Β. Β.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Δ/Γ 154

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

Τὸ παρὸν ἀποτελεῖ τὸν Β' Τόμον τοῦ διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Δ' Τάξεως τοῦ Γυμνασίου προοριζομένου διδακτικοῦ βιβλίου, ἡ συγγραφὴ τοῦ ὁποίου ἀνετέθη, διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 57338 26-4-1968 Ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, εἰς τοὺς καθηγητὰς τῶν Μαθηματικῶν κ.κ. :

1) Θεοδόσιον Βαβαλέτσκον, Καθηγητὴν τῆς Βαρβακείου Πρoτ. Σχολῆς.

2) Ἰωάννην Ἰωαννίδην, Ἐπιμελητὴν τοῦ Ἐθν. Μ. Πολυτεχνείου.

3) Γεώργιον Μποῦσγον, Δρα τῶν Μαθηματικῶν, καθηγητὴν Λεοντείου Σχολῆς.

Συνετάγη βάσει τοῦ ἐγκριθέντος, διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 126711/19-9-68 Ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, νέου Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος, καταρτισθέντος ὑπὸ τῆς, ἐκ τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Ἐθν. Μ. Πολυτεχνείου κ. Παναγ. Λαδοπούλου καὶ τῶν κ.κ. Δημ. Κάππου Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, Ἀρισ. Πάλλα Καθηγητοῦ τῆς Σχολῆς Ναυτ. Δοκίμων, Νικ. Μπάρκα Προέδρου τοῦ Α.Ε.Σ. καὶ Δημ. Φιλαρέτου Συμβούλου τοῦ Α.Ε.Σ., ἐπὶ τούτῳ συσταθείσης Ἐπιτροπῆς.

Ἡ ἐποπτεία τῆς, συμφώνως πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ νέου Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος, συγγραφῆς τοῦ βιβλίου, ὑπῆρξεν ἔργον τῆς ὑπὸ τὸν Καθηγητὴν κ. Π. Λαδόπουλον Ἐπιτροπῆς, εἰς ἣν μετέσχον οἱ Καθηγηταὶ κ.κ. Δ. Κάππος καὶ Α. Πάλλας, τὰ μέλη τοῦ Α.Ε.Σ. κ.κ. Ν. Μπάρκας καὶ Δ. Φιλάρετος καὶ οἱ Γενικοὶ Ἐπιθεωρηταὶ κ.κ. Δ. Κάρτσωνας καὶ Φ. Σπηλιώτης.

Δ 2
Ιωαννίδης (Ιωάννης)

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

3-

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

I. ΙΩΑΝΝΙΔΗ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

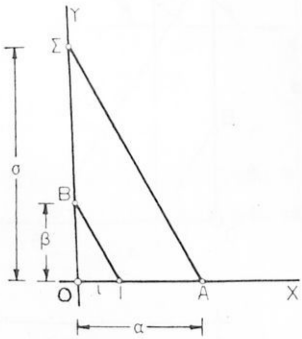
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω (α, β) ἕνα ζεῦγος εὐθ. τμημάτων. Θεωροῦμεν (Σχ. 1.1) ὀρθὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ), ἕνα εὐθ. τμῆμα ΟΙ = ι τῆς πλευρᾶς ΟΧ, λαμβανόμενον αὐθαιρέτως, καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὥστε ΟΑ=α καὶ ΟΒ = β. Ἔστω Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΟΥ μὲ τὴν διὰ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΙΒ.

Ἐφ' ὅσον τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΙ = ι (1) εἶναι σταθερόν, σὲ κάθε ζεῦγος (α, β) εὐθ. τμημάτων ἀντιστοιχεῖ, βάσει τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς, ἕνα μόνον σημεῖον Σ τῆς ΟΥ, ἤτοι ἕνα μόνον εὐθ. τμῆμα ΟΣ = σ.



Σχ. 1.1

Ἕκαστον ὅμως εὐθ. τμῆμα ΟΣ = σ δὲν εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς μόνον ζεύγους (α, β). Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν (Σχ. 1.2) μίαν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Σ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν πλευρὰν ΟΧ τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) κατὰ σημεῖον, ἔστω Α', καὶ τὴν διὰ τοῦ Ι παράλληλον ΙΒ' πρὸς τὴν Α'Σ, ὁρίζομεν ἕνα ζεῦγος εὐθ. τμημάτων (α', β'),ἔνθα α' ≡ ΟΑ' καὶ β' ≡ ΟΒ', εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ, κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν ἀντιστοιχίαν, τὸ εὐθ. τμῆμα σ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ καὶ εἰς τὸ ζεῦγος (α, β).

Σχ. 1.2

Ἂν εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος εὐθ. τμημάτων (α, β) θεωρήσωμεν ὅτι ἀντιστοιχεῖ τὸ ζεῦγος (σ,ι), ἔνθα τὸ σ εὑρίσκεται, διὰ δοθὲν ι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω κατασκευήν, ἔχομεν ὁρίσει μίαν μονοσήμαντον ἀντιστοι-

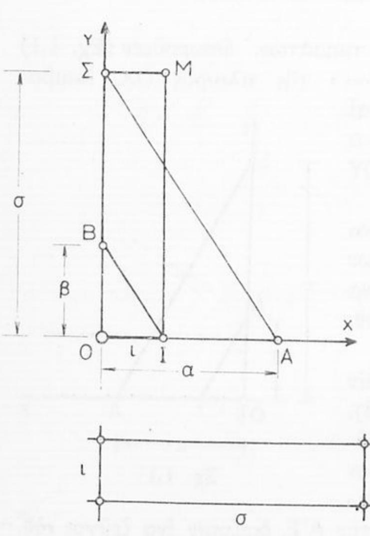
(1) Τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΙ = ι, ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρουμένου ζεύγους (α, β), θεωρεῖται ἀμετάβλητον κατὰ τὰς ἀνωτέρω θεωρήσεις.

(1) Αἱ ἐμφανιζόμεναι γραφικαὶ εἰκόνες (γραφ. σχήματα) φέρουν τὸν ἀριθμὸν τῆς παραγράφου εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρονται.

χίαν μεταξὺ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α,β) καὶ τῶν ζευγῶν (σ, ι) ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ δεύτερον μέλος ι εἶναι σταθερόν. Κατὰ τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν εἰς ἕκαστον ζεῦγος (α, β) ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον ζεῦγος (σ, ι), ἐνῷ ἕκαστον ζεῦγος (σ, ι) δὲν εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς μόνον ζεύγους (α, β).

Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἱδρυθεῖσα ἀντιστοιχία εἶναι, κατὰ ταῦτα, μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) εἰς τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (σ, ι), ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ δεύτερον μέλος ι εἶναι σταθερόν.

2. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δοθέντων δύο εὐθ. τμημάτων α καὶ β ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *τούτων κατὰ τὴν τάξιν (α, β), καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον α. β, τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντσιτοίχως τὰ εὐθ. τμήματα σ καὶ ι, ἤτοι τὰ μέλη τοῦ διατεταγμένου ζεύγους εὐθ. τμημάτων (σ, ι), τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ ζεῦγος (α, β), κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) εἰς τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν (σ, ι)* (1).



Σχ. 2

Ἂν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον σ (ι), θὰ ἔχωμεν ἐξ ὁρισμοῦ :

$$(1)\quad \alpha \cdot \beta = \sigma\,(\iota)$$

Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, εἰς ἕκαστον διατεταγμένον ζεῦγος εὐθ. τμημάτων (α, β), οὐχὶ κατ' ἀνάγκην διαφόρων ἀλλήλων, ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὀρθογώνιον σ (ι), καὶ ἕνα μόνον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ (1).

Ἂν α = β, ἡ σχέσις (1) θὰ σημειοῦται συμβολικῶς : $\alpha^2 = \sigma\,(\iota)$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου δύο εὐθ. τμημάτων προκύπτει :

$$\alpha \cdot \iota = \alpha\,(\iota) \text{ καὶ } \alpha \cdot 0 = 0\,(\iota)$$

Ἐξ ἄλλου, ἔχομεν :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1.* $\forall\ a, \beta, \gamma \in E$ *(E τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων) :*

$$a = \beta \Rightarrow a \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

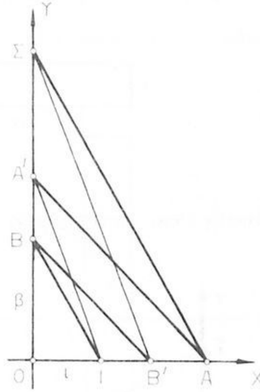
Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (2)

2. $\forall\,(a, \beta) \in E :\ a \cdot \beta = \beta \cdot a.$

Πράγματι, ἔστω σ (ι) τὸ γινόμενον α · β, εὑρισκόμενον κατὰ τὸν ὁρι-

(1) Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἱδρυθεῖσαν μονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν ὡς ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν ζευγῶν (α, β) καὶ τῶν εὐθ. τμημάτων σ, ἤτοι τῶν βάσεων τῶν ἀνωτέρω ὀρθογωνίων, δοθέντος ὅτι τὰ ὀρθογώνια ταῦτα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ι.

σμὸν (2), ἔνθα $\sigma = O\Sigma$ (Σχ. 2.1). Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου $\beta \cdot \alpha = \sigma'$ (ι) θεωροῦμεν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (2) : τὸ σημεῖον B' τοῦ ἄξονος OX ὥστε $OB' = \beta$, τὸ σημεῖον A' τοῦ OY ὥστε $OA' = \alpha$, τὴν IA' καὶ τὴν διὰ τοῦ B' παράλληλον πρὸς τὴν IA'. Ἂν τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὴν OY εἶναι τὸ σημεῖον Σ, τότε τὸ εὐθ. τμῆμα σ' δὲν εἶναι διάφορον τοῦ $O\Sigma = \sigma$. Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ $B'\Sigma$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν IA'. Τοῦτο ὅμως προκύπτει ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πάππου (1). Πράγματι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων καὶ ἰσοσκελῶν τριγώνων OAA' καὶ OBB' ἔχομεν ὅτι αἱ AA' καὶ BB' εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, παράλληλοι καὶ αἱ $A\Sigma$ καὶ IB, θὰ εἶναι, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, παράλληλοι καὶ αἱ $B'\Sigma$ καὶ IA'.



Σχ. 2.1

Ὥστε τὸ γινόμενον τῶν δύο εὐθ. τμημάτων, ὡς ὡρίσθη, εἶναι ἀντιμεταθετόν.

3. $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in E : \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

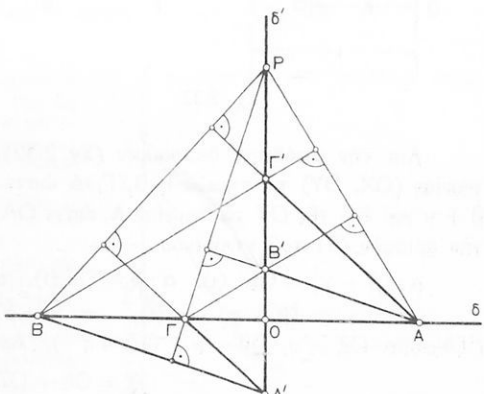
---

(1) Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει ὡς κάτωθι (Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» Τόμος Β' παραγρ. 141).

«Θεωροῦμεν δύο καθέτους ἐπ' ἀλλήλας εὐθείας δ καὶ δ' καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α', Β', Γ'. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ' καὶ Α'Β εἶναι παράλληλοι ὡς καὶ αἱ ΑΓ' καὶ Α'Γ, τότε θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ ΒΓ' καὶ Β'Γ.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰ εἰς τὴν πρότασιν σημεῖα, θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Α τῆς δ, δύο τυχούσας διὰ τούτου εὐθείας ΑΒ', ΑΓ' (Β' καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὴν δ'), ἕνα τυχὸν σημεῖον Α' τῆς δ καὶ τὰς διὰ τούτου παραλλήλους Α'Β καὶ Α'Γ πρὸς τὰς ΑΒ' καὶ ΑΓ' ἀντιστοίχως (Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὴν δ).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως, θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ Α πχ. κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ' καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ρ αὐτῆς μὲ τὴν δ'. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΡΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν Β'Γ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ' εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΡΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ', καὶ ἐπομένως καὶ ἡ παράλληλος αὐτῆς Α'Γ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΡΒ.



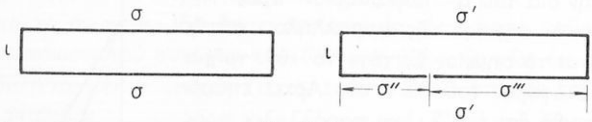
Σχ. 2.11

Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου Α'ΡΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΡΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Α'Β καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ'.

Τὸ σημεῖον Β' εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΡΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ Β'Γ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΡ.

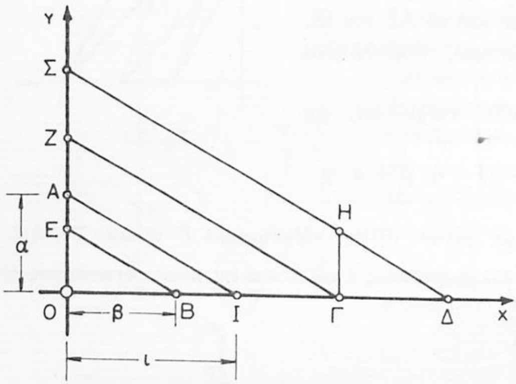
Τοῦτο ὅμως εἶναι τὸ ἀποδεικτέον.

Τὸ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἐμφανιζόμενον ἄθροισμ $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο ὀρθογωνίων σ'' (ι) καὶ σ''' (ι) τ



Σχ. 2.31

ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ γινόμενα: $\alpha \cdot \beta = \sigma''$ (ι) καὶ $\alpha \cdot \gamma = \sigma'''$ (ι).



Σχ. 2.32

Ἂν ὡς **ἄθροισμα** τῶν ἀνωτέρω ὀρθογωνίων σ'' (ι) κα σ''' (ι) ὁρίσωμεν τὸ ὀρθογώνιον σ' (ι), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις $\sigma' = \sigma'' + \sigma'''$ καὶ τὸ ὕψο εἶναι τὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα ι, τότε ἡ ἔννοια τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) =$ $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, εἶναι ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$, τὸ ὁποῖο εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον σ (ι) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον σ' (ι). Διὰ νὰ ἀποδειχθῆ ἑπομένως ἡ σ (ι) $= \sigma'$ (ι ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῆ ὅτ $\sigma = \sigma'$ ἤτοι ὅτι $\sigma = \sigma'' + \sigma'''$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωροῦμεν (Σχ. 2.32) ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΧ τῆς ὀρθῆ γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) τὰ σημεῖα Ι, Β, Γ, Δ ὥστε ΟΙ = ι, ΟΒ = β, ΟΓ = γ, ΟΔ = β + γ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΥ τὸ σημεῖον Α, ὥστε ΟΑ = α. Θὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸ τὸν ὁρισμὸν (2) τοῦ γινομένου:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \text{ΟΣ} \ (\iota), \quad \alpha \cdot \beta = \text{ΟΕ} \ (\iota), \quad \alpha \cdot \gamma = \text{ΟΖ} \ (\iota)$$

Ἤτοι: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \sigma$ (ι), $\alpha \cdot \beta = \sigma''$ (ι), $\alpha \cdot \gamma = \sigma'''$ (ι)

(Ἐθέσαμεν ΟΖ ≡ σ, ΟΕ = σ″, ΟΖ = σ‴). Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι:

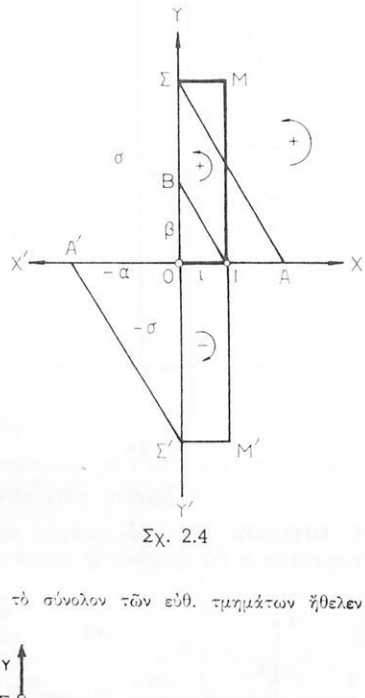
$$\text{ΟΣ} = \text{ΟΕ} + \text{ΟΖ}$$

Ἔχομεν (Σχ. 2.32) ὅτι: ΟΣ = ΟΖ + ΖΣ, ἤτοι ΟΣ = ΟΖ + ΓΗ, ἔνθα Η τὸ ἐπὶ τῆς ΔΣ σημεῖον τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΟΥ τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ Γ. Ἀλλὰ ΓΗ = ΟΕ. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογώνων τριγώνων ΟΒΕ καὶ ΓΔΗ. Ἑπομένως ἡ τελευταία: ΟΣ = ΟΖ + ΓΗ γίνεται: ΟΣ = ΟΕ + ΟΖ, ἥτις εἶναι ἡ ἀποδεικτέα.

Ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι, εἰς τὸ ὁρισθὲν γινόμενον δύο εὐθ. τμημάτων ἰσχύε ή έπιμεριστική ίδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ώς πρὸς τὴν πρόσθεσιν (1).

ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ἂν τὰ εὐθ. τμήματα α καὶ β θεωρηθοῦν προσημασμένα, τὸ γινόμενον τούτων, κατὰ μίαν δοθεῖσαν τάξιν, εὑρίσκεται βάσει τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, τῆς ἀνταποκρινομένης εἰς τὸ ὁρισμὸν τοῦ γινομένου δύο μὴ προσημασμένων εὐθ. τμημάτων. Εἰς τὴν περίπτωσιν προσημασμένων εὐθ. τμημάτων, ἀντὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) θὰ θεωρήσωμεν δύο ἄξονας $\overrightarrow{X'X}$ καὶ $\overrightarrow{Y'Y}$ καθέτους ἐπ' ἀλλήλους καὶ τὸν ἐπὶ ἑκάστου τούτων θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν ἡμιάξονα. Οὕτω :



Σχ. 2.4

1. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου $(-\alpha)\cdot\beta$:

Λαμβάνεται ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ', τὸ σημεῖον Α' ὥστε : $\overline{OA'} = -\alpha$ καὶ ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΥ τὸ σημεῖον Β ὥστε : $\overline{OB} = \beta$. Ἄγεται ἡ ΙΒ καὶ ἡ διὰ τοῦ Α' παράλληλος Α'Σ' πρὸς τὴν ΙΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἀρνητικὸν ἡμιάξονα ΟΥ' κατὰ τὸ σημεῖον Σ', ὁρίζουσα οὕτω τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{O\Sigma'}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ $\overline{O\Sigma} = \sigma$.

Πράγματι, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΣ καὶ ΟΑ'Σ' ἔχομεν ὅτι $\overline{O\Sigma} = -\overline{O\Sigma'}$ Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΟΙΜ'Σ' (Σχ. 2.4), τὸ ὁποῖον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ γνόμενον $-\alpha\cdot\beta$, καὶ τὸ ὀρ-

---

(1) Ἂν ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ἤθελεν ὁρισθῆ ὡς ἐσωτερικὴ ἐν αὐτῷ πρᾶξις, ἤτοι ὡς γινόμενον $\alpha\cdot\beta$ ὁρισθῆ τὸ εὐθ. τμῆμα σ τοῦ ὁρισμοῦ (2), τότε, ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω, ἰσχύει καὶ ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν. Πράγματι :

Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΟΧ. τὰ σημεῖα Ι, Α, Γ ὥστε $OI = \iota$, $OA = \alpha$, $O\Gamma = \gamma$ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΥ τὸ σημεῖον Β ὥστε $OB = \beta$

Εἰς τὸ ζεῦγος (β, γ), ἢ, ὅπερ τὸ αὐτό, εἰς τὸ ζεῦγος (γ, β) ἀντιστοιχεῖ τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΕ. Τὸ Ε εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ΟΥ σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ Γ παραλλήλου πρὸς τὴν ΙΒ. Εἰς τὸ ζεῦγος (α, ΟΕ) ἀντιστοιχεῖ τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΣ. Τὸ Σ εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ΟΥ σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ Α παραλλήλου πρὸς τὴν ΙΕ (Σχ 2.33). Ὥστε εἰς τὸ ζεῦγος (α, (β, γ)) ἀντιστοιχεῖ τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΣ.

Σχ. 2.33

Εἰς τὸ ζεῦγος (α, β) ἀντιστοιχεῖ τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΖ. Τὸ Ζ εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ΟΥ σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ Α παραλλήλου πρὸς τὴν ΙΒ. Εἰς τὸ ζεῦγος ((α, β), γ) ἀντιστοιχεῖ εὐθ. τμῆμα ΟΣ', ἔνθα τὸ Σ' εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ΟΥ σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ Γ παραλλήλου πρὸς τὴν ΙΖ. Ἀλλὰ ἡ παράλληλος αὕτη εἶναι συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Πάππου ἡ ΓΣ. Ἤτοι $\Sigma' \equiv \Sigma$. Πράγματι, ἔχομεν ἐκ κατασκευῆς : $A\Sigma \parallel EI$ καὶ $AZ \parallel E\Gamma$, καὶ ἐπομένως : $\Gamma\Sigma \parallel IZ$. Ὥστε εἰς τὰ ζεύγη (α, (β, γ)) καὶ ((α, β), γ) ἀντιστοιχεῖ τὸ αὐτὸ εὐθ. τμῆμα ΟΣ. **Συμβολικῶς** : $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$.

θογώνιον ΟΙΜΣ τὸ ὁποῖον εἶναι, ἐξ ὁρισμο
τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \beta$ εἶναι ἀντιθέτως προσανατ
λισμένα.

Θὰ σημειοῦμεν $-\alpha \cdot \beta = -\sigma\ (\iota)$.

Ὁμοία παρατήρησις ἰσχύει καὶ διὰ
γινόμενον $\alpha \cdot (-\beta)$. Τοῦτο, κατὰ τὸν ἀνωτέρ
ὁρισμόν, εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΟΙΜ'Σ'. Ἐξ ὁρ
σμοῦ ἑπομένως ἔχομεν ὅτι : $(-\alpha) \cdot \beta = \alpha\,(-\beta$

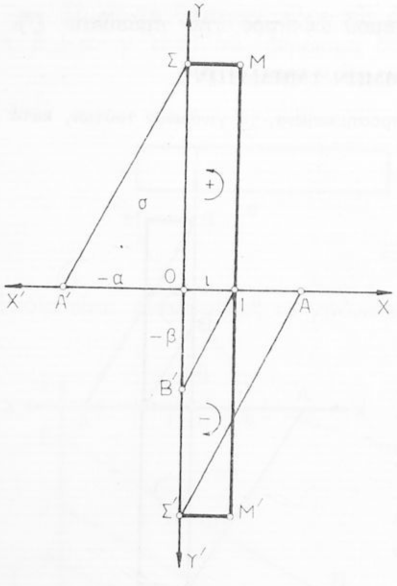
2. Διὰ τῶν εὕρεσιν τοῦ γινομένο
$(-\alpha) \cdot (-\beta)$:

Λαμβάνονται ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν ἡμιαξ
νων ΟΧ' καὶ ΟΥ' τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' ἀντιστο
χως ὥστε $\overline{OA'} = -\alpha$ καὶ $\overline{OB'} = -\beta$, ἄγετ
ἡ ΙΒ' καὶ ἡ διὰ τοῦ Α' παράλληλος πρὸς τ
ΙΒ' ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξον
ΟΥ τὸ σημεῖον Σ (Σχ. 2.5)

Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΣ' καὶ ΟΑ'Σ ἔχ
μεν ὅτι $\overline{O\Sigma} = -\overline{O\Sigma'}$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, κατὰ ταῦτα, προ
κύπτει ὅτι $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \sigma\ (\iota)$ ἤτοι ὅτι :

$$(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$$



Σχ. 2.5

ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

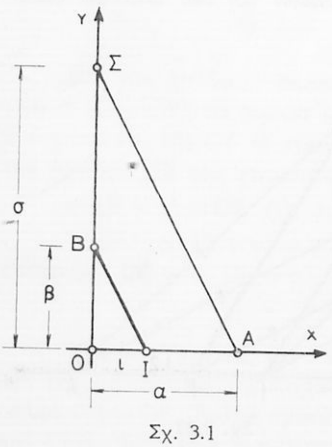
3. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μεταξὺ τῶν ζευγῶν (α, β) καὶ τῶν εὐθ
τμημάτων $\sigma\ (\iota)$ ὁρισθείσης ἀντιστοιχίας, προκύπτει ὅτι:

Δοθέντων δύο εὐθ. τμημάτων σ καὶ
ὑπάρχει εὐθ. τμῆμα β, καὶ ἕνα μόνον ὥστ

$$\alpha \cdot \beta = \sigma(\iota).\ (\Sigma\chi.\ 3.1)$$

Πράγματι, ἂν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΥ θεω
ρήσωμεν τὸ σημεῖον Σ ὥστε $O\Sigma = \sigma$ καὶ ἐπ
τοῦ ἄξονος ΟΧ τὸ σημεῖον Α ὥστε $OA = \alpha$
ἐνῷ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΧ ἔχει ὁρισθῆ τὸ ση
μεῖον Ι ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα $OI = \iota$ νὰ εἶνα
τὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα, ἡ διὰ τοῦ Ι πα
ράλληλος πρὸς τὴν ΑΣ ὁρίζει ἐπὶ τοῦ ἄξονο
ΟΥ ἕνα μόνον σημεῖον Β (ἀφοῦ τὸ $OI = \iota$ εἶ
ναι σταθερὸν) καὶ εἶναι, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ
γινομένου $\alpha \cdot \beta$:

$$\alpha \cdot \beta = \sigma\ (\iota)$$



Σχ. 3.1

Τὸ ζεῦγος (β, ι), συνοπτικῶς εὐθ. τμῆμα
$\beta\ (\iota)$ [1], δύναται νὰ ὀνομάζεται πηλίκον ἢ
λόγος τῶν εὐθ. τμημάτων σ καὶ α κατὰ τὴν τάξιν (σ, α).

(1) Εὑρισκόμενον βάσει τοῦ μοναδιαίου τμήματος ι

Ἂν τὸν ἀνωτέρω λόγον β(ι) συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\frac{\sigma(\iota)}{\alpha}$ θὰ σημειοῦμεν : $\frac{\sigma(\iota)}{\alpha} = \beta$

Ἐπειδὴ τὸ εὐθ. τμῆμα β εὑρέθη ἐκ τῶν σ καὶ α, βάσει τοῦ μοναδιαίου τμήματος ι, δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν : $\frac{\sigma}{\alpha} = \beta(\iota)$ ἢ $\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\beta}{\iota}$.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω εἰς τὰ ζεύγη :

(σ, α), (σ′ ,α′), (σ″, α″), . . ., ἀντιστοιχοῦν τὰ ζεύγη:

(β, ι), (β′, ι), (β″, ι), . . ., τῶν ὁποίων τὸ δεύτερον μέλος εἶναι τὸ σταθερὸν εὐθ. τμῆμα ι.

Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαν, ἡ ὁποία δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ζευγῶν (σ, α) καὶ τῶν εὐθ. τμημάτων β (ἀφοῦ τὸ μέλος ι εἶναι σταθερόν), εἰς τὸ ζεῦγος (σ, σ) ἀντιστοιχεῖ τὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα ι, ὡς ἐκ τῆς σχετικῆς κατασκευῆς προκύπτει. Ἔχομεν δηλαδή :

$$\frac{\sigma}{\sigma} = \iota$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ὑπάρχει ἀναλογία (ἰσομορφία) μεταξὺ τῶν γεωμ. πηλίκων τῶν εὐθ. τμημάτων πρὸς τὰ ἀριθμητικὰ τοιαῦτα.

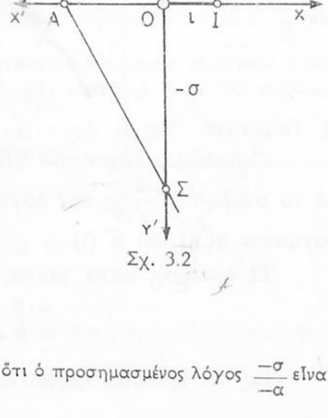
ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟΣ ΛΟΓΟΣ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ἂν τὰ εὐθ. τμήματα σ καὶ α θεωρηθοῦν προσημασμένα, τότε καὶ ὁ λόγος αὐτῶν, εὑρισκόμενος κατὰ τὰ ἀνωτέρω (3), εἶναι προσημασμένος. Τὰ εὐθ. τμήματα λαμβάνονται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἢ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος ΟΧ ἢ ΟΧ′ καὶ τοῦ ΟΥ ἢ ΟΥ′ καθ' ὅσον θεωροῦνται θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσημασμένα ἀντιστοίχως. Οὕτω, διὰ τὴν εὕρεσιν π.χ. τοῦ λόγου $\frac{-\sigma}{-\alpha}$ δύο **ἀρνητικῶς προσημασμένων** εὐθ. τμημάτων — σ καὶ — α, κατὰ τὴν τάξιν: (— σ, — α), λαμβάνονται τὰ σημεῖα Σ′ καὶ Α′ (Σχ. 3.2) ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν ἡμιαξόνων ΟΥ′ καὶ ΟΧ′ ἀντιστοίχως ὥστε $\overline{O\Sigma'} = -\sigma$ καὶ $\overline{OA'} = -\alpha$, ἄγεται ἡ Α′Σ′ καὶ ἡ διὰ τοῦ Ι παράλληλος ΙΒ πρὸς τὴν Α′Σ′. Τὸ σημεῖον Β εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος ΟΥ καὶ ὁρίζει τὸ **θετικῶς προσημασμένον** τμῆμα $\overline{OB} = \beta$. Ἔχομεν κατὰ ταῦτα : $\frac{-\sigma}{-\alpha} = \frac{\beta}{\iota}$ ἤ :

$$(1)\quad \frac{-\sigma}{-\alpha} = \beta\ (\iota)$$

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τμήματα σ καὶ α εἶναι ἀντιστοίχως προσημασμένα θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς, θὰ εὕρωμεν :

$$(2)\quad \frac{-\sigma}{\alpha} = -\beta\ (\iota)$$



Σχ. 3.2

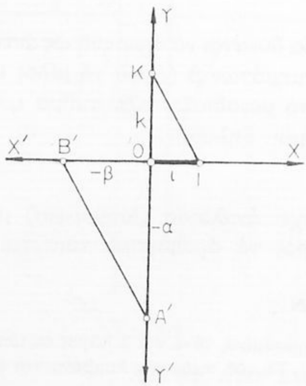
Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σχέσεως (1) θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ προσημασμένος λόγος $\frac{-\sigma}{-\alpha}$ εἶναι

θετικὸς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σχέσεως (2) ὅτι ὁ προσημασμένος λόγος $\frac{-\sigma}{\alpha}$ εἶ
ἀρνητικός.

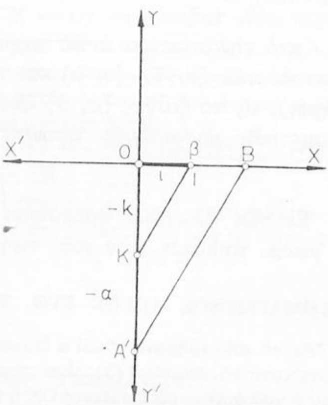
Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, σημειοῦντες :

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \overline{k}\,(\iota)$$

θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ προσημασμένος λόγος τῶν προσημασμένων τμημάτων $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$ ὁρίζετ ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{k}$, βάσει τοῦ θετικῶς πάντοτε προσημασμένου τμήματος ι. Τὸ εὐθύγρα μον τοῦτο εὐθ. τμῆμα $\overline{k}$, ἑπομένως καὶ ὁ λόγος $\overline{k}\,(\iota)$ εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσημ



Σχ. 3.3



Σχ. 3.4

σμένος, καθ' ὅσον τὰ τμήματα $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\beta}$ εἶναι ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως προσημασμένα (ὁμόσημα ἢ ἑτερόσημα).

Διὰ τὴν συντομίαν τοῦ συμβολισμοῦ δυνάμεθα ἀντὶ τῆς $\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \overline{k}\,(\iota)$, νὰ σημειοῦ-μεν $\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \overline{k}$, καὶ εἰδικώτερον : $\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = k$ ἢ $\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = -k$, καθ' ὅσον ὁ λόγος $\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ εἶναι θετι-κῶς ἢ ἀρνητικῶς προσημασμένος), ἤτοι τὸ εὐθ. τμῆμα k ἐμφανίζεται εἰς τὸν θετικὸν (Σχ. 3.3) ἡμιάξονα ΟΥ ἢ τὸν ἀρνητικὸν (Σχ. 3.4) ἡμιάξονα ΟΥ′

4. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω ὅτι : $\alpha \cdot \beta = \sigma\,(\iota)$ καὶ $\alpha' \cdot \beta' = \sigma'\,(\iota)$.

Ὀνομάζομεν **λόγον** τῶν γινομένων α. β καὶ α′ · β′, καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον: $\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha' \cdot \beta'}$, τὸν λόγον τῶν πλευρῶν σ κα σ′ τῶν ἀντιστοίχων ὀρ-θογωνίων σ(ι) καὶ σ′ (ι).

Ἐξ ὁρισμοῦ, κατὰ ταῦτα, ἔχομεν :

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha' \cdot \beta'} = \frac{\sigma\,(i)}{\sigma'\,(i)} = \frac{\sigma}{\sigma'}.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι : $\frac{\alpha \cdot \delta}{\alpha' \cdot \delta} = \frac{\alpha}{\alpha'}$.

Ἤτοι ὅτι εἰς τὰ ζεύγη (α, α') καὶ $(\alpha \cdot \delta, \alpha' \cdot \delta)$ ἀντιστοιχεῖ ὁ αὐτὸς λόγος β (ι).

Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν $\alpha \cdot \delta = \sigma$ (ι) καὶ $(\alpha' \cdot \delta) = \sigma'$ (ι), ἐκ τῆς σχετικῆς κατασκευῆς ἐπαληθεύεται ὅτι ὁ λόγος $\frac{\sigma}{\sigma'}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\frac{\alpha}{\alpha'}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ἡ ἔννοια τοῦ λόγου δύο εὐθ. τμημάτων α καὶ β κατὰ τὴν τάξιν (α, β), ὡρίσθη, ἀνεξαρτήτως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς τὸ βάσει τοῦ μοναδιαίου τμήματος ι εὑρισκόμενον εὐθ. τμῆμα k διὰ τὸ ὁποῖον : $k \cdot \beta = \alpha$ (ι)

Σχετικῶς μὲ τὴν ἔννοιαν ταύτην τοῦ λόγου δύο εὐθ. τμημάτων, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1. Ἂν δοθέντων δύο εὐθ. τμημάτων α καὶ β ὑπάρχῃ εὐθ. τμῆμα δ, ὥστε

$$\alpha = \mu \cdot \delta \quad \text{καὶ} \quad \beta = \mu \cdot \delta$$

ἔνθα μ καὶ ν φυσικοὶ ἀριθμοὶ $(\mu, \nu \in N)$, τότε τὰ εὐθ. τμήματα α καὶ β θὰ ὀνομάζωνται **σύμμετρα,** καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα δ κοινὸν **ὑποπολλαπλάσιον** τῶν α καὶ β.

Σχ. 4.1

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς **λόγον** τῶν εὐθ. τμημάτων α καὶ β κατὰ τὴν τάξιν (α, β), τὸν **ρητὸν ἀριθμὸν** $\frac{\mu}{\nu}$.

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$$\alpha = \mu \cdot \delta \quad \text{καὶ} \quad \beta = \nu \cdot \delta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu} \quad (\text{ἢ } \alpha = \frac{\mu}{\nu} \cdot \beta)$$

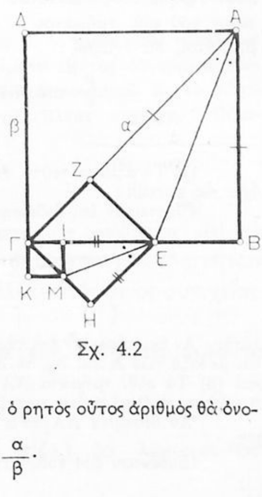
Ἂν δύο εὐθ. τμήματα α καὶ β εἶναι σύμμετρα ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδου μετὰ πεπερασμένον πλῆθος διαιρέσεων, δίδει ὑπόλοιπον 0.

2. Ἂν δοθέντων δύο εὐθ. τμημάτων α καὶ β, δὲν ὑπάρχῃ εὐθ. τμῆμα δ ὥστε :

$$\alpha = \mu \cdot \delta \quad \text{καὶ} \quad \beta = \mu \cdot \delta \qquad (\mu, \nu \in N)$$

ἤτοι ἂν δὲν ὑπάρχῃ κοινὸν ὑποπολλαπλάσιον τῶν α καὶ β, τότε τὰ εὐθ. τμήματα α καὶ β θὰ ὀνομάζωνται **ἀσύμμετρα.**

Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν ἀσύμμετρα εὐθ. τμήματα, ἤτοι εὐθ. τμήματα, μὴ ἔχοντα (μὴ δεχόμενα) κοινὸν ὑποπολλαπλάσιον, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν εὐθ. τμήματα ἡ ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐφαρμογὴ τοῦ ἀλγορίθμου τοῦ Εὐκλείδου δὲν δύναται νὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 0. Τοῦτο ἀποδεικνύεται π.χ. διὰ δύο εὐθ. τμήματα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι ἡ διαγώνιος α καὶ τὸ ἄλλο ἡ πλευρὰ β ἑνὸς τετραγώνου (Σχ. 4.2).



Σχ. 4.2

Διὰ δύο τοιαῦτα εὐθ. τμήματα δὲν ὑπάρχει ρητὸς ἀριθμὸς $\frac{\mu}{\nu}$ ὥστε τὸ γινόμενον $\frac{\mu}{\nu} \cdot \beta$ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα α. Ὁ λόγος κατὰ ταῦτα $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμός. Ὠνομάσθη (Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως»). **ἀσύμμετρος** ἀριθμός.

Ἐν σχέσει μὲ τὸν ἀσύμμετρον λόγον $\frac{\alpha}{\beta}$ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Ἂν δι' ἕνα ρητὸν ἀριθμὸν $\frac{\mu}{\nu}$ ἔχωμεν : $\frac{\mu}{\nu} \cdot \beta < \alpha$, τότε ὁ ρητὸς οὗτος ἀριθμὸς θὰ ὀνομασθῇ κατὰ προσέγγισιν καὶ **κατ' ἔλλειψιν τιμὴ** τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἂν δι' ἕνα ρητὸν ἀριθμὸν $\frac{\mu'}{\nu'}$ ἔχωμεν : $\frac{\mu'}{\nu'} \cdot \beta > \alpha$, τότε ὁ ρητὸς οὗτος ἀριθμὸς θα ὀνομασθῇ κατὰ προσέγγισιν καὶ **καθ' ὑπεροχὴν τιμὴ** τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$.

Θὰ σημειοῦμεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{\mu}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta} \text{ καὶ } \frac{\mu'}{\nu'} > \frac{\alpha}{\beta}$$

Κάθε τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ κατ' ἔλλειψιν εἶναι μικροτέρα κάθε τιμῆς αὐτοῦ καθ' ὑπεροχήν.

Πράγματι, ἂν $\frac{\mu}{\nu} \cdot \beta < \alpha$ καὶ $\frac{\mu'}{\nu'} \cdot \beta > \alpha$, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα:

$$\frac{\mu}{\nu} \cdot \beta < \frac{\mu'}{\nu'} \cdot \beta$$

καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν ἰσοδύναμον :

$$\frac{\mu}{\nu} < \frac{\mu'}{\nu'}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἕνα **διαμερισμὸν** τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ρητῶν εἰς δύο κλάσεις P καὶ P', ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς κατ' ἔλλειψιν τιμὰς τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἡ δευτέρα ἀπὸ τὰς καθ' ὑπεροχὴν τιμὰς αὐτοῦ.

Ὁ κατὰ τὰ ἀνωτέρω διαμερισμὸς ὀνομάζεται **τομὴ** εἰς τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν.

Γενικώτερον, ὀνομάζομεν **τομὴν** εἰς τὸ διατεταγμένον σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, κάθε διαμερισμὸν αὐτοῦ εἰς δύο κλάσεις **P** καὶ **P'** τοιαύτας ὥστε κάθε ρητὸς τῆς κλάσεως **P** νὰ εἶναι μικρότερος κάθε ρητοῦ τῆς κλάσεως P'.

Ἂν, κατόπιν τούτου, δοθέντων τῶν ἀσυμμέτρων εὐθ. τμημάτων α καὶ β, χωρίσωμεν τὸ β εἰς ν ἴσα εὐθ. τμήματα καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν :

$$\frac{1}{\nu} \cdot \beta, \quad \frac{2}{\nu} \cdot \beta, \quad \frac{3}{\nu} \cdot \beta, \ldots$$

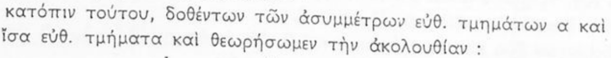
τῶν ἀκεραίων πολλαπλασίων τοῦ εὐθ. τμήματος $\frac{\beta}{\nu}$, θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους – Εὐδόξου (¹), ὅτι ἕνα ἐκ τῶν ἀνωτέρω πολλαπλασίων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ εὐθ. τμήματος α. Οὕτω, τὸ α κεῖται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν πολλαπλασίων τοῦ β. Ἤτοι, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\rho}{\nu} \cdot \beta < \alpha < \frac{\rho+1}{\nu} \cdot \beta, \text{ ἤτοι: } \frac{\rho}{\nu} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\rho+1}{\nu}$$

---

(1) Τὸ ἀξίωμα τοῦτο, διὰ τοῦ ὁποίου εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς **συνεχείας** εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἔχει ὡς κάτωθι :

«Ἔστωσαν ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ε ἕνα σημεῖον A_1 κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β



Σχ. 4.3

αὐτῆς. Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ε τὰ σημεῖα $A_2, A_3, A_4, \ldots, A\nu$, τοιαῦτα ὥστε : (α) Τὸ A_1 νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ A_2, τὸ A_2 μεταξὺ τῶν A_1 καὶ A_3, τὸ A_3 μεταξὺ τῶν A_2 καὶ A_4 κ.ο.κ. καὶ (β) Τὰ εὐθ. τμήματα $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_2A_4, \ldots, A_{\nu-1}A_\nu$ νὰ εἶναι ἴσα, ὑπάρχει σημεῖον Αν ὥστε τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν $A\nu{-}1$ καὶ Αν».

Ἂν θέσωμεν $AA_1 = \alpha$ καὶ $AB = \beta$ δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ ἀξίωμα τοῦτο ὡς ἑξῆς :

«Δοθέντων δύο εὐθ. τμημάτων α καὶ β, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς ν ὥστε $\nu \cdot \alpha > \beta$.

Οἱ ἀριθμητικοὶ λόγοι $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$ εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, αἱ κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν $\frac{1}{\nu}$ τιμαὶ τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀντιστοίχως.

Ἂν χωρίσωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα β εἰς ν' ἴσα εὐθ. τμήματα, ἔνθα $\nu' > \nu$, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως:

$$\frac{\rho'}{\nu'} \cdot \beta < \alpha < \frac{\rho'+1}{\nu'} \cdot \beta, \text{ ἤτοι : } \frac{\rho'}{\nu'} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\rho'+1}{\nu'}$$

Οἱ ἀριθμητικοὶ λόγοι $\frac{\rho'}{\nu'}$ καὶ $\frac{\rho'+1}{\nu'}$ εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, αἱ κατ' ἔλλειψιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν $\frac{1}{\nu'}$ τιμαὶ τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ κ.ο.κ.

Ἂν θεωρήσωμεν τὴν κλάσιν τῶν κατ' ἔλλειψιν καὶ τὴν κλάσιν τῶν καθ' ὑπεροχὴν τιμῶν τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχει τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ μεγαλυτέρα κάθε τιμῆς τῆς πρώτης κλάσεως, τῶν κατ' ἔλλειψιν τιμῶν αὐτοῦ, καὶ μικροτέρα κάθε τιμῆς τῆς δευτέρας κλάσεως, τῶν καθ' ὑπεροχὴν τιμῶν αὐτοῦ, ἡ τιμὴ αὕτη, εἶναι ἕνας ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον ὠνομάσαμεν **ἀσύμμετρον**. Οὗτος εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν ἀσυμμέτρων εὐθ. τμημάτων α καὶ β κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν.

Ὁ λόγος ἑνὸς εὐθ. τμήματος α πρὸς τὸ μοναδιαῖον τμῆμα ι, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ εἶναι ρητὸς ἢ ἀσύμμετρος ἀριθμός, καὶ μάλιστα θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἐφ' ὅσον τὸ εὐθ. τμῆμα α θεωρῆται προσημασμένον, ὀνομάζεται **ἀλγεβρικὴ τιμὴ** τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος α.

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι:

Ἂν δύο εὐθ. τμήματα εἶναι ἴσα, τότε καὶ αἱ ἀλγεβρικαὶ αὐτῶν τιμαί, αἱ εὑρισκόμεναι βάσει τοῦ αὐτοῦ μοναδιαίου τμήματος, εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων εὐθ. τμημάτων, ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν εὐθ. τούτων τμημάτων ὡς πρὸς τὸ ἀνωτέρω μοναδιαῖον τμῆμα.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ γινομένου εὐθ. τμήματος ἐπὶ ρητὸν ἢ ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ εὐθ. τμήματος.

Ὁ λόγος δύο εὐθ. τμημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀλγεβρικῶν των τιμῶν, ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα.

Σημειοῦμεν, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ὅτι τὸ γινόμενον α. β. γ τριῶν εὐθ. τμημάτων ἔχει ἔννοιαν, εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Ἐπιπέδου, ἐφ' ὅσον ἀναφέρεται εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν εὐθ. τμημάτων α, β, γ, ἢ ἐφ' ὅσον ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ὁρισθῇ ὡς ἐσωτερικὴ πρᾶξις ἐν αὐτῷ (Βλέπε παράγρ. 2 Πόρισμα 3, ὑποσημείωσις 1).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων εἰς τὸ γεωμετρικὸν γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον τῶν εὐθ. τμημάτων, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μίαν θεώρησιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐκλείδου, χωρὶς τὴν εἰσαγωγὴν ἀξιώματός τινος συνεχείας.

5. ΟΡΙΣΜΟΣ Ἂν α, β, α', β' εἶναι τέσσαρα οἱαδήποτε εὐθ. τμήματα τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι :

$$(1) \qquad \alpha \cdot \beta' = \beta \cdot \alpha'$$

ἤτοι ὥστε νὰ εἶναι ἴσα τὰ ἀντίστοιχα ὀρθογώνια σ (ι), θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ ἀνωτέρω εὐθ. τμήματα ὁρίζουν μίαν **ἀναλογίαν** καὶ θὰ σημειοῦμεν :

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$$

Ἡ ἰσότης (2) δύναται, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνας δεύτερος συμβολικὸς τρόπος γραφῆς τῆς ἰσότητος (1), ἢ ὡς ἐκφράζουσα τὸ γεωμετρικῶς ἀκριβὲς γεγονός, καθ' ὃ τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ α' διὰ τοῦ β', διότι ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω πηλίκων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ $\alpha \cdot \beta'$ ἢ τοῦ $\beta \cdot \alpha'$ μὲ τὸν αὐτὸν διαιρέτην $\beta \cdot \beta'$.

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

6. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἕνα τρίγωνον Α'Β'Γ' τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὀνομάζεται* **ὁμορρόπως ὅμοιον** *ἢ ἁπλῶς* **ὅμοιον** *πρὸς ἕνα ἄλλο ΑΒΓ ὁμόλογον τοῦ πρώτου* [1], *ὅταν αἱ γωνίαι τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ὁμολόγους αὐτῶν γωνίας τοῦ δευτέρου καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ πρώτου ἀνάλογοι πρὸς τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς τοῦ δευτέρου.*[2] Ἤτοι ὅταν εἶναι :

$$A' = A, \ B' = B, \ \Gamma' = \Gamma, \ \text{καὶ} \ \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Θὰ σημειοῦμεν, συμβολικῶς : $A'B'\Gamma' \sim AB\Gamma$.

Ἂν αἱ γωνίαι τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι αἱ ἀντίθετοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν γωνιῶν τοῦ δευτέρου καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἀνάλογοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν τοῦ δευτέρου, τότε τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' θὰ ὀνομάζεται **ἀντιρρόπως ὅμοιον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (6) ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε εἶναι ὅμοια.*
2. Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς ἑαυτό.

3. Ἂν ἕνα τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τότε καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α'Β'Γ'. Συμβολικῶς :

$$A'B'\Gamma' \sim AB\Gamma \Rightarrow AB\Gamma \sim A'B'\Gamma'.$$ [3]

4. Ἂν ἕκαστον ἐκ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον πρὸς ἕνα τρίτον τρίγωνον Α''Β''Γ'', τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Συμβολικῶς :

$$AB\Gamma \sim A''B''\Gamma'' \ \text{καὶ} \ A'B'\Gamma' \sim A''B''\Gamma'' \Rightarrow AB\Gamma \sim A'B'\Gamma'.$$

Ἐκ τῶν πορισμάτων 2, 3 καὶ 4 προκύπτει ὅτι ἡ ὁμοιότης εἰς τὰ τρίγωνα εἶναι μία ἰσοδυναμία. Πράγματι, ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀξιωμάτων προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σύ-

---

(1) Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ὀνομάζονται **ὁμόλογα**, ὅταν ἔχῃ ὁρισθῇ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν των (Βλέπε σχετικῶς : «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως Κεφ. III, 76).

(2) *Ὁμόλογοι πλευραὶ* δύο ὁμολόγων τριγώνων εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ὁμολόγων κορυφῶν.

Ὁμόλογοι διάμεσοι, διχοτόμοι κλπ. δύο ὁμολόγων τριγώνων εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ ὁμολόγων κορυφῶν τῶν τριγώνων τούτων.

(3) Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι **ὅμοια πρὸς ἄλληλα.**

ολον τῶν ὁμοίων τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες : ἀνακλαστική ἢ αὐτοπαθής, συμμετρική καὶ μεταβατική (1).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἕνα διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου εἰς κλάσεις (κλάσεις ὁμοιότητος), ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ λα τὰ τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὅμοια πρὸς δοθὲν ἐν αὐτῷ τρίγωνον ΑΒΓ.

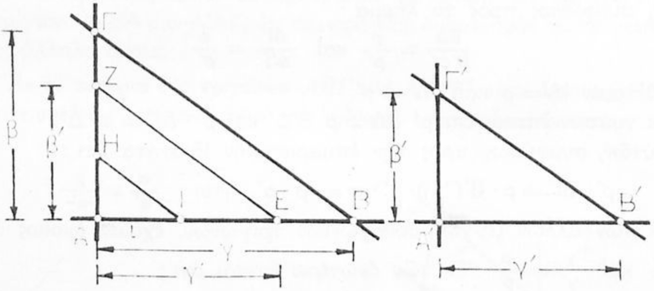
. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ γωνίαι δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἀντιστοίχως σαι τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.**

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν τριγώνων ἶναι ἀνάλογοι.

Ἀποδεικνύομεν, πρῶτον τὴν ἑξῆς βοηθητικὴν πρότασιν (λῆμμα) :

Ἂν δύο ὀρθογώνια, κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α΄, τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ χουν τὰς γωνίας αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας (ἐκτὸς τῆς Α = Α΄ ἰσχύῃ καὶ ἡ 3 = Β΄ ἢ ἡ Γ = Γ΄), **τότε θὰ ἔχουν τὰς ὁμολόγους αὐτῶν καθέτους πλευρὰς ιναλόγους.** Ἤτοι θὰ εἶναι καί: $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ λήμματος τούτου, θεωροῦμεν (Σχ. 7α) ἐπὶ τῆς



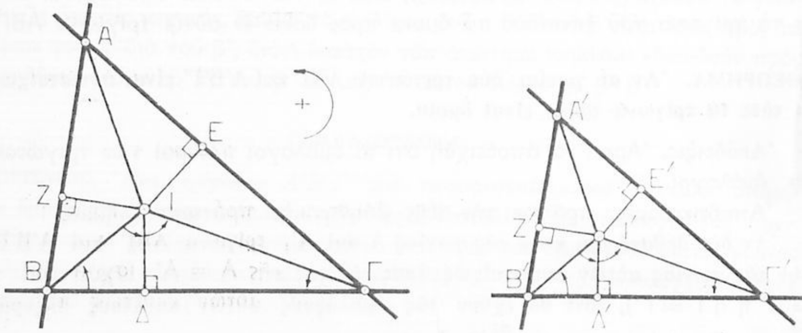
Σχ. 7α

ΑΒ, πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ Β, τὸ σημεῖον Ε ὥστε ΑΕ = γ΄ καὶ τὴν παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ (Ζ ἐπὶ τῆς ΓΑ). Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΕΖ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχομεν ὅτι ΑΖ = β΄. Ἂν ἐπὶ τῆς ΑΒ θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Ι ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΙ νὰ εἶναι τὸ μοναδιαῖον, καὶ τὴν διὰ τοῦ Ι παράλληλον ΙΗ πρὸς τὴν ΒΓ (Η ἐπὶ τῆς ΑΓ), θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (2) : ΑΓ = ΑΒ · ΑΗ καὶ ΑΖ = ΑΕ · ΑΗ, ἤτοι : β=ΑΗ · γ καὶ β΄ =ΑΗ · γ΄. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι :

$$\beta' \cdot \gamma = \gamma' \cdot \beta, \text{ ἤτοι ὅτι: } \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

(1) Ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος, ὡς ὡρίσθη, εἶναι, ὅπως καὶ ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος, μία **ἰσοδυναμία.**

Θεωροῦμεν ἤδη δύο τυχόντα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν ὁποίων
γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, τὰ κοινὰ σημεῖα Ι καὶ Ι' τῶν διχοτόμων τ
ἀντιστοίχως, καὶ τὰς προβολὰς Δ, Ε, Ζ, καὶ Δ', Ε', Ζ' τῶν Ι καὶ Ι' ἀντιστοίχ
ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' ἀντιστοίχως. (Σχ. 7β)



Σχ. 7β

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΙΒΔ, Ι'Β'Δ' καὶ ΙΔΓ, Ι'Δ'Γ' ἔχομεν, ἀν
στοίχως, συμφώνως πρὸς τὸ λῆμμα :

$$\frac{Β\Delta}{Β'\Delta'} = \frac{\rho}{\rho'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} = \frac{\rho}{\rho'}$$

Ἐθέσαμεν $Ι\Delta = \rho$ καὶ $Ι'\Delta' = \rho'$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\rho' \cdot Β\Delta = \rho . Β'\Delta'$ καὶ $\rho' \cdot \Delta\Gamma = \rho \cdot \Delta'\Gamma'$
καὶ ἐξ αὐτῶν, συμφώνως πρὸς τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα ὅτι :

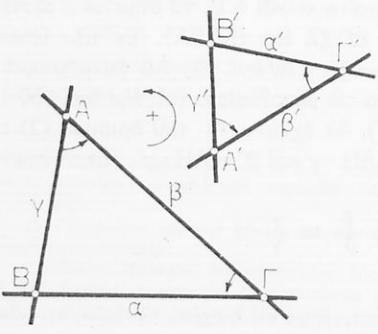
$$\rho' . Β\Gamma = \rho \cdot Β'\Gamma' \;\; ἢ \;\; \rho' \cdot \alpha = \rho \cdot \alpha', \;\; ἤτοι : \;\; \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\rho}{\rho'} .$$

Ἐκ τῶν ἄλλων ζευγῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ἔχομεν ὁμοίως ὅτι :
$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\rho}{\rho'}$ καὶ $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\rho}{\rho'}$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

ἤτοι ἡ ἀποδεικτέα πρότασις.

Ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\alpha'} \left(= \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}\right)$ τῶν ὁμ
λόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων τριγώνων Α
καὶ Α'Β'Γ' ὀνομάζεται **λόγος ὁμοιότη**
αὐτῶν.



Σχ. 7.1

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν αἱ γωνίαι δ
τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ εἶναι ἀντιστοίχ
ἀντίθετοι, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἀ
τιρρόπως ὅμοια.* (Σχ. 7.1)

Πράγματι, ἡ γενομένη (7) ἀπόδει
ἰσχύει καὶ ἐπὶ δύο ἀντιρρόπως ὁμοίων τρ
γώνων.

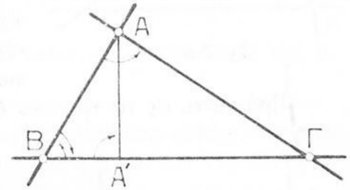
Αἱ κατωτέρω προτάσεις εἶναι ἐπίσης πορίσματα τῆς προτάσεως (7) :

2. Ἂν εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (ΑΒ = ΑΓ καὶ Α'Β' = 'Γ'), αἱ γωνίαι Α καὶ Α' ἢ αἱ γωνίαι Β καὶ Β' εἶναι ἴσαι, τότε τὰ τρίγωνα ιῦτα εἶναι ὅμοια. [1].

3. Ἂν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι δύο ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.[1]

Εὐνόητον, κατόπιν τοῦ πορίσματος (1), εἶναι ὅτι ἂν τῶν ἰσοσκελῶν (Πόισμα 2) ἢ τῶν ὀρθογωνίων (Πόρισμα 3) τριγώνων αἱ γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι, ὰ τρίγωνα εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια.

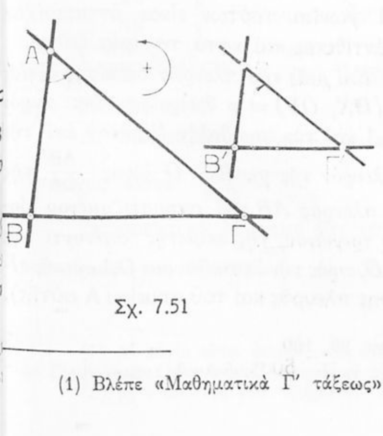
4. Ἂν εἶναι ΑΑ' τὸ ἐπὶ τὴν ἐπιτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ότε τὰ δύο τρίγωνα Α'ΒΑ καὶ Α'ΑΓ εἶναι μοια πρὸς ἄλληλα καὶ ἀντιρρόπως ὅμοια πρὸς ὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



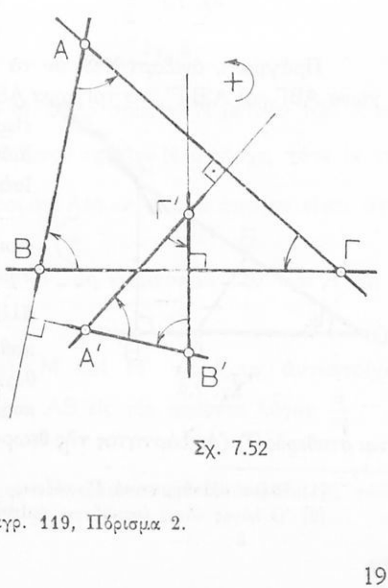
Σχ. 7.4

Πράγματι, ἐκ τῶν ἀντιθέτων ὀρθῶν γωῶν (Α'Β, Α'Α) καὶ (ΑΒ,ΑΓ) τῶν τριγώνων 'ΒΑ καὶ ΑΒΓ, καὶ τῶν ἀντιθέτων γωνιῶν ΒΑ, ΒΑ') καὶ (ΒΓ, ΒΑ) αὐτῶν, ἕπεται (7) τι ταῦτα εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια. Δι' ὅμοιον όγον εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Α'ΑΓ καὶ ΑΒΓ. Ἐξ ἄλου τὰ τρίγωνα Α'ΒΑ καὶ Α'ΑΓ, ὡς ἀντιρρόπως ὅμοια πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἶναι πρὸς ἄλληλα ὅμοια.

5. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι ἢ ἀντιστοίχως κάθετοι, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.



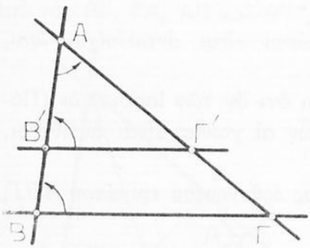
Σχ. 7.51



Σχ. 7.52

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» παραγρ. 119, Πόρισμα 2.

Πράγματι, αἱ γωνίαι δύο τριγώνων τῆς προτάσεως εἶναι ἀντιστοίχω ἴσαι. (1) Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ εἶναι (7) ὅμοια (Σχ. 7.51 καὶ 7.5



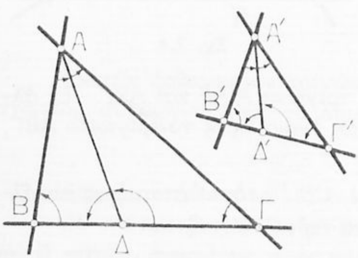
Σχ. 7.6

6. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ τρίγων ΑΒ′Γ′ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β′ καὶ Γ′ εἶναι κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστο χως μὲ τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, εἶν ὅμοια.

Πράγματι, αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων ΑΒ καὶ ΑΒ′Γ′ (Σχ. 7.6) εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι.

7. Ἂν ΑΔ καὶ Α′Δ′ εἶναι δύο ὁμόλογ διχοτόμοι δύο ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α′Β′Δ′, ὡς καὶ τὰ ΑΓ καὶ Α′Γ′Δ′, εἶναι ὅμοια.

Πράγματι, εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α′Β′Δ′ εἶναι ἴσαι αἱ γωνίαι Β καὶ ὡς καὶ αἱ (ΑΒ, ΑΔ) καὶ (Α′Β′, Α′Δ′), ὡ τὰ ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν (ΑΒ, ΑΓ) κα (Α′Β′, Α′Γ′), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι, ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως,εἶναι ὅμοια τὰ τρίγωνα ΑΒ καὶ Α′Β′Γ′.

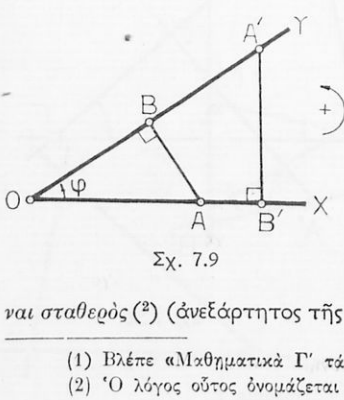


Σχ. 7.7

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι δύο οἱαιδή ποτε ὁμόλογοι διχοτόμοι δύο ὁμοίων τρι γώνων χωρίζουν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰ τρίγωνα ἀντιστοίχως ὅμοια.

8. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις (Πόρισμα 7 ἰσχύει καὶ διὰ δύο ὁμόλογα ὕψη τῶν ὁμοίω τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′.

Πράγματι, ἀνεξαρτήτως ἂν τὰ ὕψη π.χ. $ΑΗ_1$ καὶ $Α'Η'_1$ **χωρίζουν** τὰ τρί γωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′, τὰ τρίγωνα $ΑΒΗ_1$ καὶ $Α'Β'Η'_1$ ὡς καὶ τὰ $ΑΗ_1Γ$ καὶ $Α'Η_1'Γ$ εἶναι πάντοτε ὅμοια ἢ ἀντιρρόπως ὅμοια διότι αἱ γωνίαι τούτων εἶναι ἀντιστοίχω ἴσαι ἢ ἀντίθετοι καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη.



Σχ. 7.9

9. Ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν δοθείσης ὀξεία γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) = φ θεωροῦμεν ἕνα τυχὸ σημεῖον Α καὶ τὴν προβολὴν Β αὐτοῦ ἐπὶ τὴ ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας. Ὁ λόγος $\frac{AB}{OA}$ *τῆ καθέτου πλευρᾶς ΑΒ τοῦ σχηματιζομένου ὀρ θογωνίου τριγώνου, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆ κορυφῆς Ο, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΟΑ αὐτοῦ, εἶ ναι σταθερὸς* (2) (ἀνεξάρτητος τῆς θεωρουμένης πλευρᾶς καὶ τοῦ σημείου Α αὐτῆς)

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ′ τάξεως» παράγρ. 99, 100.

(2) Ὁ λόγος οὗτος ὀνομάζεται **ἡμίτονον** τῆς γωνίας φ. Συμβολικῶς : ημφ.

Σταθερὸς εἶναι ἐπίσης καὶ ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς ΟΒ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὡς καὶ ὁ λόγος τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ.[1]

Πράγματι, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' ἕπεται (7) ὅτι $\frac{AB}{OA} = \frac{AB'}{OA'}$ κλπ.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΔΟΘΕΝΤΑ ΛΟΓΟΝ.

8. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντων ἐπὶ εὐθείας ε δύο σημείων Α καὶ Β, ὑπάρχει σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, καὶ ἕνα μόνον, ὥστε :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \ (^2)$$

Ὑπάρχει, ἐπίσης, σημεῖον Μ' τῆς ε, μὴ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, ὥστε: $\frac{AM'}{M'B} = \frac{\mu}{\nu}$

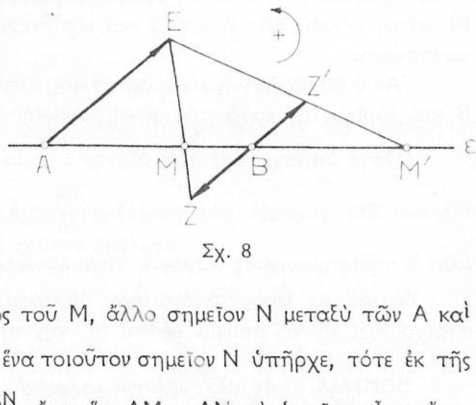
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν : δύο τυχούσας παραλλήλους εὐθείας διὰ τῶν Α καὶ Β, ἐπὶ τῆς πρώτης ἕνα σημεῖον Ε, ὥστε : $AE = \mu$ καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ', ἑκατέρωθεν τοῦ Β, ὥστε : $BZ = BZ' = \nu$. (Σχ 8).

Ἔστωσαν Μ καὶ Μ' τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε μὲ τὰς εὐθείας ΕΖ καὶ ΕΖ'. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΜΕ καὶ ΒΜΖ, προκύπτει ὅτι :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AE}{BZ} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$$

καὶ ἐκ τῶν τριγώνων ΑΜ'Ε καὶ ΒΜ'Ζ' ὅτι :

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{AE}{BZ'} \Rightarrow \frac{AM'}{M'B} = \frac{\mu}{\nu}$$



Σχ. 8

Ἐξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς τοῦ Μ, ἄλλο σημεῖον Ν μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ὥστε $\frac{AN}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$ · Πράγματι, ἂν ἕνα τοιοῦτον σημεῖον Ν ὑπῆρχε, τότε ἐκ τῆς $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$ θὰ εἴχομεν : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AB}$, ἤτοι ὅτι $AM = AN$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, ὅταν $M \equiv N$.

Δι' ὅμοιον λόγον ἕνα μόνον σημεῖον Μ', μὴ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, ὑπάρχει, ὥστε: $\frac{AM'}{M'B} = \frac{\mu}{\nu}$

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' χωρίζουν ἀντιστοίχως **ἐσωτερικῶς** καὶ **ἐξωτερικῶς** τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς τὸν **δοθέντα λόγον** $\frac{\mu}{\nu}$

(1) Αἱ λόγοι οὗτοι ὀνομάζονται ἀντιστοίχως : **συνημίτονον** καὶ **ἐφαπτομένη** τῆς γωνίας φ. Συμβολικῶς : **συν φ** καὶ **εφ φ**.
(2) μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

Ἂν ἀντὶ τῆς εὐθείας ε θεωρήσωμεν ἕνα ἄξονα $\vec{\xi}$ καὶ τὰ ἐκ τῆς θεωρήσεω τοῦ σημείου Μ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ προκύπτοντα εὐθ. τμήματα $\overline{AM}$ καὶ $\overline{MB}$ θεωρηθοῦ προσανατολισμένα (προσημασμένα), τότε :

Ἂν τὸ σημεῖον Μ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, τὰ εὐθ. τμήματα $\overline{AM}$ καὶ $\overline{M}$ εἶναι ὁμοίως, θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς, προσανατολισμένα καὶ ὁ προσημασμένο λόγος αὐτῶν θεωρεῖται θετικός.

Ἂν τὸ σημεῖον Μ δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β τὰ εὐθ. τμήματα $\overline{AM}$ κα $\overline{MB}$ εἶναι ἀντιθέτως προσημασμένα καὶ ὁ προσημασμένος λόγος αὐτῶν θεωρεῖτα ἀρνητικός.

Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας :

Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β ἐπὶ ἄξονος $\vec{\xi}$, ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτο σημεῖον Μ καὶ ἕνα μόνον, ὥστε ὁ προσημασμένος λόγος τῶν εὐθ. τμημάτων $\overline{AM}$ καὶ $\overline{MB}$, νὰ εἶναι ἴσος πρὸς δοθέντα προσημασμένον λόγον $\frac{\overline{\mu}}{\overline{\nu}}$ ($\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$ δοθέντα εὐθ τμήματα).

Πράγματι, ἂν ὁ δοθεὶς προσημασμένος λόγος εἶναι θετικός, τότε τὸ σημεῖο Μ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ εὑρίσκεται κατὰ τὴν προηγουμένην (Σχ. 8) κατασκευήν.

Ἂν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι ἀρνητικός, τότε τὸ Μ δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Α κα Β καὶ εὑρίσκεται κατὰ τὴν προηγουμένην (Σχ. 8) κατασκευήν.

Ὥστε ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ σημεῖον Μ, καὶ ἕνα μόνον, ὥστε :

$$(1) \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \overline{k} \ (^1)$$

ἔνθα ὁ προσημασμένος λόγος $\overline{k}$ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός (3)

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω οἱ προσημασμένοι λόγοι $\overline{k}$ καὶ $\overline{k}'$ οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῆς προτάσεως (8) εἶναι ἀντίθετοι [2].

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμολόγων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι παράλληλοι καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη, τότε αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφὰς αὐτῶν εἶναι συντρέχουσαι.*

Πράγματι, τὰ ἐν λόγῳ τρίγωνα εἶναι (7, Πόρισμα 5) ὅμοια.

Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′. Ἐπειδὴ αἱ ΒΓ καὶ Β′Γ′ εἶναι παράλληλοι τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΒ′Γ′ εἶνα ὅμοια. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι :

$$(1) \qquad \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{B'\Gamma'}}$$

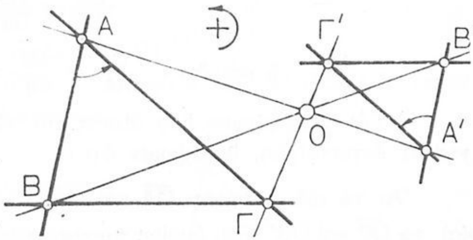
---

(1) Διὰ τῆς (1), σημειοῦται, συμβολικῶς, ἡ σχέσις : $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{k}}{\iota}$, ἔνθα $\frac{\overline{k}}{\iota} = \frac{\overline{\mu}}{\overline{\nu}}$

(2) Τὰ ἀντίστοιχα εὐθ. τμήματα $\overline{k}$ καὶ $\overline{k}'$ εἶναι ἀντίθετα.

῾Ο δεύτερος λόγος τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′.

Οὕτω, τὸ σημεῖον Ο χωρίζει τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΒ′ (ὡς καὶ τὸ ΓΓ′) εἰς λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.



Σχ. 8.1

῎Αν θεωρήσωμεν τὴν ΑΑ′ καὶ ὀνομάσωμεν Ο′ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὴν ΒΒ′, θὰ ἔχωμεν, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Ο′ΑΒ καὶ Ο′Α′Β′ ὅτι :

$$(2) \qquad \frac{\overline{O'B}}{\overline{O'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

ἤτοι ὅτι τὸ Ο′ χωρίζει τὸ τμῆμα ΒΒ′ εἰς λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

῞Ωστε τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ χωρίζουν τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΒ′ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. ᾽Εκ τούτου ἕπεται (8) ὅτι δὲν εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἤτοι ὅτι ἡ ΑΑ′ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ

῾Η κατωτέρω πρότασις εἶναι θεμελιώδης εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλόγων εὐθ. τμημάτων [1]

9. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνουσαι τὰς πλευρὰς ΟΧ καὶ ΟΥ μιᾶς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ὁρίζουν ἐπὶ τούτων ὁμόλογα [2] εὐθ. τμήματα ἀνάλογα.

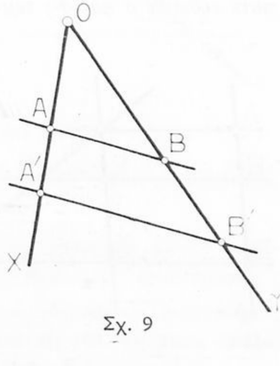
᾽Απόδειξις. ῾Η ἀποδεικτέα ἀναλογία :

$$(1) \qquad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

εἶναι πόρισμα τῆς προτάσεως (7). Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ′Β′ εἶναι (7) ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. ῾Η πρότασις ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ Α′ καὶ Β′ εἶναι σημεῖα τῶν ἡμιευθειῶν ΟΧ′ καὶ ΟΥ′, τῶν ἀντικειμένων τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως.



Σχ. 9

---

(1) Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ (640 - 546 π.Χ.)

(2) Δύο εὐθ. τμήματα ἐπὶ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ λέγονται **ὁμόλογα** ὅταν κεῖνται μεταξὺ τοῦ αὐτοῦ ζεύγους παραλλήλων εὐθειῶν, τεμνουσῶν τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ

2. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ὅτι :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

ἢ καὶ ὅτι : $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$ καὶ $\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$

3. Ἂν θεωρήσωμεν δύο ἄξονας ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ἐφ' ὧν αἱ πλευραὶ τῆ γωνίας ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν ὅτι :

Ἂν τὰ εὐθ. τμήματα $\overline{OA}$ καὶ $\overline{OA}'$ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμένα, τότ καὶ τὰ $\overline{OB}$ καὶ $\overline{OB}'$ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμένα. Ἂν τὰ $\overline{OA}$, $\overline{OA}'$ εἶναι ἀντι θέτως προσανατολισμένα τότε καὶ τὰ $\overline{OB}$, $\overline{OB}'$ εἶναι ἀντιθέτως προσανατολι σμένα, καὶ ἑπομένως οἱ λόγοι $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$ καὶ $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$ εἶναι ὁμοίως προσημασμένοι

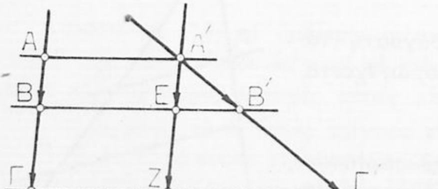
Μία πληρεστέρα, κατὰ συνέπειαν, διατύπωσις τοῦ θεωρήματος εἶναι ἡ ἑξῆς

«Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὁρίζουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας ὁμόλογα προσημασμένα εὐθ. τμήματα ἀνάλογα».

Ἤτοι : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν δὲν δυνάμεθα νὰ ἀντιμεταθέσωμεν τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους ὅρους, διότι τὰ ἐμφανιζόμενα εἰς τὴν ἀναλογίαν προσανατολισμέ να τμήματα $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ὡς καὶ τὰ $\overline{OA}'$, $\overline{OB}'$ δὲν εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως (συγγραμμικὰ) καὶ δὲν ὁρίζεται λόγος προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων (διανυσμάτων) ἐπὶ μὴ παραλλήλων φορέων.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τρεῖς ἢ περισσότεροι παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουν ἐπὶ δύο οἱωνδή- ποτε εὐθειῶν σ καὶ σ', τεμνουσῶν αὐτάς, ὁμόλογα εὐθ. τμήματα ἀνάλογα.*



Σχ. 9.1

Πράγματι, ἔστωσαν α, β, γ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ σ καὶ σ' αἱ τέμνουσαι αὐτὰς (Σχ. 9. 1).

Θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ A' παράλληλον σ_1 πρὸς τὴν σ (Σχ. 9.1) Ἔχομεν :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EZ}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{EZ}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἀποδει- κτέα ἀναλογία :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$$

10. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΧ καὶ ΟΥ μιᾶς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ)

θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα Α, Α′ καὶ Β, Β′ ἀντιστοίχως ὥστε:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$$

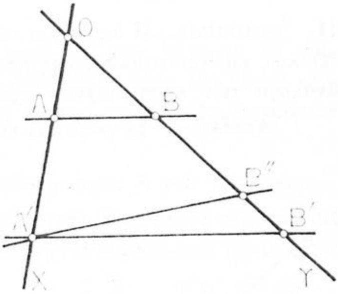
τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι παράλληλοι [1]

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 10) τὴν διὰ τοῦ Α′ παράλληλον Α′Β″ πρὸς τὴν ΑΒ (Β″ ἐπὶ τῆς ΟΥ). Ἐκ τῆς προτάσεως (7) ἔχομεν ὅτι: $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB''}}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

$\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB''}}$, καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι: $\overline{OB'} = \overline{OB''}$

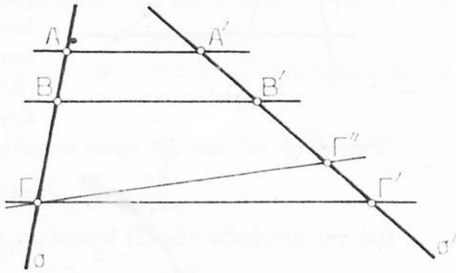
Τὰ σημεῖα ἑπομένως Β′ καὶ Β″ δὲν εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἤτοι ἡ Α′Β′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.



Σχ. 10

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν Α,Β,Γ καὶ Α′,Β′,Γ′ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο εὐθειῶν σ καὶ σ′ ὥστε* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$ *καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι παράλληλοι, τότε ἡ ΓΓ′ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς.*

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν (Σχ. 10.1) τὴν διὰ τοῦ Γ παράλληλον ΓΓ″ πρὸς τὴν ΑΑ′ (Γ″ ἐπὶ τῆς σ′) θὰ ἔχωμεν (9, Πόρισμα): $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma''}}$ ἐκ τῆς ὁποίας καὶ τῆς ὑποθέσεως ἕπεται ὅτι: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma''}}$, ἤτοι ὅτι $\overline{B'\Gamma'} = \overline{B'\Gamma''}$



Σχ. 10,1

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι Γ′ ≡ Γ″. Ὥστε ἡ ΓΓ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ΑΑ′ καὶ ΒΒ′.

2. Πᾶσα παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ χωρίζει τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ εἰς εὐθ. τμήματα ἀνάλογα. Ἀντιστρόφως:

Ἂν τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν μιᾶς εὐθείας ε μὲ τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως χωρίζουν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ αὐτοῦ εἰς εὐθ. τμήματα ἀνάλογα, τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

---

(1) Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος (9).

Ἤτοι, ἂν ἡ ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς AB καὶ ΓΔ θὰ εἶναι :

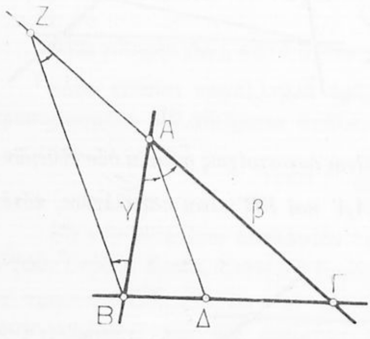
$$(1)\quad \frac{MA}{NB} = \frac{M\Delta}{N\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma},\ \text{καὶ ἀντιστρόφως :}$$

Ἂν ἰσχύῃ μία τῶν (1), τότε ἡ MN εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις το τραπεζίου.

ΔΙΧΟΤΟΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

11. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α (1) τριγώνου ΑΒΓ χωρίζουν ἐσω τερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς, τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευρὰν αὐτοῦ εἰς τμήματ ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πρὸς αὐτὰ πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Δ καὶ Δ′ τὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ σημεῖα τῆς διχοτό μου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου καὶ τῆ ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ. Αἱ ἀπο δεικτέαι ἀναλογίαι εἶναι αἱ κάτωθι :



Σχ. 11.1

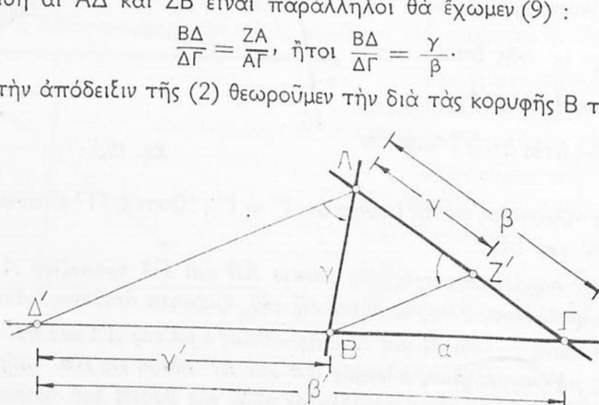
$$(1)\quad \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{καὶ}\quad (2)\quad \frac{B\Delta'}{\Delta'\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (1) θεωροῦ μεν τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Β τοῦ τριγώνου παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ. Ἔστω Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ (Σχ. 11.1). Αἱ γωνία (ΒΑ, ΒΖ) καὶ (ΖΒ, ΖΑ) εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς (ΑΒ, ΑΔ) καὶ (ΑΔ, ΑΓ), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως αἱ γωνίαι (ΒΑ, ΒΖ) καὶ (ΖΒ, ΖΑ) εἶναι ἴσαι καὶ λόγῳ τούτου, θὰ εἶναι καὶ ΑΖ = ΑΒ.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΔ καὶ ΖΒ εἶναι παράλληλοι θὰ ἔχωμεν (9) :

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{ZA}{A\Gamma},\ \text{ἤτοι}\ \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (2) θεωροῦμεν τὴν διὰ τὰς κορυφῆς Β τοῦ τριγώνου



Σχ. 11.2

(1) Διχοτόμος τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) καὶ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας (ΑΓ′, ΑΒ) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ταράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ'. Ἔστω Ζ' τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὴν ΑΓ Σχ. 11.2).

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν (ΒΖ', ΒΑ) καὶ (Ζ'Α, ΖΒ) ἕπεται ὅτι ΑΖ' = ΑΒ. Λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΔ' καὶ ΒΖ' ἔχομεν: $\frac{\text{Β}\Delta'}{\Delta'\Gamma} = \frac{\text{Ζ'Α}}{\text{Α}\Gamma}$, ἤτοι

$$\frac{\text{Β}\Delta'}{\Delta'\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

12. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς, κατὰ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν προσκειμένων πλευρῶν, εἶναι τὰ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ταύτης σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α τοῦ τριγώνου.** Ἤτοι:

Αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΔ' εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Δ_1 τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ θεωρουμένου τριγώνου. Ἐκ τοῦ προηγουμένου (11) θεωρήματος ἔχομεν ὅτι:

$$\frac{\text{Β}\Delta_1}{\Delta_1\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Ἀλλά, ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι : $\frac{\text{Β}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$. Ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν ἕπεται (8) ὅτι τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ_1 δὲν εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἤτοι $\Delta \equiv \Delta_1$ καὶ ἑπομένως ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ΑΔ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ΑΔ'.

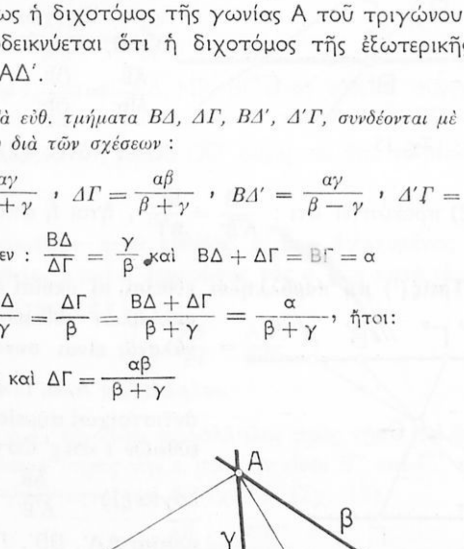
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὰ εὐθ. τμήματα ΒΔ, ΔΓ, ΒΔ', Δ'Γ, συνδέονται μὲ τὰς πλευρὰς α, β, γ (β > γ) τοῦ τριγώνου διὰ τῶν σχέσεων* :

$$B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}, \quad \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}, \quad B\Delta' = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}, \quad \Delta'\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$$

Πράγματι, ἔχομεν : $\frac{\text{Β}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ καὶ $\text{Β}\Delta + \Delta\Gamma = \text{Β}\Gamma = \alpha$

Ἑπομένως : $\frac{\text{Β}\Delta}{\gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\beta} = \frac{\text{Β}\Delta + \Delta\Gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, ἤτοι:

$\text{Β}\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ καὶ $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$



Σχ. 12.1

Ὁμοίως : $\frac{B\Delta'}{\Delta'\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ καὶ $\Delta'\Gamma - \Delta'B = B\Gamma = \alpha$

Ἐπομένως : $\frac{B\Delta'}{\gamma} = \frac{\Delta'\Gamma}{\beta} = \frac{\Delta'\Gamma - \Delta'B}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta - \gamma}$, ἤτοι

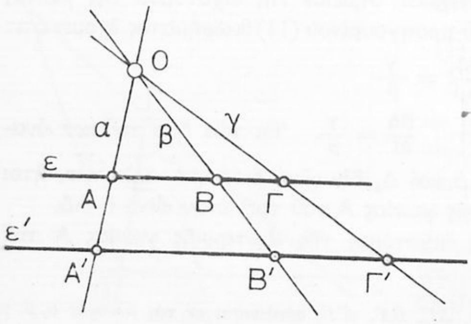
$$B\Delta' = \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma} \text{ καὶ } \Delta'\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}$$

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις ἰσχύουν, ὡς εἶναι εὐνόητον, καὶ διὰ τὰ τμήματα κατὰ τὰ ὁποῖα χωρίζονται αἱ πλευραὶ ΓΑ καὶ ΑΒ τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὰ ἐπὶ τούτων σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως.

ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

13. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τρεῖς (1) εὐθεῖαι συντρέχουσαι (2) ὁρίζουν ἐπὶ δύο οἱωνδήποτε παραλλήλων εὐθειῶν, εὐθ. τμήματα ἀνάλογα.



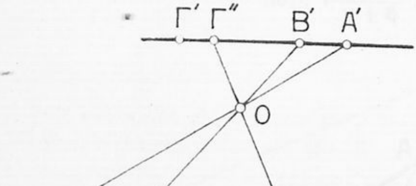
Σχ. 13

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς συντρέχουσαι εὐθεῖαι καὶ ε καὶ ε′ δύο τυχοῦσαι παράλληλοι τέμνουσαι τὰς α, β, γ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΒ, ΟΑ′Β′ ἔχομεν ὅτι : (1) $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$ καὶ ἐκ τῶν ΟΒΓ, ΟΒ′Γ′ ὅτι : (2) $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{B'\Gamma'}}$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι : $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{B'\Gamma'}}$, ἤτοι ἡ ἀποδεικτέα ἀναλογία.

14. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τρεῖς (1) μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν εὐθ. τμήματα ἀνάλογα, εἶναι συντρέχουσαι. Ἤτοι :



Σχ. 14

Ἂν Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο παραλλήλων εὐθειῶν ε καὶ ε′ ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀναλογία (1) : $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{B'\Gamma'}}$, τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

(1) Ἢ περισσότεραι

(2) Διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου

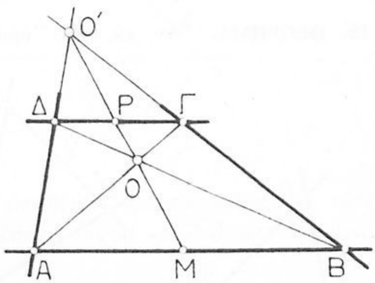
'Απόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημείων τῶν ΑΑ′ καὶ ΒΒ′, καὶ Γ′′ τὸ σημεῖον
τὰ τὸ ὁποῖον ἡ ΟΓ τέμνει τὴν ε′. Εἶναι (13) :

$$(2) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{B'\Gamma''}}$$

κ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι : $\overline{B'\Gamma'} = \overline{B'\Gamma''}$, ἤτοι ὅτι $\Gamma' \equiv \Gamma''$. Ὥστε ἡ ΓΓ′
ρχεται διὰ τοῦ Ο. Σημειοῦμεν ὅτι ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι παράλληλοι
τε καὶ ἡ ΓΓ′ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς (1).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν βάσεων ΑΒ καὶ
Δ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ
ινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων αὐτοῦ καὶ
ὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΔ
ὶ ΒΓ.*

Πράγματι, ἂν εἶναι Μ καὶ Ρ τὰ μέ-
ι τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως
ομεν : $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{\Gamma P}}{\overline{P\Delta}}$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται
4) ὅτι αἱ ΑΓ, ΜΡ, ΒΔ, εἶναι εὐθεῖαι
υντρέχουσαι, ἤτοι ὅτι ἡ ΜΡ διέρχεται
ὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν ΑΓ καὶ
Δ. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν : $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{\Delta P}}{\overline{P\Gamma}}$,



Σχ. 14.1

τῆς ὁποίας ἕπεται (14) ὅτι αἱ ΑΔ, ΜΡ, ΒΓ εἶναι εὐθεῖαι συντρέχουσαι, ἤτοι
τι ἡ ΜΡ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο′ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

Ἀπεδείχθη, οὕτως, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΟ′ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ Ρ τῶν
άσεων τοῦ τραπεζίου.

**5. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν τρεῖς εὐθείας α, β, γ διερχομένας διὰ τοῦ αὐτοῦ
ημείου Ο καὶ δύο εὐθείας ε καὶ ε′ τεμνούσας τὰς α, β, γ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ
αὶ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως. Ἂν :**

$$(1) \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

ότε αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ε′ εἶναι παράλληλοι.

'Απόδειξις. Ἂν ἡ ε′ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε καὶ θεωρήσωμεν τὴν
ιὰ τοῦ Α′ παράλληλον ε′′ πρὸς τὴν ε, τότε ἂν εἶναι Β′′ καὶ Γ′′ τὰ κοινὰ σημεῖα
ὑτῆς μὲ τὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν (Σχ. 15).

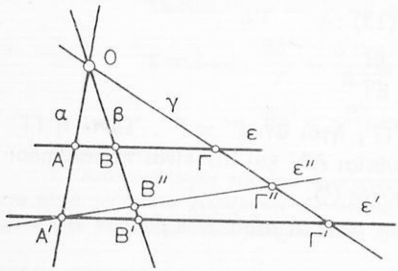
$$(2) \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B''}{B''\Gamma''}$$

(1) Τὸ σημεῖον Ο κεῖται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ε καὶ ε′ ἢ δὲν κεῖται μεταξὺ τούτων,
αθ' ὅσον τὰ ὁμόλογα εὐθ. τμήματα εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίρροπα ἢ ὁμόρροπα.

'Εξ αὐτῆς καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτ

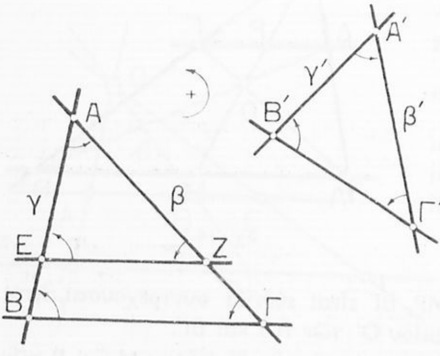
$$\frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{A'B''}{B''\Gamma''}.$$

'Αλλὰ ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕ-πεται, δυνάμει τοῦ θεωρήματος (9), ὅτ αἱ εὐθεῖαι Β'Β'' καὶ Γ'Γ'', ἤτοι αἱ β κα γ, εἶναι παράλληλοι. Τοῦτο ὅμως εἶνα ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν καθ' ἣν αἱ α, β, γ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.



Σχ. 15

16. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α' Β' Γ' αἱ πλευραὶ β, γ εἶναι ἀνάλογοι τῶν β', γ' καὶ αἱ περιεχόμεναι γωνίαι Α καὶ Α' εἶναι ἴσαι, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.



Σχ. 16

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ὥστε $AE = \gamma'$ καὶ $AZ = \beta'$. 'Εκ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ἀναλογίας ἕπεται (10), ὅτι $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{AZ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$, ἤτοι ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ λόγω τούτου ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ὅμοια.

'Αλλὰ τὰ τρίγωνα Α'Β'Γ' καὶ ΑΕΖ εἶναι ἴσα διότι $AE = A'B'$, $AZ = A'\Gamma'$ καὶ $A = A'$. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια.

Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, θὰ εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ ὁμόλογοι διάμεσοι δύο ὁμοίων τριγώνων χωρίζουν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰς τρίγωνα ἀντιστοίχως ὅμοια.*

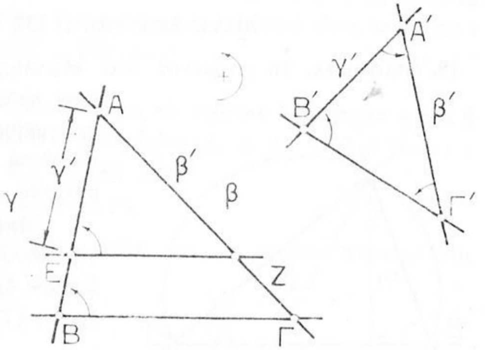
17. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμοίως προσανατολισμένων ὁμολόγων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἀνάλογοι καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως ὥστε : $AE = \gamma'$ καὶ $AZ = \beta'$. 'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι : $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\beta}{\beta'}$
Ἑπομένως : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{AZ}}$. 'Εξ αὐτῆς ἕπεται (10) ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς

τὴν ΒΓ καὶ λόγῳ τούτου ὅτι, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ὅτι :

$\frac{AB}{AE} = \frac{B\Gamma}{EZ}$, ἤτοι ὅτι : $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{EZ}$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ἀναλογίας : $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ ἕπεται ὅτι $EZ = \alpha'$. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα Α′Β′Γ′ καὶ ΑΕΖ εἶναι ἴσα, διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ἀπεδείχθη ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ θὰ εἶναι καὶ τὸ Α′Β′Γ′ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.



Σχ. 17

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε θὰ εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια. Ἡ γενομένη ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ δύο τρίγωνα ἀντιρρόπως ὅμοια.

18. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ Β′ Γ′ *αἱ πλευραὶ β, γ εἶναι ἀνάλογοι τῶν β′, γ′* (1) *καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ′ ἴσαι, τότε αἱ γωνίαι Β καὶ Β′ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.*

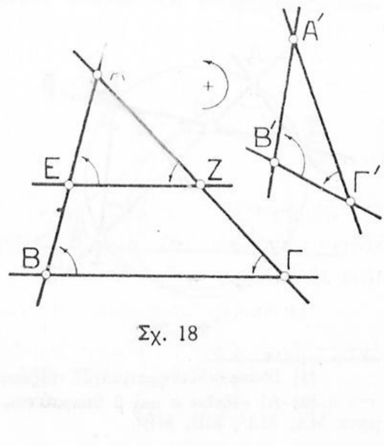
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΒ τὸ σημεῖον Ε ὥστε $AE = A'B'$ $(= \gamma')$ καὶ τὴν διὰ τοῦ Ε παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ (Ζ ἀπὶ τῆς ΑΓ). Θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{A\Gamma}{AZ} \quad \text{ἤτοι :} \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\beta}{AZ}.$$

Ἐκ τῆς ἀναλογίας αὐτῆς καὶ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν :

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\beta}{\beta'}, \text{ ἕπεται ὅτι } AZ = \beta'.$$

Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΕΖ καὶ Α′Β′Γ′ εἰς τὰ ὁποῖα αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ ΑΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς Α′Β′ $(= \gamma')$ καὶ Α′Γ′$(= \beta')$, ἐνῶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν πλευρῶν ΑΕ καὶ Α′Β′ γωνίαι Γ καὶ Γ′ αὐτῶν, ὡς ἴσαι πρὸς



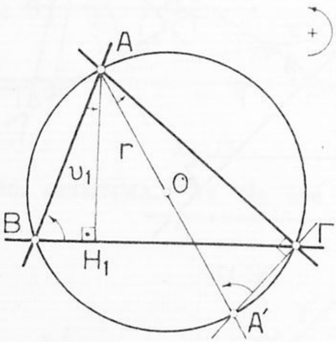
Σχ. 18

(1) $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$

τὴν γωνίαν Γ, ἕπεται (1) ὅτι αἱ γωνίαι Ε καὶ Β′ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ καὶ ἑπομένως ὅτι καὶ αἱ Β καὶ Β′ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

ΑΠΛΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ

19. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τρίτην πλευράν του.



Σχ. 19

᾿Απόδειξις. Ἔστω Α′ τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τῆς κορυφῆς Α εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ. Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων $ΑΒΗ_1$ καὶ ΑΑ′Γ ἔχομεν (7):

$$\frac{AH_1}{A\Gamma} = \frac{AB}{AA'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon_1}{\beta} = \frac{\gamma}{2r}, \quad \text{ἢ}$$

$$\beta \cdot \gamma = 2r \cdot \upsilon_1$$

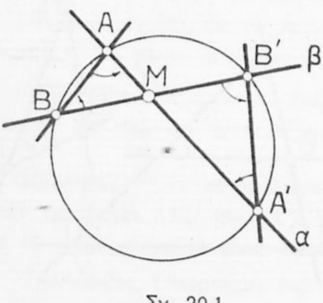
20. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν διὰ σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου κύκλου (Ο) θεωρήσωμεν δύο εὐθείας α καὶ β τεμνούσας τὸν (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα Α, Α′ καὶ Β, Β′ ἀντιστοίχως, τότε:

$$(1) \quad \overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB'} \ (2)$$

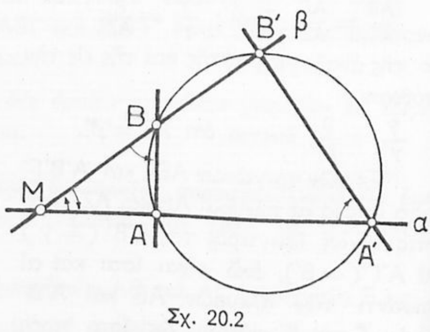
᾿Απόδειξις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΑΒ καὶ ΜΑ′Β′ (Σχ. 20.1) ἢ τῶν ἀντιρρόπως ὁμοίων τριγώνων ΜΑΒ καὶ ΜΒ′Α′ (Σχ. 20.2) ἔχομεν:

$$\frac{MA}{MB'} = \frac{MB}{MA'} \Rightarrow MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

Ἐπειδὴ τὰ $\overline{MA}$, $\overline{MA'}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καθ' ὅσον τὸ σημεῖον



Σχ. 20.1



Σχ. 20.2

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ′ τάξεως» Κεφ. IV παραγρ. (124)

(2) Αἱ εὐθεῖαι α καὶ β θεωροῦνται προσανατολισμέναι, ὡς καὶ τὰ ἐπὶ τούτων εὐθ. τμήματα ΜΑ, ΜΑ′, ΜΒ, ΜΒ′.

Μ εἶναι ἐξωτερικὸν (Σχ. 20.2) ἢ ἐσωτερικὸν (Σχ. 20.1) σημεῖον τοῦ (Ο) ἀντιστοίχως, ἀνεξαρτήτως τοῦ θεωρουμένου προσανατολισμοῦ τῆς α, τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ΜΒ,ΜΒ′, τὰ ἀνωτέρω προσημασμένα γινόμενα εἶναι ἴσα ἤτοι :

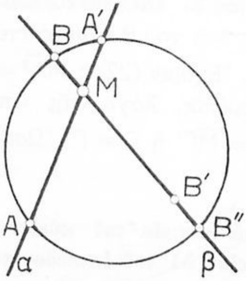
$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB'}$$

21. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἐπὶ δύο τεμνομένων κατὰ τὸ σημεῖον Μ εὐθειῶν α καὶ β θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα Α, Α′ καὶ Β, Β′ ἀντιστοίχως (Α, Α′ ἐπὶ τῆς α) ὥστε :

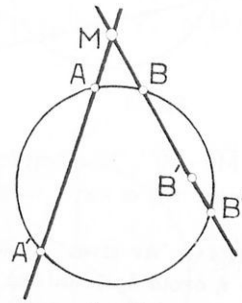
$$(1) \quad \overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB'}$$

τότε τὰ σημεῖα Α, Α′, Β, Β′ εἶναι συγκυκλικά [1].

Ἀπόδειξις. Ἔστω Β″ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, κοινὸν σημεῖον τῆς



Σχ. 21.1



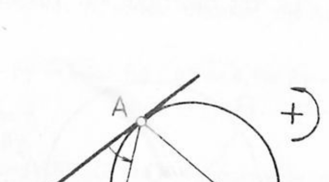
Σχ. 21.2

εὐθείας β μὲ τὸν κύκλον ΑΒΑ′ (Σχ. 21). Εἶναι (20) : $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB''}$. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι : $\overline{MB} \cdot \overline{MB'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB''}$, ἤτοι ὅτι : $\overline{MB'} = \overline{MB''}$ ἢ $B' \equiv B''$. Ὥστε ὁ κύκλος ΑΒΑ′ διέρχεται διὰ τοῦ Β′.

22. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἀπὸ σημείου Μ ἐξωτερικοῦ κύκλου (Ο) θεωρήσωμεν ἐφαπτομένην ΜΑ καὶ τέμνουσαν ΜΒΓ αὐτοῦ (Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὴν ἐφαπτομένην καὶ Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν τέμνουσαν) **τότε :**

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma}$$

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΓΜΑ εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια. Πράγματι (ΜΒ, ΜΑ) = − (ΜΑ, ΜΓ) καὶ (ΑΜ, ΑΒ) = − (ΓΜ, ΓΑ). Ἐκ τῶν τριγώνων τούτων ἔχομεν :



Σχ. 22

$$\frac{MA}{M\Gamma} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB \cdot M\Gamma$$

---

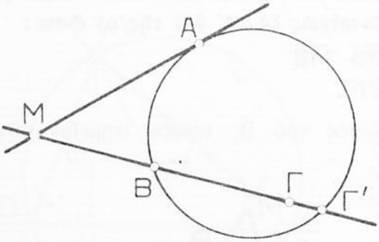
(3) Ἀντίστροφον τοῦ (20)

ἐπειδὴ τὰ $\overline{MB}$ καὶ $\overline{M\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα, δι' οἱονδήποτε προσανατολισμὸν τῶν εὐθειῶν ΜΑ καὶ ΜΒΓ, θὰ ἔχωμεν καὶ κατὰ τὸ πρόσημον : $\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma}$

23. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἐπὶ δύο τεμνομένων κατὰ τὸ σημεῖον Μ εὐθειῶν α καὶ β θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα : Α ἐπὶ τῆς α καὶ Β, Γ ἐπὶ τῆς β, ὥστε :

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma}$$

τότε ὁ κύκλος ΑΒΓ ἐφάπτεται τῆς α κατὰ τὸ σημεῖον Α(1).



Σχ. 23

Ἀπόδειξις. Ἔστω Γ' (Σχ. 23) τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τοῦ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς α εἰς τὸ Α. Ἔχομεν (22) : $\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma'}$ καὶ ἑπομένως, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως : $\overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma} = \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma'}$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι : $\overline{M\Gamma} = \overline{M\Gamma'}$ ἢ $\Gamma \equiv \Gamma'$. Ὥστε ὁ κύκλος ΑΒΓ ἐφάπτεται τῆς α κατὰ τὸ σημεῖον Α.

24. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἶναι Α καὶ Α' τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου Ο(r) μὲ τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ, θὰ εἶναι :

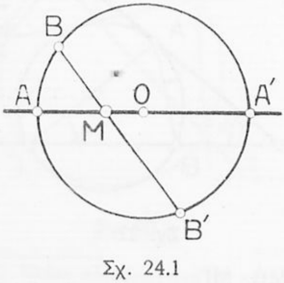
$$(1) \qquad \overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MO}^2 - r^2$$

Πράγματι, ἔχομεν (Σχ. 24)

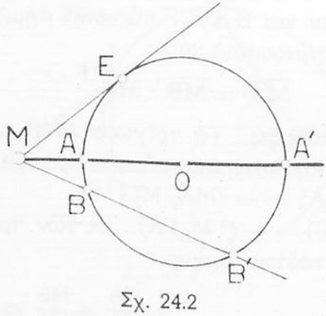
$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = (\overline{MO} + \overline{OA})(\overline{MO} + \overline{OA'}) = \overline{MO}^2 + \overline{MO} \cdot \overline{OA'} + \overline{MO} \cdot \overline{OA} + \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$$
$$= \overline{MO}^2 + \overline{MO}\,(\overline{OA'} + \overline{OA}) + \overline{OA} \cdot \overline{OA'}. \text{ Ὥστε :}$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MO}^2 - r^2, \text{ διότι } \overline{OA} = -\overline{AO}.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω καὶ τῆς $\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB'}$, ὅπου Β καὶ Β' τὰ κοινὰ



Σχ. 24.1



Σχ. 24.2

(1) Ἀντίστροφον τοῦ (22)

σημεῖα τοῦ (Ο) μὲ τυχοῦσαν διὰ τοῦ Μ εὐθεῖαν θὰ ἔχωμεν καί :

$$\overline{MB} \cdot \overline{MB'} = \overline{MO}^2 - r^2$$

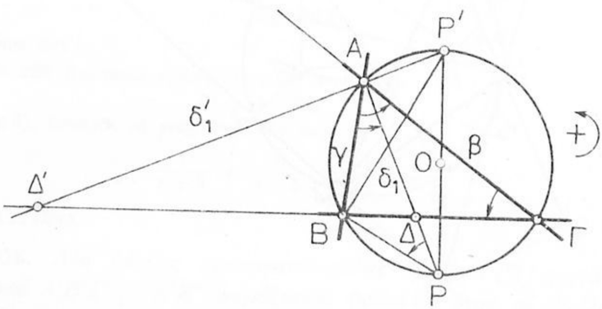
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι διὰ δοθέντα κύκλον $\underline{O(r)}$ καὶ δοθὲν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του, τὸ προσημασμένον γινόμενον $\overline{MA} \cdot \overline{MA'}$ εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τῆς διὰ τοῦ Μ τεμνούσης τὸν κύκλον Ο (r).

ΠΟΡΙΣΜΑ *Τὸ γινόμενον $\overline{MA} \cdot \overline{MA'}$ εἶναι θετικόν, ἀρνητικὸν ἢ μηδενικὸν* (1) *καθ' ὅσον τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἀντιστοιχως σημεῖον ἐξωτερικόν, ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου $O(r)$ ἢ σημεῖον αὐτοῦ.*

25. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἶναι Δ καὶ Δ' τὰ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α τριγώνου ΑΒΓ (Δ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ), τότε :

(1) $A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma - B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ καὶ (2) $A\Delta'^2 = B\Delta' \cdot \Delta'\Gamma - AB \cdot A\Gamma$

Ἀπόδειξις. Θέτομεν : $A\Delta = \delta$, $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Delta = \gamma'$, $\Delta\Gamma = \beta'$, $A\Delta' = \delta'$,



Σχ. 25

$B\Delta' = \gamma''$, $\Delta'\Gamma = \beta''$ Ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς ἀποδεικτέας σχέσεις εἶναι ἡ :

$$(1) \quad \delta_1^2 = \beta \cdot \gamma - \beta'\gamma'$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΡ (Ρ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον τῆς ΑΔ μὲ τὸν κύκλον ΑΒΓ) καὶ ΑΔΓ ἔχομεν :

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{PA}{\Gamma A} \Rightarrow \frac{\gamma}{\delta_1} = \frac{\delta_1 + P\Delta}{\beta} \Rightarrow \beta\gamma = \delta_1^2 + \delta_1 \cdot P\Delta \Rightarrow \beta\gamma = \delta_1^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Rightarrow \delta_1^2 = \beta\gamma - \beta'\gamma'$$

Ἡ δευτέρα ἀπὸ τὰς ἀποδεικτικὰς σχέσεις εἶναι ἡ :

$$(2) \quad \delta_1'^2 = \beta''\gamma'' - \beta\gamma.$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς, θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΡ' (Ρ' τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Ρ εἰς τὸν κύκλον Ο) καὶ ΑΔ'Γ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Πράγματι, εἶναι : (Ρ'Α, Ρ'Β) = (ΓΑ, ΓΒ) καὶ (ΑΒ, ΑΡ') = (ΑΔ', ΑΓ). Ἐκ τούτων ἔχομεν :

$$\frac{AB}{A\Delta'} = \frac{P'A}{\Gamma A} \Rightarrow \frac{\gamma}{\delta'_1} = \frac{\Delta'P' - \delta'_1}{\beta} \Rightarrow \beta\gamma = \delta'_1 \cdot \Delta P'_1 - \delta_1'^2 \Rightarrow \beta\gamma = \Delta'_1 A \cdot \Delta'_1 P' - \delta_1'^2 \Rightarrow$$

$$\beta\gamma = \Delta'B \cdot \Delta'\Gamma - \delta_1'^2 \quad \Rightarrow \delta_1'^2 = \beta''\gamma'' - \beta\gamma.$$

---

(1) $\overline{0} \cdot \overline{MA'} = \overline{0}(\iota)$.

Σημειοῦμεν ὅτι :

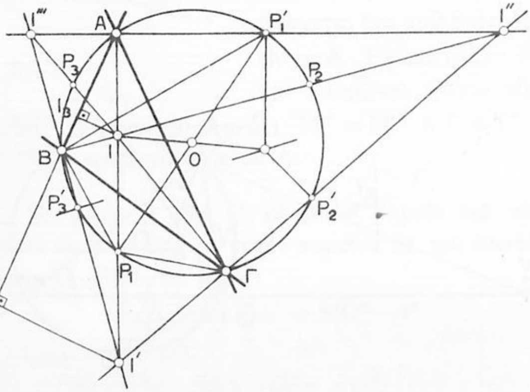
1. Ἐκ τῶν εἰς τὸ πόρισμα τοῦ θεωρήματος (12) ἀναφερομένων σχέσεων προκύπτει ὅτι αἱ διχοτόμοι δ_1 καὶ δ_1' τοῦ τριγώνου εὑρίσκονται ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα γ', β', γ'', β'' εἶναι ἀντιστοίχως τὰ εὐθ. τμήματα ΒΔ, ΔΓ, ΒΔ' Δ'Γ περὶ ὧν τὸ ἀνωτέρω πόρισμα.

2. Ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις ἰσχύουν, ὡς εἶναι εὐνόητον, διὰ τὰς διχοτόμους δ_2, δ_2' τῶν γωνιῶν Β τοῦ τριγώνου ὡς καὶ διὰ τὰς δ_3, δ'_3 τῶν γωνιῶν Γ αὐτοῦ.

26. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τῶν κέντρων Ι, Ι΄, Ι΄΄, Ι΄΄΄ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων αὐτοῦ συνδέονται πρὸς τὰς ἀκτίνας r, ρ, ρ₁, ρ₂, ρ₃ τῶν κύκλων τούτων ἀντιστοίχως διὰ τῶν σχέσεων

$$(1)\ OI^2 = r^2 - 2r\rho,\quad (2)\ OI'^2 = r^2 + 2r\rho_1,\quad (3)\ OI''^2 = r^2 + 2r\rho_2,\quad (4)\ OI'''^2 = r^2 + 2r\rho_3$$

Ἀπόδειξις (1). Ἔστω P_1 τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου (Ο), τοῦ κειμένου πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, καὶ P_1' τὸ ἀντιδια-



Σχ. 26.1

μετρικὸν αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον. Ἔστωσαν ἀκόμη I_3 καὶ I'_3 αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Ι καὶ Ι' ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων AI_3I καὶ P'_1BP_1 ἔχομεν :

$\dfrac{IA}{P_1P_1'} = \dfrac{II_3}{BP_1}$, ἤτοι $\dfrac{IA}{2r} = \dfrac{\rho}{BP_1}$ ἢ $2r\rho = IA \cdot BP_1 \cdot$ Ἀλλὰ $BP_1 = IP_1$ (1) Ἑπομένως : $2r\rho = IA \cdot IP_1$ ἢ (24) : $2r\rho = r^2 - OI^2$. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ἡ :

$$OI^2 = r^2 - 2r\rho$$

ἤτοι ἡ ἀποδεικτέα.

(2) Ἡ δευτέρα σχέσις ἀποδεικνύεται ὁμοίως διὰ τῆς θεωρήσεως τῶν ὁμοίων τριγώνων AI'_3I' καὶ P'_1BP_1. Πράγματι, ἐκ τούτων ἔχομεν (Σχ. 26)

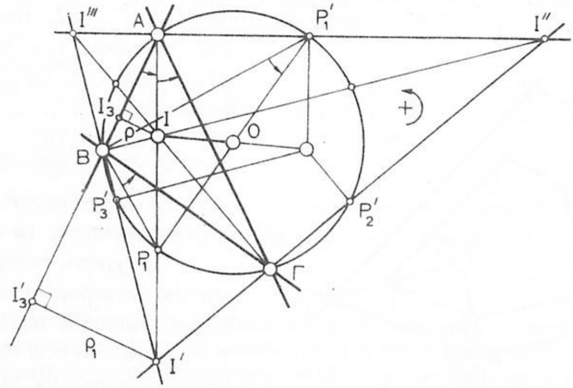
$\dfrac{I'A}{P_1P'_1} = \dfrac{I'I_3'}{BP_1}$, ἤτοι: $\dfrac{I'A}{2r} = \dfrac{\rho_1}{I'P_1}$ διότι $BP' = I'P_1$: Ὥστε :

$2r\rho_1 = I'A.\ I'P_1$ ἢ $2r\rho_1 = OI'^2 - r^2$ ἢ $OI'^2 = r^2 + 2r\rho_1$.

---

(1) Διότι αἱ γωνίαι (BI, BP_1) καὶ (IB, IP_1) εἶναι ἀντίθετοι, ἤτοι (BI, BP_1) = (IP_1, IB), ἀφοῦ ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ Βλέπε : «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» παραγρ. 277).

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ εἰς τὰ εὐθ. τμήματα OI'' κα OI''' ἀναφερόμεναι σχέσεις (3) καὶ (4).



Σχ. 26.2

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἡ ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσις (1) : $OI^2 = r^2 - 2r\rho$ ἤ :

$$\delta^2 = r^2 - 2r\rho$$

(ἐθέσαμεν $OI \equiv \delta$), δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\frac{1}{r+\delta} + \frac{1}{r-\delta} = \frac{1}{\rho} \quad [1]$$

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

27. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο ὁμοίως προσανατολισμένα ὁμόλογα* [2] *κυρτὰ πολύγωνα ΑΒΓ...ΕΖ καὶ Α'Β'Γ'...Ε'Ζ' ὀνομάζονται* **ὅμοια** [3] *ὅταν αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογοι.* Ἤτοι, ὅταν ἱκανοποιοῦνται αἱ συνθῆκαι :

$$(1) \quad A = A', \ B = B', \ldots, \ Z = Z' \text{ καὶ}$$

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \ldots = \frac{ZA}{Z'A'}.$$

Ἂν ἰσχύουν αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι (1) καὶ (2), ἀλλὰ τὰ πολύγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε θὰ ὀνομάζωνται *ἀντιρρόπως ὅμοια.*

---

(1) Εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῆς Ε' τάξεως θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν ἕνα τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον, τότε ἡ μεταξὺ τῶν ἀκτίνων r καὶ ρ τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου καὶ τῆς ἀποστάσεως δ τῶν κέντρων O καὶ I τῶν κύκλων τούτων, σχέσις, εἶναι ἡ :

$$\frac{1}{(r+\delta)^2} + \frac{1}{(r-\delta)^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

(2) Δύο πολύγωνα ΑΒΓ ΕΖ καὶ Α'Β'Γ'... Ε'Ζ' θὰ ὀνομάζωνται **ὁμόλογα**, ὅταν ἔχῃ ὁρισθῇ μιὰ ἀμφιμονοσήματος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν των. Βάσει αὐτῆς αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων πολυγώνων ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἀλλήλας (Εἰς τὴν κορυφὴν Α τοῦ ἑνὸς πολυγώνου ἀντιστοιχεῖ ἡ Α' τοῦ ἄλλου καὶ εἰς τὴν Α' τοῦ δευτέρου ἡ Α τοῦ πρώτου)

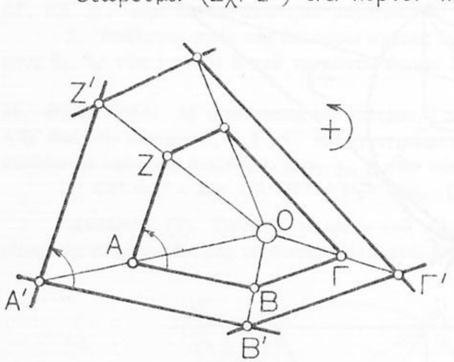
(3) Συμβολικῶς : ΑΒΓ... ΕΖ ~ Α'Β'Γ'...Ε'Ζ'

Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν ὀνομάζεται καὶ **λόγος ὁμοιότητος** τῶν ὁμοίων ἢ ἀντιρρόπως ὁμοίων πολυγώνων.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὕπαρξιν τῶν ὁμοίων πολυγώνων σημειοῦμεν :

Θεωροῦμεν (Σχ. 27) ἕνα κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓ...ΕΖ, ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου του καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,..., ΟΖ, τὰ σημεῖα Α', Β', Γ',..., Ε',Ζ' ὥστε :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O\Gamma'}}{\overline{O\Gamma}} = \ldots = \frac{\overline{OZ'}}{\overline{OZ}}$$



Σχ. 27

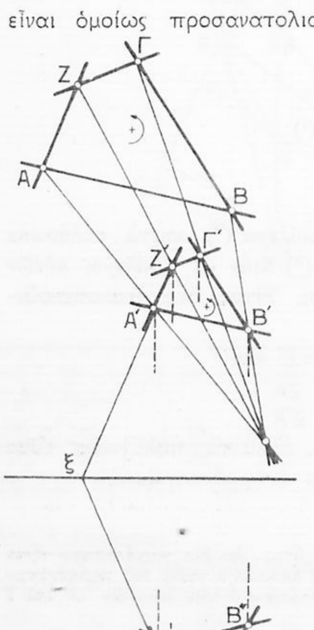
Τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'...Ε'Ζ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ... ΕΖ.

Πράγματι, ἐκτὸς τῆς συνθήκης τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸν προσανατολισμὸν τῶν πολυγώνων τούτων, ἔχομεν ὅτι δύο τυχοῦσαι ὁμόλογοι γωνίαι, ὡς αἱ (ΑΒ, ΑΖ) καὶ (Α'Β', Α'Ζ') εἶναι ἴσαι, ἀφοῦ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι καὶ αἱ πλευραί των εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι. Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἔχομεν :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB}{OB'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{O\Gamma}{O\Gamma'} = \ldots = \frac{OZ}{OZ'} = \frac{ZA}{Z'A'}$$

ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ὁμολόγων τριγώνων : ΟΑΒ, ΟΑ'Β', τῶν ΟΒΓ, ΟΒ'Γ',..., καὶ τῶν ΟΖΑ, ΟΖ'Α', τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἔχομεν :



Σχ. 27.2

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Τὸ πολύγωνον ΑΒΓ...ΕΖ καὶ τὸ ὁμόλογον Α''Β''Γ''... Ε''Ζ'' τοῦ ὁμοίου πρὸς αὐτὸ πολυγώνου Α'Β'Γ'...Ε'Ζ', εἰς μίαν μεταφορὰν ἢ στροφὴν ἢ συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον, εἶναι πολύγωνα ὅμοια.*

Πράγματι, τὰ πολύγωνα Α'Β'Γ'...Ε'Ζ' καὶ Α''Β''Γ''...Ε''Ζ'' εἶνα ἴσα.(1)

2. Τὸ πολύγωνον ΑΒΓ... ΕΖ καὶ τὸ συμμετρικὸν Α''Β''Γ''...Ε''Ζ'' τοῦ ὁμοίου πρὸς αὐτὸ πολυγώνου Α'Β'Γ'...Ε'Ζ', ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ, εἶναι πολύγωνα ἀντιρρόπως ὅμοια.

Πράγματι, τὰ πολύγωνα Α'Β'Γ'... Ε'Ζ' καὶ Α''Β''Γ''... Ε''Ζ'' (Σχ. 27.2) εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα. (1)

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» : Κεφ. VI παράγρ. 224.

3. Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ ὁμολόγους κορυφὰς δύο ὁμοίων ἢ ἀντιρρόπως ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια ἢ ἀντιρρόπως ὅμοια.

4. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων ἢ ἀντιρρόπως ὁμοίων πολυγώνων $ΑΒΓ\ldots ΕΖ$ καὶ $Α'Β'Γ'\ldots Ε'Ζ'$ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πράγματι, εἶναι :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \ldots = \frac{ZA}{Z'A} = \frac{AB + B\Gamma + \ldots + ZA}{A'B' + B'\Gamma' + \ldots + Z'A'} = \frac{2\tau}{2\tau'}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Αἱ κατωτέρω προτάσεις γεωμ. τόπων, διατυπούμεναι ὡς προβλήματα, ἀνταποκρίνονται εἰς θεμελιώδεις συνθήκας εἰς τὰς ὁποίας εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς ἀναλογίας :

28. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε δοθείσης διευθύνσεως (Δ) καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης:

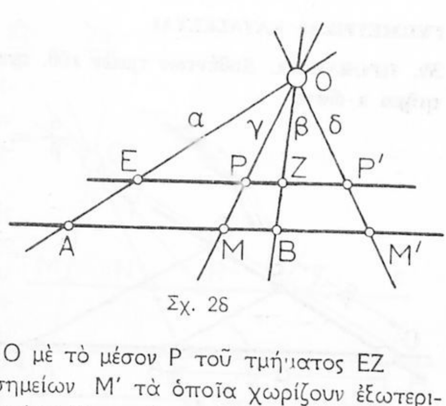
$$(1) \qquad \frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ καὶ ν δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα.

Λύσις. Ἔστω Ρ ἕνα σημεῖον τοῦ συνόλου ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΕΖ τῆς δοθείσης διευθύνσεως, κείμενον μεταξὺ τῶν Ε καὶ Ζ (Ε καὶ Ζ ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως) καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ, θεωρούμενον ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας ε τῆς δοθείσης διευθύνσεως, κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Ἐκ τῶν :

$$\frac{EP}{PZ} = \frac{\mu}{\nu} \text{ καὶ } \frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \text{ ἕπεται ὅτι: } \frac{EP}{PZ} = \frac{AM}{MB}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (14), ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΜΡ, ΒΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΡ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν α καὶ β ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς, ἂν αὗται εἶναι παράλληλοι. Ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τῆς γνωστῆς εὐθείας $OP \equiv \delta$. Ἐξ ἄλλου, κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΟΡ ἱκανοποιεῖ (13) τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (1).



Σχ. 28

Σημειοῦμεν ὅτι :

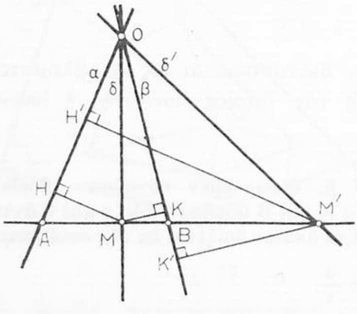
1. Ἂν $\mu = \nu$, ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ Ο μὲ τὸ μέσον Ρ τοῦ τμήματος ΕΖ

2. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ′ τὰ ὁποῖα χωρίζουν ἐξωτερικῶς τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ κατὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον εἶναι μία δευτέρα διὰ τοῦ Ο εὐθεῖα δ′ (Σχ 28).

29. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ εὑρε θῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης

$$(1) \quad \frac{MH}{MK} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα ΜΗ καὶ ΜΚ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως καὶ μ καὶ ν δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα.



Σχ. 29

Λύσις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖο τῶν α καὶ β. Θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ Μ παράλληλον ε πρὸς τὴν μίαν τῶν διχο τόμων τῶν γωνιῶν τῶν α καὶ β καὶ ἔστω σαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε μ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως. Τὸ τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι (ΑΒ, ΑΟ)= = (ΒΟ, ΒΑ). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνω ΑΜΗ καὶ ΜΒΚ ἕπεται ὅτι :

$$(2) \quad \frac{MH}{MK} = \frac{MA}{MB} \left(= \frac{\mu}{\nu} \right)$$

Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι ἡ ΟΜ εἶνα γνωστὴ εὐθεῖα, διότι ἡ ε εἶναι εὐθεῖα γνωστῆς διευθύνσεως (προηγούμενος γεωμ. τόπος). Ὁ γεωμ. τόπος ἀποτε λεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας δ καὶ δ′.

Σημειοῦμεν ὅτι :

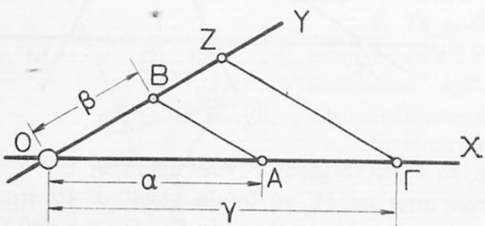
Ἂν αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τότε καὶ αἱ δ καὶ δ′ εἶναι παράλληλο πρὸς αὐτάς.

Αἱ εὐθεῖαι δ καὶ δ′ δύνανται νὰ ὀνομάζωνται καὶ **εὐθεῖαι τῶν ἀναλόγω ἀποστάσεων.**

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

30. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθέντων τριῶν εὐθ. τμημάτων α, β, γ νὰ κατασκευασθῇ εὐθ τμῆμα x ὥστε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$



Σχ. 30

Λύσις. Ἐπὶ τῶν πλευρῶ ΟΧ καὶ ΟΥ μιᾶς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ἀντιστοίχως ὁρίζοντα τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὥστ ΟΑ = α καὶ ΟΒ = β, καὶ ἐπ τῆς πλευρᾶς ΟΧ, καὶ πρὸ τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁ ποῖον δὲν κεῖται τὸ Ο ἢ τ ἀντίθετον αὐτοῦ, τὸ σημεῖο Γ ὥστε ΑΓ = γ. Ἔστω Ζ τ κοινὸν σημεῖον τῆς ΟΥ μὲ τὴν διὰ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΖ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Πράγματι, εἶναι (9) :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{A\Gamma}{BZ}, \text{ ἤτοι : } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{BZ}$$

Τὸ εὑρεθὲν εὐθ. τμῆμα ΒΖ ($= x$) ὀνομάζεται **τετάρτη ἀνάλογος** τῶν εὐθ. τμημάτων α, β, γ κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν.

Σημειοῦμεν ὅτι :

(1) Ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τετάρτην ἀνάλογον α, γ, β.

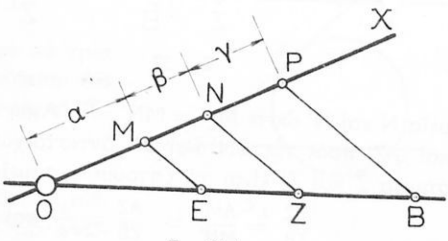
Πράγματι, αἱ ἀναλογίαι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{x}$ εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot x$

2. Ἕνας ἄλλος τρόπος κατασκευῆς τοῦ εὐθ. τμήματος x βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα (20).

31. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ χωρισθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα εἰς εὐθ. τμήματα ἀνάλογα δοθέντων εὐθ. τμημάτων (1).

Λύσις. Ἔστω ΑΒ τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ α, β, γ τὰ εὐθ. τμήματα εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ὁποίων πρέπει νὰ χωρισθῇ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

Ἐπὶ τυχούσης ἀπὸ τοῦ Α ἡμιευθείας ΑΧ, μὴ περιεχούσης τὸ Β, ὁρίζονται (Σχ 31.1) τὰ διαδοχικὰ εὐθ. τμήματα ΑΜ, ΜΝ, ΝΡ, ὥστε : $AM = \alpha$, $MN = \beta$, $NP = \gamma$ καὶ κατασκευάζονται αἱ διὰ τῶν Μ καὶ Ν παράλληλοι ΜΕ καὶ ΝΖ πρὸς τὴν ΡΒ (Ε καὶ Ζ ἐπὶ τῆς ΑΒ). Εἶναι (9, Πόρισμα) :

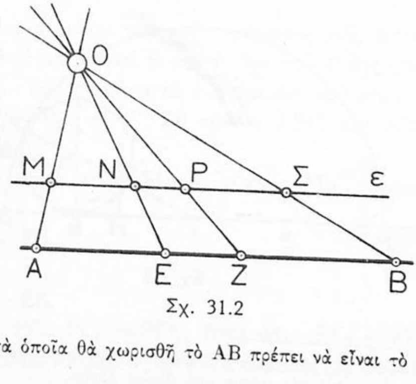


Σχ. 31.1

$$\frac{AE}{\alpha} = \frac{EZ}{\beta} = \frac{ZB}{\gamma}$$

Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἰσχύει, ὡς εἶναι εὐνόητον, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ δοθέντα εὐθ. τμήματα εἶναι ὁσαδήποτε.

Ἕνας δεύτερος τρόπος κατασκευῆς βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα (13) τῆς ...έσμης : Ἐπὶ εὐθείας ε παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ ὁρίζονται τὰ σημεῖα Μ, Ν ... Σ ὥστε : $MN = \alpha$, $NP = \beta$, $P\Sigma = \gamma$ (Σχ. 31.2). Εὑρίσκομεν τὸ κοινὸν σημεῖον ... τῶν εὐθειῶν ΑΜ καὶ ΒΣ. Αἱ ΟΝ καὶ



Σχ. 31.2

(1) Τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθ. τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα θὰ χωρισθῇ τὸ ΑΒ πρέπει νὰ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

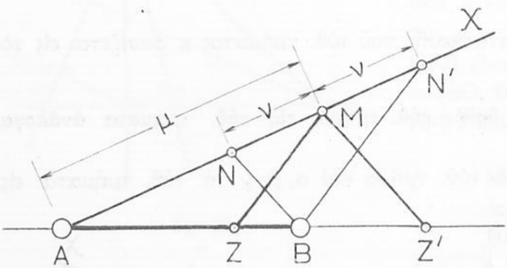
ΟΡ τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα Ε καὶ Ζ. Πράγματι ἔχομεν (13)

$$\frac{AE}{\alpha} = \frac{EZ}{\beta} = \frac{ZB}{\gamma}$$

Τὰ εὑρεθέντα σημεῖα εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς θεωρουμένης παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ.

32. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα χωρίζουν δοθ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ

Λύσις. Ἕνας τρόπος κατασκευῆς εἶναι ὁ ἀνταποκρινόμενος πρὸς τὸ σχ τικὸν (8) θεώρημα ὑπάρξεω Ἕνας δεύτερος τρόπος ἐπ λύσεως τοῦ προβλήματ τούτου, βασιζόμενος ἐπίσ εἰς τὰς προτάσεις ἐπὶ τ ὁμοιότητος τῶν τριγώνα (Θεώρημα Θαλοῦ), εἶναι κατωτέρω :

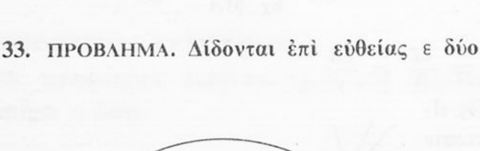


Σχ. 32

Ἐπὶ τυχούσης ἀπὸ τ Α ἡμιευθείας ΑΧ ὁρίζοντα τὸ σημεῖον Μ ὥστε ΑΜ = καὶ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τὰ σ μεῖα Ν καὶ Ν′ ὥστε ΜΝ = ΜΝ′ = ν Ἄγονται αἱ διὰ τοῦ Μ παράλληλοι Μ καὶ ΜΖ′ πρὸς τὰς ΒΝ′ καὶ ΒΝ ἀντιστοίχως (Ζ καὶ Ζ′ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ). σημεῖα Ζ καὶ Ζ′ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα. Πράγματι, ἔχομεν :

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AM}{MN'} \Rightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{\mu}{\nu} \text{ καὶ } \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{\mu}{\nu}$$

33. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σ μεῖον Μ τῆς εὐθείας ε, ὥστ $MA^2 = MB \cdot AB$. (1)



Σχ. 33

Λύσις. Ἐπὶ τῆς καθέτου ἐ τὴν ε κατὰ τὸ σημεῖον Β λα βάνεται τὸ σημεῖον Ο ὥστε ΒΟ= καὶ κατασκευάζεται ὁ κύκλος κε τρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΒ, ὁ ὁποῖο ἀφοῦ ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τ ε, ἐφάπτεται τῆς ε κατὰ τὸ σημεῖ Β (Σχ. 33). Ἔστωσαν Ζ καὶ Ζ′ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΟ

(1) Λέγομεν ὅτι ἑκάστη τῶν δύο λύσεων Μ καὶ Μ′ τοῦ προβλήματος χωρίζει τὸ ε τμῆμα ΑΒ εἰς *μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

τὸν ἀνωτέρω κύκλον καὶ Μ καὶ Μ' τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων Α (ΑΖ) καὶ Α (ΑΖ') μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. 'Εκ τούτων τὸ Μ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ τὸ Μ' πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Β. Τὰ σημεῖα ταῦτα Μ καὶ Μ' εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἔχομεν :

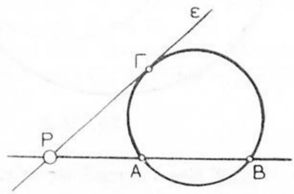
$$(1)\quad AB^2 = AZ\cdot AZ' \Rightarrow AB^2 = AM\,(AM + AB) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB^2 = AM^2 + AM\cdot AB \Rightarrow MA^2 = AB^2 - MA\cdot AB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow MA^2 = AB\,(AB - MA) \Rightarrow MA^2 = AB\cdot MB.$$

$$(2)\quad AB^2 = AM\cdot AM' \Rightarrow AB^2 = AM'\cdot AZ \Rightarrow AB^2 = AM'\,(AZ' - ZZ') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB^2 = AM'\,(AM' - AB) \Rightarrow AB^2 = AM'^2 - AM'\cdot AB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AM'^2 = AB^2 + AM'\cdot AB \Rightarrow AM'^2 = AB\,(AB + AM') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AM'^2 = AB\cdot BM' \Rightarrow M'A^2 = M'B\cdot AB.$$

34. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας.

Λύσις. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ ε ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. (Σχ. 34.1). Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ κύκλος (Ω) εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος καὶ ἔστω Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτοῦ μὲ τὴν ε.

Ὁ κύκλος οὗτος ὁρίζεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ρ αὐτῆς μὲ τὴν ε. Ἔχομεν :



Σχ. 34.1

$$(1)\quad PA\cdot PB = P\Gamma^2$$

'Εκ τῆς ἀνωτέρω (1) ἕπεται ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΡΓ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθ. τμημάτων ΡΑ καὶ ΡΒ καὶ ἑπομένως ὅτι κατασκευάζεται βάσει τούτων.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις :

Κατασκευάζεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ εὑρίσκεται τὸ κοινὸν σημεῖον Ρ αὐτῆς καὶ τῆς ε.

Ἂν τὸ σημεῖον Ρ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, κατασκευάζεται τυχὼν κύκλος διερχόμενος ἀπὸ τὰ Α καὶ Β καὶ ἡ διὰ τοῦ Ρ ἐφαπτομένη ΡΓ' αὐτοῦ (Γ' τὸ σημεῖον ἐπαφῆς). Εὑρίσκονται τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ρ σημεῖα Γ_1 καὶ Γ_2 διὰ τὰ ὁποῖα $P\Gamma_1 = P\Gamma_2 = P\Gamma'$. Οἱ κύκλοι $AB\Gamma_1$ καὶ $AB\Gamma_2$ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος (Σχ. 34.2).

Πράγματι, ἔστω Γ_1' τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ὁ κύκλος $AB\Gamma_1$ ἐπανατέμνει τὴν εὐθεῖαν ε. Ἔχομεν :

$$P\Gamma_1\cdot P\Gamma_1' = PA\cdot PB.$$

'Εκ κατασκευῆς, ἔχομεν ὅτι :

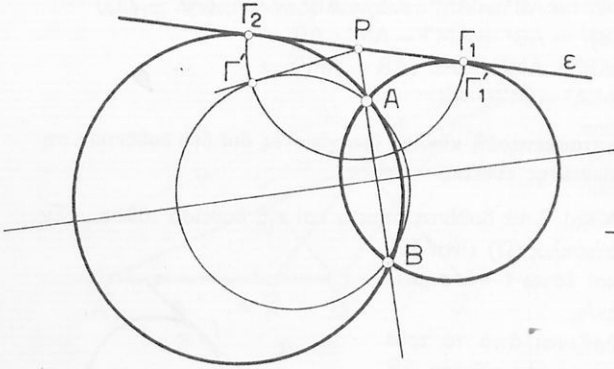
$$P\Gamma_1{}^2 = PA\cdot PB$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι : $P\Gamma_1\cdot P\Gamma_1' = P\Gamma^2{}_1$, ἤτοι ὅτι: $P\Gamma_1' = P\Gamma_1$, ἐνῷ τὰ σημεῖα Γ_1 καὶ Γ_1' κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ρ. 'Επομένως τὰ σημεῖα

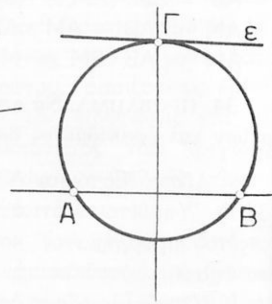
Γ_1' καὶ Γ_1 ταυτίζονται, ἤτοι ὁ κύκλος $AB\Gamma_1$ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ε κατὰ τὸ σημεῖον Γ_1.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ κύκλος $AB\Gamma_2$ ἐφάπτεται τῆς ε κατὰ τὸ σημεῖον Γ_2.

Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε, τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. (Σχ. 34.3). Ἡ μεσοκάθετος αὕτη τέμνει τὴν ε κατὰ ἕνα σημεῖον Γ. Ὁ κύκλος ΑΒΓ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.



Σχ. 34.2



Σχ. 34.3

Καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὰς μεταξὺ τῶν δεδομένων στοιχείων σχέσεις, διὰ τὴν ὕπαρξιν καὶ τὸ πλῆθος τῶν λύσεων, σημειοῦμεν :

1. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὴν ε κατὰ τὸ σημεῖον Ρ. Ἂν τὸ Ρ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ἂν τὸ Ρ ταυτίζεται πρὸς τὸ Α, ὑπάρχει ἕνας μόνον κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Β καὶ ἐφαπτόμενος τῆς ε κατὰ τὸ σημεῖον Α. Τοῦτο ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ Ρ ταυτίζεται πρὸς τὸ Β.

Ἂν τὸ Ρ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, κάθε κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β τέμνει τὴν ε κατὰ δύο σημεῖα διάφορα ἀλλήλων. Τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λύσιν (δὲν ὑπάρχει κύκλος ἱκανοποιῶν τὰς δοθείσας συνθήκας).

2. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

3. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ ταυτίζεται πρὸς τὴν ε. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει λύσις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἑνὸς ἄξονος $\vec{\xi}$ καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις :

(1) $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = \overline{AM}^2 - \overline{BM}^2$ (2) $\overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2$ (3) $\overline{AB}^2 - \overline{A\Gamma}^2 = 2\overline{B\Gamma} \cdot \overline{MA}$.

2. Θεωροῦμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Ρ ἑνὸς ἄξονος ξ. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις :

$$\overline{PA} \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{PB} \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{P\Gamma} \cdot \overline{AB} = 0$$

3. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος $\vec{\xi}$ δύο σημεῖα Α καὶ Β.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Διὰ κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\lambda\overline{MA} + \mu\,\overline{MB} = (\lambda + \mu)\,\overline{MG}$$

ἔνθα λ καὶ μ ρητοὶ ἀριθμοὶ ὥστε $\lambda + \mu = 0$ καὶ G τὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος διὰ τὸ ὁποῖον : $\lambda \cdot \overline{GA} + \mu \cdot \overline{GB} = 0$

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις :

$$\lambda\overline{MA}^2 + \mu\overline{MB}^2 = (\lambda + \mu)\,\overline{MG}^2 + \lambda\overline{GA}^2 + \mu\overline{GB}^2.$$

4. Θεωροῦμεν δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ β καὶ γ εἶναι ἀνάλογοι τῶν β' καὶ γ' καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Α' παραπληρωματικαί. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ' εἶναι ἴσαι.

5. Θεωροῦμεν δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ' εἶναι ἴσαι καὶ αἱ Β καὶ Β' παραπληρωματικαί. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραὶ γ καὶ γ' εἶναι ἀνάλογοι τῶν β καὶ β'.

6. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον ΑΑ' αὐτοῦ (Α' τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ). Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ἀνωτέρω παραλλήλου μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{AE}{AZ} = \frac{\beta}{\gamma}$$

7. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως ὥστε ΒΕ = ΓΖ. Ἔστω Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΓ καὶ ΕΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{ME}{MZ} = \frac{\beta}{\gamma}$$

8. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν διὰ τοῦ μέσου Α' τῆς πλευρᾶς ΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ αὐτοῦ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$BE = \Gamma Z = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

9. Θεωροῦμεν δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ' εἶναι ἴσαι καὶ αἱ Β καὶ Β' παραπληρωματικαί. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραὶ γ καὶ γ' εἶναι ἀνάλογοι τῶν β καὶ β'.

10. Θεωροῦμεν δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ β καὶ γ εἶναι ἀνάλογοι τῶν β' καὶ γ' καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Α' παραπληρωματικαί. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ' εἶναι ἴσαι.

11. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ σημεῖα H_1, H_2, H_3 τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἕκαστον τῶν τριγώνων AH_2H_3, BH_3H_1, ΓH_1H_2 εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

12. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' αὐτοῦ, τῶν ὁποίων ἔστω Η τὸ κοινὸν σημεῖον (Α', Β', Γ ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις :

(1) $\overline{A'A} \cdot \overline{A'H} = -\overline{A'B} \cdot \overline{A'\Gamma}$

(2) $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{H\Gamma} \cdot \overline{H\Gamma'}$

(3) $B\Gamma \cdot AA' = \Gamma A \cdot BB' = AB \cdot \Gamma\Gamma'$

13. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην το κύκλου ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς εὐθείας αὐτῆς μὲ τὰς Α καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{A\Gamma} \cdot \overline{AN}$$

14. Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοια, τότε ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτ ὁμολόγων εὐθ. τμημάτων αὐτῶν, ὡς τῶν ὕψῶν, διχοτόμων, διαμέσων, ἀκτίνων περιγεγραμ μένων, ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων, ἀποστάσεων τῶν ὁμολόγων κορυ φῶν ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τούτων, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τούτω (λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν των).

15. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὕψος ΑΑ΄ αὐτοῦ, ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ΑΑ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β΄ καὶ Γ΄ τῶν ΒΜ καὶ ΓΜ μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθ ὅτι ἡ ΑΑ΄ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (Α΄Β΄, Α΄Γ΄).

16. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὀνομάζομεν : Δ καὶ Ρ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς διχοτό μου τῆς γωνίας Α αὐτοῦ μὲ τὴν ΒΓ καὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν Ι, Ι΄, Ι΄΄, Ι΄ τὰ κέντρα τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου καὶ τῶν παραγεγραμμένων αὐτο ἀντιστοίχως.

(1) Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις :

$$AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AP = AI \cdot AI'$$

(2) Ἂν εἶναι Δ΄ καὶ Ρ΄ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώ νου μὲ τὴν ΒΓ καὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀνάλογοι τῶν ἀνωτέρω σχέσεις : $AB \cdot A\Gamma = A\Delta' \cdot AP' = AI'' \cdot AI'''$

17. Θεωροῦμεν δύο ὀρθογώνια κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α΄ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon'_1}$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

18. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα καὶ ὀρθογώνια κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'} \left(= \dfrac{\gamma}{\gamma'} \right)$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, θὰ εἶναι ἀντιρρόπω ὅμοια ([1]).

19. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι :

$\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'} = \dfrac{r}{r'}$, ἔνθα r, r΄ αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτ εἶναι ὅμοια.

20. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

(1) $B = B'$ καὶ $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\rho}{\rho'}$ ἢ (2) $A = A'$ καὶ $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\rho}{\rho'}$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτ εἶναι ὅμοια.

21. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $B = 2\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\beta^2 = \gamma(\gamma + \alpha)$.

22. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Α΄ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὰς διὰ τοῦ Β καὶ Γ πα ραλλήλους πρὸς τὴν ΑΑ΄ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β΄ καὶ Γ΄ αὐτῆς μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\dfrac{1}{AA'} = \dfrac{1}{BB'} + \dfrac{1}{\Gamma\Gamma'}$

23. Δίδεται γωνία (ΑΧ, ΑΥ). Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, ὥστε :

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{A\Gamma} = \frac{1}{\lambda},$$ ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

---

(1) Ἐφεξῆς τὰ θεωρούμενα τρίγωνα θὰ νοοῦνται ὁμοίως προσανατολισμένα, ἐκτὸς ἐναν τίας ἐνδείξεως.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας (ΑΧ, ΑΥ) (περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΒΓ).

24. Δίδεται κύκλος (0), διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ καὶ μία εὐθεῖα δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς σημεῖον Ι τῆς ΑΒ, Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τῶν εὐθειῶν ΜΑ καὶ ΜΒ μὲ τὴν εὐθεῖαν δ.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\overline{\text{ΙΓ}} \cdot \overline{\text{ΙΔ}} = \overline{\text{ΑΙ}} \cdot \overline{\text{ΙΒ}}$

(2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ΑΓΔ.

25. Θεωροῦμεν : γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ἕνα κύκλον (Ω) ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν, τοῦ ὁποίου ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ. Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ω) καὶ ΜΙ, ΜΗ, ΜΚ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΟΧ, ΟΥ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\text{ΜΙ}^2 = \text{ΜΗ} \cdot \text{ΜΚ}$

26. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων ἑνὸς κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ χωρίζει τὰς διαγωνίους ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ.

27. Θεωροῦμεν : τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὴν εὐθεῖαν ΓΜ τὴν συνδέουσαν τὴν κορυφὴν Γ μὲ τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ τραπεζίου, τὸ κοινὸν σημεῖον Κ τῆς ΓΜ μὲ τὴν διαγώνιον ΒΔ, τὴν διὰ τοῦ Κ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Η. Ε, Ζ αὐτῆς μὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΔΑ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Η καὶ Κ τριχοτομοῦν τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ.

28. Θεωροῦμεν τραπέζιον ΑΒΓΔ (βάσεις αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ). Ἔστω Ε τὸ σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΔ τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς $\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ Η, Κ, Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς διὰ τοῦ Ε παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου μὲ τὰς ΑΓ, ΒΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως.

(1) Νὰ εὑρεθοῦν συναρτήσει τῶν $\text{ΑΒ} = \alpha$, $\text{ΓΔ} = \beta$ καὶ τῶν μ, ν τὰ εὐθ. τμήματα ΕΗ, ΕΚ, ΚΖ καὶ ΕΖ.

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ε, Ζ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΖ. Περίπτωσις $\mu = \alpha$ καὶ $\nu = \beta$.

29. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ. Ἔστωσαν : Α τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐφαπτομένων, Β καὶ Γ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτῶν μὲ τὸν κύκλον (Ο) καὶ Ι, Κ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ἐφαπτομένων μὲ τὴν κάθετον ἐπὶ τὸν ΟΑ, εἰς τὸ Ο, ἀντιστοίχως (Ι ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ Κ ἐπὶ τῆς ΑΓ). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην τοῦ (Ο) καὶ ὀνομάζομεν Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἐντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν εὐθειῶν ΟΜ, ΟΝ εἶναι σταθερὰ (ἀνεξάρτητος τῆς θεωρουμένης ἐφαπτομένης ΜΝ)

(2) Τὸ γινόμενον ΙΜ · ΚΝ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΙΑ · ΚΓ (ἢ ΙΒ · ΚΑ)

(3) Αἱ ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ο) εἰς τὰ Β καὶ Γ σημειοσειραὶ ΙΜΑ, ΚΓΝ εἶναι ὅμοιαι, ὡς καὶ αἱ ΚΝΑ καὶ ΙΒΜ.

(4) Τὸ γινόμενον $\frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΒ}} \cdot \frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΓ}}$ εἶναι σταθερόν.

30. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') τεμνόμενοι κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Β εὐθεῖαν καὶ ὀνομάζομεν Ε καὶ Ζ τὰ κοινά, ἐκτὸς τοῦ Β, σημεῖα αὐτῆς μὲ τοὺς ἀνωτέρω κύκλους ἀντιστοίχως.

(1). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΖ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ ΑΟΟ' καὶ ἑπομένως ὅμοια πρὸς ἄλληλα. (1)

(2) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ΑΒ διέρχεται διὰ τοῦ Ο καὶ ὀνομάζομεν Ζ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ζ ὡς πρὸς τὸ Ε. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία (Ζ' Ζ, Ζ' Α). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Ζ'.

---

(1) Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΖ *μένει ὅμοιον πρὸς ἑαυτό*, ὅταν ἡ ΕΖ «στρέφεται» περὶ τὸ Β (αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΕΖ εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς θέσεως τῆς διὰ τοῦ Β εὐθείας ΕΖ).

31. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ τέμνουσαν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ καὶ ὑποθέτομεν ὅτι :

$$(1) \quad Ε\Gamma^2 = Β\Gamma \cdot ΕΖ$$

(1) Ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν τριγώνων ΖΕΓ καὶ ΕΒΓ νὰ εὑρεθῇ κατασκευὴ τῆς ΕΖ ὥστε νὰ ἱκανοποιῆται ἡ (1).

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ΑΕ^2 = Α\Gamma \cdot ΑΖ$ καὶ $Α\Gamma^2 = ΑΒ \cdot ΑΕ$

32. Ἔστωσαν (Ο) καὶ (Ο)' δύο κύκλοι, ἀκτίνων ἀντιστοίχως r καὶ r', κείμενοι ἐκτὸς ἀλλήλων. Θεωροῦμεν μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΑΑ' καὶ μίαν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΒ' αὐτῶν, τῶν ὁποίων ἔστω Ι τὸ κοινὸν σημεῖον (Α, Α' καὶ Β,Β' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τοὺς (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως).

(1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία (ΙΟ, ΙΟ')

(2) Νὰ εὑρεθοῦν, συναρτήσει τῶν ἀκτίνων r καὶ r' τὰ γινόμενα ΙΑ · ΙΑ' καὶ ΙΒ · ΙΒ'.

(3) Ἔστω Η ἡ προβολὴ τοῦ Ι ἐπὶ τὴν ΟΟ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι σημεῖον τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τετράπλευρα ΙΟΑΒ καὶ ΙΟ'Α'Β'. Νὰ εὑρεθῇ, ἐκ τούτων, ἡ γωνία (ΗΑ, ΗΑ') καὶ ἡ (ΗΒ, ΗΒ') καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ΗΑ καὶ ΗΑ' ἐπανατέμνουν τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο)' κατὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν (Ο) καὶ (Ο)' μὲ τὴν δευτέραν αὐτῶν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην.

33. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Ἔστωσαν Μ καὶ Ν δύο σημεῖα τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Α καὶ τοιαῦτα ὥστε : (1) $ΑΜ \cdot ΑΝ = ΑΒ^2$

(1) Ἔστω Ρ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΜΒ καὶ ΝΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΑΓΝ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΜΝ.

(2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Ρ τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ζεύγη (Μ,Ν) τῆς (1).

34. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του καὶ τὰ συμμετρικὰ Α', Β', Γ' τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ σημείου Ρ'

(2) Ἡ εὐθεῖα ΡΡ' διέρχεται διὰ γνωστοῦ (ἀνεξαρτήτου τοῦ Ρ) σημείου G καὶ ὅτι ΡG = 2GΡ'

35. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Αἱ διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου παράλληλοι πρὸς τὰς ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ διέρχονται διὰ σημείου Ρ'

(2) Ἡ εὐθεῖα ΡΡ' διέρχεται διὰ γνωστοῦ σημείου G (ἀνεξαρτήτου τοῦ σημείου Ρ) καὶ ὅτι ΡG = 2GΡ'.

(2) Ἂν Ρ ≡ Η, τότε Ρ' ≡ Ο (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου καὶ Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ).

Ἂν Ρ ≡ Ι, τότε τὸ Ρ' ≡ Κ (Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τοῦ μεσοτριγώνου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ).

36. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον $Η_1Η_2Η_3$ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν $Η_2Η_3$, $Η_3Η_1$, $Η_1Η_2$ τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (εἶναι συντρέχουσαι).

37. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ σημεῖα Ι (κοινὸν σημεῖον διχοτόμων του), G (κέντρον βάρους αὐτοῦ) καὶ Κ (κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τοῦ μεσοτριγώνου). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Τὰ σημεῖα Ι, G, Κ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ (2) ΙG = 2GΚ

38. Ἔστωσαν σ καὶ σ' δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ Ο ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου των. Θεωροῦμεν τρεῖς τυχούσας διὰ τοὺς Ο εὐθείας α, β, γ καὶ ὀνομάζομεν Α,Α' · Β, Β' · Γ, Γ', τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων μὲ τὰς σ καὶ σ' ἀντιστοίχως. (Α, Α' τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς α μὲ τὰς α, σ' κλπ).

1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Μ(ΒΓ'·Β'Γ), Ν(ΓΑ'·Γ'Α), Ρ(ΑΒ·Α'Β) (1) κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2) Βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως νὰ κατασκευασθῇ ἡ διὰ δοθέντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθεῶν παράλληλος πρὸς αὐτάς, διὰ τῆς ἀποκλειστικῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανόνος (μόνον δι' εὐθειῶν).

39. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὰς διχοτόμους ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ αὐτοῦ (Α', Β', Γ' σημεῖα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως) καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν διχοτόμων τούτων : Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1). $\frac{IA}{IA'} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}, \quad \frac{IB}{IB'} = \frac{\gamma+\beta}{\beta}, \quad \frac{I\Gamma}{I\Gamma'} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$

(2). $\frac{IA'}{AA'} = \frac{\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma)}, \quad \frac{IB'}{BB'} = \frac{\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)}, \quad \frac{I\Gamma'}{\Gamma\Gamma'} = \frac{\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)}$

40. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\beta + \gamma = 2\alpha$, τότε ἡ εὐθεῖα IG εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἀντιστρόφως. (Ι καὶ G τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων ἀντιστοίχως).

41. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ο) καὶ (Ο') ἐφαπτομένους ἀλλήλων ἐξωτερικῶς καὶ μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν αὐτῶν ἐφαπτομένην τῆς ὁποίας ἔστωσαν Α καὶ Α' τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τοὺς κύκλους ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$AA'^2 = 4rr'.$$

(r, r' αἱ ἀκτῖνες τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως).

42. Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ὀνομάζομεν : Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του, Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων, Ρ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ο, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ καὶ Σ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ο, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΟΒΓ καὶ ΟΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : τὰ σημεῖα Ο,Ε,Ζ, Ρ, Σ εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

43. Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (1). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τούτου καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι ἑκάστη τῶν ὁποίων συνδέει τὰ ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὸν κύκλον (1) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

44. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

Ἂν αἱ διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ πρώτου τριγώνου παράλληλοι πρὸς τὰς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' ἀντιστοίχως, διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τότε καὶ αἱ διὰ τῶν κορυφῶν Α', Β',Γ' τοῦ δευτέρου παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο'.

45. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τὰ ὁποῖα χωρίζουν αὐτὰς εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν πλευρῶν $ΔΑ \equiv \delta$ καὶ $ΒΓ \equiv \beta$, ἤτοι τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$\frac{AE}{EB} = \frac{\Delta Z}{Z\Gamma} = \frac{\delta}{\beta}$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μίαν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

46. Δίδεται εὐθεῖα σ καὶ τέσσαρα σημεῖα Ε, Ζ, Η, Κ αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί, ἢ αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αὗται, περιέχουν τὰ ἀνωτέρω σημεῖα ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ παραλληλογράμμου διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο γνωστὰ σημεῖα τῆς σ (ἀνεξάρτητα τοῦ θεωρουμένου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ).

47. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς τοῦτον. Νὰ

---

(1) Μὲ τὸ σύμβολον (ΒΓ'. Β'Γ) δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΓ' καὶ Β'Γ.

ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων κάθε σημείου Μ τοῦ κύκλου (Ο) ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ΒΓ καὶ ΔΑ. Εἰδικώτερον, ἂν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο), τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων κάθε σημείου Μ τοῦ κύκλου (Ο) ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ (Ο) κατὰ τὴν ἀπέναντι τῆς τρίτης αὐτῆς πλευρᾶς κορυφήν.

48. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο) καὶ τὰς ἐφαπτομένας τοῦ (Ο) κατὰ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων κάθε σημείου Μ τοῦ κύκλου (Ο) ἀπὸ τῶν ἀνωτέρω ἐφαπτομένων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Γενίκευσις εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον.

48. Θεωροῦμεν : κύκλον (Ο), διάμετρον ΑΒ αὐτοῦ, ἕνα κύκλον (Ω) ἔχοντα κέντρον ἕνα τυχὸν σημεῖον Ω τοῦ κύκλου (Ο) καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΩΓ αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὀνομάζομεν Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ω). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον Μ τῶν ΩΓ καὶ ΕΖ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΩΓ.

49. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ σχέσις :

$$r = (\sqrt{2} + 1)\,\rho$$

εἶναι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλος Ι (ρ) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸν κύκλον Ο(r).

50. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Ἂν μεταξὺ τῶν ἀκτίνων r καὶ ρ δύο κύκλων Ο(r) καὶ Ι(ρ) καὶ τῆς ἀποστάσεως ΟΙ = δ τῶν κέντρων Ο καὶ Ι αὐτῶν, ὑπάρχῃ ἡ σχέσις :

$$(1)\quad \delta^2 = r^2 - 2r\rho$$

τότε ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ΑΒΓ, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο(r) καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ι(ρ)

(2) Ἂν μεταξὺ τῶν ἀκτίνων r καὶ ρ_1 δύο κύκλων Ο(r) καὶ Ι′(ρ_1) καὶ τῆς ἀποστάσεως ΟΙ′ ≡ ≡ δ′ τῶν κέντρων των Ο καὶ Ι′ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις :

$$(2)\quad \delta'^2 = r^2 + 2r\rho_1$$

τότε ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ΑΒΓ, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο(r) καὶ δέχεται τὸν Ι′(ρ_1) ὡς παρεγγεγραμμένον αὐτοῦ κύκλον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ.

51. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) καὶ μίαν εὐθεῖαν ε τέμνουσαν τοὺς κύκλους τούτους ὥστε αἱ ὁριζόμεναι ἐπ' αὐτῆς χορδαὶ ΑΒ καὶ Α′Β′ τῶν (Ο) καὶ (Ο′) νὰ εἶναι ἴσαι (ἕκαστον τῶν Α καὶ Α′ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Β′) Ἔστω Ρ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐφαπτομένων τῶν (Ο) καὶ (Ο′) κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Β′. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) φαίνονται ἀπὸ τοῦ Ρ ὑπὸ ἴσας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως : Ἂν οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) φαίνωνται ἀπὸ σημείου Ρ τοῦ ἐπιπέδου των ὑπὸ ἴσας γωνίας, τότε ΑΒ = Α′Β′.

(2) Αἱ ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεςς : τοῦ Β ἀπὸ τοῦ (Ο′) καὶ τοῦ Β′ ἀπὸ τοῦ (Ο) εἶναι ἴσαι.

52. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἑκάστης τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι ἀνάλογοι δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ε, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu}$$

53. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ε καὶ ε′ τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς ε καὶ δύο σημεῖα Α′ καὶ Β′ τῆς ε′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Ρ τοῦ ἐπιπέδου, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ Μ καὶ Μ′

ἐπὶ τὰς ε καὶ ε' ἀντιστοίχως, χωρίζουν τὰ εὐθ. τμήματα AB καὶ A'B' εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν σημείων P τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A'}{M'B'} \text{ (1)}$$

54 Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συμμετρικαὶ τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ, ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, τοῦ τριγώνου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ' (2).

55 Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν δύο τυχόντα σημεῖα Α' καὶ Β' τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτοῦ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ε τῶν εὐθειῶν ΓΑ' καὶ ΔΒ' καὶ τοὺς κύκλους ΑΑ'Ε καὶ ΒΒ'Ε τῶν ὁποίων ἔστω Ζ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ε, κοινὸν σημεῖον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

56 Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν : Τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ (Ο), τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ, τὰ δεύτερα κοινὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ αὐτῶν μὲ τὸν κύκλον (Ο) καὶ τὴν διὰ τοῦ Ρ παράλληλον ΡΝ πρὸς τὴν ΑΒ. (Ν σημεῖον τοῦ (Ο)). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΝΣ τέμνει τὴν ΑΒ κατὰ γνωστὸν σημεῖον Τ αὐτῆς.

57 Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον (Ω) ἐκ τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ὀνομάζομεν Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτοῦ μὲ τὸν κύκλον (Ο). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (ἀνεξαρτήτου τοῦ κύκλου (Ω)).

58 Δίδεται κύκλος Ο (r), εὐθεῖα δ διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς δ, συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο τοῦ (Ο). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Ρ τοῦ (Ο), τὰς εὐθείας ΡΑ, ΡΒ καὶ τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Ρ, κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν αὐτῶν μὲ τὸν κύκλον (Ο). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{AP}{AM} + \frac{BP}{BN}$$

εἶναι σταθερὸν (ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ρ ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο)).

59 Θεωροῦμεν δύο ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο') τεμνομένους κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἕνα κύκλον (Γ) ἐφαπτόμενον τῆς εὐθείας ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Α. Ὀνομάζομεν Μ καὶ Μ' τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (Γ) μὲ τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΜ' διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ι τῆς χορδῆς ΑΒ.

60 Δίδεται σημεῖον Ι καὶ εὐθεῖα ε. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε καὶ ὀνομάζομεν Μ' τὸ σημεῖον τῆς ΙΜ, τὸ κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ι πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ, διὰ τὸ ὁποῖον :

$$IM \cdot IM' = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν ἡ εὐθεῖα ε δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Ι, ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ' εἶναι ἕνας κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Ι, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Ι καθέτου ΙΑ ἐπὶ τὴν ε.

Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σημεῖον Μ' θεωρεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ι πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Μ.

61 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ἀντιπαράλληλον τῆς ΒΓ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ καὶ ὀνομάζομεν Β' καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ Μ' τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος Β'Γ'. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ' (3).

62 Δίδεται κύκλος (Ο), μία διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ, καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τῆς διαμέτρου ΑΒ. Θεωροῦμεν δύο τυχούσας διὰ τοῦ Ρ εὐθείας καθέτους ἐπ' ἀλλήλας καὶ ὀνομάζομεν Ν καὶ Ν'

---

(1) Εὐθεῖα τῶν *ἀναλόγων διαιρέσεων*

(2) *Συμμετροδιάμεσος* τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

(3) Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ὀνομάζονται *ἰσογώνια* σημεῖα ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὴν ἐφαπτομένην ε τοῦ κύκλου (Ο) εἰς τὸ Α. Νὰ ὁρισθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ο) τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν Ν καὶ Ν'.

63. Δίδεται κύκλος (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ρ τῆς διαμέτρου ΑΒ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ Ρ καὶ ὀνομάζομεν Μ καὶ Μ' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὸν κύκλον (Ο) καὶ Ν καὶ Ν' τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ΒΜ καὶ ΒΜ' ἀντιστοίχως μὲ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου (Ο) εἰς τὸ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Ι τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ο) τῶν ἀγομένων διὰ τῶν Ν καὶ Ν'.

64. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν ὅλα τὰ ὀρθογώνια τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τῶν ἀνωτέρω ὀρθογωνίων.

65. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΒ τοῦ (Ο) καὶ τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΒ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν κοινῶν σημείων τοῦ κύκλου τούτου (διαμέτρου ΑΒ) μὲ τὴν διάμετρον τοῦ πρώτου τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

66. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχὸν τρίγωνον ΑΒ'Γ' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ ἔχον μὲ αὐτὸ κοινὴν τὴν κορυφὴν Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν εὐθειῶν ΓΓ' καὶ ΒΒ'.

67. Δίδεται γωνία (ΑΥ, ΑΖ). Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῶν πλευρῶν ΑΥ καὶ ΑΖ τῆς δοθείσης γωνίας ἀντιστοίχως καὶ θέτομεν $AB = y$ καὶ $A\Gamma = z$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ΒΓ δι' ἑκάστην τῶν ὁποίων εἶναι :

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\lambda}$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

68. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις x_1, x_2, x_3 ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως νὰ εἶναι ἀνάλογοι τριῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτων λ_1, λ_2, λ_3. Ἤτοι :

$$\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2} = \frac{x_3}{\lambda_3}$$

69. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις x_1, x_2, x_3 ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, εἶναι ἀνάλογοι τριῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτων λ_1, λ_2, λ_3. Ἤτοι :

$$\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2} = \frac{x_3}{\lambda_3}$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρες λύσεις τοῦ προβλήματος.

70. Δίδεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Α τοῦ κύκλου (Ο) ὥστε, ἂν εἶναι Β καὶ Γ τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΑΡ καὶ ΑΣ μὲ τὸν κύκλον (Ο), ἡ εὐθεῖα ΒΓ νὰ εἶναι δοθείσης διευθύνσεως.

71. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ὥστε :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\mu}{\nu} \text{ καὶ } AB = \lambda$$

ἔνθα λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

72. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς πλευρᾶς ΟΧ. (Α μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΟΥ, ὥστε ἡ ΜΑ νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΜΟ, ΜΒ).

73. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, δύο σημεῖα Α' καὶ Β', ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι :

(1) Ἡ εὐθεῖα $A'B'$ νὰ εἶναι γνωστῆς διευθύνσεως (Δ) καί,

$$(1) \quad \frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

(2) Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $A'B'$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον καὶ νὰ ἰσχύῃ ἡ (1).

74. Δίδεται κύκλος (Ο), δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ καὶ μία εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (Ο). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ὥστε, ἂν εἶναι Α' καὶ Β' τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ΜΑ καὶ ΜΒ ἀντιστοχως μὲ τὴν ε, νὰ εἶναι :

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

75 Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : κύκλος (Ο), δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ (Ο), μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνα σημεῖον Ι τῆς ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ο) ὥστε. ἂν εἶναι Α' καὶ Β' τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε μὲ τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{IA'}{IB'} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

76 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως ὥστε :

$$MN = \lambda \text{ καὶ } \frac{MB}{N\Gamma} = \frac{\nu}{\mu}$$

ἔνθα λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

77 Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ. Νὰ εὑ ρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ο) ὥστε :

$$(1) \quad MA \cdot MB = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

78 Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΒΓ ὥστε :

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma}$$

79 Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') τῶν ὁποίων ἔστωσαν Ρ καὶ Σ τὰ κοινὰ σημεῖα, καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΡΣ ὥστε ἂν εἶναι Α' καὶ Β' τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Μ, κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΜΑ καὶ ΜΒ μὲ τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως, ἡ εὐθεῖα $A'B'$ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΡΣ.

80 Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Ρ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Α εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας α. Νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖα τέμνουσα τὰ α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

81 Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου των. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

82 Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ σημείου Ο, καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς α, β, γ ὥστε ἂν εἶναι Α, Β, Γ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἄνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

83. Δίδονται δύο γωνίαι (ΟΧ, ΟΥ) καὶ (Ο'Χ', Ο'Υ'). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δ δ
θείσης διευθύνσεως (Δ), τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῶν δοθεισῶν γωνιῶν ὥστε, ἂν εἶναι Α, Β κ
Α', Β' τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα

84. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β, μία τρίτη εὐθεῖα γ τέμνουσα τὰς α καὶ
καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ Ο καὶ τέμνουσα τὰς α, β,
ὥστε, ἂν εἶναι Α, Β, Γ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{O\Gamma} = \frac{\mu}{\nu},$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα

85. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ σημεῖον Ρ ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθε
διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοιν
σημεῖα, τὸ γινόμενον $PA \cdot PB$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

86. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Ρ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ το
Ρ, τέμνουσα τὸν (Ο) ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα, ὁ κύκλος (Ω), διαμέτρου ΑΒ
νὰ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΡΟ.

87. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομέν
ε τοῦ (Ο) ὥστε, ἂν εἶναι ΑΑ' καὶ ΒΒ' αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπὸ αὐτῆς, νὰ εἶναι :

$$AA' \cdot BB' = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

88. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖ
διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ, ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, ν
εἶναι :

$$AB^2 = OA \cdot OB.$$

89. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλ
ληλοι χορδαὶ ΑΑ' καὶ ΒΒ' τοῦ (Ο) ὥστε :

$$(1) \quad \frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu} \quad ἢ \quad (2) \quad AA' \cdot BB' = \lambda^2$$

ἔνθα λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

90. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευα-
σθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς α καὶ β, ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ
σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$PA \cdot PB = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

91. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμ-
μένον εἰς τὸν (Ο). Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν γωνίαν (ΑΒ, ΑΓ)
τοῦ τριγώνου καὶ ἐφαπτόμενος ἐσωτερικῶς τοῦ (Ο), καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ.

92. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος δύο, δοθέντων κύκλων (Ο) καὶ (Ο'), κα
διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α.

93. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ αὐτοῦ ἀντιστοίχως
τρεῖς κύκλοι οἱ ὁποῖοι, θεωρούμενοι ἀνὰ δύο νὰ ἐφάπτωνται ἀλλήλων.

94. Δίδεται εὐθεῖα ε, σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ κατασκευασθῇ κύ-
κλος (Ο) κέντρου Ο, τέμνων τὴν ε ὥστε, ἂν εἶναι Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$AM \cdot AN = \lambda^2,$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα

95. Δίδονται : κύκλος (Ο), καὶ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ κατα-
σκευασθῇ κύκλος (Ω) διερχόμενος ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τέμνων τὸν Ο ὥστε ἂν εἶναι Ε
καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτοῦ καὶ τοῦ (Ο), ἡ εὐθεῖα ΕΖ νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν Γ καὶ Δ ἀποστάσεις

ΓΓ' καὶ ΔΔ' τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$ (μ καὶ ν δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα).

96. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ἐφαπτόμενος τοῦ κύκλου (Ο).

97. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ συνθῆκαι:

(1) $MA + MB = \lambda$

(2) $MA - MB = \lambda$, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

98. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἐπὶ τῆς α τρία σημεῖα Β, Α, Γ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ εἶναι δάφορον τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ι) ἐφαπτόμενος τῆς α κατὰ τὸ σημεῖον Α, ὥστε αἱ ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ, αἱ διάφοροι τῆς α, νὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς β.

99. Δίδονται δύο παράλληλοι ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ Α'Χ' κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΑ', ἡ ὁποία εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') ἐγγεγραμμένοι ἀντιστοίχως εἰς τὰς γωνίας Α καὶ Α', ἐφαρμόμεναι ἀλλήλων, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες ἔχουν δοθέντα λόγον.

100. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον (Ο) τρίγωνον ΑΒΓ, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Μ, Ν, Ρ.

101. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

(1) β, γ, δ_1 (2) α, A, $\beta + \nu\gamma = \lambda$ (ν δοθεὶς φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

(3) α, A, $\beta - \nu\gamma = \lambda$. (4) α, A, $\beta\gamma$ (5) α, υ_1, $\beta \cdot \Gamma H_2 = \lambda^2$

(6) α, A, $\beta \cdot \Gamma H_2 = \lambda^2$ (7) A, $\beta\gamma$, καὶ τῆς συνθήκης ὅπως ἡ πλευρὰ α εἶναι ἐλαχίστη.

102. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων:

(1) μ_1, δ_1, $\frac{\beta}{\gamma}$ (2) α, A [1], $\beta(\beta + \gamma)$

(3) A, ρ, καὶ τῆς συνθήκης: $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$

(4) r, ρ, ρ_1 (5) α, $\beta\gamma$, $B - \Gamma$

(6) A, ρ, $IB \cdot I\Gamma = \lambda^2$, ἔνθα Ι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου καὶ ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

(7) α, υ_1, $\Delta_1 B \cdot \Delta_1 \Gamma = \delta_1^2$ (Δ_1 τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου).

(8) α, $\beta + \gamma$, υ_1 (9) α, $\beta - \gamma$, υ_1

(10) α, υ_1, $O_1 H_1 \cdot O_1 \Delta_1 = \lambda^2$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα)

(11) δ_1, $\frac{\beta}{\gamma}$, 2τ (12) α, υ_1, ρ

(13) α, $\beta - \gamma$, $\Gamma H_1 = \lambda$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα)

(14) δ_1, $\beta - \Delta_1 \Gamma = \lambda$, $\gamma - \Delta_1 B = \mu$ (λ καὶ μ δοθέντα εὐθ. τμήματα).

(15) υ_1, μ_1, σ_1 (σ_1 ἡ συμμετροδιάμεσος τοῦ τριγώνου ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ).

(16) υ_1, δ_1, σ_1 (17) A, $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$, καὶ τῆς συνθήκης ὅπως ἡ εὐθεῖα ΒΓ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ. (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

(18) A, $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$, 2τ (19) A, $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$, υ_1

(20) $A = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\lambda^2}$, ρ (ἢ ρ_1).

---

(1) Γωνία (ΑΒ, ΑΓ).

103. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅταν δίδωνται τρία σημεῖα χωρίζοντα τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἀντιστοίχως εἰς δοθέντας λόγους.

104. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται :

(1) Ὁ περιγεγραμμένος κύκλος (Ο) καὶ αἱ συνθῆκαι ὅπως αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ.

(2) Ὁ περιγεγραμμένος κύκλος (Ο) καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Α′, Β′, Γ′.

105. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Α′ τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο τρίγωνον Α′Β′Γ′ (Α′ τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς ΒΓ) τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α′ νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ καὶ τὸ γινόμενον $Α'Β' \cdot Α'Γ' = λ^2$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

106. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) Β, α, καὶ τῆς συνθήκης : $γ \cdot ΑΒ \pm β \cdot ΑΓ = k^2$

(2) Α, α, καὶ τῆς συνθήκης : $γ \cdot ΑΒ \pm β \cdot ΑΓ = k^2$

107. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου των ὥστε ἡ γωνία τῶν ἀπὸ τούτου ἐφαπτομένων τῶν (Ο) καὶ (Ο′) νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεις ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην :

$$γ \cdot ΑΒ \pm β \cdot ΑΓ = k^2$$

108. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως (Δ) τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ὥστε νὰ ἱκανοποιῆται ἡ συνθήκη :

$$λ \cdot ΔΕ + μ \cdot ΒΔ + ν\, ΓΕ = k^2$$

109. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ τῆς σχέσεως :

$$α \cdot ΒΓ + β \cdot ΓΑ + γ \cdot ΑΒ = k^2$$

ἔνθα, α, β, γ, k δοθέντα εὐθ. τμήματα.

110. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΝ = σ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα Μ καὶ Ν χωρίζουν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ εἰς δοθέντα λόγον $\frac{μ}{ν}$ (μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα).

111. Εἰς δοθὲν τετράπλευρον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

112. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον (Ο) τετράπλευρον ΑΒΓΔ ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Σ.

113. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων : Ἀκτὶς ρ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ διαγώνιος ΑΓ = λ, ΒΔ = μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

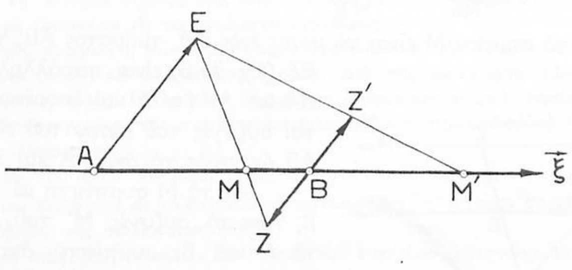
35. ΟΡΙΣΜΟΣ. Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἀπεδείχθη (7) ὅτι δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας ε ὑπάρχουν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ χωρίζοντα ἀντιστοίχως ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς δύο εὐθ. τμήματα τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν. Ἐσημειώσαμεν ἐπίσης ὅτι ἂν ἀντὶ τῆς εὐθείας ε θεωρήσωμεν ἄξονα ξ, οἱ προσημασμένοι λόγοι : $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$ καὶ $\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}}$ εἶναι ἀντίθετοι, ἤτοι: $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}}$.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι :

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ χωρίζουν *ἁρμονικῶς* τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ κατὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον.

Σημειοῦμεν, κατὰ ταῦτα, ὅτι :

1. Δοθέντος ἑνὸς σημείου Μ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, ὑπάρχει σημεῖον Μ′,



Σχ. 35.α

διάφορον τοῦ Μ, καὶ ἕνα μόνον, ὥστε : $\frac{AM}{MB} = \frac{AM'}{M'B}$.

Ἡ εὕρεσις τοῦ Μ′ βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα (7) :
Θεωροῦμεν δύο τυχούσας παραλλήλους εὐθείας διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ μίαν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Μ τέμνουσαν αὐτάς. Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα (Σχ. 34α). Ἂν εἶναι Ζ′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ζ ὡς πρὸς τὴ Β, καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ε μὲ τὴν ΕΖ′, ἔχομεν, ὡς ἀπεδείχθη (7) ὅτι :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AE}{BZ} \text{ καὶ } \frac{AM'}{M'B}=\frac{AE}{BZ'}, \text{ καὶ ἐκ τούτων ὅτι: } \frac{AM}{MB}=\frac{AM'}{M'B}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι ἀνεξάρτητον τῶν θεωρηθεισῶν διὰ τῶν Α καὶ Β παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τῆς διὰ τοῦ Μ τεμνούσης αὐτάς, ἀφοῦ δοθέντος τοῦ Μ ὁρίζεται ὁ λόγος $\frac{AM}{MB}$ καὶ ὑπάρχει (7) ἕνα μόνον σημεῖον τῆς ε, μὴ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, ὥστε ὁ λόγος $\frac{AM'}{M'B}$ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὁρισθέντα. Τὸ σημεῖον Μ′ ὀνομάζεται **συζυγὲς** τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὸ συζυγὲς τοῦ Μ′ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β εἶναι τὸ σημεῖον Μ.

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ ὀνομάζονται *συζυγῆ ἀλλήλων* ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β.

2. Ἐκ τῆς $\frac{AM}{MB}=\frac{AM'}{M'B}$ ἔχομεν: $\frac{AM}{AM'}=\frac{MB}{M'B}$ Ἐκ τῆς δευτέρας αὐτῆς ἀναλογίας προκύπτει ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β χωρίζουν ἁρμονικῶς τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΜ′, ἤτοι εἶναι συζυγῆ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Μ′.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Μ, Μ′ ἀποτελοῦν *ἁρμονικὴν τετράδα* ἢ ἁρμονικὴν *σημειοσειρὰν* ἢ καὶ ἁρμονικὸν *σύμπλεγμα* σημείων. Ὥστε:

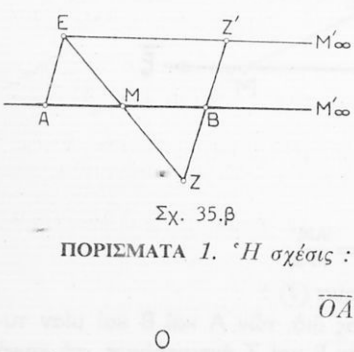
Μία τετρὰς σημείων Α,Β,Μ,Μ′ μιᾶς εὐθείας $\vec{\xi}$ *ὀνομάζεται* **ἁρμονικὴ** *ὅταν οἱ προσημασμένοι λόγοι* $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$ *καὶ* $\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}}$ *εἶναι ἀντίθετοι.*

Δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \text{ ἢ καὶ } (ABMM')=-1$$

3. Ἂν τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ μέσον ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ, τότε ἡ εὐθεῖα ΕΖ′ (Σχ. 35.β) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ($\equiv \xi$) καὶ ἑπομένως δὲν ὁρίζεται συζυγὲς τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ὡς πρὸς τὰ ἄκρα Α καὶ Β αὐτοῦ.

Ἂν τὸ Μ συμπίπτῃ μὲ τὸ Α ἢ τὸ Β, τότε τὸ συζυγὲς Μ′ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, συμπίπτει ἀντιστοίχως μὲ τὸ Α ἢ τὸ Β.

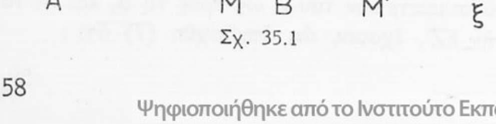


Σχ. 35.β

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Ἡ σχέσις:* $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}}$ *εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν:*

$$\overline{OA}^2=\overline{OM}\cdot\overline{OM'},$$

ἔνθα Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἤτοι:



Σχ. 35.1

Ἡ σχέσις: $\overline{OA}^2=\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$

εἶναι μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἡ τετρὰς A,B,M,M' μιᾶς εὐθείας $\vec{\xi}$ εἶναι ἁρμονική. Πράγματι, ἔχομεν (Σχ. 35.1):

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \Rightarrow \frac{\overline{AO}+\overline{OM}}{\overline{MO}+\overline{OB}} = -\frac{\overline{AO}+\overline{OM'}}{\overline{M'O}+\overline{OB}} \Rightarrow \frac{\overline{OA}-\overline{OM}}{\overline{OM}-\overline{OB}} = -\frac{\overline{OA}-\overline{OM'}}{\overline{OM'}-\overline{OB}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OA}-\overline{OM}}{\overline{OM}-\overline{OB}} = \frac{\overline{OM'}-\overline{OA}}{\overline{OM'}-\overline{OB}} \Rightarrow \frac{2\overline{OA}}{-2\overline{OM}} = \frac{2\,\overline{OM'}}{-2\overline{OM}} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = \overline{OM}\cdot\overline{OM'}$$

2. *Ἂν Δ καὶ Δ' εἶναι τὰ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α τριγώνου ΑΒΓ, ἡ τετρὰς ΒΓΔΔ' εἶναι ἁρμονική.*

Πράγματι, εἶναι (11) : $\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \frac{\gamma}{\beta}$ καὶ $\frac{\overline{B\Delta'}}{\overline{\Delta'\Gamma}} = -\frac{\gamma}{\beta}$

Ἑπομένως : $\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}} = -\frac{\overline{B\Delta'}}{\overline{\Delta'\Gamma}}$

ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

36. ΟΡΙΣΜΟΣ Δυνάμεθα, πρὸς ἀποφυγὴν ἐξαιρέσεως, νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ συζυγὲς τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ τῆς εὐθείας ξ. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ὀνομασθῇ **ἐπ' ἄπειρον σημεῖον** τῆς εὐθείας ξ. Οὕτω, δεχόμεθα ὅτι ἡ παράλληλος ΕΖ' πρὸς τὴν ξ (Σχ. 34.β) τέμνει τὴν ξ κατὰ τὸ ἀπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτῆς.

Δεχόμενοι, κατὰ ταῦτα, ὅτι ὑπάρχει, τὸ συζυγὲς Μ' τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ τῆς ξ, ὡς πρὸς τὰ ἄκρα Α καὶ Β αὐτοῦ, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, ἐν προκειμένῳ ἡ ξ καὶ ἡ ΕΖ', ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἕνα μόνον : τὸ ἀπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτῶν.

Περὶ τοῦ ἐπ' ἄπειρον σημείου μιᾶς εὐθείας ξ δέον νὰ σημειώσωμεν ὅτι εἶναι ἕνα εἰδικὸν σημεῖον αὐτῆς μὴ ὑπακοῦον εἰς τὰ ἀξιώματα διατάξεως. (1)

Ἡ ἰδέα τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἐπ' ἄπειρον στοιχείων εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὀφείλεται εἰς τὸν G. Desarques (1639) καὶ J. Poncelet (1865). Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἐπ' ἄπειρον στοιχείων, αἱ προτάσεις τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας διατυποῦνται ὑπὸ ἑνιαίαν καὶ γενικωτέραν μορφήν, ἀποφευγομένης τῆς περιπτωσιολογίας (εἰδικῶν περιπτώσεων). Οὕτως, εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Desarques. :

Δύο εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχουν πάντοτε ἕνα κοινὸν σημεῖον, ἐπ' ἄπειρον ἢ μή.

Εἰς ἑκάστην διεύθυνσιν εἰς τὸ ἐπίπεδον ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἐπ' ἄπειρον σημεῖον : Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν τῆς διευθύνσεως αὐτῆς.

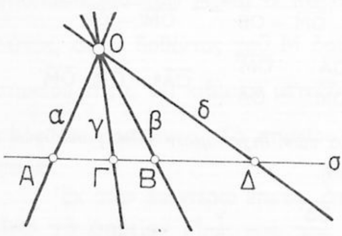
Τὰ εἰς τὰς διαφόρους ἀλλήλων διευθύνσεις τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦντα ἐπ' ἄπειρον σημεῖα, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ὀνομάζεται **ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖα** τοῦ ἐπιπέδου. Ὥστε :

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Desarques, ἢ ὅπως λέγομεν τὴν Γεωμετρίαν τοῦ ἐπεκτεταμένου Εὐκλειδείου χώρου :

Κάθε εὐθεῖα περιέχει ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, ἐπ' ἄπειρον σημεῖον, καὶ
Κάθε ἐπίπεδον περιέχει μίαν, καὶ μόνον μίαν, ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖαν.

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» : Κεφ. Ι παραγρ. 13-15

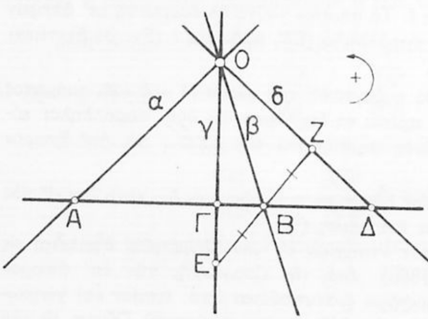
37. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία τετρὰς εὐθειῶν (α, β, γ, δ) διερχομένων διὰ σημείου Ο, συμβολικῶς Ο (α, β, γ, δ), θὰ ὀνομάζεται ἁρμονικὴ τετρὰς ἢ* **ἁρμονικὴ δέσμη** *εὐθειῶν, ἂν ἡ τομὴ (Α, Β, Γ, Δ) αὐτῆς μὲ μίαν εὐθεῖαν σ εἶναι ἁρμονικὴ τετρὰς σημείων.* (1)



Σχ. 37

Αἱ εὐθεῖαι γ καὶ δ αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ Ο μὲ τὰ συζυγῆ, ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, σημεῖα Γ καὶ Δ τῆς ἁρμονικῆς τετράδος Α,Β,Γ,Δ, ὀνομάζονται *συζυγεῖς εὐθεῖαι* τῆς δέσμης, Ο (α,β,γ,δ) (Σχ. 37). Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται *κέντρον* ἢ φορεὺς τῆς δέσμης Ο (α,β,γ,δ). Ἡ ἀνωτέρω δέσμη δύναται νὰ συμβολίζεται, μὲ τὸ σύμβολον Ο (αβγδ) ἢ τὸ Ο (Α Β Γ Δ).

38. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν διὰ τοῦ σημείου Β τῆς εὐθείας β μιᾶς ἁρμονικῆς δέσμης Ο (αβγδ) θεωρήσωμεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν συζυγῆ τῆς β εὐθεῖαν α τῆς δέσμης, καὶ εἶναι Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς γ καὶ δ, τὸ σημεῖον Β εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΖ.



Σχ. 38

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΓ καὶ ΕΒΓ, καὶ τῶν ΟΑΔ καὶ ΖΒΔ ἔχομεν ἀντιστοίχως (Σχ. 38) :

$$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΟΑ}{ΒΕ} \text{ καὶ } \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΟΑ}{ΒΖ} \text{ καὶ}$$

ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως : $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΑΔ}{ΔΒ}$

θὰ εἶναι καί : $\frac{ΟΑ}{ΒΕ} = \frac{ΟΑ}{ΒΖ}$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ΒΕ = ΒΖ,

39. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν: τέσσαρας εὐθείας α, β, γ, δ διὰ σημείου Ο, τὴν διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Β τῆς β παράλληλον πρὸς τὴν α καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς γ καὶ δ ἀντιστοίχως. Ἂν τὸ Β εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΖ, τότε ἡ δέσμη Ο (αβγδ) εἶναι ἁρμονικὴ (2).

---

(1) Δυνάμεθα, ἑπομένως, νὰ ἔχωμεν μίαν ἁρμονικὴν δέσμην εὐθειῶν, ἂν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου, κείμενον ἐκτὸς εὐθείας σ, μὲ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μιᾶς ἁρμονικῆς τετράδος σημείων ἐπὶ τῆς σ. Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις ὀνομάζεται **προβολὴ** τῆς τετράδος Α,Β,Γ,Δ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο. Προβολήν, τῆς τετράδος σ (Α,Β,Γ,Δ) ἀπὸ τοῦ Ο, ὀνομάζομεν συνήθως καὶ τὴν δέσμην Ο (α, β, γ, δ).

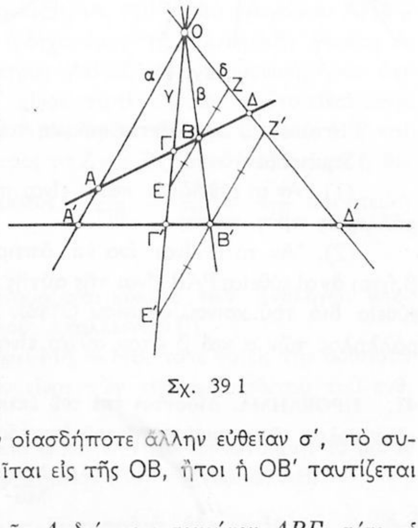
(2) Ἀντίστροφον τοῦ (38).

'Απόδειξις. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ τομὴ αὐτῆς μὲ μίαν οἱανδήποτε εὐθεῖαν σ εἶναι ἁρμονικὴ τετρὰς σημείων (37). Ὡς εὐθεῖαν σ θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Β εὐθεῖαν. Ἔστωσαν Α,Γ,Δ (Σχ. 38) τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς σ μὲ τὰς εὐθείας α, γ, δ ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΓ, ΕΒΓ ὡς καὶ τῶν ΟΑΔ, ΖΒΔ προκύπτουν αἱ ἀναλογίαι :

$\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΟΑ}{ΒΕ}$ καὶ $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΟΑ}{ΒΖ}$. Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀναλογιῶν τούτων εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωμεν : $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΑΔ}{ΔΒ}$, ἤτοι ὅτι ἡ ἐπὶ τῆς σ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονική.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν ἡ τομὴ Α,Β,Γ,Δ μιᾶς τετράδος εὐθειῶν α, β, γ, δ διερχομένων διὰ σημείου Ο, μὲ εὐθεῖαν σ, εἶναι ἁρμονική, τότε καὶ ἡ τομὴ Α′,Β′,Γ′,Δ′ αὐτῆς μὲ τυχοῦσαν εὐθεῖαν σ′, διάφορον τῆς σ, εἶναι ἁρμονική.*

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὰς διὰ τῶν Β καὶ Β′ παραλλήλους πρὸς τὴν ΟΑ, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 39.1): $\frac{ΒΕ}{ΒΖ} = \frac{Β'Ε'}{Β'Ζ'}$. Ἀλλὰ ΒΕ = ΒΖ, διότι ἡ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονικὴ (38). Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ Β′Ε′ = Β′Ζ′. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (39) ὅτι καὶ ἡ τετρὰς Α′Β′Γ′Δ′ εἶναι ἁρμονική.



Σχ. 39 1

Ἐκ τῆς προτάσεως αὐτῆς ἕπεται ὅτι, δοθεισῶν τῶν εὐθειῶν α, γ, δ, ἡ συζυγὴς β τῆς α ὡς πρὸς τὰς γ καὶ δ ὁρίζεται μονοσημάντως.

Πράγματι, διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν συζυγῆ β τῆς α ὡς πρὸς τὰς γ καὶ δ δέον νὰ θεωρήσωμεν μίαν τομὴν (Α, Γ, Δ) τῶν α, γ, δ μὲ μίαν εὐθεῖαν σ καὶ νὰ ὁρίσωμεν τὸ συζυγὲς Β τοῦ Α ὡς πρὸς τὰ Γ καὶ Δ. Ἡ συζυγὴς τῆς α εἶναι ἡ εὐθεῖα ΟΒ. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος (1) προκύπτει ὅτι ἂν θεωρήσωμεν τὴν τομὴν (Α′, Γ′, Δ′) τῶν α, γ, δ μὲ μίαν οἱασδήποτε ἄλλην εὐθεῖαν σ′, τὸ συζυγὲς Β′ τοῦ Β ὡς πρὸς τὰ Α′ καὶ Γ′ κεῖται εἰς τῆς ΟΒ, ἤτοι ἡ ΟΒ′ ταυτίζεται πρὸς τὴν ΟΒ.

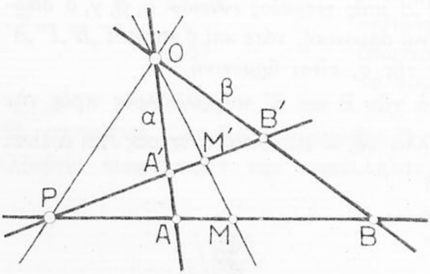
2. Ἂν ΑΑ′ εἶναι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ, τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΑ′ καὶ ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α παράλληλος, πρὸς τὴν ΒΓ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν δέσμην εὐθειῶν.

3. Ἂν μιᾶς ἁρμονικῆς δέσμης Ο (α β γ δ) εὐθειῶν, αἱ συζυγεῖς εὐθεῖαι γ καὶ δ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς α καὶ β.

Πράγματι, ἄν εἶναι Α, Γ, Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν α, γ, β ἀντιστοίχως μὲ τυχοῦσαν παράλληλον σ πρὸς τὴν δ, τὸ Γ εἶναι (38) τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, καὶ ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

40. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Θεωροῦμεν : τυχοῦσαν διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖαν, τὰ κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως καὶ τὸ συζυγὲς Μ τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

Λύσις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν α καὶ β καὶ Μ ἕνα σημεῖον τοῦ ζητουμένου γεωμ. τόπου (Σχ. 40). Ἡ δέσμη Ο (ΡΜΑΒ) εἶναι ἁρμονική, ἤτοι ἡ ΟΜ εἶναι ἡ συζυγὴς τῆς ΟΡ ὡς πρὸς τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἡ ΟΜ εἶναι ἑπομένως γνωστὴ εὐθεῖα διότι εἶναι γνωσταὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΡ, ΟΑ, ΟΒ. Ὀνομάζομεν δ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ. Κάθε σημεῖον Μ τῆς δ ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, διότι ἂν θεωρήσωμεν τὴν ΡΜ′ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β, ἡ τετρὰς ΡΜ′Α′Β′ εἶναι ἁρμονική, ἤτοι τὸ Μ εἶναι τὸ συζυγὲς τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α′ καὶ Β′ (39).



Σχ. 40

Ἡ εὐθεῖα δ ὀνομάζεται **πολικὴ** τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας α καὶ β.

Σημειοῦμεν ὅτι :

(1) Ἂν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τότε καὶ ἡ εὐθεῖα δ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς.

(2). Ἂν τὸ Ρ εἶναι ἕνα ἐπ' ἄπειρον σημεῖον (36) τοῦ ἐπιπέδου τῶν α καὶ β, ἤτοι ἂν αἱ εὐθεῖαι ΡΑΒ εἶναι τῆς αὐτῆς γνωστῆς δευθύνσεως, ὁ γεωμ. τόπος εἶναι εὐθεῖα διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν α καὶ β (Πρόβλημα 26) ἢ ἡ μεσοπαράλληλος τῶν α καὶ β ὅταν αὗται εἶναι παράλληλοι.

41. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου ἡ συνθήκη εἶναι ἡ :

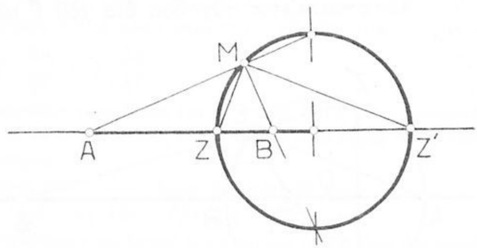
$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

Λύσις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνωτέρω συνθήκην. Θεωροῦμεν (Σχ. 41) τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Μ (ἐσωτερικὴν καὶ ἐξωτερικήν) τοῦ τριγώνου ΑΜΒ καὶ τὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ σημεῖα Ζ καὶ Ζ′ αὐτῶν ἀντιστοίχως. Εἶναι (10) :

$$(1) \quad \frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad (2) \quad \frac{Z'A}{Z'B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$$

'Εκ τούτων ἔπεται ὅτι εἶναι γνωστὰ (7), τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ'. 'Εξ ἄλλου, εἶναι (ΜΖ, ΜΖ') $= \frac{\pi}{2}$. 'Εκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου : τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὸ εὐθ. τμῆμα ΖΖ'.



Σχ. 41

'Αντιστρόφως, κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἀνωτέρω κύκλου ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ Πράγματι, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι σημεῖον Μ τοῦ κύκλου τούτου, ἡ ΜΖ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) τοῦ τριγώνου ΑΜΒ, ἑπομένως ἡ ΜΖ', ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΖ, ἐξωτερικὴ διχοτόμος αὐτοῦ. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ΜΖ δὲν εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) καὶ θεωροῦμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΜΒ' διὰ τὴν ὁποίαν (ΜΖ, ΜΒ') = (ΜΑ, ΜΖ). Οὕτως ἡ ΜΖ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας (ΜΑ, ΜΒ') τοῦ τριγώνου ΑΜΒ', καὶ ἡ ΜΖ', ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΖ, ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ. 'Εκ τούτου ἔπεται (11) ὅτι ἡ τετρὰς ΑΒ'ΖΖ' εἶναι ἁρμονική, ἤτοι ὅτι τὸ συζυγὲς τοῦ Α, ὡς πρὸς τὰ Ζ καὶ Ζ', εἶναι τὸ Β'. Ὅμως τοῦτο εἶναι ἄτοπον διότι, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ συζυγὲς τοῦ Α ὡς πρὸς τὰ Ζ καὶ Ζ' εἶναι τὸ Β καὶ τὸ Α δὲν δύναται νὰ ἔχῃ δύο συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Ζ καὶ Ζ'. Ὥστε ἡ ΜΖ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) καὶ ἑπομένως : $\frac{MA}{MB} = \frac{ZA}{ZB} = \frac{Z'A}{Z'B}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{ZA}{ZB} = \frac{\mu}{\nu}$, θὰ εἶναι : $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Ὁ κύκλος οὗτος, διαμέτρου ΖΖ', ὀνομάζεται **κύκλος τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων** καὶ εἶναι γνωστὸς ὡς **κύκλος τοῦ 'Απολλωνίου** (1)

Σημειοῦμεν ὅτι ἂν $\mu = \nu$, ὅτε εἶναι καὶ ΜΑ = ΜΒ, τότε τὸ εἰς τὴν δοθεῖσαν συνθήκην ἀντιστοιχοῦν σύνολον σημείων εἶναι τῶν τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ σημεῖα Ζ κα Ζ' εἶναι ἀντιστοίχως τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον (36) τῆς εὐθείας ΑΒ.

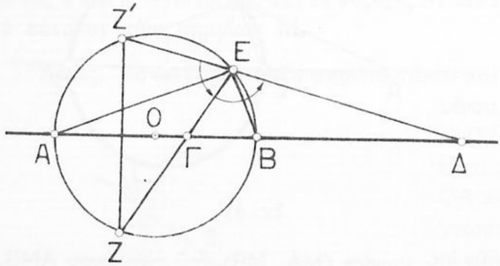
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

42. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Δίδονται ἐπὶ εὐθείας σ τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συζυγὲς Δ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β.**

(1) Ὁ 'Απολλώνιος ὁ Περγαῖος (265 – 170 π.Χ.) ὑπῆρξεν εἷς ἐκ τῶν διασημοτέρων Ἑλλήνων μαθηματικῶν. Εἰς τὸ περίφημον ἔργον του «Κωνικαὶ τομαί» ἐξαντλεῖται ἡ ἐξέτασις τῶν μέχρι καὶ σήμερον γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν Κωνικῶν τομῶν εἰς τὸν Εὐκλείδειον Χῶρον. Καθ' ὅσον εἰδικῶς ἀφορᾷ τὸν ἀνωτέρω κύκλον, ὁ πρῶτος θεωρήσας τοῦτον εἶναι ὁ 'Αριστοτέλης (384 π.Χ.).

Λύσις. Ἕνας πρῶτος τρόπος εὑρέσεως τῆς λύσεως βασίζεται εἰς τὸ θεώρη
7 καὶ τὸν ὁρισμὸν (35). Ὁ κατωτέρω βασίζεται εἰς τὸ Πόρισμα 2 τοῦ ὁρισμ
(35). Ἔστω ὅτι τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

Κατασκευάζεται τυχοῦσα διὰ τοῦ Γ εὐθεῖα. Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ κοι σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς τὸν κύκλον διαμέτρου Α καὶ Ζ′ τὸ συμμετρικὸν τ Ζ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Α Τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῶν ε θειῶν ΑΒ καὶ ΕΖ′ εἶναι ζητούμενον συζυγὲς τοῦ Γ ὡ πρὸς τὰ Α καὶ Β.

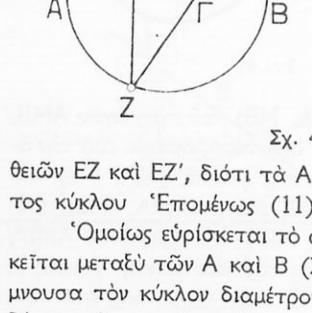


Σχ. 42

Πράγματι, αἱ ΕΑ κ ΕΒ εἶναι ἀντιστοίχως διχ τόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ε θειῶν ΕΖ καὶ ΕΖ′, διότι τὰ Α καὶ Β εἶναι τὰ μέσα τῶν τόξων ΖΖ′ τοῦ θεωρηθέ τος κύκλου Ἑπομένως (11) ἡ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονική.

Ὁμοίως εὑρίσκεται τὸ συζυγὲς Γ τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, ὅταν τὸ Δ δ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β (Σχ. 42) : Κατασκευάζεται τυχοῦσα διὰ τοῦ Δ τ μνουσα τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΒ. Εὑρίσκεται τὸ συμμετρικὸν Ζ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶ δύο κοινῶν σημείων, ἔστω τοῦ Ζ′, ὡς πρὸς τὴν σ καὶ ὁρίζεται τὸ Γ ὡς κοινὸ σημεῖον τῆς εὐθείας σ μὲ τὴν ΕΖ.

43. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ σημείου Ο Νὰ κατασκευασθῇ ἡ συζυγὴς δ τῆς γ ὡς πρὸ τὰς α καὶ β.



Σχ, 43

Λύσις : Ἐκ τοῦ θεωρήματος (39) ἕπεται ἑξῆς σύνθεσις (Σχ. 43) : Κατασκευάζεται τυχοῦ σα παράλληλος πρὸς τὴν α καὶ ἔστωσαν Β κα Ε τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς β καὶ γ. Ἂ εἶναι Ζ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε ὡς πρὸς τὸ Β (ΒΖ = ΒΕ), ἡ εὐθεῖα ΟΖ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν : τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ο′ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ρ τῆς εὐθείας ΟΟ′ μὲ τὰς βάσει ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τετρὰς ΜΡΟΟ′ εἶναι ἁρμονική.

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνθήκη :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{A\Gamma}} + \frac{1}{\overline{A\Delta}}$$

είναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τῆς εὐθείας σ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

3. Θεωροῦμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ ἄξονος σ.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) $\overline{AB}\cdot\overline{\Gamma\Delta}+\overline{A\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}+\overline{A\Delta}\cdot\overline{B\Gamma}=0$

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ἡ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονική, τότε θὰ εἶναι :

$$(2)\quad \frac{\overline{BA}}{\overline{B\Gamma}}=2\,\frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta\Gamma}}$$

Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ ἀνωτέρω (2) συνθήκη εἶναι ἱκανὴ ἵνα ἡ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονική.

4. Θεωροῦμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ ἄξονος σ καὶ ὀνομάζομεν Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν ἡ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονική, τότε θὰ εἶναι :

$$(\alpha)\quad \overline{AB}\cdot\overline{AN}=\overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}\qquad \text{καὶ}\qquad (\beta)\quad \overline{AB}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2=4\cdot\overline{MN}^2$$

(2) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι εἶναι ἱκαναὶ ἵνα ἡ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονική.

5. Θεωροῦμεν τὴν ἁρμονικὴν τετράδα ΑΒΜΝ καὶ τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Α′ εἶναι τὸ συζυγὲς τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Ν καὶ τὸ Β′ τὸ συζυγὲς τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τετρὰς Α′Β′ΜΝ εἶναι ἁρμονική.

6. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος σ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνθήκη :

$$\overline{A\Gamma}\cdot\overline{B\Delta}+\overline{A\Delta}\cdot\overline{B\Gamma}=0$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ὅπως τὰ ἀνωτέρω σημεῖα ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

7. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος σ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Ο αὐτοῦ. Θέτομεν :

$$\overline{OA}=\overline{\alpha},\ \overline{OB}=\overline{\beta},\ \overline{O\Gamma}=\overline{\gamma},\ \overline{O\Delta}=\overline{\delta}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνθήκη :

$$(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\,(\overline{\gamma}+\overline{\delta})=2\,(\overline{\alpha}\ \overline{\beta}+\overline{\gamma}\ \overline{\delta})$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα ἡ τετρὰς ΑΒΓΔ εἶναι ἁρμονική.

8. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι α, β, δ, δ′ τοῦ προβλήματος (29) ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

9. Δίδεται κύκλος (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ καὶ χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ′ τῶν ΜΓ καὶ ΜΔ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἀντιστοίχως, Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Ζ καὶ Ζ′ χωρίζουν ἁρμονικῶς τὴν διάμετρον ΑΒ.

10. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης :

$$\frac{y}{z}=\frac{\beta}{\gamma}$$

ἔνθα y καὶ z αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα δύο εὐθειῶν σ_1 καὶ σ_1' αἱ ὁποῖαι μετὰ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν δέσμην.

(2) Ἔστωσαν Σ_1 καὶ Σ_1' τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν σ_1 καὶ σ_1' ἀντιστοίχως μὲ τὴν ΒΓ (Σ_1 μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ). Ἡ $A\Sigma_1\equiv\sigma_1$ ὀνομάζεται ἐσωτερικὴ **συμμετροδιάμεσος** καὶ ἡ σ_1' ἐξωτερικὴ συμμετροδιάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐκ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ.

Ἡ ἐξωτερικὴ συμμετροδιάμεσος σ_1' τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ κατὰ τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ

(3) Ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$\frac{B\Sigma_1}{\Sigma_1\Gamma}=\frac{B\Sigma_1'}{\Sigma_1'\Gamma}=\frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

(4) Αἱ ἐσωτερικαὶ συμμετροδιάμεσοι αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ.

(5) Δύο ἐξωτερικαὶ συμμετροδιάμεσοι τοῦ τριγώνου, π.χ. αἱ σ_2', σ_3', καὶ ἡ ἐσωτερικὴ σ_1 ἡ διερχομένη διὰ τῆς τρίτης κορυφῆς Α, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ′

11. Θεωροῦμεν δύο κύκλους Ω (r) καὶ Ω′ (r′). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου

Ο τῆς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας τούτων ἀπὸ μιᾶς κοινῆς ἐσωτερικῆς αὐτῶν ἐφαπτομένης εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀποστάσεως ΩΩ′ = δ τῶν κέντρων των.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων ἀπὸ μιᾶς κοινῆς ἐξωτερικῆς αὐτῶν ἐφαπτομένης.

12. Ὀνομάζομεν **κύκλον τοῦ Ἀπολλωνίου** ὡς πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου ΑΒΓ, τὸν κύκλον ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς διάμετρον τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ἔχον ὡς ἄκρα τὰ ἐπὶ τῆς θεωρουμένης πλευρᾶς σημεῖα τῶν διχοτόμων (ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς) τῆς ἀπέναντι γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Οἱ τρεῖς κύκλοι τοῦ Ἀπολλωνίου κάθε τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται διὰ δύο σημείων Ζ καὶ Ζ′.

(2) Οἱ ἀνωτέρω κύκλοι τέμνουν ὀρθογωνίως τὸν κύκλον ΑΒΓ.

(3) Αἱ ἀκτῖνες r_1, r_2, r_3 τῶν κύκλων τοῦ Ἀπολλωνίου συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

13. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ὀνομάζομεν (Ω) κάθε κύκλον ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ φαίνεται ἀπὸ τοῦ Β ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων (Ω).

14. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον (Ω) ἐκ τῶν διερχομένων διὰ τῶν Β καὶ Γ καὶ ὀνομάζομεν Σ καὶ Τ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτοῦ μὲ τὰς ἐφαπτομένας του τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Α, καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΩΑ καὶ ΣΤ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

15. Δίδεται κύκλος (Ο), εὐθεῖα δ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς δ. Θεωροῦμεν : τυχοῦσαν διάμετρον Α′Β′ τοῦ (Ο), τοὺς κύκλους ΟΑΑ′ καὶ ΟΒΒ′ καὶ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ο, κοινὸν σημεῖον Μ τῶν κύκλων τούτων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

16. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐξωτερικῶς κατὰ τὸ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΒ′ τῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως ὥστε :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα, καὶ ὀνομάζομεν Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΒ′ τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

17. Δίδονται δύο κύκλοι Ο (r) καὶ Ο′ (r′). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν κύκλων ἀπὸ ἑκάστου τῶν ὁποίων οἱ ἀνωτέρω κύκλοι φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

18. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς πλευρᾶς ΟΧ (Α μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΟΥ ὥστε ἡ ΜΑ νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΜΟ, ΜΒ).

19. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Α′ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΑ′ ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὰ εὐθ. τμήματα Α′Β καὶ Α′Γ νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

20. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ (Β μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ Γ μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

21. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῆς ε χωρίζοντα ἁρμονικῶς τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ, ὥστε ΜΜ′ = λ. (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

22. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε τέσσαρα σημεῖα Α, Β καὶ Α′, Β′. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς ε τὰ ὁποῖα νὰ χωρίζουν ἁρμονικῶς καὶ τὰ δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α′Β′.

23. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ΜΑ ἀπὸ τοῦ Α νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΜΒ αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας β.

Γενίκευσις εἰς τὰς περιπτώσεις :

(1) Ἡ ΜΒ τέμνει τὴν β ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

(2) Ἀντὶ τῆς συνθήκης $MA = MB$, δίδεται ἡ : $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$,
νθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

24. Δίδεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς ε ὥστε :

$$MN = \lambda \text{ καὶ } \frac{AM}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$$

νθα λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

25. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε τρία σημεῖα Α, Β, Γ (Β μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε, ὥστε :

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma}$$

26. Δίδεται κύκλος (Ο), εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α αὶ Β τῆς ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ὥστε, ἂν εἶναι Γ καὶ Δ τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Μ, οινὰ σημεῖα τοῦ (Ο) μὲ τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΜΓ = ΜΔ (νὰ εἶναι σαι αἱ χορδαὶ ΜΓ καὶ ΜΔ).

27. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ σημείου Ο καὶ ἕνα ημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε διὰ τοῦ Ρ ὥστε, ἂν εἶναι Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς ὲ τὰς α, β, γ ἀντιστοίχως, ἡ τετρὰς ΡΑΒΓ νὰ εἶναι ἁρμονική.

28. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ ατασκευασθῇ, διὰ τῆς ἀποκλειστικῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανόνος, ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη ιὰ τοῦ Ρ καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν α καὶ β, χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ σημείου Ο.

29. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ πολικὴ δοθέντος σημείου Ρ ὡς πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας α καὶ β ὲ τὴν ἀποκλειστικὴν χρησιμοποίησιν τοῦ κανόνος.

30. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δ κάθετος ἐπὶ τὰς α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu},$$

νθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα

31. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) $\alpha, A, \frac{\beta}{\gamma}$ (2) α, υ_1 (ἢ δ_1 ἢ μ_1), $\frac{\beta}{\gamma}$

(3) $A, \beta + \gamma, \alpha + \gamma$ (4) $\upsilon_1, \mu_1, \frac{\beta}{\gamma}$

(5) $\alpha, B, \frac{\beta}{\gamma}$ (6) $\alpha, \frac{\beta}{\gamma}, B - \Gamma$

(7) $\alpha, \frac{\beta}{\gamma}, \upsilon_2$ (8) $\frac{\alpha}{\beta}, \upsilon_1, \mu_1$

(9) $\frac{\beta}{\gamma}, \upsilon_1, \mu_1$

(10) $\alpha, B, \gamma + \nu\beta = \lambda$ (ν δοθεὶς φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα)

(11) $\alpha, B, \gamma - \nu\beta = \lambda$. (12) $B - \Gamma, \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \delta_1$

(13) $A, \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \delta_1$ (14) δ_1, ρ, ρ_1

(15) Σημεῖα : H_1, O_1, I_1

(16) B, δ_1, ἀπόστασις $\Gamma K = \lambda$ τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας $A\Delta_1$.

(17) $A, \frac{\beta}{\gamma}, r$ (18) A, r, συνθήκη : $\frac{2}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

(19) $\alpha, \frac{\beta}{\gamma}, r$ (20)

32. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ, δ αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕ ΤΟΥΤΟ ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

44. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ γινόμενον εὐθ. τμήματος α ἐπὶ εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς αὐτὸ ὀνομάζεται *τετράγωνον* τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος α. Συμβολικῶς : α^2

Συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα (2) ὁρισμὸν τοῦ γινομένου δύο εὐθ. τμημάτων, τὸ α^2 εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον σ(ι).

Ἕνα εὐθ. τμῆμα ὀνομάζεται *μέση ἀνάλογος* δύο ἄλλων ἢ *γεωμετρικὸς μέσος* αὐτῶν, ὅταν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων.

45. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὕψος ΑΑ′ ὀρθογωνίου κατὰ τὴν γωνίαν Α τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὑποτείνουσαν, εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν εὐθ. τμημάτων Α′Β καὶ Α′Γ. Ἤτοι :

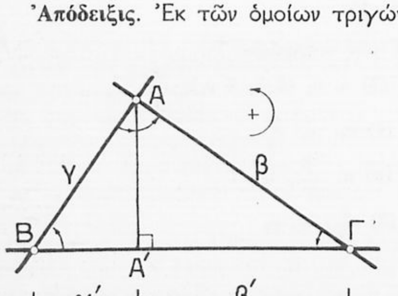
$$(1)\quad AA'^2 = A'B \cdot A'\Gamma \text{ [1]}$$

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΑΑ′ (7) ἔχομεν ὅτι :

$$\frac{AA'}{A'\Gamma} = \frac{A'B}{AA'},\ \text{ἤτοι: } AA'^2 = A'B \cdot A'\Gamma,$$

καὶ ἂν θέσωμεν: $AA' = \upsilon$, $A'B = \gamma'$, $A'\Gamma = \beta'$:

$$\upsilon^2 = \beta' \cdot \gamma'$$



Σχ. 45

Ἂν ἡ εὐθεῖα ΒΓ εἶναι προσανατολισμένη, ἀντὶ τῆς (1) θὰ ἔχωμεν τήν : $\overline{AA'}^2 = -\overline{A'B} \cdot \overline{A'\Gamma}$, ἤ :

$$(2)\quad \overline{AA'}^2 = \overline{BA'} \cdot \overline{A'\Gamma}.$$

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἡ ἀνωτέρω (2) συνθήκη εἶναι ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ (Α′ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ). Πράγματι, ἐκ τῆς ἀνωτέρω (2) ἕπεται ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα $\overline{BA'}$ καὶ $\overline{A'\Gamma}$ εἶναι ὁμόσημα καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ σημεῖον Α′ κεῖται με-

(1) Τὰ εὐθ. τμήματα Α′Β καὶ Α′Γ ὀνομάζονται καὶ **προβολαὶ** τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Γενικώτερον ὀνομάζομεν **προβολὴν** εὐθ. τμήματος ΑΒ ἐπὶ εὐθεῖαν σ, τὸ εὐθ. τμῆμα Α′Β′ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα Α′ καὶ Β′ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν σ.

ταξὺ τῶν Β καὶ Γ. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς αὐτῆς, ἐν τῇ ὑποθέσει, συνθήκης (1) γραφομένης ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας, τῆς:

$$\frac{AA'}{A'\Gamma} = \frac{A'B}{AA'}$$

ἕπεται (16) ὅτι εἶναι ὅμοια τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΑ' καὶ ΓΑΑ' Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ὅτι : (ΒΓ, ΒΑ) = (ΑΑ', ΑΓ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = (ΑΒ, ΑΑ'), καὶ ἐκ τούτων, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, ὅτι : Β + Γ = Α, ἤτοι τὸ ἀποδεικτέον.

46. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὴν προβολὴν Α' τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἑκάστη κάθετος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἐκ τῶν εὐθ. τμημάτων Α'Β, Α'Γ προσκειμένου πρὸς τὴν θεωρουμένην κάθετον πλευράν.

Ἤτοι (Σχ. 46) :

(1) $\gamma^2 = \alpha \cdot A'B$ καὶ (2) $\beta^2 = \alpha \cdot A'\Gamma$ ἢ $\gamma^2 = \alpha\gamma'$ καὶ $\beta^2 = \alpha\beta'$

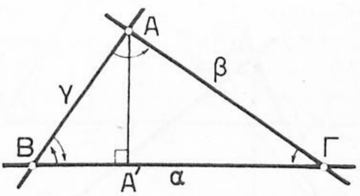
Ἐθέσαμεν : $A'B = \gamma'$ καὶ $A'\Gamma = \beta'$.

Ἀπόδειξις. Τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'ΒΑ, ὡς καὶ τῶν ἐπίσης ἀντιρρόπως ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'ΑΓ.

Πράγματι, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΑ εἶναι (7) ἀντιρρόπως ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀντιστοίχως ἀντιθέτους. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῆς ἕπεται(Σχ. 46) ὅτι :

$\frac{BA'}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$, καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ ἀποδεικτέα :

$$\gamma^2 = \alpha \cdot BA'$$



Σχ. 46

Ἂν ἡ εὐθεῖα ΒΓ θεωρηθῇ προσανατολισμένη, ἀντὶ τῆς (1) θὰ ἔχωμεν τήν :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BA'}.\ \overline{B\Gamma}$$

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη : $\overline{AB}^2 = \overline{BA'} \cdot \overline{B\Gamma}$ εἶναι ἱκανὴ ἵνα ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ (Α' ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ). Πράγματι, ἐκ τῆς συνθήκης ταύτης ἕπεται ὅτι τὰ $\overline{BA'}$ καὶ $\overline{B\Gamma}$ εἶναι ὁμόσημα, ἤτοι ὅτι τὸ Α' κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Γ. Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῆς ἀνωτέρω, ἐν τῇ ὑποθέσει, συνθήκης γραφομένης ὑπὸ μορφήν, ἀναλογίας, τῆς :

$$\frac{BA'}{AB} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

ἕπεται, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι κοινὴ γωνία τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'ΒΑ, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια, καὶ ἐπειδὴ τὸ δεύτερον εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν (Α'Β, Α'Α) αὐτοῦ, τὸ πρῶτον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὸν ὁμόλογον τῆς ἀνωτέρω γωνίας, ἤτοι κατὰ τὴν γωνίαν (ΑΒ, ΒΓ) τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς ὁμολόγου ΒΓ τῆς ΒΑ.

Ὁμοίως, ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'ΑΓ, ἀποδεικνύεται ὅτι : Ἂν ἡ γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ ὀρθή, θὰ ἰσχύῃ ἡ :

$$(2) \quad \beta^2 = \alpha .\, A'\Gamma$$

καὶ ὅτι ἡ συνθήκη :

$$\overline{\Gamma A}^2 = \overline{\Gamma A'} \cdot \overline{\Gamma B}$$

εἶναι ἱκανὴ ἵνα ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ (Α' ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ) εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ.

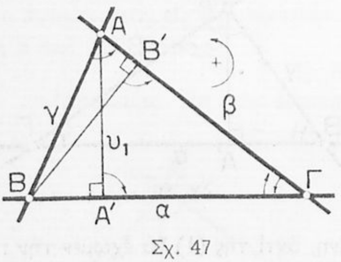
47. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ, τότε :

$$(1) \quad \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_1,$$

ἔνθα υ_1 τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος αὐτοῦ. Ἀντιστρόφως :

Ἂν εἷς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύῃ ἡ (1), τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΑΓ εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια (αἱ ὀρθαὶ γωνίαι αὐτῶν ὡς καὶ αἱ γωνίαι Γ εἶναι ἀντίθετοι). Ἑπομένως (7) : $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\upsilon_1}{\gamma}$, ἤτοι :



Σχ. 47

$$(1) \quad \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_1$$

Ἐξ ἄλλου, ἂν εἷς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύῃ ἡ(1), ἐνῷ τὸ Α' εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἡ γωνία Α αὐτοῦ ἀποδεικνύεται ὀρθή.

Πράγματι, ἡ μία τουλάχιστον τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τῶν τριγώνυ ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα. Ἔστω ὅτι ἡ Γ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ προβολὴ Α' τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Β. Θεωροῦμεν τὸ ὕψος ΒΒ'. Τὸ σημεῖον Β' κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α, διότι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα. Τὰ τρίγωνα Α'ΑΓ καὶ Β'ΒΓ εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια, διότι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι καὶ αἱ γωνίαι Γ αὐτῶν καὶ ἀντίθετοι. Ἐκ τούτων ἕπεται (7) ὅτι :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \quad \text{ἤτοι : } \beta \cdot \upsilon_2 = \alpha \,.\, \upsilon_1$$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν συνθήκης: $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_1$, ἕπεται ὅτι : $\beta\gamma = \beta \cdot \upsilon_2$, καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι: $\gamma = \upsilon_2$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι ἡ κορυφὴ Α συμπίπτει μὲ τὴν Β', ἤτοι ὅτι ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀρθή.

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα ἀγόμεθα, ὁμοίως, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία

τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ὀξεῖα. Ὥστε ἡ συνθήκη (1) : $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_1$ εἶναι ἀναγ-
καία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γω-
νίαν Α αὐτοῦ.

8. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ, τότε τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν του.**

Συμβολικῶς : $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΓΑ^2$, ἢ : (1) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Ἀντιστρόφως :

Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύῃ ἡ (1), τότε τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ, τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α αὐτοῦ.

Ἤτοι : $A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (1)

Ἡ συνθήκη (1) εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ) (2).

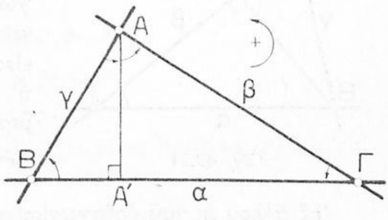
Ἀπόδειξις 1. Ἔστω ὅτι $(AB, AΓ) = \frac{\pi}{2}$ (π ἡ εὐθεῖα γωνία). Ἡ προβολὴ Α′ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, διότι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι. Ἐκ τῶν :

$\gamma^2 = \alpha \cdot BA'$ καὶ $\beta^2 = \alpha \cdot A'Γ$ (46),

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν :

$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha(BA' + A'Γ) \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$,

διότι $BA' + A'Γ = BΓ \equiv \alpha$.



Σχ. 48

2. Ἔστω ὅτι εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ (1) : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν (Α′Υ, Α′Ζ) καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν Α′Υ καὶ Α′Ζ αὐτῆς ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ ὥστε : $A'B' = AB \; (= \gamma)$ καὶ $A'Γ' = AΓ (= \beta)$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Α′Β′Γ′ ἔχομεν : $B'Γ'^2 = A'B'^2 + Γ'A'^2$, ἤτοι $B'Γ'^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς ὑποθέσεως : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ προκύπτει ὅτι : $B'Γ' = \alpha$. Τὰ τρίγωνα, ἑπομένως, ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται

---

(1) Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα (572 - 501 π.Χ.)

Ὁ Πυθαγόρας, ἐκ τῶν μεγαλυτέρων σοφῶν ὅλων τῶν ἐποχῶν, ἐγεννήθη εἰς τὴν Σάμον, μεταναστεύσας περὶ τὴν ἀκμὴν τῆς ἡλικίας του εἰς Κρότωνα τῆς Κάτω Ἰταλίας. Κατὰ τὴν Πυθαγόρειον φιλοσοφίαν οἱ ἀριθμοὶ ἐμφανίζονται ὡς ἡ ἀρχὴ τῶν ὄντων. Ἡ ἀνεξάρτητως πάσης ἐμπειρίας, ἀλλὰ μόνον διὰ τῆς καθαρᾶς νοήσεως, γνῶσις τῶν ἀριθμῶν ὁδηγεῖ εἰς ἕνα Κόσμον μὴ δυνάμενον νὰ νοηθῇ διὰ τῶν αἰσθήσεων, ἀλλὰ αἰώνιον καὶ ἀμετάβλητον καὶ διὰ τὸν λογον τοῦτον ἅγιον καὶ θεῖον. Αἱ ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἀναλογίαι καὶ ἡ σχέσις τούτων μὲ τὴν Γεωμετρίαν καὶ τὴν Τέχνην, ἰδία δὲ μὲ τὴν Μουσικήν, δίδουν τὸ μέτρον τῆς σημασίας τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὴν Δημιουργίαν.

(2) Κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι τριῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὠνομάσθη *Πυθαγόρειον* τρίγωνον.

ὅτι: $(AB, A\Gamma) = (A'B', A'\Gamma')$, ἤτοι ὅτι: $(AB, A\Gamma) = \frac{\pi}{2}$, διότι ἐξ ὑποθέσεως :

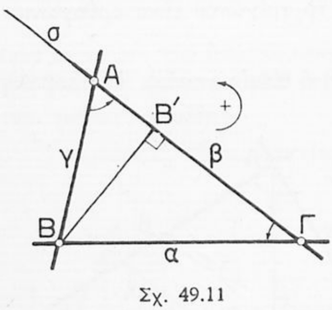
$(A'B', \ A'\Gamma') = \frac{\pi}{2}$.

49. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ τετράγωνον πλευρᾶς αὐτοῦ κειμένης ἀπέναντι ὀξείας (ἀμβλείας) γωνίας του, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ, ἠλαττωμένον (ηὐξημένον) κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων ἐπὶ τὴν ὀρθὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν περιέχουσαν τὴν πρώτην.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $B\Gamma$ ($\equiv \alpha$) ἡ θεωρουμένη πλευρὰ (Σχ. 49.11). Θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \pm 2\beta \cdot AB',$$

ἔνθα AB' ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς πλευρᾶς AB ($\equiv \gamma$) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν σ τὴν περιέχουσαν τὴν πλευρὰν $A\Gamma$ ($\equiv \beta$).



Σχ. 49.11

Θεωροῦμεν τὰς δύο περιπτώσεις :

1. Ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα. Ἂν καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα (Σχ. 49.11), τὸ σημεῖον B' κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ λόγῳ τούτου θὰ εἶναι: $A\Gamma = AB' + B'\Gamma$, ἤτοι $\beta = AB' + B'\Gamma$ ἢ : $B'\Gamma = \beta - AB'$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν) :

$$(1)\quad B'\Gamma^2 = \beta^2 + AB^2 - 2\beta \cdot AB'.$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $BB'\Gamma$ ἔχομεν (47).

$$(2)\quad \alpha^2 = BB'^2 + B'\Gamma^2,$$ καὶ λόγῳ τῆς (1) :

$$\alpha^2 = BB'^2 + \beta^2 + AB'^2 - 2\beta \cdot AB'$$

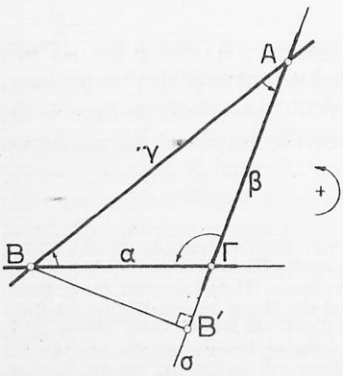
Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ABB' ἔχομεν (47) :

$$BB'^2 + AB'^2 = AB^2 \ (\equiv \gamma^2).$$

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἑπομένως σχέσεως ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AB',$$

ἤτοι τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν.



Σχ. 49.12

Ἂν ἡ γωνία Γ εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 49.12) τότε τὸ σημεῖον B' κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Α, καὶ ἑπομένως : $B'\Gamma = AB' - \beta$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν :

$$(1)\quad B'\Gamma^2 = AB'^2 + \beta^2 - 2\beta AB'.$$

Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς : $\alpha^2 = BB'^2 + B'\Gamma^2$ εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅτι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AB'$

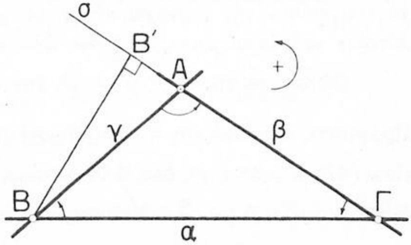
Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐκ τῆς : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AB'$ ἕπεται ὅτι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Ἑπομένως πεδείχθη ἡ πρότασις :

$$A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$

2. Ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα. Ἡ προβολὴ Β′ τοῦ Β ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ Σχ. 49.2) κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυή Γ καὶ ἑπομένως : $B'\Gamma = A\Gamma + AB'$ ἤτοι : $B'\Gamma = \beta + AB'$. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν:

(1) $B'\Gamma^2 = \beta^2 + AB'^2 + 2\beta \cdot AB'$.



Σχ. 49.2

Ἀλλὰ εἶναι καὶ (2): $B\Gamma^2 = B'\Gamma^2 + BB'^2$, Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ ῆς (1) ἔχομεν :

$\alpha^2 = \beta^2 + AB'^2 + 2\beta \cdot AB' + BB'^2$,

αὶ ἐπειδή:

$AB'^2 + BB'^2 = AB^2 (\equiv \gamma^2)$, θα ἔχωμεν : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AB'$, ἤτοι τὴν ἀποδεικτέαν.

Σημειοῦμεν ὅτι ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέεως ἕπεται ὅτι : $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, ἤτοι ἀπεδείχθη ὅτι :

$$A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$$

Σημειοῦμεν ἐπίσης :

1. Εἴτε ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ)͘ εἶναι ὀξεῖα εἴτε εἶναι ἀμβλεῖα, ἔχομεν :

$$\alpha^2 = BB'^2 + B'\Gamma^2 \text{ καὶ } BB' = AB^2 - AB'^2$$

ιὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω καὶ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

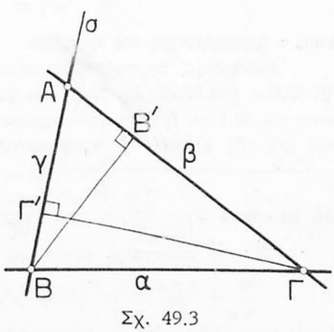
$$(1)\ \alpha^2 = AB^2 + B'\Gamma^2 - AB'^2$$

Ἐξ ἄλλου, ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ($\equiv \sigma$) θεωρηθῆ προσανατολισμένη, τότε, ἀνεξαρτήτως οῦ ἐπ' αὐτῆς θεωρουμένου προσανατολισμοῦ καὶ τῆς θέσεως τοῦ Β′ ὡς πρὸς ὰ Α καὶ Γ (ἤτοι τῆς ἐπὶ τῆς σ διατάξεως τῶν σημείων Α, Γ, Β′), θὰ ἔχωμεν :

$\overline{A\Gamma} = \overline{AB'} + \overline{B'\Gamma}$ (Chasles - Möbius)

ἤτοι : $\overline{B'\Gamma} = \overline{A\Gamma} - \overline{AB'}$, καὶ ἑπομένως (ἐπιεριστικὴ ἰδιότης) :

(2) $\overline{B'\Gamma}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{AB}'^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB}'$



Σχ. 49.3

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$\alpha^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB}'$, ἤτοι :

(3) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB}'$ (1).

Τὸ γινόμενον $\overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB}'$ εἶναι θετικόν, μηδενικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον ἡ γωνία Α τοῦ τριγώου εἶναι ἀντιστοίχως ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

(1) Ἡ σχέσις αὐτὴ δύναται νὰ γραφῆ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$ συν Α, ἀνεξαρτήτως τῆς γωνίας Α.

Ἡ σχέσις (3) ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ σχέσις :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma'},$$

ἐκ τῆς ὁποίας καὶ τῆς ἀποδειχθείσης (3) προκύπτει (Σχ. 49.3) ἡ :

$$\overline{A\Gamma} \cdot \overline{AB'} = \overline{AB} \cdot A\Gamma'$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Οἱασδήποτε γωνία τριγώνου εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, καθ' ὅσον τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.*

Οὕτως, ἐκ τῆς $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, ἕπεται ὅτι: $A < \frac{\pi}{2}$, (π ἡ εὐθεῖα γωνία).

Πράγματι, ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις $A = \frac{\pi}{2}$, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι (47) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Ἐπίσης ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις $A > \frac{\pi}{2}$, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν (Σχ. 49.2) εἶναι (49): $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\, AB'$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Ἀπεδείχθη ἑπομένως ἡ πρότασις:

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow A < \frac{\pi}{2}.$$

Ἐκ τῆς προτάσεως αὐτῆς καὶ τῆς ἀποδειχθείσης (49) :

$$A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \text{ ἔχομεν ὅτι :}$$

$$A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ : $A > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$

ΥΨΗ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

50. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὕψος υ_1 τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν α αὐτοῦ, δίδεται ἐκ τῆς ἰσότητος:

$$\upsilon_1^2 = \frac{4\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\alpha^2}\text{(1)}$$

ἔνθα τ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΑ'Β ἔχομεν (48) : (1) $\upsilon_1^2 = \gamma^2 - A'B^2$. Ἐξ ἄλλου, εἴτε ὀξεῖα (Σχ. 50.1) εἴτε ἀμβλεῖα (Σχ. 50.2) εἶναι ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου (οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Α' ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ), θὰ ἔχωμεν (49), ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ προσανατολισμοῦ :

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\overline{B\Gamma} \cdot \overline{BA'}$$

καὶ ἑπομένως ὅτι : $\overline{BA'} = \dfrac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\overline{B\Gamma}}$.

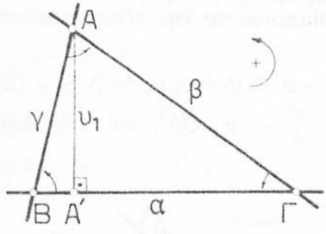
Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς (1) εὑρίσκομεν :

$$(2) \quad \upsilon_1^2 = \gamma^2 - \frac{(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2}$$

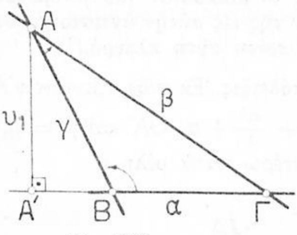
---

(1) Διὰ τοῦ δευτέρου μέλους παρίσταται συμβολικῶς τὸ γινόμενον τῶν εὐθ. τμημάτων $\lambda = \dfrac{4\tau\,(\tau-\alpha)}{\alpha}$ καὶ $\mu = \dfrac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\alpha}$.

Εκ τῆς ἀνωτέρω ἔχομεν τὸ ὕψος $υ_1$ τοῦ τριγώνου διὰ τῶν πλευρῶν α, β, γ αὐτοῦ.



Σχ. 50.1



Σχ. 50.2

Ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀνωτέρω (2). Πράγματι :

Ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν : $υ_1^2 = \dfrac{4α^2γ^2 - (γ^2 + α^2 - β^2)^2}{4α^2}$

Ἂν θέσωμεν $α + β + γ = 2τ$ εὑρίσκομεν :
$β + γ - α = 2τ - 2α$, ἤτοι: $β + γ - α = 2(τ - α)$, καὶ ὁμοίως : $γ + α - β = 2(τ - β)$,
$α + β - γ = 2(τ - γ)$.

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $4α^2γ^2 - (γ^2 + α^2 - β^2)^2$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον :
$(α + β + γ)\ (β + γ - α)\ (γ + α - β)\ (α + β - γ)$, θὰ ἔχωμεν :

$$υ_1^2 = \frac{4τ\ (τ - α)\ (τ - β)\ (τ - γ)}{α^2}$$

Σημειοῦμεν ὅτι διὰ κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν $υ_1$, α, β, γ εὑρίσκονται αἱ σχέσεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰ ὕψη $υ_2$ καὶ $υ_3$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

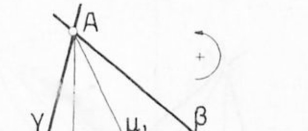
ΔΙΑΜΕΣΟΙ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

51. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέσου αὐτοῦ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν τρίτην πλευράν του, αὐξηθὲν κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ταύτης.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $β > γ$. Θὰ εἶναι : (ΟΓ, ΟΑ) > (ΟΑ, ΟΒ) καὶ ἑπομένως ἡ γωνία (ΟΓ, ΟΑ) εἶναι ἀμβλεῖα καὶ ἡ (ΟΑ, ΟΒ) ὀξεῖα.

Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΓ καὶ ΒΟΑ ἔχομεν (48) ἀντιστοίχως, θέτοντες $ΑΟ = μ_1$ καὶ $ΟΒ = ΟΓ = \dfrac{α}{2}$:

$β^2 = μ_1^2 + \dfrac{α^2}{4} + α \cdot ΟΑ'$ (Α′ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ) $γ^2 = μ_1^2 + \dfrac{α^2}{4} - α \cdot ΟΑ'$



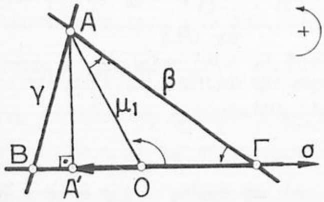
Σχ. 51

καὶ ἐκ τούτων διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη : (1) $β^2 + γ^2 = 2μ_1^2 + \dfrac{α^2}{2}$

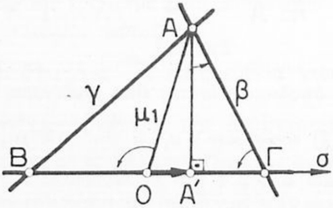
Διὰ κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων, εὑρίσκονται αἱ δύο ἄλλαι σχέσεις, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διαμέσους $μ_2$ καὶ $μ_3$.

52. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ὀρθὴν προβολὴν τῆς εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχούσης διαμέσου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ τρίτη αὕτη πλευρά.(1)

Ἀπόδειξις Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΓ καὶ ΒΟΑ ἔχομεν, ἂν $\beta > \gamma$ (Σχ. 52.): $\beta^2 = \mu_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} + \alpha \cdot OA'$ καὶ $\gamma^2 = \mu_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \cdot OA'$, καὶ δι' ἀφαιρέσεως, τῶν ἀνωτέρω κατὰ μέλη :



Σχ. 52.1



Σχ. 52.2

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot OA'$$

Ἂν $\beta < \gamma$, (Σχ. 52.2) ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι :

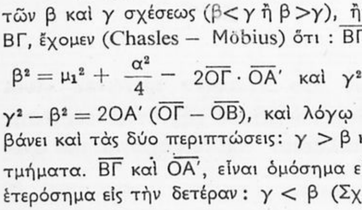
$$\gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha \cdot OA'.$$

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἡ εὐθεῖα ΒΓ θεωρηθῇ ὁπωσδήποτε προσανατολισμένη τότε, ἀνεξαρτήτως τῆς μεταξὺ τῶν β καὶ γ σχέσεως ($\beta < \gamma$ ἢ $\beta > \gamma$), ἤτοι τῆς διατάξεως τῶν σημείων Β, Γ, Α' ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΒΓ, ἔχομεν (Chasles – Möbius) ὅτι : $\overline{B\Gamma} = \overline{BO} + \overline{O\Gamma}$ ἢ (1) $\overline{B\Gamma} = \overline{O\Gamma} - \overline{OB}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι (49):

$\beta^2 = \mu_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 2\overline{O\Gamma} \cdot \overline{OA'}$ καὶ $\gamma^2 = \mu_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 2\,\overline{OB} \cdot \overline{OA'}$ καὶ ἐπομένως :

$\gamma^2 - \beta^2 = 2OA'\,(\overline{O\Gamma} - \overline{OB})$, καὶ λόγῳ τῆς (1) : $\gamma^2 - \beta^2 = \overline{2B\Gamma} \cdot \overline{OA'}$ Ἡ ἀνωτέρω περιλαμβάνει καὶ τὰς δύο περιπτώσεις: $\gamma > \beta$ καὶ $\gamma < \beta$, δοθέντος ὅτι τὰ προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα. $\overline{B\Gamma}$ καὶ $\overline{OA'}$, εἶναι ὁμόσημα εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν : $\gamma > \beta$ (Σχ. 52.2) καὶ ἑτερόσημα εἰς τὴν δετέραν : $\gamma < \beta$ (Σχ. 52.1).



Σχ. 52.3

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὰς διχοτόμους τοῦ τριγώνου, αἱ σχετικαὶ σχέσεις εἶναι αἱ εἰς τὸ κεφάλαιον Ι, παραγρ. (25), ἀναφερόμεναι.

Γενικώτερον, σημειοῦμεν τὰ κάτωθι :

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ, (Σχ. 51.3) ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ (2) x τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΜ εὑρίσκεται ἐκ τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου.

Πράγματι ἐκ τῶν τριγώνων ΑΜΓ καὶ ΒΜΑ ἔχομεν ἀντιστοίχως (49) :

$\beta^2 = x^2 + \beta'^2 + 2\beta' \cdot MH$ καὶ $\gamma^2 = x^2 + \gamma'^2 - 2\gamma' \cdot MH$

ἔνθα ΜΗ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΗ καὶ β', γ' αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν ΜΓ, ΒΜ ἀντιστοίχως.

(1) Ὁπωσδήποτε προσανατολισθεῖσα.

(2) Βλέπε σχετικὴν σημείωσιν ἐν Κεφαλαίῳ Ι, παραγρ. (4)

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ ΜΗ, εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$(1)\quad \beta^2 \cdot \gamma' + \gamma^2 \cdot \beta' = \alpha\,(x^2 + \beta'\gamma')\ (^1)$$

Ἂν τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου, ἤτοι ἂν $M \equiv \Delta$, θὰ ἔχωμεν (12) : $\beta' = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ καὶ $\gamma' = \dfrac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$, καὶ ἐκ τῆς (1):

$$\delta_1^{\,2} = \beta\gamma - \beta'\gamma'$$

Διὰ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον δ'_1 εὑρίσκομεν, ὁμοίως :

$$\delta'^{\,2}_1 = \beta''\gamma'' - \beta\gamma$$

ἔνθα $\beta'' \equiv B\Delta_1'$, καὶ $\gamma'' \equiv \Delta'_1\Gamma$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

53. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῆ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης :

$$(1)\quad MA^2 + MB^2 = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

Λύσις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τοῦ συνόλου καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 53). Ἐκ τῆς προτάσεως (50) ἔχομεν :

$$MA^2 + MB^2 = 2\,OM^2 + \frac{AB^2}{2}$$

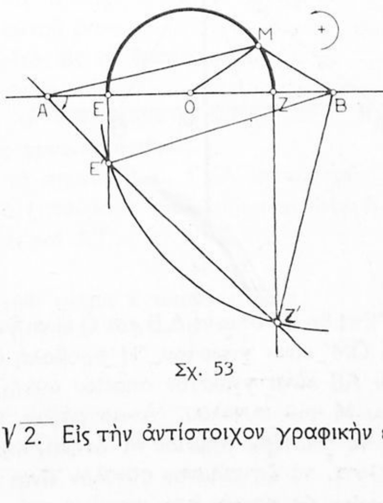
Ἡ συνθήκη (1) εἶναι, ἑπομένως, ἰσοδύναμος πρὸς τήν :

$$2OM^2 + \frac{AB^2}{2} = \lambda^2$$

ἢ τὴν :

$$4OM^2 = 2\lambda^2 - AB^2 \quad ἢ \quad OM^2 = \frac{2\lambda^2 - AB^2}{4}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τοῦ Ο εἶναι σταθερά, ἤτοι ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου : τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα $OM = r$ ὁριζομένην ἐκ τῆς (2). Ὁ κύκλος οὗτος, θεωρούμενος ὡς φορεὺς τῶν σημείων του, εἶναι τὸ εἰς τὸ ἀνωτέρω (1) σύνολον ἀνταποκρινόμενον γεωμετρικὸν σχῆμα.



Σχ. 53

Σημειοῦμεν ὅτι διὰ νὰ ὑπάρχῃ ὁ κύκλος οὗτος πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $2\lambda^2 \geqslant AB^2$, ἤτοι νὰ ὑπάρχῃ τὸ ὀρθογώνιον $2\lambda^2 - AB^2$ ἤ, ὅπως συμβολικῶς σημειοῦμεν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι : $AB \leqslant \lambda\sqrt{2}$. Εἰς τὴν ἀντίστοιχον γραφικὴν εἰκόνα

(1) M. Stewart (1717-1785)

(Σχ. 53) ἐμφανίζεται ἡ κατασκευὴ τῶν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημείων Ε κα Ζ τοῦ εὑρεθέντος κύκλου :

Κατασκευάζεται μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ πρώτην πλευρὰν τὴν ΑΒ, ἡ γωνία $(AB, AX) = \frac{\pi}{4}$, καὶ ὁ κύκλος κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος λ καὶ εὑρίσκονται τὰ κοινὰ σημεῖα Ε′ καὶ Ζ′ τοῦ κύκλου τούτου μετὰ τῆς ΑΧ. Τὰ Ε καὶ Ζ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν Ε′ καὶ Ζ′ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Πράγματι, ἔχομεν :

$EE'^2 + EB^2 = \lambda^2$ καὶ $ZZ'^2 + ZB^2 = \lambda^2$.

Ἀλλὰ $EE' = AE$ καὶ $ZZ' = ZA$. Οὕτω, τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἱκανοποιοῦν τὴν (1), ἤτοι εἶναι τὰ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖα τοῦ συνόλου.

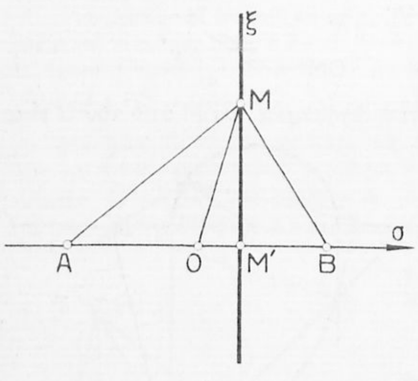
Ἂν $AB = \lambda\sqrt{2}$, τὸ ἐκ τῆς (1) ὁριζόμενον σύνολον περιέχει ἕνα μόνον σημεῖον : τὸ Ο.

54. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

$$(1) \qquad MA^2 - MB^2 = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

Λύσις. Ἔστω Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, Μ ἕνα στοιχεῖον τοῦ συνόλου καὶ Μ′ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.



Σχ. 54

Ἵνα ἕνα σημεῖον Μ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἱκανοποιῇ τὴν (1).

Ἔχομεν ὅμως (52) :

$$(2) \qquad MA^2 - MB^2 = 2\overline{A} \cdot \overline{OMB'}$$

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἐπὶ τῆς ὁποίας θεωροῦνται τὰ προσημασμένα (προσανατολισμένα) εὐθ. τμήματα $\overline{AB}$ καὶ $\overline{OM'}$, θεωρεῖται ὁπωσδήποτε προσανατολισμένη.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι ἵνα τὸ σημεῖον Μ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι : $2\overline{AB} \cdot \overline{OM'} = \lambda^2$, ἤτοι, ἀφοῦ $AB \neq 0$:

$$\overline{OM'} = \frac{\lambda^2}{2\,\overline{AB}}$$

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α,Β καὶ Ο εἶναι γνωστά, ὡς καὶ τὸ γινόμενον λ^2, τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{OM'}$ εἶναι γνωστόν. Ἡ προβολὴ ἑπομένως Μ′ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἶναι γνωστὸν σημεῖον αὐτῆς, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρουμένου σημείου Μ τοῦ συνόλου. Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Μ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ ἀνωτέρω σημεῖον Μ′ ἀνήκει, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, εἰς τὸ σύνολον. Ὥστε, τὸ ζητούμενον σύνολον εἶναι ἡ ἀνωτέρω κάθετος ξ, ἐπὶ τὴν ΑΒ, θεωρουμένη ὡς φορεὺς τῶν σημείων τοῦ συνόλου (1).

Σημειοῦμεν ὅτι :

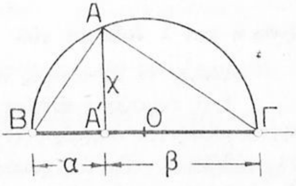
1. Ἂν $\lambda^2 = 0$, θὰ εἶναι καὶ $\overline{OM'} = 0$, καὶ ἑπομένως τὸ εἰς τὴν συνθήκην (1) ἀνταποκρινόμενον σχῆμα εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ τμήματος AB.

2. Ἂν $\lambda^2 \neq 0$, δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ προσανατολισμὸς τῆς εὐθείας AB ($\equiv \sigma$) ὁρίζεται ἐκ τοῦ εὐθ. τμήματος $\overline{AB}$ καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ πρόσημον τοῦ εὐθ. τμήματος $\overline{AB}$ εἶναι τὸ $+$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ γινόμενον λ^2 καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{OM'} = \dfrac{\lambda^2}{2\,\overline{AB}}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον. Τὸ σημεῖον M′, προβολὴ τοῦ M ἐπὶ τὴν AB, κεῖται, κατὰ συνέπειαν, πρὸς τὸ μέρος τοῦ O πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ B ἂν $MB < MA$, ἢ πρὸς τὸ μέρος τοῦ O πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ A ἂν $MA < MB$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

55. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα α καὶ β. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μέση ἀνάλογος τούτων.

Λύσις. Ἐν προκειμένῳ ζητεῖται εὐθ τμῆμα x ὥστε : $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{x}{\beta}$ ἢ $x^2 = \alpha\beta$. Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ε ὁρίζονται τὰ σημεῖα B καὶ A′ ὥστε $BA' = \alpha$, καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ A′ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ B, τὸ σημεῖον Γ ὥστε $A'\Gamma = \beta$. Κατασκευάζεται ὁ κύκλος (O) διαμέτρου BΓ καὶ ἡ διὰ τοῦ A′ κάθετος ἐπὶ τὴν BΓ. Ἔστω A τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς καθέτου αὐτῆς μὲ τὸν κύκλον (O). Τὸ εὐθ. τμῆμα AA′ εἶναι τὸ ζητούμενον (45). Ἕνας ἄλλος τρόπος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα (46) καὶ ἕνας τρίτος εἰς τὸ θεώρημα (23).



Σχ. 55

56. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθ. τμῆμα x ὥστε : $x^2 = \mu \cdot \alpha^2$ (1) ἔνθα α δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ μ δοθεὶς φυσικὸς ἀριθμός.

Λύσις. Ὁρίζονται ἐπὶ εὐθείας ε τὰ σημεῖα B,A′, Γ (A′ μεταξὺ τῶν B καὶ Γ) ὥστε $BA' = \alpha$ καὶ $A'\Gamma = \mu \cdot \alpha$. Τὸ ζητούμενον εὐθ. τμῆμα x εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν εὐθ. τμημάτων $BA' = \alpha$ καὶ $A'\Gamma = \mu \cdot \alpha$ (45).

57. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα x τοιοῦτον ὥστε :

$$(1)\ x^2 = \alpha^2 + \beta^2 \ \text{ἢ}\ (2)\ x^2 = \alpha^2 - \beta^2,$$

ἔνθα α καὶ β δοθέντα εὐθ. τμήματα.

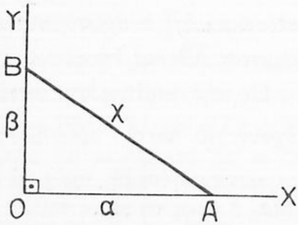
Λύσις. Βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα (48):

(1) Κατασκευάζεται ὀρθὴ γωνία (OX, OY) καὶ ὁρίζονται ἐπὶ τῶν πλευ-

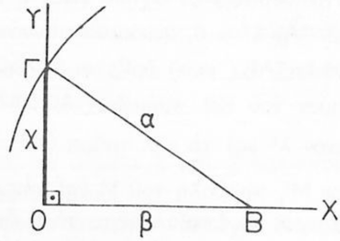
(1) Συμβολικῶς : $x = \alpha\sqrt{\mu}$

ρῶν αὐτῆς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως ὥστε ΟΑ = α, ΟΒ = β. (Σχ. 57.1
Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι, εἶναι (45): $AB^2 = \alpha^2 + \beta$

(2) Κατασκευάζεται ὀρθὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ὁρίζεται ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευ



Σχ. 57.1



Σχ. 57.2

ρᾶς της, ἔστω τῆς ΟΧ, τὸ σημεῖον Β ὥστε ΟΒ = β. (Σχ. 57.2) Εὑρίσκεται τ σημεῖον Γ τῆς ΟΥ, ὥστε ΒΓ = α (κοινὸν σημεῖον τῆς ΟΥ μὲ τὸν κύκλον κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος α). Τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα x. Πράγματ εἶναι (45) $O\Gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

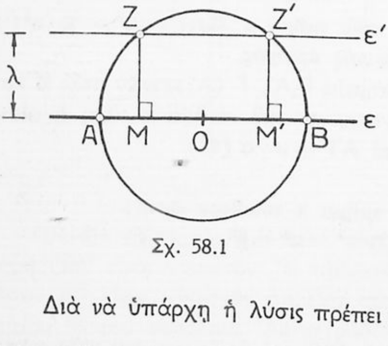
58. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθ. τμήματα x καὶ y ὥστε:

$$x + y = \alpha \text{ καὶ } xy = \lambda^2$$

ἔνθα α καὶ λ δοθέντα εὐθ. τμήματα.

Λύσις. Ἡ κατωτέρω σύνθεσις βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα (45):

Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ε ὁρίζονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ὥστε: ΑΒ = α Κατασκευάζεται ὁ κύκλος (Ο) διαμέτρου ΑΒ καὶ ἡ μία τῶν παραλλήλων ε′ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε, τῶν ἀπεχουσῶν ἀπὸ αὐτῆς τὴν ἀπόστασιν λ. Ἔστωσαν Ζ καὶ Ζ′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὸν κύκλον (Ο), καὶ Μ καὶ Μ′ αἱ προβολαὶ τούτων ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε. Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΜ καὶ ΜΒ, ὡς καὶ τὰ ΑΜ′ καὶ ΜΒ′ ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος.



Σχ. 58.1

Πράγματι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΖΒ ἔχομεν (45):

$MZ^2 = AM \cdot MB$, ἤτοι: $AM \cdot MB = \lambda^2$.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ Μ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, εἶναι $AM + MB = \alpha$.

Τὰ εὐθ. τμήματα Μ′Α, Μ′Β δὲν ἀποτελοῦν νέαν λύσιν, διότι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ΜΒ καὶ ΜΑ. (Σχ. 58.1)

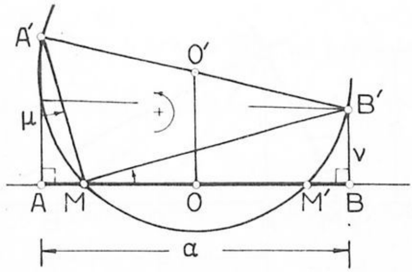
Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ λύσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\lambda^2 \leqslant \frac{\alpha^2}{4}$, ἤτοι $\lambda \leqslant \frac{\alpha}{2}$

Ἂν $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, τότε $x = y = \frac{\alpha}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ γινόμενον $x \cdot y$ εἶναι μέγιστον.

Ἂν $\lambda > \frac{\alpha}{2}$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν διότι ἡ ε′ δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν κύκλον (Ο).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἡ δευτέρα συνθήκη δίδεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $xy = \mu \cdot \nu$, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, χωρὶς νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην ἀνάλογον λ τῶν μ καὶ ν καὶ ἀναχθῶμεν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.



Σχ. 58.2

Ἡ σύνθεσις, βασιζομένη εἰς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ἔχει ὡς κάτωθι :

Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ε ὁρίζονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὥστε $AB = \alpha$ (Σχ. 58,2), Κατασκευάζονται αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ε εἰς τὰ Α καὶ Β καὶ ὁρίζονται ἐπὶ τούτων, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ ὥστε $AA' = \mu$ καὶ $BB' = \nu$.

Κατασκευάζεται ὁ κύκλος διαμέτρου Α′Β′. Ἔστωσαν Μ καὶ Μ′ τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου τούτου μὲ τὴν εὐθεῖαν ε. Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΜ καὶ ΜΒ (ἢ ΑΜ′ καὶ Μ′Β) ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Α′ΑΜ καὶ ΜΒΒ′ ἔχομεν : $\frac{AM}{BB'} = \frac{A'A}{MB}$ ἤτοι : $AM \cdot MB = \mu \cdot \nu$.

Ἐξ ἄλλου $AM + MB = \alpha$, διότι ἂν $\mu\nu \leqslant OA^2$ (Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ), τὰ Μ καὶ Μ′ κεῖνται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω κατασκευὴ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

$$Z^2 - \alpha Z + \lambda^2 = 0$$

διὰ τῆς ὁποίας συνδέονται τὰ δοθέντα εὐθ. τμήματα α καὶ λ πρὸς τὰ ζητούμενα εὐθ. τμήματα $Z_1 = x$ καὶ $Z_2 = y$

Ὁμοίως ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα :

59. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθ. τμήματα x καὶ y ὥστε :

$$x - y = \alpha \quad \text{καὶ} \quad xy = \lambda^2$$

ἔνθα α, λ, δοθέντα εὐθ. τμήματα.

Λύσις. Ἡ κατωτέρω σύνθεσις προκύπτει ἐκ τοῦ θεωρήματος (45) :

Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον καθέτους πλευρὰς τμήματα ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ α καὶ λ ($AB = \alpha$, $A\Gamma = \lambda$). Ὁρίζονται ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′, ὥστε $OM = OM' = O\Gamma$(Σχ. 59.1). Τὰ εὐθ. τμήματα ΜΒ καὶ ΜΑ (ἢ τὰ Μ′Α καὶ Μ′Β) ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΓΜ′ ἔχομεν ὅτι :

$$MA \cdot AM' = \lambda^2 \quad \text{ἢ} \quad MA \cdot MB = \lambda^2, \text{ διότι } AM' = MB$$

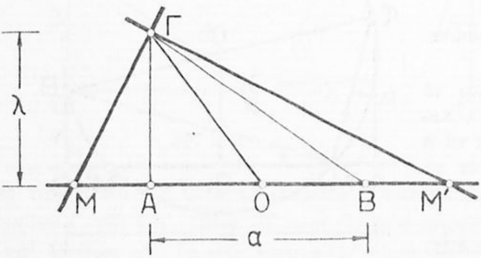
Ἡ κατωτέρα, ἁπλουστέρα, σύνθεσις βασίζεται εἰς τὸ θεώρημα (22) :

Κατασκευάζεται κύκλος (Ο) διαμέτρου ἴσης πρὸ τὸ εὐθ. τμῆμα α (Σχ. 59·2) Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Α αὐτοῦ ὁρίζεται τὸ σημεῖον Ζ ὥστε $AZ = \lambda$.

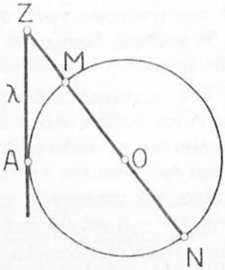
Ἂν εἶναι Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα κύκλου μὲ τὴν εὐθεῖαν ΖΟ (Μ καὶ Ν ἀντιδιαμετρικὰ τοῦ σημεῖα τοῦ (Ο)), τὰ εὐθ. τμήματα ΖΜ καὶ ΖΝ ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται ὡς ἁπλῆ.

Δυνάμεθα, ἀναφερόμενοι καὶ εἰς τὴν ἐν παραγρ. (4) σημείωσιν, νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι :

Ἡ ἀνωτέρω κατασκευὴ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν θετικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως :



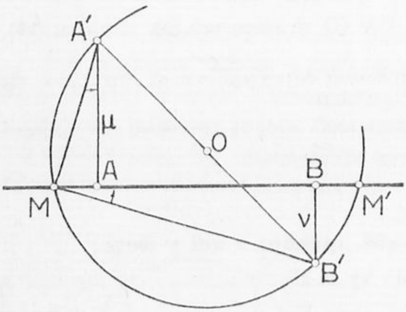
Σχ. 59.1



Σχ. 59.2

$Z^2 - \alpha Z - \lambda^2 = O$, διὰ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν ζητουμένων εὐθ. τμημάτων καὶ τῆς :
$Z^2 + \alpha Z - \lambda^2 = 0$, διὰ τὸ μικρότερον ἐκ τούτων.

Ἂν ἀντὶ τῆς συνθήκης $xy = \lambda^2$ δίδεται ἡ $xy = \mu \cdot \nu$, ἔνθα μ,ν δοθέντα εὐθ. τμήματα, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν σύνθεσιν ἀνάλογον τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸ πρόβλημα (58) :



Σχ. 59.3

Ἐπὶ εὐθείας ε ὁρίζονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ὥστε ΑΒ = α (Σχ.59.3) καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ε, κατὰ τὰ Α καὶ Β, τὰ σημεῖα Α' καὶ Β', ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, ὥστε ΑΑ' = μ καὶ ΒΒ' = ν. Κατασκευάζεται ὁ κύκλος διαμέτρου Α'Β' τοῦ ὁποίου ἔστωσαν Μ καὶ Μ' τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν Σ. Τὰ εὐθ. τμήματα ΜΑ καὶ ΜΒ (ἢ Μ'Β καὶ Μ'Α) ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος. Πράγματι, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΑΑ' καὶ Β'ΒΜ ἔχομεν : $\frac{MA}{\nu} = \frac{\mu}{MB}$, ἤτοι : $MA \cdot MB = \mu\nu$. Ἐξ ἄλλου: $MB - MA = AB = \alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1) $A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_1^2}$ καὶ

(2) $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_1^2}$, $B < \frac{\pi}{2}$, $\Gamma < \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

(3) $A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Gamma A'}{A'B}$ (Α' ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν ΒΓ).

(4) $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Gamma A'}{A'B}$ καὶ $\beta \neq \gamma \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

2. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Μ τῆς διαγωνίου ΒΔ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$BM \cdot \Delta M = AB^2 - AM^2$$

3. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$$

4. Ἂν Β καὶ Γ εἶναι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ καὶ Β′ καὶ Γ′ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^2 = \beta \cdot \Gamma B' + \gamma \cdot B\Gamma'$$

5. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΒΓΔ′. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$A\Delta^2 + A\Delta'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

6. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, τὰ ὕψη ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ αὐτοῦ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Η τῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^2 = BB' \cdot BH + \Gamma\Gamma' \cdot \Gamma H$$

7. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΑΑ′ αὐτοῦ. Ἔστωσαν ρ, ρ′ ρ″ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων ἀντιστοίχως εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΑ′Β, ΑΑ′Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\rho^2 = \rho'^2 + \rho''^2$$

8. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1) $\delta_2 = \delta_3 \Leftrightarrow \beta = \gamma$ (2) $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow 2\mu_1^2 = \mu_2^2 + \mu_3^2$

(3) $\mu_1^2 = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha = (\beta - \gamma)\sqrt{2}$ $(\beta > \gamma)$ (4) $A = \pi/2 \Rightarrow \mu_2^2 + \mu_3^2 = 5\mu_1^2$

(5) $A = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\delta_1} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$ (6) $O_1\Delta_1 = \delta_1 \Rightarrow \beta - \gamma = \mu_1\sqrt{2}$ $(\beta > \gamma)$

(7) $O_1\Delta_1 = \delta_1 \Rightarrow \alpha^2 = 4\beta\gamma$

(8) $\beta = 2\gamma,\ B < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow A > 2\Gamma$

(9) $\delta_1^2 = B\Delta_1 \cdot \Delta_1\Gamma \Rightarrow \beta + \gamma = \alpha\sqrt{2}$ (10) $4 \cdot O_1H_1 \cdot O_1\Delta_1 = (\beta - \gamma)^2$

(11) $OG^2 = r^2 - \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{9}$ (12) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\,(GA^2 + GB^2 + G\Gamma^2)$

(13) $BO_2 \perp \Gamma O_3 \Rightarrow \mu_2^2 + \mu_3^2 = \mu_1^2$

9. Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ($AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$). Θέτομεν $A\Gamma = x$, $B\Delta = y$ καὶ $EZ = \mu$ (Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = x^2 + y^2 + 4\mu^2$$

Περίπτωσις παραλληλογράμμου.

10. Θεωροῦμεν δύο κύκλους O(r) καὶ O′(r′) ἐφαπτομένους ἀλλήλων ἐξωτερικῶς. Νὰ εὑρεθῇ, συναρτήσει τῶν r καὶ r′, τὸ τμῆμα τῆς κοινῆς ἐξωτερικῆς αὐτῶν ἐφαπτομένης, τὸ ἔχον ἄκρα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

11. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συμμετροδιάμεσοι σ_1 καὶ σ_1' τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

12. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνθήκη :

$$(1)\quad \delta^2 = r^2 + r'^2$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα οἱ κύκλοι O (r) καὶ O′ (r′) τέμνωνται ὀρθογωνίως.

(Διὰ τοῦ δ συμβολίζεται τὸ εὐθ. τμῆμα OO′).

13. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι· ἵνα δύο κύκλοι (O) καὶ O′) τέμνωνται ὀρθογωνίως πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως ἡ τυχοῦσα διάμετρος τοῦ ἑνὸς τούτων χωρίζεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τοῦ ἄλλου.

14. Δίδονται δύο κύκλοι O (r) καὶ O′ (r′), ἔνθα $r \geqslant r'$. Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν κύκλων τοῦ ὁποίου αἱ ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεις ἀπὸ τούτων εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ εἶναι μία εὐθεῖα ξ κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ' τῶν ἀνωτέρω κύκλων εἰς σημεῖον Ι αὐτῆς ὁριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως :

$$KI = -\frac{r^2 - r'^2}{2\delta}$$

ἔνθα Κ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΟ' καὶ $\delta = OO'$.

15. Δίδεται κύκλοι (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε καὶ τὰς ἐφαπτομένα ΜΑ καὶ ΜΒ τοῦ (Ο) (Α καὶ Β τὰ σημεῖα ἐπαφῆς). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ διέρχετα διὰ σταθεροῦ σημείου (ἀνεξαρτήτου τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ τῆς ε).

16. Δίδεται κύκλος Ο (r) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν (Ο) καὶ ὀνομάζομεν: Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα, καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖο τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τῶ σημείων Μ εἶναι μία εὐθεῖα ρ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΡ εἰς σημεῖον Ρ' αὐτῆς, ὁριζόμενον ἐ τῆς σχέσεως : $OP \cdot OP' = r^2$

17. Δίδεται κύκλος Ο (r) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν (Ο) καὶ ὀνομάζομεν Α, Β τὰ κοινὰ σημεῖα καὶ Μ τὸ συζυγὲς τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ εἶναι μία εὐθεῖα ρ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΡ εἰς τὸ σημεῖον Ρ' αὐτῆς τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως :

$$OP \cdot OP' = r^2$$

18. Δίδεται εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ κύκλος (Ο) ἐφαπτόμενος τῆς εὐθείας ΑΒ κατὰ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τοῦ ὁποίου ἡ συνθήκη εἶναι ἡ

$$MA^2 + MB^2 = 4MT^2,$$

ἔνθα ΜΤ ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις τοῦ Μ ἀπὸ τοῦ κύκλου (Ο).

19. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου του. Ὀνομάζομεν (Ω) κάθε κύκλον ὁποῖος ἔχει τὸ κέντρον του Ω ἐπὶ τοῦ (Ο) καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Α.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δι' ἑκάστου σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου διέρχονται, ἐν γένει, δύ κύκλοι (Ω).

(2)Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείῶν Μ, δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων οἱ ἀνωτέρω δύ κύκλοι (Ω) τέμνονται ὀρθογωνίως.

20. Δίδεται εὐθεῖα σ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α' αὐτῆς. Θεωροῦμεν δύο κύκλους Ω(r) κα Ω' (r'), ἐφαπτομένους τῆς σ κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως, Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπο τῶν κοινῶν σημείων τῶν κύκλων τούτων εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

$$(1)\ r + r' = \lambda, \quad (2)\ r - r' = \lambda\ , \quad (3)\ \frac{r}{r'} = \frac{\mu}{\nu}\ , \quad (4)\ r \cdot r' = \lambda^2$$

ἔνθα λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

21. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχω Θεωροῦμεν τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Ν αὐτῆς μὲ τ α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Ρ τῶν εὐθειῶν ΑΝ καὶ ΒΜ

22. Δίδεται κύκλος Ο (r) καὶ σημεῖον Α ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α καὶ ὀνομάζομεν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς μὲ τὸν κύκλον Ο (r) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τῶν μέσων τῶν χορδῶν ΒΓ

(2) Τῆς προβολῆς Α' τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

23. Δίδεται ὀρθὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Ὀνομάζομεν ε κάθε εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς πλευρά ΟΧ καὶ ΟΥ τῆς γωνίας ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ε.

24. Δίδεται κύκλος (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ καὶ σημεῖον Γ τῆς διαμέτρου ΑΒ (κείμεν μεταξὺ τῶν Α καὶ Β). Ἔστω δ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ (O_1), (O_2) οἱ κύκλ διαμέτρων ΑΓ καὶ ΓΒ. Ὀνομάζομεν (Ω_1) καὶ (Ω_2) τοὺς δύο κύκλους ἐκ τῶν ὁποίων ὁ (Ω_1) ἐφάπτεται τῶν (Ο), (O_1) καὶ τῆς εὐθείας δ, καὶ ὁ (Ω_2) τῶν (Ο), (O_2) καὶ τῆς εὐθείας δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀνωτέρω δύο κύκλοι (Ω_1) καὶ (Ω_2) εἶναι ἴσοι.

25 Νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα x, ὥστε :

(1) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = \dfrac{\beta}{\gamma}$, ἔνθα α, β, γ δοθέντα εὐθ. τμήματα

(2) $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \dfrac{\gamma}{x}$ (3) $x^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2$, ἔνθα $\alpha_1.\ \alpha_2 \ldots, \alpha_\nu$ δοθέντα εὐθ. τμήματα.

26 Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθ. τμήματα x καὶ y ὥστε :

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{x}{y}$$

ἔνθα α, β δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα.

27 Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὥστε :

$$MA^2 - MB^2 = \lambda^2$$

28 Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν δῦο σημεῖα Β καὶ Γ τοῦ κύκλου (Ο), ὥστε αἱ ΒΟ καὶ ΓΟ νὰ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

29 Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) Διέρχεται διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ διχοτομεῖ δοθέντα κύκλον (Ο).

(2) Διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ διχοτομεῖ δύο δοθέντας κύκλους (Ο) καὶ (Ο').

(3) Ἔχει δοθὲν κέντρον Ω καὶ διχοτομεῖ δοθέντα κύκλον (Ο).

(4) Ἔχει δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ καὶ διχοτομεῖ δύο δοθέντας κύλους (Ο) καὶ (Ο').

(5) Τέμνει ὀρθογωνίως δύο δοθέντας κύκλους (Ο) καὶ (Ο') καὶ διχοτομεῖ ἕνα τρίτον δοθέντα κύκλον (Γ).

(6) Τέμνει ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον (Α) καὶ διχοτομεῖ δύο δοθέντας κύκλους (Β) καὶ (Γ).

(7) Διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Α, τέμνει ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον (Ο) καὶ διχοτομεῖ δεύτερον δοθέντα κύκλον (Γ).

30 Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) $\beta^2 + \gamma^2,\ \alpha,\ B$ (2) $\beta^2 + \gamma^2,\ \alpha,\ \upsilon_1$

(3) $\beta^2 + \gamma^2,\ \alpha,\ \mu_2$ (4) $\beta^2 + \gamma^2,\ \alpha,\ A$

(5) $\beta^2 + \gamma^2,\ \alpha,\ \upsilon_2$ (6) $\beta^2 - \gamma^2,\ \alpha,\ \upsilon_2$

(7) $\beta^2 - \gamma^2,\ \alpha,\ A$ (8) $\beta^2 - \gamma^2,\ \alpha,\ \mu_2$

(9) $\beta^2 - \gamma^2,\ \alpha,\ \upsilon_1$ (10) $\beta^2 - \gamma^2,\ \alpha,\ \mu_1$

(11) $\alpha,\ A,\ \mu\beta^2 + \nu\gamma^2 = \lambda^2$, ἔνθα μ, ν δοθέντες φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

(12) $\alpha,\ A,\ \mu\beta^2 - \nu\gamma^2 = \lambda^2$ (13) $\alpha,\ B,\ \beta^2 - \gamma^2 = \lambda^2$

(14) $\alpha,\ B,\ \mu\beta^2 - \nu\gamma^2 = \lambda^2$ (15) $\alpha,\ \dfrac{\beta}{\gamma},\ \beta^2 + \gamma^2$

(16) $\alpha,\ \dfrac{\beta}{\gamma},\ \mu\beta^2 + \nu\gamma^2 = \lambda^2$ (μ, ν δοθέντες φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

(17) $\alpha,\ \dfrac{\beta}{\gamma},\ \beta^2 - \gamma^2$ (18) $\alpha,\ \dfrac{\beta}{\gamma},\ \mu\beta^2 - \nu\gamma^2 = \lambda^2$

31 Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) $\beta - \gamma,\ \upsilon_1,\ r.$ (2) $\alpha,\ A,\ \delta_1$ (3) $\beta,\ \gamma,\ H_1O_1 = \lambda$

(4) $HA = \lambda,\ HB = H\Gamma = \mu$ καὶ συνθήκη : $\beta = \gamma$.

(5) $\alpha,\ A,\ O_1H_1 \cdot O_1\Delta_1 = \lambda^2$ (6) $A,\ \delta_1,\ \mu_1$

(7) $A,\ \beta + \gamma,\ \upsilon_1$

32 Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) $\delta_1,\ \rho,\ \rho_1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

60. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν ἐπὶ μιᾶς προσανατολισμένης εὐθείας σ δύο σημεῖα (καὶ Μ. Τὸ ἐκ τῶν σημείων τούτων ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα $\overline{OM}$ εἶναι θετικῶ (Σχ. 60.1) ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένον, βάσει τοῦ ἐπὶ τῆς σ θεωρουμένο προσανατολισμοῦ. Ἂς ὀνομάσωμεν $\overline{\alpha}$ τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{OM}$ ($\overline{OM} \equiv \alpha$) (1)

Ἂν δοθῇ ἕνα προσημασμένον εὐθ. τμῆμα $\overline{k}$ τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{\alpha'}$, διὰ τὸ ὁποῖον

$$\overline{\alpha'}\ (\iota) = \overline{k} \cdot \overline{\alpha}$$

εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσημασμένον καθ' ὅσον τὸ $\overline{k}$ εἶναι ὁμό σημον ἢ ἑτερόσημον τοῦ $\overline{\alpha}$ ἀντιστοίχως (ἤτοι καθ' ὅσον τὰ εὐθ. τμήματ $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{k}$ εἶναι ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως προσημασμένα ἀντιστοίχως).

Ὥστε, ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας :

Σχ. 60.1

Ἂν τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{k}$ εἶ ναι θετικῶς προσημασμένον, τό τε τὰ εὐθ. τμήματα α καὶ α' ε ναι ὁμοίως (θετικῶς ἢ ἀρνητ κῶς) προσημασμένα.

Ἂν τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{k}$ εἶναι ἀρνητικῶς προσημασμένον, τότε τὰ $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\alpha}$ εἶναι ἀντιθέτως προσημασμένα.

Δυνάμεθα, ἤδη νὰ καθορίσωμεν ὅπως :

1. Ἂν τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{k}$ εἶναι θετικῶς προσημασμένον, ἀντιστοιχῇ εἰς τ σημεῖον Μ τῆς $\vec{\sigma}$, τὸ σημεῖον Μ' αὐτῆς, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς $\overline{OM'} = \alpha$,' τὸ ὁποῖο κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ, ὥστε τὰ $\overline{OM'}$ καὶ $\overline{O}$ νὰ εἶναι ὁμόρροπα (Σχ. 60.1).

2. Ἂν τὸ $\overline{k}$ εἶναι ἀρνητικῶς προσημασμένον, ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ σημεῖο Μ τῆς $\vec{\sigma}$ τὸ σημεῖον Μ' αὐτῆς, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς $\overline{OM'} = \overline{\alpha'}$, τὸ ὁποῖον κεῖτ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Μ ὥστε τὰ $\overline{OM'}$ καὶ $\overline{O}$ νὰ εἶναι ἀντίρροπα : (Σχ. 60.2).

---

(1) Τὰ σύμβολα $\overline{OM}$ καὶ $\overrightarrow{OM}$ ἀνταποκρίνονται εἰς τὴν αὐτήν, ποιοτικήν, ἔννοιαν: τ προσανατολισμένου (προσημασμένου) εὐθ. τμήματος. Μετὰ τήν, ἀπὸ τῆς ἑπομένης τάξεως, ε σαγωγὴν τῆς ἐννοίας τοῦ λόγου δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων καὶ τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς δια νύσματος $\overrightarrow{OM}$, ἡ τελευταία αὕτη θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\overline{OM}$.

Κατόπιν, τῶν ἀνωτέρω, δοθέντος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς σημείου Ο, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ αὐτοῦ, ὑπάρχει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΜ ἕνα σημεῖον Μ', καὶ ἕνα μόνον, ὥστε :

Σχ. 60.2

$\overline{OM}'(\iota) = \overline{k} \cdot \overline{OM}$, ἤ, ὅπως δυνάμεθα συμβολικῶς νὰ σημειοῦμεν:

$$(1) \qquad \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \overline{k}$$

ἔνθα $\overline{k}$ δοθὲν προσημασμένον τμῆμα, μὴ μηδενικόν.

Τὸ βάσει τῆς ἀνωτέρω συνθήκης (1) εὑρισκόμενον ἀντίστοιχον Μ' τοῦ σημείου Μ ὀνομάζεται καὶ **εἰκὼν** τοῦ Μ κατὰ τὴν ἐξ αὐτῆς ὁριζομένην ἀντιστοιχίαν. Τὸ σημεῖον Μ δύναται νὰ ὀνομάζεται **πρότυπον**.

Ἂν ἡ εἰκὼν Μ' τοῦ Μ θεωρηθῇ ὡς πρότυπον τότε ἡ εἰκὼν τοῦ σημείου τούτου Μ' εἶναι ἕνα σημεῖον Μ'' διάφορον, ἐν γένει, τοῦ Μ : τὸ εὑρισκόμενον ἐκ τῆς:

$$(1) \qquad \frac{\overline{OM''}}{\overline{OM'}} = \overline{k}.$$

Ἐξ ἄλλου, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι, ἕνα σημεῖον Μ' τοῦ ἐπιπέδου, τοῦτο εἶναι εἰκὼν ἑνὸς μόνον σημείου Μ αὐτοῦ, ὁριζομένου, ἐπὶ τῆς ΟΜ', ἐκ τῆς ἀνωτέρω συνθήκης (1).

Ἡ ἐκ τῆς (1) ὁριζομένη ἀντιστοιχία, εἶναι κατὰ ταῦτα, μιὰ *ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις* τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' ἑαυτοῦ (ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου : τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου). Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη ὀνομάζεται *ὁμοιοθεσία*. Οὕτω ἔχομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Δοθέντος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σημείου Ο, ὀνομάζομεν **ὁμοιοθεσίαν**, *ὁριζομένην ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἕνα δοθὲν προσημασμένον εὐθ. τμῆμα* $\overline{k} \neq 0$, *συμβολικῶς ὁμοιοθεσία* $H(O, \overline{k})$, *τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ συνόλου τούτου, τὴν ὁριζομένην ἐκ τῶν συνθηκῶν :*

$$(OM, OM') = 0 \text{ ἢ } \pi \text{ καὶ } \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \overline{k}$$

Ἐκ τῆς (ΟΜ, ΟΜ') = 0 ἢ π, ἐξασφαλίζεται ὅπως τὸ κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην ἀντίστοιχον ἢ ὁμόλογον (εἰκὼν) Μ' τοῦ σημείου Μ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΜ.

Εἶναι, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων, εὐνόητον ὅτι ἂν τὸ $\overline{k}$ θεωρῆται μὲ τὸ πρόσημον + τότε θὰ εἶναι (ΟΜ, ΟΜ') = 0, διότι τὰ $\overline{OM}'$ καὶ $\overline{OM}$ εἶναι ὁμόρροπα, καὶ ἂν τὸ $\overline{k}$ θεωρῆται μὲ τὸ πρόσημον –, τότε θὰ εἶναι $(\overline{OM}, \overline{OM}') = \pi$, διότι τὰ $\overline{OM}'$ καὶ $\overline{OM}$ εἶναι ἀντίρροπα.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (θετικῶς προσημασμένον $\overline{k}$) ἡ ὁμοιοθεσία

ὀνομάζεται *ὁμόρροπος*, Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν (ἀρνητικῶς προσημα-
σμένον $\overline{k}$) ἡ ὁμοιοθεσία ὀνομάζεται *ἀντίρροπος*.

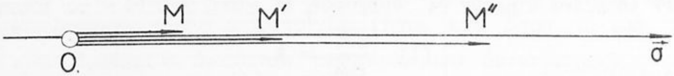
Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται *κέντρον* τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ τὸ $\overline{k}$ *λόγος* αὐτῆ
Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν $\overline{k} = \iota$, τότε $\overline{OM'} = \overline{OM}$ ἤτοι, διὰ κάθε Μ, ἔχομεν $M' \equiv M$. Ἡ ὁμοιο-
θεσία εἶναι μία *ταυτότης*.

Ἂν $\overline{k} = -\iota$, τότε $\overline{OM'} = -\overline{OM}$. Ἤτοι τὸ Μ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ
ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο. Ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι μία *συμμετρία* τῆς ὁποίας τὸ κέν-
τρον εἶναι τὸ σημεῖον Ο.

2. Ἂν τὸ σημεῖον Μ' εἶναι τὸ ὁμόλογον (εἰκὼν) τοῦ Μ κατα τὴν ὁμοιοθεσία
H(O, $\overline{k}$), τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ', κατὰ τὴν αὐτὴν ὁμοιοθεσίαν **H** (O,$\overline{k}$), εἶναι, ὡ
ἐσημειώσαμεν, ἕνα σημεῖον Μ'', διάφορον, ἐν γένει, τοῦ Μ (Σχ. 60.3). Ἤτο

$$M \xrightarrow{\mathbf{H}} M' \Rightarrow M' \xrightarrow{\mathbf{H}} M'' \ (\neq M) \quad (^1)$$



Σχ. 60.3

Ἡ ὁμοιοθεσία, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὁμόλογον (εἰκὼν) τοῦ Μ' (θεωρου-
μένου ὡς προτύπου) εἶναι τὸ Μ, εἶναι ἡ ὁμοιοθεσία $\mathbf{H}^{-1}$ (O,$\overline{k}'$), ἔνθα τὸ $\overline{k}'$ συνδ-
εται μὲ τὸ $\overline{k}$ διὰ τῆς σχέσεως $\overline{k} \cdot \overline{k}' = \iota$ (ι τὸ μοναδιαῖον τμῆμα).

Τὸ $\overline{k}'$ εὑρίσκεται ἑπομένως ἐκ τῆς $\overline{k}' = \frac{\iota}{\overline{k}}$, ὅπου ι τὸ μοναδιαῖον τμῆμ
(θετικῶς πάντοτε προσημασμένον). Ἡ ἀπεικόνισις $\mathbf{H}^{-1}$ (O, $\overline{k}'$) εἶναι ἡ *ἀντί-
στροφος* τῆς **H** (O,$\overline{k}$). Ἔχομεν ἑπομένως :

$$M \xrightarrow{\mathbf{H}} M' \Leftrightarrow M' \xrightarrow{\mathbf{H}^{-1}} M.$$

3. Τὸ ὁμόλογον (εἰκὼν) ἑνὸς σημείου Μ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν (**H**) δύνατα
νὰ ὀνομάζεται ἁπλῶς, **ὁμοιόθετον** τοῦ Μ κατὰ τὴν (**H**).

61. ΟΡΙΣΜΟΣ *ὀνομάζομεν* **ὁμοιόθετον** *ἑνὸς σχήματος (Φ), κατὰ τὴν ὁμοιοθεσία
H (O, $\overline{k}$), τὸ σύνολον (Φ') τῶν ὁμοιοθέτων ὅλων τῶν σημείων τοῦ (Φ) κατὰ τὴ
ἀνωτέρω ὁμοιοθεσίαν.*

Αἱ κατωτέρω προτάσεις ἀναφέρονται εἰς τὰ ὁμοιόθετα τῶν ἁπλῶν γεω-
μετρικῶν σχημάτων :

---

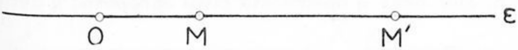
(1) Ἀντὶ τοῦ συμβολισμοῦ : $M \xrightarrow{\mathbf{H}} M'$ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ὁ : $\mathbf{H}(M) = M'$ ἢ
$M' = \mathbf{H}(M)$

ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΝ ΕΥΘΕΙΑΣ

Σημειοῦμεν ὅτι:

Ἂν ἕνα σημεῖον M κεῖται ἐπὶ εὐθείας ε (Σχ. 61), διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου O μιᾶς ὁμοιοθεσίας **H**(O,k), τότε τὸ ὁμοιόθετον M′ τοῦ σημείου M εἶναι, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιοθεσίας, σημεῖον τῆς ε. Τὸ ὁμοιόθετον, κατὰ ταῦτα, σχῆμα ε′ τῆς ἀνωτέρω εὐθείας ε εἶναι αὐτὴ ἡ ε. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ε **μετασχηματίζεται εἰς ἑαυτὴν** κατὰ τὸν ἀνωτέρω μετασχηματισμὸν (ὁμοιοθεσίαν **H**, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς ε), ἢ ὅτι μένει **ἀναλλοίωτος** κατὰ τὸν **μετασχηματισμὸν**(1) **H** (O,$\overline{k}$).

Ἀντιστρόφως, ἂν μία εὐθεῖα ε′ μένῃ ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν **H** (O,$\overline{k}$), τὸ ὁμόλογον M′ τοῦ σημείου M τῆς ε κεῖται ἐπὶ τῆς ε, ἤτοι ἡ ε διέρχεται διὰ τοῦ O, διότι τὰ σημεῖα O, M, M′ κεῖνται, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμοιοθεσίας, ἐπ᾽ εὐθείας. Ὥστε:

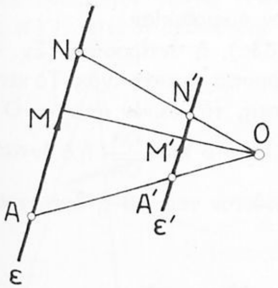


Σχ. 61

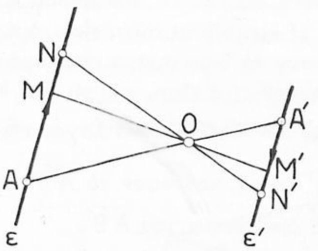
Ἵνα μία εὐθεῖα ε τοῦ ἐπιπέδου μένῃ ἀναλλοίωτος κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν **H** (O,$\overline{k}$) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ τὸ κέντρον O αὐτοῦ.

62. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμοιόθετον εὐθείας ε, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας, εἶναι μία εὐθεία ε′ παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν A καὶ M ἕνα δοθὲν καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ε καὶ A′ καὶ M′ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν **H** (O,k). Ἔχομεν (Σχ. 62.1 καὶ 62.2): $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA'} = k\cdot\overrightarrow{OM} - k\cdot\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = k\cdot\overrightarrow{AM}$ (2)



Σχ. 62.1



62.2

Ὥστε: $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{AM}$.

---

(1) Ἀπεικόνισιν **H** (O, $\overline{k}$)

(2) Ἢ $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OM'} = k\cdot\overrightarrow{AO} + k\cdot\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) = k\cdot\overrightarrow{AM}$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς ἔπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα Α'Μ' εἶναι ἡ διὰ τοῦ Α' παράλληλος πρὸς τὴν ε ([1]). Ἔστω ε' ἡ εὐθεῖα αὕτη.

Ἂν εἶναι Ν' ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ε', τοῦτο εἶναι ὁμοιόθετον ἑνὸς μόνον σημείου τῆς ε : τοῦ κοινοῦ σημείου Ν αὐτῆς καὶ τῆς ΟΝ'. Πράγματι, ἐκ τῆς παραλληλίας τῶν ε καὶ ε', ἔχομεν ὅτι :

$$\frac{\overrightarrow{ON'}}{\overrightarrow{ON}} = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = k \quad \text{ἤ:} \quad \overrightarrow{ON'} = k.\overrightarrow{ON},$$

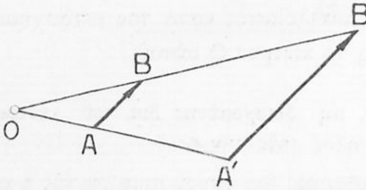
ἤτοι τὸ σημεῖον Ν' εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ Ν κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν **Η** (Ο,k)

ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

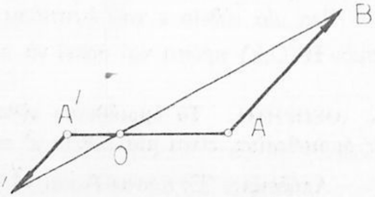
63. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμοιόθετον διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$, ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$, καθ' ὅσον ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπος ἢ ἀντίρροπος.

Ὁ λόγος τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$([2]) εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν, ἐξ ὁρισμοῦ : $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$. Ἐπειδὴ



Σχ. 63.α



63.β

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'}$, θὰ ἔχωμεν $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OB}$, ὅθεν : $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

Σημειοῦμεν ὅτι ἂν δύο διανύσματα εἶναι συγγραμμικὰ τότε ἕκαστον τούτων εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μόνον ὁμοιοθεσίαν.

Ἡ ὁμοιοθεσία αὕτη εἶναι ὁμόρροπος (Σχ. 63α), ἢ ἀντίρροπος (Σχ. 63β) καθ' ὅσον τὰ διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα ἀντιστοίχως. Τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι, καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν εὐθειῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ'. Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁ $k = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ ἢ ὁ ἀντίστροφος k' αὐτοῦ, καθ' ὅσον τὸ $\overrightarrow{A'B'}$ θεωρεῖται ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἢ ἀντιστρόφως τὸ $\overrightarrow{AB}$ ὁμοιόθετον τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$.

---

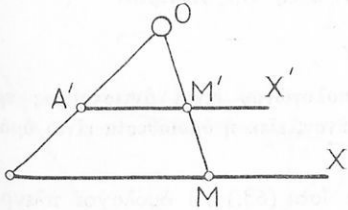
(1) Ἂν ἦτο Α'Μ'' ∥ ε (Μ'' ∈ΟΜ), θὰ εἴχομεν: $k = \dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \dfrac{\overrightarrow{OM''}}{\overrightarrow{OM}}$, ἐκ τῆς ὁποίας καὶ τῆς $\dfrac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = k$, ἔπεται $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM'}$, ἤτοι $M'' \equiv M'$

(2) Ὁ λόγος τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $\overrightarrow{A'B'}$ εἶανι ὁ λόγος τῶν ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως προσημασμένων εὐθ. τμημάτων $\overline{AB}$ καὶ $\overline{A'B'}$.

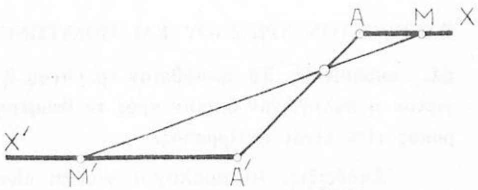
ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΝ ΗΜΙΕΥΘΕΙΑΣ

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ ὁμοιόθετον ἡμιευθείας AX εἶναι ἡμιευθεῖα $A'X'$ ὁμόρροπος ἢ ἀντίρροπος τῆς AX, καθ' ὅσον ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροπος ἢ ἀντίρροπος.*

Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν δύο ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ Α'Χ' εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, τότε ἂν εἶναι ὁμόρροποι (Σχ .62.11), τότε κάθε σημεῖον Ο τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα αὐτῶν, μὴ κείμενον μεταξὺ τούτων, εἶναι κέντρον



Σχ. 63.11



63.12

ὁμοιοθεσίας **H** (O,k), κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία εἶναι ὁμοιόθετος τῆς ἄλλης.

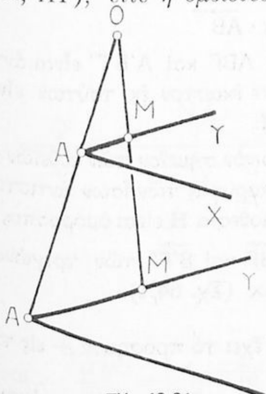
Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁ $\overline{k} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, ἂν ἡ Α'Χ' εἶναι ἡ ὁμοιόθετος τῆς ΑΧ,

ἤτοι ἂν $AX \xrightarrow{H} A'X'$, καὶ ὁ $\overline{k'} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$, ἂν ἡ ΑΧ εἶναι ἡ ὁμοιόθετος τῆς Α'Χ'. Ἂν αἱ θεωρούμεναι ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ Α'Χ' εἶναι ἀντίρροποι (Σχ. 63.12), τότε κάθε σημεῖον κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Α' εἶναι κέντρον ὁμοιοθεσίας κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία εἶναι ὁμοιόθετος τῆς ἄλλης.

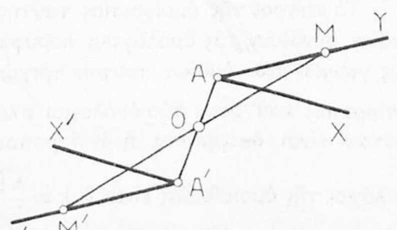
ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΝ ΓΩΝΙΑΣ

1. *Τὸ ὁμοιόθετον γωνίας (AX, AY) εἶναι γωνία ($A'X'$, $A'Y'$) ἴση μὲ τὴν (AX, AY), εἴτε ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπος εἴτε εἶναι ἀντίρροπος. Ἀντιστρόφως, ἂν δύο γωνιῶν αἱ πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε αἱ γωνίαι εἶναι ὁμοιόθετοι.*

Ἂν αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν εἶναι



ΣΧ. 63.21



Σχ. 63.22

ὁμόρροποι, καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη (Σχ. 63.21), τότε κάθε σημεῖον μὴ κείμεμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Α′ εἶναι κέντρον ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας **Η**; κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία εἶναι ὁμοιόθετος τῆς ἄλλης.

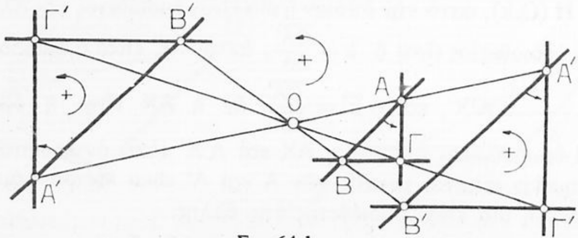
Ἂν αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν εἶναι ἀντίρροποι (Σχ. 63.22), τότε κάθε σημεῖον κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Α′ εἶναι κέντρον ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία εἶναι ὁμοιόθετος τῆς ἄλλης.

Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁ $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ ἢ ὁ ἀντίστροφος αὐτοῦ, καὶ ἔχει τὸ πρόσημον + εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ τὸ εἰς τὴν δευτέραν.

ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

64. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμοιόθετον τριγώνου ἢ πολυγώνου εἶναι ἀντιστοίχως τρίγωνον ἢ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ θεωρούμενον· εἴτε ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπος εἴτε εἶναι ἀντίρροπος.

Ἀπόδειξις. Αἱ ὁμόλογοι γωνίαι εἶναι ἴσαι (63.) Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ



Σχ. 64.1

εἶναι ἀνάλογοι, διότι ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ἐκ τούτων εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας.

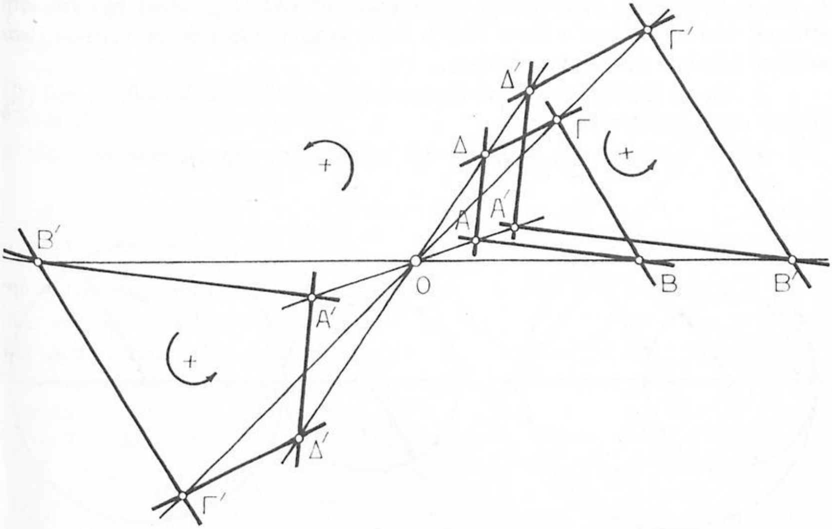
Ἤτοι: $(AB,\ A\Gamma) = (A'B',\ A'\Gamma')$ καὶ $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη, τότε ἕκαστον ἐκ τούτων εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μόνον ὁμοιοθεσίαν **Η**.

Τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας ταύτης εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφάς, ἤτοι τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων ἀντιστοίχως γωνιῶν τῶν ὁμοίων τούτων τριγώνων. Ἡ ὁμοιοθεσία **Η** εἶναι ὁμόρροπος ἢ ἀντίρροπος καθ' ὅσον δύο ὁμόλογοι πλευραί, π.χ. $\overrightarrow{B\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι ἀντιστοίχως (Σχ. 64.1).

Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁ $k = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ καὶ ἔχει τὸ πρόσημον + εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμορρόπου καὶ τὸ – εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας.

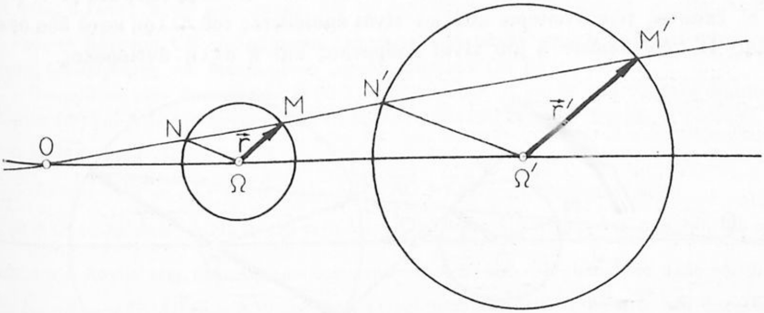
Αἱ αὐταὶ παρατηρήσεις ἰσχύουν καὶ ἐπὶ δύο ὁμοίων πολυγώνων τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι (Σχ. 64.2).



Σχ. 64.2

65. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμοιόθετον κύκλου Ω (r) εἶναι κύκλος. Ω′ (r′).

Ἀπόδειξις. Ἔστω M′ τὸ ὁμοιόθετον ἑνὸς τυχόντος σημείου M τοῦ κύκλου (Ω), καὶ Ω′ τὸ ὁμοιόθετον τοῦ κέντρου Ω τοῦ (Ω), κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν **H** (O, k).



Σχ. 65

Εἶναι : $\dfrac{\overrightarrow{\Omega' M'}}{\overrightarrow{\Omega M}} = k$ ἢ $\overrightarrow{\Omega' M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι : $\Omega' M' = k \cdot \mathbf{r}$

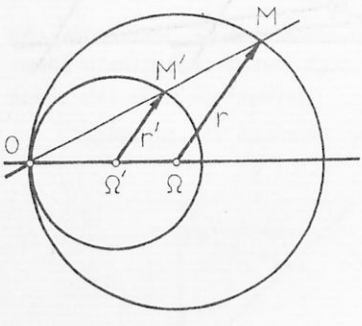
Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον M′ τοῦ κύκλου Ω′ (r′) εἶναι ὁμοιόθετον ἑνὸς σημείου M τοῦ Ω (r).

Σημειοῦμεν ὅτι :

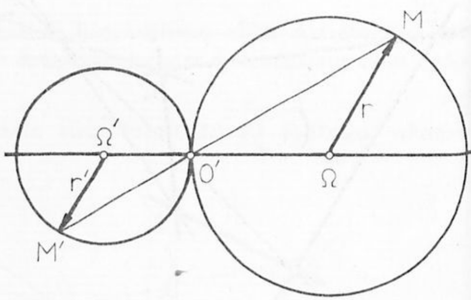
1. Ἂν τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου Ω (r), αἱ διὰ τούτου ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου τούτου Ω (r) εἶναι ἐφαπτόμεναι καὶ τοῦ ὁμοιοθέτου του κύκλου Ω′(r′), διότι ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο ὁμολόγους ἀκτῖνας.

2. Ἂν τὸ Ω συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας, ὁ ὁμοιόθετος τοῦ (Ω) κύκλος εἶναι ὁμόκεντρος αὐτοῦ.

3. Ἂν ὁ κύκλος (Ω) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας, τότε ὁ



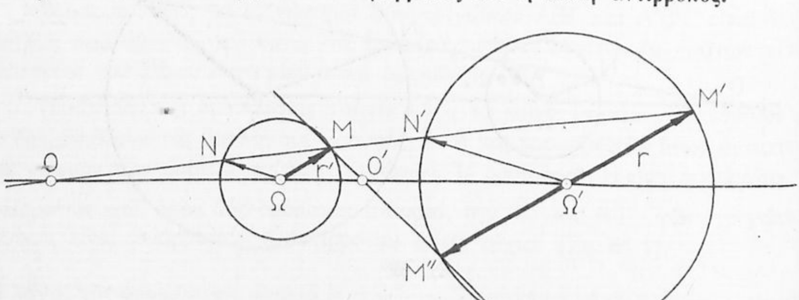
Σχ. 65.31



65.32

ὁμοιόθετος (Ω′) τοῦ (Ω) ἐφάπτεται τοῦ (Ω) κατὰ τὸ κέντρον O τῆς ὁμοιοθεσίας, καὶ μάλιστα ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς καθ' ὅσον ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροπος (Σχ. 65.31) ἢ ἀντίρροπος (Σχ. 65.32)

66. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλους Ω(r) καὶ Ω′ (r′). Ἂν $r \neq r'$, ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω κύκλων εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ ἄλλου κατὰ δύο ὁμοιοθεσίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ὁμόρροπος καὶ ἡ ἄλλη ἀντίρροπος.



Σχ. 66.1

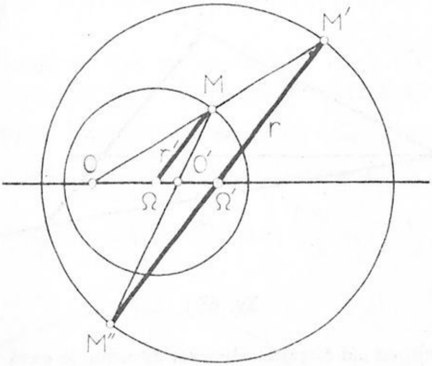
Τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων ὁμοιοθεσιῶν χωρίζουν τὸ εὐθ. τμῆμα ΩΩ′, τὸ ἔχον

ἄκρα τὰ κέντρα τῶν θεωρουμένων κύκλων, ἁρμονικῶς, κατὰ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων r καὶ r′ αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\overline{\Omega M}$ μία ἀκτὶς τοῦ (Ω). Τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ὁμόρροπον ἀκτῖνα $\overline{\Omega' M'}$ (Σχ. 66.1 καὶ 66.2) τοῦ κύκλου (Ω′) ἢ τὴν ἀντίρροπον $\overrightarrow{\Omega' M''}$ αὐτῆς τοῦ (Ω′).

Ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{\overrightarrow{\Omega M}}{\overrightarrow{\Omega' M'}} = \frac{r}{r'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overrightarrow{\Omega M}}{\overrightarrow{\Omega' M''}} = -\frac{r}{r'}$$



Σχ. 66.2

Τὰ κοινὰ σημεῖα O καὶ O′ τῶν MM′ καὶ MM″ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΩΩ′ ἀντιστοίχως, εἶναι τὰ κέντρα τῶν δύο περὶ ὧν ἡ πρότασις ὁμοιοθεσιῶν.

Ἐξ ἄλλου εἶναι :

$$\frac{\overrightarrow{O\Omega}}{\overrightarrow{O\Omega'}} = \frac{r}{r'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overrightarrow{O'\Omega'}}{\overrightarrow{O'\Omega'}} = -\frac{r}{r'}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι : $\dfrac{\overline{O\Omega}}{\overline{O\Omega'}} = -\dfrac{\overline{O\Omega}}{\overline{O'\Omega'}}$, ἤτοι ὅτι τὰ σημεῖα Ω καὶ Ω′ χωρίζουν ἁρμονικῶς τὸ εὐθ. τμῆμα OO′, τὸ ἔχον ἄκρα τὰ κέντρα τῶν θεωρουμένων κύκλων.

ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

67. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ′) τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὁμοιόθετα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως ὁ λόγος $\overline{k}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ὁριζομένου ἀπὸ δύο τυχόντα σημεῖα A, B τοῦ ἑνός, πρὸς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν σημεῖα A′, B′ τοῦ ἄλλου, εἶναι σταθερὸς (ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου ζεύγους σημείων (A, B)).**

Θεωροῦμεν μίαν ὁμοιοθεσίαν H (O,k). [1] Ἔστωσαν A καὶ B δύο τυχόντα σημεῖα ἑνὸς σχήματος (Φ) καὶ A′ καὶ B′ ἀντιστοίχως τὰ ὁμόλογα αὐτῶν (Σχ. 67). Ἔχομεν, ἐξ ὁρισμοῦ, ὅτι: $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$[2] καὶ $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$.

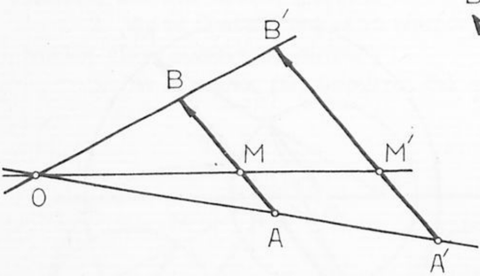
Ἀλλά : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'}$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$. Ἑπομένως ἔχομεν : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OB} = K(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k \cdot \overrightarrow{AB}$, ἤτοι : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι ὁ λόγος τῶν παραλλήλων διανυσμάτων $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{A'B}$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον k τῆς ὁμοιοθεσίας. Τὰ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ ὁμοίως προσημασμένα ὅταν ὁ λόγος $\overline{k}$ τῆς ὁμοιοθεσίας

(1) Θὰ σημειοῦμεν ἁπλῶς k ἀντὶ τοῦ $\overline{k}$, ὅταν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπος καὶ — k ὅταν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀντίρροπος.

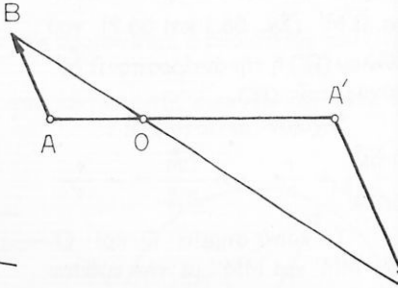
(2) Ἐπὶ τῆς εὐθείας OA τὸ προσανατολισμένον εὐθ. τμῆμα $\overline{OA}$ καὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ εἶναι ἡ αὐτὴ ἔννοια.

εἶναι θετικῶς προσημασμένος καὶ ἀντιθέτως προσημασμένα ἂν ὁ $\overline{\mathrm{k}}$ καὶ ἀρνητικῶς προσημα-
σμένος.

Ἀντιστρόφως. Ἔστωσαν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ′) τοῦ ἐπιπέδου. Ὑποθέτομεν ὅ



Σχ. 67.1



Σχ. 67.2

ὑπάρχει μιὰ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία κατὰ τὴν ὁποίαν, ἂν εἶναι A′ καὶ B′ τὰ ἀντίστο
χα δύο οἱωνδήποτε σημείων A καὶ B ἑνὸς σχήματος (Φ) εἶναι :

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \mathrm{k}.$$

ἔνθα k, δοθὲν θετικῶς προσημασμένον εὐθ. τμῆμα.

Ἂν $\mathrm{k} = 1$, ἡ ἀντιστοιχία εἶναι μιὰ **μεταφορὰ** ἢ μία **ταυτότης** (ἂν δύο ὁμόλογα σ
μεῖα συμπίπτουν).

Ἂν $K \neq 1$, ὑπάρχει **(8)** ἐπὶ τῆς εὐθείας AA′ ἕνα σημεῖον O, καὶ ἕνα μόνον, ὥστ

$\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \mathrm{k}.$ Ἔχομεν οὕτω:

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \mathrm{k}\,\overrightarrow{OA} + \mathrm{k}\,\overrightarrow{AB},\ \text{ἤτοι :}\ \overrightarrow{OB'} = \mathrm{k}\,\overrightarrow{OB}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς προκύπτει ὅτι τὸ σημεῖον B′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ
κατὰ τὴν **ὁμοιοθεσίαν H** (O, k). (Σχ. 67.1)

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα ἀγόμεθα, ὁμοίως, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁπο
τὸ k εἶναι ἀρνητικῶς προσημασμένον εὐθ. τμῆμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ O (Σχ. 67
εἶναι σημεῖον τῆς AA′ κείμενον μεταξὺ τῶν A καὶ A′.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἂν ἕνα σημεῖον M εἶναι σημεῖον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, τὸ ὁμο
θετον M′ τοῦ M εἶναι σημεῖον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{A'B'}$, διότι : $\overrightarrow{A'M'} = \mathrm{k}\cdot\overrightarrow{AM}$ ἢ $\overrightarrow{A'M'} = -\mathrm{k}\cdot$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΣ

**68. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ : Τὰ μέσα O_1, O_2, O_3 τῶν πλευρῶν Β
ΓΑ, ΑΒ αὐτοῦ ἀντιστοίχως, τὰ ἐπὶ τριῶν τούτων πλευρῶν σημεῖα H_1, H_2,
τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν του, καὶ τὰ μέσα P_1, P_2, P_3 τῶν εὐθυγράμμων τμημάτ
ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, ἔνθα Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτ
κύκλου (Ω) (1), τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος r τοῦ κύκλου ΑΒ**

(1) Κύκλος Euler (1707 - 1783) τοῦ τριγώνου

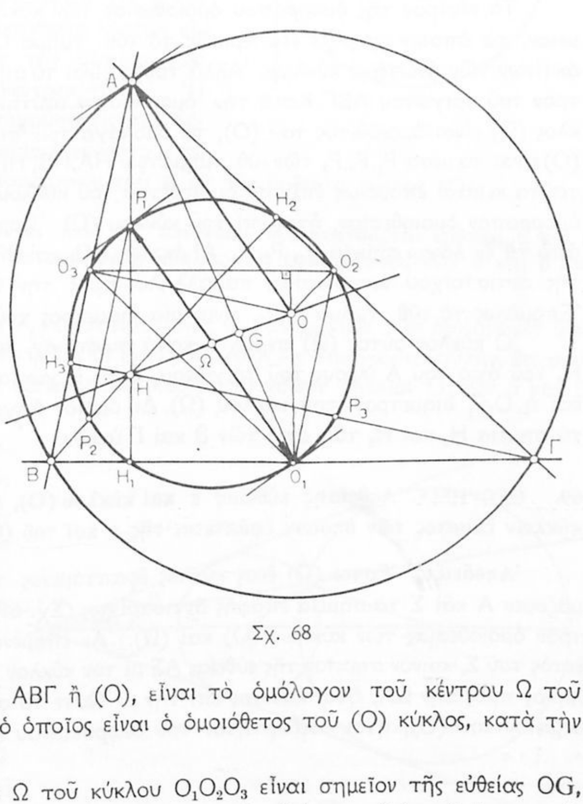
) κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΑΒΓ, τὸ κέντρον Ω τοῦ κύκλου (Ω), τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

᾿Απόδειξις. Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $O_1O_2O_3$ εἶναι ἀντιστοίχως παράλ-ηλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. ῾Επομένως (8, Πόρισμα) αἱ εὐ-ῖαι AO_1, BO_2, ΓO_3, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου G. Τὸ σημεῖον τοῦτο ναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι αἱ AO_1, BO_2, ΓO_3 εἶναι αἱ διά-σοι αὐτοῦ.

Τὸ τρίγωνον O_1,O_2O_3 εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὴν ντίρροπον ὁμοιοθεσίαν τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον τοῦτο G. Καθ' σον ἀφορᾷ τὸν λόγον k τῆς ὁμοιοθεσίας παρατηροῦμεν ὅτι $GO_1 = \frac{1}{2}$ GA, φοῦ εἶναι $O_2O_3 = \frac{1}{2}$ ΒΓ. ᾿Επειδὴ τὰ ὁμόλογα σημεῖα O_1 καὶ Α κεῖνται ἑκατέ-ωθεν τοῦ κέντρου G τῆς ὁμοιοθεσίας, δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν : $\frac{\overline{GO_1}}{\overline{GA}} = -\frac{1}{2}$

Τὰ ὕψη τοῦ τρι-ώνου $O_1O_2O_3$ εἶναι ἱ μεσοκάθετοι τῶν λευρῶν τοῦ τριγώ-ου ΑΒΓ. ῾Επομένως ὸ κοινὸν σημεῖον Ο ῶν ὑψῶν τούτων ναι τὸ ὁμόλογον οῦ ὀρθοκέντρου Η οῦ τριγώνου ΑΒΓ ατὰ τὴν ἀνωτέρω ὁ-οιοθεσίαν $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$.

᾿Εκ τούτου ἕπεται τι ἡ εὐθεῖα ΟΗ δι-ρχεται διὰ τοῦ κέν-ρου G τῆς ὁμοιοθε-ίας καὶ ἀκόμη ὅτι : $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{1}{2}$.



Σχ. 68

Κατὰ τὴν ἀνωτέ-ω ὁμοιοθεσίαν κέν-ρου G, τὸ σημεῖον), κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἢ (Ο), εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ κέντρου Ω τοῦ ύκλου $O_1O_2O_3$ ἢ (Ω), ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ὁμοιόθετος τοῦ (Ο) κύκλος, κατὰ τὴν νωτέρω ὁμοιοθεσίαν.

Οὕτω, τὸ κέντρον Ω τοῦ κύκλου $O_1O_2O_3$ εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας OG, ιότι ἡ εὐθεῖα ὡς ὁριζομένη ἀπὸ ὁμοιόθετα σημεῖα, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας. Ἐπὶ τῆς OG κεῖται, ὡς ἀνωτέρω ἐσημειώσαμεν, καὶ τὸ σημεῖον H κ

εἶναι $\frac{G\Omega}{GO} = -\frac{1}{2}$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι : $\overline{O\Omega} = \frac{3}{2}\overline{OG} = \frac{1}{2}$ OH. Ἤτοι τὸ

εἶναι, τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος OH.

Ἐπειδὴ $\frac{G\Omega}{GO} = -\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{H\Omega}{HO} = \frac{1}{2}$ ἕπεται ὅτι: $\frac{\overline{G\Omega}}{\overline{GO}} = -\frac{\overline{H\Omega}}{\overline{HO}}$, ἤτοι ὅτι ἡ ἐ τῆς εὐθείας HO τετρὰς HGΩO εἶναι ἁρμονική. Ἡ εὐθεῖα HO εἶναι ἡ εὐθε Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (1).

Ἂν θέσωμεν OA = **r** (ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΑΒΓ), τότε ἐκ τῆς : $\frac{\overline{\Omega O_1}}{OA} = -$

ἕπεται ὅτι $\Omega O_1 = \frac{1}{2}OA$, ἤτοι $\Omega O_1 = \frac{r}{2}$ Ὥστε : τὸ κέντρον Ω τοῦ κύκλου O_1O_2 εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος OH καὶ ἡ ἀκτὶς ρ αὐτοῦ ἴση πρὸς τὸ ἥμι τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Τὸ σημεῖον G ἀπεδείχθη κέντρον τῆς ἀντιρρόπ ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων (O) καὶ (Ω).

Τὸ κέντρον τῆς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων τούτων εἶναι τὸ σ μεῖον, τὸ ὁποῖον χωρίζει ἐξωτερικῶς τὸ εὐθ. τμῆμα OΩ κατὰ τὸν λόγον τ ἀκτίνων τῶν ἀνωτέρω κύκλων. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι τὸ σημεῖον H, ἤτοι τὸ ὀρθόκε τρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν ταύτην, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κ κλος (Ω) εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ (O), τὰ ὁμόλογα τῶν σημείων A, B, Γ τοῦ κύκλ (O) εἶναι τὰ μέσα P_1, P_2, P_3 τῶν εὐθ. τμημάτων HA, HB, HΓ ἀντιστοίχως. Τὰ σημε ταῦτα κεῖνται ἑπομένως ἐπὶ τοῦ ὁμοιοθέτου τοῦ κύκλου (O) κατὰ τὴν ἀνωτέρ ὁμόρροπον ὁμοιοθεσίαν, ἤτοι ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ω). Ὥστε ὁ κύκλος (Ω) διέρχετ ἀπὸ τὰ ἐν λόγῳ σημεῖα P_1, P_2, P_3. Αἱ ἀκτῖνες ΩO_1 καὶ ΩP_1, αἱ ὁποῖαι εἶναι, λόγ τῆς ἀντιστοίχου ὁμοιοθεσίας, παράλληλοι πρὸς τὴν OA, κεῖνται ἐπ' εὐθεία Ἑπομένως τὸ εὐθ. τμῆμα O_1P_1, εἶναι μία διάμετρος τοῦ κύκλου $O_1O_2O_3$.

Ὁ κύκλος οὗτος (Ω) περιέχει, κατὰ συνέπειαν, καὶ τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖ H_1 τοῦ ἀπὸ τοῦ A ὕψους τοῦ τριγώνου, διότι ἡ γωνία (H_1O_1, H_1P_1) εἶναι ὀρθ καὶ ἡ O_1P_1 διάμετρος τοῦ κύκλου (Ω). Δι' ὅμοιον λόγον ὁ κύκλος (Ω) περιέχ τὰ σημεῖα H_2 καὶ H_3 τῶν ἀπὸ τῶν B καὶ Γ ὑψῶν.

69. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης εὐθείας ε καὶ κύκλου (O), ὑπάρχουν δύο οἰκογένει κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τῆς ε καὶ τοῦ (O).

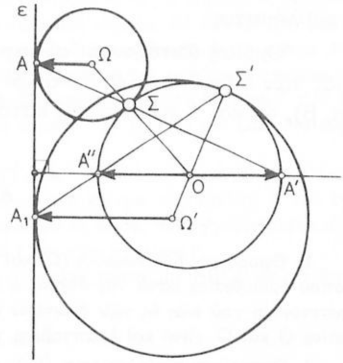
Ἀπόδειξις. Ἔστω (Ω) ἕνας κύκλος ἐφαπτόμενος τῆς ε καὶ τοῦ (O). Ὀν μάζομεν A καὶ Σ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἀντιστοίχως (Σχ. 69). Τὸ σημεῖον Σ εἶναι κέ τρον ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων (O) καὶ (Ω). Ἂν ἑπομένως, εἶναι A' τὸ δεύτερο ἐκτὸς τοῦ Σ, κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας AΣ μὲ τὸν κύκλον (O), ἡ O'A' εἶναι παρά ληλος πρὸς τὴν ΩA, ἤτοι κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Ὥστε τὸ σημεῖον A' εἶναι γνωστ σημεῖον τοῦ (O), ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρουμένου κύκλου (Ω), ἐξαρτώμεν

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ» Γ' τάξεως Κεφ. IV παραγρ. 142

ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων καὶ εὑρισκόμενον βάσει τούτων, ὡς ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ (Ο) τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ε.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

Ἂν διὰ τοῦ Α′ ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα καὶ εἶναι Α τὸ κοινὸν σημεῖον της μὲ τὴν ε καὶ Σ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α′, κοινὸν σημεῖον της μὲ τὸν (Ο), τότε τὸ κοινὸν σημεῖον Ω τῆς ΟΣ καὶ τῆς εἰς τὸ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ε εἶναι κέντρον κύκλου ἐφαπτομένου τῆς ε καὶ τοῦ (Ο). Ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶναι ἡ ΩΑ = ΩΣ. Εἰς τὸ ἀντιδιαμετρικὸν Α″ τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἕνας δεύτερος κύκλος (Ω′), ἱκανοποιῶν τὰς δοθείσας συνθήκας.



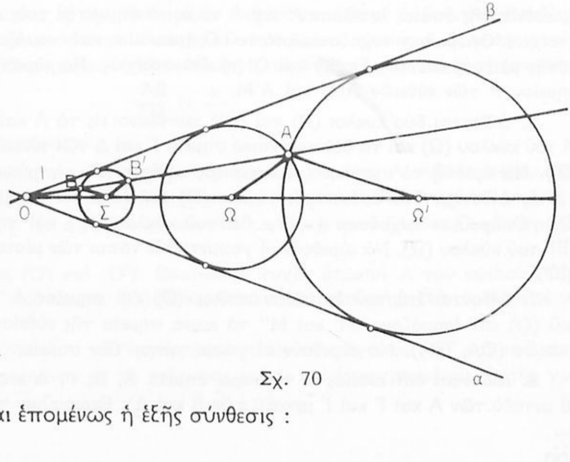
Σχ. 69

Ἐπειδὴ ἡ διὰ τοῦ Α′ εὐθεῖα ἐλήφθη τυχοῦσα, ὑπάρχουν ἄπειροι κύκλοι (Ω), ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τῆς ε καὶ τοῦ (Ο). Ἡ πρώτη οἰκογένεια λύσεων εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δέσμην τῶν εὐθειῶν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Α′. Ἡ δευτέρα εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δέσμην τῶν εὐθειῶν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Α″ : τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Α εἰς τὸν δοθέντα κύκλον (Ο).

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος τῶν α καὶ β καὶ διερχόμενος διὰ τοῦ Α.

Λύσις. Τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐντὸς μιᾶς ἐκ τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β. Οἱ κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς τὴν γωνίαν αὐτήν, θεωρούμενοι ἀνὰ δύο, ἔχουν ὡς κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν α καὶ β. Ἕκαστος τῶν κύκλων τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμοιόθετος ἑνὸς κύκλου (Σ) ἐκ τούτων, εἰς ὁμοιοθεσίαν ἔχουσαν κέντρον τὸ Ο.

Ἔστω (Ω) μία λύσις τοῦ προβλήματος. Τὸ κέντρον Ω τῆς λύσεως κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΣ. Ἂν εἶναι Β καὶ Β′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ΟΑ μὲ τὸν κύκλον (Σ), ἡ ΩΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΒ ἢ τὴν ΣΒ′. Ἕπεται ἑπομένως ἡ ἑξῆς σύνθεσις :



Σχ. 70

Ὁρίζεται σημεῖον Σ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν α καὶ β, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Α, καὶ κατασκευάζεται ὁ κύκλος (Σ), κέντρου Σ, ὁ ἐφαπτόμενος τῶν α καὶ β. Ἡ εὐθεῖα ΟΑ τέμνει τὸν κύκλον αὐτὸν εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Β'. Αἱ διὰ τοῦ Α παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΣ καὶ Β'Σ τέμνουν τὴν ΟΣ κατὰ τὰ σημεῖα Ω καὶ Ω'. Ἕκαστον τῶν σημείων τούτων εἶναι κέντρον μιᾶς λύσεως τοῦ προβλήματος.

Ὁμοίως ἐξετάζονται αἱ περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας τὸ Α εἶναι σημεῖον μιᾶς τῶν διδομένων εὐθειῶν α καὶ β ἢ κεῖται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν (α, β), ὡς καὶ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ω) καὶ (Ω') καὶ τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' τῆς ὁμορρόπου καὶ ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας κατὰ τὰς ὁποίας ὁ (Ο') εἶναι ὁμόλογος τοῦ (Ο). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε ἐφαπτομένη τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ἀνωτέρω κύκλων ἀγομένη ἀπὸ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο κέντρων ὁμοιοθεσίας Ο καὶ Ο' εἶναι καὶ ἐφαπτομένη τοῦ ἄλλου.

2. Θεωροῦμεν τρεῖς κύκλους (Ω_1), (Ω_2), (Ω_3) καὶ τὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας αὐτῶν, θεωρουμένων ἀνὰ δύο (O_1, O_1' τὰ κέντρα τῆς ὁμορρόπου καὶ ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων (Ω_2), (Ω_3), O_2, O_2' τὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας τῶν (Ω_3), (Ω_1) καὶ O_3, O_3' τὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας τῶν (Ω_1), (Ω_2)). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Τὰ κέντρα τῆς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας O_1, O_2, O_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

(2) Τὰ κέντρα O_1, O_2', O_3' μιᾶς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας καὶ τῶν δύο ἄλλων ἀντιρρόπων ὁμοιοθεσιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς καὶ τὰ O_2, O_3', O_1' καὶ O_3, O_1', O_2'.

3. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον $AB^2 = 2 \cdot B\Gamma^2$, τὸ ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ ὀρθογώνιον, ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἡμικυκλίου τούτου καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ' τῶν ΜΓ καὶ ΜΔ ἀντιστοίχως μὲ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$A\Gamma'^2 + B\Delta'^2 = AB^2$$

4. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι Ο (r) καὶ Ο (r'), ἔνθα $r > r'$ καὶ μία ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθεῖα τῆς ὁποίας ἔστωσαν Α' καὶ Α τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τοὺς κύκλους Ο (r') καὶ Ο (r) ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθεῖαν καὶ ὀνομάζομεν Μ' καὶ Μ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τοὺς κύκλους Ο (r') καὶ Ο (r) ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Ρ τῶν εὐθειῶν ΑΜ' καὶ Α'Μ.

5. Δίδονται δύο κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') τεμνόμενοι εἰς τὰ Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ω) καὶ τὰ δεύτερα κοινὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τῶν εὐθειῶν ΜΑ καὶ ΜΒ μὲ τὸν κύκλον (Ω'). Νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον (γεωμετρικὸς τόπος) τῶν κέντρων βάρους τῶν τριγώνων ΑΓΔ.

6. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου (Ω'). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν χορδὴν ΡΑ τοῦ κύκλου (Ω') καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν χορδὴν ΡΒΓ τοῦ κύκλου (Ω). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμετρικοὶ τόποι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

7. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ (Ο) καὶ ὀνομάζομεν Μ' καὶ Μ'' τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΜ μὲ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν (ΟΑ, ΟΜ). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων Μ' καὶ Μ''.

8. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας σ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κατὰ τὴν σημειουμένην διάταξιν (Β μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ Γ μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ). Θεωροῦμεν τὸν κύκλον (Ω) τοῦ ὁποίου σημεῖα Μ ὁρίζονται ἐκ τῆς συνθήκης (ΜΑ, ΜΒ) = φ καὶ τὸν κύκλον (Ω′) τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα Μ′ ὁρίζονται ἐκ τῆς συνθήκης (Μ′Γ, Μ′Δ) = − φ.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΩΩ′ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου (ἀνεξαρτήτου τῆς γωνίας φ).

(2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω′).

9. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν (Ο) καὶ ὀνομάζομεν Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα. Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΝ ἐπανατέμνουν τὸν κύκλον (Ο′) κατὰ δύο σημεῖα Μ′ καὶ Ν′. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα Μ′Ν′ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ρ′, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ρ.

10. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν : τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ (Ο), τὸ συμμετρικὸν Δ τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ Γ καὶ τὸν κοινὸν σημεῖον Μ τῶν ΑΓ καὶ ΟΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

11. Δίδονται δύο σημεῖα Ο καὶ Α. Ὀνομάζομεν (Τ) κάθε τετράπλευρον ΟΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ΟΓ = ΟΑ = α καὶ ΑΒ = ΒΓ = β καὶ Ι καὶ Ι′ ἀντιστοίχως τὰ κέντρα τῶν κύκλων : τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τετράπλευρον καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς αὐτό, τοῦ ἐγγεγραμμέου εἰς τὴν γωνίαν Ο. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων Ι καὶ τῶν σημείων Ι′.

12. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ὀνομάζομεν (Τ) κάθε τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$ΓΔ = γ \text{ καὶ } \frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{μ}{ν}$$

ἔνθα γ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

(2) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ′ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τῶν τραπεζίων (Τ).

13. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ὀνσμάζομεν (Τ) κάθε τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον ΓΔ = γ καὶ ΑΔ = δ, ἔνθα γ καὶ δ δοθέντα εὐθ. τμήματα. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

(2) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ′ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τῶν τραπεζίων (Τ).

14. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ μία εὐθεῖα ε. Ὀνομάζομεν (Τ) κάθε τραπέζιον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Δ εἶναι σημεῖον τῆς ε καὶ ἡ πλευρὰ ΓΔ ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα γ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

(2) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ′ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τῶν τραπεζίων (Τ).

15. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν δ, δοθείσης διευθύνσεως (Δ) καὶ ὀνομάζομεν Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας α, β, γ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τῶν εὐθειῶν δ, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐκ τῆς συνθήκης :

$$\frac{ΑΒ}{ΓΜ} = \frac{μ}{ν}$$

ἔνθα μ καὶ ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

16. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι β καὶ γ καὶ ἕνα σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Θεωροῦμεν ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι τυχόντα σημεῖα τῶν εὐθειῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων βάρους G τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

17. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τοῦ κύκλου (Ο′) καὶ τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ κύκλου (Ο) (Β καὶ Γ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ παρεγεγγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ.

(2) Τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

(3) Τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν ΘΑ καὶ ΒΓ.

(4) Τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

18. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ τὰς διὰ τούτου παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ ὁποῖαι τέμνουν ἀντιστοίχως : τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ Σ. Ἡ διὰ τοῦ Σ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ρ.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΜΝΡΣ εἶναι παραλληλόγραμμον.

(2) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν μέσων τῶν εὐθ. τμημάτων ΜΣ καὶ ΝΡ.

(3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου Ο τοῦ παραλληλογράμμου ΜΝΡΣ.

19. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς ἀλλήλων κατὰ τὸ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν (ΑΧ, ΑΥ) καὶ ὀνομάζομεν Β καὶ Γ τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΧ καὶ ΑΥ τῆς γωνίας μὲ τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ΟΒ καὶ Ο′Γ εἶναι παράλληλοι καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΒΓ.

(2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς προβολῆς Η τῆς κορυφῆς Α τῆς γωνίας (ΑΧ, ΑΥ) ἐπὶ τὴν ΒΓ ὡς καὶ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Ι τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ.

(3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους G τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

20. Δίδεται κύκλος Ο (r) καὶ σημεῖον Η ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Ὀνομάζομεν (Τ) κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (Ο) καὶ ἔχον ὡς ὀρθόκεντρον τὸ σημεῖον Η. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ἐπὶ τούτων ἰχνῶν τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

21. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου της τοιοῦτον ὥστε αἱ προβολαὶ Ρ καὶ Σ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ νὰ ὁρίζουν εὐθ. τμῆμα ΡΣ = λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

22. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν δοθείσης διευθύνσεως (Δ), τῆς ὁποίας ἔστωσαν Ρ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Διὰ τῶν Ρ καὶ Ν θεωροῦμεν τὰς εὐθείας δύο δοθεισῶν διευθύνσεων (Δ′) καὶ (Δ″) καὶ ὀνομάζομεν Μ τὸ κοινόν των σημεῖον.

(1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

(2) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τρίγωνον ΜΝΡ τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ διευθύνσεις τῶν πλευρῶν.

23. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Ρ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ (Ο). Ἔστω Η ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΡΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος :

(1) Τοῦ κέντρου βάρους G τοῦ τριγώνου ΡΟΜ.

(2) Τοῦ μέσου Ι τοῦ εὐθ. τμήματος ΡΗ.

(3) Τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΟΡΗ.

24. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ), ἴση πρὸς τὴν $\frac{\pi}{3}$ καὶ σημεῖον Ι τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον κέντρου Ι τέμνοντα τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ καὶ ὀνομάζομεν Α καὶ Β δύο κοινὰ σημεῖα μὴ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΙ. Ἔστωσαν Η καὶ Κ αἱ προβολαὶ τοῦ Ι ἐπὶ τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι.

(1) Τοῦ κέντρου Ω τοῦ κύκλου ΑΙΒ.

(2) Τοῦ ὀρθοκέντρου Η καὶ τοῦ κέντρου βάρους G τοῦ τριγώνου τούτου ΙΑΒ.

25. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα α καὶ σημεῖον Ι. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς α καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΙΑ τὸ σημεῖον Μ′, πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ι πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ, ὥστε

$$(1) \quad IM \cdot IM' = \lambda^2,$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ εὑρεθῇ σύνολον τῶν σημείων Μ', τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς (1).

26. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ' τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης (1), τῆς προηγουμένης προτάσεως, ὅταν τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' θεωροῦνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ι.

27. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ὀνομάζομεν Δ καί Ε τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, καὶ Η καὶ Κ τὰς προβολὰς τῶν Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν ΒΓ.

(1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Ι τοῦ εὐθ. τμήματος ΔΕ.

(2) Ἔστω Ζ ἡ προβολὴ τοῦ Ι ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΙΖ.

(3) Νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τῆς ΔΕ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὀρθογώνιον ΔΕΚΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

28. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων δύο εὐθειῶν Simson καθέτων ἐπ' ἀλλήλας.

29. Δίδεται κύκλος (Γ) καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Γ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τοῦ (Γ) καὶ τὸν κύκλον Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τοῦ κύκλου Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

30. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Η. Θεωροῦμεν τὴν οἰκογένειαν τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι ὁμόλογος τοῦ (Ο) κατὰ μίαν ὁμοιοθεσίαν κέντρου Η.

(1) Νὰ κατασκευασθοῦν οἱ κύκλοι τῆς οἰκογενείας, οἱ ἐφαπτόμενοι δοθείσης εὐθείας ε.

(2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων τῆς οἰκογενείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ.

31. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν γωνίαν (ΑΥ, ΑΖ) ἐκ τῶν ἐχουσῶν κορυφὴν τὸ Α καὶ ἴσων πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ, καὶ ὀνομάζομεν Β καὶ Γ τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς μὲ τὸν κύκλον (Ο) ἀντιστοίχως.

(1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(α) Τῶν μέσων Α' τῶν χορδῶν ΒΓ.

(β) Τῶν μέσων Β' καὶ Γ' τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως.

(γ) Τῶν μέσων τῶν εὐθ. τμημάτων Β'Γ'.

(2) Θεωροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ.

(α) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὀρθόκεντρον Η' τοῦ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι σταθερὸν (ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) $= \varphi$).

(3) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(α) Τῶν ὀρθοκέντρων Η τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

(β) Τῶν κορυφῶν Δ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΔΓ.

(γ) Τῶν κέντρων Ο' τῶν κύκλων ΒΓΔ.

32. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον (Ω) ἐκ τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ὀνομάζομεν: Ε καὶ Ζ τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου αὐτοῦ, τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ε, Ι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ Ρ καὶ Σ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ΔΕ καὶ ΓΖ μὲ τὸν κύκλον (Ω).

(1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων Ρ καὶ Σ.

(2) Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Ρ τέμνει τὴν ε κατὰ σταθερὸν σημεῖον Μ καὶ ὁ γεωμ. τόπος τῶν Σ κατὰ σταθερὸν σημεῖον Ν, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀμφότερα διάφορα τῶν Γ καὶ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\mathrm{IM} \cdot \mathrm{I\Delta} = \mathrm{IN} \cdot \mathrm{I\Gamma}$$

(3) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΡΣ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

33. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ τῶν ὁποίων ἡ γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων βάρους G τῶν τριγώνων τούτων.

34. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ σημείου τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου.

35. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διάμετρον ΒΓ τοῦ (Ο) καὶ τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τῶν Β καὶ Γ, κοινὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ μὲ τὸν κύκλον (Ο). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τῶν ὀρθοκέντρων Η τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

(2) Τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων ΑΒΓ.

(3) Τῶν κέντρων Ω′ τῶν κύκλων ΑΒ′Γ′.

36. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἕνας κύκλος (Ο) καὶ ἕνα σημεῖον Α. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Ρ τοῦ κύκλου (Ο), τὴν ἐφαπτομένην ε τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Ρ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΡΜΣ, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ΡΣ κεῖται ἐπὶ τῆς ε. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Μ τῶν ὀρθογωνίων ΑΡΜΣ.

37. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) καὶ ἕνα σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλοι ἀκτῖνες ΟΜ καὶ Ο′Μ′ τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως, ὥστε νὰ φαίνωνται ἀπὸ τοῦ Α ὑπὸ ἴσας γωνίας.

38. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ ὥστε τὰ εὐθ. τμήματα ΜΑ′, ΜΒ′, ΜΓ′ τὰ παράλληλα ἀντιστοίχως πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας (Α′, Β′, Γ′ σημεῖα τοῦ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως), νὰ εἶναι ἴσα.

39. Δίδεται σημεῖον Ι καὶ κύκλος (Ο). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ (Ο) καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΙΜ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ι πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ, τὸ σημεῖον Μ′ ὥστε :

$$IM \cdot IM' = \lambda^2,$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ′ εἶναι ἕνας κύκλος (Ο′). Ὁ κύκλος (Ο′) εἶναι ὁ ὁμοιόθετος κύκλος τοῦ (Ο), κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Ι καὶ ὁ λόγος $k = \frac{\lambda^2}{\sigma^2}$, ἔνθα σ ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ι ἀπὸ τοῦ κύκλου (Ο).

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) κατὰ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν εὐθεῖαν ΙΜΜ′ (αἱ ἐφαπτομενικαὶ ἀποστάσεις τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ἀνωτέρω ἐφαπτομένων ἀπὸ τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) εἶναι ἴσαι).

(3) Ἂν εἶναι σ^2 καὶ σ'^2 αἱ δυνάμεις τοῦ Ι ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\lambda^2 = \sigma \cdot \sigma'$$

40. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι δύο δοθέντων κύκλων (Ο) καὶ (Ο′).

41. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ, δύο σημεῖα Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως, ὥστε :

$$BX = XY = Y\Gamma$$

42. Δίδεται σημεῖον Β καὶ δύο παράλληλοι ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ ΓΥ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Β, τέμνουσα τὰς ἀνωτέρω παραλλήλους κατὰ δύο σημεῖα Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως, ὥστε :

$$\frac{AX}{AY} = \frac{\mu}{\nu}$$

μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

43. Δίδονται δύο ἀκτῖνες κύκλου (Ο). Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ τοῦ (Ο) χωριζομένη ἀπὸ τῶν διδομένων ὡς ἄνω ἀκτίνων εἰς τρία ἴσα εὐθ. τμήματα.

44. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως (Δ) χωρίζουσα κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἕνα ζεῦγος ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

45. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν π.χ.

ΒΓ τοῦ τριγώνου, ὥστε ἂν εἶναι X καὶ Y τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$XY^2 = XA \cdot XB$$

46. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ ἐπίκεντρος γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη τοῦ (Ο), ὥστε τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ἐπαφῆς νὰ χωρίζῃ τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς ζητουμένης ἐφαπτομένης μὲ τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ, εἰς δοθέντα λόγον.

47. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ σημείου Ο καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς α, β, γ ὥστε, ἂν εἶναι Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

48. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ω) τῶν ὁποίων ἔστωσαν Ρ καὶ Σ τὰ κοινὰ σημεῖα. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ (ἢ τοῦ Σ) ὥστε νὰν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς, τὰ διάφορα τοῦ Ρ, μὲ τοὺς ἀνωτέρω κύκλους ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

49. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

50. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα (49) εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἀντὶ τῶν εὐθειῶν α καὶ β δίδεται μία εὐθεῖα α καὶ ἕνας κύκλος (Ο) ἢ δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Γ).

51. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου τῶν α καὶ β. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$OA + OB = 2AB$$

52. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλοι χορδαὶ ΑΑ' καὶ ΒΒ' τοῦ (Ο) ὥστε :

$$AA' \cdot BB' = \lambda^2,$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

53. Δίδονται τέσσαρες ὁμόκεντροι κύκλοι Α (α), Β (β), Γ(γ), Δ (δ), ἔνθα $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε τέμνουσα τούτους ὥστε, ἂν εἶναι : Α,Α' · Β, Β' · Γ, Γ' · Δ, Δ' τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως (ἕκαστον τῶν Β καὶ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ), νὰ εἶναι :

$$AB = \Gamma\Delta.$$

54. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο ἡμικύκλιον ἐφαπτόμενον τῆς ΒΓ κατὰ δοθὲν σημεῖον Ρ αὐτῆς καὶ ἔχον τὰ ἄκρα Ε καὶ Ζ αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως.

55. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Α' τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τρίγωνον Α'Β'Γ' (Α' τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς ΒΓ) τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ Β'Γ' νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ καὶ ἡ γωνία Α' ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ.

56. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) Σημεῖα Α καὶ G (κέντρον βάρους) καὶ γωνία Β καὶ Γ.

(2) Σημεῖα Α καὶ G, γωνία Β καὶ ὕψος υ_1 (ἢ υ_2).

57. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) Γωνία Β, Γ καὶ περίμετρος 2τ (2) Β, Γ καὶ υ_1 (ἢ μ_1).

(3) Β, Γ καὶ δ_1 (ἢ δ_1'). (4) Α, υ_1 καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$.

(5) Α, α καὶ $\frac{\beta}{\gamma}$. (6) Α, $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ δ_1 (ἢ δ_1').

(7) Α, $\frac{\beta}{\gamma}$ καὶ ΟΙ (Ο καὶ Ι τὰ κέντρα περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀντιστοίχως).

(8) $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ GI (G τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου).

58. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) υ_1, υ_2, υ_3 (2) Α, β, $\frac{\alpha}{\gamma}$.

(3) Α, υ_1, $\frac{ВН_1}{Н_1Г} = \frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα).

(4) α, Α, μ_2

59. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) α, Β, $\beta - \upsilon_1$ (2) Α, $\alpha - \gamma$, $\upsilon_2 + Н_2Г = \lambda$.

(3) α, Α, $\beta + \mu\gamma$ (μ δοθεὶς φυσικὸς ἀριθμός).

(4) Α, $\beta + \gamma$, $\alpha + \gamma$ (5) Α, $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$

(6) α, Β, $\beta - \upsilon_1 = \lambda$ (7) Α, $\alpha - \gamma$, $\upsilon_2 + ГН_2 = \lambda$.

60. Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο) νὰ ἐγγραφῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ὥστε $\alpha + \upsilon_1 = \lambda$.

61. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν σημείων P_1, P_2, P_3 κατὰ τὰ ὁποῖα αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου τέμνουν τὸν κύκλον ΑΒΓ.

62. Δίδεται γωνία (ΑΧ, ΑΥ) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου της. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ (Α ἡ κορυφὴ τῆς δοθείσης γωνίας) τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΧ καὶ ΑΥ τῆς δοθείσης γωνίας, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ συνθῆκαι: (1) Ὁ κύκλος ΑΒΓ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ρ καὶ (2) Ἡ εὐθεῖα ΒΓ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

63. Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον δοθείσης περιμέτρου.

64. Εἰς δοθὲν τετράπλευρον νὰ ἐγγραφῇ ῥόμβος τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου.

65. Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

66. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ἢ δοθέντα κυκλικὸν τομέα (1), ἢ δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα (2) νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

67. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν διαγωνίων του.

68. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων: Α, (ΒΑ, ΒΔ) = φ, ΒΔ = λ, $\frac{КА}{КГ} = \frac{\mu}{\nu}$ (Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του), καὶ τῆς συνθήκης ὅπως εἶναι ἐγγράψιμον (λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα).

69. Νὰ κατασκευασθῇ κυρτὸν ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ αὐτοῦ. Διερεύνησις.

---

(1) Σχῆμα ἀποτελούμενον ἀπὸ ἕνα κυκλικὸν τόξον καὶ τὰς ἀκτίνας τοῦ κύκλου αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου.

(2) Σχῆμα ἀποτελούμενον ἀπὸ ἕνα τόξον καὶ τὴν χορδὴν αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΟΜΟΙΟΤΗΣ

ΟΜΟΡΡΟΠΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

71. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω ἐπὶ τοῦ προσημασμένου ἐπιπέδου ἕνα δοθὲν σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁμόλογον M_1 αὐτοῦ κατὰ τὴν στροφὴν R (O, φ), ἔνθα φ δοθεῖσα προσανατολισμένη γωνία, καὶ τὸ ὁμόλογον Μ′ τοῦ M_1 κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν **Η** (O,k) τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ ὁ λόγος k ἕνας δοθεὶς θετικῶς προσημασμένος λόγος.

Τὸ σημεῖον M_1 ὁρίζεται κατὰ ταῦτα, ἐκ τοῦ Μ βάσει τῶν συνθηκῶν :

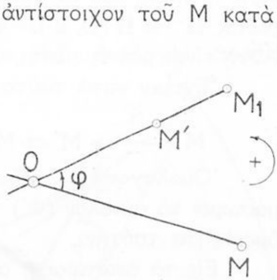
$$OM = OM_1 \text{ καὶ } (OM_1, OM) = \varphi$$

Καὶ τὸ Μ′ ἐκ τοῦ M_1 βάσει τῶν :

$$(OM_1, OM') = O \text{ καὶ } \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k,$$

ἤτοι ὡς τὸ σημεῖον τῆς OM_1 διὰ τὸ ὁποῖον $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM_1}} = k.$

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Μ′ ὡς ἀντίστοιχον τοῦ Μ κατὰ τὴν ἀντιστοιχίαν, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα(1) μιᾶς στροφῆς R καὶ μιᾶς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας **Η**, αἱ ὁποῖαι χωροῦν κατὰ τὴν ἀναφερομένην τάξιν (R, H).



Σχ. 71

Βάσει τῆς ἀνωτέρω ἀντιστοιχίας, κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (πρότυπον) ἔχει ἕνα μόνον ἀντίστοιχον σημεῖον Μ′ (εἰκόνα), καὶ οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου (εἰκών) ὑπάρχει, σημεῖον Μ αὐτοῦ, καὶ ἕνα μόνον, τοῦ ὁποίου τὸ ὁμόλογον κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαν εἶναι τὸ θεωρηθὲν σημεῖον Μ′. Πράγματι, ἂν εἶναι M_1 (Σχ.71) τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν ἀντίστροφον τῆς **Η** ὁμοιοθεσίαν $\mathbf{H}^{-1}$, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ λόγου k τῆς **Η**, τότε τὸ ὁμόλογον τοῦ M_1 κατὰ τὴν στροφὴν. R (O, − φ), ἤτοι κατὰ τὴν στροφὴν R^{-1} εἶναι τὸ σημεῖον Μ.

Ἡ ἀνωτέρω, κατὰ ταῦτα, ὁρισθεῖσα ἐκ τῶν στοιχείων Ο, φ, **k**, ἀντιστοιχία εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *ὁμόρροπος ὁμοιότης* εἰς τὸ

(1) Γινόμενον

ἐπίπεδον. Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται *κέντρον* τῆς ὁμοιότητος, ἡ γωνία φ τῆς στροφῆς, *γωνία* τῆς ὁμοιότητος καὶ ὁ λόγος k τῆς ὁμοιοθεσίας *λόγος* τῆς ὁμοιότητος.

Δυνάμεθα, ἑπομένως, νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Ὀνομάζομεν **ὁμόρροπον ὁμοιότητα** *ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τὸ γινόμενον μιᾶς στροφῆς* **R** *(O, φ) ἐπὶ μίαν ὁμόρροπον ὁμοιοθεσίαν* **H** *(O,k)*

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὰ γράμματα R καὶ **H** τὴν στροφὴν καὶ τὴν ὁμοιοθεσίαν ἀντιστοίχως καὶ μὲ τὸ S τὴν ὁμοιότητα, θὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς :

$$S = H \times R$$

ἂν ἡ S εἶναι τὸ γινόμενον τῆς στροφῆς **R** καὶ τῆς ὁμοιοθεσίας **H**, ὅταν αὗται θεωροῦνται κατὰ τὴν τάξιν (R, **H**).

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον : S (O,φ, k) τὴν ὡς ἄνω ὁρισθεῖσαν ὁμοιότητα καὶ εἶναι M′ τὸ ὁμόλογον ἑνὸς σημείου M τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ ταύτην, θὰ σημειοῦμεν : $M \xrightarrow{\mathbf{S}} M'$ ἢ $M' = \mathbf{S}(M)$. Τὸ σημεῖον M′ εἶναι ἡ *εἰκὼν* τοῦ M κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν S, καὶ τὸ M τὸ *πρότυπον*.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι, ἂν ἡ εἰκὼν M′ τοῦ M θεωρηθῇ ὡς πρότυπον τότε ἡ εἰκὼν τοῦ M′ εἶναι ἕνα σημεῖον M″ διάφορον, ἐν γένει, τοῦ M.

Αἱ σχέσεις: $(OM, OM') = \varphi$ καὶ $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$ δύναται νὰ γραφοῦν :

$$(OM', OM) = -\varphi \quad \text{καὶ} \quad \overline{OM} = k' \, \overline{OM'},$$

ἔνθα k′ ὁ ἀντίστροφος τοῦ λόγου k.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ M εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ M′ κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ἡ ὁποία καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς στροφῆς $R^{-1} \equiv R(O, -\varphi)$ καὶ τῆς ὁμοιοθεσίας $\mathbf{H}^{-1} \equiv \mathbf{H}(O, k')$. Ὑπάρχει ἑπομένως ἡ *ἀντίστροφος* τῆς S ἀπεικόνισις. Αὕτη εἶναι μία ὁμοιότης, συμβολιζομένη μὲ τὸ σύμβολον S^{-1}.

Ἔχομεν κατὰ ταῦτα τὴν ἰσοδυναμίαν :

$$M \xrightarrow{S} M' \Leftrightarrow M' \xrightarrow{S^{-1}} M \quad \text{ἢ} \quad M' = \mathbf{S}(M) \Leftrightarrow M = \mathbf{S}^{-1}(M')$$

Ὁμόλογον ἑνὸς σχήματος (Φ), κατὰ μίαν ὁμόρροπον ὁμοιότητα S, θὰ ὀνομάσωμεν τὸ σύνολον (Φ′) τῶν ὁμολόγων ὅλων τῶν σημείων τοῦ (Φ) κατὰ τὴν ὁμοιότητα ταύτην.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω ἡ στροφὴ R καὶ ἡ ὁμοιοθεσία **H** θεωροῦνται ἔχουσαι τὸ αὐτὸ κέντρον. Ὡς κατωτέρω θέλομεν ἴδει τοῦτο δὲν εἶναι ἀπαραίτητον. Ὁμοίως ὁρίζεται ἡ ὁμοιότης καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ στροφὴ καὶ ἡ ὁμοιοθεσία ἔχουν ὡς κέντρα δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα Ω καὶ O τοῦ ἐπιπέδου.

Καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὰ ὁμόλογα τῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ μίαν ὁμοιότητα S (O, φ, k), παρατηροῦμεν :

72. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμόλογον εὐθείας ε κατὰ μίαν ὁμοιότητα S εἶναι εὐθεῖα ε′.

Ἀπόδειξις. Τὸ ὁμόλογον τῆς εὐθείας ε κατὰ τὴν στροφὴν R (O,φ) εἶναι ὡς ἀπεδείχθη (1) μία εὐθεῖα ε_1. Τὸ ὁμόλογον τῆς εὐθείας ε_1 κατὰ τὴν ὁμοιοθ

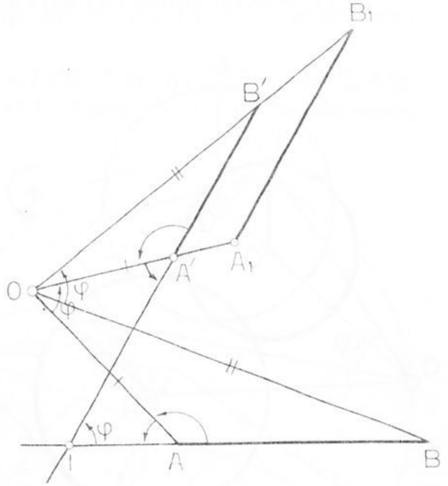
(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ′ τάξεως» παράγρ. 167.

ίαν **Η** (Ο, k) εἶναι ὡς ἀπεδείχθη (62) μία εὐθεῖα ε'. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι: Τὸ μόλογον τῆς εὐθείας ε κατὰ τὴν ὁμοιότητα **S** εἶναι ἡ εὐθεῖα ε'.

3. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμόλογον εὐθ. τμήματος ΑΒ κατὰ μίαν ὁμοιότητα S εἶναι ὐθ. τμῆμα Α'Β' τοῦ ὁποίου ὁ λόγος ρὸς τὸ ΑΒ εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιό-ητος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω (Σχ. 73) A_1B_1 ὸ ὁμόλογον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ατὰ τὴν στροφὴν R(O,φ). Εἶναι $A_1B_1 = AB$. Ἂν εἶναι Α' Β' τὸ ὁμόλο-ον τοῦ A_1B_1 κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν **Η**, θὰ εἶναι : $\frac{A'B'}{A_1B_1} = k$, καὶ ἑπομένως: $\frac{A'B'}{AB} = k$

Σημειοῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ τρί-ωνα ΟΑΒ καὶ OA_1B_1 εἶναι ἴσα, καὶ ὸ ΟΑ'Β' ὁμορρόπως ὅμοιον τοῦ OA_1B_1, θὰ εἶναι : $OA'B' \sim OAB$.



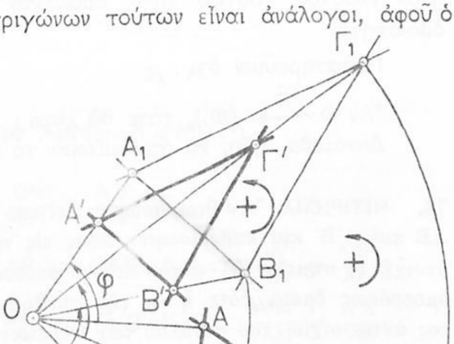
Σχ· 73

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Τὸ ὁμόλογον τριγώνου ΑΒΓ κατὰ μίαν ὁμοιότητα* **S** *(O, φ, k) εἶναι τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.*

Πράγματι, αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἀνάλογοι, ἀφοῦ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμολόγων, κατὰ τὴν ὁμοιότητα, πλευρῶν των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον k τῆς ὁμοιότητος. (Σχ. 73.1)

2. Τὸ ὁμόλογον πολυγώνου ΑΒΓ... ΕΖ κατὰ μίαν ὁμοιότητα **S** *(O,φ,k) εἶναι πολύγωνον Α'Β'Γ'.. Ε'Ζ' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ...ΕΖ.*

Πράγματι, ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν καὶ τὴν ὁμοιοθεσίαν αἱ ὁμόλογοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου Α'Β'Γ'...Ε'Ζ' εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓ...ΕΖ, ἐνῶ ἐκ τοῦ θεωρήμα-

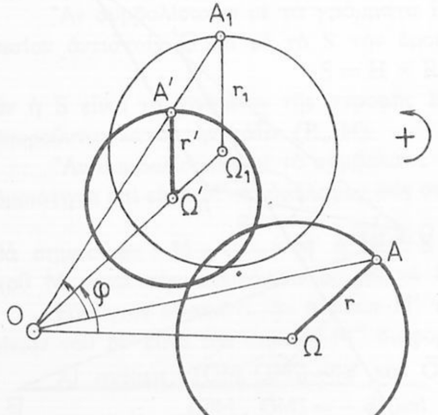


Σχ. 73.1

τος (64) ἔχομεν ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν ἀνωτέρω πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι [1];

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὸ ὁμόλογον ἑνὸς τριγώνου ἢ πολυγώνο κατὰ μίαν ὁμοιότητα S εἶναι τρίγωνον ἢ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ θεωρούμενον, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῶν δοθέντων (6, 27) ὁρισμῶν.

3. Τὸ ὁμόλογον κύκλου (Ω) κατὰ μίαν ὁμοιότητα S εἶναι κύκλος (Ω').



Σχ. 73.3

Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων r *καὶ* r_1 *τῶν κύκλων τούτων ἰσοῦται πρὸ τὸν λόγον* k *τῆς ὁμοιότητος.*

Πράγματι, κατὰ τὴν στροφὴν R (O,φ) καὶ τὴν ὁμοιότητ H (O,k), τῶν ὁποίων ἡ S εἶνα γινόμενον, τὸ ὁμόλογον τοῦ κύκλου εἶναι κύκλος. Καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων r κα r', οὗτος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγο ὁμοιότητος, συμφώνως πρὸς τ θεώρημα (64).

Γενικώτερον τὸ ὁμόλογο (Φ') ἑνὸς σχήματος (Φ), κατ μίαν ὁμοιότητα S, ὀνομάζεται *ὁμορρόπως ὅμοιον* ἢ ἁπλῶς *ὅμοιο* τοῦ (Φ). Ἤτοι :

Δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζονται ὅμοια ὅταν ἕκαστον τούτων εἶναι ὁμόλογον τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν ὁμόρροπο ὁμοιότητα.

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἂν $\Phi \xrightarrow{S} (\Phi')$, τότε θὰ εἶναι : $(\Phi') \xrightarrow{S^{-1}} (\Phi)$

Δυνάμεθα, ἤδη, νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

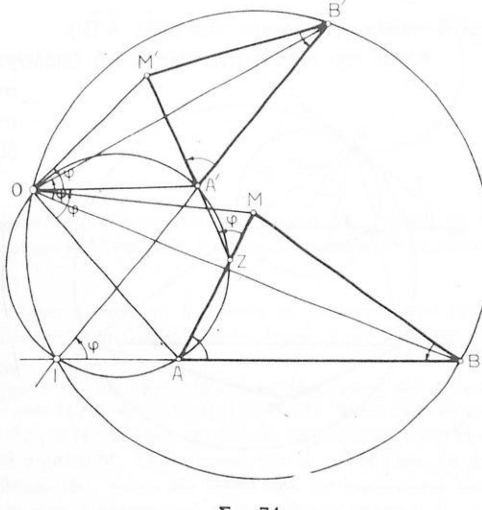
74. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τυχόντα εὐθ. τμήματ AB καὶ A'B' καὶ καθορίσωμεν ὅπως εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχῇ τὸ σημεῖον M' αὐτοῦ διὰ τὸ ὁποῖον τά τρίγωνα ABM καὶ A'B'M' εἶνα ὁμορρόπως ὅμοια, τότε ἡ ἐκ τῆς συνθήκης ταύτης ὁριζομένη ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλο εἶναι μία ὁμόρροπος ὁμοιότης.

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει σημεῖον O τοῦ ἐπι

(1) Ἂν ὀνομάσωμεν (Φ) καὶ (Φ') τὰ πολύγωνα ταῦτα, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ (Φ') εἶν ἴσον πρὸς τὸ (Φ) καὶ ὁμοιόθετον τοῦ (Φ'). Δυνάμεθα, ἐξ ὁρισμοῦ, νὰ θεωρήσωμεν ὅμοια δύο πολύγωνα ἢ γενικώτερον δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ'), ὅταν ὑπάρχῃ σχῆμα (Φ') ἴσον πρὸς τὸ ἕνα ἐ τούτων καὶ ὁμοιόθετον πρὸς τὸ ἄλλο.

ου, καὶ ἕνα μόνον, τὸ ὁποῖον συμπίπτει πρὸς τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ κατὰ τὴν οτέρω ἀντιστοιχίαν. (1). Πράγματι, ἔστω Ι (Σχ. 74.) τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ειῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. Ἐπειδὴ διὰ τὸ σημεῖον Ο πρέπει τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ 'Β' νὰ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν (ΒΟ, ΒΑ) = (Β'Ο, Β'Α'), ἤτοι :
),ΒΙ) = (Β'Ο, Β'Γ), ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Ο εἶναι σημεῖον τοῦ λου ΙΒΒ'.

Ἐπειδὴ θὰ εἶναι ἐπίσης (ΑΒ, ΑΟ) = (Α'Β', Α'Ο') ἢ (ΑΟ,ΑΙ) = (Α'Ο, Α'Ι), σημεῖον Ο εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου ΙΑΑ'. Ὥστε τὸ Ο εἶναι τὸ δεύτερον, ὸς τοῦ Ι, κοινὸν σημεῖον τῶν ἀνωτέρω κύκλων ΙΑΑ' καὶ ', ὁριζόμενον οὕτως ἀποκλει- κῶς ἐκ τῶν δοθέντων στοι- ων (σημείων Α, Β καὶ Α',Β').



Σχ. 74

Ὁρισθέντος τοῦ Ο, ὁρίζεται ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΑ'), ὡς καὶ ΟΒ, ΟΒ'). Αἱ γωνίαι αὗται αι ἴσαι ἀφοῦ (ΟΑ, ΟΒ) = ΟΑ', ΟΒ').

Θέτομεν (ΟΑ, ΟΑ') = 3, ΟΒ') = φ. Σημειοῦμεν ὅτι γωνία αὕτη (ΟΑ ΟΑ') ἢ 3, ΟΒ') εἶναι ἴση πρὸς τὴν νίαν $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Θεωροῦμεν τώρα ἕνα τυχὸν ιεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ ὅλογον αὐτοῦ, κατὰ τὴν ἀ- τέρω ἀντιστοιχίαν, ἤτοι τὸ ιεῖον Μ' τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον ΑΒΜ ~ Α'Β'Μ') (2).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$(OM,\ OM') = \varphi \quad \text{καὶ} \quad \frac{OM'}{OM} = \frac{A'B'}{AB}.$$

άγματι, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' ἔχομεν $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$,

ἐκ τῶν ἐπίσης ὁμοίων τριγώνων ΑΒΜ καὶ Α'Β'Μ' ὅτι : $\frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB}$.

Ἑπομένως $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'M'}{AM}$. Ἐξ ἄλλου αἱ γωνίαι (ΑΜ, ΑΟ) καὶ (Α'Μ', Α'Ο) αι ἴσαι, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΖΑ'Ο.

(1) *Ἡνωμένον*, ἢ διπλοῦν, σημεῖον τῆς ἀντιστοιχίας

(2) Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν εἶναι Ζ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΜ τὸν κύκλον ΙΑΑ', τὸ σημεῖον Μ' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΖΑ', διότι εἶναι (Α'Β', Α'Μ') = (ΑΒ, ΑΜ)

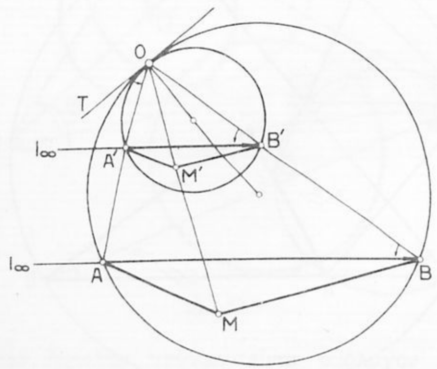
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΑ'Μ' εἶναι ὅμοια κ
λόγῳ τούτου θὰ ἔχωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι :

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}, \text{ καὶ ἀφ' ἑτέρου ὅτι } (OM, OM') = (OA, OA')$$

διότι εἶναι ἴσαι. αἱ γωνίαι (ΟΑ, ΟΜ) καὶ (ΟΑ', ΟΜ').

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω : $(OM, OM') = \varphi$ καὶ $\frac{OM'}{OM} = \frac{A'B'}{AB}$ $(= k)$, προκύπ
ὅτι τὸ σημεῖον Μ' εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν ὁμοιότητα τῆς ὁποίας
κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον S, ὁ λόγος ὁ $\frac{A'B'}{AB} = k$, τῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτ
καὶ ἡ γωνία φ, ἡ γωνία τῶν $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Κατὰ τὴν ὁμοιότητα ταύτην τὰ ὁμόλογα τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι σημεῖα Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως ὥστε ἡ ἀνωτέρω (74) πρότα δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆ



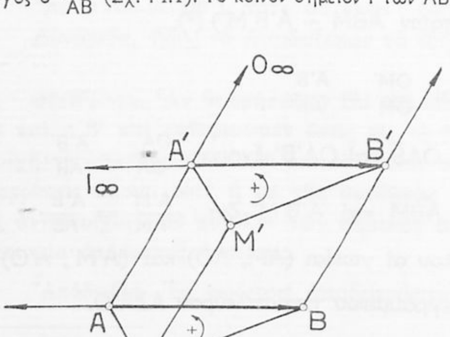
Σχ. 74.1

Μία ὁμόρροπος ὁμοιότης ἐν ἐπιπέδῳ ὁρίζεται ἀπὸ δύο ζεύ ὁμολόγων σημείων: (A, A') κ (B,B').

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' τῶν ὁποίων κεῖνται τὰ εὐθ. τμήμ ΑΒ εἶναι Α'Β', εἶναι παράλληλοι καὶ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ὁμόρροπα ὁριζομένη ὁμοιότης εἶναι μία ὁμοιοθε τῆς ὁποίας τὸ κέντρον Ο εἶναι τὸ κ νὸν σημεῖον τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ' καὶ λόγος ὁ $\frac{A'B'}{AB}$ (Σχ. 74.1). Τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτ

Ἡ γωνία τῆς ὁμοιότητος εἰς περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ἡ γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, ἤτοι ἡ μηδενικὴ γωνία. εἰδικώτερον εἶναι Α'Β'=ΑΒ, (Σχ.74. τότε ἡ ὁμοιότης καὶ μία μεταφορά : ἡ ριζομένη ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$. Τὸ κ τρον Ο αὐτῆς εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σ μεῖον τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ'.

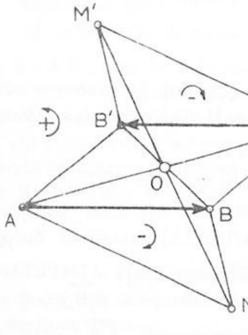


Σχ. 74.12

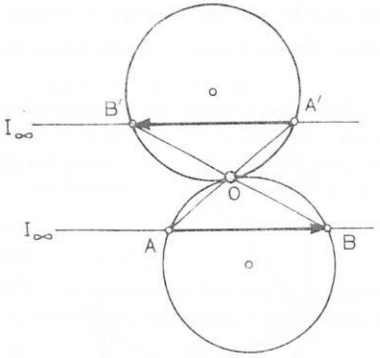
2. Ἂν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ Α εἶναι ἀντίρροπα, τότε τὸ κέντρον τῆς τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ, Α'Β' ὁριζο νης ὁμοιότητος εἶναι τὸ κοινὸν σημε τῶν εὐθειῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ'. Ἡ ὁμοιό καὶ μία ἀντίρροπος ὁμοιοθεσία.

Ἂν εἰδικώτερον $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, ἡ μοιότης εἶναι μία συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ' (Σχ. 74.22, 74.23).

3. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β', αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β' δὲν εἶναι



Σχ. 74.22



Σχ. 74.23

παράλληλοι καὶ εἶναι $AB = A'B'$ τότε ἡ ὁμοιότης εἶναι μία στροφὴ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΙΑΑ' καὶ ΙΒΒ' ἢ ὡς τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ' καὶ ΒΒ' [1]

Σημείωσις. Εἰς τὰ προηγούμενα ἡ ὁμοιότης S ὡρίσθη εἰς τὸ ἀποτέλεσμα (γινόμενον) μιᾶς στροφῆς R (O,φ) καὶ μιᾶς ὁμοιοθεσίας H(O,k), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον Ο. Ἐσημειώσαμεν δέ :

$$S = H \times R$$

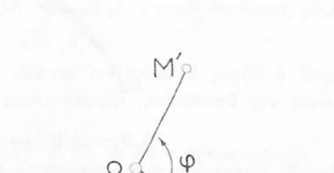
Εἶναι εὐνόητον ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ στροφὴ καὶ ἡ ὁμοιοθεσία ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον Ο, τὸ γινόμενον $H \times R$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $R \times H$. Ἤτοι ὅταν τὸ ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὴν $H \times R$ εἶναι τὸ σημεῖον Μ', τότε καὶ κατὰ τὴν $R \times H$ τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ εἶναι τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ'. Τὸ γινόμενον τῶν R καὶ H εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἀντιμεταθετόν. Ὡς κατωτέρω θέλομεν ἴδει, τοῦτο δὲν ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας Ο εἶναι διάφορον τοῦ κέντρου Ω τῆς στροφῆς.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

75. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τῆς ὁμοιότητος, θὰ ὀνομάσωμεν ὁμόρροπον ὁμοιότητα εἰς τὸ ἐπίπεδον, τὸ γινόμενον μιᾶς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας, H (O,k) ἐπὶ μίαν στροφὴν R (Ω, φ) (τὰ κέντρα Ο καὶ Ω εἶναι, ἐν γένει, σημεῖα διάφορα ἀλλήλων). Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ S μίαν τοιαύτην ὁμοιότητα θὰ σημειώσωμεν :

$$S = R \times H.$$

Ἂν εἶναι Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, M_1 τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν H (O, k) καὶ Μ' τὸ ὁμόλογον τοῦ M_1 κατὰ τὴν στροφὴν R (Ω, φ) τὸ σημεῖον Μ' εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν ὁμοιότητα S. Διὰ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος δίδεται μία ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα ἕνα σχῆμα (Φ') εἶναι ὁμόλογον τοῦ σχήματος (Φ) κατὰ μίαν ὁμοιότητα S.



Σχ. 75

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» παραγρ. 167, Πόρισμα 1.

76. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα σχῆμα (Φ′) εἶναι ὁμόλογον τοῦ (Φ) κατὰ μίαν ὁμοιότητα S, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ (Φ), ἡ γωνία φ αὐτοῦ καὶ τοῦ ὁμολόγου του $\overrightarrow{A'B'}$, κατὰ τὴν ὁμοιότητα S, νὰ εἶναι σταθερά, ἤτοι ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ ὁ λόγος A′B′/AB ἐπίσης σταθερός.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\overrightarrow{AB}$ ἕνα διάνυσμα εἰς τὸ σχῆμα Φ. (Σχ. 76) Τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν H (O,k) εἶναι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A_1B_1}$, τοιοῦτον ὥστε :

$$A_1B_1 = k,\ AB$$

Τὰ διανύσματα A_1B_1 καὶ AB εἶναι ὁμόρροπα, ἐπειδὴ ἡ ὁμοιοθεσία H (O,k) θεωρεῖται ὁμόρροπος. Ἔχομεν ἑπομένως :

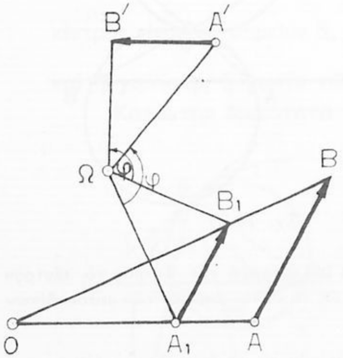
$$(1)\quad \overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot AB \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = 0$$

Τὸ ὁμόλογον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{A_1B_1}$, κατὰ τὴν στροφὴν R (Ω,φ) εἶναι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$, διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν :

$$(2)\quad A'B' = A_1B_1 \text{ καὶ } (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi\ (+2K\pi).$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι θὰ ἔχωμεν :

$$A'B' = k \cdot AB \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi\ (+2K\pi)$$



Σχ. 76

Ὁ λόγος, ἑπομένως τῶν εὐθ. τμημάτων A′B′ καὶ AB εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, ἡ γωνία φ τῆς στροφῆς.

Ἀντιστρόφως. Ἔστωσαν (Φ) καὶ (Φ′) δύο σχήματα τοῦ ἐπιπέδου τοιαῦτα ὥστε εἰς ἕκαστον διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ (Φ) νὰ ἀντιστοιχῇ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ τοῦ (Φ′) ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας :

$$(1)\quad A'B' = k \cdot AB \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi\ (+2K\pi),$$

ἔνθα k δοθεὶς λόγος καὶ φ δοθεῖσα γωνία.

Ἔστωσαν O ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ (Φ_1) τὸ ὁμόλογον τοῦ (Φ) κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν κέντρου O καὶ λόγου k. Τὸ ὁμόλογον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A_1B_1}$ τοιοῦτον ὥστε : $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, ἤτοι :

$$A_1B_1 = k \cdot AB \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = 0$$

ἀφοῦ ὁ λόγος k θεωρεῖται θετικῶς προσημασμένος.
Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως, ἑρμηνευομένης ἐκ τῶν (1), ἔχομεν :

$$A_1B_1 = A'B' \text{ καὶ } (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi + 2K\pi$$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς προκύπτει ὅτι, τὸ σχῆμα (Φ′) εἶναι ὁμόλογον τοῦ (Φ_1) κατὰ μίαν στροφὴν τῆς ὁποίας ἡ γωνία εἶναι φ [1].

Ὥστε τὸ (Φ′) εἶναι ὁμόλογον τοῦ (Φ) κατὰ μίαν ἀντιστοιχίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἀποτέλεσμα μιᾶς ὁμοιοθεσίας H (O,k) καὶ μιᾶς στροφῆς, τῆς ὁποίας ἡ γωνία εἶναι ἡ φ. Ἡ ἀντιστοιχία, ἑπομένως, αὕτη εἶναι μία ὁμοιότης.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται ὅτι μία ὁμοιότης δύναται νὰ ἀναλυθῇ κατὰ ἀπείρους τρόπους εἰς μίαν ὁμοιοθεσίαν καὶ μίαν στροφήν. Αἱ ὁμοιοθεσίαι ὅμως καὶ αἱ στροφαί, ἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται ἡ ὁμοιότης ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἀντιστοίχως.

Ὁ λόγος k ὀνομάζεται **λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας** καὶ ἡ γωνία φ **γωνία τῆς στροφῆς** εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται ἡ **ὁμοιότης** ἢ λόγος καὶ γωνία τῆς ὁμοιότητος, δυναμένης νὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $S\ (O, \varphi, k)$.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Αἱ σχέσεις (1) δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἑξῆς :

$AB = k' \cdot A'B'$, ἔνθα k' ὁ ἀντίστροφος τοῦ λόγου k, καὶ $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) = -\varphi$

Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι, ἂν τὸ σχῆμα (Φ') εἶναι ὁμόλογον τοῦ (Φ) κατὰ τὴν ὁμοιότητα, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ὁ k καὶ γωνία ἡ φ, τότε τὸ σχῆμα (Φ) εἶναι ὁμόλογον τοῦ (Φ') κατὰ τὴν ὁμοιότητα, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ὁ k' καὶ γωνία ἡ − φ. Ἡ τελευταία αὕτη ἀντιστοιχία ὀνομάζεται **ἀντίστροφος** τῆς S, καὶ εἶναι μία ὁμοιότης, συμβολιζομένη μὲ τὸ σύμβολον S^{-1}. Ἔχομεν ἑπομένως τὴν ἰσοδυναμίαν :

$$(\Phi) \xrightarrow{S} (\Phi') \Leftrightarrow (\Phi') \xrightarrow{S^{-1}} (\Phi)$$

77. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶσα ὁμοιότης $S \equiv R\ (\Omega, \varphi) \cdot H\ (O, k)$ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον μιᾶς στροφῆς τῆς ὁποίας ἡ γωνία εἶναι ἡ φ καὶ μιᾶς ὁμοιοθεσίας τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι k, κατὰ ἀπείρους τρόπους.

(φ καὶ k ἡ γωνία καὶ ὁ λόγος τῆς δοθείσης ὁμοιότητος ἀντιστοίχως).

Ἀπόδειξις : Ἂν εἶναι $\overrightarrow{A'B'}$ τὸ ὁμόλογον ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ κατὰ τὴν δοθεῖσαν ὁμοιότητα S, θὰ εἶναι (Σχ. 77) :

$$(1) \quad A'B' = k \cdot AB \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi\ (+2K\pi).$$

Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ ὁμόλογον $\overrightarrow{A'B'}$ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ θεωροῦντες ἕνα τυχὸν σημεῖον Ω_1 τοῦ ἐπιπέδου ὡς κέντρον στροφῆς $R_1\ (\Omega_1, \varphi)$, ἔνθα φ ἡ δοθεῖσα γωνία.

Κατὰ τὴν στροφὴν $R_1\ (\Omega_1, \varphi)$ τὸ ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A'_1B_1}$ ὁριζόμενον ἐκ τῶν:

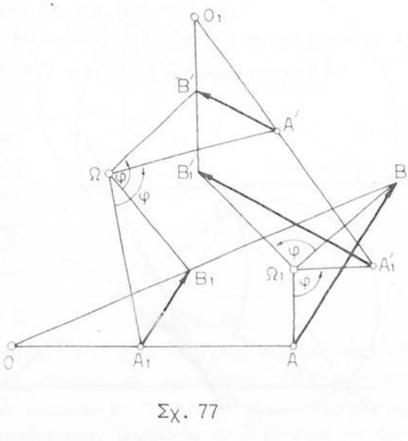
(2) $A'_1B'_1 = AB$ καὶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'_1B'_1}) = \varphi\ (+2K\pi)$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$A'B' = k \cdot A'_1B'_1$ καὶ $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'_1B'_1}) = 0$ (1) καὶ ἐκ τούτων, ἀφοῦ ὁ λόγος k εἶναι θετικῶς προσημασμένος (ὁμόρροπος ὁμοιοθεσία) ὅτι :

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{A'_1B'_1}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἔχομεν ὅτι τὸ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{A_1'B'_1}$ κατὰ μίαν ὁμοιοθεσίαν τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ὁ δοθεὶς k. Τὸ κέντρον αὐτῆς εἶναι ἕνα σημεῖον O_1 (Σχ. 77), διάφορον, ἐν γένει, τοῦ O.



Σχ. 77

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲν ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον $H\ (O,k) \cdot R\ (\Omega, \varphi)$ εἶναι ἀντιμεταθετόν, ἤτοι ὅτι τὸ ὁμόλογον ἑνὸς τυχόντος σημείου M κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν $H\ (O, k) \cdot R(\Omega, \varphi)$ ταυτίζεται μὲ τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ κατὰ τὴν $R(\Omega, \varphi) \cdot H(O, k)$. Διότι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ ὁμόλογον M' τοῦ M κατὰ τὴν στροφὴν $R(\Omega, \varphi)$, ἡ ὁμοιοθεσία κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὁμόλογον τοῦ M'_1 εἶναι τὸ M' δὲν ἔχει τὸ κέντρον εἰς τὸ O, ἀλλὰ ἕνα σημεῖον O_1 διάφορον τοῦ O.

(1) Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{A'_1B'_1}$ εἶναι ὁμόρροπα.

Σημειοῦμεν ὅτι, αἱ προτάσεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰ ὁμόλογα τῶν ἁπλῶν γεωμ. σχη-μάτων κατὰ τὴν ὁμοιότητα $R(O,\varphi)\cdot H(O,k)$, ἰσχύουν καὶ κατὰ τὴν ὁμοιότητα $R(\Omega,\varphi)\cdot H(O,k)$ ἔνθα $\Omega \neq O$. Οὕτω :

Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') καὶ ὅμοια (ὁμόλογα κατὰ μίαν ὁμοιότητα S), ἕκαστο τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ἑνὸς εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ τρίγωνον τοῦ ἄλλου.

Πράγματι, θὰ ἔχωμεν: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \dfrac{\Gamma'A'}{\Gamma A}\ (= k)$

καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ δοθέντος (6) ὁρισμοῦ.

Ἐκ τούτων ἕπεται ἀκόμη ὅτι, δοθέντος ἑνὸς σχήματος (Φ), δυνάμεθα νὰ κατασκευά-σωμεν ἕνα σχῆμα (Φ') ὅμοιον πρὸς τὸ (Φ), θεωροῦντες ἕνα ζεῦγος σημείων (Α,Β) τοῦ (Φ) κα ἕνα τυχὸν ζεῦγος σημείων (Α', Β') τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου τὰ μέλη θὰ θεωρηθοῦν ὁμόλογ τῶν Α,Β ἀντιστοίχως. Οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τώρα ἕνα σημεῖον Μ τοῦ (Φ), ὑπάρχει σημεῖο Μ' τοῦ ἐπιπέδου ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ Α'Β'Μ' νὰ εἶναι ὁμορρόπως ὅμοια κατὰ ἕνα δο-θέντα προσανατολισμόν. Οὕτω, τὰ σχήματα :

Φ(Α, Β, Μ, Ν,...) καὶ Φ' (Α', Β', Μ', Ν',...), εἶναι ὁμορρόπως ὅμοια.

ΚΕΝΤΡΟΝ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

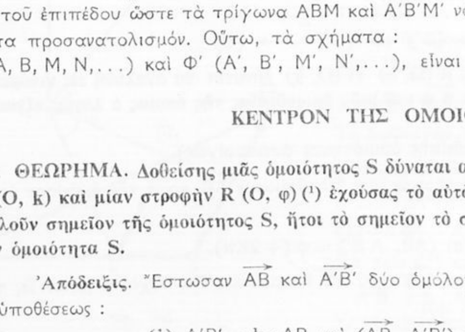
78. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης μιᾶς ὁμοιότητος S δύναται αὕτη νὰ ἀναλυθῇ εἰς μίαν ὁμοιοθεσία H (O, k) καὶ μίαν στροφὴν R (O, φ) [1] ἐχούσας τὸ αὐτὸ κέντρον O. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τ διπλοῦν σημεῖον τῆς ὁμοιότητος S, ἤτοι τὸ σημεῖον τὸ συμπῖπτον πρὸς τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ κατ τὴν ὁμοιότητα S.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ δύο ὁμόλογα, κατὰ τὴν S, διανύσματα. Ἔχομε ἐξ ὑποθέσεως :

$$(1)\quad A'B' = k\cdot AB \text{ καὶ } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}) = \varphi\ (+2K\pi). \text{ ἔνθα } K\in \mathbb{Z}$$

(k ὁ λόγος καὶ φ ἡ γωνία τῆς ὁμοιότητος S)

Ἡ δοθεῖσα ὁμοιότης S ὁρίζεται (74) ἐκ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$.



Σχ. 78.1

Ἔστω τώρα Ο τὸ κοινὸν κέντρον τ στροφῆς καὶ τῆς ὁμοιοθεσίας εἰς τ ὁποίας ἀναλύεται ἡ S (Ο τὸ ζητο μενον σημεῖον).

Πρέπει, ἂν ὑπάρχῃ τὸ σ μεῖον αὐτό, νὰ εἶναι :

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OA'}) = \varphi\ (+2K\pi),$$

διότι τὸ Ο δέον νὰ ἀντιστοιχῇ πρ ἑαυτὸ κατὰ τὴν ζητουμένην ὁμοι τητα. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ Ο εἶν σημεῖον γνωστοῦ, ἐκ τῆς φ, κυκλ κοῦ τόξου [2] ἔχοντος ἄκρα τὰ σ μεῖα Α καὶ Α' Ἐξ ἄλλου δέον ἔχωμεν: $\dfrac{OA'}{OA} = k$. Ἐξ αὐτῆς ἕπετ ὅτι τὸ Ο εἶναι σημεῖον γνωστοῦ (41) κύκλου (κύκλος τοῦ Ἀπολλωνίου) ὁριζομένου ἐκ τ σημείων Α, Α' καὶ τοῦ λόγου k. Οὕτω, τὸ σημεῖον Ο ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τ ἀνωτέρω δύο γεωμ. τόπων.

(1) k καὶ φ ὁ λόγος καὶ ἡ γωνία τῆς δοθείσης ὁμοιότητος S.
(2) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» παραγρ. 255.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὸ ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ κατὰ τὴν ὁμοιότητα $R(O,\varphi) \cdot H(O.k)$ θα O τὸ ἀνωτέρω ὁρισθὲν σημεῖον, θὰ ἔχωμεν :

Τὸ ὁμόλογον τοῦ A εἶναι τὸ σημεῖον A′ καὶ τὸ ὁμόλογον τοῦ B ἔστω τὸ σημεῖον B'_1. Ἑπομένως τὸ ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A'B'_1}$, ἤτοι :

$$(2) \quad A'B'_1 = k \cdot AB \quad \text{καὶ} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'_1}) = \varphi\ (+2K\pi)$$

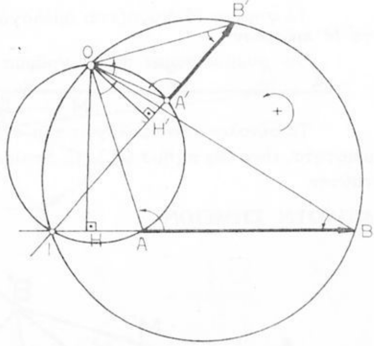
Ἐκ τούτων καὶ τῶν ἐν τῇ ὑποθέσει (1) προκύπτει ὅτι τὸ $\overrightarrow{A'B'_1}$ ταυτίζεται πρὸς τὸ $\overrightarrow{A'B'}$, ότι ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $A'B'_1 = A'B'$, καὶ ἐκ τῆς $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'_1}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A',B'})$ τι τὸ B'_1 εἶναι σημεῖον τῆς A′B′.

Ὥστε ἂν εἶναι (Φ) καὶ (Φ′) δύο σχήματα ὁμόλογα κατὰ τὴν ἐκ τῶν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ὁρι-σμένην ὁμοιότητα S, θὰ εἶναι τὸ (Φ′) ὁμόλογον τοῦ (Φ) κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν ὁμοιότητα $R(O,\varphi) \cdot H\,(O,k)$.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιότητος O παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι σημεῖον τῶν τόξων ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων δύο ὁμόλογα κατὰ τὴν ὁμοιότητα σημεῖα φαίνονται ὑπὸ τὴν γωνίαν φ τῆς ὁμοιότητος. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἐπίσης σημεῖον ὅλων τῶν κύκλων οἱ ὁποῖοι χωρίζουν τὰ εὐθ. τμήματα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄκρα δύο ὁμόλογα κατὰ τὴν ὁμοιότητα σημεῖα, εἰς λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον k τῆς ὁμοιότητος.

2. Ἂν εἶναι I τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν φορέων τῶν ὁμολόγων δανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ (Σχ. 78.2), ἔχομεν :
$(IA, IA') = \varphi\ (+K\pi)$(1). Ἑπομένως : $(IA, IA') = (OA, OA')$ Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὰ σημεῖα A,A′,I,O εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἤτοι ὅτι τὸ O εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου AIA′. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ κύκλου BIB′. Ἑπομένως, ἂν οἱ φορεῖς τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ τέμνωνται καὶ εἶναι I τὸ κοινόν των σημεῖον, τὸ κέντρον τῆς ἐκ τῶν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ὁρι-ζομένης ὁμοιότητος (74) εἶναι τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ I, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων A I A′ καὶ B I B′.



Σχ. 78.2

3. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων OAB καὶ OA′B′ προκύπτει ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων OH καὶ OH′ τοῦ O ἀπὸ τῶν AB καὶ A′B′ ἀντιστοίχως (ἤτοι ὁ λόγος τῶν ἀπὸ τοῦ O ὁμολόγων ὑψῶν OH καὶ OH′ τῶν ἀνωτέρω τριγώνων) ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $\dfrac{AB}{A'B'}$, ἤτοι πρὸς τὸν λόγον k τῆς ὁμοιότητος. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον O εἶναι σημεῖον γνωστοῦ (29) γεωμ. τόπου : τῶν σημείων ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν φορέων τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ἔχουν λόγον γνωστὸν k. Ὁ τόπος οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο διὰ τοῦ I εὐθείας τῶν **ἀναλόγων ἀποστάσεων.** Ἑπομένως τὸ O δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς κοινὸν σημεῖον ἑνὸς ἐκ τῶν ἀνωτέρω κύκλων A IA′ ἢ B I B′ καὶ τῆς μιᾶς ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων.

4. Τὸ O δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς κοινὸν σημεῖον μόνον εὐθειῶν ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι :

$$(4) \qquad \frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{H'A'}}{\overline{H'B'}}$$

(1) Βλέπε : Μαθηματικὰ Γ′ τάξεως, Κεφ. IV παραγρ. (112) περὶ τῆς γωνίας δύο εὐθειῶν

Ἡ ἀνωτέρω ἀναλογία προκύπτει ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Ο Α Β καὶ Ο Α′ Β′. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν ὅτι αἱ προβολαὶ Η καὶ Η′ τοῦ Ο ἐπὶ τὰς εὐθείας Α Β καὶ Α′ Β′ χωρίζουν τὰ εὐθ. τμήματα Α Β καὶ Α′ Β′ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα τοῦ συνόλου, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς (4) κεῖνται ἐπὶ εὐθείας **δ** [1]. Ἡ εὐθεῖα αὕτη ὁρίζεται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Ε τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς Α Β καὶ Α′Β′ κατὰ τὰ Α καὶ Α′ ἀντιστοίχως καὶ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Ζ τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς Α Β καὶ Α′ Β′ κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ ἀντιστοίχως.

Σχ. 78.4

Ὥστε τὸ Ο ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς ἀνωτέρω εὐθείας (τῶν ἀναλόγων διαιρέσεων) μὲ τὴν μίαν τῶν εὐθειῶν τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων (29).

ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

79. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθ. τμήματα Α Β καὶ Α′ Β′. Δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν ὅπως εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχῇ τὸ σημεῖον Μ′ αὐτοῦ διὰ τὸ ὁποῖον τὰ τρίγωνα ΜΑΒ καὶ Μ′Α′Β′ εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια. Ἡ ἐκ τῆς συνθήκης ταύτης ὁριζομένη ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' ἑαυτοῦ ὀνομάζεται **ἀντίρροπος ὁμοιότης**. Ὁ λόγος $\frac{A'B'}{AB} = k$ ὀνομάζεται **λόγος** τῆς ὁμοιότητος.

Τὸ σημεῖον Μ ὀνομάζεται ὁμόλογον ἢ **εἰκὼν** τοῦ Μ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὁμοιότητα, καὶ τὸ Μ **πρότυπον**.

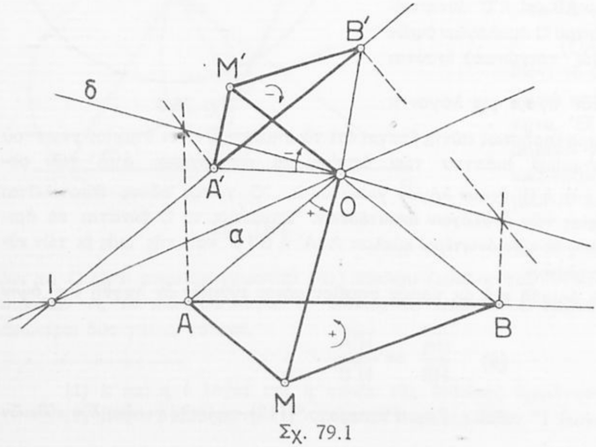
Ἄν συμβολίσωμεν μὲ τὸ γράμμα S τὴν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν, θὰ σημειοῦμεν :

$$M \xrightarrow{S} M' \quad ἢ \quad M' = S\,(M)$$

Τὸ σύνολον τῶν ὁμολόγων τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος (F) κατὰ μίαν ἀντίρροπον ὁμοιότητα, εἶναι ἕνα σχῆμα (F′), τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ὁμόλογον τοῦ (F), κατὰ τὴν ὁμοιότητα ταύτην.

ΔΙΠΛΟΥΝ ΣΗΜΕΙΟΝ

Δοθείσης μιᾶς ἀντιρρόπου ὁμοιότητος **S** εἰς τὸ ἐπίπεδον ὑπάρχει ἐν αὐτῷ ἕνα σημεῖον Ο, καὶ ἕνα μόνον, συμπῖπτον πρὸς τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ, κατὰ τὴν **S**. Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Ο ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτὸ κατὰ τὴν S, ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ὁμοίων τριγώνων ΟΑΒ καὶ Ο′Α′Β′ προκύπτει ὅτι τοῦτο εἶναι κοινὸν σημεῖον δύο εὐθειῶν : τῆς εὐθείας τῶν **ἀνα-**



Σχ. 79.1

(1) **Εὐθεῖα** τῶν *ἀναλόγων διαιρέσεων*.

γων διαιρέσεων καὶ ἐκείνης ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν τῶν **ἀναλόγων ἀποστάσεων** διὰ τὴν ὁποίαν α τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια.

Τὸ σημεῖον τοῦτο Ο ὀνομάζεται **διπλοῦν** (1) σημεῖον τῆς ἀνωτέρω ὁμοιότητος S.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ διπλοῦ σημείου Ο ἀπὸ δύο ὁμολόγων σημείων εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος πρὸς τὸν λόγον k τῆς ὁμοιότητος.*

Πράγματι, ἂν εἶναι Μ καὶ Μ' δύο ὁμόλογα σημεῖα, τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΑ'Β' ναι ἀντιρρόπως ὅμοια καὶ ἐπομένως (Σχ. 79.1).

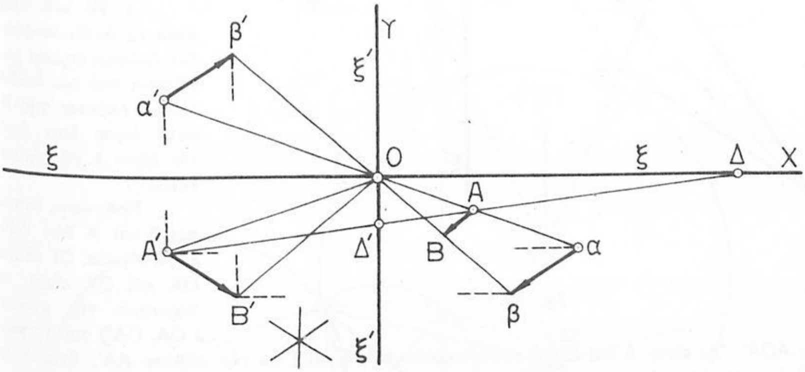
$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA} = k.$$

2. Δύο ὁμόλογα εὐθ. τμήματα ΜΝ καὶ Μ'Ν' φαίνονται ἀπὸ τοῦ διπλοῦ σημείου Ο ὑπὸ ωνίας ἀντιθέτους.

Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΟΜΝ καὶ ΟΜ'Ν' εἶναι ἀντιρρόπως ὅμοια.

ΙΠΛΑΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

Ἔστω (Σχ. 79.2) α β τὸ ὁμοιόθετον τοῦ εὐθ. τμήματος Α Β κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν Ο, k) (2), καὶ α' β' τὸ ὁμοιόθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν (Ο, −k). ὰ εὐθ. τμήματα α β καὶ α' β' εἶναι βεβαίως ἴσα πρὸς τὸ Α'Β'.



Σχ. 79.2

Τὰ α β καὶ α' β' εἶναι συμμετρικὰ τοῦ Α'Β' ὡς πρὸς ἄξονας συμμετρίας τοὺς ΟΥ καὶ ΟΧ ντιστοίχως (Σχ. 79.2). Τὰ σημεῖα α καὶ α' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο. Ὁ ἄξων συμμετρίας τῶν Α' Β' καὶ α β εἶναι ἡ διχοτόμος Ο Χ τῆς γωνίας (Ο α, Ο Α') καὶ ὁ ἄξων συμμετρίας τῶν Α' Β' καὶ α' β' ἡ διχοτόμος ΟΥ τῆς γωνίας (Ο'Α', Ο'α'). Ἐπειδὴ αἱ ἀνωτέρω ωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ αἱ εὐθεῖαι Ο Χ καὶ Ο Υ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Αἱ εὐθεῖαι Ο Χ ≡ ξ καὶ ΟΥ ≡ ξ' ὀνομάζονται **διπλαῖ εὐθεῖαι** τῆς ὁμοιότητος S.

Τὰ ἀνωτέρω ὁρισθέντα στοιχεῖα : διπλοῦν σημεῖον, διπλαῖ εὐθεῖαι (ἄξονες) καὶ λόγος ῆς ὁμοιότητος εἶναι τὰ χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα αὐτῆς.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν δύο σχήματα ὁμόλογα κατὰ μίαν ντίρροπον ὁμοιότητα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (ἀντιρρόπως ὅμοια) ὡς κάτωθι :

Ἔστω F ἕνα δοθὲν σχῆμα (Σχ. 79.3). Θεωροῦμεν τὸ ὁμοιόθετον (Φ) τοῦ (F) κατὰ

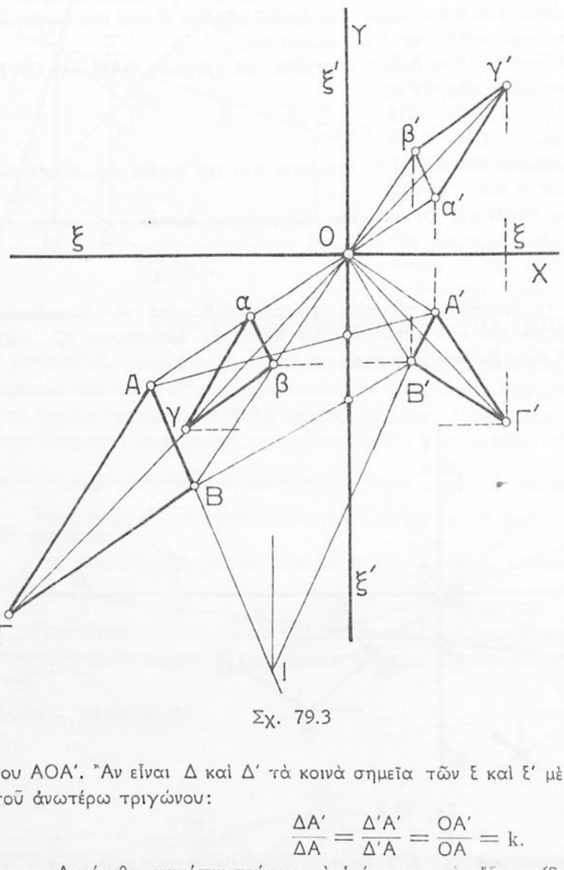
(1) *Ἡνωμένον* πρὸς τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ, κατὰ τὴν S.

(2) k ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος.

μίαν ὁμοιοθεσίαν H (O, k) τῆς ὁποίας τὸ κέντρον O εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ ὁ λό-
γος τυχὼν k. Θεωροῦμεν, ἀκολούθως τὸ συμμετρικὸν (F′) τοῦ σχήματος (Φ) ὡς πρὸς τυ-
χοῦσαν εὐθεῖαν διερχο-
μένην διὰ τοῦ O. Τὸ
σχῆμα (F′) εἶναι ἀντιρ-
ρόπως ὅμοιον τοῦ (F).

3. Δύο ὁμόλογοι εὐθεῖαι κατὰ τὴν ἀντίρροπον ὁμοιότητα S, σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς διπλᾶς εὐθείας ξ καὶ ξ′ (ἄξονας τῆς S).

Δυνάμεθα, κατὰ συνέπειαν νὰ ἔχωμεν τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀξόνων θεωροῦντες τὰς διχοτόμους τῆς γωνίας δύο ὁμολόγων κατὰ τὴν ὁμοιότητα εὐθειῶν.



Σχ. 79.3

4. Τὰ εὐθ. τμήματα τὰ ὁποῖα συνδέουν δύο ὁμόλογα σημεῖα χωρίζονται ἀπὸ τὰς διπλᾶς εὐθείας (ἄξονας τῆς S) κατὰ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον k τῆς ὁμοιότητος.

Πράγματι, ἔστωσαν A καὶ A′ δύο ὁμόλογα σημεῖα. Οἱ ἄξονες OX καὶ OY εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας (OA, OA′) τοῦ τριγώνου AOA′. Ἂν εἶναι Δ καὶ Δ′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ξ καὶ ξ′ μὲ τὴν εὐθεῖαν AA′, ἔχομεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τριγώνου:

$$\frac{\Delta A'}{\Delta A} = \frac{\Delta' A'}{\Delta' A} = \frac{OA'}{OA} = k.$$

Δυνάμεθα, κατόπιν τούτου, νὰ ὁρίσωμεν τοὺς ἄξονας (διπλᾶς εὐθείας) τῆς ὁμοιότητος ὡς τοὺς γεωμ. τόπους τῶν σημείων τὰ ὁποῖα χωρίουν τὰ εὐθ. τμήματα A A′ κατὰ τὸν λόγον k τῆς ὁμοιότητος.

5. Αἱ ἀποστάσεις δύο ὁμολόγων σημείων ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν ἀξόνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον k τῆς ὁμοιότητος.

Πράγματι, ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων A′ καὶ A ἀπὸ τῆς ξ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον $\frac{\Delta A'}{\Delta A} = k$.

6. Οἱ διπλοὶ ἄξονες εἶναι αἱ μόναι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἑαυτὰς (συμπίπτουν μὲ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κατὰ τὴν θεωρουμένην ὁμοιότητα).

Πράγματι, ἔστω M ἕνα σημεῖον τοῦ ἄξονος O X. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὸ ὁμόλογον μ αὐτοῦ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν H (O, k) καὶ ἀκολούθως τὸ συμμετρικὸν M′ τοῦ μ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ. Ἐπειδὴ τὸ M εἶναι σημεῖον τῆς ξ, τὸ ὁμοιόθετον μ αὐτοῦ ναι ἐπίσης σημεῖον τῆς ξ, συμπῖπτον, κατὰ συνέπειαν, μὲ τὸ συμμετρικὸν M′ αὐτοῦ ὡς πρὸς ὴν ξ.

Ὥστε τὸ ὁμόλογον M′ τοῦ M, κατὰ τὴν ὁμοιότητα S, κεῖται ἐπὶ τῆς OX ≡ ξ, καὶ εἶναι:

$$\frac{OM'}{OM} = k.$$

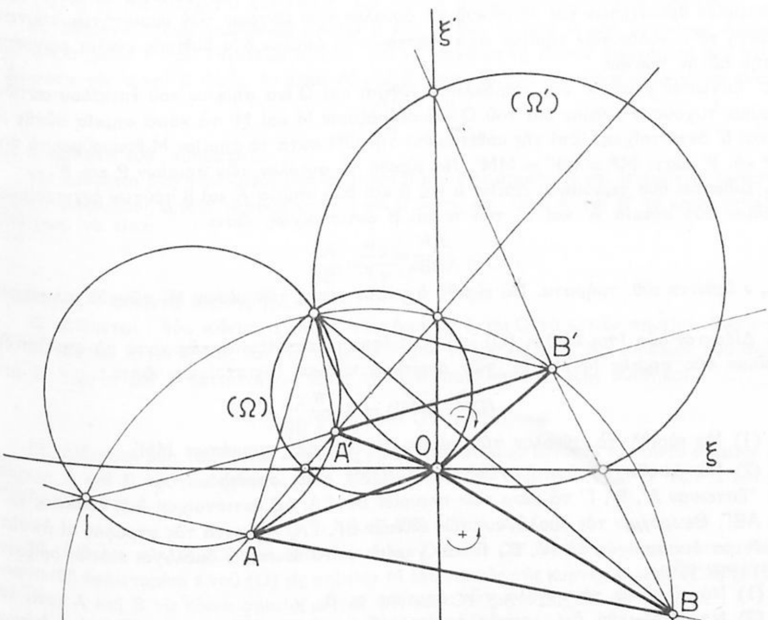
Ἂν εἶναι M καὶ N δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος ξ, τὰ ὁμόλογα, κατὰ τὴν ὁμοιότητα, σημεῖα ′ καὶ N′ τούτων, ἀντιστοίχως, εἶναι σημεῖα τοῦ ἄξονος O X ≡ ξ, ἤτοι ἡ ὁμόλογος τοῦ ἄξο-ος ξ (≡ M N) εὐθεῖα εἶναι ἡ M′N′ (≡ ξ).

Οὕτως, ὁ ἄξων ξ, καὶ δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ ὁ ξ′ εἶναι **διπλῆ**, κατὰ τὴν ὁμοιότητα, εὐθεῖα χι ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ διπλὰ σημεῖα, ἀλλὰ ὅτι ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτήν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν δικαιολογεῖται ὁ ὅρος **διπλῆ εὐθεῖα**, ὁ ποδιδόμενος εἰς τὰς ξ καὶ ξ′, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ προκύπτει ὅτι αἱ ἀνωτέρω δύο διπλαὶ εὐθεῖαι ἄξονες τῆς ὁμοιότητος) εἶναι αἱ μόναι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν πρὸς αυτάς.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, μία ἀντίρροπος ὁμοιότης ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δύναται νὰ ρισθῇ ὡς γινόμενον μιᾶς ὁμοιοθεσίας **H** (O, k) ἐπὶ μίαν συμμετρίαν **Σ** ὡς πρὸς ἄξονα ξ διερ-όμενον διὰ τοῦ κέντρου O τῆς ὁμοιοθεσίας.



Σχ. 79.4

2. Δοθείσης μιᾶς ἀντιρρόπου ὁμοιότητος (79) διὰ τῶν εὐθ. τμημάτων A B καὶ A′ B′

(δύο ζευγῶν σημείων Α, Α' καὶ Β, Β'), τὸ διπλοῦν σημεῖον (κέντρον) Ο αὐτῆς, δύναται ν ὁρισθῇ καὶ ὡς τὸ δεύτερον (ἐκτὸς τοῦ διπλοῦ σημείου τῆς ἐκ τούτων ὁριζομένης ὁμορρόπο ὁμοιότητος) κοινὸν σημεῖον τῶν δύο κύκλων (Ω) καὶ (Ω') τοῦ Ἀπολλωνίου, οἱ ὁποῖοι ὁρί ζονται ἀπὸ τὰς συνθήκας :

$$\frac{OA'}{OA} = k \text{ καὶ } \frac{OB'}{OB} = k,$$

ἀντιστοίχως (Σχ. 79.4).

Οἱ ἄξονες ξ καὶ ξ' τῆς ἀντιρρόπου ὁμοιότητος, θὰ εἶναι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὸ κέν τρον Ο αὐτῆς μὲ τὰ ἄκρα τῶν ἐπὶ τῶν Α Α' ἢ Β Β' διαμέτρων τῶν ἀνωτέρω κύκλων το Ἀπολλωνίου (Σχ. 79.4).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο'). Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τῶν κύκλων τού των ἀντιστοίχως ὥστε $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \varphi$, ἔνθα φ μία δοθεῖσα γωνία. Ἡ εὐθεῖα ΜΜ' ἐπανα τέμνει τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο') κατὰ τὰ σημεῖα Ν καὶ Ν' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτ τὸ σημεῖον Ν' εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Ν κατὰ μίαν ὁμοιότητα. Νὰ ὁρισθῇ ἡ ὁμοιότης αὐτη

2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοτήτων δοθέντος λόγου k, κατὰ τὰς ὁποία τὸ ὁμόλογον μιᾶς δοθείσης εὐθείας δ εἶναι μία δοθεῖσα εὐθεῖα δ'.

3. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο δοθέντες κύκλοι τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὁμόλογοι ἀλλήλων κατ μίαν ἀπειρίαν ὁμοιοτήτων καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοτήτων τούτων Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων ἀπὸ ἑκάστου τῶν ὁποίων δύο δοθέντες κύκλοι φαίνοντα ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

4. Ἔστωσαν δ καὶ δ' δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ Ο ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶ Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ Ο καὶ ὀνομάζομεν Μ καὶ Μ' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μ τὰς δ καὶ δ' ἀντιστοίχως. Ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΜ κατὰ τὸ σημεῖον Μ θεωροῦμεν τὰ ση μεῖα Ρ καὶ Ρ' ὥστε ΜΡ = ΜΡ' = ΜΜ'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Ρ καὶ Ρ'.

5. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τούτων ἀντιστοίχω Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α' καὶ Β' τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, ὥστε :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu}$$

ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ' τῶν εὐθ. τμημάτω Α'Β'.

6. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς κατὰ τὸ σημεῖον Α Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τῶν ἀνωτέρω κύκλων ἀντιστοίχως, ὥστε :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = + \frac{\pi}{2}$$

(1) Να εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν μέσων Η τῶν εὐθ. τμημάτων ΜΜ'.

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM})$ εἶναι σταθερά.

7. Ἔστωσαν Α', Β', Γ' τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως ἑνὸς δοθέντος τρ γώνου ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τὰς ὁμολόγους τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ κατὰ τὰς στροφὰς αἱ ὁποῖ ἔχουν κέντρα ἀντιστοίχως τὰ Α', Β', Γ' καὶ γωνίαν φ. Αἱ ἀνωτέρω ὁμόλογοι εὐθεῖαι ὁρίζου ἕνα τρίγωνον αβγ.

(1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σύνολα τῶν σημείων α, β, γ.

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, μεταβαλλομένης τῆς γωνίας φ, τὸ τρίγωνον αβγ μένει ὅμοιο πρὸς τὸ ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος ὁμοιότητος .

(3) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος αβγ (περιγεγραμμένος τοῦ τριγώνου αβγ) καὶ ὁ κ κλος ΑΒΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον Ο.

(4) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σύνολα τῶν μέσων τῶν βγ, γα, αβ, ὡς ἐπίσης τὰ σύνολα τῶν κέ τρων βάρους τῶν τριγώνων αβγ, τῶν ὀρθοκέντρων αὐτῶν καὶ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶ ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων αὐτῶν.

(5) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διάμεσοι καὶ τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου αβγ διέρχονται διὰ σταθερῶν σημείων.

8. Δίδεται εὐθεῖα δ καὶ σημεῖον Ο, τοῦ ὁποίου ἔστω Η ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν δ. Θεωροῦμεν ὅλας τὰς ὁμοιότητας κέντρου Ο, καθ' ἑκάστην τῶν ὁποίων τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου Η εἶναι ἕνα σημεῖον Η' τῆς δ.

(1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δοθείσης τῆς γωνίας τῆς ὁμοιότητος ὁρίζεται ὁ λόγος αὐτῆς.

(2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν ὁμολόγων Μ' ἑνὸς δοθέντος σημείου Μ κατὰ τὰς ἀνωτέρω ὁμοιότητας.

(3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τῶν ὁποίων τὰ ὁμόλογα, κατὰ τὰς ἀνωτέρω ὁμοιότητας, συμπίπτουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ'.

(4) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι δ, τῶν ὁποίων αἱ ὁμόλογοι, κατὰ τὰς ἀνωτέρω ὁμοιότητας, συμπίπτουν εἰς τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ', διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

(5) Ἔστω (Γ) ἕνας δοθεὶς κύκλος τοῦ ὁποίου ὁ ὁμόλογος κύκλος, κατὰ τὰς ἀνωτέρω ὁμοιότητας εἶναι ὁ (Γ').

Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας κύκλος (Γ'), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ γωνία φ τῆς ὁμοιότητος.

Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας κύκλος (Γ') διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Μ' τοῦ ἐπιπέδου.

Νὰ κατασκευασθοῦν οἱ κύκλοι (Γ') οἱ ἐφαπτόμενοι δοθείσης εὐθείας (δ') τοῦ ἐπιπέδου.

9. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Ὀνομάζομεν (Τ) κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), ὅμοιον πρὸς δοθέν, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι σημεῖα τοῦ (Ο) ἡ δὲ ΑΒ διέρχεται διὰ τοῦ Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΑΓ.

10. Δίδονται : δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β, δύο σημεῖα Α καὶ Β τούτων ἀντιστοίχως καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu}$$

(μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα).

11. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τούτων ἀντιστοίχως. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Α' καὶ Β' τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu} \text{ καὶ } A'B' = \lambda$$

ἔνθα λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα

12. Δίδονται : δύο εὐθεῖαι α καὶ β, τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, δύο σημεῖα Α καὶ Β τούτων ἀντιστοίχως καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου των. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Α' καὶ Β' τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{\mu}{\nu} \text{ καὶ } (PA', PB') = \varphi$$

13. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τούτων ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Α' καὶ Β' τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, ὥστε :

$$A'B' = \lambda \text{ καὶ } AA' + BB' = \mu$$

14. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο ἡμιευθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΥ ἀπὸ τοῦ κέντρου του. Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη ε τοῦ (Ο) εἰς σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$$

(μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα).

15. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο κύκλοι (Α) καὶ (Β) διερχόμενοι διὰ τοῦ Ρ, τεμνόμενοι ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, ἐφαπτόμενοι ἀντιστοίχως τῶν α καὶ β καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες ἔχουν δοθέντα λόγον.

16. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) Β, Γ καὶ 2τ

(2) Β, Γ καὶ $υ_1$ (ἢ $μ_1$).

(3) Β, Γ καὶ $δ_1$ (ἢ $δ'_1$)

(4) Α, $υ_1$ καὶ $\frac{β}{γ}$

(5) Α, α καὶ $\frac{β}{γ}$

(6) Α, $\frac{β}{γ}$ καὶ $δ_1$ (ἢ $δ'_1$)

(7) Α, $\frac{β}{γ}$ καὶ ΟΙ = δ

(8) $\frac{β}{γ}$, $\frac{α}{γ}$ καὶ GI = λ.

(9) Α, Β – Γ, $υ_1$

(10) Α, $\frac{β}{γ}$, $υ_1$

17. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα ἄλλο τρίγωνον Α'Β'Γ' (Α', Β', Γ' ἐπὶ τ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως) ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι : (1) Αἱ ΑΓ καὶ ΑΒ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας ($δ_2$) καὶ ($δ_3$) ἀντιστοίχως καὶ (ΒΓ = α (ἔνθα α δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

18. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τοῦτο ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΕ Δίδεται ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ἡ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ αὐτ εἶναι μία κορυφὴ τοῦ παραλληλογράμμου.

19. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ νὰ εἶναι ἀντιστοίχ σημεῖα τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν (ἢ τριῶν δοθέντων ὁμοιοκέντρων κύκλων

20. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Α' τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

21. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τοῦτο ἄλλο τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον π δοθὲν τρίγωνον.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν ἓξ οἰκογένειαι λύσεων.

22. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τοῦτο ἄλλο τρίγωνον Α'Β'Γ' ὅμοιον πρὸς δ τρίγωνον, ὥστε ἡ εὐθεῖα Β'Γ' νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ (ἢ νὰ εἶναι εὐθεῖα δοθε διευθύνσεως).

23. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ὅταν δίδωνται :

Αἱ κορυφαὶ Δ, Γ, ἡ διαφορὰ Γ – Δ = φ, ὁ λόγος $\frac{ΒΓ}{ΔΑ} = \frac{μ}{ν}$, καὶ ἡ συνθήκη ὅπω κορυφαὶ Α καὶ Β αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν α καὶ β.

(μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα καὶ φ δοσεῖσα γωνία).

24. Εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς δ ὀρθογώνιον.

25. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον τετράπλευρον ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὥστε, δύο ἐκ κορυφῶν αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἐπὶ τοῦ κύκλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

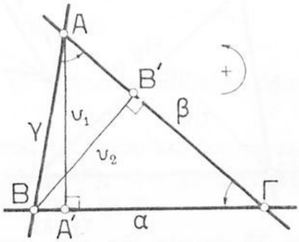
80. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θεωρουμένης πλευρᾶς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ θεωρούμενον τρίγωνον καὶ ΑΑ', ΒΒ' τὰ ὕψη αὐτοῦ τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΓΑ. (Σχ. 80)

Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ὁμοίων τριγώνων ΑΑ'Γ καὶ ΒΒ'Γ ἔχομεν ὅτι :

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΒΒ'}{ΑΑ'} \quad \text{ἤτοι } ΒΓ \cdot ΑΑ' = ΑΓ \cdot ΒΒ' \text{ ἢ}$$

$$\alpha \cdot \upsilon_1 = \beta \cdot \upsilon_2$$



Σχ. 80

Ἔστω σ(ι) τὸ γινόμενον τοῦτο.

Συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν (1) τοῦ γινομένου δύο εὐθ. τμημάτων εἰς τὰ ἀνωτέρω γινόμενα $\alpha \cdot \upsilon_1 = \beta \cdot \upsilon_2 = \gamma \cdot \upsilon_3$ ἀντιστοιχεῖ τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον σ (ι), βάσεως σ καὶ ὕψους ἴσου πρὸς τὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα ι.

81. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἐμβαδὸν** *τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον Εμβ ΑΒΓ* (1), *τὸ ἀνωτέρω γινόμενον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν λ ἐκλεγόμενον αὐθαιρέτως.* Κατωτέρω θὰ ἐξηγηθῇ ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον λαμβάνεται $\lambda = \frac{1}{2}$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θεωρεῖται μὲ τὸ πρόσημον + ἢ τὸ – καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένον.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν ὁποίων δύο ὁμόλογοι* (2) *πλευραὶ εἶναι ἴσαι εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν.*

Ἂν δύο ὁμόλογα ὕψη εἶναι ἴσα, τότε τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰ ὕψη ταῦτα πλευρῶν.

---

(1) Ἡ μὲ τὸ σύμβολον **Ε**, ὅταν δὲν χωρεῖ παρεξήγησις ὡς πρὸς τὸ ἀντίστοιχον τρίγωνον.

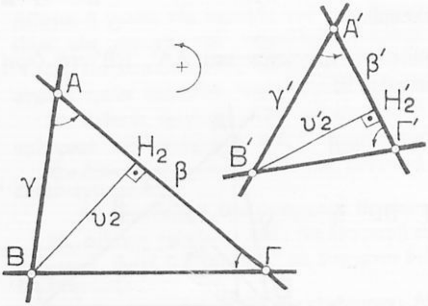
(2) Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' θεωροῦνται ὁμόλογα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἔχει ὁρισθῇ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν των.

Πράγματι, οἱ λόγοι τῶν ἐμβαδῶν, εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις, εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ ἀριθμοῦ λ καὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἢ ὑψῶν ἀντιστοίχως.

82. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἂν τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων εἶναι ἴσα, τότε τὰ τρίγωνα ὀνομάζονται* **ἰσοδύναμα**.

83. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ὁμόλογοι γωνίαι(1) δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί, τὰ ἐμβαδὰ τούτων εἶναι ἀνάλογα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶν θεωρουμένων γωνιῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α καὶ Α' αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν. Ἔχομεν (80) συμβολίζοντες μὲ τὰ **Ε** καὶ **Ε'** τὰ ἐμβαδὰ τῶν θεωρουμένων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἀνιστοίχως :



Σχ. 83

$$(1) \quad \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E'}} = \frac{\lambda \cdot \beta \cdot \upsilon_2}{\lambda \cdot \beta' \cdot \upsilon'_2} = \frac{\beta \upsilon_2}{\beta' \upsilon'_2}$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $ΑΒΗ_2$ καὶ $Α'Β'Η'_2$ ἔχομεν : $\frac{\upsilon_2}{\upsilon'_2} = \frac{\gamma}{\gamma'}$

Ἐκ τῆς (1) ἑπομένως ἔχομεν :

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E'}} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$$

Ὁμοία εἶναι ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν Α καὶ Α'.

Σημειοῦμεν ὅτι, καὶ ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἰσχύει.

Πράγματι, ἂν ἰσχύῃ ἡ : $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E'}} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, τότε ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς :

$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E'}} = \frac{\beta \cdot \upsilon_2}{\beta' \cdot \upsilon'_2}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'} = \frac{\beta \cdot \upsilon_2}{\beta' \cdot \upsilon'_2}$ καὶ ἑπομένως ὅτι $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon'_2}$.

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (16) ὅτι εἶναι ὅμοια τὰ τρίγωνα $ΑΒΗ_2$ καὶ $Α'Β'Η'_2$, καὶ λόγῳ τούτου ὅτι (ΑΒ, ΑΓ) = (Α'Β', Α'Γ').

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμοίων ἢ ἀντιρρόπως ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των.*

ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΑ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΤΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

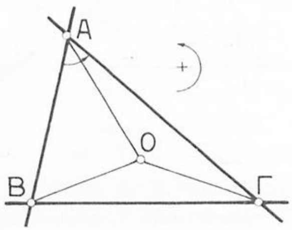
84. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὰ τρία τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο.

Κάθε τρίγωνον ἐκ τῶν ἀνωτέρω θὰ ὀνομάζεται **προσθετικὸν** ἢ **ἀφαιρετικὸν**

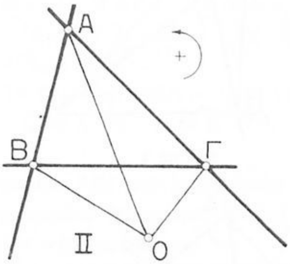
(1) Ἕνα ζεῦγος ὁμολόγων γωνιῶν

καθ' ὅσον εἶναι ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως προσανατολισμένον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀντιστοίχως.

Ἂν τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (1), τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ εἶναι καὶ τὰ τρία προσθετικὰ (Σχ. 84.1). Ἂν τὸ ση- Ο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ),



Σχ. 84.1



Σχ. 84.2

τότε ἐκ τῶν τριγώνων ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ (Σχ. 84.2) τὸ τρίγωνον ΟΒΓ εἶναι ἀφαιρετικὸν καὶ τὰ ἄλλα δύο προσθετικά.

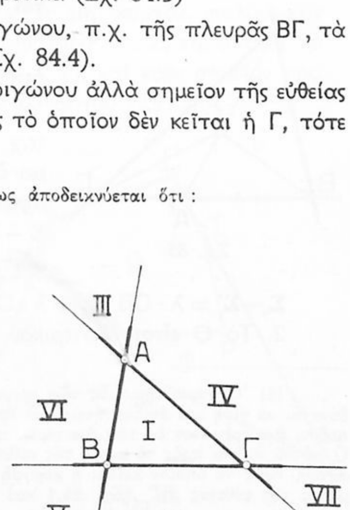
Ἂν τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας τῆς ἀντικειμένης (κατὰ κορυφὴν) τῆς (ΑΒ, ΑΓ), τότε τὸ τρίγωνον ΟΒΓ εἶναι προσθετικὸν καὶ τὰ ἄλλα δύο ἀφαιρετικὰ (Σχ. 84.3)

Ἂν τὸ σημεῖον Ο εἶναι σημεῖον τοῦ τριγώνου, π.χ. τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΟΓΑ καὶ ΟΑΒ εἶναι προσθετικὰ (Σχ. 84.4).

Ἂν τὸ σημεῖον Ο δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τριγώνου ἀλλὰ σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΓ, κείμενον πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ Γ, τότε

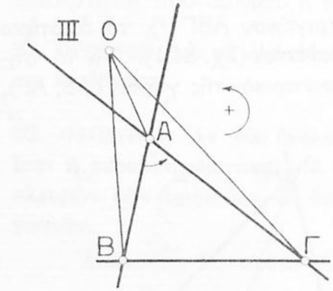
(1) Βάσει τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων διατάξεως ἀποδεικνύεται ὅτι :

Αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ «χωρίζουν» τὸ ἐπίπεδον (τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου) εἰς ἑπτὰ σύνολα σημείων: Τὸ σύνολον I (Σχ. 84) εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, τὸ σύνολον II εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ τριγώνου τὰ ὁποῖα εἶναι σημεῖα τῆς κυρτῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) ἤτοι ἐσωτερικὰ σημεῖα τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ), τὸ σύνολον III εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα εἶναι σημεῖα τῆς κυρτῆς γωνίας τῆς ἀντικειμένης τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) τοῦ τριγώνου, ἤτοι ἐσωτερικὰ σημεῖα τῆς γωνίας τῆς ἀντικειμένης τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) τοῦ τριγώνου κλπ.

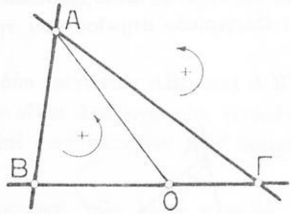


Σχ. 84

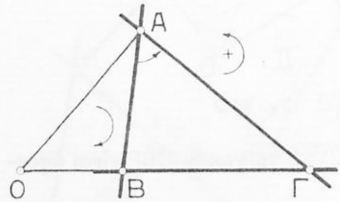
τὸ τρίγωνον ΟΓΑ εἶναι προσθετικὸν καὶ τὸ ΟΑΒ ἀφαιρετικὸν [1] (Σχ. 84.5) κλπ.



Σχ. 84.3



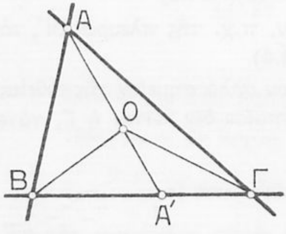
Σχ. 84.4



Σχ. 84.5

Ἂν ὀνομάσωμεν **Σ** τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσθετικῶν τριγώνων καὶ **Σ′** τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀφαιρετικῶν τριγώνων, ἂν ὑπάρχουν, ὡς πρὸς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, διὰ τὸ θεωρούμενον δοθὲν σημεῖον Ο, ἀποδεικνύεται ὅτι :

85. ΘΕΩΡΗΜΑ. Διὰ κάθε σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ ἡ διαφορὰ Σ − Σ′ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 85

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὰς ἑξῆς δυνατὰς περιπτώσεις :

1. Τὸ Ο εἶναι σημεῖον τοῦ τριγώνου (Σχ. 84.4) π.χ. σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐν προκειμένῳ ἔχομεν ὅτι Εμβ ΟΒΓ = 0 [2]. Δὲν ὑπάρχουν, ἐξ ἄλλου, ἀφαιρετικὰ τρίγωνα, ἤτοι **Σ′** = 0. Ἡ διαφορὰ **Σ − Σ′** εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσθετικῶν τριγώνων ΟΓΑ καὶ ΟΑΒ :

$$\Sigma - \Sigma' = \lambda \cdot OB \cdot \upsilon_1 + \lambda \cdot O\Gamma \cdot \upsilon_1 = \lambda \cdot B\Gamma \cdot \upsilon_1 = \lambda \cdot \alpha\upsilon_1 = \text{Εμβ } AB\Gamma.$$

2. Τὸ Ο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου κείμενον ἐπὶ μιᾶς τῶν

(1) Ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν τριγώνων ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ εἰς προσθετικὰ καὶ ἀφαιρετικὰ δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἀνεξαρτήτως τοῦ προσανατολισμοῦ. Οὕτως, εἰς τὸ μὴ προσανατολισμένον ἐπίπεδον, ἕνα τρίγωνον ἐκ τῶν ἀνωτέρω, π.χ. τὸ ΟΒΓ, θὰ ὀνομάζεται προσθετικόν, ὅταν ἡ κορυφὴ Ο αὐτοῦ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ, τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὴν ἀπέναντι τῆς Ο πλευρὰν αὐτοῦ, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α, ἤτοι ὅταν αἱ κορυφαὶ Ο καὶ Α κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ (Σχ. **84.1 καὶ 84.3**).

Τὸ τρίγωνον ΟΒΓ θὰ ὀνομάζεται ἀφαιρετικόν, ὅταν αἱ κορυφαὶ Ο καὶ Α κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Ο πλευρὰ τοῦ θεωρουμένου τριγώνου. (Σχ. 84.2)

(2) Τὸ ὀρθογώνιον 0 (ι) ὅπου μὲ τὸ 0 συμβολίζεται τὸ μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα.

ύθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἔστω ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ Γ (Σχ. 84.5). Ἔχομεν ὅτι: Εμβ ΟΒΓ $= 0$.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΓΑ εἶναι προσθετικὸν καὶ τὸ ΟΑΒ ἀφαιρετικόν, θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma - \Sigma' = \lambda \cdot \mathrm{O\Gamma} \cdot \upsilon_1 - \lambda \cdot \mathrm{OB} \cdot \upsilon_1 = \lambda \cdot \mathrm{B\Gamma} \cdot \upsilon_1 = \lambda \cdot \alpha\upsilon_1 = \text{Εμβ ΑΒΓ}.$$

3. Τὸ Ο εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου. Ἐν προκειμένῳ τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς Α′ τῆς εὐθείας ΑΟ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ. Ἐξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχουν ἀφαιρετικὰ τρίγωνα, ἤτοι $\Sigma' = 0$. Ἔχομεν ἑπομένως (Σχ. 85):

$$\Sigma - \Sigma' = \text{Εμβ ΟΒΓ} + \text{Εμβ ΟΓΑ} + \text{Εμβ ΟΑΒ} =$$
$$= \text{Εμβ ΟΒΑ}' + \text{Εμβ ΟΑ'Γ} + \text{Εμβ ΓΑΑ}' - \text{Εμβ ΟΑ'Γ} + \text{Εμβ ΑΒΑ}' - \text{Εμβ ΟΒΑ}'$$
$$= \text{Εμβ ΓΑΑ}' + \text{Εμβ ΑΒΑ}' = \lambda \cdot \mathrm{A'\Gamma} \cdot \upsilon_1 + \lambda \cdot \mathrm{BA'} \cdot \upsilon_1 = \lambda \cdot \mathrm{B\Gamma} \cdot \upsilon_1 = \lambda \cdot \alpha\, \upsilon_1 =$$
$$= \text{Εμβ ΑΒΓ}.$$

4. Τὸ Ο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐσωτερικὸν μιᾶς τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, π.χ. τῆς (ΑΒ, ΑΓ). Ἐν προκειμένῳ θεωροῦμεν τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον Α′ τῆς ΑΟ καὶ ἀποδεικνύομεν ὁμοίως τὴν πρότασιν.

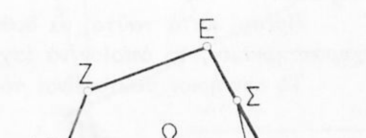
5. Τὸ Ο εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον μιᾶς τῶν ἀντικειμένων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, π.χ. τῆς ἀντικειμένης τῆς (ΑΒ, ΑΓ).

Ἐν προκειμένῳ τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΟΒΓ. Ἀναγόμεθα, βάσει τῆς παρατηρήσεως ταύτης εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΑΠΛΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

86. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν ἕνα ἁπλοῦν, κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν, πολύγωνον ΑΒΓ ... ΕΖ καὶ μίαν ἁπλῆν πολυγωνικὴν γραμμὴν ΜΝΡ ... Σ, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα Μ καὶ Σ εἶναι σημεῖα τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ ... ΕΖ καὶ κάθε σημεῖον της, ἐκτὸς τῶν ἄκρων της Μ καὶ Σ, ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ (Σχ. 86).

Ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΜΝΡ ... Σ χωρίζει τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ ΑΒΓ ... ΕΖ, τὰ μὴ ἀνήκοντα εἰς αὐτήν, εἰς δύο σύνολα σημείων: (Ω) καὶ (Φ). Ἡ ἕνωσις τῶν (Ω), (Φ) καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς πολυγ. γραμμῆς ΜΝΡ ... Σ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου Τ ≡ ΑΒΓ ... ΕΖ.



Σχ. 86

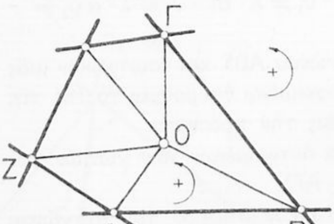
Τὰ δύο πολύγωνα τῶν ὁποίων τὸ ἐσωτερικὸν εἶναι ἀντιστοίχως τὸ (Ω) καὶ τὸ (Φ) ὀνομάζονται *προσκείμενα*.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο ἀνωτέρω πολυγώνων εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ ἄλλου.

Τὸ πολύγωνον ΑΒΓ ... ΕΖ ὀνομάζεται *ἄθροισμα* τῶν δύο ἀνωτέρω προσκειμένων πολυγώνων.

Δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι κάθε ἁπλοῦν πολύγωνον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τρίγωνα κατὰ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους, ἤτοι ὅτι ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνὸς σύνολα τριγώνων, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα (τρίγωνα) ἔχουν *ἄθροισμα* τὸ θεωρούμενον πολύγωνον, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν ἐσωτερικῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο ἐχωρίσθη(1).

87. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ἕνα ἁπλοῦν πολύγωνον ΑΒΓ . . . ΕΖ. Θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου κα τὰ τρίγωνα: ΟΑΒ, ΟΒΓ, . . ., ΟΖΑ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο καὶ βάσει τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, . . ., ΖΑ τοῦ πολυγώνου Ἂν τὸ θεωρούμενον πολύγωνον εἶναι κυρτόν ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν ἀνωτέρω τριγώνων ὡ προσθετικῶν ἢ ἀφαιρετικῶν δύναται νὰ γίνη βάσει τοῦ κριτηρίου τῆς ταυτότητος τοῦ προσανατολισμοῦ των πρὸς τὸν τοῦ θεωρουμένου πολυγώνου. Οὕτως, ἂν τὸ σημεῖον Ο εἶνα ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ . . . Ε ὅλα τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ὁμοίως προσανατολισμένα πρὸς τὸ πολύγωνον. Ἂν τ



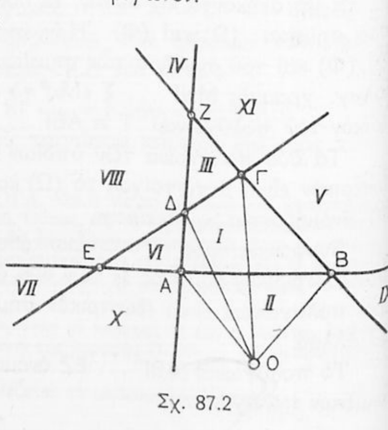
Σχ. 87.1

Ο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου τότε τὸ πλῆθος τῶν ὁμοίως καὶ ἀντιθέτως πρὸς τὸ πολύγωνον προσανατολισμένων τριγώνων ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου(2).

Ἂν τὸ θεωρούμενον πολύγωνον εἶναι μὴ κυρτὸν τὸ ἀνωτέρω κριτήριο δὲν ἰσχύει δοθέντος ὅτι δὲν ὁρίζεται προσανατολισμὸς διὰ τὸ μὴ κυρτὸν πολύγωνον.

Πρέπει, κατὰ ταῦτα, νὰ δοθῇ ἄλλο κριτήριον διὰ τὸν κατὰ τ' ἀνωτέρω χαρακτηρισμόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὸ τρίγωνον.

Τὸ κριτήριον τοῦτο εἶναι τὸ ἑξῆς :



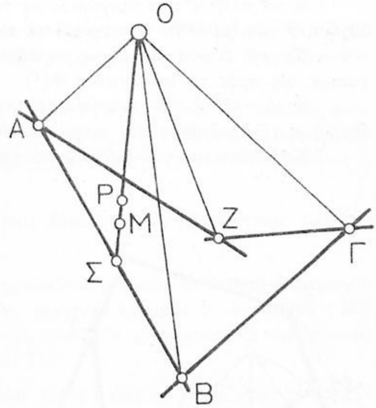
Σχ. 87.2

(1) Δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν πρῶτον τὰ *προσκείμενα* πολύγωνα ὡς δύο πολύγωνα ἔχοντα μίαν ἢ περισσοτέρας πλευρὰς ἢ τμήματα πλευρῶν κοινὰ καὶ μὴ ἔχοντα κοινὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον καὶ ἀκολούθως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὡς τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον προκύπτει ὅταν ἀφαιρέσωμεν (θεωρήσωμεν ὡς μὴ ὑφισταμένας) τὰς κοινὰς πλευρὰς τῶν δύο πρώτων. Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἀθροίσματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν δύο ἀρχικῶν πολυγώνων καὶ μόνον ἀπὸ αὐτά.

(2) Αἱ εὐθεῖαι ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ δύο διαδοχικὰς κορυφὰς ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου, χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς ἕνδεκα σύνολα (Σχ. 87.2) σημείων.

Δοθέντος σημείου Ο εἰς τὸ ἐπίπεδον ἁπλοῦ, κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ, πολυγώνου ΑΒΓ. . . ΕΖ (Σχ. 87.3), ἕνα τρίγωνον ἐκ τῶν ΟΑΒ, ΟΒΓ, . ., ΟΖΑ θὰ ὀνομάζεται **προσθετικόν**, ὅταν οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν τῆς ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Ο πλευρᾶς αὐτοῦ, ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν Ο καὶ Σ σημεῖον Ρ, ὥστε κάθε σημεῖον Μ κείμενον μεταξὺ τῶν Σ καὶ Ρ, νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ. . . . ΕΖ.

Οὕτω τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΒΓ (Σχ. 87.3) εἶναι προσθετικά.

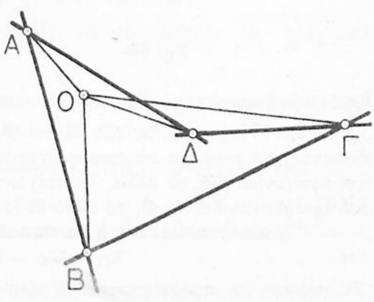


Σχ. 87.3

Ἕνα τρίγωνον ἐκ τῶν ἀνωτέρω θὰ ὀνομάζεται **ἀφαιρετικόν**, ὅταν οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Σ ἐσωτερικὸν τῆς ἀπέναντι τοῦ Ο πλευρᾶς αὐτοῦ, δὲν ὑπάρχῃ, μεταξὺ τῶν Ο καὶ Σ, σημεῖον Ρ, ὥστε κάθε σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Σ καὶ Ρ, νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ. . . ΕΖ. Οὕτω ,τὰ τρίγωνα ΟΓΖ, ΟΖΑ (Σχ. 87.3), εἶναι ἀφαιρετικά.

Εἰς τὸ διὰ τοῦ σχήματος (87.4) ἀπεικονιζόμενον τετράπλευρον, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΔΑ εἶναι προσθετικά, τὸ δὲ ΟΓΔ ἀφαιρετικόν.

Θεωροῦμεν τώρα, ἕνα ἁπλοῦν πολύγωνον ΑΒΓ . . . ΕΖ, συμβολικῶς **Τ** τὸ ὁποῖον ἔχει καθ' οἱονδήποτε τρόπον χωρισθῆ εἰς τρίγωνα, ἕνα τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου του, καὶ τὰ τρίγωνα : ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, . . . , ΟΖΑ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ θεωρηθὲν σημεῖον Ο καὶ ἀπέναντι τοῦ Ο πλευρὰς τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ . . . ΕΖ (Σχ 88).



Σχ. 87.4

Ὀνομάζομεν Σ_T τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσθετικῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριγώνων καὶ Σ'_T τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκ τούτων ἀφαιρετικῶν ὡς πρὸς τὸ πολύγωνον **Τ**. Θὰ ἀποδειχθῆ ὅτι :

88. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ διαφορὰ $\Sigma_T - \Sigma'_T$ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τ τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει χωρισθῆ τὸ πολύγωνον ΑΒΓ. . . ΕΖ.

Ἀπόδειξις Θὰ ἀποδείξωμεν, ἐν πρώτοις, ὅτι ἂν ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἰσχύῃ διὰ δύο προσκείμενα πολύγωνα **Ω** καὶ **Φ**(Σχ.88), τὰ ὁποῖα ἔχουν χωρισθῆ εἰς τρίγωνα, τότε ἰσχύει καὶ διὰ τὸ ἄθροισμα $T \equiv$ ΑΒΓ. . . ΕΖ αὐτῶν.

Ἂς ὀνομάσωμεν :

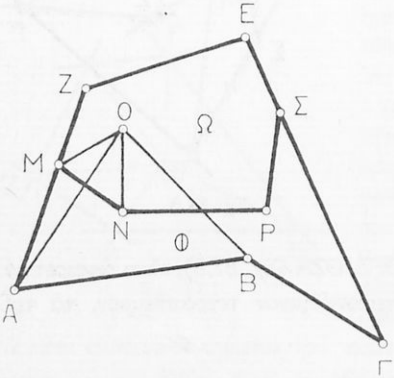
Σ_Ω καὶ Σ'_Ω ἀντιστοίχως τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετικῶν καὶ τῶν ἀφαιρετικῶν τριγώνων, ὡς πρὸς τὸ πολύγωνον Ω(1).

ω τὸ πλῆθος τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει χωρισθῆ τὸ πολύγωνον Ω, καὶ E_Ω τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει χωρισθῆ τὸ πολύγωνον Ω.

Σ_Φ καὶ Σ'_Φ ἀντιστοίχως τὸ ἄθροισμα τῶν προσθετικῶν καὶ τῶν ἀφαιρετικῶν τριγώνων, ὡς πρὸς τὸ πολύγωνον Φ(1)

φ τὸ πλῆθος τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει χωρισθῆ τὸ πολύγωνον Φ, καὶ E_Φ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει χωρισθῆ τὸ πολύγωνον Φ.

E τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει χωρισθῆ τὸ πολύγωνον T.



Σχ. 88

Τὸ ἄθροισμα T τῶν προσκειμένων πολυγώνων Ω καὶ Φ ἔχει οὕτω χωρισθῆ εἰς $\varphi + \omega$ τρίγωνα. Ἀφοῦ ἐπομένως ὠνομάσαμεν τ τὸ πλῆθος τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει χωρισθῆ τὸ πολύγωνον T, θὰ ἔχωμεν : $\tau = \varphi + \omega$ καὶ $E_\Omega + E_\Phi = E_T$.

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι :

Εἰς τὰ πολύγωνα Ω καὶ Φ ἔχομεν δύο κατηγορίας πλευρῶν :

1. Πλευρὰς μὴ κοινὰς τῶν Ω καὶ Φ αἱ ὁποῖαι εἶναι πλευραὶ (ἢ τμήματα πλευρῶν) τοῦ πολυγώνου T, ὡς αἱ... AB, ΒΓ, ΓΣ, ΣΕ, ΕΖ,... ΖΜ (Σχ.88), εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τρίγωνα προσθετικὰ ἢ ἀφαιρετικὰ διὰ πολύγωνα Ω καὶ Φ(1). Εἰς τὴν ἐμφανιζομένην (Σχ. 88) περίπτωσιν ἔχομεν ὅτι εἰς τὴν, ἐκ τῶν ἀνωτέρω, πλευρὰν π.χ. ΑΒ ἀντιστοιχεῖ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι προσθετικὸν διὰ τὸ πολύγωνον Ω καὶ διὰ τὸ πολύγωνον Φ. Εἰς τὴν πλευρὰν ΕΖ ἀντιστοιχεῖ τὸ τρίγωνον ΟΕΖ τὸ ὁποῖον εἶναι προσθετικὸν διὰ τὸ Ω κλπ.

2. Πλευρὰς κοινὰς τῶν Ω καὶ Φ, ὡς εἶναι ΜΝ, ΝΡ,..., ΡΣ (Σχ. 88), εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τρίγωνα τὰ ὁποῖα εἶναι προσθετικὰ διὰ τὸ ἕνα ἐκ τῶν πολυγώνων Ω καὶ Φ καὶ ἀφαιρετικὰ διὰ τὸ ἄλλο. Τὸ τρίγωνον πχ ΟΝΡ εἶναι προσθετικὸν διὰ τὸ πολύγωνον Ω καὶ ἀφαιρετικὸν διὰ τὸ Φ, τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ΟΜΝ,..., ΟΡΣ.

Ἔχομεν ὑποθέσει ὅτι ἡ ἀποδεικτέα πρότασις ἰσχύει διὰ τὰ πολύγωνα Ω καὶ Φ, ἤτοι ὅτι :

$$\Sigma_\Omega - \Sigma'_\Omega = E_\Omega \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_\Phi - \Sigma'_\Phi = E_\Phi$$

Ἐκ τούτων διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$(\Sigma_\Omega - \Sigma'_\Omega) + (\Sigma_\Phi - \Sigma'_\Phi) = E_\Omega + E_\Phi \quad \text{ἢ}$$

$$(1) \qquad (\Sigma_\Omega + \Sigma_\Phi) - (\Sigma'_\Omega + \Sigma'_\Phi) = E'_T$$

Σημειοῦμεν τώρα ὅτι, τὸ τρίγωνον π.χ. ΟΝΡ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΝΡ εἶναι κοινὴ τῶν πολυγώνων Ω καὶ Φ, ἐμφανίζεται εἰς τὸ Σ_Ω (διότι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι προσθετικὸν διὰ τὸ Ω) καὶ εἰς τὸ Σ'_Φ (διότι εἶναι ἀφαιρετικὸν διὰ τὸ Φ). Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου δὲν ἐμφανίζεται εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1). Εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἐμφανίζονται, κατὰ ταῦτα, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων (προσθετικῶν ἢ ἀφαιρετικῶν) τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς τῶν Ω καὶ Φ, ἤτοι εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ T. Ὥστε, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι ἡ διαφορὰ $\Sigma_T - \Sigma'_T$. Ἡ (1), ἐπομένως, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν :

$$\Sigma_T - \Sigma'_T = E_T$$

---

(1) Ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὸ θεωρηθὲν τυχὸν σημεῖον Ο.

'Απεδείχθη οὕτω ὅτι, ἂν ἡ ἀποδεικτέα πρότασις ἰσχύῃ διὰ τὰ πολύγωνα **Ω** καὶ **Φ**, ἰσχύει καὶ διὰ τὸ ἄθροισμα **Τ** αὐτῶν. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς, ὡς πρὸς τὴν ἀποδεικτέαν πρότασιν :

1. Ἡ πρότασις αὕτη ἔχει ἀποδειχθῆ διὰ $\tau = 1$. Πράγματι, ἀπεδείχθη (85) ὅτι : Διὰ κάθε σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἡ διαφορὰ $\Sigma_1 - \Sigma'_1$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου E_1.

2. Ἂν ἰσχύῃ διὰ τυχὸν τ, τότε ἰσχύει καὶ διὰ $\tau+1$. Πράγματι, τοῦτο ἀκριβῶς ἀπεδείχθη ἀνωτέρω, ἀφοῦ τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει χωρισθῆ εἰς $\tau+1$ τρίγωνα εἶναι ἄθροισμα ἑνὸς τριγώνου καὶ ἑνὸς πολυγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει χωρισθῆ εἰς τ τρίγωνα. Ἑπομένως ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ κάθε τ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1 Ἡ διαφορὰ $\Sigma_T - \Sigma'_T$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ο.*

Πράγματι, ἡ διαφορὰ αὕτη: τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀφαιρετικῶν, ἂν ὑπάρχουν ἀφαιρετικὰ τρίγωνα, ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν προσθετικῶν τριγώνων κορυφῆς Ο, ἀπεδείχθη (88) ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα E_T τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ο.

2. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ πολύγωνον, εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον χωρίζεται εἰς τρίγωνα.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δίδεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός :

89. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἐμβαδὸν** *ἑνὸς πολυγώνου* **Τ**, *τὴν διαφορὰν $\Sigma_T - \Sigma'_T$, ἢ τὸ ἄθροισμα E_T, τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τοῦτο.*

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Δύο ἴσα πολύγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.*

Πράγματι, δύο ἴσα πολύγωνα δύνανται [1] νὰ χωρισθοῦν εἰς τρίγωνα ἀντιστοίχως ἴσα.

2. Ἂν δύο πολύγωνα **Ω** *καὶ* **Φ** *εἶναι προσκείμενα* (86), *τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀθροίσματος* **Τ** *αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν* **Ω** *καὶ* **Φ**.

Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς προηγουμένης (88) προτάσεως.

Συνοψίζοντες τ' ἀνωτέρω, ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου, παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἀφοῦ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου ὡρίσθη ὡς ἄθροισμα ἐμβαδῶν τριγώνων, εἰς ἕκαστον δὲ τρίγωνον ἀντιστοιχεῖ (80) ἕνα ὀρθογώνιον τῆς μορφῆς σ(1), ἕπεται ὅτι εἰς τὸ τυχὸν ἁπλοῦν πολύγωνον ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὀρθογώνιον τῆς μορφῆς αὐτῆς : τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῆς μορφῆς σ (1) τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἐπὶ μέρους τρίγωνα. Τὰ ὀρθογώνια ταῦτα δύνανται νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς *γεωμετρικὰ μεγέθη*, ἀφοῦ ὁρίζεται ἐπὶ τούτων: σχέσις ἰσότητος, σχέσις διατάξεως καὶ ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως μὲ τὰς ἰδιότητας τούτων.

Ἀπεδείχθη, κατὰ ταῦτα, ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μίαν ἀντιστοιχίαν βάσει τῆς ὁποίας, εἰς ἕκαστον ἐπίπεδον πολύγωνον ἀντιστοιχεῖ ἕνα μέγεθος, τὸ

---

(1) Βλέπε : «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» Κεφ. VI.

ὁποῖον λέγεται *ἐπιφάνεια* ἢ *ἐμβαδὸν* αὐτοῦ, ἔχον τὰς εἰς τὰ ἀνωτέρω (1 καὶ 2) πορίσματα ἀναφερομένας ἰδιότητας.

90. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο πολύγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδὰ ὀνομάζονται* **ἰσοδύναμα.**

ΕΚΛΟΓΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ λ

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ὡρίσθη (81) ὡς τὸ γινόμενον $\lambda \cdot (\alpha \upsilon_1)$, ἔνθα α καὶ υ_1 ἀντιστοίχως μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος αὐτοῦ. Διὰ τὸν ἀριθμὸν λ ἐσημειώσαμεν ὅτι δύναται νὰ ἐκλεγῇ αὐθαιρέτως. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐκλεγέντος τοῦ λ, ἐκ τῆς τυχὸν ἀλλαγῆς αὐτοῦ (ἀντικαταστάσεως αὐτοῦ δι' ἄλλου ἀριθμοῦ), προέρχεται ἀντικατάστασις τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων καὶ τῶν πολυγώνων μὲ ἐμβαδὰ ἀνάλογα τῶν πρώτων.

Ἡ τοιαύτη ὅμως ἀντικατάστασις κατ' οὐδὲν ἐπηρεάζει τὴν ἰσχὺν τῶν δύο θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἐμβαδοῦ (89, Πορίσματα 1 καὶ 2).

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα ι ὡς ἕνα *νέον εἶδος μονάδος*, καὶ νὰ ὀνομάσωμεν αὐτὴν μονάδα ἐπιφανείας, θέτοντες $\iota^2 = 1$.

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (89) τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου, ἔχομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀνωτέρω τετραγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τοῦτο ἀπὸ μίαν διαγώνιον αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων εἶναι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, ἴσον πρὸς $\lambda \cdot \iota^2$. Τὸ ἐμβαδόν, κατὰ ταῦτα, τοῦ ἀνωτέρω τετραγώνου εἶναι ἴσον πρὸς $2\lambda\iota^2$. Ἔχομεν ὅμως: $2\lambda\iota^2 = 1$ καὶ $\iota^2 = 1$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\lambda = 1/2$. Κατόπιν τῆς ἀνωτέρω ἐκλογῆς, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.

Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \upsilon_1$ $(= \beta \cdot \upsilon_2 = \gamma \cdot \upsilon_3) = \sigma(\iota)$. Τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου $\sigma(\iota)$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν (ἐπιφάνεια) τοῦ τριγώνου.

Σημειοῦμεν ὅτι:

Ἂν δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, ἀντὶ τῶν εὐθ. τμημάτων α καὶ υ_1 (μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους) θεωρήσωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς αὐτῶν τιμὰς $\overline{\alpha}$ καὶ $\overline{\upsilon_1}$ αὐτῶν ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς τὸ μοναδιαῖον εὐθ. τμῆμα ι [1], ὁ ἀριθμὸς $\overline{\lambda} \cdot \overline{\alpha} \cdot \upsilon_1 \equiv \mathbf{E}$ θὰ ὀνομασθῇ **ἀλγεβρικὴ τιμὴ** ἢ ἁπλῶς **τιμὴ** τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ προσημασμένου ἐμβαδοῦ $\overline{\mathrm{E}}$ θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $|\mathbf{E}|$ ἢ ἁπλῶς (Ε)

91. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\mathbf{E} = \rho\tau = \rho_1(\tau - \alpha) = \rho_2(\tau - \beta) = \rho_3(\tau - \gamma),$$

ἔνθα Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, α, β, γ αἱ πλευραί, τ ἡ ἡμιπερίμετρος καὶ ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3

(1) Βλέπε Κεφ. Ι παραγρ. 4. Σημείωσις.

αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων αὐτοῦ κύκλων ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν ὅτι :

$E =$ Εμβ ΙΒΓ $+$ Εμβ ΙΓΑ $+$ Εμβ ΙΑΒ,

ἤτοι :

$$E = \frac{\alpha}{2}\cdot\rho + \frac{\beta}{2}\cdot\rho + \frac{\gamma}{2}\cdot\rho$$

ἢ $E = \rho\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ ἢ $E = \rho\cdot\tau$.

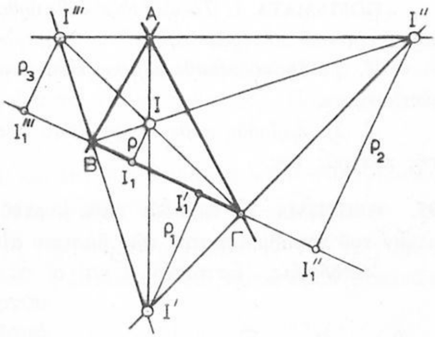
Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :

$E =$ εμβ Ι'ΓΑ $+$ εμβ Ι'ΑΒ $-$ εμβ Ι'ΓΒ,

ἤτοι :

$$E = \frac{\beta}{2}\cdot\rho_1 + \frac{\gamma}{2}\cdot\rho_1 - \frac{\alpha}{2}\cdot\rho_1$$ ἢ

$$E = \rho_1\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$$ ἢ $E=\rho_1\cdot(\tau-\alpha)$ κλπ.



Σχ. 91

92. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$E^2 = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\ (^1)$$

Ἀπόδειξις. Ἀπεδείχθη ὅτι ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὰ γράμματα α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ τὸ τ τὴν ἡμιπερίμετρον αὐτοῦ, διδομένην ἀπὸ τὴν ἰσότητα: $2\tau=\alpha+\beta+\gamma$, τότε τὸ ὕψος αὐτοῦ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν α, ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$\upsilon^2 = \frac{4}{\alpha^2}\ \tau\,(\tau\text{-}\alpha)\ (\tau\text{-}\beta)\ (\tau\text{-}\gamma).$$

Ἔχομεν ὅμως: $E = \frac{1}{2}\ \alpha\cdot\upsilon$, ἑπομένως : $E^2 - \frac{\alpha^2}{4}\ \upsilon^2$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω καὶ τῆς (Ι) εὑρίσκομεν: $E^2 = \tau\ (\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)$.

93 ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\alpha\beta\gamma = 4rE$$

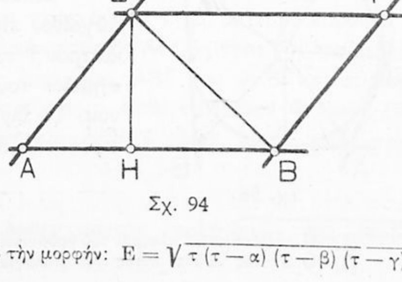
ἔνθα, α, β, γ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ, Ε τὸ ἐμβαδόν του καὶ r ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἀπεδείχθη (19) ὅτι: $\beta\gamma = 2r\cdot\upsilon_1$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι: $\alpha\beta\gamma = 2r\alpha\upsilon_1$. Ὅμως, τὸ γινόμενον $\alpha\upsilon_1 = 2E$. Ἑπομένως :

$$\alpha\beta\gamma = 4rE$$

94. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὴν διαγώνιον π.χ. ΒΔ αὐτοῦ. Τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθη τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς



Σχ. 94

(1) Ἡ ἰσότης αὐτὴ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $E = \sqrt{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}$

$\frac{1}{2}$ ΑΒ · ΔΗ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον πρὸς ΑΒ · ΔΗ. Θέτοντες ΑΒ = β καὶ ΔΗ = υ, θὰ σημειοῦμεν: Εμβ ΑΒΓΔ = β · υ.

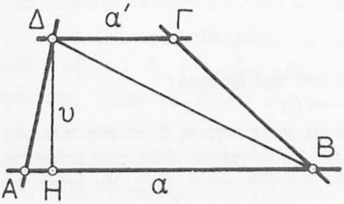
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον δύο προσκειμένων πλευρῶν του*(1).

2. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε ρόμβου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.

3. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε τετραγώνου πλευρᾶς α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς του.

95. ΘΕΩΡΗΜΑ: Τὸ ἐμβαδὸν κάθε κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν α καὶ α′ αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ τραπέζιον (Σχ. 95) ἀπὸ τὴν διαγώνιον ΒΔ αὐτοῦ ἔχουν ἐμβαδὰ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ γινόμενα: $\frac{\alpha}{2} \cdot \upsilon$ καὶ $\frac{\alpha'}{2} \cdot \upsilon$.



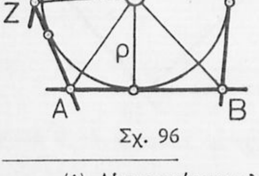
Σχ. 95

Ἂν ἑπομένως συμβολίσωμεν μὲ τὸ γράμμα **Ε** τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, θὰ ἔχωμεν : $\mathbf{E} = \frac{\alpha + \alpha'}{2} \cdot \upsilon$

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ ἐμβαδὸν κάθε κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὴν διάμεσον ΕΖ, τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.*

Πράγματι, ἂν εἶναι μ ἡ διάμεσος αὕτη, εἶναι γνωστὸν ὅτι : $2\mu = \alpha + \alpha'$, ἑπομένως : $\mathbf{E} = \mu \cdot \upsilon$.

96. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον Ι (ρ) (2) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.



Σχ. 96

Ἀπόδειξις. Δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ κέντρον Ι τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, συνδέοντες τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Τὸ ὕψος τῶν ἀνωτέρω τριγώνων εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ κύκλου Ι (ρ).

(1) Αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου δύνανται νὰ ὀνομάζωνται καὶ διαστάσεις αὐτοῦ.
(2) Ὁ ὁποῖος κεῖται ἐντὸς τοῦ πολυγώνου.

97. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων κυρτῶν πολυγώνων ΑΒΓ... ΕΖ καὶ Α΄Β΄Γ΄... Ε΄Ζ΄ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

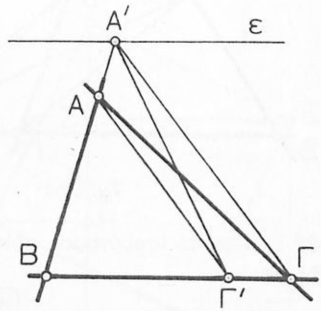
Ἀπόδειξις. Τὰ πολύγωνα τοῦ θεωρήματος χωρίζονται διὰ τῶν ὁμολόγων διαγωνίων των, τῶν ἀγομένων ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν των, π.χ. τῶν Α καὶ Α΄, εἰς τρίγωνα ἀντιστοίχως ὅμοια, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει (83, Πόρισμα) ἡ ἀποδεικτέα πρότασις.

Σημειοῦμεν ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει, καὶ ἐπὶ δύο ἁπλῶν ἐν γένει πολυγώνων, ἀφοῦ ταῦτα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς τρίγωνα ἀντιστοίχως ὅμοια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἀναφερομένων εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ πολυγώνου, εὐκόλως προκύπτει ἡ ἐπίλυσις τῶν κατωτέρω βασικῶν προβλημάτων :

98. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον αὐτοῦ, ἔχον δοθὲν ὕψος ἢ δοθεῖσαν βάσιν.

Λύσις. Ἔστω υ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΒΓ τριγώνου.



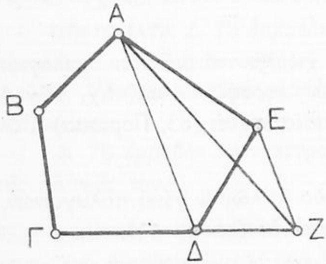
Σχ. 98

Κατασκευάζομεν τὴν παράλληλον ε πρὸς τὴν ΒΓ, τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου καὶ ἀπέχουσαν ἀπὸ αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα υ. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΑ κατὰ τὸ σημεῖον Α΄. Ὑποθέτομεν ΑΒ < Α΄Β. Κατασκευάζομεν τὴν διὰ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν Α΄Γ. Ἔστω Γ΄ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΓ. Ἔχομεν: ΒΓ΄ < ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ΄ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἀθροίσματα ΑΒΓ΄ + ΑΓ΄Γ καὶ ΑΒΓ΄ + Α΄ΑΓ.

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΓ΄Γ καὶ Α΄ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΑΓ΄ καὶ ἴσα τὰ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτὴν ὕψη, διότι αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Α΄ αὐτῶν ἀντιστοίχως, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῆς ΑΓ΄, κεῖνται ἐπὶ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ΄ εὐθείας. Τὰ τρίγωνα ἑπομένως, ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ΄ εἶναι ἰσοδύναμα. Τὸ πρόβλημα δέχεται ἀπείρους λύσεις : Κάθε τρίγωνον βάσεως ΒΓ΄ τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι κορυφὴ εἶναι σημεῖον τῆς ε εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

99. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔΕ τὸ δοθὲν κυρτὸν πολύγωνον (Σχ. 99). Κατασκευ

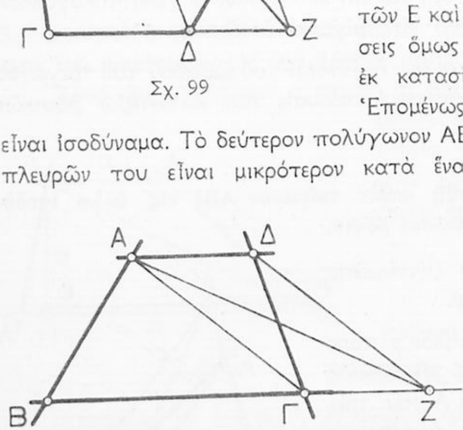


Σχ. 99

ζομεν τὴν διὰ τῆς κορυφῆς π.χ. Ε παράλληλ πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΔ, τῆς ὁποίας ἔστω Ζ τ ἐπὶ τῆς ΓΔ σημεῖον. Τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ κ ΑΒΓΖ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἀθροίσματα :

$$ΑΒΓΔ + ΑΔΕ \text{ καὶ } ΑΒΓΔ + ΑΔΖ$$

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΔΖ εἶν ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα κοινὴν τὴν πλευρὰν Γ καὶ ἀντίστοιχα ὕψη ἴσα πρὸς τὰς ἀποστάσ τῶν Ε καὶ Ζ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΓΔ. Αἱ ἀποστ σεις ὅμως αὗται εἶναι ἴσαι, ἀφοῦ ἡ ΕΖ εἶνα ἐκ κατασκευῆς, παράλληλος πρὸς τὴν Α Ἑπομένως τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ εἶναι ἰσοδύναμα. Τὸ δεύτερον πολύγωνον ΑΒΓΖ εἶναι κυρτὸν καὶ τὸ πλῆθος τ πλευρῶν του εἶναι μικρότερον κατὰ ἕνα τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τ δοθέντος. Ἐπαναλαμβάνον τὴν προηγουμένην κατασκευ ἐπὶ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΖ ε ρίσκομεν ἕνα τρίγωνον ἰσοδ ναμον τοῦ ἀρχικοῦ πολυγών



Σχ. 99.1

Τὸ πρόβλημα δέχεται πείρους λύσεις.

Σημειοῦμεν ὅτι, ἡ πρ γουμένη κατασκευὴ ἐφαρμοζο νη εἰς τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σ 99.1) δίδει τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον ΑΒΖ. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓ ἔχομεν :

$$ΓΖ = ΑΔ$$

καὶ ἑπομένως:

$$ΒΖ = ΒΓ + ΑΔ.$$

100. ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ἰσοδύναμον τράγωνον.

Λύσις: Ἔστωσαν α καὶ υ μία πλευρὰ καὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος τοῦ θέντος τριγώνου. Τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἴ πρὸς α καὶ υ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον. Ἂν ἐξ ἄλλου εἶναι x ἡ πλευ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θὰ εἶναι :

$$x^2 = \frac{α}{2} \cdot υ$$

Τὸ εὐθ. τμῆμα x κατασκευάζεται (55)

Σημειοῦμεν ὅτι : Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προτάσεων (99, 100) προκύπ ὅτι δοθέντος πολυγώνου **Π** δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσο ναμον πρὸς αὐτό, δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν λ τοῦ ἰσοδυνά πρὸς τὸ πολύγωνον τετραγώνου.

Οὕτω, διὰ κάθε δοθὲν ἁπλοῦν πολύγωνον **Π** δυνάμεθα νὰ θέσωμεν : Εμβ $\Pi = \lambda^2$, ἔνθα λ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα.

101. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον Π΄ ὅμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον Π καὶ ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν πολύγωνον Ρ.**

Λύσις. Ἔστω x ἡ πλευρὰ τοῦ (Π΄) ἡ ὁμόλογος μιᾶς πλευρᾶς α τοῦ (Π) Εἶναι:

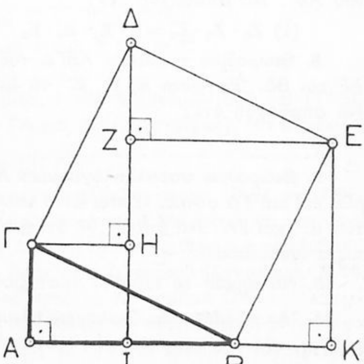
$$\frac{\text{Εμβ } \Pi'}{\text{Εμ } \Pi} = \frac{x_2}{\alpha^2}$$

Ἀλλὰ Εμβ Π' = Εμβ Ρ. Ἑπομένως $\frac{\text{Εμβ } P}{\text{Εμβ } \Pi} = \frac{x^2}{\alpha^2}$ ἢ $\frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{x^2}{\alpha^2}$, ἔνθα μ καὶ λ αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς τὰ **Ρ** καὶ **Π** τετραγώνων.

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ὅτι : $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{x}$, ἤτοι ὅτι ἡ πλευρὰ x κατασκευάζεται καὶ ἑπομένως καὶ τὸ **Π΄**, ὡς ὅμοιον τοῦ **Π**.

Κατωτέρω δίδεται μία δευτέρα ἀπόδειξις τῆς προτάσεως (48), βασιζομένη εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐμβαδοῦ.

102. ΘΕΩΡΗΜΑ. [1] **Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.**



Σχ. 102

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 102) τὰς καθέτους ΔΙ καὶ ΕΚ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὰς καθέτους ΕΖ καὶ ΓΗ ἐπὶ τὴν ΔΙ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΕΔ, ΚΕΒ, ΗΔΓ εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως τὰ τετράγωνα ΑΙΗΓ καὶ ΙΚΕΖ ἔχουν πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἑπομένως : ΓΒΕΔ = ΑΙΗΓ + ΓΗΔ + ΙΚΕΖ + ΖΕΔ − ΑΒΓ − ΚΕΒ = ΑΙΗΓ + ΙΚΕΖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) Διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς διαγωνίου ΑΓ αὐτοῦ εἶναι : Εμβ ΜΑΒ = Εμβ ΜΔΑ.

(2) Διὰ κάθε ἐσωτερικὸν σημεῖον Μ αὐτοῦ εἶναι :
Εμβ ΜΑΒ + Εμβ ΜΓΔ = Εμβ ΜΒΓ + Εμβ ΜΔΑ

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κάθε τραπεζίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, ἀπὸ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται ἡ πρώτη.

3. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, εὐθεῖαν ε τοῦ ἐπιπέδου του μὴ ἔχουσαν μὲ αὐτὸ κοινὸν σημεῖον, τρεῖς εὐθείας, διὰ τῶν κορυφῶν του Α,Β,Γ, τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, τὰ κοινὰ σημεῖα

(1) Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα (571—501 π.Χ)

Α', Β', Γ' τῶν εὐθειῶν τούτων μὲ τὴν εὐθεῖαν ε ἀντιστοίχως καὶ τὰ μέσα Δ, Ε, Ζ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{Εμβ ΑΒΓ} = 2 \text{ Εμβ ΔΕΖ}$$

4. Θεωροῦμεν : κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ζ τῶν ΒΓ καὶ ΑΔ καὶ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{Εμβ ΑΒΓΔ} = 4 \text{ Εμβ ΖΜΝ}$$

5. Θεωροῦμεν : τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὰ μέσα Ι καὶ Κ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ, καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ρ τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς διαγωνίους τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν Ι καὶ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα τὰ συνδέοντα τὸ Ρ μὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου χωρίζουν τοῦτο εἰς τέσσαρα τετράπλευρα ἰσοδύναμα.

6. Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΔΕΖ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ΑΒΓ καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸ Α'Β'Γ'. Ἔστωσαν Ε, Ε', Ε'' ἀντιστοίχως τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ,ΔΕΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $E''^2 = E \cdot E'$.

7. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, τὰς διὰ τοῦ Μ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ τὰ τρία τρίγωνα καὶ τρία παραλληλόγραμμα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ τρίγωνον ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω εὐθείας. Ὀνομάζομεν $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραλληλογράμμων καὶ $\mathbf{E}$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(1)\ \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_3 = 8 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_3 \qquad (2)\ \sqrt{\mathbf{E}} = \sqrt{\mathbf{E}_1} + \sqrt{\mathbf{E}_2} + \sqrt{\mathbf{E}_3}$$

8. Θεωροῦμεν τραπέζιον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἔστωσαν $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΓΔ, ΟΒΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\mathbf{E}''^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}'$$

9. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ δύο σημεῖα Α' καὶ Γ' ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ. Ἔστω Ε τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΓ' καὶ ΔΑ' καὶ Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΓ' καὶ ΓΑ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ χωρίζει τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τραπέζια ἰσοδύναμα.

10. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

11. Ἂν τὰ μέσα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν δύο πολυγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν συμπίπτουν, τότε τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

12. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο πολυγώνων περιγεγραμμένων περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον (Ι) ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν περιμέτρων των.

13. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, τὸν κύκλον $ΑΟ_1Δ_1$ ($Ο_1$ καὶ $Δ_1$ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, καὶ τὰ δεύτερα ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' τοῦ κύκλου τούτου μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα $Δ_1ΒΓ'$ καὶ $Δ_1ΓΒ'$ εἶναι ἰσοδύναμα.

14. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν διχοτόμον ΑΔ αὐτοῦ (Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ , τοὺς κύκλους ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ καὶ τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα Γ' καὶ Β' αὐτῶν μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΒ' = ΓΓ'.

15. Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ ἀντιστοίχως καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ Ζ, μὲ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΔ τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ Ε. Ἔστωσαν Μ, Μ, Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ τετραπλεύρου ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τετράπλευρα ΟΜΑΣ, ΟΝΒΜ, ΟΡΓΝ, ΟΣΔΡ εἶναι ἰσοδύναμα.

16. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ, καὶ τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ σημεῖον ἐπαφῆς I_1 μὲ τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον (Ι). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\mathbf{E} = I_1B \cdot I_1\Gamma$$

ἔνθα $\mathbf{E}$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

17. Δίδεται μία γωνία (ΑΥ, ΑΖ) καὶ ἕνα σημεῖον Ε ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν διὰ τοῦ Ε καὶ ὀνομάζομεν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς πλευρὰς ΑΥ καὶ ΑΖ τῆς γωνίας ἀντιστοίχως, καὶ Ζ τὴν προβολὴν τῆς κορυφῆς Α τῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι:

῎Αν εἶναι ΒΕ = ΓΖ, τότε τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ εἶναι ἐλάχιστον. ῎Ητοι : ῎Αν εἶναι Β′ καὶ Γ′ τὰ κοινὰ σημεῖα μιᾶς οἱασδήποτε ἄλλης διὰ τοῦ Ε εὐθείας, διαφόρου τῆς ἀνωτέρω ΒΓ, μὲ τὰς ΑΥ καὶ ΑΖ, τότε $B'\Gamma' > B\Gamma$.

18. ῎Αν εἰς δύο τετράπλευρα αἱ διαγώνιοι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι ὡς καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν, τότε τὰ τετράπλευρα εἶναι ἰσοδύναμα.

19. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν Γ, Α, Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται τὰ Β, Γ, Α, τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′ ὥστε :

$$\frac{BA'}{B\Gamma} = k_1 \qquad \frac{\Gamma B'}{\Gamma A} = k_2, \qquad \frac{A\Gamma'}{AB} = k_3.$$ Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι :

$$\text{Εμβ } A'B'\Gamma' = \text{Εμβ } AB\Gamma \cdot [1 + (k_1 + k_2 + k_3) + (k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_2)]$$

20. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

(1) $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\upsilon_1} + \dfrac{1}{\upsilon_2} + \dfrac{1}{\upsilon_3}$ (2) $\dfrac{1}{\rho_1} = \dfrac{1}{\upsilon_2} + \dfrac{1}{\upsilon_3} - \dfrac{1}{\upsilon_1}$

(3) $\dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{1}{\upsilon_3} + \dfrac{1}{\upsilon_1} - \dfrac{1}{\upsilon_2}$ (4) $\dfrac{1}{\rho_3} = \dfrac{1}{\upsilon_1} + \dfrac{1}{\upsilon_2} - \dfrac{1}{\upsilon_3}$

(5) $\mathbf{E}^2 = \rho \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3$ (6) $\rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 + \rho_1\rho_2 = \tau^2$

(7) $\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 = \rho \cdot \tau^2$.

21. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν διχοτόμων ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ (Β′ καὶ Γ′ σημεῖα τῶν ΓΑ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι :

$$\text{Εμβ } B\Gamma B'\Gamma' = 2 \text{ Εμβ } IB\Gamma$$

22. Θεωροῦμεν : ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, δύο τυχόντα παραλληλόγραμμα ΓΑΕΖ καὶ ΑΒΗΚ κείμενα πρὸς τὸ μέρος τῶν ΓΑ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ τρίγωνον, καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΗΚ. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων τούτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΒΓΜΝ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΓΜ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ.

23. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς διαμέσους τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ 3/4 τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

24. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις y καὶ z ἀπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως, συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\frac{y}{z} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

25. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ Α′, Β′, Γ′ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἀντιστοίχως (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ) εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

26. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ τέσσαρα σημεῖα Ε, Ζ, Η, Κ αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθὲν ἐμβαδὸν λ^2 καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ περιέχουν ἀντιστοίχως τὰ ἀνωτέρω σημεῖα. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ τῶν παραλληλογράμμων τούτων.

27. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῆ ἐσωτερικὸν σημεῖον Ζ αὐτοῦ, ὥστε τὰ τρίγωνα ΖΒΓ, ΖΓΑ, ΖΑΒ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

28. Δίδεται κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ζ αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ζ χωρίζουσα τὸ τετράπλευρον εἰς δύο πολύγωνα ἰσοδύναμα.

29. Νὰ χωρισθῇ δοθὲν τρίγωνον ἢ πολύγωνον εἰς τρία πολύγωνα ἰσοδύναμα ἢ πολύγωνα τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ἀνάλογα τριῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτων λ, μ, ν, δι' εὐθειῶν ἀγομένων :

(1) Ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς.
(2) Ἀπὸ δοθέντος σημείου τοῦ πολυγώνου.
(3) Ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου.

30. Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ. Νὰ χωρισθῇ τοῦτο :

(1) Εἰς δύο τραπέζια ἰσοδύναμα δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του. Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν εἶναι δοθείς.
(2) Εἰς δύο σχήματα ἰσοδύναμα, δι' εὐθείας ἀγομένης ἀπὸ δοθέντος σημείου Ρ.

31. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο ἡμιευθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΥ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο τοῦ (Ο). Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη ε τοῦ (Ο) εἰς σημεῖον αὐτοῦ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε μὲ τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ νὰ εἶναι :

$$\text{Εμβ ΟΑΒ} = \lambda^2$$

λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

32. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β, τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι :

$$\text{Εμβ ΟΑΒ} = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

33. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) Ἀποστάσεις λ_2 καὶ λ_3 τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου ἀπὸ τῶν διχοτόμων $ΒΔ_2$ καὶ $ΓΔ_3$ ἀντιστοίχως καὶ συνθήκη :

$$\frac{\rho}{\rho_2} = \frac{\rho_3}{\rho_1}$$

34. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ ἔχον δοθὲν ἐμβαδὸν λ^2.

35. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) $\beta,\ \gamma,\ \mathbf{E} = \lambda^2$ (2) $\alpha,\ A,\ \mathbf{E} = \lambda^2$ (3) $\alpha,\ \dfrac{\beta}{\gamma},\ \mathbf{E} = \lambda^2$
(4) $\alpha,\ \beta\gamma,\ \mathbf{E} = \lambda^2$ (5) $A,\ \delta_1,\ \mathbf{E} = \lambda^2$ (6) $\alpha,\ \beta+\gamma,\ \mathbf{E} = \lambda^2$
(7) $\beta+\gamma,\ \upsilon_1,\ \mathbf{E} = \lambda^2$ (8) $A,\ \dfrac{\beta}{\gamma},\ \mathbf{E}$ (9) $\alpha,\ \beta+\gamma$,

συνθήκη : $\mathbf{E}$ = μέγιστον.

36. Δίδεται κύκλος (Ι). Νὰ περιγραφῇ περὶ τοῦτον τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἐλάχιστον.

37. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) $\mathbf{E}$ (1), $\dfrac{\alpha}{\beta}$ (α, β δύο προσκείμεναι πλευραί). (2) $\mathbf{E}$, 2τ (τ ἡ ἡμιπερίμετρος).

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}$, 2τ (4) $\mathbf{E}$, ΑΓ = λ (διαγώνιος).

38. Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο) νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον δοθὲν ἐμβαδὸν λ^2.

39. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τοῦτο ῥόμβος ΜΝΡΣ ἔχων δοθὲν ἐμβαδὸν λ^2.

---

(1) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἀξιωμάτων καὶ τῶν βασικῶν προτάσεων τῆς Γεωμετρίας ὑπενθυμίζομεν (1) τὰ κάτωθι :

1. **ΑΞΙΩΜΑ.** *Κάθε εὐθεῖα περιέχει δύο (1) σημεῖα Α καὶ Β διάφορα ἀλλήλων.*

2. **ΑΞΙΩΜΑ.** *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα, διάφορα ἀλλήλων, ὑπάρχει εὐθεῖα α περιέχουσα τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ μόνον μία.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β **ὁρίζουν** τὴν εὐθεῖαν α.

3. **ΑΞΙΩΜΑ.** *Κάθε ἐπίπεδον (Π) περιέχει τρία (2) σημεῖα Α,Β,Γ, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.*

4. **ΑΞΙΩΜΑ.** *Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα διάφορα ἀλλήλων, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, τότε ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) περιέχον τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ ἕνα μόνον.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ **ὁρίζουν** τὸ ἐπίπεδον (Π).

5. **ΑΞΙΩΜΑ.** *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), διάφορα ἀλλήλων, τότε κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι σημεῖον τοῦ (Π).*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ εὐθεία ΑΒ **κεῖται** ἐπὶ τοῦ (Π) ἢ ὅτι **ἀνήκει** εἰς τὸ (Π) ἢ ὅτι **εἶναι εὐθεῖα** αὐτοῦ.

6. **ΑΞΙΩΜΑ.** *Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), διάφορα ἀλλήλων, ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, τότε θὰ ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Β.*

Ἡ εὐθεία σ ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖται (5) ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ ἐπὶ τοῦ (Ρ), ἤτοι κάθε σημεῖον αὐτῆς εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ). Ἡ εὐθεῖα αὐτη σ ὠνομάσθη **τομὴ** τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ). Ἐξ ἄλλου κάθε κοινὸν σημεῖον Γ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) κεῖται ἐπὶ τῆς σ, διότι εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα δὲν θὰ ἦσαν διάφορα ἀλλήλων, ὡς ἔχοντα τρία κοινὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (4).

(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως»

(2) τουλάχιστον.

7. ΑΞΙΩΜΑ. *Ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Ἤτοι ὑπάρχουν τέσσερα σημεῖα τοιαῦτα ὥστε τὸ τυχὸν ἐκ τούτων νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ τρία ἄλλα.

8. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Μία εὐθεῖα α καὶ ἕνα σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον.**

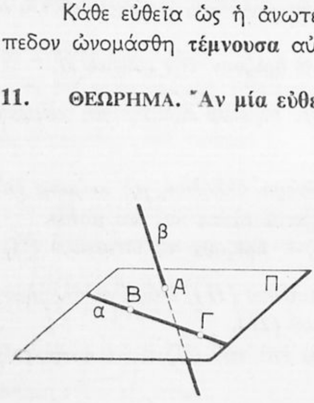
9. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Δύο τεμνομέναι εὐθεῖαι α καὶ β ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον.**

10. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν μία εὐθεῖα ε ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α ἑνὸς ἐπιπέδου (Π) καὶ ἕνα σημεῖον Β μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π), δὲν ἔχει ἐκτὸς τοῦ Α, ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π).**

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ ε εἶχεν, ἐκτὸς τοῦ Α, καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Γ, μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π), τότε θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ σημεῖον Β θὰ ἔκειτο (5) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν διότι τὸ σημεῖον Β κεῖται, ἐξ ὑποθέσεως, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

Κάθε εὐθεῖα ὡς ἡ ἀνωτέρω, ἔχουσα ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐπίπεδον ὠνομάσθη **τέμνουσα** αὐτό.

11. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν μία εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καὶ μιὰ δευτέρα εὐθεῖα β τέμνη τὸ (Π) κατὰ σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α, τότε αἱ εὐθεῖαι α καὶ β δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἤτοι δὲν ὑπάρχει ἐπίπεδον περιέχον τὰς α καὶ β.**



Σχ. 11

Ἀπόδειξις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει ἕνα τοιοῦτον ἐπίπεδον (Ρ) περιέχον τὰς α καὶ β, ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον. Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Β καὶ Γ ἐπὶ τῆς α (Σχ. 11), θὰ ἔχωμεν ὅτι ἕκαστον τῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ), ἑπομένως ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἀπ' εὐθείας (6), ἤτοι ὅτι τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, δηλαδὴ ἐπὶ τῆς α. Ἀλλὰ τὸ Α, ἐξ ὑποθέσεως, κεῖται ἐκτὸς τῆς α.

12. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο εὐθεῖαι α καὶ β αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζονται* **ἀσύμβατοι.** (11)

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουν τὰ κάτωθι συμπεράσματα, καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὴν σχετικὴν θέσιν δύο εὐθειῶν εἰς τὸ χῶρον :

Δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ εἶναι εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π) ἢ νὰ εἶναι σύμβατοι. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον αὶ ὀνομάζονται *τεμνόμεναι* ἢ νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, καὶ ὀνομάζονται *αράλληλοι*. Ὥστε :

3. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο εὐθεῖαι ὀνομάζονται* **παράλληλοι**, *ἂν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ πιπέδου καὶ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον.*

Αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, δὲν εἶναι ὅμως παράλ-ηλοι, διότι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἂν δύο εὐθεῖαι τοῦ χώρου ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα θὰ λέγωμεν ὅτι **συμπί-τουν.**

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν σχετικὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἐσημειώ-σαμεν ἤδη ὅτι :

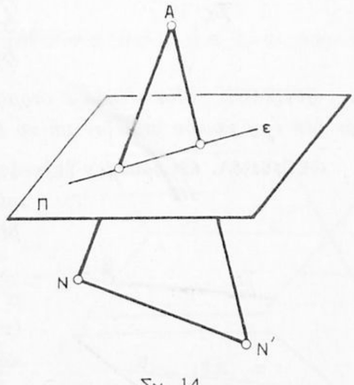
1. Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ *κεῖται* ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (5).
2. Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ εἶναι *τέμνουσα* τὸ ἐπίπεδον (10).

Κατωτέρω(15) θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν εὐθεῖαι μὴ ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐπίπεδον. Αἱ εὐθεῖαι αὗται θὰ ὀνομασθοῦν **παράλληλοι** πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἐκ τῶν ἀξιωμάτων διατάξεως (βλέπε: «Μαθημα-τικὰ Γ' τάξεως» Κεφ. Ι, 25), συνεπείας, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῆς Γ' τάξεως (Κεφ. Ι παραγρ. 25) ἐσημειώσαμεν ὅτι κάθ, πίπεδον (Π) τοῦ χώρου χωρίζει ὅλα τὰ σημεῖα αὐτοῦ εἰς δύο σύνολα τὰ ὁποῖα ὠνομάσαμεν ημιχώρους ὡς πρὸς τὸ (Π). Τὸ σχετικὸν θεώρημα εἶναι τὸ ἑξῆς :

14. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶν ἐπίπεδον (Π) χωρίζει ὅλα τά σημεῖα, τὰ ὁποῖα δέν κεῖνται ἐπ' αὐτοῦ εἰς δύο σύνολα σημείων: Πᾶν σημεῖον Α τοῦ ἑνὸς συνόλου ὁρίζει μὲ πᾶν σημεῖον Β τοῦ ἄλλου. εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἕνα σημεῖον τοῦ (Π). Ἀντιθέτως, δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Α' τοῦ αὐτοῦ συνόλου ὁρίζουν εὐθ. τμῆμα ΑΑ' τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ση-μεῖον τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 14

Ἀπόδειξις : Ἔστω Α ἕνα σημεῖον κείμε-νον ἐκτὸς τοῦ (Π). Θεωροῦμεν ὅτι ἀνήκουν εἰς ἕνα πρῶτον σύνολον ὅλα τὰ σημεῖα Μ, δι' ἕκα-στον τῶν ὁποίων, δὲν ὑπάρχει ἐπὶ τῆς ΑΜ, καὶ μεταξὺ τῶν Α καὶ Μ, σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Π). Εἰς ἕνα δεύτερον σύνολον θεωροῦμεν ὅτι ἀνήκουν ὅλα τὰ σημεῖα Ν δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων ὑπάρχει μεταξὺ τῶν Α καὶ Ν σημεῖον τοῦ (Π). (Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΝ περιέχει ἕνα ση-μεῖον τοῦ (Π).) Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Μεταξὺ δύο σημείων Μ καὶ Μ' δὲν ὑπάρχει σημεῖον τοῦ (Π).
2. Μεταξὺ δύο σημείων Ν καὶ Ν' δὲν ὑπάρχει σημεῖον τοῦ (Π).
3. Μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν ὑπάρχει πάντοτε σημεῖον τοῦ (Π).

1. Ἐξ ὑποθέσεως, οὔτε ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος AM οὔτε ἐπὶ τοῦ AM′ ὑπάρχει σημεῖον τοῦ (Π). Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν M καὶ M′ ὑπάρχει σημεῖον τοῦ (Π), τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ AMM′. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνονται ἑπομένως κατὰ μίαν εὐθεῖαν ε. Ἡ εὐθεῖα ε δὲν περιέχει οὐδὲν τῶν σημείων A, M, M′ καὶ ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν M καὶ M′. Ἑπομένως ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν A καὶ M ἢ μεταξὺ τῶν A καὶ M′, συμφώνως πρὸς τὸ σχετικὸν ἀξίωμα διατάξεως (Pasch). Ἀλλὰ τοῦτο ἀκριβῶς εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν.

2. Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, μεταξὺ τῶν A καὶ N ὑπάρχει σημεῖον τοῦ (Π), ὅπως καὶ μεταξὺ τῶν A καὶ N′. Ἡ τομὴ ε τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ ANN′ τέμνει δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου ANN′. Ἑπομένως, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν N καὶ N′.

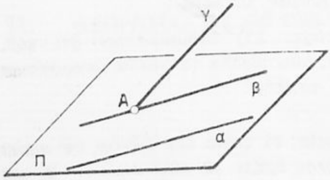
3. Μεταξὺ τῶν A καὶ M δὲν ὑπάρχει, ἐξ ὑποθέσεως, σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐνῶ ὑπάρχει σημεῖον τοῦ (Π) μεταξὺ τῶν A καὶ N. Ἑπομένως, ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ AMN ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν A καὶ N καὶ δὲν ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν A καὶ M. Συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα τοῦ Pasch ἡ ἀνωτέρω τομὴ ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν M καὶ N.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα A καὶ A′ τῆς προτάσεως κεῖνται **πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος** τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ ὅτι τὰ σημεῖα A καὶ B **κεῖνται ἑκατέρωθεν** τοῦ (Π).

ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

15. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν α καὶ σημεῖον A μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α. Ὑπάρχει εὐθεῖα β διερχομένη διὰ τοῦ A καὶ παράλληλος πρὸς τὴν α καὶ μία μόνον.

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα α καὶ τὸ σημεῖον A ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον (Π). Ἔστω β ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου παράλληλος πρὸς τὴν α, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ A. Ἐκτὸς τῆς β δὲν ὑπάρχει ἄλλη διὰ τοῦ A παράλληλος καὶ τὴν α.

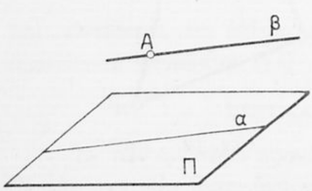


Σχ. 15

Πράγματι, μιὰ τοιαύτη εὐθεῖα γ, ἂν ὑπάρχῃ, δὲν δύναται, κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου, νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π). Ἑπομένως, ὡς ἔχουσα μὲ τὸ (Π) τὸ σημεῖον A κοινόν, εἶναι τέμνουσα αὐτό. Ἀλλὰ ἐκ τούτου ἕπεται (11) ὅτι αἱ εὐθεῖαι α καὶ γ εἶναι ἀσύμβατοι καὶ ὄχι, ὡς ὑπετέθη, παράλληλοι.

16. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία εὐθεῖα ε ὀνομάζεται* **παράλληλος** *πρὸς ἕνα ἐπίπεδον (Π) ὅταν δὲν ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ (Π).*

17. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖαν α αὐτοῦ καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἡ διὰ τοῦ A παράλληλος β πρὸς τὴν α δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ (Π).



Σχ. 17

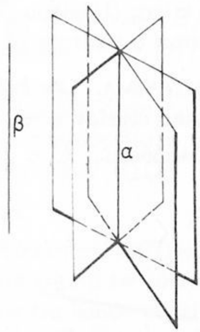
Ἀπόδειξις. Ἔστω (P) τὸ ἐπίπεδον τῶν α καὶ β. Ἡ εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ ἐπὶ τοῦ (P), ἤτοι εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν. Ἂν ἡ β καὶ τὸ (Π) εἶχον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (P), ἤτοι σημεῖον τῆς α. Ἑπομένως αἱ α καὶ β θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι παράλληλοι.

῾Η εὐθεῖα β εἶναι ἑπομένως (16) παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).
κ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *῎Αν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τότε κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς α ναι παράλληλον πρὸς τὴν β.*

῎Αν τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχοένων διὰ τῆς εὐθείας α ὀνομάσωμεν **ἀξονικὴν δέμην ἐπιπέδων** μὲ ἄξονα, τὴν εὐθεῖαν α, τὸ ἀνωτέρω όρισμα δύναται νὰ διατυπωθῆ καὶ ὡς ἑξῆς :

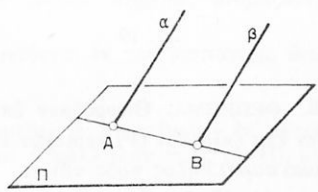
«῎Αν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, ότε ἑκατέρα τούτων εἶναι παράλληλος πρὸς ὅλα ὰ ἐπίπεδα τῆς δέσμης ἐπιπέδων, ἡ ὁποία ἔχει ξονα τὴν ἄλλην». (Σχ. 17.1).



Σχ. 17.1

8. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π), καὶ δύο παραλλήλους εὐθείας α καὶ . ῎Αν ἡ εὐθεῖα α τέμνη τὸ (Π) τότε καὶ ἡ β έμνει αὐτό.

᾿Απόδειξις. ῎Εστω Α τὸ κοινὸν σημεῖον ῆς α καὶ τοῦ (Π). Τὸ ἐπίπεδον τῶν α καὶ τέμνει τὸ (Π) κατὰ εὐθεῖαν σ διερχομένην ιὰ τοῦ Α. ῾Η β τέμνει τὴν σ καὶ ἔστω Β τὸ οινὸν σημεῖον. ῾Η β δὲν ἔχει, ἐκτὸς τοῦ Β, ἄλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ (Π), διότι εἰς τὴν ἀνίθετον περίπτωσιν δὲν θὰ ἦτο διάφορος τῆς . ᾿Αλλὰ τοῦτο (β ≡ σ) δὲν εἶναι δυνατόν, ιότι ἡ β τέμνει τὴν σ.

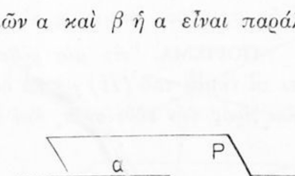


Σχ. 18

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. ῎Αν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν α καὶ β ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον (Π), τότε καὶ ἡ β εἶαι παράλληλος πρὸς τὸ (Π) ἢ κεῖται ἐπ᾿ αὐτοῦ.*

Πράγματι, ἡ β δὲν δύναται νὰ τέμνη τὸ Π), διότι τότε καὶ ἡ α θὰ ἔτεμνε (18) τοῦτο, νῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό.

2. ῎Αν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν α καὶ , ἡ α κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), τότε καὶ β κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π) ἢ εἶναι παράλληλος ρὸς αὐτό.



Σχ. 18.4

3. ῎Αν μία εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος ρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), τότε ἡ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου (Π) παράλληλος β πρὸς τὴν α, κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π).

Πράγματι, ἂν ἡ β ἦτο τέμνουσα τὸ (Π), τότε καὶ ἡ α θὰ ἦτο (18) τέμνουσα αὐτό, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό.

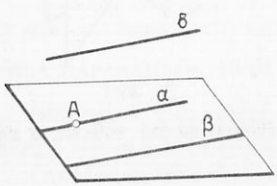
4. *Ἂν μία εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) κα (Ρ), τότε εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν τομὴν σ αὐτῶν.*

Πράγματι, ἡ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Α τῆς τομῆς σ παράλληλος πρὸ τὴν α κεῖται (Πόρισμα 3) ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐπὶ τοῦ (Ρ). Ἑπομένως συμπίπτει μὲ τὴν τομὴν σ τῶν (Π) καὶ (Ρ).

19. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἑκάστη ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ β εἶναι παράλληλο πρὸς μίαν εὐθεῖαν ε τότε αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Αἱ α καὶ β δὲν ἔχουν (15) κοινὸν σημεῖον. Ἐξ ἄλλου κεῖντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τοῦτο ἀποδεικνύε ται ὡς ἑξῆς :

Θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον Α τῆς α καὶ τ ἐπίπεδον (Π) τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τ σημεῖον Α καὶ τὴν εὐθεῖαν β. Ἡ εὐθεῖα α κε ται ἐπὶ τοῦ (Π). Πράγματι, ἂν ἡ α ἦτο τέ μνουσα τὸ (Π), τότε καὶ ἡ ε θὰ ἦτο (18 τέμνουσα αὐτό, διότι αἱ α καὶ ε εἶναι πα ράλληλοι. Ἀλλὰ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον (β ∥ καὶ ἡ β θὰ ἦτο τέμνουσα τὸ (Π). Ἀλλὰ ἡ κεῖται εἰς τὸ (Π), ἀφοῦ τὸ (Π) ὁρίζεται ἀπ τὴν εὐθεῖαν β καὶ τὸ σημεῖον Α.

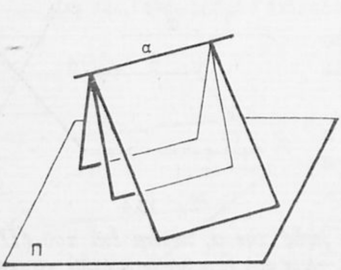


Σχ. 19

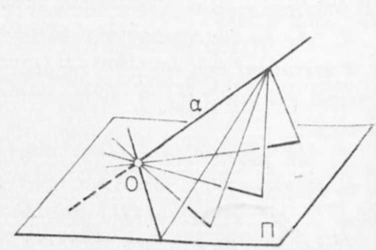
20. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖαν α παράλληλον πρὸς αὐτο Ἂν ἕνα ἐπίπεδον (Ρ) περιέχον τὴν α τέμνῃ τὸ (Π), τότε ἡ τομὴ β τῶν (Π) καὶ (Ρ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α.

Ἀπόδειξις. Ἂν αἱ α καὶ β εἶχον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν ση μεῖον τῆς α καὶ τοῦ (Π), διότι ἡ β κεῖται εἰς τὸ (Π). Ἀλλὰ ἡ α εἶναι, ἐξ ὑποθ σεως, παράλληλος πρὸς τὸ (Π). Ὥστε αἱ α καὶ β, κείμεναι εἰς τὸ (Ρ), δὲν ἔχου κοινὸν σημεῖον, ἑπομένως εἶναι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν μία εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον (Π) τότε αἱ τομαὶ τοῦ (Π) μὲ τὰ διὰ τῆς α ἐπίπεδα τὰ τέμνοντα τὸ (Π), εἶναι παράλ ληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν α, καὶ ἑπομένως καὶ μεταξύ των παράλληλοι* (19).



Σχ. 20.11



Σχ. 20.12

Σημειοῦμεν ὅτι :

Τὸ ἀνωτέρω πόρισμα δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

*Ἂν μία εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον (Π), τότε ἡ τομὴ τῆς δέσμης τῶν ἐπιπέδων ἡ ὁποία ἔχει ἄξονα τὴν εὐθεῖαν α, μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἕνα σύνολον παραλλήλωνεὐθειῶν τοῦ (Π), ἤτοι μία παράλληλος ἐν τῷ (Π) δέσμη εὐθειῶν (*Σχ. 20.11*)*

Ἂν ἡ α εἶναι τέμνουσα τὸ (Π), τότε ἡ τομὴ τοῦ (Π) μὲ τὴν ἀξονικὴν δέσμην ἐπιπέδων, ἡ ὁποία ἔχει ἄξονα τὴν εὐθεῖαν α, εἶναι μία ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν ἔχουσα κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῆς εὐθείας α καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) (Σχ. 20.12).

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Ἐκ τῶν ἀξιωμάτων θέσεως (4,6) προκύπτει ὅτι, δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) :

1. Συμπίπτουν εἰς ἕν, ἂν ἔχουν τρία σημεῖα κοινὰ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας (4).
2. Τέμνονται, ἂν εἶναι διάφορα ἀλλήλων καὶ ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον (6).

Θὰ ἀποδειχθῇ ἀμέσως κατωτέρω ὅτι : δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) δύνανται νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

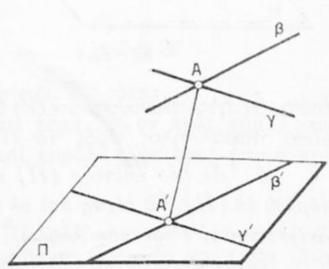
ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ

21. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, ὀνομάζονται* ***παράλληλα.***

Ἡ ὕπαρξις παραλλήλων ἐπιπέδων ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος :

22. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπ' αὐτοῦ. Ὑπάρχει ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ παράλληλον πρὸς τὸ (Π), καὶ ἕνα μόνον.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τυχούσας τεμνομένας εὐθείας β' καὶ γ' τοῦ ἐπιπέδου (Π), τῶν ὁποίων ἔστω Α' τὸ κοινὸν σημεῖον καὶ τὰς διὰ τοῦ Α παραλλήλους β καὶ γ πρὸς τὰς β' καὶ γ' ἀντιστοίχως. Ἔστω (Ρ) τὸ ἐπίπεδον τῶν β καὶ γ. Τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Πράγματι, ἂν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶχον κοινὸν σημεῖον, τότε ἡ τομὴ σ αὐτῶν θὰ ἦτο (20) παράλληλος πρὸς τὴν β καὶ τὴν γ. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν (15). Ἐξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχει διὰ τοῦ Α ἐπίπεδον (Ρ') διάφορον τοῦ (Ρ) καὶ παράλληλον πρὸς τὸ (Π).



Σχ. 22

Πράγματι, ἂν ἕνα τοιοῦτον ἐπίπεδον (Ρ') ὑπῆρχε, τότε αἱ β καὶ γ θὰ ἔκειντο (18, Πόρισμα 3) ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦτο τοῦτο διάφορον τοῦ (Ρ).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα πρὸς ἕνα τρίτον ἐπίπεδον (Σ), τότε τὰ (Π) καὶ (Ρ) εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα.*

2. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, τότε, κάθε εὐθεῖα α τοῦ ἑνὸς ἢ παράλληλος πρὸς αὐτό, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἄλλο.

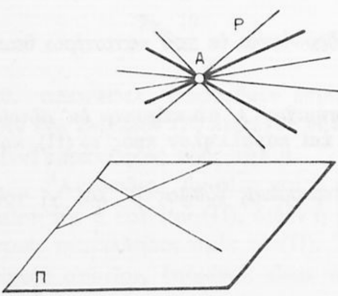
Πράγματι, ἔστω ὅτι ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π). Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν β τοῦ (Π), παράλληλον πρὸς τὴν α καὶ μίαν εὐθεῖαν γ τοῦ (Ρ) παράλληλον πρὸς τὴν β. Ἐπειδὴ α || β καὶ β || γ, ἕπεται α || γ (19) καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι ἡ α εἶναι (17) παράλληλος πρὸς τὸ (Ρ).

3. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα καὶ μιὰ εὐθεῖα α εἶναι τέμνουσα τὸ (Π), τότε ἡ α εἶναι τέμνουσα καὶ τὸ (Ρ).

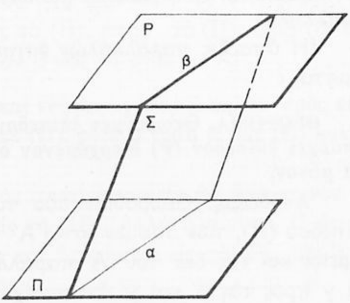
Πράγματι, ἂν ἡ α ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ (Ρ), θὰ ἦτο παράλληλος καὶ πρὸς τὸ (Π), ἐνῶ, ἐξ ὑποθέσεως, τέμνει τὸ (Π).

4. Τὸ σύνολον τῶν διὰ δοθέντος σημείου Α εὐθειῶν, τῶν παραλλήλων πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (Π) εἶναι μία ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Α καὶ φορεὺς τὸ διὰ τοῦ Α ἐπίπεδον (Ρ) τὸ παράλληλον πρὸς τὸ (Π).

Πράγματι, κάθε εὐθεῖα τοῦ (Ρ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π) (22, Πόρισμα 2).
Ἐξ ἄλλου κάθε εὐθεῖα διὰ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὸ (Π) κεῖται ἐπὶ τοῦ (Ρ),



Σχ. 22.4



Σχ. 22.5

διότι ἂν ἦτο τέμνουσα τὸ (Ρ) θὰ ἦτο τέμνουσα καὶ τὸ (Π), ἐνῶ, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π).

5. Ἄν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, τότε κάθε ἐπίπεδον (Σ) τέμνον τὸ (Π), θὰ τέμνῃ καὶ τὸ (Ρ). Αἱ τομαὶ α καὶ β τοῦ (Σ) μὲ τὰ (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως, εἶναι παράλληλοι.

Πράγματι, ἂν τὸ (Σ) ἦτο παράλληλον πρὸς τὸ (Ρ), θὰ ἦτο (Πόρισμα 1) παράλληλον καὶ πρὸς τὸ (Π), ἐνῶ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ (Σ) τέμνει τὸ (Π).

Ἂν αἱ α καὶ β εἶχον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ). Τοιοῦτον ὅμως σημεῖον δὲν ὑπάρχει, διότι τὰ (Π) καὶ (Ρ) εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, παράλληλα.

23. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τέμνωνται, δύο δὲ ἐπίπεδα (Π′)

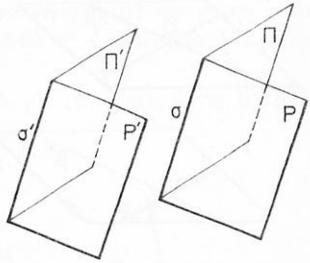
καὶ (Ρ′) εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τὸ (Π) καὶ (Ρ) τότε :

1. Τὰ ἐπίπεδα (Π′) καὶ (Ρ′) τέμνονται, καί,

2. Αἱ τομαί : σ τῶν (Π) καὶ (Ρ) καὶ σ′ τῶν (Π′) καὶ (Ρ′) εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. 1. Τὰ (Π′) καὶ (Ρ′) δὲν δύνανται νὰ συμπίπτουν, οὔτε νὰ εἶναι παράλληλα, διότι εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων θὰ ἦσαν παράλληλα (22, Πόρισμα 1) τὰ (Π) καὶ (Ρ), ἐνῷ ταῦτα, ἐξ ὑποθέσεως, τέμνονται.

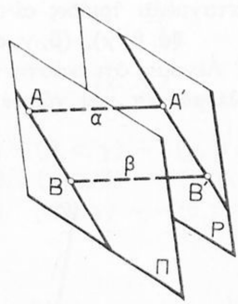
2. Ἡ σ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π′), διότι κεῖται εἰς τὸ (Π) καὶ πρὸς τὸ (Ρ′) διότι κεῖται εἰς τὸ (Ρ) (22, Πόρισμα 2). Ἑπομένως ἡ σ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν σ′ (18, Πόρισμα 4).



Σχ. 23

24. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Π′) εἶναι παράλληλα καὶ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β τέμνουν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα κατὰ τὰ σημεῖα Α, Α′ καὶ Β,Β′ ἀντιστοίχως (Α καὶ Α′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς α μὲ τὰ (Π) καὶ (Π′) ἀντιστοίχως), τότε ΑΑ′ = ΒΒ′.

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι (23) παράλληλοι. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΑ′Β′Β εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΑΑ′ = ΒΒ′.



Σχ. 24

25. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ἀσύμβατοι, τότε :

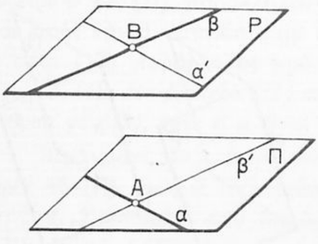
1. Ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) περιέχον τὴν α καὶ παράλληλον πρὸς τὴν β καὶ ἕνα μόνον, ὡς καὶ ἐπίπεδον (Ρ) περιέχον τὴν β καὶ παράλληλον πρὸς τὴν α καὶ ἕνα μόνον.

2. Τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις. 1. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τῆς α (Σχ. 25) καὶ τὴν διὰ τούτου παράλληλον β′ πρὸς τὴν β. Τὸ ἐπίπεδον (Π), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς α καὶ β′ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν β (17).

Ἐξ ἄλλου, ἂν ὑπῆρχε διὰ τῆς α καὶ ἄλλο ἐπίπεδον (Π′) παράλληλον πρὸς τὴν β, τότε καὶ τομὴ α τῶν (Π) καὶ (Π′) θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν β (18, Πόρισμα 4). Ἀλλὰ αἱ α καὶ β εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἀσύμβατοι. Δι᾽ ὅμοιον λόγον ὑπάρχει ἐπίπεδον (Ρ) διὰ τῆς β παράλληλον πρὸς τὴν α καὶ ἕνα μόνον.

2. Ἐπειδὴ αἱ α καὶ β′ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ (P), τὸ ἐπίπεδον (Π) αὐτῶν εἶναι (22) παράλληλον πρὸς τὸ (P).



Σχ. 25

Ὥστε ἂν αἱ α καὶ β εἶναι δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, ὑπάρχουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (P), καὶ μόνον δύο, περιέχοντα τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως.

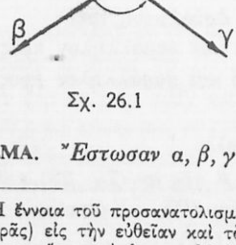
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ὁ γεωμ. τόπος τῶν εὐθειῶν β′ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν β. καὶ τεμνουσῶν τὴν α εἶναι μία ἐπίπεδος δέσμη παραλλήλων εὐθειῶν μὲ φορέα τὸ διὰ τῆς α ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς τὴν β.*

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

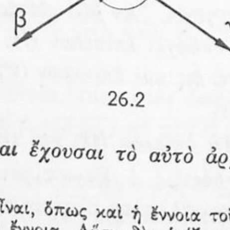
Θεωροῦμεν τρεῖς ἡμιευθείας α, β, γ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν σημεῖον O (Σχ. 26.1). Ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν τούτων α, β, γ ὁρίζονται ἐν ὅλῳ, ἓξ διατεταγμέναι τριάδες αἱ :

(α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β), (α, γ, β), (β, α, γ), (γ, β, α).

Λέγομεν ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω τριάδων ὁρίζει μίαν φορὰν ἢ **προσανατολισμὸν** εἰς τὸν χῶρον (1).



Σχ. 26.1



26.2

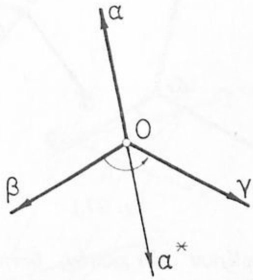
26. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἔστωσαν α, β, γ τρεῖς ἡμιευθεῖαι ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν ση-*

(1) Ἡ ἔννοια τοῦ προσανατολισμοῦ εἰς τὸν χῶρον εἶναι, ὅπως καὶ ἡ ἔννοια τοῦ προσανατολισμοῦ (φορᾶς) εἰς τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον, ἀρχικὴ ἔννοια. Αὕτη δὲν ὁρίζεται ἐξ ἄλλων ἐννοιῶν, δύναται ὅμως νὰ ἑρμηνευθῇ δι' ἐννοιῶν *ἐποπτικῶν*. Οὕτως ἂν θεωρήσωμεν τὴν τριάδα (α, β, γ), ἡ ἐκ τῆς κυρτῆς γωνίας (β, γ) ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της φορὰ (κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῇ ἡ πρώτη πλευρὰ β αὐτῆς ὥστε νὰ παραχθῇ ἡ κυρτὴ γωνία (β,γ)), θεωρουμένη ἀπὸ σημείου τῆς α, δύναται νὰ εἶναι ἡ θετικὴ (Σχ. 26.1) ἢ ἡ ἀρνητική(Σχ.26. 2). Ἂν ἡ ἐν λόγῳ φορὰ εἶναι ἡ θετική, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ τριὰς (α, β, γ) ὁρίζει τὸν θετικὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον καὶ ὅτι εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ἡ τριὰς (α, β, γ) ὁρίζει τὸν ἀρνητικὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον.

ιεῖον Ο καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Αἱ διατεταγμέναι τριάδες (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β) ὁρίζουν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν ζῶρον. Αἱ διατεταγμέναι τριάδες (α, γ, β), (β, α, γ), (γ, β, α) ὁρίζουν ἕνα καὶ ὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον, διάφορον τοῦ πρώτου [1].

Ὁ ἐκ τῆς τριάδος (α, β, γ) ὁριζόμενος προσανατολισμὸς εἰς τὸν χῶρον εἶναι ιάφορος τοῦ ὁριζομένου ἐκ τῆς τριάδος $(\alpha^*, \beta, \gamma)$, ἔνθα α^* ἡ ἡμιευθεῖα ἡ ἀντικει-ιένη τῆς α [2].

Ἂν ὁ ἐκ τῶν τριῶν πρώτων τριάδων (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β) ὁρι-όμενος προσανατολισμὸς ὀνομασθῇ **θετικός**, ὁ ἐκ ῶν τριῶν ἄλλων τριάδων ὁριζόμενος θὰ ὀνομα-θῇ **ἀρνητικός**.



Σχ. 26.3

Ἐξ ἄλλου, ἂν ἡ τριὰς (α, β, γ) ὁρίζῃ τὸν θε-ικὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον, τότε, ὡς ἐκ οῦ ἀξιώματος (26) προκύπτει, ἡ τριὰς (α*, β, γ) ρίζει τὸν ἀρνητικόν, ἐν αὐτῷ, προσανατολισμόν. Ἂν, σημειοῦντες : $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\beta, \gamma, \alpha)$ ἐννο-οῦμεν ὅτι αἱ τριάδες (α, β, γ) καὶ (β, γ, α) ὁρίζουν ὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον, καὶ ση-ιειοῦντες : $(\alpha, \gamma, \beta) \sim -(\alpha, \beta, \gamma)$ ἐννοοῦμεν ὅτι ἱ τριάδες (α, β, γ) καὶ (α, γ, β) ὁρίζουν τοὺς δύο ἀντιθέτους προσανατολισμοὺς εἰς τὸν χῶρον, θὰ χωμεν κατὰ τὸ ἀξίωμα (26) :

. $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\beta, \gamma, \alpha) \sim (\gamma, \alpha, \beta)$ καὶ $(\alpha, \gamma, \beta) \sim (\beta, \alpha, \gamma) \sim (\gamma, \beta\, \alpha)$.

. $(\alpha, \beta, \gamma) \sim -(\alpha, \gamma, \beta)$, $(\beta, \gamma, \alpha) \sim -(\beta, \alpha, \gamma)$, $(\gamma, \alpha, \beta) \sim -(\gamma, \beta, \alpha)$

. $(\alpha, \beta, \gamma) \sim -(\alpha^*, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma) \sim -(\alpha, \beta^*, \gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma) \sim -(\alpha, \beta, \gamma^*)$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Εἶναι :* $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha, \beta^*, \gamma^*)$.

Πράγματι, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα ἔχομεν :

$(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\beta, \gamma, \alpha) \sim -(\beta^*, \gamma, \alpha) \sim -(\alpha, \beta^*, \gamma) \sim (\alpha, \beta^*, \gamma^*)$.

2. Εἶναι : $(\alpha, \beta, \gamma) \sim -(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$.

Πράγματι, εἶναι (Πόρισμα 1) : $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha, \beta^*, \gamma^*)$.

---

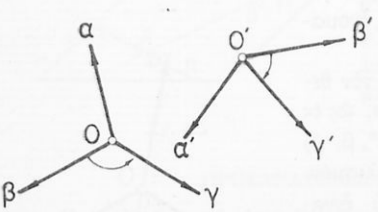
(1) Ἐποπτικῶς τοῦτο ἑρμηνεύεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως καθ' ἥν : Ἂν ἡ ἐκ τῆς κυρτῆς ωνίας (β, γ) ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της φορά, θεωρουμένη ἀπὸ σημείου τῆς α, εἶναι ἡ θετικὴ Σχ. **26.3**), τότε καὶ ἡ ἐκ τῆς κυρτῆς γωνίας (γ, α) ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της φορά, ὅταν εωρῆται ἀπὸ σημείου τῆς β, εἶναι ἐπίσης ἡ θετική, ὡς καὶ ἡ ἐκ τῆς κυρτῆς γωνίας (α, β) ριζομένη, ὅταν θεωρῆται ἀπὸ σημείου τῆς γ.

Ἂν ἡ ἐκ τῆς κυρτῆς γωνίας (β, γ) ὁριζομένη κατὰ τὰ ἀνωτέρω φορὰ εἶναι ἡ θετική, τότε ἐκ τῆς κυρτῆς γωνίας (γ, β) ὁριζομένη, ὅταν θεωρῆται ἀπὸ σημείου τῆς ἀκμῆς α εἶναι ἡ ἀρνη-ικὴ (Σχ. 26.2), ἤτοι ἡ τριὰς (α, γ, β) ὁρίζει τὸν ἀρνητικὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον καὶ πομένως καὶ αἱ (β, α, γ) καὶ (γ, β, α) ὁρίζουν, τὸν αὐτόν, ἤτοι τὸν ἀρνητικόν, προσανατολισμὸν εἰς ὸν χῶρον.

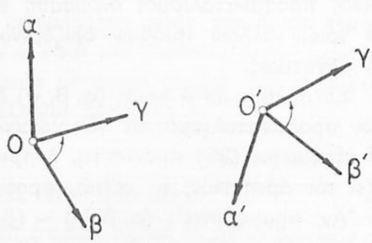
(2) Ἐποπτικῶς ἑρμηνεύεται τοῦτο ἐκ τῆς παρατηρήσεως καθ' ἥν : Ἂν ἡ ἐκ τῆς κυρτῆς ωνίας (β, γ) ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της φορά, ὅταν θεωρῆται ἀπὸ σημείου τῆς α, εἶναι ἡ ετικὴ (Σχ. **26.3**), τότε ἡ ἐκ τῆς αὐτῆς κυρτῆς γωνίας (β, γ) ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της ορά, ὅταν θεωρῆται ἀπὸ σημείου τῆς α *, εἶναι ἡ ἀρνητικὴ (Σχ. 26.3).

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ἀξιώματος (26) ἔχομεν ὅτι : $(\alpha, \beta^*, \gamma^*) \sim -(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$
Ἑπομένως: $(\alpha, \beta, \gamma) \sim -(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$, ἤτοι ὅτι ἂν ἡ τριὰς (α, β, γ) ὁρίζ[ει] τὸν θετικὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον, τότε ἡ τριὰς $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ ὁρίζει τ[ὸν] ἀρνητικὸν ἐν αὐτῷ προσανατολισμόν.

27. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο διάφοροι ἀλλήλων [1] **διατεταγμέναι** τριάδες ἡμιευθειῶ[ν] (α, β, γ) καὶ $(\alpha', \beta', \gamma')$ θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι *ὁμοίως προσανατολισμέναι*, ὅτα[ν]



Σχ. 27.1

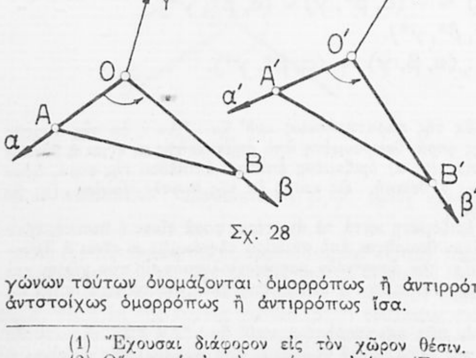


Σχ. 27.2

ὁρίζουν τὸν αὐτόν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον, *ἀν-τιθέτως δὲ προσανατολισμέναι* ὅταν δὲν ὁρίζουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν εἰ[ς] τὸν χῶρον, ἀλλὰ τοὺς δύο ἀντιθέτους ἐν αὐτῷ προσανατολισμούς[2].

ΟΜΟΡΡΟΠΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΣ ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

28. ΟΡΙΣΜΟΣ Θεωροῦμεν ἐπὶ δύο διαφόρων ἀλλήλων ἐπιπέδων δύο τρίγωνα ΟΑΒ κα[ὶ] Ο′Α′Β′ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι (ΟΑ = Ο′Α′, ΟΒ = Ο′Β′, ΑΒ = Α′Β′) καὶ ἀπὸ τῶν Ο καὶ Ο′ δύο ἡμιευθεία[ι] γ καὶ γ′ ἀντιστοίχως μὴ κειμένα[ι] ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν τριγώνων. Ἂς ὀνομάσωμεν α,β τὰς ἡμιευθεία[ς] ΟΑ, ΟΒ, καὶ α′, β′ τὰς ἡμιευθεία[ς] Ο′Α′, Ο′Β′ ἀντιστοίχως.



Σχ. 28

Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ Ο′Α′Β′ θὰ ὀνομάζωνται **ὁμορρόπως ἢ ἀντιρ-ρόπως ἴσα** καθ' ὅσον αἱ διατεταγμέ-ναι τριάδες (α, β, γ) καὶ $(\alpha', \beta', \gamma')$ εἶναι ἀντιστοίχως, ὁμοίως (Σχ. 28) ἢ ἀντιθέτως προσανατολισμέναι, ἤτοι (27) ὁρίζουν τὸν αὐτὸν προσανατο-λισμὸν εἰς τὸν χῶρον ἢ ἀντιθέτως.

Αἱ ὁμόλογαι γωνίαι τῶν τρι-γώνων τούτων ὀνομάζονται ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσαι καθ' ὅσον τὰ τρίγωνα εἶναι ἀντστοίχως ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.

---

(1) Ἔχουσαι διάφορον εἰς τὸν χῶρον θέσιν.
(2) Οὕτως αἱ εἰς τὴν πρώτην εἰκόνα (Σχ. 27.1) ἐμφανιζόμεναι τριάδες (α, β, γ) καὶ $(\alpha', \beta', \gamma')$ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι, ἐνῶ αἱ εἰς τὴν δευτέραν εἰκόνα (Σχ. 27.2) ἐμφανιζό-μεναι τριάδες (α, β, γ) καὶ $(\alpha', \beta', \gamma')$ εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.

Σημειοῦμεν ὅτι :

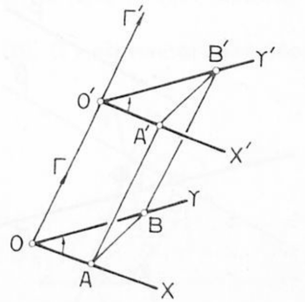
Ὡς ἐκ τοῦ ἀξιώματος (26) προκύπτει, δύο τυχόντα ὁμόλογα τρίγωνα OAB καὶ O'A'B' τοῦ χώρου, ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὁμορρόπως ἴσα, διότι ὑπάρχουν δύο ἡμιευθεῖαι, ἀγόμεναι ἀπὸ δύο ὁμολόγων κορυφῶν π.χ. O καὶ O' τῶν τριγώνων τούτων, ὥστε αἱ τριάδες (α, β, γ) καὶ (α', β', γ') νὰ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι (νὰ ὁρίζουν τὸν αὐτόν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον). Πράγματι, ἂν διὰ δύο τυχούσας ἡμιευθείας γ καὶ γ' (μὴ κειμένας εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων) εἶναι $(\alpha, \beta, \gamma) \sim -(\alpha', \beta', \gamma')$, τότε διὰ τὰς ἡμιευθείας γ^* καὶ γ' εἶναι κατὰ τὸ ἀξίωμα (26): $(\alpha, \beta, \gamma^*) \sim (\alpha', \beta', \gamma')$.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

29. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν (OX, OY) καὶ (O'X', O'Y') εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροποι [1], τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.

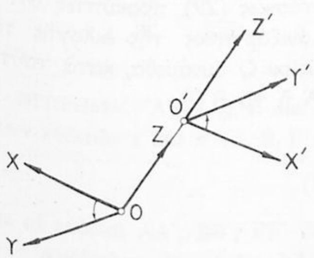
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα A, A' τῶν πλευρῶν OX, O'X' ἀντιστοίχως ὥστε OA = O'A' καὶ τὰ σημεῖα B, B' τῶν πλευρῶν OY καὶ OY' ἀντιστοίχως ὥστε OB = O'B'. Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων OAA'O' καὶ OBB'O ἔχομεν ὅτι : AA' = OO' καὶ BB' = OO'. Ἑπομένως AA'=BB' καὶ AA'||BB'. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ABB'A' ἔχομεν ὅτι AB = A'B'.

Οὕτως αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων OAB καὶ O'A'B' εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι (Σχ. 29) ὁμορρόπως ἴσα καὶ λόγῳ τούτου : (OA, OB) = (O'A', O'B'), ἤτοι (OX, OY) = (O'X', O'Y').

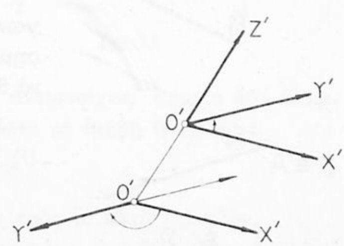


Σχ. 29

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν (OX, OY) καὶ (O'X', O'Y') εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.*



29.1



29.2

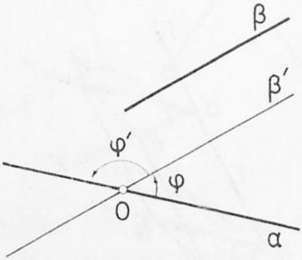
(1) Αἱ ἡμιευθεῖαι OX καὶ O'X' τοῦ χώρου λέγονται *ὁμόρροποι* ὅταν εἶναι παράλληλοι (κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν) καὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας OO' ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα αὐτῶν, ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

2. *Ἂν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν (OX, OY) καὶ ($O'X'$, $O'Y'$) εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροποι κατὰ τὸ ἓν ζεῦγος καὶ ἀντίρροποι κατὰ τὸ ἄλλο, τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.*

30. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καὶ α′ καὶ β′ δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως καὶ ἀγόμεναι ἀπὸ τυχόντος σημείου Ο τοῦ χώρου. Ὀνομάζομεν* **γωνίαν τῶν εὐθειῶν** *α καὶ β, τὴν γωνίαν τῶν α′ καὶ β′.*

Ὡς ἐκ τοῦ θεωρήματος (29) προκύπτει, ἡ ἀνωτέρω γωνία τῶν εὐθειῶν α καὶ β εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τοῦ σημείου Ο. Δυνάμεθα, ἑπομένως ὡς σημεῖον Ο νὰ λάβωμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς α ἢ τῆς β. Δυνάμεθα δηλαδή, νὰ ορίσωμεν ὡς γωνίαν τῶν εὐθειῶν α καὶ β τὴν γωνίαν τῆς α μὲ τὴν παράλληλον β′ πρὸς τὴν β, τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τῆς α (Σχ. 30).

Ἂν ἡ γωνία δύο εὐθειῶν α καὶ β εἶναι ἡ *ὀρθὴ* τότε αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β θὰ ὀνομάζωνται *ὀρθογώνιοι*.

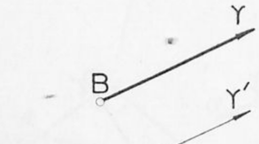


Σχ. 30

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τότε κάθε εὐθεῖα ὀρθογώνιος πρὸς τὴν μίαν ἐκ τούτων εἶναι ὀρθογώνιος καὶ πρὸς τὴν ἄλλην.*

31. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γωνίαν δύο ἡμιευθειῶν** *AX καὶ BY κειμένων ἐπὶ ἀσυμβάντων φορέων α καὶ β, τὴν γωνίαν δύο ὁμορρόπων πρὸς ταύτας ἡμιευθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ χώρου.*

Ἐκ τῆς προτάσεως (29) προκύπτει ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τοῦ σημείου Ο. Ὡς σημεῖον Ο δυνάμεθα, κατὰ ταῦτα, νὰ θεωρήσωμεν τὸ Α ἢ τὸ Β [1].



Σχ. 31

(1) Ὁμοίως ὁρίζεται ἡ γωνία δύο διανυσμάτων καὶ δύο ἀξόνων εἰς τὸν χῶρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ

32. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** Ἂν τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ θεωρούμεναι ἀνὰ δύο εἶναι ἀσύμβατοι, δὲν ὑπάρχουν ἐν γένει, τρία παράλληλα ἐπίπεδα περιέχοντα αὐτὰς ἀντιστοίχως· Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (Α) καὶ (Β) τὰ περιέχοντα τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως (25), ἡ εὐθεῖα γ τέμνει, ἐν γένει, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰ (Α) καὶ (Β), ὑπάρχει ἐπίπεδον (Γ) περιέχον τὴν γ καὶ παράλληλον πρὸς τὰ (Α) καὶ (Β) καὶ ἕνα μόνον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὁρίζεται ἀπὸ τὴν γ καὶ τὴν διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Γ αὐτῆς παράλληλον πρὸς τὴν α ἢ τὴν β. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι α, β, γ *εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.*

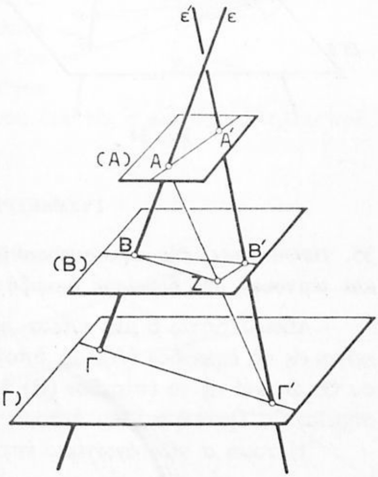
33. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν τρία παράλληλα ἐπίπεδα (Α), (Β), (Γ) τέμνωνται ἀπὸ δύο ἀσυμβάτους, ἐν γένει, εὐθείας, ε καὶ ε′, καὶ εἶναι Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ τὰ σημεῖα τομῆς ἀντιστοίχως, τότε:** $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Τότε καὶ τὸ Β′ θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α′ καὶ Γ′. Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ′ (Σχ. 33). Ἔστω Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὸ ἐπίπεδον (Β). Εἶναι ΒΖ ∥ ΓΓ′ καὶ ΖΒ′ ∥ ΑΑ′ (22, Πόρισμα 5). Ἐκ τῶν:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{Z\Gamma}} \text{ καὶ } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{Z\Gamma}},$$

ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}$$



Σχ. 33

34. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ε καὶ ε′ (Α, Β, Γ σημεῖα τῆς ε) ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:**

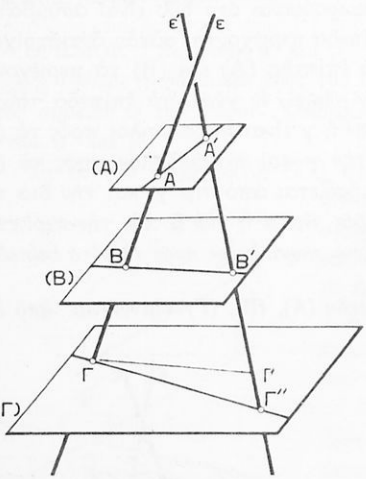
$$(1) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}\ {}^{(1)}$$

τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, εἶναι ἀσύμβατοι. Πράγματι, ἄν π.χ. αἱ ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ ἦσαν εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τότε

(1) Ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι ὅταν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, τότε τὸ Β′ κεῖται μεταξὺ τῶν Α′ καὶ Γ′.

καὶ αἱ AB αἱ A'B', ἤτοι αἱ ε καὶ ε', θὰ ἦσαν εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἐνῶ αἱ ε καὶ ε' εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἀσύμβατοι.



Σχ. 34

Ἔστωσαν (A) καὶ (B) τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα ἀντιστοίχως τὰς AA' καὶ BB' (25), καὶ (Γ) τὸ παράλληλον πρὸς τὰ (A) καὶ (B) ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Γ. Τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον (Γ) διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ'. Πράγματι, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θὰ ἔτεμνε τὴν ε' εἰς σημεῖον Γ'', διάφορον τοῦ Γ' καὶ θὰ εἴχομεν (33):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma''}}$$ καί, λόγῳ τῆς (1), ὅτι :

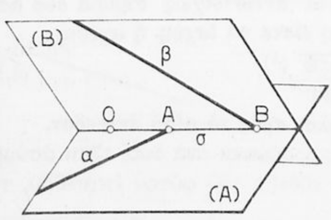
$B'\Gamma' = B'\Gamma''$, ἤτοι ὅτι τὸ σημεῖον Γ'' συμπίπτει μὲ τὸ Γ'. Ὥστε ἡ ΓΓ' κεῖται ἐπὶ τοῦ (Γ) καὶ ἑπομένως αἱ AA', BB', ΓΓ' κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων, τῶν (A), (B), (Γ), δηλαδὴ εἶναι (32) παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

35. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου O καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β.

Λύσις. Ἔστω σ μία εὐθεῖα ἱκανοποιοῦσα τὰς διδομένας συνθήκας. Ἡ σ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον (A), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς εὐθείας α καὶ τοῦ σημείου O, ὡς καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον (B) τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθείαν β καὶ τὸ σημεῖον O. Ὥστε ἡ σ εἶναι ἡ τομὴ τῶν γνωστῶν τούτων ἐπιπέδων (A) καὶ (B).

Ἡ τομὴ σ τῶν ἀνωτέρω ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖα γνωστή, δοθέντος ὅτι ὁρίζεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων (6). Ἡ τομὴ σ τῶν ἐπιπέδων (A) καὶ (B) τέμνει, ἐν γένει, τὴν α, διότι κεῖται μετ' αὐτῆς εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (A), καὶ τὴν β, διότι κεῖται μετ' αὐτῆς εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (B).



Σχ. 35

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ πρόβλημα δέχεται λύσιν παρατηροῦμεν :

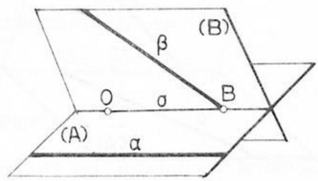
1. Ἂν τὸ O κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν α καὶ β, π.χ. ἐπὶ τῆς α, τότε τὸ πρόβλημα

δέχεται ἀπείρους λύσεις : ὅλας τὰς διὰ τοῦ O εὐθείας τὰς τεμνούσας τὴν β.

2. Ἂν τὸ O κεῖται ἐκτὸς τῶν α καὶ β, τὰ ἐπίπεδα (A) καὶ (B), τὰ ὁποῖα εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἀφοῦ αἱ α καὶ β εἶναι ἀσύμβατοι, ἔχουν κοινὸν τὸ σημεῖον O καὶ ἑπομένως τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν σ διερχομένην διὰ τοῦ O καὶ τέμνουσαν, ἐν γένει, τὰς α καὶ β, ὡς προηγουμένως ἐσημειώσαμεν.

3. Ἡ σ δύναται νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α ἢ τὴν β. Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α, τότε ἡ α θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (B).

Τὸ (B) θὰ εἶναι, ἑπομένως, τὸ διὰ τῆς β ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς τὴν α, ὁριζόμενον, ἕνεκα τούτου, ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν α καὶ β, ἤτοι ἀνεξαρτήτως τοῦ O. Εἰς τὴν θεωρουμένην ὅμως περίπτωσιν τὸ ἐπίπεδον (B) περιέχει τὸ σημεῖον O. Ἂν, ἑπομένως, τὸ σημεῖον O δίδεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας β καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν α, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Δι' ὅμοιον λόγον δὲν ἔχει λύσιν ὅταν τὸ O δίδεται, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς α καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν β. Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν τὸ πρόβλημα δέχεται λύσιν καὶ μίαν μόνον.

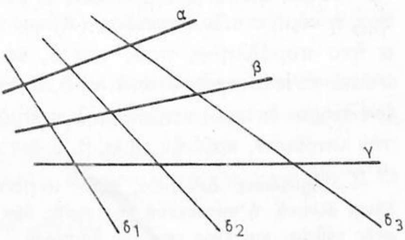


Σχ. 35γ

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης, ἡ ὁποία δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς θεώρημα ὑπάρξεως ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ὑπάρχει μία ἀπειρία εὐθειῶν τεμνουσῶν τρεῖς εὐθείας α, β, γ τοῦ χώρου αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, εἶναι ἀσύμβατοι.*

Πράγματι, δι' ἑκάστου σημείου τῆς τυχούσης ἐκ τῶν α, β, γ, π.χ. τῆς α, ὑπάρχει, ἐν γένει (1), εὐθεῖα τέμνουσα τὰς β καὶ γ.



Σχ. 35.1

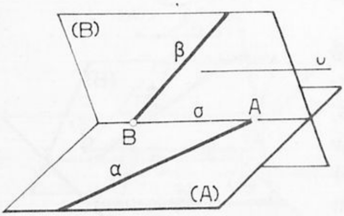
36. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β καὶ παράλληλος πρὸς μίαν τρίτην εὐθεῖαν δ, μὴ παράλληλον πρὸς τὰς α καὶ β.

---

(1) Ὑπάρχει ἐξαίρεσις ὡς πρὸς δύο σημεῖα τῆς γ: τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (25) τὰ περιέχοντα τὰς α καὶ β.
Ἡ ἐξαίρεσις αὕτη δὲν ὑφίσταται ὅταν αἱ α, β, γ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (32).

Λύσις. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα σ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος (Σχ. 36).

Τὸ ἐπίπεδον (Α) τῶν α καὶ σ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν δ, διότι ἡ δ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν σ αὐτοῦ. Ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον (Α) εἶναι γνωστόν, ἤτοι ὁρίζεται ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων : ὡς διερχόμενον διὰ τῆς α καὶ παράλληλον πρὸς τὴν δ (25). Δι' ὅμοιον λόγον τὸ ἐπίπεδον (Β) τῶν β καὶ σ, εἶναι γνωστόν, ὡς διερχόμενον διὰ τῆς β καὶ παράλληλον πρὸς τὴν δ. Ἡ σ, ἑπομένως, εἶναι τομὴ τῶν γνωστῶν ἐπιπέδων (Α) καὶ (Β).



Σχ. 36

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ σύνθεσις ἔχει ὡς ἑξῆς :

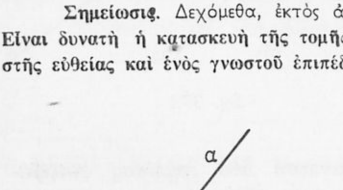
Κατασκευάζονται τὰ ἐπίπεδα (Α) καὶ (Β) τὰ παράλληλα πρὸς τὴν δ καὶ περιέχοντα ἀντιστοίχως τὰς α καὶ β. Ἂν ἡ τομὴ τούτων ὑπάρχῃ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν δ (ὡς τομὴ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν δ) καὶ τέμνει, ἐν γένει, τὰς α καὶ β, διότι κεῖται μεθ' ἑκάστης τούτων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὰς συνθήκας (σχέσεις μεταξὺ τῶν δοθέντων στοιχείων) ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ πρόβλημα δέχεται λύσιν παρατηροῦμεν :

1. Ἂν τὰ ἐπίπεδα (Α) καὶ (Β) εἶναι παράλληλα (αἱ τρεῖς εὐθεῖαι α, β, δ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον) δὲν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος.

2. Ἂν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι α, β, δ δὲν εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ σ τῶν ἐπιπέδων (Α) καὶ (Β) τέμνει τὰς α καὶ β. Πράγματι, ἂν π.χ. ἡ α ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν σ, θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Β). Ἀλλὰ τότε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι α, β, δ θὰ ἦσαν παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον: ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ (Β). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, καθ' ἣν αἱ α, β, δ δὲν εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Σημείωσις. Δεχόμεθα, ἐκτὸς ἀντιθέτου ἐνδείξεως, ὅτι :
Εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τῆς τομῆς δύο γνωστῶν ἐπιπέδων ὡς καὶ τῆς τομῆς μιᾶς γνωστῆς εὐθείας καὶ ἑνὸς γνωστοῦ ἐπιπέδου.

Δυνάμεθα, πρὸς περιορισμὸν τοῦ εὔρους τῆς ἀνωτέρω παραδοχῆς, νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὅταν εἶναι γνωστὸν ἕνα κοινὸν σημεῖον δύο δοθέντων ἐπιπέδων, καὶ τὸ δεύτερον (Ἀξίωμα 6) κοινὸν σημεῖον αὐτῶν εἶναι γνωστόν, καὶ ἡ τομὴ κατασκευάζεται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν ἐπιπέδων, ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων (Ἐπίπεδος κατασκευή).

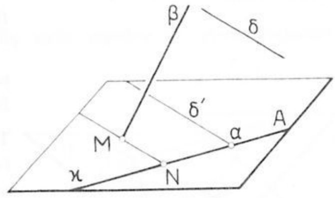


Σχ. 36.1

Καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν τομὴν Α μιᾶς δοθείσης εὐθείας α καὶ ἑνὸς δοθέντος ἐπιπέδου (Π), δυνάμεθα, πρὸς εὕρεσιν αὐτῆς, νὰ θεωρήσωμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 36.1) καὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν α καὶ τὸ

Μ. Τὸ σημεῖονΜ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ). Ἔστω Ν τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Μ, κοινὸν σημεῖον τῶν (Π) καὶ (Ρ). Ἡ εὐθεῖα ΜΝ ἢ β εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων. Τὸ κοινὸν σημεῖον Α τῆς β καὶ τῆς α εἶναι σημεῖον τοῦ (Π), ἤτοι τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς α καὶ τοῦ (Π). (Αἱ α καὶ β κεῖντάι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ)). Οὕτω τὸ Α εὑρέθη διὰ κατασκευῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).

Καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὸ ἀνωτέρω (36) πρόβλημα, δυνάμεθα συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, θεωροῦντες διὰ σημείου τῆς α τὴν παράλληλον δ' πρὸς τὴν δ, νὰ ἔχωμεν τὸ διὰ ταύτης, τῆς α, ἐπίπεδον (Α) τὸ παράλληλον πρὸς τὴν δ (Σχ. 36.2). Δυνάμεθα ἀκολούθως, νὰ εὕρωμεν κατὰ τ' ἀνωτέρω, τὴν τομὴν Μ τῆς β καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Α). Ἡ διὰ τοῦ Μ παράλληλος πρὸς τὴν δ (ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Α)) εἶναι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος.



Σχ. 36.2

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑ

37. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος διανύσματος $\vec{\alpha}$ τοῦ χώρου (1) καὶ σημείου Μ ἐν αὐτῷ, ὑπάρχει σημεῖον Μ' καὶ ἕνα μόνον (2) ὥστε :

$$(1) \qquad \overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}$$

Τὸ σημεῖον Μ' δύναται νὰ ὀνομασθῇ *εἰκὼν* τοῦ Μ ὁριζομένη ἐκ τῆς (1), καὶ τὸ Μ *πρότυπον.*

Ἂν τὸ σημεῖον Μ' θεωρηθῇ ὡς πρότυπον, τότε ἡ εἰκὼν αὐτοῦ, ἡ ὁριζομένη ἐκ τῆς (1), εἶναι ἕνα σημεῖον Μ'' διάφορον, ἐν γένει, τοῦ Μ.

Ἐξ ἄλλου οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ' τοῦ χώρου, ὑπάρχει ἐν αὐτῷ σημεῖον Μ ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ (1).

Ἡ ἐκ τῆς (1) ὁριζομένη ἀντιστοιχία εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ συνόλου τούτου (ἐφ' ἑαυτοῦ), ἡ ὁποία ὀνομάζεται *παράλληλος μεταφορὰ* ἢ ἁπλῶς *μεταφορά.*

Ἡ ἐκ τοῦ διανύσματος $-\vec{\alpha}$ ὁριζομένη μεταφορὰ εἶναι ἡ **ἀντίστροφος** τῆς ὁριζομένης ἐκ τοῦ $\vec{\alpha}$, ἀπεικόνισις. Ἂν τὴν ἐκ τοῦ $\vec{\alpha}$ ὁριζομένην μεταφορὰν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\mathbf{T}(\vec{\alpha})$, τὴν ἐκ τοῦ $-\vec{\alpha}$ ὁριζομένην θὰ συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\mathbf{T}^{-1}$.

Ἂν τὸ Μ' εἶναι τὸ ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ τοῦ χώρου κατὰ τὴν μεταφορὰν **Τ**, θὰ σημειοῦμεν :

$$M \xrightarrow{\mathbf{T}} M' \;\; \text{ἢ} \;\; M' = \mathbf{T}(M) \;\; \text{καὶ}$$

$$M' \xrightarrow{\mathbf{T}^{-1}} M \;\; \text{ἢ} \;\; M = \mathbf{T}^{-1}(M').$$

Ὁμόλογον ἑνὸς σχήματος (Φ) κατὰ τὴν μεταφορὰν $\mathbf{T}(\vec{\alpha})$ *ὀνομάζομεν τὸ* ***σύνολον (Φ')*** *τῶν ὁμολόγων ὅλων τῶν σημείων τοῦ (Φ), κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ ὁμόλογον εὐθείας ε κατὰ τὴν μεταφορὰν* $\mathbf{T}(\vec{\alpha})$ *εἶναι εὐθεῖα ε' παράλληλος πρὸς τὴν ε.*

---

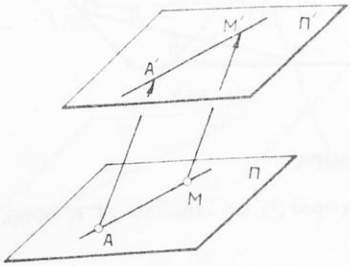
(1) Διατεταγμένον ζεῦγος σημείων (Α, Β) τοῦ χώρου

(2) Τὰ ἀξιώματα τῆς ἰσότητος τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων, (Βλέπε : «Μαθηματικὰ Γ' Τάξεως Κεφ. ΙΙ, παράγρ. 26—31) ἰσχύουν καὶ εἰς τὸν χῶρον.

2. *Τὸ ὁμόλογον ἡμιευθείας ΑΧ κατὰ τὴν μεταφορὰν* $T(\vec{\alpha})$ *εἶναι ἡμιευθεῖα Α'Χ' παράλληλος πρὸς τὴν ΑΧ.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ Α'Χ' εἶναι *ὁμόρροποι.*

38. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμόλογον ἐπιπέδου (Π) εἰς παράλληλον μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$ εἶναι ἐπίπεδον (Π') παράλληλον πρὸς τὸ (Π).



Σχ. 38

Ἀπόδειξις. Ἂν εἶναι Α καὶ Μ ἕνα ὡρισμένον καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ (Π) καὶ Α' καὶ Μ' τὰ ὁμόλογα αὐτῶν ἀντιστοίχως κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$, ἡ εὐθεῖα ΑΜ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΜ, ἑπομένως καὶ πρὸς τὸ (Π). Οὕτω, τὸ Μ' εἶναι σημεῖον γνωστοῦ ἐπιπέδου (Π'): τοῦ διὰ τοῦ Α' παραλλήλου πρὸς τὸ (Π). Ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον Μ' τοῦ (Π') εἶναι ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ τοῦ (Π) κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ ὁμόλογον γωνίας, τριγώνου, πολυγώνου, κύκλου, κατὰ τὴν μεταφορὰν* $T(\vec{\alpha})$ *εἶναι σχήματα* (1) *κείμενα ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν καὶ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς αὐτά.*

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ

39. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δοθέντος σημείου Ο, ὀνομάζομεν* **συμμετρικὸν** *ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τοῦ χώρου, ὡς πρὸς τὸ Ο, τὸ σημεῖον Μ' τῆς ΟΜ, τὸ κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Μ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης ΟΜ' = ΟΜ.*

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι δοθέντος τοῦ Ο τὸ συμμετρικὸν Μ' τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ χώρου, ὡς πρὸς τὸ Ο, ὁρίζεται ἐκ τῶν συνθηκῶν :

$$(1)\quad (OM, OM') = \pi \text{ καὶ } OM = OM'$$

Ἡ ἐκ τῶν (1) ὁριζομένη ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ συνόλου τούτου ὀνομάζεται **συμμετρία** ὡς πρὸς τὸ Ο. Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **κέντρον** τῆς συμμετρίας. Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον Σ(Ο) τὴν ἀνωτέρω συμμετρίαν, τότε διὰ δύο ὁμόλογα κατὰ ταύτην σημεῖα Μ καὶ Μ' τοῦ χώρου, θὰ σημειοῦμεν :

$$M \xrightarrow{\Sigma} M'$$

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον Σ^{-1}, τὴν ἀντίστροφον τῆς Σ ἀπεικόνισιν, θὰ σημειοῦμεν :

$$M' \xrightarrow{\Sigma^{-1}} M$$

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ἀντιστοιχοῦν, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν **διττῶς** πρὸς ἄλληλα (2)

Συμμετρικὸν ἑνὸς σχήματος (Φ) ὡς πρὸς σημεῖον Ο, ὀνομάζομεν τὸ σύνολον (Φ') τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ (Φ), ὡς πρὸς τὸ Ο.

---

(1) Γωνία, τρίγωνον, πολύγωνον, κύκλος, ἀντιστοίχως.

(1) Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ Ο εἶναι μία *ἐνελικτική*, ὅπως λέγομεν, ἀντιστοιχία.

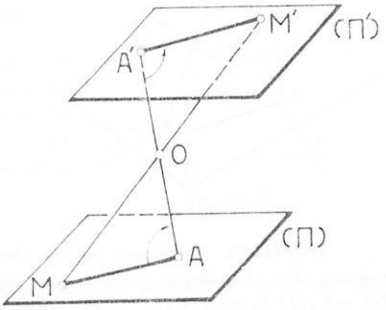
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας ε εἶναι εὐθεῖα ε' παράλληλος πρὸς τὴν ε. Τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας AX εἶναι ἡμιευθεῖα A'X' παράλληλος πρὸς τὴν AX.* Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἡμιευθεῖαι AX καὶ A'X' εἶναι *ἀντίρροποι.*

40. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου (Π), ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι ἐπίπεδον (Π') παράλληλον πρὸς τὸ (Π).

Ἀπόδειξις : Ἔστω Α εἶναι ὡρισμένον καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ (Π) καὶ Α' καὶ Μ' τὰ συμμετρικὰ τούτων ἀντστοίχως, ὡς πρὸς τὸ Ο.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν (ΑΜ, ΑΟ) καὶ (Α'Μ', Α'Ο') ἕπεται ὅτι ἡ Α'Μ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΜ καὶ ἑπομένως (17) καὶ πρὸς τὸ (Π). Λόγῳ τούτου ἡ Α'Μ', ἑπομένως καὶ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Μ' εἶναι σημεῖον γνωστοῦ (22) ἐπιπέδου: τοῦ διὰ τοῦ Α' παραλλήλου πρὸς τὸ (Π). Ἐξ ἄλλου οἱουδήποτε καὶ ἂν εἶναι σημεῖον Μ' τοῦ ἐπιπέδου (Π'), τοῦτο εἶναι συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου Μ τοῦ (Π) : τοῦ κοινοῦ σημείου τῆς ΟΜ' μὲ τὸ (Π). Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΑ'Μ'.



Σχ. 40

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ ὁμόλογον γωνίας, τριγώνου, πολυγώνου, κύκλου, κατὰ οἱανδήποτε συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι σχήματα* (1) *κείμενα ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν καὶ ἀντιρρόπως ἴσα* (2) *πρὸς αὐτὰ ἀντιστοίχως.*

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

41. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος ἑνὸς σημείου Ο καὶ ἑνὸς προσημασμένου λόγου k ὀνομάζομεν *ὁμοιόθετον* ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τοῦ χώρου, ὡς πρὸς κέντρον τὸ σημεῖον Ο, τὸ σημεῖον Μ' τῆς εὐθείας ΟΜ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης .

$$(1) \quad \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = k$$

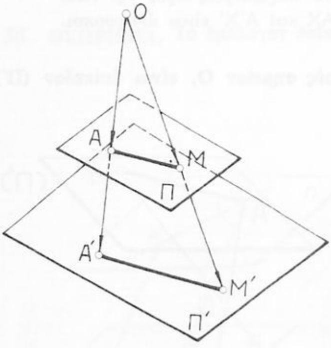
Ἡ ἐκ τῆς συνθήκης (1) ὁριζομένη ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ χώρου (ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐφ' ἑαυτοῦ) ὀνομάζεται *ὁμοιοθεσία*. Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται *κέντρον* καὶ ὁ λόγος k *λόγος* τῆς ὁμοιοθεσίας.

Ἡ ὁμοιοθεσία ὀνομάζεται *ὁμόρροπος* ἢ *ἀντίρροπος* καθ' ὅσον ὁ λόγος k αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσημασμένος. Οὕτως, εἰς τὴν περίπτωσιν ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας δύο οἱαδήποτε ὁμόλογα, κατὰ ταύτην σημεῖα Μ καὶ Μ' κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου Ο αὐτῆς, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας τὰ Μ καὶ Μ' κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο.

---

(1) Γωνία, τρίγωνον, πολύγωνον, κύκλος, ἀντιστοίχως.
(2) Θεωρούμενα ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο τῆς συμμετρίας.

42. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμοιόθετον ἐπιπέδου (Π) (3) εἶναι ἐπίπεδον (Π′) παράλληλον πρὸς τὸ(Π).



Σχ. 42

Ἀπόδειξις: Ἔστω M′ τὸ ὁμοιόθετον ἑνὸς τυχόντος σημείου M τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ A′ τὸ ὁμοιόθετον ἑνὸς ὡρισμένου σημείου A τοῦ (Π).

Ἐκ τῶν $\dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = k$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = k$ ἕπεται ὅτι ἡ A′M′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AM καὶ ἑπομένως καὶ πρὸς τὸ (Π). Ἑπομένως ἡ A′M′ κεῖται ἐπὶ γνωστοῦ ἐπιπέδου : τοῦ διὰ τοῦ ὡρισμένου σημείου A′ παραλλήλου (Π′) πρὸς τὸ (Π).

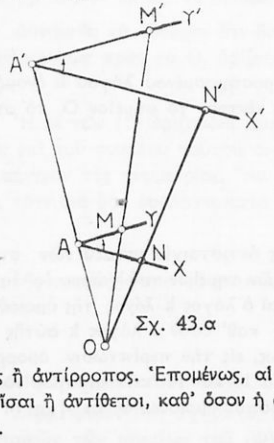
Ἐξ ἄλλου οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον M′ τοῦ (Π′), ὑπάρχει σημεῖον M τοῦ (Π) καὶ ἕνα μόνον ὥστε :

$$\frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = k.$$

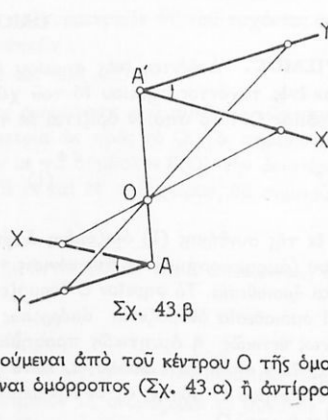
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Π′), ἕκαστον τούτων εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον O τοῦ χώρου (μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π) ἢ τοῦ (Π′)). Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ O ἀπὸ τῶν θεωρουμένων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Π′).*

43. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμοιόθετον γωνίας εἶναι γωνία ἴση ἢ ἀντίθετος πρὸς τὴν θεωρουμένην. Τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις. Τὰ ὁμοιόθετα τῶν πλευρῶν τῆς θεωρουμένης γωνίας εἶναι ἡμιευθεῖαι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη, καθ' ὅσον ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρ-



Σχ. 43.α



Σχ. 43.β

ροπος ἢ ἀντίρροπος. Ἑπομένως, αἱ γωνίαι, θεωρούμεναι ἀπὸ τοῦ κέντρου O τῆς ὁμοιοθεσίας, εἶναι ἴσαι ἢ ἀντίθετοι, καθ' ὅσον ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ὁμόρροπος (Σχ. 43.α) ἢ ἀντίρροπος (Σχ. 43.β).

ΠΟΡΙΣΜΑ *Τὸ ὁμοιόθετον τριγώνου ἢ πολυγώνου εἶναι ἀντιστοίχως τρίγωνον ἢ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ θεωρούμενον. Τὰ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων ἢ πολυγώνων εἶναι παράλληλα.*

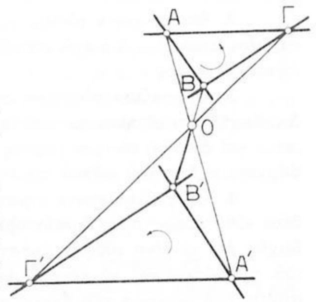
---

(3) Σύνολον τῶν ὁμοιοθέτων τῶν σημείων τοῦ (Π).

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὰ ὁμοιόθετα τρίγωνα ἢ πολύγωνα, θεωρούμενα ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας, εἶναι ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως προσανατολισμένα καθ' ὅσον ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροπος ἢ ἀντίρροπος.

2. Ἂν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμοίων τριγώνων ἢ πολυγώνων εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, τότε ἕκαστον τούτων εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ ἄλλου. Τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφάς των. Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἢ πολυγώνων (Σχ. 43.12).



Σχ. 43.12

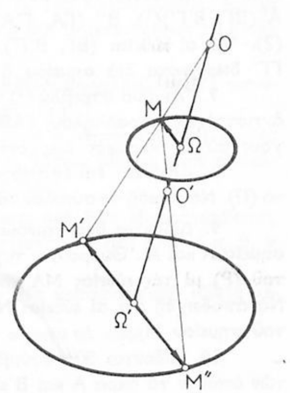
Πράγματι, αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται. Αἱ ΑΑ' καὶ ΒΒ' π.χ. τέμνονται διότι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. Ἐξ ἄλλου δὲν κεῖνται καὶ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἑπομένως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Ἐπὶ πλέον εἶναι: $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$.

44. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμοιόθετον κύκλου (Ω) εἶναι κύκλος (Ω'). Τὰ ἐπίπεδα καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων εἶναι ὁμοιόθετα κατὰ τὴν θεωρουμένην ὁμοιοθεσίαν. Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω') ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Ω' καὶ Μ' τὰ ὁμοιόθετα τοῦ κέντρου Ω καὶ ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τοῦ κύκλου (Ω) ἀντιστοίχως, κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν Η(Ο.k) (Σχ. 44). Εἶναι:

$$\frac{\overrightarrow{\Omega'M'}}{\overrightarrow{\Omega M}} = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}, \text{ ἤτοι } \frac{r'}{r} = k$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο κύκλοι κείμενοι ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων, εἶναι ὁμοιόθετοι κατὰ δύο ὁμοιοθεσίας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ὁμόρροπος καὶ ἡ ἄλλη ἀντίρροπος. Τὰ κέντρα τῶν ὁμοιοθεσιῶν εἶναι τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο', τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὸ εὐθ. τμῆμα ΩΩ' κατὰ λόγον k ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων. Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας (ὁμορρόπου ἢ ἀντιρρόπου) εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων.*



Σχ. 44

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν ν εὐθείας $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$, αἱ ὁποῖαι θεωρούμεναι ἀνὰ δύο τέμνονται χωρὶς νὰ κεῖνται ὅλαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2. Θεωροῦμεν ν εὐθείας $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ αἱ ὁποῖαι θεωρούμεναι ἀνὰ δύο τέμνονται χωρὶς νὰ διέρχωνται ὅλαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

3. Θεωροῦμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα ἐκ τῶν ἀνωτέρω σημείων καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

4. Θεωροῦμεν πέντε σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ τὰ δέκα εὐθ. τμήματα τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ θεωρούμενα ἀνὰ δύο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ δέκα εὐθεῖαι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐθ. τμημάτων καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα (τὰ διάφορα τῶν ἄκρων τοῦ θεωρηθέντος εὐθ. τμήματος) διέρχονται διὰ σημείου.

5. Θεωροῦμεν τρία ἐπίπεδα (Α), (Β), (Γ) τὰ ὁποῖα θεωρούμενα ἀνὰ δύο, τέμνονται. Ἔστωσαν α, β, γ αἱ τομαὶ τούτων (α ἡ τομὴ τῶν (Β) καὶ (Γ) κλπ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε κοινὸν σημεῖον δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν α, β, γ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν ἐπιπέδων (Α), (Β), (Γ).

6. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1). Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΑ'. ΒΒ', ΓΓ' διέρχωνται διὰ σημείου Ο ἢ εἶναι παράλληλοι τὰ σημεῖα Α''(ΒΓ, Β'Γ')(1), Β'' (ΓΑ, Γ'Α'), Γ'' (ΑΒ, Α'Β') κεῖνται ἐπ' εὐθείας

(2). Ἂν αἱ εὐθεῖαι (ΒΓ, Β'Γ'), (ΓΑ, Γ'Α'), (ΑΒ, Α'Β') τέμνωνται, τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

7. Ἂν δύο στρεβλὰ (2) τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως παραλλήλους (ΑΒ | |Α' Β' κλπ), τότε αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ὁμολόγους αὐτῶν κορυφὰς διέρχονται διὰ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

8. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ μία εὐθεῖα γ τέμνουσα τὸ (Π). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει καὶ τὰς τρεῖς εὐθείας α,β,γ.

9. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ὁποίων ἔστω σ ἡ τομή, καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α'. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ν καὶ Ν' τοῦ (Ρ) μὲ τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΑ' ἀντιστοίχως.
Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΝΝ' διέρχονται διὰ γνωστοῦ σημείου (ἀνεξαρτήτου τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ).

10. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β. Θεωροῦμεν τὰ εὐθ. τμήματα ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα Α καὶ Β εἶναι τυχόντα σημείων τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμετρικοὶ τόποι :

(1). Τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ.

(2). Τῶν σημείων Μ τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὰ ἀνωτέρω εὐθ. τμήματα ΑΒ εἰς λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν.

11. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β τέμνουσαι τὸ (Π). Θεωροῦμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως καὶ κείμενον ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸ (Π). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τὰ

(1) Κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΓ καὶ Β'Γ'.

(2) Αἱ κορυφαὶ ἑκάστου τούτων δὲν εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ὁποῖα διαιροῦν ἐσωτερικῶς τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ εἰς λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν.

12. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ ἀσύμβατοι ἀνὰ δύο καὶ τέμνουσαι τὸ (Π). Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ (Π) τοῦ ὁποίου ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς α, β, γ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

13. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ κύκλος (Ο) ἐπὶ ἐπιπέδου (Ρ) παραλλήλου πρὸς τὸ (Π). Δίδονται ἐπίσης δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ α' τέμνουσαι τὸ (Ρ) κατὰ δύο σημεῖα ἀντιδιαμετρικὰ τοῦ κύκλου (Ο). Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας ε, ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει τὰς α καὶ α' καὶ τὸν κύκλον (Ο). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κοινῶν σημείων Μ τῶν εὐθειῶν ε μὲ τὸ ἐπίπεδον (Π).

14. Δίδεται σημεῖον Ο καὶ εὐθεῖα ε (ἢ ἐπίπεδον (Π)). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε (ἢ τοῦ (Π)) καὶ τὸ σημεῖον Μ' τῆς εὐθείας ΟΜ διὰ τὸ ὁποῖον : $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k$, ἔνθα k δοθεὶς προσημασμένος λόγος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ'.

15. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς ε καὶ τοῦ (Π), ὥστε τὸ σημεῖον Ο νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ'.

16. Δίδεται κύκλος (Ο), εὐθεῖα α καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ τέμνουσα τὴν α καὶ τὸν κύκλον (Ο).

17. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα α παράλληλος πρὸς τὸ (Π) καὶ σημεῖον Ο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ο καὶ τέμνουσα τὴν α καὶ τὸ (Π) ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι ΑΒ $= \lambda$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

18. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα α τέμνουσα τὸ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως, τέμνουσα τὴν α καὶ τὸ (Π) ὥστε, ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι ΑΒ $= \lambda$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

19. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') κείμενοι ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως, τέμνουσα τοὺς (Ο) καὶ (Ο').

20. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β τέμνουσαι τὸ (Π). Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΜΝ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π) καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ $= \lambda$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

21. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, εἶναι ἀσύμβατοι. Νὰ κατασκευασθοῦν τρία ἐπίπεδα (Α), (Β), (Γ) περιέχοντα ἀντιστοίχως τὰς εὐθείας α, β, γ καὶ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

22. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ, ἀσύμβατοι ἀνὰ δύο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς α, β, γ ὥστε ἂν εἶναι Α, Β, Γ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα νὰ εἶναι :

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$$

(μ καὶ ν δοθέντα εὐθ. τμήματα).

23. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τρία σημεῖα Μ, Ν, Ρ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθοῦν, δι' ἐπιπέδων κατασκευῶν, τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΜΝΡ μὲ τὰς εὐθείας ΔΑ, ΑΓ, ΒΔ ἀντιστοίχως.

24. Δίδεται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἐκτὸς τοῦ (Π) ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἀντιστοίχως, τέσσαρα σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' ὥστε τὸ τετράπλευρον Α' Β' Γ' Δ' νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

25. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι β καὶ γ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς γ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς β καὶ τὸ μέσον Μ' τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ΑΜ'.

26. Δίδονται δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ὥστε ἡ εὐθεῖα ΟΜ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καὶ ΟΜ = λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

27. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Α) καὶ (Α′), ἕνα σημεῖον Ο τοῦ (Α) καὶ ἕνα σημεῖον Ο′ τοῦ (Α′). Θεωροῦμεν δύο ὀρθογωνίους ἡμιευθείας ΟΑ καὶ Ο′Α′ τῶν (Α) καὶ (Α′) ἀντιστοίχως καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ τούτων ὥστε ΟΑ = α καὶ Ο′Α′ = α′ (α καὶ α′ δοθέντα εὐθ. τμήματα). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ′.

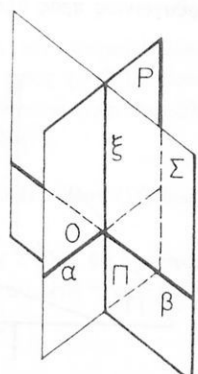
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

45. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν ξ τέμνουσαν ἕνα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Ο αὐτοῦ.

Ἂν ἡ εὐθεῖα ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ (Π) τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Ο, ὀνομάζεται **κάθετος** *ἐπὶ τὸ (Π)*

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Ο μιᾶς εὐθείας ξ, ἐπὶ ἑκάστου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ξ ὑπάρχει, ὡς γνωστόν, μία κάθετος ἐπὶ τὴν ξ, εἰς τὸ Ο, καὶ μία μόνον. Ἂν θεωρήσωμεν δύο, διάφορα ἀλλήλων, ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ) διερχόμενα διὰ τῆς ξ καὶ τὰς ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων καθέτους α καὶ β ἐπὶ τὴν ξ εἰς τὸ Ο, (Σχ. 45) αἱ κάθετοι αὗται α καὶ β ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον (Π). Ἡ εὐθεῖα ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας α καὶ β τοῦ (Π) εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Ο αὐτῆς μὲ τὸ (Π).

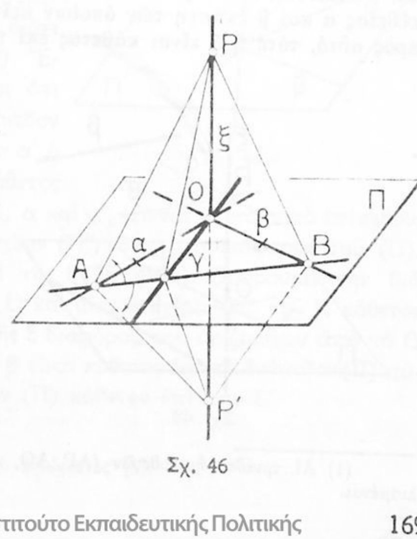


Σχ. 45

Ἡ ὕπαρξις τῆς καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος:

46. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δύο εὐθείας α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον. Ἂν μία εὐθεῖα ξ διερχομένη διὰ τοῦ Ο εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς α καὶ β, τότε εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ (Π), αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ Ο, ἤτοι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν γ τοῦ (Π) διερχομένην διὰ τοῦ Ο καὶ μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν σ τοῦ (Π) τέμνουσαν τὰς α, β, γ ἔστω κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως (Σχ. 46). Ἔστωσαν Ρ καὶ Ρ′ δύο σημεῖα τῆς ξ συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Ο.



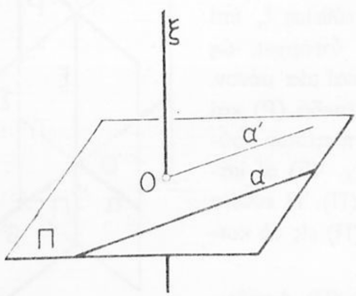
Σχ. 46

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΡΟΑ καὶ Ρ′ΟΑ, τῶν ὁποίων αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ἕπεται ὅτι: $PA = P'A$, καὶ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων POB καὶ $P'OB$ ὅτι $PB = P'B$. Ἐκ τῶν τριγώνων PAB καὶ $P'AB$ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι (AB κοινή, $PA = P'A$, $PB = P'B$), ἕπεται ὅτι $(AB, AP) = -(AB, AP')$, ἤτοι: $(A\Gamma, AP) = -(A\Gamma, AP')$. (1).

Ἐκ τῶν τριγώνων $PA\Gamma$ καὶ $P'A\Gamma$ ($AP = AP'$, $A\Gamma$ κοινὴ καὶ $(A\Gamma, AP) = -(A\Gamma, AP')$), ἕπεται ὅτι $P\Gamma = P'\Gamma$.

Ἐκ τῶν τριγώνων $PO\Gamma$ καὶ $P'O\Gamma$, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ἕπεται ὅτι $(O\Gamma, OP) = -(O\Gamma, OP')$, καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι ἡ $O\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν OP, ἤτοι ὅτι ἡ ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $O\Gamma$ ($\equiv \gamma$).

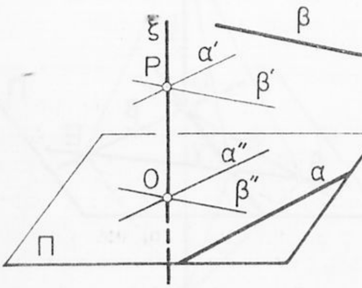
47. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τότε εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ (Π) καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς τὸ (Π).



Σχ. 47

Ἀπόδειξις. Ἂν εἶναι α μία τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ (Π), ἡ διὰ τοῦ O παράλληλος α' πρὸς τὴν α κεῖται εἰς τὸ (Π). Ἡ ξ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α', ἤτοι ἡ γωνία τῶν (ξ, α') εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ γωνία αὕτη εἶναι ἡ γωνία τῶν (ξ, α). Ὥστε ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α. Ἂν ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π), ἡ διὰ τοῦ O παράλληλος α' πρὸς τὴν α κεῖται εἰς τὸ (Π) (18, Πόρισμα 3). Ἐπειδὴ ἡ γωνία τῶν (ξ, α') εἶναι ὀρθή, ἡ εὐθεῖα ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α.

48. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο μὴ παραλλήλους εὐθείας α καὶ β ἑκάστη τῶν ὁποίων κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό, τότε ἡ ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).



Σχ. 48

Ἀπόδειξις. Ἡ ξ τέμνει τὸ (Π). Πράγματι, ἂν ἡ ξ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ (Π), αἱ εὐθεῖαι α, β, ξ θὰ ἦταν παράλληλοι πρὸς τὸ (Π), καὶ ἑπομένως αἱ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου P τῆς ξ παράλληλοι α', β' πρὸς τὰς α, β ἀντιστοίχως θὰ ἔκειντο μετὰ τῆς ξ ἐπὶ ἐπιπέδου (P) παραλλήλου πρὸς τὸ (Π). Οὕτω, θὰ εἴχομεν, ἐν τῷ (P), δύο εὐθείας α', β' καθέτους ἐπὶ τὴν ξ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον P αὐτῆς.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἄτοπον ἀγόμεθα ἂν

(1) Αἱ τριάδες ἡμιευθειῶν (AP, AO, $A\Gamma$), (AP' AO, $A\Gamma$) εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.

ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ξ κεῖται εἰς τὸ (Π). Ὥστε ἡ ξ εἶναι τέμνουσα τὸ (Π). Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον. Ἂν θεωρήσωμεν τὰς διὰ τοῦ Ο παραλλήλους α'' καὶ β'' πρὸς τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως, αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται εἰς τὸ (Π). Ἀλλὰ ἡ ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ αὐτάς, διότι εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὰς παραλλήλους των α καὶ β. Ἑπομένως ἡ ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν δύο εὐθεῖαι ξ καὶ ξ' εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τότε καὶ ξ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).*

Πράγματι, ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο τυχούσας εὐθείας α καὶ β τοῦ (Π) ἢ παραλλήλους πρὸς αὐτό. Ἡ ξ' ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὰς α καὶ β, ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) (48).

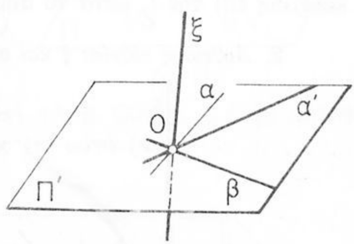
2. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι παράλληλα, τότε κάθε εὐθεῖα ξ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ (Ρ).

Πράγματι, ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο τυχούσας μὴ παραλλήλους εὐθείας α καὶ β τοῦ (Π). Ἀλλὰ αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ (Ρ). Ὥστε ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο μὴ παραλλήλους εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ (Ρ). Ἑπομένως ἡ ξ εἶναι (48) κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ).

49. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης εὐθείας ξ καὶ σημείου Ο ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τοῦ Ο καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ξ, καὶ ἕνα μόνον.

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ξ (Σχ. 49.α). Θεωροῦμεν δύο εὐθείας α καὶ β διερχομένας διὰ τοῦ Ο καὶ καθέτους ἐπὶ τὴν ξ (45). Τὸ ἐπίπεδον (Π) τῶν α καὶ β εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ξ (46).

Ἐξ ἄλλου δὲν ὑπάρχει ἐκτὸς τοῦ (Π) ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ξ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον (Π') εἶναι διάφορον τοῦ (Π) καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ξ κατὰ τὸ σημεῖον Ο. Αἱ α καὶ β δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κεῖνται καὶ αἱ δύο εἰς τὸ (Π'), διότι τότε δὲν θὰ ἦτο τοῦτο διάφορον τοῦ (Π). Ἔστω ὅτι ἡ α δὲν κεῖται εἰς τὸ (Π'), ἤτοι ὅτι εἶναι τέμνουσα τὸ (Π'). Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὰς ξ καὶ α καὶ ἔστω α' ἡ τομὴ (1) αὐτοῦ μὲ τὸ (Π). Ἡ ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς α καὶ α', ἐνῶ αἱ εὐθεῖαι αὗται, ξ, α καὶ α', κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τοῦτο εἶναι ἄτοπον. Ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον (Π') δὲν εἶναι διάφορον τοῦ (Π).

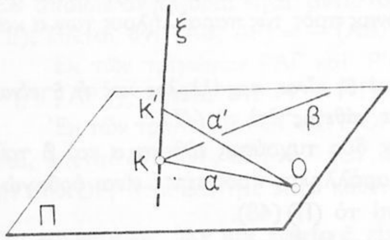


Σχ. 49.α

2. Ἔστω ὅτι τὸ Ο δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ξ (Σχ. 49.β). Θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ Ο κάθετον ΟΚ ἐπὶ τὴν ξ (Κ ἐπὶ τῆς ξ) καὶ μίαν δευτέραν διὰ τοῦ Κ κάθετον β ἐπὶ τὴν ξ (κειμένην ἐπὶ ἐπιπέδου διὰ τῆς ξ διαφόρου τοῦ ὁριζομένου ἀπὸ τὸ Ο καὶ τὴν ξ) Ἡ ξ ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς α καὶ β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) αὐτῶν. Ὥστε ὑπάρχει διὰ τοῦ Ο ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν ξ.

(1) Ἡ ὕπαρξις τῆς α' προκύπτει ἐκ τοῦ ἀξιώματος (4).

'Εξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχει διὰ τοῦ Ο ἐπίπεδον (Π') διάφορον τοῦ (Π) κα κάθετον ἐπὶ τὴν ξ. Πράγματι, ἂν ὑπῆρχεν ἕνα τοιοῦτον ἐπίπεδον (Π'), τοῦτο δὲν δύναται νὰ τέμνῃ τὴν ξ εἰς τὸ Κ, διότι τότε θὰ ὑπῆρχον δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν ξ εἰς τὸ Κ : τὸ (Π) καὶ τὸ (Π'). Τοῦτο ὅμως ἀπεκλείσθη προηγουμένως (1). Ἔστω Κ' τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ (Π') καὶ τῆς ξ. Ἡ ξ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Π') εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΚ' (≡ α'). Τοῦτο ἀκριβῶς εἶναι ἄτοπον, διότι θὰ ὑπῆρχον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν Ο καὶ ξ δύο εὐθεῖαι α καὶ α', διὰ τοῦ Ο, κάθετοι ἐπὶ τὴν ξ.



Σχ. 49.β

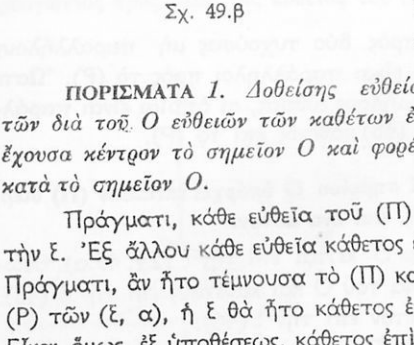
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Δοθείσης εὐθείας ξ καὶ σημείου Ο αὐτῆς, τὸ σύνολον τῶν διὰ τοῦ Ο εὐθειῶν τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ξ, εἶναι μία ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ φορέα τὸ ἐπίπεδον (Π), τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ξ κατὰ τὸ σημεῖον Ο.*

Πράγματι, κάθε εὐθεῖα τοῦ (Π) διερχομένη διὰ τοῦ Ο εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ξ. 'Εξ ἄλλου κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ξ κατὰ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π). Πράγματι, ἂν ἦτο τέμνουσα τὸ (Π) καὶ εἶναι α' ἡ τομὴ τοῦ (Π) μὲ τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τῶν (ξ, α), ἡ ξ θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν α' (ἀφοῦ αὕτη κεῖται εἰς τὸ (Π)). Εἶναι ὅμως, ἐξ ὑποθέσεως, κάθετος ἐπὶ τὴν α, ὥστε θὰ εἴχομεν ἐν τῷ (Ρ) δύο καθέτους ἐπὶ τὴν ξ, κατὰ τὸ σημεῖον Ο αὐτῆς. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον.

2. Δοθείσης εὐθείας ξ καὶ σημείου Ο ἐκτὸς αὐτῆς, τὸ σύνολον τῶν διὰ τοῦ Ο εὐθειῶν, τῶν ὀρθογωνίων πρὸς τὴν ξ, εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ξ ἐπιπέδου (Π) τοῦ ἀγομένου ἀπὸ τοῦ Ο, δέσμη εὐθειῶν ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον Ο.

Πράγματι, κάθε εὐθεῖα α διερχομένη διὰ τοῦ Ο καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ (Π) εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ξ, καὶ ἀντιστρόφως :

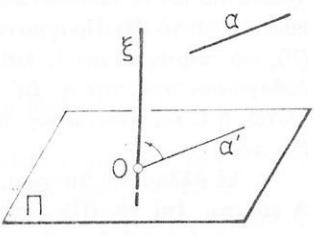
Κάθε εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ξ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ξ καὶ διερχομένου διὰ τοῦ Ο.



Σχ. 49.2

50. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον (Π), τότε κάθε εὐθεῖα α κάθετος ἢ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ξ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ ἐπὶ τοῦ (Π) σημεῖον τῆς ξ. (Σχ. 50). Θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ Ο παράλληλον α′ πρὸς τὴν α. Ἡ γωνία τῶν ξ καὶ α′ εἶναι ὀρθή, ἀφοῦ ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α. Οὕτω, ἡ α′, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ξ κατὰ τὸ σημεῖον Ο αὐτῆς, κεῖται (49, Πόρισμα 1) ἐπὶ τοῦ (Π). Οὕτως, ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν, τὴν α′, τοῦ (Π) καὶ λόγῳ τούτου (17) παράλληλος πρὸς τὸ (Π).



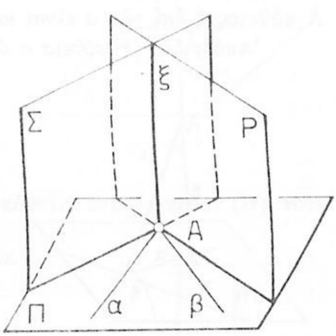
Σχ. 50

51. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντος ἐπιπέδου (Π) καὶ σημείου Α ὑπάρχει εὐθεῖα ξ διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), καὶ μόνον μία.

Ἀπόδειξις 1. Ἔστω ὅτι τὸ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π) (Σχ. 51.1).

Θεωροῦμεν δύο εὐθείας α καὶ β τοῦ (Π) διερχομένας διὰ τοῦ Α καὶ τὰ δύο ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ) τὰ διερχόμενα διὰ τοῦ Α καὶ κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς α καὶ β. Τὰ ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ), δὲν ταυτίζονται διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ α καὶ β θὰ ἦταν κάθετοι ἐπὶ τὴν τομήν, ἔστω σ, αὐτῶν μὲ τὸ (Π), τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι αἱ α, β καὶ σ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Π).

Ἡ τομὴ ξ τῶν (Ρ) καὶ (Σ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Πράγματι ἡ ξ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α διότι ἡ α ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ξ ἡ ὁποία κεῖται εἰς τὸ (Ρ).



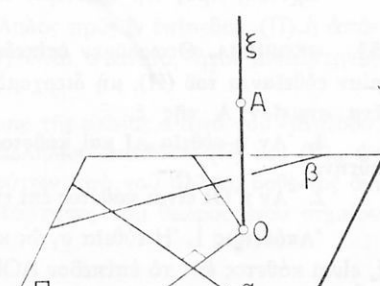
Σχ. 51.1

Δι' ὅμοιον λόγον ἡ ξ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν β. Οὕτως, ἡ ξ ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας α καὶ β τοῦ (Π) εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό (45).

Ἐξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς τῆς ξ, ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ) εἰς τὸ σημεῖον Α. Πράγματι, ἂν μία τοιαύτη εὐθεῖα ξ′ ὑπῆρχε καὶ ἦτο σ ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου-(Ε) τῶν ξ καὶ ξ′ μὲ τὸ (Π), θὰ εἴχομεν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ε) δύο εὐθείας ξ καὶ ξ′ καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν σ αὐτοῦ, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α αὐτῆς.

2. Ἔστω ὅτι τὸ Α δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π) (Σχ. 51.2)

Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ (Π) δύο τυχούσας μὴ παραλλήλους εὐθείας α καὶ β καὶ τὰ δύο ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ) τὰ διερ-



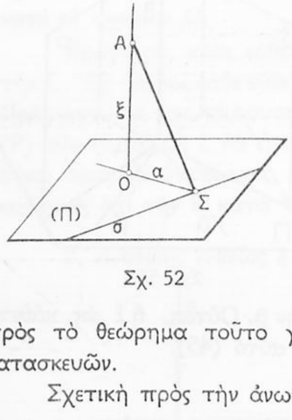
Σχ. 51.2

χόμενα διὰ τοῦ Α καὶ κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς α καὶ β. Ἡ τομὴ ξ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Πράγματι, ἡ α εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ), τὸ περιέχον τὴν ξ, καὶ ἑπομένως ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ξ. Ἤτοι, ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν β. Οὕτω, ἡ ξ, ὡς ὀρθογώνιος πρὸς δύο εὐθείας α καὶ β τοῦ (Π), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).

Ἐξ ἄλλου δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω εὐθείας ξ, ἄλλη εὐθεῖα διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Πράγματι, ἂν μία τοιαύτη εὐθεῖα ξ ὑπῆρχε, καὶ θεωρήσωμεν τὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) σημεῖα Ο καὶ Ο' τῶν ξ καὶ ξ' ἀντιστοίχως, αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΟΟ' θὰ εἶχον ἄθροισμα μεγαλύτερον τῆς γωνίας π.

52. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἂν εἶναι σ μία τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), ΑΙ ἡ διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν σ (Ι ἐπὶ τῆς σ) καὶ α ἡ εἰς τὸ Ι κάθετος ἐπὶ τὴν σ, ἡ κειμένη ἐπὶ τοῦ (Π), τότε ἡ διὰ τοῦ Α κάθετος ξ ἐπὶ τὴν α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) (1)

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα σ ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΙ καὶ α (Σχ. 52), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν καὶ ἑπομένως ὀρθογώνιος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ αὐτοῦ. Ὥστε ἡ ξ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν σ. Ἡ ξ ὅμως εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, κάθετος ἐπὶ τὴν α. Ὥστε ἡ ξ, ὡς ὀρθογώνιος πρὸς δύο εὐθείας, τὰς σ καὶ α, τοῦ ἐπιπέδου (Π), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).



Σχ. 52

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι γνωστὴ ὡς θεώρημα τῶν «τριῶν καθέτων». Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἔχομεν μίαν δευτέραν ἀπόδειξιν περὶ τῆς ὑπάρξεως τῆς διὰ τοῦ σημείου Α καθέτου ἐπὶ τὸ θεωρηθὲν ἐπίπεδον (Π). Ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὸ θεώρημα τοῦτο γεωμ. κατασκευὴ πραγματοποιεῖται δι' ἐπιπέδων κατασκευῶν.

Σχετικὴ πρὸς τὴν ἀνωτέρω πρότασιν (52) εἶναι καὶ ἡ ἑξῆς :

53. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π), μίαν τυχοῦσαν κάθετον ξ ἐπ' αὐτό, μίαν εὐθεῖαν σ τοῦ (Π), μὴ διερχομένην διὰ τοῦ ἐπὶ τούτου ἴχνους Ο τῆς ξ, καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς ξ.

1. Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΙ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν σ, τότε καὶ ἡ ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.

2. Ἂν ἡ ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν σ, τότε καὶ ἡ ΑΙ θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Ἀπόδειξις 1. Ἡ εὐθεῖα σ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΙ καὶ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ξ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΙ καὶ λόγῳ τούτου κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΙ. Ὥστε ἡ ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν σ (Σχ. 52).

---

(1) Θεώρημα τῶν *τριῶν καθέτων*.

2. Ἡ εὐθεῖα σ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν OI καὶ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ξ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον AOI, καὶ λόγῳ τούτου κάθετος ἐπὶ τὴν AI. Ὥστε ἡ εὐθεῖα AI εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν σ.

ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα AO (52) εἶναι μικρότερον οἱουδήποτε τμήματος AM, ἔνθα M τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Π), διάφορον τοῦ O.

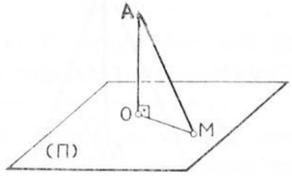
Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AOM (Σχ. 54), τοῦ ὁποίου ἡ AM εἶναι ὑποτείνουσα καὶ ἡ AO κάθετος πλευρά, ἕπεται ὅτι: $AO < AM$.

54. ΟΡΙΣΜΟΣ Θεωροῦμεν: ἐπίπεδον (Π), σημεῖον A κείμενον ἐκτὸς αὐτοῦ, καὶ τὴν κάθετον AO ἐπὶ τὸ (Π) (O ἐπὶ τοῦ (Π)).

Τὸ εὐθ τμῆμα AO ὀνομάζεται *ἀπόστασις* τοῦ σημείου A ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Τὸ σημεῖον O ὀνομάζεται *ὀρθὴ προβολὴ* τοῦ A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π).

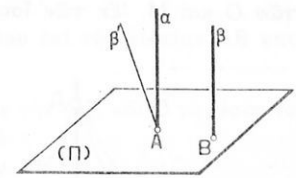
Τὸ συμμετρικὸν A' τοῦ A, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O, ὀνομάζεται *συμμετρικὸν* τοῦ A *ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον* (Π).



Σχ. 54

55. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τότε εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου A τῆς α καὶ τοῦ (Π) παράλληλον β' πρὸς τὴν β. Ἡ εὐθεῖα β' εἶναι (48, Πόρισμα 1) κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) καὶ ἑπομένως ταυτίζεται μὲ τὴν α, διότι διὰ τοῦ A μία μόνον κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) ἄγεται (51). Ὥστε ἡ α καὶ παράλληλος πρὸς τὴν β.



Σχ. 55

56. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν μία εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν ἐπίπεδον (Π) ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων M αὐτῆς ἀπὸ τοῦ (Π) εἶναι σταθερά, ἤτοι ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου M (55).

Ἡ ἀπόστασις αὐτὴ ὀνομάζεται *ἀπόστασις* τῆς εὐθείας α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ ἡ *ἀπόστασις* δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (P), ὡς ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων M τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἀπὸ τοῦ ἄλλου, δοθέντος ὅτι ἡ ἀπόστασις αὐτὴ εἶναι σταθερά, ἤτοι ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου M (55).

ΕΥΘΕΙΑ ΠΛΑΓΙΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

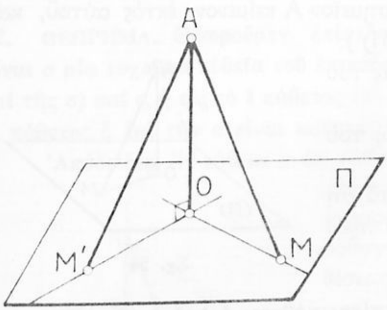
57. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Πᾶσα εὐθεῖα α μὴ κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου (Π), ἡ ὁποία δὲν* *εἶναι κάθετος οὔτε παράλληλος πρὸς αὐτό, ὀνομάζεται* **πλαγία** *ὡς πρὸς τοῦτο.*

Κάθε εὐθ. τμῆμα κείμενον ἐπὶ εὐθείας πλαγίας ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) δύναται νὰ ὀνομάζεται *πλάγιον* ὡς πρὸς τὸ (Π).

58. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἀπὸ σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π), θεωρήσωμεν τὴν κάθετον ΑΟ ἐπ' αὐτὸ καὶ δύο πλαγίας ΑΜ καὶ ΑΜ′ (Ο, Μ, Μ′ τὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἴχνη τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν) τότε:

1. $OM = OM' \Leftrightarrow AM = AM'$ καὶ 2. $OM > OM' \Leftrightarrow AM > AM'$

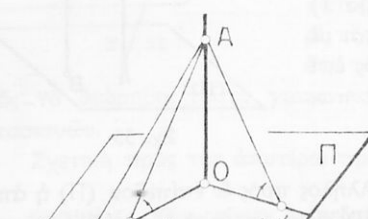
Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω ΟΜ = ΟΜ′. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΑΟΜ′ (Σχ. 58.1.) ἕπεται ὅτι ΑΜ = ΑΜ′ Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν ἴσας ἀντιστοίχως τὰς καθέτους αὐτῶν πλευράς.



Σχ. 58.1

Ἂν ΑΜ = ΑΜ′, τότε ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΑΟΜ′ τῶν ὁποίων αἱ ὑποτείνουσαι ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΟ κοινή, ἕπεται ὅτι: ΟΜ = ΟΜ′.

2. Ἔστω ΟΜ > ΟΜ′ (Σχ. 58.2). Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΜ τὸ σημεῖον Μ″ ὥστε ΟΜ″ = ΟΜ′. Ἐπειδὴ ΟΜ′ < ΟΜ, τὸ σημεῖον Μ″ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Μ. Ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΜ′ καὶ ΑΟΜ″ ἕπεται ὅτι ΑΜ″ = ΑΜ′. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΜ > ΑΜ″, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ ΑΜ > ΑΜ′.



Σχ. 58.2

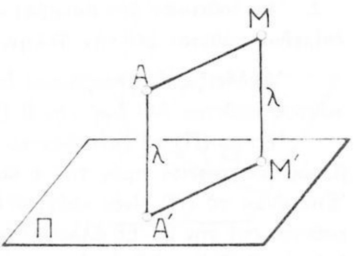
Ἂν ΑΜ > ΑΜ′ τότε θὰ εἶναι καὶ ΟΜ > ΟΜ′.

Πράγματι, ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις: ΟΜ = ΟΜ′, διότι τότε θὰ ἦτο (1): ΑΜ = ΑΜ′, ἐνῶ, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ΑΜ > ΑΜ′, ὡς καὶ ἡ περίπτωσις ΟΜ < ΟΜ′, διότι τότε θὰ ἦτο, ὡς ἀπεδείχθη, ΑΜ < ΑΜ′, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΜ > ΑΜ′. Ὥστε ΟΜ > ΟΜ′

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

59. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντος ἐπιπέδου (Π), τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα δύο ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Ρ′) παραλλήλων πρὸς τὸ (Π).

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α καὶ Μ ἕνα ὡρισμένον καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ συνόλου, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Π). Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἕνα σημεῖον Α τοῦ συνόλου, θεωροῦντες ἐπὶ τυχούσης καθέτου ἐπὶ τὸ (Π), καὶ ἀπὸ τοῦ ἐπὶ τούτου ἴχνους Ο αὐτῆς, τὸ σημεῖον Α ὥστε ΟΑ = λ. Ἔστωσαν ΑΑ′ καὶ ΜΜ′ αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Μ ἀπὸ τοῦ (Π) (ΑΑ′ = ΜΜ′ = λ). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΑ′ Μ′Μ ἕπεται ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν Α′Μ′ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ ἑπομένως παράλληλος πρὸς τὸ (Π). Λόγῳ τούτου ἡ εὐθεῖα ΑΜ κεῖται ἐπὶ γνωστοῦ (22, Πόρισμα 4) ἐπιπέδου (Ρ) : τοῦ διὰ τοῦ Α παραλλήλου πρὸς τὸ (Π). Ἑπομένως καὶ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Σχ. 59

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) ἀπέχει ἀπὸ τοῦ (Π) ἀπόστασιν ἴσην πρὸς λ, διότι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) καὶ ἴση πρὸς λ.

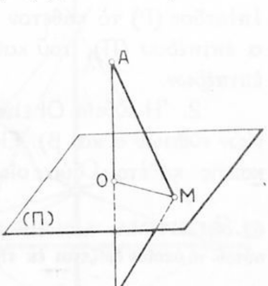
Εἰς τὰ σημεῖα τοῦ χώρου τὰ κείμενα πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ (Π) ἀντιστοιχεῖ ἕνα δεύτερον ἐπίπεδον (Ρ′) παράλληλον πρὸς τὸ (Π) καὶ ἀπέχον ἀπὸ τούτου τὴν ἀπόστασιν λ.

60. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ χώρου, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

(1) ΜΑ = ΜΒ

ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κατὰ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν (1), καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Τὸ γνωστὸν τοῦτο σημεῖον Ο εἶναι σημεῖον τοῦ συνόλου ἀφοῦ ΟΑ = ΟΒ. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΒΟΜ, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ἕπεται ὅτι (ΟΜ, ΟΑ) = = −(ΟΜ, ΟΒ) καὶ ἑπομένως ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΟΜ, ἄρα καὶ τὸ ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον Μ, κεῖται ἐπὶ γνωστοῦ (49, Πόρισμα 1) ἐπιπέδου (Π) : τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ο αὐτῆς (μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ).



Σχ. 60

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἀπέχει ἴσον τῶν σημείων Α καὶ Β. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΒΟΜ, τῶν ὁποίων αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι (ΟΜ κοινὴ καὶ ΟΑ = ΟΒ).

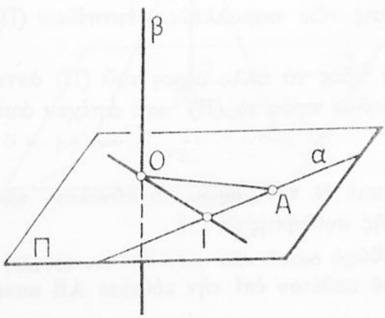
Τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον (Π) ὀνομάζεται **μεσοκάθετον** ἐπίπεδον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

61. ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ὀρθογώνιοι, τότε ὑπάρχει, δι' ἑκάστης τούτων, ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην καὶ ἕνα μόνον. Ἀντιστρόφως :

2. Ἂν δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν α καὶ β, ὑπάρχῃ διὰ τῆς μιᾶς τούτων ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην, τότε αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ὀρθογώνιοι.

Ἀπόδειξις 1. Θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Α τῆς εὐθείας α καὶ τὴν διὰ τούτου κάθετον ΑΟ ἕως τὴν β (Ο ἐπὶ τῆς β).

Ἔστω (Π) τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΟ καὶ α. Ἡ εὐθεῖα β, ὡς ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Ἑπομένως τὸ (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν β. Ὥστε ὑπάρχει διὰ τῆς α ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν β. Ἐξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχει διὰ τῆς α ἄλλο ἐπίπεδον (Π') κάθετον ἐπὶ τὴν β, διότι τοῦτο, ὡς περιέχον τὴν α, θὰ περιεῖχε τὸ σημεῖον Α. Οὕτω, θὰ ὑπῆρχον διὰ τοῦ σημείου Α δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν β, τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἐκ τῆς προτάσεως (49).



Σχ. 61

Τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον (Π), εἶναι κατὰ ταῦτα, ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρηθέντος σημείου Α τῆς α, ἀφοῦ εἶναι ἕνα μόνον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει διὰ τῆς β ἐπίπεδον (Ρ) κάθετον ἐπὶ τὴν α, καὶ ἕνα μόνον.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν εἶναι Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς β μὲ τὸ διὰ τῆς α ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν β, καὶ ΟΙ ἡ διὰ τοῦ Ο κάθετος ἐπὶ τὴν α (Ι ἐπὶ τῆς α), ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ΟΙ καὶ ἡ β ὁρίζουν τὸ διὰ τῆς β ἐπίπεδον (Ρ) τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν α. Ἐξ ἄλλου ἡ ΟΙ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ τῆς α ἐπιπέδου (Π), τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν β, ἤτοι εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

2. Ἡ εὐθεῖα ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς α καὶ β (κοινὴ κάθετος τῶν ὀρθογωνίων εὐθειῶν α καὶ β). Εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον θὰ ἀποδειχθῇ ἡ ὕπαρξις τῆς κοινῆς καθέτου δύο οἱωνδήποτε ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

62. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ χώρου, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

$$(1) \qquad MA^2 - MB^2 = \lambda^2$$

ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα, εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου (Π). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο (Π) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ι αὐτῆς, τὸ κείμενον πρὸς τὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β, καὶ ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Ο ἀπόστασιν ΟΙ διδομένην ἐκ τῆς :

$$(2) \qquad OI = \frac{\lambda^2}{2 \cdot AB}.$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ (Σχ. 62) ἕνα σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν (1), Ι ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἐπειδὴ ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι ΜΑ > ΜΒ, θὰ εἶναι καὶ ΙΑ > ΙΒ, ἤτοι τὸ Ι κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ ἔχομεν:

$$MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot OI$$

Ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς (1) ἔπεται ὅτι :

$2 \cdot AB \cdot OI = \lambda^2$, καὶ ἑπομένως ὅτι :

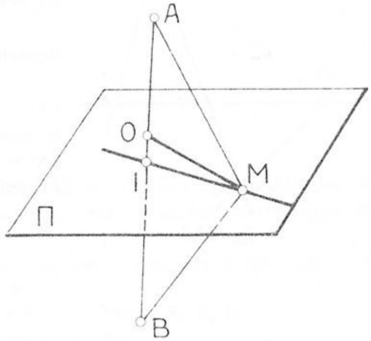
$$OI = \frac{\lambda^2}{2\,AB.}$$

Τὸ Ι ἑπομένως εἶναι σημεῖον γνωστόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ Μ προβάλλεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κατὰ τὸ ἀνωτέρω γνωστὸν σημεῖον Ι αὐτῆς, ἤτοι ὅτι ἡ ΙΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ γνωστὸν σημεῖον Ι αὐτῆς. Ὥστε ἡ ΙΜ, ἄρα καὶ τὸ Μ, κεῖται (49) ἐπὶ γνωστοῦ ἐπιπέδου, καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἔστω (Π) τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Ἐξ ἄλλου, κάθε σημεῖον τοῦ (Π), τοῦ ὁριζομένου ἐκ τῆς (2), ἱκανοποιεῖ τὴν (1). Πράγματι, ἐκ τῆς (2) ἔχομεν : $\lambda^2 = 2 \cdot AB \cdot OI$, καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ ὅτι :

$$MA^2 - MB^2 = \lambda^2,$$

ἤτοι ὅτι τὸ σημεῖον Μ ἱκανοποιεῖ τὴν (1)



Σχ. 62

63. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν : δύο ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β, δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς α καὶ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τῆς β. Ἡ συνθήκη :

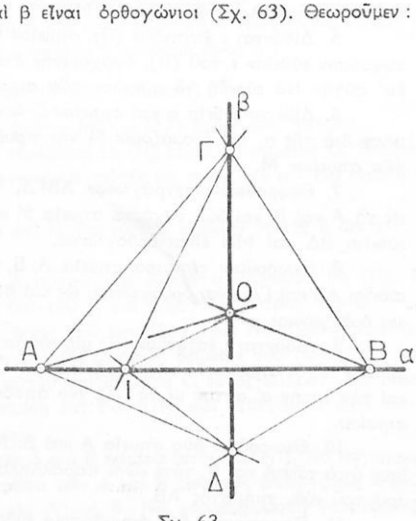
$$(1) \qquad A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$$

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ὀρθογώνιοι (1).

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω ὅτι αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ὀρθογώνιοι (Σχ. 63). Θεωροῦμεν : Τὸ διὰ τῆς α ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν β (61), τὸ κοινὸν σημεῖον Ο αὐτοῦ μὲ τὴν β, καὶ τὴν κάθετον ΟΙ ἐπὶ τὴν α (Ι ἐπὶ τῆς α). Ἡ ΓΙ εἶναι (53) κάθετος ἐπὶ τὴν α, ὅπως καὶ ἡ ΟΙ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν: $A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 2AB \cdot MI$ (ἔνθα Μ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ).

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν ὁμοίως : $A\Delta^2 - B\Delta^2 = 2\,AB \cdot MI$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι : $A\Gamma^2 - B\Gamma^2 = A\Delta^2 - B\Delta^2$, καὶ ἑπομένως ὅτι : $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$

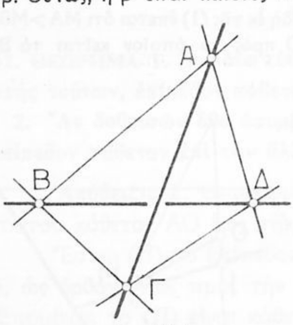
2. Ἔστω ὅτι διὰ δύο τυχόντα σημεῖα Α, Β τῆς α καὶ Γ, Δ τῆς β, ἰσχύει ἡ (1). Θέτομεν: $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2 = \lambda^2$. Ἐκ τῆς $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = \lambda^2$ ἔπεται (62) ὅτι τὸ Α εἶναι σημεῖον γνωστοῦ ἐπιπέδου (Π), καθέτου ἐπὶ τὴν β. Ἐκ τῆς $B\Gamma^2 - B\Delta^2 = \lambda^2$ ἔπεται ὅτι τὸ Β εἶναι σημεῖον τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἡ εὐθεῖα ἑπομένως ΑΒ, ἤτοι ἡ α, κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν



Σχ. 63

(1) Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ ἐπὶ δύο εὐθειῶν α καὶ β τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

β. Οὕτως, ἡ β εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, τὸ (Π), περιέχον τὴν α, καὶ ἑπομένως ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α.



Σχ. 63.1

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Θεωροῦμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ὡς καὶ αἱ ΒΓ, ΑΔ εἶναι ὀρθογώνιοι, τότε καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.

Πράγματι, ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἔχομεν (63) ὅτι $ΓΑ^2 - ΒΑ^2 = ΓΒ^2 - ΔΒ^2$ καὶ $ΓΔ^2 - ΓΑ^2 = ΒΔ^2 - ΒΑ^2$, κ ἐκ τούτων, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη : $ΓΔ^2 - ΑΔ^2 = ΓΒ^2 - ΑΒ^2$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται (63) ὅτι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιοι (Σχ. 63.1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π), τρεῖς ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ καὶ μίαν ἡμιευθεῖ ΟΤ τέμνουσαν τὸ (Π) ὥστε : (ΟΧ, ΟΤ) = (ΟΥ, ΟΤ) = (ΟΖ, ΟΤ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθε ΟΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).

2. Θεωροῦμεν πέντε ἴσα εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κύκλοι ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχουν, ἐκτὸς τοῦ Α, ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α'.

3. Θεωροῦμεν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδο Ἔστωσαν Μ, Ν, Ρ τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΓ, ΒΓ, ΑΔ, καὶ Ι καὶ Κ τὰ μέσα τῶν Α καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΙΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝΡ.

4. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ α'. Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον ἀπέχ ἀπὸ τῶν α καὶ α' ἀποστάσεις λ καὶ λ' ἀντιστοίχως, ὅπου λ καὶ λ' δοθέντα εὐθ. τμήματα. Ν ὁρισθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

5. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Ο αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Θεωροῦμ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε τοῦ (Π), διερχομένην διὰ τοῦ Ο, καὶ ὀνομάζομεν Μ τὴν προβολὴν τοῦ ἐπ' αὐτήν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

6. Δίδεται εὐθεῖα α καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον (Π) διερχ μενον διὰ τῆς α, καὶ ὀνομάζομεν Μ τὴν προβολὴν τοῦ Ο ἐπὶ τὸ (Π). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολ τῶν σημείων Μ.

7. Θεωροῦμεν : τετράγωνον ΑΒΓΔ, τὰς καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγών εἰς τὰ Α καὶ Β, καὶ δύο τυχόντα σημεῖα Μ καὶ Ν τούτων ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΜΝ εἶναι ὀρθογώνιοι.

8. Θεωροῦμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἂν εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι, ὡς καὶ ΒΓ καὶ ΑΔ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ ναι ὀρθογώνιοι.

9. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π) μία εὐθεῖα α αὐτοῦ καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτοῦ. Θεωρο μεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς α, τὴν εὐθεῖαν ΟΜ, τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΜ εἰς τὸ καὶ τὴν τομὴν α' αὐτοῦ μὲ τὸ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι α' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτ σημείου.

10. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν ἕνα ἐπίπεδον (Π) ἀπέχ ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β, τότε εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἢ διέρχεται διὰ τοῦ μ σου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

11. Θεωροῦμεν : δύο ἀσυμβάτους εὐθείας δ καὶ δ', δύο σημεῖα Α, Β τῆς δ καὶ δύο σ μεῖα Α', Β' τῆς δ' ὥστε : ΑΒ = Α'Β'. Ἔστω α ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν μεσοκαθέτων τ εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ Α'Β' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Κάθε σημεῖον τῆς α ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν δ καὶ δ′
2. Ἡ α σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς δ καὶ δ′

12. Δίδονται : κύκλος (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ καὶ σημεῖον Σ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (Ο) εἰς τὸ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ (Ο) καὶ τὰς προβολὰς Η καὶ Ρ τοῦ Α ἐπὶ τὰς ΣΒ καὶ ΣΜ ἀντιστοίχως.

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $(ΜΣ, ΜΒ) = \frac{\pi}{2}$

β) Τὰ τρίγωνα ΣΜΒ καὶ ΣΡΗ εἶναι ὅμοια.

γ) Ἡ ΣΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΡΗ

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Ρ.

13. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν δ καὶ δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσα καὶ παράλληλα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ Α′Β′ καὶ Γ′Δ′ τῶν ἀνωτέρω εὐθ. τμημάτων ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν δ εἶναι ἴσαι.

14. Δίδονται δύο ἴσα εὐθ. τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ. Θεωροῦμεν τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΟΜ ἴσον πρὸς τὰ δοθέντα.

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν σημείων Α, Β, Μ.
2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων ΑΒΜ.

15. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι, α, β, γ, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο καὶ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν α, β γ.

16. Δίδεται σημεῖον Ο καὶ δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὀνομάζομεν δ κάθε εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Ο, ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ προβολαὶ τῶν ἀνωτέρω εὐθ. τμημάτων εἶναι ἴσαι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν δ.

17. Δίδονται κύκλος (Ο), σημεῖον Ρ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Ρ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (Ο) ἕνα σημεῖον Σ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ (Ο) καὶ ὀνομάζομεν : Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὸν (Ο), καὶ G τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΣΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων G.

18. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ (Π). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), τοῦ ὁποίου ἡ συνθήκη εἶναι ἡ :

1. $(ΜΑ, ΜΒ) = \frac{\pi}{2}$ 2. $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα).
3. $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = \lambda^2$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα)   4. $ΜΑ^2 - ΜΒ^2 = \lambda^2$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

19. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα α τέμνουσα τὸ (Π) κατὰ τὸ σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν δ τοῦ (Π) καὶ τὴν συμμετρικὴν δ′ αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν δ′.

20. Δίδεται εὐθεῖα δ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς δ ὥστε :

1. ΜΑ = ΜΒ   2. ΜΑ = ΑΒ.

21. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ, καὶ εὐθεῖα α τέμνουσα τὸ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα α′ τοῦ (Π), διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α.

22. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μικρότερον καὶ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΜ, ὅπου Μ σημεῖον τοῦ (Ο).

23. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δ, διερχομένη διὰ τοῦ Α, κειμένη ἐπὶ τοῦ (Π), καὶ ἀπέχουσα ἀπὸ τοῦ Ο δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

24. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα ἐκτὸς τοῦ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δ τοῦ (Π) ἀπέχουσα ἀντιστοίχως ἀπὸ τῶν Α καὶ Β δοθείσας ἀποστάσεις λ καὶ μ.

25. Δίδονται : εὐθεῖα δ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τῆς δ, ὥστε αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τούτου :

1. Νὰ εἶναι ἴσαι. 2. Νὰ ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ (μ,ν δοθέντα εὐθ. τμήματα)

26. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν δοθέντων τούτων σημείων.

27. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τοῦ Ο καὶ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ.

28. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ εὐθεῖα δ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν δ.

29. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα, Α, Β, Γ, Δ, μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων.

30. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθοῦν τέσσαρα ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ), (Τ), παράλληλα, ἰσαπέχοντα, καὶ διερχόμενα ἀντιστοίχως διὰ τῶν δοθέντων σημείων.

31. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α,Β κείμενα ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) διὰ τὸ ὁποῖον :
1. Τὸ ἄθροισμα ΜΑ + ΜΒ εἶναι ἐλάχιστον
2. Ἡ διαφορὰ τῶν ΜΑ καὶ ΜΒ εἶναι μεγίστη.

32. Δίδεται εὐθεῖα δ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τοῦ Ο, παράλληλον πρὸς τὴν δ καὶ ἀπέχον ἀπὸ τῆς δ δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

33. Δίδεται εὐθεῖα δ καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), διερχόμενα ἀντιστοίχως διὰ τῆς δ καὶ τοῦ Α καὶ ἀπέχοντα ἀλλήλων δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

34. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Ο αὐτοῦ καὶ δύο εὐθ. τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ (Α Β ἐκτὸς τοῦ (Π)). Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ (Π) εὐθεῖα δ, διερχομένη διὰ τοῦ Ο, ὥστε αἱ προβολαὶ τῶν εὐθ. τμημάτων ΟΑ καὶ ΟΒ ἐπ' αὐτὴν νὰ εἶναι ἴσαι.

35. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π) δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β τοῦ (Π) κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἕνα σημεῖον Ρ κείμενον ἐκτὸς τοῦ (Π). Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ὥστε : ἡ γωνία (ΡΑ, ΡΒ) νὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἐλάχιστον.

36. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π) σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα δ τέμνουσα τὸ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα α τοῦ (Π), διερχομένη διὰ τοῦ Α, ὥστε ἡ γωνία τῶν α καὶ δ νὰ εἶναι δοθεῖσα φ.

37. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως δύο σημεῖα Μ καὶ Ν ὥστε : $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = \frac{ΝΔ}{ΝΓ}$. Νὰ εὑρεθοῦν, ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΔΑ, δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ ἀντιστοίχως ὥστε ἡ εὐθεῖα ΡΣ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ καὶ $\frac{ΡΒ}{ΡΓ} = \frac{ΣΑ}{ΣΔ}$.

38. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖα δ μὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου τούτου. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Χ τῆς δ ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝΡΣ, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΧΑΒΓ, νὰ εἶναι :
1. Ὀρθογώνιον 2. Ῥόμβος

39. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθοῦν τρία ἐπίπεδα παράλληλα καὶ ἰσαπέχοντα, ὥστε τὸ ἕνα ἐκ τούτων νὰ περιέχῃ δύο ἀπὸ τὰ δοθέντα, καὶ τὰ ἄλλα δύο ἀνὰ ἓν ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἀντιστοίχως.

40. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπίπεδον (Π) μὴ ἔχον κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ τρίγωνον. Ὀνομάζομεν x, y, z τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ (Π) καὶ δ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους G αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $x + y + z = 3δ$

41. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα, Α. Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ὁποίου ἡ συνθήκη εἶναι ἡ :

$$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = ΜΓ^2 + ΜΔ^2$$

42. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Ρ). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τρόπος τῶν σημείων Μ τοῦ (Π), δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = λ^2$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

43. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κείμενα ἐπ' εὐθείας δ μὴ κειμένης ἐπὶ τοῦ (Π). Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Π) διὰ τὸ ὁποῖον : (ΜΑ, ΜΒ)= = (ΜΓ, ΜΔ). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

44. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ παράλληλοι καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον :

1. Ἀπὸ τῶν εὐθειῶν α, β, γ.
2. Ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰς εὐθείας α, β, γ, θεωρουμένας ἀνὰ δύο.

45. Δίδεται εὐθεῖα δ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β μὴ κείμενα ἐπ' αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ τῆς δ διὰ τὸ ὁποῖον :

1. Τὸ ἄθροισμα ΜΑ + ΜΒ εἶναι ἐλάχιστον
2. Ἡ διαφορὰ τῶν ΜΑ καὶ ΜΒ εἶναι μεγίστη.

46. Δίδεται εἰς τὸν χῶρον μία προσανατολισμένη εὐθεῖα $\vec{\xi}$. Θεωροῦμεν: τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ διὰ τοῦ Μ ἐπίπεδον (Π) τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ξ, τοῦ ὁποίου ἔστω Ο τὸ ἐπὶ τῆς $\vec{\xi}$ σημεῖον, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ὁμόλογον Μ' τοῦ Μ κατὰ τὴν ἐν τῷ (Π) στροφὴν **R** (Ο, φ), ἔνθα φ δοθεῖσα, ἐν τῷ (Π), προσανατολισμένη γωνία.

Ἡ βάσει τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν ὁριζομένη ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐφ' ἑαυτοῦ ὀνομάζεται **στροφὴ** ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $\vec{\xi}$ (1).

Ὁ ἄξων $\vec{\xi}$ ὀνομάζεται **ἄξων** τῆς στροφῆς καὶ ἡ γωνία φ **γωνία** τῆς στροφῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κατὰ μίαν στροφὴν **R** (ξ, φ) :

1. Τὸ ὁμόλογον εὐθείας ἢ ἐπιπέδου εἶναι ἀντιστοίχως εὐθεῖα ἢ ἐπίπεδον.
2. Τὸ ὁμόλογον εὐθ. τμήματος ΑΒ εἶναι εὐθ. τμῆμα Α'Β' ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.
3. Τὸ ὁμόλογον γωνίας, τριγώνου, πολυγωνου, κύκλου, εἶναι ἀντιστοίχως σχήματα ἴσα πρὸς τὰ θεωρούμενα.

---

(1) Συμβολικῶς : **R** (ξ, φ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

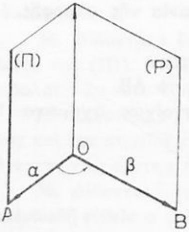
ΔΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ ΕΠ' ΑΛΛΗΛΑ

ΔΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

64. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **δίεδρον γωνίαν** *κάθε ζεῦγος ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν.*

Τὰ ἀνωτέρω ἡμιεπίπεδα ὀνομάζονται *ἕδραι* τῆς διέδρου γωνίας καὶ ἡ ἀρχικὴ αὐτῶν ἡμιευθεῖα *ἀκμὴ* αὐτῆς (Σχ. 64).



Σχ. 64

Ἂν εἶναι (Π) καὶ (Ρ) αἱ ἕδραι καὶ γ ἡ ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ πρώτη ἕδρα εἶναι ἡ (Π) καὶ ἡ δευτέρα ἡ (Ρ), τότε ἡ δίεδρος γωνία θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον γ(Π,Ρ) ἢ ἁπλῶς (Π, Ρ).

Σημεῖα τῆς διέδρου γωνίας ὀνομάζομεν τὰ σημεῖα τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

ΚΥΡΤΗ ΚΑΙ ΜΗ ΚΥΡΤΗ ΔΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

65. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν (Π′) καὶ (Ρ′) τὰ ἡμιεπίπεδα τὰ ἀντικείμενα τῶν ἑδρῶν Π καὶ Ρ ἀντιστοίχως τῆς διέδρου γωνίας (Π, Ρ).

Θεωροῦμεν τὸ σύνολον (Χ) τῶν ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχικὴν εὐθεῖαν τὴν ἀκμὴν γ τῆς διέδρου (Π,Ρ) καὶ κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἕδρα Π καὶ τὸ σύνολον (Υ) τῶν ἡμιεπιπέδων μὲ ἀρχικὴν εὐθεῖαν τὴν γ, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Π) πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἕδρα (Ρ).

Ἡ τομὴ τῶν συνόλων (Χ) καὶ (Υ) εἶναι ἕνα σύνολον (Ζ) ἡμιεπιπέδων, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** *τῆς γωνίας (Π, Ρ).*

Τὰ στοιχεῖα (ἡμιεπίπεδα) τοῦ συνόλου (Ζ) ὀνομάζονται *ἐσωτερικὰ* ἡμιεπίπεδα τῆς γωνίας (Π,Ρ) ἢ ἁπλῶς ἡμιεπίπεδα τῆς γωνίας (Π,Ρ).

Τὸ σύνολον (Ζ′) τῶν ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχικὴν εὐθεῖαν τὴν ἀκμὴν α τῆς διέδρου γωνίας γ (Π,Ρ), ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι διάφορον τοῦ (Π) καὶ τοῦ (Ρ) καὶ δὲν εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (Π,Ρ), ὀνομάζεται *ἐξωτερικὸν* αὐτῆς ἡμιεπίπεδον.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου (Ζ') ὀνομάζονται *ἐξωτερικὰ ἡμιεπίπεδα* τῆς γω-
ίας (Π,Ρ) καὶ τὸ σύνολον αὐτῶν *ἐξωτερικὸν* αὐτῆς.

Τὰ σημεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων τοῦ συνόλου (Ζ), τὰ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν κμὴν γ τῆς διέδρου γωνίας (Π,Ρ), ὀνομάζονται *ἐσωτερικὰ σημεῖα* τῆς διέδρου αὶ τὰ σημεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων τοῦ συνόλου (Ζ') τὰ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν ἀκμὴν τῆς (Π,Ρ) *ἐξωτερικὰ σημεῖα* τῆς διέδρου.

6. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Ἡ ἕνωσις τῆς γωνίας (Π,Ρ) καὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ (Ζ) αὐτῆς ὀνο-μάζεται* **κυρτὴ γωνία** *(Π,Ρ).*

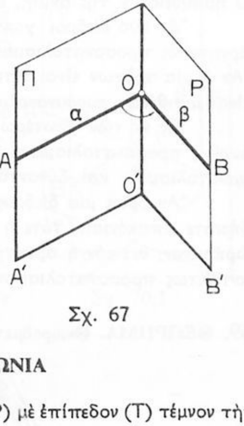
Ἡ ἕνωσις τῆς γωνίας (Π,Ρ) καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ (Ζ') αὐτῆς ὀνομάζεται **μὴ κυρτὴ** *γωνία (Π,Ρ).*

Ἐκ τῆς γωνίας ἑπομένως (Π,Ρ) ὁρίζονται μία κυρτὴ καὶ μία μὴ κυρτὴ ίεδρος γωνία (Π,Ρ).

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΣ ΓΩΝΙΑ ΔΙΕΔΡΟΥ

7. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Ἡ τομὴ μιᾶς κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς διέδρου γωνίας γ(Π, Ρ) μὲ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν γ αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως μία ἐπίπεδος κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) ἡ ὁποία ὀνομάζεται* **ἀντίστοιχος** *τῆς διέδρου γωνίας γ(Π,Ρ)*

Σημειοῦμεν ὅτι, ἡ ἀνωτέρω τομὴ (ΟΑ, ΟΒ) ἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου καθέτου, ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου, ἐπιπέδου. Πράγματι δύο τοιαῦται κάθετοι τομαὶ (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', ΟΒ') ἶναι γωνίαι ἴσαι. (28).



Σχ. 67

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΔΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

68. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** Ἔστω (α,β) ἡ τομὴ μιᾶς διέδρου γωνίας γ(Π, Ρ) μὲ ἐπίπεδον (Τ) τέμνον τὴν ἀκμὴν αὐτῆς [1] (α, β αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ κατὰ τὰς ὁποίας τέμνονται αἱ ἕδραι (Π) καὶ (Ρ) τῆς διέδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Τ)). Ἂς ὀνομάσωμεν γ τὴν μίαν ἀπὸ τὰς δύο ἡμιευθείας αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου ἀπὸ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Τ).

Ἂν ἡ διατεταγμένη τριὰς ἡμιευθειῶν (α, β, γ) ὁρίζῃ τὸν θετικὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον (εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη) θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ κυρτὴ δίεδρος γωνία γ (Π, Ρ) εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη (Σχ. 68.1) *καὶ ἡ μὴ κυρτὴ δίεδρος γωνία γ (Π, Ρ) ἀρνητικῶς προσανατολισμένη.*

Ἂν, ἀντιθέτως, ἡ διατεταγμένη τριὰς (α, β, γ) ὁρίζῃ τὸν ἀρνητικὸν προσανατολισμὸν

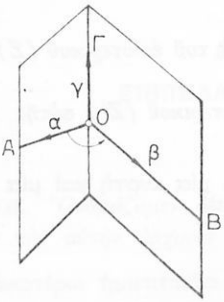
---

(1) Ἂν τὸ ἐπίπεδον (Τ) εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν γ, ἡ τομὴ αὐτοῦ μὲ τὴν δίεδρον εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν γ.

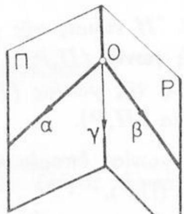
εἰς τὸν χῶρον (Σχ. 68.2), θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ κυρτὴ δίεδρος γ(Π, Ρ) εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη καὶ ἡ μὴ κυρτὴ δίεδρος γ(Π,Ρ) θετικῶς προσανατολισμένη.

Ἑρμηνεύοντες ἐποπτικῶς τὰ ἀνωτέρω σημειοῦμεν ὅτι :

Ἡ κυρτὴ δίεδρος γωνία γ(Π,Ρ) εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη, καθ' ὅσον ἡ τομὴ (α,β) αὐτῆς, ἡ ὁποία εἶναι μία κυρτὴ γωνία, θεωρουμένη ἀπὸ σημείου Γ τῆς ἀπὸ τοῦ



Σχ. 68.1



Σχ. 68.2

Ο ἡμιευθείας γ τῆς ἀκμῆς, εἶναι ἀντιστοίχως θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη.

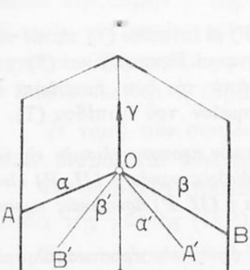
Ἂν δύο δίεδροι γωνίαι γ(Π,Ρ) καὶ γ′(Π′, Ρ′) εἶναι ἀμφότεραι θετικῶς ἢ ἀμφότεραι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι *ὁμοίως προσανατολισμέναι.*

Ἂν ἡ μία τούτων εἶναι θετικῶς καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητικῶς προσανατολισμένη θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι *ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.*

Ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, δύο δίεδροι γωνίαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν πάντοτε ὁμοίως προσανατολισμέναι, ἀφ' οὗ τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς θεωρουμένου προσανατολισμοῦ, καὶ δύνανται οὗτος νὰ ὁρισθῇ αὐθαιρέτως.

Ἂν ὅμως μία δίεδρος γ′ (Π′, Ρ′) εἶναι ὁμόλογος μιᾶς διέδρου γ(Π,Ρ), κατὰ μίαν οἱαδήποτε ἀπεικόνισιν, τότε ἡ ὁμόλογος γ′ τῆς ἡμιευθείας γ τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου γ(Π,Ρ) ἔχει ὡρισμένον, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, προσανατολισμόν, καὶ ἐπομένως αἱ δίεδροι εἶναι ὁμοίως ἢ ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.

69. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν κυρτὴν δίεδρον γωνία γ (Π, Ρ), σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς γ αὐτῆς καὶ τὰς ἡμιευθείας ΟΑ′ καὶ ΟΒ′, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας (Π) πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἕδρα (Ρ) καὶ ἡ δευτέρα πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας (Ρ) πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἕδρα (Π). Ἡ γωνία (ΟΑ′, ΟΒ′) καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς ἀντιστοίχου τῆς διέδρου γ (Π, Ρ) εἶναι παραπληρωματικαί.

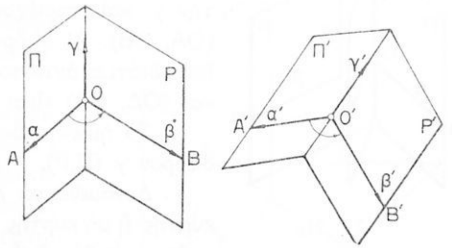


Σχ. 69

Ἀπόδειξις. Ἔστω (ΟΑ, ΟΒ) ἡ τομὴ τῆς διέδρου γ(Π, Ρ) μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας (ΟΑ′, ΟΒ′). Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν γ τῆς διέδρου, ἡ ἐν λόγῳ τομὴ (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ἀντίστοιχος τῆς διέδρου. Οὕτως, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι (ΟΑ′, ΟΒ′) καὶ (ΟΑ, ΟΒ) θεωρούμεναι ἀπὸ οἱουδήποτε σημείου εἰς ἀκμῆς γ τῆς διέδρου, εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (αἱ τριάδες γ, α, β καὶ γ,α′,β′ εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι). Ἑπομένως ἑκατέρα τούτων εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιθέτου τῆς ἄλλης, διότι ὡς πρώτη πλευρὰ ΟΑ′ ≡ α′ τῆς γωνίας (ΟΑ′, ΟΒ′) θεωρεῖται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΟΑ ≡ α τῆς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ).

ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

70. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο δίεδροι γωνίαι γ (Π,Ρ) καὶ γ(Π′, Ρ′) τῶν ὁποίων αἱ ἀκμαὶ εἶναι τυχοῦσαι, ἀσύμβατοι ἐν γένει, εὐθεῖαι τοῦ χώρου, ὀνομάζονται ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως* **ἴσαι** *ὅταν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσαι (28).*



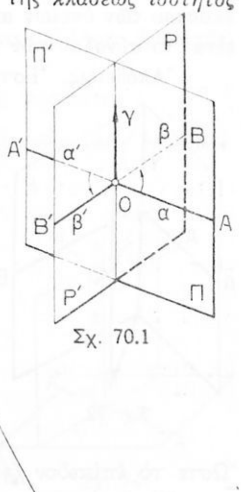
Σχ. 70

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν διέδρων γωνιῶν ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως ἰσότητος τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν.

Δυνάμεθα, ὡς ἐκ τούτου, νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς *κλάσεως ἰσότητος* εἰς τὸ σύνολον τῶν διέδρων γωνιῶν, τὰς σχέσεις *διατάξεως*, τὴν ἔννοιαν τῶν *διαδοχικῶν* διέδρων γωνιῶν καὶ τὰς πράξεις : *Προσθέσεως* καὶ *ἀφαιρέσεως*, ὡς καὶ τοῦ *πολλαπλασιασμοῦ* ἐπὶ φυσικὸν ἢ ρητὸν ἀριθμόν.

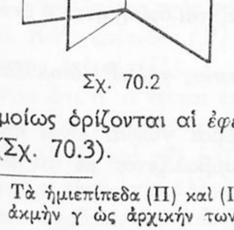
Ὁμοίως ὁρίζονται αἱ ἔννοιαι τῆς *εὐθείας διέδρου γωνίας*, ὡς καὶ τῆς *μηδενικῆς* καὶ *πλήρους* διέδρου γωνίας.

Ἡ ἔννοια τῶν *ἀντικειμένων* διέδρων γωνιῶν εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐννοίας τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου. Οὕτω :

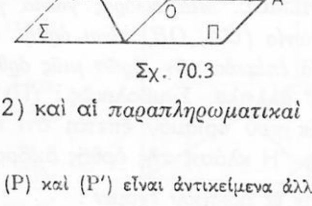


Σχ. 70.1

Δύο δίεδροι γωνίαι γ(Π,Ρ) καὶ γ(Π′,Ρ′) ὀνομάζονται **ἀντικείμεναι ἀλλήλων,** *ὅταν αἱ ἕδραι ἑκάστης τούτων εἶναι ἀντικείμεναι τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης* [1] (Σχ. 70.1).



Σχ. 70.2



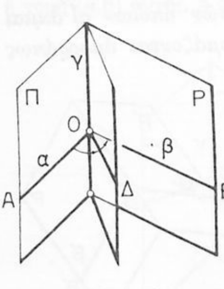
Σχ. 70.3

Ὁμοίως ὁρίζονται αἱ *ἐφεξῆς* (Σχ. 70.2) καὶ αἱ *παραπληρωματικαὶ* δίεδροι γωνίαι (Σχ. 70.3).

(1) Τὰ ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (Π′), ὡς καὶ τὰ (Ρ) καὶ (Ρ′) εἶναι ἀντικείμενα ἀλλήλων καὶ ἔχουν τὴν ἀκμὴν γ ὡς ἀρχικήν των ἡμιευθεῖαν.

ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΔΙΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ

71. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν δίεδρον γωνίαν γ (Π,Ρ) καὶ τὴν διχοτόμον ΟΔ μιᾶς ἀντιστοίχου γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) αὐτῆς (τομῆς τη μὲ τυχὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν γ αὐτῆς). Ἔ- στω (Δ) τὸ ἡμιεπίπεδον (γ, Δ) τὸ ἔχον ἀρχικὴν εὐθεῖαι τὴν γ καὶ περιέχον τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς γωνία (ΟΑ, ΟΒ). Αἱ δίεδροι γωνίαι γ (Π,Δ) καὶ γ(Δ,Ρ) εἶνα ἴσαι, διότι αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδαι γωνίαι (ΟΑ,ΟΔ καὶ (ΟΔ, ΟΒ) εἶναι ἴσαι.



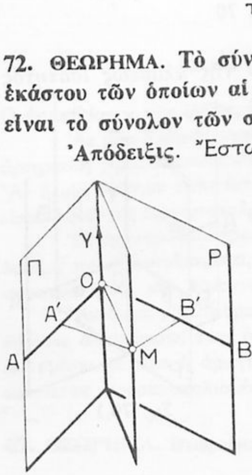
Σχ. 71

Τὸ ἡμιεπίπεδον (γ, Δ) ὀνομάζεται **διχοτομοῦν** τὴ δίεδρον γ (Π,Ρ).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδο κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς διέδρου γ (Π,Ρ) χωρίζει τὴν δίεδρο ταύτην εἰς δύο διέδρους γωνίας ἴσας.

72. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων διέδρου γωνίας γ(Π,Ρ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν της εἶναι ἴσα εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τοῦ συνόλου. Ἂν εἶναι ΜΑ' καὶ ΜΒ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου γωνίας γ (Π,Ρ), θὰ εἶνα ΜΑ' = ΜΒ'.



Σχ. 72

Ἐπειδὴ ἡ γ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὰς εὐθεία ΜΑ' καὶ ΜΒ', θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Τ) αὐ τῶν. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Τ) τὴν ἀκμὴν γ τῆς διέδρου γωνίας. Ἡ γωνία (ΟΑ', ΟΒ εἶναι ἀντίστοιχος τῆς διέδρου. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίω τριγώνων ΟΑ'Μ καὶ ΟΒ'Μ, τῶν ὁποίων ἡ ὑποτε νουσα ΟΜ εἶναι κοινὴ καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ ΜΑ' κ ΜΒ' ἴσαι, ἕπεται ὅτι (ΟΑ', ΟΜ) = (ΟΜ, ΟΒ'), ἤτ ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας (ΟΑ', ΟΒ'

Ὥστε τὸ ἐπίπεδον (γ, Μ) εἶναι τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΟΡΘΗ ΔΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ - ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ ΕΠ' ΑΛΛΗΛΑ

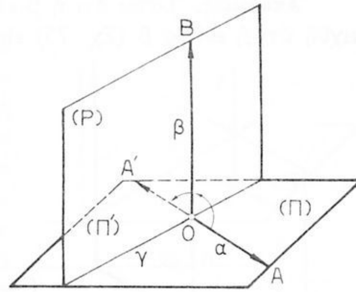
73. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία δίεδρος γωνία γ(Π,Ρ) ὀνομάζεται* **ὀρθή**, *ὅταν ἡ ἀντίστοιχ αὐτῆς γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ὀρθή.*

Τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν μιᾶς ὀρθῆς διέδρου γωνίας γ(Π,Ρ) ὀνομάζονται **κ θετα ἐπ' ἄλληλα.** Συμβολικῶς : (Π) ⊥ (Ρ).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρ ἀλλήλας. Ἡ κλάσις τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολ $\frac{\pi}{2}$. Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν :

$\gamma\,(\Pi,P) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (OA,\, OB) = \frac{\pi}{2}$ ἢ $\gamma\,(\Pi,P) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\Pi) \perp (P)$.

Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου (Σ) μίαν ὀρθὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ τὴν άθετον γ ἐπὶ τὸ (Σ) κατὰ τὴν κορυφὴν Ο τῆς ἀνωτέρω γωνίας, ἡ δίεδρος γωνία ἡ ἔχουσα ἀκμὴν τὴν γ καὶ ἕδρας τὰ ἡμιεπίπεδα (γ, Α) ≡ (Π) καὶ (γ, Β) ≡ (Ρ), εἶναι ια ὀρθὴ δίεδρος γωνία, διότι ἡ γωνία ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ὀρθὴ γωνία καὶ ἀντίστοιχος τῆς ὁρισθείσης γωνίας γ (Π,Ρ).



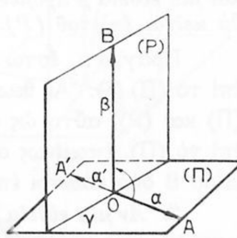
Σχ. 73

Ἂν εἶναι ΟΑ′ ἡ ἡμιευθεῖα ἡ ἀντικειμένη τῆς ΟΑ, τὸ ἡμιεπίπεδον (γ, Α′) ≡ (Π′) καὶ τὸ (γ, Β) ≡ (Ρ) ὁρίζουν μίαν δευτέραν δίεδρον γωνίαν γ(Ρ, Π′) τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος γωνία (ΟΒ, ΟΑ′) εἶναι ὀρθή. Αἱ δίεδροι γωνίαι γ (Π,Ρ) καὶ γ(Ρ,Π′) εἶναι ἴσαι. Τὸ ἡμιεπίπεδον (Ρ) δύναται νὰ θεωρηθῇ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γωνίαν γ (Π,Π′), τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι ἡμιεπίπεδα ἀντικείμενα ἀλλήλων, ἤτοι τῆς εὐθείας διέδρου γωνίας γ (Π,Π′).

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ἀποδεικνύονται αἱ ἑξῆς προτάσεις :

74. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εὐθεῖα β εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τότε κάθε ἐπίπεδον (Ρ) περιέχον τὴν β εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) σημεῖον τῆς β, γ ἡ τομὴ τῶν (Π) καὶ (Ρ) καὶ α ἡ διὰ τοῦ Ο εὐθεῖα τοῦ (Π) ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν γ. Ἐπειδὴ ἡ β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α (45), ἤτοι ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ὀρθή. Ὅμως, ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ἀντίστοιχος τῆς διέδρου γ(Π,Ρ), διότι τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν γ, ἀφοῦ ἡ γ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας α καὶ β. Ἑπομένως (73) ἡ δίεδρος γ(Π,Ρ) εἶναι ὀρθὴ καὶ λόγῳ τούτου τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ἑδρῶν αὐτῆς εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, ἤτοι τὸ διὰ τῆς β ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

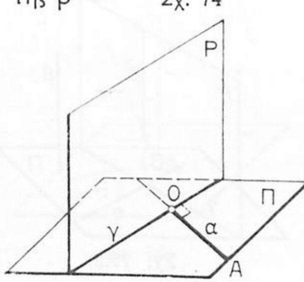


Σχ. 74

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖαν α παράλληλον πρὸς τὸ (Π) ἢ κειμένην ἐπ' αὐτοῦ. Κάθε ἐπίπεδον (Ρ) κάθετον ἐπὶ τὴν α εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).*

Ἔστω ὅτι ἡ α κεῖται ἐπὶ τοῦ (Π). Τότε τὸ (Π), ὡς περιέχον τὴν α εἶναι (74) κάθετον ἐπὶ τὸ (Ρ), ἤτοι καὶ (Ρ) ⊥ (Π).

Ἂν ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π), θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐπὶ τοῦ (Π) παράλληλον α′

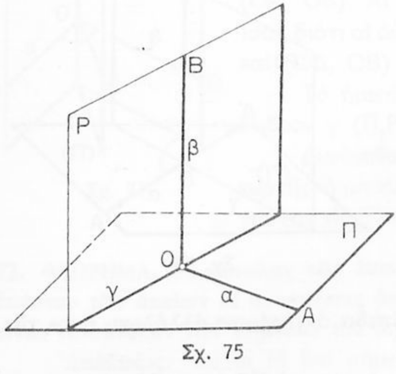


Σχ. 74.1

πρὸς τὴν α. Ἡ α' εἶναι (48, Πόρισμα 1) κάθετος ἐπὶ τοῦ (Ρ). Ἀναγόμεθα οὕ-
τως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

**75. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα καὶ μί-
εὐθεῖα β τοῦ ἑνὸς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν γ τῶν ἐπιπέδων τούτων, τότε ἡ ε
θεῖα β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ β εἶναι εὐθεῖα τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὴν γ. Θὰ ἀπο-
δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα β (Σχ. 75) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Θεωροῦμεν μίαν τῶ



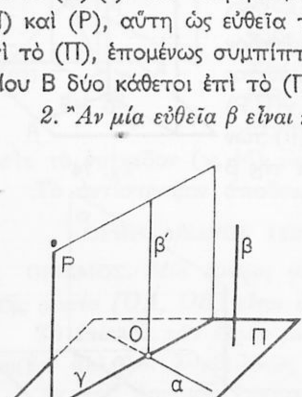
Σχ. 75

διέδρων τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰ κάθετ
ἐπ' ἄλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Ἡ δ
εδρος αὐτὴ γ (Π, Ρ) εἶναι (73) ὀρθ
ἑπομένως οἱαδήποτε ἀντίστοιχος αὐτῆ
εἶναι ὀρθή. Ἔστωσαν : Ο τὸ ἐπὶ τῆς
σημεῖον τῆς β, ΟΒ ἡ ἡμιευθεῖα τῆς
ἡ κειμένη ἐπὶ τῆς ἕδρας (Ρ) τῆς θεω
ρουμένης διέδρου, καὶ ΟΑ ἡ ἐπὶ τῆς
δρας (Π) ἡμιευθεῖα ἡ κειμένη ἐπὶ τῆς κα
θέτου α ἐπὶ τὴν γ, τῆς κειμένης ἐπὶ τῆ
ἕδρας (Π). Ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ὀρθ
διότι εἶναι ἀντίστοιχος τῆς ὀρθῆς διέδρο
γ(Π,Ρ). Οὕτως, ἡ β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴ
γ, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ἐπὶ τὴν α. Ἐπομένως (46) ἡ β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλ
καὶ μία εὐθεῖα β ἀγομένη ἀπὸ σημείου τοῦ (Ρ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), τότε αὐτ
θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ (Ρ).*

Πράγματι, ἔστω Β τὸ σημεῖον τοῦ (Ρ) ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄγεται ἡ κάθετο
ἐπὶ τὸ (Π) (1). Ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ Β κάθετον β' ἐπὶ τὴν τομὴν γ τῶ
(Π) καὶ (Ρ), αὕτη ὡς εὐθεῖα τοῦ (Ρ) κάθετος ἐπὶ τὴν γ, θὰ εἶναι (75) κάθετο
ἐπὶ τὸ (Π), ἑπομένως συμπίπτει μὲ τὴν β, διότι ἄλλως θὰ ὑπῆρχον διὰ τοῦ ση
μείου Β δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ (Π), τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον (51).

*2. Ἂν μία εὐθεῖα β εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τότε κάθε ἐπίπεδον (Ρ) πα
ράλληλον πρὸς τὴν β εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).*



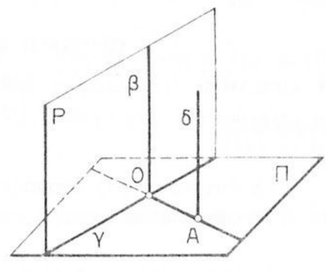
Σχ. 75.2

Πράγματι, ἔστω (Ρ) ἕνα τυχὸν ἐπίπε
δον παράλληλον πρὸς τὴν β, καὶ γ ἡ τομ
του μὲ τὸ (Π). Ἡ διὰ τοῦ τυχόντος σημείο
Ο τῆς γ παράλληλος β' πρὸς τὴν β κεῖτα
(18 Πόρισμα 3) ἐπὶ τοῦ (Ρ). Ἡ εὐθεῖα ὅμω
β' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), διότι ἡ παράλ
ληλος της β εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό. Ὥστε τ
(Ρ) περιέχει εὐθεῖαν β' κάθετον ἐπὶ τὸ (Π) κα
λόγω τούτου εἶναι (74) κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

(1) Τὸ Β δύναται νὰ εἶναι καὶ σημεῖον τῆς τομῆς γ τῶν (Π) καὶ (Ρ).

76. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἕν ἐκ τούτων εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω δ μία κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) καὶ Α τὸ ἐπὶ τοῦ (Π) ἴχνος αὐτῆς. Θεωροῦμεν τὴν κάθετον ΑΟ ≡ α ἐπὶ τὴν τομὴν γ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ). Ἡ ΑΟ εἶναι (75) κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ).

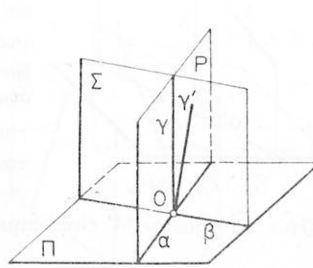


Σχ. 76

Ἔστω β ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) μὲ τὸ ἐπίπεδον τῶν α καὶ δ. Ἡ α, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν β. Ἀλλὰ ἡ α εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν δ, διότι ἡ δ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Αἱ εὐθεῖαι ἑπομένως β καὶ δ, κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α αὐτοῦ, εἶναι παράλληλοι. Ἡ δ ἑπομένως, ὡς παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν β τοῦ (Ρ), εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό (17).

77. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἕκαστον ἐκ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Σ) εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τότε καὶ ἡ τομὴ γ τῶν (Ρ) καὶ (Σ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).**

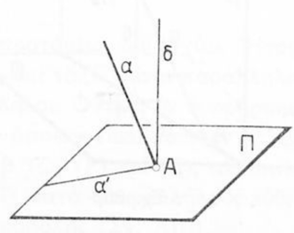
Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο ἡ τομὴ τῆς γ καὶ τοῦ (Π). Τὸ Ο εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν α καὶ β κατὰ τὰς ὁποίας τὸ (Π) τέμνεται ἀπὸ τὰ (Ρ) καὶ (Σ) ἀντιστοίχως. Ἡ διὰ τοῦ Ο κάθετος γ′ ἐπὶ τὸ (Π) κεῖται (75, Πόρισμα 1) ἐπὶ τοῦ (Ρ) καὶ δι' ὅμοιον λόγον ἐπὶ τοῦ (Σ). Οὕτως, ἡ γ′, ὡς τομὴ τῶν (Ρ) καὶ (Σ) συμπίπτει μὲ τὴν γ. Ὥστε ἡ γ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).



Σχ. 77

78. **ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα α δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), ὑπάρχει ἐπίπεδον (Ρ), περιέχον τὴν α καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π), καὶ ἕνα μόνον.**

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τῆς α καὶ τὴν διὰ τούτου κάθετον δ ἐπὶ τὸ (Π). Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τῶν εὐθειῶν α καὶ δ, ὡς διερχόμενον διὰ τῆς δ, εἶναι (74) κάθετον ἐπὶ τὸ (Π). Ἐξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς τοῦ (Ρ), ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς α καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π). Πράγματι ἂν ἕνα τοιοῦτον ἐπίπεδον (Σ) ὑπῆρχε, τότε ἡ α, ὡς τομὴ



Σχ. 78

τῶν καθέτων ἐπὶ τὸ (Π) ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Σ), θὰ ἦτο (77) κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως. Εἰς τὸ σχῆμα (78) ἐμφανίζεται ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ α εἶναι τέμνουσα τὸ (Π), καὶ τὸ σημεῖον Α τὸ ἐπὶ τοῦ (Π) σημεῖον αὐτῆς. Ἡ εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο ἐμφανιζομένη εὐθεῖα α εἶναι ἡ τομὴ τῶν (Π) καὶ (Ρ).

ΠΡΟΒΟΛΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

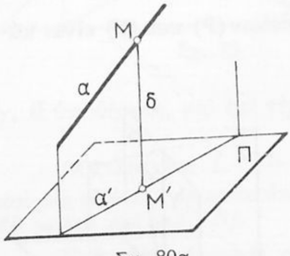
79. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ὀρθὴν προβολὴν** *ἢ ἁπλῶς* **προβολὴν** *σχήματος (Φ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), τὸ σύνολον (Φ') τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ (Φ) ἐπὶ τὸ (Π).*

Τὸ ἐπίπεδον (Π) ὀνομάζεται **ἐπίπεδον προβολῆς**.

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

80. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖα α μὴ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας α ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ' ἡ προβολὴ ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τῆς α ἐπὶ τὸ (Π). Τὸ ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν α καὶ τὴν προβάλλουσαν δ τὸ Μ ἐπὶ τὸ (Π), εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ (Π), ὡς περιέχον τὴν κάθετον ΜΜ' ἐπ' αὐτὸ (74). Ἐξ ἄλλου τὸ ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι γνωστὸν ἐπίπεδον, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρηθέντος σημείου Μ τῆς α. Πράγματι, ἀφοῦ ἡ α δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), τὸ (Ρ) εἶναι τὸ διὰ τῆς α μοναδικὸν τῆς ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π) (78). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ ἡ τομὴ α' τῶν (Π) καὶ (Ρ) εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα (1).

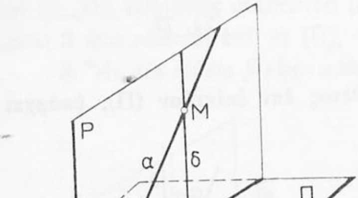


Σχ. 80α

Οὕτω, τὸ σημεῖον Μ' εἶναι σημεῖον μιᾶς γνωστῆς εὐθείας τῆς α'.

Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) ὀνομάζεται **προβάλλ**... τὴν α ἐπὶ τὸ (Π).

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Μ' τῆς ... θείας α' εἶναι προβολὴ ἑνὸς σημείου Μ τῆς ... Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ ... κάθετον δ ἐπὶ τὸ (Π), αὕτη θὰ κεῖται (75, ... ρισμα 1) ἐπὶ τοῦ Ρ καὶ ἑπομένως τέμνει τὴν ... Ἔστω Μ τὸ κοινὸν σημεῖον. Ἡ προβολὴ ... Μ εἶναι τὸ Μ', ἀφοῦ ἡ δ εἶναι ἡ διὰ τοῦ ... κάθετος ἐπὶ τὸ (Π).



Σχ. 80β

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν ἡ α εἶναι τέμνουσα τὸ (Π)

---

(1) Ὁρίζεται ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων, ὡς τομὴ δύο γνωστῶν ἐπιπέ...

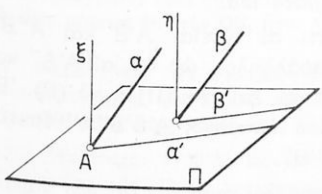
προβολὴ α' αὐτῆς ἐπὶ τὸ (Π) διέρχεται διὰ τοῦ ἐπὶ τοῦ (Π) σημείου Α τῆς α. Πράγματι, τὸ σημεῖον Α συμπίπτει μὲ τὴν προβολήν του ἐπὶ τὸ (Π), ἤτοι προβάλλεται ἐπὶ τὸ (Π) καθ' ἑαυτό. Ἡ διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) κεῖται ἐπὶ τοῦ (Ρ), ὡς παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν δ τοῦ (Ρ), ἀγομένη ἀπὸ τοῦ σημείου Α αὐτοῦ.

2. Ἂν ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π), ἡ προβολή της α' ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α (20).

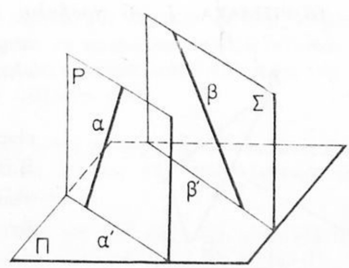
3. Ἂν ἡ α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), ὅλα τὰ σημεῖα τῆς α προβάλλονται κατὰ τὸ ἐπὶ τοῦ (Π) ἴχνος Α αὐτῆς.

81. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ προβολαὶ α' καὶ β' δύο παραλλήλων εὐθειῶν α καὶ β, ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Τὰ ἐπίπεδα τὰ προβάλλοντα τὰς α καὶ β ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι παράλληλα, διότι ὁρίζονται ἀπὸ εὐθείας ἀντιστοίχως παραλλήλους. Πράγματι, αἱ διὰ τῶν κοινῶν σημείων Α καὶ Β τῶν α καὶ β μὲ τὸ (Π) κάθετοι ξ καὶ η ἐπὶ τὸ (Π) αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὰ προβάλλοντα τὰς α καὶ β ἐπίπεδα, εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ (Π). Ἐξ ἄλλου καὶ αἱ α καὶ β εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πα-



Σχ. 81α

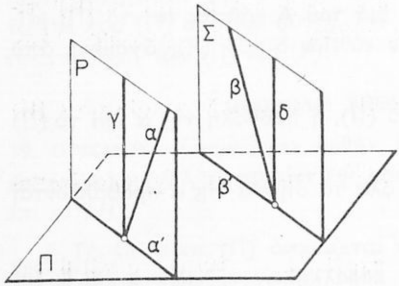


Σχ. 81β

ράλληλοι. Αἱ α' καὶ β' εἶναι ἑπομένως παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν ἀνωτέρω προβαλλόντων ἐπιπέδων μὲ τὸ (Π).

Σημειοῦμεν ὅτι ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δὲν ἰσχύει. Ἤτοι : Ἂν αἱ προβολαὶ α' καὶ β' τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι παράλληλοι, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι. Οὕτως, ἂν θεωρήσωμεν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ), ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι κάθετον ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον (Π), τότε δύο οἱαιδήποτε εὐθεῖαι α καὶ β τῶν (Ρ) καὶ (Σ), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐν γένει ἀσύμβατοι, προβάλλονται ἐπὶ τὸ (Π) κατὰ παραλλήλους εὐθείας: τὰς τομὰς τῶν (Ρ) καὶ (Σ) μὲ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς (Σχ. 81β).

82. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ προβολαὶ α′ καὶ β′ δύο εὐθειῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), εἶναι παράλληλοι, τότε τὰ προβάλλοντα αὐτὰς ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.



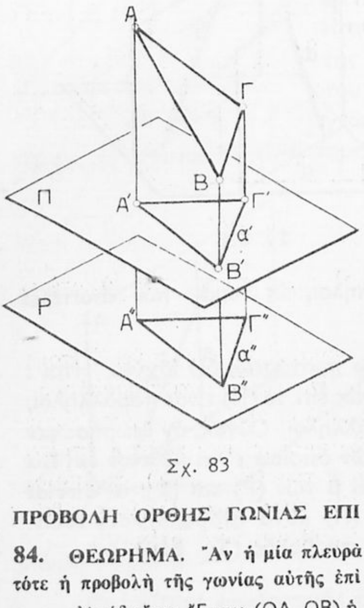
Σχ. 82

Ἀπόδειξις. Τὰ προβάλλοντα τὰς α καὶ β ἐπίπεδα (Ρ) καὶ (Σ), ὡς κάθετα ἐπὶ τὸ (Π), περιέχουν ἀντιστοίχως δύο εὐθείας γ καὶ δ καθέτους ἐπὶ τὸ (Π) καὶ ἑπομένως παραλλήλους. Οὕτω τὸ (Ρ) περιέχει τὰς α′ καὶ γ καὶ τὸ (Σ) τὰς β′ καὶ δ, ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς α′ καὶ γ. Ἑπομένως τὰ (Ρ) καὶ (Σ) εἶναι παράλληλα (22).

83. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ προβολαὶ α′ καὶ α″ μιᾶς εὐθείας α ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Αἱ α′ καὶ α″ εἶναι αἱ τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) μὲ τὸ προβάλλον τὴν εὐθεῖαν α ἐπὶ αὐτά.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Αἱ προβολαὶ Α′Β′ καὶ Α″Β″ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως, εἶναι εὐθ. τμήματα ἴσα.*



Σχ. 83

Πράγματι αἱ εὐθεῖαι Α′Β′ καὶ Α″Β″ εἶναι (55) παράλληλοι, ὡς καὶ αἱ Α′Α″ καὶ Β′Β″ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ (Π) ἢ τὸ (Ρ). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ἑπομένως Α′Β′Β″Α″ ἕπεται ὅτι Α′Β′ = Α″Β″.

2. Αἱ προβολαὶ τριγώνου ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι τρίγωνα ἴσα.

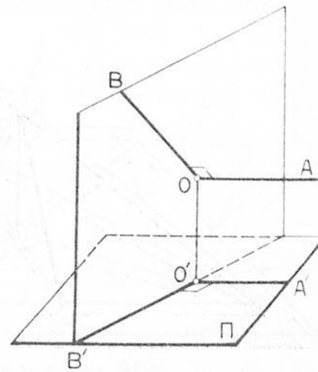
3. Αἱ προβολαὶ γωνίας, ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι γωνίαι ἴσαι.

4. Αἱ προβολαὶ πολυγώνου ἐπὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα εἶναι πολύγωνα ἴσα.

ΠΡΟΒΟΛΗ ΟΡΘΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

84. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἡ μία πλευρὰ ὀρθῆς γωνίας εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον (Π) τότε ἡ προβολὴ τῆς γωνίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι γωνία ὀρθή.

Ἀπόδειξις: Ἔστω (ΟΑ, ΟΒ) ἡ ὀρθὴ γωνία (Σχ. 84), ΟΑ ἡ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) πλευρὰ αὐτῆς, καὶ (Ο'Α', Ο'Β') ἡ προβολὴ τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ἐπὶ τὸ (Π). Ἐπειδὴ ἡ ΟΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π), κάθε ἐπίπεδον δι' αὐτῆς, ἑπομένως καὶ τὸ προβάλλον αὐτὴν ἐπὶ τὸ (Π), τέμνει τὸ (Π) κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΑ, ἤτοι ἡ Ο'Α' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΑ. Ἡ ΟΑ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ ἐπὶ τὴν ΟΟ' (τὴν προβάλλουσαν τὸν κορυφὴν Ο ἐπὶ τὸ (Π)), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ προβάλλον τὸν ΟΒ ἐπὶ τὸ (Π), ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ Ο'Β', ὡς προβολὴ τῆς ΟΒ ἐπὶ τοῦ (Π). Ἑπομένως ἡ ΟΑ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν Ο'Β'. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ παράλληλος Ο'Α' πρὸς τὴν ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Ο'Β', ἤτοι ἡ γωνία (Ο'Α', Ο'Β') εἶναι ὀρθή. Εὐκόλως ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἑξῆς, σχετικὰ πρὸς τὸ ἀνωτέρω, θεωρήματα:



Σχ. 84

85. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν ἡ πλευρὰ ΟΑ μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον (Π) καὶ ἡ προβολὴ τῆς γωνίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι γωνία ὀρθή, τότε καὶ ἡ προβαλλομένη γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ὀρθή.**

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ Ο'Α' (Σχ. 84) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς Ο'Β' καὶ ΟΟ', εὐθείας τοῦ προβάλλοντος τὴν ΟΒ ἐπιπέδου, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ προβάλλον τὴν ΟΒ ἐπίπεδον, ἑπομένως ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΟΒ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ παράλληλος ΟΑ πρὸς τὴν Ο'Α' θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ, ἤτοι ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ὀρθή.

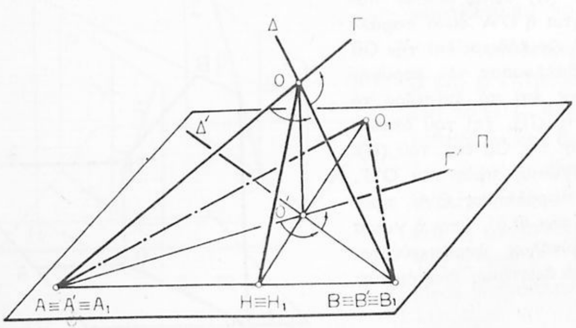
86. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν ἡ προβολὴ (Ο'Α', Ο'Β') μιᾶς ὀρθῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ἐπὶ ἐπίπεδον (Π), εἶναι γωνία ὀρθή, τότε ἡ μία τουλάχιστον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς προβαλλομένης γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς.**

Ἀπόδειξις: Ἡ Ο'Α', ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς Ο'Β' καὶ ΟΟ' (Σχ. 84), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν τούτων, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ προβάλλον τὸν ΟΒ ἐπὶ τὸ (Π). Ἑπομένως ἡ Ο'Α' εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΟΒ. Ὥστε : ἡ ΟΒ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν Ο'Α' καὶ κάθετος, ἐξ ὑποθέσεως, πρὸς τὴν ΟΑ. Ἤτοι ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τοῦ προβάλλοντος τὴν ΟΑ ἐπὶ τὸ (Π). Ἂν αἱ ΟΑ καὶ Ο'Α' εἶναι παράλληλοι, ἡ πρότασις ἔχει ἀποδειχθῆ διότι ἡ ΟΑ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν Ο'Α' θὰ εἶναι (17) παράλληλος πρὸς τὸ (Π). Ἂν αἱ ΟΑ καὶ Ο'Α' δὲν εἶναι παράλληλοι τότε ἡ ΟΒ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν καὶ λόγω τούτου (76) παράλληλος πρὸς τὸ (Π).

87. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἡ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) μιᾶς ὀρθῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι γωνία ἀμβλεῖα.**

Ἀπόδειξις: Ἔστω Η ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὴν ΑΒ (Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς). Τὸ σημεῖον Η κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Ἡ Ο'Η (Ο' ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὸ (Π)), εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (53). Ἐξ ἄλλου εἶναι $HO > HO'$ διότι ἡ ΟΗ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΟ'Η. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΗΟ', καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Η πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Ο', τὸ σημεῖον O_1 ὥστε $HO_1 = HO$.

Ἐπειδὴ $HO_2 > HO'$, τὸ σημεῖον O_1 κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο' πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Η, ἤτοι τὸ Ο' κεῖται μεταξὺ τῶν Η καὶ O_1. Ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΗΑ καὶ $O_1H_1A_1$ (εἶναι ἴσαι αἱ κάθετοι αὐτῶν πλευραὶ ἀντιστοίχως) ἕπεται ὅτι $O_1A_1 = OA$.



Σχ. 87

Δι' ὅμοιον λόγον (ἴσα τρίγωνα ΟΗΒ καὶ $O_1H_1B_1$) ἕπεται ὅτι $O_1B_1 = OB$. Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ $O_1A_1B_1$ εἶναι ἴσα καὶ λόγω τούτου $(O_1A_1, O_1B_1) =$

$$= (OA, OB) = \frac{\pi}{2}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $O_1A_1B_1$ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ σημεῖον Ο' εἶναι σημεῖον τοῦ ὕψους του (κεῖται μεταξὺ τῶν O_1 καὶ H_1) ἕπεται ὅτι

$(O'A', O'B') > (O_1A_1, O_1B_1)$

Ἤτοι ἡ γωνία (Ο'Α', Ο'Β') εἶναι ἀμβλεῖα.

Σημειοῦμεν ὅτι :

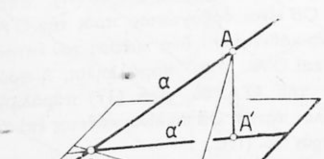
1. Ἡ προβολὴ (Ο'Γ', Ο'Δ') τῆς γωνίας (ΟΓ, ΟΔ), τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ἀμβλεῖα γωνία, ὡς ἴση πρὸς τὴν (Ο'Α', Ο'Β').

2. Ἡ προβολὴ (Ο'Β', Ο'Γ') τῆς γωνίας (ΟΒ,ΟΓ) εἶναι ὀξεῖα γωνία, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς (Ο'Α', Ο'Β'), ἡ ὁποία ἀπεδείχθη ἀμβλεῖα.

ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

88. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖαν α τέμνουσαν τὸ (Π) καὶ μὴ κάθετον ἐπ' αὐτό. Ἐκ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου (Π) τῶν διερχομένων διὰ τοῦ ἐπὶ τούτου ἴχνους Ο τῆς α, ἡ σχηματίζουσα μὲ τὴν α τὴν ἐλαχίστην γωνίαν εἶναι ἡ προβολὴ α' αὐτῆς ἐπὶ τὸ (Π).

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 88) τυχοῦσαν εὐθεῖαν β τοῦ (Π), διερχομένην διὰ τοῦ Ο, τὴν προβολὴν Α' ἑνὸς τυχόντος σημείου Α τῆς α ἐπὶ τὸ (Π) καὶ τὸ σημεῖον Μ τῆς β διὰ τὸ ὁποῖον ΟΜ = ΟΑ' Εἶναι (5...) ΑΑ' < ΑΜ. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΑ' καὶ ΟΑΜ τῶν ὁποίων αἱ δύο πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι (ΟΑ κοινὴ καὶ ΟΜ = ΟΑ') καὶ αἱ τρίται ἄνισοι (ΑΑ' < ΑΜ) ἕπεται ὅτι



Σχ. 88

$$(OA, OA') < (OA, OM)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐλαχίστη γωνία (ΟΑ, ΟΑ')= ... ὀνομάζεται **κλίσις** τῆς α ὡς πρὸς τὸ (Π). ... τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν τοῦ (Π) ἡ σχηματίζουσα μὲ τὴν α τὴν μεγίστην γωνίαν εἶναι ἡ ἀντικειμένη ΟΑ'' τῆς προβολῆς ΟΑ' τῆς ἡμιευθείας ΟΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν α' (88) εὐθεῖαι, εἴτε κεῖνται ἐ... ὄχι ἐπὶ τοῦ (Π) σχηματίζουν μὲ τὴν α τὴν αὐτὴν ἐλαχίστην γωνίαν θ.*

2. Ἡ κλίσις θ τῆς εὐθείας α ὡς πρὸς τὸ (Π) εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ὀξείας γωνίας τῆς α μὲ τυχοῦσαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

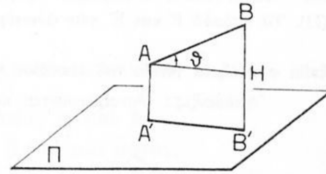
Ἂν ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π), λέγομεν ὅτι ἡ κλίσις αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ (Π), εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία (ἡ προβολὴ α′ τῆς α ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α).

Ἂν ἡ α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π), ἡ γωνία της μὲ τὸ (Π) εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία.

3. Ἂν εἶναι $A'B'$ ἡ προβολὴ εὐθ. τμήματος AB, ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) θὰ εἶναι :

$$A'B' = AB.\ \sigma\upsilon\nu\theta,$$

ἔνθα θ ἡ κλίσις τῆς εὐθείας AB ὡς πρὸς τὸ (Π).



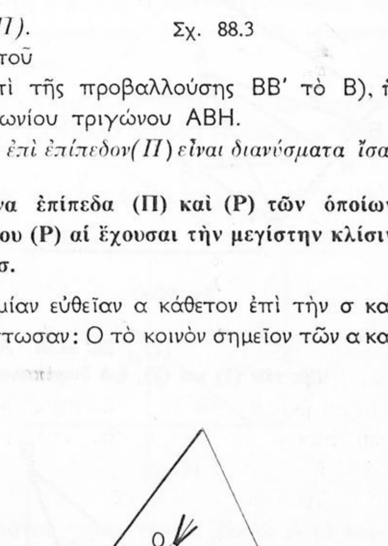
Σχ. 88.3

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ Α παράλληλον ΑΗ πρὸς τὴν Α′Β′ (Η ἐπὶ τῆς προβαλλούσης ΒΒ′ τὸ Β), ἡ ἀνωτέρω ἰσότης προκύπτει ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΗ.

4. Αἱ προβολαὶ δύο ἴσων διανυσμάτων ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) εἶναι διανύσματα ἴσα.

89. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ὁποίων ἔστω σ ἡ τομή. Ἐκ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) αἱ ἔχουσαι τὴν μεγίστην κλίσιν ὡς πρὸς τὸ (Π) εἶναι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν σ.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ (Ρ) μίαν εὐθεῖαν α κάθετον ἐπὶ τὴν σ καὶ μίαν εὐθεῖαν β πλαγίαν ὡς πρὸς τὴν σ. Ἔστωσαν: Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν α καὶ β, Α καὶ Μ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν α καὶ β μὲ τὴν σ καὶ Ο′ ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὸ (Π). Ἡ Ο′Α εἶναι (53) κάθετος ἐπὶ τὴν σ, καὶ ἑπομένως ἡ Ο′Μ πλαγία ὡς πρὸς αὐτήν. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι Ο′Α < Ο′Μ. Ἔστω Μ′ τὸ σημεῖον τῆς Ο′Α (πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο′ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Α) διὰ τὸ ὁποῖον Ο′Μ′ = Ο′Μ. Τὸ σημεῖον Μ′ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Ο′. Ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΟ′Μ καὶ ΟΟ′Μ′ ἕπεται ὅτι :



Σχ. 89

(Μ′Ο, Μ′Ο′) = (ΜΟ, ΜΟ′). Αἱ γωνίαι (ΑΟ, ΑΟ′) καὶ (ΜΟ, ΜΟ′) εἶναι ἀντιστοίχως αἱ κλίσεις τῶν α καὶ β ὡς πρὸς τὸ (Π).

Ἐπειδὴ (ΑΟ, ΑΟ′) > (Μ′Ο, Μ′Ο′) (ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΟΑΟ′) θὰ εἶναι:

$$(AO,\ AO') > (MO,\ MO')$$

Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν κάθετον α ἐπὶ τὴν σ εὐθεῖαι τοῦ (Ρ) θὰ ὀνομάζωνται εὐθεῖαι **μεγίστης κλίσεως** αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ (Π).

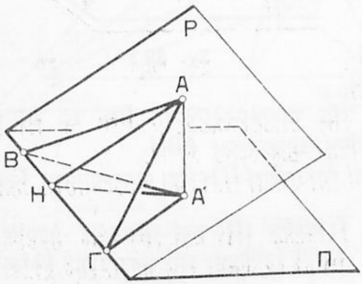
ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

90. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὴν προβολὴν Α΄Β΄Γ΄ αὐτοῦ ἐπὶ ἐπίπεδον (Π). Τὰ ἐμβαδὰ Ε καὶ Ε΄ τῶν ἀνωτέρω τριγώνων ἀντιστοίχως, συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως:

$$E' = E \cdot \text{συν}\,\varphi$$

ἔνθα φ ἡ ὀξεῖα γωνία τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς.

᾿Απόδειξις: ᾿Αποδεικνύεται κατὰ πρῶτον ἡ πρότασις εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐπίπεδον προβολῆς (Π) εἶναι παράλληλον πρὸς μίαν πλευράν, π.χ. τὴν ΒΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θεωροῦμεν ὡς ἐπίπεδον προβολῆς, τὸ διὰ τῆς ΒΓ παράλληλον πρὸς τὸ (Π). ῾Ως γνωστὸν (83, Πόρισμα 2) αἱ προβολαὶ τοῦ τριγώνου ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι τρίγωνα ἴσα καὶ ἑπομένως ἰσοδύναμα.



Σχ. 90α

῎Εστω Α΄ΒΓ ἡ προβολὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ ΑΗ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. ῾Η Α΄Η εἶναι (53) κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἤτοι τὸ εὐθ. τμῆμα Α΄Η εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου Α΄ΒΓ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ΒΓ. ῾Η γωνία (ΗΑ,ΗΑ΄) $= \varphi$ εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) (ἀντίστοιχος τῆς ὀξείας διέδρου αὐτῶν). Εἶναι :

$$(1)\quad 2E' = \text{ΒΓ} \cdot \text{Α΄Η} \quad \text{καὶ} \quad (2)\ 2 \cdot E = \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΗ}$$

᾿Εκ τῶν (1) καὶ (2), διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν :

$$\frac{E'}{E} = \frac{\text{Α΄Η}}{\text{ΑΗ}},$$ καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\text{Α΄Η}}{\text{ΑΗ}}$ εἶναι τὸ συν φ, θὰ ἔχωμεν :

$$E' = E \cdot \text{συν}\,\varphi$$

Σχ. 90β

῎Αν τὸ ἐπίπεδον προβολῆς ἔχῃ τυχοῦσαν θέσιν ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον, θεωροῦμεν (Σχ. 90β) τὴν προβολὴν τοῦ τριγώνου ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς καὶ διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς, π.χ. τῆς Α, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. ῎Εστω Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ Β΄ καὶ Γ΄ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προβολῆς. Τὰ τρίγωνα ΑΒ΄Ζ καὶ ΑΖΓ΄ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ προβολαὶ τῶν ΑΒΖ καὶ ΑΖΓ. ᾿Αλλὰ τὰ τρίγωνα ταῦτα ΑΒΖ καὶ ΑΖΓ εἶναι τρίγωνα τῆς προηγουμένης περιπτώσεως (τὸ ἐπίπεδον προβολῆς περιέχει τὴν πλευρὰν ΑΖ αὐτῶν). ῾Επομένως ἔχομεν :

$$\text{Εμβ ΑΒ΄Ζ} = \text{Εμβ ΑΒΖ}.\text{συν}\ \varphi \quad \text{καὶ} \quad \text{Εμβ ΑΖΓ΄} = \text{Εμβ ΑΖΓ}.\ \text{συν}.\ \varphi.$$

Εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν (Ζ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ), τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει διὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω κατὰ μέλη. Πράγματι, εὑρίσκομεν :

$$\text{Εμβ } AB'Z + \text{Εμβ } AZ\Gamma' = \text{συν } \varphi \, (\text{Εμβ } ABZ + \text{Εμβ } AZ\Gamma)$$

$$\text{ἤτοι : } \mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot \text{συν}\varphi$$

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις γενικεύεται, εὐκόλως, εἰς τὸ τυχὸν κυρτὸν πολύγωνον καὶ εἰς τὸν κύκλον.

ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

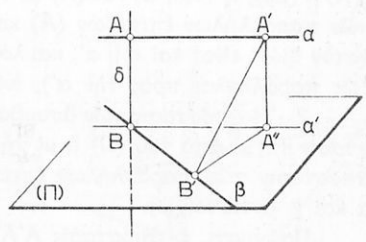
91. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β.

1. Ὑπάρχει εὐθεῖα δ κάθετος ἐπὶ τὰς α καὶ β καὶ μία μόνον.

2. Ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς δ μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως, τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι τὸ μικρότερον ἐκ τῶν εὐθ. τμημάτων, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εἶναι σημεῖα τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως.

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω (Π) τὸ ἐπίπεδον τὸ περιέχον τὴν β καὶ παράλληλον πρὸς τὴν α, καὶ α′ ἡ προβολὴ τῆς α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἡ εὐθεῖα α′ εἶναι (17) παράλληλος πρὸς τὴν α.

Ἐξ ἄλλου, ἡ α′ τέμνει τὴν β, διότι εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν (α′ ||β) αἱ α καὶ β, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν α′, θὰ ἦσαν παράλληλοι, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἀσύμβατοι.



Σχ. 91

Ἔστω Β τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν α′ καὶ β. Ἡ διὰ τοῦ Β κάθετος δ ἐπὶ τὸ (Π) τέμνει τὴν α. Πράγματι, τὸ ἐπίπεδον (Α), τὸ προβάλλον τὴν α ἐπὶ τὸ (Π), εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ (Π) καὶ ἑπομένως (75 Πόρισμα 1) ἡ διὰ τοῦ σημείου Β τῆς τομῆς τῶν (Α) καὶ (Π) κάθετος δ ἐπὶ τὸ (Π) κεῖται εἰς τὸ (Α), καὶ λόγω τούτου τέμνει τὴν α. Ἔστω Α τὸ κοινὸν σημεῖον. Ἡ εὐθεία δ, ἤτοι ἡ ΑΒ, εἶναι κοινὴ κάθετος τῶν α καὶ β, διότι ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν β καὶ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α′ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν α, ἀφοῦ ἡ τελευταία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α′.

Ἐξ ἄλλου δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς τῆς ΑΒ, δευτέρα κάθετος κοινὴ τῶν α καὶ β. Πράγματι, ἔστω ὅτι ἡ Α′Β′ (Σχ. 91) εἶναι κοινὴ κάθετος τῶν α καὶ β. Ἡ Α′Β′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν β καὶ , ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν α, ὀρθογώνιος πρὸς τὴν α′ (α′ ||α). Ἑπομένως ἡ Α′Β′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Τοῦτο ὅμως ἄγει εἰς ἄτοπον, διότι ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ Α′ κάθετον Α′Α″ ἐπὶ τὴν α′, ἡ εὐθεῖα αὕτη Α′Α″ θὰ εἶναι (75) κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Οὕτω θὰ ἔχωμεν διὰ τοῦ Α′ δύο καθέτους Α′Β′ καὶ Α′Α″ ἐπὶ τὸ (Π), διαφόρους ἀλλήλων.

2. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου κατὰ τὴν γωνίαν Α″, τριγώνου Α′Α″Β′ προκύπτει ὅτι Α′Β′>Α′Α″, καὶ ἑπομένως ὅτι Α′Β′>ΑΒ (διότι Α′Α″ = ΑΒ).

Ἡ εὐθεῖα δ ὀνομάζεται **κοινὴ κάθετος** τῶν α καὶ β, τὸ δὲ εὐθ. τμῆμα ΑΒ **ἀπόστασις** τῶν α καὶ β.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς πρόβλημα :

Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν, νὰ κατασκευασθῇ κοινὴ κάθετος τούτων·

Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος, θὰ ἔχωμεν :

Ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τὸ περιέχον τὴν β καὶ παράλληλον πρὸς τὴν α, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Α) : τοῦ προβάλλοντος τὴν α ἐπὶ τὸ (Π).

Ἂν εἶναι (Ρ) τὸ διὰ τῆς α ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς τὴν β, ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ), ἀγομένη διὰ σημείου Β τῆς β, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Β) : τοῦ προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν β ἐπὶ τὸ (Ρ). Οὕτως, ἡ δ ὁρίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο ἀνωτέρω γνωστῶν ἐπιπέδων (Α) καὶ (Β).

Ἡ ἐν λόγω τομὴ δ ὑπάρχει, ἤτοι τὰ ἐπίπεδα (Α) καὶ (Β) τέμνονται.

Πράγματι, τὰ (Α) καὶ (Β) εἶναι διάφορα ἀλλήλων, διότι εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν αἱ α καὶ β θὰ ἦσαν εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἀσύμβατοι.

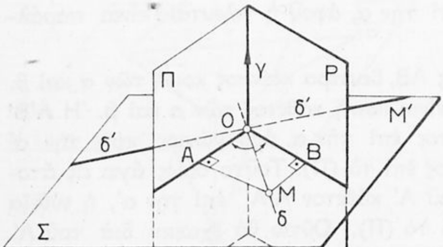
Τὰ (Α) καὶ (Β) δὲν εἶναι παράλληλα, διότι εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ((Α) || (Β)), ἡ τομὴ α′ τοῦ (Π) μὲ τὸ (Α) καὶ ἡ β θὰ ἦσαν παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Α) καὶ (Β) μὲ τὸ (Π). Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν διότι εἶναι καὶ α || α′, καὶ λόγω τούτου θὰ ἦσαν παράλληλοι αἱ α καὶ β (ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν α′), ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἀσύμβατοι.

2. Ἡ ἀπόστασις τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν α καὶ β εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς α ἀπὸ τοῦ (Π) ἢ μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς β ἀπὸ τοῦ (Ρ), ἤτοι μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως.

Πράγματι, ἡ ἀπόστασις Α′Α″ τοῦ τυχόντος σημείου Α′ τῆς α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι σταθερὰ (ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου Α′ τῆς α) καὶ ἴση πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

92. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Θεωροῦμεν σημεῖον Μ τοῦ χώρου καὶ ὀνομάζομεν ΜΑ καὶ ΜΒ τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :

(1) ΜΑ = ΜΒ.



Σχ. 92

Λύσις : Θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον Μ τοῦ συνόλου (Σχ. 92). Αἱ εὐθεῖαι ΜΑ καὶ ΜΒ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὰ (Π) καὶ (Ρ), εἶναι ὀρθογώνιοι πρὸς τὴν τομὴν γ αὐτῶν, καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν γ. Ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΒ μὲ τῶν δίεδρον γ(Π, Ρ), εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ὁποίας ἀνήκει τὸ θεωρούμενον σημεῖον Μ, εἶναι ἡ ἀντίστοιχος (ΟΑ, ΟΒ) τῆς διέδρου ταύτης.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ (ΜΑ = ΜΒ καὶ ὑποτείνουσα ΟΜ κοινή) ἕπεται ὅτι (ΟΜ, ΟΑ) = – (ΟΜ, ΟΒ), ἤτοι ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι ἡ διχοτόμος δ τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ ἡμιεπίπεδον (γ, Μ) εἶναι τὸ διχοτομοῦν (71) τὴν ὡς ἄνω δίεδρον, ἤτοι ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ διχοτομοῦντος τούτου ἐπιπέδου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὸ Μ δύναται νὰ εἶναι σημεῖον ἑνὸς ἐκ τῶν τεσσάρων ἐπιπέδων τῶν διχοτομούντων τὰς διέδρους τὰς ὁριζομένας ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

Σημειοῦμεν ὅτι, ἐκ τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων διχοτομούντων ἐπιπέδων, τὰ διχοτομοῦντα δύο ἀντικειμένας ἐκ τῶν ὁριζομένων διέδρων γωνιῶν, εἶναι ἀντικείμενα (ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδον) ὡς καὶ τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἄλλας δύο ἀντικειμένας διέδρους.

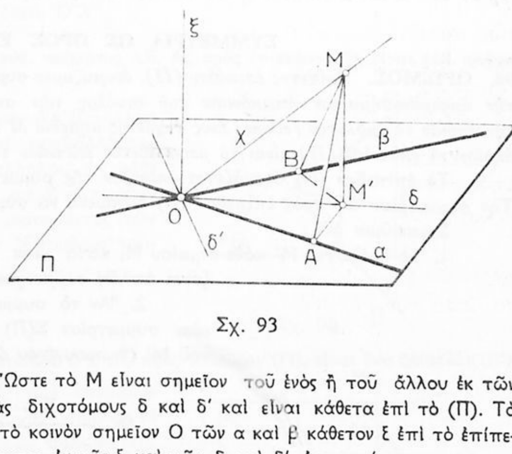
Τὰ ἀνωτέρω δύο ἐπίπεδα (γ, δ) καὶ (γ, δ′) (δ, δ′ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν (α,β), εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, διότι ἡ ἀντίστοιχος (δ, δ′) μιᾶς τῶν ὁριζομένων, ἐκ τῶν (Π) καὶ (Ρ), διέδρων γωνιῶν εἶναι ὀρθή, ἀφοῦ $\delta \perp \delta'$.

93. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β. Θεωροῦμεν σημεῖον Μ τοῦ χώρου καὶ ὀνομάζομεν ΜΑ καὶ ΜΒ τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης:

$$(1) \qquad MA = MB\ .$$

Λύσις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τοῦ συνόλου (Σχ. 93), καὶ ΜΑ ΜΒ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως.

Θεωροῦμεν τὴν προβολὴν Μ′ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) καὶ α καὶ β. Αἱ εὐθεῖαι Μ′Α καὶ Μ′Β εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως (53). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΜ′Α καὶ ΜΜ′Β (εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι ΜΑ = ΜΒ καὶ ΜΜ′ κοινή) προκύπτει ὅτι Μ′Α = Μ′Β. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ Μ′ εἶναι σημεῖον γνωστοῦ σχήματος τοῦ ἐπιπέδου (Π), τοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ τὰς διχοτόμους δ καὶ δ′ τῶν ὑπὸ τῶν α καὶ β ὁριζομένων γωνιῶν. Ἐξ ἄλλου τὸ ἐπίπεδον (δ, Μ), ὡς περιέχον τὴν ΜΜ′ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ (Π). Ὥστε τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου ἐκ τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς διχοτόμους δ καὶ δ′ καὶ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ (Π). Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα περιέχουν τὴν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν α καὶ β κάθετον ξ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) αὐτῶν, καὶ ἑπομένως ὁρίζονται ἐκ τῆς ξ καὶ τῶν δ καὶ δ′ ἀντιστοίχως.



Σχ. 93

Ἀντιστρόφως, ἂν εἶναι Μ ἕνα σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν ἀνωτέρω ἐπιπέδων (ξ, δ) ἢ (ξ, δ′), αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν α καὶ β εἶναι ἴσαι. Πράγματι, ἔστωσαν ΜΑ καὶ ΜΒ αἱ ἀποστάσεις αὗται τοῦ σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου (ξ, δ), ἀπὸ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τὴν κάθετον ΜΜ′ ἐπὶ τὴν δ. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τῶν α καὶ β (75).

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων (53) ἔχομεν ὅτι αἱ Μ′Α καὶ Μ′Β εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς α καὶ β. Ἀλλὰ Μ′Α = Μ′Β, διότι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου δ. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων κατὰ τὰς γωνίας (Μ′Μ, Μ′Α) καὶ (Μ′Μ, Μ′Β) τριγώνων ΜΜ′Α καὶ ΜΜ′Β, τῶν ὁποίων εἶναι ἴσαι αἱ κάθετοι πλευραὶ ἕπεται ὅτι: ΜΑ = ΜΒ.

Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα (ξ, δ) καὶ (ξ, δ′) ὀνομάζονται **διχοτομοῦντα** τὰς ἐπιπέδους γωνίας (α, β).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης (1), εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν α καὶ β, τοῦ περιέχοντος τὴν μεσοπαράλληλον αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ΟΧ ἑκάστη τῶν ὁποίων σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ δύο τεμνομένας εὐθείας α καὶ β, εἶναι δύο ἐπίπεδοι δέσμαι εὐθειῶν ἔχουσαι κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν α καὶ β καὶ κείμεναι ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν διχοτομούντων τὰς γωνίας τῶν (α, β).*

Πράγματι, ὡς ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΒΜ προκύπτει (ΟΜ κοινὴ αὐτῶν ὑποτείνουσα, καὶ ΜΑ = ΜΒ) ἡ ΟΜ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς α καὶ β.

Ἀντιστρόφως δέ, κάθε εὐθεῖα ΟΧ σχηματίζουσα ἴσας γωνίας μὲ τὰς α καὶ β κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου ἐκ τῶν ἀνωτέρω διχοτομούντων τὰς γωνίας (α, β) ἐπιπέδων. Πράγματι, ἂν εἶναι Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ΟΧ καὶ ΜΑ, ΜΒ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὴ α καὶ β ἀντιστοίχως, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ (ΟΜ κοινὴ καὶ (ΟΑ, ΟΜ) = (ΟΒ, ΟΜ)), ἕπεται ὅτι ΜΑ = ΜΒ καὶ ἐξ αὐτῆς (93) ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ προηγουμένου γεωμ. τόπου, ἤτοι ἡ ΟΜ (ἢ ΟΧ) κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς α καὶ β, εἶναι τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ διὰ τῆς μεσοπαραλλήλου τῶν α καὶ β ἐπιπέδου, τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

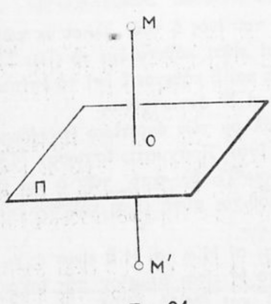
94. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δοθέντος ἐπιπέδου (Π), ὀνομάζομεν* **συμμετρίαν** *ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐφ' ἑαυτοῦ, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὁμόλογον (εἰκὼν) ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τοῦ χώρου εἶναι τὸ σημεῖον Μ' διὰ* **ὁποῖον** *τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ'.*

Τὸ ἐπίπεδον (Π) ὀνομάζεται *ἐπίπεδον* τῆς συμμετρίας (Σχ. 94).

Τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) δυνάμεθα νὰ συμβολίζωμεν μὲ τὸ σύμβολον Σ(Π).

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὸ ὁμόλογον Μ' κάθε σημείου Μ, κατὰ μίαν συμμετρίαν Σ(Π), δύναται νὰ ὀνομάζεται ἁπλῶς *συμμετρικὸν* τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).



Σχ. 94

2. Ἂν τὸ συμμετρικὸν (εἰκὼν) ἑνὸς σημείου Μ κατὰ μίαν συμμετρίαν Σ(Π) εἶναι τὸ Μ', τότε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ' (θεωρουμένου ὡς προτύπου) εἶναι τὸ σημεῖον Μ, ἤτοι :

$$M \xrightarrow{\Sigma} M' \Rightarrow M' \xrightarrow{\Sigma} M.$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ἀντιστοιχοῦν *διττῶς* πρὸς ἄλληλα.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀπεικόνισις (συμμετρία ὡς πρὸς ἐπίπεδον) εἶναι *ἐνελικτική*. [1]

3. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν *ἀντίστροφον* τῆς Σ(Π) ἀπεικόνισιν [2], εἰς τὸ σημεῖον Μ', ὅταν τοῦτο θεωρῆται ὡς εἰκών, ἀντιστοιχεῖ ὡς πρότυπον τὸ σημεῖον Μ, ἤτοι :

$$M' \xrightarrow{\Sigma} M,$$

ἕπεται ὅτι : $\Sigma^{-1} = \Sigma$.

---

(1) Περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ὅρου τούτου θὰ γίνῃ λόγος εἰς ἑπομένην τάξιν.

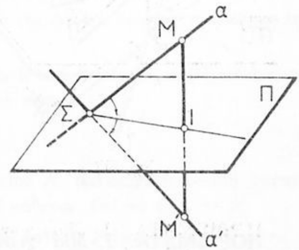
(2) Ἢ μετασχηματισμόν.

Τὰ ὁμόλογα τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), κατὰ τὴν ὡς πρὸς τοῦτο συμμετρίαν Σ(Π), εἶναι *διπλᾶ* σημεία τῆς ἀπεικονίσεως, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἕκαστον τούτων ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἑαυτό.

Συμμετρικὸν ἑνὸς σχήματος (Φ), ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), ὀνομάζομεν τὸ σύνολον (Φ′) τῶν συμμετρικῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ (Φ), κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ(Π).

95. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας ὡς πρὸς ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις: Ἔστω (Π) τὸ ἐπίπεδον τῆς συμμετρίας καὶ α μία δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸ (Π) κατὰ τὸ σημεῖον Σ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς α καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ′ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ (Π) (Σχ. 95). Ἡ εὐθεῖα ΣΜ′ κεῖται ἐπὶ γνωστοῦ ἐπιπέδου: τοῦ προβάλλοντος τὴν εὐθεῖαν α ἐπὶ τὸ (Π). Ἐπειδὴ (ΣΙ, ΣΜ′) = − (ΣΙ, ΣΜ), ἡ εὐθεῖα ΣΜ′ εἶναι γνωστὴ ὡς συμμετρικὴ τῆς α ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΣΙ, ἡ ὁποία τελευταία, εἶναι γνωστή, ὡς τομὴ τοῦ (Σ) μὲ τὸ ἐπίπεδον τὸ προβάλλον τὴν α ἐπὶ τὸ (Π). Ἔστω α′ ἡ εὐθεῖα ΣΜ′. Κάθε σημεῖον Μ′ τῆς α′ εἶναι συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου Μ τῆς α. Ὥστε τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας α εἶναι ἡ εὐθεῖα α′.

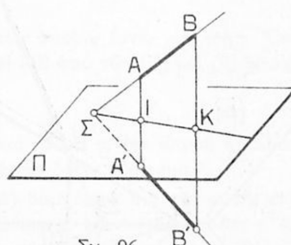


Σχ. 95

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας ΟΧ, ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἡμιευθεῖα Ο′Χ′.*

96. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), εἶναι εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.

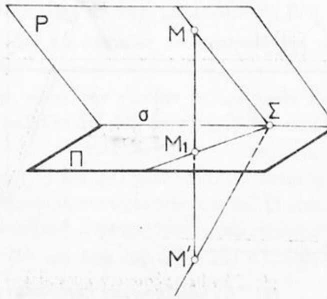
Ἀπόδειξις. Τὸ τετράπλευρον ΑΑ′Β′Β εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ ΑΑ′ καὶ ΒΒ′, αἱ προβάλλουσαι τὰ Α καὶ Β ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ (Π). Ἐξ ἄλλου ἡ ΙΚ (Ι καὶ Κ αἱ προβολαὶ τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὸ (Π)), εἶναι μεσοκάθετος τῶν βάσεων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ τοῦ τραπεζίου. Ἑπομένως τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι Α′Β′ = ΑΒ.



Σχ. 96

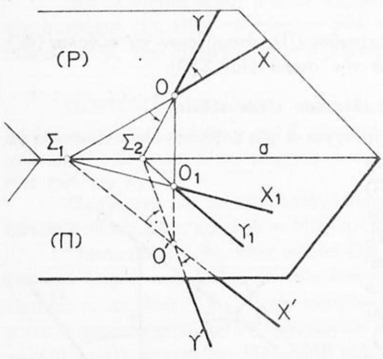
97. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου (Ρ), ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἕνα ἐπίπεδον (Ρ′).

Ἀπόδειξις. Ἔστω σ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ). Θεωροῦμεν (Σχ. 97) τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ (Ρ) καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ′ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ (Π). Ἔστω M_1 τὸ κοινὸν σημεῖον (προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ (Π)) τῆς ΜΜ′ μὲ τὸ (Π). Ἡ ΜΜ′ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν σ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Ἔστω Σ ἡ τομὴ τῆς σ μὲ τὸ διὰ τῆς ΜΜ′ ἐπίπεδον (Σ) τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν σ. Ἡ $ΣM_1$ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Σ). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $ΣMM_1$ καὶ $ΣM'M_1$ τῶν ὁποίων αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι ($ΣM_1$ κοινή), ἕπεται ὅτι ($ΣM_1$, ΣΜ) = − ($ΣM_1$, ΣΜ′). Ἀλλὰ ἡ γωνία ($ΣM_1$, ΣΜ) εἶναι γνωστὴ (γωνία τῶν (Π) καὶ (Ρ)), ἑπομένως καὶ ἡ γωνία ($ΣM_1$, ΣΜ′) εἶναι γνωστή. Οὕτω, τὸ ἐπίπεδον



Σχ. 97

(P′), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σ καὶ τὴν ΣΜ′ εἶναι γνωστόν, ὡς διερχόμενον διὰ τῆς σ καὶ σχηματίζον μὲ τὸ (Π) γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἀντίθετον τῆς ($ΣΜ_1$, ΣΜ).



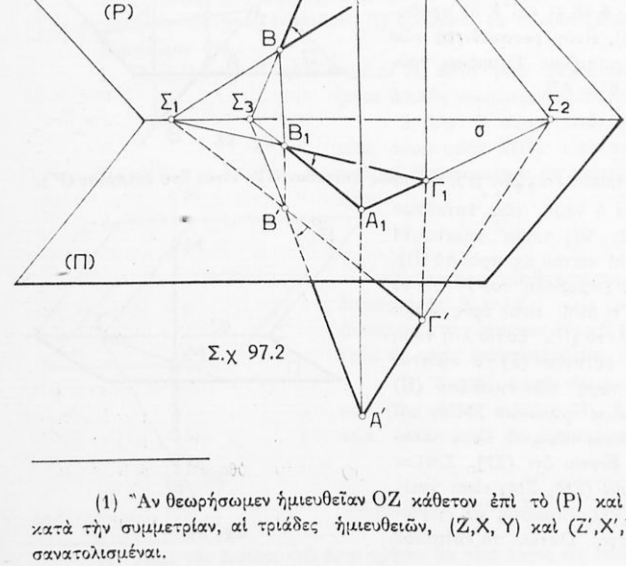
Σχ. 97.1

Ἐξ ἄλλου, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου τούτου (P′), τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ (Π) εἶναι σημεῖον τοῦ (P).

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ Μ′ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π) καὶ ὀνομάσωμεν Μ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὸ (P), ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $ΣΜΜ_1$ καὶ $ΣΜ'Μ_1$, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὅταν θεωρήσωμεν τὸ διὰ τῆς ΜΜ′ ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν σ, προκύπτει ὅτι: $Μ_1Μ' = Μ_1Μ$, ἤτοι ὅτι τὸ Μ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ′ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Ὥστε, τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἐπιπέδου (P), ὡς πρὸς τὸ (Π), εἶναι τὸ (P′).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Μία γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ἡ συμμετρικὴ (Ο′Χ′, Ο′Υ′) αὐτῆς, ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι.*



Σ.χ 97.2

Πράγματι, ἂν εἶναι $Σ_1$ καὶ $Σ_2$ τὰ ἐπὶ τῆς τομῆς σ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) τῆς γωνίας (ΟΧ,ΟΥ)· κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν (ΟΧ,Ο′Χ′)καὶ (ΟΥ,Ο′Υ′), ἐκ τῶν τριγώνων $ΟΣ_1Σ_2$ καὶ $Ο'Σ_1Σ_2$, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι (96) ἀντιστοίχως ἴσαι, ἔπεται (Σχ. 97.1) ὅτι :

$(ΟΣ_1,ΟΣ_2) = -(Ο'Σ_1,Ο'Σ_2)$,

καὶ ἑπομένως[1] ὅτι :

$(ΟΧ,ΟΥ) = -(Ο'Χ',Ο'Υ')$.

2. *Τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π) τρίγωνα ἢ πολύγωνα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα,*

Πράγματι, αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι (96) ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ἀντίθετοι (Σχ. 97.2)

(1) Ἂν θεωρήσωμεν ἡμιευθεῖαν ΟΖ κάθετον ἐπὶ τὸ (P) καὶ τὴν ὁμόλογον αὐτῆς Ο′Ζ′ κατὰ τὴν συμμετρίαν, αἱ τριάδες ἡμιευθειῶν, (Ζ,Χ, Υ) καὶ (Ζ′,Χ′,Υ′,) εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν δίεδρον γωνίαν γ(Π,Ρ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
(1) Ἂν τὰ Α καὶ Β ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῆς ἀκμῆς γ τῆς διέδρου, τότε τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀπέχουν ἴσον καὶ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (Π) τῶν ἑδρῶν ἀντιστοίχως, καί,
(2) Ἂν τὰ Α καὶ Β ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν (Ρ) καὶ (Π) τῆς διέδρου ἀντιστοίχως, τότε τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀπέχουν ἴσον καὶ ἀπὸ τῆς ἀκμῆς γ αὐτῆς.

2. Δίδονται : δίεδρος γωνία γ(Π,Ρ) ἕνα σημεῖον Α τῆς ἕδρας (Π) καὶ ἕνα σημεῖον Β τῆς ἕδρας (Ρ). Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ τέμνον τὴν δίεδρον κατὰ γωνίαν ὀρθήν.

3. Δίδεται δίεδρος γωνία γ(Π, Ρ) καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῆς ἕδρας (Π). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἕδρας (Ρ) σημεῖον Α ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι :
1. Ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α καὶ ἰσοσκελές.
2. Ἰσόπλευρον.

4. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (α) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τοῦ Α, παράλληλον πρὸς τὴν α καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π).

5. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ κατὰ τὴν κορυφὴν Α ἕνα σημεῖον Α'. Ὀνομάζομεν Η καὶ Η' τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΗ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α'ΒΓ.

6. Δίδονται τρία ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ), τεμνόμενα κατὰ τὸ σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων (Π), (Ρ), (Σ).

7. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδαν (Π) καὶ (Ρ) τῶν ὁποίων ἔστω γ ἡ τομή. Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τῶν (Π) καὶ (Ρ) ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην : $MA + MB = \lambda$.
Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

8. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ εὐθεῖα α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τῆς α, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν (Π) καὶ (Ρ) νὰ ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ.

9. Θεωροῦμεν τέσσαρα ἐπίπεδα (Α), (Β), (Γ), (Δ) διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ αὐτῶν μὲ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα τότε καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' τῶν ἀνωτέρω ἐπιπέδων μὲ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε', ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.

10. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ διὰ τῆς α ἐπίπεδον (Ρ) τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν β εἶναι κάθετον ἐπὶ ὅλα τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῆς β.

11. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ μεσοκάθετα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας δ.

12. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) ἕνα ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἕνα σημεῖον Σ, ὥστε : $\Sigma A = \Sigma B = \Sigma \Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΣΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

13. Δίδονται : Δύο κάθετα ἐπ' ἄλληλα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ὁποίων ἔστω γ ἡ τομή, ἕνα σημεῖον Ο τῆς γ καὶ ἕνα σημεῖον Α τοῦ (Π). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Ο εὐθεῖαν ΟΧ τοῦ (Ρ) καὶ τὴν προβολὴν Η τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΟΧ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Η.

14. Θεωροῦμεν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ δύο εὐθείας α καὶ β καθέτους ἀντιστοίχως ἐπ' αὐτά. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
Ἂν τὰ (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, τότε αἱ α καὶ β εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ἀντιστρόφως :

Ἂν αἱ α καὶ β εἶναι ὀρθογώνιοι τότε τὰ (Π) καὶ (Ρ) εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.

15. Θεωροῦμεν : ἐπίπεδον (Π), ἕνα κύκλον (Ο) κείμενον ἐπὶ τοῦ (Π), μίαν διάμετρον ΑΒ τοῦ (Ο), δύο εὐθείας α καὶ β, τεμνούσας τὸ (Π) εἰς τὰ Α καὶ Β ἀντιστοίχως, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) καὶ ἕνα σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ο). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ καὶ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.

16. Θεωροῦμεν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας ε καὶ ε', τέσσαρα σημεῖα Α,Β, Γ, Δ τῆς ε ὥστε : $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ} = k$ καὶ τὰς προβολὰς Α', Β', Γ', Δ' τῶν ἀνωτέρω σημείων ἐπὶ τὴν ε'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Ἂν $\frac{ΑΑ'}{ΒΒ'} = k$, τότε : $\frac{ΑΓ'}{Γ'Β} = k$.
2. Τὰ ἐπίπεδα (Γ, ε') καὶ (Δ, ε') εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.

17. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) ἕνας κύκλος (Ο) καὶ μία εὐθεῖα δ καὶ ἐκτὸς τοῦ (Π) ἕνα σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη ε τοῦ κύκλου (Ο), ὥστε τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὸ Α καὶ τὰς δ καὶ ε ἀντιστοίχως νὰ εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.

18. Θεωροῦμεν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν γ(Π,Ρ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
1. Ἂν ἡ τομὴ (ΟΑ, ΟΒ) τῆς γ(Π, Ρ) καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (Τ) εἶναι γωνία ὀρθή, τότε ἡ μία τουλάχιστον ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΟΑ καὶ ΟΒ αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν γ τῆς διέδρου γωνίας γ(Π, Ρ), καί,
2. Ἂν ἡ μία τουλάχιστον τῶν πλευρῶν τῆς τομῆς (ΟΑ, ΟΒ) τῆς ὀρθῆς διέδρου γ(Π,Ρ) καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (Τ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν γ αὐτῆς, τότε ἡ (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι γωνία ὀρθή.

19. Δίδεται ὀρθὴ δίεδρος γωνία γ(Π,Ρ) καὶ εὐθεῖα δ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον περιέχον τὴν δ καὶ τέμνον τὴν δίεδρον κατὰ γωνίαν ὀρθήν.

20. Δίδεται ὀρθὴ δίεδρος γωνία γ(Π, Ρ) καὶ σημεῖον Α τῆς ἀκμῆς γ αὐτῆς.
1. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ Α καὶ τέμνουν τὴν δίεδρον κατὰ γωνίαν ὀρθήν.
2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν ἐπὶ τὰ ἀνωτέρω ἐπίπεδα ἑνὸς ἄλλου δοθέντος σημείου Β τῆς ἀκμῆς.

21. Δίδονται : ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) κύκλος Ο(r) καὶ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέτρου Ο αὐτοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ (Π), τὸ σημεῖον Σ διὰ τὸ ὁποῖον $ΟΣ = r$. Ἔστωσαν : Α καὶ Β δύο σημεῖα τοῦ (Ο), α καὶ β αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ εἰς τὰ Α καὶ Β καὶ δ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (Α) καὶ (Β), τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὸ Σ καὶ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δίεδρος γωνία (Α, Β) εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας :
1. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ
2. Ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ὀρθή.

22. Δίδονται : Ἐπίπεδον (Π), μία εὐθεῖα α κάθετος ἐπὶ αὐτὸ καὶ μία εὐθεῖα β πλαγία πρὸς αὐτό. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς α, καὶ τὸ ἐπίπεδον (Σ) τὸ διερχόμενον διὰ τῆς β καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ (Ρ). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν τριῶν ἐπιπέδων (Π), (Ρ), (Σ).

23. Δίδεται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) τρίγωνον ΑΒΓ. Ἔστω δ ἡ διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ (Π). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α' τῆς δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος :
1. Τῶν κέντρων βάρους G' τῶν τριγώνων Α'ΒΓ.
2. Τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α'ΒΓ ἰχνῶν τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν αὐτοῦ.
3. Τῶν ὀρθοκέντρων Η' τῶν τριγώνων Α'ΒΓ.

24. Δίδεται δίεδρος γωνία γ(Π, Ρ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς ἀντιστοίχως, ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν (Ρ) καὶ (Π) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τοῦ εὐθ. τμήματος

ΑΒ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

25. Δίδεται δίεδρος γωνία γ(Π, Ρ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐσωτερικὰ αὐτῆς, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) τῆς διέδρου ἔχουν ἄθροισμα λ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ΑΒ, ἐσωτερικοῦ τῆς διέδρου, ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ), ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα λ.

26. Δίδεται δίεδρος γωνία γ(Π,Ρ) καὶ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐσωτερικὰ αὐτῆς, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου ἔχουν ἄθροισμα λ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀποστάσεις οἱουδήποτε σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, ἐσωτερικοῦ τῆς διέδρου γωνίας, ἀπὸ τῶν (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν ἄθροισμα λ.

27. Θεωροῦμεν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ὁποίων ἔστω δ ἡ τομή. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Ἂν ἕνα ἐπίπεδον (Τ) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο ἐκ τῶν δύο ἐπιπέδων τῶν διχοτομούντων τὰς διέδρους αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὸ (Π) καὶ (Ρ), τότε τέμνει τὰ (Π) καὶ (Ρ) ὑπὸ ἴσας γωνίας, καί,
2. Ἂν ἕνα ἐπίπεδον (Τ) τέμνῃ τὰ (Π) καὶ (Ρ) ὑπὸ ἴσας γωνίας, τότε τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο ἐκ τῶν ἀνωτέρω διχοτομούντων ἐπιπέδων.

28. Δίδονται τρία τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ), τῶν ὁποίων ἔστω Ο κοινὸν σημεῖον. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον τέμνον τὰ δοθέντα ὑπὸ ἴσας γωνίας.

29. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τοῦ Ο καὶ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς α καὶ β.

30. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον :

1. Ἀπὸ τῶν εὐθειῶν α, β, γ,
2. Ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων $(\Pi) \equiv (\beta, \gamma)$, $(P) \equiv (\gamma, \alpha)$, $(\Sigma) \equiv (\alpha, \beta)$.

31. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ, αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, εἶναι ἀσύμβατοι, καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ο καὶ σχηματίζουσα ἴσας γωνίας μὲ τὰς α, β, γ ἀντιστοίχως.

32. Δίδεται δίεδρος γωνία γ (Π, Ρ) καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς μία ἡμιευθεῖα ΟΖ, ἀγομένη ἀπὸ σημείου Ο τῆς ἀκμῆς γ τῆς διέδρου. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Τ) περιέχον τὴν ΟΖ καὶ τέμνον τὴν δίεδρον κατὰ γωνίαν τῆς ὁποίας ἡ ΟΖ εἶναι διχοτόμος.

33. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) ἕνα ρόμβον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου $AB = \alpha$ καὶ $B\Delta = \dfrac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$, καὶ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ κέντρον Ο τοῦ ρόμβου καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ τὸ σημεῖον Σ διὰ τὸ ὁποῖον $\Sigma B = \alpha$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Ἡ γωνία (ΣΑ, ΣΓ) εἶναι ὀρθή.
2. Ἡ ΣΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ.
3. Ἡ δίεδρος γωνία τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι τὰ ἡμιεπίπεδα (ΣΑ, Β) καὶ (ΣΑ, Δ) εἶναι ὀρθή.

34. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ παράλληλοι καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν α, β, γ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α καὶ ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

35. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ παράλληλοι καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τούτων τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

36. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν τούτων τρία σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

37. Θεωροῦμεν: κύκλον Ο (r), διάμετρον ΑΒ αὐτοῦ, ἕνα σημεῖον Η τῆς διαμέτρου αὐτῆς, μίαν χορδὴν ΓΔ τοῦ (Ο) περιέχουσαν τὸ Η, τὴν εἰς τὸ Η κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τοῦ (Ο) καὶ τὸ σημεῖον Σ τῆς ἀνωτέρω καθέτου διὰ τὸ ὁποῖον ΟΣ = r. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τῶν γωνία (ΣΓ, ΣΔ) εἶναι ὀρθή.

38. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ, πλευρᾶς α, καὶ ἕνα σημεῖον Μ τῆς εἰς τὸ Α καθέτου ΑΖ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου, ὥστε ΑΜ = α. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δίεδροι γωνίαι ὁποίων ἀκμαὶ εἶναι αἱ: ΑΒ, ΑΔ, ΒΓ, ΓΔ, ΜΒ, ΜΔ, ΜΓ.

39. Δίδεται ὀξεῖα δίεδρος γωνία γ (Π, Ρ) καὶ σημεῖον Α ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

40. Δίδεται ὀξεῖα δίεδρος γωνία γ (Π, Ρ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐσωτερικὰ αὐτῆς. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς δύο σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

41. Ἂν τρία σημεῖα Α, Β, Γ μιᾶς εὐθείας ε ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ μιᾶς εὐθείας δ, τότε αἱ εὐθεῖαι δ καὶ ε εἶναι παράλληλοι.

42. Θεωροῦμεν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ὁποίων ἔστω γ ἡ τομὴ καὶ μίαν εὐθεῖαν δ κάθετον ἐπὶ τὸ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ προβολὴ δ' τῆς δ ἐπὶ τὸ (Ρ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν γ.

43. Δίδονται: ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ α' καὶ β' ἐπὶ τὸ (Π) εἶναι παράλληλοι. Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας ΜΝ ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει τὰς α καὶ β (Μ καὶ Ν σημεῖα τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως) καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει μία γνωστὴ εὐθεῖα δ, κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ), ἡ ὁποία τέμνει ὅλας τὰς εὐθείας ΜΝ.

44. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), μία εὐθεῖα α ἐπὶ τοῦ (Π) καὶ μία εὐθεῖα β ἐπὶ τοῦ (Ρ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει, ἐν γένει, εὐθεῖα δ τῆς ὁποίας αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὰ (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως εἶναι αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι α καὶ β ἀντιστοίχως.

45. Θεωροῦμεν: δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), δύο εὐθείας α καὶ β, τὰς προβολὰς α' καὶ β' αὐτῶν ἐπὶ τὸ (Π) καὶ τὰς προβολὰς α'' καὶ β'' αὐτῶν ἐπὶ τὸ (Ρ). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐν γένει:

$$\alpha' \parallel \beta' \text{ καὶ } \alpha'' \parallel \beta'' \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$$

46. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ε, α, β. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τῆς ε, ὥστε αἱ προβολαὶ α' καὶ β' τῶν α καὶ β ἐπὶ τοῦτο νὰ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

47. Θεωροῦμεν: δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), τῶν ὁποίων ἔστω γ ἡ τομή, ἓν σημεῖον Μ, καὶ τὰς προβολὰς Μ' καὶ Μ'' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Μ' καὶ Μ'' προβάλλονται ἐπὶ τὴν γ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α αὐτῆς.

48. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ, τὰς ἡμιευθείας ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ, ΔΤ τὰς καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καὶ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ, καὶ ἐπὶ τῶν ΑΧ καὶ ΒΥ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α' καὶ Β'. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τῆς Α' Β' καὶ τέμνον τὰς ΓΖ καὶ ΔΤ, ὥστε ἂν εἶναι Γ' καὶ Δ' ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, τὸ παραλληλόγραμμον Α'Β'Γ'Δ' νὰ εἶναι ρόμβος.

49. Θεωροῦμεν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ἐπίπεδον (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. Ἂν ἡ μία τῶν διχοτόμων τῆς (ΟΧ, ΟΥ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π), τότε αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας αὐτῆς προβάλλονται ἐπὶ τὸ (Π) κατὰ τὰς διχοτόμους τῆς προβολῆς τῆς (ΟΧ, ΟΥ) ἐπὶ τὸ (Π), καί,
2. Ἂν αἱ διχοτόμοι μιᾶς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) προβάλωνται ἐπὶ τὸ (Π) κατὰ τὰς διχοτόμους

τῆς προβολῆς της, ἐπὶ τὸ (Π), τότε ἡ μία τοὐλάχιστον τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ (Π).

50. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ καὶ μὴ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελές.

51. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐπὶ τὸ ὁποῖον αἱ προβολαὶ τῶν πλευτῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι ἴσαι (τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ προβάλεται ἐπὶ τὸ (Π) κατὰ τρίγωνον ἰσοσκελές).

52. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) καὶ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ προβολὴ G′ τοῦ κέντρου βάρους G τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι τὸ κέντρον βάρους τῆς προβολῆς Α′Β′Γ′ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὸ (Π).

53. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα α παράλληλος πρὸς αὐτὸ καὶ σημεῖον Ο. Ἔστω α′ ἡ προβολὴ τῆς α ἐπὶ τὸ (Π). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ο′ τοῦ (Π) ὥστε διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς α νὰ εἶναι ΟΜ = Ο′Μ′, ἔνθα Μ′ ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ (Π).

54. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἡ προβολὴ (Α′Β, Α′Γ) τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) νὰ εἶναι γωνία ὀρθή.

55. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τῆς ΒΓ, ὥστε ἡ προβολὴ Α′ΒΓ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐπὶ τὸ (Π), νὰ εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

56. Θεωροῦμεν : εὐθεῖαν δ, δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς, δύο ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β καθέτους ἐπὶ τὴν δ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς, δύο σημεῖα Μ, Μ′ τῆς α συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Α καὶ δύο σημεῖα Ν καὶ Ν′ τῆς β συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. ΜΝ = Μ′Ν′.
2. Αἱ γωνίαι τῶν ΜΝ καὶ Μ′Ν′ μὲ τὴν ΑΒ εἶναι ἴσαι.

57. Θεωροῦμεν στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν ἴσων τούτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, εἶναι ἴσαι.

58. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Π) ἐπὶ τὸ ὁποῖον τὸ τετράπλευρον τοῦτο προβάλλεται κατὰ παραλληλόγραμμον.

59. Θεωροῦμεν : δύο ἀσυμβάτους εὐθείας δ καὶ δ′, τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῆς δ καὶ τὰς καθέτους ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ ἐπὶ τὴν δ′ (Α′, Β′, Γ′ ἐπὶ τῆς δ′). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ διέρχεται τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΓ′.

60. Θεωροῦμεν : δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ), δύο ἡμιευθείας ΟΑ καὶ ΟΒ ἀγομένας ἀπὸ σημείου Ο τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου καὶ κειμένας ἐπὶ τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς καὶ τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ἐπίπεδον περιέχῃ τὴν ΟΔ, τότε ἡ ΟΔ ἢ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΟΔ′ τῆς (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν α τῆς διέδρου γ (Π, Ρ).

61. Θεωροῦμεν δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ) καὶ ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος αὐτὴν ἐπιπέδου μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν α αὐτῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα ΟΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς τομῆς (ΟΑ, ΟΒ) τῆς διέδρου γωνίας ὑπὸ οἱουδήποτε ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ΟΔ.

62. Θεωροῦμεν : ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α καὶ Α′ αὐτοῦ καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτοῦ. Ὀνομάζομεν φ καὶ φ′ τὰς κλίσεις τῶν εὐθειῶν ΟΑ καὶ ΟΑ′ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὸ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $ΟΑ < ΟΑ' \Leftrightarrow φ > φ'$

63. Θεωροῦμεν : δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ), ἕνα σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς γ αὐτῆς καὶ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς τὰς ἡμιευθείας ΟΑ καὶ ΟΒ ἀντιστοίχως ὥστε ἡ ΟΑ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν γ καὶ ἡ ΟΒ πλαγία ὡς πρὸς αὐτήν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Ἂν ἡ δίεδρος γ (Π, Ρ) εἶναι ὀξεῖα, τότε ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου φ τῆς διέδρου.

2. Ἂν ἡ γ (Π, Ρ) εἶναι ὀρθή, τότε ἡ (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν φ.
3. Ἂν ἡ γ (Π, Ρ) εἶναι ἀμβλεῖα, τότε ἡ (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι μικροτέρα τῆς φ.

64. Θεωροῦμεν δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
1. Ἂν τὰ Α καὶ Β ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῆς ἀκμῆς γ τῆς διέδρου, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴσον κεκλιμένη (ἔχει τὴν αὐτὴν κλίσιν) πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν.
2. Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου, τότε τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῆς ἀκμῆς γ αὐτῆς.

65. Θεωροῦμεν δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
1. Ἂν ἡ ΑΒ εἶναι ἴσον κεκλιμένη ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ἑδρῶν, τότε εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γ (Π′, Ρ), ἔνθα (Π′) τὸ ἡμιεπίπεδον τὸ ἀντικείμενον τοῦ (Π).
2. Ἂν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γ (Π′, Ρ), τότε εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου γ (Π, Ρ).

66. Δίδονται δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ε ἑκάστη τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τοῦ Ο καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ).

67. Δίδονται τρία ἐπίπεδα (Π,) (Ρ), (Σ) καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε διὰ τοῦ Ο, ἔχουσα τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ).

68. Θεωροῦμεν : δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ), δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς ἀντιστοίχως, τὰς ἀποστάσεις ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ αὐτῶν ἀντιστοίχως ἀπὸ τῆς ἀκμῆς γ τῆς διέδρου καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῆς ΑΒ μὲ τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\dfrac{ΑΔ}{ΔΒ} = \dfrac{ΑΑ'}{ΒΒ'}$

69. Θεωροῦμεν δύο τεμνομένας εὐθείας α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον καὶ τὰς διχοτόμους δ καὶ δ′ τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς α καὶ β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
1. Ἂν ἕνα ἐπίπεδον (Π) διέρχηται διὰ τῆς δ ἢ τῆς δ′, τότε αἱ α καὶ β ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς αὐτό.
2. Ἂν αἱ α καὶ β ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Π), διερχόμενον διὰ τοῦ Ο, τότε τὸ (Π) περιέχει τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ἐκ τῶν διχοτόμων δ καὶ δ′ τῶν γωνιῶν τῶν α καὶ β.

70. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Ο, ὥστε αἱ α, β, γ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς τοῦτο.

71. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β μὴ κείμενα ἐπ' αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι ΜΑ καὶ ΜΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς αὐτό.

72. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα ε αὐτοῦ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β μὴ κείμενα ἐπ' αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ε σημεῖον Μ, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς τὸ (Π).

73. Θεωροῦμεν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ) καὶ εὐθεῖαν δ τῆς ὁποίας αἱ κλίσεις ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ καὶ $\dfrac{\pi}{2} - \omega$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι κάθε ἐπιπέδου (Τ) καθέτου ἐπὶ τὴν δ, μὲ τὰ (Π) καὶ (Ρ), εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς φ καὶ ω.

74. Θεωροῦμεν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ) καὶ μίαν εὐθεῖαν ε τέμνουσαν τὰς ἕδρας αὐτῆς κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Ὀνομάζομεν φ καὶ ω τὰς κλίσεις τῆς ε ὡς πρὸς τὰ (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\varphi + \omega \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

75. Δίδεται ὀρθὴ δίεδρος γωνία γ (Π, Ρ) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α, ὥστε αἱ κλίσεις αὐτῆς ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) τῆς διέδρου, νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο δοθείσας γωνίας φ καὶ ω.

76. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Ο αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ Ο καὶ πλαγία ὡς πρὸς τὸ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα α τοῦ (Π), διερχομένη διὰ τοῦ Ο, ὥστε ἡ γωνία αὐτῆς καὶ τῆς ε νὰ εἶναι δοθεῖσα φ.

77. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) τῶν ὁποίων ἔστω γ ἡ τομή, καὶ ἕνα σημεῖον Α τοῦ (Ρ). Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ (Ρ) εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ ἔχουσα δοθεῖσαν κλίσιν φ ὡς πρὸς τὸ (Π).

78. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Ο αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ Ο καὶ πλαγία ὡς πρὸς τὸ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς ε ὥστε ἡ γωνία αὐτοῦ καὶ τοῦ (Π) νὰ εἶναι δοθεῖσα φ.

79. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τοῦ Α ὥστε ἡ γωνία τῶν (Π) καὶ (Ρ) νὰ εἶναι δοθεῖσα φ.

80. Θεωροῦμεν τρία ἐπίπεδα (Α), (Β), (Γ) παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν ἕνα ἐπίπεδον (Π) σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τὰ (Α), (Β), (Γ), εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν δ, ἤτοι καὶ ἐπὶ τὰ (Α), (Β) (Γ).

81. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς ΟΑ, τὴν εὐθεῖαν μεγίστης κλίσεως ΟΗ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ (Ρ) καὶ τὴν κάθετον ΟΗ′ ἐπὶ τὸ (Ρ) (Η′ ἐπὶ τοῦ (Π). Νὰ εὑρεθῇ :

1. Ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Η.
2. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν εὐθειῶν ΟΗ′.

82. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο), διάμετρον ΑΒ αὐτοῦ, δύο εὐθείας α καὶ β διὰ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως, καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ, κεκλιμένας κατὰ γωνίαν φ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) τοῦ κύκλου (Ο) καὶ μὴ παραλλήλους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε εὐθεῖα δ τέμνουσα τὰς α, β καὶ τὸν (Ο) εἶναι κεκλιμένη κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ ὡς πρὸς τὸ (Π) καὶ προβάλλεται ἐπὶ τοῦτο κατὰ ἐφαπτομένην τοῦ (Ο).

83. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) καὶ εὐθεῖαν ε παράλληλον πρὸς αὐτό. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῆς ε ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου (Π), τῶν μὴ παραλλήλων πρὸς αὐτὴν εἶναι ἴσαι.

84. Θεωροῦμεν : δύο ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος (Α καὶ Β ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως), δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῆς α καὶ τὰς καθέτους ΜΗ καὶ Μ′Η′ ἐπὶ τὴν β (Η καὶ Η′ ἐπὶ τῆς β). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$AM < AM' \Rightarrow MH < M'H'$$

85. Θεωροῦμεν δύο εὐθείας α καὶ β καὶ ἐπὶ τῆς α δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν τὰ Α καὶ Β ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῆς β, τότε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν α καὶ β διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, καί,

Ἂν ἡ κοινὴ κάθετος τῶν α καὶ β διέρχηται διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, τότε τὰ Α καὶ Β ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῆς β.

86. Θεωροῦμεν στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη (ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΔ = ΒΓ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Ι καὶ Κ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ ἀντιστοίχως, εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΒΔ.

87. Θεωροῦμεν : δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κάθετα ἐπ' ἄλληλα τῶν ὁποίων ἔστω α ἡ τομή, δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τῆς α, ὥστε ΓΔ = 2x, τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῶν (Π) καὶ (Ρ) ἀντιστοίχως ὥστε ΑΓ = ΑΔ = ΒΓ = ΒΔ = α καὶ τὰ μέσα Ι καὶ Κ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως.

1. Νὰ εὑρεθοῦν συναρτήσει τῶν α καὶ x τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΙΚ.
2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ x διὰ τὸ ὁποῖον ἡ δίεδρος γωνία ἡ ἔχουσα ἕδρας τὰ ἡμιεπίπεδα (ΑΒ,Γ) καὶ (ΑΒ,Δ), εἶναι ὀρθή. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ εὑρεθῇ, συναρτήσει τοῦ α, τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἡ θέσις τοῦ σημείου Ο τοῦ ἀπέχοντος ἴσον ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ, Δ.

88. Δίδονται δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ πλευρᾶς α. Ἡ δίεδρος γωνία ἡ ἔχουσα ἀκμὴν τὴν ΒΓ καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι περιέχουν τὰ σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως, εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\pi}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τοῦ α :

1. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ'.
2. Ἡ ἀπόστασις Α'Α'' τοῦ Α' ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ.
3. Ἡ ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΑΑ'.

89. Θεωροῦμεν : εὐθεῖαν δ, δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς ὥστε ΑΒ = λ, δύο ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β καθέτους ἐπὶ τὴν δ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς ἀντιστοίχως, καὶ ἐπὶ τῶν α καὶ β τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως ὥστε : ΑΑ' = α καὶ ΒΒ' = β. Ἔστω Α'Β' = μ. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῶν α, β, λ καὶ μ ἡ ἀπόστασις τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β'.

90. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος (Α καὶ Β ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως). Θεωροῦμεν δύο τυχόντα σημεῖα Α' καὶ Β' τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ὥστε Α'Β' = λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΙΚ, ΜΝ, ΡΣ (Ι, Κ, Μ, Ν, Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν ΑΑ', ΒΒ', ΑΒ, Α'Β', ΑΒ', Α'Β ἀντιστοίχως) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου G. Τὰ εὐθ. τμήματα ΙΚ, ΜΝ, ΡΣ εἶναι σταθερὰ (ἀνεξάρτητα τῆς θέσεως τῶν Α' καὶ Β').
2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων G.

91. Θεωροῦμεν τρεῖς εὐθείας α, β, γ ἀσυμβάτους ἀνὰ δύο καὶ μὴ παραλλήλους πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Ἂν αἱ ἀποστάσεις τῶν εὐθειῶν γ, α καὶ τῶν εὐθειῶν γ, β εἶναι ἴσαι, τότε ἡ γ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου ἐκ τῶν ἐπιπέδων τῶν διχοτομούντων τὰς διέδρους αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), τὰ ἀγόμενα ἀντιστοίχως διὰ τῶν α καὶ β καὶ παράλληλα πρὸς τὴν γ, καὶ ἀντιστρόφως :
2. Ἂν ἡ γ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ), τότε αἱ ἀποστάσεις αὐτῆς ἀπὸ τῶν α καὶ β εἶναι ἴσαι.

Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ α, β, γ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

92. Δίδονται τέσσαρες εὐθεῖαι α, β, γ, δ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε παράλληλος πρὸς τὴν δ τῆς ὁποίας αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν α, β, γ νὰ εἶναι ἴσαι.

93. Θεωροῦμεν : δύο ἀσυμβάτους εὐθείας α καὶ β, τὴν κοινὴν κάθετον ΑΒ αὐτῶν (Α καὶ Β ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως), δύο τυχόντα σημεῖα Α' καὶ Β' τῶν α καὶ β, καὶ τὸ σημεῖον Μ' τῆς Α'Β' διὰ τὸ ὁποῖον : $\frac{M'A'}{M'B'} = \frac{AA'}{BB'}$. Τὸ ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω στοιχείων ἀποτελούμενον σχῆμα προβάλλεται ἐπὶ ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τυχὸν σημεῖον Ο αὐτῆς. Ἔστωσαν Α'', Μ'', Β'' αἱ προβολαὶ τῶν Α', Μ', Β' ἀντιστοίχως ἐπὶ τὸ (Π). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἡ ΟΜ'' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΟΑ'', ΟΒ'').

94. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ἴσα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΓΔ.

95. Δίδονται δύο ὀρθογώνιαι εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος (Α καὶ Β ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως). Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α' καὶ Β' τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ὥστε Α'Β' = λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Ἡ γωνία τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι σταθερὰ (ἀνεξάρτητος τῶν Α' καὶ Β')
2. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἓξ εὐθ. τμημάτων τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ σημεῖα Α, Β, Α', Β', θεωρούμενα ἀνὰ δύο, εἶναι σταθερόν.

96. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα α τέμνουσα τὸ (Π) κατὰ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἕνα σημεῖον Β τοῦ (Π). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα β τοῦ (Π) διερχομένη διὰ τοῦ Β, ὥστε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν α καὶ β νὰ διέρχηται διὰ τοῦ Α ἢ τοῦ Β.

97. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι α καὶ β. Ἔστω (Ρ) τὸ διὰ τῆς β ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς τὴν α. Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (P) τοῦ ὁποίου τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν α καὶ β ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ^2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

98. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ τῶν ἴσων πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν α καὶ β.

99. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος (Α καὶ Β σημεῖα τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως). Θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον Μ τῆς α καὶ ἕνα σημεῖον Ν τῆς β.

1. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κοινὴ κάθετος ΙΚ τῶν ΑΒ καὶ ΜΝ (Ι καὶ Κ σημεῖα τῶν ΑΒ καὶ ΜΝ ἀντιστοίχως).

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{BN^2}$ καὶ $\frac{IA}{IB} = \frac{KM}{KN} = \frac{AM^2}{BN^2}$

100. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β τῶν ὁποίων ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος (Α καὶ Β ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως). Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν α καὶ β δύο σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως, ὥστε :

$$\frac{AM}{BN} = k,$$

καὶ τὴν κοινὴν κάθετον ΙΚ τῶν ΑΒ καὶ ΜΝ (Ι καὶ Κ ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΜΝ ἀντιστοίχως). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Κ.

101. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β παράλληλοι πρὸς αὐτό. Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας δ ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει τὰς α αἱ β καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α καὶ ὀνομάζομεν Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως καὶ Ρ τὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἴχνος αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Ρ.

102. Δίδεται εὐθεῖα δ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν α ἑκάστη τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τοῦ Ο καὶ ἀπέχει ἀπὸ τῆς δ δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

103. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ, καὶ εὐθεῖα ε μὴ παράλληλος πρὸς αὐτό. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ (Π) εὐθεῖα α, διερχομένη διὰ τοῦ Α ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τῆς ε νὰ εἶναι δοθεῖσα λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

104. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι δ καὶ ε τῶν ὁποίων ἔστω ΙΟ ἡ κοινὴ κάθετος (Ι καὶ Ο ἐπὶ τῶν δ καὶ ε ἀντιστοίχως) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς ε, κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Ο. Θέτομεν ΙΟ = δ, ΟΑ = α καὶ ΟΒ = β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Εἰς ἕκαστον σημεῖον Μ τῆς δ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον Ν αὐτῆς, καὶ ἕνα μόνον, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΒΝ νὰ εἶναι ὀρθογώνιοι.

2. Τὸ γινόμενον ΙΜ. ΙΝ εἶναι σταθερόν.

105. Νὰ κατασκευασθῇ στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων : ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, τῆς συνθήκης ὅπως αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνιοι κατὰ τὰ δύο ζεύγη, καὶ τῆς συνθήκης ὅπως αἱ κοιναὶ κάθετοι αὐτῶν εἶναι ὀρθογώνιοι.

106. Δίδεται ὀρθὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας εἰς τὸ Ο, δύο σημεῖα Μ καὶ Ν κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Ο καὶ συμμετρικὰ ὡς πρὸς αὐτό. Θεωροῦμεν : τὴν διὰ τοῦ Μ παράλληλον ΜΧ' πρὸς τὴν ΟΧ, τὴν διὰ τοῦ Ν παράλληλον ΝΥ' πρὸς τὴν ΟΥ, ἕνα σημεῖον Α τῆς ΜΧ', ἕνα σημεῖον Β τῆς ΝΥ' καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῆς ΑΒ καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΥ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ι ἀπὸ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ, συναρτήσει τῶν ΜΑ = α καὶ ΝΒ = β.

107. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α, τὰς καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἰς τὰ Β καὶ Γ καὶ ἐπὶ τούτων καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως, ὥστε ΒΕ = ΒΑ καὶ ΓΖ = ΓΑ. Ἔστω Ζ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ζ ὡς πρὸς τὸ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Τὸ κοινὸν σημεῖον Τ τῶν ΒΓ καὶ ΕΖ' εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2. Τὸ κοινὸν σημεῖον Τ' τῶν ΒΓ καὶ ΕΖ εἶναι σημεῖον τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς ἀνωτέρω γωνίας Α.

108. Θεωροῦμεν : δίεδρον γωνίαν γ (Π, Ρ) τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\pi}{4}$, δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς ἀκμῆς γ τῆς διέδρου, τὰς καθέτους ΑΧ καὶ ΒΥ ἐπὶ τὴν ἀκμήν, τὰς κειμένας ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ), καὶ ἕνα σημεῖον Μ τῆς ΑΧ.
1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀρθὴ προβολὴ Μ' τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΒΥ.
2. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ εὐθ. τμήματα ΒΜ' καὶ ΜΜ' συναρτήσει τῶν $AB = \lambda$ καὶ $AM = x$.
3. Ἔστω Μ'' ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Μ' ἐπὶ τὴν ΑΧ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου ΜΜ'Μ'', συναρτήσει τῶν λ καὶ x
4. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΒΥ τὸ σημεῖον Ν ὥστε $BN = AM$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε' τοῦ τριγώνου ΒΜΝ, συναρτήσει τῶν λ καὶ x, καὶ νὰ ὁρισθῇ τὸ x ὥστε ὁ λόγος $\frac{E}{E'}$ νὰ εἶναι δοθεὶς k. Διερεύνησις ὡς πρὸς k, διὰ δοθὲν λ.

109. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΟΜ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὰς α καὶ β ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

110. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δύο εὐθεῖαι ΒΧ καὶ ΒΥ τεμνόμεναι ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{\pi}{4}$. Ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Β καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Α διὰ τὸ ὁποῖον $BA = \alpha$ καὶ τὴν παράλληλον ΑΧ' πρὸς τὴν ΒΧ. Ἔστω Γ ἕνα σημεῖον τῆς ΑΧ', Δ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΒΥ, καὶ Γ' ἡ προβολή του ἐπὶ τὸ (Π).
1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓ'Δ εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν του Δ.
2. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΒΥ ἕνα σημεῖον Δ', ὥστε $B\Delta' = \alpha$ καὶ τὸ διὰ τοῦ Δ' ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΥ, καὶ ὀνομάζομεν Γ'' τὴν τομὴν αὐτοῦ μὲ τὴν ΑΧ'. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν Γ''Δ' καὶ ΑΒ.
3. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ τῆς ΑΧ' ἕνα ἄλλο σημεῖον Γ''' καὶ ἐπὶ τῆς ΒΥ ἕνα σημεῖον Δ'' ὥστε ἡ γωνία τῶν Γ'''Δ'' καὶ ΑΒ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν Γ''Δ' καὶ ΑΒ.
4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν Γ''Δ' καὶ Γ'''Δ''.
5. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τὸ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Γ'.

111. Δίδεται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π), ἕνας κύκλος (Ο) ἀκτῖνος r καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ (Ο) ἀντιδιαμετρικά. Ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ (Π) εἰς τὸ Α θεωροῦμεν σημεῖον Σ ὥστε $A\Sigma = x$, καὶ διὰ τοῦ Σ ἕνα ἐπίπεδον (Ρ) κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ καὶ τέμνον τὸ(Π) ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{\omega}{3}$.
1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὸ x ὥστε τὸ ἐπίπεδον (Ρ) νὰ τέμνῃ τὸν (Ο) εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ.
2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν ἡ ἀνωτέρω συνθήκη ἱκανοποιῆται, αἱ γωνίαι (ΔΣ, ΔΒ) καὶ (ΓΣ,ΓΒ) εἶναι ὀρθαί.

112. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ). Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως δύο σημεῖα Α καὶ Β ὥστε : $AB = \lambda$ καὶ $AB \parallel \delta$ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ δ δοθεῖσα εὐθεῖα).

113. Δίδεται τραπέζιον ΑΑ'Β'Β (ΑΑ' || ΒΒ') καὶ ἕνα σημεῖον Σ κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Π) τοῦ τραπεζίου. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ ὀνομάζομεν: Δ καὶ Ε τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτοῦ μὲ τὰς ΣΑ' καὶ ΣΒ' ἀντιστοίχως, καὶ Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΕ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

114. Δίδονται : ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα δ κάθετος ἐπὶ τὸ (Π) καὶ σημεῖον Β τοῦ (Π). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τῆς δ καὶ τὸ σημεῖον Γ τοῦ (Π) διὰ τὸ ὁποῖον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Γ τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

115. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β. Θεωροῦμεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ (Π). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι :

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

116. Δίδονται : κύκλος (Ο), διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ καὶ δύο μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (Ο). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν δ τέμνουσαν τὸν κύκλον καὶ τὰς εὐθείας α καὶ β καὶ ἔστωσαν : Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς δ μὲ τὸν κύκλον, καὶ Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως.

1. Ἔστωσαν Ε' καὶ Ζ' αἱ προβολαὶ τῶν Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον Κ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Ε'Ζ' εἶναι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν Μ ὡς πρὸς τὰ Ε' καὶ Ζ'.
2. Ἔστω Ι ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ΟΙ. ΟΚ εἶναι σταθερὸν καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα Ε'Ζ' εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

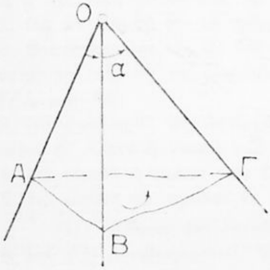
Η ΤΡΙΕΔΡΟΣ ΚΑΙ Η ΠΟΛΥΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

ΤΡΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

98. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν μίαν διατεταγμένην τριάδα ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν σημεῖον καὶ δὲν κεῖνται, ἐν γένει, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων κυρτῶν γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ), (ΟΒ, ΟΓ), (ΟΓ, ΟΑ), ὀνομάζεται **τρίεδρος γωνία**.

Ἡ τρίεδρος γωνία ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, συμβολίζεται συνήθως μὲ τὸ σύμβολον: Ο.ΑΒΓ.



Σχ. 98

Αἱ ἀνωτέρω ἡμιευθεῖαι ὀνομάζονται **ἀκμαὶ** τῆς τριέδρου γωνίας, καὶ τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Ο αὐτῶν, **κορυφὴ** αὐτῆς.

Αἱ κυρταὶ γωνίαι (ΟΒ, ΟΓ) ≡ α, (ΟΓ, ΟΑ) ≡ β, (ΟΑ, ΟΒ) ≡ γ ὀνομάζονται **ἐπίπεδοι** ἢ **ἐδρικαὶ** γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας ἢ καὶ ἁπλῶς **ἕδραι** αὐτῆς.

Σημεῖα τῆς τριέδρου γωνίας ὀνομάζονται τὰ σημεῖα τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν αὐτῆς.

Αἱ κυρταὶ δίεδροι γωνίαι ἑκάστης τῶν ὁποίων ἡ ἀκμὴ εἶναι μία τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ αἱ ἕδραι περιέχουν τὰς δύο ἄλλας ἀκμὰς τῆς τριέδρου ὀνομάζεται **δίεδροι** γωνία τῆς τριέδρου γωνίας.

Τὰς διέδρους γωνίας τῆς τριέδρου αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκμὰς τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, συμβολίζομεν συνήθως, μὲ τὰ γράμματα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως. Ἤτοι :

ΟΑ (Β, Γ) ≡ Α,   ΟΒ (Γ, Α) ≡ Β   ΟΓ (Α,Β) ≡ Γ.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι :

(ΟΒ, ΟΓ) ≡ α,   (ΟΓ, ΟΑ) ≡ β,   (ΟΑ, ΟΒ) ≡ γ

κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀντιστοίχως ἢ τῶν διέδρων Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, καὶ ἀντιστρόφως.

Οὕτω ἡ ἑδρικὴ γωνία (ΟΒ, ΟΓ) ≡ α καὶ ἡ δίεδρος ΟΑ (Β,Γ) ≡ Α *κεῖνται ἀπέναντι ἀλλήλων* κλπ.

Ἐξ ἄλλου, ἀναφερόμενοι εἰς τὸν εἰς τὴν διατεταγμένην τριάδα ἡμιευθειῶν

ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀντιστοιχοῦντα προσανατολισμὸν τοῦ χώρου (παραγρ. 26) σημειοῦμεν ὅτι :

Δύο ὁμόλογοι (1) τρίεδροι γωνίαι Ο.ΑΒΓ καὶ Ο'.Α'Β'Γ' θὰ ὀνομάζονται *ὁμοίως προσανατολισμέναι*, ὅταν αἱ διατεταγμέναι τριάδες (ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β', Ο'Γ') ὁρίζουν τὸν αὐτόν, θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον, καὶ *ἀντιθέτως προσανατολισμέναι*, ὅταν αὗται ὁρίζουν τοὺς δύο ἀντιθέτους ἐν αὐτῷ προσανατολισμούς.

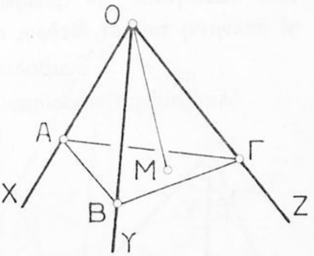
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΝ ΤΡΙΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ

99. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂς συμβολίσωμεν μὲ τὰ γράμματα (Α), (Β), (Γ) τὰ σύνολα τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῶν διέδρων γωνιῶν Α, Β, Γ τῆς τριέδρου γωνίας ἀντιστοίχως (2).

Κάθε σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἀνωτέρω τριῶν συνόλων σημείων (Α), (Β), (Γ), θὰ ὀνομασθῇ **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τῆς τριέδρου γωνίας.

Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῆς τριέδρου γωνίας θὰ ὀνομασθῇ **ἐσωτερικὸν** αὐτῆς.

Κάθε σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον τῆς τριέδρου γωνίας, οὔτε ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** σημεῖον τῆς τριέδρου γωνίας, τὸ δὲ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τῆς τριέδρου **ἐξωτερικὸν** αὐτῆς.



Σχ. 99

Κάθε ἡμιευθεῖα ἔχουσα ὡς ἀρχικὸν σημεῖον τὴν κορυφὴν Ο τῆς τριέδρου γωνίας καὶ περιέχουσα ἕνα ἐσωτερικὸν ἢ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς, θὰ ὀνομάζεται, ἀντιστοίχως, **ἐσωτερικὴ** ἢ **ἐξωτερικὴ ἡμιευθεῖα** τῆς τριέδρου γωνίας.

Ἐξ ἄλλου, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ μιᾶς τριέδρου γωνίας Ο.ΧΥΖ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ο ἡμιευθεῖο, ἡ περιέχουσα ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς θεωρουμένης τριέδρου γωνίας.

ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΤΡΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

100. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ ὀνομάζεται* **ἰσοσκελής**, *ὅταν δύο τουλάχιστον ἑδρικαὶ γωνίαι αὐτῆς εἶναι ἴσαι.*

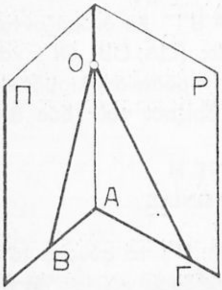
Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὕπαρξιν τῆς ἰσοσκελοῦς τριέδρου γωνίας παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν θεωρήσωμεν μίαν τυχοῦσαν δίεδρον α(Π,Ρ), δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν

---

(1) Αἱ τρίεδροι ὀνομάζονται *ὁμόλογοι*, ὅταν ἔχει ὁρισθῇ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ἀκμῶν των.

(2) Βλέπε παραγρ. 65.

ἐπὶ τῶν ἑδρῶν (Π) καὶ (Ρ) αὐτῆς ἀντιστοίχως δύο ἡμιευθείας, ἀπὸ τυχόντος σημείου Ο τῆς ἀκμῆς της, σχηματιζούσας ἴσας γωνίας μὲ αὐτὴν α, ἤτοι τοιαύτας ὥστε : (ΟΓ, ΟΑ) ≡ (ΟΑ, ΟΒ). Ἡ τρίεδρος Ο.ΑΒΓ εἶναι, ἰσοσκελής, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $\beta = \gamma$.



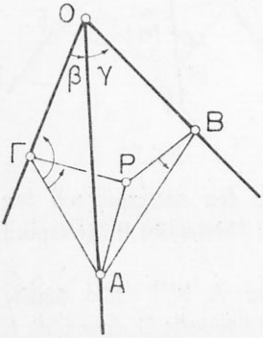
Σχ. 100

Ὡς κατωτέρω θέλομεν ἴδει, ὑπάρχει ἀναλογία μεταξὺ τῶν προτάσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ τὴν ἰσοσκελῆ τρίεδρον γωνίαν.

101. ΘΕΩΡΗΜΑ **Ἂν τριέδρου γωνίας Ο·ΑΒΓ δύο ἑδρικαὶ γωνίαι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων δίεδροι αὐτῆς εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.**

Συμβολικῶς : $\beta = \gamma \Leftrightarrow B \triangleq \Gamma$

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἀκμῆς ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ κοινὴ πλευρὰ τῶν ἴσων ἑδρικῶν γωνιῶν καὶ τὴν διὰ τούτου κάθετον ΑΡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀπέναντι τῆς ΟΑ ἕδρας. Θεωροῦμεν ἐπίσης τὰς διὰ τοῦ Ρ καθέτους ΡΒ καὶ ΡΓ ἐπὶ τὰς δύο ἄλλας ἀκμὰς τῆς τριέδρου (Σχ. 101), καὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ ἀντιστοίχως συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (53). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΓΑ καὶ ΟΒΑ (κοινὴ ὑποτείνουσα, καὶ $\beta = \gamma$) ἔχομεν ὅτι ΑΒ = ΑΓ. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΡΓΑ καὶ ΡΒΑ (ἴσαι ὑποτείνουσαι καὶ ΑΡ κοινή) ἕπεται ὅτι: (ΓΑ, ΓΡ) = (ΒΡ, ΒΑ). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τῆς τριέδρου γωνίας ἀντιστοίχως.



Σχ. 101

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΡΓΑ, ΡΒΑ καὶ ἀκολούθως τῶν ΟΓΑ καὶ ΟΒΑ.

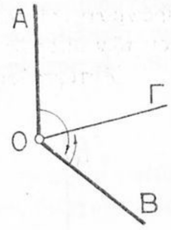
ΔΙΣΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ ΤΡΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

102. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ ὀνομάζεται* **δισορθογώνιος,** *ὅταν δύο ἑδρικαὶ γωνίαι αὐτῆς εἶναι ὀρθαί.*

Ὡς πρὸς τὴν ὕπαρξιν μιᾶς τοιαύτης γωνίας παρατηροῦμεν ὅτι ἂν θεωρήσωμεν μίαν γωνίαν (ΟΒ, ΟΓ) διάφορον, ἐν γένει, τῆς ὀρθῆς καὶ μίαν ἡμιευθεῖαν

(1) Αἱ ἀκμαὶ ἀντιστοιχοῦν **διττῆς** πρὸς ἀλλήλας.

ΟΑ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (ΟΒ, ΟΓ), τότε αἱ δύο ἑδρικαὶ γωνίαι (ΟΓ, ΟΑ) = = β καὶ (ΟΑ, ΟΒ) = γ εἶναι ὀρθαί.



Σχ. 102

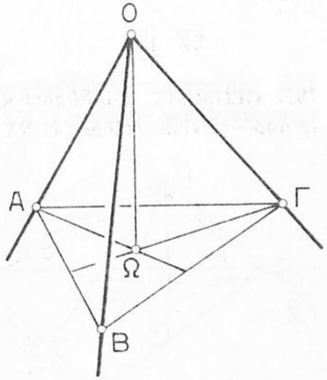
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ ἀπέναντι τῶν ὀρθῶν ἑδρικῶν γωνιῶν μιᾶς δισορθογωνίου τριέδρου κείμεναι δίεδροι γωνίαι εἶναι ὀρθαί.*

Πράγματι, ἐπειδὴ ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ, εἶναι (46) κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τούτων, ἑπομένως (74) καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ΒΟΓ, ἤτοι αἱ δίεδροι ΟΒ (Γ,Α) καὶ ΟΓ (Α,Β) εἶναι ὀρθαί.

ΙΣΟΕΔΡΙΚΗ ΤΡΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

103. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ ὀνομάζεται* **ἰσοεδρική,** *ὅταν καὶ αἱ τρεῖς ἑδρικαὶ αὐτῆς γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ὕπαρξιν τῆς ἰσοεδρικῆς τριέδρου γωνίας παρατηροῦμεν ὅτι ἂν θεωρήσωμεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος αὐτοῦ (1), ἡ τρίεδρος Ο.ΑΒΓ εἶναι ἰσοεδρική. Πράγματι, τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ, θεωρούμενα ἀνὰ δύο, εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας. Ἑπομένως $\alpha = \beta = \gamma$.



Σχ. 103

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς ἰσοεδρικῆς τριέδρου εἶναι ἴσαι.*

Ἀντιστρόφως:

Ἂν μιᾶς τριέδρου αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι τότε ἡ τρίεδρος εἶναι ἰσοεδρική, ἤτοι εἶναι ἴσαι αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι αὐτῆς.

Πράγματι, ἐκ τῆς $\beta = \gamma$ ἕπεται (101) ἡ $Β = Γ$ καὶ ἐκ τῆς $\gamma = \alpha$ ἡ $Γ = Α$ Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι : $Α = Β = Γ$.

Ἀντιστρόφως, ἐκ τῆς $Β = Γ$ ἕπεται ἡ $\beta = \gamma$ καὶ ἐκ τῆς $Γ = Α$ ἡ $\gamma = \alpha$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι: $\alpha = \beta = \gamma$.

ΤΡΙΣΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ ΤΡΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

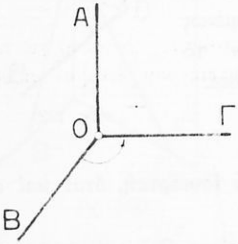
104. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία τρίεδρος γωνία τῆς ὁποίας αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ ὀνομάζεται* **τρισορθογώνιος**.

Ἂν θεωρήσωμεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν (ΟΒ,ΟΓ) καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ, τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (ΟΒ, ΟΓ), ἡ τρίεδρος Ο.ΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιος

(1) Ἄξων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του.

(Σχ. 104). Αἱ δίεδροι γωνίαι κάθε τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας εἶναι ὀρθαί. Πράγματι, αἱ ὀρθαί γωνίαι (ΟΒ, ΟΓ), (ΟΓ, ΟΑ), (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων τῆς τριέδρου.

Ἀντιστρόφως, ἂν αἱ δίεδροι γωνίαι τριέδρου εἶναι ὀρθαί, ἡ τρίεδρος εἶναι τρισορθογώνιος, ἤτοι αἱ ἑδρικαὶ αὐτῆς γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

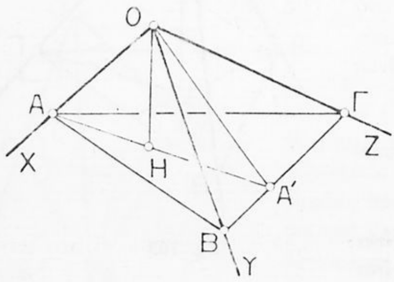


Σχ. 104

Πράγματι, ἡ ἀκμὴ π.χ. ΟΑ εἶναι τομὴ δύο ἐπιπέδων τῶν ΑΟΒ καὶ ΓΟΑ τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ΒΟΓ, ἑπομένως (77) ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ καὶ λόγω τούτου κάθετος ἐπὶ τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ, ἤτοι (ΟΑ, ΟΒ) $=$ (ΟΓ, ΟΑ) $= \frac{\pi}{2}$

Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι (ΟΒ, ΟΓ) $= \frac{\pi}{2}$

105. ΘΕΩΡΗΜΑ. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου Ο.XYZ, ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ο αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 105.1

Ἀπόδειξις. Ἔστω Η ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ο τῆς τριέδρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Ἡ ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΟΑ (διότι ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἐπίπεδον ΒΟΓ) καὶ πρὸς τὴν ΟΗ (διότι ἡ ΟΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ). Ἑπομένως ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΗ. Ἡ ΑΗ ἑπομένως εἶναι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΒΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ, ἕπεται ὅτι τὸ Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

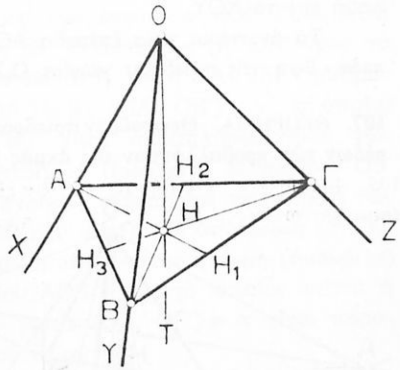
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου Ο.XYZ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον.*

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν κάθετον ΟΑ' ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὸ σημεῖον Α' κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, διότι ἡ γωνία (ΟΒ, ΟΓ) εἶναι ὀρθή. Ἡ ΟΑ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΑ', ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΟΑ' εἶναι ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΑ') αὐτοῦ. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ΑΟΑ' καὶ ΑΒΓ εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, διότι τὸ δεύτερον περιέχει τὴν ΒΓ ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον (ἀφοῦ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΟΑ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ'), ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Ο κάθετος ΟΗ ἐπὶ τὴν ΑΑ' (τομὴν τῶν ἀνωτέρω, καθέτων ἐπ' ἄλληλα, ἐπιπέδων) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ Ἑπομένως τὸ Η κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Α', ἀφοῦ τὸ ΟΗ εἶναι τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΑ'. Ἐπειδὴ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΑ' εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (διότι τὸ Α' κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ), τὸ σημεῖον Η εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον [1].

ΕΠΙΠΕΔΑ — ΥΨΗ ΤΡΙΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ

106. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ προβάλλοντα τὰς ἀκμὰς τριέδρου γωνίας Ο.ΧΥΖ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἀπέναντι τούτων ἑδρῶν τῆς τριέδρου, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΟΤ ἡ τομὴ δύο ἐκ τῶν ἐπιπέδων τᾶς προτάσεως : τοῦ προβάλλοντος τὴν ἀκμὴν ΟΧ ἀπὶ τὸ ἐπίπεδον ΥΟΖ καὶ τοῦ προβάλλοντος τὴν ἀκμὴν ΟΥ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΟΧ (Σχ. 106). Θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΟΖ καὶ τὴν ΟΤ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΧΟΥ, ἤτοι ὅτι εἶναι τὸ προβάλλον τὴν ΟΖ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΧΟΥ.



Σχ. 106

Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΤ καὶ ἔστωσαν : Η τὸ κοινὸν σημεῖον τοῦ (Π) μὲ τὴν ΟΤ καὶ Α,Β,Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτοῦ μὲ τὰς ἀκμὰς ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ τῆς τριέδρου ἀντιστοίχως.

---

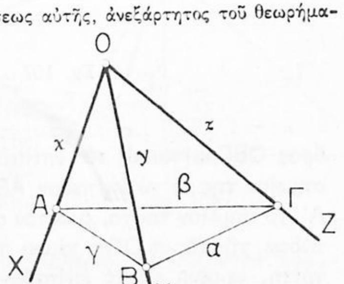
(1) Ἕνας δεύτερος τρόπος ἀποδείξεως τῆς προτάσεως αὐτῆς, ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρήματος (105), βασίζεται εἰς τὴν πρότασιν κατὰ τὴν ὁποίαν: Ἵνα μιὰ γωνία τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα πρέπει νὰ ἀρκεῖ τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων. Πράγματι, ἂν θέσωμεν $ΒΓ = α$, $ΓΑ = β$, $ΑΒ = γ$, $ΟΑ = x$, $ΟΒ = y$, $ΟΓ = z$, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ ἔχομεν:

$$y^2 + z^2 = α^2, \quad z^2 + x^2 = β^2, \quad x^2 + y^2 = γ^2$$

καὶ ἐκ τούτων ὅτι :

$$(1) \qquad x^2 = \frac{β^2 + γ^2 - α^2}{2}, \quad y^2 = \frac{γ^2 + α^2 - β^2}{2},$$

$$z^2 = \frac{α^2 + β^2 - γ^2}{2}$$



Σχ. 105.2

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω (1) ἕπεται ὅτι :

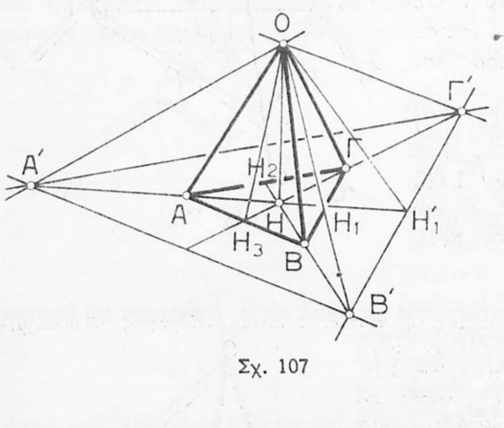
$β^2 + γ^2 > α^2$ ἢ $α^2 < β^2 + γ^2$. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι $(ΑΒ,ΑΓ) < \frac{π}{2}$, ἤτοι ὅτι ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τῶν (1), προκύπτει, ὁμοίως ὅτι καὶ αἱ Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι.

Τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πράγματι, τὸ ἐπί-πεδον ΑΟΗ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, κάθετον ἐπὶ τὸ ΒΟΓ, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ (ὡ[ς] περιέχον τὴν ΟΗ). Ἑπομένως ἡ τομὴ ΒΓ τῶν ἐπιπέδων ΟΒΓ καὶ ΑΒΓ εἶνα[ι] κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΗ καὶ λόγῳ τούτου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖα[ν] ΑΗ αὐτοῦ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΗ. Οὕτω[ς] τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτ[ι] ἡ ΓΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Οὕτως, ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΗ καὶ ὀρθο-γώνιος πρὸς τὴν ΟΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΟΗ. Λόγῳ τούτου καὶ τ[ὸ] ἐπίπεδον ΑΟΗ, τὸ περιέχον τὴν ΑΒ, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΓΟΗ, ἤτοι τὸ ἐπίπε-δον ΓΟΗ εἶναι τὸ προβάλλον τὴν ΟΓ, ἤτοι τὴν ΟΖ, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ, δη-λαδὴ ἐπὶ τὸ ΧΟΥ.

Τὰ ἀνωτέρω τρία ἐπίπεδα ΑΟΗ, ΒΟΗ, ΓΟΗ ὀνομάζονται, συνήθως **ἐπί-πεδα - ὕψη** τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΧΥΖ.

107. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΧΥΖ, τὴν τομὴν ΟΤ τῶν ἐπι-πέδων τῶν προβαλλόντων τὰς ἀκμὰς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν καὶ ἕν[α] τυχὸν ἐπίπεδον (Π) κάθετο[ν] ἐπὶ τὴν ΟΤ, τέμνον τὴν Ο[Τ] εἰς τὸ Η καὶ τὰς ΟΧ,ΟΥ, Ο[Ζ] κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντι-στοίχως. Αἱ διὰ τῆς κορυφῆ[ς] Ο τῆς τριέδρου κάθετοι ἐπ[ὶ] τὰ ἐπίπεδα ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟ[Β] τῶν ἑδρῶν αὐτῆς ἀντιστοί-χως τέμνουν, τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὰς κορυφὰς Α΄, Β΄, Γ[΄] τριγώνου ὁμοιοθέτου πρὸς τ[ὸ] ΑΒΓ.



Σχ. 107

Ἀπόδειξις. Ἡ ἐκ τῶν κα-θέτων τῆς προτάσεως κάθε-τος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕ-δρας ΟΒΓ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΟΗ (75, Πόρισμα 1) καὶ ἑπομένως τὸ κοινὸ[ν] σημεῖον της μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον της μὲ τὴν ΑΗ. Ἔστ[ω] Α΄ τὸ σημεῖον τοῦτο. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ διὰ τοῦ Ο κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπ[ί-] πεδον τῆς ἕδρας ΟΓΑ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ κατὰ σημεῖον Β΄ τῆς ΒΗ, καὶ [ἡ] τρίτη, κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΟΗ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ κατὰ σημεῖον [Γ΄] τῆς ΓΗ.

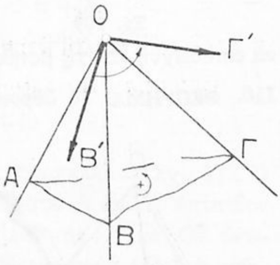
Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ (Σχ. 107) εἶναι ἀντιστοίχως παρά[λ-] ληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πράγματι, ἡ ΟΒ΄, ὡς κάθετος ἐπ[ὶ] τὸ ἐπίπεδον ΓΟΑ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ. Ἡ ΟΓ΄, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδο[ν] ΑΟΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ. Ὥστε ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΟΒ΄ κα[ὶ] ΟΓ΄ καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Β΄ΟΓ΄. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

'Γ' εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΟΑ. Ἀλλὰ ἡ Β'Γ' εἶναι καὶ πρὸς τὴν ΟΗ ρθογώνιος, διότι ἡ ΟΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ'. Ἐκ τούτων ἕπε-ται ὅτι ἡ Β'Γ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΗ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι κάθε-τος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΗ, ὡς ὀρθογώνιος πρὸς τὰς εὐθείας ΟΗ καὶ ΟΑ'. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι αἱ ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ΓΑ καὶ Γ'Α', ὡς καὶ αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλοι. Ἀπεδείχθη οὕ-τω ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ ΑΒΓ. Τὸ κέντρον τῆς ὁμοιο-θεσίας εἶναι τὸ σημεῖον Η.

ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΤΡΙΕΔΡΟΙ

108. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' τῆς προηγουμένης (107) προτάσεως κεῖνται (Σχ. 107) πρὸς τὸ μέρος τῶν ἐπιπέδων ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ ἀκμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀντιστοίχως (ἡ ΟΑ' πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΒΟΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἀκμὴ ΟΑ τῆς τριέδρου κλπ), αἱ γωνίαι $(ΟΒ', ΟΓ') \equiv \alpha'$, $(ΟΓ', ΟΑ') \equiv \beta'$, $(ΟΑ', ΟΒ') \equiv \gamma'$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἑδρικαὶ γωνίαι τῆς τριέδρου Ο. Α'Β'Γ' εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων Α, Β, Γ τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Πράγματι, αἱ πλευραὶ ΟΒ' καὶ ΟΓ' τῆς γωνίας (ΟΒ', ΟΓ') εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν ΓΟΑ καὶ ΑΟΒ τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ καὶ κεῖνται ἐξ ὑποθέσεως : ἡ ΟΒ' πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΓΟΑ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἀκμὴ (ἡμιευθεῖα) ΟΒ, καὶ ἡ ΟΓ' πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἀκμὴ ΟΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται (69) ὅτι ἡ γωνία $(ΟΒ,' ΟΓ') \equiv \alpha'$ εἶναι παρα-πληρωματικὴ τῆς ἀντιστοίχου τῆς διέδρου Α αὐτῆς.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ γωνίαι (ΟΓ', ΟΑ') καὶ (ΟΑ', ΟΒ') εἶναι ἀντιστοίχως παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων Β καὶ Γ τῆς τριέδρου Ο · ΑΒΓ.



Σχ. 108

Ὥστε αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι α', β', γ' τῆς νέας τριέδρου Ο.Α'Β'Γ' εἶναι ἀντιστοίχως παραπληρω-ματικαὶ τῶν διέδρων Α, Β, Γ τῆς Ο.ΑΒΓ.

Ἐπειδή, ὡς ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς προηγου-μένης προτάσεως προκύπτει, αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου Ο.Α'Β'Γ', θὰ ἔχωμεν ὅτι αἱ ἑδρικαὶ γω-νίαι α, β, γ τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ εἶναι παραπλη-ρωματικαὶ τῶν διέδρων Α', Β', Γ' τῆς Ο.Α'Β'.Γ'.

Δύο τρίεδροι Ο.ΑΒΓ καὶ Ο.Α'Β'Γ', ὡς αἱ ἀνωτέρω, ὀνομάζονται **παρα-πληρωματικαὶ ἀλλήλων.**

Ἂν ἑπομένως, συμβολίσωμεν μὲ τὰ γράμματα α, β, γ, Α, Β, Γ τὰ στοι-χεῖα (ἑδρικὰς καὶ διέδρους γωνίας) τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ καὶ μὲ τὰ α', β', γ', Α', Β', Γ' τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς παραπληρωματικῆς Ο.Α'Β'Γ' τῆς Ο.ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$\alpha' + A = \pi, \quad \beta' + B = \pi, \quad \gamma' + \Gamma = \pi \quad \text{καὶ}$$
$$\alpha + A' = \pi, \quad \beta + B' = \pi, \quad \gamma + \Gamma' = \pi$$

109. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἑκάστη ἑδρικὴ γωνία τριέδρου γωνία. Ο.XYZ εἶναι μικροτέρ[α] τοῦ ἀθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

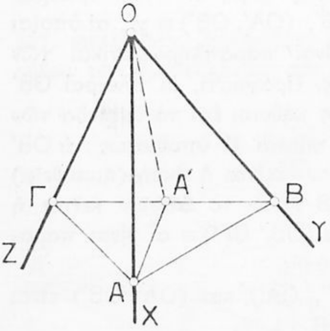
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $(OY, OZ) = \alpha$, $(OZ, OX) = \beta$, $(OX, OY) = \gamma$ α[ἱ] ἑδρικαὶ γωνίαι τῆς τριέδρου. Ὑποθέτομεν $\alpha > \beta > \gamma$ καὶ θεωροῦμεν (Σχ. 109) ἐπ[ὶ] τῶν ΟΥ καὶ ΟΖ δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, καὶ τὴν ἡμιευθεῖα[ν] ΟΑ′ τῆς ἕδρας (ΟΥ, ΟΖ) διὰ τὴν ὁποίαν $(OA', O\Gamma) = (O\Gamma, OA) = \beta$, ἔνθα Α[′] ἐπὶ τῆς ΒΓ. Τὸ σημεῖον Α′ τῆς ΒΓ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, διότι $\beta < \alpha$.

Ἔστω Α τὸ σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΟΧ διὰ τὸ ὁποῖον $OA = OA'$. Ἐκ τῶ[ν] τριγώνων ΟΓΑ καὶ ΟΑ′Γ, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ΟΓ εἶναι κοινὴ πλευρὰ καὶ ἐπὶ πλέο[ν] $OA = OA'$ καὶ $(O\Gamma, OA) = (OA', O\Gamma)$, ἕπεται ὅτι $\Gamma A = A'\Gamma$. Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $B\Gamma < \Gamma A + AB$, ἤτο[ι] $BA' + A'\Gamma < \Gamma A + AB$ καὶ ἐπειδὴ $\Gamma A = A'\Gamma$ θὰ εἶναι: $BA' < AB$. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ κα[ὶ] ΟΒΑ′ (εἰς τὰ ὁποῖα $OA = OA'$, ΟΒ κοινὴ πλευ-ρά, καὶ $BA' < AB$) ἕπεται ὅτι :

$(OB, OA') < (OA, OB)$, ἤτοι: $(OB, OA') < \gamma$

Ἀλλὰ $(OB, OA') = (OB, O\Gamma) - (OA', O\Gamma) = \alpha - \beta$

Ὥστε $\alpha - \beta < \gamma$, ἤτοι $\alpha < \beta + \gamma$. Ἐπει-δὴ $\alpha > \beta$ καὶ $\alpha > \gamma$, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι κα[ὶ] $\beta < \gamma + \alpha$ καὶ $\gamma < \alpha + \beta$.



Σχ. 109

Ἂν $\alpha = \beta = \gamma$ (ἰσοεδρικὴ τρίεδρος γωνία) ἡ πρότασις προφανῶς ἰσχύει.

Σημειοῦμεν ὅτι: ἡ σχέσις $\alpha < \beta + \gamma$ δύνατα[ι] νὰ ἀποδειχθῇ καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐννοίας τῆς κλίσεως εὐθείας ὡς πρὸς ἐπίπεδον.

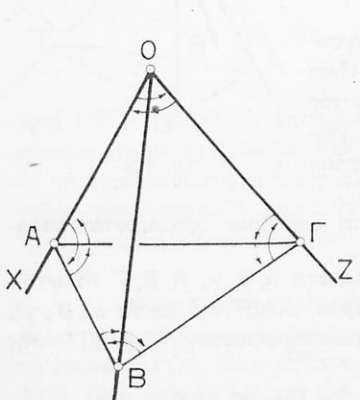
110. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν τριέδρου γωνίας Ο.XYZ εἶναι μικρότερον τῆς πλήρους γωνίας 2π.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶ[ν] ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ τῆς τριέδρου γωνίας, τρία ση-μεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν τριέδρω[ν] γωνιῶν Α · ΒΓΟ, Β · ΓΑΟ, Γ · ΑΒΟ ἔχομεν ἀν-τιστοίχως (109):

(1) $(AB, A\Gamma) < (A\Gamma, AO) + (AO, AB)$

(2) $(B\Gamma, BA) < (BA, BO) + (BO, B\Gamma)$

(3) $(\Gamma A, \Gamma B) < (\Gamma B, \Gamma O) + (\Gamma O, \Gamma A)$



Σχ. 110

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶ[ν] πρώτων μελῶν τῶν (1), (2), (3) εἶναι ἴσο[ν] πρὸς π, ὡς ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώ-νου ΑΒΓ. Οὕτω, διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη, ἔχομεν :

$\pi < (A\Gamma, AO) + (\Gamma O, \Gamma A) + (AO, AB) + (BA, BO) + (BO, B\Gamma) + (\Gamma B, \Gamma O)$.

Ἀλλὰ $(A\Gamma, AO) + (\Gamma O, \Gamma A) = \pi - (OA, O\Gamma)$, ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΓ. Δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν:

$(BA, BO) + (BO, B\Gamma) = \pi - (OB, OA)$ καὶ $(BO, B\Gamma) + (\Gamma B, \Gamma O) = \pi - (O\Gamma, OB)$.

Ἑπομένως :

$$\pi < \pi - (OA, O\Gamma) + \pi - (OB, OA) + \pi - (O\Gamma, OB), \text{ ἢ}$$
$$(O\Gamma, OB) + (OB, OA) + (OA, O\Gamma) < 2\pi, \text{ ἢ } \alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$

111. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν κάθε τριέδρου γωνίας εἶναι μικρότερον τῆς γωνίας 3π καὶ μεγαλύτερον τῆς π.

2. Τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ἑδρικῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῆς τρίτης καὶ τῆς γωνίας π.

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω Ο.ΑΒΓ ἡ θεωρουμένη τρίεδρος καὶ Ο.Α'Β'Γ' ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς. Ἔχομεν (110) : (1) $\alpha' + \beta' + \gamma' < 2\pi$

Ἀλλά : $\alpha' + A = \pi$, $\beta' + B = \pi$, $\gamma' + \Gamma = \pi$. Ἑπομένως :

(2) $\alpha' = \pi - A$, $\beta' = \pi - B$, $\gamma' = \pi - \Gamma$

Ἐκ τῆς (1), ἑπομένως, ἔχομεν :

$$\pi - A + \pi - B + \pi - \Gamma < 2\pi, \text{ ἑπομένως } A + B + \Gamma > \pi$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν :

$$A + \alpha' = \pi, \quad B + \beta' = \pi, \quad \Gamma + \gamma' = \pi, \text{ ἔχομεν :}$$
$$A + B + \Gamma = 3\pi - (\alpha' + \beta' + \gamma'),$$

καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι : $A + B + \Gamma < 3\pi$

2. Ἐκ τῆς $\alpha' < \beta' + \gamma'$ καὶ τῶν (2), ἔχομεν :

$$\pi - A < \pi - B + \pi - \Gamma, \text{ ἤτοι : } B + \Gamma < \pi + A.$$

Ἐκ τῶν $\beta' < \gamma' + \alpha'$ καὶ $\gamma' < \alpha' + \beta'$ ἔχομεν, ὁμοίως, ὅτι :

$$\Gamma + A < \pi + B \text{ καὶ } A + B < \pi + \Gamma$$

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΡΙΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ (1)

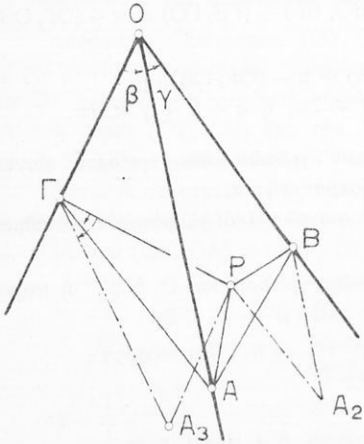
112. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω Ο.ΧΥΖ μία τρίεδρος γωνία. Θεωροῦμεν (Σχ. 112.1) τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἀκμῆς ΟΧ, τὴν ὀρθὴν προβολὴν Ρ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας (ΟΥ, ΟΖ), καὶ τὰς προβολὰς Β καὶ Γ τοῦ Ρ ἐπὶ τὰς ΟΥ καὶ ΟΖ ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων (53) ἔχομεν ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΥ καὶ ἡ ΟΓ ἐπὶ τὴν ΟΖ. Ἑπομένως αἱ γωνίαι (ΒΡ, ΒΑ) καὶ (ΓΡ, ΓΑ) εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Β καὶ Γ τῆς τριέδρου. Τὰ ἐπίπεδα ΑΡΒ καὶ ΑΡΓ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας (ΟΥ, ΟΖ), ὡς περιέχοντα τὴν κάθετον ΑΡ ἐπὶ τοῦτο. Ἂν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ) θεωρήσωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΡΒ εἰς τὸ Ρ καὶ τὸ σημεῖον A_2 αὐτῆς (Σχ. 112.1) διὰ τὸ ὁποῖον $PA_2 = PA$, θὰ εἶναι:

$$(BP, BA_2) = (BP, BA).$$

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΡΒ καὶ A_2PB (αἱ

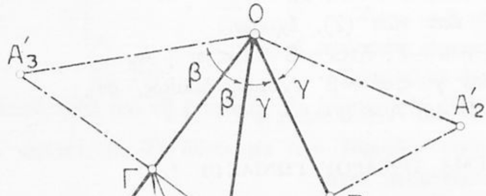
(1) Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἕδρας αὐτῆς.

κάθετοι πλευραὶ τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι). Οὕτως, ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου Β τῆς τριέδρου ἐμφανίζεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ). Ὁμοίως, ἂν θεωρήσωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΡΓ εἰς τὸ Ρ καὶ τὸ σημεῖον A_3 αὐτῆς διὰ τὸ ὁποῖον $PA_3 = PA$, θὰ εἶναι $(\Gamma P, \Gamma A_3) = (\Gamma P, \Gamma A)$, ἤτοι καὶ ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου Γ τῆς τριέδρου ἐμφανίζεται ὁμοίως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ). Ἄν, πέραν τούτου, θεωρήσωμεν (Σχ. 112.2) ἐπὶ τῆς ΡΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Ρ(εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν τὸ Ρ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας (ΟΥ, ΟΖ), τὸ σημεῖον A'_2 ὥστε $BA'_2 = BA$, θὰ ἔχωμεν ὅτι : $(OB, OA'_2) = (OA, OB) = \gamma$.



Σχ. 112.1

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων OBA'_2 καὶ ΟΒΑ. Οὕτως, ἡ ἑδρικὴ γωνία γ τῆς τριέδρου ἐμφανίζεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ). Ὁμοίως, ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ΡΓ τὸ σημεῖον A'_3 (Σχ. 112.2) ὥστε $\Gamma A'_3 = \Gamma A$, ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων $O\Gamma A'_3$ καὶ ΟΓΑ προκύπτει ὅτι $(O\Gamma, OA'_3) = (O\Gamma, OA) = \beta$, ἤτοι ὅτι καὶ ἡ ἑδρικὴ γωνία β τῆς τριέδρου ἐμφανίζεται εἰς τὸ ἐπίπεδον (ΟΥ, ΟΖ).



Σχ. 112.2

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. $OA'_2 = OA'_3$, διότι τὰ τμήματα ταῦτα ἐθεωρήθησαν ἴσα πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ.

2. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον BPA_2 εἶναι ἡ *κατάκλισις* τοῦ ΒΡΑ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ), διὰ στροφῆς περὶ τὴν ΒΡ, καὶ τὸ ΓPA_3 ἡ κατάκλισις τοῦ ΓΡΑ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ) διὰ στροφῆς περὶ τὴν ΓΡ.

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα OBA'_2 καὶ $O\Gamma A'_3$ εἶναι αἱ κατακλίσεις τῶν ΟΒΑ καὶ ΟΓΑ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ), διὰ στροφῆς περὶ τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ ἀντιστοίχως.

3. Τὰ σημεῖα A_2 καὶ A_3 εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου

(ΟΥ, ΟΖ) κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κέντρα τὰ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνας $ΒΑ'_2$ καὶ $ΓΑ'_3$ ἀντιστοίχως.

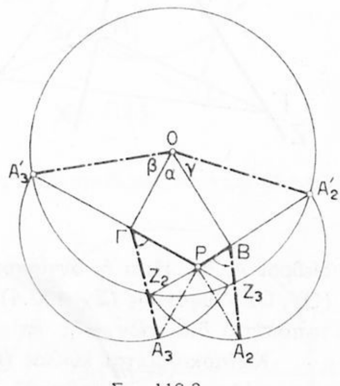
4. Ἂν ἀντὶ τοῦ θεωρηθέντος σημείου Α τῆς ἀκμῆς ΟΧ τῆς τριέδρου γωνίας θεωρήσωμεν ἕνα ἄλλο σημεῖον Α', θὰ ἔχωμεν ἕνα ἄλλο σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ), τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον, μάλιστα ὁμοιόθετον, κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς τριέδρου καὶ λόγον τὸν $\frac{ΟΑ'}{ΟΑ}$.

Τὸ εὑρεθὲν ἐπίπεδον σχῆμα δύναται νὰ ὀνομάζεται **ἀνάπτυγμα** *τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΧΥΖ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας (ΟΥ, ΟΖ) αὐτῆς.*

Ὁμοίως εὑρίσκεται τὸ ἀνάπτυγμα τῆς τριέδρου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας (ΟΖ, ΟΧ) ἢ τῆς (ΟΧ, ΟΥ).

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ

Εἰς τὴν παρατιθεμένην εἰκόνα (Σχ. 112.3) ἐμφανίζεται τὸ ἀνάπτυγμα τῆς τριέδρου Ο.ΧΥΖ (Σχ. 112.1) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ). Διὰ τὴν κατασκευὴν τούτου ἐθεωρήσαμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἕνα κύκλον (Ο) ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ τοῦ χωρικοῦ [1] σχήματος καὶ τὰς ἐπικέντρους γωνίας β, α, γ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἑδρικὰς τῆς τριέδρου Ο.ΧΥΖ, ἤτοι τοῦ χωρικοῦ σχήματος Ο.ΧΥΖ. Μεταξὺ τῶν γωνιῶν α, β, γ ἰσχύουν, βεβαίως, αἱ εἰς τὰς προτάσεις (109, 110) ἀναφερόμεναι σχέσεις: $α < β + γ$ κλπ. Διὰ τῶν $Α'_2$ καὶ $Α'_3$ κατεσκευάσθησαν αἱ κάθετοι $Α'_2Β$ καὶ $Α'_3Γ$ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας α, αἱ ὁποῖαι τέμνονται κατὰ τὸ σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου Ο (ΟΑ), ἀφοῦ $α < β + γ$, καὶ ἐπανατέμνουσιν ἀντιστοίχως τὸν θεωρηθέντα κύκλον (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα $Ζ_2$ καὶ $Ζ_3$ ἀντστοίχως. Ἀκολούθως κατεσκευάσθησαν οἱ κύκλοι $Β(ΒΑ'_2)$ καὶ $Γ(ΓΑ'_3)$, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὰ $Ζ_2$ καὶ $Ζ_3$ ἀντιστοίχως, καὶ αἱ εἰς τὸ Ρ κάθετοι ἐπὶ τὰς $Α'_2Ζ_2$ καὶ $Α'_3Ζ_3$ καὶ εὑρέθησαν τὰ κοινὰ σημεῖα $Α_2$ καὶ $Α_3$ τῶν καθέτων τούτων μὲ τοὺς ἀνωτέρω κύκλους. Αἱ γωνίαι $(ΒΡ, ΒΑ_2)$ καὶ $(ΓΡ, ΓΑ_3)$ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Β καὶ Γ τῆς τριέδρου, ἤτοι ἴσαι πρὸς τὰς διέδρους γωνίας Β καὶ Γ τοῦ χωρικοῦ σχήματος.



Σχ. 112.3

Πράγματι, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων $ΟΒΑ'_2$ καὶ ΟΒΑ (τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ χωρικοῦ σχήματος), ἡ ὁποία ἐξασφαλίζεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὑποτεινουσῶν $ΟΑ'_2$ καὶ ΟΑ αὐτῶν, καὶ τῶν γωνιῶν γ, προκύπτει ὅτι εἶναι ἴσα τὰ

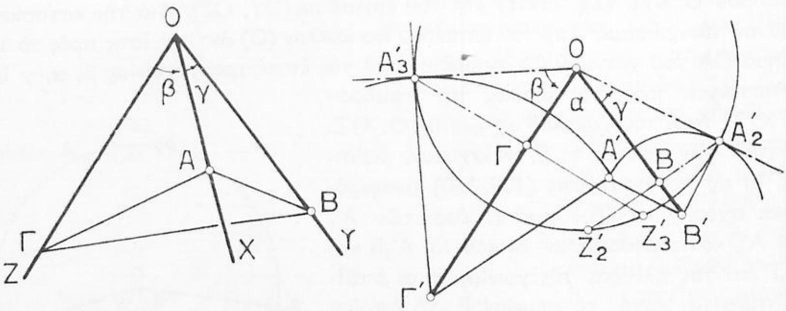
(1) Ἐν τῷ χώρῳ σχήματος

εὐθ. τμήματα ΟΒ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ χωρικοῦ σχήματος, ὡς καὶ τὰ BA'_2 καὶ ΒΑ.

Ἐπειδὴ δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ἴσα τὰ εὐθ. τμήματα ΟΓ, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὰ τετράπλευρα ΟΒΡΓ τοῦ ἐπιπέδου καὶ χωρικοῦ σχήματος εἶναι ἴσα. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα ΡΒ εἶναι ἴσα καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσα καὶ τὰ BA'_2 καὶ ΒΑ, ἑπομένως καὶ τὰ BA_2 καὶ ΒΑ, θὰ εἶναι ἴσα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα PBA_2 καὶ ΡΒΑ τῶν δύο σχημάτων (ἐπιπέδου καὶ χωρικοῦ). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ γωνία (ΒΡ, BA_2) τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΒΡ, ΒΑ) τοῦ χωρικοῦ, ἡ ὁποία τελευταία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου Β τῆς τριέδρου. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ γωνία (ΓΡ, $ΓA_3$) εἶναι ἴση πρὸς τὴν δίεδρον Γ τῆς τριέδρου.

Καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ) ἐμφάνισιν τῆς ἀντιστοίχου τῆς διέδρου Α τῆς τριέδρου Ο.ΧΥΖ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Θεωροῦμεν (Σχ. 112.4) μίαν τομὴν τῆς τριέδρου μὲ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΧ. Ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) ἡ ὁποία εἶναι ἡ τομὴ τοῦ θεωρουμένου ἐπιπέδου μὲ τὴν



Σχ. 112.4

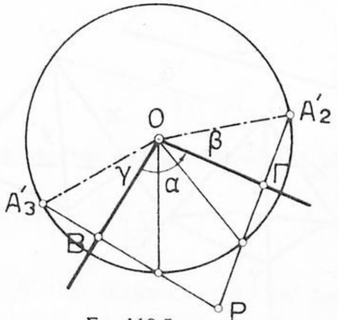
δίεδρον Α, θὰ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου αὐτῆς. Ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ) ἐμφάνισις (Σχ. 112.4) τῆς ἀντιστοίχου ταύτης γωνίας (1) πραγματοποιεῖται διὰ τῶν ἑξῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ) κατασκευῶν :

Κατασκευάζεται κύκλος (Ο), τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς δύναται, ἀφοῦ λαμβάνεται αὐθαιρέτως, νὰ θεωρηθῇ ἴση πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ τοῦ χωρικοῦ σχήματος. Ἑκατέρωθεν τῆς ἐπικέντρου γωνίας τῆς ἴσης πρὸς τὴν (ΟΒ, ΟΓ) = α κατασκευάζονται δύο γωνίαι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἑδρικὰς γωνίας β καὶ γ τοῦ χωρικοῦ σχήματος. Ἔστωσαν A'_2 καὶ A'_3 (Σχ. 112.4) τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν τούτων (τῶν διαφόρων τῶν τῆς γωνίας α) μὲ τὸν κύκλον (Ο). Κατασκευάζονται αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ (Ο) εἰς τὰς A'_2 καὶ A'_3 καὶ ἔστωσαν Β' καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ ἀντιστοίχως. Ἂν εἶναι Α' τὸ ἓν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων τῶν κύκλων Β' ($B'A'_2$) καὶ Γ' ($Γ'A'_3$), ἡ γωνία (Α'Β', Α'Γ')

(1) Εἰς τὸ ἀληθὲς της μέγεθος.

εἶναι ἡ ζητουμένη δίεδρος γωνία Α, ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου Α τῆς τριέδρου, εἰς τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος.

Πράγματι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $OA'_3\Gamma'$ καὶ $OA\Gamma$, τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ χωρικοῦ σχήματος ($OA'_3 = OA$ καὶ $(OA'_3, O\Gamma) = (OA, O\Gamma)$), ἕπεται ὅτι $A'_3\Gamma' = A\Gamma$, ἤτοι ὅτι $A'\Gamma' = A\Gamma$, διότι $A'_3\Gamma' = A'\Gamma'$. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ $A'B' = AB$. Ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἐθεωρήσαμεν ἀνωτέρω, ἔχομεν ἀκόμη ὅτι: $O\Gamma' = O\Gamma$ καὶ $OB' = OB$. Ἐκ τούτων καὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν $(O\Gamma, OB)$ καὶ $(O\Gamma', OB')$ ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα $OB'\Gamma'$ καὶ $OB\Gamma$ (ἐπιπέδου καὶ χωρικοῦ σχήματος) καὶ ἑπομένως ὅτι $B'\Gamma' = B\Gamma$. Τὰ τρίγωνα, κατὰ ταῦτα, $A'B'\Gamma'$ καὶ $AB\Gamma$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας, καὶ ἑπομένως $(A'B', A'\Gamma') = (AB, A\Gamma)$, ἤτοι ἡ ἐμφανιζομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΟΥ, ΟΖ) γωνία $(A'B', A'\Gamma')$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου Α τῆς τριέδρου.

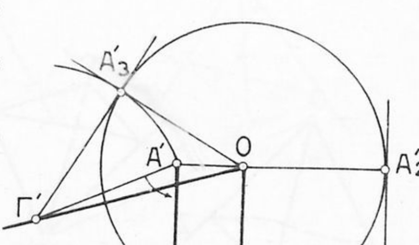


Σχ. 112.5

Σημειοῦμεν ὅτι, ἀντὶ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν προηγουμένην, βάσει τῆς ὁποίας κατεσκευάσθησαν αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Β καὶ Γ τῆς τριέδρου γωνίας, κατασκευάζοντες τὰς ἐπικέντρους γωνίας α, β, γ, ὥστε ἡ β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν γ καὶ α. Οὕτως, ἀντὶ τῶν ἀντιστοίχων τῶν διέδρων Β καὶ Γ, θὰ ἔχωμεν τὰς ἀντιστοίχους τῶν διέδρων Γ καὶ Α.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀναπτύγματος τῆς τριέδρου ἐκ τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν α, β, γ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως αὗται συνδέωνται διὰ τῶν σχέσεων: $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ καὶ $\alpha < \beta + \gamma$, ἂν α εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἑδρικὴ γωνία.

Πράγματι, ἂν $\alpha > \beta + \gamma$, τότε τὸ σημεῖον Ρ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) καὶ ἀντιστρόφως (Σχ. 112.5).



Σχ. 112.6

Ἡ γραφικὴ εἰκὼν (112.6) ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΧΥΖ, π.χ. ἡ $(OA, OB) \equiv \gamma$, εἶναι ὀρθή. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο) κατὰ τὸ σημεῖον A'_2 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΒ (1).

(1) Τὸ Β' εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον (Μέρος Α', παραγ. 36) τῆς ΟΒ.

Τὸ σημεῖον Α' εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΟΑ'$_2$ μὲ τὸν κύκλον Γ' (Γ'Α'$_3$) (κέντρου Γ' καὶ ἀκτῖνος Γ'Α'$_3$). Ἡ Α'Β'' εἶναι ἡ διὰ τοῦ Α' παράλληλος πρὸς τὴν ΟΒ' καὶ ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ (Α'Γ', Α'Β'') [1]

Τέλος, σημειοῦμεν ὅτι δοθέντος τοῦ ἐπιπέδου σχήματος (112.4) ὑπάρχει τρίεδρος γωνία (χωρικὸν σχῆμα), καὶ μία μόνον, τῆς ὁποίας τοῦτο εἶναι ἀνάπτυγμα.

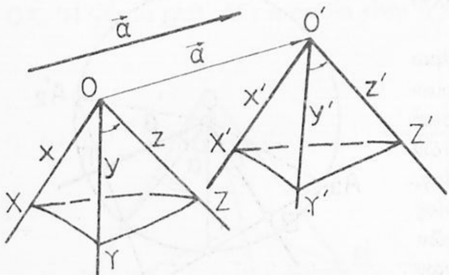
ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

113. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο τρίεδροι γωνίαι Ο. ΑΒΓ καὶ Ο. Α'Β'Γ' ὀνομάζονται* **ὁμορρόπως ἴσαι** *ἢ ἁπλῶς* **ἴσαι,** *ὅταν αἱ ἑδρικαὶ καὶ αἱ δίεδροι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι,* **ἀντιρρόπως** *δὲ* **ἴσαι** *ὅταν αἱ ἑδρικαὶ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετοι (ἀντιρρόπως ἴσαι).*

Παρατηροῦμεν ὅτι :

1. Ἡ τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ καὶ ἡ ὁμόλογος Ο'.Χ'Υ'Ζ' αὐτῆς κατὰ μίαν παράλληλον μεταφορὰν **Τ** $(\vec{\alpha})$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσαι (Σχ. 113).

Ἂν ὀνομάσωμεν x, y, z τὰς ἀκμὰς ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ τῆς πρώτης καὶ x', y', z' τὰς ὁμολόγους αὐτῶν



Σχ. 113.1

κατὰ τὴν ἀνωτέρω μεταφοράν, ἀκμὰς Ο'Χ', Ο'Υ', Ο'Ζ' τῆς δευτέρας, αἱ διατεταγμέναι τριάδες (x, y, z) καὶ (x', y', z') ὁρίζουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν εἰς τὸν χῶρον.

2. Ἡ τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ καὶ ἡ ὁμόλογος αὐτῆς Ο'.Χ'Υ'Ζ' εἰς μίαν συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον (Σχ. 113.2) εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι.

Αἱ διατεταγμέναι τριάδες (x, y, z) καὶ (x', y', z') ὁρίζουν δύο ἀντιθέτους προσανατολισμοὺς εἰς τὸν χῶρον, ἤτοι αἱ ἀνωτέρω τρίεδροι εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.

Σχ. 113.2

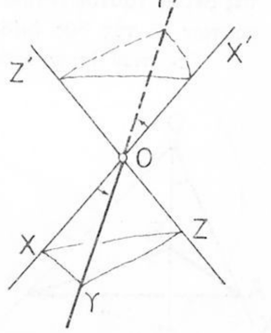
(1) Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς διέδρου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας, (ΟΧ, ΟΒ).

ΚΑΤΑ ΚΟΡΥΦΗΝ ΤΡΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

114. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο τρίεδροι γωνίαι* $O.XYZ$ *καὶ* $O.X'Y'Z'$ *ὀνομάζονται* **κατὰ κορυφήν**, ὅταν αἱ ἀκμαὶ τῆς μιᾶς ἐκ τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ἀντικείμεναι τῶν ἀκμῶν τῆς ἄλλης (Σχ. 114).

Αἱ κατὰ κορυφὴν τρίεδροι, συμμετρικαὶ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν κοινὴν των κορυφὴν Ο, εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι, ἤτοι αἱ ἑδρικαὶ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἀντίθετοι.

Αἱ κατὰ κορυφὴν τρίεδροι, ὅπως καὶ αἱ συμμετρικαὶ ἀλλήλων, ὡς πρὸς σημεῖον, εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.



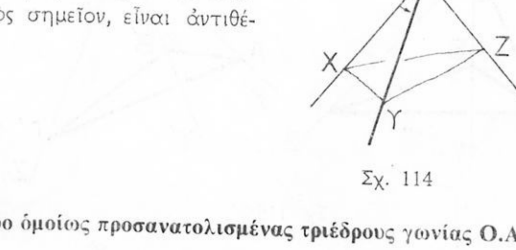
Σχ. 114

115. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένας τριέδρους γωνίας Ο.ΑΒΓ καὶ Ο'.Α'Β'Γ' εἶναι :

$$\beta = \beta', \ \gamma = \gamma' \text{ καὶ } A = A',$$

τότε αἱ τρίεδροι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Α' τῶν ἀκμῶν ΟΑ καὶ Ο'Α' ἀντιστοίχως, ὥστε ΟΑ = = Ο'Α', καὶ τὰς τομὰς ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν τριέδρων μὲ τὰ κάθετα ἐπὶ τὰς ΟΑ καὶ Ο'Α' ἐπίπεδα κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως. (Σχ. 115.1).



Σχ. 115.1

Αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΓ) καὶ (Α'Β', Α'Γ') τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσαι, ὡς ἀντίστοιχοι τῶν ἴσων, ἐξ ὑποθέσεως, διέδρων Α καὶ Α'.

Τὰ ὀρθογώνια, κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α', τρίγωνα ΟΑΒ καὶ Ο'Α'Β' εἶναι ἴσα (ΟΑ = Ο'Α' καὶ $\gamma = \gamma'$). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι : ΑΒ = Α'Β' καὶ ΟΒ = Ο'Β'.

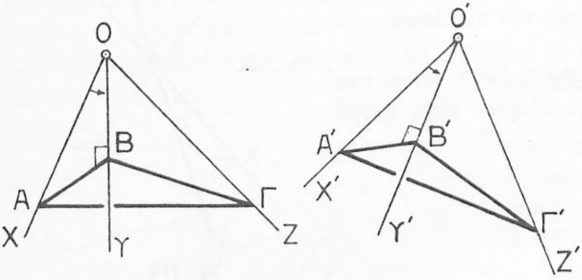
Ἐπειδὴ καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΓ καὶ Ο'Α'Γ' εἶναι ἴσα (ΟΑ = Ο'Α' καὶ $\beta = \beta'$), θὰ εἶναι : ΑΓ = Α'Γ' καὶ ΟΓ = Ο'Γ'.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα (ΑΒ = Α'Β', ΑΓ = Α'Γ' καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = (Α'Β', Α'Γ')) καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ

ΒΓ= Β'Γ'. Ἐξ ἄλλου, τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ Ο'Β'Γ' εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας, καὶ ἑπομένως (ΟΒ, ΟΓ)=(Ο'Β', Ο'Γ'), ἤτοι $\alpha = \alpha'$.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων γωνιῶν Β καὶ Β', θεωροῦμεν : δύο σημεῖα Β καὶ Β' τῶν ἀκμῶν ΟΒ καὶ Ο'Β' ὥστε ΟΒ = Ο'Β', τὰ κάθετα ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ταύτας ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β', καὶ τὰς τομὰς ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τούτων μὲ τὰς δύο διέδρους ἀντιστοίχως (Σχ. 115.2).

Ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΒ καὶ Ο'Α'Β' (ΟΒ = Ο'Β' καὶ $\gamma = \gamma'$), ἕπεται ὅτι ΟΑ = Ο'Α' καὶ ΑΒ = Α'Β'. Ὁμοίως ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΒΓ καὶ Ο'Β'Γ' (ΟΒ = Ο'Β' καὶ $\alpha = \alpha'$), ἕπεται ὅτι ΟΓ = Ο'Γ' καὶ ΒΓ = Β'Γ'. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΓ καὶ Ο'Α'Γ' (ΟΑ = Ο'Α', ΟΓ = Ο'Γ' καὶ $\beta = \beta'$), ἕπεται ὅτι ΑΓ = Α'Γ'. Τέλος, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ



Σχ. 115.2

καὶ Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι Β καὶ Β' αὐτῶν, ἤτοι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Β καὶ Β' τῶν τριέδρων, εἶναι ἴσαι. Ὥστε Β=Β'.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ δίεδροι Γ καὶ Γ' εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως αἱ θεωρούμεναι τρίεδροι εἶναι ἴσαι, συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα (113) ὁρισμόν.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν αἱ θεωρούμεναι τρίεδροι εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι, ἡ τυχοῦσα ἐκ τούτων ἀποδεικνύεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἴση μὲ τὴν συμμετρικὴν τῆς ἄλλης ὡς πρὸς τὴν κορυφήν της. Αἱ θεωρούμεναι τρίεδροι εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι.

Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μίαν δευτέραν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω (115) θεωρήματος, ἂν θεωρήσωμεν τὰ ἀναπτύγματα (112) τῶν περὶ ὧν τὸ θεώρημα τριέδρων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι αὐτῶν ἐμφανίζονται κατὰ τὴν τάξιν α, β, γ καὶ α', β', γ' ἀντιστοίχως (Σχ. 115.3).

Διὰ τὴν εὐκολίαν τῆς ἀποδείξεως ὑπετέθη ὅτι τὰ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΥ καὶ Ο'Υ' σημεῖα Β καὶ Β' ἐλήφθησαν ὥστε ΟΒ = Ο'Β'. Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων $ΟΑΒ_1$ καὶ $Ο'Α'Β'_1$ ($ΟΒ_1 = Ο'Β'_1$ καὶ $\gamma = \gamma'$), ἕπεται ὅτι ΟΑ = Ο'Α' καὶ $ΑΒ_1 = Α'Β'_1$ καὶ λόγω τῆς τελευταίας ὅτι $ΑΔ_1 = Α'Δ'_1$.

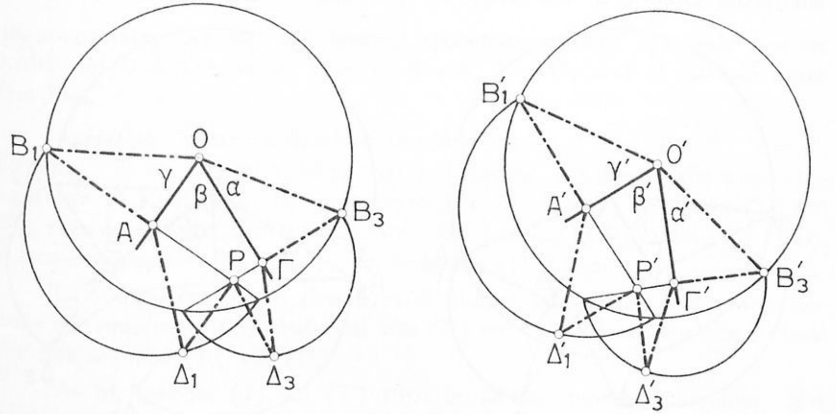
Ἐκ τῶν ἐπίσης ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων $ΡΑΔ_1$ καὶ $Ρ'Α'Δ'_1$ (Α = Α', $ΑΔ_1 = Α'Δ'_1$), ἕπεται ὅτι ΑΡ = Α'Ρ'.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὰ τετράπλευρα ΟΑΡΓ καὶ Ο'Α'Ρ'Γ' εἶναι ἴσα.

Πράγματι, ἐπειδὴ $\beta = \beta'$, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι αὐτῶν ἀντιστοίχως, διότι αἱ γωνίαι Α,Γ ὡς καὶ αἱ Α',Γ', εἶναι ὀρθαί, ἐπὶ πλέον εἶναι, ὡς ἀπεδείχθη, ΑΡ = Α'Ρ'. Ἐκ τῶν ἴσων τούτων τετραπλεύρων ἔχομεν ΟΓ = Ο'Γ'. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς $ΟΒ_3=Ο'Β'_3$ ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΟΓΒ_3$ καὶ $Ο'Γ'Β'_3$, καὶ ἐκ τούτου ὅτι $\alpha = \alpha'$.

'Εξ ἄλλου ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων $Ρ\Gamma\Delta_3$ καὶ $Ρ'\Gamma'\Delta'_3$ ($Ρ\Gamma = Ρ'\Gamma'$ καὶ $\Gamma\Delta_3 = \Gamma'\Delta'_3$), ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ' τῶν τριγώνων τούτων (ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Γ καὶ Γ' τῶν τριέδρων) εἶναι ἴσαι. Ὥστε $\Gamma = \Gamma'$.

Ἂν θεωρήσωμεν τὰ ἀναπτύγματα τῶν ἀνωτέρω τριέδρων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων (ΟΥ, ΟΖ)



Σχ. 115.3

καὶ (Ο'Υ', Ο'Ζ') ἀποδεικνύομεν εὐκόλως τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων Β καὶ Β'.

'Απεδείχθη ἑπομένως ὅτι: ἂν αἱ ὁμοίως προσανατολισμέναι τρίεδροι γωνίαι ἔχουν τὰς ἑδρικὰς αὐτῶν γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας, κατὰ τὰ δύο ζεύγη, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων των ὁριζομένας διέδρους ἴσας (περιεχομένας διέδρους), εἶναι ἴσαι.

116. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένας τριέδρους γωνίας Ο.ΑΒΓ καὶ Ο'Α'Β'Γ' εἶναι: $\alpha = \alpha'$, $B = B'$, $\Gamma = \Gamma'$, τότε αἱ τρίεδροι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A = A'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Ἔστωσαν (Τ) καὶ (Τ') αἱ τρίεδροι τοῦ θεωρήματος. Θεωροῦμεν τὰς παραπληρωματικὰς (T_1) καὶ (T'_1) τούτων ἀντιστοίχως. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (108) εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως δύο ἑδρικαὶ τῶν (T_1) καὶ (T'_1) καὶ αἱ περιεχόμεναι δίεδροι, ἤτοι: $\beta_1 = \beta'_1$, $\gamma_1 = \gamma'_1$ καὶ $A_1 = A'_1$. Ἑπομένως αἱ τρίεδροι αὗται (T_1) καὶ (T'_1) εἶναι ἴσαι (115). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ ὁμόλογα στοιχεῖα αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι $\alpha_1 = \alpha'_1$, $B_1 = B'_1$, $\Gamma_1 = \Gamma'_1$. Ἑπομένως (108): $A = A'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἀντιστοίχως παραπληρωματικαὶ τῶν προηγουμένων ($A + \alpha_1 = \pi$ καὶ $A' + \alpha'_1 = \pi$, ἤτοι: $A + \alpha_1 = A' + \alpha'_1$, καὶ ἐπειδὴ $\alpha_1 = \alpha'_1$, θὰ εἶναι καὶ $A = A'$ κλπ).

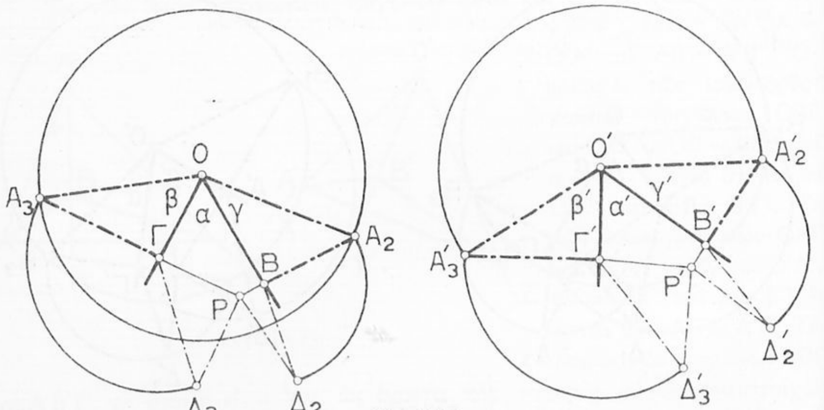
117. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένας τριέδρους γωνίας Ο.ΑΒΓ καὶ Ο'.Α'Β'Γ' εἶναι:

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma'$$

τότε αἱ τρίεδροι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις Θεωροῦμεν τὰ ἀναπτύγματα τῶν τριέδρων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν α καὶ α'. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $OA_3\Gamma$ καὶ $O'A'_3\Gamma'$, τῶν ὁποίων εἶναι ἴσαι αἱ ὑποτείνουσαι OA_3 καὶ $O'A'_3$ καὶ αἱ γωνίαι β καὶ β', ἕπεται ὅτι $O\Gamma = O'\Gamma'$ καὶ $\Gamma A_3 = \Gamma'A'_3$ ἢ $\Gamma\Delta_3 = \Gamma'\Delta'_3$.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων OBA_2 καὶ $O'B'A'_2$ ($OA_2 = OA'_2$ καὶ $\gamma = \gamma'$). ἕπεται ὅτι $OB = O'B'$ καὶ $BA_2 = B'A'_2$ ἢ $B\Delta_2 = B'\Delta'_2$. Ἐκ τῶν $O\Gamma = O'\Gamma'$,



Σχ. 117.1

$OB = O'B'$ καὶ $\alpha = \alpha'$, ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα τὰ τετράπλευρα $O\Gamma PB$ καὶ $O'\Gamma'P'B'$, ἤτοι ὅτι $\Gamma P = \Gamma'P'$ καὶ $BP = B'P'$. Ἐκ τῶν $\Gamma P = \Gamma'P'$ καὶ $\Gamma\Delta_3 = \Gamma'\Delta'_3$ ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσαι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\Gamma P\Delta_3$ καὶ $\Gamma'P'\Delta'_3$ καὶ ἑπομένως ὅτι $\Gamma = \Gamma'$. Δι' ὅμοιον λόγον (ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα $BP\Delta_2$ καὶ $B'P'\Delta'_2$), εἶναι καὶ $B = B'$. Ἀναγόμεθα οὕτως εἰς τὴν προηγουμένην (116) περίπτωσιν.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῇ βοηθείᾳ τομῆς, θεωροῦμεν δύο σημεῖα A καὶ A' τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν OA καὶ $O'A'$ ἀντιστοίχως, ὥστε $OA = O'A'$ καὶ τὰς τομὰς τῶν διέδρων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκμὰς τὰς OA καὶ $O'A'$, μὲ δύο ἐπίπεδα κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ ταύτας κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἰσαπέχοντα τῶν κορυφῶν O καὶ O' σημεῖα A καὶ A'. Αἱ τομαὶ (AE, AZ) καὶ ($A'E'$, $A'Z'$) μὲ τὰς ἀνωτέρω διέδρους τῶν τριέδρων εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν διέδρων τούτων.

Σχ. 117.2

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OAE καὶ $O'A'E'$ εἶναι ἴσα, διότι $OA = O'A'$ καὶ $\beta = \beta'$ (Σχ. 117.2). Ἑπομένως $OE = O'E'$ καὶ $AE = A'E'$.

Δι' ὅμοιον λόγον ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων OAZ καὶ $O'A'Z'$ ἔχομεν ὅτι: $OZ = O'Z'$ καὶ $AZ = A'Z'$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω : $OE = O'E'$, $OZ = O'Z'$ καὶ τῆς $\alpha = \alpha'$, ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα ΟΕΖ καὶ Ο'Ε'Ζ', καὶ ἑπομένως : ΕΖ = Ε'Ζ'. 'Απεδείχθη ὅμως ὅτι εἶναι καὶ ΑΕ = Α'Ε' καὶ ΑΖ = Α'Ζ'. 'Εκ τούτων ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΖ καὶ Α'Ε'Ζ' εἶναι ἴσα (ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως ἴσας), καὶ ἑπομένως (ΑΕ, ΑΖ) = (Α'Ε', Α'Ζ'), ἤτοι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Α καὶ Α' τῶν τριέδρων εἶναι ἴσαι. 'Αναγόμεθα οὕτως εἰς τὴν πρότασιν (115).

Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν αἱ τρίεδροι εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι, τότε ἑκατέρα τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης.

118. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένας τριέδρους γωνίας Ο.ΑΒΓ καὶ Ο'.Α'Β'Γ', εἶναι : Α = Α', Β = Β', Γ = Γ', τότε αἱ τρίεδροι αὗται εἶναι ἴσαι.

'Απόδειξις. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Ἔστωσαν (Τ) καὶ (Τ') αἱ τρίεδροι τοῦ θεωρήματος. Θεωροῦμεν τὰς παραπληρωματικὰς (T_1) καὶ (T'_1) τούτων ἀντιστοίχως. Αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι τῶν (T_1) καὶ (T'_1) εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων τῶν (Τ) καὶ (Τ') (108). Αἱ παραπληρωματικαὶ τρίεδροι εἶναι ἑπομένως (117) ἴσαι.

'Εκ τούτου ἔπεται ὅτι εἶναι ἴσαι αἱ δίεδροι γωνίαι τῶν παραπληρωματικῶν καὶ ἑπομένως (108) αἱ ἑδρικαὶ τῶν (Τ') καὶ (Τ'), ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων τῶν (T_1) καὶ (T'_1).

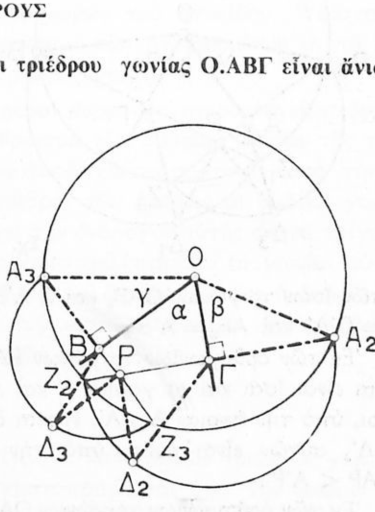
Ἂν αἱ τρίεδροι (Τ) καὶ (Τ') εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι, τότε ἑκατέρα τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, ἤτοι αἱ τρίεδροι γωνίαι εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΤΡΙΕΔΡΟΥΣ

119. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ἑδρικαὶ γωνίαι τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι αὐτῆς εἶναι ὁμοίως ἄνισοι, καὶ ἀντιστρόφως : Ἤτοι :

$$\beta > \gamma \Leftrightarrow B > \Gamma.$$

'Απόδειξις. Ἔστω $\beta > \gamma$. Θεωροῦμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς τριέδρου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἑδρικῆς γωνίας (ΟΒ, ΟΓ). 'Εκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $ΟΓΑ_2$, καὶ $ΟΒΑ_3$ (Σχ. 119), τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ $\beta > \gamma$, ἔπεται ὅτι: $ΓΑ_2 > ΒΑ_3$, καὶ ἑπομένως $ΓΔ_2 > ΒΔ_3$ (διότι $ΓΔ_2 = ΓΑ_2$ καὶ $ΒΔ_3 = ΒΑ_3$).



Σχ. 119

Θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΓΡΔ_2$ καὶ $ΒΡΔ_3$. Αἱ κάθετοι πλευραὶ $ΡΔ_2$ καὶ $ΡΔ_3$ τούτων εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι αἱ κατακλίσεις τοῦ αὐτοῦ εὐθ. τμήματος ΑΡ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ, διὰ στροφῆς περὶ τὰς ΡΓ καὶ ΡΒ ἀντιστοίχως, ἢ διότι τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν: $Ρ\Delta^2_2 = ΡΑ_2 \cdot ΡΖ_2$ καὶ $Ρ\Delta^2_3 = ΡΑ_3 \cdot ΡΖ_3$.

Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ΡΓ τὸ σημεῖον Β′ ὥστε ΡΒ′ = ΡΒ, θὰ εἶναι : $\Delta_2Β' = \Delta_3Β$, καὶ λόγω τούτου: $\Delta_2Β' < \Delta_2Γ$. Ὥστε τὸ Β′ κεῖται μεταξὺ τῶν Ρ καὶ Γ, ἤτοι $(Β'Ρ, Β'\Delta_2) > (ΓΡ, Ρ\Delta_2)$, ἤτοι $Β > Γ$.

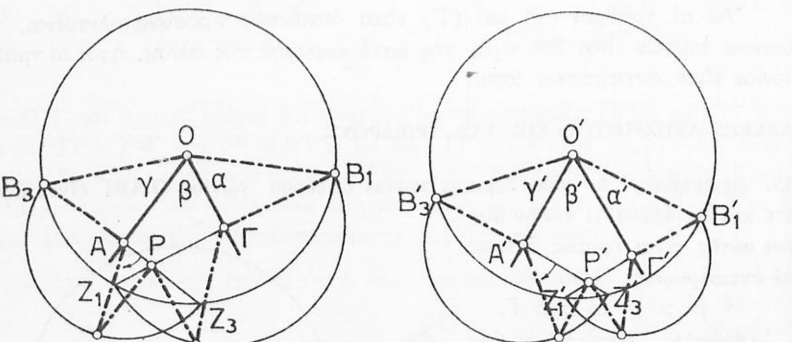
Ἂν $\beta = \gamma$, ἀποδεινύεται, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων $ΒΡ\Delta_3$ καὶ $ΓΡ\Delta_2$, ὅτι $Β = Γ$.

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῆς $Β > Γ$ ἕπεται ἡ $\beta > \gamma$. Πράγματι, ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις $\beta = \gamma$, ἀφοῦ τότε θὰ ἦτο $Β = Γ$, ὡς καὶ ἡ περίπτωσις $\beta < \gamma$, διότι τότε, συμφώνως μὲ τὸ ἀποδειχθὲν πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως, θὰ ἦτο $Β < Γ$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $Β > Γ$.

120. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι τρίεδροι γωνίαι Ο. ΑΒΓ καὶ Ο′. Α′Β′Γ′ ἔχουν τὰς ἑδρικὰς αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ τὰ δύο ζεύγη ($\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$) καὶ τὰς περιεχομένας διέδρους γωνίας ἀνίσους, τότε ὁμοίως ἄνισοι εἶναι καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων διέδρων κείμεναι ἑδρικαὶ γωνίαι. Ἤτοι:

$$\beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ Α > Α' \Rightarrow \alpha > \alpha'$$

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὰ ἀναπτύγματα τῶν τριέδρων τῆς προτάσεως.



Σχ. 120

Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων $ΟΑΒ_3$ καὶ $Ο'Α'Β'_3$ ($ΟΒ_3 = Ο'Β'_3$ καὶ $\gamma = \gamma'$) ἕπεται ὅτι $ΟΑ = Ο'Α'$ καὶ $ΑΒ_3 = Α'Β'_3$.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $ΡΑ\Delta_3$ καὶ $Ρ'Α'\Delta'_3$, τῶν ὁποίων αἱ ὑποτείνουσαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Α′ (ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Α καὶ Α′) ἄνισοι, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $Α > Α'$, ἕπεται ὅτι $Ρ\Delta_3 > Ρ'\Delta'_3$, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Δ_3 καὶ Δ'_3 αὐτῶν εἶναι ἄνισοι ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $\Delta_3 < \Delta'_3$, ἀφοῦ $Α > Α'$, ἕπεται ὅτι $ΑΡ < Α'Ρ'$.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΡ, Ο′Α′Ρ′, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι ΟΑ = Ο′Α′ καὶ $ΑΡ < Α'Ρ'$, ἕπεται ὅτι $(ΟΑ, ΟΡ) < (Ο'Α', Ο'Ρ')$, καὶ ἐπειδὴ $\beta = \beta'$, ὅτι :, $(ΟΡ, ΟΓ) > (Ο'Ρ', Ο'Γ')$. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΡΓ καὶ Ο′Ρ′Γ′ ἕπεται ὅτι $ΟΓ < Ο'Γ'$.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $ΟΓΒ_1$ καὶ $Ο'Γ'Β'_1$, τῶν ὁποίων αἱ ὑποτείνουσαι εἶναι ἴσαι καὶ $ΟΓ<Ο'Γ'$, ἕπεται ὅτι $α>α'$, διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν $Β_1$ καὶ $Β'_1$ εἶναι ἄνισοι, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $Β_1 < Β'_1$.

121. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι τρίεδροι γωνίαι (Τ) καὶ (Τ') ἔχουν τὰς ἑδρικὰς αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων ἑδρικῶν κείμεναι δίεδροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισοι. Ἤτοι:

$$β=β' \quad γ=γ', \ α>α' \Rightarrow Α>Α'.$$

Ἀπόδειξις. Κατόπιν τῆς προηγουμένης (120) προτάσεως, ἡ ἀνωτέρω ἀποδεικνύεται εὐκόλως, διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Πράγματι, ἀποκλείεται ἡ σχέσις $Α=Α'$, διότι τότε αἱ δίεδροι θὰ ἦσαν ἴσαι καὶ ἑπομένως θὰ ἦτο $α=α'$, τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως ($α>α'$).

Ὁμοίως ἀποκλείεται ἡ σχέσις $Α<Α'$, διότι τότε θὰ ἦτο (120) $α<α'$, τὸ ὁποῖον ἐπίσης ἀποκλείεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως ($α>α'$).

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Αἱ ἀνωτέρω δύο προτάσεις εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν δύο προτάσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰς σχέσεις ἀνισότητος μεταξὺ τῶν στοιχείων δύο τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι προκύπτουν ἐκ τούτων δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ὅρων *πλευρὰ* καὶ *γωνία* τοῦ τριγώνου μὲ τοὺς ὅρους *ἑδρικὴ γωνία* καὶ *δίεδρος γωνία* τῆς τριέδρου.

Ἐξ ἄλλου, καὶ ἄλλαι ἐκ τῶν ἐπὶ τῶν τριέδρων ἀποδειχθεισῶν προτάσεων ἔχουν τὰς ἀναλόγους αὐτῶν ἐπὶ τῶν τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου. Ὑφίσταται ἑπομένως μία ἀναλογία μεταξὺ τῶν προτάσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ δύο σχήματα: τρίγωνον τοῦ ἐπιπέδου καὶ τρίεδρος γωνία.

Ὑφίστανται ὅμως καὶ οὐσιώδεις διαφοραί, ὅπως ἡ ἀναφερομένη εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς τριέδρου γωνίας. Ἐπίσης, ἡ ἐπὶ τῶν τριέδρων ἀποδειχθεῖσα πρότασις κατὰ τὴν ὁποίαν, δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι τρίεδροι τῶν ὁποίων αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, εἶναι ἴσαι, δὲν ἔχει τὴν ἀνάλογον αὐτῆς εἰς τὰ τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου, δοθέντος ὅτι ἂν εἰς δύο τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ὄχι ἴσα. Οὕτως, ἡ θεωρία τῆς ὁμοιότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου δὲν ἔχει τὴν ἀνάλογον αὐτῆς εἰς τὸ σύνολον τῶν τριέδρων γωνιῶν τοῦ χώρου.

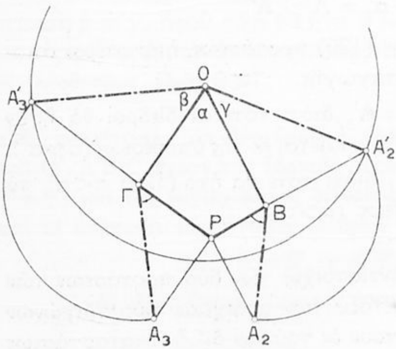
ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Εἰς τὰ διδόμενα κατωτέρω παραδείγματα κατασκευῶν τριέδρων γωνιῶν, αἱ κατασκευαὶ τούτων θεωροῦνται πραγματοποιηθεῖσαι ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐπιτυγχάνεται, διὰ κατασκευῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ἐκ τῶν δεδομένων στοιχείων εὕρεσις τῶν πρωτευόντων (διέδρων ἢ ἑδρικῶν γωνιῶν), στοιχείων τῆς τριέδρου γωνίας.

122. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ ἐκ τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν α, β, γ αὐτῆς.

Λύσις. Ἐκ τῶν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς τριέδρου γωνίας ἀναφερομένων παρατηρήσεων (112), προκύπτει ἡ ἑξῆς σύνθεσις :

Κατασκευάζονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Σχ.122) τρεῖς γωνίαι (OX'_3, OX_3), (OX_3, OX_2), (OX_2, OX_2'), ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας β,α,γ, καὶ ἕνας κύκλος κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος τυχούσης, ὁ ὁποῖος τέμνει τὰς ἡμιευθείας OX'_3 καὶ OX'_2 κατὰ τὰ σημεῖα A'_3 καὶ A'_2 ἀντιστοίχως.

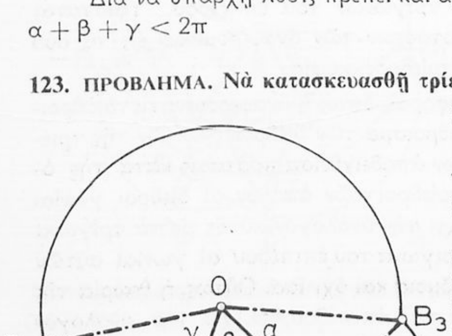


Σχ. 122

Κατασκευάζονται ἀκολούθως : ἡ διὰ τοῦ A'_3 κάθετος ἐπὶ τὴν OX_3 καὶ ἡ διὰ τοῦ A'_2 κάθετος ἐπὶ τὴν OX_2 καὶ ἔστω Ρ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Αἱ κατὰ τὸ σημεῖον Ρ κάθετοι ἐπὶ τὰς $A'_3\Gamma$ καὶ A'_2B τέμνουν τοὺς κύκλους $\Gamma(\Gamma A'_3)$ καὶ $B\,(BA'_2)$ κατὰ τὰ σημεῖα A_3 καὶ A_2 ἀντιστοίχως. Αἱ γωνίαι (ΓP, ΓA_3) καὶ (BP, BA_2) εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων Β καὶ Γ τῆς τριέδρου. Ἡ κατασκευὴ τῆς διέδρου Α προκύπτει ἐκ τῶν ἐν παραγράφῳ (112) παρατηρήσεων.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha < \beta + \gamma$, ἂν $\alpha > \beta, \gamma$, καὶ $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$

123. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων β, γ, Α αὐτῆς.



Σχ. 123

Λύσις. Ἐκ τῶν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς τριέδρου γωνίας ἀναφερομένων (112) παρατηρήσεων προκύπτει ἡ ἑξῆς σύνθεσις :

Κατασκευάζονται (Σχ. 123): δύο προσκείμεναι γωνίαι (OY_1, OX)$=\gamma$ καὶ (OX, OZ) $=\beta$, ὁ κύκλος κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος τυχούσης, ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν OY_1 κατὰ τὸ σημεῖον B_1, ἡ διὰ τοῦ B_1 κάθετος B_1AZ_1 ἐπὶ τὴν ΟΧ (Α ἐπὶ τῆς ΟΧ), ὁ κύκλος Α (AB_1), ἡ ἡμιευθεῖα $A\Delta_1$ (Δ_1 ἐπὶ τοῦ κύκλου Α (AB_1)), διὰ τὴν ὁποίαν (AZ_1, $A\Delta_1$)$=$ Α, ἡ διὰ τοῦ Δ_1 κάθετος Δ_1P ἐπὶ τὴν B_1A (Ρ ἐπὶ τῆς εὐθείας B_1A) καὶ ἡ διὰ τοῦ Ρ κάθετος ΡΓ ἐπὶ τὴν ΟΖ (Γ ἐπὶ τῆς ΟΖ), ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα B_3 καὶ Z_3. Ἡ γωνία ($O\Gamma$, OB_3) εἶναι ἡ τρίτη ἑδρικὴ γωνία α τῆς τριέδρου γωνίας. Αἱ δίεδροι Β καὶ Γ τῆς τριέδρου κατασκευάζονται κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωρεῖται : τὸ σημεῖον Β τῆς ἀκμῆς ΟΥ τοῦ χωρικοῦ σχήματος (τῆς ἐν τῷ χώρῳ τριέδρου γωνίας περὶ τῆς ὁποίας ὑποθέτομεν ὅτι ἱκανοποιεῖ τὰς δοθείσας συνθήκας) διὰ τὸ ὁποῖον τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (Ο), ἡ προβολὴ P_1 τοῦ Β ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀπέναντι ἑδρικῆς γωνίας β, καὶ ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης τῶν ἀντιστοίχων (ἐπιπέδου καὶ χωρικοῦ σχήματος) στοιχείων κατὰ τὰ ἐν παραγράφῳ (112) ἀναφερόμενα.

Η ΠΟΛΥΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ

124. ΟΡΙΣΜΟΙ. Θεωροῦμεν ἕνα διατεταγμένον σύνολον ἡμιευθειῶν ΟΑ,ΟΒ, . . .,ΟΖ, πλήθους ν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν σημεῖον καὶ δὲν κεῖνται ὅλαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων κυρτῶν γωνιῶν :

$$(OA,\ OB),\ (OB,\ O\Gamma),\ \ldots,\ (OZ,\ OA)$$

ἑκάστης τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι δύο διαδοχικαὶ ἡμιευθεῖαι τοῦ θεωρουμένου συνόλου ἡμιευθειῶν ὀνομάζεται **ν-εδρος γωνία**.

Ἡ ν - εδρος γωνία τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ εἶναι αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, . . ., ΟΖ, συμβολίζεται, συνήθως, μὲ τὸ σύμβολον Ο · ΑΒΓ. . .Ζ.

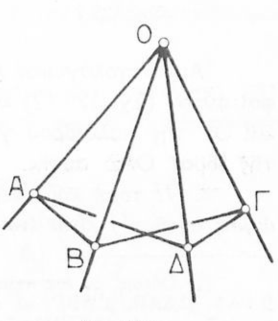
Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ,ΟΒ,. . .,ΟΖ ὀνομάζονται *ἀκμαὶ* τῆς ν-εδρου γωνίας καὶ τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Ο αὐτῶν *κορυφὴ* αὐτῆς.

Αἱ κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ), (ΟΒ, ΟΓ),. . ., (ΟΖ, ΟΑ) αἱ ἀποτελοῦσαι τὴν ν - εδρον γωνίαν ὀνομάζονται *ἐπίπεδοι* ἢ *ἑδρικαὶ γωνίαι*.

Σημεῖα τῆς ν - έδρου γωνίας ὀνομάζονται τὰ σημεῖα τῶν ἑδρικῶν της γωνιῶν.

Κάθε ἐπίπεδον ὁριζόμενον ἀπὸ δύο ἀκμὰς τῆς ν - έδρου γωνίας, μὴ διαδοχικάς, ὀνομάζεται *διαγώνιον ἐπίπεδον* αὐτῆς.

Αἱ πολύεδροι γωνίαι χαρακτηρίζονται ὡς *ἁπλαῖ* ἢ *μὴ ἁπλαῖ*, καθ' ὅσον ἰσχύουν ἀντιστοίχως συνθῆκαι ἀνάλογοι τῶν εἰς τὰ ἐπίπεδα πολύγωνα ἀναφερομένων (1), βάσει τῶν ὁποίων χαρακτηρίζονται ταῦτα εἰς ἁπλᾶ ἢ μὴ ἁπλᾶ.



Σχ. 124

Αἱ συνθῆκαι αὗται προκύπτουν ἐκ τῶν εἰς τὰ πολύγωνα ἀναφερομένων τριῶν συνθηκῶν δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ὅρου *κορυφὴ* διὰ τοῦ ὅρου *ἀκμὴ* καὶ τοῦ ὅρου *πλευρὰ* διὰ τοῦ ὅρου *ἕδρα*. Οὕτως, ἂν θεωρήσωμεν ἕνα μὴ ἁπλοῦν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 124) καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του, ἡ τετράεδρος γωνία Ο.ΑΒΓΔ εἶναι μία μὴ ἁπλῆ ν-εδρος γωνία ($\nu=4$).

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ ὡς πρὸς τὸν χαρακτηρισμὸν μιᾶς ἁπλῆς ν - έδρου γωνίας ὡς *κυρτῆς* ἢ *μὴ κυρτῆς*. Οὕτω :

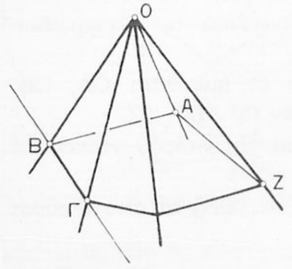
(1) Βλέπε «Μαθηματικὰ Γ' τάξεως» Μέρος Β' (παραγρ. 182, 185).

125. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία ἁπλῆ ν–εδρος γωνία Ο.ΑΒΓ... Ζ ὀνομάζεται* **κυρτή,** *ὅταν, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ ἀκμαὶ αὐτῆς, αἱ λοιπαὶ ν–2 ἀκμαί της κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς θεωρουμένας διαδοχικὰς ἀκμάς της.*

Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν ἀκμαὶ τῆς ν–εδρου γωνίας κείμεναι ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου ἕδρας τινός, ἡ ν–εδρος γωνία ὀνομάζεται **μὴ κυρτή**. (1)

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν ΑΒΓ ... ΕΖ εἶναι ἕνα ἁπλοῦν ἐπίπεδον ν–γωνον (2) καὶ Ο ἕνα σημεῖον κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του, ἡ ν–εδρος γωνία Ο. ΑΒΓ...ΕΖ εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτή, καθ' ὅσον τὸ ν-γωνον ΑΒΓ ...Ζ εἶναι ἀντιστοίχως κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν* (3).



Σχ. 125.1

Πράγματι, ἂν τὸ ν-γωνον ΑΒΓ...Ζ εἶναι κυρτόν, καὶ εἶναι Β καὶ Γ δύο διαδοχικαὶ κορυφαί του, αἱ λοιπαὶ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ ἑπομένως αἱ ἀντίστοιχοι ἀκμαὶ τῆς πολυέδρου γωνίας (αἱ περιέχουσαι ἀντιστοίχως τὰς λοιπάς, ἐκτὸς τῶν Β καὶ Γ, κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ..Ζ) κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΟΒΓ (Σχ.125.1).

Ἂν τὸ πολύγωνον ΑΒΓ...Ζ εἶναι μὴ κυρτὸν καὶ εἶναι Β καὶ Γ δύο κορυφαὶ αὐτοῦ (Σχ. 125.12) κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΖ, τότε αἱ ἀκμαὶ ΟΒ καὶ ΟΓ τῆς πολυέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ...Ζ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΟΑΖ αὐτῆς.

2. Ἡ τομὴ κάθε κυρτῆς ν–εδρου γωνίας ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνοντος ὅλας τὰς ἀκμὰς αὐτῆς (4) εἶναι ἕνα κυρτὸν ν–γωνον.

---

(1) Οὕτως, ἂν ἕνα σημεῖον Ο εἶναι ἐσωτερικὸν τῶν τεσσάρων τριέδρων γωνιῶν Α.ΒΓΔ, Β.ΓΔΑ, Γ.ΔΑΒ, Δ.ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοῦ χώρου, ἡ τετράεδρος γωνία Ο.ΑΒΓΔ εἶναι μία μὴ κυρτὴ πολύεδρος γωνία (124).

(2) Βλέπε : «Μαθηματικὰ» Γ' τάξεως», Τόμος Β', παραγρ. 182, 185.

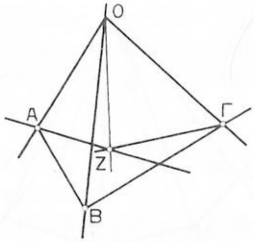
(3) Ἡ ν-εδρος γωνία δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ τοῦ ἁπλοῦ ἢ μὴ ἁπλοῦ ἐπιπέδου ν-γώνου καὶ ἑνὸς σημείου Ο θεωρουμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του, ὡς **προβολὴ** τοῦ ν-γώνου ἀπὸ τοῦ Ο, ἤτοι, ὡς τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων κυρτῶν γωνιῶν τοῦ ὁρισμοῦ (124), προστιθεμένης ἐν αὐτῷ τῆς στνθήκης ὅπως αἱ θεωρούμεναι (124) ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθεῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ ἀνωτέρω (124) ὁρισμοῦ προεκρίθη, τὸ μὲν ὡς ἐξυπηρετοῦσα τὴν ἑνότητα τῆς δομῆς τοῦ βιβλίου (βλέπε ὁρισμὸν ἐπιπέδου ν-γώνου εἰς τὰ Μαθηματικὰ Γ' τάξεως), τὸ δὲ ὡς μὴ περιορίζουσα τὸ εὖρος τῆς διὰ τούτου εἰσαγομένης ἐννοίας (βλέπε ὑποσημ. (1)).

(4) Ἀποδεικνύεται ὅτι :

Ἂν μία ν–εδρος γωνία εἶναι κυρτή, ὑπάρχουν ἄπειρα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν ὁποίων τέμνει ὅλας τάς ἀκμὰς αὐτῆς.

Πράγματι, ἂν ἡ τομὴ δὲν ἦτο κυρτὸν ν-γωνον, ἤτοι ἂν δύο κυρυφαὶ π.χ. Β καὶ Γ αὐτῆς (Σχ. 125.12) ἔκειντο ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΖ (τῆς ὁριζομένης ἀπὸ δύο διαδοχικὰς κορυφὰς τῆς τομῆς αὐτῆς), τότε αἱ ἀκμαὶ ΟΒ καὶ ΟΓ τῆς κυρτῆς ν-έδρου γωνίας θὰ ἔκειντο ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΟΑΖ αὐτῆς. Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κυρτῆς ν-έδρου γωνίας (125).



Σχ. 125.12

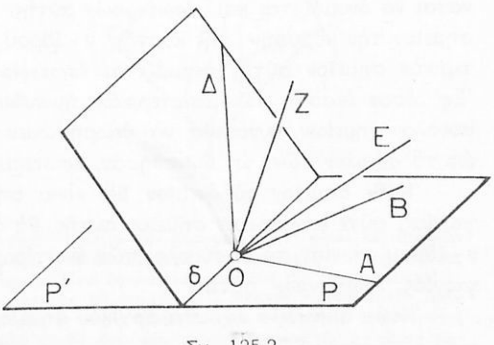
Αἱ τομαὶ μιᾶς κυρτῆς ν-έδρου γωνίας. Ο.ΑΒΖ...Ζ μὲ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι ν-γωνα ὁμοιόθετα, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὴν κορυφὴν Ο τῆς ν-έδρου γωνίας καὶ λόγον, τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο τομῶν.

ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ

126. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωροῦμεν κυρτὴν ν-εδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ ... Ζ. Κάθε κυρτὴ δίεδρος γωνία τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ περιέχει μίαν ἀκμὴν τῆς ν-έδρου γωνίας καὶ αἱ ἕδραι τὴν προηγουμένην καὶ τὴν ἑπομένην τῆς θεωρουμένης, ἀκμὴν τῆς ν-έδρου γωνίας, ὀνομάζεται* **δίεδρος γωνία** *τῆς ν-έδρου γωνίας.*
Οὕτως, ἡ δίεδρος γωνία ΟΒ (Α,Γ) τῆς πολυέδρου γωνίας Ο.ΑΒ...Ζ (Σχ. 126) εἶναι μία δίεδρος γωνία τῆς πολυέδρου ταύτης γωνίας.

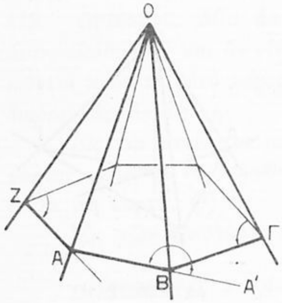
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κυρτῆς ν-έδρου γωνίας προκύπτει ὅτι, ἐκτὸς τῶν τριῶν ἀκμῶν τῆς ν-έδρου γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὴν θεωρουμένην δίεδρον

Πράγματι, ἂν ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π′) διὰ τῆς κορυφῆς Ο, τοιοῦτον ὥστε ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τῆς ν-έδρου γωνίας νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ, τότε κάθε ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὸ (Π′) καὶ τέμνον μίαν ἀκμήν, τέμνει ὅλας τὰς ἀκμάς. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν (Σχ. 125.2) τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας, π.χ. τῆς ἕδρας (ΟΑ, ΟΒ). Αἱ λοιπαί, ἐκτὸς τῶν ΟΑ, ΟΒ, ἀκμαὶ τῆς ν-έδρου γωνίας κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Θεωροῦμεν ἐπίσης μίαν εὐθεῖαν δ τοῦ ἀνωτέρω ἐπιπέδου διερχομένην διὰ τοῦ Ο καὶ τοιαύτην ὥστε αἱ ΟΑ καὶ ΟΒ νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα δ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ εἰς δύο ἡμιεπίπεδα. Ἔστω (Ρ) τὸ ἐκ τούτων περιέχον τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ (Ρ′) τὸ ἀντικείμενον αὐτοῦ. Ἔστω ΟΔ ἡ ἀκμὴ τῆς ν-έδρου γωνίας διὰ τὴν ὁποίαν ἡ δίεδρος δ (Ρ′,Δ) δὲν περιέχει οὐδεμίαν ἐκ τῶν ἀκμῶν τῆς ν-έδρου γωνίας. Ἂν εἶναι Μ ἕνα σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου γωνίας δ (Ρ′,Δ), ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τῆς ν-έδρου γωνίας κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Ρ′), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν δ καὶ τὸ θεωρηθὲν σημεῖον Μ.



Σχ. 125 2

αὐτῆς, αἱ λοιπαὶ $\nu-3$ ἀκμαὶ αὐτῆς εἶναι ἐσωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι τῆς διέδρου ταύτης.



Σχ. 126

Ἡ δίεδρος γωνία ΟΒ (Α',Γ), τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι ἡ ΟΒ καὶ αἱ ἕδραι τὰ ἡμιεπίπεδα (ΟΒ, Α') καὶ (ΟΒ, Γ), τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΟΒ καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ἀντιστοίχως ὀνομάζεται *ἐξωτερικὴ* δίεδρος τῆς κυρτῆς ν - ἑδρου γωνίας Ο. ΑΒΓ. . . Ζ.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΝ ΚΥΡΤΗΣ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ ΓΩΝΙΑΣ

127. ΟΡΙΣΜΟΣ. Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον (παραγρ. 65) ὡρίσθη τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων μιᾶς διέδρου γωνίας. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ὠνομάσθησαν σημεῖα τῆς κυρτῆς διέδρου γωνίας, τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὴν δίεδρον γωνίαν, θεωρηθεῖσαν ὡς ζεῦγος δύο ἡμιεπιπέδων. Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ γράμμα (Α) τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῆς διέδρου γωνίας, τῆς κυρτῆς ν - ἑδρου Ο.ΑΒΓ. . .Ζ, τῆς ἐχούσης ἀκμὴν τὴν ἀκμὴν ΟΑ τῆς ν - ἑδρου, μὲ τὸ (Β) τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῆς διέδρου τῆς ν - ἑδρου, τῆς ἐχούσης ἀκμὴν τὴν ἀκμὴν ΟΒ κλπ, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

Ὀνομάζομεν **ἐσωτερικὸν σημεῖον** *μιᾶς κυρτῆς ν–ἑδρου γωνίας κάθε σημεῖον τῆς τομῆς τῶν συνόλων $(A), (B), \ldots, (Z)$, ἔνθα μὲ τὰ σύμβολα $(A), (B), \ldots, (Z)$ συμβολίζονται τὰ σύνολα τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ν–ἑδρου γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκμὰς ἀντιστοίχως τὰς OA, OB, $\ldots$, OZ* (1).

Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων μιᾶς κυρτῆς ν - ἑδρου γωνίας δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ *ἐσωτερικὸν* αὐτῆς. Κάθε ἡμιευθεῖα ἔχουσα ἀρχικὸν σημεῖον τὴν κορυφὴν τῆς κυρτῆς ν - ἑδρου γωνίας καὶ περιέχουσα ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς ὀνομάζεται *ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα* τῆς ν - ἑδρου γωνίας. Ἐφ' ὅσον ἑκάστη τῶν ἐσωτερικῶν ἡμιευθειῶν ν - ἑδρου γωνίας θεωρῆται ὡς σύνολον σημείων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ν - ἑδρου γωνίας ὡς τὸ *σύνολον* τῶν, ὡς ὡρίσθησαν, *ἐσωτερικῶν ἡμιευθειῶν αὐτῆς*.

Κάθε σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον (124) τῆς κυρτῆς ν - ἑδρου γωνίας, οὔτε ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς, θὰ ὀνομάζεται *ἐξωτερικὸν σημεῖον* τῆς ν - ἑδρου γωνίας, τὸ δὲ σύνολον τῶν ἀνωτέρω ἐξωτερικῶν σημείων τῆς ν - ἑδρου γωνίας, *ἐξωτερικὸν* αὐτῆς.

Κάθε ἡμιευθεῖα ἔχουσα ἀρχικὸν σημεῖον τὴν κορυφὴν τῆς κυρτῆς ν - ἑδρου

(1) Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων μιᾶς κυρτῆς ν - ἑδρου γωνίας δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἡ τομὴ τῶν ν ἡμιχώρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας τῆς ν - ἑδρου γωνίας καὶ περιέχει ὅλας τὰς ἀκμὰς αὐτῆς. Ἡ ὕπαρξις τῆς τομῆς εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἀποδεικνύεται βάσει τῶν ἀξιωμάτων διατάξεως.

γωνίας καὶ περιέχουσα ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς θὰ ὀνομάζεται *ἐξωτερικὴ ἡμιευθεῖα* τῆς ν - έδρου αὐτῆς γωνίας.

Ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων: τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν ἡμιευθειῶν τῆς κυρτῆς ν - έδρου γωνίας, καὶ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς της ἡμιευθειῶν αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν της, εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς της ἡμιευθειῶν τοῦ χώρου (κεντρικὴ δέσμη εὐθειῶν) (1).

128. ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε ἑδρικὴ γωνία οἱασδήποτε κυρτῆς ν–έδρου γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων ἑδρικῶν γωνιῶν αὐτῆς.*

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὰ διαγώνια ἐπίπεδα τῆς ν–έδρου γωνίας τὰ ἀγόμενα ἀπὸ μιᾶς ἀκμῆς αὐτῆς. Τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος (109) (2).

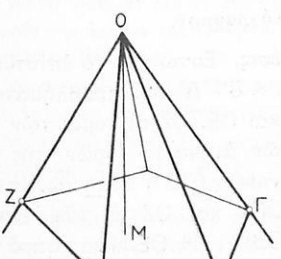
129. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν οἱασδήποτε κυρτῆς ν-έδρου γωνίας εἶναι μικρότερον τῆς πλήρους γωνίας 2π.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν μίαν τομὴν ΑΒΓ . . . Ζ τῆς ν-έδρου γωνίας, ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνοντος ὅλας τὰς ἀκμὰς αὐτῆς. Τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος (109) εἰς τὰς τριέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι ἔχουν κορυφὰς τὰς κορυφὰς Α,Β,Γ, . . , Ζ τῆς τομῆς (βλέπε ἀπόδειξιν προτάσεως 110).

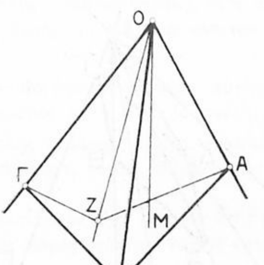
---

(1) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι μία ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς κυρτῆς ν - έδρου γωνίας (κυρτὸν πολύγωνον), κάθε ἡμιευθεῖα ἔχουσα ἀρχικὸν σημεῖον τὴν κορυφὴν τῆς ν - έδρου καὶ περιέχουσα ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς τομῆς ταύτης, εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς ν - έδρου, καὶ τὰ σημεῖα της, ἐσωτερικὰ σημεῖα τῆς ν - έδρου.

Ἐπὶ ἁπλῆς μὴ κυρτῆς πολυέδρου γωνίας Ο. ΑΒΓ. . . Ζ, ἐσωτερικὴν ἡμιευθεῖαν αὐτῆς



Σχ. 127.1



Σχ. 127.2

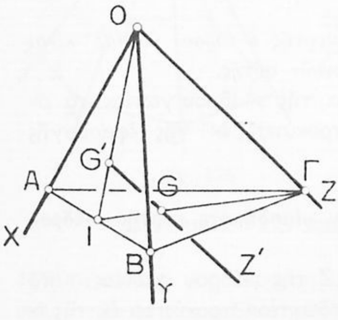
θὰ ὀνομάσωμεν κάθε ἡμιευθεῖαν ἔχουσαν ἀρχικὸν σημεῖον τὴν κορυφὴν Ο αὐτῆς καὶ περιέχουσαν ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς της. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ τομὴ μιᾶς τοιαύτης εὐθείας μὲ τὸ ἐπίπεδον οἱασδήποτε ἄλλης ἐπιπέδου τομῆς, εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς τομῆς ταύτης.

Ἐπὶ ἁπλῆς ἀλλὰ μὴ κυρτῆς ν - έδρου γωνίας, θὰ ὀνομάσωμεν **δίεδρον γωνίαν** αὐτῆς, κάθε κυρτὴν ἢ μὴ κυρτὴν δίεδρον γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ περιέχει μίαν ἀκμὴν τῆς θεωρουμένης ν - έδρου γωνίας, καὶ κάθε ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς ν - έδρου γωνίας. Οὕτως, ἡ κυρτὴ δίεδρος γωνία ΟΒ (Α, Γ), (Σχ. 127.1) ὡς καὶ ἡ μὴ κυρτὴ δίεδρος γωνία ΟΒ(Α, Γ) (Σχ. 127.2) εἶναι δίεδροι γωνίαι τῶν ἀντιστοίχων ν - έδρων γωνιῶν Ο. ΑΒ. . . Ζ.

(2) Ἡ πρότασις ἀπεδείχθη (110) διὰ $\nu = 3$ (τρίεδρος γωνία). Δυνάμεθα, δεχόμενοι ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = \mu$, νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = \mu + 1$, ὅτε ἰσχύει διὰ κάθε ν (ν - εδρος γωνία).

'Εφαρμογαὶ εἰς ἀποδεικτικὰς προτάσεις καὶ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς ν-έδρου γωνίας δίδονται διὰ τῶν ἀσκήσεων τοῦ κεφαλαίου τούτου. Κατωτέρω ἀναφερόμεθα εἰς δύο ἁπλᾶς ἐκ τούτων.

130 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται τρίεδος γωνία Ο.ΧΥΖ καὶ δύο σημεῖα Α, Β τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ αὐτῆς ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Γ τῆς ἀκμῆς ΟΖ καὶ ὀνομάζομεν G τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων G.

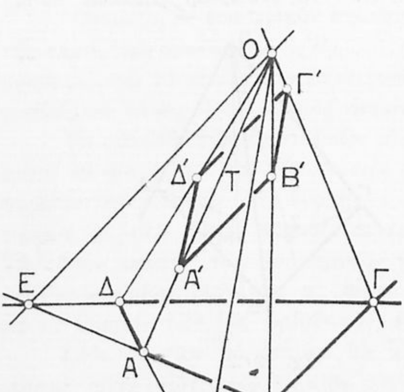


Σχ. 130

Λύσις. Ἔστω Ι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ G′ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΟΙ μὲ τὴν διὰ τοῦ G παράλληλον πρὸς τὴν ΟΖ. Τὸ σημεῖον G′ εἶναι γνωστὸν σημεῖον : τὸ κέντρον βάρος τοῦ τριγώνου ΟΑΒ. Οὕτως, ἡ ἡμιευθεῖα G′G εἶναι γνωστή, ὡς ἡ ἀπὸ τοῦ G′ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΖ.'Εξ ἄλλου, κάθε σημεῖον τῆς ἡμιευθείας αὐτῆς εἶναι, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, κέντρον βάρους, ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ τῆς προτάσεως.

Σημειοῦμεν ὅτι, ἡ ἡμιευθεῖα G′Z′ (Σχ. 130), εἶναι ἡ ὁμοιόθετος τῆς ΟΖ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν $\mathbf{H}\left(\mathrm{I},\ k = \frac{1}{3}\right)$.

131. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται κυρτὴ τετράεδρος γωνία Ο.ΧΥΖΤ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδος τομὴ ταύτης, ἡ ὁποία εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 131

Λύσις. Ἔστω (Τ) τὸ ἐπίπεδον μιᾶς λύσεως Α′Β′Γ′Δ′ τοῦ προβλήματος (Σχ. 131), καὶ ΟΕ, ΟΖ αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τῆς τετραέδρου γωνίας (ΟΕ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΟΑΒ, ΟΓΔ καὶ ΟΖ ἡ τῶν ἐπιπέδων ΟΑΔ, ΟΒΓ). Ἡ ΟΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς Α′Β′ καὶ Γ′Δ′, ὡς τομὴ δύο ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῶν παραλλήλων Α′Β′ καὶ Γ′Δ′. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ ΟΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς Α′Δ′ καὶ Β′Γ′. Οὕτω, τὸ ἐπίπεδον τῆς λύσεως εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (ΟΕ, ΟΖ).

'Αντιστρόφως, ἡ τομὴ τῆς τετραέδρου γωνίας μὲ κάθε ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ (ΟΕ, ΟΖ) εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος, ἤτοι εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον. Πράγματι, ἑκάστη τῶν εὐθειῶν Α'Β' καὶ Γ'Δ' εἶναι παράλληλος (22, Πόρισμα 5) πρὸς τὴν ΟΕ, διότι αἱ Α'Β' καὶ ΟΕ εἶναι τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων (Τ) καὶ (ΟΕ, ΟΖ) μὲ τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ, καὶ αἱ Γ'Δ' καὶ ΟΕ τομαὶ τῶν ἀνωτέρω ἐπιπέδων μὲ τὸ ἐπίπεδον ΟΓΔ. Ὥστε αἱ Α'Β' καὶ Γ'Δ' εἶναι παράλληλοι, ὡς παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΟΕ. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ Α'Δ' καὶ Β'Γ'. Τὸ πρόβλημα ἑπομένως δέχεται ἀπείρους λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν δίεδρον γωνίαν Ο. ΑΒΓ καὶ ἡμιευθεῖαν ΟΧ ἐσωτερικὴν αὐτῆς. Ὀνομάζομεν β' καὶ γ' τὰς γωνίας (ΟΧ, ΟΒ) καὶ (ΟΧ, ΟΓ) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\beta' + \gamma' < \beta + \gamma$$

(β καὶ γ αἱ ἑδρικαὶ (ΟΓ, ΟΑ) καὶ (ΟΑ, ΟΒ) τῆς τριέδρου).

2. Κάθε τριέδρου γωνίας μία τουλάχιστον ἑδρικὴ γωνία εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας $\frac{2\pi}{3}$ καὶ μία τοὐλάχιστον δίεδρος γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας $\frac{\pi}{3}$.

3. Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν κάθε κυρτῆς ν–έδρου γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῆς γωνίας $(\nu-2)$. π καὶ μικρότερον τῆς γωνίας $\nu\pi$.

4. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν διέδρων γωνιῶν κάθε κυρτῆς ν–έδρου γωνίας εἶναι μικρότερον τῆς γωνίας 2π.

5. Κάθε κυρτὴ ν–εδρος γωνία ἔχει τὸ πολὺ τρεῖς ἑδρικὰς γωνίας ὀρθὰς ἢ ἀμβλείας καὶ τὸ πολὺ τρεῖς διέδρους γωνίας ὀξείας.

6. Ἂν εἰς τρίεδρον Ο.ΑΒΓ εἶναι $\beta = \gamma$ (ἰσοσκελὴς τρίεδρος γωνία), τότε τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον τῆς τριέδρου, ἡ ὁποία ἔχει ἀκμὴν τὴν ΟΑ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας (ΟΒ, ΟΓ).

7. Ἂν εἰς τρίεδρον, τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν μίαν δίεδρον γωνίαν αὐτῆς εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τότε ἡ τρίεδρος αὕτη εἶναι ἰσοσκελής.

8. Ἂν εἰς τρίεδρον Ο. ΑΒΓ εἶναι $\beta = \gamma$ (ἰσοσκελὴς τρίεδρος γωνία), τότε τὸ ἐπίπεδον τὸ προβάλλον τὴν ἀκμὴν ΟΑ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀπέναντι ἕδρας περιέχει τὴν διχοτόμον τῆς ἕδρας αὐτῆς.

9. Ἂν εἰς τρίεδρον γωνίαν τὸ ἐπίπεδον τὸ προβάλλον μίαν ἀκμὴν αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀπέναντι ἕδρας, περιέχῃ τὴν διχοτόμον τῆς ἕδρας αὐτῆς, τότε ἡ τρίεδρος αὕτη εἶναι ἰσοσκελής.

10. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο. ΑΒΓ καὶ μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΧ ἐσωτερικὴν αὐτῆς. Συμβολίζομεν μὲ τὰ γράμματα α', β', γ' τὰς γωνίας (ΟΧ, ΟΑ), (ΟΧ, ΟΒ), (ΟΧ, ΟΓ) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} < \alpha' + \beta' + \gamma' < \alpha + \beta + \gamma$$

(α, β, γ αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι τῆς τριέδρου).

11. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο. ΑΒΓ καὶ τὰς κλίσεις φ_1, φ_2, φ_3 τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αὐτῆς ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} < \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \alpha + \beta + \gamma.$$

12. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο. ΑΒΓ, εἰς τὴν ὁποίαν $\beta > \gamma$, καὶ τὴν διχοτόμον

ΟΔ τῆς ἑδρικῆς γωνίας α αὐτῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ δίεδρος Α. ΟΔ. Β (1) εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ Α. ΟΔ. Γ ἀμβλεῖα.

13. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ τῆς ὁποίας ἡ δίεδρος Α εἶναι ὀρθή. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ τῆς τριέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου (Π) καθέτου ἐπὶ οἱανδήποτε τῶν τριῶν ἀκμῶν αὐτῆς εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ τῆς ὀρθῆς διέδρου.

14. Δίδονται δύο ἡμιευθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΥ. Θεωροῦμεν τὰς ἡμιευθείας ΟΖ δι' ἑκάστην τῶν ὁποίων εἶναι : $(OX, OZ) + (OY, OZ) = \pi$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν ἡμιευθειῶν ΟΖ.

15. Δίδονται : ἐπίπεδον (Ρ), σημεῖον Ο αὐτοῦ καὶ δύο ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (Ρ). Νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ τοῦ (Ρ) ἡ ἡμιευθεῖα ΟΧ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄθροισμα $(OX, OA) + (OX, OB)$ εἶναι ἐλάχιστον.

16. Δίδονται : ἐπίπεδον (Ρ), σημεῖον Ο αὐτοῦ καὶ δύο ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ κείμεναι ἑκατέρωθεν τοῦ (Ρ). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἡμιευθεῖα ΟΧ τοῦ (Ρ) διὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν (ΟΧ, ΟΑ) καὶ (ΟΧ, ΟΒ) εἶναι μεγίστη.

17. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ καὶ ὀνομάζομεν α' τὴν γωνίαν τῆς ἀκμῆς ΟΑ αὐτῆς καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἀπέναντι τῆς ἀκμῆς αὐτῆς ἑδρικῆς γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha' < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha' < \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \alpha' = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha' = \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \alpha' > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha' > \frac{\beta+\gamma}{2}$$

(α, β, γ αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι τῆς τριέδρου).

18. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ καὶ τὰς γωνίας α', β', γ' τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αὐτῆς μὲ τὰς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἑδρικῶν γωνιῶν ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' < \alpha + \beta + \gamma$$

19. Τὸ ἄθροισμα τῶν κλίσεων εὐθείας α ὡς πρὸς δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) κάθετα ἐπ' ἄλληλα εἶναι μικρότερον τῆς γωνίας $\frac{\pi}{2}$, ἐκτὸς ἂν ἡ α εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

20. Τὸ ἄθροισμα τῶν κλίσεων δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν, ὡς πρὸς ἕνα ἐπίπεδον (Π), εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς τὴν γωνίαν $\frac{\pi}{2}$.

21. Ἡ διαφορὰ τῶν κλίσεων μιᾶς εὐθείας ὡς πρὸς δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) εἶναι μικροτέρα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων τούτων.

22. Ἡ διαφορὰ τῶν κλίσεων δύο εὐθειῶν ὡς πρὸς ἕνα ἐπίπεδον εἶναι μικροτέρα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τῶν δύο εὐθειῶν.

23. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο παραπληρωματικαὶ τρίεδροι γωνίαι εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι.

24. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ καὶ τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς ἑδρικῆς γωνίας $(OB, O\Gamma) = \alpha$ αὐτῆς. Θέτομεν : $(OA, O\Delta) = \alpha'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow A = B + \Gamma.$$

25. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι $\alpha = \frac{\pi}{2}$ καὶ $B = \Gamma = \frac{3\pi}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δίεδρος γωνία Α αὐτῆς.

26. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι $\beta > \gamma$ καὶ τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς ἑδρικῆς γωνίας (ΟΒ, ΟΓ) αὐτῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$A.O\Delta.\Gamma > A.O\Delta.B$$

27. Δίδεται ἐπίπεδον (Ρ) καὶ δύο εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΖ τέμνουσαι τὸ (Ρ) κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον

---

(1) Μὲ τὸ σύμβολον Α. ΟΔ. Β συμβολίζομεν τὴν δίεδρον γωνίαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι ἡ ΟΔ καὶ αἱ ἕδραι περιέχουν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Ο. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα ΟΧ τοῦ (Ρ), ὥστε τὰ ἐπίπεδα ΟΧΥ καὶ ΟΧΖ νὰ εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.

28. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ τῆς ὁποίας ἡ δίεδρος Α εἶναι ὀρθὴ (ὀρθογώνιος τρίεδρος). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι οἱαδήποτε ἐκ τῶν δύο ἄλλων διέδρων, ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς, γωνιῶν αὐτῆς εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, καθ' ὅσον ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἑδρικὴ γωνία τῆς τριέδρου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, ἀντιστοίχως.

29. Θεωροῦμεν ἰσοεδρικὴν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΧΥΖ καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ αὐτῆς τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι :

1. Ἂν ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον.

Νὰ ἐξετασθῆ ἂν ἰσχύῃ ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ἤτοι ἂν ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

2. Ἂν ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ, τότε τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ καὶ ἀντιστρόφως :

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα ἔχουν ἴσα ἐμβαδά, τότε θὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

30. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ καὶ τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αὐτῆς ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ ὀνομάζομεν Α', Β', Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτοῦ μὲ τὰς ἀνωτέρω ἀκμὰς τῆς τριέδρου ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν O_1, O_2, O_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως.

1. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ εὐθεῖαι O_1A', O_2B', $O_3\Gamma'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ.

2. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ παράλληλα πρὸς τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδα Α'Β'Γ'.

31. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ καὶ σημεῖον G ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ κατασκευασθῆ ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον διὰ τοῦ G καὶ τέμνον τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου ὥστε ἂν εἶναι: Α,Β,Γ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, τὸ σημεῖον G νὰ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

32. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς ΟΧ. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ ὀνομάζομεν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτοῦ μὲ τὰς ἀκμὰς ΟΥ καὶ ΟΖ τῆς τριέδρου γωνίας καὶ G τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων G.

33. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἀκμῶν ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ ὀνομάζομεν : Γ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτοῦ μὲ τὴν ΟΖ καὶ G τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων G.

34. Θεωροῦμεν ἰσοεδρικὴν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΧΥΖ, τῆς ὁποίας αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς $\frac{2\pi}{3}$, καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ αὐτῆς ἀντιστοίχως τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ὥστε : ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = α. Νὰ εὑρεθῆ, συναρτήσει τοῦ α, ἡ ἀπόστασις ΟΗ τῆς κορυφῆς Ο ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ.

35. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον τρίεδρον γωνίαν Ο.ΧΥΖ, τῆς ὁποίας ἡ μία δίεδρος εἶναι ὀρθή. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτῆς εἶναι περιττόν, ἤτοι ὅτι ὑπάρχουν τρεῖς ἑδρικαὶ γωνίαι ὀξεῖαι ἢ μία.

36. Θεωροῦμεν τρισορθογώνιον τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ καὶ μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΧ ἐσωτερικὴν τῆς τριέδρου. Ὀνομάζομεν : α', β', γ' τὰς γωνίας ΟΧ μὲ τὰς ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀντιστοίχως καὶ α'', β'', γ'' τὰς γωνίας (κλίσεις) τῆς ΟΧ μὲ τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι :

$$1.\ \alpha' + \beta' + \gamma' + \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = \frac{3\pi}{2}$$

$$2.\ \alpha' + \beta' + \gamma' > \alpha'' + \beta'' + \gamma''$$

37. Θεωροῦμεν : τρισορθογώνιον τρίεδρον γωνίαν ΟΧΥΖ, τρία τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ αὐτῆς ἀντιστοίχως καὶ τὴν προβολὴν Η τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Ὀνομάζομεν : E_1, E_2, E_3 τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ ἀντιστοίχως, Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, $Ε_1'$, $Ε_2'$, $Ε_3'$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ ἀντιστοίχως, x, y, z τὰ εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀντιστοίχως, υ τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΗ, καὶ $φ_1$, $φ_2$, $φ_3$ τὰς γωνίας (ΟΗ, ΟΑ), (ΟΗ, ΟΒ), (ΟΗ, ΟΓ) ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) $E_1^2 = E \cdot E_1'$, $E_2^2 = E \cdot E_2'$, $E_3^2 = E \cdot E_3'$ (2) $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = E^2$

(3) $\frac{1}{υ^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ (4) $συν^2φ_1 + συν^2φ_2 + συν^2φ_3 = 1$

38. Δίδεται τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία Ο.XYZ. Ὀνομάζομεν (Π) κάθε ἐπίπεδον τέμνον τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου καὶ ἀπέχον ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ο δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ καὶ Α,Β,Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (Π) μὲ τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου. Νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν ἐπιπέδων (Π) ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον τὸ γινόμενον ΟΑ.ΟΒ.ΟΓ εἶναι ἐλάχιστον.

39. Δίδονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ. Νὰ κατασκευασθῇ τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω δοθέντα σημεῖα.

40. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΗΧ,ΗΥ,ΗΖ, ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν σημεῖον Η. Νὰ κατασκευσθῇ τρισορθογώνιος τρίεδρος Ο.ΑΒΓ τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ νὰ προβάλωνται ἐπὶ τὸ (Π) κατὰ τὰς ἡμιευθείας ΗΧ, ΗΥ, ΗΖ ἀντιστοίχως.

41. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) τρία σημεῖα Α, Β, Η. Νὰ κατασκευασθῇ τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία τῆς ὁποίας αἱ δύο ἀκμαὶ νὰ τέμνουν τὸ (Π) εἰς τὰ Α καὶ Β, ἡ δὲ κορυφὴ Ο αὐτῆς νὰ προβάλλεται ἐπὶ τὸ (Π) κατὰ τὸ σημεῖον Η.

42. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α τοῦ ὁποίου ἔστω Η τὸ κέντρον. Ἔστω Ο τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος τοῦ τριγώνου, διὰ τὸ ὁποῖον ΟΑ = α, καὶ Σ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΗ.

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τρίεδρος γωνία Σ.ΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιος.
2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ καὶ ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιοι.
3. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΑ, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΜΒΓ εἶναι ἐλάχιστον καὶ νὰ εὑρεθῇ, συναρτήσει τοῦ α, τὸ ἐλάχιστον τοῦτο.

43. Σὲ κάθε τρίεδρον γωνίαν Ο.XYZ τὰ τρία ἐπίπεδα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ μίαν ἀκμὴν καὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι ἑδρικῆς γωνίας (διάμεσα ἐπίπεδα) διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

44. Θεωροῦμεν : τρίεδρον γωνίαν Ο.XYZ, τὴν διχοτόμον ΟΑ′ τῆς ἑδρικῆς γωνίας (ΟΥ, ΟΖ) καὶ τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους ΟΒ″ καὶ ΟΓ″ τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν (ΟΖ,ΟΧ), καὶ (ΟΧ,ΟΥ) αὐτῆς ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΧΟΑ′, ΥΟΒ″, ΖΟΓ″ διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

45. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.XYZ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. Αἱ διχοτόμοι δύο ἑδρικῶν γωνιῶν αὐτῆς καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς τρίτης ἑδρικῆς γωνίας κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.
2. Αἱ τρεῖς ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

46. Θεωροῦμεν δύο τριέδρους γωνίας Ο.ΑΒΓ καὶ Ο.Α′Β′Γ′ παραπληρωματικὰς ἀλλήλων. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

47. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἑκάστη τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Ο τῆς τριέδρου, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἕδρας καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι τῆς ἕδρας αὐτῆς ἀκμήν, κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

48. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ καὶ τὰς διχοτόμους ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν (ΟΒ, ΟΓ), (ΟΓ, ΟΑ), (ΟΑ,ΟΒ) αὐτῆς ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἑδρικὰς γωνίας τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ (τὰ διὰ τῶν ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ κάθετα ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ τῶν ἑδρῶν) εἶναι τὰ ἐπίπεδα - ὕψη τῆς τριέδρου Ο.Α′Β′Γ′.

49. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος γωνίας Ο.ΑΒΓ ἐκ τῶν διχοτόμων ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν αὐτῆς.

50. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.XYZ. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ αὐτῆς τρία σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοίχως ὥστε τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.

51. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ καὶ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ τῶν ἀκμῶν αὐτῆς διὰ τὰ ὁποῖα τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ εἶναι ἴσα. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἐξωτερικὰς διέδρους τῆς τριέδρου εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

52. Θεωροῦμεν μίαν τρίεδρον γωνίαν Ο.XYZ καὶ ὀνομάζομεν (B_1), (B_2), (B_3) τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους τῆς τριέδρου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκμὰς τὰς ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ ἀντιστοίχως καὶ (B'_1), (B'_2), (B'_3) τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἐξωτερικὰς διέδρους τῆς τριέδρου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκμὰς τὰς ἀνωτέρω. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι :

1. Τὰ ἐπίπεδα (B_1), (B_2), (B_3) διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας OG (ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς τριέδρου).
2. Τὰ ἐπίπεδα (B_1), $B'_2)$, (B'_3) διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας OG′.
   Τὰ ἐπίπεδα (B'_1), (B_2), (B'_3) διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας OG″.
   Τὰ ἐπίπεδα (B'_1), (B'_2), (B_3) διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας OG‴.

53. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.XYZ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν ΥΟΖ, ΧΟΖ, ΧΟΖ ἀντιστοίχως εἶναι ἀνάλογοι τριῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτων α,β,γ.

54. Δίδεται ἰσοεδρικὴ τρίεδρος γωνία Ο.XYZ. Νὰ εὑρεθοῦν τρία σημεῖα Α, Β, Γ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ αὐτῆς ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἰσόπλευρον.

55. Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Ο.XYZ καὶ τὰ ἐπίπεδα - ὕψη ΧΟΑ′, ΥΟΒ′, ΖΟΓ′, αὐτῆς (ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ αἱ προβολαὶ τῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΥΟΖ, ΖΟΧ, ΧΟΥ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἐπίπεδα - ὕψη τῆς τριέδρου Ο.XYZ εἶναι διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῆς τριέδρου Ο.Α′Β′Γ′.

56. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ κατασκευασθῆ εὐθεῖα ε τέμνουσα τὰς α καὶ β καὶ σχηματίζουσα μὲ αὐτὰς δοθείσας γωνίας φ καὶ ω ἀντιστοίχως.

57. Νὰ κατασκευασθῆ στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων : ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ, (ΒΑ,ΒΓ) = φ, (ΓΒ, ΓΔ) = ω.

58. Νὰ κατασκευασθῆ στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων : ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ, ΔΑ = δ, (ΑΒ, ΑΔ) = φ, δίεδρος Δ. ΑΒ. Γ = ω.

59. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.XYZ καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς ἕδρας ΥΟΖ. Ὀνομάζομεν (Τ) κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι σημεῖα τῶν ἑδρῶν ΖΟΧ καὶ ΧΟΥ τῆς τριέδρου ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐκ τῶν τριγώνων (Τ) ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον. Γενίκευσις εἰς μίαν τετράεδρον γωνίαν Ο.XYZT.

60. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.XYZ καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῆ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνον ὑπὸ ἴσας γωνίας :

1. Τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου γωνίας.
2. Τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου γωνίας.

61. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῆ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Ρ καὶ τέμνον τὰς ἀνωτέρω εὐθείας ὑπὸ ἴσας γωνίας.

62. Θεωροῦμεν τρίεδρον Ο.ΑΒΓ καὶ τὰς διὰ τοῦ Ο εὐθείας ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν διχοτομούντων τὰς ἐξωτερικὰς διέδρους τῆς τριέδρου γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκμὰς τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι :

1. Αἱ εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Ρ).
2. Τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον (Ρ) ἔχει τὴν αὐτὴν κλίσιν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ.

63. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.XYZ τῆς ὁποίας $\alpha = \frac{\pi}{3}$ καὶ $\beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$ καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς ἀκμῆς ΟΧ αὐτῆς, ὥστε : ΟΑ = λ. Θεωροῦμεν τὴν τομὴν ΑΒΓ τῆς τριέδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ Α. Νὰ εὑρεθοῦν :

1. Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συναρτήσει τοῦ λ.
2. Αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι τῆς τριέδρου γωνίας Α.ΟΒΓ.
3. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΟΒΓ.

64. Δίδεται τρίεδρος γωνία Σ.ΧΥΖ. Θεωροῦμεν τρία σημεῖα Α,Β,Γ τῶν ἀκμῶν ΣΧ, ΣΥ, ΣΖ τῆς τριέδρου ἀντιστοίχως, ὥστε ΣΑ = ΣΒ = ΣΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος ἑκάστου τῶν σημείων Ο,G,Η τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (περίκεντρον, βαρύκεντρον καὶ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ).

65. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), τῶν ὁποίων ἔστω γ ἡ τομή, καὶ μία εὐθεῖα δ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον (Σ) διερχόμενον διὰ τῆς δ καὶ τέμνον τὰ (Π) καὶ (Ρ), ὥστε αἱ τομαὶ α καὶ β νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν γ· (νὰ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ (Π), (Ρ) (Σ) ἰσοσκελὴς τρίεδρος γωνία).

66. Δίδεται τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὴν ἡ τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν εἶναι ἐλάχιστον.

67. Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος ἑνὸς κανονικοῦ ν-γώνου ΑΒΓ. . . Ζ ἡ ν-εδρος Ο.ΑΒΓ . . . Ζ, τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ ἑδρικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὀνομάζεται **κανονικὴ** ἢ **ἰσοεδρική**. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι κάθε ἰσοεδρικῆς ν-έδρου γωνίας εἶναι ἴσαι.

68. Δίδεται ἰσοσκελὴς τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδος τομὴ ΑΒΓ αὐτῆς, ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἴσον πρὸς δοθέν.

69. Δίδεται ἰσοεδρικὴ τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ αὐτῆς τρία σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

70. Θεωροῦμεν: κύκλον (Ι), τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου τούτου, καὶ ἕνα τυχὸν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον περὶ τὸν (Ι). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀπέναντι ἑδρικαὶ γωνίαι τῆς τετραέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓΔ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

71. Θεωροῦμεν κύκλον (Ω), τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος τοῦ κύκλου τούτου, καὶ ἕνα τυχὸν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (Ω). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀπέναντι δίεδροι γωνίαι τῆς τετραέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓΔ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ἤτοι ὅτι εἶναι : $Α + Γ = Β + Δ$.

72. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν τὴν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ, ΔΤ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἐπὶ τὴν ἀκμῶν ΓΖ καὶ ΔΤ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Γ′ καὶ Δ′, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΒΓ′ καὶ ΑΔ′ νὰ εἶναι ὀρθογώνιοι.

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἡ ΑΓ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ′. Τὰ τρίγωνα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ὡς κορυφὰς τρία τυχόντα ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ′, Δ′ εἶναι ὀρθογώνια. Τὸ μέσον Ι τοῦ εὐθ. τμήματος Γ′Δ′ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β, Γ′, Δ′.
2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Ι τῶν εὐθ. τμημάτων Γ′Δ′.
3. Ἔστω $ΓΓ' = γ$, $ΔΔ' = δ$, $ΒΓ = ΑΔ = α$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$γ \cdot δ = α^2 \ (\text{σταθερόν}).$$

73. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ αὐτοῦ τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ παράλληλοι (τῆς αὐτῆς διευθύνσεως). Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν (β, γ), (γ, α), (α,β) τῆς ὁριζομένης πρισματικῆς ἐπιφανείας δίδονται ἀντιστοίχως τρία σημεῖα $Δ_1$, $Δ_2$, $Δ_3$. Νὰ κατασκευασθῇ (κατασκευὴ διὰ τοῦ κανόνος) ἡ τομὴ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν $Δ_1$, $Δ_2$, $Δ_3$.

74. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων : (1) α, Β, Γ (2) Β,Γ, β (3) Α, Β,Γ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΙ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΟΜΟΙΟΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

---

(1) 'Εκ τῆς ὕλης τῶν «Μαθηματικῶν Γ' τάξεως».

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΔΙΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ — ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ ΕΠ' ΑΛΛΗΛΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Η ΤΡΙΕΔΡΟΣ ΚΑΙ Η ΠΟΛΥΕΔΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελὶς 78 Στίχος 22 ἀντὶ $2\overline{A}.\ \overline{OMB'}$ τίθενται : $2\ \overline{AB}.\ \overline{OM}$
» 216 » 16 διαγράφονται αἱ λέξεις «ἢ καὶ ἁπλῶς **ἕδραι** αὐτῆς»
» 41 Σχ. 31.1 ἀντὶ Ο τίθεται Α
» 161 Σχ. 36.2 » α » Α
» Α » α
» 161 Σχ. 36.2 διαγράφεται τὸ γράμμα κ.

Ἐπιμελητὴς Ἐκδόσεως : Ἠλίας Ντζιώρας (Ἀπ. Δ.Σ. 6977/2-12-68).

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1968 (XII) - ΑΝΤ. 85.000 - ΣΥΜΒ. 1790 / 27 - 11 - 68

'Εκτύπωσις - Βιβλιοδεσία : 'Ιω. Καμπανᾶ Ο.Ε. Φιλαδελφείας 4 ΑΘΗΝΑΙ