ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ. ΓΡΑΦΑΚΟΥ - Κ. ΔΙΑΚΑΚΗ - Σ. ΜΑΝΤΖΑΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β/Γ = 152

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑΝ

Τὸ βιβλίο μεταγλωττίσθηκε ἀπὸ τοὺς καθηγητὲς Ἀνδρ. Πατεράκη, μαθηματικό, καὶ Ἀθ. Ματσούκα, φιλόλογο.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

Γ. ΓΡΑΦΑΚΟΥ - Κ. ΔΙΑΚΑΚΗ - Σ. ΜΑΝΤΖΑΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΠΕΡΙ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

(Ἐπαναλήψεις καὶ συμπληρώσεις)

§ **1**. *Φέρετε στὸ νοῦ σας τὰ πρόσωπα τῆς οἰκογένειάς σας καὶ θεωρῆστε τα σὰν μιὰ ὁλότητα (μιὰ ὁμάδα, μιὰ συλλογὴ προσώπων). Τί παρατηρεῖτε;*

Παρατηροῦμε ὅτι μὲ ἀντικείμενα, ποὺ τὰ γνωρίζομε καλὰ (τὰ πρόσωπα τῆς οἰκογένειάς μας) καὶ ποὺ δὲν τὰ συγχέομε μεταξύ τους, σχηματίσαμε μὲ τὴ σκέψη μας ἕνα νέο ἀντικείμενο.

Τὸ ἀντικείμενο αὐτὸ τὸ ὀνομάζομε **σύνολο**. Τὸ σύνολο τῶν προσώπων τῆς οἰκογένειάς μας. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ θεωρήσουμε ἀντικείμενα α, β, γ, δ ἐντελῶς καθορισμένα καὶ διαφορετικὰ μεταξύ τους σὰν ἕνα ἀντικείμενο: Τὸ σύνολο τῶν α, β, γ, δ.

Σύνολο εἶναι τὸ ἀντικείμενο, ποὺ σχηματίζομε (μὲ τὴ σκέψη μας ἢ τὴ φαντασία μας), ἂν θεωρήσουμε ἀντικείμενα ἐντελῶς καθορισμένα καὶ διαφορετικὰ μεταξύ τους σὰν ἕνα ἀντικείμενο.

Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ λέγονται **στοιχεῖα τοῦ συνόλου** καὶ συμβολίζονται μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου: α, β, γ, δ, ... Τὸ σύνολο τῶν ἀντικειμένων α, β, γ, δ, συμβολίζεται μὲ κεφαλαῖο γράμμα: Α ἢ Β ἢ ...

Λέμε ὅτι **τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Α ἀνήκουν σ' αὐτό**, καὶ γράφομε συμβολικὰ $\alpha \in A$, $\beta \in A$ κ.ο.κ., ἢ ὅτι **ἀπὸ τὸ σύνολο Α λαμβάνονται τὰ στοιχεῖα του.** Συμβολικὰ $A \ni \alpha$ ἢ $A \ni \beta$ (ἀπὸ τὸ Α λαμβάνεται τὸ α κ.λ.π.). Ἂν τὸ ἀντικείμενο α δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο Α, γράφομε $\alpha \notin A$.

§ **2**. Ἕνα σύνολο καθορίζεται, ἂν δηλώσουμε τὰ στοιχεῖα του καὶ τὰ γράψουμε μέσα σὲ ἄγκιστρα· π.χ. τὸ σύνολο τῶν α, β, γ, δ, γράφεται $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Αὐτὸ τὸν τρόπο παραστάσεως τὸν λέμε καθορισμὸ τοῦ συνόλου μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του.

Παράδειγμα. Νὰ ὁρισθεῖ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 5, 6, 7, 8, 9. Τὸ σύνολο αὐτὸ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Μποροῦμε ὅμως νὰ ὁρίσουμε τὸ σύνολο αὐτὸ καὶ ὡς τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 4 καὶ μικρότεροι τοῦ 10, καὶ νὰ γράψουμε $\{\chi / \chi$ φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $4 < \chi < 10\}$.

Τὸν τρόπο αὐτὸ τὸν λέμε καθορισμὸ τοῦ συνόλου μὲ περιγραφή.

Ἕνα σύνολο καθορίζεται μὲ περιγραφή, ἂν περιγράψουμε μιὰ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῶν στοιχείων του. Δηλαδὴ μιὰ ἰδιότητα, ποὺ τὴν ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖα του καὶ μόνο αὐτά.

Μιὰ ἰδιότητα συμβολίζεται μὲ p( ) ἢ q( ). Π.χ. q( ) σημαίνει «φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 10». Γιὰ τοὺς 11, 13, 17, ποὺ ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτή, γράφομε 11:q(11)*, 13:q(13), 17:q(17). Γιὰ τοὺς 6, 3, 2, ποὺ δὲν ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτή, γράφομε ὄχι 6:q(6), ὄχι 3:q(3), ὄχι 2:q(2). Γιὰ ἕνα ἀντικείμενο χ, ποὺ ἔχει τὴν ἰδιότητα q( ), γράφομε χ:q(χ). Δηλαδὴ τὸ χ ἔχει τὴν ἰδιότητα q( ). Γιὰ ἕνα ἀντικείμενο ψ, ποὺ δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα αὐτή, γράφομε ὄχι ψ:q(ψ) καὶ διαβάζομε: τὸ ψ δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα q( ).

§ **3**. *Ὀνομάστε A τὸ σύνολο {3, 4, 5, 6} καὶ B τὸ {χ/χ φυσικὸς μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 7}. Τί παρατηρεῖτε;*

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀνήκει στὸ Β καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β ἀνήκει στὸ Α. Λέμε τώρα ὅτι τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἴσα καὶ συμβολίζομε $A = B$ ἢ λέμε ὅτι πρόκειται γιὰ τὸ ἴδιο σύνολο: $A \equiv B$. Τὰ ἴδια παρατηροῦμε καὶ στὰ σύνολα Α καὶ $\Gamma = \{5, 3, 6, 4\}$. Ἑπομένως **ἡ σειρὰ (ἡ τάξη), μὲ τὴν ὁποία γράφονται τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου, δὲν ἔχει καμιὰ σημασία γιὰ τὸν καθορισμό του.**

Δύο σύνολα εἶναι ἴσα, ἂν κάθε στοιχεῖο τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτὰ ἀνήκει στὸ ἄλλο καὶ ἀντιστρόφως.

Εὔκολα διαπιστώνομε ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα ὅτι: $A = A$, $A = B \Rightarrow B = A$ καὶ $A = B$ καὶ $B = \Gamma \Rightarrow A = \Gamma$.

Ἡ ἰσότητα τῶν συνόλων εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

§ **4**. Ἂν προσέξουμε μόνο τὴν ἰδιότητα: κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀνήκει στὸ Β, θὰ λέμε ὅτι **τὸ Α εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Β** ἢ ὅτι τὸ Α περιέχεται στὸ Β καὶ θὰ γράφουμε: $A \subseteq B$. (στὸ παραπάνω παράδειγμα τῆς § 3 εἶναι καὶ $B \subseteq A$). Ἑπομένως $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

Τὴ σχέση $A \subseteq B$ μποροῦμε νὰ τὴ γράψουμε $B \supseteq A$. Θὰ λέμε τότε: **Τὸ Β εἶναι ὑπερσύνολο τοῦ Α.**

Στὰ σύνολα Α καὶ $\Delta = \{\chi / \chi$ φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $2\}$ παρατηροῦμε ὅτι $A \subseteq \Delta$, ἀλλὰ ὅτι $\Delta \nsubseteq A$ (γιατὶ τὰ στοιχεῖα 7, 8, 9, ... τοῦ Δ δὲν ἀνήκουν στὸ Α). Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε ὅτι **τὸ Α εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Δ·** συμβολικὰ $A \subset \Delta$. **Τὸ Δ λέγεται γνήσιο ὑπερσύνολο τοῦ Α·** συμβολικὰ $\Delta \supset A$.

Ἂν ὁρίσουμε μὲ περιγραφὴ τὸ σύνολο {χ / χ φυσικὸς μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 3}, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι δὲν ἔχει κανένα στοι-

* Τὸ σύμβολο 11:q(11) διαβάζεται: 11 ἔχει τὴν ἰδιότητα.

χεῖο. Καθορίζεται λοιπὸν ἕνα σύνολο, ποὺ δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖο. Τὸ σύνολο αὐτὸ λέγεται **κενὸ σύνολο** καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ $\varnothing$. Τὸ $\varnothing$ εἶναι ὑποσύνολο κάθε συνόλου. $\varnothing \subseteq A$ γιὰ κάθε σύνολο Α.

Δεχόμαστε ὅτι ὅλα τὰ ἀντικείμενα, ποὺ μποροῦν νὰ εἶναι στοιχεῖα τῶν θεωρούμενων συνόλων, ἀνήκουν σ' ἕνα σύνολο U. Τὸ U λέγεται **βασικὸ (ἢ γενικὸ) σύνολο** ἢ **σύνολο ἀναφορᾶς** τῶν θεωρούμενων συνόλων.

Κάθε σύνολο Α εἶναι ὑποσύνολο τοῦ U. $A \subseteq U$ γιὰ κάθε σύνολο Α.

Ἡ σχέση τοῦ **ἐγκλεισμοῦ** $\subseteq$ ἔχει τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

$A \subseteq A$ ἀνακλαστικὴ (γιατὶ κάθε στοιχεῖο ὁποιουδήποτε συνόλου Α ἀνήκει στὸ σύνολο Α).

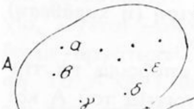
$A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ἀντισυμμετρικὴ (§ 4),

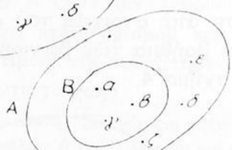
$A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ μεταβατικὴ (γιατὶ ἂν κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀνήκει στὸ Β καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β ἀνήκει στὸ Γ, τότε κάθε στοιχεῖο τοῦ Α ἀνήκει στὸ Γ). Νὰ τὸ ἐπαληθεύσετε στὰ παραπάνω παραδείγματα.

Γιὰ νὰ κάνουμε αἰσθητὴ τὴν ἔννοια τοῦ συνόλου Α τῶν στοιχείων α, β, γ, . . . παριστάνομε τὰ στοιχεῖα του μὲ σημεῖα καὶ τὸ σύνολο $\{α, β, γ, \ldots\}$ μὲ μιὰ κλειστὴ γραμμή, ἡ ὁποία περιβάλλει τὰ σημεῖα αὐτά. Σχῆμα (1).

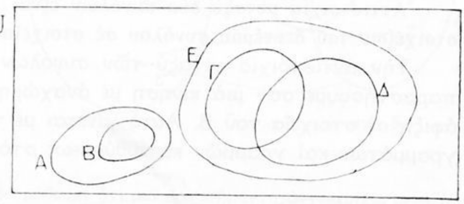
Τὸ ὑποσύνολο $B = \{α, β, γ\}$ τοῦ Α, τὸ παριστάνομε στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ Α. Σχημ. (2). Τὸ βασικὸ σύνολο U τὸ παριστάνομε σὰν ἕνα ὀρθογώνιο· στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ὀρθογωνίου παριστάνονται ὅλα τὰ θεωρούμενα σύνολα. Σχημ. (3).

σχ. 1.





σχ. 2.



σχ. 3.

Οἱ παραστάσεις αὐτὲς λέγονται βέννια διαγράμματα πρὸς τιμὴ τοῦ Ἄγγλου φιλοσόφου καὶ μαθηματικοῦ J. Venn, (1834-1923), ποὺ τὶς χρησιμοποίησε πρῶτος.

Ἀσκήσεις:

1. Νὰ βρεῖτε τὰ ὑποσύνολα τῶν συνόλων $\{α\}$, $\{1, 2\}$, $\{α, β, γ\}$, $\{3, 12, 6, 7\}$.

2. Νὰ βρεῖτε τὰ ὑποσύνολα τοῦ $\{χ \,/\, χ$ ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ $\frac{7}{5}$ καὶ μικρότερος τοῦ $\frac{10}{3}\}$.

3. Νὰ ὁρίσετε μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο $\{\chi / \chi$ διαγώνιος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ$\}$.

4. Νὰ ὁρίσετε μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο $\{\chi / \chi$ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\kappa : 5$, ὅπου κ ἀκέραιος$\}$ καὶ μὲ περιγραφὴ τὸ $\{\text{ΑΓ, ΒΔ}\}$.

5. Νὰ συγκρίνετε τὰ σύνολα $A = \{0, 1, 2\}$ καὶ $B = \{\chi/\chi$ ὑπόλοιπο διαιρέσεως φυσικοῦ ἀριθμοῦ διὰ 3$\}$.

6. Νὰ συγκρίνετε τὰ σύνολα $A = \{\chi/\chi$ παραλληλόγραμμο$\}$, $B = \{\chi/\chi$ ὀρθογώνιο$\}$ καὶ $\Gamma = \{\chi / \chi$ τετράγωνο$\}$ καὶ νὰ κάνετε τὰ διαγράμματά τους.

2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ

Μονοσήμαντη καὶ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Ἰσοδύναμα σύνολα.

§ 5. *Σὲ μιὰ συλλογὴ (ἕνα σύνολο) Α γραμματοσήμων ἀνήκουν τὰ γραμματόσημα α, β, γ, δ, ε. Τὰ α, γ καὶ δ ἀξίζουν 1 δραχμὴ τὸ καθένα. Τὰ β καὶ ε, 2 δρχ. Τὰ α καὶ δ ἐκδόθηκαν τὸ 1932, τὰ β, γ καὶ ε τὸ 1936.*

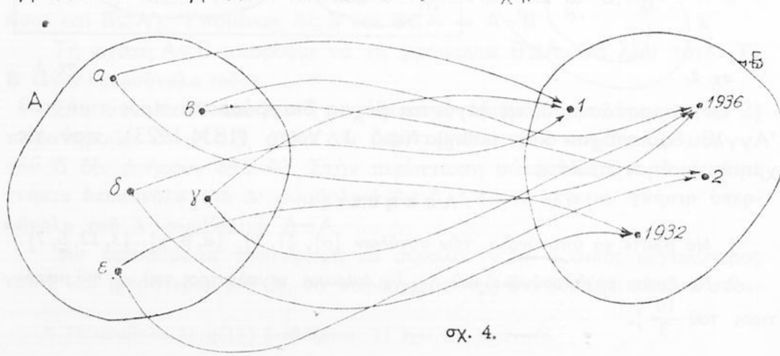
Θεωρήσετε τὰ σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ *καὶ* $B = \{1, 2, 1932, 1936\}$. *Σκεφτῆτε τώρα ἕνα στοιχεῖο τοῦ Α καὶ δίπλα σ' αὐτὸ ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β. Τί παρατηρεῖτε;*

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ α παραθέτομε τὸν 1 ἢ τὸ 1932 (τὴν τιμή του ἢ τὴ χρονολογία ἐκδόσεώς του) συμβολικὰ (α,1) ἢ (α,1932). Στὸ β παραθέτομε ἢ ἀντιστοιχίζομε τὸν 2 ἢ τὸ 1936. Συμβολικὰ (β, 2) ἢ (β, 1936) κ.λ.π.

Λέμε τώρα ὅτι μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β ὑπάρχει μιὰ ἀντιστοιχία (ἐπειδὴ στὰ στοιχεῖα τοῦ Α παραθέσαμε ἢ ἀντιστοιχίσαμε στοιχεῖα τοῦ Β).

Ἀντιστοιχία μεταξὺ δύο συνόλων εἶναι ἡ ἀντιστοίχιση (ἢ παράθεση) στοιχείων τοῦ δευτέρου συνόλου σὲ στοιχεῖα τοῦ πρώτου.

Τὴν ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β μποροῦμε νὰ τὴν παραστήσουμε σὰν μιὰ κίνηση μὲ ἀναχώρηση ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ Α καὶ ἄφιξη σὲ στοιχεῖα τοῦ Β. Αὐτὸ γίνεται μὲ τὴ βοήθεια τῶν βέννιων διαγραμμάτων καὶ γραμμῶν κατευθύνσεως στὸ σχῆμα 4.



σχ. 4.

Γι' αὐτὸ τὸ Α λέγεται **σύνολο ἀφετηρίας** καὶ τὸ Β **σύνολο ἀφίξεως**. Τὸ σχῆμα 4 τὸ ὀνομάζομε διάγραμμα (ἢ γράφημα) τῆς ἀντιστοιχίας (στὸ γραμματόσημο ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμή του καὶ ἡ χρονολογία ἐκδόσεώς του).

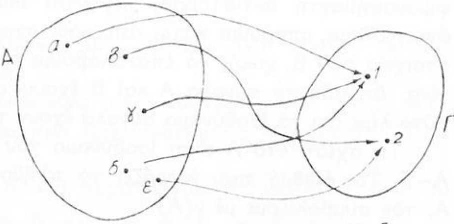
Σημείωση: Οἱ παραστάσεις (α, 1), (α, 1932), (β, 2) κ.λ.π., τὶς ὁποῖες χρησιμοποιήσαμε, γιὰ νὰ συμβολίσουμε τὴν ἀντιστοίχιση, λέγονται **διατεταγμένα ζεύγη**. Μποροῦμε νὰ παραστήσουμε (ἢ νὰ ὁρίσουμε) μιὰν ἀντιστοιχία σὰν ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν.

§ **6**. Ἂν μεταξὺ τοῦ συνόλου Α τῶν γραμματοσήμων καὶ τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν Γ = {1, 2} μελετήσουμε τὴν ἀντιστοιχία: σ' ἕνα γραμματόσημο ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμή του, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι σὲ **κάθε** στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχεῖ **ἕνα μόνο** στοιχεῖο τοῦ συνόλου Γ. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται **μονοσήμαντη ἀντιστοιχία**. Τὰ πρῶτα μέλη τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, 1), (γ, 1), (δ, 1), (β, 2), (ε, 2) εἶναι τώρα διαφορετικὰ μεταξύ τους.

Μονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ δύο συνόλων ἔχομε, ὅταν σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ πρώτου συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ δευτέρου.

Στὸ σχῆμα 5 ἔχομε τὸ διάγραμμα τῆς μονοσήμαντης ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Γ.

Παρατήρηση: Τὸ σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, τὸ ὁποῖο παριστάνει μιὰ μονοσήμαντη ἀντιστοιχία, λέγεται —ὅπως θὰ μάθουμε ἀργότερα— **συνάρτηση**. Τὰ Α καὶ Γ θὰ λέγονται τότε **πεδίο ὁρισμοῦ** καὶ **πεδίο τιμῶν** τῆς συναρτήσεως (ἀντιστοίχως).

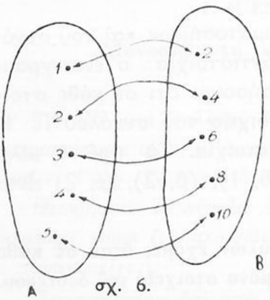


σχ. 5.

Σημείωση: Σὲ ἀνώτερη τάξη θὰ μάθουμε ὅτι μιὰ μονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β λέγεται καὶ **ἀπεικόνιση τοῦ Α στὸ Β**. Τὸ Α στὴν περίπτωση αὐτὴ θὰ ὀνομάζεται σύνολο ἀρχετύπων καὶ τὸ Β σύνολο εἰκόνων.

§ 7. Μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν Α = {1, 2, 3, 4, 5} καὶ τοῦ συνόλου τῶν διπλασίων τους Β = {2, 4, 6, 8, 10} ὑπάρχει μιὰ μονοσήμαντη ἀντιστοιχία, ἡ ἑξῆς: σὲ κάθε ἀριθμὸ τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ὁ διπλάσιός του στὸ Β. Ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν συνόλων Β καὶ Α ὑπάρχει μιὰ μονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Ἡ ἀντίστροφη τῆς προηγούμενης: σὲ κάθε στοιχεῖο (ἀριθμὸ) τοῦ Β ἀντιστοιχεῖ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ στὸ Α. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται **ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία**.

Ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ δύο συνόλων (ἢ ἀπεικόνιση ἕνα πρὸς ἕνα) ἔχομε, ὅταν σὲ **κάθε στοιχεῖο τοῦ πρώτου συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ δευτέρου καὶ σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ δευτέρου συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ πρώτου (ἐκεῖνο ποὺ τὸ εἶχε ὡς ἀντίστοιχο) ἢ ὅταν μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ὑπάρχει μιὰ μονοσήμαντη ἀντιστοιχία καὶ μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της.**



σχ. 6.

Στὸ σχῆμα 6 ἔχομε τὸ διάγραμμα τῆς ἀμφιμονοσήμαντης ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν συνόλων A καὶ B. Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσουμε καὶ ὡς ἑξῆς:

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10

Παρατηροῦμε ὅτι μποροῦμε κάτω ἀπὸ κάθε στοιχεῖο τοῦ πρώτου συνόλου νὰ γράψουμε ἕνα στοιχεῖο τοῦ δευτέρου, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβουμε ἢ νὰ παραλείψουμε κανένα.

§ **8**. Τὰ σύνολα A καὶ B, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὴ μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία, λέγονται **ἰσοδύναμα** σύνολα. Τότε ὅμως, ὅπως εἴδαμε, μποροῦμε κάτω ἀπὸ κάθε στοιχεῖο τοῦ A νὰ γράψουμε ἕνα στοιχεῖο τοῦ B, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβουμε καὶ χωρὶς νὰ παραλείψουμε κανένα. Δηλαδὴ τὰ σύνολα A καὶ B ἔχουν τὸ ἴδιο πλῆθος στοιχείων. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὰ ἰσοδύναμα σύνολα ἔχουν τὸν ἴδιο **πληθικὸ ἀριθμό.**

Τὴ σχέση «τὸ A εἶναι ἰσοδύναμο τοῦ B» τὴν γράφομε συμβολικά: $A \sim B$. Τὸν ἀριθμό, ποὺ ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου A, τὸν συμβολίζομε μὲ $\nu(A)$.

Ὥστε $A \sim B \Leftrightarrow \nu(A) = \nu(B)$. Αὐτὸ τὸ διαπιστώνομε καὶ ἂν ἀπαριθμήσουμε τὰ στοιχεῖα τῶν A καὶ B.

Μεταξὺ ἑνὸς συνόλου A καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουμε μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία τὴν

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

Ἂν μεταξὺ τῶν A καὶ B εἶναι δυνατὴ ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10,

τότε εἶναι δυνατὴ καὶ ἡ

2	4	6	8	10
1	2	3	4	5

μεταξὺ τῶν B καὶ A.

Θεωροῦμε τώρα καὶ τὸ σύνολο Γ μὲ στοιχεῖα τὰ τριπλάσια τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Α: Γ = {3, 6, 9, 12, 15}. Παρατηροῦμε ὅτι μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, Α καὶ Γ ἔχομε τὶς ἀμφιμονοσήμαντες ἀντιστοιχίες:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{array}$$

τότε ὅμως ἔχομε καὶ τὴν

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{array}$$

μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι ἡ ἰσοδυναμία τῶν συνόλων ἔχει τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας:

$A \sim A$, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ καὶ $A \sim B$ καὶ $B \sim \Gamma \Rightarrow A \sim \Gamma$

ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

Ἑπομένως τὶς ἴδιες ἰδιότητες ἔχει καὶ ἡ ἰσότητα τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν τους.

3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ — ΑΠΕΙΡΟΣΥΝΟΛΑ

§ **9**. Ἂν θεωρήσουμε τὸ σύνολο Α = {α, β, γ, δ, ε}, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του ἐκφράζεται ἀπὸ τὸ φυσικὸ ἀριθμὸ 5. Συνεπῶς $\nu(A) \in N$.

Τὰ σύνολα, ποὺ οἱ πληθικοί τους ἀριθμοὶ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί, λέγονται **πεπερασμένα σύνολα**.

Πάρτε τώρα ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Α καὶ ἐξετάστε ἂν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ Α μποροῦμε νὰ ἔχουμε μιὰν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Τί παρατηρεῖτε;

Παίρνομε τὸ Β = {α, γ, δ} καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατόν:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha & & \gamma & \delta & \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ & \alpha & \gamma & \delta & \end{array}$$

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσουμε, ἂν πάρουμε ὁποιοδήποτε γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Α. Λέμε λοιπὸν ὅτι **ἕνα σύνολο εἶναι πεπερασμένο, ὅταν δὲν ἔχει γνήσιο ὑποσύνολο ἰσοδύναμο μὲ αὐτό.**

§ **10**. Ἂς πάρουμε τώρα τὸ σύνολο Ν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: Ν = {1, 2, 3, 4, 5, . . .} καὶ τὸ σύνολο N_α τῶν ἀρτίων $N_\alpha = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ N_α εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Ν, $N_\alpha \subset N$ καὶ ὅτι κάτω ἀπὸ κάθε στοιχεῖο τοῦ Ν μποροῦμε νὰ γράψουμε ἕνα στοιχεῖο τοῦ N_α, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβουμε ἢ νὰ παραλείψουμε κανένα.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots\ldots & 1000 \ \ldots\ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots\ldots & 2000 \ \ldots\ldots \end{array}$$

Τὸ σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο ἰσοδύναμο μὲ αὐτό. Κανένας φυσικὸς ἀριθμὸς —ὁσοδήποτε μεγάλος— δὲν μπορεῖ νὰ ἐκφράσει τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του. Τὸ N εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολο. Τὸ N_α εἶναι ἐπίσης ἕνα ἀπειροσύνολο.

Ὥστε, **ἕνα σύνολο εἶναι ἀπειροσύνολο, ὅταν ἔχει ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο ἰσοδύναμο μὲ αὐτό.**

Ἕνα σύνολο ἰσοδύναμο μὲ ἕνα ἀπειροσύνολο εἶναι ἐπίσης ἀπειροσύνολο. Τὸ ὑπερσύνολο ἑνὸς ἀπειροσυνόλου εἶναι ἀπειροσύνολο. Π.χ. τὸ σύνολο Q τῶν ρητῶν.

Τὸ σύνολο Δ τῶν σημείων ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος AB εἶναι ἀπειροσύνολο.

§ **11**. Τὰ παραπάνω σύνολα δὲν μποροῦμε νὰ τὰ ὁρίσουμε πλήρως μὲ ἀναγραφή. Γι' αὐτὸ ὡς τώρα χρησιμοποιήσαμε ἀτελεῖς ἀναγραφές: $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ $Q = \{\ldots \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{2}, \ldots 1, \ldots \frac{3}{2}, \ldots\}$. Μποροῦμε ὅμως νὰ τὰ ὁρίσουμε μὲ περιγραφή. Δηλαδὴ νὰ δηλώσουμε μιὰν ἰδιότητα, ποὺ ἂν τὴν ἔχει ἕνα ἀντικείμενο, ἀνήκει στὸ σύνολο, ἂν ὅμως δὲν τὴν ἔχει, δὲν ἀνήκει σ' αὐτό.

$N = \{\chi / \chi$ εἶναι πληθικὸς ἀριθμὸς πεπερασμένου συνόλου$\}$.

$N_\alpha = \{\chi / \chi$ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ $2\}$.

$Q = \{\chi / \chi = \frac{\mu}{\nu}$, μ: εἶναι ἀκέραιος, ν: εἶναι φυσικὸς καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ ἀνάγωγο κλάσμα$\}$.

$\Delta = \{\chi / \chi$ εἶναι τὸ σημεῖο A ἢ B ἢ σημεῖο μεταξὺ τῶν A καὶ B$\}$.

Συνεπῶς μὲ περιγραφὴ ὁρίζονται κυρίως τὰ ἀπειροσύνολα, ἀλλὰ καὶ πεπερασμένα σύνολα.

Σημείωση: Μποροῦμε τώρα νὰ ποῦμε ὅτι ἕνα σύνολο εἶναι μιὰ κατηγορία ἢ ἕνα εἶδος ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μιὰ ὁρισμένη ἰδιότητα (ὡς πρὸς τὴν ὁποία θεωροῦνται).

Ἀσκήσεις:

7. Κάνετε μεταξὺ τῶν συνόλων $A = \{3, 8, 15, 13, 14, 12, 7\}$ καὶ $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τὴν ἀντιστοιχία: σὲ στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχεῖ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 3, τὸ ὁποῖο ἀνήκει στὸ B.

8. Στὸ σύνολο A τῶν χωρῶν τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης ἀντιστοιχίστε τὸ σύνολο B τῶν πρωτευουσῶν τους. Χαραχτηρίστε τὴν ἀντιστοιχία. Κάνετε τὸ διάγραμμά της.

9. Ἐξετάστε ἂν εἶναι ἰσοδύναμα τὰ σύνολα $A = \{\chi/\chi$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ $3\}$ καὶ $B = \{\chi/\chi$ εἶναι ὑπόλοιπο διαιρέσεως φυσικοῦ ἀριθμοῦ διὰ $7\}$.

10. Νὰ γίνουν ὅλες οἱ δυνατὲς ἀμφιμονοσήμαντες ἀντιστοιχίες μεταξὺ τῶν συνόλων $A = \{2, 9, 4\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Πόσες εἶναι αὐτές;

11. Νὰ ὁρίσετε μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς τριμελοῦς συνόλου καὶ τὸ σύνολο τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν τους. Κάνετε μεταξύ τους μιὰ ἀντιστοιχία. Χαραχτηρίστε τὸ εἶδος της.

12. Μεταξὺ τῶν συνόλων Α = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} καὶ Β = {0, 1, 2, 3, 9, 12, 18} νὰ γίνει ἡ ἀντιστοιχία: σὲ στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του διὰ 3 ἢ πολλαπλάσιό του, τὸ ὁποῖο ἀνήκει στὸ Β.

13. Ἐξετάστε ἂν μεταξὺ τῶν συνόλων Α = {χ/χ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 11 μικρότερο τοῦ 97} καὶ ἑνὸς γνήσιου ὑποσυνόλου του εἶναι δυνατὴ μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία.

14. Νὰ ὁρίσετε μὲ περιγραφὴ τὸ σύνολο Α = {0, 7, 14, 21, 28, . . . }.

15. Ποιὰ σχέση ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν ἀρτίων $N_α$ καὶ τοῦ συνόλου N_4 τῶν ἀκ. πολλαπλασίων τοῦ 4.

16. Ἐξετάστε ἂν εἶναι ἰσοδύναμα τὰ σύνολα Ε = {χ/χ ἐπίκεντρη γωνία σ' ἕναν κύκλο (0)} καὶ Τ = {χ/χ τόξο τοῦ κύκλου (0)}.

17. Ἐξετάστε ἂν εἶναι ἰσοδύναμα τὰ σύνολα Ν καὶ Κ = {χ/χ εἶναι κλασματικὴ μονάδα}.

4. ΕΝΩΣΗ ΚΑΙ ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ — ΔΙΑΖΕΥΞΗ ΚΑΙ ΣΥΖΕΥΞΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

§ **12**. Τὸ σύνολο, στὸ ὁποῖο ἀνήκουν ὅλα τὰ στοιχεῖα δύο συνόλων Α καὶ Β, καὶ μόνον αὐτά, λέγεται **ἕνωση τῶν Α καὶ Β** καὶ συμβολίζεται $A \cup B$.

Ἡ ἕνωση ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία $α \in A$ εἴτε $α \in B \Leftrightarrow α \in A \cup B$.

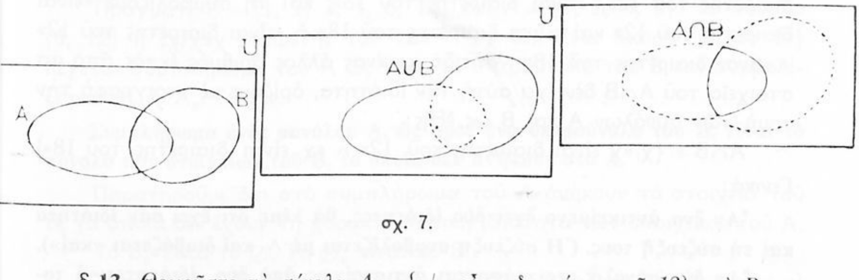
Τὴν πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκομε τὸ $A \cup B$, ἂν δοθοῦν τὰ Α καὶ Β, τὴν ὀνομάζομε «ἕνωση συνόλων» καὶ τὴ συμβολίζομε μὲ τὸ $\cup$.

Τὸ σύνολο, στὸ ὁποῖο ἀνήκουν τὰ κοινὰ στοιχεῖα δύο συνόλων Α καὶ Β καὶ μόνον αὐτά, λέγεται **τομὴ τῶν Α καὶ Β** καὶ συμβολίζεται $A \cap B$.

Ἡ τομὴ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία $α \in A$ καὶ $α \in B \Leftrightarrow α \in A \cap B$.

Τὴν ἀντίστοιχη πράξη τὴ λέμε «τομὴ συνόλων» καὶ τὴ συμβολίζομε μὲ $\cap$.

Παράδειγμα. Ἂν Α = {α, β, γ, δ, ε} καὶ Β = {γ, δ, ε, ζ} τότε $A \cup B$ = {α, β, γ, δ, ε, ζ} καὶ $A \cap B$ = {γ, δ, ε}. Ἂν χρησιμοποιήσουμε τὰ βέννια διαγράμματα, ἔχομε:



σχ. 7.

§ **13**. *Θεωρῆστε τὰ σύνολα Α = {χ/χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 12} καὶ Β = = {χ/χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18} καὶ καθορίστε μὲ ἀναγραφὴ 1) τὴν ἕνωση καὶ 2) τὴν τομή τους.*

᾿Αφοῦ καθορίσουμε μὲ ἀναγραφὴ τὰ σύνολα, τὰ ὁποῖα μᾶς ἔχουν δοθεῖ $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, βρίσκομε:

1) τὸ σύνολο $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ $A \cup B$ ἢ διαιρεῖ μόνο τὸν 12 (οἱ 4 καὶ 12) ἢ διαιρεῖ μόνο τὸν 18 (οἱ 9 καὶ 18) ἢ διαιρεῖ καὶ τοὺς δύο (οἱ 1, 2, 3, 6).

Τὴ σύνθετη αὐτὴ ἰδιότητα, τὴν ὁποία ἔχουν τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \cup B$, τὴ λέμε **διάζευξη (συμβολικὰ $\vee$, προφορικὰ «εἴτε»), τῶν ἰδιοτήτων** «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12», «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» καὶ τὴ συμβολίζομε:«Εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\vee$ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» (καὶ πιὸ ἁπλὰ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» εἴτε «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»).

Κανένα ἄλλο ἀντικείμενο ἐκτὸς ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \cup B$ δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα αὐτή.

Ἑπομένως μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε μὲ περιγραφὴ τὸ σύνολο $A \cup B$ ὡς ἑξῆς: $A \cup B = \{\chi /$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» εἴτε «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$ ἢ $A \cup B = \{\chi /$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\vee$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$.

Γενικὰ **ἂν ἕνα ἀντικείμενο ἔχει μιὰ τουλάχιστο ἀπὸ δύο ἰδιότητες, λέμε ὅτι ἔχει σὰν ἰδιότητα τὴ διάζευξή τους.**

Συμβολικά: $\chi : p(\chi)$ ἢ $\chi : q(\chi) \Rightarrow \chi : p(\chi) \vee q(\chi)$.

Συνεπῶς: **῎Αν δύο σύνολα περιγράφονται (ἀντιστοίχως) ἀπὸ τὶς ἰδιότητες p( ) καὶ q( ), ἡ ἕνωση τῶν συνόλων αὐτῶν περιγράφεται ἀπὸ τὴ διάζευξή τους.**

$$A = \{\chi / \chi : p(\chi)\},\ B = \{\chi / \chi : q(\chi)\} \Rightarrow A \cup B = \{\chi / \chi : p(\chi) \vee q(\chi)\}.$$

2) Ὁρίζομε μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο του εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ 12 καὶ τοῦ 18.

Τὴ σύνθετη αὐτὴ ἰδιότητα τὴ λέμε **σύζευξη τῶν ἰδιοτήτων** «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12», «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18», καὶ τὴ συμβολίζομε «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» καὶ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» ἢ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\wedge$ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18». ᾿Επειδὴ κανένας ἄλλος ἀριθμὸς ἐκτὸς ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \cap B$ δὲν ἔχει αὐτὴ τὴν ἰδιότητα, ὁρίζομε μὲ περιγραφὴ τὴν τομὴ τῶν συνόλων A καὶ B ὡς ἑξῆς:

$A \cap B = \{\chi /$«χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\wedge$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$.

Γενικά:

῎Αν ἕνα ἀντικείμενο ἔχει δύο ἰδιότητες, θὰ λέμε ὅτι ἔχει σὰν ἰδιότητα καὶ τὴ σύζευξή τους. (Ἡ σύζευξη συμβολίζεται μὲ $\wedge$ καὶ διαβάζεται «καί»).

῎Αν δύο σύνολα περιγράφονται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο ἰδιότητες, ἡ τομή τους περιγράφεται ἀπὸ τὴν σύζευξη τῶν ἰδιοτήτων.

$$A = \{\chi / \chi : p(\chi)\},\ B = \{\chi / \chi : q(\chi)\} \Rightarrow A \cap B = \{\chi / \chi : p(\chi) \wedge q(\chi)\}.$$

Εὔκολα ἐπαληθεύομε μὲ παραδείγματα τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῆς ἑνώσεως καὶ τῆς τομῆς.

Τὸ μονότιμο

Τὴ μεταθετικὴ	$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$
Τὴν προσεταιριστικὴ	$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$
	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
Τοῦ οὐδετέρου	$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap U = A$
Τὴν ἐπιμεριστικὴ	$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Ἀσκήσεις:

18. Ποιὰ εἶναι ἡ διάζευξη τῶν ἰδιοτήτων «εἶναι ἄρτιος», «εἶναι περιττός»;

19. Ποιὰ εἶναι ἡ σύζευξη τῶν ἰδιοτήτων $\chi > 5$, $\chi < 13$;

20. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο $\{\chi/\chi$: «χ εἶναι ἄρτιος» $\wedge$ «χ εἶναι περιττός»$\}$;

21. Νὰ ὁρισθοῦν μὲ περιγραφὴ καὶ ἀναγραφὴ ἡ ἕνωση καὶ ἡ τομὴ τῶν συνόλων $\Delta_1 = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$, $\Delta_2 = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 54»$\}$.

22. Ποιὰ εἶναι ἡ ἕνωση τῶν τριῶν συνόλων $A = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 32» $\wedge$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 40»$\}$, $B = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 40»$\}$ καὶ $\Gamma = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 40+32»$\}$.

23. Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο $A = \{\chi/\chi$:«$\chi \in Q_0^+$» $\wedge$ «$\chi+1 = 5$»$\}$, $B = \{\chi$:«$\chi \in Q_0^+$» $\wedge$ «$\chi-3 = 7$»$\}$.

24. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις $(A \cup B) \cap (\Gamma \cup B)$, $(A \cup B \cup \Gamma) \cap \Delta$.

5. ΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ — ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΩΝ — ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

§ 14. Ἂν θεωρήσουμε τὸ σύνολο $A = \{\chi/\chi$ διαιρέτης τοῦ 6$\}$ καὶ τὸ σύνολο $B = \{\chi/\chi$ διαιρέτης τοῦ 12$\}$, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι $A \subseteq B$.

Πράγματι $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ καὶ $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Τὸ σύνολο $\{4, 12\}$ ἢ $\{\chi/\chi$«χ διαιρέτης τοῦ 12» $\wedge$ «χ δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 6»$\}$ λέγεται συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς τὸ ὑπερσύνολό του B καὶ συμβολίζεται A_B^c ἢ A'_B. Ὥστε:

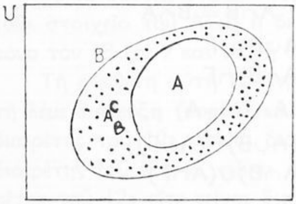
Συμπλήρωμα ἑνὸς συνόλου A, ὡς πρὸς ἕνα ὑπερσύνολό του B, εἶναι τὸ σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ B, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὸ A.

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ συμπλήρωμα τοῦ A ἀνήκουν τὰ στοιχεῖα τοῦ B, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὴ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ A.

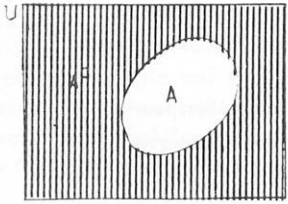
Τὸ B_B^c εἶναι τὸ $\varnothing$, Τὸ $\varnothing_B^c$ εἶναι τὸ B.

Ὅταν λέμε ἁπλῶς συμπλήρωμα τοῦ A (συμβολικὰ A^c), ἐννοοῦμε τὸ συμπλήρωμά του ὡς πρὸς τὸ βασικὸ σύνολο U (ὑπερσύνολο ὅλων τῶν θεωρούμενων συνόλων).

Τὸ βέννιο διάγραμμα τοῦ A_B^c τὸ βλέπομε στὸ σχῆμα 8 καὶ τὸ διάγραμμα τοῦ A^c στὸ σχῆμα 9.



σχ. 8.



σχ. 9.

§ **15**. Θεωροῦμε τὰ σύνολα $B = \{α, β, γ, δ, ε\}$, $A = \{β, δ, ε\}$ καὶ $A_B^c = \{α, γ\}$. Ἡ τομὴ τῶν A καὶ A_B^c εἶναι τὸ κενὸ σύνολο, ἢ μὲ ἄλλα λόγια τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ξένα μεταξύ τους.

Ἡ ἕνωσή τους εἶναι τὸ B. Λέμε ὅτι τὰ σύνολα A καὶ A_B^c ἀποτελοῦν ἕνα **διαμερισμὸ** τοῦ συνόλου B. Ὁμοίως λέμε ὅτι τὰ σύνολα $\{α, γ\}$, $\{β, ε\}$ καὶ $\{δ\}$ ἀποτελοῦν ἕνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου B, γιατὶ εἶναι διαφορετικὰ ἀπὸ τὸ κενὸ σύνολο, εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνὰ δύο καὶ ἡ ἕνωσή τους εἶναι τὸ B. Μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ B διαμερίζεται στὰ σύνολα αὐτά.

Τὰ σύνολα A_1, A_2, A_3, ... εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου A, ὅταν κανένα ἀπὸ αὐτὰ δὲν εἶναι κενό, εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνὰ δύο καὶ ἡ ἕνωση ὅλων εἶναι τὸ A.

§ **16**. Νὰ διαμερισθεῖ τὸ σύνολο:

$$K = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{3}, \frac{3}{6}, \frac{6}{10}, \frac{7}{14}, \frac{12}{20} \right\}$$

σὲ σύνολα, ποὺ καθένα νὰ περιέχει **ἴσους** ρητοὺς ἀριθμούς. Μὲ βάση τὴ σχέση ἰσότητας τῶν κλασμάτων διαμερίζομε τὸ K στὰ σύνολα.

$$K_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{3}{3} \right\}, \quad K_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{7}{14} \right\}, \quad K_3 = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20} \right\}.$$

Τὰ στοιχεῖα καθενὸς ἀπὸ τὰ K_1, K_2, K_3 ἀντιπροσωπεύουν τὸν ἴδιο ρητὸ ἀριθμό. Τὰ στοιχεῖα τοῦ K_1 τὸν ρητὸ $\frac{1}{1}$, τοῦ K_2 τὸν ρητὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ K_3 τὸν $\frac{3}{5}$.

Τὰ σύνολα K_1, K_2, K_3 λέγονται **κλάσεις ἰσοδυναμίας.**

Γενικὰ ἡ σχέση τῆς ἰσότητας τῶν κλασμάτων διαμερίζει τὸ σύνολο ὅλων τῶν κλασμάτων σὲ κλάσεις ἰσοδυναμίας. Κάθε κλάση παριστάνει ἢ ἀντιπροσωπεύει ἕναν ρητὸ ἀριθμό.

Ἂν ἕνα σύνολο A διαμερίζεται σὲ ἄλλα σύνολα A_1, A_2, A_3, ... ἔτσι, ὥστε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ A_1 νὰ ἀντιπροσωπεύουν ἕνα ἀντικείμενο, ὅλα τὰ

στοιχεῖα τοῦ A_2 ἕνα ἄλλο ἀντικείμενο κ.ο.κ., τὰ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ λέγονται κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Ἡ σχέση, μὲ βάση τὴν ὁποία γίνεται ὁ διαμερισμὸς αὐτός, λέγεται **σχέση ἰσοδυναμίας** καὶ ἔχει τὶς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας.

Ἀσκήσεις:

25. Νὰ βρεθεῖ τὸ A_N^C ὅπου $A = \{\chi/\chi$ φυσικὸς ἀριθμὸς $\wedge \chi > 6\}$.

26. Ἂν $A = \{\chi/«\chi \in Q_0^+» \wedge \chi > 3\}$ καὶ $B = \{\chi/«\chi \in Q_0^+» \wedge \chi < 11\}$, νὰ βρεθοῦν τὰ σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A_{Q_0^+}^C$ καὶ ἡ τομὴ τῶν συμπληρωμάτων τῶν A καὶ B ὡς πρὸς Q_0^+.

27. Νὰ ἐκτελεσθεῖ ἡ πράξη $(A \cup A^C) \cap A$.

28. Ἂν $A = \{\chi/\chi$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $60\}$, $B = \{\chi/\chi$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $12\}$ καὶ $\Gamma = \{\chi|\chi$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $15\}$, νὰ βρεῖτε τὰ συμληρώματα τῶν B καὶ Γ ὡς πρὸς A.

29. Νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ τὰ σύνολα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως ὅτι τὸ συμπλήρωμα τῆς ἑνώσεως τῶν B καὶ Γ ἰσοῦται μὲ τὴν τομὴ τῶν συμπληρωμάτων τῶν συνόλων αὐτῶν (ὡς πρὸς τὸ ὑπερσύνολό τους A). Ἐπίσης ὅτι τὸ συμπλήρωμα τῆς τομῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ἕνωση τῶν συμπληρωμάτων. Συμβολικά:

$$(B \cup \Gamma)_A^C = (B_A^C) \cap (\Gamma_A^C) \text{ καὶ } (B_A^C) \cup (\Gamma_A^C) = (B \cap \Gamma)_A^C.$$

30. Νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ παραδείγματα, ὅτι τὸ σύνολο, ποὺ περιγράφεται μὲ τὴ σύζευξη δύο ἰδιοτήτων, εἶναι ὑποσύνολο ἐκείνου, ποὺ περιγράφεται μὲ μία ἀπ' αὐτές.

31. Διαμερίστε τὸ σύνολο $A = \{2, 5, 9, 6\}$ σὲ μονομελῆ σύνολα.

32. Νὰ διαμερισθεῖ τὸ σύνολο $A = \{\chi/\chi$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $4\}$ σὲ διμελῆ σύνολα.

33. α) Νὰ κάνετε ἕνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου τῶν πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μὲ βάση τὴ σχέση «εἶναι παράλληλος». β) Κάνετε ἕνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων σὲ τρία ὑποσύνολα.

34. Νὰ διαμερίσετε τὸ σύνολο $A = \{2, 5, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$ σὲ κλάσεις ἰσοδυναμίας μὲ βάση τὴ σχέση: οἱ ἀριθμοὶ κάθε κλάσεως ἀφήνουν τὸ ἴδιο ὑπόλοιπο, ἂν διαιρεθοῦν διὰ 3.

35. Σὲ πόσες κλάσεις ἰσοδυναμίας διαμερίζεται τὸ σύνολο N μὲ βάση τὴ σχέση: ὑπόλοιπο διαιρέσεως τοῦ α διὰ 5 = ὑπόλοιπο διαιρέσεως τοῦ β διὰ 5;

36. Σχηματίστε τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν διαγωνίων τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ ἔτσι, ὥστε σ' ἕνα ὑποσύνολο ν' ἀνήκουν οἱ διαγώνιοι, οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀπὸ τὴν ἴδια κορυφή. Ἀποτελοῦν διαμερισμὸ αὐτὰ τὰ ὑποσύνολα;

6. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ

§ **17.** Ὅταν —κατὰ τὴν μελέτη τῆς ἀντιστοιχίας— ἀντιστοιχίσαμε στὸ στοιχεῖο α τὸ στοιχεῖο β, χρησιμοποιήσαμε τὸ συμβολισμό: (α, β). Αὐτὸ εἶναι ἕνα διμελὲς σύνολο, στὸ ὁποῖο τὸ ἕνα μέλος προηγεῖται ἀπὸ τὸ ἄλλο (δηλαδὴ ἔχει σημασία ἡ τάξη τῶν στοιχείων του). Τὸ (α, β) λέγεται **διατεταγμένο ζεῦγος** ἢ **διατεταγμένο (διμελὲς) σύνολο.** Ἐπειδὴ μποροῦμε στὸ α νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὸ α, θεωροῦμε καὶ τὸ (α, α) διατεταγμένο ζεῦγος.

Πρόβλημα. *Νὰ γράψετε τὸ σύνολο {2, 3, 1, 5, 4} ἔτσι, ὥστε νὰ προηγεῖται ὁ μικρότερος ἀριθμός.*

Γράφομε τότε (1, 2, 3, 4, 5). Τὸ (1, 2, 3, 4, 5) εἶναι ἕνα **διατεταγμένο σύνολο.** (Γιὰ τὴν παράστασή του χρησιμοποιήσαμε παρενθέσεις ἀντὶ γιὰ ἄγκιστρα).

Ἕνα σύνολο εἶναι διατεταγμένο, ὅταν μεταξὺ δύο στοιχείων του ἔχει ὁρισθεῖ ποιὸ προηγεῖται.

Μεταξὺ δύο στοιχείων τοῦ (1, 2, 3, 4, 5), π.χ. τῶν 3 καὶ 2, ἰσχύει ἡ σχέση: $2<3$. Σχηματίζομε τότε τὸ ζεῦγος (2, 3). Γιὰ τὸ ζεῦγος (4, 4) ἰσχύει $4=4$.

Γενικὰ γιὰ δύο στοιχεῖα του α καὶ β μποροῦμε νὰ γράψουμε $\alpha \leqslant \beta$ ἢ $\beta \leqslant \alpha$.

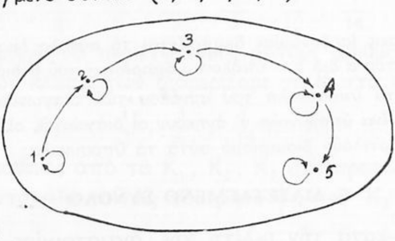
Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὸ διατεταγμένο σύνολο (1, 2, 3, 4, 5), εἶναι τὸ σύνολο {2, 3, 1, 5, 4} ἐφοδιασμένο μὲ τὴ διάταξη (ἢ τὴ σχέση διατάξεως)$\leqslant$. Τὴ διάταξη αὐτὴ τὴν ὀνομάζομε διάταξη κατὰ μέγεθος.

Παρατηροῦμε ὅτι ὁποιοδήποτε διμελὲς ὑποσύνολο τοῦ {2, 3, 1, 5, 4} μπορεῖ νὰ διαταχθεῖ μὲ τὴ διάταξη $\leqslant$. Τὸ {2, 3}: $2\leqslant 3$. Τὸ {5, 4}: $4\leqslant 5$ κ.ο.κ. Γι' αὐτὸ ἡ διάταξη $\leqslant$ λέγεται **ὁλικὴ διάταξη** καὶ τὸ (1, 2, 3, 4, 5,) **ὁλικῶς διατεταγμένο σύνολο.**

Γραφικῶς παριστάνομε τὴ διάταξη: $\alpha<\beta$ ὡς ἑξῆς: $\alpha \frown \beta$. Δηλαδὴ μὲ γραμμὴ ποὺ κετευθύνεται ἀπὸ τὸ α πρὸς τὸ β.

Τὴν περίπτωση $\alpha=\alpha$ τὴν παριστάνομε μὲ $\alpha\circlearrowright$, δηλαδὴ μὲ μιὰ θηλειά, ποὺ ἐπιστρέφει στὸ α.

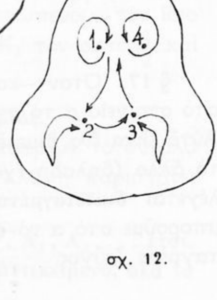
Στὸ σχῆμα 10 ἔχομε γραφικὴ παράσταση (διάγραμμα) τῆς διατάξεως στὸ διατεταγμένο σύνολο (1, 2, 3, 4, 5).



σχ. 10.

Μερικὲς φορὲς μᾶς δίνεται ἡ εὐκαιρία νὰ κάνουμε καὶ διασκεδαστικὰ διαγράμματα διατεταγμένων συνόλων, ὅπως στὰ σχήματα 11 καὶ 12 γιὰ τὸ (1,2,3,4).

σχ. 11.



σχ. 12.

§ **18**. Τὴ σχέση ὁ α διαιρεῖ τὸν β τὴ συμβολίζομε προσωρινὰ μὲ α/β. Ἂν ἐφοδιάσουμε τὸ σύνολο {2, 3, 4, 6, 9} μὲ τὴ διάταξη αὐτή, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι μερικὰ ἀπὸ τὰ διμελῆ ὑποσύνολά του δὲν διατάσσονται.

Γράφομε 2/4 (ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 4), 2/2, 4/4 κ.ο.κ, ἀλλὰ δὲν μποροῦμε νὰ γράψουμε: 2/3 (ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 3), 6/9.

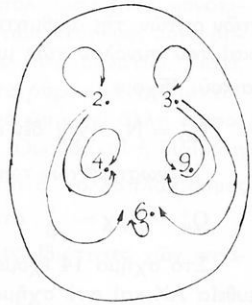
Τὸ σύνολο {2, 3, 4, 6, 9} ἐφοδιασμένο μὲ τὴ διάταξη / λέγεται **μερικῶς διατεταγμένο σύνολο** καὶ ἡ σχέση «διαιρεῖ τὸν . . .» λέγεται **μερικὴ διάταξη**.

Ἂν τὴ διάταξη: τό α προηγεῖται ἀπὸ τὸ β ἢ ταυτίζεται μὲ τὸ β, τὴ συμβολίσουμε μὲ $\alpha \leqslant \beta$ καὶ τήν: τὸ β ἀκολουθεῖ τὸ α (ἢ ταυτίζεται μὲ τὸ α) μὲ $\beta \geqslant \alpha$, ἐπαληθεύομε εὔκολα ἀπὸ τὰ παραδείγματά μας ὅτι οἱ ἰδιότητες τῆς διατάξεως εἶναι οἱ ἑξῆς:

$\alpha \leqslant \alpha$ ἀνακλαστικὴ

$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ ἀντισυμμετρικὴ καὶ

$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$ μεταβατική.



σχ. 13.

Ἀσκήσεις:

37. Νὰ διατάξετε τὸ σύνολο $\{3^5, 3^2, 3^1, 3^0, 3^3, 3^4\}$, ὥστε νὰ προηγεῖται ἡ δύναμη μὲ τὸ μικρότερο ἐκθέτη.

38. Κάνετε τὸ ἴδιο καὶ στὸ σύνολο $\{3^2, 5^1, 10^0, 2^3\}$. Αὐτὴ ἡ διάταξη εἶναι διάταξη κατὰ μέγεθος;

39. Νὰ διατάξετε τὸ σύνολο {4, 8, 9, 3, 12, 16, 18} ἔτσι, ὥστε μεταξὺ δύο στοιχείων του νὰ προηγεῖται ἐκεῖνο ποὺ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἄλλου. Θὰ εἶναι τότε τὸ σύνολο ὁλικῶς διατεταγμένο; Νὰ γίνει τὸ διάγραμμα τῆς διατάξεως.

40. Εἶναι ὁλικῶς διατεταγμένο τὸ N μὲ διάταξη κατὰ μέγεθος; Γιατί;

41. Ἐξηγῆστε γιατί εἶναι ὁλικῶς διατεταγμένο τὸ σύνολο τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς μὲ διάταξη κατὰ μέγεθος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

Α΄. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q_0^+ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ (ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ).

§ 19. Μάθαμε στὴν Α΄ τάξη γιὰ τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, τὶς πράξεις τους καὶ τὶς ἰδιότητες τῶν πράξεων.

Παρακάτω θὰ ἐπαναλάβουμε μερικοὺς γνωστοὺς κανόνες γιὰ τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς καὶ γιὰ τὶς πράξεις τους.

Τὸ σύνολο $Q_0^+ = \{0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{4}, \ldots\ 1, \ldots, 2, \ldots, 2\frac{1}{2}, \ldots\}$

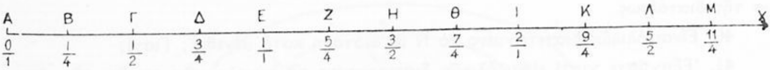
τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ἡ ἕνωση τοῦ συνόλου N_0 τῶν ἀκεραίων καὶ τοῦ συνόλου τῶν μὴ ἀκέραιων πηλίκων ἑνὸς ἀκεραίου διὰ ἑνὸς φυσικοῦ. Ἔχομε:

$Q_0^+ = N_0 \cup \{\chi/\chi$ δὲν εἶναι ἀκέραιο πηλίκο ἑνὸς ἀκερ. διὰ ἑνὸς φυσικοῦ$\}$.

Ἡ ἕνωση αὐτῶν τῶν δύο συνόλων δίνει περιγραφικὰ τὸ Q_0^+, ὡς ἑξῆς:

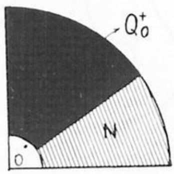
$Q_0^+ = \{\chi/\chi = \frac{\alpha}{\beta}$ ὅταν $\alpha \in N_0$, $\beta \in N$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀνάγωγο$\}$.

Στὸ σχῆμα 14 ἔχομε τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν ρητῶν στὴν ἡμιευθεία ΑΧ καὶ στὸ σχῆμα 15 τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Q_0^+.



σχ. 14.

§ 20. Ἂν δοθοῦν δύο ρητοὶ α καὶ β, τότε ὑπάρχει πάντοτε ὁ ρητὸς α+β. Δηλαδὴ μποροῦμε νὰ ἐκτελέσουμε τὴν πράξη τῆς προσθέσεως στὸ σύνολο τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς καὶ νὰ βροῦμε σὰν ἄθροισμά τους ἕναν ρητό. Αὐτὸ ὅμως δὲν συμβαίνει



σχ. 15.

στὴν πράξη τῆς ἀφαιρέσεως. Ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ ὑπάρχει, ἂν $\alpha \geqslant \beta$. Ἑπομένως δὲν μποροῦμε νὰ ἐκτελέσουμε πάντοτε τὴν πράξη τῆς ἀφαιρέσεως, ἢ λέμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ στὸ σύνολο τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁ ρητὸς γ, τότε, ὅπως εἶναι γνωστό, ἔχομε: $\alpha-\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha=\beta+\gamma \Leftrightarrow \alpha-\gamma=\beta$. Ἐπίσης ἂν γ, δ εἶναι ρητοί, ὑπάρχει πάντοτε ὁ ρητὸς $\gamma\cdot\delta$ καὶ ἂν $\gamma\neq 0$, ὑπάρχει ὁ ρητὸς $\frac{1}{\gamma}$ (ἀντίστροφος τοῦ γ) καὶ ἔχομε $\delta:\gamma=\delta\cdot\frac{1}{\gamma}$.

§ **21**. Τὸ μηδὲν «0» εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως: $0+\alpha=\alpha$, σὰν παράγοντας μηδενίζει τὸ γινόμενο: $0\cdot\alpha=0$ καὶ δὲν θεωρεῖται ποτὲ σὰν διαιρέτης. Ἡ μονάδα «1» εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ: $1\cdot\alpha=\alpha$.

§ **22**. Οἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολ/σμοῦ εἶναι μονότιμες. Δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενο δύο ρητῶν εἶναι ἕνας μόνο ρητός. (Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὴν ἀφαίρεση, ἂν εἶναι δυνατή). Γιατί, ἀφοῦ ἡ διαφορὰ 18—5 ἢ 13 εἶναι τέτοια, ὥστε τὸ ἄθροισμά της μὲ τὸν ἀφαιρετέο 5 νὰ δίνει τὸν μειωτέο 18, δὲν μπορεῖ νὰ ὑπάρχει ἄλλη διαφορά, γιὰ τὸν λόγο ὅτι ἡ πρόσθεση εἶναι μονότιμη. Ὁμοίως καὶ ἡ διαίρεση $\alpha:\beta$ $(\beta\neq 0)$ εἶναι μονότιμη, γιατί $\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$ καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ρητῶν εἶναι πράξη μονότιμη).

Ὁ παρακάτω πίνακας περιέχει τὶς κυριότερες ἰδιότητες τῶν πράξεων συμβολικά.

Οἱ $\alpha,\beta,\gamma\in Q_0^+$		
Πράξεις	Πρόσθεση	Πολ/μός
Ὕπαρξη ἀθροίσμ. καὶ γινομένου	$(\alpha+\beta)\in Q_0^+$	$(\alpha\cdot\beta)\in Q_0^+$
Ἀντιμεταθ. ἰδιότητα	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
προσεταιρ. ἰδιότητα	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
Ἐπιμεριστ. ἰδιότητα	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$	

Ἀσκήσεις:

42. α) Ἁπλοποιῆστε τὰ κλάσματα:

$$\frac{24}{27},\ \frac{15}{14},\ \frac{55}{30},\ \frac{12}{30},\ \frac{35}{35},\ \frac{42}{21},\ \frac{11}{33},\ \frac{9}{18}$$

β) Κάνετε τὶς παρακάτω πράξεις:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}, \quad \frac{7}{6}+\frac{8}{9}, \quad \frac{13}{4}-\frac{5}{16}, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}, \quad \frac{7}{3}\cdot\frac{9}{14}, \quad \frac{11}{8}\cdot\frac{0}{4},$$

$$\frac{12}{13}:\frac{4}{13}. \quad \frac{15}{16}:\frac{1}{4}$$

43. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω προτάσεις εἶναι σωστές, ποιὲς λαθεμένες καὶ γιατί;

α) $(17:15{,}2) \in Q_0^+$, β) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}-\frac{5}{8}$, γ) $200:40 = 40:200$,

δ) $205\cdot\left(\frac{1}{3}+19\right)=205\cdot\left(19+\frac{1}{3}\right)$, ε) $(97-98)\in N_o$,

στ) $\frac{3}{4}+8=\left(\frac{3}{4}+8\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$

ζ) $\left(\frac{7}{13}+\frac{3}{7}\right)+1=\frac{7}{13}+\left(\frac{3}{7}+1\right)$, η) $\left(15\frac{1}{2}-\frac{31}{2}\right)\in Q_0^+$

θ) $0{,}5\cdot\left(7\cdot\frac{1}{3}\right)=\left(0{,}5\cdot 7\right)\cdot\frac{1}{3}$

44. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ παρακάτω πράξεις:

α) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right):2\frac{2}{3}+\left(4\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right):\frac{2}{5}$,

β) $\left[\left(\frac{3}{16}+\frac{2}{8}+\frac{3}{4}\right):\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{4}\right]\cdot 10\frac{2}{7}$,

γ) $2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right)$,

δ) $\left(5\frac{7}{26}-1\frac{4}{39}\right):\left(6\frac{2}{9}-4\frac{5}{6}\right)$

2. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ

§ **23**. Θὰ προσπαθήσουμε νὰ ἐπιλύσουμε τὰ παρακάτω προβλήματα.

α) Στὴν πόλη Α ἡ θερμοκρασία τὸ μεσημέρι ἦταν 10 βαθμοὶ πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν. Τὸ βράδυ ἡ θερμοκρασία εἶχε κατεβεῖ κατὰ 7 βαθμούς. Ποιὰ ἦταν ἡ θερμοκρασία τὸ βράδυ;

Ἔχομε: 10 βαθμ. − 7 βαθμ. = 3 βαθμ. πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ἄρα ἡ θερμοκρασία τὸ βράδυ στὴν πόλη Α ἦταν 3 βαθμοὶ πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν.

β) Ἡ θερμοκρασία τὸ μεσημέρι στὴν πόλη Β ἦταν 6 βαθμοὶ πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν. Τὸ βράδυ ἡ θερμοκρασία εἶχε κατεβεῖ κατὰ 8 βαθμούς. Ποιὰ ἦταν ἡ θερμοκρασία στὴν πόλη Β τὸ βράδυ;

Ἂν ὀνομάσουμε χ βαθμοὺς τὴ θερμοκρασία τὸ βράδυ στὴν πόλη Β, τότε σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα ἔχομε νὰ ἐκτελέσουμε τὴν ἀφαίρεση 6 βαθμοὶ $-$ 8 βαθμοὶ ἢ νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἐξίσωση $6-8=\chi$.

Ἡ ἀφαίρεση αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατὴ στὸ σύνολο Q_0^+ τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς. Ἑπομένως καὶ ἡ παραπάνω ἐξίσωση δὲν ἔχει λύση στὸ σύνολο αὐτό.

Ὅμως τὸ πρόβλημα ἔχει λύση καὶ ὁ καθένας μπορεῖ νὰ ἀπαντήσει ὅτι ἡ θερμοκρασία τὸ βράδυ στὴν πόλη Β ἦταν 2 βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ἔχομε λοιπόν: 6 βαθμοὶ $-$ 8 βαθμοὶ $=$ 2 βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν.

$$6 \quad -8 \quad = \chi$$

Γιὰ νὰ ἐκφράσουμε τὴ διαφορὰ αὐτή, πρέπει νὰ δημιουργήσουμε νέους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ δίνουν λύση σὲ προβλήματα ὅπως τὸ παραπάνω.

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ νέος ἀριθμὸς χ, ὁ ὁποῖος θὰ ἀντιπροσωπεύει τὴν ἔκφραση «δύο βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν», πρέπει νὰ ὁρισθεῖ μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ μὲ τὸν 8 νὰ ἰσοῦται μὲ 6, γιὰ νὰ διατηρεῖται ἡ γνωστή μας ἰσοδυναμία: $6-8=\chi \Leftrightarrow 6=8+\chi$

Ἀλλὰ τότε ἔχομε:

$$6=8+\chi \Leftrightarrow 6=\underbrace{(6+2)}_{8}+\chi \Leftrightarrow 6=6+\underbrace{(2+\chi)}_{0}.$$

Ἐπειδὴ $6=6+0$, πρέπει ὁ 2 καὶ ὁ χ νὰ ἔχουν ἄθροισμα μηδέν. Δηλαδὴ $2+\chi=0$. Ὁ νέος ἀριθμὸς χ συμβολίζεται μὲ -2 καὶ διαβάζεται **ἀρνητικὸς** δύο ἢ **πλὴν δύο.**

Ὥστε ἡ θερμοκρασία «δύο βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν» παριστάνεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ -2 βαθμοί.

Ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς 2 (-2) λέγεται **ἀντίθετος** τοῦ 2 καὶ εἴδαμε ὅτι $2+(-2)=0$. Ὁμοίως ἔχομε $(-2)+2=0$, γιατί, ὅταν τὸ θερμόμετρο δείχνει -2 βαθμοὺς (2 βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδὲν) καὶ ἀνεβεῖ κατὰ 2 βαθμούς, θὰ δείχνει τὴ θερμοκρασία 0 βαθμ.

Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα δύο ἀντίθετων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν. Ἡ ἐξίσωση $2+\chi=0$, γιὰ τὴν ὁποία ἔχομε τώρα τὴ λύση -2, ἐκφράζει καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸ 2, γιὰ νὰ ἔχουμε ἄθροισμα μηδέν;

Ἀνάλογα προβλήματα ἐκφράζουν καὶ οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

$$1+\psi=0 \quad ἢ \quad \psi+1=0\,, \quad \frac{1}{2}+\varphi=0 \quad ἢ \quad \varphi+\frac{1}{2}=0$$

$$3+z=0 \quad ἢ \quad z+3=0\,, \quad \frac{3}{4}+\tau=0 \quad ἢ \quad \tau+\frac{3}{4}=0$$

$$\omega+4=0 \quad ἢ \quad 4+\omega=0$$

Οἱ ἀντίθετοι τῶν $1, 3, 4, \frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$ παριστάνονται ἀντιστοίχως μὲ $-1, -3, -4, -\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{3}{4}$ καὶ ἔχομε: $1+(-1)=0,\ 3+(-3)=0,$ $(-4)+4=0,\ \frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=0$ καὶ $\frac{3}{4}+(-\frac{3}{4})=0.$

Οἱ ἀριθμοὶ $-1, -2, -3, -4, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$ κ.λ.π. δὲν ἀνήκουν στὸ σύνολο Q_0^+ τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς. Γι' αὐτὸ ὁρίζομε τὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, τὸ ὁποῖο ἔχει στοιχεῖα τοὺς ἀριθμοὺς $-1, -2, -3, -\frac{1}{2},$ $-\frac{3}{4}$, καὶ γενικῶς τὸν ἀριθμὸ $-\alpha$ ὅπου $\alpha \in Q_0^+$.

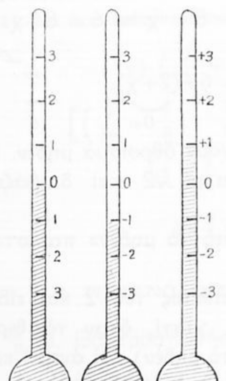
Τὸ σύνολο αὐτὸ τὸ συμβολίζομε μὲ τὸ Q^- καὶ ἔχει τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Q^+, μπροστὰ ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχομε θέσει τὸ πρόσημο πλὴν (—). Δηλαδὴ τὰ ἀντίθετα τῶν στοιχείων τοῦ Q^+.

Στοιχεῖα τοῦ Q^+: $1, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{4}, \ldots, 2, \ldots, 2\frac{1}{2}, \ldots 3, \ldots$

Στοιχεῖα τοῦ Q^-: $-1, \ldots, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{3}{4}, \ldots, -2, \ldots, -2\frac{1}{2}, \ldots, -3, \ldots$

§ **24**. Παρατηροῦμε στὸ θερμόμετρο (σχ. 16) ὅτι τὸ ἄκρο τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης περνᾶ μπροστὰ ἀπὸ τοὺς νέους ἀριθμοὺς $-1,$ $-2,\ -3$, κ.λ.π., ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μηδὲν ἐλαττώνεται. (Αὐτὸ δικαιολογεῖ γιὰ ποιὸ λόγο διαλέξαμε τὸ πρόσημο πλὴν «—», γιὰ νὰ παραστήσουμε τοὺς νέους ἀριθμούς).

Γιὰ νὰ περάσει ὅμως τὸ ἄκρο τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης μπροστὰ ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν, πρέπει ἡ θερμοκρασία, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μηδέν, νὰ αὐξάνει. Γι' αὐτὸν τὸ λόγο γιὰ τὴν παράσταση τῶν γνωστῶν μας ἀριθμῶν τοῦ Q^+ θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ πρόσημο σὺν «+».



σχ. 16.

Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ἐκφράζομε τὴ λύση τοῦ πρώτου προβλήματος ὡς ἑξῆς: «Ἡ θερμοκρασία τὸ βράδυ θὰ εἶναι $+3$ βαθμοί».

Στὸ σύνολο Q^+ ἀνήκουν τώρα οἱ ἀριθμοὶ $+1,\ +\frac{1}{2},\ +2$ κ.λ.π., τοὺς ὁποίους ὀνομάζομε θετικοὺς ρητοὺς καὶ τὸ σύνολο Q^+ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν.

Ἔχομε τώρα:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\text{Στοιχεῖα τοῦ συνόλου } Q^+: & +1, & \ldots, & +\frac{1}{2}, & \ldots, & +2, & \ldots, & +\frac{5}{2}, & \ldots, & +3, & \ldots \\
& \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\text{Στοιχεῖα τοῦ συνόλου } Q^-: & -1, & \ldots, & -\frac{1}{2}, & \ldots, & -2, & \ldots, & -\frac{5}{2}, & \ldots, & -3, & \ldots
\end{array}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν ἀπὸ τὸν ὁρισμό τους ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρὸς ἕνα στὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Q^+.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Q^- λέγονται ἀντίθετα (ἢ συμμετρικὰ) τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ Q^+ ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ Q^+ λέγονται ἀντίθετα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ Q^-.

Π.χ. Ὁ ἀντίθετος τοῦ $+\frac{5}{2}$ εἶναι ὁ $-\frac{5}{2}$ καὶ ὁ ἀντίθετος τοῦ $-\frac{5}{2}$ εἶναι ὁ $+\frac{5}{2}$ Αὐτοὶ ἔχουν ἄθροισμα μηδὲν

$$\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)=0 \text{ ἢ } \left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)=0.$$

Ὁ μηδὲν δὲν ἀνήκει στὸ Q^+ οὔτε στὸ Q^- καὶ συνεπῶς δὲν ἔχει πρόσημο. (Δὲν γράφομε $+0$ ἢ -0)

Ἀντίθετος ὅμως τοῦ μηδενὸς εἶναι ὁ μηδέν, διότι $0+0=0$.

§ **25** Ἂν συνοψίσουμε τὰ παραπάνω, ἔχομε:

1) Τὸ γνωστό μας σύνολο Q^+ (τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδὲν) τὸ ὀνομάσαμε σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν καὶ μπροστὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του θέσαμε τὸ πρόσημο σὺν «+»

Εἶναι:

Σύνολο θετικῶν ρητῶν $= Q^+ = \{\ldots, +\frac{1}{2}, \ldots, +1, \ldots +2, \ldots\}$.

Σημείωση: Στὰ ἑπόμενα ὁ θετικὸς ρητὸς θὰ γράφεται μὲ τὸ πρόσημό του ἢ χωρὶς αὐτὸ (π.χ. ὁ θετικὸς $\frac{1}{2}$ θὰ γράφεται $+\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{2}$). Τὸ πρόσημο σὺν θὰ τὸ θέτουμε στὸν θετικὸ ἀριθμό, ἂν θέλουμε νὰ δώσουμε μεγαλύτερη ἔμφαση στὴν ἔκφραση «θετικός».

Ὥστε: **Θετικὸς ρητὸς λέγεται κάθε ρητὸς τῆς ἀριθμητικῆς ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν.** Μπροστὰ ἀπ' αὐτὸν θέτομε τὸ πρόσημο σὺν «+» ἢ κανένα πρόσημο.

2) Ὁρίσαμε ἕνα νέο σύνολο, τὸ ὁποῖο ὀνομάσαμε σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, στὰ ὁποῖα ἐθέσαμε μπροστὰ τὸ πρόσημο πλὴν «−».

Ὥστε: **Ἀρνητικὸς ρητὸς λέγεται κάθε ἀντίθετος θετικοῦ ρητοῦ.** Συμβολικά: **κάθε ρητὸς τῆς ἀριθμητικῆς (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδὲν) ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ πρόσημο πλὴν «−»**.

Εἶναι: Σύνολο ἀρνητικῶν ρητῶν $= Q^- = \{\ldots, -\frac{1}{2}\ldots, -1, \ldots, -2, \ldots\}$.

3) Μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Q^+ καὶ Q^- ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα εἶναι αὐτὰ ποὺ ἔγιναν ἀπὸ τὸ ἴδιο στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς καὶ λέγονται ἀντίθετα στοιχεῖα.

Ὥστε: **Κάθε θετικὸς ρητὸς ἔχει ἕναν καὶ μόνο ἕναν ἀρνητικὸ ὡς ἀντίθετό του. Καὶ κάθε ἀρνητικὸς ἔχει ἕναν καὶ μόνο ἕναν θετικὸ ὡς ἀντίθετό του.**

Ἀσκήσεις:

45. Ἀπαντῆστε στὰ παρακάτω ἐρωτήματα:

α) Ἀνήκει ὁ μηδὲν στὸ σύνολο Q^+ ἢ στὸ Q^-;

β) Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀντίθετοι τῶν : $+\frac{35}{17}, -20, +\frac{17}{20}, -\frac{25}{2}, +16, 15, \frac{1}{2}$.

46. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ρητοὶ χ, ψ, z, ω, φ, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔχομε:

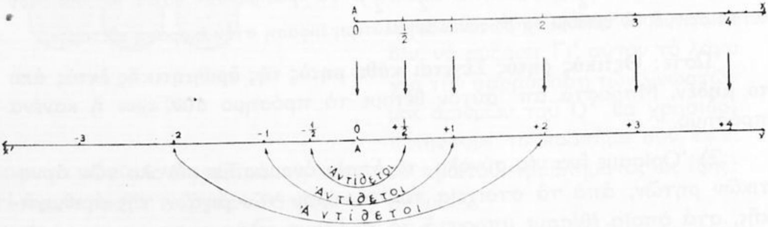
$$\chi + \frac{7}{8} = 0\ ,\ \frac{11}{3} + \psi = 0\ ,\ \frac{1}{5} + z = 0,\ \ \omega + 10{,}3 = 0,\ \ \varphi + 12 = 0;$$

47. Ποιοὶ εἶναι οἱ θετικοὶ ρητοὶ κ, λ, μ, ν, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔχομε:

$$-\frac{8}{9} + \kappa = 0\ ,\ \lambda + \left(-\frac{2}{7}\right) = 0\ ,\ \mu + (-100) = 0\ ,\ -\frac{35}{2} + \nu = 0;$$

48. Ποιὸν κανόνα ξέρετε γιὰ τοὺς ἀντίθετους ρητούς;

3. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q
ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



σχ. 17α καὶ 17β.

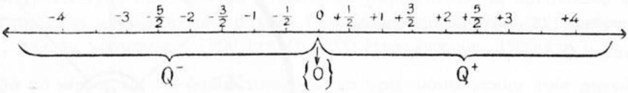
§ **26**. Τὸ σχῆμα 17α παριστάνει τὴν ἡμιευθεία ΑΧ, στὴν ὁποία ἔχουν τοποθετηθεῖ μὲ τὸν γνωστὸ τρόπο οἱ ρητοὶ τῆς ἀριθμητικῆς.

Στὸ σχῆμα 17β γίνεται ἐπέκταση τῆς ἡμιευθείας ΑΧ κατὰ τὴν ἀντικείμενή της ΑΧ΄ καὶ σχηματίζεται ἡ εὐθεία Χ΄ΑΧ. Οἱ ρητοὶ τῆς ἀριθμητικῆς (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν), οἱ ὁποῖοι εἶναι τοποθετημένοι στὴν ΑΧ, λέγονται τώρα θετικοὶ ρητοί.

Στὴν ἡμιευθεία ΑΧ΄ μποροῦν νὰ τοποθετηθοῦν (στὸ σχῆμα ἔχουν τοποθετηθεῖ) οἱ ἀντίθετοι τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, οἱ ἀρνητικοί, μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε κάθε ἀρνητικὸς νὰ τοποθετεῖται σ' ἕνα σημεῖο ἀριστερὰ τοῦ Α, τὸ ὁποῖο νὰ ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α ὅσο ἀπέχει κα. τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο ἔχει τοποθετηθεῖ ὁ ἀντίθετός του θετικός.

Ὥστε οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ τοποθετοῦνται στὴν Χ΄ΑΧ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο Α.

Μποροῦμε ἀπὸ αὐτὸ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι κάθε θετικὸς εἶναι δεξιὰ τοῦ μηδενὸς καὶ κάθε ἀρνητικὸς εἶναι ἀριστερὰ τοῦ μηδενός.



$$\underbrace{\{\cdots,-2,\cdots,-1,\cdots,-\frac{1}{2},\cdots\}\cup\{0\}\cup\{\cdots,+\frac{1}{2},\cdots,+1,\cdots,+2,\cdots\}}_{Q}$$

σχ. 17γ.

Στὸ σχῆμα 17γ ἔχομε τοποθετήσει σὲ μιὰ εὐθεία: α) Τὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, β) τὸ σύνολο τὸ ὁποῖο ἔχει στοιχεῖο μόνο τὸ μηδὲν καὶ γ) τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν.

Ἡ ἕνωση τῶν τριῶν αὐτῶν συνόλων δίνει ἕνα νέο σύνολο Q ($Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$), τὸ ὁποῖο λέγεται **σύνολο τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.**

Σημείωση α΄: Ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖο παραστήσαμε τοὺς ρητοὺς στὴν εὐθεία Χ΄ΑΧ σημαίνει ὅτι κάθε ρητὸς ἔχει τοποθετηθεῖ σ' ἕνα μόνο σημεῖο τῆς εὐθείας, χωρὶς αὐτὸ νὰ σημαίνει ὅτι σὲ κάθε σημεῖο της ἔχει τοποθετηθεῖ ἕνας ρητὸς πραγματικὸς ἀριθμός.

Σημείωση β΄: Στὰ ἑπόμενα θὰ λέμε **«ρητὸς»** καὶ θὰ ἐννοοῦμε **«πραγματικὸς ρητός»**.

Σημείωση γ΄: Σὲ παλαιότερα βιβλία οἱ πραγματικοὶ ρητοὶ λέγονταν σχετικοὶ (ρητοὶ) ἀριθμοί.

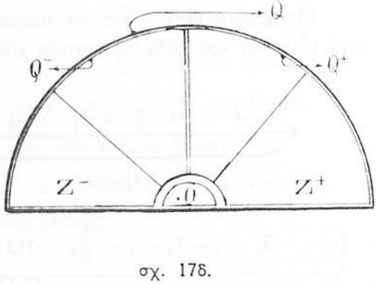
§ **27**. Ὑποσύνολα τοῦ Q (συνόλου τῶν ρητῶν) εἶναι τὰ Q^-, $\{0\}$, Q^+.

Ὁμοίως ὑποσύνολα τοῦ Q εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖο συμβολίζομε μὲ τὸ Z^- (αὐτὸ εἶναι ὑποσύνολο καὶ τοῦ Q^-) καὶ τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖο συμβολίζομε μὲ τὸ Z^+ (Τὸ Z^+ εἶναι ὑποσύνολο καὶ τοῦ Q^+). Ἡ ἕνωση τῶν συνόλων Z^-, $\{0\}$, Z^+ δίνει τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖο συμβολίζομε μὲ τὸ Z.

$$\underbrace{\underbrace{\{\cdots,-4,-3,-2,-1\}}_{Z^-} \cup \{0\} \cup \underbrace{\{+1,+2,+3,+4,\cdots\}}_{Z^+}}_{Z}$$

Ὥστε $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$

Τὸ σχῆμα 17δ εἶναι τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



σχ. 17δ.

Ἀνακεφαλαίωση :

1. Οἱ ἀρνητικοὶ ρητοί, τὸ μηδὲν καὶ οἱ θετικοὶ ρητοὶ λέγονται ρητοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ σύνολό τους συμβολίζεται μὲ Q.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Q μέσα σὲ ἄγκιστρα γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$Q = \left\{ 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \cdots \right\}$$

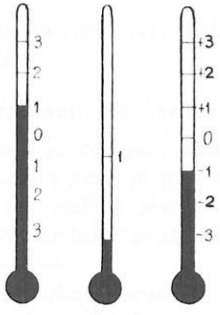
2. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι, τὸ μηδὲν καὶ οἱ θετικοὶ ἀκέραιοι λέγονται **ἀκέραιοι** ἀριθμοὶ καὶ τὸ σύνολό τους συμβολίζεται μὲ τὸ Z.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Z μέσα σὲ ἄγκιστρα γράφονται, μὲ συντομία καὶ ὡς ἑξῆς:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

§ **28. Ἐφαρμογές:**

Τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς τοὺς χρησιμοποιοῦμε στὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς.



α β γ σχ. 18.

1. Τὸ θερμόμετρο α σχ. 18 δείχνει 1 βαθμὸ πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ἂν καλυφθεῖ ἡ θερμομετρικὴ κλίμακα (σχ. 18β) μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε νὰ φαίνεται μόνο τὸ ἄκρο τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης καὶ ὁ ἀριθμὸς τῆς κλίμακας, ὁ ὁποῖος εἶναι παραπλεύρως (ὁ «1»), δὲν μποροῦμε νὰ ἀπαντήσουμε μὲ βεβαιότητα ἂν ἡ θερμοκρασία εἶναι 1 βαθμὸς πάνω ἀπὸ τὸ μηδὲν ἢ 1 βαθμὸς κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ὅμως μὲ τὸ θερμόμετρο γ δὲν ἀντιμετωπίζομε αὐτὴ τὴ δυσκολία, γιατί, ἂν τὸ ἄκρο τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι στὸν -1, θὰ καταλάβουμε ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι 1 βαθμὸς κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν, ἂν εἶναι στὸν $+1$, ἡ θερμοκρασία εἶναι 1 βαθμὸς πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν.

2. Ὁ ταμίας μπορεῖ νὰ ἀντικαταστήσει τὶς ἐκφράσεις: «πληρωμὴ 2.000 δρχ», «εἴσπραξη 1800 δρχ.» μὲ τοὺς ρητοὺς -2000 δρχ. καὶ $+1800$ δρχ. ἀντιστοίχως.

3. Οἱ χρονολογίες πρὸ Χριστοῦ μποροῦν νὰ παρασταθοῦν μὲ ἀρνητικοὺς ρητοὺς καὶ οἱ χρονολογίες μ.Χ. μὲ θετικοὺς ρητούς. Π.χ. ἂν γράψουμε -300 ἔτη, ἐννοοῦμε 300 ἔτη π.Χ., ἐνῶ ἂν γράψουμε $+1900$ ἔτη (ἢ 1900 ἔτη), ἐννοοῦμε 1900 ἔτη μ.Χ.

4. Γιὰ τὸ κέρδος καὶ τὴ ζημία μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις:

49. Ἀπαντῆστε στὰ παρακάτω ἐρωτήματα:

α) Ὁ μηδὲν ἀνήκει στὸ Q;

β) Ὁ μηδὲν ἀνήκει στὸ Z;

γ) Ποιὰ εἶναι ἡ τομὴ καὶ ἡ ἕνωση τῶν συνόλων Z^-, Z^+;

δ) Ποιὰ εἶναι ἡ τομὴ καὶ ἡ ἕνωση τῶν συνόλων Q^-, Q^+;

ε) Τὸ σύνολο Z εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Q^+ ἢ τοῦ Q^-;

ζ) Διαμερίστε τὰ σύνολα Q καὶ Z σὲ γνωστά σας ὑποσύνολα.

50. Χρησιμοποιῆστε τοὺς ρητοὺς γιὰ νὰ ἐκφράσετε σύντομα τὰ παρακάτω:

$3\frac{1}{2}$ m κάτω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας.

500 m πάνω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας.

Κέρδος 2600 δρχ., ζημία 3500 δρχ.

Χρονολογία τῆς μάχης τῶν Θερμοπυλῶν.

Χρονολογία τῆς κηρύξεως τῆς ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως.

Ἔτος γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ.

51. Βρεῖτε παραδείγματα, στὰ ὁποῖα νὰ χρησιμοποιοῦνται οἱ ρητοὶ ἀριθμοί.

4. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΡΗΤΟΥ - Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ.

§ 29. Ἀπόλυτη τιμὴ ρητοῦ.

Ἀπόλυτους ρητοὺς ὀνομάζομε τοὺς ρητοὺς τῆς ἀριθμητικῆς, ἑπομένως καὶ τοὺς θετικοὺς ρητούς.

Ὁ θετικὸς ἀριθμὸς πέντε γράφεται $+5$ ἢ 5, δηλαδὴ συμβολίζεται μὲ τὸν ἀπόλυτο 5 καὶ τὸ πρόσημο σὺν μπροστά του ἢ μόνο μὲ τὸν ἀπόλυτο 5.

Ὁ ἀπόλυτος ἀριθμὸς 5 λέγεται ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ $+5$.

Αὐτὸ συμβολίζεται ὡς ἑξῆς: $|+5| = 5$.

Ὥστε **ἀπόλυτη τιμὴ θετικοῦ ἀριθμοῦ ὀνομάζομε τὸν ἴδιο τὸν ἀριθμό.**

Ὁ ἀρνητικὸς τρία γράφεται -3. Συμβολίζεται μὲ τὸν ἀπόλυτο τρία καὶ τὸ πρόσημο $-$ μπροστά του. Ὁ 3 λέγεται ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ -3 καὶ συμβολίζεται μὲ $|-3|$. Εἶναι: $|-3| = 3$ καὶ διαβάζεται «ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ πλὴν τρία ἴσον 3».

Ὥστε **ἀπόλυτη τιμὴ ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἀντίθετός του.**

Ἐπειδὴ $|+3| = 3$ καὶ $|-3| = 3$, ἔχομε $|+3| = |-3|$ (γιατί;)

Ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ μηδενὸς εἶναι τὸ μηδὲν $|0| = 0$

Γενικά: ἂν α εἶναι θετικὸς ρητός, ἔχομε $|\alpha| = \alpha$,

ἂν α εἶναι ἀρνητικὸς ρητός, ἔχομε $|\alpha| =$ ὁ ἀντίθετος τοῦ α

καὶ ἂν α εἶναι μηδέν, ἔχομε $|\alpha| = 0$.

Ἐφαρμογές :

α) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τῶν ρητῶν:

$$-\frac{7}{2},\ -\frac{1}{8},\ +\frac{3}{5},\ +2\frac{4}{9},\ +3,\ 6,\ \frac{4}{5},\ 0.$$

Ἔχομε: $\left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$, $\left|-\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{8}$, $\left|+\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$,

$\left|+2\frac{4}{9}\right| = 2\frac{4}{9}$, $|+3| = 3$, $|6| = 6$, $\left|\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$, $|0| = 0$.

β) Ἂν $|\chi-1| = 12$ καὶ $\chi-1$ εἶναι θετικὸς ρητός, νὰ βρεθεῖ ὁ χ.

Ἐπειδὴ $\chi-1$ εἶναι θετικός, ἔχομε $|\chi-1| = \chi-1$. Ἄρα $|\chi-1| = \chi-1 = 12 \Leftrightarrow \chi = 12+1 \Leftrightarrow \chi = 13$.

§ 30. Συμβολισμὸς ρητοῦ μὲ ἕνα γράμμα.

Ὅπως εἴδαμε, συμβολίσαμε ἕναν ὁποιοδήποτε ρητὸ μὲ ἕνα γράμμα α.

Μποροῦμε πάντοτε νὰ συμβολίζουμε μὲ γράμματα τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς.

Ὅταν λέμε ὅτι ὁ β εἶναι ρητὸς ἀριθμός, θὰ ἐννοοῦμε ὅτι μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τὸν β μὲ ὁποιοδήποτε ρητὸ ἀριθμό, δηλαδὴ θετικό, ἀρνητικὸ ἢ μηδέν.

Ἡ ἔκφραση «ὁ β εἶναι θετικὸς» συμβολίζεται: $\beta = +|\beta|$

Ἡ ἔκφραση «ὁ β εἶναι ἀρνητικὸς» συμβολίζεται: $\beta = -|\beta|$

§ **31**. Δύο ἢ περισσότεροι θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι.

Δύο ἢ περισσότεροι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι.

Ἕνας θετικὸς καὶ ἕνας ἀρνητικὸς εἶναι ἑτερόσημοι.

Π.χ. ὁ $+\frac{3}{4}$ καὶ ὁ $-\frac{2}{3}$ εἶναι ἑτερόσημοι,

ὁ -2 καὶ ὁ $+\frac{1}{2}$ εἶναι ἑτερόσημοι,

ὁ 3 καὶ ὁ -4 εἶναι ἑτερόσημοι

Οἱ ἀριθμοί: $+\frac{3}{2}$, $+2$, $+1$, $\frac{4}{7}$, 8 εἶναι ὁμόσημοι.

Οἱ ἀριθμοί: $-\frac{3}{10}$, -4, -20, $-2\frac{1}{4}$, -5 εἶναι ὁμόσημοι.

§ 32. Ἡ ἰσότητα στὸ σύνολο τῶν ρητῶν.

Ξέρομε ὅτι τὸν ἀριθμὸ 8 μποροῦμε νὰ τὸν παραστήσουμε μὲ τὰ σύμβολα 8, $\frac{16}{2}$, $6+2$, $2\cdot 4$ κ.λ.π.

Ἑπομένως $8=\frac{16}{2}=6+2=2\cdot 4$. Ὅταν λέμε ὅτι δύο ἀριθμοὶ α καὶ β τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ἴσοι, ἐννοοῦμε ὅτι πρόκειται γιὰ δύο διαφορετικοὺς συμβολισμοὺς τοῦ ἴδιου ρητοῦ.

Ἂν ἔχουμε τώρα τοὺς ρητοὺς $+3$ καὶ $+\frac{6}{2}$, παρατηροῦμε ὅτι ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμὲς (εἶναι $|+3|=3$ καὶ $|+\frac{6}{2}|=\frac{6}{2}$, ἄρα $|+3|=|+\frac{6}{2}|$ ἢ $3=\frac{6}{2}$) καὶ τὸ ἴδιο πρόσημο (εἶναι ὁμόσημοι).

Ἐπίσης οἱ ρητοὶ $-\frac{2}{5}$ καὶ $-\frac{4}{10}$ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμὲς καὶ εἶναι ὁμόσημοι.

Τοὺς ρητούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές, τοὺς ὀνομάζομε **ἴσους**.

Ὥστε **οἱ ρητοὶ α καὶ β λέγονται ἴσοι (συμβολικὰ $\alpha=\beta$), ἐὰν καὶ μόνο ἐὰν εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές.**

Ὁ συμβολισμὸς $\alpha=\beta$, ὁ ὁποῖος σημαίνει ὅτι ὁ α εἶναι ἴσος μὲ τὸν β, λέγεται **ἰσότητα.**

Ἐπειδὴ ὁ $-5=-5$, ἰσχύει ἡ ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα τῆς ἰσότητας.

Ἐπίσης ἂν $-5=-\frac{10}{2}$, εἶναι καὶ $-\frac{10}{2}=-5$· ἑπομένως ἰσχύει καὶ ἡ συμμετρικὴ ἰδιότητα τῆς ἰσότητας.

Τέλος ἂν $-5=-\frac{10}{2}$ καὶ $-\frac{10}{2}=-\frac{15}{3} \Rightarrow -5=-\frac{15}{3}$, ἄρα ἰσχύει καὶ ἡ μεταβατικὴ ἰδιότητα τῆς ἰσότητας.

Ὥστε ἡ ἰσότητα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἔχει τὶς γνωστὲς ἰδιότητες:

$\alpha=\alpha$ (ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα)

$\alpha=\beta \Rightarrow \beta=\alpha$ (συμμετρικὴ ἰδιότητα)

$\alpha=\beta$ καὶ $\beta=\gamma \Rightarrow \alpha=\gamma$ (μεταβατικὴ ἰδιότητα)

Ἀσκήσεις:

52. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τῶν παρακάτω ρητῶν:

$$+8 \quad -\frac{25}{3}, \quad -\frac{13}{20}, \quad +\frac{12}{3}, \quad +\frac{1}{12}, \quad \frac{11}{4}, \quad 0$$

53. Ποιοὺς ρητοὺς παριστάνουν τὰ χ, ψ, z, ἄν:

$|\chi|=1$, $|\psi|=0$, $|z|=|-\frac{3}{2}|$;

54. α) Ἂν $|\chi+3|=5$ καὶ $\chi+3$ εἶναι θετικὸς ρητός, νὰ βρεθεῖ ὁ χ.

β) Ἂν $|3\chi|=0$, νὰ βρεθεῖ ὁ χ.

γ) Ἂν γιὰ τοὺς ρητοὺς α, β, γ, δ ἔχουμε $\alpha+1=\beta+\gamma+\delta$ καὶ $\beta+\gamma+\delta=5$, νὰ βρεθεῖ ὁ α.

55. Ἐξετάστε ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ γ εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι στὶς παρακάτω περιπτώσεις.

1. Ὁ α εἶναι ὁμόσημος τοῦ β καὶ ὁ β εἶναι ὁμόσημος τοῦ γ.
2. Ὁ α εἶναι ὁμόσημος τοῦ β καὶ ὁ β εἶναι ἑτερόσημος τοῦ γ.
3. Ὁ α εἶναι ἑτερόσημος τοῦ β καὶ ὁ β εἶναι ἑτερόσημος τοῦ γ.
4. Ὁ α εἶναι ἑτερόσημος τοῦ β καὶ ὁ β εἶναι ὁμόσημος τοῦ γ.

Β' ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Οἱ πράξεις στὸ σύνολο Q εἶναι ἡ πρόσθεση, ἡ ἀφαίρεση, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεση.

§ 33. 1. ΠΡΟΣΘΕΣΗ

α) Ἕνα ἀεροπλάνο ἀνέβηκε ἀρχικὰ 3 km καὶ κατόπι ἄλλα 2 km. Σὲ ποιὸ ὕψος ἀνέβηκε τελικὰ τὸ ἀεροπλάνο;

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ ἀεροπλάνο ἀνέβηκε 5 km.

Ἂν χρησιμοποιήσουμε τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, τότε ἡ ἔκφραση «ἀνέβηκε 3 km» συμβολίζεται $+3$ km, τὸ ἴδιο γιὰ τὴν ἔκφραση «ἀνέβηκε 2 km» ἔχομε $+2$ km καὶ γιὰ τὴν «ἀνέβηκε 5 km» γράφομε $+5$ km.

Ἐπειδὴ ἀνέβηκε 3 km + ἀνέβηκε 2 km = ἀνέβηκε 5 km,

ἔχομε $(+3 \text{ km}) + (+2 \text{ km}) = +5 \text{ km}$.

Ἂν τὸ ἀεροπλάνο κατέβαινε 3 km καὶ 2 km, θὰ κατέβαινε τελικὰ 5 km.

Ἄρα $(-3 \text{ km}) + (-2 \text{ km}) = -5 \text{ km}$.

Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα δύο ὁμόσημων ρητῶν εἶναι ρητὸς ὁμόσημος μὲ αὐτοὺς καὶ ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Παραδείγματα.

$$(+5)+(+8) = +13 = +(5+8)$$

$$(-7)+(-3) = -10 = -(7+3)$$

$$\left(+\frac{6}{11}\right)+\left(+\frac{5}{11}\right) = +\frac{11}{11} = +\left(\frac{6}{11}+\frac{5}{11}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{4}\right) = -\frac{5}{4} = -\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)$$

Γενικὰ ἐὰν α καὶ β εἶναι θετικοί, τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι θετικὸς καὶ ἡ ἀπόλυτη τιμή του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν.

$$|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

(Ἂν α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί, τὸ $\alpha+\beta$ εἶναι ἀρνητικός).

β) Γνωρίζομε ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως στὸ σύνολο Q_0^+. Δηλαδὴ $5+0 = 0+5 = 5$, ἑπομένως καὶ $(+5)+0 = 0+(+5) = +5$.

Ἂν ἡ θερμοκρασία εἶναι -2 βαθμοὶ καὶ ἀνεβεῖ κατὰ 0 βαθμούς, τελικὰ θὰ ἔχουμε θερμοκρασία -2 βαθμούς.

Ἄρα $(-2)+0 = -2$. Ὁμοίως καὶ $0+(-2) = -2$.

Ὥστε **τὸ μηδὲν εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως στὸ σύνολο τῶν ρητῶν.**

Συμβολικά: Ἂν $\alpha \in Q \Rightarrow \alpha+0 = 0+\alpha = \alpha$

γ) Ἂν ἡ θερμοκρασία ἀνεβεῖ 3 βαθμοὺς καὶ ὕστερα κατεβεῖ 3 βαθμούς, τελικὰ δὲν γίνεται καμιὰ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας. Δηλαδή:

$$(+3)+(-3) = 0.$$

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντίθετων ρητῶν ἰσοῦται μὲ μηδέν.

δ) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα $(-3)+(+7)$.

Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα, θὰ στηριχτοῦμε στοὺς κανόνες τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁμόσημων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντίθετων ρητῶν.

Ἐπειδὴ $+7 = +(3+4) = (+3)+(+4)$,

ἔχομε: $(-3)+(+7) = \underbrace{(-3)+(+3)}_{0}+(+4) = 0+(+4) = +4 =$
$= +(7-3)$.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $(+3)+(-5)$, ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο. Δηλαδὴ

$$-5 = -(3+2) = (-3)+(-2), \text{ ἄρα } (+3)+(-5) = \underbrace{(+3)+(-3)}_{0}+(-2) =$$

$$= 0+(-2) = -2 = -(5-3).$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα τοῦ ἀθροίσματος δύο ἑτερόσημων ρητῶν ἔχομε:

Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτερόσημων ρητῶν εἶναι ρητὸς ὁμόσημος μὲ ἐκεῖνον ποὺ ἔχει τὴ μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμὴ καὶ ἡ ἀπόλυτη τιμή του ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ (τῆς μικρότερης ἀπὸ τὴν μεγαλύτερη) τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Παραδείγματα.

$$(-12)+(+11) = -(12-11) = -1$$

$$(+10)+(-4) = +(10-4) = +6$$

$$\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right) = -\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{8}\right) = -\frac{2}{8}$$

Γενικά:

Ἂν $\alpha \in Q^+$, $\beta \in Q^-$ καὶ $|\alpha|>|\beta| \Rightarrow \alpha+\beta = +(|\alpha|-|\beta|)$, ὅπου $|\alpha|-|\beta|>0$.

Ἂν $\alpha \in Q^+$, $\beta \in Q^-$ καὶ $|\alpha|<|\beta| \Rightarrow \alpha+\beta = -(|\beta|-|\alpha|)$, ὅπου $|\beta|-|\alpha|>0$

Ἐφαρμογές:

1. $(+4)+(+2) = +6 = +(4+2)$, $(+4)+(-7) = -3 = -(7-4)$
   $(-2)+(-3) = -5 = -(2+3)$, $(-3)+(+8) = +5 = +(8-3)$

2. $\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{6}{6} = -\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)$,

   $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{3} = -\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)$

§ **34**. Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω καὶ ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει πάντοτε τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν καὶ εἶναι μονότιμο (βρίσκεται μόνο μία τιμή του), γιατὶ ὁ ὑπολογισμός του ἀνάγεται στὴν πρόσθεση ἢ στὴν ἀφαίρεση τῶν ἀπόλυτων ἀριθμῶν.

Γενικὰ ἐὰν α καὶ β εἶναι ρητοί, ὑπάρχει ὁ ρητὸς (α+β) [συμβολικά: α, β∈Q ⇒ (α + β)∈Q], ὁ ὁποῖος λέγεται ἄθροισμα αὐτῶν.

Τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν εἶναι μονότιμο.

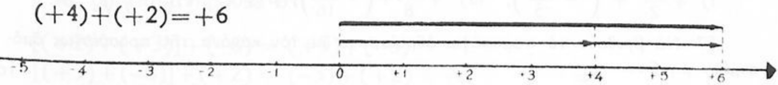
Ἐπειδὴ $(+2)+(-5) = -3$ καὶ $(-5)+(+2) = -3$, ἔχομε ὅτι

$$(+2)+(-5) = (-5)+(+2).$$

Ὥστε. **Ἂν α καὶ β εἶναι ρητοί, ἔχομε $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ (μεταθετικὴ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως).**

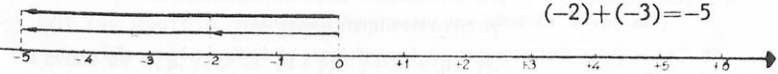
3. Παρακάτω δίνεται γεωμετρικὴ ἐξήγηση τῶν προσθέσεων τῆς πρώτης ἐφαρμογῆς.

$(+4)+(+2)=+6$



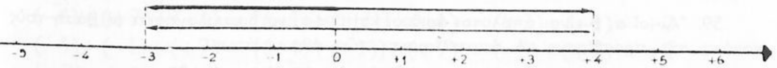
σχ. 19.

$(-2)+(-3)=-5$



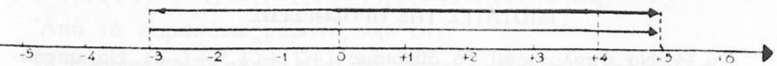
σχ. 20.

$(+4)+(-7)=-3$



σχ. 21.

$(-3)+(+8)=+5$



σχ. 22.

4. Ἂν προσθέσουμε καὶ στὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητας $-3 = -\frac{6}{2}$ τὸν $+2$, ἔχομε

α' μέλος $-3+(+2) = -1$,

β' μέλος $-\frac{6}{2}+(+2) = -(\frac{6}{2}-2) = -1$.

Ἄρα $-3+(+2)=-\frac{6}{2}+(+2)$

Γενικὰ $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$

Ἀσκήσεις:

56. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

α) $(+3)+\left(+\frac{1}{2}\right)$, β) $(-5)+(-19)$, γ) $(+12)+(-7)$,

δ) $(+7)+(-13{,}5)$, ε) $\left(-\frac{1}{2}\right)+(+1)$, στ) $\left(-\frac{13}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$,

ζ) $\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)$, η) $(-1)+\left(+\frac{3}{2}\right)$, θ) $-\frac{4}{3}+\left(+\frac{1}{6}\right)$,

ι) $+\frac{5}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)$, ια) $+\frac{3}{8}+\left(-\frac{87}{16}\right)$, ιβ) $+\frac{2}{5}+\left(-\frac{4}{7}\right)$.

57. Νὰ βρεθοῦν τὰ παρακάτω ἀθροίσματα μὲ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως ὁμόσημων ρητῶν:

α) $(-3)+(-2)+(-1)$, β) $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$,

γ) $(-2)+(-2)+(-2)$, δ) $-\frac{3}{4}+(-1)+\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(Γιὰ τὴν α' νὰ δοθεῖ καὶ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία).

58. Ἂν α, β, γ, δ εἶναι ρητοί, νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ ἀριθμητικὰ παραδείγματα τὴν παρακάτω ἰδιότητα:

$$\alpha=\beta \text{ καὶ } \gamma=\delta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta.$$

Σημείωση: Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται πρόσθεση τῶν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἐκφράζει τὸ μονότιμο τῆς προσθέσεως.

59. Ἂν οἱ α, β εἶναι ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta<\alpha$, νὰ δικαιολογήσετε μὲ βάση τοὺς κανόνες τῆς προσθέσεως τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἀθροισμάτων:

1. $(+\alpha)+(-\beta)=+(\alpha-\beta)$, 2. $(-\alpha)+(+\beta)=-(\alpha-\beta)$,
3. $(-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)$, 4. $(+\alpha)+(+\beta)=+(\alpha+\beta)$.

2. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΑΠΟ ΔΥΟ ΠΡΟΣΘΕΤΕΩΝ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 35. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἄθροισμα $(+2)+(+3)+(-6)$. Θὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ μὲ τὸν τρόπο ἐργασίας ποὺ μάθαμε στὴν Α' τάξη.

Δηλαδὴ θὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθετέων, $(+2)+(+3)=+5$ καὶ σ' αὐτὸ θὰ προσθέσουμε τὸν τρίτο προσθετέο, $(+5)+(-6)=-1$.

Αὐτὸ τὸ γράφομε ὡς ἑξῆς:

$(+2)+(+3)+(-6)=[(+2)+(+3)]+(-6)=(+5)+(-6)=-1.$

Ὁ ρητὸς -1 εἶναι τὸ ἄθροισμα $(+2)+(+3)+(-6)$.

Ἡ ἀγκύλη $[(+2)+(+3)]$ ἔχει τὴν ἔννοια ὅτι κάνομε πρῶτα τὴν ράξη ποὺ εἶναι μέσα σ' αὐτή.

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε, ἂν ἔχουμε περισσότερους ἀπὸ τρεῖς προσθε-έους.

Ὥστε **τὸ ἄθροισμα περισσότερων ἀπὸ δύο ρητῶν εἶναι ὁ ρητός, τὸν τοῖο βρίσκομε, ἂν στὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσουμε τὸν τρίτο, τὸ νέο ἄθροισμα προσθέσουμε τὸν τέταρτο κ.ο.κ.**

Γενικὰ ἂν α, β, γ, δ εἶναι ρητοί, ἔχομε

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=[(\alpha+\beta)+\gamma]+\delta.$$

§ **36**. α) Παρατηροῦμε ὅτι:

$$[(+2)+(+3)]+(-6)=(+5)+(-6)=-1$$

αὶ $[(+3)+(-6)]+(+2)=(-3)+(+2)=-1 \quad \Rightarrow$

$$[(+2)+(+3)]+(-6)=[(+3)+(-6)]+(+2) \quad \text{ἢ}$$

$$[(+2)+(+3)]+(-6)=(+2)+[(+3)+(-6)]$$

Ἀπὸ τὴν παραπάνω ἰσότητα προκύπτει ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν ρη-ῶν ἔχει τὴν ἰδιότητα τῆς προσεταιριστικότητας.

Γενικὰ ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in Q \Rightarrow (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

β) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ρητῶν -4, $+7$, -1 μὲ ὅλους τοὺς υνατοὺς τρόπους.

Ἔχομε:

$$(-4)+(+7)+(-1)=[(-4)+(+7)]+(-1)=(+3)+(-1)=+2$$
$$(-4)+(-1)+(+7)=[(-4)+(-1)]+(+7)=(-5)+(+7)=+2$$
$$(+7)+(-1)+(-4)=[(+7)+(-1)]+(-4)=(+6)+(-4)=+2$$
$$(+7)+(-4)+(-1)=[(+7)+(-4)]+(-1)=(+3)+(-1)=+2$$
$$(-1)+(-4)+(+7)=[(-1)+(-4)]+(+7)=(-5)+(+7)=+2$$
$$(-1)+(+7)+(-4)=[(-1)+(+7)]+(-4)=(+6)+(-4)=+2$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παρατηροῦμε ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα τριῶν ρητῶν εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴ σειρά, μὲ τὴν ὁποία αμβάνονται οἱ προσθετέοι.

Γενικὰ ἂν α, β, γ εἶναι ρητοί, ἔχομε

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\gamma+\beta=\beta+\alpha+\gamma=\ldots\ldots$$

(Αὐτὸ ἰσχύει καὶ γιὰ περισσότερους ἀπὸ τρεῖς ρητούς).

Ἐφαρμογές.

1. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἄθροισμα $(-3)+(+5)+(-4)+(+6)$.

Σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω β' ἰδιότητα ἔχομε:

$$(-3)+(+5)+(-4)+(+6)=(+6)+(+5)+(-4)+(-3)=$$
$$=[(+6)+(+5)]+[(-4)+(-3)]$$
$$=(+11)+(-7)=+4.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ β΄ ἰδιότητα καὶ ἡ προσεταιριστικότητα τῆς προσθέσεως μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ προσθέσουμε χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικοὺς καὶ νὰ καταλήξουμε σ' ἕνα ἄθροισμα δύο ἑτερόσημων ρητῶν ἀριθμῶν.

2. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα:

$$\left(+\frac{5}{2}\right)+(-3)+\left(+\frac{8}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{8}{2}\right)$$

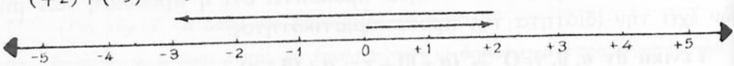
Ἔχομε:

$$\underbrace{\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)}_{+\frac{6}{2}}+\underbrace{\left(+\frac{8}{2}\right)+\left(-\frac{8}{2}\right)}_{0}+(-3)=$$

$$=\left(+\frac{6}{2}\right)+0+(-3)=(+3)+(-3)=0.$$

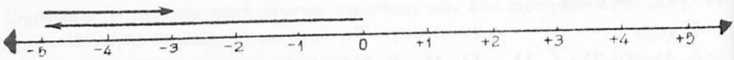
3. Παρακάτω δίνεται γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν ἰδιοτήτων (ἀντιμεταθετική-προσεταιριστική) τῆς προσθέσεως.

$(+2)+(-5)=-3$



σχ. 23.

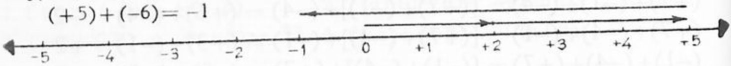
$(-5)+(+2)=-3$



σχ. 24.

$[(+2)+(+3)]+(-6)$

$(+5)+(-6)=-1$

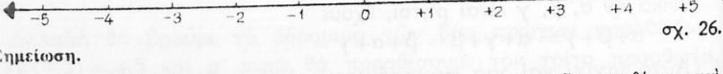


σχ. 25.

$(+2)+[(+3)+(-6)]$

$[(+3)+(-6)]+(+2)$

$(-3)+(+2)=-1$



σχ. 26.

Σημείωση.

Συμφωνοῦμε σ' ἕνα ἄθροισμα νὰ παραλείπουμε τὸ σύμβολο τῆς προσθέσεως καὶ γράφουμε τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλο μὲ τὸ πρόσημό τους.

Π. χ. ἀντὶ νὰ ἔχουμε $(+6)+(-5)+(+2)$,

γράφομε $+6 \quad -5 \quad +2$ ἢ $6-5+2$.

Όταν λοιπὸν λέμε νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἄθροισμα:

$-3+4-12+5$, ἐννοοῦμε τὸ $(-3)+(+4)+(-12)+(+5)$

Π.χ. $-3+4-12+5=(-3)+(+4)+(-12)+(+5)=(+4)+(+5)+(-12)+(-3)=(+9)+(-15)=-6$.

Ἀσκήσεις:

60. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

α) $(-10)+(-11)+(-12)+(+13)+(+14)$.

β) $(+15)+(-7)+(+3)+(-5)+(-4)$.

γ) $(-4{,}2)+(+3{,}7)+(-2{,}6)+(+1)$.

δ) $\left(+\frac{27}{5}\right)+\left(-\frac{23}{6}\right)+\left(+8\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{7}{15}\right)+\left(-8\frac{2}{3}\right)$

61. α) Ἂν $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-5\frac{3}{4}$, $\gamma=-\frac{4}{12}$ καὶ $\delta=+6$, νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

β) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα $-\frac{4}{5}+\frac{2}{10}-3\frac{1}{2}+1$.

γ) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα $16-7+5\frac{1}{6}-13\frac{1}{3}-1$.

δ) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα $-15+15{,}5-\frac{1}{2}+2{,}3-0{,}3$.

62. Νὰ συγκριθοῦν τὰ δύο ἑπόμενα ἀθροίσματα:

α) $[(-4)+(+8)+(-6)]+(-3)$, $(-4)+(+8)+[(-6)+(-3)]$,

β) ἐπίσης τά: $(-4)+(+12)+(-13)$, $(-4)+(+20)+(-8)+(-13)$.

63. Ἂν α, β, γ εἶναι ρητοί, νὰ δείξετε μὲ παραδείγματα ὅτι ἡ ἰσότητα $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ συνεπάγεται τὴν ἰσότητα $\alpha=\beta$.

3. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΡΗΤΩΝ.

§ 37. *α) Νὰ συγκριθεῖ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τῶν ἀθροισμάτων* $(+6)+(+3)$ *καὶ* $(-6)+(-3)$ *μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν προσθετέων τους.*

Γνωρίζομε ὅτι $(+6)+(+3)=+9$ καὶ $(-6)+(-3)=-9$.

Ἐπίσης ὅτι $6=|+6|=|-6|$, $3=|+3|=|-3|$ καὶ $9=|+9|=|-9|$

Ἐπειδὴ ὅμως $6+3=9$

ἔχομε $|+6|+|+3|=|+9|$ καὶ $|-6|+|-3|=|-9|$

ἢ $|+6|+|+3|=|(+6)+(+3)|$ καὶ $|-6|+|-3|=|(-6)+(-3)|$

ἢ $|(+6)+(+3)|=|+6|+|+3|$ καὶ $|(-6)+(-3)|=|-6|+|-3|$

Ὥστε ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ὁμόσημων ρητῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Γενικὰ ἂν οἱ ρητοὶ α, β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχομε

$$\underbrace{|\alpha+\beta|}_{\substack{\downarrow\\ \text{ἀπόλυτη τιμὴ}\\ \text{τοῦ ἀθροίσματος}}} = \underbrace{|\alpha|+|\beta|}_{\substack{\downarrow\\ \text{ἄθροισμα τῶν}\\ \text{ἀπόλυτων τιμῶν}}}$$

β) Νὰ συγκριθεῖ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος $(+8)+(-6)$ *μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν προσθετέων του.*

Ἔχομε $|(+8)+(-6)|=|+2|=2$ καὶ $|+8|+|-6|=8+6=14$. Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνομε

ὅτι $|(+8)+(-6)|<|+8|+|-6|$

Ὥστε ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἑτερόσημων ρητῶν εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Γενικὰ ἂν οἱ ρητοὶ α, β εἶναι ἑτερόσημοι, ἔχομε :

$$|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$$

Παραδείγματα:

1. Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι $|(-10)+(+3)|<|-10|+|+3|$

Ἔχομε: $|(-10)+(+3)|=|-7|=7$ καὶ $|-10|+|+3|=10+3$.

Ἐπειδὴ $7<10+3 \Rightarrow |(-10)+(+3)|<|-10|+|+3|$

2. Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι $\left|\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right|<\left|+\frac{3}{5}\right|+\left|-\frac{3}{5}\right|$

Ἔχομε:

$\left|\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right|=|0|=0$ καὶ $\left|+\frac{3}{5}\right|+\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$

Ἄρα: $\left|\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right|<\left|+\frac{3}{5}\right|+\left|-\frac{3}{5}\right|$

Ἀνακεφαλαίωση.

§ 38. Ἀπὸ ὅσα ἀναφέρονται στὴν «**πρόσθεση τῶν ρητῶν**» συμπεραίνομε ὅτι:

α. Ὅταν δοθοῦν δύο ρητοὶ α καὶ β ὑπάρχει **πάντοτε** ὁ ρητὸς α+β.

Συμβολικά: $\alpha, \beta \in Q \Rightarrow (\alpha+\beta) \in Q$

Δηλαδή:

Ἂν α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, τότε ὁ (α+β) εἶναι ὁμόσημος μὲ αὐτοὺς κι ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

$$|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Ἂν α, β εἶναι ἑτερόσημοι, τότε ὁ $(\alpha+\beta)$ εἶναι ὁμόσημος μὲ τὸν ρητὸ ποὺ ἔχει τὴ μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμὴ καὶ ἡ ἀπόλυτη τιμή του ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν προσθετέων.

$$|\alpha+\beta| = |\alpha| - |\beta| \quad \text{ἂν } |\alpha| > |\beta|$$

$$|\alpha+\beta| = |\beta| - |\alpha| \quad \text{ἂν } |\alpha| < |\beta|$$

β) Τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν εἶναι ἕνας καὶ μόνο ἕνας ρητὸς (μονότιμο τῆς προσθέσεως).

γ) Ἰσχύει ἡ μεταθετικότητα στὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν

$$\alpha+\beta = \beta+\alpha$$

δ) Ἂν δοθοῦν οἱ ρητοὶ α, β, γ, ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

ε) Ὑπάρχει ἕνα μόνο στοιχεῖο στὸ σύνολο τῶν ρητῶν, τὸ μηδέν, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως.

Ἂν $\alpha \in Q$ εἶναι: $0+\alpha = \alpha+0 = \alpha$

στ) Γιὰ κάθε ρητὸ ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνο ἕνας ἄλλος ρητὸς ἀντίθετος (ἢ συμμετρικός) του.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντίθετων εἶναι ἴσο μὲ μηδέν.

Ἂν α εἶναι ἀπόλυτος ἀριθμός, ὁ ἀντίθετος τοῦ $+\alpha$ εἶναι ὁ $-\alpha$ καὶ

$$(+\alpha)+(-\alpha) = 0.$$

Ἀσκήσεις:

64. Μὲ ἀριθμητικὰ παραδείγματα νὰ συγκρίνετε τὸ $|\alpha+\beta+\gamma|$ μὲ τὸ $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$, α) ἂν α, β, γ εἶναι ὁμόσημοι καὶ β) ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

65. Νὰ συγκριθεῖ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἑτερόσημων ρητῶν μὲ τὴ διαφορὰ τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους. Δηλαδὴ ἂν α, β εἶναι ἑτερόσημοι, νὰ συγκριθεῖ τὸ

$|\alpha+\beta|$ μὲ τὸ $|\alpha|-|\beta|$, ἂν $|\alpha|>|\beta|$ ἢ τὸ

$|\alpha+\beta|$ μὲ τὸ $|\alpha|-|\beta|$, ἂν $|\alpha|<|\beta|$.

66. Ποιοὶ ρητοὶ μποροῦν ν' ἀντικαταστήσουν τὸ χ στὶς παρακάτω ἰσότητες;

α) $\left|\left(+\frac{3}{4}\right)+x\right| = \left|+\frac{3}{4}\right| + \left|+\frac{1}{4}\right|$ β) $|(-3)+x| = |-3| + |-1|$,

γ) $\left|(+5)+\left(+\frac{1}{2}\right)\right| = |+5| + |x|$

δ) $\left|\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\right| = \left|-\frac{5}{8}\right| + |x|$

67. Ποιὸ συμπέρασμα προκύπτει γιὰ τοὺς ρητοὺς α καὶ β,

ἂν α) $\alpha+\beta = 0$, β) $\alpha+\beta = \alpha$.

68. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

α) $(-12)+(-18)+(+24)+(+30)+(-36)$.

β) $\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{7}{4}\right)+\left(+\frac{11}{2}\right)+\left(+\frac{10}{16}\right)+(-1)$

γ) $\left(-\frac{4}{9}\right)+(+2)+\left(-\frac{25}{6}\right)+\left(-\frac{14}{3}\right)+\left(+\frac{8}{18}\right)+(+1)$.

69. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

α) $-4-6+8-10+14-20$, β) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1$

γ) $5+\frac{18}{9}-\frac{15}{3}+\frac{21}{7}-\frac{24}{6}-2$ δ) $1+\frac{5}{12}-\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-2$.

70. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀθροισμάτων.

α) $[(+3)+(-8)+(+2)+(-1)]+[(-7)+(+10)+(-2)]$,

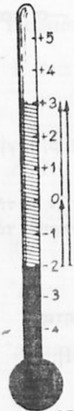
β) $(-1+3-8+12)+(5-7-13)$.

71. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις: α) $(-2)+\chi=+3$ καὶ β) $\chi+\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$.

4. Η ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 39. Πρόβλημα. *Τὸ πρωὶ τὸ θερμόμετρο ἔδειχνε -2^{β} καὶ τὸ μεσημέρι $+3^{\beta}$. Κατὰ πόσους βαθμοὺς μεταβλήθηκε ἡ θερμοκρασία;*

Ἔστω ὅτι ἡ θερμοκρασία μεταβλήθηκε κατὰ χ^{β}. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ζητούμενο, πρέπει ἀπὸ τὴν τελικὴ θερμοκρασία $+3^{\beta}$ νὰ ἀφαιρέσουμε τὴν ἀρχικὴ θερμοκρασία -2^{β}.



σχ. 27

Ἔχομε λοιπὸν $\chi^{\beta}=(+3)^{\beta}-(-2)^{\beta}$ ἢ

$\chi=(+3)-(-2)$.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ καὶ σὰν λύση τῆς ἐξισώσεως $(-2)+\chi=+3$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ πρόβλημα. «Ποιὸν ρητὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸν (-2), γιὰ νὰ βροῦμε τὸ $+3$;».

Μάθαμε στὴν Α΄ τάξη ὅτι ἡ ἀφαίρεση εἶναι πράξη ἀντίστροφη τῆς προσθέσεως. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ στὸ σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Δηλαδὴ καὶ στοὺς νέους ἀριθμοὺς **ἀφαίρεση εἶναι ἡ πράξη, κατὰ τὴν ὁποία δίνονται δύο ρητοὶ καὶ βρίσκεται ἕνας τρίτος, ὁ ὁποῖος ὅταν προστεθεῖ στὸν δεύτερο, δίνει ἄθροισμα τὸν πρῶτο.**

Ὥστε ἔχομε τὴν ἰσοδυναμία:

$$(+3)-(-2)=\chi \Leftrightarrow (-2)+\chi=+3$$

Γιὰ νὰ βροῦμε ὅμως τὴ διαφορὰ $(+3)-(-2)$, κάνομε τὶς ἑξῆς σκέψεις: στὸ ἀρχικὸ πρόβλημα: Τὸ θερμόμετρο δείχνει -2^{β}, ἄρα πρέπει νὰ ἀνεβεῖ 2^{β} ἡ θερμοκρασία, γιὰ νὰ φθάσει στὸ μηδὲν καὶ ὕστερα νὰ ἀνεβεῖ 3^{β}. Δηλαδὴ πρέπει νὰ ἀνεβεῖ ἡ θερμοκρασία 5^{β}.

Ἄρα $\chi^{\beta}=(+2)^{\beta}+(+3)^{\beta}=+5^{\beta}$. Συνεπῶς ἡ διαφορὰ $(+3)^{\beta}-(-2)^{\beta}=$ $=(+2)^{\beta}+(+3)^{\beta}$ ἢ $(+3)-(-2)=(+3)+(+2)$.

Ὥστε ἡ διαφορὰ δύο ρητῶν βρίσκεται, ἂν προσθέσουμε στὸν μειωτέο τὸν ἀντίθετο τοῦ ἀφαιρετέου.

Ἑπομένως καὶ ἡ ἐξίσωση $(-2)+\chi=+3$ ἐπιλύεται ὡς ἑξῆς:
$(-2)+\chi=+3 \Leftrightarrow \chi=(+3)-(-2) \Leftrightarrow \chi=(+3)+(+2) \Leftrightarrow \chi=+5$.

Χρησιμοποιοῦμε τώρα τὴν ἰδιότητα $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma \in Q)$, γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε γενικότερα τὴν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $(-2)+\chi=+3$ ἢ τὴν εὕρεση τῆς διαφορᾶς $\chi=(+3)-(-2)$.

Προσθέτομε καὶ στὰ δύο μέλη τῆς $(-2)+\chi=+3$ τὸν ἀντίθετο τοῦ -2 καὶ ἔχομε:

$$
\begin{aligned}
(-2)+\chi=+3 \Leftrightarrow [(-2)+\chi]+(+2) &= +3+(+2)\\
[\chi+(-2)]+(+2) &= +3+(+2)\\
\chi+[(-2)+(+2)] &= +3+(+2)\\
\chi+0 &= +3+(+2)\\
\chi &= (+3)+(+2)=+5
\end{aligned}
$$

Ὥστε $\chi=(+3)-(-2)=(+3)+(+2)$.

Δηλαδὴ διαπιστώνομε ὅτι, γιὰ νὰ ἀφαιρέσουμε ἕναν ρητό, πρέπει νὰ προσθέσουμε τὸν ἀντίθετό του. ($-\alpha=$ ὁ ἀντίθετος τοῦ α). Ἐπειδὴ στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ὑπάρχει πάντοτε ὁ ἀντίθετος ἑνὸς ἀριθμοῦ ποὺ μᾶς δίνεται, ὑπάρχει πάντοτε καὶ ἡ διαφορὰ δύο ρητῶν καὶ ἑπομένως ἡ ἀφαίρεση εἶναι πάντοτε δυνατὴ στὸ σύνολο αὐτό. Ἡ ἀφαίρεση εἶναι πράξη μονότιμη, γιατί τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀντίθετου τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μονότιμο.

Ὥστε, ἂν α καὶ β εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, ὀνομάζομε διαφορὰ $\alpha-\beta$ τὸν ρητὸ γ, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὸν $\alpha+$(ἀντίθετος τοῦ β).

Ἔχομε $\gamma=\alpha+(\text{ἀντίθ. τοῦ } \beta) \Rightarrow \gamma+\beta=\alpha+\underbrace{(\text{ἀντίθ. τοῦ } \beta)+\beta}_{0}$

$$\Rightarrow \gamma+\beta=\alpha$$

Συμβολικά: $\boxed{\text{Ἂν } \alpha, \beta \in Q: \ \alpha-\beta=\gamma \Leftrightarrow \beta+\gamma=\alpha, \ \gamma \in Q}$

Ἐφαρμογές.

1. $\alpha-0=\alpha+0=\alpha$ (γιατὶ ὁ ἀντίθετος τοῦ μηδενὸς εἶναι τὸ μηδέν)
   $(-3)-(-3)=(-3)+(+3)=0$. Γενικὰ $\alpha-\alpha=0$, $(\alpha \in Q)$
2. $0-(+3)=0+(-3)=-3$
   $0-(-3)=0+(+3)=+3$
   $0-\alpha=0+(-\alpha)=-\alpha \quad (\alpha \in Q)$

Ἐπειδὴ $0-\alpha=0+$(ἀντίθ. τοῦ α), **συμβολίζομε** τὸν ἀντίθετο ἑνὸς ρητοῦ α μὲ $-\alpha$.
Ὥστε γιὰ κάθε ρητὸ α ἔχομε: $\alpha-0=\alpha$, $0-\alpha=-\alpha$, $\alpha-\alpha=0$.

3. Νὰ βρεθοῦν οἱ παρακάτω διαφορές:

$$(+6)-(-7)=(+6)+(+7)=+13$$
$$(-7)-(+6)=(-7)+(-6)=-13$$
$$\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)=+\frac{2}{4}$$
$$\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{2}{4}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παρατηροῦμε ὅτι (ἂν $\alpha, \beta \in Q$) οἱ ρητοὶ $\alpha-\beta$ καὶ $\beta-\alpha$ εἶναι ἀντίθετοι.

Ἀσκήσεις:

72. Νὰ βρεθοῦν οἱ παρακάτω διαφορές:

α) $(-10)-(+25)$, β) $(+25)-(-10)$
γ) $(+14)-(+11)$, δ) $(+11)-(+14)$
ε) $(-5)-(+5)$, στ) $(-18)-(-18)$

ζ) $\left(+\frac{3}{16}\right)-\left(-\frac{3}{16}\right)$, η) $\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)$

73. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἑπόμενες ἐξισώσεις:

α) $x-\left(+\frac{7}{3}\right)=-1$, δ) $\left(-\frac{4}{15}\right)+x=-1$, ζ) $x-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$

β) $x+\left(-\frac{3}{20}\right)=-\frac{1}{5}$, ε) $-x-\left(+\frac{13}{2}\right)=-2$, η) $-x-(-12)=-12$

γ) $x-(-13)=-13$, στ) $-4-x=-14$, θ) $+3-x=-3$.

74. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἑπόμενες διαφορὲς καὶ νὰ ἐπαληθευθεῖ ἡ ἰσότητα «μειωτέος = ἀφαιρετέος + διαφορά».

α) $\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)$, β) $(-5)-\left(-\frac{2}{3}\right)$, γ) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)$,

δ) $\left(+\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$, ε) $\left(-\frac{10}{7}\right)-(-1)$, στ) $(+3)-\left(-\frac{11}{2}\right)$.

5. ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟ (—) ΣΑΝ ΣΥΜΒΟΛΟ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΣΑΝ ΠΡΟΣΗΜΟ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 40. Εἴδαμε (§ 36 σημείωση) ὅτι ἕνα ἄθροισμα π.χ. τὸ $(+3)+(-2)$ γράφεται σύντομα $+3-2$ ἢ $3-2$.

Τὸ πλὴν μπροστὰ ἀπὸ τὸ δύο θεωρεῖται σὰν πρόσημο.

Μπορεῖ ὅμως τὸ πλὴν νὰ θεωρηθεῖ καὶ σὰν σύμβολο ἀφαιρέσεως τοῦ θετικοῦ δύο ἀπὸ τὸν 3, γιατὶ

$$3-2=(+3)-(+2)=(+3)+(-2).$$

Ἐπίσης γιὰ τὸ $3-7$ ἔχομε: $3-7=(+3)+(-7)=-4$

↓
πρόσημο τοῦ ἑπτὰ
Πρόσθεση τοῦ -7 στὸν $+3$

$$3-7=(+3)-(+7)=(+3)+(-7)=-4$$

↓
Σύμβολο ἀφαιρέσεως
Ἀφαίρεση τοῦ $+7$ ἀπὸ τὸν $+3$
ἢ τοῦ 7 ἀπὸ τὸν 3

Συνεπῶς τὸ σύμβολο πλὴν $(-)$ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ σὰν σύμβολο ἀφαιρέσεως ἢ σὰν πρόσημο.

Παραδείγματα

1. Στὸ σύμβολο $-(+2)$ τὸ πλὴν θεωρεῖται σὰν πρόσημο τοῦ $(+2)$ ἀλλὰ καὶ σὰν σύμβολο ἀφαιρέσεως τοῦ $+2$.

→σύμβολο ἀφαιρέσεως τοῦ θετικοῦ πέντε ἀπὸ τὸ μηδὲν

2. $0-5=0-(+5)=0+(-5)=-5$

$$0-5=0+(-5)=-5$$

→πρόσημο τοῦ πέντε

→πρόσημο

3. $-8-3=(-8)-(+3)=(-8)+(-3)=-11$

→σύμβ. ἀφαιρέσεως.

→πρόσημο

$$-8-3=-(+8)-(+3)=+(-8)+(-3)=(-8)+(-3)=-11$$

→σύμβολο ἀφαιρέσεως

4) Ἔχομε $-4-10=(-4)+(-10)=-14=-(+14)=-[(+4)+(+10)]$

Δηλαδή: $-[(+4)+(+10)]=(-4)+(-10)$, ἀλλὰ $(+4)+(+10)=$ $=[(+4)+(+10)]$ ἢ $[(+4)+(+10)]=(+4)+(+10)$

Ὥστε **τὸ ἀντίθετο ἑνὸς ἀθροίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων τῶν προσθετέων.**

§ **41. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως** (οἱ παρακάτω ἰδιότητες ἐπαληθεύονται εὔκολα).

1. Ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται, ἂν προσθέσουμε (ἢ ἀφαιρέσουμε) στὸν μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ρητό.

$$\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma\in Q)$$
$$\alpha-\beta=(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$$

2. Πῶς ἀφαιρῶ ρητὸ ἀπὸ ἄθροισμα.

$$(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma) \quad \text{ἢ}$$
$$(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta$$

3. Πῶς ἀφαιρῶ ἀριθμὸ ἀπὸ διαφορά.

$$(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma) \quad \text{ἢ}$$
$$(\alpha-\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)-\beta$$

4. Πῶς ἀφαιρῶ ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμό.

$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma \quad \text{ἢ}$$
$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\gamma)-\beta \quad \text{ἢ}$$
$$\alpha-(\beta+\gamma)=\alpha+[(-\beta)+(-\gamma)]$$ (βλέπε προηγούμενο παράδειγμα 4).

5. Πῶς ἀφαιρῶ διαφορὰ ἀπὸ ἀριθμὸ

$$\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha-\beta)+\gamma \quad \text{ἢ}$$
$$\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$$

Οἱ παραπάνω ἰδιότητες ἰσχύουν χωρὶς κανέναν περιορισμό, γιατὶ ἡ διαφορὰ ὑπάρχει πάντοτε στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

6. Νὰ ἐπαληθευθεῖ ἡ ἰδιότητα: $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha-\gamma=\beta-\gamma$

Ἀφαιροῦμε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητας $-5=-\frac{10}{2}$ τὸν -3.

α΄ μέλος: $(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2$

β΄ μέλος: $\left(-\frac{10}{2}\right)-(-3)=\left(-\frac{10}{2}\right)+(+3)=-\left(\frac{10}{2}-3\right)=-(5-3)=-2$

Ἄρα $(-5)-(-3)=\left(-\frac{10}{2}\right)-(-3)$

Συνεπῶς ἀπὸ τὴν $-5=-\frac{10}{2} \Rightarrow (-5)-(-3)=\left(-\frac{10}{2}\right)-(-3)$.

Ἐφαρμογή.

Ἀφαιροῦμε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητας $-8+3=-5$ τὸν 3.

Ἔχομε:
$$-8+3-3=-5-3$$
$$-8+0=-5-3$$
$$-8=-5-3$$

Ἂν παρατηρήσουμε τὶς ἰσότητες: $-8+3=-5$
$$-8=-5-3$$

καταλήγομε στὸ συμπέρασμα ὅτι: Ἂν μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος μιᾶς ἰσότητας στὸ ἄλλο, ἀλλάζομε τὸ πρόσημό του.

7. Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Q$, νὰ ἐπαληθευθεῖ ἡ ἰδιότητα $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$ μὲ ἀριθμητικὸ παράδειγμα.

(Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἐκφράζει τὸ μονότιμο τῆς διαφορᾶς).

Σημείωση: Ἡ ἐργασία, κατὰ τὴν ὁποία ἂν $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$, λέγεται ἀφαίρεση τῶν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη.

Ἀσκήσεις:

75. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ τιμὴ τῶν παρακάτω παραστάσεων:

α) ἂν θεωρηθεῖ τὸ (–) σὰν σύμβολο ἀφαιρέσεως καὶ β) ἂν θεωρηθεῖ τὸ πλὴν σὰν πρόσημο:

α) $7-10$, β) $5-\frac{1}{2}$, γ) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$, δ) $-17-19$, ε) $-6-\frac{2}{5}$.

76. Νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς ἰδιότητες 1, 2, 3, 4, 5 τῆς ἀφαιρέσεως μὲ τὰ παρακάτω ἀριθμητικὰ παραδείγματα:

1. $\alpha = +5$, $\beta = -12$ καὶ $\gamma = +7$.
2. $\alpha = -\frac{3}{5}$, $\beta = +1$ καὶ $\gamma = -\frac{2}{3}$
3. $\alpha = 5{,}6$, $\beta = 7{,}2$ καὶ $\gamma = -11$.

77. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

α) $7-(-3)$, β) $(7+8)-(-3+8)$, γ) $(7\text{-}5)-(-3-5)$,
δ) $[12+(-2)+3]-(-4)$, ε) $-7-(7+3)$,
στ) $-12-[5-(-2)]$, ζ) $(-3-7)-9$, η) $(15-21)+(-4)$.

78. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi, \psi$ ἀπὸ τίς:

1) $\alpha = (-4+7)+(5-12)$, 2) $\beta = (-4+5)-[7+(-12)]$,
3) $\gamma = (-5+9)+(-5-9)$, 4) $\delta = (-5+9)-(-5-9)$,
5) $-\chi-3=-5$, 6) $\psi+4=-7$.

79. Νὰ βρεθοῦν μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων τους τὰ σύνολα:

$A = \{\chi/\chi+3=3\}$, $B = \{\psi/\psi-5=-7\}$, $\Gamma = \{\omega/2-\omega=-3\}$

80. Νὰ δοκιμάσετε ἂν τὰ παρακάτω ζεύγη τιμῶν α καὶ β ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα

$$|\alpha-\beta| = |\alpha| - |\beta|:$$

1) $\alpha=7$, $\beta=2$, 2) $\alpha=2$, $\beta=7$, 3) $\alpha=-7$, $\beta=-2$,
4) $\alpha=-7$, $\beta=2$, 5) $\alpha=7$, $\beta=-2$, 6) $\alpha=2$, $\beta=-7$,
7) $\alpha=-2$, $\beta=-7$. 8) $\alpha=-2$, $\beta=7$,

6. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ.

§ **42**. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ παράσταση:

$$(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$$

Κάνομε τὶς πράξεις μὲ τὴ σειρὰ ποὺ εἶναι σημειωμένες:

$$\underbrace{(+6)-(-5)}+(-3)-(+4)$$

$$\underbrace{(+6)+(+5)}+(-3)-(+4)$$

$$\underbrace{(+11)+(-3)}-(+4)$$

$$(+8)-(+4)=(+8)+(-4)=+4$$

Τὸ ἀποτέλεσμα $+4$ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως.

Γενικὰ ἂν α, β, γ, δ εἶναι ρητοί, ἔχομε:

$\alpha-\beta+\gamma-\delta=[(\alpha-\beta)+\gamma]-\delta$ χωρὶς περιορισμούς, γιατὶ οἱ ἀφαιρέσεις στὸ σύνολο Q εἶναι πάντοτε δυνατές.

Οἱ ἀριθμητικὲς παραστάσεις α) $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$

β) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)+(-2)$

γ) $(-1)+(-3)+(-6)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

δ) $12-6+7-14$

λέγονται **ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα.**

Ὥστε κάθε ἀριθμητικὴ παράσταση, ἡ ὁποία περιέχει ρητοὺς ἀριθμούς, ποὺ συνδέονται μὲ τὸ + ἢ τὸ —, λέγεται ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα (ἢ ἀριθμητικὸ πολυώνυμο).

Τὰ παραπάνω ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα β, γ εἶναι ἀθροίσματα πολλῶν προσθετέων (§ 35). Οἱ προσθετέοι τους λέγονται καὶ ὅροι.

Ἐπίσης καὶ τὸ δ εἶναι ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων μὲ ὅρους: 12 -6, $+7$, -14, γιατί

$$12-6+7-14=12+(-6)+(+7)+(-14)$$

(πιὸ ἁπλὴ μορφὴ ἀθροίσματος § 36 σημείωση 4)

Τὸ α' ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$ μπορεῖ νὰ γραφεῖ καὶ $(+6)+(+5)+(-3)+(-4)$. Αὐτὸ ἔχει ὅρους τούς: $+6$, $+5$, -3, -4, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὅροι καὶ τοῦ ἀρχικοῦ, καὶ τιμὴ $+4$.

Ἂν σ' ἕνα ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα προσθέσουμε τοὺς ἀντίθετους τῶν ρητῶν οἱ ὁποῖοι ἀφαιροῦνται, θὰ ἔχουμε ἕνα ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων.

Παραδείγματα:

1. $-\frac{1}{5}+\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)=\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+(-1)$

2. $7-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{3}{2}\right)+2=7+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+2$

3. $+8-(+7)-(-6)+(-5)+(+4)=+8+(-7)+(+6)+(-5)+(+4)=$
$= 8-7+6-5+4$

Παρατηρήσεις:

1. Ἕνα ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴ σειρὰ τῶν ὅρων του (§ 36). Αὐτὸ ἰσχύει καὶ σ' ἕνα ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα, ἂν στοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀφαιροῦνται μεταφέρουμε μπροστὰ τὸ σύμβολο τῆς ἀφαιρέσεως, ὅταν τοὺς ἀλλάξουμε σειρά.

$$\underbrace{(+6)}_{\text{προσθετ.}} \underbrace{-(-5)}_{\text{ἀφαιρ.}} \underbrace{+(-3)}_{\text{προσθετ.}} \underbrace{-(+4)}_{\text{ἀφαιρ.}} = \underbrace{-(-5)}_{\text{ἀφαιρ.}} \underbrace{+(+6)}_{\text{προσθετ.}} \underbrace{-(+4)}_{\text{ἀφαιρ.}} \underbrace{+(-3)}_{\text{προσθετ.}}$$

Δηλαδὴ κάθε ἀριθμὸς ποὺ προσθέτεται (ἢ ἀφαιρεῖται) στὸ πρῶτο μέλος, πρέπει νὰ προσθέτεται (ἢ νὰ ἀφαιρεῖται) καὶ στὸ δεύτερο μέλος.

Εἴπαμε ὅτι ὅροι τοῦ $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$ εἶναι οἱ ὅροι τοῦ $(+6)+(+5)+(-3)+(-4)$. Δηλαδὴ οἱ $+6$, $+5$, -3, -4.

Ἐπειδή:
$$\begin{aligned} (+6) &= +(+6) = +6 \\ -(-5) &= +(+5) = +5 \\ +(-3) &= +(-3) = -3 \\ -(+4) &= +(-4) = -4, \end{aligned}$$

μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε σὰν ὅρους τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$ τοὺς $+6$, $-(-5)$, -3, $-(+4)$

Σημείωση: Γιὰ νὰ ἀποφύγουμε λάθη, ἡ ἀντιμετάθεση τῶν ὅρων ἀλγ. ἀθροίσματος γίνεται συνήθως, ὅταν μετατραπεῖ σὲ ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων.

Ὑπενθυμίζομε ὅτι κάθε θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει μπροστά του τὸ + (ἢ κανένα πρόσημο) προσθέτεται, π.χ. οἱ ἀριθμοὶ $+(+6)$, $+(-3)$, $(+6)$ προσθέτονται. Ἂν ὑπάρχει μπροστά του τὸ $-$, ἀφαιρεῖται, δηλαδὴ προσθέτεται ὁ ἀντίθετός του. Π.χ. $-(-5)=+(+5)=+5=5$

2. Ἔχομε:

$$(+6)-(-5)+(-3)-(+4)=(+6)+(+5)+(-3)+(-4)=6+5-3-4$$
$$(+6)-(-5)-(+3)+(-4)=(+6)+(+5)+(-3)+(-4)=6+5-3-4.$$

Ἀπ' αὐτὰ παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἁπλουστευμένη γραφὴ ἑνὸς ἀθροίσματος μπορεῖ νὰ προέρχεται ἀπὸ ἕνα ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖο ἔχει γραφεῖ μὲ διάφορους τρόπους.

Π.χ. τό: $-6+3-1+2=(-6)+(+3)+(-1)-(-2)$ ἢ
$=-(+6)-(-3)+(-1)+(+2)$ ἢ
$=+(-6)+(+3)-(+1)+(+2)$ κ.λ.π.

Ἐφαρμογές:

1. α) $(-3)+(-6)-(-8)=(-3)+(-6)+(+8)=(-9)+(+8)=-1$

β) $(+3)-(-6)-(+8)=(+3)+(+6)+(-8)=(+9)+(-8)=+1$

Τὰ παραπάνω ἀθροίσματα ἔχουν ἀντίθετους ὅρους καὶ λέγονται ἀντίθετα.

2. Προσθέτομε δύο ἀλγ. ἀθροίσματα π.χ: $[(-4)+(-5)-(-10)]+[-(-6)-(+9)]=$

$[(-4)+(-5)+(+10)]+[(+6)+(-9)]=(-4)+(-5)+(+10)+(+6)+(-9)=$

$=(+16)+(-18)=-2$

$[(-9)+(+10)]+[\;-3\;]=[+1]+[-3]=-2.$

Ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο παραπάνω ἀθροισμάτων βρέθηκε μὲ δύο τρόπους.

α) Σχηματίσαμε ἕνα ἄθροισμα ἀπὸ τοὺς ὅρους τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων καὶ βρήκαμε τὴν τιμή του κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 36 ἐφαρμογὴ 1) καὶ

β) Βρήκαμε τὴν τιμὴ καθενὸς ἀπὸ τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα καὶ καταλήξαμε σὲ ἄθροισμα δύο ρητῶν.

3. $[(-4)+(-5)-(-10)]-[-(-6)-(+9)]=[(-4)+(-5)+(+10)]-[+(+6)+(-9)]$

$=[(-4)+(-5)+(+10)]+[+(-6)+(+9)]=[+1]+[+3]=+4$

Γιὰ νὰ ἀφαιρέσουμε ἕνα ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα, προσθέτομε τὸ ἀντίθετό του.

Ἀσκήσεις:

81. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ παρακάτω ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

α) $(-4)-(+3)+(-15)$, γ) $\frac{7}{2}-(+2)+\left(+\frac{1}{2}\right)-(+2{,}5)-(-0{,}5)$

β) $-(+10)-8-(-16)+(-7)+1$, δ) $-\frac{3}{11}-\left(-\frac{4}{22}\right)+(-1)-\left(+\frac{8}{11}\right)$

82. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ παρακάτω ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

α) $[-5-(-9)+(-13)+(+17)]+(-13)$,

β) $\left[(-12)+(+7)-(+19)-\left(-\frac{29}{2}\right)\right]+\left(+\frac{1}{2}\right)$

γ) $\left[\frac{1}{2}-(-2)+\left(-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)-(+3)\right]$

δ) $-\frac{38}{5}-\left[1-(+7)-\left(-\frac{2}{5}\right)\right]$

ε) $\left[+3-(+6)-\left(-\frac{22}{3}\right)\right]\left[\left(-\frac{2}{3}\right)-(-3)+(+2)\right]$

83. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ παρακάτω ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

α) $\alpha+\beta+\gamma$, β) $-\alpha-\beta-\gamma$, γ) $\alpha-\beta+\gamma$, δ) $-\alpha-\beta+\gamma$,

ε) $\alpha-\beta-\gamma$, στ) $-\alpha+\beta-\gamma$, ζ) $-\alpha+\beta+\gamma$,

ἂν $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{3}{4}$ καὶ $\gamma=1$.

7. Η ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q. ΔΙΑΤΑΞΗ.

§ 43. *Τί σημαίνει ἡ σχέση $\alpha>\beta$; Τί ἡ $\gamma<\delta$;*

Ξέρομε ὅτι ἡ σχέση $\alpha>\beta$ σημαίνει «ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β». Ἡ σχέση αὐτὴ λέγεται ἀνισότητα μὲ πρῶτο μέλος τὸν α καὶ δεύτερο μέλος τὸν β.

Ἡ ἀνισότητα $\gamma < \delta$ ἐκφράζει ὅτι «ὁ γ εἶναι μικρότερος τοῦ δ».

Οἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\varepsilon > \zeta$ εἶναι ὁμόστροφες (ἢ τῆς ἴδιας φορᾶς).

Οἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\gamma < \delta$ εἶναι ἑτερόστροφες (ἢ ἀντίθετης φορᾶς).

Παρατηροῦμε τὸ σχῆμα 28, τὸ ὁποῖο παριστάνει ἕνα μέρος τῆς θερμομετρικῆς κλίμακας. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ θερμοκρασία $+3^0$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ θερμοκρασία 0^0 καὶ ὅτι ἡ θερμοκρασία 0^0 εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ θερμοκρασία -2^0.

σχ. 28.

Ἐπίσης ἡ θερμοκρασία -1^0 εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ θερμοκρασία -4^0.

Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς:

1. Κάθε θετικὸς ρητὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ μηδὲν ἢ ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι μικρότερο ἀπὸ κάθε θετικὸ ἀριθμό.

$$\alpha \in Q \text{ καὶ } \alpha \text{ εἶναι θετικὸς } \Leftrightarrow \alpha > 0$$

2. Τὸ μηδὲν εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸ ἢ ὅτι κάθε ἀρνητικὸς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ μηδὲν

$$\beta \in Q \text{ καὶ } \beta \text{ εἶναι ἀρνητικὸς } \Leftrightarrow \beta < 0$$

3. Κάθε θετικὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικό.

$$\alpha \text{ εἶναι θετικὸς ρητὸς καὶ } \beta \text{ ἀρνητικὸς } \Rightarrow \alpha > \beta.$$

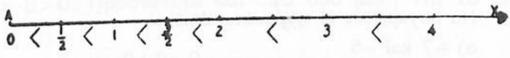
4. Μεταξὺ δύο θετικῶν ρητῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴ μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμή.

$$\alpha, \gamma \text{ θετικοὶ καὶ } |\alpha| > |\gamma| \Rightarrow \alpha > \gamma$$

5. Μεταξὺ δύο ἀρνητικῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴ μικρότερη ἀπόλυτη τιμή.

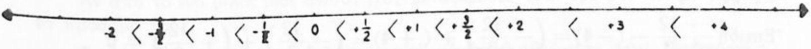
$$\beta, \delta \text{ ἀρνητικοὶ καὶ } |\beta| > |\delta| \Rightarrow \beta < \delta.$$

Ξέρομε ὅτι κάθε ἀριθμός, ποὺ εἶναι τοποθετημένος δεξιότερα ἀπὸ ἕναν ἄλλο στὴν εὐθεία τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτόν.



σχ. 29.

Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τοὺς ρητούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι τοποθετημένοι στὴν εὐθεία τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



σχ. 30

§ **44.** *Νὰ συγκριθεῖ ἡ διαφορὰ δύο ρητῶν μὲ τὸ μηδέν.*

$\left(+\frac{1}{2}\right)-0=\left(+\frac{1}{2}\right)+0=+\frac{1}{2}$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς

$0-(-1)=0+(+1)=+1$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς

$(+5)-(-2)=(+5)+(+2)=+7$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς

$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{12}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{12}{3}\right)=+\frac{10}{3}$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικ. ἀρθμ.

$\left(-\frac{5}{8}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right)=\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)=0$ ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ μηδὲν

$(+3)-(+5)=(+3)+(-5)=-2$ ἡ διαφορὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

$(-6)-(-5)=(-6)+(+5)=-1$ ἡ διαφορὰ εἶναι ἀρνητ. ἀριθμὸς

Ἀπὸ αὐτὰ παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

1. Ἡ διαφορὰ ἑνὸς μικρότερου ἀπὸ ἕναν μεγαλύτερο εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

2. Ἡ διαφορὰ δύο ἴσων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν.

3. Ἡ διαφορὰ ἑνὸς μεγαλύτερου ἀπὸ ἕναν μικρότερο εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἑπομένως διατυπώνομε τὸν παρακάτω ὁρισμό:

Ὁ ρητὸς α εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ρητὸ β, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός· εἶναι ἴσος μὲ τὸν β, ἐὰν α—β ἰσοῦται μὲ μηδέν· εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν β, ἐὰν α—β εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Συμβολικά: $\alpha,\ \beta \in Q$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha-\beta>0 &\Leftrightarrow \alpha>\beta \\ \alpha-\beta=0 &\Leftrightarrow \alpha=\beta \\ \alpha-\beta<0 &\Leftrightarrow \alpha<\beta \end{aligned}}$$

Ἐφαρμογή.

Νὰ συγκριθοῦν οἱ παρακάτω ἀριθμοί.

α) $+7$ καὶ -5

Ἔχομε $(+7)-(-5)=(+7)+(+5)=+12>0$

Ἄρα $+7>-5$

β) -13 καὶ -12

Εἶναι $(-13)-(-12)=(-13)+(+12)=-1<0$

Ἑπομένως $-13<-12$

γ) $-\frac{12}{3}$ καὶ -4

Ἐπειδὴ $-\frac{12}{3}-(-4)=\left(-\frac{12}{3}\right)+(+4)=\left(-\frac{12}{3}\right)+\left(+\frac{12}{3}\right)=0$

$$\Rightarrow -\frac{12}{3}=-4.$$

§ 45. Ἰδιότητες.

1. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀνισότητες

$+7>+2$ καὶ $+2>-10$ συνεπάγονται τὴν ἀνισότητα $+7>-10$.
Δηλαδὴ ἰσχύει ἡ μεταβατικὴ ἰδιότητα στὴν ἀνισότητα.

Γενικά: $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma \Rightarrow \alpha>\gamma \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$

Αὐτὸ δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma$, ἔχομε ὅτι $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς καὶ $\beta-\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Τὸ ἄθροισμά τους: $\alpha-\beta+\beta-\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἀλλὰ $-\beta$ καὶ β εἶναι ἀντίθετοι: ἄρα $\alpha\underbrace{-\beta+\beta}_{0}-\gamma=\alpha-0-\gamma=\alpha-\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἑπομένως $\alpha>\gamma$.

2. Ἐπειδὴ $+\frac{5}{9}>0$ καὶ ὁ ἀντίθετός του $-\frac{5}{9}<0$, ἔχομε γενικὰ τὴν ἰσοδυναμία: $\alpha>0 \Leftrightarrow -\alpha<0 \quad (\alpha \in Q)$

3. Ἐπίσης ἀπὸ τὰ παραδείγματα:

$$-3-(-8)=-3+(+8)=+5, \quad -3>-8$$
$$-8-(-3)=-8+(+3)=-5, \quad -8<-3$$

Ἔχομε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \beta<\alpha \quad (\alpha,\ \beta \in Q)$

Δικαιολόγηση:

$\alpha>\beta$, συνεπάγεται ὅτι $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός· ἀλλὰ τότε ὁ ἀντίθετός του $\beta-\alpha$ θὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Συνεπῶς $\beta<\alpha$.

4. Ἂν καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητας προσθέσουμε τὸν ἴδιο ρητό, βρίσκομε ὁμόστροφη ἀνισότητα. π.χ. $-5>-12$ προσθέτομε τὸν -3:

$$-5+(-3)>-12+(-3) \quad \text{δηλαδὴ } -8>-15$$

Γενικά: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$

Δικαιολόγηση:

Ἐπειδὴ $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha-\beta>0$. Προσθέτομε καὶ στὰ δύο μέλη της τὸ μηδέν:

$$\alpha-\beta+0>0$$

$$\alpha-\beta+\gamma-\gamma>0 \Rightarrow \alpha+\gamma-\beta-\gamma>0 \Rightarrow \alpha+\gamma-(\beta+\gamma)>0 \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$$

Ἐφαρμογή

$\alpha+\beta>\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta+(-\beta)>\gamma+(-\beta) \Rightarrow \alpha>\gamma-\beta.$

Ἂν ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος μιᾶς ἀνισότητας μεταφέρουμε ἕναν ὅρο στὸ ἄλλο, ἀλλάζομε τὸ πρόσημό του.

5. Νὰ διατυπώσετε μὲ λόγια καὶ νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰδιότητα:

$$\alpha>\beta \Rightarrow \alpha-\gamma>\beta-\gamma \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$$

§ 46. Διάταξη.

Ἂν δοθοῦν δύο ρητοὶ ἀριθμοί, αὐτοὶ ἢ εἶναι ἴσοι ἢ ὁ ἕνας εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἄλλο.

Τὴν ἔκφραση «. . . εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος . . .» τὴ συμβολίζομε μὲ $\leqslant$.

Ἂν λάβουμε ὑπ' ὄψη τὶς ἰδιότητες τῆς ἀνισότητας καὶ τῆς ἰσότητας, παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες.

$\alpha \leqslant \alpha$	ἀνακλαστική
$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$	ἀντισυμμετρική
$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$	μεταβατική

Τὴ σχέση $\leqslant$ τὴ λέμε διάταξη τῶν ρητῶν κατὰ μέγεθος.

Σημείωση: Κάθε σχέση, ποὺ ἔχει τὶς ἰδιότητες «ἀνακλαστική», «ἀντισυμμετρική» καὶ «μεταβατική» λέγεται σχέση διατάξεως.

Ἀσκήσεις:

84. Ἀπὸ τὰ σύμβολα $>$, $<$, $=$ νὰ βάλετε τὸ κατάλληλο μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν: -2 καὶ -5, -1 καὶ $-\frac{3}{2}$, 0 καὶ -6, $-\frac{5}{6}$ καὶ $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ καὶ 0, $-\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{1}{3}$
$-\frac{2}{14}$ καὶ $-\frac{1}{7}$, $(-3+1)$ καὶ -8.

85. Ποιὲς ἀπὸ τὶς ἑπόμενες σχέσεις εἶναι ἀληθεῖς;
α) $-12+15-2 > 3-13+17-7$, β) $-2+12-5 = 2-3+10$,
γ) $-10 > -\frac{21}{2}$, δ) $-50 < -\frac{1}{2}$, ε) $-\frac{3}{4} > 0$, στ) $0 < -20$,
ζ) $-1+\frac{24}{5} > -0{,}6+4{,}2$, η) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4} < 0{,}75-\frac{5}{8}$.

86. Ἐφαρμόζοντας τὴν ἰδιότητα $\alpha+\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma-\beta$ νὰ ἀποδείξετε ὅτι:

$$\alpha+2 > 12 \Rightarrow \alpha > 10$$
$$\beta-3 < 5 \Rightarrow \beta < 8 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in Q)$$
$$2-\gamma > 2 \Rightarrow \gamma < 0.$$

87. Νὰ ἀποδείξετε μὲ ἀριθμητικὰ παραδείγματα τὶς παρακάτω ἰδιότητες καὶ νὰ τὶς διατυπώσετε καὶ μὲ λόγια: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Q$).

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta,$$
$$\alpha > \beta \text{ καὶ } \gamma = \delta \Rightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta,$$
$$\alpha > \beta \text{ καὶ } \gamma > \delta \Rightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta.$$

88. Νὰ προσθέσετε κατὰ μέλη τὶς παρακάτω ἀνισότητες:

α) $\begin{matrix} -5 < -3 \\ 3 < 5 \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} -5 < -3 \\ -4 < -1 \end{matrix}$ γ) $\begin{matrix} -5 < -3 \\ 1 < 3. \end{matrix}$

Τί παρατηρεῖτε; Μπορεῖτε νὰ ἀφαιρέσετε κατὰ μέλη; Διατυπῶστε κανόνες.

Ἀσκήσεις γιὰ ἐπανάληψη:

89. Βρεῖτε τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων:

α) $0-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}-0$, $-3+4-6$, $-6+4-3$,

β) $-1-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}-1$, $-1-(-\frac{3}{2})$, $-\frac{3}{2}-(-1)$,

γ) $-1-11-111$, $-1+(-2-3)$, $-1-(-2-3)$,

δ) $-30{,}3-15{,}7+\frac{63}{5}-10+\frac{1}{2}$, $17{,}7+12{,}5-9{,}4+\frac{2}{5}-1$.

90. Ἀπαντῆστε στὰ παρακάτω ἐρωτήματα:

α) $\alpha=\beta$ συνεπάγεται $|\alpha|=|\beta|$; Ἂν $|\alpha|=|\beta|$, τί συμπέρασμα βγαίνει γιὰ τοὺς ρητοὺς α, β;

β) Ποιός εἶναι ὁ ρητὸς χ, ὅταν $|\chi|=\left|-\frac{3}{7}\right|$;

γ) Ἀληθεύει γιὰ τὸν ρητὸ γ ὅτι $\gamma=|-\gamma|$;

δ) Σὲ ποιὸ ὑποσύνολο τοῦ Q ἀνήκει ὁ ρητὸς ψ, ἂν
1) $\psi=|\psi|$, 2) $0=|\psi|$ καὶ 3) $-\psi=|\psi|$;

ε) Ποιὸς εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ $\kappa-\lambda$ καὶ ποιὸς τοῦ $-\mu+\nu$; ($\kappa, \lambda, \mu, \nu \in Q$).

91. Ἂν $\chi=-12+17-9$, $\psi=5-11+10$ καὶ $z=-19+22$, νὰ βρεθοῦν τὰ

α) $\chi+\psi-z$, β) $\chi-\psi+z$, γ) $-\chi+z+\psi$ καθὼς καὶ τὰ

δ) $\chi+\psi+z$, ε) $(\chi+\psi)+z$, στ) $\chi+(\psi+z)$

92. Ἂν $\chi=-\frac{5}{6}+\frac{7}{3}-1$ καὶ $\psi=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+3$, νὰ βρεθοῦν τὰ

α) $\chi+\psi$, β) $\chi-\psi$, γ) $-\chi+\psi$.

93. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ α) $-\alpha+\beta-\gamma$, β) $-\gamma+\beta-\alpha$, γ) $-\alpha-\gamma+\beta$,

ἂν $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{5}{3}$, $\gamma=+\frac{1}{6}$

94. Νὰ διατάξετε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, -5, +\frac{1}{8}, +1, 0\}$ κατὰ τάξη μεγέθους.

95. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω σχέσεις εἶναι ἀληθεῖς;

α) $-4>-2$, β) $13>-31$, γ) $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$, δ) $-\frac{1}{5}<-1$

ε) $-\frac{3}{2}+5-1 \neq 4-1{,}5$, στ) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{2} \neq \frac{1}{3}+\frac{1}{2}$.

96. Ποιὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4{,}5\}$ ἐπαληθεύουν τὴ σχέση $\chi-5<-2$;

97. Μὲ παραδείγματα νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι:

ἂν $\alpha<\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.

98. Ἂν γιὰ τοὺς ρητοὺς α, β ἔχουμε τὴ σχέση $\alpha>\beta$, νὰ ἐξετάσετε ποιὰ σχέση ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀντιθέτων τοῦ α καὶ β.

99. Ἂν $x \in Q$, $\psi \in Q^+$, $z \in Q^-$, νὰ βρεθοῦν μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων τους τὰ σύνολα:

α) $\{x / \frac{5}{7} - x = -\frac{5}{7}\}$, β) $(\psi / \psi - 3 = -1\}$, γ) $\{x / -\frac{3}{5} - x = -\frac{3}{5}\}$,

δ) $\{\psi / \frac{1}{2} - \psi = 20\}$, ε) $\{x / -\frac{5}{2} + x = -\frac{5}{2}$, στ) $\{z / -\frac{2}{3} + z = -\frac{2}{3}\}$,

100. Ἂν $\alpha = 0$, $\beta = -1$ καὶ $\gamma = -2$, νὰ ὑπολογίσετε τὰ

1) $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha)$ καὶ 2) $-(\alpha - \beta) - (\beta - \gamma) - (\gamma - \alpha)$.

8. Η ΠΡΑΞΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΡΗΤΩΝ

§ **47**. Στὶς πράξεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, τὶς ὁποῖες ὁρίσαμε μέχρι τώρα, εἴδαμε ὅτι διατηροῦνται οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

Γι' αὐτὸ θὰ ὁρίσουμε τὸν πολλαπλασιασμὸ στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἔτσι, ὥστε νὰ ἰσχύουν οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τοῦ πολ/σμοῦ.

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ἀντιμεταθετικὴ

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ προσεταιριστικὴ

$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ἐπιμεριστικὴ

1. Ἐπειδὴ $3 \cdot 5 = 15$ εἶναι καὶ

$(+3) \cdot (+5) = +15$.

Δηλαδὴ τὸ γινόμενο δύο θετικῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

2. Στὸν πίνακα (α) παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

Ὅταν ὁ πολ/στὴς 3 ἐλαττώνεται κατὰ μία μονάδα καὶ γίνεται: 2, 1, 0, τὸ γινόμενο ἐλαττώνεται κατὰ 5 καὶ γίνεται: 10, 5, 0. Ἂν συνεχίσουμε νὰ ἐλαττώνουμε τὸν πολ/στὴ κατὰ ἕνα: -1, -2, -3, . . . πρέπει νὰ ἐλαττώνουμε καὶ τὸ γινόμενο κατὰ 5: -5, -10, -15, . . .

Δηλαδὴ πρέπει $(-1) \cdot 5 = -5$, $(-2) \cdot 5 = -10$, $(-3) \cdot 5 = -15$ κ.ο.κ. ἢ $(-1) \cdot (+5) = -5$ $(-2) \cdot (+5) = -10$ κ.ο.κ.

Δεχόμαστε ὅτι $5\,(-2) = (-2) \cdot 5 = -10$ (μεταθετικὴ ἰδιότητα τοῦ πολ/σμοῦ).

Ἑπομένως τὸ γινόμενο δύο ἑτερόσημων ρητῶν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

(α)

Παράγοντες	Γινόμενο
$3 \cdot 5$	15
$2 \cdot 5$	10
$1 \cdot 5$	5
$0 \cdot 5$	0
$-1 \cdot 5$	; -5
$-2 \cdot 5$	; -10
$-3 \cdot 5$	; -15
. .	.
. .	.
. .	.

(β)

Παράγοντες	Γινόμενο
$5 \cdot (-2)$	-10
$4 \cdot (-2)$	-8
$3 \cdot (-2)$	-6
$2 \cdot (-2)$	-4
$1 \cdot (-2)$	-2
$0 \cdot (-2)$	; 0
$(-1) \cdot (-2)$	; 2
$(-2) \cdot (-2)$	; 4
$(-3) \cdot (-2)$	; 6
. .	.
. .	.
. .	.

3. Ἀφοῦ παραδεχτήκαμε ὅτι $(-2)\cdot 5 = 5\cdot(-2) = -10$ (μεταθετικὴ ἰδιότητα τοῦ πολ/σμοῦ), παρατηροῦμε τὸν πίνακα (β).

Ὅταν ὁ πολ/στὴς 5 ἐλαττώνεται κατὰ ἕνα, τὸ γινόμενο αὐξάνεται κατὰ δύο.

Ἄρα πρέπει νὰ δεχτοῦμε ὅτι: $0\cdot(-2) = 0$, $(-1)\cdot(-2) = 2$, $(-2)\cdot(-2) = 4$, $(-3)\cdot(-2) = 6$ κ.ο.κ.

Συνεπῶς τὸ γινόμενο δύο ἀρνητικῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

§ **48**. Μποροῦμε νὰ αἰτιολογήσουμε τὰ παραπάνω, ἂν δεχτοῦμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma\ ,\quad \alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha\ ,\quad \alpha\cdot 0 = 0$$

1. Ἐπειδὴ $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5} = \frac{2\cdot 7}{3\cdot 5} = \frac{14}{15}$ ἔχομε $\boxed{\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{7}{5}\right) = +\frac{14}{15}}$

2. Εἶναι $\frac{3}{4}\cdot 0 = 0$

ἢ $\frac{3}{4}\cdot(-2+2) = 0$

ἢ $\frac{3}{4}\cdot(-2)+\frac{3}{4}\cdot 2 = 0$ (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα)

ἢ $\frac{3}{4}\cdot(-2)+\frac{6}{4} = 0$. Ἀπ' αὐτὴ παρατηροῦμε ὅτι τὸ $\frac{3}{4}\cdot(-2)$ πρέπει νὰ παριστάνει τὸν ἀντίθετο τοῦ $\frac{6}{4}$, δηλαδὴ τὸ $-\frac{6}{4}$.

Συνεπῶς $\frac{3}{4}\cdot(-2) = -\frac{6}{4}$ ἢ $\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot(-2) = -\frac{6}{4}$ καὶ

$\boxed{\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot(-2) = (-2)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{4}}$ (μεταθετικὴ ἰδιότητα)

3. Ἔχομε $(-2)\cdot 0 = 0$

ἢ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right) = 0$

ἢ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+(-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right) = 0$

ἢ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{6}{4}\right) = 0$.

Ἀπὸ τὴν τελευταία αὐτὴ ἰσότητα συμπεραίνομε ὅτι τὸ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ παριστάνει τὸν ἀντίθετο τοῦ $-\frac{6}{4}$, δηλαδὴ τὸν $+\frac{6}{4}$. Ἄρα:

$$\boxed{(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{6}{4}}$$

Ἀπ' αὐτὰ καταλήγομε στὸ συμπέρασμα ὅτι:

Τὸ γινόμενο δύο ρητῶν εἶναι ρητὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν καὶ εἶναι θετικός, ἂν αὐτοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸς ἂν εἶναι ἑτερόσημοι, καὶ μηδέν, ἂν ὁ ἕνας εἶναι μηδέν.

Συμβολικά: α, β∈Q καὶ α, β ὁμόσημοι, $\alpha\cdot\beta = |\alpha|\cdot|\beta|$

α, β ἑτερόσημοι, $\alpha\cdot\beta = -(|\alpha|\cdot|\beta|)$

$\alpha\cdot 0 = 0$

Σημείωση: Τὸ γινόμενο $\alpha\cdot\beta$ γράφεται καὶ αβ.

Παραδείγματα

$(+2)\cdot(+\frac{3}{5}) = +(2\cdot\frac{3}{5}) = +\frac{6}{5} > 0$, $(-\frac{6}{7})\cdot(+3) = -(\frac{6}{7}\cdot 3) = -\frac{18}{7} < 0$,

$(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{5}{7}) = +(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}) = +\frac{10}{21} > 0$, $(+4)\cdot(-\frac{2}{5}) = -(4\cdot\frac{2}{5}) = -\frac{8}{5} < 0$.

α, β ρητοὶ ὁμόσημοι ⇔ $\alpha\beta > 0$, α, β ρητοὶ ἑτερόσημοι ⇔ $\alpha\beta < 0$,

$0\cdot(-\frac{1}{2}) = 0$, $0\cdot(+\frac{5}{16}) = 0$, $0\cdot\alpha = 0$.

§ 49. Ἰδιότητες.

Σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ γινομένου δύο ρητῶν παρατηροῦμε ὅτι ὁ πολ/σμὸς ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ἰδιότητες, ποὺ δεχτήκαμε, ἔχει καὶ τὶς παρακάτω:

α) Ὅταν δοθοῦν δύο ρητοὶ α καὶ β, ὑπάρχει πάντοτε ὁ ρητὸς αβ (γινόμενο αὐτῶν). Συμβολικὰ α, β∈Q ⇒ α β∈Q

β) Τὸ γινόμενο δύο ρητῶν εἶναι ἕνας μόνο ρητός. Δηλαδὴ ἡ πράξη τοῦ πολ/σμοῦ εἶναι μονότιμη.

γ) Ἐπειδὴ $(+1)\cdot(+\frac{2}{3}) = +(1\cdot\frac{2}{3}) = +\frac{2}{3}$, $(-\frac{4}{7})\cdot(+1) = -(\frac{4}{7}\cdot 1) = -\frac{4}{7}$ συμπεραίνομε ὅτι ὁ ἀριθμὸς +1 εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολ/σμοῦ.

$$\alpha\in Q \Rightarrow (+1)\cdot\alpha = \alpha$$

δ) Ἐπειδὴ $(-1)\cdot(-5) = +(1\cdot 5) = +5$, $(+\frac{3}{10})\cdot(-1) = -(\frac{3}{10}\cdot 1) = -\frac{3}{10}$ συμπεραίνομε ὅτι τὸ γινόμενο ἑνὸς ρητοῦ ἐπὶ (−1) εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἀντίθετό του.

$$\alpha\in Q \Rightarrow (-1)\cdot\alpha = -\alpha$$

ε) Ἔχομε:

$(+2)\cdot(+\frac{1}{2}) = +(2\cdot\frac{1}{2}) = +1$, $(+\frac{5}{3})\cdot(+\frac{3}{5}) = +(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}) = +1$

$(-2)\cdot(-\frac{1}{2}) = +(2\cdot\frac{1}{2}) = +1$, $(-\frac{5}{3})\cdot(-\frac{3}{5}) = +(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}) = +1$

Ἄρα δύο ὁμόσημοι ρητοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντίστροφες ἀπόλυτες τιμές, ἔχουν γινόμενο τὸ $+1$. Οἱ ρητοὶ αὐτοὶ λέγονται ἀντίστροφοι.

Συνεπῶς ὅταν δοθεῖ ἕνας ρητὸς α ($\alpha \neq 0$), ὑπάρχει ἕνας μόνο ρητὸς ὁμόσημος μὲ αὐτὸν καὶ μὲ ἀντίστροφη ἀπόλυτη τιμή, ὁ ὁποῖος λέγεται ἀντίστροφος τοῦ α καὶ συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{\alpha}$ ἢ α^{-1}

Συντομότερα:

Γιὰ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδὲν) ὑπάρχει ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ Q, τὸ ὁποῖο λέγεται ἀντίστροφο αὐτοῦ.

Π.χ. ὁ ἀντίστροφος τοῦ $+20$ εἶναι ὁ $+\frac{1}{20}$, τοῦ -48 εἶναι ὁ $-\frac{1}{48}$ τοῦ $-\frac{17}{19}$ εἶναι ὁ $-\frac{19}{17}$ τοῦ $+1$ εἶναι ὁ $+1$ καὶ τοῦ -1 εἶναι ὁ -1.

Ἀσκήσεις:

101. Βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $+1\cdot(-1)$, $(+8)\cdot(+1)$, $-\frac{3}{5}\cdot(-1)$, $(-\frac{15}{7})\cdot(+1)$

β) $0\cdot(-12)$, $(-\frac{4}{21})\cdot(-\frac{21}{4})$, $(+\frac{1}{2})\cdot(+2)$, $(+\frac{3}{8})\cdot(-\frac{8}{3})$

102. Βρῆτε τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων:

α) $-\frac{13}{15}\cdot(-\frac{15}{13})+8\cdot(-\frac{1}{8})$, β) $-\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{41}{61}\cdot\frac{61}{41}+(-\frac{101}{119})\cdot(-\frac{119}{101})$

γ) $\frac{5}{3}\cdot(-\frac{3}{5})+\frac{1}{2}\cdot(-2)+15\cdot(-\frac{1}{15})+\frac{46}{3}\cdot(-\frac{3}{23})$

δ) $-\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{4}+\frac{10}{17}\cdot(-\frac{17}{10})+\frac{21}{29}\cdot(-\frac{29}{21})$.

103. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα μὲ τὸν συντομότερο τρόπο:
[χρησιμοποιῆστε τὴν ἰδιότητα: $\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma)$]

α) $5\cdot(-7)+5\cdot27$, β) $6\cdot(-12)-6\cdot18$, γ) $59\cdot(-19)+59\cdot9$,

δ) $-\frac{2}{5}\cdot11-\frac{2}{5}\cdot19$, ε) $-21\cdot(-17)+(-21)\cdot(-13)$, στ) $\frac{15}{23}\cdot(-18)-\frac{30}{46}\cdot12$.

104. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ παρακάτω γινόμενα μὲ δύο τρόπους:

α) $-5\cdot(+12-19)$, β) $\frac{3}{4}\cdot(-\frac{2}{3}+\frac{5}{6})$, γ) $(-4+\frac{7}{2}-\frac{3}{5})\cdot(-\frac{10}{11})$

δ) $(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{6})\cdot(-\frac{24}{13})$, ε) $(\frac{2{,}1}{7}-\frac{11}{5}+\frac{7}{2}-1)\cdot(-\frac{70}{19})$.

105. Ποιὸ συμπέρασμα ἐξάγεται γιὰ τοὺς ρητοὺς α, β, ἂν $\alpha\beta>0$ ἢ $\alpha\beta=0$ ἢ $\alpha\beta<0$;

9. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΡΗΤΩΝ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 50. *Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ γινόμενο* $2\cdot(-3)\cdot4$.

Βρίσκομε τὸ γινόμενο τῶν δύο πρώτων παραγόντων, $2\cdot(-3)=-6$

καὶ κατόπι πολλαπλασιάζομε τὸ γινόμενο αὐτὸ μὲ τὸν τρίτο παράγοντα.

Αὐτὸ τὸ γράφομε καὶ ὡς ἑξῆς:

$$2\cdot(-3)\cdot4 = [2\cdot(-3)]\cdot4 = (-6)\cdot4 = -24.$$

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε, ἂν ἔχουμε περισσότερους ἀπὸ τρεῖς παράγοντες.

Ὥστε γινόμενο τριῶν ἢ περισσότερων ρητῶν εἶναι ὁ ρητός, τὸν ὁποῖο βρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς δύο πρώτους, τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βροῦμε μὲ τὸν τρίτο κ.ο.κ.

Συμβολικά: $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta = [(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma]\cdot\delta \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta\in Q)$.

Παραδείγματα :

$$(+2)\cdot(+4)\cdot(+5) = [(+2)\cdot(+4)]\cdot(+5) = (+8)\cdot(+5) = +40 = +(2\cdot4\cdot5)$$
$$(-2)\cdot(+4)\cdot(+5) = [(-2)\cdot(+4)]\cdot(+5) = (-8)\cdot(+5) = -40 = -(2\cdot4\cdot5)$$
$$(-2)\cdot(-4)\cdot(+5) = [(-2)\cdot(-4)]\cdot(+5) = (+8)\cdot(+5) = +40 = +(2\cdot4\cdot5)$$
$$(-2)\cdot(-4)\cdot(-5) = [(-2)\cdot(-4)]\cdot(-5) = (+8)\cdot(-5) = -40 = -(2\cdot4\cdot5)$$

Ἀπ' αὐτὰ παρατηροῦμε ὅτι:

Ἕνα γινόμενο μὲ περισσότερους ἀπὸ δύο παράγοντες ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν παραγόντων του καὶ εἶναι θετικό, ἂν οἱ παράγοντές του εἶναι θετικοὶ ἢ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός· εἶναι ἀρνητικό, ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

Μὲ βάση τὸν προηγούμενο κανόνα νὰ ὑπολογίσετε τὰ γινόμενα:

$$(+2)\cdot(+3)\cdot(+4)\cdot(+5) = +(2\cdot3\cdot4\cdot5) = +120$$
$$(-2)\cdot(+3)\cdot(+4)\cdot(+5) = -(2\cdot3\cdot4\cdot5) = -120$$
$$(+2)\cdot(+3)\cdot(-4)\cdot(-5) = +(2\cdot3\cdot4\cdot5) = +120$$
$$(+2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5) = -(2\cdot3\cdot4\cdot5) = -120$$
$$(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5) = +(2\cdot3\cdot4\cdot5) = +120$$

Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι θετικοὶ ἔχομε:

$$(-\alpha)\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta = -(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)$$
$$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot\gamma\cdot\delta = (\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)$$
$$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)\cdot\delta = -(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)$$
$$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)\cdot(-\delta) = (\alpha\cdot\beta\cdot\delta\cdot\gamma)$$

Σημείωση: Τὸ γινόμενο $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$ γράφεται καὶ αβγδ.

§ 51. Ἰδιότητες.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενο ρητῶν ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους, ἰσχύουν σ' αὐτὸ ὅλες οἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

1. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\gamma)\cdot\beta$
2. $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot(\delta\cdot\varepsilon)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon$
3. $\alpha\beta\gamma\delta=\gamma\alpha\delta\beta=\beta\alpha\delta\gamma=\dots$
4. $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$

Π.χ. $[(-2)\cdot(-5)]\cdot(-6)=(+10)\cdot(-6)=-60$

$(-2)\cdot[(-5)\cdot(-6)]=(-2)\cdot(+30)=-60$. Ἄρα

$[(-2)\cdot(-5)]\cdot(-6)=(-2)\cdot[(-5)\cdot(-6)]$ καὶ γενικὰ

$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐφαρμογές:

α) $2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=-\left(1\cdot1\cdot\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$

β) $(-2)\cdot(-2)=(2\cdot2)=2^2$, $\quad(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-(3\cdot3\cdot3)=-3^3$

γ) $\left(-\frac{3}{4}\cdot5\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\cdot2\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot5\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot2=$

$=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot5\cdot2\right)=1\cdot10=10$

δ) $[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-2)\cdot(-2)]=[-(2\cdot2\cdot2)]\cdot[+(2\cdot2)]=$

$[-2^3]\cdot(+2^2]=-(2^3\cdot2^2]=-2^5$

ε) $[(-3)+(-6)]\cdot[(-8)+(-6)]=(-3)\cdot[(-8)+(-6)]+(-6)\cdot[(-8)+(-6)]=$

$=24+18+48+36=126$

$[(-3)+(-6)]\cdot[(-8)+(-6)]=[-9]\cdot[-14]=126$. (β΄ τρόπος πιό ἁπλός).

στ) $(-2+\alpha)\cdot(-3+\beta)=(-2)\cdot[-3+\beta]+\alpha[-3+\beta]=(-2)\cdot(-3)+(-2)\beta+\alpha(-3)+\alpha\beta$

$=6-2\beta-3\alpha+\alpha\beta.$

ζ) $-2\cdot(-3+\alpha)+(-5+\alpha)\cdot3=(-2)\cdot(-3)+(-2)\cdot\alpha+(-5)\cdot3+3\alpha$

$=6-2\alpha+(-15)+3\alpha=$

$=6-2\alpha-15+3\alpha=$

$=6-15+3\alpha-2\alpha=$

$=-9+\alpha$

§ 52. Ἀπόλυτη τιμὴ γινομένου ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἔχομε: $|(-2)\cdot(+\frac{3}{4})|=|-\frac{6}{4}|=\frac{6}{4}$

$|-2|\cdot|+\frac{3}{4}|=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$

Συνεπῶς $|(-2)\cdot(+\frac{3}{4})|=|(-2)|\cdot|+\frac{3}{4}|$.

Ὥστε ἡ ἀπόλυτη τιμὴ ἑνὸς γινομένου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Γενικὰ ἂν $\alpha, \beta \in Q$, εἶναι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἰσχύει καὶ γιὰ περισσότερους ἀπὸ δύο παράγοντες.

Ἰδιότητες ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων

§ 53. α) Ἰδιότητα: Ἂν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma \in Q)$

Π.χ. Ἔχομε τὴν ἰσότητα $-\frac{4}{5} = -\frac{8}{10}$ καὶ πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸν ρητὸ -5.

α' μέλος $-\frac{4}{5} \cdot (-5) = +4$

β' μέλος $-\frac{8}{10} \cdot (-5) = +\frac{8}{2}$ ἄρα $-\frac{4}{5} \cdot (-5) = -\frac{8}{10}(-5)$

Ἑπομένως μποροῦμε νὰ πολ/σουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητας μὲ τὸν ἴδιο ρητὸ καὶ νὰ λάβουμε ἰσότητα.

β) Ἰδιότητα: Ἂν $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ καὶ $\gamma \neq 0$, θὰ ἔχουμε καὶ $\alpha = \beta$ $(\alpha, \beta, \gamma \in Q)$.

Π.χ. ἂν $\chi \cdot (-5) = (-4) \cdot (-5)$, $(\chi \in Q)$ πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ -5.

α' μέλος: $[\chi \cdot (-5)] \cdot (-\frac{1}{5}) = \chi \cdot [(-5) \cdot (-\frac{1}{5})] = \chi \cdot (+1) = \chi$

β' μέλος $[(-4) \cdot (-5)] \cdot (-\frac{1}{5}) = (-4) \cdot [(-5) \cdot (-\frac{1}{5})] = (-4) \cdot (+1) = -4$

Ἄρα $\chi = -4$

§ 54. α) Ἰδιότητα: Ἂν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > 0$ εἶναι καὶ

$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, $(\alpha, \beta \in Q, \gamma \in Q^+)$

Π.χ. $-3 > -4$ πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸ $+2$ καὶ ἔχομε:

α' μέλος: $(-3) \cdot (+2) = -6$

β' μέλος: $(-4) \cdot (+2) = -8$

Ἄρα $(-3) \cdot (+2) > (-4) \cdot (+2)$

β) Ἰδιότητα: Ἂν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma < 0$ εἶναι καί:

$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ $(\alpha, \beta \in Q, \gamma \in Q^-)$

Π.χ. $+\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$ πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸν -2

α' μέλος: $(+\frac{2}{3}) \cdot (-2) = -\frac{4}{3}$

β' μέλος: $-\frac{4}{5} \cdot (-2) = +\frac{8}{5}$ καὶ ἐπειδὴ $-\frac{4}{3} < +\frac{8}{5}$, ἔχομε ὅτι: $(+\frac{2}{3}) \cdot (-2) < (-\frac{4}{5}) \cdot (-2)$. Ἑπομένως:

Ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητας μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, διάφορο τοῦ μηδενός, προκύπτει ὁμόστροφη ἀνισότητα, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός, καὶ ἑτερόστροφη ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.

Ἐφαρμογές :

§ **55.** 1. Πολλαπλασιάζομε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητας $-10+7=-3$ ἐπὶ τὸν -1.
$-10+7=-3 \Rightarrow (-10+7)\cdot(-1)=-3\cdot(-1) \Rightarrow (-10)\cdot(-1)+7\cdot(-1)=3 \Rightarrow 10-7=3$
Δηλαδὴ μποροῦμε νὰ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἰσότητας.

Γενικά: $(\alpha,\beta,\gamma \in Q)$ ἂν $\alpha-\beta=\gamma \Rightarrow -\alpha+\beta=-\gamma$

2. Πολλαπλασιάζομε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητας $-\frac{1}{3}>-2$ ἐπὶ τὸν -1.
$-\frac{1}{3}>-2 \Rightarrow -\frac{1}{3}(-1)<(-2)\cdot(-1) \Rightarrow \frac{1}{3}<2$

Μποροῦμε νὰ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἀνισότητας, ἂν ἀλλάξουμε τὴ φορά της.

Γενικά: $(\alpha,\beta,\gamma \in Q)$. Ἂν $\alpha+\beta>\gamma \Rightarrow -\alpha-\beta<-\gamma$.

§ 56. Ἀνακεφαλαίωση:

Ἀπὸ ὅσα ἀναφέρονται στὸν πολ/σμὸ τῶν ρητῶν συμπεραίνομε ὅτι:

α. Ὅταν δοθοῦν δύο ρητοὶ α καὶ β, ὑπάρχει ὁ ρητὸς αβ (γινόμενο αὐτῶν).

Συμβολικὰ $\alpha,\beta \in Q$ καὶ $\alpha\beta \in Q$. Δηλαδή:
Ἂν α, β εἶναι ὁμόσημοι, τότε $\alpha\beta=|\alpha|\cdot|\beta|$
ἂν α, β εἶναι ἑτερόσημοι, τότε $\alpha\beta=-(|\alpha|\cdot|\beta|)$,
ἂν ὁ ἕνας εἶναι μηδέν, τότε $\alpha\cdot\beta=0$.
Σὲ ὅλες τὶς παραπάνω περιπτώσεις ἔχομε

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$$

β. Τὸ γινόμενο δύο ρητῶν εἶναι ἕνας καὶ μόνο ἕνας ρητὸς (μονότιμο τοῦ πολ/σμοῦ).

γ. Ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ἰδιότητα: $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$, $(\alpha,\beta\in Q)$

δ. Ὅταν δοθοῦν οἱ ρητοὶ α, β καὶ γ, ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολ/σμοῦ: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

ε. Ὑπάρχει ἕνα στοιχεῖο τοῦ Q, τὸ +1, τὸ ὁποῖο εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολ/σμοῦ.

$$\alpha\in Q \Rightarrow \alpha\cdot(+1)=\alpha$$

στ. Γιὰ κάθε στοιχεῖο τοῦ Q, (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδὲν) ὑπάρχει ἕνα ἄλλο στοιχεῖο αὐτοῦ (καὶ εἶναι μοναδικό), τὸ ὁποῖο εἶναι ἀντίστροφό του.

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ ρητοῦ α $(\alpha\neq0)$ εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha}$ ἢ α^{-1} καὶ $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$

ζ. Γιὰ τοὺς ρητοὺς α, β καὶ γ ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα:

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

Ἀσκήσεις:

106. Νὰ βρεθοῦν τὰ γινόμενα:

α) $(-8)\cdot(-13)\cdot(+2)\cdot(-5)$, β) $(-125)\cdot(-8)\cdot(+179)\cdot(-1)$,

γ) $-\frac{17}{19}\cdot\left(-\frac{3}{16}\right)\cdot(+4)\cdot\left(+\frac{19}{17}\right)\cdot\left(-\frac{16}{3}\right)\cdot$

δ) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{2}\right)\cdot$

ε) $(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$

στ) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

107. Νὰ βρεθοῦν τὰ γινόμενα:

α) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$, δ) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$,

β) $\left[(-2)\cdot(-3)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right)\right]\cdot(-5)$, ε) $\left[\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-5)\right]\cdot\left(-\frac{56}{6}\right)$

γ) $[(3)\cdot(-3)\cdot(-3)]\cdot[(-3)\cdot(-3)]$ στ) $\left[-\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(-\frac{11}{10}\right)\right]\cdot\left[\left(-\frac{9}{7}\right)\cdot\left(-\frac{10}{11}\right)\right]$

108. Νὰ βρεθοῦν τὰ παρακάτω γινόμενα μὲ δύο τρόπους:

α) $[(-5)+2]\cdot[(-3)+(-2)]$,

β) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left[\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$,

γ) $\left[-4+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{3}\right]\cdot\left(-\frac{15}{16}\right)$,

δ) $\left(-1+\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-2+\frac{1}{2}\right)$

109. Ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in Q$, νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι

$$|\alpha\cdot\beta\cdot\gamma| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|$$

110. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ γινόμενα:

α) $(-4+7)\cdot(-4-7)$, β) $(-5+\beta)\cdot(\alpha-3)$, γ) $(-3+5)\cdot(-3+5)$,

δ) $(-4+\beta)\cdot(+3+\alpha)$, ε) $(-4-6)\cdot(-4-6)$, στ) $(\alpha-5)\cdot(\alpha+5)$.

111. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $3\cdot(\alpha-\beta)-4\cdot(\alpha-4)+3\cdot(\beta-2)$, β) $4(\alpha+\beta+\gamma)-3(\alpha-\beta)-2(\beta+\gamma)$.

112. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις.

α) $\chi\cdot\frac{1}{2}=1$, β) $\chi\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1$, γ) $\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\chi=1$, δ) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\chi=\frac{6}{8}$.

113. α) Στὴ θέση τοῦ ἐρωτηματικοῦ νὰ θέσετε τὸ κατάλληλο σύμβολο ἀπὸ τὰ =, >, < μεταξὺ τῶν παραστάσεων:

α) $\frac{17}{6}+\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}+3$, β) $\frac{2}{5}-1$; $-\frac{7}{5}+\frac{1}{10}$

γ) $\frac{20}{3}$; $7-\frac{1}{3}$, δ) $\frac{7}{3}$; $6-\frac{7}{2}$

β) Πολλαπλασιάστε καὶ τὰ δύο μέλη τῶν σχέσεων ποὺ βρήκατε:

1) ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν,
2) ἐπὶ τὸν ἀντίθετο τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν καὶ
3) ἐπὶ (–1).

114. Νὰ ἀλλάξετε τὸ πρόσημο τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν στὶς παρακάτω ἰσότητες καὶ ἀνισότητες. Τί παρατηρεῖτε;

α) $-\frac{20}{3}=\frac{1}{3}-7$, β) $-5>-\frac{15}{2}$, γ) $-\frac{1}{1000}>-10$,

δ) $\frac{7}{8}-1<-\frac{1}{9}$, ε) $-\chi+5=-12$, στ) $-6-\chi>-6$.

115. Πολλαπλασιάστε κατὰ μέλη τὶς παρακάτω ὁμόστροφες ἀνισότητες. Τί παρατηρεῖτε;

α) $\begin{matrix}-3>-8\\4>2\end{matrix}$ β) $\begin{matrix}-3<2\\-5<5\end{matrix}$ γ) $\begin{matrix}3>-2\\2>-3\end{matrix}$

116. Ἂν μεταξὺ τῶν θετικῶν ρητῶν α καὶ β ὑπάρχει ἡ σχέση $\alpha>\beta$, νὰ ἐξετάσετε ποιὰ σχέση ἰσχύει μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων τοῦ α καὶ τοῦ β.

10. Η ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΣΤΟ Q — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

§ 57. Πηλίκο δύο ρητῶν.

Νὰ βρεθεῖ ρητός, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν $-\frac{3}{5}$, *δίνει γινόμενο τὸν 6.*

Ἂν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ρητός, ἔχομε τὴν ἐξίσωση $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\chi=6$.

Ἡ διαίρεση στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς πράξη ἀντίστροφη τοῦ πολ/σμοῦ.

Διαίρεση εἶναι ἡ πράξη, κατὰ τὴν ὁποία δίνονται δύο ἀριθμοὶ καὶ βρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν δεύτερο, δίνει γινόμενο τὸν πρῶτο.

Ὥστε μποροῦμε νὰ γράψουμε:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\chi=6\Rightarrow\chi=6:\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ χ θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἰδιότητα: $\alpha=\beta\Leftrightarrow\Leftrightarrow\gamma\cdot\alpha=\gamma\cdot\beta$

Ἔχομε: $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\chi=6\Rightarrow\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\cdot\chi\right]=\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 6\right.$

$$\Rightarrow\left[\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\cdot\chi=6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad [+1]\cdot x = 6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$x = 6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$$

Ἄρα $\quad x = 6 : \left(-\frac{3}{5}\right) = 6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$

Ὥστε διαίρεση εἶναι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη.

$$(\alpha,\ \beta \in Q) \qquad \alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \qquad (\beta \neq 0)$$

Ἐφαρμογὲς

$$(+12) : (+3) = (+12)\cdot\left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{12}{3} = +4$$

$$(-15) : (-5) = (-15)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = +\frac{15}{5} = +3$$

$$(+24) : (-7) = (+24)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{24}{7}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) : \left(+\frac{4}{9}\right) = \left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(+\frac{9}{4}\right) = -\frac{36}{28} = -\frac{9}{7}$$

$$0 : \left(-\frac{2}{3}\right) = 0\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Ἡ διαίρεση $\left(-\frac{4}{5}\right):0$ εἶναι ἀδύνατη, διότι δὲν ὑπάρχει ἀντίστροφος τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πηλίκο αὐτό.

Ἀπ' αὐτὰ παρατηροῦμε ὅτι:

Ἂν δοθοῦν οἱ ρητοὶ α καὶ β, τὸ πηλίκο τοῦ α διὰ τοῦ β (β≠0) εἶναι θετικό, ἂν αὐτοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸ ἂν εἶναι ἑτερόσημοι, καὶ μηδὲν ἂν ὁ α εἶναι μηδέν. Ἡ ἀπόλυτη τιμή του εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν α καὶ β.

Τὸ πηλίκο $\alpha : \beta$ γράφεται καὶ μὲ μορφὴ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

Συμβολικά: 1. $\alpha\cdot\beta > 0$ τὸ $\alpha:\beta = \frac{\alpha}{\beta} > 0$

$(\alpha,\ \beta \in Q)$ 2. $\alpha\cdot\beta < 0$ τὸ $\alpha:\beta = \frac{\alpha}{\beta} < 0$ $\qquad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

3. $\alpha = 0$ τὸ $\alpha:\beta = \frac{0}{\beta} = 0$

Σημείωση: Εἴπαμε ὅτι διαίρεση εἶναι ὁ πολ/σμὸς τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη. Συνεπῶς ἐπειδὴ ὁ πολ/σμὸς εἶναι πράξη μονότιμη, καὶ ἡ διαίρεση εἶναι πράξη μονότιμη.

Ἡ διαίρεση εἶναι δυνατή, ὅταν ὑπάρχει ἀντίστροφος τοῦ διαιρέτη, ἀλλὰ ἀντίστροφος τοῦ διαιρέτη ὑπάρχει μόνον, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν.

§ 58. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ πηλίκου δύο ρητῶν εἶναι φανερό, ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

1. $\alpha : \beta \quad = (\alpha\cdot\gamma) : (\beta\cdot\gamma) \quad (\gamma\neq 0)$
2. $(\alpha+\beta+\gamma) : \delta \quad = (\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$
3. $(\alpha-\beta) : \gamma \quad = (\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$
4. $(\alpha\cdot\beta):\gamma \quad = (\alpha:\gamma)\cdot\beta = \alpha\cdot(\beta:\gamma)$
5. $\alpha : (\beta\cdot\gamma\cdot\delta) \quad = [(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta$

Ἐπαληθεύομε τὴν 1η ἰδιότητα:

$$(+3):(-4) = -\frac{3}{4}, \quad [(+3)\cdot(-2)]:[(-4)\cdot(-2)] = (-6):(+8) = -\frac{6}{8}$$

Ἄρα $(+3) : (-4) = [(+3)\cdot(-2)] : [(-4)\cdot(-2)]$

Μποροῦμε ὅμως νὰ αἰτιολογήσουμε καὶ γενικότερα τὴν ἰδιότητα $\alpha:\beta = (\alpha\cdot\gamma):(\beta\cdot\gamma)$.

Ἔχομε
$$\alpha:\beta = \alpha\cdot\frac{1}{\beta} = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}\cdot(+1) = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\left(\gamma\cdot\frac{1}{\gamma}\right) =$$
$$= \alpha\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} = \alpha\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\beta\cdot\gamma} = (\alpha\cdot\gamma):(\beta\cdot\gamma)$$

Αἰτιολογοῦμε καὶ τὴν 2η ἰδιότητα:

$$(\alpha+\beta+\gamma) : \delta = (\alpha+\beta+\gamma)\cdot\frac{1}{\delta} = \alpha\cdot\frac{1}{\delta}+\beta\cdot\frac{1}{\delta}+\gamma\cdot\frac{1}{\delta} =$$
$$= (\alpha:\delta) + (\beta:\delta) + (\gamma:\delta)$$

Ὁμοίως αἰτιολογοῦνται καὶ οἱ ὑπόλοιπες ἰδιότητες.

Σημείωση: Μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε καὶ μὲ λόγια τὶς παραπάνω ἰδιότητες. Π.χ. τὶς ἰδιότητες 1 και 2:

1. Ἂν πολ/σουμε διαιρετέο καὶ διαιρέτη μιᾶς διαιρέσεως ἐπὶ ἕναν ρητὸ διαφορετικὸ ἀπὸ τὸν μηδέν, τὸ πηλίκο δὲν μεταβάλλεται.
2. Γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἕνα ἄθροισμα διὰ ἑνὸς ρητοῦ διαφορετικοῦ ἀπὸ τὸ μηδέν, διαιροῦμε καθένα ἀπὸ τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ρητοῦ καὶ προσθέτομε τὰ πηλίκα ποὺ προκύπτουν.

Ἀσκήσεις:

117. Νὰ βρεῖτε τὰ πηλίκα: α) $(-24):(+6)$, β) $(-48):(-16)$, γ) $(-4):\left(+\frac{3}{7}\right)$
δ) $\left(+\frac{3}{8}\right):\left(-\frac{5}{7}\right)$, ε) $-\frac{10}{11}:(+3)$, στ) $(-6):\left(-\frac{15}{2}\right)$,
ζ) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{3}{10}\right)$, η) $\left(+\frac{15}{17}\right):(+15)$

118. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:
α) $\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+3\right) : (-3)$, δ) $\left[\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot 8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right]:\left(-\frac{1}{2}\right)$
β) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\right]:\left(-\frac{3}{5}\right)$, ε) $\left(-\frac{3}{4}-\frac{6}{2}+1\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$

γ) $[(-3)\cdot(-5)\cdot 4]:[(-2)\cdot(-3)]$, στ) $[(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)]:[(-3)\cdot(-3)]$

119. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\chi\cdot(-3) = -\frac{27}{31}$, β) $\chi\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = -8$, γ) $\frac{5}{8}\cdot\chi = -\frac{4}{15}$,

δ) $-\chi = \frac{3}{11}$, ε) $\chi:\left(-\frac{13}{15}\right) = -\frac{5}{26}$. στ) $\left(-\frac{2}{7}\right):\chi = -\frac{23}{7}$, ζ) $(-10)\cdot\chi = 0$.

120. Νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς ἰσοδυναμίες:

1. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha:\gamma=\beta:\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in Q,\ \gamma\neq 0)$
2. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha:\gamma>\beta:\gamma$ $(\alpha,\beta\in Q,\ \gamma\in Q^+)$
3. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha:\gamma<\beta:\gamma$ $(\alpha,\beta\in Q,\ \gamma\in Q^-)$
4. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ $(\alpha,\beta\in Q,\ \beta\neq 0)$.

Μπορεῖτε νὰ τὶς δικαιολογήσετε;

11. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ — ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

§ 59. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς παραστάσεις:

α. $-(-5)+(-2)-(+12)$

β. $-(-8+13-14)+(10-6+1)-(12-6)$

γ. $[(2-8)+(-15+17)]-[(-6+3)-(-12+7)]+(-5+3)$

δ. $(-7+2)-\left(-2+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left[\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{6}\right)+1\right]:\left(-\frac{11}{3}\right)$

ε. $\left(-3+\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(2-\frac{1}{6}\right):(-11)-\left(-\frac{3}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)$

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν παραστάσεων αὐτῶν ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμε ὅτι στὶς παραστάσεις α, β, γ δὲν ἔχουν σημειωθεῖ πολ/σμοὶ ἢ διαιρέσεις, ἑπομένως αὐτὲς μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα. Ἀλλὰ γιὰ τὰ β καὶ γ (ἀλγ. ἀθροίσματα) ὁ ρητός, ὁ ὁποῖος προσθέτεται ἢ ἀφαιρεῖται, εἶναι τὸ ἄθροισμα ποὺ βρίσκεται μέσα στὴν παρένθεση ἢ τὸ ἄθροισμα ἀθροισμάτων ἢ ἡ διαφορὰ ἀθροισμάτων, ποὺ βρίσκεται μέσα στὴν ἀγκύλη.

1. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως γ.

Α' τρόπος:
$$\begin{aligned}&[(2-8)+(-15+17)]-[(-6+3)-(-12+7)]+(-5+3)=\\&=[(-6)+2]-[(-3)-(-5)]+(-5+3)=\\&=(-4)-[-3+(+5)]+(-2)=\\&=(-4)-(+2)+(-2)=\\&=(-4)+(-2)+(-2)=-8\end{aligned}$$

Σημείωση. Ἡ ἀγκύλη, ἡ ὁποία παύει νὰ περιέχει παρενθέσεις, μετατρέπεται σὲ παρένθεση.

Ὑπολογίσαμε τὶς τιμὲς τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων, τὰ ὁποῖα βρίσκονται μέσα στὶς ἀγκύλες, καὶ καταλήξαμε σ' ἕνα ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν.

Β' τρόπος $[(2-8)+(-15+17)]-[(-6+3)-(-12+7)]+(-5+3)=$

$$[(2-8)+(-15+17)]+[-(-6+3)+(-12+7)]+(-5+3)=$$
$$(2-8)+(-15+17)-(-6+3)+(-12+7)+(-5+3)=$$
$$(2-8)+(-15+17)+(+6-3)+(-12+7)+(-5+3)=$$
$$2-8-15+17+6-3-12+7-5+3=$$
$$2-8-15+17+6-3-12+7-5+3=35-43=-8$$

Στὴν ἀρχὴ προσθέσαμε τὸ ἀντίθετο τῶν ἀθροισμάτων, ποὺ βρίσκονται μέσα στὴ δεύτερη ἀγκύλη, ἡ ὁποία ἔχει μπροστά της τὸ πλήν(–).

Κατόπι παραλείψαμε τὶς ἀγκύλες καὶ τὸ σύμβολο + ποὺ βρίσκεται μπροστά τους.

Ὕστερα προσθέσαμε τὸ ἀντίθετο τῶν ἀθροισμάτων, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦνται (ἔχουν μπροστὰ ἀπὸ τὴν παρένθεσή τους τὸ πλήν (–)), ἀφαιρεῖται μόνο τὸ $(-6+3)$, καὶ παραλείψαμε τὶς παρενθέσεις καὶ τὸ σύμβολο + ποὺ βρίσκεται μπροστά τους.

Τελικὰ ὑπολογίσαμε τὴν τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος ποὺ προκύπτει.

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καὶ γιὰ τὴν παράσταση β.

(Στὴν παράγραφο 42, ἐφαρμογή, ἔχομε ὑπολογίσει ἄθροισμα καὶ διαφορὰ ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων).

Ἀπὸ τὸν δεύτερο τρόπο τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς γ' ἀριθμ. παραστάσεως συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς:

1) Μποροῦμε νὰ ἐξαλείψουμε μιὰ παρένθεση (ἢ ἀγκύλη), ὅταν ἔχει μπροστά της τὸ σύμβολο + (ἢ κανένα πρόσημο), καὶ νὰ ἀφήσουμε τοὺς ὅρους ποὺ βρίσκονται μέσα σ' αὐτὴ καὶ καθένα μὲ τὸ πρόσημό του στὸ νέο ἄθροισμα.

2. Ἂν μπροστὰ ἀπὸ μιὰ παρένθεση (ἢ μιὰ ἀγκύλη) ὑπάρχει τὸ σύμβολο –, προσθέτομε τὴν παρένθεση (ἢ τὴν ἀγκύλη) ποὺ περιέχει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντίθετων ὅρων, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν μέσα σ' αὐτή, καὶ ἀναγόμαστε στὴν πρώτη περίπτωση.

Παραδείγματα

α) $10+(-7+5+4)=$
$10-7+5+4=$
$10-7+5+4=12$

β) $-(-8+13-14)=$
$+(+8-13+14)=$
$+8-13+14=$
$8-13+14=9$

γ) $10+(5-7+4)=$
$10+(+5-7+4)=$
$10+5-7+4=$
$10+5-7+4=12$

δ) $(10-6+1)-(12-6)=$
$(10-6+1)+(-12+6)=$
$10-6+1-12+6=$
$10-6+1-12+6=-1$

Σημείωση.

1. Ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος ἑνὸς ἀθροίσματος εἶναι θετικός, συνήθως δὲν ἔχει τὸ πρόσημό του +. Γιὰ νὰ συνδεθεῖ ὅμως στὸ νέο ἄθροισμα, πρέπει νὰ θέσουμε τὸ πρόσημό του. (Βλ. παρ. γ).

2. Οἱ παραστάσεις $(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\gamma+3\alpha)$ καὶ $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$ γίνονται πιὸ ἁπλές, ἂν ἐξαλείψουμε τὶς παρενθέσεις.

Π.χ.
$$\begin{aligned}(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\gamma+3\alpha)&=\\ \alpha-\beta+\gamma\quad+\beta-\gamma+3\alpha&=\\ \alpha+3\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma&=4\alpha\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)&=\\ (\alpha+\beta)+(-\alpha+\beta)&=\\ \alpha+\beta\quad-\alpha+\beta&=\\ \alpha+\beta-\alpha+\beta&=2\beta\end{aligned}$$

Ἔχομε: $(\alpha-\beta)-(\delta-\gamma)=(\alpha-\beta)+(-\delta+\gamma)=\alpha-\beta-\delta+\gamma$.

Ἂν ἐφαρμόσουμε τὴ συμμετρικὴ ἰδιότητα τῆς ἰσότητας καὶ γράψουμε $\alpha-\beta-\delta+\gamma=(\alpha-\beta)-(\delta-\gamma)$,

παρατηροῦμε ὅτι:

Μποροῦμε νὰ θέσουμε ὅρους ἑνὸς ἀθροίσματος μέσα σὲ παρένθεση μπροστὰ ἀπὸ τὴν ὁποία ἔχομε θέσει τὸ σύμβολο +.

Ἂν ὅμως θέσουμε ὅρους ἑνὸς ἀθροίσματος μέσα σὲ παρένθεση, μπροστὰ ἀπὸ τὴν ὁποία ἔχομε θέσει τὸ −, πρέπει νὰ ἀλλάξουμε τὰ πρόσημά τους.

2. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως δ.

$$\begin{aligned}
&(-7+2)-\left(-2+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left[\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{6}\right)+1\right]:\left(-\frac{11}{3}\right)\\
&(-5)-\left(-\frac{8}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left[\frac{5\cdot 8}{8\cdot 6}+1\right]\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)=\\
&(-5)-\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\qquad+\left[\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right]\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)=\\
&(-5)-\left(+\frac{5\cdot 2}{4\cdot 3}\right)\qquad+\left[\frac{11}{6}\right]\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)=\\
&(-5)-\left(+\frac{5}{6}\right)\qquad+\left[-\frac{11\cdot 3}{6\cdot 11}\right]=\\
&\left(-\frac{30}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)\qquad+\left[-\frac{3}{6}\right]=-\frac{38}{6}=-\frac{19}{3}
\end{aligned}$$

3. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως ε.

$$\begin{aligned}
&\left(-3+\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(2-\frac{1}{6}\right):(-11)-\left(-\frac{3}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)\\
&\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{11}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)-\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)=\\
&\frac{8}{4}+\left(-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{8}{3}\right)=\\
&\frac{4}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(+\frac{8}{3}\right)=\frac{12}{6}-\frac{1}{6}+\frac{16}{6}=\frac{27}{6}
\end{aligned}$$

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν παραστάσεων δ καὶ ε ἐργαστήκαμε ὡς ἑξῆς:

α) Βρήκαμε τὸν ρητὸ σὲ κάθε παρένθεση (ἢ ἀγκύλη)

β) Ἐκτελέσαμε τοὺς πολ/σμοὺς καὶ τὶς διαιρέσεις καὶ

γ) Ἐκτελέσαμε τὶς ἀφαιρέσεις καὶ τὶς προσθέσεις.

Παραδείγματα :

α) $(-4+3)\cdot 2+(8-6)\cdot(-3)=$
$(-8+6)+(-24+18)=-8+6-24+18=-8$

β) $(12-15):(-3)+(23-3):(-4)=$
$(-3):(-3)+(20):(-4)=1+(-5)=-4$

γ) $6-(-5)\cdot(-2)+(-14):(-7)+7=$
$6-(+10)+(+2)+7=$
$6+(-10)+2+7=15-10=5.$

Παρατήρηση.

Στὸ α΄ παράδειγμα ἔχομε ἄθροισμα γινομένων.

Βρήκαμε πρῶτα τὰ γινόμενα (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα) καὶ κατόπι τὰ προσθέσαμε.

Στὸ β΄ παράδειγμα ἔχομε ἄθροισμα πηλίκων.

Γιὰ νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα, προηγήθηκαν οἱ διαιρέσεις (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα).

Καὶ στὸ γ΄ παράδειγμα προηγήθηκαν οἱ πολ/σμοὶ καὶ οἱ διαιρέσεις.

Ἀσκήσεις :

121. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(-6+2-3)+(13-7)$, β) $(7-10)+(-8+10-6)$, γ) $-(3-12)$,
δ) $-(-4+11)$, ε) $(11-12)-(-2+4)$,
στ) $(-3+2)-(-8+7)-(7-2)+(-3+1-10)-5$.

122. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(20-13)+[(5-10)+(-12+9)]$, β) $-[(4-6)+(7-3)]+[(-7+11)-(-5+2)]$
γ) $[-(-7+12)+(-3+10)]-[-(-3+11)-(8-15)]+[-(-17+3)-5]$,
δ) $[(-5+7)+(3-12)]-[-6+(-8)]$.

123. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-1\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{3}{20}+1\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)$

β) $0-\left[\left(5{,}5-\frac{15}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]+\left[-(0{,}5-4)+2\right]-\left(-\frac{1}{2}+1\right)$,

γ) $\left[(-10{,}5+15{,}50)-\frac{1}{2}\right]+\left[0+\left(-\frac{18}{5}+\frac{15}{7}\right)+\frac{1}{35}\right]-\frac{10}{7}$

124. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\left(-3+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(2-\frac{5}{8}\right):(-5)$,

β) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right):\left(1-\frac{1}{4}\right)$

γ) $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right):\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\right)$,

δ) $\left(2-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)\cdot(-3)-\left(-\frac{1}{3}+4-\frac{5}{6}\right):(-3)$

125. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(-7+13):(-2)+(12-19)\cdot(15-16)-4$,
β) $(21-27):(-3)-(12-16):(-4)+5-5\cdot(-2)$,
γ) $12-6\cdot(-3)+7-15:(-3)+18-16:(-4)+1$.

126. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $\left(-\frac{5}{3}\right):\left(-\frac{11}{6}\right)+\left(-\frac{10}{3}\right):\left(+\frac{2}{9}\right)-15:(-1)$,

β) $(3-2)\cdot(-3+2)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{42}{8}-\frac{11}{4}\right)$

γ) $-0{,}01:(0{,}001-0{,}01)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}:\frac{3}{5}\right)$

δ) $[-3+(-7+2)-1]\cdot[-2+(-3+2-9)]-(3-8+2)\cdot(-5)$.

127. Νὰ ἐξαλείψετε τὶς παρενθέσεις:

α) $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)$, $\quad(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)$,
β) $\alpha-(-\beta+\gamma-\delta)$, $\quad-(\alpha-\beta)-(-\gamma+\delta)$,
γ) $\alpha-[(\beta-\gamma)+\alpha]-(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)$,
δ) $\alpha+(\beta-\gamma)+[-\delta+(\alpha-\beta)+\gamma]-(\delta-\gamma)$.

128. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς τιμὲς τῶν παραστάσεων, ἂν $\alpha=-2$, $\beta=-3$, $\gamma=4$:

1. $\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{-\alpha+\gamma-\beta}$, 2. $\dfrac{-3\alpha+2\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$, 3. $\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$.

129. Νὰ γράψετε τὶς ἑπόμενες παραστάσεις μὲ μορφὴ ἀθροίσματος περισσότερων παραστάσεων.

1) $-\alpha+\beta+\gamma-\delta+\kappa-\lambda$, $\quad$ 2) $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon-\zeta+\eta$.

130. Στὶς ἑπόμενες παραστάσεις νὰ βάλετε τὸν πρῶτο καὶ τὸν τρίτο ὅρο σὲ μιὰ παρένθεση μὲ τὸ σύμβολο + μπροστά της καὶ τοὺς ὑπόλοιπους σὲ ἄλλη παρένθεση μὲ τὸ σύμβολο − μπροστά της.

α) $-15{,}4-11{,}7+12-10+\frac{1}{3}$, $\quad$ β) $19{,}6+13{,}5-9{,}4+\frac{2}{5}-1$,

γ) $\rho+\tau-\mu-\nu+\sigma-\kappa$, $\quad$ δ) $-\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon$.

12. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

§ 60. α) Ἐφαρμοστὸ διάνυσμα.

Στὴ Γεωμετρία μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σὰν τὸ διμελὲς σύνολο τῶν ἄκρων του, $\{A, B\}$.

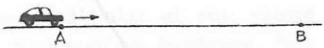
Γι' αὐτό, ὅταν λέμε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἢ εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΑ, ἐννοοῦμε τὸ ἴδιο ἀντικείμενο (γιατί;)

σχ. 31.

Πρόβλημα.

α) Ἕνα αὐτοκίνητο ποὺ κινεῖται πάνω σὲ εὐθύγραμμο δρόμο ἀπὸ τὸ σημεῖο Α ἔφθασε στὸ σημεῖο Β.

β) Ἕνα αὐτοκίνητο ποὺ κινεῖται πάνω σὲ εὐθύγραμμο δρόμο ἀπὸ τὸ σημεῖο Β ἔφθασε στὸ σημεῖο Α.



σχ, 32.

Πῶς θὰ ἐκφράσουμε μαθηματικὰ τὶς διαφορετικὲς αὐτὲς κινήσεις;

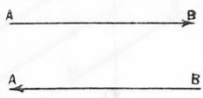
Ἂν ποῦμε ὅτι τὸ αὐτοκίνητο διέτρεξε καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα (τοῦ δρόμου) ΑΒ, δὲν θὰ εἴμαστε ἀκριβεῖς.

σχ. 33.

Τὸ σωστὸ εἶναι νὰ ποῦμε στὴν α) περίπτωση «. . . διάνυσε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ ὁποῖο ἔχει **ἀρχὴ** τὸ Α καὶ **πέρας** τὸ Β» καὶ στὴν β) «διάνυσε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ ὁποῖο ἔχει **ἀρχὴ** τὸ Β καὶ **πέρας** τὸ Α».

Τώρα πιὰ τὸ εὐθύγρ. τμῆμα ΑΒ, **ποὺ διανύεται ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β,** δὲν εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ εὐθύγ. τμῆμα ΒΑ, **ποὺ διανύεται ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α,** γιατὶ διαφέρει ἡ φορὰ τῆς κινήσεως.

Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ τὰ λέμε **διανύσματα**, τὰ συμβολίζομε $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ καὶ τὰ παριστάνομε γραφικῶς: (δηλαδὴ σὰν βέλη μὲ τὴν αἰχμὴ στὸ πέρας τους).



Διάνυσμα, λοιπόν, εἶναι **ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ὁρισμένη ἀρχὴ καὶ ὁρισμένο πέρας,**

σχ. 34,

ἢ λέμε μὲ συντομία ὅτι:

Διάνυσμα εἶναι ἕνα προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα.

Ἂν ἕνα διάνυσμα ἔχει ὁρισμένη θέση (ἄρα καὶ ἀρχὴ ὁρισμένη), λέγεται **ἐφαρμοστὸ διάνυσμα** (ἢ δεσμευμένο διάνυσμα).

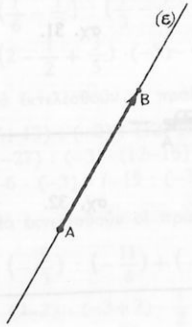
Παρατήρηση.

Τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα εἶναι ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος σημείων καὶ ὄχι ἁπλῶς ἕνα διμελὲς σύνολο σημείων.

Ἔχομε λοιπόν: Εὐθύγραμμο τμῆμα $AB \equiv \{A, B\} \equiv \{B, A\}$

Διάνυσμα $\overrightarrow{AB} \equiv (A, B)$, διάνυσμα $\overrightarrow{BA} \equiv (B, A)$.

§ 61. Στοιχεῖα ἐφαρμοστοῦ διανύσματος.



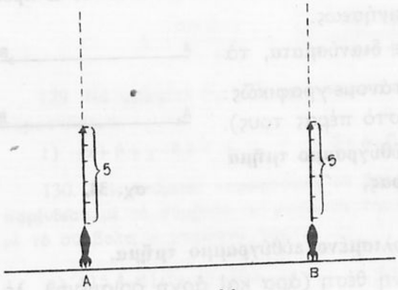
σχ. 35.

Τὸ διατεταγμένο ζεῦγος (A, B) καθορίζεται:

1. Ἀπὸ τὴν εὐθεία AB, δηλαδὴ τὸ **φορέα** του ε.
2. Ἀπὸ τὴ φορὰ ποὺ καθορίζει ἡ κίνηση ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B.
3. Ἀπὸ τὴν τιμὴ τοῦ εὐθυγρ. τμήματος AB, δηλαδὴ τὸ λόγο * του πρὸς τὴ μονάδα μετρήσεως. Ἡ τιμὴ τοῦ AB συμβολίζεται μὲ $|\overrightarrow{AB}|$, $(|\overrightarrow{AB}| \in Q_0^+)$ καὶ διαβάζεται «ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$»
4. Ἀπὸ τὴν ἀρχὴ A.

§ 62. Τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα.

Ἕνας πύραυλος ἐκτοξεύεται ἀπὸ ἕνα σημεῖο A τοῦ πεδίου ἐκτοξεύσεως πυραύλων κατακόρυφα πρὸς τὰ πάνω μὲ ταχύτητα 5 km/sec. Πῶς θὰ παραστήσουμε τὴν ταχύτητά του;



σχ. 36.

Ὁ καλύτερος τρόπος παραστάσεως εἶναι: ἕνα διάνυσμα μὲ **φορέα** τὴν κατακόρυφη εὐθεία, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ A, **φορὰ** πρὸς τὰ πάνω καὶ **ἀπόλυτη τιμὴ 5.**

Ἂν ἕνας δεύτερος πύραυλος ἐκτοξευθεῖ ἀπὸ τὸ σημεῖο B κατακόρυφα πρὸς τὰ πάνω μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα, ἡ ταχύτητα τοῦ δεύτερου πυραύλου εἶναι ἕνα διάνυσμα μὲ **φορέα** τὴν κατακόρυφη εὐθεία, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ B, **φορὰ** πρὸς τὰ πάνω καὶ ἀπόλυτη τιμὴ 5.

* Βλέπε § 13 τοῦ μέρους τῆς Γεωμετρίας τοῦ βιβλίου αὐτοῦ.

Τὰ δύο αὐτὰ διανύσματα παριστάνουν τὸ ἴδιο ἀντικείμενο, τὴν ἴδια ταχύτητα.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα ἢ **ἴσα διανύσματα.**

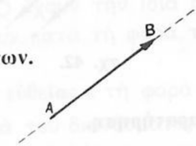
Τὰ ἴσα αὐτὰ διανύσματα ἔχουν: α) παράλληλους φορεῖς
β) τὴν ἴδια φορὰ (πρὸς τὰ πάνω)
γ) ἴσες ἀπόλυτες τιμές.

Παρατήρηση.

Τὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν, οἱ ὁποῖες εἶναι **παράλληλες μὲ τὴν πλατιὰ ἔννοια** (εἶναι παράλληλες ἢ συμπίπτουν), τὸ ὀνομάζομε **διεύθυνση.** Λέμε τώρα, ὅτι δύο διανύσματα, ποὺ βρίσκονται πάνω σὲ παράλληλους φορεῖς ἢ πάνω στὸν ἴδιο φορέα, ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση.

Ἑπομένως τὰ διανύσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν **τὴν ἴδια διεύθυνση, τὴν ἴδια φορὰ καὶ ἴσες ἀπόλυτες τιμές, εἶναι ἴσα.**

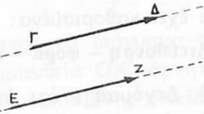
§ 63. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητας τῶν διανυσμάτων.



Σχ. 37.

1. Κάθε διάνυσμα εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἑαυτό του.

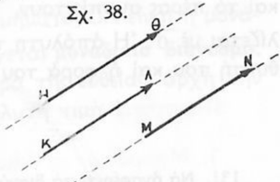
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$



Σχ. 38.

2. Ἂν ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{EZ}$, τότε καὶ τὸ $\overrightarrow{EZ}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{EZ} \Rightarrow \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$



Σχ. 39.

3. Δύο διανύσματα ἴσα μ' ἕνα τρίτο διάνυσμα εἶναι καὶ μεταξύ τους ἴσα.

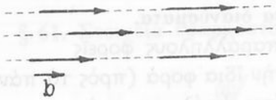
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{K\Lambda} \\ \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{MN}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{MN}$$

Δηλαδὴ ἡ ἰσότητα τῶν διανυσμάτων ἔχει τὶς ἰδιότητες **ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.**

Σχ. 40.

§ **64.** Ἂν ἔχουμε ἕνα σύνολο ἴσων διανυσμάτων, μποροῦμε σύμφωνα μὲ τὶς ἰδιότητες αὐτὲς νὰ θεωροῦμε ὅτι ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ διανύσματα αὐτὰ ἀντιπροσωπεύει τὸ σύνολο.

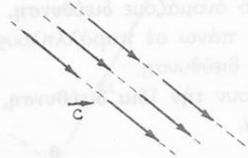
Ένα σύνολο ἴσων διανυσμάτων ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:



1. Τὴ διεύθυνση.
2. Τὴ φορά.
3. Τὴν ἀπόλυτη τιμή.

σχ 41.

Τὸ σύνολο αὐτὸ λέγεται **ἐλεύθερο διάνυσμα** ἢ ἁπλῶς **διάνυσμα**.



σχ. 42.

Τὰ ἐλεύθερα διανύσματα τὰ συμβολίζομε μὲ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, . . . , $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ κ.λπ. (Γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἢ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου μὲ τὸ σύμβολο → πάνω ἀπ' αὐτά).

Τὶς ἀπόλυτες τιμὲς τῶν $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ . . . τὶς συμβολίζομε μὲ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, . . .

Παρατήρηση.

1. Μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ἐλεύθερο διάνυσμα ἕνα διάνυσμα, τὸ ὁποῖο ἔχει καθορισμένα:

Διεύθυνση – φορά – ἀπόλυτη τιμὴ (χωρὶς ὁρισμένη ἀρχή).

2. Δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει ἕνα διάνυσμα $\vec{AA}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας συμπίπτουν. Τὸ διάνυσμα αὐτὸ λέγεται μηδενικὸ καὶ συμβολίζεται μὲ $\vec{0}$. Ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι 0, ἡ διεύθυνσή του καὶ ἡ φορά του δὲν ὁρίζονται.

Ἀσκήσεις:

131. Νὰ ἀναφέρετε τὰ διανύσματα, ποὺ ὁρίζουν τρία σημεῖα Α, Β, Γ.

132. Νὰ ἀναφέρετε τὰ ζεύγη τῶν ἴσων διανυσμάτων, ποὺ ὁρίζουν οἱ κορυφὲς ἑνὸς παραλ/μου ΑΒΓΔ.

133. Σχεδιάστε δύο διανύσματα μὲ ἀρχὲς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἴσα μὲ τὸ διάνυσμα $\vec{AM}$, ὅπου ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

134. Δίνεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Μὲ ἀρχὴ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ο σχεδιάστε ὅλα τὰ διανύσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν οἱ κορυφὲς τοῦ τετραπλεύρου.

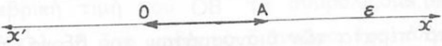
135. Γράψτε 5 διανύσματα, ποὺ ἀντιπροσωπεύουν τὸ ἴδιο ἐλεύθερο διάνυσμα.

136. Νὰ δικαιολογήσετε τὶς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας τῶν διανυσμάτων.

13. Η ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ (ΑΞΟΝΑΣ) — ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ — ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ

1. Ἡ προσανατολισμένη εὐθεία - Ἄξονας.

§ **65**. *Πάρτε δύο σημεῖα Ο καὶ Α στὴν εὐθεία ε (τὸ Α δεξιὰ τοῦ Ο). Συγκρίνετε τὰ διανύσματα* $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ *καὶ* $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$. *Τί παρατηρεῖτε;*



σχ. 43.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ καὶ $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση καὶ τὴν ἴδια ἀπόλυτη τιμή, ἀλλὰ διαφέρουν κατὰ τὴ φορά τους. Τὰ διανύσματα αὐτὰ λέγονται **ἀντίθετα**.

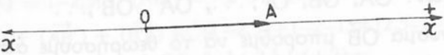
Συμφωνοῦμε νὰ ὀνομάζουμε **θετικὴ φορὰ τῆς εὐθείας** ε τὴ φορὰ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, καὶ **ἀρνητικὴ φορὰ τῆς** ε τὴ φορὰ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$.

Κάθε εὐθεία, τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθεῖ ἡ θετικὴ φορά, λέγεται **προσανατολισμένη εὐθεία.**

Ἡ ἡμιευθεία ΟΧ, πάνω στὴν ὁποία βρίσκεται τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, λέγεται θετικὴ ἡμιευθεία καὶ ἡ ἀντικείμενή της ἡμιευθεία ΟΧ' ἀρνητικὴ ἡμιευθεία. Τὸ σημεῖο Ο λέγεται ἀρχὴ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε.

Ἂν θεωρήσουμε ὅτι τὸ μῆκος τοῦ εὐθύγρ. τμήματος ΟΑ εἶναι ἡ μονάδα τοῦ μήκους, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ τῆς εὐθείας ε λέγεται **μοναδιαῖο διάνυσμα.**

Αὐτὸ τὸ διάνυσμα ἔχει φορὰ τὴ θετικὴ φορὰ τῆς εὐθείας, ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε καὶ ἀπόλυτη τιμὴ 1.



σχ. 43α

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ προσανατ. εὐθεία λέγεται **ἄξονας** (σχ. 43α)

Ἄξονας εἶναι ἡ προσανατολισμένη εὐθεία, πάνω στὴν ὁποία ἔχει ὁρισθεῖ ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ μοναδιαῖο διάνυσμα.

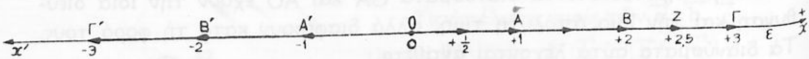
2. Ἀπεικόνιση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν στὴν προσανατολισμένη εὐθεία.

§ **66**. Μποροῦμε νὰ ἀπεικονίσουμε τὸ σύνολο Q τῶν ρητῶν πάνω σὲ μιὰ προσανατολισμένη εὐθεία (ἄξονα), ὡς ἑξῆς:

Στὴν ἀρχὴ O τοῦ ἄξονα X΄OX ἀπεικονίζομε (δηλαδὴ ἀντιστοιχίζομε μονοσήμαντα) τὸν ἀριθμὸ μηδέν.

Στὸ πέρας τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ τὸν ἀριθμὸ $+1$, στὸ πέρας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$, ποὺ ἡ ἀπόλυτη τιμή του εἶναι 2, ἀπεικονίζομε τὸν $+2$ κ.ο.κ.

Δηλαδὴ στὰ πέρατα τῶν διανυσμάτων τοῦ ἄξονα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴ τὸ O καὶ φορὰ θετική, ἀπεικονίζομε τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Q^+, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀπόλυτες τιμές των.



σχ. 44.

Στὰ πέρατα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$ κ.λ.π., τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίθετα τῶν $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ κ.ο.κ. ἀντιστοίχως, ἀπεικονίζομε τοὺς -1, -2, κ.λ.π., οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀντίθετοι τῶν $+1$, $+2$, κ.ο.κ.

Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ τὸ σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀπεικονίζεται μονοσήμαντα πάνω στὸν ἄξονα X΄OX (στὸ σύνολο τῶν σημείων τῆς εὐθείας ε).

Παρατηρήσεις:

1. Μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι τὸ σύνολο Q ἀπεικονίζεται στὸ σύνολο τῶν διανυσμάτων: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, . . ., $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, . . .

2. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ μποροῦμε νὰ τὸ θεωρήσουμε σὰν γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ $+2$ ἐπὶ τὸ μοναδιαῖο $\overrightarrow{OA}$ καὶ νὰ γράψουμε: $\overrightarrow{OB} = (+2)\cdot\overrightarrow{OA}$ (ἢ $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$).

Ὁμοίως $\overrightarrow{OA'} = (-1)\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = (-2)\cdot\overrightarrow{OA}$ κ.λ.π.

Τοὺς ἀριθμοὺς 0, $+1$, $+2$, . . . , -1, -2, . . . τοὺς λέμε **τετμημένες** τῶν σημείων O, A, B, . . ., A΄, B΄, . . . ἀντιστοίχως.

Ἐπομένως **τετμημένη σημείου ἑνὸς ἄξονα εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζεται σ᾿ αὐτό.**

3. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος.

§ 67. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ λέγεται ὁ ἀριθμὸς $+2$. Ἐπειδὴ θεωρήσαμε $\overrightarrow{OB}=+2\overrightarrow{OA}$, ὁ $+2$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $\overrightarrow{OB}$ πρὸς τὸ μοναδιαῖο $\overrightarrow{OA}$.

$$\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}=+2$$

Τὴν ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{OB}$ τὴ συμβολίζομε μὲ $(\overrightarrow{OB})$. Ὥστε $(\overrightarrow{OB})=+2$, $(\overrightarrow{OO})=0$ (τὸ μηδενικὸ διάνυσμα ἔχει ἀλγεβρικὴ τιμὴ 0). $(\overrightarrow{O\Gamma})=+3$, $(\overrightarrow{OB'})=-2$ κ.λ.π.

Παρατηροῦμε ὅτι: $(\overrightarrow{OB})=+2=+2-0=$ τετμ. B — τετμ. O.

Ἄρα ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τὴν τετμημένη τοῦ πέρατός του.

Παραδείγματα:

$(\overrightarrow{BZ})=2{,}5-2=0{,}5$ $\qquad$ $(\overrightarrow{ZA})=1-2{,}5=-1{,}5$

$(\overrightarrow{B'A'})=-1-(-2)=1$ $\qquad$ $(\overrightarrow{\Gamma'O})=0-(-3)=+3$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος πάνω σ' ἕναν ἄξονα εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τὸ διάνυσμα ἔχει φορὰ θετική, καὶ ἂν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τὸ διάνυσμα ἔχει φορὰ ἀρνητική.

Ἐφαρμογὴ

Θεωροῦμε τὰ σημεῖα Z, A, B' καὶ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{ZA}$, $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{B'Z}$ (Σχ. 44).

Ὑπολογίστε τὸ ἄθροισμα $(\overrightarrow{ZA})+(\overrightarrow{AB'})+(\overrightarrow{B'Z})$.

Ἔχομε: $(ZA)=1-2{,}5$, $\quad (AB')=-2-1$, $\quad (B'Z)=2{,}5-(-2)$.

Ὥστε: $(\overrightarrow{ZA})+(\overrightarrow{AB'})+(\overrightarrow{B'Z})=(1-2{,}5)+(-2-1)+[2{,}5-(-2)]=$

$=1-2{,}5-2-1+2{,}5+(+2)=$

$=1-2{,}5-2-1+2{,}5+2=0$

Ἀσκήσεις:

137. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀλγεβρικὲς τιμὲς τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{K\Lambda}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{\Lambda M}$, $\overrightarrow{MK}$, ἂν οἱ τετμημένες τῶν σημείων K, Λ, M, N τοῦ ἄξονα εἶναι ἀντιστοίχως $-7, +2, -\frac{3}{8}, -\frac{13}{5}$

138. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος, ἄν:

α) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι $\frac{11}{2}$ καὶ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος 8,

β) » » » » » -4 » » » -1,

γ) » » » » » $-\frac{3}{2}$ » » » 4,

δ) » » » » » 2 » » » -5,

ε) » » » » » 5 » » » 2.

139. Νὰ βρεθεῖ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος ἑνὸς διανύσματος ἄν:

α) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι -2 καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμή του εἶναι $+1$,

β) » » » » » -1 » » » » » 3,

γ) » » » » » 2 » » » » » 2,

δ) » » » » » -5 » » » » » -7,

ε) » » » » » $\frac{3}{2}$ » » » » » 4.

14. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ — ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ.

§ 68. α) Δυνάμεις μὲ βάση ρητὸ καὶ ἐκθέτη ἀκέραιο $\geqslant 2$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα: $(-3)\cdot(-3)$, $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$,

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right),\quad (-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$$

Ἔχομε:

$$(-3)\cdot(-3) = +(3\cdot3) = 3^2$$

$$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -(2\cdot2\cdot2) = -2^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = +\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -(4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4) = -4^5$$

Γνωρίζομε ὅτι τὸ γινόμενο $\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$ λέγεται νιοστὴ δύναμη τοῦ α

καὶ γράφεται συντόμως: α^ν $\left(\begin{array}{r}\text{ὁ } \alpha \text{ λέγεται βάση, } \alpha\in Q_0^+\\ \text{ὁ } \nu \text{ λέγεται ἐκθέτης, } \nu\in N\\ \text{καὶ } \nu\geqslant 2\end{array}\right)$

Ἐπίσης ὅτι: $\alpha^1 = \alpha$ καὶ $\alpha^0 = 1 \quad (\alpha\neq0)$

Τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς τοὺς ἐπεκτείνομε καὶ στοὺς ρητοὺς πραγμ. ἀριθμούς, δηλαδὴ ἂν $\alpha\in Q$ **καὶ** $\nu\in N$, **τὸ** α^ν **παριστάνει τὸ γινόμενο ν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν α καὶ λέγεται νιοστὴ δύναμη τοῦ α.**

Ἐπομένως ἡ 2η δύναμη τοῦ -3 εἶναι: $(-3)\cdot(-3)=(-3)^2$

ἡ 3η δύναμη τοῦ -2 εἶναι: $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^3$

ἡ 4η δύναμη τοῦ $-\frac{2}{3}$ εἶναι: $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

καὶ ἡ 5η δύναμη τοῦ -4 εἶναι: $(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=(-4)^5$

Ἂν συγκρίνουμε αὐτὰ μ' ἐκεῖνα ποὺ βρήκαμε παραπάνω, ἔχουμε:

$(-3)^2=3^2$ (θετικὸς) $\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4$ (θετικὸς)

$(-2)^3=-2^3$ (ἀρνητικὸς) $\quad (-4)^5=-4^5$ (ἀρνητικὸς)

Ἄρα ὅταν ἕνας ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψώνεται σὲ ἄρτια δύναμη, δίνει θετικὸ ἐξαγόμενο, ἐνῶ ὅταν ὑψώνεται σὲ περιττὴ δύναμη, δίνει ἀρνητικό.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$(-2)^2\cdot(-2)^3=(-2)^{2+3}=(-2)^5$$

$$[(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^5$$

$$[(-2)^3]^2=(-2)^{2.3}=(-2)^6$$

$$(-2)^3\cdot(-2)^3=(-2)^{3+3}=(-2)^{2.3}$$

$$(-3)^4:(-3)^2=(-3)^{4-2}=(-3)^2$$

$$\frac{(-3)^4}{(-3)^2}=\frac{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}{(-3)\cdot(-3)}=(-3)\cdot(-3)=(-3)^2$$

$$[(-2)\cdot(-3)]^2=(-2)^2\cdot(-3)^2$$

$$[(-2)\cdot(-3)]\cdot[(-2)\cdot(-3)]=(-2)\cdot(-3)(-2)\cdot(-3)=(-2)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$$

$$[(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-3)\cdot(-3)]=(-2)^2\cdot(-3)^2$$

Ἐπομένως ἰσχύουν οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

$$\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}\quad \Big(\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\underbrace{\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha.}_{\mu\ \text{παραγ,}}\underbrace{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha.}_{\nu\ \text{παράγ.}}=\underbrace{\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\mu+\nu\ \text{παράγ.}}=\alpha^{\mu+\nu}\Big)$$

$$\alpha^\mu:\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}\quad(\mu\geqslant\nu)\quad \left(\alpha^\mu:\alpha^\nu=\frac{\overbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}^{\mu\ \text{παράγ.}}}{\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγ.}}}=\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\mu-\nu\ \text{παρ.}}=\alpha^{\mu-\nu}\right)$$

$$(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}\quad\Big(\underbrace{\alpha^\mu\cdot\alpha^\mu\ldots\alpha^\mu}_{\nu\ \text{παράγ.}}=\alpha^{\mu+\mu+\ldots+\mu}=\alpha^{\mu\nu}\Big)$$

$(\alpha\beta\gamma)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu$ καὶ ὅταν $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in Q\quad(\mu,\ \nu\in N)$,

Ἐφαρμογές.

$$(-1)^0 = 1,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1,\ \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$$

$$(-1)^1 = -1,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2},\ \left(-\frac{3}{5}\right)^5 : \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$(-1)^2 = 1,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$(-1)^3 = -1$$

$$(-1)^4 = 1,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8},\ \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = $$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} = \frac{9}{64}$$

§ 69. β) Δυνάμεις μὲ ἐκθέτη ἀκέραιο μικρότερο ἀπὸ τὸ μηδέν.

Γνωρίζομε τί παριστάνει τὸ σύμβολο α^ν, ὅταν τὸ $\alpha \in Q$ καὶ τὸ $\nu \in Z^+$, δηλαδὴ γνωρίζομε ὅτι:

$\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha\cdot\alpha$, $\alpha^3 = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$, κ.ο.κ.

Τί παριστάνει ὅμως τὸ σύμβολο α^κ , ὅταν τὸ $\kappa \in Z^-$; Δηλαδὴ τί παριστάνει τὸ α^{-1}; τὸ α^{-2}; τὸ α^{-3}; κ.ο.κ.

Στὴν § 49ε εἴδαμε ὅτι ὁ ἀντίστροφος τοῦ α συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{\alpha}$ ἢ μὲ α^{-1}· ἄρα τὰ δύο αὐτὰ σύμβολα εἶναι ἴσα, ἀφοῦ συμβολίζουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (τὸν ἀντίστροφο τοῦ α).

Συνεπῶς $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$ ἢ $\alpha^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^1 = \frac{1}{\alpha}$

Ἐπεκτείνομε αὐτὸ τὸ συμβολισμὸ καὶ ἔχομε:

$$\alpha^{-2} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^{-3} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^3}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu = \frac{1}{\alpha^\nu} \qquad \nu \in N$$

Ὥστε κάθε δύναμη ρητοῦ (διαφορετικοῦ ἀπὸ τὸ μηδὲν) μὲ ἐκθέτη ἀρνητικὸ ἀκέραιο παριστάνει τὴ δύναμη τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ρητοῦ μὲ ἐκθέτη τὸν ἀντίθετο θετικὸ ἀκέραιο.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀντίστροφος τοῦ α ὑπάρχει, ὅταν ὁ α εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν, γι' αὐτὸ τὸ σύμβολο $\alpha^{-\nu}$, ($\nu \in N$) ἔχει ἔννοια, ὅταν $\alpha \neq 0$

Συμβολικά: ἂν τὸ $\nu \in N_0$ καὶ $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$.

Ἐφαρμογές.

$$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}, \quad (-2)^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$$

$$(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad (-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}, \quad (-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}, \quad (-3)^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}, \quad (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Σημείωση.

1. Ἀπὸ τὰ παραπάνω παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει ὁ κανόνας γιὰ τὸ πρόσημο τῆς δυνάμεως, ὅταν ἡ βάση εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ὁ ἐκθέτης ἄρτιος ἢ περιττός.

2. Στὸν τύπο $\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}$ ἂν $\nu = 0$, ἔχομε $\alpha^{-0} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{0}$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ $-0 = 0$, εἶναι $\alpha^{-0} = \alpha^0 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^0 = 1.$

3. Στὰ ἑπόμενα, ὅταν γράφουμε τὸ σύμβολο α^ν, θὰ ἐννοοῦμε ὅτι $\alpha \in Q$, $\alpha \neq 0$ καὶ $\nu \in Z$.

§ 70. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ βάση ρητὸ (διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ μηδὲν) καὶ ἐκθέτη ἀκέραιο.

1. $(-2)^{-2} \cdot (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = (-2)^{-5}$

Ἄρα γενικά: $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

2. $[(-2)^{-3}]^{-2} = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-2} = \left[\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)^3\right]^2 =$

$$= \left[\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)\right]^{2\cdot 3} = (-2)^6 = (-2)^{(-3)\cdot(-2)}$$

Ἄρα γενικά: $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

3. $(-4)^{-5} : (-4)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^5 : \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = (-4)^{-2}$

Ἀλλὰ καὶ $(-4)^{-5} : (-4)^{-3} = (-4)^{-5-(-3)} = (-4)^{-5+3} = (-4)^{-2}$

Γενικά: $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$

4. $[(-2)\cdot(-3)]^{-2} = \left[\frac{1}{(-2)\,(-3)}\right]^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 =$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = (2-)^{-2} \cdot (-3)^{-2}$$

Γενικά: $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$

Ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει καὶ γιὰ περισσότερους παράγοντες:

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}\cdot\gamma^{\nu}\cdot\delta^{\nu}$$

Ἐφαρμογές.

$$(-3)\cdot(-3)^{-2}\cdot(-3)^{3} = (-3)^{1-2+3} = (-3)^{2} = 9$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-2)^{4} = 16$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2-(-3)} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2+3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{1} = -\frac{3}{4}$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-3)\right]^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-3)^{-2} = (-2)^{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2} = 4\cdot\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{131}{25}\right)\cdot\left(-\frac{131}{25}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{131}{25}\right)^{-3} = \left(-\frac{131}{25}\right)^{1+2-3} = \left(-\frac{131}{25}\right)^{0} = 1$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς :

140. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ δυνάμεις:

α) 4^{-2}, $(-7)^{-2}$, $(-1)^{1}$, $(-1)^{-1}$, $(-1)^{-2}$, -1^{12}, $-(-1)^{-3}$,

β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $(-0{,}5)^{3}$, $(-0{,}5)^{-2}$.

141. Νὰ ἐκτελεσθοῦν μὲ τὸν συντομότερο τρόπο οἱ πράξεις:

α) $\left(-\frac{101}{305}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{101}{305}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{101}{305}\right)^{-1}$, β) $\left(\frac{259}{748}\right)^{2}\cdot\left(\frac{259}{748}\right)^{3}\cdot\left(\frac{748}{259}\right)^{5}$

γ) $\left(-\frac{149}{245}\right)^{-4} : \left(-\frac{149}{245}\right)^{-3}$, δ) $\left(-\frac{15}{16}\right)^{+3} : \left(-\frac{16}{15}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}^{-2}\right)$

142. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(-1)^{1}+(-1)^{-1}+(-1)^{2}+(-1)^{-2}+(-1)^{0}+1^{0}$, β) $(10^{-4})^{-3}$.

γ) $2^{-2}+4^{-1}+3^{0}-8^{1}+(-1)^{-2}$, δ) $[(-10)^{2}]^{-3}$, ε) $\left[\left(-\frac{1}{10}\right)^{-2}\right]^{-3}$

143. Νὰ γράψετε μὲ μορφὴ δυνάμεως τοὺς ἀριθμούς:

α) 10, -10, 0,1, $-0{,}1$, -8. $-\frac{16}{9}$

β) 100, -100, 0,01, $-0{,}01$.

γ) 1000, -1000, 0,001, $-0{,}001$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{27}{64}$

144. Νὰ γράψετε μὲ σύντομο τρόπο τοὺς ἀριθμούς:

α) 0,0000001 , δ) $\frac{1}{0{,}00000007}$

β) 0,0000000015,

γ) $-0{,}000000000045$, ε) $\frac{1}{-0{,}0000000009}$

145. Νὰ βρεθεῖ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α) $2^{\chi-4}-6\cdot4^{\chi-3}+1^{\chi-2}-5^{\chi-1}$, ἂν $\chi=1$,

β) $2\cdot\chi^{-2}-2^{-\chi}+\chi^{\chi}-3\cdot(-1)^{-3}$, ἂν $\chi=-2$,

γ) $(\chi+4)\cdot2^{\chi-2}-3\cdot3^{\chi+1}+6\cdot3^{\chi-1}$, ἂν $\chi=0$.

δ) $2\cdot(-\frac{1}{3})^3\cdot(-2)^{-2}-(-3)^{-3}+(-1)^{-1}$,

ε) $\frac{\chi^2-\psi^2}{\chi+\psi}$ ἄν $\chi=-\frac{1}{2}$ καὶ $\psi=-2$

146. Τὰ παρακάτω γινόμενα νὰ γίνουν δυνάμεις ἑνὸς ρητοῦ:

α) $(-8)^2\cdot(-4)^3$ β) $(-\frac{1}{8})\cdot(-\frac{1}{4})$

γ) $(-\frac{1}{2})^{-2}\cdot(-2)^3$ δ) $(-1)^{-3}\cdot(-2)^{-1}\cdot 2^3$

ε) $(-\frac{1}{3})^{-3}\cdot 3^2$ στ) $(-\frac{1}{9})\cdot\frac{1}{3}$

147. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $(-\frac{1}{2})^{-3}\cdot\chi=(-\frac{1}{2})^{-2}$ β) $(-\frac{2}{3})^{-2}:\chi=(-\frac{2}{3})$

γ) $\chi:(-\frac{1}{2})^{-2}=-\frac{1}{2}$ δ) $0{,}00000016=\chi\cdot 4^2\cdot 10^{-8}$

15. ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΤΟΥ ΙΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

§ 71. Στὸν παρακάτω πίνακα περιλαμβάνονται οἱ βασικὲς πράξεις: Πρόσθεση — Πολλαπλασιασμὸς καὶ οἱ σπουδαιότερες ἰδιότητές τους.

Σημείωση. Ἀφαίρεση ρητοῦ εἶναι ἡ πρόσθεση τοῦ ἀντίθετού του καὶ διαίρεση ρητοῦ εἶναι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη:

Τὰ $\alpha, \beta, \gamma \in Q$		
Πράξεις	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμὸς**
Ὕπαρξη ἀθροίσματος καὶ γινομένου	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha+\beta\in Q$	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha\beta\in Q$
Μεταθετικὴ ἰδιότητα	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha+\beta=\beta+\alpha$	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστικὴ ἰδιότητα	Γιὰ κάθε α, β καὶ γ $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	Γιὰ κάθε α, β καὶ γ $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$
Ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου	Ὑπάρχει τὸ $0\in Q$, ὥστε γιὰ κάθε α $\alpha+0=\alpha$	Ὑπάρχει τὸ $1\in Q$, ὥστε γιὰ κάθε α $1\cdot\alpha=\alpha$
Ὕπαρξη ἀντίθετου καὶ ἀντίστροφου στοιχείου	Γιὰ κάθε α ὑπάρχει τὸ στοιχεῖο $-\alpha$ ὥστε, $\alpha+(-\alpha)=0$	Γιὰ κάθε $\alpha\neq 0$ ὑπάρχει τὸ στοιχεῖο $\frac{1}{\alpha}$, ὥστε $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$
Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα	Γιὰ κάθε α, β καὶ γ, $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

§ 72. Ἰδιότητες ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων.

1. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=\beta+\gamma \\ \alpha\gamma=\beta\gamma \ (\gamma \neq 0) \end{cases}$ 2. $\begin{matrix} \alpha=\beta \\ \gamma=\delta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha+\gamma=\beta+\delta \\ \alpha\gamma=\beta\delta \end{matrix}$

3. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma > \beta+\gamma \\ \alpha\gamma > \beta\gamma \ (\gamma > 0) \\ \alpha\gamma < \beta\gamma \ (\gamma < 0) \end{cases}$ 4. $\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma \geqslant \delta \end{matrix} \Rightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta$

§ 73. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

1. $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}.\ldots\alpha^{\rho} = \alpha^{\mu+\nu+\cdots+\rho}$ 2. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$ 3. $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

4. $(\alpha.\beta.\gamma\ldots\kappa)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}\cdot\gamma^{\nu}\ldots\kappa^{\nu}$

5. $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = 1 \ (\alpha \neq 0)$, $\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu} \ (\alpha \neq 0)$

Γενικὲς ἀσκήσεις τοῦ κεφαλαίου ΙΙ.

148. Ἂν $\chi = -6+7-2+3$, $\psi = -4+3-7+2$ καὶ $z = -4+6-3$, νὰ βρεθοῦν τὰ α) $\chi+\psi+z$, β) $\chi-\psi-z$, γ) $\chi^2+\psi^2+z^2$, δ) $-\chi^2+\psi^2-z^2$

149. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

α) $(2-5+7)\cdot(-2+7)+(-13+7):(-12+15)$,

β) $\left(-\frac{2}{5}+1\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}-1\right)-\left(1+\frac{5}{2}\right):\left(-2-\frac{1}{3}\right)$,

γ) $\left(-3+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+3-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$,

δ) $\left(-\frac{3}{5}+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(-\frac{15}{7}\right)-\left(\frac{7}{2}-1\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$,

ε) $-[-4-(-3+2)]+[-(-6+2)-14]\cdot[-0{,}5+1]$

150. Νὰ βρεθεῖ ὁ χ ἀπὸ τὶς ἰσότητες:

α) $-\frac{2}{5}\chi = -\frac{14}{5}-\frac{5}{10}$, β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} : \chi = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$

γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : \chi = -\frac{1}{2}$ δ) $-\frac{1}{4}\cdot\chi = \left[(-2)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$

ε) $\left(-\frac{3}{4}\right) : \chi = \frac{1}{4}-\frac{27}{8}$, στ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-\chi) = -\frac{1}{2^2}$

ζ) $[2^3\cdot10^{-7}] : \chi = 5^2\cdot10^{-9}$

151. Ἂν $\alpha=-5$ καὶ $\beta=+3$, νὰ βρεθεῖ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α) $(\alpha+\beta)^2$ β) $(\alpha-\beta)^2$ γ) $\alpha^2-\beta^2$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$, $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

Τί παρατηρεῖτε ;

152. Νὰ βρεθεῖ ἡ τιμὴ τῶν παρακάτω παραστάσεων:

α) $\dfrac{3\alpha^2-2\beta^3}{2}-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{3}$, ἂν $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=2$

β) $\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{3}-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4}\right):\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^2+1}{\alpha\beta}\right)$, ἂν $=1$, $\beta=2$

γ) $\dfrac{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$, ἂν $\alpha=-3$, $\beta=2$

δ) $(4\cdot\chi^{\chi})^2-6(\chi\psi)^{\chi\psi}-\psi^{2\psi}$, ἂν $\chi=-1$, $\psi=2$

153. Στὶς ἑπόμενες παραστάσεις νὰ βρεθεῖ τὸ ἐξαγόμενο καὶ νὰ γραφεῖ σὰν δύναμη.

α) $(3^2\cdot3^3):3^4+(2^5:2^3)\cdot2-6\cdot5$

β) $(-3^{-2}:3^{-3})\cdot3^{-4}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+4^2:3^3$

γ) $\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{7}\right)^{-3}:\left[\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{2}\right)^0\right]^{-2}-\left[\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{5}{2}\right]^{-1}$

δ) $5\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-4}+\left(-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{1}{81}\right)^0-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}:5^{-2}$

154. Νὰ βρεθεῖ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α) $4\cdot2^{\chi+1}-3\cdot3^{\chi}-6\cdot3^{\chi-1}+(\chi-2)\cdot2^{\chi-2}$ ἐὰν $\chi=0$

β) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\chi-4}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\chi-3}+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\chi-2}+(-1)^{\chi-1}-(-1)^{\chi}$ ἐὰν $\chi=1$

γ) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\chi-3}+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\chi-2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\chi-1}+(-1)^{\chi}$ ἐὰν $\chi=1$

155. Στὴ θέση τοῦ ἐρωτηματικοῦ νὰ βάλετε τὸ κατάλληλο σύμβολο ἀπὸ τὰ $>$, $<$, $=$ στὰ παρακάτω:

α) $-\dfrac{7}{3}+\dfrac{14}{6}$; $-\dfrac{1}{2}$

β) $-5+\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{8}-\dfrac{7}{4}$

γ) $-\dfrac{3}{5}$; $-\dfrac{4}{3}+\dfrac{11}{15}$

καὶ νὰ πολλαπλασιάσετε ἐπὶ (-1) καὶ τὰ δύο μέλη τῶν σχέσεων ποὺ προκύπτουν.

δ) Στὶς προηγούμενες σχέσεις νὰ μεταφέρετε τοὺς ὅρους τοῦ β' μέλους στὸ πρῶτο.

156. Νὰ πολλαπλασιάσετε καὶ τὰ δύο μέλη τῶν παρακάτω ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους:

α) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{6}$, β) $\dfrac{3}{4}-1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}$, γ) $\dfrac{12}{14}-\dfrac{1}{7}=1-\dfrac{2}{7}$

δ) $\dfrac{13}{14}>1-\dfrac{1}{7}$, ε) $\dfrac{7}{3}<3-\dfrac{1}{2}$, στ) $1-\dfrac{1}{4}<\dfrac{25}{8}-2$

157. Νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ ἀριθμητικὰ παραδείγματα τὶς σχέσεις:

1) $\alpha^2+\beta^2 \geqslant 2\alpha\beta$, 2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geqslant \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

158. Νὰ ἀποδείξετε τά:

α) $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$, β) $(-1)^{2\nu} = 1$,

γ) $(-1)^{2\nu+1} = -1$, δ) $\alpha^{\kappa-\lambda} \cdot \alpha^{\lambda-\mu} \cdot \alpha^{\mu-\kappa} = 1$,

ε) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

Α. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ — ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha\chi + \beta = 0$. ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΥΤΗΣ.

§ 74. Στὴν Α΄ τάξη μάθαμε ἐξισώσεις, ὅπως εἶναι οἱ $\chi+3=0$, $12-\chi=8$, $3\chi=15$ καὶ εἴδαμε ὅτι αὐτὲς ἀληθεύουν γιὰ ὁρισμένες τιμὲς τοῦ γράμματος χ, τὸ ὁποῖο λέγεται ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως.

Ὥστε ἐξίσωση ὡς πρὸς χ εἶναι μιὰ ἰσότητα, ἡ ὁποία περιέχει τὸν ἄγνωστο χ καὶ ἡ ὁποία ἀληθεύει γιὰ ὁρισμένες ἀπὸ τὶς τιμές, ποὺ μπορεῖ νὰ λάβει ὁ χ.

Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωση, λέγεται **λύση** τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ εὕρεση τῶν λύσεων λέγεται **ἐπίλυση** τῆς ἐξισώσεως.

Σημείωση.

1. Ὅταν λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\chi+3=8$ ἀληθεύει γιὰ τὴν τιμὴ 5 τοῦ χ, ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5 ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωση, ἐννοοῦμε ὅτι, ἂν στὴν ἐξίσωση $\chi+3=8$ θέσουμε ἀντὶ γιὰ τὸν χ τὸν 5, θὰ πάρουμε τὴν ἀριθμητικὴ ἰσότητα $5+3=8$ ἢ $8=8$ (τὸ πρῶτο μέλος ἴσο μὲ τὸ δεύτερο μέλος).

Μὲ τὴν ἐργασία αὐτή, κατὰ τὴν ὁποία θέτομε ἀντὶ γιὰ τὸν χ τὴ λύση τῆς ἐξισώσεως καὶ βρίσκομε ὅτι τὸ πρῶτο μέλος εἶναι ἴσο μὲ τὸ δεύτερο, λέμε ὅτι **ἐπαληθεύομε** τὴν ἐξίσωση ἢ ὅτι γίνεται ἡ **ἐπαλήθευση τῆς ἐξισώσεως**.

Ὅταν μιὰ ἐξίσωση ἐπαληθεύεται γιὰ μιὰ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, λέμε ὅτι ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι πράγματι λύση τῆς ἐξισώσεως. Π.χ. ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 3 ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωση $\chi-2=1$, συμπεραίνομε ὅτι ὁ 3 εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

2. Μιὰ ἐξίσωση εἶναι δυνατὸν νὰ μὴν ἔχει λύση. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $3+\chi=\chi+\frac{5}{2}$ δὲν ἐπαληθεύεται, ὁποιονδήποτε ρητὸ κι ἂν θέσουμε ἀντὶ γιὰ τὸν χ.

Αὐτὴ λέγεται **ἀδύνατη** ἐξίσωση.

Ὑπάρχουν καὶ ἐξισώσεις οἱ ὁποῖες ἔχουν ἄπειρες λύσεις π.χ. ἡ $\chi+5=5+\chi$ ἐπαληθεύεται μὲ ὁποιονδήποτε ρητό. Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ λέγεται **ταυτότητα** ἢ ἀόριστη ἐξίσωση.

Οἱ ἐξισώσεις, τὶς ὁποῖες ἐξετάζομε, ἀνάγονται στὴ γενικὴ μορφὴ $\alpha\chi+\beta=0$, ἡ ὁποία λέγεται **ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ**, ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος ἔχει ἐκθέτη τὴ μονάδα, $\alpha\chi^1+\beta=0$ ἢ $\alpha\chi+\beta=0$.

Οἱ α, β εἶναι ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις ἀνεξάρτητες ἀπὸ τὸν χ (δὲν περιέχουν τὸν χ).

Ὁ α λέγεται συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου καὶ θεωρεῖται διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ὁ β λέγεται γνωστὸς ὅρος.

Στὴν ἐξίσωση $6\chi-5=3\chi+1$, ἡ ὁποία εἶναι 1ου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ, παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

Οἱ παραστάσεις $6\chi-5$, $3\chi+1$ λέγονται «μέλη τῆς ἐξισώσεως».

Οἱ ὅροι τους λέγονται καὶ ὅροι τῆς ἐξισώσεως.

Οἱ -5, 1 εἶναι οἱ γνωστοὶ ὅροι καὶ οἱ 6χ, 3χ εἶναι οἱ ἄγνωστοι ὅροι.

Στὴν ἐξίσωση $\frac{2\chi+3}{2}+\frac{\chi-1}{3}=\frac{\chi+2}{6}$ μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε σὰν ὅρους τοῦ 1ου μέλους τὶς παραστάσεις $\frac{2\chi+3}{2}$ καὶ $\frac{\chi-1}{3}$ καὶ τοῦ δεύτερου μέλους τὴν παράσταση $\frac{\chi+2}{6}$.

§ 75. **Ἰσοδύναμες ἐξισώσεις.**

Οἱ ἐξισώσεις $\chi-2=5$, $\chi+3=10$ ἔχουν τὴ λύση 7 (γιατὶ ἐπαληθεύονται ἂν ἀντὶ τοῦ χ θέσουμε τὸν 7) καὶ μόνον αὐτή.

Δύο ἐξισώσεις μὲ ἕναν ἄγνωστο λέγονται ἰσοδύναμες, ἂν ἔχουν τὶς ἴδιες λύσεις.

§ 76. **Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.**

α) Ἂν στὴν ἐξίσωση $(\chi+2)\cdot 3-6=12$ ἐκτελέσουμε τὶς πράξεις

$$3\chi+\underbrace{6-6}=12$$

$$3\chi+0=12,$$

καταλήγομε στὴν ἐξίσωση $3\chi=12$, ἡ ὁποία ἔχει λύση τὸν ἀριθμὸ 4.

Ἡ λύση αὐτὴ εἶναι καὶ λύση τῆς ἀρχικῆς, γιατὶ παρατηροῦμε ὅτι τὴν ἐπαληθεύει:

$$(\chi+2)\cdot 3-6=12$$

α΄ μέλος: $(4+2)\cdot 3-6$

$$6\cdot 3-6$$

$$18-6=12$$

β΄ μέλος: 12

Ὥστε, **ἂν στὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐκτελέσουμε τὶς σημειωμένες πράξεις, βρίσκομε ἰσοδύναμη ἐξίσωση.**

β) Ἡ ἐξίσωση $\chi+3=2$ ἔχει τὴ λύση -1. Ἂν προσθέσουμε καὶ στὰ δύο μέλη της τὸν 4, θὰ ἔχουμε:

$$\chi+3+4=2+4 \Leftrightarrow \chi+7=6$$

Ἡ ἐξίσωση $\chi+7=6$ ἔχει τὴ λύση -1, γιατὶ τὴν ἐπαληθεύει καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀρχική.

Ἄρα, **ἂν προσθέσουμε καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως τὸν ἴδιο ρητό, παίρνομε ἰσοδύναμη ἐξίσωση.**

Σημείωση. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ ὅταν προσθέσουμε τὴν ἴδια παράσταση, ἡ ὁποία περιέχει τὸν ἄγνωστο χ. π.χ. $\chi+3=2 \Leftrightarrow \chi+3+(\chi+1)=2+(\chi+1) \Leftrightarrow 2\chi+4=\chi+3$

Αὐτὴ ἔχει τὴ λύση -1, γιατὶ τὴν ἐπαληθεύει,

$$2(-1)+4=-1+3$$

$$-2+4=-1+3$$

$$2=2$$

Πρακτικὸ συμπέρασμα τῆς ἰδιότητας αὐτῆς.

Ἂν προσθέσουμε καὶ στὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $2χ+3=5$ τὸν -3, παίρνομε τὴν ἰσοδύναμη ἐξίσωση $2χ+3+(-3)=5+(-3)$ ἢ τὴν $2χ=5-3$, ἡ ὁποία εἶναι πιὸ ἁπλὴ ἀπὸ τὴν ἀρχική.

Παρατηροῦμε ὅτι ἀπὸ τὴν ἐξίσωση $2χ+3=5$ μεταβαίνομε στὴν $2χ=5-3$, ἂν μεταφέρουμε τὸν 3 ἀπὸ τὸ πρῶτο μέλος στὸ δεύτερο καὶ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημό του.

Ὥστε μποροῦμε νὰ μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀθροίσματος ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος μιᾶς ἐξισώσεως στὸ ἄλλο, ἂν τοῦ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο ἢ μὲ συντομία: Ὁ ὅρος μιᾶς ἐξισώσεως, ὁ ὁποῖος ἀλλάζει μέλος, ἀλλάζει καὶ πρόσημο.

Παραδείγματα:

1. $χ-5=7 \Leftrightarrow χ=7+5$
2. $3-2χ+6=5χ-1 \Leftrightarrow 3+6=2χ+5χ-1 \Leftrightarrow 3+6+1=2χ+5χ \Leftrightarrow 5χ+2χ=3+6+1$. Στὴ μορφὴ αὐτὴ τῆς ἐξισώσεως λέμε ὅτι ἔχομε χωρίσει γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους.

γ) Ἡ ἐξίσωση $\frac{χ}{2}-1=0$ ἔχει τὴ λύση 2, γιατὶ τὴν ἐπαληθεύει.

Πολλαπλασιάζομε καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ 2 καὶ ἔχομε $(\frac{χ}{2}-1)\cdot 2=0\cdot 2 \Leftrightarrow \frac{χ}{2}\cdot 2-1\cdot 2=0\cdot 2 \Leftrightarrow χ-2=0$.

Ἡ ἐξίσωση $χ-2=0$ ἔχει τὴ λύση 2, ἄρα εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀρχική.

Ἑπομένως, **ἂν πολ/σουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ ἕναν ρητό, διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ μηδέν, παίρνομε ἐξίσωση ἰσοδύναμη.**

Πρακτικὰ συμπεράσματα τῆς ἰδιότητας αὐτῆς.

1. πολ/ζομε ἐπὶ (-1) καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $2-χ=3$, $(2-χ)(-1)=3(-1)$ καὶ παίρνομε τὴν ἰσοδύναμη ἐξίσωση $-2+χ=-3$

Παρατηροῦμε **ὅτι μποροῦμε νὰ ἀλλάξουμε τὰ πρόσημα τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως.**

Παραδείγματα : $-χ=7 \Leftrightarrow χ=-7$, $\quad -χ+3=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow χ-3=\frac{1}{2}$

2. Πολ/ζομε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $\frac{χ}{2}-\frac{χ}{3}=1$ ἐπὶ τὸ 6. (Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν), $6.\left(\frac{χ}{2}-\frac{χ}{3}\right)=6\cdot 1 \Leftrightarrow 6.\frac{χ}{2}-6\cdot\frac{χ}{3}=6 \Leftrightarrow 3χ-2χ=6$

Ἄρα **μποροῦμε νὰ ἀπαλείψουμε τοὺς παρονομαστὲς μιᾶς ἐξισώσεως, ἂν πολ/με τὰ μέλη της ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.**

Παραδείγματα:

1. $\frac{\chi}{2}-3=1 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{\chi}{2}-2\cdot 3=2\cdot 1 \Leftrightarrow \chi-6=2$

2. $\frac{2\chi}{3}+\frac{1-\chi}{4}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 12\cdot\frac{2\chi}{3}+\frac{12(1-\chi)}{4}=12\cdot\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4\cdot 2\chi+3(1-\chi)=6\cdot 3$

§ 77. Ἐργασία γιὰ τὴν ἐπίλυση μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕναν ἄγνωστο.

Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}=\frac{1}{2}$

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἐξίσωση αὐτή, ἀπαλείφομε πρῶτα τοὺς παρονομαστές.

Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ βρίσκουμε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 4, 3, 2 τὸ ὁποῖο εἶναι ὁ 12, πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸν 12 καὶ ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις διαιρέσεως (ἁπλοποιήσεις). Αὐτὸ εἶναι πάντοτε δυνατόν, γιατὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι διαιρετὸ μὲ καθένα ἀπ' αὐτούς.

Ὥστε: $\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 12\left(\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}\right)=12\cdot\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{12\cdot(2\chi+1)}{4}-\frac{12(\chi-2)}{3}=6\cdot 1 \Leftrightarrow 3\cdot(2\chi+1)-4\cdot(\chi-2)=6$$

Γιὰ τὴν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $3(2\chi+1)-4(\chi-2)=6$ (καὶ κάθε ἄλλης τῆς μορφῆς αὐτῆς) ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις τοῦ πολ/μοῦ:

$$3(2\chi+1)-4(\chi-2)=6 \Leftrightarrow (6\chi+3)-(4\chi-8)=6$$

Ἐξαλείφομε τὶς παρενθέσεις: $(6\chi+3)-(4\chi-8)=6 \Leftrightarrow 6\chi+3-4\chi+8=6$

Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις προσθέσεως: $6\chi+3-4\chi+8=6 \Leftrightarrow 2\chi+11=6$

(Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται καὶ ἀναγωγὴ τῶν ὅμοιων ὅρων).

Τώρα γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε τὴν $2\chi+11=6$, μεταφέρομε τὸν 11 στὸ β' μέλος (χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους), $2\chi+11=6 \Leftrightarrow 2\chi=6-11$ καὶ ἐκτελοῦμε τὴν τελευταία πράξη τῆς προσθέσεως ἢ ἀναγωγή,

$$2\chi=6-11 \Leftrightarrow 2\chi=-5$$

Κατόπι ἐπιλύομε τὴν $2\chi=-5$, ἂν διαιρέσουμε καὶ τὰ δύο μέλη της μὲ τὸ συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου, δηλαδὴ ἂν πολ/σουμε καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ συντελεστῆ τοῦ ἀγνώστου.

$2\chi=-5 \Leftrightarrow \frac{2\chi}{2}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow \chi=-\frac{5}{2}$. Συντομότερα $2\chi=-5 \Leftrightarrow \chi=-\frac{5}{2}$. Ὥστε ἡ λύση τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως $\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}=\frac{1}{2}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $-\frac{5}{2}$

Ἐπαλήθευση:

α' μέλος:

$$\frac{2\left(-\frac{5}{2}\right)+1}{4}-\frac{-\frac{5}{2}-2}{3}=\frac{-5+1}{4}-\frac{\frac{-5-4}{2}}{3}=\frac{-4}{4}-\frac{-9}{6}=$$

$$=-1+\frac{9}{6}=-\frac{6}{6}+\frac{9}{6}=\frac{-6+9}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

β' μέλος: $\frac{1}{2}$

Ἂν συνοψίσουμε τὰ παραπάνω γιὰ τὴν ἐπίλυση μιᾶς πρωτοβάθμιας ἐξισώσεως, ἔχομε τὴν ἑξῆς γενικὴ πορεία ἐπιλύσεως:

1. Ἀπαλείφομε τοὺς παρανομαστὲς (ἂν ὑπάρχουν).
2. Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις τοῦ πολ/μοῦ.
3. Ἐξαλείφομε τὶς παρενθέσεις.
4. Χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους.
5. Ἐκτελοῦμε τὶς ἀναγωγὲς τῶν ὅμοιων ὅρων καὶ στὰ δύο μέλη.
6. Διαιροῦμε μὲ τὸ συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου, ἂν εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν.

Μὲ τὴν παραπάνω ἐργασία κάθε ἐξίσωση 1ου βαθμοῦ μὲ ἕναν ἄγνωστο παίρνει τὴ μορφὴ $\gamma\chi=\delta$ καὶ ἔχει τὴν λύση $\chi=\frac{\delta}{\gamma}$ ἂν $\gamma\neq 0$.

Σημείωση. Εἶναι δυνατὸν ἡ ἐκτέλεση τῶν πράξεων τοῦ πολ/σμοῦ καὶ ἡ ἐξάλειψη τῶν παρενθέσεων νὰ γίνουν συγχρόνως. Π.χ. $2(3\chi+1)-3(\chi+2)=5(\chi+1)-4(\chi-1)\Leftrightarrow 6\chi+2-3\chi-6=5\chi+5-4\chi+4$.

Ἐπίσης πρὶν χωρίσουμε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους, μποροῦμε νὰ κάνουμε ἀναγωγὲς καὶ στὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως: Π.χ. $6\chi+2-3\chi-6=5\chi+5-4\chi+4\Leftrightarrow 3\chi-4=\chi+9$ Στὴ συνέχεια χωρίζομε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους . . .

§ 78. Ἐπίλυση τῆς γενικῆς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἡ γενικὴ ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ ἔχει τὴ μορφὴ $\alpha\chi+\beta=0$. Μεταφέρομε τὸ γνωστὸ ὅρο β στὸ δεύτερο μέλος καὶ ἔχομε $\alpha\chi=0-\beta$ ἢ $\alpha\chi=-\beta$.

Διαιροῦμε καὶ τὰ δύο μέλη μὲ τὸ συντελεστὴ α τοῦ ἀγνώστου: $\frac{\alpha\chi}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ βρίσκομε τὴ λύση $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$

Σημείωση. Ὁ α θεωρεῖται διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν. Ἂν $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$, ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη. Π.χ. ἡ $0\chi=5$ εἶναι ἀδύνατη, γιατὶ δὲν ὑπάρχει ρητός, ὁ ὁποῖος ὅταν πολ/ται μὲ τὸ 0 νὰ δίνει γινόμενο τὸν 5. Ἂν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀόριστη ἢ ταυτότητα. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $0\chi=0$ εἶναι ταυτότητα, γιατὶ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε ρητὸ ἀριθμό.

Ἀσκήσεις:

159. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $-12\chi+60=12$, β) $3\chi-14=+8$, γ) $5(\chi-2)-2(3-\chi)=3\chi-4$

δ) $\chi-1=2(3-2\chi)-3(1-\chi)$, ε) $2\chi-5=\frac{4\chi-3}{5}$, στ) $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}=5$

ζ) $\chi-\frac{2\chi-1}{3}=\frac{3(\chi+1)}{4}$

160. Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις:

α) $\frac{4-5\chi}{12}-\frac{3(\chi-1)}{2}=2\chi-6$, β) $2\chi+\left(\frac{\chi}{3}-\frac{\chi}{4}\right)=\frac{5\chi}{3}+30$

γ) $\frac{3\chi-5}{2}-\frac{4\chi-2}{5}=\frac{3(\chi-2)}{10}+\frac{\chi-23}{2}$, δ) $\frac{2\chi-1}{3}-\frac{3\chi-2}{4}=\frac{5\chi-4}{6}-\frac{7\chi+6}{12}$

161. Νὰ βρεθεῖ μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο $A\cup B$, ἄν:

α) $A=\{\chi/3(\chi-1)=12,\ \chi\in Q\}$ καὶ $B=\{\chi/\ \frac{3\chi-4}{5}-\frac{3-2\chi}{2}=0,\ \chi\in Q\}$

β) $A=\{\chi/\ \frac{\chi}{3}+2=4,\ \chi\in Q\}$ καὶ $B=\{\chi/\ \frac{2\chi+3}{3}=\frac{\chi-1}{4},\ \chi\in Q\}$

γ) $A=\{\chi/\ \frac{2\chi}{3}+\frac{\chi}{6}-5=\frac{5\chi}{4},\ \chi\in Q\}$ καὶ $B=\{\chi/6{,}5-\frac{5\chi-1}{6}=\frac{20}{3},\ \chi\in Q\}$

162. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\chi+2=\chi+1$, β) $\chi+3=2+\chi+1$, γ) $\frac{2\chi-3}{2}=\chi-5$,

δ) $\chi-\frac{5\chi-12}{4}=3-\frac{\chi}{4}$, ε) $\frac{3\chi+7}{15}=\frac{\chi-1}{5}$, στ) $\frac{5\chi+6}{6}=0{,}5\chi+\frac{\chi+3}{3}$

163. Νὰ βρεθοῦν τὰ ὑποσύνολα τοῦ Q: A, B, Γ, Δ, E καὶ Z, ἄν:

$A=\{\chi/0\chi=-4\}$, $B=\{\chi/0\chi=0\}$, $\Gamma=\{\chi/\chi-3=2+\chi\}$,

$\Delta=\{\chi/1\chi=\chi\}$, $E=\{\chi/\frac{2\chi-1}{3}-\frac{5\chi-2}{12}=\frac{\chi+1}{4}\}$, $Z=\{\chi/2\chi-\frac{5\chi-12}{4}=3+\frac{3\chi}{4}\}$

164. Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν α, β, γ, δ οἱ παρακάτω ἐξισώσεις εἶναι ἀδύνατες;

1) $(\alpha+2)\chi=1$, 2) $\beta\chi=6+5\chi$, 3) $(3\gamma-1)\chi=2$, 4) $\delta\chi+\chi+1=5\chi+7$

165. Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν α καὶ β οἱ παρακάτω ἐξισώσεις εἶναι ἀόριστες;

1) $(\alpha-1)\chi=\beta-2$, 2) $(3\alpha+4)\chi=\beta+\frac{1}{2}$, 3) $\alpha\chi-1=\beta-3\chi$,

4) $\alpha\chi-\beta=8\chi+3\beta-1$.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ Αου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ.

§ 79. Πρόβλημα εἶναι μιὰ πρόταση, ποὺ περιλαμβάνει δεδομένα καὶ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα εἶναι ρητοὶ ἀριθμοὶ ποὺ συνδέονται μεταξύ τους. Ἡ εὕρεση τῶν ζητουμένων λέγεται ἐπίλυση τοῦ προβλήματος.

Ἕνα πρόβλημα μπορεῖ νὰ ἐκφρασθεῖ ἀπὸ μιὰ ἐξίσωση, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω.

Μὲ τὶς ἐξισώσεις βρίσκουμε συντομότερα καὶ εὐκολότερα τὴ λύση τῶν προβλημάτων.

Σημείωση. Ἂν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος δὲν εἶναι ἐπαρκῆ καὶ κατάλληλα, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύση. Π.χ. Ἕνας μαθητὴς ἔχει 20 δρχ. καὶ ξοδεύει 3 δρχ. τὴν ἡμέρα. Ἕνας ἄλλος μαθητὴς ἔχει 12 δρχ. καὶ ξοδεύει 2 δρχ. τὴν ἡμέρα. Μετὰ πόσες ἡμέρες θὰ ἔχουν τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό;

Δὲν ὑπάρχει λύση. Ἡ λύση 8 ἡμέρες δὲν εἶναι δεκτή, γιατὶ μετὰ τὴν ἕκτη ἡμέρα δὲν θὰ ἔχουν χρήματα.

Παραδείγματα:

1ο. Οἱ τρεῖς πρῶτες τάξεις ἑνὸς Γυμνασίου ἔχουν 360 μαθητές. Ἡ Α′ τάξη ἔχει διπλάσιους μαθητὲς ἀπὸ τὴ Β′ τάξη καὶ ἡ Γ′ τάξη ἔχει τριπλάσιους ἀπὸ τὴ Β′ τάξη.

Πόσους μαθητὲς ἔχει κάθε τάξη;

Οἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἕνα ἀπὸ τὰ ζητούμενα τὸ συμβολίζομε μὲ χ. Σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα συμβολίζομε μὲ χ τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν τῆς Β′ τάξης. Γιὰ νὰ σχηματίσουμε τὴν ἐξίσωση, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἡ Β′ τάξη ἔχει χ μαθητές. Ἡ πρώτη τάξη, ἡ ὁποία ἔχει 2πλάσιους μαθητὲς ἀπὸ τὴν Β′ τάξη, θὰ ἔχει 2χ μαθητὲς καὶ ἡ Γ′ τάξη 3χ μαθητές.

Ἀλλὰ μαθητὲς Α′ τάξης + μαθητὲς Β′ τάξης + μαθητὲς Γ′ τάξης = 360 μαθ.

$$2\chi \quad + \quad \chi \quad + \quad 3\chi \quad = 360$$

Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως:

$$2\chi+\chi+3\chi=360 \Leftrightarrow 6\chi=360 \Leftrightarrow \chi=\frac{360}{6} \Leftrightarrow \chi=60$$

Ἀπάντηση στὸ πρόβλημα:

Ἡ Β′ τάξη ἔχει 60 μαθητὲς

Ἡ Α′ τάξη ἔχει $2\cdot 60=120$ μαθητὲς

Ἡ Γ′ τάξη ἔχει $3\cdot 60=180$ μαθητὲς

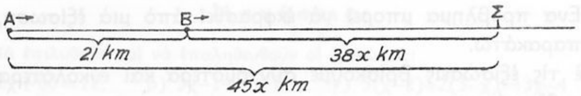
Ἐπαλήθευση: 60 μαθ + 120 μαθ. + 180 μαθ. = 360 μαθ.

2ο. Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν μεταξύ τους 21 km. Δύο αὐτοκίνητα ξεκινοῦν συγχρόνως ἀπὸ τὶς πόλεις αὐτὲς μὲ σταθερὲς ταχύτητες 45 km/h καὶ 38 km/h ἀντιστοίχως καὶ κινοῦνται εὐθύγραμμα κατὰ τὴ φορὰ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Μετὰ πόσες ὧρες θὰ συναντηθοῦν καὶ σὲ πόση ἀπόσταση ἀπὸ τὴν πόλη Α;

Οἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου:

Ἔστω ὅτι μετὰ χ ὧρες θὰ συναντηθοῦν στὸ Σ.



σχ. **45.**

Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως:

Ἀφοῦ σὲ 1 ὥρα τὸ 1ο αὐτοκίνητο διανύει 45 km, σὲ χ ὧρες θὰ διανύσει 45χ km. Τὸ 2ο αὐτοκίνητο σὲ χ ὧρες θὰ διανύσει 38χ km.

Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $A\Sigma = AB + B\Sigma$

$$45\chi = 21 + 38\chi$$

Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως. $45\chi = 21 + 38\chi \Leftrightarrow 45\chi - 38\chi =$

$$= 21 \Leftrightarrow 7\chi = 21 \Leftrightarrow \chi = \frac{21}{7} \Leftrightarrow \chi = 3$$

(Ἐπαλήθευση τῆς ἐξισώσεως: $45\chi = 21 + 38\chi$

α΄ μέλος: $45 \cdot 3 = 135$

β΄ μέλος: $21 + 38 \cdot 3 = 21 + 114 = 135$)

Ἀπάντηση στὸ πρόβλημα:

Θὰ συναντηθοῦν μετὰ 3 ὧρες.

Σὲ ἀπόσταση $3 \cdot 45$ km $= 135$ km ἀπὸ τὴν πόλη Α.

3ο. Ὅταν τὸ 3πλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ αὐξηθεῖ κατὰ $\frac{11}{2}$, γίνεται 41,5. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἡ λύση εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἄρα τὸ 3πλάσιό του θὰ εἶναι 3χ. Σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα σχηματίζομε τὴν ἐξίσωση.

«Τὸ 3πλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ» «ὅταν αὐξηθεῖ κατὰ $\frac{11}{2}$» «γίνεται» 41,5

$$3\chi \qquad + \qquad \frac{11}{2} \qquad = \qquad 41{,}5$$

Ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως βρίσκομε τὴ λύση 12, ἡ ὁποία τὴν ἐπαληθεύει καὶ ἑπομένως εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τοῦ προβλήματος.

4ο. Δύο ἀκέραιοι θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 188. Ἂν διαιρεθεῖ ὁ μεγαλύτερος διὰ τοῦ μικρότερου, δίνει πηλίκο 3 καὶ ὑπόλοιπο 8. Ποιοί εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Οἱ λύσεις εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἂν ὁ μικρότερος εἶναι χ, τότε ὁ μεγαλύτερος θὰ εἶναι 188–χ καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα:

Διαιρετέος = διαιρέτης ἐπὶ πηλίκο + ὑπόλοιπο ἔχομε τὴν ἐξίσωση:

$$188 - \chi = \chi \cdot 3 + 8.$$

Ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 45.

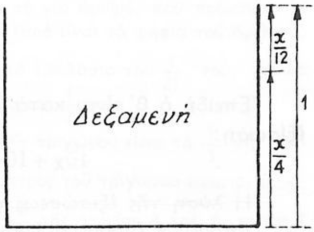
Ἄρα ὁ μικρότερος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 45 καὶ ὁ μεγαλύτερος ὁ $188 - 45 = 143$.

Πραγματικὰ ὁ 143 ἂν διαιρεθεῖ διὰ 45, δίνει πηλίκο 3 καὶ ὑπόλοιπο 8.

5ο Μιὰ βρύση γεμίζει μιὰ ἄδεια δεξαμενὴ σὲ 4 ὧρες καὶ μιὰ ἄλλη σὲ 12 ὧρες Σὲ πόσες ὧρες θὰ γεμίσουν τὴ δεξαμενή, ἂν τρέχουν καὶ οἱ δύο συγχρόνως;

Ἔστω ὅτι σὲ χ ὧρες θὰ γεμίσουν τὴ δεξαμενή, ἂν τρέχουν συγχρόνως. (Ὁ χ πρέπει νὰ εἶναι θετικός).

Ἐπειδὴ ἡ πρώτη βρύση γεμίζει τὴ δεξαμενὴ σὲ 4 ὧρες, σὲ μιὰ ὥρα θὰ γεμίσει τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς δεξαμενῆς, σὲ 2 ὧρες τὰ $\frac{2}{4}$, καὶ σὲ χ ὧρες τὰ $\frac{\chi}{4}$.



σχ. 46.

Ἡ δεύτερη βρύση σὲ χ ὧρες θὰ γεμίσει τὰ $\frac{\chi}{12}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἄρα ἔχομε τὴν ἐξίσωση:

Μέρος τῆς δεξ. ποὺ γεμίζει ἡ α΄ βρύση σὲ χ ὧρες	+	μέρος τῆς δεξ. ποὺ γεμίζει ἡ β΄ βρύση σὲ χ ὧρες	=	Ὁλόκληρη ἡ δεξαμενὴ (Μιὰ δεξαμενή)
$\frac{\chi}{4}$	+	$\frac{\chi}{12}$	=	1

Ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως εἶναι 3.

Ἑπομένως σὲ 3 ὧρες θὰ γεμίσουν τὴ δεξαμενὴ καὶ οἱ δυὸ βρύσες.

6ο Ἕνας πατέρας εἶναι 42 ἐτῶν καὶ ὁ γιός του 10 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θὰ εἶναι 3πλάσια ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ γιοῦ;

Ἔστω μετὰ χ ἔτη. (Ἂν ἡ τιμὴ τοῦ χ βρεθεῖ ἀρνητική, τὸ ζητούμενο ἔγινε στὸ παρελθόν).

Τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θὰ εἶναι $42+\chi$ καὶ τοῦ γιοῦ $10+\chi$. Ἐπειδὴ ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα εἶναι τριπλάσια ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ γιοῦ, ἔχομε τὴν ἐξίσωση:

$42+\chi=3\cdot(10+\chi) \Leftrightarrow 42+\chi=30+3\chi \Leftrightarrow 2\chi=12 \Leftrightarrow \chi=6$. Ἄρα μετὰ ἀπὸ 6 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θὰ εἶναι 3πλάσια ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ γιοῦ.

7ο Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς διψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι 10. Ἂν ἐναλλάξουμε τὴ θέση τῶν ψηφίων του, βρίσκουμε ἀριθμὸ μεγαλύτερο κατὰ 18. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἔστω χ τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων, τότε τὸ ψηφίο τῶν μονάδων θὰ εἶναι $10-\chi$ καὶ ὁ ἀριθμός.

$$\underset{\text{δεκάδες}}{\underset{\downarrow}{10\cdot\chi}} + \underset{\text{μονάδες}}{\underset{\downarrow}{(10-\chi)}} : (\text{π.χ. } 53 = \underset{\text{δεκάδες}}{\underset{\downarrow}{10\cdot 5}} + \underset{\text{μονάδες}}{\underset{\downarrow}{3}})$$

Περιορισμός: Οἱ χ, $10-\chi$ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι, μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι τοῦ 0 καὶ μικρότεροι ἀπὸ τὸ 10.

Ἂν ἐναλλάξουμε τὰ ψηφία του, βρίσκουμε τὸν ἀριθμὸ

$$\underbrace{10\cdot(10-\chi)}_{\text{δεκάδες}} + \underbrace{\chi}_{\text{μονάδες}}$$

Ἐπειδὴ ὁ β' εἶναι κατὰ 18 μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν α', θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση:

$$10\chi+10-\chi+18=10(10-\chi)+\chi$$

Ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι ὁ 4.

Ἑπομένως ἔχουμε 4 δεκάδες καὶ $10-4=6$ μονάδες. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 46.

8ο. Ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος εἶναι κατὰ 9 δρχ. μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ τριπλάσιο τῆς τιμῆς τοῦ κιλοῦ τῶν ζυμαρικῶν. Ἂν 15 κιλὰ κρέας καὶ 50 κιλὰ ζυμαρικὰ ἀξίζουν 1370 δρχ., ποιὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος καὶ ποιὰ τοῦ κιλοῦ τῶν ζυμαρικῶν; (οἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί).

Ἔστω χ δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τῶν ζυμαρικῶν. Ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος θὰ εἶναι $3\chi+9$ καὶ θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση:

$(3\chi+9)\cdot15+50\chi=1370 \Leftrightarrow 45\chi+135+50\chi=1370 \Leftrightarrow$ $95\chi=1370-135 \Leftrightarrow 95\chi=1235 \Leftrightarrow \chi=13$. Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τῶν ζυμαρικῶν εἶναι 13 δρχ. καὶ ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος εἶναι 48 δρχ.

Προβλήματα:

166. Μετρήσαμε 360 ἄτομα: ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά. Οἱ ἄνδρες ἦταν 2πλάσιοι ἀπὸ τὶς γυναῖκες καὶ τὰ παιδιὰ ἦταν τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν γυναικῶν. Πόσα ἦταν τὰ παιδιά;

167. Ὁ Πέτρος ἔχει 3πλάσιες δραχμὲς ἀπὸ ὅσες ἔχει ὁ Παῦλος. Πόσες δραχμὲς ἔχει ὁ καθένας, ἂν ὁ Πέτρος ἔχει 12 δραχμὲς περισσότερες ἀπὸ τὸν Παῦλο;

168. Ἀπὸ δύο πόλεις, ποὺ ἀπέχουν μεταξύ τους 108 km, ξεκινοῦν συγχρόνως δύο ποδηλάτες μὲ ταχύτητες 19 km/h καὶ 17 km/h καὶ κατευθύνονται γιὰ συνάντηση. Ὕστερ' ἀπὸ πόσες ὧρες θὰ συναντηθοῦν καὶ σὲ ποιὰ ἀπόσταση ἀπὸ τὶς πόλεις;

169. Ἂν σ' ἕναν ἀριθμὸ προσθέσουμε τὸ $\frac{1}{3}$ του, βρίσκουμε τὸν ἀριθμὸ 19 ἐλαττωμένο κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ζητούμενου ἀριθμοῦ. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

170. Νὰ βρεθοῦν δύο θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, ποὺ νὰ ἔχουν διαφορὰ 401, τὸ πηλίκο τοῦ μεγαλύτερου διὰ τοῦ μικρότερου νὰ εἶναι 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπο 6.

171. Μιὰ βρύση γεμίζει μιὰν ἄδεια δεξαμενὴ σὲ 3 ὧρες, μιὰ ἄλλη σὲ 6 ὧρες καὶ μιὰ τρίτη τὴν ἀδειάζει σὲ 4 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ γεμίσει ἡ δεξαμενή, ἂν τρέχουν καὶ οἱ τρεῖς μαζί;

172. Ένας πατέρας είναι 59 χρονῶν καὶ ὁ γιός του 29. Ὕστερ' ἀπὸ πόσα χρόνια ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θὰ εἶναι τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς ἡλικίας τοῦ γιοῦ;

173. Ἡ διαφορὰ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τὸ ψηφίο τῶν μονάδων ἑνὸς διψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι 3. Ἂν σ' αὐτὸν προσθέσουμε τὸ νέο ἀριθμό, ποὺ προκύπτει μὲ ἐναλλαγὴ τῶν ψηφίων του, βρίσκουμε ἄθροισμα 121. Ποιὰ εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ;

174. Ἀπὸ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει ν' ἀφαιρέσουμε τὸ 13πλάσιο τοῦ $\frac{1}{21}$ του, γιὰ νὰ βροῦμε ἕναν ἀριθμὸ κατὰ 4 μικρότερο ἀπὸ τὸ 2πλάσιο τοῦ $\frac{1}{7}$ του;

175. Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρὲς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς τρίτης πλευρᾶς του. Νὰ βρεθοῦν οἱ πλευρές, ἂν ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι 31,2 cm.

176. Ἡ γωνία Β ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς γωνίας Α καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς γωνίας Β. Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

177. Ἕνας ὑπάλληλος ἔδωσε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μισθοῦ του γιὰ ν' ἀγοράσει ὕφασμα καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ γιὰ ραφτικά. Ἐὰν τοῦ περίσσευσαν 800 δρχ, πόσος εἶναι ὁ μισθός του;

178. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ 10πλάσιο εἶναι μεγαλύτερο κατὰ 16 ἀπὸ τὸ 2πλάσιο τοῦ $\frac{1}{5}$ του;

179. Νὰ διατυπωθοῦν σὲ προβλήματα οἱ ἑπόμενες ἐξισώσεις:

α) $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=9$, β) $\frac{x}{2}=35-\frac{x}{3}$, γ) $x-\frac{3x}{4}=\frac{4x}{5}+\frac{11}{2}$

3. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ.

§ 80. Ἡ σχέση $x+1>5$ γιὰ $x=7$ ἀληθεύει: $7+1>5$, ἀλλὰ γιὰ $x=2$ δὲν ἀληθεύει ($2+1$ δὲν εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 5). Ἡ $x+1>5$ λέγεται ἀνίσωση πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Ἀνίσωση ὡς πρὸς x εἶναι μιὰ ἀνισότητα, ἡ ὁποία περιέχει τὸν ἄγνωστο x.

Παραδείγματα ἀνισώσεων 1ου βαθμοῦ:

$x-1>3$, $2x+6>0$, $4x+10<0$, $3x-1<8$

Γενικὰ τὴν ἀνίσωση 1ου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕναν ἄγνωστο x τὴν παριστάνομε μὲ τὴ σχέση: $\alpha x+\beta>0$ $(\alpha, \beta \in Q)$

Λύση ἀνισώσεως λέγεται κάθε τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ἡ ὁποία τὴν ἐπαληθεύει.

Π.χ. τὸ 7 εἶναι λύση τῆς $x+1>5$.

Ἐπίλυση ἀνισώσεως λέγεται ἡ εὕρεση τῶν λύσεών της.

Δύο ἀνισώσεις λέγονται ἰσοδύναμες, ὅταν ἔχουν τὶς ἴδιες λύσεις ἢ τὸ ἴδιο σύνολο λύσεων.

Ἰδιότητες ἀνισώσεων

Οἱ ἀνισώσεις ἔχουν τὶς ἰδιότητες ποὺ μάθαμε στὶς ἐξισώσεις (§ 76). Μὲ βάση τὶς ἰδιότητες αὐτές, παίρνουμε ὁμόστροφη ἰσοδύναμη ἀνίσωση, μὲ τὴν παρατήρηση ὅτι:

Ἂν πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισώσεως ἐπὶ θετικὸ ἀριθμό, προκύπτει ὁμόστροφη ἰσοδύναμη ἀνίσωση, ἐνῶ, ἂν πολ/με ἐπὶ ἀρνητικό, προκύπτει ἑτερόστροφη ἰσοδύναμη ἀνίσωση.

Ἑπομένως, ἂν ἀλλάξουμε τὰ πρόσημα τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἀνισώσεως, πρέπει νὰ ἀλλάξουμε καὶ τὴ φορά της.

Γιὰ τὴν ἐπίλυση μιᾶς ἀνισώσεως ἀκολουθοῦμε πορεία ἐργασίας παρόμοια μ' ἐκείνη, ποὺ μάθαμε στὶς ἐξισώσεις.

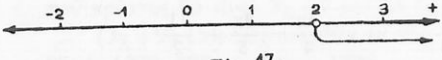
Παραδείγματα.

1) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $3\chi - 2 > 4$

$$3\chi - 2 > 4 \Leftrightarrow 3\chi > 4 + 2 \Leftrightarrow 3\chi > 6 \Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} > \frac{6}{3} \Leftrightarrow \chi > 2$$

Ἑπομένως ὅλοι οἱ ρητοί, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 2, εἶναι λύσεις τῆς ἀνισώσεως $3\chi - 2 > 4$.

Ἂν χρησιμοποιήσουμε τὸν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, παρατηροῦμε ὅτι στὸ σύνολο τῶν λύσεων ἀνήκουν οἱ ρητοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι δεξιὰ τοῦ 2.

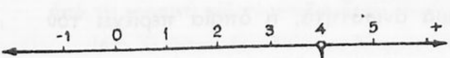


σχ. 47.

2) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $2\chi + 5 > 7\chi - 15$

$$2\chi + 5 > 7\chi - 15 \Leftrightarrow 2\chi - 7\chi > -5 - 15 \Leftrightarrow -5\chi > -20 \Rightarrow 5\chi < 20 \Leftrightarrow$$
$$\frac{5\chi}{5} < \frac{20}{5} \Leftrightarrow \chi < 4.$$

Ἄρα οἱ ρητοί, ποὺ εἶναι μικρότεροι τοῦ 4, εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἀρχικῆς ἀνισώσεως $2\chi + 5 > 7\chi - 15$. Στὸν ἄξονα τῶν ρητῶν οἱ λύσεις εἶναι ἀριστερὰ τοῦ 4.

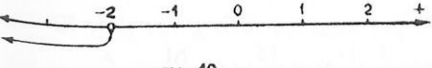


σχ. 48.

3) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $\frac{2\chi+1}{3} < \frac{\chi}{2}$

$$\frac{2\chi+1}{3} < \frac{\chi}{2} \Leftrightarrow \frac{6.(2\chi+1)}{3} < 6 \cdot \frac{\chi}{2} \Leftrightarrow 2(2\chi+1) < 3\chi \Leftrightarrow 4\chi + 2 < 3\chi \Leftrightarrow$$
$$4\chi - 3\chi < -2 \Leftrightarrow \chi < -2$$

Οἱ ρητοί, ποὺ εἶναι ἀριστερὰ τοῦ -2 στὸν ἄξονα τῶν ρητῶν, ἀποτελοῦν τὸ σύνολο τῶν λύσεων τῆς $\chi < -2$, συνεπῶς καὶ τῆς ἰσοδύναμής της $\frac{2\chi+1}{3} < \frac{\chi}{2}$.

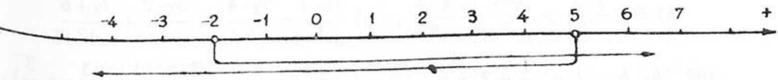


σχ. 49.

4) Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ κοινὲς λύσεις τῶν ἀνισώσεων: $2\chi+4>0$ καὶ $3\chi-4<11$.

Ἔχουμε: $2\chi+4>0 \Leftrightarrow 2\chi>-4 \Leftrightarrow \chi>-2$

$3\chi-4<11 \Leftrightarrow 3\chi<4+11 \Leftrightarrow 3\chi<15 \Leftrightarrow \chi<5$



σχ. 50.

Οἱ κοινὲς λύσεις τῶν παραπάνω ἀνισώσεων εἶναι οἱ ρητοί, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ -2 καὶ μικρότεροι τοῦ 5. Τὸ σύνολο αὐτῶν τῶν ρητῶν περιγράφεται ἀπὸ τήν: $-2<\chi<5$

Σημείωση.

Ἂν $A=\{\chi/2\chi+4>0\}$ καὶ $B=\{\chi/3\chi-4<11\}$

Ἔχουμε: $A=\{\chi/\chi>-2\}$ καὶ $B=\{\chi/\chi<5\}$

$A\cap B=\{\chi/\chi>-2\}\cap\{\chi/\chi<5\}=\{\chi/-2<\chi<5\}$

5) Ἂν $\chi\in Z$ καὶ $-3<\chi<5$ (ὁ χ περιέχεται μεταξὺ τοῦ -3 καὶ τοῦ 5), νὰ βρεθεῖ μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο $A=\{\chi/2\chi-1<2+\chi\}$

Ἔχουμε: $2\chi-1<2+\chi \Leftrightarrow 2\chi-\chi<2+1 \Leftrightarrow \chi<3$. Ἄρα ὁ χ εἶναι:

$-2, 0, 1, 2$ καὶ $A=\{-2, 0, 1, 2\}$.

6) Νὰ γίνει πιὸ ἁπλὴ ἡ περιγραφὴ τοῦ συνόλου:

$A=\{\chi/4\chi-5<3+3\chi \wedge 5\chi-5>4\chi-2\}$

Εἶναι: $4\chi-5<3+3\chi \Leftrightarrow 4\chi-3\chi<3+5 \Leftrightarrow \chi<8$

$5\chi-5>4\chi-2 \Leftrightarrow 5\chi-4\chi>5-2 \Leftrightarrow \chi>3 \Leftrightarrow 3<\chi$

Ἄρα $A=\{\chi/3<\chi<8\}$

Ἀσκήσεις:

180. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $2\chi+8<0$, δ) $3\chi<\chi+1$, στ) $-2\chi+1<\chi$, ζ) $\chi+1>\frac{\chi}{2}$

β) $-3\chi>\frac{6}{5}$, ε) $\frac{3\chi}{-2}+5>\chi$, η) $7\chi-3<3(\chi-2)+2(3-\chi)$,

γ) $\frac{3\chi+1}{2}-\frac{\chi-1}{3}>0$, θ) $\frac{2\chi+1}{3}+\frac{1-\chi}{2}>3$, ι) $\frac{3\chi+1}{4}-\frac{4-\chi}{3}>1$

181. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $2-\chi>2$, ε) $-\chi+\frac{1}{2}<-\frac{3}{2}$, θ) $\chi-\frac{5}{4}<2\chi-\frac{1}{4}$

β) $5(\chi-3)>3(\chi-1)$, στ) $18-5(\chi+1)<3(\chi-1)-2$

γ) $2(4-\chi)-3(\chi-7)<16\chi+1$, ζ) $-13(\chi-2)>1-6(\chi-3)$

δ) $6-\frac{\chi-1}{2}>\frac{\chi-2}{3}-\frac{\chi-3}{4}$, η) $\frac{2\chi-1}{3}-\frac{5\chi-4}{6}<\frac{3\chi-2}{4}+\frac{7\chi+6}{12}$

182. Ἂν $A=\{\chi/\frac{\chi}{3}+2>\chi-\frac{2\chi-4}{3}\}$ καὶ $B=\{\chi/\frac{2}{3}\chi-\frac{1}{3}>\frac{3}{4}\chi+\frac{3}{4}\}$, νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὸ σύνολο $A\cap B$ στὴν εὐθεία τῶν ρητῶν.

183. Ἂν $A=\{\chi/\chi-5>5\chi-1\}$ καὶ $B=\{\chi/\frac{3}{2}\chi+1>\chi-2\}$, νὰ βρεῖτε μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο $A\cap B=\{\chi/\chi\in Z\}$

184. Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὰ σύνολα (στὴν εὐθεία τῶν ρητῶν).

α) $A=\{\chi/8-\chi<\chi+2\ \wedge\ 8-\chi>\chi-1\}$

β) $B=\{\chi/4\chi-5<3+3\chi\ \wedge\ 5\chi-5>4\chi-2\}$

γ) $\Gamma=\{\chi/\frac{1}{2}\chi+5>-3\chi-2\wedge\frac{1}{2}\chi-1<\chi-2\}$

δ) $\Delta=\{\chi/-\frac{2}{3}\chi-4>0\ \wedge\ -\frac{1}{2}\chi+2>0\}$

185. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\chi-2>\chi$, γ) $\chi+3<\chi$, ε) $\frac{1}{2}-\chi<\frac{1}{4}-\chi$

β) $\chi+1>\chi$, δ) $\chi-1<\chi$, στ) $\chi+6>\chi+4$

Β΄ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ $\alpha\chi+\beta\geqslant 0$

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

α) Ἡ ἔννοια τῆς μεταβλητῆς.

§ **81.** *Ποιὲς τιμὲς μπορεῖ νὰ πάρει ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ;*

Ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ μπορεῖ νὰ λάβει τὶς τιμές: $\frac{1}{2}$ ἔτους, 1 ἔτος, 1,5 ἔτη, καθὼς καὶ ὅλες τὶς τιμὲς ποὺ βρίσκονται μεταξύ τους. Γενικὰ μπορεῖ νὰ πάρει ὅλες τὶς τιμὲς μεταξὺ 0 καὶ 12 ἔτη.

Ἂν συμβολίσουμε μὲ χ τὴν ἡλικία τοῦ παιδιοῦ, ἔχουμε τὸν πίνακα:

χ	. . .	$\frac{1}{2}$	1	1,5	. . .

Οἱ τιμὲς τοῦ χ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$A = \{0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots 1, \ldots, 12\} \text{ ἢ } A = \{\chi / 0 \leq \chi \leq 12\}$$

Τὸ γράμμα χ λέγεται μεταβλητή.

Ὥστε μεταβλητὴ εἶναι κάθε γράμμα, τὸ ὁποῖο παίρνει τιμὲς ἀπὸ ἕνα σύνολο ἀριθμῶν.

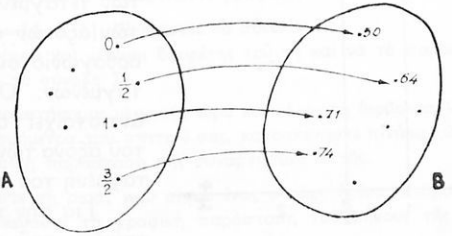
Σημείωση. Ἡ παιδικὴ ἡλικία θεωρεῖται ὅτι διαρκεῖ μέχρι τὸ 12ο ἔτος.

β) Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.

§ **82**. Ὅταν γεννήθηκε ἕνα παιδί, εἶχε ὕψος 50 cm, ὅταν ἔγινε 6 μηνῶν, εἶχε ὕψος 64 cm, σὲ ἡλικία ἑνὸς ἔτους εἶχε ὕψος 71 cm κ.ο.κ., ὅπως φαίνεται στὸν παρακάτω πίνακα, στὸν ὁποῖο παριστάνομε μὲ χ ἔτη τὴν ἡλικία καὶ μὲ ψ cm τὸ ὕψος τοῦ παιδιοῦ (Στὶς τιμὲς τῆς ἡλικίας, ποὺ βρίσκονται μεταξὺ τῶν 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ἀντιστοιχοῦν τιμὲς τοῦ ὕψους ποὺ βρίσκονται μεταξὺ τῶν 50, 64, 71, 74 ἀντιστοίχως).

Ἡλικία: χ ἔτη	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
Ὕψος : ψ cm	50	...	64	...	71	...	74	...

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ **κάθε τιμὴ** τῆς ἡλικίας τοῦ παιδιοῦ ἀντιστοιχεῖ **μία μόνο τιμὴ** τοῦ ὕψους του. Δηλαδὴ σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A = \{0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, 1, \ldots, \frac{3}{2}, \ldots\}$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο στοιχεῖο τοῦ συνόλου $B = \{50, \ldots, 64, \ldots, 71, \ldots, 74, \ldots\}$. Ἑπομένως μεταξὺ τοῦ συνόλου Α τῶν τιμῶν τῆς ἡλικίας καὶ τοῦ συνόλου Β τῶν τιμῶν τοῦ ὕψους ὑπάρχει μία μονοσήμαντη ἀντιστοιχία, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα βλέπετε στὸ σχ. (51)



σχ. 51.

Τὸ σύνολο Α, ἀπὸ τὸ ὁποῖο παίρνει τιμὲς ἡ μεταβλητὴ χ, λέγεται **πεδίο ὁρισμοῦ** καὶ τὸ σύνολο Β **πεδίο τιμῶν.**

Ἂν σὲ κάθε στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνο ἕνα στοιχεῖο ἑνὸς ἄλλου συνόλου, τότε ἔχουμε μεταξὺ τῶν συνόλων αὐτῶν μία μονοσήμαντη ἀντιστοιχία.

Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ ὁρίζει μία συνάρτηση.

γ) Ἡ συνάρτηση σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν.

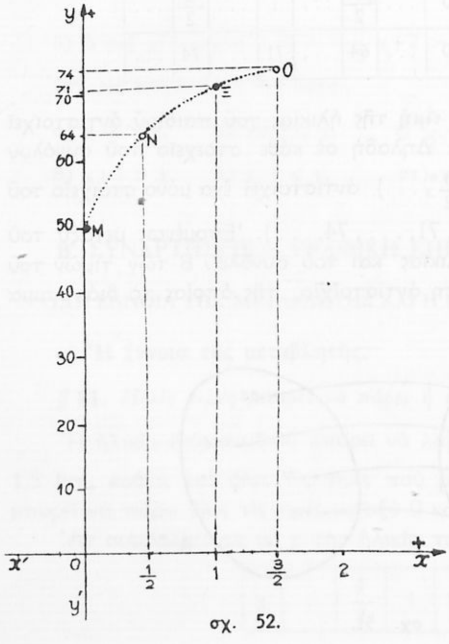
§ 83. Ἂν σχηματίσουμε τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$(0, 50), (\frac{1}{2}, 60), (1, 71), (\frac{3}{2}, 74), \ldots$ τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς πρῶτο μέλος μιὰ τιμὴ τοῦ χ καὶ ὡς δεύτερο μέλος τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ψ, παίρνουμε ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν τὸ

$$F = \{(0, 50), (\frac{1}{2}, 64), (1, 71), (\frac{3}{2}, 74), \ldots\}$$

Τὸ σύνολο αὐτὸ παριστάνει τὴν προηγούμενη συνάρτηση.

Ἐπειδὴ ἡ ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β εἶναι μονοσήμαντη, **δὲν ὑπάρχουν στὸ σύνολο F ζεύγη μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος.**



σχ. 52.

δ) Γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως F.

§ 84. Παίρνουμε δύο ἄξονες, οἱ ὁποῖοι τέμνονται καθέτως. Θεωροῦμε τὸ σημεῖο τομῆς τους ὡς ἀρχὴ καὶ τοποθετοῦμε πάνω σ' αὐτοὺς τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς ὅπως μάθαμε.

Τὸν χ′οχ τὸν ὀνομάζομε ἄξονα τῶν χ (ἢ ἄξονα τῶν τετμημένων) καὶ τὸν ἄξονα ψ′οψ ἄξονα τῶν ψ ἢ ἄξονα τῶν τεταγμένων. Τὸ ζεῦγος τῶν ἀξόνων αὐτῶν τὸ λέμε ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα τῶν ψ, λέγεται τεταγμένη τοῦ σημείου αὐτοῦ.

Γιὰ τὴν τετμημένη ἑνὸς σημείου τοῦ ἄξονα τῶν χ μάθαμε στὴν § 66.

Στὸ σημεῖο, ποὺ ἔχει τετμημένη $\frac{1}{2}$, ὑψώνομε κάθετο στὸν ἄξονα τῶν χ καὶ στὸ σημεῖο ποὺ ἔχει τεταγμένη 64, φέρνουμε κάθετο στὸν ἄξονα τῶν ψ. Οἱ κάθετες αὐτὲς τέμνονται στὸ σημεῖο Ν. Λέμε ὅτι τὸ Ν εἶναι ἡ **γραφικὴ παράσταση** τοῦ ζεύγους $(\frac{1}{2}, 64)$ ἢ ἡ **γραφικὴ εἰκόνα** του. Τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ 64 τοὺς ὀνομάζομε ἀντιστοίχως **τετμημένη** καὶ **τεταγμένη** τοῦ σημείου Ν ἢ **συντεταγμένες** του.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο κατασκευάζουμε τὶς γραφικὲς παραστάσεις τῶν ζευγῶν τοῦ συνόλου F, δηλαδὴ τῆς συναρτήσεως.

Ἡ γραφικὴ παράσταση τοῦ ζεύγους (0, 50) εἶναι τὸ σημεῖο Μ τοῦ ἄξονα τῶν ψ, γιατὶ ἡ τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι 0 καὶ ἡ τεταγμένη 50.

Τὸ σύνολο τῶν Μ, . . ., Ν, . . . , Ξ, . . ., Ο, . . . τὸ λέμε **γραφικὴ εἰκόνα τῆς συναρτήσεως F.**

Σημείωση: Ἂν πάρουμε τὶς γραφικὲς παραστάσεις πολλῶν ζευγῶν, ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι μία γραμμή.

Ἀσκήσεις:

186. Ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὴν ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ σὲ ἔτη καὶ μὲ ψ τὸ βάρος του σὲ kgr*, ἔχουμε τὸν πίνακα:

χ	...	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	...
ψ	...	7	9,2	10,4	11,5	...

Νὰ παραστήσετε τὴ συνάρτηση μεταξὺ ἡλικίας καὶ βάρους σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν καὶ νὰ κατασκευάσετε τὴ γραφικὴ παράστασή της. (Χρησιμοποιῆστε τετραγωνισμένο ἢ χιλιοστομετρικὸ χαρτί).

187. Τὸ σύνολο $F = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ εἶναι συνάρτηση; Ποιὸ εἶναι τὸ πεδίου ὁρισμοῦ καὶ τὸ πεδίο τιμῶν της;

188. Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, νὰ ὁρίσετε τὸ σύνολο $F = \{(\chi, \psi)/\chi \in A$ καὶ ψ εἶναι διπλάσιο τοῦ $\chi\}$ καὶ νὰ τὸ παραστήσετε γραφικῶς.

189. Ἂν $A = \{4, 5, 6\}$, νὰ ὁρίσετε τὸ σύνολο:
$\Sigma = \{(\chi, \psi)/\chi \in A$ καὶ ψ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\chi\}$ καὶ νὰ τὸ παραστήσετε γραφικῶς. Εἶναι συνάρτηση τὸ σύνολο Σ;

190. Ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὴν ὥρα καὶ μὲ ψ τὴ θερμοκρασία, ποὺ δείχνει τὴν ὥρα αὐτὴ τὸ θερμόμετρο τοῦ σπιτιοῦ σας, κατασκευάστε πίνακα τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν καὶ τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

191. Μετρῆστε τὴ σκιά, ποὺ ρίχνει ἕνας στύλος ἢ ἕνα δένδρο κατὰ τὶς ἀκέραιες ὧρες, καὶ κατασκευάστε τὴ γραφικὴ παράσταση τοῦ μήκους τῆς σκιᾶς συναρτήσει τῆς ὥρας.

2. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = \alpha\chi$ ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ

§ 85. **Πρόβλημα.** *Ἕνα ἀεροπλάνο ἔχει σταθερὴ ταχύτητα 500 km/h. Πόση ἀπόσταση θὰ διανύσει σὲ χ ὧρες, ἂν κινεῖται εὐθύγραμμα;*

Σὲ 1 ὥρα διανύει 1.500 km = 500 km

Σὲ 2 ὧρες διανύει 2.500 km = 1000 km

Σὲ 3 ὧρες διανύει 3.500 km = 1500 km

. . . .

. . . .

Σὲ χ ὧρες διανύει χ · 500 km = ψ km

Μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι:

Σὲ 0 ὧρες διανύει 0. 500 km = 0 km

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χρόνου χ ἀντιστοιχεῖ μία μόνο τιμὴ τῆς ἀποστάσεως.

Δηλαδὴ ἡ ἀπόσταση, τὴν ὁποία διανύει τὸ ἀεροπλάνο, εἶναι συνάρτηση τοῦ χρόνου χ.

Ἡ συνάρτηση αὐτὴ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση $\psi = 500\,\chi$.

Ἡ μεταβλητὴ χ παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο Q_o^+ καὶ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῆς ψ ἀνήκουν ἐπίσης στὸ Q_o^+, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν παρακάτω πίνακα.

(Δηλαδὴ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ καὶ τὸ πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Q_o^+)

Χρόνος σὲ ὧρες χ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	...	χ
Ἀπόσταση σὲ km ψ	0	250	500	750	1000	1500	2000	...	$\psi = 500\chi$

Ἡ συνάρτηση σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν παριστάνεται ὡς ἑξῆς:

$$F = \{(0, 0), (\tfrac{1}{2}, 250), (1, 500), (\tfrac{3}{2}, 750), \ldots, (2, 1000), \ldots\}$$

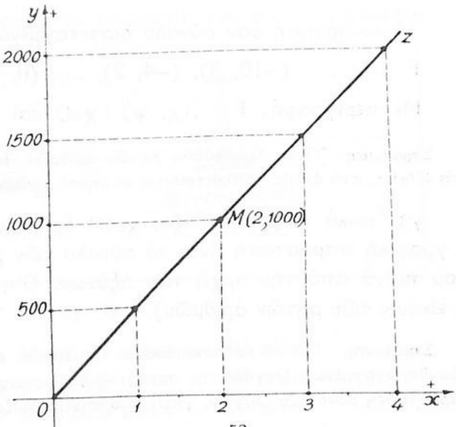
ἢ μὲ περιγραφή: $F = \{(\chi, \psi) \,/\, \chi \in Q_o^+ \text{ καὶ } \psi = 500\chi\}$

Ἐπειδὴ ἡ σχέση $\psi = 500\chi$ ὁρίζει τὴ συνάρτηση F, λέμε πολλὲς φορὲς **ἡ συνάρτηση $\psi = 500\chi$.**

Γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως.

Κατασκευάζουμε τὶς γραφικὲς εἰκόνες τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς F καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ βρίσκονται πάνω σὲ μιὰ ἡμιευθεία ρητῶν ἀριθμῶν, τὴν OZ (σχ. 53) β) *Τί παριστάνει ἡ σχέση* $\psi = -\frac{1}{2}\chi$; $(\chi \in Q)$

Ἡ σχέση $\psi = -\frac{1}{2}\chi$ εἶναι συνάρτηση (μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ Q καὶ πεδίο τιμῶν ἐπίσης τὸ Q), γιατί, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν παρακάτω πίνακα, σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χ θετική, ἀρνητικὴ ἢ μηδὲν ἀντιστοιχεῖ μία μόνο ρητὴ τιμὴ τοῦ ψ (μονότιμο τοῦ πολ/σμοῦ).

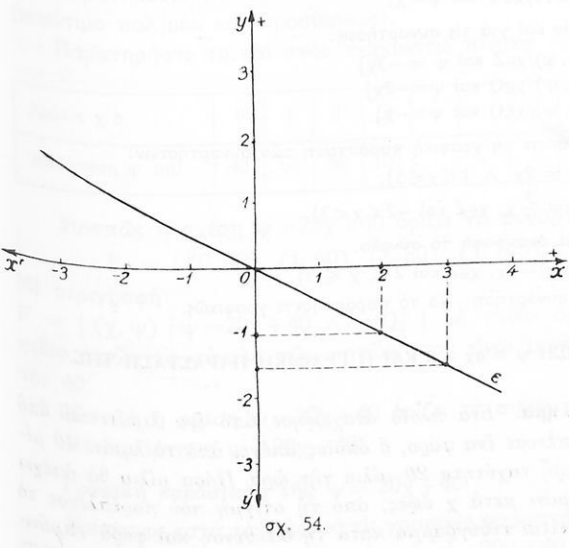


σχ. 53.

χ	...	−10	−4	−1	0	1	2	3	4	10	...
$\psi = -\frac{1}{2}\chi$	...	5	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$	−2	−5	...

Παρατήρηση: Τὸ πηλίκο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν εἶναι σταθερό, δηλαδὴ ἴσο μὲ −2, ἐκτὸς τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν 0,0.

Κατασκευάζομε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $\psi = -\frac{1}{2}\chi$ σ' ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὴ εἶναι μιὰ εὐθεία ε ρητῶν πραγματ. ἀριθμῶν, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων (σχ. 54)



σχ. 54.

Ἡ συνάρτηση σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι:

$F = \{\ldots (-10, 5), (-4, 2), \ldots (0, 0), \ldots (2, -1), \ldots\}$

Μὲ περιγραφή: $F = \{(\chi, \psi) \,/\, \chi \in Q$ καὶ $\psi = -\frac{1}{2}\chi\}$

Σημείωση: Ὅταν λέμε εὐθεία ρητῶν ἀριθμῶν, ἐννοοῦμε τὸ σύνολο τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας, στὰ ὁποῖα τοποθετοῦνται οἱ ρητοὶ ἀριθμοί.

γ) Γενικὰ ἡ $\psi = \alpha\chi$, $(\alpha, \chi \in Q)$ ὁρίζει μιὰ συνάρτηση, τῆς ὁποίας ἡ γραφικὴ παράσταση εἶναι τὸ σύνολο τῶν ρητῶν σημείων μιᾶς εὐθείας, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. (Ρητὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν).

Σημείωση. Γιὰ νὰ κατασκευάσουμε τὴν εὐθεία, στὴν ὁποία βρίσκονται οἱ εἰκόνες τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha\chi$, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὶς γραφικὲς παραστάσεις μόνο δύο ζευγῶν, γιατὶ δύο σημεῖα ὁρίζουν μία μόνον εὐθεία.

Ἀσκήσεις:

192. Νὰ σχηματίσετε πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν καὶ νὰ κατασκευάσετε τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν παρακάτω συναρτήσεων:

α) $F_1 = \{(\chi, \psi)/\chi \in Z^+$ καὶ $\psi = 2\chi\}$
β) $F_2 = \{(\chi, \psi)/\chi \in Q^+$ καὶ $\psi = 4\chi\}$
γ) $F_3 = \{(\chi, \psi)/\chi \in Q$ καὶ $\psi = \chi\}$

193. Κάνετε τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὶς συναρτήσεις:

α) $F_1 = \{(\chi, \psi)/\chi \in Z$ καὶ $\psi = -3\chi\}$
β) $F_2 = \{(\chi, \psi)/\chi \in Q$ καὶ $\psi = -2\chi\}$
γ) $F_3 = \{(\chi, \psi)/\chi \in Q$ καὶ $\psi = -\chi\}$.

194. Νὰ κατασκευάσετε τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν συναρτήσεων:

α) $\{(\chi, \psi)/\psi = 2\chi \wedge 1 \leqslant \chi \leqslant 5\}$,
β) $\{(\chi, \psi)/\psi = \frac{3}{2}\chi,\ \chi \in Z$ καὶ $-2 \leqslant \chi < 3\}$.

195. Νὰ ὁρίσετε μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο.

$\Sigma = \{(\chi, \psi)/|\psi| = 2\chi,\ \chi \in Z$ καὶ $2 \leqslant \chi \leqslant 5\}$.

Εἶναι αὐτὸ τὸ σύνολο συνάρτηση; Νὰ τὸ παραστήσετε γραφικῶς.

3. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = \alpha\chi + \beta$ ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ.

§ 86. α) **Πρόβλημα.** *Ἕνα πλοῖο ἀναχώρησε ἀπὸ ἕνα λιμάνι καὶ ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ παρέπλευσε ἕνα φάρο, ὁ ὁποῖος ἀπέχει ἀπὸ τὸ λιμάνι 40 μίλια, ἀπόκτησε σταθερὴ ταχύτητα 20 μίλια τὴν ὥρα. Πόσα μίλια θὰ ἀπέχει τὸ πλοῖο ἀπὸ τὸ λιμάνι μετὰ χ ὧρες, ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ παρέπλευσε τὸ φάρο; (τὸ πλοῖο κινεῖται εὐθύγραμμα κατὰ τὴ διεύθυνση καὶ φορὰ Λιμάνι-Φάρος).*

Τὴν 0 ὥρα τὸ πλοῖο βρίσκεται μπροστὰ στὸ φάρο. Ἑπομένως:

Σχ. 55.

Σὲ 0 ὧρες ἔχει διανύσει $40+0\cdot 20$ μίλια $=$ 40 μίλια
Σὲ 1 ὥρα ἔχει διανύσει $40+1\cdot 20$ μίλια $=$ 60 μίλια
Σὲ 2 ὧρες ἔχει διανύσει $40+2\cdot 20$ μίλια $=$ 80 μίλια
Σὲ 3 ὧρες ἔχει διανύσει $40+3\cdot 20$ μίλια $=$ 100 μίλια

. . . .

. . . .

Σὲ χ ὧρες ἔχει διανύσει $40+\chi\cdot 20$ μίλια $=\psi$ μίλια $=20\cdot\chi+40$μίλια.

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μιὰ τιμὴ τοῦ ψ (μονότιμο πολ/μοῦ καὶ προσθέσεως).

Παρατηρῆστε το καὶ στὸν παρακάτω πίνακα.

Χρόνος χ h	0	1	2	3	·	·	·	χ
Ἀπόσταση ψ mil	40	60	80	100	·	·	·	$\psi=20\chi+40$

Συνεπῶς ἡ σχέση $\psi=20\chi+40$ ὁρίζει τὴ συνάρτηση

$$F=\{(0,40),\ (1,60),\ (2,80),\ (3,100),\ \dots\}$$

Μὲ περιγραφή:

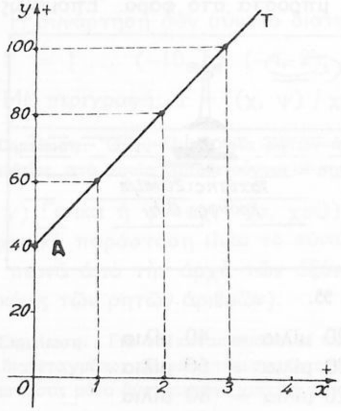
$F=\{(\chi,\psi)\ /\ \psi=20\chi+40\ \wedge\ \chi\in Q_0^+\}$ μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ Q_0^+ καὶ πεδίο τιμῶν τὸ σύνολο τῶν ρητῶν, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι μὲ τὸν 40.

Ἐπειδὴ ἡ σχέση $\psi=20\chi+40$ ὁρίζει τὴ συνάρτηση F, λέμε:

Ἡ συνάρτηση $\psi=20\chi+40$

Γραφικὴ παράσταση τῆς $\psi=20\chi+40$.

Βρίσκουμε κατὰ τὰ γνωστὰ τὶς γραφικὲς παραστάσεις τῶν ζευγῶν τῆς συναρτήσεως καὶ παρατηροῦμε ὅτι ἡ $\psi=20\chi+40$ παριστάνεται γρα-



σχ. 56.

φικῶς ἀπό τὴν ἡμιευθεία ΑΤ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

β) Νὰ ἐξετάσετε, ἂν ἡ σχέση $\psi = 2\chi + 1$, $(\chi \in Q)$ *εἶναι συνάρτηση καὶ νὰ βρεῖτε τὴ γραφικὴ παράστασή της.*

Δίνουμε διάφορες τιμὲς στὸ χ καὶ βρίσκουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ ψ, ὅπως φαίνεται στὸν παρακάτω πίνακα:

χ	…	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	…
$\psi = 2\chi+1$	…	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	7	9	…

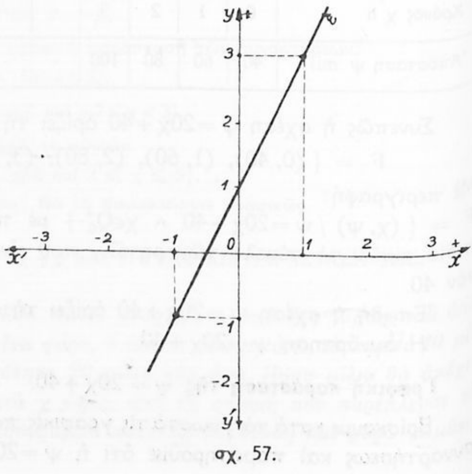
Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνο μία τιμὴ τοῦ ψ. Ἄρα ἡ $\psi = 2\chi + 1$ εἶναι συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ καὶ πεδίο τιμῶν τὸ Q.

Αὐτὴ σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι:
$F = \{ (-3,-5), \dots (-\frac{1}{2},0),$
$(0, 1), (\frac{1}{2},2)\ (1, 3), \dots \}$.

Μὲ περιγραφή:
$F = \{(\chi, \psi) \ / \ \psi = 2\chi + 1 \wedge \chi \in Q \}$

Γραφικὴ παράσταση τῆς $\psi = 2\chi + 1$.

Κατασκευάζουμε τὶς γραφικὲς παραστάσεις (εἰκόνες) τῶν ζευγῶν καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὲς



σχ. 57.

βρίσκονται σὲ μιὰ εὐθεία ε, ποὺ δὲν περνᾶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

γ) Γενικὰ ἡ $\psi = \alpha\chi + \beta$, ὅπου α, β εἶναι σταθεροὶ ρητοὶ καὶ χ μεταβλητή, ποὺ παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ Q, εἶναι συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ καὶ πεδίο τιμῶν τὸ Q.

Γραφικῶς παριστάνεται ἀπὸ τὰ ρητὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας, ποὺ δὲν περνᾶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

Ἀσκήσεις:

196. Νὰ γίνει γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως:

$$\psi = -\frac{1}{2}\chi - 1, \quad \text{ἂν } \chi \in A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}.$$

197. Σὲ τετραγωνισμένο χαρτὶ νὰ σχεδιάσετε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες καὶ νὰ βρεῖτε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $F = \{(\chi, \psi) / \psi = -\frac{1}{2}\chi + 1 \wedge \chi \in Q\}$. Ἐπίσης νὰ βρεῖτε τὰ ζεύγη τῆς F, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὶς εἰκόνες των πάνω στοὺς ἄξονες.

198. Κάνετε τὰ ἴδια καὶ γιὰ τὶς συναρτήσεις:

$F_1 = \{(\chi, \psi) / \psi = 0\chi + 2 \wedge \chi \in Q\}$ καὶ $F_2 = \{(\chi, \psi) / \psi = 0\chi + 0 \wedge \chi \in Q\}$.

199. Νὰ κατασκευάσετε τὴν εὐθεία, ἀπὸ τὴν ὁποία παριστάνεται γραφικῶς ἡ συνάρτηση $\psi = 2\chi - 1 (\chi \in Q)$ σὲ τετραγωνισμένο χαρτί, καὶ νὰ σημειώσετε τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο ἡ πιὸ πάνω εὐθεία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ. Ποιὰ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ; Νὰ θέσετε τὴν τετμημένη αὐτὴ στὴν ἐξίσωση $2\chi - 1 = 0$. Τί παρατηρεῖτε;

200. Στὸ ἴδιο σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων νὰ κατασκευάσετε τὶς γραφικὲς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων:

$F_1 = \{(\chi, \psi) / \psi = \chi + 1 \wedge \chi \in Q\}$, $F_2 = \{(\chi, \psi) / \psi = 2\chi - 4 \wedge \chi \in Q\}$.

201. Ἐπίσης τῶν συναρτήσεων:

$F_3 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 2 \wedge \chi \in Q\}$, $F_4 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 3 \wedge \chi \in Q\}$.

202. Τὸ ἴδιο γιὰ τὶς συναρτήσεις:

$F_3 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 2 \wedge \chi \in Q\}$, $F_5 = \{(\chi, \psi) / \psi = \frac{4 - 4\chi}{2} \wedge \chi \in Q\}$.

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ $\alpha\chi + \beta = 0$ ΚΑΙ ΤΗΣ $\alpha\chi + \beta > 0$

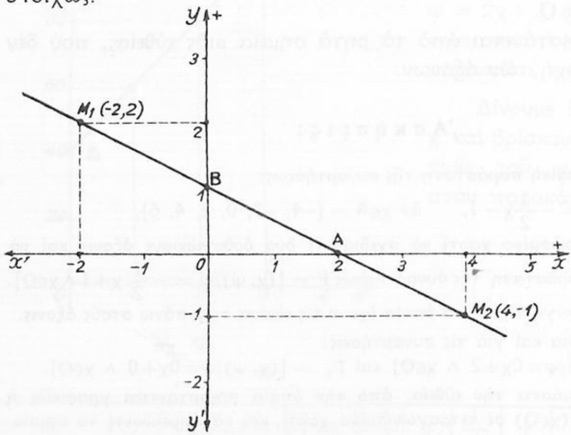
α) Πρόβλημα. *Νὰ βρεθεῖ γραφικῶς ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως* $-\frac{1}{2}\chi + 1 = 0$.

§ **87**. Πάνω σὲ τετραγωνισμένο χαρτὶ γράφουμε τοὺς ὀρθογώνιους ἄξονες καὶ βρίσκουμε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως: $\psi = -\frac{1}{2}\chi + 1$.

(Δίνομε δύο τιμὲς στὸ χ ἔστω τὶς $\chi = -2$ καὶ $\chi = 4$ καὶ βρίσκουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ ψ, δηλαδὴ $\psi = 2$ καὶ $\psi = -1$.

Ἔπειτα βρίσκουμε τὶς εἰκόνες τῶν ζευγῶν $(-2, 2)$, $(4, -1)$ καὶ ἔστω ὅτι αὐτὲς εἶναι τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2 ἀντιστοίχως, καὶ φέρνουμε τὴν εὐθεία M_1M_2)

Ἡ εὐθεία M_1M_2 παριστάνει γραφικῶς τὴ συνάρτηση $\psi = -\frac{1}{2}\chi + 1$.
Ἡ εὐθεία αὐτὴ τέμνει τοὺς ἄξονες χ΄χ καὶ ψ΄ψ στὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.



σχ. 58.

Τὸ σημεῖο Β εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ ζεύγους (0, 1) καὶ τὸ Α ἡ εἰκόνα τοῦ ζεύγους (2,0).

Τὸ πρῶτο μέλος τοῦ ζεύγους (2,0), δηλαδὴ ὁ 2, ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωση: $-\frac{1}{2}\chi + 1 = 0$ ἄρα εἶναι ἡ λύση της.

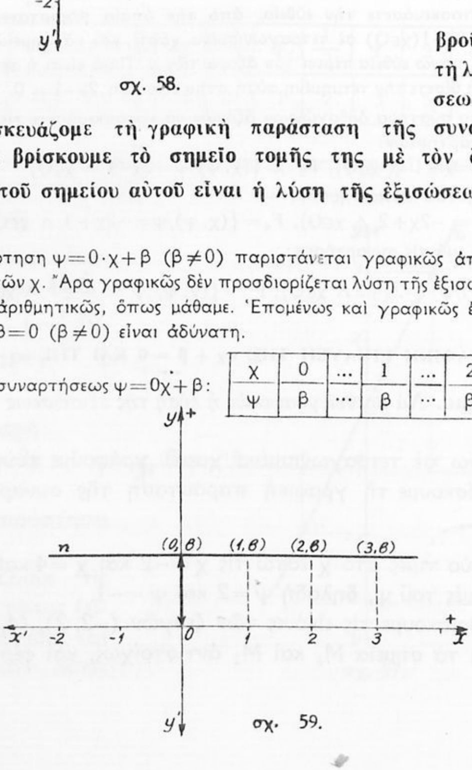
Ὥστε γιὰ νὰ βροῦμε γραφικῶς τὴ λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi + \beta = 0$ $(\alpha \neq 0)$, **κατασκευάζομε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως** $\psi = \alpha\chi + \beta$ **καὶ βρίσκουμε τὸ σημεῖο τομῆς της μὲ τὸν ἄξονα τῶν** χ. **Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως** $\alpha\chi + \beta = 0$.

Σημείωση.

1. Ἡ συνάρτηση $\psi = 0\cdot\chi + \beta$ $(\beta \neq 0)$ παριστάνεται γραφικῶς ἀπὸ μιὰ εὐθεία // πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ. Ἄρα γραφικῶς δὲν προσδιορίζεται λύση τῆς ἐξισώσεως $0\chi + \beta = 0$. Ἀλλὰ οὔτε καὶ ἀριθμητικῶς, ὅπως μάθαμε. Ἑπομένως καὶ γραφικῶς ἐπαληθεύεται ὅτι ἡ ἐξίσωση $0\chi + \beta = 0$ $(\beta \neq 0)$ εἶναι ἀδύνατη.

Πίνακ. τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = 0\chi + \beta$:

χ	0	...	1	...	2	...	3	...
ψ	β	...	β	...	β	...	β	...



σχ. 59.

2. Ἡ συνάρτηση $\psi = 0\chi + 0$ παριστάνεται γραφικῶς ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν χ. Ἄρα δὲν προσδιορίζεται γραφικῶς μία λύση γιὰ τὴν ἐξίσωση $0\chi + 0 = 0$. Αὐτὴ ἔχει ἄπειρες λύσεις.

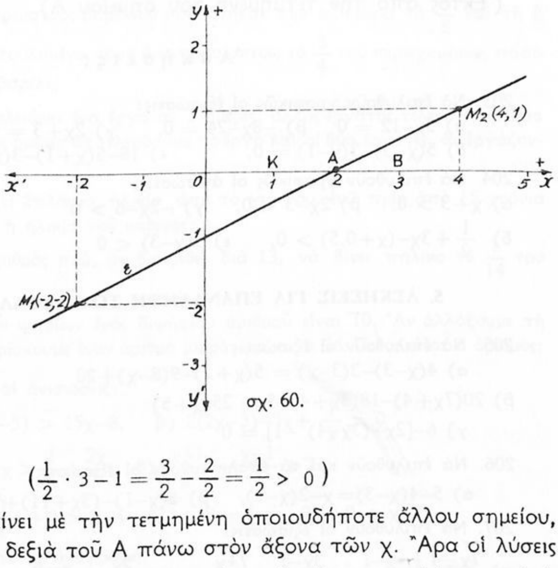
Πίνακας τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = 0\chi + 0$:

χ	0	…	1	…	2	…	3	…
ψ	0	…	0	…	0	…	0	…

β) Νὰ βρεθοῦν γραφικῶς οἱ λύσεις τῆς $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$

§ **88**. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση $\psi = \frac{1}{2}\chi - 1$ καὶ ἐργαζόμενοι ὅπως στὰ προηγούμενα κατασκευάζουμε τὴν εὐθεία ε (γραφ. παράσταση αὐτῆς), ποὺ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ στὸ σημεῖο Α, τὸ ὁποῖο ἔχει τετμημένη 2.

Θέτουμε στὴν ἀνίσωση $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$ ἀντὶ χ τὴν τετμημένη 3 ἑνὸς σημείου Β τοῦ ἄξονα Χ'Χ, τὸ ὁποῖο βρίσκεται δεξιὰ τοῦ Α, καὶ παρατηροῦμε ὅτι ὁ 3 ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση.



σχ. 60.

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} > 0\right)$$

Τὸ ἴδιο συμβαίνει μὲ τὴν τετμημένη ὁποιουδήποτε ἄλλου σημείου, τὸ ὁποῖο βρίσκεται δεξιὰ τοῦ Α πάνω στὸν ἄξονα τῶν χ. Ἄρα οἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$ εἶναι οἱ ρητοί, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ τὸν 2 ($\chi > 2$). Αὐτὸ ἐπαληθεύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἀριθμ. ἐπίλυση τῆς ἀνισώσεως.

Σημείωση: Ἂν θέσουμε τὴν τετμημένη 1 ἑνὸς σημείου Κ, τὸ ὁποῖο βρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ Α πάνω στὸν ἄξονα τῶν χ, παρατηροῦμε ὅτι δὲν ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση.

$$\frac{1}{2}\chi - 1 > 0 \qquad \left(\frac{1}{2}.1 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} < 0\right)$$

Ἄρα οἱ τετμημένες τῶν σημείων τοῦ ἄξονα τῶν χ, τὰ ὁποῖα βρίσκονται ἀριστερὰ τοῦ Α, δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωση.

Γενικὰ ἂν ἔχουμε τὴν ἀνίσωση $αχ+β>0$ $(α\neq 0)$, γιὰ νὰ βροῦμε γραφικῶς τὶς λύσεις της, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Κατασκευάζουμε τὴν εὐθεία, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δύο τυχόντα ζεύγη τῆς συναρτήσεως.

2) Βρίσκουμε τὸ σημεῖο τομῆς τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονα τῶν χ. Ἔστω Α τὸ σημεῖο αὐτό.

3) Δοκιμάζουμε ἂν ἡ τετμημένη ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ ἄξονα τῶν χ (π.χ. δεξιὰ τοῦ Α) ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση.

Ἂν τὴν ἐπαληθεύει, οἱ λύσεις της εἶναι οἱ ρητὲς τετμημένες τῶν σημείων τῆς ἡμιευθείας ΑΧ'. Ἂν δὲν τὴν ἐπαληθεύει, οἱ λύσεις της εἶναι οἱ ρητὲς τετμημένες τῶν σημείων τῆς ἀντικείμενης ἡμιευθείας ΑΧ'.

(Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν τετμημένη τοῦ σημείου Α).

Ἀσκήσεις:

203. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς οἱ ἐξισώσεις:

α) $3χ-12=0$ β) $-8χ-24=0$, γ) $2χ+3=0$,

δ) $5(χ-3)-3(χ-1)=0$, ε) $18-5(χ+1)-3(χ-1)=0$

204. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς οἱ ἀνισώσεις:

α) $χ+3>0$, β) $2χ-3<0$, γ) $-2χ-6>0$

δ) $\frac{1}{2}+3χ-(χ+0{,}5)>0$, ε) $3(χ-3)<0$

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ III:

205. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $4(χ-3)-3(3-χ)=5(χ+2)-9(8-χ)+20$

β) $20(7χ+4)-18(3χ+4)-5=25(χ+5)$

γ) $6-[2χ-(3χ-4)-1]=0$

206. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $5-4(χ-3)=χ-2(χ-1)$, β) $6(χ-1)-(3χ+11)+7=0$

207. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{7χ-4}{15}+\frac{χ-1}{3}=\frac{3χ-1}{5}-\frac{7+χ}{10}$, β) $\frac{2χ}{15}+\frac{χ-6}{12}=\frac{3}{10}\left(\frac{χ}{2}-5\right)$

γ) $\frac{18χ+13}{9}=\frac{6χ+1}{5}+\frac{2}{3}\cdot\left(6-\frac{3χ}{2}\right)$, δ) $\frac{2}{5}\left(\frac{3χ}{4}-\frac{2}{7}\right)=-\frac{5}{7}\left(\frac{12χ}{25}-\frac{1}{75}\right)$

208. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ παρακάτω προβλήματα μὲ τὴ βοήθεια ἐξισώσεων:

α) Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ παραλ/μου ΑΒΔΓ, ἂν ἡ γωνία του Α ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γωνίας Β.

β) Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν ἡ γωνία Β ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς γωνίας Α καὶ ἡ γωνία Γ ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς γωνίας Α.

γ) Δύο κομμάτια ὕφασμα διαφέρουν κατὰ 66,5 m. Τὸ μεγαλύτερο εἶναι 5πλάσιο ἀπὸ τὸ μικρότερο καὶ 4,5 m ἀκόμη. Νὰ βρεθοῦν τὰ μήκη τους.

δ) Νὰ βρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ θετικοὶ ἀκέραιοι τέτοιοι, πού, ἂν ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο μικρότερων ἀφαιρέσουμε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μεγαλύτερου, θὰ βροῦμε τὸν ρητὸ $\frac{127}{6}$.

ε) Ἕνα αὐτοκίνητο ἀναχώρησε στὶς 7 τὸ πρωὶ ἀπὸ τὴν πόλη Α μὲ ταχύτητα 33 km/h. Τί ὥρα πρέπει νὰ ἀναχωρήσει ἕνα ἄλλο αὐτοκίνητο ἀπὸ τὴν ἴδια πόλη καὶ πρὸς τὴν ἴδια φορὰ μὲ ταχύτητα 45km/h, γιὰ νὰ φτάσει τὸ πρῶτο ὕστερ' ἀπὸ 2h 45min;

209. Μὲ τὴ βοήθεια ἐξισώσεων νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ προβλήματα:

α) Ἔφαγαν μαζὶ 47 ἄνδρες καὶ γυναῖκες. Κάθε ἄνδρας πλήρωσε 50 δρχ. καὶ κάθε γυναίκα 47 δρχ. Ἂν οἱ ἄνδρες πλήρωσαν 1380 δρχ. περισσότερα ἀπὸ τὶς γυναῖκες, πόσοι ἦταν οἱ ἄνδρες;

β) Ἀπὸ τὸ περιεχόμενο ἑνὸς βαρελιοῦ πουλήθηκαν τὴν α΄ ἡμέρα τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὴ β΄ ἡμέρα 39 κιλά. Ἐάν τὸ πουλημένο ποσὸ ἀντιπροσωπεύει τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ περιεχομένου, πόσα κιλὰ ἔμειναν ἀκόμη στὸ βαρέλι;

γ) Ἕνας ἐργάτης τελειώνει ἕνα ἔργο σὲ 3 ἡμέρες· ἄλλος ἐργάτης τελειώνει τὸ ἴδιο ἔργο σὲ 6 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσουν τὸ ἔργο καὶ οἱ δύο ἐργάτες, ἂν ἐργάζονται συγχρόνως;

δ) Ἕνας πατέρας ἔχει 2πλάσια ἡλικία ἀπὸ τὸ γιό του, ἐνῶ πρὶν ἀπὸ 15 χρόνια εἶχε 3πλάσια. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ καθενός;

ε) Νὰ βρεθεῖ ἕνας ἀριθμὸς πού, ἂν διαιρεθεῖ διὰ 13, νὰ δίνει πηλίκο τὸ $\frac{1}{14}$ του καὶ ὑπόλοιπο 12.

ζ) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑνὸς διψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι 10. Ἂν ἀλλάξουμε τὴ θέση τῶν ψηφίων του, βρίσκουμε ἕναν ἀριθμὸ μικρότερο κατὰ 36. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

210. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $2(8\chi-5) > 15\chi-8$, β) $2(2\chi-3)-5\chi+\frac{1}{2} > 0$

γ) $\frac{\chi}{4}-\chi > \frac{1}{6}-\frac{2\chi}{3}$ δ) $\frac{\chi+1}{2}-\frac{\chi-1}{3} > 1$

211. Ἂν $A=\{\chi / \frac{3}{4}\chi+3>0 \wedge \chi\in Z\}$, $B=\{\chi/\chi-2<0 \wedge \chi\in Z\}$, νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο $A\cap B$ μὲ ἀναγραφή.

212. Νὰ βρεθεῖ ἡ τομὴ τῶν συνόλων $A=\{\chi/\chi+1 > \frac{\chi}{2}-2\}$ καὶ

$B=\{\chi/\chi+1 < \frac{\chi}{3}-3\}$ (μὲ ἁπλὴ περιγραφή).

213. Νὰ κατασκευάσετε τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν συναρτήσεων:

α) $\psi=3\chi$ β) $\psi=-2\chi+1$ γ) $\psi=1{,}5\chi-\frac{1}{2}$ $(\chi\in Q)$.

214. Ἂν $A=\{(\chi,\psi)/\psi=2\chi \wedge \chi\in Q\}$ καὶ $B=\{(\chi,\psi)/\psi=\chi+2 \wedge \chi\in Q\}$, νὰ βρεθεῖ γραφικῶς τὸ σύνολο $A\cap B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Α. ΛΟΓΟΙ — ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ — ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

1. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ — ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΟΜΟΕΙΔΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ.

§ 89. Λόγος δύο ἀριθμῶν.

Δίνονται οἱ ἀριθμοὶ 54 καὶ 9. Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν δεύτερο (9), γιὰ νὰ βροῦμε τὸν πρῶτο (54);

Ἂν χ εἶναι ὁ ἀριθμός, θὰ ἔχουμε: $9\chi = 54 \Leftrightarrow \chi = \frac{54}{9} \Leftrightarrow \chi = 6$. Ὁ ἀριθμὸς 6 λέγεται λόγος τοῦ 54 πρὸς τὸν 9.

Ὥστε λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ α πρὸς ἕναν ἀριθμὸ β (β≠0) λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν β, δίνει γινόμενο τὸν α.

Ἂν ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι λ, ἔχουμε:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \lambda \Leftrightarrow \beta \cdot \lambda = \alpha}$$

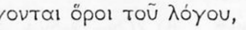
Συνεπῶς ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεώς τους·

Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παριστάνεται καί: (α, β)

Ὁ α καὶ ὁ β λέγονται ὅροι τοῦ λόγου, ὁ α λέγεται ἡγούμενος καὶ ὁ β ἑπόμενος.

§ 90. Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.

Δίνεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Νὰ βρεθεῖ ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ, *ὥστε* $\Gamma\Delta = AB + AB + \frac{1}{4}AB$.



Κατασκευάζουμε κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ

σχ. 61.

$\Gamma\Delta = AB + AB + \frac{1}{4}AB$ ἤ

$\Gamma\Delta = (1 + 1 + \frac{1}{4})AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{9}{4}AB$.

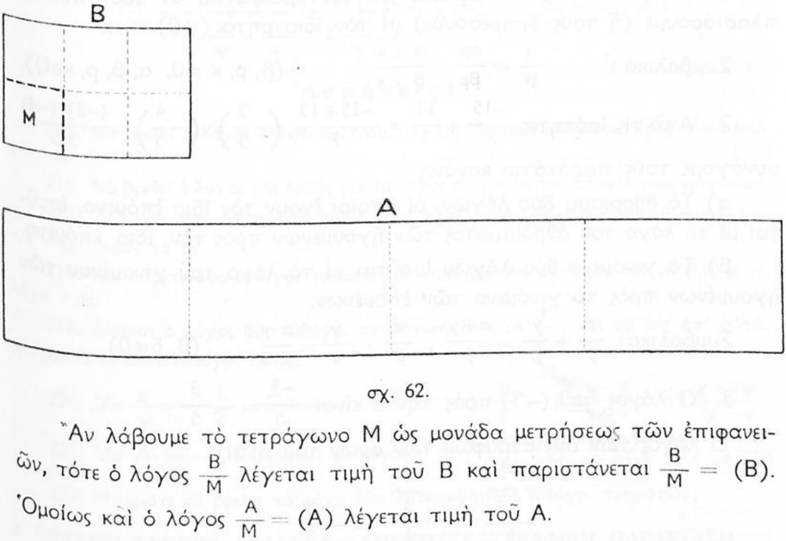
Ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{4}$, μὲ τὸν ὁποῖο πολλαπλασιάζεται τὸ ΑΒ καὶ δίνει τὸ ΓΔ, λέγεται λόγος τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ καὶ συμβολίζεται $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ ἢ (ΓΔ,ΑΒ).

Ὥστε $\quad \frac{ΓΔ}{ΑΒ} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow ΓΔ = \frac{9}{4}ΑΒ$

Γενικὰ **λόγος ἑνὸς μεγέθους Α πρὸς ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς μέγεθος Β λέγεται ὁ ἀριθμὸς λ, μὲ τὸν ὁποῖο ὅταν πολλαπλασιάζεται τὸ μέγεθος Β, δίνει τὸ Α.**

Συμβολικά: $\quad \frac{A}{B} = λ \Leftrightarrow A = λ \cdot B$

§ **91.** Στὸ σχῆμα (62) ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου Α πρὸς τὸ ὀρθογώνιο Β εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4, δηλαδὴ $\frac{A}{B} = 4$ διότι $A = 4B$.



σχ. 62.

Ἂν λάβουμε τὸ τετράγωνο Μ ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν, τότε ὁ λόγος $\frac{B}{M}$ λέγεται τιμὴ τοῦ Β καὶ παριστάνεται $\frac{B}{M} = (B)$. Ὁμοίως καὶ ὁ λόγος $\frac{A}{M} = (A)$ λέγεται τιμὴ τοῦ Α.

Ἔχουμε $\frac{B}{M} = (B) = 6$, γιατὶ $B = 6M$ καὶ $\frac{A}{M} = (A) = 24$, γιατὶ $A = 24M$.

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες: $(A) = 24$

$(B) = 6$ μὲ διαίρεση κατὰ μέλη παίρνουμε:

$\frac{(A)}{(B)} = \frac{24}{6} = 4$. Ἀλλὰ καὶ $\frac{A}{B} = 4$, ἑπομένως $\boxed{\frac{A}{B} = \frac{(A)}{(B)}}$ (1)

Ὥστε ὁ λόγος δύο ἐπιφανειῶν ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῶν τιμῶν τους, ἂν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα.

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἰσχύει γιὰ ὁποιαδήποτε ὁμοειδῆ μεγέθη Α καὶ Β καὶ ὁ λόγος $\frac{A}{B}$ εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴ μονάδα μετρήσεώς τους.

Δηλαδὴ ἡ ἰσότητα (1) ἰσχύει, καὶ ἂν πάρουμε ἄλλη μονάδα μετρήσεως ἀντὶ γιὰ τὴ μονάδα M.

§ 92. Ἰδιότητες τοῦ λόγου.

1) Νὰ συγκρίνετε τὸ λόγο τῶν ἀριθμῶν −5 καὶ −8 μὲ τὸ λόγο τῶν $(-5)\cdot(-2)$ καὶ $(-8)\cdot(-2)$

Ἔχομε $\quad \frac{-5}{-8}=\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{(-5)\cdot(-2)}{(-8)\cdot(-2)}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$

Ἄρα $\quad \frac{-5}{-8}=\frac{(-5)\cdot(-2)}{(-8)\cdot(-2)}$. Ἰσχύει καὶ $\frac{-5}{-8}=\frac{(-5):(-2)}{(-8):(-2)}$

Συνεπῶς ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν τοὺς πολλαπλασιάσουμε (ἢ τοὺς διαιρέσουμε) μὲ τὸν ἴδιο ρητὸ ($\neq 0$).

Συμβολικά : $\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\rho}{\beta\rho}=\frac{\alpha:\kappa}{\beta:\kappa} \quad (\beta,\ \rho,\ \kappa \neq 0,\ \ \alpha,\ \beta,\ \rho,\ \kappa \in Q)$.

2. Ἀπὸ τὶς ἰσότητες $\frac{-15}{7}+\frac{13}{7}=\frac{-15+13}{7}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{(-2)\cdot(-4)}{3\cdot 5}$

συνάγομε τοὺς παρακάτω κανόνες :

α) Τὸ ἄθροισμα δύο λόγων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἴδιο ἑπόμενο, ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν ἴδιο ἑπόμενο.

β) Τὸ γινόμενο δύο λόγων ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τοῦ γινομένου τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ γινόμενο τῶν ἑπομένων.

Συμβολικά: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\,\delta} \quad (\beta,\ \delta\neq 0)$

3. Ὁ λόγος τοῦ (−3) πρὸς τὸν 5 εἶναι $\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$

Ὁ λόγος τῶν ἀντιστρόφων τῶν ὅρων του εἶναι

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}=-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}=-\frac{5}{3}$$

Ἐπομένως **ὁ λόγος τῶν ἀντιστρόφων τῶν ὅρων ἑνὸς λόγου ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ λόγου.**

Συμβολικά: Ἐὰν $\lambda_1=\frac{\alpha}{\beta}$ τότε $\lambda_2=\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\beta}}=\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\lambda_1\,\lambda_2=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$

Ἐφαρμογές.

α) $\frac{-5}{-6}=\frac{(-5)\cdot(-1)}{(-6)\cdot(-1)}=\frac{5}{6}$ β) $\frac{-7}{8}=\frac{(-7)\cdot(-1)}{8\cdot(-1)}=\frac{7}{-8}=-\frac{7}{8}$

γ) $\frac{6}{17}+\frac{1}{17}+\left(-\frac{5}{17}\right)=\frac{6+1-5}{17}=\frac{2}{17}$

δ) $\frac{-5}{9}\cdot\frac{3}{-4}=\frac{(-5)\cdot 3}{9\cdot(-4)}=\frac{-15}{-36}=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12}$

ε) $\lambda_1=\frac{-2}{-3}=+\frac{2}{3}$, $\lambda_2=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}}=+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ καὶ $\lambda_1\lambda_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$.

ζ) Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=2$, νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος $\frac{\chi+\psi}{2\chi-\psi}$.

Διαιροῦμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ λόγου $\frac{\chi+\psi}{2\chi-\psi}$ διὰ τοῦ ψ:

$$\frac{\chi+\psi}{2\chi-\psi}=\frac{\frac{\chi}{\psi}+\frac{\psi}{\psi}}{2.\frac{\chi}{\psi}-\frac{\psi}{\psi}}=\frac{\frac{\chi}{\psi}+1}{2.\frac{\chi}{\psi}-1}=\frac{2+1}{2\cdot 2-1}=\frac{3}{4-1}=\frac{3}{3}=1$$

Ἀσκήσεις:

215. Νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου πρὸς τὴν πλευρά του.

216. Νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὴ γωνία τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου.

217. Ὁ λόγος τοῦ τεκτονικοῦ πήχη πρὸς τὸ m εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τοῦ τ.τ. πήχη πρὸς τὸ m^2.

218. Νὰ πάρετε δύο εὐθύγρ. τμήματα μὲ τιμὲς ρητοὺς ἀριθμοὺς καὶ νὰ βρεῖτε τὸ λόγο τους.

219. Δίνεται ὁ λόγος δύο εὐθύγρ. τμημάτων, ἴσος μὲ $\frac{3}{5}$, καὶ τὸ ἕνα ἀπ' αὐτά. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄλλο εὐθύγρ. τμῆμα.

220. Ἂν $\frac{\chi}{\psi}=-\frac{1}{2}$, νὰ βρεθοῦν οἱ λόγοι: α) $\frac{\psi}{\chi}$, β) $\frac{\psi-\chi}{\chi+\psi}$, γ) $\frac{\chi+2\psi}{2\chi-\psi}$.

221. Ἂν $\frac{\chi}{\psi}=-2$, νὰ βρεθοῦν οἱ λόγοι: α) $\frac{2\chi+\psi}{\chi+3\psi}$, β) $\frac{2\chi\psi-\psi^2}{\chi^2-\psi^2}$, γ) $\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}$

222. Μπορεῖτε νὰ βρεῖτε τὸ λόγο δύο ὁποιωνδήποτε εὐθύγρ. τμημάτων;

2. ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΧΕΣΗΣ.

§ **93**. Ξαναρχόμαστε στὸ πρόβλημα τῆς § 85.

Ἕνα ἀεροπλάνο, τὸ ὁποῖο κινεῖται εὐθύγραμμα μὲ σταθερὴ ταχύτητα 500 km/h, περνᾶ πάνω ἀπὸ τὸ σχολεῖο μας Α. Μετὰ χ ὧρες περνᾶ πάνω ἀπὸ ἕνα σημεῖο Β. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση ΑΒ; (Τὸ ἀεροπλάνο κινεῖται ὁριζοντίως).

Ἂν ΑΒ $=\psi$ km, ἔχουμε τὴ συνάρτηση $\psi=500\chi$. Σχηματίζουμε τὸν πίνακα τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν.

Τιμὲς χρόνου σὲ ὧρες	χ	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...	χ
Τιμὲς ἀποστάσεως σὲ km	$\psi=500\chi$	0	25	50	250	500	1000	1500	...	500χ

Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὴν τιμὴ τοῦ χρόνου $\frac{1}{20}$ ἐπὶ 10, θὰ βροῦμε $\frac{1}{2}$. Ἂν πολ/σουμε καὶ τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ 25 τῆς ἀποστάσεως ἐπὶ 10, θὰ βροῦμε 250. Ἀλλὰ ἀπὸ τὸν πίνακα διαπιστώνουμε ὅτι οἱ τιμὲς $\frac{1}{2}$ καὶ 250 εἶναι ἀντίστοιχες.

Ἐπίσης ἂν πολλαπλασιάσουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς $\frac{1}{10}$ καὶ 50 ἐπὶ 30, βρίσκουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς 3 καὶ 1500.

Ὥστε, ἂν πολ/σουμε ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν μεγεθῶν χρόνου καὶ ἀποστάσεως μὲ ἕναν ρητό, βρίσκουμε πάλι ἀντίστοιχες τιμές. Τὰ μεγέθη χρόνος καὶ ἀπόσταση εἶναι ἀνάλογα.

Ὥστε **δύο μεγέθη λέγονται εὐθέως ἀνάλογα, ἂν ἔχουν ἀντίστοιχες τιμὲς καὶ τὰ γινόμενα δύο ἀντίστοιχων τιμῶν ἐπὶ τὸν ἴδιο ρητὸ εἶναι πάλι ἀντίστοιχες τιμές.**

Συνεπῶς, ἂν οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς χ, ψ δύο μεγεθῶν συνδέονται μὲ τὴ σχέση $\psi=\alpha\chi$ ($\alpha\neq0$), τὰ μεγέθη αὐτὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

Ἂν δύο μεγέθη εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, οἱ ἀντίστοιχες τιμές τους συνδέονται μὲ μιὰ σχέση τῆς μορφῆς $\psi=\alpha\chi$;

Δύο μεγέθη Α καὶ Β ἔχουν ἀντίστοιχες τιμὲς αὐτὲς ποὺ ἀναγράφονται στὸν παρακάτω πίνακα.

Τιμὲς μεγ. Α	1	...	2	...	3	...	4	...	5	...	6	...	7	...	8	...	χ
Τιμὲς μεγ. Β	2	...	4	...	6	...	8	...	10	...	12	...	14	...	16	...	ψ

Τὰ μεγέθη Α καὶ Β εἶναι ἀνάλογα· διότι, ἂν πολ/σουμε δύο ἀντίστοιχες τιμὲς π.χ. τὶς 2 καὶ 4 μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ 2 ἢ 3 ἢ 4 κ.λ.π., βρίσκουμε πάλι ἀντίστοιχες τιμές.

Παρατηροῦμε ὅτι: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\ldots=\frac{\chi}{\psi}$. Ἀπ' αὐτὰ ἔχουμε:

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \psi=2\chi$$

Ὥστε **οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς χ καὶ ψ τῶν ἀνάλογων μεγεθῶν Α καὶ Β συνδέονται μὲ μιὰ σχέση τῆς μορφῆς ψ = αχ.**

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε ὅτι δύο μεγέθη μὲ ἀντίστοιχες τιμὲς χ καὶ ψ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ἂν οἱ τιμές τους συνδέονται μὲ μιὰ σχέση τῆς μορφῆς $ψ=αχ$ $(α \neq 0)$

§ 94. Ἰδιότητες.

1 Γιὰ τὶς τιμὲς τῶν ἀνάλογων μεγεθῶν Α καὶ Β εἴδαμε ὅτι:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots$$

Ὥστε, **ἂν δύο μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, οἱ ἀντίστοιχες τιμές τους ἔχουν τὸν ἴδιο λόγο.**

Σημείωση: Στὴ συνάρτηση $ψ=αχ$ $(α\neq0)$ διὰ $χ=0$ ἔχουμε $ψ=0$. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{0}{0}$ δὲν εἶναι ὁρισμένο, γι' αὐτὸ ἐξαιρεῖται ἀπὸ τὸν παραπάνω κανόνα ὁ λόγος τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν 0 καὶ 0.

2. Συγκρίνουμε τὸ λόγο δύο τιμῶν τοῦ μεγέθους Α μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ μεγέθους Β.

Λόγος τῶν τιμῶν 2 καὶ 6 τοῦ μεγέθους Α : $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Λόγος τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν 4 καὶ 12 τοῦ μεγέθους Β: $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Συνεπῶς, **ἂν δύο μεγέθη εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.**

Παραδείγματα εὐθέως ἀνάλογων μεγεθῶν:

α) Ὁ ἀριθμὸς ἐργατῶν τῆς ἴδιας ἀποδόσεως καὶ τὸ ἔργο τὸ ὁποῖο ἐκτελοῦν στὸν ἴδιο χρόνο.

β) Τὸ βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος καὶ ἡ τιμή του.

γ) Ἡ πλευρὰ ἰσόπλευρου τριγώνου, καὶ ἡ περίμετρός του.

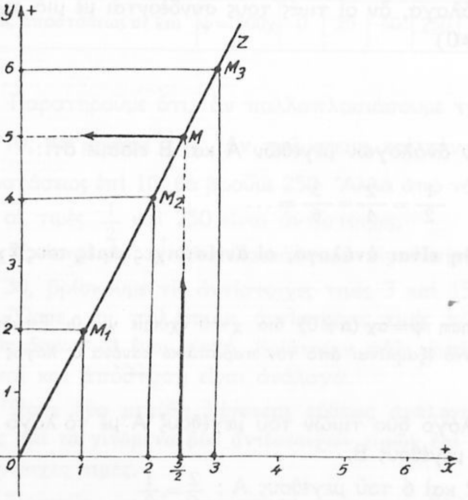
δ) Ὁ χρόνος καὶ τὸ διάστημα στὴν ἰσοταχῆ κίνηση.

ε) Ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου καὶ τὸ μῆκος του.

§ 95. Γραφικὴ παράσταση.

Ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς σχέσης, ποὺ συνδέει τὶς τιμὲς εὐθέως ἀνάλογων μεγεθῶν, εἶναι ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $ψ=αχ$, τὴν ὁποία ἐμελετήσαμε στὴν § 85 α καὶ τὴν ἐπαναλαμβάνουμε μὲ συντομία παρακάτω γιὰ τὴ σχέση $ψ=2χ$, ἡ ὁποία συνδέει τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν εὐθέως ἀνάλογων μεγεθῶν Α καὶ Β.

Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τοῦ ἡμιάξονα οχ παριστάνουν τιμὲς τοῦ μεγέθους Α καὶ οἱ τεταγμένες τῶν σημείων τοῦ οψ τιμὲς τοῦ μεγέθους Β.



σχ. 63.

Τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, . . . εἶναι οἱ γραφικὲς παραστάσεις (ἢ εἰκόνες) τῶν ζευγῶν (1, 2), (2,4) (3, 6), . . . καὶ βρίσκονται πάνω στὴν ἡμιευθεία ΟΖ.

Παρατήρηση:

Μὲ τὴν ἡμιευθεία ΟΖ μποροῦμε νὰ βροῦμε τιμὲς τοῦ μεγέθους Β ἀντίστοιχες τιμῶν τοῦ Α. Π.χ. Γιὰ νὰ βροῦμε ποιὰ τιμὴ τοῦ μεγέθους Β ἀντιστοιχεῖ στὴν τιμὴ $\frac{5}{2}$ τοῦ μεγέθους Α, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Στὸ σημεῖο, τὸ ὁποῖο ἔχει τετμημένη $\frac{5}{2}$, φέρνουμε κάθετο στὸν οχ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΖ στὸ σημεῖο Μ. Ἀπὸ τὸ σημεῖο Μ φέρνουμε // πρὸς τὸν οχ (ἢ ⊥ στὸν οψ). Αὐτὴ τέμνει τὸν οψ σ' ἕνα σημεῖο, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη 5 εἶναι ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ $\frac{5}{2}$.

Ἀσκήσεις:

223. Ἐξετάστε ἂν τὰ ἑπόμενα μεγέθη εἶναι ἀνάλογα:

α) Ὁ χρόνος καὶ τὸ ἔργο ποὺ ἐκτελεῖ μιὰ ὁμάδα ἀπὸ ἐργάτες.

β) Ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀτόμου καὶ τὸ βάρος του.

γ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος ἐκτελέσεως ἑνὸς ἔργου.

224. Βρεῖτε παραδείγματα εὐθέως ἀνάλογων μεγεθῶν.

225. Νὰ συμπληρωθεῖ ὁ παρακάτω πίνακας, νὰ βρεθεῖ ἡ σχέση, ποὺ συνδέει τὶς ἀντίστοιχες τιμές, καὶ νὰ γίνει γραφικὴ παράσταση αὐτῆς.

Τιμὲς μήκους ὑφάσματος σὲ m	;	;	2	4,5	3	
Τιμὲς πωλήσεως ὑφάσματος σὲ δρχ.	10	150	400	;	;	

226. Γιὰ τὰ μεγέθη «πλευρὰ τετραγώνου» καὶ «περίμετρος αὐτοῦ» νὰ βρεθεῖ ἡ σχέση, ποὺ συνδέει τὶς ἀντίστοιχες τιμές τους, καὶ νὰ γίνει γραφικὴ παράσταση αὐτῆς.

227. Νὰ γίνει τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὰ μεγέθη βάρος ἐμπορεύματος καὶ τιμή του, ἂν ἡ τιμὴ τῆς μονάδας βάρους εἶναι 40 δρχ.

228. Ἐξετάστε ἂν μεγέθη μὲ τιμές, ποὺ τὶς συνδέει ἡ σχέση τῆς μορφῆς $\psi = \alpha\chi + \beta$, εἶναι ἀνάλογα.

3. ΜΕΓΕΘΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ— ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΧΕΣΗΣ.

§ 96. **Πρόβλημα.** *Μὲ ποιὰ ταχύτητα πρέπει νὰ κινηθεῖ ἕνα αὐτοκίνητο, γιὰ νὰ διανύσει μιὰ ἀπόσταση 100 χιλιομέτρων σὲ 1 ὥρα, 2 ὧρες, 2,5 ὧρες, 4 ὧρες κ.ο.κ. ;*

Ἂν παραστήσουμε μὲ χ τὴν τιμὴ τοῦ χρόνου σὲ ὧρες καὶ μὲ ψ τὴν τιμὴ τῆς ταχύτητας σὲ χιλιόμετρα ἀνὰ ὥρα, θὰ ἔχουμε τὴ σχέση:

$$\text{Ταχύτητα ἐπὶ χρόνο} = \text{διάστημα}$$

$$\psi \cdot \chi = 100 \Leftrightarrow \psi = \frac{100}{\chi}$$

Ἂν στὴ σχέση $\psi = \frac{100}{\chi}$ θέσουμε ὅπου χ τὶς τιμὲς 1, 2, 2,5 , . . ., βρίσκουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ ψ 100, 50, 40, . . . καὶ σχηματίζουμε τὸν παρακάτω πίνακα:

Τιμὲς τοῦ χρόνου σὲ ὧρες	χ	...	1	2	2,5	4	5	...	χ
Τιμὲς τῆς ταχύτητας σὲ km/h	ψ	...	100	50	40	25	20	...	$\frac{100}{\chi}$

Ἀπὸ τὸν πίνακα αὐτὸ παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

1. Σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χρόνου ἀντιστοιχεῖ μία μόνο τιμὴ τῆς ταχύτητας (μονότιμο τῆς διαιρέσεως), ἄρα ἡ $\psi = \frac{100}{\chi}$ εἶναι συνάρτηση.

2. Ἂν πολ/σουμε τὴν τιμὴ 2,5 τοῦ χρόνου ἐπὶ 2, βρίσκουμε 5. Ἂν διαιρέσουμε τὴν τιμὴ 40 τῆς ταχύτητας (ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ 2,5) διὰ 2, βρίσκουμε 20, δηλαδὴ τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ 5.

Τὰ μεγέθη χρόνος καὶ ταχύτητα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὶς ἰδιότητες αὐτές, λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** μεγέθη.

Δύο μεγέθη λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν ἔχουν ἀντίστοιχες τιμὲς τέτοιες ὥστε, ὅταν πολλαπλασιάζεται μιὰ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕναν ρητὸ ($\neq 0$) καὶ διαιρεῖται ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου μὲ τὸν ἴδιο ρητό, νὰ βρίσκονται νέες τιμὲς ἀντίστοιχες.

§ 97. Ἰδιότητες.

α) Παρατηροῦμε ὅτι: $1.100 = 2 \cdot 50 = 2{,}5 \cdot 40 = \ldots$

Ἄρα τὸ γινόμενο δύο ἀντίστοιχων τιμῶν τῶν ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν εἶναι τὸ ἴδιο (σταθερό).

β) Οἱ προηγούμενες ἰσότητες γράφονται:

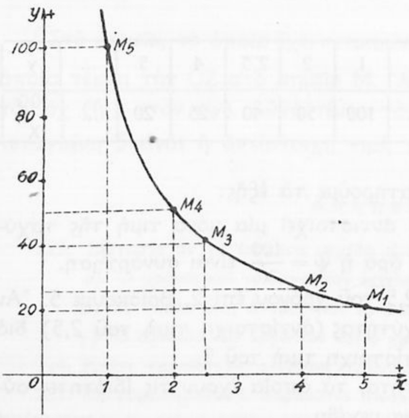
$$\frac{1}{\frac{1}{100}} = \frac{2}{\frac{1}{50}} = \frac{2{,}5}{\frac{1}{40}} = \ldots$$

Ἑπομένως **στὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη οἱ τιμὲς τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς ἀντίστροφες τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.**

γ) Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ὁ λόγος τῶν τιμῶν 1 καὶ 4 τοῦ χρόνου εἶναι $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ λόγος τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν 100 καὶ 25 τῆς ταχύτητας εἶναι $\frac{100}{25} = 4$, δηλαδὴ ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{4}$.

Συνεπῶς **στὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ λόγου τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.**

§ 98. Γραφικὴ παράσταση τῆς σχέσης $\psi = \frac{100}{\chi}$



σχ. 64.

Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τοῦ οχ παριστάνουν τιμὲς χρόνου σὲ ὧρες καὶ οἱ τεταγμένες τῶν σημείων τοῦ οψ τιμὲς ταχύτητας σὲ χιλιόμετρα ἀνὰ ὥρα.

Βρίσκουμε κατὰ τὰ γνωστὰ τὶς γραφικὲς παραστάσεις (εἰκόνες) τῶν ζευγῶν (5, 20), (4,25), (2,5, 40) . . . καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, . . δὲν βρίσκονται πάνω σὲ μιὰ εὐθεία, ἀλλὰ σὲ μιὰ καμπύλη, ἡ ὁποία λέγεται ὑπερβολή.

Ἐπειδὴ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{100}{\chi}$ εἶναι τὸ Q^+, ἡ ὑπερβολὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕναν κλάδο, ὁ ὁποῖος βρίσκεται μέσα στὴ $\measuredangle$ χοψ.

Ἐφαρμογή :

§ **99**. Δίνεται ἡ συνάρτηση $\psi = \frac{1}{\chi}$.

α) Νὰ κατασκευασθεῖ πίνακας ἀντίστοιχων τιμῶν.

β) Νὰ ἐξετασθεῖ ἂν οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς εἶναι τιμὲς ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν.

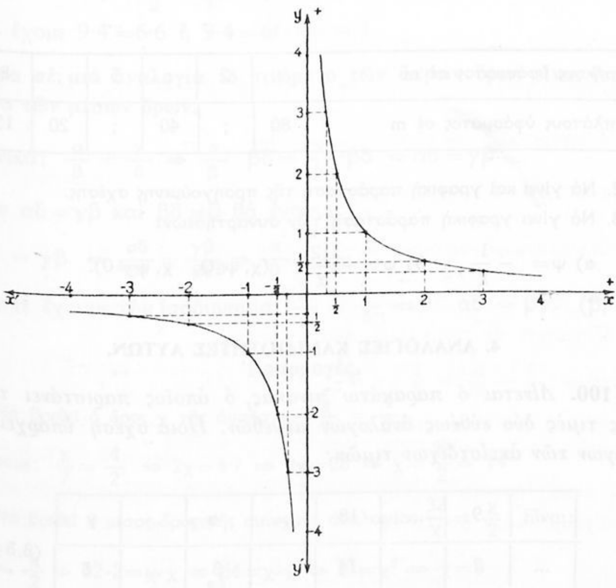
γ) Νὰ γίνει ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς $\psi = \frac{1}{\chi}$

α)

χ	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3	...
ψ	...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...

β) Πολλαπλασιάζουμε τὴν τιμὴ $\frac{1}{2}$ τοῦ χ ἐπὶ 6 καὶ βρίσκουμε τὴν τιμὴ 3. Διαιροῦμε τὴν τιμὴ 2 τοῦ ψ (ἀντίστοιχη τοῦ $\frac{1}{2}$) διὰ 6 καὶ βρίσκουμε τὴν τιμὴ $\frac{1}{3}$. Οἱ τιμὲς ὅμως 3 καὶ $\frac{1}{3}$ εἶναι ἀντίστοιχες, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸν πίνακα.

Ἄρα οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς εἶναι τιμὲς ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν.



σχ. 65.

γ) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $ψ = \frac{1}{χ}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο καμπύλες συμμετρικὲς πρὸς τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, οἱ ὁποῖες εἶναι οἱ δύο κλάδοι μιᾶς ὑπερβολῆς.

Γενικὰ ἡ συνάρτηση $ψ = \frac{α}{χ}$ $(α, χ, ψ \in Q$ καὶ $α, χ, ψ \neq 0)$ ὁρίζει ζεύγη τιμῶν ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν.

Τὸ γινόμενο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν εἶναι σταθερὸ $(χψ = α)$. Ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ χ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ψ.

Γραφικῶς ἡ $ψ = \frac{α}{χ}$ παριστάνεται ἀπὸ μιὰ καμπύλη (μὲ ἕνα ἢ δύο κλάδους, ἀνάλογα μὲ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ της), ποὺ λέγεται ὑπερβολὴ (ὀρθογώνια ὑπερβολή).

Ἀσκήσεις:

229. Ἐξετάστε ἂν τὰ παρακάτω μεγέθη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα:

α) Ἀριθμὸς ἐργατῶν καὶ χρόνος γιὰ ἕνα ὁρισμένο ἔργο.

β) Ἡ πλευρὰ τριγώνου καὶ τὸ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴ ὕψος, ὅταν παραμένει σταθερὸ τὸ ἐμβαδό του.

230. Βρεῖτε παραδείγματα ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν.

231. Νὰ συμπληρώσετε τὸν παρακάτω πίνακα καὶ νὰ γράψετε τὴ σχέση ποὺ συνδέει δύο ὁποιεσδήποτε ἀντίστοιχες τιμές, ἂν παραμένει σταθερὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑφάσματος.

Τιμὲς μήκους ὑφάσματος σὲ m	;	2	;	5	;	8	χ
Τιμὲς πλάτους ὑφάσματος σὲ m	80	;	40	;	20	15	ψ

232. Νὰ γίνει καὶ γραφικὴ παράσταση τῆς προηγούμενης σχέσης.

233. Νὰ γίνει γραφικὴ παράσταση τῶν συναρτήσεων:

α) $ψ = -\frac{1}{χ}$, β) $ψ = -\frac{12}{χ}$ $(χ, ψ \in Q, \quad χ, ψ \neq 0)$.

4. ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ.

§ 100. *Δίνεται ὁ παρακάτω πίνακας, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς δύο εὐθέως ἀνάλογων μεγεθῶν. Ποιὰ σχέση ὑπάρχει μεταξὺ τῶν λόγων τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν;*

...	9	...	18	...	α	...	γ	
...	7	...	14	...	β	...	δ	(β,δ ≠ 0)

Ξέρουμε ὅτι $\frac{9}{7} = \frac{18}{14} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Ἡ ἰσότητα $\frac{9}{7} = \frac{18}{14}$ ἢ γενικὰ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ὀνομάζεται ἀναλογία.

Ὥστε **ἀναλογία εἶναι ἡ ἰσότητα δύο λόγων.**

Ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ γράφεται συμβολικά: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ἢ $[(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)]$.

Οἱ α, γ, λέγονται **ἡγούμενοι** ὅροι καὶ οἱ β, δ **ἑπόμενοι** ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Οἱ β, γ λέγονται **μέσοι** ὅροι καὶ οἱ α, δ **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Σημείωση. Στὴν ἀναλογία $\frac{\chi}{\psi} = \frac{\psi}{z}$ ὁ ψ λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν χ καὶ z. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ ἀναλογία λέγεται **συνεχής**.

Στὴ συνεχῆ ἀναλογία $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ ὁ 4 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν 8 καὶ 2.

Ὁ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν λέγεται καὶ **γεωμετρικὸς μέσος** αὐτῶν.

§ 101. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

Στὴν ἀναλογία $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ παρατηροῦμε ὅτι $4 \cdot 3 = 2 \cdot 6$. Ὁμοίως στὴν $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$ ἔχομε $9 \cdot 4 = 6 \cdot 6$ ἢ $9 \cdot 4 = 6^2$

Ἄρα **σὲ μιὰ ἀναλογία τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων ὅρων.**

Γενικά: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\delta = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \beta\delta \Rightarrow \alpha\delta = \gamma\beta$

Ἂν $\alpha\delta = \gamma\beta$ καὶ $\beta\delta \neq 0$ θὰ ἔχουμε:

$\alpha\delta = \gamma\beta \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\gamma\beta}{\beta\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Ὥστε ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \quad (\beta, \delta \neq 0)$.

Ἐφαρμογές.

α) Νὰ βρεθεῖ ὁ ὅρος χ τῆς ἀναλογίας $\frac{\chi}{7} = \frac{4}{2}$.

Ἔχουμε: $\frac{\chi}{7} = \frac{4}{2} \Rightarrow 2\chi = 4 \cdot 7 \Rightarrow 2\chi = 28 \Rightarrow \chi = \frac{28}{2} = 14$

β) Νὰ βρεθεῖ ὁ μέσος ὅρος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας $\frac{32}{\chi} = \frac{\chi}{2}$. Εἶναι:

$\frac{32}{\chi} = \frac{\chi}{2} \Rightarrow 32 \cdot 2 = \chi \cdot \chi \Rightarrow 64 = \chi \cdot \chi \Leftrightarrow 8^2 = \chi^2 \Rightarrow \chi = 8$

2. Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{10}{5}=\frac{8}{4}$. Οἱ ἀντίστροφοι λόγοι εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουμε τὴν ἀναλογία $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι, ἂν ἐναλλάξουμε τοὺς μέσους ὅρους, προκύπτει μιὰ νέα ἀναλογία: $\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$. Ὁμοίως ἂν ἐναλλάξουμε τοὺς ἄκρους ὅρους: $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

Γενικά, ἂν ἔχουμε τὴν ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0)$, βρίσκουμε τὶς νέες ἀναλογίες: 1) $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$, 2) $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$, 3) $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$

Πραγματικά:

1) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\alpha\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} \Rightarrow \frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$

2) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

3) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\alpha\beta}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$

Ἂν ἔχουμε μιὰ ἀναλογία μὲ ὅρους διαφορετικοὺς ἀπὸ τὸ 0 καὶ α) ἀντιστρέψουμε τοὺς λόγους β) ἐναλλάξουμε τοὺς μέσους ὅρους γ) ἐναλλάξουμε τοὺς ἄκρους ὅρους της, παίρνουμε νέες ἀναλογίες.

Ἐφαρμογή.

Ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{-12}{-6}=\frac{-10}{-5}$ νὰ σχηματίσετε νέες ἀναλογίες.

1ο. Ἀντιστρέφουμε τοὺς λόγους: $\frac{-6}{-12}=\frac{-5}{-10}$

2ο. Ἐναλλάσσουμε τοὺς μέσους ὅρους: $\frac{-12}{-10}=\frac{-6}{-5}$

3ο. Ἐναλλάσσουμε τοὺς ἄκρους ὅρους: $\frac{-5}{-6}=\frac{-10}{-12}$

3. Νὰ προσθέσετε τὴ μονάδα στοὺς λόγους τῆς ἀναλογίας $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν προκύπτει νέα ἀναλογία.

Ἔχουμε: $\frac{3}{5}=\frac{6}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{5}+1=\frac{6}{10}+1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}+\frac{5}{5}=\frac{6}{10}+\frac{10}{10}$

$$\Leftrightarrow \frac{3+5}{5}=\frac{6+10}{10}. \quad \left(\frac{8}{5}=\frac{16}{10}\right)$$

Ἂν στοὺς ἡγούμενους ὅρους μιᾶς ἀναλογίας προσθέσουμε τοὺς ἑπόμενους, ἔχουμε πάλι ἀναλογία.

Γενικά: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$

Ἂν ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τοὺς λόγους τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τὴ μονάδα, ἔχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\gamma}{\delta}-1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$$

Νὰ διατυπώσετε κανόνα γιὰ τὴν ἰσοδυναμία:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$$

Ἐφαρμογές.

α) Νὰ βρεθεῖ ὁ χ ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{28-\chi}{\chi}=\frac{2}{5}$. ἔχουμε:

$$\frac{28-\chi}{\chi}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{28-\chi+\chi}{\chi}=\frac{2+5}{5} \Leftrightarrow \frac{28}{\chi}=\frac{7}{5} \Leftrightarrow 7\chi=5\cdot 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi=\frac{5.28}{7} \Leftrightarrow \chi=5\cdot 4 \Leftrightarrow \chi=20.$$

β) Νὰ βρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ποὺ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 50 καὶ λόγο $\frac{12}{13}$

Ἔστω χ καὶ ψ οἱ ἀριθμοί. Ἔχουμε $\chi+\psi=50$ καὶ $\frac{\chi}{\psi}=\frac{12}{13}$.

Ἀπὸ τὴν $\frac{\chi}{\psi}=\frac{12}{13} \Leftrightarrow \frac{\chi+\psi}{\psi}=\frac{12+13}{13} \Leftrightarrow \frac{50}{\psi}=\frac{25}{13} \Leftrightarrow 25\psi=13\cdot 50 \Leftrightarrow$

$$\psi=\frac{13\cdot 50}{25} \Leftrightarrow \psi=13\cdot 2 \Leftrightarrow \psi=26.$$ Ἑπομένως $\chi=50-26=24$.

4. Νὰ συγκρίνετε τὸ λόγο $\frac{2+8}{3+12}$ μὲ τοὺς λόγους τῆς ἀναλογίας $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$

Τί παρατηρεῖτε;

Παρατηροῦμε ὅτι $\frac{2+8}{3+12}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

Ἄρα $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}=\frac{2+8}{3+12}$. Γενικά: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ $(\beta\cdot\delta>0)$.

Πραγματικά: ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\lambda$, τότε καὶ $\frac{\gamma}{\delta}=\lambda$. Ἑπομένως ἔχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\beta\lambda\\ \gamma=\delta\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta\lambda+\delta\lambda \Rightarrow \alpha+\gamma=(\beta+\delta)\lambda \Rightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\lambda=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Ἂν ἔχουμε ἴσους λόγους μὲ ὁμόσημους παρονομαστές, ὁ λόγος ποὺ ἔχει ἀριθμητὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴ τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν εἶναι ἴσος μὲ τοὺς ἀρχικοὺς λόγους.

Δηλαδὴ γενικότερα

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=\ldots=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots}$$

Σημείωση. Ἂν οἱ παρονομαστὲς δὲν εἶναι ὁμόσημοι, εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν ὁμόσημοι.

Π.χ. $\frac{-2}{4}=\frac{5}{-10}=\ldots\ldots$

Ἔχουμε $\frac{-2}{4}=\frac{5(-1)}{-10.(-1)}=\ldots\Leftrightarrow\frac{-2}{4}=\frac{-5}{10}=\ldots$

Ἐφαρμογή.

Ἂν $\frac{\alpha}{-5}=\frac{\beta}{-7}=\frac{\gamma}{-12}$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma=48$, νὰ βρεθοῦν οἱ α, β, γ.

Ἔχουμε $\frac{\alpha}{-5}=\frac{\beta}{-7}=\frac{\gamma}{-12}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{-5-7-12}=\frac{48}{-24}=-2$

Ἄρα $\frac{\alpha}{-5}=-2\Rightarrow\alpha=(-5)\cdot(-2)\Rightarrow\alpha=10$

$\frac{\beta}{-7}=-2\Rightarrow\beta=(-7)\cdot(-2)\Rightarrow\beta=14$

$\frac{\gamma}{-12}=-2\Rightarrow\gamma=(-12)\cdot(-2)\Rightarrow\gamma=24.$

Ἀσκήσεις:

234. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἄγνωστοι ὅροι τῶν παρακάτω ἀναλογιῶν:

α) $\frac{-10}{\chi}=\frac{5}{4}$, δ) $\frac{\chi}{-4}=\frac{-25}{\chi}$, ζ) $\frac{8}{-4}=\frac{4}{\chi}$, ι) $\frac{6}{-3}=\frac{\chi}{2}$

β) $\frac{-9}{6}=\frac{6}{\chi}$, ε) $\frac{\chi}{-9}=\frac{-9}{27}$, η) $\frac{2}{5}=\frac{6}{\psi}$, ια) $\frac{27}{42}=\frac{\psi}{70}$

γ) $\frac{2}{\beta}=\frac{10}{35}$, στ) $\frac{16}{\gamma}=\frac{\gamma}{9}$, θ) $\frac{4,5}{\psi}=\frac{\psi}{2}$, ιβ) $\frac{-4}{7}=\frac{\gamma}{56}$, ιγ) $\frac{\alpha}{15}=\frac{15}{12}$.

235. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἀποτελοῦν ἀναλογία οἱ τετράδες:

α) (15, 35, 9, 21) β) (-12, 34, −18, 51)
γ) (9, 21, 21, 49)) δ) $(\chi, \psi, \chi^2, \chi\psi)$

236. Νὰ βρεθεῖ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν 16 καὶ 25.

237. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας

$\frac{\chi}{6}=\frac{\psi}{7}$ α) ἂν $\chi+\psi=65$ καὶ β) ἂν $\chi-\psi=78$.

238. Νὰ βρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ποὺ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 560 καὶ λόγο $\frac{2}{5}$.

239. Νὰ βρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ποὺ νὰ ἔχουν διαφορὰ 200 καὶ λόγο $\frac{7}{5}$.

240. Ἂν $\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}=\frac{z}{5}$ καὶ $\chi+\psi+z=200$, νὰ βρεθοῦν τὰ χ, ψ, z.

241. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἑπόμενοι ὅροι τῶν ἴσων λόγων $\frac{2}{\chi}=\frac{3}{\psi}=\frac{4}{z}$, ἂν $\chi+\psi+z=81$.

242. Ἂν $\frac{\chi}{\psi}=\frac{3}{4}$ καὶ $\chi+\psi=56$, νὰ βρεθοῦν τὰ χ καὶ ψ.

243. Ἂν $\frac{\chi-3}{\chi}=\frac{\psi-4}{\psi}$ καὶ $\chi+\psi=84$, νὰ βρεθοῦν τὰ χ καὶ ψ.

Β. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΛΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ **102. Πρόβλημα 1ο**. *Ἂν 6 ἐργάτες σκάβουν 3 στρέμματα σὲ 8 ὧρες, πόσα στρέμματα θὰ σκάψουν 14 ἐργάτες σὲ 8 ὧρες; (ὅλοι οἱ ἐργάτες ἔχουν τὴν ἴδια ἀπόδοση).*

Ἔστω ὅτι στὴν τιμὴ «14 ἐργάτες» ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «χ στρέμματα».

Σχηματίζουμε τὸν παρακάτω πίνακα.

Πλῆθος ἐργατῶν	6	14	2πλάσιοι ἐργ. 12	3πλάσιοι ἐργ. 18	...
Τιμὲς ἔργου σὲ στρέμματα	3	χ	2πλάσια στρέμ. 6	3πλάσια στρέμ. 9	...

Ἐπειδὴ τὰ μεγέθη πλῆθος ἐργατῶν καὶ ἔργο εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, δηλαδὴ $\frac{6}{14}=\frac{3}{\chi}$

Ἑπομένως $\frac{6}{14}=\frac{3}{\chi} \Leftrightarrow 6\chi=3\cdot 14 \Leftrightarrow 6\chi=42 \Leftrightarrow \chi=7$.

Ἄρα οἱ 14 ἐργάτες θὰ σκάψουν 7 στρέμματα σὲ 8 ὧρες.

Σημείωση 1.

Τὸ παραπάνω πρόβλημα μποροῦμε νὰ τὸ κατατάξουμε ὡς ἑξῆς:

Πλῆθος ἐργατῶν τῆς ἴδιας ἀποδόσεως	Τιμὲς ἔργου σὲ στρέμ.	Τιμὲς χρόνου σὲ ὧρες
6	3	8
14	χ	8

ἢ πιὸ ἁπλὰ

6 ἐργάτες → 3 στρέμ.

14 » → χ »

Σημείωση 2.

Σχηματίζουμε τὴν ἀναλογία $\frac{6}{3}=\frac{14}{\chi}$, ἂν χρησιμοποιήσουμε τὴν ἰδιότητα: «Στὰ εὐθέως ἀνάλογα ποσὰ οἱ λόγοι τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν εἶναι ἴσοι». Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ αὐτὴ τὴν ἀναλογία βρίσκουμε $\chi=7$.

Πρόβλημα 2ο. Ἂν 10 ἐργάτες σκάβουν σὲ 12 ἡμέρες 50 στρέμματα, 8 ἐργάτες σὲ πόσες ἡμέρες θὰ σκάψουν τὰ 50 στρέμματα; (ὅλοι οἱ ἐργάτες ἔχουν τὴν ἴδια ἀπόδοση καὶ ἐργάζονται τὶς ἴδιες ὧρες κάθε ἡμέρα).

Ἔστω ὅτι οἱ 8 ἐργάτες θὰ σκάψουν σὲ χ ἡμέρες τὰ 50 στρέμματα.

Σχηματίζουμε τὸν πίνακα:

Πλῆθος ἐργατῶν	10	8		20	5
Τιμὲς χρόνου σὲ ἡμέρες	12	χ		6	24

Ἐπειδὴ τὰ μεγέθη πλῆθος ἐργατῶν καὶ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

Ἄρα ἔχουμε τὴν ἀναλογία $\frac{10}{8}=\frac{\chi}{12}$, ἀπὸ τὴν ὁποία βρίσκουμε $\chi=15$.

Ἑπομένως οἱ 8 ἐργάτες θὰ σκάψουν σὲ 15 ἡμέρες τὰ 50 στρέμματα.

Σημείωση 1.

Ἂν χρησιμοποιήσουμε τὴν ἰδιότητα «στὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη τὰ γινόμενα τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν εἶναι ἴσα», ἔχομε $10 \cdot 12 = 8 \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = \frac{10.12}{8} \Leftrightarrow$

$$\chi=\frac{120}{8} \Leftrightarrow \chi=15.$$

Σημείωση 2.

Μποροῦμε νὰ κατατάξουμε τὸ παραπάνω πρόβλημα καὶ ὡς ἑξῆς:

Πλῆθος ἐργατῶν τῆς ἴδιας ἀποδόσεως	Τιμὲς χρόνου σὲ ἡμέρες	Τιμὲς ἔργου σὲ στρέμματα
10	12	50
8	χ	50

ἢ

10 ἐργάτες → 12 ἡμέρες

8 » → χ »

Προβλήματα:

244. Γιὰ τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἔργου διατέθηκε τὸ ποσὸ τῶν 9.000 δρχ. Τί ποσὸ χρημάτων ἀντιστοιχεῖ στὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἴδιου ἔργου;

245. Γιὰ 100 ἐνδυμασίες χρειάζονται 300 m μῆκος ἀπὸ ἕνα ὕφασμα πλάτους 1,40 m. Γιὰ 125 ὅμοιες ἐνδυμασίες πόσο πρέπει νὰ εἶναι τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος, ἂν τὸ μῆκος παραμένει σταθερό;

246. Ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται διατηρῶντας γιὰ $\frac{8}{3}$ ὧρες ταχύτητα 67,5 km/h. Πόσα km θὰ διανύσει μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα σὲ $\frac{32}{9}$ ὧρες;

247. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει ταχύτητα 56 km/h καὶ διανύει ἀπόσταση 182 km. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διανύσει τὴν ἀπόσταση αὐτή, ἂν ἐλαττώσει τὴν ταχύτητά του κατὰ τὸ $\frac{1}{14}$ της;

248. 50 στρατιῶτες ἔχουν τροφὲς γιὰ 30 ἡμέρες. Πόσες ἡμέρες θὰ περάσουν μὲ αὐτές, ἂν αὐξηθεῖ ἡ μερίδα κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ της;

249. Συμφωνήθηκε νὰ τελειώσει ἕνα ἔργο σὲ 25 ἡμέρες. Ἐὰν 6 ἐργάτες τελείωσαν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἔργου σὲ 10 ἡμέρες, πόσοι ἐργάτες πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, γιὰ νὰ τελειώσει τὸ ὑπόλοιπο ἔργο στὴν καθορισμένη προθεσμία;

250. 12 ἄνδρες ἐκτελοῦν ἕνα ἔργο σὲ 20 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἴδιο ἔργο 20 γυναῖκες, ἂν ἡ ἐργασία 4 ἀνδρῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐργασία 5 γυναικῶν;

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

§ 103. Πρόβλημα 1ο. *Ἕνα ἐμπόρευμα κόστους 800.000 δρχ. πουλήθηκε μὲ κέρδος 12%. Πόσο ἦταν τὸ κέρδος;*

Ἂν καλέσουμε x δρχ. τὸ κέρδος, ἐπειδὴ 12% σημαίνει «σὲ 100 μονάδες κόστους τὸ κέρδος εἶναι 12» καὶ τὸ κέρδος θεωρεῖται ἀνάλογο τοῦ κόστους, ἔχουμε:

Κόστος	100	800.000
Κέρδος	12	x

$$\Rightarrow \frac{100}{800.000} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 96.000$$

Ἄρα τὸ κέρδος εἶναι 96.000 δρχ.

Τὸ κέρδος λέγεται ποσοστὸ ἐπὶ τοῦ κόστους.

Στὴν πράξη καὶ στὴν οἰκονομικὴ ζωὴ ἕνα μέγεθος, ποὺ ὀνομάζεται **ποσοστό, θεωρεῖται ἀνάλογο** ἑνὸς ἄλλου μεγέθους, τὸ ὁποῖο καλεῖται **ἀρχικὸ μέγεθος** ἢ **ἀρχικὸ ποσό.**

Τὸ ποσοστὸ καὶ τὸ ἀρχικὸ ποσὸ εἶναι ὁμοειδῆ μεγέθη, συνήθως νομισματικὰ ἢ μεγέθη βάρους ἢ ὄγκου.

Συμβολίζουμε μὲ Α τὸ ἀρχικὸ μέγεθος καὶ μὲ Π τὸ ποσοστό.

Τὸ ποσοστό, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ 100 μονάδες ἀρχικοῦ ποσοῦ, λέγε-

ται «ποσόστωση» ἢ ἁπλῶς «ποσοστὸ» ἐπὶ τοῖς ἑκατό. Τὸ συμβολίζου
μὲ τὸ ε καὶ γράφουμε ε %.

(Μποροῦμε νὰ ἔχουμε καὶ ποσοστὸ ἐπὶ 1000 μονάδων ἀρχικοῦ ποσοῦ,
ὁπότε γράφουμε ε ‰).

Τὸ ἐμπορικὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία εἶναι ποσοστὰ ἐπὶ τῆς τιμῆς κόστους,
ἡ ὁποία εἶναι γι' αὐτὰ ἀρχικὸ ποσό, (ἐκτὸς ἂν ὁρίζονται ρητῶς ἐπὶ
τῆς τιμῆς πωλήσεως).

Τὰ ἔξοδα γιὰ μεταφορὰ - ἀποθήκευση - δασμούς, μὲ τὰ ὁποῖα ἐπιβα-
ρύνεται ἕνα προϊόν, εἶναι ποσοστὸ μὲ ἀρχικὸ ποσὸ τὴν τιμὴ τῆς ἀγορᾶς.

Ἡ ἀμοιβὴ ἑνὸς ἐμπορικοῦ ἀντιπροσώπου εἶναι ποσοστὸ μὲ ἀρχικὸ
ποσὸ τὴν τιμὴ πωλήσεως τῶν προϊόντων, τὰ ὁποῖα διαθέτει.

Τὸ ἀπόβαρο (βάρος συσκευασίας ἑνὸς προϊόντος) εἶναι ποσοστὸ μὲ
ἀρχικὸ ποσὸ τὸ μεικτὸ βάρος.

Τὸ βάρος ἑνὸς διαλυμένου σώματος εἶναι ποσοστὸ μὲ ἀρχικὸ ποσὸ
τὸ βάρος τοῦ διαλύματος.

Ἂν Α, Π, ε% εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἀρχικὸ ποσό, τὸ ποσοστὸ καὶ ἡ
ποσόστωση (ποσοστὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ) ἔχουμε τὸν πίνακα:

Ἀρχικὸ ποσὸ	Α	100
Ποσοστὸ	Π	ε

καὶ ἀπ' αὐτὸν τὴν ἀναλογία $\frac{A}{100} = \frac{\Pi}{\varepsilon}$, ἀπὸ τὴν
ὁποία παίρνουμε τοὺς τύπους $A = \frac{100}{\varepsilon} \cdot \Pi$, $\Pi = \frac{\varepsilon}{100} \cdot A$

Πρόβλημα 2°. Ἕνα ἐμπόρευμα πουλήθηκε 805.000 δρχ. μὲ κέρδος
15%. Πόσο κόστιζε τὸ ἐμπόρευμα;

Ἂν χ δρχ. εἶναι τὸ κόστος, τὸ ποσοστὸ θὰ εἶναι 805.000–χ δρχ.
Κατατάσσουμε αὐτὰ σὲ πίνακα, γράφουμε τὴν ἀναλογία καὶ βρίσκουμε τὸν χ

Α	100	χ
Π	15	805000–χ

$$\Rightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{805000-\chi}{15} \Leftrightarrow \cdots \chi = 700000$$

Ἐπειδὴ ἔχουμε $\frac{A}{100} = \frac{\Pi}{\varepsilon} = \frac{A+\Pi}{100+\varepsilon}$ (ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν), τὰ
Α, Α + Π εἶναι μεγέθη ἀνάλογα, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰ Π, Α + Π. Τὸ Α + Π
εἶναι τὸ ἀρχικὸ ποσό, τὸ ὁποῖο ἔχει αὐξηθεῖ κατὰ τὸ ἀντίστοιχο πο-
σοστὸ Π.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ χρησιμοποιήσουμε καὶ τὸν ἑξῆς πίνακα:

Α	100	χ
Α+Π	115	805000

$$\Rightarrow \frac{\chi}{805000} = \frac{100}{115} \Leftrightarrow 115\chi = 805.000 \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{805.000.100}{115} \Leftrightarrow \chi = 7000 \cdot 100 \Leftrightarrow \chi = 700.000$$

Ἄρα τὸ κόστος εἶναι 700.000 δρχ.

Σημείωση 1. Ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{A}{100} = \frac{\Pi}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{A}{100} = \frac{A-\Pi}{100-\varepsilon}$ καὶ $\frac{\Pi}{\varepsilon} = \frac{A-\Pi}{100-\varepsilon}$. Τὸ $A-\Pi$ εἶναι τὸ ἀρχικὸ ποσὸ ἐλαττωμένο κατὰ τὸ ἀντίστοιχο ποσοστό. Τὸ μέγεθος αὐτὸ εἶναι ἀνάλογο καὶ πρὸς τὸ ἀρχικὸ ποσὸ A καὶ πρὸς τὸ ποσοστὸ Π. Ἀπὸ τὶς προηγούμενες ἀναλογίες προκύπτουν καὶ οἱ παρακάτω τύποι γιὰ τὰ A καὶ Π.

$A = \frac{(A-\Pi)\cdot 100}{100-\varepsilon}$, $\Pi = \frac{(A-\Pi)\cdot\varepsilon}{100-\varepsilon}$ καὶ ἀντιστοίχως οἱ: $A = \frac{(A+\Pi)\cdot 100}{100+\varepsilon}$, $\Pi = \frac{(A+\Pi)\cdot\varepsilon}{100+\varepsilon}$ **(Πρόβλ. 2)**

Σημείωση 2. Οἱ παραπάνω ὁριζόντιοι πίνακες χρησιμοποιοῦνται καὶ κατακόρυφα.

Πρόβλημα 3ο. Τὸ καθαρὸ βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 1067 kgr*. Ἂν τὸ ἀπόβαρό του εἶναι 3%, πόσο εἶναι τὸ μεικτὸ βάρος του καὶ πόσο τὸ ἀπόβαρό του;

α) Ἔστω χ kgr* τὸ μεικτὸ βάρος. Τὸ ἀντίστοιχο ἀπόβαρο εἶναι χ−1067 kgr*

A	Π
100	3
χ	χ−1067

$$\Rightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{\chi-1067}{3} \Leftrightarrow \ldots \chi = 1100$$

Μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸν πίνακα:

A	Π
100	97
χ	1067

$$\Rightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{1067}{97} \Leftrightarrow 97\chi = 106700 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{106700}{97} \Leftrightarrow \chi = 1100$$

Ἄρα τὸ μεικτὸ βάρος εἶναι 1100 kgr*.

β) Τὸ ἀπόβαρο εἶναι 1100−1067 = 33 kgr*.

Μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε καὶ ἀπ' εὐθείας.

Ἔστω χ kgr* τὸ ἀπόβαρο. Ἔχουμε τὸν πίνακα.

Π	Α–Π
3	97
χ	1067

$$\Rightarrow \frac{\chi}{3} = \frac{1067}{97} \Leftrightarrow \chi = \frac{1067.3}{97} \Leftrightarrow \chi = 11.3 \Leftrightarrow \chi = 33$$

Πρόβλημα 4ο. Ἕνας ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα καὶ πληρώνει 82.000 δρχ. Ἔχει ἔξοδα 12% (ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς) καὶ πουλᾶ μὲ κέρδος 15% (ἐπὶ τοῦ κόστους). Πόσες δρχ. θὰ πουλήσει τὸ ἐμπόρευμα;

Ὑπολογίζουμε πρῶτα τὸ κόστος· ἔστω ὅτι αὐτὸ εἶναι χ δρχ.

Α	Α+Π
100	112
82000	χ

$$\Rightarrow \chi = 91840$$

Ὑπολογίζουμε τώρα τὴν τιμὴ πωλήσεως ψ δρχ.

Α	Α+Π
100	115
91840	ψ

$$\Rightarrow \frac{\psi}{115} = \frac{91840}{100} \Leftrightarrow \psi = \frac{91840.115}{100} \Leftrightarrow \psi = 105616$$

Ἄρα ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματος εἶναι 105.616 δρχ.

Παρατήρηση. Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε, ἂν κάνουμε τὴν κατάταξη:

χ δρχ. πώληση	82000 δρχ. ἀγορά
100 δρχ. ἀγορὰ	112 δρχ. κόστος
100 δρχ. κόστος	115 δρχ. πώληση καὶ σχηματίσουμε τὴν ἐξίσωση:

$\chi \cdot 100 \cdot 100 = 82000 \cdot 112 \cdot 115$ ἡ ὁποία, ὅταν ἐπιλυθεῖ, δίνει

$$\chi = \frac{82000 \cdot 112 \cdot 115}{100 \cdot 100} \Leftrightarrow \chi = \frac{1056160000}{10000} \Leftrightarrow \chi = 105616.$$

Προβλήματα:

251. Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 20% καὶ εἰσέπραξε 360.000 δρχ. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος;

252. Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 15% καὶ κέρδισε 60.000 δρχ. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος;

253. Τὸ μεικτὸ βάρος ἑνὸς προϊόντος εἶναι 375 kgr* καὶ τὸ καθαρὸ 300 kgr*. Πόσο τοῖς ἑκατὸ εἶναι τὸ ἀπόβαρο α) ἐπὶ τοῦ μικτοῦ βάρους καὶ β) ἐπὶ τοῦ καθαροῦ βάρους;

254. Ἕνα ἀντικείμενο ἀξίας 3750 δρχ. πουλήθηκε μὲ κέρδος 25% ἐπὶ τοῦ κόστους. Ποιὰ εἶναι ἡ τιμὴ πωλήσεως καὶ πόσο εἶναι τὸ κέρδος;

255. Ἐὰν τὸ κέρδος μὲ 20% εἶναι 4940 δρχ, ποιὰ εἶναι ἡ τιμὴ πωλήσεως καὶ ποιὸ τὸ κόστος;

256. Μιὰ τηλεόραση πουλήθηκε μὲ ἔκπτωση 30% 4550 δρχ. Πόσο ἦταν τὸ κόστος καὶ πόση ἡ ἔκπτωση;

257. Ἕνας ἔμπορος πουλᾶ τὸν τ. πήχη ὅσο ἀγοράζει τὸ m. Πόσο τοῖς ἑκατὸ κερδίζει;

258. Ἐὰν ἕνας ἔμπορος πουλᾶ μὲ κέρδος 25% ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς, πόσο τοῖς ἑκατὸ κερδίζει ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως;

259. Ἐὰν ἕνας ἔμπορος πουλοῦσε τὸ ἐμπόρευμά του 11500 δρχ, θὰ κέρδιζε 15% ἐπὶ τοῦ κόστους του. Τὸ πούλησε ὅμως 9500 δρχ. Πουλήθηκε τὸ ἐμπόρευμα πάνω ἢ κάτω ἀπὸ τὸ κόστος του καὶ πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐπὶ τοῦ κόστους;

260. Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἕνα ἀντικείμενο μὲ ζημία 7%. Ἐὰν τὸ πουλοῦσε μὲ κέρδος 3%, θὰ ἔπαιρνε 750 δρχ. περισσότερο. Ποιὸ ἦταν τὸ κόστος τοῦ ἀντικειμένου;

261. Πόσο ἀγοράστηκε ἕνα ἐμπόρευμα, ποὺ ἐπιβαρύνθηκε μὲ ἔξοδα 10% καὶ πουλήθηκε μὲ κέρδος 11% 183150 δρχ.;

262. Δύο ἀντικείμενα κοστίζουν μαζὶ 5000 δρχ. καὶ πουλήθηκαν τὸ α' μὲ κέρδος 20% καὶ τὸ β' μὲ κέρδος 15%. Ἂν τὸ ὁλικὸ κέρδος ἦταν 900 δρχ., νὰ βρεθεῖ τὸ κόστος τοῦ καθενός.

263. Ἕνας ἔμπορος ὑπολογίζει νὰ κερδίσει 25% ἐπὶ τοῦ κόστους ἑνὸς ἐμπορεύματος. Τὸ πούλησε ὅμως μὲ ὑπερτίμηση 5% ἐπὶ τῆς τιμῆς ποὺ ἔγραφε πάνω. Πόσο τοῖς ἑκατὸ κέρδισε ἐπὶ τοῦ κόστους;

264. Ἕνας ἔμπορος γράφει πάνω σ' ἕνα ἐμπόρευμα τιμὴ κατὰ 30% ἀνώτερη ἀπὸ τὸ κόστος καὶ τὸ πουλᾶ μὲ ἔκπτωση κερδίζοντας ἔτσι 23,50% ἐπὶ τοῦ κόστους. Ποιὰ εἶναι ἡ ἔκπτωση ἐπὶ τῆς τιμῆς ποὺ γράφει πάνω;

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 104. Πρόβλημα.

3 m^3 τοίχου χτίζονται ἀπὸ 5 χτίστες σὲ 2 ἡμέρες
6 m^3 τοίχου χτίζονται ἀπὸ ; χτίστες σὲ 2 ἡμέρες
9 m^3 τοίχου χτίζονται ἀπὸ ; χτίστες σὲ 2 ἡμέρες
6 m^3 τοίχου χτίζονται ἀπὸ 5 χτίστες σὲ ; ἡμέρες
12 m^3 τοίχου χτίζονται ἀπὸ 5 χτίστες σὲ ; ἡμέρες

Νὰ συμπληρωθοῦν οἱ τιμὲς «πλῆθος χτιστῶν» καὶ «τιμὴ χρόνου».

Οἱ ἀπαντήσεις εἶναι μὲ τὴ σειρὰ 10 χτίστες, 15 χτίστες, 4 ἡμέρες, 8 ἡμέρες, διότι τὸ μέγεθος «τιμὴ ἔργου» εἶναι ἀνάλογο μὲ καθένα ἀπὸ τὰ μεγέθη «πλῆθος ἐργατῶν», «τιμὴ χρόνου», ἐφόσον τὸ ἄλλο διατηρεῖ τὴν ἴδια τιμὴ (παραμένει σταθερό).

Λέμε ὅτι τὸ μέγεθος «τιμὴ χρόνου» εἶναι ἀνάλογο πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν μεγεθῶν «πλῆθος ἐργατῶν», «τιμὴ χρόνου».

Σχηματίζουμε τὸν παρακάτω πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν.

Τιμὴ ἔργου χ	3	6	9	6	12
Πλῆθος ἐργατῶν ψ	5	10	15	5	5
Τιμὴ χρόνου z	2	2	2	4	8
Γινόμενο ψ.z	10	20	30	20	40

καὶ παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάζεται μιὰ τιμὴ τοῦ χ ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, πολλαπλασιάζεται μιὰ ἀπὸ τὶς τιμὲς ψ ἢ z μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό (ἐφόσον ἡ ἄλλη παραμένει σταθερή). Ἑπομένως τὸ γινόμενο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν ψ·z πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (σύμφωνα μὲ τὴν προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

Δηλαδὴ τὸ μέγεθος χ εἶναι ἀνάλογο πρὸς τὸ μέγεθος ψ.z. Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνουμε ὅτι:

1. Ἕνα μέγεθος εἶναι ἀνάλογο πρὸς ἕνα ζεῦγος, μιὰ τριάδα, κ.ο.κ. μεγεθῶν, ὅταν εἶναι ἀνάλογο πρὸς καθένα ἀπὸ αὐτά, ἐφόσον τὰ ἄλλα διατηροῦνται σταθερά.

2. Ἂν ἕνα μέγεθος εἶναι ἀνάλογο πρὸς ἕνα ζεῦγος, μιὰ τριάδα κ.ο.κ. μεγεθῶν, εἶναι ἀνάλογο πρὸς τὸ γινόμενό τους.

Ἂν στὸ ζεῦγος ἢ τὴν τριάδα ὑπάρχει ἕνα μέγεθος π.χ. τὸ ψ ἀντιστρόφως ἀνάλογο τοῦ χ, τότε τὸ ἀντικαθιστοῦμε μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖο ἔχει τὶς ἀντίστροφες τιμές, δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{\psi}$, γιατί, ὅπως μάθαμε, οἱ τιμὲς τοῦ χ εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς ἀντίστροφες τῶν τιμῶν τοῦ ψ.

Ἐφαρμογές. **1.** Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει μῆκος 32m, πλάτος 30m καὶ τιμὴ 480.000 δρχ. Πόσο πλάτος θὰ εἶχε, ἂν εἶχε μῆκος 20m καὶ τιμὴ 450000 δρχ.;

Καλοῦμε χ δρχ. τὸ ζητούμενο καὶ κατατάσσουμε σὲ πίνακα τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς ὁριζοντίως.

Πλάτος	Μῆκος	Χρηματική τιμή
30	32	480000
χ	20	450000

Συγκρίνουμε τὸ μέγεθος τοῦ ἀγνώστου μὲ τὸ μέγεθος τοῦ ζεύγους τῶν γνωστῶν.

Ἐπειδὴ τὸ μέγεθος πλάτος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογο τοῦ μήκους καὶ εὐθέως ἀνάλογο τῆς χρημ. τιμῆς, εἶναι ἀνάλογο τοῦ γινομένου $\frac{1}{\text{μῆκος}} \cdot$ χρημ. τιμή.

Συνεπῶς ἔχουμε τὴν ἀναλογία $\frac{30}{\chi} = \frac{\frac{1}{32} \cdot 480000}{\frac{1}{20} \cdot 450000}$

Ἀπὸ τὴν ἀναλογία αὐτὴ προκύπτει ἡ $\frac{\chi}{30} = \frac{32.450000}{20.480000}$ ἢ $\chi = 30 \cdot \frac{32}{20} \cdot \frac{450000}{480000}$ (1).

Τελικὰ βρίσκουμε $\chi = 45$. Ἄρα τὸ οἰκόπεδο θὰ εἶχε πλάτος 45m.

Παρατήρηση. Ἡ ἐξίσωση (1) δικαιολογεῖ τὸν γνωστὸ κανόνα ἀπὸ τὸ Δημοτικὸ Σχολεῖο: ὁ χ ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω του ἀριθμὸ ἐπὶ τὰ κλάσματα κάθε στήλης ἀντιστραμμένα, ὅταν τὸ ποσὸ εἶναι ἀνάλογο πρὸς τὸ ποσὸ τοῦ ἀγνώστου, καὶ ἐπὶ τὰ κλάσματα ὅπως εἶναι, ὅταν τὸ ποσὸ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογο.

2. 8 ἐργάτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σὲ 12 ἡμέρες, ὅταν ἐργάζονται 7 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες 18 ἐργάτες θὰ τελειώσουν τὸ 3πλάσιο τοῦ ἔργου, ὅταν ἐργάζονται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. (Οἱ ἐργάτες εἶναι τῆς ἴδιας ἀποδόσεως).

Ἂν ἐργαστοῦμε ὅπως προηγουμένως, ἔχουμε:

Ἡμέρες ἐργασίας	Πλῆθος ἐργατῶν	Ὧρες ἐργασίας	Ἔργο
12	8	7	1
χ	18	8	3

Ἐπειδὴ τὸ μέγεθος «ἡμ. ἐργασ.» εἶναι ἀντιστρ. ἀνάλογο τοῦ «πλῆθος ἐργατῶν» καὶ τοῦ «ὧρες ἐργασίας» καὶ ἀνάλογο τοῦ «ἔργου», θὰ εἶναι ἀνάλογο τοῦ γινομένου : «$\frac{1}{\text{πλ. ἐργ.}}$» · «$\frac{1}{\text{ὧρ. ἐργ.}}$» · «ἔργο».

ἡμ. ἐργασίας

Ἐπομένως $\begin{array}{l} 12 \rightarrow \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 \\ \chi \rightarrow \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 \end{array} \Rightarrow \frac{12}{\chi} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1}{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3}$

$$\Leftrightarrow \chi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = 12 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{\chi}{8 \cdot 7} = \frac{12 \cdot 3}{18 \cdot 8} \Leftrightarrow \chi = 12 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{1}$$

$\Leftrightarrow \chi = 14$. Τὸ τριπλάσιο ἔργο θὰ τελειώσει σὲ 14 ἡμέρες.

3. Ἕνας ἐμπορικὸς ἀντιπρόσωπος ποὺ περιοδεύει (πλασιὲ) πληρώνεται μὲ 3% κάθε ἔτος ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως τῶν προϊόντων ποὺ πουλᾶ. Ἡ προμήθεια ὅμως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κ.ο.κ., ἂν πετύχει τὶς πωλήσεις στὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ κ. ο. κ. τοῦ καθορισμένου χρόνου. Κάποτε πούλησε ἐμπορεύματα μέσα σὲ 3 μῆνες, καί, ἀφοῦ κράτησε τὴν προμήθειά του, παρέδωσε στὸν ἐργοδότη του 88.000 δρχ. Τί ποσὸ κράτησε;

Ὁ ἀντιπρόσωπος κράτησε τὴν προμήθειά του, ποὺ εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὴν τιμὴ πωλήσεως (ὅταν ὁ χρόνος παραμένει σταθερὸς) καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρὸς τὸ χρόνο (ὅταν ἡ τιμὴ πωλήσεως παραμένει σταθερή).

Ἂν χ δρχ. εἶναι ἡ προμήθειά του, ἡ ἀντίστοιχη σ' αὐτὴν τιμὴ πωλήσεως εἶναι $88000+\chi$ καὶ ὁ χρόνος εἶναι 3 μῆνες. Ἂν ἡ τιμὴ πωλήσεως εἶναι 100 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 12 μῆνες, ἡ προμήθεια εἶναι 3 δρχ.

Προμήθεια	Τιμὴ πωλήσεως	Χρόνος
3	100	12
χ	$88000+\chi$	3

Προμήθεια	Τιμὴ πωλήσεως ἐπὶ $\frac{1}{\text{χρόνος}}$
3	$100 \cdot \frac{1}{12}$
χ	$(88000+\chi) \cdot \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{\chi}{3} = \frac{\frac{1}{3}(88000+\chi)}{\frac{1}{12} \cdot 100} \Leftrightarrow$$

$100\chi = 12(88000+\chi) \Leftrightarrow 100\chi = 12.88000 + 12\chi \Leftrightarrow 100\chi - 12\chi = 12.88000 \Leftrightarrow 88\chi = 12.88000 \Leftrightarrow \chi = \frac{12.88000}{88} \Leftrightarrow \chi = 12 \cdot 1000 \Leftrightarrow \chi = 12000$. Ἐκράτησε γιὰ προμήθεια 12000 δρχ.

Προβλήματα :

265. 8 ἐργάτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σὲ 12 ἡμέρες μὲ 7 ὧρες ἐργασία τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελειώσουν τὸ ἴδιο ἔργο 12 ἐργάτες, ὅταν ἐργάζονται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα;

266. 9 ἐργάτες σκάβουν 18 στρέμματα σὲ 6 ἡμέρες, ἂν ἐργάζονται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες 8 ἐργάτες θὰ σκάψουν 16 στρέμματα, ἂν ἐργάζονται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα;

267. 20 ἐργάτες μὲ ἐργασία 8 ὧρες τὴν ἡμέρα τελείωσαν τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς ἔργου σὲ 14 ἡμέρες. Πόσες ὧρες τὴν ἡμέρα πρέπει νὰ ἐργάζονται 16 ἐργάτες, γιὰ νὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπο ἔργο σὲ 30 ἡμέρες;

268. Γιὰ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἀγοράστηκαν 700 σανίδες μήκους 3,4 dm καὶ πλάτους 6 cm. Πόσες σανίδες μήκους 3 dm καὶ πλάτους 7 cm θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὸ ἴδιο πάτωμα;

269. Ἕνας ράφτης χρειάζεται ὕφασμα 60 m μήκους καὶ 1 m πλάτους γιὰ 20 ὅμοιες ἐνδυμασίες. Πόσα m μῆκος θὰ χρειαστεῖ γιὰ 18 ὅμοιες ἐνδυμασίες, ἂν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 1,2 m;

270. Ἕνα πλοῖο ἀναχώρησε γιὰ ταξίδι 45 ἡμερῶν μὲ 35 ἐπιβάτες. Τὸ ἀπόθεμα τῶν τροφίμων του ἐπιτρέπει νὰ παρέχεται στοὺς ἐπιβάτες ἡμερήσια μερίδα τροφίμων 1200 gr*. Ὕστερ' ἀπὸ 15 ἡμέρες περισυλλέγει ναυαγοὺς καὶ συντομεύει τὸ ταξίδι του κατὰ 5 ἡμέρες, ἐνῶ ἡ μερίδα τῶν τροφίμων περιορίζεται σὲ 1008 gr*. Πόσους ναυαγοὺς περισυνέλεξε τὸ πλοῖο;

271. Οἱ ἐπιστήμονες ὑπολόγισαν ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι ἀνάλογο πρὸς τὴ μάζα τοῦ πλανήτη, πάνω στὸν ὁποῖο βρίσκεται, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογο πρὸς τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνας του. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ βάρος ἑνὸς ἀστροναύτη στὴ Σελήνη, ἂν αὐτὸς ζυγίζει στὴ Γῆ 70 kgr*. Οἱ μάζες Γῆς καὶ Σελήνης εἶναι ἀντίστοιχα $6 \cdot 10^{21}$ ton καὶ $7,5 \cdot 10^{19}$ ton καὶ οἱ ἀκτίνες τους 6400 km, 1740 km.

272. Μεταξὺ παραγωγῶν καὶ μιᾶς ἑταιρείας μεταφορῶν ἔγινε ἡ ἑξῆς συμφωνία: Ἡ ἑταιρεία θὰ παίρνει 5% ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως τῶν πρώιμων λαχανικῶν, τὰ ὁποῖα θὰ μεταφέρνει στὴ Δυτικὴ Γερμανία μέσα σὲ 10 ἡμέρες, καὶ ἡ ἀμοιβή της θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογη πρὸς τὸ χρόνο μεταφορᾶς. Ἡ ἑταιρεία μετέφερε προϊόντα μέσα σ' 6 ἡμέρες. Αὐτὰ πουλήθηκαν καὶ οἱ παραγωγοὶ εἰσέπραξαν ἕνα ποσό, ποὺ ἀφαιρώντας τὴν ἀμοιβὴ τῆς ἑταιρείας ἔμεινε 102000 δρχ. Ποιὰ ἦταν ἡ τιμὴ πωλήσεως τῶν προϊόντων;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

§ 105. Ἂν καταθέσουμε στὴν τράπεζα ἕνα ποσὸ χρημάτων καὶ μετὰ ἀπὸ ὁρισμένο χρόνο τὸ ἀποσύρουμε, θὰ πάρουμε αὐτὸ καὶ ἐπὶ πλέον ἕνα ἄλλο χρηματικὸ ποσό, ποὺ λέγεται **τόκος.**

Ὁ τόκος δηλαδὴ εἶναι τὸ κέρδος ποὺ παίρνουμε, ὅταν τοκίζουμε τὰ χρήματά μας.

Τὰ χρήματα, ποὺ καταθέτουμε στὴν Τράπεζα ἢ δανείζουμε σὲ ἰδιῶτες, χρησιμοποιοῦνται σὲ διάφορες ἐπιχειρήσεις μὲ σκοπὸ τὴν παραγωγὴ κέρδους. Ἀπὸ τὸ κέρδος ποὺ δίνουν αὐτά, εἶναι δίκαιο νὰ παίρνουμε κι ἐμεῖς ἕνα μέρος, δηλαδὴ τὸν τόκο.

Ἐπιτόκιο εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων σ' ἕνα ἔτος.

Ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιο, πρὸς τὸ χρόνο, κατὰ τὸν ὁποῖο τοκίζεται αὐτό, καὶ πρὸς τὸ ἐπιτόκιο.

Σημείωση. Ἂν κάποιος δανειστεῖ π.χ. 100 δρχ. γιὰ ἕνα ἔτος μὲ 6%, στὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ ἐπιστρέψει 106 δρχ, δηλ. τὸ κεφάλαιο καὶ τὸν ἀντίστοιχο τόκο του· αὐτὸ λέγεται **αὐξημένο κεφάλαιο** κατὰ τὸν ἀντίστοιχο τόκο του.

Σὲ μερικὲς περιπτώσεις ὁ δανειστὴς κρατεῖ προκαταβολικὰ τὸν τόκο καὶ ὁ ὀφειλέτης παίρνει σὰν δάνειο 94 δρχ. αὐτὸ λέγεται **ἐλαττωμένο κεφάλαιο** κατὰ τὸν ἀντίστοιχο τόκο του. Στὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ ἐπιστρέψει στὸ δανειστὴ 100 δρχ.

β) Ἂν καταθέσουμε στὴν τράπεζα ἕνα κεφάλαιο, μᾶς δίνουν ἕνα βιβλιάριο, στὸ ὁποῖο ἀναγράφεται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαριασμοῦ μας, τὸ ὀνοματεπώνυμό μας, ἡ διεύθυνσή μας, τὸ ποσὸ ποὺ καταθέσαμε, καὶ ἡ ἡμερομηνία καταθέσεως.

Συνήθως οἱ τράπεζες ὑπολογίζουν τοὺς τόκους κατὰ τὸ τέλος τοῦ Ἰουνίου καὶ τὸ τέλος τοῦ Δεκεμβρίου κάθε ἔτους. Ἂν δὲν ἀποσύρουμε τοὺς τόκους τὴν ἡμέρα, κατὰ τὴν ὁποία ὑπολογίζονται, τότε γιὰ τὸ ἑπόμενο ἑξάμηνο τὸ κεφάλαιο ἔχει αὐξηθεῖ κατὰ τὸν τόκο του. (Ἡ πρόσθεση τῶν τόκων στὸ κεφάλαιο λέγεται κεφαλοποίηση τῶν τόκων).

Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ στὰ Ταχ. Ταμιευτήρια, ἀλλὰ ἐκεῖ οἱ τόκοι ὑπολογίζονται στὸ τέλος κάθε ἔτους.

Ἂν γίνεται κεφαλοποίηση τῶν τόκων, τότε ἔχουμε σύνθετο τόκο ἢ ἀνατοκισμό.

Στὰ παρακάτω προβλήματα τὸ κεφάλαιο παραμένει σταθερὸ σ' ὅλη τὴ διάρκεια τοῦ τοκισμοῦ του.

Ὅταν πρόκειται γιὰ τράπεζα ἢ ταμιευτήριο, θεωροῦμε ὅτι οἱ τόκοι ἀποσύρονται κατὰ τὴν ἡμέρα τοῦ ὑπολογισμοῦ τους (δηλαδὴ δὲν γίνεται κεφαλοποίησή τους).

Πρόβλημα 1. Ποιὸς εἶναι ὁ τόκος ἑνὸς κεφαλαίου 20000 δρχ. σὲ 3 ἔτη μὲ 5%.

Κεφάλαιο	Χρόνος	Τόκος
100	1	5
20000	3	χ

Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιο καὶ πρὸς τὸ χρόνο, θὰ εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ γινόμενο «Κεφάλαιο» ἐπὶ «Χρόνος». Συνεπῶς ἔχουμε:

Κεφάλαιο·χρόνος	Τόκος
100·1	5
20000·3	χ

$$\Rightarrow \frac{100\cdot 1}{20000\cdot 3} = \frac{5}{\chi} \Leftrightarrow 100\chi = 20000\cdot 5\cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{20000\cdot 5\cdot 3}{100} \quad (1) \Leftrightarrow \chi = 3000.$$

Ἄρα ὁ τόκος εἶναι 3000 δρχ.

Ἂν εἶναι τ ὁ τόκος, κ τὸ κεφάλαιο, ε τὸ ἐπιτόκιο καὶ t ὁ χρόνος καὶ ἐργαστοῦμε ὅπως καὶ στὴν ἐξίσωση (1), θὰ ἔχουμε τὸν τύπο

$$\boxed{\tau = \frac{\kappa\cdot\varepsilon\cdot t}{100}}$$

Τὸν τύπο αὐτὸ τὸν βρίσκουμε καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 100 δρχ. φέρνουν τόκο ε σὲ 1 ἔτος

ἢ 1 δρχ. θὰ φέρει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}$ σὲ 1 ἔτος καὶ

οἱ κ δρχ. θὰ φέρουν τόκο $\kappa\cdot\frac{\varepsilon}{100}$ σὲ 1 ἔτος

Οἱ κ δρχ. σὲ t ἔτη θὰ φέρουν τόκο $\kappa\cdot\frac{\varepsilon}{100}\cdot t$ δρχ. Ἄρα $\tau = \frac{\kappa\cdot\varepsilon\cdot t}{100}$

Σημείωση 1. Στὸν τύπο τοῦ τόκου ἡ μεταβλητὴ t παριστάνει τιμὲς χρόνου σὲ ἔτη. Ἂν ἔχουμε μῆνες ἢ ἡμέρες, τότε ὁ πιὸ πάνω τύπος γίνεται: $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\mu}{1200}$ ἢ $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\eta}{36000}$ (μ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χρόνου σὲ μῆνες καὶ η ἡ τιμὴ τοῦ χρόνου σὲ ἡμέρες).

2. Τὸ ἐμπορικὸ ἔτος τὸ θεωροῦμε μὲ 360 ἡμέρες καὶ κάθε μῆνα μὲ 30 ἡμέρες.

3. Ὁ τύπος $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\eta}{36000}$ παίρνει τὴ μορφὴ $\tau = \frac{\kappa.\eta}{\frac{36000}{\varepsilon}} = \frac{\nu}{\delta}$

Τὸ πηλίκο $\frac{36000}{\varepsilon}$ λέγεται σταθερὸς διαιρέτης καὶ τὸ γινόμενο $\kappa.\eta = \nu$ λέγεται τοκάριθμος. Ἄρα ὁ τόκος ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκο τοῦ τοκαρίθμου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτη.

Πρόβλημα 2. Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 11 μῆνες, ὅταν τοκίζεται μὲ 6%, φέρνει τόκο 1100 δρχ.;

Ἔστω χ δρχ. τὸ κεφάλαιο. Ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ τόκου $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\mu}{1200}$ παίρνουμε τὴν ἐξίσωση $1100 = \frac{\chi.6.11}{1200} \Leftrightarrow 1100.1200 = 6 \cdot 11 \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = \frac{1200.1100}{6.11} \Leftrightarrow \chi = 200 \cdot 100 \Leftrightarrow \chi = 20.000$. Ἄρα τὸ κεφάλαιο εἶναι 20.000 δρχ.

Πρόβλημα 3. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 18.000 δρχ. ὅταν τοκίζεται μὲ 8%, φέρνει τόκο 160 δρχ.,

Ἔστω χ ἔτη ὁ χρόνος. Ἀπὸ τὸν τύπο $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.t}{100}$ παίρνουμε τὴν ἐξίσωση $160 = \frac{18000 \cdot 8 \cdot \chi}{100} \Leftrightarrow 160 = 180.8.\chi \Leftrightarrow \chi = \frac{160}{180 \cdot 8} \Leftrightarrow \chi = \frac{20}{180} \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{9}$. Ἑπομένως ὁ χρόνος εἶναι $\frac{1}{9}$ ἔτη ἢ $\frac{1}{9} \cdot 12 = \frac{4}{3}$ μῆνες ἢ $\frac{4}{3} \cdot 30 = 40$ ἡμέρες.

Πρόβλημα 4. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσουμε 45000 δρχ., γιὰ νὰ πάρουμε μετὰ 52 ἡμέρες 260 δρχ. τόκο;

Ἀντικαθιστοῦμε τὰ δεδομένα στὸν τύπο $\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot \eta}{36000}$ καὶ ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωση ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστο ε.

$$260 = \frac{45000 \cdot 52 \cdot \varepsilon}{36000} \Leftrightarrow 260 = \frac{45 \cdot 52 \cdot \varepsilon}{36} \Leftrightarrow 45 \cdot 52 \cdot \varepsilon = 260 \cdot 36 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{260 \cdot 36}{45 \cdot 52} \Leftrightarrow \varepsilon = 4.$$

Ἄρα $\varepsilon\% = 4\%$ δηλαδὴ πρέπει νὰ τὸ τοκίσουμε μὲ 4%.

Πρόβλημα 5. Ποιὸ κεφάλαιο ὅταν τοκίζεται μὲ 5% γιὰ 72 ἡμέρες γίνεται μὲ τὸν τόκο του 10100 δρχ;

Ἔχουμε κεφάλαιο σὺν τόκος ἴσον 10100 δρχ. Ἂν χ δρχ. εἶναι τὸ κεφάλαιο, παίρνουμε τὴν ἐξίσωση $\chi + \frac{\chi\cdot 5\cdot 72}{36000} = 10100 \Leftrightarrow \chi + \frac{\chi\cdot 360}{360\cdot 100} = 10100 \Leftrightarrow \chi + \frac{\chi}{100} = 10100 \Leftrightarrow 100\chi + \chi = 1010000 \Leftrightarrow 101\chi = 1010000 \Leftrightarrow \chi = \frac{101\cdot 10000}{101} \Leftrightarrow \chi = 10000$. Τὸ κεφάλαιο εἶναι 10000 δρχ.

Πρόβλημα 6. Κάποιος τόκισε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του μὲ 5,5% καὶ τὸ ὑπόλοιπο μὲ 4,5%. Ἂν ἀπὸ τὸ α΄ μέρος τοῦ κεφαλαίου πῆρε μετὰ ἕνα ἔτος 120 δρχ. τόκο περισσότερο παρὰ ἀπὸ τὸ β΄ μέρος, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

Ἔστω χ δρχ. τὸ κεφάλαιο. Τὸ α΄ μέρος εἶναι $\frac{3}{5}\chi$ καὶ ὁ τόκος του $\frac{\frac{3}{5}\chi\cdot 5,5\cdot 1}{100}$. Τὸ β΄ μέρος εἶναι $\frac{2}{5}\chi$ καὶ ὁ τόκος του (σ' ἕνα ἔτος): $\frac{\frac{2}{5}\chi\cdot 4,5\cdot 1}{100}$

Ἔχουμε ὅμως: Τόκος α΄ μέρους πλὴν τόκος β΄ μέρους ἴσον 120 δρχ. Ἔχουμε συνεπῶς τὴν ἐξίσωση

$$\frac{\frac{3}{5}\chi\cdot 5,5}{100} - \frac{\frac{2}{5}\chi\cdot 4,5}{100} = 120 \Leftrightarrow \frac{3\chi\cdot 1,1}{100} - \frac{2\chi\cdot 0,9}{100} = 120$$

$$\Leftrightarrow \frac{3,3\chi - 1,8\chi}{100} = 120 \Leftrightarrow \frac{1,5\chi}{100} = 120 \Leftrightarrow 1,5\chi = 12000 \Leftrightarrow \chi = \frac{12000}{1,5}$$

$\Leftrightarrow \chi = 8000$. Τὸ κεφάλαιο εἶναι 8000 δρχ.

Σημείωση. Ὁ τόκος ἑνὸς κεφαλαίου 6000 δρχ. μὲ 6% γιὰ 89 ἡμέρες βρίσκεται σύντομα μὲ τὸν τύπο

$$\tau = \frac{\nu}{\delta} = \frac{6000\cdot 89}{\frac{36000}{6}} = \frac{6000\cdot 89}{6000} = 89.$$ Ὁ τόκος εἶναι 89 δρχ.

Ὅταν τὸ κεφάλαιο ἰσοῦται μὲ τὸ σταθερὸ διαιρέτη, ὁ τόκος εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἡμερῶν.

Προβλήματα.

273. Πόσο τόκο φέρνουν
α) 16000 δρχ. μὲ 4,5% γιὰ 8 μῆνες;
β) 4500 δρχ. μὲ 8% γιὰ 179 ἡμέρες;
γ) 7200 δρχ. μὲ 5% γιὰ 211 ἡμέρες;
δ) 12000 δρχ. μὲ 6% γιὰ 97 ἡμέρες;

274. Νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο, ἂν ε% = 5%, ὁ τόκος εἶναι 345 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 115 ἡμέρες.

275. Νὰ βρεθεῖ ἡ χρόνος, ἂν ε% = 6%, ὁ τόκος εἶναι 138 δρχ. καὶ τὸ κεφ. 4600 δρχ.

276. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐπιτόκιο, ἂν τὸ κεφ. εἶναι 3600 δρχ, ὁ τόκος 480 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 20 μῆνες.

277. Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 100 ἡμέρες μὲ 4,5% φέρνει τόκο, ὅσο δίνει κεφάλαιο 8000 δρχ. σὲ 6 μῆνες μὲ 5%;

278. Τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς κεφαλαίου τοκίστηκαν μὲ 6,5% καὶ σὲ 5 μῆνες ἔδωσαν τόκο 650 δρχ. Ποιὸ ἦταν τὸ κεφάλαιο;

279. Κεφάλαιο 37500 δρχ. τοκίστηκε μὲ 6% κι ἔγινε μὲ τὸν τόκο του 37750 δρχ. Νὰ βρεθεῖ ὁ χρόνος.

280. Δανειστήκαμε 1200 δρχ. μὲ 9% καὶ πληρώσαμε στὶς 2 Φεβρουαρίου γιὰ κεφάλαιο καὶ τόκο 1386 δρχ. Πότε δανειστήκαμε τὸ κεφάλαιο;

281. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἕνα κεφάλαιο 12000 δρχ. ἔδωσε τόκο 1250 δρχ. σὲ χρόνο ἴσο μὲ τὸ χρόνο, κατὰ τὸν ὁποῖο τοκίστηκαν 3600 δρχ. μὲ 4% κι ἔγιναν μαζὶ μὲ τὸν τόκο τους 4000 δρχ;

282. Κεφάλαιο 111000 δρχ. κατατέθηκε σὲ μιὰ τράπεζα στὶς 14 Μαρτίου καὶ στὶς 17 Ὀκτωβρίου τοῦ ἑπόμενου ἔτους ἀποσύρθηκε μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του. Ποιὸ ἦταν τὸ ἐπιτόκιο, ἂν κεφάλαιο καὶ τόκος μαζὶ ἔγιναν 121600,50 δρχ;

283. Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 40 μῆνες μὲ 4,5% ἔγινε μαζὶ μὲ τὸν τόκο του 13800 δρχ; (Ἂν χ δρχ. τὸ κεφάλαιο, ὁ τόκος του θὰ εἶναι $\frac{\chi \cdot 4,5 \cdot 40}{1200}$ καὶ $\chi + \frac{\chi \cdot 4,5 \cdot 40}{1200} = 13800$)

284. Δανειστήκαμε ἕνα ποσὸ χρημάτων μὲ τὴ συμφωνία νὰ κρατηθοῦν οἱ τόκοι προκαταβολικά. Ποιὸ ἦταν τὸ κεφάλαιο, ἂν μᾶς ἔδωσαν 9800 δρχ. καὶ κράτησαν τόκους 4 μηνῶν μὲ 6%; (Κεφάλαιο πλὴν τόκος = 9800 δρχ.: $\kappa - \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot \mu}{1200} = 9800$).

285. Ἐτόκισε κάποιος τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου του μὲ 4% καὶ τὸ ὑπόλοιπο μὲ 5% καὶ πῆρε σὲ ἕνα ἔτος τόκο 546 δρχ. Ποιὸ ἦταν τὸ κεφάλαιο;

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 106. α) Γραμμάτια.

Ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται χρήματα ἢ ἀγοράζει ἐμπορεύματα μὲ πίστωση (δὲν πληρώνει ἀμέσως τὴν ἀξία τους) δίνει στὸν δανειστὴ ἢ στὸν πιστωτὴ μιὰ ἔγγραφη ὑπόσχεση πληρωμῆς τοῦ χρέους του. Τὸ ἔγγραφο αὐτὸ λέγεται **γραμμάτιο.**

Τύπος γραμματίου

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20ῇ Μαρτίου 1970 — Διὰ δραχμὰς 5000.

Μετὰ δύο μῆνας ἀπὸ σήμερον, ἤτοι τὴν 20ην Μαΐου 1970, ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Α............................ ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ τὸ ἄνω ποσὸν τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν (5000), ὅπερ ἔλαβον παρ' αὐτοῦ ὡς δάνειον.

Χαρτόσημον

Β........................

(Ὑπογραφὴ καὶ Δ/νσις ὀφειλέτου)

Συνήθως στὶς ἐμπορικὲς συναλλαγὲς γίνεται χρήση ἑνὸς ἐγγράφου, ποὺ λέγεται **συναλλαγματική**. Τὴ συναλλαγματικὴ τὴν ἐκδίδει ὁ πιστωτὴς καὶ τὴν ἀποδέχεται ὁ ὀφειλέτης μὲ τὴν ὑπογραφή του.

Τύπος συναλλαγματικῆς

Λῆξις τῇ 20 - 5 - 1970. Συναλλαγματικὴ διὰ δρχ. 5000.

Τὴν 20ὴν Μαΐου 1970 πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης μόνης Συναλλαγματικῆς εἰς διαταγήν μου καὶ εἰς........................τὸ ἄνω ποσὸν τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν, ὧν τὸ ἰσότιμον ἐλάβετε παρ' ἐμοῦ εἰς ἐμπορεύματα τῆς τελείας ἀρεσκείας σας καὶ ἐν ὑπερημερίᾳ μετὰ τοῦ νομίμου τόκου ἀπὸ τῆς λήξεως μέχρις ἐξοφλήσεως.

Χαρτόσημον

Πρὸς τὸν κ. Β.......... Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-3-1970
Δ/νσις.................... ὁ ἐκδότης
Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-3-1970 Α..................
Δεκτὴ (Ὑπογραφὴ καὶ Δ/νσις)
Β........................
(ὑπογραφὴ)

Τὸ ποσό, ποὺ ἀναγράφεται στὴν ἔγγραφη ὑπόσχεση, λέγεται **ὀνομαστικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου. Αὐτὴ τὴ συμβολίζουμε μὲ ο.

Ἡ ἡμερομηνία, κατὰ τὴν ὁποία πρέπει νὰ πληρωθεῖ τὸ γραμμάτιο, εἶναι ἡ **λήξη** τοῦ γραμματίου.

β) Ὀπισθογράφηση καὶ προεξόφληση γραμματίου.

Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ κ. Α. εἶναι κάτοχος τοῦ πιὸ πάνω γραμματίου ὀνομ. ἀξίας 5000 δρχ., τὸ ὁποῖο λήγει μετὰ ἀπὸ 2 μῆνες. Μετὰ ἀπὸ 20 ἡμέρες ἀπὸ τὴν ἔκδοση τοῦ γραμματίου (ἢ 40 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του, δηλαδὴ στὶς 10-4-1970) ὁ κ. Α ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα καὶ μεταβιβάζει, δηλαδὴ πουλᾶ τὸ γραμμάτιο σ' ἕνα τρίτο πρόσωπο (ἢ συνήθως στὴν Τράπεζα) ἀφοῦ προηγουμένως ὑπογράψει στὴν πίσω ὄψη του γιὰ τὴ μεταβίβαση ἢ πώληση αὐτή. Αὐτὴ ἡ πράξη λέγεται **ὀπισθογράφηση τοῦ γραμματίου.** Ὁ πωλητὴς κ. Α. λέγεται καὶ κομιστὴς τοῦ γραμματίου.

Ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου κρατεῖ ἀπὸ τὴν ὀν. ἀξία του τὸν τόκο της γιὰ 40 ἡμέρες μὲ ἕνα ὁρισμένο ἐπιτόκιο π.χ. 4,5% $\left(5000 \cdot \frac{4,5}{100} \cdot \frac{40}{360} = 25\right)$ καὶ τὸ ὑπόλοιπο (5000 − 25 = 4975) τὸ δίνει στὸν κομιστὴ κ. Α. Ἡ διαδικασία αὐτὴ λέγεται **προεξόφληση τοῦ γραμματίου.** Ὁ χρόνος μεταξὺ ἡμερομηνίας προεξοφλήσεως καὶ λήξεως τοῦ γραμματίου λέγεται καὶ **προθεσμία.**

Τὸ ποσὸ τῶν 25 δρχ., ποὺ κρατεῖ ὁ ἀγοραστής, λέγεται **ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση.** Τὴ συμβολίζουμε μὲ τὸ γράμμα υ. (Γενικὰ ὑφαίρεση εἶναι ἡ ἔκπτωση, ποὺ γίνεται σ' ἕνα γραμμάτιο, ὅταν προεξοφλεῖται, δηλαδὴ ὅταν πληρώνεται πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του). Στὰ ἑπόμενα θὰ λέμε ὑφαίρεση καὶ θὰ ἐννοοῦμε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση). Τὸ ποσὸ 4975 δρχ. = 5000 δρχ. − 25 δρχ. λέγεται **παροῦσα ἀξία** τοῦ γραμματίου καὶ ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ τῆς ἐξ. ὑφ. ἀπὸ τὴν ὀν. ἀξία. Ἂν συμβολίσουμε μὲ π τὴν παροῦσα ἀξία, ἔχουμε τὶς παρακάτω ἰσοδυναμίες:

$$\pi = o - \upsilon \Leftrightarrow \pi + \upsilon = o \Leftrightarrow \upsilon = o - \pi \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεση εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας, τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ἐπιλύονται μὲ τοὺς τύπους τοῦ τόκου, εἰς τοὺς ὁποίους τὸ κεφάλαιο κ ἀντικαθιστᾶται μὲ τὴν ὀν. ἀξία ο καὶ τὸ τ μὲ τὸ υ. π.χ.

Τύπος τοῦ τόκου	Τύπος τῆς ἐξ. ὑφαιρέσεως
$\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot t}{100}$	$\upsilon = \frac{o \cdot \varepsilon \cdot t}{100}$

Σημείωση. Ἕνα γραμμάτιο ἢ μιὰ συναλλαγματική, ποὺ δὲν περιέχει τὶς λέξεις «εἰς διαταγήν», δὲν μπορεῖ νὰ μεταβιβασθεῖ σὲ ἄλλον.

Στὰ παρακάτω προβλήματα θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴ λέξη «γραμμάτιο» καὶ θὰ ἐννοοῦμε ἔγγραφη ὑπόσχεση (γραμμάτιο ἢ συναλλαγματική), ἡ ὁποία μεταβιβάζεται σ' ἕνα τρίτο πρόσωπο ἢ στὴν Τράπεζα.

Παραδείγματα:

1ο. Ἕνα γραμμάτιο ὀν. ἀξίας 3000 δρχ. προεξοφλήθηκε τὴν 10η Μαΐου μὲ 6% γιὰ 2980 δρχ. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιο;

Ἂν χ ἔτη εἶναι ὁ χρόνος μεταξὺ προεξοφλήσεως καὶ λήξεως τοῦ γραμματίου, ἀπὸ τὸν τύπο $\upsilon = o - \pi$ βρίσκουμε τὴν ὑφαίρεση 20 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸν τύπο $\upsilon = \frac{o \cdot \varepsilon \cdot t}{100}$ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $20 = \frac{3000 \cdot 6 \cdot \chi}{100} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 20 = 30 \cdot 6 \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = \frac{20}{180} \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{9}$. Ὁ χρόνος εἶναι $\frac{1}{9}$ ἔτη ἢ $\frac{1}{9} \cdot 360$ ἡμέρες $= 40$ ἡμέρες. Ἄρα τὸ γραμμάτιο ἔληγε στὶς 20 Ἰουνίου τοῦ ἴδιου ἔτους.

2ο. Νὰ βρεθεῖ ἡ ὀν. ἀξία καὶ ἡ ὑφαίρεση ἑνὸς γραμματίου, τὸ ὁποῖο προεξοφλήθηκε 40 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 9% γιὰ 1980 δρχ. Ἂν εἶναι χ δρχ ἡ ὀν. ἀξία του, ἡ ὑφαίρεση θὰ εἶναι $\frac{\chi \cdot \varepsilon \cdot \eta}{36000}$ καὶ ὁ τύπος $o - \upsilon = \pi$ γίνεται:

$\chi - \frac{\chi \cdot \varepsilon \cdot \eta}{36000} = \pi$. Ἀπ' αὐτὸν τὸν τύπο λαμβάνουμε τὴν ἐξίσωση $\frac{\chi \cdot 9 \cdot 40}{36000} = 1980 \Leftrightarrow$ $\chi - \frac{\chi}{100} = 1980 \Leftrightarrow 100\chi - \chi = 198000 \Leftrightarrow 99\chi = 198000 \Leftrightarrow \chi = \frac{198000}{99}$ $\Leftrightarrow \chi = 2000$. Ἡ ὀν. ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 2000 δρχ. καὶ ἡ ὑφαίρεση 2000 δρχ. − 1980 δρχ = 20 δρχ.

Προβλήματα.

286. Ποιὰ εἶναι ἡ ἐξ. ὑφαίρεση καὶ ἡ παρ. ἀξία ἑνὸς γραμματίου ὀνομ. ἀξίας 2600 δρχ., τὸ ὁποῖο προεξοφλήθηκε 2 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 6%;

287. Νὰ βρεθεῖ ἡ ὀνομ. ἀξία καὶ ἡ παρ. ἀξία ἑνὸς γραμματίου, ποὺ προεξοφλήθηκε 5 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 7,2% καὶ εἶχε ἐξ. ὑφαίρεση 60 δρχ.

288. Ποιὸς ἦταν ὁ χρόνος ἀπὸ τὴν προεξόφληση μέχρι τὴν λήξη ἑνὸς γραμματίου 2160 δρχ., ποὺ προεξοφλήθηκε μὲ 8% γιὰ 2131,2 δρχ.;

289. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο προεξοφλήθηκε ἕνα γραμμάτιο 3200 δρχ. 50 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του γιὰ 3168 δρχ.;

290. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἐξ. ὑφαίρεση ἑνὸς γραμματίου, ποὺ προεξοφλήθηκε 3 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του γιὰ 2751 δρχ. μὲ 7%.

291. Ἕνα γραμμάτιο, ποὺ ἔπρεπε νὰ πληρωθεῖ στὶς 28 Ἰουνίου, προεξοφλήθηκε γιὰ 2970 δρχ. στὶς 13 Μαΐου (τοῦ ἴδιου ἔτους) μὲ 8%. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομ. ἀξία του;

292. Ἕνα γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 80 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 9% γιὰ 4410 δρχ. Τί κέρδος θὰ εἶχε ὁ κομιστής, ἐὰν ἡ προεξόφληση γινόταν μὲ 8%;

293. Ἐὰν ἡ ὀνομ. ἀξία εἶναι 1600 δρχ., ε%=9% καὶ ἡ παρ. ἀξία εἶναι 1562 δρχ., νὰ βρεθεῖ ὁ χρόνος.

294. Ἐὰν ἡ ὀνομ. ἀξία εἶναι 1200 δρχ., ἡ παρ. ἀξία εἶναι 1155 δρχ. καὶ ὁ χρόνος εἶναι 5 μῆνες, νὰ βρεθεῖ τὸ ἐπιτόκιο.

295. Ἐὰν ἡ παρ. ἀξία εἶναι 4900 δρχ., ε%=6% καὶ ὁ χρόνος εἶναι 4 μῆνες, νὰ βρεθεῖ ἡ ὀνομ. ἀξία.

296. Δύο γραμμάτια, ποὺ ἔχουν ἄθροισμα ὀνομ. ἀξιῶν 14400 δρχ., προεξοφλοῦνται μαζὶ μὲ 6% γιὰ 14214 δρχ. Ἂν τὸ α΄ ἔληγε μετὰ ἀπὸ 3 μῆνες καὶ τὸ β΄ μετὰ ἀπὸ 2 μῆνες, νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ ὀνομ. ἀξία τοῦ κάθε γραμματίου.

6. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ.

§ 107. Ἂν ἕνας μαθητὴς ἔχει 8 στὰ γραπτὰ ἑνὸς μαθήματος καὶ 12 στὰ προφορικά, τότε ὁ βαθμός του σ' αὐτὸ τὸ μάθημα θὰ εἶναι $\frac{8+12}{2}=10$. Ὁ ἀριθμὸς 10 λέγεται μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 12.

Ἂν οἱ βαθμοὶ τοῦ μαθητῆ στὰ μαθήματά του εἶναι: 10, 11, 17, 12, 14, 13, 16, 14, 15, 17, τότε ὁ γενικὸς βαθμὸς στὸ ἐνδεικτικό του θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{10+11+17+12+14+13+16+14+15+17}{10}=\frac{139}{10}=13\frac{9}{10}$, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητῆ.

Γενικά: **Ἀριθμητικὸς μέσος ὅρος διάφορων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματός των διὰ τοῦ πλήθους των.**

Ἂν $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_\nu$ εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ ($\nu \in N$), τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{\chi_1+\chi_2+\chi_3+\ldots+\chi_\nu}{\nu}=\chi_\mu$ εἶναι ὁ μέσος ὅρος τους. Ἐπειδὴ $\chi_1+\chi_2+\ldots+\chi_\nu=\nu.\chi_\mu$, λέμε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, ποὺ μᾶς ἔχουν δοθεῖ, εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μέσου ὅρου τους ἐπὶ τὸ πλῆθος τους.

Σημείωση. Ἂν ὁ ἀριθμὸς χ_1 ἐμφανίζεται κ_1 φορές, ὁ χ_2 κ_2 φορὲς καὶ ὁ χ_3 κ_3 φορές, τότε $\chi_\mu = \dfrac{\kappa_1\chi_1 + \kappa_2\chi_2 + \kappa_3\chi_3}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3}$

Ἐφαρμογές.

1. Νὰ βρεθεῖ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν 15 καὶ 20.

Ἔχουμε $\dfrac{15+20}{2} = \dfrac{35}{2} = 17{,}5$. Παρατηροῦμε ὅτι $15 < 17{,}5 < 20$ καὶ ὅτι $17{,}5 - 15 = 20 - 17{,}5$.

Ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι ὁ $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ τῶν α καὶ β $\left(\text{π.χ. ἂν } \alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta\right)$ καὶ εἶναι $\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \beta - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

2. Ἂν ὁ βαθμὸς στὰ προφορικὰ ἑνὸς μαθητῆ σ' ἕνα μάθημα εἶναι 11 καὶ στὸν ἔλεγχό του ὁ μ. ὅρος εἶναι 13 σ' αὐτὸ τὸ μάθημα, ποιὸς εἶναι ὁ βαθμὸς στὰ γραπτά;

Ἂν χ εἶναι ὁ βαθμὸς τῶν γραπτῶν του, ἔχουμε $\dfrac{11+\chi}{2} = 13 \Leftrightarrow 11+\chi = 26 \Leftrightarrow \chi = 15$.

Προβλήματα:

297. Νὰ βρεθεῖ ἡ μέση θερμοκρασία ἑνὸς ἀσθενοῦς σὲ μία ἡμέρα, ἂν θερμομετρήθηκε τρεῖς φορὲς κι ἔδειξε θερμοκρασία 38 β., 38,7 β. καὶ 38,2 β.

298. Νὰ βρεθεῖ ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 7, 10, 13, 16, 19. Ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 19. Τί παρατηρεῖτε;

299. Νὰ βρεθεῖ ὁ μ. ὅ. τῶν 10, 14, 18, 22. Ἐπίσης τῶν 10 καὶ 22. Τί παρατηρεῖτε;

300. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 1 ὡς 49 (Βρεῖτε πρῶτα τὸν μ. ὅ.)

301. Ὁ μ. ὅ. τῶν βαθμῶν σὲ τρία μαθήματα ἦταν 14,5. Κατόπι μεταβλήθηκε ὁ βαθμὸς στὸ ἕνα μάθημα καὶ ὁ μ. ὅ. ἔγινε 15, 5. Πόσο αὐξήθηκε ὁ βαθμὸς σ' αὐτὸ τὸ μάθημα;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

§ 108. Πρόβλημα 1ο.

Νὰ μερισθεῖ ὁ ἀριθμὸς 100 σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 5,

Ἂν χ, ψ, z εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ζητοῦμε, θὰ ἔχουμε $\chi + \psi + z = 100$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, 3 καὶ 5, θὰ ἔχουμε ἴσους λόγους:

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5} = \frac{\chi+\psi+z}{2+3+5} = \frac{100}{10} = 10.$$

Ἄρα $\dfrac{\chi}{2} = 10 \Leftrightarrow \chi = 20$, $\dfrac{\psi}{3} = 10 \Leftrightarrow \psi = 30$ καὶ $\dfrac{z}{5} = 10 \Leftrightarrow z = 50$

Πρόβλημα 2ο.

Νὰ μερισθεῖ ὁ 130 σὲ μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4.

Ἂν χ, ψ, z εἶναι τὰ μέρη τοῦ 130, θὰ εἶναι $\chi + \psi + z = 130$.

Ἐπειδὴ οἱ χ, ψ, z εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν 2, 3, 4, θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Ἑπομένως:

$$\frac{\chi}{\frac{1}{2}} = \frac{\psi}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \frac{\chi}{\frac{1}{2}\cdot 12} = \frac{\psi}{\frac{1}{3}\cdot 12} = \frac{z}{\frac{1}{4}\cdot 12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{4} = \frac{z}{3} = \frac{\chi+\psi+z}{6+4+3} = \frac{130}{13} = 10.$$ Ἄρα $\chi = 60$, $\psi = 40$, $z = 30$.

Πρόβλημα 3ο. Ἕνα κεφάλαιο 10000 δρχ. εἶχε κατατεθεῖ γιὰ 6 μῆνες καὶ ἕνα ἄλλο 9000 δρχ. γιὰ 10 μῆνες μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο. Ἂν καὶ τὰ δύο κεφάλαια ἔφεραν 500 δρχ. τόκο, πόσος τόκος ἀναλογεῖ σὲ κάθε κεφάλαιο;

Ἔστω χ δρχ. ὁ τόκος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κεφάλαιο τῶν 10000 δρχ. καὶ ψ δρχ. ὁ τόκος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κεφάλαιο τῶν 9000 δρχ.

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιο καὶ πρὸς τὸ χρόνο, ἑπομένως θὰ εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ γινόμενο «κεφάλαιο ἐπὶ χρόνο».

Συνεπῶς $$\frac{\chi}{10000\cdot 6} = \frac{\psi}{9000\cdot 10} \Leftrightarrow \frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{9} \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\chi+\psi}{2+3} =$$

$$= \frac{500}{5} = 100.$$

Ἄρα $\frac{\chi}{2} = 100 \Leftrightarrow \chi = 200$ καὶ $\frac{\psi}{3} = 100 \Leftrightarrow \psi = 300$.

Οἱ τόκοι εἶναι 200 δρχ. καὶ 300 δρχ. ἀντιστοίχως.

Σημείωση.

Ἂν τ_1, τ_2 εἶναι τιμὲς τοῦ τόκου

κ_1, κ_2 τιμὲς τοῦ κεφαλαίου

t_1, t_2 τιμὲς τοῦ χρόνου, ἔχουμε τὸν πίνακα

τ	τ_1	τ_2
κ	κ_1	κ_2
t	t_1	t_2
κt	$\kappa_1 t_1$	$\kappa_2 t_2$

καὶ ἀπ' αὐτὸν τὴν ἀναλογία $\frac{\tau_1}{\kappa_1 t_1} = \frac{\tau_2}{\kappa_2 t_2}$.

Ἂν $t_1 = t_2$ μερίζουμε τὸν τόκο (ἢ τὸ κέρδος) ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων.

Ἂν $\kappa_1 = \kappa_2$ μερίζουμε τὸν τόκο (ἢ τὸ κέρδος) ἀναλόγως τῶν χρόνων.

(Τὸ ἐπιτόκιο θεωρεῖται σταθερό. Εἶναι δυνατὸν νὰ βρεθεῖ τὸ ἐπιτόκιο στὸ 3ο πρόβλημα;)

Πρόβλημα 4ο. Ένα χρηματικὸ ἔπαθλο ἀπὸ 4840 δρχ. πρόκειται νὰ μοιραστεῖ στοὺς τρεῖς πρώτους δρομεῖς, οἱ ὁποῖοι πέτυχαν τὶς ἑξῆς τιμὲς χρόνου ἐπιδόσεως (σ' ἕνα ἀγώνισμα δρόμου μιᾶς ἀποστάσεως)· ὁ πρῶτος τερμάτισε σὲ 2,4 min, ὁ β' σὲ 2,7 min καὶ ὁ γ' σὲ 3 min. Πόσες δρχ. θὰ πάρει ὁ καθένας;

Ἔστω χ δρχ, ψ δρχ, z δρχ, οἱ ἀμοιβὲς τῶν α', β' γ' ἀντιστοίχως

Ἀμοιβὴ	χ	ψ	z
Χρόνος ἐπιδ.	2,4	2,7	3
Ἀπόσταση	1	1	1

Ἐπειδὴ ἡ ἀμοιβὴ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη τοῦ χρόνου ἐπιδόσεως (γιὰ τὴν ἴδια ἀπόσταση), θὰ ἔχουμε.

$$\frac{\chi}{\frac{1}{2,4}} = \frac{\psi}{\frac{1}{2,7}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{\chi}{\frac{1}{2,4}\cdot 21,6} = \frac{\psi}{\frac{1}{2,7}\cdot 21,6} = \frac{z}{\frac{1}{3}\cdot 21,6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\chi}{9} = \frac{\psi}{8} = \frac{z}{7,2} = \frac{\chi+\psi+z}{9+8+7,2} = \frac{4840}{24,2} = 200.$$

Ἄρα $\frac{\chi}{9} = 200 \Leftrightarrow \chi = 1800$, $\frac{\psi}{8} = 200 \Leftrightarrow \psi = 1600$ καὶ $z = 1440$.

Ὁ α' θὰ πάρει 1800 δρχ., ὁ β' 1600 δρχ. καὶ ὁ γ' 1440 δρχ.

Πρόβλημα 5ο.

Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν σὲ μιὰ ἐπιχείρηση τὰ ἑξῆς ποσά: Ὁ α' 500.000 δρχ., ὁ β' 600.000δρχ. καὶ ὁ γ' 660.000 δρχ.

Τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 2 ἔτη

τὰ χρήματα τοῦ β' ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 18 μῆνες

τὰ χρήματα τοῦ γ' ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 20 μῆνες.

Ἂν ἐκέρδισαν 300000 δρχ, πόσο κέρδος πρέπει νὰ πάρει καθένας;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐπιλύεται, ὅπως τὸ παραπάνω 3ο πρόβλημα. Μερίζουμε τὸ κέρδος ἀναλόγως πρὸς τὸ γινόμενο τῶν καταθέσεων ἐπὶ τοὺς χρόνους.

Ἔστω χ δρχ, ψ δρχ, z δρχ, τὰ κέρδη ἀντιστοίχως. Ἔχουμε

$$\frac{\chi}{500000\cdot 24} = \frac{\psi}{600000\cdot 18} = \frac{z}{660000\cdot 20} \Leftrightarrow \frac{\chi}{120} = \frac{\psi}{108} = \frac{z}{132} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\chi}{10} = \frac{\psi}{9} = \frac{z}{11} = \frac{\chi+\psi+z}{10+9+11} = \frac{300000}{30} = 10000.$$

Ἄρα $\quad x = 100000, \quad \psi = 90000, \quad z = 110000.$

Ὁ α′ θὰ πάρει 100000 δραχμές, ὁ β′ 90000 δραχμὲς καὶ ὁ γ′ 110000 δρχ.

Προβλήματα:

302. Νὰ μερισθεῖ ὁ 180 σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς α) 6, 10, 14. β) 3, 5, 7. γ) 18, 30, 42 καὶ δ) 360, 600, 840. Νὰ συγκρίνετε τὰ ἀποτελέσματα τῶν 4 περιπτώσεων καὶ νὰ δικαιολογήσετε αὐτὸ ποὺ θὰ βρεῖτε.

303. Νὰ μερισθεῖ ὁ 260 ἀνάλογα πρὸς τούς: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{7}{12}$

304. Νὰ μερισθοῦν: α) ὁ 480 ἀνάλογα πρὸς τοὺς 2, $\frac{9}{4}$ καὶ $\frac{6}{8}$, β) ὁ 310 ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς 2, 3 καὶ 5 καὶ γ) ὁ 24 ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς 2, $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{2}{5}$

305. Ἕνας σύλλογος φιλοπτώχων μοίρασε 600 δρχ. σὲ 3 φτωχὲς οἰκογένειες ἀνάλογα πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν μελῶν τους. Ἡ α′ οἰκογένεια εἶχε 4 μέλη, ἡ β′ 6 καὶ ἡ γ′ 10. Πόσες δραχμὲς πῆρε κάθε οἰκογένεια;

306. Ἀπὸ δύο πόλεις, ποὺ ἀπέχουν μεταξύ τους 220 km, ξεκινοῦν συγχρόνως δύο αὐτοκίνητα μὲ ταχύτητες 50 km/h καὶ 60 km/h καὶ τρέχουν νὰ συναντηθοῦν. Νὰ βρεῖτε πόσα km θὰ διανύσει τὸ καθένα μέχρι νὰ συναντηθοῦν.

307. Ἕνα χρηματικὸ ἔπαθλο 5200 δρχ. πρόκειται νὰ μοιραστεῖ σὲ 2 ποδηλάτες ἀνάλογα πρὸς τὶς ἐπιδόσεις τους σ' ἕνα ἀγώνισμα δρόμου κάποιας ἀποστάσεως· ὁ α′ ἔτρεξε τὴν ἀπόσταση σὲ 18 min καὶ ὁ β′ σὲ 21 min. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρει ὁ καθένας;

308. Δύο αὐτοκινητιστὲς μετέφεραν ἐμπορεύματα μὲ ἀμοιβὴ 6800 δραχμές. Ὁ α′ μετέφερε 4,5 ton σὲ ἀπόσταση 40 km καὶ ὁ β′ 5 ton σὲ ἀπόσταση 32 km. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ καθένας;

309. Τρεῖς ἀδελφὲς κληρονόμησαν ἀπὸ τὸ θεῖο τους 700960 δρχ. μὲ τὸν ὅρο νὰ τὶς μοιραστοῦν ἀνάλογα πρὸς τὴν ἡλικία τους. Οἱ ἡλικίες τους ἦταν 14, 16 καὶ 21 ἔτη. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρει ἡ καθεμιά;

310. Δύο βοσκοὶ ἐνοίκιασαν ἕνα χωράφι 2850 δρχ. Ὁ α′ ἐβόσκησε 200 πρόβατα 20 ἡμέρες καὶ ὁ β′ 150 πρόβατα 30 ἡμέρες. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσει ὁ καθένας;

311. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση καταθέτοντας 100000 δρχ. Δύο μῆνες ἀργότερα πῆρε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 150000 δρχ. Ἕνα χρόνο μετὰ τὴν πρόσληψη τοῦ συνεταίρου βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 99000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρει ὁ καθένας;

8. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΙΞΕΩΣ

§ 109. Τὰ προβλήματα, στὰ ὁποῖα γίνεται λόγος γιὰ ἀνάμειξη ἐμπορευμάτων τοῦ ἴδιου εἴδους μὲ διαφορετικὲς ποιότητες καὶ γενικὰ διάφορων σωμάτων, τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ ἀναμιχθοῦν, λέγονται προβλήματα ἀναμείξεως ἢ μείξεως. Τὸ προϊὸν τῆς ἀναμείξεως ἢ μείξεως λέγεται **μεῖγμα**. Τὰ σώματα, ποὺ ἀναμειγνύονται, λέγονται **μέρη** τοῦ μείγματος.

Ἡ ἐπίλυση τῶν προβλημάτων αὐτῶν θὰ γίνει μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἐξισώσεων καὶ στηρίζεται στοὺς ἑξῆς κανόνες:

1. **Τὰ βάρη τῶν μερῶν ἔχουν ἄθροισμα τὸ βάρος τοῦ μείγματος.**

2. **Ἡ τιμὴ κόστους τοῦ μείγματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν, ποὺ κοστίζουν τὰ μέρη του.**

Πρόβλημα 1ο. Ένας έμπορος ανάμειξε 150 kgr* λάδι τῶν 24 δρχ. τὸ kgr* μὲ 100 kgr * λάδι ἄλλης ποιότητας τῶν 29 δρχ. τὸ kgr*. Πόσο ἀξίζει τὸ kgr* τοῦ μείγματος;

Ἔστω χ δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ kgr* τοῦ μείγματος

Ἔχουμε: Τιμὴ α΄ ποιότητας σὺν τιμὴ β΄ ποιότητας ἴσον τιμὴ μείγματος·

$$100 \cdot 29 \quad + \quad 150 \cdot 24 \quad = \quad (150+100) \cdot \chi$$

Ἐπιλύομε τὴν ἐξίσωση καὶ βρίσκουμε $\chi = 26$

Ἑπομένως 26 δρχ. ἀξίζει τὸ kgr* τοῦ μείγματος.

Σημείωση. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε νὰ ζητήσουμε: Πόσο πρέπει νὰ πουλᾶ τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος, γιὰ νὰ κερδίσει 25% ἐπὶ τῆς τιμῆς κόστους τοῦ μείγματος;

Ἀφοῦ βροῦμε πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος, προχωροῦμε στὴν ἐπίλυση σύμφωνα μὲ τὰ γνωστὰ ἀπὸ τὰ ποσοστά

100 δρχ. κόστος — 125 δρχ. πώληση

26 δρχ. κόστος — χ $\Rightarrow \dfrac{100}{26} = \dfrac{125}{\chi} \Leftrightarrow \chi = 32{,}50$

Πρέπει νὰ πουλᾶ 32,50 δρχ. τὸ κιλό, γιὰ νὰ κερδίζει 25% ἐπὶ τοῦ κόστους.

Πρόβλημα 2ο. Ένας οἰνοπώλης ἀνάμειξε κρασὶ τῶν 5 δρχ./kgr* μὲ κρασὶ ἄλλης ποιότητας τῶν 4 δρχ./kgr* καὶ ἔκανε μεῖγμα 100 kgr* τῶν 4,60 δρχ/kgr* Πόσα kgr* πῆρε ἀπὸ κάθε εἶδος;

Ἔστω ὅτι πῆρε χ kgr* ἀπὸ τὴν ποιότητα τῶν 5 δρχ/kgr*. Τότε ἀπὸ τὴν ἄλλη ποιότητα ἔλαβε (100–χ) kgr*. Ἑπομένως ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $5\chi + 4(100-\chi) = 4{,}6 \cdot 100$ ἀπὸ τὴν ὁποία βρίσκουμε $\chi = 60$.

Ἄρα ἔλαβε 60 kgr* ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα καὶ 40 kgr* ἀπὸ τὴ β΄ ποιότητα.

Πρόβλημα 3ο. Μὲ ποιά ἀναλογία πρέπει νὰ ἀναμείξουμε λίπος τῶν 35 δρχ/kgr* μὲ λίπος τῶν 30 δρχ/kgr*, γιὰ νὰ σχηματίσουμε μεῖγμα τῶν 32 δρχ/kgr*;

Ἂν πάρουμε χ kgr* ἀπὸ τὸ λίπος τῶν 35 δρχ/kgr* καὶ ψ kgr* ἀπὸ τὸ λίπος τῶν 30 δρχ./kgr*, τότε τὸ μεῖγμα θὰ εἶναι (χ + ψ) kgr* καὶ θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση.

$35\chi + 30\psi = 32(\chi + \psi)$, ἡ ὁποία ἔχει δύο ἀγνώστους.

Ἡ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τέτοια, ὥστε μπορεῖ νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν χ καὶ ψ.

Π.χ. $35\chi + 30\psi = 32(\chi + \psi) \Leftrightarrow 35\chi + 30\psi = 32\chi + 32\psi \Leftrightarrow$
$35\chi - 32\chi = 32\psi - 30\psi \Leftrightarrow 3\chi = 2\psi \Leftrightarrow \dfrac{\chi}{\psi} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\chi}{2} = \dfrac{\psi}{3}$

Ἡ ἀναλογία ἀναμείξεως εἶναι 2 kgr* ἀπὸ τὴν ποιότητα τῶν 35 δρχ/kgr* καὶ 3 kgr* ἀπὸ τὴν ἄλλη ποιότητα.

Πρόβλημα 4ο. Ένας ἔμπορος ἀνάμειξε δύο ποιότητες ἑνὸς εἴδους τῶν 36 δρχ/kgr* καὶ τῶν 25 δρχ/kgr* Τὸ κόστος τοῦ μείγματος ἦταν 30 δρχ./kgr* Ἂν ἀπὸ τὴν α' ποιότητα πῆρε 100 kgr*, πόσα kgr* πῆρε ἀπὸ τὴν ἄλλη;

Ἔστω ὅτι πῆρε χ kgr* ἀπὸ τὴ β' ποιότητα.

Ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $36 \cdot 100 + 25 \cdot \chi = 30(100+\chi) \Leftrightarrow$

$$3600 + 25\chi = 3000 + 30\chi \Leftrightarrow 3600 - 3000 = 30\chi - 25\chi \Leftrightarrow$$

$$5\chi = 600 \Leftrightarrow \chi = \frac{600}{5} \Leftrightarrow \chi = 120.$$

Ἐπῆρε 120 kgr* ἀπὸ τὴ β' ποιότητα.

Προβλήματα:

312. Ἀναμείχθηκαν 200 kgr* κρασὶ τῶν 4 δρχ./kgr* μὲ 300 kgr* ἀπὸ ἄλλη ποιότητα τῶν 4,5 δρχ/kgr*. Πόσο ἀξίζει τὸ kgr* τοῦ μείγματος;

313. Ἕνας ἔμπορος ἀνάμειξε 80 kgr* λάδι τῶν 25 δρχ/kgr* μὲ 120 kgr* ἀπὸ ἄλλη ποιότητα τῶν 30 δρχ/kgr*. Πόσο πρέπει νὰ πουλᾶ τὸ kgr* τοῦ μείγματος, γιὰ νὰ κερδίζει 10% ἐπὶ τοῦ κόστους; (Οἱ τιμὲς εἶναι τιμὲς κόστους).

314. Σὲ ποιὰ ἀναλογία πρέπει νὰ ἀναμείξουμε βούτυρο τῶν 50 δρχ/kgr* μὲ βούτυρο τῶν 60 δρχ./kgr*, γιὰ νὰ πετύχουμε μεῖγμα τῶν 56 δρχ/kgr*; Καὶ ἂν κάνουμε μεῖγμα 50 kgr*, πόσα kgr* πρέπει νὰ πάρουμε ἀπὸ κάθε ποιότητα βουτύρου;

315. Ἕνας καφεπώλης ἀνάμειξε καφὲ τῶν 90 δρχ./kgr* μὲ καφὲ τῶν 82 δρχ./kgr* κι ἔκανε μεῖγμα 12 kgr* τῶν 88 δρχ./kgr*. Πόσα kgr* πῆρε ἀπὸ κάθε ποιότητα;

316. Ἕνας ἔμπορος ἀνάμειξε 150 kgr* λάδι τῶν 32 δρχ./kgr* μὲ 100 kgr* ἀπὸ ἄλλη ποιότητα τῶν 26 δρχ./kgr*. Ἂν πουλᾶ τὸ μεῖγμα 34,80 δρχ. τὸ kgr*, πόσο τοῖς ἑκατὸ κερδίζει; (Οἱ τιμὲς εἶναι τιμὲς κόστους).

317. Ἔγινε μεῖγμα (100+χ) kgr* ἀπὸ δύο ποιότητες ἑνὸς εἴδους. Ἡ τιμὴ τοῦ kgr* τῆς α' ποιότητας ἦταν 35 δρχ., τῆς β' ποιότητας 30 δρχ. καὶ τοῦ μείγματος 32 δρχ. Ἂν ἀπὸ τὴ β' ποιότητα χρησιμοποιήθηκαν χ gkr*, νὰ βρεθεῖ ὁ χ.

318. Ἀναμείχθηκαν 100kgr * τῶν 20 δρχ./kgr * μὲ 80kgr* τῶν χ δρχ./kgr* ἀπὸ δύο ποιότητες ἑνὸς εἴδους. Ἂν ἡ τιμὴ τοῦ μείγματος ἦταν 22 δρχ./kgr*, νὰ βρεθεῖ ὁ χ.

319. Πῶς πρέπει νὰ ἀναμείξουμε δύο ποιότητες ἑνὸς εἴδους, ποὺ ἔχουν κόστος 48 δρχ./kgr* καὶ 44 δρχ./kgr*, γιὰ νὰ κάνουμε μεῖγμα, ποὺ ἂν τὸ πουλᾶμε 49,50 δρχ./kgr*, νὰ κερδίζουμε 10% ἐπὶ τοῦ κόστους;

9. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΡΑΜΑΤΩΝ

§ **110**. Ἂν συγχωνεύσουμε ἢ συντήξουμε (μὲ διάφορες μεθόδους) δύο ἢ περισσότερα μέταλλα, παίρνουμε ἕνα σῶμα ποὺ λέγεται **κράμα**.

Στὴν οἰκονομικὴ ζωὴ ἐνδιαφέρουν τὰ κράματα, ποὺ γίνονται ἀπὸ πολύτιμα μέταλλα (χρυσό, ἄργυρο). Ἡ ἀξία τους ἐκτιμᾶται ἀπὸ τὸ λόγο τοῦ βάρους τοῦ πολύτιμου μετάλλου πρὸς τὸ ὁλικὸ βάρος τοῦ κράματος. Ὁ λόγος αὐτὸς λέγεται **τίτλος** τοῦ κράματος καὶ ἐκφράζεται **σὲ χιλιοστά**.

Ἂν Α εἶναι τὸ βάρος τοῦ πολύτιμου μετάλλου, Β τὸ βάρος τοῦ κράματος καὶ τ ὁ τίτλος τοῦ κράματος, ἔχουμε

$$\frac{A}{B} = \tau \Leftrightarrow A = B \cdot \tau$$

Π.χ. όταν λέμε ότι τὸ κράμα ἔχει τίτλο 0,850 ἢ $\frac{850}{1000}$, ἐννοοῦμε ὅτι ἀπὸ τὰ 1000 gr* τοῦ κράματος τὰ 850 gr* εἶναι πολύτιμο μέταλλο καὶ τὰ 150 gr* εἶναι ἄλλο ἢ ἄλλα μέταλλα.

Ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ σὲ **καράτια.** Π.χ. ὅταν λέμε ὅτι ἕνα χρυσὸ κόσμημα εἶναι 18 καρατιῶν, ἐννοοῦμε ὅτι τὰ $\frac{18}{24}$ τοῦ βάρους του εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα $\frac{6}{24}$ ἄλλα μέταλλα.

Ἡ ἐπίλυση τῶν προβλημάτων θὰ γίνει μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἐξισώσεων, ὅπως καὶ στὰ προβλήματα τῆς μείξεως, μὲ βάση τοὺς κανόνες.

α) «Τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τοῦ πολύτιμου μετάλλου, τὸ ὁποῖο περιέχεται στὰ κράματα ποὺ πρόκειται νὰ συντηχθοῦν εἶναι ἴσο μὲ τὸ βάρος τοῦ πολύτιμου μετάλλου στὸ νέο κράμα».

β) Τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῶν κραμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ νέου κράματος.

Πρόβλημα 1ο. Ἕνας χρυσοχόος συνέτηξε 12 gr* χρυσὸ τίτλου 0,900 μὲ 18 gr* ἄλλο χρυσὸ τίτλου 0,800.

Νὰ βρεθεῖ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

Ἔστω χ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

Τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ στὸ α΄ κράμα εἶναι $0{,}900 \cdot 12$ gr*.

Τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ στὸ β΄ κράμα εἶναι $0{,}800 \cdot 18$ gr*.

Τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ στὸ νέο κράμα εἶναι $\chi \cdot (12+18)$ gr*.

Σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω κανόνα ἔχουμε τὴν ἐξίσωση

$$0{,}900 \cdot 12 + 0{,}800 \cdot 18 = \chi(12+18) \Leftrightarrow 10{,}8 + 14{,}4 = 30\chi \Leftrightarrow 30\chi = 25{,}2$$

$$\chi = \frac{25{,}2}{30} \Leftrightarrow \chi = 0{,}840.$$

Ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι 0,840.

Πρόβλημα 2ο. Ἂν συντήξουμε δύο εἴδη κραμάτων (τοῦ ἴδιου πολύτιμου μετάλλου) μὲ τίτλους 0,900 καὶ 0,600, παίρνουμε ἕνα νέο κράμα, ποὺ ἔχει βάρος 42 gr* καὶ τίτλο 0,700. Πόσα γραμμάρια πήραμε ἀπὸ κάθε κράμα;

Ἔστω ὅτι πήραμε χ gr* ἀπὸ τὸ κράμα μὲ τίτλο 0,900, τότε ἀπὸ τὸ ἄλλο κράμα θὰ ἔχουμε πάρει (42—χ) gr*. Ἑπομένως ἔχουμε τὴν ἐξίσωση:

$$0{,}900\chi + 0{,}600(42-\chi) = 0{,}700 \cdot 42 \Leftrightarrow 9\chi + 6(42-\chi) = 7 \cdot 42 \Leftrightarrow 9\chi + 6 \cdot 42 - 6\chi = 7 \cdot 42 \Leftrightarrow 9\chi - 6\chi = 7 \cdot 42 - 6 \cdot 42 \Leftrightarrow 3\chi = (7-6) \cdot 42 \Leftrightarrow 3\chi = 42 \Leftrightarrow \chi = \frac{42}{3}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 14$$

Ὥστε πήραμε 14 gr* ἀπὸ τὸ κράμα μὲ τίτλο 0,900 καὶ 42 gr*—14 gr* = 28 gr* ἀπὸ τὸ ἄλλο κράμα.

Πρόβλημα 3ο. Σὲ ποιὰ ἀναλογία πρέπει νὰ συγχωνεύσουμε δύο κράματα (τοῦ ἴδιου πολύτιμου μετάλλου) μὲ τίτλους 0,920 καὶ 0,800, γιὰ νὰ πετύχουμε νέο κράμα μὲ τίτλο 0,840;

Ἂν πάρουμε χ gr* ἀπὸ τὸ κράμα μὲ τίτλο 0,920 καὶ ψ gr *ἀπὸ τὸ ἄλλο κράμα, τὸ νέο κράμα θὰ εἶναι $(\chi+\psi)$ gr*

Ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $0{,}920\chi+0{,}800\psi=0{,}840(\chi+\psi) \Leftrightarrow$ $92\chi+80\psi=84(\chi+\psi) \Leftrightarrow 23\chi+20\psi=21\chi+21\psi \Leftrightarrow 23\chi-21\chi=21\psi-20\psi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \; 2\chi=\psi \;\Leftrightarrow\; \frac{\chi}{1}=\frac{\psi}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\chi}{\psi}=\frac{1}{2}$$

Ἡ ἀναλογία συγχωνεύσεως εἶναι 1 gr* ἀπὸ τὸ κράμα μὲ τίτλο 0,920 καὶ 2 gr* ἀπὸ τὸ ἄλλο κράμα.

Προβλήματα:

320. Ἕνας χρυσοχόος συγχωνεύει 10 gr* χρυσὸ τίτλου 0,900 μὲ 14 gr* ἄλλο χρυσὸ τίτλου 0,600. Νὰ βρεθεῖ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

321. Κάνουμε νέο κράμα βάρους 90 gr* καὶ τίτλου 0,840 ἀπὸ δύο ἄλλα κράματα τίτλων 0,900 καὶ 0,800. Πόσα gr* θὰ πάρουμε ἀπὸ κάθε κράμα;

322. Σὲ ποιὰ ἀναλογία πρέπει νὰ συγχωνεύσουμε δύο εἴδη χρυσοῦ μὲ τίτλους 0,900 καὶ 0,750, γιὰ νὰ πετύχουμε κράμα τίτλου 0,800, καὶ πόσα gr* θὰ πάρουμε ἀπὸ κάθε εἶδος, ἂν τὸ νέο κράμα ἔχει βάρος 75 gr*;

323. Συγχωνεύουμε 80 gr* ἄργυρο τίτλου 0,920 μὲ ἄλλο ἄργυρο τίτλου 0,850 καὶ παίρνουμε νέο κράμα τίτλου 0,900. Πόσα gr* ἀπὸ τὸ β΄ κράμα θὰ χρησιμοποιήσουμε;

324. α) Πόσα gr* καθαρὸς χρυσὸς περιέχονται σὲ 50,5 gr* χρυσὸ τίτλου 0,740;
β) Κράμα χρυσοῦ 80 gr* περιέχει 50 gr* καθαρὸ χρυσό. Ποιὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

325. Ἕνας χρυσοχόος συνέτηξε 10 gr* χρυσὸ 17 καρατιῶν μὲ 20 gr* ἄλλο χρυσὸ 20 καρατιῶν καὶ μὲ 30 gr* τίτλου 22 καρατιῶν. Νὰ βρεθεῖ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος σὲ καράτια.

326. Πόσα gr* χαλκὸ πρέπει νὰ συγχωνεύσουμε μὲ 140 gr* καθαρὸ χρυσό, γιὰ νὰ πετύχουμε κράμα τίτλου 0,700;

10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦ. IV.

327. Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=2$ καὶ $\chi+\psi=15$, νὰ βρεθοῦν τὰ χ, ψ.

328. Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=-\frac{2}{3}$, νὰ βρεθοῦν οἱ λόγοι:

α) $\frac{2\chi-\psi}{\chi+\psi}$ β) $\frac{\chi+2}{\psi-3}$ $(\psi \neq 3)$ γ) $\frac{\chi-2}{\psi+3}$ $(\psi \neq -3)$ καὶ δ) $\frac{\chi+\psi}{3\chi-2\psi}$

329. Ἐὰν $3\chi+4\psi=52$ καὶ $\frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{5}$, νὰ βρεθοῦν τὰ χ, ψ.

$$\left(\frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{5}=\frac{3\chi}{3\cdot 2}=\frac{4\psi}{4\cdot 5}=\frac{3\chi}{6}=\frac{4\psi}{20}=\frac{3\chi+4\psi}{6+20}=\frac{52}{26}=\cdots\right)$$

330. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας $\frac{\chi}{3}=\frac{\psi}{1}$, ἂν α) $2\chi+3\psi=180$ καὶ β) $2\chi-5\psi=30$.

331. Νὰ βρεθοῦν οἱ ὅροι τοῦ λόγου $\frac{\chi}{\psi} = \frac{3}{4}$, ἂν α) $\chi + 3\psi = 150$ καὶ β) $5\chi - 3\psi = 30$

332. Δύο ἐργάτες τέλειωσαν ἕνα ἔργο. Ὁ α' ἔκανε τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ β' τὸ ὑπόλοιπο. Ἂν ὁ α' πῆρε 4200 δρχ., πόσο ἐκόστισε ὁλόκληρο τὸ ἔργο;

333. Γιὰ ν' ἀγοράσει κάποιος μία ἐνδυμασία, τοῦ ἔγινε ἔκπτωση 270 δρχ. καὶ πλήρωσε 1230 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἔκπτωση;

334. Ἕνα ἀντικείμενο κόστους 1800 δρχ. πουλήθηκε 1440 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἔκπτωση; Ἂν εἶχε κόστος 1400 δρχ. καὶ πουλιόταν 1750 δρχ., πόσο τοῖς ἑκατὸ θὰ ἦταν τὸ κέρδος;

335. 15 ἐργάτες ἔκαναν σὲ 8 ἡμέρες τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς ἔργου. Ἂν ἀπολύθηκαν 5 ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες οἱ ὑπόλοιποι θὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπο ἔργο;

336. Ἐὰν ἕνας πεζοπόρος βαδίσει 7 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες κάθε μέρα, θὰ διανύσει τὰ $\frac{7}{13}$ μιᾶς ἀποστάσεως. Πόσες ὧρες τὴν ἡμέρα πρέπει νὰ βαδίζει, γιὰ νὰ διανύσει τὴν ὑπόλοιπη ἀπόσταση σὲ 8 ἡμέρες;

337. Τὰ $\frac{5}{16}$ ἑνὸς κεφαλαίου τοκίστηκαν μὲ 7% κι ἔγιναν μαζὶ μὲ τὸν τόκο τους 9831 δρχ. Νὰ βρεθεῖ ὁ χρόνος, ἂν ὁλόκληρο τὸ κεφάλαιο ἦταν 28928 δραχμές.

338. Τὸ $\frac{1}{2}$ ἑνὸς κεφαλαίου τοκίστηκε μὲ 5%, τὸ $\frac{1}{3}$ του μὲ 6% καὶ τὸ ὑπόλοιπο μὲ 4%. Ἂν σ' ἕνα χρόνο κεφάλαιο καὶ τόκοι ἔγιναν 18930 δρχ., νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

339. Τοκίστηκαν τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς κεφαλαίου μὲ 6% καὶ τὸ ὑπόλοιπο μὲ 5%. Ἂν τοκιζόταν ὁλόκληρο τὸ κεφάλαιο μὲ 5%, θὰ ἔδινε 120 δρχ. τόκο λιγότερο ἀπὸ ὅσο ἔδωσε στὴν προηγούμενη περίπτωση. Ἂν ὁ χρόνος καὶ στὶς δύο περιπτώσεις εἶναι 12 μῆνες, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

340. Ἂν κεφ. + τόκ. εἶναι 10100 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 2,5 μῆνες καὶ ε% = 4,8%, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

341. Ἂν κεφ. + τόκ. εἶναι 9126 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 63 ἡμέρες καὶ ε% = 8%, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

342. Ἂν κεφ. — τόκ. εἶναι 4440 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 4 μῆν. καὶ ε % = 4 %, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

343. Στὶς παρακάτω ἐξισώσεις ὁ χ παριστάνει τὸ κεφάλαιο σὲ δραχμές. Νὰ διατυπώσετε τὶς ἐξισώσεις αὐτὲς σὲ προβλήματα καὶ νὰ τὶς ἐπιλύσετε.

α) $\chi + \chi \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{5}{12} = 18300$, β) $\chi - \chi \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{105}{360} = 9460$.

344. Ἀπὸ δύο πόλεις, ποὺ ἀπέχουν μεταξύ τους 360 km, ξεκινοῦν συγχρόνως γιὰ συνάντηση δύο αὐτοκίνητα μὲ ταχύτητες 65 km/h καὶ 55 km/h. Σὲ ποιὰ ἀπόσταση θὰ συναντηθοῦν;

345. Νὰ μερισθεῖ ὁ ἀριθ. 3600 ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς 12, 15, 20.

346. Νὰ μερισθεῖ ὁ ἀριθ. 250 ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{4}{9}$

347. Δύο ἔμποροι κατέθεσαν γιὰ μιὰ ἐπιχείρηση 100.000 δρχ. ὁ α' καὶ 80.000 δρχ. ὁ β'. Ὕστερ' ἀπὸ 18 μῆνες κέρδισαν 54000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρει ὁ καθένας;

348. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ 500.000 δρχ. Ὕστερ' ἀπὸ 3 μῆνες πῆρε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσό. 6 μῆνες μετὰ τὴν πρόσληψη τοῦ συνεταίρου βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 60.000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρει ὁ καθένας;

349. Δύο συνεταῖροι κατέθεσαν 405000 δρχ. γιὰ μιὰ ἐπιχείρηση. Τὰ χρήματα τοῦ α΄ ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 15 μῆνες καὶ τοῦ β΄ 12 μῆνες. Ἐὰν πῆραν ἴσα κέρδη, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο, ποὺ εἶχε καταθέσει ὁ καθένας.

350. Ἕνας ἔμπορος ἀνάμειξε 100/kgr* ἑνὸς εἴδους τῶν 35 δρχ./kgr* μὲ ἄλλο τῶν 30 δρχ./kgr*. Πόσα kgr* χρησιμοποίησε ἀπὸ τὴ β΄ ποιότητα, ἐὰν πουλοῦσε 33 δρχ. τὸ kgr* τοῦ μείγματος κι ἐκέρδισε 250 δραχμές;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

351. Ἐὰν $\alpha=-4$ καὶ $\beta=2$, νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῶν παραστάσεων $\alpha^3+3\alpha^2\beta+$ $+3\alpha\beta^2+\beta^3$ καὶ $(\alpha+\beta)^3$. Τί παρατηρεῖτε;

352. Ἐὰν $\alpha=-2$, $\beta=-3$ καὶ $\gamma=-1$, νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῶν παραστάσεων: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$ καὶ $(\alpha+\beta+\gamma)^2$. Τί παρατηρεῖτε;

353. Ἐὰν $\chi=-2$, $\alpha=-3$ καὶ $\beta=4$, νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῶν παραστάσεων $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$ καὶ $(\chi+\alpha)\cdot(\chi+\beta)$. Τί παρατηρεῖτε;

354. Ἐὰν $\chi=3$, $\psi=-4$, $\alpha=-2$ καὶ $\beta=1$, νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων $(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\chi^2+\psi^2)-(\alpha\chi+\beta\psi)^2$ καὶ $(\alpha\psi-\beta\chi)^2$. Τί παρατηρεῖτε;

355. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{3\chi-1}{5}=\dfrac{5-7\chi}{15}$, β) $\dfrac{5\chi+1}{7}=\dfrac{2\chi-3}{3}$, γ) $\dfrac{2\chi-2{,}5}{3}=\dfrac{4\chi-5}{6}$,

δ) $\dfrac{2\chi-1{,}5}{5}=\dfrac{0{,}8\chi-1}{2}$

(Γιὰ τὴν ἀπαλοιφὴ τῶν παρονομαστῶν νὰ χρησιμοποιηθεῖ ἡ ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma\ ).$$

356. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $(\chi+1).(\chi+2)=\chi(\chi+7)-6$, β) $2.(\chi-1)\cdot(\chi+1)=\chi(2\chi-6)+16$,

γ) $(\chi-3)\cdot(\chi-4)-2\chi(\chi-3)=\chi(11-\chi)$, δ) $\dfrac{1}{3}\left(\chi-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{3}{5}\left(\chi+\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{7}{2}=0$

357. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{\chi-7}{4}+\dfrac{\chi+10}{21}+1=\dfrac{5\chi-7}{8}-\dfrac{9\chi+6}{35}$,

β) $\dfrac{3\chi-2}{8}-\dfrac{13\chi+3}{27}+9=\dfrac{5\chi-12}{18}-\dfrac{2-5\chi}{4}$,

γ) $\dfrac{3\chi}{4}+\dfrac{5}{17}(2\chi+1)=(\chi-1)+\dfrac{7\chi-5}{51}-\dfrac{2-\chi}{2}$,

δ) $\dfrac{4+13\chi}{22}+\dfrac{\chi}{2}-\dfrac{7\chi-1}{3}+\dfrac{3-15\chi}{33}-\dfrac{6-5\chi}{4}=0$.

358. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{7}$ εἶναι κατὰ $\frac{13}{5}$ μικρότερο ἀπὸ τὸ τριπλάσιό του;

359. Ἂν σ' ἕναν ἀριθμὸ προσθέσουμε τὸ 4πλάσιό του, βρίσκουμε ἀριθμὸ κατὰ $\frac{8}{25}$ μικρότερο ἀπὸ τὸν 10,32. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

360. Ἀπὸ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει ν' ἀφαιρέσουμε τὸ 8πλάσιο τοῦ $\frac{1}{8}$ του, γιὰ νὰ βροῦμε ἀριθμὸ κατὰ $\frac{21}{2}$ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτοῦ;

361. Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ διαιρέσουμε τὸν 744, γιὰ νὰ βροῦμε πηλίκο 14 καὶ ὑπόλοιπο 44;

362. Νὰ χωριστεῖ ὁ ἀριθμὸς $\frac{378}{5}$ σὲ δύο ἄλλους, ὥστε ὁ ἕνας νὰ εἶναι διπλάσιος ἀπὸ τὸν ἄλλο.

363. Ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου εἶναι 2πλάσια ἀπὸ τοῦ Παύλου. Πρὶν ἀπὸ 7 χρόνια οἱ ἡλικίες τους εἶχαν ἄθροισμα ἴσο μὲ τὴ σημερινὴ ἡλικία τοῦ Πέτρου. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἡλικίες τους.

364. Ἕνα πλοῖο ἀναχώρησε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ μὲ ταχύτητα 19,5 mil/h. Ὕστερ' ἀπὸ 4 ὧρες ἀναχώρησε δεύτερο πλοῖο μὲ ταχύτητα 23,5 mil/h πρὸς τὴν ἴδια κατεύθυνση. Μετὰ ἀπὸ πόσες ὧρες τὸ β' πλοῖο θὰ φτάσει τὸ α';

365. Ἡ γωνία Γ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}=1$ ὀρθ.) εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γωνίας Β. Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

366. Νὰ βρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ποὺ τὰ τετράγωνά τους διαφέρουν κατὰ 39.

367. Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 17 καὶ τὰ τετράγωνά τους διαφέρουν κατὰ 119. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

368. Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 27. Ἂν στὸ γινόμενό τους προσθέσουμε τὸ τετράγωνο τοῦ μικρότερου, βρίσκουμε 216. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

369. Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς ἂν διαιρεθεῖ διὰ 11, δίνει ὑπόλοιπο 9, ἐνῶ ἂν διαιρεθεῖ διὰ 3, δίνει ὑπόλοιπο 2. Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν πηλίκων εἶναι 53, βρεῖτε τὸν ἀριθμό.

370. Τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων ἑνὸς διψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ 4 μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ψηφίο τῶν μονάδων. Ἂν στὸν ἀριθμὸ προσθέσουμε τὸ $\frac{1}{5}$ του, βρίσκουμε 114. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

371. Ἕνα ρολόι δείχνει μεσημέρι ἀκριβῶς (12 h 0 min 0 sec). Ποιὰ ὥρα θὰ συναντηθοῦν (γιὰ δεύτερη φορὰ) ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης;

372. Δύο θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰ 48. Ἂν ὁ μεγαλύτερος διαιρεθεῖ διὰ τοῦ μικρότερου, δίνει πηλίκο 3 καὶ ὑπόλοιπο 2. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

373. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\frac{3\chi-1}{5}>\frac{\chi-1}{3}$, β) $\frac{\chi+5}{2}-\frac{\chi-1}{3}>3$, γ) $3\chi-3+\frac{\chi-1}{-4}>0$.

δ) $\frac{\chi+1}{3}-\frac{\chi-1}{2}<1$, ε) $2\left(\frac{5}{2}-\chi\right)>\frac{1}{2}+2(1{,}5-\chi)$.

374. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ κοινὲς λύσεις τῶν ἀνισώσεων:

α) $\chi-1>-2$ καὶ $2(\chi-3)<0$

β) $\frac{1}{2}+\chi>\chi$ καὶ $\chi-3<10$

γ) $\chi-3>\chi$ καὶ $2-\chi>-\chi$

375. Ἂν $A=\{\chi/\chi-\frac{\chi-1}{2}>\frac{\chi-2}{2}-\frac{\chi-3}{4}$ καὶ $\chi\in Z\}$ καὶ

$B = \{\chi / -\chi + 1 < 4\chi + 1 \wedge \chi \in Z\}$, νὰ βρεθεῖ τὸ $A \cap B$ μὲ ἀναγραφή.

376. Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὶς συναρτήσεις:

α) $\psi = -2\chi + 5$, β) $\psi = \frac{24}{\chi}$ γ) $\psi = -4\chi$ $(\chi, \psi \in Q)$

377. Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ν' ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύουν οἱ πιὸ κάτω ἀναλογίες:

1) $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}$, 2) $\frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma}{\gamma-\delta}$, 3) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ $(\beta, \delta \neq 0, |\alpha| \neq |\beta|, |\gamma| \neq |\delta|)$

378. Ἂν $\frac{\chi}{\chi+1} = \frac{\psi}{\psi+2}$ καὶ $\chi + \psi = 21$, νὰ βρεθοῦν τὰ χ, ψ.

379. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῶν ἴσων λόγων $\frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5}$, ἐὰν $2\chi + 3\psi + 4z = 330$.

380. Νὰ μερισθεῖ ὁ 99 ἀνάλογα πρὸς τοὺς α) 2, 3, 4 καὶ β) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

381. Νὰ μερισθεῖ ὁ 390 ἀντιστρ. ἀνάλογα πρὸς τοὺς α) 2, 3, 4 καὶ β) $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{6}$, 1.

382. Ἕνας ἔμπορος ἀγοράζει καφὲ 81 δρχ. τὸ kgr*, τὸν καβουρδίζει καὶ τὸν μεταπουλᾶ. Πόσο πρέπει νὰ πουλᾶ τὸ kgr*, γιὰ νὰ πετύχει κέρδος 10% ἐπὶ τοῦ κόστους, ἂν λάβουμε ὑπ' ὄψη ὅτι ὁ καφὲς χάνει τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ βάρους του, ὅταν καβουρδίζεται;

383. Ἕνας ἔμπορος γράφει ἐπάνω σ' ἕνα ἐμπόρευμα τιμὴ κατὰ 25% μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τιμὴ κόστους. Ὕστερα κάνει ἔκπτωση 10% ἐπὶ τῆς τιμῆς ποὺ γράφει ἐπάνω. Βρεῖτε πόσο τοῖς ἑκατὸ ἐπὶ τοῦ κόστους κερδίζει τελικὰ ὁ ἔμπορος.

384. Ἐὰν κέφ.−τόκ. = 54000 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 2,5 ἔτη καὶ ε% = 4%, νὰ βρεθεῖ ὁ τόκος.

385. Ἐὰν κέφ. + τόκ. = 4060 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 3 μῆν. καὶ ε% = 6%, νὰ βρεθεῖ ὁ τόκος.

386. Ἐὰν κέφ.−τόκ. = 7160 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 40 ἡμ. καὶ ε% = 5%, νὰ βρεθεῖ ὁ τόκος.

387. Ἕνα μέρος κεφαλαίου 40.000 δρχ. τοκίστηκε μὲ 4% γιὰ 5 μῆνες κι ἔφερε τόκο 500 δρχ. περισσότερο ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο μέρος του, ποὺ τοκίστηκε μὲ 5% γιὰ 6 μῆνες. Νὰ βρεθεῖ τὸ μέρος τοῦ κεφαλαίου ποὺ τοκίστηκε (τὸ πρῶτο).

388. Δύο ἴσα κεφάλαια τοκίζονται τὸ ἕνα μὲ 4,5% καὶ τὸ ἄλλο μὲ 5,5% καὶ δίνουν τόκο 4500 δρχ. σὲ 2 ἔτη. Ποιὰ εἶναι τὰ κεφάλαια;

389. Στὶς παρακάτω ἐξισώσεις ὁ χ παριστάνει τὸ κεφάλαιο σὲ δραχμές. Νὰ διατυπώσετε αὐτὲς τὶς ἐξισώσεις σὲ προβλήματα καὶ νὰ τὶς ἐπιλύσετε.

α) $\chi + \chi \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{2,4}{12} = 10120$, β) $\chi - \chi \cdot \frac{2,5}{100} \cdot \frac{400}{360} = 7000$.

390. Ἕνας γεωργὸς πούλησε ἕναν κῆπο 1050 m^2. Τὰ χρήματα ποὺ πῆρε τὰ τόκισε μὲ 12% καὶ μετὰ ἀπὸ 3 ἔτη καὶ 2 μῆνες πῆρε τόκο καὶ κεφάλαιο 115920 δρχ. Πόσο πούλησε τὸ στρέμμα;

391. Ἀγόρασε κάποιος οἰκόπεδο 700 m^2. Ἐπλήρωσε τὴ μισὴ τιμὴ ἀμέσως κι ἐπέτυχε ἔκπτωση 8% ἐπ' αὐτῆς. Γιὰ τὴν ἄλλη μισὴ πλήρωσε ὕστερ' ἀπὸ 8 μῆνες 104000 δρχ. μαζὶ μὲ τὸν τόκο, μὲ 6%. Τί ποσὸ πλήρωσε συνολικὰ γιὰ τὸ οἰκόπεδο καὶ ποιὰ ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ στρέμματος;

392. 4 ἀδελφοὶ μοιράστηκαν κληρονομιὰ 540 στρέμματα ὡς ἑξῆς: Ὁ πρῶτος πῆρε τὰ μισὰ ἀπὸ ὅσα πῆραν οἱ ἄλλοι τρεῖς, ποὺ τὰ μερίδιά τους ἦταν ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4 καὶ 5. Πόσα στρέμματα πῆρε ὁ καθένας;

393. Δύο ἔμποροι ἔκαναν ἐπιχείρηση. Ὁ α' κατέθεσε 70000 δρχ. καὶ πῆρε κέρδος 6000 δρχ., ὁ β' κατέθεσε 80000 δρχ. καὶ τὸ κέρδος του ἦταν 8000 δρχ. Πόσο χρόνο ἔμειναν τὰ χρήματα τοῦ β' στὴν ἐπιχείρηση, ἂν τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν 6 μῆνες;

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

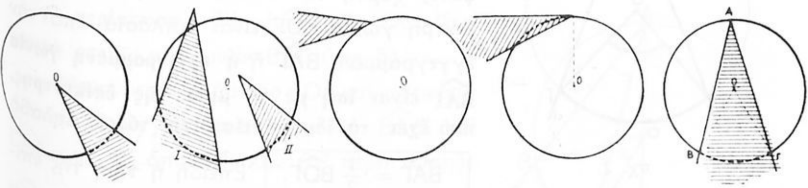
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Α. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

§ 1. *Σχεδιάστε στὸ τετράδιό σας ἕναν κύκλο καὶ στὸ χαρτόνι σας μία κυρτὴ γωνία. Κόψτε τὴ γωνία καὶ σχεδιάστε τὶς διάφορες θέσεις, ποὺ μπορεῖ νὰ πάρει ἡ γωνία σχετικὰ μὲ τὸν κύκλο.*

Περιγράφουμε μερικὲς ἀπὸ τὶς θέσεις αὐτές:



1α 1β 1γ 1δ 1ε

σχ. 1.

Ἡ γωνία τοῦ σχήματος 1α ἔχει τὴν κορυφή της στὸ κέντρο τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία αὐτή, ὅπως ἔχουμε μάθει στὴν Α΄ τάξη, λέγεται **ἐπίκεντρη**. Οἱ γωνίες τοῦ σχήματος 1β δὲν ἔχουν τὴν κορυφή τους στὸν κύκλο· ἡ (I) τὴν ἔχει στὸ ἐξωτερικὸ καὶ ἡ (II) στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία τοῦ σχήματος 1γ ἔχει τὴν κορυφή της στὸν κύκλο καὶ οἱ πλευρές της βρίσκονται στὸ ἐξωτερικό του. Στὸ σχῆμα 1δ ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνίας ἀποκόβει χορδὴ καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στὸ ἕνα ἄκρο τῆς χορδῆς.

Ἡ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ τοῦ σχήματος 1ε ἔχει τὴν κορυφή της στὸν κύκλο καὶ οἱ πλευρές της τὸν τέμνουν. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **ἐγγεγραμμένη** στὸν κύκλο.

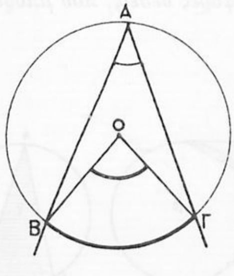
Ὥστε: **Ἐγγεγραμμένη στὸν κύκλο γωνία** ὀνομάζεται ἡ γωνία, ποὺ ἔχει **τὴν κορυφή της στὸν κύκλο καὶ οἱ πλευρές** της τὸν τέμνουν.

Τὸ τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας αὐτῆς, λέγεται **ἀντίστοιχο τόξο τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας** (σχῆμα 1ε).

Τὴν ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο μὲ τὴν ἐγγεγραμμένη, τὴ λέμε **ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη** τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$. (σχῆμα 1ε).

§ 2. Σχέση τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας μὲ τὴν ἐπίκεντρη, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο.

Σχεδιάστε ἕναν κύκλο, μία ἐγγεγραμμένη γωνία σ' αὐτὸν καὶ τὴν ἐπίκεντρη, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο. Συγκρίνετε τὶς δύο αὐτὲς γωνίες. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 2).



σχ. 2.

Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη σ' αὐτὸν γωνία $\widehat{BA\Gamma}$. Σχηματίζουμε τὴν ἀντίστοιχή της ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$.

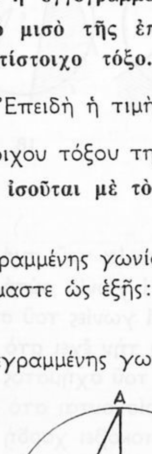
Ἂν μετρήσουμε ἢ χρησιμοποιήσουμε διαφανὲς χαρτί, θὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ἐγγεγραμμένη $\widehat{BA\Gamma}$ ἢ **ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο.** Δηλαδὴ $\boxed{\widehat{BA\Gamma} = \frac{1}{2}\widehat{BO\Gamma}.}$ Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς ἐπίκεντρης γωνίας ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴ τοῦ ἀντίστοιχου τόξου της, συμπεραίνουμε ὅτι **ἡ τιμὴ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς τιμῆς τοῦ ἀντίστοιχου τόξου της.**

Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὴ σχέση τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας σ' ἕναν κύκλο μὲ τὴν ἀντίστοιχή της ἐπίκεντρη, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

α' περίπτωση. Μία ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. (σχῆμα 3). Ἔστω κύκλος (Ο, R), ἡ ἐγγεγραμμένη σ' αὐτὸν γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ καὶ ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$. Ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΒ. Ἑπομένως $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{BA\Gamma} + \widehat{ABO}$ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{ABO} = \widehat{BA\Gamma}$, ἔχουμε $\widehat{BO\Gamma} = 2 \cdot \widehat{BA\Gamma}$ ἄρα $\boxed{\widehat{BA\Gamma} = \frac{1}{2}\widehat{BO\Gamma}}$

Δηλαδὴ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης $\widehat{BO\Gamma}$.



σχ. 3.

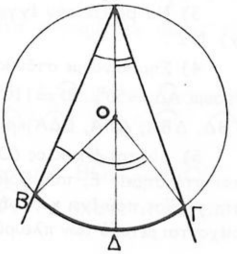
β' περίπτωση Ἔστω ὅτι τὸ κέντρο Ο εἶναι ἐσωτερικὸ σημεῖο τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ (σχ. 4). Φέρνουμε τὴ διάμετρο ΑΟΔ καὶ σχηματίζονται δύο ἐγγεγραμμένες γωνίες, οἱ $\widehat{ΒΑΔ}$ καὶ $\widehat{ΔΑΓ}$, γιὰ τὶς ὁποῖες ἔχουμε (ἂν λάβουμε ὑπ' ὄψη τὴν α' περίπτωση):

$\widehat{ΒΑΔ} = \frac{1}{2}\ \widehat{ΒΟΔ}$ Προσθέτουμε τὶς ἰσότητες

$\widehat{ΔΑΓ} = \frac{1}{2}\ \widehat{ΔΟΓ}$ αὐτὲς κατὰ μέλη καὶ ἔχουμε

$\widehat{ΒΑΔ} + \widehat{ΔΑΓ} = \frac{1}{2}\ (\widehat{ΒΟΔ} + \widehat{ΔΟΓ})$ δηλαδὴ

$$\boxed{\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\ \widehat{ΒΟΓ}}$$



σχ. 4.

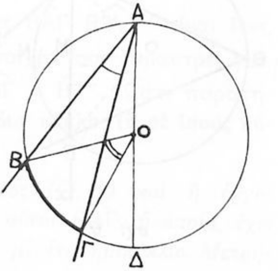
γ' περίπτωση. Τὸ κέντρο Ο εἶναι ἐξωτερικὸ σημεῖο τῆςγωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ (σχ. 5).

Φέρνουμε τὴ διάμετρο ΑΟΔ καὶ σχηματίζονται οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{ΒΑΔ}$ καὶ $\widehat{ΓΑΔ}$, γιὰ τὶς ὁποῖες ἔχουμε (α' περίπτωση):

$\widehat{ΒΑΔ} = \frac{1}{2}\ \widehat{ΒΟΔ}$ Ἀφαιροῦμε τὶς ἰσότητες αὐ-

$\widehat{ΓΑΔ} = \frac{1}{2}\ \widehat{ΓΟΔ}$ τὲς κατὰ μέλη καὶ βρίσκουμε:

$\widehat{ΒΑΔ} - \widehat{ΓΑΔ} = \frac{1}{2}\ (\widehat{ΒΟΔ} - \widehat{ΓΟΔ})$,



σχ. 5.

Συνεπῶς $\boxed{\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\ \widehat{ΒΟΓ}}$

Συμπεραίνουμε λοιπὸν ὅτι: **Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία σὲ κύκλο ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο.**

Παρατηρήσεις

1) Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία σὲ κύκλο εἶναι πάντοτε **κυρτὴ** γωνία·

2) Ἡ ἐπίκεντρη γωνία, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο μὲ τὴν ἐγγεγραμμένη, μπορεῖ νὰ εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ γωνία.

Ἀσκήσεις

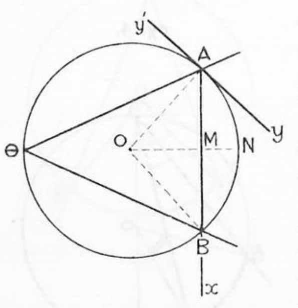
1) Μία ἐπίκεντρη γωνία εἶναι 120°. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο μὲ τὴν ἐπίκεντρη αὐτή.

2) Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι 23° 30′, νὰ βρεῖτε σὲ μοῖρες καὶ σὲ μέρη ὀρθῆς τὴν ἀντίστοιχή της ἐπίκεντρη γωνία.

3) Νὰ βρεῖτε τὴν ἐγγεγραμμένη γωνία, ποὺ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο α) 35°, β) 42°, γ) 192°.

4) Σημειώνουμε στὸν κύκλο (O, R) 4 διαδοχικὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ ἔτσι ὥστε νὰ ἔχουμε $\overset{\frown}{A\Delta} = 50^\circ$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 110^\circ$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 70^\circ$. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{B\Delta\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A\Delta}$, $\widehat{\Gamma B\Delta}$, $\widehat{\Delta BA}$, $\widehat{\Delta\Gamma A}$, $\widehat{B\Delta A}$ καὶ $\widehat{A\Gamma B}$.

5) Δίνεται ὁ κύκλος (O, R). Φέρνουμε δύο χορδές του ΑΔ καὶ ΒΓ, οἱ ὁποῖες τέμνονται στὸ σημεῖο Ε, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου. Νὰ συγκρίνετε τὴν τιμὴ τῆς γωνίας, ποὺ ἔχει κορυφὴ τὸ Ε, μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της καὶ τῶν προεκτάσεών τους. (Ὑπόδειξη: Φέρετε τὴν ΑΓ).


σχ. 6.

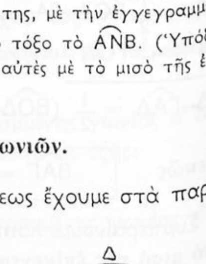
6) Δίνεται ὁ κύκλος (O, R). Φέρνουμε δύο εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες τὸν τέμνουν ἀντιστοίχως στὰ σημεῖα Β, Γ καὶ Α, Δ καὶ συναντιοῦνται στὸ σημεῖο Ζ, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου. Νὰ συγκρίνετε τὴν τιμὴ τῆς γωνίας, ποὺ ἔχει κορυφὴ τὸ z, μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰ τῶν τιμῶν τῶν τόξων τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς. (Ὑπόδειξη: Φέρετε τὴν ΑΓ ἢ ΒΔ).

7) Δίνεται ὁ κύκλος (O, R) καὶ μία χορδή του ΑΒ (σχ. 6). Στὸ ἕνα ἄκρο της (π.χ. στὸ Α) φέρετε τὴν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ψ′Αψ. Νὰ συγκρίνετε τὴ γωνία $\widehat{\psi AB}$, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴ χορδὴ ΑΒ καὶ τὴν ἐφαπτομένη στὸ ἄκρο της, μὲ τὴν ἐγγεγραμμένη $\widehat{A\Theta B}$, ποὺ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο τὸ $\overset{\frown}{ANB}$. (Ὑπόδειξη: Συγκρίνετε τὶς γωνίες αὐτὲς μὲ τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης $\widehat{BOA}$. Διατυπῶστε τὴ σχετικὴ πρόταση).

§ 3. Ἐφαρμογὲς τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν.

Ἄμεσες ἐφαρμογὲς τῆς προηγούμενης προτάσεως ἔχουμε στὰ παρακάτω:

1. Ἔστω ὁ κύκλος (O,R) καὶ οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες σ' αὐτὸν $\widehat{A\Gamma B}$, $\widehat{A\Delta B}$, $\widehat{AEB}$, *ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο* $\overset{\frown}{AB}$. *Συγκρίνετε αὐτὲς τὶς γωνίες (σχ. 7).*

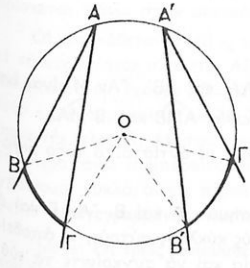

σχ. 7.

Οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ κάθε μία ἀπ' αὐτὲς εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ἴδιας ἐπίκεντρης γωνίας $\widehat{AOB}$. Δηλαδὴ

$$\widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Delta B} = \widehat{AEB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

Ἄρα: **Οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο, εἶναι ἴσες.**

2. *Ἔχουμε τὶς ἐγγεγραμμένες στὸν ἴδιο κύκλο Ο γωνίες* $\widehat{ΒΑΓ}$ *καὶ* $\widehat{Β'Α'Γ'}$, *οἱ ὁποῖες ἔχουν τὰ ἀντίστοιχά τους τόξα ἴσα,* $\overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{Β'Γ'}$. *Νὰ συγκρίνετε αὐτὲς τὶς γωνίες (σχ. 8).*



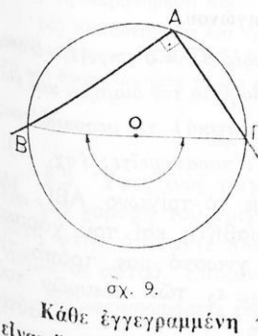
σχ. 8.

Στὶς γωνίες αὐτὲς ἔχουμε τὶς ἰσότητες $\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\,\widehat{ΒΟΓ}$ καὶ $\widehat{Β'Α'Γ'} = \frac{1}{2}\,\widehat{Β'Ο'Γ'}$.
Ἐπειδὴ $\overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{Β'Γ'}$, ἔχουμε $\widehat{ΒΟΓ} = \widehat{Β'ΟΓ'}$, ὁπότε καὶ $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{Β'Α'Γ'}$, γιατὶ εἶναι μισὰ ἴσων γωνιῶν.

Στὸν ἴδιο κύκλο (ἢ σὲ ἴσους κύκλους) δύο ἐγγεγραμμένες γωνίες, ποὺ ἔχουν ἴσα τὰ ἀντίστοιχά τους τόξα, εἶναι ἴσες.

Ἀντιστρόφως, ἂν οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{ΒΑΓ}$, $\widehat{Β'Α'Γ'}$ εἶναι ἴσες, δηλαδὴ $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{Β'Α'Γ'}$, θὰ εἶναι καὶ οἱ ἀντίστοιχές τους ἐπίκεντρες γωνίες ἴσες, δηλαδὴ $\widehat{ΒΟΓ} = \widehat{Β'ΟΓ'}$ καὶ συνεπῶς $\overset{\frown}{ΒΓ} = \overset{\frown}{Β'Γ'}$. Ὥστε παρατηροῦμε ὅτι **δύο ἴσες ἐγγεγραμμένες γωνίες στὸν ἴδιο κύκλο (ἢ σὲ ἴσους κύκλους) ἔχουν ἴσα ἀντίστοιχα τόξα.**

3. *Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία σ' αὐτὸν* $\widehat{ΒΑΓ}$, *ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχο τόξο ἴσο μὲ ἕνα ἡμικύκλιο. Μετρῆστε τὴν γωνία αὐτὴ (σχ. 9).*



σχ. 9.

Μετρώντας την διαπιστώνουμε ὅτι εἶναι 90° (ἢ 1 ὀρθ.). Αὐτὸ δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς: Ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ὀρθή, γιατὶ ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία εἶναι μία **εὐθεία γωνία**. Δηλαδὴ $\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\,\widehat{ΒΟΓ} = \frac{1}{2}\cdot 2$ ὀρθ. $= 1$ ὀρθή.

Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία σὲ κύκλο, τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστοιχο τόξο εἶναι ἕνα ἡμικύκλιο, εἶναι ὀρθή.

Σημείωση.

Τὴν πρόταση τῆς § 2 «κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία σὲ κύκλο ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο» τὴν αἰτιολογήσαμε μὲ τὴ βοήθεια ἄλλων προτάσεων, ποὺ εἶναι γνωστὲς ἀπὸ τὴν προηγούμενη τάξη. Τὸ ἴδιο ἐπαναλάβαμε στὶς προτάσεις 1, 2, 3 τῆς § 3. Τὴν ἐργασία αὐτὴ τὴν ὀνομάζουμε ἀπόδειξη καὶ τὶς προτάσεις τὶς λέμε **θεωρήματα**.

Ὥστε: **Θεώρημα** εἶναι μία πρόταση, τῆς ὁποίας ἀποδείχνουμε τὴν ἀλήθεια.

Στὴν Α' τάξη μάθαμε μερικὲς βασικὲς προτάσεις, τὶς ὁποῖες δὲν ἀποδείξαμε, ὅπως π.χ. «ἀπὸ δύο σημεῖα διέρχεται μία καὶ μόνο εὐθεία» ἢ «ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται ἐκτὸς εὐθείας, διέρχεται μία μόνο παράλληλη πρὸς αὐτήν». Τὶς προτάσεις αὐτὲς τὶς ὀνομάζουμε **ἀξιώματα**.

Ὥστε: **ἀξίωμα** εἶναι μία βασικὴ πρόταση, ποὺ τὴν δεχόμαστε σὰν ἀληθῆ.

Ἀσκήσεις

8) Σ' ἕναν κύκλο νὰ φέρετε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΑ' καὶ ΒΒ'. Ἂν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου Α'Β', νὰ συγκρίνετε τὶς γωνίες $\widehat{AMB}$ καὶ $\widehat{B'MA}$.

9) Βρεῖτε τὸ εἶδος τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας σὲ κύκλο μὲ ἀντίστοιχο τόξο μεγαλύτερο, ἴσο, ἢ μικρότερο ἀπὸ ἡμικύκλιο.

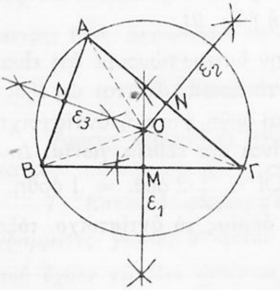
10) Δύο κύκλοι μὲ κέντρα Ο καὶ Ο' τέμνονται στὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἂν Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα τοῦ Α ὡς πρὸς τοὺς κύκλους αὐτούς, ν' ἀποδείξετε ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Β, Δ βρίσκονται πάνω σὲ μία εὐθεία καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ εὐθ. τμήματα ΟΟ' καὶ ΓΔ. (Σημ. Μὲ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{AB\Delta}$ θὰ βοηθηθεῖτε νὰ ἀποδείξετε τὴν πρόταση).

11) Σημειώνουμε στὸν κύκλο (Ο, **R**) 4 διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἔτσι ποὺ νὰ εἶναι $\widehat{AB}=70^o$, $\widehat{B\Gamma}=100^o$, $\widehat{\Gamma\Delta}=110^o$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A\Delta\Gamma}$. Τί παρατηρεῖτε; Τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὶς γωνίες $\widehat{BA\Delta}$ καὶ $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

Β'. ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟ

1ο. Μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου.

§ 4. *Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΒΓ = 5 cm, ΑΓ=6 cm, ΑΒ=4 cm. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα φέρετε (προσεκτικὰ) τὶς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν του. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 10).*



σχ. 10.

Κατασκευάζουμε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα φέρνουμε κατὰ τὸν γνωστό μας τρόπο τὶς μεσοκαθέτους ε_1, ε_2, ε_3 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὲς **συντρέχουν** σ' ἕνα σημεῖο Ο.

Συγκρίνουμε (μὲ τὸ διαβήτη) τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὰ εἶναι ἴσα, δηλαδὴ ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. Ἂν μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ ἀκτίνα ΟΑ γράψουμε κύκλο, αὐτὸς διέρχεται ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφὲς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος τοῦ τριγώνου.

Ἄρα: **Οἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο, ποὺ εἶναι τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου.**

Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὸ παραπάνω ἀποτέλεσμα, στηριζόμαστε στὴ γνωστή μας πρόταση: «Κάθε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθ. τμήματος ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα του» καὶ «κάθε σημεῖο, ποὺ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθ. τμήματος, βρίσκεται πάνω στὴν μεσοκάθετο αὐτοῦ».

Οἱ μεσοκάθετοι ε_1 καὶ ε_2 τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο, (ἐπειδὴ οἱ κάθετοι πάνω σ' αὐτὲς ΑΓ καὶ ΒΓ τέμνονται). Ἐπειδὴ τὸ Ο βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο ε_1, ἔχουμε ΟΒ=ΟΓ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ Ο βρίσκεται καὶ πάνω στὴ μεσοκάθετο ε_2, ἔχουμε καὶ ΟΓ=ΟΑ. Συνεπῶς ΟΑ=ΟΒ. Ἐπειδὴ τό Ο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετό της ε_3. Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε, ὅτι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. Ἂν μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ ἀκτίνα ΟΑ γράψουμε κύκλο, αὐτὸς περνᾶ ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφὲς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος τοῦ τριγώνου.

Ὥστε: **Οἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν κάθε τριγώνου συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο, ποὺ εἶναι τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου.**

Ἀσκήσεις:

12) Φέρετε τὶς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἑνὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσετε γιὰ τὴ θέση τοῦ κέντρου τῶν περιγεγραμμένων κύκλων σ' αὐτά;

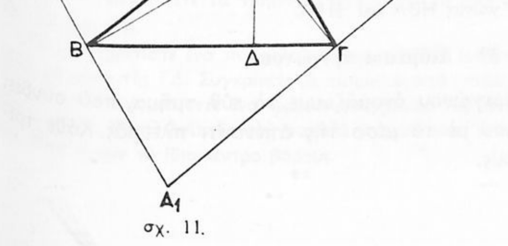
13) Φέρετε τὶς μεσοκαθέτους τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ βάση του. Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογῆστε μὲ συλλογισμοὺς τὴ παρατήρησή σας.

14) Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Μὲ βάσεις τὶς πλευρές του σχηματίστε ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΚΓ, ΓΛΑ καὶ φέρετε τὰ ὕψη τους ΟΟ΄, ΚΚ΄, ΛΛ΄. Προεκτείνετέ τα καὶ δικαιολογῆστε τὸ ὅτι αὐτὰ συντρέχουν στὸ ἴδιο σημεῖο.

2ο. Ὕψη ἑνὸς τριγώνου.

§ 5. **Ὕψος** ἑνὸς τριγώνου ὀνομάζουμε τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖο συνδέει μιὰ κορυφὴ τοῦ τριγώνου μὲ τὸ ἴχνος τῆς καθέτου ἀπὸ τὴν κορυφὴ αὐτὴ στὴν ἀπέναντι πλευρά. Ὕψος ὅμως θεωρεῖται καὶ ὁ φορέας τοῦ τμήματος αὐτοῦ. Ἑπομένως κάθε τρίγωνο ἔχει τρία ὕψη.

Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ=3,5 cm, ΒΓ=4 cm καὶ ΑΓ=2,5 cm. Φέρετε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα καὶ τοῦ διαβήτη τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 11).



σχ. 11.

Φέρνουμε μὲ προσοχὴ τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ τρία ὕψη **συντρέχουν** στὸ ἴδιο σημεῖο Η, ποὺ τὸ ὀνομάζουμε **ὀρθόκεντρο** τοῦ τριγώνου. Ἔχουμε λοιπὸν τὴν πρόταση: **Τὰ ὕψη κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἕνα σημεῖο.**

Ἂν θέλουμε νὰ **αἰτιολογήσουμε** αὐτὴ τὴν παρατήρηση μὲ συλλογισμούς, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: (σχ. 11).

Γράφουμε τρεῖς εὐθεῖες, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α, Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου καὶ εἶναι παράλληλες πρὸς τὶς πλευρές του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Οἱ τρεῖς αὐτὲς εὐθεῖες τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν τὸ τρίγωνο $Α_1Β_1Γ_1$.

Ἔχουμε: $\left.\begin{matrix} ΑΒ_1 // ΒΓ \\ ΓΒ_1 // ΑΒ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $ΑΒΓΒ_1$ εἶναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow ΑΒ_1 = ΒΓ$

καὶ $\left.\begin{matrix} ΒΓ_1 // ΑΓ \\ ΑΓ_1 // ΒΓ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $ΑΓ_1ΒΓ$ εἶναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow ΑΓ_1 = ΒΓ$.

Ἑπομένως $ΑΒ_1 = ΑΓ_1$. Ἄρα τὸ σημεῖο Α εἶναι τὸ μέσο τῆς $Β_1Γ_1$. Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ΑΒΓ(κάθετο) στὴ ΒΓ εἶναι κάθετο στὴν παράλληλό της $Β_1Γ_1$, στὸ μέσο της Α. Δηλαδὴ ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς $Β_1Γ_1$ τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$. Ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν $Γ_1Α_1$, $Α_1Β_1$ τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$.

Οἱ μεσοκάθετοι ὅμως τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$, ὅπως ξέρουμε πιά, συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο Η. Ἄρα καὶ τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ **συντρέχουν** σ' ἕνα σημεῖο Η, τὸ **ὀρθόκεντρο** τοῦ τριγ. ΑΒΓ. Ὥστε: **Τὰ ὕψη κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἕνα σημεῖο.**

Παρατηρήσεις

1) Ἐὰν τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στὸ Α, ἐπειδὴ δύο ὕψη του εἶναι οἱ κάθετες πλευρές του, τὸ ὀρθόκεντρό του εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας του.

2) Ἐὰν τὸ τρίγωνο εἶναι ὀξυγώνιο, τὸ ὀρθόκεντρό του βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου, καὶ ἂν εἶναι ἀμβλυγώνιο, βρίσκεται στὸ ἐξωτερικό του.

Ἀσκήσεις

15) Νὰ κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ καὶ νὰ βρεῖτε τὸ ὀρθόκεντρό του Η. Νὰ ὁρίσετε τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΗ, ΒΓΗ καὶ ΓΑΗ.

16) Σ' ἕνα τρίγωνο ΔΕΖ φέρετε τὰ ὕψη ΔΔ' καὶ ΕΕ'. Αὐτὰ τέμνονται στὸ σημεῖο Η. Ἀπὸ τὸ Η φέρετε κάθετο στὴν ΕΔ. Περνᾶ αὐτὴ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Ζ; (Γιατί;)

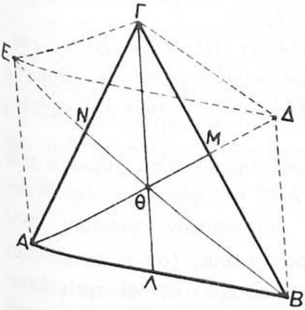
17) Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρετε τὰ ὕψη ΒΒ' καὶ ΓΓ'. Ἀπὸ τὸ σημεῖο τομῆς τους Η φέρετε τὴν ΑΗ. Περνᾶ αὐτὴ ἀπὸ τὸ μέσο τῆς ΒΓ; (Γιατί;)

18) Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{Α}$ εἶναι 70°. Τὰ ὕψη του ΑΔ καὶ ΒΕ τέμνονται στὸ Η. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{ΗΒΑ}$ καὶ $\widehat{ΗΓΑ}$.

3ο. Διάμεσοι τριγώνου.

§ 6. **Διάμεσο** ἑνὸς τριγώνου ὀνομάζουμε τὸ εὐθ. τμῆμα, ποὺ συνδέει μία κορυφὴ τοῦ τριγώνου μὲ τὸ μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς διαμέσους.

Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ=4 cm, ΒΓ=5 cm καὶ ΑΓ=6 cm. Μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων φέρετε (προσεκτικὰ) τὶς διαμέσους τοῦ τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 12).



σχ. 12.

Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τὶς διαμέσους ΑΜ, ΒΝ καὶ ΓΛ καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὲς **συντρέχουν** στὸ ἴδιο σημεῖο Θ. Ἂν συγκρίνουμε μὲ τὸ διαβήτη τὰ εὐθ. τμήματα ΑΘ καὶ ΘΜ, τὰ ΒΘ καὶ ΘΝ, καθὼς καὶ τὰ ΓΘ καὶ ΘΛ, θὰ διαπιστώσουμε ὅτι ΑΘ $=$ 2ΘΜ καὶ ΘΜ $= \frac{1}{3}$ ΑΜ (ἢ ΑΘ $= \frac{2}{3}$ ΑΜ). Ὁμοίως ἔχουμε ΝΘ $= \frac{1}{3}$ ΒΝ καὶ ΘΛ $= \frac{1}{3}$ ΓΛ.

Ἑπομένως: **Οἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο, ποὺ λέγεται κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσο κάθε πλευρᾶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου (ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη κορυφή).**

Μποροῦμε νὰ **αἰτιολογήσουμε** τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο:

Στὶς προεκτάσεις τῶν ΑΜ καὶ ΒΝ (πέρα ἀπὸ τὰ Μ καὶ Ν) παίρνουμε ἀντιστοίχως τμήματα ΜΔ$=$ΜΘ καὶ ΝΕ$=$ΝΘ. Φέρνουμε τὶς ΓΕ καὶ ΓΔ. Τὸ τετράπλευρο ΓΘΒΔ ποὺ σχηματίζεται εἶναι παραλληλόγραμμο, ἐπειδὴ οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται (ΓΜ$=$ΜΒ καὶ ΘΜ$=$ΜΔ). Ὁμοίως καὶ τὸ ΓΘΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἐπειδὴ ΓΝ$=$ΝΑ καὶ ΘΝ$=$ΝΕ. Συνεπῶς ΒΔ$=$//ΓΘ καὶ ΑΕ$=$//ΓΘ. Ἄρα ΒΔ$=$//ΑΕ. Ὥστε τὸ ΑΒΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατὶ ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες. Τότε ὅμως ἔχουμε ΑΘ$=$ΘΔ καὶ ΒΘ$=$ΘΕ (γιατὶ οἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται). Ἀλλὰ ΘΔ$=$2ΘΜ, ὥστε ΑΘ$=$ 2ΘΜ καὶ ΘΜ$= \frac{1}{3}$ΑΜ. Ὁμοίως συμπεραίνουμε ὅτι ΘΝ$= \frac{1}{3}$ ΒΝ. Μὲ ὅμοιο τρόπο ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ διάμεσος ΓΛ τέμνει τὴν ΒΝ σ' ἕνα σημεῖο, ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὸ Ν τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ΒΝ, δηλαδὴ στὸ σημεῖο Θ, τὸ ὁποῖο ἀπέχει ἀπὸ τὸ Λ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ΓΛ. Ὥστε: **Οἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο. Αὐτὸ ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσο κάθε πλευρᾶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη κορυφή.**

Ἀσκήσεις

19) Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ βρεῖτε τὸ κέντρο βάρους του.

20) Φέρετε τὴ διάμεσο ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πάρτε σ' αὐτὴν ἕνα τμῆμα ΑΘ$= \frac{2}{3}$ ΑΜ. Συγκρίνετε τὰ τμήματα, στὰ ὁποῖα οἱ ΒΘ καὶ ΓΘ τέμνουν τὶς πλευρές του ΑΓ καὶ ΑΒ.

21) Σχηματίστε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἑνῶστε μὲ εὐθ. τμῆμα τὴν κορυφὴ Α μὲ τὸ μέσο τῆς ΓΔ. Συγκρίνετε τὰ τμήματα, στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ ΑΜ ἀπὸ τὴν ΒΔ.

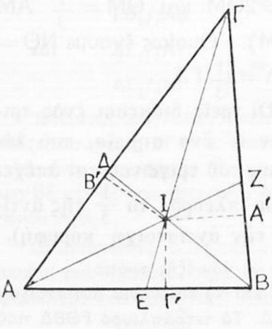
22) Νὰ σχηματίσετε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καὶ νὰ πάρετε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ν στὸ ἐπίπεδο τοῦ παραλληλογράμμου. Ἀποδείξετε ὅτι τὰ τρίγωνα ΝΑΓ καὶ ΝΒΔ ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο βάρους.

4º. Διχοτόμοι τριγώνου.

§ 7. Ὀνομάζουμε ἐσωτερικὴ **διχοτόμο** ἑνὸς τριγώνου τὴ διχοτόμο μιᾶς γωνίας του. Διχοτόμο ὀνομάζουμε καὶ τὸ τμῆμα τῆς προηγούμενης ἀπὸ τὴν κορυφὴ μέχρι τὴν ἀπέναντι πλευρά.

Κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς ἐσωτερικὲς διχοτόμους.

Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ=4 cm, ΒΓ=5 cm, ΑΓ = 6 cm. Μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων (διαβήτη, χάρακα) νὰ φέρετε (προσεκτικὰ) τὶς ἐσωτερικὲς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 13).



σχ. 13.

Κατασκευάζουμε κατὰ τὰ γνωστά μας τὸ τρίγωνο ΑΒΓ καὶ φέρνουμε τὶς διχοτόμους τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν του $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$. Παρατηροῦμε, (ἂν ἡ κατασκευὴ ἔχει γίνει μὲ προσοχὴ) ὅτι οἱ τρεῖς ἐσωτερικὲς διχοτόμοι του **συντρέχουν** στὸ ἴδιο σημεῖο Ι. Φέρνουμε τὶς ἀποστάσεις ΙΑ′, ΙΒ′, ΙΓ′ τοῦ σημείου Ι ἀπὸ τὶς πλευρὲς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Συγκρίνουμε τὶς ἀποστάσεις αὐτὲς μὲ τὸ διαβήτη καὶ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ἴσες, δηλαδὴ ΙΑ′ = ΙΒ′ = ΙΓ′.

Ἑπομένως: **Οἱ τρεῖς ἐσωτερικὲς διχοτόμοι κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἕνα σημεῖο, ποὺ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρές του.**

Μποροῦμε νὰ **αἰτιολογήσουμε** τὴν παρατήρηση αὐτὴ μὲ συλλογισμούς, ἂν στηριχτοῦμε στὶς γνωστὲς ἰδιότητες: «Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρές της» καὶ «κάθε ἐσωτερικὸ σημεῖο μιᾶς γωνίας, τὸ ὁποῖο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρές της, εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς».

Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΖ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευρὰ ΒΓ στὸ Ζ. Ἡ ἐσωτ. διχοτόμος ΒΔ τῆς γωνίας $\widehat{B}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΖ τέμνει τὴν πλευρά του ΑΖ σ' ἕνα σημεῖο Ι.

Σημειώνουμε μὲ τὰ Α′, Β′, Γ′ τοὺς πόδες τῶν καθέτων, οἱ ὁποῖες ἄγονται ἀπὸ τὸ Ι στὶς πλευρὲς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Τὸ σημεῖο Ι, ἐπειδὴ βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο ΑΖ τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ. Εἶναι ὅμως καὶ σημεῖο τῆς διχοτόμου ΒΔ, ἄρα ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς ΑΒ καὶ ΒΓ. Ἑπομένως ἀπέχει ἐξ ἴσου καὶ ἀπὸ τὶς πλευρὲς ΒΓ καὶ ΑΓ. Ἐπειδὴ τὸ Ι εἶναι ἐσωτερικὸ σημεῖο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συμπεραίνουμε ὅτι τὸ Ι βρίσκεται καὶ πάνω στὴ διχοτόμο ΓΕ τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ..

Ὥστε: **Οἱ τρεῖς ἐσωτερικὲς διχοτόμοι κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἕνα σημεῖο, ποὺ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρές του.**

Παρατηρήσεις

1. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ΙΓ′ = ΙΒ′ = ΙΑ′ (τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ι ἀπὸ τὶς πλευρὲς) παρατηροῦμε ὅτι, ἐὰν μὲ κέντρο τὸ σημεῖο Ι καὶ ἀκτίνα ΙΑ′ =

$=IB' = I\Gamma'$ γράψουμε ἕναν κύκλο, αὐτὸς θὰ ἐφάπτεται στὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στὰ σημεῖα Α', Β', Γ' (γιατί;). Ὥστε τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο συντρέχουν οἱ ἐσωτερικὲς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τὸ κέντρο ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται στὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου καὶ λέγεται **ἐγγεγραμμένος** κύκλος στὸ τρίγωνο.

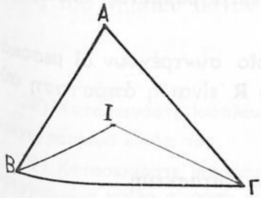
2. Στὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο οἱ διάμεσοι εἶναι καὶ ὕψη καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του. Ἄρα τὸ κοινὸ σημεῖο τους εἶναι τὸ κέντρο βάρους του, τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τὸ ὀρθόκεντρο τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Λέμε ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ **κέντρο** τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Σημ. Οἱ προτάσεις τῶν § 4, 5, 6, 7 εἶναι θεωρήματα.

Ἀσκήσεις

23) Κατασκευάστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο καὶ βρεῖτε τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διχοτόμων του. Ἐξηγῆστε γιατὶ βρίσκεται αὐτὸ πάνω στὸ ὕψος του.

24) Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἀντιστοίχως 60° καὶ 50°. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία $B\widehat{I}\Gamma$ (τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων του ΒΙ, ΙΓ), (σχ. 14).



σχ. 14.

25) Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^\circ$) νὰ φέρετε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἂν Ι εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τους, μετρῆστε τὴ γωνία $\widehat{BI\Gamma}$. Μπορεῖτε νὰ αἰτιολογήσετε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό;

26) Κατασκευάστε ἕναν κύκλο (Ο, R = 2 cm) Φέρετε τρεῖς ἐφαπτόμενές του, οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀνὰ δύο στὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Ἀπὸ ποιὸ σημεῖο περνοῦν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ;

27) Κατασκευάστε ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Φέρετε τὴ διαγώνιό του ΑΓ καὶ τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma A}$. Αὐτὲς τέμνονται πάνω στὴ διαγώνιο ΒΔ τοῦ τετραγώνου. Γιατί;

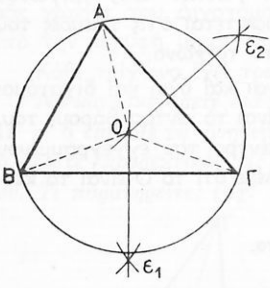
§ 8. Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου. Κατασκευή.

Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ κατασκευάστε ἕναν κύκλο, ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ τριγώνου.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὴν § 4 ὑπάρχει ἕνας κύκλος, ὁ ὁποῖος περνᾶ ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α,Β,Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Αὐτὸν τὸν ὀνομάσαμε περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου. Ἂν Ο εἶναι τὸ κέντρο του, τότε ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ (ἐπειδὴ εἶναι ἀκτίνες).

Ἑπομένως τὸ κέντρο Ο εἶναι τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο συντρέχουν οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Κατασκευή:



σχ. 15.

Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα φέρνουμε τὶς μεσο καθέτους $ε_1$ καὶ $ε_2$ τῶν πλευρῶν του ΒΓ κα ΑΓ. Οἱ $ε_1$ καὶ $ε_2$ τέμνονται σὲ ἕνα (μοναδικὸ σημεῖο Ο, ποὺ εἶναι τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμ μένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, γιατὶ ἔχουμ ΟΒ = ΟΓ, ἐπειδὴ τὸ Ο βρίσκεται πάνω στὴ $ε_1$, καὶ ΟΓ = ΟΑ, ἐπειδὴ τὸ Ο βρίσκετα πάνω στὴν $ε_2$. Ἑπομένως ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

Ἄρα, ἐὰν μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ ἀκτίνα ΟΑ γράψουμε κύκλο (Ο, ΟΑ), αὐτὸς θὰ περάσε ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ συνεπῶς θὰ εἶνα ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ

Ἂν τώρα προσπαθήσουμε νὰ γράψουμε καὶ ἄλλον κύκλο περιγε γραμμένο στὸ τρίγωνο ΑΒΓ, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι αὐτὸς ταυτίζετα μὲ τὸν πρῶτο (ἐπειδὴ οἱ $ε_1$ καὶ $ε_2$ τέμνονται σὲ ἕνα μόνο σημεῖο).

Ὥστε: **Ὑπάρχει ἕνας κύκλος (καὶ μόνον ἕνας), ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶ τρεῖς κορυφὲς ἑνὸς τριγώνου.** Αὐτὸς λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος τοῦ τριγώνου.

Τὸ κέντρο του Ο εἶναι τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο συντρέχουν οἱ μεσοκά θετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. **Ἀκτίνα του R** εἶναι ἡ ἀπόσταση αὐ τοῦ τοῦ σημείου ἀπὸ μία κορυφή του.

§ 9. Ἐγγεγραμμένος κύκλος σ' ἕνα τρίγωνο. Κατασκευή.

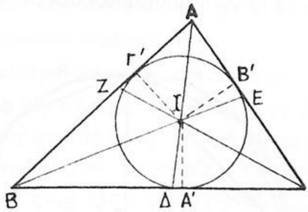
Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἕναν κύκλο, ποὺ νὰ ἐφάπτετα καὶ στὶς τρεῖς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ἐσωτερικά.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὴν § 7 ὑπάρχει ἕνας κύκλος, ποὺ ἐφά πτεται στὶς πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τὸ κέντρο Ι τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο συντρέχουν οἱ ἐσωτερικὲς διχο τόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ὁ κύκλος αὐτὸς λέγεται **ἐγγεγραμ μένος** κύκλος στὸ τρίγωνο.

Κατασκευή:

Σχεδιάζουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα φέρνουμε τὶς ἐσωτερικὲς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Γ}$ τοῦ τριγώνου (σχ. 16). Αὐτές, ὅπως γνωρίζουμε (§ 7), συντρέχουν σὲ ἕνα σημεῖο Ι.

Μὲ κέντρο τὸ Ι καὶ ἀκτίνα τὴν ἀπόσταση τοῦ Ι ἀπὸ τὴ ΒΓ, τὴν ΙΑ', γράφουμε κύκλο (Ι, ΙΑ'), ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται στὴν πλευρὰ ΒΓ στὸ σημεῖο Α'. Ὁ κύκλος αὐτὸς ἐφάπτεται καὶ στὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, γιατί, ἂν φέρουμε τὶς ἀποστάσεις ΙΓ', ΙΒ' ἀπὸ τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἔχουμε (καθὼς μάθαμε) ΙΒ' = ΙΓ' = ΙΑ'. Ἄρα ὁ κύκλος (Ι, ΙΑ') εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος στὸ τρίγωνο ΑΒΓ, γιατὶ οἱ πλευρές του εἶναι κάθετες στὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΙΑ', ΙΒ', ΙΓ'.



σχ. 16.

Ἂν ἐπιχειρήσουμε νὰ γράψουμε καὶ ἄλλον κύκλο ἐγγεγραμμένο στὸ ἴδιο τρίγωνο ΑΒΓ, αὐτὸς θὰ ταυτισθεῖ μὲ τὸν πρῶτο (γιατὶ οἱ διχοτόμοι ΓΖ, ΒΕ τέμνονται σὲ ἕνα μόνο σημεῖο).

Ὥστε: **Ὑπάρχει ἕνας κύκλος καὶ μόνο ἕνας ἐγγεγραμμένος στὸ τρίγωνο ΑΒΓ. Τὸ κέντρο του Ι** εἶναι τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο συντρέχουν οἱ τρεῖς ἐσωτερικὲς διχοτόμοι τοῦ τριγώνου. **Ἀκτίνα του ρ,** εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ μιὰ πλευρά του.

Ἀσκήσεις

28) Κατασκευάστε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὰ 4 cm καὶ σχεδιάστε τὸν περιγεγραμμένο κύκλο του.

29) Κατασκευάστε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὰ 5 cm καὶ σχεδιάστε τὸν ἐγγεγραμμένο κύκλο σ' αὐτό.

30) Νὰ κατασκευάσετε τὸν περιγεγραμμένο κύκλο ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἑνὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου.

31) Νὰ σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ νὰ κατασκευάσετε τὸν περιγεγραμμένο κύκλο του. Νὰ βρεῖτε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ὀρθόκεντρου τοῦ τριγώνου ὡς πρὸς τὶς πλευρές του. Τί παρατηρεῖτε;

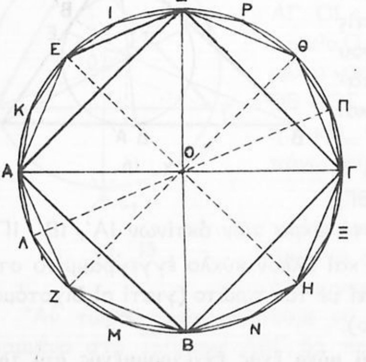
32) Νὰ πάρετε τρία σημεῖα, ποὺ δὲν βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεία, καὶ νὰ κατασκευάσετε τὸν κύκλο, ποὺ περνᾶ ἀπ' αὐτά.

Γ. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΥΚΛΟΥ ΣΕ 2^{ν} ($\nu \in N$ καὶ $\nu > 1$) ἢ $3 \cdot 2^{\nu}$ (ὅπου ν ἀκέρ.) ΙΣΑ ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ.

§ **10**. *Κατασκευάστε κύκλο (O, R) καὶ διαιρέστε τον σὲ 4 ἴσα τόξα. Ἔπειτα διαιρέστε τὸν κύκλο σὲ 8, 16, . . . ἴσα τόξα καὶ ἑνῶστε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ σημεῖα κάθε διαιρέσεώς του. Τί παρατηρεῖτε; (σχ, 17).*

Σχηματίζουμε έναν κύκλο μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα R.

Γιὰ νὰ τὸν διαιρέσουμε σὲ 4 ἴσα τόξα, φέρνουμε δύο διαμέτρους κά-θετες, τὶς ΑΓ καὶ ΒΔ. Οἱ ἐπί-κεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, ΔΟΑ εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ εἶναι ὀρ-θές. Ἐπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα τους εἶναι ἴσα, δηλαδὴ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$.



σχ. 17.

Φέρνουμε τὶς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κι ἔτσι ὁρίζουμε ἕνα κυρτὸ τετρά-πλευρο, ποὺ ἔχει τὶς πλευρές του ἴσες, δηλαδὴ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ (χορδὲς ἴσων τόξων τοῦ ἴδιου κύ-κλου),καὶ τὶς γωνίες του ἴσες $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$, γιατὶ εἶναι ὀρθὲς (γωνίες ἐγγεγραμμένες σὲ ἡμικύκλιο). Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ λέγεται **κανο-νικὸ τετράπλευρο ἢ τετράγωνο.**

Ὥστε: **Κανονικὸ πολύγωνο λέγεται τὸ πολύγωνο, ποὺ ἔχει τὶς πλευρές του ἴσες καὶ τὶς γωνίες του ἴσες.** Τὸ μῆκος μιᾶς ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρές του τὸ συμβολίζουμε μὲ τὸ λ.

Ἂν φέρουμε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OA}$, ὁ κύκλος διαιρεῖται σὲ 8 ἴσα τόξα (ἀντίστοιχα ἴσων ἐπίκεντρων γωνιῶν). Φέρνουμε τὶς χορδὲς τῶν τόξων αὐτῶν καὶ ἔτσι κατασκευάζουμε ἕνα κυρτὸ ὀκτάγωνο. Τὸ ὀκτάγωνο αὐτὸ εἶναι κανονικό, γιατὶ ἔχει τὶς πλευρές του ἴσες, ἐπειδὴ εἶναι χορδὲς ἴσων τόξων, καὶ τὶς γωνίες του ἴσες, ἐπειδὴ καθεμιά τους εἶναι ἐγγεγραμμένη στὸν κύκλο καὶ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο ἴσο μὲ τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κύκλου.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐργασίας διαιροῦμε τὸν κύκλο σὲ 16 ἴσα τόξα, 32 κλπ. καὶ ὁρίζουμε κανονικὸ δεκαεξάγωνο, ἔπειτα κυρτὸ κανονικὸ πολύ-γωνο μὲ 32 πλευρές κ.ο.κ.

Βασισμένοι στὶς προηγούμενες κατασκευὲς λέμε ὅτι μποροῦμε νὰ διαιρέσουμε τὸν κύκλο (μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα) σὲ $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5, \ldots, 2^\nu$ ἴσα τόξα καὶ νὰ ὁρίσουμε μ' αὐτὸν τὸν τρόπο κανονικὰ κυρτὰ πολύγωνα μὲ $2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^\nu$ πλευρές.

Ὁ κύκλος (O, R) ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὶς κορυφὲς τῶν κανονικῶν αὐτῶν πολυγώνων, λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** καὶ τὰ πολύγωνα εἶναι ἐγ-γεγραμμένα στὸν κύκλο αὐτό. Οἱ ἀκτίνες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ποὺ καταλήγουν στὶς κορυφὲς τῶν κανονικῶν πολυγώνων, λέγονται **ἀκτίνες** τῶν πολυγώνων.

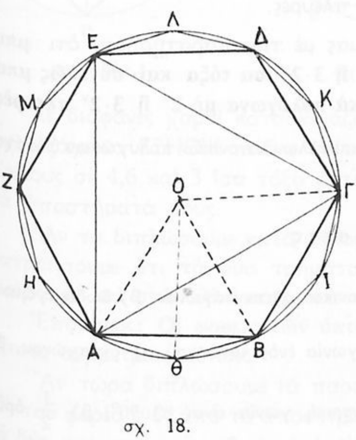
Ἡ κυρτὴ γωνία δύο διαδοχικῶν ἀκτίνων τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται **κεντρικὴ** γωνία τοῦ πολυγώνου καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{360}{\nu}$, ὅπου ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Τὸ κέντρο Ο τοῦ κύκλου λέγεται **κέντρο** τοῦ καν. πολυγώνου.

Οἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὶς πλευρές του εἶναι ἴσες (ἀποστάσεις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ ἴσες χορδές του). Ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν πλευρὰ λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὸ μῆκος του συμβολίζεται μὲ τὸ α (π.χ. τοῦ τετραγώνου α_4, τοῦ καν. ἑξαγώνου α_6 κ.ο.κ. Ἀντιστοίχως τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τους συμβολίζεται μὲ λ_4, λ_6 κ.ο.κ.).

Ἂν ἕνα κανονικὸ πολύγωνο εἶναι κυρτό, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $\Sigma = (\nu-2)\cdot 2$ ὀρθ. $= (2\nu-4)$ ὀρθ. (ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν του). Ἐπειδὴ ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες, καθεμιὰ εἶναι ἴση μὲ $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθ. $= \left(2-\frac{4}{\nu}\right)$ ὀρθ.

§ 11. *Νὰ κατασκευάσετε κύκλο (Ο, R) καὶ νὰ ἐγγράψετε σ' αὐτὸν ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο, ἀφοῦ διαιρέσετε τὸν κύκλο σὲ 6 ἴσα τόξα. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 18).*



σχ. 18.

Κατασκευάζουμε κύκλο μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα R. Ὑποθέτουμε ὅτι μὲ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἔχουμε διαιρέσει τὸν κύκλο σὲ 6 ἴσα τόξα. Τὸ τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΟΑ = ΟΒ, ἐπειδὴ εἶναι ἀκτίνες τοῦ κύκλου) καὶ ἔχει τὴ γωνία $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (κεντρικὴ γωνία). Ἄρα καὶ οἱ γωνίες του εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Δηλαδὴ τὸ τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρο. Ἑπομένως ΑΒ = R.

Γιὰ νὰ διαιρέσουμε λοιπὸν ἕναν κύκλο σὲ 6 ἴσα τόξα, γράφουμε 6 διαδοχικὲς χορδὲς ἴσες μὲ τὴν ἀκτίνα. Ἑνώνουμε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ποὺ διαιροῦν τὸν κύκλο, καὶ σχηματίζουμε ἕνα κυρτὸ ἑξάγωνο. Αὐτὸ εἶναι κανονικό, ὅπως μποροῦμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε, ἂν συγκρίνουμε τὶς πλευρές του μὲ τὸ διαβήτη καὶ τὶς γωνίες του μὲ διαφανὲς χαρτὶ (ἢ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο). Μποροῦμε ὅμως καὶ νὰ αἰτιολογήσουμε τὴ διαπίστωσή μας αὐτὴ μὲ τὴν παρατήρηση ὅτι οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ εἶναι **ἴσες**, γιατὶ τὶς πήραμε κατὰ τὴν κατασκευή του ἴσες μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, καὶ οἱ γωνίες του εἶναι **ἴσες**, ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμένες στὸν ἴδιο κύκλο κι ἔχουν ἀντίστοιχα τόξα ἴσα μὲ $\frac{4}{6}$ τοῦ κύκλου.

Γιὰ νὰ ἐγγράψουμε στὸν κύκλο κανονικὸ **δωδεκάγωνο**, τὸν διαιροῦμε σὲ 12 ἴσα τόξα. Γιὰ νὰ γίνει αὐτό, φέρνουμε τὶς διχοτόμους τῶν κεντρικῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἑνώνουμε τὰ διαδοχικὰ σημεῖα διαιρέσεως τοῦ κύκλου καὶ κατασκευάζουμε ἔτσι κανονικὸ δωδεκάγωνο (γιατί;). Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐργασίας διαιροῦμε τὸν κύκλο σὲ 24, 48 κ.ο.κ. ἴσα τόξα καὶ ἐγγράφουμε σ' αὐτὸν κανονικὸ **εἰκοσιτετράγωνο**, ἔπειτα κυρτὸ κανονικὸ πολύγωνο μὲ 48 πλευρὲς κ.ο.κ. Τελικὰ συνδέουμε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα ἀνὰ δύο τὶς μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς Α,Γ,Ε τοῦ ἐγγεγραμμένου στὸν κύκλο κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Ἔτσι σχηματίζεται ἕνα τρίγωνο ΑΓΕ ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο, τὸ ὁποῖο εἶναι ἰσόπλευρο, διότι ΑΓ = = ΓΕ = ΕΑ, ἐπειδὴ εἶναι χορδὲς ἴσων τόξων τοῦ κύκλου. Αὐτὸ εἶναι τὸ **κανονικὸ τρίγωνο.** Ἀπὸ τὶς προηγούμενες κατασκευὲς συμπεραίνουμε ὅτι μποροῦμε νὰ διαιρέσουμε ἕναν κύκλο σὲ $3,\ 3{\cdot}2=6,\ 3{\cdot}2^2=12,\ 3{\cdot}2^3,\ 3{\cdot}2^4,\ \ldots,\ 3{\cdot}2^\nu$ ἴσα τόξα καὶ νὰ ἐγγράψουμε κανονικὸ πολύγωνο στὸν κύκλο μὲ $3,\ 3{\cdot}2=6,\ 3{\cdot}2^2=12,\ 3{\cdot}2^3,\ \ldots,\ 3{\cdot}2^\nu$ πλευρές.

Συνοψίζουμε τὰ συμπεράσματά μας μὲ τὴν παρατήρηση, ὅτι **μποροῦμε νὰ διαιρέσουμε τὸν κύκλο σὲ 2^ν ἢ $3\cdot2^\nu$ ἴσα τόξα καὶ συνεπῶς μποροῦμε νὰ ἐγγράψουμε σ' αὐτὸν κανονικὰ πολύγωνα μὲ 2^ν ἢ $3\cdot2^\nu$ πλευρές.**

Σημείωση. Μὲ τὴν ἐγγραφὴ στὸν κύκλο καὶ ἄλλων κανονικῶν πολυγώνων θ' ἀσχοληθοῦμε σὲ ἀνώτερη τάξη.

Ἀσκήσεις

33) Βρεῖτε τὴν κεντρικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ α) πενταγώνου, β) δωδεκαγώνου, γ) εἰκοσιτετραγώνου, δ) τριγώνου.

34) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ α) ὀκταγώνου, β) δεκαεξαγώνου, γ) δωδεκαγώνου;

35) Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι α) 90^o, β) $\frac{1}{2}$ ὀρθ., γ) 30^o καὶ δ) 24^o;

36) Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἡ ἐσωτερικὴ γωνία εἶναι α) 108^o, β) $\frac{4}{3}$ ὀρθ., γ) 135^o, δ) $\frac{5}{3}$ ὀρθ. καὶ ε) 175^o;

37) Νὰ κατασκευάσετε ἕναν κύκλο μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα R = 5 cm καὶ νὰ ἐγγράψετε σ' αὐτὸν ἕνα κανονικὸ εἰκοσιτετράγωνο.

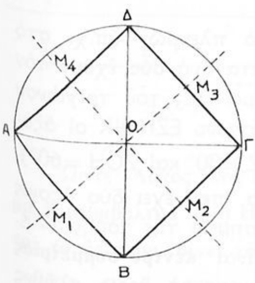
38) Νὰ κατασκευάσετε κανονικὸ ἑξάγωνο μὲ πλευρὰ μήκους 4 cm.

39) Νὰ γράψετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 3 cm καὶ νὰ κατασκευάσετε ἕνα κανονικὸ ὀκτάγωνο, ποὺ νὰ ἔχει τὸ ΑΒ ὡς πλευρά.

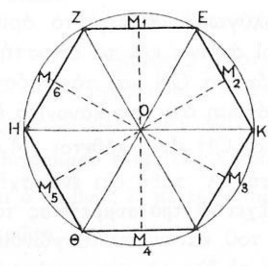
40) Νὰ ἐγγράψετε σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα R κανονικὸ ἑξάγωνο καὶ νὰ ἑνώσετε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Ἔτσι ὁρίζεται ἕνα νέο ἑξάγωνο. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσετε γι' αὐτό;

§ 12. Στοιχεῖα συμμετρίας καθενὸς ἀπὸ τὰ κανονικὰ πολύγωνα καὶ ὕπαρξη τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου σ' αὐτά.

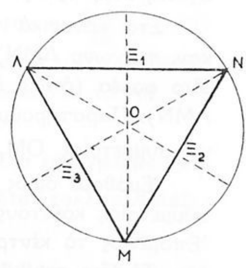
Κατασκευάστε σὲ διαφανὲς χαρτὶ ἕνα τετράγωνο, ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο καὶ ἕνα κανονικὸ τρίγωνο καὶ βρεῖτε τοὺς ἄξονες συμμετρίας τοῦ καθενὸς τους. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 19).



σχ. 19α.



σχ. 19β.



σχ. 19γ.

Σὲ διαφανὲς χαρτὶ κατασκευάζουμε ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ, ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ κι ἕνα κανονικὸ τρίγωνο ΛΜΝ διαιρώντας τρεῖς κύκλους σὲ 4,6 καὶ 3 ἴσα τόξα ἀντιστοίχως καὶ γράφουμε τὶς ἀκτίνες καὶ τὰ ἀποστήματά τους.

Ἂν τὰ διπλώσουμε κατὰ μῆκος τοῦ φορέα μιᾶς ἀκτίνας τους, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὰ δύο τμήματα καθενός τους ταυτίζονται. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ στὰ ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα.

Ἑπομένως: **Οἱ φορεῖς τῶν ἀκτίνων τῶν κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτῶν.**

Ἂν τώρα διπλώσουμε τὰ παραπάνω κανονικὰ πολύγωνα κατὰ μῆκος τοῦ φορέα ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἀποστήματά τους, θὰ παρατηρήσουμε πάλι ὅτι τὰ δύο τμήματα τοῦ καθενὸς ἀπ' αὐτὰ ταυτίζονται. Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε καὶ στὰ ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα. Ἄρα **οἱ φορεῖς τῶν ἀποστημάτων ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.** Παρατηροῦμε λοιπόν, ὅτι τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἔχουν ὡς ἄξονες συμμετρίας τοὺς φορεῖς τῶν ἀκτίνων τους καὶ τοὺς φορεῖς τῶν ἀποστημάτων τους.

Στὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ **ἄρτιο** πλῆθος πλευρῶν (π.χ. στὸ καν.

ἑξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ) δύο ἀκτίνες βρίσκονται πάνω στὸν ἴδιο φορέα (ὅπως οἱ ΟΗ καὶ ΟΚ τοῦ καν. ἑξαγώνου ΕΖΗΘΙΚ). Ὥστε: **Ὁ ἀριθμὸς τῶν φορέων τῶν ἀκτίνων ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ἄρτιο πλῆθος πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του** (στὸ ΕΖΗΘΙΚ εἶναι τρεῖς). Ἐπίσης τὸ πλῆθος τῶν φορέων τῶν ἀποστημάτων τους εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, γιατὶ τὰ ἀποστήματά τους ἀνὰ δύο ἔχουν τὸν ἴδιο φορέα (ὅπως π.χ. στὸ κανονικὸ ἑξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ τὰ ἀποστήματα OM_1 καὶ OM_4, δηλαδὴ τὸ πλῆθος τῶν φορέων τῶν ἀποστημάτων του εἶναι $\frac{6}{2} = 3$). Τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο λοιπὸν ἔχει 6 ἄξονες συμμετρίας.

Ὥστε: **Ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ ἄρτιο πλῆθος πλευρῶν ν, ἔχει ν ἄξονες συμμετρίας.**

Στὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ περιττὸ ἀριθμὸ πλευρῶν (π.χ. στὸ καν. τρίγωνο ΛΜΝ) οἱ ἀκτίνες καὶ τὰ ἀποστήματα ἀνὰ δύο ἔχουν τὸν ἴδιο φορέα (ὅπως ἡ ἀκτίνα ΟΝ καὶ τὸ ἀπόστημα $O\Xi_3$ τοῦ τριγώνου ΛΜΝ). Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι στὸ κανονικὸ ἑξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ οἱ ἄξονες συμμετρίας OM_1 καὶ ΟΗ εἶναι κάθετοι ($M_1\widehat{O}Z = 30^\circ$ καὶ $Z\widehat{O}H = 60^\circ$).

Ἐμάθαμε ὅμως στὴν Α' τάξη ὅτι ἕνα σχῆμα, ποὺ ἔχει δύο ἄξονες συμμετρίας κάθετους, **ἔχει κέντρο συμμετρίας** τὸ σημεῖο τῆς τομῆς τους. Ἑπομένως τὸ κέντρο τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι **κέντρο συμμετρίας του. Τὸ ἴδιο συμβαίνει σὲ ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἄρτιο πλῆθος πλευρῶν**. Στὸ κανονικὸ τρίγωνο ΛΜΝ δὲν ὑπάρχουν κάθετοι ἄξονες συμμετρίας. Ἑπομένως αὐτὸ δὲν ἔχει **κέντρο συμμετρίας. Τὸ ἴδιο συμβαίνει σ' ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ περιττὸ πλῆθος πλευρῶν.** Ὥστε στὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἄρτιο πλῆθος πλευρῶν τὸ κέντρο τους εἶναι **κέντρο συμμετρίας**, ἐνῷ στὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ περιττὸ ἀριθμὸ πλευρῶν τὸ κέντρο τους **δὲν εἶναι κέντρο συμμετρίας.**

Τὸ κέντρο καθενὸς ἀπὸ τὰ κανονικὰ πολύγωνα εἶναι κέντρο ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται στὶς πλευρές του, γιατί, ὅπως μάθαμε, αὐτὸ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρές. Ὁ κύκλος αὐτὸς λέγεται **ἐγγεγραμμένος** στὸ καν. πολύγωνο.

Κάθε κανονικὸ πολύγωνο ἔχει ἕναν ἐγγεγραμμένο κύκλο, ποὺ εἶναι ὁμόκεντρος μὲ τὸν περιγεγραμμένο καὶ ἔχει ἀκτίνα τὸ ἀπόστημα τοῦ καν. πολυγώνου.

Ἀσκήσεις

41) Νὰ κατασκευάσετε κανονικὸ ὀκτάγωνο καὶ νὰ φέρετε τοὺς ἄξονες συμμετρίας του. Βρεῖτε τὰ ζεύγη τῶν κάθετων ἀξόνων.

42) Κάνετε τὸ ἴδιο καὶ γιὰ ἕνα κανονικὸ δωδεκάγωνο.

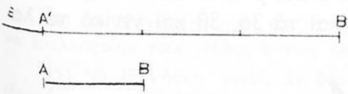
43) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα κανονικὸ δεκαεξάγωνο καὶ ἕνα κανονικὸ δωδεκάγωνο καὶ νὰ γράψετε τοὺς ἐγγεγραμμένους κύκλους σὲ καθένα ἀπ' αὐτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Α. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

§ 13. *Πάρτε μιὰ εὐθεία ε καὶ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Πάνω στὴν ε, μὲ ἀρχὴ τὸ Α′, πάρτε τρία εὐθύγραμμα τμήματα διαδοχικὰ καὶ ἴσα μὲ τὸ ΑΒ. Ἔστω Β′ τὸ ἄκρο τοῦ τελευταίου (σχ. 20).*



σχ. 20.

Λέμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος Α′Β′ πρὸς τὸ ΑΒ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ γράφουμε $\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = 3$. Ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ἐκεῖνος μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθεῖ τὸ ΑΒ, γιὰ νὰ δώσει τὸ Α′Β′.

Ὥστε: **Λόγος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος Α πρὸς ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα Β (συμβολικὰ $\frac{Α}{Β}$) εἶναι ὁ ἀριθμὸς λ, μὲ τὸν ὁποῖο ὅταν πολλαπλασιάζεται τὸ δεύτερο, δίνει τὸ πρῶτο.**

Ἂν ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι εὐθύγρ. τμήματα, λέμε «τὸ ΓΔ ἔχει πρὸς τὸ ΕΖ λόγο λ» ἢ συντομότερα «ΓΔ πρὸς ΕΖ ἴσον λ» καὶ γράφουμε (ΓΔ, ΕΖ) = λ ἢ συνηθέστερα: $\boxed{\frac{ΓΔ}{ΕΖ} = λ}$

ὥστε $\boxed{\frac{ΓΔ}{ΕΖ} = λ \Leftrightarrow ΓΔ = λ \cdot ΕΖ}$

Τιμὴ εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ὁ λόγος του πρὸς τὴ μονάδα μετρήσεως ἢ συγκρίσεως.

Τὴν τιμὴ τοῦ ΑΒ τὴ συμβολίζουμε μὲ (ΑΒ). Τὸ ΑΒ εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα. Ἡ τιμὴ (ΑΒ) εἶναι ἀριθμός. Ἂν α εἶναι ἡ μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων καὶ $ΑΒ = 5 \cdot α$, $ΓΔ = 8 \cdot α$ τότε $\frac{ΑΒ}{α} = 5$ καὶ $\frac{ΓΔ}{α} = 8$. Συνεπῶς (ΑΒ) = 5 καὶ (ΓΔ) = 8 (1)

Θεωροῦμε τὸ λόγο $\frac{ΒΑ}{ΓΔ}$. Ἂν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = λ$ τότε $ΑΒ = λ \cdot ΓΔ$. Ἂν ἀντικαταστήσουμε ἀπὸ τὶς (1) τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ μὲ τὰ ἴσα τους, θὰ πάρουμε $5α = λ \cdot 8 \cdot α$, συνεπῶς $5 = 8λ$ (ἐπειδὴ τὸ γινόμενο εὐθ. τμήματος α ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸ εἶναι μονότιμο) ἄρα $λ = \frac{5}{8}$ δηλαδή: $\boxed{\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{(ΑΒ)}{(ΓΔ)}}$

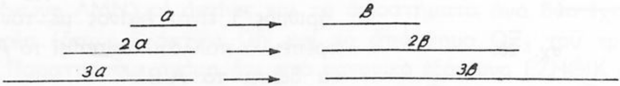
Ὁ λόγος δύο εὐθύγραμμων τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν τιμῶν τους (ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα).

Σημείωση: Αὐτὸ ἰσχύει γενικὰ γιὰ τὸ λόγο δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν. Ἐπίσης ἀληθεύει ὅτι: Ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τους (ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα). Τὴν ἰδιότητα αὐτὴ θὰ τὴ χρησιμοποιήσουμε στὴ μέτρηση τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων.

§ 14. Ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα.

Εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἀντίστοιχά τους, ὅταν τὰ γινόμενα δύο ἀντίστοιχων τμημάτων ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ εἶναι ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα.

Δηλαδή, ἂν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β εἶναι ἀντίστοιχα, τότε καὶ τὰ 2α καὶ 2β εἶναι ἀντίστοιχα ὅπως καὶ τὰ 3α, 3β καὶ γενικὰ τὰ λα καὶ λβ (λ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀριθμός).



σχ· 21.

Ἂν συγκρίνουμε τὸ λόγο δύο τμημάτων ἀπὸ αὐτὰ π.χ. τῶν 2α καὶ 3α μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχών τους (ἀντίστοιχά τους εἶναι τὰ 2β καὶ 3β) παρατηροῦμε ὅτι $\frac{2\alpha}{3\alpha} = \frac{2}{3}$ καὶ $\frac{2\beta}{3\beta} = \frac{2}{3}$ (θεωροῦμε ὡς μονάδα τὸ α γιὰ τὰ πρῶτα καὶ τὸ β γιὰ τὰ δεύτερα). Ὥστε: **Ἂν εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο (ὁποιωνδήποτε) ἀπὸ αὐτὰ ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχών τους.**

Ἂν σὲ ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα τὰ Α'Β' καὶ Γ'Δ' εἶναι ἀντίστοιχα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, τὴν ἰσότητα τῶν λόγων $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ τὴ λέμε **ἀναλογία τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων** ΑΒ, ΓΔ, Α'Β', Γ'Δ'. Μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τοὺς λόγους τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων μὲ τοὺς λόγους τῶν τιμῶν τους καὶ νὰ ἔχουμε τὴν $\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{(A'B')}{(\Gamma'\Delta')}$, ἡ ὁποία εἶναι **ἀναλογία ἀριθμῶν**.

Ἀναλογία τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ ἔχουμε, ὅταν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Οἱ α καὶ δ λέγονται **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας, οἱ β καὶ γ λέγονται **μέσοι** ὅροι αὐτῆς.

Οἱ α καὶ γ **ἡγούμενοι** καὶ οἱ β καὶ δ **ἑπόμενοι** ὅροι. Γιὰ τὶς ἀναλογίες τῶν ἀριθμῶν μπορεῖτε νὰ δεῖτε στὴν Ἀριθμητικὴ (κεφ. 4 § 100, 101).

Ἀναφέρουμε μὲ συντομία μερικὲς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν, τὶς ὁποῖες θὰ χρησιμοποιήσουμε στὰ ἑπόμενα.

1) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \beta\gamma=\alpha\delta$ συνεπῶς **τὸ γινόμενο τῶν μέσων ὅρων μιᾶς ἀναλογίας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων της.**

2) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$. **Σὲ μιὰ ἀναλογία μποροῦμε νὰ ἐναλλάξουμε τοὺς ἄκρους ἢ τοὺς μέσους ὅρους της.**

3) $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha'+\beta'+\gamma'}$. **Λόγοι ἴσοι μεταξύ τους εἶναι ἴσοι καὶ μὲ τὸ λόγο ποὺ ἔχει ἀριθμητὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴ τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν.**

Ἀσκήσεις.

44) Νὰ ἐξηγήσετε γιατὶ καὶ σὲ μιὰ ἀναλογία εὐθύγραμμων τμημάτων μποροῦμε νὰ ἐναλλάξουμε τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους ὅρους.

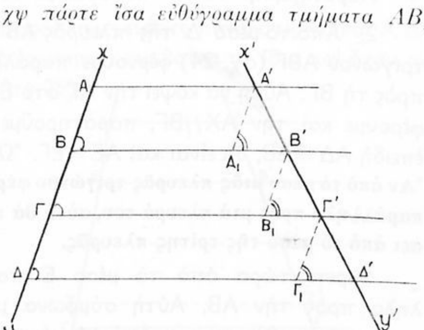
45) Νὰ ἐξηγήσετε γιατί, ἂν δύο λόγοι εὐθύγραμμων τμημάτων εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ μὲ τὸ λόγο τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων.

Ἐπίσης ἂν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ δεῖξτε ὅτι $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$

Τὸ Θεώρημα τοῦ Θαλῆ

1ο. Θεώρημα.

§ 15. *Πάνω σὲ μιὰ εὐθεία χψ πάρτε ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Δ φέρτε εὐθεῖες παράλληλες μεταξύ τους. Ἔπειτα φέρτε μιὰ ἄλλη εὐθεία, ποὺ νὰ τέμνει τὶς παράλληλες αὐτὲς στὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἀντιστοίχως. Συγκρίνετε (μὲ τὸ διαβήτη) τὰ εὐθ. τμήματα Α′Β′, Β′Γ′, Γ′Δ′.*



σχ. 22.

Τὰ συγκρίνουμε καὶ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ἴσα.

Ἑπομένως : **Ἂν παράλληλες εὐθεῖες τέμνουν δύο ἄλλες καὶ ὁρίζουν πάνω στὴ μιὰ ἴσα εὐθ. τμήματα, θὰ ὁρίζουν ἴσα εὐθ. τμήματα καὶ πάνω στὴν ἄλλη.**

Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ φέρνουμε παράλληλες πρὸς τὴ χψ (ἄρα καὶ παράλληλες μεταξύ τους). Αὐτὲς τέμνουν τὶς BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ στὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ τετράπλευρα ABA_1A' καὶ $B\Gamma B_1B'$ εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἐπομένως $A'A_1=AB$ καὶ $B'B_1=B\Gamma$. Ἀλλὰ $AB=B\Gamma$· συνεπῶς $A'A_1=B'B_1$.

Συγκρίνουμε τώρα τὰ τρίγωνα $A'A_1B'$ καὶ $B'B_1\Gamma'$. Αὐτὰ εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν:

$A'A_1=B'B_1$, ὅπως δείξαμε πιὸ πάνω.

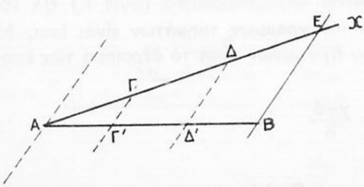
$A_1\widehat{A'B'}=B_1\widehat{B'\Gamma'}$ ἐπειδὴ εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν παραλλήλων $A'A_1$, $B'B_1$, οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀπὸ τὴν $A'B'$, καὶ

$\widehat{A}_1=\widehat{B}_1$, ἐπειδὴ $\widehat{A}_1=\widehat{B}$, $\widehat{B}_1=\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{B}$ (γιατί;)

Ἐπομένως $A'B'=B'\Gamma'$. Ὁμοίως $B'\Gamma'=\Gamma'\Delta'$ κ.ο.κ.

Ἐφαρμογὲς

1. Νὰ διαιρεθεῖ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σὲ τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα (σχ. 23). Φέρνουμε μιὰ ἡμιευθεία ΑΧ καὶ παίρνουμε σ' αὐτὴν τὰ ἴσα διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Φέρνουμε τὴ ΒΕ καὶ ἀπὸ τὰ Δ, Γ καὶ Α φέρνουμε παράλληλες πρὸς αὐτή, οἱ ὁποῖες τέμνουν τὸ ΑΒ στὰ σημεῖα Δ′ καὶ Γ′. Τότε θὰ εἶναι $A\Gamma'=\Gamma'\Delta'=\Delta'B$.



σχ. 23.

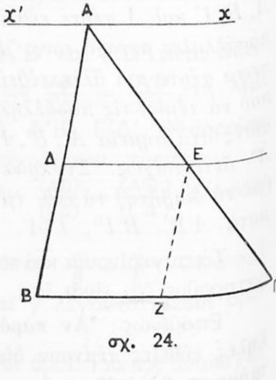
Παρατήρηση: Τὸ ΑΓ′ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο $\frac{1}{3}$ ΑΒ.

2. Ἀπὸ τὸ μέσο Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 24) φέρνουμε παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ. Αὐτὴ θὰ κόψει τὴν ΑΓ στὸ Ε. Ἂν φέρουμε καὶ τὴν ΑΧ//ΒΓ, παρατηροῦμε ὅτι, ἐπειδὴ ΑΔ = ΔΒ, θὰ εἶναι καὶ ΑΕ = ΕΓ. Ὥστε:

Ἂν ἀπὸ τὸ μέσο μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου φέρουμε παράλληλο πρὸς μιὰ πλευρά του, αὐτὴ θὰ περάσει ἀπὸ τὸ μέσο τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Φέρετε τώρα ἀπὸ τὸ μέσο Ε παράλληλο πρὸς τὴν ΑΒ. Αὐτὴ σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο θὰ περάσει ἀπὸ τὸ μέσο Ζ τῆς ΒΓ καί, ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρο ΔΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμο, θὰ εἶναι ΔΕ = ΒΖ, δηλαδὴ

$$\Delta E=\frac{1}{2}\,B\Gamma.$$



σχ. 24.

3. Σημειῶστε τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Συγκρίνετε τὴ ΔΕ μὲ τὴ ΒΓ.

Ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴ ΒΓ, γιατὶ ἀπὸ τὸ Δ περνᾶ μία μόνο παράλληλος πρὸς τὴ ΒΓ. Αὐτὴ ὅμως ἡ παράλληλος, ὅπως εἴδαμε στὸ προηγούμενο, περνᾶ καὶ ἀπὸ τὸ Ε καὶ δύο σημεῖα ὁρίζουν μιὰ εὐθεία. Τὸ τμῆμα ΔΕ εἶναι ἴσο, ὅπως εἴδαμε, μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ ΒΓ. Μὲ συντομία γράφουμε τὶς δύο αὐτὲς ἰδιότητες ΔΕ =// $\frac{1}{2}$ ΒΓ. Ὥστε:

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ ὁποῖο ἑνώνει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν τρίτη πλευρὰ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ μισό αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

46) Νὰ διαιρεθεῖ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σὲ πέντε ἴσα μέρη.

47) Νὰ πάρετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καὶ νὰ βρεῖτε τὰ $\frac{2}{5}\cdot$ ΑΒ.

48) Δίνεται ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Ἀπὸ τὸ μέσο Μ τῆς διαγωνίου ΒΔ νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις του, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ στὸ Ν καὶ τὴν ἄλλη διαγώνιο στὸ Λ. Νὰ συγκρίνετε τὸ τμῆμα ΝΛ μὲ τὸ ΓΔ καὶ τὸ ΜΛ μὲ τὴ διαφορὰ τῶν βάσεων.

49) Νὰ πάρετε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ νὰ ἐξετάσετε μὲ τὰ γεωμετρικὰ ὄργανα ἂν εἶναι κορυφὲς ἑνὸς παραλληλογράμμου.

50) Νὰ ἐξηγήσετε γιατὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, διχοτομοῦνται.

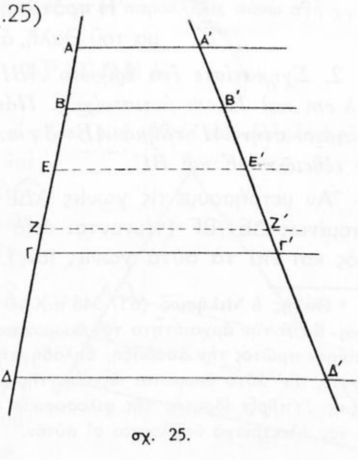
2ο. Θεώρημα

§ 16. Στὴν § 15 σχ. 24, εἴδαμε ὅτι ἂν ΑΒ = ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ Α′Β′ = = Γ′Δ′. Τότε ὅμως $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'} = 1$. Δηλαδὴ τὰ ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὶς παράλληλες εὐθεῖες πάνω στὶς ΑΔ καὶ Α′Δ′, εἶναι ἀνάλογα. Γεννᾶται τώρα τὸ ἐρώτημα: συμβαίνει τὸ ἴδιο καὶ ὅταν τὸ ΑΒ εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ ΓΔ; (σχ.25)

Κατασκευάστε ἕνα τραπέζιο ΑΒΒ′Α′ (ΑΑ′//ΒΒ′) μὲ ΑΒ = 3 cm, Α′Β′ = 5 cm καὶ στὴν προέκταση τοῦ ΑΒ νὰ πάρετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ = 6 cm.

Ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ νὰ φέρετε παράλληλες πρὸς τὶς βάσεις τοῦ τραπεζίου, οἱ ὁποῖες τέμνουν τὴν προέκταση τῆς Α′Β′ στὰ σημεῖα Γ′ καὶ Δ′ ἀντιστοίχως. Μετρῆστε τὸ Γ′Δ′ καὶ συγκρίνετε τοὺς λόγους: $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ *καὶ* $\frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$

Βρίσκουμε Γ′Δ′ = 10 cm,



σχ. 25.

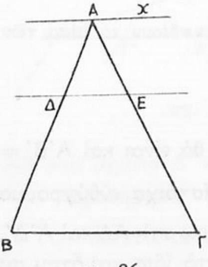
ἑπομένως $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'} = \frac{1}{2}$. Ἄρα: **Ἂν παράλληλες εὐθεῖες τέμνουν δύο ἄλλες, τὰ ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὶς παράλληλες, εἶναι ἀνάλογα.**

Γιὰ νὰ **αἰτιολογήσουμε** τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Στὴν προέκταση τῆς AB παίρνουμε τμῆμα BE=AB. Ἡ παράλληλος ἀπὸ τὸ E πρὸς τὶς AA′ καὶ BB′ τέμνει τὴν A′B′ στὸ E′ καὶ εἶναι A′B′=B′E′. Τὰ εὐθ. τμήματα AB καὶ A′B′ εἶναι ἀντίστοιχα (βρίσκονται μεταξὺ τῶν ἴδιων παραλλήλων). Ἀλλὰ καὶ τὰ AE καὶ A′E′ εἶναι ἀντίστοιχα. Αὐτὰ ὅμως εἶναι ἴσα μὲ 2AB καὶ 2A′B′ ἀντιστοίχως. Ἂν θεωρήσουμε καὶ τὸ AZ=3.AB, θὰ πάρουμε ὡς ἀντίστοιχό του τὸ A′Z′=3.A′B′ κ.ο.κ.

Ἀποδεικνύεται (ὅπως θὰ μάθουμε σὲ μεγαλύτερη τάξη) ὅτι, ἂν ΓΔ=λ·AB, τότε Γ′Δ′=λ·A′B′ (λ ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀριθμός).

Ἑπομένως: **Τὰ τμήματα ποὺ ὁρίζονται πάνω στὴν εὐθεία AB ἀπὸ τὶς παράλληλες εὐθεῖες, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχά τους, ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὶς ἴδιες παράλληλες πάνω στὴν A′B′.**

Ἐφαρμογές.



σχ. 26.

1. Μιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς μιὰ πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου διαιρεῖ τὶς ἄλλες πλευρές του σὲ τμήματα ἀνάλογα.

Φέρνουμε μιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Αὐτὴ τέμνει τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ στὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Ἂν φέρουμε καὶ τὴν ΑΧ//ΒΓ, θὰ συμπεράνουμε σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο ὅτι:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}, \quad \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta B}{AB} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}.$$

Ἡ πρόταση αὐτὴ ποὺ εἶναι γνωστὴ σὰν Θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ἀποδίδεται στὸ Θαλῆ τὸ Μιλήσιο(*).

2. *Σχηματίστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ μήκη πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσα μὲ 8 cm καὶ 12 cm ἀντιστοίχως. Πάνω στὴν ΑΒ πάρτε τμῆμα ΑΔ=2cm καὶ πάνω στὴν ΑΓ τμῆμα ΑΕ=3 cm. Νὰ βρεῖτε τὴ σχετικὴ θέση (σχ. 26) τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΒΓ.*

Ἂν μετρήσουμε τὶς γωνίες $\widehat{A\Delta E}$ καὶ $\widehat{AB\Gamma}$, θὰ βροῦμε ὅτι εἶναι ἴσες. Ἑπομένως ΔΕ//ΒΓ (τέμνονται ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίες ἴσες). Μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε, δηλαδή

---

* **Θαλῆς ὁ Μιλήσιος** (637-548 π.Χ.): Μεγάλος Ἕλληνας μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος. Κατὰ τὴν ἀρχαιότητα τὸν θεωροῦσαν ἕναν ἀπὸ τοὺς ἑπτὰ σοφούς. Αὐτὸς χρησιμοποίησε πρῶτος τὴν ἀπόδειξη, δηλαδὴ τὴ δικαιολόγηση μιᾶς ἀλήθειας μὲ βάση ἄλλες γνωστές. Γι' αὐτὸ θεωρεῖται ἱδρυτὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ γενικὰ τῆς ἐπιστήμης. Ὑπῆρξε ἱδρυτὴς τῆς φιλοσοφικῆς σχολῆς τῆς Μιλήτου. Οἱ πρῶτες γνώσεις γιὰ τὸν ἠλεκτρισμὸ ὀφείλονται σ' αὐτόν.

νὰ αἰτιολογήσουμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό. Παρατηροῦμε ὅτι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{4}$ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{4}$, ἑπομένως $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Ἄρα ἡ παράλληλος πρὸς τὴ ΒΓ, ποὺ φέρνεται ἀπὸ τὸ Δ, ὀφείλει (κατὰ τὸ προηγούμενο) νὰ περάσει ἀπὸ τὸ Ε.

Ὥστε: **Ἂν μιὰ εὐθεία διαιρεῖ δύο πλευρὲς τριγώνου σὲ τμήματα ἀνάλογα, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτη πλευρά του.**

Ἀσκήσεις

51) Νὰ διαιρεθεῖ ἕνα εὐθ. τμῆμα σὲ δύο τμήματα, ποὺ νὰ ἔχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

52) Δίνονται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καὶ δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β. Νὰ διαιρέσετε τὸ ΑΒ σὲ τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰ α καὶ β.

53) Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ = 5 cm καὶ ΑΓ = 6 cm. Πάρτε πάνω στὴν ΑΒ ἕνα τμῆμα $ΑΔ = \frac{1}{3} ΑΓ$ καὶ φέρετε ἀπὸ τὸ Δ// πρὸς τὴ ΒΓ. Ἂν αὐτὴ τέμνει τὴν ΑΓ στὸ Ζ, βρεῖτε τὸ μῆκος τοῦ ΑΖ.

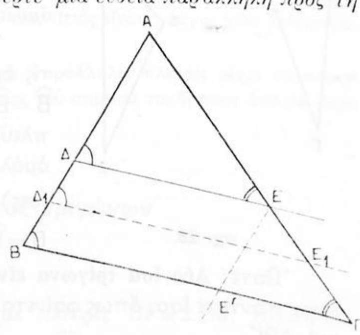
54) Ἀπὸ τὸ κέντρο βάρους ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ. Ἂν αὐτὴ τέμνει τὴν ΑΒ στὸ Δ, ὑπολογίστε τοὺς λόγους $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}$, $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}$, $\frac{ΑΒ}{ΔΒ}$.

55) Νὰ κατασκευάσετε τὴ διχοτόμο ΑΔ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ Β νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὴν ΑΔ. Ἂν αὐτὴ τέμνει τὴν προέκταση τῆς ΑΓ στὸ Ε, νὰ συγκρίνετε τὰ ΑΒ καὶ ΑΕ. Νὰ συγκρίνετε ἐπίσης τοὺς λόγους $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$, $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

56) Νὰ κατασκευάσετε τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες ε, ε′, ε″ ὥστε ἡ ε νὰ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ε′ 3 cm καὶ ἡ ε′ ἀπὸ τὴν ε″ 5 cm. Νὰ τὶς κόψετε μὲ μιὰ εὐθεία χψ καὶ νὰ ὑπολογίσετε τοὺς λόγους τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν οἱ παράλληλες πάνω στὴ χψ.

Β. ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

§ **17.** *Πάρτε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ φέρτε μιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴ ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνει τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ στὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Συγκρίνετε τὶς γωνίες καὶ τὶς πλευρὲς τῶν τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ. Τί παρατηρεῖτε;*



σχ. 27.

Παρατηροῦμε ὅτι, $\widehat{Α} = \widehat{Α}$, $\widehat{Β} = \widehat{Δ}$ καὶ $\widehat{Γ} = \widehat{Ε}$ (εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ, οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀπὸ τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ).

Γιὰ τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ ἔχουμε:

$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Φέρνουμε τώρα ἀπὸ τὸ Ε παράλληλο πρὸς τὴν ΑΒ. Αὐτὴ τέμνει τὴν ΒΓ στὸ Ε΄. Σύμφωνα πάλι μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ θὰ εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΕ'}{ΒΓ}$.

Τὸ τετράπλευρο ὅμως ΔΒΕ΄Ε εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἄρα ΒΕ΄ = = ΔΕ, ἑπομένως $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Ἔχουμε λοιπὸν $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὶς ἀντίστοιχες γωνίες τους ἴσες καὶ τὶς πλευρές, ποὺ βρίσκονται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν, ἀνάλογες.

Λέμε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια.

Οἱ ἀντίστοιχες κορυφὲς Α,Α, Δ,Β καὶ Ε,Γ τῶν ἴσων γωνιῶν λέγονται **ὁμόλογες κορυφές**. Οἱ γωνίες τους λέγονται **ὁμόλογες γωνίες**, καὶ οἱ πλευρές, οἱ ὁποῖες συνδέουν δύο ὁμόλογες κορυφὲς ἢ βρίσκονται ἀπέναντι ὁμόλογων γωνιῶν, λέγονται **ὁμόλογες πλευρές**.

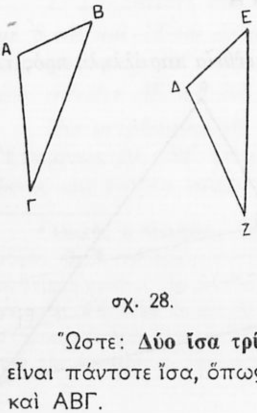
Θὰ λέμε ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὶς ὁμόλογες γωνίες τους ἴσες καὶ τὶς ὁμόλογες πλευρές τους ἀνάλογες.

$$\boxed{\widehat{Α}=\widehat{Δ},\ \widehat{Β}=\widehat{Ε},\ \widehat{Γ}=\widehat{Ζ} \text{ καὶ } \frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Leftrightarrow \text{Τριγ. ΑΒΓ ὅμοιο τριγ. ΔΕΖ.}}$$

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παραπάνω, μιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς μιὰ πλευρὰ τριγώνου ὁρίζει ἕνα νέο τρίγωνο ὅμοιο μὲ αὐτό.

Σημείωση: Οἱ ὁμόλογες κορυφὲς πρέπει νὰ γράφονται μὲ τὴν ἴδια τάξη.

§ 18. Ἐφαρμογές.



σχ. 28.

1. Πάρτε δύο ἴσα τρίγωνα (μὲ τὴν βοήθεια διαφανοῦς χαρτιοῦ) τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ καὶ συγκρίνετε τὶς γωνίες τους καὶ τοὺς λόγους τῶν ὁμόλογων πλευρῶν τους.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχουν τὶς ὁμόλογες γωνίες τους ἴσες, δηλαδὴ $\widehat{Α}=\widehat{Δ}$, $\widehat{Β}=\widehat{Ε}$ καὶ $\widehat{Γ}=\widehat{Ζ}$. Οἱ λόγοι τῶν ὁμόλογων πλευρῶν εἶναι ἴσοι μὲ τὴ μονάδα (γιατὶ οἱ ὁμόλογες πλευρὲς τῶν ἴσων τριγώνων εἶναι ἴσες). Ἑπομένως: $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}$ καὶ $\widehat{Α}=\widehat{Δ}$, $\widehat{Β}=\widehat{Ε}$ καὶ $\widehat{Γ}=\widehat{Ζ}$.

Ὥστε: **Δύο ἴσα τρίγωνα εἶναι ὅμοια.** Ἀλλὰ δύο ὅμοια τρίγωνα δὲν εἶναι πάντοτε ἴσα, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα (27) γιὰ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ.

2. Ἐπειδὴ στὸ σχῆμα (27) φέραμε τὴ ΔΕ παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ, συμπεράναμε ὅτι τὸ τρίγ. ΑΔΕ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τρίγ. ΑΒΓ.

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰ ΔΕ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ. Ἑπομένως, ἂν ἕνα τρίγωνο εἶναι ὅμοιο μὲ ἕνα ἄλλο, καὶ τὸ δεύτερο εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ πρῶτο.

3. Στὸ σχῆμα (27) φέρνουμε τὴ $Δ_1E_1$ παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ.

Τότε τὸ τρίγ. $ΑΔ_1E_1$ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τρίγ. ΑΒΓ. Διαπιστώσαμε ὅτι τὸ τριγ. ΑΔΕ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τριγ. ΑΒΓ, καὶ ἐπειδὴ οἱ ΔΕ//ΒΓ καὶ $Δ_1E_1$//ΒΓ συνεπάγονται τὴν ΔΕ//$Δ_1E_1$, ἔχουμε ὅτι τὸ τρίγωνο $ΑΔ_1E_1$ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τρίγωνο ΑΔΕ. Ὥστε δύο τρίγωνα ὅμοια μὲ ἕνα τρίτο εἶναι ὅμοια.

Ἂν συνοψίσουμε, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ σχέση τῆς ὁμοιότητας ἔχει τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας.

Τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιο τρὶγ. ΑΒΓ (ἀνακλαστική).

τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιο τρίγ. ΔΕΖ ⇒ τρίγ. ΔΕΖ ὅμοιο τρίγ. ΑΒΓ (συμμετρική) καὶ

τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιο τρίγ. ΔΕΖ καὶ τρίγ. ΔΕΖ ὅμοιο τρίγ. ΗΘΙ ⇒ τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιο τρίγ. ΘΗΙ (μεταβατική).

Ἀσκήσεις

57) Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 5cm καὶ ΑΓ = 6 cm. Πάνω στὴν ΑΒ πάρτε τμῆμα ΑΔ = 2 cm καὶ φέρτε παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνει τὴν ΑΓ στὸ Ε. Ὑπολογίστε τὸ μῆκος τῆς ΔΕ.

58) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἔχει μῆκος 6 cm. Ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τμήματός της, ποὺ εἶναι ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου;

59) Σχηματίστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ προεκτείνετε τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ μέχρι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, ὥστε $ΑΔ = \frac{3}{5}$. ΑΒ καὶ $ΑΕ = \frac{3}{5}$.ΑΓ. Ὑπολογίστε τὸ λόγο $\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

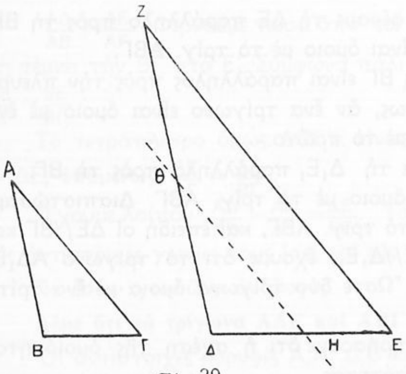
60) Ἕνα τραπέζιο ἔχει βάσεις 12 cm καὶ 7 cm. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τῶν τμημάτων, στὰ ὁποῖα ἡ μία διαγώνιος χωρίζει τὴν ἄλλη;

61) Στὸ ἴδιο τραπέζιο προεκτείνετε τὶς μὴ παράλληλες πλευρὲς μέχρι τὸ σημεῖο τομῆς τους. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τομῆς τους ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρές;

Κριτήρια ὁμοιότητας τριγώνων

§ 19. 1ο Κριτήριο ὁμοιότητας.

Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΒΓ = 2 cm, ΒΑ = 4 cm



σχ. 29.

καὶ ΓΑ = 5 cm. Μετὰ πάρετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΔΕ = = 4 cm καὶ μὲ βάση αὐτὸ κατασκευάστε τὸ τρίγωνο ΖΔΕ, ὥστε $\widehat{\Delta}=\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{E}$. Συγκρίνετε τὶς γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{Z}$ καὶ τοὺς λόγους τῶν ὁμόλογων πλευρῶν. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 29).

Χρησιμοποιώντας μοιρογνωμόνιο ἢ «διαφανὲς» βρίσκουμε ὅτι $\widehat{A}=\widehat{Z}$. Ἐπομένως τὰ τρίγωνα ἔχουν τὶς ὁμόλογες γωνίες τους ἴσες, δηλαδὴ $\widehat{A}=\widehat{Z}$, $\widehat{B}=\widehat{\Delta}$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{E}$.

Μετρώντας μὲ ὑποδεκάμετρο βρίσκουμε ὅτι ΔΖ = 8 cm καὶ ΕΖ = 10 cm.

Τότε $\frac{B\Gamma}{\Delta E}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{A\Gamma}{ZE}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

Ὥστε $\frac{B\Gamma}{\Delta E}=\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{A\Gamma}{ZE}$, δηλαδὴ οἱ ὁμόλογες πλευρὲς τῶν τριγώνων εἶναι ἀνάλογες. Ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΖΔΕ, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίες ἴσες μία πρὸς μία, εἶναι ὅμοια.

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίες ἴσες μία πρὸς μία, εἶναι ὅμοια.

Γιὰ νὰ **αἰτιολογήσουμε** τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐργασίας μας καὶ νὰ πειστοῦμε, ὅτι δὲν εἶναι συμπτωματικό, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Παίρνουμε πάνω στὴ ΔΕ τμῆμα ΔΗ = ΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ Η φέρνουμε παράλληλο πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴ ΔΖ στὸ Θ. Παρατηροῦμε ὅτι, τὸ τρίγ. ΘΔΗ εἶναι ὅμ. μὲ τὸ ΖΔΕ (1), ὅπως μάθαμε στὴν § 17. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΘΔΗ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν ΔΗ = ΒΓ καὶ $\widehat{\Delta}=\widehat{B}$, $\widehat{H}=\widehat{\Gamma}$ (ἐπειδὴ $\widehat{H}=\widehat{E}$ καὶ $\widehat{E}=\widehat{\Gamma}$).

Ἄρα τὸ τρίγ. ΘΔΗ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τρίγ. ΑΒΓ (2). Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) συμπεραίνουμε ὅτι τὸ τριγ. ΑΒΓ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τριγ. ΖΔΕ. Ὥστε: **Δύο τρίγωνα μὲ δύο γωνίες ἴσες μία πρὸς μία εἶναι ὅμοια.**

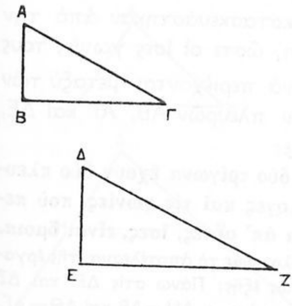
Ἐφαρμογές.

1. Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι ὅμοια, γιατὶ κάθε ἕνα ἀπ' αὐτὰ ἔχει γωνίες 60°. Δηλαδὴ ἔχουν δύο γωνίες ἴσες.

2. Κατασκευάστε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ὥστε μία ὀξεία γωνία τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἴση μὲ μιὰ ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου. Τί παρατηρεῖτε;

Κατασκευάζουμε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔτσι ὥστε $\widehat{\Gamma}=\widehat{Z}$. Παρατηροῦμε ὅτι $\widehat{\Gamma}=\widehat{Z}$ καὶ $\widehat{A}=\widehat{E}$, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθές. Ἐπομένως, **ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μία ὀξεία γωνία ἴση, εἶναι ὅμοια.** (σχ. 30)

3. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ ($\widehat{A}$ = 1 ὀρθή) νὰ φέρετε τὸ ὕψος

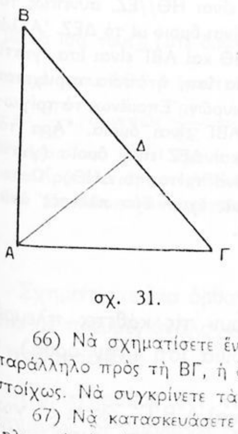


σχ. 30.

ΑΔ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΔΑ μὲ τὸ ΓΑΒ. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 31).

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΑΒ ἔχουν μία ὀξεία γωνία κοινή, τὴ $\widehat{B}$. Ἄρα εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΓΔΑ καὶ ΓΑΒ ἔχουν τὴν ὀξεία γωνία $\widehat{\Gamma}$ κοινή, εἶναι λοιπὸν καὶ αὐτὰ ὅμοια. Ἑπομένως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΔΑ εἶναι ὅμοια (ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια μὲ ἕνα τρίτο).

Ἀσκήσεις



σχ. 31.

62) Ἐξετάστε ἂν δύο ἰσοσκελῆ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

63) Νὰ κατασκευάσετε δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' καὶ νὰ φέρετε τὶς διχοτόμους τους ΑΔ καὶ Α'Δ'. Ἐξετάστε ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α'Β'Δ' καθὼς καὶ τὰ ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ' εἶναι ὅμοια.

64) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ καὶ νὰ φέρετε τὸ ὕψος του ΑΔ. Νὰ συγκρίνετε τοὺς λόγους $\frac{\Delta B}{AB}$ καὶ $\frac{AB}{\Gamma B}$.

65) Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ = 7 cm, ΒΓ = 6 cm καὶ ΓΑ = 9 cm. Πάρτε πάνω στὴν ΑΒ ἕνα τμῆμα ΒΔ = 4 cm καὶ κατασκευάστε γωνία $\widehat{B\Delta E} = \widehat{\Gamma}$, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΔΕ τέμνει τὴν ἡμιευθεία ΒΓ στὸ Ε. Ὑπολογίστε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΒΔΕ.

66) Νὰ σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τὴ διάμεσό του ΑΜ. Νὰ φέρετε μιὰ παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὶς ΑΒ, ΑΜ, ΑΕ στὰ σημεῖα Β', Μ', Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ συγκρίνετε τὰ τμήματα Β'Μ' καὶ Γ'Μ'.

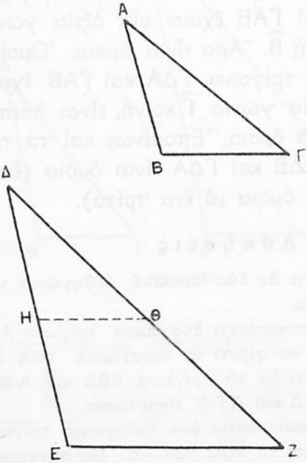
67) Νὰ κατασκευάσετε δύο ὀξυγώνια τρίγωνα μὲ πλευρὲς ἀντιστοίχως παράλληλες καὶ νὰ τὰ συγκρίνετε. Νὰ διαπιστώσετε, ὅτι αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

§ 20. 2ο Κριτήριο ὁμοιότητας τριγώνων.

Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ=3 cm, ΑΓ=4 cm καὶ ΒΓ=6 cm. Ἔπειτα νὰ κατασκευάσετε μιὰ γωνία Δ ἴση μὲ τὴν Α καὶ στὶς πλευρές της νὰ πάρετε τμήματα ΔΕ=6 cm καὶ ΔΖ=8 cm. Συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 32).

Χρησιμοποιώντας μοιρογνωμόνιο ἢ διαφανὲς χαρτὶ βρίσκουμε ὅτι $\widehat{B} = \widehat{E}$ καὶ $\widehat{Z} = \widehat{\Gamma}$. Ἂν μετρήσουμε τὴν ΕΖ, βρίσκουμε ὅτι εἶναι 12 cm. Ἐπειδὴ τώρα εἶναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ καὶ $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, ἔχουμε

$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ καὶ $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Συνεπῶς, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ κατασκευάστηκαν ἀπὸ τὴν ἀρχὴ ἔτσι, ὥστε οἱ ἴσες γωνίες τους $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ νὰ περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀνάλογων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ΔΕ, ΔΖ. Ὥστε:



σχ. 32.

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὲς ἀνάλογες καὶ τὶς γωνίες, ποὺ περιέχονται ἀπ' αὐτές, ἴσες, εἶναι ὅμοια.

Αἰτιολογοῦμε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐργασίας μας ὡς ἑξῆς: Πάνω στὶς ΔΕ καὶ ΔΖ παίρνουμε τμήματα ΔΗ = ΑΒ καὶ ΔΘ = ΑΓ. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\Delta H}{\Delta E} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta Z}$. Τότε ὅμως, ὅπως μάθαμε στὴν § 16.2, θὰ εἶναι ΗΘ//ΕΖ, συνεπῶς τὸ τρίγωνο ΔΗΘ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ ΔΕΖ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΔΗΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν μία γωνία ἴση, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΔΗΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια (γιατὶ εἶναι ὅμοια μὲ ἕνα τρίτο, τὸ ΔΗΘ). Ὥστε: **Τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο πλευρὲς ἀνάλογες καὶ τὶς γωνίες τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἴσες, εἶναι ὅμοια.**

Ἐφαρμογές.

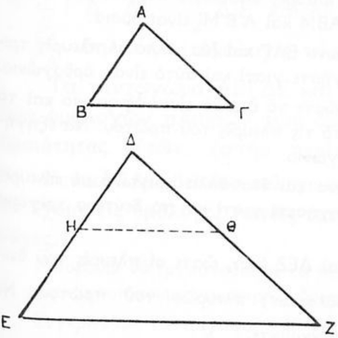
1. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὶς κάθετες πλευρές τους ἀνάλογες, εἶναι ὅμοια, γιατὶ ἔχουν μία γωνία ἴση (τὴν ὀρθή), ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ ἀνάλογων πλευρῶν.

2. Σχηματίζουμε τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', ὥστε οἱ γωνίες τῶν κορυφῶν τους νὰ εἶναι ἴσες, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ καὶ ΑΒ = ΑΓ, Α'Β' = Α'Γ' τότε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$. Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνουμε ὅτι, ἂν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὶς γωνίες τῶν κορυφῶν τους ἴσες, εἶναι ὅμοια.

§ 21. 3ο Κριτήριο ὁμοιότητας τριγώνων.

Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ=4 cm, ΒΓ=5 cm καὶ ΓΑ=6 cm καὶ ἕνα ἄλλο τρίγωνο ΔΕΖ μὲ πλευρὲς ΔΕ=8 cm, ΕΖ= =10 cm καὶ ΖΔ=12 cm. Συγκρίνετε τώρα τὶς γωνίες τῶν τριγώνων αὐτῶν.

Μὲ τὴ βοήθεια διαφανοῦς χαρτιοῦ ἢ μοιρογνωμονίου βρίσκουμε εὔκολα ὅτι οἱ ὁμόλογες γωνίες τους εἶναι ἴσες. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἀπὸ τὴν ἀρχή



σχ. 33.

εἶχαν καὶ τὶς ὁμόλογες πλευρές τους ἀνάλογες: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$.
Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνουμε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια
Ὥστε:

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τὶς (ὁμόλογες) πλευρές τους ἀνάλογες, εἶναι ὅμοια.

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ **αἰτιολογήσουμε** ὡς ἑξῆς (σχ. 33): Πάνω στὶς ΔΕ καὶ ΔΖ παίρνουμε τμήματα ΔΗ = ΑΒ καὶ ΔΘ = ΑΓ καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ εἶναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\Delta H}{\Delta E} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta Z}$ (ἀντικαθιστοῦμε μὲ τὰ ἴσα τους). Τότε ὅμως τρίγ. ΔΗΘ ὅμοιον μὲ τρίγ. ΔΕΖ, συνεπῶς $\frac{H\Theta}{EZ} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta Z}$. Θέτουμε ὅπου ΔΘ τὸ ἴσο του ΑΓ καὶ ἔχουμε $\frac{H\Theta}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$. Ἀπὸ τὴν ἀρχὴ ὅμως εἶναι $\frac{\Gamma A}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{EZ}$, συνεπῶς $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{H\Theta}{EZ}$, ἄρα ΗΘ = ΒΓ. Τὰ τρίγωνα τώρα ΔΗΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν τὶς πλευρές τους ἴσες μία πρὸς μία. Συνεπῶς εἶναι ὅμοια. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια (γιατὶ εἶναι ὅμοια μὲ τὸ τρίγωνο ΔΗΘ). Ἑπομένως: **Δύο τρίγωνα μὲ τὶς (ὁμόλογες) πλευρές τους ἀνάλογες εἶναι ὅμοια.**

Ἐφαρμογές.

Σχηματίστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο καὶ κατασκευάστε ἕνα ἄλλο τρίγωνο μὲ πλευρὲς ἀνάλογες πρὸς τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ δεύτερο τρίγωνο εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ πρῶτο. Ἑπομένως οἱ ὁμόλογες γωνίες τους εἶναι ἴσες. Συνεπῶς καὶ τὸ δεύτερο τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο.

Ἀσκήσεις

68) Νὰ κατασκευάσετε δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ (ΑΒ = ΑΓ καὶ ΑΔ = ΑΕ), ὥστε $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Delta AE}$ καὶ ἡ ΑΔ νὰ εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{BA\Gamma}$. Νὰ συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΓΑΕ καὶ νὰ δικαιολογήσετε γιατὶ εἶναι ὅμοια.

69) Νὰ κατασκευάσετε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', ὥστε $\widehat{A} = \widehat{A'}$ καὶ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{2}{3}$. Νὰ δικαιολογήσετε γιατὶ αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

70) Νὰ σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο καὶ νὰ ἑνώσετε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Νὰ συγκρίνετε τὰ τέσσερα τρίγωνα, ποὺ σχηματίζονται, μὲ τὸ ἀρχικό.

71) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ = 2,5 cm, ΒΓ = 4,2 cm καὶ

ΓΑ=3 cm. καὶ ἕνα ἄλλο Α′Β′Γ′ μὲ ἀντίστοιχες πλευρὲς διπλάσιες. Φέρετε τὶς διαμέσους ΑΜ καὶ Α′Μ′ καὶ ἀποδείξετε γιατὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ Α′Β′Μ′ εἶναι ὅμοια.

72) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ καὶ ἕνα ἄλλο μὲ πλευρὲς τριπλάσιες ἀπὸ τὶς πλευρὲς τοῦ πρώτου. Δικαιολογῆστε γιατὶ καὶ αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιο.

73) Νὰ κατασκευάσετε δύο τρίγωνα ἔτσι, ὥστε τὸ ἕνα νὰ εἶναι ὀξυγώνιο καὶ τὸ ἄλλο νὰ ἔχει πλευρὲς ἀντιστοίχως τριπλάσιες ἀπὸ τὶς πλευρὲς τοῦ πρώτου. Νὰ ἐξηγήσετε γιατὶ καὶ τὸ δεύτερο τρίγωνο θὰ εἶναι ὀξυγώνιο.

74) Κατασκευάστε ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο καὶ ἕνα ἄλλο τρίγωνο μὲ πλευρὲς διπλάσιες ἀπὸ τὶς πλευρὲς τοῦ πρώτου. Νὰ ἐξηγήσετε γιατὶ καὶ τὸ δεύτερο τρίγωνο θὰ ἔχει μιὰ ἀμβλεία γωνία.

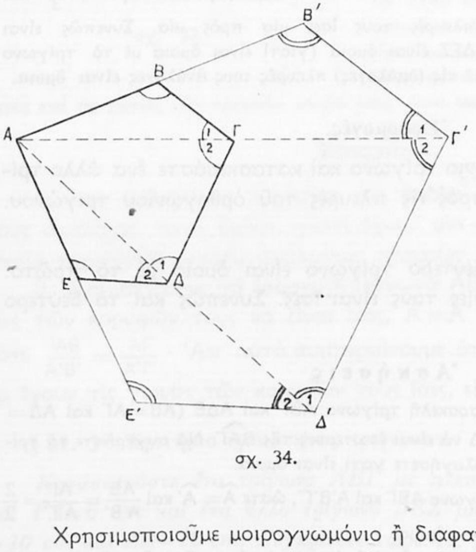
75) Νὰ κατασκευάσετε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔτσι, ὥστε οἱ πλευρὲς τοῦ δεύτερου νὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ἀντίστοιχων (ὁμόλογων) πλευρῶν τοῦ πρώτου. Νὰ φέρετε μετὰ τὶς διάμεσες ΑΜ καὶ ΔΝ καὶ νὰ τὶς συγκρίνετε.

76) Νὰ κατασκευάσετε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ τὶς πλευρές τους ἀντιστοίχως παράλληλες καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ὅμοια.

Γ. ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

§ 22. *Σχηματίσετε ἕνα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ καὶ προεκτείνετε τὴν ΑΒ μέχρι τὸ Β′, ὥστε ΑΒ′= 2.ΑΒ.*

Προεκτείνετε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο τὶς διαγωνίους ΑΓ μέχρι τὸ Γ′, ΑΔ μέχρι τὸ Δ′ καὶ τὴν πλευρὰ ΑΕ μέχρι τὸ Ε′. Συγκρίνετε τὶς ὁμόλογες (ἀντίστοιχες) γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta}$, $\widehat{\Delta'}$, $\widehat{E}$, $\widehat{E'}$ *καὶ τὶς ὁμόλογες πλευρὲς ΑΒ, ΑΒ′, ΒΓ, Β′Γ′, ΓΔ, Γ′Δ′, ΔΕ, Δ′Ε′, ΕΑ, Ε′Α τῶν πενταγώνων ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ′Γ′Δ′Ε′. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 34).*



σχ. 34.

Χρησιμοποιοῦμε μοιρογνωμόνιο ἢ διαφανὲς καὶ βρίσκουμε, ὅτι οἱ ὁμόλογες γωνίες τῶν πενταγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσες. Μὲ τὸ διαβήτη ἢ τὸ ὑποδεκάμετρο διαπιστώνουμε ὅτι $AB = \frac{1}{2} \cdot AB'$, $B\Gamma = \frac{1}{2} B'\Gamma'$, $\Gamma\Delta =$

$= \frac{1}{2}$ Γ'Δ', $ΔΕ = \frac{1}{2}$ Δ'Ε' καὶ $ΑΕ = \frac{1}{2} \cdot ΑΕ'$ ἢ $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΕΑ}{Ε'Α'}$ δηλαδὴ οἱ ὁμόλογες πλευρὲς τους εἶναι ἀνάλογες.

Τὰ πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ'Γ'Δ'Ε' λέγονται **ὅμοια**. Ὁ λόγος λ δύο ὁμόλογων πλευρῶν τῶν ὅμοιων αὐτῶν πενταγώνων λέγεται **λόγος ὁμοιότητας αὐτῶν**. (στὴν περίπτωσή μας $λ = \frac{1}{2}$).

Γενικὰ λέμε ὅτι δύο πολύγωνα (μὲ τὸ ἴδιο πλῆθος κορυφῶν) εἶναι ὅμοια, ἂν ἔχουν τὶς ὁμόλογες γωνίες τους ἴσες καὶ τὶς ὁμόλογες πλευρές τους ἀνάλογες.

Μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε μὲ τὰ πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ'Γ'Δ'Ε', (σχ. 34) χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικὰ ὄργανα.

Συγκρίνουμε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ'. Αὐτὰ ἔχουν μιὰ γωνία κοινὴ (τὴν Α), ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀνάλογων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΒ', ΑΓ'. Ἄρα:

$$\widehat{Β} = \widehat{Β'}$$
$$\widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ'} \quad \text{καὶ}$$
$$\frac{ΑΒ}{ΑΒ'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΑΓ}{ΑΓ'}$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΑΓ'Δ' εἶναι ὅμοια. Ἑπομένως:

$$\widehat{Γ}_2 = \widehat{Γ'}_2, \ \widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ'}_1 \ \text{καὶ} \ \frac{ΑΓ}{ΑΓ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΑΔ}{ΑΔ'}$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΔ'Ε' εἶναι ὅμοια (ἔχουν μιὰ γωνία κοινὴ μεταξὺ ἀνάλογων πλευρῶν), συνεπῶς:

$$\widehat{Δ}_2 = \widehat{Δ'}_2, \ \widehat{Ε} = \widehat{Ε'} \ \text{καὶ} \ \frac{ΑΔ}{ΑΔ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΑΕ}{ΑΕ'}$$

Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνουμε ὅτι οἱ ὁμόλογες γωνίες τῶν πενταγώνων μας εἶναι ἴσες ἢ ἀπ' εὐθείας ($\widehat{Α} = \widehat{Α}$, $\widehat{Ε} = \widehat{Ε'}$, $\widehat{Β} = \widehat{Β'}$) ἢ σὰν ἀθροίσματα ἴσων γωνιῶν ($\widehat{Γ} = \widehat{Γ'}$, $\widehat{Δ} = \widehat{Δ'}$) καὶ οἱ ὁμόλογες πλευρὲς τους εἶναι ἀνάλογες.

Παρατήρηση 1. Οἱ διαγώνιοι, ποὺ ἑνώνουν δύο ὁμόλογες κορυφές, λέγονται ὁμόλογες διαγώνιοι. Στὰ ὅμοια πεντάγωνα τοῦ σχήματος 34 δύο διαγώνιοι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς ὁμόλογες διαγωνίους τοῦ ἄλλου π.χ. οἱ ΑΓ, ΑΔ εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς ΑΓ', ΑΔ'.

Οἱ ὁμόλογες διαγώνιοι δύο ὅμοιων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογες.

Παρατήρηση 2. Στὸ σχ. 34 παρατηροῦμε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒ'Γ', ΑΓ'Δ', ΑΔ'Ε' ἔχουν τὴν ἴδια διάταξη μὲ τὰ ἀντιστοίχως ὅμοιά τους ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ.

Ἑπομένως: **Δύο ὅμοια πολύγωνα χωρίζονται σὲ τρίγωνα ὅμοια ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ὁμοίως διατεταγμένα.**

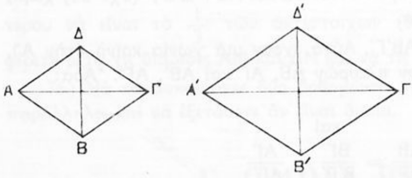
Παρατήρηση 3. Στὴν ἀρχὴ τῆς ἐργασίας μας κατασκευάσαμε πρῶτα τὰ πεντάγωνα ἔτσι, ὥστε νὰ χωρίζονται σὲ τρίγωνα κατὰ τὸν παραπάνω τρόπο καὶ ἀπ' αὐτὸ καταλήξαμε στὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι ὅμοια.

Ἑπομένως: **Ἂν δύο πολύγωνα χωρίζονται σὲ τρίγωνα ὅμοια ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ὁμοίως διατεταγμένα, εἶναι ὅμοια.**

Στὰ ἴδια συμπεράσματα καταλήγουμε καὶ ὅταν τὰ πολύγωνα βρίσκονται σὲ διαφορετικὲς θέσεις, γιατὶ μποροῦμε νὰ θέσουμε τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο, ὅπως στὸ σχ. 34, χρησιμοποιώντας διαφανὲς ἢ κατασκευάζοντας ἕνα πολύγωνο ἴσο μὲ τὸ ἕνα.

§ 23. Ἐφαρμογές.

1. Δύο ρόμβοι ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' μὲ μία γωνία ἴση εἶναι ὅμοιοι (σχ. 35).



σχ. 35.

Ἂν $\widehat{A} = \widehat{A}'$ τότε καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$. Ἀλλὰ καὶ $\widehat{B} = \widehat{B}'$ καὶ $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}'$ (εἶναι ἴσες μὲ ἴσες ἢ παραπληρωματικὲς ἴσων). Ἐπειδὴ εἶναι $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ καὶ $A'B' = B'\Gamma' = \Gamma'\Delta' = \Delta'A'$, θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'}$$

2. **Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὅμοιων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῆς ὁμοιότητάς των.**

Ἂν λ εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητας τῶν πενταγώνων τοῦ σχήματος (34), θὰ ἔχουμε $\lambda = \frac{AB}{AB'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A}$ συνεπῶς:

$$\lambda = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA}{AB' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'E' + E'A}$$ (ἰδιοτ. τῶν ἀναλογιῶν § 14).

3. Σχεδιάζουμε δύο ἄνισους κύκλους καὶ ἐγγράφουμε σ' αὐτοὺς τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ' ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμε ὅτι: $\widehat{A} = \widehat{A}'$ $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$, $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}'$, $\widehat{E} = \widehat{E}'$, $\widehat{Z} = \widehat{Z}'$ (κάθε μία ἀπ' αὐτὲς εἶναι 120°) καὶ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EZ}{E'Z'} = \frac{ZA}{Z'A'}$ γιατὶ οἱ λόγοι αὐτοὶ ἔχουν ἴσους ὅρους.

Ἐπομένως: (§ 22).

Δύο κανονικὰ πολύγωνα μὲ τὸ ἴδιο πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια.

Ἀσκήσεις

77) Νὰ ἐξετάσετε ἂν δύο τετράγωνα εἶναι ὅμοια.

78) Δύο ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουν διαστάσεις 3 cm, 4 cm καὶ 6 cm, 8 cm ἀντιστοίχως. Εἶναι ὅμοια; Γιατί;

79) Ἐξηγῆστε γιατὶ δύο ρόμβοι μὲ ἀνάλογες διαγωνίους εἶναι ὅμοιοι.

80) Νὰ κατασκευάσετε δύο ὀρθογώνια ἔτσι, ὥστε οἱ διαγώνιοι καθενὸς νὰ σχη-

ματίζουν γωνία 30° καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι τριπλάσια ἀπὸ μιὰ διαγώνιο τοῦ ἄλλου. Ἐξηγῆστε γιατὶ εἶναι ὅμοια.

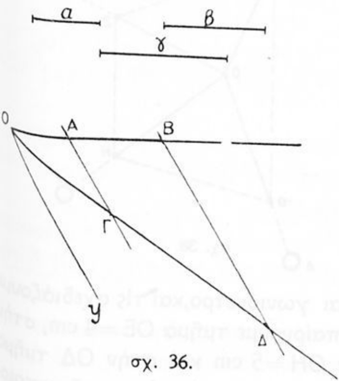
81) Ἐξηγῆστε γιατὶ δύο παραλληλόγραμμα μὲ πλευρὲς ἀνάλογες καὶ μία γωνία ἴση εἶναι ὅμοια.

82) Νὰ σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο καὶ σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς διαμέσους του νὰ πάρετε ἕνα σημεῖο, τὸ ὁποῖο νὰ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη κορυφὴ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαμέσου. Ἐξηγῆστε γιατὶ τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι κορυφὲς τριγώνου ὅμοιου μὲ τὸ ἀρχικό.

Δ΄. ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

§ 24. Κατασκευὴ τετάρτης ἀναλόγου.

Πάρτε τρία εὐθύγραμμα τμήματα α=3 cm, β=4 cm, γ=6 cm καὶ βρεῖτε ἕνα τέταρτο εὐθύγραμμο τμῆμα χ, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\chi}$, *δηλαδὴ τὰ α, β, γ, χ νὰ ἀποτελοῦν ἀναλογία.* Τὸ χ λέγεται τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ.



σχ. 36.

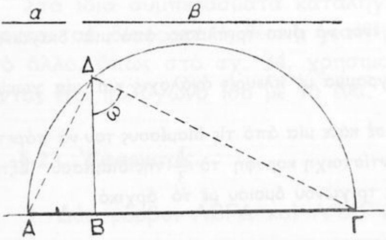
Ἂν πάνω στὴ μιὰ πλευρὰ μιᾶς γωνίας Ο πάρουμε ΟΑ = 3 cm, ΑΒ = 4 cm καὶ στὴν ἄλλη πλευρὰ τμῆμα ΟΓ = 6 cm καὶ φέρουμε ἀπὸ τὸ Β παράλληλο πρὸς τὴν ΑΓ, αὐτὴ τέμνει τὴν εὐθεία ΟΓ στὸ Δ. Μετρώντας βρίσκουμε ὅτι ΓΔ = 8 cm, συνεπῶς ἡ ΓΔ ἐπαληθεύει τὴν ἀναλογία $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\chi}$ καὶ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ, τὴν ὁποία ζητοῦμε.

Ἂν φέρουμε ἀπὸ τὸ Ο τὴν Οψ // ΑΓ, βλέπουμε ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δικαιολογεῖται ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ: Παράλληλες εὐθεῖες ὁρίζουν πάνω σὲ δύο εὐθεῖες, τὶς ὁποῖες τέμνουν (δηλαδὴ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας Ο), ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα.

Σημείωση: Ἂν μὲ α, β, γ, ὀνομάσουμε τὶς τιμὲς τῶν τριῶν τμημάτων καὶ μὲ χ τὴν τιμὴ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τους, θὰ ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\chi} \Leftrightarrow \alpha\cdot\chi=\beta.\gamma$. Ἡ ἐργασία, ποὺ κάναμε παραπάνω, ἀποτελεῖ γεωμετρικὴ ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

§ 25. Πάρτε τὰ εὐθ. τμήματα α = 2 cm καὶ β = 8 cm. Νὰ βρεῖτε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα χ, ὥστε $\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\beta}$. Τὸ χ λέγεται μέση ἀνάλογος τῶν α καὶ β. Ἂν πάρουμε τὶς τιμές τους, θὰ ἔχουμε $\frac{(\alpha)}{(\chi)}=\frac{(\chi)}{(\beta)} \Leftrightarrow (\chi)^2=(\alpha)\cdot(\beta)$.

Παίρνουμε πάνω σὲ μιὰ εὐθεία τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἴσα μὲ 2 cm καὶ 8 cm ἀντιστοίχως. Μὲ διάμετρο τὴν ΑΓ γράφουμε ἡμικύκλιο. Στὸ Β ὑψώνουμε κάθετο

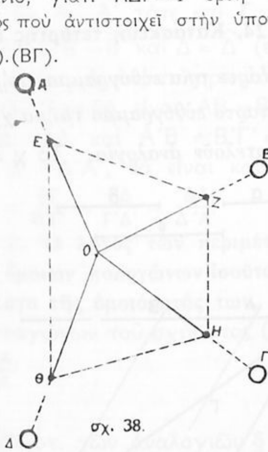


σχ. 37.

στὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἡμικύκλιο στὸ σημεῖο Δ. Μὲ μέτρηση βρίσκουμε ὅτι ΒΔ $=4$cm. Τότε ὅμως $4^2=2\cdot 8$, δηλαδὴ $(ΒΔ)^2=(ΑΒ)\cdot(ΑΓ)$. Ὥστε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΔ εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος.

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δὲν εἶναι τυχαῖο, γιατὶ ὅπως μάθαμε στὴν § 19.3 τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΒΑ καὶ ΓΒΔ εἶναι ὅμοια (τὸ τρίγ. ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιο, γιατὶ $\widehat{ΑΔΓ}=1$ ὀρθή ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμένη σὲ ἡμικύκλιο, καὶ ΔΒ τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ὑποτείνουσα). Ἑπομένως $\dfrac{(ΑΒ)}{(ΒΔ)}=\dfrac{(ΒΔ)}{(ΒΓ)}$ καὶ $(ΒΔ)^2=(ΑΒ).(ΒΓ)$.

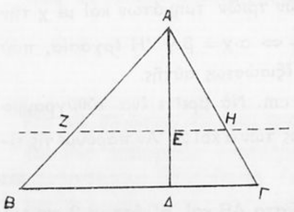
§ **26**. Οἱ ἀποστάσεις τεσσάρων πόλεων Α, Β, Γ, Δ ἀπὸ ἕνα σημεῖο εἶναι 40 km, 60 km, 50 km καὶ 45 km ἀντιστοίχως. Νὰ σχεδιάσετε χάρτη τῆς περιοχῆς αὐτῆς μὲ κλίμακα 1/1.000.000.



σχ. 38.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ κατασκευάσουμε σχήματα ὅμοια μὲ τὰ σχήματα τοῦ ἐδάφους μὲ λόγο ὁμοιότητας 1/1000.000. Γιὰ νὰ γίνει αὐτό, μετροῦμε (μὲ σκόπευση ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο τοῦ ἐδάφους) τὶς γωνίες $\widehat{ΑΟΒ}$, $\widehat{ΒΟΓ}$, $\widehat{ΓΟΔ}$, $\widehat{ΔΟΑ}$ μὲ ἕνα ὄργανο, ποὺ λέγεται γωνιόμετρο, καὶ τὶς σχεδιάζουμε στὸ χαρτί μας. Πάνω στὴν πλευρὰ ΟΑ παίρνουμε τμῆμα ΟΕ $=4$ cm, στὴν ΟΒ τμῆμα ΟΖ $=6$ cm, στὴν ΟΓ τμῆμα ΟΗ $=5$ cm καὶ στὴν ΟΔ τμῆμα ΟΘ $=4{,}5$ cm. Τὰ σημεῖα Ο, Ε, Ζ, Η, Θ ἀποτελοῦν τὸ χάρτη τῆς περιοχῆς Ο, Α, Β, Γ, Δ. Πραγματικὰ τὸ τρίγωνο ΟΘΕ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ ΟΔΑ (ἔχουν δύο γωνίες ἴσες μεταξὺ ἀνάλογων πλευρῶν) καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητας λ εἶναι ἴσος μὲ $\dfrac{ΟΕ}{ΟΑ}=\dfrac{4\text{ cm}}{4000000\text{ cm}}=\dfrac{1}{1000000}$

§ **27**. Σχηματίστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Μετὰ νὰ κατασκευάσετε ἕνα ἄλλο τρίγωνο ὅμοιο μὲ αὐτό, τὸ ὁποῖο νὰ ἔχει ἕνα ὕψος ἴσο μὲ 6 cm.



σχ. 39.

Φέρνουμε τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ παίρνουμε σ' αὐτὸ τμῆμα ΑΕ ἴσο μὲ 6 cm. Ἀπὸ τὸ Ε φέρνουμε παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ στὰ Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως. Συγκρίνουμε τὰ τρίγωνα ΑΖΗ καὶ ΑΒΓ. Αὐτὰ εἶναι ὅμοια σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε. Τὸ ΑΖΗ ἔχει ὕψος $ΑΕ = 6$ cm, γιατὶ ἐφόσον ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος στὴ ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ στὴν παράλληλό της ΖΗ. Ὥστε τὸ ΑΖΗ εἶναι τὸ ζητούμενο τρίγωνο.

Ἀσκήσεις

83) Κατασκευάστε τὴν τετάρτη ἀνάλογο τῶν πλευρῶν $α$, $β$, $γ$, ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.

84) Κατασκευάστε τὴν τετάρτη ἀνάλογο τῶν ὑψῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τοῦ προηγούμενου τριγώνου.

85) Σχηματίστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ κατασκευάστε ἕνα ἄλλο ὅμοιο μὲ αὐτό, τοῦ ὁποίου τὸ ὁμόλογο ὕψος πρὸς τὸ ὕψος ΒΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι 4 cm.

86) Βόρεια, ἀνατολικὰ καὶ βορειοδυτικὰ τοῦ Γυμνασίου σας Γ βρίσκονται τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Δ ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Γ 4,7km, 6,5 km, καὶ 7,3 km. Κατασκευάστε χάρτη τῆς περιοχῆς (κλίμακα 1:1.000.000)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

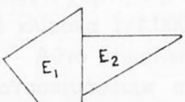
ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Α. ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. Ὁρισμοί:

§ 28. Ὀνομάζουμε ἐπιφάνεια ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος (ἁπλῆς κλειστῆς γραμμῆς) τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖο εἶναι ἐσωτερικό του.

Ἐπιφάνειες ἐπιπέδων σχημάτων μποροῦμε νὰ παρατηρήσουμε στὸ σχῆμα (40). Ἡ εἰκόνα αὐτὴ παριστάνει δύο ἐπιφάνειες ἐπιπέδων σχημάτων E_1 καὶ E_2. **Ἄθροισμα** τῶν ἐπιφανειῶν E_1 καὶ E ὀνομάζουμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖο παίρνουμε, ἂν διαγράψουμε (σβήσουμε) τὴν κοινὴ γραμμή.



σχ. 40.

Ἐμβαδὸ ἐπιφάνειας καλοῦμε τὴν ἔκτασή της, ἡ ὁποία ἔχει ἐκφρασθεῖ σὲ μονάδες μετρήσεως, καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ τὸ Ε.

Θέτουμε τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Πῶς μποροῦμε νὰ προσδιορίσουμε τὴν ἔκταση (δηλ. τὸ ἐμβαδὸ) τῆς ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος (40) ἢ τῆς ἐπιφάνειας κάθε ἐπιπέδου σχήματος;

Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ πετύχουμε συγκρίνοντας τὴν ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος μὲ τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς ὁρισμένου ἐπιπέδου σχήματος, τὴν ὁποία παίρνουμε ὡς μονάδα. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς συγκρίσεως εἶναι ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος καλεῖται **τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ** τῆς ἐπιφάνειας. (**Τὴν** τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔ τὴ συμβολίζουμε μὲ (ΑΒΓΔ)).

Ἡ εὕρεση **τῆς τιμῆς** τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται **μέτρηση** αὐτῆς. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι ἕνας ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὴ μονάδα, γιὰ νὰ πάρουμε τὸ ἐμβαδό (δηλ. ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ πρὸς τὴ μονάδα).

§ 29. Μονάδες μετρήσεως ἐπιφαγειῶν

Οἱ μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι ἐπιφάνειες τετραγώνων, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ ἰσοῦται μὲ μιὰ μονάδα μήκους.

Ἡ κυριότερη μονάδα γιὰ τὴ μέτρηση ἐπιφανειῶν εἶναι:

Τὸ **τετραγωνικὸ μέτρο** (m^2), δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 m.

Τὰ πολλαπλάσιά του εἶναι:

1. Τὸ **τετραγωνικὸ δεκάμετρο** (dam^2), ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 δεκάμετρο (dam)
2. Τὸ **τετραγωνικὸ ἑκατόμετρο** (hm^2), ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 ἑκατόμετρο (hm)
3. Τὸ **τετραγωνικὸ χιλιόμετρο** (km^2), ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 χιλιόμετρο (km)

Οἱ ὑποδιαιρέσεις του εἶναι:

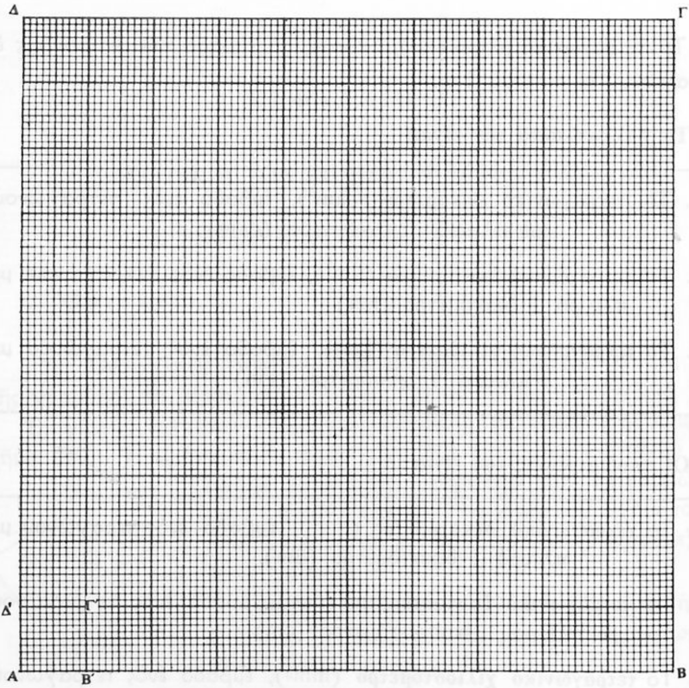
1. Τὸ **τετραγωνικὸ δεκατόμετρο** (dm^2), ἐμβαδὸ ἑνὸς τεραγώνου μὲ πλευρὰ 1 δεκατόμετρο (dm).
2. Τὸ **τετραγωνικὸ ἑκατοστόμετρο** (cm^2), ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 ἑκατοστόμετρο (cm).
3. Τὸ **τετραγωνικὸ χιλιοστόμετρο** (mm^2), ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 χιλιοστόμετρο (mm).

Κατασκευὴ ὁρισμένων μονάδων ἐπιφανειῶν.

1. Κατασκευάζουμε πάνω σ' ἕνα φύλλο χιλιοστομετρικοῦ χαρτιοῦ ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰ 1 dm καὶ ὁρίζουμε ἔτσι ἕνα τετραγωνικὸ δεκατόμετρο (dm^2).

2. Στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας Α τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τὸ τετράγωνο ΑΒ'Γ'Δ', μὲ πλευρὰ 1 cm, δηλαδὴ ἕνα τετραγωνικὸ ἑκατοστόμετρο (cm^2).

3. Ἐπίσης μέσα στὸ τετράγωνο ΑΒ'Γ'Δ' ὑπάρχουν μικρότερα τετράγωνα, μὲ πλευρὰ 1mm, καθένα ἀπ' αὐτὰ εἶναι μιὰ ὑποδιαίρεση τῆς ἀρχικῆς μονάδας ἐπιφάνειας. Καθένα τους τὸ ὀνομάσαμε τετραγωνικὸ χιλιοστόμετρο (mm^2).



σχ. 41.

Μποροῦμε ἔτσι νὰ βροῦμε π.χ. πόσα τετράγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒ΄Γ΄Δ΄ περιέχει τὸ ΑΒΓΔ καὶ πόσα τετραγωνικὰ χιλιοστόμετρα ὑπάρχουν στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒ΄Γ΄Δ΄ καὶ νὰ ὁρίσουμε τὴ σχέση, ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀντίστοιχων μονάδων ἐπιφανειῶν.

Σύγκριση μονάδων ἐπιφανειῶν: Συγκρίνοντας τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ μὲ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒ΄Γ΄Δ΄, τὸ ὁποῖο ἔχει πλευρὰ τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου, βρίσκουμε ὅτι τὸ τετράγωνο ΑΒΓΔ περιέχει δέκα ταινίες. Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς ταινίες αὐτὲς περιέχει 10 τετράγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒ΄Γ΄Δ΄.

Ὥστε: ΑΒΓΔ = 100·ΑΒ΄Γ΄Δ΄.

Συνεχίζοντας μὲ ὅμοιο τρόπο καὶ μὲ τὶς ἄλλες ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδας συμπεραίνουμε γενικὰ ὅτι: «Κάθε μονάδα ἐπιφάνειας ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 μονάδες ἐπιφάνειας τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξης» (1)

Δηλαδή: $1\text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2 = 10.000\ \text{cm}^2 = 1.000.000\ \text{mm}^2$

$$1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2 = 10.000\ \text{mm}^2$$

$$1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2.$$

Ἡ ἰδιότητα (1) μᾶς ὁδηγεῖ καὶ στοὺς ἀκόλουθους κανόνες:

1) Γιὰ νὰ τρέψουμε ἕνα συμμιγῆ σὲ ἁπλὸ (τῆς τελευταίας τάξης), ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ἕνα ἐμβαδό, παριστάνουμε κάθε ἀριθμὸ τοῦ συμμιγῆ σὰν διψήφιο (ἂν δὲν εἶναι) ἀναπληρώνοντας μὲ μηδενικὰ κάθε μονάδα ποὺ λείπει.

Π.χ. α) $8hm^2\ 2dm^2\ 7m^2 = 08hm^2\ 02dm^2\ 07m^2 = 80207m^2$

β) $9\ m^2\ 18\ cm^2 = 90018\ cm^2$

2) Μποροῦμε νὰ μεταβάλουμε τὴ μονάδα ἐπιφάνειας μεταθέτοντας τὴν ὑποδιαστολὴ κατὰ 2, κατὰ 4, κ.ο.κ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ἂν θέλουμε νὰ πᾶμε ἀπὸ μιὰ μονάδα στὴν ἀμέσως κατώτερη μονάδα ἐπιφάνειας, ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, γιὰ νὰ πᾶμε ἀπὸ μιὰ μονάδα ἐμβαδοῦ στὴν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξης. (Ἀναπληρώνουμε μὲ μηδενικὰ τὰ ψηφία ποὺ λείπουν ἀπὸ μονάδα μιᾶς ὁρισμένης τάξης).

Π.χ. α) $832,18m^2 = 8,3218dam^2 = 83218dm^2 = 8321800cm^2$.

Παρατήρηση:

Γιὰ τὴ μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας τῶν ἀγρῶν χρησιμοποιοῦν ἀλλοῦ:

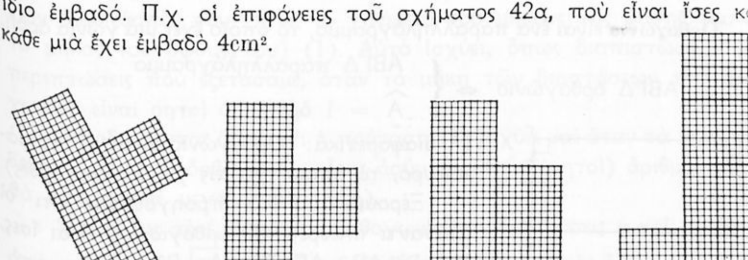
1) Τὸ τετραγωνικὸ δεκάμετρο $(dam^2) = 100m^2$, τὸ ὁποῖο ὀνομάζουν ἄρ (a) καὶ 2) τὸ τετραγωνικὸ ἑκατόμετρο $(hm^2) = 100dam^2 = 10.000\ m^2$, τὸ ὁποῖο λέγεται ἑκτάριο (ha) καὶ ἰσοῦται μὲ 100ἄρ $= 100a$. Στὴ χώρα μας χρησιμοποιεῖται τὸ στρέμμα $= 1000m^2 = \frac{1}{10}\ ha$. Γιὰ τὴ μέτρηση τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν οἰκοπέδων χρησιμοποιοῦμε ἀκόμη καὶ τὸν τετραγωνικὸ τεκτονικὸ πήχη, $1\tau\pi^2 = \frac{9}{16}m^2 = 0,5625m^2$.

Τέλος γιὰ τὴ μέτρηση μεγάλων ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦμε τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο $(1km^2) = 1.000.000\ m^2$.

§ 30. Ἰσοδύναμες ἐπιφάνειες.— Ἰσοδύναμα σχήματα.

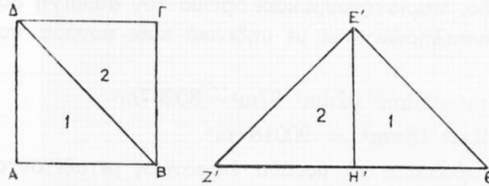
Οἱ ἐπιφάνειες τῶν ἴσων σχημάτων εἶναι ἴσες.

Δύο ἴσες ἐπιφάνειες (ὅταν μετροῦνται μὲ τὴν ἴδια μονάδα) ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδό. Π.χ. οἱ ἐπιφάνειες τοῦ σχήματος 42α, ποὺ εἶναι ἴσες καὶ κάθε μιὰ ἔχει ἐμβαδὸ $4cm^2$.



α σχ. 42. β

Οἱ ἐπιφάνειες στὸ σχῆμα 42β δὲν εἶναι ἴσες, ἔχουν ὅμως ἐμβαδὸ ἴσο μὲ 5cm². Αὐτὲς λέγονται **ἰσοδύναμες** ἢ **ἰσεμβαδικὲς** ἐπιφάνειες.



σχ. 43.

Τὰ ἐπίπεδα σχήματα ΑΒΓΔ καὶ Ε′Ζ′Θ′ (σχ. 43) ἔχουν ἰσοδύναμες ἐπιφάνειες. Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε μὲ κατάλληλη διαίρεσή τους. Τὰ παραπάνω σχήματα λέγονται **ἰσοδύναμα** σχήματα.

Ἰσοδύναμες ἐπιφάνειες εἶναι αὐτὲς ποὺ ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.

Ἰσοδύναμα σχήματα εἶναι αὐτὰ ποὺ ἔχουν ἰσοδύναμες ἐπιφάνειες.

Παρατήρηση: Δύο ἴσα ἐμβαδὰ ἔχουν ἴσες τιμὲς καὶ ἀντιστρόφως.

$$\boxed{\text{Ἐμβ. ΑΒΓΔ} = \text{Ἐμβ. Α′Β′Γ′Δ′} \Leftrightarrow (\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{Α′Β′Γ′Δ′})}$$

Ἀσκήσεις

87) Νὰ τραποῦν σὲ m² τά: 13 dam², 1 hm², 2 km², 18 dam², 58 hm².

88) Πόσα mm² ἔχουν α) 3 m², β) 4 dam², γ) 38 cm².

89) Ἐκφράστε σὲ m² καὶ κατόπι σὲ ares α) $\frac{1}{10}$ hm², β) $\frac{1}{10}$ km².

90) Νὰ τραποῦν σὲ m² τὰ ἐμβαδὰ α) 5 hm² 6 dam² 8 mm² καὶ β) 156,25 dm².

91) Μετατρέψετε σὲ cm² α) 672 dm², β) 3,84 hm² γ) 29 dam².

92) Ἐκτελέσετε τὴν πρόσθεση, ἀφοῦ πρηγουμένως μετατρέψετε τοὺς προσθετέους σὲ cm²: $\frac{2}{5}$ m² + 560000 mm² + 152 cm² + 16 dm².

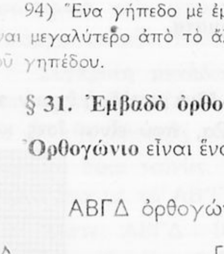
93) Ὑπολογίσετε σὲ m² τὶς διαφορές: α) 8 στρεμ. −243 m² καὶ β) 4 ha −136,25a.

94) Ἕνα γήπεδο μὲ ἐμβαδὸ 6ha ἔχει διαιρεθεῖ σὲ δύο μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλλο κατὰ 40a. Νὰ βρεῖτε πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸ κάθε μέρους τοῦ γηπέδου.

§ 31. Ἐμβαδὸ ὀρθογωνίου.

Ὀρθογώνιο εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο, τὸ ὁποῖο ἔχει μιὰ γωνία ὀρθή.

$$\text{ΑΒΓΔ ὀρθογώνιο} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο} \\ \widehat{A} = 1 \text{ ὀρθή} \end{cases}$$



σχ. 44.

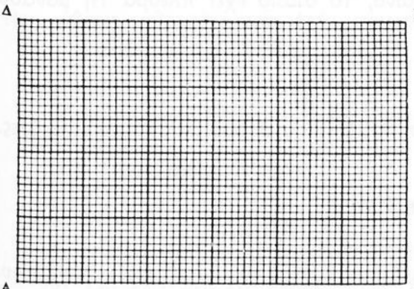
(ἢ διαφορετικά: Ὀρθογώνιο εἶναι τὸ τετράπλευρο, τὸ ὁποῖο ἔχει τὶς γωνίες του ὀρθές).

Ξέρουμε ἀπὸ τὰ προηγούμενα ὅτι οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες, δηλαδὴ ΑΒ = ΔΓ καὶ ΑΔ = ΒΓ.

Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΑΒ = α καὶ ΑΔ =

$=\beta$ λέγονται **διαστάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου. Τὸ πρῶτο λέγεται **βάση** ἢ **μῆκος** καὶ τὸ δεύτερο **ὕψος** ἢ **πλάτος** τοῦ ὀρθογωνίου.

Κατασκευάστε σὲ μία γωνία ἑνὸς φύλλου χιλιοστομετρικοῦ χαρτιοῦ (ἢ τετραγωνισμένου χαρτιοῦ) ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μὲ ΑΒ=6 cm καὶ ΑΔ= = 4 cm καὶ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.



σχ. 45.

Διαπιστώνουμε ὅτι τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ 24 cm^2 ἢ (6×4) cm^2,καὶ βρίσκουμε ἔτσι τὸ ἐμβαδό του $E_{ΑΒΓΔ}=24cm^2=(6\times4)\ cm^2$ δηλ. $(6cm\times4cm)$ ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του.

Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐργαζόμαστε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου Α΄Β΄Γ΄Δ΄ μὲ διαστάσεις κλασματικοὺς ἀριθμοὺς π.χ. $Α'Β'=\frac{4}{10}$ dm καὶ $Α'Δ'=$ $=\frac{3}{10}$ dm. Ἔχουμε $E_{Α'Β'Γ'Δ'}=$ $=12\ cm^2=\frac{12}{100}\ dm^2=(\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10})\ dm^2=\frac{4}{10}\ dm\cdot\frac{3}{10}\ dm$ ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του.

Ἂν πάνω στὸ χιλιοστομετρικὸ χαρτὶ κατασκευάσουμε ἕνα ὀρθογώνιο ΔΕΖΘ μὲ ΔΕ=6,5 cm καὶ ΔΘ=3,4 cm, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδό του σὲ ἀκέραιο ἀριθμὸ μονάδων, δηλαδὴ σὲ τετρ. χιλιοστόμετρα (mm^2), $E_{ΔΕΖΘ}=2210\ cm^2$. Μετατρέπουμε τὸ ἐμβαδό του σὲ τετρ. ἑκατοστόμετρα $E_{ΔΕΖΘ}=22{,}10\ cm^2$ καὶ συγκρίνοντάς το μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του σὲ ἑκατοστόμετρα (cm), βρίσκουμε ὅτι τὸ $E_{ΔΕΖΘ}=$ $=22{,}10\ cm^2=(6{,}5\cdot3{,}4)\ cm^2$.

Δηλαδὴ διαπιστώνουμε πάλι ὅτι τὸ ἐμβαδό του εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του (ἢ μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του) (1). Αὐτὸ ἰσχύει, ὅπως διαπιστώσαμε στὶς περιπτώσεις ποὺ ἐξετάσαμε, ὅταν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί.

Ἀποδεικνύεται ὅμως ὅτι ἡ πρόταση (1) ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἀσύμμετροι (μὴ ρητοὶ) ἀριθμοὶ (ὅπως θὰ μάθουμε σὲ μεγαλύτερη τάξη).

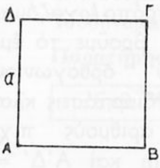
Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις α καὶ β δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $\boxed{E=\alpha\cdot\beta}$ (2), δηλαδή: **Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του.**

Ὁ τύπος (2) γράφεται καὶ $E = \beta \cdot \upsilon$, γιατὶ ξέρουμε ὅτι ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται **βάση** καὶ ἡ ἄλλη **ὕψος** του. Ἀπὸ τὸν τύπο $E = \beta \cdot \upsilon$ παίρνουμε καὶ τοὺς $\beta = \frac{E}{\upsilon}$ καὶ $\upsilon = \frac{E}{\beta}$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ μῆκος τῶν δύο διαστάσεων πρέπει νὰ ἐκφράζεται μὲ τὴν ἴδια μονάδα μήκους, ὁπότε τὸ ἐμβαδὸ ἐκφράζεται μὲ τὴ μονάδα ποὺ παριστάνεται μὲ τὸ τετράγωνο, τὸ ὁποῖο ἔχει πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους ποὺ ἔχουμε ἐκλέξει.

§ 32. Ἐμβαδὸ τετραγώνου.

Τετράγωνο εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο, τοῦ ὁποίου οἱ δύο διαστάσεις εἶναι ἴσες.



σχ. 46.

$$\text{ΑΒΓΔ τετράγωνο} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ ὀρθογώνιο} \\ ΑΒ = ΑΔ \end{cases}$$

Ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραγώνου.

Ἂν παραστήσουμε μὲ α τὸ μῆκος τῶν ἴσων διαστάσεών του, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, τὸ ἐμβαδό του εἶναι $E = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$,

δηλαδή: $\boxed{E = \alpha^2}$.

Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ τετράγωνο τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς του.

Παρατηρήσεις:

1. Ξέρουμε ὅτι ἡ δεύτερη δύναμη ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τετράγωνο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, γιατὶ δίνει τὴν τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἔχει τιμὴ ἴση μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

2. Εἶναι χρήσιμο νὰ ξέρουμε ἀπὸ μνήμης τὰ τετράγωνα μερικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

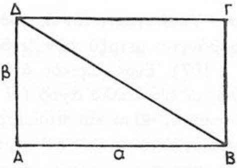
α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
α^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	...

Ἐφαρμογή.

Τὰ μήκη τῶν κάθετων πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι α καὶ β. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.

Ἔχουμε βρεῖ ὅτι ἡ διαγώνιος ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ χωρίζει αὐτὸ σὲ δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα, τῶν ὁποίων οἱ πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουν μήκη τὶς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθ. τριγώνου π.χ. τοῦ ΔΑΒ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, ποὺ ἔχει διαστάσεις ἴσες μὲ τὶς κάθετες πλευρὲς τοῦ ὀρθ. τριγώνου.

Συνεπῶς $E = \frac{\alpha \cdot \beta}{2}$



σχ. 47.

(Διατυπώσετε τὸ σχετικὸ κανόνα).

Ἀσκήσεις

95) Οἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 13 m καὶ 187 m. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του.

96) Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει ἐμβαδὸ 36 cm^2. Μία ἀπὸ τὶς διαστάσεις του εἶναι 4 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαστάσεώς του.

97) Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 6 cm, ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδό του;

98) Ποιό εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου, ποὺ τὸ ἐμβαδό του εἶναι 121 cm^2;

99) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 124 cm, ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδό του;

100) Οἱ δύο κάθετες πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 14 cm καὶ 23 cm, ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδό του;

101) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 150 cm. Ἂν ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς διαστάσεις του εἶναι 25 cm, νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.

102) Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου, ὅταν γνωρίζουμε ὅτι ἡ περίμετρός του ἰσοῦται μὲ 24 cm καὶ ὁ λόγος τῶν διαστάσεών του εἶναι $\frac{1}{3}$

103) Νὰ βρεθεῖ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ, ὅταν εἶναι γνωστὸ ὅτι, ἂν αὐξήσουμε τὴν ΑΒ κατὰ 4m καὶ ἐλαττώσουμε τὴ ΒΓ κατὰ 8 m, βρίσκουμε ἕνα ὀρθογώνιο, τὸ ὁποῖο ἔχει ἐμβαδὸ κατὰ 196 m^2 μικρότερο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραγώνου.

104) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθογωνίου ἀγροῦ ἔχουν ἐμβαδὸ 8,112 στρέμματα. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἀγροῦ; Ποιὰ εἶναι ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς διαστάσεις του, ἂν ἡ ἄλλη εἶναι 169 m;

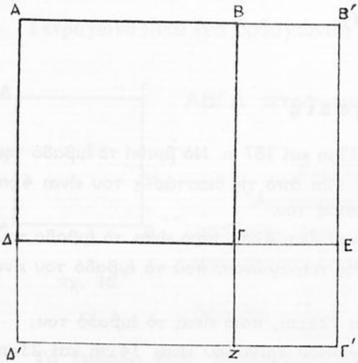
105) Ἕνας ὀρθογώνιος ἀγρός, ποὺ ἡ μιὰ διάστασή του εἶναι 180 m, ἀγοράστηκε 288000 δρχ. μὲ 16.000 δρχ. τὸ στρέμμα. Ἕνας δρόμος πλάτους 3 m κάνει τὸ γύρο τοῦ ὀρθογωνίου ἀγροῦ κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου του καὶ στὸ ἐσωτερικό του. Δύο ἄλλοι δρόμοι πλάτους 2 m εἶναι χαραγμένοι παράλληλα μὲ τοὺς ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου. Οἱ τρεῖς αὐτοὶ δρόμοι διαιροῦν τὸν ἀγρὸ σὲ 4 ἴσα μέρη. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη τοῦ ἀγροῦ.

106) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου εἶναι 240 m. Κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου του καὶ στὸ ἐσωτερικό του φυτεύουμε δένδρα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 5 m

μεταξύ τους καὶ 5 m ἀπὸ τὴν περίμετρο. Τὸ πλάτος τοῦ ἀγροῦ εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μήκους του. Ὑπολογίστε τὸν ἀριθμὸ τῶν δένδρων καὶ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγροῦ, ἡ ὁποία περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δενδροστοιχιῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἀγροῦ.

107) Ἕνας χωρικὸς ἀντάλλαξε ἕναν ἀγρό, ποὺ εἶχε σχῆμα τετραγώνου πλευρᾶς 60m, μὲ ἕναν ἄλλο ἀγρὸ (μὲ τὴν ἴδια ποιότητα χώματος) ποὺ εἶχε σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ πλάτος 40 m καὶ περίμετρο ἴση μὲ τὴν περίμετρο τοῦ πρώτου. Ἔχασε ἢ κέρδισε ὁ χωρικὸς ἀπὸ τὴν ἀνταλλαγή αὐτή;

108) Κατασκευάστε ἕνα τετράγωνο μὲ μῆκος πλευρᾶς ἔστω α. Ν' αὐξήσετε τὴν πλευρά του κατὰ τὸ μῆκος β ($\beta \neq \alpha$) ἔτσι, ὥστε νὰ σχηματίσετε τὸ τετράγωνο ΑΒ'Γ'Δ' (σχ. 48). Ἡ προέκταση τῆς ΔΓ τέμνει τὴ Β'Γ' στὸ Ε καὶ ἡ προέκταση τῆς ΒΓ τὴ Γ'Δ' στὸ Ζ. Νὰ συγκρίνετε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒ'Γ'Δ' μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Ποιὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ΑΒ'Γ'Δ'; Ποιὰ εἶναι ἡ φύση τῶν τετραπλεύρων ΒΒ'ΕΓ, ΓΕΓ'Ζ, ΖΔ'ΔΓ; Ποιές εἶναι οἱ διαστάσεις τους; Νὰ συμπληρώσετε τὶς τιμὲς τῶν ἐμβαδῶν:



σχ. 48.

(ΑΒ'Γ'Δ') = $(\alpha+\beta)^2$

(ΑΒΓΔ) = . . . , (ΒΒ'ΕΓ) = . . .

(ΓΕΓ'Ζ) = . . . (ΔΓΖΔ') = . . .

Νὰ βρεῖτε τὴ σχέση ποὺ συνδέει τὰ ἐμβαδὰ αὐτά.

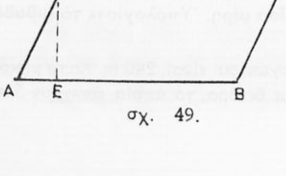
(Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ΑΒ'Γ'Δ' εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἄλλων τεσσάρων. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἐκφράζεται μὲ ἕναν τύπο, ὁ ὁποῖος περιέχει τὶς τιμὲς τῶν ἐμβαδῶν ποὺ βρήκαμε: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+\alpha\beta$. Ὁ τύπος αὐτὸς μπορεῖ νὰ γραφεῖ μὲ τὴ μορφὴ $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$, τὸ ὁποῖο ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: Τὸ τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους σὺν τὸ διπλάσιο γινόμενό τους.

Ἐφαρμόζουμε τὸν τύπο αὐτὸ στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ τετραγώνου ἑνὸς διψήφιου ἀριθμοῦ. π.χ. $45^2 = 40^2+5^2+2\cdot40\cdot5 = 1600+25+400 = 2025$.

109) Νὰ ἐργασθεῖτε μὲ ὅμοιο τρόπο καὶ νὰ δώσετε γεωμετρικὴ ἐξήγηση τῶν τύπων: α) $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$ καὶ β) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$.

§ 33. Ἐμβαδὸ παραλληλογράμμου

Παραλληλόγραμμο εἶναι ἕνα τετράπλευρο, τὸ ὁποῖο ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες.

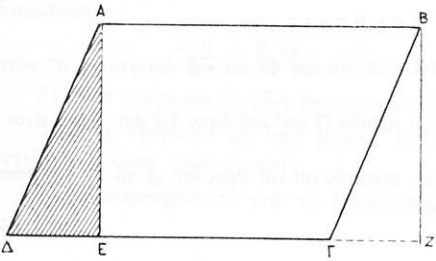


σχ. 49.

$$\text{ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ΑΒ} // \text{ΔΓ} \\ \text{ΑΔ} // \text{ΒΓ} \end{cases}$$

βάση ἑνὸς παραλληλογράμμου λέγεται μιὰ ὁποιαδήποτε πλευρά του.

Ύψος παραλληλογράμμου εἶναι τὸ τμῆμα τῆς καθέτου σὲ δύο ἀπέναντι βάσεις, τὸ ὁποῖο περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.



σχ. 50.

Κατασκευάστε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, φέρετε τὰ ὕψη του ΑΕ καὶ ΒΖ καὶ συγκρίνετε τὸ ἐμβαδό του μὲ τὸ ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕΖΒ. Τί παρατηρεῖτε;

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΓΖ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουν τὶς ὑποτείνουσές των ἴσες (ΑΔ = ΒΓ) καὶ μία κάθετη πλευρὰ ἴση (ΑΕ = ΒΖ) (γιατί;). Ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἰσεμβαδικά. Συνεπῶς (ΑΔΕ) = (ΒΓΖ). (1) Τὰ ἰσεμβαδικὰ σχήματα ἔχουν ἴσες τιμὲς ἐμβαδῶν § 30.

Ἑπομένως, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα (50), ἔχουμε: (ΑΒΓΔ) = = (ΑΒΓΕ) + (ΑΔΕ). Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὴν (1) προκύπτει ἡ (ΑΒΓΔ) = = (ΑΒΓΕ) + (ΒΓΖ) ἄρα (ΑΒΓΔ) = (ΑΕΖΒ), δηλαδὴ μετασχηματίσαμε τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στὸ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο ΑΕΖΒ. Ἀλλὰ ὅπως γνωρίζουμε $E_{AEZB} = (AE)\cdot(EZ)$ καὶ ἐπειδὴ ΔΓ = ΑΒ = ΕΖ = β, ΑΕ = ΒΖ = υ καὶ $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AEZB}$, ἔχουμε $E_{AB\Gamma\Delta} = \beta\cdot\upsilon$, δηλαδὴ

$$\boxed{E = \beta\cdot\upsilon} \qquad (2).$$

Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν. (Τὰ μήκη ἐκφράζονται μὲ τὴν ἴδια μονάδα).

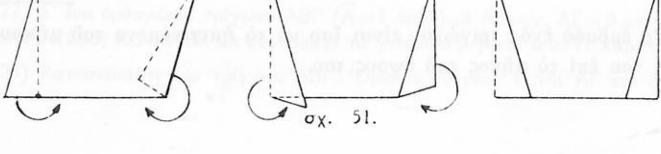
Παρατηρήσεις:

1. Εἶναι φανερὸ πὼς μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε ὡς βάση ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου, ἀρκεῖ νὰ πάρουμε καὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν. Ἂν β' εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς καὶ υ' τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν, ἔχουμε $E = \beta\cdot\upsilon = \beta'\cdot\upsilon'$.

2. Ἐννοεῖται πὼς τὸ μῆκος τῆς βάσης καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους τοῦ παραλληλογράμμου ἐκφράζονται μὲ τὴν ἴδια μονάδα μήκους.

3. Ἀπὸ τὴ (2) ἔχουμε $\beta = \dfrac{E}{\upsilon}$ καὶ $\upsilon = \dfrac{E}{\beta}$.

Σημείωση: Μποροῦμε ἐποπτικὰ μὲ ἕνα παραλληλόγραμμο ἀπὸ χαρτόνι καὶ μὲ


σχ. 51.

δίπλωση καὶ ἀναδίπλωση τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων, ὅπως φαίνεται στὸ σχ. (51), νὰ δοῦμε τὸ μετασχηματισμὸ τοῦ παραλληλογράμμου σὲ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο.

Ἀσκήσεις

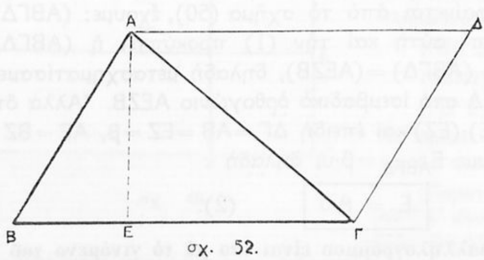
110) Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει μιὰ πλευρὰ 48 cm καὶ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴν ὕψος 3 dm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.

111) Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει ἐμβαδὸ 72 cm^2 καὶ ὕψος 1,2 dm. Πόση εἶναι ἡ βάση του;

112) Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει βάση 96 cm καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς βάσης του. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του σὲ dm^2.

§ 34. Ἐμβαδὸ τριγώνου.

Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του ἀπὸ τὴ βάση του ΒΓ καὶ τὸ ὕψος του ΑΕ.



σχ. 52.

Εἶναι γνωστὸ ὅτι **βάση** ἑνὸς τριγώνου λέγεται μιὰ ὁποιαδήποτε πλευρά του. Π.χ. ἡ ΒΓ εἶναι βάση. Ἀντίστοιχο ὕψος σ' αὐτὴ εἶναι τὸ ΑΕ. Φέρνουμε ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α καὶ Γ τὶς παραλλήλους ΑΔ καὶ ΓΔ πρὸς τὶς ΒΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως, ὁπότε τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖο σχηματίζεται, εἶναι παραλληλόγραμμο μὲ βάση τὴ ΒΓ καὶ ὕψος τὸ ΑΕ.

Ἔχουμε μάθει ὅτι κάθε διαγώνιος παραλληλογράμμου τὸ χωρίζει σὲ δύο ἴσα τρίγωνα. Ἑπομένως ἡ ΑΓ χωρίζει τὸ ΑΒΓΔ σὲ δύο ἰσεμβαδικὰ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ συνεπῶς (ΑΒΓ) = (ΑΓΔ).

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸ τοῦ καθενὸς τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἑπομένως εἶναι:

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\,(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}\,(ΒΓ)\cdot(ΑΕ)$ καὶ ἂν τὸ μῆκος τῆς βάσης ΒΓ εἶναι α καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ΑΕ εἶναι $υ_1$, ἔχουμε: $\boxed{Ε = \frac{α\cdot υ_1}{2}}$

Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἡμιγινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.

Παρατηρήσεις:

1) Εἶναι φανερὸ ὅτι βρίσκουμε τὸ ἴδιο ἐμβαδό, ἂν πάρουμε ὡς βάση μιὰ ἄλλη πλευρὰ καὶ ὡς ὕψος ἐκεῖνο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ αὐτή. Ἑπομένως:

$$\frac{\alpha \cdot \upsilon_1}{2} = \frac{\beta \cdot \upsilon_2}{2} = \frac{\gamma \cdot \upsilon_3}{2} = E$$

2) Δύο τρίγωνα μὲ ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

3) Δύο τρίγωνα μὲ ἴσες βάσεις ἔχουν ἐμβαδὰ ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα ὕψη τους (γιατί);

4) Τί συμπεραίνετε γιὰ τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη;

Ἀσκήσεις

113) Ἕνα τρίγωνο ἔχει βάση 62 cm καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὸ μισὸ τῆς βάσης του. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του.

114) Πόσο εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸ 5 m^2, ἂν ἡ ἀντίστοιχη πλευρὰ στὸ ὕψος αὐτὸ ἔχει μῆκος 20 dm;

115) Οἱ πλευρὲς ἑνὸς παραλληλογράμμου ἔχουν μήκη 24 cm καὶ 27 cm. Τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πρώτη πλευρὰ ἔχει μῆκος 18 cm. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἄλλη πλευρά.

116) Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου. Ἡ περίμετρός του εἶναι 186 m καὶ ἡ μία πλευρά του 24m. Ἂν ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν μεγαλύτερων πλευρῶν του εἶναι 19 m, νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του.

117) Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἔχει πλευρὰ 16 cm. Ἂν ἡ βάση τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 3,2 dm, νὰ βρεθεῖ τὸ ἀντίστοιχό της ὕψος.

118) Ἕνα τρίγωνο καὶ ἕνα ὀρθογώνιο ἔχουν μιὰ πλευρὰ κοινὴ καὶ ἴσα ἐμβαδά. Ποιὰ σχέση συνδέει τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ στὴν κοινὴ πλευρά, μὲ τὴν πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, ποὺ εἶναι κάθετη στὴν κοινὴ πλευρά;

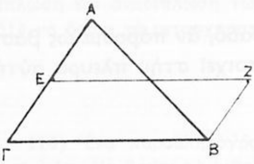
119) Ἕνα τρίγωνο ἔχει ἐμβαδὸ 27 cm^2. Ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη του εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς πλευρᾶς, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτό. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ὕψος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου.

120) Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελές. Οἱ ἴσες πλευρές του ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν μῆκος 8 cm κάθε μία. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πῶς ὑπολογίζεται γενικὰ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

121) Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1$ ὀρθή) εἶναι 50 m^2. Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος τῶν ἴσων πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ.

122) Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1$ ὀρθή) μὲ $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ καὶ $B\Gamma = \alpha$ νὰ φέρετε τὸ ὕψος $A\Delta = \upsilon$ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ γινόμενα $\beta \cdot \gamma$ καὶ $\alpha \cdot \upsilon$. Τί παρατηρεῖτε;

123) Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Ὁρίσετε τὸ μέσο Ε τῆς ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰ



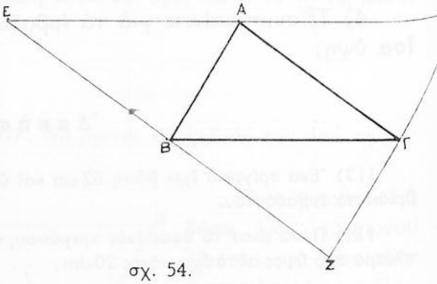
σχ. 53.

Ε καὶ Β φέρετε παραλλήλους πρὸς τὶς ΓΒ καὶ ΓΑ ἀντιστοίχως. Αὐτὲς τέμνονται στὸ Ζ. Συγκρίνετε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΓΒΖ, ποὺ σχηματίζεται, μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 53).

124) Σχηματίστε ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ τὶς κορυφές του φέρετε παραλλήλους πρὸς τὶς διαγωνίους του. Σχηματίζεται τότε ἕνα παραλληλόγραμμο, τὸ ΕΖΗΘ. Νὰ συγκρίνετε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

125) Σχηματίστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὶς κορυφές του νὰ φέρετε παραλλήλους πρὸς τὶς πλευρές του. Σχηματίζεται τότε ἕνα δεύτερο τρίγωνο ΔΕΖ. Νὰ συγκρίνετε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 54).

Σημείωση: Στὶς ἀσκήσεις 123, 124 καὶ 125 γίνεται μετασχηματισμὸς εὐθύγραμμων σχημάτων σὲ ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ χάραξη κατάλληλων γραμμῶν.

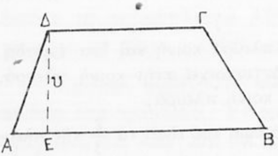


σχ. 54.

§ 35. Ἐμβαδὸ τραπεζίου.

Τραπέζιο εἶναι ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο, τὸ ὁποῖο ἔχει δύο μόνο παράλληλες πλευρές.

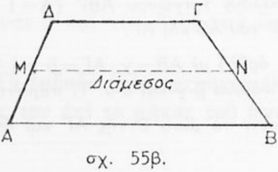
$$\text{Τραπέζιο ΑΒΓΔ} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ κυρτὸ} \\ \text{μόνο ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ} \end{cases}$$



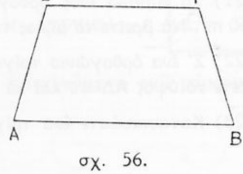
σχ. 55.

Οἱ παράλληλες πλευρὲς τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του. **Ὕψος** τοῦ τραπεζίου εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα τῆς καθέτου πρὸς τὶς βάσεις του, τὸ ὁποῖο περιέχεται μεταξὺ τῶν βάσεων. **Διάμεσος** τραπεζίου λέγεται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖο συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παράλληλων πλευρῶν του (σχ. 55β).

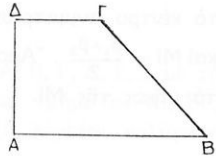
Ἰσοσκελὲς τραπέζιο εἶναι τὸ τραπέζιο, ποὺ ἔχει ἴσες τὶς μὴ παράλληλες πλευρές του. (σχ. 56).



σχ. 55β.



σχ. 56.

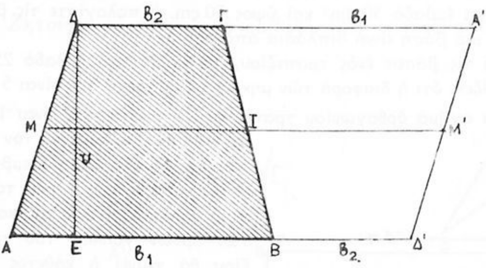


σχ. 57.

Ὀρθογώνιο τραπέζιο εἶναι τὸ τραπέζιο, ποὺ ἔχει μία πλευρὰ κάθετη στὶς βάσεις του. (σχ.57)

Ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Τὸ τυχὸν τραπέζιο ΑΒΓΔ (σχ. 58) ἔχει βάσεις ΑΒ $= \beta_1$, ΔΓ $= \beta_2$ καὶ ὕψος ΔΕ $= \upsilon$. Ἔστω Ι τὸ μέσο τῆς μὴ παράλληλης πλευρᾶς ΒΓ. Κατασκευάζουμε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ΑΒΓΔ ὡς πρὸς κέντρο συμμετρίας τὸ Ι. Τὸ συμμετρικὸ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τραπέζιο Α'ΓΒΔ', ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ΑΒΓΔ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν τῶν δύο συμμετρικῶν τραπεζίων εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔ'Α'Δ. (ΔΑ' // ΑΔ', ΑΔ // Δ'Α' γιατὶ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς κέντρο συμμετρίας τὸ Ι). Τὸ ἐμβαδὸ καθενὸς ἀπὸ τὰ τραπέζια ΑΒΓΔ



σχ. 58.

καὶ Α'ΓΒΔ' εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔ'Α'Δ, δηλαδὴ $E_{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{2} E_{ΑΔ'Α'Δ}$.

Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμο αὐτὸ ἔχει βάση τὴν ΑΔ' $= \beta_1 + \beta_2$ καὶ ὕψος υ, τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$\boxed{E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \upsilon} \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.

Ἀπὸ τὸν τύπο (1) ἔχουμε: $E = \frac{\beta_1+\beta_2}{2} \cdot \upsilon \Leftrightarrow 2E = (\beta_1 + \beta_2)\cdot\upsilon \Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 = \frac{2E}{\upsilon} \Leftrightarrow \beta_1 = \frac{2E}{\upsilon} - \beta_2$. Ἐπίσης ἔχουμε τὸν τύπο $\upsilon = \frac{2E}{\beta_1+\beta_2}$.

Παρατήρηση:

Ἡ διάμεσος ΙΜ τοῦ τραπεζίου τέμνει τὴν Α'Δ στὸ μέσο της Μ' (λόγω τῆς συμμετρίας) τότε ΜΜ' $=$ ΑΔ' $= \beta_1 + \beta_2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ Ι εἶναι τὸ κέντρο συμμετρίας, εἶναι τὸ μέσο τοῦ ΜΜ′, ἑπομένως $2MI = \beta_1 + \beta_2$ καὶ $MI = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}$. Ἄρα ὁ τύπος (1) γράφεται καὶ $\boxed{E = \mu \cdot \upsilon}$, ἂν μ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ΜΙ.

Ἀσκήσεις

126) Τὰ μήκη τῶν βάσεων ἑνὸς τραπεζίου εἶναι $\beta_1 = 8$ cm καὶ $\beta_2 = 6$ cm καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του $\upsilon = 7$ cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου.

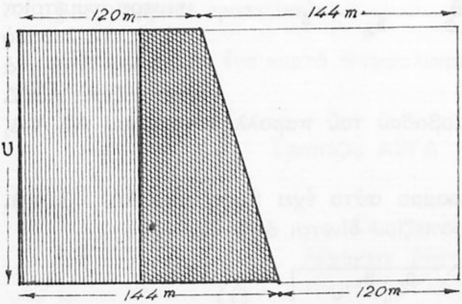
127) Ἕνα τραπέζιο ἔχει ἐμβαδὸ 63 cm². Τὸ ὕψος του εἶναι 6 cm καὶ ἡ μία ἀπὸ τὶς βάσεις του 14 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἄλλη βάση.

128) Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ἀγροῦ σχήματος τραπεζίου εἶναι 3 στρέμ. καὶ οἱ βάσεις του ἔχουν μήκη 180 m καὶ 120 m. Ποιὸ εἶναι τὸ ὕψος του;

129) Ἕνα τραπέζιο ἔχει ἐμβαδὸ 30 dm³ καὶ ὕψος 50 cm. Ὑπολογίστε τὶς βάσεις του, ὅταν γνωρίζετε ὅτι ἡ μία βάση εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ἄλλη.

130) Νὰ ὑπολογίσετε τὶς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου, τὸ ὁποῖο ἔχει ἐμβαδὸ 252 m² καὶ ὕψος 24 m, ὅταν γνωρίζετε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν βάσεών του εἶναι 5 m.

131) Ἕνας ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τραπεζίου. Οἱ βάσεις του εἶναι 120 m καὶ 144 m. Θέλουμε νὰ τὸν διαιρέσουμε σὲ δύο μέρη ἰσεμβαδικὰ μὲ μιὰ κάθετο στὶς βάσεις του. Σὲ ποιὰ ἀπόσταση ἀπὸ τὶς κορυφὲς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου θὰ τέμνει ἡ κάθετος αὐτὴ τὶς βάσεις του;



σχ. 59.

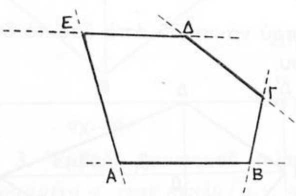
Ὑπόδειξη: Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἀγροῦ, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογ. τραπεζίου, εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖο ἔχει διαστάσεις τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου (120 m + 144 m = 264 m) καὶ τὸ ὕψος του υ m, ἢ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖο ἔχει διαστάσεις $\frac{264}{2}$ m = 132 m καὶ υ m. Ἡ κάθετος στὶς δύο βάσεις χωρίζει τὸ τραπέζιο σὲ ἕνα ὀρθογώνιο καὶ σ' ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο (τὸ ὕψος υ τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ μιὰ διάσταση τοῦ ὀρθογωνίου). Ἐπειδὴ οἱ δύο αὐτὲς ἐπιφάνειες ἔχουν ἴσα ἐμβαδά, πρέπει κάθε μία νὰ ἔχει ἐμβαδὸ τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου ποὺ μᾶς δόθηκε, δηλαδὴ τὸ μισὸ τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖο ἔχει διαστάσεις 132 m καὶ υm· δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις $\frac{132}{2}$ m = 66 m καὶ υm. Τώρα πιὰ εἶναι εὔκολο νὰ ὑπολογίσουμε τὴν ἀπόσταση τῆς καθέτου πρὸς τὶς βάσεις τοῦ τραπεζίου ἀπὸ τὶς κορυφὲς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν του, τὴν ὁποία ἔχετε νὰ ὑπολογίσετε.

§ 36. Ἐμβαδὸ πολυγώνου.

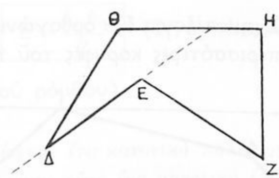
Ἂν πάρουμε πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μὲ τὴ σειρὰ ποὺ ἀναφέρονται καὶ φέρουμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΑ, ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖΑ λέγεται **πολύγωνο** ΑΒΓΔΕΖ.

Λέμε ὅτι ἕνα πολύγωνο εἶναι **κυρτὸ** (σχ. 60), ὅταν βρίσκεται ὁλόκληρο στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα, ποὺ ὁρίζονται, ἀπὸ τὸ φορέα κάθε πλευρᾶς του. Σὲ κάθε ἄλλη περίπτωση εἶναι **μὴ κυρτὸ** (σχ. 61). **Διαγώνιος** πολυγώνου λέγεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ ὁποῖο ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὲς κορυφές του.

Ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου.



σχ. 60.

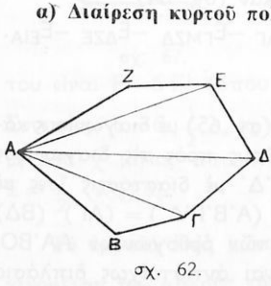


σχ. 61.

Μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδό του χρησιμοποιώντας τὶς παρακάτω μεθόδους:

Α. Τὴν προσθετικὴ μέθοδο:

α) Διαίρεση κυρτοῦ πολυγώνου σὲ τρίγωνα:

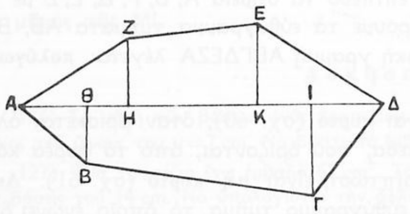


σχ. 62.

Ἔστω ἕνα κυρτὸ πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Φέρνουμε τὶς διαγωνίους του ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α, καὶ διαιροῦμε τὸ πολύγωνο σὲ 4 τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, ΑΕΖ (σχ. 62). Ἔχουμε: (ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ) + (ΑΕΖ)

Ἄρα: τὸ ἐμβαδὸ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, στὰ ὁποῖα διαιρεῖται.

β) Ἀνάλυση τοῦ πολυγώνου σὲ κυρτὰ τραπέζια, ὀρθογώνια καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα:



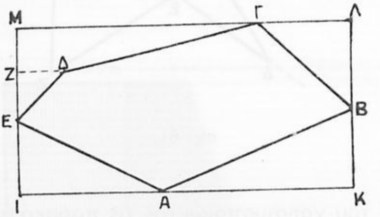
σχ. 63.

Φέρνουμε τὴ μεγαλύτερη διαγώνιο, τὴν ΑΔ, καὶ ἀπὸ τὶς ἄλλες κορυφὲς φέρνουμε τὶς καθέτους σ' αὐτήν. Διαιροῦμε ἔτσι τὸ πολύγωνο σὲ ὀρθογώνια τραπέζια καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα (σχ. 63) καὶ ἔχουμε:

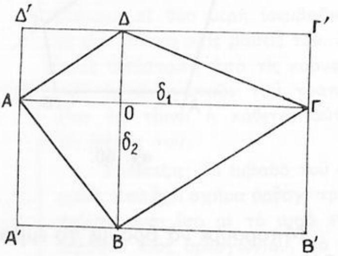
$$E_{ΑΒΓΔΕΖ} = E_{ΑΒΘ} + E_{ΘΒΓΙ} + E_{ΙΓΔ} + E_{ΔΕΚ} + E_{ΚΕΖΗ} + E_{ΖΑΗ}.$$

Β. Τὴ μέθοδο τῆς διαφορᾶς τῶν ἐμβαδῶν:

Σχηματίζουμε ἕνα ὀρθογώνιο ΙΚΛΜ, ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερες κορυφὲς τοῦ πολυγώνου.



σχ. 64.



σχ. 65.

Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΙΚΛΜ, τὸ ὁποῖο ἔχει ἐλαττωθεῖ κατὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἢ ὀρθ. τραπεζίων ποὺ σχηματίσθηκαν (σχ. 64).

Δηλαδή: $E_{ΑΒΓΔΕ} = E_{ΚΛΜΙ} - E_{ΑΚΒ} - E_{ΒΛΓ} - E_{ΓΜΖΔ} - E_{ΔΖΕ} - E_{ΕΙΑ}$.

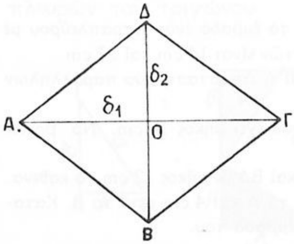
§ 37. Ἐφαρμογές.

1. Κατασκευάστε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 65) μὲ διαγωνίους καθέτους καὶ ἀπὸ τὶς κορυφές του φέρετε παραλλήλους πρὸς τὶς διαγωνίους του. Σχηματίζεται τότε τὸ ὀρθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' μὲ διαστάσεις ἴσες μὲ τὶς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. Ἑπομένως (Α'Β'Γ'Δ') = (ΑΓ) · (ΒΔ)

Τὸ ὀρθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΑ'ΒΟ, ΒΒ'ΓΟ, ΓΓ'ΔΟ, ΟΔΔ'Α ποὺ καθένα τους εἶναι ἀντιστοίχως διπλάσιο ἀπὸ τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΒΟΑ, ΒΓΟ, ΓΔΟ, ΑΟΔ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου Α'Β'Γ'Δ'.

Ἄρα: **Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραπλεύρου μὲ καθέτους διαγωνίους, εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἡμιγινόμενο τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων του.** $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$ (δ_1, δ_2 εἶναι τὰ μήκη τῶν ΑΓ, ΒΔ σχ. 65).

2. Ἐμβαδὸ ρόμβου.

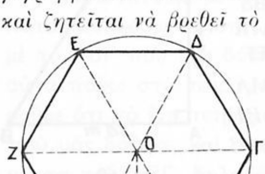


σχ. 66.

Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζουμε, οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως (σχ. 66), **τὸ ἐμβαδό του ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιγινόμενο τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων του.**

Δηλαδή: $\boxed{E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}}$ (δ_1, δ_2 τὰ μήκη τῶν διαγωνίων τοῦ ρόμβου).

3. Ἐμβαδὸ κανονικοῦ πολυγώνου: *Δίνεται ἕνα κανονικὸ πολύγωνο ἐγγεγραμμένο σ' ἕναν κύκλο (π.χ. στὴν περίπτωση αὐτὴ ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο) καὶ ζητεῖται νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του (σχ. 67).*

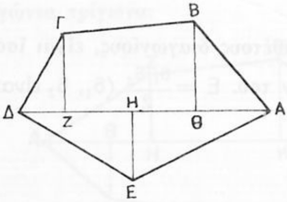


σχ. 67.

Περίμετρο ἑνὸς εὐθ. σχήματος ὀνομάσαμε τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Ἐπειδὴ στὰ κανονικὰ πολύγωνα οἱ πλευρές τους εἶναι ὅλες ἴσες, ἡ περίμετρος π.χ. τοῦ παραπάνω ἑξαγώνου θὰ εἶναι $6 \cdot \lambda_6$ καὶ γενικὰ ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ ν-πλεύρου εἶναι $\nu \cdot \lambda_\nu$. Ἂν φέρουμε τὶς ἀκτίνες τοῦ παραπάνω κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 67), αὐτὸ διαιρεῖται σὲ 6 ἴσα τρίγωνα. Ἄρα τὸ ἐμβαδό του εἶναι $E = 6 \cdot E'$ (ὅπου E' εἶναι τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα τρίγωνα). Συνεπῶς $E = 6 \cdot \frac{1}{2} \lambda_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} (6\lambda_6) \cdot \alpha_6$, δηλαδὴ $E = \frac{1}{2}$ χ μῆκος περιμέτρου χ μῆκος ἀποστήματος. Καὶ γενικὰ γιὰ ἕνα κανονικὸ ν-πλευρο $E = \frac{1}{2} (\nu\lambda_\nu) \cdot \alpha_\nu$.

Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός του.

Ἀσκήσεις



σχ. 68.

132) Ἕνα πολύγωνο ΑΒΓΔΕ ἔχει τὴ διαγώνιο ΑΔ=148 m. Οἱ κάθετες ΓΖ, ΕΗ καὶ ΒΘ εἶναι 43 m, 45 m καὶ 52 m ἀντιστοίχως (σχῆμα 68). Ἂν ΔΖ= =18 m, ΘΑ=38 m καὶ ΔΗ=70 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδό του.

133) Ἕνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 12 cm καὶ 9 cm. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του.

134) Ἂν τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ρόμβου εἶναι 42 cm² καὶ ἡ μία διαγώνιός του εἶναι 12 cm, νὰ βρεθεῖ ἡ ἄλλη διαγώνιος.

135) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τετραπλεύρου μὲ καθέτους διαγωνίους, ὅταν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτῶν εἶναι 14 cm καὶ 27 cm.

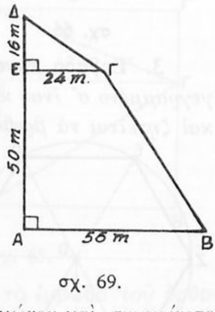
136) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ρόμβου εἶναι 144 cm καὶ ἡ ἀπόσταση δύο παράλληλων πλευρῶν του 28 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.

137) Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς διαγωνίους ἑνὸς τετραγώνου ἔχει μῆκος 10 cm. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του.

138) Φέρετε δύο κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ μὲ μῆκος 12 cm τὸ καθένα. Αὐτὰ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ι, ποὺ ἀπέχει 5 cm ἀπὸ τὸ Α καὶ 4 cm ἀπὸ τὸ Β. Κατασκευάστε τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ καὶ ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδό του.

139) Ἔστω ἕνα οἰκόπεδο, ποὺ ἔχει σχῆμα ὅπως αὐτὸ ποὺ εἰκονίζεται στὸ σχῆμα (69). ($\widehat{A}=1$ ὀρθή). Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδό του.

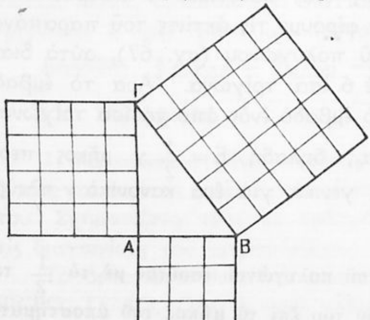
140) Νὰ σχηματίσετε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ καὶ νὰ φέρετε ἀπὸ τὸ Α μιὰ παράλληλο πρὸς τὴν διαγώνιό του ΒΔ. Ἡ παράλληλος αὐτὴ τέμνει τὴν εὐθεία ΓΒ στὸ Ε. Συγκρίνετε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραπλεύρου μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου ΔΕΓ.



σχ. 69.

Β'. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§ 38. *Κατασκευάστε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ κάθετες πλευρὲς ΑΓ=4 μονάδ. μήκους καὶ ΑΒ = 3 μονάδ. μήκους. Μετρῆστε τὴν ὑποτείνουσά του. Ἔπειτα κατασκευάστε τετράγωνα μὲ πλευρὲς τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου καὶ συγκρίνετε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων τῶν κάθετων πλευρῶν του. Τί παρατηρεῖτε;*

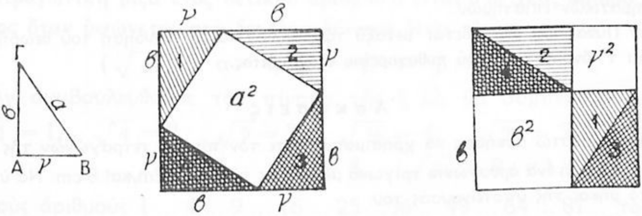


σχ. 70.

Μετρώντας διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ εἶναι ἴση μὲ 5 μον. μήκους καὶ παρατηροῦμε (σχ. 70) ὅτι τὸ τετράγωνο, ποὺ ἔχει πλευρὰ τὴν ὑποτείνουσα, περιέχει 25 τετραγωνάκια μὲ πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους καὶ ὅτι τὰ δύο ἄλλα τετράγωνα περιέχουν ἀντιστοίχως 9 καὶ 16 τέτοια τετραγωνάκια. Ἀλλὰ $25=16+9$ ἢ $5^2=4^2+3^2$ ἄρα $(ΒΓ)^2=(ΑΓ)^2+(ΑΒ)^2$(1). Ἡ σχέση (1), ποὺ συνδέει τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἐκφράζει τὸ πυθαγόρειο θεώρημα.

Μποροῦμε γενικὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὴ σχέση (1) ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ $\widehat{A}=1$ ὀρθὴ καὶ μὲ μήκη πλευρῶν $ΑΒ=γ$, $ΑΓ=β$ καὶ $ΒΓ=α$. Κατασκευάζουμε δύο ἴσα τετράγωνα καὶ καθένα μὲ πλευρὰ ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $β+γ$, τῶν μηκῶν τῶν κάθετων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.



(71α) (71β)

σχ. 71.

Παριστάνουμε μὲ E_1 τὸ ἐμβαδὸ καθενὸς ἀπὸ τὰ τετράγωνα αὐτά. Κατασκευάζουμε ἐπίσης ἀπὸ χαρτόνι τέσσερα ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ ποὺ μᾶς δόθηκε (E τὸ ἐμβαδὸ καθενός). Θέτουμε τὰ τρίγωνα αὐτὰ πάνω στὸ τετράγωνο, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 71α, καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἕνα τετράγωνο ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ, ποὺ μᾶς δόθηκε, καὶ ἀπὸ ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσα τοῦ ΑΒΓ, δηλαδὴ $E_1=α^2+4E$ (2). Ἔπειτα τοποθετοῦμε τὰ τρίγωνα στὸ ἄλλο τετράγωνο μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα 71β. Παρατηροῦμε, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 71β, ὅτι αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 τετράγωνα μὲ πλευρὲς β καὶ γ ἀντιστοίχως, καὶ ἀπὸ τέσσερα ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ. Ἄρα $E_1=β^2+γ^2+4E$ (3).

Ἐφαρμόζουμε τὴ μεταβατικὴ ἰδιότητα στὶς σχέσεις (2) καὶ (3) καὶ ἔχουμε $α^2+4E=β^2+γ^2+4E$. Συνεπῶς $α^2=β^2+γ^2$. Δηλαδὴ βρήκαμε πάλι τὴ σχέση $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ πυθαγόρειο θεώρημα:

Τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο κάθετων πλευρῶν του.

Παρατήρηση: Ἀπὸ τὴ σχέση $α^2=β^2+γ^2$ βρίσκουμε τὶς ἑξῆς σχέσεις: $β^2=α^2-γ^2$ καὶ $γ^2=α^2-β^2$, δηλαδή: **Τὸ τετράγωνο κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου βρίσκεται, ἂν ἀπὸ τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας ἀφαιρέσουμε τὸ τετράγωνο τῆς ἄλλης κάθετης πλευρᾶς.**

Ἱστορικὴ σημείωση: Ὁ διάσημος μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος **Πυθαγόρας** γεννήθηκε τὸ 580 π.Χ. στὴ Σάμο καὶ πέθανε τὸ 500 π.Χ. στὸ Μεταπόντιο τῆς Κάτω Ἰταλίας.

Μετὰ ἀπὸ σύσταση τοῦ Θαλῆ πῆγε στὴν Αἴγυπτο (πιθανῶς καὶ στὴ Βαβυλώνα) ὅπου παρέμεινε γιὰ πολλὰ χρόνια καὶ μυήθηκε στὶς γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων μὲ τὴ μελέτη τῶν βιβλίων τους.

Μετὰ τὴν ἐπιστροφή του στὴν Ἑλλάδα πῆγε στὴν Κρήτη καὶ τὴ Σάμο καὶ τέλος πέρασε στὸν Κρότωνα τῆς Κάτω Ἰταλίας (Μεγάλη Ἑλλάδα), ὅπου ἵδρυσε καὶ διεύθυνε Σχολή, ἡ ὁποία θεωρεῖται ὡς τὸ Πρῶτο Πανεπιστήμιο τοῦ κόσμου. Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ μαθητές του, ποὺ ὀνομάζονταν **Πυθαγόρειοι**, συνέβαλαν στὴν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν.

Ὁ Πυθαγόρας ὑπῆρξε ἀπὸ τὶς κορυφαῖες μορφὲς τῆς ἐπιστήμης ὅλων τῶν ἐποχῶν καὶ ἡ πνευματική του δραστηριότητα ἀναφέρεται σ' ὅλους τοῦ τομεῖς τῶν φυσικῶν καὶ μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Στὸν Πυθαγόρα ἀποδίδεται μεταξὺ τῶν ἄλλων καὶ ἡ ἐπινόηση τοῦ θεωρήματος ποὺ φέρει τ' ὄνομά του, τοῦ **πυθαγορείου θεωρήματος.**

Ἀσκήσεις

Στὶς παρακάτω ἀσκήσεις νὰ χρησιμοποιήσετε τὸν πίνακα τετραγώνων τῆς § 32.

141) Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσάς του.

142) Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ὑποτείνουσα ΒΓ = 15 cm καὶ τὴν κάθετη πλευρὰ ΑΒ = 9 cm. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά του ΑΓ.

143) Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος του.

144) Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιο ἡ μικρὴ βάση εἶναι $\beta_1 = 50$ cm, κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρές του 10 cm καὶ τὸ ὕψος του 6 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.

145) Δίνεται ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιο, ποὺ ἔχει μεγάλη βάση ἴση μὲ $\frac{11}{5}\alpha$ καὶ τὶς ἄλλες τρεῖς πλευρές τους ἴσες μὲ α. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδό του. Ἐφαρμογή: $\alpha = 5$cm.

146) Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει μιὰ πλευρὰ μήκους 3 cm καὶ διαγώνιο μήκους 5 cm.

147) Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχει ὑποτείνουσα 25 cm καὶ μιὰ κάθετη πλευρὰ 24 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ὕψος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ὑποτείνουσα.

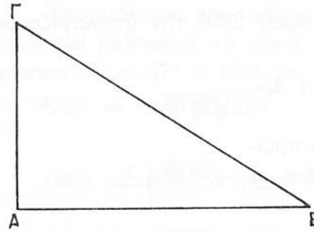
148) Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχει ἐμβαδὸ 6 cm^2. Μία κάθετη πλευρά του εἶναι 4 cm. Νὰ βρεθεῖ τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσάς του.

Τετραγωνικὴ ρίζα

§ 39. Τετραγωνικὴ ρίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὑπολογισμός της.

Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 45 mm καὶ 28 mm καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὸ τετράγωνο τῆς τιμῆς τῆς ὑποτείνουσας καὶ τὴν τιμή της.

Κατασκευάζουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ μὲ κάθετες πλευρὲς ΑΒ = 45 mm καὶ ΑΓ = 28 mm καὶ ἐφαρμόζουμε τὸ πυθαγόρειο θεώρημα (σχ. 72).



σχ. 72.

$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 \Rightarrow (ΒΓ)^2 = 45^2 + 28^2 \Rightarrow (ΒΓ)^2 = 2025 + 784 \Rightarrow$
$\Rightarrow (ΒΓ)^2 = 2809$

Ἂν μετρήσουμε τὴν ὑποτείνουσα, θὰ βροῦμε ὅτι ΒΓ = 53 mm. Ὥστε: $53^2 = 2809$. Τὸν ἀριθμὸ 53 τὸν ὀνομάζουμε **τετραγωνικὴ ρίζα** τοῦ ἀριθμοῦ 2809 καὶ συμβολίζουμε $\sqrt{2809}$ Ὥστε $\sqrt{2809} = 53$. Γενικά:

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ α εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{\alpha}$, ὁ ὁποῖος ὅταν ὑψώνεται στὴ δευτέρα δύναμη δίνει τὸν α.

$$(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \beta^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha}$$

Ἂν συμβουλευθοῦμε τὸν πίνακα τῆς § 32, θὰ συμπεράνουμε ὅτι:

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{49} = 7, \quad \sqrt{64} = 8, \quad \sqrt{81} = 9 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Τοὺς ἀριθμοὺς 1 ... 4 ... 9 ... 16 ... 25 ...36 ... 49 ... 64 ... 81... τοὺς λέμε τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων ἢ ἁπλῶς τέλεια τετράγωνα, γιατὶ γράφονται μὲ τὴ μορφὴ $1^2 \ldots 2^2 \ldots 3^2 \ldots 4^2 \ldots 5^2 \ldots 6^2 \ldots 7^2 \ldots 8^2 \ldots 9^2 \ldots$

Οἱ τετραγωνικὲς ρίζες τῶν παραπάνω τέλειων τετραγώνων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

§ **40**. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἀκέραιος ἀριθμός, ποὺ δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο, βρίσκεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τέλειων τετραγώνων.

Π.χ. $1 < 3 < 4$, $25 < 31 < 36$ κ.λ.π. ἢ $1^2 < 3 < 2^2$, $5^2 < 31 < 6^2$.

Λέμε ὅτι ὁ 1 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγιση μονάδας, μὲ ἔλλειψη, καὶ ὁ 2 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγιση μονάδας, μὲ ὑπεροχή, καὶ συμβολίζουμε: μὲ ἐλ. $\sqrt{3} = 1$ κατὰ προσέγγιση μονάδας καί: μὲ ὑπ. $\sqrt{3} = 2$ κατὰ προσέγγιση μονάδας. Ὁμοίως: μὲ ἔλ. $\sqrt{31} = 5$ κατὰ προσέγγιση μονάδας καί: μὲ ὑπ. $\sqrt{31} = 6$ κατὰ προσέγγιση μονάδας.

Ἀπ' ἐδῶ κι ἐμπρὸς ὅταν λέμε τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγιση μονάδας, θὰ ἐννοοῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα μὲ ἔλλειψη.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγιση μονάδας εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ ποὺ μᾶς ἔχει δοθεῖ.

Ὁ ἀριθμὸς 2809 εἶναι τέλειο τετράγωνο, γιατὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα του εἶναι ὁ ἀκέραιος 53.

§ **41**. Τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 2809 τὴν ὑπολογίζουμε ὡς ἑξῆς:

1. Τὸν χωρίζουμε σὲ διψήφια τμήματα ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ τέλος.

$$\sqrt{28'09}$$

2. Βρίσκουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πρώτου τμήματος 28 κατὰ προσέγγιση μονάδας μὲ ἔλλειψη.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ \hline & \end{array}$$

3. Ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ 28 τὸ τετράγωνο τοῦ 5 (τὸν 25).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ -25 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

4. Παραθέτουμε δεξιὰ ἀπὸ τὴ διαφορὰ 3 τὸ ἑπόμενο διψήφιο τμῆμα 09 καὶ χωρίζουμε τὸ τελευταῖο ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ 309 ποὺ σχηματίσθηκε.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ -25 & \\ \hline 30'9 & \end{array}$$

5. Διπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ 5 ποὺ βρήκαμε (πάνω-δεξιά) καὶ βρίσκουμε 10, τὸ ὁποῖο γράφουμε κάτω ἀπὸ τὸν 5.

6. Διαιροῦμε τὸ 30 τοῦ 309 διὰ τοῦ 10 καὶ τὸ πηλίκο 3 τὸ γράφουμε δεξιὰ τοῦ 10 καὶ σχηματίζουμε τὸν ἀριθμὸ 103· πολλαπλασιάζουμε αὐτὸν μὲ τὸν 3 (γράφουμε καὶ δεξιά καὶ κάτω ἀπὸ τὸν 10 τὸ πηλίκο 3). Ἀφαιροῦμε τὸ γινόμενο 309 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 309 (Ἂν τὸ γινόμενο 103 × 3 ἦταν μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν 309, θὰ γράφαμε δεξιὰ καὶ κάτω ἀπὸ τὸν 10 τὸν ἀμέσως μικρότερο ἀριθμὸ τοῦ 3, τὸν 2, ὡς ἑξῆς $\begin{array}{r}102\\ \times 2\end{array}$ καὶ θὰ συνεχίζαμε νὰ ἐργαζόμαστε τὸ ἴδιο).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ -25 & \overline{103} \\ \hline 30'9 & \times 3 \\ -30'9 & \overline{309} \\ \hline 0 & \end{array}$$

7. Παραθέτουμε δεξιὰ ἀπὸ τὸν 5 ποὺ βρήκαμε (στάδιο 2), τὸ πηλίκο 3. Ὁ ἀριθμὸς 53 ποὺ βρήκαμε πάνω δεξιὰ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2809.

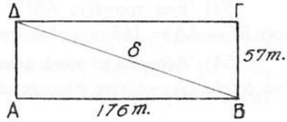
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 53 \\ -25 & \overline{103} \\ \hline 309 & \times 3 \\ -309 & \overline{309} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ὁ 2809 εἶναι τέλειο τετράγωνο, γιατί κάτω ἀριστερὰ βρήκαμε ὑπόλοιπο 0. Ἂν ἔχουμε καὶ τρίτο τμῆμα, ἐπαναλαμβάνουμε τὴν ἐργασία ἀπὸ τὸ στάδιο 4 καὶ κάτω.

Ἐφαρμογές.

1. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ διαγώνιος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 57 m καὶ 176 m (σχ. 73).

Ἐφαρμόζουμε τὸ πυθαγόρειο θεώρημα καὶ βρίσκουμε τὸ μῆκος δ τῆς διαγωνίου. $\delta^2 = 57^2 + 176^2 \Leftrightarrow \delta^2 = 34225 \Leftrightarrow \delta = \sqrt{34225}$.



σχ. 73.

(ἐδῶ τὸ πρῶτο τμῆμα εἶναι μονοψήφιο).

$\sqrt{3'42'25}$	185		
−1	29	28	365
2 4'2	× 9	× 8	× 5
−2 2 4	261	224	1825
1 8 2'5			
− 1 8 2 5			
0			

Ὥστε ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος 185 m.

Παρατήρηση: Κατὰ τὴ διαίρεση 24:2 θέτουμε τὸν μεγαλύτερο μονοψήφιο 9. Ἂν ὅμως, ὅπως ἐδῶ, τὸ γινόμενο 29×9 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν 242, θέτουμε τὸν ἀμέσως μικρότερο ἀριθμὸ 8 κ.ο.κ.

Ἂν ἡ τελικὴ διαφορὰ δὲν εἶναι 0, τότε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ποὺ βρίσκουμε, εἶναι κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ μὲ ἔλλειψη.

2. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 139 mm καὶ μία κάθετη πλευρά του 38 mm. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά.

Ἂν χ εἶναι ἡ τιμή της, ἔχουμε:

$$\chi^2 + 38^2 = 139^2 \Leftrightarrow \chi^2 = 139^2 - 38^2 \Leftrightarrow \chi^2 = 17877 \Leftrightarrow \chi = \sqrt{17877}.$$

$\sqrt{1'78'77}$	133	
−1	23	263
07'8	× 3	× 3
− 6 9	69	789
0 97'7		
− 7 8 9		
1 8 8		

Ὥστε $\sqrt{17877} = 133$ κατὰ προσέγγιση μονάδας.

Δηλ. $133^2 < 17877 < 134^2$. Πραγματικὰ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 17689 < 17877 < 17956$

Μὲ μέτρηση διαπιστώνουμε ὅτι ἡ πλευρὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ 133 mm ἀλλὰ μικρότερη ἀπὸ 134 mm.

Ἀσκήσεις

149) Ὑπολογίστε τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{121}$, $\sqrt{6241}$, $\sqrt{12321}$

150) Βρεῖτε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 11, 45, 1797, 394563 κατὰ προσέγγιση μονάδας.

151) Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἔχει ἴσες πλευρὲς 185 m καὶ βάση 222 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδό του.

152) Μιὰ χορδὴ ΑΒ ἑνὸς κύκλου εἶναι 336 cm καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο του ἀπόσταση 374 cm. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου;

153) Ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἔχει βάσεις ΑΒ = 276 mm καὶ ΓΔ = 78 mm καὶ πλευρὲς ΒΓ = ΑΔ = 165 mm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδό του.

154) Ἀνάμεσα σὲ ποιὰ μήκη βρίσκεται ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖο ἔχει κάθετες πλευρὲς μὲ μήκη 389 cm καὶ 214 cm;

§ 42. Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγιση.

Νὰ βρεῖτε μεταξὺ ποιῶν ἀκεραίων τετραγώνων περιέχεται ὁ ἀριθμὸς 1200 καὶ νὰ διαιρέσετε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ θὰ βρεῖτε καὶ τὸν 1200 διὰ 100. Τί παρατηρεῖτε;

Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 1200 κατὰ προσέγγιση μονάδας μὲ ἔλλειψη

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12'00} & 34 \\ -9 & 64 \\ 30'0 & \times 4 \\ -256 & 256 \\ 44 & \end{array}$$

Αὐτὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 34

Τότε ἔχουμε $34^2 < 1200 < 35^2 \Leftrightarrow \frac{34^2}{100} < 12 < \frac{35^2}{100}$

$\Rightarrow \frac{34^2}{10^2} < 12 < \frac{35^2}{10^2} \Rightarrow \left(\frac{34}{10}\right)^2 < 12 < \left(\frac{35}{10}\right)^2$

$\Rightarrow 3{,}4^2 < 12 < 3{,}5^2$.

Παρατηροῦμε, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν δεκαδικῶν 3,4 καὶ 3,5. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ διαφέρουν κατὰ 0,1.

Ὁ ἀριθμὸς 3,4 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,1 μὲ ἔλλειψη. Ὁ ἀριθμὸς 3,5 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,1, μὲ ὑπεροχή.

Ὅταν λέμε ἁπλῶς τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγιση, θὰ ἐννοοῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα μὲ ἔλλειψη καὶ θὰ γράφουμε μὲ ἔλ. $\sqrt{12} = 3{,}4$ κατὰ προσέγγιση 0,1. Ἂν ἐργαστοῦμε ὅμοια μὲ τὸν ἀριθμὸ 120.000, θὰ βροῦμε:

$$\begin{array}{r|l|l} \sqrt{12'00'00} & 346 & \\ -9 & 64 & 686 \\ 30'0 & \times 4 & \times 6 \\ -25\,6 & 256 & 4116 \\ 4\,40'0 & & \\ -4\,11\,6 & & \\ 2\,84 & & \end{array}$$

Δηλαδὴ $346^2 < 120.000 < 347^2$. Διαιροῦμε διὰ $10.000 = 100^2$ καὶ ἔχουμε: $\left(\frac{346}{100}\right)^2 < 12 < \left(\frac{347}{100}\right)^2 \Rightarrow (3{,}46)^2 < 12 < (3{,}47)^2$.

Ὁ ἀριθμὸς 3,46 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση ἑκατοστοῦ (0,01).

Τετραγωνική ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγιση δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ κλπ. εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς μὲ ἕνα, δύο, τρία κλπ. δεκαδικὰ ψηφία ἀντιστοίχως, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸν ἀριθμό, ποὺ μᾶς ἔχει δοθεῖ.

Γιὰ νὰ βροῦμε προηγουμένως τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,1, ὑπολογίσαμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $1200 = 12.100 = 12 \cdot 10^2$ κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ τὴ διαιρέσαμε διὰ 10.

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,01 ὑπολογίσαμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $120000 = 12 \cdot 10000 = 12 \cdot 100^2$ καὶ τὴ διαιρέσαμε διὰ 100.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγιση δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ, ... ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: 1) πολλαπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ $100 = 10^2$, $10000 = 100^2$, $1000000 = 1000^2$ κλπ. ἀντιστοίχως. 2) Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ 3) διαιροῦμε αὐτὴ διὰ 10, 100, 1000 ἀντιστοίχως.

Τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

α) Δίνεται τὸ κλάσμα $\frac{16}{25}$. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια τετράγωνα: $\frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2} \Rightarrow \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

Ὁ $\frac{16}{25}$ λέγεται τέλειο τετράγωνο τοῦ ρητοῦ $\frac{4}{5}$. Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{16}{25}$, $\frac{36}{81}$, $\frac{9}{64}$, ... εἶναι τέλεια τετράγωνα ρητῶν ἀριθμῶν.

Γενικά: $\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2}}$, διότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

β) Νὰ βρεθεῖ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{3}{8}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{8}$. Πολλαπλασιάζουμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 8^2 καὶ ἔχουμε $\frac{3}{8} \cdot 8^2 = 3 \cdot 8 = 24$. Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου 24 κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ τὴ διαιροῦμε διὰ 8. Δηλαδὴ $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{24}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{8}$, δηλαδὴ μὲ ἔλλ. $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{8}$.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος κατὰ προσέγγιση τῆς κλασματικῆς μονάδας του, πολλαπλασιάζουμε τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸ τετράγωνο τοῦ παρονομαστῆ, ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ τὴ διαιροῦμε μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.

Ἐφαρμογές.

1) Νὰ βρεθεῖ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 19,763 κατὰ προσέγγιση 0,01. Πολλαπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ 10000 καὶ ἔχουμε $19{,}763 \cdot 10000 = 197630$.

Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 197630 κατὰ προσέγγιση μονάδας, ἡ ὁποία εἶναι 444, καὶ τὴ διαιροῦμε διὰ 100. Ὥστε $\sqrt{19{,}763} = 4{,}44$ κατὰ προσέγγιση 0,01.

2) Θέλουμε νὰ μετρήσουμε τὴν ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κάθετες πλευρὲς $\frac{3}{5}$ m καὶ $\frac{2}{3}$ m καὶ διαθέτουμε μιὰ μετροταινία, ποὺ ἔχει διαιρέσεις σὲ mm.

Μεταξὺ ποιῶν τιμῶν θὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας; Ἔστω χ m τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας. Τότε $\chi^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \chi^2 = \frac{9}{25} + \frac{4}{9} \Rightarrow \chi^2 = \frac{81+100}{225} \Rightarrow \chi^2 = \frac{181}{225} \Rightarrow \chi = \sqrt{\frac{181}{225}}$.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μέχρι χιλιοστόμετρο, πρέπει νὰ ὑπολογίσουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{181}{225}$ κατὰ προσέγγιση 0,001. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ πολλαπλασιάζουμε τὸ $\frac{181}{225}$ ἐπὶ 1000^2 δηλαδὴ $\frac{181}{225} \cdot 1000000 = \frac{181000000}{225}$.

Βρίσκουμε τὸ ἀκέραιο πηλίκο τοῦ $\frac{181000000}{225} = 804444$.

Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 804444 κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ τὴ διαιροῦμε διὰ 1000.

$\sqrt{80'44'44}$	896	
-64	169	1786
164'4	$\times 9$	$\times 6$
-1521	1521	10716
1234'4		
-10716		
1628		

$\sqrt{\frac{181}{225}} = 0{,}896$ κατὰ προσέγγιση 0,001 $\Rightarrow$ $0{,}896 < \chi < 0{,}897$.

Ὥστε τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας εἶναι μεταξὺ 0,896 m καὶ 0,897 m.

Σημείωση 1. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἀνώτερες καὶ κατώτερες τετραγωνικὲς ρίζες τοῦ 3 κατὰ προσέγγιση 0,1, 0,01, 0,001 καὶ νὰ τὶς διατάξετε πάνω σ' ἕναν ἄξονα.

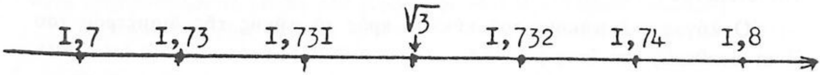
(Ὅταν λέμε ἀνώτερες καὶ κατώτερες τετρ. ρίζες, ἐννοοῦμε τὶς τετραγ. ρίζες μὲ ὑπεροχὴ καὶ μὲ ἔλλειψη ἀντιστοίχως).

Οἱ ρίζες εἶναι 1,7   1,8   κατὰ προσέγγιση 0,1

1,73,   1,74   κατὰ προσέγγιση 0,01

1,731, 1,732 κατὰ προσέγγιση 0,001

Διατάσσουμε αὐτὲς πάνω σ' ἕναν ἄξονα.



Ὁσεσδήποτε φορὲς καὶ ἂν ἐπαναλάβουμε τὸν ὑπολογισμό, δὲν θὰ βροῦμε ἀκριβῶς τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3. Ἂν τοποθετήσουμε τὶς κατὰ προσέγγιση τετραγωνικὲς ρίζες πάνω σ' ἕναν ἄξονα μεταξὺ τῶν ἀνωτέρων καὶ κατωτέρων, θὰ ὑπάρχει πάντοτε ἕνα σημεῖο. Σ' αὐτὸ τοποθετεῖται ὁ ἀριθμὸς 1,731 . . ., ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἀλλὰ δὲν εἶναι περιοδικός. Τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ τὸν λέμε τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 καὶ τὸν συμβολίζουμε μὲ $\sqrt{3}$.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν ἀνήκει στὸ Q. Σὲ μεγαλύτερη τάξη θὰ μάθουμε ὅτι ὀνομάζεται **ἀσύμμετρος** ἀριθμός. Ἀριθμοὶ αὐτοῦ τοῦ εἴδους εἶναι καὶ οἱ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ κλπ.

Σημείωση 2. Ὁ ἀριθμὸς 2 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4, γιατὶ $2^2=4$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι καὶ $(-2)^2=4$. Ὁ -2 λέγεται δεύτερη τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4.

Γενικά, ἂν $\alpha>0$, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν θετικὸ ἀριθμὸ $\sqrt{\alpha}$ ὑπάρχει καὶ δεύτερη τετραγωνικὴ ρίζα, ποὺ συμβολίζεται μὲ $-\sqrt{\alpha}$.

Ἀσκήσεις

155) Ὑπολογίστε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 138, 272, 19836, κατὰ προσέγγιση 0,1 καὶ 0,001.

156) Ὑπολογίστε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 97, 635, $\frac{3}{17}$, 0,003845 κατὰ προσέγγιση 0,001.

157) Ὑπολογίστε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{19}$, $\frac{47}{131}$, $\frac{656}{713}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{131}$, $\frac{1}{713}$ ἀντιστοίχως.

158) Ποιὸ εἶναι κατὰ προσέγγιση 0,001 τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους;

159) Ποιὸ εἶναι κατὰ προσέγγιση 0,0001 τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου μὲ πλευρὰ 2 cm;

Γ'. ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ — ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΟΥ

Α'. Μῆκος κύκλου

§ **43.** *Ἀποκόψτε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 5 cm ἀπὸ ἕνα χονδρὸ χαρτόνι ἢ ξύλο. Μετρῆστε τὸ μῆκος τοῦ κύκλου μὲ μιὰ πάνινη μετροταινία περιτυλίγοντάς την γύρω ἀπὸ τὸν κύκλο καὶ βρεῖτε τὸ λόγο τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του.*

Τὸ μῆκος τοῦ κύκλου ποὺ μετρήθηκε εἶναι 31,4 cm. Ἄρα $\frac{31,4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}=3,14$.

Ἂν ἐπαναλάβουμε τὴν ἴδια ἐργασία μὲ περισσότερους κύκλους, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους κάθε κύκλου πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του εἶναι 3,14 (κατὰ προσέγγιση). Δηλαδή:

Ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ 3,14.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς παριστάνεται διεθνῶς μὲ τὸ γράμμα π τοῦ ἀλφαβήτου μας (*).

Ἂν παραστήσουμε μὲ Γ τὸ μῆκος ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτίνα R, θὰ ἔχουμε:

$$\frac{\Gamma}{2R} = \pi \Leftrightarrow \boxed{\Gamma = 2\pi R}$$

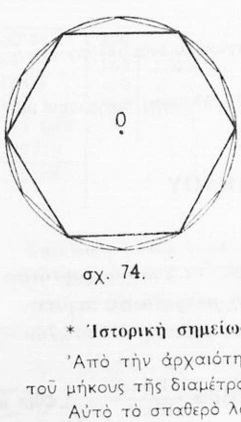
Δηλαδή: **Τὸ μῆκος τοῦ κύκλου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ π.**

§ 44. Μῆκος τόξου.

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ κύκλος διαιρεῖται σὲ 360°. Ἔστω τ τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου μ° καὶ Γ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι τόξο 360°. Τότε ἔχουμε: $\frac{\tau}{\Gamma} = \frac{\mu}{360}$ (ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν τιμῶν τους, ἂν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα).

Ἑπομένως: $\frac{\tau}{2\pi R} = \frac{\mu}{360} \Leftrightarrow \tau = 2\pi R \cdot \frac{\mu}{360} \Leftrightarrow \boxed{\tau = \pi R \frac{\mu}{180}}$ Δηλαδή:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου μ°, πολλαπλασιάζουμε τὸ μῆκος τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{360}$ ἢ τὸ μῆκος τοῦ ἡμικυκλίου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{180}$.



σχ. 74.

Σημείωση: Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἑξῆς μέθοδο: Ἐγγράφουμε στὸν κύκλο ἕνα κανονικὸ κυρτὸ ἑξάγωνο. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου. Ἂν τώρα ἐγγράψουμε κανονικὸ δωδεκάγωνο, παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίμετρός του πλησιάζει περισσότερο τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ἀλλὰ παραμένει μικρότερη ἀπ' αὐτό. Ἂν διπλασιάζουμε συνεχῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, πλησιάζουμε ὅσο θέλουμε τὸ μῆκος τοῦ κύκλου (σχ. 74).

Σημ. Τὴ μέθοδο αὐτὴ χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης στὸ βιβλίο του «Κύκλου μέτρησις».

* **Ἱστορικὴ σημείωση**:

Ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα εἶχε διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του εἶναι **σταθερός**. (Ἱπποκράτης ὁ Χῖος 450 π.Χ.). Αὐτὸ τὸ σταθερὸ λόγο τὸν παρέστησαν μὲ τὸ γράμμα π.

Πρῶτος ὁ μεγάλος Ἕλληνας μαθηματικὸς τῆς ἀρχαιότητας **Ἀρχιμήδης** ὅρισε κατὰ προσέγγιση ὡς τιμὴ τοῦ π τὸ κλάσμα $\frac{22}{7}=3{,}1428\left(\frac{310}{71}<\pi<\frac{31}{7}\right)$. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ χρησιμοποίησε τὴ μέθοδο ποὺ ἀναφέρουμε στὴν προηγούμενη σημείωση.

Ὁ Πτολεμαῖος βρῆκε τὴν τιμὴ 3,14166. Ὁ Ὁλλανδὸς γεωμέτρης Μέττιους (1571-1635 μ.Χ.) βρῆκε τὸ $\pi=3{,}1415920$.

Κατὰ προσέγγιση τιμὴ τοῦ π παίρνουμε τὸν ἀριθμὸ 3,14 καὶ γιὰ μεγαλύτερη προσέγγιση τὸν ἀριθμὸ 3,14159.

Γι' αὐτὴ τὴν τιμὴ τοῦ π ὑπάρχει καὶ μνημονικὸς κανόνας.

ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ Μέγας γεωμετρεῖ

3, 1 4 1 5 9

Δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμάτων κάθε λέξης ἀντιπροσωπεύει τὸ ἀντίστοιχο ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ π.

Ἀσκήσεις

160) Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ποὺ ἔχει ἀκτίνα 4 cm.

161) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος 37,68 cm.

162) Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τόξου 50° σ' ἕναν κύκλο ἀκτίνας 12 cm;

163) Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου 100° σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 5 cm.

164) Ποιὰ εἶναι ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου, ἂν ἕνα τόξο του 30° ἔχει μῆκος 2 cm;

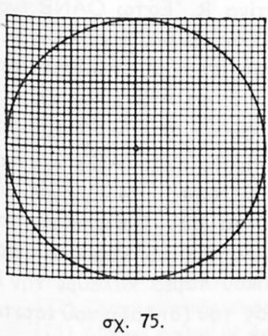
165) Ἕνας κύκλος ἔχει μῆκος 62πβ cm. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου αὐτοῦ;

Β'. Ἐμβαδὸ κύκλου καὶ κυκλικοῦ τομέα

§ 45. Ἐμβαδὸ κύκλου.

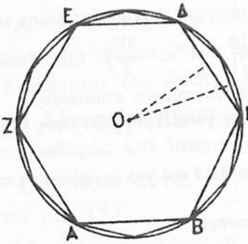
Ἐμβαδὸ κύκλου καλοῦμε τὴν ἔκταση τῆς ἐπιφάνειάς του, δηλαδὴ τὴν ἔκταση τοῦ ἐσωτερικοῦ του, ἡ ὁποία ἔχει ἐκφρασθεῖ σὲ μονάδες μετρήσεως.

Πάνω σὲ χιλιοστομετρικὸ χαρτὶ σχηματίστε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 2 cm. (Χρησιμοποιῆστε ὡς κέντρο ἕνα σημεῖο τομῆς δύο ἔντονων γραμμῶν). Μετρῆστε τὸ ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειάς του σὲ cm^2. (σχ. 75).



σχ. 75.

Μετροῦμε τὰ cm^2, ποὺ περικλείει ὁ κύκλος καὶ τὰ ἐπὶ πλέον mm^2 καὶ βρίσκουμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου εἶναι περίπου 12,56 cm^2. Παρατηροῦμε ὅτι $3{,}14\cdot 2^2=3{,}14\cdot 4=12{,}56cm^2$. Δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $3{,}14\cdot R^2$ ἢ $\mathbf{E}=\pi R^2$ (ὅπου R τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου). Μποροῦμε νὰ αἰτιολογήσουμε τὰ παραπάνω ὡς ἑξῆς:



σχ. 76.

Σχεδιάζουμε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα R (σχ.76). Στὸν κύκλο αὐτὸ ἐγγράφουμε ἕνα κανονικὸ κυρτὸ ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου. Διχοτομοῦμε τὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$,. . . μὲ τὸ γνωστὸ τρόπο καὶ ἐγγράφουμε ἔτσι ἕνα κανονικὸ δωδεκάγωνο. Ἡ περίμετρός του εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν περίμετρο τοῦ ΑΒΓΔΕΖ, ἀλλὰ παραμένει μικρότερη ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου καὶ πλησιάζει περισσότερο αὐτόν. Στὴ συνέχεια ἐγγράφουμε στὸν ἴδιο κύκλο ἕνα κανονικὸ κυρτὸ 24-γωνο κ.ο.κ.

Διπλασιάζοντας συνεχῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου παρατηροῦμε ὅτι:

1) Ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου, πού ἐγγράφεται στὸν κύκλο, πλησιάζει **ὅσο θέλουμε** τὸ μῆκος τοῦ κύκλου.

2) Τὸ ἀπόστημα **πλησιάζει ὅσο θέλουμε** τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου.

3) Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου **πλησιάζει ὅσο θέλουμε** τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου.

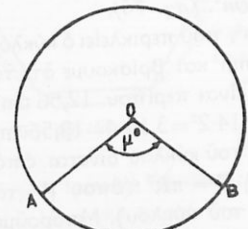
Ἂν ἀντικαταστήσουμε στὸν τύπο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ($E = \frac{1}{2} \times$ μῆκος περιμέτρου $\times$ μῆκος ἀποστήματος) τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου μὲ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου $2\pi R$ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος μὲ τὴν ἀκτίνα R, ἔχουμε: $E = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$, ἄρα $\boxed{E = \pi R^2.}$

Δηλαδή: **Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνας του.**

Σημ. Τὴ μέθοδο αὐτὴ χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης στὸ βιβλίο του «κύκλου μέτρησις».

§ 46. Ἐμβαδὸ κυκλικοῦ τομέα

Θεωροῦμε ἕναν κύκλο μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα R. Ἔστω ΟΑΝΒ ἕνας τομέας τοῦ κύκλου. Ὅπως εἶναι γνωστό, **κυκλικὸς τομέας** λέγεται ἡ μεικτὴ κλειστὴ γραμμὴ πού ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα τόξο κύκλου (π.χ. τὸ $\widehat{ANB}$) καὶ τὶς δύο ἀκτίνες, πού καταλήγουν στὰ ἄκρα τοῦ τόξου αὐτοῦ (σχ. 77). Τὸ τόξο $\widehat{ANB}$ λέγεται βάση τοῦ κυκλικοῦ τομέα. Μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὸν κύκλο σὰν ἕνα κυκλικὸ τομέα, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 360°. Ἐμβαδὸ κυκλικοῦ τομέα καλοῦμε τὴν ἔκταση τῆς ἐπιφάνειάς του (δηλαδὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ του) ἐκφρασμένη σὲ μονάδες μετρήσεως.



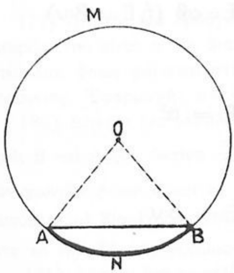
σχ. 77.

Ἐὰν ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα μ° καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου, θὰ ἔχουμε $\frac{\varepsilon}{E} = \frac{\mu}{360} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{E \cdot \mu}{360} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}$.

Ἀλλὰ $\varepsilon = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu}{360} = \frac{\pi R \, \mu}{180} \cdot \frac{R}{2} = \tau \cdot \frac{R}{2}$ (ὅπου τ τὸ μῆκος τῆς βάσης τοῦ τομέα).

Ἐφαρμογές.

1. Ἐμβαδὸ κυκλικοῦ τμήματος: Ἐπιφάνεια **κυκλικοῦ τμήματος** ὀνομάζουμε τὴν ἐπιφάνεια, ποὺ περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου κύκλου καὶ τῆς χορδῆς του (π.χ. στὸ σχ. 78 τὸ σχῆμα ΑΝΒΑ καθὼς καὶ τὸ ΑΜΒΑ εἶναι κυκλικὰ τμήματα).

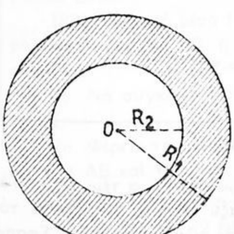


σχ. 78.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΝΒΑ, τοῦ ὁποίου τὸ τόξο εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἡμικύκλιο, ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέα ΑΟΒΝ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ.

Μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒΑ, τοῦ ὁποίου τὸ τόξο εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἡμικύκλιο, προσθέτοντας στὸ ἐμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέα ΑΟΒΜΑ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ.

2. Ἐμβαδὸ κυκλικῆς στεφάνης: Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ περιέχεται μεταξὺ δύο ὁμόκεντρων κύκλων μὲ ἀκτῖνες R_1 καὶ R_2 (ὅπου $R_1 > R_2$) λέγεται **κυκλικὴ στεφάνη** (ἢ κυκλικὸς δακτύλιος) (σχ. 79). Τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυκλικῆς στεφάνης δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $E = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi\,(R_1^2 - R_2^2)$.



σχ. 79.

Ἀσκήσεις

166) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτῖνα 13 cm.

167) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸ 50,24 cm^2.

168) Τὸ μῆκος ἑνὸς κύκλου εἶναι 37, 68dm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.

169) Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα 60° ἑνὸς κύκλου ἀκτίνας 10 cm.

170) Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυκλικῆς στεφάνης, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δύο ὁμόκεντρους κύκλους μὲ ἀκτῖνες 8 cm καὶ 5 cm.

171) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτῖνα $R = 3\alpha$.

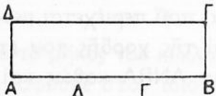
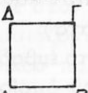
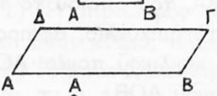
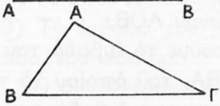
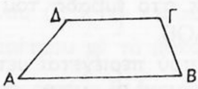
172) Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κύκλου εἶναι $24\,\pi\alpha^2$. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα του.

173) Δίνεται κύκλος μὲ ἀκτῖνα $R = 4\alpha$ καὶ ἕνας κυκλικὸς τομέας του γωνίας 60°. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέα αὐτοῦ καὶ τὴν περίμετρό του.

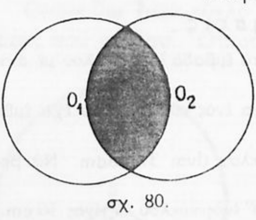
174) Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος, ποὺ ὁρίζεται σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα R καὶ ποὺ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο 60^o. Ἐφαρμογὴ $R = 15$ cm.

175) Ἡ περίμετρος ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 6 dm, εἶναι 13,57 dm. Νὰ βρεῖτε τὴν ἐπίκεντρη γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέα καὶ τὸ ἐμβαδό του.

Πίνακας τύπων τοῦ ἐμβαδοῦ διάφορων ἐπιπέδων σχημάτων

Εἰκόνα τοῦ εὐθ. σχήμ.	Ὄνομα τοῦ σχήματος	Τύπος ποὺ δίνει τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του
	Ὀρθογώνιο	$E = \alpha\beta$ (ἢ $E = B \cdot \upsilon$)
	Τετράγωνο	$E = \alpha^2$
	Παραλληλόγραμμο	$E = \beta \cdot \upsilon$
	Τρίγωνο	$E = \frac{\alpha \cdot \upsilon_1}{2} = \frac{\beta \cdot \upsilon_2}{2} = \frac{\gamma \cdot \upsilon_3}{2}$
	Τραπέζιο	$E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \upsilon$
	Κύκλος	$E = \pi R^2$

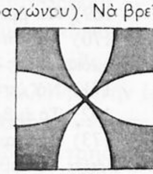
Διάφορες ἀσκήσεις στὰ ἐμβαδά.



σχ. 80.

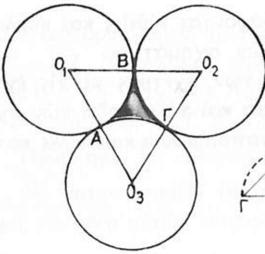
176) Δύο ἴσοι κύκλοι μὲ ἀκτίνα α τέμνονται. Τὰ κέντρα τους ἀπέχουν μεταξύ τους α. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς κοινῆς ἐπιφάνειας τῶν δύο κύκλων. Ἐφαρμογὴ $\alpha = 5$ cm (σχ. 80).

177) Δίνεται ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς 10 cm. Μὲ κέντρα τὶς κορυφές του καὶ ἀκτίνα τὸ μισὸ τῆς διαγωνίου του γράφουμε τέσσερα τεταρτοκύκλια (τὰ ὁποῖα περατώνονται στὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου). Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος (81).

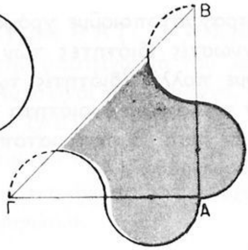


σχ. 81.

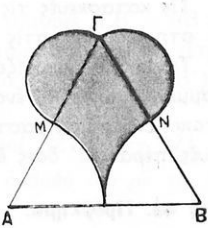
178) Δίνονται τρεῖς ἴσοι κύκλοι μὲ κέντρα O_1, O_2, O_3 καὶ ἀκτίνα $R = 10$ cm. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο καὶ ὁρίζουν ἔτσι ἕνα καμπυλόγραμμο τρίγωνο ΑΒΓ (τὸ γραμμοσκιασμένο ἐπίπεδο μέρος). Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ καμπυλόγραμμου αὐτοῦ τριγώνου (σχ. 82).



σχ. 82



σχ. 83.



σχ. 84.

179) Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ. Τὸ μῆκος τῶν κάθετων πλευρῶν του εἶναι α. Μὲ διαμέτρους τὰ μισὰ τῶν κάθετων πλευρῶν του γράφουμε 4 ἡμικύκλια, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 83. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας. Ἐφαρμογή: $\alpha = 4$ cm.

180) Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ μῆκος πλευρᾶς α. Μὲ κέντρα τὶς κορυφὲς Β καὶ Α καὶ ἀκτίνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφουμε τόξα, τὰ ὁποῖα νὰ βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ τῶν γωνιῶν Α καὶ Β καὶ νὰ περατώνονται στὶς πλευρές του. Ἐπίσης γράφουμε δύο ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους $\Gamma M = \Gamma N = \frac{\alpha}{2}$, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 84. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας. Ἐφαρμογή: $\alpha = 6$ cm.

181) Δίνεται ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ὀρθογώνιο στὰ Α καὶ Δ, στὸ ὁποῖο ἔχουμε $A\Delta = AB = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ εἶναι $6\alpha^2$. Ὑπολογίστε τὶς βάσεις καὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου συναρτήσει τοῦ α.

182) Σχεδιάστε ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΔΓ//ΑΒ). Βρεῖτε τὸ μέσο Ι τῆς ΒΓ καὶ φέρετε τὴ ΔΙ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ στὸ Ε. Συγκρίνετε τὰ ἐμβαδὰ τοῦ τραπεζίου καὶ τοῦ τριγώνου ΔΑΕ.

183) Ἀπὸ τὸ μέσο Ι τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) φέρετε παράλληλο πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὶς εὐθεῖες ΑΔ καὶ ΒΓ στὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως.

1ο. Νὰ συγκρίνετε τὰ ἐμβαδὰ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΖΕ.

2ο. Φέρετε τὴν ΙΚ κάθετο στὴν ΑΒ καὶ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς ΑΒ καὶ τὸ μῆκος τῆς ΙΚ.

184) Στὸ παραπάνω τραπέζιο φέρετε τὶς διαγωνίους, οἱ ὁποῖες τέμνονται στὸ Ο.

1ο. Συγκρίνετε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ καὶ

2ο. Συγκρίνετε ἐπίσης τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΔΟΓ.

Δ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

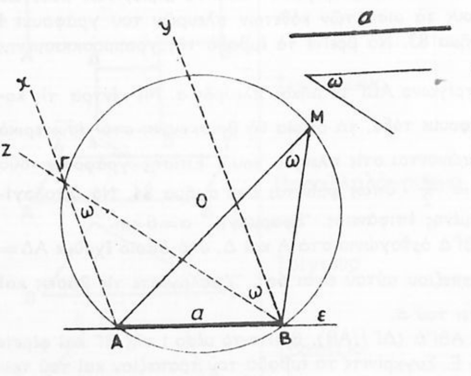
§ **47**. Λέμε ὅτι κατασκευάζουμε ἕνα σχῆμα, ὅταν τὸ σχεδιάζουμε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα καὶ τοῦ διαβήτη, μὲ βάση ὁρισμένα δεδομένα· π.χ. ὅταν κατασκευάζουμε ἕνα τρίγωνο, τοῦ ὁποίου μᾶς δίνονται οἱ πλευρές· ὅταν κατασκευάζουμε τὴ μεσοκάθετο ἑνὸς δεδομένου εὐθύγραμμου τμήματος ἢ ὅταν κατασκευάζουμε τὴ διχοτόμο μιᾶς δεδομένης γωνίας.

Τὶς κατασκευὲς τὶς πραγματοποιοῦμε γράφοντας εὐθεῖες καὶ κύκλους καὶ στηριζόμενοι στὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῶν σχημάτων.

Τώρα πιὰ γνωρίζουμε πολλὲς ἰδιότητές των σχετικὲς μὲ τὶς ἐγγεγραμμένες γωνίες σ' ἕναν κύκλο, τὴν ὁμοιότητα καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων. Συνεπῶς εἴμαστε σὲ θέση νὰ πραγματοποιήσουμε καὶ ἄλλες κατασκευὲς πέρα ἀπ' ὅσες ἔχουμε μάθει.

§ 48. Πρόβλημα.

Δίνεται ἕνα εὐθ. τμῆμα α καὶ μιὰ γωνία ω. Νὰ κατασκευασθεῖ τόξο κύκλου, ποὺ νὰ ἔχει χορδὴ ἴση μὲ τὸ α καὶ νὰ ἐγγράφεται σ' αὐτὸ γωνία ἴση μὲ τὴν ω.



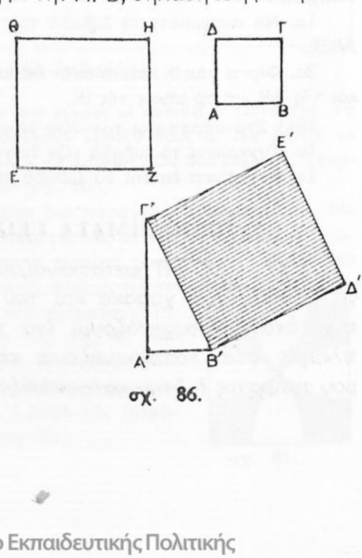
σχ. 85.

Σὲ μιὰ εὐθεία ε παίρνουμε τμῆμα ΑΒ = α καὶ φέρνουμε πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τῆς ε τὶς παράλληλες ἡμιευθεῖες ΑΧ καὶ ΒΨ. Κατασκευάζουμε τώρα τὴ γωνία $\widehat{\Psi B Z} = \omega$. Ἡ ΒΖ τέμνει τὴν ΑΧ στὸ σημεῖο Γ (ἡ γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ εἶναι ἴση μὲ ω κατὰ τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῶν παραλλήλων). Κατασκευάζουμε σύμφωνα μὲ τὰ γνωστὰ τὸν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ.85).

Τὸ τόξο ΑΓΒ τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι τὸ ζητούμενο, γιατὶ κάθε γωνία ΑΜΒ μὲ τὴν κορυφή της πάνω σ' αὐτὸ εἶναι ἴση μὲ τὴν $\widehat{A\Gamma B}$, δηλαδὴ ἴση μὲ τὴν ω.

§ 49. Πρόβλημα 1ο.

Δίνονται δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ. Νὰ κατασκευασθεῖ ἕνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο αὐτῶν τετραγώνων.

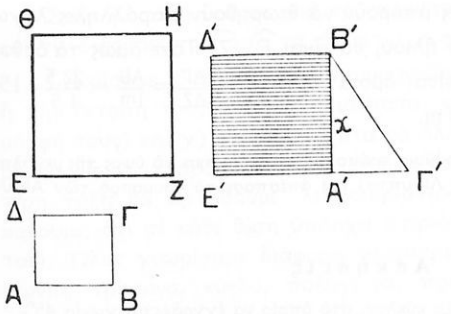


σχ. 86.

Ἂν καλέσουμε χ τὴν τιμὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ποὺ ζητεῖται, θὰ πρέπει νὰ εἶναι $\chi^2 = (AB)^2 + (EZ)^2$. Ἐπειδὴ αὐτὸ μᾶς ὑπενθυμίζει τὸ πυθαγόρειο θεώρημα, κάνουμε τὴν ἑξῆς κατασκευή. Κατασκευάζουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο Β'Α'Γ' μὲ κάθετες πλευρὲς Α'Β' = ΑΒ καὶ Α'Γ' = ΕΖ. Μὲ πλευρὰ τὴν ὑποτείνουσά του κατασκευάζουμε τὸ τετράγωνο Β'Δ'Ε'Γ' (σχ. 86). Αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενο, γιατὶ $(Β'Γ')^2 = (Α'Β')^2 + (Α'Γ')^2$, δηλαδὴ $(Β'Γ')^2 = (ΑΒ)^2 + (ΕΖ)^2$.

Πρόβλημα 2ο. *Δίνονται δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ (σχ. 87).*

Νὰ κατασκευασθεῖ ἕνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μὲ τὴ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν τετραγώνων.



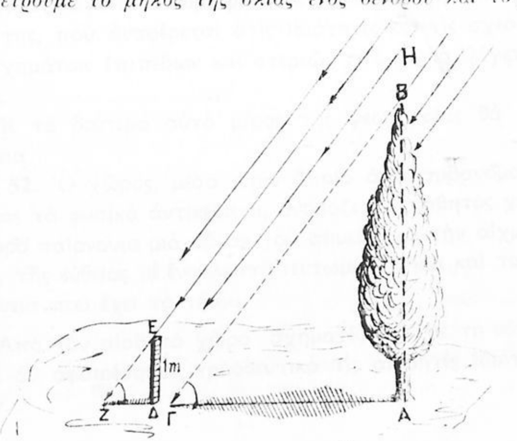
σχ. 87.

Ἂν καλέσουμε χ τὴν τιμὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ποὺ ζητεῖται, πρέπει νὰ εἶναι $χ^2 = (ΕΖ)^2 - (ΑΒ)^2$. Ἡ σχέση αὐτὴ ὁδηγεῖ στὴν κατασκευὴ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσα ΕΖ καὶ μιὰ κάθετη πλευρὰ ΑΒ. Κατασκευάζουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο Α'Β'Γ' ἀπὸ τὴν κάθετη πλευρὰ Α'Γ' = ΑΒ καὶ τὴν ὑποτείνουσα Γ'Β' = ΕΖ. Μὲ πλευρὰ τὴν κάθετο Α'Β' κατασκευάζουμε τὸ τετράγωνο Α'Β'Δ'Ε', τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ ζητούμενο.

§ **50**. Μερικὲς φορὲς μποροῦμε νὰ μετρήσουμε φυσικὰ μεγέθη μὲ γεωμετρικὲς κατασκευές.

Παράδειγμα:

Μετροῦμε τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς ἑνὸς δένδρου καὶ τὸ βρίσκουμε 22,5 m.



σχ. 88.

Πῶς μποροῦμε νὰ μετρήσουμε τὸ ὕψος τοῦ δένδρου (χωρὶς ν᾽ἀνεβοῦμε μέχρι τὴν κορυφή του) χρησιμοποιώντας ἕναν κατακόρυφο στύλο μὲ μῆκος ἕνα μέτρο; (σχ. 88).

Παριστάνουμε τὸ ὕψος τοῦ δένδρου μὲ τὴν ΑΒ, κάθετο στὴν ὁριζόντια γραμμή, τὴ σκιὰ τοῦ δένδρου μὲ τὸ τμῆμα ΑΓ, τὸ στύλο μὲ τὸ ΕΔ καὶ τὴ σκιά του μὲ ΔΖ. Μετροῦμε στὸ ἔδαφος μὲ μετροταινία τὴ ΔΖ καὶ βρίσκουμε $ΔΖ = 1{,}5$ m.

Ἐπειδὴ οἱ ἡλιακὲς ἀκτίνες μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν παράλληλες λόγω τῆς μεγάλης ἀποστάσεως τοῦ ἥλιου, θὰ εἶναι $\widehat{Γ} = \widehat{Ζ}$. Τότε ὅμως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ὅμοια· ἄρα $\frac{ΑΒ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Rightarrow \frac{ΑΒ}{1\text{m}} = \frac{22{,}5}{1{,}5} = 15.$ Τὸ ὕψος τοῦ δένδρου εἶναι 15 m.

Σημείωση: Λέγεται ὅτι μὲ παρόμοιο τρόπο ὁ Θαλῆς μέτρησε τὸ ὕψος τῆς μεγάλης πυραμίδας (σ᾽ἕνα ταξίδι του στὴν Αἴγυπτο) καὶ ἀπέσπασε τὸ θαυμασμὸ τῶν Αἰγυπτίων σοφῶν.

Ἀσκήσεις

185) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τόξο κύκλου, στὸ ὁποῖο νὰ ἐγγράφεται γωνία 45°.

186) Νὰ διαιρέσετε ἕνα τρίγωνο σὲ δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα μὲ μιὰ εὐθεία, ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ μιὰ κορυφή του.

187) Δίνονται τρία τετράγωνα. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τετραγώνων.

188) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ διαγώνιός του εἶναι ἴση μὲ ἕνα γνωστὸ εὐθ. τμῆμα δ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Α. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 51. Εἰσαγωγὴ

Στὴν Α' τάξη μάθαμε γιὰ τὰ **γεωμετρικὰ στερεὰ** (ἢ ἁπλῶς στερεὰ) καὶ τὶς διαφορές των ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα φυσικὰ στερεά.

Γνωρίσαμε ἰδιότητες τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν α) τὸ μέγεθός τους ἢ τὴν ἔκτασή τους στὸν τρισδιάστατο χῶρο, β) τὸ σχῆμα τους (τὴ μορφή τους) καὶ γ) τὴ δυνατότητα νὰ ἀλλάζουμε τὴ θέση τους στὸ χῶρο, χωρὶς νὰ μεταβάλλονται τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθός τους. (Σὲ μεγαλύτερη τάξη θὰ ἐξετάσουμε λεπτομερέστερα τὴν ἰδιότητα αὐτὴ καὶ θὰ μάθουμε, ὅτι σὲ κάθε θέση ὑπάρχει στερεὸ ἴσο μ' αὐτὸ ποὺ μετατοπίζεται). Τέλος γνωρίσαμε διάφορα γεωμετρικὰ σχήματα (εὐθεία, ἐπίπεδο, γωνία, τρίγωνα, κύκλο, πολύγωνα, πρίσματα, πυραμίδες, κύλινδρο, κῶνο καὶ σφαίρα).

Ἀπὸ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα ἄλλα ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα τους στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ λέγονται **ἐπίπεδα σχήματα** (ὅπως τά: εὐθεία, γωνία, τρίγωνο, πολύγωνο, κύκλος), ἄλλα ὅμως δὲν ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα τους στό ἴδιο ἐπίπεδο καὶ λέγονται **μὴ ἐπίπεδα γεωμετρικὰ σχήματα ἢ στερεὰ σχήματα** (ὅπως τά: πρίσματα, πυραμίδες, κύλινδροι, κ.ἄ).

Τὸ μέρος τῆς γεωμετρίας, ποὺ ἀναφέρεται στὴ μελέτη τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, λέγεται **Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου** (ἢ ἐπιπεδομετρία) καὶ τὸ μέρος της, ποὺ ἀναφέρεται στὶς ἰδιότητες καὶ τὶς σχέσεις τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἐπιπέδων καὶ στερεῶν στὸ χῶρο, λέγεται **Γεωμετρία τοῦ χώρου.**

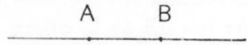
Μὲ τὸ δεύτερο αὐτὸ μέρος τῆς γεωμετρίας θὰ ἀσχοληθοῦμε στὴ συνέχεια.

§ 52. Ὁ χῶρος, μέσα στὸν ὁποῖο ἀντιλαμβανόμαστε μὲ τὶς αἰσθήσεις μας τὰ φυσικὰ ἀντικείμενα, ὀνομάζεται αἰσθητὸς χῶρος. Στὸν αἰσθητὸ χῶρο παίρνουμε μιὰ «ἰδέα» τοῦ σημείου μὲ τὴν αἰχμὴ μιᾶς λεπτῆς βελόνας, τῆς εὐθείας μὲ ἕνα λεπτὸ τεντωμένο νῆμα καὶ τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὴν ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει τὸ τζάμι.

Ἀπὸ τὸν αἰσθητὸ χῶρο σχηματίζουμε μὲ τὴ νόηση τὸ **Γεωμετρικὸ χῶρο,** ἂν ἀφαιρέσουμε προοδευτικὰ τὶς αἰσθητὲς ἰδιότητες τῶν ἀντικειμένων.

Στοιχεῖα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου εἶναι **τὰ σημεῖα, οἱ εὐθεῖες καὶ τὰ ἐπίπεδα**.

Τὶς ἰδιότητες τῶν στοιχείων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου τὶς δίνουμε μὲ μερικὲς βασικὲς προτάσεις, τὶς ὁποῖες ὀνομάζουμε **ἀξιώματα**.



σχ. 89α.

§ 53. Καθορισμὸς μιᾶς εὐθείας στὸ χῶρο.

Ἀξιώματα:

1. Ἀπὸ δύο ὁποιαδήποτε διαφορετικὰ σημεῖα τοῦ χώρου διέρχεται μία εὐθεία καὶ μόνο μία. (σχ. 89α.)
2. Ἡ εὐθεία εἶναι ἀπεριόριστη (δηλαδὴ τὸ εὐθ. τμῆμα AB μπορεῖ νὰ προεκταθεῖ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα του).

§ 54. Ὁρισμὸς τοῦ ἐπιπέδου.

Ἂν παρατηρήσουμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ποὺ βρίσκεται σὲ ἠρεμία μέσα σὲ μιὰ δεξαμενὴ ἢ μέσα σ' ἕνα δοχεῖο ἢ τὴν ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει τὸ τζάμι, παίρνουμε μιὰ **ἰδέα τῆς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας**.

Γιὰ νὰ ἐξακριβώσουμε πρακτικὰ ἂν μιὰ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδη, θέτουμε πάνω σ' αὐτὴ ἕνα χάρακα καὶ τὸν μετατοπίζουμε πρὸς διάφορες διευθύνσεις παρατηρώντας ἂν ἡ ἀκμή του ἐφαρμόζει σ' ὅλες τὶς θέσεις πάνω στὴν ἐπιφάνεια.

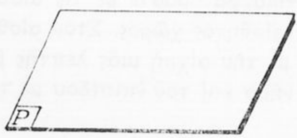
Ἔχουμε λοιπὸν στὸ γεωμ. χῶρο τὸ παρακάτω ἀξίωμα:

Ἕνα ἐπίπεδο (p) εἶναι μιὰ ἐπιφάνεια τέτοια ὥστε, ἂν δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἀνήκουν στὸ ἐπίπεδο, τότε ὁλόκληρη ἡ εὐθεία ἀνήκει στὸ ἐπίπεδο.

Οἱ εὐθεῖες ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι, ὅπως εἴπαμε, ἀπεριόριστες, ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδο εἶναι μιὰ ἐπιφάνεια ἀπεριόριστη.

Παράσταση τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδο εἶναι μιὰ ἀπεριόριστη ἐπιφάνεια, παριστάνουμε μόνο ἕνα μέρος του συνήθως μὲ ἕνα **ὀρθογώνιο** (σχ. 89). Τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ φαίνεται προοπτικῶς σὰν ἕνα παραλληλόγραμμο. Πάνω σ' αὐτὸ σημειώνουμε ἕνα ἀπὸ τὰ ἑπόμενα λατινικὰ γράμματα (p), (q), κ.λ.π.



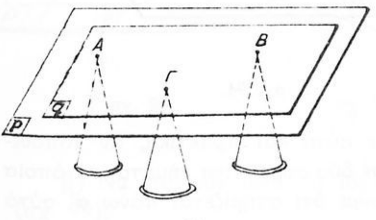
σχ. 89.

Σημ. Ἡ παράσταση αὐτὴ τοῦ ἐπιπέδου δὲν πρέπει νὰ μᾶς παρασύρει, ὥστε νὰ λησμονοῦμε πὼς τὸ ἐπίπεδο εἶναι μιὰ ἐπιφάνεια, ποὺ ἐκτείνεται ἀπεριόριστα.

§ 55. Καθορισμὸς ἑνὸς ἐπιπέδου στὸ χῶρο.

Ἀξίωμα: Ἀπὸ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία, διέρχεται ἕνα καὶ μόνο ἕνα ἐπίπεδο.

Πρακτικὰ εἶναι εὔκολο νὰ πετύχουμε τὴν ἀναπαράσταση τοῦ καθορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου. Τοποθετοῦμε μιὰ μεταλλικὴ πλάκα πάνω σὲ τρία σημεῖα π.χ. Α, Β, Γ τὰ ὁποῖα νὰ μὴν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία ε, καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὴ **στηρίζεται** σ' αὐτὰ (σχ. 90). (Αὐτὸ δὲν πετυχαίνεται μὲ δύο σημεῖα). Ἂν θελήσουμε νὰ στηρίξουμε καὶ ἄλλη μεταλλικὴ πλάκα στὰ τρία σημεῖα (π.χ. ἄκρα ἀκίδων) Α, Β, Γ, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι αὐτὴ θὰ ἐφαρμόσει πάνω στὴν πρώτη μεταλλικὴ πλάκα καὶ οἱ ἐπίπεδες ἐπιφάνειές των θὰ ταυτισθοῦν.

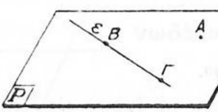


σχ. 90.

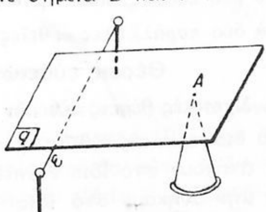
Ἀπ' αὐτὴ καὶ ἄλλες παρόμοιες παρατηρήσεις σὲ φαινόμενα τῆς καθημερινῆς ζωῆς (π.χ. τραπέζια, τρίποδα, καθίσματα κ.ἄ), δικαιολογοῦμε γιατὶ θέσαμε στὸν γεωμ. χῶρο τὸ παραπάνω ἀξίωμα.
Μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε ἀκόμη, ὅτι:

I) Ἀπὸ μιὰ εὐθεία καὶ ἕνα σημεῖο Α, ποὺ δὲν ἀνήκει σ' αὐτή, διέρχεται ἕνα καὶ μόνο ἕνα ἐπίπεδο.

Θεωροῦμε μιὰ εὐθεία ε καὶ ἕνα σημεῖο Α ποὺ δὲν ἀνήκει σ' αὐτή. Ἂν πάρουμε στὴν ε δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Β καὶ Γ καὶ θεωρήσουμε



σχ. 91.



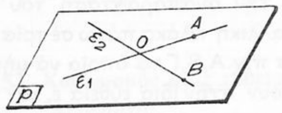
σχ. 92.

καὶ τὸ Α, ἔχουμε τρία σημεῖα, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία, καί, ὅπως μάθαμε, αὐτὰ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, τὸ Ρ, στὸ ὁποῖο ἀνήκει καὶ ἡ ε (γιατί;)

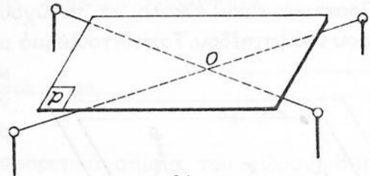
Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε καὶ πρακτικά, ἂν στηρίξουμε μιὰ ἐπίπεδη μεταλλικὴ πλάκα πάνω σ' ἕνα τεντωμένο νῆμα (συρμάτινο) ε καὶ σ' ἕνα σημεῖο Α (ἄκρο ἀκίδας), τὸ ὁποῖο δὲν ἀνήκει στὸ νῆμα. Τὸ ἐπίπεδο, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν ε, μπορεῖ νὰ περάσει ἀπὸ κάθε νέα θέση τοῦ σημείου Α (σχ. 92).

II) Ἀπὸ δύο εὐθεῖες, ποὺ τέμνονται, διέρχεται ἕνα μόνο ἐπίπεδο.

Αὐτὸ συμβαίνει, γιατὶ ἔχουμε τρία σημεῖα, τὰ O, A καὶ B τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία.



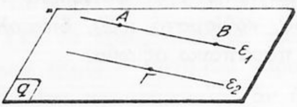
σχ. 93.



σχ. 94.

Μποροῦμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε αὐτὸ καὶ πρακτικά, ἂν τοποθετήσουμε μιὰ μεταλλικὴ πλάκα πάνω σὲ δύο συρμάτινα νήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο, ὁπότε θὰ δοῦμε ὅτι στηρίζεται πάνω σ' αὐτὰ (σχ. 94).

III) Ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεῖες διέρχεται ἕνα μόνο ἐπίπεδο.



σχ. 95.

Αὐτὸ εἶναι φανερό, γιατὶ δύο παράλληλες εὐθεῖες, ἀπὸ τὸν ὁρισμό, ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (σχ. 95).

Ὥστε τὸ ἐπίπεδο ὁρίζεται:

I. Ἀπὸ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία.

II. Ἀπὸ μία εὐθεία καὶ ἕνα σημεῖο, τὸ ὁποῖο δὲν ἀνήκει σ' αὐτήν.

III. Ἀπὸ δύο εὐθεῖες, ποὺ τέμνονται.

IV. Ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεῖες.

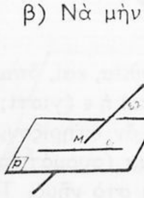
Θέσεις εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων

§ 56. I. Σχετικὲς θέσεις εὐθειῶν στὸ χῶρο.

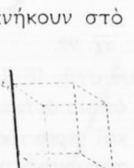
Α. Δύο διαφορετικὲς εὐθεῖες ε_1, ε_2 μποροῦν νὰ ἔχουν τὶς ἑξῆς θέσεις:

α) Νὰ ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (νὰ εἶναι συνεπίπεδες).

β) Νὰ μὴν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο.



σχ. 96.



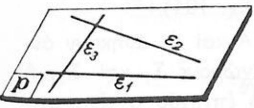
σχ. 97.

Στὴν πρώτη περίπτωση οἱ εὐθεῖες θὰ τέμνονται ἢ θὰ εἶναι παράλληλες.

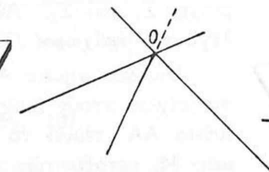
Στὴ δεύτερη περίπτωση δὲν τέμνονται καὶ δὲν εἶναι παράλληλες. Τότε οἱ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 λέγονται **ἀσύμβατες** εὐθεῖες (ἢ στρεβλὲς ἢ μὴ συνεπίπεδες) (σχ. 96, 97).

ΙΙ. Τρεῖς ἢ περισσότερες εὐθεῖες μποροῦν:

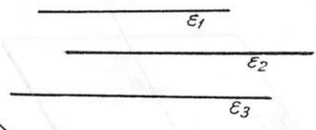
α) Νὰ εἶναι συνεπίπεδες (σχ. 98).



σχ. 98.



σχ. 99.



σχ. 100.

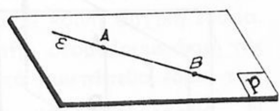
β) Νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, χωρὶς νὰ εἶναι συνεπίπεδες (σχ. 99).

γ) Νὰ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλες χωρὶς νὰ εἶναι συνεπίπεδες. (Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ἔχουν τὶς ἰδιότητες τῆς παραλληλίας, τὶς ὁποῖες μάθαμε) (σχ. 100).

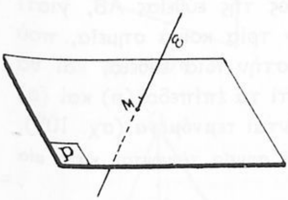
§ 57. Σχετικὲς θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου

α΄ περίπτωση:

Ἂν μιὰ εὐθεία ε ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β μὲ ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), ἀνήκει στὸ ἐπίπεδο αὐτό, ὅπως μάθαμε κατὰ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 101).



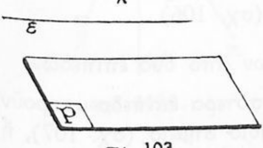
σχ. 101.



σχ. 102.

β΄ περίπτωση:

Ἂν μιὰ εὐθεία ε ἔχει ἕνα μόνο κοινὸ σημεῖο Μ μὲ τὸ ἐπίπεδο (Ρ), λέμε ὅτι ἡ εὐθεία ε τέμνει τὸ ἐπίπεδο αὐτὸ ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδο (Ρ) τέμνει τὴν εὐθεία ε. Τὸ κοινὸ σημεῖο τους Μ λέγεται **σημεῖο τομῆς ἢ ἴχνος** (σχ. 102).



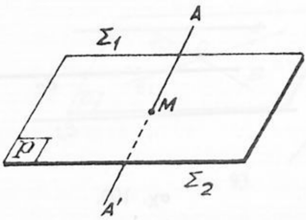
σχ. 103.

γ΄ περίπτωση:

Ἂν τέλος μιὰ εὐθεία ε δὲν ἔχει κανένα κοινὸ σημεῖο μὲ τὸ ἐπίπεδο (Ρ), λέμε ὅτι εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδο αὐτό. (σχ. 103).

§ 58. Ἡ ἔννοια τοῦ ἡμιχώρου.

Ἕνα ἐπίπεδο P, ἐπειδὴ προεκτείνεται ἀπεριόριστα πρὸς ὅλες τὶς διευθύνσεις, χωρίζει τὸ χῶρο σὲ δύο περιοχὲς Σ_1 καὶ Σ_2. Αὐτὲς οἱ δύο περιοχὲς λέγονται **ἡμίχωροι** (Σχ. 104).



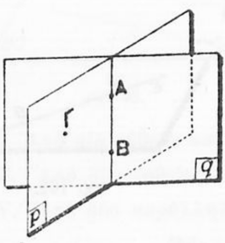
σχ. 104.

Ἂν δύο σημεῖα A καὶ A' ἀνήκουν ἀντιστοίχως στοὺς ἡμιχώρους Σ_1 καὶ Σ_2, ἡ εὐθεία AA' τέμνει τὸ ἐπίπεδο σ' ἕνα σημεῖο M, μεταξὺ τῶν A καὶ A', τὸ ὁποῖο καλοῦμε σημεῖο τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἡμιευθεία MA περιέχεται στὸν ἡμίχωρο Σ_1 καὶ ἡ MA' περιέχεται στὸν ἡμίχωρο Σ_2.

§ 59. Σχετικὲς θέσεις ἐπιπέδων

A'. Δύο ἐπιπέδων.

α) Ἂν δύο διαφορετικὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) ἔχουν κοινὰ δύο σημεῖα A, B, θὰ ἔχουν κοινὴ καὶ τὴν εὐθεία AB (γιατί;). Τότε λέμε ὅτι τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεία AB. Ἡ εὐθεία αὐτὴ λέγεται **τομὴ** τῶν δύο ἐπιπέδων.

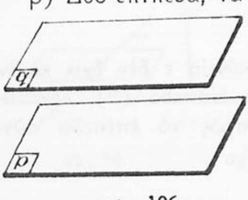


σχ. 105.

Τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸ σημεῖο Γ, τὸ ὁποῖο νὰ **βρίσκεται** ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB, γιατὶ τότε θὰ εἶχαν τρία κοινὰ σημεῖα, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία, καὶ θὰ ταυτίζονταν. Αὐτὸ ὅμως δὲν εἶναι δυνατόν, γιατὶ τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) εἶναι διαφορετικά. Τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) λέγονται **τεμνόμενα** (σχ. 105).

Σημ. Ἂν δύο διαφορετικὰ ἐπίπεδα ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο, τέμνονται κατὰ μία εὐθεία, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτό. (Ἀξίωμα).

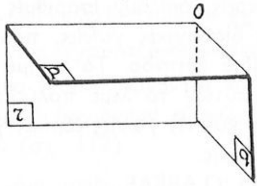
β) Δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸ σημεῖο, λέγονται **παράλληλα** [(p) // (q)]. (σχ. 106).



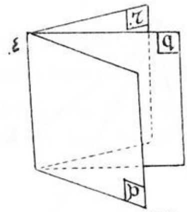
σχ. 106.

B'. Περισσότερων ἀπὸ δύο ἐπιπέδων.

α) Τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα μποροῦν νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο (σχ. 107), ἢ ἀπὸ μιὰ εὐθεία (σχ. 108).

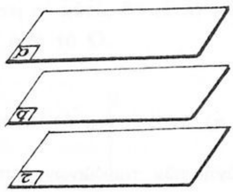


σχ. 107.



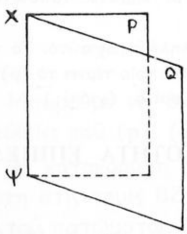
σχ. 108.

β) Ἂν δύο διαφορετικὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς ἕνα τρίτο, εἶναι καὶ μεταξύ τους παράλληλα. Μποροῦν συνεπῶς καὶ περισσότερα ἀπὸ δύο ἐπίπεδα νὰ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλα. Παράδειγμα: Οἱ ὀροφὲς (ἢ τὰ δάπεδα) τῶν ὀρόφων μιᾶς πολυκατοικίας παράλληλες πρὸς τὴν ὀροφὴ τοῦ α΄ ὀρόφου (ἢ τὸ ἔδαφος) εἶναι καὶ μεταξύ τους παράλληλες. (Σχ. 109).



σχ. 109.

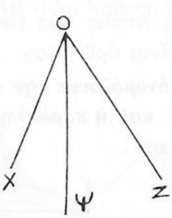
§ 59α. Δίεδρη γωνία — Πολύεδρη (στερεὰ) γωνία



σχ. 109α.

Δίεδρη γωνία εἶναι τὸ σχῆμα, ποὺ ὁρίζουν δύο ἡμιεπίπεδα μὲ κοινὴ ἀρχικὴ εὐθεία. Τὴν ἀρχικὴ εὐθεία τὴν ὀνομάζουμε ἀκμὴ τῆς δίεδρης γωνίας καὶ τὰ ἡμιεπίπεδα ἕδρες της.

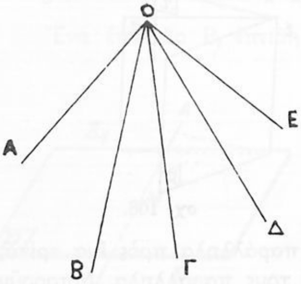
Ἡ P-XΨ-Q εἶναι μιὰ δίεδρη γωνία. Ἡ ἀκμή της εἶναι ἡ εὐθεία χψ καὶ οἱ ἕδρες της τὰ ἡμιεπίπεδα P καὶ Q (σχ. 109α). Δύο ἐπίπεδα, ποὺ τέμνονται, ὁρίζουν τέσσερες διαδοχικὲς δίεδρες γωνίες (σχ. 105).



σχ. 109β.

Τρεῖς ἡμιευθεῖες μὲ κοινὴ ἀρχή, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο, ὁρίζουν τρεῖς διαδοχικὲς ἀλλὰ μὴ συνεπίπεδες γωνίες. Τὸ σχῆμα τῶν τριῶν αὐτῶν γωνιῶν τὸ ὀνομάζουμε τρίεδρη στερεὰ γωνία καὶ τὶς τρεῖς ἐπίπεδες γωνίες ἑδρικὲς γωνίες της. Στὸ σχῆμα 109β οἱ ἡμιευθεῖες OX, OΨ, OZ ὁρίζουν τὴν τρίεδρη γωνία O.XΨZ μὲ ἑδρικὲς γωνίες τὶς $\widehat{XOΨ}$, $\widehat{ΨOZ}$, $\widehat{ZOX}$. Τὸ σημεῖο O τὸ λέμε κορυφὴ τῆς τρίεδρης γωνίας.

Περισσότερες ἀπὸ τρεῖς ἡμιευθεῖες μὲ κοινὴ ἀρχή, ἀλλὰ μὴ συνεπίπεδες



σχ. 109γ.

ἀνὰ τρεῖς, ὁρίζουν ἰσάριθμές τους ἐπίπεδες διαδοχικὲς γωνίες, ποὺ δὲν εἶναι στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Τὸ σχῆμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν τὸ λέμε πολύεδρη στερεὰ γωνία καὶ τὶς γωνίες ἑδρικὲς γωνίες τῆς πολύεδρης.

Ἡ Ο.ΑΒΓΔΕ εἶναι μιὰ πολύεδρη (πεντάεδρη) στερεὰ γωνία μὲ ἑδρικὲς γωνίες τὶς $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OE}$, $\widehat{EOA}$ (σχ. 109 γ).

Ἀσκήσεις

189) Στὴν αἴθουσα διδασκαλίας νὰ βρεῖτε εὐθεῖες α) παράλληλες, β) τεμνόμενες καὶ γ) ἀσύμβατες.

190) Στὴν αἴθουσα διδασκαλίας νὰ ὁρίσετε τὰ ζεύγη τῶν τεμνόμενων ἐπιπέδων καὶ τὰ ζεύγη τῶν παράλληλων ἐπιπέδων.

191) Ἔχουμε τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Βρεῖτε τὴν τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ.

192) Κατασκευάστε τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες ε_1, ε_2 καὶ ε_3 α) ὅταν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο, β) ὅταν δὲν ἀνήκουν ὅλες στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (π.χ. μὲ νήματα τοποθετημένα παράλληλα).

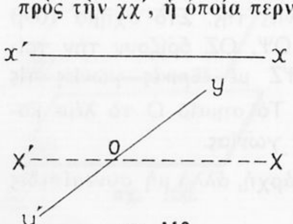
193) Δίνονται ἕνα ἐπίπεδο (p) καὶ μιὰ εὐθεία ε παράλληλη πρὸς αὐτό. Τὸ τυχὸν σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου (p) ὁρίζει μὲ τὴν ε ἕνα ἐπίπεδο (q), τὸ ὁποῖο τέμνει τὸ (p) κατὰ μία εὐθεία δ. Ποιὰ εἶναι ἡ σχετικὴ θέση τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ε καὶ δ; (γιατί;)

Β΄. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ — ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

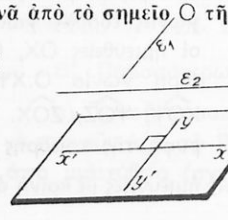
§ 60. Γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν.

Θεωροῦμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες τοῦ χώρου χχ΄ καὶ ψψ΄. Ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς μιᾶς φέρνουμε παράλληλο πρὸς τὴν ἄλλη. Σχηματίζονται τότε τέσσερες κυρτὲς γωνίες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες δύο εἶναι ὀξεῖες (ἴσες) καὶ δύο ἀμβλεῖες (ἴσες) ἢ καὶ οἱ τέσσερες εἶναι ὀρθές (σχ. 110).

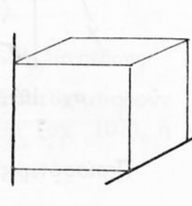
Γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν χχ΄ καὶ ψψ΄ ὀνομάζουμε τὴν ὀξεία (ἢ τὴν ὀρθὴ) γωνία, τὴν ὁποία σχηματίζουν οἱ ψψ΄ καὶ ἡ παράλληλος ΧΧ΄ **πρὸς τὴν χχ΄, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο** Ο **τῆς ψψ΄.**



σχ. 110.



σχ. 111.


σχ. 112.

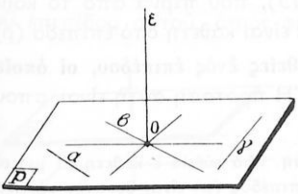
῎Αρα ἡ γωνία τῶν δύο εὐθειῶν χχ΄καὶ ψψ΄εἶναι ἡ γωνία(ΟΧ,ΟΨ)(σχ.110).

Δύο εὐθεῖες λέγονται **ὀρθογώνιες**, ὅταν ἡ γωνία τους εἶναι **ὀρθὴ** (σχ.111).

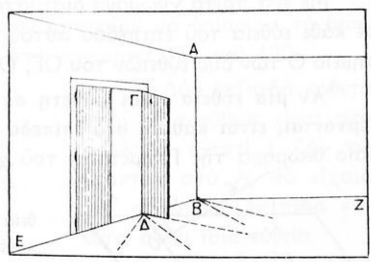
῎Αν δύο εὐθεῖες τέμνονται καὶ εἶναι ὀρθογώνιες, εἶναι **κάθετες**. Σὰν παράδειγμα ὀρθογώνιων εὐθειῶν ἀναφέρουμε τὶς μὴ παράλληλες ἀκμὲς ἑνὸς κύβου (σχ. 112).

§ 61. Καθετότητα εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.

Μία εὐθεία, ἡ ὁποία τέμνει ἕνα ἐπίπεδο (p) σ' ἕνα σημεῖο Ο, λέγεται κάθετη σ' αὐτό, ἂν εἶναι κάθετη σὲ ὅλες τὶς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ Ο.



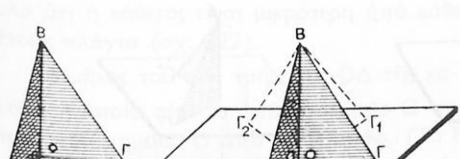
σχ. **113.**



σχ. **114.**

Μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ε εἶναι ὀρθογώνια πρὸς ὅλες τὶς εὐθεῖες τοῦ (p). (σχ. 113).

Ἡ κατακόρυφη τομὴ ΑΒ δύο τοίχων τῆς σχολικῆς αἴθουσας εἶναι κάθετη στὶς τομὲς ΒΖ καὶ ΒΕ τῶν ἐπιπέδων τῶν τοίχων καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πατώματος. Μὲ τὸ γνώμονα διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετη σὲ ὅλες τὶς εὐθεῖες τοῦ πατώματος, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ Β. Συνεπῶς ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι κάθετη στὸ πάτωμα. Τὸ ἴδιο παρατηροῦμε γιὰ τὴν εὐθεία περιστροφῆς (ΓΔ) (εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τοὺς στροφεῖς της) τῆς πόρτας τῆς αἴθουσας (σχ. 114). ῎Αν τὴν ἀνοιγοκλείσουμε καὶ σημειώσουμε μὲ κιμωλία στὸ πάτωμα τὶς διάφορες θέσεις τῆς κάτω εὐθύγραμμης ἀκμῆς τῆς πόρτας, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι οἱ γωνίες, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς

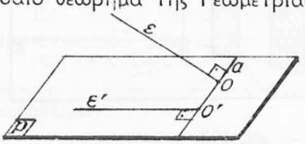


σχ. **115.**

ἡμιευθεῖες αὐτὲς καὶ τὴν εὐθεία περιστροφῆς τῆς πόρτας, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὸ γνώμονα, εἶναι ὀρθές. Ἄρα ἡ εὐθεία ΓΔ εἶναι κάθετη στὸ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος. Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὶς παραπάνω παρατηρήσεις, στερεώνουμε δύο γνώμονες τὸν ἕνα πάνω στὸν ἄλλο ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχουν μιὰ κοινὴ πλευρὰ ΑΒ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τοὺς τοποθετοῦμε πάνω στὸ ἐπίπεδο μὲ τρόπο ὥστε τὸ Α νὰ συμπίπτει μὲ τὸ Ο καὶ οἱ πλευρὲς ΟΓ καὶ ΟΓ′ νὰ βρίσκονται στὸ ἐπίπεδο (σχ. 115). Ἡ κοινὴ πλευρὰ τῶν δύο γνωμόνων εἶναι κάθετη στὶς εὐθεῖες ΟΓ καὶ ΟΓ′ τοῦ ἐπιπέδου στὸ Ο (ΟΒ ⊥ ΟΓ καὶ ΟΒ ⊥ ΟΓ′, γιατὶ εἶναι κάθετες πλευρὲς ὀρθογωνίου τριγώνου).

Μὲ ἕνα τρίτο γνώμονα διαπιστώνουμε ὅτι ἡ εὐθεία ΟΒ εἶναι κάθετη σὲ κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ (σχ. 115), ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κοινὸ σημεῖο Ο τῶν δύο εὐθειῶν του ΟΓ, ΟΓ′, ἄρα εἶναι κάθετη στὸ ἐπίπεδο (ρ).

Ἂν μία εὐθεία εἶναι κάθετη σὲ δύο εὐθεῖες ἑνὸς ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖες τέμνονται, εἶναι κάθετη στὸ ἐπίπεδο αὐτό. (Ἡ πρόταση αὐτὴ εἶναι σπουδαῖο θεώρημα τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου).



σχ. 116.

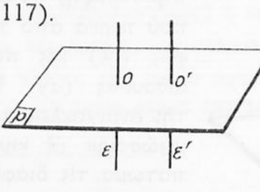
Σημείωση. Μιὰ εὐθεία ε κάθετη σὲ μιὰ εὐθεία α τοῦ ἐπιπέδου (ρ) εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κάθετη στὸ ἐπίπεδο, ἀλλὰ εἶναι δυνατὸ καὶ νὰ μὴν εἶναι ἢ νὰ ἀνήκει σ᾽ αὐτό. Ἂν μιὰ εὐθεία τέμνει ἕνα ἐπίπεδο χωρὶς νὰ εἶναι κάθετη σ᾽ αὐτό, λέγεται **πλάγια** πρὸς τὸ (ρ) (σχ. 116).

§ 62. Ἰδιότητες τῆς καθέτου – (θεωρήματα)

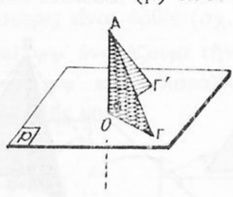
Ἂν χρησιμοποιήσουμε τὸ σύστημα μὲ τοὺς γνώμονες τῆς § 61, καταλήγουμε στὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

α) Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου μποροῦμε νὰ φέρουμε μόνο **μία** εὐθεία κάθετη στὸ ἐπίπεδο.

β) Δύο εὐθεῖες ε καὶ ε′ κάθετες στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (ρ) εἶναι παράλληλες (σχ. 117).



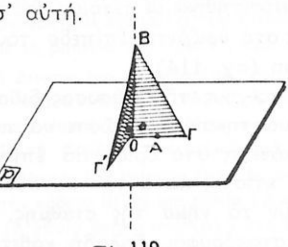
σχ. 117.



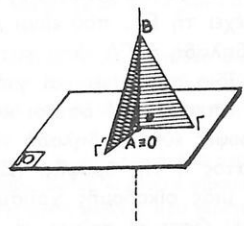
σχ. 118.

γ) Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α μποροῦμε νὰ φέρουμε μιὰ μόνο κάθετο σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο, εἴτε τὸ σημεῖο Α ἀνήκει σ᾽ αὐτὸ εἴτε ὄχι (σχ. 118).

δ) Ἀπὸ ἕνα σημεῖο μποροῦμε νὰ φέρουμε ἕνα ἐπίπεδο κάθετο σὲ μία εὐθεία. Τὸ σημεῖο αὐτὸ εἶναι δυνατὸ νὰ ἀνήκει στὴν ΑΒ ἢ νὰ μὴν ἀνήκει σ' αὐτή.

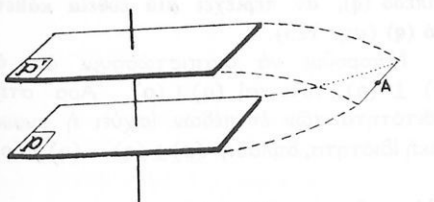


σχ. 119.



σχ. 120.

Μὲ τὸ σύστημα τῶν δύο γνωμόνων μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὴ θέση τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, ὅπως φαίνεται στὰ σχήματα 119 καὶ 120.



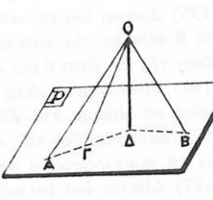
σχ. 121.

ε) Δύο ἐπίπεδα κάθετα στὴν ἴδια εὐθεία εἶναι παράλληλα (γιατί;). Ἂν τέμνονταν στὸ Α, θὰ εἴχαμε ἀπ' αὐτὸ δύο ἐπίπεδα κάθετα στὴν ἴδια εὐθεία.

ζ) Μιὰ εὐθεία κάθετη στὸ ἕνα ἀπὸ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι κάθετη καὶ στὸ ἄλλο.

§ 63. Ἀπόσταση σημείου ἀπὸ ἐπίπεδο

Εἴπαμε ὅτι ἀπὸ ἕνα σημεῖο π.χ. Ο, ποὺ δὲν ἀνήκει σ' ἕνα ἐπίπεδο (p), μποροῦμε νὰ φέρουμε μιὰ μόνο κάθετο στὸ ἐπίπεδο, τὴν ΟΔ.



σχ. 122.

Ἂν ἀπὸ τὸ Ο φέρουμε καὶ διάφορες πλάγιες πρὸς τὸ ἐπίπεδο, θὰ διαπιστώσουμε εὔκολα ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικρότερη ἀπὸ κάθε τέτοια πλάγια (σχ. 122).

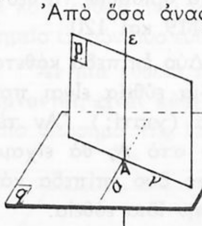
Τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΔ τῆς καθέτου, ἡ ὁποία φέρεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο πρὸς τὸ ἐπίπεδο, λέγεται **ἀπόσταση** τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο. (Τὸ ἴχνος Δ τῆς καθέτου ΟΔ λέγεται **προβολὴ** τοῦ Α πάνω στὸ ἐπίπεδο (p)).

§ 64. Καθετότητα ἐπιπέδων

Εἴπαμε στὴν προηγούμενη § 61 ὅτι ἡ εὐθεία, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τοὺς στροφεῖς τῆς σχολικῆς αἴθουσας, εἶναι κάθετη στὸ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος. Τότε τὸ ἐπίπεδο Θ τῆς πόρτας αὐτῆς λέγεται **ἐπίπεδο κάθετο** πρὸς τὸ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος (γιατὶ τοποθετήθηκε μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε νὰ περιέχει τὴ ΓΔ, ποὺ εἶναι κάθετος στὸ **ὁριζόντιο** ἐπίπεδο τοῦ πατώματος, δηλαδὴ ἡ ΓΔ εἶναι κατακόρυφη (σχ. 114).

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ γιὰ τοὺς τοίχους τῆς αἴθουσας διδασκαλίας (ἢ τοῦ σπιτιοῦ), οἱ ὁποῖοι κατασκευάστηκαν ἔτσι, ὥστε νὰ περιέχουν **κατακόρυφες** εὐθεῖες, δηλαδὴ εὐθεῖες κάθετες στὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο τοῦ πατώματος ἢ τῆς ὀροφῆς. (**Σημ.** Οἱ κτίστες κατὰ τὴν κατασκευὴ τῶν τοίχων μιᾶς οἰκοδομῆς χρησιμοποιοῦν τὸ **νῆμα** τῆς **στάθμης**, γιὰ νὰ πετύχουν ὥστε οἱ τοῖχοι νὰ εἶναι κατακόρυφοι, δηλαδὴ κάθετοι στὴν ὁριζόντια ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος).

Ἀπὸ ὅσα ἀναφέραμε παραπάνω συμπεραίνουμε γενικὰ ὅτι: **Ἕνα ἐπίπεδο (p) λέγεται κάθετο πρὸς ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο (q), ἂν περιέχει μιὰ εὐθεία κάθετη στὸ (q)** (σχ. 123).



σχ. 123.

Μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἂν (p) ⊥ (q), τότε καὶ (q) ⊥ (p). Ἄρα στὴν καθετότητα τῶν ἐπιπέδων ἰσχύει ἡ συμμετρικὴ ἰδιότητα, δηλαδή: (p) ⊥ (q) ⇔ (q) ⊥ (p).

Ἀσκήσεις

194) Βρεῖτε μέσα στὴν αἴθουσα

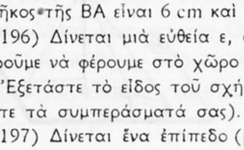
α) Ἐπίπεδα κάθετα β) ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὸ πάτωμά της, γ) ἐπίπεδα ὁριζόντια καὶ κατακόρυφα καὶ δ) εὐθεῖες κάθετες σὲ ἐπίπεδο.

195) Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (p) καὶ ἕνα σημεῖο Β, ποὺ δὲν ἀνήκει σ' αὐτό. Ἀπὸ τὸ σημεῖο Β φέρουμε τὴν κάθετο ΒΑ στὸ ἐπίπεδο (p) καὶ τὴν πλάγια πρὸς αὐτὸ ΒΓ. Ἂν τὸ μῆκος τῆς ΒΑ εἶναι 6 cm καὶ τῆς ΒΓ 10 cm, νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς ΑΓ.

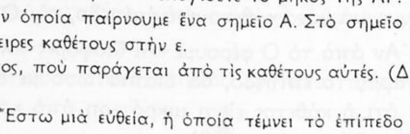
196) Δίνεται μιὰ εὐθεία ε, στὴν ὁποία παίρνουμε ἕνα σημεῖο Α. Στὸ σημεῖο αὐτὸ μποροῦμε νὰ φέρουμε στὸ χῶρο ἄπειρες καθέτους στὴν ε.

Ἐξετάστε τὸ εἶδος τοῦ σχήματος, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὶς καθέτους αὐτές. (Διατυπῶστε τὰ συμπεράσματά σας).

197) Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (p). Ἔστω μιὰ εὐθεία, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐπίπεδο σ' ἕ-



σχ. 124.



σχ. 125.

να σημεῖο Α καὶ εἶναι κάθετη στὸ (ρ). Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Β τῆς ε φέρνουμε τὴν κάθετο ΒΓ σὲ μιὰ ὁποιαδήποτε εὐθεία ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου (ρ). Ἐξετάστε ἂν οἱ ΑΓ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετες. (Μὲ τὴ βοήθεια τῶν τριῶν γνωμόνων τῆς § 61).

198) Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (ρ). Ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου φέρουμε τὴν κάθετο ΑΓ σὲ μιὰ εὐθεία του, νὰ δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖο Γ μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Β τῆς καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδο στὸ Α, εἶναι κάθετη στὴν ΓΔ (Σχ. 124). (Μὲ τὴ βοήθεια τῶν γνωμόνων).

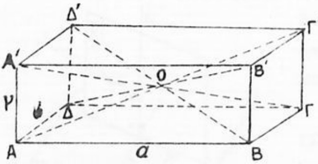
199) Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (ρ). Ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖο Β, ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ ἐπίπεδο, φέρουμε τὴν κάθετο ΒΓ σὲ μιὰ εὐθεία ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ κι ἔπειτα φέρουμε τὴν κάθετο ΓΑ (ἡ ὁποία ἀνήκει στὸ (ρ)) στὴ ΓΔ, δείξετε ὅτι ἡ κάθετος ποὺ φέρεται ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὴν ΓΑ εἶναι κάθετος στὸ ἐπίπεδο (ρ). (Σχῆμα 125). (Μὲ τὴ βοήθεια τῶν γνωμόνων).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Α. ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

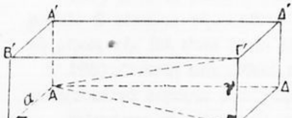
§ 65. **Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο** εἶναι ἕνα στερεό, τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὀρθογώνια (σὲ τρόπο ὥστε κάθε πλευρὰ καθενὸς νὰ εἶναι κοινὴ ἑνὸς μόνο ἄλλου). Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ ὀνομάζονται ἕδρες (ἢ βάσεις) τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου. Οἱ πλευρὲς τῶν ὀρθογωνίων λέγονται ἀκμές. **Διαστάσεις** τοῦ παραλληλεπιπέδου λέγονται τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὴν ἴδια κορυφή. Ἡ μιὰ ἀπ' αὐτὲς λέγεται μῆκος, ἡ ἄλλη πλάτος καὶ ἡ τρίτη ὕψος. π.χ. στὸ σχ.126 οἱ ΑΒ = α, ΑΔ = β καὶ ΑΑ' = γ.

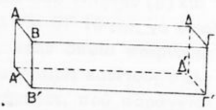


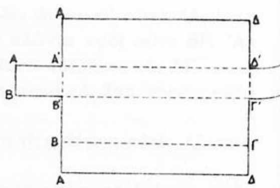
σχ. 126.

Διαγώνιο τοῦ ὀρθογ. παραλ/δου ὀνομάζουμε τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖο ὁρίζουν δύο κορυφές του, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια ἕδρα.

Μποροῦμε νὰ μελετήσουμε τὶς ἰδιότητες τοῦ ὀρθ. παρ/δου μὲ τὴ


σχ. 127.


σχ. 128.


σχ. 129.

βοήθεια ἑνὸς στερεομετρικοῦ ὑποδείγματος (μοντέλου) ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ ὑλοποιημένες μόνο τὶς ἀκμές του (π.χ. ἀπὸ σκληρὸ σύρμα) καὶ στὸ ὁποῖο οἱ διαγώνιες εἶναι κατασκευασμένες ἀπὸ νήματα.

α) Οἱ ἀκμὲς τοῦ ὀρθ. παρ/δου ποὺ εἶναι παράλληλες, εἶναι ἴσες.

β) Οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι παράλληλες καὶ ἴσες.

γ) Οἱ διαγώνιοί του περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ μέσο κάθε μιᾶς ἀπ' αὐτὲς καὶ λέγεται **κέντρο** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (εἶναι καὶ κέντρο συμμετρίας του).

Σημ. Οἱ παραπάνω ἰδιότητες ἰσχύουν γιὰ ὅλα τὰ παραλληλεπίπεδα, ὅπως θὰ δοῦμε στὰ ἑπόμενα μαθήματα.

δ) Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες.

Μποροῦμε νὰ ὑπολογίσουμε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν διαστάσεών του.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὴ διαγώνιο ΑΓ' = δ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' (σχ. 127), ἐφαρμόζουμε τὸ πυθαγόρειο θεώρημα στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΓ' (τὸ τρίγωνο ΑΓΓ' εἶναι ὀρθογώνιο, γιατὶ ἡ ΓΓ' εἶναι κάθετος στὸ ἐπίπεδο ΑΒΓΔ, ἄρα κάθετος καὶ στὴν ΓΑ. Ἑπομένως ἡ γωνία $\widehat{ΑΓΓ'} = 1$ ὀρθή.)

Ἔτσι ἔχουμε: $ΑΓ'^2 = ΑΓ^2 + ΓΓ'^2$ καὶ $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$. Ἄρα $ΑΓ'^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΓ'^2 \Rightarrow δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2$ καὶ ἐπομένως $δ = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}$.

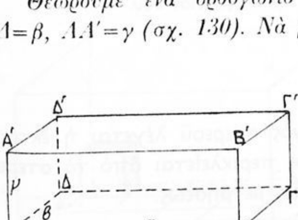
Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο ἀπέναντι ἑδρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγεται ὕψος αὐτοῦ.

Ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παρ/δου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν του.

Ἀνάπτυγμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, τὴν ὁποία παίρνουμε, ἂν τὸ κόψουμε κατὰ μῆκος τῆς ΒΓ καὶ τῶν ΒΒ', ΒΑ, Α'Β', ΓΔ, Δ'Γ', ΓΓ' καὶ τὸ ἀναπτύξουμε (ξεδιπλώσουμε) σ' ἕνα ἐπίπεδο (σχ. 128, 129).

§ 66. Ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ διαστάσεις ΑΒ=α, ΑΔ=β, ΑΑ'=γ (σχ. 130). Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του.



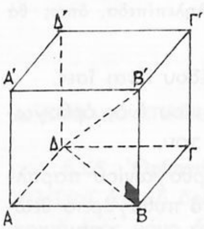
σχ. 130.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ εἶναι α·β καθὼς ἐπίσης καὶ τῆς ἕδρας Α'Β'Γ'Δ'. (γιατί;)

Τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἕδρας ΑΒΒ'Α' εἶναι α·γ καθὼς καὶ τῆς ἀπέναντί της ἕδρας ΔΓΓ'Δ'. Τῆς ἕδρας ΑΑ'Δ'Δ τὸ ἐμβαδὸ εἶναι β·γ καθὼς καὶ τῆς ΒΒ'Γ'Γ, ποὺ εἶναι ἀπέναντι σ' αὐτήν.

Ὥστε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' εἶναι $Ε = 2αβ + 2αγ + 2βγ$ ἢ $\boxed{Ε = 2(αβ + βγ + γα)}$

§ 67. Κύβος



σχ. 131.

Κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ποὺ ἔχει ὅλες τὶς ἀκμές του ἴσες.

Ἑπομένως οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνα (σχ. 131).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς κύβου, ἐφαρμόζουμε τὸν τύπο $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ καὶ ἔχουμε $\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2$ ἄρα $\delta^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \delta = \alpha\sqrt{3}$.

Τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του εἶναι:

$$E = 2\cdot(\alpha\cdot\alpha + \alpha\cdot\alpha + \alpha\cdot\alpha) = 2\cdot 3\alpha^2 \Leftrightarrow \boxed{E = 6\alpha^2}$$

Ἀσκήσεις

200) Οἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 6 cm, 5 cm, 4 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του.

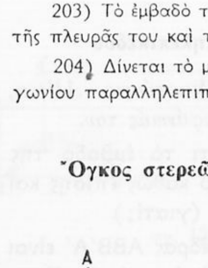
201) Κατασκευάστε τὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ 3 cm καὶ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του.

202) Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Οἱ τρεῖς διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογες πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8, 10, 12 καὶ τὸ ἐμβαδὸ τῆς (ὁλικῆς) ἐπιφάνειάς του εἶναι 2368 cm^2. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ διαστάσεις του.

203) Τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κύβου εἶναι 54 cm^2. Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του καὶ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου του.

204) Δίνεται τὸ μῆκος, τὸ ὕψος, καὶ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου μιᾶς ἕδρας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του.

Ὄγκος στερεῶν



σχ. 132.

§ **68. Ὄγκος** ἑνὸς στερεοῦ λέγεται ἡ ἔκταση τοῦ χώρου, ὁ ὁποῖος περικλείεται ἀπὸ τὸ στερεό, ἐκφρασμένη σὲ μονάδες μετρήσεως.

Μέτρηση τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ.

Τιμὴ τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ὄγκου του πρὸς τὴ μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων. Τὴν τιμὴ τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 132) τὴ συμβολίζουμε μὲ (ΑΒΓΔ) καὶ τὸν ὄγκο του μὲ τὸ V ἢ $V_{ΑΒΓΔ}$.

Μέτρηση τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ἡ εὕρεση τῆς τιμῆς τοῦ ὄγκου του. Ἡ τιμὴ τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὴ μονάδα, γιὰ νὰ ἔχουμε τὸν ὄγκο του.

Μονάδες ὄγκου

Ἡ μονάδα ὄγκου εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴ τὴ μονάδα μήκους ποὺ ἔχουμε ἐκλέξει.

Μονάδα μήκους ἔχουμε ὁρίσει τὸ μέτρο (1 m), ἄρα ἡ μονάδα ὄγκου εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ ἕνα μέτρο· δηλαδὴ τὸ **κυβικὸ μέτρο**, τὸ ὁποῖο σημειώνεται μὲ συντομία (m^3).

Οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι:

1) Τὸ κυβικὸ δεκατόμετρο (dm^3), δηλαδὴ ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ μήκους 1 dm.

2) Τὸ κυβικὸ ἑκατοστόμετρο (cm^3), δηλαδὴ ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ μήκους 1 cm.

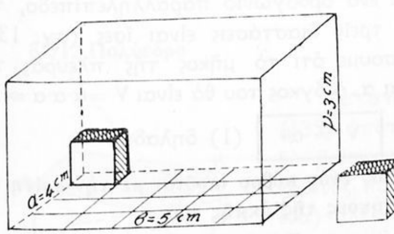
3) Τὸ κυβικὸ χιλιοστόμετρο (mm^3), δηλαδὴ ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ μήκους 1 mm.

§ 69. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ διαστάσεις $\alpha = 4$ cm, $\beta = 5$ cm καὶ $\gamma = 3$ cm. Σκεφθεῖτε πῶς μποροῦμε νὰ μετρήσουμε αὐτὸ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ γεμίζουμε μὲ κύβους, ποὺ ἔχουν ἀκμὴ 1 cm. Γιὰ νὰ γεμίσει, χρειάζονται 60 κύβοι ὄγκου ἴσου μὲ 1 cm^3 δηλαδὴ $V = 60\ cm^3$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι καταλήγουμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὶς τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου,

$$4\ cm \cdot 5\ cm \cdot 3\ cm = 60\ cm^3.$$



σχ. 133.

Ἄρα $V = 4\ cm \cdot 5 cm \cdot 3\ cm = 60\ cm^3$, δηλαδὴ γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζουμε τὶς τρεῖς διαστάσεις του ἐκφρασμένες στὴν ἴδια μονάδα μήκους.

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἡ βάση τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου χωρίζεται σὲ 5 ἐπὶ 4 ἴσα τετράγωνα μὲ πλευρὰ 1 cm. Πάνω σὲ καθένα ἀπ' αὐτὰ τοποθετοῦμε τὴ βάση ἑνὸς κύβου μὲ πλευρὰ 1 cm καὶ σχηματίζεται ἔτσι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ ὕψος 1 cm. Αὐτὸ ἔχει ὄγκο $4\ cm \cdot 5\ cm \cdot 1\ cm = 20\ cm^3$. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο χωρίζεται (μὲ ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὴ βάση του) σὲ τρία ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα μὲ τὸν ἴδιο ὄγκο.

Συνεπῶς: $V = 3 \cdot 20\ cm^3 = 60\ cm^3 = 3 \cdot (4\ cm \cdot 5\ cm \cdot 1\ cm) = 4\ cm \cdot 5\ cm \cdot 3\ cm$.

Ἂν δοθεῖ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τοῦ ὁποίου οἱ διαστάσεις ἔχουν μήκη α, β, γ, ὁ ὄγκος του εἶναι $\boxed{V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$

Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν τριῶν διαστάσεών του.

Ἀποδεικνύεται ὅτι αὐτὸ ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ τιμὲς τῶν α, β, γ εἶναι ὁποιοιδήποτε ἀριθμοί.

Παρατηροῦμε στὸν τύπο $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ὅτι τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ δίνει τὸ ἐμβαδὸ E_β τοῦ ὀρθογωνίου τῆς βάσης μὲ διαστάσεις α καὶ β, ἐνῶ τὸ γ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου:

Ἄρα $\boxed{V = E_\beta \cdot \upsilon}$ δηλαδή:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς βάσης του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀντίστοιχου ὕψους.

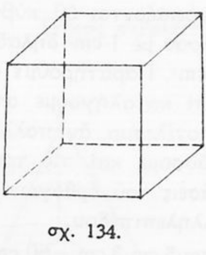
§ 70. Ὄγκος κύβου

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τοῦ ὁποίου οἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσες (σχ. 134). Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου εἶναι α, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \Rightarrow$

$\boxed{V = \alpha^3}$ (1) δηλαδή:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτη δύναμη τοῦ μήκους τῆς ἀκμῆς του.

α



σχ. 134.

Παρατήρηση: Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ ἡ τρίτη δύναμη ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται κύβος τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀπὸ τὸν τύπο (1) ἐννοοῦμε ὅτι κάθε μονάδα ὄγκου ἰσοῦται μὲ $1000 = 10^3$ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξης, ἄρα:

$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3$ ἢ

$1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$.

$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000000\ mm^3$$
$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

Ἀσκήσεις

205) Βρεῖτε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου πλευρᾶς 3,5 m.

206) Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει διαστάσεις 5 m, 14 dm, καὶ 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

207) Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παρ/δου εἶναι 64 dm^3 καὶ τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης του 16 dm^2. Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ βάση αὐτή.

208) Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς κύβου, ποὺ ἔχει ὄγκο 4913 cm^3. (Ὑπόδειξη: ἀναλύστε τὸν ἀριθμὸ σὲ γινόμενο παραγόντων).

209) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κύβου εἶναι 294 dm^2. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο του.

210) Ἕνας σιδηρουργὸς ἔχει μιὰ μεταλλικὴ πλάκα σὲ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 4 m, 5 m καὶ 0,5 m καὶ σκοπεύει νὰ τὴ διαιρέσει σὲ κύβους, ποὺ καθένας τους νὰ ἔχει ἀκμὴ 0,05 m. Σὲ πόσους τέτοιους κύβους μπορεῖ νὰ διαιρεθεῖ ἡ πλάκα;

211) Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ποὺ οἱ διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογες πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 5, 6 καὶ ἔχουν ἄθροισμα 70 dm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

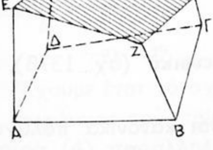
212) Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει ὄγκο 960 cm^3. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς διαστάσεις του, ἂν γνωρίζετε ὅτι αὐτὲς εἶναι ἀνάλογες πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 6.

213) Ἕνα δοχεῖο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 2 m, 3 m, 4 m. Ἕνα ἄλλο δοχεῖο μὲ τὸ ἴδιο σχῆμα ἔχει ὀκταπλάσιο ὄγκο καὶ διαστάσεις ἀνάλογες πρὸς τὶς διαστάσεις τοῦ πρώτου δοχείου. Νὰ βρεθοῦν οἱ διαστάσεις τοῦ δεύτερου δοχείου.

214) Ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ μῆκος α τῆς ἀκμῆς ἑνὸς κύβου ἐπὶ 2, πόσος γίνεται ὁ ὄγκος του; Ἐφαρμογή: α = 5 cm.

Β. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

§ 71. Πολύεδρο



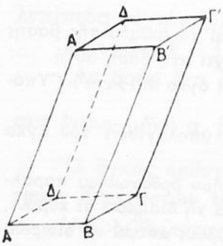
σχ. 135.

Τὸ στερεὸ ποὺ εἰκονίζεται στὸ σχῆμα (135) ἀποτελεῖται ἀπὸ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα δὲ βρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Κάθε πλευρὰ καθενὸς πολυγώνου ἀνήκει καὶ σὲ ἕνα (μόνο ἕνα) ἄλλο πολύγωνο. **Τὸ στερεὸ αὐτὸ εἶναι ἕνα πολύεδρο.** Τὰ πολύγωνα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται, εἶναι οἱ **ἕδρες** τοῦ πολυέδρου. Οἱ πλευρὲς τῶν ἑδρῶν εἶναι οἱ **ἀκμὲς** τοῦ πολυέδρου καὶ οἱ κορυφὲς τῶν ἑδρῶν οἱ **κορυφὲς** τοῦ πολυέδρου. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ ὁ κύβος εἶναι πολύεδρα.

Σημ. Σημεῖα τοῦ πολυέδρου λέγονται τὰ σημεῖα τῶν ἀκμῶν του καὶ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν ἑδρῶν του.

§ 72. Πρίσμα

Πρίσμα εἶναι ἕνα πολύεδρο, ποὺ ἔχει δύο ἕδρες ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς ἄλλες παραλληλόγραμμα. (σχ. 136).

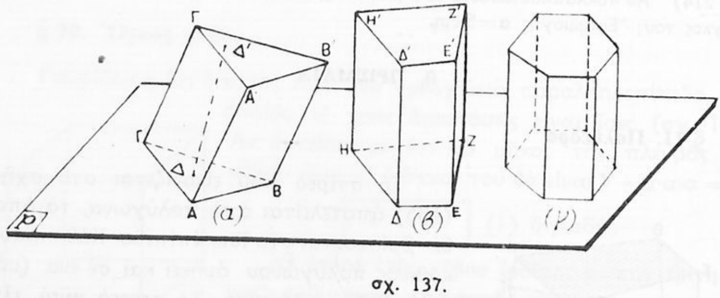


σχ. 136.

Οἱ ἴσες καὶ παράλληλες ἕδρες ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ λέγονται βάσεις τοῦ πρίσματος. Τὰ παραλληλόγραμμα λέγονται παράπλευρες ἕδρες τοῦ πρίσματος, ὅπως τὰ ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄ κ.λ.π. Οἱ ἀκμὲς ΑΑ΄, ΒΒ΄, . . ., οἱ ὁποῖες περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων, λέγονται παράπλευρες ἀκμές. Αὐτὲς εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

Ἡ ἀπόσταση τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων λέγεται **ὕψος** τοῦ πρίσματος, π.χ. τὸ ΔΔ΄ (σχ. 137α). Ἂν οἱ παράπλευρες ἀκμὲς εἶναι κάθετες στὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων, τὸ πρίσμα λέγεται **ὀρθὸ πρίσμα,** διαφορετικὰ λέγεται **πλάγιο.** Συνεπῶς τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσο μὲ τὴν παράπλευρη ἀκμή του καὶ οἱ παράπλευρες ἕδρες του εἶναι ὀρθογώνια, π.χ. τὸ ΔΔ΄ (σχ. 137β).

Ἂν τὸ πρίσμα ἔχει τριγωνικὲς βάσεις, λέγεται **τριγωνικὸ** πρίσμα, ὅπως τὸ ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ στὸ σχῆμα 137α. Ἂν ἔχει βάσεις τετράπλευρα,



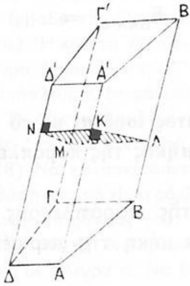
σχ. 137.

πεντάγωνα κ.λ.π., λέγεται ἀντιστοίχως **τετραπλευρικὸ** (σχ. 137β), **πενταγωνικὸ** κ.λ.π. πρίσμα.

Ὅταν οἱ βάσεις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, αὐτὸ λέγεται **κανονικὸ** πρίσμα. (σχ. 137γ).

Παρατήρηση: Μποροῦμε μὲ μιὰ ἁπλὴ κατασκευὴ νὰ ἔχουμε ἕνα στερεομετρικὸ ὑπόδειγμα (μοντέλο) πρίσματος.

Παίρνουμε δύο (ἢ περισσότερα) ἴσα πολύγωνα ἀπὸ ξύλο ἢ χαρτόνι. Ἀνοίγουμε τρύπες στὶς κορυφὲς τῶν πολυγώνων αὐτῶν καὶ περνᾶμε νήματα, τὰ ὁποῖα παίρνουν παράλληλες θέσεις. Μὲ παράλληλη μεταφορὰ τῶν πολυγώνων θὰ ἔχουμε τὴν ἔννοια τοῦ πρίσματος (ὀρθοῦ καὶ πλάγιου) καθὼς καὶ τῆς παράλληλης πρὸς τὶς βάσεις ἢ τῆς κάθετης τομῆς του.



σχ. 138.

Ἂν φέρουμε ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στὶς παράπλευρες ἀκμὲς τοῦ πρίσματος, παίρνουμε ἕνα πολύγωνο, τὸ ὁποῖο λέγεται **κάθετη τομὴ** τοῦ πρίσματος. Οἱ πλευρὲς τῆς κάθετης τομῆς ἑνὸς πρίσματος εἶναι ὕψη τῶν ἀντίστοιχων παράπλευρων ἑδρῶν, ὅταν λάβουμε ὡς βάσεις των τὶς παράπλευρες ἀκμές. Στὰ ὀρθὰ πρίσματα ἡ κάθετη τομὴ εἶναι ἴση μὲ τὶς βάσεις.

§ 73. Ἐμβαδὸ ἐπιφάνειας πρίσματος.

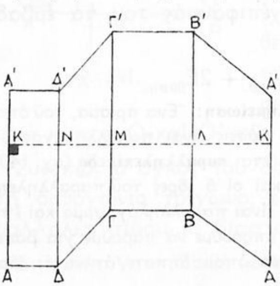
Ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας πρίσματος λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν του.

Ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας πρίσματος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παράπλευρων ἑδρῶν του.

Δίνεται τὸ πλάγιο πρίσμα ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' καὶ ἔστω ΚΛΜΝ μιὰ κάθετη τομή του. (σχ. 138). Ζητεῖται νὰ βρεῖτε:

α) Τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος καὶ

β) Τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.



σχ. 139.

α) Κατασκευάζουμε ἕνα στερεομετρικὸ ὑπόδειγμα(μοντέλο)τοῦ πρίσματος αὐτοῦ.

Κόβουμε κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς π.χ. τῆς ΑΑ' τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ποὺ μᾶς δόθηκε καὶ ἀναπτύσσουμε τὶς ἕδρες της (τοῦ στερ. ὑποδείγματος) πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο.

Ἔχουμε ἔτσι τὸ σχῆμα 139, ποὺ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσερα (4) παραλληλόγραμμα, τὰ ΑΒΒ'Α', ΒΓΓ'Β', ΓΔΔ'Γ', ΔΑΑ'Δ' τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι οἱ πλευρὲς ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ τῆς κάθετης τομῆς τοῦ πρίσματος καὶ οἱ βάσεις ἴσες μὲ τὴν παράπλευρη ἀκμή του. Ἂν α, β, γ, δ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μήκη τους καὶ λ εἶναι τὸ μῆκος τῆς παράπλευρης ἀκμῆς τοῦ πρίσματος, τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος αὐτοῦ. Δηλαδή:

$$E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi\iota\varphi.\ \pi\rho\iota\sigma\mu.} = E_{ABB'A'} + E_{B\Gamma\Gamma'B'} + E_{\Gamma\Delta\Delta'\Gamma'} + E_{\Delta AA'\Delta'} \Rightarrow$$

$$E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi\iota\varphi.\ \pi\rho\iota\sigma\mu.} = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \delta\lambda \text{ συνεπῶς}$$

$$E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi\iota\varphi.\ \pi\rho\iota\sigma\mu.} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\cdot\lambda. \text{ Δηλαδή:}$$

Τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου τῆς κάθετης τομῆς του ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς παράπλευρης ἀκμῆς του.

Ἂν τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθό, τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις τὰ μήκη τῆς περιμέτρου τῆς βάσης του καὶ τοῦ ὕψους του.

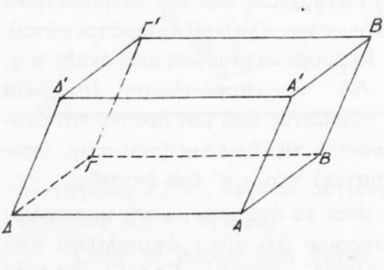
Ἄρα: **Τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν μηκῶν τῆς περιμέτρου τῆς βάσης του καὶ τοῦ ὕψους του.**

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα μποροῦμε νὰ καταλήξουμε καὶ ἂν θεωρήσουμε ἀπ' εὐθείας τὸ στερεό, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ στερεομετρικὸ ὑπόδειγμα καὶ τὸ ἀνάπτυγμά του. Ἐπειδὴ κάθε παράπλευρη ἔδρα εἶναι παραλληλόγραμμο, ἔχουμε $E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi\iota\varphi.\ \pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu.} = E_{ABB'A'} + E_{B\Gamma\Gamma'B'} + E_{\Gamma\Delta\Delta'\Gamma'} + E_{\Delta AA'\Delta'}$

$$\Rightarrow E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi\iota\varphi.\ \pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu.} = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \delta\lambda \Rightarrow E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi\iota\varphi.\ \pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu.} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta).\lambda$$

β) Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος προσθέτουμε στὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ἴσων βάσεών του.

Ἔτσι ἔχουμε: $E_{\grave{o}\lambda.\ \grave{\epsilon}\pi\iota\varphi.\ \pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu.} = E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi.\ \pi\rho.} + 2E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}$.



σχ. 140.

Σημείωση: Ἕνα πρίσμα, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι παλαλληλόγραμμα, ὀνομάζεται **παραλληλεπίπεδο** (σχ. 140). Ἔτσι καὶ οἱ 6 ἔδρες τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ ἑπομένως μποροῦμε νὰ πάρουμε γιὰ βάσεις του δυὸ ὁποιεσδήποτε ἀπέναντι ἔδρες του.

Ἕνα παραλληλεπίπεδο ὀνομάζεται ὀρθό, ἂν οἱ παράπλευρες ἔδρες του εἶναι ὀρθογώνια.

Συνεπῶς, ὅσα ἀναφέραμε παραπάνω γιὰ τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας πρίσματος, ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ παραλληλεπίπεδα.

Ἀσκήσεις

215) Ἕνα ὀρθὸ πρίσμα ἔχει βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 6 cm καὶ 8 cm καὶ ὕψος 15 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του, καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.

216) Ἡ κάθετη τομὴ ἑνὸς πλάγιου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο μὲ πλευρὰ 3 cm. Ἡ παράπλευρη ἀκμὴ τοῦ πρίσματος εἶναι 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του.

217) Δίνεται ἕνα κανονικὸ πρίσμα ἀκμῆς 5 m, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι τετράγωνο πλευρᾶς 2 m. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του.

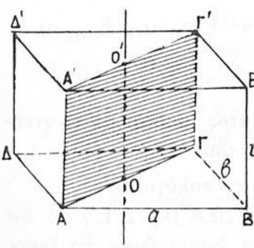
218) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθὸ πρίσμα ἀπὸ χαρτόνι, ποὺ νὰ ἔχει ὕψος 7 cm καὶ ἡ βάση του νὰ εἶναι ρόμβος μὲ διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.

219) Δίνεται ἕνα κανονικὸ πρίσμα μὲ ἀκμὴ 5α, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο μὲ πλευρὰ α. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ α) τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του καὶ β) τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του. Ἐφαρμογή: α = 13 cm.

§ 74. Ὄγκος πρίσματος

α) Ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο:

Δίνεται ἕνα ὀρθὸ τριγωνικὸ πρίσμα μὲ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ μήκη κάθετων πλευρῶν α καὶ β καὶ ὕψος μήκους υ. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.



σχ. 141.

Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ διαστάσεις α, β καὶ υ. Τὸ στερεὸ αὐτὸ τέμνεται ἀπὸ τὸ διαγώνιο ἐπίπεδο ΑΑ'Γ'Γ (σχ. 141) σὲ δύο πρίσματα, ποὺ ἔχουν βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ μήκη κάθετων πλευρῶν α καὶ β καὶ ὕψος υ. Τὰ ὀρθὰ αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἴσα (γιατὶ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΟ', ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' τῶν βάσεων).

Συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖο ἔχει βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο, εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, υ.

Δηλαδή: $V = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \upsilon}{2} \Rightarrow V = \frac{\alpha \cdot \beta}{2} \cdot \upsilon$. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ἡ ὁποία εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο, εἶναι

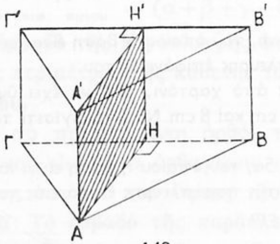
$$E = \frac{\alpha \cdot \beta}{2}. \quad \text{Ἄρα} \quad \boxed{V = E_\beta \cdot \upsilon}$$

Ἑπομένως: **Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

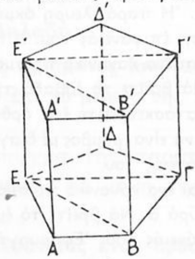
β) Ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος:

Δίνεται ἕνα ὀρθὸ τριγωνικὸ πρίσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' μὲ βάση ἕνα τυχὸν τρίγωνο ΑΒΓ. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ'Β'Γ', τὸ διαιροῦμε σὲ δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, ποὺ ἔχουν βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα,



σχ. 142.



σχ. 143.

μὲ τὸ ἐπίπεδο ΑΗΗ'Α', τὸ ὁποῖο ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΑΑ' τοῦ πρίσματος. Δηλαδὴ μὲ ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στὸ ΒΓΓ'Β' (σχ. 142).

Ἄρα: $V_{ΑΒΓΑ'Β'Γ'} = V_{ΑΒΗΑ'Β'Η'} + V_{ΓΑΗΓ'Α'Η'} = E_{ΑΒΗ}\cdot υ + E_{ΑΗΓ}\cdot υ =$

$= (E_{ΑΒΗ} + E_{ΑΗΓ})\cdot υ = E_{ΑΒΓ}\cdot υ$

Ὥστε: $V_{ΑΒΓΑ'Β'Γ'} = E_{βάσεως}\cdot υ$.

Ἄρα: **Ὁ ὄγκος κάθε ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.**

γ) Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος μὲ βάση ὁποιοδήποτε πολύγωνο:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε', τὸ διαιροῦμε σὲ ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὕψος τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ποὺ μᾶς ἔχει δοθεῖ καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΕΓ, ΓΕΔ (σχ. 143). Ὀνομάζουμε μὲ V_1, V_2, V_3 τοὺς ὄγκους τῶν πρισμάτων αὐτῶν καὶ μὲ E_1, E_2, E_3 τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών τους. Τότε ἔχουμε

$V_{πρισμ.} = V_1 + V_2 + V_3$. Συνεπῶς

$V_{πρισμ.} = E_1\cdot υ + E_2\cdot υ + E_3\cdot υ = (E_1 + E_2 + E_3)υ$

Ἑπομένως $V_{πρισμ.} = E_{βασ.}\cdot υ$.

Ὥστε: **Ὁ ὄγκος κάθε ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

δ) Ὄγκος ὁποιουδήποτε πλάγιου πρίσματος:

Ὁ τύπος $\boxed{V_{πρίσμ.} = E_{βασ.}\cdot υ}$, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ὄγκου ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γενικὸς καὶ ἰσχύει, ὅπως θὰ μάθουμε σὲ μεγαλύτερη τάξη, καὶ γιὰ τὰ πλάγια πρίσματα.

Ἄρα γενικά: **Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

Σημ. Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε πρίσματος δίνεται καὶ ἀπὸ τὸν τύπο V = E κάθετης τομῆς · λ (ὅπου λ τὸ μῆκος τῆς παράπλευρης ἀκμῆς).

Ἀσκήσεις

220) Ἕνα ὀρθὸ τριγωνικὸ πρίσμα ἔχει ὕψος 40 cm καὶ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

221) Δίνεται ἕνα κανονικὸ ἑξαγωνικὸ πρίσμα, τὸ ὁποῖο ἔχει ὕψος 12 dm καὶ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσης του 8 dm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

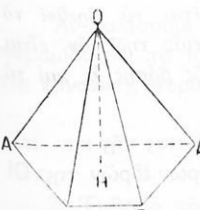
222) Ἕνα ὀρθὸ πρίσμα ἔχει ὄγκο 200 cm^3 καὶ ὕψος 8 cm. Ἂν ἡ βάση του εἶναι τετράγωνο, νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρά της.

223) Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνὸς κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 324cm^2. Ἂν τὸ ὕψος του εἶναι τριπλάσιο ἀπὸ τὴν πλευρὰ τῆς βάσης του, νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο του.

224) Ἕνα κανονικὸ ἑξαγωνικὸ πρίσμα ἔχει πλευρὰ τῆς βάσης του α καὶ ὕψος 2α. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος. Ἐφαρμογή: α = 9 cm.

Γ. ΠΥΡΑΜΙΔΑ—ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ—ΜΕΤΡΗΣΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

§ 75. Πυραμίδα:



σχ. 144.

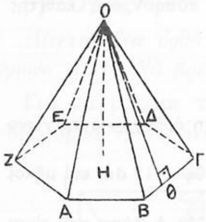
Πυραμίδα εἶναι ἕνα στερεό, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα πολύγωνο καὶ ἀπὸ τρίγωνα. Τὰ τρίγωνα ἔχουν μία κοινὴ κορυφὴ (ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ ἐπίπεδο τοῦ πολυγώνου) καὶ καθένα ἔχει μία πλευρὰ κοινὴ μὲ τὸ πολύγωνο (σχ. 144).

Τὸ πολύγωνο ΑΒΓΔ λέγεται βάση τῆς πυραμίδας καὶ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, . . λέγονται παράπλευρες ἕδρες της. Τὸ σημεῖο Ο λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδας· τὰ εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΒ, . . . λέγονται παράπλευρες ἀκμές της. Ἡ ἀπόσταση ΟΗ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὴ βάση τῆς πυραμίδας εἶναι τὸ ὕψος της. Τὸ **σύνολο** τῶν παράπλευρων ἑδρῶν ἀποτελεῖ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας. Ἂν ἡ βάση τῆς πυραμίδας εἶναι τρίγωνο, ἡ πυραμίδα λέγεται **τριγωνική**· ἂν εἶναι τετράπλευρο, πεντάγωνο κλπ., λέγεται **τετραπλευρική, πενταγωνική** κλπ.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμίδα εἶναι ἕνα πολύεδρο μὲ 4 ἕδρες καὶ λέγεται **τετράεδρο.**

§ 76. Κανονικὴ πυραμίδα

Μία πυραμίδα λέγεται **κανονική**, ὅταν ἡ βάση της εἶναι κανονικὸ πολύγωνο καὶ τὸ ἴχνος τοῦ ὕψους εἶναι τὸ κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 145).

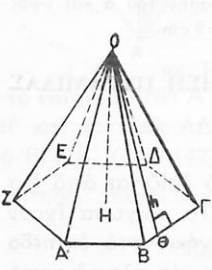


σχ. 145.

Οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς κανονικῆς πυραμί-δας εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα (ΑΟΒ, ΒΟΓ, . .) Τὸ ὕψος ΟΘ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα λέγεται **ἀπόστημα** τῆς κανονικῆς πυραμίδας (ἢ **πα-ράπλευρο ὕψος**) καὶ συμβολίζεται μὲ h. Ἂν ἡ βάση μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο αὐτὴ λέγεται κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίδα. Ἕνα τετράεδρο εἶναι κανονικό, ἂν οἱ 4 ἕδρες του εἶνα ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα.

§ 77. Ἐμβαδὸ κανονικῆς πυραμίδας.

Ὀνομάζουμε **ἐμβαδὸ πυραμίδας** τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν της. **Ἐμβαδὸ τῆς παρά-πλευρης ἐπιφάνειας** λέμε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παράπλευρων ἑδρῶν της.



σχ. 146.

1. Ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας:

Δίνεται μιὰ κανονικὴ πυραμίδα (π.χ. ἑξαγωνική) ΟΑΒΓΔΕΖ (σχ. 146) καὶ ζητεῖται νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της, ἂν εἶναι γνωστὸ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσης λ_6 καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος h.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς καν. αὐ-τῆς πυραμίδας, προσθέτουμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν παράπλευρων ἑδρῶν της. Οἱ ἕδρες αὐτὲς εἶναι ἴσες.

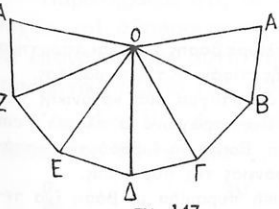
Ἄρα $E_{\text{παρ. ἐπιφ. πυρ.}} = 6 \cdot E_{AOB} = 6 \cdot \dfrac{\lambda_6 \cdot h}{2} = \dfrac{6\lambda_6 \cdot h}{2} =$

$$= \frac{\text{μῆκος περιμέτρου βάσης} \times \text{μῆκος ἀποστήματος}}{2}$$

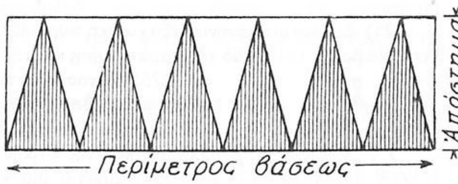
Ἑπομένως: **Τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυ-ραμίδας ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιγινόμενο τοῦ μήκους τῆς περιμέτρου τῆς βάσης της ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός της.**

Παρατηρήσεις: 1) Ἂν κόψουμε τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια κατὰ μῆκος μιᾶς παράπλευρης ἀκμῆς καὶ τὴν ἀναπτύξουμε σ᾽ ἐπίπεδο, ἔχουμε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ σχήματος 146 (σχ. 147).

2) Μποροῦμε κόβοντας τὴν πυραμίδα κατὰ μῆκος ὅλων τῶν παρά-



σχ. 147.



σχ. 148.

πλευρων ἀκμῶν νὰ ἔχουμε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς πυραμίδας (σχ. 148).

Τότε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας αὐτῆς βρίσκεται, ἂν πάρουμε τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει διαστάσεις τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τῆς βάσης τῆς πυραμίδας καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός της.

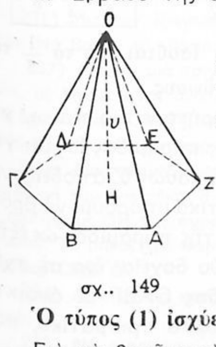
Ἄρα $E_{\text{παρ. ἐπιφ. καν. πυρ.}} =$

$$= \frac{\text{μῆκος περιμέτρου βάσης} \times \text{μῆκος ἀποστήματος}}{2}$$

Ἂν καλέσουμε λ_ν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσης τῆς κανονικῆς πυραμίδας, ν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσης καὶ h τὸ ἀπόστημα τῆς κανονικῆς πυραμίδας, θὰ ἔχουμε:

$$\boxed{E_{\text{παρ. ἐπιφ. καν. πυρ.}} = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot h}{2}}$$

2. Ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κανονικῆς πυραμίδας:



σχ.. 149

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλ. ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας, προσθέτουμε στὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης της.

$$\boxed{E_{\text{ολ.}} = E_{\text{παρ.}} + E_{\text{βασ.}}} \quad (1)$$

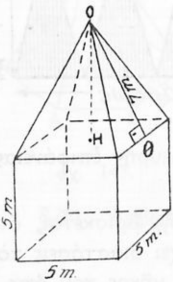
δηλαδή: $$\boxed{E_{\text{ολ.}} = \frac{\nu \cdot \lambda_\nu \cdot h}{2} + E_{\text{βασ.}}} \quad (2)$$

Ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ γιὰ τὶς μὴ κανονικὲς πυραμίδες.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς ὁποιασδήποτε πυραμίδας, προσθέτουμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν της.

Ἀσκήσεις

225) Δίνεται μιὰ κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμίδα μὲ πλευρὰ βάσης 3 cm καὶ ἀπόστημα 9 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας.



σχ. 150.

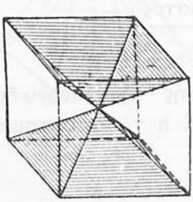
226) Κατασκευάστε τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας, ποὺ ἡ βάση της εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 3 cm καὶ τὸ ἀπόστημα της 2,5 cm. Βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας.

227) Δίνεται μιὰ κανονικὴ πυραμίδα μὲ βάση ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἔχει πλευρὰ 6 cm, καὶ ὕψος 4 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς πυραμίδας.

228) Δίνεται μιὰ κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμίδα, ποὺ ἡ παράπλευρη ἀκμή της εἶναι 10 cm καὶ τὸ ὕψος 6 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς της.

229) Τὸ στερεὸ τοῦ σχήματος 150 ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕναν κύβο μὲ πλευρὰ 5 m καὶ ἀπὸ μία κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίδα, ποὺ τὸ ἀπόστημά της εἶναι 7 m. Βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του.

§ 78. Ὄγκος πυραμίδας.


σχ. 151.

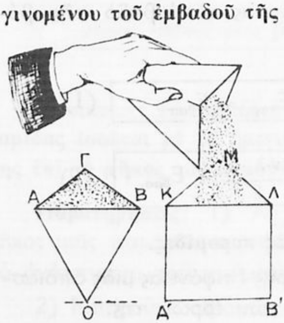
1. Δίνεται μιὰ κανονικὴ τετραγων. πυραμίδα μὲ μῆκος πλευρᾶς βάσης λ καὶ μῆκος ὕψους $v = \frac{\lambda}{2}$. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο της.

Κατασκευάζουμε 6 πυραμίδες ἴσες μὲ αὐτὴ ποὺ μᾶς δόθηκε καὶ τὶς τοποθετοῦμε ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχουν κοινὴ τὴν κορυφὴ καὶ ἀνὰ δύο κοινὴ παράπλευρη ἕδρα. Τότε σχηματίζεται ἕνας κύβος μὲ ἀκμὴ λ (σχ. 151).

Ἄρα ὁ ὄγκος καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ἴσες αὐτὲς πυραμίδες εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου.

Δηλαδή: ἔχουμε $V_{\text{καν. πυρ.}} = \frac{1}{6}\lambda^3 = \frac{1}{3}\lambda^2 \cdot \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{1}{3} E_\beta \cdot v}$

Ἑπομένως: Ὁ **ὄγκος τῆς κανονικῆς πυραμίδας ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**



σχ. 152.

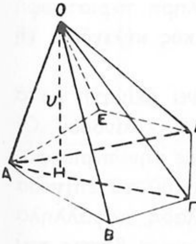
2. Ὁ τύπος, ποὺ βρήκαμε πιὸ πάνω, γιὰ τὸν ὄγκο τῆς κανονικῆς πυραμίδας ἰσχύει γιὰ ὁποιαδήποτε πυραμίδα, καθὼς θ' ἀποδείξουμε σὲ ἀνώτερη τάξη. Πρακτικὰ μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸν τύπο τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδας ὡς ἑξῆς.

Χρησιμοποιοῦμε δύο δοχεῖα· ἕνα σὲ σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδας ΟΑΒΓ μὲ ἀνοικτὴ τὴ βάση ΑΒΓ καὶ ἕνα ἄλλο πρισματικό, ποὺ ἔχει βάση ἴση μὲ τὴ βάση ΑΒΓ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας καὶ ὕψος ἴσο μὲ τῆς πυραμίδας.

Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν γεμίσουμε μὲ ψιλὴ ἄμμο (ἢ νερὸ) τὸ πρῶτο δοχεῖο καὶ ἀδειάσουμε τὸ περιεχόμενό του στὸ δεύτερο, θὰ χρειαστεῖ νὰ ἐπαναλάβουμε αὐτὴ τὴν ἐργασία τρεῖς φορές, ὥσπου νὰ γεμίσει τὸ πρισματικὸ δοχεῖο (σχ. 152)

Ἂν εἶναι V ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας καὶ V′ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, θὰ ἔχουμε:

$$3V = V' \Leftrightarrow V = \frac{V'}{3} \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\cdot E_\beta \cdot \upsilon \; \left(V' = E_\beta \cdot \upsilon \right)$$



σχ. 153.

3. Γιὰ νὰ μετρήσουμε μιὰ ὁποιαδήποτε πυραμίδα ΟΑΒΓΔΕ (σχ. 153), ποὺ ἔχει ἐμβαδὸ βάσης E_β καὶ ὕψος υ, τὴ διαιροῦμε στὶς τριγωνικὲς πυραμίδες ΟΑΒΓ, ΟΑΓΔ, ΟΑΔΕ, οἱ ὁποῖες ἔχουν τὸ ἴδιο ὕψος, ὄγκους V_1, V_2, V_3 ἀντιστοίχως καὶ ἐμβαδὰ βάσεων E_1, E_2, E_3, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα Ε. Ἑπομένως:

$$V_{ΟΑΒΓΔΕ} = V_1 + V_2 + V_3 \Leftrightarrow V_{ΟΑΒΓΔΕ} = \frac{1}{3}\,E_1\cdot\upsilon + \frac{1}{3}\,E_2\cdot\upsilon + \frac{1}{3}\,E_3\cdot\upsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{ΟΑΒΓΔΕ} = \frac{1}{3}\,(E_1+E_2+E_3)\cdot\upsilon \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\,E_\beta\cdot\upsilon$$

Ἄρα καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι: **Ὁ ὄγκος μιᾶς ὁποιασδήποτε πυραμίδας ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

Ἀσκήσεις

230) Μιὰ κανονικὴ πυραμίδα ἔχει γιὰ βάση ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ μήκους 8 cm καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 6 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο της.

231) Μιὰ καν. ἑξαγωνικὴ πυραμίδα ἔχει παράπλευρη ἀκμὴ μήκους 10 cm καὶ ὕψος 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο της.

232) Δίνεται μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα ΟΑΒΓ μὲ ἀκμὲς ΟΑ = 3α, ΟΒ = 4α καὶ ΟΓ = = 2α, οἱ ὁποῖες εἶναι ἀνὰ δύο κάθετες. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας ΟΑΒΓ, ποὺ ἔχει κορυφὴ Ο καὶ βάση ΑΒΓ (θὰ τὸ πετύχετε αὐτό, ἂν βρεῖτε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας ΑΟΒΓ, ποὺ ἔχει κορυφὴ Α καὶ βάση ΟΒΓ). Ἐφαρμογή: α = 5 cm.

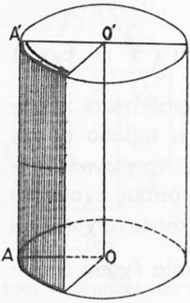
233) Δίνεται μιὰ πυραμίδα ΟΑΒΓΔ μὲ κορυφὴ Ο καὶ βάση ἕνα ρόμβο ΑΒΓΔ, ποὺ ἡ πλευρά του ἔχει μῆκος 8 cm καὶ ἡ διαγώνιός του ΑΓ ἔχει ἐπίσης μῆκος 8 cm. Τὸ ἴχνος Η τοῦ ὕψους ΟΗ τῆς πυραμίδας εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ρόμβου. Τὸ μῆκος τῆς παράπλευρης ἀκμῆς ΟΒ εἶναι 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας ΟΑΒΓΔ.

234) Δίνεται ἕνα κανονικὸ τετράεδρο μὲ ἀκμὴ α καὶ ζητεῖται ὁ ὄγκος του. Ἐφαρμογή: α = 6 cm.

235) Νὰ συγκρίνετε τὰ ὕψη ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου (χρησιμοποιῆστε τὸν ὄγκο του).

Δ. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ (ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ) ΜΕΤΡΗΣΗ ΟΡΘΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

§ 79. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.



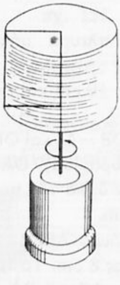
σχ. 154.

Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΟΟ΄Α΄ (σχ. 154) ποὺ περιστρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν ΟΟ΄, ἡ ὁποία παραμένει ἀκίνητη. Μὲ μιὰ ὁλόκληρη περιστροφή του παράγεται ἕνας **ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος (ἢ κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς).**

Ἡ εὐθεία ΟΟ΄, ποὺ παραμένει ἀκίνητη κατὰ τὴν περιστροφή, λέγεται **ἄξονας** τοῦ κυλίνδρου. Οἱ πλευρὲς ΟΑ καὶ Ο΄Α΄ παράγουν μὲ τὴν περιστροφὴ δύο ἴσους κυκλικοὺς δίσκους, ποὺ τὰ ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα στὴν ΟΟ΄, δηλαδὴ παράλληλα μεταξύ τους. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης λέγεται **ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου**. Ἡ πλευρὰ ΑΑ΄ παράγει μὲ τὴν περιστροφὴ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ΑΑ΄ λέγεται **γενέτειρα** τοῦ κυλίνδρου. Τὸ κοινὸ μῆκος τῶν γενετειρῶν τοῦ κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἀπόσταση ΟΟ΄ τῶν κέντρων τῶν βάσεών του καὶ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος (ἢ ἁπλὰ κύλινδρος) εἶναι ἕνα στερεὸ ἐκ περιστροφῆς, τὸ ὁποῖο παράγεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο, ποὺ περιστρέφεται γύρω ἀπὸ μιὰ πλευρά του, ἡ ὁποία παραμένει ἀκίνητη.


σχ. 155.

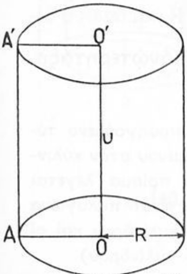
Σημείωση: Μποροῦμε μὲ κάποιο μηχανισμὸ νὰ περιστρέψουμε γρήγορα ἕνα ὀρθογώνιο (ἀπὸ χαρτόνι ἢ ἄλλο ὑλικό) γύρω ἀπὸ μιὰ διάστασή του καὶ λόγω τοῦ ὀπτικοῦ μεταισθήματος νὰ ἔχουμε τὴν εἰκόνα ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου στὸ χῶρο τῶν τριῶν διαστάσεων. Ἡ εἰκόνα αὐτὴ δικαιολογεῖ καὶ κινητικῶς τὸν τρόπο παραγωγῆς τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου (ἢ ἐκ περιστροφῆς) (σχ. 155). Στὸ ἑξῆς ὅταν λέμε «κύλινδρος», θὰ ἐννοοῦμε «ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος».

§ 80. Ἐμβαδὸ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.

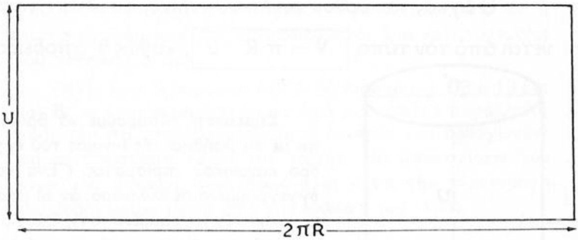
α) Ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου:

Δίνεται ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ ὕψος $υ$. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

Ἂν κόψουμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου κατὰ μῆκος μιᾶς γενέτειράς του (σχ. 156) καὶ τὴν ἀναπτύξουμε σ' ἕνα ἐπίπεδο, θὰ πάρουμε ἕνα ὀρθογώνιο, ποὺ ἔχει διαστάσεις τὰ μήκη τοῦ κύκλου τῆς βάσης καὶ τοῦ ὕψους (σχ. 157).



σχ. 156.



σχ. 157.

Ἑπομένως: **Τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τοῦ κύκλου τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

Δηλαδὴ $\boxed{E_{\text{κυρτ. ἐπιφ. κυλ.}} = 2\pi R \cdot \upsilon}$

β) Ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ προηγούμενου κυλίνδρου, προσθέτουμε τὸ ἐμβαδὸ τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου στὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

Ἔτσι ἔχουμε $\boxed{E_{\text{ὁλικ.}} = 2\pi R \cdot \upsilon + 2\pi R^2}$

ἢ ἀλλιῶς $E_{\text{ὁλικ.}} = 2\pi R \cdot (\upsilon + R)$

Ἀσκήσεις

236) Δίνεται ἕνας κύλινδρος μὲ ἀκτίνα βάσης 5 cm καὶ ὕψος $\upsilon = 25$ cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ α) τῆς κυρτῆς καὶ β) τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου.

237) Μία δεξαμενὴ πετρελαίου σὲ σχῆμα ὀρθοῦ κυλίνδρου ἔχει διάμετρο (ἐσωτερική) βάσης 10 m καὶ ὕψος 20m. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς (ἐσωτερικῆς) ἐπιφάνειας τῆς δεξαμενῆς αὐτῆς.

238) Δίνεται ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας εἶναι 471 cm² καὶ ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης 5 cm. Βρεῖτε τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

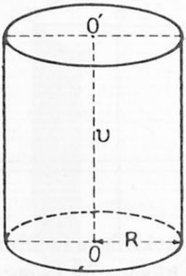
239) Ἕνα κυλινδρικὸ μολύβι ἄξυστο ἔχει διάμετρο 6 mm καὶ μῆκος 18 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.

240) Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις α καὶ β. Τὸ περιστρέφουμε πρῶτα γύρω ἀπὸ τὴ μιὰ πλευρὰ καὶ ἔπειτα γύρω ἀπὸ τὴν ἄλλη (τὴ διαδοχικὴ μὲ τὴν πρώτη πλευρὰ) καὶ παράγονται ἔτσι δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσετε γιὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο αὐτῶν κυλίνδρων;

§ 81. Ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.

Δίνεται ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ ὕψος υ. (σχ. 158). Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ ὕψος υ δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $\boxed{V = \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon}$, καθὼς θ' ἀποδείξουμε σὲ ἀνώτερη τάξη.

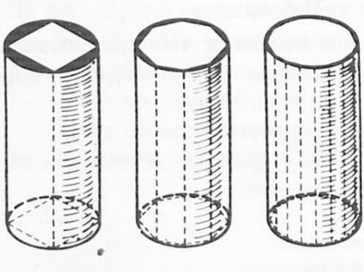


σχ. 158.

Σημείωση. Μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸν προηγούμενο τύπο μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἔννοιας τοῦ ἐγγεγραμμένου στὸν κύλινδρο κανονικοῦ πρίσματος. (Ἕνα κανονικὸ πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένο σὲ κύλινδρο, ἂν οἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα κανονικὰ ἐγγεγραμμένα στὶς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ οἱ παράπλευρες ἀκμές του εἶναι γενέτειρες τοῦ κυλίνδρου).

Ἕνα ἐγγεγραμμένο σὲ κύλινδρο κανονικὸ πρίσμα, ποὺ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσης του συνεχῶς διπλασιάζεται, πλησιάζει λίγο λίγο τὸ σχῆμα τοῦ κυλίνδρου.

Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ δείξουμε μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς ἀνοικτοῦ ἀπὸ πάνω κυλίνδρου ἀπὸ χαρτόνι καὶ μερικῶν κανονικῶν πρισμάτων, ποὺ ἔχουν ὕψος ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ βάσεις σχήματος τετραγώνου, καν. ὀκταγώνου, καν. δεκαεξαγώνου κλπ. (πολυγώνων, τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ ἐγγραφοῦν στὴ βάση τοῦ κυλίνδρου).



σχ. 159.

Ἂν βάλουμε ἕνα ἀπ' αὐτὰ μέσα στὸν κύλινδρο, οἱ βάσεις του θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένες στὶς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ οἱ παράπλευρες ἀκμές του εἶναι γενέτειρες τοῦ κυλίνδρου.

Βάνουμε μὲ τὴ σειρὰ μέσα στὸν κύλινδρο τὰ καν. πρίσματα μὲ βάση τετράγωνο, καν. 8/γωνο, καν. 16/γωνο κλπ. καὶ παρατηροῦμε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τοῦ κυλίνδρου καὶ τῶν πρισμάτων συνεχῶς ἐλαττώνεται, ὅσο αὐξάνει τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσης τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, καὶ μπορεῖ νὰ γίνει ὅσο θέλουμε μικρὴ (σχ. 159).

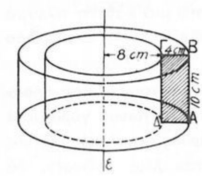
Γι' αὐτὸ τὸ λόγο λέμε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος προσεγγίζει (ἔχει ὅριο) τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι $V = E_\beta . \upsilon$. Ἑπομένως καὶ τοῦ κυλίνδρου ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $V = E_\beta . \upsilon = \pi R^2 \cdot \upsilon$.

(Μὲ περισσότερες λεπτομέρειες θὰ ἐξετάσουμε τὸ θέμα αὐτὸ σὲ ἀνώτερη τάξη).

Ἀσκήσεις

241) Ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ἔχει ἀκτίνα βάσης R = 5 cm καὶ ὕψος 15 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

242) Ἕνας κύλινδρος, ποὺ ὁ ὄγκος του εἶναι 45π cm³, ἔχει ὕψος 5 cm. Νὰ βρεῖτε τὴν ἀκτίνα τῆς βάσης του.



σχ. 160.

243) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 94,20 cm^2. Τὸ ὕψος του εἶναι 15 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο του.

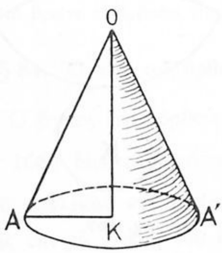
244) Ἕνα πηγάδι κυλινδρικοῦ σχήματος ἔχει βάθος 6 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο τῆς λιθοδομῆς του, ἂν ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ πηγαδιοῦ εἶναι 3 m καὶ τὸ πάχος τοῦ τοίχου 2,5 dm.

245) Ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις ΑΒ = 10 cm καὶ ΒΓ = 4 cm στρέφεται γύρω ἀπὸ μιὰ εὐθεία ε παράλληλη πρὸς τὴν ΑΒ, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐπίπεδο τοῦ ὀρθογωνίου καὶ σὲ ἀπόσταση 12 cm ἀπ' αὐτήν. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγεται κατὰ τὴν περιστροφὴ τοῦ ὀρθογωνίου γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία ε (σχ. 160).

Ε. ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ (ΚΩΝΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ) ΜΕΤΡΗΣΗ ΟΡΘΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΩΝΟΥ

§ 82. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος.

Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΚΟ (γων. Κ = 1ὀρθ.). Τὸ περιστρέφουμε γύρω ἀπὸ τὴν ΟΚ. Μὲ μιὰ ὁλόκληρη περιστροφὴ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ γύρω ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρά του παράγεται **ἕνας** ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος. Ἡ ΚΟ παραμένει ἀκίνητη κατὰ τὴν περιστροφὴ καὶ ὁ φορέας της λέγεται **ἄξονας** τοῦ κώνου (σχ. 161).



Σχ. 161.

Ἡ πλευρὰ ΟΑ (ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΚΟ) μὲ τὴν περιστροφὴ παράγει τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια **τοῦ κώνου** καὶ ὀνομάζεται *γενέτειρα* ἢ **πλευρὰ** τοῦ κώνου.

Ἡ πλευρὰ ΚΑ παράγει μὲ τὴν περιστροφὴ ἕναν κυκλικὸ δίσκο, ποὺ τὸ ἐπίπεδό του εἶναι κάθετο στὸν ἄξονα τοῦ κώνου στὸ σημεῖο Κ. Ὁ δίσκος αὐτὸς λέγεται **βάση** τοῦ κώνου. Ἡ ἀκτίνα R τῆς βάσης εἶναι ἡ **ἀκτίνα** τοῦ κώνου καὶ τὸ σημεῖο Ο εἶναι ἡ **κορυφὴ** τοῦ κώνου.

Ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Ο τοῦ κώνου ἀπὸ τὴ βάση, δηλαδὴ τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΚ τοῦ ἄξονά του λέγεται **ὕψος** τοῦ κώνου. Ἡ γωνία ΑΟΚ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΟΚ εἶναι τὸ μισὸ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. Ἂν τὸ τρίγωνο ΑΟΑ' εἶναι ἰσόπλευρο, δηλαδὴ ἡ διάμετρος τῆς βάσης εἶναι ἴση μὲ τὴ γενέτειρα τοῦ κώνου, τότε ὁ κῶνος λέγεται **ἰσόπλευρος**.

Σημείωση. Μποροῦμε νὰ περιστρέψουμε γρήγορα μὲ κάποιο μηχανισμὸ ἕνα ὀρθογ.

Σχ. 162.

τρίγωνο (ἀπὸ χαρτόνι ἢ κάτι ἄλλο) γύρω ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρά του καὶ νὰ ἔχουμε τὴν εἰκόνα ἑνὸς κώνου ἐκ περιστροφῆς στὸ χῶρο τῶν τριῶν διαστάσεων (σχ. 162).

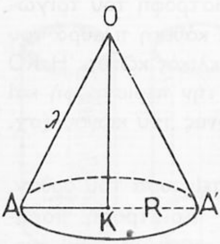
Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι: **Τὸ στερεό, ποὺ παράγεται μὲ μιὰ ὁλόκληρη περιστροφὴ ἑνὸς ὀρθογ. τριγώνου γύρω ἀπὸ μιὰ ἀκίνητη κάθετη πλευρά του, λέγεται ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος (ἢ κῶνος ἐκ περιστροφῆς).** Στὰ ἑπόμενα ὅταν λέμε «κῶνος», θὰ ἐννοοῦμε «ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος».

§ 83. Ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.

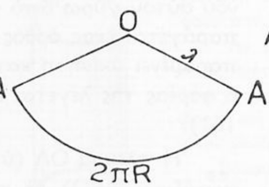
α) Ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου:

Δίνεται ἕνας κῶνος μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ πλευρὰ λ. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

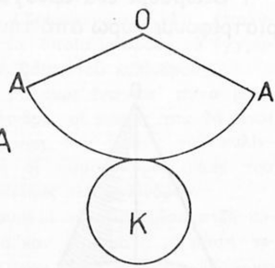
Κόβουμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου κατὰ μῆκος μιᾶς γενέτειράς του καὶ τὴν ἀναπτύσσουμε σ' ἕνα ἐπίπεδο (σχ. 163, 164).



σχ. 163.



σχ. 164.



σχ. 165.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου εἶναι ἕνας κυκλικὸς τομέας, ποὺ τὸ ἐμβαδό του εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου καὶ τὸ τόξο εἶναι ἴσο μὲ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσης τοῦ κώνου, δηλαδὴ $\tau = 2\pi R$.

Ξέρουμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέα δίνεται καὶ ἀπὸ τὸν τύπο:

$$\varepsilon = \tau \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\, 2\pi R\lambda = \pi R\lambda.$$

Ἄρα $\boxed{E_{\text{κυρτ. ἐπιφ. κών. ἐκ περ.}} = \pi R\lambda}$ δηλαδή:

Τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τοῦ ἡμικυκλίου τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς γενέτειρας τοῦ κώνου.

β) Ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου:
Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, προσθέτουμε στὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης του (σχ. 165).

Δηλαδὴ $\boxed{E_{\text{ὁλικ.}} = \pi R\lambda + \pi R^2}$ ἢ ἀλλιῶς $\boxed{E_{\text{ὁλικ.}} = \pi R\cdot(R+\lambda)}$

Ἀσκήσεις

246) Δίνεται ἕνας κῶνος μὲ ἀκτίνα βάσης 8 cm καὶ πλευρὰ 10 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του.

247) Ἕνας κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει πλευρὰ μήκους 15 cm καὶ ὕψος 12 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

248) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κώνου, ποὺ ἔχει ὕψος 16 cm καὶ πλευρὰ μήκους 20 cm.

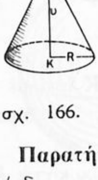
249) Τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κώνου εἶναι 47,10 dm^2 καὶ ἡ πλευρά του 5 dm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.

250) Ἕνας ἰσόπλευρος ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχει ὕψος 10 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνας τῆς βάσης, τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς καὶ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου αὐτοῦ.

251) Ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 20 cm περιστρέφεται γύρω ἀπὸ μιὰ διαγώνιό του. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ ποὺ παράγεται.

§ 84. Ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ ὕψος υ (σχ. 166) δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon}$, δηλαδὴ **ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.**



σχ. 166.

Σὲ ἀνώτερη τάξη θ' ἀποδείξουμε αὐτὴ τὴν πρόταση. Μποροῦμε ὅμως νὰ βροῦμε τὸν τύπο αὐτό μὲ συλλογισμοὺς ἀνάλογους πρὸς ἐκείνους τῆς § 81.
Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ θὰ χρησιμοποιήσουμε κανονικὲς πυραμίδες ἐγγεγραμμένες στὸν κῶνο, ποὺ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσης των συνεχῶς διπλασιάζεται.

Παρατήρηση: Ἀπὸ τοὺς τύπους τῶν ὄγκων τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου, ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος, παρατηροῦμε ὅτι **ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος μὲ τὸν κῶνο.**

Αὐτὸ τὸ διαπιστώνουμε, ἂν χρησιμοποιήσουμε ἕνα κωνικὸ καὶ ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο μὲ ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη καὶ ἐργαστοῦμε ὅπως στὴν § 78.

Ἀσκήσεις

252) Ἕνας κῶνος ἔχει ἀκτίνα βάσης 15 cm καὶ ὕψος 40 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο του.

253) Ἕνας κῶνος, ποὺ τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του εἶναι 47,10 cm^2, ἔχει πλευρὰ μήκους 5 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

254) Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, ποὺ ἔχει ὕψος $υ = 9$ cm καὶ μῆκος γενέτειρας $λ = 15$ cm.

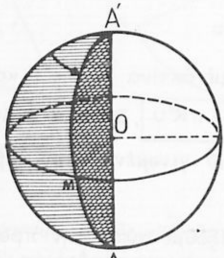
255) Τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσης ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι 18,84 dm καὶ ἡ γενέτειρά του 5 dm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου αὐτοῦ.

256) Δίνεται ἕνας ἰσόπλευρος κῶνος, ποὺ ἔχει ὕψος 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτίνα τῆς βάσης καὶ τὸν ὄγκο του.

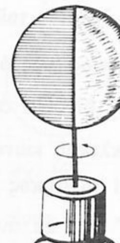
ΣΤ. ΣΦΑΙΡΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

§ 85. Σφαίρα.

Δίνεται ἕνα ἡμικύκλιο ΑΜΑ′. Ἂν τὸ περιστρέψουμε (μιὰ ὁλόκληρη περιστροφὴ) γύρω ἀπὸ τὴν ἀκίνητη διάμετρό του ΑΑ′, παράγεται ἕνα στερεό, ποὺ λέγεται **σφαίρα**.



σχ. 167.



σχ. 168.

Κάθε σημεῖο τῆς σφαίρας ἀπέχει ἀπὸ τὸ Ο ἀπόσταση R ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ ἡμικυκλίου. Τὸ Ο λέγεται κέντρο τῆς σφαίρας. Ἡ σφαίρα συμβολίζεται: σφαίρα (Ο, R).

Κάθε ἐπίπεδο, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ Ο, τέμνει τὴ σφαίρα κατὰ ἕναν κύκλο, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα R καὶ λέγεται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας.

Κάθε ἐπίπεδο, ποὺ τέμνει τὴ σφαίρα, ἀλλὰ δὲν περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο της, τὴν τέμνει κατὰ ἕναν κύκλο, ὁ ὁποῖος λέγεται **μικρὸς κύκλος** τῆς σφαίρας.

Σημ. Μὲ ἕναν μηχανισμὸ περιστρέφουμε γρήγορα ἕνα ἡμικύκλιο (ἀπὸ χαρτόνι ἢ ἄλλο ὑλικὸ) καὶ ἔχουμε τὴν εἰκόνα μιᾶς σφαίρας στὸ χῶρο τῶν τριῶν διαστάσεων (σχ. 168).

§ 86. Ἐμβαδὸ σφαίρας.

Τὸ ἐμβαδὸ τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτίνα ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας (μέγιστος κύκλος).

Δηλαδή: $\boxed{E_{\text{σφαιρ.}} = 4\pi R^2}$

Ἀσκήσεις

257) Μία σφαίρα ἔχει ἀκτίνα 8 cm. Βρεῖτε τὸ ἐμβαδό της.

258) Τὸ μῆκος ἑνὸς μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 50,24 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς σφαίρας.

259) Τὸ ἐμβαδὸ μιᾶς σφαίρας εἶναι 50,24 cm². Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτίνα της, καθὼς καὶ τὴν ἀκτίνα μιᾶς ἄλλης σφαίρας, ποὺ τὸ ἐμβαδό της εἶναι τετραπλάσιο ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ τῆς πρώτης.

260) Νὰ βρεῖτε τὸ λόγο τῶν ἐμβαδῶν δύο σφαιρῶν μὲ ἀκτίνες 3 cm καὶ 2 cm.

261) Κάνετε τὸ ἴδιο, ὅταν οἱ ἀκτίνες εἶναι R_1, R_2.

§ 87. Ὄγκος σφαίρας.

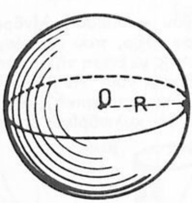
Ὁ ὄγκος V μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα R δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$ (1) καθὼς θ' ἀποδείξουμε σ' ἀνώτερη τάξη.

Δηλαδή: **Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ κύβου τοῦ μήκους τῆς ἀκτίνας της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ $\frac{4}{3}$ π.**

Ὁ τύπος (1) μπορεῖ νὰ γραφεῖ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\pi D^3,\ \text{ὅπου } D = 2R.$$

Σημ. Ὁ μεγάλος Ἕλληνας μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης πέτυχε πρῶτος νὰ μετρήσει τὸ ἐμβαδὸ καὶ τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας.



σχ. 169.

Ἐφαρμογές.

1. Δύο σφαῖρες ἔχουν ἀκτίνες 2 καὶ 3 cm. Νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τους.

2. Δύο σφαῖρες ἔχουν ἀκτίνες R_1, R_2. Βρεῖτε τὸ λόγο τῶν ὄγκων τους.

$$\left(\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)$$

3. Ἂν R καὶ 2R εἶναι οἱ ἀκτίνες δύο σφαιρῶν, ποιὰ εἶναι ἡ σχέση τῶν ὄγκων τους;

Ἀσκήσεις

262) Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα 5 m.

263) Βρεῖτε τὴν ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας, ποὺ ἔχει ὄγκο 113,04 cm^3.

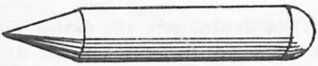
264) Τὸ ἐμβαδὸ μιᾶς σφαίρας εἶναι 314 cm^2. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο της.

265) Τὸ ἐμβαδὸ μιᾶς σφαίρας εἶναι 113,04 cm^2. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο μιᾶς ἄλλης σφαίρας, ποὺ ἔχει ἀκτίνα τριπλάσια ἀπὸ τὴν ἀκτίνα τῆς πρώτης σφαίρας.

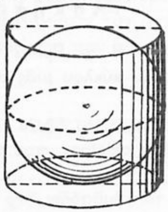
266) Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 153,86 cm^2. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας αὐτῆς.

Ἀσκήσεις γιὰ ἐπανάληψη τοῦ κεφ. V.

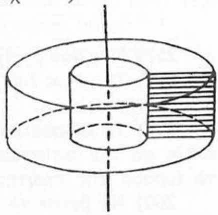
267) Ἕνα σῶμα σὲ σχῆμα κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ ἀκτίνα βάσης 1,5 dm καὶ μῆκος 4 dm καταλήγει στὸ ἕνα ἄκρο του σὲ κῶνο μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα καὶ ὕψος 2 dm· στὸ ἄλλο ἄκρο του καταλήγει σὲ ἡμισφαίριο μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα (ἐξωτερικῶς). Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας (ἐξωτερικῆς) τοῦ στερεοῦ καὶ τὸν ὄγκο του (σχ. 170).



σχ. 170.



σχ. 171.



σχ. 172.

268) Μία σφαίρα εἶναι ἐγγεγραμμένη σὲ κύλινδρο ἐκ περιστροφῆς (σχ. 171), δηλαδὴ ἡ σφαίρα περιέχεται ἀκριβῶς στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐφάπτεται στὶς δύο βάσεις καὶ στὴν κυρτὴ ἐπιφάνειά του κατὰ μῆκος ἑνὸς μεγίστου κύκλου. Ἂν ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας εἶναι 5 cm, νὰ βρεῖτε α) τὴν ἀκτίνα τῆς βάσης τοῦ κυλίνδρου, β) τὸ ὕψος του, γ) τὸ ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, δ) τὸ ἐμβαδὸ τῆς σφαίρας, ε) τὸ λόγο τῶν δύο αὐτῶν ἐμβαδῶν καὶ στ) τὸ λόγο τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν αὐτῶν.

269) Στὸ παραπάνω σχῆμα (σχ. 172) ἔχουμε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 5 cm, ποὺ κάνει μιὰ ὁλόκληρη περιστροφὴ γύρω ἀπὸ μιὰ εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου του, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλη πρὸς μία πλευρά του καὶ βρίσκεται σ' ἀπόσταση 3 cm ἀπ' αὐτή. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴ τοῦ τετραγώνου γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεία ε. (σχ. 172).

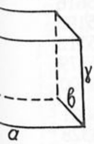
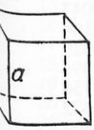
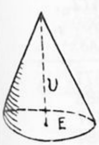
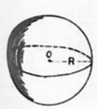
270) Ἕνας ἰσόπλευρος ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος εἶναι ἐγγεγραμμένος σὲ μιὰ σφαίρα μὲ ἀκτίνα 6 cm (δηλ. ἡ σφαίρα περνᾶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ τοῦ κώνου καὶ ὁ κύκλος τῆς βάσης του εἶναι ἕνας μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας). Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου (σχ. 173).

271) Ἕνα δοχεῖο ἀνοικτὸ πρὸς τὰ πάνω ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ ἀκτίνα βάσης 6 m καὶ ὕψος 8 m καὶ στηρίζεται πάνω σ' ἕναν κύβο, ποὺ ἔχει ἀκμὴ 18 m. Τὸ ἐσωτερικὸ τοῦ δοχείου ἔχει σχῆμα κώνου ἐκ περιστροφῆς μὲ βάση τὴ μία ἀπὸ τὶς βάσεις τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ καὶ κορυφὴ τὸ κέντρο τῆς ἄλλης βάσης του. Ἂν βάψουμε μὲ λαδομπογιὰ ὁλόκληρη τὴν ἐπιφάνεια τοῦ δοχείου (ἐξωτερικὴ κι ἐσωτερικὴ) καθὼς καὶ τὴν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τῆς κυβικῆς βάσης, ὅπου στηρίζεται τὸ κυλινδρικὸ δοχεῖο πληρώνοντας 85 δρχ. τὸ m^2, πόσες δραχμὲς θὰ ξοδεύσουμε;

σχ. 173.

σχ. 174.

Πίνακας τύπων ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων διαφόρων στερεῶν

α στερεοῦ	Ὄνομα Στερεοῦ	Ἐμβαδὸ γιὰ ὑπολογισμὸ	Τύπος ποὺ δίνει τὸ ἐμβαδὸ	Ὄγκος γιὰ ὑπολογισμὸ	Τύπος ποὺ δίνει τὸν ὄγκο
	Πρίσμα	Ἐμβαδὸ παράπλ. ἐπιφάνειας Ἐμβαδὸ ὁλικῆς ἐπιφάνειας	Ὀρθοῦ πρίσματος $E_{\pi\alpha\rho.\ \grave{\epsilon}\pi.} =$ $=$ περ.βασ $\cdot \times \upsilon$ $E_{\acute{o}\lambda.} =$ περ.βασ. $\times \upsilon + 2E_\beta$	Ὄγκος Πρίσματος	$V = E_\beta \cdot \upsilon$
	Ὀρθ. παρ/δο	Ἐμβαδὸ ὁλικῆς ἐπιφάνειας	$E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$	Ὄγκος ὀρθ. παρ/δου	α) $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ καὶ β) $V = E_\beta \cdot \upsilon$
	Κύβος	Ἐμβαδὸ ὁλικῆς ἐπιφάνειας	$E = 6\alpha^2$	Ὄγκος κύβου	$V = \alpha^3$
	Πυραμίδα (κανονική)	Ἐμβαδὸ παράπλ. ἐπιφάνειας Ἐμβαδὸ ὁλικῆς	$E = \dfrac{\text{περ.βάσ.} \times \text{ἀπόστ.}}{2}$ $E = \dfrac{\text{περ.βασ.} \times \text{ἀποστ}}{2} + E_\beta$	Ὄγκος πυραμίδας	$V = \dfrac{1}{3} E_\beta \cdot \upsilon$
	Πυραμίδα (ὁποιαδήποτε	Ἐμβαδὸ	$E =$ Ἄθροισ. $E_{\grave{\epsilon}\delta\rho\tilde{\omega}\nu}$	Ὄγκος	$V = \dfrac{1}{3} E_\beta \cdot \upsilon$
	Κύλινδρος (ὀρθὸς κυκλ.)	Ἐμβαδὸ κυρτ. ἐπιφάνειας Ἐμβαδὸ ὁλικῆς ἐπιφάνειας	$E = 2\pi R \upsilon$ $E = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$ ἢ $E = 2\pi R(\upsilon + R)$	Ὄγκος κυλίνδρου	$V = \pi R^2 \cdot \upsilon$
	Κῶνος (ὀρθὸς κυκλ.)	Ἐμβαδὸ κυρτ. ἐπιφάνειας Ἐμβαδὸ ὁλικ. ἐπιφάνειας	$E = \pi R \lambda$ $E = \pi R\lambda + \pi R^2$ ἢ $E = \pi R(R + \lambda)$	Ὄγκος κώνου	$V = \dfrac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon$
	Σφαίρα	Ἐμβαδὸ	$E = 4\pi R^2$	Ὄγκος	$V = \dfrac{4}{3} \pi \cdot R^3$.

Πίνακας τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ὥς 100

α	α^2	α^3	α	α^2	α^3
1	1	1	51	2601	132651
2	4	8	52	2704	140608
3	9	27	53	2809	148877
4	16	64	54	2916	157464
5	25	124	55	3025	166375
6	36	216	56	3136	175616
7	49	343	57	3249	185193
8	64	512	58	3364	195112
9	81	729	59	3481	205379
10	100	1000	60	3600	216000
11	121	1331	61	3721	226981
12	144	1728	62	3844	238328
13	169	2197	63	3969	250047
14	196	2744	64	4096	262144
15	225	3375	65	4225	274625
16	256	4096	66	4356	287496
17	289	4913	67	4489	300756
18	324	5832	68	4624	314432
19	361	6859	69	4761	328509
20	400	8000	70	4900	343000
21	441	9261	71	5041	357911
22	484	10648	72	5184	373248
23	529	12167	73	5329	389017
24	576	13824	74	5476	405224
25	625	15625	75	5625	421875
26	676	17576	76	5776	438976
27	729	19683	77	5929	456533
28	784	21952	78	6084	474552
29	841	24389	79	6241	493039
30	900	27000	80	6400	512000
31	961	29791	81	6561	531441
32	1024	32768	82	6724	551368
33	1089	35937	83	6889	571787
34	1156	39304	84	7056	592704
35	1225	42875	85	7224	614125
36	1296	46656	86	7396	636056
37	1369	50653	87	7569	658503
38	1444	54872	88	7744	681472
39	1521	59139	89	7921	704969
40	1600	64000	90	8100	729000
41	1681	68921	91	8281	753571
42	1764	74088	92	8464	778688
43	1849	79507	93	8649	804357
44	1936	85184	94	8836	830584
45	2025	91125	95	9025	857375
46	2116	97336	96	9216	884735
47	2209	103823	97	9409	912673
48	2304	110592	98	9604	941192
49	2401	117649	99	9801	970299
50	2500	125000	100	10000	1000000

Πίνακας τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ὥς 100

Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$
1	1,000	26	5,099	51	7,141	76	8,718
2	1,414	27	5,196	52	7,211	77	8,775
3	1,732	28	5,292	53	7,280	78	8,832
4	2,000	29	5,385	54	7,349	79	8,888
5	2,236	30	5,477	55	7,416	80	8,944
6	2,450	31	5,568	56	7,483	81	9,000
7	2,646	32	5,657	57	7,550	82	9,055
8	2,828	33	5,745	58	7,616	83	9,110
9	3,000	34	5,831	59	7,681	84	9,165
10	3,162	35	5,916	60	7,746	85	9,220
11	3,317	36	6,000	61	7,810	86	9,274
12	3,464	37	6,083	62	7,874	87	9,327
13	3,606	38	6,164	63	7,937	88	9,381
14	3,741	39	6,245	64	8,000	89	9,434
15	3,873	40	6,325	65	8,062	90	9,487
16	4,000	41	6,403	66	8,124	91	9,539
17	4,123	42	6,481	67	8,185	92	9,591
18	4,243	43	6,557	68	8,246	93	9,644
19	4,359	44	6,633	69	8,307	94	9,695
20	4,472	45	6,708	70	8,367	95	9,747
21	4,583	46	6,782	71	8,426	96	9,798
22	4,690	47	6,856	72	8,485	97	9,849
23	4,796	48	6,928	73	8,544	98	9,900
24	4,899	49	7,000	74	8,602	99	9,950
25	5,000	50	7,071	75	8,660	100	10,000

Σημείωση: Οἱ τετραγωνικὲς ρίζες τῶν μὴ τελείων τετραγώνων εἶναι κατὰ προσέγγιση 0,001.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ – ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι — Α. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

Δ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV – Α. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Β. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ – ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V – ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Ζ΄, 1976 (VIII) - ΑΝΤΙΤΥΠΑ 150.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2732/6-5-1976

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΔΕΛΕΡΜΑΣ & ΣΙΑ Ο. Ε.

ΟΕ
ΔΒ