νά γραφτεῖ κύκλος πού νά περνάει ἀπό δύο γνωστά σημεῖα Α καί Β καί νά ἐφάπτεται σέ γνωστό κύκλο (Κ, R).

298. Δίνεται μιά εὐθεία (ε), ἕνα σημεῖο της Α καί ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπ' αὐτή. Μέ κέντρο τό Β νά γραφτεῖ κύκλος, πού νά τέμνει τήν (ε) στά Γ καί Δ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι $A\Gamma \cdot A\Delta = k^2$, ὅπου τό k εἶναι δεδομένο τμῆμα.

299. Ἀπό ἕνα σημεῖο Σ ἐσωτερικό μιᾶς γωνίας $\widehat{xOy}$ νά φέρετε εὐθεία πού νά τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας στά Α καί Β, ἔτσι ὥστε τό τμῆμα ΑΒ νά διαιρεῖται ἀπό τό Σ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο.

300. Ὅταν δοθεῖ τό μεγαλύτερο (ἤ τό μικρότερο) μέρος ἑνός ἄγνωστου τμήματος, πού ἔχει διαιρεθεῖ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο, νά κατασκευαστεῖ τό τμῆμα.

ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

101. Πρόβλημα. Νά βρεθεῖ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων, πού ἔχουν ἴσες δυνάμεις ὡς πρός δύο κύκλους (O_1,R_1) καί (O_2,R_2).

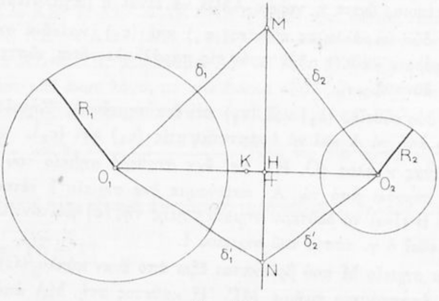
Λύση. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τούς δύο κύκλους καί ἄς ὀνομάσουμε δ_1 καί δ_2 τίς ἀποστάσεις του ἀπό τά κέντρα O_1 καί O_2 ἀντιστοίχως (σχ. 132). Γνωρίζουμε (§ 94) ὅτι εἶναι: $\mathcal{D}M/(O_1,R_1) = \delta_1^2 - R_1^2$ καί $\mathcal{D}M/(O_2, R_2) = \delta_2^2 - R_2^2$. Ἐπειδή οἱ δυνάμεις τοῦ Μ ὡς πρός τούς δύο κύκλους εἶναι ἴσες, ἔπεται ὅτι:

(1) $$\delta_1^2 - R_1^2 = \delta_2^2 - R_2^2.$$

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $R_1 \geqq R_2$, ἡ (1) γράφεται:

(2) $$\delta_1^2 - \delta_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Ἀπό τή σχέση (2) προκύπτει ὅτι ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων δ_1 καί δ_2 τοῦ σημείου Μ ἀπό τά O_1 καί O_2 εἶναι σταθερή. Ἐφαρμόζουμε τότε τό δεύτερο θεώρημα τῆς διαμέσου (§ 60) γιά τό τρίγωνο MO_1O_2.



Σχ. 132

Φέρνουμε τήν κάθετο ἀπό τό Μ στήν O_1O_2, πού τήν τέμνει στό Η καί ἔχουμε:

(3) $$\delta_1^2 - \delta_2^2 = 2\delta \cdot KH,$$

ὅπου $\delta = O_1O_2$ εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων καί Κ τό μέσο της. Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) προκύπτει ὅτι:

$$2\delta \cdot KH = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{ἤ}$$

$$\mathbf{KH} = \frac{\mathbf{R_1^2 - R_2^2}}{\mathbf{2\delta}}.$$

Τώρα ἀπό τήν (4) συμπεραίνουμε ὅτι τό μῆκος ΚΗ εἶναι σταθερό. Ἄρα τό σημεῖο Η εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένο πάνω στή διάκεντρο καί μάλιστα, ἐπειδή θεωρήσαμε ὅτι $R_1 \geqq R_2$, ἀπό τή σχέση (2) προκύπτει ὅτι $\delta_1 \geqq \delta_2$. Ἄρα τό Η ὡς πρός τό Κ θά βρίσκεται πρός τό μέρος τοῦ μικρότερου κύκλου.

Ἀπό τά προηγούμενα συνάγεται ὅτι, ἀφοῦ ἀπό τό ὁποιοδήποτε σημεῖο

Μ τοῦ τόπου ἡ κάθετος στή διάκεντρο περνάει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Η, ὅλα τά σημεῖα τοῦ τόπου βρίσκονται πάνω σ' αὐτή τήν κάθετο.

'Αντιστρόφως. Ἔστω Ν ἕνα σημεῖο τῆς ΜΗ, πού εἶναι κάθετη στή διάκεντρο O_1O_2. Θά δείξουμε ὅτι τό Ν ἔχει ἴσες δυνάμεις ὡς πρός τούς δύο κύκλους. Ἄς ὀνομάσουμε δ_1' καί δ_2' τίς ἀποστάσεις τοῦ Ν ἀπό τά κέντρα O_1 καί O_2 ἀντιστοίχως. 'Εφαρμόζουμε τό δεύτερο θεώρημα τῆς διαμέσου γιά τό τρίγωνο NO_1O_2 καί ἔχουμε :

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = 2\delta \cdot KH.$$

'Αλλά ἐξ αἰτίας τῆς (4) ἡ προηγούμενη σχέση γράφεται :

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = 2\delta \cdot \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\delta}$$

ἤ

$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

ἀπό τήν ὁποία παίρνουμε :

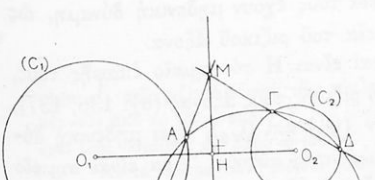
$$\delta_1'^2 - R_1^2 = \delta_2'^2 - R_2^2.$$

'Από τήν τελευταία φαίνεται ὅτι οἱ δυνάμεις τοῦ Ν ὡς πρός τούς δύο κύκλους εἶναι ἴσες. Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι ἡ κάθετος στή διάκεντρο O_1O_2 στό σημεῖο Η.

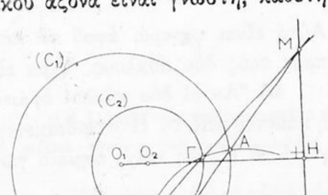
102. 'Ορισμός. Ριζικός ἄξονας δύο κύκλων λέγεται ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων, τά ὁποῖα ἔχουν ἴσες δυνάμεις ὡς πρός τούς δύο κύκλους.

Πόρισμα. 'Ο ριζικός ἄξονας δύο κύκλων εἶναι εὐθεία κάθετη στή διάκεντρό τους.

Κατασκευή τοῦ ριζικοῦ ἄξονα. Γενική μέθοδος. Ὅταν δοθοῦν δύο κύκλοι (C_1) καί (C_2), ἡ διεύθυνση τοῦ ριζικοῦ ἄξονα εἶναι γνωστή, κάθετη



Σχ. 133



Σχ. 134

στή διάκεντρό τους. Ὥστε ἀρκεῖ νά βροῦμε ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα καί ἀπ' αὐτό νά φέρουμε κάθετο στή διάκεντρο.

Γράφουμε ἕνα βοηθητικό κύκλο (C), πού νά τέμνει τούς (C_1) καί (C_2) στά σημεῖα Α, Β καί Γ, Δ ἀντιστοίχως σχ. (133 ἤ 134). Οἱ ΑΒ καί ΓΔ, γενικά τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο M, τό ὁποῖο εἶναι σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα τῶν (C_1) καί (C_2). Πραγματικά, εἶναι :

(1) $$MA \cdot MB = M\Gamma \cdot M\Delta = \mathfrak{D}M/(C).$$

'Αλλά :

(2) $$MA \cdot MB = \mathfrak{D}M/(C_1) \text{ καί}$$

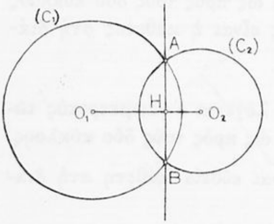
(3) $$M\Gamma \cdot M\Delta = \mathfrak{D}M/(C_2).$$

'Από τίς σχέσεις (1), (2) καί (3) προκύπτει ὅτι :

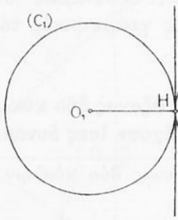
$$\mathfrak{D}M/(C_1) = \mathfrak{D}M/(C_2).$$

'Επομένως τό M εἶναι σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα τῶν (C_1) καί (C_2). Τότε ἀπό τό M φέρνουμε κάθετο MH στή διάκεντρο τῶν κύκλων ἡ ὁποία εἶναι ὁ ριζικός τους ἄξονας.

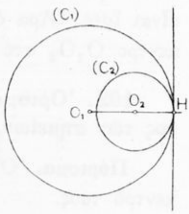
Εἰδικές περιπτώσεις. i) "Αν οἱ δύο κύκλοι τέμνονται (σχ. 135), τότε ὁ ριζικός ἄξονάς τους εἶναι ἡ εὐθεία, πού ὁρίζεται ἀπό τήν κοινή χορδή τους.



Σχ. 135



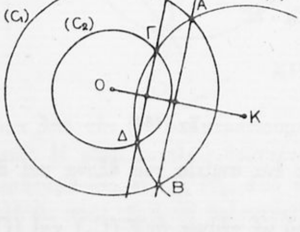
Σχ. 136



Σχ. 137

Αὐτό εἶναι φανερό, ἀφοῦ τά κοινά σημεῖα τους ἔχουν μηδενική δύναμη, ὡς πρός τούς δύο κύκλους. "Αρα εἶναι σημεῖα τοῦ ριζικοῦ ἄξονα.

ii) "Αν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται καί εἶναι H τό σημεῖο ἐπαφῆς τους, ἡ κάθετος ἀπό τό H στή διάκεντρο εἶναι ὁ ριζικός τους ἄξονας (σχ. 136, 137), γιατί τό H, ὡς κοινό σημεῖο τῶν κύκλων (C_1) καί (C_2), ἔχει μηδενική δύναμη ὡς πρός αὐτούς. "Αρα εἶναι σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα.



Σχ. 138

iii) "Αν οἱ κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι (σχ. 138), τότε ριζικός ἄξονας δέν ὑπάρχει, γιατί ὄχι μόνον δέ γνωρίζουμε τήν διεύθυνσή του, ἀφοῦ καί ἡ διεύθυνση τῆς διακέντρου τῶν (C_1) καί (C_2) εἶναι ἀπροσδιόριστη, ἀλλά δέν μποροῦμε νά βροῦμε οὔτε ἕνα σημεῖο του. Πραγματικά, ἄν O εἶναι τό κέντρον τῶν (C_1) καί (C_2) καί K τό κέντρον ἑνός βοηθητικοῦ κύκλου (C), πού τέμνει τούς (C_1) καί (C_2) στά Α, Β καί Γ, Δ ἀντιστοίχως, εἶναι ΑΒ // ΓΔ, ὡς κάθετες στήν ΟΚ. Ἑπομένως δέν τέμνονται. Ἄρα δέν μποροῦμε νά βροῦμε σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα.

★ **103. Ριζικό κέντρο τριῶν κύκλων.** Ἄς θεωρήσουμε τρεῖς κύκλους (C_1), (C_2) καί (C_3) καί ἔστω (ρ_1) ὁ ριζικός ἄξονας τῶν (C_2) καί (C_3) καί (ρ_2) ὁ ριζικός ἄξονας τῶν (C_1) καί (C_3). Οἱ δύο αὐτοί ριζικοί ἄξονες τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ρ καί τότε θά εἶναι :

(1) $$\mathfrak{D}P/(C_2) = \mathfrak{D}P/(C_3),$$

γιατί τό Ρ ἀνήκει στό ριζικό ἄξονα (ρ_1), καί

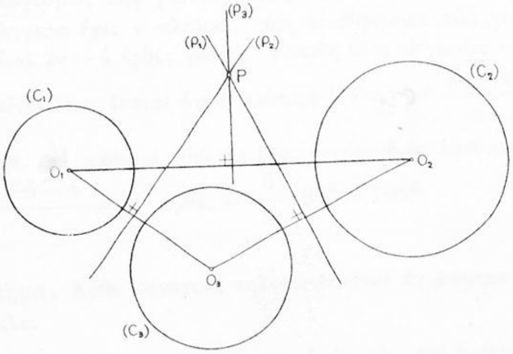
(2) $$\mathfrak{D}P/(C_1) = \mathfrak{D}P/(C_3),$$

γιατί τό Ρ ἀνήκει στό ριζικό ἄξονα (ρ_2).

Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει

$$\mathfrak{D}P/(C_1) = \mathfrak{D}P/(C_2),$$

πού σημαίνει ὅτι τό Ρ εἶναι σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἄξονα (ρ_3) τῶν κύκλων (C_1) καί (C_2).



Σχ. 139

Ἄρα οἱ τρεῖς ριζικοί ἄξονες τῶν κύκλων (C_1), (C_2), (C_3) ὅταν τούς παίρνουμε ἀνά δύο, περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ρ, τό ὁποῖο λέγεται **ριζικό κέντρο** τῶν τριῶν κύκλων, καί ἔχει ἴσες δυνάμεις ὡς πρός αὐτούς.

Ἄν τά κέντρα τῶν τριῶν κύκλων βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, τότε τό ριζικό κέντρο δέν ὑπάρχει, γιατί οἱ τρεῖς ριζικοί ἄξονες θά εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι στήν ἴδια εὐθεία. Συμβατικά δεχόμαστε τότε ὅτι τό ριζικό κέντρο ἔχει ἀπομακρυνθεῖ στό ἄπειρο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

301. Ἄν ὁ ριζικός ἄξονας δύο κύκλων δέν τέμνει τόν ἕναν ἀπ' αὐτούς, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι δέν τέμνει καί τόν ἄλλο.

302. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο, R) καί σημεῖο Α. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, γιά τά ὁποῖα εἶναι ΜΑ = ΜΒ, ὅπου ΜΒ εἶναι τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ἀπό τό Μ στόν κύκλο (Ο, R).

303. Δίνονται δύο κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) καί ἔστω (δ) ὁ ριζικός τους ἄξονας. Ἄν MA εἶναι ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου M τοῦ κύκλου (K, R) ἀπό τό ριζικό ἄξονα ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι $\mathfrak{D}M/(\Lambda,\rho) = 2K\Lambda \cdot MA$.

304. Δίνονται τρία σημεῖα A, B, Γ. Νά γραφτεῖ κύκλος, πού τά ἐφαπτόμενά του τμήματα ἀπό τά A,B,Γ νά ἔχουν δεδομένα μήκη α, β, γ ἀντιστοίχως.

305. Ἄν τρεῖς κύκλοι τέμνονται ἀνά δύο, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ κοινές χορδές περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

ΒΙΒΛΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

104. Ὁρισμός. Ἕνα πολύγωνο λέγεται **κανονικό,** ὅταν ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες καί ὅλες τίς γωνίες του ἴσες (σχ. 140).

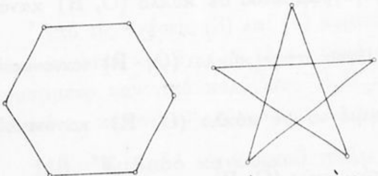
105. Κανονική πολυγωνική γραμμή λέγεται ἡ τεθλασμένη γραμμή πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές της ἴσες καί ὅλες τίς γωνίες της ἴσες.

106. Ὑπολογισμός τῆς γωνίας ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου. Ἄν ἕνα κανονικό πολύγωνο ἔχει ν πλευρές, τότε τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του, ὅπως ξέρουμε, εἶναι $2\nu - 4$ ὀρθές γωνίες. Ἐπειδή ὅλες οἱ γωνίες τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσες, ἕπεται ὅτι ἡ καθεμιά ἰσοῦται μέ $\dfrac{2\nu - 4}{\nu}$ ὀρθές.

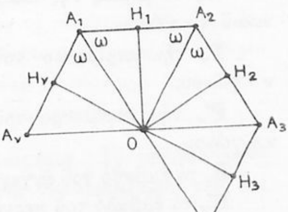
Παράδειγμα. Ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἴσες γωνίες ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι $\dfrac{2 \times 5 - 4}{5} = \dfrac{6}{5}$ ὀρθές $= \dfrac{6}{5} \cdot 90^{0} = 108^{0}$.

107. Θεώρημα. Κάθε κανονικό πολύγωνο εἶναι ἐγγράψιμο καί περιγράψιμο σέ κύκλο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό κανονικό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$, πού ἡ πλευρά του εἶναι λ καί τό μέτρο καθεμιᾶς ἀπ' τίς ἴσες γωνίες του εἶναι $2\omega < 2^{L}$ (σχ. 141). Διχοτομοῦμε τίς γωνίες $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{A}_2$. Οἱ διχοτόμοι τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο O, γιατί αὐτές σχηματίζουν γωνίες ω μέ τήν A_1A_2, πού ἔχουν ἄθροισμα



Σχ. 140



Σχ. 141

$\omega + \omega = 2\omega < 2L$. Τό τρίγωνο OA_1A_2 εἶναι ἰσοσκελές, γιατί ἔχει τίς γωνίες τῆς βάσεως A_1A_2 ἴσες. Φέρνουμε τήν OA_3 καί παρατηροῦμε ὅτι εἶναι :

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3},$$

γιατί ἔχουν $A_1A_2 = A_2A_3 = \lambda$, τήν OA_2 κοινή καί τή γωνία πού περιέχεται στίς ἴσες πλευρές ἴση μέ ω. Ἄρα θά εἶναι καί τό OA_2A_3 ἰσοσκελές, συνεπῶς ἔχουμε :

$$OA_1 = OA_2 = OA_3.$$

Μέ ἴδιο τρόπο παίρνουμε :

$$OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_\nu.$$

Ἄρα τό πολύγωνο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο μέ κέντρο O καί ἀκτίνα OA_1.

Τό πολύγωνο τώρα μπορεῖ νά χωριστεῖ σέ ν ἴσα καί ἰσοσκελή τρίγωνα

$$\overset{\Delta}{OA_1A_2} = \overset{\Delta}{OA_2A_3} = \ldots = \overset{\Delta}{OA_\nu A_1}.$$

Τότε καί τά ὕψη τους θά εἶναι ἴσα, δηλαδή $OH_1 = OH_2 = \ldots = OH_\nu$. Ἄρα ὁ κύκλος μέ κέντρο τό O καί ἀκτίνα OH_1 ἐφάπτεται στίς πλευρές τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί συνεπῶς τό πολύγωνο εἶναι περιγράψιμο σ' αὐτόν.

Παρατήρηση. Τό σημεῖο O, ὡς κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμένου κύκλου γιά τό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$, λέγεται ἁπλῶς **κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.** Ἡ ἀκτίνα OA_1 τοῦ περιγεγραμμένου στό πολύγωνο κύκλου λέγεται **ἀκτίνα τοῦ πολυγώνου** καί ἡ ἀκτίνα OH_1 τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτό κύκλου λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ πολυγώνου. Ἡ γωνία $A_1\widehat{O}A_2$ λέγεται **κεντρική γωνία τοῦ πολυγώνου.** Αὐτή ἰσοῦται προφανῶς μέ $\dfrac{360^\circ}{\nu}$ ἤ $\dfrac{4L}{\nu}$, ὅπου ν **εἶναι τό πλῆθος τῶν πλευρῶν** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

108. Γενικοί συμβολισμοί. Στό ἑξῆς θά συμβολίζουμε μέ :

λ_ν τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

α_ν τό ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου.

λ'_ν τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

P_ν τήν περίμετρο τοῦ ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

P'_ν τήν περίμετρο τοῦ περιγεγραμμένου σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

E_ν τό ἐμβαδό τοῦ ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

E'_ν τό ἐμβαδό τοῦ περιγεγραμμένου σέ κύλο (O, R) κανονικοῦ ν - γώνου.

109. Θεώρημα. Ἄν ἕνας κύκλος διαιρεθεῖ σέ ν ἴσα τόξα, τά διαιρετικά σημεῖα εἶναι κορυφές ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ν-γώνου, καί οἱ ἐφα-

πτόμενες στά σημεῖα αὐτά ὁρίζουν ἐπίσης ἕνα περιγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο, πού ἔχει διαιρεθεῖ σέ ν ἴσα τόξα μέ τά σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ (σχ. 142). Τότε θά εἶναι :

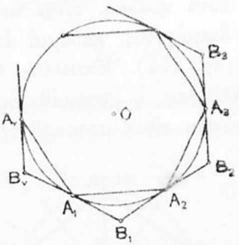
(1) $$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_\nu A_1,$$

ὡς χορδές ἴσων τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου. Ἐπιπλέον ἔχουμε :

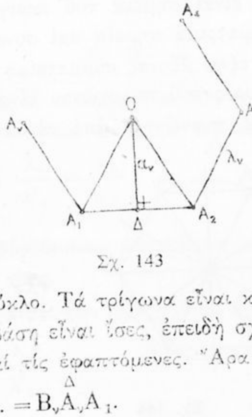
(2) $$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \ldots = \widehat{A}_\nu,$$

γιατί εἶναι γωνίες ἐγγεγραμμένες σέ ἴσα τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου. Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) συμπεραίνουμε ὅτι τό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ εἶναι κανονικό.

Ἄν στά σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ φέρουμε ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου, αὐτές καθώς τέμνονται ὁρίζουν τά σημεῖα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$, τά ὁποῖα εἶναι κορυφές κανονικοῦ ν-γώνου. Πραγματικά τά τρίγωνα $B_1A_1A_2$, $B_2A_2A_3, \ldots, B_\nu A_\nu A_1$ εἶναι ἰσοσκελή, γιατί ἀπ' τό ὁποιοδήποτε σημεῖο B_k, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ μποροῦμε



Σχ. 142



Σχ. 143

νά φέρουνε ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα στόν κύκλο. Τά τρίγωνα εἶναι καί ἴσα, γιατί ἔχουν ἴσες βάσεις, καί οἱ γωνίες στή βάση εἶναι ἴσες, ἐπειδή σχηματίζονται ἀπό ἴσες χορδές τοῦ ἴδιου κύκλου καί τίς ἐφαπτόμενες. Ἄρα :

$$B_1\overset{\Delta}{A}_1A_2 = B_2\overset{\Delta}{A}_2A_3 = \ldots = B_\nu\overset{\Delta}{A}_\nu A_1.$$

Τότε θά εἶναι καί

(3) $$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \ldots = \widehat{B}_\nu \quad \text{καί}$$

(4) $$B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_\nu B_1.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) συμπεραίνουμε ὅτι τό πολύγωνο $B_1B_2\ldots B_\nu$ εἶναι κανονικό καί ἔχει τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν, μέ τό $A_1A_2\ldots A_\nu$. Τό περιγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο $B_1B_2B_3\ldots B_\nu$, λέγεται ἀντίστοιχο τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ καί ἀντιστρόφως.

110. Ἐμβαδό κανονικοῦ πολυγώνου. Θεώρημα. Τό ἐμβαδό κάθε κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς ἡμιπεριμέτρου του ἐπί τό ἀπόστημά του.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα κανονικό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ μέ πλευρά λ_ν, μέ ἀπόστημα α_ν καί κέντρο του τό Ο (σχ. 143). Αὐτό μπορεῖ νά διαιρεθεῖ σέ ν τρίγωνα ἴσα πρός τό OA_1A_2. Ἑπομένως, ἄν E_ν εἶναι τό ἐμβαδό του, θά ἔχουμε :

$$(1) \qquad E_\nu = \nu \cdot (OA_1A_2).$$

Ἀλλά $(OA_1A_2) = \frac{1}{2}\lambda_\nu\alpha_\nu$ καί τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

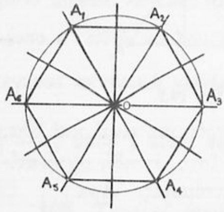
$$E_\nu = \nu \cdot \frac{1}{2}\lambda_\nu\alpha_\nu = \frac{\nu\lambda_\nu}{2}\alpha_\nu = \frac{P_\nu\alpha_\nu}{2}.$$

Ἄρα
$$\mathbf{E_\nu = \frac{P_\nu\alpha_\nu}{2}},$$

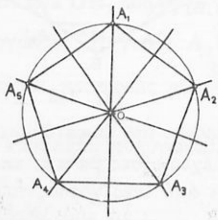
ὅπου P_ν εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου.

111. Συμμετρία στά κανονικά πολύγωνα. Θεώρημα. Κάθε κανονικό ν-γωνο ἔχει ν ἄξονες συμμετρίας.

Ἀπόδειξη. i) Ἔστω $\nu = 2k$ ἄρτιος. Οἱ κορυφές τοῦ πολυγώνου τότε, ἐπειδή εἶναι σημεῖα τοῦ περιγεγραμμένου σ' αὐτό κύκλου, εἶναι ἀνά δύο ἀντιδιαμετρικά σημεῖα καί συνεπῶς ὁρίζουν k διαμέτρους, καθεμιά ἀπ' τίς ὁποῖες εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ πολυγώνου (σχ. 144). Ἐπιπλέον, ἐπειδή οἱ πλευρές τοῦ πολυγώνου εἶναι ἀνά δύο παράλληλες, ἡ μεσοκάθετος μιᾶς πλευρᾶς, περνώντας ἀπό τό κέντρο τοῦ πολυγώνου, εἶναι μεσοκάθετος καί



Σχ. 144



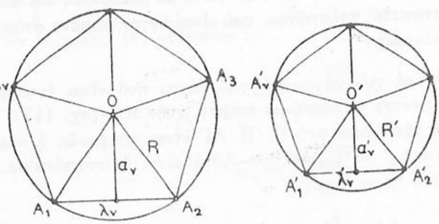
Σχ. 145

τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καί ἑπομένως εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπειδή ἔχουμε k ζεύγη παράλληλων πλευρῶν, ἔχουμε k τέτοιους ἄξονες συμμετρίας. Ἄρα οἱ ἄξονες συμμετρίας τελικά εἶναι $k + k = 2k = \nu$.

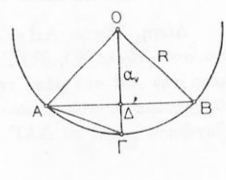
ii) Ἔστω ν περιττός (σχ. 145). Ἡ κάθε διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου στό πολύγωνο κύκλου, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό μιά κορυφή, εἶναι μεσοκάθετος γιά τήν ἀπέναντι πλευρά καί ἑπομένως εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Οἱ ἄξονες αὐτοί εἶναι ν, ὅσες δηλαδή καί οἱ κορυφές τοῦ πολυγώνου.

112. Ὁμοιότητα στά κανονικά πολύγωνα. Θεώρημα. Δύο κανονικά πολύγωνα μέ τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια. Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων καί ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων τους ἰσοῦται μέ τό λόγο τῆς ὁμοιότητάς τους.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο κανονικά πολύγωνα $A_1A_2\ldots A_\nu$, $A'_1A'_2\ldots A'_\nu$ μέ τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν ν (σχ. 146). Ἀπό τά κέντρα τους O καί O' φέρνουμε τίς ἀκτίνες $OA_1, OA_2, \ldots, OA_\nu$ καί $O'A'_1, O'A'_2, \ldots, O'A'_\nu$ καί διαιροῦμε τό κάθε πολύγωνο σέ ν ἴσα καί ἰσοσκελή τρίγωνα. Ἐπειδή $A_1\widehat{O}A_2 = A'_1\widehat{O'}A_2 = \dfrac{360^0}{\nu}$, ἄρα καί $A_1\overset{\Delta}{O}A_2 \approx A'_1\overset{\Delta}{O'}A_2$. Ἑπομένως τά δύο κανονικά πολύγωνα εἶναι ὅμοια, γιατί εἶναι χωρισμένα σέ ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια



Σχ. 146



Σχ. 147

καί ὁμοίως τοποθετημένα. Ἄν λ_ν καί λ'_ν εἶναι οἱ πλευρές τῶν δύο πολυγώνων καί α_ν, α'_ν τά ἀποστήματα τους ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα, A_1OA_2 καί $A'_1O'A'_2$ παίρνουμε $\dfrac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \dfrac{OA_1}{O'A'_1} = \dfrac{R}{R'}$ καί $\dfrac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}$,

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὅμοιων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῆς ὁμοιότητάς τους.

Πραγματικά, ἄν P_ν καί P'_ν εἶναι οἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων, ἔχουμε :

$$\frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu}{\nu \cdot \lambda'_\nu} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}. \qquad (3)$$

Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὅμοιων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους.

Πραγματικά, ἄν E_ν καί E'_ν εἶναι τά ἐμβαδά τους, ἔχουμε (§ 110) :

$$\frac{E_\nu}{E'_\nu} = \frac{\dfrac{P_\nu \cdot \alpha_\nu}{2}}{\dfrac{P'_\nu \cdot \alpha'_\nu}{2}} = \frac{P_\nu}{P'_\nu} \cdot \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} \cdot \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}\right)^2.$$

★ 113. Πρόβλημα I. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἀπόστημα α_ν ἑνός κανονικοῦ ν - γώνου πού ἔχει πλευρά λ_ν καί ἀκτίνα R.

Λύση. Ἄς πάρουμε $AB = \lambda_\nu$ τήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ ν - γώνου πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (O, R) (σχ. 147). Φέρνουμε τήν $O\Delta \perp AB$. Ἑπομένως τό OΔ εἶναι τό ἀπόστημα α_ν τοῦ πολυγώνου. Ἐπιπλέον τό Δ εἶναι μέσο τῆς πλευρᾶς AB, γιατί στό ἰσοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ τό ὕψος ΟΔ εἶναι καί διάμεσος. Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ ($\widehat{\Delta} = 1\llcorner$) ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ΟΑ = R καί ἡ κάθετος $\text{ΑΔ} = \frac{\lambda_\nu}{2}$. Ἄρα ἔχουμε $\text{ΟΔ}^2 =$

$= \text{ΟΑ}^2 - \text{ΑΔ}^2$ ἤ $\alpha_\nu^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - \lambda_\nu^2}{4}$, ἀπό τήν ὁποία ἕπεται ὅτι :

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}.$$

★ 114. Πρόβλημα ΙΙ. Ἄν δοθεῖ ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ πλευρά λ_ν καί ἀκτίνα R, νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο καί ἔχει διπλάσιο ἀριθμό πλευρῶν.

Λύση. Ἔστω $\text{ΑΒ} = \lambda_\nu$ ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (Ο, R). Ἀπό τό κέντρο Ο φέρνουμε κάθετο στήν ΑΒ (σχ. 147), πού τέμνει τήν ΑΒ στό μέσο της Δ καί τόν κύκλο στό Γ. Ἡ ΑΓ εἶναι προφανῶς ἡ πλευρά τοῦ ζητούμενου πολυγώνου καί ἔστω $\lambda_{2\nu}$ τό μῆκος της. Αὐτή εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΔΑΓ, στό ὁποῖο εἶναι :

$$\text{ΑΔ} = \frac{\lambda_\nu}{2} \quad \text{καί}$$

$\text{ΔΓ} = \text{ΟΓ} - \text{ΟΔ} = R - \alpha_\nu$, ὅπου α_ν εἶναι τό ἀπόστημα τοῦ δεδομένου πολυγώνου. Αὐτό εἶναι :

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}.$$

Τότε : $\text{ΔΓ} = R - \alpha_\nu = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}$. Ἄρα $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2$ ἤ

$$\lambda_{2\nu}^2 = \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \left(\frac{2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}\right)^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2} \quad \text{ἤ}$$

(1) $$\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}} \quad \text{(Τύπος τοῦ Ἀρχιμήδη).}$$

★ 115. Πρόβλημα ΙΙΙ. Ὅταν δοθεῖ ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ πλευρά λ_ν καί ἀκτίνα R, νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου πού εἶναι περιγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο καί ἔχει τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν.

Λύση. Ἔστω $\text{ΑΒ} = \lambda_\nu$ ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (Ο, R) (σχ. 148). Ἀπό τό Ο φέρνουμε κάθετο στήν ΑΒ, πού τήν τέμνει στό σημεῖο Δ καί τόν κύκλο στό σημεῖο Γ. Ἀπό τό Γ φέρνουμε ἐφαπτόμενη τοῦ κύκλου, πού τέμνει τίς προεκτάσεις τῶν ΟΑ καί ΟΒ στά Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Τότε ἡ ΕΖ εἶναι ἡ πλευρά τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου στόν ἴδιο κύκλο καί μέ τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν. Καί αὐτό συμβαίνει, γιατί τό τρίγωνο ΟΕΖ εἶναι μέν ἰσοσκελές, ἀφοῦ τό ὕψος του ΟΓ διχοτομεῖ τή γωνία του Ο, ὅμοιο δέ πρός τό ΟΑΒ μέ σταθερό λόγο ὁμοιότητας $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΔ}} = \frac{R}{\alpha_\nu}$. Ἑπομένως, τό πολύγωνο, πού κατασκευάζεται μέ τόν τρόπο αὐτό καί ἔχει πλευρά τήν ΕΖ, διαιρεῖται σέ τρίγωνα ὅμοια πρός τά ἀντίστοιχα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μέ πλευρά τήν ΑΒ. Ἄρα εἶναι ὅμοιο πρός αὐτό καί ἐπομένως εἶναι κανονικό. Ἄς σημειωθεῖ ἀκόμη ὅτι ὅλα τά περιγεγραμμένα (ἀντιστοίχως ἐγγεγραμμένα) κανονικά πολύγωνα στόν ἴδιο κύκλο καί μέ τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν εἶναι ἴσα, γιατί εἶναι ὅμοια μέ λόγο ὁμοιότητας, $\frac{R}{R} = 1$ (§ 112).

Ἀπό τά $\overset{\Delta}{OEZ} \approx \overset{\Delta}{OAB}$ παίρνουμε:

(1) $$\frac{EZ}{AB} = \frac{O\Gamma}{O\Delta}.$$

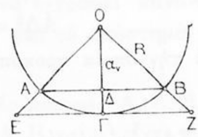
Τό ΟΔ εἶναι τό ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καί εἶναι ἴσο μέ

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}.$$

Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}} \quad \text{ἤ}$$

(2) $$\lambda'_\nu = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}.$$



Σχ. 148

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

306. Νά βρεθεῖ σέ μοῖρες ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ α) πεντάγωνου, β) ὀκτάγωνου, γ) δωδεκάγωνου.

307. Νά βρεθεῖ σέ μοῖρες ἡ κεντρική γωνία τοῦ κανονικοῦ: α) πεντάγωνου, β) δεκάγωνου, γ) δεκαπεντάγωνου.

308. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ γωνία κανονικοῦ ν-γώνου, γιά $\nu > 4$, εἶναι ἀμβλεία, ἐνῶ ἡ κεντρική γωνία του εἶναι ὀξεία.

309. Ποιοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρική γωνία εἶναι 36°;

310. Ὑπάρχει κανονικό πολύγωνο μέ κεντρική γωνία α) 15°, β) 25°, γ) 24° καί ποιό εἶναι αὐτό;

311. Ὑπάρχει κανονικό πολύγωνο μέ γωνία α) 140°, β) $157^\circ\ 30'$, γ) 160° καί ποιό εἶναι αὐτό;

312. Ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου ἡ ἀκτίνα εἶναι 8 cm καί τό ἀπόστημα $4\sqrt{3}$ cm. Νά βρεθεῖ ἡ πλευρά του.

313. Ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων δύο κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι $\frac{3}{4}$. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τους καί ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους.

314. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι μεταξύ τῆς πλευρᾶς λ, τοῦ ἀποστήματος α καί τῆς ἀκτίνας R ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου ὑπάρχει ἡ σχέση $\lambda^2 = 4(R^2 - \alpha^2)$.

315. Ἄν Α, Β, Γ, Δ εἶναι διαδοχικές κορυφές ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $A\Gamma^2 - AB^2 = AB \cdot A\Delta$.

ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

116. Πρόβλημα Ι. Σ' ἕναν κύκλο (Ο,R) νά ἐγγραφεῖ τετράγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημά του ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Λύση. Ἐπειδή οἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου τέμνονται καθέτως καί περνοῦν ἀπό τό κέντρο του, γράφουμε δύο διαμέτρους ΑΓ καί ΒΔ τοῦ κύκλου (Ο, R) οἱ ὁποῖες τέμνονται καθέτως. Αὐτές ὁρίζουν πάνω στόν κύκλο τίς κορυφές τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 149).

Τότε ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ παίρνουμε :

$$ΑΔ^2 = ΟΑ^2 + ΟΔ^2 \quad ἤ \quad λ_4{}^2 = R^2 + R^2,$$

ἀπό τήν ὁποία προκύπτει :

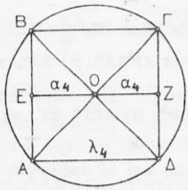
$$\boldsymbol{λ_4 = R\sqrt{2}}.$$

Ἄν ἀπ' τό κέντρο Ο φέρουμε παράλληλο πρός τήν ΑΔ, σχηματίζεται τό ὀρθογώνιο ΑΕΖΔ, στό ὁποῖο εἶναι προφανῶς $ΕΖ = 2α_4$. Ἀλλά $ΕΖ = ΑΔ = λ_4$. Ἄρα $2α_4 = R\sqrt{2}$, ἀπό τήν ὁποία παίρνουμε :

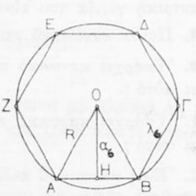
$$\boldsymbol{α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}.$$

117. Πρόβλημα ΙΙ. Σ' ἕναν κύκλο (Ο,R) νά ἐγγραφεῖ κανονικό ἑξάγωνο, καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημά του ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Λύση. Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τό ζητούμενο ἑξάγωνο πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (Ο, R) (σχ. 150). Ἡ κεντρική γωνία του $\widehat{ΑΟΒ}$ εἶναι ἴση μέ



Σχ. 149



Σχ. 150

$\frac{360^0}{6} = 60^0$. Ἄρα τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρο, συνεπῶς

$$ΑΒ = ΟΑ = R \quad ἤ \quad \boldsymbol{λ_6 = R}.$$

Ἡ κατασκευή γίνεται εὔκολα ἄν πάρουμε αὐθαίρετα ἕνα σημεῖο Α τοῦ κύκλου (Ο, R) καί μέ τήν ἴδια ἀκτίνα R ὁρίσουμε διαδοχικά μέ τό διαβήτη τίς ὑπόλοιπες κορυφές τοῦ ἑξαγώνου, ἔτσι ὥστε νά εἶναι

$$ΑΒ = R, \quad ΒΓ = R, \ldots, \quad ΕΖ = R.$$

Τό ἀπόστημα $\alpha_6 = \mathrm{OH}$ εἶναι τό ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου μέ πλευρά R ἑπομένως εἶναι:

$$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Αὐτό ἄλλωστε εὔκολα προκύπτει καί ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΗ, πού ἔχει $\mathrm{OA} = \mathrm{R}$ καί $\mathrm{AH} = \frac{\mathrm{R}}{2}$.

118. Πρόβλημα III. Σ' ἕναν κύκλο (Ο, R) νά ἐγγραφεῖ κανονικό τρίγωνο (ἰσόπλευρο), καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημά του ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Λύση. Ὁρίζουμε πάνω στόν κύκλο διαδοχικά τίς κορυφές Α, Ζ, Β, Δ, Γ,Ε κανονικοῦ ἑξαγώνου (σχ. 151). Τότε τά σημεῖα Α, Β καί Γ εἶναι κορυφές κανονικοῦ τριγώνου. Πραγματικά ἔχουμε:

$$\widehat{\mathrm{AZB}} = \widehat{\mathrm{B\Delta\Gamma}} = \widehat{\mathrm{\Gamma EA}}. \quad \text{Ἄρα} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma A},$$

δηλαδή τό τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς πλευρᾶς του προεκτείνουμε τή ΓΟ, πού ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$ θά περάσει ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$, δηλαδή ἀπό τήν κορυφή Ζ τοῦ ἐγγεγραμμένου στόν ἴδιο κύκλο κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἄρα ΖΒ = R. Τό τρίγωνο ΒΓΖ εἶναι ὀρθογώνιο στό Β, γιατί ἡ ΓΖ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. Σ' αὐτό εἶναι ΓΖ = 2R καί ΖΒ = R.

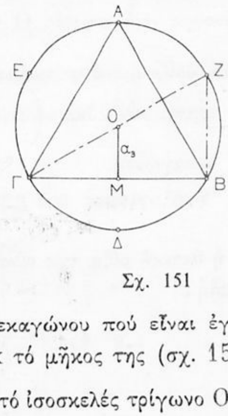
Ἄρα $\quad \mathrm{\Gamma B}^2 = \mathrm{\Gamma Z}^2 - \mathrm{ZB}^2 \quad$ ἤ

$$\lambda_3{}^2 = 4\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}^2 = 3\mathrm{R}^2 \quad \text{ἤ} \quad \lambda_3 = R\sqrt{3}.$$

Γιά τό ἀπόστημα ἔχουμε $\mathrm{OM} = \alpha_3 = \frac{\mathrm{ZB}}{2}$.

Ἄρα: $\quad \alpha_3 = \frac{R}{2},$

γιατί τά ἄκρα του εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΓΖ καί ΓΒ τοῦ τριγώνου ΓΖΒ, πού ἔχει ΖΒ = R.



Σχ. 151

119. Πρόβλημα IV. Σ' ἕναν κύκλο (Ο,R) νά ἐγγραφεῖ κανονικό δεκάγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημά του ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Λύση. Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (Ο, R) καί ἄς ὀνομάσουμε x τό μῆκος της (σχ. 152). Ἡ κεντρική γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ εἶναι $\frac{360^0}{10} = 36^0$. Ἄρα στό ἰσοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἴσες γωνίες του εἶναι $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Ἄν φέρουμε τή διχοτόμο ΑΓ τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$, τό τρίγωνο ΟΑΒ χωρίζεται σέ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, γιατί τό ΓΑΟ ἔχει $\widehat{\mathrm{O}} = 36^\circ$ καί $\widehat{\mathrm{A}} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$. Ἄρα

(1) $\Gamma\mathrm{A} = \Gamma\mathrm{O}$.

Τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει $\widehat{\mathrm{A}} = 36^\circ$ καί $\widehat{\mathrm{B}} = 72^\circ$.

Ἄρα $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$. Ἑπομένως

(2) $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{AB}$.

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει πώς $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma = \Gamma\mathrm{O} = x$.

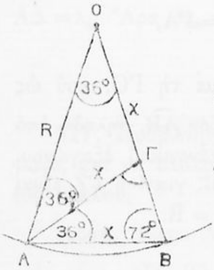
Ἄν τώρα ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα τῆς διχοτόμου γιά τό τρίγωνο ΟΑΒ, βρίσκουμε :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AO}} = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{\Gamma\mathrm{O}} \quad \text{ἤ}$$

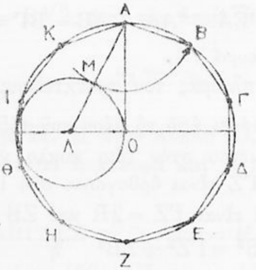
$$\frac{x}{R} = \frac{R - x}{x} \quad \text{ἤ}$$

(3) $x^2 = R(R - x)$.

Ἀπ' τή σχέση (3) φαίνεται ὅτι τό τμῆμα x εἶναι τό μεγαλύτερο ἀπό τά δύο τμήματα τῆς ἀκτίνας R, ὅταν αὐτή διαιρεθεῖ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο.



Σχ. 152



Σχ. 153

Κατασκευή. (Εἶναι ἴδια μέ τήν κατασκευή τῆς χρυσῆς τομῆς § 100). Φέρνουμε στό σημεῖο Ο τοῦ κύκλου $\left(\Lambda, \frac{R}{2}\right)$ τήν ἐφαπτομένη πάνω στήν ὁποία ὁρίζουμε ἕνα τμῆμα ΟΑ = R. Ἄν Μ εἶναι τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ ΑΛ τέμνει τόν κύκλο $\left(\Lambda, \frac{R}{2}\right)$ τό τμῆμα ΑΜ θά εἶναι ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ὑπολογισμός τοῦ μήκους της. Ἡ ἐξίσωση (3) γράφεται :

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

καί ἡ θετική ρίζα της εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, δηλαδή :

$$\lambda_{10} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$\lambda_{10} = \frac{\mathbf{R(\sqrt{5} - 1)}}{\mathbf{2}}.$$

Τό ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπό ἕνα κεντρικό τρίγωνο ΟΑΒ (σχ. 154). Φέρνουμε τήν $OM \perp AB$. Εἶναι $OM = \alpha_{10}$, $AM = \frac{\lambda_{10}}{2}$ ἄρα

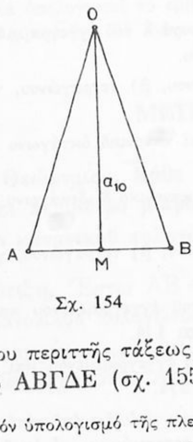
$$\alpha^2_{10} = OA^2 - AM^2 = R^2 - \left[\frac{R(\sqrt{5}-1)}{4}\right]^2 =$$

$$= R^2 - \frac{R^2(5-2\sqrt{5}+1)}{16} = \frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16} \quad \text{ἤ}$$

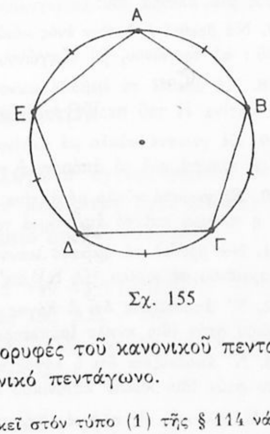
$$\alpha_{10} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

120. Πρόβλημα V. Σ' ἕναν κύκλο (Ο,R) νά ἐγγραφεῖ κανονικό πεντάγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημά του ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Λύση. Κατασκευάζουμε πρῶτα ἕνα κανονικό δεκάγωνο καί τότε οἱ



Σχ. 154



Σχ. 155

κορυφές του περιττῆς τάξεως θά εἶναι οἱ κορυφές τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, δηλαδή τό ΑΒΓΔΕ (σχ. 155) εἶναι κανονικό πεντάγωνο.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς πλευρᾶς του λ_5, ἀρκεῖ στόν τύπο (1) τῆς § 114 νά θέσουμε $\nu = 5$, γνωρίζοντας ὅτι $\lambda_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, καί νά ἐπιλύσουμε ὡς πρός λ_5. Τότε παίρνουμε:

$$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Τό ἀπόστημα ὑπολογίζεται ἀπό ἕνα κεντρικό τρίγωνο:

$$\alpha_5^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_5}{2}\right)^2 = R^2 - \left[\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]^2 =$$

$$= R^2 - \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{16} = \frac{R^2(6+2\sqrt{5})}{16} \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha_5 = \frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{R(\sqrt{5}+1)}{4}.$$

121. Πρόβλημα VI. Σ' ἕναν κύκλο νά ἐγγραφεῖ κανονικό δεκαπεντάγωνο.

Λύση. Ἀπό τήν ἀριθμητική ἰσότητα $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ παρατηροῦμε ὅτι γιά νά βροῦμε τό δέκατο πέμπτο τοῦ κύκλου, πρέπει ἀπό τό ἕκτο του ν' ἀφαιρέσουμε τό δέκατο. Ἄν λοιπόν ἀπό τό τόξο πού ἀντιστοιχεῖ στήν πλευρά κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀφαιρέσουμε τό τόξο πού ἀντιστοιχεῖ στήν πλευρά κανονικοῦ δεκαγώνου, θά βροῦμε τό τόξο πού ἀντιστοιχεῖ στήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Μετά ἀπό τήν παρατήρηση αὐτή ἡ κατασκευή εἶναι εὔκολη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

316. Ν' ἀποδείξετε πώς καθεμιά διαγώνιος κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι παράλληλη πρός μιά πλευρά του.

317. Νά βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα ἑνός κύκλου ἀπό τήν πλευρά λ τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτόν κανονικοῦ : α) τριγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) τετραγώνου.

318. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου ἀπό τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

319. Σέ γνωστό κύκλο μέ ἀκτίνα R νά ἐγγραφεῖ κανονικό ὀκτάγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημά του.

320. Σέ γνωστό κύκλο μέ ἀκτίνα R νά ἐγγραφεῖ κανονικό δωδεκάγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημά του.

321. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό κανονικοῦ α) τριγώνου, β) τετραγώνου, γ) ἑξαγώνου περιγεγραμμένου σέ κύκλο (O, R) ἀπ' τήν ἀκτίνα R.

322. Ν' ἀποδείξετε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τοῦ περιγεγραμμένου στόν ἴδιο κύκλο ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 1/4.

323. Ν' ἀποδείξετε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τοῦ περιγεγραμμένου στόν ἴδιο κύκλο κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 3/4.

324. Μέ πλευρές τίς πλευρές ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου καί ἔξω ἀπ' αὐτό κατασκευάζουμε τετράγωνα. Ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ κορυφές τῶν τετραγώνων, οἱ ὁποῖες δέν εἶναι καί κορυφές τοῦ ἑξαγώνου, εἶναι κορυφές κανονικοῦ δωδεκαγώνου καί νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.

Β΄.

325. Σέ ἕνα κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ μέ πλευρά α συνδέουμε τήν κορυφή Α μέ τό μέσο Η τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό καθενός ἀπό τά δύο μέρη, στά ὁποῖα διαιρεῖται τό ἑξάγωνο.

326. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ πλευρά ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο μέ ἀκτίνα R, εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογώνιου τριγώνου, πού ἔχει κάθετες πλευρές τίς πλευρές τῶν ἐγγεγραμμένων στόν ἴδιο κύκλο κανονικοῦ ἑξαγώνου καί κανονικοῦ δεκαγώνου.

327. Σ' ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα R ἐγγράφουμε τό ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Μέ πλευρές τίς ΑΒ καί ΑΓ κατασκευάζουμε τά τετράγωνα ΑΒΔΕ καί ΑΓΖΗ, πού περιέχουν τό τρίγωνο ΑΒΓ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ πλευρές ΒΔ καί ΓΖ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ν, πού βρίσκεται πάνω στόν κύκλο, καί οἱ πλευρές ΕΔ καί ΗΖ τέμνονται σέ σημεῖο Μ, πού βρίσκεται στήν προέκταση τῆς διαμέτρου, πού φέρνουμε ἀπό τό Α. Νά βρεθεῖ καί τό ἐμβαδό τοῦ σχήματος ΑΕΜΗ.

328. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τοῦ κυρτοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἀπό τήν ἀκτίνα του χωρίς νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά του.

329. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου στό ἴδιο κύκλο (Ο, R).

330. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμάνου κανονικοῦ δωδεκαγώνου στόν ἴδιο κύκλο (Ο, R).

331. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ πλευρά καί τό ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ α) ὀκταγώνου, β) δωδεκαγώνου, γ) εἰκοσαγώνου, ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο (Ο, R).

332. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ κέντρο Ο. Μέ κέντρα τίς κορυφές τοῦ τετραγώνου καί ἀκτίνα ΑΟ γράφουμε κυκλικά τόξα, πού τέμνουν τίς πλευρές τοῦ τετραγώνου σέ ὀκτώ σημεῖα. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι κορυφές κανονικοῦ ὀκταγώνου καί νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό του ἀπό τήν πλευρά τοῦ τετραγώνου.

333. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό κανονικοῦ πολυγώνου πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (Ο, R), καί ἔχει 35 διαγωνίους.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

122. Θεώρημα. Κάθε κανονικό πολύγωνο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (Ο, R) ἔχει περίμετρο μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο ἐγγεγραμμένου στόν ἴδιο κύκλο κανονικοῦ πολυγώνου μέ διπλάσιο ἀριθμό πλευρῶν.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $AB = \lambda_\kappa$ ἡ πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (Ο, R) κανονικοῦ πολυγώνου μέ κ πλευρές καί $A\Delta = \Delta B = \lambda_{2\kappa}$ ἡ πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου στόν ἴδιο κύκλο μέ διπλάσιο ἀριθμό πλευρῶν (σχ. 156). Ἀπό τό τρίγωνο ΑΔΒ παίρνουμε:

$$AB < A\Delta + \Delta B \quad \text{ἤ}$$

$$\lambda_\kappa < 2\lambda_{2\kappa}. \tag{1}$$

Ἄν τή σχέση (1) τήν πολλαπλασιάσουμε ἐπί κ, παίρνουμε:

$$\kappa \cdot \lambda_\kappa < 2\kappa \cdot \lambda_{2\kappa} \quad \text{ἤ}$$

$$P_\kappa < P_{2\kappa}, \tag{2}$$

ὅπου P_κ καί $P_{2\kappa}$ εἶναι οἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων μέ πλευρές κ καί 2κ ἀντιστοίχως.

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

$$\mathbf{P_\kappa, P_{2\kappa}, P_{4\kappa}, \ldots, P_{2^\nu\kappa}, \ldots \mid \nu = 0,1,2, \ldots} \tag{3}$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, πού τό καθένα εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο (O, R) καί ἔχει διπλάσιο ἀριθμό πλευρῶν ἀπό τό προηγούμενό του, εἶναι αὔξουσα, δηλαδή :

$$P_{\varkappa} < P_{2\varkappa} < P_{4\varkappa} < \ldots < P_{2^{\nu}\varkappa} < \ldots \mid \nu = 0,1,2 \ldots$$

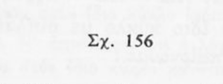
123. Θεώρημα. Ἄν ἑνός μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου σέ σταθερό κύκλο (O, R), τό πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐξάνει καί τείνει στό ἄπειρο, τότε :

i) Τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του λ_ν μικραίνει τείνοντας πρός τό μηδέν.

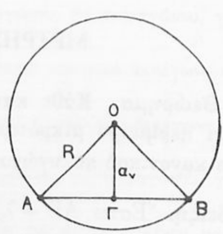
ii) Τό μῆκος τοῦ ἀποστήματός του α_ν μεγαλώνει τείνοντας πρός τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

iii) Τό μῆκος τῆς περιμέτρου του P_ν μεγαλώνει τείνοντας πρός τό μῆκος L τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνας σταθερός κύκλος (O, R) μέ μῆκος L (περίμετρο) καί $AB = \lambda_\nu$ ἡ πλευρά ἑνός ἐγγεγραμμένου σ' αὐτόν κανονικοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές (σχ. 157).



Σχ. 156



Σχ. 157

i) Τό μῆκος τοῦ (μικτότερου) τόξου $\widehat{AB}$ εἶναι ἴσο μέ τό $1/\nu$ τοῦ μήκους L τοῦ κύκλου, δηλαδή εἶναι :

(1) $$\widehat{AB} = \frac{1}{\nu} \cdot L.$$

Τότε $$\lim_{\nu \to \infty} \widehat{AB} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{L}{\nu} = 0 \ (*).$$

* Τό σύμβολο lim σημαίνει ὅριο.

Ἐπειδή ὅμως εἶναι

(2) $$\lambda_\nu = AB < \widehat{AB},$$

προκύπτει ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ὅτι $\lim\limits_{\nu \to \infty} \lambda_\nu = 0.$

ii) Ἄν $O\Gamma = \alpha_\nu$ εἶναι τό ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί $A\Gamma = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\lambda_\nu}{2}$, ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΟ πού ἔχει ὑποτείνουσα τήν $AO = R$, παίρνουμε :

$$AO^2 = O\Gamma^2 + A\Gamma^2 \text{ ἤ } R^2 = \alpha_\nu^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 \text{ ἤ } \alpha_\nu^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 \text{ ἤ}$$

$$\text{ἤ } \lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu^2 = \lim_{\nu \to \infty} \left[R^2 - \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 \right] = R^2 - \lim_{\nu \to \infty} \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 =$$

$= R^2 - 0 = R^2$ ἤ $\lim\limits_{\nu \to 8} \alpha_\nu^2 = R^2$ ἤ $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = R$ (ἐφόσον ἡ σχέση ἀναφέρεται στά μέτρα γεωμετρικῶν μεγεθῶν), δηλαδή τό ἀπόστημα α_ν τείνει πρός τήν ἀκτίνα R, ὅταν τό ν τείνει πρός τό ἄπειρο.

iii) Τό μῆκος κυκλικοῦ τόξου, ἀπ' τόν ὁρισμό, εἶναι ἴσο μέ τό ὅριο πρός τό ὁποῖο τείνει κανονική πολυγωνική γραμμή ἐγγεγραμμένη σ' αὐτό, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν της τείνει πρός τό ἄπειρο. Ἄρα τό μῆκος L τοῦ κύκλου (O, R) εἶναι ἴσο μέ τό ὅριο πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ περίμετρος P_ν μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου σ' αὐτόν, ὅταν τό πλῆθος ν τῶν πλευρῶν του τείνει πρός τό ἄπειρο.

Σύμφωνα μ' αὐτά, ἐφόσον ἡ πλευρά $\lambda_\nu = AB$ ἑνός ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ν-γώνου στόν κύκλο (O, R) εἶναι μικρότερη ἀπ' τό ἀντίστοιχο σ' αὐτήν τόξο $\widehat{AB}$, δηλαδή $\lambda_\nu < \widehat{AB}$ θά εἶναι $\nu \cdot \lambda_\nu < \nu \cdot \widehat{AB}$ ἤ $P_\nu < L$ καί ἐπειδή ἐπιπλέον $\lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu = L$, ἕπεται ὅτι τό μῆκος τῆς μεταβλητῆς περιμέτρου P_ν αὐξάνει τείνοντας στό μῆκος L τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Μέ ἄλλη διατύπωση, ἡ ἀκολουθία P_ν, $\nu = 3, 4, 5, \ldots$, τῶν περιμέτρων τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων στόν κύκλο (O, R) εἶναι αὔξουσα καί φραγμένη ἀπό τήν περίμετρο L τοῦ κύκλου (O, R), καί συγκλίνει σ' αὐτήν.

124. Θεώρημα. Κάθε κανονικό πολύγωνο περιγεγραμμένο σέ κύκλο (O, R), ἔχει περίμετρο μεγαλύτερη ἀπό τό περιγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο κανονικό πολύγωνο μέ διπλάσιο ἀριθμό πλευρῶν.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $AB = \lambda'_\kappa$ ἡ πλευρά ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου σέ κύκλο (O, R) καί Γ τό μέσο της καί τό σημεῖο ἐπαφῆς της μέ τόν κύκλο (σχ. 158). Φέρνουμε τίς ΟΑ καί ΟΒ καί ἄς θεωρήσουμε ὅτι αὐτές τέμνουν τόν κύκλο στά Ι καί Κ. Στά Ι καί Κ φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου, πού ὁρίζουν πάνω στήν ΑΒ τά σημεῖα Ε καί Ζ. Ἡ συμμετρία ὡς πρός τόν ἄξονα ΟΓ, καθώς καί ὡς πρός τούς ἄξονες ΟΑ καί ΟΒ, μᾶς ἐξασφαλίζει τήν κανονικότητα γιά τό πολύγωνο τό περιγεγραμμένο στόν κύκλο (Ο, R) μέ πλευρά τήν ΕΖ. Τό πολύγωνο αὐτό ΔΕΖΗ... ἔχει διπλάσιο ἀριθμό πλευρῶν ἀπό τό πολύγωνο μέ πλευρά τήν ΑΒ καί ἔστω $\lambda'_{2\kappa}$ τό μῆκος καθεμιᾶς πλευρᾶς του.

Ἀπό τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΙΕ καί ΒΚΖ ἔχουμε :

$$AE > IE \text{ καί } ZB > ZK. \quad \text{Τότε εἶναι :}$$

$$AE + EZ + ZB > IE + EZ + ZK \quad \text{ἤ}$$

$$\lambda'_{\kappa} > \frac{\lambda'_{2\kappa}}{2} + \lambda'_{2\kappa} + \frac{\lambda'_{2\kappa}}{2} \quad \text{ἤ}$$

(1) $$\lambda'_{\kappa} > 2\lambda'_{2\kappa}.$$

Ἄν τή σχέση (1) τήν πολλαπλασιάσουμε ἐπί κ, παίρνουμε :

$$\kappa\lambda'_{\kappa} > 2\kappa\lambda'_{2\kappa} \quad \text{ἤ}$$

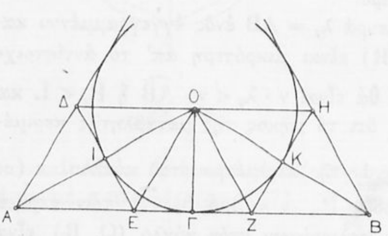
(2) $$P'_{\kappa} > P'_{2}.$$

Πόρισμα. Ἡ ἀκολουθία

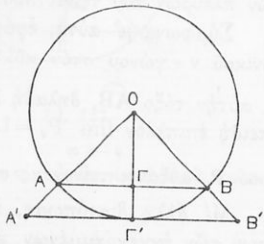
(3) $$P'_{\kappa}, P'_{2\kappa}, P'_{4\kappa}, \ldots, P'_{2^{\nu}\kappa} \ldots \mid \nu = 0,1,2,\ldots$$

τῶν περιμέτρων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, καθένα ἀπό τά ὁποῖα εἶναι περιγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο (Ο, R) καί ἔχει διπλάσιο ἀριθμό πλευρῶν ἀπό τό προηγούμενό του, εἶναι φθίνουσα, δηλαδή :

$$P'_{\kappa} > P'_{2\kappa} > P'_{4\kappa} > \ldots > P'_{2^{\nu}\kappa} > \ldots \mid \nu = 0,1,2,\ldots$$



Σχ. 158



Σχ. 159

125. Θεώρημα. Οἱ περίμετροι δύο μεταβλητῶν κανονικῶν πολυγώνων μέ τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν, πού τό ἕνα εἶναι ἐγγεγραμμένο καί τό ἄλλο περιγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο (Ο, R), τείνουν πρός κοινό ὅριο, πού εἶναι τό μῆκος τοῦ κύκλου, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τους τείνει πρός τό ἄπειρο.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε μιά πλευρά $AB = \lambda_{\nu}$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καί ἀντίστοιχα πρός αὐτή τήν $A'B' = \lambda'_{\nu}$ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 159). Τά δύο πολύγωνα, ἀφοῦ ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια καί ἐπομένως $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{O\Gamma}{O\Gamma'}$ ἤ

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \text{ ἤ } \frac{\nu\cdot\lambda_\nu}{\nu\cdot\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \text{ ἤ } \frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \text{ ἤ } \lim_{\nu\to\infty}\frac{P_\nu}{P'_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\alpha_\nu}{R} \text{ ἤ}$$

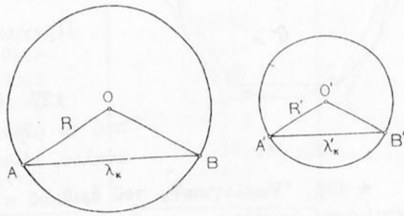
$$\frac{\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu}{\lim\limits_{\nu\to\infty} P'_\nu} = \frac{\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu}{R} \text{ ἤ } \frac{\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu}{\lim\limits_{\nu\to\infty} P'_\nu} = \frac{R}{R} = 1 \text{ ἤ } \lim_{\nu\to\infty} P_\nu = \lim_{\nu\to\infty} P'_\nu.$$ Ἀλλά

$\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu = L$ (§ 123). Ἄρα $\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} P'_\nu = L$, ὅπου L εἶναι τό μῆκος τοῦ κύκλου.

126. Θεώρημα. (Ἱπποκράτη τοῦ Χίου). Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο κύκλων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀκτίνων τους.

Ἀπόδειξη. Σέ δύο κύκλους (O, R) καί (O′, R′). Ἐγγράφουμε ἀπό ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ τό ἴδιο πλῆθος ν πλευρῶν (σχ. 160). Τότε τά πολύγωνα εἶναι ὅμοια καί ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τους εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῆς ὁμοιότητάς τους (§ 112). Ἀλλά ὁ λόγος ὁμοιότητας $\dfrac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}$ εἶναι ἴσος μέ τόν λόγο τῶν ἀκτίνων τους $\dfrac{R}{R'}$. Ἄρα:

$$(1) \qquad \frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{R}{R'}.$$



Σχ. 160

Ἄν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων διπλασιάζεται συνεχῶς καί τείνει στό ἄπειρο, τότε οἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων συγκλίνουν στά μήκη τῶν κύκλων καί ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{P_\nu}{P'_\nu} = \frac{R}{R'} \text{ ἤ}$$

$$\frac{\lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu}{\lim\limits_{\nu\to 8} P'_\nu} = \frac{R}{R'} \text{ ἤ}$$

$$(2) \qquad \frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}.$$

Πόρισμα I. Ὁ λόγος τοῦ μήκους ἑνός κύκλου πρός τή διάμετρό του εἶναι σταθερός ἀριθμός.

Πραγματικά, ἡ σχέση (2) γράφεται :

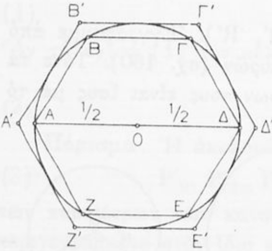
$$\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} \quad \text{ἤ ἀκόμα}$$

$$(3) \qquad \frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}.$$

Ἀπό τήν (3) προκύπτει ὅτι ἀφοῦ γιά δύο ὁποιουσδήποτε κύκλους ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ ἑνός πρός τή διάμετρό του βρέθηκε ἴσος μέ τό λόγο τοῦ μήκους τοῦ ἄλλου πρός τή διάμετρό του, ὁ λόγος αὐτός δέ μεταβάλλεται, δηλαδή εἶναι σταθερός.

Ὁ σταθερός αὐτός λόγος συμβολίζεται διεθνῶς μέ τό ἑλληνικό γράμμα π, δηλαδή

$$(4) \qquad \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2R}} = \pi.$$



Σχ. 161

Πόρισμα II. Τό μῆκος ἑνός κύκλου εἶναι ἴσο πρός τό γινόμενο τῆς διαμέτρου του μέ τόν ἀριθμό π.

Πραγματικά, ἀπό τή σχέση (4), παίρνουμε:

$$\mathbf{L = 2\pi R}.$$

127. Ὁρισμός. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, πού τό μῆκος του εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος ἑνός κύκλου, λέγεται **ἀνάπτυγμα** τοῦ κύκλου.

★ 128. Ὑπολογισμός τοῦ ἀριθμοῦ π. Γιά νά ὑπολογίσουμε τόν ἀριθμό π, σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς :

Ὁ τύπος (4) τῆς προηγούμενης παραγράφου δίνει τόν ἀριθμό π ὡς πηλίκο τῆς περιμέτρου L ἑνός κύκλου πρός τή διάμετρό του 2R. Ἄν ἑπομένως γνωρίζαμε τήν περίμετρο L ἑνός κύκλου μέ γνωστή διάμετρο, θά μπορούσαμε νά ὑπολογίσουμε τόν ἀριθμό π. Μέ τή σκέψη αὐτή ξεκινᾶμε νά γράψουμε ἕναν κύκλο μέ διάμετρο $2R = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$, ὁπότε ὁ τύπος (4) τῆς προηγούμενης παραγράφου δίνει $\pi = L$, δηλαδή τό πρόβλημα ἀνάγεται στόν ὑπολογισμό τοῦ μήκους L τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου μέ ἀκτίνα $R = \frac{1}{2}$.

Ἄν στόν κύκλο ἐγγράψουμε καί περιγράψουμε κανονικά πολύγωνα μέ τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν, ἔστω ἑξάγωνα (σχ. 161), εἶναι φανερό ὅτι ἡ περίμετρος L τοῦ κύκλου περιέχεται μεταξύ τῶν περιμέτρων τῶν δύο πολυγώνων. Πραγματικά, τό ἐγγεγραμμένο πολύγωνο ἔχει περίμετρο μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο τοῦ κύκλου, ἐπειδή εἶναι κλειστή κυρτή γραμμή πού κλείνεται ἀπό ἄλλη (τόν κύκλο). Ἐπίσης ὁ κύκλος ἔχει περίμετρο μικρότερη ἀπ' τήν περίμετρο τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, ἐπειδή εἶναι κλειστή κυρτή γραμμή πού κλείνεται ἀπό ἄλλη (τό περιγεγραμμένο πολύγωνο). Ἡ πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου εἶναι $\lambda_6 = R = \frac{1}{2}$ καί ἑπομένως ἡ περίμετρός του εἶναι $P_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Ἡ πλευρά τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου ὑπολογίζεται μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου (2) τῆς παραγράφου 115 προσεγγιστικά στόν ἀριθμό 0,57735 καί ἑπομένως ἡ περίμετρός του εἶναι $P'_6 = 6 \cdot 0,57735 = 3,4641$. Ἤδη βρέθηκε μιά πρώτη προσέγγιση γιά τόν ἀριθμό π, ἡ $\pi = 3$, γιατί $P_6 < \pi < P'_6 \Rightarrow 3 < \pi < 3,4641$.

Μέ διπλασιασμό τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν ἑξαγώνων παίρνουμε δωδεκάγωνα, μετά 24 /γωνα κ.ο.κ. καί κάθε φορά μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε τίς πλευρές τῶν κανονικῶν πολυγώνων, πού προκύπτουν μέ τή βοήθεια τῶν τύπων τῶν παραγράφων 114 καί 115.

Μέ τό συνεχή διπλασιασμό τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων, τά κανονικά πολύγωνα τείνουν νά ταυτιστοῦν μέ τόν κύκλο καί μέ τόν τρόπο αὐτό δημιουργοῦνται δύο ἀκολουθίες περιμέτρων πού συγκλίνουν πρός τόν ἀριθμό π :

$$P_6 < P_{12} < P_{24} < \ldots < \pi < \ldots < P'_{24} < P'_{12} < P'_6$$

οἱ ὁποῖες περιορίζουν τόν π ὁλοένα σέ στενώτερα ἀριθμητικά πλαίσια.

Καταλαβαίνουμε εὔκολα πώς ὅσο περισσότερους ὅρους ἀπό τίς προηγούμενες ἀκολουθίες ὑπολογίσουμε, τόσο μεγαλύτερη προσέγγιση γιά τόν ἀριθμό π θά πάρουμε. Ἄς σημειωθεῖ ὅτι οἱ ὑπολογισμοί αὐτοῦ τοῦ εἴδους, πρίν ἀπ' τήν ἀνακάλυψη τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ἦταν δυσχερέστατοι καί ἀπασχόλησαν γιά πολλά χρόνια τούς μαθηματικούς διάφορων ἐποχῶν.

Παρακάτω δίνουμε πίνακα τῶν περιμέτρων τῶν ἐγγεγραμμένων καί περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων σέ κύκλο μέ διάμετρο $2R = 1$.

ν	P	P′
6	3	3,46410
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
384	3,14155	3,14166

Ὁ ἀριθμός π περιέχεται πάντοτε μεταξύ τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο στηλῶν P καί P′. Τά ἀκριβή δεκαδικά ψηφία τοῦ π εἶναι προφανῶς τά κοινά ψηφία τῶν δύο προσεγγίσεων. Ἀπό τόν προηγούμενο πίνακα προκύπτει ὅτι $3,14155 < \pi < 3,14166$, δηλαδή ὁ ἀριθμός π μέ τά τρία πρῶτα δεκαδικά ψηφία του εἶναι $\pi = 3,141\ldots$

Ὁ π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός καί μάλιστα ὑπερβατικός, ὅπως ἀπόδειξε τό 1882 ὁ Γερμανός μαθηματικός Lindemann, δηλαδή ὄχι μόνο δέν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ κάποιο ἀριθμητικό κλάσμα, ἀλλά δέν μπορεῖ νά εἶναι ρίζα καμιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μέ ἀκέραιους συντελεστές. Ἔτσι ἀποδείχθηκε ὅτι δέν εἶναι δυνατό νά κατασκευαστεῖ μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη εὐθύγραμμο τμῆμα, πού νά ἔχει μῆκος ἴσο μέ τόν ἀριθμό π. Ἡ διαπίστωση αὐτή δίνει ὁριστικά ἀρνητική ἀπάντηση στή λύση τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, πού τέθηκε ἀπό τούς ἀρχαίους Ἕλληνες, δηλαδή τῆς κατασκευῆς τετραγώνου πού ἔχει ἐμβαδό ἴσο μέ τό ἐμβαδό γνωστοῦ κύκλου.

Ἀπό τό θεώρημα τοῦ Ἱπποκράτη φαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμός π ἦταν γνωστός καί στούς ἀρχαίους Ἕλληνες, πού ὑποψιάζονταν μάλιστα ὅτι αὐτός δέν μπορεῖ νά παρασταθεῖ μέ κάποιο ἀριθμητικό κλάσμα. Ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) ἔδωσε μιά προσεγγιστική τιμή του, τήν $\pi = \frac{22}{7} = 3,1428$ πού διαφέρει περίπου κατά $\frac{1}{1000}$ ἀπό τήν πραγματική τιμή τοῦ π.

Στήν πράξη ἀντί γιά τόν ἀριθμό π χρησιμοποιοῦνται οἱ προσεγγίσεις του

3,14 ἤ **3,1416,** ἤ **3,14159,**

ἀνάλογα μέ τήν ἀκρίβεια πού χρειάζεται γιά τήν ἀντιμετώπιση τοῦ κάθε προβλήματος. Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι τά ψηφία τῆς τελευταίας ἀπό τίς προηγούμενες προσεγγίσεις, πού εἶναι γνωστή ἀπό τά μέσα τοῦ 16ου αἰώνα περίπου, συμφωνοῦν μέ τό πλῆθος τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων τῆς φράσεως :

ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ μέγας γεωμετρεῖ
3 1 4 1 5 9

Σήμερα γιά τίς ἀνάγκες τῆς ἀστροναυτικῆς, πού ἀπαιτεῖ ἀκριβέστατους ὑπολογισμούς, ἔχει βρεθεῖ μέ ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή προσέγγιση τοῦ ἀριθμοῦ π μέ 10000 δεκαδικά ψηφία.

Δίνομε προσέγγιση τοῦ ἀριθμοῦ π μέ 15 δεκαδικά ψηφία :

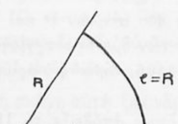
$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793...$$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

129. Ὁρισμός. Μῆκος ἤ ἀνάπτυγμα ἑνός κυκλικοῦ τόξου μέ ἄκρα τά σημεῖα Α καί Β λέγεται τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει τό μῆκος κανονικῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς μέ τά ἴδια ἄκρα Α καί Β ἐγγεγραμμένης στό τόξο, ὅταν τό πλῆθος ν τῶν πλευρῶν της αὐξανόμενο ἀπεριόριστα τείνει πρός τό ἄπειρο.

130. Ὑπολογισμός τοῦ μήκους κυκλικοῦ τόξου. Εἶναι γνωστό πώς τά γεωμετρικά μεγέθη «τόξα ἑνός κύκλου» καί «ἀντίστοιχες πρός αὐτά ἐπίκεντρες γωνίες» εἶναι ἀνάλογα. Ἄν ἑπομένως συμβολίσουμε l τό μῆκος κυκλικοῦ τόξου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρη γωνία, ὅταν μετρηθεῖ σέ μοῖρες, εἶναι μ^0, θά ἔχουμε τήν ἀναλογία :

$$(1) \qquad \frac{l}{L} = \frac{\mu^0}{360^0},$$



Σχ. 162

ὅπου L εἶναι τό μῆκος τοῦ κύκλου (O, R), στόν ὁποῖο ἀνήκει τό τόξο.

Τότε ἀπό τή σχέση (1) καί γνωρίζοντας ὅτι $L = 2\pi R$, παίρνουμε :

$$(2) \qquad l = \frac{2\pi R \cdot \mu}{360}.$$

131. Ἀκτίνιο (rad ἀπό τό radian = ἀκτίνιο). Ἕνα κυκλικό τόξο λέγεται τόξο ἑνός ἀκτινίου (ἤ ἀκτίνιο τόξο) ὅταν τό ἀνάπτυγμά του (τό μῆκος του) εἶναι ἴσο μέ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, στόν ὁποῖο ἀνήκει. Ἀντιστοίχως ἡ ἐπίκεντρη γωνία του λέγεται γωνία ἑνός ἀκτινίου. Σύμφωνα μέ αὐτά ἕνα πλῆρες τόξο (τόξο 360^0) ἔχει $\frac{L}{R} = \frac{2\pi R}{R} = \mathbf{2\pi}$ **ἀκτίνια.** Ἀντιστοίχως ἡ ἐπίκεντρη γωνία του, δηλαδή ἡ γωνία τῶν 360^0, ἔχει 2π ἀκτίνια.

Ἡ γωνία ἑνός ἀκτινίου περιέχεται μεταξύ τῶν 57^0 καί 58^0. Μία προσέγγισή της εἶναι :

$$\mathbf{1\ rad = 57^0\ 17'\ 44', 3.}$$

Ἄν ἡ ἐπίκεντρη γωνία ἑνός τόξου l, μετρημένη σέ ἀκτίνια, εἶναι ω, ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$l = \frac{2\pi R \cdot \omega}{2\pi} = \omega \cdot R \quad \text{ἤ} \quad l = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}.$$

ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΟΥ

132. Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός κύκλου (O, R) τείνει νά καλυφτεῖ ἀπό τό ἐμβαδό μεταβλητοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου σ' αὐτόν, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν του διπλασιαζόμενο συνεχῶς τείνει στό ἄπειρο. Ἄν E_λ εἶναι τό ἐμβαδό κανονικοῦ πολυγώνου μέ λ πλευρές, γνωρίζουμε (§ 110) πώς εἶναι $E_\lambda = \dfrac{P_\lambda \cdot \alpha_\lambda}{2}$. Τότε δημιουργοῦμε τήν ἀκολουθία τῶν ἐμβαδῶν

$$(1) \qquad E_\kappa,\ E_{2\kappa},\ E_{2^2\kappa}, \ldots,\ E_{2^\nu\kappa}, \ldots \mid \nu = 0,1,2, \ldots$$

Ἄν ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει, τότε θά ὑπάρχει τό ἐμβαδό E τοῦ κύκλου καί θά εἶναι ἴσο μέ τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας (1). Ἀλλά ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει, γιατί (§ 123) :

$$\lim_{\nu \to 8} E_{2^\nu\kappa} = \lim_{\nu\to\infty}\left[\frac{P_{2^\nu\kappa} \cdot \alpha_{2^\nu\kappa}}{2}\right] = \frac{1}{2} \lim_{\nu\to\infty} P_{2^\nu\kappa} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \alpha_{2^\nu\kappa} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot R$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2. \quad \text{Ἄρα}$$

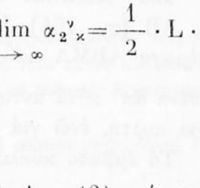
$$(2) \qquad \mathbf{E} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{R}^2.$$

Ἄν $d = 2R$ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, τότε ὁ τύπος (2) γράφεται :

$$(3) \qquad \mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{d}^2}{\mathbf{4}}.$$

133. Κυκλικός τομέας. Ἄς πάρουμε ἕναν κύκλο (O, R), ἕνα τόξο του $\overset{\frown}{AMB}$ καί τίς δύο ἀκραῖες ἀκτῖνες τοῦ τόξου OA, OB (σχ. 163). Τό κλειστό ἐπίπεδο τμῆμα, πού ὁρίζεται ἀπό τό τόξο αὐτό καί ἀπό τίς δύο ἀκραῖες ἀκτίνες του λέγεται **κυκλικός τομέας.** Ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ τοῦ τόξου λέγεται καί ἐπίκεντρη γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέα.

Ὁ κύκλος (O, R) μέ τό ἐσωτερικό του μπορεῖ νά θεωρηθεῖ κυκλικός τομέας, πού ἡ ἐπίκεντρη γωνία του εἶναι πλήρης γωνία, δηλαδή γωνία 360^0. Αὐτόν θά τόν λέμε καί πλήρη κυκλικό τομέα.



Σχ. 163

134. Ἐμβαδό κυκλικοῦ τομέα. Εὔκολα μπορεῖ νά διαπιστωθεῖ ὅτι τά γεωμετρικά στοιχεῖα «κυκλικοί τομεῖς τοῦ ἴδιου κύκλου» καί «ἀντίστοιχες πρός αὐτούς ἐπίκεντρες γωνίες» εἶναι ἀνάλογα.

Τότε, ἄν $E_{\kappa.\tau.}$ εἶναι τό ἐμβαδό κυκλικοῦ τομέα, πού ἡ ἐπίκεντρη γωνία του σέ μοῖρες, εἶναι μ^0, καί $E = \pi R^2$ τό ἐμβαδό τοῦ κύκλου, στόν ὁποῖο ἀνήκει ὁ τομέας, ἔχουμε :

$$\frac{E_{\kappa.\tau.}}{\pi R^2} = \frac{\mu^0}{360^0} \quad \text{ἤ}$$

$$(1) \qquad \mathbf{E_{\kappa.\tau.} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}}.$$

Μετασχηματισμός τοῦ τύπου (1). Ἄν ἡ ἐπίκεντρη γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέα σέ ἀκτίνια εἶναι ω, τότε ὁ τύπος (1) γράφεται :

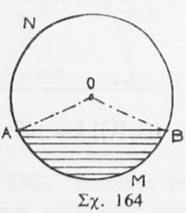
$$E_{\kappa.\tau.} = \frac{\pi R^2 \cdot \omega}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2\omega = \frac{1}{2} R\omega \cdot R = \frac{1}{2}\, l \cdot R \quad \text{ἤ}$$

$$\mathbf{E_{\kappa.\tau.} = \frac{1}{2}\, l\, R},$$

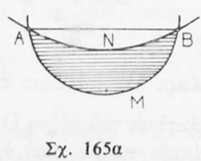
ὅπου l εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου του (§ 131).

135. Κυκλικό τμῆμα. Ἄς πάρουμε ἕνα κύκλο (O, R) καί μία χορδή του AB (σχ. 164). Μέ τή χορδή AB ὁ κύκλος χωρίζεται σέ δύο κλειστά τμήματα ABMA καί ABNA, πού τό καθένα λέγεται **κυκλικό τμῆμα.** Στό καθένα ἀπ' αὐτά ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$, πού γιά τό πρῶτο εἶναι κυρτή, ἐνῶ γιά τό δεύτερο εἶναι μή κυρτή.

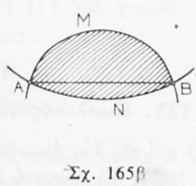
Τό ἐμβαδό κυκλικοῦ τμήματος ὑπολογίζεται ἀπό τά ἐμβαδά τοῦ ἀντί-



Σχ. 164



Σχ. 165α



Σχ. 165β

στοιχου σ' αὐτό κυκλικοῦ τομέα καί τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου AOB, ὡς ἑξῆς :

i) Ἄν $\widehat{AOB} < 2^{L}$, τότε :

$$(ABMA) = (AOBMA) - (AOB).$$

ii) Ἄν $\widehat{AOB} > 2^{L}$, τότε :

$$(ABNA) = (AOBNA) + (AOB).$$

136. Μηνίσκος. Τό κλειστό ἐπίπεδο τμῆμα, πού ὁρίζουν δύο κυκλικά τόξα (ὄχι τοῦ ἴδιου κύκλου) μέ κοινά ἄκρα Α καί Β λέγεται μηνίσκος.

Ἄν ἡ κοινή χορδή ΑΒ βρίσκεται ἔξω ἀπό τό μηνίσκο, τό ἐμβαδό του εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΜΒ καί ΑΝΒ (σχ. 165α), ἐνῶ, ἄν ἡ κοινή χορδή βρίσκεται μέσα στό μηνίσκο, τό ἐμβαδό του εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΜΒ καί ΑΝΒ (σχ. 165β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

334. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τοῦ κύκλου, πού ἔχει ἀκτίνα 8 m.

335. Ἑνός αὐτοκινήτου οἱ τροχοί ἔχουν ἀκτίνα 0,35 m καί ἔκαναν 1800 στροφές. Πόση ἀπόσταση διέτρεξε τό αὐτοκίνητο ;

336. Ἕνας κυκλικός στίβος ἔχει μῆκος 400 m. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα του ;

337. Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε τά διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ καί ΓΔ και γράφουμε ἡμικύκλια μέ διαμέτρους τίς ΑΒ, ΒΓ καί ΓΔ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό μῆκος τοῦ ἡμικύκλιου μέ διάμετρο τήν ΑΔ εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν τριῶν ἄλλων ἡμικυκλίων.

338. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου σέ κανονικό ἑξάγωνο πού ἔχει πλευρά 5 cm.

339. Σ' ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα 6 cm ἐγγράφουμε τετράγωνο καί στό τετράγωνο ἐγγράφουμε νέο κύκλο. Νά βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα καί τό μῆκος τοῦ νέου αὐτοῦ κύκλου.

340. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τοῦ τόξου πού ἀντιστοιχεῖ σέ πλευρά ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου σέ κύκλο μέ ἀκτίνα 4 m.

341. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τοῦ τόξου πού ἀντιστοιχεῖ σέ πλευρά τετραγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο μέ ἀκτίνα 10 m.

342. Σ' ἕναν κύκλο ἕνα τόξο 40^0 ἔχει μῆκος 15 m. Νά βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

343. Μέ κέντρα τίς κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά α καί ἀκτίνα α γράφουμε 3 τόξα, πού ἔχουν τά ἄκρα τους στίς κορυφές τοῦ τριγώνου. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τους εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος τοῦ κύκλου πού ἔχει ἀκτίνα $\frac{\alpha}{2}$.

344. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό κύκλου πού ἔχει ἀκτίνα 5 cm.

345. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου σέ τετράγωνο μέ πλερά α.

346. Σ' ἕναν κύκλο γράφουμε μία διάμετρο ΑΒ καί τίς χορδές ΑΓ καί ΒΓ. Ἄν τό μῆκος τῶν χορδῶν εἶναι 12 m καί 5 m ἀντίστοιχα, νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ κύκλου.

347. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἐμβαδό κυκλικοῦ δακτυλίου (δηλαδή τό ἐμβαδό τοῦ μέρους, πού περιέχεται μεταξύ δύο ὁμόκεντρων κύκλων) εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό κύκλου, πού ἔχει διάμετρο τή χορδή τοῦ μεγαλύτερου κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μικρότερου.

348. Σ' ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα α εἶναι ἐγγεγραμμένο ἕνα κανονικό ἑξάγωνο. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ μέρους τοῦ κύκλου, πού βρίσκεται ἔξω ἀπ' τό ἑξάγωνο.

349. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό κυκλικοῦ τομέα 120^0 σ' ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα α.

350. Ἕνας κυκλικός τομέας 45^0 ἔχει ἐμβαδό $\pi\alpha^2$. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό καί ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

351. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό καθενός ἀπό τά δύο μέρη, στά ὁποῖα διαιρεῖται ἕνας κύκλος μέ ἀκτίνα α, ἀπό τήν πλευρά ἰσόπλευρου τριγώνου πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σ' αὐτόν.

352. Ὁμοίως ἀπό τήν πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

353. Δύο ἴσοι κύκλοι μέ ἀκτίνα ρ, ἔχουν διάκεντρο ἴση μέ $\rho\sqrt{2}$. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ κοινοῦ μέρους τους.

Β΄.

354. Ἕνας κύκλος νά διαιρεθεῖ σέ τέσσερα ἰσοδύναμα μέρη μέ ὁμόκεντρους κύκλους.

355. Ἕνας κύκλος νά διαιρεθεῖ μέ ὁμόκεντρους κύκλους σέ τρία μέρη ἀνάλογα πρός τά μήκη λ, μ, ν.

356. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι μέ ἀκτίνα R ἐφάπτονται ἀνά δύο ἐξωτερικά. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ μέρους, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τριῶν αὐτῶν κύκλων.

357. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι μέ ἀκτίνα R ἐφάπτονται ἐξωτερικά ἀνά δύο. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ κύκλου, πού ἐφάπτεται ἐξωτερικά σ' αὐτούς καί τοῦ κύκλου πού ἐφάπτεται ἐσωτερικά σ' αὐτούς.

358. Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α. Μέ κέντρα τίς κορυφές του καί ἀκτίνα α γράφουμε ἀνά ἕνα τόξο πού ἔχει τά ἄκρα του στίς δύο ἄλλες κορυφές του. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ καμπυλόγραμμου τριγώνου πού σχηματίζεται.

359. Δίνεται ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλευρά α. Μέ κορυφές τίς Α καί Γ καί ἀκτίνα α γράφουμε δύο τεταρτοκύκλια μέσα στό τετράγωνο. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ μέρους πού περιέχεται ἀνάμεσά τους.

360. Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτη. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ ἡμικύκλιο. Μέ διαμέτρους τίς κάθετες πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ γράφουμε ἡμικύκλια στό ἐξωτερικό τοῦ τριγώνου. Νά δειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν δύο μηνίσκων πού σχηματίζονται εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.

361. Δίνεται ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 2α. Μέ κέντρα τίς κορυφές του καί ἀκτίνα α γράφουμε τεταρτοκύκλια μέσα σ' αὐτό. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ καμπυλόγραμμου σταυροῦ πού σχηματίζεται.

362. Δίνεται ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 2α. Μέ διαμέτρους τίς πλευρές του γράφουμε ἡμικύκλια μέσα στό τετράγωνο. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ καμπυλόγραμμου σταυροῦ πού σχηματίζεται.

363. Δίνεται ἕνας κύκλος (Κ, R). Μέ κέντρα τίς κορυφές τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτόν ἰσόπλευρου τριγώνου καί ἀκτίνα R γράφουμε τρία τόξα πού ἔχουν τά ἄκρα τους στόν κύκλο. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ καμπυλόγραμμου τρίφυλλου πού σχηματίζεται.

364. Σ' ἕναν κύκλο Κ μέ ἀκτίνα R φέρνουμε δύο διαμέτρους ΑΚΒ καί ΓΚΔ κάθετες μεταξύ τους. Μέ κέντρο τό Γ καί ἀκτίνα ΓΑ γράφουμε τό τόξο ΑΕΒ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἐμβαδό τοῦ μηνίσκου ΑΔΒΕΑ εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΓΑΒ.

365. Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α. Γράφουμε ἀπό ἕνα τόξο, πού περνάει ἀπό τίς δύο κορυφές του καί ἀπό τό κέντρο τοῦ τριγώνου. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τρίφυλλου πού σχηματίζεται.

366. Δίνεται ἕνα τεταρτοκύκλιο ΚΑΒ μέ ἀκτίνα R. Μέ κέντρο τό Α καί ἀκτίνα R γράφουμε ἕνα τόξο, πού τέμνει τό τόξο $\widehat{AB}$ στό Γ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ μικτόγραμμου σχήματος ΚΒΓ.

367. Δίνεται ἕνα ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΚΒ. Πάνω στή διάμετρο ΑΒ παίρνουμε κάποιο σημεῖο Γ καί μέ διαμέτρους τίς ΑΓ καί ΒΓ γράφουμε ἀπό ἕναν κύκλο μέσα στό ἡμικύκλιο. Ἀπό τό Γ φέρνουμε τήν κάθετο στήν ΑΒ, πού τέμνει τό ἡμικύκλιο στό σημεῖο Δ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἐμβαδό, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τριῶν ἡμικύκλιων, εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό κύκλου πού ἔχει διάμετρο τή ΓΔ.

368. Μέ κέντρα τίς κορυφές ένός τετραγώνου μέ πλευρά α καί ἀκτίνα α γράφουμε τεταρτοκύκλια μέσα στό τετράγωνο. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ καμπυλόγραμμου τετραγώνου πού σχηματίζεται.

369. Δύο κύκλοι μέ ἀκτῖνες ρ καί 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό σημεῖο Α. Φέρνουμε τήν κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη ΒΓ. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ μέρους, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς ΒΓ καί τῶν δύο κύκλων.

370. Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε τρία τμήματα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = α καί μέ κέντρα τά Β καί Γ καί ἀκτίνα α γράφουμε κύκλους, πού τέμνονται στά σημεῖα Ε καί Ζ. Μέ κέντρα τά Ε καί Ζ καί ἀκτίνα 2α γράφουμε τόξα, πού καταλήγουν στούς κύκλους αὐτούς. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ «ὠοειδοῦς» σχήματος.

371. Δίνεται ἕνα τεταρτοκύκλιο ΚΑΒ μέ κέντρο Κ. Μέ διαμέτρους τίς ἀκτίνες ΚΑ καί ΚΒ γράφουμε ἀπό ἕνα ἡμικύκλιο πού βρίσκεται μέσα στό τεταρτοκύκλιο. Τά δύο ἡμικύκλια τέμνονται στό σημεῖο Γ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι : α) Τά σημεῖα Α, Γ, Β βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, β) τό καμπυλόγραμμο σχῆμα ΚΓ, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν ἡμικυκλίων, εἶναι ἰσοδύναμο πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, πού ἔχουν χορδές τίς ΑΓ καί ΒΓ καί γ) νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ καμπυλόγραμμου σχήματος πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{A\Gamma}$ καί $\widehat{B\Gamma}$.

372. Μέ κέντρα τίς κορυφές ένός τετραγώνου μέ πλευρά α καί ἀκτίνα α γράφουμε τέσσερις κύκλους. α) Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ κοινοῦ ἐσωτερικοῦ τμήματος τῶν τεσσάρων κύκλων. β) Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό ὅλου τοῦ σχήματος.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

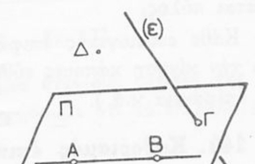
ΒΙΒΛΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

137. Ἐπίπεδο. Ἡ ἔννοια τοῦ ἐπιπέδου ἤ ἐπίπεδης ἐπιφάνειας μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τήν ἐπιπεδομετρία, ὡς πρωταρχική ἔννοια. Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς ἤρεμης λίμνης (περιορισμένων διαστάσεων) μπορεῖ νά δώσει τήν εἰκόνα ἑνός μέρους ἐπίπεδης ἐπιφάνειας.

138. Ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου. Ἀξίωμα Ι. Ἕνα ἐπίπεδο περιέχει τουλάχιστο τρία σημεῖα Α, Β, Γ πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία καί ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο Δ ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο (σχ. 166).

Ἀξίωμα ΙΙ. Ἀπό τρία σημεῖα, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, περνάει ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο.



Σχ. 166

Ἀξίωμα ΙΙΙ. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 166).

Πόρισμα. Μία εὐθεία (ε), πού δέν ἀνήκει σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π), μπορεῖ νά τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) μόνο σέ ἕνα σημεῖο Γ. Τό Γ λέγεται ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) πάνω στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 167).

Ἀξίωμα IV. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ χώρου, ἑκατέρωθεν

ἐπιπέδου (Π), τότε κάθε γραμμή πού περνάει ἀπό τά Α καί Β ἔχει ἕνα τουλάχιστο κοινό σημεῖο Γ μέ τό ἐπίπεδο (σχ. 167).

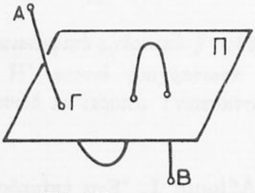
Ἀξίωμα V. Ἕνα ἐπίπεδο ἐκτείνεται ἀπεριόριστα.

139. Θεώρημα. Ἕνα ἐπίπεδο περιέχει ἄπειρες εὐθεῖες.

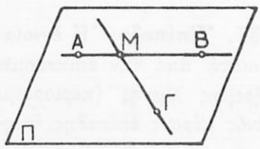
Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί τρία σημεῖα του Α, Β καί Γ πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 168). Θεωροῦμε τήν εὐθεία ΑΒ, πού ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π) (ἀξίωμα ΙΙΙ). Ἔστω ἀκόμα ἕνα σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ΑΒ. Αὐτό ἀνήκει στό (Π) καί συνεπῶς ἡ εὐθεία ΓΜ ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π).

Οἱ ἄπειρες θέσεις, πού μπορεῖ νά ἔχει τό σημεῖο Μ πάνω σνήν εὐθεία ΑΒ, δίνουν ἄπειρες εὐθεῖες ΓΜ, πού προφανῶς ἀνήκουν ὅλες στό ἐπίπεδο (Π). Ἄρα τό (Π) ἔχει ἄπειρες εὐθεῖες.

Παρατήρηση. Ἀπ' τό προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε πώς ἄν μιά εὐθεία ΓΜ κινεῖται ἔτσι, ὥστε τό σημεῖο Γ νά παραμένει σταθερό καί τό Μ ν' ἀνήκει πάντα στήν εὐθεία ΑΒ, ἡ εὐθεία ΓΜ διαγράφει ἐπίπεδο (Π). Ἀπ'



Σχ. 167



Σχ. 168

αὐτό προκύπτει ὅτι τό ἐπίπεδο (Π) μπορεῖ νά σχηματιστεῖ ἀπό μιά τέτοια κίνηση τῆς εὐθείας ΓΜ, γι' αὐτό καί λέγεται **εὐθειογενής ἐπιφάνεια.** Ἡ εὐθεία ΑΒ λέγεται **ὁδηγός** γιά τήν κίνηση τῆς εὐθείας ΓΜ ἐνῶ τό σημεῖο Γ λέγεται **πόλος.**

Κάθε εὐθειογενής ἐπιφάνεια, δηλαδή κάθε ἐπιφάνεια πού διαγράφεται ἀπό τήν κίνηση κάποιας εὐθείας, δέν εἶναι ὁπωσδήποτε ἐπίπεδο (κυματοειδής ἐπιφάνεια κ.ἄ.).

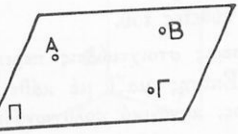
140. Καθορισμός ἐπιπέδου. Τρία σημεῖα πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία καθορίζουν τή θέση ἑνός καί μόνο ἐπιπέδου.

Δεχόμαστε ὅτι τρία σημεῖα Α, Β καί Γ, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία εἶναι ἱκανά, γιά νά καθορίσουν τό μοναδικό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 169), πού περνάει ἀπ' αὐτά (ἀξίωμα ΙΙ).

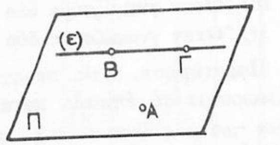
Πόρισμα. Ἄν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινά σημεῖα πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, τά ἐπίπεδα ταυτίζονται.

141. Μιά εὐθεία καί ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπ' αὐτή καθορίζουν τή θέση ἑνός μόνο ἐπιπέδου.

Πραγματικά, ἔστω μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτή. Παίρνουμε δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Β καί Γ τῆς εὐθείας (ε). Τά τρία σημεῖα Α, Β καί Γ καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Π) (σχ. 170). Σ' αὐτό ἀνήκουν τό σημεῖο Α καί ἡ εὐθεία (ε), ἀφοῦ ἔχει δύο σημεῖα της Β καί Γ πάνω στό (Π). Μπορούμε ἑπομένως νά θεωρήσουμε ὅτι τό ἐπίπεδο (Π) ὁρίζεται ἀπό τήν εὐθεία (ε) καί ἀπό τό σημεῖο Α.



Σχ. 169

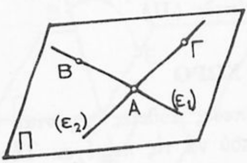


Σχ. 170

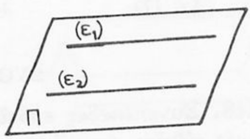
Πόρισμα. Ἄν δύο ἐπίπεδα ἔχουν μιά κοινή εὐθεία καί ἕνα κοινό σημεῖο ἔξω ἀπό τήν εὐθεία, τότε ταυτίζονται.

142. Δύο εὐθεῖες πού τέμνονται καθορίζουν τή θέση ἑνός μόνο ἐπιπέδου.

Πραγματικά, ἄν (ε_1) καί (ε_2) εἶναι οἱ δύο εὐθεῖες καί Α εἶναι τό κοινό τους σημεῖο (σχ. 171), θεωροῦμε ἀπό ἕνα σημεῖο Β καί Γ τῆς καθεμιᾶς καί ἔστω (Π) τό ἐπίπεδο πού περνάει ἀπό τά τρία σημεῖα Α, Β καί Γ. Στό (Π) ἀνήκουν καί οἱ δύο εὐθεῖες, ἀφοῦ ἡ καθεμιά ἔχει δύο σημεῖα της στό (Π) (ἀξίωμα ΙΙΙ). Μπορούμε ἑπομένως νά θεωρήσουμε ὅτι τό ἐπίπεδο (Π) ἔχει οριστεῖ ἀπό τίς δύο τεμνόμενες εὐθεῖες.



Σχ. 171



Σχ. 172

143. Δύο παράλληλες εὐθεῖες καθορίζουν τή θέση ἑνός μόνο ἐπιπέδου (σχ. 172).

Σέ τοῦτο καταλήγουμε ἀπό τόν ὁρισμό τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ὡς δυό συνεπίπεδων εὐθειῶν χωρίς κοινό σημεῖο.

Πόρισμα. Ἄν δύο ἐπίπεδα ἔχουν δύο κοινές εὐθεῖες (τεμνόμενες ἤ παράλληλες), τά ἐπίπεδα αὐτά ταυτίζονται.

144. Ἀνακεφαλαίωση γιά τόν καθορισμό ἑνός ἐπίπεδου.

Ἕνα ἐπίπεδο καθορίζεται πλήρως, καί συνεπῶς θά θεωρεῖται γνωστό, στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις :

i) Ὅταν γνωρίζουμε τρία σημεῖα του, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

ii) Ὅταν γνωρίζουμε μιά εὐθεία καί ἕνα σημεῖο του πού δέν ἀνήκει στήν εὐθεία.

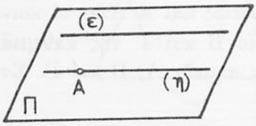
iii) Ὅταν γνωρίζουμε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες του.

iv) Ὅταν γνωρίζουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες του.

Παρατήρηση. Στίς προηγούμενες τέσσερις στοιχειώδεις περιπτώσεις, θά θεωροῦμε τό ἐπίπεδο κατασκευάσιμο. Ἐπίσης μαζί μέ κάθε ἐπίπεδο σχῆμα πού μᾶς δίνεται (π.χ. τρίγωνο, κύκλος, κανονικό πολύγωνο κ.ἄ.) θά θεωροῦμε καί τό ἐπίπεδό του ὡς δεδομένο.

Στά σχήματα τῆς στερεομετρίας πού εἴμαστε ἀναγκασμένοι νά ἀπεικονίζουμε ἕνα στερεό πάνω στό φύλλο σχεδιάσεως, τίς περισσότερες φορὲς τά ἐπίπεδα θά τά ἀπεικονίζουμε μέ ἕνα ὀρθογώνιο τμῆμα τους, πού θά τό σχεδιάζουμε ὅμως συνήθως σάν πλάγιο παραλληλόγραμμο (βλέπε καί § 204).

145. Θεώρημα. Πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) θεωροῦμε μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Α. Ἀπό τό Α φέρνουμε εὐθεία (η)//(ε). Ἡ εὐθεία (η) ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π).



Σχ. 173

Ἀπόδειξη. Οἱ δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (η) καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (σχ. 173). Αὐτό μαζί μέ τό ἐπίπεδο (Π) ἔχει κοινή τήν εὐθεία (ε) καί τό σημεῖο Α καί ἑπομένως συμπίπτει μέ τό (Π) (§ 141 πόρ.). Ἄρα ἡ εὐθεία (η) ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π).

ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

146. Συνεπίπεδες εὐθεῖες ἤ ὁμοεπίπεδες εὐθεῖες λέγονται δύο διαφορετικές εὐθεῖες, ὅταν ὑπάρχει ἐπίπεδο, πού νά τίς περιέχει. Τότε οἱ δύο εὐθεῖες ἤ θά τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο ἤ θά εἶναι παράλληλες.

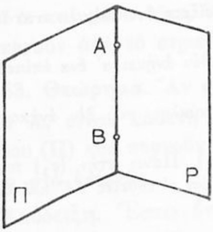
147. Ἀσύμβατες εὐθεῖες λέγονται δύο μή συνεπίπεδες εὐθεῖες. Ἀποκλείονται τά ἐνδεχόμενα «νά τέμνονται» ἤ «νά εἶναι παράλληλες».

ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

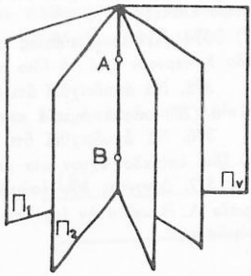
148. Θεώρημα. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἔχουν δύο κοινά σημεῖα Α καί Β, τότε ἔχουν καί κοινή εὐθεία τήν ΑΒ.

Ἀπόδειξη. $A \in (\Pi)$, $B \in (\Pi) \Rightarrow$ εὐθ. $AB \in (\Pi)$. Ἐπίσης $A \in (P)$, $B \in (P) \Rightarrow$ εὐθ. $AB \in (P)$ (σχ. 174). Ἄρα ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι κοινή γιά τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

Παρατήρηση. Τό θεώρημα μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ γιά ν ἐπίπεδα, δηλαδή: **Ἄν ν ἐπίπεδα (Π_1), (Π_2),(Π_3), ..., (Π_ν) ἔχουν δύο κοινά σημεῖα Α καί Β, τότε ἔχουν καί κοινή εὐθεία τήν ΑΒ.**



Σχ. 174

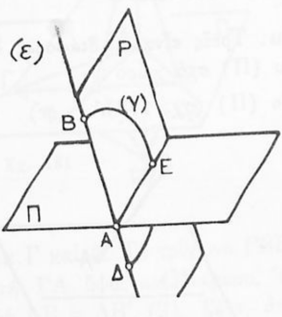


Σχ. 175

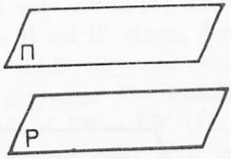
Τά ν ἐπίπεδα λέμε ὅτι ἀποτελοῦν ἀξονική δέσμη ἐπιπέδων (σχ. 175).

149. Θεώρημα. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Α, τότε ἔχουν καί μιά κοινή εὐθεία πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε μιά εὐθεία (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) πού περνάει ἀπ' τό κοινό σημεῖο Α τῶν δύο ἐπιπέδων (σχ. 176). Πάνω σ' αὐτή καί ἑκατέ-



Σχ. 176



Σχ. 177

ρωθεν τοῦ Α παίρνουμε δύο σημεῖα Β καί Δ καί γράφουμε μιά γραμμή (γ) (ὄχι εὐθεία), πού ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Ρ), καί περνάει ἀπ' τά σημεῖα Β καί Δ. Αὐτή θά κόψει τό ἐπίπεδο (Π) σέ ἕνα σημεῖο Ε (§ 138, IV). Τό σημεῖο Ε ἀνήκει προφανῶς καί στά δύο ἐπίπεδα καί συνεπῶς ἡ εὐθεία ΑΕ εἶναι κοινή γιά τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Ἄρα ἡ τομή δύο ἐπιπέδων, γενικῶς εἶναι εὐθεία.

150. Ὁρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) λέγονται παράλληλα, ἄν ἡ τομή τους εἶναι τό κενό σύνολο (σχ. 177).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

373. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἀπό τρία σημεῖα πού βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, περνοῦν ἄπειρα ἐπίπεδα.

374. Ἄν τρεῖς εὐθεῖες τέμνονται ἀνά δύο, ν' ἀποδείξετε ὅτι ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπίπεδο ἤ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

375. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἕνας κύκλος (Ο, R), πού δέν ἀνήκει σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π), τό πολύ δύο κοινά σημεῖα μπορεῖ νά ἔχει μέ τό (Π).

376. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι δύο ἴσοι καί ὁμόκεντροι κύκλοι, πού δέν ἀνήκουν ὅμως στό ἴδιο ἐπίπεδο, ἔχουν μία μόνο κοινή διάμετρο.

377. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Πάνω στήν (ε_1) παίρνουμε σημεῖα Α, Β καί στήν (ε_2) σημεῖα Γ, Δ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΓ καί ΒΔ εἶναι ἀσύμβατες.

Β΄.

378. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι 10 ἐπίπεδα τέμνονται κατά 45 τό πολύ εὐθεῖες.

479. Νά βρεθεῖ τό πλῆθος τῶν εὐθειῶν, κατά τίς ὁποῖες ν ἐπίπεδα τέμνονται ἀνά δύο.

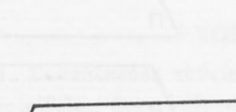
380. Δίνονται ἕνα σημεῖο Α, μία εὐθεία (ε) καί ἕνας κύκλος (Κ, R) στό χῶρο. Νά φέρετε ἀπό τό Α εὐθεία (ζ), πού νά τέμνει τήν εὐθεία (ε) καί τόν κύκλο (Κ, R).

381. Δίνονται δύο εὐθεῖες πού τέμνονται καί δύο ἀσύμβατες. Νά φέρετε εὐθεία πού νά τέμνει καί τίς τέσσερις εὐθεῖες.

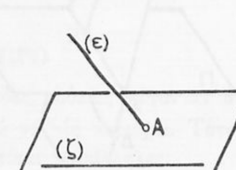
ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

151. Θέσεις εὐθείας καί ἐπιπέδου. Τρεῖς εἶναι οἱ διάφορες δυνατές θέσεις μιᾶς εὐθείας (ε) καί ἑνός ἐπιπέδου (Π) στό χῶρο:

i) Ἡ εὐθεία (ε) ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 178).



Σχ. 178



Σχ. 179

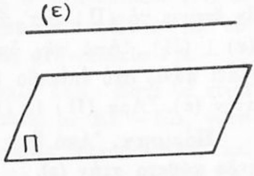
ii) Ἡ εὐθεία (ε) τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) σ' ἕνα σημεῖο Α (σχ. 179). Τό Α λέγεται ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) πάνω στό ἐπίπεδο (Π).

Παρατήρηση. Κάθε εὐθεία (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), πού δέν περνάει ἀπ' τό Α, (σχ. 179) εἶναι ἀσύμβατη μέ τήν εὐθεία (ε).

iii) Ἡ εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο (Π). Μέ τόν ὅρο «παράλληλη» ἐννοοῦμε ὅτι ἡ εὐθεία (ε) δέν ἔχει κανένα κοινό σημεῖο μέ τό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 180). Τότε καί τό ἐπίπεδο (Π) λέγεται παράλληλο πρός τήν εὐθεία (ε).

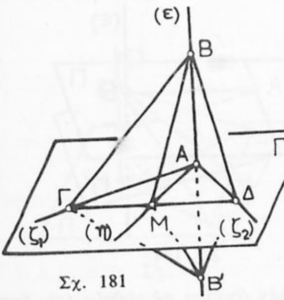
152. Εὐθεία κάθετη πρός ἐπίπεδο. Ὁρισμός. Μιά εὐθεία (ε) πού τέμνει ἐπίπεδο (Π) σ' ἕνα σημεῖο του Α, λέγεται κάθετη πρός τό ἐπίπεδο (Π), τότε καί μόνο τότε, ὅταν εἶναι κάθετη πρός ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ (Π) πού περνοῦν ἀπό τό σημεῖο Α.

153. Θεώρημα. Ἄν μιά εὐθεία (ε), πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο (Π) σ' ἕνα σημεῖο Α, εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου (Π) πού περνοῦν ἀπό τό Α, τότε εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο.

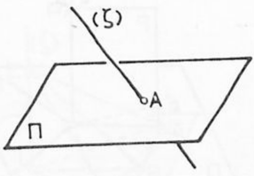


Σχ. 180

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη στίς εὐθεῖες (ζ_1) καί (ζ_2) τοῦ ἐπιπέδου (Π) στό Α (σχ. 181). Εἶναι ἀρκετό νά δειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη καί σέ μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἡ ὁποία περνάει ἀπό τό σημεῖο Α.



Σχ. 181



Σχ. 182

Πάνω στήν εὐθεία (ε) παίρνουμε δύο σημεῖα Β καί Β' τέτοια, ὥστε νά εἶναι $AB = AB'$ καί πάνω στίς (ζ_1) καί (ζ_2) παίρνουμε δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Γ καί Δ. Τό τρίγωνο ΓΒΒ' εἶναι ἰσοσκελές μέ $ΓΒ = ΓΒ'$ (1), γιατί ἔχει τή ΓΑ ὕψος καί διάμεσο. Ὁμοίως καί τό τρίγωνο ΔΒΒ' εἶναι ἰσοσκελές μέ $ΔΒ = ΔΒ'$ (2). Τότε, ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2), προκύπτει ὅτι τριγ. ΒΓΔ = τριγ. Β'ΓΔ (ἡ ΓΔ εἶναι κοινή). Ἄρα $B\widehat{ΓΔ} = B'\widehat{ΓΔ}$ (3). Ἔστω Μ τό σημεῖο, στό ὁποῖο ἡ εὐθεία (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τό Α, τέμνει τή ΓΔ. Τότε ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (3), συμπεραίνουμε πώς τά τρίγωνα ΒΓΜ καί Β'ΓΜ εἶναι ἴσα, γιατί ἀκόμα ἔχουν τή ΓΜ κοινή. Ἄρα $MB = MB'$, δηλαδή τό τριγ. ΒΜΒ' εἶναι ἰσοσκελές. Αὐτό ἔχει τή ΜΑ ὡς διάμεσο. Ἐπομένως εἶναι καί ὕψος του, δηλαδή $MA \perp BB' \Rightarrow (\varepsilon) \perp (\eta)$. Ἄρα ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο (Π).

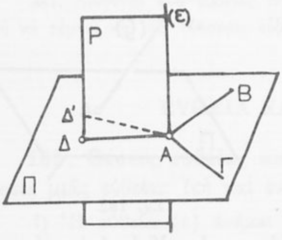
Παρατήρηση. Κάθε εὐθεία (ζ) πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δέν εἶναι κάθετη σ' αὐτό, λέγεται **πλάγια** ὡς πρός τό (Π) (σχ. 182).

154. Θεώρημα. Ἔστω μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο της Α. Τό σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου, πού εἶναι κάθετες στήν εὐθεία (ε) στό σημεῖο Α, ἀποτελεῖ ἐπίπεδο (Π) κάθετο στήν (ε) στό Α.

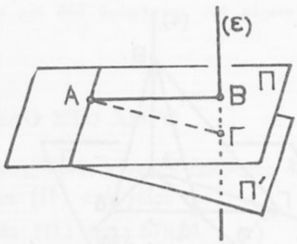
Ἀπόδειξη. Δύο ἀπό τίς εὐθεῖες τοῦ συνόλου αὐτοῦ, οἱ ΑΒ καί ΑΓ, καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Π), πού εἶναι κάθετο στήν εὐθεία (ε) στό σημεῖο Α γιατί (ε) $\perp$ ΑΒ καί (ε) $\perp$ ΑΓ (σχ. 185). Ἔστω ἀκόμη μία εὐθεία ΑΔ $\perp$ (ε). Ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ΑΔ $\in$ (Π).

Θεωροῦμε τό ἐπίπεδο (Ρ), πού καθορίζεται ἀπό τίς εὐθεῖες (ε) καί ΑΔ. Αὐτό τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) ἀναγκαστικά κατά τήν εὐθεία ΑΔ. Γιατί, ἄν ἔτεμνε τό (Π) κατ' ἄλλη εὐθεία ΑΔ', θά ἦταν (ε) $\perp$ ΑΔ', ἐπειδή εἶναι (ε) $\perp$ (Π). Ἀπό τήν ὑπόθεση ὅμως ἔχουμε (ε) $\perp$ ΑΔ, πού εἶναι ἄτοπο, γιατί πάνω στό ἐπίπεδο (Ρ) θά ὑπῆρχαν δύο εὐθεῖες ΑΔ καί ΑΔ' κάθετες στήν (ε). Ἄρα (Π) $\cap$ (Ρ) = ΑΔ, δηλαδή ἡ ΑΔ ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π).

Πόρισμα. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας (ε) ὑπάρχει μόνο ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στήν (ε).



Σχ. 183



Σχ. 184

155. Θεώρημα. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ εὐθεία (ε), ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στήν (ε) ὑπάρχει.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τό Α φέρνουμε τήν ΑΒ $\perp$ (ε). Ἡ ΑΒ εἶναι μία καί μοναδική. Ἀπό τό Β θεωροῦμε τό κάθετο ἐπίπεδο (Π) στήν (ε) (σχ. 184), πού εἶναι ἕνα καί μοναδικό (§ 154 πόρ.) καί περιέχει τό Α, γιατί ΑΒ $\perp$ (ε). Ἄρα ὑπάρχει ἀπό τό Α ἕνα ἐπίπεδο (Π) $\perp$ (ε). Εἶναι καί τό μοναδικό, γιατί ἄν ἀπό τό Α ὑπῆρχε καί δεύτερο ἐπίπεδο (Π') $\perp$ (ε), αὐτό θά ἔτεμνε τήν (ε) σ' ἕνα σημεῖο Γ καί θά ἦταν ΑΓ $\perp$ (ε). Δηλαδή ἀπό τό Α θά ὑπῆρχαν δύο κάθετες, οἱ ΑΒ καί ΑΓ, στήν (ε), ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα τό (Π) εἶναι καί μοναδικό.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ

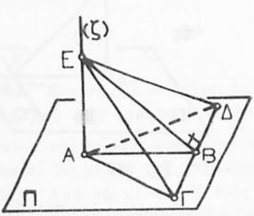
156. Θεώρημα. Μία εὐθεία (ζ) εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) σέ ἕνα σημεῖο Α. Ἀπό τό ἴχνος της Α θεωροῦμε εὐθεία ΑΒ $\perp$ ΓΔ, ὅπου ἡ ΓΔ

εἶναι εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἂν Ε εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς εὐθείας (ζ), τότε εἶναι ΕΒ ⊥ ΓΔ.

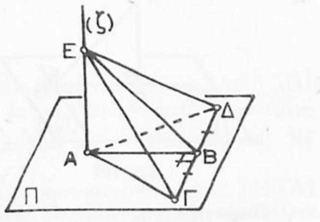
Ἀπόδειξη. Τά σημεῖα Γ καί Δ τά παίρνουμε ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΒΓ = ΒΔ (σχ. 185). Τότε τό τρίγωνο ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, γιατί ἔχει τήν ΑΒ ὡς ὕψος καί διάμεσο. Ἄρα ΑΓ = ΑΔ. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καί ΕΑΔ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν τήν ΑΕ κοινή καί ΑΓ = ΑΔ. Ἄρα ΕΓ = ΕΔ, δηλαδή τό τρίγωνο ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Αὐτό ἔχει τήν ΕΒ ὡς διάμεσο. Ἄρα εἶναι καί ὕψος του, δηλαδή ΕΒ ⊥ ΓΔ.

157. Θεώρημα. Μιά εὐθεία (ζ) εἶναι κάθετος σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) σέ ἕνα σημεῖο Δ. Ἂν ἀπό ἕνα σημεῖο Ε τῆς (ζ) φέρουμε κάθετο ΕΒ σέ μιά εὐθεία ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος στήν εὐθεία ΓΔ.

Ἀπόδειξη. Ἂν τά σημεῖα Γ καί Δ τά πάρουμε ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΒΓ = ΒΔ (σχ. 186), τό τρίγωνο ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, μέ ΕΓ = ΕΔ, γιατί ἔχει τήν ΕΒ ὡς ὕψος καί διάμεσο. Τότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καί ΕΑΔ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν τὴν ΕΑ κοινή καί ΕΓ = ΕΔ. Ἄρα εἶναι καί ΑΓ = ΑΔ, δηλαδή τό τρίγωνο ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Αὐτό ἔχει τήν ΑΒ ὡς διάμεσο. Ἑπομένως εἶναι καί ὕψος του, δηλαδή ΑΒ ⊥ ΓΔ.



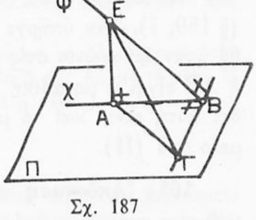
Σχ. 185



Σχ. 186

158. Θεώρημα. Δύο ἡμιευθεῖες Βx καί Βy μέ κοινή ἀρχή, εἶναι κάθετες σέ τρίτη εὐθεία ΒΓ. Οἱ Βx καί ΒΓ ὁρίζουν τή θέση ἑνός ἐπιπέδου (Π). Ἀπό ἕνα σημεῖο Ε τῆς Βy φέρνουμε ΕΑ ⊥ Βx. Τότε εἶναι ΕΑ ⊥ (Π).

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ὑπόθεση εἶναι ΕΑ ⊥ Βx (σχ. 187). Ἀρκεῖ νά δεχθεῖ ὅτι ἡ ΕΑ εἶναι κάθετος καί σέ μιά ἀκόμη εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 187

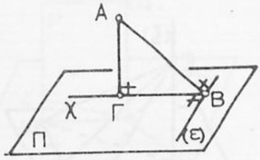
Τά τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΒΓ καί ΕΒΓ εἶναι ὀρθογώνια. Ἐφαρμόζουμε σ' αὐτά τό πυθαγόρειο θεώρημα καί ἔχουμε ἀντιστοίχως: $ΒΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΕ^2$ (1), $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ (2) καί $ΓΕ^2 = ΒΓ^2 + ΒΕ^2$ (3). Ἀπό τή σχέση (1) παίρνουμε $ΑΕ^2 = ΒΕ^2 - ΑΒ^2$ (4). Προσθέτουμε τώρα τίς σχέσεις (2) καί (4) κατά μέλη καί παίρνουμε: $ΑΓ^2 + ΑΕ^2 = ΒΓ^2 + ΒΕ^2$ (5). Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (5) ἔχουμε $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2$ καί ἀπ' αὐτήν εἶναι φανερό ὅτι τό τρίγωνο ΑΓΕ εἶναι ὀρθογώνιο στό Α, γιατί σ' αὐτό ἰσχύει ἡ σχέση τοῦ πυθαγόρειου θεωρήματος. Ἄρα $ΕΑ \perp ΑΓ$ καί ἑπομένως $ΕΑ \perp (Π)$.

159. Κατασκευή εὐθείας πού νά περνάει ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί νά εἶναι κάθετος σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π).

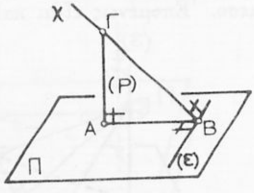
i) Ἄν τό σημεῖο Α δέν ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 188). Ἀπό τό Α φέρνουμε εὐθεία $ΑΒ \perp (ε)$, ὅπου (ε) εἶναι μιά τυχαία εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀπό τό Β φέρνουμε εὐθεία $Bx \perp (ε)$ πού νά ἀνήκει στό (Π). Ἀπό τό Α φέρνουμε $ΑΓ \perp Bx$. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος στό ἐπίπεδο (Π).

ii) Ἄν τό σημεῖο Α ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 189). Φέρνουμε $ΑΒ \perp (ε)$, ὅπου (ε) εἶναι μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀπό τό Β φέρνουμε $Bx \perp (ε)$, πού δέν ἀνήκει στό (Π). Οἱ ΑΒ καί Bx καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ). Πάνω σ' αὐτό φέρνουμε εὐθεία $ΑΓ \perp ΑΒ$. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος στό ἐπίπεδο (Π).

Ἡ ἀπόδειξη καί στίς δύο περιπτώσεις εἶναι εὔκολη μέ τή βοήθεια τοῦ 3ου θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων (§ 158).



Σχ. 188



Σχ. 189

Παρατήρηση. Μέ τίς δύο προηγούμενες κατασκευές ἀποδείχθηκε ἡ ὕπαρξη εὐθείας κάθετης σ' ἐπίπεδο ἀπό ἕνα σημεῖο πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο ἤ πάνω σ' αὐτό.

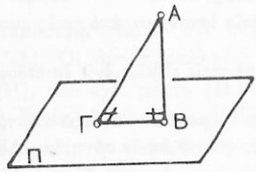
160. Θεώρημα. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού δέν ἀνήκει σέ ἐπίπεδο (Π), φέρεται μία μόνο κάθετη εὐθεία στό ἐπίπεδο.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τό Α ὑπάρχει κάθετος ΑΒ (σχ. 190) στό ἐπίπεδο (Π) (§ 159, i). Ἄν ὑπῆρχε καί δεύτερη κάθετος ΑΓ στό (Π), τό τρίγωνο ΑΒΓ θά ἦταν ὀρθογώνιο στίς δύο γωνίες του Β καί Γ, ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μοναδική κάθετος ἀπό τό Α στό (Π). Στά ἑπόμενα θά δειχθεῖ ὅτι αὐτή εἶναι καί τό μικρότερο τμῆμα μέ ἄκρα τό σημεῖο Α καί ἕνα σημεῖο τοῦ (Π).

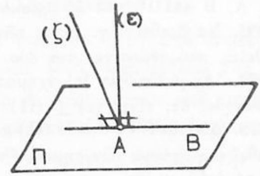
161. Ἀπόσταση σημείου Α ἀπό ἐπίπεδο (Π), λέγεται τό μῆκος τοῦ κάθετου τμήματος ἀπό τό σημεῖο Α στό ἐπίπεδο (Π).

162. Θεώρημα. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α ἑνός ἐπιπέδου (Π) φέρεται μία μόνο κάθετος στό ἐπίπεδο.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τό Α ὑπάρχει εὐθεία (ε) ⊥ (Π) (§ 159, ii). Ἄν ὑπῆρχε καί δεύτερη εὐθεία (ζ) κάθετη στό (Π) στό Α (σχ. 191), τότε τό ἐπίπεδο τῶν εὐθειῶν (ε) καί (ζ) θά ἔτεμνε τό ἐπίπεδο (Π) κατά τήν εὐθεία ΑΒ καί



Σχ. 190



Σχ. 191

θά ἦταν (ε) ⊥ ΑΒ καί (ζ) ⊥ ΑΒ. Αὐτό ὅμως δέν μπορεῖ νά συμβαίνει γιατί θά ὑπῆρχαν στό ἴδιο ἐπίπεδο ἀπ' τό Α δύο κάθετες στήν ΑΒ. Ἄρα ἡ (ε) ⊥ (Π) εἶναι ἡ μοναδική κάθετη στό ἐπίπεδο (Π) στό σημεῖο Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

382. Ἕνα σημεῖο Α ἀπέχει ἀπό ἐπίπεδο (Π) ἀπόσταση 10 cm. Φέρνουμε ΑΒ ⊥ (Π) καί πάνω στό (Π) γράφουμε κύκλο μέ κέντρο Β καί ἀκτίνα 8 cm. Φέρνουμε ἐφαπτόμενη τοῦ κύκλου στό σημεῖο του Γ καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τμῆμα $ΓΔ = 2\sqrt{7}$ cm. Νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΔ.

383. Ἀπό τό κέντρο Κ ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ φέρνουμε εὐθεία (ε) ⊥ (ΑΒΓΔ) καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε ἕνα σημεῖο Μ. Ἄν Ζ εἶναι τό μέσο τῆς ΑΒ, ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΜΖ ⊥ ΑΒ.

384. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μιά εὐθεία (ε) πλάγια πρός αὐτό. Ν' ἀποδειχθεῖ πώς ὑπάρχει μία μόνο εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π) κάθετη στήν εὐθεία (ε).

385. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνα σημεῖο του Α καί ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπ' αὐτό. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Β πάνω στίς εὐθεῖες τοῦ (Π) πού περνοῦν ἀπ' τό Α.

386. Ἀπό τό μέσο τῆς ὑποτείνουσας ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου φέρνουμε κάθετο στό ἐπίπεδό του. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε σημεῖο τῆς καθέτου αὐτῆς ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς κορυφές τοῦ τριγώνου.

387. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπό τήν κορυφή του Α φέρνουμε τήν Αx κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου καί ἑνώνουμε ἕνα σημεῖο Δ τῆς Αx μέ τό μέσο Μ τῆς βάσεως ΒΓ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι α) ΔΜ ⊥ ΒΓ καί β) ΒΓ ⊥ (ΔΑΜ).

Β΄.

388. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) τέμνονται κατά τήν εὐθεία ΑΒ. Ἀπό ἕνα σημεῖο Γ φέρνουμε ΓΔ ⊥ (Π), ΓΕ ⊥ (Ρ) καί ἀπ' τά Δ καί Ε φέρνουμε καθέτους στήν ΑΒ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐτές περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

389. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτό. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), πού ἀπέχουν ἀπό τό Α ἀπόσταση λ.

390. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνα σημεῖο του Α καί ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπό τό (Π). Νά φέρετε ἀπό τό Α εὐθεία τοῦ (Π) πού νά ἀπέχει ἀπό τό Β ἀπόσταση λ.

391. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνας κύκλος (Κ, R) πάνω σ' αὐτό καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο. Νά φέρετε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π), πού νά ἐφάπτεται στόν κύκλο (Κ, R) καί νά ἀπέχει ἀπό τό σημεῖο Α ἀπόσταση λ.

392. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό τρία δεδομένα σημεῖα Α, Β καί Γ, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

393. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό τρεῖς συνεπίπεδες εὐθεῖες, πού τέμνονται ἀνά δύο.

394. Ἄν μιά εὐθεία (ε) σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τρεῖς εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου (Π), νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι (ε) $\perp$ (Π).

395. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα $AB = 2\alpha$ ἔξω ἀπό τό (Π). Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπό τά ὁποῖα τό τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπό ὀρθή γωνία.

396. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτό. Ἀπό τό Α φέρνουμε τό κάθετο τμῆμα ΑΒ στό ἐπίπεδο (Π) καί δύο πλάγια τμήματα ΑΓ καί ΑΔ. Πάνω σ' αὐτά παίρνουμε τά σημεῖα Ε, Ζ, Η ἀντίστοιχα ἔτσι, πού νά εἶναι $\frac{AE}{AB} = \frac{AZ}{A\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta}$. Ν' ἀποδείξετε ὅτι $AB \perp (EZH)$.

397. Πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) δίνεται ἕνας κύκλος (Κ, R). Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τοῦ κύκλου φέρνουμε τή διάμετρο ΑΒ καί ὑψώνουμε κάθετο Αx στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου. Στήν Αx παίρνουμε ἕνα σημεῖο Γ καί τό συνδέουμε μέ ἕνα σημεῖο Δ τοῦ κύκλου. α) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\Gamma\Delta \perp B\Delta$. β) Φέρνουμε $AE \perp B\Gamma$ καί $AZ \perp \Gamma\Delta$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τριγ. ΓΒΔ $\approx$ τριγ. ΓΖΕ. γ) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $B\Gamma \perp (AEZ)$.

398. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπ' αὐτό. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), γιά τά ὁποῖα εἶναι : $MA^2 + MB^2 = \lambda^2$, ὅπου τό λ εἶναι γνωστό μῆκος.

399. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, γιά τά ὁποῖα εἶναι : $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$, ὅπου τό λ εἶναι γνωστό μῆκος.

163. Μεσοκάθετο ἐπίπεδο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος. Ὁρισμός. Μεσοκάθετο ἐπίπεδο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται τό ἐπίπεδο πού εἶναι κάθετο στό τμῆμα ΑΒ καί περνάει ἀπό τό μέσο του.

164. Θεώρημα. Κάθε σημεῖο τοῦ μεσοκάθετου ἐπιπέδου (Π) ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος καί ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο, τό ὁποῖο ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος, βρίσκεται στό μεσοκάθετο ἐπίπεδο.

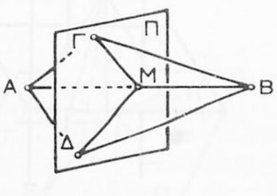
Ἀπόδειξη. Ἔστω Γ ἕνα σημεῖο τοῦ μεσοκάθετου ἐπιπέδου (Π) τοῦ τμήματος ΑΒ. Τότε $\Gamma M \perp AB$ (σχ. 192). Ἐπειδή ἐπιπλέον εἶναι $MA = MB$, τό τριγ. ΓΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἀφοῦ ἔχει τή ΓΜ ὡς ὕψος καί διάμεσο. Ἄρα $\Gamma A = \Gamma B$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Δ ἕνα σημεῖο, πού ἰσαπέχει ἀπό τά Α καί Β, τότε τό τριγ. ΔΑΒ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα ἡ διάμεσος του ΔΜ εἶναι καί ὕψος, δηλαδή $\Delta M \perp AM$. Ἄρα τό σημεῖο Δ ἀνήκει στό μεσοκάθετο ἐπίπεδο (Π) τοῦ τμήματος ΑΒ.

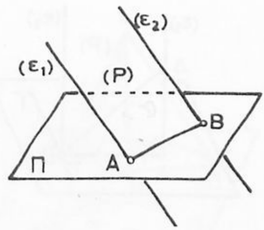
Παρατήρηση. Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ὅτι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β, εἶναι τό μεσοκάθετο ἐπίπεδο τοῦ τμήματος ΑΒ.

165. Θεώρημα. Ἄν δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλες καί ἡ μία τέμνει ἕνα ἐπίπεδο (Π), τότε καί ἡ ἄλλη τέμνει τό (Π).

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ (ε_1) τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) στό σημεῖο Α (σχ. 193). Οἱ δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), πού ἔχει μέ τό (Π) κοινό τό σημεῖο Α. Ἄρα ἔχουν καί κοινή εὐθεία, ἡ ὁποία, ἀφοῦ εἶναι εὐθεία τοῦ (Ρ) καί τέμνει τήν εὐθεία (ε_1) στό Α, θά τέμνει καί τήν παράλληλή της στό Β. Τό Β ἑπομένως ἀνήκει στήν τομή τῶν δύο ἐπιπέδων, καί κατά συνέπεια ἀνήκει στό (Π). Ἄρα καί ἡ εὐθεία (ε_2) τέμνει τό (Π).



Σχ. 192

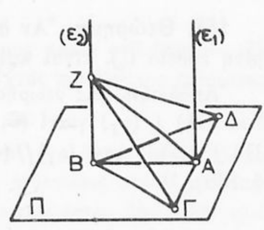


Σχ. 193

166. Θεώρημα. Ἄν δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι κάθετες σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π), εἶναι μεταξύ τους παράλληλες.

Ἀπόδειξη. Στήν ἀρχή παρατηροῦμε ὅτι οἱ εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) ἀποκλείεται νά τέμνονται, γιατί τότε ἀπό τό κοινό σημεῖο τους θά ὑπῆρχαν δύο κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο (Π) (σχ. 194). Ἀρκεῖ ἑπομένως ν' ἀποδείξουμε ὅτι οἱ (ε_1) καί (ε_2) εἶναι συνεπίπεδες.

Ἄν Α καί Β εἶναι τά ἴχνη τῶν (ε_1) καί (ε_2) πάνω στό ἐπίπεδο (Π) ἀντιστοίχως, ἀπ' τό Α φέρνουμε εὐθεία τοῦ (Π) κάθετη στήν ΑΒ καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε ΑΓ = ΑΔ. Τότε τό τριγ. ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, γιατί ἔχει τήν ΒΑ ὡς ὕψος καί διάμεσο. Ἄρα ΒΓ = ΒΔ. Οἱ εὐθεῖες (ε_1) καί ΑΒ καθορίζουν τό μεσοκάθετο ἐπίπεδο τοῦ τμήματος ΓΔ, γιατί $(\varepsilon_1) \perp$ ΓΔ καί ΑΒ $\perp$ ΓΔ. Τό σημεῖο Β τῆς (ε_2) ἀνήκει προφανῶς στό ἐπίπεδο αὐτό. Ἔστω Ζ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς εὐθείας (ε_2). Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΒΓ καί ΖΒΔ ἔχουν τή ΖΒ κοινή καί ΒΓ = ΒΔ. Ἄρα εἶναι ἴσα καί ἑπομένως ΖΓ = ΖΔ. Ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα προκύπτει ὅτι τό σημεῖο Ζ ἀνήκει στό μεσοκάθετο

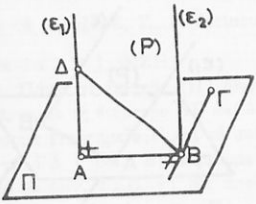


Σχ. 194

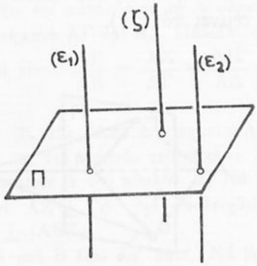
ἐπίπεδο τοῦ τμήματος ΓΔ. Τότε καί ἡ εὐθεία (ε_2) ἀνήκει στό ἐπίπεδο αὐτό καί ἑπομένως εἶναι συνεπίπεδη τῆς (ε_1). Ἄρα εἶναι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$.

167. Θεώρημα. Ἄν δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλες καί ἕνα ἐπίπεδο (Π) εἶναι κάθετο στή μιά ἀπ' αὐτές, τότε τό (Π) εἶναι κάθετο καί στήν ἄλλη.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο $(\Pi) \perp (\varepsilon_1)$ στό σημεῖο Α (σχ. 195). Τό ἐπίπεδο (Π) θά τέμνει ὁπωσδήποτε καί τήν εὐθεία (ε_2) σ' ἕνα σημεῖο Β, γιατί εἶναι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$ (§ 165) καί θά εἶναι $(\varepsilon_1) \perp AB$ ἄρα $(\varepsilon_2) \perp AB$. Ἀρκεῖ ἑπομένως ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι κάθετη καί σέ ἄλλη μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π).



Σχ. 195



Σχ. 196

Ἀπό τό σημεῖο Β καί πάνω στό ἐπίπεδο (Π) φέρνουμε τή $B\Gamma \perp AB$ καί ἔστω Δ ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας (ε_1). Γνωρίζουμε ὅτι $\Delta B \perp B\Gamma$ (θεώρ. τριῶν καθέτων) καί ἑπομένως $B\Gamma \perp (AB\Delta)$. Τό ἐπίπεδο ὅμως (ΑΒΔ) συμπίπτει μέ τό ἐπίπεδο (Ρ) τῶν δύο παραλλήλων (ε_1) καί (ε_2), γιατί αὐτά ἔχουν κοινή τήν εὐθεία (ε_1) καί τό σημεῖο Β. Ἄρα θά εἶναι $(\varepsilon_2) \perp B\Gamma$. Τότε ὅμως εἶναι καί $(\varepsilon_2) \perp (\Pi)$.

168. Θεώρημα. Ἄν δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλες πρός τρίτη εὐθεία (ζ), εἶναι καί μεταξύ τους παράλληλες.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο $(\Pi) \perp (\zeta)$ (σχ. 196). Τότε θά εἶναι $(\Pi) \perp (\varepsilon_1)$ γιατί $(\varepsilon_1) // (\zeta)$ (§ 167). Γιά τόν ἴδιο λόγο θά εἶναι καί $(\Pi) \perp (\varepsilon_2)$. Ἄρα $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$, ἐπειδή εἶναι κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο (Π) (§ 166).

ΚΑΘΕΤΑ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

169. Θεώρημα. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ ἐπίπεδο (Π):

i) Τό κάθετο τμῆμα στό ἐπίπεδο (Π) εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο.

ii) Τά ἴχνη δύο ἴσων πλάγιων τμημάτων ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος.

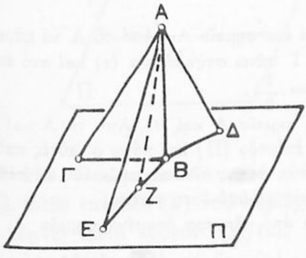
iii) Τά ἴχνη δύο ἄνισων τμημάτων ἀπέχουν ὁμοιοστρόφως ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος.

Ἀπόδειξη.

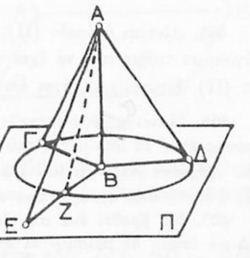
i) $AB \perp (\Pi)$. Τό τρίγωνο $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιο στό B (σχ. 197) καί ἑπομένως εἶναι $AB < A\Gamma$.

ii) Παίρνουμε δύο ἴσα πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα, τά $A\Gamma$ καί $A\Delta$. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $AB\Delta$ ἔχουν τίς ὑποτείνουσές τους ἴσες καί τήν AB κοινή. Ἄρα εἶναι ἴσα ὁπότε, $B\Gamma = B\Delta$.

iii) Ἄς εἶναι AE καί $A\Delta$ δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα, ὅπου $AE > A\Delta$. Πάνω στήν EB παίρνουμε ἕνα σημεῖο Z, τέτοιο ὥστε νά εἶναι $AZ = A\Delta$, ὁπότε $BZ = B\Delta$ καί $AE > AZ \Rightarrow BE > BZ \Rightarrow BE > B\Delta$.



Σχ. 197



Σχ. 198

170. Θεώρημα. Στό σύνολο τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τά ὁποῖα ξεκινοῦν ἀπό ἕνα σημεῖο A πού δέν ἀνήκει σέ ἐπίπεδο (Π) καί ἔχουν τό ἄλλο ἄκρο τους πάνω στό (Π):

i) μικρότερο ἀπ' ὅλα εἶναι τό κάθετο.

ii) δύο τμήματα εἶναι ἴσα, ἄν τά ἴχνη τους πάνω στό ἐπίπεδο (Π) ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος.

iii) δύο τμήματα εἶναι ἄνισα, ἄν τά ἴχνη τους πάνω στό ἐπίπεδο (Π) ἀπέχουν ὁμοιοστρόφως ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος.

Ἀπόδειξη.

i) Φέρνουμε τό κάθετο τμῆμα $AB \perp (\Pi)$ καί ἕνα ὁποιοδήποτε τμῆμα $A\Delta$ πλάγιο πρός τό (Π). Τό τρίγωνο $AB\Delta$ εἶναι ὀρθογώνιο στό B καί ἑπομένως $AB \leqq A\Delta$, δηλαδή τό κάθετο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο (τό = ἰσχύει στήν περίπτωση, στήν ὁποία τό Δ συμπίπτει μέ τό B).

ii) $AB \perp (\Pi)$ (σχ. 198) καί ἔστω $B\Gamma = B\Delta$. Τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{AB\Delta}$, γιατί εἶναι ὀρθογώνια μέ $B\Gamma = B\Delta$ καί ἔχουν τήν AB κοινή. Ἄρα $A\Gamma = A\Delta$.

iii) Ἔστω $BE > B\Delta$. Πάνω στή BE παίρνουμε τμῆμα $BZ = B\Delta$, τότε $AZ = A\Delta$ καί ἐπειδή $BE > BZ$ θά εἶναι $AE > AZ$ ἤ $AE > A\Delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

400. Δίνεται μιά εὐθεία (ε) καί δύο σημεῖα Α καί Β τοῦ χώρου. Νά βρεθεῖ πάνω στήν εὐθεία (ε) ἕνα σημεῖο Μ, τό ὁποῖο νά ἰσαπέχει ἀπό τά Α καί Β.

401. Δίνονται δύο σημεῖα Α καί Β καί μιά εὐθεία (ε) στό χῶρο. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Γ τῆς εὐθείας (ε) τέτοιο ὥστε τό τρίγωνο ΑΒΓ νά εἶναι ἰσοσκελές α) μέ κορυφή τό Γ β) μέ κορυφή τό Α.

402. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπ' αὐτό. Νά βρεθοῦν τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό τά Α καί Β.

403. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός στρεβλοῦ τετραπλεύρου (πού οἱ κορυφές του δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο) εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου. Πότε αὐτό εἶναι ρόμβος;

404. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά Α καί Γ ἰσαπέχουν ἀπό κάθε ἐπίπεδο πού περιέχει τή ΒΔ.

Β΄.

405. Δίνεται ἐπίπεδο (Π), μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Α. Ἀπό τό Α νά φέρετε εὐθύγραμμο τμῆμα πού νά ἔχει τά ἄκρα του Β καί Γ πάνω στήν εὐθεία (ε) καί στό ἐπίπεδο (Π) ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι: $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

406. Πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) δίνονται δύο σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τά Α καί Β φέρνουμε πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ (Π) καθέτους στό ἐπίπεδο (Π) καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα $ΑΓ = κ$ καί $ΒΔ = λ$. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπό τά ὁποῖα τά τμήματα ΑΓ καί ΒΔ φαίνονται ὑπό ἴσες γωνίες.

407. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο, πού νά ἰσαπέχει ἀπό τέσσερα δοσμένα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τά ὁποῖα δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.

408. Δίνεται ἕνα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (στρεβλό λέγεται τό τετράπλευρο, πού οἱ τέσσερις κορυφές του δέν ἀνήκουν στό ἴδιο ἐπίπεδο). Ἀπό τά μέσα Ε καί Ζ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καί ΓΔ φέρνουμε ἐπίπεδο (Π), τό ὁποῖο τέμνει τίς ΑΔ καί ΒΓ στά σημεῖα Η καί Θ ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\frac{ΗΑ}{ΗΔ} = \frac{ΘΒ}{ΘΓ}$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

171. Ὁρισμός. Μιά εὐθεία (ε) λέγεται παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἄν ἡ τομή τους εἶναι τό κενό σύνολο δηλ. $(ε)//(Π) \Longleftrightarrow (ε) \cap (Π) = \varnothing$ (Σχ. 199).

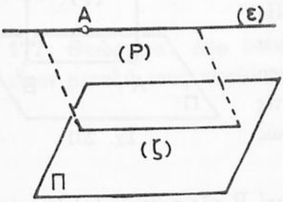
Τότε καί τό ἐπίπεδο (Π) λέγεται παράλληλο πρός τήν εὐθεία (ε).

172. Θεώρημα. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), μιά εὐθεία του (ζ) καί ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει στό (Π). Ἀπ' τό Α θεωροῦμε εὐθεία (ε)//(ζ). Τότε ἡ εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο (Π).

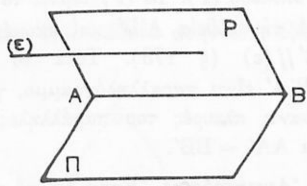
Ἀπόδειξη. Οἱ εὐθεῖες (ε) καί (ζ), ὡς παράλληλες, καθορίζουν ἐπίπεδο (Ρ) (σχ. 199), τό ὁποῖο τέμνεται μέ τό (Π) κατά τήν εὐθεία (ζ). Ἡ εὐθεία (ε), ὡς εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), ἀνήκει ἐξολοκλήρου σ' αὐτό. Ἑπομένως, ἄν ἡ (ε) ἔτεμνε τό (Π) σέ ἕνα σημεῖο Σ, θά ἔπρεπε αὐτό νά ἀνήκει στό κοινό μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων, δηλαδή στήν εὐθεία (ζ). Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί εἶναι (ε)//(ζ). Ἄρα ἡ εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο (Π).

Παρατήρηση. Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ὅτι ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ ἐπίπεδο (Π), ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες παράλληλες πρός τό ἐπίπεδο (Π). Αὐτές ἀποτελοῦν ἐπίπεδη δέσμη εὐθειῶν μέ πόλο τό Α.

Πόρισμα. Ἄν μία εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός τήν τομή ΑΒ δύο ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) (Σχ. 200) **καί δέν ἀνήκει σέ κανένα ἀπ' αὐτά, τότε εἶναι παράλληλη καί πρός τά δύο ἐπίπεδα.**



Σχ. 199



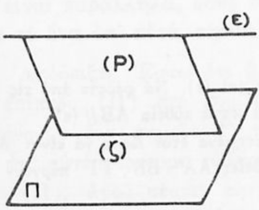
Σχ. 200

173. Θεώρημα. Ἄν μιά εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π), κάθε ἐπίπεδο (Ρ) πού περιέχει τήν εὐθεία (ε) καί τέμνει τό ἐπίπεδο (Π), τό τέμνει κατά εὐθεία (ζ)//(ε).

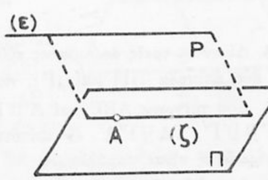
Ἀπόδειξη. Οἱ εὐθεῖες (ε) καί (ζ) εἶναι συνεπίπεδες (σχ. 201). Ἀρκεῖ ἑπομένως νά δειχθεῖ ὅτι δέν ἔχουν κοινό σημεῖο. Ἀσφαλῶς ὅμως δέν ἔχουν κοινό σημεῖο, γιατί, ἄν ὑπῆρχε ἕνα κοινό σημεῖο Σ, αὐτό, ὡς σημεῖο τῆς εὐθείας (ζ), θά βρισκόταν πάνω στό ἐπίπεδο (Π). Ἀλλά τότε ἡ εὐθεία (ε) θά εἶχε τό σημεῖο της Σ στό ἐπίπεδο (Π), πράγμα πού εἶναι ἄτοπο, γιατί εἶναι (ε)//(Π). Ἄρα εἶναι (ε)//(ζ).

174. Θεώρημα. Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνα σημεῖο του Α καί μιά εὐθεία (ε)//(Π). Ἀπό τό Α θεωροῦμε εὐθεία (ζ)//(ε). Τότε ἡ εὐθεία (ζ) εἶναι εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Ἀπόδειξη. Οἱ δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (ζ) καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ) (σχ. 202). Τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἔχουν κοινό σημεῖο τό Α.



Σχ. 201

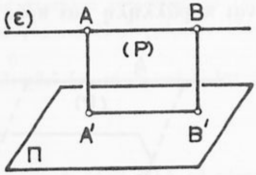


Σχ. 202

Ἑπομένως θά ἔχουν καί κοινή εὐθεία καί μάλιστα αὐτή πρέπει νά εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία (ε) (§ 173). Ἐπειδή ἐπιπλέον πρέπει νά περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Α, αὐτή δέν εἶναι ἄλλη παρά ἡ ἴδια ἡ εὐθεία (ζ). Ἄρα ἡ εὐθεία (ζ) ὡς κοινή γιά τά δύο ἐπίπεδα ἀνήκει καί στό ἐπίπεδο (Π).

175. Θεώρημα. Ἄν μιά εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π), ὅλα τά σημεῖα της ἰσαπέχουν ἀπό τό ἐπίπεδο καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Παίρνουμε δύο σημεῖα τῆς εὐθείας (ε), τά Α καί Β (σχ. 203). Φέρνουμε ΑΑ′ ⊥ (Π) καί ΒΒ′ ⊥ (Π) τότε ΑΑ′// ΒΒ′. Οἱ παράλληλες ΑΑ′ καί ΒΒ′ καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ). Τό (Ρ) τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) κατά τήν εὐθεία Α′Β′ καί ἑπομένως θά εἶναι Α′Β′ // (ε) (§ 173). Τότε τό τετράπλευρο ΑΒΒ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατί ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες. Ἑπομένως εἶναι ΑΑ′ = ΒΒ′.



Σχ. 203

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι τά σημεῖα Α καί Β τῆς εὐθείας (ε) ἰσαπέχουν ἀπό τό ἐπίπεδο (Π), δηλαδή εἶναι ΑΑ′ = ΒΒ′. Τότε τό τετράπλευρο ΑΒΒ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμο γιατί ἔχει τίς ΑΑ′ καί ΒΒ′ ἴσες καί παράλληλες (κάθετες στό (Π)). Ἄρα εἶναι ΑΒ // Α′Β′ καί ἑπομένως (ε) // (Π) (§ 421).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

409. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) τέμνονται κατά εὐθεία ΑΒ. Ἕνα ἐπίπεδο (Σ) παράλληλο πρός τήν ΑΒ τέμνει τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ τομές εἶναι παράλληλες.

410. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α νά φέρετε εὐθεία παράλληλη πρός δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

411. Δίνεται μιά εὐθεία (ε) καί δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Νά φέρετε ἐπίπεδο πού νά περιέχει τήν (ε) καί νά τέμνει τά (Π) καί (Ρ) κατά εὐθεῖες παράλληλες.

412. Νά φέρετε ἐπίπεδο πού νά περιέχει μιά δεδομένη εὐθεία (ε) καί νά ἰσαπέχει ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β.

413. Νά φέρετε ἐπίπεδο πού νά περνάει σέ ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τέσσερα γνωστά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

Β′.

414. Δίνονται τρεῖς ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1), (ε_2) καί (ε). Νά φέρετε ἀπό τίς (ε_1) καί (ε_2) δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), πού νά τέμνονται κατά εὐθεία ΑΒ // (ε).

415. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ εἶναι τοποθετημένα ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΒ// Α′Β′, ΒΓ // Β′Γ′, ΓΑ // Γ′Α′. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο ἤ εἶναι παράλληλες.

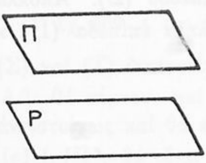
416. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), μιά εὐθεία (ε) // (Π) καί ἕνα σημεῖο Σ. Νά φέρετε ἀπό τό Σ εὐθεία πού νά τέμνει τήν (ε) σέ σημεῖο Α καί τό ἐπίπεδο (Π) σὲ σημεῖο Β ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΒ = λ, ὅπου λ εἶναι γνωστό μῆκος.

417. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), δύο σημεῖα Α, Β καί ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα α // (Π). Ἀπό τά σημεῖα Α καί Β νά φέρετε δύο παράλληλες εὐθεῖες πού νά τέμνουν τό ἐπίπεδο (Π) στά Α' καί Β' ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι Α'Β' //= α.

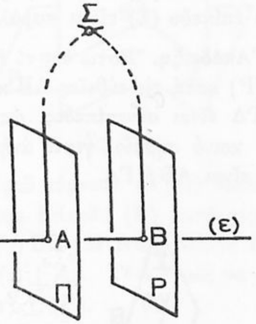
ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

176. Ὁρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) λέγονται παράλληλα, ἄν ἡ τομή τους εἶναι τό κενό σύνολο. Δηλαδή (Π)//(Ρ) $\Longleftrightarrow$ (Π) $\cap$ (Ρ) = $\varnothing$ (Σχ. 204).

177. Θεώρημα. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), κάθετα στήν ἴδια εὐθεία (ε), εἶναι μεταξύ τους παράλληλα.

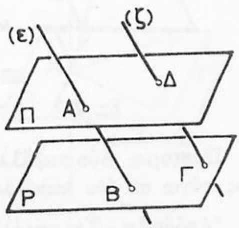


Σχ. 204



Σχ. 205

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ εὐθεία (ε) τέμνει τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) στά σημεῖα Α καί Β (σχ. 205). Τά ἐπίπεδα ἀποκλείεται νά τέμνονται. Γιατί, ἄν ὑπῆρχε ἕνα κοινό σημεῖον τους Σ, ἀπό τό Σ θά ὑπῆρχαν δύο εὐθεῖες ΣΑ καί ΣΒ κάθετες στήν εὐθεία (ε), ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα.



Σχ. 206

178. Θεώρημα. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεία (ε), πού τέμνει τό ἕνα ἀπ' αὐτά, τέμνει καί τό ἄλλο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεία (ε) τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) στό σημεῖο Α (σχ. 206). Παίρνουμε ἕνα σημεῖο Γ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καί ἀπ' αὐτό φέρνουμε εὐθεία (ζ)//(ε). Τό ἐπίπεδο (Π), ἀφοῦ τέμνει τήν εὐθεία (ε), θά τέμνει καί τήν παράλληλό της (ζ) σ' ἕνα σημεῖο Δ (§ 414). Ἄρα ἡ εὐθεία (ζ), ἀφοῦ ἔχει ἕνα σημεῖο της

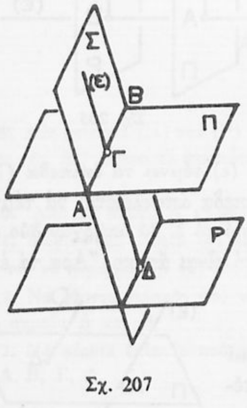
Δ ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο (Ρ), δέν εἶναι εὐθεία τοῦ (Ρ). Τό ἐπίπεδο (Ρ) ὅμως τέμνει τήν εὐθεία (ζ) στό Γ καί ἑπομένως θά τέμνει καί τήν παράλληλό της (ε) σ' ἕνα σημεῖο Β.

179. Θεώρημα. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα, κάθε ἐπίπεδο (Σ) πού τέμνει τό ἕνα ἀπ' αὐτά, τέμνει καί τό ἄλλο.

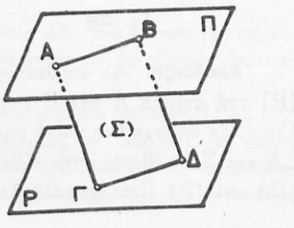
Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τό ἐπίπεδο (Σ) τέμνει τό (Π) κατά τήν εὐθεία ΑΒ (σχ. 207). Θεωροῦμε μιά εὐθεία (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Σ) ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΒ στό Γ. Ἡ εὐθεία (ε), ἀφοῦ τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) στό σημεῖο Γ, θά τέμνει καί τό παράλληλό του ἐπίπεδο (Ρ) σ' ἕνα σημεῖο Δ. Ἑπομένως τό ἐπίπεδο (Σ) ἔχει τό σημεῖο του Δ πάνω στό ἐπίπεδο (Ρ) καί συνεπῶς τέμνει τό (Ρ).

180. Θεώρημα. Οἱ τομές δύο παράλληλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), ἀπό τρίτο ἐπίπεδο (Σ) εἶναι παράλληλες εὐθεῖες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τό ἐπίπεδο (Σ) τέμνει τά παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κατά τίς εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ ἀντιστοίχως (σχ. 208). Οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ εἶναι συνεπίπεδες, ὡς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου (Σ). Ἀποκλείεται νά ἔχουν κοινό σημεῖο, γιατί ἀνήκουν στά παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Ἄρα εἶναι ΑΒ // ΓΔ.



Σχ. 207



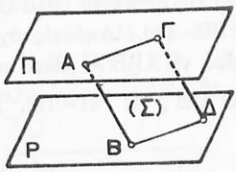
Σχ. 208

Πόρισμα. Δύο παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ μέ τά ἄκρα τους πάνω σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι ἴσα.

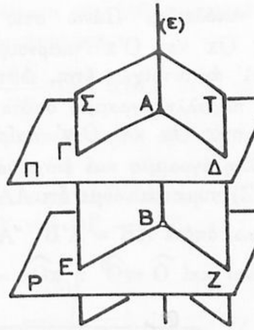
Ἀπόδειξη. Τά παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Σ), πού τέμνει τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κατά τίς ΑΓ καί ΒΔ (σχ. 209). Τότε θά εἶναι ΑΓ // ΒΔ (§ 180) καί ἑπομένως τό ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἄρα ΑΒ = ΓΔ.

181. Θεώρημα. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεία (ε), πού εἶναι κάθετη στό ἕνα ἀπ' αὐτά, εἶναι κάθετη καί στό ἄλλο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι (ε) ⊥ (Π) (σχ. 210). Ἡ εὐθεία (ε), ἀφοῦ τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) σ' ἕνα σημεῖο Α, θά τέμνει καί τό παράλληλό του ἐπίπεδο (Ρ) σέ κάποιο σημεῖο Β. Ἀπό τό Α θεωροῦμε δύο, ὁποιεσδήποτε, εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΔ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἡ (ε) καί οἱ ΑΓ καί ΑΔ καθορίζουν δύο



Σχ. 209

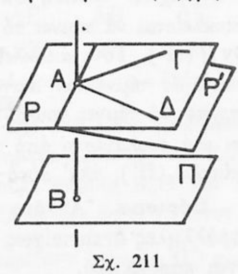


Σχ. 210

ἐπίπεδα (Σ) καί (Τ) ἀντιστοίχως, τά ὁποῖα ἀφοῦ τέμνουν τό (Π) κατά τίς ΑΓ καί ΑΔ, θά τέμνουν καί τό παράλληλό του ἐπίπεδο (Ρ) κατά τίς ΒΕ καί ΒΖ ἀντιστοίχως καί θά εἶναι μάλιστα ΑΓ // ΒΕ καί ΑΔ // ΒΖ (§ 180). Ἐπειδή (ε) ⊥ (Π), θά εἶναι (ε) ⊥ ΑΓ καί (ε) ⊥ ΑΔ. Τότε ὅμως θά εἶναι καί (ε) ⊥ ΒΕ καί (ε) ⊥ ΒΖ καί ἑπομένως (ε) ⊥ (Ρ).

182. Θεώρημα. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ ἐπίπεδο (Π), φέρεται ἕνα μόνο ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό (Π).

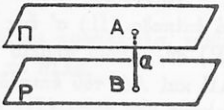
Ἀπόδειξη. Ἀπό τό σημεῖο Α φέρνουμε εὐθεία ΑΒ ⊥ (Π) (σχ. 211). Φέρνουμε ἐπίσης τίς ΑΓ ⊥ ΑΒ καί ΑΔ ⊥ ΑΒ, πού καθορίζουν τό μοναδικό κάθετο ἐπίπεδο (Ρ) στήν ΑΒ στό σημεῖο Α. Εἶναι φανερό τώρα ὅτι (Ρ) // (Π), γιατί εἶναι κάθετα στήν ἴδια εὐθεία ΑΒ. Τό (Ρ) εἶναι καί τό μοναδικό ἐπίπεδο ἀπ' τό Α παράλληλο πρός τό (Π), γιατί, ἄν ὑπῆρχε καί δεύτερο ἐπίπεδο (Ρ') // (Π) θά ἦταν (Ρ') ⊥ ΑΒ, γιατί ΑΒ ⊥ (Π). Ἀλλά τότε θά ὑπήρχαν δύο κάθετα ἐπίπεδα ἀπό τό Α πρός τήν ΑΒ, τό (Ρ) καί τό (Ρ'), πράγμα πού εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ἀπό τό Α ὑπάρχει ἕνα μόνο ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό (Π).



Σχ. 211

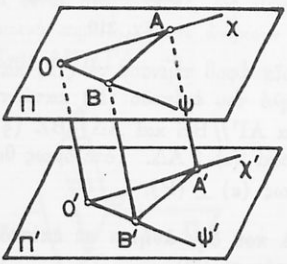
183. Ἀπόσταση δύο παράλληλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) λέγεται τό μῆκος α τοῦ κάθετου εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ τῶν δύο ἐπιπέδων. Τά Α καί B εἶναι σημεῖα τῶν ἐπιπέδων (Π) καί (P) ἀντιστοίχως (σχ. 212).

184. Θεώρημα. Δύο γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $x'\widehat{O'}y'$, πού ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες καί ὁμόρροπες, εἶναι ἴσες καί τά ἐπίπεδα πού καθορίζονται ἀπ' αὐτές, εἶναι παράλληλα.

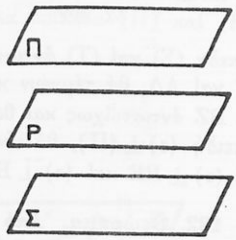


Σχ. 212

Ἀπόδειξη. Πάνω στίς παράλληλες εὐθεῖες Ox καί $O'x'$ παίρνουμε τά σημεῖα A καί A' ἀντιστοίχως ἔτσι, ὥστε νά εἶναι $OA = O'A'$. Ἄρα τό $OAA'O'$ θά εἶναι παραλληλόγραμμο ὁπότε καί $OO' \mathbin{/\!/} = AA'$ (1) (σχ. 213). Ὁμοίως πάνω στίς Oy καί $O'y'$ παίρνουμε $OB = O'B'$, ὁπότε τό $OBB'O'$ θά εἶναι παραλληλόγραμμο καί ἐπομένως $OO' \mathbin{/\!/} = BB'$ (2). Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) συμπεραίνουμε ὅτι $AA' \mathbin{/\!/} = BB'$, ἄρα τό $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμο, ὁπότε $AB = A'B'$. Ἄρα $O\overset{\Delta}{A}B = O'\overset{\Delta}{A'}B'$, (Π - Π - Π). Ἐπομένως θά εἶναι καί $\widehat{O} = \widehat{O'}$ ἤ $x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$.



Σχ. 213



Σχ. 214

Οἱ δύο γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $x'\widehat{O'}y'$ καθορίζουν τά ἐπίπεδα (Π) καί (Π') ἀντιστοίχως. Ἐπειδή $Ox \mathbin{/\!/} O'x'$ θά εἶναι $Ox \mathbin{/\!/} (Π')$ (§ 172), δηλαδή ἡ Ox ἀποκλείεται νά τέμνει τό ἐπίπεδο (Π'). Ἐπίσης ἐπειδή $Oy \mathbin{/\!/} O'y'$, θά εἶναι $Oy \mathbin{/\!/} (Π')$. Τότε ἀποκλείεται νά τέμνονται καί τά ἐπίπεδα (Π) καί (Π'), γιατί, ἄν τέμνονταν κατά μία εὐθεία ΚΛ, αὐτή, ὡς εὐθεία τοῦ (Π), θά ἔπρεπε νά τέμνει τουλάχιστο μιά ἀπό τίς Ox καί Oy καί αὐτό σημαίνει ὅτι μιά τουλάχιστο ἀπό τίς Ox καί Oy θά εἶχε ἕνα σημεῖο της πάνω στό ἐπίπεδο (Π'), ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα εἶναι $(Π) \mathbin{/\!/} (Π')$.

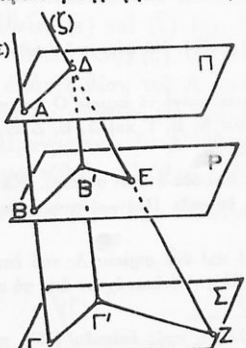
Πόρισμα. Ἄν δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου οἱ ὁποῖες τέμνονται, εἶναι παράλληλες ἀντιστοίχως πρός δύο εὐθεῖες ἑνός ἄλλου ἐπιπέδου, τά ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

185. Θεώρημα. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (P) εἶναι παράλληλα πρός τρίτο ἐπίπεδο (Σ), εἶναι καί μεταξύ τους παράλληλα.

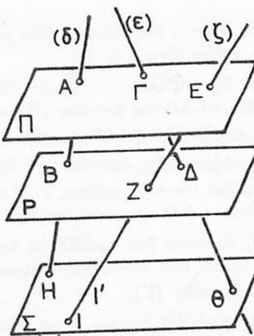
᾿Απόδειξη. $(\Pi) /\!/ (\Sigma)$, $(P) /\!/ (\Sigma)$ (σχ. 214). Τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἀποκλείεται νά τέμνονται, γιατί τότε ἀπό ἕνα ἀπ' τά κοινά τους σημεῖα θά ὑπήρχαν δύο παράλληλα ἐπίπεδα πρός τό (Σ), ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο (§ 182). Ἄρα εἶναι $(\Pi) /\!/ (P)$.

186. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ. Ἄν τρία τουλάχιστο ἐπίπεδα (Π), (Ρ) καί (Σ) εἶναι παράλληλα καί τέμνονται ἀπό δύο εὐθεῖες (ε) καί (ζ) στά σημεῖα, Α, Β, Γ καί Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως, τά τμήματα τῶν εὐθειῶν, τά ὁποῖα περιέχονται μεταξύ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν, εἶναι ἀνάλογα.

᾿Απόδειξη. Θά ἀποδείξουμε ὅτι $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{EZ}$ (σχ. 215). ᾿Απ' τό σημεῖο Δ φέρνουμε εὐθεία $\Delta B'\Gamma' /\!/ AB\Gamma$. Οἱ δύο παράλληλες εὐθεῖες καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο, πού τέμνει τά ἐπίπεδα (Π), (Ρ) καί (Σ) κατά εὐθεῖες παράλληλες $A\Delta /\!/ BB' /\!/ \Gamma\Gamma'$. Ἄρα τά τετράπλευρα $ABB'\Delta$ καί $B\Gamma\Gamma'B'$ εἶναι παραλληλόγραμμα. ῾Επομένως $AB = \Delta B'$ καί $B\Gamma = B'\Gamma'$.



Σχ. 215



Σχ. 216

Οἱ τεμνόμενες εὐθεῖες ΔΕΖ καί $\Delta B'\Gamma'$ καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο, πού τέμνει τά ἐπίπεδα (Ρ) καί (Σ) κατά εὐθεῖες παράλληλες $B'E /\!/ \Gamma'Z$. Ἄρα θά εἶναι (θεώρημα τοῦ Θαλῆ στό ἐπίπεδο) $\dfrac{\Delta B'}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Delta E}{EZ} \Rightarrow \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{EZ}$.

Τό θεώρημα μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ καί γιά περισσότερα ἀπό τρία ἐπίπεδα.

187. Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖες (δ), (ε) καί (ζ) ὄχι τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου τέμνουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) στά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ, καί Ε,Ζ ἀντιστοίχως (σχ. 216). **Ἄν πάνω στίς εὐθεῖες πάρουμε σημεῖα Η,Θ καί Ι ἀντιστοίχως καί πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), τέτοια ὥστε νά εἶναι :** $\dfrac{AB}{BH} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta} = \dfrac{EZ}{ZI}$, **τά σημεῖα Η,Θ καί Ι καθορίζουν ἐπίπεδο (Σ) παράλληλο πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).**

᾿Απόδειξη. Ἄν τό ἐπίπεδο (Σ) (σχ. 216), πού καθορίζεται ἀπό τά σημεῖα Η, Θ καί Ι, δέν ἦταν παράλληλο πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ἀπό τά σημεῖα Η καί Θ θά περνοῦσε ἕνα μόνο ἐπίπεδο παράλληλο πρός τά (Π) καί (Ρ) καί θά ἔτεμνε τήν εὐθεία (ζ) σέ σημεῖο Ι', πρός τό μέρος τῶν Η καί Θ ὡς πρός τό (Ρ). Τότε θά ἦταν (προηγούμενο θεώρημα): $\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI'}$ (1).

'Από τήν ὑπόθεση ὅμως ἔχουμε : $\frac{AB}{BH} = \frac{EZ}{ZI}$ (2). Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται $\frac{EZ}{ZI'} = \frac{EZ}{ZI}$ ἤ $ZI' = ZI$, δηλαδή θά ἔπρεπε τό σημεῖο Ι' νά ταυτίζεται μέ τό σημεῖο Ι. 'Απ' αὐτό ἔπεται ὅτι (Σ) // (Π) // (Ρ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

418. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μιά εὐθεία (ε) // (Π). Νά φέρετε ἐπίπεδο (Ρ) // (Π) πού νά περιέχει τήν (ε).

419. Τρεῖς εὐθεῖες τοῦ χώρου Οx, Οy, καί Οz ἔχουν κοινό τό σημεῖο Ο καί τέμνονται ἀπό δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) στά σημεῖα Α, Β, Γ καί Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι τριγ. ΑΒΓ $\approx$ τριγ. ΔΕΖ.

420. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μιά εὐθεία (ε) πού δέν ἀνήκει σ' αὐτό. Νά τοποθετηθεῖ τμῆμα γνωστοῦ μήκους λ μέ τά ἄκρα του στό ἐπίπεδο (Π) καί στήν εὐθεία (ε) καί νά εἶναι παράλληλο πρός γνωστή διεύθυνση (δ).

421. Δίνονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) // (Ρ) καί ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου (Π). Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), πού ἰσαπέχουν ἀπό τό σημεῖο Α καί τό ἐπίπεδο (Ρ).

422. 'Από ἕνα σημεῖο Α νά φέρετε εὐθεία παράλληλη πρός ἐπίπεδο (Π), πού νά τέμνει γνωστή εὐθεία (ε).

423. Τρία παράλληλα ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ) κατά σειρά ἀπέχουν τά (Π) καί (Ρ) 12 cm, τά (Ρ) καί (Σ) 8 cm. Μιά εὐθεία (ε) τέμνει αὐτά στά σημεῖα Α,Β,Γ, ἀντιστοίχως καί εἶναι ΑΒ = 18 cm. Νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος ΒΓ.

Β'.

424. 'Από ἕνα σημεῖο Α νά φέρετε ἐπίπεδο πού νά ἰσαπέχει ἀπό τρία γνωστά σημεῖα Β,Γ,Δ.

425. Πάνω σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) βρίσκονται δύο κύκλοι (Κ,R) καί (Λ,ρ) ἀντιστοίχως. Νά φέρετε εὐθεία παράλληλη πρός γνωστή διεύθυνση (δ), πού νά τέμνει καί τούς δύο κύκλους.

426. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν τμημάτων, τά ὁποῖα ἔχουν τά ἄκρα τους πάνω σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

427. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτό. Ἑνώνουμε τό Α μέ ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καί πάνω στό τμῆμα ΑΜ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ι τέτοιο, ὥστε $\frac{IA}{IM} = \frac{\varkappa}{\lambda}$. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

428. Δίνεται ἕνας κύκλος (O, R) καί ἕνα σημεῖο Α. Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου, νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Δ τοῦ τμήματος ΑΜ.

429. Δίνεται ἕνας κύκλος (O, R) καί δύο σημεῖα Β καί Γ ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδό του. Ἕνα μεταβλητό σημεῖο Α διαγράφει τόν κύκλο. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

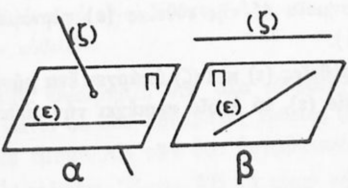
ΑΣΥΜΒΑΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

188. Ὁρισμός. Στήν § 147 εἴδαμε ὅτι ἀσύμβατες εὐθεῖες λέγονται δύο μή συνεπίπεδες εὐθεῖες.

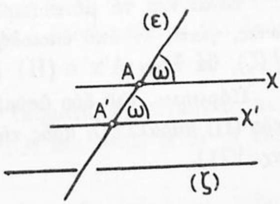
Πόρισμα. Κάθε ἐπίπεδο (Π), πού περιέχει μιά ἀπό τίς δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ), τέμνει τήν ἄλλη ἤ εἶναι παράλληλο πρός αὐτή (σχ. 217 α καί β).

189. Γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν. Ἄς θεωρήσουμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ) (σχ. 218). Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς εὐθείας (ε) φέρνουμε εὐθεία Αx // (ζ). Ἡ γωνία ω τῶν εὐθειῶν (ε) καί Αx εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ Α πάνω στήν εὐθεία (ε) καί λέγεται γωνία τῶν δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε) καί (ζ).

Πραγματικά, ἄν Α′ εἶναι ἕνα ἄλλο σημεῖο τῆς εὐθείας (ε) καί ἀπ' αὐτό φέρουμε εὐθεία Α′x′ // (ζ), θά εἶναι Αx // Α′x′, ὡς παράλληλες πρός τήν ἴδια εὐθεία (ζ). Ἄρα θά εἶναι καί $\widehat{A} = \widehat{A'} = \omega$.



Σχ. 217



Σχ. 218

190. Ὀρθογώνιες εὐθεῖες λέγονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες, πού ἡ γωνία τους εἶναι ὀρθή.

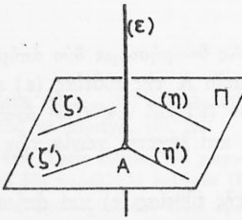
191. Θεώρημα. Ἄν μιά εὐθεία (ε) εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο εὐθεῖες (ζ) καί (η) ἑνός ἐπίπεδου (Π), ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο (Π).

Ἀπόδειξη. Ἀπό τό ἴχνος Α τῆς εὐθείας (ε) πάνω στό ἐπίπεδο (Π) φέρνουμε τίς εὐθεῖες (ζ′) // (ζ) καί (η′) // (η) (σχ. 219). Οἱ εὐθεῖες (ζ′)

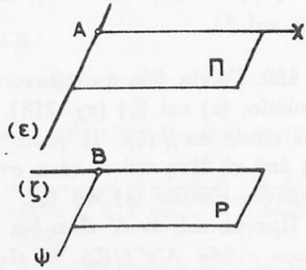
καί (η') ἀνήκουν στό ἐπίπεδο (Π) (§ 145). Ἐπειδή εἶναι (ε) $\perp$ (ζ), θά εἶναι (ε) $\perp$ (ζ'). Ὅμοια εἶναι καί (ε) $\perp$ (η'). Ἄρα ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο (Π), ἐπειδή εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες του.

192. Θεώρημα. Γιά δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ) ὑπάρχουν δύο μόνο παράλληλα ἐπίπεδα, πού τό καθένα περιέχει τήν καθεμιά.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τά σημεῖα Α καί Β τῶν δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε) καί (ζ) ἀντιστοίχως φέρνουμε ἀπό μία εὐθεία Αx καί Βy παράλληλη πρός τίς (ζ) καί (ε) ἀντιστοίχως (σχ. 220). Τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), πού ὁρίζονται, εἶναι παράλληλα, γιατί δύο εὐθεῖες τοῦ ἑνός εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλες πρός δύο εὐθεῖες τοῦ ἄλλου.



Σχ. 219



Σχ. 220

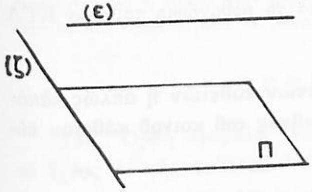
Εἶναι καί τά μόνα παράλληλα ἐπίπεδα, πού περιέχουν τίς δύο ἀσύμβατες, γιατί, ἄν ἀπό ὁποιοδήποτε σημεῖο Α' τῆς εὐθείας (ε) φέρναμε Α'x' // (ζ), θά ἦταν Α'x' $\in$ (Π) (§ 174).

Πόρισμα. Γιά δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ) ὑπάρχει ἕνα μόνο ἐπίπεδο (Π) παράλληλο πρός τήν εὐθεία (ε), τό ὁποῖο περιέχει τήν εὐθεία (ζ) (σχ. 221).

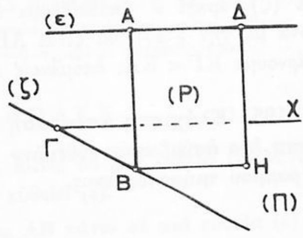
ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

193. Θεώρημα. Γιά δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ), ὑπάρχει μία καί μόνο μία εὐθεία κάθετος καί στίς δύο ἀσύμβατες.

Ἀπόδειξη. Ἀπό ἕνα σημεῖο Γ τῆς εὐθείας (ζ) φέρνουμε εὐθεία Γx // (ε) (σχ. 222). Οἱ δύο εὐθεῖες (ζ) καί Γx καθορίζουν ἐπίπεδο (Π). Ἀπό ἕνα σημεῖο Δ τῆς εὐθείας (ε) φέρνουμε ΔΗ $\perp$ (Π) καί ἀπό τό Η τήν εὐθεία ΗΒ // (ε). Ἡ εὐθεία ΗΒ ἀνήκει ἀσφαλῶς στό ἐπίπεδο (Π) (§ 174) καί ἑπομένως τέμνει τήν εὐθεία (ζ) σέ σημεῖο Β (ἀποκλείεται νά εἶναι παράλληλη, γιατί τότε θά ἦταν καί (ε) // (ζ)). Οἱ δύο παράλληλες (ε) καί ΒΗ καθορίζουν ἐπίπεδο (Ρ), στό ὁποῖο ἀνήκει προφανῶς καί ἡ ΔΗ. Ἀπό τό σημεῖο Β φέρνουμε εὐθεία παράλληλη πρός τή ΔΗ, πού ὡς εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), τέμνει τήν εὐθεία (ε) σέ σημεῖο Α. Τό τετράπλευρο ΑΔΗΒ εἶναι ἀπό τήν κατασκευή του παραλληλόγραμμο καί μάλιστα ὀρθογώνιο, γιατί εἶ-



Σχ. 221



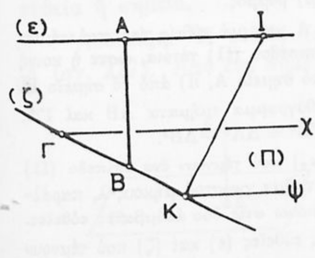
Σχ. 222

ναι ΔΗ $\perp$ (Π), ἄρα ΔΗ $\perp$ ΗΒ. Ἑπομένως θά εἶναι καί $\widehat{A} = 1^{L}$ ἤ ΑΒ $\perp$ (ε). Ἐπειδή ἐπιπλέον εἶναι ΔΗ $\perp$ (Π), θά εἶναι ΑΒ $\perp$ (Π), ὁπότε ΑΒ $\perp$ (ζ). Ἑπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κοινή κάθετος τῶν δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε) καί (ζ).

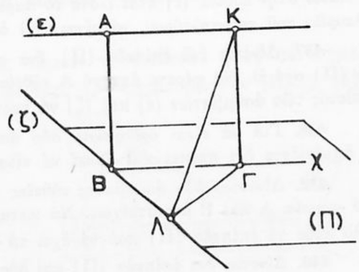
Ἡ κοινή κάθετος ΑΒ τῶν δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν εἶναι καί ἡ μοναδική. Πραγματικά ἔστω ὅτι ἡ ΙΚ (σχ. 223) εἶναι μία ἄλλη κοινή κάθετος τῶν δύο ἀσύμβατων. Ἀπό τό Κ φέρνουμε Ky // (ε). Τότε ἡ ΙΚ θά εἶναι κάθετος στήν Ky, ἐπειδή εἶναι κάθετος στήν παράλληλή της (ε). Ἡ Ky ὅμως ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π), γιατί Ky // (ε) // Γx. Ἄρα ΙΚ $\perp$ (Π), ὡς κάθετος στίς δύο εὐθεῖες του (ζ) καί Ky. Συνεπῶς ΑΒ // ΙΚ, ὡς κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο (Π). Ἄρα οἱ ΑΒ καί ΙΚ καθορίζουν ἐπίπεδο, στό ὁποῖο ἀνήκει ἡ ΑΙ $\equiv$ (ε) καί ἡ ΒΚ $\equiv$ (ζ), δηλαδή οἱ ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ) εἶναι συνεπίπεδες, ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα μία μόνο εἶναι ἡ κοινή κάθετος δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν.

194. Θεώρημα. Ἀπ' ὅλα τά εὐθύγραμμα τμήματα, πού ἔχουν τά ἄκρα τους πάνω σέ δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ), μικρότερο εἶναι τό κοινό κάθετο τμῆμα ΑΒ τῶν δύο ἀσύμβατων.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒ τό κοινό κάθετο τμῆμα τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε) καί (ζ) (σχ. 224). Ἀπό τό Β φέρνουμε τήν Βx // (ε), πού μαζί μέ τήν



Σχ. 223



Σχ. 224

εὐθεία (ζ) καθορίζει ἕνα ἐπίπεδο (Π)// (ε). Ἂν ΚΛ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο τμῆμα μέ τά ἄκρα του πάνω στίς δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ), ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι $AB < K\Lambda$. Φέρνουμε $K\Gamma \perp (\Pi)$, σύμφωνα μέ τήν § 175 θά εἶναι $AB = K\Gamma$. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΚΓΛ παίρνουμε $K\Gamma < K\Lambda$, ἑπομένως $AB < K\Lambda$.

195. Ἐλάχιστη ἀπόσταση δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν ἤ ἁπλῶς «ἀπόσταση δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν» λέγεται τό μῆκος τοῦ κοινοῦ κάθετου εὐθύγραμμου τμήματός τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

430. Δίνονται δύο ἀσύμβατες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Α. Νά φέρετε ἀπό τό Α εὐθεία πού νά τέμνει καί τίς δύο ἀσύμβατες.

431. Ἡ κοινή κάθετος ΑΒ δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) ἔχει μῆκος 12 cm καί ἡ γωνία τῶν ἀσύμβατων εἶναι 60^0. Πάνω στήν (ε_1) παίρνουμε τμῆμα $A\Gamma = 6$cm καί πάνω στήν (ε_2) τμῆμα $B\Delta = 8$ cm. Νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τοῦ τμήματος ΓΔ (δύο περιπτώσεις).

432. Ἀπό τό μέσο Γ τοῦ κοινοῦ κάθετου τμήματος ΑΒ δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) φέρνουμε ἐπίπεδο (Π) παράλληλο πρός τίς ἀσύμβατες. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε τμῆμα μέ τά ἄκρα του πάνω στίς δύο ἀσύμβατες διχοτομεῖται ἀπό τό ἐπίπεδο (Π).

433. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) παράλληλες πρός τό (Π). Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ κοινή κάθετος τῶν δύο ἀσύμβατων εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο (Π).

434. Σ' ἕνα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καί $A\Delta = B\Gamma$. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων του εἶναι ἡ κοινή κάθετός τους.

Β΄.

435. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Νά φέρετε εὐθεία πού νά τέμνει τίς δύο ἀσύμβατες καί νά ἔχει γνωστή διεύθυνση (δ).

436. Ἑνός μεταβλητοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οἱ κορυφές Α,Β,Γ διατηροῦνται σταθερές, ἐνῶ ἡ κορυφή του Δ διαγράφει μιά εὐθεία (ε). Νά βρεθεῖ ἡ θέση τοῦ Δ πάνω στήν εὐθεία (ε) ἔτσι ὥστε τό παραλληλόγραμμο, πού ἔχει κορυφές τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, νά εἶναι : α) ὀρθογώνιο, β) ρόμβος.

437. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνα σημεῖο του Α καί μιά εὐθεία (ε) πού τέμνει τό (Π) στό Β. Νά φέρετε ἀπό τό Α εὐθεία (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) τέτοια, ὥστε ἡ κοινή κάθετος τῶν ἀσύμβατων (ε) καί (ζ) νά περνᾶ i) ἀπό τό σημεῖο Α, ii) ἀπό τό σημεῖο Β.

438. Γιά νά εἶναι ὀρθογώνια δύο ἀσύμβατα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, ν' ἀποδείξετε ὅτι πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\Gamma A^2 - \Gamma B^2 = \Delta A^2 - \Delta B^2$.

439. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) πού τέμνουν ἕνα ἐπίπεδο (Π) στά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα γνωστοῦ μήκους λ, παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο (Π) πού νά ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες.

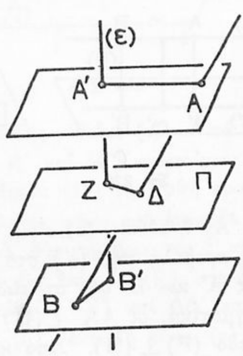
440. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ζ) πού τέμνουν τό (Π) στά σημεῖα Α καί Β. Ἕνα μεταβλητό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες καί παραμένει παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο (Π). Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου του Ι.

441. Ἄν σ' ἕνα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = ΓΔ καί ΑΔ = ΒΓ, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τά μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου.

ΟΡΘΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ

196. 'Ορθή προβολή ἑνός σημείου Α πάνω σέ μιά εὐθεία (ε) λέγεται τό ἴχνος Α΄ τῆς καθέτου ἀπό τό Α στήν εὐθεία (ε).

'Ορθή προβολή εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ πάνω σέ μιά εὐθεία (ε) λέγεται τό σύνολο τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος ΑΒ πάνω στήν εὐθεία (ε) (σχ. 225). Τό σημειοσύνολο τοῦτο εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ἄκρα τίς ὀρθές προβολές Α΄ καί Β΄ τῶν Α καί Β πάνω στήν εὐθεία (ε). Κάθε σημεῖο Δ τοῦ τμήματος ΑΒ προβάλλεται σ' ἕνα σημεῖο Ζ τοῦ τμήματος Α΄Β΄ μέ ἐπίπεδο (Π) ἀπό τό Δ κάθετο στήν (ε) καί ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο Ζ τοῦ τμήματος Α΄Β΄ εἶναι ἡ προβολή ἑνός σημείου Δ τοῦ τμήματος ΑΒ, ὅπου τό Δ εἶναι ἡ τομή τοῦ κάθετου ἐπιπέδου στήν (ε) ἀπό τό Ζ.



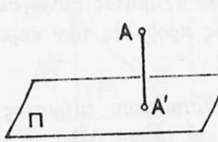
Σχ. 225

197. 'Ορθή προβολή ἑνός σημείου Α πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) λέγεται τό ἴχνος Α΄ τῆς κάθετης εὐθείας ἀπό τό Α στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 226).

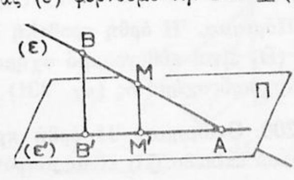
198. 'Ορθή προβολή ἑνός σχήματος (Σ) πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) λέγεται τό σύνολο τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ) πάνω στό ἐπίπεδο (Π).

199. Θεώρημα. Ἡ ὀρθή προβολή εὐθείας (ε) σέ ἐπίπεδο (Π) εἶναι εὐθεία ἤ σημεῖο.

'Απόδειξη. Ἡ εὐθεία (ε) γενικῶς τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) σέ σημεῖο Α (σχ. 227). 'Από ἕνα σημεῖο Β τῆς εὐθείας (ε) φέρνουμε τήν ΒΒ΄ ⊥ (Π).



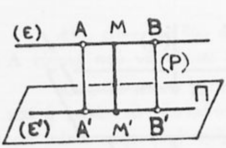
Σχ. 226



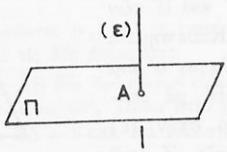
Σχ. 227

'Η εὐθεία ΒΒ′ καί τό σημεῖο Α καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), πού τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) κατά τήν εὐθεία (ε′). Τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας (ε) προβάλλεται πάνω στό ἐπίπεδο (Π) σέ σημεῖο Μ′ τῆς εὐθείας (ε′), γιατί ἡ ΜΜ′, ἐπειδή εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο (Π), εἶναι παράλληλη τῆς εὐθείας ΒΒ′ καί ἑπομένως εἶναι εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). 'Επομένως τό σημεῖο Μ′, στό ὁποῖο τέμνει τό ἐπίπεδο (Π), πρέπει νά ἀνήκει στό κοινό μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), δηλαδή στήν εὐθεία (ε′).

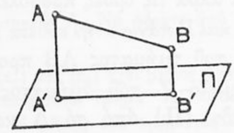
Καί ἀντιστρόφως, ἄν Μ′ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας (ε′), φέρνουμε ἀπ' αὐτό τήν κάθετο στό (Π), ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη τῆς ΒΒ′ καί ἑπομένως περιέχεται στό ἐπίπεδο ΒΒ′Α. Ἄρα τέμνει τήν ΑΒ σέ σημεῖο Μ. 'Απ' αὐτά συμπεραίνουμε πώς ἡ ὀρθή προβολή τῆς εὐθείας (ε) στό ἐπίπεδο (Π) εἶναι ἡ εὐθεία (ε′).



Σχ. 228



Σχ. 229



Σχ. 230

Ἄν ἡ εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 228), ἡ ὀρθή προβολή της (ε′) στό ἐπίπεδο (Π) καθορίζεται ἀπό τίς ὀρθές προβολές Α′ καί Β′ δύο σημείων Α καί Β τῆς εὐθείας (ε) στό ἐπίπεδο (Π). Πραγματικά, οἱ ΑΑ′ ⊥ (Π) καί ΒΒ′ ⊥ (Π) εἶναι παράλληλες καί ὁρίζουν ἐπίπεδο (Ρ) ⊥ (Π). 'Από κάθε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας (ε) ἡ ΜΜ′ ⊥ (Π) ἀνήκει στό (Ρ) καί ἑπομένως τέμνει τό (Π) στό Μ′ ∈ (ε′) καί ἀντιστρόφως, ἀπό ἕνα σημεῖο Μ′ τῆς (ε′) ἡ κάθετος στό (Π) ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Ρ) καί ἑπομένως τέμνει τήν (ε) σέ σημεῖο Μ. Οἱ εὐθεῖες (ε) καί (ε′), ὡς συνεπίπεδες καί χωρίς κοινό σημεῖο, εἶναι παράλληλες.

Ἄν τέλος ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 229), ἡ ὀρθή προβολή της στό (Π) εἶναι τό ἴχνος της Α πάνω στό ἐπίπεδο (Π), δηλαδή εἶναι σημεῖο.

Παρατήρηση. 'Η ὀρθή προβολή εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα τίς ὀρθές προβολές Α′ καί Β′ τῶν Α καί Β πάνω στό (Π) (σχ. 230).

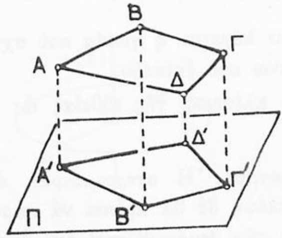
Πόρισμα. Ἡ ὀρθή προβολή ἑνός εὐθύγραμμου σχήματος πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) εἶναι εὐθύγραμμο σχῆμα μέ κορυφές τίς προβολές τῶν κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος (σχ. 231),

200. Θεώρημα. Ἡ ὀρθή προβολή ἑνός εὐθύγραμμου εμήματος ΑΒ πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) εἶναι μικρότερη ἤ ἴση ἀπό τό τμῆμα ΑΒ.

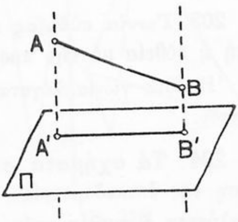
'Απόδειξη. Ἔστω Α′Β′ ἡ προβολή τοῦ τμήματος ΑΒ πάνω στό ἐπίπεδο

(Π) (σχ. 232). Τότε εἶναι Α΄Β΄ $\leqq$ ΑΒ, γιατί τό τμῆμα Α΄Β΄ εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν παράλληλων εὐθειῶν ΑΑ΄ καί ΒΒ΄. Τό = ἰσχύει μόνο στήν περίπτωση τῆς παραλληλίας τοῦ τμήματος ΑΒ μέ τό ἐπίπεδο (Π).

201. Θεώρημα. Οἱ ὀρθές προβολές δύο παράλληλων εὐθειῶν (ε) καί (ζ) πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.



Σχ. 231

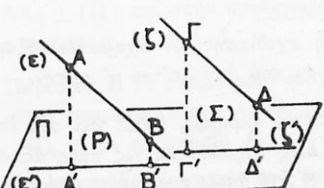


Σχ. 232

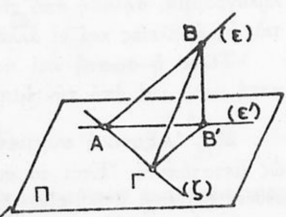
᾿Απόδειξη. Παίρνουμε δύο σημεῖα Α καί Β τῆς εὐθείας (ε) καί τά προβάλλουμε πάνω στό ἐπίπεδο (Π) στά σημεῖα Α΄ καί Β΄ ἀντιστοίχως (σχ. 233). Τά σημεῖα Α΄ καί Β΄ καθορίζουν στό ἐπίπεδο (Π) τήν ὀρθή προβολή τῆς εὐθείας (ε). ῾Ομοίως ἡ εὐθεία (ζ) προβάλλεται πάνω στό ἐπίπεδο (Π) στήν εὐθεία (ζ΄) μέ τίς ὀρθές προβολές Γ΄ καί Δ΄ δύο σημείων της Γ καί Δ. Οἱ παράλληλες εὐθεῖες ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), στό ὁποῖο ἀνήκει ἡ εὐθεία (ε). ῾Ομοίως οἱ παράλληλες εὐθεῖες ΓΓ΄ καί ΔΔ΄ καθορίζουν ἐπίπεδο (Σ), στό ὁποῖο ἀνήκει ἡ εὐθεία (ζ). ᾿Επειδή εἶναι (ε) // (ζ) καί ΑΑ΄ // ΓΓ΄ ὡς κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο (Π), συμπεραίνουμε πῶς (Ρ) // (Σ) (§ 184). ῾Επομένως καί (ε΄) // (ζ΄), γιατί εἶναι τομές παράλληλων ἐπιπέδων ἀπό τρίτο ἐπίπεδο.

202. Θεώρημα. ῎Αν μιά εὐθεία (ε) τέμνει ἕνα ἐπίπεδο (Π) στό σημεῖο Α, σχηματίζει γωνίες μέ τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπό τίς ὁποῖες μικρότερη εἶναι αὐτή πού σχηματίζεται μέ τήν προβολή της (ε΄).

᾿Απόδειξη. ᾿Από ἕνα σημεῖο Β τῆς εὐθείας (ε) φέρνουμε ΒΒ΄ $\perp$ (Π) (σχ. 234). ῾Η εὐθεία ΑΒ΄ $\equiv$ (ε΄) εἶναι ἡ προβολή τῆς εὐθείας (ε) πάνω στό



Σχ. 233



Σχ. 234

ἐπίπεδο (Π). Ἄς θεωρήσουμε καί μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α. Πάνω σ' αὐτή παίρνουμε τμῆμα $ΑΓ = ΑΒ'$ καί ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

$ΒΒ' < ΒΓ$, γιατί ἡ ΒΓ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου $ΒΒ'Γ$ ($\widehat{Β'} = 1^{\llcorner}$). Τότε ἀπό τά τρίγωνα $ΒΑΒ'$ καί $ΒΑΓ$, πού ἔχουν τή ΒΑ κοινή, τήν $ΑΒ' = ΑΓ$ καί $ΒΒ' < ΒΓ$, συμπεραίνουμε πώς $\widehat{ΒΑΒ'} < \widehat{ΒΑΓ}$.

203. Γωνία εὐθείας καί ἐπιπέδου λέγεται ἡ γωνία πού σχηματίζει αὐτή ἡ εὐθεία μέ τήν προβολή της πάνω στό ἐπίπεδο.

Ἡ ἴδια γωνία λέγεται καί **γωνία κλίσεως** τῆς εὐθείας ὡς πρός τό ἐπίπεδο.

204. Τά σχήματα στή Στερεομετρία. Ἡ στερεομετρία, ὡς ἐπέκταση τῆς ἐπιπεδομετρίας, μέ πρώτη σκέψη δέ θά πρέπει νά παρουσιάζει μεγαλύτερη δυσκολία στήν ἀντιμετώπιση τῶν θεμάτων της, ἀπό ἐκείνη πού παρουσιάζει ἡ ἐπιπεδομετρία. Ἐντούτοις ὅμως ὑπάρχει μεγαλύτερη δυσκολία καί τοῦτο ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι δέν ἐργαζόμαστε μέ αὐτά τά ἴδια στερεά τῆς στερεομετρίας, ἀλλά ἀπεικονίζουμε αὐτά σέ ἐπίπεδο (φύλλο σχεδιάσεως ἤ πίνακα) καί ἐργαζόμαστε μέ τίς εἰκόνες τους.

Οἱ εἰκόνες αὐτές τῶν στερεῶν, δέν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρά οἱ ὀρθές προβολές τῶν στερεῶν πάνω στό ἐπίπεδο σχεδιάσεως. Γιά τή σχεδίαση ἑπομένως τῶν σχημάτων πρέπει νά ἔχουμε ὑπ' ὄψη ὁρισμένους βασικούς κανόνες, δηλαδή:

i) Ἄν τό στερεό πού πρόκειται ν' ἀπεικονίσουμε περιέχει παράλληλες εὐθεῖες, αὐτές θά σχεδιαστοῦν ὡς παράλληλες (§ 201).

ii) Τά μήκη γενικά δέ διατηροῦνται, ἀλλά προβάλλονται σέ μικρότερα (§ 449).

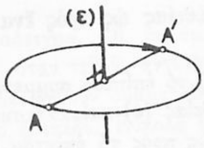
iii) Δύο παράλληλα καί ἴσα τμήματα ἔχουν παράλληλες καί ἴσες προβολές.

iv) Οἱ γωνίες γενικά δέ διατηροῦνται, ἀλλά προβάλλονται σέ μεγαλύτερες ἤ μικρότερες γωνίες καί τοῦτο θά ἐξαρτᾶται ἀπό τή φανταστική θέση τοῦ στερεοῦ ὡς πρός τό ἐπίπεδο σχεδιάσεως. Τά ἐπίπεδα τμήματα λ.χ. πού τά φανταζόμαστε ὡς ὀρθογώνια, τά σχεδιάζουμε συνήθως ὡς πλάγια παραλληλόγραμμα, δηλαδή ἀπό τίς ὀρθές γωνίες τους οἱ δύο ἀπέναντι προβάλλονται ὡς ἀμβλεῖες καί οἱ ἄλλες δύο ὡς ὀξεῖες.

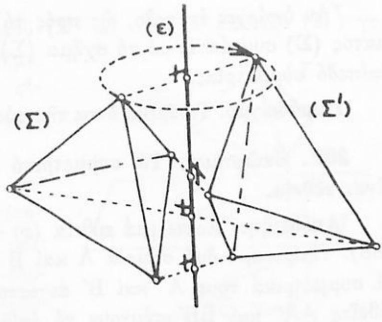
Τέλος ἡ σωστή καί παραστατική σχεδίαση τῶν σχημάτων ἐξαρτᾶται κατά πολύ καί ἀπό τήν ἐμπειρία ἐκείνου πού ἀσχολεῖται μ' αὐτήν.

205. Ἀξονική συμμετρία. Ὁρίζεται ἀκριβῶς, ὅπως καί στό ἐπίπεδο ὡς μετατόπιση. Ἔτσι τό συμμετρικό ἑνός σημείου Α, ὡς πρός ἄξονα μιά εὐθεία (ε) (σχ. 235), εἶναι ἕνα σημεῖο Α', τό ὁποῖο προκύπτει ἀπό τήν περιστροφή τοῦ σημείου Α γύρω ἀπ' τήν εὐθεία (ε), κατά γωνία 180^0. Τό ἐπίπεδο, πάνω στό ὁποῖο γίνεται ἡ περιστροφή τοῦ Α, εἶναι κάθετο στόν ἄξονα συμμετρίας (ε). Τό τμῆμα ΑΑ′ ἔχει ὡς μεσοκάθετο τόν ἄξονα συμμετρίας (ε).

Τό συμμετρικό (Σ′) ἑνός στερεοῦ (Σ) ὡς πρός ἕνα ἄξονα συμμετρίας (ε) ἀπαρτίζεται ἀπό τό σύνολο τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ στερεοῦ (Σ) ὡς πρός τόν ἴδιο ἄξονα (σχ. 236). Τά δύο στερεά (Σ) καί (Σ′) εἶναι ἴσα, γιατί τό (Σ′) προκύπτει ἀπό μετατόπιση (περιστροφή) τοῦ στερεοῦ (Σ).



Σχ. 235



Σχ. 236

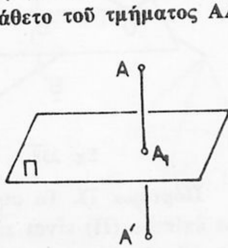
206. Ἄξονας συμμετρίας στερεοῦ. Ἄν γιά ἕνα στερεό (Σ) ὑπάρχει εὐθεία (ε) καί εἶναι τέτοια, ὥστε τό συμμετρικό Μ′ τοῦ ὁποιουδήποτε σημείου Μ τοῦ στερεοῦ (Σ), ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν (ε), νά ἀνήκει στό (Σ), τότε λέμε ὅτι τό στερεό (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία (ε).

ΣΥΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟ (ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΣ)

207. Ὁρισμός. Ἄς πάρουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σ' αὐτό (σχ. 237).

Συμμετρικό τοῦ σημείου Α, πρός τό ἐπίπεδο (Π), λέγεται ἕνα σημεῖο Α′, τέτοιο, ὥστε τό ἐπίπεδο (Π) νά εἶναι τό μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΑ′.

Μετά ἀπ' αὐτό τόν ὁρισμό, γιά νά κατασκευάσουμε τό συμμετρικό Α′ τοῦ σημείου Α ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π), φέρνουμε ἀπ' τό Α τήν $AA_1 \perp (\Pi)$ καί στήν προέκτασή της παίρνουμε τμῆμα $A_1A' = A_1A$.



Σχ. 237

Πόρισμα Ι. Τό συμμετρικό τοῦ σημείου Α′ πού εἶναι συμμετρικό τοῦ Α, ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π), εἶναι τό σημεῖο Α.

Πόρισμα ΙΙ. Τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) παραμένουν ἀναλλοίωτα στή συμμετρία ὡς πρός τό (Π), δηλαδή συμπίπτουν μέ τά συμμετρικά τους.

208. Ὁρισμός. Συμμετρικό ἑνός σχήματος (Σ), ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π) λέγεται ἕνα σχῆμα (Σ΄), τό ὁποῖο ἀπαρτίζεται ἀπό τά συμμετρικά τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π).

Ἄν ὑπάρχει ἐπίπεδο, ὡς πρός τό ὁποῖο τό συμμετρικό (Σ΄) ἑνός σχήματος (Σ) συμπίπτει μέ τό σχῆμα (Σ), τότε θά λέμε ὅτι τό σχῆμα (Σ) ἔχει ἐπίπεδο συμμετρίας.

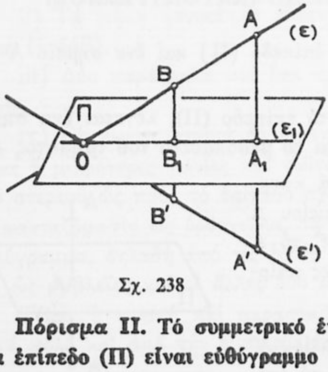
Παράδειγμα. Τά ἔμβια ὄντα τῆς φύσεως γενικά ἔχουν ἐπίπεδο συμμετρίας.

209. Θεώρημα. Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδο εἶναι εὐθεία.

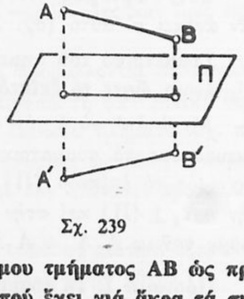
Ἀπόδειξη. Ἔστω μιά εὐθεία (ε) καί (Π) τό ἐπίπεδο συμμετρίας (σχ. 238). Παίρνουμε δυό σημεῖα Α καί Β τῆς εὐθείας (ε) καί κατασκευάζουμε τά συμμετρικά τους Α΄ καί Β΄ ἀντιστοίχως, ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π). Οἱ εὐθεῖες ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ τέμνουν τό ἐπίπεδον (Π) ἀντιστοίχως, στά σημεῖα A_1 καί B_1, τά ὁποῖα ὁρίζουν τήν ὀρθή προβολήν (ε_1) τῆς εὐθείας (ε) πάνω στό ἐπίπεδο (Π). Τότε ἡ συμμετρία τῆς εὐθείας (ε) ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ καί ἀξονική συμμετρία ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία (ε_1). Ἑπομένως, ἐπειδή συνυπάρχει ἀξονική συμμετρία, τό συμμετρικό τῆς εὐθείας (ε) ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π) εἶναι εὐθεία (ε΄).

Πόρισμα I. Ἄν μιά εὐθεία (ε) τέμνει ἕνα ἐπίπεδο (Π) σέ σημεῖο Ο, ἡ συμμετρική εὐθεία (ε΄) τῆς (ε) ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π) περνάει ἀπό τό σημεῖο Ο.

Ἄν ἡ εὐθεία (ε) ἦταν παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο (Π), καί ἡ συμμετρική της θά ἦταν παράλληλη πρός τό (Π).



Σχ. 238



Σχ. 239

Πόρισμα II. Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π) εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα Α΄Β΄, πού ἔχει γιά ἄκρα τά συμμετρικά τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 239) καί εἶναι ἴσο μέ τό ΑΒ.

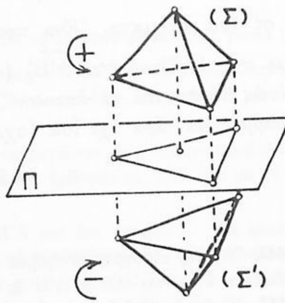
Πόρισμα III. Τό συμμετρικό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π), εἶναι ἴσο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄, γιατί τά δύο τρίγωνα ἔχουν τίς πλευρές τους ἀντιστοίχως ἴσες. Συνεπῶς καί τό συμμετρικό ὁποιουδήποτε ἐπί-

πεδου εὐθύγραμμου σχήματος ὡς πρός ἐπίπεδο εἶναι ἴσο σχῆμα καί γενικότερα τό συμμετρικό ὁποιουδήποτε ἐπίπεδου σχήματος εἶναι ἴσο σχῆμα.

Παρατηρήσεις.

i) Τό συμμετρικό (Σ′) ἑνός στερεοῦ (Σ) ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π) γενικά δέν εἶναι σχῆμα ἴσο μέ τό σχῆμα (Σ) καί τοῦτο, γιατί τά δύο στερεά εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα (σχ. 240).

Παράδειγμα. Οἱ παλάμες τῶν χεριῶν μας, ὅταν τεθοῦν ἀντιμέτωπες, μποροῦν νά θεωρηθοῦν συμμετρικές, ὡς πρός ἐνδιάμεσο ἐπίπεδο. Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι δέν εἶναι ἴσες, γιατί, ἄν ἦταν ἄυλες, δέ θά μποροῦσαν νά ταυτιστοῦν μέ τοποθέτηση τῆς μιᾶς πάνω στήν ἄλλη.



Σχ. 240

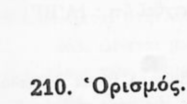
ii) Ἡ συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδο λέγεται καί κατοπτρισμός, γιατί δύο στερεά συμμετρικά μεταξύ τους ὡς πρός ἐπίπεδο ἔχουν τέτοια σχέση, ὅποια σχέσει ἔχει τό ἕνα ἀπ' αὐτά μέ τό κατοπτρικό του εἴδωλο μέσα σέ ἐπίπεδο κάτοπτρο.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

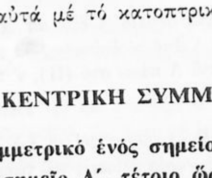
210. Ὁρισμός. Συμμετρικό ἑνός σημείου Α ὡς πρός κέντρο ἕνα ἄλλο σημεῖο Ο λέγεται ἕνα σημεῖο Α′, τέτοιο ὥστε τό τμῆμα ΑΑ′ νά ἔχει γιά μέσο του τό κέντρο τῆς συμμετρίας Ο (σχ. 241).

Πόρισμα. Τό συμμετρικό τοῦ σημείου Α′, πού εἶναι συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τό κέντρο Ο εἶναι τό σημεῖο Α.

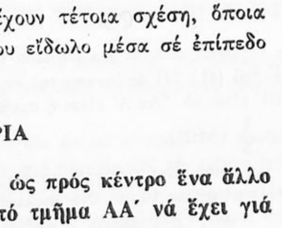
211. Ὁρισμός. Συμμετρικό ἑνός σχήματος (Σ) ὡς πρός κέντρο σημεῖο Ο λέγεται ἕνα σχῆμα (Σ′), πού ἀπαρτίζεται ἀπό τά συμμετρικά τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ) ὡς πρός τό κέντρο Ο (σχ. 243).



Σχ. 241



Σχ. 242



Σχ. 243

"Αν τό σχῆμα (Σ') ταυτιζόταν μέ τό σχῆμα (Σ), θά λέγαμε ὅτι τό (Σ) ἔχει κέντρο συμμετρίας τό σημεῖο Ο.

212. Ἡ κεντρική συμμετρία ἀπεικονίζει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σέ ἴσο τμῆμα Α'Β' καί ἑπομένως τά ἐπίπεδα σχήματα γενικά τά ἀπεικονίζει σέ ἴσα σχήματα. "Ενα προσανατολισμένο τμῆμα ὅμως $\overrightarrow{AB}$ τό ἀπεικονίζει στό ἀντίθετό του $\overrightarrow{A'B'}$ (σχ. 242), δηλαδή εἶναι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$ καί ἑπομένως τά στερεά τά ἀπεικονίζει σέ ἀντιθέτως προσανατολισμένα, δηλαδή μή ἐφαρμόσιμα, ἄρα ὄχι ἴσα (σχ. 243).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

442. "Αν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ προβάλλεται πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) στό Α'Β', ν' ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $AB \geqq A'B' \geqq 0$.

443. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος προβάλλεται στό μέσο τῆς προβολῆς του πάνω σέ ἐπίπεδο.

444. Τρία σημεῖα Α,Β,Γ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία καί προβάλλονται πάνω σέ ἐπίπεδο (Π) στά Α',Β',Γ' ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι : $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{A'B'}{B'\Gamma'}$.

445. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτό καί δύο σημεῖα Β καί Γ τοῦ (Π). Ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπό τό ἐπίπεδο (Π) εἶναι 3λ καί ἀπό τήν εὐθεία ΒΓ εἶναι 5λ. "Αν Α' εἶναι ἡ προβολή τοῦ Α πάνω στό (Π), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι : $(A'B\Gamma) = \dfrac{4}{5}(AB\Gamma)$.

446. "Ενα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μέ μῆκος 20 cm ἔχει προβολή Α'Β' σέ ἐπίπεδο (Π) μέ μῆκος 10 cm. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος, ὡς πρός τό ἐπίπεδο.

447. "Ενα σημεῖο Α ἀπέχει ἀπό ἐπίπεδο (Π) 8 cm καί ἄλλο σημεῖο Β ἀπέχει ἀπό τό (Π) 10 cm. "Αν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος ΑΒ, ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π), εἶναι 30^o, νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ, ὅταν : α) τά Α καί Β βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Π), β) τά Α καί Β βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ (Π).

448. Νά ἐξεταστεῖ τό προηγούμενο πρόβλημα, ἄν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος ΑΒ, ὡς πρός τό (Π), εἶναι 45^o.

Β'.

449. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ προβολές δύο παράλληλων καί ἴσων εὐθύγραμμων τμημάτων πάνω στήν ἴδια εὐθεία εἶναι ἴσες.

450. Δίνεται μιά ὀρθή γωνία $x\widehat{K}y$. "Αν ἡ μιά πλευρά της εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ προβολή τῆς ὀρθῆς γωνίας στό ἐπίπεδο (Π) εἶναι ὀρθή γωνία.

451. Δίνεται μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Α. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ σημείου Α πάνω στά ἐπίπεδα, τά ὁποῖα περνοῦν ἀπό τήν εὐθεία (ε).

452. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β πού δέν ἀνήκουν σ' αὐτό. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, πού τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπό τά σημεῖα Α καί Β νά εἶναι τό πιό μικρό πού μπορεῖ νά ὑπάρξει.

453. Τό ἴδιο πρόβλημα, ὅταν ἡ διαφορά τῶν ἀποστάσεων ἀπό τά σημεῖα Α καί Β πρέπει νά εἶναι ἡ πιό μεγάλη πού ὑπάρχει.

454. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πού νά ἔχει ὡς μέσο ἕνα γνωστό σημεῖο Ο καί τά ἄκρα του νά βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία (ε) καί σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) ἀντιστοίχως.

455. Δίνεται ὀρθή γωνία $\widehat{xKy}$, πού οἱ πλευρές της τέμνουν ἕνα ἐπίπεδο (Π) στά Α καί Β. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ προβολή τῆς ὀρθῆς γωνίας πάνω στό ἐπίπεδο εἶναι ἀμβλεία γωνία.

456. Πότε ἡ προβολή μιᾶς ὀρθῆς γωνίας πάνω σέ ἐπίπεδο εἶναι ὀξεία γωνία;

457. Δίνεται μιά ὀξεία γωνία $\widehat{xOy}$. Ἄν ἡ μία πλευρά της εἶναι παράλληλη πρός ἐπίπεδο (Π), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ προβολή τῆς γωνίας πάνω στό ἐπίπεδο εἶναι ὀξεία γωνία.

458. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὀρθῶν προβολῶν ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος πάνω σέ τρεῖς εὐθεῖες, ἀνά δύο ὀρθογώνιες, εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ τμήματος αὐτοῦ.

459. Δίνεται ἕνα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί ἕνα σημεῖο Σ. Νά φέρετε ἀπό τό Σ ἕνα ἐπίπεδο, πάνω στό ὁποῖο τό τετράπλευρο νά προβάλλεται κατά παραλληλόγραμμο.

460. Μέ ποιές συνθῆκες ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προβάλλεται πάνω σέ ἐπίπεδο κατά τή διχοτόμο τῆς προβολῆς της;

461. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Ἕνα μεταβλητό κατά θέση τμῆμα μέ σταθερό μῆκος λ ἔχει τά ἄκρα του στίς δύο ἀσύμβατες. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδο, ὡς πρός τό ὁποῖο τό τμῆμα σχηματίζει σταθερή γωνία κλίσεως καί προβάλλεται πάνω σ' αὐτό κατά σταθερό μῆκος.

462. Δίνονται δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄξονες συμμετρίας, μέ καθέναν ἀπό τούς ὁποίους ἡ μιά ἀπό τίς ἀσύμβατες εὐθεῖες ἀπεικονίζεται στήν ἄλλη.

463. Δίνεται μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σ' αὐτή. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α, ὡς πρός τά ἐπίπεδα, πού περνοῦν ἀπ' τήν εὐθεία (ε).

464. Δίνονται δύο ὀρθογώνιες εὐθεῖες (ε) καί (ζ). Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μέ σταθερό μῆκος λ ἔχει τά ἄκρα του στίς δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

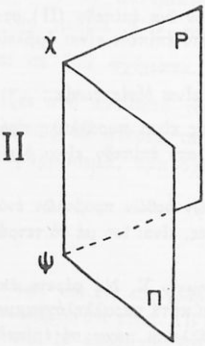
ΔΙΕΔΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

213. Ὁρισμός. Δύο ἡμιεπίπεδα (Π) καί (Ρ) μέ κοινή ἀρχή μιά εὐθεία xy διαιροῦν τό χῶρον σέ δύο περιοχές Ι καί ΙΙ (σχ. 244). Ἡ καθεμιά ἀπ' τίς περιοχές αὐτές λέγεται δίεδρη γωνία μέ ἀκμή τήν εὐθεία xy καί μέ ἕδρες τά ἡμιεπίπεδα (Π) καί (Ρ).

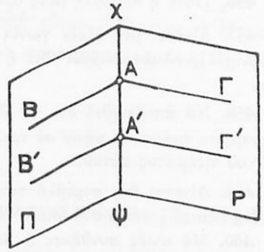
Τή δίεδρη γωνία τή συμβολίζουμε μέ (Π)xy(Ρ).

214. Ἀντίστοιχη ἐπίπεδη μιᾶς διέδρου. Ἄς θεωρήσουμε μιά δίεδρη γωνία (Π)xy(Ρ) καί ἔστω Α ἕνα σημεῖο τῆς ἀκμῆς της xy (σχ. 245). Ἀπό τό Α φέρνουμε τό κάθετο ἐπίπεδο στή xy, πού τέμνει τίς ἕδρες τῆς διέδρου κατά τίς ἡμιευθεῖες ΑΒ καί ΑΓ. Ἡ σχηματιζόμενη ἐπίπεδη γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ σημείου Α πάνω στή xy καί λέγεται «ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ)».

Πραγματικά, ἄν Α′ εἶναι ἕνα ἄλλο σημεῖο τῆς ἀκμῆς xy καί φέρουμε ἀπ' αὐτό τό κάθετο ἐπίπεδο στή xy, θά καθοριστεῖ ἀντίστοιχα ἡ ἐπίπεδη



Σχ. 244



Σχ. 245

γωνία $B'\widehat{A'}\Gamma'$, πού εἶναι προφανῶς ἴση μέ τή $B\widehat{A}\Gamma$, γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες καί ὁμόρροπες (§ 184).

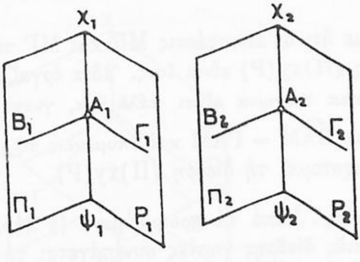
Πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι οἱ πλευρές τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης γωνίας βρίσκονται στίς ἕδρες τῆς δίεδρης καί εἶναι κάθετες στήν ἀκμή της.

215. Θεώρημα. Ἄν δύο δίεδρες γωνίες $(\Pi_1)x_1y_1(P_1)$ καί $(\Pi_2)x_2y_2(P_2)$ εἶναι ἴσες, τότε καί οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους εἶναι ἴσες καί ἀντιστρόφως.

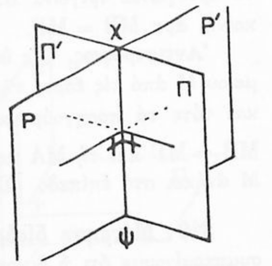
Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ οἱ δίεδρες εἶναι ἴσες, μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση καί ἑπομένως μποροῦν νά ἀποκτήσουν κοινή, ἄρα ἴση ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία, μέ κάθετο ἐπίπεδο στήν κοινή ἀκμή τους.

Ἀντιστρόφως. Παίρνουμε $B_1\widehat{A}_1\Gamma_1 = B_2\widehat{A}_2\Gamma_2$ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τῶν διέδρων (σχ. 246). Φανταζόμαστε μετατόπιση τῆς ἐπίπεδης γωνίας $B_2\widehat{A}_2\Gamma_2$ ἔτσι, ὥστε νά ταυτιστεῖ μέ τή $B_1\widehat{A}_1\Gamma_1$. Τότε κατανάγκη ἡ ἀκμή x_2y_2 θά ταυτιστεῖ μέ τήν ἀκμή x_1y_1, γιατί διαφορετικά στό ἐπίπεδο $B_1A_1\Gamma_1$ θά ὑπῆρχαν δύο κάθετες εὐθεῖες στό σημεῖο A_1, πράγμα ἄτοπο. Τότε ὅμως τό ἡμιεπίπεδο (Π_2) στή νέα θέση του θά ταυτιστεῖ μέ τό (Π_1), γιατί θά ἔχει μέ αὐτό κοινές τίς A_1B_1 καί x_1y_1. Ὁμοίως καί τό ἡμιεπίπεδο (P_2) θά ταυτιστεῖ μέ τό (P_1). Ἄρα οἱ δίεδρες εἶναι ἴσες, ἀφοῦ μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση.

216. Κατ' ἀκμή δίεδρες λέγονται δύο δίεδρες γωνίες $(\Pi)xy(P)$ καί $(\Pi')xy(P')$ (σχ. 247), πού ἔχουν κοινή ἀκμή xy καί εἶναι συμμετρικές ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν ἀκμή τους xy. Ἑπομένως δύο κατ' ἀκμή δίεδρες γωνίες εἶναι ἴσες (§ 205). Οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες τους, πού προκύπτουν ἀπό τό ἴδιο κάθετο ἐπίπεδο στήν ἀκμή xy, εἶναι κατά κορυφήν γωνίες.



Σχ. 246

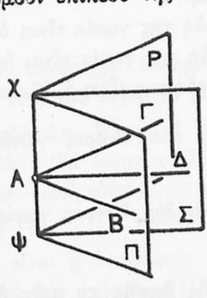


Σχ. 247

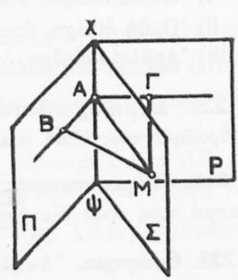
217. Διχοτομοῦν ἐπίπεδο μιᾶς δίεδρης γωνίας (Π)xy(P) (σχ. 248), λέγεται τό ἐπίπεδο (Σ) πού χωρίζει τή δίεδρη σέ δύο ἴσες δίεδρες γωνίες. Αὐτό ὁρίζεται ἀπό τήν ἀκμή xy τῆς δίεδρης γωνίας καί ἀπό τή διχοτόμο ΑΔ μιᾶς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης γωνίας της $\widehat{B A \Gamma}$. Πραγματικά εἶναι (Π)xy (Σ) = (P)xy(Σ), γιατί $\widehat{B A \Delta} = \widehat{\Gamma A \Delta}$.

218. Χαρακτηριστική ἰδιότητα τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου. Κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου πού διχοτομεῖ μιά δίεδρη γωνία ἰσαπέχει ἀπό τίς ἕδρες της καί ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο ἐσωτερικό μιᾶς δίεδρης πού ἰσαπέχει ἀπό τίς ἕδρες της ἀνήκει στό ἐπίπεδο πού διχοτομεῖ τή δίεδρη γωνία.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε μιά δίεδρη γωνία (Π)xy(P), ἔστω (Σ) τό διχοτομοῦν ἐπίπεδό της καί Μ ἕνα σημεῖο τοῦ (Σ) (σχ. 249). Ἀπό τό Μ



Σχ. 248



Σχ. 249

φέρνουμε ΜΑ ⊥ xy, ΜΒ ⊥ (Π), ΜΓ ⊥ (P), ὁπότε ΑΒ ⊥ xy καί ΑΓ ⊥ xy (θεώρ. τριῶν καθέτων), δηλαδή ἡ γωνία $\widehat{B A \Gamma}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς δίεδρης (Π)xy(P), καθώς καί οἱ $\widehat{B A M}$ καί $\widehat{\Gamma A M}$ οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες τῶν (Π)xy(Σ) καί (Ρ)xy(Σ). Ἐπειδή τό σημεῖο Μ ἀνήκει στό ἐπίπεδο πού διχοτομεῖ τή δίεδρη (Π)xy(Ρ), ἕπεται ὅτι $\widehat{ΒΑΜ} = \widehat{ΓΑΜ}$. Ἄρα τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΜ καί ΓΑΜ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν καί τή ΜΑ κοινή, ἄρα ΜΒ = ΜΓ.

Ἀντιστρόφως. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ ἀποστάσεις ΜΒ καί ΜΓ τοῦ σημείου Μ ἀπό τίς ἕδρες τῆς δίεδρης (Π)xy(Ρ) εἶναι ἴσες. Ἴδια ἐργαζόμαστε καί τότε τά προηγούμενα ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι πάλι ἴσα, γιατί ἔχουν ΜΒ = ΜΓ καί τή ΜΑ κοινή. Ἄρα $\widehat{ΒΑΜ} = \widehat{ΓΑΜ}$ καί ἑπομένως τό σημεῖο Μ ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Σ) πού διχοτομεῖ τή δίεδρη (Π)xy(Ρ).

219. Μέτρηση δίεδρης γωνίας. Ἀπό τά προηγούμενα (§ 215, 217) συμπεραίνουμε ὅτι ἡ διχοτόμηση μιᾶς δίεδρης γωνίας συνεπάγεται τή διχοτόμηση τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδής της καί ἀντίστροφα. Ὅμοια μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ διαίρεση μιᾶς δίεδρης σέ ν ἴσες δίεδρες συνεπάγεται τή διαίρεση σέ ν ἴσες ἐπίπεδες τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης. Ἄρα τά γεωμετρικά στοιχεῖα «δίεδρες γωνίες» καί «ἀντίστοιχες ἐπίπεδες» εἶναι ἀνάλογα καί ἑπομένως δέχονται ἀριθμητικά μόνο τίς ἴδιες μονάδες μετρήσεως. Λέμε λ.χ. ὅτι μία δίεδρη γωνία εἶναι 60^0, ἄν καί μόνο ἡ ἀντίστοιχή της ἐπίπεδη εἶναι 60^0. Εὐνόητο εἶναι ὅτι ὅλες οἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γωνιῶν ἔχουν τίς ἀντίστοιχές τους γιά τή μέτρηση τῶν δίεδρων γωνιῶν.

Οἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καί τῆς ἀφαιρέσεως μεταξύ δίεδρων γωνιῶν, καθώς καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἤ διαιρέσεως διέδρου μέ φυσικό ἀριθμο, ἀνάγονται στίς ἀντίστοιχες πράξεις μεταξύ τῶν ἀντίστοιχων ἐπιπέδων γωνιῶν τους.

220. Εἴδη δίεδρων γωνιῶν. Ἀντίστοιχα πρός τά γνωστά εἴδη τῶν ἐπίπεδων γωνιῶν ὁρίζουμε καί τίς δίεδρες γωνίες:

i) **Ὀξεία δίεδρη,** ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδή της γωνία εἶναι ὀξεία.
ii) **Ὀρθή δίεδρη,** ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδή της γωνία εἶναι ὀρθή.
iii) **Ἀμβλεία δίεδρη,** ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδή της εἶναι ἀμβλεία γωνία.

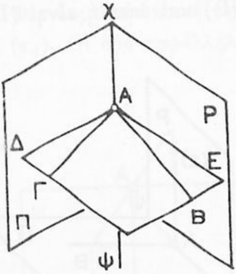
221. Συμπληρωματικές δίεδρες λέγονται δύο δίεδρες γωνίες, πού τό ἄθροισμά τους εἶναι μιά ὀρθή δίεδρη.

222. Παραπληρωματικές δίεδρες λέγονται δύο δίεδρες γωνίες, πού ἄθροισμά τους εἶναι μία πεπλατυσμένη δίεδρη.

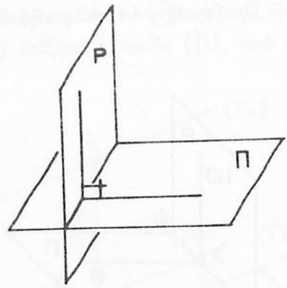
223. Θεώρημα. Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς ἀκμῆς xy μιᾶς δίεδρης γωνίας (Π)xy(Ρ) φέρουμε ἡμιευθεῖες ΑΒ καί ΑΓ κάθετες στίς ἕδρες τῆς δίεδρης καί πρός τό μέρος τῶν ἑδρῶν της (Ρ) καί (Π) ἀντίστοιχα, οἱ ἡμιευθεῖες ΑΒ καί ΑΓ ὁρίζουν δίεδρη μέ ἀκμή τή xy παραπληρωματική τῆς δίεδρης (Π)xy(Ρ).

Ἀπόδειξη. $ΑΒ \perp (Π) \Rightarrow ΑΒ \perp xy$, $ΑΓ \perp (Ρ) \Rightarrow ΑΓ \perp xy$ (σχ. 250).

Ἄρα τό ἐπίπεδο τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ καί ΑΓ εἶναι κάθετο στήν ἀκμή xy καί ἑπομένως οἱ τομές του ΑΔ καί ΑΕ μέ τίς ἕδρες τῆς δίεδρης δίνουν τήν



Σχ. 250



Σχ. 251

ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία $\widehat{\Delta A E}$ τῆς δίεδρης. Εἶναι ἀρκετό ν' ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι $\widehat{B A \Gamma} + \widehat{\Delta A E} = 2^{\llcorner}$. Ἀλλά $\widehat{B A \Delta} = 1^{\llcorner}$, $\widehat{\Gamma A E} = 1^{\llcorner} \Rightarrow \widehat{B A \Delta} + \widehat{\Gamma A E} = 2^{\llcorner} \Rightarrow$ $\Rightarrow (\widehat{B A \Gamma} + \widehat{\Gamma A \Delta}) + (\widehat{\Gamma A B} + \widehat{B A E}) = 2^{\llcorner} \Rightarrow \widehat{B A \Gamma} + (\widehat{\Gamma A \Delta} + \widehat{\Gamma A B} + \widehat{B A E}) = 2^{\llcorner} \Rightarrow \widehat{B A \Gamma} + \widehat{\Delta A E} = 2^{\llcorner}$.

ΚΑΘΕΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

224. Ὁρισμός. Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) λέγονται κάθετα μεταξύ τους, ὅταν μιά ἀπ' τίς τέσσερις δίεδρες πού σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή (σχ. 251).

Εὐνόητο εἶναι ὅτι τότε καί οἱ τέσσερις δίεδρες πού σχηματίζονται εἶναι ὀρθές.

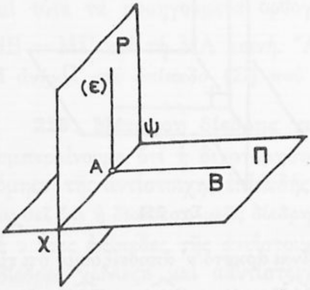
225. Θεώρημα. Θεωροῦμε μιά εὐθεία (ε) κάθετη σ' ἐπίπεδο (Π). Κάθε ἐπίπεδο (Ρ), πού περιέχει τήν εὐθεία (ε), εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο (Π).

Ἀπόδειξη. Ἔστω Α τό ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) πάνω στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 252). Τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ἀφοῦ ἔχουν κοινό σημεῖο τό Α, θά ἔχουν καί κοινή εὐθεία, τή xy. Στό ἐπίπεδο (Π) φέρνουμε εὐθεία $AB \perp xy$. Ἐπειδή $(\varepsilon) \perp (\Pi)$, ἕπεται ὅτι $(\varepsilon) \perp xy$ καί $(\varepsilon) \perp AB$. Ἄρα ἡ ὀρθή γωνία $\widehat{(\varepsilon) AB}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία τῆς δίεδρης (Π)xy(Ρ) καί ἑπομένως τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι κάθετα.

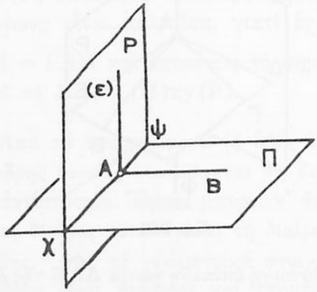
226. Θεώρημα. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι κάθετα μεταξύ τους, κάθε εὐθεία (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Π), κάθετη στήν τομή τους xy, εἶναι κάθετη καί στό ἐπίπεδο (Ρ).

Ἀπόδειξη. Ἔστω Α τό ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) πάνω στή xy (σχ. 253). Ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη στήν εὐθεία xy τοῦ ἐπιπέδου (Π). Εἶναι ἀρκετό ἑπομένως νά δεχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη καί σέ μιάν ἄλλη εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Φέρνουμε στό ἐπίπεδο (Π) εὐθεία $AB \perp xy$. Τότε ἡ γωνία $(\widehat{\varepsilon)AB}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς δίεδρης (Π)xy(Ρ) καί ἐπειδή εἶναι (Π) ⊥



Σχ. 252

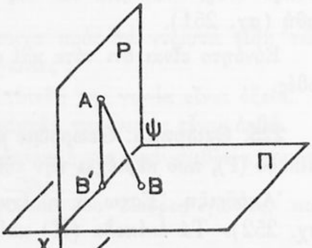


Σχ. 253

(Ρ) τότε (ε) ⊥ ΑΒ. Ἄρα (ε) ⊥ (Π), ὡς κάθετη στίς δύο εὐθεῖες του xy καί ΑΒ.

227. Θεώρημα. Παίρνουμε δύο κάθετα μεταξύ τους ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί Α ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). Φέρνουμε τήν ΑΒ ⊥ (Π). Τότε ἡ εὐθεία ΑΒ ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Ρ).

Ἀπόδειξη. Ἄν ἡ εὐθεία ΑΒ δέν ἦταν εὐθεία τοῦ (Ρ), δέ θά ἔτεμνε τήν τομή xy τῶν δύο ἐπιπέδων (σχ. 254). Θά ὑπῆρχε ἑπομένως εὐθεία $AB' \perp xy$. Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, θά ἦταν $AB' \perp (\Pi)$, δηλαδή θά ὑπήρχαν δύο κάθετες ΑΒ καί ΑΒ′ ἀπ' τό σημεῖο Α πρός τό ἐπίπεδο (Π), πράγμα πού εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ἡ ΑΒ ⊥ (Π) ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Ρ).



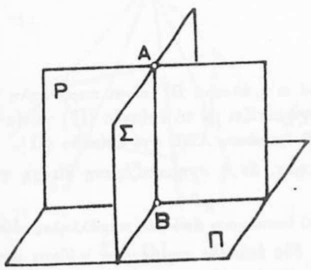
Σχ. 254

228. Θεώρημα. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Ρ) καί (Σ) εἶναι κάθετα σέ τρίτο ἐπίπεδο (Π), τότε καί ἡ τομή τους εἶναι εὐθεία κάθετη στό ἐπίπεδο (Π).

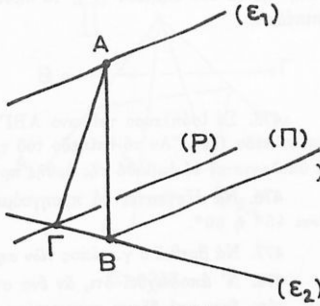
Ἀπόδειξη. Ἔστω Α ἕνα σημεῖο τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (Ρ) καί (Σ) (σχ. 255). Ἀπ' αὐτό φέρνουμε ΑΒ ⊥ (Π), ὁπότε $AB \in (P)$ καί $AB \in (\Sigma)$ (§ 227). Ἄρα ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων (Ρ) καί (Σ) καί ἑπομένως εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο (Π).

229. Θεώρημα. "Αν δύο εὐθεῖες εἶναι ὀρθογώνιες, ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο πού περιέχει τή μιά καί εἶναι κάθετο στήν ἄλλη.

'Απόδειξη. "Ας θεωρήσουμε δύο ὀρθογώνιες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) (σχ. 256). Φέρνουμε τήν κοινή τους κάθετο ΑΒ καί ἀπό τό Β τή $Bx \parallel (\varepsilon_1)$, ὁπότε $Bx \perp (\varepsilon_2)$. Οἱ δύο παράλληλες Bx καί (ε_1) ὁρίζουν ἐπίπεδο (Π), πού εἶναι



Σχ. 255



Σχ. 256

κάθετο στήν (ε_2), γιατί εἶναι $Bx \perp (\varepsilon_2)$, καί $AB \perp (\varepsilon_2)$. "Αρα ὑπάρχει ἐπίπεδο (Π) πού περιέχει τήν (ε_1) καί εἶναι κάθετο στήν (ε_2).

'Εκτός ἀπό τό (Π) δέν ὑπάρχει ἄλλο. Γιατί, ἄν ὑπῆρχε καί δεύτερο ἐπίπεδο $(P) \perp (\varepsilon_2)$, πού νά περιέχει τήν (ε_1), αὐτό θά ἔτεμνε τήν (ε_2) σέ σημεῖο Γ καί τότε θά ἦταν $(\varepsilon_2) \perp (P)$, ἄρα $(\varepsilon_2) \perp A\Gamma$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί ἀπό τό Α θά ὑπῆρχαν δύο κάθετες στήν (ε_2), ἡ ΑΒ καί ἡ ΑΓ. "Αρα δέν ὑπάρχει δεύτερο ἐπίπεδο κάθετο στήν (ε_2) καί πού νά περιέχει τήν (ε_1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

465. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἐπίπεδα πού διχοτομοῦν δύο κατ' ἀκμήν δίεδρες γωνίες ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδο.

466. "Αν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) τμηθοῦν ἀπό τρίτο ἐπίπεδο (Σ), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἐντός καί ἐναλλάξ σχηματιζόμενες δίεδρες εἶναι ἴσες, ἐνῶ οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη δίεδρες εἶναι παραπληρωματικές.

467. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε εὐθεία, πού ἀνήκει στό ἐπίπεδο πού διχοτομεῖ μιά δίεδρη γωνία, σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τίς ἕδρες της.

468. "Αν δύο δίεδρες γωνίες ἔχουν τίς ἕδρες τους παράλληλες, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἀκμές τους εἶναι παράλληλες.

469. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο δεδομένα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

470. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἐπίπεδα πού διχοτομοῦν δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικές δίεδρες γωνίες εἶναι κάθετα.

471. Μία εὐθεία (ε) εἶναι πλάγια πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π). Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἀπό τήν (ε) περνάει ἕνα μόνο ἐπίπεδο κάθετο στό (Π).

472. Ἄν μιά εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε ἐπίπεδο κάθετο πρός τήν (ε) εἶναι κάθετο καί πρός τό ἐπίπεδο (Π).

473. Ἄν ἕνα ἐπίπεδο (Π) εἶναι κάθετο στήν τομή δύο ἐπιπέδων (Ρ) καί (Σ), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό (Π) εἶναι κάθετο στά (Ρ) καί (Σ).

474. Ἄν μιά εὐθεία (ε) εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ προβολή της σέ ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), τό ὁποῖο τέμνει τό (Π), εἶναι κάθετη στήν τομή τῶν δύο ἐπιπέδων.

Β΄.

475. Σέ ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρά α ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π). Ἄν τό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου σχηματίζει μέ τό ἐπίπεδο (Π) γωνία 60^0, νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στό ἐπίπεδο (Π).

476. Νά ἐξεταστεῖ τό προηγούμενο πρόβλημα, ἄν ἡ σχηματιζόμενη δίεδρη γωνία εἶναι 45^0 ἤ 30^0.

477. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες.

478. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν ἕνα στερεό ἔχει δύο ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους, τότε ἔχει καί ἄξονα συμμετρίας τήν τομή τῶν ἐπιπέδων.

479. Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (Π), δύο σημεῖα του Β καί Γ καί ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει στό (Π). Ἄν Α΄ εἶναι ἡ ὀρθή προβολή τοῦ σημείου Α στό ἐπίπεδο (Π), ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι $(Α'ΒΓ) = (ΑΒΓ) \cdot συνφ$, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία, πού σχηματίζει τό ἐπίπεδο (Π) μέ τό ἐπίπεδο (ΑΒΓ).

480. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό δύο δεδομένα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἔχουν λόγο $μ : ν$.

481. Ἄν μιά εὐθεία σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τίς ἕδρες μιᾶς δίεδρης γωνίας, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἴχνη της πάνω στίς ἕδρες τῆς δίεδρης ἰσαπέχουν ἀπό τήν ἀκμή καί ἀντιστρόφως.

482. Δίνονται δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) πού τέμνονται κάθετα. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι, γιά νά εἶναι μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π) ὀρθογώνια ὡς πρός μιά εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), πρέπει καί ἀρκεῖ μιά τουλάχιστον ἀπ' αὐτές νά εἶναι κάθετη στήν τομή xy τῶν δύο ἐπιπέδων.

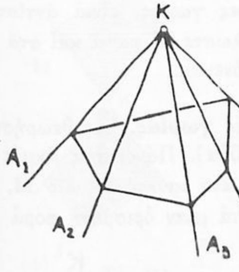
483. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἔχει τά ἄκρα του Α καί Β στίς ἕδρες μιᾶς δίεδρης γωνίας. Τό ἐπίπεδο πού διχοτομεῖ τή δίεδρη τέμνει τό τμῆμα ΑΒ στό σημεῖο Γ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Γ ἀπό τά Α καί Β εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καί Β ἀπό τήν ἀκμή τῆς δίεδρης.

ΣΤΕΡΕΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

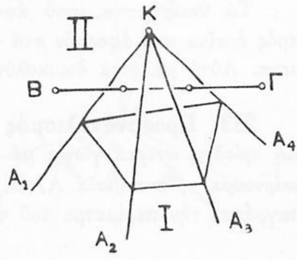
230. Ὁρισμός. Μέ ἀρχή ἕνα σημεῖο Κ θεωροῦμε μιά διαδοχή ἀπό ἡμιευθεῖες $ΚΑ_1$, $ΚΑ_2$, $ΚΑ_3$,..., $ΚΑ_ν$, $ΚΑ_1$, $ν \geqq 3$, πού δέ βρίσκονται ἀνά τρεῖς διαδοχικές στό ἴδιο ἐπίπεδο (σχ. 257). **Τό σύνολο τῶν (ἐπίπεδων) γωνιῶν, πού ἔχουν πλευρές δύο διαδοχικές ἡμιευθεῖες, ἀπαρτίζει ἕνα στερεό σχῆμα, πού λέγεται ν/εδρη στερεά γωνία.**

Τό σημεῖο Κ λέγεται **κορυφή** τῆς στερεᾶς γωνίας, οἱ ἡμιευθεῖες KA_1, KA_2, $KA_3, \ldots$, KA_ν λέγονται **ἀκμές** καί οἱ γωνίες $A_1\widehat{KA}_2, A_2\widehat{KA}_3, \ldots, A_\nu\widehat{KA}_1$ **ἕδρες.**

Τά κύρια στοιχεῖα μιᾶς ν/εδρης στερεᾶς γωνίας εἶναι οἱ ν ἕδρες της (ἐπίπεδες γωνίες) καί οἱ ν δίεδρες γωνίες της μέ ἀκμές τίς ἀκμές τῆς στερεᾶς



Σχ. 257



Σχ. 258

γωνίας. **Διαγώνιο** ἐπίπεδο λέγεται κάθε ἐπίπεδο, πού ὁρίζεται ἀπό δύο μή διαδοχικές ἀκμές. Τά διαγώνια ἐπίπεδα μιᾶς ν/εδρης γωνίας εἶναι τόσα, ὅσες εἶναι καί οἱ διαγώνιες ν/γωνου, πού προκύπτει μέ ἐπίπεδη τομή τῆς στερεᾶς γωνίας, δηλαδή $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$.

Μία ν/εδρη στερεά γωνία λέγεται κανονική, ἄν ἔχει ὅλες τίς ἕδρες της ἴσες καί ὅλες τίς δίεδρές της ἐπίσης ἴσες.

231. Κυρτή στερεά γωνία. Μία στερεά γωνία λέγεται κυρτή, ἄν εἶναι δυνατό ὅλες οἱ ἕδρες της νά τμηθοῦν ἀπό ἐπίπεδο καί ἡ τομή νά εἶναι κυρτό πολύγωνο (σχ. 258).

Μιά κυρτή στερεά γωνία διαιρεῖ τό χῶρο σέ δύο περιοχές Ι καί ΙΙ. Ἀπ' αὐτές, ἡ περιοχή Ι ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα : Γιά κάθε ζεῦγος σημείων της τό εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα τά σημεῖα αὐτά ἀνήκει στήν περιοχή. Ἡ περιοχή αὐτή λέγεται κυρτή περιοχή τοῦ χώρου καί ἀποτελεῖ τό ἐσωτερικό τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας. Ἡ ἄλλη περιοχή ΙΙ, ὅπου ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο ζεῦγος σημείων {Β, Γ} τέτοιο, ὥστε τό τμῆμα ΒΓ νά μήν ἀνήκει ἐξολοκλήρου στήν περιοχή ΙΙ, λέγεται μή κυρτή περιοχή καί ἀποτελεῖ τό ἐξωτερικό τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.

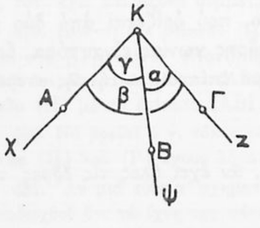
Οἱ δύο περιοχές, στίς ὁποῖες διαιρεῖ τό χῶρο μία μή κυρτή στερεά γωνία, εἶναι μή κυρτές περιοχές.

232. Τρίεδρες στερεές γωνίες. Εἶναι οἱ ἁπλούστερες, ἀλλά καί οἱ βασικότερες ἀπό τίς στερεές (πολύεδρες) γωνίες, γιατί κάθε πολύεδρη γωνία μπορεῖ νά διαιρεθεῖ σέ τρίεδρες μέ διαγώνια ἐπίπεδα πού περνοῦν ἀπό μιά ἀκμή της.

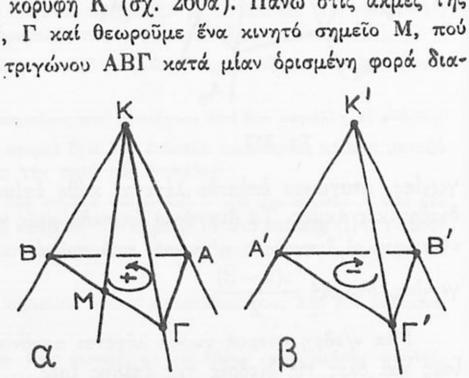
῞Ας πάρουμε μιά τρίεδρη στερεά γωνία Kxyz (σχ. 259). ῎Αν τοποθετήσουμε πάνω στίς ἀκμές της τρία σημεῖα Α,Β καί Γ, τότε τά ἕξι κύρια στοιχεῖα της τά συμβολίζουμε ὡς ἑξῆς. Τίς δίεδρες γωνίες της μέ $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ καί τίς ἕδρες της μέ $\widehat{\alpha}$, αὐτή πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπ' τή δίεδρη $\widehat{A}$, μέ $\widehat{\beta}$ καί $\widehat{\gamma}$ ἀντιστοίχως, αὐτές πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπ' τίς δίεδρες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

Τά θεωρήματα, πού ἀφοροῦν στίς τρίεδρες γωνίες, εἶναι ἀντίστοιχα πρός ἐκεῖνα πού ἀφοροῦν στά τρίγωνα, ὅπως ἄλλωστε θά φανεῖ καί στά ἑπόμενα. Αὐτό μάλιστα διευκολύνει στήν ἀπομνημόνευση.

233. Προσανατολισμός τρίεδρης στερεᾶς γωνίας. ῞Ας θεωρήσουμε μιά τρίεδρη στερεά γωνία μέ κορυφή Κ (σχ. 260α). Πάνω στίς ἀκμές της παίρνουμε τρία σημεῖα Α, Β, Γ καί θεωροῦμε ἕνα κινητό σημεῖο Μ, πού διαγράφει τήν περίμετρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατά μίαν ὁρισμένη φορά δια-



Σχ. 259



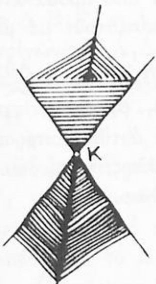
Σχ. 260

γραφῆς, ἔστω τήν ΑΒΓΑ. Τότε ἡ τρίεδρη στερεά γωνία Κ θεωρεῖται προσανατολισμένη, μέ τήν ἔννοια ὅτι διαγράφεται ἀπό τήν ἡμιευθεία ΚΜ κατά τή φορά ΑΒΓΑ. Εἶναι φανερό ὅτι δύο εἶναι οἱ δυνατές φορές διαγραφῆς τῆς στερεᾶς γωνίας Κ, μέ τήν ἔννοια ΑΒΓΑ ἤ μέ τήν ἔννοια ΑΓΒΑ. Μία ἀπ' αὐτές, πού τή διαλέγουμε αὐθαίρετα, λέγεται θετική καί ἡ ἄλλη (ἀντίθετη τῆς πρώτης) ἀρνητική. Αὐτό πού κυρίως μᾶς ἐνδιαφέρει εἶναι ἄν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες εἶναι ὁμοιόστροφα ἤ ἑτερόστροφα προσανατολισμένες, δηλαδή μέ τόν ἴδιο ἤ ἀντίθετο προσανατολισμό. Στό σχῆμα 260 οἱ δύο στερεές γωνίες Κ.ΑΒΓ καί Κ'.Α'Β'Γ' εἶναι ἑτερόστροφα προσανατολισμένες.

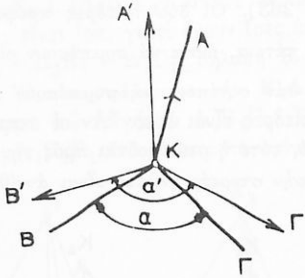
234. Κατακορυφή στερρεές γωνίες λέγονται δύο στερεές γωνίες μέ κοινή κορυφή Κ καί συμμετρικές μεταξύ τους ὡς πρός τήν κοινή κορυφή τους (σχ. 261).

Δύο κατακορυφή στερεές γωνίες ἔχουν τίς ἕδρες τους ἴσες καί τίς δίεδρές τους ἐπίσης ἴσες, ἀλλά οἱ στερεές γωνίες δέν εἶναι ἴσες (δηλ. μή ἐφαρμόσιμες), γιατί εἶναι ἀντίθετα προσανατολισμένες (§ 212).

235. Παραπληρωματική μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας. Ἄς πάρουμε μία τρίεδρη στερεά γωνία Κ.ΑΒΓ (σχ. 262). Φέρνουμε ἡμιευθεία ΚΑ' κάθετη στήν ἕδρα ΒΚΓ καί πρός τό μέρος τῆς ἀκμῆς ΚΑ. Ὅμοια φέρνουμε ΚΒ' ⊥ ΑΚΓ καί πρός τό μέρος τῆς ΚΒ, ὅπως ἐπίσης καί ΚΓ' ⊥ ΑΚΒ καί



Σχ. 261



Σχ. 262

πρός τό μέρος τῆς ΚΓ. Οἱ τρεῖς ἡμιευθεῖες ΚΑ', ΚΒ' καί ΚΓ' ὁρίζουν μιά τρίεδρη στερεά γωνία, πού λέγεται παραπληρωματική τῆς τρίεδρης Κ.ΑΒΓ.

Ἀπό τόν προηγούμενο ὁρισμό τῆς παραπληρωματικῆς μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας ἕπονται τά ἑξῆς :

i) Ἡ παραπληρωματική Κ.Α'Β'Γ' τῆς Κ.ΑΒΓ ὁρίζεται κατά ἕνα καί μόνο τρόπο καί ἐπομένως εἶναι μοναδική.

ii) Ἡ κάθε ἕδρα τῆς Κ.Α'Β'Γ' εἶναι παραπληρωματική τῆς ἀντίστοιχης δίεδρης τῆς Κ.ΑΒΓ, δηλαδή εἶναι $\widehat{\alpha'}+\widehat{A}=2^{L}$, $\widehat{\beta'}+\widehat{B}=2^{L}$, $\widehat{\gamma'}+\widehat{\Gamma}=2^{L}$ (§ 472).

iii) Ἡ τρίεδρη Κ.ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματική τῆς Κ.Α'Β'Γ'. Πραγματικά εἶναι ΚΒ' ⊥ ΑΚΓ, ὁπότε ΚΒ' ⊥ ΚΑ (1) καί ἡ ΚΒ' βρίσκεται πρός τό μέρος τῆς ΚΒ. Ἡ ΚΓ' ⊥ ΑΚΒ ⇒ ΚΓ' ⊥ ΚΑ (2) καί ἡ ΚΓ' βρίσκεται πρός τό μέρος τῆς ΚΓ. Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) συμπεραίνουμε ὅτι ΚΑ ⊥ Β'ΚΓ' καί ἡ ΚΑ βρίσκεται πρός τό μέρος τῆς ΚΑ'. Ὁμοίως εἶναι ΚΒ ⊥ Α'ΚΓ' καί ΚΓ ⊥ Α'ΚΒ' καί οἱ ΚΒ καί ΚΓ βρίσκονται πρός τό μέρος τῶν ΚΒ' καί ΚΓ' ἀντίστοιχα. Ἄρα ἡ Κ.ΑΒΓ εἶναι ἡ παραπληρωματική τῆς Κ.Α'Β'Γ' (καί ἐπομένως ἡ ἔννοια τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας εἶναι συμμετρική καί γιά τίς τρίεδρες).

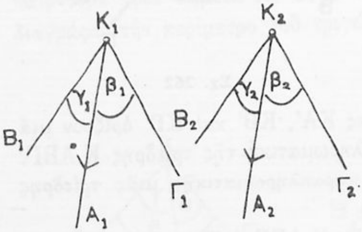
iv) Ἡ τρίεδρη Κ.ΑΒΓ, παραπληρωματική τῆς Κ.Α'Β'Γ', εἶναι τέτοια, ὥστε : $\widehat{\alpha}+\widehat{A'}=2^{L}$, $\widehat{\beta}+\widehat{B'}=2^{L}$, $\widehat{\gamma}+\widehat{\Gamma'}=2^{L}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΤΙΣ ΤΡΙΕΔΡΕΣ ΣΤΕΡΕΕΣ

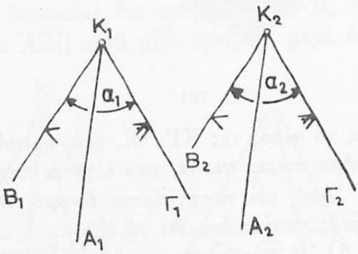
236. Θεώρημα. Ἄν δύο τρίεδρες στρεές γωνίες ἔχουν δύο ἕδρες ἀντιστοίχως ἴσες μία πρός μία καί τίς δίεδρες γωνίες, πού περιέχονται ἀπό τίς ἴσες ἕδρες, ἴσες, οἱ στερεές γωνίες εἶναι ἴσες ἤ ἡ μιά ἰσοῦται μέ τήν κατα-

κορυφήν τῆς ἄλλης, ἀναλόγως τοῦ ἄν εἶναι ὁμοιόστροφα ἤ ἑτερόστροφα προσανατολισμένες.

'Απόδειξη. Θεωροῦμε δύο τρίεδρες στερεές γωνίες $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καί $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ μέ $\widehat{\beta_1} = \widehat{\beta_2}$, $\widehat{\gamma_1} = \widehat{\gamma_2}$, $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ καί μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό (σχ. 263). Οἱ δύο τρίεδρες προφανῶς μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση τέτοια, ὥστε νά συμπέσουν οἱ δύο ἴσες δίεδρες $\widehat{A_1}$ καί $\widehat{A_2}$. Αὐτό θά ἔχει σάν συνέπεια νά συμπέσουν καί οἱ ἴσες ἕδρες $\widehat{\beta_1}$, $\widehat{\beta_2}$ καί $\widehat{\gamma_1}$, $\widehat{\gamma_2}$. Ἄρα οἱ τρίεδρες εἶναι ἴσες. Ἄν οἱ στερεές γωνίες εἶναι μέ ἀντίθετο προσανατολισμό, τότε ἡ μιά ἰσοῦται πρός τήν κατακόρυφήν τῆς ἄλλης, γιατί δύο κατακορυφήν στερεές γωνίες εἶναι ἀντίθετα προσανατολισμένες.



Σχ. 263



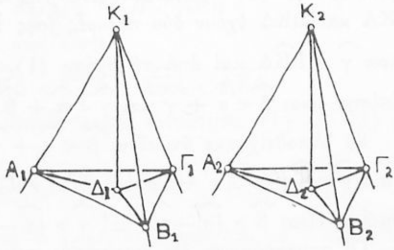
Σχ. 264

237. Θεώρημα. Ἄν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες ἔχουν μιά ἕδρα ἀντίστοιχα ἴση καί τίς προσκείμενες στήν ἴση ἕδρα δίεδρες γωνίες ἀντίστοιχα ἴσες, οἱ στερεές γωνίες εἶναι ἴσες ἤ ἡ μιά ἰσοῦται μέ τήν κατακορυφήν τῆς ἄλλης, ἀνάλογα τοῦ ἄν εἶναι ὁμοιόστροφα ἤ ἑτερόστροφα προσανατολισμένες.

'Απόδειξη. Θεωροῦμε δύο τρίεδρες $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, καί $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ μέ $\widehat{\alpha_1} = \widehat{\alpha_2}$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ καί μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό (σχ. 264). Οἱ δύο τρίεδρες προφανῶς μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση τέτοια, ὥστε νά συμπέσουν οἱ ἴσες ἕδρες $\widehat{\alpha_1}$, καί $\widehat{\alpha_2}$. Αὐτό θά ἔχει σάν συνέπεια νά συμπέσουν καί οἱ ἑκατέρωθέν τους ἴσες δίεδες $\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$ καί $\widehat{\Gamma_1}$, $\widehat{\Gamma_2}$. Ἄρα οἱ τρίεδρες εἶναι ἴσες. Ἄν οἱ δύο τρίεδρες στερεές γωνίες ἦταν μέ ἀντίθετο προσανατολισμό, τότε ἡ μιά θά ἦταν ἴση μέ τήν κατακορυφήν τῆς ἄλλης.

238. Θεώρημα. Ἄν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες ἔχουν τίς τρεῖς ἕδρες τους ἀντίστοιχα ἴσες, οἱ τρίεδρες στερεές γωνίες εἶναι ἴσες ἤ ἡ μιά ἰσοῦται μέ τήν κατακορυφήν τῆς ἄλλης, ἀνάλογα τοῦ ἄν εἶναι ὁμοιόστροφα ἤ ἑτερόστροφα προσανατολισμένες.

'Απόδειξη. Θεωροῦμε τίς τρίεδρες στερεές γωνίες $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καί $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ μέ $\widehat{\alpha_1} = \widehat{\alpha_2}$, $\widehat{\beta_1} = \widehat{\beta_2}$ καί $\widehat{\gamma_1} = \widehat{\gamma_2}$ (σχ. 264). Δέ βλάπτεται ἡ γενικότητα ἄν ἀκόμα ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $K_1A_1 = K_1B_1 = K_1\Gamma_1 = K_2A_2 = K_2B_2 = K_2\Gamma_2$. Τότε εἶναι φανερό πώς $A_1\overset{\Delta}{K_1}B_1 = A_2\overset{\Delta}{K_2}B_2$, $B_1\overset{\Delta}{K_1}\Gamma_1 = B_2\overset{\Delta}{K_2}\Gamma_2$, $\Gamma_1\overset{\Delta}{K_1}A_1 = \Gamma_2\overset{\Delta}{K_2}A_2$ γιατί ἔχουν δύο πλευρές ἴσες καί τήν περιεχόμενη σ' αὐτές γωνία ἴση. Ἄρα $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 \Rightarrow A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$. Φέρνουμε $K_1\Delta_1 \perp (A_1B_1\Gamma_1)$, ὁπότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$, $K_1B_1\Delta_1$, $K_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ἴσες ὑποτείνουσες καί τήν $K_1\Delta_1$ κοινή, ἄρα $\Delta_1A_1 = \Delta_1B_1 = \Delta_1\Gamma_1$, δηλαδή τό Δ_1 εἶναι περίκεντρο τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. Ὁμοίως φέρνουμε τήν $K_2\Delta_2 \perp (A_2B_2\Gamma_2)$ καί τό Δ_2 θά εἶναι τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$. Τότε συμπεραίνουμε ὅτι μετατοπίζοντας τήν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ ἔτσι, ὥστε τὸ τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ νά ταυτιστεῖ μέ τό ἴσο του $A_2B_2\Gamma_2$, τό σημεῖο Δ_1 θά συμπέσει μέ τό Δ_2. Ἀκόμα ἀπό τήν παρατήρηση ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$ καί $K_2A_2\Delta_2$ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν $K_1A_1 = K_2A_2$ καί $\Delta_1A_1 = \Delta_2A_2$, συμπεραίνουμε πώς καί $\Delta_1K_1 = \Delta_2K_2$. Ἄρα στή μετόπιση ἡ κορυφή K_1 θά συμπέσει μέ τήν K_2. Ἑπομένως οἱ τρίεδρες



Σχ. 265

εἶναι ἴσες, γιατί μποροῦν νά ταυτιστοῦν. Ἄν οἱ δύο τρίεδρες εἶναι μέ ἀντίθετο προσανατολισμό, τότε ἡ μιά ἰσοῦται μέ τήν κατακορυφήν τῆς ἄλλης.

239. Θεώρημα. Ἄν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες ἔχουν τίς τρεῖς δίεδρές τους ἀντίστοιχα ἴσες, εἶναι ἴσες ἤ ἡ μία ἰσοῦται μέ τήν κατακορυφήν τῆς ἄλλης, ἀνάλογα τοῦ ἄν εἶναι ὁμοιόστροφα ἤ ἑτερόστροφα προσανατολισμένες.

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καί $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ οἱ δύο τρίεδρες στερεές γωνίες μέ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ (σχ. 265). Φανταζόμαστε τίς παραπληρωματικές τους τρίεδρες (§ 235), πού κατανάγκην θά ἔχουν τίς ἕδρες τους ἴσες, γιατί οἱ ἀρχικές ἔχουν τίς δίεδρές τους ἴσες καί ἑπομένως, κατά τό προηγούμενο θεώρημα, θά εἶναι ἴσες. Τότε ὅμως καί οἱ τρίεδρες $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ θά εἶναι ἴσες ὡς παραπληρωματικές ἴσων τρίεδρων. Ἄν οἱ δύο τρίεδρες εἶναι μέ ἀντίθετο προσανατολισμό, τότε ἡ μιά ἰσοῦται μέ τήν κατακορυφήν τῆς ἄλλης.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΤΕΡΕΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

240. Θεώρημα. Σέ κάθε τρίεδρη στερεά γωνία κάθε ἕδρα εἶναι :

i) Μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

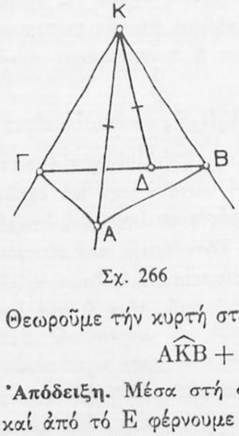
ii) Μεγαλύτερη ἀπόλυτα ἀπό τή διαφορά τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξη. **i)** Εἶναι φανερό πώς τό θεώρημα χρειάζεται ἀπόδειξη μόνο γιά τή μεγαλύτερη ἕδρα (σχ. 266). Ἄς θεωρήσουμε ὅτι εἶναι : $\widehat{\alpha} \geqq \widehat{\beta}$ καί $\widehat{\alpha} \geqq \widehat{\gamma}$. Μέσα στήν ἕδρα $\widehat{\alpha}$ παίρνουμε ἡμιευθεία ΚΔ, τέτοια, ὥστε νά εἶναι : $\Gamma\widehat{K}\Delta = \Gamma\widehat{K}A = \widehat{\beta}$, ὁπότε $B\widehat{K}\Delta = \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$ (1). Δέ βλέπτεται ἡ γενικότητα, ἄν θεωρήσουμε ὅτι εἶναι $KA = K\Delta$ καί ὅτι τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ εἶναι συνεπίπεδα. Τότε εἶναι τριγ. ΓΚΑ = τριγ. ΓΚΔ, γιατί ἔχουν τήν ΓΚ κοινή, $KA = K\Delta$ καί $\Gamma\widehat{K}A = \Gamma\widehat{K}\Delta$. Ἄρα $\Gamma A = \Gamma\Delta$, ὁπότε $\Delta B = \Gamma B - \Gamma A$ (2). Ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε : $AB > \Gamma B - \Gamma A$ (3). Ἡ σχέση (3), ἐξαιτίας τῆς (2) γράφεται $AB > B\Delta \Rightarrow B\widehat{K}A > B\widehat{K}\Delta$, γιατί τά τρίγωνα ΒΚΑ καί ΒΚΔ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες καί τίς τρίτες πλευρές τους ἄνισες. Ἄρα $\widehat{\gamma} > B\widehat{K}\Delta$ καί ἀπό τή σχέση (1), θά εἶναι $\widehat{\gamma} > \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$ ἤ $\widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$. Ἐπίσης εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}$ καί $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

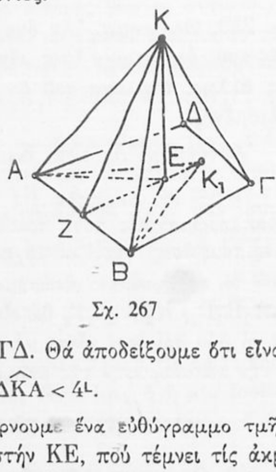
ii) Ἀποδείχτηκε ὅτι εἶναι $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}$ ἤ $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta} - \widehat{\gamma}$ (4) καί $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$ ἤ $\widehat{\alpha} > \widehat{\gamma} - \widehat{\beta}$ (5). Ἀπ' τίς σχέσεις (4) καί (5) συμπεραίνουμε ὅτι $\widehat{\alpha} > |\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}|$. Ὁμοίως εἶναι $\widehat{\beta} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\gamma}|$ καί $\widehat{\gamma} > |\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}|$.

Οἱ προηγούμενες ἕξι ἀνισοτικές σχέσεις μποροῦν νά συγχωνευτοῦν στή διπλή ἀνισοτική σχέση : $|\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}| < \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$.

241. Θεώρημα. Τό ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν κάθε πολύεδρης κυρτῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερο ἀπό 4 ὀρθές γωνίες.



Σχ. 266



Σχ. 267

Θεωροῦμε τήν κυρτή στερεά γωνία Κ.ΑΒΓΔ. Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι :

$$A\widehat{K}B + B\widehat{K}\Gamma + \Gamma\widehat{K}\Delta + \Delta\widehat{K}A < 4^{L}.$$

Ἀπόδειξη. Μέσα στή στερεά γωνία παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΕ καί ἀπό τό Ε φέρνουμε ἐπίπεδο κάθετο στήν ΚΕ, πού τέμνει τίς ἀκμές στά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ (σχ. 267) καί ἔτσι σχηματίζεται τό κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔ. (Τή θέση τῆς ΚΕ τήν διαλέγουμε ἔτσι, ὥστε τό κάθετο ἐπίπεδο ἀπό τό Ε στήν ΚΕ νά τέμνει ὅλες τίς ἀκμές τῆς στερεᾶς γωνίας). Φέρνουμε $EZ \perp AB$ καί ἄρα $KZ \perp AB$. Ἀπ' τό ὀρθογώνιο τρίγωνο EKZ ἔχουμε $ZE < ZK$. Ἄν περιστρέψουμε τό τρίγωνο KAB γύρω ἀπό τήν AB, ἔτσι, ὥστε τό ἐπίπεδό του νά πέσει πάνω στό ΑΒΓΔ, τότε ἡ ZK, ὡς κάθετη στήν AB, θά πέσει στή ZE καί, ἐπειδή εἶναι $ZE < ZK$, τότε τό K θά πέσει στήν προέκταση τῆς ZE, ἔστω στό σημεῖο K_1. Φέρνουμε καί τίς EA καί EB. Τότε ἔχουμε :

$$\widehat{AK_1Z} < \widehat{AEZ}, \quad \widehat{ZK_1B} < \widehat{ZEB}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη καί παίρνουμε :

(1) $$\widehat{AK_1B} < \widehat{AEB}, \text{ δηλαδή } \widehat{AKB} < \widehat{AEB}.$$

Ὅμοια μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ πώς εἶναι :

(2) $$\widehat{BK\Gamma} < \widehat{BE\Gamma}, \quad \widehat{\Gamma K\Delta} < \widehat{\Gamma E\Delta}, \quad \widehat{\Delta KA} < \widehat{\Delta EA}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς ὁμοιόστροφες ἀνισότητες (1) καί (2) καί παίρνουμε :

(3) $$\widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{\Gamma K\Delta} + \widehat{\Delta KA} < \widehat{AEB} + \widehat{BE\Gamma} + \widehat{\Gamma E\Delta} + \widehat{\Delta EA}$$

καί, ἐπειδή οἱ γωνίες μέ κορυφή τό Ε ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μέ 4 ὀρθές γωνίες, ἡ (3) γίνεται :

$$\widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{\Gamma K\Delta} + \widehat{\Delta KA} < 4L.$$

✱ **242.** Στή γενική περίπτωση τό θεώρημα μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὡς ἑξῆς :

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἡ κυρτή στερεά γωνία $KA_1A_2...A_\nu$ (σχ. 268), ὅπου τά σημεῖα $A_1, A_2,...A_\nu$ βρίσκονται σέ ἐπίπεδη τομή. Θά συμβολίσουμε μέ $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_\nu$ τίς ἕδρες τῆς στερεᾶς γωνίας καί μέ $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2,... \widehat{A}_\nu$ τίς γωνίες τοῦ πολύγωνου $A_1A_2A_3...A_\nu$ ἀντίστοιχα. Τότε, ἀπό τά τρίγωνα KA_1A_2, KA_2A_3,..., $KA_\nu A_1$, ἔχουμε :

$\widehat{\alpha}_1 = 2L - (\widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1}), \widehat{\alpha}_2 = 2L - (\widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2}), ..., \widehat{\alpha}_\nu = 2L - (\widehat{KA_\nu A_1} + \widehat{KA_1A_\nu})$. Προσθέτουμε κατά μέλη τίς προηγούμενες ν ἰσότητες καί παίρνουμε :

$\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 ... + \widehat{\alpha}_\nu = 2\nu L - (\widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + ... + \widehat{KA_\nu A_1} + \widehat{KA_1A_\nu})$ (1).

Τά σημεῖα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ εἶναι κορυφές τρίεδρων στερεῶν γωνιῶν καί ἐπομένως (§ 240) θά εἶναι :

$$\widehat{A}_1 < \widehat{KA_1A_\nu} + \widehat{KA_1A_2}, \ \widehat{A}_2 < \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3}, \ ..., \ \widehat{A}_\nu < \widehat{KA_\nu A_{\nu-1}} + \widehat{KA_\nu A_1}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη αὐτές τίς ν ἀνισότητες καί παίρνουμε :

$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + ... + \widehat{A}_\nu < \widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + ... + \widehat{KA_\nu A_1} + \widehat{KA_1A_\nu}$. Γνωρίζουμε ὅτι $A_1 + A_2 + ... + A_\nu = (2\nu - 4)L$ καί ἐπομένως ἡ τελευταία ἀνισότητα γράφεται :

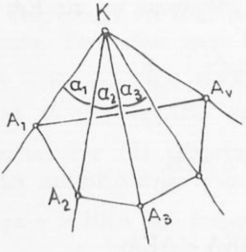
(2) $$(2\nu - 4)L < \widehat{KA_1A_2} + \widehat{KA_2A_1} + \widehat{KA_2A_3} + \widehat{KA_3A_2} + ... + \widehat{KA_\nu A_1} + \widehat{KA_1A_\nu}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τάς σχέσεις (1) καί (2) καί ἔχουμε :

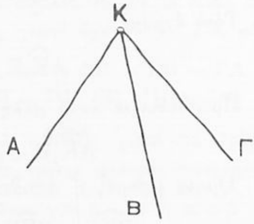
$$\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 + ... + \widehat{\alpha}_\nu + (2\nu - 4)L < 2\nu L \Rightarrow \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 + \widehat{\alpha}_3 + ... + \widehat{\alpha}_\nu < 4L.$$

243. Θεώρημα. Σέ κάθε τρίεδρη στερεά γωνία τό ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν της βρίσκεται μεταξύ 2 καί 6 ὀρθῶν γωνιῶν, ἐνῶ ἡ καθεμιά ὅταν αὐξηθεῖ κατά 2^{L} ξεπερνάει τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων.

'Απόδειξη. Ἔστω Κ.ΑΒΓ μιά τρίεδρη στερεά γωνία (σχ. 269). Ἄς



Σχ. 268



Σχ. 269

φανταστοῦμε τήν παραπληρωματική της Κ.Α'Β'Γ' (§ 235), πού οἱ ἕδρες της εἶναι $\widehat{\alpha'}$, $\widehat{\beta'}$, $\widehat{\gamma'}$. Γνωρίζουμε ὅτι $\widehat{A} + \widehat{\alpha'} = 2^{L}$, $\widehat{B} + \widehat{\beta'} = 2^{L}$, $\widehat{\Gamma} + \widehat{\gamma'} = 2^{L}$ ἤ $\widehat{A} + \widehat{\alpha'} + \widehat{B} + \widehat{\beta'} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\gamma'} = 6^{L}$ (1) ἤ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6^{L}$ (2). 'Από τό προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ὅτι εἶναι $\widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'} < 4^{L}$ ἤ $4^{L} > \widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'}$ (3). Προσθέτουμε κατά μέλη τίς σχέσεις (1) καί (3) καί παίρνουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'} + 4^{L} > 6^{L} + \widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'}$ ἤ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} > 2^{L}$. Οἱ ἀνισότητες (2) καί (4) συγχωνεύονται στή διπλή ἀνισότητα $2^{L} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6^{L}$.

'Επίσης εἶναι (§ 240) $\widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'} > \widehat{\alpha'}$, ὁπότε $2^{L} - \widehat{B} + 2^{L} - \widehat{\Gamma} > 2^{L} - \widehat{A}$ ἤ $\widehat{A} + 2^{L} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$. Ἴδια βρίσκουμε $\widehat{B} + 2^{L} > \widehat{A} + \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma} + 2^{L} > \widehat{A} + \widehat{B}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

484. Σέ κάθε τρίεδρη στερεά γωνία ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι μιά τουλάχιστο ἕδρα της εἶναι μικρότερη ἀπό 120^{0}.

485. Σέ κάθε τρίεδρη στερεά γωνία ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι μιά τουλάχιστο δίεδρη εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 60^{0}.

486. Στίς ἀκμές μιᾶς τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας (μέ τίς ἕδρες της ὀρθές) παίρνουμε τμήματα ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ = α. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο, καί τό ἐμβαδό του εἶναι διπλάσιο ἀπό τό ἐμβαδό ἰσόπλευρου τριγώνου μέ πλευρά α.

487. Μιᾶς τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας οἱ ἀκμές τέμνονται μέ ἐπίπεδο στά σημεῖα Α,Β,Γ. Ἄν εἶναι ΚΑ = 3α, ΚΒ = 4α, ΚΓ = 5α, ὅπου Κ εἶναι ἡ κορυφή τῆς στερεᾶς γωνίας, νά ὑπολογιστοῦν οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

488. Τέμνουμε τίς ἀκμές τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας Κ μέ ἐπίπεδο στά σημεῖα Α,Β,Γ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ κορυφή Κ προβάλλεται στό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

489. Στήν προηγούμενη ἄσκηση, ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $(ΚΑΒ)^2 = (ΓΑΒ)(ΗΑΒ)$, β) $(ΚΑΒ)^2 + (ΚΒΓ)^2 + (ΚΓΑ)^2 = (ΑΒΓ)^2$.

490. Μία τρισορθογώνια στερεά γωνία τέμνεται μέ ἐπίπεδο στά σημεῖα Α,Β,Γ. Ἄν α,β,γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νά ὑπολογιστοῦν τά τμήματα ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ, ὅπου Κ εἶναι ἡ κορυφή τῆς τρισορθογώνιας στερεᾶς.

491. Ἄν οἱ ἕδρες μιᾶς στερεᾶς γωνίας εἶναι 60^0 ἡ καθεμιά, πόσες τό πολύ ἕδρες μπορεῖ νά ἔχει ἡ στερεά γωνία;

492. Τό ἴδιο νά ἐξεταστεῖ ἄν οἱ ἕδρες της εἶναι 90^0 ἡ καθεμιά.

493. Μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας οἱ δύο ἕδρες εἶναι 70^0 καί 90^0. Ποιές εἶναι οἱ δυνατές τιμές γιά τήν τρίτη ἕδρα της;

Β'.

494. Σέ κάθε τρίεδρη στερεά γωνία ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά τρία ἐπίπεδα πού διχοτομοῦν τίς δίεδρές της περνοῦν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία.

495. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά τρία ἐπίπεδα, πού περνοῦν ἀπό τίς ἀκμές μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας καί ἀπό τίς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, τέμνονται κατά τήν ἴδια εὐθεία.

496. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν δύο τρίεδρες στερεές γωνίες ἔχουν τίς δίεδρες γωνίες τους ἴσες μία πρός μία, τότε οἱ παραπληρωματικές τους θά ἔχουν τίς ἕδρες τους ἴσες μία πρός μία καί ἀντιστρόφως.

497. Ἀπό τήν κορυφή Κ μιᾶς τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας φέρνουμε μιά ἡμιευθεία Κx στό ἐσωτερικό τῆς στερεᾶς γωνίας. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ γωνίες, πού σχηματίζει ἡ Κx μέ τίς ἀκμές καί μέ τίς τρεῖς ἕδρες τῆς στερεᾶς γωνίας, ἔχουν ἄθροισμα σταθερό.

498. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερο ἀπό 4 ὀρθές γωνίες.

499. Ἄν δύο ἕδρες μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσες, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι καί οἱ ἀπέναντί τους δίεδρες εἶναι ἴσες καί ἀντιστρόφως.

500. Ἄν μιά τρίεδρη στερεά γωνία ἔχει τίς τρεῖς ἕδρες της ἴσες, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι θά ἔχει καί τίς τρεῖς δίεδρές της ἴσες καί ἀντιστρόφως.

501. Ἄν μία τρίεδρη στερεά γωνία ἔχει δύο ἴσες δίεδρες, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἐπίπεδο πού διχοτομεῖ τήν τρίτη δίεδρη εἶναι κάθετο στήν ἀπέναντι ἕδρα.

502. Δίνεται μιά κυρτή τετράεδρη στερεά γωνία καί ἕνα σημεῖο Σ. Νά φέρετε ἀπό τό σημεῖο Σ ἐπίπεδο (Π), πού νά τέμνει τή στερεά γωνία κατά παραλληλόγραμμο.

503. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίεδρη στερεά γωνία ἀπέναντι ἀπό μεγαλύτερη δίεδρη ὑπάρχει μεγαλύτερη ἕδρα καί ἀντιστρόφως.

504. Δίνεται μιά τρίεδρη στερεά γωνία Κ.ΑΒΓ. Φέρνουμε ἡμιευθεία ΚΧ μέσα στή στερεά γωνία. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\widehat{ΧΚΑ} + \widehat{ΧΚΒ} < \widehat{ΓΚΑ} + \widehat{ΓΚΒ}$.

505. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν δίεδρων γωνιῶν μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας μέ ν ἀκμές περιέχεται μεταξύ 2ν - 4 καί 6ν - 12 ὀρθές γωνίες.

506. Δίνεται τετράεδρη στερεά γωνία μέ κορυφή Κ καί δύο σταθερά σημεῖα Α καί Β πάνω σέ δύο διαδοχικές ἀκμές της. Μεταβλητό ἐπίπεδο περνᾶ ἀπό τά Α καί Β καί τέμνει τίς ἄλλες δύο ἀκμές της στά Μ καί Ν. i) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία ΜΝ περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο. ii) Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καί ΒΝ. iii) Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΝ καί ΒΜ.

ΒΙΒΛΙΟ ΕΚΤΟ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

244. Ὁρισμός. Πολύεδρο λέγεται τό στερεό, πού τελειώνει παντοῦ σέ ἐπίπεδα τμήματα.

Τά ἐπίπεδα αὐτά τμήματα εἶναι κατανάγκην πολύγωνα καί λέγονται **ἕδρες** τοῦ πολυέδρου (σχ. 260). Οἱ πλευρές τῶν πολυγωνικῶν ἑδρῶν λέγονται **ἀκμές** τοῦ πολυέδρου καί εἶναι οἱ τομές δύο προσκείμενων ἑδρῶν. Οἱ κορυφές τῶν πολυγωνικῶν ἑδρῶν λέγονται **κορυφές** τοῦ πολυέδρου. Αὐτές ἀνήκουν σέ τρεῖς τουλάχιστο ἕδρες καί εἶναι σημεῖα, στά ὁποῖα συμβάλλουν τρεῖς τουλάχιστον ἀκμές. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει ἄκρα δύο κορυφές, ὄχι τῆς ἴδιας ἕδρας, λέγεται **διαγώνιος** τοῦ πολυέδρου.

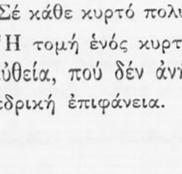
Ἕνα πολύεδρο λέγεται **κυρτό**, ἄν τό ἐπίπεδο ὁποιασδήποτε ἕδρας του ἀφήνει πρός τήν ἴδια περιοχή τοῦ χώρου ὁλόκληρο τό πολύεδρο.

Σέ κάθε κυρτό πολύεδρο οἱ ἕδρες εἶναι κυρτά πολύγωνα καί ἀντιστρόφως.

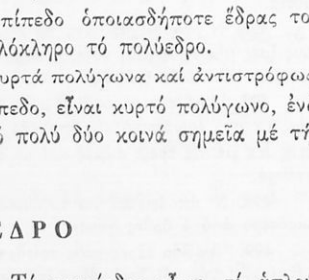
Ἡ τομή ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου μέ ἐπίπεδο, εἶναι κυρτό πολύγωνο, ἐνῶ μιά εὐθεία, πού δέν ἀνήκει σέ ἕδρα, ἔχει τό πολύ δύο κοινά σημεῖα μέ τήν πολυεδρική ἐπιφάνεια.

ΤΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ

245. Τά στοιχεῖα τοῦ τετραέδρου. Τό τετράεδρο εἶναι τό ἁπλούστερο ἀπό τά πολύεδρα. Ἔχει τέσσερις τριγωνικές ἕδρες, τέσσερις κορυφές καί ἕξι ἀκμές. Τετράεδρο μποροῦμε νά πάρουμε, ἄν κόψουμε τίς ἀκμές μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας μέ ἐπίπεδο (σχ. 271).



Σχ. 270



Σχ. 271

Κάθε τετράεδρο εἶναι κυρτό πολύεδρο, ἔχει ἕξι δίεδρες γωνίες, πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἕξι ἀκμές του, καί τέσσερις τρίεδρες στερεές γωνίες πού ἀντιστοιχοῦν στίς τέσσερις κορυφές του.

Ὕψος ἑνός τετράεδρου λέγεται τό κάθετο τμῆμα, ἀπό μιά κορυφή του στήν ἀπέναντι ἕδρα του (σχ. 271). Τό τετράεδρο ἐπομένως ἔχει τέσσερα ὕψη. Τά ὕψη ἑνός τετράεδρου γενικά δέν περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Διάμεσος ἑνός τετράεδρου λέγεται τό τμῆμα πού ἔχει ἄκρα μιά κορυφή καί τό κέντρο βάρους τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Τό τετράεδρο ἐπομένως ἔχει τέσσερις διαμέσους.

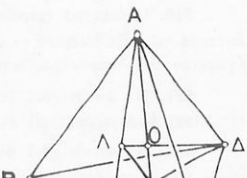
246. Εἴδη τετραέδρων. Στό σύνολο ὅλων τῶν τετράεδρων ἀξιοσημείωτα εἶναι τά κανονικά καί τά ὀρθοκεντρικά τετράεδρα.

Κανονικό τετράεδρο λέγεται ἕνα τετράεδρο πού ἔχει καί τίς ἕξι ἀκμές του ἴσες. Οἱ ἕδρες ἑνός κανονικοῦ τετράεδρου εἶναι ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα.

Ὀρθοκεντρικό τετράεδρο λέγεται ἕνα τετράεδρο, πού τά τέσσερα ὕψη του περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Τό κοινό σημεῖο τῶν ὑψῶν του λέγεται **ὀρθόκεντρο** τοῦ τετράεδρου. Στά ὀρθοκεντρικά τετράεδρα μόνο καί τά τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τους εἶναι ὀρθογώνια (βλ. ἄσκ. 511).

247. Θεώρημα. Σέ κάθε τετράεδρο οἱ τέσσερις διάμεσοι περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, πού λέγεται κέντρο βάρους τοῦ τετράεδρου καί ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή ἀπόσταση ἴση μέ τά $\frac{3}{4}$ τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου τοῦ τετράεδρου.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό τετράεδρο ΑΒΓΔ καί Κ,Λ τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν του ΒΓΔ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως (σχ. 272). Τό σημεῖο Κ βρίσκεται πάνω στή διάμεσο ΔΕ τῆς ἕδρας ΒΓΔ καί τό σημεῖο Λ πάνω στή διάμεσο ΑΕ τῆς ἕδρας ΑΒΓ. Ἐπομένως οἱ διάμεσοι ΑΚ καί ΔΛ τοῦ τετράεδρου τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Ο, γιατί εἶναι ἐσωτερικά τμήματα τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.



Σχ. 272

Ἐπειδή τά σημεῖα Κ καί Λ εἶναι κέντρα βάρους ἑδρῶν, ἕπεται ὅτι $\frac{ΕΔ}{ΕΚ} = \frac{ΕΑ}{ΕΛ} = \frac{3}{1}$ ἄρα $ΔΑ \parallel ΚΛ$, ὁπότε τριγ. ΕΔΑ $\approx$ τριγ. ΕΚΛ, ἐπομένως $\frac{ΔΑ}{ΚΛ} = \frac{3}{1}$. Ἐπίσης, ἀπό τήν παραλληλία τῶν τμημάτων ΔΑ καί ΚΛ, συμπεραίνουμε πώς $\overset{\Delta}{\mathrm{OA\Delta}} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{OK\Lambda}}$, ἄρα $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OK}} = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{K\Lambda}} = \dfrac{3}{1}$, ἑπομένως

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OK}} = \frac{3}{1} \;\; \text{ἤ} \;\; \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AO}+\mathrm{OK}} = \frac{3}{3+1} \;\; \text{ἤ} \;\; \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AK}} = \frac{3}{4} \;\; \text{ἤ} \;\; \mathrm{AO} = \frac{3}{4}\,\mathrm{AK}.$$

"Ομοια μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ἡ ἴδια σχέση καί γιά τίς ἄλλες διαμέσους τοῦ τετράεδρου, οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο O.

Τήν ὀνομασία **κέντρο βάρους τοῦ τετράεδρου** γιά τό σημεῖο O τήν ἔχουμε πάρει ἀπό τή φυσική, γιατί συμπίπτει μέ τό κέντρο βάρους τοῦ τετράεδρου, ἄν ἦταν ἀπό ὁμογενές ὑλικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

507. Σέ κάθε τετράεδρο : α) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά τμήματα μέ ἄκρα τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. β) "Αν οἱ ἀπέναντι ἀκμές εἶναι ἀνά δύο ἴσες, τά προηγούμενα τμήματα εἶναι κάθετα πρός τίς ἀπέναντι ἀκμές καί ἀκόμα εἶναι ἀκμές τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας.

508. Σ' ἕνα κανονικό τετράεδρο ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἕξι ἀκμῶν του εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας καί οἱ κοινές κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἄξονες συμμετρίας.

509. Περίκεντρο τετράεδρου. Σέ κάθε τετράεδρο ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ κάθετοι, πού φέρονται στίς ἕδρες του ἀπό τά περίκεντρά τους περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Τό σημεῖο αὐτό λέγεται περίκεντρο τοῦ τετράεδρου καί ἰσαπέχει ἀπό τίς κορυφές του.

510. Ἔγκεντρο τετράεδρου. Σέ κάθε τετράεδρο ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι τά διχοτομικά ἐπίπεδα τῶν ἕξι δίεδρων γωνιῶν του περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Τό σημεῖο αὐτό λέγεται ἔγκεντρο τοῦ τετράεδρου καί ἰσαπέχει ἀπό τίς ἕδρες του.

511. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν ἕνα τετράεδρο εἶναι ὀρθοκεντρικό, οἱ ἀπέναντι ἀκμές του εἶναι ὀρθογώνιες· καί ἀντιστρόφως.

512. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε ὀρθοκεντρικό τετράεδρο τά ἴχνη τῶν τεσσάρων ὑψῶν του εἶναι ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν του.

513. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ κοινές κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνός ὀρθοκεντρικοῦ τετράεδρου περνοῦν ἀπό τό ὀρθόκεντρο τοῦ τετράεδρου.

514. Ν' ἀποδεχθεῖ ὅτι τά ἕξι μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν ἑνός τετράεδρου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

515. 'Αν σ' ἕνα τετράεδρο ΚΑΒΓ ἡ στερεά γωνία του Κ εἶναι τρισορθογώνια, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ὕψος ΚΗ ἱκανοποιεῖ τή σχέση : $\dfrac{1}{\mathrm{KH}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{KA}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{KB}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{K\Gamma}^2}$.

516. Σέ κάθε τετράεδρο ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἐπίπεδα, πού ὁρίζονται ἀπό κάθε ἀκμή καί ἀπό τό μέσο τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

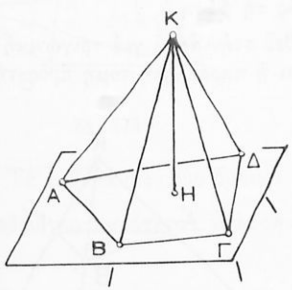
517. Δίνεται ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ. "Ενα ἐπίπεδο εἶναι παράλληλο πρός τήν ἕδρα ΒΓΔ καί τέμνει τό τετράεδρο κατά τό τρίγωνο Β'Γ'Δ'. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες, πού συνδέουν τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Β'Γ'Δ' μέ τίς ἀπέναντι κορυφές τοῦ τετράεδρου, περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Η ΠΥΡΑΜΙΔΑ

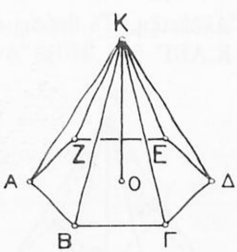
248. Ὁρισμοί. Πυραμίδα λέγεται τό πολύεδρο, πού ἡ μιά ἕδρα του εἶναι ἕνα πολύγωνο, τό ὁποῖο λέγεται βάση τῆς πυραμίδας, ἐνῶ οἱ ἄλλες ἕδρες του εἶναι τρίγωνα μέ κοινή κορυφή ἕνα σημεῖο, πού λέγεται κορυφή τῆς πυραμίδας.

Πυραμίδα μποροῦμε νά πάρουμε, ἄν κόψουμε τίς ἀκμές μιᾶς στερεᾶς γωνίας μέ ἐπίπεδο στά σημεῖα Α,Β,Γ,... (σχ. 273).

Μιά πυραμίδα εἶναι κυρτή ἤ μή κυρτή, ἀνάλογα μέ τή βάση της ΑΒΓΔ, ἄν δηλαδή αὐτή εἶναι κυρτό ἤ μή κυρτό πολύγωνο. Οἱ τριγωνικές ἕδρες ΚΑΒ, ΚΒΓ,... λέγονται **παράπλευρες ἕδρες** τῆς πυραμίδας καί οἱ ἀκμές ΚΑ, ΚΒ,



Σχ. 273



Σχ. 274

ΚΓ..., πού συγκλίνουν στήν κορυφή Κ τῆς πυραμίδας, λέγονται **παράπλευρες ἀκμές**.

Μιά πυραμίδα χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική κλπ., ἀνάλογα μέ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεώς της.

Ὕψος τῆς πυραμίδας λέγεται τό κάθετο τμῆμα ΚΗ ἀπ' τήν κορυφή της Κ πρός τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως.

Κανονική λέγεται κάθε πυραμίδα πού ἔχει ὡς βάση ἕνα κανονικό πολύγωνο, καί ἡ κορυφή της προβάλλεται στό κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολύγωνου τῆς βάσεως (σχ. 274).

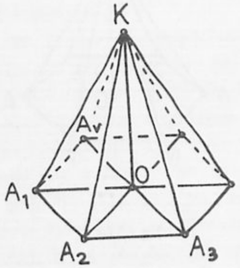
249. Θεώρημα. Σέ κάθε κανονική πυραμίδα οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι ἴσα ἰσοσκελή τρίγωνα.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε μιά κανονική πυραμίδα $K.A_1A_2...A_\nu$ (σχ. 275). Φέρνουμε τό ὕψος KO, ὅπου τό O εἶναι τό κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Τότε εἶναι $OA_1 = OA_2$. Ἄρα τά ὀρθογώνια τρίγωνα KOA_1 καί KOA_2 εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν τήν KO κοινή καί $OA_1 = OA_2$. Ἑπομένως $KA_1 = KA_2$. Μέ ἴδιο τρόπο μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $KA_1 = KA_2 = ... = KA_\nu$. Ἐπειδή ἀκόμα εἶναι $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{\nu-1}A_\nu$, συμπεραίνουμε ὅτι τά παράπλευρα τρίγωνα εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ.

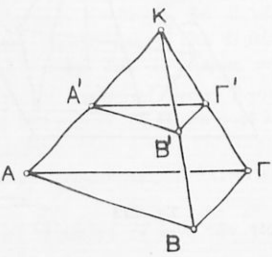
Ἀντιστρόφως. Θεωροῦμε τήν πυραμίδα $K.A_1A_2...A_\nu$ μέ $KA_1 = KA_2 = ... = KA_\nu$ καί $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{\nu-1}A_\nu$. Φέρνουμε πάλι τό ὕψος KO, ὁπότε $K\overset{\Delta}{O}A_1 = K\overset{\Delta}{O}A_2 = ... = K\overset{\Delta}{O}A_\nu$ ὡς ὀρθογώνια μέ ἴσες τίς ὑποτείνουσες καί τήν KO κοινή. Ἄρα $OA_1 = OA_2 = ... = OA_\nu$. Τότε τά τρίγωνα OA_1A_2, OA_2A_3,..., $OA_\nu A_1$ εἶναι ἴσα ἰσοσκελή καί ἑπομένως τό πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ εἶναι κανονικό μέ κέντρο τήν προβολή O τοῦ A πάνω σ' αὐτό. Ἄρα ἡ πυραμίδα εἶναι κανονική.

250. Θεώρημα. Ἡ τομή μιᾶς πυραμίδας μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση της, εἶναι πολύγωνο ὅμοιο πρός τή βάση.

Ἀπόδειξη. Τό θεώρημα θά ἀποδειχθεῖ στήν ἀρχή γιά τριγωνική πυραμίδα K.ΑΒΓ (σχ. 276). Ἄν Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἡ παράλληλη τομή πρός τή βάση



Σχ. 275



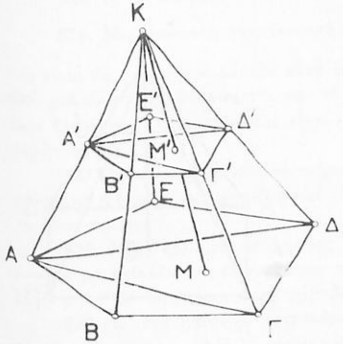
Σχ. 276

ΑΒΓ, παρατηροῦμε ὅτι Α΄Β΄ // ΑΒ, Β΄Γ΄ // ΒΓ καί Γ΄Α΄ // ΓΑ, ὡς τομές παράλληλων ἐπιπέδων ἀπό τρίτο. Ἄρα εἶναι τριγ. Α΄Β΄Γ΄ $\approx$ τριγ. ΑΒΓ, γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες.

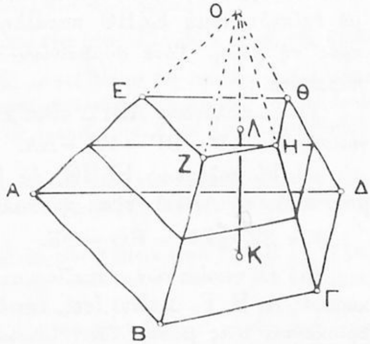
Ἄς θεωρήσουμε τώρα μιά πυραμίδα K.ΑΒΓΔΕ καί τήν τομή Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση (σχ. 277). Μέ τά ἐπίπεδα ΑΚΓ, ΑΚΔ, πού τέμνουν τή βάση καί τήν παράλληλη τομή κατά διαγωνίους, διαιρεῖται ἡ πυραμίδα σέ τριγωνικές πυραμίδες. Ἄρα εἶναι Α΄Β΄Γ΄ $\approx$ ΑΒΓ, Α΄Γ΄Δ΄ $\approx$ ΑΓΔ, Α΄Δ΄Ε΄ $\approx$ ΑΔΕ καί ἑπομένως Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ $\approx$ ΑΒΓΔΕ, γιατί ἀποτελοῦνται ἀπό ὅμοια τρίγωνα καί ὁμοίως τοποθετημένα.

Παρατηρήσεις:

i) Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητας $\frac{A'B'}{AB}$ τῶν δύο ὅμοιων πολυγώνων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο $\frac{KA'}{KA}$, γιατί εἶναι $KA'B' \approx KAB$. Ὁ ἴδιος λόγος μεταφέρεται σέ κάθε τμῆμα $KM'M$, μέ τά M' καί M πάνω στά δύο παράλληλα ἐπίπεδα καί ἀσφαλῶς καί πάνω στίς ὑπόλοιπες παράπλευρες ἀκμές $KB'B$, $K\Gamma'\Gamma$, κλπ. Τοῦτο προκύπτει ἀπό τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ.



Σχ. 277



Σχ. 278

ii) Τά ἐμβαδά τῶν δύο ὅμοιων πολυγώνων ἔχουν λόγο ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας, δηλαδή $\frac{(A'B'\Gamma'\Delta'E')}{(AB\Gamma\Delta E)} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{KM'}{KM}\right)^2$.

ΚΟΛΟΥΡΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

251. Ὁρισμοί. Κόλουρη πυραμίδα λέγεται τό μέρος μιᾶς πυραμίδας, πού περιέχεται μεταξύ τῆς βάσεως καί μιᾶς παράλληλης πρός τή βάση τομῆς τῆς πυραμίδας.

Μία κόλουρη πυραμίδα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ. 278) ἔχει τίς ἕδρες της ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ παράλληλες. Αὐτές λέγονται **βάσεις** τῆς πυραμίδας καί εἶναι ὅμοια πολύγωνα (§ 250). Οἱ παράπλευρες ἕδρες της εἶναι τραπέζια.

Ἡ ἀπόσταση ΚΛ τῶν δύο βάσεων λέγεται ὕψος τῆς κόλουρης πυραμίδας.

Μία κόλουρη πυραμίδα λέγεται **κανονική**, ἄν ἔχει προκύψει ἀπό κανονική πυραμίδα. Ἄρα μία κανονική κόλουρη πυραμίδα ἔχει ὡς βάσεις κανονικά ὅμοια πολύγωνα, ἐνῶ τό τμῆμα, μέ ἄκρα τά κέντρα βάρους τῶν δύο βάσεων, εἶναι κάθετο στίς βάσεις.

Μεσαία τομή ἤ μέση τομή τῆς κόλουρης πυραμίδας, λέγεται ἡ τομή της ἀπό ἐπίπεδο παράλληλο πρός τίς βάσεις της καί πού ἰσαπέχει ἀπ' αὐτές. Ἡ μεσαία τομή εἶναι πολύγωνο ὅμοιο πρός τίς βάσεις καί διχοτομεῖ τίς παράπλευρες ἀκμές τῆς κόλουρης πυραμίδας, ὅπως καί τό ὕψος της, καί γενικά κάθε τμῆμα μέ τά ἄκρα του πάνω στίς βάσεις.

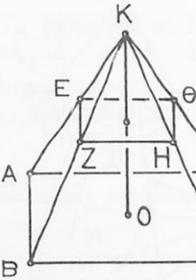
252. Θεώρημα. Σέ κάθε κόλουρη κανονική πυραμίδα οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι ἴσα ἰσοσκελή τραπέζια καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε μιά κόλουρη κανονική πυραμίδα ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ (σχ. 279). Αὐτή ἔχει προκύψει ἀπό τήν κανομική πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ μέ ἐπίπεδη τομή ΕΖΗΘ παράλληλη πρός τή βάση. Τότε συμβαίνουν τά παρακάτω :

i) Τό πολύγωνο ΑΒΓΔ εἶναι κανονικό, ἄρα ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ.

ii) Τό πολύγωνο ΕΖΗΘ, ὡς ὅμοιο πρός τό ΑΒΓΔ, εἶναι κανονικό, ἄρα ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ = ΘΕ.

iii) Οἱ γωνίες τῶν τραπεζίων στίς κορυφές Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσες, ἐπειδή βρίσκονται στίς βάσεις ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων. Ἄρα τά παράπλευρα τραπέζια εἶναι ἴσα ἰσοσκελή.



Σχ. 279

Ἀντιστρόφως. Ἄν ἡ κόλουρη πυραμίδα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ ἔχει τά παράπλευρα τραπέζια ἴσα καί ἰσοσκελή, εἶναι κανονική. Πραγματικά στήν ἀρχή παρατηροῦμε ὅτι οἱ παράπλευρες ἕδρες συγκλίνουν σέ σημεῖο Κ, γιατί κάθε κόλουρη πυραμίδα ἔχει προκύψει ἀπό πυραμίδα. Ἀρκεῖ ἑπομένως ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ εἶναι κανονική. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, γιατί τά τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, πού ξέρουμε ὅτι ἔχουν ἴσες βάσεις ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ καί τίς γωνίες στίς βάσεις τους ἴσες (ἀπό τά ἴσα ἰσοσκελή τραπέζια), εἶναι ἴσα ἰσοσκελή τρίγωνα καί ἑπομένως ἡ Κ.ΑΒΓΔ εἶναι κανονική, ἄρα ἡ κόλουρη πυραμίδα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ εἶναι κανονική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

518. Νά ὑπολογιστεῖ τό ὕψος ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου ἀπό τήν ἀκμή του α.

519. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό κανονικό τετράεδρο εἶναι κανονική τριγωνική πυραμίδα. Σέ τί διαφέρει τό κανονικό τετράεδρο ἀπό μιά κανονική τριγωνική πυραμίδα ;

520. Τό ἐμβαδό τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδας εἶναι Ε. Τήν τέμνουμε μὲ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση πού νά περνάει ἀπό τό μέσο μιᾶς παράπλευρης ἀκμῆς. Νά ἐκφραστεῖ τό ἐμβαδό τῆς τομῆς ἀπό τό ἐμβαδό Ε τῆς βάσεως.

521. Τό ὕψος μιᾶς πυραμίδας εἶναι υ, ἐνῶ ἡ βάση της ἔχει ἐμβαδό Ε. Τήν κόβουμε μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση σέ ἀπόσταση α ἀπό τήν κορυφή ($\alpha < \upsilon$). Νά ἐκφραστεῖ τό ἐμβαδό τῆς τομῆς ἀπό τά Ε, α καί υ.

522. Νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος μιᾶς ἀπό τίς παράπλευρες ἀκμές κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραδίδας ἀπό τήν ἀκμή α τῆς βάσεως καί τό ὕψος $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{7}}{2}$ τῆς πυραμίδας.

523. Τό ἴδιο πρόβλημα, ἄν ἡ κανονική πυραμίδα εἶναι α) τριγωνική, β) ἑξαγωνική.

524. Σέ μιά κόλουρη πυραμίδα δύο ὁμόλογες πλευρὲς τῶν βάσεων ἔχουν λόγο 1/3 καί τά ἐμβαδά τῶν βάσεων εἶναι E_1 καὶ E_2. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τῆς μεσαίας τομῆς. Νά γίνει ἐφαρμογή, ἄν οἱ βάσεις εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα μέ πλευρές α καί 3α ἀντιστοίχως.

Β΄.

525. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ κανονικό τετράεδρο εἶναι ὀρθοκεντρικό.

526. Μιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα ἔχει ὕψος $\frac{4\alpha}{3}$ καί ἡ ἀκμή τῆς βάσεώς της εἶναι 2α. Ἄν τήν πυραμίδα αὐτή τήν κόψουμε στά δύο μέ ἕνα ἐπίπεδο πού νά περνάει ἀπό μιά ἀκμή τῆς βάσεώς της καί νά σχηματίζει μέ τή βάση γωνία 45°, α) νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ τομή τῆς πυραμίδας εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο καί β) νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τῆς τομῆς αὐτῆς.

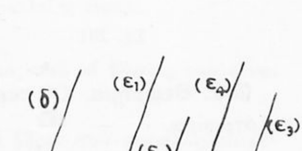
527. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά τμήματα μέ ἄκρα τά μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως κόλουρης τριγωνικῆς πυραμίδας καί τίς ἀπέναντι κορυφές τῆς ἄλλης βάσεως περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

528. Μιᾶς κόλουρης πυραμίδας τά ἐμβαδά τῶν βάσεων εἶναι E_1 καί E_2. Τήν τέμνουμε μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τίς βάσεις, πού διαιρεῖ τό ὕψος σέ δύο τμήματα μέ λόγο μ/ν. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τῆς τομῆς.

529. Σ' ἕνα κανονικό τετράεδρο ΑΒΓΔ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες πού ἑνώνουν τό μέσο Ε τοῦ ὕψους ΑΗ μέ τίς κορυφές Β, Γ καί Δ, εἶναι ἀκμές τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας.

ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ

253. Πρισματική ἐπιφάνεια. Θεωροῦμε μιά διαδοχή ἀπό εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3),..., (ε_ν) παράλληλες πρός μιά διεύθυνση (δ) (σχ. 280). Κάθε δύο διαδοχικές σχηματίζουν ἐπίπεδες ζῶμες, καί ὅλες αὐτές δημιουργοῦν μιά ἐπιφάνεια, πού λέγεται **πρισματική.** Οἱ ἐπίπεδες ζῶνες λέγονται **ἕδρες** τῆς πρισματικῆς ἐπιφάνειας καί οἱ παράλληλες εὐθεῖες λέγονται **ἀκμές** της. Ἡ πρισματική ἐπιφάνεια λέγεται **κυρτή,** ἄν ἡ τομή της ἀπό ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κυρτό πολύγωνο, διαφορετικά ἡ πρισματική ἐπιφάνεια λέγεται **μή κυρτή.**



Σχ. 280

Κάθετη τομή μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφάνειας λέγεται ἡ τομή της ἀπό ἐπίπεδο κάθετο στίς ἀκμές της. Ἡ κάθετη τομή εἶναι πολύγωνο.

254. Πρίσμα. Ἄν μιά πρισματική ἐπιφάνεια τμηθεῖ ἀπό δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) (σχ. 281), **τό στερεό μεταξύ τῶν ἐπίπεδων αὐτῶν λέγεται πρίσμα.**

Οἱ παράλληλες τομές εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ), πού λέγονται **βάσεις** τοῦ πρίσματος, ἐνῶ οἱ ἄλλες ἕδρες τοῦ στερεοῦ λέγονται **παράπλευρες ἕδρες.**

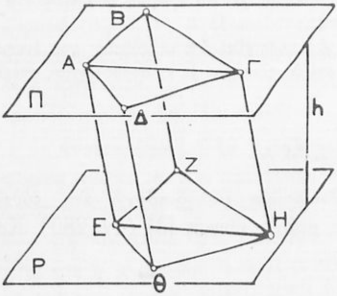
Παράπλευρες ἀκμές τοῦ πρίσματος λέγονται οἱ ἀκμές του (ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ καί ΔΘ) πού δέν ἀνήκουν στίς βάσεις του.

Κάθετη τομή τοῦ πρίσματος λέγεται τό πολύγωνο πού προκύπτει ἀπό τήν τομή του μέ ἐπίπεδο κάθετο στήν παράπλευρη ἐπιφάνεια, ὅταν αὐτό τέμνει ὅλες τίς παράπλευρες ἀκμές.

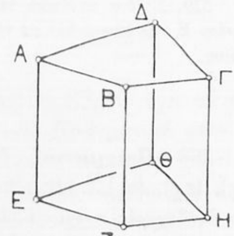
Ὕψος τοῦ πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόσταση h τῶν βάσεών του.

Ἕνα πρίσμα χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό κλπ. ἀνάλογα μέ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών του.

Διαγώνιο ἐπίπεδο λέγεται κάθε ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό δύο παράπλευρες ἀκμές πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια ἕδρα (π.χ. ΑΕΗΓ σχ. 281).



Σχ. 281



Σχ. 282

255. Θεώρημα. Οἱ παράπλευρες ἕδρες κάθε πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα πρίσμα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ. 282). Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ πρίσματος εἶναι ΑΕ // ΒΖ // ΓΗ // ΔΘ. Ἀκόμα εἶναι ΑΚ//ΕΖ σάν τομές παράλληλων ἐπιπέδων (τῶν βάσεων) ἀπό τρίτο. Ἄρα τό τετράπλευρο ΑΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Μέ ἴδιο τρόπο μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι καί οἱ ἄλλες παράπλευρες ἕδρες εἶναι παραλληλόγραμμα.

Πόρισμα. Οἱ παράπλευρες ἀκμές κάθε πρίσματος εἶναι ἴσες.

256. Ὀρθό πρίσμα λέγεται ἕνα πρίσμα πού οἱ παράπλευρες ἀκμές του εἶναι κάθετες στίς βάσεις του.

Κανονικό πρίσμα λέγεται ἕνα **ὀρθό** πρίσμα πού οἱ βάσεις του εἶναι κανονικά πολύγωνα.

257. Θεώρημα. Οἱ βάσεις κάθε πρίσματος εἶναι ἴσα πολύγωνα.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα πρίσμα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ. 282). Ἐπειδή οἱ παράπλευρες ἀκμές του εἶναι ἴσες καί παράλληλες, συμπεραίνουμε ὅτι, ἄν ἡ βάση ΑΒΓΔ μετατοπιστεῖ κατά τό δείκτη $\overrightarrow{AE}$, θά συμπέσει μέ τήν ἄλλη βάση ΕΖΗΘ. Ἄρα οἱ βάσεις εἶναι ἴσα πολύγωνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

530. Ἄν ἕνα πρίσμα τμηθεῖ ἀπό ἐπίπεδο παράλληλο πρός τίς παράπλευρες ἀκμές του, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ τομή εἶναι παραλληλόγραμμο.

531. Ν' ἀποδείξετε ὅτι ἡ τομή δύο διαγωνίων ἐπιπέδων ἑνός πρίσματος εἶναι παράλληλη καί ἴση πρός τίς παράπλευρες ἀκμές του.

532. Ἕνα κανονικό τριγωνικό πρίσμα τέμνεται μέ ἐπίπεδο, πού περνάει ἀπό μιά ἀκμή τῆς βάσεως καί ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή τῆς ἄλλης βάσεως. Νά ὑπολογιστεῖ τό ὕψος τοῦ πρίσματος ἀπό τήν ἀκμή α τῆς βάσεώς του, ἄν τό ἐπίπεδο τομῆς σχηματίζει μέ τή βάση γωνία 60^0.

533. Τό ἴδιο πρόβλημα, ἄν τό ἐπίπεδο τομῆς σχηματίζει γωνία 45^0 μέ τή βάση.

534. Ἕνα κανονικό τριγωνικό πρίσμα ἔχει ἀκμή βάσεως α καί ὕψος α. Τό τέμνουμε μέ ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό μιά ἀκμή τῆς βάσεως καί πού σχηματίζει γωνία 60^0 μέ τή βάση. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ τομή εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο καί νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό του ἀπό τήν ἀκμή α.

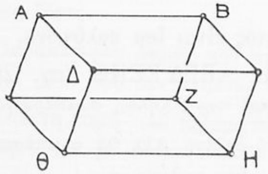
535. Τέμνουμε ἕνα τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ.ΔΕΖ μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τήν ἕδρα ΒΓΖΕ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι α) ἡ τομή εἶναι παραλληλόγραμμο β) ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς πρός τό ἐμβαδό τῆς παράλληλης ἕδρας εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀποστάσεων τῆς ἀκμῆς ΑΔ ἀπό τό ἐπίπεδο τομῆς καί τῆς παράλληλης ἕδρας.

258. Παραλληλεπίπεδο λέγεται ἕνα πρίσμα, πού οἱ βάσεις του εἶναι παραλληλόγραμμα (σχ. 283).

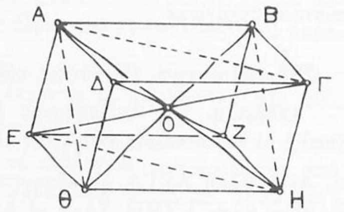
Ἀπό τόν ὁρισμό συμπεραίνουμε ὅτι ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα τό παραλληλεπίπεδο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὑπό τριπλή ἔννοια πρίσμα μέ βάσεις δύο ὁποιεσδήποτε ἀπέναντι ἕδρες του. Ἄρα οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι ἴσα παραλληλόγραμμα καί οἱ ἀκμές του ἀποτελοῦν τρεῖς ὁμάδες, πού ἡ καθεμιά ἔχει τέσσερις παράλληλες καί ἴσες ἀκμές. Τέλος τό παραλληλεπίπεδο ἔχει τρία ὕψη.

259. Θεώρημα. Οἱ διαγώνιοι κάθε παραλληλεπιπέδου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, πού λέγεται κέντρο βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου.

'Απόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ ἕνα παραλληλεπίπεδο (σχ. 284). Οἱ ἀκμές του ΑΕ καί ΓΗ εἶναι ἴσες καί παράλληλες καί ἑπομένως τό τετρά-



Σχ. 283



Σχ. 284

πλευρο ΑΕΗΓ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἄρα οἱ διαγώνιοι ΑΗ καί ΓΕ τέμνονται σέ σημεῖο Ο, πού μάλιστα εἶναι καί τό μέσο τῆς καθεμιᾶς.

'Ομοίως ἀπό τά παραλληλόγραμμα ΑΒΗΘ καί ΑΖΗΔ συμπεραίνουμε ὅτι καί οἱ διαγώνιοι ΒΘ καί ΔΖ ἀντίστοιχα περνοῦν ἀπό τό μέσο Ο τῆς διαγωνίου ΑΗ. Ἄρα οἱ τέσσερις διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο, πού λέγεται **κέντρο βάρους** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρηση. Τό σημεῖο Ο, ὡς μέσο τῆς κάθε διαγωνίου τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι καί κέντρο συμμετρίας τοῦ στερεοῦ, γι' αὐτό καί πολλές φορές τό λέμε μόνο κέντρο τοῦ παραλληλεπιπέδου.

260. 'Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο λέγεται τό παραλληλεπίπεδο, πού οἱ ἕδρες του εἶναι ὀρθογώνια (σχ. 285).

Οἱ στερεές γωνίες ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι τρισορθογώνιες καί τά τρία ὕψη του εἶναι ἴσα πρός τρεῖς ἀκμές του, πού συγκλίνουν σέ μιά κορυφή, λέγονται μάλιστα καί διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

261. Θεώρημα. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες.

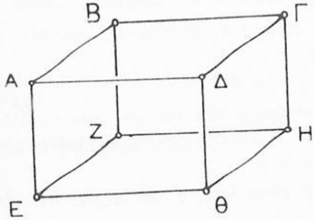
'Απόδειξη. Ἔστω α, β, γ οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου (σχ. 286) καί $ΑΗ = δ$ μιά διαγώνιός του. 'Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ παίρνουμε : $δ^2 = ΕΗ^2 + γ^2$ (1). 'Από τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΕΘΗ παίρνουμε : $ΕΗ^2 = α^2 + β^2$ (2). Τώρα ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) συνάγεται ὅτι :

$$δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2 \Rightarrow \mathbf{δ = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}}.$$

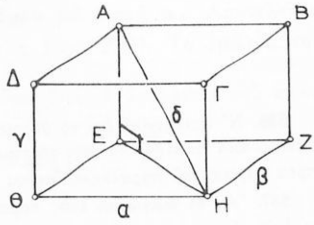
Τό ἴδιο μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ καί γιά τίς ἄλλες διαγωνίους. Ἄρα οἱ τέσσερις διαγώνιοι τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες.

262. Κύβος λέγεται τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πού οἱ ἕδρες του εἶναι τετράγωνα.

Ἀπό τόν ὁρισμό συνάγεται ὅτι οἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσες.



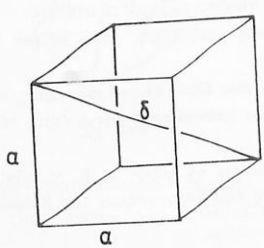
Σχ. 285



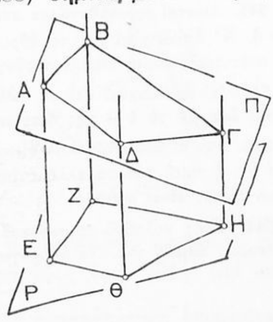
Σχ. 286

Ἄν α εἶναι ἡ ἀκμή τοῦ κύβου (σχ. 287) καί δ ἡ διαγώνιός του, ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ὅτι $\boldsymbol{\delta = \alpha\sqrt{3}}$.

263. Κολοβό πρίσμα. Ἄν μιά πρισματική ἐπιφάνεια τμηθεῖ ἀπό δύο μή παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) (σχ. 288) **δημιουργεῖται στερεό, πού λέγεται κολοβό πρίσμα.**



Σχ. 287

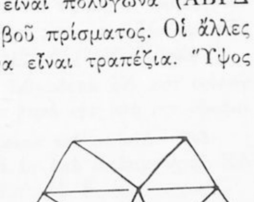


Σχ. 288

Οἱ τομές ἀπό τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ ὄχι ἴσα), πού τά λέμε **βάσεις** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Οἱ ἄλλες ἕδρες λέγονται παράπλευρες ἕδρες καί κατά κανόνα εἶναι τραπέζια. Ὕψος στό κολοβό πρίσμα δέν ὁρίζεται.

264. Πρισματοειδές λέγεται τό πολύεδρο, **πού ἔχει δύο παράλληλες ἕδρες, οἱ ὁποῖες λέγονται βάσεις, καί δέν ἔχει ἄλλες κορυφές ἐκτός ἀπό τίς κορυφές τῶν βάσεων** (σχ. 289).

Οἱ ἄλλες ἕδρες πού λέγονται παράπλευρες, εἶναι τρίγωνα ἤ τραπέζια. Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο βάσεων λέγεται ὕψος τοῦ πρισματοειδοῦς.



Σχ. 289

Μεσαία τομή λέγεται ἡ τομή τοῦ στερεοῦ ἀπό τό μεσοπαράλληλο ἐπίπεδο τῶν βάσεών του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

536. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνός παραλληλεπίπεδου ἀπό ἐπίπεδο, πού δέν τό τέμνει, ἰσοῦται μέ τό ὀκταπλάσιο τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ παραλληλεπίπεδου ἀπό τό ἐπίπεδο.

537. Ἄν οἱ διαγώνιοι ἑνός παραλληλεπίπεδου εἶναι ἴσες, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

538. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπίπεδου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του.

539. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

540. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ κύβος ἔχει κέντρο συμμετρίας τήν τομή τῶν διαγωνίων του.

541. Δίνεται τρισορθογώνια στερεά γωνία $Oxyz$ καί στό ἐσωτερικό της ἕνα τμῆμα $OA = \delta$. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τοῦ τμήματος πάνω στίς τρεῖς ἕδρες τῆς τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας παραμένει σταθερό.

542. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε κύβο ἡ προβολή μιᾶς ἀκμῆς πάνω σέ μιά διαγώνιο εἶναι ἴση μέ τό $1/3$ τῆς διαγωνίου.

543. Ἄν σ' ἕνα παραλληλεπίπεδο δύο προσκείμενες ἕδρες εἶναι ἰσοδύναμες, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ τομή τοῦ παραλληλεπίπεδου ἀπό ἐπίπεδο κάθετο στήν κοινή ἀκμή τῶν ἰσοδύναμων ἑδρῶν εἶναι ρόμβος.

544. Ἑνός κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίνονται τά μήκη α, β, γ τῶν τριῶν παράπλευρων ἀκμῶν του. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀπόσταση τῶν βαρυκέντρων τῶν βάσεών του.

Β'.

545. Δίνονται τρεῖς ὀρθογώνιες εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3) καί μεταβλητό κατά θέση εὐθύγραμμο τμῆμα μέ σταθερό μῆκος δ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του στίς τρεῖς ἀσύμβατες εὐθεῖες παραμένει σταθερό.

546. Δίνεται κύβος μέ ἀκμή α. Τόν τέμνουμε μέ τό μεσοκάθετο ἐπίπεδο μιᾶς διαγωνίου του. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ τομή εἶναι κανονικό ἑξάγωνο καί νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό του ἀπό τήν ἀκμή α τοῦ κύβου.

547. Δίνεται ἕνα παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΗ τριχοτομεῖται ἀπό τά ἐπίπεδα ΒΔΕ καί ΓΖΘ.

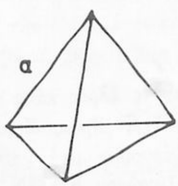
ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

265. Μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας ἑνός πολύεδρου. Γιά νά μετρήσουμε τήν ἐπιφάνεια ἑνός πολύεδρου, μετρᾶμε τίς ἐπιφάνειες τῶν ἑδρῶν του (ἐμβαδά ἐπίπεδων πολυγώνων) καί τά προσθέτουμε. Ἡ ἐργασία αὐτή ὅμως, σέ μερικές εἰδικές περιπτώσεις, τυποποιεῖται καί ἑπομένως ἁπλουστεύεται, ὅπως θά φανεῖ στά ἑπόμενα.

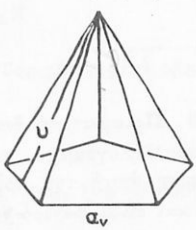
266. Ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετράεδρου μέ ἀκμή α. Ἀποτελεῖται ἀπό τέσσερα ἰσόπλευρα τρίγωνα μέ πλευρά α (σχ. 290). Τό ἐμβαδό τοῦ καθενός ἀπ' αὐτά εἶναι ἴσο μέ $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ καί ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ τετράεδρου εἶναι $4\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$, δηλαδή :

$$\mathbf{E = \alpha^2\sqrt{3}.}$$

267. Ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδας. Στήν κανονική πυραμίδα, ὅπου ὅλες οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι ἴσα ἰσοσκελή τρίγωνα, ὑπολογίζουμε τό ἐμβαδό ἑνός μόνο τριγώνου καί μετά τό πολλαπλασιάζουμε μέ τό πλῆ-



Σχ. 290



Σχ. 291

θος ν τῶν παράπλευρων ἑδρῶν. Ἄν α_ν εἶναι ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καί υ εἶναι τό παράπλευρο ὕψος (σχ. 291), μιά παράπλευρη ἕδρα ἔχει ἐμβαδό $\frac{1}{2}\alpha_\nu\upsilon$ καί ἑπομένως ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια εἶναι $\nu\frac{1}{2}\alpha_\nu\upsilon = \frac{\nu\alpha_\nu}{2}\upsilon = \frac{P_\nu}{2}\upsilon$, ὅπου P_ν εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Ἄρα ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$\mathbf{E_\pi = \frac{P_\nu}{2}\upsilon.}$$

Ἄν στήν ἐπιφάνεια αὐτή προσθέσουμε καί τό ἐμβαδό E_ν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, παίρνουμε τόν τύπο :

$$\mathbf{E_{o\lambda.} = \frac{P_\nu}{2}\upsilon + E_\nu}$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς πυραμίδας.

268. Ἐπιφάνεια κόλουρης κανονικῆς πυραμίδας. Οἱ παράπλευρες ἕδρες μιᾶς κόλουρης κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια. Ἂν α_ν, β_ν καί υ εἶναι οἱ βάσεις καί τό ὕψος ἀντίστοιχα ἑνός ἀπ' αὐτά (σχ. 292), τό ἐμβαδό του θά εἶναι $\frac{\alpha_\nu+\beta_\nu}{2}\cdot\upsilon$ καί ἑπομένως ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς κόλουρης πυραμίδας εἶναι: $\nu\cdot\frac{\alpha_\nu+\beta_\nu}{2}\cdot\upsilon=\frac{\nu\alpha_\nu+\nu\beta_\nu}{2}\cdot\upsilon=\frac{P_\nu+p_\nu}{2}\upsilon$, ὅπου P_ν καί p_ν εἶναι οἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν βάσεων. Ἄρα ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας δίνεται ἀπό τόν τύπο:

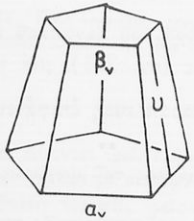
$$\mathbf{E}_\pi=\frac{\mathbf{P}_\nu+\mathbf{p}_\nu}{2}\cdot\boldsymbol{\upsilon}.$$

Ἂν στήν ἐπιφάνεια αὐτή προσθέσουμε καί τά ἐμβαδά E_ν καί ε_ν τῶν δύο βάσεων, παίρνουμε τόν τύπο:

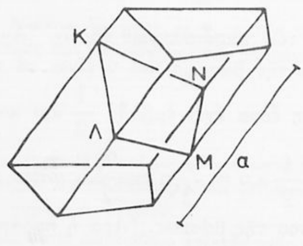
$$\mathbf{E}_{o\lambda.}=\frac{\mathbf{P}_\nu+\mathbf{p}_\nu}{2}\boldsymbol{\upsilon}+\mathbf{E}_\nu+\boldsymbol{\varepsilon}_\nu$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ.

269. Πρισματική ἐπιφάνεια. Οἱ παράπλευρες ἕδρες κάθε πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα, πού ἡ μιά πλευρά τους ἔχει μῆκος α ἴσο μέ τήν παράπλευρη ἀκμή τοῦ πρίσματος (σχ. 293). Φέρνουμε μιά κάθετη τομή ΚΛΜΝ καί εἶναι φανερό πώς οἱ πλευρές τοῦ πολυγώνου ΚΛΜΝ εἶναι ὕψη



Σχ. 292



Σχ. 293

γιά τίς παράπλευρες ἕδρες τοῦ πρίσματος. Τότε ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια, ὡς ἄθροισμα τῶν παράπλευρων ἑδρῶν, εἶναι ἴση μέ $\alpha\cdot K\Lambda+\alpha\cdot\Lambda M+\alpha\cdot MN+\alpha\cdot NK=\alpha(K\Lambda+\Lambda M+MN+NK)=\alpha\cdot P$. Ἄρα ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια κάθε πρίσματος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\mathbf{E}_\pi=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{P}$$

ὅπου α εἶναι ἡ παράπλευρη ἀκμή τοῦ πρίσματος καί P ἡ περίμετρος τῆς κάθετης τομῆς του.

Ἄν στήν προηγούμενη ἐπιφάνεια προσθέσουμε καί τίς δύο ἴσες βάσεις B τοῦ πρίσματος, παίρνουμε τόν τύπο :

$$\mathbf{E}_{o\lambda.} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P} + 2\mathbf{B}$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος.

270. Ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος. Οἱ τύποι τῆς προηγούμενης παραγράφου ἰσχύουν βέβαια καί γιά τά ὀρθά πρίσματα, ἐκεῖ ὅμως ἡ περίμετρος P τῆς κάθετης τομῆς εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν περίμετρο τῆς βάσεως, ἐνῶ τό μῆκος α τῆς παράπλευρης ἀκμῆς μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό ὕψος h τοῦ πρίσματος. Ἔτσι παίρνουμε :

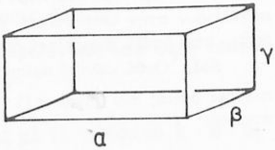
$$\mathbf{E}_{\pi} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{h} \quad \text{καί} \quad \mathbf{E}_{o\lambda.} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{h} + 2\mathbf{B}.$$

271. Ἐπιφάνεια ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Ἄν οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ (σχ. 294), ὁ τύπος τῆς προηγούμενης παραγράφου γιά τήν ὁλική ἐπιφάνειά του γίνεται :

$$E_{o\lambda.} = (2\alpha + 2\beta)\gamma + 2\alpha\beta = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma),$$

δηλαδή :

$$\mathbf{E}_{o\lambda.} = 2(\boldsymbol{\alpha\beta} + \boldsymbol{\alpha\gamma} + \boldsymbol{\beta\gamma}).$$



Σχ. 294

Πόρισμα. Ἡ ἐπιφάνεια κύβου μέ ἀκμή α εἶναι ἴση μέ $6\alpha^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

548. Μιά κανονική ἑξαγωνική πυραμίδα ἔχει ἀκμή βάσεως 5α καί ὕψος 6α. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιφάνειά της

549. Μιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα ἔχει παράπλευρο ὕψος ἴσο μέ τά 5/6 τῆς ἀκμῆς τῆς βάσεως. Ἄν ἡ ὁλική ἐπιφάνειά της εἶναι 384cm^2, νά βρεθεῖ ἡ ἀκμή τῆς βάσεως καί τό ὕψος της.

550. Μιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα ἔχει βάση μέ πλευρά α καί οἱ παράπλευρες ἕδρες της σχηματίζουν μέ τή βάση γωνίες 30°. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιφάνειά της.

551. Μιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα ἔχει ἀκμή βάσεως α καί παράπλευρη ἀκμή α. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ὁλική ἐπιφάνειά της.

552. Σ' ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ οἱ ἕδρες ΑΒΓ καί ΔΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα μέ πλευρά α καί ἡ δίεδρη ΒΓ εἶναι 60°. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνειά του.

553. Σ' ἕνα ὀρθό τριγωνικό πρίσμα ἡ βάση εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές 9α καί 12α. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἄν τό ὕψος εἶναι ἴσο μέ τήν ὑποτείνουσα τῆς τριγωνικῆς βάσεως.

554. Νά βρεθεῖ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος μέ ὕψος 2α, ὅταν ἡ βάση του εἶναι κανονικό α) τρίγωνο, β) τετράγωνο, γ) ἑξάγωνο, ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ ἀκτίνα α.

555. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πού ἡ βάση του εἶναι τετράγωνο μέ πλευρά α καί τό ὕψος του εἶναι 2α, τέμνεται ἀπό ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τά ἄκρα τῶν ἀκμῶν τῆς ἴδιας στερεᾶς γωνίας. Νά βρεθεῖ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας πού προκύπτει.

556. Οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπίπεδου εἶναι ἀνάλογες πρός τούς ἀριθμούς 1, 3, 4 καί ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι 342cm^2. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ διαστάσεις του.

557. Ἡ διαγώνιος ἑνός κύβου εἶναι $4\sqrt{3}$ cm. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνειά του.

Β΄.

558. Τρίεδρη στερεά γωνία μέ κορυφή Κ ἔχει τίς ἕδρες της 60° τήν καθεμιά. Πάνω σέ μιά ἀκμή της παίρνουμε τμῆμα $ΚΑ = \alpha$ καί φέρνουμε ἐπίπεδο $(ΑΒΓ) \perp ΚΑ$, πού τέμνει τίς ἄλλες ἀκμές τῆς τρίεδρης στά Β καί Γ. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου ΚΑΒΓ.

559. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο κανονικῶν πρισμάτων, πού οἱ βάσεις τους εἶναι τετράγωνο τοῦ ἑνός, ἑξάγωνο τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένες σέ ἴσους κύκλους μέ ἀκτίνα R καί τά ὕψη τους εἶναι ἴσα μέ τά ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοίχως.

560. Τέμνουμε ἕνα κύβο μέ ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τά ἄκρα τριῶν ἀκμῶν του, πού συγκλίνουν στήν ἴδια στερεά γωνία. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν, στά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύβος.

561. Ὀρθό κολοβό πρίσμα ἔχει βάση ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α. Οἱ δύο παράπλευρες ἀκμές του εἶναι $\alpha(1+\sqrt{3})$ καί ἡ τρίτη α. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ.

ΟΓΚΟΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

272. Θεώρημα. Σέ κάθε τετράεδρο τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας του ἐπί τό ἀντίστοιχό της ὕψος εἶναι τό ἴδιο γιά ὅλες τίς ἕδρες.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τά ὕψη ΑΕ, ΒΖ (σχ. 295) καί θ' ἀποδείξουμε ὅτι $(ΒΓΔ)\cdot ΑΕ = (ΑΓΔ)\cdot ΒΖ$.

Φέρνουμε $ΑΗ \perp ΓΔ$ καί $ΒΘ \perp ΓΔ$, ὁπότε $ΕΗ \perp ΓΔ$ καί $ΖΘ \perp ΓΔ$ (θεώρ. τριῶν καθέτων). Ἄρα οἱ γωνίες $\widehat{ΑΗΕ}$ καί $\widehat{ΒΘΖ}$ εἶναι ἀντίστοιχες ἐπίπεδες τῆς δίεδρης ΓΔ, ἑπομένως $\widehat{ΑΗΕ} = \widehat{ΒΘΖ}$. Τότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ καί ΒΘΖ εἶναι ὅμοια καί συνεπῶς

$$\frac{ΑΕ}{ΒΖ} = \frac{ΑΗ}{ΒΘ}. \tag{1}$$

Τά τρίγωνα ΑΓΔ καί ΒΓΔ ἔχουν τή ΓΔ κοινή. Ἄρα

$$\frac{(ΑΓΔ)}{(ΒΓΔ)} = \frac{ΑΗ}{ΒΘ}. \tag{2}$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) συνάγεται : $\dfrac{ΑΕ}{ΒΖ} = \dfrac{(ΑΓΔ)}{(ΒΓΔ)}$ ἤ $(ΒΓΔ)\cdot ΑΕ = (ΑΓΔ)\cdot ΒΖ$.

273. Ὁρισμός. **Ὄγκος τετράεδρου λέγεται τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἀπό τίς ἕδρες του ἐπί τό ἀντίστοιχό της ὕψος, ἐπί κάποιο σταθερό συντελεστή k, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τήν αὐθαίρετη ἐκλογή τῆς μονάδας μετρήσεως τῶν ὄγκων *.**

Ὁ ὄγκος ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται μέ (ΑΒΓΔ) ἤ $V_{(ΑΒΓΔ)}$ ἤ ἁπλούστερα μέ V, ὅταν ξέρουμε ποῦ ἀναφέρεται αὐτός. Οἱ ἴδιοι συμβολισμοί ἐπεκτείνονται καί γιά τόν ὄγκο ὁποιουδήποτε πολυέδρου.

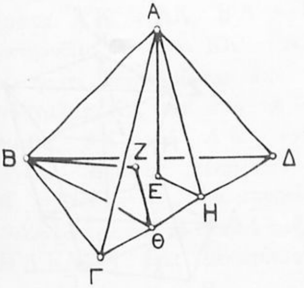
Δύο τετράεδρα ἤ γενικά δύο στερεά μέ ἴσους ὄγκους λέγονται ἰσοδύναμα.

Πόρισμα I. Δύο τετράεδρα μέ ἰσεμβαδικές βάσεις καί ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.

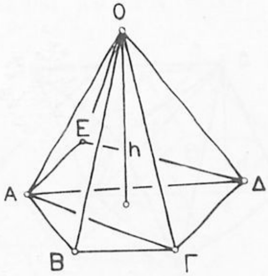
Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων μέ ἰσεμβαδικές βάσεις εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τή μονάδα μετρήσεως (τό συντελεστή k) καί ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων πρός τίς βάσεις ὑψῶν.

Πόρισμα III. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέρδων μέ ἴσα ὕψη ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων πρός αὐτά βάσεων.

274. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος πυραμίδας εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο k · B · h, ὅπου B ἡ βάση καί h τό ὕψος τῆς πυραμίδας.



Σχ. 295



Σχ. 296

Ἀπόδειξη. Ἔστω Ο.ΑΒΓΔΕ μιά πυραμίδα μέ ὕψος h (σχ. 296). Τή διαιροῦμε σέ τετράεδρα μέ τά ἐπίπεδα ΟΑΓ, ΟΑΔ. Τότε ἔχουμε :

(1) $\qquad (Ο.ΑΒΓΔΕ) = (Ο.ΑΒΓ) + (Ο.ΑΓΔ) + (Ο.ΑΔΕ).$

Κατά τόν ὁρισμό ὅμως (§ 273) εἶναι : $(Ο.ΑΒΓ) = k(ΑΒΓ)h$, $(Ο.ΑΓΔ) = k(ΑΓΔ)h$, $(Ο.ΑΔΕ) = k(ΑΔΕ)h$ καί ἑπομένως ἡ σχέση (1) γράφεται : $(Ο.ΑΒΓΔΕ) = k\,\{(ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ)\}\,h = k\,(ΑΒΓΔΕ)\,h$ ἤ $(Ο.ΑΒΓΔΕ) = kB.h.$

(*) Ἡ τιμή τοῦ συντελεστῆ k ὁρίζεται παρακάτω (§ 277), ἀφοῦ προηγουμένως ὁριστεῖ ἡ μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων.

275. Θεώρημα. Κάθε τριγωνικό πρίσμα μπορεῖ νά διαιρεθεῖ σέ τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓ.ΔΕΖ ἕνα τριγωνικό πρίσμα (σχ. 297). Τό διαιροῦμε σέ τρία τετράεδρα :

(1) (ΑΒΓ.ΔΕΖ) = (Δ.ΑΒΓ) + (Γ.ΔΕΖ) + (Δ.ΒΓΕ).

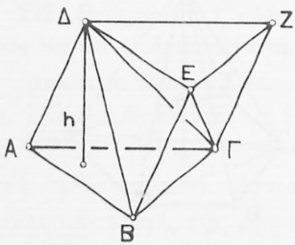
Παρατηροῦμε ὅτι (Δ.ΑΒΓ) = (Γ.ΔΕΖ), γιατί ἔχουν ἴσες βάσεις καί ἴσα ὕψη. Ἐπίσης εἶναι (Γ.ΔΕΖ) = (Δ.ΒΓΕ), γιατί ἔχουν ἴσες βάσεις τίς ΓΕΖ καί ΓΕΒ καί ἴσα ὕψη ἀπ' τήν κοινή κορυφή τους Δ. Ἄρα τό τριγωνικό πρίσμα διαιρεῖται σέ τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα καί ἑπομένως ἡ σχέση (1) γράφεται :

(ΑΒΓ.ΔΕΖ) = 3 (Δ.ΑΒΓ).

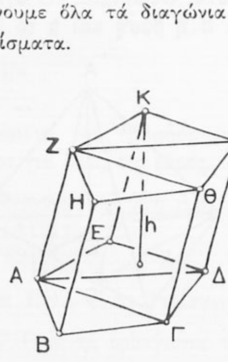
Πόρισμα. Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ 3k · B · h, ὅπου B ἡ βάση του καί h τό ὕψος του.

276. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος ἑνός πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος του, ἐπί τό σταθερό συντελεστή 3k.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔΕ.ΖΗΘΙΚ ἕνα πρίσμα μέ ὕψος h (σχ. 298). Ἀπό μιά παράπλευρη ἀκμή του, τήν ΑΖ, φέρνουμε ὅλα τά διαγώνια ἐπίπεδα καί τό πρίσμα διαιρεῖται σέ τριγωνικά πρίσματα.



Σχ. 297



Σχ. 298

Τότε ἔχουμε : (ΑΒΓ...Κ) = 3k(ΑΒΓ)h + 3k(ΑΓΔ)h + 3k(ΑΔΕ)h = 3k(ΑΒΓΔΕ)h. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο 3kBh, ὅπου Β ἡ βάση τοῦ πρίσματος.

Πόρισμα. Ὁ ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α, β, γ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο 3.καβγ.

277. Μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων. Προσδιορισμός τοῦ συντελεστή k. Πρακτικοί λόγοι ἔχουν ἐπιβάλει ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων τήν κυβική, δηλαδή ἕνα κύβο μέ ἀκμή τή μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους.

Ὁ ὄγκος τῆς μονάδας μετρήσεως, κατά τό προηγούμενο πόρισμα, εἶναι ἴσος μέ $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ καί βεβαίως πρέπει νά εἶναι $3k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Ἄρα :

$$k = \frac{1}{3}.$$

Πόρισμα. Ἀπό τά προηγούμενα συνάγεται ὅτι :

i) Ὁ ὄγκος πυραμίδας δίνεται ἀπό τόν τύπο $V = \frac{1}{3} Bh$.

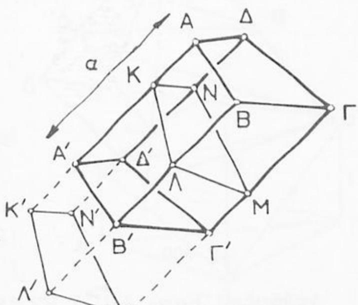
ii) Ὁ ὄγκος πρίσματος δίνεται ἀπό τόν τύπο $V = Bh$, ὅπου B εἶναι ἡ βάση τοῦ στερεοῦ καί h τό ὕψος του.

iii) Ὁ ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α, β, γ δίνεται ἀπό τόν τύπο $V = \alpha\beta\gamma$.

iv) Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου μέ ἀκμή α δίνεται ἀπό τόν τύπο $V = \alpha^3$.

278. Θεώρημα. Κάθε πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμο πρός ὀρθό πρίσμα μέ βάση τήν κάθετη τομή καί ὕψος τήν παράπλευρη ἀκμή του.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′ ἕνα (πλάγιο) πρίσμα μέ παράπλευρη ἀκμή ΑΑ′ = α καί ΚΛΜΝ μία κάθετη τομή του (σχ. 299). Προεκτείνουμε τίς παράπλευρες ἀκμές του κατά τήν ἴδια φορά καί παίρνουμε τμήματα Α′Κ′ = ΑΚ, Β′Λ′ = ΒΛ, Γ′Μ′ = ΓΜ καί Δ′Ν′ = ΔΝ. Τότε παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ΚΚ′ = ΑΑ′ = α, γιατί ἀποτελοῦνται ἀπό τό κοινό τμῆμα ΚΑ′ καί ἀπό τά ἴσα τμήματα ΑΚ καί Α′Κ′ ἀντιστοίχως. Ὁμοίως εἶναι ΛΛ′ = ΜΜ′ = ΝΝ′ = α. Ἄρα μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι τό στερεό τμῆμα ΑΒΓΔ.ΚΛΜΝ ἔχει μετατοπιστεῖ κατά τό δείκτη $\overrightarrow{AA'}$ στήν θέση Α′Β′Γ′Δ′.Κ′Λ′Μ′Ν′ καί ἐπομένως εἶναι : (ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′) = (ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′) (1). Ἀλλά τό ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′ εἶναι ὀρθό πρίσμα, μέ βάση τήν κάθετη τομή (ΚΛΜΝ) = Β καί ὕψος τήν ἀκμή ΚΚ′ = α. Ἐπομένως εἶναι (ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′) = Β · α καί τότε ἡ σχέση (1) γράφεται : (ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′) = Β · α.



Σχ. 299

279. Θεώρημα. Ἄν δύο τετράεδρα ἔχουν μιά στερεά γωνία ἴση, ὁ λόγος τῶν ὄγκων τους εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν, οἱ ὁποῖες περιέχουν τίς ἴσες στερεές γωνίες.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε δύο τετράεδρα ΑΒΓΔ καί Α΄Β΄Γ΄Δ΄ (σχ. 300) τοποθετημένα ἔτσι, ὥστε νά συμπίπτουν οἱ ἴσες στερεές γωνίες τους στό Α. Φέρνουμε $ΒΕ \perp (ΑΓΔ)$ καί $Β'Ε' \perp (ΑΓ'Δ')$. Τότε θά εἶναι :

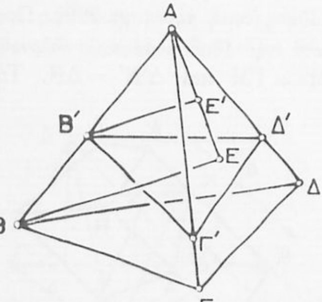
$$(1) \qquad \frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΒ'Γ'Δ')} = \frac{{}^1/_3\,(ΑΓΔ)\,ΒΕ}{{}^1/_3\,(ΑΓ'Δ')\,Β'Ε'} = \frac{(ΑΓΔ)\,ΒΕ}{(ΑΓ'Δ')\,Β'Ε'}.$$

Ἐπειδή τά τρίγωνα ΑΓΔ καί ΑΓ΄Δ΄ ἔχουν κοινή τή γωνία $\widehat{Α}$, ἔχουμε $\dfrac{(ΑΓΔ)}{(ΑΓ'Δ')} = \dfrac{ΑΓ \cdot ΑΔ}{ΑΓ' \cdot ΑΔ'}$, ἐνῶ ἀπό τά ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΒ΄Ε΄ παίρνουμε $\dfrac{ΒΕ}{Β'Ε'} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΒ'}$. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται :

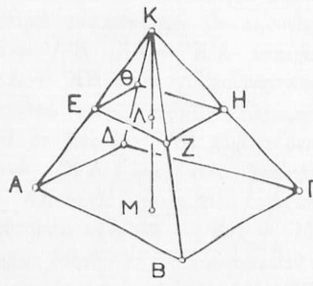
$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΒ'Γ'Δ')} = \frac{ΑΓ \cdot ΑΔ}{ΑΓ' \cdot ΑΔ'} \cdot \frac{ΑΒ}{ΑΒ'} \quad ἤ \quad \frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΒ'Γ'Δ')} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ΑΔ}{ΑΒ' \cdot ΑΓ' \cdot ΑΔ'}.$$

280. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος τῆς κόλουρης πυραμίδας δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\,(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h.}$$



Σχ. 300



Σχ. 301

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ μία κόλουρη πυραμίδα μέ βάσεις τά ὅμοια πολύγωνα (ΑΒΓΔ) = Β, (ΕΖΗΘ) = β καί ὕψος h (σχ. 301).

Θεωροῦμε τό σημεῖο Κ, στό ὁποῖο τέμνονται οἱ παράπλευρες ἀκμές της, καί τό κάθετο τμῆμα ΚΛΜ στίς βάσεις τῆς κόλουρης πυραμίδας. Ὁ ὄγκος της V εἶναι ἴσος μέ τή διαφορά τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων Κ.ΑΒΓΔ καί Κ.ΕΖΗΘ, δηλαδή εἶναι :

$$(1) \qquad V = \frac{1}{3}\,Β \cdot ΚΜ - \frac{1}{3}\,\beta \cdot ΚΛ.$$

Γνωρίζουμε ὅτι (§ 250) $\dfrac{Β}{\beta} = \dfrac{ΚΜ^2}{ΚΛ^2} \Rightarrow$

$$(2) \qquad \frac{KM}{K\Lambda} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\beta}}.$$

Ἀπό τή σχέση (2) βρίσκουμε ὅτι $\dfrac{KM}{KM - K\Lambda} = \dfrac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}$ ἤ

$\dfrac{KM}{h} = \dfrac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}$ ἤ $KM = \dfrac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}$, καί ἀκόμη $\dfrac{KM - K\Lambda}{K\Lambda} =$ $\dfrac{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}$ ἤ $\dfrac{h}{K\Lambda} = \dfrac{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}$ ἤ $K\Lambda = \dfrac{h\sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}$. Ἀντικαθιστοῦμε τίς τιμές τῶν KM καί KΛ στή σχέση (1) καί παίρνουμε:

$$V = \frac{1}{3}\left[B\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}} - \beta\frac{h\sqrt{\beta}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{B^3} - \sqrt{\beta^3}}{\sqrt{B} - \sqrt{\beta}}\right]h =$$

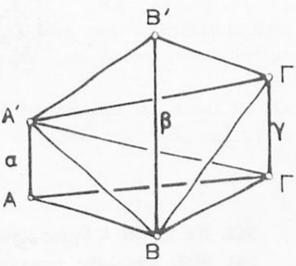
$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{B^2} + \sqrt{B\beta} + \sqrt{\beta^2}\right)h = \frac{1}{3}\left(B + \sqrt{B\beta} + \beta\right)h, \text{ δηλαδή :}$$

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\,(B + \sqrt{B\beta} + \beta)\,h.}$$

281. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\,B(\alpha + \beta + \gamma),}$$

ὅπου B εἶναι ἡ κάθετη τομή του καί α, β, γ οἱ παράπλευρες ἀκμές του.



Σχ. 302

Ἀπόδειξη. i) Ἄν τό κολοβό τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓ.Α′Β′Γ′ (σχ. 302) εἶναι ὀρθό, τότε ἡ βάση του (ΑΒΓ) = B εἶναι καί κάθετη τομή του καί ὁ ὄγκος του V ἀναλύεται σέ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, ὡς ἑξῆς:

$$(1) \qquad V = (A'.AB\Gamma) + (A'.BB'\Gamma') + (A'.B\Gamma\Gamma').$$

Ἐκτελοῦμε τούς παρακάτω φανερούς μετασχηματισμούς (§ 273 πόρ. I):

$$(A'.BB'\Gamma') = (A.BB'\Gamma') = (\Gamma'.ABB') = (\Gamma.ABB') = (B'.AB\Gamma) = \frac{1}{3}B\beta$$

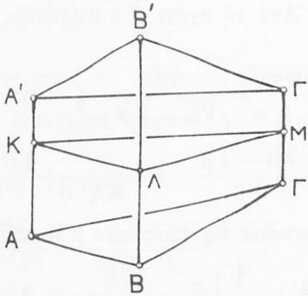
καί $(A'B\Gamma\Gamma') = (A.B\Gamma\Gamma') = (\Gamma'.AB\Gamma) = \dfrac{1}{3}B\gamma$. Ἐπειδή ἀκόμα εἶναι

$(A'.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B\alpha$, ἡ σχέση (1) γράφεται : $V = \frac{1}{3} B\alpha + \frac{1}{3} B\beta + \frac{1}{3} B\gamma$

ἤ $V = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma)$.

ii) Ἄν τό τριγωνικό κολοβό πρίσμα δέν εἶναι ὀρθό (σχ. 303) : Φέρνουμε μιά κάθετη τομή $(K\Lambda M) = B$ καί τότε τό στερεό ἀναλύεται σέ ἄθροισμα δύο ὀρθῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων μέ κοινή βάση τήν $(K\Lambda M) = B$, δηλαδή :

(2) $V = (K\Lambda M.AB\Gamma) + (K\Lambda M.A'B'\Gamma')$.



Σχ. 303

Κατά τό προηγούμενο θά ἔχουμε :

$(K\Lambda M.AB\Gamma) = \frac{1}{3} B(KA + \Lambda B + M\Gamma)$

καί $(K\Lambda M.A'B'\Gamma') = \frac{1}{3} B(KA' + \Lambda B' + M\Gamma')$, ἄρα ἡ σχέση (2) γράφεται :

$V = \frac{1}{3} B(KA + \Lambda B + M\Gamma) + \frac{1}{3}(BKA' + \Lambda B' + M\Gamma') = \frac{1}{3} B(AA' +$

$+ BB' + \Gamma\Gamma') = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma)$, δηλαδή :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} B(\alpha + \beta + \gamma).}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

562. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου μέ ἀκμή α.

563. Μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας ἡ ἀκμή τῆς βάσεως εἶναι α καί οἱ παράπλευρες ἕδρες της σχηματίζουν γωνίες 45^{o} μέ τή βάση. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος της.

564. Δίνονται τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3), ὄχι στό ἴδιο ἐπίπεδο. Πάνω στήν (ε_1) ὀλισθαίνει ἕνα τμῆμα ΑΒ μέ σταθερό μῆκος καί πάνω στίς (ε_2) καί (ε_3) δύο σημεῖα Γ καί Δ ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μεταβλητοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι σταθερός.

565. Ὁ ὄγκος ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου νά ἐκφραστεῖ α) ἀπό τό ὕψος τοῦ h β) ἀπό τήν ἀπιφάνειά του Ε.

566. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδας πού ἔχει ἀκμή βάσεως α καί παράπλευρη ἀκμή $\frac{\alpha\sqrt{17}}{2}$.

567. Μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας ἡ ἀκμή τῆς βάσεως εἶναι α καί ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια εἶναι διπλάσια ἀπ' τή βάση. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας.

B'.

568. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος τετραέδρου εἶναι ἴσος μέ τό $1/3$ τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς του ἐπί τήν προβολή τοῦ στερεοῦ σέ ἐπίπεδο κάθετο στήν ἀκμή αὐτή.

569. Ἄν σ' ἕνα τετράεδρο οἱ δύο ἀπέναντι ἀκμές εἶναι ὀρθογώνιες, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος μέ τό $1/6$ τοῦ γινομένου τῶν ἀκμῶν αὐτῶν, ἐπί τήν ἐλάχιστη ἀπόστασή τους.

570. Ἄν ἑνός τετραέδρου ἡ μία κορυφή προβάλλεται στήν ἀπέναντι ἕδρα στό ὀρθόκεντρό της, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό γινόμενο δύο ὁποιωνδήποτε ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου ἐπί τήν κοινή τους κάθετο εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐκλογή τῶν ἀκμῶν τούτων.

571. Ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ οἱ ἕδρες ΑΒΓ καί ΔΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἡ ἀκμή $ΑΔ = α$ καί ἡ δίεδρη $\widehat{ΒΓ}$ εἶναι 60^0. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος του.

572. Μιᾶς πυραμίδας Κ.ΑΒΓΔ ἡ βάση ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος της ἰσοῦται μέ τά $2/3$ τῆς ἕδρας ΚΑΒ ἐπί τήν ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν ἀκμῶν ΚΑ καί ΓΔ.

573. Μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας ἡ ἀκμή τῆς βάσεως εἶναι $2α$ καί οἱ παράπλευρες ἕδρες σχηματίζουν μέ τή βάση γωνίες 15^0. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος της.

574. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλευρά α. Ἀπό τίς κορυφές Α καί Γ φέρνουμε καθέτους στό ἐπίπεδο τοῦ τετραγώνου πρός τό ἴδιο μέρος του καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα $ΑΕ = ΑΓ$ καί $ΓΖ = ΑΒ$. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΕΖ.

575. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλερά α. Ἀπό τίς κορυφές του Β καί Δ φέρνουμε κάθετα τμήματα στό ἐπίπεδο τοῦ τετραγώνου $ΒΕ = 3α$, $ΔΖ = 2α$ καί πρός τό ἴδιο μέρος. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΓΕΖ.

576. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδας, πού ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά της εἶναι $12α$ καί οἱ παράπλευρες ἕδρες της σχηματίζουν δίεδρες γωνίες 30^0 μέ τή βάση.

577. Τρισορθογώνια στερεά γωνία Κ τέμνεται μέ ἐπίπεδο στά Α, Β καί Γ. Ἄν $ΚΑ = 2α$, $ΚΒ = 3α$ καί $ΚΓ = 4α$, νά ὑπολογιστεῖ i) τό ἐμβαδό τῆς τομῆς καί ii) τό ὕψος ΚΗ τοῦ τετραέδρου ΚΑΒΓ.

A'.

578. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος πρίσματος, πού ἡ βάση του εἶναι κανονικό α) τρίγωνο, β) τετράγωνο, γ) ἑξάγωνο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ ἀκτίνα R καί ἔχει ὕψος διπλάσιο ἀπό τήν ἀκμή τῆς βάσεως.

579. Ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάση εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές $20α$ καί $15α$, ἐνῶ τό ὕψος του ἰσοῦται μέ τήν ὑποτείνουσα τῆς τριγωνικῆς βάσεως. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος του.

580. Τριγωνικό πρίσμα ἔχει βάση ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α καί οἱ παράπλευρες ἀκμές του σχηματίζουν γωνία 60^0 μέ ἐπίπεδο τῆς βάσεως. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τῆς κάθετης τομῆς του.

581. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό μισό τοῦ γινομένου μιᾶς παράπλευρης ἕδρας του ἐπί τήν ἀπόσταση τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἀπ' αὐτή.

582. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο πρισμάτων, πού οἱ βάσεις τους εἶναι κανονικό ἑξάγωνο τοῦ ἑνός, ἰσόπλευρο τρίγωνο τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένες σέ ἴσους κύκλους μέ ἀκτίνα R, ἐνῶ τά ὕψη τους εἶναι ἴσα μέ τά ἀποστήματα τῶν βάσεών τους.

583. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων, πού ἔχουν κοινή κορυφή ἕνα σημεῖο ἐσωτερικό ἑνός πρίσματος καί βάσεις τίς βάσεις τοῦ πρίσματος, εἶναι σταθερό.

584. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, πού οἱ διαστάσεις του ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο μέ ἄθροισμα 27cm καί πού ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι $454 cm^2$.

585. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $486 cm^2$.

586. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος κύβου α) ἀπό τή διαγώνιό του δ καί β) ἀπό τήν ἐπιφάνειά του E.

587. Οἱ διαστάσεις ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνάλογες πρός τούς ἀριθμούς 2,3,4 καί ὁ ὄγκος του εἶναι $648 cm^3$. Νά βρεθοῦν οἱ διαστάσεις του.

588. Πάνω στίς τρεῖς ἀκμές πού συγκλίνουν στήν ἴδια κορυφή Α ἑνός κύβου μέ ἀκμή α, παίρνουμε τμήματα $AB' = A\Gamma' = A\Delta' = 2\alpha/3$. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ κύβου καί τοῦ τετραέδρου $AB'\Gamma'\Delta'$.

Β΄.

589. Ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου οἱ διαστάσεις εἶναι 3α, 4α, 5α. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος του, ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων χρησιμοποιήσουμε τόν ὄγκο κανονικοῦ τετραέδρου μέ ἀκμή 2α.

590. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιδέπου, ἄν ἡ διαγώνιός του εἶναι 26cm, ἡ διαγώνιος μιᾶς ἕδρας του 10 cm καί ἡ ἐπιφάνειά του $768 cm^2$.

591 Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων παραλληλεπιπέδου καί τοῦ τετραέδρου τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμές συγκλίνουν σέ μία κορυφή τοῦ παραλληλεπιπέδου.

592. Ἕνα παραλληλεπίπεδο νά διαιρεθεῖ σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ ἐπίπεδα πού περνοῦν ἀπό μιά ἀκμή του.

593. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καί τοῦ ὀκταέδρου μέ κορυφές τά κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

594. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ὄγκοι δύο παραλληλεπιπέδων μέ μία στερεά γωνία κοινή εἶναι ὅπως τά γινόμενα τῶν ἀκμῶν πού περιέχουν τήν κοινή στερεά γωνία.

Α΄.

595. Ν' ἐποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος κόλουρης πυραμίδας δίνεται ἀπό τόν τύπο $V = \frac{1}{3} B(1 + \lambda + \lambda^2)h$, ὅπου λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητας τῶν δύο βάσεων.

596. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα μέ ἀκμή βάσεως 2α καί ὕψος $\alpha\sqrt{3}$ τέμνεται μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση πού περνάει ἀπό τό μέσο τοῦ ὕψους. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τῆς σχηματιζόμενης κόλουρης πυραμίδας.

597. Ὀρθό κολοβό πρίσμα ἔχει βάση ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α καί παράπλευρες ἀκμές α, 2α, 3α. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος του.

598. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδό τῆς κάθετης τομῆς του ἐπί τήν ἀπόσταση τῶν κ. βάρους τῶν βάσεων.

Β΄.

599. Μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας ἡ βάση ἔχει πλευρά 2α καί οἱ παράπλευρες ἀκμές σχηματίζουν γωνία 60^0 μέ τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως. Νά βρεθεῖ σέ ποιά ἀπόσταση ἀπό τή βάση πρέπει νά φέρουμε ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση ἔτσι, ὥστε ἡ σχηματιζόμενη κόλουρη πυραμίδα νά ἔχει ὄγκο $\dfrac{104\alpha^3\sqrt{3}}{81}$

600. Ἑνός τριγωνικοῦ πρίσματος οἱ παράπλευρες ἀκμές ἔχουν μῆκος 20cm. Πάνω σέ δύο παράπλευρες ἀκμές παίρνουμε σημεῖα Η καί Θ, πού ἀπέχουν ἀπό τίς ἀντίστοιχες κορυφές τῆς ἴδιας βάσεως ἀποστάσεις 12cm καί 15cm. Πάνω στήν τρίτη παράπλευρη ἀκμή νά ὁριστεῖ σημεῖο Ι ἔτσι, ὥστε τό ἐπίπεδο (ΗΘΙ) νά διαιρεῖ τό πρίσμα σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη.

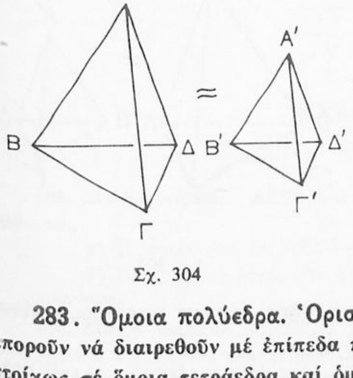
601. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μέ τό 1/4 τοῦ γινομένου τῆς κάθετης τομῆς ἐπί τό ἄθροισμα τῶν παράπλευρων ἀκμῶν του.

602. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδό τῆς κάθετης τομῆς του ἐπί τήν ἀπόσταση τῶν κέντρων τῶν βάσεών του.

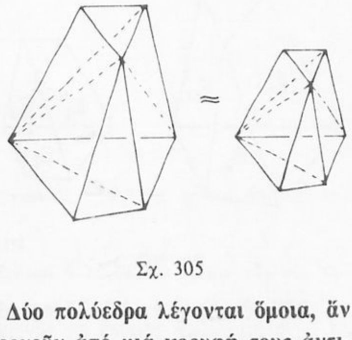
ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

282. ῞Ομοια τετράεδρα. Ὁρισμός. Δύο τετράεδρα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχουν τίς ἕδρες τους ὅμοιες μία πρός μία καί ὁμοίως τοποθετημένες (σχ. 304).

Ὁ λόγος ὁμοιότητας τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν εἶναι ὁ ἴδιος γιά ὅλα τά ζεύγη τῶν ὅμοιων ἑδρῶν καί λέγεται λόγος ὁμοιότητας τῶν τετραέδρων. Οἱ ἀντίστοιχες στερεές, ὅπως καί οἱ δίεδρες γωνίες τῶν δύο τετραέδρων, εἶναι ἴσες.



Σχ. 304



Σχ. 305

283. ῞Ομοια πολύεδρα. Ὁρισμός. Δύο πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ἄν μποροῦν νά διαιρεθοῦν μέ ἐπίπεδα πού περνοῦν ἀπό μιά κορυφή τους ἀντιστοίχως σέ ὅμοια τετράεδρα καί ὁμοίως τοποθετημένα (σχ. 305).

Ἀπό τά προηγούμενα συνάγονται τά παρακάτω :

i) Ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ ἑνός πολύεδρου (ἕδρες, κορυφές, ἀκμές, γωνίες κλπ.) πρός τά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Δυό ἀντίστοιχα στοιχεῖα λέγονται **ὁμόλογα.**

ii) Οἱ ὁμόλογες ἕδρες εἶναι ὅμοια πολύγωνα μέ τόν ἴδιο λόγο ὁμοιότητας τῶν πολύεδρων.

iii) Οἱ ὁμόλογες γωνίες τῶν δύο πολύεδρων (ἐπίπεδες, δίεδρες, στερεές) εἶναι ἴσες.

iv) Ἡ σχέση τῆς ὁμοιότητας δύο πολύεδρων, πού συμβολίζεται μέ τό $\approx$, εἶναι σχέση ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική, δηλαδή :

α) $(\Sigma) \approx (\Sigma)$,

β) $(\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \Rightarrow (\Sigma_2) \approx (\Sigma_1)$,

γ) $(\Sigma_1) \approx (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) \approx (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) \approx (\Sigma_3)$.

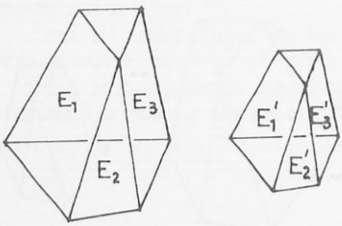
Ἄρα ἡ σχέση τῆς ὁμοιότητας εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

284. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὅμοιων πολυέδρων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας.

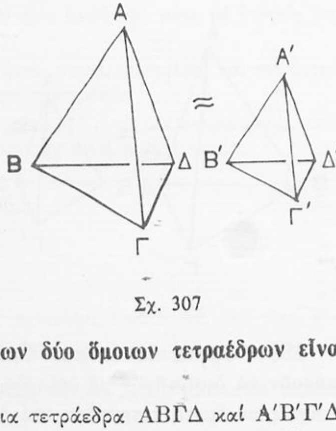
Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὅμοια πολύεδρα μέ λόγο ὁμοιότητας λ (σχ. 306) καί τῶν ὁποίων οἱ ἕδρες ἔχουν ἐμβαδά $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ καί $E'_1, E'_2, \ldots, E'_\nu$ ἀντίστοιχα. Ἐπειδή οἱ ὁμόλογες ἕδρες εἶναι ὅμοια πολύγωνα μέ λόγο ὁμοιότητας λ, ἔχουμε :

$$\frac{E_1}{E'_1} = \lambda^2, \ \frac{E_2}{E'_2} = \lambda^2, \ldots, \frac{E_\nu}{E'_\nu} = \lambda^2 \text{ ἤ } \lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \ldots = \frac{E_\nu}{E'_\nu} =$$

$$= \frac{E_1 + E_2 + \ldots + E_\nu}{E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_\nu} = \frac{E}{E'},$$ ὅπου E καί E′ εἶναι οἱ ἐπιφάνειες τῶν δύο πολύεδρων. Ἄρα εἶναι $\frac{E}{E'} = \lambda^2$.



Σχ. 306



Σχ. 307

285. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὅμοιων τετραέδρων εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου ὁμοιότητας.

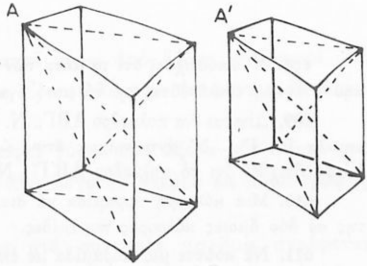
Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὅμοια τετράεδρα ΑΒΓΔ καί Α′Β′Γ′Δ′ (σχ. 307) καί ἔστω λ ὁ λόγος ὁμοιότοτάς τους. Τότε θά εἶναι : $\frac{AB}{A'B'} =$

$= \dfrac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'} = λ$ ἤ $ΑΒ = λΑ'Β'$, $ΑΓ = λΑ'Γ'$, $ΑΔ = λΑ'Δ'$. Ἐπειδή οἱ τρίεδρες γωνίες $\widehat{Α}$ καί $\widehat{Α'}$ εἶναι ἴσες, συμπεραίνουμε ὅτι (§ 279):

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ΑΔ}{Α'Β' \cdot Α'Γ' \cdot ΑΔ'} = \frac{λΑ'Β' \cdot λΑ'Γ' \cdot λΑ'Δ'}{Α'Β' \cdot Α'Γ' \cdot Α'Δ'} = λ^3.$$ Ἄρα

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = λ^3.$$

286. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὅμοιων πολυέδρων εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου ὁμοιότητάς τους.



Σχ. 308

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο ὅμοια πολύεδρα (σχ. 308), πού οἱ ὄγκοι τους εἶναι V καί V'. Ἀπό δύο ὁμόλογες κορυφές Α καί Α' φέρνουμε ἐπίπεδα καί διαιροῦμε τά δύο στερεά σέ ζεύγη ὅμοιων τετραέδρων μέ τόν ἴδιο λόγο ὁμοιότητας λ, καί ἄς συμβολήσουμε μέ $V_1, V_2, \ldots, V_ν$ καί $V'_1, V'_2, \ldots, V'_ν$ τούς ὄγκους τους. Τότε θά εἶναι (§ 285):

$$\frac{V_1}{V'_1} = λ^3,\ \frac{V_2}{V'_2} = λ^3, \ldots, \frac{V_ν}{V'_ν} = λ^3 \text{ ἤ } λ^3 = \frac{V_1}{V'_1} = \frac{V_2}{V'_2} = \ldots = \frac{V_ν}{V'_ν} =$$

$$= \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_ν}{V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_ν} = \frac{V}{V'}.$$

Ἄρα εἶναι:

$$\frac{V}{V'} = λ^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

603. Δίνεται τετράεδρο ΑΒΓΔ καί ὀνομάζουμε Κ,Λ,Μ,Ν τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν του.

α) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι $ΑΒΓΔ \approx ΚΛΜΝ$.

β) Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων.

604. Δίνεται πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ. Τήν τέμνουμε μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση της καί πού περνάει ἀπό τό μέσο Α' τῆς ἀκμῆς ΚΑ.

α) Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι σχηματίζεται νέα πυραμίδα ὅμοια μέ τή δεδομένη.

β) Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων.

605. Ἡ βάση μιᾶς πυραμίδας ἔχει ἐμβαδό $144 cm^2$. Τήν τέμνουμε μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση σέ ἀπόσταση 4cm ἀπό τήν κορυφή καί ἡ τομή ἔχει ἐμβαδό $64 cm^2$. Νά ὑπολογιστεῖ τό ὕψος τῆς πυραμίδας.

606. Δύο πυραμίδες μέ ἴσα ὕψη ἔχουν βάσεις $120 cm^2$ καί $180 cm^2$ ἀντιστοίχως. Τίς τέμνουμε μέ ἐπίπεδα παράλληλα πρός τίς βάσεις τους στήν ἴδια ἀπόσταση ἀπ' αὐτές καί ἡ τομή τῆς πρώτης πυραμίδας εἶναι $70 cm^2$. Νά βρεθεῖ ἡ τομή τῆς δεύτερης πυραμίδας.

607. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ κύβοι τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὅμοιων πολυέδρων εἶναι ὅπως τά τετράγωνα τῶν ὄγκων τους.

Β΄.

608. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τά μέσα τῶν ἀκμῶν ἑνός τετράεδρου εἶναι κορυφές ὀκτάεδρου πού ὁ ὄγκος του ἰσοῦται μέ τό μισό ὄγκο τοῦ τετράεδρου.

609. Δίνεται ἕνα πολύεδρο ΑΒΓ...Ν. Πάνω στίς ἡμιευθεῖες ΑΒ, ΑΓ,...,ΑΝ παίρνουμε σημεῖα Β', Γ',...,Ν' ἀντιστοίχως ἔτσι, ὥστε νά εἶναι $AB' = A\Gamma' = ... = AN' = \lambda$. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό πολύεδρο ΑΒ'Γ'...Ν' εἶναι ὅμοιο πρός ΑΒΓ...Ν.

610. Μιά κόλουρη πυραμίδα νά διαιρεθεῖ μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τίς βάσεις της σέ δύο ὅμοιες κόλουρες πυραμίδες.

611. Νά κόψετε μιά πυραμίδα μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση ἔτσι, ὥστε αὐτή νά χωριστεῖ σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη.

612. Νά κόψετε μιά πυραμίδα μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση ἔτσι, ὥστε αὐτή νά χωριστεῖ σέ δύο στερεά μέ λόγο μ/ν.

ΒΙΒΛΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

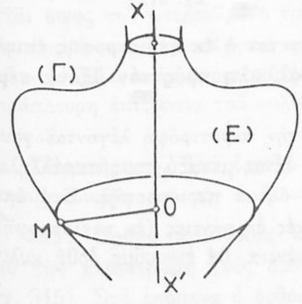
ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

287. Ὁρισμοί.

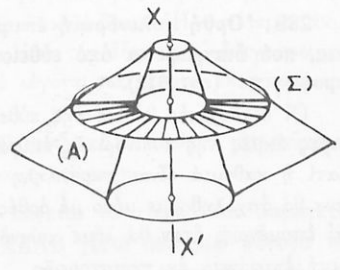
i) Κάθε γραμμή (Γ), ὅταν περιστραφεῖ γύρω ἀπό ἄξονα xx′ κατά μιά πλήρη γωνία (360°), διαγράφει ἐπιφάνεια Ε, πού λέγεται **ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς** (σχ. 309).

ii) Κάθε σχῆμα (Α), ὅταν περιστραφεῖ γύρω ἀπό ἄξονα xx′ κατά μιά πλήρη γωνίαν, δημιουργεῖ στερεό (Σ), πού λέγεται **στερεό ἐκ περιστροφῆς** (σχ. 528).

Σημείωση. Στά ἑπόμενα θά λέμε γιά συντομία «σχῆμα στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα» καί θά ἐννοοῦμε «σχῆμα στρέφεται πλήρη στροφή γύρω ἀπό ἄξονα».



Σχ. 309



Σχ. 310

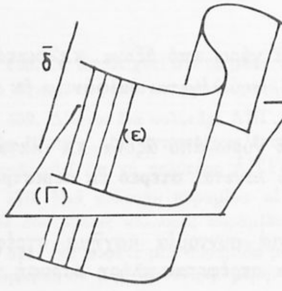
Πόρισμα I. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς γραμμῆς (Γ) (σχ. 309) φέρνουμε ΜΟ ⊥ xx′. Στήν περιστροφή τό τμῆμα ΜΟ παραμένει σταθερό κατά μέγεθος, τό σημεῖο Ο σταθερό κατά θέση καί ἑπομένως τό σημεῖο Μ διαγράφει κύκλο (Ο,ΟΜ), πού τό ἐπίπεδό του εἶναι κάθετο στόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἄρα ἡ **τομή ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς ἀπό ἐπίπεδο κάθετο στόν ἄξονα εἶναι κύκλος.**

Πόρισμα II. Ἡ τομή στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς, ἀπό ἐπίπεδο κάθετο στόν ἄξονα περιστροφῆς (σχ. 310), εἶναι γενικά κυκλικός δακτύλιος.

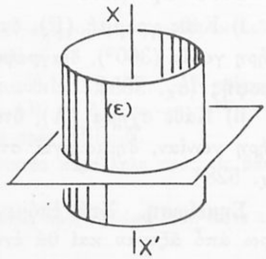
Πόρισμα III. Κάθε ἐπιφάνεια ἤ κάθε στερεό ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα περιστροφῆς, πού λέγεται καί ἄξονας τοῦ σχήματος.

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

288. Γενική ἔννοια κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας. Κυλινδρική ἐπιφάνεια γενικά λέγεται κάθε εὐθειογενής ἐπιφάνεια, ὅπου ἡ εὐθεία (ε), πού τή διαγράφει, παραμένει πάντα παράλληλη πρός δοσμένη διεύθυνση (δ) καί τέμνει σταθερή γραμμή (Γ) (σχ. 311). Ἡ γραμμή (Γ) λέγεται **ὁδηγός** τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ε). Ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια γενικά δέν εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.



Σχ. 311



Σχ. 312

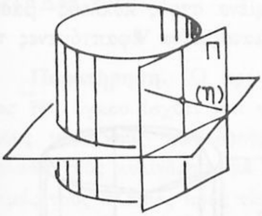
289. Ὀρθή κυλινδρική ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια, πού διαγράφεται ἀπό εὐθεία (ε), παράλληλη πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς xx′ (σχ. 312).

Οἱ διαδοχικές θέσεις τῆς εὐθείας (ε) στήν περιστροφή λέγονται **γενέτειρες** ἀκμές τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας καί εἶναι μεταξύ τους παράλληλες, γιατί ἡ καθεμιά εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς. Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ ὀρθές κυλινδρικές ἐπιφάνειες (ἐκ περιστροφῆς) καί ἑπομένως, ὅταν θά λέμε κυλινδρική ἐπιφάνεια, θά ἐννοοῦμε ὀρθή κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

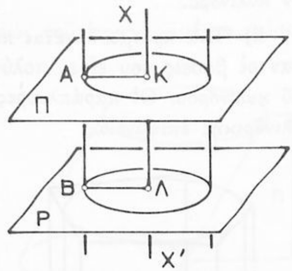
290. Ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας λέγεται κάθε ἐπίπεδο (Π), πού ἔχει μέ τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια κοινή μιά μόνο γενέτειρα ἀκμή (σχ. 313). Κάθε εὐθεία (η) τοῦ ἐφαπτόμενου ἐπιπέδου (μέ ἐξαίρεση τή γενέτειρα ἀκμή) λέγεται ἐφαπτόμενη εὐθεία τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας καί ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τήν ἐπιφάνεια.

291. Θεώρημα. Οἱ τομές κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας ἀπό ἐπίπεδα κάθετα στόν ἄξονα τῆς ἐπιφάνειας εἶναι ἴσοι κύκλοι.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε δύο τομές μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας ἀπό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κάθετα στόν ἄξονα xx′ τῆς ἐπιφάνειας (σχ. 314). Οἱ τομές εἶναι ὁπωσδήποτε κύκλοι, γιατί ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 287 πόρ. Ι), καί ἔστω Κ καί Λ τά κέντρα τους πάνω στόν ἄξονα xx′. Μιά γενέτειρα ἀκμή τέμνει τά ἐπίπεδα τομῆς στά Α καί Β. Τό τετράπλευρο ΑΚΛΒ εἶναι ὀρθογώνιο, γιατί $AB // = K\Lambda$ καί $K\Lambda \perp (P)$. Ἄρα εἶναι $KA = \Lambda B$ καί ἑπομένως οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι.



Σχ. 313



Σχ. 314

292. Κύλινδρος. Ἄν κόψουμε μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ἐπίπεδα (Π) καί (P), κάθετα στόν ἄξονα xx′ (σχ. 314), **τό στερεό μεταξύ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν λέγεται ὀρθός κυκλικός κύλινδρος.**

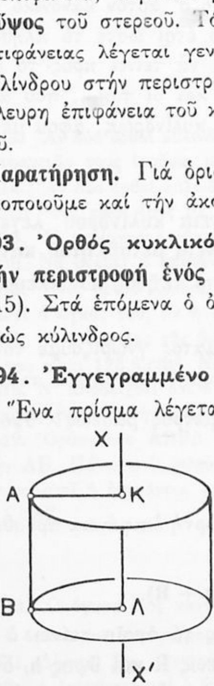
Οἱ ἴσοι κύκλοι, κατά τούς ὁποίους τά δύο ἐπίπεδα τέμνουν τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια, λέγονται **βάσεις** τοῦ κύλινδρου καί ἡ ἀπόστασή τους λέγεται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Τό τμῆμα AB τῆς γενέτειρας ἀκμῆς τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας λέγεται γενέτειρα ἀκμή τοῦ κυλίνδρου. Ἡ γενέτειρα ἀκμή τοῦ κυλίνδρου στήν περιστροφή της γύρω ἀπό τόν ἄξονα xx′ διαγράφει τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, πού λέγεται καί **κυρτή ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ.

Παρατήρηση. Γιά ὁρισμό τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μποροῦμε νά χρησιμοποιοῦμε καί τήν ἀκόλουθη ἰσοδύναμη πρόταση.

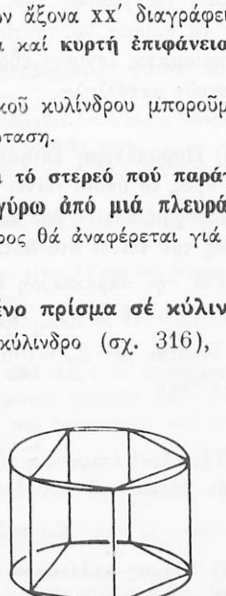
293. Ὀρθός κυκλικός κύλινδρος λέγεται τό στερεό πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή ἑνός ὀρθογωνίου AKΛB γύρω ἀπό μιά πλευρά του (σχ. 315). Στά ἑπόμενα ὁ ὀρθός κυκλικός κύλινδρος θά ἀναφέρεται γιά συντομία ὡς κύλινδρος.

294. Ἐγγεγραμμένο καί περιγγεγραμμένο πρίσμα σέ κύλινδρο.

i) Ἕνα πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένο σέ κύλινδρο (σχ. 316), ὅταν

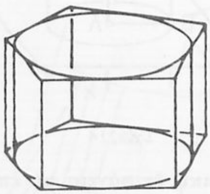


Σχ. 315

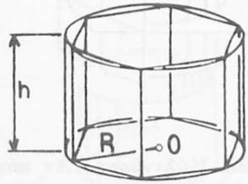

Σχ. 316

οἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα ἐγγεγραμμένα στούς κύκλους - βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Οἱ παράπλευρες ἀκμές τοῦ πρίσματος εἶναι γενέτειρες ἀκμές γιά τόν κύλινδρο.

ii) Ἕνα πρίσμα λέγεται **περιγεγραμμένο** γύρω ἀπό κύλινδρο (σχ. 317), ὅταν οἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα περιγεγραμμένα στούς κύκλους - βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Οἱ παράπλευρες ἕδρες τοῦ πρίσματος εἶνα ἐφαπτόμενες τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας.



Σχ. 317



Σχ. 318

295. Μέτρηση τοῦ κυλίνδρου. Ἄς θεωρήσουμε ἕναν ὀρθό κύλινδρο μέ βάση κύκλο (O,R), ὕψος h καί ἐγγεγραμμένο σ' αὐτόν κανονικό πρίσμα (σχ. 318). Φανταζόμαστε τό πρίσμα μεταβλητό ἔτσι ὥστε τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του, αὐξανόμενο συνέχεια, νά τείνει πρός τό ἄπειρο. Τότε τό πρίσμα θά ταυτιστεῖ μέ τόν κύλινδρο καί οἱ τύποι, πού ἀφοροῦν στά πρίσματα, ἰσχύουν οὐσιαστικά καί γιά τούς κυλίνδρους, ἀφοῦ μετασχηματιστοῦν κατάλληλα.

Τότε :

i) Παράπλευρη ἐπιφάνεια ἤ κυρτή ἐπιφάνεια κυλίνδρου λέγεται τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος μέ ἀκτίνα βάσεως R καί ὕψος h, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του τείνει στό ἄπειρο.

Γιά τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος γνωρίζουμε τόν τύπο $E_\pi = P_\nu \cdot h$ (§ 270). Τότε ἡ κυρτή (παράπλευρη) ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μέ $E_\kappa = \lim_{\nu \to \infty} P_\nu \cdot h = 2\pi R h$ (περίμετρος βάσεως × ὕψος) δηλαδή εἶναι :

$$\mathbf{E_\kappa = 2\pi R h.}$$

Τήν ὁλική ἐπιφάνεια τή βρίσκουμε ἄν στήν κυρτή ἐπιφάνεια προσθέσουμε τίς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου, δηλαδή εἶναι :

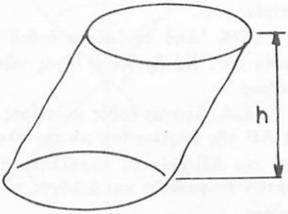
$$\mathbf{E_{o\lambda} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(h + R).}$$

ii) Ὄγκος κυλίνδρου λέγεται τό ὅριο πρός τό ὁποῖο τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητοῦ κανονικοῦ πρίσματος μέ ἀκτίνα βάσεως R καί ὕψος h, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του τείνει πρός τό ἄπειρο.

'Ο τύπος, πού δίνει τόν ὄγκο V τοῦ κυλίνδρου, προέρχεται ἀπό τόν τύπο $V = Bh$ τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος καί εἶναι : $V = \lim_{\nu \to \infty} E_\nu h = \pi R^2 h$,

ὅπου E_ν εἶναι τό ἐμβαδό τῆς κανονικῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος. Ἄρα εἶναι :

$$V = \pi R^2 h.$$



Σχ. 319

Παρατήρηση. 'Ο προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καί γιά τούς πλάγιους κυκλικούς κυλίνδρους (σχ. 319), δηλαδή τούς κυλίνδρους μέ τίς γενέτειρες ἀκμές τους πλάγιες πρός τίς κυκλικές βάσεις τους. Γενικά ἰσχύει ὁ τύπος **«Ὄγκος = Βάση × Ὕψος»** γιά κάθε κύλινδρο (ὀρθό ἤ πλάγιο), πού ἡ βάση του δέν εἶναι ἀναγκαστικά κύκλος, καί τοῦτο, γιατί μποροῦμε, ὅπως καί προηγουμένως, νά θεωρήσουμε ὅτι ὁ κάθε κύλινδρος προέρχεται ἀπό κάποιο μεταβλητό ἐγγεγραμμένο πρίσμα, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν του τείνει πρός τό ἄπειρο καί ταυτόχρονα ἡ κάθε πλευρά του τείνει στό μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

613. Ἄν δύο ὀρθοί κύλινδροι ἔχουν ἴσες βάσεις, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τους ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ὑψῶν τους.

614. Ἄν δύο ὀρθοί κύλινδροι ἔχουν ἴσα ὕψη, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τους εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεών τους.

615. Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ἑνός ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι 31,4 cm καί τό ὕψος του 6 cm. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος του.

616. Ἑνός ὀρθοῦ κυλίνδρου ἡ κυρτή ἐπιφάνεια εἶναι τριπλάσια ἀπό τή βάση του. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος του, ἄν ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως εἶναι 4 cm.

617. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνός ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι 10 cm καί ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του εἶναι 125,6 cm^2. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος του.

618. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μέ τό 1/2 τοῦ γινομένου τῆς ἀκτίνας του ἐπί τήν κυρτή ἐπιφάνειά του.

619. Ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις $AB = 4\alpha$ καί $A\Delta = 3\alpha$ στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΑΒ. Πάνω στίς πλευρές του ΔΑ καί ΓΒ παίρνουμε τμήματα $\Delta E = \Gamma Z = \alpha$. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού διαγράφεται ἀπό τό ὀρθογώνιο ΓΔΕΖ.

Β'.

620. Ὁ ὄγκος ἑνός κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶνει $6\sqrt{3}$ cm^3. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου σ' αὐτό κυλίνδρου.

621. Δίνεται ἕνα κανονικό τετραγωνικό πρίσμα μέ ἀκμή βάσεως α καί ὕψος 2α. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ α) ἐγγεγραμμένου του κυλίνδρου, β) περιγεγραμμένου του κυλίνδρου.

622. Ἑνός ὀρθογωνίου οἱ διαστάσεις εἶναι α καί β μέ $\alpha < \beta$. Γύρω ἀπό ποιά πλευρά του πρέπει νά στραφεῖ τό ὀρθογώνιο, ὥστε ὁ κύλινδρος πού προκύπτει νά ἔχει α) τή μεγαλύτερη ἐπιφάνεια, β) τό μεγαλύτερο ὄγκο ;

623. Ἄν κύλινδρος τμηθεῖ μέ ἐπίπεδο, παράλληλο πρός τόν ἄξονά του, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ τομή εἶναι ὀρθογώνιο.

624. Νά βρεθοῦν τά ἐπίπεδα συμμετρίας ἑνός ὀρθοῦ κυλίνδρου καί τό κέντρο συμμετρίας του.

625. Ἀπό τόν ἄξονα ὀρθοῦ κυλίνδρου φέρνουμε δύο ἡμιεπίπεδα πού σχηματίζουν γωνία 60^0. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν, στά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

626. Δίνεται ὀρθός κύλινδρος μέ βάση κύκλο ἀκτίνας R καί ὕψος h. Φέρνουμε χορδή AB τῆς βάσεως ἴση μέ τήν πλευρά ἐγγεγραμμένου σ' αὐτήν ἰσόπλευρου τρίγωνου καί ἀπό τήν AB ἐπίπεδο παράλληλο πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν, στά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

627. Χορδή κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας λέγεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μέ τά ἄκρα του πάνω στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ κοινή κάθετος τοῦ ἄξονα μιᾶς ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας καί μιᾶς χορδῆς της περνᾶ ἀπό τό μέσο τῆς χορδῆς.

628. Ἕνα ὀρθογώνιο στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, παράλληλο μιᾶς πλευρᾶς του καί ὁ ὁποῖος δέν τέμνει τό ὀρθογώνιο. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι α) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ πού προκύπτει ἰσοῦται μέ τήν περίμετρο τοῦ ὀρθογώνιου ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου, πού διαγράφει τό κέντρο τοῦ ὀρθογώνιου. β) Ὁ ὄγκος τοῦ ἴδιου στερεοῦ ἰσοῦται μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογώνιου ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου, πού διαγράφει τό κέντρο τοῦ ὀρθογώνιου.

629. Δίνονται τρία ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ), πού τέμνονται ἀνά δύο καί παράλληλα πρός τήν ἴδια εὐθεία (δ). Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν τέσσερις ὀρθές κυλινδρικές ἐπιφάνειες, πού ἡ καθεμιά ἐφάπτεται καί στά τρία ἐπίπεδα.

630. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων πού ἡ ἀπόστασή τους ἀπό μιά εὐθεία (ε) εἶναι α.

631. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν εὐθειῶν πού ἔχουν σταθερή διεύθυνση καί ἐφάπτονται σέ γνωστή ὀρθή κυλινδρική ἐπιφάνεια.

632. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, πού ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό τίς δύο εὐθεῖες εἶναι κ/λ.

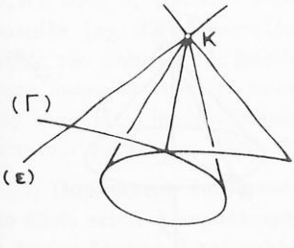
633. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, πού τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό τίς παράλληλες εἶναι σταθερό.

ΚΩΝΟΣ

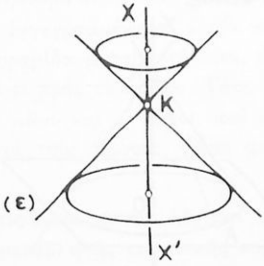
296. Γενική ἔννοια κωνικῆς ἐπιφανείας. Κωνική ἐπιφάνεια γενικά λέγεται κάθε εὐθειογενής ἐπιφάνεια, ὅπου ἡ εὐθεία (ε), πού τή διαγράφει, περνᾶ πάντα ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Κ καί τέμνει μιά σταθερή γραμμή (Γ) (σχ. 320). Τό σημεῖο Κ λέγεται **κορυφή** τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας καί ἡ γραμμή **(Γ) οδηγός** τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ε). Ἡ κωνική ἐπιφάνεια, γενικά δέν εἶναι ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

297. Ὀρθή κωνική ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια πού διαγράφεται ἀπό εὐθεία (ε), πού τέμνει τόν ἄξονα περιστροφῆς xx′ σέ σημεῖο Κ (σχ. 321).

Τό σημεῖο Κ λέγεται **κορυφή** τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας καί οἱ διαδοχικές θέσεις τῆς εὐθείας (ε) στήν περιστροφή της λέγονται **γενέτειρες ἀκμές** τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας. Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ τίς ὀρθές κωνικές ἐπιφάνειες (ἐκ περιστροφῆς).

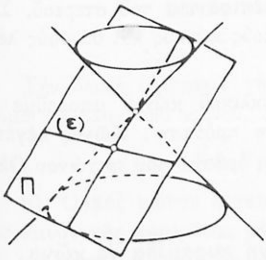


Σχ. 320

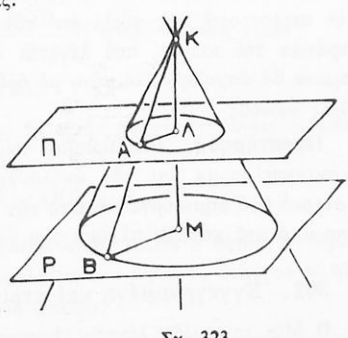


Σχ. 321

298. Ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο κωνικῆς ἐπιφάνειας λέγεται κάθε ἐπίπεδο (Π), πού ἔχει μέ τήν κωνική ἐπιφάνεια κοινή μιά μόνο γενέτειρα ἀκμή (σχ. 322). Κάθε εὐθεία (ε) τοῦ ἐφαπτόμενου ἐπιπέδου (μέ ἐξαίρεση τή γενέτειρα ἀκμή) ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τήν κωνική ἐπιφάνεια καί λέγεται **ἐφαπτόμενη** εὐθεία τῆς ἐπιφάνειας.



Σχ. 322

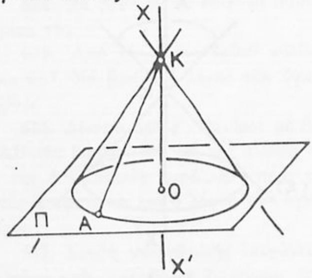


Σχ. 323

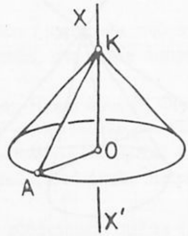
299. Θεώρημα. Οἱ τομές μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἀπό ἐπίπεδα κάθετα στόν ἄξονά της εἶναι κύκλοι καί ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τους εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό τήν κορυφή.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε δύο τομές μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἀπό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κάθετα στόν ἄξονα **xx'** τῆς ἐπιφάνειας (σχ. 323). Οἱ τομές εἶναι ὁπωσδήποτε κύκλοι, γιατί ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 287) καί ἔστω Λ καί Μ τά κέντρα τους πάνω στόν ἄξονα **xx'**. Μιά γενέτειρα ἀκμή τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας τέμνει τά ἐπίπεδα τομῆς στά Α καί Β. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΛΑ καί ΚΜΒ εἶναι ὅμοια, γιατί ἔχουν κοινή τή γωνία τους στό Κ. Ἀπ' αὐτά παίρνουμε: $\dfrac{\Lambda A}{MB} = \dfrac{K\Lambda}{KM} = \dfrac{KA}{KB}$.

300. Ὀρθός κυκλικός κῶνος. Ἄν μιά κωνική ἐπιφάνεια τμηθεῖ μέ ἐπίπεδο (Π) κάθετο στόν ἄξονά της xx′ (σχ. 324), **τό στερεό πού περιέχεται μεταξύ τῆς κορυφῆς Κ τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας καί τῆς ἐπίπεδης τομῆς λέγεται κῶνος.**



Σχ. 324



Σχ. 325

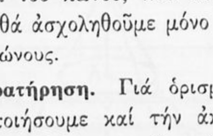
Ὁ κύκλος, κατά τόν ὁποῖο τέμνεται ἡ κωνική ἐπιφάνεια, λέγεται **βάση** τοῦ κώνου καί ἡ ἀπόσταση ΚΟ τῆς κορυφῆς Κ ἀπό τή βάση λέγεται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ. Γενέτειρα ἀκμή τοῦ κώνου λέγεται τό τμῆμα ΚΑ ἀπό τήν κορυφή τοῦ κώνου ὡς τόν κύκλο τῆς βάσεως. Ἡ γενέτειρα ἀκμή ΚΑ τοῦ κώνου, στήν περιστροφή της γύρω ἀπ' τόν ἄξονα xx′, διαγράφει τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, πού λέγεται καί **κυρτή ἐπιφάνεια** τοῦ στερεοῦ. Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ ὀρθούς κυκλικούς κώνους καί θά τούς λέμε ἁπλῶς κώνους.

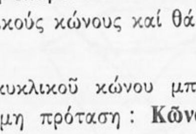
Παρατήρηση. Γιά ὁρισμό τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε καί τήν ἀκόλουθη ἰσοδύναμη πρόταση: **Κῶνος λέγεται τό στερεό πού δημιουργεῖται ἀπό τήν περιστροφή ὀρθογώνιου τριγώνου ΟΚΑ γύρω ἀπό μιά κάθετη πλευρά του** (σχ. 325).

301. Ἐγγεγραμμένη καί περιγεγραμμένη πυραμίδα σέ κῶνο.

i) Μία πυραμίδα λέγεται **ἐγγεγραμμένη** σέ κῶνο (σχ. 326), ὅταν τά δύο στερεά ἔχουν κοινή κορυφή καί ἡ βάση τῆς πυραμίδας εἶναι πολύγωνο ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο - βάση τοῦ κώνου. Οἱ παράπλευρες ἀκμές τῆς πυραμίδας εἶναι γενέτειρες ἀκμές γιά τόν κῶνο.

ii) Μία πυραμίδα λέγεται **περιγεγραμμένη** σέ κῶνο (σχ. 327), ὅταν


Σχ. 326


Σχ. 327

τά δύο στερεά ἔχουν κοινή κορυφή καί ἡ βάση τῆς πυραμίδας εἶναι πολύγωνο περιγεγραμμένο στόν κύκλο - βάση τοῦ κώνου. Οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς πυραμίδας εἶναι ἐφαπτόμενες τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας.

302. Μέτρηση τοῦ κώνου. Ἄς θεωρήσουμε ἕναν κῶνο μέ βάση κύκλο (O, R), ὕψος h, γενέτειρα ἀκμή λ καί μιά ἐγγεγραμμένη σ' αὐτόν κανονική πυραμίδα (σχ. 328). Φανταζόμαστε τήν πυραμίδα μεταβλητή ἔτσι, ὥστε τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της νά τείνει πρός τό ἄπειρο. Τότε ἡ μεταβλητή πυραμίδα τείνει νά ταυτιστεῖ μέ τόν κῶνο καί οἱ τύποι, πού ἀφοροῦν στίς πυραμίδες, ἰσχύουν οὐσιαστικά καί γιά τούς κώνους, ἀφοῦ μετασχηματιστοῦν κατάλληλα. Ἔτσι ἔχουμε :

i) Παράπλευρη ἐπιφάνεια ἤ κυρτή ἐπιφάνεια κώνου λέγεται τό ὅριο, στό ὁποῖο τείνει ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδας μέ ἀκτίνα βάσεως R καί παράπλευρη ἀκμή λ, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνει στό ἄπειρο.

Γιά τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς κανονικῆς πυραμίδας γνωρίζουμε τόν τύπο $E_\pi = \dfrac{P_\nu \upsilon}{2}$ (§ 267), ὅπου P_ν εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καί υ τό παράπλευρο ὕψος. Τότε ἡ κυρτή (παράπλευρη) ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἰσοῦται μέ : $E_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{P_\nu \upsilon}{2} = \dfrac{2\pi R\lambda}{2} = \pi R\lambda$, δηλαδή εἶναι :

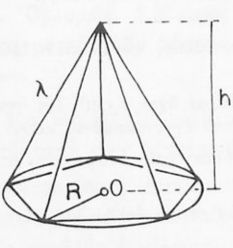
$$\mathbf{E_\kappa = \pi R\lambda.}$$

Τήν ὁλική ἐπιφάνεια τή βρίσκουμε, ἄν στήν κυρτή ἐπιφάνεια προσθέσουμε τή βάση τοῦ κώνου, δηλαδή εἶναι :

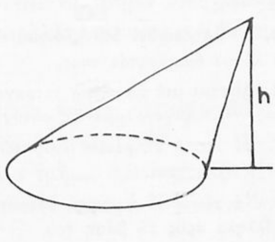
$$\mathbf{E_{o\lambda.} = \pi R\lambda + \pi R^2 = \pi R(\lambda + R).}$$

ii) Ὄγκος κώνου λέγεται τό ὅριο, στό ὁποῖο τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητῆς κανονικῆς πυραμίδας μέ ἀκτίνα βάσεως R καί ὕψος h, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της τείνει στό ἄπειρο.

Ὁ τύπος, πού δίνει τόν ὄγκο V τοῦ κώνου, προέρχεται ἀπό τόν τύπο



Σχ. 328



Σχ. 329

$V = \frac{1}{3}$ Bh τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδας καί εἶναι : $V = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{3} E_\nu h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$,

ὅπου E_ν τό ἐμβαδό τῆς κανονικῆς βάσεως τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδας. Ἄρα εἶναι :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.}$$

Παρατήρηση. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καί γιά τούς πλάγιους κώνους (σχ. 329) καί γενικά ἰσχύει ὁ τύπος «Ὄγκος $= \frac{1}{3}$ [Βάση × Ὕψος]» γιά τούς τυχαίους κώνους, δηλαδή κώνους πού ἡ βάση τους δέν εἶναι ἀναγκαστικά κύκλος. Ἡ ἀπόδειξη γίνεται μέ τήν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐγγεγραμμένη πυραμίδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

634. Ἰσόπλευρος κῶνος λέγεται ὁ κῶνος, πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή ἰσόπλευρου τριγώνου γύρω ἀπό ἕνα ὕψος του. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ἰσόπλευρου κώνου ἀπό τήν πλευρά α τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου, ἀπό τό ὁποῖο προῆλθε.

635. Ἰσόπλευρος κῶνος ἔχει ὁλική ἐπιφάνεια $E = 3\pi\alpha^2$. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ μεσαία τομή του.

636. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος κώνου, πού ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του εἶναι 20π cm² καί ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς του εἶναι 4 cm.

637. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια κώνου, πού ὁ ὄγκος του εἶναι 72π cm³ καί τό ὕψος του 8 cm.

638. Δίνεται κανονική ἑξαγωνική πυραμίδα μέ πλευρά βάσεως 5α καί ὕψος 12α. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου κώνου.

639. Ὅμοιοι κῶνοι λέγονται δύο κῶνοι πού παράγονται ἀπό τήν περιστροφή δύο ὅμοιων ὀρθογώνιων τριγώνων γύρω ἀπό τίς ὁμόλογες κάθετες πλευρές τους ἀντιστοίχως. Λόγος ὁμοιότητας λέγεται ὁ λόγος δύο ὁμόλογων γραμμικῶν στοιχείων τους. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὅμοιων κώνων ἰσοῦται μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητάς τους.

640. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὅμοιων κώνων εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου ὁμοιότητάς τους.

641. Δίνεται μιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα μέ ὄγκο 6 cm³. Νά ὑπολογιστεῖ i) ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου κώνου ii) ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου.

642. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια ἑνός κώνου εἶναι 24π cm² καί τό ὕψος του $h = 4$ cm. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος του.

643. Νά χωριστεῖ ἡ κυρτή ἐπιφάνεια ἑνός κώνου σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση του.

644. Ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ $AB = A\Gamma = \alpha$ καί $\widehat{A} = 120^0$ στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΑΒ. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγόμενου στερεοῦ.

645. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος κώνου εἶναι ἴσος μέ τό 1/3 τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του ἐπί τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπό μιά γενέτειρα ἀκμή.

Β΄.

646. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια ἑνός κώνου εἶναι $E = \pi(33 + 7\sqrt{33})cm^2$ καί ὁ ὄγκος του $V = 44\pi\ cm^3$. Νά βρεθεῖ ἡ γενέτειρα ἀκμή καί τό ὕψος τοῦ κώνου, ὅταν γνωρίζουμε ὅτι ἐκφράζονται ἀπό ἀκέραιους ἀριθμούς.

647. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο στρέφεται διαδοχικά γύρω ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του. Ἄν V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι πού παράγονται μέ τήν περιστροφή του γύρω ἀπό τίς κάθετες πλευρές του καί V εἶναι ὁ ὄγκος πού παράγεται μέ τήν περιστροφή του γύρω ἀπό τήν ὑποτείνουσα, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\dfrac{1}{V_1^2} + \dfrac{1}{V_2^2} = \dfrac{1}{V^2}$.

648. Σέ μιά τρίεδρη στερεά γωνία νά περιγραφεῖ κωνική ἐπιφάνεια.

649. Σέ μιά τρίεδρη στερεά γωνία νά ἐγγραφεῖ κωνική ἐπιφάνεια.

650. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου, ἀπό τό ὁποῖο παράγεται, ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου, τόν ὁποῖο διαγράφει τό κ. βάρους τοῦ ὀρθ. τριγώνου.

651. Δίνεται κῶνος μέ ἀκτίνα βάσεως R καί ὕψος h. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀπόσταση δύο παράλληλων πρός τήν βάση ἐπιπέδων, πού τό ἕνα διαιρεῖ τήν κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ κώνου σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη καί τό ἄλλο διαιρεῖ τόν ὄγκο τοῦ κώνου σέ δύο ἴσους ὄγκους.

652. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια ἑνός κώνου νά διαιρεθεῖ μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση του σέ δύο τμήματα μέ λόγο μ/ν.

653. Ἕνας κῶνος νά διαιρεθεῖ μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση του σέ δύο τμήματα, πού ὁ λόγος τῶν ὄγκων τους νά εἶναι μ/ν.

654. Δίνεται κῶνος μέ κορυφή Κ καί στή βάση του φέρνουμε χορδή ΑΒ ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτή κανονικοῦ τριγώνου. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, στά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κῶνος ἀπό τό ἐπίπεδο ΚΑΒ.

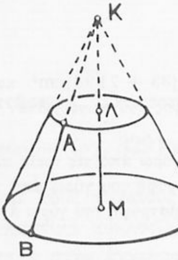
ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

303. Ὁρισμός. Κόλουρος κῶνος λέγεται τό τμῆμα ἑνός κώνου, πού περιέχεται μεταξύ τῆς βάσεως καί μιᾶς παράλληλης πρός τή βάση τομῆς τοῦ κώνου.

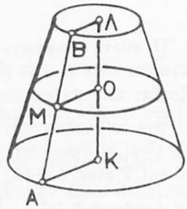
Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι τοῦ κόλουρου κώνου λέγονται **βάσεις** του καί ἡ ἀπόστασή τους λέγεται **ὕψος** τοῦ στερεοῦ (σχ. 330).

Γενέτειρα ἀκμή λέγεται τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του, πού ὅταν προεκταθεῖ, περνᾶ ἀπό τήν κορυφή Κ τοῦ κώνου, ἀπό τόν ὁποῖο προῆλθε ὁ κόλουρος κῶνος.

Μεσαία τομή κόλουρου κώνου λέγεται ἡ τομή του μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τίς βάσεις, τό ὁποῖο διχοτομεῖ τό ὕψος του (σχ. 331). Ἡ μεσαία τομή εἶναι κύκλος, πού ἡ ἀκτίνα του ΟΜ ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ἀκτίνων ΚΑ καί ΛΒ τῶν βάσεων τοῦ κόλουρου κώνου. Αὐτό προκύπτει ἀπό τό τραπέζιο ΑΒΛΚ πού ἔχει διάμεσο τήν ΟΜ.



Σχ. 330

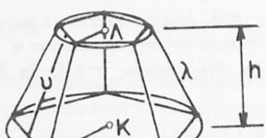


Σχ. 331

Παρατήρηση. Γιά ὁρισμό τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κόλουρου κώνου μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε καί τήν ἑξῆς ἰσοδύναμη πρόταση :

Κόλουρος κῶνος λέγεται τό στερεό πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή ὀρθογώνιου τραπεζίου ΑΒΛΚ, γύρω ἀπό τήν πλευρά ΚΛ, πού εἶναι κάθετη στίς βάσεις (σχ. 321).

304. Μέτρηση κόλουρου κώνου. Ἄς θεωρήσουμε ἕναν κόλουρο κῶνο μέ βάσεις κύκλους (Κ,R), (Λ,ρ), ὕψος h καί γενέτειρα ἀκμή λ (σχ. 332). Ἐγγράφουμε σ' αὐτόν κανονική κόλουρη πυραμίδα, πού ὅμως τή θεωροῦμε μεταβλητή ἔτσι, ὥστε τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της νά τείνει πρός τό ἄπειρο. Τότε ἡ κόλουρη πυραμίδα τείνει νά ταυτιστεῖ μέ τόν κόλουρο κῶνο καί ἑπομένως οἱ τύποι, πού ἀφοροῦν στίς κόλουρες πυραμίδες, ἰσχύουν καί γιά τούς κόλουρους κώνους, ἀφοῦ μετασχηματισθοῦν κατάλληλα.



Σχ. 332

i) Παράπλευρη ἐπιφάνεια ἤ κυρτή ἐπιφάνεια κόλουρου κώνου λέγεται τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια μεταβλητῆς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας μέ ἀκτίνες βάσεων R,ρ καί παράπλευρη ἀκμή λ, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της τείνει στό ἄπειρο.

Γιά τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας γνωρίζουμε τόν τύπο $E_\pi = \dfrac{P_\nu + p_\nu}{2}\,\upsilon$ (§ 268), ὅπου P_ν, p_ν εἶναι οἱ περίμετροι τῶν βάσεών της καί υ τό παράπλευρο ὕψος. Τότε ἡ κυρτή (παράπλευρη) ἐπιφάνεια τοῦ κόλουρου κώνου εἶναι ἴση μέ: $E_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{P_\nu + p_\nu}{2} \upsilon =$ $\frac{2\pi R + 2\pi\rho}{2} \lambda = \pi(R + \rho)\lambda$, δηλαδή εἶναι:

$$\mathbf{E_\kappa = \pi(R + \rho)\lambda.}$$

Τήν ὁλική ἐπιφάνεια τή βρίσκουμε, ἄν στήν κυρτή ἐπιφάνεια προσθέσουμε τίς δύο βάσεις τοῦ κόλουρου κώνου, δηλαδή εἶναι:

$$\mathbf{E_{o\lambda.} = \pi(R + \rho)\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2.}$$

ii) Ὄγκος κόλουρου κώνου λέγεται τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει ὁ ὄγκος μεταβλητῆς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας μέ ἀκτίνες βάσεων R, ρ καί ὕψος h, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της τείνει στό ἄπειρο.

Ὁ τύπος τοῦ ὄγκου τοῦ κόλουρου κώνου προέρχεται ἀπό τόν τύπο $V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$ τοῦ ὄγκου κόλουρης πυραμίδας, ὡς ἑξῆς:

$$V = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{3}(E_\nu + \sqrt{E_\nu \varepsilon_\nu} + \varepsilon_\nu)h = \frac{1}{3}(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \pi \rho^2} + \pi\rho^2)h =$$

$= \frac{\pi}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)h$, ὅπου E_ν καί ε_ν τά ἐμβαδά τῶν κανονικῶν βάσεων τῆς ἐγγεγραμμένης κόλουρης πυραμίδας. Ἄρα εἶναι:

$$\mathbf{V = \frac{\pi}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)h.}$$

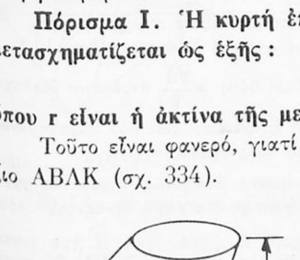
Παρατήρηση. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καί γιά τούς πλάγιους κυκλικούς κόλουρους κώνους (σχ. 333). Γενικά γιά ὅλους τούς κόλουρους κώνους ἰσχύει ὁ τύπος $V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$. Ἡ ἀπόδειξη γίνεται μέ τήν ἴδια διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐγγεγραμμένη κόλουρη πυραμίδα.

Πόρισμα Ι. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια $E_\kappa = \pi(R + \rho)\lambda$ κόλουρου κώνου μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

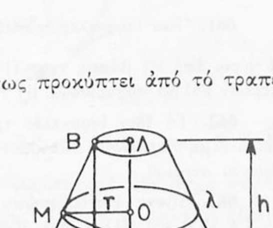
$$\mathbf{E_\kappa = 2\pi r\lambda,}$$

ὅπου r εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς μεσαίας τομῆς.

Τοῦτο εἶναι φανερό, γιατί $R + \rho = 2r$, ὅπως προκύπτει ἀπό τό τραπέζιο ΑΒΛΚ (σχ. 334).



Σχ. 333



Σχ. 334

Πόρισμα II. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια $E_\kappa = 2\pi r\lambda$ κόλουρου κώνου μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$E_\kappa = 2\pi MI \cdot h.$$

ὅπου MI τό μεσοκάθετο τμῆμα τῆς γενέτειρας AB ὡς τόν ἄξονα.

Αὐτό συνάγεται ἀπό τά ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα MOI καί BΔA ($B\Delta \perp KA$), ἀπό τά ὁποῖα παίρνουμε : $\dfrac{MO}{MI} = \dfrac{B\Delta}{BA}$ ἤ $\dfrac{r}{MI} = \dfrac{h}{\lambda}$ ἤ $r\lambda = MI \cdot h$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος $E_\kappa = 2\pi r\lambda$ μετασχηματίζεται στόν $E_\kappa = 2\pi \cdot MI \cdot h$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

655. Ἑνός κόλουρου κώνου οἱ βάσεις εἶναι περιγεγραμμένες σέ κανονικά ἑξάγωνα μέ πλευρές 2 cm, 10 cm ἀντίστοιχα καί τό ὕψος του εἶναι 15 cm. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ κυρτή ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ κόλουρου κώνου.

656. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει ὄγκο $V = 700\pi\alpha^3$, ὕψος $h = 12\alpha$ καί ἡ μιά ἀκτίνα του εἶναι διπλάσια ἀπ' τήν ἄλλη. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του.

657. Ἕνα δοχεῖο σέ σχῆμα κόλουρου κώνου μέ κάτω βάση ἐσωτερικῆς διαμέτρου 20 cm, πάνω βάση ἐσωτερικῆς διαμέτρου 40 cm καί γενέτειρα ἀκμή 26 cm, γεμίζει μέ πετρέλαιο μέχρι ὕψος 5 cm ἀπό τήν πάνω βάση. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τοῦ περιεχόμενου πετρελαίου σέ λίτρα καί τό βάρος του (εἰδ. βάρος πετρελαίου $0{,}8 gr/cm^3$).

658. Δίνεται κύκλος (O,R) καί μιά εὐθεία (ε) πού ἐφάπτεται σ' αὐτόν. Θεωροῦμε μιά διάμετρο ΚΛ καί περιστρέφουμε τό σχῆμα γύρω ἀπό τήν εὐθεαί (ε). Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, πού διαγράφει ἡ διάμετρος ΚΛ, εἶναι σταθερή.

659. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει βάσεις μέ ἀκτίνες ρ καί 3ρ. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο κόλουρων κώνων, στούς ὁποίους διαιρεῖται ὁ δεδοσμένος κόλουρος κῶνος ἀπό τή μεσαία τομή του.

660. Ἕνα κανονικό ἑξάγωνο στρέφεται γύρω ἀπό ἕνα ἄξονα συμμετρίας του. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγόμενου στερεοῦ (δύο περιπτώσεις).

661. Ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο μέ βάσεις α, 2α καί ὕψος $\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ στρέφεται διαδοχικά γύρω ἀπό τίς βάσεις του. i) Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἐπιφάνειες τῶν δύο παραγόμενων στερεῶν καί νά συγκριθοῦν. ii) Νά γίνουν τά ἴδια γιά τούς ὄγκους.

662. Τό ἴδιο ἰσοσκελές τραπέζιο τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως στρέφεται γύρω ἀπό μιά μή παράλληλη πλευρά του. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγόμενου στερεοῦ.

663. Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ καί ἔστω Κ τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Φέρνουμε τίς ΚΑ, ΚΒ καί $KO \perp AB$. Τό σχῆμα στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα συμμετρίας του ΚΟ καί τό ὀρθογώνιο διαγράφει κύλινδρο ἐνῶ τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ διαγράφει κῶνο, πού λέγεται **ἐγγεγραμμένος** στόν κύλινδρο. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν i) ἄν τό ὀρθογώνιο εἶναι τετράγωνο, ii) ἄν εἶναι $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{3}{2}$.

664. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ ($KA = KB$). Ἐγγράφουμε σ' αὐτό ὀρθογώνιο ΓΔΕΖ μέ τήν ΕΖ πάνω στήν ΑΒ καί φέρνουμε ΚΟ $\perp$ ΑΒ. Τό σχῆμα στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα συμμετρίας του ΚΟ καί τό τρίγωνο διαγράφει κῶνο, ἐνῶ τό ὀρθογώνιο διαγράφει κύλινδρο, πού λέγεται **ἐγγεγραμμένος** στόν κῶνο. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν, ἄν τό τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο καί τό ὀρθογώνιο εἶναι τετράγωνο.

Β΄.

665. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει ὄγκο $V = 124\pi\alpha^3$, ὕψος $h = 4\alpha$ καί κυρτή ἐπιφάνεια $E = 55\pi\alpha^2$. Νά βρεθοῦν οἱ ἀκτῖνες του.

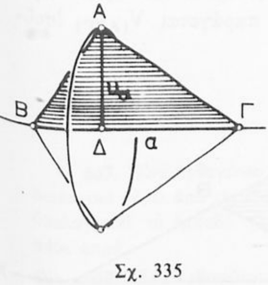
666. Δίνεται κόλουρος κῶνος μέ στοιχεῖα R, ρ, h. Σέ ποιά ἀπόσταση ἀπό τήν μεγαλύτερη βάση πρέπει νά φέρουμε ἐπίπεδη τομή παράλληλη πρός τίς βάσεις ἔτσι, ὥστε ἡ κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ κόλουρου κώνου νά διαιρεθεῖ σέ δύο ἰσοδύναμες κυρτές ἐπιφάνειες ;

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΑΞΟΝΑ

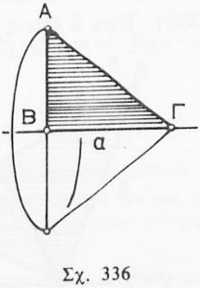
305. Θεώρημα. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν στραφεῖ γύρω ἀπό τήν πλευρά του α, παράγει ὄγκο ἴσο μέ $\frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha$.

i) Ἄν τό τρίγωνο εἶναι ὀξυγώνιο στίς γωνίες του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$, ὁ ὄγκος πού παράγεται ἀναλύεται σέ ἄθροισμα δύο κώνων (σχ. 335) μέ κοινή βάση κύκλο μέ ἀκτίνα υ_α. Τότε ἔχουμε :

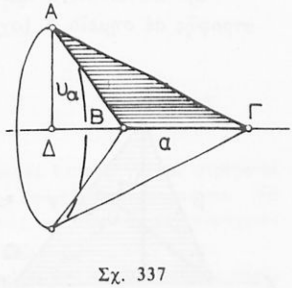
$$V = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta B + \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta\Gamma = \frac{1}{3}\pi(\Delta B + \Delta\Gamma)\upsilon^2_\alpha = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha.$$



Σχ. 335



Σχ. 336



Σχ. 337

ii) Ἄν τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο σέ μιά ἀπ' τίς γωνίες του $\widehat{B}$ ἤ $\widehat{\Gamma}$, ἔστω στή $\widehat{B}$ (σχ. 336), ὁ ὄγκος πού παράγεται ἰσοῦται μέ τόν ὄγκο κώνου πού ἔχει βάση κύκλο μέ ἀκτίνα $AB = \upsilon_\alpha$ καί ὕψος $B\Gamma = \alpha$, δηλαδή εἶναι :

$$V = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot B\Gamma = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha.$$

iii) Ἄν τό τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο σέ μιά ἀπό τίς γωνίες του $\widehat{B}$

ἤ $\widehat{\Gamma}$, ἔστω στή $\widehat{B}$ (σχ. 337), ὁ ὄγκος πού παράγεται ἀναλύεται σέ διαφορά δύο κώνων μέ κοινή βάση ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα υ_α. Τότε ἔχουμε :

$$V = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta\Gamma - \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\alpha \cdot \Delta B = \frac{1}{3}\pi(\Delta\Gamma - \Delta B)\upsilon^2_\alpha = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha.$$

Ἄρα καί στίς τρεῖς περιπτώσεις ὁ ὄγκος πού παράγεται εἶναι ἴσος μέ :

$$V = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha.$$

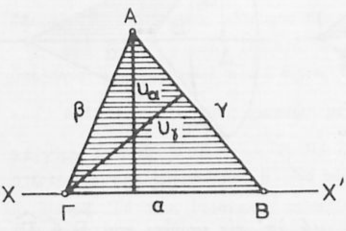
306. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος, πού παράγεται ἀπό τρίγωνο τό ὁποῖο στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, πού περνᾶ ἀπό μιά κορυφή του καί δέν τέμνει τό τρίγωνο, ἰσοῦται μέ τό τρίτο τῆς ἐπιφάνειας, πού διαγράφει ἡ ἀπέναντι πλευρά, ἐπί τό ὕψος πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτή.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ καί xx' ὁ ἄξονας περιστροφῆς, πού περνάει ἀπό τήν κορυφή Γ.

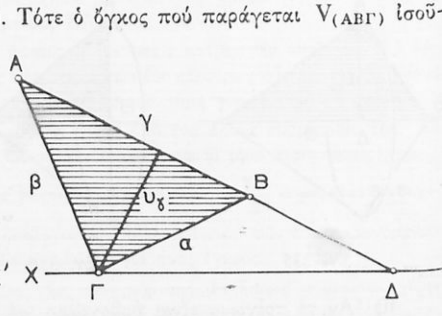
i) Ἄς θεωρήσουμε ὅτι ὁ ἄξονας xx' περιέχει τήν πλευρά ΒΓ (σχ. 338). Τότε ὁ ὄγκος πού παράγεται ἰσοῦται μέ $V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon^2_\alpha$ (§ 305) καί μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς : $V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi(\alpha\upsilon_\alpha)\upsilon_\alpha = \frac{1}{3}\pi(\gamma\upsilon_\gamma)\upsilon_\alpha =$

$= \frac{1}{3}(\pi\upsilon_\alpha\gamma)\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_\gamma$, ὅπου $E_{AB} = \pi\upsilon_\alpha\gamma$ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια, πού διαγράφεται ἀπό τήν πλευρά ΑΒ.

ii) Ἔστω ὅτι ἡ πλευρά ΑΒ, ὅταν προεκταθεῖ, τέμνει τόν ἄξονα περιστροφῆς σέ σημεῖο Δ (σχ. 339). Τότε ὁ ὄγκος πού παράγεται $V_{(AB\Gamma)}$ ἰσοῦ-



Σχ. 338

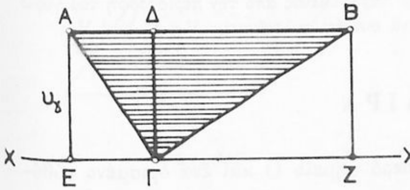


Σχ. 339

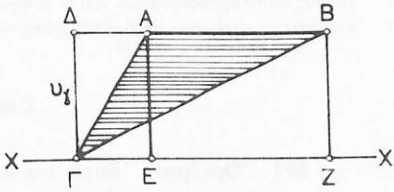
ται μέ τή διαφορά $V_{(A\Gamma\Delta)} - V_{(B\Gamma\Delta)}$ καί κατά τήν προηγούμενη περίπτωση εἶναι :

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}E_{A\Delta}\upsilon_\gamma - \frac{1}{3}E_{B\Delta}\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}(E_{A\Delta} - E_{B\Delta})\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_\gamma.$$

iii) Ἔστω ὅτι ἡ πλευρά AB εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς. Φέρνουμε $AE \perp xx'$, $BZ \perp xx'$ καί εἶναι προφανῶς $AE = BZ = \upsilon_\gamma$. Ἄν τό Γ προβάλλεται πάνω στήν AB σέ σημεῖο Δ ἐνδιάμεσο τῶν A καί B (σχ. 340), ὁ ὄγκος πού παράγεται $V_{(AB\Gamma)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς :



Σχ. 340



Σχ. 341

$$V_{(AB\Gamma)} = V_{(ABZE)} - V_{(A\Gamma E)} - V_{(B\Gamma Z)} = \pi\upsilon^2_\gamma AB - \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\gamma E\Gamma - \frac{1}{3}\pi\upsilon^2_\gamma Z\Gamma =$$

$$\frac{1}{3}[3\pi\upsilon_\gamma AB - \pi\upsilon_\gamma E\Gamma - \pi\upsilon_\gamma Z\Gamma]\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}[\pi\upsilon_\gamma(3AB - E\Gamma - Z\Gamma)]\upsilon_\gamma =$$

$$\frac{1}{3}[\pi\upsilon_\gamma(3AB - AB)]\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}[\pi\upsilon_\gamma(2AB)]\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}(2\pi\upsilon_\gamma AB)\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_\gamma.$$

Ἄν ἡ προβολή Δ τοῦ Γ πάνω στήν AB εἶναι ἔξω ἀπό τό τμῆμα AB (σχ. 341), ὁ ὄγκος πού παράγεται $V_{(AB\Gamma)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς : $V_{(AB\Gamma)} = V_{(ABZE)} + V_{(A\Gamma E)} - V_{(BZ\Gamma)}$ καί ὅπως προηγουμένως καταλήγουμε στό ἴδιο ἀποτέλεσμα. Ἄρα καί στίς τρεῖς περιπτώσεις ὁ ὄγκος πού παράγεται ἰσοῦται μέ

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}E_{AB}\cdot\upsilon_\gamma.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

667. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού ἔχει κάθετες πλευρές 6 cm καί 8 cm στρέφεται διαδοχικά γύρω ἀπό τίς δύο κάθετες πλευρές του καί γύρω ἀπό τήν ὑποτείνουσά του. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας καί ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ πού παράγεται κάθε φορά.

668. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο στρέφεται διαδοχικά γύρω ἀπό τίς δύο κάθετες πλευρές του. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ὄγκοι πού παράγονται εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρός τίς πλευρές, γύρω ἀπό τίς ὁποῖες περιστρέφεται τό τρίγωνο.

669. Ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, πού δέν τό τέμνει καί πού σχηματίζει γωνία 30^0 μέ τήν προσκείμενη πλευρά του. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ πού παράγεται.

670. Ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ ἴσες πλευρές $AB = A\Gamma = \alpha$ καί μέ γωνία κορυφῆς $\widehat{A} = 120^0$ στρέφεται γύρω ἀπό τήν πλευρά του AB. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδό τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ πού παράγεται.

671. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 1L)$ στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του πού περνᾶ ἀπό τήν κορυφή Α καί πού ἐφάπτεται στόν περιγεγραμμένο του κύκλο. Νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου ὁ ὄγκος πού παράγεται.

672. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\alpha > \beta > \gamma$ στρέφεται διαδοχικά γύρω ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του. Νά βρεθεῖ ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς τρεῖς ὄγκους πού παράγονται.

673. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο στρέφεται διαδοχικά γύρω ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του. Ἄν V_1 καί V_2 εἶναι οἱ παραγόμενοι ὄγκοι ἀπό τήν περιστροφή τοῦ τριγώνου γύρω ἀπό τίς δύο κάθετες πλευρές του καί V ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ἀπό τήν περιστροφή του γύρω ἀπό τήν ὑποτείνουσα, νά βρεθεῖ σχέση πού νά συνδέει τούς ὄγκους V_1, V_2 καί V.

ΣΦΑΙΡΑ

307. Ὁρισμοί. Ἔστω ἕνα σταθερό σημεῖο Ο καί ἕνα ὁρισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους R. Τότε :

i) **Σφαίρα** ὀνομάζουμε τό σύνολο τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέση $OM \leqq R$. Τό σημεῖο Ο λέγεται **κέντρο** τῆς σφαίρας καί τό μῆκος R **ἀκτίνα** τῆς σφαίρας. Τή σφαίρα πού ἔχει κέντρο Ο καί ἀκτίνα R θά τή συμβολίζουμε μέ (O,R).

Εἰδικότερα τό σύνολο τῶν σημείων Μ γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέση $OM = R$ θά τό ὀνομάζουμε σφαιρική ἐπιφάνεια.

ii) **Χορδή** λέγεται κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα μέ τά ἄκρα του πάνω στή **σχαιρική ἐπιφάνεια.**

iii) **Διάμετρος** λέγεται κάθε χορδή πού περνάει ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας. Εἶναι ἡ μεγαλύτερη ἀπ' ὅλες τίς χορδές καί ἔχει μῆκος ἴσο μέ τό διπλάσιο τῆς ἀκτίνας. Τά ἄκρα μιᾶς διαμέτρου λέγονται ἀντιδιαμετρικά σημεῖα καί εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρο τῆς σφαίρας.

Ἀπό τούς προηγούμενους ὁρισμούς προκύπτουν εὔκολα τά παρακάτω :

Ἄς θεωρήσουμε ἐπίπεδο (Π), πού περνάει ἀπό τό κέντρο Ο τῆς σφαίρας (O,R) (σχ. 342). Πάνω σ' αὐτό τά σημεῖα Μ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας εἶναι τέτοια, ὥστε $OM = R$ καί ἑπομένως ἀπαρτίζουν κύκλο (O,R) πάνω στό ἐπίπεδο (Π). Ἕνας τέτοιος κύκλος λέγεται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας καί τό ἐπίπεδό του λέγεται **διαμετρικό** ἐπίπεδο.

308. Συμμετρίες στή σφαίρα ὑπάρχουν :

i) **Κεντρική συμμετρία** ὡς πρός τό κέντρο της.

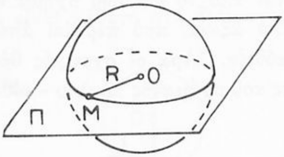
ii) **Ἀξονική συμμετρία** ὡς πρός κάθε διάμετρό της.

iii) **Συμμετρία ἐπιπέδου** ὡς πρός κάθε διαμετρικό ἐπίπεδο.

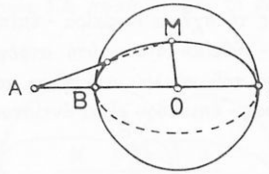
309. Ἡ σφαίρα εἶναι στερεό ἐκ περιστροφῆς. Παράγεται ἀπό τήν περιστροφή κύκλου (O,R) γύρω ἀπό μιά διάμετρό του.

310. Ἀπόσταση ἑνός σημείου ἀπό μιά σφαίρα. Ἄς θεωρήσουμε μιά σφαίρα (O,R), ἕνα σημεῖο Α καί μιά διάμετρο ΒΓ πού περνάει ἀπό τό

A (σχ. 343). Ἄν M εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, ἀπό τό τρίγωνο AOM παίρνουμε :



Σχ. 342



Σχ. 343

i) $AM \geqq |AO - OM|$ ἤ $AM \geqq |AO - OB|$ ἤ $AM \geqq AB$ ἤ $AB \leqq AM$. Ἀπό τήν τελευταία σχέση, τό τμῆμα AB τό ὁρίζουμε ὡς τήν **ἐλάχιστη ἀπόσταση** τοῦ σημείου A ἀπό τή σφαίρα. Αὐτό εἶναι ἴσο μέ $|\delta - R|$, ὅπου $\delta = AO$.

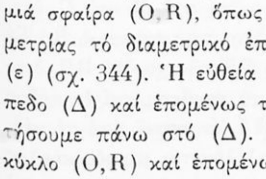
ii) $AM \leqq AO + OM$ ἤ $AM \leqq AO + O\Gamma$ ἤ $AM \leqq A\Gamma$ ἤ $A\Gamma \geqq AM$. Ἀπό τήν τελευταία σχέση τό τμῆμα AΓ τό ὁρίζουμε ὡς τή **μέγιστη ἀπόσταση** τοῦ σημείου A ἀπό τή σφαίραν. Αὐτό εἶναι ἴσο μέ $\delta + R$.

311. Σχετικές θέσεις εὐθείας καί σφαίρας. Μιά εὐθεία (ε) καί μιά σφαίρα (O, R), ὅπως καί ἄν βρίσκονται, ἔχουν πάντα ὡς ἐπίπεδο συμμετρίας τό διαμετρικό ἐπίπεδο (Δ) τῆς σφαίρας, πού περιέχει τήν εὐθεία (ε) (σχ. 344). Ἡ εὐθεία (ε) δέν μπορεῖ νά ἔχει σημεῖα της ἔξω ἀπ' τό ἐπίπεδο (Δ) καί ἑπομένως τά κοινά σημεῖα τῶν δύο σχημάτων θά τά ἀναζητήσουμε πάνω στό (Δ). Τό ἐπίπεδο (Δ) τέμνει τή σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο (O, R) καί ἑπομένως οἱ σχετικές θέσεις εὐθείας καί σφαίρας ἀνάγονται στίς γνωστές σχετικές θέσεις εὐθείας καί κύκλου, δηλαδή, ἄν α εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπό τήν εὐθεία, ἔχουμε :

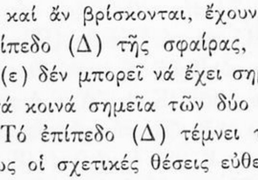
i) Ἡ σφαίρα καί ἡ εὐθεία ἔχουν δύο κοινά σημεῖα (τέμνονται) $\Longleftrightarrow \alpha < R$ (σχ. 344).

ii) Ἡ σφαίρα καί ἡ εὐθεία ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο (ἐφάπτονται), $\Longleftrightarrow \alpha = R$ (σχ. 345).

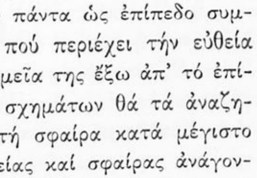
iii) Ἡ σφαίρα καί ἡ εὐθεία δέν ἔχουν κοινά σημεῖα $\Longleftrightarrow \alpha > R$ (σχ. 346).



Σχ. 344

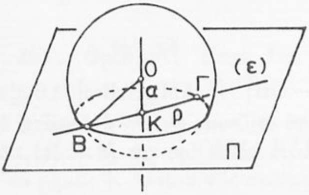


Σχ. 345

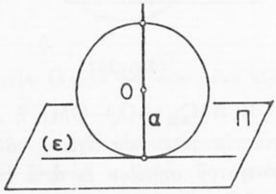


Σχ. 346

312. Σχετικές θέσεις σφαίρας καί ἐπιπέδου. Μιά σφαίρα παράγεται ἀπό περιστροφή κύκλου γύρω ἀπό μιά διάμετρό του. Ἕνα ἐπίπεδο παράγεται ἀπό περιστροφή εὐθείας γύρω ἀπό ἄξονα κάθετο σ' αὐτή. Ἑπομένως τό σχῆμα «σφαίρα - ἐπίπεδο» παράγεται ἀπό τό ἐπίπεδο σχῆμα «κύκλος - εὐθεία» ὅταν αὐτό στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου καί εἶναι κάθετος στήν εὐθεία. Ἄρα οἱ σχετικές θέσεις σφαίρας - ἐπιπέδου εἶναι ἀντίστοιχες μέ ἐκεῖνες τοῦ σχήματος κύκλου - εὐθείας



Σχ. 347



Σχ. 348

στό ἐπίπεδο, δηλαδή, ἄν α εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου σφαίρας (O,R) πού διαγράφεται ἀπό κύκλο (O,R) καί (Π) εἶναι τό ἐπίπεδο πού διαγράφεται ἀπό εὐθεία (ε), ἔχουμε :

i) Ὁ κύκλος (O,R) μέ τήν εὐθεία (ε) τέμνονται στά Β καί Γ (σχ. 347) $\Longleftrightarrow$ ἡ σφαίρα (O,R) μέ τό ἐπίπεδο (Π) τέμνονται, $\Longleftrightarrow \alpha < R$. Τά Β καί Γ, ὅταν στρέφονται γύρω ἀπ' τή μεσοκάθετο ΟΚ τῆς χορδῆς ΒΓ, διαγράφουν στό ἐπίπεδο (Π) κύκλο (Κ,ρ). Ἄρα **ἡ τομή σφαίρας καί ἐπιπέδου εἶναι κύκλος μέ ἀκτίνα $\rho \leqq R$.** Ἄν τό ἐπίπεδο (Π) δέν περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας, εἶναι $\rho < R$ καί ὁ κύκλος (Κ,ρ) λέγεται **μικρός κύκλος** τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἄν τό (Π) περνάει ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας (διαμετρικό ἐπίπεδο), θά εἶναι $\rho = R$ καί ἡ τομή θά εἶναι **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας.

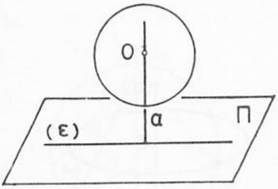
ii) Ὁ κύκλος (O,R) μέ τήν εὐθεία (ε) ἐφάπτονται στό Α (σχ. 348) $\Longleftrightarrow$ ἡ σφαίρα (O,R) μέ τό ἐπίπεδο (Π) ἐφάπτονται στό Α (ἔχουν ἕνα μόνον κοινό σημεῖο) $\Longleftrightarrow$ **$\alpha = R$.**

iii) Ὁ κύκλος (O,R) μέ τήν εὐθεία (ε) δέν τέμνονται (σχ. 349) $\Longleftrightarrow$ ἡ σφαίρα (O,R) μέ τό ἐπίπεδο (Π) δέν τέμνονται $\Longleftrightarrow$ **$\alpha > R$.**

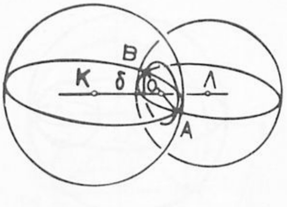
Πόρισμα. Ἀπό τρία σημεῖα μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας περνάει ἕνας κύκλος τῆς σφαίρας.

313. Σχετικές θέσεις δύο σφαιρῶν. Διάκεντρος δύο σφαιρῶν (K,R) καί (Λ,ρ) λέγεται τό τμῆμα ΚΛ μέ ἄκρα τά κέντρα τῶν δύο σφαιρῶν καί συμβολίζεται μέ δ. Δύο σφαῖρες παράγονται ἀπό τήν περιστροφή δύο κύκλων γύρω ἀπό τή διάκεντρό τους. Ἑπομένως οἱ σχετικές θέσεις δύο σφαιρῶν εἶναι ἀντίστοιχες μέ τίς σχετικές θέσεις δύο κύκλων στό ἐπίπεδο καί ἑπομένως ἔχουμε :

i) Δύο κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) τέμνονται στά A καί B (σχ. 350) $\Longleftrightarrow$ οἱ σφαῖρες (K, R) καί (Λ, ρ) τέμνονται $\Longleftrightarrow$ $| R - \rho | < \delta < R + \rho$. Τά κοινά σημεῖα A καί B τῶν δύο κύκλων, ὅταν στρέφονται γύρω ἀπό τή μεσοκάθετο ΚΛ, διαγράφουν κύκλο. Ἄρα **ἡ τομή δύο σφαιρῶν εἶναι κύκλος.** Τό κέντρο του O βρίσκεται στή διάκεντρο τῶν δύο σφαιρῶν καί τό ἐπίπεδό του εἶναι κάθετο στή διάκεντρο.



Σχ. 349

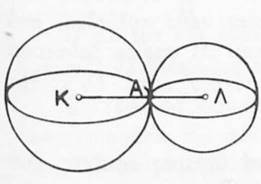


Σχ. 350

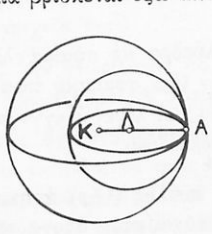
ii) Οἱ κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικά σέ σημεῖο A (σχ. 351) $\Longleftrightarrow$ οἱ σφαῖρες (K, R) καί (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό σημεῖο A (ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο) $\Longleftrightarrow$ $\delta = R + \rho$. Τό σημεῖο A βρίσκεται πάνω στή διάκεντρο.

iii) Οἱ κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικά σέ σημεῖο A (σχ. 352) $\Longleftrightarrow$ οἱ σφαῖρες (K, R) καί (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικά στό A (ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο) $\Longleftrightarrow$ $\delta = | R - \rho |$. Τό σημεῖο A βρίσκεται πάνω στή διάκεντρο καί ἡ μιά σφαίρα βρίσκεται μέσα στήν ἄλλη.

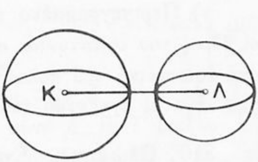
iv) Οἱ κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ὁ ἕνας βρίσκεται ἔξω ἀπ' τόν ἄλλο (σχ. 353) $\Longleftrightarrow$ οἱ δύο σφαῖρες (K, R) καί (Λ, ρ) δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ἡ μιά βρίσκεται ἔξω ἀπό τήν ἄλλη $\Longleftrightarrow$ $\delta > R + \rho$.



Σχ. 351



Σχ. 352



Σχ. 353

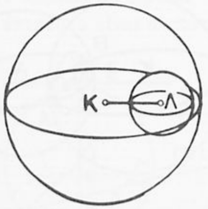
v) Οἱ κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ὁ ἕνας βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο (σχ. 351) $\Longleftrightarrow$ οἱ σφαῖρες (K, R) καί (Λ, ρ) δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ἡ μιά βρίσκεται μέσα στήν ἄλλη $\Longleftrightarrow$ $\delta < | R - \rho |$.

314. Γωνία δύο σφαιρῶν. Ἀναφέρεται μόνο στίς τεμνόμενες σφαῖρες καί εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων πού ἀπό τήν περιστροφή τους προῆλθαν οἱ δύο σφαῖρες.

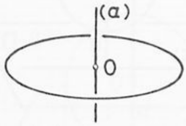
315. Ὁρισμοί.

i) Ἄξονας κύκλου λέγεται ἡ εὐθεία (α) πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου καί εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου (σχ. 355).

ii) Πόλοι κύκλου σφαίρας. Ἄν κύκλος (Ο,ρ) ἀνήκει σέ σφαίρα (Κ,R) (σχ. 356), τά σημεῖα Π_1 καί Π_2, στά ὁποῖα ὁ ἄξονας τοῦ κύκλου τέμνει τή σφαίρα, λέγονται πόλοι τοῦ κύκλου (Ο,ρ) τῆς σφαίρας (Κ,R).



Σχ. 354



Σχ. 355

iii) Πολική ἀπόσταση. Ὁ κάθε πόλος (σχ. 356) ἰσαπέχει ἀπό ὅλα τά σημεῖα Μ τοῦ κύκλου (Ο,ρ), γιατί τά ὀρθογώνια τρίγωνα $ΜΟΠ_1$ καί $ΜΟΠ_2$ διατηροῦν σταθερό μέγεθος γιά τίς διάφορες θέσεις τοῦ Μ πάνω στόν κύκλο (Ο,ρ). Ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἀποστάσεις αὐτές λέγεται **πολική ἀπόσταση** τοῦ κύκλου. Κάθε κύκλος ἑπομένως ἔχει δύο πολικές ἀποστάσεις ρ_1 καί ρ_2. Ἐπειδή οἱ πόλοι Π_1 καί Π_2 εἶναι ἀντιδιαμετρικά σημεῖα τῆς σφαίρας, τό τρίγωνο $\Pi_1 Μ \Pi_2$ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἑπομένως θά εἶναι $\rho^2_1 + \rho^2_2 = 4R^2$.

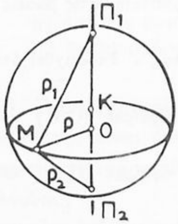
iv) Ἐγγεγραμμένο πολύεδρο σέ σφαίρα λέγεται κάθε πολύεδρο, πού οἱ κορυφές του ἀνήκουν στήν ἴδια σφαιρική ἐπιφάνεια. Ἡ σφαίρα λέγεται **περιγεγραμμένη** στό πολύεδρο καί τό κέντρο της λέγεται **περίκεντρο** τοῦ πολυέδρου.

v) Περιγεγραμμένο πολύεδρο σέ σφαίρα λέγεται κάθε πολύεδρο, πού οἱ ἕδρες του ἐφάπτονται στήν ἴδια σφαιρική ἐπιφάνεια. Ἡ σφαίρα βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ πολυέδρου καί λέγεται ἐγγεγραμμένη σ' αὐτό. Τό κέντρο της λέγεται **ἔγκεντρο** τοῦ πολυέδρου.

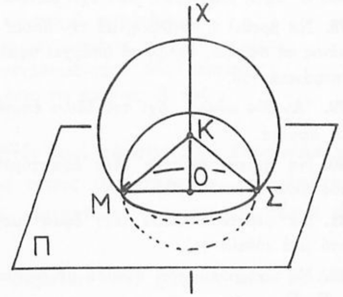
316. Θεώρημα. Ἕνας κύκλος (Ο,ρ) ἀνήκει σέ ἄπειρες σφαῖρες, πού τά κέντρα τους βρίσκονται πάνω στόν ἄξονα τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι τό τυχαῖο σημεῖο Κ τοῦ ἄξονα Οx τοῦ κύκλου (Ο,ρ) ἰσαπέχει ἀπό τά σημεῖα Μ τοῦ κύκλου (Ο,ρ) (σχ. 357). Τοῦτο ὅμως εἶναι φανερό, γιατί γιά τίς διάφορες θέσεις τοῦ Μ πάνω στόν κύκλο (Ο,ρ) τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΟΜ διατηροῦν σταθερό μέγεθος, ἀφοῦ σ' αὐτά, ἐκτός ἀπό τήν ὀρθή γωνία στό Ο, παραμένουν σταθερές κατά μῆκος οἱ πλευρές ΟΚ καί ΟΜ = ρ. Ἄρα καί τό μῆκος ΚΜ παραμένει σταθερό καί ἑπομένως τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Κ τοῦ ἄξονα Οx εἶναι κέντρο σφαίρας, στήν ὁποία ἀνήκει ὁ κύκλος (Ο,ρ).

Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο, δηλαδή, ἄν ὁ κύκλος (Ο,ρ) ἀνήκει σέ σφαίρα (Κ,R), τό κέντρο της Κ βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα Οx τοῦ κύκλου (Ο,ρ). Ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ΚΟ εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο (Π) τοῦ κύκλου (Ο,ρ). Ἄν Σ εἶναι τό ἀντιδιαμετρικό τοῦ Μ, ὡς πρός τόν κύκλο (Ο,ρ), εἶναι φανερό πώς $ΚΜ = ΚΣ$, ἄρα $ΚΟ \perp ΜΣ$. Ὁμοίως μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ



Σχ. 356



Σχ. 357

ὅτι ἡ ΚΟ εἶναι κάθετη σέ μιάν ἀκόμη διάμετρο τοῦ κύκλου (Ο,ρ) καί ἐπομένως $ΚΟ \perp (Π)$, δηλαδή τό κέντρο τῆς σφαίρας ἀνήκει στόν ἄξονα Οx τοῦ κύκλου (Ο,ρ).

Ἀπό τά προηγούμενα συνάγεται ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, στίς ὁποῖες ἀνήκει ὁ κύκλος (Ο,ρ), εἶναι ὁ ἄξονας Οx τοῦ κύκλου.

317. Καθορισμός σφαίρας. Μία σφαίρα εἶναι καθορισμένη, ὅταν εἶναι γνωστά τά ἀκόλουθα στοιχεῖα της :

i) Κέντρο καί ἀκτίνα. Ἄν γνωρίζουμε τό κέντρο καί τήν ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας, θά θεωροῦμε ὅτι γνωρίζουμε τή σφαίρα.

ii) Τέσσερα σημεῖα της ὄχι στό ἴδιο ἐπίπεδο. Ἄν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τέσσερα σημεῖα ὄχι στό ἴδιο ἐπίπεδο, τά τρία ἀπ' αὐτά Α, Β, Γ ὁρίζουν κύκλο. Τό κέντρο τῆς σφαίρας, πού περνάει ἀπό τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ὁρίζεται ἀπό τήν τομή τοῦ ἄξονα τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) καί τοῦ μεσοκάθετου ἐπιπέδου ἑνός ἀπό τά τμήματα ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ. Τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ΑΔ, ΒΔ καί ΓΔ τέμνουν τόν ἄξονα τοῦ κύκλου (ΑΒΓ) στό ἴδιο σημεῖο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

674. Δίνεται μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα 5 cm καί ἕνα ἐπίπεδο πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο της 3 cm. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου στή σφαίρα κυλίνδρου, πού ἡ βάση του εἶναι ἡ τομή τῆς σφαίρας καί τοῦ ἐπιπέδου. ('Εγγεγραμμένος κύλινδρος σέ σφαίρα λέγεται ἕνας κύλινδρος, πού οἱ βάσεις του εἶναι κύκλοι τῆς σφαίρας).

675. Δύο σφαῖρες μέ ἀκτίνες 5 cm καί 12 cm ἀντιστοίχως ἔχουν διάκεντρο 13 cm. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδό τῆς τομῆς τους.

676. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε ὀρθός κυκλικός κύλινδρος εἶναι ἐγγράψιμος σέ σφαίρα, δηλαδή ὑπάρχει σφαίρα, πάνω στήν ὁποία βρίσκονται οἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

677. Δίνεται σφαίρα (O,R). Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτή κυλίνδρου, πού ἔχει ἀκτίνα βάσεως R/2.

678. Νά βρεθεῖ ἡ συνθήκη, μέ τήν ὁποία ἕνας ὀρθός κυκλικός κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος σέ σφαίρα, δηλδή νά ὑπάρχει σφαίρα πού νά ἐφάπτεται στίς βάσεις καί στήν κυρτή ἐπιφάνειά του.

679. Ἄν δύο κύκλοι, ὄχι τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου, τέμνονται, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἀνήκουν στήν ἴδια σφαίρα.

680. Νά φέρετε ἐπίπεδο (Π) ἐφαπτόμενο γνωστῆς σφαίρας (O,R) καί παράλληλο πρός ἄλλο ἐπίπεδο (P).

681. Νά φέρετε ἐπίπεδο (Π) ἐφαπτόμενο γνωστῆς σφαίρας (O,R) καί πού νά περνᾶ ἀπό μιά εὐθεία (ε).

682. Νά κατασκευαστεῖ σφαίρα μέ ἀκτίνα R, πού νά περνᾶ ἀπό τρία γνωστά σημεῖα A, B, Γ.

683. Νά κατασκευαστεῖ σφαίρα μέ ἀκτίνα R, πού νά ἐφάπτεται στίς ἕδρες γνωστῆς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας Kxyz.

584. Ἄν μιά σφαίρα περνᾶ ἀπό ἕνα σημεῖο A καί ἐφάπτεται στίς ἕδρες δίεδρης γωνίας, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι περνᾶ καί ἀπό τό συμμετρικό τοῦ A, ὡς πρός τό διχοτομοῦν ἐπίπεδο τῆς δίεδρης.

Β΄.

685. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε τετράεδρο εἶναι i) ἐγγράψιμο σέ σφαίρα καί ii) περιγράψιμο σέ σφαίρα.

686. Νά βρεθοῦν οἱ συνθῆκες, μέ τίς ὁποῖες δύο κύκλοι, πού δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, ἀνήκουν στήν ἴδια σφαίρα.

687. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀκτίνα τῆς τομῆς δύο τεμνόμενων σφαιρῶν ἀπό τίς ἀκτίνες τῶν σφαιρῶν καί τή διάκεντρό τους.

688. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε κυκλικός κῶνος εἶναι ἐγγράψιμος σέ σφαίρα, δηλαδή ὑπάρχει σφαίρα, πάνω στήν ὁποία βρίσκεται ἡ βάση καί ἡ κορυφή τοῦ κώνου.

689. Δίνεται σφαίρα (O,R). Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ἰσόπλευρου κώνου ἐγγεγραμμένου σ' αὐτή, ἀπό τήν ἀκτίνα R τῆς σφαίρας.

690. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε ὀρθός κυκλικός κῶνος εἶναι περιγράψιμος σέ σφαίρα, δηλαδή ὑπάρχει σφαίρα πού ἐφάπτεται στή βάση καί στήν κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

691. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ἰσόπλευρου κώνου περιγεγραμμένου σέ σφαίρα (O, ρ), ἀπό τήν ἀκτίνα ρ.

692. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης σέ κῶνο μέ ἀκτίνα 5α καί ὕψος 12α.

693. Δίνεται κανονικό τετράεδρο ΚΑΒΓ μέ ἀκμή α. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας πού ἐφάπτεται στήν ἕδρα ΑΒΓ καί στίς ἀκμές ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ.

694. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν ἕνα παραλληλεπίπεδο εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ σφαίρα, εἶναι ὀρθογώνιο.

695. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι, γιά νά εἶναι ἕνα παραλληλεπίπεδο περιγεγραμμένο σέ σφαίρα, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ἕδρες του νά εἶναι ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα.

696. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος περιγεγραμμένου σέ σφαίρα πολύεδρου ἰσοῦται μέ τό 1/3 τῆς ἐπιφάνειάς του ἐπί τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

697. Σ' ἕνα τετράεδρο ΚΑΒΓ ἡ στερεά γωνία Κ εἶναι τρισορθογώνια καί ἔχει $KA = \alpha$, $KB = \beta$, $K\Gamma = \gamma$. Νά ὑπολογιστεῖ ἀπό τά α, β, γ ἡ ἀκτίνα τῆς περιγεγραμμένης σ' αὐτό σφαίρας.

698. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετράεδρου

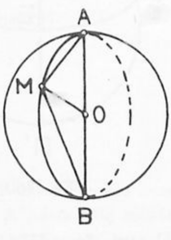
i) ἀπό τήν ἀκτίνα R τῆς περιγεγραμμένης σ' αὐτό σφαίρας

ii) ἀπό τήν ἀκτίνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης σ' αὐτό σφαίρας.

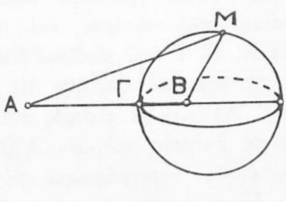
Νά βρεθεῖ σχέση πού νά συνδέει τίς ἀκτίνες R καί ρ.

318. Γεωμετρικοί τόποι. Ἐκτός ἀπό τή σφαιρική ἐπιφάνεια πού ἀπό τόν ὁρισμό της εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων, πού ἀπέχουν σταθερή ἀπόσταση ἀπό σταθερό σημεῖο, σημαντικοί γεωμετρικοί τόποι εἶναι καί οἱ ἀκόλουθοι :

i) Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπό τά ὁποῖα ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπό ὀρθή γωνία, εἶναι σφαιρική ἐπιφάνεια μέ διάμετρο ΑΒ (σχ. 358).



Σχ. 358



Σχ. 359

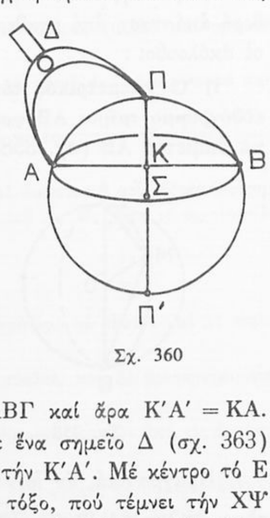
Πραγματικά, ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, ἐπειδή εἶναι $MO = AB/2$, θά εἶναι $\widehat{AMB} = 1^{L}$. Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο, δηλαδή $\widehat{AMB} = 1^{L} \Rightarrow MO = AB/2$ καί ἐπομένως τό Μ εἶναι σημεῖο τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας.

ii) Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό δύο γνωστά σημεῖα Α καί Β εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$, εἶναι σφαιρική ἐπιφάνεια μέ διάμετρο ΓΔ (ἀπολλώνια σφαίρα), ὅπου τά Γ καί Δ διαιροῦν τό τμῆμα ΑΒ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ (σχ. 359).

Πραγματικά, ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τέτοιο, ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, τότε πάνω στό ἐπίπεδο πού ὁρίζεται ἀπό τό Μ καί τήν εὐθεία ΑΒ, ὁ γ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ἀπολλώνιος κύκλος μέ σταθερή διάμετρο ΓΔ (§ 92). Ἄν τό σχῆμα στραφεῖ γύρω ἀπό τήν ΑΒ, ὁ ἀπολλώνιος κύκλος θά διαγράψει ἀπολλώνια σφαιρική ἐπιφάνεια μέ διάμετρο ΓΔ, πού εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

319. Σφαιρικός διαβήτης. Γιά νά χαράξουμε ἕναν κύκλο πάνω στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας, χρησιμοποιοῦμε τό **σφαιρικό διαβήτη,** δηλαδή ἕνα διαβήτη, πού τά σκέλη του εἶναι καμπύλα καί ὄχι εὐθύγραμμα ὅπως τοῦ κοινοῦ διαβήτη (σχ. 360). Στηρίζουμε τό ἕνα ἄκρο του σ' ἕνα σημεῖο τῆς σφαίρας καί μέ τό ἄλλο ἄκρο του μποροῦμε νά γράψουμε κύκλο πάνω στή σφαιρική ἐπιφάνεια.

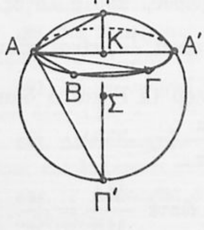


Σχ. 360

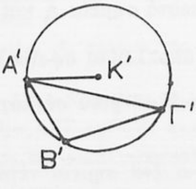
320. Πρόβλημα. Νά βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα δεδομένης σφαίρας.

Λύση. Μέ κέντρο ἕνα σημεῖο Π τῆς σφαίρας Σ καί ἀκτίνα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτη, ἔστω τήν ΠΑ (σχ. 361), γράφουμε κύκλο πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καί παίρνουμε τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ κύκλου. Κατόπι μετροῦμε μέ τό σφαιρικό διαβήτη τίς ἀποστάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ καί μέ πλευρές αὐτές κατασκευάζουμε τό ἐπίπεδο τρίγωνο Α'Β'Γ' (σχ. 362), στό ὁποῖο περιγράφουμε τόν κύκλο (Κ', Κ'Α'). Εἶναι φανερό ὅτι εἶναι Α'Β'Γ' = ΑΒΓ καί ἄρα Κ'Α' = ΚΑ.

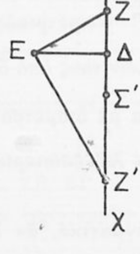
Ἔπειτα πάνω σέ μιά εὐθεία ΧΨ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ (σχ. 363) καί φέρνουμε τή ΔΕ κάθετη στή ΧΨ καί ἴση μέ τήν Κ'Α'. Μέ κέντρο τό Ε καί ἀκτίνα τήν πολική ἀπόσταση ΑΠ γράφουμε τόξο, πού τέμνει τήν ΧΨ στό σημεῖο Ζ. Φέρνουμε τήν ΕΖ' ⊥ ΕΖ, πού τέμνει τήν ΧΨ στό Ζ'. Τώρα



Σχ. 361



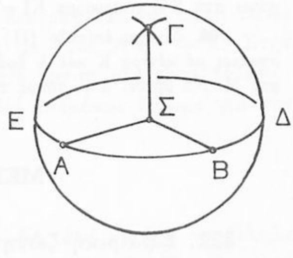
Σχ. 362



Σχ. 363

εἶναι τρίγ. $ΔΕΖ = ΚΑΠ$ ἐπειδή εἶναι ὀρθογώνια μέ $ΔΕ = ΚΑ$ καί $ΕΖ = ΑΠ$. Ἐπίσης εἶναι $ΕΖΖ' = ΑΠΠ'$, γιατί ἔχουν $\widehat{Ε} = \widehat{Α} = 90^0$, $ΕΖ = ΑΠ$ καί $Ε\widehat{Ζ}Ζ' = Α\widehat{Π}Π'$. Ἄρα $ΠΠ' = ΖΖ'$, δηλαδή ἡ $ΖΖ'$ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας $Σ$ καί ἄρα ἡ ἀκτίνα της εἶναι ἡ $Σ'Ζ = \dfrac{ΖΖ'}{2}$.

321. Πρόβλημα. Πάνω στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας νά γραφτεῖ μέγιστος κύκλος πού νά περνάει ἀπό δύο γνωστά σημεῖα της.



Σχ. 364

Λύση. Μέ κέντρα τά δεδομένα σημεῖα Α καί Β (σχ. 364) καί ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτη ἴσο μέ τεταρτημόριο, δηλαδή μέ τήν ὑποτείνουσα ὀρθογώνιου ἰσοσκελοῦς τριγώνου πού ἔχει κάθετες πλευρές ἴσες μέ τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας (τήν ἀκτίνα τή βρίσκουμε ὅπως στό προηγούμενο πρόβλημα), γράφουμε δύο τόξα, πού τέμνονται στό σημεῖο Γ. Μετά μέ κέντρο τό Γ καί τήν ἴδια ἀκτίνα γράφουμε κύκλο, πού εἶναι ὁ ζητούμενος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

699. Δίνονται δύο σταθερά σημεῖα Ο καί Α. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος : i) τῶν προβολῶν τοῦ Α πάνω στίς εὐθεῖες πού περνοῦν ἀπό τό Ο καί ii) τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α ὡς πρός τίς εὐθεῖες πού περνοῦν ἀπό τό Ο.

700. Δίνεται σφαίρα (O,R) καί σημεῖο Α. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, φέρνουμε τήν ΑΜ καί πάνω σ' αὐτή παίρνουμε $ΜΚ = ΜΑ$. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Κ.

701. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, γιά τά ὁποῖα εἶναι : $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = k^2$, ὅπου Α καί Β εἶναι σταθερά σημεῖα καί k δοσμένο τμῆμα.

702. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, γιά τά ὁποῖα εἶναι : $ΜΑ^2 - ΜΒ^2 = k^2$, ὅπου Α καί Β εἶναι σταθερά σημεῖα καί k δεδομένο τμῆμα.

Β'.

703. Δίνεται σφαίρα (K,R). Μιά μεταβλητή εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός γνωστή εὐθεία (δ) καί ἐφάπτεται στή σφαίρα σέ σημεῖο Μ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

704. Δίνεται σφαίρα (K,R) καί εὐθεία (ε). Ἕνα μεταβλητό ἐπίπεδο (Π) περνᾶ ἀπό τήν εὐθεία (ε) καί τέμνει τή σφαίρα κατά κύκλο (O,ρ). Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου Ο.

705. Ἕνα μεταβλητό τρίγωνο ΑΒΓ διατηρεῖ σταθερή κατά θέση καί μέγεθος τή βάση $ΒΓ = α$ καί σταθερή κατά μέγεθος τή διάμεσο $ΑΜ = μ_α$. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α, ἄν $ΑΒ = 2ΑΓ$.

706. Δίνεται σφαίρα (Κ,R) καί σταθερή διάμετρός της ΑΚΒ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, φέρνουμε τή ΒΜ καί στήν προέκτασή της παίρνουμε τμῆμα ΜΓ = ΜΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος i) τοῦ σημείου Γ, ii) τοῦ σημείου Ι τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καί ΚΓ.

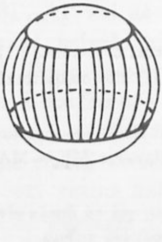
707. Δίνεται σφαίρα (Κ,R) καί σταθερό ἐπίπεδο (Π) πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο της Κ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, φέρνουμε τή ΜΑ ⊥ (Π) καί πάνω στή ΚΜ παίρνουμε ΚΙ = ΜΑ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Ι.

708. Δίνεται ἐπίπεδο (Π) καί δύο σταθερά σημεῖα του Α καί Β. Δύο μεταβλητές σφαῖρες μέ κέντρα Κ καί Λ ἐφάπτονται στό ἐπίπεδο (Π) στά Α καί Β καί μεταξύ τους στό Μ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

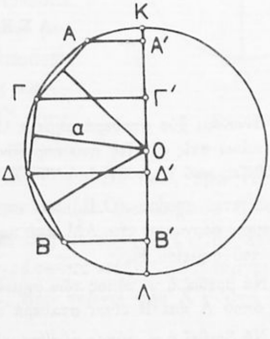
ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

322. Σφαιρική ζώνη λέγεται τό τμῆμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, τό ὁποῖο περιλαμβάνεται μεταξύ δύο παράλληλων ἐπιπέδων, πού τέμνουν τή σφαίρα (σχ. 365).

Οἱ τομές εἶναι κύκλοι καί λέγονται βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης καί ἡ ἀπόσταση τῶν βάσεων λέγεται ὕψος της.



Σχ. 365



Σχ. 366

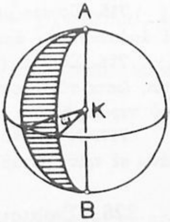
Γιά τή μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαιρικῆς ζώνης θεωροῦμε ἕνα ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΚΟΛ (σχ. 366) καί ἕνα τόξο του $\widehat{AB}$ στό ὁποῖο ἐγγράφουμε κανονική πολυγωνική γραμμή ΑΓΔΒ. Ἄν τό σχῆμα στραφεῖ γύρω ἀπ' τή διάμετρο ΚΛ, τό ἡμικύκλιο θά διαγράψει σφαίρα, ἐνῶ τό τόξο $\widehat{AB}$ θά διαγράψει σφαιρική ζώνη μέ ὕψος Α′Β′, ὅπου ΑΑ′ ⊥ ΚΛ καί ΒΒ′ ⊥ ΚΛ. Ἡ ἐγγεγραμμένη πολυγωνική γραμμή ΑΓΔΒ θά διαγράψει ἐπιφάνεια ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν, πού διαγράφουν οἱ πλευρές της. Φέρνουμε ΓΓ′ ⊥ ΚΛ, ΔΔ′ ⊥ ΚΛ καί τά ἀποστήματα α ἀπ' τό κέντρο Ο τοῦ ἡμικυκλίου. Οἱ ἐπιφάνειες, πού διαγράφουν οἱ πλευρές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, εἶναι κυρτές ἐπιφάνειες κόλουρων κώνων καί ἑπομένως ἔχουμε (§ 304) πόρ. II) : $E_{A\Gamma} = 2\pi\alpha A'\Gamma'$, $E_{\Gamma\Delta} = 2\pi\alpha\Gamma'\Delta'$, $E_{\Delta B} = 2\pi\alpha\Delta'B'$. Τίς προσθέτουμε καί παίρνουμε : $E_{A\Gamma\Delta B} = 2\pi\alpha\,(A'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'B') = 2\pi\alpha A'B'$ (1). Ἄν φανταστοῦμε ὅτι τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξάνει καί τείνει στό ἄπειρο, τότε ἡ πολυγωνική γραμμή τείνει νά ταυτιστεῖ μέ τό τόξο $\widehat{AB}$ καί ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια πού διαγράφεται ἀπ' αὐτή τείνει στή ζητούμενη ἐπιφάνεια τῆς σφαιρικῆς ζώνης μέ ὕψος $A'B' = h$. Στήν περίπτωση αὐτή, τό μόνο πού θά μεταβληθεῖ στή σχέση (1) εἶναι τό ἀπόστημα α, πού θά ταυτιστεῖ μέ τήν ἀκτίνα R καί ἑπομένως ἔχουμε γιά τήν ἐπιφάνεια σφαιρικῆς ζώνης τόν τύπο :

$$\mathbf{E = 2\pi Rh.}$$

323. Μονοβασική σφαιρική ζώνη. Ἄν ἕνα ἀπό τά δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἐφάπτεται στή σφαίρα, ἡ σφαιρική ζώνη πού καθορίζει ἔχει μιά βάση καί λέγεται **μονοβασική.** Ἡ ἐπιφάνειά της δίνεται ἀπό τόν ἴδιο τύπο τῆς προηγούμενης παραγράφου.

324. Σφαιρική ἐπιφάνεια. Ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἐπιφάνεια σφαιρικῆς ζώνης μέ ὕψος $h = 2R$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος δίνει

$$\mathbf{E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2.}$$



Σχ. 367

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν ἰσοῦται μέ τό τετράγωνο τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων τους.

★ **325. Σφαιρική ἄτρακτος** λέγεται τό τμῆμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν ἑδρῶν δίεδρης γωνίας, πού ἡ ἀκμή της AB εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 362).

Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι δύο σφαιρικές ἄτρακτοι τῆς ἴδιας σφαίρας ἤ ἴσων σφαιρῶν, πού ὁρίζονται ἀπό ἴσες δίεδρες γωνίες, εἶναι ἴσες.

Ἀπ' αὐτό συνάγεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου εἶναι ἀνάλογη τοῦ μέτρου ω τῆς δίεδρης γωνίας, ἀπ' τήν ὁποία καθορίζεται, καί θά λέγεται **σφαιρική ἄτρακτος γωνίας ω.**

Ἐπειδή ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σφαιρική ἄτρακτος γωνίας $360°$, ἡ ἐπιφάνεια E μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου γωνίας ω θά εἶναι τέτοια, ὥστε

$$\frac{E}{\omega} = \frac{4\pi R^2}{360} \quad \text{ἤ} \quad E = \frac{4\pi R^2\omega}{360}.$$

Σημείωση. Ἄν ἡ γωνία $\omega°$, μετρηθεῖ σέ ἀκτίνια καί εἶναι α, ὁ προηγούμενος τύπος τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς : $E = \dfrac{4\pi R^2\alpha}{2\pi} = 2R^2\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

709. Μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα 5 cm τέμνεται ἀπό δύο παράλληλα ἐπίπεδα, πού ἀπέχουν ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας 3 cm καί 4 cm. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τῆς σφαιρικῆς ζώνης πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν ἐπιπέδων (δύο περιπτώσεις).

710. Νά ὑπολογιστεῖ τό ὕψος σφαιρικῆς ζώνης ἰσοδύναμης πρός μέγιστο κύκλο σφαίρας μέ ἀκτίνα R.

711. Τό ἐπίπεδο ἑνός μικροῦ κύκλου σφαίρας πού ἔχει ἀκτίνα 4 cm, ἀπέχει ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας 1 cm. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἐπιφάνειες τῶν δύο μονοβασικῶν ζωνῶν, στίς ὁποῖες διαιρεῖται ἡ σφαίρα.

712. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης σέ κονομικό τετράεδρο ἀκμῆς α. Ὁμοίως τῆς ἐγγεγραμμένης.

Β΄.

713. Μιά σφαιρική ἐπιφάνεια μέ ἀκτίνα R νά διαιρεθεῖ σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ ἐπίπεδα παράλληλα.

714. Τέμνουμε σφαίρα (O,R) μέ ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό μιά ἕδρα τοῦ ἐγγεγραμμένου σ' αὐτή κύβου. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καθεμιᾶς ἀπό τίς δύο μοναβασικές σφαιρικὲς ζῶνες, στίς ὁποῖες διαιρεῖται ἡ σφαίρα.

715. Σφαίρα μέ ἀκτίνα α φωτίζεται ἀπό σημειακή φωτεινή πηγή Φ, πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση 2α ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ φωτιζόμενη ἐπιφάνεια.

716. Σφαίρα (O,R) νά τμηθεῖ ἀπό ἐπίπεδα συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρο της ἔτσι, ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ζώνης, πού περιλαμβάνουν.

717. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ σφαιρική ζώνη, πού ὁρίζεται ἀπό δύο ὁμόκεντρες σφαῖρες πάνω σέ τρίτη μεταβλητή σφαίρα, πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο τους, ἔχει σταθερή ἐπιφάνεια.

326. Σφαιρικός τομέας λέγεται τό στερεό πού παράγεται ἀπό κυκλικό τομέα ΑΟΒ, ὅταν αὐτός στρέφεται γύρω ἀπό διάμετρο τοῦ ἐπιπέδου του, ἡ ὁποία δέν τόν τέμνει (σχ. 368).

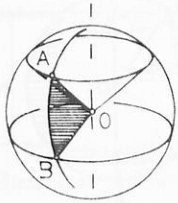
Τό τόξο $\widehat{AB}$ διαγράφει σφαιρική ζώνη, πού λέγεται **βάση** τοῦ σφαιρικοῦ τομέα. **Ὕψος** του λέγεται τό ὕψος τῆς βάσεώς του, δηλαδὴ τῆς σφαιρικῆς ζώνης, πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτόν.

Γιά τή μέτρηση τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τομέα θεωροῦμε στό τόξο $\widehat{AB}$ (σχ. 369) τοῦ κυκλικοῦ τομέα, ἀπ' τόν ὁποῖο παράγεται, ἐγγεγραμμένη κανονική πολυγωνική γραμμή. Ὁ ὄγκος, πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή τοῦ ἐπίπεδου σχήματος ΟΑΓΔΒΟ γύρω ἀπ' τήν ΚΑ, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων, πού παράγουν τά τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΓΔ, ΟΔΒ κατά τήν περιστροφή. Φέρνουμε ἀπ' τό κέντρο Ο τά ἀποστήματα α καί ἔχουμε (§ 306):

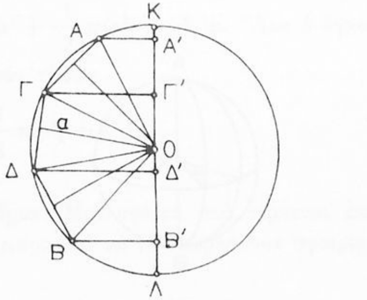
$$V_{(OA\Gamma)} = \frac{1}{3}\,E_{A\Gamma}\cdot\alpha,\quad V_{(O\Gamma\Delta)} = \frac{1}{3}\,E_{\Gamma\Delta}\cdot\alpha,\quad V_{(O\Delta B)} = \frac{1}{3}\,E_{\Delta B}\cdot\alpha \Rightarrow$$

$$(1)\qquad V_{(OA\Gamma\Delta BO)} = \frac{1}{3}\,[E_{A\Gamma} + E_{\Gamma\Delta} + E_{\Delta B}]\cdot\alpha = \frac{1}{3}\,E_{A\Gamma\Delta B}\cdot\alpha.$$

Ἄν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης στό τόξο $\widehat{AB}$ πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξάνει καί τείνει στό ἄπειρο, τό ἀπόστημα α τείνει στήν



Σχ. 368



Σχ. 369

ἀκτίνα R καί ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται μέ τόν ὄγκο V τοῦ σφαιρικοῦ τομέα. Τότε ἀπό τήν προηγούμενη σχέση (1) ἔχουμε: $V = \frac{1}{3} E_{\widehat{AB}} R$ καί, ἐπειδή $E_{\widehat{AB}} = 2\pi Rh$ (§ 322), συνάγεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέα εἶναι ἴσος μέ:

$$\mathbf{V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.}$$

327. Ὄγκος σφαίρας. Ἡ σφαίρα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σφαιρικός τομέας μέ ὕψος $h = 2R$ καί ἑπομένως ἀπό τόν προηγούμενο τύπο παίρνουμε:

$$\mathbf{V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3} \pi R^3.}$$

Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων τους.

★ **328. Σφαιρικός ὄνυχας** λέγεται τό τμῆμα τῆς σφαίρας πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν ἑδρῶν δίεδρης γωνίας, πού ἡ ἀκμή της AB εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ. 370).

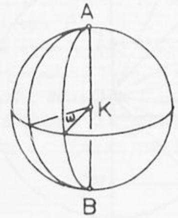
Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχα εἶναι ἀνάλογος τῆς δίεδρης γωνίας του, δηλαδή εἶναι: $\frac{V}{\omega} = \frac{V_{\sigma\varphi.}}{360}$ καί ἑπομένως δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\omega}{360}.$$

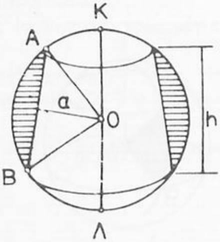
329. Σφαιρικός δακτύλιος λέγεται τό στερεό πού παράγεται ἀπό κυκλικό τμῆμα AB ὅταν αὐτό στρέφεται γύρω ἀπό διάμετρο ΚΛ τοῦ ἐπιπέδου του, ἡ ὁποία δέν τό τέμνει (σχ. 371).

Ἡ ἀπόσταση h τῶν δύο παράλληλων κύκλων, πού διαγράφουν τά σημεῖα A καί B, λέγεται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου.

Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἡ διαφορά τῶν ὄγκων τοῦ



Σχ. 370



Σχ. 371

σφαιρικοῦ τομέα, πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή τοῦ κυκλικοῦ τομέα AOB καί τοῦ ὄγκου, πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή τοῦ τριγώνου AOB. Φέρνουμε τό ἀπόστημα α καί ἔχουμε :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3} E_{AB}\cdot\alpha = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}(2\pi\alpha h)\alpha = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{2}{3}\pi\alpha^2 h =$$

$$= \frac{2}{3}\pi(R^2 - \alpha^2)h = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 h = \frac{1}{6}\pi AB^2 h.$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου δίνεται ἀπό τόν τύπο :

$$\mathbf{V = \frac{1}{6}\pi AB^2 h.}$$

330. Σφαιρικό τμῆμα. Ἄν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουν μιά σφαίρα, τό τμῆμα της, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν ἐπιπέδων, λέγεται σφαιρικό τμῆμα (σχ. 322).

Ἡ ἀπόσταση h τῶν δύο παράλληλων ἐπιπέδων λέγεται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καί οἱ κύκλοι, κατά τούς ὁποίους τά ἐπίπεδα τέμνουν τή σφαίρα, λέγονται βάσεις του.

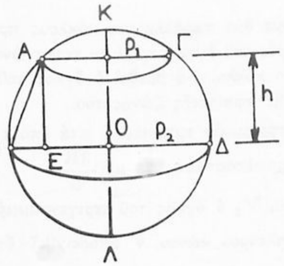
Ἄς θεωρήσουμε μιά διάμετρο ΚΟΛ τῆς σφαίρας κάθετη στίς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καί ἕνα ἐπίπεδο πού περνάει ἀπό τήν ΚΛ καί τέμνει τούς κύκλους - βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος στά A, Γ καί B, Δ ἀντιστοίχως. Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου AB καί τοῦ κόλουρου κώνου ABΔΓ. Ἄν ρ_1 καί ρ_2 εἶναι οἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἔχουμε :

$$V = \frac{1}{6}\pi AB^2 h + \frac{1}{3}\pi(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)h = \frac{1}{6}\pi\left[AB^2 + 2\rho_1^2 +\right.$$

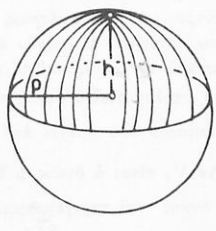
$+ 2\rho_1\rho_2 + 2\rho^2{}_2\big]h$. Φέρνουμε $AE \perp B\Delta$, $(AE = h)$, ὁπότε $AB^2 = = h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2 = h^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho^2{}_2$ καί ὁ ὄγκος μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς: $V = \frac{1}{6}\pi\big[(h^2 + \rho^2{}_1 - 2\rho_1\rho_2 + \rho^2{}_1) + 2\rho^2{}_1 + 2\rho_1\rho_2 + 2\rho^2{}_2\big]h = = \frac{1}{6}\pi\big[h^2 + 3\rho^2{}_1 + 3\rho^2{}_2\big]h = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho^2{}_1 + \rho^2{}_2)h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\mathbf{V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho^2{}_1 + \rho^2{}_2)h.}$$

331. Μονοβασικό σφαιρικό τμῆμα. Μιά σφαίρα πού τέμνεται ἀπό ἐπίπεδο διαιρεῖται σέ δύο τμήματα πού μποροῦμε νά τά θεωρήσουμε σφαιρικά



Σχ. 372



Σχ. 373

τμήματα μέ τή μιά βάση τόν κύκλο μέ ἀκτίνα ρ (σχ. 373) καί τήν ἄλλη μηδενική. Γι' αὐτό καί λέγονται μονοβασικά σφαιρικά τμήματα. Ἄν h εἶναι τό ὕψος ἑνός ἀπ' αὐτά, ὁ ὄγκος του δίνεται ἀπό τόν τύπο τῆς προηγούμενης παραγράφου, ὁ ὁποῖος μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\rho^2 h.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

718. Δίνεται μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα 8 cm. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέα πού ἡ βάση του εἶναι τόξο 60°, καί ὁ ἄξονάς του εἶναι παράλληλος πρός τή χορδή τοῦ τόξου αὐτοῦ.

719. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης σέ κύβο μέ ἀκμή α.

720. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης σέ κύβο μέ ἀκμή α.

721. Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό ἐμβαδό μέγιστου κύκλου της. Νά βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα καί ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

722. Ποιά είναι ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας, πού ὁ ὄγκος της ἰσοῦται ἀριθμητικά μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειάς της ;

723. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος σφαίρας ἐγγεγραμμένης σέ κύλινδρο πού ἔχει ἀκτίνα βάσεως R.

724. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας ἐγγεγραμμένης σέ κῶνο ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτίνα βάσεως α καί ὕψος 3α.

725. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου, ἄν ἡ χορδή τοῦ τόξου πού τόν παράγει εἶναι ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου σέ μέγιστο κύκλο τῆς σφαίρας ἀκτίνας R, ἐνῶ ὁ ἄξονας περιστροφῆς περνάει ἀπό τό ἕνα ἄκρο τῆς χορδῆς.

726. Σέ μιά σφαίρα πού ἔχει ἀκτίνα R φέρνουμε χορδή ΑΒ κάθετη στό μέσο τῆς ἀκτίνας ΟΓ. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ δακτυλίου πού παράγεται ἀπό τό κυκλικό τμῆμα πού ἔχει χορδή τήν ΑΒ καί στρέφεται γύρω ἀπ' τόν ἄξονα ΟΠ, παράλληλο πρός τήν ΑΒ.

727. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος μέ μιά βάση εἶναι ἴσος μέ $\pi h^2 R - \frac{1}{3}\pi h^3$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας καί h τό ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

728. Σέ σφαίρα μέ ἀκτίνα 4 cm φέρνουμε δύο παράλληλους κύκλους πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ κέντρου καί μέ διαμέτρους τίς πλευρές τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καί τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου σέ μέγιστο κύκλο. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζόμενου σφαιρικοῦ τμήματος καί τό ἐμβαδό τῆς σφαιρικῆς ζώνης του.

729. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων, στά ὁποῖα διαιρεῖται σφαίρα ἀπό ἐπίπεδο πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο ἀπόσταση ἴση μέ $\frac{3R}{5}$.

730. Ἄν V_1 εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας, V_2 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου, V_3 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου ἰσόπλευρου κώνου, ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι : $\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{6} = \frac{V_3}{9}$. Ἐπίσης νά ἀποδειχθεῖ ὅτι μέ τήν ἴδια σχέση συνδέονται καί οἱ ἐπιφάνειες E_1, E_2, E_3 τῶν ἴδιων στερεῶν.

731. Κυκλικός τομέας 60^0 μέ ἀκτίνα ρ στρέφεται γύρω ἀπό μιά ἀκραία ἀκτίνα του. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγόμενου στερεοῦ.

Β΄.

732. Κύβος μέ ἀκμή α γεμίζεται ἀπό ἴσες σφαῖρες διάμετρου α/ν, ν = 1, 2, 3... Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό πλῆθος τους.

733. Δίνονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καί δύο ἴσες καί παράλληλες χορδές τους. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ σφαιρικοί δάκτυλοι, πού παράγονται ἀπό τά δύο κυκλικά τμήματα, ὅταν αὐτά στραφοῦν γύρω ἀπό μιά διάμετρο, εἶναι ἰσοδύναμοι.

734. Κωνικό δοχεῖο ἰσόπλευρου κώνου γεμίζει μέ ὑγρό ἴσαμε ὕψος 5 cm. Μέσα σ' αὐτό βυθίζεται σφαίρα ἀκτίνας 1 cm. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἀνύψωση τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ. Ἐπίσης νά ὑπολογιστεῖ πόσος θά ἔπρεπε νά ἦταν ὁ ὄγκος τοῦ περιεχόμενου στό δοχεῖο ὑγροῦ, ὥστε ἡ βυθιζόμενη σ' αὐτό σφαίρα νά ἐφάπτεται στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ.

735. Δύο σφαῖρες (Κ, 3α) καί (Λ, 4α) ἔχουν διάκεντρο ΚΛ = 5α. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους τους.

736. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρός τήν ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σ' αὐτή ἰσόπλευρου κώνου ἔχει λόγο 4/9. Τόν ἴδιο λόγο ἔχουν καί οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

737. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σ' αὐτή κυλίνδρου ἔχουν λόγο 2/3. Τόν ἴδιο λόγο ἔχουν καί οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

738. Σφαίρα (O,R) τέμνεται μέ ἐπίπεδο. Ἄν τό ἐμβαδό τῆς τομῆς εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο σχηματιζόμενων μονοβασικῶν ζωνῶν, νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ ἐπιπέδου τομῆς ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας.

ΕΚΔΟΣΗ ΣΤ΄ 1981 — (V) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 135.000 — ΣΥΜΒΑΣΗ 3602/15-5-81

ΕΚΤΥΠΩΣΗ: Σ. Τσατσαρώνη
ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Δ. Κατσαβριᾶς καί ΣΙΑ Ο.Ε.

ΟΕ
ΔΒ