ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β/Γ = 152

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ. ΓΡΑΦΑΚΟΥ - Κ. ΔΙΑΚΑΚΗ - Σ. ΜΑΝΤΖΑΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1970

Δ 1 MMK

Γραφάκοι (Γ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

Δ Ζ μπ

Γραφάκος (Γ)

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

Γ. ΓΡΑΦΑΚΟΥ - Κ. ΔΙΑΚΑΚΗ - Σ. ΜΑΝΤΖΑΡΑ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1970

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΠΕΡΙ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

(Ἐπαναλήψεις καὶ συμπληρώσεις)

§ **1.** ***Φέρατε εἰς τὸν νοῦν σας τὰ πρόσωπα τῆς οἰκογενείας σας, καὶ θεωρήσατέ τα ὡς ἓν ὅλον (μίαν ὁμάδα, μίαν συλλογὴν προσώπων). Τί παρατηρεῖτε;***

Παρατηροῦμεν ὅτι μὲ ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα γνωρίζομεν καλῶς (τὰ πρόσωπα τῆς οἰκογενείας μας) καὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων δὲν κάμνομεν σύγχυσιν, ἐσχηματίσαμεν διὰ τῆς σκέψεώς μας ἓν νέον ἀντικείμενον.

Τὸ ἀντικείμενον αὐτὸ ὀνομάζομεν **σύνολον.** Τὸ σύνολον τῶν προσώπων τῆς οἰκογενείας μας. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀντικείμενα α, β, γ, δ καλῶς ὡρισμένα (τὰ ὁποῖα γνωρίζομεν καλῶς) καὶ διακεκριμένα (τὰ ὁποῖα δὲν συγχέομεν) ὡς ἓν ἀντικείμενον. Τὸ σύνολον τῶν α, β, γ, δ.

Σύνολον εἶναι τὸ ἀντικείμενον τὸ ὁποῖον σχηματίζομεν (διὰ τῆς σκέψεως ἢ τῆς φαντασίας μας) ἐὰν θεωρήσωμεν καλῶς ὡρισμένα καὶ διακεκριμένα ἀντικείμενα, ὡς ἓν ἀντικείμενον.

Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ λέγονται, **στοιχεῖα τοῦ συνόλου,** καὶ συμβολίζονται μὲ γράμματα πεζὰ τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου: α, β, γ, δ, ... Τὸ σύνολον τῶν ἀντικειμένων α, β, γ, δ, συμβολίζεται διὰ κεφαλαίου γράμματος: Α ἢ Β ἢ....

Λέγομεν ὅτι, τὰ **στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Α ἀνήκουν εἰς αὐτό,** καὶ συμβολίζομεν $α \in Α$, $β \in Α$ κ.ο.κ. ἢ ὅτι **ἐκ τοῦ συνόλου Α λαμβάνονται τὰ στοιχεῖα του.** Συμβολικῶς $Α \ni α$ ἢ $Α \ni β$ (ἐκ τοῦ Α λαμβάνεται τὸ α κ.λ.π.). Ἐὰν τὸ ἀντικείμενον α δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Α, γράφομεν $α \notin Α$.

§ **2.** Σύνολον καθορίζεται διὰ δηλώσεως τῶν στοιχείων του καὶ ἀναγραφῆς αὐτῶν μεταξὺ δύο ἀγκίστρων· π. χ. τὸ σύνολον τῶν α, β, γ, δ, γράφεται {α, β, γ, δ}. Αὐτὸν τὸν τρόπον παραστάσεως λέγομεν καθορισμὸν τοῦ συνόλου δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του.

Παράδειγμα. Νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 5, 6, 7, 8, 9.

Τὸ σύνολον αὐτὸ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: {5, 6, 7, 8, 9}.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ὁρίσωμεν τὸ σύνολον αὐτὸ ὡς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 4 καὶ μικρότεροι τοῦ 10 καὶ νὰ γράψωμεν $\{χ/χ$ φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $4<χ<10\}$. Τὸν τρόπον αὐτὸν λέγομεν καθορισμὸν τοῦ συνόλου διὰ περιγραφῆς.

Σύνολον καθορίζεται διὰ περιγραφῆς, ἐὰν περιγράψωμεν μίαν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τῶν στοιχείων του. Δηλαδὴ μίαν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖα του καὶ μόνον αὐτά.

Μίαν ἰδιότητα συμβολίζομεν διὰ τοῦ p( ) ἢ τοῦ q( ). Π.χ. q( ) σημαίνει: «φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 10». Διὰ τοὺς 11, 13, 17 οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὴν τὴν ἰδιότητα γράφομεν 11 :q(11)*, 13:q(13), 17:q(17). Διὰ τοὺς 6, 3, 2, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτὴν γράφομεν ὄχι 6:q(6), ὄχι 3:q(3), ὄχι 2:q(2). Δι' ἓν ἀντικείμενον χ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα q( ), γράφομεν χ:q(χ). Δηλαδὴ τὸ χ ἔχει τὴν ἰδιότητα q( ). Δι' ἓν ἀντικείμενον ψ, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα αὐτὴν γράφομεν ὄχι ψ:q(ψ) καὶ διαβάζομεν: τὸ ψ δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα q( ).

§ **3.** *Ὀνομάσατε Α τὸ σύνολον {3,4,5,6} καὶ Β τὸ {χ/χ φυσικὸς μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 7}· Τί παρατηρεῖτε ;*

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ Α ἀνήκει εἰς τὸ Β καὶ κάθε στοιχεῖον τοῦ Β ἀνήκει εἰς τὸ Α. Λέγομεν τώρα ὅτι τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἴσα καὶ συμβολίζομεν Α=Β ἢ ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου : Α≡Β. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὰ σύνολα Α καὶ Γ = {5, 3, 6, 4}. Ἑπομένως **ἡ τάξις (ἡ σειρὰ) μὲ τὴν ὁποίαν ἀναγράφονται τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου, οὐδεμίαν σημασίαν ἔχει διὰ τὸν καθορισμὸν αὐτοῦ.**

Δύο σύνολα εἶναι ἴσα, ὅταν κάθε στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἀνήκει εἰς τὸ ἄλλο καὶ ἀντιστρόφως. Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, ὅτι: Α=Α, Α=Β ⟹ Β=Α καὶ Α=Β καὶ Β=Γ ⟹ Α=Γ.

Ἡ ἰσότης τῶν συνόλων εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

§ **4.** Ἐὰν προσέξωμεν μόνον τὴν ἰδιότητα : κάθε στοιχεῖον τοῦ Α ἀνήκει εἰς τὸ Β, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ **Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β** ἢ ὅτι ἐγκλείεται (ἢ περιέχεται) εἰς τὸ Β καὶ θὰ γράφωμεν: Α⊆Β. (εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, § 3, εἶναι καὶ Β⊆Α). Ἑπομένως Α⊆Β καὶ Β⊆Α ⟹ Α=Β.

Τὴν σχέσιν Α⊆Β δυνάμεθα νὰ γράψωμεν Β⊇Α. Τότε θὰ λέγωμεν : **Τὸ Β εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ Α.**

Εἰς τὰ σύνολα Α καὶ Δ={χ|χ φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 2} παρατηροῦμεν ὅτι Α⊆Δ ἀλλ' ὅτι Δ⊈Α (διότι τὰ στοιχεῖα 7, 8, 9... τοῦ Δ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ Α). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι: **Τὸ Α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Δ** καὶ συμβολίζομεν : Α⊂Δ. **Τὸ Δ λέγεται γνήσιον ὑπερσύνολον τοῦ Α**· συμβολικῶς Δ⊃Α.

Ἐὰν ὁρίσωμεν διὰ περιγραφῆς τὸ σύνολον {χ/χ φυσικὸς μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 3}, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οὐδὲν στοιχεῖον ἔχει. Καθορίζεται λοιπὸν σύνολον, τὸ ὁποῖον στερεῖται στοιχείων. Τὸ σύνολον αὐτὸ

---

* Τὸ σύμβολον 11 : q(11) διαβάζεται : 11 ἔχει τὴν ἰδιότητα...

λέγεται **κενὸν σύνολον** καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ $\varnothing$. Τὸ $\varnothing$ εἶναι ὑποσύνολον κάθε συνόλου. $\varnothing \subseteq A$ διὰ κάθε σύνολον A.

Δεχόμεθα ὅτι, ὅλα τὰ ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ εἶναι **στοι**χεῖα τῶν θεωρουμένων συνόλων ἀνήκουν εἰς ἓν σύνολον U. Τὸ U λέγεται **βασικὸν (ἢ γενικὸν) σύνολον** ἢ **σύνολον ἀναφορᾶς** τῶν θεωρουμένων συνόλων. Κάθε σύνολον A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ U. $A \subseteq U$ διὰ κάθε σύνολον A.

Ἡ σχέσις τοῦ **ἐγκλεισμοῦ** $\subseteq$ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

$A \subseteq A$ ἀνακλαστικὴν (διότι κάθε στοιχεῖον συνόλου ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον)

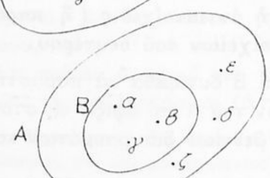
$A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ἀντισυμμετρικὴν (§ 4).

$A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ μεταβατικὴν (διότι ἐὰν κάθε στοιχεῖον τοῦ A ἀνήκει εἰς τὸ B καὶ κάθε στοιχεῖον τοῦ B ἀνήκει εἰς τὸ Γ, τότε κάθε στοιχεῖον τοῦ A ἀνήκει εἰς τὸ Γ). Ἐπαληθεύσατέ το εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα.

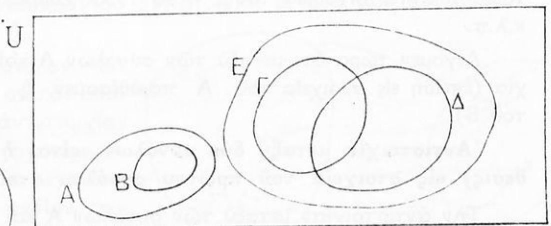
Διὰ νὰ κάμωμεν αἰσθητὴν τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου A τῶν στοιχείων α, β, γ,..., παριστῶμεν ταῦτα διὰ σημείων καὶ τὸ σύνολον {α, β, γ,...} διὰ κλειστῆς γραμμῆς ἡ ὁποία περιβάλλει τὰ σημεῖα αὐτά. Σχημ. (1)

Τὸ ὑποσύνολον B={α, β, γ} τοῦ A, παριστῶμεν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ A. Σχημ. (2). Τὸ βασικὸν σύνολον U παριστῶμεν ὡς ἓν ὀρθογώνιον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁποίου παρίστανται ὅλα τὰ θεωρούμενα σύνολα. Σχημ. (3).

σχ. 1.



σχ. 2.



σχ. 3.

Αἱ παραστάσεις αὐταὶ λέγονται βέννια διαγράμματα πρὸς τιμὴν τοῦ Ἄγγλου φιλοσόφου καὶ μαθηματικοῦ J. Venn, (1834 - 1923), ὁ ὁποῖος τὰς ἐχρησιμοποίησε πρῶτος.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὕρητε τὰ ὑποσύνολα τῶν συνόλων {α}, {1, 2}, {α, β, γ}, {3, 12, 6, 7}.
2. Νὰ εὕρητε τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\left\{ x \mid x \text{ ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ } \frac{7}{5} \text{ καὶ μικρότερος τοῦ } \frac{10}{3} \right\}$.

3. Νὰ όρίσητε δι' ἀναγραφῆς τὸ σύνολον {χ/χ διαγώνιος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ}.

4. Νὰ ὁρίσητε δι' ἀναγραφῆς τὸ σύνολον {χ/χ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως κ : 5, ὅπου κ ἀκέραιος} καὶ διὰ περιγραφῆς τὸ {ΑΓ, ΒΔ}.

5. Συγκρίνατε τὰ σύνολα Α = {0, 1, 2} καὶ Β = {χ/χ ὑπόλοιπον διαιρέσεως φυσικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 3}.

6. Συγκρίνατε τὰ σύνολα Α = {χ/χ παραλληλόγραμμον}, Β = {χ/χ ὀρθογώνιον} καὶ Γ = {χ/χ τετράγωνον} καὶ κάμετε τὰ διαγράμματά των.

2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ

Μονοσήμαντος καὶ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία. Ἰσοδύναμα σύνολα.

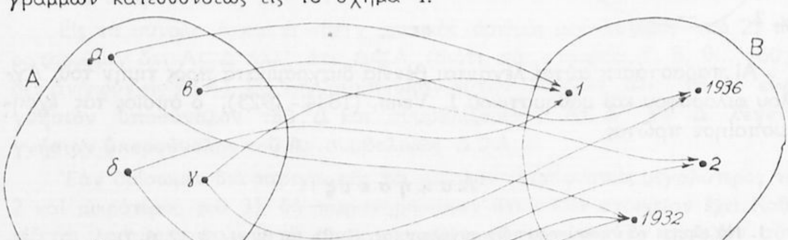
§ **5.** *Εἰς μίαν συλλογὴν (ἓν σύνολον) Α, γραμματοσήμων ἀνήκουν τὰ γραμματόσημα α, β, γ, δ, ε. Τὰ α, γ καὶ δ τιμῶνται 1 δραχμήν. Τὰ β καὶ ε 2 δρχ. Τὰ α καὶ δ ἐξεδόθησαν τὸ 1932, τὰ β, γ καὶ ε τὸ 1936. Θεωρήσατε τὰ σύνολα Α={α, β, γ, δ, ε} καὶ Β={1, 2, 1932, 1936}. Σκεφθῆτε τώρα ἓν στοιχεῖον τοῦ Α καὶ δίπλα εἰς αὐτὸ ἓν στοιχεῖον τοῦ Β. Τί παρατηρεῖτε ;*

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ α παραθέτομεν τὸν 1 ἢ τὸ 1932 (τὴν τιμὴν ἢ τὴν χρονολογίαν ἐκδόσεως), συμβολικῶς (α, 1) ἢ (α, 1932). Εἰς τὸ β παραθέτομεν ἢ ἀντιστοιχοῦμεν τὸν 2 ἢ τὸ 1936. Συμβολικῶς: (β, 2) ἢ (β, 1936) κ.λ.π.

Λέγομεν τώρα ὅτι μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β ὑπάρχει μία ἀντιστοιχία (ἐπειδὴ εἰς στοιχεῖα τοῦ Α παρεθέσαμεν ἢ ἀντιστοιχίσαμεν στοιχεῖα τοῦ Β).

Ἀντιστοιχία μεταξὺ δύο συνόλων, εἶναι ἡ ἀντιστοίχισις (ἢ παράθεσις) εἰς στοιχεῖα τοῦ πρώτου συνόλου στοιχείων τοῦ δευτέρου.

Τὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς μίαν κίνησιν μὲ ἀναχώρησιν ἐκ στοιχείων τοῦ Α καὶ ἄφιξιν εἰς στοιχεῖα τοῦ Β. Τοῦτο γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν βεννίων διαγραμμάτων καὶ γραμμῶν κατευθύνσεως εἰς τὸ σχῆμα 4.



σχ. 4.

Διὰ τοῦτο τὸ Α λέγεται **σύνολον ἀφετηρίας** καὶ τὸ Β **σύνολον ἀφίξεως.**

Τὸ σχῆμα 4 ὀνομάζομεν διάγραμμα (ἢ γράφημα) τῆς ἀντιστοιχίας (εἰς γραμματόσημον ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμή του καὶ ἡ χρονολογία ἐκδόσεως αὐτοῦ).

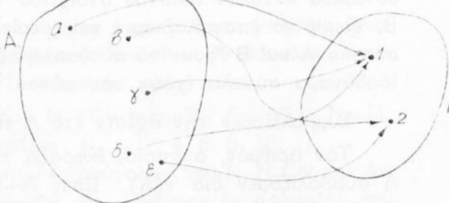
Σημείωσις. Αἱ παραστάσεις (α, 1), (α, 1932), (β, 2) κ.λ.π., τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ νὰ συμβολίσωμεν τὴν ἀντιστοίχισιν, λέγονται **διατεταγμένα ζεύγη.** Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν (ἢ ὁρίσωμεν) μίαν ἀντιστοιχίαν ὡς σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν.

§ **6.** Ἐὰν μεταξὺ τοῦ συνόλου Α τῶν γραμματοσήμων καὶ τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν Γ={1, 2} μελετήσωμεν τὴν ἀντιστοιχίαν: εἰς γραμματόσημον ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμή του, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς **κάθε** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχεῖ **ἓν μόνον** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Γ. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται **μονοσήμαντος ἀντιστοιχία.** Τὰ πρῶτα μέλη τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α,1), (γ, 1), (δ, 1), (β, 2), (ε, 2) εἶναι τώρα διάφορα μεταξύ των.

Μονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ δύο συνόλων ἔχομεν, ὅταν εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ πρώτου συνόλου ἀντιστοιχῇ ἓν μόνον στοιχεῖον τοῦ δευτέρου.

Τὸ διάγραμμα τῆς μονοσημάντου ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Γ ἔχομεν εἰς τὸ σχῆμα 5.

Παρατήρησις. Τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, τὸ ὁποῖον παριστᾷ μίαν μονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν λέγεται – ὡς θὰ μάθωμεν ἀργότερον – **συνάρτησις.** Τὸ Α καὶ Γ θὰ λέγωνται τότε **πεδίον ὁρισμοῦ** καὶ **πεδίον τιμῶν** τῆς συναρτήσεως (ἀντιστοίχως).



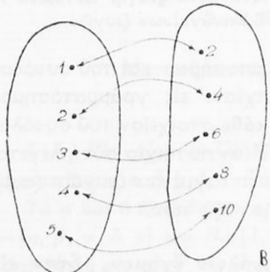
σχ. 5.

Σημείωσις. Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θὰ μάθωμεν, ὅτι μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β λέγεται καὶ **ἀπεικόνισις τοῦ Α εἰς τὸ Β.** Τὸ Α εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ὀνομάζεται σύνολον ἀρχετύπων καὶ τὸ Β σύνολον εἰκόνων.

§ **7.** Μεταξὺ τοῦ συνόλου ἀριθμῶν Α={1, 2, 3, 4, 5} καὶ τοῦ συνόλου τῶν διπλασίων των Β={2, 4, 6, 8, 10}, ὑπάρχει μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία. Ἡ : εἰς κάθε ἀριθμὸν τοῦ Α, ἀντιστοιχεῖ ὁ διπλάσιος του εἰς τὸ Β. Ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν συνόλων Β καὶ Α ὑπάρχει μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία. Ἡ ἀντίστροφος τῆς προηγουμένης : εἰς κάθε στοιχεῖον (ἀριθμὸν) τοῦ Β ἀντιστοιχεῖ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ εἰς τὸ Α. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται **ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.**

Ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ δύο συνόλων (ἢ ἀπεικόνισιν ἕνα πρὸς ἕνα) ἔχομεν ὅταν εἰς **κάθε στοιχεῖον τοῦ πρώτου συνόλου ἀντι-**

στοιχεῖ ἓν μόνον στοιχεῖον τοῦ δευτέρου καὶ εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ δευτέρου συνόλου ἓν μόνον στοιχεῖον τοῦ πρώτου (ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου αὐτὸ ἦτο ἀντίστοιχον) ἢ ὅταν μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ὑπάρχῃ μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία καὶ μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπάρχῃ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς.



σχ. 6.

Τὸ διάγραμμα τῆς ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν συνόλων A καὶ B ἔχομεν εἰς τὸ σχῆμα 6. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{matrix}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα κάτωθεν ἑκάστου στοιχείου τοῦ πρώτου συνόλου, νὰ γράψωμεν ἓν στοιχεῖον τοῦ δευτέρου, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν ἢ νὰ παραλείψωμεν κανέν.

§ **8.** Τὰ σύνολα A καὶ B μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὴ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία λέγονται **ἰσοδύναμα σύνολα.** Τότε ὅμως, ὡς εἴδομεν, δυνάμεθα κάτωθεν ἑκάστου στοιχείου τοῦ A νὰ γράψωμεν ἓν στοιχεῖον τοῦ B, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν καὶ χωρὶς νὰ παραλείψωμεν κανέν. Δηλαδὴ τὰ σύνολα A καὶ B ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὰ ἰσοδύναμα σύνολα ἔχουν τὸν αὐτὸν **πληθικὸν ἀριθμόν.**

Συμβολίζομεν τὴν σχέσιν «τὸ A εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ B» διὰ τοῦ $A \sim B$.

Τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου A συμβολίζομεν διὰ $\nu(A)$. Ὥστε $A \sim B \Longleftrightarrow \nu(A) = \nu(B)$. Τοῦτο διαπιστοῦμεν καὶ δι' ἀπαριθμήσεως τῶν στοιχείων τῶν A καὶ B.

Μεταξὺ συνόλου A καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν τὴν $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$

Ἐὰν μεταξὺ τῶν A καὶ B εἶναι δυνατὴ ἡ ἀμφιμ. ἀντιστοιχία $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{matrix}$

τότε εἶναι δυνατὴ καὶ ἡ $\begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$ μεταξὺ τῶν B καὶ A.

Θεωροῦμεν τώρα καὶ τὸ σύνολον Γ τῶν τριπλασίων τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου A: $\Gamma = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Παρατηροῦμεν ὅτι μεταξὺ τῶν A καὶ B, A καὶ Γ ἔχομεν τὰς ἀμφιμ. ἀντιστοιχίας: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10. \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15. \end{matrix}$ Τότε ὅμως ἔχομεν καὶ τὴν

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{array} \quad \text{μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἰσοδυναμία τῶν συνόλων ἔχει τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.

$A \sim A$, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ καὶ $A \sim B$ καὶ $B \sim \Gamma \Rightarrow A \sim \Gamma$

ἀνακλαστικήν, συμμετρικήν, καὶ μεταβατικήν.

Τὰς αὐτὰς ἑπομένως ἰδιότητας ἔχει καὶ ἡ ἰσότης τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν.

3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ — ΑΠΕΙΡΟΣΥΝΟΛΑ

§ **9**. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σύνολον $A=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ 5. Συνεπῶς $\nu(A) \in N$.

Τὰ σύνολα τῶν ὁποίων οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί, λέγονται **πεπερασμένα σύνολα**.

Λάβετε τώρα ἓν γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α καὶ ἐξετάσατε ἐὰν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ Α δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν. Τί παρατηρεῖτε ;

Λαμβάνομεν τὸ $B=\{\alpha, \gamma, \delta\}$ καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν:
$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha & & \gamma & \delta & \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{ccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha & \beta & \delta & & \end{array} .$$

Τὸ αὐτὸ θὰ παρατηρήσωμεν ἐὰν λάβωμεν ὁποιοδήποτε γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι **πεπερασμένον εἶναι ἓν σύνολον, ὅταν τοῦτο δὲν ἔχῃ γνήσιον ὑποσύνολον ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό.**

§ **10**. Ἂς λάβωμεν τώρα τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: $N=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ καὶ τὸ σύνολον N_α τῶν ἀρτίων: $N_\alpha=\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ N_α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ N, $N_\alpha \subset N$ καὶ ὅτι κάτωθεν ἑκάστου στοιχείου τοῦ N δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἓν στοιχεῖον τοῦ N_α χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν ἢ νὰ παραλείψωμεν κανέν.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots\ldots & 1000\ldots\ldots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16\ldots\ldots & 2000\ldots\ldots \end{array}$$

Τὸ σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἓν γνήσιον ὑποσύνολον ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό. Οὐδεὶς φυσικὸς ἀριθμὸς — ὁσονδήποτε μεγάλος — δύναται νὰ ἐκφράσῃ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του. Τὸ N εἶναι ἓν ἀπειροσύνολον. Τὸ N_α εἶναι ἐπίσης ἓν ἀπειροσύνολον. Ὥστε **ἀπειροσύνολον εἶναι ἓν σύνολον, ὅταν ἔχῃ ἓν γνήσιον ὑποσύνολον ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό.** Ἓν σύνολον ἰσοδύναμον πρὸς ἀπειροσύνολον, εἶναι ἐπίσης ἀπειροσύνολον. Τὸ ὑπερσύνολον ἑνὸς ἀπειροσυνόλου εἶναι ἀπειροσύνολον. Π.χ. τὸ σύνολον Q τῶν ρητῶν. Τὸ σύνολον Δ τῶν σημείων ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἶναι ἀπειροσύνολον.

§ **11**. Τὰ ἀνωτέρω σύνολα δὲν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν πλήρως δι' αναγραφῆς. Διὰ τοῦτο μέχρι τοῦδε ἐχρησιμοποιήσαμεν ἀτελεῖς ἀναγραφάς: N= $=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $Q=\left\{\cdots\frac{1}{3}, \cdots\frac{1}{2}, \cdots 1, \cdots\frac{3}{2}\cdots\right\}$. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ὁρίσωμεν αὐτὰ διὰ περιγραφῆς. Δηλαδὴ ἐὰν δηλώσωμεν μίαν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν ἐὰν μὲν ἔχῃ ἓν ἀντικείμενον, ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον, ἐὰν δὲ δὲν ἔχῃ, δὲν ἀνήκει εἰς αὐτό.

N={χ/χ εἶναι πληθικὸς ἀριθμὸς πεπερασμένου συνόλου}

N_α={χ/χ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2}

Q={χ/χ=$\frac{\mu}{\nu}$ μ: εἶναι ἀκέραιος, ν: εἶναι φυσικὸς καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ ἀνάγωγον κλάσμα}.

Δ={χ/χ εἶναι τὸ σημεῖον Α ἢ Β ἢ σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β}.

Διὰ περιγραφῆς συνεπῶς ὁρίζονται καὶ πεπερασμένα σύνολα καὶ (ἰδίως) τὰ ἀπειροσύνολα.

Σημείωσις. Δυνάμεθα τώρα νὰ εἴπωμεν, ὅτι σύνολον εἶναι μία κατηγορία ἢ ἓν εἶδος ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν ὡρισμένην ἰδιότητα (ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν θεωροῦνται).

Ἀσκήσεις

7. Κάμετε μεταξὺ τῶν συνόλων Α= {3, 8, 15, 13, 14, 12, 7} καὶ Β = {0,1, 2, 3, 4} τὴν ἀντιστοιχίαν: εἰς στοιχεῖον τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 3, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ Β.

8. Εἰς τὸ σύνολον Α τῶν χωρῶν τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης ἀντιστοιχίσατε τὸ σύνολον Β τῶν πρωτευουσῶν αὐτῶν. Χαρακτηρίσατε τὴν ἀντιστοιχίαν. Κάμετε τὸ διάγραμμα αὐτῆς.

9. Ἐξετάσατε ἐὰν εἶναι ἰσοδύναμα τὰ σύνολα Α = {χ/χ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3} καὶ Β = {χ/χ εἶναι ὑπόλοιπον διαιρέσεως φυσικοῦ ἀριθμοῦ διὰ 7}.

10. Νὰ γίνουν ὅλαι αἱ δυναταὶ ἀμφιμονοσήμαντοι ἀντιστοιχίαι μεταξὺ τῶν συνόλων Α = {2, 9, 4} καὶ Β = {α, β, γ}. Πόσαι εἶναι αὐταί;

11. Ὁρίσατε δι' ἀναγραφῆς τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς τριμελοῦς συνόλου καὶ τὸ σύνολον τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Κάμετε μεταξὺ αὐτῶν μίαν ἀντιστοιχίαν. Χαρακτηρίσατε τὸ εἶδος αὐτῆς.

12. Μεταξὺ τῶν συνόλων Α = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} καὶ Β = {0, 1, 2, 3, 9, 12, 18} νὰ γίνῃ ἡ ἀντιστοιχία: εἰς στοιχεῖον τοῦ Α, ἀντιστοιχεῖ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 3 ἢ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ Β.

13. Ἐξετάσατε ἐὰν μεταξὺ τῶν συνόλων Α = {χ/χ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11 μικρότερον τοῦ 97} καὶ ἑνὸς γνησίου ὑποσυνόλου του, εἶναι δυνατὴ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.

14. Ὁρίσατε διὰ περιγραφῆς τὸ σύνολον Α = {0, 7, 14, 21, 28, ...}

15. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν ἀρτίων N_α καὶ τοῦ συνόλου N_4, τῶν ἀκ. πολλαπλασίων τοῦ 4.

16. Ἐξετάσατε ἐὰν εἶναι ἰσοδύναμα τὰ σύνολα Ε = {χ/χ εἶναι ἐπίκεντρος εἰς κύκλον (0) γωνία} καὶ Τ = {χ/χ τόξον τοῦ κύκλου (0)}.

17. Ἐξετάσατε ἐὰν εἶναι ἰσοδύναμα τὰ σύνολα Ν καὶ Κ = {χ/χ εἶναι κλασματικὴ μονάς}.

4. ΕΝΩΣΙΣ ΚΑΙ ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ — ΔΙΑΖΕΥΞΙΣ ΚΑΙ ΣΥΖΕΥΞΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

§ **12.** Τὸ σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν ὅλα τὰ στοιχεῖα δύο συνόλων Α καὶ Β, καὶ μόνον αὐτά, λέγεται **Ἕνωσις τῶν Α καὶ Β** καὶ συμβολίζεται $A \cup B$.

Ἡ ἕνωσις ὁρίζεται διὰ τῆς ἰσοδυναμίας $\alpha \in A$ ἢ $\alpha \in B \Longleftrightarrow \alpha \in A \cup B$.

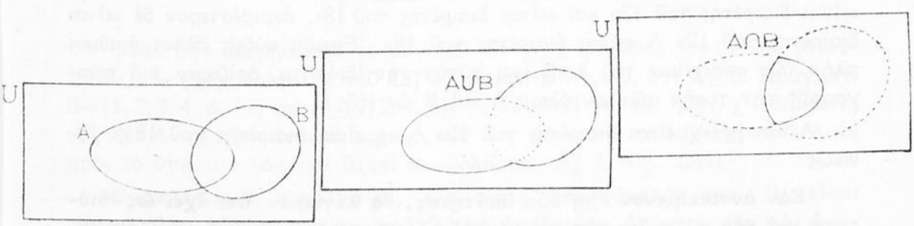
Τὴν πρᾶξιν μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὴν $A \cup B$, ἐὰν δοθοῦν τὰ Α καὶ Β ὀνομάζομεν «ἕνωσιν συνόλων» καὶ συμβολίζομεν διὰ τοῦ $\cup$.

Τὸ σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν τὰ κοινὰ στοιχεῖα δύο συνόλων Α καὶ Β καὶ μόνον αὐτά, λέγεται **Τομὴ τῶν Α καὶ Β** καὶ συμβολίζεται $A \cap B$.

Ἡ τομὴ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἰσοδυναμίας $\alpha \in A$ καὶ $\alpha \in B \Longleftrightarrow \alpha \in A \cap B$.

Τὴν ἀντίστοιχον πρᾶξιν λέγομεν «τομὴν συνόλων» καὶ συμβολίζομεν διὰ τοῦ $\cap$.

Παράδειγμα. Ἐὰν $A=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ καὶ $B=\{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ τότε $A \cup B=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$ καὶ $A \cap B=\{\gamma, \delta, \varepsilon\}$. Χρησιμοποιοῦντες τὰ βέννια διαγράμματα ἔχομεν:



σχ. 7.

§ **13.** ***Θεωρήσατε τὰ σύνολα*** $A=\{\chi/\chi$ ***εἶναι διαιρέτης τοῦ 12***$\}$ ***καὶ*** $B=\{\chi/\chi$ ***εἶναι διαιρέτης τοῦ 18***$\}$ ***καὶ καθορίσατε δι' ἀναγραφῆς 1ον τὴν ἕνωσιν καὶ 2ον τὴν τομὴν αὐτῶν.***

Ἀφοῦ καθορίσωμεν δι' ἀναγραφῆς τὰ δοθέντα σύνολα $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ καὶ $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ εὑρίσκομεν:

1ον τὸ σύνολον $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ $A \cup B$ ἢ διαιρεῖ μόνον τὸν 12 (οἱ 4 καὶ 12) ἢ διαιρεῖ μόνον τὸν 18 (οἱ 9 καὶ 18) ἢ διαιρεῖ ἀμφοτέρους τοὺς 12 καὶ 18 (οἱ 1, 2, 3, 6).

Τὴν σύνθετον αὐτὴν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \cup B$ λέγομεν **διάζευξιν (συμβολικῶς $\vee$) προφορικῶς «ἤ», τῶν ἰδιοτήτων** «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12», «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» καὶ τὴν συμβολίζομεν:

«Εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\vee$ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» ἁπλούστερον δὲ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» ἢ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18».

Οὐδὲν ἄλλο ἀντικείμενον πλὴν τῶν στοιχείων τοῦ $A \cup B$ ἔχει τὴν ἰδιότητα αὐτήν. Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν διὰ περιγραφῆς τὸ σύνολον $A \cup B$ ὡς ἑξῆς: $A \cup B = \{\chi /$«χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» ἢ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$ ἢ $A \cup B = \{\chi /$«χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\vee$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$.

Γενικῶς ἐὰν ἀντικείμενον ἔχῃ μίαν τουλάχιστον ἐκ δύο ἰδιοτήτων, λέγομεν ὅτι ἔχει ὡς ἰδιότητα τὴν διάζευξιν αὐτῶν.

Συμβολικῶς: $\chi{:}p(\chi)$ ἢ $\chi{:}q(\chi) \Longrightarrow \chi{:}p(\chi) \vee q(\chi)$.

Συνεπῶς: **Ἐὰν δύο σύνολα περιγράφονται (ἀντιστοίχως) ὑπὸ τῶν ἰδιοτήτων p( ) καὶ q( ), ἡ Ἕνωσις τῶν συνόλων, περιγράφεται ὑπὸ τῆς διαζεύξεως αὐτῶν:**

$$A = \{\chi / \chi{:}p(\chi)\},\ B = \{\chi / \chi{:}q(\chi)\} \Longrightarrow A \cup B = \{\chi / \chi{:}p(\chi) \vee q(\chi)\}.$$

2ον. Ὁρίζομεν δι᾽ ἀναγραφῆς τὸ σύνολον $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι κάθε στοιχεῖον αὐτοῦ εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ 12 καὶ τοῦ 18.

Τὴν σύνθετον αὐτὴν ἰδιότητα λέγομεν **Σύζευξιν τῶν ἰδιοτήτων** «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12», «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» καὶ συμβολίζομεν ἁπλῶς μὲν διὰ τῆς: «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» καὶ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18», ἀκριβέστερον δὲ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\wedge$ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18». Ἐπειδὴ οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς πλὴν τῶν στοιχείων τοῦ $A \cap B$ ἔχει αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, ὁρίζομεν διὰ περιγραφῆς τὴν τομὴν τῶν συνόλων A καὶ B ὡς ἑξῆς:

$A \cap B = \{\chi /$«χ: εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\wedge$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$. Γενικῶς:

Ἐὰν ἀντικείμενον ἔχῃ δύο ἰδιότητας, θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχει ὡς ἰδιότητα καὶ τὴν σύζευξιν αὐτῶν· (ἡ σύζευξις συμβολίζεται $\wedge$ καὶ διαβάζεται «καί»).

Ἐὰν δύο σύνολα περιγράφωνται ἀντιστοίχως ὑπὸ δύο ἰδιοτήτων, ἡ τομὴ αὐτῶν περιγράφεται ὑπὸ τῆς συζεύξεως τῶν ἰδιοτήτων.

$$A = \{\chi / \chi{:}p(\chi)\},\ B = \{\chi / \chi{:}q(\chi)\} \Longrightarrow A \cap B = \{\chi / \chi{:}p(\chi) \wedge q(\chi)\}.$$

Εὐκόλως ἐπαληθεύομεν διὰ παραδειγμάτων τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῆς ἑνώσεως καὶ τομῆς.

Τὸ μονότιμον		
Τὴν μεταθετικὴν	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Τὴν προσεταιριστικὴν	$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$	
	$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$	
Τοῦ οὐδετέρου	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
Τὴν ἐπιμεριστικὴν	$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	
	$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$	

Ἀσκήσεις

18. Ποία εἶναι ἡ διάζευξις τῶν ἰδιοτήτων «εἶναι ἄρτιος», «εἶναι περιττός»;

19. Ποία ἡ σύζευξις τῶν ἰδιοτήτων $\chi > 5$, $\chi < 13$.

20. Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον $\{\chi/\chi$:«χ εἶναι ἄρτιος» $\wedge$ «χ εἶναι περιττός»$\}$

21. Νὰ ὁρισθοῦν διὰ περιγραφῆς καὶ δι' ἀναγραφῆς, ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ τῶν συνόλων $\Delta_1 = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»$\}$, $\Delta_2 = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 54»$\}$.

22. Ποία εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν τριῶν συνόλων $A = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 32» $\wedge$ «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 40»$\}$, $B = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 40»$\}$ καὶ $\Gamma = \{\chi/\chi$: «χ εἶναι διαιρέτης τοῦ $40 + 32$»$\}$.

23. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον $A = \{\chi/\chi$: «$\chi \in Q_0^+$» $\wedge$ «$\chi + 1 = 5$»$\}$, $B = \{\chi$: «$\chi \in Q_0^+$» $\wedge$ «$\chi - 3 = 7$»$\}$.

24. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις $(A \cup B) \cap (\Gamma \cup B)$, $(A \cup B \cup \Gamma) \cap \Delta$

5. ΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ — ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΩΝ — ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

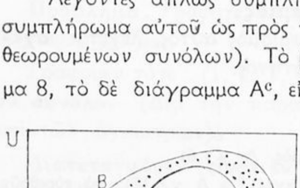
§ **14.** Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σύνολον $A = \{\chi/\chi$ διαιρέτης τοῦ $6\}$ καὶ τὸ σύνολον $B = \{\chi/\chi$ διαιρέτης τοῦ $12\}$ θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι $A \subseteq B$. Πράγματι $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ καὶ $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Τὸ σύνολον $\{4, 12\}$ ἢ $\{\chi/\chi$ «διαιρέτης τοῦ 12» $\wedge$ «χ δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 6»$\}$ λέγεται συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς τὸ ὑπερσύνολόν του B καὶ συμβολίζεται A_B^C ἢ A'_B. Ὥστε :

Συμπλήρωμα συνόλου A, ὡς πρὸς ὑπερσύνολόν του B, εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ B, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ A.

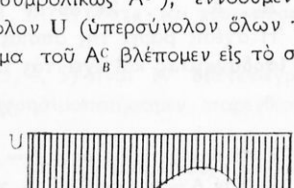
Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ συμπλήρωμα τοῦ A ἀνήκουν τὰ στοιχεῖα τοῦ B, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ A.

Τὸ B_B^C εἶναι τὸ $\varnothing$. Τὸ $\varnothing_B^C$ εἶναι τὸ B.

Λέγοντες ἁπλῶς συμπλήρωμα τοῦ A (συμβολικῶς A^C), ἐννοοῦμεν τὸ συμπλήρωμα αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ βασικὸν σύνολον U (ὑπερσύνολον ὅλων τῶν θεωρουμένων συνόλων). Τὸ βέννιον διάγραμμα τοῦ A_B^C βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα 8, τὸ δὲ διάγραμμα A^c, εἰς τὸ σχῆμα 9.



σχ. 8.



σχ. 9.

§ **15**. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα $B=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, $A=\{\beta, \delta, \varepsilon\}$ καὶ $A_B^C=\{\alpha, \gamma\}$. Ἡ τομὴ τῶν A καὶ A_B^C εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, ἢ ἄλλως τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ξένα μεταξύ των. Ἡ ἕνωσις αὐτῶν εἶναι τὸ B. Λέγομεν ὅτι τὰ σύνολα A καὶ A_B^C ἀποτελοῦν ἕνα **διαμερισμὸν** τοῦ συνόλου B. Ὁμοίως λέγομεν ὅτι τὰ σύνολα $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \varepsilon\}$ καὶ $\{\delta\}$ ἀποτελοῦν ἕνα διαμερισμὸν τοῦ συνόλου B, διότι εἶναι διάφορα τοῦ κενοῦ συνόλου, εἶναι ἀνὰ δύο μεταξύ των ξένα καὶ ἡ ἕνωσις ὅλων εἶναι τὸ B. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ ὅτι τὸ B διαμερίζεται εἰς τὰ σύνολα αὐτά.

Τὰ σύνολα A_1, A_2, A_3 . . . εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου A, ὅταν οὐδὲν ἐξ αὐτῶν εἶναι κενόν, εἶναι ἀνὰ δύο ξένα καὶ ἡ ἕνωσις ὅλων εἶναι τὸ A.

§ **16**. Νὰ διαμερισθῇ τὸ σύνολον

$$K=\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{3}, \frac{3}{6}, \frac{6}{10}, \frac{7}{14}, \frac{12}{20}\right\}$$

εἰς σύνολα **ἴσων** ρητῶν ἀριθμῶν. Μὲ βάσιν τὴν σχέσιν ἰσότητος τῶν **κλασμάτων**, διαμερίζομεν τὸ K εἰς τὰ σύνολα

$$K_1=\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{3}\right\}, K_2=\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{7}{14}\right\}, K_3=\left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20}\right\}$$

Τὰ στοιχεῖα ἑκάστου τῶν K_1, K_2, K_3 ἀντιπροσωπεύουν τὸν αὐτὸν ρητὸν ἀριθμόν. Τοῦ K_1 τὸν ρητὸν $\frac{1}{1}$, τοῦ K_2 τὸ ρητὸν $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ K_3 τὸν $\frac{3}{5}$

Τὰ σύνολα K_1, K_2, K_3 λέγονται **κλάσεις ἰσοδυναμίας**. Γενικῶς ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος τῶν κλασμάτων διαμερίζει τὸ σύνολον ὅλων τῶν κλασμάτων εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας. Ἑκάστη κλάσις παριστᾷ ἢ ἀντιπροσωπεύει ἕνα ρητὸν ἀριθμόν.

Ἐὰν σύνολον A διαμερίζεται εἰς ἄλλα σύνολα A_1, A_2, A_3, . . . εἰς τρόπον ὥστε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ A_1 νὰ ἀντιπροσωπεύουν ἓν ἀντικείμενον, ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ A_2 ἓν ἄλλο ἀντικείμενον κ.ο.κ., τὰ A_1, A_2, A_3 . . ., λέγονται κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Ἡ σχέσις βάσει τῆς ὁποίας γίνεται ὁ διαμερισμὸς αὐτός, λέγεται **σχέσις ἰσοδυναμίας** καὶ ἔχει τὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.

Ἀσκήσεις

25. Νὰ εὑρεθῇ τὸ A_N^C ὅπου $A=\{\chi \,/\, \chi$ φυσικὸς ἀριθμὸς $\wedge\ \chi>6\}$

26. Ἐὰν $A=\{\chi \,/\,$ «$\chi \in Q_0^+$» $\wedge\ \chi>3\}$ καὶ $B=\{\chi \,/\,$ «$\chi \in Q_0^+$» $\wedge\ \chi<11\}$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ σύνολα A, B, $A \cap B$, $A_{Q_0^+}^C$ καὶ ἡ τομὴ τῶν συμπληρωμάτων τῶν A καὶ B ὡς πρὸς Q_0^+

27. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις $(A \cup A^c) \cap A$.

28. Ἐὰν $A=\{\chi \,/\, \chi$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $60\}$, $B=\{\chi \,/\, \chi$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $12\}$ καὶ $\Gamma=\{\chi \,/\, \chi$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $15\}$. Νὰ εὕρητε τὰ συμπληρώματα τῶν B καὶ Γ ὡς πρὸς A.

29. Νὰ ἐπαληθεύσητε μὲ τὰ σύνολα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ὅτι τὸ συμπλήρωμα τῆς ἑνώσεως τῶν B καὶ Γ ἰσοῦται πρὸς τὴν τομὴν τῶν συμπληρωμάτων τῶν συνόλων

αὐτῶν (ὡς πρὸς τὸ ὑπερσύνολον τῶν Α). Ὁμοίως ὅτι τὸ συμπλήρωμα τῆς τομῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν ἕνωσιν τῶν συμπληρωμάτων. Συμβολικῶς :

$$(B \cup \Gamma)^C_A = (B^C_A) \cap (\Gamma^C_A) \quad \text{καὶ} \quad (B^C_A) \cup (\Gamma^C_A) = (B \cap \Gamma)^C_A$$

30. Ἐπαληθεύσατε διὰ παραδειγμάτων ὅτι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον περιγράφεται διὰ τῆς συζεύξεως δύο ἰδιοτήτων, εἶναι ὑποσύνολον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον περιγράφεται διὰ μιᾶς ἐξ αὐτῶν.

31. Διαμερίσατε τὸ σύνολον Α = {2, 5, 9, 6} εἰς μονομελῆ σύνολα.

32. Νὰ διαμερισθῆ τὸ σύνολον Α = {χ / χ εἶναι διαιρέτης τοῦ 4} εἰς διμελῆ σύνολα.

33. α) Νὰ κάμετε ἕνα διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μὲ βάσιν τὴν σχέσιν «εἶναι παράλληλος». β) Κάμετε ἕνα διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων εἰς τρία ὑποσύνολα.

34. Νὰ διαμερίσητε τὸ σύνολον Α = {2, 5, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 13} εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας μὲ βάσιν τὴν σχέσιν : οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστης κλάσεως ἀφήνουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον διαιρούμενοι διὰ 3.

35. Εἰς πόσας κλάσεις ἰσοδυναμίας διαμερίζεται τὸ σύνολον Ν μὲ βάσιν τὴν σχέσιν : ὑπόλοιπον διαιρέσεως τοῦ α διὰ 5 = ὑπόλοιπον διαιρέσεως τοῦ β διὰ 5.

36. Σχηματίσατε τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν διαγωνίων τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, εἰς τρόπον ὥστε εἰς ἓν ὑποσύνολον, νὰ ἀνήκουν αἱ διαγώνιοι, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς. Ἀποτελοῦν διαμερισμὸν τὰ ὑποσύνολα αὐτά ;

6. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ

§ **17.** Ὅταν —κατὰ τὴν μελέτην τῆς ἀντιστοιχίας— ἀντεστοιχίσαμεν εἰς τὸ στοιχεῖον α τὸ στοιχεῖον β, ἐχρησιμοποιήσαμεν τὸν συμβολισμόν: (α, β). Τοῦτο εἶναι ἓν διμελὲς σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἓν μέλος προηγεῖται τοῦ ἄλλου (δηλαδὴ ἔχει σημασίαν ἡ τάξις τῶν στοιχείων του). Τὸ (α, β) λέγεται **διατεταγμένον ζεῦγος** ἢ **διατεταγμένον (διμελὲς) σύνολον.** Ἐπειδὴ δυνάμεθα εἰς τὸ α νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸ α, θεωροῦμεν καὶ τὸ (α,α) διατεταγμένον ζεῦγος.

Πρόβλημα. *Γράψατε τὸ σύνολον* {2, 3, 1, 5, 4} *ὥστε νὰ προηγῆται ὁ μικρότερος ἀριθμός.*

Γράφομεν τότε : (1, 2, 3, 4, 5). Τὸ (1, 2, 3, 4, 5) εἶναι ἓν **διατεταγμένον σύνολον.** (Διὰ τὴν παράστασιν αὐτοῦ ἐχρησιμοποιήσαμεν παρενθέσεις ἀντὶ τῶν ἀγκίστρων).

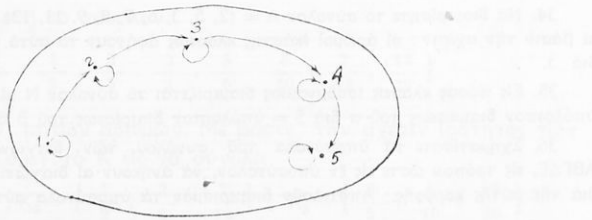
Διατεταγμένον εἶναι ἓν σύνολον, ὅταν μεταξὺ δύο στοιχείων του ἔχῃ ὁρισθῆ ποῖον προηγεῖται.

Μεταξὺ δύο στοιχείων τοῦ (1, 2, 3, 4, 5) π.χ. τῶν 3 καὶ 2, ἰσχύει ἡ σχέσις: $2<3$. Σχηματίζομεν τότε τὸ ζεῦγος (2, 3). Διὰ τὸ ζεῦγος (4, 4) ἰσχύει ἡ $4=4$ Γενικῶς διὰ δύο στοιχεῖα τοῦ α καὶ β, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\alpha \leqslant \beta$ ἢ $\beta \leqslant \alpha$.

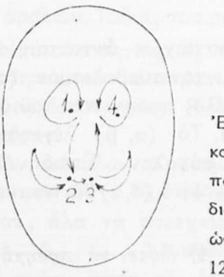
Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι τὸ διατεταγμένον σύνολον (1, 2, 3, 4, 5), εἶναι τὸ σύνολον {2, 3, 1, 5, 4} ἐφοδιασμένον μὲ τὴν διάταξιν (ἢ τὴν σχέσιν διατάξεως) $\leqslant$. Τὴν διάταξιν αὐτὴν ὀνομάζομεν διάταξιν κατὰ μέγεθος. Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁποιοδήποτε διμελὲς ὑποσύνολον τοῦ $\{2, 3, 1, 5, 4\}$ δύναται νὰ διαταχθῇ μὲ τὴν διάταξιν $\leqslant$. Τὸ $\{2, 3\}: 2 \leqslant 3$. Τὸ $\{5, 4\}: 4 \leqslant 5$ κ.ο.κ. Διὰ τοῦτο ἡ διάταξις $\leqslant$ λέγεται **ὁλικὴ διάταξις** καὶ τὸ $(1, 2, 3, 4, 5)$ **ὁλικῶς διατεταγμένον σύνολον.**

Γραφικῶς παριστῶμεν τὴν διάταξιν: $\alpha < \beta$ ὡς ἑξῆς: $\alpha \curvearrowright \beta$. Δηλαδὴ μὲ κατευθυνομένην γραμμὴν ἀπὸ τὸ α πρὸς τὸ β.

Τὴν περίπτωσιν $\alpha = \alpha$ παριστῶμεν ὡς $\alpha \circlearrowright$, δηλαδὴ μὲ βρόχον, ὁ ὁποῖος ἐπιστρέφει εἰς τὸ α. Γραφικὴν παράστασιν (διάγραμμα) τῆς διατάξεως εἰς τὸ διατεταγμένον σύνολον $(1, 2, 3, 4, 5)$ ἔχομεν εἰς τὸ σχῆμα 10.



σχ. 10.



σχ. 11.

Ἐνίοτε μᾶς δίδεται ἡ εὐκαιρία νὰ κάμωμεν καὶ παιγνιώδη διαγράμματα διατεταγμένων συνόλων, ὡς εἰς τὰ σχήματα 11 καὶ 12 διὰ τὸ $(1, 2, 3, 4)$.

σχ. 12.

§ **18.** Συμβολίζομεν τὴν σχέσιν ὁ α διαιρεῖ τὸν β προσωρινῶς μὲ α / β. Ἐὰν ἐφοδιάσωμεν τὸ σύνολον $\{2, 3, 4, 6, 9\}$ μὲ τὴν διάταξιν αὐτήν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι μερικὰ ἐκ τῶν διμελῶν ὑποσυνόλων του δὲν διατάσσονται.

Γράφομεν $2/4$ (ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 4), $2/2$, $4/4$ κ.ο.κ. ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $2/3$ (ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 3), $6/9$.

Τὸ ἐφωδιασμένον μὲ τὴν διάταξιν / σύνολον $\{2, 3, 4, 6, 9\}$ λέγεται **μερικῶς διατεταγμένον σύνολον** καὶ ἡ σχέσις «διαιρεῖ τόν...» **μερικὴ διάταξις.**

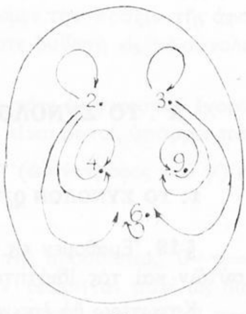
Ἐὰν τὴν διάταξιν: τὸ α προηγεῖται τοῦ β ἢ ταυτίζεται μὲ τὸ β συμβολίσωμεν διὰ τοῦ $\alpha \leqslant \beta$ καὶ τήν: τὸ β ἕπεται τοῦ α (ἢ ταυτίζεται) διὰ τοῦ

$\beta \geqslant \alpha$ εὐκόλως ἐπαληθεύομεν ἐκ τῶν παραδειγμάτων μας, ὅτι αἱ ἰδιότητες τῆς διατάξεως εἶναι αἱ :

$\alpha \leqslant \alpha$ ἀνακλαστική

$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$ ἀντισυμμετρικὴ καὶ

$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \gamma \Longrightarrow \alpha \leqslant \gamma$ μεταβατική.



σχ. 13.

Ἀσκήσεις

37. Διατάξατε τὸ σύνολον $\{3^5, 3^2, 3^1, 3^0, 3^3, 3^4\}$ ὥστε νὰ προηγῆται ἡ δύναμις μικροτέρου ἐκθέτου.

38. Κάμετε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σύνολον $\{3^2, 5^4, 10^0, 2^5\}$. Εἶναι ἡ διάταξις αὐτὴ διάταξις κατὰ μέγεθος;

39. Διατάξατε τὸ σύνολον $\{4, 8, 9, 3, 12, 16, 18\}$ ὥστε μεταξὺ δύο στοιχείων του, νὰ προηγῆται τὸ πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου. Θὰ εἶναι τότε τὸ σύνολον ὁλικῶς διατεταγμένον; Νὰ γίνῃ τὸ διάγραμμα τῆς διατάξεως.

40. Εἶναι ὁλικῶς διατεταγμένον τὸ N μὲ διάταξιν κατὰ μέγεθος; Διατί ;

41. Ἐξηγήσατε διατὶ εἶναι ὁλικῶς διατεταγμένον τὸ σύνολον τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, μὲ διάταξιν κατὰ μέγεθος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Α΄. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ Q_0^+ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ (ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ)

§ **19**. Ἐμάθομεν εἰς τὴν Α΄ τάξιν διὰ τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, τὰς πράξεις αὐτῶν καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων.

Κατωτέρω θὰ ἐπαναλάβωμεν μερικοὺς γνωστοὺς κανόνας διὰ τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς καὶ διὰ τὰς πράξεις αὐτῶν.

Τὸ σύνολον $Q_0^+ = \left\{0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{4}, \ldots, 1, \ldots, 2, \ldots, 2\frac{1}{2}, \ldots\right\}$

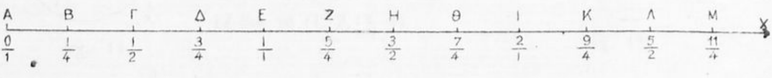
τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ἡ ἕνωσις τοῦ συνόλου N_0 τῶν ἀκεραίων, καὶ τοῦ συνόλου τῶν μὴ ἀκεραίων πηλίκων ἑνὸς ἀκεραίου δι᾽ ἑνὸς φυσικοῦ. Ἔχομεν :

$$Q_0^+ = N_0 \cup \{\chi / \chi \text{ μὴ ἀκέραιον πηλίκον ἑνὸς ἀκερ. δι᾽ ἑνὸς φυσικοῦ}\}$$

Ἡ ἕνωσις τῶν δύο τούτων συνόλων δίδει περιγραφικῶς τὸ Q_0^+ ὡς κάτωθι:

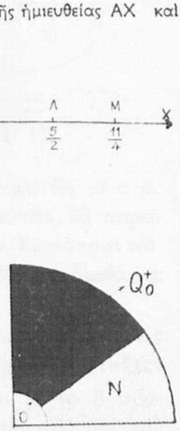
$$Q_0^+ = \{\chi / \chi = \frac{\alpha}{\beta} \text{ ὅταν } \alpha \in N_0 \text{ , } \beta \in N \text{ καὶ } \frac{\alpha}{\beta} \text{ ἀνάγωγον}\}$$

Εἰς τὸ σχῆμα 14 ἔχομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν ρητῶν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΧ καὶ εἰς τὸ σχῆμα 15 τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Q_0^+



σχ. 14.

§ **20**. Ἐὰν δοθοῦν δύο ρητοὶ α καὶ β, τότε ὑπάρχει πάντοτε ὁ ρητὸς α+β. Δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς καὶ νὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα ἕνα ρητόν. Τοῦτο



σχ. 15.

δὲν συμβαίνει διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς ἀφαιρέσεως. Ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ ὑπάρχει, ἐὰν $\alpha \geqq \beta$. Ἐπομένως δὲν δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν τῆς ἀφαιρέσεως, ἢ λέγομεν, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἐὰν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ ὑπάρχῃ καὶ εἶναι ὁ ρητὸς γ, τότε ὡς γνωστὸν ἔχομεν: $\alpha-\beta=\gamma \Longleftrightarrow \alpha=\beta+\gamma \Longleftrightarrow \alpha-\gamma=\beta$. Ἐπίσης ἐὰν γ, δ, εἶναι ρητοί, ὑπάρχει πάντοτε ὁ ρητὸς $\gamma.\delta$ καὶ ἐὰν $\gamma \neq 0$, ὑπάρχει ὁ ρητὸς $\frac{1}{\gamma}$ (ἀντίστροφος τοῦ γ) καὶ ἔχομεν $\delta:\gamma=\delta.\frac{1}{\gamma}$.

§ **21**. Τὸ μηδὲν «0» εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως, $0+\alpha=\alpha$, ὡς παράγων μηδενίζει τὸ γινόμενον, $0.\alpha=0$ καὶ δὲν θεωρεῖται ποτὲ ὡς διαιρέτης. Ἡ μονὰς «1» εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, $1.\alpha=\alpha$.

§ **22**. Αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολ/σμοῦ εἶναι μονότιμοι. Δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον δύο δοθέντων ρητῶν εἶναι εἷς μόνον ρητός. (Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν, ἐὰν εἶναι δυνατή. Διότι, ἐφόσον ἡ διαφορὰ $18-5$ ἢ 13 εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῆς μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου 5 νὰ δίδῃ τὸν μειωτέον 18, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ ἄλλη διαφορὰ λόγῳ τοῦ μονοτίμου τῆς προσθέσεως. Ὁμοίως καὶ ἡ διαίρεσις $\alpha:\beta$ $(\beta \neq 0)$ εἶναι μονότιμος, διότι $\alpha:\beta=\alpha.\frac{1}{\beta}$ καὶ ὁ πολ/σμὸς δύο ρητῶν εἶναι πρᾶξις μονότιμος).

Ὁ κατωτέρω πίναξ περιέχει τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν πράξεων συμβολικῶς.

Οἱ $\alpha,\beta,\gamma \in Q_0^+$		
Πράξεις	Πρόσθεσις	Πολ/σμὸς
Ὕπαρξις ἀθροίσματος καὶ γινομένου	$(\alpha+\beta) \in Q_0^+$	$(\alpha\cdot\beta) \in Q_0^+$
Ἰδιότης ἀντιμεταθ.	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
Ἰδιότης προσεταιρ.	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
Ἰδιότης ἐπιμεριστ.	$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$	

Ἀσκήσεις

42. α) Ἀπλοποιήσατε τὰ κλάσματα :

$$\frac{24}{27}, \frac{15}{14}, \frac{55}{30}, \frac{12}{30}, \frac{35}{35}, \frac{42}{21}, \frac{11}{33}, \frac{9}{18}$$

β) Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι πράξεις :

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}, \quad \frac{7}{6}+\frac{8}{9}, \quad \frac{13}{4}-\frac{5}{16}, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}, \quad \frac{7}{3}\cdot\frac{9}{14}, \quad \frac{11}{8}\cdot\frac{0}{4},$$

$$\frac{12}{13}:\frac{4}{13}, \quad \frac{15}{16}:\frac{1}{4}$$

43. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων εἶναι ὀρθαί, ποῖαι ἐσφαλμέναι καὶ διατί ;

α) $(17 : 15{,}2) \in Q_0^+$, β) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}-\frac{5}{8}$, γ) $200 : 40 = 40 : 200$,

δ) $205 \cdot \left(\frac{1}{3}+19\right) = 205 \cdot \left(19+\frac{1}{3}\right)$, ε) $(97-98) \in N_0$,

στ) $\frac{3}{4}+8=\left(\frac{3}{4}+8\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$

ζ) $\left(\frac{7}{13}+\frac{3}{7}\right)+1=\frac{7}{13}+\left(\frac{3}{7}+1\right)$, η) $\left(15\frac{1}{2}-\frac{31}{2}\right) \in Q_0^+$

θ) $0{,}5 \cdot \left(7\cdot\frac{1}{3}\right)=\left(0{,}5\cdot 7\right)\cdot\frac{1}{3}$

44. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

α) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right) : 2\frac{2}{3}+\left(4\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) : \frac{2}{5}$,

β) $\left[\left(\frac{3}{16}+\frac{2}{8}+\frac{3}{4}\right) : \frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4}\right]\cdot 10\frac{2}{7}$,

γ) $2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right)$,

δ) $\left(5\frac{7}{26}-1\frac{4}{39}\right) : \left(6\frac{2}{9}-4\frac{5}{6}\right)$

2. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ

§ **23** Θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὰ κάτωθι προβλήματα:

α) *«Εἰς τὴν πόλιν Α ἡ θερμοκρασία ἦτο 10 βαθμοὶ ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς τὴν μεσημβρίαν. Τὸ ἑσπέρας ἡ θερμοκρασία εἶχε κατέλθει κατὰ 7 βαθμούς. Ποία ἡ θερμοκρασία τὸ ἑσπέρας;».*

Ἔχομεν : 10 βαθμ. − 7 βαθμ. = 3 βαθμ. ἄνωθεν τοῦ μηδενός.

Ἄρα ἡ θερμοκρασία τὸ ἑσπέρας εἰς τὴν πόλιν Α εἶναι 3 βαθμ. ἄνωθεν τοῦ μηδενός.

β) *«Ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν πόλιν Β ἦτο 6 βαθμ. ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς τὴν μεσημβρίαν. Τὸ ἑσπέρας ἡ θερμοκρασία εἶχε κατέλθει κατὰ 8 βαθμούς. Ποία ἦτο ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν πόλιν Β τὸ ἑσπέρας ;»*

Ἐὰν καλέσωμεν χ βαθμ. τὴν θερμοκρασίαν τὸ ἑσπέρας εἰς τὴν πόλιν Β, τότε συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα, ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν 6 βαθμ. -8 βαθμ. ἢ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $6-8=\chi$.

Ἡ ἀφαίρεσις αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον Q_0^+ τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς. Ἑπομένως καὶ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον αὐτό.

Ἐν τούτοις τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν καὶ οἱοσδήποτε δύναται νὰ ἀπαντήσῃ ὅτι ἡ θερμοκρασία εἰς τὴν πόλιν Β τὸ ἑσπέρας ἦτο 2 βαθμοὶ κάτωθεν τοῦ μηδενός.

Ἔχομεν λοιπόν: 6 βαθμ. $-$ 8 βαθμ. $=$2 βαθμοὶ κάτωθεν τοῦ μηδενὸς

$$6 \quad -8 \quad = \quad \chi$$

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτήν, πρέπει νὰ εἰσάγωμεν νέους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ δίδουν λύσιν εἰς τὰ προβλήματα ὅπως τὸ ἀνωτέρω.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ νέος ἀριθμὸς χ, ὁ ὁποῖος θὰ ἀντιπροσωπεύῃ τὴν ἔκφρασιν «δύο βαθμοὶ κάτωθεν τοῦ μηδενὸς» πρέπει νὰ ὁρισθῇ κατὰ τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ μὲ τὸν 8 νὰ ἰσοῦται μὲ 6, διὰ νὰ διατηρῆται ἡ γνωστή μας ἰσοδυναμία: $6-8=\chi \Longleftrightarrow 6=8+\chi$.

Ἀλλὰ τότε ἔχομεν:

$$6=8+\chi \Longleftrightarrow 6=\underbrace{(6+2)}_{8}+\chi \Longleftrightarrow 6=6+\underbrace{(2+\chi)}_{0}$$

Ἐπειδὴ $6=6+0$, πρέπει ὁ 2 καὶ ὁ χ νὰ ἔχουν ἄθροισμα μηδέν. Δηλαδὴ $2+\chi=0$.

Ὁ νέος ἀριθμὸς χ συμβολίζεται -2 καὶ διαβάζεται **ἀρνητικὸς** δύο ἢ πλὴν **δύο**

Ὥστε ἡ θερμοκρασία «δύο βαθμ. κάτωθεν τοῦ μηδενὸς» παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ -2 βαθμ.

Ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δύο (-2) λέγεται ἀντίθετος τοῦ 2 καὶ εἴδομεν ὅτι $2+(-2)=0$. Ὁμοίως ἔχομεν $(-2)+2=0$, διότι, ὅταν τὸ θερμόμετρον δεικνύῃ -2 βαθμ. (2 βαθμ. κάτωθεν τοῦ μηδενὸς) καὶ ἀνέλθῃ κατὰ 2 βαθμούς, τοῦτο θὰ δεικνύῃ τὴν θερμοκρασίαν 0 βαθμ.

Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν. Ἡ ἐξίσωσις $2+\chi=0$, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν τώρα τὴν λύσιν -2 ἐκφράζει καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

«Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 2 διὰ νὰ ἔχωμεν ἄθροισμα μηδέν;»

Ἀνάλογα προβλήματα ἐκφράζουν καὶ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$$1+\psi=0 \quad \text{ἢ} \quad \psi+1=0 \quad , \quad \frac{1}{2}+\varphi=0 \quad \text{ἢ} \quad \varphi+\frac{1}{2}=0$$

$$3+z=0 \quad \text{ἢ} \quad z+3=0 \quad , \quad \frac{3}{4}+\tau=0 \quad \text{ἢ} \quad \tau+\frac{3}{4}=0$$

$$\omega+4=0 \quad \text{ἢ} \quad 4+\omega=0$$

Οἱ ἀντίθετοι τῶν 1, 3, 4, $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$ παρίστανται ἀντιστοίχως διὰ τῶν $-1, -3, -4, -\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{3}{4}$. Ἔχομεν δέ: $1+(-1)=0,\ 3+(-3)=0,$

$$(-4)+4=0,\ \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ καὶ } \frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=0.$$

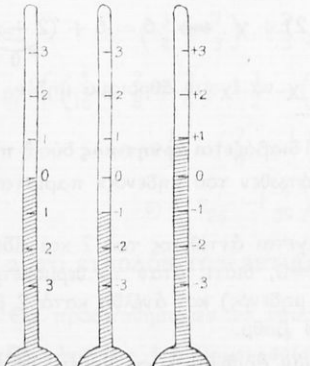
Οἱ ἀριθμοὶ $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}$ κ.λ.π. δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον Q_0^+ τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς. Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $-1, -2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$, καὶ γενικῶς ὁ ἀριθμὸς $-\alpha$ ὅπου $\alpha \in Q^+$.

Τὸ σύνολον τοῦτο συμβολίζομεν διὰ τοῦ Q^- καὶ ἔχει τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Q^+, πρὸ τῶν ὁποίων ἔχει τεθῆ τὸ πρόσημον πλὴν (–). **Δηλαδὴ τὰ ἀντίθετα τῶν στοιχείων τοῦ Q^+.**

Στοιχεῖα τοῦ Q^+: $1, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{4}, \ldots, 2, \ldots, 2\frac{1}{2}, \ldots, 3, \ldots$

Στοιχεῖα τοῦ Q^-: $-1, \ldots, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{3}{4}, \ldots, -2, \ldots, -2\frac{1}{2}, \ldots, -3, \ldots$

§ **24**. Παρατηροῦμεν εἰς τὸ θερμόμετρον (σχ. 16) ὅτι τὸ ἄκρον τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης διέρχεται πρὸ τῶν νέων ἀριθμῶν $-1,\ -2,\ -3$, κ.λ.π. ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀρχομένη ἐκ τοῦ μηδενὸς **ἐλαττοῦται**. (Αὐτὸ δικαιολογεῖ διατὶ ἐκλέξαμεν τὸ πρόσημον πλὴν «– » διὰ νὰ παραστήσωμεν τοὺς νέους ἀριθμούς).



σχ. 16.

Διὰ νὰ διέλθῃ ὅμως τὸ ἄκρον τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης πρὸ τῶν ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς ἀριθμῶν, πρέπει ἡ θερμοκρασία, ἀρχομένη ἐκ τοῦ μηδενός, **νὰ αὐξάνεται**. Διὰ τοῦτο διὰ τὴν παράστασιν τῶν γνωστῶν μας ἀριθμῶν τοῦ Q^+ θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ πρόσημον σὺν « + ».

Ὡς ἐκ τούτου ἐκφράζομεν τὴν λύσιν τοῦ πρώτου προβλήματος ὡς ἑξῆς: «Ἡ θερμοκρασία τὸ ἑσπέρας θὰ εἶναι +3 βαθμοί».

Εἰς τὸ σύνολον Q^+ ἀνήκουν τώρα οἱ ἀριθμοὶ $+1,\ +\frac{1}{2},\ +2$, κ.λ.π. τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν θετικοὺς ρητοὺς καὶ τὸ σύνολον Q^+ σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν. Ἔχομεν τώρα:

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Στοιχεῖα τοῦ συνόλου } Q^+: & +1,\ldots, & +\frac{1}{2},\ldots, & +2,\ldots, & +\frac{5}{2},\ldots, & +3,\ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\text{Στοιχεῖα τοῦ συνόλου } Q^-: & -1,\ldots, & -\frac{1}{2},\ldots, & -2,\ldots, & -\frac{5}{2},\ldots, & -3,\ldots
\end{array}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν, ἀντιστοιχοῦν ἓν πρὸς ἓν πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Q^+.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Q^- λέγονται ἀντίθετα (ἢ συμμετρικὰ) τῶν ἀντιστοίχων τοῦ Q^+ ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ Q^+ λέγονται ἀντίθετα τῶν ἀντιστοίχων τοῦ Q^-.

Π.χ. Ὁ ἀντίθετος τοῦ $+\frac{5}{2}$ εἶναι ὁ $-\frac{5}{2}$ καὶ ὁ ἀντίθετος τοῦ $-\frac{5}{2}$ εἶναι ὁ $+\frac{5}{2}$. Οὗτοι ἔχουν ἄθροισμα μηδέν.

$$\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)=0 \quad \text{ἢ} \quad \left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)=0.$$

Ὁ μηδὲν δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Q^+ οὔτε εἰς τὸ Q^- καὶ συνεπῶς στερεῖται προσήμου. (Δὲν γράφομεν $+0$ ἢ -0).

Ἀντίθετος ὅμως τοῦ μηδενὸς εἶναι ὁ μηδέν, διότι $0+0=0$.

§ **25.** Ἐὰν συνοψίσωμεν τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

1ον Τὸ γνωστόν μας σύνολον Q^+ (τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἐκτὸς τοῦ μηδενὸς) ὠνομάσαμεν σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν καὶ ἔμπροσθεν τῶν στοιχείων αὐτοῦ ἐθέσαμεν τὸ πρόσημον σὺν «+».

Εἶναι:

$$\text{Σύνολον θετικῶν ρητῶν} = Q^+ = \left\{\ldots,+\frac{1}{2},\ldots,+1,\ldots,+2,\ldots\right\}$$

Σημείωσις. Εἰς τὰ ἑπόμενα ὁ θετικὸς ρητὸς θὰ γράφεται μετὰ τοῦ προσήμου του ἢ ἄνευ αὐτοῦ (π.χ. ὁ θετικὸς $\frac{1}{2}$ θὰ γράφεται $+\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{2}$). Θὰ θέτωμεν δὲ τὸ πρόσημον σὺν εἰς τὸν θετικὸν ἀριθμόν, ἐὰν θέλωμεν νὰ δώσωμεν μεγαλυτέραν ἔμφασιν εἰς τὴν ἔκφρασιν «θετικός».

Ὥστε: **Θετικὸς ρητὸς λέγεται κάθε ρητὸς τῆς ἀριθμητικῆς ἐκτὸς τοῦ μηδενός.** Πρὸ αὐτοῦ θέτομεν τὸ πρόσημον σὺν «+» ἢ οὐδὲν πρόσημον.

2ον Ὡρίσαμεν ἓν νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον ὠνομάσαμεν σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, εἰς τὰ ὁποῖα ἐθέσαμεν ἔμπροσθεν αὐτῶν τὸ πρόσημον πλὴν «−».

Ὥστε: Ἀρνητικὸς ρητὸς λέγεται κάθε ἀντίθετος θετικοῦ ρητοῦ. Συμβολικῶς: κάθε ρητὸς τῆς ἀριθμητικῆς, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ πρόσημον πλὴν « — ».

Εἶναι : Σύνολον ἀρνητικῶν ρητῶν $= Q^- = \{..., -\frac{1}{2}, ..., -1, ..., -2, ...\}$.

3ον Μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Q^+ καὶ Q^- ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία. Τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα εἶναι αὐτά, τὰ ὁποῖα ἔγιναν ἀπὸ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς καὶ λέγονται ἀντίθετα στοιχεῖα.

Ὥστε : Κάθε θετικὸς ρητὸς ἔχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἀρνητικὸν ὡς ἀντίθετόν του. Καὶ κάθε ἀρνητικὸς ἔχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα θετικὸν ὡς ἀντίθετόν του.

Ἀσκήσεις

45. Ἀπαντήσατε εἰς τὰ κάτωθι ἐρωτήματα :

α) Ἀνήκει ὁ μηδὲν εἰς τὸ σύνολον $Q+$ ἢ εἰς τὸ $Q-$;

β) Ποῖοι οἱ ἀντίθετοι τῶν : $+\frac{35}{17}$, -20, $+\frac{17}{20}$, $-\frac{25}{2}$, $+16$, 15, $\frac{1}{2}$

46. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ρητοὶ χ, ψ, z, ω, φ, διὰ τοὺς ὁποίους ἔχομεν :

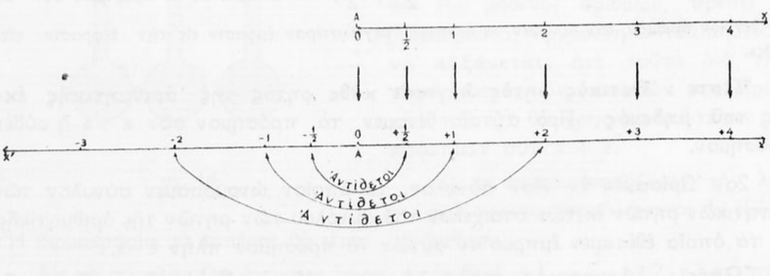
$$\chi + \frac{7}{8} = 0, \quad \frac{11}{3} + \psi = 0, \quad \frac{1}{5} + z = 0, \quad \omega + 10{,}3 = 0, \quad \varphi + 12 = 0.$$

47. Ποῖοι εἶναι οἱ θετικοὶ ρητοὶ κ, λ, μ, ν, διὰ τοὺς ὁποίους ἔχομεν :

$$-\frac{8}{9} + \kappa = 0, \quad \lambda + \left(-\frac{2}{7}\right) = 0, \quad \mu + (-100) = 0, \quad -\frac{35}{2} + \nu = 0;$$

48. Ποῖον κανόνα γνωρίζετε διὰ τοὺς ἀντιθέτους ρητούς;

3. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ Q
ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ



σχ. 17α καὶ 17β.

§ **26**. Τὸ σχῆμα 17α παριστᾷ τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΧ ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχουν τοποθετηθῆ, κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον, οἱ ρητοὶ τῆς ἀριθμητικῆς.

Εἰς τὸ σχῆμα 17β γίνεται ἐπέκτασις τῆς ἡμιευθείας ΑΧ κατὰ τὴν ἀντικειμένην αὐτῆς ΑΧ' καὶ ἐμφανίζεται ἡ εὐθεῖα Χ'ΑΧ. Οἱ ρητοὶ τῆς ἀριθμητικῆς (ἐκτὸς τοῦ μηδενός), οἱ ὁποῖοι εἶναι τοποθετημένοι ἐπὶ τῆς ΑΧ λέγονται τώρα θετικοὶ ρητοί.

Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΧ' δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν (εἰς τὸ σχῆμα ἔχουν τοποθετηθῆ) οἱ ἀντίθετοι τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, οἱ ἀρνητικοί, κατὰ τρόπον, ὥστε ἕκαστος ἀρνητικὸς νὰ τοποθετῆται ἐπὶ σημείου ἀριστερὰ τοῦ Α, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τούτου ὅσον ἀπέχει τὸ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει τοποθετηθῆ ὁ ἀντίθετος αὐτοῦ θετικός.

Ὥστε οἱ ἀντίθετοι τοποθετοῦνται ἐπὶ τῆς Χ'ΑΧ συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α.

Δυνάμεθα ἐκ τούτου νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι πᾶς θετικὸς εἶναι δεξιὰ τοῦ μηδενὸς καὶ ὅτι πᾶς ἀρνητικὸς εἶναι ἀριστερὰ τοῦ μηδενός.

$$\underbrace{\{\cdots,-2,\cdots,-1,\cdots,-\frac{1}{2},\cdots\}\cup\{0\}\cup\{\cdots,+\frac{1}{2},\cdots,+1,\cdots,+2,\cdots\}}_{Q}$$

σχ. 17γ.

Εἰς τὸ σχῆμα 17γ ἔχομεν τοποθετήσει ἐπὶ εὐθείας: α) τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, β) τὸ σύνολον τοῦ ὁποίου στοιχεῖον εἶναι μόνον τὸ μηδὲν καὶ γ) τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν.

Ἡ ἕνωσις τῶν τριῶν τούτων συνόλων δίδει ἓν νέον σύνολον Q ($Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$), τὸ ὁποῖον λέγεται **σύνολον τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**.

Σημείωσις α'. Ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον παρεστήσαμεν τοὺς ρητοὺς ἐπὶ τῆς εὐθείας Χ'ΑΧ σημαίνει ὅτι ἕκαστος ρητὸς ἔχει τοποθετηθῆ ἐπὶ ἑνὸς μόνον σημείου τῆς εὐθείας, χωρὶς τοῦτο νὰ σημαίνῃ ὅτι εἰς κάθε σημεῖον αὐτῆς ἔχει τοποθετηθῆ εἷς ρητὸς πραγματικὸς ἀριθμός.

Σημείωσις β. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ λέγωμεν «**ρητός**» καὶ θὰ ἐννοοῦμεν «**πραγματικὸς ρητός**».

Σημείωσις γ'. Εἰς παλαιότερα βιβλία οἱ πραγματικοὶ ρητοὶ ὠνομάζοντο σχετικοὶ (ρητοὶ) ἀριθμοί.

§ **27.** Ὑποσύνολα τοῦ Q (συνόλου τῶν ρητῶν) εἶναι προφανῶς τά: Q^-, $\{0\}$, Q^+.

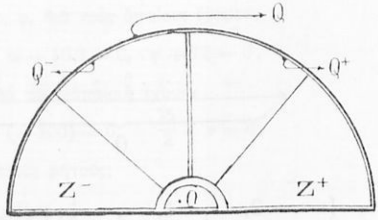
Ὁμοίως ὑποσύνολα τοῦ Q εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν διὰ τοῦ Z^- (τοῦτο εἶναι ὑποσύνολον καὶ τοῦ Q^-) καὶ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν διὰ τοῦ Z^+. (Τὸ Z^+ εἶναι ὑποσύνολον καὶ τοῦ Q^+).

Ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων Z^-, $\{0\}$, Z^+, δίδει τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν διὰ τοῦ Z.

$$\underbrace{\underbrace{\{\cdots,-4,-3,-2,-1\}}_{Z^-} \cup \{0\} \cup \underbrace{\{+1,+2,+3,+4,\cdots\}}_{Z^+}}_{Z}$$

Ὥστε $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$

Τὸ σχῆμα 17δ εἶναι τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



σχ. 17δ.

Ἀνακεφαλαίωσις :

1. Οἱ ἀρνητικοὶ ρητοί, τὸ μηδὲν καὶ οἱ θετικοὶ ρητοὶ λέγονται **ρητοὶ** ἀριθμοὶ καὶ τὸ σύνολον αὐτῶν συμβολίζεται διὰ τοῦ Q.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Q ἐντὸς τοῦ ἀγκίστρου γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$Q = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

2. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι, τὸ μηδὲν καὶ οἱ θετικοὶ ἀκέραιοι λέγονται **ἀκέραιοι** ἀριθμοὶ καὶ τὸ σύνολον αὐτῶν συμβολίζεται διὰ τοῦ Z.

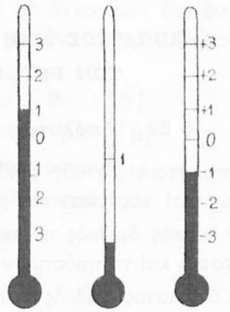
Τὰ στοιχεῖα τοῦ Z ἐντὸς τοῦ ἀγκίστρου γράφονται, συντόμως καὶ ὡς ἑξῆς: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

§ **28. Ἐφαρμογαί :**

Τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμεν εἰς προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς.

1. Τὸ θερμόμετρον α (σχ. 18) δεικνύει 1 βαθμ. ἄνωθεν τοῦ μηδενός.

Ἐὰν καλυφθῇ ἡ θερμομετρικὴ κλῖμαξ (σχ. 18β) κατὰ τρόπον ,ὥστε νὰ διακρίνηται μόνον τὸ ἄκρον τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης καὶ ὁ παραπλεύρως ἀριθμὸς τῆς κλίμακος, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ «1», δὲν δυνάμεθα μετὰ βεβαιότητος νὰ ἀπαντήσωμεν ἂν ἡ θερμοκρασία εἶναι 1 βαθμ. ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς ἢ 1 βαθμ. κάτωθεν τοῦ μηδενός.



σχ. 18.

Διὰ τὸ θερμόμετρον ὅμως γ δὲν ἀντιμετωπίζομεν αὐτὴν τὴν δυσκολίαν, διότι, ἐὰν τὸ ἄκρον τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι εἰς τὸν -1, θὰ ἐννοήσωμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι 1 βαθμ. κάτωθεν τοῦ μηδενός, ἐὰν εἶναι εἰς τὸν $+1$, ἡ θερμοκρασία εἶναι 1 βαθμ. ἄνωθεν τοῦ μηδενός.

2. Ὁ ταμίας δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὰς ἐκφράσεις: «πληρωμὴ 2000 δρχ.», «εἴσπραξις 1800 δρχ.» ἀντιστοίχως διὰ τῶν ῥητῶν -2000 δρχ. καὶ $+1800$ δρχ.

3. Αἱ πρὸ Χριστοῦ χρονολογίαι δύνανται νὰ παρασταθοῦν ὑπὸ ἀρνητικῶν ῥητῶν καὶ αἱ χρονολογίαι μετὰ Χριστὸν ὑπὸ θετικῶν ῥητῶν.

Π.χ. ἐὰν γράψωμεν -300 ἔτη, ἐννοοῦμεν 300 ἔτη πρὸ Χριστοῦ, ἐνῷ ἐὰν γράψωμεν $+1900$ ἔτη, (ἢ 1900 ἔτη), ἐννοοῦμεν 1900 ἔτη μ.Χ.

4. Διὰ τὸ κέρδος καὶ τὴν ζημίαν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις :

49. Ἀπαντήσατε εἰς τὰ κάτωθι ἐρωτήματα:
   α) Ὁ μηδὲν ἀνήκει εἰς τὸ Q;
   β) Ὁ μηδὲν ἀνήκει εἰς τὸ Z;
   γ) Ποία εἶναι ἡ τομὴ καὶ ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων $Z-$, $Z+$;
   δ) Ποία εἶναι ἡ τομὴ καὶ ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων $Q-$, $Q+$;
   ε) Τὸ σύνολον Z εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου $Q+$ ἢ τοῦ $Q-$;
   ζ) Διαμερίσατε τὰ σύνολα Q καὶ Z εἰς γνωστά σας ὑποσύνολα.

50. Χρησιμοποιήσατε τοὺς ῥητοὺς διὰ νὰ ἐκφράσητε συντόμως τὰ κάτωθι:
   $3\frac{1}{2}$ m ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.
   500 m ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.
   Κέρδος 2600 δρχ., ζημία 3500 δρχ..
   Χρονολογία τῆς μάχης τῶν Θερμοπυλῶν.
   Χρονολογία κηρύξεως τῆς Ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως.
   Ἔτος γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ.

51. Εὕρετε παραδείγματα, εἰς τὰ ὁποῖα νὰ χρησιμοποιοῦνται οἱ ῥητοὶ ἀριθμοί.

Ἐπειδὴ ὁ $-5=-5$, ἰσχύει ἡ ἀνακλαστικὴ ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ἐπίσης ἐὰν $-5=-\frac{10}{2}$, εἶναι καὶ $-\frac{10}{2}=-5$· ἑπομένως ἰσχύει καὶ ἡ συμμετρικὴ ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Τέλος ἐὰν $-5=-\frac{10}{2}$ καὶ $-\frac{10}{2}=-\frac{15}{3} \Longrightarrow -5=-\frac{15}{3}$ ἄρα ἰσχύει καὶ ἡ μεταβατικὴ ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

Ὥστε ἡ ἰσότης τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἔχει τὰς γνωστὰς ἰδιότητας:

$\alpha=\alpha$ (ἀνακλαστικὴ ἰδιότης)

$\alpha=\beta \Longrightarrow \beta=\alpha$ (συμμετρικὴ ἰδιότης)

$\alpha=\beta$ καὶ $\beta=\gamma \Longrightarrow \alpha=\gamma$ (μεταβατικὴ ἰδιότης).

Ἀσκήσεις :

52. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν κάτωθι ρητῶν:

$$+8, \quad -\frac{25}{3}, \quad -\frac{13}{20}, \quad +\frac{12}{3}, \quad +\frac{1}{12}, \quad \frac{11}{4}, \quad 0$$

53. Ποίους ρητοὺς παριστοῦν τὰ χ, ψ, z ἐάν:

$$|\chi|=1, \quad |\psi|=0, \quad |z|=\left|-\frac{3}{2}\right|$$

54. α) Ἐὰν $|\chi+3|=5$ καὶ $\chi+3$ εἶναι θετικὸς ρητὸς νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

β) Ἐὰν $|3\chi|=0$ νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

γ) Ἐὰν διὰ τοὺς ρητοὺς α, β, γ, δ, ἔχωμεν $\alpha+1=\beta+\gamma+\delta$ καὶ $\beta+\gamma+\delta=5$ νὰ εὑρεθῇ ὁ α.

55. Ἐξετάσατε ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ γ εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις.

1. α εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸν β καὶ β εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸν γ.
2. α εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸν β καὶ β εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τὸν γ.
3. α εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τὸν β καὶ β εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τὸν γ.
4. α εἶναι ἑτερόσημος πρὸς τὸν β καὶ β εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸν γ.

Β'. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αἱ πράξεις εἰς τὸ σύνολον Q εἶναι ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις.

§ 33. 1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

α) Ἀεροπλάνον ἀνῆλθεν κατ' ἀρχὴν 3 km καὶ κατόπιν ἄλλα 2 km. Εἰς ποῖον ὕψος τελικῶς ἀνῆλθεν τὸ ἀεροπλάνον;

Προφανῶς τὸ ἀεροπλάνον ἀνῆλθεν 5 km.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς τότε ἡ ἔκφρασις «ἀνῆλθεν 3 km» συμβολίζεται $+3$ km, ὁμοίως διὰ τὸ «ἀνῆλθεν 2 km» ἔχομεν $+2$ km καὶ διὰ τὸ «ἀνῆλθεν 5 km» γράφομεν $+5$ km.

Ἐπειδὴ ἀνῆλθεν 3 km + ἀνῆλθεν 2 km = ἀνῆλθεν 5 km,

ἔχομεν $(+3 \text{ km}) + (+2 \text{ km}) = +5 \text{ km}.$

Ἐὰν τὸ ἀεροπλάνον κατήρχετο κατὰ 3 καὶ κατὰ 2 km, τοῦτο θὰ κατήρχετο τελικῶς κατὰ 5 km. Ἄρα $(-3 \text{ km}) + (-2 \text{ km}) = -5 \text{ km}.$

Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων ρητῶν εἶναι ρητὸς ὁμόσημος πρὸς αὐτοὺς καὶ ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.

Παραδείγματα.

$$(+5) + (+8) = +13 = +(5+8)$$

$$(-7) + (-3) = -10 = -(7+3)$$

$$\left(+\frac{6}{11}\right) + \left(+\frac{5}{11}\right) = +\frac{11}{11} = +\left(\frac{6}{11} + \frac{5}{11}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{4}\right) = -\frac{5}{4} = -\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right)$$

Γενικῶς ἐὰν α καὶ β εἶναι θετικοί, τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι θετικὸς καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν·

$$|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$$

(Ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί, τὸ $\alpha+\beta$ εἶναι ἀρνητικός).

β) Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον Q_0^+. Δηλαδὴ $5+0=0+5=5$, ἑπομένως καὶ $(+5)+0=0+(+5)=+5$.

Ἐὰν ἡ θερμοκρασία εἶναι -2 βαθμ. καὶ ἀνέλθῃ κατὰ 0 βαθμούς, τελικῶς θὰ ἔχωμεν θερμοκρασίαν -2 βαθμούς. Ἄρα $(-2)+0=-2$ · ὁμοίως καὶ $0+(-2)=-2$.

Ὥστε τὸ μηδὲν εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν.

Συμβολικῶς : Ἐὰν $\alpha \in Q \implies \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$

γ) Ἐὰν ἡ θερμοκρασία ἀνέλθῃ κατὰ 3 βαθμ. καὶ κατόπιν κατέλθῃ κατὰ 3 βαθμ., οὐδεμία τελικῶς μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας γίνεται. Δηλαδὴ

$$(+3) + (-3) = 0$$

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ρητῶν ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

δ) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $(-3)+(+7)$.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν αὐτὸ τὸ πρόβλημα ,θὰ στηριχθῶμεν εἰς τοὺς κανόνας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁμοσήμων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιθέτων ρητῶν.

Ἐπειδὴ $+7=+(3+4)=(+3)+(+4)$,

ἔχομεν: $(-3)+(+7)=\underbrace{(-3)+(+3)}_{0}+(+4)=0+(+4)=+4=$

$=+(7-3)$.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $(+3)+(-5)$ ἐργαζόμεθα ὁμοίως. Δηλαδὴ $-5=-(3+2)=(-3)+(-2)$, ἄρα $(+3)+(-5)=\underbrace{(+3)+(-3)}_{0}+(-2)=$

$=0+(-2)=-2=-(5-3)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἀθροίσματος δύο ἑτεροσήμων ρητῶν ἔχομεν:

Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων ρητῶν εἶναι ρητὸς ὁμόσημος πρὸς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν (τῆς μικροτέρας ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας) τῶν ἀπολύτων τιμῶν.

Παραδείγματα.

$$(-12)+(+11)=-(12-11)=-1$$

$$(+10)+(-4)=+(10-4)=+6$$

$$\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)=-\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{8}\right)=-\frac{2}{8}$$

Γενικῶς:

Ἐὰν $\alpha\in Q^+$, $\beta\in Q^-$ καὶ $|\alpha|>|\beta| \Longrightarrow \alpha+\beta=+(|\alpha|-|\beta|)$, ὅπου $|\alpha|-|\beta|>0$

Ἐὰν $\alpha\in Q^+$, $\beta\in Q^-$ καὶ $|\alpha|<|\beta| \Longrightarrow \alpha+\beta=-(|\beta|-|\alpha|)$, ὅπου $|\beta|-|\alpha|>0$

Ἐφαρμογαί.

1. $(+4)+(+2)=+6=+(4+2)$, $(+4)+(-7)=-3=-(7-4)$

$(-2)+(-3)=-5=-(2+3)$, $(-3)+(+8)=+5=+(8-3)$

2. $\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{6}{6}=-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)$,

$$\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=-\frac{3}{3}=-\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)$$

§ **34.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει πάντοτε τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν καὶ εἶναι μονότιμον (εὑρίσκεται μόνον μία τιμὴ αὐτοῦ), διότι ὁ ὑπολογισμός του ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν ἢ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν.

Γενικῶς ἐὰν α καὶ β εἶναι ρητοί, ὑπάρχει ὁ ρητὸς $(\alpha+\beta)$ [συμβολικῶς : $\alpha, \beta \in Q \Longrightarrow (\alpha+\beta) \in Q$], ὁ ὁποῖος λέγεται ἄθροισμα αὐτῶν.

Τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν εἶναι μονότιμον.

Ἐπειδὴ $(+2)+(-5)=-3$ καὶ $(-5)+(+2)=-3$ ἔχομεν ὅτι

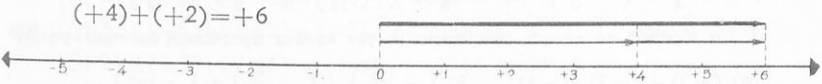
$$(+2)+(-5)=(-5)+(+2).$$

Ὥστε :

Ἐὰν α καὶ β εἶναι ρητοί, ἔχομεν $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (μεταθετικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως).

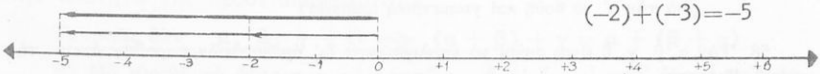
3. Κατωτέρω δίδεται γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν προσθέσεων τῆς 1ης ἐφαρμογῆς.

$(+4)+(+2)=+6$



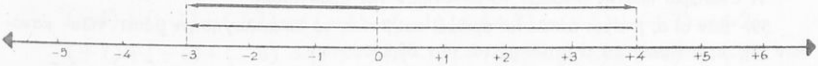
σχ. 19.

$(-2)+(-3)=-5$



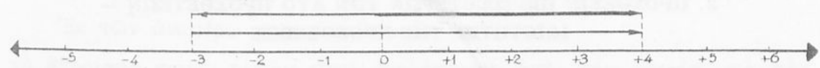
σχ. 20.

$(+4)+(-7)=-3$



σχ. 21.

$(-3)+(+8)=+5$



σχ. 22.

4. Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $-3=-\frac{6}{2}$ προσθέσωμεν τὸν $+2$ λαμβάνομεν :

α′ μέλος $-3+(+2)=-1$

β′ μέλος $-\frac{6}{2}+(+2)=-\left(\frac{6}{2}-2\right)=-1$

"Αρα $-3+(+2)=-\frac{6}{2}+(+2)$.

Γενικῶς $\alpha=\beta \Longrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in Q)$

'Ασκήσεις:

56. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

α) $(+3)+\left(+\frac{1}{2}\right)$, β) $(-5)+(-19)$, γ) $(+12)+(-7)$,

δ) $(+7)+(-13{,}5)$, ε) $\left(-\frac{1}{2}\right)+(+1)$, στ) $\left(-\frac{13}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$,

ζ) $\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)$, η) $(-1)+\left(+\frac{3}{2}\right)$, θ) $-\frac{4}{3}+\left(+\frac{1}{6}\right)$,

ι) $+\frac{5}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)$, ια) $+\frac{3}{8}+\left(-\frac{87}{16}\right)$, ιβ) $+\frac{2}{5}+\left(-\frac{4}{7}\right)$.

57. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα μὲ τὸν κανόνα προσθέσεως ὁμοσήμων ρητῶν.

α) $(-3)+(-2)+(-1)$, β) $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$,

γ) $(-2)+(-2)+(-2)$, δ) $-\frac{3}{4}+(-1)+\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(διὰ τὴν α' νὰ δοθῇ καὶ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία)

58. 'Εὰν α, β, γ, δ εἶναι ρητοὶ νὰ ἐπαληθεύσητε δι' ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων τὴν κάτωθι ἰδιότητα.

$$\alpha=\beta \text{ καὶ } \gamma=\delta \Longrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$$

Σημείωσις. Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται πρόσθεσις τῶν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἐκφράζει τὸ μονότιμον τῆς προσθέσεως.

59. 'Εὰν οἱ α, β εἶναι ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta<\alpha$, νὰ δικαιολογήσητε βάσει τῶν κανόνων τῆς προσθέσεως τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἀθροισμάτων:

1. $(+\alpha)+(-\beta)=+(\alpha-\beta)$, 2. $(-\alpha)+(+\beta)=-(\alpha-\beta)$
3. $(-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)$, 4. $(+\alpha)+(+\beta)=+(\alpha+\beta)$

2. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΟΣΘΕΤΕΩΝ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ **35.** Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $(+2)+(+3)+(-6)$. Θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἐργαζόμενοι, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν Α' τάξιν.

Δηλαδὴ θὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθετέων, $(+2)+(+3)=+5$ καὶ θὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸν τρίτον προσθετέον, $(+5)+(-6)=-1$.

Τοῦτο γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$(+2)+(+3)+(-6)=[(+2)+(+3)]+(-6)=(+5)+(-6)=-1$

Ὁ ρητὸς -1 εἶναι τὸ ἄθροισμα $(+2)+(+3)+(-6)$.

Ἡ ἀγκύλη $[(+2)+(+3)]$ ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐκτελοῦμεν πρῶτον τὴν πρᾶξιν ἐντὸς αὐτῆς.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα ἐὰν ἔχωμεν περισσοτέρους προσθετέους τῶν τριῶν.

Ὥστε ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο ρητῶν εἶναι ὁ ρητός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσωμεν τὸν τρίτον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα προσθέσωμεν τὸν τέταρτον κ.ο.κ.

Γενικῶς ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι ρητοὶ ἔχομεν:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=[(\alpha+\beta)+\gamma]+\delta$$

§ **36.** α) Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$[(+2)+(+3)]+(-6)=(+5)+(-6)=-1$$

καὶ $[(+3)+(-6)]+(+2)=(-3)+(+2)=-1 \quad \Longrightarrow$

$$[(+2)+(+3)]+(-6)=[(+3)+(-6)]+(+2) \quad \text{ἢ}$$

$$[(+2)+(+3)]+(-6)=(+2)+[(+3)+(-6)]$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος προκύπτει ὅτι ἡ πρόσθεσις τῶν ρητῶν ἔχει τὴν ἰδιότητα τῆς προσεταιριστικότητος.

Γενικῶς ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in Q \Longrightarrow (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ρητῶν -4, $+7$, -1 καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Ἔχομεν:

$$(-4)+(+7)+(-1)=[(-4)+(+7)]+(-1)=(+3)+(-1)=+2$$
$$(-4)+(-1)+(+7)=[(-4)+(-1)]+(+7)=(-5)+(+7)=+2$$
$$(+7)+(-1)+(-4)=[(+7)+(-1)]+(-4)=(+6)+(-4)=+2$$
$$(+7)+(-4)+(-1)=[(+7)+(-4)]+(-1)=(+3)+(-1)=+2$$
$$(-1)+(-4)+(+7)=[(-1)+(-4)]+(+7)=(-5)+(+7)=+2$$
$$(-1)+(+7)+(-4)=[(-1)+(+7)]+(-4)=(+6)+(-4)=+2$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

τὸ ἄθροισμα τριῶν ρητῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν σειρὰν μὲ τὴν ὁποίαν λαμβάνονται οἱ προσθετέοι.

Γενικῶς ἐὰν α, β, γ εἶναι ρητοὶ ἔχομεν $\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\gamma+\beta=\beta+\alpha+\gamma=\ldots$ (Αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους τῶν τριῶν ρητούς).

Ἐφαρμογαί.

1. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $(-3)+(+5)+(-4)+(+6)$.

Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω β' ἰδιότητα ἔχομεν:

$$\begin{aligned}(-3)+(+5)+(-4)+(+6) &= (+6)+(+5)+(-4)+(-3)\\ &= [(+6)+(+5)]+[(-4)+(-3)]\\ &= (+11)+(-7)=+4\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ β' ἰδιότης καὶ ἡ προσεταιριστικότης τῆς προσθέσεως μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικοὺς καὶ νὰ καταλήξωμεν εἰς ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων ρητῶν ἀριθμῶν.

2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$\left(+\frac{5}{2}\right)+(-3)+\left(+\frac{8}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{8}{2}\right)$$

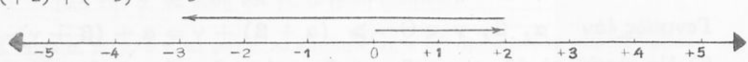
Ἔχομεν:

$$\underbrace{\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)}_{+\frac{6}{2}}+\underbrace{\left(+\frac{8}{2}\right)+\left(-\frac{8}{2}\right)}_{0}+(-3)=$$

$$=\left(+\frac{6}{2}\right)+0+(-3)=(+3)+(-3)=0$$

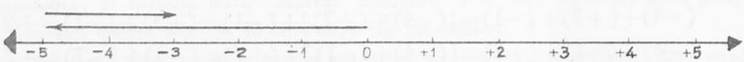
3. Κατωτέρω δίδεται γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν ἰδιοτήτων (ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική) τῆς προσθέσεως.

$(+2)+(-5)=-3$



σχ. 23.

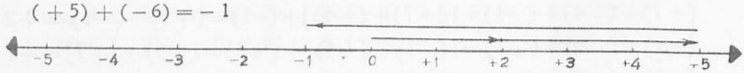
$(-5)+(+2)=-3$



σχ. 24.

$[(+2)+(+3)]+(-6)$

$(+5)+(-6)=-1$

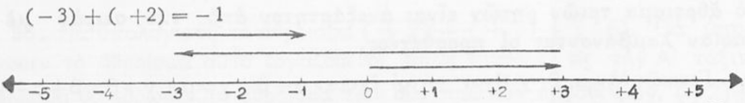


$(+2)+[(+3)+(-6)]$

$[(+3)+(-6)]+(+2)$

σχ. 25.

$(-3)+(+2)=-1$



σχ. 26.

Σημείωσις.

Συμφωνοῦμεν εἰς ἕνα ἄθροισμα νὰ παραλείπωμεν τὸ σύμβολον τῆς προσθέσεως καὶ νὰ γράφωμεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὸ πρόσημόν των.

Π.χ. ἀντὶ νὰ ἔχωμεν $(+6)+(-5)+(+2)$

γράφομεν $+6 \quad -5 \quad +2$ ἢ $6-5+2$

Ὅταν λοιπὸν λέγωμεν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$-3+4-12+5$, ἐννοοῦμεν τὸ $(-3)+(+4)+(-12)+(+5)$

Π. χ. $-3+4-12+5=(-3)+(+4)+(-12)+(+5)=(+4)+(+5)+(-12)+(-3)=$

$$(+9)+(-15) = -6$$

Ἀσκήσεις

60. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

α) $(-10)+(-11)+(-12)+(+13)+(+14)$

β) $(+15)+(-7)+(+3)+(-5)+(-4)$

γ) $(-4{,}2)+(+3{,}7)+(-2{,}6)+(+1)$

δ) $\left(+\frac{27}{5}\right)+\left(-\frac{23}{6}\right)+\left(+8\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{7}{15}\right)+\left(-8\frac{2}{3}\right)$

61. α) Ἐὰν $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-5\frac{3}{4}$, $\gamma=-\frac{4}{12}$ καὶ $\delta=+6$ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $-\frac{4}{5}+\frac{2}{10}-3\frac{1}{2}+1$

γ) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $16-7+5\frac{1}{6}-13\frac{1}{3}-1$

δ) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $-15+15{,}5-\frac{1}{2}+2{,}3-0{,}3$

62. Νὰ συγκριθοῦν τὰ δύο κατωτέρω ἀθροίσματα :

α) $[(-4)+(+8)+(-6)]+(-3)$, $(-4)+(+8)+[(-6)+(-3)]$

β) ὁμοίως τά : $(-4)+(+12)+(-13)$, $(-4)+(+20)+(-8)+(-13)$

63. Ἐὰν α, β, γ, εἶναι ῥητοί, νὰ δειχθῇ διὰ παραδειγμάτων ὅτι ἐκ τῆς ἰσότητος

$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ συνεπάγεται ἡ ἰσότης $\alpha=\beta$.

3. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΡΗΤΩΝ

§ **37**. *α) Νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν ἀθροισμάτων* $(+6)+(+3)$ *καὶ* $(-6)+(-3)$ *πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων αὐτῶν.*

Γνωρίζομεν ὅτι $(+6)+(+3)=+9$ καὶ $(-6)+(-3)=-9$.

Ἐπίσης ὅτι $6=|+6|=|-6|$, $3=|+3|=|-3|$ καὶ $9=|+9|=|-9|$.

Ἐπειδὴ ὅμως $6+3=9$

ἔχομεν $|+6|+|+3|=|+9|$ καὶ $|-6|+|-3|=|-9|$

ἢ $|+6|+|+3|=|(+6)+(+3)|$ καὶ $|-6|+|-3|=|(-6)+(-3)|$

ἢ $|(+6)+(+3)|=|+6|+|+3|$ καὶ $|(-6)+(-3)|=|-6|+|-3|$

῞Ωστε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ὁμοσήμων ρητῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.

Γενικῶς ἐὰν οἱ ρητοὶ α, β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχομεν:

$$\underbrace{|\alpha+\beta|}_{\substack{\downarrow \\ \text{ἀπόλυτος τιμὴ} \\ \text{ἀθροίσματος}}} = \underbrace{|\alpha|+|\beta|}_{\substack{\downarrow \\ \text{ἄθροισμα ἀπο-} \\ \text{λύτων τιμῶν}}}$$

β) Νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος $(+8)+(-6)$ *πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων αὐτοῦ.*

῎Εχομεν: $|(+8)+(-6)|=|+2|=2$ καὶ

$|+8|+|-6|=8+6=14$ ᾿Εκ τούτων συνάγεται ὅτι:

$$|(+8)+(-6)|<|+8|+|-6|$$

῞Ωστε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἑτεροσήμων ρητῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.

Γενικῶς ἐὰν οἱ ρητοὶ α, β εἶναι ἑτερόσημοι, ἔχομεν:

$$|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$$

Παραδείγματα :

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $|(-10)+(+3)|<|-10|+|+3|$

῎Εχομεν: $|(-10)+(+3)|=|-7|=7$ καὶ $|-10|+|+3|=10+3$

᾿Επειδὴ $7<10+3 \Rightarrow |(-10)+(+3)|<|-10|+|+3|$

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\left|\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right|<\left|+\frac{3}{5}\right|+\left|-\frac{3}{5}\right|$

῎Εχομεν :

$\left|\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right|=|0|=0$ καὶ $\left|+\frac{3}{5}\right|+\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$

῎Αρα: $$\left|\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\right|<\left|+\frac{3}{5}\right|+\left|-\frac{3}{5}\right|$$

᾿Ανακεφαλαίωσις :

§ **38**. ᾿Εκ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν «**πρόσθεσιν τῶν ρητῶν**» συμπεραίνομεν ὅτι:

α. Δοθέντων δύο ρητῶν α καὶ β, ὑπάρχει **πάντοτε** ὁ ρητὸς $\alpha+\beta$.

Συμβολικῶς: $\alpha, \beta \in Q \Rightarrow (\alpha+\beta)\in Q$.

῎Ητοι:

᾿Εὰν α καὶ β ὁμόσημοι, τότε ὁ $(\alpha+\beta)$ εἶναι ὁμόσημος πρὸς αὐτοὺς μὲ ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$$

Ἐὰν α, β ἑτερόσημοι, τότε ὁ $(\alpha+\beta)$ εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὸν ρητὸν μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν **τῶν προσθετέων**.

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|-|\beta| \quad \text{ἐὰν} \quad |\alpha|>|\beta|$$
$$|\alpha+\beta|=|\beta|-|\alpha| \quad \text{ἐὰν} \quad |\alpha|<|\beta|$$

β. Τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν εἶναι εἷς καὶ μόνον εἷς ρητὸς (μονότιμον τῆς προσθέσεως).

γ. Ἰσχύει ἡ μεταθετικότης εἰς τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν.

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

δ. Δοθέντων τῶν ρητῶν α, β, γ ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

ε) Ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν, τὸ μηδέν, τὸ ὁποῖον εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως.

Ἐὰν $\alpha \in Q$ εἶναι : $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$

στ) Διὰ κάθε ρητὸν ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον εἷς ἄλλος ρητὸς ἀντίθετος (ἢ συμμετρικὸς) τούτου.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

Ἐὰν α εἶναι ἀπόλυτος ἀριθμός, ὁ ἀντίθετος τοῦ $+\alpha$ εἶναι ὁ $-\alpha$ καὶ

$$(+\alpha)+(-\alpha)=0$$

Ἀσκήσεις

64. Δι' ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων νὰ συγκρίνητε τὸ $|\alpha+\beta+\gamma|$ πρὸς τὸ $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$, α) ἐὰν α, β, γ εἶναι ὁμόσημοι καὶ β) ἐὰν εἶναι ἑτερόσημοι.

65. Νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἑτεροσήμων ρητῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν. Δηλαδὴ ἐὰν α, β ἑτερόσημοι νὰ συγκριθῇ τὸ

$|\alpha+\beta|$ πρὸς τὸ $|\alpha|-|\beta|$, ἐὰν $|\alpha|>|\beta|$ ἢ τὸ

$|\alpha+\beta|$ πρὸς τὸ $|\alpha|-|\beta|$, ἐὰν $|\alpha|<|\beta|$.

66. Ποῖοι ρητοὶ δύνανται νὰ ἀντικαταστήσουν τὸ χ εἰς τὰς κάτωθι ἰσότητας:

α) $\left|\left(+\frac{3}{4}\right)+\chi\right|=\left|+\frac{3}{4}\right|+\left|+\frac{1}{4}\right|$ β) $|(-3)+\chi|=|-3|+|-1|$

γ) $\left|(+5)+\left(+\frac{1}{2}\right)\right|=|+5|+|\chi|$

δ) $\left|\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)\right|=\left|-\frac{5}{8}\right|+|\chi|$

67. Ποῖον συμπέρασμα προκύπτει διὰ τοὺς ρητοὺς α καὶ β,

ἐὰν α) $\alpha+\beta=0$

β) $\alpha+\beta=\alpha$

68. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

α) $(-12)+(-18)+(+24)+(+30)+(-36)$

β) $\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{7}{4}\right)+\left(+\frac{11}{2}\right)+\left(+\frac{10}{16}\right)+(-1)$

γ) $\left(-\frac{4}{9}\right)+(+2)+\left(-\frac{25}{6}\right)+\left(-\frac{14}{3}\right)+\left(+\frac{8}{18}\right)+(+1)$

69. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

α) $-4-6+8-10+14-20$ β) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1$

γ) $5+\frac{18}{9}-\frac{15}{3}+\frac{21}{7}-\frac{24}{6}-2$ δ) $1+\frac{5}{12}-\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-2.$

70. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀθροισμάτων :

α) $[(+3)+(-8)+(+2)+(-1)]+[(-7)+(+10)+(-2)]$

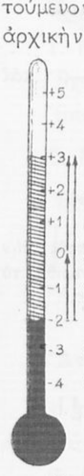
β) $(-1+3-8+12)+(5-7-13)$

71. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις : α) $(-2)+\chi=+3$ καὶ β) $\chi+\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

4. Η ΠΡΑΞΙΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ **39. Πρόβλημα.** *Τὴν πρωΐαν τὸ θερμόμετρον ἐδείκνυεν* -2^β *καὶ τὴν μεσημβρίαν* $+3^\beta$. *Κατὰ πόσους βαθμοὺς μετεβλήθη ἡ θερμοκρασία ;*

Ἔστω ὅτι ἡ θερμοκρασία μετεβλήθη κατὰ χ^β. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον πρέπει ἀπὸ τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν $+3^\beta$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἀρχικὴν θερμοκρασίαν -2^β



σχ. 27

Ἔχομεν λοιπὸν $\chi^\beta=(+3)^\beta-(-2)^\beta$ ἢ

$$\chi=(+3)-(-2)$$

Ἡ τιμὴ τοῦ χ δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς λύσις τῆς ἐξισώσεως $(-2)+\chi=+3$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ πρόβλημα : «Ποῖον ρητὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν (-2) διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν $+3$».

Ἐμάθομεν εἰς τὴν Α΄ τάξιν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ εἰς τὸ σύνολον Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Δηλαδὴ καὶ εἰς τοὺς νέους ἀριθμοὺς **ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, κατὰ τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ρητοὶ καὶ εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον, δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον.**

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν :

$$(+3)-(-2)=\chi \iff (-2)+\chi=+3$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὴν διαφορὰν $(+3)-(-2)$ κάμνομεν τὰς ἑξῆς σκέψεις εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα : Τὸ θερμόμετρον δεικνύει -2^β ἄρα πρέπει νὰ ἀνέλθῃ 2^β ἡ θερμοκρασία διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μηδὲν καὶ κατόπιν νὰ ἀνέλθῃ 3^β. Ἤτοι πρέπει νὰ ἀνέλθῃ ἡ θερμοκρασία κατὰ 5^β

Ἄρα $\chi^\beta=(+2)^\beta+(+3)^\beta=+5^\beta$. Συνεπῶς ἡ διαφορὰ $(+3)-(-2)=(+2)+(+3)$ ἢ $(+3)-(-2)=(+3)+(+2)$.

Ὥστε **ἡ διαφορὰ δύο ρητῶν εὑρίσκεται, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.** Ἑπομένως καὶ ἡ ἐξίσωσις $(-2)+\chi=+3$ ἐπιλύεται ὡς ἑξῆς:

$$(-2)+\chi=+3 \Longleftrightarrow \chi=(+3)-(-2) \Longleftrightarrow \chi=(+3)+(+2) \Longleftrightarrow \chi=+5$$

Χρησιμοποιοῦμεν τώρα τὴν ἰδιότητα $\alpha=\beta \Longleftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma \in Q)$ διὰ νὰ αἰτιολογήσωμεν γενικώτερον τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως $(-2)+\chi=+3$ ἢ τὴν εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς $\chi=(+3)-(-2)$.

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς $(-2)+\chi=+3$ τὸν ἀντίθετον τοῦ -2 καὶ ἔχομεν:

$$\begin{aligned}(-2)+\chi=+3 \Longleftrightarrow\ & [(-2)+\chi]+(+2)=+3+(+2)\\ & [\chi+(-2)]+(+2)=+3+(+2)\\ & \chi+[(-2)+(+2)]=+3+(+2)\\ & \chi+0=+3+(+2)\\ & \chi=+3+(+2)=+5\end{aligned}$$

Ὥστε $\chi=(+3)-(-2)=(+3)+(+2)$.

Δηλαδὴ διαπιστοῦται ὅτι διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ρητὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετόν του. ($-\alpha=$ ἀντίθετος τοῦ α). Ἐπειδὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ὑπάρχει πάντοτε ὁ ἀντίθετος δοθέντος ἀριθμοῦ, ὑπάρχει πάντοτε καὶ ἡ διαφορὰ δύο ρητῶν καὶ ἑπομένως ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πάντοτε δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον αὐτό.

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις μονότιμος, διότι τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μονότιμον.

Ὥστε, ἐὰν α καὶ β εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, καλοῦμεν διαφορὰν $\alpha-\beta$ τὸν ρητὸν γ, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ $\alpha+$(ἀντίθετος τοῦ β).

Ἔχομεν $\gamma=\alpha+(\text{ἀντίθ. τοῦ } \beta) \Longrightarrow \gamma+\beta=\alpha+\underbrace{(\text{ἀντίθ. τοῦ } \beta)+\beta}_{0}$

$$\Longrightarrow \gamma+\beta=\alpha$$

Συμβολικῶς: $\boxed{\text{Ἐὰν } \alpha,\ \beta \in Q:\ \alpha-\beta=\gamma \Longleftrightarrow \beta+\gamma=\alpha,\ \ \gamma \in Q.}$

Ἐφαρμογαί:

1. $\alpha-0=\alpha+0=\alpha$ (διότι ὁ ἀντίθετος τοῦ μηδενὸς εἶναι τὸ μηδέν).
   $(-3)-(-3)=(-3)+(+3)=0.$ Γενικῶς $\alpha-\alpha=0,\ (\alpha \in Q)$

2. $0-(+3)=0+(-3)=-3$
   $0-(-3)=0+(+3)=+3$
   $0-\alpha=0+(-\alpha)=-\alpha \qquad (\alpha \in Q)$

Ἐπειδὴ $0-\alpha=0+$(ἀντίθ. τοῦ α), **συμβολίζομεν** τὸν ἀντίθετον ρητοῦ α μὲ $-\alpha$.

Ὥστε διὰ κάθε ρητὸν α ἔχομεν: $\alpha-0=\alpha,\ 0-\alpha=-\alpha,\ \alpha-\alpha=0$

3. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί:

$$(+6)-(-7)=(+6)+(+7)=+13$$
$$(-7)-(+6)=(-7)+(-6)=-13$$
$$\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)=+\frac{2}{4}$$
$$\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{2}{4}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι (ἐὰν $\alpha, \beta \in Q$) οἱ ρητοὶ $\alpha-\beta$ καὶ $\beta-\alpha$ εἶναι ἀντίθετοι.

Ἀσκήσεις

72. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί :

α) $(-10)-(+25)$, β) $(+25)-(-10)$

γ) $(+14)-(+11)$, δ) $(+11)-(+14)$

ε) $(-5)-(+5)$, ζ) $(-18)-(-18)$

ζ) $\left(+\frac{3}{16}\right)-\left(-\frac{3}{16}\right)$, η) $\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)$

73. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $\chi-\left(+\frac{7}{3}\right)=-1$, δ) $\left(-\frac{4}{15}\right)+\chi=-1$, ζ) $\chi-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$

β) $\chi+\left(-\frac{3}{20}\right)=-\frac{1}{5}$, ε) $-\chi-\left(+\frac{13}{2}\right)=-2$, η) $-\chi-(-12)=-12$

γ) $\chi-(-13)=-13$, στ) $-4-\chi=-14$, θ) $+3-\chi=-3$

74. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραὶ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἰσότης «Μειωτέος = ἀφαιρετέος + διαφορά».

α) $\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)$, β) $(-5)-\left(-\frac{2}{3}\right)$, γ) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)$

δ) $\left(+\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$, ε) $\left(-\frac{10}{7}\right)-(-1)$, στ) $(+3)-\left(-\frac{11}{2}\right)$,

5. ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟΝ (—) ΩΣ ΣΥΜΒΟΛΟΝ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣΗΜΟΝ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ **40.** Εἴδομεν §36 σημείωσις, ὅτι ἓν ἄθροισμα π.χ. τὸ $(+3)+(-2)$ γράφεται συντόμως $+3-2$ ἢ $3-2$.

Τὸ πλὴν πρὸ τοῦ δύο θεωρεῖται ὡς πρόσημον.

Δύναται ὅμως τὸ πλὴν νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς σύμβολον ἀφαιρέσεως τοῦ θετικοῦ δύο ἀπὸ τὸν τρία διότι :

$$3-2=(+3)-(+2)=(+3)+(-2)$$

'Επίσης διὰ τὸ $3-7$ ἔχομεν: $3-7=(+3)+(-7)=-4$

πρόσημον τοῦ ἑπτὰ

Πρόσθεσις τοῦ -7 εἰς τὸν $+3$

$$\mathbf{3}-\mathbf{7}=(+3)-(+7)=(+3)+(-7)=-4$$

Σύμβολον ἀφαιρέσεως

Ἀφαίρεσις τοῦ $+7$ ἀπὸ τὸν $+3$

ἢ τοῦ 7 ἀπὸ τὸν 3

Συνεπῶς τὸ σύμβολον πλὴν $(-)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύμβολον ἀφαιρέσεως ἢ ὡς πρόσημον.

Παραδείγματα

1. Εἰς τὸ σύμβολον $-(+2)$ τὸ πλὴν θεωρεῖται ὡς πρόσημον τοῦ $(+2)$ ἀλλὰ καὶ ὡς σύμβολον ἀφαιρέσεως τοῦ $+2$.

σύμβολον ἀφαιρέσεως τοῦ θετικοῦ πέντε ἀπὸ τὸ μηδὲν

2. $0-5=0-(+5)=0+(-5)=-5$

$$0-5=0+(-5)=-5$$

πρόσημον τοῦ πέντε

πρόσημον

3. $-8-3=(-8)-(+3)=(-8)+(-3)=-11$

σύμβ. ἀφαιρέσεως.

πρόσημον

$$-8-3=-(+8)-(+3)=+(-8)+(-3)=(-8)+(-3)=-11$$

σύμβολον ἀφαιρέσεως

4. Ἔχομεν: $-4-10=(-4)+(-10)=-14=-(+14)=-[(+4)+(+10)]$

Δηλαδή: $-[(+4)+(+10)]=(-4)+(-10)$, ἀλλὰ $(+4)+(+10)=$ $=[(+4)+(+10)]$ ἢ $[(+4)+(+10)]=(+4)+(+10)$

Ὥστε **τὸ ἀντίθετον ἀθροίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων προσθετέων.**

§ **41. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως** (εὐκόλως ἐπαληθεύονται αἱ κάτωθι ἰδιότητες).

Ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ρητόν.

$$\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma\in Q)$$
$$\alpha-\beta=(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$$

2. Πῶς ἀφαιρῶ ρητὸν ἀπὸ ἄθροισμα.

$$(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma) \text{ ἢ}$$
$$(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta$$

3. Πῶς ἀφαιρῶ ἀριθμὸν ἀπὸ διαφορὰν

$$(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma) \text{ ἢ}$$
$$(\alpha-\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)-\beta$$

4. Πῶς ἀφαιρῶ ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμὸν

$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma \text{ ἢ}$$
$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\gamma)-\beta \text{ ἢ}$$
$$\alpha-(\beta+\gamma)=\alpha+[(-\beta)+(-\gamma)]$$ (βλέπε προηγούμενον παράδ. 4).

5. Πῶς ἀφαιρῶ διαφορὰν ἀπὸ ἀριθμόν.

$$\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha-\beta)+\gamma \text{ ἢ}$$
$$\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$$

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἰσχύουν χωρὶς κανένα περιορισμόν, διότι ἡ διαφορὰ ὑπάρχει πάντοτε εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

6. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἰδιότης: $\alpha=\beta \Longrightarrow \alpha-\gamma=\beta-\gamma$.

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $-5=-\frac{10}{2}$ τὸν -3.

α′ μέλος: $(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2$

β′ μέλος: $\left(-\frac{10}{2}\right)-(-3)=\left(-\frac{10}{2}\right)+(+3)=-\left(\frac{10}{2}-3\right)=-(5-3)=-2$

Ἄρα $(-5)-(-3)=\left(-\frac{10}{2}\right)-(-3)$.

Συνεπῶς ἐκ τῆς $-5=-\frac{10}{2} \Longrightarrow (-5)-(-3)=\left(-\frac{10}{2}\right)-(-3)$

Ἐφαρμογή.

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $-8+3=-5$ τὸν 3.

Ἔχομεν:
$$-8+3-3=-5-3$$
$$-8+0=-5-3$$
$$-8=-5-3$$

Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὰς ἰσότητας:
$$-8+3=-5$$
$$-8=-5-3$$

καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι: Ἐὰν μεταφέρωμεν ὅρον ἀπὸ τὸ ἓν μέλος ἰσότητος εἰς τὸ ἄλλο, ἀλλάσσομεν τὸ πρόσημόν του.

7. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Q$, νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἰδιότης $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta \Longrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$ δι' ἀριθμητικοῦ παραδείγματος. (Αὕτη ἐκφράζει τὸ μονότιμον τῆς διαφορᾶς).

Σημείωσις. Ἡ ἐργασία κατὰ τὴν ὁποίαν, ἐὰν $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta \Longrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$ λέγεται ἀφαίρεσις τῶν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη.

Ἀσκήσεις

75. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

α) ἐὰν τὸ (–) ληφθῇ ὡς σύμβολον ἀφαιρέσεως καὶ

β) ἐὰν τὸ πλὴν ληφθῇ ὡς πρόσημον.

α) $7 - 10$, β) $5 - \frac{1}{2}$, γ) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$, δ) $-17 - 19$, ε) $-6 - \frac{2}{5}$

76. Ἐπαληθεύσατε τὰς ἰδιότητας 1, 2, 3, 4, 5 τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τῶν κάτωθι ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων.

1. $\alpha = +5$, $\beta = -12$ καὶ $\gamma = +7$
2. $\alpha = -\frac{3}{5}$, $\beta = +1$ καὶ $\gamma = -\frac{2}{3}$
3. $\alpha = 5{,}6$, $\beta = 7{,}2$ καὶ $\gamma = -11$

77. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

α) $7 - (-3)$, β) $(7+8) - (-3+8)$, γ) $(7-5) - (-3-5)$,

δ) $[12 + (-2) + 3] - (-4)$ ε) $-7 - (7+3)$

στ) $-12 - [5 - (-2)]$, ζ) $(-3-7) - 9$, η) $(15 - 21) + (-4)$

78. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ α, β, γ, δ, χ, ψ ἐκ τῶν :

1. $\alpha = (-4+7) + (5-12)$, 2. $\beta = (-4+5) - [7 + (-12)]$
3. $\gamma = (-5+9) + (-5-9)$, 4. $\delta = (-5+9) - (-5-9)$
5. $-\chi - 3 = -5$, 6. $\psi + 4 = -7$

79. Νὰ εὑρεθοῦν δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

$A = \{\chi / \chi + 3 = 3\}$, $B = \{\psi / \psi - 5 = -7\}$, $\Gamma = \{\omega / 2 - \omega = -3\}$

80. Νὰ δοκιμάσητε, ἐὰν τὰ κάτωθι ζεύγη τιμῶν α καὶ β ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα

$$|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta|.$$

1. $\alpha = 7$, $\beta = 2$ 5. $\alpha = 7$, $\beta = -2$
2. $\alpha = 2$, $\beta = 7$ 6. $\alpha = 2$, $\beta = -7$
3. $\alpha = -7$, $\beta = -2$ 7. $\alpha = -2$, $\beta = -7$
4. $\alpha = -7$, $\beta = 2$ 8. $\alpha = -2$, $\beta = 7$

6. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

§ **42.** Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ παράστασις :

$$(+6) - (-5) + (-3) - (+4)$$

Ἐκτελοῦμεν κατὰ σειρὰν τὰς σημειουμένας πράξεις :

$$\underbrace{(+6) - (-5)} + (-3) - (+4)$$

$$\underbrace{(+6)+(+5)}+(-3)-(+4)$$

$$\underbrace{(+11)+(-3)}-(+4)$$

$$(+8)-(+4)=(+8)+(-4)=+4$$

Τὸ ἀποτέλεσμα $+4$ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀριθμ. παραστάσεως. Γενικῶς ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι ρητοὶ ἔχομεν:

$\alpha-\beta+\gamma-\delta=[(\alpha-\beta)+\gamma]-\delta$ χωρὶς περιορισμούς, διότι αἱ ἀφαιρέσεις εἰς τὸ σύνολον Q εἶναι πάντοτε δυναταί.

Ἡ ἀριθμ. παράστασις: α) $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$

καθὼς καὶ αἱ: β) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)+(-2)$

γ) $(-1)+(-3)+(-6)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

δ) $12-6+7-14$

λέγονται **ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα.**

Ὥστε κάθε ἀριθμητικὴ παράστασις, ἡ ὁποία περιέχει ρητοὺς ἀριθμούς, συνδεομένους μὲ τὸ + ἢ τὸ — λέγεται ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (ἢ ἀριθμητικὸν πολυώνυμον.)

Τὰ ἀνωτέρω ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα β, γ εἶναι ἀθροίσματα πολλῶν προσθετέων (§35). Οἱ προσθετέοι αὐτῶν λέγονται καὶ ὅροι.

Ἐπίσης καὶ τὸ δ εἶναι ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων μὲ ὅρους: 12, -6, $+7$, -14 διότι:

$$12-6+7-14=12+(-6)+(+7)+(-14)$$

(ἁπλουστέρα μορφὴ ἀθροίσματος § 36 σημείωσις 4).

Τὸ α′ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$ δύναται νὰ γραφῇ καί: $(+6)+(+5)+(-3)+(-4)$. Τοῦτο ἔχει ὅρους τούς: $+6$, $+5$, -3, -4, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὅροι καὶ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τιμὴν $+4$.

Ἐὰν εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα προσθέσωμεν τοὺς ἀντιθέτους τῶν ρητῶν, οἱ ὁποῖοι ἀφαιροῦνται, λαμβάνομεν ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων.

Παραδείγματα :

1. $-\frac{1}{5}+\left(-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)=\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)$

2. $7-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{3}{2}\right)+2=7+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+2$

3. $+8-(+7)-(-6)+(-5)+(+4)=+8+(-7)+(+6)+(-5)+(+4) =$

$$= 8-7+6-5+4$$

Παρατηρήσεις :

1. Ἕν ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς σειρᾶς τῶν ὅρων του (§36). Τοῦτο ἰσχύει καὶ εἰς ἕνα ἀλγ. ἄθροισμα, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀφαιροῦνται, μεταφέρουν πρὸ αὐτῶν, κατὰ τὴν ἐναλλαγήν των, τὸ σύμβολον τῆς ἀφαιρέσεως .Π.χ.

$$\underbrace{(+6)}_{\text{προστίθ.}} - \underbrace{(-5)}_{\text{ἀφαιρ.}} + \underbrace{(-3)}_{\text{προστίθ.}} - \underbrace{(+4)}_{\text{ἀφαιρ.}} = - \underbrace{(-5)}_{\text{ἀφαιρ.}} + \underbrace{(+6)}_{\text{προστίθ.}} - \underbrace{(+4)}_{\text{ἀφαιρ.}} + \underbrace{(-3)}_{\text{προστίθ.}}$$

Δηλαδὴ κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστίθεται (ἢ ἀφαιρεῖται) εἰς τὸ α' μέλος, πρέπει νὰ προστίθεται (ἢ νὰ ἀφαιρῆται) καὶ εἰς τὸ β' μέλος.

Εἴπομεν ὅτι ὅροι τοῦ $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$ εἶναι οἱ ὅροι τοῦ $(+6)+(+5)+(-3)+(-4)$. Δηλαδὴ οἱ : $+6,\ +5,\ -3,\ -4$. .

Ἐπειδή :

$$\begin{aligned} (+6) &= +(+6) = +6 \\ -(-5) &= +(+5) = +5 \\ +(-3) &= +(-3) = -3 \\ -(+4) &= +(-4) = -4 \end{aligned}$$

δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ὅρους τοῦ ἀλγεβρ. ἀθροίσματος $(+6)-(-5)+(-3)-(+4)$ τούς : $+6,\ -(-5),\ -3,\ -(+4)$

Σημείωσις : Πρὸς ἀποφυγὴν σφαλμάτων ἡ ἀντιμετάθεσις τῶν ὅρων ἀλγ. ἀθροίσματος γίνεται συνήθως, ὅταν τοῦτο μετατραπῆ εἰς ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων.

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι κάθε θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ $+$ (ἢ οὐδὲν πρόσημον) προστίθεται π.χ. οἱ ἀριθμοὶ $+(+6)$, $+(-3)$, $(+6)$ προστίθενται.

Ἐὰν ὑπάρχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ $-$, ἀφαιρεῖται δηλαδὴ προστίθεται ὁ ἀντίθετός του. Π.χ. $-(-5)=+(+5)=+5=5$

2. Ἔχομεν :

$$(+6)-(-5)+(-3)-(+4)=(+6)+(+5)+(-3)+(-4)=6+5-3-4$$

$$(+6)-(-5)-(+3)+(-4)=(+6)+(+5)+(-3)+(-4)=6+5-3-4$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἁπλουστευμένη γραφὴ ἑνὸς ἀθροίσματος δύναται νὰ προέρχεται ἀπὸ ἓν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἔχει γραφῆ κατὰ διαφόρους τρόπους.

Π.χ. τό : $-6+3-1+2=(-6)+(+3)+(-1)-(-2)$ ἢ

$$=-(+6)-(-3)+(-1)+(+2) \text{ ἢ}$$

$$=+(-6)+(+3)-(+1)+(+2) \text{ κ.λ.π.}$$

'Εφαρμογαί.

1. α) $(-3)+(-6)-(-8)=(-3)+(-6)+(+8)=(-9)+(+8)=-1$
 β) $(+3)-(-6)-(+8)=(+3)+(+6)+(-8)=(+9)+(-8)=+1$

Τὰ ἀνωτέρω ἔχουν ἀντιθέτους ὅρους καὶ λέγονται ἀντίθετα.

2. Προσθέτομεν δύο ἀλγ. ἀθροίσματα π.χ. : $[(-4)+(-5)-(-10)]+[-(-6)-(+9)]=$

$$[(-4)+(-5)+(+10)]+[+(+6)+(-9)]=(-4)+(-5)+(+10)+(+6)+(-9)=$$
$$=(+16)+(-18)=-2$$
$$[\ (-9)+(+10)\ ]+[\ \ -3\ \ ]=[+1]+[-3]=-2.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀνωτέρω ἀθροισμάτων εὑρέθη κατὰ δύο τρόπους.

α) Ἐσχηματίσαμεν ἓν ἄθροισμα ἀπὸ τοὺς ὅρους τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων, τοῦ ὁποίου εὕρομεν τὴν τιμὴν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 36 ἐφαρμογὴ 1) καὶ

β) Εὕρομεν τὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων καὶ κατελήξαμεν εἰς ἄθροισμα δύο ρητῶν.

3. $[(-4)+(-5)-(-10)]-[-(-6)-(+9)]=[(-4)+(-5)+(+10)]-$
$-[+(+6)+(-9)]=[(-4)+(-5)+(+10)]+[+(-6)+(+9)]=[+1]+[+3]=+4.$

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα προσθέτομεν τὸ ἀντίθετον αὐτοῦ.

'Ασκήσεις

81. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

α) $(-4)-(+3)+(-15)$, γ) $\frac{7}{2}-(+2)+\left(+\frac{1}{2}\right)-(+2{,}5)-(-0{,}5)$

β) $-(+10)-8-(-16)+(-7)+1$, δ) $-\frac{3}{11}-\left(-\frac{4}{22}\right)+(-1)-\left(+\frac{8}{11}\right)$

82. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

α) $[-5-(-9)+(-13)+(+17)]+(-13)$

β) $\left[(-12)+(+7)-(+19)-\left(-\frac{29}{2}\right)\right]+\left(+\frac{1}{2}\right)$

γ) $\left[\frac{1}{2}-(-2)+\left(-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)-(+3)\right]$

δ) $-\frac{38}{5}-\left[1-(+7)-\left(-\frac{2}{5}\right)\right]$

ε) $\left[+3-(+6)-\left(-\frac{22}{3}\right)\right]-\left[\left(-\frac{2}{3}\right)-(-3)+(+2)\right]$

83. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

α) $\alpha+\beta+\gamma$, γ) $\alpha-\beta+\gamma$, ε) $\alpha-\beta-\gamma$ ζ) $-\alpha+\beta+\gamma$,
β) $-\alpha-\beta-\gamma$, δ) $-\alpha-\beta+\gamma$, στ) $-\alpha+\beta-\gamma$, ἐὰν

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{3}{4} \text{ καὶ } \gamma=1$$

7. Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ Q. ΔΙΑΤΑΞΙΣ

§ **43.** *Τί σημαίνει ἡ σχέσις $\alpha>\beta$; Τί ἡ $\gamma<\delta$;*

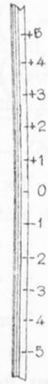
Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ σχέσις $\alpha>\beta$ σημαίνει «ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β». Ἡ σχέσις αὐτὴ λέγεται ἀνισότης μὲ πρῶτον μέλος τὸν α καὶ δεύτερον μέλος τὸν β.

Ἡ ἀνισότης $\gamma < \delta$ ἐκφράζει ὅτι «ὁ γ εἶναι μικρότερος τοῦ δ».

Αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\varepsilon > \zeta$ εἶναι ὁμόστροφοι (ἢ τῆς αὐτῆς φορᾶς).

Αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\gamma < \delta$ εἶναι ἑτερόστροφοι (ἢ ἀντιθέτου φορᾶς).

Παρατηροῦμεν τὸ σχῆμα 28, τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἓν μέρος τῆς θερμομετρικῆς κλίμακος. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ θερμοκρασία $+3^{\beta}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θερμοκρασίας 0^{β} καὶ ὅτι ἡ θερμοκρασία 0^{β} εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θερμοκρασίας -2^{β}.



σχ. 28.

Ἐπίσης ἡ θερμοκρασία -1^{β} εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θερμοκρασίας -4^{β}.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὰ ἑξῆς:

1. Κάθε θετικὸς ρητὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενὸς ἢ ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι μικρότερον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ.

$$\alpha \in Q \text{ καὶ } \alpha \text{ εἶναι θετικὸς} \iff \alpha > 0$$

2. Ὁ μηδὲν εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ ἢ ὅτι κάθε ἀρνητικὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός.

$$\beta \in Q \text{ καὶ } \beta \text{ εἶναι ἀρνητικὸς} \iff \beta < 0$$

3. Κάθε θετικὸς εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ.

$$\alpha \text{ εἶναι θετικὸς ρητὸς καὶ } \beta \text{ εἶναι ἀρνητικὸς} \Longrightarrow \alpha > \beta$$

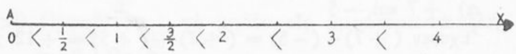
4. Μεταξὺ δύο θετικῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

$$\alpha, \gamma \text{ θετικοὶ καὶ } |\alpha| > |\gamma| \Longrightarrow \alpha > \gamma$$

5. Μεταξὺ δύο ἀρνητικῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

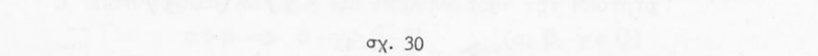
$$\beta, \delta \text{ ἀρνητικοὶ καὶ } |\beta| > |\delta| \Longrightarrow \delta < \beta$$

Γνωρίζομεν ὅτι κάθε ἀριθμὸς τοποθετημένος δεξιώτερον ἄλλου ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ.



σχ. 29.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς ρητούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι τοποθετημένοι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



σχ. 30

§ **44**. *Νὰ συγκριθῇ ἡ διαφορὰ δύο ῥητῶν πρὸς τὸ μηδέν.*

$\left(+\frac{1}{2}\right)-0=\left(+\frac{1}{2}\right)+0=+\frac{1}{2}$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς

$0-(-1)=0+(+1)=+1$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς

$(+5)-(-2)=(+5)+(+2)=+7$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς

$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{12}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{12}{3}\right)=+\frac{10}{3}$ ἡ διαφορὰ εἶναι θετικ. ἀριθμ.

$\left(-\frac{5}{8}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right)=\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)=0$ ἡ διαφορὰ ἰσοῦται πρὸς μηδὲν

$(+3)-(+5)=(+3)+(-5)=-2$ ἡ διαφορὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

$(-6)-(-5)=(-6)+(+5)=-1$ ἡ διαφορὰ εἶναι ἀρνητ. ἀριθμὸς

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1. Ἡ διαφορὰ μικροτέρου ἀπὸ μεγαλυτέρου εἶναι θετικὸς ἀριθμός.
2. Ἡ διαφορὰ ἴσων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν.
3. Ἡ διαφορὰ μεγαλυτέρου ἀπὸ μικροτέρου εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἐπομένως διατυποῦμεν τὸν κάτωθι ὁρισμόν.

Ὁ ῥητὸς α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ῥητοῦ β ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν α — β εἶναι θετικὸς ἀριθμός, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν β ἐὰν α — β ἰσοῦται πρὸς μηδέν, εἶναι μικρότερος τοῦ β ἐὰν α — β εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Συμβολικῶς : $\alpha,\ \beta \in Q$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha-\beta>0 \iff \alpha>\beta \\ \alpha-\beta=0 \iff \alpha=\beta \\ \alpha-\beta<0 \iff \alpha<\beta \end{array}}$$

Ἐφαρμογή.

Νὰ συγκριθοῦν οἱ κάτωθι ἀριθμοί.

α) $+7$ καὶ -5

Ἔχομεν $(+7)-(-5)=(+7)+(+5)=+12>0$

Ἄρα $+7>-5$

β) -13 καὶ -12

Εἶναι $(-13)-(-12)=(-13)+(+12)=-1<0$

Ἐπομένως $-13<-12$

γ) $-\frac{12}{3}$ καὶ -4

Ἐπειδὴ $-\frac{12}{3}-(-4)=\left(-\frac{12}{3}\right)+(+4)=\left(-\frac{12}{3}\right)+\left(+\frac{12}{3}\right)=0$

$$\Longrightarrow -\frac{12}{3}=-4.$$

§ 45. **Ἰδιότητες.**

1. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τὰς ἀνισότητας

$+7>+2$ καὶ $+2>-10$ συνεπάγεται ἡ ἀνισότης $+7>-10$. Ἤτοι ἰσχύει ἡ μεταβ. ἰδιότης εἰς τὴν ἀνισότητα.

Γενικῶς: $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma \Longrightarrow \alpha>\gamma \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$

Τοῦτο δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma$ ἔχομεν ὅτι $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς καὶ $\beta-\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν: $\alpha-\beta+\beta-\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἀλλὰ $-\beta$ καὶ β ἀντίθετοι: ἄρα $\alpha\underbrace{-\beta+\beta}_{0}-\gamma=\alpha-0-\gamma=\alpha-\gamma$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἐπομένως $\alpha>\gamma$.

2. Ἐπειδὴ $+\frac{5}{9}>0$ καὶ ὁ ἀντίθετός του $-\frac{5}{9}<0$, ἔχομεν γενικῶς τὴν ἰσοδυναμίαν: $\alpha>0 \Longleftrightarrow -\alpha<0 \qquad (\alpha\in Q)$

3. Ἐπίσης ἐκ τῶν παραδειγμάτων:

$$-3-(-8)=-3+(+8)=+5, \qquad -3>-8$$
$$-8-(-3)=-8+(+3)=-5, \qquad -8<-3$$

Ἔχομεν: $\alpha>\beta \Longleftrightarrow \beta<\alpha \qquad (\alpha,\ \beta\in Q)$

Δικαιολόγησις:

Ἐὰν $\alpha>\beta$ συνεπάγεται $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός· ἀλλὰ τότε ὁ ἀντίθετός του $\beta-\alpha$ θὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Συνεπῶς $\beta<\alpha$

4. Ἐὰν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη ἀνισότητος προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ρητὸν εὑρίσκομεν ὁμόστροφον ἀνισότητα. Π.χ. $-5>-12$ προσθέτομεν τὸν -3: $-5+(-3)>-12+(-3)$ δηλαδὴ $-8>-15$.

Γενικῶς: $\alpha>\beta \Longleftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma\in Q)$

Δικαιολόγησις:

Ἐπειδὴ $\alpha>\beta \Longrightarrow \alpha-\beta>0$. Προσθέτομεν τὸ μηδὲν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη:

$$\alpha-\beta+0>0$$

$$\alpha-\beta+\gamma-\gamma>0 \Longrightarrow \alpha+\gamma-\beta-\gamma>0 \Longrightarrow \alpha+\gamma-(\beta+\gamma)>0 \Longrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$$

Ἐφαρμογή.

$\alpha+\beta>\gamma \Longleftrightarrow \alpha+\beta+(-\beta)>\gamma+(-\beta) \Longrightarrow \alpha>\gamma-\beta$. Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἓν μέλος ἀνισότητος μεταφέρωμεν ὅρον εἰς τὸ ἄλλο, ἀλλάσσομεν τὸ πρόσημόν του.

5. Διατυπώσατε λεκτικῶς καὶ ἐπαληθεύσατε τὴν ἰδιότητα:

$$\alpha>\beta \Longrightarrow \alpha-\gamma>\beta-\gamma \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma\in Q)$$

§ 46. Διάταξις

Ἐὰν δοθοῦν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοί, αὐτοὶ ἢ εἶναι ἴσοι ἢ ὁ εἷς εἶναι μικρότερος τοῦ ἄλλου.

Τὴν ἔκφρασιν: «..... εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος.....» συμβολίζομεν διὰ τοῦ $\leqslant$

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἰδιότητας τῆς ἀνισότητος καὶ τῆς ἰσότητος παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἰδιότητες :

$\alpha \leqslant \alpha$ ἀνακλαστική

$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$ ἀντισυμμετρική

$\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \gamma \Longrightarrow \alpha \leqslant \gamma$ μεταβατική

Τὴν σχέσιν $\leqslant$ λέγομεν διάταξιν τῶν ρητῶν κατὰ μέγεθος.

Σημείωσις : Κάθε σχέσις, ἡ ὁποία ἔχει τὰς ἰδιότητας «ἀνακλαστικήν», «ἀντισυμμετρικὴν» καὶ «μεταβατικὴν» λέγεται σχέσις διατάξεως.

Ἀσκήσεις :

84. Νὰ θέσητε τὸ κατάλληλον σύμβολον ἐκ τῶν : $>$, $<$, $=$ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν :
-2 καὶ -5, -1 καὶ $-\frac{3}{2}$, 0 καὶ -6 , $-\frac{5}{6}$ καὶ $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ καὶ 0, $-\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{1}{3}$,

$-\frac{2}{14}$ καὶ $-\frac{1}{7}$, $(-3+1)$ καὶ -8.

85. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς :
α) $-12+15-2 > 3-13+17-7$, β) $-2+12-5=2-3+10$, γ) $-10 > -\frac{21}{2}$

δ) $-50 < -\frac{1}{2}$, ε) $-\frac{3}{4} > 0$, στ) $0 < -20$, ζ) $-1+\frac{24}{5} > -0{,}6+4{,}2$,

η) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4} < 0{,}75-\frac{5}{8}$

86. Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος $\alpha+\beta > \gamma \Longrightarrow \alpha > \gamma-\beta$ νὰ δείξητε ὅτι :

$$\alpha+2 > 12 \Longrightarrow \alpha > 10$$
$$\beta-3 < 5 \Longrightarrow \beta < 8 \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$$
$$2-\gamma > 2 \Longrightarrow \gamma < 0$$

87. Δι' ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων νὰ δειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰδιότητες καὶ νὰ διατυπωθοῦν καὶ λεκτικῶς : $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in Q)$

$$\alpha > \beta \Longleftrightarrow -\alpha < -\beta$$
$$\alpha > \beta \text{ καὶ } \gamma = \delta \Longrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta$$
$$\alpha > \beta \text{ καὶ } \gamma > \delta \Longrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta$$

88. Νὰ προσθέσητε κατὰ μέλη τὰς κάτωθι ἀνισότητας :

α) $\begin{array}{l} -5 < -3 \\ 3 < 5 \end{array}$ β) $\begin{array}{l} -5 < -3 \\ -4 < -1 \end{array}$ γ) $\begin{array}{l} -5 < -3 \\ 1 < 3. \end{array}$

Τί παρατηρεῖτε ; Δύνασθε νὰ ἀφαιρέσητε κατὰ μέλη; Διατυπώσατε κανόνας.

'Ασκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

89. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α) $0 - \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} - 0$, $-3+4-6$, $-6+4-3$.

β) $-1-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}-1$, $-1-\left(-\frac{3}{2}\right)$, $-\frac{3}{2}-(-1)$

γ) $-1-11-111$, $-1+(-2-3)$, $-1-(-2-3)$

δ) $-30{,}3-15{,}7+\frac{63}{5}-10+\frac{1}{2}$, $17{,}7+12{,}5-9{,}4+\frac{2}{5}-1$

90. 'Απαντήσατε εἰς τὰ κατωτέρω ἐρωτήματα:

α) 'Εὰν $\alpha=\beta$ συνεπάγεται $|\alpha|=|\beta|$; 'Εὰν $|\alpha|=|\beta|$ τὶ συμπέρασμα ἐξάγεται διὰ τοὺς ρητοὺς α, β ;

β) Ποῖος ὁ ρητὸς χ, ὅταν $|\chi|=|-\frac{3}{7}|$;

γ) Διὰ τὸν ρητὸν γ ἀληθεύει ὅτι $\gamma=|-\gamma|$;

δ) Εἰς ποῖον ὑποσύνολον τοῦ Q ἀνήκει ὁ ρητὸς ψ, ἐὰν 1ον $\psi=|\psi|$, 2ον $0=|\psi|$ καὶ 3ον $-\psi=|\psi|$;

ε) Ποῖος ὁ ἀντίθετος τοῦ $\kappa-\lambda$ καὶ ποῖος τοῦ $-\mu+\nu$; $(\kappa, \lambda, \mu, \nu, \in Q)$.

91. 'Εὰν $\chi=-12+17-9$, $\psi=5-11+10$ καὶ $z=-19+22$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ α) $\chi+\psi-z$, β) $\chi-\psi+z$, γ) $-\chi+z+\psi$ καθὼς καὶ τὰ δ) $\chi+\psi+z$, ε) $(\chi+\psi)+z$, στ) $\chi+(\psi+z)$

92. 'Εὰν $\chi=-\frac{5}{6}+\frac{7}{3}-1$ καὶ $\psi=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+3$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ

α) $\chi+\psi$, β) $\chi-\psi$, γ) $-\chi+\psi$.

93. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ α) $-\alpha+\beta-\gamma$ $\qquad \alpha=-\frac{3}{2}$

β) $-\gamma+\beta-\alpha$ ἐὰν $\beta=-\frac{5}{3}$

γ) $-\alpha-\gamma+\beta$ $\qquad \gamma=+\frac{1}{6}$

94. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, -5, +\frac{1}{8}, +1, 0\right\}$ νὰ διαταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους.

95. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς;

α) $-4>-2$, β) $13>-31$, γ) $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$, δ) $-\frac{1}{5}<-1$

ε) $-\frac{3}{2}+5-1\neq 4-1{,}5$, στ) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\neq\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

96. Ποῖα ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\chi-5<-2$;

97. Διὰ παραδειγμάτων νὰ ἐπαληθεύσητε ὅτι:

'Εὰν $\alpha<\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.

98. 'Εὰν διὰ τοὺς ρητοὺς α, β ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\alpha>\beta$, νὰ ἐξετάσητε ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀντιθέτων τοῦ α καὶ β.

99. Ἂν $\chi \in Q$, $\psi \in Q+$, $z \in Q-$, νὰ εὑρεθοῦν δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα :

α) $\left\{\chi \,/\, \frac{5}{7} - \chi = -\frac{5}{7}\right\}$,β) $\left\{\psi/\psi - 3 = -1\right\}$, , γ) $\left\{\chi/ -\frac{3}{5} - \chi = -\frac{3}{5}\right\}$

δ) $\left\{\psi \,/\, \frac{1}{2} - \psi = 20\right\}$, ε) $\left\{\chi \,/\, -\frac{5}{2} + \chi = -\frac{5}{2}\right\}$, στ) $\left\{z \,/\, -\frac{2}{3} + z = -\frac{2}{3}\right\}$

100. Ἐὰν $\alpha = 0$, $\beta = -1$ καὶ $\gamma = -2$, νὰ ὑπολογισθοῦν τά :

1) $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha)$ καὶ 2) $-(\alpha - \beta) - (\beta - \gamma) - (\gamma - \alpha)$.

8. Η ΠΡΑΞΙΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ Q. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΡΗΤΩΝ

§ **47**. Εἰς τὰς μέχρι τοῦδε πράξεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, εἴδομεν ὅτι, διατηροῦνται αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

Διὰ τοῦτο θὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τοῦ πολ/σμοῦ

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ἀντιμεταθετικὴ

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha(\beta \cdot \gamma)$ προσεταιριστικὴ

$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ ἐπιμεριστική.

1. Ἐπειδὴ $3 \cdot 5 = 15$ εἶναι καὶ

$$(+3).(+5) = +15$$

Δηλαδὴ τὸ γινόμενον δύο θετικῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

2. Εἰς τὸν παραπλεύρως πίνακα (α) παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Ὅταν ὁ πολ/στὴς 3 ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα καὶ γίνεται : 2, 1, 0, τὸ γινόμενον ἐλαττοῦται κατὰ 5 καὶ γίνεται: 10, 5, 0. Ἐὰν συνεχίσωμεν νὰ ἐλαττώνωμεν τὸν πολ/στὴν κατὰ ἕνα : −1, −2, −3, ... πρέπει καὶ τὸ γινόμενον νὰ ἐλαττώνωμεν κατὰ 5 : −5, −10, −15...

Δηλαδὴ πρέπει $(-1) \cdot 5 = -5$, $(-2).5 = -10$, $(-3) \cdot 5 = -15$ κ. ο. κ. ἢ $(-1).(+5) = -5$,

$$(-2) \cdot (+5) = -10 \text{ κ.ο.κ.}$$

Δεχόμεθα ὅτι $5.(-2) = (-2).5 = -10$ (μεταθετικὴ ἰδιότης τοῦ πολ/σμοῦ).

Ἑπομένως τὸ γινόμενον ἑτεροσήμων ρητῶν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

(α)

Παράγοντες	Γινόμενον
$3 \cdot 5$	15
$2 \cdot 5$	10
$1 \cdot 5$	5
$0 \cdot 5$	0
$-1 \cdot 5$	; −5
$-2 \cdot 5$	; −10
$-3 \cdot 5$	; −15
. .	.
. .	.
. .	.

(β)

Παράγοντες	Γινόμενον
$5 \cdot (-2)$	−10
$4 \cdot (-2)$	−8
$3 \cdot (-2)$	−6
$2 \cdot (-2)$	−4
$1 \cdot (-2)$	−2
$0 \cdot (-2)$	; 0
$(-1) \cdot (-2)$	; 2
$(-2) \cdot (-2)$	; 4
$(-3) \cdot (-2)$	; 6
. .	.
. .	.
. .	.

3. Μετὰ τὴν παραδοχὴν ὅτι $(-2).5=5.(-2)=-10$ (μεταθετικὴ ἰδιότης τοῦ πολ/σμοῦ) παρατηροῦμεν τὸν πίνακα (β).

Ὅταν ὁ πολ/στὴς 5 ἐλαττοῦται κατὰ ἕνα, τὸ γινόμενον αὐξάνεται κατὰ δύο.

Ἄρα πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι : $0\cdot(-2)=0$, $(-1)\cdot(-2)=2$, $(-2)\cdot(-2)=4$, $(-3)\cdot(-2)=6$ κ.ο.κ.

Συνεπῶς τὸ γινόμενον δύο ἀρνητικῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

§ **48**. Δυνάμεθα νὰ αἰτιολογήσωμεν τὰ ἀνωτέρω ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες : $\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$, $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$, $\alpha\cdot 0=0$

1. Ἐπειδὴ $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$ ἔχομεν καὶ $\boxed{\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{7}{5}\right)=+\frac{14}{15}}$

2. Εἶναι $\frac{3}{4}\cdot 0=0$

ἢ $\frac{3}{4}\cdot(-2+2)=0$

ἢ $\frac{3}{4}\cdot(-2)+\frac{3}{4}\cdot 2=0$ (ἐπιμερ. ἰδιότης)

ἢ $\frac{3}{4}\cdot(-2)+\frac{6}{4}=0$. Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\frac{3}{4}\cdot(-2)$ πρέπει νὰ παριστᾶ τὸν ἀντίθετον τοῦ $\frac{6}{4}$, δηλαδὴ τὸν $-\frac{6}{4}$.

Συνεπῶς $\frac{3}{4}\cdot(-2)=-\frac{6}{4}$ ἢ $(+\frac{3}{4})\cdot(-2)=-\frac{6}{4}$ καὶ

$\boxed{\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot(-2)=(-2)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{6}{4}}$ (μεταθετικὴ ἰδιότης).

3. Ἔχομεν $(-2).0=0$

ἢ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)=0$

ἢ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+(-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)=0$

ἢ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{6}{4}\right)=0.$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητος συμπεραίνομεν ὅτι τὸ $(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ παριστᾶ τὸν ἀντίθετον τοῦ $-\frac{6}{4}$ δηλαδὴ τὸ $+\frac{6}{4}$. Ἄρα :

$$\boxed{(-2)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{6}{4}}$$

Ἐκ τούτων καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Τὸ γινόμενον δύο ρητῶν εἶναι ρητὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν καὶ εἶναι θετικὸς μέν, ἐὰν οὗτοι εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸς δέ, ἐὰν εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μηδέν, ἐὰν ὁ εἷς εἶναι μηδέν.

Συμβολικῶς : $\alpha,\ \beta \in Q$ καὶ $\alpha,\ \beta$ ὁμόσημοι, $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$

$\alpha,\ \beta$ ἑτερόσημοι, $\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|)$

$\alpha \cdot 0 = 0$

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον $\alpha\ .\ \beta$ γράφεται καὶ $\alpha\beta$.

Παραδείγματα

$$(+2)\cdot\left(+\frac{3}{5}\right)=+\left(2\cdot\frac{3}{5}\right)=+\frac{6}{5}>0,\ \left(-\frac{6}{7}\right)\cdot(+3)=-\left(\frac{6}{7}\cdot 3\right)=-\frac{18}{7}<0,$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=+\frac{10}{21}>0,\ (+4)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=-\left(4\cdot\frac{2}{5}\right)=-\frac{5}{8}<0,$$

$\alpha,\ \beta$ ρητοὶ ὁμόσημοι $\Longleftrightarrow \alpha\beta > 0$, $\alpha,\ \beta$ ρητοὶ ἑτερόσημοι $\Longleftrightarrow \alpha\beta < 0$,

$$0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0\ ,\ 0\cdot\left(+\frac{5}{16}\right)=0\ ,\quad 0\cdot\alpha=0\ .$$

§ 49. Ἰδιότητες.

Συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ρητῶν παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πολ/σμὸς ἐκτὸς τῶν ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας ἐδέχθημεν ἔχει καὶ τὰς κάτωθι :

α) Δοθέντων δύο ρητῶν α καὶ β ὑπάρχει πάντοτε ὁ ρητὸς αβ (γινόμενον αὐτῶν). Συμβολικῶς, $\alpha,\ \beta \in Q \Longrightarrow \alpha\beta \in Q$.

β) Τὸ γινόμενον δύο ρητῶν εἶναι εἷς μόνον ρητός. Δηλαδὴ ἡ πρᾶξις τοῦ πολ/σμοῦ εἶναι μονότιμος.

γ) Ἐπειδὴ $(+1)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)=+\left(1\cdot\frac{2}{3}\right)=+\frac{2}{3}\ ,\ \left(-\frac{4}{7}\right)\cdot(+1)=$ $=-\left(\frac{4}{7}\cdot 1\right)=-\frac{4}{7}$ συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $+1$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὸν πολ/σμόν.

$$\alpha \in Q \Longrightarrow (+1)\cdot\alpha=\alpha$$

δ) Ἐπειδὴ $(-1)\cdot(-5)=+(1\cdot 5)=+5,\ \left(+\frac{3}{10}\right)\cdot(-1)=-\left(\frac{3}{10}\cdot 1\right)=$ $=-\frac{3}{10}$ συνάγομεν ὅτι τὸ γινόμενον ρητοῦ ἐπὶ (-1) ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ.

$$\alpha \in Q \Longrightarrow (-1)\cdot\alpha=-\alpha$$

ε) Ἔχομεν :

$$(+2)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)=+\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=+1,\ \left(+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{5}\right)=+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)=+1$$

$$(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=+\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=+1\ ,\ \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)=+1$$

Ἄρα οἱ ὁμόσημοι ρητοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντιστρόφως ἀπολύτους τιμὰς ἔχουν γινόμενον τὸν $+1$. Οὗτοι λέγονται ἀντίστροφοι ρητοί.

Συνεπῶς δοθέντος ἑνὸς ρητοῦ α ($\alpha \neq 0$) ὑπάρχει ἄλλος, ὁμόσημος πρὸς αὐτὸν καὶ μὲ ἀντίστροφον ἀπόλυτον τιμήν, ὁ ὁποῖος λέγεται ἀντίστροφος τοῦ α καὶ συμβολίζεται $\frac{1}{\alpha}$ ἢ α^{-1}. Συντομώτερον:

Διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν (ἐκτὸς τοῦ μηδενὸς) ὑπάρχει ἓν μόνον ἄλλο στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ἀντίστροφον αὐτοῦ.

Π.χ. ὁ ἀντίστροφος τοῦ $+20$ εἶναι ὁ $+\frac{1}{20}$, τοῦ -48 εἶναι ὁ $-\frac{1}{48}$ τοῦ $-\frac{17}{19}$ εἶναι ὁ $-\frac{19}{17}$ τοῦ $+1$ εἶναι ὁ $+1$ καὶ τοῦ -1 εἶναι ὁ -1.

Ἀσκήσεις

101. Εὕρετε τὰ γινόμενα:

α) $+1 \cdot (-1)$, $(+8) \cdot (+1)$, $-\frac{3}{5} \cdot (-1)$, $\left(-\frac{15}{7}\right) \cdot (+1)$

β) $0 . (-12)$, $\left(-\frac{4}{21}\right) \cdot \left(-\frac{21}{4}\right)$, $\left(+\frac{1}{2}\right) \cdot (+2)$, $\left(+\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)$

102. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α) $-\frac{13}{15} \cdot \left(-\frac{15}{13}\right) + 8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$, δ) $-\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} + \frac{10}{17} \cdot \left(-\frac{17}{10}\right) + \frac{21}{29} \cdot \left(-\frac{29}{21}\right)$

β) $-\frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{41}{61} \cdot \frac{61}{41} + \left(-\frac{101}{119}\right) \cdot \left(-\frac{119}{101}\right)$,

γ) $\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot (-2) + 15 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) + \frac{46}{3} \cdot \left(-\frac{3}{23}\right)$

103. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον.
[Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰδιότητα: $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$]

α) $5 \cdot (-7) + 5 \cdot 27$, γ) $59 \cdot (-19) + 59 \cdot 9$, ε) $-21 \cdot (-17) + (-21) \cdot (-13)$

β) $6 \cdot (-12) - 6 \cdot 18$, δ) $-\frac{2}{5} . 11 - \frac{2}{5} \cdot 19$, στ) $\frac{15}{23} \cdot (-18) - \frac{30}{46} \cdot 12$.

104. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ δύο τρόπους:

α) $-5 \cdot (+12 - 19)$, β) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right)$, γ) $\left(-4 + \frac{7}{2} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{10}{11}\right)$

δ) $\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{24}{13}\right)$, ε) $\left(\frac{2{,}1}{7} - \frac{11}{5} + \frac{7}{2} - 1\right) \cdot \left(-\frac{70}{19}\right)$

105. Ποῖον συμπέρασμα ἐξάγεται διὰ τοὺς ρητοὺς α, β, ἐὰν $\alpha\beta > 0$ ἢ $\alpha\beta = 0$ ἢ $\alpha\beta < 0$;

9. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΤΡΙΩΝ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΡΗΤΩΝ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ **50.** *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον* $2 \cdot (-3) \cdot 4$.

Εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων, $2 \cdot (-3) = -6$

καὶ κατόπιν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα $-6 \cdot 4 = -24$.

Τοῦτο γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$2 \cdot (-3) \cdot 4 = [2 \cdot (-3)] \cdot 4 = (-6) \cdot 4 = -24$$

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα, ἐὰν ἔχωμεν περισσοτέρους τῶν τριῶν παράγοντας.

Ὥστε γινόμενον τριῶν ἢ περισσοτέρων ρητῶν εἶναι ὁ ρητός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο πρώτους, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον με τὸν τρίτον κ.ο.κ.

Συμβολικῶς : $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] \cdot \delta \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in Q)$.

Παραδείγματα :

$$(+2) \cdot (+4) \cdot (+5) = [(+2) \cdot (+4)] \cdot (+5) = (+8) \cdot (+5) = +40 = +(2 \cdot 4 \cdot 5)$$
$$(-2) \cdot (+4) \cdot (+5) = [(-2) \cdot (+4)] \cdot (+5) = (-8) \cdot (+5) = -40 = -(2 \cdot 4 \cdot 5)$$
$$(-2) \cdot (-4) \cdot (+5) = [(-2) \cdot (-4)] \cdot (+5) = (+8) \cdot (+5) = +40 = +(2 \cdot 4 \cdot 5)$$
$$(-2) \cdot (-4) \cdot (-5) = [(-2) \cdot (-4)] \cdot (-5) = (+8) \cdot (-5) = -40 = -(2 \cdot 4 \cdot 5)$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἓν γινόμενον μὲ περισσοτέρους τῶν δύο παράγοντας ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων του καὶ εἶναι θετικὸν μέν, ἐὰν οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶναι θετικοὶ ἢ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, ἀρνητικὸν δέ, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

Μὲ βάσιν τὸν προηγούμενον κανόνα ὑπολογίσατε τὰ γινόμενα :

$$(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5) = +(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = +120$$
$$(-2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5) = -(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = -120$$
$$(+2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (-5) = +(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = +120$$
$$(+2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = -(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = -120$$
$$(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = +(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = +120$$

Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι θετικοὶ ἔχομεν :

$$(-\alpha) \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = -(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)$$
$$(-\alpha) \cdot (-\beta) \cdot \gamma \cdot \delta = (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)$$
$$(-\alpha) \cdot (-\beta) \cdot (-\gamma) \cdot \delta = -(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)$$
$$(-\alpha) \cdot (-\beta) \cdot (-\gamma) \cdot (-\delta) = (\alpha \cdot \beta \cdot \delta \cdot \gamma)$$

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον α. β. γ. δ. γράφεται καὶ αβγδ.

§ 51. Ἰδιότητες

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ρητῶν ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν, ἰσχύουν, δι' αὐτό, ὅλαι αἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

1. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\gamma)\cdot\beta$
2. $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot(\delta\cdot\varepsilon)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon$
3. $\alpha\beta\gamma\delta=\gamma\alpha\delta\beta=\beta\alpha\delta\gamma=\ldots$
4. $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta)=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$

Π.χ. $[(-2)\cdot(-5)]\cdot(-6)=(+10).(-6)=-60$

$(-2)\cdot[(-5)\cdot(-6)]=(-2)\cdot(+30)=-60$. Ἄρα

$[(-2)\cdot(-5)]\cdot(-6)=(-2)\cdot[(-5)\cdot(-6)]$ καὶ γενικῶς

$(\alpha\beta)\gamma=\alpha\,(\beta\gamma)$ ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐφαρμογαί :

α) $2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=$

$$=-\left(1\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$$

β) $(-2)\cdot(-2)=(2\cdot 2)=2^2$, $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-(3\cdot 3\cdot 3)=-3^3$

γ) $\left(-\frac{3}{4}\cdot 5\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\cdot 2\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 5\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 2=$

$$=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot 5\cdot 2\right)=1\cdot 10=10$$

δ) $[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-2)\cdot(-2)]=[-(2\cdot 2\cdot 2)]\cdot[+(2\cdot 2)]=$
$[-2^3]\cdot[+2^2]=-(2^3\cdot 2^2)=-2^5$

ε) $[(-3)+(-6)]\cdot[(-8)+(-6)]=(-3)\cdot[(-8)+(-6)]+(-6)\cdot[(-8)+(-6)]=$
$=24+18+48+36=126$

$[(-3)+(-6)]\cdot[(-8)+(-6)]=[-9].[-14]=126$. (β' τρόπος ἁπλούστερος).

στ) $(-2+\alpha).(-3+\beta)=(-2)[-3+\beta]+\alpha[-3+\beta]=(-2).(-3)+(-2)\beta+\alpha(-3)+\alpha\beta=$
$=6-2\beta-3\alpha+\alpha\beta$

ζ) $-2.(-3+\alpha)+(-5+\alpha).3=(-2).(-3)+(-2).\alpha+(-5).3+3\alpha$
$=6-2\alpha+(-15)+3\alpha=$
$=6-2\alpha-15+3\alpha=$
$=6-15+3\alpha-2\alpha$
$=-9+\alpha$

§ 52. Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ρητῶν ἀριθμῶν

Ἔχομεν : $\left|(-2)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)\right|=\left|-\frac{6}{4}\right|=\frac{6}{4}$

$$|-2|\cdot\left|+\frac{3}{4}\right|=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$$

Συνεπῶς $\left|(-2)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)\right|=|-2|\cdot\left|+\frac{3}{4}\right|$

Ὥστε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Γενικῶς $\alpha,\ \beta \in Q$ εἶναι : $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$
Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους τῶν δύο παράγοντας.

Ἰδιότητες ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων

§ **53.** α) Ἰδιότης : Ἐὰν $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$. $(\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$

Π.χ. Ἔχομεν τὴν ἰσότητα $-\frac{4}{5} = -\frac{8}{10}$ καὶ πολ/μεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸν ρητὸν -5.

α΄ μέλος : $-\frac{4}{5}\cdot(-5) = +4$.

β΄ μέλος : $-\frac{8}{10}\cdot(-5) = +\frac{8}{2}$ ἄρα $-\frac{4}{5}\cdot(-5) = -\frac{8}{10}\cdot(-5)$

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ πολ/ωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ρητὸν καὶ νὰ λάβωμεν ἰσότητα.

β) Ἰδιότης : Ἐὰν $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ καὶ $\gamma\neq 0$ θὰ ἔχωμεν καὶ $\alpha=\beta$. $(\alpha,\beta,\gamma\in Q)$

Π.χ. ἐὰν $\chi\cdot(-5)=(-4)\cdot(-5)$, $(\chi\in Q)$ πολ/μεν καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ -5.

α΄ μέλος : $[\chi.(-5)].(-\frac{1}{5}) = \chi\cdot[(-5)\cdot(-\frac{1}{5})] = \chi\cdot(+1) = \chi$

β΄ μέλος: $[(-4)\cdot(-5)]\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = (-4)\cdot\left[(-5)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right] = (-4)\cdot(+1) = -4$

Ἄρα $\chi = -4$

§ **54.** α) Ἰδιότης : Ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>0$ εἶναι καὶ

$\alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\gamma$ $(\alpha,\beta\in Q,\ \gamma\in Q^+)$

Π.χ. $-3>-4$ πολ/μεν καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸν $+2$ καὶ ἔχομεν :

α΄ μέλος : $(-3)\cdot(+2) = -6$

β΄ μέλος : $(-4)\cdot(+2) = -8$. Ἄρα $(-3)\cdot(+2) > (-4)\cdot(+2)$

β) Ἰδιότης : Ἐὰν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma<0$ εἶναι καὶ :

$\alpha\cdot\gamma<\beta.\gamma$ $(\alpha,\ \beta\in Q$ καὶ $\gamma\in Q^-)$

Π.χ. $+\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$ πολ/μεν καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸν -2.

α΄ μέλος : $+\frac{2}{3}\cdot(-2) = -\frac{4}{3}$

β΄ μέλος : $-\frac{4}{5}\cdot(-2) = +\frac{8}{5}$ καὶ ἐπειδὴ $-\frac{4}{3} < +\frac{8}{5}$ ἔχομεν ὅτι :

$\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(-2) < \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot(-2)$ Ἑπομένως :

Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός, προκύπτει ἀνισότης, ὁμόστροφος μέν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός, ἑτερόστροφος δέ, ἐὰν οὗτος εἶναι ἀρνητικός.

'Εφαρμογαί :

§ **55** 1. Πολ/μεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $-10+7=-3$ ἐπὶ τὸν -1.

$$-10+7=-3 \Rightarrow (-10+7).(-1)=-3.(-1) \Rightarrow (-10).(-1)+7.(-1)=3 \Rightarrow 10-7=3.$$

Δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἰσότητος

Γενικῶς : $(\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$ ἐὰν $\alpha-\beta=\gamma \Rightarrow -\alpha+\beta=-\gamma$

2. Πολ/μεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $-\frac{1}{3}>-2$ ἐπὶ τὸν -1.

$$-\frac{1}{3}>-2 \Rightarrow -\frac{1}{3}\ (-1) < (-2)\ \ (-1) \Rightarrow \frac{1}{3} < 2$$

Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν ἀνισότητος, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν φοράν της.

Γενικῶς : $(\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q)$. 'Εὰν $\alpha+\beta>\gamma \Rightarrow -\alpha-\beta<-\gamma$

§ 56. 'Ανακεφαλαίωσις.

'Εκ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸν πολ/σμὸν τῶν ρητῶν συμπεραίνομεν ὅτι :

α. Δοθέντων δύο ρητῶν α καὶ β ὑπάρχει ὁ ρητὸς αβ (γινόμενον αὐτῶν). Συμβολικῶς : $\alpha,\ \beta \in Q$ καὶ $\alpha\beta \in Q$. Ἤτοι :

'Εὰν α, β ὁμόσημοι, τότε $\alpha\beta=|\alpha|\cdot|\beta|$

ἐὰν α, β ἑτερόσημοι, τότε $\alpha\beta=-(|\alpha|\cdot|\beta|)$,

ἐὰν ὁ εἷς εἶναι μηδέν, τότε $\alpha\cdot\beta=0$.

Εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἔχομεν

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$$

β. Τὸ γινόμενον δύο ρητῶν εἶναι εἷς καὶ μόνον εἷς ρητὸς (μονότιμον τοῦ πολ/σμοῦ).

γ. 'Ισχύει ἡ μεταθετικὴ ἰδιότης : $\alpha\beta=\beta\alpha$, $(\alpha,\beta \in Q)$.

δ. Δοθέντων τῶν ρητῶν α, β καὶ γ ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότη- τοῦ πολ/σμοῦ : $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

ε. Ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον τοῦ Q, τὸ $+1$, τὸ ὁποῖον εἶναι οὐδέτερον εἰς τὸν πολ/σμόν.

$$\alpha \in Q \Rightarrow \alpha\cdot(+1)=\alpha$$

στ. Διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ Q, (ἐκτὸς τοῦ μηδενός), ὑπάρχει ἓν ἄλλο στοιχεῖον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίστροφον τούτου.

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ ρητοῦ α $(\alpha\neq 0)$ εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha}$ ἢ α^{-1} καὶ $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$

ζ. Διὰ τοὺς ρητοὺς α, β καὶ γ ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης :

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

Ἀσκήσεις

106. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

α) $(-8)\cdot(-13)\cdot(+2)\cdot(-5)$, β) $(-125)\cdot(-8)\cdot(+179)\cdot(-1)$,

γ) $-\frac{17}{19}\cdot\left(-\frac{3}{16}\right)\cdot(+4)\cdot\left(+\frac{19}{17}\right)\cdot\left(-\frac{16}{3}\right)$,

δ) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{3}{2}\right)$,

ε) $(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$,

στ) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

107. Ὁμοίως τὰ γινόμενα:

α) $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$, δ) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$,

β) $\left[(-2)\cdot(-3)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right)\right]\cdot(-5)$, ε) $\left[\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot(-5)\right]\cdot\left(-\frac{56}{6}\right)$

γ) $[(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)]\cdot[(-3)\cdot(-3)]$, στ) $\left[-\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(-\frac{11}{10}\right)\right]\cdot$

$\cdot\left[\left(-\frac{9}{7}\right)\cdot\left(-\frac{10}{11}\right)\right]$

108. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ δύο τρόπους.

α) $[-5+2]\cdot[(-3)+(-2)]$,

β) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left[\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$,

γ) $\left[-4+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{3}\right]\cdot\left(-\frac{15}{16}\right)$,

δ) $\left(-1+\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-2+\frac{1}{2}\right)$

109. Ἐὰν $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in Q$ ἐπαληθεύσατε ὅτι:

$$|\alpha\cdot\beta\cdot\gamma| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|$$

110.* Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα:

α) $(-4+7)\cdot(-4-7)$, γ) $(-3+5)\cdot(-3+5)$, ε) $(-4-6)\cdot(-4-6)$,

β) $(-5+\beta)\cdot(\alpha-3)$, δ) $(-4+\beta)\cdot(+3+\alpha)$, στ) $(\alpha-5)\cdot(\alpha+5)$

111. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

α) $3\cdot(\alpha-\beta)-4\cdot(\alpha-4)+3\cdot(\beta-2)$

β) $4(\alpha+\beta+\gamma)-3(\alpha-\beta)-2(\beta+\gamma)$

112. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $\chi\cdot\frac{1}{2}=1$, β) $\chi\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1$, γ) $\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\chi=1$, δ) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\chi=\frac{6}{8}$.

113. α) Εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἐρωτηματικοῦ νὰ τεθῇ τὸ κατάλληλον σύμβολον ἐκ τῶν $=$, $>$, $<$ μεταξὺ τῶν παραστάσεων:

α) $\frac{17}{6}+\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}+3$, β) $\frac{2}{5}-1$; $-\frac{7}{5}+\frac{1}{10}$

γ) $\frac{20}{3}$; $7-\frac{1}{3}$, δ) $\frac{7}{3}$; $6-\frac{7}{2}$

β) Πολλαπλασιάσατε ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν εὑρεθησομένων σχέσεων:

1ον ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν

2ον ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν καὶ

3ον ἐπὶ (-1).

114. Ἀλλάξατε τὸ πρόσημον τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν τῶν κάτωθι ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων. Τί παρατηρεῖτε;

α) $-\frac{20}{3}=\frac{1}{3}-7$, β) $-5>-\frac{15}{2}$, γ) $-\frac{1}{1000}>-10$,

δ) $\frac{7}{8}-1<-\frac{1}{9}$, ε) $-\chi+5=-12$, στ) $-6-\chi>-6$

115. Πολλαπλασιάσατε κατὰ μέλη τὰς κάτωθι ὁμοστρόφους ἀνισότητας. Τί παρατηρεῖτε;

α) $\begin{matrix}-3>-8\\ 4>2\end{matrix}$ β) $\begin{matrix}-3<2\\ -5<5\end{matrix}$ γ) $\begin{matrix}3>-2\\ 2>-3\end{matrix}$

116. Ἐὰν διὰ τοὺς θετικοὺς ῥητοὺς α καὶ β ὑφίσταται ἡ σχέσις $\alpha>\beta$, νὰ ἐξετάσητε ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων τοῦ α καὶ τοῦ β.

10. Η ΠΡΑΞΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΟ Q — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 57. Πηλίκον δύο ῥητῶν.

Νὰ εὑρεθῇ ῥητός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν $-\frac{3}{5}$ δίδει γινόμενον τὸν 6.

Ἐὰν χ ὁ ζητούμενος ῥητὸς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\chi=6$.

Ἡ διαίρεσις εἰς τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολ/σμοῦ.

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, κατὰ τὴν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ εὑρίσκεται τρίτος, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.

Ὥστε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\chi=6 \Rightarrow \chi=6:\left(-\frac{3}{5}\right)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἰδιότητα: $\alpha=\beta \Longleftrightarrow \gamma\alpha=\gamma\beta$.

Ἔχομεν: $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\chi=6 \Rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\chi\right]=\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 6$

$$\Rightarrow\left[\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\cdot\chi=6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad [(+1)]\cdot\chi=6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$\chi=6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$$

Ἄρα $\quad \chi=6:\left(-\frac{3}{5}\right)=6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$

Ὥστε διαίρεσις εἶναι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

$$(\alpha,\ \beta\in Q) \qquad \alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta} \qquad (\beta\neq 0)$$

Ἐφαρμογαί

$$(+12):(+3)=(+12)\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)=+\frac{12}{3}=+4$$

$$(-15):(-5)=(-15)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=+\frac{15}{5}=+3$$

$$(+24):(-7)=(+24)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{24}{7}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right):\left(+\frac{4}{9}\right)=\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(+\frac{9}{4}\right)=-\frac{36}{28}=-\frac{9}{7}$$

$$0:\left(-\frac{2}{3}\right)=0\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=0$$

Ἡ διαίρεσις $\left(-\frac{4}{5}\right):0$ εἶναι ἀδύνατος, διότι δὲν ὑπάρχει ἀντίστροφος τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πηλίκον αὐτό.

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι:

Ἐὰν δοθοῦν οἱ ρητοὶ α καὶ β τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ β ($\beta\neq 0$) εἶναι θετικὸν μέν, ἐὰν αὐτοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δέ, ἐὰν εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μηδέν, ἐὰν ὁ α εἶναι μηδέν. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α καὶ β.

Τὸ πηλίκον $\alpha:\beta$ γράφεται καὶ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

Συμβολικῶς: 1. $\alpha\cdot\beta>0$ τὸ $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}>0$

$(\alpha,\ \beta\in Q)$ 2. $\alpha\ \ \beta<0$ τὸ $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}<0$ $\qquad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

3. $\alpha=0$ τὸ $\alpha:\beta=\frac{0}{\beta}=0$

Σημείωσις. Εἴπομεν ὅτι διαίρεσις εἶναι ὁ πολ/σμὸς τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου. Συνεπῶς ἐπειδὴ ὁ πολ/σμὸς εἶναι πρᾶξις μονότιμος καὶ ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις μονότιμος.

Ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατή, ὅταν ὑπάρχῃ ἀντίστροφος τοῦ δαιρέτου, ἀλλὰ ἀντίστροφος τοῦ διαιρέτου ὑπάρχει μόνον, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

§ 58. Ἰδιότητες διαιρέσεως.

Λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πηλίκου δύο ρητῶν εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως :

1. $\alpha : \beta \quad = (\alpha\cdot\gamma) : (\beta\cdot\gamma) \quad (\gamma \neq 0)$
2. $(\alpha+\beta+\gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$
3. $(\alpha-\beta) : \gamma \quad = (\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma)$
4. $(\alpha\cdot\beta) : \gamma \quad = (\alpha : \gamma)\cdot\beta = \alpha\cdot(\beta : \gamma)$
5. $\alpha : (\beta\cdot\gamma\cdot\delta) \quad = [(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta$

Ἐπαληθεύομεν τὴν 1ην ἰδιότητα :

$$(+3) : (-4) = -\frac{3}{4}, \quad [(+3).(-2)] : [(-4).(-2)] = (-6) : (+8) = -\frac{6}{8}$$

$$\text{Ἄρα} \quad (+3) : (-4) = [(+3)\cdot(-2)] : [(-4)\cdot(-2]$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ αἰτιολογήσωμεν καὶ γενικώτερον τὴν ἰδιότητα $\alpha : \beta = (\alpha\cdot\gamma) : (\beta\cdot\gamma)$.

$$\text{Ἔχομεν } \alpha : \beta = \alpha\cdot\frac{1}{\beta} = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}\cdot(+1) = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\left(\gamma\cdot\frac{1}{\gamma}\right) =$$

$$= \alpha\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma} = \alpha\cdot\gamma\cdot\frac{1}{\beta\gamma} = (\alpha\cdot\gamma) : (\beta\cdot\gamma).$$

Αἰτιολογοῦμεν καὶ τὴν 2αν ἰδιότητα :

$$(\alpha+\beta+\gamma) : \delta = (\alpha+\beta+\gamma)\cdot\frac{1}{\delta} = \alpha\cdot\frac{1}{\delta} + \beta\cdot\frac{1}{\delta} + \gamma\cdot\frac{1}{\delta} = (\alpha:\delta) + (\beta:\delta) + (\gamma:\delta)$$

Ὁμοίως αἰτιολογοῦνται καὶ αἱ ὑπόλοιποι ἰδιότητες.

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ λεκτικῶς τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας. Π.χ. διὰ τὰς 1, 2, ἰδιότητας : 1. Ἐὰν πολ/ωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην, μιᾶς διαιρέσεως, ἐπὶ ρητὸν διάφορον τοῦ μηδενὸς τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται. 2. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα διὰ ρητοῦ διαφόρου τοῦ μηδενός, διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, διὰ τοῦ ρητοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Ἀσκήσεις

117. Νὰ εὕρητε τὰ πηλίκα : α) $(-24) : (+6)$, β) $(-48) : (-16)$, γ) $(-4) : \left(+\frac{3}{7}\right)$

δ) $\left(+\frac{3}{8}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right)$, ε) $-\frac{10}{11} : (+3)$, στ) $(-6) : \left(-\frac{15}{2}\right)$,

ζ) $\left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{3}{10}\right)$, η) $\left(+\frac{15}{17}\right) : (+15)$

118. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+3\right) : (-3)$, δ) $\left[\left(-\frac{5}{6}\right) \; 8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right] : \left(-\frac{1}{2}\right)$

β) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\right] : \left(-\frac{3}{5}\right)$, ε) $\left(-\frac{3}{4}-\frac{6}{2}+1\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)$

γ) $[(-3)\cdot(-5)\cdot 4]:[(-2)\cdot(-3)]$, στ) $[(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)]:[(-3)\cdot(-3)]$

119. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $\chi\cdot(-3)=-\dfrac{27}{31}$, β) $\chi\cdot\left(-\dfrac{3}{7}\right)=-8$, γ) $\dfrac{5}{8}\cdot\chi=-\dfrac{4}{15}$

δ) $-\chi=\dfrac{3}{11}$, ε) $\chi:\left(-\dfrac{13}{15}\right)=-\dfrac{5}{26}$, στ) $\left(-\dfrac{2}{7}\right):\chi=-\dfrac{23}{7}$, ζ) $(-10)\cdot\chi=0$

120. Νὰ ἐπαληθεύσητε τὰς ἰσοδυναμίας:

1. $\alpha=\beta \Longleftrightarrow \alpha:\gamma=\beta:\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in Q\ ,\ \gamma\neq 0)$
2. $\alpha>\beta \Longleftrightarrow \alpha:\gamma>\beta:\gamma$ $(\alpha,\beta\in Q\ ,\ \gamma\in Q^+)$
3. $\alpha>\beta \Longleftrightarrow \alpha:\gamma<\beta:\gamma$ $(\alpha,\beta\in Q\ ,\ \gamma\in Q^-)$
4. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $(\alpha,\beta\in Q\ ,\ \beta\neq 0)$

Δύνασθε νὰ τὰς δικαιολογήσητε;

11. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

§ **59**. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ παραστάσεις:

α. $-(-5)+(-2)-(+12)$

β. $-(-8+13-14)+(10-6+1)-(12-6)$

γ. $[(2-8)+(-15+17)]-[(-6+3)-(-12+7)]+(-5+3)$

δ. $(-7+2)-\left(-2+\dfrac{3}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\left[\left(-\dfrac{5}{8}\right)\cdot\left(-\dfrac{8}{6}\right)+1\right]:\left(-\dfrac{11}{3}\right)$

ε. $\left(-3+\dfrac{7}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{5}{4}\right)+\left(2-\dfrac{1}{6}\right):(-11)-\left(-\dfrac{3}{5}-1\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}+1\right)$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν παραστάσεων αὐτῶν ἐργαζόμεθα ὡς κατωτέρω:

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς παραστάσεις α, β, γ δὲν ἔχουν σημειωθῆ πολ/σμοὶ ἢ διαιρέσεις, ἑπομένως δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα. Ἀλλὰ διὰ τὸ β καὶ γ (ἀλγ. ἄθροισμα) ὁ ρητός, ὁ ὁποῖος προστίθεται ἢ ἀφαιρεῖται, εἶναι τὸ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἄθροισμα ἢ τὸ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ἄθροισμα ἀθροισμάτων ἢ διαφορὰ ἀθροισμάτων.

1. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως γ.

Α΄ τρόπος:
$$\begin{aligned}
&[(2-8)+(-15+17)]-[(-6+3)-(-12+7)]+(-5+3)=\\
&=[(-6)+2]-[(-3)-(-5)]+(-5+3)=\\
&=(-4)-[-3+(+5)]+(-2)=\\
&=(-4)-(+2)+(-2)=\\
&=(-4)+(-2)+(-2)=-8
\end{aligned}$$

Σημείωσις. Ἀγκύλη ἡ ὁποία παύει νὰ περιέχῃ παρενθέσεις ὑποβιβάζεται εἰς παρένθεσιν·

Ὑπελογίσαμεν τὰς τιμὰς τῶν ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων καὶ κατελήξαμεν εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ρητῶν ἀριθμῶν.

Β' τρόπος: $[(2-8)+(-15+17)]-[(-6+3)-(-12+7)]+(-5+3)=$

$[(2-8)+(-15+17)]+[-(-6+3)+(-12+7)]+(-5+3)=$

$(2-8)+(-15+17) \quad -(-6+3)+(-12+7)+(-5+3)=$

$(2-8)+(-15+17) \quad +(+6-3)+(-12+7)+(-5+3)=$

$2-8 \quad -15+17 \quad +6-3 \quad -12+7 \quad -5+3=$

$2-8-15+17+6-3-12+7-5+3=35-43=-8$

Κατ' ἀρχὰς προσεθέσαμεν τὸ ἀντίθετον τῶν ἀθροισμάτων τῶν εὑρισκομένων ἐντὸς τῆς δευτέρας ἀγκύλης, ἡ ὁποία ἔχει ἔμπροσθέν της τὸ πλὴν (—).

Κατόπιν παρελείψαμεν τὰς ἀγκύλας καὶ τὸ σύμβολον + ἔμπροσθεν αὐτῶν.

Ἐν συνεχείᾳ προσεθέσαμεν τὸ ἀντίθετον τῶν ἀθροισμάτων, τὰ ὁποῖα ἀφαιροῦνται, (ἔχουν ἔμπροσθεν τῆς παρενθέσεως αὐτῶν τὸ πλὴν (—)), ἀφαιρεῖται μόνον τὸ $(-6+3)$ καὶ παρελείψαμεν τὰς παρενθέσεις καὶ τὸ σύμβολον + ἔμπροσθεν αὐτῶν.

Τελικῶς ὑπελογίσαμεν τὴν τιμὴν τοῦ προκύπτοντος ἀθροίσματος.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν παράστασιν β.

(Εἰς τὴν παράγραφον 42, ἐφαρμογή, ἔχομεν ὑπολογίσει ἄθροισμα καὶ διαφορὰν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων).

Ἐκ τοῦ δευτέρου τρόπου ὑπολογισμοῦ τῆς γ' ἀριθμ. παραστάσεως συνάγομεν τὰ ἑξῆς:

1ον. Δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν παρένθεσιν (ἢ ἀγκύλην), ὅταν ἔμπροσθέν της ὑπάρχῃ τὸ σύμβολον + (ἢ οὐδὲν πρόσημον) καὶ νὰ ἀφήσωμεν τοὺς ἐντὸς αὐτῆς ὅρους μὲ τὸ πρόσημόν των εἰς τὸ νέον ἄθροισμα.

2ον. Ἐὰν ἔμπροσθεν παρενθέσεως (ἢ ἀγκύλης) ὑπάρχῃ τὸ σύμβολον —, προσθέτομεν τὴν περιέχουσαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων ὅρων, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν ἐντὸς αὐτῆς καὶ ἀναγόμεθα εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Παραδείγματα.

α) $10+(-7+5+4)=$
$10 \quad -7+5+4)=$
$10-7+5+4=12$

β) $-(-8+13-14)=$
$+(+8-13+14)=$
$+8-13+14=$
$8-13+14=9$

γ) $10+(5 \quad -7+4)=$
$10+(+5-7+4)=$
$10 \quad +5-7+4=$
$10+5-7+4=12$

δ) $(10-6+1)-(12 \quad -6)=$
$(10-6+1)+(-12+6)=$
$10-6+1 \quad -12+6=$
$10-6+1-12+6=-1$

Σημείωσις.

1. Ὅταν εἶναι θετικὸς ὁ πρῶτος ὅρος ἀθροίσματος συνήθως δὲν ἔχει τὸ πρόσημόν του $+$. Διὰ νὰ συνδεθῇ ὅμως εἰς τὸ νέον ἄθροισμα πρέπει νὰ τεθῇ τὸ πρόσημόν του. (Βλ. παρ. γ).

2. Αἱ παραστάσεις $(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\gamma+3\alpha)$ καὶ $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$ ἁπλουστεύονται, ἐὰν ἐξαλείψωμεν τὰς παρενθέσεις.

Π.χ. $(\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\gamma+3\alpha)=$
$\alpha-\beta+\gamma \quad +\beta-\gamma+3\alpha=$
$\alpha+3\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma = 4\alpha$

$(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=$
$(\alpha+\beta)+(-\alpha+\beta)=$
$\alpha+\beta \quad -\alpha+\beta=$
$\alpha+\beta-\alpha+\beta=2\beta$

Ἔχομεν: $(\alpha-\beta)-(\delta-\gamma)=(\alpha-\beta)+(-\delta+\gamma)=\alpha-\beta-\delta+\gamma$.

Ἐὰν γράψωμεν κατὰ τὴν συμμετρικὴν ἰδιότητα: $\alpha-\beta-\delta+\gamma=(\alpha-\beta)+(-\delta+\gamma)=(\alpha-\beta)-(\delta-\gamma)$ παρατηροῦμεν ὅτι:

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὅρους ἀθροίσματος ἐντὸς παρενθέσεως πρὸ τῆς ὁποίας ἐτέθη τὸ σύμβολον $+$.

Ἐὰν ὅμως θέσωμεν ὅρους ἀθροίσματος ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ἐτέθη τὸ $-$, πρέπει νὰ ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον αὐτῶν.

2. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως δ.

$$(-7+2)-\left(-2+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left[\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{6}\right)+1\right]:\left(-\frac{11}{3}\right)$$

$$(-5)-\left(-\frac{8}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left[\frac{5\cdot 8}{8\cdot 6}+1\right]\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)=$$

$$(-5)-\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left[\frac{5}{6}+\frac{6}{6}\right]\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)=$$

$$(-5)-\left(+\frac{5\quad 2}{4\cdot 3}\right)+\left[\frac{11}{6}\right]\cdot\left(-\frac{3}{11}\right)=$$

$$(-5)-\left(+\frac{5}{6}\right)+\left[-\frac{11\cdot 3}{6\cdot 11}\right]=$$

$$\left(-\frac{30}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left[-\frac{3}{6}\right]=-\frac{38}{6}=-\frac{19}{3}$$

3. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως ε.

$$\left(-3+\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(2-\frac{1}{6}\right):\left(-11\right)-\left(-\frac{3}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)$$

$$\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{11}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)-\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)=$$

$$\frac{8}{4}+\left(-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{8}{3}\right)=$$

$$\frac{4}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(+\frac{8}{3}\right)=\frac{12}{6}-\frac{1}{6}+\frac{16}{6}=\frac{27}{6}$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν παραστάσεων δ καὶ ε εἰργάσθημεν ὡς ἑξῆς :

α) Εὕρομεν τὸν ρητὸν εἰς ἑκάστην παρένθεσιν (ἢ ἀγκύλην).

β) Ἐξετελέσαμεν τοὺς πολ/σμοὺς καὶ τὰς διαιρέσεις καὶ

γ) Ἐξετελέσαμεν τὰς ἀφαιρέσεις καὶ προσθέσεις.

Παραδείγματα

α) $(-4+3)\cdot 2+(8-6)\cdot(-3)=$

$(-8+6)+(-24+18)=-8+6-24+18=-8$

β) $(12-15):(-3)+(23-3):(-4)=$

$(-3):(-3)+(20):(-4)=1+(-5)=-4$

γ) $6-(-5)\cdot(-2)+(-14):(-7)+7=$

$6-(+10)+(+2)+7=$

$6+(-10)+2+7=15-10=5.$

Παρατήρησις :

Εἰς τὸ α' παράδειγμα ἔχομεν ἄθροισμα γινομένων. Εὕρομεν πρῶτον τὰ γινόμενα (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης) καὶ κατόπιν προσεθέσαμεν αὐτά.

Εἰς τὸ β' παράδειγμα ἔχομεν ἄθροισμα πηλίκων. Προηγήθησαν αἱ διαιρέσεις (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης) διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα.

Καὶ εἰς τὸ γ' παράδειγμα προηγήθησαν οἱ πολ/σμοὶ καὶ αἱ διαιρέσεις.

Ἀσκήσεις

121. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $(-6+2-3)+(13-7)$, β) $(7-10)+(-8+10-6)$,

γ) $-(3-12)$, δ) $-(-4+11)$, ε) $(11-12)-(-2+4)$,

ϛ) $(-3+2)-(-8+7)-(7-2)+(-3+1-10)-5$

122. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $(20-13)+[(5-10)+(-12+9)]$, δ) $[(-5+7)+(3-12)]-[-6+(-8)]$,

β) $-[(4-6)+(7-3)]+[(-7+11)-(-5+2)]$,

γ) $[-(-7+12)+(-3+10)]-[-(-3+11)-(8-15)]+[-(-17+3)-5]$

123. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-1\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{3}{20}+1\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)$,

β) $0-\left[\left(5{,}5-\frac{15}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]+[-(0{,}5-4)+2]-\left(-\frac{1}{2}+1\right)$,

γ) $\left[(-10{,}5+15{,}50)-\frac{1}{2}\right]+\left[0+\left(-\frac{18}{5}+\frac{15}{7}\right)+\frac{1}{35}\right]-\frac{10}{7}$

124. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $\left(-3+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(2-\frac{5}{8}\right):(-5)$,

β) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right):\left(1-\frac{1}{4}\right)$

γ) $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right):\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\right)$,

δ) $\left(2-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)\cdot(-3)-\left(-\frac{1}{3}+4-\frac{5}{6}\right):(-3)$

125. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $(-7+13):(-2)+(12-19)\cdot(15-16)-4$,

β) $(21-27):(-3)-(12-16):(-4)+5-5\cdot(-2)$,

γ) $12-6\cdot(-3)+7-15:(-3)+18-16:(-4)+1$

126. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $\left(-\frac{5}{3}\right):\left(-\frac{11}{6}\right)+\left(-\frac{10}{3}\right):\left(+\frac{2}{9}\right)-15:(-1)$,

β) $(3-2)\cdot(-3+2)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{42}{8}-\frac{11}{4}\right)$,

γ) $-0{,}01:(0{,}001-0{,}01)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}:\frac{3}{5}\right)$,

δ) $[-3+(-7+2)-1].[-2+(-3+2-9)]-(3-8+2).(-5)$

127. Νὰ ἐξαλείψητε τὰς παρενθέσεις :

α) $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)$, $\quad(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)$,

β) $\alpha-(-\beta+\gamma-\delta)$, $\quad-(\alpha-\beta)-(-\gamma+\delta)$,

γ) $\alpha-[(\beta-\gamma)+\alpha]-(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)$,

δ) $\alpha+(\beta-\gamma)+[-\delta+(\alpha-\beta)+\gamma]-(\delta-\gamma)$

128. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων, ἐὰν $\alpha=-2$, $\beta=-3$ καὶ $\gamma=4$

1. $\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{-\alpha+\gamma-\beta}$, 2. $\dfrac{-3\alpha+2\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$, 3. $\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$

129. Αἱ κάτωθι παραστάσεις νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος περισσοτέρων παραστάσεων.

1) $-\alpha+\beta+\gamma-\delta+\kappa-\lambda$, 2) $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon-\zeta+\eta$

130. Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὅρος νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως μὲ τὸ σύμβολον + ἔμπροσθεν αὐτῆς καὶ οἱ ὑπόλοιποι ἐντὸς ἄλλης παρενθέσεως μὲ τὸ σύμβολον − ἔμπροσθεν αὐτῆς.

α) $-15{,}4-11{,}7+12-10+\frac{1}{3}$, β) $19{,}6+13{,}5-9{,}4+\frac{2}{5}-1$

γ) $\rho+\tau-\mu-\nu+\sigma-\kappa$, δ) $-\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon$.

12. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

§ 60 Ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.

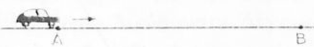
Εἰς τὴν Γεωμετρίαν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ὡς τὸ διμελὲς σύνολον τῶν ἄκρων αὐτοῦ, {A, B}.

Διὰ τοῦτο, ὅταν λέγωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα AB ἢ εὐθύγρ. τμῆμα BA, ἐννοοῦμεν τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον (διατί;)

σχ. 31.

Πρόβλημα.

α) Αὐτοκίνητον κινούμενον ἐπὶ εὐθυγράμμου ὁδοῦ, ἐκ σημείου A ἔφθασε εἰς τὸ σημεῖον B.



σχ. 32.

β) Αὐτοκίνητον κινούμενον ἐπὶ εὐθυγράμμου ὁδοῦ ἐκ τοῦ B ἔφθασεν εἰς τὸ A.

Πῶς θὰ ἐκφράσωμεν μαθηματικῶς τὰς διαφορετικὰς αὐτὰς κινήσεις ;

σχ. 33.

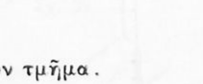
Ἐὰν εἴπωμεν ὅτι τὸ αὐτοκίνητον διέτρεξε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ εὐθύγρ. τμῆμα (ὁδοῦ) AB, δὲν θὰ εἴμεθα ἀκριβεῖς.

Ὀρθὸν εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν α) νὰ εἴπωμεν : «. . . διήνυσε τὸ εὐθύγ τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει **ἀρχὴν** τὸ A καὶ **πέρας** τὸ B».

Διὰ τὴν περίπτωσιν β) «διήνυσε τὸ εὐθύγ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει **ἀρχὴν** τὸ B καὶ **πέρας** τὸ A».

Τώρα πλέον τὸ εὐθυγρ. τμῆμα AB **διανυόμενον ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B** δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ εὐθύγρ. τμῆμα BA **διανυόμενον ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A**, διότι διαφέρει ἡ φορὰ τῆς κινήσεώς των.

Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ λέγομεν **διανύσματα** καὶ συμβολίζομεν γραπτῶς μὲν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, γραφικῶς δέ : (δηλαδὴ ὡς βέλη μὲ τὴν αἰχμὴν εἰς τὸ πέρας αὐτῶν).



σχ. 34.

Διάνυσμα, λοιπόν, εἶναι **ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ὡρισμένην ἀρχὴν καὶ ὡρισμένον πέρας.**

ἢ λέγομεν συντόμως ὅτι :

Διάνυσμα εἶναι ἓν προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ἐὰν τὸ διάνυσμα ἔχῃ ὡρισμένην θέσιν (ἄρα καὶ ἀρχὴν ὡρισμένην), λέγεται **ἐφαρμοστὸν διάνυσμα** (ἢ δεσμευμένον διάνυσμα).

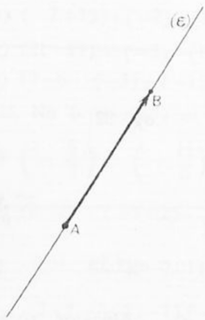
Παρατήρησις :

Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα εἶναι ἓν διατεταγμένον ζεῦγος σημείων καὶ ὄχι ἁπλῶς ἓν διμελὲς σύνολον σημείων.

Ἔχομεν λοιπόν: Εὐθύγραμμον τμῆμα $AB \equiv \{A, B\} \equiv \{B, A\}$

Διάνυσμα $\overrightarrow{AB} \equiv (A,B)$, διάνυσμα $\overrightarrow{BA} \equiv (B, A)$.

§ 61. Στοιχεῖα ἐφαρμοστοῦ διανύσματος.



σχ. 35.

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (A, B) καθορίζεται:

1. Ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν AB, ἤτοι τὸν **φορέα** αὐτοῦ ε.

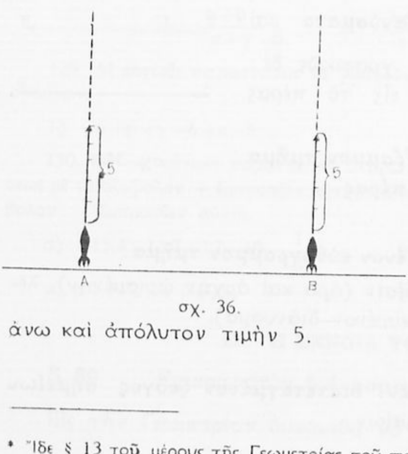
2. Ἀπὸ τὴν φοράν, τὴν ὁποίαν καθορίζει ἡ κίνησις ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B.

3. Ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ εὐθυγρ. τμήματος AB, δηλαδὴ τὸν λόγον* αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως. Ἡ τιμὴ τοῦ AB συμβολίζεται μὲ $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\overrightarrow{AB}| \in Q_0^+$) καὶ διαβάζεται «ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$».

4. Ἀπὸ τὴν ἀρχὴν A.

§ 62. Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα.

Πύραυλος ἐκτοξεύεται ἐκ σημείου A τοῦ πεδίου ἐκτοξεύσεως πυραύλων κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 5 km/sec. Πῶς θὰ παραστήσωμεν τὴν ταχύτητά του;



σχ. 36.

Ὁ καλύτερος τρόπος παραστάσεως εἶναι: ἓν διάνυσμα μὲ **φορέα** τὴν κατακόρυφον εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ A, **φορὰν** πρὸς τὰ ἄνω καὶ **ἀπόλυτον τιμὴν 5**.

Ἐὰν δεύτερος πύραυλος ἐκτοξευθῇ ἐκ σημείου B κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου πυραύλου εἶναι ἓν διάνυσμα μὲ **φορέα** τὴν διὰ τοῦ B κατακόρυφον εὐθεῖαν, **φορὰν** πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἀπόλυτον τιμὴν 5.

---

* Ἴδε § 13 τοῦ μέρους τῆς Γεωμετρίας τοῦ παρόντος βιβλίου.

Τὰ δύο αὐτὰ διανύσματα παριστοῦν τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον. Τὴν αὐτὴν ταχύτητα.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα ἢ **ἴσα διανύσματα**.

Τὰ ἴσα αὐτὰ διανύσματα ἔχουν: α) Φορεῖς παραλλήλους.
β) Φορὰν τὴν αὐτὴν (πρὸς τὰ ἄνω)
γ) Ἀπολύτους τιμὰς ἴσας.

Παρατήρησις

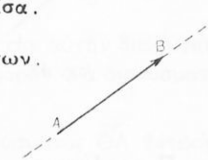
Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι **παράλληλοι μὲ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν** (εἶναι παράλληλοι ἢ συμπίπτουν), ὀνομάζομεν **διεύθυνσιν**. Λέγομεν τώρα, ὅτι δύο διανύσματα **ἐπὶ παραλλήλων φορέων** ἢ **τοῦ αὐτοῦ φορέως** ἔχουν τὴν αὐτὴν **διεύθυνσιν**.

Ἐπομένως τὰ διανύσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν: **τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἴσας ἀπολύτους τιμὰς εἶναι ἴσα.**

§ 63. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν διανυσμάτων.

1. Κάθε διάνυσμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ἑαυτόν του.

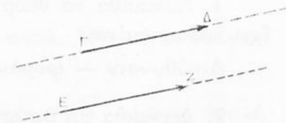
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$



Σχ. 37.

2. Ἐὰν διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{EZ}$ τότε καὶ $\overrightarrow{EZ}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

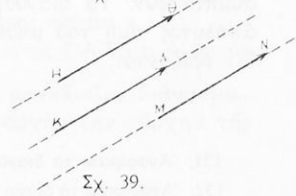
$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{EZ} \Longrightarrow \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$



Σχ. 38.

3. Δύο διανύσματα ἴσα πρὸς τρίτον διάνυσμα εἶναι ἴσα.

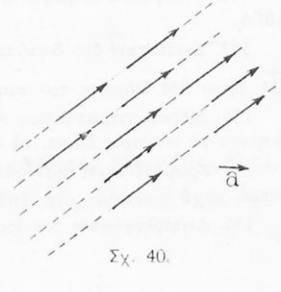
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{K\Lambda}\\ \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{MN}\end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{MN}$$



Σχ. 39.

Δηλαδὴ ἡ ἰσότης τῶν διανυσμάτων ἔχει τὰς ἰδιότητας **ἀνακλαστικὴν — συμμετρικὴν — μεταβατικήν**.

§ 64. Ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύνολον ἴσων διανυσμάτων, ἐπιτρέπεται συμφώνως πρὸς τὰς ἰδιότητας αὐτὰς νὰ θεωρῶμεν, ὅτι ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν, ἀντιπροσωπεύει τὸ σύνολον.



Σχ. 40.

Ἓν σύνολον ἴσων διανυσμάτων ὁρίζεται ἐκ τῶν ἑξῆς στοιχείων:

1. Διεύθυνσιν
2. Φορὰν
3. Ἀπόλυτον τιμὴν

σχ. 41.

Τὸ σύνολον αὐτὸ λέγεται **ἐλεύθερον διάνυσμα** ἢ ἁπλῶς **διάνυσμα.**

σχ. 42.

Τὰ ἐλεύθερα διανύσματα συμβολίζομεν μὲ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$... ἢ $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ κ.λ.π.

(Γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἢ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου μὲ τὸ σύμβολον ⟶ ἄνωθεν αὐτῶν).

Τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ... συμβολίζομεν $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$

Παρατήρησις.

1. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἐλεύθερον διάνυσμα ἓν διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει καθωρισμένα:

Διεύθυνσιν — φορὰν — ἀπόλυτον τιμὴν (δίχως ὡρισμένην ἀρχήν).

2. Δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει ἓν διάνυσμα $\vec{AA}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας συμπίπτουν. Τὸ διάνυσμα αὐτὸ λέγεται μηδενικὸν καὶ συμβολίζεται $\vec{0}$. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι 0, ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ δὲν ὁρίζονται.

Ἀσκήσεις

131. Ἀναφέρατε τὰ διανύσματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τρία σημεῖα Α, Β, Γ.

132. Ἀναφέρατε τὰ ζεύγη τῶν ἴσων διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ κορυφαὶ παραλ/μου ΑΒΓΔ.

133. Σχεδιάσατε δύο διανύσματα μὲ ἀρχὰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἴσα πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{AM}$, ὅπου ΑΜ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

134. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Μὲ ἀρχὴν τυχὸν σημεῖον 0, σχεδιάσατε ὅλα τὰ διανύσματα τὰ ἴσα πρὸς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου.

135. Γράψατε πέντε διανύσματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἀντιπροσωπεύουν τὸ αὐτὸ ἐλεύθερον διάνυσμα.

136. Δικαιολογήσατε τὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος τῶν διανυσμάτων.

13. Η ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ (ΑΞΩΝ) – ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ – ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ

1. Ἡ προσανατολισμένη εὐθεῖα — Ἄξων.

§ 65. *Ἐπὶ τῆς εὐθείας ε λάβετε δύο σημεῖα Ο καὶ Α (τὸ Α δεξιὰ τοῦ Ο). Νὰ συγκριθοῦν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{AO}$. Τί παρατηρεῖτε;*

σχ. 43.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{AO}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν, διαφέρουν δὲ κατὰ τὴν φοράν. Τὰ διανύσματα αὐτὰ λέγονται **ἀντίθετα**.

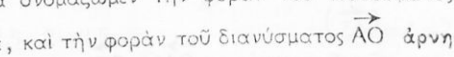
Συμφωνοῦμεν νὰ ὀνομάζωμεν τὴν φορὰν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ **θετικὴν φορὰν τῆς εὐθείας ε**, καὶ τὴν φορὰν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AO}$ **ἀρνητικὴν φορὰν τῆς ε**.

Κάθε εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορά, λέγεται **προσανατολισμένη**.

Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΧ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, λέγεται θετικὴ ἡμιευθεῖα καὶ ἡ ἀντικειμένη αὐτῆς ἡμιευθεῖα ΟΧ' ἀρνητικὴ ἡμιευθεῖα.

Τὸ σημεῖον Ο λέγεται ἀρχὴ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ε.

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγρ. τμήματος ΟΑ εἶναι ἡ μονὰς τοῦ μήκους, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ τῆς εὐθείας ε, λέγεται **μοναδιαῖον διάνυσμα**. Τοῦτο ἔχει φορὰν τὴν θετικὴν φορὰν τῆς εὐθείας, ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῆς προσανατ. εὐθείας ε καὶ ἀπόλυτον τιμὴν 1.



σχ. 43α

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ προσανατ. εὐθεῖα ε λέγεται **ἄξων** (σχ. 43α).

Ἄξων εἶναι ἡ προσανατολισμένη εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα.

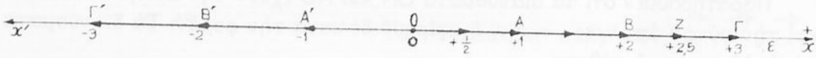
2. Ἀπεικόνισις τῶν ρητῶν εἰς τὴν προσανατολισμένην εὐθεῖαν.

§ **66**. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν τὸ σύνολον Q τῶν ρητῶν, ἐπὶ μιᾶς εὐθείας προσανατολισμένης (ἄξονος), ὡς ἑξῆς :

Εἰς τὴν ἀρχὴν O τοῦ ἄξονος X΄OX ἀπεικονίζομεν (δηλαδὴ ἀντιστοιχοῦμεν μονοσημάντως) τὸν ἀριθμὸν 0.

Εἰς τὸ πέρας τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ τὸν ἀριθμὸν $+1$, εἰς τὸ πέρας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι 2 ἀπεικονίζομεν τὸν $+2$ κ.ο.κ.

Δηλαδὴ εἰς τὰ πέρατα τῶν διανυσμάτων τοῦ ἄξονος, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν O καὶ φορὰν τὴν θετικήν, ἀπεικονίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Q^+ οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀντιστοίχως ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν.



σχ. 44

Εἰς τὰ πέρατα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$ κ.λ.π., τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίθετα ἀντιστοίχως τῶν $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ κ.ο.κ. ἀπεικονίζομεν τοὺς -1, -2 κ.λ.π. ἀντιθέτους τῶν $+1$, $+2$ κ.ο.κ.

Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν τὸ σύνολον τῶν ρητῶν Q ἀπεικονίζεται μονοσημάντως ἐπὶ τοῦ ἄξονος X΄OX (ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς εὐθείας ε).

Παρατηρήσεις.

1. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σύνολον Q ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ . . ., $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, . . .

2. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ $+2$ ἐπὶ τὸ μοναδιαῖον $\overrightarrow{OA}$ καὶ νὰ γράψωμεν : $\overrightarrow{OB}=(+2)\cdot\overrightarrow{OA}$ (ἢ $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$)
Ὁμοίως $\overrightarrow{OA'}=(-1)\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=(-2)\cdot\overrightarrow{OA}$ κ.λ.π.

Τοὺς ἀριθμοὺς 0, $+1$, $+2$, . . . -1, -2, . . . λέγομεν **τετμημένας** τῶν σημείων O,A,B, . . .A΄, B΄. . . ἀντιστοίχως.

Ἑπομένως **τετμημένη σημείου ἑνὸς ἄξονος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζεται ἐπ᾽ αὐτοῦ.**

3. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος

§ **67**. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ λέγεται ὁ ἀριθμὸς $+2$. Ἐπειδὴ ἐθεωρήσαμεν $\overrightarrow{OB}=+2\overrightarrow{OA}$, ὁ $+2$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $\overrightarrow{OB}$ πρὸς τὸ μοναδιαῖον $\overrightarrow{OA}$.

$$\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}}=+2$$

Συμβολίζομεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ $\overrightarrow{OB}$ μὲ $(\overrightarrow{OB})$. Ὥστε $(\overrightarrow{OB})=+2$, $(\overrightarrow{OO})=0$ (μηδ. διάνυσμα ἔχει ἀλγεβρ. τιμὴν 0). $(\overrightarrow{O\Gamma})=+3$, $(\overrightarrow{OB'})=-2$ κ.λ.π.

Παρατηροῦμεν ὅτι: $(\overrightarrow{OB})=+2=+2-0=$ τετμ.Β $-$ τετμ.Ο.

Ἄρα ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τῆς τετμημένης τοῦ πέρατος αὐτοῦ.

Παραδείγματα:

$(\overrightarrow{BZ})=2{,}5-2=0{,}5$, $\qquad (\overrightarrow{ZA})=1-2{,}5=-1{,}5$,

$(\overrightarrow{B'A'})=-1-(-2)=1$, $\qquad (\overrightarrow{\Gamma'O})=0-(-3)=+3$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονος εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τὸ διάνυσμα ἔχει φορὰν θετικὴν καὶ ἐὰν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τὸ διάνυσμα ἔχει φορὰν ἀρνητικήν.

Ἐφαρμογὴ

Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Ζ, Α, Β′ καὶ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{ZA}$, $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{B'Z}$ (Σχ. 44).

Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα $(\overrightarrow{ZA})+(\overrightarrow{AB'})+(\overrightarrow{B'Z})$.

Ἔχομεν: $(\overrightarrow{ZA})=1-2{,}5$, $(\overrightarrow{AB'})=-2-1$, $(\overrightarrow{B'Z})=2{,}5-(-2)$.

Ὥστε: $(\overrightarrow{ZA})+(\overrightarrow{AB'})+(\overrightarrow{B'Z})=(1-2{,}5)+(-2-1)+[2{,}5-(-2)]=$

$$=1-2{,}5-2-1+2{,}5+(+2)=$$

$$=1-2{,}5-2-1+2{,}5+2=0$$

Ἀσκήσεις

137. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{K\Lambda}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{\Lambda M}$, $\overrightarrow{MK}$, ἐὰν αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Κ, Λ, Μ, Ν τοῦ ἄξονος εἶναι ἀντιστοίχως -7, $+2$, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{13}{5}$

138. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος ἐάν:

α) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι $\frac{11}{2}$ καὶ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος 8

β) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι -4 καὶ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος -1

γ) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι $-\frac{3}{2}$ καὶ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος 4

δ) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι 2 καὶ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος -5

ε) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι 5 καὶ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος 2

139. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος ἐάν:

α) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι -2 καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι $+1$

β) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι -1 καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι 3

γ) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι 2 καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι 2

δ) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι -5 καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι -7

ε) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι $\frac{3}{2}$ καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι 4

14. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΟΝ — ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ

§ 68. α) Δυνάμεις μὲ βάσιν ρητὸν καὶ ἐκθέτην ἀκέραιον ≥ 2.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα: $(-3)\cdot(-3)$, $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$,

$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$, $(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$

Ἔχομεν:

$$(-3)\cdot(-3) = +(3\cdot3) = 3^2$$

$$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -(2\cdot2\cdot2) = -2^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = +\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -(4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4) = -4^5$$

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ γινόμενον $\underbrace{\alpha.\alpha.\alpha....\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$ λέγεται νιοστὴ δύναμις τοῦ α

καὶ γράφεται συντόμως: α^ν $\left(\begin{array}{l} \alpha \text{ λέγεται βάσις}, \ \alpha \in Q_0^+ \\ \nu \text{ λέγεται ἐκθέτης}, \ \nu \in N \\ \qquad \text{καὶ } \nu \geq 2 \end{array}\right)$

Ἐπίσης ὅτι: $\alpha^1 = \alpha$ καὶ $\alpha^0 = 1$ $(\alpha \neq 0)$

Τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς ἐπεκτείνομεν καὶ διὰ τοὺς ρητοὺς πραγμ. ἀριθμούς, δηλαδὴ **ἐὰν** $\alpha \in Q$ **καὶ** $\nu \in N$, **τὸ** α^ν **παριστᾷ τὸ γινόμενον** ν **παραγόντων ἴσων πρὸς** α **καὶ λέγεται νιοστὴ δύναμις τοῦ** α.

Επομένως ἡ 2α δύναμις τοῦ -3 εἶναι : $(-3)\cdot(-3)=(-3)^2$

ἡ 3η δύναμις τοῦ -2 εἶναι : $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^3$

ἡ 4η δύναμις τοῦ $-\frac{2}{3}$ εἶναι : $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

καὶ ἡ 5η δύναμις τοῦ -4 εἶναι : $(-4).(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=(-4)^5$

Ἐὰν συγκρίνωμεν αὐτὰ πρὸς τὰ ἀνωτέρω εὑρεθέντα ἔχομεν :

$(-3)^2=3^2$ (θετικὸς) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4$ (θετικὸς)

$(-2)^3=-2^3$ (ἀρνητικὸς) $(-4)^5=-4^5$ (ἀρνητικὸς)

Ἄρα ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν μὲν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικόν, εἰς περιττὴν δὲ δύναμιν ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$(-2)^2\cdot(-2)^3=(-2)^{2+3}=(-2)^5$$

$$[(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^5,$$

$$[(-2)^3]^2=(-2)^{2\cdot3}=(-2)^6$$

$$(-2)^3\cdot(-2)^3=(-2)^{3+3}=(-2)^{2\cdot3}$$

$$(-3)^4:(-3)^2=(-3)^{4-2}=(-3)^2$$

$$\frac{(-3)^4}{(-3)^2}=\frac{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}{(-3)\cdot(-3)}=(-3)\cdot(-3)=(-3)^2$$

$$[(-2)\cdot(-3)]^2=(-2)^2\cdot(-3)^2$$

$$[(-2)\cdot(-3)]\cdot[(-2)\cdot(-3)]=(-2)\cdot(-3)(-2)\cdot(-3)=(-2)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$$

$$[(-2)\cdot(-2)]\cdot[(-3)\cdot(-3)]=(-2)^2\cdot(-3)^2$$

Ἑπομένως ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

$$\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}\quad(\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\underbrace{\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\mu\ \text{παράγ.}}\underbrace{.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγ.}}=\underbrace{\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha}_{\mu+\nu\ \text{παράγ.}}=\alpha^{\mu+\nu})$$

$$\alpha^\mu:\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}\quad(\mu\geqslant\nu)\quad\left(\alpha^\mu:\alpha^\nu=\frac{\overbrace{\alpha\alpha\ldots.\alpha}^{\mu\ \text{παράγ.}}}{\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu\ \text{παράγ.}}}=\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\mu-\nu\ \text{παρ.}}=\alpha^{\mu-\nu}\right)$$

$$(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}\quad\left(\underbrace{\alpha^\mu\cdot\alpha^\mu\ldots\alpha^\mu}_{\nu\ \text{παραγ.}}=\alpha^{\mu+\mu+\ldots+\mu}=\alpha^{\mu\nu}\right)$$

$(\alpha\beta\gamma)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu$ καὶ ὅταν $\alpha,\beta,\gamma\in Q$ $(\mu,\nu\in N)$,

Ἐφαρμογαί

$$(-1)^0 = 1, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$$

$$(-1)^1 = -1, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^5 : \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$(-1)^2 = 1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$(-1)^3 = -1$$

$$(-1)^4 = 1, \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}, \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} = \frac{9}{64}$$

§ 69. β) Δυνάμεις μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον μικρότερον τοῦ μηδενός.

Γνωρίζομεν τὶ παριστᾶ τὸ σύμβολον α^ν, ὅταν $\alpha \in Q$ καὶ $\nu \in Z^+$, δηλαδὴ γνωρίζομεν ὅτι:

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^2 = \alpha\cdot\alpha, \quad \alpha^3 = \alpha.\alpha.\alpha., \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τὶ παριστᾶ ὅμως τὸ σύμβολον α^κ, ὅταν $\kappa \in Z^-$; Δηλαδὴ τὶ παριστᾶ τὸ α^{-1}; τὸ α^{-2}; τὸ α^{-3}; κ.ο.κ.

Εἰς τὴν §49ε εἴδομεν, ὅτι ὁ ἀντίστροφος τοῦ α συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{\alpha}$ ἢ μὲ α^{-1}· ἄρα τὰ δύο αὐτὰ σύμβολα εἶναι ἴσα ἐφόσον συμβολίζουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἀντίστροφον τοῦ α).

Συνεπῶς $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$ ἢ $\alpha^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^1 = \frac{1}{\alpha}$

Ἐπεκτείνομεν τὸν συμβολισμὸν αὐτὸν καὶ ἔχομεν:

$$\alpha^{-2} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^{-3} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = \frac{1}{\alpha^3}$$

....

....

....

$$\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu = \frac{1}{\alpha^\nu} \qquad \nu \in N$$

Ὥστε δύναμις ρητοῦ (διαφόρου τοῦ μηδενὸς) μὲ ἐκθέτην ἀρνητικὸν ἀκέραιον, παριστᾶ τὴν δύναμιν τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ ρητοῦ μὲ ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον θετικὸν ἀκέραιον.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀντίστροφος τοῦ α ὑπάρχει ὅταν ὁ α εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, διὰ τοῦτο τὸ σύμβολον $\alpha^{-\nu}$, $(\nu \in N)$ ἔχει ἔννοιαν ὅταν $\alpha \neq 0$.

Συμβολικῶς: ἐὰν τὸ $\nu \in N_0$ καὶ $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$

Ἐφαρμογαί

$$2^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}\ ,\quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2}=\frac{25}{16},\ (-2)^{-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1}=-\frac{1}{2}$$

$$(-3)^{-2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{9}\ ,\ (-3)^{-3}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}=-\frac{1}{27}\ ,\ (-2)^{-2}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=-\frac{27}{8}\ ,\ (-3)^{-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{1}=-\frac{1}{3},\ (-2)^{-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=-\frac{1}{8}$$

Σημείωσις :

1. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει ὁ κανὼν διὰ τὸ πρόσημον τῆς δυνάμεως, ὅταν ἡ βάσις εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ὁ ἐκθέτης ἄρτιος ἢ περιττός.

2. Εἰς τὸν τύπον $\alpha^{-\nu}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}$, ἐὰν $\nu=0$ ἔχομεν : $\alpha^{-0}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{0}$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ $-0=0$ εἶναι $\alpha^{-0}=\alpha^{0}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{0}=1$.

3. Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὅταν γράφωμεν τὸ σύμβολον α^{ν} θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι $\alpha\in Q$, $\alpha\neq 0$ καὶ $\nu\in Z$.

§ 70. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ βάσιν ρητὸν (διάφορον τοῦ μηδενὸς) καὶ ἐκθέτην ἀκέραιον.

1. $(-2)^{-2}\cdot(-2)^{-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}=(-2)^{-5}$

Ἄρα γενικῶς : $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$

2. $[(-2)^{-3}]^{-2}=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{-2}=\left[\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}}\right]^{2}=\left[\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)^{3}\right]^{2}=$

$$=\left[\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)\right]^{2\cdot 3}=(-2)^{6}=(-2)^{(-3)\cdot(-2)}$$

Ἄρα γενικῶς : $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\cdot\nu}$

3. $(-4)^{-5}:(-4)^{-3}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{5}:\left(-\frac{1}{4}\right)^{3}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{2}=(-4)^{-2}$

Ἀλλὰ καὶ $(-4)^{-5}:(-4)^{-3}=(-4)^{-5-(-3)}=(-4)^{-5+3}=(-4)^{-2}$

Γενικῶς : $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$

4. $[(-2)\cdot(-3)]^{-2}=\left[\frac{1}{(-2)(-3)}\right]^{2}=\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^{2}=$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}=(-2)^{-2}\cdot(-3)^{-2}$$

Γενικῶς : $(\alpha\cdot\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$

Ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας:

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)^\nu = \alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu\cdot\delta^\nu$$

Ἐφαρμογαί

$$(-3)\cdot(-3)^{-2}\cdot(-3)^3 = (-3)^{1-2+3} = (-3)^2 = 9$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-2)^4 = 16$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2-(-3)} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2+3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^1 = -\frac{3}{4}$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-3)\right]^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(-3)^{-2} = (-2)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4\cdot\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{131}{25}\right)\cdot\left(-\frac{131}{25}\right)^2\cdot\left(-\frac{131}{25}\right)^{-3} = \left(-\frac{131}{25}\right)^{1+2-3} = \left(-\frac{131}{25}\right)^0 = 1$$

Ἀσκήσεις

140. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις:

α) 4^{-2}, $(-7)^{-2}$, $(-1)^1$, $(-1)^{-1}$, $(-1)^{-2}$, -1^{12}, $-(-1)^{-3}$

β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $(-0{,}5)^3$, $(-0{,}5)^{-2}$

141. Νὰ ἐκτελεσθοῦν κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον αἱ πράξεις:

α) $\left(-\frac{101}{305}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{101}{305}\right)^3\cdot\left(-\frac{101}{305}\right)^{-1}$, β) $\left(\frac{259}{748}\right)^2\cdot\left(\frac{259}{748}\right)^3\cdot\left(\frac{748}{259}\right)^5$

γ) $\left(-\frac{149}{245}\right)^{-4} : \left(-\frac{149}{245}\right)^{-3}$ δ) $\left(-\frac{15}{16}\right)^{+3} : \left(-\frac{16}{15}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

142. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

α) $(-1)^1 + (-1)^{-1} + (-1)^2 + (-1)^{-2} + (-1)^0 + 1^0$, β) $(10^{-4})^{-3}$,

γ) $2^{-2} + 4^{-1} + 3^0 - 8^1 + (-1)^{-2}$ δ) $[(-10)^2]^{-3}$, ε) $\left[\left(-\frac{1}{10}\right)^{-2}\right]^{-3}$

143. Νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφὴν δυνάμεως οἱ κάτωθι ἀριθμοί:

α) 10, −10, 0,1, 0,1, −8, $-\frac{16}{9}$

β) 100, −100, 0,01, −0,01,

γ) 1000, −1000, 0,001, −0,001, $\frac{1}{8}$, $-\frac{27}{64}$

144. Νὰ γράψητε συντόμως τοὺς κάτωθι ἀριθμούς:

α) 0,0000001 δ) $\frac{1}{0{,}00000007}$

β) 0,0000000015

γ) −0,000000000045 ε) $\frac{1}{-0{,}0000000009}$

145. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α) $2^{\chi-4} - 6\cdot4^{\chi-3} + 1^{\chi-2} - 5^{\chi-1}$ ἐὰν $\chi = 1$

β) $2\cdot\chi^{-2} - 2^{-\chi} + \chi^{\chi} - 3\cdot(-1)^{-3}$ ἐὰν $\chi = -2$

γ) $(\chi+4)\cdot2^{\chi-2} - 3\cdot3^{\chi+1} + 6\cdot3^{\chi-1}$ ἐὰν $\chi = 0$

δ) $2\left(-\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot (-2)^{-2}\ (-3)^{-3}\ (-1)^{-1}$

ε) $\frac{\chi^2-\psi^2}{\chi+\psi}$ ἐὰν $\chi = -\frac{1}{2}$ καὶ $\psi = -2$

146. Τὰ κάτωθι γινόμενα νὰ γίνουν δυνάμεις ἑνὸς ρητοῦ:

α) $(-8)^2 \cdot (-4)^3$ β) $\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-2)^3$ δ) $(-1)^{-3} \cdot (-2)^{-1} \cdot 2^3$

ε) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot 3^2$ στ) $\left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{3}$

147. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \chi = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ β) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2} : \chi = \left(-\frac{2}{3}\right)$

γ) $\chi : \left(-\frac{1}{2}\right)^{2} = -\frac{1}{2}$ δ) $0{,}00000016 = \chi \cdot 4^2 \cdot 10^{-8}$

15. ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ II

§ 71. Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα περιλαμβάνονται αἱ βασικαὶ πράξεις: Πρόσθεσις — Πολλαπλασιασμὸς καὶ αἱ σπουδαιότεραι ἰδιότητες.

Σημείωσις. Ἀφαίρεσις ρητοῦ εἶναι ἡ πρόσθεσις τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ καὶ διαίρεσις ρητοῦ εἶναι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

Τὰ $\alpha, \beta, \gamma \in Q$

Πράξεις	Πρόσθεσις	Πολλαπλασιασμὸς
Ὕπαρξις ἀθροίσματος καὶ γινομένου	Διὰ κάθε α καὶ β $\alpha+\beta \in Q$	Διὰ κάθε α καὶ β $\alpha\beta \in Q$
Μεταθετικὴ ἰδιότης	Διὰ κάθε α καὶ β $\alpha+\beta=\beta+\alpha$	Διὰ κάθε α καὶ β $\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστικὴ ἰδιότης	Διὰ κάθε α, β καὶ γ $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	Διὰ κάθε α, β καὶ γ $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$
Ὕπαρξις οὐδετέρου στοιχείου	Διὰ κάθε α ὑπάρχει τὸ στοιχεῖον 0 ὥστε $\alpha+0=\alpha$	Διὰ κάθε α ὑπάρχει τὸ στοιχεῖον 1 ὥστε $1 \cdot \alpha=\alpha$
Ὕπαρξις ἀντιθέτου καὶ ἀντιστρόφου στοιχείου	Διὰ κάθε α ὑπάρχει τὸ στοιχεῖον $-\alpha$ ὥστε $\alpha+(-\alpha)=0$	Διὰ κάθε $\alpha \neq 0$ ὑπάρχει τὸ στοιχεῖον $\frac{1}{\alpha}$ ὥστε $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}=1$
Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης	Διὰ κάθε α, β καὶ γ, $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

§ 72. Ἰδιότητες ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων.

1. $\alpha=\beta \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=\beta+\gamma \\ \alpha\gamma=\beta\gamma \ (\gamma\neq 0) \end{cases}$ 2. $\begin{matrix} \alpha=\beta \\ \gamma=\delta \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha+\gamma=\beta+\delta \\ \alpha\gamma=\beta\delta \end{matrix}$

3. $\alpha>\beta \Longleftrightarrow \begin{matrix} \alpha+\gamma > \beta+\gamma \\ \alpha\gamma > \beta\gamma \ (\gamma>0) \\ \alpha\gamma < \beta\gamma \ (\gamma<0) \end{matrix}$ 4. $\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma \geqq \delta \end{matrix} \Longrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta$

§ 73. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

1. $\alpha^{\mu}.\alpha^{\nu}\ldots\alpha^{\rho}=\alpha^{\mu+\nu+\ldots+\rho}$ 2. $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$ 3. $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$

4. $(\alpha.\beta.\gamma\ldots\kappa)^{\nu}=\alpha^{\nu}.\beta^{\nu}.\gamma^{\nu}\ldots\kappa^{\nu}$

5. $\alpha^{1}=\alpha,\quad \alpha^{0}=1\ (\alpha\neq 0),\quad \alpha^{-\nu}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}\ (\alpha\neq 0)$

Γενικαὶ ἀσκήσεις κεφαλαίου II

148. Ἐὰν $\chi=-6+7-2+3$, $\psi=-4+3-7+2$ καὶ $z=-4+6-3$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ α) $\chi+\psi+z$, β) $\chi-\psi-z$, γ) $\chi^2+\psi^2+z^2$, δ) $-\chi^2+\psi^2-z^2$

149. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

α) $(2-5+7).(-2+7)+(-13+7):(-12+15)$,

β) $\left(-\frac{2}{5}+1\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}-1\right)-\left(1+\frac{5}{2}\right):\left(-2-\frac{1}{3}\right)$,

γ) $\left(-3+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+3-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$,

δ) $\left(-\frac{3}{5}+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(-\frac{15}{7}\right)-\left(\frac{7}{2}-1\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$,

ε) $-[-4-(-3+2)]+[-(-6+2)-14].[-0{,}5+1]$

150. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χ ἐκ τῶν ἰσοτήτων:

α) $-\frac{2}{5}\chi=-\frac{14}{5}-\frac{5}{10}$, β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}:\chi=\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$,

γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}:\chi=-\frac{1}{2}$ δ) $-\frac{1}{4}\cdot\chi=\left[(-2)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$,

ε) $\left(-\frac{3}{4}\right):\chi=\frac{1}{4}-\frac{27}{8}$, στ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-\chi)=-\frac{1}{2^7}$

ζ) $[2^3.10^{-7}]:\chi=5^2.10^{-9}$

151. Ἐὰν $\alpha=-5$ καὶ $\beta=+3$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων

α) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$, β) $\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$, γ) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$

Τί παρατηρεῖτε;

152. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

α) $\dfrac{3\alpha^2-2\beta^3}{2}-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{3}$ ἐὰν $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=2$

β) $\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{3}-\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4}\right):\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^2+1}{\alpha\beta}\right)$ ἐὰν $\alpha=1$, $\beta=2$

γ) $\dfrac{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$ ἐὰν $\alpha=-3$, $\beta=2$

δ) $(4.\chi^{\chi})^2-6(\chi\psi)^{\chi\psi}-\psi^{2\psi}$ ἐὰν $\chi=-1$, $\psi=2$

153. Εἰς τὰς ἀκολούθους παραστάσεις νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ γραφῇ ὡς δύναμις.

α) $(3^2.3^3):3^4+(2^5:2^3).2-6.5$

β) $\left(-3^{-2}:3^{-3}\right)\cdot 3^{-4}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+4^2:3^3$

γ) $\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{7}\right)^{-3}:\left[\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{2}\right)^0\right]^{-2}-\left[\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{5}{2}\right]^{-1}$

δ) $5\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-4}+\left(-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{1}{81}\right)^0-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}:5^{-2}$

154. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α) $4.2^{\chi+1}-3.3^{\chi}-6.3^{\chi-1}+(\chi-2).2^{\chi-2}$ ἐὰν $\chi=0$

β) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\chi-4}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\chi-3}+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\chi-2}+(-1)^{\chi-1}-(-1)^{\chi}$ ἐὰν $\chi=1$

γ) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\chi-3}+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\chi-2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\chi-1}+(-1)^{\chi}$ ἐὰν $\chi=1$

155. Εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἐρωτηματικοῦ νὰ τεθῇ τὸ κατάλληλον σύμβολον ἐκ τῶν $>$, $<$, $=$ εἰς τὰ κάτωθι:

α) $-\dfrac{7}{3}+\dfrac{14}{6}$; $-\dfrac{1}{2}$

β) $-5+\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{8}-\dfrac{7}{4}$

γ) $-\dfrac{3}{5}$; $-\dfrac{4}{3}+\dfrac{11}{15}$

καὶ νὰ πολλαπλασιασθοῦν καὶ τὰ δύο μέλη τῶν προκυπτουσῶν σχέσεων ἐπὶ (-1).

δ) Εἰς τὰς προηγουμένας σχέσεις νὰ μεταφερθοῦν οἱ ὅροι τοῦ β΄ μέλους εἰς τὸ πρῶτον.

156. Νὰ πολ/σιάσητε καὶ τὰ δύο μέλη τῶν κάτωθι ἰσοτήτων καὶ ἀνισοτήτων μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

α) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{6}$, β) $\dfrac{3}{4}-1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}$, γ) $\dfrac{12}{14}-\dfrac{1}{7}=1-\dfrac{2}{7}$

δ) $\dfrac{13}{14}>1-\dfrac{1}{7}$, ε) $\dfrac{7}{3}<3-\dfrac{1}{2}$, στ) $1-\dfrac{1}{4}<\dfrac{25}{8}-2$

157. Νὰ ἐπαληθεύσητε τὰς σχέσεις: 1. $\alpha^2+\beta^2 \geqslant 2\alpha\beta$, 2. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geqslant \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ δι' ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων.

158. Νὰ ἀποδειχθοῦν τά:

α) $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$, β) $(-1)^{2\nu} = 1$,

γ) $(-1)^{2\nu+1} = -1$, δ) $\alpha^{\kappa-\lambda} \cdot \alpha^{\lambda-\mu} \cdot \alpha^{\mu-\kappa} = 1$,

ε) $\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Α. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Η ΕΞΙΣΩΣΙΣ $\alpha\chi+\beta=0$. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

§ 74. Είς τὴν Α΄ τάξιν ἐγνωρίσαμεν ἐξισώσεις, ὅπως τὰς $\chi+3=5$, $12-\chi=8$, $3\chi=15$ καὶ εἴδομεν ὅτι αὗται ἀληθεύουν δι' ὡρισμένας τιμὰς τοῦ γράμματος χ, τὸ ὁποῖον λέγεται ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως.

Ὥστε ἐξίσωσις ὡς πρὸς χ εἶναι μία ἰσότης, περιέχουσα τὸν ἄγνωστον χ, ἡ ὁποία ἀληθεύει δι' ὡρισμένας ἐκ τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ὁ χ.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, λέγεται **λύσις** τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ εὕρεσις τῶν λύσεων, λέγεται **ἐπίλυσις** τῆς ἐξισώσεως.

Σημείωσις.

1. Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi+3=8$ ἀληθεύει διὰ τὴν τιμὴν 5 τοῦ χ, ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5 ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, ἐννοοῦμεν ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi+3=8$ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ χ τὸ 5, θὰ λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα $5+3=8$ ἢ $8=8$ (Πρῶτον μέλος ἴσον πρὸς τὸ δεύτερον μέλος).

Διὰ τῆς ἐργασίας αὐτῆς, διὰ τῆς ὁποίας θέτομεν ἀντὶ τοῦ χ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται πρὸς τὸ δεύτερον, λέγομεν ὅτι **ἐπαληθεύομεν** τὴν ἐξίσωσιν ἢ ὅτι γίνεται **ἐπαλήθευσις** τῆς ἐξισώσεως.

Ὅταν μία ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ μίαν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ,λέγομεν ὅτι ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι πράγματι λύσις τῆς ἐξισώσεως. Π. χ. ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 3 ἐπαληθεύει τὴν $\chi-2=1$ συνάγομεν ὅτι εἶναι λύσις αὐτῆς.

2. Μία ἐξίσωσις εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχῃ λύσιν. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3+\chi=\chi+\frac{5}{2}$ δὲν ἐπαληθεύεται, ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ χ οἱονδήποτε ρητόν. Αὐτὴ λέγεται **ἀδύνατος** ἐξίσωσις.

Ὑπάρχουν καὶ ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀπείρους λύσεις. π.χ. ἡ $\chi+5=5+\chi$ ἐπαληθεύεται δι' οἱουδήποτε ρητοῦ. Αὐτὴ λέγεται **ταυτότης** ἢ ἀόριστος ἐξίσωσις.

Αἱ ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας ἐξετάζομεν, ἀνάγονται εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν $\alpha\chi+\beta=0$, ἡ ὁποία λέγεται **ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ**, ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος ἔχει ἐκθέτην τὴν μονάδα. $\alpha\chi^1+\beta=0$ ἢ $\alpha\chi+\beta=0$.

Οἱ α, β εἶναι ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις ἀνεξάρτητοι τοῦ χ (μὴ περιέχουσαι τὸ χ). Ὁ α λέγεται συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου καὶ θεωρεῖται διάφορος τοῦ μηδενός. Ὁ β λέγεται γνωστὸς ὅρος.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $6\chi-5=3\chi+1$, ἡ ὁποία εἶναι 1ου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

Αἱ παραστάσεις $6\chi-5$, $3\chi+1$ λέγονται «μέλη τῆς ἐξισώσεως» Οἱ ὅροι αὐτῶν λέγονται καὶ ὅροι τῆς ἐξισώσεως. Οἱ -5, 1 εἶναι οἱ γνωστοὶ ὅροι καὶ οἱ 6χ, 3χ εἶναι οἱ ἄγνωστοι ὅροι.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\frac{2\chi+3}{2}+\frac{\chi-1}{3}=\frac{\chi+2}{6}$ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ὅρους τοῦ 1ου μέλους τὰς παραστάσεις $\frac{2\chi+3}{2}$ καὶ $\frac{\chi-1}{3}$ καὶ τοῦ 2ου μέλους τὴν παράστασιν $\frac{\chi+2}{6}$.

§ 75. Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις.

Αἱ ἐξισώσεις $\chi-2=5$, $\chi+3=10$ ἔχουν τὴν λύσιν 7, (διότι ἐπαληθεύονται ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ ὁ 7) καὶ μόνον αὐτή.

Δύο ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον λέγονται ἰσοδύναμοι, ἐὰν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις.

§ 76. Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων

α) Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $(\chi+2).3-6=12$ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις

$$3\chi+\underbrace{6-6}=12$$

$$3\chi+0=12$$

καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $3\chi=12$, ἡ ὁποία ἔχει λύσιν τὸν ἀριθμὸν 4.

Ἡ λύσις αὐτὴ εἶναι καὶ λύσις τῆς ἀρχικῆς, διότι παρατηροῦμεν ὅτι τὴν ἐπαληθεύει: $(\chi+2).3-6=12$

α΄ μέλος: $(4+2).3-6$

$6.3-6$

$18-6=12$

β΄ μέλος: 12

Ὥστε, **ἐὰν εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐκτελέσωμεν τὰς σημειουμένας πράξεις, εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.**

β) Ἡ ἐξίσωσις $\chi+3=2$ ἔχει τὴν λύσιν -1. Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη αὐτῆς τὸν 4 θὰ ἔχωμεν:

$$\chi+3+4=2+4 \Longleftrightarrow \chi+7=6.$$

Ἡ ἐξίσωσις $\chi+7=6$ ἔχει τὴν λύσιν -1, διότι τὴν ἐπαληθεύει καὶ ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν.

Ἄρα, **ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως τὸν αὐτὸν ρητόν, λαμβάνομεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.**

Σημείωσις. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν προσθέσωμεν τὴν αὐτὴν παράστασιν, ἡ ὁποία περιέχει τὸν ἄγνωστον χ. π.χ. $\chi+3=2 \Longleftrightarrow \chi+3+(\chi+1)=2+(\chi+1) \Longleftrightarrow 2\chi+4=\chi+3$. Αὐτὴ ἔχει τὴν λύσιν -1, διότι τὴν ἐπαληθεύει,

$$2.(-1)+4=-1+3$$

$$-2+4=-1+3$$

$$2=2$$

Πρακτικὸν συμπέρασμα τῆς ἰδιότητος αὐτῆς.

Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $2\chi+3=5$ τὸν -3, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $2\chi+3+(-3)=5+(-3)$ ἢ τὴν $2\chi=5-3$, ἡ ὁποία εἶναι ἁπλουστέρα τῆς ἀρχικῆς.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $2\chi+3=5$ μεταβαίνομεν εἰς τὴν $2\chi=$ $=5-3$, ἐὰν μεταφέρωμεν τὸν 3 ἐκ τοῦ 1ου μέλους εἰς τὸ δεύτερον καὶ τοῦ ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημόν του.

Ὥστε δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον ἀθροίσματος ἑνὸς μέλους ἐξισώσεως, εἰς τὸ ἄλλο, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον αὐτοῦ ἢ συντόμως : **ὁ ὅρος ἐξισώσεως, ὁ ὁποῖος ἀλλάσσει μέλος ἀλλάσσει καὶ πρόσημον.**

Παραδείγματα :

1. $\chi-5=7 \Longleftrightarrow \chi=7+5$

2. $3-2\chi+6=5\chi-1 \Longleftrightarrow 3+6=2\chi+5\chi-1 \Longleftrightarrow 3+6+1=2\chi+5\chi \Longleftrightarrow$ $5\chi+2\chi=3+6+1$. Εἰς τὴν μορφὴν αὐτὴν τῆς ἐξισώσεως λέγομεν ὅτι ἔχομεν χωρίσει γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους.

γ) Ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{2}-1=0$ ἔχει τὴν λύσιν 2, διότι τὴν ἐπαληθεύει.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ 2 καὶ ἔχομεν $\left(\frac{\chi}{2}-1\right).2=$ $=0.2 \Longleftrightarrow \frac{\chi}{2}.2-1.2=0.2 \Longleftrightarrow \chi-2=0$.

Ἡ ἐξίσωσις $\chi-2=0$ ἔχει τὴν λύσιν 2, ἄρα εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν.

Ἐπομένως, **ἐὰν πολ/σωμεν καὶ τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ ρητόν, διάφορον τοῦ μηδενός, λαμβάνομεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.**

Πρακτικὰ συμπεράσματα τῆς ἰδιότητος αὐτῆς.

1. Πολ/ζομεν ἐπὶ (-1) ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $2-\chi=3$, $(2-\chi).(-1)=$ $=3.(-1)$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $-2+\chi=-3$.

Παρατηροῦμεν ὅτι **δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως.**

Παραδείγματα : $-\chi=7 \Longleftrightarrow \chi=-7$, $-\chi+3=-\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \chi-3=\frac{1}{2}$

2. Πολ/ζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισ. $\frac{\chi}{2}-\frac{\chi}{3}=1$ ἐπὶ τὸ 6, (Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν), $6.\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\chi}{3}\right)=6.1 \Longleftrightarrow 6.\frac{\chi}{2}-6.\frac{\chi}{3}=6 \Longleftrightarrow 3\chi-2\chi=6$

Ἄρα δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς μιᾶς ἐξισώσεως, ἐὰν πολ/μεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

Παραδείγματα :

1. $\frac{\chi}{2}-3=1 \Longleftrightarrow 2\cdot\frac{\chi}{2}-2\cdot3=2\cdot1 \Longleftrightarrow \chi-6=2$

2. $\frac{2\chi}{3}+\frac{1-\chi}{4}=\frac{3}{2} \Longleftrightarrow 12\cdot\frac{2\chi}{3}+\frac{12(1-\chi)}{4}=12\cdot\frac{3}{2} \Longleftrightarrow 4\cdot2\chi+3(1-\chi)=6\cdot3$

§ 77. Ἐργασία διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεως 1ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}=\frac{1}{2}$

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ἐξαλείφομεν πρῶτον τοὺς παρονομαστάς.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 4, 3, 2, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ 12, πολ/μεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν 12 καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις διαιρέσεως (ἁπλοποιήσεις). Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατόν, διότι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι διαιρετὸν ὑπ' αὐτῶν.

Ὥστε: $\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow 12\left(\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}\right)=12\cdot\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow \frac{12\cdot(2\chi+1)}{4}-\frac{12(\chi-2)}{3}=6\cdot1 \Longleftrightarrow 3\cdot(2\chi+1)-4\cdot(\chi-2)=6$

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως $3(2\chi+1)-4(\chi-2)=6$ (καὶ οἱασδήποτε ἄλλης τῆς μορφῆς αὐτῆς) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ :

$$3(2\chi+1)-4(\chi-2)=6 \Longleftrightarrow (6\chi+3)-(4\chi-8)=6$$

Ἐξαλείφομεν τὰς παρενθέσεις : $(6\chi+3)-(4\chi-8)=6 \Longleftrightarrow 6\chi+3-4\chi+8=6$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις προσθέσεως : $6\chi+3-4\chi+8=6 \Longleftrightarrow 2\chi+11=6$.

(Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται καὶ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων).

Τώρα διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν $2\chi+11=6$, μεταφέρομεν τὸν 11 εἰς τὸ β' μέλος (χωρίζομεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους), $2\chi+11=6 \Longleftrightarrow 2\chi=6-11$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν τελευταίαν πρᾶξιν προσθέσεως ἢ ἀναγωγήν,

$$2\chi=6-11 \Longleftrightarrow 2\chi=-5$$

Ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύομεν τὴν $2\chi=-5$, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, δηλαδὴ ἐὰν πολ/ωμεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου.

$2\chi=-5 \Longleftrightarrow \frac{2\chi}{2}=-\frac{5}{2} \Longleftrightarrow \chi=-\frac{5}{2}$. Συντομώτερον $2\chi=-5 \Longleftrightarrow$ $\chi=-\frac{5}{2}$. Ὥστε ἡ λύσις τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως $\frac{2\chi+1}{4}-\frac{\chi-2}{3}=\frac{1}{2}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $-\frac{5}{2}$.

Ἐπαλήθευσις :

α' μέλος :

$$\frac{2\left(-\frac{5}{2}\right)+1}{4}-\frac{-\frac{5}{2}-2}{3}=\frac{-5+1}{4}-\frac{\frac{-5-4}{2}}{3}=\frac{-4}{4}-\frac{-9}{6}=$$

$$=-1+\frac{9}{6}=-\frac{6}{6}+\frac{9}{6}=\frac{-6+9}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

β' μέλος : $\frac{1}{2}$

Ἐὰν συνοψίσωμεν τὰ ἀνωτέρω διὰ τὴν ἐπίλυσιν μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως ἔχομεν τὴν ἑξῆς γενικὴν πορείαν τῆς ἐπιλύσεως.

1ον. Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς (ἐὰν ὑπάρχουν).

2ον. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις πολ/σμοῦ.

3ον. Ἐξαλείφομεν τὰς παρενθέσεις.

4ον. Χωρίζομεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους.

5ον. Ἐκτελοῦμεν τὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ εἰς τὰ δύο μέλη.

6ον. Διαιροῦμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, ἐὰν εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας πᾶσα ἐξίσωσις 1ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον λαμβάνει τὴν μορφὴν $\gamma\chi=\delta$ καὶ ἔχει τὴν λύσιν $\chi=\frac{\delta}{\gamma}$ ἐὰν $\gamma\neq 0$.

Σημείωσις. Εἶναι δυνατὸν ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων πολ/σμοῦ καὶ ἡ ἐξάλειψις τῶν παρενθέσεων νὰ γίνῃ συγχρόνως. Π.χ. $2(3\chi+1)-3(\chi+2)=5(\chi+1)-4(\chi-1) \Longleftrightarrow 6\chi+2-3\chi-6=5\chi+5-4\chi+4$.

Ἐπίσης πρὶν χωρίσωμεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ἀναγωγὰς καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως. Π.χ. $6\chi+2-3\chi-6=5\chi+5-4\chi+4 \Longleftrightarrow 3\chi-4=\chi+9$.
Ἐν συνεχείᾳ χωρίζομεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους...

§ 78. Ἐπίλυσις τῆς γενικῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως

Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ α' βαθμοῦ ἔχει τὴν μορφὴν $\alpha\chi+\beta=0$. Μεταφέρομεν τὸν γνωστὸν ὅρον β εἰς τὸ β' μέλος καὶ ἔχομεν $\alpha\chi=0-\beta$ ἢ $\alpha\chi=-\beta$.

Διαιροῦμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ α τοῦ ἀγνώστου: $\frac{\alpha\chi}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$

Σημείωσις. Ὁ α θεωρεῖται διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $0\chi=5$ εἶναι ἀδύνατος, διότι δὲν ὑπάρχει ρητός, ὁ ὁποῖος πολ/μενος ἐπὶ 0 νὰ δίδῃ τὸν 5. Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος, ταυτότης. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $0\chi=0$ εἶναι ταυτότης, διότι ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε ρητὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις

159. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $-12\chi+60=12$, β) $3\chi-14=+8$, γ) $5(\chi-2)-2(3-\chi)=3\chi-4$

δ) $\chi-1=2(3-2\chi)-3(1-\chi)$, ε) $2\chi-5=\dfrac{4\chi-3}{5}$, στ) $\dfrac{\chi}{2}+\dfrac{\chi}{3}=5$

ζ) $\chi-\dfrac{2\chi-1}{3}=\dfrac{3(\chi+1)}{4}$

160. Νὰ ἐπιλύσητε τὰς ἐξισώσεις :

α) $\dfrac{4-5\chi}{12}-\dfrac{3(\chi-1)}{2}=2\chi-6$, β) $2\chi+\left(\dfrac{\chi}{3}-\dfrac{\chi}{4}\right)=\dfrac{5\chi}{3}+30$

γ) $\dfrac{3\chi-5}{2}-\dfrac{4\chi-2}{5}=\dfrac{3(\chi-2)}{10}+\dfrac{\chi-23}{2}$, δ) $\dfrac{2\chi-1}{3}-\dfrac{3\chi-2}{4}=\dfrac{5\chi-4}{6}-\dfrac{7\chi+6}{6}$

161. Νὰ εὑρεθῇ δι' ἀναγραφῆς τὸ σύνολον $A\cup B$ ἐάν :

α) $A=\left\{\chi/3(\chi-1)=12,\ \chi\in Q\right\}$ καὶ $B=\left\{\chi/\ \dfrac{3\chi-4}{5}-\dfrac{3-2\chi}{2}=0,\ \chi\in Q\right\}$

β) $A=\left\{\chi/\ \dfrac{\chi}{3}+2=4,\ \chi\in Q\right\}$ καὶ $B=\left\{\chi/\ \dfrac{2\chi+3}{3}=\dfrac{\chi-1}{4},\ \chi\in Q\right\}$

γ) $A=\left\{\chi/\ \dfrac{2\chi}{3}+\dfrac{\chi}{6}-5=\dfrac{5\chi}{4},\ \chi\in Q\right\}$ καὶ $B=\left\{\chi/6{,}5-\dfrac{5\chi-1}{6}=\dfrac{20}{3}\ \chi\in Q\right\}$

162. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $\chi+2=\chi+1$, β) $\chi+3=2+\chi+1$, γ) $\dfrac{2\chi-3}{2}=\chi-5$,

δ) $\chi-\dfrac{5\chi-12}{4}=3-\dfrac{\chi}{4}$, ε) $\dfrac{3\chi+7}{15}=\dfrac{\chi-1}{5}$, στ) $\dfrac{5\chi+6}{6}=0{,}5\chi+\dfrac{\chi+3}{3}$

163. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑποσύνολα τοῦ Q : Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ Ζ, ἐάν :

$A=\{\chi/0\chi=-4\}$, $B=\{\chi/0X=0\}$, $\Gamma=\{\chi/\chi-3=2+\chi\}$,

$\Delta=\{\chi/1\chi=\chi\}$, $E=\left\{\chi/\ \dfrac{2\chi-1}{3}-\dfrac{5\chi-2}{12}=\dfrac{\chi+1}{4}\right\}$, $Z=\left\{\chi/2\chi-\dfrac{5\chi-12}{4}=3+\dfrac{3\chi}{4}\right\}$

164. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α, β, γ, δ αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι ἀδύνατοι;

1) $(\alpha+2)\chi=1$, 2) $\beta\chi=6+5\chi$, 3) $(3\gamma-1)\chi=2$, 4) $\delta\chi+\chi+1=5\chi+7$

165. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι ἀόριστοι;

1) $(\alpha-1)\chi=\beta-2$, 2) $(3\alpha+4)\chi=\beta+\dfrac{1}{2}$, 3) $\alpha\chi-1=\beta-3\chi$

4) $\alpha\chi-\beta=8\chi+3\beta-1$

?. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ Αου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ **79**. Πρόβλημα εἶναι μία πρότασις, ἡ ὁποία περιλαμβάνει δεδομένα καὶ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα εἶναι ρητοὶ ἀριθμοὶ συνδεόμενοι μεταξύ των. Ἡ εὕρεσις τῶν ζητουμένων λέγεται ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος.

Ἓν πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ μιᾶς ἐξισώσεως, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Διὰ τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν συντομώτερον καὶ εὐκολώτερον τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.

Σημείωσις

Δὲν ὑπάρχει πάντοτε λύσις, ἐὰν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος δὲν εἶναι ἐπαρκῆ καὶ κατάλληλα Π.χ. εἷς μαθητὴς ἔχει 20 δρχ. καὶ ἐξοδεύει 3 δρχ. ἡμερησίως. Ἄλλος μαθητὴς ἔχει 12 δρχ. καὶ ἐξοδεύει 2 δρχ. ἡμερησίως. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων; Δὲν ὑπάρχει λύσις. Ἡ λύσις 8 ἡμ. δὲν εἶναι δεκτή, διότι πέραν τῆς 6ης ἡμέρας δὲν θὰ ἔχουν χρήματα.

Παραδείγματα :

1ον. Ἡ Α' τάξις ἑνὸς Γυμνασίου ἔχει 2πλασίους μαθητὰς ἀπὸ τὴν Β' τάξιν καὶ ἡ Γ' τάξις ἔχει 3πλασίους ἀπὸ τὴν Β' τάξιν. Ἂν οἱ μαθηταὶ τῶν τριῶν τάξεων ἦσαν 360, πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ κάθε τάξις;

Αἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι θετικοί.

Ἓν ἐκ τῶν ζητουμένων συμβολίζομεν διὰ τοῦ χ. Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν τῆς Β' τάξεως. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως :

Ἡ Β' τάξις ἔχει χ μαθητάς. Ἡ Α' τάξις ἡ ὁποία ἔχει 2πλασίους μαθητὰς ἀπὸ τὴν Β' τάξιν θὰ ἔχῃ 2χ μαθητὰς καὶ ἡ Γ' τάξις 3χ μαθητάς. Ἀλλά,

μαθηταὶ Α' τάξεως + μαθηταὶ Β' τάξεως + μαθηταὶ Γ' τάξεως = 360 μαθ.

$$2\chi \quad + \quad \chi \quad + \quad 3\chi \quad = 360$$

ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως :

$$2\chi+\chi+3\chi = 360 \iff 6\chi = 360 \iff \chi = \frac{360}{6} \iff \chi=60$$

Ἀπάντησις εἰς τὸ πρόβλημα:

Ἡ Β' τάξις ἔχει 60 μαθητάς.

Ἡ Α' τάξις ἔχει 2.60=120 μαθητάς.

Ἡ Γ' τάξις ἔχει 3.60=180 μαθητάς.

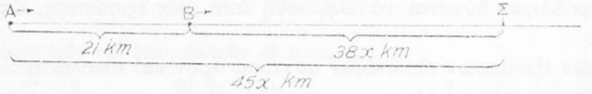
Ἐπαλήθευσις : 60 μαθ.+120 μαθ.+180 μαθ.=360 μαθ.

2ον. Δύο αὐτοκίνητα ἐκκινοῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β μὲ σταθερὰς ταχύτητας 45 **km/h** καὶ 38 **km/h** ἀντιστοίχως καὶ κινοῦνται εὐθυγράμμως κατὰ τὴν φορὰν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ τῆς πόλεως Α, ἐὰν ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων εἶναι 21 **km** ;

Αἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου :

Ἔστω ὅτι μετὰ χ ὥρας θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ Σ.



σχ. 45.

Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως:

Ἐφόσον εἰς 1 ὥραν τὸ 1ον αὐτοκίνητον διανύει 45 km εἰς χ ὥρας θὰ διανύσῃ 45χ km. Τὸ 2ον αὐτοκίνητον εἰς χ ὥρας θὰ διανύσῃ 38χ km.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $A\Sigma = AB + B\Sigma$

$$45\chi = 21 + 38\chi.$$

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $45\chi = 21 + 38\chi \Longleftrightarrow 45\chi - 38\chi =$

$$= 21 \Longleftrightarrow 7\chi = 21 \Longleftrightarrow \chi = \frac{21}{7} \Longleftrightarrow \chi = 3$$

(Ἐπαλήθευσις τῆς ἐξισώσεως: $45\chi = 21 + 38\chi$.

α΄ μέλος: $45 \cdot 3 = 135$

β΄ μέλος: $21 + 38 \cdot 3 = 21 + 114 = 135$).

Ἀπάντησις εἰς τὸ πρόβλημα:

Θὰ συναντηθοῦν μετὰ 3 ὥρας.

Εἰς ἀπόστασιν $3 \cdot 45$ km $= 135$ km ἀπὸ τὴν πόλιν Α.

3ον. Τὸ 3 πλάσιον ἀριθμοῦ αὐξηθὲν κατὰ $\frac{11}{2}$ γίνεται 41,5. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

Ἡ λύσις εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἄρα τὸ 3πλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι 3χ. Συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν.

«Τὸ 3πλάσιον ἀριθμοῦ» «αὐξηθὲν κατὰ $\frac{11}{2}$» «γίνεται» 41,5

$$3\chi \qquad + \qquad \frac{11}{2} \qquad = \qquad 41{,}5$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν λύσιν 12, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει αὐτὴν καὶ ἑπομένως εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τοῦ προβλήματος.

4ον. Δύο ἀκέραιοι θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 188. Ὁ μεγαλύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ μικροτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 8. Ποῖοι οἱ ἀριθμοί;

Αἱ λύσεις θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ἐὰν ὁ μικρότερος εἶναι χ, τότε ὁ μεγαλύτερος θὰ εἶναι 188 − χ καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἰδιότητα:

Διαιρετέος = διαιρέτης ἐπὶ πηλίκον + ὑπόλοιπον, ἔχομεν τὴν ἔξίσωσιν:

$$188 - \chi = \chi \cdot 3 + 8$$

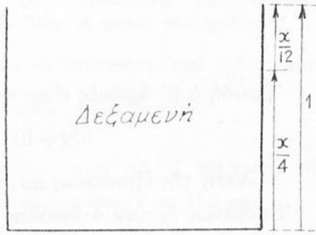
Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 45.

Ἄρα ὁ μικρότερος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 45 καὶ ὁ μεγαλύτερος $188 - 45 = 143$.

Πράγματι ὁ 143 διαιρούμενος διὰ 45 δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 8.

5ον. Κρουνὸς γεμίζει κενὴν δεξαμενὴν εἰς 4 ὥρας καὶ ἄλλος εἰς 12 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενὴν ἐὰν ρέουν καὶ οἱ δύο συγχρόνως;

Ἔστω, ὅτι εἰς χ ὥρας θὰ γεμίσουν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ τὴν δεξαμενήν, ἐὰν ρέουν συγχρόνως. (Ὁ χ πρέπει νὰ εἶναι θετικός).



σχ. 46.

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος κρουνὸς γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 4 ὥρας, εἰς 1 ὥραν θὰ γεμίσῃ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς, εἰς 2 ὥρας τὰ $\frac{2}{4}$ αὐτῆς καὶ εἰς χ ὥρας τὰ $\frac{\chi}{4}$ αὐτῆς.

Ὁ δεύτερος κρουνὸς εἰς χ ὥρας θὰ γεμίσῃ τὰ $\frac{\chi}{12}$ αὐτῆς. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

Μέρος τῆς δεξ. τὸ ὁποῖον γεμίζει ὁ α′ κρουνὸς εἰς χ ὥρας + μέρος δεξ. τὸ ὁποῖον γεμίζει ὁ β′ κρουνὸς εἰς χ ὥρας = Ὁλόκληρος ἡ δεξαμενὴ (Μία δεξαμενή).

$$\frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{12} = 1$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως εἶναι 3.

Ἑπομένως εἰς 3 ὥρας θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενὴν καὶ οἱ δύο κρουνοί.

6ον. Πατὴρ εἶναι 42 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 10 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι 3πλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;

Ἔστω μετὰ χ ἔτη. (Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ χ εὑρεθῇ ἀρνητική, τὸ ζητούμενον συνέβη κατὰ τὸ παρελθόν).

Τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι $42+\chi$ καὶ τοῦ υἱοῦ $10+\chi$. Ἐπειδὴ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι 3πλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$42+\chi=3(10+\chi) \iff 42+\chi=30+3\chi \iff 2\chi=12 \iff \chi=6$. Ἄρα μετὰ 6 ἔτη θὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον.

7ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 10. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερος. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἐὰν χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, τότε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων θὰ εἶναι $10-\chi$ καὶ ὁ ἀριθμὸς $\underset{\text{δεκάδες}}{10\chi}+\underset{\text{μονάδες}}{(10-\chi)}$: (Π.χ. $53 = \underset{\text{δεκάδες}}{10.5}+\underset{\text{μονάδες}}{3}$)

Περιορισμός : Οἱ χ, $10-\chi$ πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι καὶ μικρότεροι τοῦ 10. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία, ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι :

$$\underbrace{10\cdot(10-\chi)}_{\text{δεκάδες}}+\underbrace{\chi}_{\text{μονάδες}}$$

Ἐπειδὴ ὁ β' ἀριθμὸς εἶναι κατὰ 18 μεγαλύτερος, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$10\chi+10-\chi+18=10(10-\chi)+\chi$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 4.

Ἑπομένως ἔχομεν 4 δεκάδας καὶ $10-4=6$ μονάδας. Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 46.

8ον. Ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος εἶναι **κατὰ** 9 δρχ. μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς τιμῆς τοῦ κιλοῦ τῶν ζυμαρικῶν. Ἐὰν 15 κιλὰ κρέατος καὶ 50 κιλὰ ζυμαρικῶν ἀξίζουν 1370 δρχ., ποία ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος καὶ τῶν ζυμαρικῶν; (Αἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί).

Ἔστω χ δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τῶν ζυμαρικῶν. Ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος θὰ εἶναι $3\chi+9$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$(3\chi+9)\cdot 15+50\chi=1370 \iff 45\chi+135+50\chi=1370 \iff 95\chi=1370-135$
$95\chi=1235 \iff \chi=13$. Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τῶν ζυμαρικῶν εἶναι 13 δρχ.καὶ ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ κρέατος εἶναι 39 δρχ..

Προβλήματα

166. Ἐμετρήσαμεν 360 ἄτομα ἄνδρας, γυναῖκας καὶ παῖδας. Οἱ ἄνδρες ἦσαν 2πλάσιοι τῶν γυναικῶν καὶ οἱ παῖδες τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν γυναικῶν κατὰ τὸ πλῆθος. Πόσοι ἦσαν οἱ παῖδες ;

167. Ὁ Πέτρος ἔχει 3πλασίας δραχμὰς ἀπὸ ὅσας ἔχει ὁ Παῦλος. Πόσας δρχ. ἔχει ἕκαστος, ἐὰν ὁ Πέτρος ἔχῃ 12 δρχ. περισσοτέρας τοῦ Παύλου ;

168. Δύο ποδηλάται μὲ ταχύτητας 19 km/h καὶ 17 km/h ἐκκινοῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 108 km καὶ κατευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ τῶν πόλεων ;

169. Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν προσθέσωμεν τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 19 ἠλαττωμένον κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ποῖος ὁ ἀριθμός ;

170. Νὰ εὑρεθοῦν δύο θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν διαφορὰν 401, τὸ πηλίκον τοῦ μεγαλυτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι 6 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 6.

171. Κρουνὸς γεμίζει κενὴν δεξαμενὴν εἰς 3 ὥρας, ἄλλος εἰς 6 ὥρας καὶ τρίτος τὴν ἀδειάζει εἰς 4 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενὴ ἐὰν ρέουν καὶ οἱ τρεῖς συγχρόνως;

172. Πατὴρ εἶναι 59 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 29 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;

173. Ἡ διαφορὰ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 3. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του προκύπτοντα νέον ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ἄθροισμα 121. Ποῖα τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ;

174. Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 13πλάσιον τοῦ $\frac{1}{21}$ αὐτοῦ, διὰ νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν κατὰ 4 μικρότερον τοῦ 2πλασίου τοῦ $\frac{1}{7}$ αὐτοῦ ;

175. Ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραί, ἐὰν ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι 31,2 cm.

176. Ἡ γωνία Β τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς γωνίας Α καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς γωνίας Β. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

177. Ὑπάλληλος ἐδαπάνησε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μισθοῦ του διὰ τὴν ἀγορὰν ὑφάσματος καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ διὰ ραπτικά. Ἐὰν τοῦ ἐπερίσσευσαν 800 δρχ., ποῖος εἶναι ὁ μισθός του ;

178. Ποίου ἀριθμοῦ τὸ 10πλάσιον εἶναι μεγαλύτερον κατὰ 16 τοῦ 2πλασίου τοῦ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ;

179. Νὰ διατυπωθοῦν εἰς προβλήματα αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $\frac{\chi}{2} - \frac{\chi}{4} = 9$, β) $\frac{\chi}{2} = 35 - \frac{\chi}{3}$, γ) $\chi - \frac{3\chi}{4} = \frac{4\chi}{5} + \frac{11}{2}$

3. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ **80.** Ἡ σχέσις $\chi+1 > 5$ διὰ $\chi=7$ ἀληθεύει : $7+1 > 5$, ἀλλὰ διὰ $\chi=2$ δὲν ἀληθεύει. ($2+1$ δὲν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5). Ἡ $\chi+1>5$ λέγεται ἀνίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ.

Ἀνίσωσις ὡς πρὸς χ εἶναι μία ἀνισότης περιέχουσα τὸν ἄγνωστον χ.

Παραδείγματα ἀνισώσεων 1ου βαθμοῦ :

$$\chi-1>3, \quad 2\chi+6>0, \quad 4\chi+10<0, \quad 3\chi-1<8$$

Γενικῶς τὴν ἀνίσωσιν 1ου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον χ παριστῶμεν διὰ τῆς σχέσεως : $\alpha\chi+\beta>0 \quad (\alpha, \beta \in Q)$.

Λύσις ἀνισώσεως λέγεται κάθε τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ἡ ὁποία τὴν ἐπαληθεύει.

Π.χ. Τὸ 7 εἶναι λύσις τῆς $\chi+1>5$.

Ἐπίλυσις ἀνισώσεως εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν λύσεων αὐτῆς.

Ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἀνισώσεις, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις ἢ τὸ αὐτὸ σύνολον λύσεων.

Ἰδιότητες ἀνισώσεων.

Αἱ ἀνισώσεις ἔχουν τὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (§76). **Βάσει τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, λαμβάνομεν ὁμόστροφον ἰσοδύναμον ἀνίσωσιν**, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι :

Ἐὰν πολ/μεν καί τὰ δύο μέλη ἀνισώσεως ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν, προκύπτει ὁμόστροφος ἰσοδύναμος ἀνίσωσις ἐνῶ, ἐὰν πολ/μεν ἐπὶ ἀρνητικόν, προκύπτει ἑτερόστροφος ἰσοδύναμος ἀνίσωσις.

Ἑπομένως, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον τῶν ὅρων καὶ τῶν δύο μελῶν ἀνισώσεως πρέπει νὰ ἀλλάξωμεν καὶ τὴν φορὰν αὐτῆς.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἀνισώσεως ἀκολουθοῦμεν πορείαν ἐργασίας παρομοίαν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ἐμάθομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις.

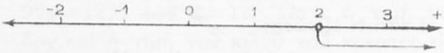
Παραδείγματα.

1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις $3\chi-2>4$.

$$3\chi-2>4 \Longleftrightarrow 3\chi>4+2 \Longleftrightarrow 3\chi>6 \Longleftrightarrow \frac{3\chi}{3}>\frac{6}{3} \Longleftrightarrow \chi>2.$$

Ἑπομένως ὅλοι οἱ ρητοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 2 εἶναι λύσεις τῆς ἀνισώσεως $3\chi-2>4$.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν λύσεων ἀνήκουν οἱ ρητοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι δεξιὰ τοῦ 2.

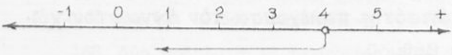


σχ. 47.

2ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις $2\chi+5>7\chi-15$

$$2\chi+5>7\chi-15 \Longleftrightarrow 2\chi-7\chi>-5-15 \Longleftrightarrow -5\chi>-20 \Longleftrightarrow 5\chi<20 \Longleftrightarrow \frac{5\chi}{5}<\frac{20}{5} \Longleftrightarrow \chi<4$$

Ἄρα οἱ μικρότεροι τοῦ 4 ρητοὶ εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἀρχικῆς ἀνισώσεως $2\chi+5>7\chi-15$. Εἰς τὸν ἄξονα τῶν ρητῶν αἱ λύσεις εἶναι ἀριστερὰ τοῦ 4.



σχ. 48,

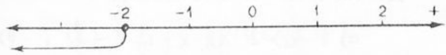
3ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις : $\frac{2\chi+1}{3}<\frac{\chi}{2}$

$$\frac{2\chi+1}{3}<\frac{\chi}{2} \Longleftrightarrow \frac{6.(2\chi+1)}{3}<6\cdot\frac{\chi}{2} \Longleftrightarrow 2(2\chi+1)<3\chi \Longleftrightarrow 4\chi+2<3\chi \Longleftrightarrow 4\chi-3\chi<-2 \Longleftrightarrow \chi<-2$$

Οἱ ρητοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀριστερὰ τοῦ -2 εἰς τὸν ἄξονα τῶν ρητῶν, ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\chi<-2$ καὶ συνεπῶς τῆς ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν $\frac{2\chi+1}{3}<\frac{\chi}{2}$

4ον. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ κοιναὶ λύσεις τῶν ἀνισώσεων:

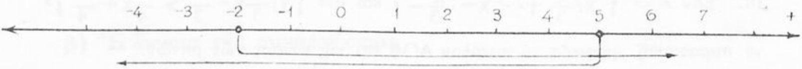
$2\chi+4 > 0$ καὶ $3\chi-4 < 11$.



σχ. 49.

Ἔχομεν: $2\chi+4>0 \iff 2\chi > -4 \iff \chi>-2$

$3\chi-4<11 \iff 3\chi<4+11 \iff 3\chi<15 \iff \chi<5$



σχ. 50.

Αἱ κοιναὶ λύσεις τῶν ἀνωτέρω ἀνισώσεων εἶναι οἱ ῥητοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ -2 καὶ μικρότεροι τοῦ 5. Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν ῥητῶν περιγράφεται ὑπὸ τῆς: $-2<\chi<5$.

Σημείωσις.

Ἐὰν $A=\{\chi/2\chi+4>0\}$ καὶ $B=\{\chi/3\chi-4<11\}$

Ἔχομεν: $A=\{\chi/\chi>-2\}$ καὶ $B=\{\chi/\chi<5\}$

$A\cap B=\{\chi/\chi>-2\}\cap\{\chi/\chi<5\}=\{\chi/-2<\chi<5\}$

5ον. Ἐὰν $\chi\in Z$ καὶ $-3<\chi<5$ (ὁ χ περιέχεται μεταξὺ -3 καὶ 5), νὰ εὑρεθῇ δι' ἀναγραφῆς τὸ σύνολον $A=\{\chi/2\chi-1<2+\chi\}$.

Ἔχομεν: $2\chi-1<2+\chi \iff 2\chi-\chi<2+1 \iff \chi<3$. Ἄρα ὁ χ εἶναι:

$-2, 0, 1, 2$ καὶ $A=\{-2, 0, 1, 2\}$

6ον. Νὰ ἁπλουστευθῇ ἡ περιγραφὴ τοῦ συνόλου:

$$A=\{\chi/4\chi-5<3+3\chi \ \wedge\ 5\chi-5>4\chi-2\}$$

Εἶναι: $4\chi-5<3+3\chi \iff 4\chi-3\chi<3+5 \iff \chi<8$

$5\chi-5>4\chi-2 \iff 5\chi-4\chi>5-2 \iff \chi>3 \iff 3<\chi$

Ἄρα $A=\{\chi/3<\chi<8\}$

Ἀσκήσεις

180. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις:

α) $2\chi+8<0$, δ) $3\chi<\chi+1$, στ) $-2\chi+1<\chi$, ζ) $\chi+1>\dfrac{\chi}{2}$

β) $-3\chi>\dfrac{6}{5}$, ε) $\dfrac{3\chi}{-2}+5>\chi$, η) $7\chi-3<3(\chi-2)+2(3-\chi)$,

γ) $\dfrac{3\chi+1}{2}-\dfrac{\chi-1}{3}>0$, θ) $\dfrac{2\chi+1}{3}+\dfrac{1-\chi}{2}>3$, ι) $\dfrac{3\chi+1}{4}-\dfrac{4-\chi}{3}>1$

181. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις:

α) $2-\chi > 2$, ε) $-\chi+\frac{1}{2} < -\frac{3}{2}$, θ) $\chi-\frac{5}{4} < 2\chi-\frac{1}{4}$

β) $5(\chi-3) > 3(\chi-1)$, στ) $18-5(\chi+1) < 3(\chi-1)-2$

γ) $2(4-\chi)-3(\chi-7) < 16\chi+1$, ζ) $-13(\chi-2) > 1-6(\chi-3)$

δ) $6-\frac{\chi-1}{2} > \frac{\chi-2}{3}-\frac{\chi-3}{4}$, η) $\frac{2\chi-1}{3}-\frac{5\chi-4}{6} < \frac{3\chi-2}{4}+\frac{7\chi+6}{12}$

182. Ἐὰν $A=\left\{\chi/\frac{\chi}{3}+2>\chi-\frac{2\chi-4}{3}\right\}$ καὶ $B=\left\{\chi/\frac{2}{3}\chi-\frac{1}{3}>\frac{3}{4}\chi+\frac{3}{4}\right\}$, νὰ παρασταθῇ γραφικῶς τὸ σύνολον $A\cap B$ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ρητῶν.

183. Ἐὰν $A=\{\chi/\chi-5>5\chi-1\}$ καὶ $B=\left\{\chi/\frac{3}{2}\chi+1>\chi-2\right\}$, νὰ εὑρεθῇ δι᾽ ἀναγραφῆς τὸ σύνολον $A\cap B=\{\chi/\chi\in Z\}$

184. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς τὰ σύνολα (ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ρητῶν).

α) $A=\{\chi/8-\chi<\chi+2 \ \wedge \ 8-\chi>\chi-1\}$

β) $B=\{\chi/4\chi-5<3+3\chi \wedge 5\chi-5>4\chi \ 2\}$

γ) $\Gamma=\left\{\chi/\frac{1}{2}\chi+5>-3\chi-2 \ \wedge \ \frac{1}{2}\chi-1<\chi-2\right\}$

δ) $\Delta=\left\{\chi/-\frac{2}{3}\chi-4>0 \ \wedge \ -\frac{1}{2}\chi+2>0\right\}$

185. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις:

α) $\chi-2>\chi$, γ) $\chi+3<\chi$, ε) $\frac{1}{2}-\chi<\frac{1}{4}-\chi$

β) $\chi+1>\chi$, δ) $\chi-1<\chi$, στ) $\chi+6>\chi+4$

Β΄. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΗΣ $\alpha\chi+\beta \gtreqless 0$

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

α) Ἡ ἔννοια τῆς μεταβλητῆς.

§ **81**. *Ποίας τιμὰς δύναται νὰ λάβῃ ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδίου;*

Ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδίου δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμάς: $\frac{1}{2}$ ἔτη, 1 ἔτος, 1,5 ἔτη, ὡς καὶ ὅλας τὰς μεταξὺ αὐτῶν τιμάς. Γενικῶς δὲ ὅλας τὰς μεταξὺ 0 καὶ καὶ 12 ἔτη τιμάς.

Ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ χ ἔτη τὴν ἡλικίαν τοῦ παιδίου ἔχομεν τὸν πίνακα:

χ	...	$\frac{1}{2}$	1	1,5	...

Αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου:

$$A = \left\{0, \ldots \frac{1}{2}, \ldots 1, \ldots, 12\right\} \text{ ἢ } A = \left\{\chi / 0 \leqslant \chi < 12\right\}$$

Τὸ γράμμα χ λέγεται μεταβλητή.

Ὥστε **μεταβλητὴ εἶναι κάθε γράμμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ ἕνα σύνολον ἀριθμῶν.**

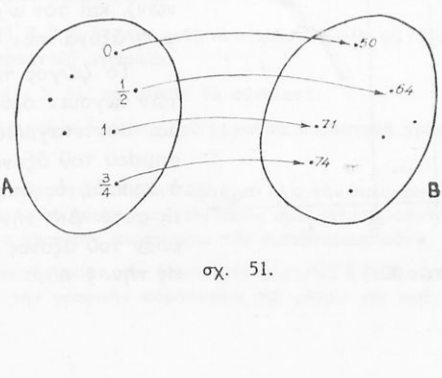
Σημείωσις. Ἡ παιδικὴ ἡλικία θεωρεῖται ὅτι διαρκεῖ μέχρι τοῦ 12ου ἔτους.

β) Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.

§ **82.** Ὅταν ἐγεννήθη ἓν παιδίον εἶχεν ὕψος 50 cm, ὅταν ἔγινε 6 μηνῶν εἶχεν ὕψος 64 cm, εἰς ἡλικίαν ἑνὸς ἔτους εἶχεν ὕψος 71 cm κ.ο.κ., ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ χ ἔτη τὴν ἡλικίαν καὶ διὰ τοῦ ψ cm τὸ ὕψος τοῦ παιδίου. (Εἰς τὰς τιμὰς τῆς ἡλικίας τὰς μεταξὺ τῶν $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ ἀντιστοιχοῦν τιμαὶ τοῦ ὕψους μεταξὺ τῶν 50, 64 71, 74 ἀντιστοίχως).

Ἡλικία : χ ἔτη	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
Ὕψος : ψ cm	50	...	64	...	71	...	74	...

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς **κάθε τιμὴν** τῆς ἡλικίας τοῦ παιδίου **ἀντιστοιχεῖ μία μόνον τιμὴ** τοῦ ὕψους. Δηλαδὴ εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου $A = \left\{0, \ldots \frac{1}{2}, \ldots 1, \ldots \frac{3}{2}, \ldots\right\}$ ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον στοιχεῖον τοῦ συνόλου $B = \{50, \ldots, 64, \ldots, 71, \ldots, 74, \ldots\}$. Ἐπομένως μεταξὺ τῶν συνόλων τιμῶν ἡλικίας A καὶ τιμῶν ὕψους B ὑπάρχει μονοσήμαντος ἀντιστοιχία, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα βλέπετε σχ. (51).



σχ. 51.

Τὸ σύνολον Α, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ μεταβλητὴ χ λαμβάνει τιμάς, λέγεται **πεδίον ὁρισμοῦ** καὶ τὸ σύνολον Β **πεδίον τιμῶν**.

Ἐὰν εἰς κάθε στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν στοιχεῖον ἑνὸς ἄλλου συνόλου, τότε ἔχομεν μεταξὺ τῶν συνόλων αὐτῶν μίαν μονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν. **Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ ὁρίζει μίαν συνάρτησιν.**

γ) Ἡ συνάρτησις ὡς σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν.

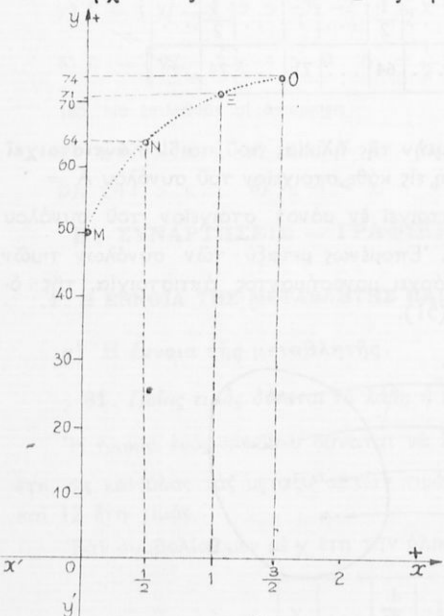
§ **83**. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$(0{,}50)$, $\left(\frac{1}{2},\ 60\right)$, $(1,\ 71)$, $\left(\frac{3}{2},\ 74\right)$, . . . , τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς πρῶτον μέλος μίαν τιμὴν τοῦ χ καὶ ὡς δεύτερον μέλος τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ ψ λαμβάνομεν ἓν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν τό:

$$F = \left\{(0{,}50),\ \left(\frac{1}{2},\ 64\right),\ (1{,}71),\ \left(\frac{3}{2},\ 74\right), \ldots\right\}$$

Τὸ σύνολον αὐτὸ παριστᾶ τὴν προηγουμένην συνάρτησιν.

Ἐπειδὴ ἡ ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β εἶναι μονοσήμαντος, **δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸ σύνολον F ζεύγη μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος.**



σχ. 52.

δ) Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως F.

§ **84**. Λαμβάνομεν δύο ἄξονας τεμνομένους καθέτως.

Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν ὡς ἀρχὴν καὶ τοποθετοῦμεν ἐπ' αὐτῶν τοὺς ρητούς, ὡς ἐμάθομεν.

Τὸν χ΄οχ ὀνομάζομεν ἄξονα τῶν χ (ἢ ἄξονα τῶν τετμημένων). καὶ τὸν ψ΄οψ ἄξονα τῶν ψ ἢ ἄξονα τῶν τεταγμένων.

Τὸ ζεῦγος τῶν ἀξόνων αὐτῶν λέγομεν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων. Τεταγμένη σημείου τοῦ ἄξονος τῶν ψ εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτό. Διὰ τὴν τετμημένην σημείου τοῦ ἄξονος τῶν χ ἐμάθομεν εἰς τὴν § 66.

Εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\frac{1}{2}$, ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν χ καὶ εἰς τὸ σημεῖον ,τὸ ὁποῖον ἔχει τεταγμένην 64, φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ. Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ν. Λέγομεν ὅτι τὸ Ν εἶναι ἡ **γραφικὴ παράστασις** τοῦ ζεύγους $\left(\frac{1}{2}, 64\right)$ ἢ ἡ **γραφικὴ εἰκὼν** αὐτοῦ. Τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ 64 ὀνομάζομεν ἀντιστοίχως **τετμημένην** καὶ **τεταγμένην** τοῦ σημείου Ν ἢ **συντεταγμένας** αὐτοῦ. Κατασκευάζομεν ὁμοίως τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν ζευγῶν τοῦ συνόλου **F**, δηλαδὴ τῆς συναρτήσεως.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ ζεύγους (0,50) εἶναι τὸ σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος τῶν ψ διότι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ τεταγμένη 50·

Τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ...Ν...Ξ...Ο... λέγομεν **γραφικὴν εἰκόνα τῆς συναρτήσεως F**.

Σημείωσις : Ἐὰν λάβωμεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις πολλῶν ζευγῶν, ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι μία γραμμή.

Ἀσκήσεις

186. Ἐὰν μὲ χ παραστήσωμεν τὴν ἡλικίαν ἑνὸς παιδίου εἰς ἔτη καὶ μὲ ψ τὸ βάρος αὐτοῦ εἰς kgr*, ἔχομεν τὸν πίνακα :

χ	...	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	...
ψ	...	7	9,2	10,4	11,5	...

Παραστήσατε τὴν συνάρτησιν μεταξὺ ἡλικίας καὶ βάρους ὡς σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν καὶ κατασκευάσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν αὐτῆς. (Χρησιμοποιήσατε τετραγωνισμένον ἢ χιλιοστομετρικὸν χάρτην).

187. Τὸ σύνολον $F = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ εἶναι συνάρτησις; Ποῖον τὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ τὸ πεδίον τιμῶν αὐτῆς;

188. Ἐὰν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον $F = \{(χ, ψ) / χ \in A$ καὶ ψ εἶναι διπλάσιον τοῦ χ$\}$ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς.

189. Ἐὰν $A = \{4, 5, 6\}$, νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον :

$Σ = \{(χ, ψ) / χ \in A$ καὶ ψ διαιρέτης τοῦ χ$\}$ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς. Εἶναι συνάρτησις τὸ σύνολον Σ;

190. Ἐὰν μὲ χ παραστήσωμεν τὴν ὥραν καὶ μὲ ψ τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν δεικνύει κατὰ τὴν ὥραν αὐτὴν τὸ θερμόμετρον τῆς οἰκίας σας, κατασκευάσατε πίνακα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν καὶ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

191. Μετρήσατε τὴν σκιάν, τὴν ὁποίαν ρίπτει στύλος ἢ δένδρον κατὰ τὰς ἀκεραίας ὥρας, καὶ κατασκευάσατε τὴν γραφικὴν παράστασιν τοῦ μήκους τῆς σκιᾶς συναρτήσει τῆς ὥρας.

2. Ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha\chi$ καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς.

§ **85. Πρόβλημα.** *Ἀεροπλάνον ἔχει σταθερὰν ταχύτητα 500 km/h. Πόσην ἀπόστασιν θὰ διανύσῃ εἰς χ ὥρας κινούμενον εὐθυγράμμως;*

Εἰς 1 ὥραν διανύει $1 \cdot 500$ km $=$ 500 km

Εἰς 2 ὥρας διανύει $2 \cdot 500$ km $=$ 1000 km

Εἰς 3 ὥρας διανύει $3 \cdot 500$ km $=$ 1500 km

. . . .

. . . .

Εἰς χ ὥρας διανύει $\chi \cdot 500$ km $= \psi$ km

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι:

Εἰς 0 ὥρας διανύει $0 \cdot 500$ km $=$ 0 km

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κάθε τιμὴν τοῦ χρόνου χ ἀντιστοιχεῖ μία μόνον τιμὴ τῆς ἀποστάσεως. Δηλαδὴ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν διανύει τὸ ἀεροπλάνον, εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου χ.

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $\psi = 500\chi$.

Ἡ μεταβλητὴ χ λαμβάνει τιμὰς ἐκ τοῦ συνόλου Q_0^+ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς ψ ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸ Q_0^+, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος.

(Δηλαδὴ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ τὸ πεδίον τιμῶν εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Q_0^+).

χρόνος εἰς ὥρας χ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	. . .	χ
Ἀπόστασις εἰς km ψ	0	250	500	750	1000	1500	2000	. . .	$\psi = 500\chi$

Ἡ συνάρτησις ὡς σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν παρίσταται ὡς:

$$F = \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{2}, 250\right), (1, 500), \left(\frac{3}{2}, 750\right), (2, 1000), \ldots \right\}$$

ἢ διὰ περιγραφῆς: $F = \{ (\chi, \psi) \,/\, \chi \in Q_0^+ \text{ καὶ } \psi = 500\chi \}$

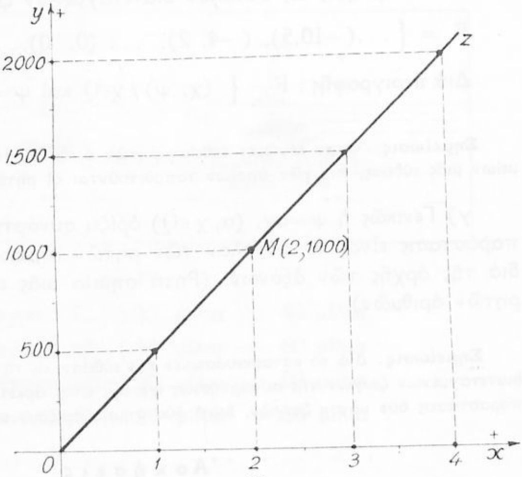
Ἐπειδὴ ἡ σχέσις $\psi = 500\chi$ ὁρίζει τὴν συνάρτησιν F, λέγομεν πολλάκις **ἡ συνάρτησις $\psi = 500\chi$**

Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως.

Κατασκευάζομεν τὰς γραφικὰς εἰκόνας τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς F καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπὶ ἡμιευθείας ρητῶν ἀριθμῶν OZ (σχ. 53).

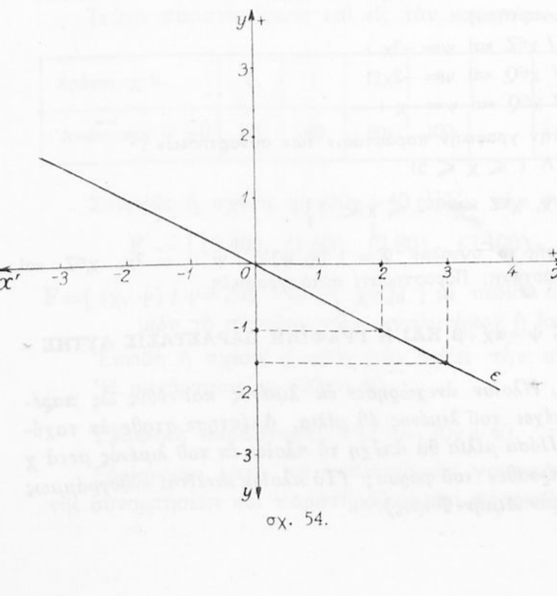
β) *Τί παριστᾶ ἡ σχέσις* $\psi = -\frac{1}{2}\chi$; $(\chi \in Q)$

Ἡ σχέσις $\psi = -\frac{1}{2}\chi$ εἶναι συνάρτησις (μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Q καὶ πεδίον τιμῶν ἐπίσης τὸ Q) διότι, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος, εἰς κάθε τιμὴν τοῦ χ θετικήν, ἀρνητικὴν ἢ μηδὲν ἀντιστοιχεῖ μία μόνον ρητὴ τιμὴ τοῦ ψ. (μονότιμον τοῦ πολ/σμοῦ).



σχ. 53.

χ	...	−10	−4	−1	0	1	2	3	4	10	...
$\psi = -\frac{1}{2}\chi$	...	5	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$	−2	−5	...



σχ. 54.

Παρατήρησις: Τὸ πηλίκον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν εἶναι σταθερόν, δηλαδὴ ἴσον μὲ −2, ἐκτὸς τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν 0,0.

Κατασκευάζομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\psi = -\frac{1}{2}\chi$ εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὴ εἶναι εὐθεῖα ε ρητῶν πραγματ. ἀριθμῶν διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων (σχῆμα 54).

Ἡ συνάρτησις ὡς σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι :

$$F = \{\ldots(-10,5),\ (-4,\ 2),\ \ldots\ (0,\ 0),\ldots\ (2,-1),\ \ldots\}$$

Διὰ περιγραφῆς : $F = \{\ (\chi,\ \psi)\ /\ \chi \in Q \text{ καὶ } \psi = -\frac{1}{2}\chi\ \}$

Σημείωσις. Ὅταν λέγωμεν εὐθεῖαν ρητῶν ἀριθμῶν, ἐννοοῦμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας, ἐπὶ τῶν ὁποίων τοποθετοῦνται οἱ ρητοὶ ἀριθμοί.

γ) Γενικῶς ἡ $\psi = \alpha\chi$, $(\alpha, \chi \in Q)$ ὁρίζει συνάρτησιν, τῆς ὁποίας ἡ γραφικὴ παράστασις εἶναι τὸ σύνολον τῶν ρητῶν σημείων μιᾶς εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. (Ρητὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας εἶναι αἱ εἰκόνες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν).

Σημείωσις. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, εἰς τὴν ὁποίαν κεῖνται αἱ εἰκόνες τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha\chi$, εἶναι ἀρκετὸν νὰ εὕρωμεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις δύο μόνον ζευγῶν, διότι δύο σημεῖα ὁρίζουν μόνον μίαν εὐθεῖαν.

Ἀσκήσεις

192. Νὰ σχηματίσητε πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν καὶ νὰ κατασκευάσητε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

α) $F_1 = \{(\chi,\ \psi)\ /\ \chi \in Z^+ \text{ καὶ } \psi = 2\chi\}$

β) $F_2 = \{(\chi,\ \psi)\ /\ \chi \in Q^+ \text{ καὶ } \psi = 4\chi\}$

γ) $F_3 = \{(\chi,\ \psi)\ /\ \chi \in Q \text{ καὶ } \psi = \chi\}$

193. Ὁμοίως διὰ τὰς συναρτήσεις :

α) $F_1 = \{(\chi,\ \psi)\ /\ \chi \in Z \text{ καὶ } \psi = -3\chi\}$

β) $F_2 = \{(\chi,\ \psi)\ /\ \chi \in Q \text{ καὶ } \psi = -2\chi\}$

γ) $F_3 = \{(\chi,\ \psi)\ /\ \chi \in Q \text{ καὶ } \psi = -\chi\}$

194. Νὰ κατασκευάσητε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν συναρτήσεων :

α) $\{(\chi,\ \psi)\ /\ \psi = 2\chi \ \wedge\ 1 \leqslant \chi \leqslant 5\}$

β) $\left\{(\chi,\ \psi)\ /\ \psi = \frac{3}{2}\chi,\ \chi \in Z \text{ καὶ } -2 \leqslant \chi < 3\right\}$

195. Ὁρίσατε δι' ἀναγραφῆς τὸ σύνολον $\Sigma = \{(\chi,\ \psi)\ /\ |\psi| = 2\chi,\ \ \chi \in Z$ καὶ $2 \leqslant \chi \leqslant 5\}$ Εἶναι αὐτὸ συνάρτησις; Παραστήσατε αὐτὸ γραφικῶς.

3. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $\psi = \alpha\chi + \beta$ ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

§ **86**. α) **Πρόβλημα**. *Πλοῖον ἀνεχώρησεν ἐκ λιμένος καὶ εὐθὺς ὡς παρέπλευσεν φάρον, ὁ ὁποῖος ἀπέχει τοῦ λιμένος 40 μίλια, ἀπέκτησε σταθερὰν ταχύτητα 20 μιλίων ἀνὰ ὥραν. Πόσα μίλια θὰ ἀπέχῃ τὸ πλοῖον ἐκ τοῦ λιμένος μετὰ χ ὥρας, ἀφ' ὅτου διῆλθεν ἔμπροσθεν τοῦ φάρου; (Τὸ πλοῖον κινεῖται εὐθυγράμμως κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν Λιμὴν-Φάρος).*

Τὴν 0 ὥραν τὸ πλοῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ φάρου. Ἑπομένως:

Σχ. 55.

Εἰς 0 ὥρας ἔχει διανύσει $40+0.20$ μίλια $=40$ μίλια

Εἰς 1 ὥραν ἔχει διανύσει $40+1.20$ μίλια $=60$ μίλια

Εἰς 2 ὥρας ἔχει διανύσει $40+2.20$ μίλια $=80$ μίλια

Εἰς 3 ὥρας ἔχει διανύσει $40+3.20$ μίλια $=100$ μίλια

. . . .

. . . .

Εἰς χ ὥρας ἔχει διανύσει $40+\chi.20$ μίλια $=\psi$ μίλια$=20\chi+40$ μίλια

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ψ (μονότιμον πολ|σμοῦ καὶ προσθέσεως).

Τοῦτο παρατηρήσατε καὶ εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

Χρόνος χ h	0	1	2	3	.	.	.	χ
Ἀπόστασις ψ mil	40	60	80	100	.	.	.	$\psi=20\chi+40$

Συνεπῶς ἡ σχέσις $\psi=20\chi+40$ ὁρίζει τὴν συνάρτησιν

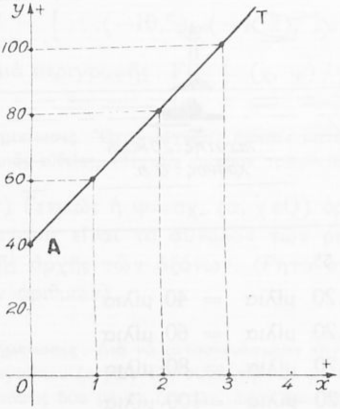
$F=\{(0,40),\ (1,60),\ (2,80),\ (3,100),\ \ldots\}$. Διὰ περιγραφῆς:

$F=\{(\chi,\psi)\ /\ \psi=20\chi+40\ \wedge\ \chi\in Q_0^+\}$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Q_0^+ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον τῶν μεγαλυτέρων ἢ ἴσων τοῦ 40 ρητῶν.

Ἐπειδὴ ἡ σχέσις $\psi=20\chi+40$ ὁρίζει τὴν συνάρτησιν **F**, λέγομεν: Ἡ συνάρτησις $\psi=20\chi+40$.

Γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi=20\chi+40$.

Εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν ζευγῶν τῆς συναρτήσεως καὶ παρατηροῦμεν ὅτι γραφικῶς ἡ $\psi=20\chi+40$ παρίσταται



σχ. 56.

ὑπὸ τῆς ἡμιευθείας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ΑΤ.

β) *Νὰ ἐξετάσητε, ἐὰν ἡ σχέσις* $\psi=2\chi+1$ $(\chi\in Q)$ *εἶναι μία συνάρτησις καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς.*

Δίδομεν διαφόρους τιμὰς εἰς τὸ χ καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ψ, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

χ	...	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
$\psi=2\chi+1$	...	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	7	9	...

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνον μία τιμὴ τοῦ ψ. Ἄρα ἡ $\psi=2\chi+1$ εἶναι συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ Q.

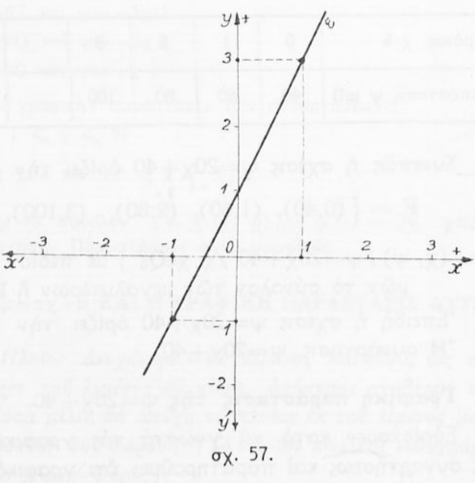
Αὐτὴ ὡς σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι:

$$F=\{(-3,-5),\ldots,(-\tfrac{1}{2},0),(0,1),(\tfrac{1}{2},2),(1,3),\ldots\}$$

Διὰ περιγραφῆς: $F=\{(\chi,\psi)\ /\ \psi=2\chi+1\ \wedge\ \chi\in Q\}$

Γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi=2\chi+1$.

Κατασκευάζομεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις (εἰκόνας) τῶν ζευγῶν καὶ



σχ. 57.

παρατηροῦμεν ὅτι αὐταὶ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ε μὴ διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

γ) Γενικῶς ἡ $\psi = \alpha\chi + \beta$, ὅπου α, β σταθεροὶ ρητοὶ καὶ χ μεταβλητὴ λαμβάνουσα τιμὰς ἐκ τοῦ Q, εἶναι συνάρτησις. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ πεδίον τιμῶν εἶναι τὸ Q.

Γραφικῶς παρίσταται ὑπὸ τῶν ρητῶν σημείων μιᾶς εὐθείας, μὴ διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

196. Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως :

$$\psi = -\frac{1}{2}\chi - 1, \quad \text{ἐὰν} \quad \chi \in A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$$

197. Ἐπὶ τετραγωνισμένου χάρτου νὰ σχεδιάσητε δύο ὀρθογωνίους ἄξονας καὶ νὰ εὕρητε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $F = \{(\chi, \psi) / \psi = -\frac{1}{2}\chi + 1 \wedge \chi \in Q\}$. Ἐπίσης νὰ εὑρεθοῦν τὰ ζεύγη τῆς F, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς εἰκόνας των ἐπὶ τῶν ἀξόνων.

198. Ὁμοίως ὡς ἄνω διὰ τὰς συναρτήσεις :

$$F_1 = \{(\chi, \psi) / \psi = 0\chi + 2 \wedge \chi \in Q\} \text{ καὶ } F_2 = \{(\chi, \psi) / \psi = 0\chi + 0 \wedge \chi \in Q\}$$

199. Νὰ κατασκευάσητε τὴν εὐθεῖαν, ὑπὸ τῆς ὁποίας παρίσταται γραφικῶς ἡ συνάρτησις $\psi = 2\chi - 1$ $(\chi \in Q)$ ἐπὶ τετραγωνισμένου χάρτου, καὶ νὰ σημειώσητε τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀνωτέρω εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ. Ποία ἡ τετμημένη αὐτοῦ τοῦ σημείου; Θέσατε τὴν τετμημένην αὐτὴν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2\chi - 1 = 0$. Τί παρατηρεῖτε;

200. Εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων νὰ κατασκευάσητε τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων :

$F_1 = \{(\chi, \psi) / \psi = \chi + 1 \wedge \chi \in Q\}$, $F_2 = \{(\chi, \psi) / \psi = 2\chi - 4 \wedge \chi \in Q\}$

201. Ὁμοίως διὰ τὰς $F_3 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 2 \wedge \chi \in Q\}$, $F_4 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 3 \wedge \chi \in Q\}$

202. Ὁμοίως διὰ τὰς $F_3 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 2 \wedge \chi \in Q\}$, $F_5 = \{(\chi, \psi) / \psi = \frac{4-4\chi}{2} \wedge \chi \in Q\}$

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΗΣ $\alpha\chi + \beta = 0$ ΚΑΙ ΤΗΣ $\alpha\chi + \beta > 0$

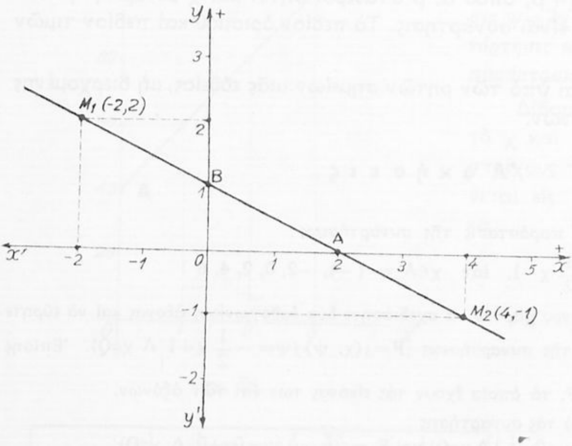
α) **Πρόβλημα.** *Νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως* $-\frac{1}{2}\chi + 1 = 0$

§ **87.** Ἐπὶ τετραγωνισμένου χάρτου χαράσσομεν τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας καὶ εὑρίσκομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως : $\psi = -\frac{1}{2}\chi + 1$

(Δίδομεν δύο τιμὰς εἰς τὸ χ ἔστω τὰς $\chi = -2$ καὶ $\chi = 4$ καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ψ ἤτοι $\psi = 2$ καὶ $\psi = -1$.

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὰς εἰκόνας τῶν ζευγῶν $(-2, 2)$, $(4, -1)$ ἔστω M_1 καὶ M_2 ἀντιστοίχως καὶ χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν M_1M_2).

Ἡ εὐθεῖα M_1M_2 παριστᾶ γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $\psi=-\frac{1}{2}\chi+1$. Αὕτη τέμνει τοὺς ἄξονας $\chi'\chi$ καὶ $\psi'\psi$ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.



σχ. 58.

Τὸ σημεῖον Β εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ ζεύγους (0, 1) καὶ τὸ Α εἰκὼν τοῦ ζεύγους(2,0)

Τὸ πρῶτον μέλος τοῦ ζεύγους (2, 0), δηλαδὴ ὁ 2, ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν : $-\frac{1}{2}\chi+1=0$ ἄρα εἶναι λύσις αὐτῆς.

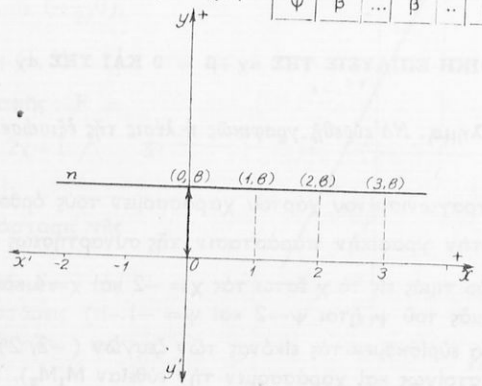
Ὥστε, **διὰ νὰ εὕρωμεν γραφικῶς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta=0$ $(\alpha\neq0)$, κατασκευάζομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha\chi+\beta$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τομῆς ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τούτου εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισ. $\alpha\chi+\beta=0$.**

Σημείωσις.

1. Ἡ συνάρτησις $\psi=0\chi+\beta$ $(\beta\neq0)$ γραφικῶς παρίσταται ὑπὸ εὐθείας // πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ. Ἄρα γραφικῶς δὲν προσδιορίζεται λύσις τῆς ἐξισ. $0\chi+\beta=0$. Ἀλλὰ οὔτε καὶ ἀριθμητικῶς, ὡς ἐμάθομεν. Ἑπομένως καὶ γραφικῶς ἐπαληθεύεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις $0\chi+\beta=0$ $(\beta\neq0)$ εἶναι ἀδύνατος.

Πίναξ τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\psi=0\chi+\beta$:

χ	0	...	1	...	2	...	3	...
ψ	β	...	β	..	β	...	β	...



σχ 59.

2. Ἡ συνάρτησις $\psi = 0\chi + 0$ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῶν χ. Ἄρα δὲν προσδιορίζεται γραφικῶς μία λύσις διὰ τὴν ἐξίσωσιν $0\chi + 0 = 0$. Αὐτὴ ἔχει ἀπείρους λύσεις.

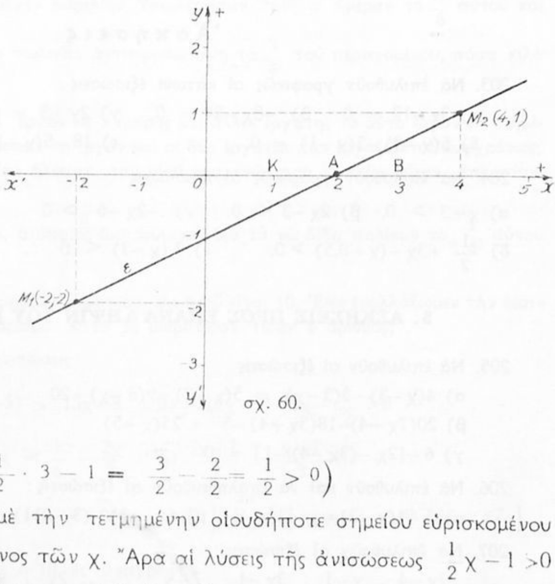
Πίναξ τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = 0\chi + 0$:

χ	0	...	1	...	2	...	3	...
ψ	0	...	0	...	0	...	0	...

β) Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς αἱ λύσεις τῆς $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$

§ **88.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $\psi = \frac{1}{2}\chi - 1$ καὶ ἐργαζόμενοι, ὅπως προηγουμένως, κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν ε (γραφ. παράστασιν αὐτῆς), ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην 2.

Θέτομεν εἰς τὴν ἀνίσωσιν $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$ ἀντὶ τοῦ χ τὴν τετμημένην 3 ἑνὸς σημείου Β εὑρισκομένου δεξιὰ τοῦ Α τοῦ ἄξονος $\chi'\chi$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 3 ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωσιν.



σχ. 60.

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3 - 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} > 0\right)$$

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει μὲ τὴν τετμημένην οἱουδήποτε σημείου εὑρισκομένου δεξιὰ τοῦ Α ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ. Ἄρα αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$ εἶναι οἱ ρητοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 2. ($\chi > 2$).

Τοῦτο ἐπαληθεύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἀριθμ. ἐπίλυσιν τῆς ἀνισώσεως $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$.

Σημείωσις. Ἐὰν θέσωμεν τὴν τετμημένην 1 (ἑνὸς σημείου Κ εὑρισκομένου ἀριστερὰ τοῦ Α ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ, παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωσιν

$$\frac{1}{2}\chi - 1 > 0. \quad \left(\frac{1}{2}\cdot 1 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} < 0\right)$$

Ἄρα αἱ τετμημέναι τῶν ἀριστερὰ τοῦ Α σημείων τοῦ ἄξονος τῶν χ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν.

Γενικῶς ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀνίσωσιν $αχ+β>0$ $(α\neq 0)$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς, διὰ νὰ εὕρωμεν γραφικῶς τὰς λύσεις αὐτῆς:

1ον Κατασκευάζομεν εὐθεῖαν ἀπὸ δύο τυχόντα ζεύγη τῆς συναρτήσεως $ψ=αχ+β$.

2ον Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ. Ἔστω Α τὸ σημεῖον αὐτό.

3ον Δοκιμάζομεν, ἐὰν ἡ τετμημένη ἑνὸς τυχόντος σημείου τοῦ ἄξονος τῶν χ (π.χ. δεξιὰ τοῦ Α) ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωσιν.

Ἐὰν τὴν ἐπαληθεύῃ, λύσεις εἶναι αἱ ρηταὶ τετμημέναι τῶν σημείων τῆς ἡμιευθείας Αχ. Ἐὰν δὲν τὴν ἐπαληθεύῃ λύσεις εἶναι αἱ ρηταὶ τετμημέναι τῶν σημείων τῆς ἀντικειμένης ἡμιευθείας Αχ′. (Πλὴν τῆς τετμημένης τοῦ Α)

Ἀσκήσεις

203. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:
α) $3χ-12=0$ β) $-8χ-24=0$, γ) $2χ+3=0$
δ) $5(χ-3)-3(χ-1)=0$, ε) $18-5(χ+1)-3(χ-1)=0$

204. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς αἱ ἀνισώσεις:
α) $χ+3>0$, β) $2χ-3<0$, γ) $-2χ-6>0$
δ) $\frac{1}{2}+3χ-(χ+0{,}5)>0$, ε) $3.(χ-3)<0$

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ III

205. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:
α) $4(χ-3)-3(3-χ)=5(χ+2)-9(8-χ)+20$
β) $20(7χ+4)-18(3χ+4)-5=25(χ+5)$
γ) $6-[2χ-(3χ-4)-1]=0$

206. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις:
α) $5-4(χ-3)=χ-2(χ-1)$, β) $6(χ-1)-(3χ+11)+7=0$

207. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:
α) $\frac{7χ-4}{15}+\frac{χ-1}{3}=\frac{3χ-1}{5}-\frac{7+χ}{10}$, β) $\frac{2χ}{15}+\frac{χ-6}{12}=\frac{3}{10}\left(\frac{χ}{2}-5\right)$
γ) $\frac{18χ+13}{9}=\frac{6χ+1}{5}+\frac{2}{3}\cdot\left(6-\frac{3χ}{2}\right)$, δ) $\frac{2}{5}\left(\frac{3χ}{4}-\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{7}\left(\frac{12χ}{25}-\frac{1}{75}\right)$

208. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι προβλήματα τῇ βοηθείᾳ ἐξισώσεων.

α) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ παραλ/μου ΑΒΓΔ, ἐὰν ἡ γωνία Α αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γωνίας Β.

β) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν ἡ γωνία Β ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς γωνίας Α καὶ ἡ γωνία Γ ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ.

γ) Δύο τεμάχια ὑφάσματος διαφέρουν κατὰ 66,5 m. Τὸ μεγαλύτερον εἶναι 5πλάσιον τοῦ μικροτέρου σὺν 4,5 m ἐπὶ πλέον. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ὑφασμάτων.

δ) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ θετικοὶ ἀκέραιοι τοιοῦτοι ὥστε, ἐὰν ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο μικροτέρων ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίτον τοῦ μεγαλυτέρου, θὰ εὕρωμεν τὸν ρητὸν $\frac{127}{6}$.

ε) Αὐτοκίνητον ἀνεχώρησεν τὴν 7ην πρωϊνὴν ἐκ τῆς πόλεως Α μὲ ταχύτητα 33 km/h. Ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ ἕτερον αὐτοκίνητον ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ ταχύτητα 45 km/h διὰ νὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον μετὰ 2 ὥρας καὶ 45΄.

209. Τῇ βοηθείᾳ ἐξισώσεων νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ προβλήματα:

α) Ἐγευμάτισαν 47 ἄνδρες καὶ γυναῖκες. Ἕκαστος ἀνὴρ ἐπλήρωσεν 50 δρχ. καὶ ἑκάστη ἐκ τῶν γυναικῶν 47 δρχ. Ἂν οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 1380 δρχ. περισσότερον τῶν γυναικῶν, πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες;

β) Ἀπὸ τὸ περιεχόμενον βαρελίου ἐπωλήθησαν τὴν α΄ ἡμέραν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ καὶ τὴν β΄ ἡμέραν 39 κιλά. Ἐὰν τὸ πωληθὲν ἀντιπροσωπεύῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ περιεχομένου, πόσα κιλὰ ἀπέμειναν εἰς τὸ βαρέλιον;

γ) Ἐργάτης τελειώνει ἔργον εἰς 3 ἡμέρας καὶ ἄλλος ἐργάτης τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 6 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο ἐργάται, ἐὰν ἐργάζωνται συγχρόνως;

δ) Πατὴρ ἔχει 2πλασίαν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ του, ἐνῶ πρὸ 15 ἐτῶν εἶχεν 3πλασίαν. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των;

ε) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 13 νὰ δίδῃ πηλίκον τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ὑπόλοιπον 12.

ζ) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 10. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του, εὑρίσκομεν ἀριθμὸν κατὰ 36 μικρότερον. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

210. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις:

α) $2(8\chi-5) > 15\chi-8$, β) $2(2\chi-3)-5\chi+\frac{1}{2}>0$

γ) $\frac{\chi}{4}-\chi>\frac{1}{6}-\frac{2\chi}{3}$ δ) $\frac{\chi+1}{2}-\frac{\chi-1}{3}>1$

211. Ἐὰν $A=\left\{\chi \mid \frac{3}{4}\chi+3>0 \wedge \chi\in Z\right\}$, $B=\left\{\chi \mid \chi-2<0 \wedge \chi\in Z\right\}$

νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον $A\cap B$ δι' ἀναγραφῆς.

212. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τῶν συνόλων $A=\left\{\chi \mid \chi+1>\frac{\chi}{2}-2\right\}$ καὶ

$B=\left\{\chi \mid \chi+1<\frac{\chi}{3}-3\right\}$ (δι' ἁπλῆς περιγραφῆς).

213. Νὰ κατασκευάσητε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν συναρτήσεων:

α) $\psi=3\chi$ β) $\psi=-2\chi+1$ γ) $\psi=1{,}5\chi-\frac{1}{2}$ $(\chi\in Q)$.

214. Ἐὰν $A=\left\{(\chi,\psi) \mid \psi=2\chi \wedge \chi\in Q\right\}$ καὶ $B=\left\{(\chi,\psi) \mid \psi=\chi+2 \wedge \chi\in Q\right\}$ νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς τὸ σύνολον $A\cap B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Α. ΛΟΓΟΙ — ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ — ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

1. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ — ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΟΜΟΕΙΔΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ

§ 89. Λόγος δύο ἀριθμῶν.

Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 54 καὶ 9. Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεύτερον (9) διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον (54) ;

Ἐὰν χ ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχωμεν : $9\chi=54 \Longleftrightarrow \chi=\frac{54}{9} \Longleftrightarrow \chi=6$. Ὁ ἀριθμὸς 6 λέγεται λόγος τοῦ 54 πρὸς τὸν 9.

Ὥστε **λόγος τοῦ ἀριθμοῦ α πρὸς τὸν β ($\beta \neq 0$) λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β δίδει γινόμενον τὸν α.**

Ἐὰν λ ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β ἔχομεν :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\lambda \Longleftrightarrow \beta\lambda=\alpha}$$

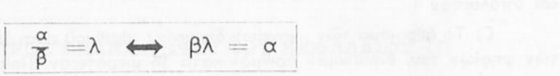
Συνεπῶς ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παρίσταται καί : (α, β)

Ὁ α καὶ ὁ β λέγονται ὅροι τοῦ λόγου, ὁ α λέγεται ἡγούμενος καὶ ὁ β ἑπόμενος.

§ 90. Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.

Δίδεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἓν ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ ὥστε $\Gamma\Delta=AB+AB+\frac{1}{4}AB$.



Κατὰ τὰ γνωστὰ κατασκευάζομεν τὸ $\Gamma\Delta=AB+AB+\frac{1}{4}AB$ ἢ

σχ. 61.

$$\Gamma\Delta=\left(1+1+\frac{1}{4}\right)AB \Longleftrightarrow \Gamma\Delta=\frac{9}{4}AB.$$

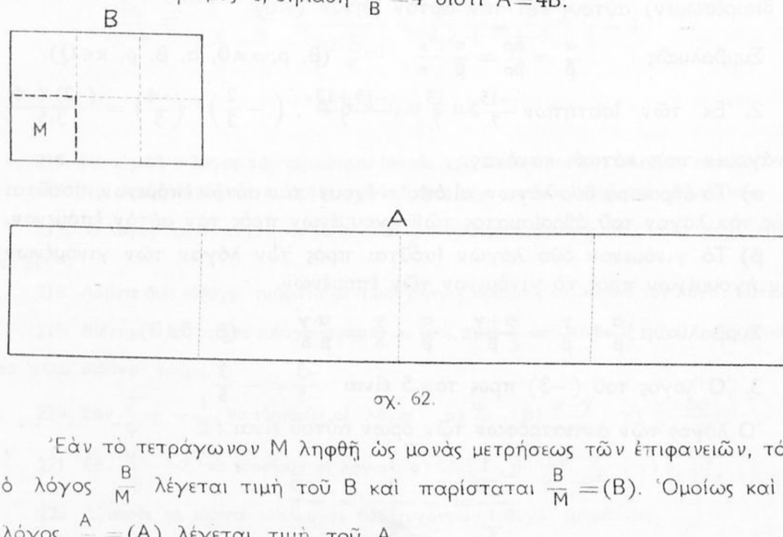
Ὁ ἀριθμὸς $\frac{9}{4}$ μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται τὸ ΑΒ καὶ δίδει τὸ ΓΔ λέγεται λόγος τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ καὶ συμβολίζεται γραπτῶς $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ ἢ (ΓΔ, ΑΒ).

Ὥστε $\quad \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{9}{4} \iff \Gamma\Delta = \frac{9}{4}AB.$

Γενικῶς λόγος μεγέθους Α πρὸς ἄλλον ὁμοειδὲς μέγεθος Β, λέγεται ὁ ἀριθμὸς λ ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον τὸ μέγεθος Β δίδει τὸ Α.

Συμβολικῶς : $\quad \frac{A}{B} = \lambda \iff A = \lambda B.$

§ **91**. Εἰς τὸ σχῆμα (62) ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου Α πρὸς τὸ ὀρθογώνιον Β εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4, δηλαδὴ $\frac{A}{B} = 4$ διότι $A = 4B$.



σχ. 62.

Ἐὰν τὸ τετράγωνον Μ ληφθῇ ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν, τότε ὁ λόγος $\frac{B}{M}$ λέγεται τιμὴ τοῦ Β καὶ παρίσταται $\frac{B}{M} = (B)$. Ὁμοίως καὶ ὁ λόγος $\frac{A}{M} = (A)$ λέγεται τιμὴ τοῦ Α.

Ἔχομεν $\frac{B}{M} = (B) = 6$, διότι $B = 6M$ καὶ $\frac{A}{M} = (A) = 24$, διότι $A = 24M$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων: $(A) = 24$

$(B) = 6$ διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$\frac{(A)}{(B)} = \frac{24}{6} = 4$. Ἀλλὰ καὶ $\frac{A}{B} = 4$, συνεπῶς $\boxed{\frac{A}{B} = \frac{(A)}{(B)}}$ (1)

Ὥστε ὁ λόγος δύο ἐπιφανειῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν αὐτῶν, ἐὰν μετρηθῶσιν ἢ συγκριθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει διὰ οἱαδήποτε ὁμοειδῆ μεγέθη Α καὶ Β καὶ ὁ λόγος

$\frac{A}{B}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως αὐτῶν. Δηλαδὴ ἡ ἰσότης (1) ἰσχύει, καὶ ἐὰν ληφθῇ ἄλλη μονὰς μετρήσεως ἀντὶ τῆς μονάδος Μ.

§ 92. Ἰδιότητες τοῦ λόγου.

1. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν -5 καὶ -8 πρὸς τὸν λόγον τῶν $(-5).(-2)$ καὶ $(-8).(-2)$.

Ἔχομεν $\frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$ καὶ $\frac{(-5)\cdot(-2)}{(-8)\cdot(-2)} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

Ἄρα $\frac{-5}{-8} = \frac{(-5)\cdot(-2)}{(-8)\cdot(-2)}$. Ἰσχύει καὶ $\frac{-5}{-8} = \frac{(-5):(-2)}{(-8):(-2)}$

Συνεπῶς ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) αὐτοὺς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ρητὸν ($\neq 0$).

Συμβολικῶς : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\rho}{\beta\rho} = \frac{\alpha:\kappa}{\beta:\kappa}$ $(\beta,\ \rho,\ \kappa \neq 0,\ \alpha,\ \beta,\ \rho,\ \kappa \in Q)$.

2. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{-15}{7} + \frac{13}{7} = \frac{-15+13}{7}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-2)\cdot(-4)}{3\cdot 5}$

συνάγομεν τοὺς κάτωθι κανόνας :

α) Τὸ ἄθροισμα δύο λόγων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ἑπόμενον, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸν αὐτὸν ἑπόμενον.

β) Τὸ γινόμενον δύο λόγων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἑπομένων.

Συμβολικῶς: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$ $(\beta,\ \delta \neq 0)$.

3. Ὁ λόγος τοῦ (-3) πρὸς τὸν 5 εἶναι $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$

Ὁ λόγος τῶν ἀντιστρόφων τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι :

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = -\frac{5}{3}$$

Ἑπομένως **ὁ λόγος τῶν ἀντιστρόφων τῶν ὅρων ἑνὸς λόγου ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου.**

Συμβολικῶς : Ἐὰν $\lambda_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ τότε $\lambda_2 = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = 1$

Ἐφαρμογαί :

α) $\frac{-5}{-6} = \frac{(-5)\cdot(-1)}{(-6)\cdot(-1)} = \frac{5}{6}$ β) $\frac{-7}{8} = \frac{(-7)\cdot(-1)}{8\cdot(-1)} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8}$

γ) $\frac{6}{17}+\frac{1}{17}+-\frac{5}{17}=\frac{6+1-5}{17}=\frac{2}{17}$

δ) $\frac{-5}{9}\cdot\frac{3}{-4}=\frac{(-5)\cdot 3}{9\cdot(-4)}=\frac{-15}{-36}=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12}$

ε) $\lambda_1=\frac{-2}{-3}=+\frac{2}{3}$, $\lambda_2=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}}=+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ καὶ $\lambda_1\lambda_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1.$

ζ) Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=2$ νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $\frac{\chi+\psi}{2\chi-\psi}$.

Διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ λόγου $\frac{\chi+\psi}{2\chi-\psi}$ διὰ τοῦ ψ:

$$\frac{\chi+\psi}{2\chi-\psi}=\frac{\frac{\chi}{\psi}+\frac{\psi}{\psi}}{2.\frac{\chi}{\psi}-\frac{\psi}{\psi}}=\frac{\frac{\chi}{\psi}+1}{2.\frac{\chi}{\psi}-1}=\frac{2+1}{2\cdot 2-1}=\frac{3}{4-1}=\frac{3}{3}=1$$

Ἀσκήσεις

215. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου ἰσοπλ. τριγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

216. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

217. Ὁ λόγος τοῦ τ. πήχ. πρὸς τὸ m εἶναι $\frac{3}{4}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ τ.τ. πήχ. πρὸς τὸ m^2.

218. Λάβετε δύο εὐθύγρ. τμήματα μὲ τιμὰς ρητοὺς ἀριθμοὺς καὶ εὕρετε τὸν λόγον αὐτῶν.

219. Δίδεται ὁ λόγος δύο εὐθυγρ. τμημάτων ἴσος πρὸς $\frac{3}{5}$ καὶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄλλο εὐθύγρ. τμῆμα.

220. Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=-\frac{1}{2}$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι: α) $\frac{\psi}{\chi}$, β) $\frac{\psi-\chi}{\chi+\psi}$, γ) $\frac{\chi+2\psi}{2\chi-\psi}$.

221. Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=-2$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι: α) $\frac{2\chi+\psi}{\chi+3\psi}$, β $\frac{2\chi\psi-\psi^2}{\chi^2-\psi^2}$, γ) $\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}$

222. Δύνασθε νὰ εὕρητε τὸν λόγον δύο τυχόντων εὐθυγρ. τμημάτων;

2. ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΥΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΣ

§ **93**. Ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ πρόβλημα τῆς §85.

Ἀεροπλάνον κινούμενον εὐθυγράμμως μὲ σταθερὰν ταχύτητα 500 km/h *διέρχεται ὑπεράνω τοῦ σχολείου μας Α. Μετὰ χ ὥρας διέρχεται ὑπεράνω σημείου Β. Ποία ἡ ἀπόστασις ΑΒ; (Τὸ ἀεροπλάνον κινεῖται ὁριζοντίως).*

Ἐὰν ΑΒ=ψ **km**, ἔχομεν τὴν συνάρτησιν ψ=500χ. Σχηματίζομεν τὸν πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν.

Τιμαὶ χρόνου εἰς ὥρας	χ	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...	χ
Τιμαὶ ἀποστάσεως εἰς km	$\psi = 500\chi$	0	25	50	250	500	1000	1500	...	500χ

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου $\frac{1}{20}$ ἐπὶ 10, θὰ εὕρωμεν $\frac{1}{2}$. Ἐὰν πολ/ωμεν καὶ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν 25 τῆς ἀποστάσεως ἐπὶ τὸν 10, θὰ εὕρωμεν 250. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ πίνακος διαπιστοῦται ὅτι αἱ τιμαὶ $\frac{1}{2}$ καὶ 250 εἶναι ἀντίστοιχοι.

Ἐπίσης πολλαπλασιάζοντες τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς $\frac{1}{10}$ καὶ 50 ἐπὶ 30 εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς 3 καὶ 1500.

Ὥστε, ἐὰν πολ/ωμεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν μεγεθῶν χρόνου καὶ ἀποστάσεως μὲ ἕνα ρητόν, εὑρίσκομεν πάλιν ἀντιστοίχους τιμὰς αὐτῶν. Τὰ μεγέθη χρόνος καὶ ἀπόστασις εἶναι ἀνάλογα.

Ὥστε **δύο μεγέθη λέγονται εὐθέως ἀνάλογα, ἐὰν ἔχουν ἀντιστοίχους τιμὰς καὶ τὰ γινόμενα δύο ἀντιστοίχων τιμῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ρητὸν εἶναι πάλιν ἀντίστοιχοι τιμαί.**

Συνεπῶς, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ χ, ψ δύο μεγεθῶν συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $\psi = \alpha\chi$ $(\alpha \neq 0)$, τὰ μεγέθη αὐτὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

Ἐὰν δύο μεγέθη εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ αὐτῶν συνδέονται διὰ σχέσεως τῆς μορφῆς $\psi = \alpha\chi$;

Δύο μεγέθη Α καὶ Β ἔχουν ἀντιστοίχους τιμὰς τὰς ἀναγραφομένας εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

Τιμαὶ μεγ. Α	1	...	2	...	3	...	4	...	5	..	6	...	7	...	8	...	χ
Τιμαὶ μεγ. Β	2	...	4	...	6	...	8	...	10	...	12	...	14	...	16	...	ψ

Τὰ μεγέθη Α καὶ Β εἶναι ἀνάλογα· διότι, ἐὰν πολ/ωμεν δύο ἀντιστοίχους τιμὰς π.χ. τὰς 2 καὶ 4 ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 2 ἢ 3 ἢ 4 κ.λ.π., εὑρίσκομεν πάλιν ἀντιστοίχους τιμάς.

Παρατηροῦμεν ὅτι: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots = \frac{\chi}{\psi}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν:

$$\frac{1}{2} = \frac{\chi}{\psi} \iff \psi = 2\chi.$$

Ὥστε **αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ χ καὶ ψ τῶν ἀναλόγων μεγεθῶν Α καὶ Β συνδέονται διὰ σχέσεως τῆς μορφῆς $\psi = \alpha\chi$.**

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι δύο μεγέθη μὲ ἀντιστοίχους τιμὰς χ καὶ ψ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ἐὰν αἱ τιμαὶ αὐτῶν συνδέωνται διὰ σχέσεως τῆς μορφῆς ψ=αχ (α≠0).

§ **94. Ἰδιότητες.**

1. Διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀναλόγων μεγεθῶν Α καὶ Β εἴδομεν ὅτι :

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\dots$$

Ὥστε, ἐὰν δύο μεγέθη εἶναι ἀνάλογα, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ αὐτῶν ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον.

Σημείωσις. Εἰς τὴν συνάρτησιν ψ = αχ (α≠0) διὰ χ = 0 ἔχομεν ψ=0. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{0}{0}$ δὲν εἶναι ὡρισμένον, διὰ τοῦτο ἐξαιρεῖται τοῦ ἀνωτέρω κανόνος ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν 0 καὶ 0.

2. Συγκρίνομεν τὸν λόγον δύο τιμῶν τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ μεγέθους Β.

Λόγος τῶν τιμῶν 2 καὶ 6 τοῦ μεγέθους Α : $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν 4 καὶ 12 τοῦ μεγέθους Β : $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Συνεπῶς, ἐὰν δύο μεγέθη εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

Παραδείγματα εὐθέως ἀναλόγων μεγεθῶν :

α) Ὁ ἀριθμὸς ἐργατῶν τῆς αὐτῆς ἀποδόσεως καὶ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐκτελοῦν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον.

β) Τὸ βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ.

γ) Ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

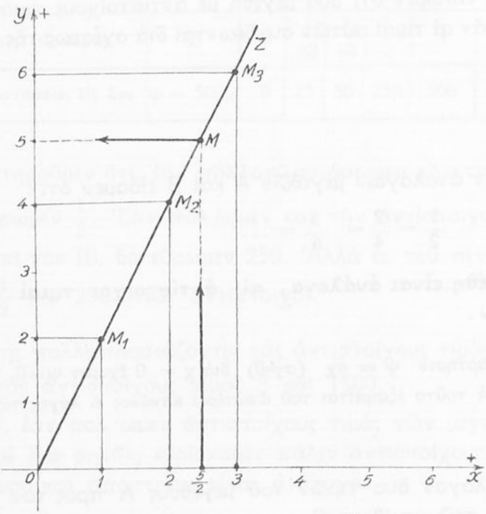
δ) Ὁ χρόνος καὶ τὸ διάστημα εἰς τὴν ἰσοταχῆ κίνησιν.

ε) Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου.

§ **95. Γραφικὴ παράστασις**

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς σχέσεως, ἡ ὁποία συνδέει τὰς τιμὰς εὐθέως ἀναλόγων μεγεθῶν, εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ψ=αχ, τὴν ὁποίαν ἐμελετήσαμεν εἰς τὴν §85α καὶ συντόμως ἐπαναλαμβάνομεν κατωτέρω διὰ τὴν σχέσιν ψ=2χ, ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν εὐθέως ἀναλόγων μεγεθῶν Α καὶ Β.

Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων τοῦ ἡμιάξονος οχ παριστοῦν τιμὰς τοῦ με-



σχ. 63.

γέθους A καὶ αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ οψ τὰς τιμὰς τοῦ μεγέθους B.

Τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3.... εἶναι αἱ γραφικαὶ παραστάσεις (ἢ εἰκόνες) τῶν ζευγῶν (1, 2), (2, 4), (3, 6),... καὶ κεῖνται ἐπὶ ἡμιευθείας OZ.

Παρατήρησις

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ τῆς ἡμιευθείας OZ τιμὰς τοῦ μεγέθους B ἀντιστοίχους τοῦ A.

Π.χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν ποία τιμὴ τοῦ μεγέθους B ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\frac{5}{2}$ τοῦ μεγέθους A, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\frac{5}{2}$ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸν οχ, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ σημεῖον M τὴν OZ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον M φέρομεν πρὸς τὸν οχ (ἢ $\perp$ ἐπὶ τὸν οψ). Αὕτη τέμνει τὸν οψ εἰς ἓν σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη 5 εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ $\frac{5}{2}$.

Ἀσκήσεις

223. Ἐξετάσατε, ἐὰν τὰ κάτωθι μεγέθη εἶναι ἀνάλογα:

α) Ὁ χρόνος καὶ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ μία ὁμὰς ἐργατῶν.

β) Ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀτόμου καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ.

γ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος ἐκτελέσεως ἑνὸς ἔργου.

224. Νὰ εὕρητε παραδείγματα εὐθέως ἀναλόγων μεγεθῶν.

225. Νὰ συμπληρωθῇ ὁ κάτωθι πίναξ, νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς καὶ νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς.

Τιμαὶ μήκους ὑφάσματος εἰς m	;	;	2	4,5	3		
Τιμαὶ πωλήσεως ὑφάσματος εἰς δρχ.	10	150	400	;	;		

226. Διὰ τὰ μεγέθη «πλευρὰ τετραγώνου» καὶ «περίμετρος αὐτοῦ» νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς αὐτῶν, καὶ νὰ γίνη γραφικὴ παράστασις αὐτῆς.

227. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ μεγέθη βάρος ἐμπορεύματος καὶ τιμὴ ἐμπορεύματος, ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς μονάδος βάρους εἶναι 40 δρχ.

228. Ἐξετάσατε, ἐὰν μεγέθη μὲ τιμὰς συνδεομένας διὰ σχέσεως τῆς μορφῆς $\psi = \alpha\chi + \beta$ εἶναι ἀνάλογα.

3. ΜΕΓΕΘΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ— ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΥΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΣ

§ **96. Πρόβλημα.** *Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ κινηθῇ αὐτοκίνητον διὰ νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 100 χιλιομέτρων εἰς χρόνον 1 ὥρας, 2 ὡρῶν, 2,5 ὡρῶν, 4 ὡρῶν κ.ο.κ.;*

Ἐὰν μὲ χ παραστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου εἰς ὥρας καὶ μὲ ψ τὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος εἰς χιλιόμετρα ἀνὰ ὥραν θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

Ταχύτης ἐπὶ χρόνον = διάστημα

$$\psi \cdot \chi = 100 \Longleftrightarrow \psi = \frac{100}{\chi}$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν $\psi = \frac{100}{\chi}$ θέσωμεν ἀντὶ τοῦ χ τὰς τιμὰς

1, 2, 2,5, . . . εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ψ

100, 50, 40, . . .

καὶ σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα:

Τιμαὶ χρόνου εἰς ὥρας	χ	...	1	2	2,5	4	5	...	χ
Τιμαὶ ταχύτητος εἰς km/h	ψ	...	100	50	40	25	20	...	$\frac{100}{\chi}$

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

1. Εἰς κάθε τιμὴν τοῦ χρόνου ἀντιστοιχεῖ μία μόνον τιμὴ τῆς ταχύτητος (μονότιμον τῆς διαιρέσεως), ἄρα ἡ $\psi = \frac{100}{\chi}$ εἶναι συνάρτησις.

2. Ἐὰν πολ/ωμεν τὴν τιμὴν 2,5 τοῦ χρόνου ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν 5. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν τιμὴν 40 τῆς ταχύτητος (ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ 2,5) διὰ 2, εὑρίσκομεν 20 δηλαδὴ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ 5.

Τὰ μεγέθη χρόνος καὶ ταχύτης, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ἰδιότητας αὐτάς, λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** μεγέθη.

Δύο μεγέθη λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν ἔχουν ἀντιστοίχους τιμὰς εἰς τρόπον ὥστε, πολλαπλασιαζομένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ρητὸν ($\neq 0$) καὶ διαιρουμένης τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ αὐτοῦ ρητοῦ, νὰ εὑρίσκωνται νέαι τιμαὶ ἀντίστοιχοι.

§ 97. **Ἰδιότητες.**

α) Παρατηροῦμεν ὅτι: $1.100 = 2.50 = 2{,}5.40 = \ldots$

Ἄρα τὸ γινόμενον δύο ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων μεγεθῶν εἶναι τὸ αὐτό, (σταθερόν).

β) Αἱ προηγούμεναι ἰσότητες γράφονται:

$$\frac{1}{\frac{1}{100}} = \frac{2}{\frac{1}{50}} = \frac{2{,}5}{\frac{1}{40}} = \ldots$$

Ἑπομένως **εἰς τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη αἱ τιμαὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστρόφους τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.**

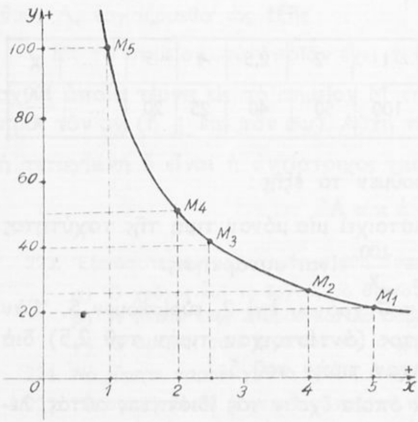
γ) Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ὁ λόγος τῶν τιμῶν 1 καὶ 4 τοῦ χρόνου εἶναι $\frac{1}{4}$, ὁ δὲ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν 100 καὶ 25 τῆς ταχύτητος εἶναι $\frac{100}{25} = 4$, δηλαδὴ ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{4}$.

Συνεπῶς εἰς τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

§ 98. **Γραφικὴ παράστασις τῆς σχέσεως $\psi = \frac{100}{x}$**

Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων τοῦ οχ παριστοῦν τιμὰς χρόνου εἰς ὥρας καὶ αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ οψ τιμὰς ταχύτητος εἰς χιλιόμετρα ἀνὰ ὥραν.

Εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὰς γραφικὰς παραστάσεις (εἰκόνας) τῶν ζευγῶν (5, 20), (4, 25), (2,5, 40)... καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3,... δὲν κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ἀλλὰ ἐπὶ μιᾶς καμπύλης καλουμένης ὑπερβολῆς.



σχ. 64.

Ἐπειδὴ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{100}{x}$ εἶναι τὸ Q^+, ἡ ὑπερβολὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κλάδον, κείμενον ἐντὸς τῆς $\measuredangle$ χοψ.

Ἐφαρμογὴ

§ 99. Δίδεται ἡ συνάρτησις $\psi = \dfrac{1}{\chi}$.

α) Νὰ καταρτισθῇ πίναξ ἀντιστοίχων τιμῶν.

β) Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί, εἶναι τιμαὶ ἀντιστρόφως ἀναλόγων μεγεθῶν.

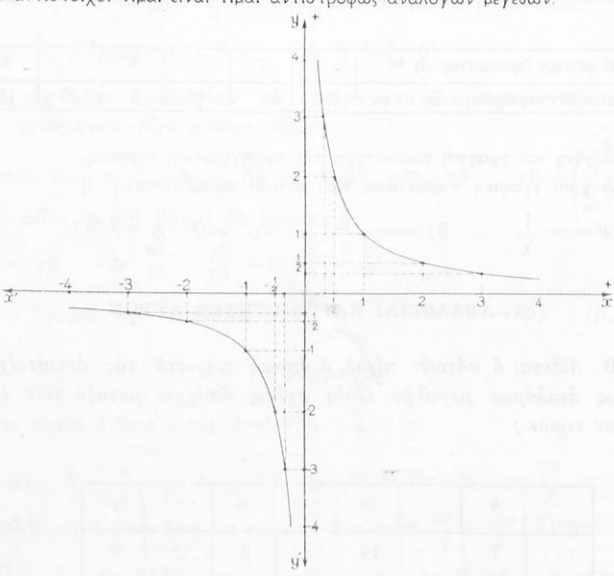
γ) Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi = \dfrac{1}{\chi}$.

α)

χ	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3	...
ψ	...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...

β) Πολλαπλασιάζομεν τὴν τιμὴν $\frac{1}{2}$ τοῦ χ ἐπὶ 6 καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν 3. Διαιροῦμεν τὴν τιμὴν 2 τοῦ ψ (ἀντίστοιχον τοῦ $\frac{1}{2}$) διὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν $\frac{1}{3}$. Αἱ τιμαὶ ὅμως 3 καὶ $\frac{1}{3}$ εἶναι ἀντίστοιχοι ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ πίνακος.

Ἄρα αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ εἶναι τιμαὶ ἀντιστρόφως ἀναλόγων μεγεθῶν.



σχ. 65.

γ) Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{1}{\chi}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο καμπύλας συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, αἱ ὁποῖαι εἶναι οἱ δύο κλάδοι μιᾶς ὑπερβολῆς.

Γενικῶς ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\alpha}{\chi}$ ($\alpha, \chi, \psi \in Q$ καὶ $\alpha, \chi, \psi \neq 0$) ὁρίζει ζεύγη τιμῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων μεγεθῶν.

Τὸ γινόμενον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν εἶναι σταθερὸν ($\chi\psi = \alpha$). Ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ χ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ψ.

Γραφικῶς ἡ $\psi = \frac{\alpha}{\chi}$ παρίσταται ὑπὸ μιᾶς καμπύλης (μὲ ἕνα ἢ δύο κλάδους, ἀναλόγως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ), καλουμένης ὑπερβολῆς (ὀρθογώνιος ὑπερβολή).

Ἀσκήσεις

229. Ἐξετάσατε, ἐὰν τὰ κάτωθι μεγέθη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

α) Ἀριθμὸς ἐργατῶν καὶ χρόνος δι' ἓν ὡρισμένον ἔργον.

β) Ἡ πλευρὰ τριγώνου καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος, ὅταν παραμένῃ σταθερὸν τὸ ἐμβαδόν του.

230. Νὰ εὕρητε παραδείγματα ἀντιστρόφως ἀναλόγων μεγεθῶν.

231. Συμπληρώσατε τὸν κάτωθι πίνακα καὶ γράψατε τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία συνδέει δύο τυχούσας ἀντιστοίχους τιμάς, ἐὰν παραμένῃ σταθερὰ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑφάσματος.

Τιμαὶ μήκους ὑφάσματος εἰς m	;	2	;	5	;	8	χ
Τιμαὶ πλάτους ὑφάσματος εἰς m	80	;	40	;	20	15	ψ

232. Νὰ γίνῃ καὶ γραφικὴ παράστασις τῆς προηγουμένης σχέσεως.

233. Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α) $\psi = -\frac{1}{\chi}$ β) $\psi = -\frac{12}{\chi}$ ($\chi, \psi \in Q$, $\chi, \psi \neq 0$).

4. ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

§ **100.** *Δίδεται ὁ κάτωθι πίναξ, ὁ ὁποῖος παριστᾶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς δύο εὐθέως ἀναλόγων μεγεθῶν. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν λόγων τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν ;*

...	9	...	18	...	α	...	γ
...	7	...	14	...	β	...	δ

($\beta, \delta \neq 0$)

Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{9}{7}=\frac{18}{14}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

Ἡ ἰσότης $\frac{9}{7}=\frac{18}{14}$ ἢ γενικῶς ἡ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ὀνομάζεται ἀναλογία.

Ὥστε **ἀναλογία εἶναι ἡ ἰσότης δύο λόγων.**

Ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ συμβολικῶς γράφεται : (α, β, γ, δ) ἢ [(α, β), (γ, δ)].

Οἱ α, γ λέγονται **ἡγούμενοι** ὅροι καὶ οἱ β, δ **ἑπόμενοι** ὅροι τῆς ἀναλογίας. Οἱ β, γ λέγονται **μέσοι** ὅροι καὶ οἱ α, δ **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Σημείωσις

Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\chi}{\psi}=\frac{\psi}{z}$ ὁ ψ λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν χ καὶ z!

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀναλογία λέγεται **συνεχής**. Εἰς τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν $\frac{8}{4}=\frac{4}{2}$ ὁ 4 εἶναι ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν 8 καὶ 2.

Ὁ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν λέγεται καὶ **γεωμετρικὸς μέσος** αὐτῶν.

§ 101. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

1. Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ παρατηροῦμεν ὅτι 4.3=2.6 . Ὁμοίως εἰς τὴν $\frac{9}{6}=\frac{6}{4}$ ἔχομεν ὅτι 9.4 = 6.6 ἢ 9.4=6^2.

Ἄρα εἰς μίαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων.

Γενικῶς : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}.\beta\delta=\frac{\gamma}{\delta}.\beta\delta \Rightarrow \alpha\delta=\gamma\beta$

Ἐὰν αδ=γβ καὶ βδ≠0 θὰ ἔχωμεν :

$\alpha\delta=\gamma\beta \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\beta\delta}=\frac{\gamma\beta}{\beta\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \quad (\beta, \delta\neq 0)$.

Ἐφαρμογαί

α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὅρος χ τῆς ἀναλογίας $\frac{\chi}{7}=\frac{4}{2}$

Ἔχομεν : $\frac{\chi}{7}=\frac{4}{2} \Rightarrow 2\chi=4.7 \Rightarrow 2\chi=28 \Rightarrow \chi=\frac{28}{2}=14$

β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ὅρος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας $\frac{32}{\chi}=\frac{\chi}{2}$. **Εἶναι :**

$\frac{32}{\chi}=\frac{\chi}{2} \Rightarrow 32.2=\chi\cdot\chi \Rightarrow 64=\chi\cdot\chi \Rightarrow 8^2=\chi^2 \Rightarrow \chi=8$

2. Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{10}{5}=\frac{8}{4}$. Οἱ ἀντίστροφοι λόγοι εἶναι ἴσοι καὶ ἔχομεν τὴν νέαν ἀναλογίαν $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τοὺς μέσους ὅρους, προκύπτει νέα ἀναλογία: $\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$. Ὁμοίως ἐὰν ἐναλλάξωμεν τοὺς ἄκρους ὅρους: $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

Γενικῶς, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0)$, εὑρίσκομεν τὰς νέας ἀναλογίας : 1) $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$, 2) $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$, 3) $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$. Πράγματι :

1) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\alpha\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} \Rightarrow \frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$

2) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

3) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\alpha\beta}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$

Ἐὰν ἔχωμεν ἀναλογίαν μὲ μὴ μηδενικοὺς ὅρους καὶ α) ἀντιστρέψωμεν τοὺς λόγους β) ἐναλλάξωμεν τοὺς μέσους ὅρους γ) ἐναλλάξωμεν τοὺς ἄκρους ὅρους αὐτῆς, λαμβάνομεν νέας ἀναλογίας.

Ἐφαρμογή

Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{-12}{-6}=\frac{-10}{-5}$ νὰ σχηματίσητε νέας ἀναλογίας.

1ον Ἀντιστρέφομεν τοὺς λόγους : $\frac{-6}{-12}=\frac{-5}{-10}$

2ον. Ἐναλλάσσομεν τοὺς μέσους ὅρους : $\frac{-12}{-10}=\frac{-6}{-5}$

3ον Ἐναλλάσσομεν τοὺς ἄκρους ὅρους : $\frac{-5}{-6}=\frac{-10}{-12}$

3. Εἰς τοὺς λόγους τῆς ἀναλογίας $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ προσθέσατε τὴν μονάδα καὶ ἐξετάσατε, ἐὰν προκύπτῃ νέα ἀναλογία.

Ἔχομεν : $\frac{3}{5}=\frac{6}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{5}+1=\frac{6}{10}+1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}+\frac{5}{5}=\frac{6}{10}+\frac{10}{10}$

$$\Leftrightarrow \frac{3+5}{5}=\frac{6+10}{10}. \quad \left(\frac{8}{5}=\frac{16}{10}\right)$$

Ἐὰν εἰς τοὺς ἡγουμένους ὅρους μιᾶς ἀναλογίας προσθέσωμεν τοὺς ἑπομένους, λαμβάνομεν ἀναλογίαν.

Γενικῶς : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς λόγους τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τὴν μονάδα, λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\gamma}{\delta}-1 \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\delta}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}.$$

Νὰ διατυπωθῇ κανὼν διὰ τὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$$

Ἐφαρμογαί

α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ χ ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{28-\chi}{\chi}=\frac{2}{5}$. Ἔχομεν :

$$\frac{28-\chi}{\chi}=\frac{2}{5} \Longleftrightarrow \frac{28-\chi+\chi}{\chi}=\frac{2+5}{5} \Longleftrightarrow \frac{28}{\chi}=\frac{7}{5} \Longleftrightarrow 7\chi=5.28 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \chi=\frac{5.28}{7} \Longleftrightarrow \chi=5.4 \Longleftrightarrow \chi=20$$

β) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα 50 καὶ λόγον $\frac{12}{13}$.

Ἔστω χ καὶ ψ οἱ ἀριθμοί. Ἔχομεν $\chi+\psi=50$ καὶ $\frac{\chi}{\psi}=\frac{12}{13}$.

Ἐκ τῆς $\frac{\chi}{\psi}=\frac{12}{13} \Longleftrightarrow \frac{\chi+\psi}{\psi}=\frac{12+13}{13} \Longleftrightarrow \frac{50}{\psi}=\frac{25}{13} \Longleftrightarrow 25\psi=13.50 \Longleftrightarrow$

$\psi=\frac{13.50}{25} \Longleftrightarrow \psi=13.2 \Longleftrightarrow \psi=26$. Ἐπομένως $\chi=50-26=24$.

4. Νὰ συγκριθῇ ὁ λόγος $\frac{2+8}{3+12}$ πρὸς τοὺς λόγους τῆς ἀναλογίας $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$.
Τί παρατηρεῖτε ;

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{2+8}{3+12}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

Ἄρα $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}=\frac{2+8}{3+12}$. Γενικῶς : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ $(\beta.\delta>0)$

Πράγματι : ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta}=\lambda$, τότε καὶ $\frac{\gamma}{\delta}=\lambda$· συνεπῶς ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\beta\lambda\\ \gamma=\delta\lambda\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha+\gamma=\beta\lambda+\delta\lambda \Longrightarrow \alpha+\gamma=(\beta+\delta)\lambda \Longrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\lambda=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Ἐὰν ἔχωμεν ἴσους λόγους μὲ ὁμοσήμους παρονομαστάς, ὁ λόγος ὁ ὁποῖος ἔχει ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν ἰσοῦται πρὸς τοὺς δοθέντας.

Δηλαδὴ γενικώτερον

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=\ldots=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots}$$

Σημείωσις. Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ δὲν εἶναι ὁμόσημοι, οὗτοι δύνανται νὰ γίνουν ὁμόσημοι. Π.χ. $\frac{-2}{4} = \frac{5}{-10} = \ldots$

Ἔχομεν $\frac{-2}{4} = \frac{5(-1)}{-10.(-1)} = \ldots \iff \frac{-2}{4} = \frac{-5}{10} = \ldots$

Ἐφαρμογὴ

Ἐὰν $\frac{\alpha}{-5} = \frac{\beta}{-7} = \frac{\gamma}{-12}$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma=48$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ α, β, γ.

Ἔχομεν $\frac{\alpha}{-5} = \frac{\beta}{-7} = \frac{\gamma}{-12} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{-5-7-12} = \frac{48}{-24} = -2$

Ἄρα $\frac{\alpha}{-5} = -2 \Longrightarrow \alpha = (-5).(-2) \Longrightarrow \alpha = 10$

$\frac{\beta}{-7} = -2 \Longrightarrow \beta = (-7).(-2) \Longrightarrow \beta = 15$

$\frac{\gamma}{-12} = -2 \Longrightarrow \gamma = (-12).(-2) \Longrightarrow \gamma = 24$

Ἀσκήσεις

234. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἄγνωστοι ὅροι τῶν κάτωθι ἀναλογιῶν.

α) $\frac{-10}{\chi} = \frac{5}{4}$, δ) $\frac{\chi}{-4} = \frac{-25}{\chi}$, ζ) $\frac{8}{-4} = \frac{4}{\chi}$, ι) $\frac{6}{-3} = \frac{\chi}{2}$

β) $\frac{-9}{6} = \frac{6}{\chi}$, ε) $\frac{\chi}{-9} = \frac{-9}{27}$, η) $\frac{2}{5} = \frac{6}{\psi}$, ια) $\frac{27}{42} = \frac{\psi}{70}$

γ) $\frac{2}{\beta} = \frac{10}{35}$, στ) $\frac{16}{\gamma} = \frac{\gamma}{9}$, θ) $\frac{4,5}{\psi} = \frac{\psi}{2}$, ιβ) $\frac{-4}{7} = \frac{\gamma}{56}$, ιγ) $\frac{\alpha}{15} = \frac{15}{12}$

235. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἀποτελοῦν ἀναλογίαν αἱ κάτωθι τετράδες.

α) (15, 35, 9, 21), β) (−12, 34, −18, 51)

δ) $(\chi, \psi, \chi^2, \chi\psi)$, γ) (9, 21, 21, 49).

236. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν 16 καὶ 25.

237. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας $\frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{7}$

α) Ἐὰν $\chi+\psi=65$ καὶ β) ἐὰν $\chi-\psi=78$

238. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 560 καὶ λόγον $\frac{2}{5}$

239. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν διαφορὰν 200 καὶ λόγον $\frac{7}{5}$

240. Ἐὰν $\frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5}$ καὶ $\chi+\psi+z=200$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ χ, ψ, z.

241. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἑπόμενοι ὅροι τῶν ἴσων λόγων $\frac{2}{\chi} = \frac{3}{\psi} = \frac{4}{z}$, ἐὰν $\chi+\psi+z=81$.

242. Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi} = \frac{3}{4}$ καὶ $\chi+\psi=56$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ χ καὶ ψ.

243. Ἐὰν $\frac{\chi-3}{\chi} = \frac{\psi-4}{\psi}$ καὶ $\chi+\psi=84$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ χ, ψ.

Β. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΛΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ **102. Πρόβλημα 1ον.** *Ἐὰν 6 ἐργάται σκάπτουν 3 στρέμματα εἰς 8 ὥρας, οἱ 14 ἐργάται (τῆς ἰδίας ἀποδόσεως) πόσα στρέμματα θὰ σκάψουν εἰς 8 ὥρας;*

Ἔστω ὅτι εἰς τὴν τιμὴν «14 ἐργάται» ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «χ στρέμματα». Σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα:

Πλῆθος ἐργατῶν	6	14	2πλάσιοι ἐργ. 12	3πλάσιοι ἐργ. 18	...
Τιμαὶ ἔργου εἰς στρέμματα	3	χ	2πλάσια στρέμ. 6	3πλάσια στρέμ. 9	...

Ἐπειδὴ τὰ μεγέθη πλῆθος ἐργατῶν καὶ ἔργον εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, δηλαδὴ $\frac{6}{14} = \frac{3}{χ}$

Ἐπομένως $\frac{6}{14} = \frac{3}{χ} \iff 6χ = 3.14 \iff 6χ = 42 \iff χ = 7$

Ἄρα 7 στρέμματα θὰ σκάψουν οἱ 14 ἐργάται εἰς 8 ὥρας.

Σημείωσις 1.

Δυνάμεθα τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ κατατάξωμεν ὡς ἑξῆς:

Πλῆθος ἐργατῶν τῆς ἰδίας ἀποδόσεως	Τιμαὶ ἔργου εἰς στρέμ.	Τιμαὶ χρόνου εἰς ὥρας
6	3	8
14	χ	8

ἢ ἁπλούστερον:

6 ἐργάται $\longrightarrow$ 3 στρέμ.
14 » $\longrightarrow$ χ »

Σημείωσις 2.

Σχηματίζομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{6}{3} = \frac{14}{χ}$, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἰδιότητα: «Εἰς τὰ εὐθέως ἀνάλογα μεγέθη εἶναι ἴσοι οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν». Ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας αὐτῆς εὑρίσκομεν χ = 7.

Πρόβλημα 2ον. Ἐὰν 10 ἐργάται σκάπτουν εἰς 12 ἡμέρας 50 στρέμματα, οἱ 8 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὰ 50 στρέμματα. (Οἱ ἐργάται εἶναι τῆς ἰδίας ἀποδόσεως καὶ ἐργάζονται τὰς ἰδίας ὥρας ἡμερησίως).

Ἔστω ὅτι οἱ 8 ἐργάται θὰ σκάψουν εἰς χ ἡμέρας τὰ 50 στρέμματα.

Σχηματίζομεν τὸν πίνακα :

Πλῆθος ἐργατῶν	10	8		20	5
Τιμαὶ χρόνου εἰς ἡμέρας	12	χ		6	24

Ἐπειδὴ τὰ μεγέθη πλῆθος ἐργατῶν καὶ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

Ἄρα ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{10}{8} = \frac{\chi}{12}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi = 15$.

Ἑπομένως εἰς 15 ἡμέρας θὰ σκάψουν τὰ 50 στρέμ. οἱ 8 ἐργάται.

Σημείωσις 1:

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἰδιότητα «εἰς τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη, τὰ γινόμενα ἀντιστοίχων τιμῶν εἶναι ἴσα» ἔχομεν $10.12 = 8.\chi \iff \chi = \frac{10.12}{8} \iff$

$$\chi = \frac{120}{8} \iff \chi = 15.$$

Σημείωσις 2:

Δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα καὶ ὡς ἑξῆς :

Πλῆθος ἐργατῶν τῆς ἰδίας ἀποδόσεως	Τιμαὶ χρόνου εἰς ἡμέρας	Τιμαὶ ἔργου εἰς στρέμ.
10	12	50
8	χ	50

ἤ

10 ἐργάται $\longrightarrow$ 19 ἡμέραι

8 » $\longrightarrow$ χ »

Προβλήματα

244. Διὰ τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἔργου διετέθη τὸ ποσὸν τῶν 9000 δρχ. Τί ποσὸν χρημάτων ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἰδίου ἔργου;

245. Διὰ 100 ἐνδυμασίας χρειάζονται 300 m μήκους ὑφάσματος πλάτους 1,40 m. Διὰ 125 ὁμοίας ἐνδυμασίας πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος, ἐὰν τὸ μῆκος παραμένῃ σταθερόν ;

246. Αὐτοκίνητον κινεῖται καὶ διατηρεῖ ἐπὶ $\frac{8}{3}$ ὥρας ταχύτητα 67,5 km/h. Πόσα km θὰ διανύσῃ μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἐπὶ $\frac{32}{9}$ ὥρας;

247. Αὐτοκίνητον ἔχει ταχύτητα 56 km/h καὶ διανύει ἀπόστασιν 182 km. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτήν, ἐὰν ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητά του κατὰ τὸ $\frac{1}{14}$ αὐτῆς;

248. 50 στρατιῶται ἔχουν τροφὰς διὰ 30 ἡμέρας. Πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν μὲ τὰ τρόφιμα αὐτά, ἐὰν αὐξηθῇ ἡ μερὶς κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς;

249. Ἔργον συνεφωνήθη νὰ τελειώσῃ εἰς 25 ἡμέρας. Ἐὰν 6 ἐργάται ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμέρας, πόσοι ἐργάται πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον ἐντὸς τῆς τακτῆς προθεσμίας ;

250. 12 ἄνδρες ἐκτελοῦν ἔργον εἰς 20 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ αὐτὸ ἔργον 20 γυναῖκες, ἐὰν ἡ ἐργασία 4 ἀνδρῶν ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἐργασίαν 5 γυναικῶν ;

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

§ **103. Πρόβλημα 1ον.** *Ἐμπόρευμα κόστους 800000 δρχ. ἐπωλήθη μὲ κέρδος 12%. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος ;*

Ἐὰν καλέσωμεν χ δρχ. τὸ κέρδος, ἐπειδὴ 12% σημαίνει «ἐπὶ 100 μονάδων κόστους τὸ κέρδος εἶναι 12» καὶ τὸ κέρδος θεωρεῖται ἀνάλογον τοῦ κόστους, ἔχομεν :

Κόστος	100	800000
Κέρδος	12	χ

$$\Longrightarrow \frac{100}{800000} = \frac{12}{\chi} \Longrightarrow \chi = 96000$$

Ἄρα τὸ κέρδος εἶναι 96 000 δρχ.

Τὸ κέρδος λέγεται ποσοστὸν ἐπὶ τοῦ κόστους.

Εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ τὴν οἰκονομικὴν ζωήν, ἓν μέγεθος καλούμενον **ποσοστὸν θεωρεῖται ἀνάλογον** ἄλλου μεγέθους, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀρχικὸν μέγεθος ἢ ἀρχικὸν ποσόν.**

Τὸ ποσοστὸν καὶ τὸ ἀρχικὸν ποσὸν εἶναι ὁμοειδῆ μεγέθη, συνήθως νομισματικὰ ἢ μεγέθη βάρους ἢ ὄγκου.

Συμβολίζομεν τὸ ἀρχικὸν μέγεθος μὲ Α καὶ τὸ ποσοστὸν μὲ Π.

Τὸ ποσοστόν, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς 100 μονάδας ἀρχικοῦ ποσοῦ, καλεῖται «ποσόστωσις» ἢ ἁπλῶς «ποσοστὸν» ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ ε. **Γράφομεν** δὲ $\varepsilon\,^0/_0$.

(Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ ποσοστὸν ἐπὶ 1000 μονάδων ἀρχικοῦ ποσοῦ ὅτε γράφομεν $\varepsilon\,^0/_{00}$).

Τὸ ἐμπορικὸν κέρδος ἢ ἡ ζημία εἶναι ποσοστὰ ἐπὶ τῆς τιμῆς κόστους, ἡ ὁποία εἶναι δι' αὐτὰ ἀρχικὸν ποσὸν (ἐκτὸς ἐὰν ρητῶς ὁρίζωνται ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως).

Τὰ ἔξοδα μεταφορᾶς - ἀποθηκεύσεως - δασμῶν, μὲ τὰ ὁποῖα ἐπιβαρύνεται ἓν προϊὸν εἶναι ποσοστὸν μὲ ἀρχικὸν ποσὸν τὴν τιμὴν ἀγορᾶς.

Ἡ ἀμοιβὴ ἑνὸς ἐμπορικοῦ ἀντιπροσώπου εἶναι ποσοστὸν μὲ ἀρχικὸν ποσὸν τὴν τιμὴν πωλήσεως τῶν προϊόντων, τὰ ὁποῖα διαθέτει.

Τὸ ἀπόβαρον (βάρος συσκευασίας ἑνὸς προϊόντος) εἶναι ποσοστὸν μὲ ἀρχικὸν ποσὸν τὸ μεικτὸν βάρος. Τὸ βάρος διαλελυμένου σώματος εἶναι ποσοστὸν μὲ ἀρχικὸν ποσὸν τὸ βάρος τοῦ διαλύματος.

Ἐὰν Α ,Π, ε% εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἀρχικὸν ποσόν, τὸ ποσοστὸν καὶ ἡ ποσόστωσις (ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν) ἔχομεν τὸν πίνακα :

Ἀρχικὸν ποσὸν	Α	100
Ποσοστὸν	Π	ε

καὶ ἐκ τούτου τὴν ἀναλογίαν $\frac{A}{100}=\frac{\Pi}{\varepsilon}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τοὺς τύπους :

$$A=\frac{100}{\varepsilon}.\,\Pi,\ \Pi=\frac{\varepsilon}{100}\cdot A.$$

Πρόβλημα 2ον. Ἐμπόρευμα ἐπωλήθη ἀντὶ 805 000 δρχ. μὲ κέρδος 15%. Πόσον τὸ κόστος αὐτοῦ;

Ἐὰν χ δρχ. τὸ κόστος, τὸ ποσοστὸν θὰ εἶναι 805 000 –χ δρχ. Κατατάσσομεν αὐτὰ εἰς πίνακα, γράφομεν τὴν ἀναλογίαν καὶ εὑρίσκομεν τὸν χ.

Α	100	χ
Π	15	805000 – χ

$$\Longrightarrow \frac{\chi}{100}=\frac{805000-\chi}{15}\Longleftrightarrow \ldots\ \chi=700000$$

Ἐπειδὴ ἔχομεν $\frac{A}{100}=\frac{\Pi}{\varepsilon}=\frac{A+\Pi}{100+\varepsilon}$ (ἰδιότης ἀναλογιῶν), τὰ Α, Α+Π εἶναι μεγέθη ἀνάλογα, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ Π, Α+Π. Τὸ Α+Π εἶναι τὸ ἀρχικὸν ποσὸν ηὐξημένον κατὰ τὸ ἀντίστοιχον ποσοστὸν Π.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς πίνακα :

Α	100	χ
Α+Π	115	805000

$$\Longrightarrow \frac{\chi}{805000}=\frac{100}{115}\Longleftrightarrow 115\chi=805\,000.100$$

$$\Longleftrightarrow \chi = \frac{805000 \cdot 100}{115} \Longleftrightarrow \chi = 7000 \cdot 100 \Longleftrightarrow \chi = 700000$$

Ἄρα τὸ κόστος εἶναι 700000 δρχ.

Σημείωσις 1. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{A}{100} = \frac{\Pi}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{A}{100} = \frac{A-\Pi}{100-\varepsilon}$ καὶ $\frac{\Pi}{\varepsilon} = \frac{A-\Pi}{100-\varepsilon}$. Τὸ $A-\Pi$ εἶναι τὸ ἀρχικὸν ποσὸν ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἀντίστοιχον ποσοστόν. Τὸ μέγεθος αὐτὸ εἶναι ἀνάλογον καὶ πρὸς τὸ ἀρχ. ποσὸν A καὶ πρὸς τὸ ποσοστὸν Π. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναλογιῶν προκύπτουν καὶ οἱ κάτωθι τύποι διὰ τὰ A καὶ Π. $A = \frac{(A-\Pi).100}{100-\varepsilon}$, $\Pi = \frac{(A-\Pi).\varepsilon}{100-\varepsilon}$ καὶ ἀντιστοίχως οἱ: $A = \frac{(A+\Pi).100}{100+\varepsilon}$, $\Pi = \frac{(A+\Pi).\varepsilon}{100+\varepsilon}$ **(Πρόβλ.2ον)**

Σημείωσις 2. Οἱ ἀνωτέρω ὁριζόντιοι πίνακες χρησιμοποιοῦνται καὶ κατακορύφως.

Πρόβλημα 3ον. Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶναι 1067 **kgr***. Πόσον εἶναι τὸ μεικτὸν βάρος αὐτοῦ, ὅταν τὸ ἀπόβαρον εἶναι 3% καὶ πόσον τὸ ἀπόβαρον αὐτοῦ;

α) Ἔστω χ **kgr*** τὸ μεικτὸν βάρος. Τὸ ἀντίστοιχον ἀπόβαρον εἶναι χ −1067 **kgr***.

A	Π
100	3
χ	χ−1067

$$\Longrightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{\chi - 1067}{3} \Longleftrightarrow \ldots \chi = 1100$$

Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν πίνακα:

A	A − Π
100	97
χ	1067

$$\Longrightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{1067}{97} \Longleftrightarrow 97\chi = 106700 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \chi = \frac{106700}{97} \Longleftrightarrow \chi = 1100.$$

Ἄρα τὸ μεικτὸν βάρος εἶναι 1100 **kgr***.

β) Τὸ ἀπόβαρον εἶναι 1100−1067=33 **kgr***.

Δυνάμεθα νὰ τὸ εὕρωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας.

Ἔστω χ kgr * τὸ ἀπόβαρον. Ἔχομεν τὸν πίνακα.

Π	Α – Π
3	97
χ	1067

$$\Rightarrow \frac{\chi}{3} = \frac{1067}{97} \Longleftrightarrow \chi = \frac{1067 \cdot 3}{97} \Longleftrightarrow \chi = 11 \cdot 3 = 33$$

Πρόβλημα 4ον. Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα ἀντὶ 82 000 δρχ. . Ἔχει ἔξοδα 12% (ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς) καὶ πωλεῖ μὲ κέρδος 15% (ἐπὶ τοῦ κόστους). Ἀντὶ πόσων δρχ. θὰ πωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμα;

Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὸ κόστος· ἔστω χ δρχ. αὐτό.

Α	Α + Π
100	112
82000	χ

$$\Rightarrow \chi = 91840$$

Ὑπολογίζομεν τώρα τὴν τιμὴν πωλήσεως ψ δρχ.

Α	Α + Π
100	115
91840	ψ

$$\Rightarrow \frac{\psi}{115} = \frac{91840}{100} \Longleftrightarrow \psi = \frac{91840 \cdot 115}{100} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \psi = 105616$$

Ἄρα ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματος εἶναι 105 616 δρχ.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καταλήγομεν, ἐὰν κάμωμεν τὴν κατάταξιν:

χ δρχ. πωλήσεως	82000 δρχ. ἀγορᾶς
100 δρχ. ἀγορᾶς	112 δρχ. κόστους
100 δρχ. κόστους	115 δρχ. πώλησις

καὶ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$\chi.100.100 = 82000.112.115$, ἡ ὁποία ἐπιλυομένη δίδει

$$\chi = \frac{82000.112.115}{100.100} \Rightarrow \chi = \frac{1056160000}{10000} \Rightarrow \chi = 105616.$$

Προβλήματα

251. Ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 20% καὶ εἰσέπραξεν 360000 δρχ. Ποία ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος ;

252. Ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπόρευμα μὲ κέρδος 15% καὶ ἐκέρδισεν 60000 δρχ. Ποία ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος;

253. Τὸ μεικτὸν βάρος ἑνὸς προϊόντος εἶναι 375 kgr * τὸ δὲ καθαρὸν εἶναι 300 kgr * Πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι τὸ ἀπόβαρον α) ἐπὶ τοῦ μεικτοῦ βάρους καὶ β) ἐπὶ τοῦ καθαροῦ βάρους;

254. Ἀντικείμενον ἀξίας 3750 δρχ. ἐπωλήθη μὲ κέρδος 25% ἐπὶ τοῦ κόστους. Ποία ἡ τιμὴ πωλήσεως καὶ πόσον εἶναι τὸ κέρδος;

255. Ἐὰν τὸ κέρδος μὲ 20% εἶναι 4940 δρχ. ποία ἡ τιμὴ πωλήσεως καὶ ποῖον τὸ κόστος;

256. Τηλεόρασις ἐπωλήθη μὲ ἔκπτωσιν 30% ἀντὶ 4550 δρχ. Πόσον τὸ κόστος καὶ πόση ἦτο ἡ ἔκπτωσις;

257. Ἔμπορος πωλεῖ τὸν τ. πῆχυν, ὅσον ἀγοράζει τὸ m. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει;

258. Ἐὰν ἔμπορος πωλῇ μὲ κέρδος 25% ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς, πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως;

259. Ἐὰν ἔμπορος ἐπώλει ἐμπόρευμα ἀντὶ 11500 δρχ., θὰ ἐκέρδιζε 15% ἐπὶ τοῦ κόστους του. Ἐπώλησεν ὅμως τοῦτο ἀντὶ 9500 δρχ. . Ἐπωλήθη τὸ ἐμπόρευμα ἄνω ἢ κάτω τοῦ κόστους του καὶ πόσον τοῖς ἑκατόν ἐπ' αὐτοῦ ;

260. Ἔμπορος ἐπώλησεν ἀντικείμενον μὲ ζημίαν 7%. Ἐὰν ἐπώλει τοῦτο μὲ κέρδος 3%, θὰ ἐλάμβανεν 750 δρχ. περισσότερον. Ποῖον τὸ κόστος τοῦ ἀντικειμένου;

261. Πόσον ἠγοράσθη ἐμπόρευμα, τὸ ὁποῖον ἐπεβαρύνθη μὲ ἔξοδα 10% καὶ ἐπωλήθη μὲ κέρδος 11% ἀντὶ 183150 δρχ;

262. Δύο ἀντικείμενα κοστίζουν ὁμοῦ 5000 δρχ. καὶ ἐπωλήθησαν τὸ μὲν α' μὲ κέρδος 20%, τὸ δὲ β' μὲ κέρδος 15%. Ἐὰν τὸ ὁλικὸν κέρδος ἦτο 900 δρχ., νὰ εὑρεθῇ τὸ κόστος ἑκάστου.

263. Ἔμπορος ὑπολογίζει νὰ κερδίσῃ 25% ἐπὶ τοῦ κόστους ἑνὸς ἐμπορεύματος. Ἐπώλησεν ὅμως αὐτὸ μὲ ὑπερτίμησιν 5% ἐπὶ τῆς ἀναγραφομένης τιμῆς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ἐπὶ τοῦ κόστους;

264. Ἔμπορος ἀναγράφει ἐπὶ ἐμπορεύματος τιμὴν κατὰ 30% ἀνωτέραν τοῦ κόστους καὶ πωλεῖ αὐτὸ μὲ ἔκπτωσιν κερδίζων οὕτω 23,50% ἐπὶ τοῦ κόστους. Ποία ἡ ἔκπτωσις ἐπὶ τῆς ἀναγραφομένης τιμῆς;

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 104. Πρόβλημα.

3 m³	*τοίχου*	*κτίζονται*	*ὑπὸ*	*5*	*κτιστῶν*	*εἰς*	*2*	*ἡμέρας*
6 m³	*τοίχου*	*κτίζονται*	*ὑπὸ*	*;*	*κτιστῶν*	*εἰς*	*2*	*ἡμέρας*
9 m³	*τοίχου*	*κτίζονται*	*ὑπὸ*	*;*	*κτιστῶν*	*εἰς*	*2*	*ἡμέρας*
6 m³	*τοίχου*	*κτίζονται*	*ὑπὸ*	*5*	*κτιστῶν*	*εἰς*	*;*	*ἡμέρας*
12 m³	*τοίχου*	*κτίζονται*	*ὑπὸ*	*5*	*κτιστῶν*	*εἰς*	*;*	*ἡμέρας*

Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ τιμαὶ «πλήθους κτιστῶν» καὶ «τιμὴ χρόνου».

Αἱ ἀπαντήσεις εἶναι κατὰ σειρὰν 10 κτίσται, 15 κτίσται, 4 ἡμέραι, 8 ἡμέραι, διότι τὸ μέγεθος «τιμὴ ἔργου» εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἕκαστον τῶν μεγεθῶν «πλῆθος ἐργατῶν», «τιμὴ χρόνου», ἐφ' ὅσον τὸ ἄλλο διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν (παραμένει σταθερόν).

Λέγομεν ὅτι τὸ μέγεθος «τιμὴ ἔργου» εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν μεγεθῶν «πλῆθος ἐργατῶν», «τιμὴ χρόνου».

Συντάσσομεν τὸν κατωτέρω πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν

Τιμὴ ἔργου χ	3	6	9	6	12
Πλῆθος ἐργατῶν ψ	5	10	15	5	5
Τιμὴ χρόνου z	2	2	2	4	8
Γινόμενον ψ·z	10	20	30	20	40

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, πολ/μένης μιᾶς τιμῆς τοῦ χ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται μία ἐκ τῶν τιμῶν ψ ἢ z ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἐφ' ὅσον ἡ ἄλλη παραμένει σταθερά). Ἑπομένως τὸ γινόμενον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν ψ.z πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (συμφώνως πρὸς τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

Δηλαδὴ τὸ μέγεθος χ εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ μέγεθος ψ.z. Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι:

1. Μέγεθος εἶναι ἀνάλογον πρὸς ζεῦγος, τριάδα, κ.ο.κ μεγεθῶν, ὅταν εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἕκαστον τούτων, ἐφ' ὅσον τὰ ἄλλα διατηροῦνται σταθερά.

2. Ἐὰν μέγεθος εἶναι ἀνάλογον πρὸς ζεῦγος, τριάδα κ.ο.κ. μεγεθῶν, εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἐὰν εἰς τὸ ζεῦγος ἢ τὴν τριάδα ὑπάρχῃ ἓν μέγεθος π.χ. τὸ ψ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ χ, τότε ἀντικαθιστῶμεν αὐτὸ μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀντιστρόφους τιμάς, δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{\psi}$, διότι ὡς ἐμάθομεν αἱ τιμαὶ τοῦ χ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστρόφους τῶν τιμῶν τοῦ ψ.

Ἐφαρμογαί. 1η. Οἰκόπεδον μήκους 32 m καὶ πλάτους 30 m τιμᾶται 480000 δρχ. Πόσον πλάτος θὰ εἶχεν, ἐὰν εἶχε μῆκος 20 m καὶ τιμὴν 450000 δρχ.;

Καλοῦμεν χ δρχ. τὸ ζητούμενον καὶ κατατάσσομεν εἰς πίνακα τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς ὁριζοντίως.

Πλάτος	Μῆκος	Χρηματικὴ τιμή
30	32	480000
χ	20	450000

Συγκρίνομεν τὸ μέγεθος τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ ζεύγους τῶν γνωστῶν.

Ἐπειδὴ τὸ μέγεθος πλάτος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ μήκους καὶ εὐθέως ἀνάλογον τῆς χρημ. τιμῆς, τοῦτο εἶναι ἀνάλογον τοῦ γινομένου $\frac{1}{\text{μῆκος}}$. χρημ. τιμή.

Συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{30}{\chi} = \frac{\frac{1}{32} \cdot 480000}{\frac{1}{20} \cdot 450000}$

Ἐκ τῆς ἀναλογίας αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν $\frac{\chi}{30} = \frac{32.450000}{20.48000}$ ἢ τὴν $\chi = 30 \cdot \frac{32}{20} \cdot \frac{450000}{480000}$ (1).

Εὑρίσκομεν $\chi = 45$. Ἄρα τὸ πλάτος τοῦ οἰκοπέδου θὰ ἦτο 45 m.

Παρατήρησις. Ἡ ἐξίσωσις (1) δικαιολογεῖ τὸν γνωστὸν ἐκ τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου κανόνα: ὁ χ ἰσοῦται πρὸς τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐπὶ τὰ κλάσματα ἑκάστης στήλης ἀντεστραμμένα μέν, ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνο τοῦ ἀγνώστου, ὡς ἔχει δέ, ἐὰν τὸ ποσὸν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον.

2α. 8 ἐργάται ἐκτελοῦν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 7 ὥρας ἡμερησίως. Εἰς πόσας ἡμέρας 18 ἐργάται θὰ ἐκτελέσουν τὸ 3πλάσιον τοῦ ἔργου ἐργαζόμενοι ἐπὶ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν. (Οἱ ἐργάται εἶναι τῆς αὐτῆς ἀποδόσεως).

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὅπως προηγουμένως ἔχομεν:

Ἡμέραι ἐργασίας	Πλῆθος ἐργατῶν	Ὧραι ἐργασίας	Ἔργον
12	8	7	1
χ	18	8	3

Ἐπειδὴ τὸ μέγεθος «ἡμ. ἐργασ.» εἶναι ἀντιστρ. ἀνάλογον τοῦ «πλήθους ἐργατῶν» καὶ τοῦ «ὧραι ἐργασίας» καὶ ἀνάλογον τοῦ «ἔργου», θὰ εἶναι

ἀνάλογον τοῦ γινομένου: «$\frac{1}{\text{πλ. ἐργ.}}$»·«$\frac{1}{\text{ὥρ. ἐργ.}}$»·«ἔργον».

ἡμ. ἐργασίας

Ἑπομένως 12 $\longrightarrow \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1$

χ $\longrightarrow \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3$

$$\Rightarrow \frac{12}{\chi} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1}{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3}$$

$$\Longleftrightarrow \chi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = 12 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 \Longleftrightarrow \frac{\chi}{8.7} = \frac{12.3}{18.8} \Longleftrightarrow \chi = 12 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{1}$$

$\Longleftrightarrow \chi = 14$. Τὸ 3πλάσιον ἔργον θὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 14 ἡμέρας.

3η. Περιοδεύων ἐμπορικὸς ἀντιπρόσωπος (πλασιὲ) ἀμείβεται μὲ 3% κατ' ἔτος ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως τῶν παρ' αὐτοῦ πωλουμένων προϊόντων. Ἡ προμήθεια ὅμως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κ.ο.κ. ἐὰν ἐπιτύχῃ τὰς πωλήσεις εἰς τὸ ἥμισυ, $\frac{1}{3}$, κ.ο.κ. τοῦ καθωρισμένου χρόνου. Κάποτε ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἐντὸς 3 μηνῶν καὶ ἀφοῦ ἐκράτησε τὴν ἀμοιβήν του παρέδωσεν εἰς τὸν ἐργοδότην του 88000 δρχ. Τί ποσὸν ἐκράτησε;

Ὁ ἀντιπρόσωπος ἐκράτησε τὴν προμήθειάν του, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τιμὴν πωλήσεως (τοῦ χρόνου διατηρουμένου σταθεροῦ) καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν χρόνον (τῆς τιμῆς πωλήσεως διατηρουμένης σταθερᾶς).

Ἐὰν χ δρχ. εἶναι ἡ προμήθειά του, ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὴν τιμὴ πωλήσεως εἶναι 88000 + χ καὶ ὁ χρόνος 3 μῆνες. Ἐὰν ἡ τιμὴ πωλήσεως εἶναι 100 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 12 μῆνες ἡ προμήθεια εἶναι 3 δρχ.

Προμήθεια	Τιμὴ πωλήσεως	Χρόνος
3	100	12
χ	88000 + χ	3

Προμήθεια	Τιμὴ πωλήσεως ἐπὶ $\frac{1}{\text{χρόνος}}$
3	$100 \cdot \frac{1}{12}$
χ	$(88000 + \chi) \cdot \frac{1}{3}$

$$\Longrightarrow \frac{\chi}{3} = \frac{\frac{1}{3}\left(88000 + \chi\right)}{\frac{1}{12} \cdot 100} \Longleftrightarrow$$

$$100\chi = 12(88000 + \chi) \Longleftrightarrow 100\chi = 12.88000 + 12\chi \Longleftrightarrow 100\chi - 12\chi = 12.88000 \Longleftrightarrow 88\chi = 12.88000$$

$\Longleftrightarrow \chi = \frac{12.88000}{88} \Longleftrightarrow \chi = 12.1000 \Longleftrightarrow \chi = 12000$. Ἐκράτησεν ὡς προμήθειαν 12000 δρχ.

Προβλήματα

265. 8 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 7 ὥρας ἡμερησίως. 12 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον, ὅταν ἐργάζωνται 8 ὥρας ἡμερησίως;

266. 9 ἐργάται σκάπτουν 18 στρέμματα εἰς 6 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 8 ὥρας ἡμερησίως. 8 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν 16 στρέμματα ἐργαζόμενοι 8 ὥρας ἡμερησίως;

267. 20 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας ἡμερησίως ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 14 ἡμέρας. Πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται 16 ἐργάται, διὰ τὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 30 ἡμέρας;

268. Διὰ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἠγοράσθησαν 700 σανίδες μήκους 3,4 dm καὶ πλάτους 6 cm. Πόσας σανίδας μήκους 3 dm καὶ πλάτους 7 cm θὰ χρειασθοῦν διὰ τὸ αὐτὸ πάτωμα;

269. Ράπτης χρειάζεται 60 m μήκους ὑφάσματος καὶ πλάτους 1 m διὰ 20 ὁμοίας ἐνδυμασίας. Πόσα m μήκους θὰ χρειασθῇ διὰ 18 ὁμοίας ἐνδυμασίας, ἐὰν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 1,2 m;

270. Πλοῖον ἀνεχώρησε διὰ ταξίδιον 45 ἡμερῶν μὲ 35 ἐπιβάτας. Τὸ ἀπόθεμα τῶν τροφίμων αὐτοῦ ἐπιτρέπει νὰ παρέχεται εἰς τοὺς ἐπιβάτας ἡμερησία μερὶς τροφίμων βάρους 1200 gr*. 15 ἡμέρας ἀργότερον περισυλλέγει ναυαγοὺς καὶ συντομεύει τὸ ταξίδιόν του κατὰ 5 ἡμέρας, ἐνῷ ἡ μερὶς τῶν τροφίμων περιορίζεται εἰς 1008 gr*. Πόσους ναυαγοὺς περισυνέλεξε τὸ πλοῖον;

271. Οἱ ἐπιστήμονες ὑπελόγισαν ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι ἀνάλογον τῆς μάζης τοῦ πλανήτου ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος ἀστροναύτου εἰς τὴν Σελήνην, ἐὰν οὗτος ζυγίζῃ ἐπὶ τῆς Γῆς 70 kgr*. Αἱ μᾶζαι Γῆς - Σελήνης εἶναι ἀντιστοίχως 6.10^{21} ton καὶ $7,5.10^{19}$ ton καὶ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν 6400 km, 1740 km.

272. Μεταξὺ παραγωγῶν καὶ ἑταιρείας μεταφορῶν ἔγινε ἡ ἑξῆς συμφωνία:

Ἡ ἑταιρεία θὰ λαμβάνῃ 5% ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως πρωΐμων λαχανικῶν, τὰ ὁποῖα θὰ μεταφέρῃ εἰς Δυτικὴν Γερμανίαν ἐντὸς 10 ἡμερῶν καὶ ἡ ἀμοιβή της θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ χρόνου μεταφορᾶς. Ἡ ἑταιρεία μετέφερε προϊόντα ἐντὸς 6 ἡμερῶν. Ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῶν εἰσεπράχθη ποσὸν τὸ ὁποῖον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ἀμοιβῆς τῆς ἑταιρείας ἀνῆλθεν εἰς 102000 δρχ. Ποία ἡ τιμὴ πωλήσεως τῶν προϊόντων;

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

§ 105. Ἐὰν καταθέσωμεν εἰς τὴν Τράπεζαν ἓν ποσὸν χρημάτων καὶ μετὰ ὡρισμένον χρόνον τὸ ἀποσύρωμεν, θὰ λάβωμεν τοῦτο καὶ ἐπὶ πλέον ἓν ἄλλο ποσὸν χρημάτων, τὸ ὁποῖον λέγεται **τόκος**.

Ὁ τόκος δηλαδὴ εἶναι τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ὅταν τοκίζωμεν τὰ χρήματά μας.

Τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα καταθέτομεν εἰς τὴν Τράπεζαν ἢ δανείζομεν εἰς ἰδιώτας, χρησιμοποιοῦνται εἰς διαφόρους ἐπιχειρήσεις μὲ σκοπὸν τὴν παραγωγὴν κέρδους. Ἐκ τοῦ κέρδους, τὸ ὁποῖον ἀποφέρουν αὐτά, δίκαιον εἶναι νὰ λαμβάνωμεν καὶ ἡμεῖς ἓν μέρος αὐτοῦ, δηλαδή, τὸν τόκον.

Ἐπιτόκιον εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων εἰς ἓν ἔτος.

Ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον, πρὸς τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον τοκίζεται τοῦτο, καὶ πρὸς τὸ ἐπιτόκιον.

Σημείωσις.

α) Ἐὰν κάποιος δανεισθῇ π.χ. 100 δρχ. δι' ἓν ἔτος πρὸς 6% εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ ἐπιστρέψῃ 106 δρχ., τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν ἀντίστοιχον τόκον του, τὸ ὁποῖον λέγεται **ηὐξημένον κεφάλαιον** κατὰ τὸν ἀντίστοιχον τόκον του.

Εἰς μερικὰς περιπτώσεις ὁ δανειστὴς κρατεῖ προκαταβολικῶς τὸν τόκον καὶ ὁ ὀφειλέτης λαμβάνει ὡς δάνειον 94 δρχ. τοῦτο λέγεται **ἠλαττωμένον κεφάλαιον** κατὰ τὸν ἀντίστοιχον τόκον του. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸν δανειστὴν 100 δρχ.

β) Ἐὰν καταθέσωμεν εἰς τὴν Τράπεζαν ἓν κεφάλαιον λαμβάνομεν ἓν βιβλιάριον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται ὁ ἀριθμὸς τοῦ λογαριασμοῦ μας, τὸ ὀνοματεπώνυμον, ἡ διεύθυνσίς μας, τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον καταθέσαμεν, καὶ ἡ ἡμερομηνία καταθέσεως.

Συνήθως αἱ Τράπεζαι ὑπολογίζουν τοὺς τόκους κατὰ τὸ τέλος Ἰουνίου καὶ τέλος Δεκεμβρίου ἑκάστου ἔτους. Ἐὰν δὲν ἀποσύρωμεν τοὺς τόκους τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπολογίζονται ουτοι, τότε διά τό έπόμενον έξάμηνον, τό κεφάλαιον είναι ηὐξημένον κατὰ τον τόκον του. (Ἡ πρόσθεσις τῶν τόκων εἰς τὸ κεφάλαιον λέγεται κεφαλοποίησις αὐτῶν).

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς τὰ Ταχ.Ταμιευτήρια, ἀλλὰ ἐκεῖ οἱ τόκοι ὑπολογίζονται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους.

Ἐὰν γίνεται κεφαλοποίησις τῶν τόκων, τότε ἔχομεν σύνθετον τόκον ἢ ἀνατοκισμόν.

Εἰς τὰ κατωτέρω προβλήματα τὸ κεφάλαιον παραμένει σταθερὸν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ τοκισμοῦ του.

Προκειμένου περὶ Τραπέζης ἢ Ταμιευτηρίου θεωροῦμεν ὅτι οἱ τόκοι ἀποσύρονται κατὰ τὴν ἡμέραν τοῦ ὑπολογισμοῦ των, (δηλαδὴ δὲν γίνεται κεφαλοποίησις τούτων.)

Πρόβλημα 1ον. Ποῖος ὁ τόκος κεφαλαίου 20000 δρχ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 5%;

Κεφάλαιον	Χρόνος	Τόκος
100	1	5
20000	3	x

Ἐπειδὴ ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον θὰ εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον «Κεφάλαιον» ἐπὶ «χρόνος». Συνεπῶς ἔχομεν :

Κεφάλαιον · χρόνος	Τόκος
100 · 1	5
20000 · 3	x

$$\Rightarrow \frac{100 \cdot 1}{20000 \cdot 3} = \frac{5}{x} \Longleftrightarrow 100\,x = 20000 \cdot 5 \cdot 3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{20000 \cdot 5 \cdot 3}{100} \quad (1) \Longleftrightarrow x = 3000.$$

Ἄρα ὁ τόκος εἶναι 3000 δρχ.

Ἐὰν τ ὁ τόκος, κ τὸ κεφάλαιον, ε τὸ ἐπιτόκιον καὶ t ὁ χρόνος καὶ ἐργασθῶμεν ὡς καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον :

$$\boxed{\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot t}{100}}$$

Τὸν τύπον αὐτὸν εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἐπειδὴ 100 δρχ. φέρουν τόκον ε δρχ. εἰς 1 ἔτος

ἢ 1 δρχ. θὰ φέρῃ τόκον $\frac{\varepsilon}{100}$ δρχ. εἰς 1 ἔτος καὶ

αἱ κ δρχ. θὰ φέρουν τόκον $\kappa \cdot \frac{\varepsilon}{100}$ δρχ. εἰς 1 ἔτος.

Αἱ κ δρχ. εἰς t ἔτη θὰ φέρουν τόκον $\kappa \cdot \frac{\varepsilon}{100} \cdot t$ δρχ. Ἄρα $\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot t}{100}$

Σημείωσις 1. Είς τὸν τύπον τοῦ τόκου ἡ μεταβλητὴ t παριστᾶ τιμὰς χρόνου εἰς ἔτη. Ἐὰν ἔχωμεν μῆνας ἢ ἡμέρας τότε ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται: $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\mu}{1200}$ ἢ $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\eta}{36000}$ (μ εἶναι ἡ τιμὴ χρόνου εἰς μῆνας καὶ η τιμὴ χρόνου εἰς ἡμέρας).

2. Θεωροῦμεν τὸ ἐμπορικὸν ἔτος μὲ 360 ἡμέρας καὶ 30 ἡμέρας ἕκαστον μῆνα.

3. Ὁ τύπος $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\eta}{36000}$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\tau = \frac{\kappa.\eta}{\frac{36000}{\varepsilon}} = \frac{\nu}{\delta}$

Τὸ πηλίκον $\frac{36000}{\varepsilon}$ λέγεται σταθερὸς διαιρέτης καὶ τὸ γινόμενον κ.η = ν λέγεται τοκάριθμος. Ἄρα ὁ τόκος ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ τοκαρίθμου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου $\tau = \frac{\nu}{\delta}$

Πρόβλημα 2ον. Ποῖον Κεφάλαιον εἰς 11 μῆνας πρὸς 6% φέρει τόκον 1100 δρχ;

Ἔστω χ δρχ. τὸ κεφάλαιον. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ τόκου $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\mu}{1200}$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $1100 = \frac{\chi.6.11}{1200} \Longleftrightarrow 1100.1200 = 6.11.\chi \Longleftrightarrow \chi = \frac{1200.1100}{6.11} \Longleftrightarrow \chi = 200.100 \Longleftrightarrow \chi = 20000$. Ἄρα τὸ κεφάλαιον εἶναι 20000 δρχ.

Πρόβλημα 3ον. Ἐπὶ πόσον χρόνον κεφάλαιον 18000 δρχ. τοκιζόμενον πρὸς 8% ἔφερε τόκον 160 δρχ.;

Ἔστω χ ἔτη ὁ χρόνος. Ἐκ τοῦ τύπου $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.t}{100}$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $160 = \frac{1800.8.\chi}{100} \Longleftrightarrow 160 = 180.8.\chi \Longleftrightarrow \chi = \frac{160}{180.8} \Longleftrightarrow \chi = \frac{20}{180} \Longleftrightarrow \chi = \frac{1}{9}$. Ἐπομένως ὁ χρόνος εἶναι $\frac{1}{9}$ ἔτη ἢ $\frac{1}{9}.12 = \frac{4}{3}$ μῆνας ἢ $\frac{4}{3} \cdot 30 = 40$ ἡμέρας.

Πρόβλημα 4ον. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 45000 δρχ διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 52 ἡμέρας τόκον 260 δρχ;

Εἰς τὸν τύπον $\tau = \frac{\kappa.\varepsilon.\eta}{3600}$ ἀντικαθιστῶμεν τὰ δεδομένα καὶ ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸ ε.

$260 = \frac{45000.52.\varepsilon}{36000} \Longleftrightarrow 260 = \frac{45.52.\varepsilon}{36} \Longleftrightarrow 45.52.\varepsilon = 260.36 \Longleftrightarrow \varepsilon = \frac{45.52}{260.36} \Longleftrightarrow \varepsilon = 4$. Ἄρα ε% = 4%, δηλαδὴ πρέπει νὰ τοκίσωμεν πρὸς 4%

Πρόβλημα 5ον. Ποῖον Κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 5 % διὰ 72 ἡμέρας ἔγινε 10100 δρχ. μὲ τὸν τόκον του;

Ἔχομεν κεφάλαιον σὺν τόκος ἴσον 10100 δρχ. Ἐὰν χ δρχ. τὸ κεφάλαιον λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\chi + \frac{\chi.5.72}{36000} = 10100 \Longleftrightarrow \chi + \frac{\chi.360}{360.100} =$ $10100 \Longleftrightarrow \chi + \frac{\chi}{100} = 10100 \Longleftrightarrow 100\chi + \chi = 1010000 \Longleftrightarrow 101\chi = 1010000$ $\Longleftrightarrow \chi = \frac{101.10000}{101} \Longleftrightarrow \chi = 10000$. Τὸ κεφάλαιον εἶναι 10000 δρχ.

Πρόβλημα 6ον. Ἐτόκισε κάποιος τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 5,5% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4,5%. Ἐὰν ἀπὸ τὸ α' μέρος τοῦ κεφαλαίου ἔλαβε μετὰ ἓν ἔτος 120 δρχ. τόκον περισσότερον παρὰ ἀπὸ τὸ β' μέρος, νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον. Ἔστω χ δρχ. τὸ κεφάλαιον. Τὸ α' μέρος εἶναι $\frac{3}{5}\chi$ καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ $\frac{\frac{3}{5}\chi.5,5.1}{100}$. Τὸ β' μέρος εἶναι $\frac{2}{5}\chi$ καὶ ὁ τόκος του (εἰς ἓν ἔτος) εἶναι: $\frac{\frac{2}{5}\chi.4,5.1}{100}$

Ἔχομεν ὅμως: Τόκος α' μέρους πλὴν τόκος β' μέρους ἴσον 120. Συνεπῶς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\frac{3}{5}\chi.5,5}{100} - \frac{\frac{2}{5}\chi.4,5}{100} = 120 \Longleftrightarrow \frac{3\chi.1,1}{100} - \frac{2\chi.0,9}{100} = 120$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3,3\chi - 1,8\chi}{100} = 120 \Longleftrightarrow \frac{1,5\chi}{100} = 120 \Longleftrightarrow 1,5\chi = 12000 \Longleftrightarrow \chi = \frac{12000}{1,5}$$

$\Longleftrightarrow \chi = 8000$. Τὸ κεφάλαιον εἶναι 8000 δρχ.

Σημείωσις. Ὁ τόκος κεφαλαίου 6000 δρχ. πρὸς 6 % διὰ 89 ἡμέρας εὑρίσκεται συντόμως διὰ τοῦ τύπου $\tau = \frac{\nu}{\delta} = \frac{6000.89}{\frac{36000}{6}} = \frac{6000.89}{6000} = 89$. Ὁ τόκος εἶναι 89 δρχ.

Ὅταν τὸ κεφάλαιον ἰσοῦται πρὸς τὸν σταθερὸν διαιρέτην, ὁ τόκος ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν.

Προβλήματα

273. Πόσον τόκον φέρουν α) 16000 δρχ. πρὸς 4,5% διὰ 8 μῆνας
β) 4500 δρχ. πρὸς 8% διὰ 179 ἡμέρας
γ) 7200 δρχ. πρὸς 5% διὰ 211 ἡμέρας
δ) 12000 δρχ. πρὸς 6% διὰ 97 ἡμέρας

274. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον, ἐὰν ε%=5%, ὁ τόκος εἶναι 345 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 115 ἡμέρ.
275. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, ἐὰν ε%=6%, ὁ τόκος εἶναι 138 δρχ. καὶ τὸ κεφ. 4600 δρχ.
276. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον, ἐὰν τὸ κεφαλ. εἶναι 3600 δρχ., ὁ τόκος 480 δρχ. καὶ ὁ χρ. 20 μην.

277. Ποῖον κεφάλαιον εἰς 100 ἡμέρας πρὸς 4,5 % φέρει τόκον, ὅσον δίδει κεφάλαιον 8000 δρχ. διὰ 6 μῆνας πρὸς 5%;

278. Τὰ $\frac{5}{8}$ κεφαλαίου ἐτοκίσθησαν πρὸς 6,5% καὶ διὰ 5 μῆνας ἔδωσαν τόκον 650 δρχ. Ποῖον τὸ κεφάλαιον;

279. Κεφάλαιον 37500 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς 6% καὶ ἔγινε μὲ τὸν τόκον του 37750 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος.

280. Ἐδανείσθημεν 1200 δρχ. πρὸς 9% καὶ ἐπληρώσαμεν τὴν 2αν Φεβρουαρίου διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον 1386 δρχ. Πότε ἐδανείσθημεν τὸ κεφάλαιον;

281. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον, κεφάλαιον 12000 δρχ. ἔδωσε τόκον 1250 δρχ. εἰς χρόνον ἴσον πρὸς τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐτοκίσθησαν 3600 δρχ. πρὸς 4% καὶ ἔγιναν μετὰ τοῦ τόκου των 4000 δρχ.;

282. Κεφάλαιον 111000 δρχ. κατετέθη εἰς τράπεζαν τὴν 14ην Μαρτίου καὶ τὴν 17ην Ὀκτωβρίου τοῦ ἑπομένου ἔτους ἀπεσύρθη μετὰ τῶν τόκων του. Ποῖον τὸ ἐπιτόκιον, ἐὰν κεφάλαιον καὶ τόκος ἀνήρχοντο εἰς 121600,50 δρχ;

283. Ποῖον κεφάλαιον αὐξηθὲν κατὰ τὸν τόκον του, ἔγινε εἰς 40 μῆνας πρὸς 4,5 %, 13800 δρχ; (Ἐὰν χ δρχ. τὸ κεφάλαιον, ὁ τόκος του θὰ εἶναι $\frac{\chi.4,5.40}{1200}$ καὶ $\chi+\frac{\chi.4,5.40}{1200}=13800$)

284. Ἐδανείσθημεν ἕν ποσὸν χρημάτων μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ κρατηθοῦν οἱ τόκοι προκαταβολικῶς. Ποῖον ἦτο τὸ κεφάλαιον, ἐὰν μᾶς ἔδωσαν 9800 δρχ. καὶ ἐκράτησαν τόκους 4 μηνῶν πρὸς 6%; (Κεφάλαιον πλὴν τόκος=9800 δρχ. $\kappa-\frac{\kappa.\epsilon.\mu}{1200}=9800$).

285. Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 4% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5% καὶ ἔλαβεν ἐτήσιον τόκον 546 δρχ. Ποῖον τὸ κεφάλαιον;

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 106. α) Γραμμάτια.

Ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος δανείζεται χρήματα ἢ ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει (δὲν πληρώνει ἀμέσως τὴν ἀξίαν αὐτῶν) δίδει εἰς τὸν δανειστήν, ἢ πιστωτὴν ἔγγραφον ὑπόσχεσιν πληρωμῆς τοῦ χρέους του. Τὸ ἔγγραφον αὐτὸ λέγεται **γραμμάτιον**.

Τύπος γραμματίου

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20ῇ Μαρτίου 1970. Διὰ δραχμὰς 5000.

Μετὰ δύο μῆνας ἀπὸ σήμερον, ἤτοι τὴν 20ην Μαΐου 1970, ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Α.............................. ἢ εἰς διαταγὴν αὐτοῦ τὸ ἄνω ποσὸν τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν (5000), ὅπερ ἔλαβον παρ' αὐτοῦ ὡς δάνειον.

Χαρτόσημον

Β..................

(Ὑπογραφὴ καὶ Δ/νσις ὀφειλέτου)

Συνήθως εἰς τὰς ἐμπορικὰς συναλλαγὰς γίνεται χρῆσις ἑνὸς ἐγγράφου, τὸ ὁποῖον λέγεται **συναλλαγματική**. Τὴν συναλλαγματικὴν ἐκδίδει ὁ πιστωτὴς καὶ τὴν ἀποδέχεται ὁ ὀφειλέτης διὰ τῆς ὑπογραφῆς του.

Τύπος συναλλαγματικῆς

Λῆξις τῇ 20 - 5 - 1970. Συναλλαγματικὴ διὰ δρχ. 5000.

Τὴν 20ὴν Μαΐου 1970 πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης μόνης Συναλλαγματικῆς εἰς διαταγήν μου καὶ εἰς.................................. τὸ ἄνω ποσὸν τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν, ὧν τὸ ἰσότιμον ἐλάβατε παρ' ἐμοῦ εἰς ἐμπορεύματα τῆς τελείας ἀρεσκείας σας καὶ ἐν ὑπερημερίᾳ μετὰ τοῦ νομίμου τόκου ἀπὸ τῆς λήξεως μέχρις ἐξοφλήσεως.

Χαρτόσημον

Πρὸς τὸν κ. Β............... Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-3-1970
Δ/νσις......................... ὁ ἐκδότης
Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-3-1970 Α...................
Δεκτὴ (Ὑπογραφὴ καὶ Δ/νσις)
Β............................
(ὑπογραφή)

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς ἔγγραφον ὑπόσχεσιν, λέγεται **ὀνομαστικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου. Ταύτην συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα **ο**.

Ἡ ἡμερομηνία κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι πληρωτέον τὸ γραμμάτιον εἶναι ἡ **λῆξις** τοῦ γραμματίου.

β) Ὀπισθογράφησις καὶ προεξόφλησις γραμματίου.

Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ κ. Α εἶναι κάτοχος τοῦ ἀνωτέρω γραμματίου ὀνομ. ἀξίας 5000 δρχ., τὸ ὁποῖον λήγει μετὰ 2 μῆνας. Μετὰ 20 ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως τοῦ γραμματίου (ἢ 40 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του, δηλαδὴ τὴν 10-4-1970) ὁ κ. Α ἔχει ἀνάγκην χρημάτων καὶ μεταβιβάζει, δηλαδὴ πωλεῖ τὸ γραμμάτιον εἰς τρίτον πρόσωπον (ἢ συνήθως εἰς Τράπεζαν) ἐφ' ὅσον προηγουμένως ὑπογράψη ὄπισθεν αὐτοῦ διὰ τὴν ἐν λόγῳ μεταβίβασιν ἢ πώλησιν. Τοῦτο δὲ λέγεται **ὀπισθογράφησις τοῦ γραμματίου**. Ὁ δὲ πωλητής, κ. Α, λέγεται καὶ κομιστὴς τοῦ γραμματίου.

Ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου κρατεῖ ἐκ τῆς ὀν. ἀξίας τὸν τόκον αὐτῆς διὰ 40 ἡμέρας πρὸς ἓν ὡρισμένον ἐπιτόκιον π. χ. 4,5 % $\left(5000 \cdot \frac{4,5}{100} \cdot \frac{40}{360} = 25\right)$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον (5000–

25 — 4975), δίδει εἰς τὸν κομιστὴν κ. Α. Ἡ διαδικασία αὕτη λέγεται **προεξόφλησις τοῦ γραμματίου**. Ὁ χρόνος μεταξὺ ἡμερομηνίας προεξοφλήσεως καὶ λήξεως τοῦ γραμματίου λέγεται καὶ **προθεσμία**.

Τὸ ποσὸν τῶν 25 δρχ., τὸ ὁποῖον κρατεῖ ὁ ἀγοραστής, λέγεται **ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις**. Συμβολίζομεν αὐτὴν μὲ τὸ γράμμα **υ**. (Γενικῶς ὑφαίρεσις εἶναι ἡ ἔκπτωσις, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται γραμμάτιον, ὅταν προεξοφλῆται, δηλαδὴ ὅταν πληρώνεται πρὸ τῆς λήξεώς του). Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ λέγωμεν ὑφαίρεσιν καὶ θὰ ἐννοοῦμεν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Τὸ ποσὸν 4975 δρχ. = 5000 δρχ. −25 δρχ. λέγεται **παροῦσα ἀξία** τοῦ γραμματίου καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς ἐξ.ὑφ. ἀπὸ τῆς ὀν. ἀξίας. Ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ **π** τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἔχομεν τὰς κάτωθι ἰσοδυναμίας:

$$\pi = o - \upsilon \iff \pi + \upsilon = o \iff \upsilon = o - \pi \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας, τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ἐπιλύονται μὲ τοὺς τύπους τοῦ τόκου, εἰς τοὺς ὁποίους τὸ κεφάλαιον κ ἀντικαθίσταται διὰ τῆς ὀν. ἀξίας ο και τὸ τ διὰ τοῦ υ. π.χ.

Τύπος τοῦ τόκου	Τύπος ἐξ. ὑφαιρέσεως
$\tau = \dfrac{\kappa.\varepsilon.t}{100}$	$\upsilon = \dfrac{o.\varepsilon.t}{100}$

Σημείωσις. Γραμμάτιον ἢ συναλλαγματικὴ μὴ περιέχον τὰς λέξεις **εἰς διαταγήν**, δὲν δύναται νὰ μεταβιβασθῇ εἰς ἄλλον.

Εἰς τὰ κατωτέρω προβλήματα θὰ χρησιμοποιοῦμεν τὴν λέξιν «γραμμάτιον» καὶ θὰ ἐννοοῦμεν ἔγγραφον ὑπόσχεσιν (γραμμάτιον ἢ συναλλαγματικὴν) μεταβιβαζομένην εἰς τρίτον πρόσωπον ἢ εἰς Τράπεζαν.

Παραδείγματα :

1ον. Γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 3000 δρχ. προεξωφλήθη τὴν 10ην Μαΐου πρὸς 6% ἀντὶ 2980 δρχ.. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον;

Ἐὰν χ ἔτη ὁ χρόνος μεταξὺ προεξοφλήσεως καὶ λήξεως τοῦ γραμματίου, ἐκ τοῦ τύπου $\upsilon = o - \pi$ εὑρίσκομεν τὴν ὑφαίρεσιν 20 δρχ. καὶ ἐκ τοῦ τύπου $\upsilon = \dfrac{o.\varepsilon.t}{100}$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $20 = \dfrac{3000.6.\chi}{100} \iff 20 = 30.6.\chi \iff \chi = \dfrac{20}{180}$ $\iff \chi = \dfrac{1}{9}$. Ὁ χρόνος εἶναι $\dfrac{1}{9}$ ἔτη ἢ $\dfrac{1}{9}\cdot 360$ ἡμερ. = 40 ἡμέρας. Ἄρα τὸ γραμμάτιον ἔληγε εἰς τὰς 20 Ἰουνίου τοῦ ἰδίου ἔτους.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀν. ἀξία καὶ ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 40 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9% ἀντὶ 1980 δρχ.

Ἐὰν χ δρχ. ἡ ὀν. ἀξία, ἡ ὑφαίρεσις θὰ εἶναι $\dfrac{\chi.\varepsilon.\eta}{36000}$ καὶ ὁ τύπος $o - \upsilon = \pi$ γίνεται: $\chi - \dfrac{\chi.\varepsilon.\eta}{36000} = \pi$. Ἐκ τούτου λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi - \dfrac{\chi.9.40}{36000} = 1980 \iff$ $\chi - \dfrac{\chi}{100} = 1980 \iff 100\chi - \chi = 198000 \iff 99\chi = 198000 \iff \chi = \dfrac{198000}{99}$ $\iff \chi = 2000$. Ἡ ὀν. ἀξία εἶναι 2000 δρχ. καὶ ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 2000 δρχ. −1980 δρχ. = 20 δρχ.

Προβλήματα

286. Ποία ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις καὶ ἡ παρ. ἀξία γραμματίου ὀν. ἀξίας 2600 δρχ., τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6%;

287. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀν. ἀξία καὶ ἡ παρ. ἀξ. γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 7,2% καὶ εἶχεν ἐξ. ὑφαίρεσιν 60 δρχ.

288. Ποῖος ὁ χρόνος μεταξὺ λήξεως καὶ προεξοφλήσεως γραμματίου 2160 δρχ., τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη πρὸς 8% ἀντὶ 2131,2 δρχ.;

289. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον προεξωφλήθη γραμμάτιον 3200 δρχ., 50 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 3168 δρχ;

290. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξ.ὑφ. γραμματίου προεξοφληθέντος 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 2751 δρχ. πρὸς 7%.

291. Γραμμάτιον ἦτο πληρωτέον τὴν 28ην Ἰουνίου καὶ προεξωφλήθη ἀντὶ 2970 δρχ. τὴν 13ην Μαΐου (τοῦ ἰδίου ἔτους) πρὸς 8%. Ποία ἡ ὀν. ἀξία αὐτοῦ;

292. Γραμμάτιον προεξωφλήθη 80 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9% ἀντὶ 4410 δρχ. Τί κέρδος θὰ εἶχεν ὁ κομιστής, ἐὰν ἡ προεξόφλησις ἐγένετο πρὸς 8%;

293. Ἐὰν ἡ ὀν. ἀξία εἶναι 1600 δρχ., ε%=9% καὶ ἡ παρ. ἀξία εἶναι 1562 δρχ., νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος.

294. Ἐὰν ἡ ὀν. ἀξία εἶναι 1200 δρχ., ἡ παρ. ἀξία εἶναι 1155 δρχ. καὶ ὁ χρόνος εἶναι 5 μῆνες νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον.

295. Ἐὰν ἡ παρ. ἀξία εἶναι 4900 δρχ., ε%=6% καὶ ὁ χρόνος εἶναι 4 μῆνες νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία.

296. Δύο γραμμάτια μὲ ἄθροισμα ὀνομαστικῶν ἀξιῶν 14400 δρχ. προεξοφλοῦνται ὁμοῦ πρὸς 6% ἀντὶ 14214 δρχ. Ἐὰν τὸ α΄ ἔληγε μετὰ 3 μῆνας καὶ τὸ β΄ μετὰ 2 μῆνας νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀν.. ἀξία ἑκάστου γραμματίου.

6. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

§ **107**. Ἐὰν εἷς μαθητὴς ἔχῃ 8 εἰς τὰ γραπτὰ ἑνὸς μαθήματος καὶ 12 εἰς τὰ προφορικά, τότε ὁ βαθμὸς τοῦ μαθήματος θὰ εἶναι $\frac{8+12}{2}=10$. Ὁ ἀριθμὸς 10 λέγεται μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 12.

Ἐὰν οἱ βαθμοὶ τοῦ μαθητοῦ εἰς τὰ μαθήματά του εἶναι : 10, 11, 17, 12, 14, 13, 16, 14, 15, 17 τότε ὁ γενικὸς βαθμὸς εἰς τὸ ἐνδεικτικόν του θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{10+11+17+12+14+13+16+14+15+17}{10}=\frac{139}{10}=13\frac{9}{10}$, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητοῦ.

Γενικῶς : **Ἀριθμητικὸς μέσος ὅρος διαφόρων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ πλήθους αὐτῶν.**

Ἐὰν $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots \chi_\nu$ εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ ($\nu \in N$) τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{\chi_1+\chi_2+\chi_3+\cdots+\chi_\nu}{\nu}=\chi_\mu$ εἶναι ὁ μέσος ὅρος αὐτῶν. Ἐπειδὴ $\chi_1+\chi_2+\ldots+\chi_\nu=\nu\chi_\mu$, λέγομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν ἰσοῦται **πρὸς** τὸ γινόμενον τοῦ μέσου ὅρου των ἐπὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς χ_1 ἐμφανίζεται κ_1 φοράς, ὁ χ_2, κ_2 φορὰς καὶ ὁ χ_3, κ_3 φορὰς τότε $\chi_\mu = \dfrac{\kappa_1\chi_1+\kappa_2\chi_2+\kappa_3\chi_3}{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3}$

Ἐφαρμογαί

1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι μέσος ὅρος τῶν 15 καὶ 20.

Ἔχομεν $\dfrac{15+20}{2} = \dfrac{35}{2} = 17{,}5$. Παρατηροῦμεν ὅτι $15 < 17{,}5 < 20$ καὶ ὅτι $17{,}5 - 15 = 20 - 17{,}5$.

Ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι ὁ $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ τῶν α καὶ β $\left(\text{π.χ. ἐὰν } \alpha < \beta \Longrightarrow \alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta\right)$ καὶ εἶναι $\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \beta - \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

2. Ἐὰν 11 εἶναι ὁ προφ. βαθμὸς ἑνὸς μαθητοῦ εἰς ἓν μάθημα καὶ εἰς τὸν ἔλεγχον αὐτοῦ ὁ μ. ὅρος ἦτο 13, διὰ τὸ μάθημα αὐτό, ποῖος ὁ γραπτὸς βαθμός;

Ἐὰν χ ὁ βαθμὸς τῶν γραπτῶν, ἔχομεν $\dfrac{11+\chi}{2} = 13 \Longleftrightarrow 11+\chi = 26 \Longleftrightarrow \chi = 15$.

Προβλήματα

297. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση θερμοκρασία ἑνὸς ἀσθενοῦς εἰς μίαν ἡμέραν, ἐὰν ἐθερμομετρήθη 3 φορὰς καὶ ἔδειξε θερμοκρασίαν 38 β., 38,7 β., καὶ 38,2 β.

298. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. ὅρος τῶν ἀριθμῶν 7, 10, 13, 16, 19. Ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 19. Τί παρατηρεῖτε;

299. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. ὅρος τῶν 10, 14, 18, 22. Ἐπίσης τῶν 10 καὶ 22. Τί παρατηρεῖτε;

300. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκερ. ἀπὸ 1 ἕως 49. (Νὰ εὕρητε πρῶτον τὸν μ. ὅρον).

301. Ὁ μ. ὅρος τῶν βαθμῶν τριῶν μαθημάτων ἦτο 14,5. Κατόπιν μετεβλήθη ὁ βαθμὸς ἑνὸς μαθήματος καὶ ὁ μ. ὅρος ἔγινε 15,5 Πόσον ηὐξήθη ὁ βαθμὸς τοῦ ἐν λόγῳ μαθήματος;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

§ 108. Πρόβλημα 1ον.

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 100 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 5.

Ἐὰν χ, ψ, z εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ ἔχωμεν $\chi+\psi+z = 100$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, 3 καὶ 5 θὰ ἔχωμεν τοὺς ἴσους λόγους :

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5} = \frac{\chi+\psi+z}{2+3+5} = \frac{100}{10} = 10.$$

Ἄρα $\dfrac{\chi}{2} = 10 \Longleftrightarrow \chi = 20$, $\dfrac{\psi}{3} = 10 \Longleftrightarrow \psi = 30$ καὶ $\dfrac{z}{5} = 10 \Longleftrightarrow z = 50$.

Πρόβλημα 2ον.

Νὰ μερισθῇ ὁ 130 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4.

Ἐὰν χ, ψ, z εἶναι τὰ μέρη τοῦ 130, θὰ εἶναι $\chi+\psi+z = 130$.

Ἐπειδὴ οἱ χ, ψ, z εἶναι ἀντιστρ. ἀνάλογοι τῶν 2, 3 ,4, οὗτοι θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Ἑπομένως :

$$\frac{\chi}{\frac{1}{2}} = \frac{\psi}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{\frac{1}{2}\cdot 12} = \frac{\psi}{\frac{1}{3}\ 12} = \frac{z}{\frac{1}{4}\cdot 12}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{4} = \frac{z}{3} = \frac{\chi+\psi+z}{6+4+3} = \frac{130}{13} = 10.$$ Ἄρα $\chi=60$, $\psi=40$, $z=30$.

Πρόβλημα 3ον.

Κεφάλαιον 10000 δρχ. κατετέθη διὰ 6 μῆνας, ἐνῷ ἄλλο κεφάλαιον 9000 δρχ. κατετέθη διὰ 10 μῆνας μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἐὰν καὶ τὰ δύο κεφάλαια ἔφερον 500 δρχ. τόκον, πόσος τόκος ἀναλογεῖ εἰς κάθε κεφάλαιον;

Ἔστω χ δρχ. ὁ τόκος, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ κεφάλαιον 10000 δρχ. καὶ ψ δρχ. ὁ τόκος, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ κεφάλαιον 9000 δρχ.

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον, ἑπομένως θὰ εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον «κεφάλαιον ἐπὶ χρόνον».

Συνεπῶς $$\frac{\chi}{10000\cdot 6} = \frac{\psi}{9000\cdot 10} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{9} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\chi+\psi}{2+3} =$$

$$= \frac{500}{5} = 100.$$

Ἄρα $$\frac{\chi}{2} = 100 \Longleftrightarrow \chi = 200 \text{ καὶ } \frac{\psi}{3} = 100 \Longleftrightarrow \psi = 300.$$

Οἱ τόκοι εἶναι 200 δρχ. καὶ 300 δρχ. ἀντιστοίχως.

Σημείωσις.

Ἐὰν τ_1, τ_2 τιμαὶ τοῦ τόκου

κ_1, κ_2 τιμαὶ τοῦ κεφαλαίου

t_1, t_2 τιμαὶ τοῦ χρόνου, ἔχομεν τὸν πίνακα

τ	τ_1	τ_2
κ	κ_1	κ_2
t	t_1	t_2
κt	$\kappa_1 t_1$	$\kappa_2 t_2$

καὶ ἐκ τούτου τὴν ἀναλογίαν $\frac{\tau_1}{\kappa_1 t_1} = \frac{\tau_2}{\kappa_2 t_2}$.

Ἐὰν $\tau_1=\tau_2$ μερίζομεν τὸν τόκον (ἢ τὸ κέρδος) ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων

Ἐὰν $\kappa_1=\kappa_2$ μερίζομεν τὸν τόκον (ἢ τὸ κέρδος) ἀναλόγως τῶν χρόνων

(Τὸ ἐπιτόκιον θεωρεῖται σταθερόν. Εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον εἰς τὸ 3ον πρόβλημα;).

Πρόβλημα 4ον.

Χρηματικὸν ἔπαθλον ἐκ 4840 δρχ. πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς τοὺς τρεῖς πρώτους δρομεῖς, οἱ ὁποῖοι ἐπέτυχον τὰς ἑξῆς τιμὰς χρόνου ἐπιδόσεως (εἰς ἀγώνισμα δρόμου μιᾶς ἀποστάσεως)· ὁ πρῶτος ἐτερμάτισεν εἰς 2,4 min, ὁ β' εἰς 2,7 min καὶ ὁ γ' εἰς 3 min. Πόσας δρχ. θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Ἔστω χ δρχ., ψ δρχ., z δρχ., αἱ ἀμοιβαὶ ἀντιστοίχως τῶν α', β', γ'.

Ἀμοιβή	χ	ψ	z
Χρόνος ἐπιδ.	2,4	2,7	3
Ἀπόστασις	1	1	1

Ἐπειδὴ ἡ ἀμοιβὴ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ χρόνου ἐπιδόσεως (διὰ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi}{\frac{1}{2,4}} = \frac{\psi}{\frac{1}{2,7}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{\frac{1}{2,4}\cdot 21,6} = \frac{\psi}{\frac{1}{2,7}\cdot 21,6} = \frac{z}{\frac{1}{3}\cdot 21,6} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\chi}{9} = \frac{\psi}{8} = \frac{z}{7,2} = \frac{\chi+\psi+z}{9+8+7,2} = \frac{4840}{24,2} = 200.$$

Ἄρα $\quad \frac{\chi}{9} = 200 \Longleftrightarrow \chi = 1800, \quad \frac{\psi}{8} = 200 \Longleftrightarrow 1600$ καὶ $z = 1440.$

Ὁ α' θὰ λάβῃ 1800 δρχ., ὁ β' 1600 δρχ. καὶ ὁ γ' 1440 δρχ.

Πρόβλημα 5ον.

Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν τὰ ἑξῆς ποσά : Ὁ α' 500000 δρχ., ὁ β' 600000 δρχ. καὶ ὁ γ' 660000 δρχ.

Τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 2 ἔτη,

τὰ χρήματα τοῦ β' ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 18 μῆνας καὶ

τὰ χρήματα τοῦ γ' ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ 20 μῆνας.

Ἐὰν ἐκέρδισαν 300000 δραχμάς, πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐπιλύεται, ὅπως τὸ ἀνωτέρω 3ον πρόβλημα. Μερίζομεν τὸ κέρδος ἀναλόγως πρὸς τὸ γινόμενον τῶν καταθέσεων ἐπὶ τοὺς χρόνους. Ἔστω χ δρχ., ψ δρχ., z δρχ., ἀντιστοίχως τὰ κέρδη. Ἔχομεν

$$\frac{\chi}{500000\cdot 24} = \frac{\psi}{600000\cdot 18} = \frac{z}{660000\cdot 20} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{120} = \frac{\psi}{108} = \frac{z}{132} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\chi}{10} = \frac{\psi}{9} = \frac{z}{11} = \frac{\chi+\psi+z}{10+9+11} = \frac{300000}{30} = 10000.$$

Ἄρα $\chi = 100000, \quad \psi = 90000, \quad z = 110000.$

Ὁ α' θὰ λάβῃ 100000 δραχμάς, ὁ β' 90000 δραχμὰς καὶ ὁ γ' 110000 δρχ.

Προβλήματα

302. Νὰ μερισθῇ ὁ 180 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν α) 6, 10, 14 β) 3, 5, 7 γ) 18, 30, 42 καὶ δ) 360, 600, 840. Νὰ συγκρίνητε τὰ ἀποτελέσματα τῶν 4 περιπτώσεων καὶ νὰ δικαιολογήσητε αὐτό, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρητε.

303. Νὰ μερισθῇ ὁ 260 ἀναλόγως τῶν $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{7}{12}$

304. Νὰ μερισθοῦν: α) ὁ 480 ἀναλόγως τῶν 2, $\frac{9}{4}$ καὶ $\frac{6}{8}$ β) ὁ 310 ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν 2, 3 καὶ 5 καὶ γ) ὁ 24 ἀντιστρόφως ἀναλόγως τῶν 2, $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{2}{5}$

305. Φιλόπτωχος σύλλογος ἐμοίρασεν 600 δραχμὰς εἰς τρεῖς πτωχὰς οἰκογενείας ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μελῶν αὐτῶν. Ἡ α' οἰκογένεια ἦτο 4μελής, ἡ β' 6μελὴς καὶ ἡ γ' 10μελής. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε κάθε οἰκογένεια;

306. Δύο αὐτοκίνητα ἐκκινοῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 220 km πρὸς συνάντησίν των μὲ ταχύτητας 50 km/h καὶ 60 km/h. Νὰ εὑρεθῇ πόσα km θὰ διανύσῃ ἕκαστον, ἕως ὅτου συναντηθοῦν.

307. Χρηματικὸν ἔπαθλον ἐκ 5200 δρχ. πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς δύο ποδηλάτας, οἱ ὁποῖοι εἶχον τὰς ἑξῆς ἐπιδόσεις εἰς ἀγώνισμα δρόμου μιᾶς ἀποστάσεως: ὁ α' διήνυσε τὴν ἀπόστασιν εἰς 18 min καὶ ὁ β' εἰς 21 min. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

308. Δύο αὐτοκινητισταὶ μετέφερον ἐμπορεύματα ἀντὶ 6800 δραχμῶν. Ὁ α' μετέφερεν 4,5 ton εἰς ἀπόστασιν 40 km καὶ ὁ β' 5 ton εἰς ἀπόστασιν 32 km. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος;

309. Τρεῖς ἀδελφαὶ ἐκληρονόμησαν ἀπὸ τὸν θεῖον τους 700960 δρχ. ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ διανεμηθοῦν ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των. Αἱ ἡλικίαι αὐτῶν εἶναι 14 ἔτη, 16 ἔτη καὶ 21 ἔτη. Πόσας δρχ. θὰ λάβῃ ἑκάστη;

310. Δύο βοσκοὶ ἐνοικίασαν ἀγρὸν ἀντὶ 2850 δρχ. Ὁ α' ἐβόσκησε 200 πρόβατα ἐπὶ 25 ἡμέρας καὶ ὁ β' 150 πρόβατα ἐπὶ 30 ἡμέρας. Ποῖον ποσὸν χρημάτων θὰ πληρώσῃ ἕκαστος;

311. Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν καταθέσας 100000 δρχ. Δύο μῆνας ἀργότερον προσέλαβε συνεταῖρον ὁ ὁποῖος κατέθεσεν 150000 δρχ. Ἓν ἔτος μετὰ τὴν πρόσληψιν τοῦ συνεταίρου εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 99000 δρχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

8. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΙΞΕΩΣ

§ **109**. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται λόγος περὶ ἀναμείξεως διαφόρων ποιοτήτων ἐμπορευμάτων τοῦ αὐτοῦ εἴδους καὶ γενικῶς διαφόρων σωμάτων τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἀναμιχθοῦν, λέγονται προβλήματα ἀναμείξεως ἢ μείξεως. Τὸ προϊὸν τῆς ἀναμείξεως ἢ μείξεως λέγεται **μεῖγμα**. Τὰ ἀναμειγνυόμενα σώματα λέγονται **μέρη τοῦ** μείγματος.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν προβλημάτων τούτων θὰ γίνῃ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξισώσεων καὶ στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς κανόνων:

1. **Τὰ βάρη τῶν μερῶν ἔχουν ἄθροισμα τὸ βάρος τοῦ μείγματος.**
2. **Ἡ τιμὴ κόστους τοῦ μείγματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν κόστους τῶν μερῶν αὐτοῦ.**

Πρόβλημα 1ον. Ἔμπορος ἀνέμειξε 150 **kgr*** ἐλαίου τῶν 24 δρχ. κατὰ **kgr***, μὲ 100 **kgr*** ἄλλης ποιότητος ἐλαίου τῶν 29 δρχ. κατὰ **kgr***. Πόσον τιμᾶται τὸ **kgr*** τοῦ μείγματος;

Ἔστω χ δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ **kgr*** τοῦ μείγματος.

Ἔχομεν : Τιμὴ α' ποιότητος σὺν τιμὴ β' ποιότητος ἴσον τιμὴ μείγματος.

$$100.29 \quad + \quad 150.24 \quad = \quad (150+100).\chi$$

Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν καὶ εὑρίσκομεν $\chi=26$.

Ἑπομένως 26 δρχ. τιμᾶται τὸ **kgr*** τοῦ μείγματος.

Σημείωσις. Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν : πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος διὰ νὰ κερδίσῃ 25% ἐπὶ τῆς τιμῆς κόστους τοῦ μείγματος.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς κόστους τοῦ κιλοῦ τοῦ μείγματος προχωροῦμεν εἰς τὴν ἐπίλυσιν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῶν ποσοστῶν.

100 δρχ. κόστος 125 δρχ. πώλησις

26 δρχ. κόστος χ $\Longrightarrow \dfrac{100}{26}=\dfrac{125}{\chi} \Longleftrightarrow \chi=32{,}50.$

Πρέπει νὰ πωλῇ 32,50 δρχ. τὸ κιλὸν διὰ νὰ κερδίζῃ 25% ἐπὶ τοῦ κόστους.

Πρόβλημα 2ον. Οἰνοπώλης ἀνέμειξε οἶνον τῶν 5 δρχ./**kgr*** μὲ οἶνον ἄλλης ποιότητος τῶν 4 δρχ./**kgr*** καὶ ἐσχημάτισε μεῖγμα 100 **kgr*** τῶν 4,60 δρχ./**kgr***. Πόσα **kgr*** ἔλαβεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

Ἔστω ὅτι ἔλαβε χ **kgr*** ἐκ τῆς ποιότητος τῶν 5 δρχ./**kgr***. Τότε ἐκ τῆς ἄλλης ποιότητος ἔλαβε $(100-\chi)$ **kgr***. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $5\chi+4(100-\chi)=4{,}6.100$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi=60$.

Ἄρα ἔλαβε 60 **kgr*** ἐκ τῆς α' ποιότητος καὶ 40 **kgr*** ἐκ τῆς β' ποιότητος.

Πρόβλημα 3ον. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν λίπος τῶν 35 δρχ./**kgr*** μὲ λίπος τῶν 30 δρχ./**kgr*** διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα τῶν 32 δρχ./**kgr***;

Ἐὰν λάβωμεν χ **kgr*** ἐκ τοῦ λίπους τῶν 35 δρχ./**kgr*** καὶ ψ **kgr*** ἐκ τοῦ λίπους τῶν 30 δρχ./**kgr***, τότε τὸ μεῖγμα θὰ εἶναι $(\chi+\psi)$ **kgr*** καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν.

$35\chi+30\psi=32(\chi+\psi)$ ἡ ὁποία ἔχει δύο ἀγνώστους. Ἡ μορφὴ ὅμως τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τοιαύτη ὥστε δύναται νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν χ, ψ.

Π.χ. $35\chi+30\psi=32(\chi+\psi) \Longleftrightarrow 35\chi+30\psi=32\chi+32\psi \Longleftrightarrow 35\chi-32\chi=$
$=32\psi-30\psi \Longleftrightarrow 3\chi=2\psi \Longleftrightarrow \dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{2}{3} \Longleftrightarrow \dfrac{\chi}{2}=\dfrac{\psi}{3}$

Ἡ ἀναλογία ἀναμείξεως εἶναι 2 **kgr*** ἐκ τῆς ποιότητος τῶν 35 δρχ./**kgr*** καὶ 3 **kgr*** ἐκ τῆς ἄλλης ποιότητος.

Πρόβλημα 4ον. Ἔμπορος ἀνέμειξε δύο ποιότητας ἑνὸς εἴδους τῶν

36 δρχ./kgr* καὶ 25 δρχ./kgr*. Τὸ κόστος τοῦ μείγματος ἦτο 30 δρχ./kgr*. Ἐὰν ἀπὸ τὴν α' ποιότητα ἔλαβε 100 kgr*, πόσα kgr* ἔλαβεν ἐκ τῆς ἄλλης;

Ἔστω ὅτι ἔλαβεν χ kgr* ἐκ τῆς β' ποιότητος.

Ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $36.100+25.\chi=30(100+\chi) \Longleftrightarrow$

$3600+25\chi = 3000+30\chi \Longleftrightarrow 3600-3000 = 30\chi-25\chi$

$5\chi = 600 \Longleftrightarrow \chi = \frac{600}{5} \Longleftrightarrow \chi=120.$

120 kgr* ἔλαβεν ἐκ τῆς β' ποιότητος.

Προβλήματα

312. Ἀνεμείχθησαν 200 kgr* οἴνου τῶν 4 δρχ./kgr* μὲ 300 kgr* ἄλλης ποιότητος τῶν 4,5 δρχ./kgr* Πόσον ἀξίζει τὸ kgr* τοῦ μείγματος;

313. Ἔμπορος ἀνέμειξε 80 kgr* ἐλαίου τῶν 25 δρχ./kgr* μὲ 120 kgr* ἄλλης ποιότητος τῶν 30 δρχ./kgr* Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ kgr* τοῦ μείγματος, διὰ νὰ ἔχῃ κέρδος 10% ἐπὶ τοῦ κόστους; (Αἱ τιμαὶ εἶναι τιμαὶ κόστους).

314. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν βούτυρον τῶν 50 δρχ./kgr* μὲ βούτυρον τῶν 60 δρχ./kgr*, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν μεῖγμα τῶν 56 δρχ./kgr*; Καὶ ἐὰν σχηματίσωμεν μεῖγμα 50 kgr*, πόσα kgr* πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης ποιότητος βουτύρου;

315. Καφεπώλης ἀνέμειξε καφὲ τῶν 90 δρχ./kgr* μὲ καφὲ τῶν 82 δρχ./kgr* καὶ ἔκαμε μεῖγμα 12 kgr* τῶν 88 δρχ./kgr.* Πόσα kgr* ἀνέμειξε ἐξ ἑκάστης ποιότητος;

316. Ἔμπορος ἀνέμειξε 150 kgr* ἐλαίου τῶν 32 δρχ./kgr* μὲ 100 kgr* ἄλλης ποιότητος 26 δρχ./kgr.* Ἐὰν πωλῇ τὸ μεῖγμα πρὸς 34,80 δρχ./kgr* πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει; (Αἱ τιμαὶ εἶναι τιμαὶ κόστους).

317. Ἐγένετο μεῖγμα (100+χ) kgr* ἐκ δύο ποιοτήτων τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Ἡ τιμὴ τοῦ kgr* τῆς α' ποιότητος ἦτο 35 δρχ., τῆς β' ποιότητος 30 δρχ. καὶ τοῦ μείγματος 32 δρχ. Ἐὰν ἐκ τῆς β' ποιότητος ἐλήφθησαν χ kgr*, νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

318. Ἀναμειγνύονται 100 kgr* τῶν 20 δρχ./kgr* μὲ 80 kgr* τῶν χ δρχ./kgr* δύο ποιοτήτων ἑνὸς εἴδους. Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ μείγματος εἶναι 22 δρχ./kgr*, νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

319. Πῶς πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν δύο ποιότητας κόστους 48 δρχ./kgr* καὶ 44 δρχ./kgr* ἑνὸς εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα, τὸ ὁποῖον, ἐὰν πωλῶμεν 49,50 δρχ./kgr*, νὰ κερδίζωμεν 10% ἐπὶ τοῦ κόστους;

9. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΡΑΜΑΤΩΝ

§ **110.** Ἐὰν συγχωνεύσωμεν ἢ συντήξωμεν (διὰ διαφόρων μεθόδων) δύο ἢ περισσότερα μέταλλα λαμβάνομεν ἓν σῶμα τὸ ὁποῖον λέγεται **κρᾶμα**.

Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν ἐνδιαφέρουν τὰ κράματα πολυτίμων μετάλλων (χρυσοῦ, ἀργύρου), τῶν ὁποίων ἡ ἀξία ἐκτιμᾶται ἐκ τοῦ λόγου τοῦ βάρους τοῦ πολυτίμου μετάλλου πρὸς τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ κράματος. Ὁ λόγος αὐτὸς λέγεται **τίτλος** τοῦ κράματος καὶ ἐκφράζεται **εἰς χιλιοστά**.

Ἐὰν Α τὸ βάρος τοῦ πολυτίμου μετάλλου, Β τὸ βάρος τοῦ κράματος καὶ τ ὁ τίτλος τοῦ κράματος, ἔχομεν

$$\frac{A}{B} = \tau \Longleftrightarrow A = B\tau$$

Π.χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ κρᾶμα ἔχει τίτλον 0,850 ἢ $\frac{850}{1000}$ ἐννοοῦμεν ὅτι ἐκ τῶν 1000 gr* τοῦ κράματος τὰ 850 gr* εἶναι πολύτιμον μέταλλον καὶ τὰ 150 gr* εἶναι ἄλλον ἢ ἄλλα μέταλλα.

Ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ εἰς **καράτια**. Π.χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι ἓν χρυσοῦν κόσμημα εἶναι 18 καρατίων, ἐννοοῦμεν ὅτι ἐκ τῶν 24 μερῶν αὐτοῦ τὰ 18 μέρη εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα 6 μέρη ἄλλα μέταλλα.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν προβλημάτων θὰ γίνῃ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξισώσεων, ὅπως καὶ εἰς τὰ προβλήματα ἀναμείξεως, μὲ βάσιν τοὺς κανόνας:

α) «**Τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τοῦ πολυτίμου μετάλλου εἰς τὰ πρὸς σύντηξιν κράματα ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ πολυτίμου μετάλλου εἰς τὸ νέον κρᾶμα**».

β) **Τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῶν κραμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ βάρος τοῦ νέου κράματος.**

Πρόβλημα 1ον. Χρυσοχόος συνέτηξε 12 gr* χρυσοῦ τίτλου 0,900 μὲ 18 gr* ἄλλου χρυσοῦ τίτλου 0,800. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

Ἔστω χ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

Τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ εἰς τὸ α' κρᾶμα εἶναι 0,900.12 gr*

Τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ εἰς τὸ β' κρᾶμα εἶναι 0,800.18 gr*

Τὸ βάρος τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ εἰς τὸ νέον κρᾶμα εἶναι $\chi.(12+18)$ gr*

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$0{,}900.12+0{,}800.18=\chi.(12+18) \Longleftrightarrow 10{,}8+14{,}4=30\chi \Longleftrightarrow 30\chi=25{,}2$$

$$\chi=\frac{25{,}2}{30} \Longleftrightarrow \chi=0{,}840.$$

Ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι 0,840.

Πρόβλημα 2ον. Ἐὰν συντήξωμεν δύο εἴδη κραμάτων (τοῦ αὐτοῦ πολυτίμου μετάλλου) τίτλων 0,900 καὶ 0,600, λαμβάνομεν νέον κρᾶμα βάρους 42 gr* καὶ τίτλου 0,700. Πόσα gr* ἐλήφθησαν ἐξ ἑκάστου κράματος;

Ἔστω ὅτι ἐλήφθησαν χ gr* ἐκ τοῦ κράματος τίτλου 0,900, τότε ἐκ τοῦ ἄλλου κράματος θὰ ἔχουν ληφθῇ $(42-\chi)$ gr*. Ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$0{,}900.\chi+0{,}600(42-\chi)=0{,}700.42 \Longleftrightarrow 9\chi+6(42-\chi)=7.42 \Longleftrightarrow 9\chi+6.42-6\chi$$
$$=7.42 \Longleftrightarrow 9\chi-6\chi=7.42-6.42 \Longleftrightarrow 4\chi=(7-6)42 \Longleftrightarrow 3\chi=42 \Longleftrightarrow \chi=\frac{42}{3}$$
$$\Longleftrightarrow \chi=14$$

Ἐλήφθησαν 14 gr* ἐκ τοῦ κράματος τίτλου 0,900 καὶ 42 gr*−14 gr*=28 gr* ἐκ τοῦ ἄλλου κράματος.

Πρόβλημα 3ον. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν δύο κράματα (τοῦ αὐτοῦ πολυτίμου μετάλλου) τίτλων 0,920 καὶ 0,800 διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,840;

Ἐὰν λάβωμεν χ gr* ἐκ τοῦ κράματος τίτλου 0,920 καὶ 4 gr* ἐκ τοῦ ἄλλου κράματος, τὸ νέον κρᾶμα θὰ εἶναι (χ+ψ) gr*.

Ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $0{,}920.\chi+0{,}800.\psi=0{,}840(\chi+\psi) \Longleftrightarrow 92\chi+80\psi=$ $=84(\chi+\psi) \Longleftrightarrow 23\chi+20\psi=21(\chi+\psi) \Longleftrightarrow 23\chi+20\psi=21\chi+21\psi \Longleftrightarrow$ $23\chi-21\chi=21\psi-20\psi \Longleftrightarrow 2\chi=\psi \Longleftrightarrow \frac{\chi}{1}=\frac{\psi}{2} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{\psi}=\frac{1}{2}$

Ἡ ἀναλογία συγχωνεύσεως εἶναι 1 gr* ἐκ τοῦ κράματος τίτλου 0,920 καὶ 2 gr* ἐκ τοῦ ἄλλου κράματος.

Προβλήματα

320. Χρυσοχόος συγχωνεύει 10 gr* χρυσοῦ τίτλου 0,900 μὲ 14 gr* ἄλλου χρυσοῦ τίτλου 0,600. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

321. Κάμνομεν νέον κρᾶμα βάρους 90 gr* καὶ τίτλου 0,840 ἐκ δύο ἄλλων κραμάτων τίτλων 0,900 καὶ 0,800. Πόσα gr* ἐξ ἑκάστου κράματος θὰ λάβωμεν;

322. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν δύο εἴδη χρυσοῦ τίτλων 0,900 καὶ 0,750, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν κρᾶμα τίτλου 0,800 καὶ πόσα gr* ἐξ ἑκάστου εἴδους θὰ λάβωμεν, ἐὰν τὸ νέον κρᾶμα ἔχῃ βάρος 75 gr* ;

323. Συγχωνεύομεν 80 gr* ἀργύρου τίτλου 0,920 μὲ ἄργυρον τίτλου 0,850 καὶ σχηματίζομεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,900. Πόσα gr* ἐκ τοῦ β' κράματος θὰ χρησιμοποιήσωμεν;

324. α) Πόσα gr* καθαροῦ χρυσοῦ περιέχονται εἰς 50,5 gr* χρυσοῦ τίτλου 0,740;

β) Κρᾶμα χρυσοῦ 80 gr* περιέχει 50 gr* καθαρὸν χρυσόν. Ποῖος ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

325. Χρυσοχόος συνέτηξε 10 gr* χρυσοῦ τῶν 17 καρατίων μὲ 20 gr* ἄλλου χρυσοῦ τῶν 20 καρατίων καὶ μὲ 30 gr* τίτλου 22 καρατίων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἰς καράτια.

326. Πόσα gr* χαλκοῦ πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν μὲ 140 gr* καθαροῦ χρυσοῦ, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν κρᾶμα τίτλου 0,700;

10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ IV

327. Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=2$ καὶ $\chi+\psi=15$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ χ, ψ.

328. Ἐὰν $\frac{\chi}{\psi}=-\frac{2}{3}$ νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι :

α) $\frac{2\chi-\psi}{\chi+\psi}$ β) $\frac{\chi+2}{\psi-3}$ $(\psi\neq 3)$ γ) $\frac{\chi-2}{\psi+3}$ $(\psi\neq -3)$ καὶ δ) $\frac{\chi+\psi}{3\chi-2\psi}$

329. Ἐὰν $3\chi+4\psi=52$ καὶ $\frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{5}$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ χ, ψ.

$$\left(\frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{5} \Longleftrightarrow \frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{5}=\frac{3\chi}{3\cdot 2}=\frac{4\psi}{4\cdot 5}=\frac{3\chi}{6}=\frac{4\psi}{20}=\frac{3\chi+4\psi}{6+20}=\frac{52}{26}=\dots\right)$$

330. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας $\frac{\chi}{3}=\frac{\psi}{1}$, ἐὰν α) $2\chi+3\psi=180$ καὶ β) $2\chi-5\psi=30$.

331. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὅροι τοῦ λόγου $\frac{χ}{ψ}=\frac{3}{4}$, ἐὰν α) $χ+3ψ=150$ καὶ β) $5χ-3ψ=30$

332. Δύο ἐργάται ἐξετέλεσαν ἓν ἔργον. Ὁ α' ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ β' τὸ ὑπόλοιπον. Ἐὰν ὁ β' ἔλαβε 4200 δρχ., πόσον ἐκόστισεν ὁλόκληρον τὸ ἔργον;

333. Διὰ τὴν ἀγορὰν ἐνδυμασίας ἐγένετο ἔκπτωσις 270 δρχ. καὶ ἐπληρώθη τὸ ποσὸν τῶν 1230 δραχμῶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ὑπελογίσθη ἡ ἔκπτωσις;

334. Ἀντικείμενον κόστους 1800 δρχ. ἐπωλήθη ἀντὶ 1440 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἦτο ἡ ἔκπτωσις; Ἐὰν τὸ κόστος του ἦτο 1400 δρχ. καὶ ἐπωλήθη ἀντὶ 1750 δρχ., πόσον τοῖς ἑκατὸν ἦτο τὸ κέρδος;

335. 15 ἐργάται ἐξετέλεσαν εἰς 8 ἡμέρας τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς ἔργου. Ἐὰν ἀπελύθησαν 5 ἐργάται, εἰς πόσας ἡμέρας οἱ ὑπόλοιποι θὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπον ἔργον;

336. Πεζοπόρος, ἐὰν βαδίσῃ 7 ἡμέρας ἐπὶ 8 ὥρας καθ' ἑκάστην θὰ διανύσῃ τὰ $\frac{7}{13}$ μιᾶς ἀποστάσεως. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ ἡμερησίως διὰ νὰ διανύσῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀποστάσεως εἰς 8 ἡμέρας;

337. Τὰ $\frac{5}{16}$ κεφαλαίου τοκισθέντα πρὸς 7% ἔγιναν μὲ τὸν τόκον των 9831 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, ἐὰν ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιον ἦτο 28928 δραχμάς.

338. Τὸ $\frac{1}{2}$ κεφαλαίου ἐτοκίσθη πρὸς 5%, τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πρὸς 6% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4%. Ἐὰν εἰς ἓν ἔτος κεφάλαιον καὶ τόκοι ἀνήρχοντο εἰς 18930 δραχμάς, νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον.

339. Ἐτοκίσθησαν τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς 6% καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5%. Ἐὰν ἐτοκίζετο ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιον πρὸς 5% θὰ ἔδιδε 120 δρχ. τόκον ὀλιγώτερον τοῦ ἐκ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως τοκισμοῦ του. Ἐὰν ὁ χρόνος καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι 12 μῆνες, νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον.

340. Ἐὰν κεφ. + τοκ. εἶναι 10100 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 2,5 μῆν. καὶ ε%=4,8%, νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον.

341. Ἐὰν κεφ.+τοκ. εἶναι 9126 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 63 ἡμ. καὶ ε%=8%, νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον.

342. Ἐὰν κεφ.—τόκ. εἶναι 4440 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 4 μῆν. καὶ ε%=4%, νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον.

343. Ἐὰν εἰς τὰς κατωτέρω ἐξισώσεις ὁ χ παριστᾷ κεφάλαιον εἰς δραχμάς, νὰ διατυπωθοῦν αὗται (λεκτικῶς) εἰς προβλήματα καὶ νὰ ἐπιλυθοῦν.

α) $χ+χ\cdot\frac{4}{100}\cdot\frac{5}{12}=18300$, β) $χ-χ\cdot\frac{5}{100}\cdot\frac{105}{360}=9460$.

344. Δύο αὐτοκίνητα ἐκκινοῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 360 km μὲ ταχύτητας 65 km/h καὶ 55 km/h πρὸς συνάντησίν των. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ συναντηθοῦν;

345. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 3600 ἀντιστρ. ἀναλόγως τῶν 12, 15, 20.

346. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 250 ἀντιστρ. ἀναλόγως τῶν $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{4}{9}$

347. Δύο ἔμποροι κατέθεσαν 100000 δρχ. ὁ α' καὶ 80000 δρχ. ὁ β' δι' ἐπιχείρησιν. Μετὰ 18 μῆνας ἐκέρδισαν 54000 δρχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

348. Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ 500000 δρχ. Μετὰ 3 μῆνας προσέλαβε συνεταῖρον ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ ποσόν. Ἓξ μῆνας μετὰ τὴν πρόσληψιν τοῦ συνεταίρου εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 60000 δρχ. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

349. Δύο συνεταίροι κατέθεσαν 405 000 δρχ. δι' ἐπιχείρησιν. Τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν 15 μῆνας καὶ τοῦ β' 12 μῆνας εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Ἐὰν ἔλαβον ἴσα κέρδη, νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον τὸ ὁποῖον εἶχε καταθέσει ἕκαστος.

350. Ἔμπορος ἀνέμειξεν 100 kgr* ἑνὸς εἴδους τῶν 35 δρχ. /kgr* μὲ ἄλλο τῶν 30 δρχ. /kgr* Πόσα kgr* ἔλαβεν ἐκ τῆς β' ποιότητος ἐὰν ἐπώλει πρὸς 33 δρχ. τὸ kgr* τοῦ μείγματος καὶ ἐκέρδισε 250 δραχμάς.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

351. Ἐὰν $\alpha = -4$ καὶ $\beta = 2$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῶν παραστάσεων $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ καὶ $(\alpha+\beta)^3$. Τί παρατηρεῖτε ;

352. Ἐὰν $\alpha = -2$, $\beta = -3$ καὶ $\gamma = -1$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῶν παραστάσεων : $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$ καὶ $(\alpha+\beta+\gamma)^2$. Τί παρατηρεῖτε;

353. Ἐὰν $\chi = -2$, $\alpha = -3$ καὶ $\beta = 4$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῶν παραστάσεων $\chi^2 + (\alpha+\beta)\chi + \alpha\beta$ καὶ $(\chi+\alpha).(\chi+\beta)$. Τί παρατηρεῖτε;

354. Ἐὰν $\chi=3$, $\psi=-4$, $\alpha=-2$ καὶ $\beta=1$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων $(\alpha^2+\beta^2).(\chi^2+\psi^2)-(\alpha\chi+\beta\psi)^2$ καὶ $(\alpha\psi-\beta\chi)^2$. Τί παρατηρεῖτε;

355. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $\dfrac{3\chi-1}{5} = \dfrac{5-7\chi}{15}$, β) $\dfrac{5\chi+1}{7} = \dfrac{2\chi-3}{3}$, γ) $\dfrac{2\chi-2{,}5}{3} = \dfrac{4\chi-5}{6}$,

δ) $\dfrac{2\chi-1{,}5}{5} = \dfrac{0{,}8\chi-1}{2}$.

(Διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἰδιότης τῶν ἀναλογιῶν:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma \quad).$$

356. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $(\chi+1).(\chi+2) = \chi(\chi+7)-6$, β) $2.(\chi-1).(\chi+1) = \chi(2\chi-6)+16$,

γ) $(\chi-3).(\chi-4)-2\chi(\chi-3)=\chi(11-\chi)$, δ) $\dfrac{1}{3}\left(\chi-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{3}{5}\left(\chi+\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{7}{2}=0$

357. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $\dfrac{\chi-7}{4}+\dfrac{\chi+10}{21}+1=\dfrac{5\chi-7}{8}-\dfrac{9\chi+6}{35}$

β) $\dfrac{3\chi-2}{8}-\dfrac{13\chi+3}{27}+9=\dfrac{5\chi-12}{18}-\dfrac{2-5\chi}{4}$

γ) $\dfrac{3\chi}{4}+\dfrac{5}{17}(2\chi+1)=(\chi-1)+\dfrac{7\chi-5}{51}-\dfrac{2-\chi}{2}$.

δ) $\dfrac{4+13\chi}{22}+\dfrac{\chi}{2}-\dfrac{7\chi-1}{3}+\dfrac{3-15\chi}{33}-\dfrac{6-5\chi}{4}=0$.

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι προβλήματα :

358. Ποίου ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτοῦ εἶναι κατὰ $\frac{13}{5}$ μικρότερον τοῦ 3πλασίου του;

359. Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν προσθέσωμεν τὸ 4πλάσιον αὐτοῦ, εὑρίσκομεν ἀριθμὸν κατὰ $\frac{8}{25}$ μικρότερον τοῦ 10,32. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

360. Ἀπὸ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 8πλάσιον τοῦ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ διὰ νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν κατὰ $\frac{21}{2}$ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1}{10}$ αὐτοῦ;

361. Διὰ ποίου ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 744 διὰ νὰ εὑρεθῇ πηλίκον 14 καὶ ὑπόλοιπον 44;

362. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς $\frac{378}{5}$ εἰς δύο ἄλλους, ὥστε ὁ εἷς νὰ εἶναι 2πλάσιος τοῦ ἄλλου.

363. Ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου εἶναι 2πλασία τῆς ἡλικίας τοῦ Παύλου. Πρὸ 7 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν ἦτο ἴσον πρὸς τὴν σημερινὴν ἡλικίαν τοῦ Πέτρου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι των.

364. Πλοῖον ἀνεχώρησεν ἐκ Πειραιῶς μὲ ταχύτητα 19,5 **mil/h**. Μετὰ 4 ὥρας ἀνεχώρησεν ἕτερον πλοῖον μὲ ταχύτητα 23,5 **mil/h** πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν. Μετὰ πόσας ὥρας τὸ β΄ πλοῖον θὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον;

365. Ἡ γωνία Γ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}=1$ ὀρθ.) ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γωνίας Β. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

366. Νὰ εὑρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα διαφέρουν κατὰ 39.

367. Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 17 καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν διαφέρουν κατὰ 119. Ποῖοι οἱ ἀριθμοί;

368. Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 27. Ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν προσθέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου εὑρίσκομεν 216. Ποῖοι οἱ ἀριθμοί;

369. Ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 9, ἐνῶ διαιρούμενος διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 2 Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν πηλίκων εἶναι 53, νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

370. Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ 4 μεγαλύτερον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων. Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν προσθέσωμεν τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, εὑρίσκομεν 114. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

371. Ὡρολόγιον δεικνύει ἀκριβῶς μεσημβρίαν (12 **h** 0 **min** 0 sec). Ποίαν ὥραν θὰ συναντηθοῦν (διὰ δευτέραν φορὰν) ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης;

372. Δύο θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰν 48. Ὁ μεγαλύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ μικροτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2. Ποῖοι οἱ ἀριθμοί;

373. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισώσεις :

α) $\frac{3\chi-1}{5} > \frac{\chi-1}{3}$, β) $\frac{\chi+5}{2} - \frac{\chi-1}{3} > 3$, γ) $3\chi-3+\frac{\chi-1}{-4} > 0$,

δ) $\frac{\chi+1}{3} - \frac{\chi-1}{2} < 1$, ε) $2\left(\frac{5}{2}-\chi\right) > \frac{1}{2}+2(1{,}5-\chi)$.

374. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ κοιναὶ λύσεις τῶν ἀνισώσεων :

α) $\chi-1>-2$ καὶ $2(\chi-3)<0$

β) $\frac{1}{2}+\chi>\chi$ καὶ $\chi-3<10$

γ) $\chi-3>\chi$ καὶ $2-\chi>-\chi$

375. Ἐὰν $A=\left\{\chi/\chi-\frac{\chi-1}{2}>\frac{\chi-2}{2}-\frac{\chi-3}{4}\text{ καὶ } \chi\in Z\right\}$ καὶ

$B = \{\chi / -\chi + 1 < 4\chi + 1 \land \chi \in Z\}$, νὰ εὑρεθῇ τὸ $A \cap B$ δι' ἀναγραφῆς.

376. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ συναρτήσεις :

α) $\psi = -2\chi + 5$, β) $\psi = \dfrac{24}{\chi}$ γ) $\psi = -4\chi$ $(\chi, \psi \in Q)$

377. Ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἀναλογίαι :

1) $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma+\delta}$, 2) $\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma-\delta}$, 3) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ $(\beta, \delta \neq 0, \ |\alpha| \neq |\beta|, \ |\gamma| \neq |\delta|)$

378. Ἐὰν $\dfrac{\chi}{\chi+1} = \dfrac{\psi}{\psi+2}$ καὶ $\chi + \psi = 21$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ χ, ψ.

379. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῶν ἴσων λόγων $\dfrac{\chi}{2} = \dfrac{\psi}{3} = \dfrac{z}{5}$ ἐὰν $2\chi + 3\psi + 4z = 330$

380. Νὰ μερισθῇ ὁ 99 ἀναλόγως τῶν α) 2, 3, 4 καὶ β) 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$.

381. Νὰ μερισθῇ ὁ 390 ἀντιστρ. ἀναλόγως τῶν α) 2, 3, 4 καὶ β) $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{5}{6}$, 1.

382. Ἔμπορος ἀγοράζει καφὲ πρὸς 81 δρχ./**kgr***, τὸν καβουρδίζει καὶ τὸν μεταπωλεῖ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ **kgr*** διὰ νὰ ἐπιτύχῃ κέρδος 10 °/₀ ἐπὶ τοῦ κόστους λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ καφὲς χάνει τὸ $\dfrac{1}{10}$ τοῦ βάρους του, ὅταν καβουρδίζεται.

383. Ἔμπορος ἀναγράφει εἰς ἓν ἐμπόρευμα τιμὴν κατὰ 25% μεγαλυτέραν τῆς τιμῆς κόστους αὐτοῦ. Ἐν συνεχείᾳ κάμνει ἔκπτωσιν 10% ἐπὶ τῆς ἀναγραφομένης τιμῆς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ κόστους κερδίζει τελικῶς ὁ ἔμπορος.

384. Ἐὰν κέφ. –τόκ. = 54000 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 2,5 ἔτη καὶ ε% = 4%, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος.

395. Ἐὰν κέφ. + τόκ. = 4060 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 3 μῆν. καὶ ε% = 6%, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος.

386. Ἐὰν κέφ. –τόκ. = 7160 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 40 ἡμ. καὶ ε% = 5%, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόκος.

387. Ἓν μέρος κεφαλαίου 40 000 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς 4% διὰ 5 μῆνας καὶ ἔφερε 500 δρχ. τόκον περισσότερον ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον μέρος αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη πρὸς 5% ἐπὶ 6 μῆνας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τοκισθὲν μέρος τοῦ κεφαλαίου.

388. Δύο ἴσα κεφάλαια τοκίζονται τὸ μὲν πρὸς 4,5% ,τὸ δὲ πρὸς 5,5% καὶ δίδουν τόκον 4500 δρχ. εἰς 2 ἔτη. Ποῖα τὰ κεφάλαια;

389. Ἐὰν χ παριστᾷ κεφάλαιον εἰς δραχμὰς εἰς τὰς κάτωθι ἐξισώσεις νὰ διατυπωθοῦν αὗται (λεκτικῶς) εἰς προβλήματα καὶ νὰ ἐπιλυθοῦν.

α) $\chi + \chi \cdot \dfrac{6}{100} \cdot \dfrac{2{,}4}{12} = 10120$, β) $\chi - \chi \cdot \dfrac{2{,}5}{100} \cdot \dfrac{400}{360} = 7000$.

390. Γεωργὸς ἐπώλησε κῆπον 1050 m^2. Τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ἐτόκισεν πρὸς 12% καὶ μετὰ 3 ἔτη καὶ δύο μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 115920 δρχ. Πόσον ἐπώλησε τὸ στρέμμα;

391. Εἷς ἠγόρασεν οἰκόπεδον ἐκτάσεως 700 °/₀. Τὸ ἥμισυ τῆς τιμῆς του ἐπλήρωσεν ἀμέσως καὶ ἐκέρδισεν ἔκπτωσιν 8% ἐπ' αὐτῆς. Διὰ τὸ ἕτερον ἥμισυ ἐπλήρωσε μετὰ 8 μῆνας 104000 δρχ. συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ τόκου πρὸς 6 °/₀. Τί ποσὸν ἐν ὅλῳ ἐπληρώθη διὰ τὸ οἰκόπεδον καὶ ποία ἡ τιμὴ τοῦ στρέμματος;

392. Τέσσαρες ἀδελφοὶ ἐμοιράσθησαν κληρονομίαν ἐκ 540 στρεμμάτων ὡς ἑξῆς : Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων ἔλαβον οἱ ἄλλοι τρεῖς, τῶν ὁποίων τὰ μερίδια ἦσαν ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5. Πόσα στρέμματα ἔλαβεν ἕκαστος;

393. Δύο ἔμποροι ἔκαμον ἐπιχείρησιν. Ὁ α' κατέθεσεν 70 000 δρχ. καὶ ἔλαβε κέρδος 6000 δρχ., ὁ β' κατέθεσεν 80000 δρχ. καὶ τὸ κέρδος του ἦτο 8000 δρχ. Ἐπὶ πόσον χρόνον ἔμειναν τὰ χρήματα τοῦ β' εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, ἐὰν τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν 6 μῆνας;

ΜΕΡΟΣ Β'

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

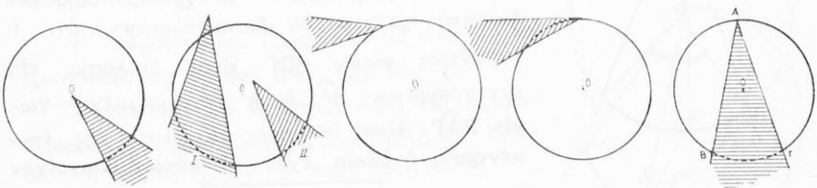
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Α. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

§ **1.** *Χαράξατε ἐπὶ τοῦ χάρτου σας ἕνα κύκλον καὶ μίαν κυρτὴν γωνίαν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου σας. Ἀποκόψατε τὴν γωνίαν καὶ σχεδιάσατε τὰς διαφόρους θέσεις, τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ αὐτὴ ἐν σχέσει πρὸς τὸν κύκλον.*

Περιγράφομεν μερικὰς ἐκ τῶν θέσεων τούτων :



1α 1β 1γ 1δ 1ε

σχ. 1.

Ἡ γωνία τοῦ σχήματος 1α ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία αὐτή, ὡς ἔχομεν μάθει εἰς τὴν Α' τάξιν, λέγεται **ἐπίκεντρος**. Αἱ γωνίαι τοῦ σχήματος 1β δὲν ἔχουν τὴν κορυφήν των ἐπὶ τοῦ κύκλου καὶ ἡ μὲν (Ι) ἔχει αὐτὴν εἰς τὸ ἐξωτερικόν, ἡ δὲ (ΙΙ) εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία τοῦ σχήματος 1γ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐπὶ τοῦ κύκλου καὶ αἱ πλευραί της εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνίας τοῦ σχήματος 1δ ἀποκόπτει χορδὴν καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς χορδῆς.

Ἡ γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ τοῦ σχήματος 1ε ἔχει τὴν κορυφήν της ἐπὶ τοῦ κύκλου καὶ αἱ πλευραί της τέμνουν αὐτόν. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὸν κύκλον.

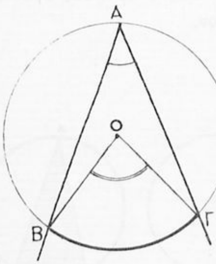
Ὥστε : **Ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία, ὀνομάζεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της ἐπὶ τοῦ κύκλου καὶ αἱ πλευραί της τέμνουν αὐτόν.**

Τὸ τόξον $\overset{\frown}{ΒΓ}$, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας αὐτῆς, λέγεται **ἀντίστοιχον τόξον τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας**. (Σχῆμα 1ε).

Τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{ΒΟΓ}$, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς ἐγγεγραμμένης, ἀντίστοιχον τόξον, λέγομεν **ἀντίστοιχον ἐπίκεντρον** τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ (σχῆμα 1ε).

§ 2. Σχέσις τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας πρὸς τὴν ἐπίκεντρον, τὴν ἔχουσαν τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον.

Χαράξατε ἕνα κύκλον, μίαν ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸν γωνίαν καὶ τὴν ἐπίκεντρον, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον. Συγκρίνατε τὰς δύο αὐτὰς γωνίας. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 2)



σχ. 2.

Ἔστω κύκλος (Ο, **R**) καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὸν γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$. Χαράσσομεν τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς ἐπίκεντρον γωνίαν $\widehat{ΒΟΓ}$.

Ἐὰν μετρήσωμεν ἢ χρησιμοποιήσωμεν διαφανῆ χάρτην θὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{ΒΟΓ}$ εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης $\widehat{ΒΑΓ}$ ἢ **ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον**. Ἤτοι $\boxed{\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\widehat{ΒΟΓ}}$. Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της συμπεραίνομεν, ὅτι **ἡ τιμὴ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς τιμῆς τοῦ ἀντιστοίχου τόξου αὐτῆς.**

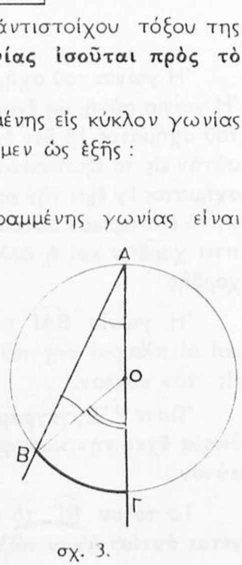
Διὰ νὰ αἰτιολογήσωμεν τὴν σχέσιν τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον γωνίας πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς ἐπίκεντρον, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

α΄ περίπτωσις. Μία τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου: (Σχῆμα 3). Ἔστω κύκλος (Ο, **R**), ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὸν γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{ΒΟΓ}$. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{ΒΟΓ}$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΒ. Ἑπομένως $\widehat{ΒΟΓ} = \widehat{ΒΑΓ} + \widehat{ΑΒΟ}$ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{ΑΒΟ} = \widehat{ΒΑΓ}$, ἔχομεν $\widehat{ΒΟΓ} = 2 . \widehat{ΒΑΓ}$ ἄρα

$$\boxed{\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\widehat{ΒΟΓ}}$$

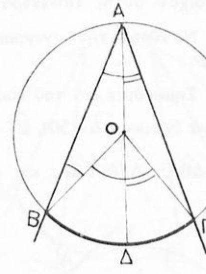
Ἤτοι: ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου $\widehat{ΒΟΓ}$.



σχ. 3.

β' Περίπτωσις. Ἔστω ὅτι τὸ κέντρον Ο εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$. (Σχ. 4).

Χαράσσομεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ καὶ σχηματίζονται δύο ἐγγεγραμμέναι γωνίαι αἱ $\widehat{ΒΑΔ}$ καὶ $\widehat{ΔΑΓ}$, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν, (ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν α' περίπτωσιν):



σχ. 4.

$$\widehat{ΒΑΔ} = \frac{1}{2}\widehat{ΒΟΔ}$$

$$\widehat{ΔΑΓ} = \frac{1}{2}\widehat{ΔΟΓ}$$

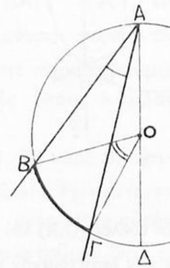
Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\widehat{ΒΑΔ} + \widehat{ΔΑΓ} = \frac{1}{2}(\widehat{ΒΟΔ} + \widehat{ΔΟΓ}) \quad \text{ἤτοι}$$

$$\boxed{\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\widehat{ΒΟΓ}}$$

γ' περίπτωσις. Τὸ κέντρον Ο εἶναι εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$. (Σχ. 5).

Χαράσσομεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ καὶ σχηματίζομεν τὰς ἐγγεγραμμένας γωνίας $\widehat{ΒΑΔ}$ καὶ $\widehat{ΓΑΔ}$, διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν (α' περίπτωσις):



σχ. 5.

$$\widehat{ΒΑΔ} = \frac{1}{2}\widehat{ΒΟΔ}$$

$$\widehat{ΓΑΔ} = \frac{1}{2}\widehat{ΓΟΔ}.$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν:

$$\widehat{ΒΑΔ} - \widehat{ΓΑΔ} = \frac{1}{2}(\widehat{ΒΟΔ} - \widehat{ΓΟΔ}).$$

Συνεπῶς $\boxed{\widehat{ΒΑΓ} = \frac{1}{2}\widehat{ΒΟΓ}}$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι: **Κάθε ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον.**

Παρατηρήσεις

1) Κάθε ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία εἶναι πάντοτε **κυρτὴ** γωνία.

2) Ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην δύναται νὰ εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ γωνία.

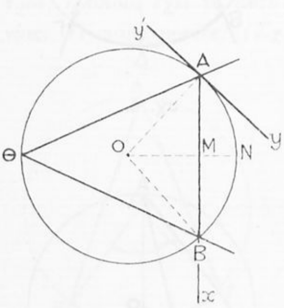
Ἀσκήσεις

1. Μία ἐπίκεντρος γωνία εἶναι 120^{0}. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ μὲ τὴν ἐπίκεντρον ἀντίστοιχον τόξον.

2. Ἐὰν μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $23^{\circ}\,30'$, νὰ εὕρητε εἰς μοίρας καὶ εἰς μέρη ὀρθῆς τὴν ἀντίστοιχον αὐτῆς ἐπίκεντρον γωνίαν.

3. Νὰ εὕρητε τὴν ἐγγεγραμμένην γωνίαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχον τόξον α) 35°, β) 42° γ) 192°.

4. Σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο, R) τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν $\overset{\frown}{ΑΔ}=50^{\circ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}=110^{\circ}$, $\overset{\frown}{ΓΔ}=70^{\circ}$. Νὰ ὑπολογίσητε τὰς γωνίας $Β\hat{Α}Γ$, $Β\hat{Δ}Γ$, $Γ\hat{Α}Δ$, $Γ\hat{Β}Δ$, $Δ\hat{Β}Α$, $Δ\hat{Γ}Α$, $Β\hat{Δ}Α$, καὶ $Α\hat{Γ}Β$.



σχ. 6.

5. Δίδεται κύκλος (Ο, R). Χαράσσομεν δύο χορδὰς αὐτοῦ ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου. Νὰ συγκρίνητε τὴν τιμὴν τῆς γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ Ε, πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν αὐτῆς. (Ὑπόδειξις: Χαράξατε τὴν ΑΓ).

6. Δίδεται κύκλος (Ο, R). Χαράσσομεν δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι τέμνουν αὐτὸν ἀντιστοίχως εἰς τὰ Β, Γ καὶ Α, Δ καὶ συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Ζ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου. Νὰ συγκρίνητε τὴν τιμὴν τῆς γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ Ζ, πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν τιμῶν τῶν τόξων τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς. (Ὑπόδειξις: Χαράξατε τὴν ΑΓ ἢ ΒΔ).

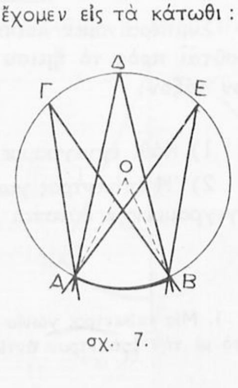
7. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καὶ μία χορδὴ αὐτοῦ ΑΒ (σχ. 6). Εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς (π. χ. τὸ Α) χαράξατε τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου ψ'Αψ. Νὰ συγκρίνητε τὴν γωνίαν $\widehat{ψΑΒ}$, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην $Α\hat{Θ}Β$, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχον τόξον τὸ $\overset{\frown}{ΑΝΒ}$. (Ὑπόδειξις: Συγκρίνατε τὰς γωνίας αὐτὰς πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου $Β\hat{Ο}Α$. Διατυπώσατε τὴν σχετικὴν πρότασιν).

§ 3. Ἐφαρμογαὶ τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν

Ἀμέσους ἐφαρμογάς, τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἔχομεν εἰς τὰ κάτωθι:

1. Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ αἱ ἐγγεγραμμέναι εἰς αὐτὸν γωνίαι $Α\hat{Γ}Β$, $Α\hat{Δ}Β$, $Α\hat{Ε}Β$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον $\overset{\frown}{ΑΒ}$. Συγκρίνατε αὐτάς. (Σχ. 7)

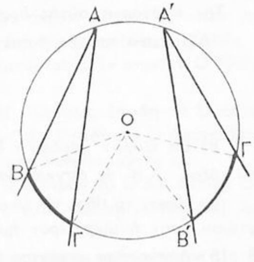
Αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι, διότι κάθε μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου γωνίας $Α\hat{Ο}Β$. Ἤτοι $Α\hat{Γ}Β = Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Ε}Β = \frac{1}{2}Α\hat{Ο}Β$.



σχ. 7.

Ἄρα: **Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον, εἶναι ἴσαι.**

2. Ἔχομεν τὰς ἐγγεγραμμένας, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον Ο, γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ καὶ $\widehat{B'A'\Gamma'}$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα ἴσα, $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$. Νὰ συγκρίνητε αὐτάς. (Σχ. 8).



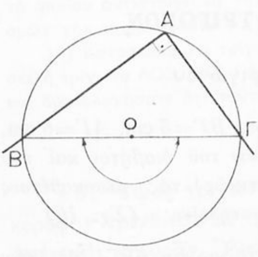
σχ. 8.

Εἰς τὰς γωνίας αὐτὰς ἔχομεν τὰς ἰσότητας $\widehat{BA\Gamma} = \frac{1}{2}\ \widehat{BO\Gamma}$ καὶ $\widehat{B'A'\Gamma'} = \frac{1}{2}\ \widehat{B'O\Gamma'}$. Ἐπειδὴ $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$, ἔχομεν $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{B'O\Gamma'}$, ὁπότε καὶ $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$, ὡς ἡμίση ἴσων γωνιῶν.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (ἢ εἰς ἴσους κύκλους), δύο ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἴσα τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα, εἶναι ἴσαι.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{B'A'\Gamma'}$ εἶναι ἴσαι, ἤτοι $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$, θὰ εἶναι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι αὐτῶν ἴσαι ἤτοι $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{B'O\Gamma'}$ καὶ συνεπῶς $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$. Ὥστε παρατηροῦμεν ὅτι: **Δύο ἴσαι ἐγγεγραμμέναι, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (ἢ εἰς ἴσους κύκλους), γωνίαι ἔχουν ἴσα ἀντίστοιχα τόξα.**

*3. Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὸν γωνία $\widehat{BA\Gamma}$, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχον τόξον ἴσον **πρὸς** ἓν ἡμικύκλιον· **μετρήσατε αὐτὴν** (Σχ. 9).*



σχ. 9.

Διὰ μετρήσεως διαπιστοῦμεν ὅτι αὐτὴ εἶναι 90^0 (ἢ 1 ὀρθ.).

Αὐτὸ δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς : Ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία εἶναι μία **εὐθεῖα γων**ία. Ἤτοι $\widehat{BA\Gamma} = \frac{1}{2}\ \widehat{BO\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 2$ ὀρθ. $= 1$ ὀρθή

Κάθε ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία, τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἶναι ἓν ἡμικύκλιον, εἶναι ὀρθή.

Σημείωσις :

Τὴν πρότασιν τῆς § 2 : «Κάθε ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον», ἐδικαιολογήσαμεν μὲ τὴν βοήθειαν ἄλλων προτάσεων, γνωστῶν ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως.

Τὸ αὐτὸ ἐπανελάβομεν εἰς τὰς προτάσεις 1, 2, 3, τῆς § 3.

Τὴν ἐργασίαν αὐτὴν ὀνομάζομεν **ἀπόδειξιν** καὶ τὰς προτάσεις, **θεωρήματα**.

Ὥστε :

Θεώρημα εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἀποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν.

Εἰς τὴν Α′ τάξιν ἐγνωρίσαμεν βασικὰς προτάσεις, τὰς ὁποίας δὲν ἀπεδείξαμεν, ὡς π.χ.

τήν: «διὰ δύο σημείων διέρχεται μία καὶ μόνον εὐθεῖα» ἢ τὴν: «ἐκ σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, διέρχεται μία μόνον παράλληλος πρὸς αὐτήν.»

Τὰς προτάσεις αὐτὰς ὀνομάζομεν **ἀξιώματα.** Ὥστε:

Ἀξίωμα εἶναι μία βασικὴ πρότασις, τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ.

Ἀσκήσεις

8) Εἰς κύκλον χαράξατε δύο καθέτους διαμέτρους ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{A'B'}$ νὰ συγκριθῶσιν αἱ γωνίαι $\widehat{AMB}$ καὶ $\widehat{B'MA}$.

9. Εὕρετε τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον, μὲ ἀντίστοιχον τόξον μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον ἡμικυκλίου.

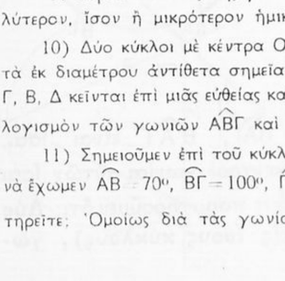
10) Δύο κύκλοι μὲ κέντρα Ο καὶ Ο΄ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἔστωσαν Γ καὶ Δ τὰ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα τοῦ Α ὡς πρὸς τοὺς κύκλους αὐτούς. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Β, Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ συγκρίνατε τὰ εὐθ. τμήματα ΟΟ΄ καὶ ΓΔ. (Σημ. Μὲ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{AB\Delta}$ θὰ βοηθηθῆτε διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως).

11) Σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο, R) τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν $\widehat{AB}=70^o$, $\widehat{B\Gamma}=100^o$, $\widehat{\Gamma\Delta}=110^o$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A\Delta\Gamma}$. Τί παρατηρεῖτε; Ὁμοίως διὰ τὰς γωνίας $\widehat{BA\Delta}$ καὶ $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

Β΄. ΕΥΘΕΙΑΙ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΑΙ ΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

1ον. Μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου

§ **4.** *Κατασκευάσατε ἓν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς* **ΒΓ=5 cm, ΑΓ=6 cm, ΑΒ=4 cm.** *Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος χαράξατε (προσεκτικῶς) τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν του. Τί παρατηρεῖτε;» (Σχ. 10)*



σχ. 10.

Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος χαράσσομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὰς μεσοκαθέτους ε_1, ε_2, ε_3 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὐταὶ **συντρέχουν** εἰς ἓν σημεῖον Ο.

Συγκρίνομεν, διὰ τοῦ διαβήτου, τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράψωμεν κύκλον, αὐτὸς διέρχεται διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λέγεται **περιγεγραμμένος** περὶ τὸ τρίγωνον κύκλος.

Ἄρα: **Αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.**

Διὰ νὰ **αἰτιολογήσωμεν** τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα, στηριζόμεθα εἰς τὴν γνωστήν μας πρότασιν:

«Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου εὐθ. τμήματος ἰσαπέχει τῶν ἄκρων αὐτοῦ» καὶ «κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων εὐθ. τμήματος κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου αὐτοῦ».

Αἱ μεσοκάθετοι ε_1 καὶ ε_2 τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ αὐτοῦ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ο (διότι αἱ κάθετοι πρὸς αὐτὰς ΑΓ καὶ ΒΓ τέμνονται).

Ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ε_1, ἔχομεν ΟΒ = ΟΓ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ε_2, ἔχομεν καὶ ΟΓ = ΟΑ. Συνεπῶς ΟΑ = ΟΒ. Ἐπειδὴ τὸ Ο ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου αὐτῆς ε_3.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράψωμεν κύκλον, αὐτὸς διέρχεται διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λέγεται **περιγεγραμμένος** περὶ τὸ τρίγωνον κύκλος.

Ὥστε: **Αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.**

Ἀσκήσεις

12) Νὰ χαράξητε τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἑνὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσητε διὰ τὴν θέσιν τοῦ κέντρου τῶν περιγεγραμμένων περὶ αὐτὰ κύκλων;

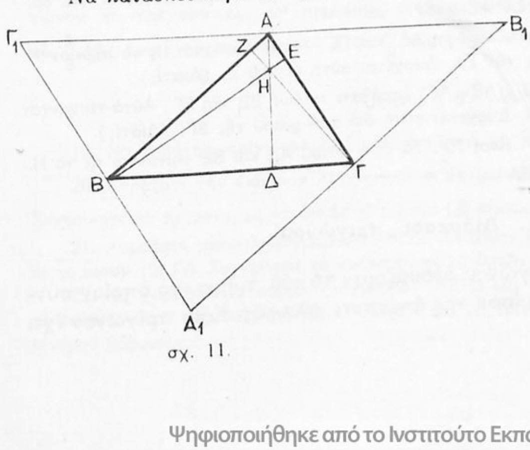
13) Χαράξατε τὰς μεσοκαθέτους τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν βάσιν αὐτοῦ. Τί παρατηρεῖτε; (Δικαιολογήσατε διὰ συλλογισμῶν τὴν παρατήρησίν σας).

14) Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ βάσεις τὰς πλευρὰς αὐτοῦ κατασκευάσατε τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΚΓ, ΓΛΑ καὶ χαράξατε τὰ ὕψη αὐτῶν ΟΟ', ΚΚ', ΛΛ'. Προεκτείνατε αὐτὰ καὶ δικαιολογήσατε ὅτι ταῦτα συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2ον. Ὕψη ἑνὸς τριγώνου

§ 5. Ὕψος τριγώνου ὀνομάζομεν τὸ εὐθύγρ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει κορυφὴν τριγώνου μὲ τὸ ἴχνος τῆς, ἐκ τῆς κορυφῆς ταύτης, καθέτου πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν. Ὕψος ὅμως θεωρεῖται καὶ ὁ φορεὺς τοῦ τμήματος τούτου. Κάθε τρίγωνον ἔχει, ἑπομένως, τρία ὕψη.

Νὰ κατασκευάσητε ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, μὲ πλευρὰς ΑΒ = 3,5 cm, ΒΓ = 4 cm καὶ ΑΓ = 2,5 cm. Χαράξατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 11).



σχ. 11.

Χαράσσομεν μετὰ προσοχῆς τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὰ τρία ὕψη **συντρέχουν** εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Η, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **ὀρθόκεντρον** τοῦ τριγώνου. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν πρότασιν: **Τὰ ὕψη τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.**

Ἐὰν ἐπιθυμοῦμεν νὰ **αἰτιολογήσωμεν** διὰ συλλογισμῶν αὐτὴν τὴν παρατήρησιν, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: (Σχ. 11).

Χαράσσομεν τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου καὶ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ. Αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$.

Ἔχομεν: $\left.\begin{array}{l} AB_1 // B\Gamma \\ \Gamma B_1 // AB \end{array}\right\} \Longrightarrow AB\Gamma B_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Longrightarrow AB_1 = B\Gamma$

καὶ $\left.\begin{array}{l} B\Gamma_1 // A\Gamma \\ A\Gamma_1 // B\Gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow A\Gamma_1 B\Gamma$ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Longrightarrow A\Gamma_1 = B\Gamma$

Ἐπομένως $AB_1 = A\Gamma_1$. Ἄρα τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ μέσον τῆς $B_1\Gamma_1$. Τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ΑΒΓ (κάθετον) πρὸς τὴν ΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν παράλληλόν της $B_1\Gamma_1$ εἰς τὸ μέσον της Α. Ἤτοι ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς $B_1\Gamma_1$ τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. Ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν Γ_1A_1, A_1B_1 τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Αἱ μεσοκάθετοι ὅμως τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$, ὡς εἶναι ἤδη γνωστόν, συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον Η. Ἄρα καὶ τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ **συντρέχουν** εἰς ἓν σημεῖον Η, τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγ. ΑΒΓ. Ὥστε. **Τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον.**

Παρατηρήσεις

1) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, ἐπειδὴ δύο ὕψη του εἶναι αἱ κάθετοι πλευραί του, τὸ ὀρθόκεντρόν του εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.

2) Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον τὸ ὀρθόκεντρόν του κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ καὶ ὅταν εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς τὸ ἐξωτερικόν του.

Ἀσκήσεις

15. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ εὕρητε τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ Η. Νὰ ὁρίσητε τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΗ, ΒΓΗ καὶ ΓΑΗ.

16. Εἰς τρίγωνον ΔΕΖ χαράξατε τὰ ὕψη ΔΔ′ καὶ ΕΕ′. Αὐτὰ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἐκ τοῦ Η χαράξατε κάθετον πρὸς τὴν ΕΔ. Διέρχεται αὐτὴ ἐκ τοῦ Ζ; (Διατί;)

17) Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) χαράξατε τὰ ὕψη ΒΒ′ καὶ ΓΓ′. Αὐτὰ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Η. Φέρομεν τὴν ΑΗ. Διέρχεται αὐτὴ διὰ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ; (Διατί;).

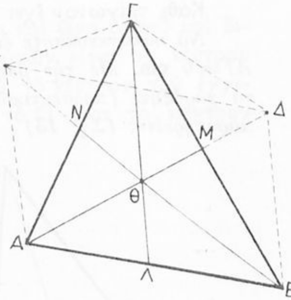
18) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι 70°. Τὰ ὕψη αὐτοῦ ΑΔ καὶ ΒΕ τέμνονται εἰς τὸ Η. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι $\widehat{HBA}$ καὶ $\widehat{H\Gamma A}$.

3ον. Διάμεσοι τριγώνου

§ 6. **Διάμεσον** ἑνὸς τριγώνου ὀνομάζομεν τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει μίαν κορυφήν του μὲ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς διαμέσους.

Νὰ κατασκευάσητε ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ΑΒ=4 cm, ΒΓ=5 cm καὶ ΑΓ=6 cm. Χαράξατε μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων τὰς διαμέσους **αὐτοῦ** *(μετὰ προσοχῆς). Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 12)*

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ χαράσσομεν τὰς διαμέσους ΑΜ, ΒΝ καὶ ΓΛ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὐταὶ **συντρέχουν** εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Θ. Ἐὰν συγκρίνωμεν μὲ τὸν διαβήτην τὰ εὐθ. τμήματα ΑΘ καὶ ΘΜ, τὰ ΒΘ καὶ ΘΝ, καθὼς καὶ τὰ ΓΘ καὶ ΘΛ, θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ΑΘ = 2ΘΜ καὶ ΘΜ = $=\frac{1}{3}$ΑΜ (ἢ ΑΘ = $\frac{2}{3}$ΑΜ). Ὁμοίως ἔχομεν ΝΘ= $\frac{1}{3}$ ΒΝ καὶ ΘΛ= $\frac{1}{3}$ ΓΛ.



σχ. 12.

Ἑπομένως: **Αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κέντρον βάρους αὐτοῦ καὶ ἀπέχει τοῦ μέσου ἑκάστης πλευρᾶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. (ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ἀπὸ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς).**

Δυνάμεθα νὰ **αἰτιολογήσωμεν** τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΜ καὶ ΒΝ (πέρα τῶν Μ καὶ Ν) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΜΔ=ΜΘ καὶ ΝΕ=ΝΘ. Χαράσσομεν τὰς ΓΕ καὶ ΓΔ. Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΓΘΒΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται. (ΓΜ=ΜΒ καὶ ΘΜ=ΜΔ). Ὁμοίως καὶ τὸ ΓΘΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ΓΝ=ΝΑ καὶ ΘΝ=ΝΕ. Συνεπῶς ΒΔ=//ΓΘ καὶ ΑΕ=//ΓΘ. Ἄρα ΒΔ=//ΑΕ. Ὥστε τὸ ΑΒΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους. Τότε ὅμως ἔχομεν ΑΘ=ΘΔ καὶ ΒΘ=ΘΕ (διότι αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται). Ἀλλὰ ΘΔ=2ΘΜ, ὥστε ΑΘ=2ΘΜ καὶ ΘΜ = $\frac{1}{3}$ ΑΜ. Ὁμοίως συμπεραίνομεν ὅτι ΘΝ=$\frac{1}{3}$ΒΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ διάμεσος ΓΛ τέμνει τὴν ΒΝ εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ Ν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ΒΝ, δηλαδὴ εἰς τὸ σημεῖον Θ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ Λ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ΓΛ. Ὥστε: **Αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον. Τοῦτο ἀπέχει τοῦ μέσου ἑκάστης πλευρᾶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ἀπὸ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς.**

Ἀσκήσεις

19. Νὰ χαράξητε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ εὕρητε τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ.

20. Χαράξατε τὴν διάμεσον ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ. Λάβετε ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΘ= $\frac{2}{3}$ ΑΜ. Συγκρίνατε τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ΒΘ καὶ ΓΘ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ αὐτοῦ.

21. Χαράξατε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἑνώσατε δι' εὐθ. τμημάτων τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον τῆς ΓΔ. Συγκρίνατε τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ΑΜ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ΒΔ.

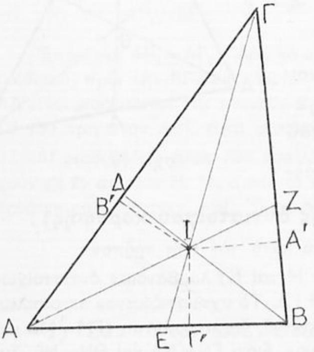
22. Νὰ χαράξητε ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ νὰ λάβητε ἓν τυχὸν σημεῖον Ν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου. Δείξατε ὅτι τὰ τρίγωνα ΝΑΓ καὶ ΝΒΔ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

4ον. Διχοτόμοι τριγώνου.

§ 7. **Διχοτόμον** ἐσωτερικὴν ἑνὸς τριγώνου καλοῦμεν τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας αὐτοῦ. Διχοτόμον καλοῦμεν καὶ τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς μέχρι τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, τμῆμα τῆς προηγουμένης.

Κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἐσωτερικὰς διχοτόμους.

Νὰ κατασκευάσητε ἓν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ = 4 cm, ΒΓ = 5 cm, ΑΓ = 6 cm. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων (διαβήτου - κανόνος) νὰ χαράξητε (προσεκτικῶς) τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 13)



σχ. 13.

Κατασκευάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ χαράσσομεν τὰς διχοτόμους τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

Παρατηροῦμεν δὲ (ἐὰν ἡ κατασκευὴ ἔχῃ γίνει μετὰ προσοχῆς), ὅτι αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι αὐτοῦ **συντρέχουν** εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ι.

Φέρομεν τὰς ἀποστάσεις ΙΑ', ΙΒ', ΙΓ' τοῦ σημείου Ι ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Συγκρίνομεν αὐτὰς διὰ τοῦ διαβήτου καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΙΑ' = ΙΒ' = ΙΓ'.

Ἑπομένως: **Αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Δυνάμεθα νὰ **αἰτιολογήσωμεν** διὰ συλλογισμῶν τὴν παρατήρησιν αὐτὴν στηριζόμενοι εἰς τὰς γνωστὰς ἰδιότητας: «Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν αὐτῆς», καὶ «κάθε σημεῖον, ἐσωτερικὸν γωνίας, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν αὐτῆς, εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης».

Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΖ τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΒΔ τῆς γωνίας $\widehat{Β}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΖ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΖ αὐτοῦ εἰς ἓν σημεῖον Ι.

Σημειοῦμεν διὰ τῶν Α',Β',Γ' τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Ι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Τὸ σημεῖον Ι, ἐπειδὴ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΖ τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ ἀπέχει ἴσον τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Εἶναι ὅμως καὶ σημεῖον τῆς διχοτόμου ΒΔ, ἄρα ἰσαπέχει τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. Ὥστε ἀπέχει ἴσον καὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ Ι εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἕπεται ὅτι τὸ Ι κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΓΕ, τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὥστε: **Αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι παντὸς τριγώνου συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**

Παρατήρησις

Ἐκ τῆς ἰσότητος ΙΓ' = ΙΒ' = ΙΑ' **τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ι ἀπὸ τῶν πλευρῶν**, παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον αὐτὸ Ι καὶ ἀκτῖνα ΙΑ' -

$=$IB′$=$IΓ′ γράψωμεν κύκλον, αὐτὸς θὰ ἐφάπτεται τῶν **πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Α′,Β′,Γ′ (διατί;).** Ὥστε τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συντρέχουν αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ λέγεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ τρίγωνον κύκλος.

2) Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον αἱ διάμεσοι εἶναι καὶ ὕψη αὐτοῦ καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του. Ἄρα τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν εἶναι τὸ κέντρον βάρους του, τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ. Λέγομεν ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ **κέντρον** τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Σημ. Αἱ προτάσεις τῶν § 4, 5, 6, 7 εἶναι θεωρήματα.

Ἀσκήσεις

23) Κατασκευάσατε ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ εὕρετε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων. Ἐξηγήσατε διατὶ τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

24) Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἀντιστοίχως 60° καὶ 50°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $\widehat{BI\Gamma}$ (τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων ΒΙ, ΙΓ αὐτοῦ). (Σχ. 14)

25) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A}=90°$) χαράξατε τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἂν Ι εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν, μετρήσατε τὴν γωνίαν $\widehat{BI\Gamma}$. Δύνασθε νὰ δικαιολογήσητε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό;

26) Κατασκευάσατε κύκλον (Ο, R=2 cm). Χαράξατε τρεῖς ἐφαπτομένας αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Ἐκ ποίου σημείου διέρχονται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ;

σχ. 14.

27) Κατασκευάσατε τετράγωνον ΑΒΓΔ. Φέρατε τὴν διαγώνιον ΑΓ αὐτοῦ καὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{B\Gamma A}$. Τέμνονται αὐταὶ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ τοῦ τετραγώνου. Διατί;

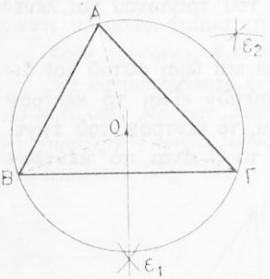
§ 8. Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου. Κατασκευή.

Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ χαράξατε κύκλον, διερχόμενον διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

Ἐξ ὅσων εἴπομεν εἰς τὴν § 4 ὑπάρχει εἷς κύκλος, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α,Β,Γ τριγώνου ΑΒΓ. Τοῦτον ὠνομάσαμεν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τρίγωνον κύκλον. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον του, τότε ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. (ὡς ἀκτῖνες).

Τὸ κέντρον Ο ἑπομένως εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συντρέχουν αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Κατασκευή :



σχ. 15.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ· χαράσσομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος τὰς μεσοκαθέτους ε_1 καὶ ε_2 τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ αὐτοῦ. Αἱ ε_1 καὶ ε_2 τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ο (καὶ ἓν μόνον), τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου, διότι ἔχομεν ΟΒ = ΟΓ ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ε_1 καὶ ΟΓ = ΟΑ ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ε_2. Ἑπομένως ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

Ἄρα, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ χαράξωμεν κύκλον (Ο, ΟΑ), αὐτὸς θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλος.

Ἐὰν τώρα προσπαθήσωμεν νὰ χαράξωμεν καὶ ἄλλον περιγεγραμμένον περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὐτὸς ταυτίζεται μὲ τὸν πρῶτον (διότι αἱ ε_1 καὶ ε_2 τέμνονται εἰς ἓν μόνον σημεῖον).

Ὥστε: **Ὑπάρχει εἷς κύκλος καὶ μόνον εἷς, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν τριγώνου.** Αὐτὸς λέγεται **περιγεγραμμένος** περὶ τὸ τρίγωνον κύκλος.

Τὸ κέντρον του Ο εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συντρέχουν αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. **Ἀκτίς του R** εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ μίαν κορυφήν του.

§ 9. Ἐγγεγραμμένος εἰς τρίγωνον κύκλος. Κατασκευή.

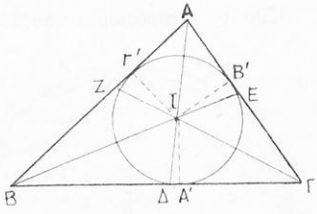
Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ χαράξητε κύκλον ἐφαπτόμενον καὶ τῶν τριῶν πλευρῶν του, ἐσωτερικῶς.

Ἐξ ὅσων εἴπομεν εἰς τὴν § 7 ὑπάρχει κύκλος, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τὸ κέντρον Ι τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συντρέχουν αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ὁ κύκλος αὐτὸς λέγεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ τρίγωνον κύκλος.

Κατασκευή :

Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος χαράσσομεν τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου. (Σχ. 16)

Αὐταὶ ὅπως γνωρίζομεν (§ 7), συντρέχουν εἰς ἓν σημεῖον Ι.



σχ. 16.

Μὲ κέντρον τὸ Ι καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ι ἀπὸ τῆς ΒΓ, τὴν ΙΑ', χαράσσομεν κύκλον (Ι, ΙΑ') ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται εἰς τὸ Α' τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Ὁ κύκλος αὐτὸς ἐφάπτεται καὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, διότι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀποστάσεις ΙΓ', ΙΒ' ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἔχομεν ὡς ἐμάθομεν, ΙΒ' = ΙΓ' = ΙΑ'. Ἄρα ὁ κύκλος (Ι, ΙΑ'), εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, διότι αἱ πλευραί του εἶναι κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΙΑ', ΙΒ', ΙΓ'.

Ἐὰν ἐπιχειρήσωμεν νὰ χαράξωμεν καὶ ἄλλον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλον, αὐτὸς θὰ ταυτισθῇ μὲ τὸν πρῶτον (διότι αἱ διχοτόμοι ΓΖ, ΒΕ εἰς ἓν μόνον σημεῖον τέμνονται).

Ὥστε: **Ὑπάρχει εἷς κύκλος καὶ μόνον εἷς ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τὸ κέντρον του Ι** εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συντρέχουν αἱ τρεῖς ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τοῦ τριγώνου. **Ἀκτὶς αὐτοῦ ρ**, εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν του.

Ἀσκήσεις

28) Κατασκευάσατε ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς 4 cm καὶ χαράξατε τὸν περιγεγραμμένον περὶ αὐτὸ κύκλον.

29. Κατασκευάσατε ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς μήκους 5 cm καὶ χαράξατε τὸν ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸ κύκλον.

30) Νὰ χαράξητε τὸν περιγεγραμμένον κύκλον περὶ ἓν ὀρθογώνιον καὶ περὶ ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον.

31) Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ χαράξατε τὸν περιγεγραμμένον περὶ αὐτὸ κύκλον. Εὕρετε τὸ συμμετρικὸν τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ὡς πρὸς τὰς πλευράς. Τί παρατηρεῖτε;

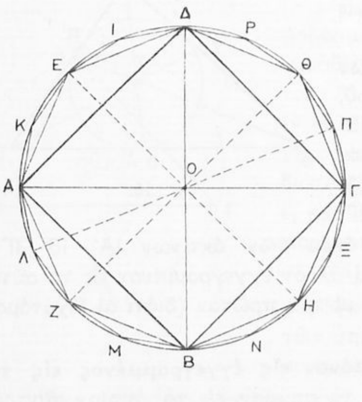
32. Λάβετε τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατασκευάσατε, τὸν διερχόμενον δι' αὐτῶν κύκλον.

Γ. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΥΚΛΟΥ ΕΙΣ 2^{ν} ($\nu \in N$ καὶ $\nu > 1$) ἢ $3 \cdot 2^{\nu}$ (ἔνθα ν ἀκερ.) ΙΣΑ ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

§ **10**. *Κατασκευάσατε κύκλον* (Ο, R) *καὶ διαιρέσατε αὐτὸν εἰς 4 ἴσα τόξα. Ἐν συνεχείᾳ διαιρέσατε τὸν κύκλον εἰς 8, 16, ... ἴσα τόξα καὶ ἑνώσατε δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰ σημεῖα ἑκάστης διαιρέσεως αὐτοῦ. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 17).*

Χαράσσομεν κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος R.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν κύκλον αὐτὸν εἰς 4 ἴσα τόξα φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους, τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ. Αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι $\widehat{A O B}$, $\widehat{B O \Gamma}$, $\widehat{\Gamma O \Delta}$, $\widehat{\Delta O A}$ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί. Ἑπομένως καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἤτοι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$.



σχ. 17.

Χαράσσομεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ ὁρίζομεν οὕτως ἓν κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας ἤτοι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ (χορδαὶ ἴσων τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου) καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$ ὡς ὀρθὰς (γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλιον). Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ λέγεται **κανονικὸν τετράπλευρον ἢ τετράγωνον.**

Ὥστε: **Κανονικὸν πολύγωνον λέγεται τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας.** Τὸ μῆκος μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ, συμβολίζομεν μὲ τὸ λ.

Ἐὰν χαράξωμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{A O B}$, $\widehat{B O \Gamma}$, $\widehat{\Gamma O \Delta}$, $\widehat{\Delta O A}$, ὁ κύκλος διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα τόξα (ἀντίστοιχα ἴσων ἐπικέντρων γωνιῶν). Φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων αὐτῶν καὶ ἐπιτυγχάνομεν τὴν κατασκευὴν ἑνὸς κυρτοῦ ὀκταγώνου. Τὸ ὀκτάγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν, διότι ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας, ὡς χορδὰς ἴσων τόξων, καὶ τὰς γωνίας του ἴσας, ἐπειδὴ ἑκάστη τούτων εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἔχει ἀντίστοιχον τόξον ἴσον πρὸς τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κύκλου.

Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον διαιροῦμεν τὸν κύκλον εἰς 16 ἴσα τόξα, 32 κ.λ.π. καὶ ὁρίζομεν κανονικὸν δεκαεξάγωνον, ἔπειτα κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον μὲ 32 πλευρὰς κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν προηγουμένων κατασκευῶν λέγομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸν κύκλον, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, εἰς $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5, \ldots, 2^\nu$ ἴσα τόξα καὶ νὰ ὁρίσωμεν οὕτω κανονικὰ κυρτὰ πολύγωνα μὲ $2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^\nu$ πλευράς.

Ὁ κύκλος (O, R) ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῶν κορυφῶν τῶν κανονικῶν τούτων πολυγώνων λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος,** τὰ δὲ πολύγωνα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν κύκλον αὐτόν. Αἱ ἀκτῖνες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰς κορυφὰς τῶν κανονικῶν πολυγώνων λέγονται **ἀκτῖνες** τούτων.

Ἡ κυρτὴ γωνία δύο διαδοχικῶν ἀκτίνων τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται **κεντρικὴ** γωνία αὐτοῦ καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{360}{\nu}$, ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

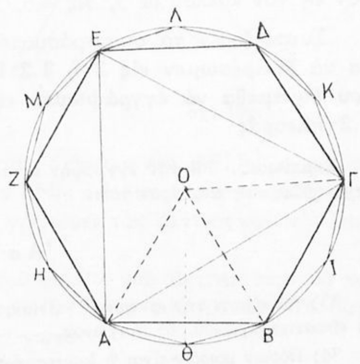
Τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου λέγεται **κέντρον** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ εἶναι ἴσαι (ἀποστάσεις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ ἴσων χορδῶν αὐτοῦ). Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς καλεῖται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὸ μῆκος του συμβολίζεται μὲ τὸ α (π.χ. τοῦ τετραγώνου α_4, τοῦ καν. ἑξαγώνου α_6, κ.ο.κ. Ἀντιστοίχως τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν των συμβολίζεται μὲ λ_4, λ_6, κ.ο.κ.)

Ἐὰν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι κυρτόν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $\Sigma=(\nu-2).2$ ὀρθ. $=(2\nu-4)$ ὀρθ. (ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν του).

Ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, ἑκάστη εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθ. $=\left(2-\frac{4}{\nu}\right)$ ὀρθ.

§ **11**. *Κατασκευάσατε κύκλον (Ο, R) καὶ ἐγγράψατε εἰς αὐτὸν ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον, διὰ διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 6 ἴσα τόξα. Τί παρατηρεῖτε;. (Σχ. 18)*



σχ. 18.

Χαράσσομεν κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος **R**.

Ὑποθέτομεν ὅτι διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἔχομεν διαιρέσει τὸν κύκλον εἰς 6 ἴσα τόξα. Τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΟΑ = ΟΒ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου) καὶ ἔχει τὴν γωνίαν $\widehat{AOB}=\frac{360^0}{6}=60^0$ (κεντρικὴ γωνία). Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι του εἶναι $\widehat{A}=\widehat{B}=\frac{180^0-60^0}{2}=60^0$. Ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἑπομένως ΑΒ = **R**.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν λοιπὸν ἕνα κύκλον εἰς 6 ἴσα τόξα, γράφομεν 6 διαδοχικὰς χορδάς, ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Ἑνώνομεν τὰ σημεῖα διαιρέσεως τοῦ κύκλου Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ καὶ σχηματίζομεν ἓν κυρτὸν ἑξάγωνον. Τοῦτο εἶναι κανονικόν, ὅπως δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν, ἐὰν συγκρίνωμεν τὰς πλευράς του μὲ τὸν διαβήτην καὶ τὰς γωνίας αὐτοῦ μὲ τὸν διαφανῆ χάρτην (ἢ τὸ μοιρογνωμόνιον). Δυνάμεθα ὅμως καὶ νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν διαπίστωσίν μας αὐτὴν μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι αἱ μὲν πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ εἶναι **ἴσαι**, διότι ἐλάβομεν αὐτὰς κατὰ τὴν κατασκευήν του ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι **ἴσαι**, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον μὲ ἀντίστοιχα τόξα ἴσα πρὸς $\frac{4}{6}$ τοῦ κύκλου.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν **δωδεκάγωνον**, διαιροῦμεν αὐτὸν εἰς 12 τόξα ἴσα. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν, χαράσσομεν τὰς διχοτόμους τῶν κεντρικῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἑνώνομεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα διαιρέσεως τοῦ κύκλου καὶ κατασκευάζομεν οὕτω κανονικὸν δωδεκάγωνον (διατί;). Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως, διαιροῦμεν τὸν κύκλον εἰς 24, 48 κ.ο.κ. ἴσα τόξα καὶ ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸν κανονικὸν **εἰκοσιτετράγωνον**, ἔπειτα κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον μὲ 48 πλευρὰς κ.ο.κ. Τέλος συνδέομεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων ἀνὰ δύο τὰς μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς Α, Γ, Ε τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Σχηματίζεται οὕτως ἓν τρίγωνον ΑΓΕ, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον, διότι ΑΓ=ΓΕ=ΕΑ ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων τοῦ κύκλου. Τοῦτο εἶναι τὸ **κανονικὸν τρίγωνον**. Ἐκ τῶν προηγουμένων κατασκευῶν συμπεραίνομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα κύκλον εἰς 3, $3.2=6$, $3.2^2=12$, 3.2^3, 3.2^4,...3.2^ν ἴσα τόξα καὶ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον εἰς τὸν κύκλον μὲ 3, $3.2=6$, $3.2^2=12$, 3.2^3,...3.2^ν πλευράς.

Συνοψίζομεν τὰ συμπεράσματά μας μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι **δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εἰς 2^ν ἢ 3.2^ν ἴσα τόξα τὸν κύκλον καὶ ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς αὐτὸν κανονικὰ πολύγωνα μὲ 2^ν ἢ 3.2^ν πλευράς.**

Σημείωσις. Μὲ τὴν ἐγγραφὴν εἰς τὸν κύκλον καὶ ἄλλων κανονικῶν πολυγώνων, θὰ ἀσχοληθῶμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

Ἀσκήσεις

33) Νὰ εὕρητε τὴν κεντρικὴν γωνίαν, ἑνὸς κανονικοῦ α) πενταγώνου, β) δωδεκαγώνου, γ) εἰκοσιτετραγώνου, δ) τριγώνου.

34) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ α) ὀκταγώνου, β) δεκαεξαγώνου; γ) δωδεκαγώνου;

35) Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι α) 90^o, β) $\frac{1}{2}$ ὀρθ., γ) 30^o καὶ δ) 24^o;

36) Ποῖον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐσωτερικὴ γωνία εἶναι α) 108^o, β) $\frac{4}{3}$ ὀρθ. γ) 135^o, δ) $\frac{5}{3}$ ὀρθ. καὶ ε) 175^o;

37) Χαράξατε ἕνα κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $R=5$ cm. Ἐγγράψατε εἰς αὐτὸν ἓν κανονικὸν εἰκοσιτετράγωνον.

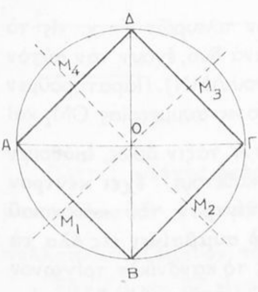
38) Νὰ κατασκευάσητε κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν μήκους 4 cm.

39) Χαράξατε εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 3 cm. Νὰ κατασκευάσητε ἓν κανονικὸν ὀκτάγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ΑΒ, ὡς πλευράν.

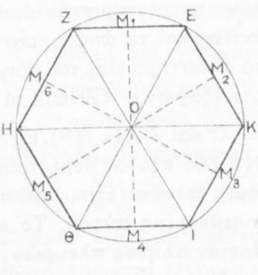
40) Ἐγγράψατε εἰς κύκλον ἀκτῖνος R κανονικὸν ἑξάγωνον. Ἑνώσατε δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ. Ὁρίζεται τότε ἓν νέον ἑξάγωνον. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσητε δι' αὐτό;

§ 12. Στοιχεῖα συμμετρίας ἑκάστου τῶν κανονικῶν πολυγώνων καὶ ὕπαρξις τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὰ κύκλου

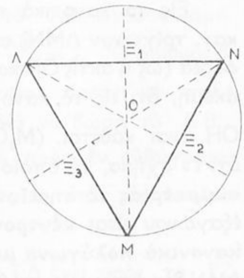
Κατασκευάσατε ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου ἓν τετράγωνον, ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἓν κανονικὸν τρίγωνον καὶ εὕρετε τοὺς ἄξονας συμμετρίας ἑκάστου τούτων. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 19)



σχ. 19α.



σχ. 19β.



σχ. 19γ.

Κατασκευάζομεν ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου τετράγωνον ΑΒΓΔ, κανονικὸν ἑξάγωνον ΕΖΗΘΙΚ καὶ κανονικὸν τρίγωνον ΛΜΝ διὰ διαιρέσεως τριῶν κύκλων ἀντιστοίχως εἰς 4, 6 καὶ 3 ἴσα τόξα καὶ γράφομεν τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰ ἀποστήματά των.

Ἐὰν διπλώσωμεν αὐτὰ κατὰ μῆκος τοῦ φορέως μιᾶς ἀκτῖνος των, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ δύο τμήματα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ταυτίζονται. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰ ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα.

Ἑπομένως : **Οἱ φορεῖς τῶν ἀκτίνων τῶν κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτῶν.**

Ἐὰν διπλώσωμεν τὰ ἀνωτέρω κατασκευασθέντα κανονικὰ πολύγωνα κατὰ μῆκος τοῦ φορέως ἑνὸς τῶν ἀποστημάτων των, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ δύο τμήματα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ταυτίζονται. Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν καὶ εἰς τὰ ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα. Ἄρα **οἱ φορεῖς τῶν ἀποστημάτων κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.** Παρατηροῦμε λοιπόν, ὅτι τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἔχουν ὡς ἄξονας συμμετρίας τοὺς φορεῖς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν καὶ τοὺς φορεῖς τῶν ἀποστημάτων των.

Εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ **ἄρτιον** πλῆθος πλευρῶν (π.χ. εἰς τὸ καν. ἑξάγωνον ΕΖΗΘΙΚ), δύο ἀκτῖνες κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως (ὡς αἱ ΟΗ καὶ ΟΚ τοῦ καν. ἑξαγώνου ΕΖΗΘΙΚ). Ὥστε: **Ὁ ἀριθμὸς τῶν φορέων τῶν ἀκτίνων καν. πολυγώνου ἀρτίου πλήθους πλευρῶν, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ** (εἰς τὸ ΕΖΗΘΙΚ εἶναι τρεῖς). Ἐπίσης τὸ πλῆθος τῶν φορέων τῶν ἀποστημάτων των εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, διότι τὰ ἀποστήματα αὐτῶν ἀνὰ δύο ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα. (Ὡς π.χ. εἰς τὸ καν. ἑξάγωνον ΕΖΗΘΙΚ τὰ ἀποστήματα OM_1 καὶ OM_4, ἤτοι τὸ πλῆθος τῶν φορέων τῶν ἀποστημάτων του εἶναι $\frac{6}{2} = 3$). Τὸ κανονικὸν λοιπὸν ἑξάγωνον ἔχει 6 ἄξονας συμμετρίας.

Ὥστε: **Κανονικὸν πολύγωνον μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν ν, ἔχει ν ἄξονας συμμετρίας.**

Εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ περιττὸν ἀριθμὸν πλευρῶν (π.χ. εἰς τὸ καν. τρίγωνον ΛΜΝ) αἱ ἀκτῖνες καὶ τὰ ἀποστήματα ἀνὰ δύο, ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα (ὡς ἡ ἀκτὶς ΟΝ καὶ τὸ ἀπόστημα $O\Xi_3$ τοῦ τριγώνου ΛΜΝ). Παρατηροῦμεν ἀκόμη, ὅτι εἰς τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΕΖΗΘΙΚ οἱ ἄξονες συμμετρίας OM_1 καὶ ΟΗ εἶναι κάθετοι. ($M_1\widehat{O}Z = 30^0$ καὶ $Z\widehat{O}H = 60^0$). Εἰς τὴν Α' τάξιν ὅμως, ἐμάθομεν ὅτι ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους, **ἔχει κέντρον συμμετρίας** τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν. Ἑπομένως τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι **κέντρον συμμετρίας** αὐτοῦ. **Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν.** Εἰς τὸ κανονικὸν τρίγωνον ΛΜΝ δὲν ὑπάρχουν κάθετοι ἄξονες συμμετρίας. Συνεπῶς **τοῦτο δὲν ἔχει κέντρον συμμετρίας. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς ὅλα τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ περιττὸν πλῆθος πλευρῶν.** Ὥστε εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν τὸ κέντρον αὐτῶν εἶναι **κέντρον συμμετρίας**, ἐνῷ τὸ κέντρον τῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ περιττὸν πλῆθος πλευρῶν **δὲν εἶναι κέντρον συμμετρίας**.

Τὸ κέντρον ἑκάστου τῶν κανονικῶν πολυγώνων εἶναι κέντρον ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, διότι, ὡς ἐμάθομεν, τοῦτο ἰσαπέχει αὐτῶν. Ὁ κύκλος αὐτὸς λέγεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον.

Κάθε κανονικὸν πολύγωνον ἔχει ἕνα ἐγγεγραμμένον κύκλον ὁμόκεντρον τοῦ περιγεγραμμένου μὲ ἀκτῖνα τὸ ἀπόστημα τοῦ καν. πολυγώνου.

Ἀσκήσεις

41) Κατασκευάσατε κανονικὸν ὀκτάγωνον καὶ χαράξατε τοὺς ἄξονας συμμετρίας αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε τὰ ζεύγη τῶν καθέτων ἀξόνων.

42) Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δι' ἓν κανονικὸν δωδεκάγωνον.

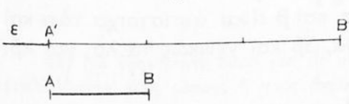
43) Κατασκευάσατε κανονικὸν δεκαεξάγωνον καὶ ἓν κανονικὸν δωδεκάγωνον καὶ χαράξατε τοὺς ἐγγεγραμμένους εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κύκλους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Α. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

§ **13.** *Λάβετε εὐθεῖαν ε καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Ἐπὶ τῆς ε, ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ Α', λάβετε τρία εὐθύγραμμα τμήματα διαδοχικὰ καὶ ἴσα πρὸς τὸ ΑΒ. Ἔστω Β' τὸ ἄκρον τοῦ τελευταίου. (Σχ. 20).*



σχ. 20.

Λέγομεν ὅτι, ὁ λόγος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Α'Β' πρὸς τὸ ΑΒ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ γράφομεν $\frac{A'B'}{AB}=3$. Ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ἐκεῖνος ἐπὶ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ ΑΒ διὰ νὰ δώσῃ τὸ Α'Β'.

Ὥστε: **Λόγος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος Α πρὸς ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα Β** $\left(\textbf{συμβολικῶς } \frac{A}{B}\right)$ **εἶναι ὁ ἀριθμὸς λ ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον τὸ δεύτερον δίδει τὸ πρῶτον.**

Ἐὰν ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι εὐθύγρ. τμήματα λέγομεν «τὸ ΓΔ ἔχει πρὸς τὸ ΕΖ λόγον λ» ἢ συντομώτερον «ΓΔ πρὸς ΕΖ ἴσον λ» καὶ γράφομεν (ΓΔ, ΕΖ)=λ ἢ συνηθέστερον: $\boxed{\frac{\Gamma\Delta}{EZ}=\lambda}$

ὥστε $\boxed{\frac{\Gamma\Delta}{EZ}=\lambda \iff \Gamma\Delta=\lambda.EZ}$

Τιμὴ εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως ἢ συγκρίσεως. Τὴν τιμὴν τοῦ ΑΒ συμβολίζομεν μὲ (ΑΒ). Τὸ ΑΒ εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἡ τιμὴ (ΑΒ) εἶναι ἀριθμός. Ἐὰν α εἶναι ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων καὶ ΑΒ=5·α, ΓΔ=8·α τότε $\frac{AB}{\alpha}=5$ καὶ $\frac{A\Gamma}{\alpha}=8$. Συνεπῶς (ΑΒ)=5 καὶ (ΑΓ)=8 (1)

Θεωροῦμεν τὸν λόγον $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$. Ἐὰν $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\lambda$ τότε ΑΒ=λ·ΓΔ. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἐκ τῶν (1) τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ διὰ τῶν ἴσων των, θὰ λάβωμεν 5α==λ.8α, συνεπῶς 5=8λ (ἐπειδὴ τὸ γινόμενον εὐθ. τμήματος α ἐπὶ ἀριθμὸν εἶναι μονότιμον) ἄρα $\lambda=\frac{5}{8}$ δηλαδή: $\boxed{\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}}$

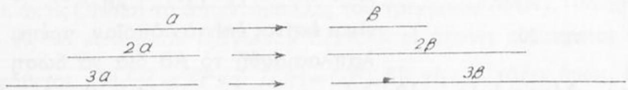
Ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν αὐτῶν (ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα).

Σημείωσις. Τοῦτο ἰσχύει γενικῶς διὰ τὸν λόγον δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν. Ἐπίσης ἀληθεύει τὸ ὅτι: Ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν αὐτῶν (ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα). Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὴν μέτρησιν τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων.

§ 14. Ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα.

Εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἀντίστοιχά των, ὅταν τὰ γινόμενα δύο ἀντιστοίχων τμημάτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἶναι ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα.

Δηλαδή, ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β εἶναι ἀντίστοιχα τότε καὶ τὰ 2α καὶ 2β εἶναι ἀντίστοιχα ὡς καὶ τὰ 3α, 3β καὶ γενικῶς τὰ λα καὶ λβ. (λ εἶναι ἀριθμὸς τυχών).



σχ. 21.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὸν λόγον δύο ἐξ αὐτῶν π.χ. τῶν 2α καὶ 3α πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων των, (ἀντίστοιχά των εἶναι τὰ 2β καὶ 3β) παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{2\alpha}{3\alpha} = \frac{2}{3}$ καὶ $\frac{2\beta}{3\beta} = \frac{2}{3}$ (θεωροῦμεν ὡς μονάδα τὸ α διὰ τὰ πρῶτα καὶ τὸ β διὰ τὰ δεύτερα). Ὥστε: **Ἐὰν εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο (τυχόντων) ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων των.**

Ἐὰν εἰς ἀνάλογα τμήματα τὰ Α'Β' καὶ Γ'Δ' εἶναι ἀντίστοιχα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, τὴν ἰσότητα τῶν λόγων $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$ λέγομεν **ἀναλογίαν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων** ΑΒ, ΓΔ, Α'Β', Γ'Δ'. Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς λόγους τῶν εὐθ. τμημάτων μὲ τοὺς λόγους τῶν τιμῶν των καὶ νὰ ἔχωμεν τὴν $\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{(A'B')}{(\Gamma'\Delta')}$, ἡ ὁποία εἶναι **ἀναλογία ἀριθμῶν.**

Ἀναλογίαν τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ ἔχομεν ὅταν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Οἱ α καὶ δ λέγονται **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ β καὶ γ λέγονται **μέσοι** ὅροι αὐτῆς. Οἱ α καὶ γ **ἡγούμενοι** καὶ οἱ β καὶ δ **ἑπόμενοι** ὅροι. Περὶ τῶν ἀναλογιῶν τῶν ἀριθμῶν δύνασθε νὰ ἴδετε εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν (Κεφ. 4 § 100, 101).

Ἀναφέρομεν συντόμως μερικὰς ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν, τὰς ὁποίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \beta\gamma = \alpha\delta$ συνεπῶς **τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων μιᾶς ἀναλογίας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς.**

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$. **Εἰς ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς ἄκρους ἢ τοὺς μέσους ὅρους αὐτῆς.**

3) $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \lambda \Longrightarrow \lambda = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha'+\beta'+\gamma'}$. **Λόγοι ἴσοι μεταξύ των εἶναι ἴσοι καὶ πρὸς τὸν λόγον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν.**

Ἀσκήσεις

44) Νὰ ἐξηγήσητε διατὶ καὶ εἰς μίαν ἀναλογίαν εὐθυγράμμων τμημάτων δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους ὅρους.

45) Νὰ ἐξηγήσητε διατί, ἐὰν δύο λόγοι εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἴσοι θὰ εἶναι ἴσοι καὶ πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων. Ἐπίσης ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ δείξατε ὅτι $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$.

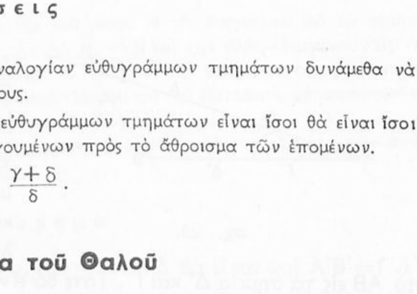
Τὸ Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ

1ον Θεώρημα

§ **15**. *Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας χψ λάβετε ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Ἐκ τῶν Α, Β, Γ καὶ Δ φέρατε εὐθείας παραλλήλους μεταξύ των. Χαράξατε μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς παραλλήλους αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἀντιστοίχως. Συγκρίνατε (διὰ τοῦ διαβήτου) τὰ εὐθ. τμήματα Α′Β′, Β′Γ′, Γ′Δ′.*

Συγκρίνομεν αὐτὰ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἴσα.

Ἑπομένως : **Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνουν δύο ἄλλας καὶ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς μιᾶς ἴσα εὐθ. τμήματα, θὰ ὁρίζουν ἴσα εὐθ. τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης.**



σχ. 22.

Διὰ νὰ **αἰτιολογήσωμεν** τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :
Ἐκ τῶν Α′ καὶ Β′ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν χψ (ἄρα καὶ παραλλήλους μεταξύ των).

Αὗται τέμνουν τὰς BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ εἰς τὰ A_1 καὶ B_1 ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τετράπλευρα ABA_1A' καὶ $B\Gamma B_1B'$ εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἑπομένως $A'A_1 = AB$ καὶ $B'B_1 = B\Gamma$. Ἀλλὰ $AB = B\Gamma$· συνεπῶς $A'A_1 = B'B_1$.

Συγκρίνομεν τώρα τὰ τρίγωνα $A'A_1B'$ καὶ $B'B_1\Gamma'$. Αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν :

$A'A_1 = B'B_1$ ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν

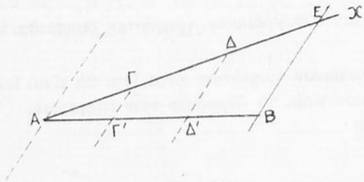
$A_1\widehat{A'B'} = B_1\widehat{B'\Gamma'}$ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν παραλλήλων $A'A_1$, $B'B_1$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς $A'B'$ καὶ

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ διότι $\widehat{A_1} = \widehat{B}$, $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{B}$. (διατί ;)

Ἑπομένως $A'B' = B'\Gamma'$. Ὁμοίως $B'\Gamma' = \Gamma'\Delta'$ κ.ο.κ.

Ἐφαρμογαί.

1. Νὰ διαιρεθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα AB εἰς τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα. (Σχ. 23).

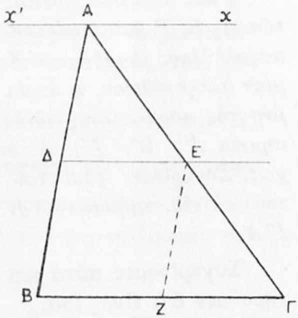


σχ. 23.

Φέρομεν ἡμιευθεῖαν $A\chi$ καὶ ἐπ' αὐτῆς τὰ ἴσα διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE. Χαράσσομεν τὴν BE καὶ ἀπὸ τὰ Δ, Γ, καὶ A φέρομεν παραλλήλους πρὸς αὐτήν, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ AB εἰς τὰ σημεῖα Δ' καὶ Γ'. Τότε θὰ εἶναι $A\Gamma' = \Gamma'\Delta' = \Delta'B$.

Παρατήρησις : Τὸ $A\Gamma'$ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον $\frac{1}{3}$ AB.

2. Ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς πλευρᾶς AB τριγώνου $AB\Gamma$ (Σχ. 24) φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$. Αὐτὴ θὰ τμήσῃ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E. Ἐὰν χαράξωμεν καὶ τὴν $A\chi // B\Gamma$ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ $A\Delta = \Delta B$, θὰ εἶναι καὶ $AE = E\Gamma$. Ὥστε: **Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου πλευρᾶς τριγώνου φέρωμεν παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ, αὐτὴ θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς.**



σχ. 24.

Φέρατε τώρα ἐκ τοῦ E παράλληλον πρὸς τὴν AB. Αὐτὴ συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ μέσου Z τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΔBZE εἶναι παραλληλόγραμμον θὰ εἶναι $\Delta E = BZ$ δηλαδὴ $\Delta E = \frac{1}{2} B\Gamma$.

3. Σημειώσατε τὰ μέσα Δ καὶ E τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$. Συγκρίνατε τὴν ΔE πρὸς τὴν $B\Gamma$.

Ἡ ΔE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$, διότι ἐκ τοῦ Δ μία μόνον παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$ διέρχεται. Αὐτὴ ὅμως, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ προηγούμενον, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Ε. Δύο δὲ σημεῖα ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν. Τὸ τμῆμα ΔΕ ἰσοῦται, ὡς εἴδομεν, πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ · ΒΓ. Γράφομεν συντόμως τὰς δύο αὐτὰς ἰδιότητας

ΔΕ=// $\frac{1}{2}$.ΒΓ. Ὥστε :

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

46) Νὰ διαιρεθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς πέντε ἴσα μέρη.

47) Νὰ λάβητε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ νὰ εὕρητε τὸ $\frac{2}{5}$. ΑΒ.

48) Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς διαγωνίου ΒΔ νὰ φέρητε παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον εἰς τὸ Λ. Νὰ συγκρίνητε τὸ τμῆμα ΝΛ πρὸς τὴν ΓΔ καὶ τὸ ΜΛ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων.

49) Νὰ λάβητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ νὰ ἐξετάσητε, χρησιμοποιοῦντες τὰ γεωμ. ὄργανα, ἐὰν εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου.

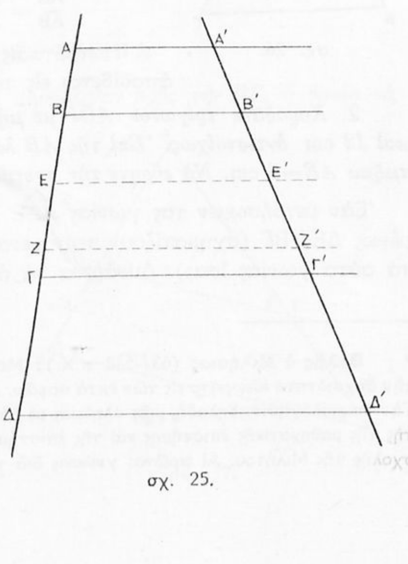
50) Νὰ ἐξηγήσητε διατὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, διχοτομοῦνται.

2ον. Θεώρημα

§ **16**. Εἰς τὴν §15 σχ. 24, εἴδομεν ὅτι ἐὰν ΑΒ=ΓΔ θὰ εἶναι καὶ Α′Β′=Γ′Δ′. Τότε ὅμως $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{Α'Β'}{Γ'Δ'}=1$. Δηλαδὴ τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ΑΔ καὶ Α′Δ′ ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἀνάλογα. Συμβαίνει ἆρά γε τοῦτο καὶ ὅταν ΑΒ εἶναι διάφορον τοῦ ΓΔ; (Σχ. 25).

Κατασκευάσατε τραπέζιον ΑΒΒ′Α′ (ΑΑ′//ΒΒ′) μὲ ΑΒ=3 cm καὶ Α′Β′=5 cm καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ΑΒ λάβετε εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ = 6cm.

Ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ φέρατε παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν προέκτασιν τῆς Α′Β′ εἰς τὰ Γ′ καὶ Δ′ ἀντιστοίχως. Μετρήσατε τὴν Γ′Δ′ καὶ συγκρίνατε τοὺς λόγους: $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ ***καὶ*** $\frac{Α'Β'}{Γ'Δ'}$.



σχ. 25.

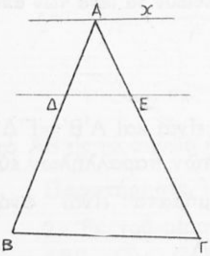
Εὑρίσκομεν Γ′Δ′=10 cm ἐπομένως $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'} = \frac{1}{2}$. Ἄρα: **Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνουν δύο ἄλλας, τὰ ὁριζόμενα ὑπ' αὐτῶν ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἀνάλογα.**

Διὰ νὰ **αἰτιολογήσωμεν** τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB λαμβάνομεν τμῆμα BE=AB. Ἡ ἐκ τοῦ E παράλληλος πρὸς τὰς AA' καὶ BB' τέμνει τὴν A'B' εἰς τὸ E' καὶ εἶναι A'B'=B'E'. Τὰ εὐθ. τμήματα AB καὶ A'B' εἶναι ἀντίστοιχα (κεῖνται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων). Ἀλλὰ καὶ τὰ AE καὶ A'E' εἶναι ἀντίστοιχα. Αὐτὰ ὅμως ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς 2AB καὶ 2A'B'. Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ τὸ AZ=3.AB, θὰ λάβωμεν ὡς ἀντίστοιχον τὸ A'Z'= 3.A'B' κ.ο.κ.

Ἀποδεικνύεται (ὡς θὰ μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν) ὅτι, ἐὰν ΓΔ=λ.AB τότε Γ'Δ'=λ.A'B' (λ τυχὼν ἀριθμός).)

Ἑπομένως: **Τὰ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ὁριζόμενα ἐπὶ τῆς εὐθείας AB τμήματα, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντιστοίχως ὁριζόμενα ὑπ' αὐτῶν ἐπὶ τῆς A'B'.**

Ἐφαρμογαὶ



σχ. 26.

1. **Εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου, διαιρεῖ τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ εἰς τμήματα ἀνάλογα.**

Φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ. Αὐτὴ τέμνει τὰς AB καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ E ἀντιστοίχως. Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὴν Αχ//ΒΓ θὰ συμπεράνωμεν συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον ὅτι:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}, \quad \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta B}{AB} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$$

Ἡ πρότασις αὐτὴ γνωστὴ ὡς Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἀποδίδεται εἰς τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον.(*).

2. *Χαράξατε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ μήκη πλευρῶν AB καὶ ΑΓ ἴσα πρὸς 8 cm καὶ 12 cm ἀντιστοίχως. Ἐπὶ τῆς AB λάβετε τμῆμα ΑΔ=2 cm καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα AE=3 cm. Νὰ εὕρητε τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΒΓ.*

Ἐὰν μετρήσωμεν τὰς γωνίας $\widehat{A\Delta E}$ καὶ $\widehat{AB\Gamma}$, θὰ τὰς εὕρωμεν ἴσας. Ἑπομένως ΔΕ//ΒΓ (σχηματίζουν τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς AB δύο ἐκτὸς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίας ἴσας). Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν δηλαδή, νὰ αἰτιολογήσω-

---

* **Θαλῆς ὁ Μιλήσιος** (637-548 π.Χ.): Μέγας Ἕλλην μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος. Κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ἐθεωρεῖτο εἷς τῶν ἑπτὰ σοφῶν. Αὐτὸς πρῶτος ἐχρησιμοποίησε τὴν ἀπόδειξιν. Τὴν δικαιολόγησιν, δηλαδή, μιᾶς ἀληθείας μὲ βάσιν ἄλλας γνωστάς. Διὰ τοῦτο θεωρεῖται ἱδρυτὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς ἐπιστήμης γενικῶς. Ὑπῆρξεν ἱδρυτὴς τῆς φιλοσοφικῆς σχολῆς τῆς Μιλήτου. Αἱ πρῶται γνώσεις διὰ τὸν ἠλεκτρισμὸν ὀφείλονται εἰς αὐτόν.

μεν τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό. Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{4}$ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{4}$ ἐπομένως $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Ἄρα ἡ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ὀφείλει (κατὰ τὸ προηγούμενον) νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Ε.

Ὥστε: **Ἐὰν εὐθεῖα διαιρῇ δύο πλευρὰς τριγώνου εἰς τμήματα ἀνάλογα, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ.**

Ἀσκήσεις

51) Νὰ διαιρεθῇ εὐθ. τμῆμα εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον $\frac{3}{4}$.

52) Δίδεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Νὰ διαιρέσητε αὐτὸ εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς δεδομένα τμήματα α καὶ β.

53) Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ=5 cm καὶ ΑΓ=6 cm. Λάβετε ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΓ$ καὶ φέρατε // πρὸς τὴν ΒΓ ἐκ τοῦ Δ. Ἐὰν αὐτὴ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ, εὕρετε τὸ μῆκος τοῦ ΑΖ.

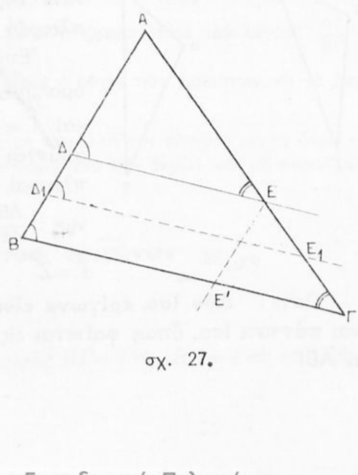
54) Ἐκ τοῦ κέντρου βάρους τριγ. ΑΒΓ φέρατε παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἐὰν αὐτὴ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, ὑπολογίσατε τοὺς λόγους $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}, \frac{ΑΒ}{ΑΔ}, \frac{ΑΒ}{ΔΒ}$

55) Νὰ κατασκευάσητε τὴν διχοτόμον ΑΔ τριγ. ΑΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Β νὰ φέρητε παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐὰν αὐτὴ τέμνῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ Ε, νὰ συγκρίνητε τὰ ΑΒ καὶ ΑΕ. Νὰ συγκρίνητε ἐπίσης τοὺς λόγους $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}, \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

56) Νὰ κατασκευάσητε τρεῖς παραλλήλους εὐθείας ε, ε', ε'' ὥστε ἡ ε νὰ ἀπέχῃ τῆς ε' 3 cm καὶ ἡ ε' τῆς ε'' 5 cm. Νὰ τμήσητε αὐτὰς δι' εὐθείας χψ καὶ νὰ ὑπολογήσητε τοὺς λόγους τῶν τμημάτων τὰ ὁποῖα αὗται ὁρίζουν ἐπὶ τῆς χψ.

Β. ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

§ 17. *Λάβετε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ φέρατε παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Συγκρίνατε τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ. Τί παρατηρεῖτε;*



σχ. 27.

Παρατηροῦμεν ὅτι, $\widehat{Α} = \widehat{Α}$, $\widehat{Β} = \widehat{Δ}$ καὶ $\widehat{Γ} = \widehat{Ε}$ (εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ, τεμνομένων ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ).

Διὰ τὰς πλευρὰς ἔχομεν συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ:

$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Φέρομεν τώρα ἀπὸ τὸ Ε παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Αὐτὴ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε'. Συμφώνως πάλιν πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΒΕ'}{ΒΓ}$.

Τὸ τετράπλευρον ὅμως ΔΒΕ'Ε εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα ΒΕ' = ΔΕ, ἑπομένως $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$. Ἔχομεν λοιπὸν $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους γωνίας των ἴσας καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων αὐτῶν γωνιῶν πλευράς, ἀναλόγους.

Λέγομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια.

Αἱ ἀντίστοιχοι κορυφαὶ Α,Α, Δ,Β καὶ Ε, Γ τῶν ἴσων γωνιῶν λέγονται **ὁμόλογοι**. Αἱ γωνίαι αὐτῶν λέγονται **ὁμόλογοι γωνίαι**, καὶ αἱ πλευραί, αἱ ὁποῖαι συνδέουν δύο ὁμολόγους κορυφὰς ἢ κεῖνται ἀπέναντι ὁμολόγων γωνιῶν, **ὁμόλογοι πλευραί**.

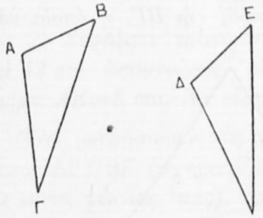
Θὰ λέγωμεν ὅτι, δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια ὅταν ἔχουν τὰς ὁμολόγους των γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους.

$$\boxed{\widehat{Α} = \widehat{Δ},\ \widehat{Β} = \widehat{Ε},\ \widehat{Γ} = \widehat{Ζ} \text{ καὶ } \frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Longleftrightarrow \text{Τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιον τρίγ. ΔΕΖ}}$$

Ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω, εὐθεῖα παράλληλος πρὸς πλευρὰν τριγώνου, ὁρίζει τρίγωνον ὅμοιον πρὸς αὐτό.

Σημείωσις : Αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ πρέπει νὰ γράφωνται κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

§ 18. Ἐφαρμογαί.



σχ. 28.

1. *Λάβετε δύο ἴσα τρίγωνα (μὲ τὴν βοήθειαν διαφανοῦς χάρτου) τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ καὶ συγκρίνατε τὰς γωνίας καὶ τοὺς λόγους τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των.*

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα θὰ ἔχουν τὰς ὁμολόγους αὐτῶν γωνίας ἴσας, ἤτοι $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$, $\widehat{Β} = \widehat{Ε}$ καὶ $\widehat{Γ} = \widehat{Ζ}$. Οἱ λόγοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἰσοῦνται πρὸς τὴν μονάδα (διότι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ἴσων τριγώνων εἶναι ἴσαι). Ἑπομένως : $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ}$ καὶ $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$, $\widehat{Β} = \widehat{Ε}$ καὶ $\widehat{Γ} = \widehat{Ζ}$.

Ὥστε : **Δύο ἴσα τρίγωνα εἶναι ὅμοια.** Ἀλλὰ δύο ὅμοια τρίγωνα δὲν εἶναι πάντοτε ἴσα, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα (27) διὰ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ.

2. Ἐπειδὴ εἰς τὸ σχῆμα (27) ἐχαράξαμεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, συνεπεράναμεν ὅτι τὸ τρίγ. ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγ. ΑΒΓ.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΕ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ. Ἑπομένως, ἐὰν τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς ἄλλο καὶ τὸ δεύτερον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον.

3. Φέρομεν εἰς τὸ σχῆμα (27) τὴν $Δ_1Ε_1$ παράλληλον τῆς ΒΓ.

Τότε τὸ τρίγ. $ΑΔ_1 Ε_1$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγ. ΑΒΓ. Διεπιστώσαμεν ὅτι τὸ τρίγ. ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγ. ΑΒΓ, καὶ ἐπειδὴ αἱ ΔΕ//ΒΓ καὶ $Δ_1Ε_1$//ΒΓ συνεπάγονται τὴν ΔΕ//$Δ_1Ε_1$, ἔχομεν ὅτι τὸ τριγ. $ΑΔ_1Ε_1$ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγ. ΑΔΕ. Ὥστε δύο τρίγωνα ὅμοια πρὸς τρίτον εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν συνοψίσωμεν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος ἔχει τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.

Τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιον τρίγ. ΑΒΓ (ἀνακλαστική),

τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιον τρίγ. ΔΕΖ $\Rightarrow$ τρίγ. ΔΕΖ ὅμοιον τρίγ. ΑΒΓ (συμμετρική) καὶ

τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιον τρίγ. ΔΕΖ καὶ τρίγ. ΔΕΖ ὅμοιον τρίγ. ΗΘΙ $\Rightarrow$ τρίγ. ΑΒΓ ὅμοιον τρίγ. ΘΗΙ (μεταβατική).

Ἀσκήσεις

57) Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ=3 cm, ΒΓ=5 cm καὶ ΑΓ=6 cm. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λάβετε τμῆμα ΑΔ=2 cm καὶ φέρατε παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Ὑπολογίσατε τὸ μῆκος τῆς ΔΕ.

58) Ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 6 cm. Ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου νὰ φέρητε παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ τμήματος αὐτῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου;

59) Χαράξατε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ προεκτείνατε τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ μέχρι τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, ὥστε ΑΔ= $\frac{3}{5}$.ΑΒ καὶ ΑΕ = $\frac{3}{5}$.ΑΓ. Ὑπολογίσατε τὸν λόγον $\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

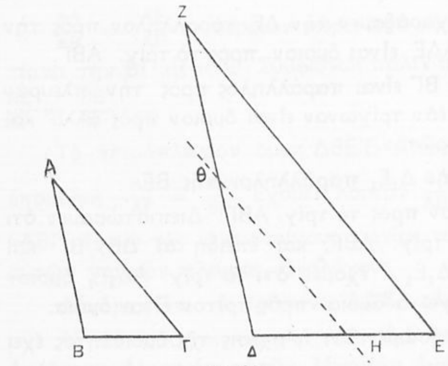
60) Τραπέζιον ἔχει βάσεις 12 cm καὶ 7 cm. Ποῖος ὁ λόγος τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ μία διαγώνιος χωρίζει τὴν ἄλλην;

61) Εἰς τὸ αὐτὸ τραπέζιον προεκτείνατε τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς μέχρις ὅτου τμηθοῦν. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τομῆς ἀπὸ τῶν ἄκρων μιᾶς μὴ παραλλήλου πλευρᾶς;

Κριτήρια ὁμοιότητος τριγώνων

§ 19. 1ον Κριτήριον ὁμοιότητος.

Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΒΓ=2 cm, ΒΑ=4 cm καὶ ΓΑ =



σχ. 29.

= 5 cm. Λάβετε ἐν συνεχείᾳ εὐθύγραμμον τμῆμα ΔΕ = 4 cm καὶ μὲ βάσιν αὐτὸ κατασκευάσατε τρίγωνον ΖΔΕ, ὥστε $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$ *καὶ* $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$*.* ***Συγκρίνατε τὰς γωνίας*** $\widehat{A} = \widehat{Z}$ ***καὶ τοὺς λόγους τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Τί παρατηρεῖτε ;*** (Σχ. 29).

Χρησιμοποιοῦντες μοιρογνωμόνιον ἢ «διαφανὲς» εὑρίσκομεν ὅτι $\widehat{A} = \widehat{Z}$. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους γωνίας των ἴσας ἤτοι $\widehat{A} = \widehat{Z}$, $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}$.

Μετροῦντες δι' ὑποδεκαμέτρου εὑρίσκομεν ὅτι ΔΖ = 8 cm καὶ ΕΖ = = 10 cm. Τότε:

$$\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AB}{Z\Delta} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Ὥστε : $\dfrac{B\Gamma}{\Delta E} = \dfrac{AB}{Z\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{ZE}$, δηλαδὴ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν τριγώνων μας εἶναι ἀνάλογοι. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΖΔΕ, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

Διὰ νὰ **αἰτιολογήσωμεν** τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐργασίας μας καὶ νὰ πεισθῶμεν, ὅτι δὲν εἶναι συμπτωματικὸν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΕ τμῆμα ΔΗ = ΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ Η φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΖ εἰς τὸ Θ. Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ τριγ. ΘΔΗ εἶναι ὁμ. πρὸς τὸ ΖΔΕ ὡς ἐμάθομεν εἰς τὴν § 17. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΘΔΗ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΔΗ = ΒΓ καὶ $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$, $\widehat{H} = \widehat{\Gamma}$ (ἐπειδὴ $\widehat{H} = \widehat{E}$ καὶ $\widehat{E} = \widehat{\Gamma}$). Ἄρα τὸ τριγ. ΘΔΗ εἶναι ὁμ. πρὸς τὸ τρίγ. ΑΒΓ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι τὸ τρίγ. ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγ. ΖΔΕ. Ὥστε: **Δύο τρίγωνα μὲ δύο γωνίας ἴσας ἀνὰ μίαν, εἶναι ὅμοια.**

Ἐφαρμογαί

1. Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι ὅμοια, διότι καθ' ἓν ἐξ αὐτῶν ἔχει γωνίας 60^0. Δηλαδὴ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας.

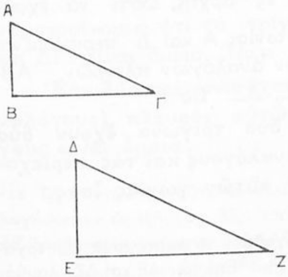
2. Κατασκευάσατε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ὥστε μία ὀξεῖα γωνία τοῦ ἑνός, νὰ ἰσοῦται πρὸς μίαν ὀξεῖαν γωνίαν τοῦ ἄλλου. Τί παρατηρεῖτε ;

Κατασκευάζομεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἰς τρόπον ὥστε $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Παρατηροῦμεν ὅτι $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$ καὶ $\widehat{A} = \widehat{E}$, ὡς ὀρθαί. Ἑπομένως, **ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ὅμοια.** (Σχ. 30).

3. Φέρατε εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ ($\widehat{A} = 1$ ὀρθή), τὸ ὕψος ΑΔ καὶ

συγκρίνατε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΔΑ πρὸς τὸ ΓΑΒ. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ.31).

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΑΒ ἔχουν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν κοινήν, τὴν $\widehat{B}$. Ἄρα εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΓΔΑ καὶ ΓΑΒ ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $\widehat{\Gamma}$ κοινήν. Εἶναι λοιπὸν καὶ αὐτὰ ὅμοια. Ἑπομένως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΔΑ εἶναι ὅμοια (ὡς ὅμοια πρὸς τρίτον).



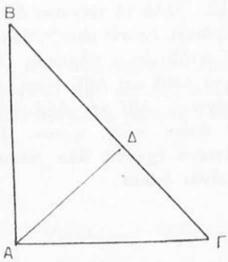
σχ. 30.

Ἀσκήσεις

62) Ἐξετάσατε, ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

63) Νὰ κατασκευάσητε δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ καὶ νὰ φέρητε τὰς διχοτόμους αὐτῶν ΑΔ καὶ Α΄Δ΄. Ἐξετάσατε, ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α΄Β΄Δ΄ ὡς καὶ τὰ ΑΓΔ καὶ Α΄Γ΄Δ΄, εἶναι ὅμοια.

64) Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ φέρητε τὸ ὕψος αὐτοῦ ΑΔ. Νὰ συγκρίνητε τοὺς λόγους $\frac{\Delta B}{AB}$ καὶ $\frac{AB}{\Gamma B}$



σχ. 31.

65) Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ=7 cm, ΒΓ=6 cm καὶ ΓΑ=9 cm. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λάβετε τμῆμα ΒΔ=4 cm καὶ κατασκευάσατε γωνίαν $B\widehat{\Delta}E=\widehat{\Gamma}$, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΔΕ τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Ὑπολογίσατε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΒΔΕ.

66) Νὰ χαράξητε τρίγωνον ΒΑΓ καὶ τὴν διάμεσον αὐτοῦ ΑΜ. Νὰ φέρητε μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ, ΑΜ, ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Β΄,Μ΄,Γ΄ ἀντιστοίχως. Νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα Β΄Μ΄ καὶ Γ΄Μ΄.

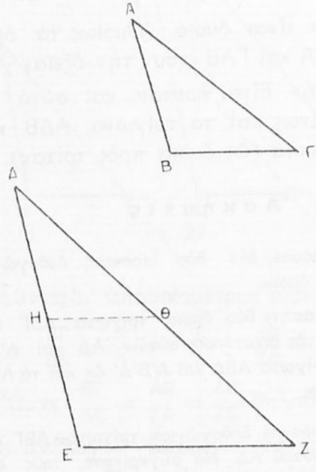
67) Νὰ κατασκευάσητε δύο ὀξυγώνια τρίγωνα μὲ πλευρὰς ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ νὰ τὰ συγκρίνητε. Νὰ διαπιστώσητε, ὅτι αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

§ 20. 2ον Κριτήριον ὁμοιότητος τριγώνων.

Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ ***μὲ πλευρὰς*** ΑΒ=3 *cm*, ΑΓ= 4 *cm* ***καὶ*** ΒΓ= =6 *cm*. ***Κατασκευάσατε ἐν συνεχείᾳ γωνίαν*** $\widehat{\Delta}$ ***ἴσην πρὸς τὴν*** $\widehat{A}$ ***καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λάβετε τμήματα*** ΔΕ = 6 *cm* ***καὶ*** ΔΖ = 8 *cm*. ***Συγκρίνατε τὰ τρίγωνα*** ΑΒΓ ***καὶ*** ΔΕΖ. ***Τί παρατηρεῖτε ; (Σχ. 32).***

Χρησιμοποιοῦντες μοιρογνωμόνιον ἢ διαφανῆ χάρτην, εὑρίσκομεν ὅτι $\widehat{B}=\widehat{E}$ καὶ $\widehat{Z}=\widehat{\Gamma}$. Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν ΕΖ εὑρίσκομεν αὐτὴν 12 cm. Ἐπειδὴ τώρα εἶναι $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{A\Gamma}{\Delta Z}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, ἔχομεν $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}=$

$= \frac{ΒΓ}{ΕΖ}$ καὶ $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$, $\widehat{Β} = \widehat{Ε}$, $\widehat{Γ} = \widehat{Ζ}$. Τὰ τρίγωνα, συνεπῶς, ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ κατεσκευάσθησαν ἐξ ἀρχῆς, ὥστε νὰ ἔχουν τὰς ἴσας γωνίας $\widehat{Α}$ καὶ $\widehat{Δ}$ περιεχομένας μεταξὺ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν, ΑΒ, ΑΓ καὶ ΔΕ, ΔΖ. Ὥστε:



σχ. 32.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἴσας, εἶναι ὅμοια.

Αἰτιολογοῦμεν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐργασίας μας ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῶν ΔΕ καὶ ΔΖ λαμβάνομεν τμήματα ΔΗ = ΑΒ καὶ ΔΘ = ΑΓ. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{ΔΗ}{ΔΕ} = \frac{ΔΘ}{ΔΖ}$.

Τότε ὅμως, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν § 16. 2 θὰ εἶναι ΗΘ // ΕΖ, συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΔΗΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕΖ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΔΗΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΔΗΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια (διότι εἶναι ὅμοια πρὸς τρίτον. Τὸ ΔΗΘ). Ὥστε: **Τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἴσας, εἶναι ὅμοια.**

Ἐφαρμογαί

1. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἀναλόγους εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν ὀρθὴν) περιεχομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.

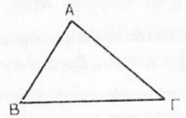
2. Χαράσσομεν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ὥστε αἱ γωνίαι τῶν κορυφῶν νὰ εἶναι ἴσαι, $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$ καὶ ΑΒ = ΑΓ, Α'Β' = Α'Γ' τότε $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$

Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν ἴσας τὰς γωνίας τῶν κορυφῶν των, εἶναι ὅμοια.

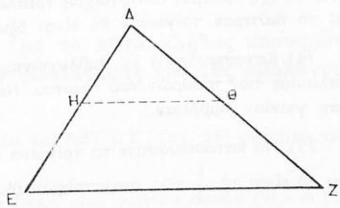
§ 21. 3ον Κριτήριον ὁμοιότητος τριγώνων

Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ = 4 cm, ΒΓ = 5 cm καὶ ΓΑ = = 6 cm καὶ ἓν ἄλλον τρίγωνον ΔΕΖ μὲ πλευρὰς ΔΕ = 8 cm, ΕΖ = 10 cm καὶ ΖΔ = = 12 cm. Συγκρίνατε τώρα τὰς γωνίας αὐτῶν τῶν τριγώνων.

Μὲ τὴν βοήθειαν διαφανοῦς χάρτου ἢ μοιρογνωμονίου, εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ὁμόλογοι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἐξ' ἀρχῆς εἶχον καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους. $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια. Ὥστε :



Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς (ὁμολόγους) πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.



Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ **αἰτιολογήσωμεν** ὡς ἑξῆς (σχ. 33): Ἐπὶ τῶν ΔΕ καὶ ΔΖ λαμβάνομεν τμήματα ΔΗ= ΑΒ καὶ ΔΘ= ΑΓ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἐξ ἀρχῆς $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$

θὰ εἶναι καὶ $\frac{\Delta H}{\Delta E} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta Z}$ (ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν ἴσων των). Τότε ὅμως τρίγ. ΔΗΘ ὅμ. πρὸς

σχ. 33.

τρίγ. ΔΕΖ συνεπῶς $\frac{H\Theta}{EZ} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta Z}$. Θέτομεν ὅπου ΔΘ τὸ ἴσον του ΑΓ καὶ ἔχομεν $\frac{H\Theta}{EZ} = \frac{\Gamma A}{Z\Delta}$. Ἐξ ἀρχῆς ὅμως εἶναι $\frac{\Gamma A}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ συνεπῶς $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{H\Theta}{EZ}$ ἄρα ΗΘ=ΒΓ. Τὰ τρίγωνα τώρα ΔΗΘ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα διότι ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας ἀνὰ μίαν. Συνεπῶς εἶναι ὅμοια. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια (διότι εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΗΘ). Ἐπομένως : **Δύο τρίγωνα μὲ τὰς (ὁμολόγους) πλευράς των ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.**

Ἐφαρμογαί

Χαράξατε ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς ἀναλόγους πρὸς αὐτό. Τί παρατηρεῖτε;

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεύτερον τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐχαράξαμεν. Αἱ ὁμόλογοι λοιπὸν γωνίαι του εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας αὐτοῦ. Συνεπῶς καὶ τὸ δεύτερον τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀσκήσεις

68) Νὰ κατασκευάσητε δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ (ΑΒ=ΑΓ καὶ ΑΔ=ΑΕ) ὥστε $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Delta AE}$ καὶ ΑΔ ἐσωτερικὴ τῆς $\widehat{BA\Gamma}$. Νὰ συγκρίνητε τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΓΑΕ καὶ νὰ δικαιολογήσητε διατὶ εἶναι ὅμοια.

69) Νὰ κατασκευάσητε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ὥστε $\widehat{A} = \widehat{A'}$ καὶ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{2}{3}$

Νὰ δικαιολογήσητε, ὅτι αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

70) Νὰ χαράξητε τρίγωνον καὶ νὰ ἑνώσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Νὰ συγκρίνητε τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται πρὸς τὸ ἀρχικόν.

71) Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς ΑΒ=2,5 cm, ΒΓ=4,2 cm καὶ ΓΑ=3 cm

καὶ ἄλλο Α′Β′Γ′ μὲ ἀντιστοίχους πλευρὰς διπλασίας. Φέρατε τὰς διαμέσους ΑΜ καὶ Α′Μ′ καὶ δείξατε διατὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ Α′Β′Μ′ εἶναι ὅμοια.

72) Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ καὶ ἄλλο τρίγωνον μὲ πλευρὰς τριπλασίας τοῦ πρώτου. Δικαιολογήσατε διατὶ καὶ αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον.

73) Νὰ κατασκευάσητε δύο τρίγωνα εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἓν νὰ εἶναι ὀξυγώνιον καὶ τὸ ἄλλο νὰ ἔχῃ πλευρὰς ἀντιστοίχως τριπλασίας τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου. Νὰ ἐξηγήσητε διατὶ καὶ τὸ δεύτερον τρίγωνον θὰ εἶναι ὀξυγώνιον.

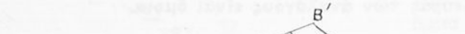
74) Κατασκευάσατε ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον καὶ ἓν ἄλλο τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰς διπλασίας τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου. Νὰ ἐξηγήσητε διατὶ καὶ τὸ δεύτερον τρίγωνον θὰ ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.

75) Νὰ κατασκευάσητε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἰς τρόπον ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ δευτέρου νὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ἀντιστοίχων (ὁμολόγων) πλευρῶν τοῦ πρώτου. Νὰ φέρητε ἐν συνεχείᾳ τὰς διαμέσους ΑΜ καὶ ΔΝ καὶ νὰ τὰς συγκρίνητε.

76) Νὰ κατασκευάσητε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ νὰ ἐξετάσητε ἐὰν εἶναι ὅμοια.

Γ′. ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

§ 22. ***Χαράξατε ἓν πεντάγωνον* ΑΒΓΔΕ *καὶ προεκτείνατε τὴν* ΑΒ *ἕως τὸ* Β′ *εἰς τρόπον ὥστε* ΑΒ′ = 2.ΑΒ. *Προεκτείνατε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰς διαγωνίους* ΑΓ *ἕως τὸ* Γ′, ΑΔ *ἕως τὸ* Δ′ *καὶ τὴν πλευρὰν* ΑΕ *ἕως τὸ* Ε′. *Συγκρίνατε τὰς ὁμολόγους (ἀντιστοίχους) γωνίας* $\widehat{A}$, $\widehat{A}$ $\widehat{B}$, $\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma}'$, $\widehat{\Delta}$, $\widehat{\Delta}'$ *καὶ* $\widehat{E}$, $\widehat{E}'$ *καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς* ΑΒ,ΑΒ′, ΒΓ,Β′Γ′, ΓΔ, Γ′Δ′, ΔΕ,Δ′Ε′, ΕΑ,Ε′Α *τῶν πενταγώνων* ΑΒΓΔΕ *καὶ* ΑΒ′Γ′Δ′Ε′. *Τί παρατηρεῖτε ;* (Σχ. 34).



σχ. 34.

Χρησιμοποιοῦμεν μοιρογνωμόνιον ἢ διαφανὲς καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ὁμόλογοι γωνίαι τῶν πενταγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Μὲ τὸν διαβήτην ἢ τὸ ὑποδεκάμετρον διαπιστοῦμεν ὅτι $\text{ΑΒ} = \frac{1}{2}.\text{ΑΒ}'$,$\text{ΒΓ} = \frac{1}{2}.\text{Β}'\text{Γ}'$, $\text{ΓΔ} = \frac{1}{2}.\ \text{Γ}'\text{Δ}'$,

$\Delta E = \frac{1}{2}.\Delta'E'$ καὶ $AE = \frac{1}{2}.AE'$ ἢ $\frac{AB}{AB'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A}$, δηλαδὴ αἱ ὁμόλογοι πλευραί των εἶναι ἀνάλογοι. Τὰ πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α Β'Γ' Δ'Ε' λέγονται **ὅμοια.** Ὁ λόγος λ δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων αὐτῶν πενταγώνων λέγεται **λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν** (εἰς τὴν περίπτωσίν μας $\lambda = \frac{1}{2}$)

Γενικῶς λέγομεν ὅτι δύο πολύγωνα (μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος κορυφῶν) εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τὰς ὁμολόγους των γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἀναλόγους.

Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν μὲ τὰ πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ'Γ'Δ'Ε', (σχ. 34) χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν γεωμετρικὰ ὄργανα.

Συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ'. Αὐτὰ ἔχουν μίαν γωνίαν κοινὴν (τὴν $\widehat{A}$) μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν. Τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ΑΒ', ΑΓ'. Ἄρα: $\widehat{B} = \widehat{B'}$

$\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma'}$, καὶ

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'}$$

Ὁμοίως διαπιστώνομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΑΓ'Δ' εἶναι ὅμοια. Ἑπομένως

$$\widehat{\Gamma_2} = \widehat{\Gamma'_2},\quad \widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta'_1} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Gamma}{A\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A\Delta'}$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΔ'Ε' εἶναι ὅμοια (ἔχουν κοινὴν μίαν γωνίαν μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν), συνεπῶς

$$\widehat{\Delta_2} = \widehat{\Delta_2'},\quad \widehat{E} = \widehat{E'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Delta}{A\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{AE}{AE'}$$

Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ὁμόλογοι γωνίαι τῶν πενταγώνων μας εἶναι ἴσαι εἴτε ἀπ' εὐθείας ($\widehat{A} = \widehat{A}$, $\widehat{E} = \widehat{E'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$) εἴτε ὡς ἀθροίσματα ἴσων ($\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$) καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἀνάλογοι.

Παρατήρησις 1. Αἱ διαγώνιοι αἱ ὁποῖαι συνδέουν δύο ὁμολόγους κορυφὰς λέγονται ὁμόλογοι διαγώνιοι. Εἰς τὰ ὅμοια πεντάγωνα τοῦ σχήματος 34 δύο διαγώνιοι τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ὁμολόγους διαγωνίους τοῦ ἄλλου π.χ. αἱ ΑΓ, ΑΔ ἀνάλογοι τῶν ΑΓ', ΑΔ'.

Αἱ ὁμόλογοι διαγώνιοι δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογοι.

Παρατήρησις 2. Παρατηροῦμεν σχ. 34 ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒ'Γ', ΑΓ'Δ', ΑΔ'Ε' ἔχουν τὴν αὐτὴν διάταξιν πρὸς τὰ ἀντιστοίχως ὅμοιά των ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ.

Ἑπομένως: **Δύο ὅμοια πολύγωνα χωρίζονται εἰς τρίγωνα ὅμοια ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως διατεταγμένα.**

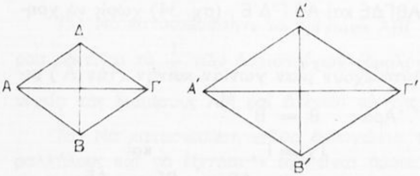
Παρατήρησις 3. Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἐργασίας μας πρῶτον κατεσκευάσαμεν τὰ πεντάγωνά μας εἰς τρόπον ὥστε νὰ χωρίζωνται εἰς τρίγωνα κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον καὶ ἐξ αὐτοῦ κατελήξαμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι ὅμοια·

Ἑπομένως: **Ἐὰν δύο πολύγωνα χωρίζωνται εἰς τρίγωνα ὅμοια ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως διατεταγμένα εἶναι ὅμοια.**

Εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα καταλήγομεν καὶ ὅταν τὰ πολύγωνα εὑρίσκωνται εἰς διαφόρους θέσεις, διότι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὡς εἰς τὸ σχ. 34, εἴτε χρησιμοποιοῦντες διαφανές, εἴτε κατασκευάζοντες πολύγωνον ἴσον πρὸς τὸ ἓν.

§ 23 Ἐφαρμογαί

1. Δύο ρόμβοι ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' μὲ ἴσην μίαν γωνίαν εἶναι ὅμοιοι.



σχ. 35.

Ἐὰν $\widehat{A}=\widehat{A'}$, τότε καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$. Ἀλλὰ καὶ $\widehat{B}=\widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta'}$ (εἶναι ἴσαι πρὸς ἴσας ἢ παραπληρωματικαὶ ἴσων). Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ καὶ Α'Β' = Β'Γ' = Γ'Δ' = Δ'Α', θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta A}{\Delta'A'}$$

2. **Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.** Ἐὰν λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν πενταγώνων τοῦ σχήματος (34), θὰ ἔχωμεν $\lambda=\frac{AB}{AB'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EA}{E'A}$.

συνεπῶς :

$$\lambda=\frac{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA}{AB'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A}\quad \text{(ἰδ. τῶν ἀναλογιῶν § 14).}$$

3. Χαράσσομεν δύο ἀνίσους κύκλους καὶ ἐγγράφομεν εἰς αὐτοὺς τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ' ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμεν ὅτι : $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $\widehat{B}=\widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta'}$, $\widehat{E}=\widehat{E'}$, $\widehat{Z}=\widehat{Z'}$ (ἑκάστη τούτων ἰσοῦται πρὸς 120^0) καὶ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EZ}{E'Z'}=\frac{ZA}{Z'A'}$ διότι οἱ λόγοι αὐτοὶ ἔχουν ἴσους ὅρους.

Ἐπομένως : (§ 22).

Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν εἶναι ὅμοια.

Ἀσκήσεις

77) Ἐξετάσατε ἐὰν δύο τετράγωνα εἶναι ὅμοια.

78) Δύο ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουν διαστάσεις 3 cm, 4 cm καὶ 6 cm, 8 cm ἀντιστοίχως. Εἶναι ὅμοια ; Διατί ;

79) Ἐξηγήσατε διατὶ δύο ρόμβοι μὲ ἀναλόγους διαγωνίους εἶναι ὅμοιοι.

80) Κατασκευάσατε δύο ὀρθογώνια εἰς τρόπον ὥστε αἱ διαγώνιοι ἑκάστου νὰ σχημα-

τίζουν γωνίαν 30^{o} καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι τριπλασία μιᾶς διαγωνίου τοῦ ἄλλου. Ἐξηγήσατε διατὶ αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

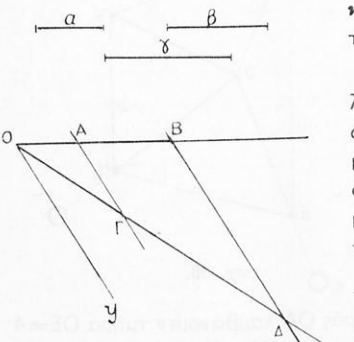
81) Ἐξηγήσατε διατὶ δύο παραλληλόγραμμα μὲ πλευρὰς ἀναλόγους καὶ μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι ὅμοια.

82) Χαράξατε τρίγωνον καὶ ἐπὶ ἑκάστης διαμέσου αὐτοῦ λάβετε σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαμέσου. Ἐξηγήσατε διατὶ αὐτὰ εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Δ΄. ΑΠΛΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

§ 24. Κατασκευὴ τετάρτης ἀναλόγου.

Λάβετε τρία εὐθύγραμμα τμήματα α=3cm, β=4 cm, γ=6 cm καὶ εὕρετε τέταρτον εὐθύγραμμον τμῆμα χ ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\chi}$, *δηλαδὴ τὰ α, β, γ, χ νὰ ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.* Τὸ χ λέγεται τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β καὶ γ.



σχ. 36.

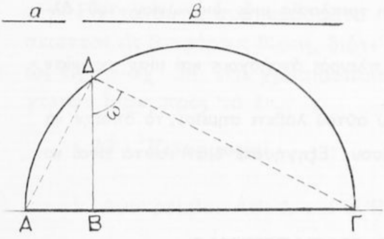
Ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας Ο λάβωμεν ΟΑ=3 *cm*, ΑΒ=4 *cm* καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τμῆμα ΟΓ=6 *cm* καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ Β παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, αὐτὴ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΟΓ εἰς τὸ Δ. Διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν ὅτι ΓΔ=8 cm, συνεπῶς ἡ ΓΔ ἐπαληθεύει τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\chi}$ καὶ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ, τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν.

Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Ο τὴν Οψ//ΑΓ βλέπομεν ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δικαιολογεῖται ὑπὸ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ: Παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουν ἐπὶ δύο εὐθειῶν, τὰς ὁποίας τέμνουν (δηλαδὴ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Ο), ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα.

Σημείωσις: Ἐὰν μὲ α, β, γ, ὀνομάσωμεν τὰς τιμὰς τῶν τριῶν τμημάτων καὶ μὲ χ τὴν τιμὴν τῆς τετάρτης ἀναλόγου των, θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\chi} \Longleftrightarrow \alpha.\chi=\beta.\gamma$. Ἡ ἐργασία τὴν ὁποίαν ἐκάμομεν ἀνωτέρω, ἀποτελεῖ γεωμετρικὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

§ 25. Λάβετε τὰ εὐθ. τμήματα α=2 cm καὶ β=8 cm. Νὰ εὕρητε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα χ ὥστε $\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\beta}$. Τὸ χ καλοῦμεν μέσην ἀνάλογον τῶν α καὶ β. Ἐὰν λάβωμεν τὰς τιμὰς θὰ ἔχωμεν: $\frac{(\alpha)}{(\chi)}=\frac{(\chi)}{(\beta)} \Longleftrightarrow (\chi)^2=(\alpha).(\beta)$.

Λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς 2 cm καὶ 8 cm. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν ἡμικύκλιον. Εἰς τὸ Β ὑψοῦμεν κάθετον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ

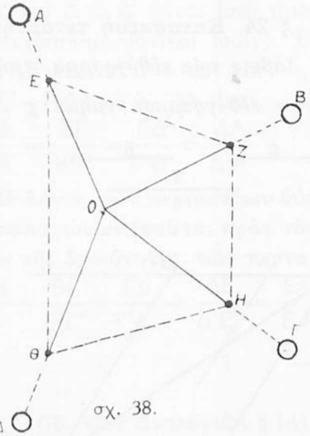


σχ. 37.

ὁποία τέμνει τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ σημεῖον Δ. Διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν ΒΔ=4 cm. Τότε ὅμως $4^2=2.8$, δηλαδὴ $(\Delta B)^2=(AB).(B\Gamma)$. Ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος.

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δὲν εἶναι τυχαῖον, διότι ὡς ἐμάθομεν εἰς τὴν § 19. 3 τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΔΒΑ καὶ ΓΒΔ εἶναι ὅμοια (τὸ τριγ. ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐπειδὴ $\widehat{A\Delta\Gamma}=1$ ὀρθὴ ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, καὶ ΔΒ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν). Ἑπομένως $\frac{(AB)}{(\Delta B)}=\frac{(\Delta B)}{(B\Gamma)}$ καὶ $(\Delta B)^2=(AB).(B\Gamma)$.

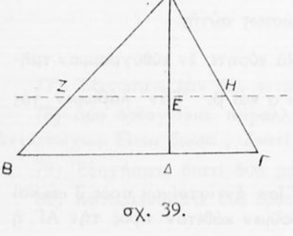
§ **26**. Ἐξ ἑνὸς σημείου αἱ ἀποστάσεις τεσσάρων πόλεων Α,Β,Γ,Δ εἶναι ἀντιστοίχως 40 km, 60 km, 50 km καὶ 45 km. Νὰ σχεδιάσητε χάρτην τῆς περιοχῆς αὐτῆς ὑπὸ κλίμακα 1/1000000.



σχ. 38.

Τοῦτο σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν σχήματα ὅμοια πρὸς τὰ τοῦ ἐδάφους μὲ λόγον ὁμοιότητος 1/1000000. Πρὸς τοῦτο δι' ἑνὸς ὀργάνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται γωνιόμετρον, μετροῦμεν (διὰ σκοπεύσεως ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τοῦ ἐδάφους) τὰς γωνίας $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OA}$ καὶ τὰς σχεδιάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου μας. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΕ=4 cm, ἐπὶ τῆς ΟΒ τμῆμα ΟΖ=6 cm, ἐπὶ τῆς ΟΓ τμῆμα ΟΗ=5 cm καὶ ἐπὶ τῆς ΟΔ τμῆμα ΟΘ=4,5 cm. Τὰ σημεῖα Ο, Ε, Ζ, Η, Θ ἀποτελοῦν τὸν χάρτην τῆς περιοχῆς Ο,Α,Β,Γ,Δ. Πράγματι τὸ τρίγωνον ΟΘΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΟΔΑ (ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν) καὶ ὁ λόγος ὁμοιότητος λ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{OE}{OA}=\frac{4 \text{ cm}}{40 \text{ km}}=\frac{4 \text{ cm}}{4000000 \text{ cm}}=\frac{1}{1000000}$

§ **27**. Χαράξατε ἓν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κατασκευάσατε ἓν ἄλλο τρίγωνον ὅμοιον πρὸς αὐτό, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἓν ὕψος ἴσον πρὸς 6 cm.



σχ. 39.

Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτοῦ τμῆμα ΑΕ ἴσον πρὸς 6 cm Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως. Συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΑΖΗ καὶ ΑΒΓ. Αὐτὰ εἶναι ὅμοια συμφώνως πρὸς ὅσα ἐμάθομεν.

Ἐπὶ πλέον τὸ ΑΖΗ ἔχει ὕψος ΑΕ = 6 cm, διότι ἐφ' ὅσον ΑΕ κάθετος πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΕ θὰ εἶναι καὶ κάθετος πρὸς τὴν παράλληλον αὐτῆς ΖΗ. Ὥστε τὸ ΑΖΗ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ἀσκήσεις

83) Κατασκευάσατε τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν πλευρῶν α, β, γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.

84) Κατασκευάσατε τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν ὑψῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τοῦ προηγουμένου τριγώνου.

85) Χαράξατε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κατασκευάσατε ἄλλον ὅμοιον πρὸς αὐτό, τοῦ ὁποίου τὸ ὁμόλογον ὕψος πρὸς τὸ ὕψος ΒΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι 4 cm.

86) Βορείως, ἀνατολικῶς καὶ βορειοδυτικῶς τοῦ γυμνασίου σας Γ εὑρίσκονται τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Δ ἀντιστοίχως ἀπέχοντα τοῦ Γ 4,7 km, 6,5 km καὶ 7,3 km. Κατασκευάσατε χάρτην τῆς περιοχῆς. (Κλῖμαξ 1:1000000).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

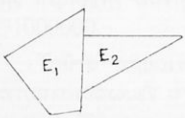
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Α. ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. Ὁρισμοί :

§ **28.** Ὀνομάζομεν ἐπιφάνειαν ἐπιπέδου σχήματος (ἁπλῆς κλειστῆς γραμμῆς) τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐσωτερικὸν αὐτοῦ.

Ἐπιφανείας ἐπιπέδων σχημάτων δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν εἰς τὸ σχῆμα (40). Ἡ εἰκὼν αὐτὴ παριστᾶ δύο ἐπιφανείας ἐπιπέδων σχημάτων E_1 καὶ E_2. **Ἄθροισμα** τῶν ἐπιφανειῶν E_1 καὶ E_2 ὀνομάζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν διαγράψωμεν τὴν κοινὴν γραμμήν.



σχ. 40.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας καλοῦμεν τὴν ἔκτασιν αὐτῆς, ἐκπεφρασμένην εἰς μονάδας μετρήσεως καὶ συμβολίζομεν αὐτὸ διὰ τοῦ Ε.

Τίθεται τὸ ἑξῆς πρόβλημα : Πῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἔκτασιν (δηλ. τὸ ἐμβαδὸν) τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος (40) ἢ τῆς ἐπιφανείας παντὸς ἐπιπέδου σχήματος;

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν διὰ συγκρίσεως τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ὡρισμένου ἐπιπέδου σχήματος, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς συγκρίσεως εἶναι εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος καλεῖται **τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ** τῆς ἐπιφανείας. (Συμβολίζομεν **τὴν τιμὴν** τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔ μὲ (ΑΒΓΔ)).

Ἡ εὕρεσις **τῆς τιμῆς** τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐπιφανείας λέγεται **μέτρησις** αὐτῆς. Ἡ **τιμὴ** λοιπὸν **τοῦ ἐμβαδοῦ** εἶναι ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν μονάδα διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἐμβαδὸν (δηλ. ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ πρὸς τὴν μονάδα).

§ **29. Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν**

Αἱ μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι ἐπιφάνειαι τετραγώνων, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς μίαν μονάδα μήκους.

Ἡ κυριωτέρα μονὰς μετρήσεως ἐπιφανειῶν εἶναι :

Τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον** (m^2), ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1m.

Τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ εἶναι :

1. Τὸ **τετραγωνικὸν δεκάμετρον** (dam^2), ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1 δεκαμέτρου (dam).
2. Τὸ **τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον** (hm^2), ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1 ἑκατομέτρου (hm).
3. Τὸ **τετραγωνικὸν χιλιόμετρον** (km^2), ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1 χιλιομέτρου (km).

Αἱ ὑποδιαιρέσεις του εἶναι :

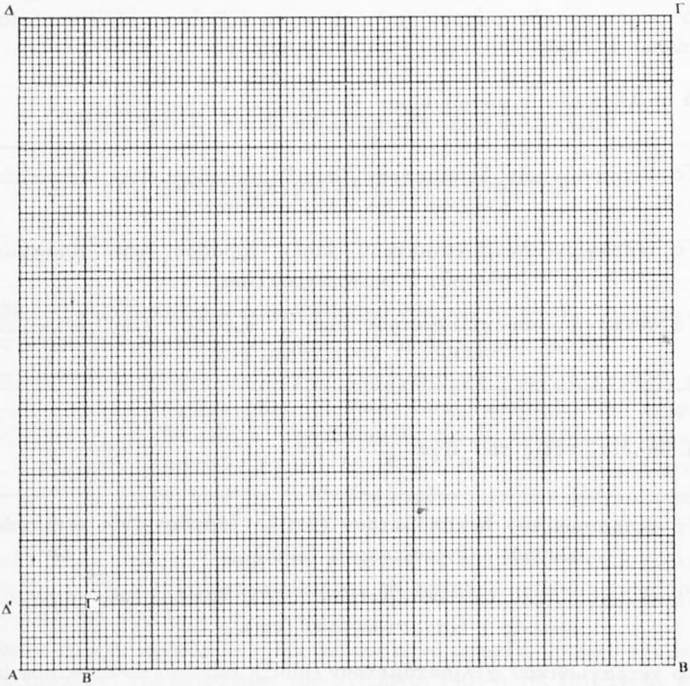
1. Τὸ **τετραγωνικὸν δεκατόμετρον** (dm^2), ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1 δεκατομέτρου (dm).
2. Τὸ **τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον** (cm^2), ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1 ἑκατοστομέτρου (cm).
3. Τὸ **τετραγωνικὸν χιλιοστόμετρον** (mm^2), ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1 χιλιοστομέτρου (mm).

Κατασκευὴ ὡρισμένων μονάδων ἐπιφανειῶν.

1. Κατασκευάζομεν ἐπὶ φύλλου χάρτου χιλιοστομετρικοῦ ἓν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 1 dm καὶ ὁρίζομεν οὕτως ἓν τετραγωνικὸν δεκατόμετρον (dm^2)

2. Ἐντὸς τῆς γωνίας Α τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΑΒ΄Γ΄Δ΄, πλευρᾶς 1 cm, ἤτοι ἓν τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον (cm^2).

3. Ἐπίσης ἐντὸς τοῦ τετραγώνου ΑΒ΄Γ΄Δ΄ ὑπάρχουν τετράγωνα μικρότερα, πλευρᾶς 1 mm, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι μία ὑποδιαίρεσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἐπιφανείας. Ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὠνομάσαμεν τετραγωνικὸν χιλιοστόμετρον (mm^2)



σχ. 41.

Δυνάμεθα οὕτω νὰ εὕρωμεν π.χ. πόσα τετράγωνα ἴσα πρὸς τὸ ΑΒ'Γ'Δ' περιέχει τὸ ΑΒΓΔ καὶ πόσα τετραγωνικὰ χιλιοστόμετρα ὑπάρχουν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒ'Γ'Δ' καὶ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων μονάδων ἐπιφανειῶν.

Σύγκρισις μονάδων ἐπιφανειῶν: Διὰ τῆς συγκρίσεως τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΒ'Γ'Δ', τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι τὸ δέκατον τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ περιέχει δέκα ταινίας. Ἑκάστη τῶν ταινιῶν τούτων περιέχει 10 τετράγωνα ἴσα πρὸς τὸ ΑΒ'Γ'Δ'.

Ὥστε: ΑΒΓΔ = 100·ΑΒ'Γ'Δ'.

Συνεχίζοντες καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ μὲ τὰς ἄλλας ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος, συμπεραίνομεν γενικῶς ὅτι: «Κάθε μονὰς ἐπιφανείας ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 μονάδας ἐπιφανείας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως». (1) Ἤτοι:

$$1 m^2 = 100 dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ mm^2$$

$$1 dm^2 = 100\ cm^2 = 10000\ mm^2$$

$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

Ἡ ἰδιότης (1) μᾶς ὁδηγεῖ καὶ εἰς τοὺς ἀκολούθους κανόνας : 1) Δια νὰ τρέψωμεν ἀριθμὸν συμμιγῆ εἰς ἁπλοῦν (τῆς τελευταίας τάξεως), ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ἓν ἐμβαδόν, παριστῶμεν κάθε ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς ὡς διψήφιον (ἐὰν δὲν εἶναι), ἀναπληροῦντες διὰ δύο μηδενικῶν πᾶσαν ἐλλείπουσαν μονάδα.

Π.χ. α) $8hm^2$ $2dam^2$ $7m^2 = 08hm^2$ $02dam^2 07m^2 = 080207m^2 = 80207m^2$,

β) $9m^2$ $18cm^2 = 90018$ cm^2.

2) Δυνάμεθα να μεταβάλωμεν τὴν μονάδα ἐπιφανείας, μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ 2, κατὰ 4, κ.ο.κ. θέσεις πρὰς τὰ δεξιὰ μέν, ἐὰν θέλωμεν νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ μίαν μονάδα εἰς τὴν ἀμέσως κατωτέραν μονάδα ἐπιφανείας ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ μίαν μονάδα ἐμβαδοῦ εἰς μίαν ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. (Ἀναπληροῦμεν μὲ μηδενικὰ τὰ ἐλλείποντα ψηφία μονάδος μιᾶς ὡρισμένης τάξεως).

Π.χ. α) $832,18m^2 = 8,3218dam^2 = 83218dm^2 = 8321800cm^2$.

Παρατήρησις :

Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῶν ἀγρῶν χρησιμοποιοῦν ἀλλαχοῦ :

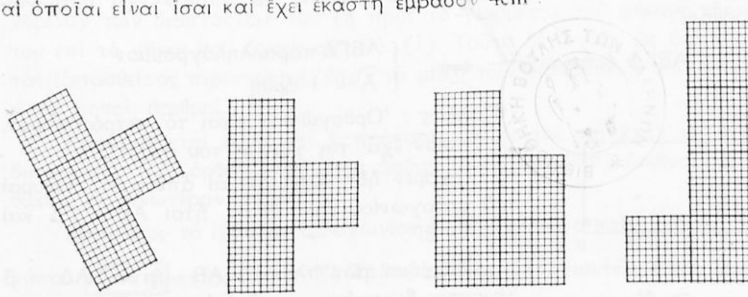
1) Τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον $(dam^2) = 100m^2$, τὸ ὁποῖον ὀνομάζουν ἄρ (a) καὶ 2) τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον $(hm^2) = 100dam^2 = 10000$ m^2, τὸ ὁποῖον λέγεται ἑκτάριον (ha) καὶ ἰσοῦται μὲ 100 ἄρ. (a). Εἰς τὴν χώραν μας χρησιμοποιεῖται τὸ στρέμμα$= 1000m^2 = \frac{1}{10}$ ha. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν οἰκοπέδων χρησιμοποιοῦμεν εἰσέτι καὶ τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν, 1 $\tau\pi^2 = \frac{9}{16}$ $m^2 = 0,5625m^2$.

Τέλος διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦμεν τὸ τετραγ. χιλιόμετρον $(1$ $km^2) = 1000000m^2$.

§ 30. Ἐπιφάνειαι ἰσοδύναμοι. — Ἰσοδύναμα σχήματα.

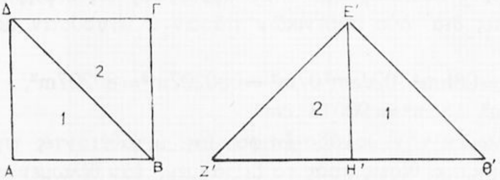
Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἴσων σχημάτων εἶναι ἴσαι.

Δύο ἴσαι ἐπιφάνειαι (μετρούμεναι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα) ἔχουν προφανῶς τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν. Ἐπὶ παραδείγματι αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ σχήματος (42α), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ ἔχει ἑκάστη ἐμβαδὸν $4cm^2$.



α σχ 42 β

Αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ σχήματος (42β) δὲν εἶναι ἴσα, ἔχουν ὅμως ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς 5cm². Αὗται λέγονται **ἰσοδύναμοι** ἢ **ἰσεμβαδικαὶ** ἐπιφάνειαι.



σχ. 43.

Τὰ ἐπίπεδα σχήματα ΑΒΓΔ καὶ Ε′Ζ′Θ′ (σχ. 43) ἔχουν ἰσοδυνάμους **ἐπιφανείας**. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν διὰ καταλλήλου διαιρέσεως αὐτῶν. Τὰ ἀνωτέρω σχήματα λέγονται **ἰσοδύναμα** σχήματα.

Ἰσοδύναμοι ἐπιφάνειαι εἶναι αἱ ἔχουσαι ἴσα ἐμβαδά.
Ἰσοδύναμα σχήματα εἶναι τὰ ἔχοντα ἰσοδυνάμους ἐπιφανείας.

Παρατήρησις : Δύο ἴσα ἐμβαδὰ ἔχουν ἴσας τιμὰς καὶ ἀντιστρόφως.

$$\boxed{\text{Ἐμβ. ΑΒΓΔ} = \text{Ἐμβ. Α′Β′Γ′Δ′} \iff (\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{Α′Β′Γ′Δ′})}$$

Ἀσκήσεις

87) Νὰ τραποῦν εἰς m² τά : 13 dam², 1 hm², 2 km², 18dam²,58 hm².

88) Πόσα mm² ἔχουν α) 3m², β) 4 dam², γ) 38 cm².

89) Ἐκφράσατε εἰς m² καὶ κατόπιν εἰς ares α) $\frac{1}{10}$ hm², β) $\frac{1}{10}$ km².

90) Νὰ τραποῦν εἰς m² τὰ ἐμβαδὰ α) 5 hm² 6 dam² 8 mm² καὶ β) 156,25 dm².

91) Μετατρέψατε εἰς cm² α) 672 dm², β) 3,84 hm² γ) 29 dam².

92) Ἐκτελέσατε τὴν πρόσθεσιν ἀφοῦ προηγουμένως μετατρέψετε τοὺς προσθετέους εἰς cm² : $\frac{2}{5}$ m² + 560000 mm² + 152 cm² + 16 dm².

93) Ὑπολογίσατε εἰς m² τὰς διαφορὰς α) 8 στρέμ. −243m² καὶ β) 4ha − 136,25a.

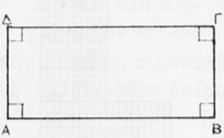
94) Γήπεδον ἐμβαδοῦ 6ha ἔχει διαιρεθῆ εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου κατὰ 40a, Νὰ εὕρητε πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου μέρους τοῦ γηπέδου.

§ 31. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.

Ὀρθογώνιον εἶναι ἓν παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν :

$$\text{ΑΒΓΔ ὀρθογώνιον} \iff \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον} \\ \widehat{A} = 1 \text{ ὀρθή} \end{cases}$$

(ἢ ἄλλως : Ὀρθογώνιον εἶναι τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς).

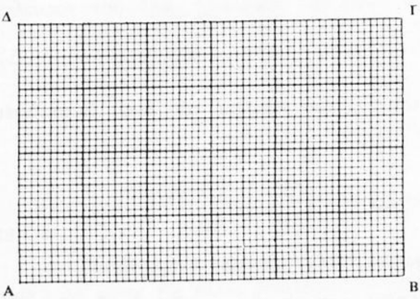


σχ. 44.

Ἔχομεν ἤδη εὕρει ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΔ = ΒΓ.

Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΑΒ = α καὶ ΑΔ = β λέγονται **διαστάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἀντιστοίχως τὸ μὲν πρῶτον **βάσις** ἢ **μῆκος** καὶ τὸ ἕτερον **ὕψος** ἢ **πλάτος** αὐτοῦ.

Κατασκευάσατε εἰς γωνίαν φύλλου χάρτου χιλιοστομετρικοῦ (ἢ χάρτου τετραγωνισμένου) ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ ΑΒ = 6 cm καὶ ἡ ΑΔ = 4 cm καὶ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.



σχ. 45.

Διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ ὀρθογώνιον ἀποτελεῖται ἀπὸ 24 cm^2 ἢ (6X4) cm^2 καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ $E_{ΑΒΓΔ} = 24\ cm^2 = (6X4)\ cm^2$, ἤτοι ($6\ cm \times 4\ cm$) ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὀρθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' μὲ διαστάσεις κλασματικοὺς ἀριθμοὺς π.χ. $Α'Β' = \frac{4}{10}$ dm καὶ $Α'Δ' = \frac{3}{10}$ dm. Ἔχομεν $E_{Α'Β'Γ'Δ'} = 12 cm^2 = \frac{12}{100} dm^2 = \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10}\right) dm^2 = \frac{4}{10}\ dm \cdot \frac{3}{10}\ dm$ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεων αὐτοῦ.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου χαράξωμεν διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ἓν ὀρθογώνιον ΔΕΖΘ, τοῦ ὁποίου ἡ ΔΕ = 6,5 cm καὶ ΔΘ = 3,4 cm, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν μονάδων, ἤτοι εἰς τετρ. χιλιοστόμετρα (mm^2), $E_{ΔΕΖΘ} = 2210\ mm^2$. Μετασχηματίζομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς τετρ. ἑκατοστόμετρα $E_{ΔΕΖΘ} = 22{,}10\ cm^2$ καὶ συγκρίνοντες αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του εἰς ἑκατοστόμετρα (cm), εὑρίσκομεν ὅτι τὸ $E_{ΔΕΖΘ} = 22{,}10\ cm^2 = (6{,}5.3{,}4) cm^2$.

Ἤτοι διαπιστοῦμεν καὶ πάλιν ὅτι τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του (ἢ πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ). (1). Τοῦτο δὲ ἰσχύει, ὡς διεπιστώθη εἰς τὰς ἐξετασθείσας περιπτώσεις, ὅταν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί.

Ἀποδεικνύεται ὅμως ὅτι ἡ πρότασις (1) ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἀσύμμετροι (μὴ ρητοὶ) ἀριθμοὶ (ὡς θὰ μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν).

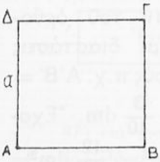
Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις α καὶ β δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\boxed{E = \alpha \cdot \beta}$ (2), ἤτοι : **Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών του.**

Ὁ τύπος (2) γράφεται καὶ $E = \beta.\upsilon$, διότι γνωρίζομεν ὅτι ἡ μία τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται **βάσις** καὶ ἡ ἄλλη **ὕψος** αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ τύπου $E = \beta.\upsilon$ λαμβάνομεν καὶ τοὺς $\beta = \frac{E}{\upsilon}$ καὶ $\upsilon = \frac{E}{\beta}$

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μῆκος τῶν δύο διαστάσεων πρέπει νὰ ἐκφράζηται εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους, ὅτε τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται διὰ τῆς μονάδος τῆς παριστωμένης μὲ τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰν τὴν ἐκλεγεῖσαν μονάδα μήκους.

§ 32. Ἐμβαδὸν τετραγώνου.

Τετράγωνον εἶναι ἓν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο διαστάσεις εἶναι ἴσαι.



$$\text{ΑΒΓΔ τετράγωνον} \iff \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ ὀρθογώνιον} \\ \text{ΑΒ} = \text{ΑΔ} \end{cases}$$

Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὸ μῆκος τῶν ἴσων διαστάσεών του, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $E = \alpha.\alpha = \alpha^2$, ἤτοι: $\boxed{E = \alpha^2}$

σχ. 46.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς του.

Παρατηρήσεις:

1) Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, διότι δίδει τὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του ἔχει τιμὴν ἴσην πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

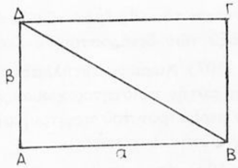
2) Χρήσιμον εἶναι νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ τετράγωνα μερικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 ...
α^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225 ...

Ἐφαρμογή

Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι α καὶ β.

Ἔχομεν εὕρει ὅτι ἡ διαγώνιος ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουν μήκη τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθ. τριγώνου π.χ. ΒΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ ὀρθ. τριγώνου. Συνεπῶς $E = \frac{\alpha.\beta}{2}$



σχ. 47

(Διατυπώσατε τὸν σχετικὸν κανόνα).

Ἀσκήσεις

95) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 13 m καὶ 187 m.

96) Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν $36 cm^2$. Μία τῶν διαστάσεών του εἶναι 4 cm. Ὑπολογίσατε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαστάσεως αὐτοῦ.

97) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς μήκους 6 cm ;

98) Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $121 cm^2$;

99) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 124 cm;

100) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 14 cm καὶ 23 cm ;

101) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 150 cm. Ἐὰν ἡ μία τῶν διαστάσεών του εἶναι 25 cm, νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

102) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ περίμετρος αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς 24 cm καὶ ὁ λόγος τῶν διαστάσεών του εἶναι $\frac{1}{3}$.

103. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τετραγώνου ΑΒΓΔ γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν ΑΒ κατὰ 4 m καὶ ἐλαττώσωμεν τὴν ΒΓ κατὰ 8 m εὑρίσκομεν ἓν ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν κατὰ $196 m^2$ μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου.

104) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ἀγροῦ ὀρθογωνίου ἔχουν ἐμβαδὸν 8,112 στρέμματα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν τοῦ ἀγροῦ; Ποία εἶναι ἡ μία τῶν διαστάσεών του, ἐὰν ἡ ἄλλη εἶναι 169 m;

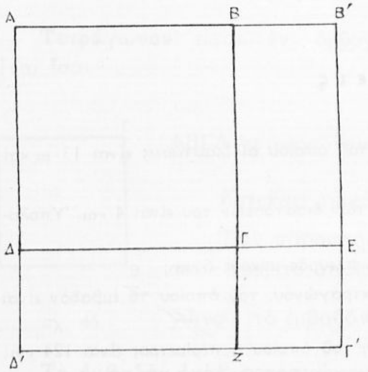
105) Εἷς ἀγρὸς ὀρθογώνιος, τοῦ ὁποίου ἡ μία διάστασις εἶναι 180 m ἠγοράσθη 288000 δρχ. ἀντὶ 16000 δρχ. τὸ στρέμμα. Εἷς δρόμος πλάτους 3 m κάμνει τὸν γύρον τοῦ ὀρθογωνίου ἀγροῦ κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικόν του. Δύο δὲ ἄλλοι δρόμοι τῶν 2 m πλάτους εἶναι χαραγμένοι παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου. Οἱ τρεῖς αὐτοὶ δρόμοι διαιροῦν τὸν ἀγρὸν εἰς 4 ἴσα μέρη. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν ἴσων αὐτῶν μερῶν τοῦ ἀγροῦ.

106) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου εἶναι 240 m. Φυτεύομεν κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ ἀγροῦ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ δένδρα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 5 m

μεταξύ των καὶ 5 m ἀπὸ τῆς περιμέτρου. Τὸ πλάτος τοῦ ἀγροῦ εἶναι $\frac{3}{5}$ τοῦ μήκους του. Ὑπολογίσατε τὸν ἀριθμὸν τῶν δένδρων καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀγροῦ, ἡ ὁποία περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δενδροστοιχιῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἀγροῦ.

107) Χωρικὸς ἀντήλλαξεν ἀγρὸν σχήματος τετραγώνου πλευρᾶς 60m, μὲ ἄλλον ἀγρὸν (τῆς αὐτῆς ποιότητος χώματος) σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος ἦτο ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πρώτου καὶ τὸ πλάτος του 40m. Ἠδικήθη ἢ ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν ἀνταλλαγὴν αὐτὴν ὁ χωρικός;

108) Κατασκευάσατε ἓν τετράγωνον πλευρᾶς μήκους ἔστω α. Αὐξήσατε τὴν πλευρὰν αὐτοῦ κατὰ τὸ μῆκος β ($\beta \neq \alpha$) εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσητε τὸ τετράγωνον ΑΒ΄Γ΄Δ΄ (σχ. 48). Ἡ προέκτασις τῆς ΔΓ τέμνει τὴν Β΄Γ΄ εἰς τὸ Ε καὶ ἡ προέκτασις τῆς ΒΓ τὴν Γ΄Δ΄ εἰς τὸ Ζ.



σχ. 48.

Νὰ συγκρίνητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒ΄Γ΄Δ΄ πρὸς ἐκεῖνον τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Ποία εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ΑΒ΄Γ΄Δ΄; Ποία εἶναι ἡ φύσις τῶν τετραπλεύρων ΒΒ΄ΕΓ, ΓΕΓ΄Ζ, ΖΔ΄ΔΓ. Ποῖαι εἶναι αἱ διαστάσεις των; Συμπληρώσατε τὰς τιμὰς τῶν ἐμβαδῶν :

$$(ΑΒ΄Γ΄Δ΄) = (\alpha+\beta)^2$$

$(ΑΒΓΔ) = \ldots$ $\qquad$ $(ΒΒ΄ΕΓ) = \ldots$

$(ΓΕΓ΄Ζ) = \ldots$ $\qquad$ $(ΔΓΖΔ΄) = \ldots$

Νὰ εὕρητε τὴν σχέσιν ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἐμβαδὰ αὐτά.

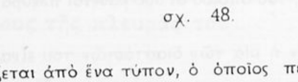
(Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒ΄Γ΄Δ΄ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ἄλλων. Αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα ἐκφράζεται ἀπὸ ἕνα τύπον, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν : $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha\beta$. Ὁ τύπος αὐτὸς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφὴν $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται οὕτως : Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀριθμῶν σὺν τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν.

Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον αὐτὸν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τετραγώνου ἑνὸς διψηφίου ἀριθμοῦ π.χ. $45^2 = 40^2 + 5^2 + 2.40.5 = 1600 + 25 + 400 = 2025$.

109) Νὰ ἐργασθῆτε καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ νὰ δώσητε γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῶν τύπων : α) $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$ καὶ β) $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

§ 33. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.

Παραλληλόγραμμον εἶναι ἓν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

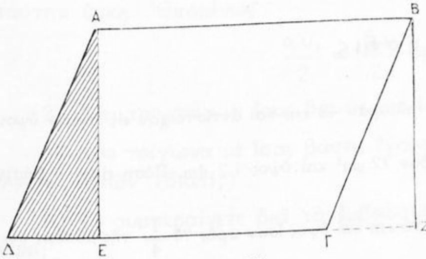


σχ. 49.

$$ΑΒΓΔ \text{ παραλληλόγραμμον} \Longleftrightarrow \begin{cases} ΑΒ // ΓΔ \\ ΑΔ // ΒΓ \end{cases}$$

Βάσις ἑνὸς παραλληλογράμμου λέγεται μία τυχοῦσα πλευρὰ αὐτοῦ.

Ὕψος παραλληλογράμμου εἶναι τὸ μεταξὺ δύο ἀπέναντι βάσεων περιεχόμενον τμῆμα τῆς πρὸς αὐτὰς καθέτου.



σχ. 50.

Κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, χαράξατε τὰ ὕψη ΑΕ καὶ ΒΖ αὐτοῦ καὶ συγκρίνατε τὸ ἐμβαδόν του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕΖΒ. Τί παρατηρεῖτε;

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΓΖ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας (ΑΔ = ΒΓ) καὶ ἀνὰ μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην (ΑΕ = ΒΖ) (διατί;). Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσεμβαδικά. Συνεπῶς (ΑΔΕ)=(ΒΓΖ).(1) Τὰ ἰσεμβαδικὰ σχήματα ἔχουν ἴσας τιμὰς ἐμβαδῶν § 20.

Ἐπομένως, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος (50) ἔχομεν: (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓΕ) + (ΑΔΕ) καὶ λόγῳ τῆς (1) (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓΕ) + (ΒΓΖ) ἄρα (ΑΒΓΔ) = (ΑΕΖΒ) ἤτοι μετεσχηματίσαμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς ἰσεμβαδικὸν ὀρθογώνιον ΑΕΖΒ. Ἀλλ' ὡς εἶναι ἤδη γνωστὸν $(E_{AEZB}) = (AE)\cdot(EZ)$. Ἐπειδὴ δὲ ΔΓ = ΑΒ = ΕΖ = β, ΑΕ = ΒΖ = υ καὶ $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AEZB}$ ἔχομεν $E_{AB\Gamma\Delta} = \beta.\upsilon$ ἤτοι

$$\boxed{E = \beta.\upsilon} \qquad (2)$$

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτήν. (τὰ μήκη ἐκφράζονται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα).

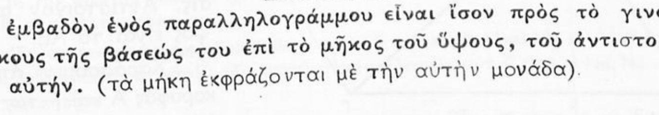
Παρατηρήσεις

1) Προφανῶς δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ὡς βάσιν ὁποιανδήποτε πλευρὰν τοῦ παραλληλογράμμου ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν καὶ τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς αὐτὴν ὕψος. Ἐὰν β′ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς καὶ υ′ τὸ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὴν ὕψος ἔχομεν $E = \beta.\upsilon = \beta'.\upsilon'$.

2. Ἐννοεῖται ὅτι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους τοῦ παραλληλογράμμου ἐκφράζονται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους.

3. Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $\beta = \dfrac{E}{\upsilon}$ καὶ $\upsilon = \dfrac{E}{\beta}$

Σημείωσις: Δυνάμεθα ἐποπτικῶς δι' ἑνὸς ἐκ χαρτονίου παραλληλογράμμου καὶ διὰ



σχ. 51.

διπλώσεως καὶ ἀναδιπλώσεως τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων, ὡς τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν παρατιθεμένων σχημάτων, νὰ ἴδωμεν τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἰς ἰσεμβαδικὸν ὀρθογώνιον.

Ἀσκήσεις

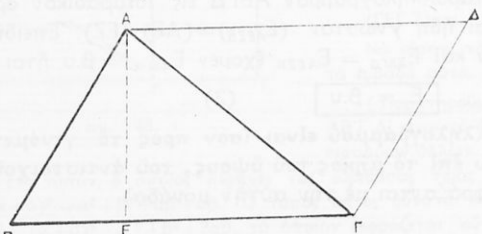
110) Ἓν παραλληλόγραμμον ἔχει μίαν πλευρὰν 48 cm καὶ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὴν ὕψος 3dm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

111) Ἓν παραλληλόγραμμον ἔχει ἐμβαδὸν 72 cm^2 καὶ ὕψος 1,2 dm. Πόση εἶναι ἡ βάσις του;

112) Ἓν παραλληλόγραμμον ἔχει βάσιν 96 cm καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς βάσεως αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του εἰς dm^2.

§ 34. Ἐμβαδὸν τριγώνου.

Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ. *Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐκ τῆς βάσεώς του* ΒΓ *καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ* ΑΕ.



σχ. 52.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι **βάσις** ἑνὸς τριγώνου λέγεται μία ὁποιαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ. Π.χ. ἡ ΒΓ εἶναι βάσις. Ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος εἶναι τὸ ΑΕ.

Χαράσσομεν ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ τὰς παραλλήλους ΑΔ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΒΓ καὶ ΑΒ, ὅτε τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἡ ΒΓ καὶ ὕψος τὸ ΑΕ.

Ἔχομεν μάθει ὅτι κάθε διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Ἑπομένως ἡ ΑΓ διαιρεῖ τὸ ΑΒΓΔ εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ ἰσεμβαδικὰ συνεπῶς (ΑΒΓ)=(ΑΓΔ).

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἑπομένως εἶναι :

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\,(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}\cdot(ΒΓ)\cdot(ΑΕ)$ καὶ ἐὰν τὸ μῆκος τῆς βάσεως ΒΓ εἶναι α καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ΑΕ εἶναι $υ_1$ ἔχομεν :

$$\boxed{Ε = \frac{α.υ_1}{2}}$$

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τοῦ μήκους τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Παρατηρήσεις.

1) Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν, ἐὰν λάβωμεν βάσιν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ ὡς ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην ὕψος. Ἑπομένως :

$$\frac{\alpha.\upsilon_1}{2} = \frac{\beta.\upsilon_2}{2} = \frac{\gamma.\upsilon_3}{2} = E$$

2) Δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

3) Δύο τρίγωνα μὲ ἴσας βάσεις ἔχουν ἐμβαδὰ ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν αὐτῶν (διατί;)

4) Τί συμπεραίνετε διὰ τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη;

Ἀσκήσεις

113) Ἓν τρίγωνον ἔχει βάσιν 62 cm καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του. Να εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

114) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου ἐμβαδοῦ 5m² ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὸ ὕψος τοῦτο πλευρά, ἔχει μῆκος 20 dm.

115) Αἱ πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου ἔχουν μήκη 24 cm καὶ 27 cm. Τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πρώτην πλευρὰν ἔχει μῆκος 18 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἄλλην πλευράν.

116) Ἑνὸς κήπου σχήματος παραλληλογράμμου ἡ περίμετρος εἶναι 186 m καὶ ἡ μία πλευρά του 24 m, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 19 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου.

117) Παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσεμβαδικὸν πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς 16 cm. Ἐὰν ἡ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 3,2 dm, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀντίστοιχον ταύτης ὕψος.

185) Ἓν τρίγωνον καὶ ἓν ὀρθογώνιον ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ ἴσα ἐμβαδά. Ποία σχέσις συνδέει τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κοινὴν πλευρὰν μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν πλευράν;

119) Ἓν τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 27cm². Ἓν τῶν ὑψῶν του εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς πλευρᾶς, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτό. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου.

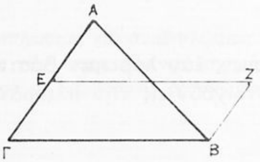
120) Δίδεται ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές. Αἱ ἴσαι πλευραί του ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν μῆκος 8 cm ἑκάστη. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πῶς ὑπολογίζεται γενικῶς τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

121) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}$=1 ὀρθ.) εἶναι 50m². Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ αὐτοῦ.

122) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A}$=1 ὀρθ.) μὲ ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ ΒΓ=α φέρατε τὸ ὕψος ΑΔ=υ καὶ συγκρίνατε τὰ γινόμενα βγ καὶ αυ. Τί παρατηρεῖτε;

123) Κατασκευάσατε τρίγωνον ΑΒΓ. Ὁρίσατε τὸ μέσον Ε τῆς ΑΓ καὶ ἐκ τῶν Ε καὶ Β χα-

ράξατε παραλλήλους πρὸς τὰς ΓΒ καὶ ΓΑ ἀντιστοίχως. Αὐται τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Συγκρίνατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου ΕΓΒΖ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΒ. (Σχ. 53)

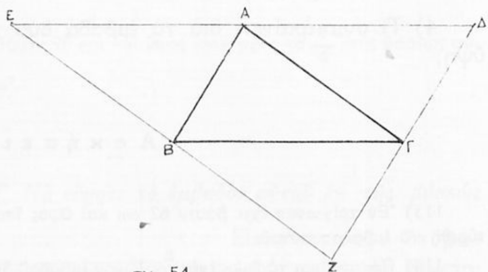


σχ. 53.

124) Χαράξατε κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν του φέρατε παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του. Σχηματίζεται τότε ἓν παραλληλόγραμμον, τὸ ΕΖΗΘ. Νὰ συγκρίνητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ

125) Χαράξατε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ νὰ φέρητε παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του. Σχηματίζεται τότε δεύτερον τρίγωνον ΔΕΖ. Νὰ συγκρίνητε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. (Σχ. 54)

Σημ. Εἰς τὰς ἀσκήσεις 123, 124, καὶ 125, γίνεται μετασχηματισμὸς εὐθ. σχημάτων εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα διὰ χαράξεως καταλλήλων γραμμῶν.

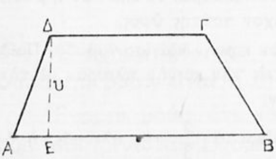


σχ. 54

§ 35. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.

Τραπέζιον εἶναι ἓν κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον παραλλήλους πλευράς.

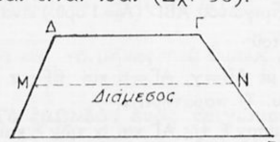
$$\text{Τραπέζιον ΑΒΓΔ} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ κυρτὸν} \\ \text{μόνον ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ} \end{cases}$$



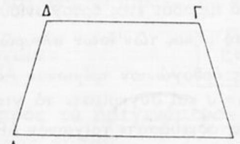
σχ. 55.

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ. **Ὕψος** τοῦ τραπεζίου εἶναι τὸ μεταξὺ τῶν βάσεων κάθετον πρὸς αὐτὰς εὐθύγραμμον τμῆμα. **Διάμεσος** τραπεζίου λέγεται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ. (Σχ. 55β)

Ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι τὸ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι (Σχ. 56).

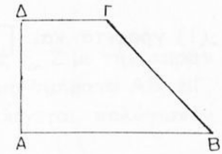


σχ. 55β.



σχ. 56.

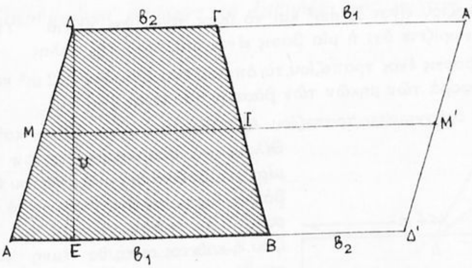
'Ορθογώνιον τραπέζιον εἶναι τὸ τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν πλευρὰν κάθετον πρὸς τὰς βάσεις (Σχ. 57).



σχ. 57.

Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Τὸ τυχὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 58) ἔχει βάσεις $AB = \beta_1$, $\Delta\Gamma = \beta_2$ καὶ ὕψος $\Delta E = \upsilon$. Ἔστω Ι τὸ μέσον τῆς μὴ παραλλήλου πλευρᾶς ΒΓ. Κατασκευάζομεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓΔ ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ι. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἓν τραπέζιον Α'ΓΒΔ' ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν τῶν δύο συμμετρικῶν τραπεζίων εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔ'Α'Δ. (ΔΑ'//ΑΔ', ΑΔ//Δ'Α' ὡς συμμετρικὰ πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ι). Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τραπεζίων ΑΒΓΔ καὶ Α'ΓΒΔ' εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔ'Α'Δ, ἤτοι $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} E_{A\Delta'A'\Delta}$



σχ. 58.

'Επειδὴ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ ἔχει βάσιν τὴν $A\Delta' = \beta_1 + \beta_2$ καὶ ὕψος υ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\boxed{E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.\upsilon} \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

'Εκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν: $E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.\upsilon \Longleftrightarrow 2E = (\beta_1 + \beta_2).\upsilon \Longleftrightarrow \beta_1 + \beta_2 = \frac{2E}{\upsilon} \Longleftrightarrow \beta_1 = \frac{2E}{\upsilon} - \beta_2$. 'Επίσης ἔχομεν τὸν τύπον $\upsilon = \frac{2E}{\beta_1 + \beta_2}$.

Παρατήρησις:

'Η διάμεσος ΙΜ τοῦ τραπεζίου τέμνει τὴν Α'Δ' εἰς τὸ μέσον της Μ' (λόγῳ τῆς συμμετρίας) τότε $MM' = A\Delta' = \beta_1 + \beta_2$. 'Αλλὰ ἕνεκα τῆς συμμετρίας τὸ Ι εἶναι μέσον τοῦ ΜΜ', ἑπομένως $2.MI = \beta_1 + \beta_2$ καὶ $MI = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ Ἄρα ὁ τύπος (1) γράφεται καὶ $\boxed{E = \mu . \upsilon}$, ἐὰν μ τὸ μῆκος τῆς ΜΙ.

Ἀσκήσεις

126) Ἑνὸς τραπεζίου τὰ μήκη τῶν βάσεων εἶναι $\beta_1 = 8$ cm. καὶ $\beta_2 = 6$ cm. καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους $\upsilon = 7$ cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

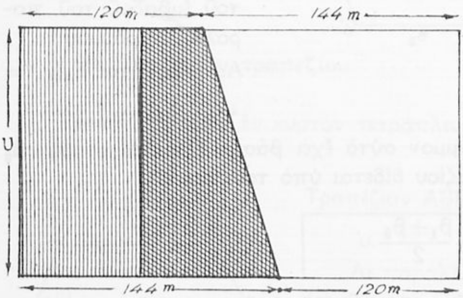
127) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 63 cm^2. Τὸ ὕψος εἶναι 6 cm. καὶ ἡ μία τῶν βάσεων εἶναι 14 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἄλλην βάσιν.

128) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀγροῦ σχήματος τραπεζίου εἶναι 3 στρέμ. καὶ αἱ βάσεις του ἔχουν μήκη 180 m καὶ 120 m. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ;

129) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 30 dm^2 καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 50 cm. Ὑπολογίσατε τὰς βάσεις αὐτοῦ, ὅταν γνωρίζετε ὅτι ἡ μία βάσις εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

130) Νὰ ὑπολογίσητε τὰς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν 252 m^2 καὶ ὕψος 24 m ὅταν γνωρίζητε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν βάσεών του εἶναι 5 m.

131) Εἷς ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τραπεζίου. Αἱ βάσεις του εἶναι 120 m καὶ 144 m Θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν εἰς δύο μέρη ἰσεμβαδικὰ διὰ μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὰς βάσεις. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου ἡ κάθετος αὐτὴ θὰ τέμνῃ τὰς βάσεις του;



σχ. 59.

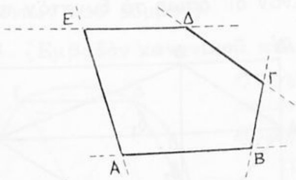
Ὑπόδειξις : Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ σχήματος ὀρθογ. τραπεζίου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου (120m + 144 m = 264 m) καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ υ m ἢ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις $\frac{264}{2} = 132$m καὶ υ m. Ἡ κάθετος εἰς τὰς δύο βάσεις χωρίζει τὸ τραπέζιον εἰς ἓν ὀρθογώνιον καὶ εἰς ἓν ὀρθογώνιον τραπέζιον (τὸ ὕψος υ τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ μία διάστασις τοῦ ὀρθογωνίου). Ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδά, πρέπει ἑκάστη νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν τὸ ἥμισυ τοῦ εὑρεθέντος ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος τραπεζίου, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις 132 m καὶ υ m· δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις $\frac{132}{2}$ m = 66 m καὶ υm). Τώρα καθίσταται πλέον εὔκολος ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀποστάσεως τῆς καθέτου ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ δοθέντος τραπεζίου ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν αὐτοῦ, τὴν ὁποίαν ἔχετε νὰ ὑπολογίσητε.

§ 36. Ἐμβαδὸν πολυγώνου

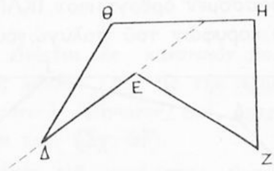
Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μὲ τὴν σειρὰν μὲ τὴν ὁποίαν ἀναφέρονται καὶ χαράξωμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΑ ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖΑ λέγεται **πολύγωνον** ΑΒΓΔΕΖ.

Λέγομεν ὅτι ἓν πολύγωνον εἶναι **κυρτὸν** (Σχ. 60) ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται ὁλόκληρον εἰς τὸ ἕνα τῶν ἡμιεπιπέδων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τοῦ φορέως ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ. **Μὴ κυρτὸν** (σχ. 61) εἶναι εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν. **Διαγώνιος** πολυγώνου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου.



σχ. 60.

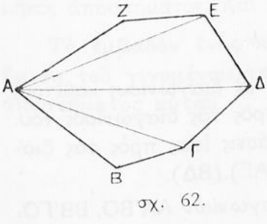


σχ. 61.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ χρησιμοποιοῦντες τὰς κάτωθι μεθόδους:

Α. Τὴν προσθετικὴν μέθοδον:

α) Διαίρεσις κυρτοῦ πολυγώνου εἰς τρίγωνα.



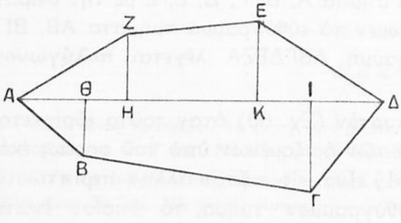
σχ. 62.

Ἔστω ἓν κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Χαράσσομεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ διαιροῦμεν τὸ πολύγωνον εἰς 4 τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, ΑΕΖ. (Σχ. 62). Ἔχομεν:

$$(ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ) + (ΑΕΖ)$$

Ἄρα: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται.

β) Ἀνάλυσις τοῦ πολυγώνου εἰς κυρτὰ τραπέζια, ὀρθογώνια καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα :



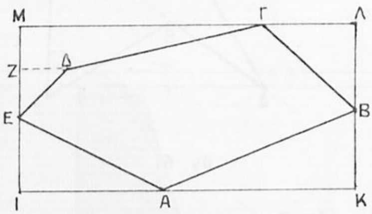
σχ. 63.

Χαράσσομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον, τὴν ΑΔ καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς ἄγομεν τὰς καθέτους πρὸς αὐτήν. Διαιροῦμεν οὕτω τὸ πολύγωνον, εἰς ὀρθογώνια τραπέζια καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα (Σχ. 63) καὶ ἔχομεν :

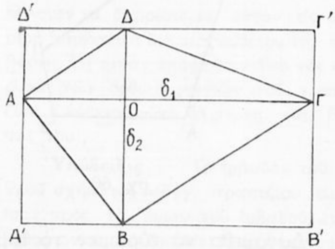
$$E_{ΑΒΓΔΕΖ} = E_{ΑΒΘ} + E_{ΘΒΓΙ} + E_{ΙΓΔ} + E_{ΔΕΚ} + E_{ΚΕΖΗ} + E_{ΖΑΗ}$$

Β. Τὴν μέθοδον τῆς διαφορᾶς τῶν ἐμβαδῶν :

Χαράσσομεν ὀρθογώνιον ΙΚΛΜ διερχόμενον δι' ὅσων τὸ δυνατὸν περισσοτέρων κορυφῶν τοῦ πολυγώνου.



σχ. 64.



σχ. 65.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΙΚΛΜ ἠλαττωμένον κατὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἢ ὀρθ. τραπεζίων, τὰ ὁποῖα ἐσχηματίσθησαν (σχ. 64).

Ἤτοι : $E_{ΑΒΓΔΕ} = E_{ΚΛΜ} - E_{ΑΚΒ} - E_{ΒΛΓ} - E_{ΓΜΖΔ} - E_{ΔΖΕ} - E_{ΕΙΑ}$

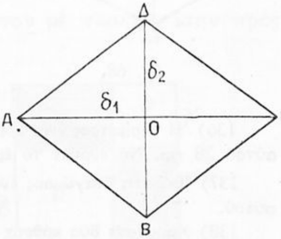
§ 37. Ἐφαρμογαὶ

1. Κατασκευάσατε τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 65) μὲ διαγωνίους καθέτους καὶ χαράξατε ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του. Σχηματίζεται τότε τὸ ὀρθογώνιον Α'Β'Γ'Δ' μὲ διαστάσεις ἴσας πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. Ἑπομένως (Α'Β'Γ'Δ') = (ΑΓ).(ΒΔ).

Τὸ ὀρθογώνιον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΑ'ΒΟ, ΒΒ'ΓΟ, ΓΓ'ΔΟ, ΟΔΔ'Α ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἀντιστοίχως διπλάσιον τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΟΑ, ΒΓΟ, ΓΔΟ, ΑΟΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου Α'Β'Γ'Δ'.

Ἄρα: **Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου μὲ διαγωνίους καθέτους, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων του.** $E = \frac{\delta_1 . \delta_2}{2}$ (δ_1, δ_2 εἶναι τὰ μήκη τῶν ΑΓ, ΒΔ σχ. 65).

2. Ἐμβαδὸν ρόμβου :

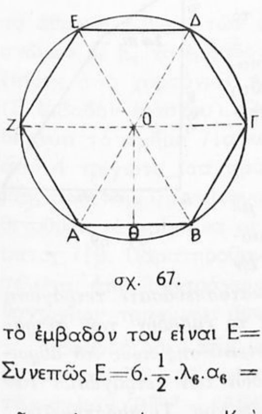


σχ. 66.

Ἐπειδή, ὡς γνωρίζομεν, αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως (σχ. 66) **τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἰσοῦται καὶ πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων του.**

Ἤτοι : $\boxed{E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}}$ (δ_1, δ_2 τὰ μήκη τῶν διαγωνίων τοῦ ρόμβου).

3. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου: *Δίδεται ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (π.χ. εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.* (Σχ. 67).

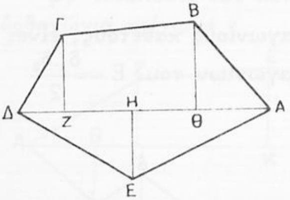


σχ. 67.

Περίμετρον ἑνὸς εὐθ. σχήματος ὠνομάσαμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Ἐπειδὴ εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα αἱ πλευραί των εἶναι ὅλαι ἴσαι, ἡ περίμετρος π.χ. τοῦ ἀνωτέρω ἑξαγώνου θὰ εἶναι $6.\lambda_6$ καὶ γενικῶς ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ ν - πλεύρου εἶναι $\nu.\lambda_\nu$. Ἐὰν χαράξωμεν τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἀνωτέρω κανονικοῦ πολυγώνου (σχῆμα 67), τοῦτο διαιρεῖται εἰς 6 ἴσα τρίγωνα. Ἄρα τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $E = 6.E'$ (ὅπου Ε' τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν ἴσων τριγώνων). Συνεπῶς $E = 6.\frac{1}{2}.\lambda_6.\alpha_6 = \frac{1}{2}.(6\lambda_6).\alpha_6$ δηλαδὴ $E = \frac{1}{2}$ Χ μῆκος περιμέτρου Χ μῆκος ἀποστήματος. Καὶ γενικῶς δι' ἓν κανονικὸν ν - πλευρον $E = \frac{1}{2}(\nu.\lambda_\nu).\alpha_\nu$

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις



σχ. 68.

132) Ἓν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ ἔχει τὴν διαγώνιον ΑΔ= 148 m. Αἱ κάθετοι ΓΖ,ΕΗ καὶ ΒΘ εἶναι ἀντιστοίχως 43m, 45m καὶ 52 m (σχῆμα 68). Ἐὰν ΔΖ = 18m, ΘΑ=38m καὶ ΔΗ= 70m. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

133. Εἷς ρόμβος ἔχει διαγωνίους 12 cm καὶ 9 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

134) Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου εἶναι 42 cm² καὶ ἡ μία διαγώνιός του 12 cm, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη διαγώνιος.

135) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου μὲ διαγωνίους καθέτους, ὅταν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτῶν εἶναι 14 cm καὶ 27 cm.

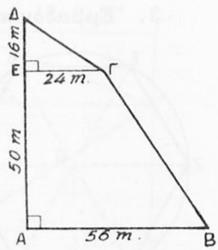
136) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ρόμβου εἶναι 144 cm, ἡ δὲ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ 28 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

137) Ἑκάστη διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου ἔχει μῆκος 10 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

138) Χαράξατε δύο κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 12 cm. Αὐτὰ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ι, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 5 cm ἀπὸ τοῦ Α καὶ 4 cm ἀπὸ τοῦ Β. Κατασκευάσατε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

139) Ἔστω ἓν οἰκόπεδον, τοῦ ὁποίου τὸ σχῆμα εἶναι τὸ εἰκονιζόμενον παραπλεύρως ΑΒΓΔ (γωνία $\widehat{A}=1$ ὀρθή). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. (Σχ. 69)

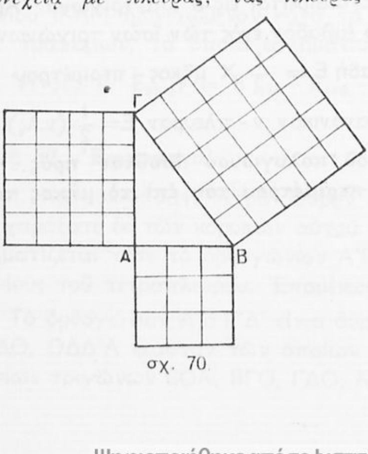
140) Χαράξατε τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ φέρατε ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ αὐτοῦ. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΓΒ εἰς τὸ Ε. Συγκρίνατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΕΓ.



σχ. 69.

Β. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ

§ **38**. *Κατασκευάσατε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΓ=4 μονάδ. μήκους καὶ ΑΒ = 3 μονάδ. μήκους. Μετρήσατε τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ. Ἐν συνεχείᾳ μὲ πλευράς, τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου κατασκευάσατε τετράγωνα καὶ συγκρίνατε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν του. Τί παρατηρεῖτε ;*



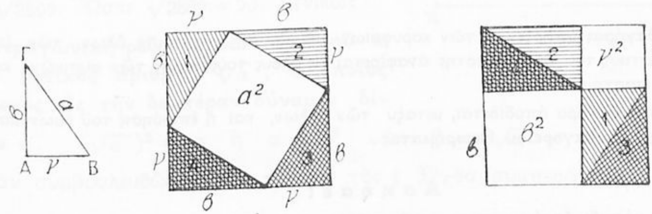
σχ. 70.

Διαπιστοῦμεν, διὰ μετρήσεως, ἀφ' ἑνὸς ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ ἰσοῦται πρὸς 5 μον. μήκους καὶ ἀφ' ἑτέρου παρατηροῦμεν (σχ. 70) ὅτι τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν περιέχει 25 τετραγωνίδια μὲ πλευρὰν τὴν μονάδα μήκους, ἐνῷ τὰ ἄλλα δύο περιέχουν ἀντιστοίχως 9 καὶ 16 τοιαὔτα τετραγωνίδια. Ἀλλὰ $25 = 16 + 9$ ἢ $5^2 = 4^2 + 3^2$ ἄρα $(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2$ (1). Ἡ σχέσις (1), ἡ ὁποία συνδέει τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἐκφράζει τὸ Πυθαγόρειον Θεώρημα.

Δυνάμεθα γενικῶς νὰ αἰτιολογήσωμεν τὴν σχέσιν (1) ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ $\widehat{A} = 1$ ὀρθ. καὶ μὲ μήκη πλευρῶν $ΑΒ = γ$, $ΑΓ = β$ καὶ $ΒΓ = α$.

Κατασκευάζομεν δύο τετράγωνα ἴσα καὶ ἕκαστον μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς



(71α) (71β)

σχ. 71.

τὸ ἄθροισμα $β + γ$ τῶν μηκῶν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Παριστῶμεν μὲ E_1 τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τετραγώνων αὐτῶν. Κατασκευάζομεν ἐπίσης ἀπὸ χαρτόνιον τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓ (Ε ἐμβαδὸν ἑκάστου). Θέτομεν τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐπὶ τοῦ τετραγώνου, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 71α καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἓν τετράγωνον ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓ καὶ ἀπὸ ἓν τετράγωνον πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ΑΒΓ ἤτοι $E_1 = α^2 + 4E$ (2). Ἐν συνεχείᾳ τοποθετοῦμεν τὰ τρίγωνα εἰς τὸ ἕτερον τετράγωνον κατὰ τὸν τρόπον τοῦ σχήματος 71β. Παρατηροῦμεν, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 71β, ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 τετράγωνα πλευρᾶς ἀντιστοίχως β καὶ γ καὶ ἐκ τεσσάρων ὀρθογωνίων τριγώνων ἴσων πρὸς τὸ ΑΒΓ. Ἄρα $E_1 = β^2 + γ^2 + 4E$ (3).

Ἐφαρμόζομεν τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα εἰς τὰς σχέσεις (2) καὶ (3) καὶ ἔχομεν $α^2 + 4E = β^2 + γ^2 + 4E$. Συνεπῶς $α^2 = β^2 + γ^2$. Ἤτοι ἔχομεν εὕρει πάλιν τὴν σχέσιν $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα:

Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

Παρατήρησις:

Ἐκ τῆς σχέσεως $α^2 = β^2 + γ^2$ εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς σχέσεις: $β^2 = α^2 - γ^2$ καὶ $γ^2 = α^2 - β^2$, ἤτοι: **τὸ τετράγωνον ἑκάστης τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.**

Σημείωσις Ἱστορική. Ὁ διάσημος μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος **Πυθαγόρας** ἐγεννήθη τὸ 580 π.Χ. εἰς Σάμον καὶ ἀπέθανε τὸ 500 π.Χ. εἰς Μεταπόντιον τῆς κάτω Ἰταλίας.

Κατόπιν συστάσεως τοῦ Θαλοῦ μετέβη εἰς Αἴγυπτον (πιθανῶς δὲ καὶ εἰς Βαβυλῶνα), ὅπου παρέμεινεν ἐπὶ πολλὰ ἔτη καὶ ἐμυήθη εἰς τὰς γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων διὰ τῆς μελέτης τῶν βιβλίων αὐτῶν.

Μετὰ τὴν ἐπιστροφήν του εἰς τὴν Ἑλλάδα μετέβη εἰς Κρήτην καὶ Σάμον καὶ τέλος διεπεραιώθη εἰς τὸν Κρότωνα τῆς Κάτω Ἰταλίας (Μεγάλη Ἑλλάς), ὅπου ἵδρυσε καὶ διηύθυνε Σχολήν, θεωρουμένην ὡς τὸ πρῶτον συστηματικὸν Πανεπιστήμιον τοῦ Κόσμου. Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ μαθηταί του, οἱ ὁποῖοι ἐκαλοῦντο **Πυθαγόρειοι**, συνέβαλον εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν.

Ὁ Πυθαγόρας ὑπῆρξεν ἐκ τῶν κορυφαίων μορφῶν τῆς ἐπιστήμης ὅλων τῶν ἐποχῶν, ἡ δὲ πνευματική του δραστηριότης ἀναφέρεται εἰς ὅλους τοὺς τομεῖς τῶν φυσικῶν καὶ μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Εἰς τὸν Πυθαγόρα ἀποδίδεται, μεταξὺ τῶν ἄλλων, καὶ ἡ ἐπινόησις τοῦ ὁμωνύμου θεωρήματος, τοῦ **Πυθαγορείου Θεωρήματος**.

Ἀσκήσεις

Εἰς τὰς κάτωθι ἀσκήσεις κάμετε χρῆσιν τοῦ πίνακος τετραγώνων τῆς § 32.

141) Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

142) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ = 15 cm καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν του ΑΒ = 9 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ ΑΓ.

143) Αἱ διαγώνιοι ρόμβου εἶναι 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ὕψος του.

144) Ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ἡ μικρὰ βάσις εἶναι $\beta_1 = 50$ cm, ἑκάστη τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του 10 cm καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ 6 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

145) Δίδεται ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη βάσις εἶναι ἴση πρὸς $\frac{11}{5}\alpha$ καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς πλευραὶ ἴσαι πρὸς α. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ἐφαρμογή : $\alpha = 5$ cm.

146) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν μήκους 3 cm καὶ διαγώνιον μήκους 5 cm.

147) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 25 cm καὶ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ 24 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὑποτείνουσαν.

148) Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 6 cm². Μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

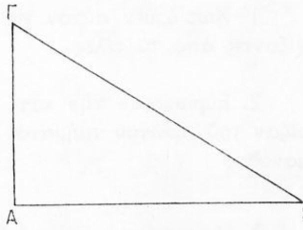
Περὶ τετραγωνικῆς ρίζης

§ 39. Τετραγωνικὴ ρίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὑπολογισμὸς αὐτῆς.

Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 45 mm καὶ 28 mm καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὸ τετράγωνον τῆς τιμῆς τῆς ὑποτεινούσης, καὶ τὴν τιμὴν αὐτῆς.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΒ = 45mm καὶ ΑΓ = 28 mm καὶ ἐφαρμόζομεν τὸ Πυθαγόρειον Θεώρημα. (σχ. 72).

$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 =$
$= 45^2 + 28^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 2025 + 784 \Rightarrow$
$(B\Gamma)^2 = 2809$



σχ. 72.

Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ θὰ εὕρωμεν ὅτι ΒΓ = 53 mm. Ὥστε: $53^2 = 2809$ Τὸν ἀριθμὸν 53 ὀνομάζομεν **τετραγωνικὴν ρίζαν** τοῦ ἀριθμοῦ 2809 καὶ συμβολίζομεν $\sqrt{2809}$. Ὥστε $\sqrt{2809} = 53$. Γενικῶς:

Τετραγωνικὴ ρίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ α εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{\alpha}$, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν δίδει τὸν α. $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ ἢ $\alpha = \beta^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha}$.

Ἐὰν συμβουλευθῶμεν τὸν πίνακα τῆς § 32 θὰ συμπεράνωμεν ὅτι:

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{36} = 6,$$
$$\sqrt{49} = 7, \quad \sqrt{64} = 8, \quad \sqrt{81} = 9 \text{ κ.λ.π.}$$

Τοὺς ἀριθμοὺς 1...4...9...16...25...36...49...64...81... λέγομεν τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων ἢ ἁπλῶς τέλεια τετράγωνα, διότι γράφονται ὑπὸ τὴν μορφὴν 1^2 ... 2^2 ... 3^2 ... 4^2 ... 5^2 ... 6^2 ... 7^2 κ.λ.π.

Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀνωτέρω τελείων τετραγώνων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

§ **40.** Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, εὑρίσκεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τελείων τετραγώνων.

Π.χ. $1 < 3 < 4$, $25 < 31 < 36$, κ.λ.π. ἢ $1^2 < 3 < 2^2$, $5^2 < 31 < 6^2$.

Λέγομεν ὅτι ὁ 1 εἶναι κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ὁ 2 εἶναι καθ' ὑπεροχὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ συμβολίζομεν κατ' ἔλ. $\sqrt{3} = 1$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ καθ' ὑπ. $\sqrt{3} = 2$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Ὁμοίως: κατ' ἔλ. $\sqrt{31} = 5$ κατὰ προσέγγισιν 1 καὶ καθ' ὑπ. $\sqrt{31} = 6$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Τοῦ λοιποῦ λέγοντες τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδο θὰ ἐννοοῦμεν τὴν κατ' ἔλλειψιν.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς 2809 εἶναι τέλειον τετράγωνον, διότι ἡ τετραγωνική του ρίζα εἶναι ὁ ἀκέραιος 53.

§ **41**. Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 2809 ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς:

1. Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ τέλος.

$$\sqrt{28'09}$$

2. Εὑρίσκομεν τὴν κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου τμήματος 28 κατὰ προσέγγισιν μονάδος

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ & \end{array}$$

3. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 28 τὸ τετράγωνον τοῦ 5 (τὸν 25).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ -25 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

4. Παραθέτομεν δεξιὰ τῆς διαφορᾶς 3 τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα 09 καὶ χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ 309.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ -25 & \\ \hline 30'9 & \end{array}$$

5. Διπλασιάζομεν τὸν εὑρεθέντα (ἄνω - δεξιὰ) ἀριθμὸν 5 καὶ εὑρίσκομεν 10, τὸ ὁποῖον γράφομεν κάτω τοῦ 5.

6. Διαιροῦμεν τὸ τμῆμα 30 τοῦ 309 διὰ τοῦ 10 καὶ τὸ πηλίκον 3 γράφομεν δεξιὰ τοῦ 10 καὶ σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν 103· πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 3 (γράφομεν καὶ δεξιὰ καὶ κάτω τοῦ 10 τὸ πηλίκον 3). Ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 309 ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 309. (Ἐὰν τὸ γινόμενον 103 X 3 εὑρίσκετο μεγαλύτερον τοῦ 309 θὰ ἐγράφομεν δεξιὰ καὶ κάτω τοῦ 10 τὸν ἀμέσως μικρότερον ἀριθμὸν τοῦ 3 τὸν 2 ὡς ἑξῆς 102 καὶ θὰ ἐσυνεχίζομεν ἐργαζόμενοι ὁμοίως). X2

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 5 \\ \cline{2-2} -25 & 103 \\ \hline 30'9 & \times 3 \\ \cline{2-2} -30'9 & 309 \\ \hline 0 & \end{array}$$

7. Παραθέτομεν δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος 5 (στάδιον 2), τὸ πηλίκον 3. Ὁ εὑρεθεὶς ἄνω δεξιὰ ἀριθμὸς 53 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2809.

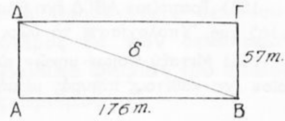
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{28'09} & 53 \\ \cline{2-2} -25 & 103 \\ \hline 309 & \times 3 \\ \cline{2-2} -309 & 309 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ὁ 2809 εἶναι τέλειον τετράγωνον διότι κάτω δεξιὰ εὕρομεν ὑπόλοιπον 0. Ἐὰν ἔχωμεν καὶ τρίτον τμῆμα, ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἐργασίαν ἀπὸ τοῦ σταδίου 4 καὶ κάτω.

Ἐφαρμογαὶ

1. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 57m καὶ 176m (σχ. 73).

'Εφαρμόζομεν τὸ Πυθαγόρειον Θεώρημα καὶ εὑρίσκομεν τὸ μῆκος δ τῆς διαγωνίου.



σχ. 73.

$\delta^2 = 57^2 + 176^2 \Longleftrightarrow \delta^2 = 34225 \Longleftrightarrow$

$\delta = \sqrt{34225}$

(ἐδῶ τὸ πρῶτον τμῆμα εἶναι μονοψήφιον).

$$
\begin{array}{r|llll}
\sqrt{3'42'25} & 185 & & & \\
\hline
-1 & 29 & 28 & 365 & \\
24'2 & \times 9 & \times 8 & \times 5 & \\
-224 & \cancel{261} & 224 & 1825 & \\
182'5 & & & & \\
-1825 & & & & \\
\hline
0 & & & &
\end{array}
$$

Ὥστε ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος 185 m.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν διαίρεσιν 24:2 θέτομεν τὸν μεγαλύτερον μονοψήφιον 9. Ἐὰν ὅμως, ὅπως ἐδῶ, τὸ γινόμενον 29X9 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 242, θέτομεν τὸν ἀμέσως κατώτερον ἀριθμὸν 8. κ.ο.κ.

Ἐὰν ἡ τελικὴ διαφορὰ δὲν εἶναι 0, τότε ἡ εὑρισκομένη τετραγωνικὴ ρίζα, εἶναι κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ κατ' ἔλλειψιν.

2. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 139 mm καὶ μία κάθετος πλευρά του 38 mm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρά.

Ἐὰν χ εἶναι ἡ τιμὴ αὐτῆς ἔχομεν:

$$\chi^2 + 38^2 = 139^2 \Longleftrightarrow \chi^2 = 139^2 - 38^2 \Longleftrightarrow \chi^2 = 17877 \Longleftrightarrow \chi = \sqrt{17877}$$

$$
\begin{array}{r|ll}
\sqrt{1'78'77} & 133 & \\
\hline
-1 & 23 & 263 \\
07'8 & \times 3 & \times 3 \\
-69 & 69 & 789 \\
097'7 & & \\
-789 & & \\
\hline
188 & &
\end{array}
$$

Ὥστε $\sqrt{17877} = 133$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Δηλ. $133^2 < 17877 < 134^2$. Πράγματι

$\Longrightarrow \quad 17689 < 17877 < 17956.$

Διαπιστώνομεν διὰ μετρήσεως, ὅτι ἡ πλευρὰ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τῶν 133 mm ἀλλὰ μικροτέρα τῶν 134 mm.

Ἀσκήσεις

149) Ὑπολογίσατε τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{121}$, $\sqrt{6241}$, $\sqrt{12321}$.

150) Εὕρετε τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν 11, 45, 1797, 394563 κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

151) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει ἴσας πλευρὰς 185 m καὶ βάσιν 222 m. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

152) Χορδὴ κύκλου ΑΒ εἶναι 336 cm καὶ ἀπέχει τοῦ κέντρου ἀπόστασιν 374 cm. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου;

153) Τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει βάσεις ΑΒ = 276 mm καὶ ΓΔ = 78 mm καὶ πλευρὰς ΒΓ = ΑΔ = = 165 mm. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

154) Μεταξὺ ποίων μηκῶν εὑρίσκεται ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς μὲ μήκη 389 cm καὶ 214 cm ;

§ 42. Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν

Νὰ εὕρητε μεταξὺ ποίων ἀκεραίων τετραγώνων περιέχεται ὁ ἀριθμὸς 1200 καὶ νὰ διαιρέσητε τὸν δοθέντα καὶ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους θὰ εὕρητε διὰ 100. Τί παρατηρεῖτε;

Ὑπολογίζομεν τὴν κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 1200 κατὰ προσέγγισιν μονάδος :

Αὐτὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 34

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12'00} & 34 \\ -9 & 64 \\ 30'0 & \times 4 \\ -256 & 256 \\ 44 & \end{array}$$

Τότε θὰ ἔχωμεν $34^2 < 1200 < 35^2 \iff \frac{34^2}{100} < 12 < \frac{35^2}{100}$

$$\Longrightarrow \frac{34^2}{10^2} < 12 < \frac{35^2}{10^2} \Longrightarrow \left(\frac{34}{10}\right)^2 < 12 < \left(\frac{35}{10}\right)^2$$

$$\Longrightarrow 3{,}4^2 < 12 < 3{,}5^2$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν 3,4 καὶ 3,5. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ διαφέρουν κατὰ 0,1.

Ὁ ἀριθμὸς 3,4 εἶναι ἡ κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγισιν 0,1. Ὁ ἀριθμὸς 3,5 εἶναι ἡ καθ' ὑπεροχὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγισιν 0,1.

Ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν, θὰ ἐννοοῦμεν τὴν κατ' ἔλλειψιν καὶ θὰ γράφωμεν κατ' ἔλ $\sqrt{12} = 3{,}4$ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως μὲ τὸν ἀριθμὸν 120000 θὰ εὕρωμεν :

$$\begin{array}{r|l|l} \sqrt{12'00'00'0} & 346 & \\ -9 & 64 & 686 \\ 30'0 & \times 4 & \times 6 \\ -256 & 256 & 4116 \\ 440'0 & & \\ -4116 & & \\ 284 & & \end{array}$$

Δηλαδὴ $346^2 < 120000 < 347^2$. Διαιροῦμεν διὰ $10\,000 = 100^2$ καὶ ἔχομεν : $\left(\frac{346}{100}\right)^2 < 12 < \left(\frac{347}{100}\right)^2 \Longrightarrow (3{,}46)^2 < 12 < (3{,}47)^2$.

Ὁ ἀριθμὸς 3,46 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ (0,01).

Τετραγωνική ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ κ.λ.π. εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν μὲ ἕν, δύο, τρία κ.λ.π. ἀντιστοίχως δεκαδικὰ ψηφία, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν προηγουμένως τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 12 κατὰ προσέγγισιν 0,1 ὑπελογίσαμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ $1200 = 12.100 = 12 \cdot 10^2$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ διηρέσαμεν αὐτὴν διὰ τοῦ 10.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 12 κατὰ προσέγγισιν 0,01 ὑπελογίσαμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ $120000 = 12.10000 = 12.100^2$ καὶ διηρέσαμεν αὐτὴν διὰ τοῦ 100.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ, . . . ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : 1) Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ $100 = 10^2$, $10000 = 100^2$, $1000000 = 1000^2$ κ.λ.π. ἀντιστοίχως. 2) Ὑπολογίζομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ 3) διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ τοῦ 10, 100, 1000 ἀντιστοίχως.

Τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικοῦ ἀριθμοῦ

α) Δίδεται τὸ κλάσμα $\frac{16}{25}$. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια τετράγωνα : $\frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2} \Rightarrow \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$. Ὁ $\frac{16}{25}$ λέγεται τέλειον τετράγωνον τοῦ ρητοῦ $\frac{4}{5}$. Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{16}{25}$, $\frac{36}{81}$, $\frac{9}{64}$, … εἶναι τέλεια τετράγωνα ρητῶν ἀριθμῶν.

Γενικῶς : $\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2}}$, διότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{3}{8}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$. Πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 8^2 καὶ ἔχομεν $\frac{3}{8} \cdot 8^2 = 3 \cdot 8 = 24$. Ὑπολογίζομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου 24 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ τοῦ 8. Δηλ. $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{24}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$, ἤτοι κατ' ἔλλ. $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν κλάσματος κατὰ προσέγγισιν τῆς κλασματικῆς μονάδος του, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, ὑπολογίζομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

Ἐφαρμογαὶ

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 19,763 κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10000 καὶ ἔχομεν $19{,}763 . 10000 = 197630$.

Ὑπολογίζομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 197630 κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἡ ὁποία εἶναι 444 καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ 100. Ὥστε $\sqrt{19{,}763} = 4{,}44$ κατὰ προσέγγισιν 0,01.

2) Θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς $\frac{3}{5}$ m καὶ $\frac{2}{3}$ m καὶ διαθέτομεν μετροταινίαν διῃρημένην εἰς mm. Μεταξὺ ποίων τιμῶν θὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης; Ἔστω χ m τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης. Τότε $\chi^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Longrightarrow \chi^2 = \frac{9}{25} + \frac{4}{9} \Longrightarrow$

$\chi^2 = \frac{81+100}{225} \Longrightarrow \chi^2 = \frac{181}{225} \Longrightarrow \chi = \sqrt{\frac{181}{225}}$ Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος μέχρι χιλιοστομέτρου πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ $\frac{181}{225}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν $\frac{181}{225}$ ἐπὶ 1000^2 ἤτοι $\frac{181}{225} \cdot 1\,000\,000 = \frac{181\,000\,000}{225}$

Εὑρίσκομεν τὸ ἀκέραιον πηλίκον τοῦ $\frac{181\,000\,000}{225} = 804444$.

Ὑπολογίζομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 804444 κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ 1000.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{80'44'44} & 896 \\
\hline
-64 & \begin{array}{r|r} 169 & 1786 \\ \times\ 9 & \times\ 6 \\ \hline 1521 & 10716 \end{array} \\
\overline{164'4} & \\
-15\,21 & \\
\overline{1234'4} & \\
-10716 & \\
\overline{1628} &
\end{array}$$

$\sqrt{\frac{181}{225}} = 0{,}896$ κατὰ προσέγγισιν 0,001 $\Longrightarrow$

$0{,}896 < \chi < 0{,}897$.

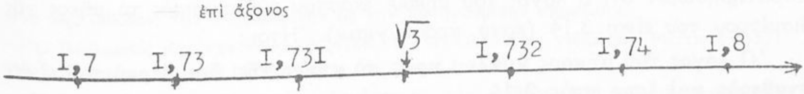
Ὥστε τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης εἶναι μεταξὺ 0,896 m καὶ 0,897 m.

Σημείωσις 1. Νὰ ὑπολογίσητε τὰς ἀνωτέρας καὶ κατωτέρας τετραγωνικὰς ρίζας τοῦ 3 κατὰ προσέγγισιν 0,1, 0,01, 0,001 καὶ νὰ διατάξητε αὐτὰς ἐπὶ ἄξονος.

(Λέγοντες ἀνωτέρας καὶ κατωτέρας τετρ. ρίζας ἐννοοῦμεν ἀντιστοίχως τὰς καθ' ὑπεροχὴν καὶ κατ' ἔλλειψιν).

Αἱ ρίζαι αὐταὶ εἶναι	1,7	1,8	κατὰ προσέγγισιν 0,1
	1,73	1,74	κατὰ προσέγγισιν 0,01

καὶ 1,731 1,732 κατὰ προσέγγισιν 0,001. Διατάσσομεν αὐτὰς ἐπὶ ἄξονος



Ὁσασδήποτε φορὰς καὶ ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸν ὑπολογισμόν, οὐδέποτε θὰ εὕρωμεν ἀκριβῶς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 3. Ἐὰν τοποθετήσωμεν τὰς κατὰ προσέγγισιν τετραγωνικὰς ρίζας ἐπὶ ἄξονος μεταξὺ τῶν ἀνωτέρων καὶ κατωτέρων, θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ἓν σημεῖον. Ἐπ' αὐτοῦ τοποθετεῖται ὁ ἀριθμὸς 1,731..., ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἀλλὰ δὲν εἶναι περιοδικός. Τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καλοῦμεν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 3 καὶ συμβολίζομεν διὰ τοῦ $\sqrt{3}$.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Q. Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θὰ μάθωμεν ὅτι ὀνομάζεται **ἀσύμμετρος** ἀριθμός. Ἀριθμοὶ αὐτοῦ τοῦ εἴδους εἶναι καὶ οἱ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, κ.λ.π.

Σημείωσις 2. Ὁ ἀριθμὸς 2 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4 διότι $2^2=4$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι καὶ $(-2)^2=4$. Ὁ -2 λέγεται δευτέρα τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4.

Γενικῶς, ἐὰν $\alpha > 0$ ἐκτὸς τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{\alpha}$ ὑπάρχει καὶ δευτέρα τετραγωνικὴ ρίζα, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ $-\sqrt{\alpha}$.

Ἀσκήσεις

155) Ὑπολογίσατε τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν 138, 272, 19836, κατὰ προσέγγισιν 0,1 καὶ 0,001.

156) Ὑπολογίσατε τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἀριθμῶν 97, 635, $\frac{3}{17}$, 0,003845 κατὰ προσέγ. 0,001.

157) Ὑπολογίσατε τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{19}$, $\frac{47}{131}$, $\frac{656}{713}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{131}$, $\frac{1}{713}$ ἀντιστοίχως.

158) Ποῖον εἶναι κατὰ προσέγγισιν 0,001 τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰν τὴν μονάδα μήκους;

159) Ποῖον εἶναι κατὰ προσέγγισιν 0,0001 τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου μὲ πλευρὰν 2 cm ;

Γ. ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ — ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Α. Μῆκος κύκλου

§ 43. *Ἀποκόψατε ἐκ χονδροῦ χαρτονίου ἢ ξύλου κύκλον ἀκτῖνος 5 cm. Μετρήσατε* ***τὸ μῆκος τοῦ κύκλου διὰ πανίνης μετροταινίας, περιτυλίσσοντες αὐτὴν πέριξ τοῦ κύκλου καὶ εὕρετε τὸν λόγον τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του.***

Τὸ μῆκος τοῦ μετρηθέντος κύκλου εἶναι 31,4 cm. Ἄρα ἔχομεν $\frac{31{,}4\ cm}{10\ cm}=3{,}14$

Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν ἐργασίαν αὐτὴν μὲ περισσοτέρους κύκλους, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους ἑκάστου κύκλου πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του εἶναι 3,14 (κατὰ προσέγγισιν). Ἤτοι :

Ὁ λόγος τοῦ μήκους κύκλου πρὸς τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος πρὸς 3,14.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς παρίσταται διεθνῶς διὰ τοῦ γράμματος τοῦ ἀλφαβήτου μας π. (*)

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Γ τὸ μῆκος ἑνὸς κύκλου, ἀκτῖνος R, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\Gamma}{2R} = \pi \iff \boxed{\Gamma = 2\pi R}$$

Ἤτοι : **Τὸ μῆκος τοῦ κύκλου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.**

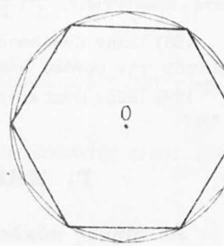
§ 44. Μῆκος τόξου

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ κύκλος διαιρεῖται εἰς 360°. Ἔστω τ τὸ μῆκος τόξου μ° καὶ Γ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι τόξον 360°. Τότε ἔχομεν: $\dfrac{\tau}{\Gamma} = \dfrac{\mu}{360}$ (διότι ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν των, ἐὰν μετρηθῶσιν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα).

Ἑπομένως : $\dfrac{\tau}{2\pi R} = \dfrac{\mu}{360} \iff \tau = 2\,\pi R \cdot \dfrac{\mu}{360} \iff \boxed{\tau = \pi R\,\dfrac{\mu}{180}}$ Ἤτοι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου μ°, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\dfrac{\mu}{360}$ ἢ τὸ μῆκος τοῦ ἡμικυκλίου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\dfrac{\mu}{180}$.

Σημ. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μήκους τοῦ κύκλου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον : Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν κυρτὸν ἑξάγωνον. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι μικροτέρα τοῦ μήκους τοῦ κύκλου. Ἐὰν τώρα ἐγγράψωμεν κανονικὸν δωδεκάγωνον παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ περίμετρος αὐτοῦ πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, παραμένουσα μικροτέρα αὐτοῦ. Ἐὰν διπλασιάζωμεν συνεχῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, πλησιάζομεν ὅσον θέλομεν τὸ μῆκος τοῦ κύκλου (σχ. 74).



σχ. 74

Σημ. Τὴν μέθοδον αὐτὴν ἐχρησιμοποίησεν ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ βιβλίον του «Κύκλου μέτρησις».

(*) **Ἱστορικὴ σημείωσις**:

Ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος εἶχε διαπιστωθῆ, ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του εἶναι **σταθερός**. (Ἱπποκράτης ὁ Χῖος 450 π.Χ.).

Παρέστησαν δὲ τὸν σταθερὸν τοῦτον λόγον διὰ τοῦ γράμματος π.

Πρῶτος ὁ μέγας τῆς ἀρχαιότητος Ἕλλην μαθηματικὸς **Ἀρχιμήδης** ὥρισεν κατὰ προσέγγισιν ὡς τιμὴν τοῦ π τὸ κλάσμα $\frac{22}{7} = 3{,}1428 \left(\frac{310}{71} < \pi < \frac{31}{7}\right)$ Ἐχρησιμοποίησεν πρὸς τοῦτο τὴν μέθοδον, τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν προηγουμένην σημείωσιν.

Ὁ Πτολεμαῖος εὗρε τὴν τιμὴν 3,14166. Ὁ δὲ Ὀλλανδὸς γεωμέτρης Μέττιους (1571 - 1635 μ. Χ.). εὗρε τὸ $\pi = 3{,}1415920$.

Τιμήν, κατὰ προσέγγισιν, τοῦ π λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν 3,14 καὶ διὰ μεγαλυτέραν προσέγγισιν τὸν ἀριθμὸν 3,14159.

Δι' αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ π ὑπάρχει καὶ μνημονικὸς κανών:

ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ Μέγας γεωμετρεῖ

3, 1 4 1 5 9

Δηλαδὴ τὸ πλῆθος τῶν γραμμάτων κάθε λέξεως ἀντιπροσωπεύει τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ π.

Ἀσκήσεις

160) Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 4 cm.

161) Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 37,68 cm.

162) Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 50° εἰς κύκλον, ἀκτῖνος 12 cm ;

163) Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου 100°, κύκλου ἀκτῖνος 5 cm.

164) Ποία ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, ἐὰν ἓν τόξον αὐτοῦ $30'$ ἔχῃ μῆκος 2 cm ;

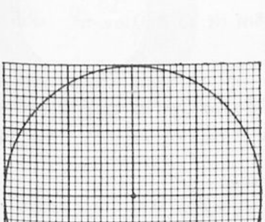
165) Κύκλος ἔχει μῆκος 62πβ cm. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ τοῦ κύκλου;

Β. Ἐμβαδὸν κύκλου καὶ κυκλικοῦ τομέως

§ 45. Ἐμβαδὸν κύκλου.

Ἐμβαδὸν κύκλου καλοῦμεν τὴν ἔκτασιν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, ἤτοι τὴν ἔκτασιν τοῦ ἐσωτερικοῦ του, ἐκπεφρασμένην εἰς μονάδας μετρήσεως.

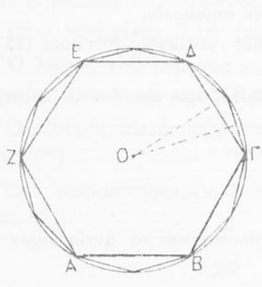
Ἐπὶ χάρτου χιλιοστομετρικοῦ χαράξατε κύκλον ἀκτῖνος 2 cm (χρησιμοποιήσατε ὡς κέντρον σημεῖον τομῆς δύο ἐντόνων γραμμῶν). Μετρήσατε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του εἰς cm^2. (σχ. 75).



σχ. 75.

Μετροῦμεν τὰ cm^2, τὰ ὁποῖα περικλείει ὁ κύκλος καὶ τὰ ἐπὶ πλέον mm^2 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι περίπου 12,56 cm^2.

Παρατηροῦμεν ὅτι $3{,}14.2^2 = 3{,}14.4 = 12{,}56 cm^2$ Δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $3{,}14\ R^2$ ἢ $E = \pi R^2$ (ἔνθα R τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου). Δυνάμεθα νὰ αἰτιολογήσωμεν τὸ ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς :



σχ. 76.

Χαράσσομεν κύκλον ἀκτῖνος R (σχ. 76). Εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν ἐγγράφομεν ἓν κανονικὸν κυρτὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ μήκους τοῦ κύκλου. Διχοτομοῦμεν τὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, . . . κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον καὶ ἐγγράφομεν οὕτως ἓν κανονικὸν δωδεκάγωνον. Ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν περίμετρον τοῦ ΑΒΓΔΕΖ, ἀλλὰ παραμένει μικροτέρα τοῦ μήκους τοῦ κύκλου, πλησιάζουσα περισσότερον αὐτόν.

Ἐν συνεχείᾳ ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἓν κανονικὸν κυρτὸν 24 - γωνον κ.ο.κ.

Διπλασιάζοντες συνεχῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου παρατηροῦμεν ὅτι: 1) Ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ κυρτοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον πολυγώνου πλησιάζει **ὅσον θέλομεν** τὸ μῆκος τοῦ κύκλου καὶ

2) τὸ ἀπόστημα πλησιάζει ὅσον θέλομεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

3) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου **πλησιάζει** ὅσον **θέλομεν** τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ κανονικοῦ πολυγώνου $\left(E = \frac{1}{2} \times\right.$ μῆκος περιμέτρου Χ μῆκος ἀποστήματος$\left.\right)$ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου διὰ τοῦ μήκους τοῦ κύκλου $2\pi R$ καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος διὰ τῆς ἀκτῖνος R, ἔχομεν $E = \frac{1}{2} . 2\pi R . R = \pi R^2$, ἄρα $\boxed{E = \pi R^2}$

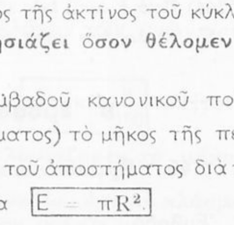
Ἤτοι: **Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ**.

Σημ. Τὴν μέθοδον αὐτὴν ἐχρησιμοποίησεν ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ βιβλίον του «Κύκλου μέτρησις».

§ 46 Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως.

Θεωροῦμεν κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος R. Ἔστω ΟΑΝΒ εἷς τομεὺς τοῦ κύκλου. Ὡς γνωστὸν **κυκλικὸς τομεὺς** λέγεται ἡ μεικτὴ κλειστὴ γραμμὴ ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς τόξου κύκλου (π.χ. τοῦ ΑΝΒ) καὶ τῶν δύο ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ τοῦ τόξου (σχ. 77). Τὸ τόξον $\widehat{ANB}$ λέγεται βάσις τοῦ κυκλικοῦ τομέως. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν κύκλον ὡς ἕνα κυκλικὸν τομέα, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 360°.

Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως καλοῦμεν τὴν ἔκτασιν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ (ἤτοι τοῦ ἐσωτερικοῦ του), ἐκπεφρασμένην εἰς μονάδας μετρήσεως.



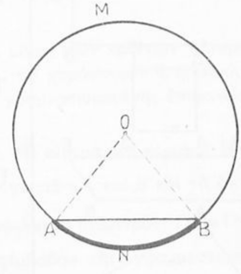
σχ. 77.

Ἐὰν ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως μ° καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου του, θὰ ἔχωμεν $\frac{\varepsilon}{E} = \frac{\mu}{360} \Longleftrightarrow \varepsilon = \frac{E.\mu}{360} \Longleftrightarrow \varepsilon = \frac{\pi.R^2.\mu}{360}$

Ἀλλὰ $\varepsilon = \frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{\pi R \mu}{180} \cdot \frac{R}{2} = \tau.\frac{R}{2}$ (ὅπου τ τὸ μῆκος τῆς βάσεως)

Ἐφαρμογαί.

1. Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος: Ὀνομάζομεν ἐπιφάνειαν **κυκλικοῦ τμήματος** τὴν περιεχομένην μεταξὺ ἑνὸς τόξου τοῦ κύκλου καὶ τῆς χορδῆς του (π.χ. εἰς τὸ ἔναντι σχῆμα τὸ ΑΝΒΑ καθὼς καὶ τὸ ΑΜΒΑ εἶναι κυκλικὰ τμήματα. (σχ. 78).

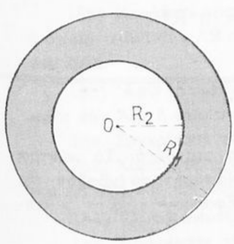


σχ. 78.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΝΒΑ, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒΝ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒΑ, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου, προσθέτοντες εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒΜΑ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΟΒ.

2. Ἐμβαδὸν κυκλικῆς στεφάνης: Ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιεχομένη μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων, ἀκτίνων R_1 καὶ R_2 (ὅπου $R_1 > R_2$) λέγεται κυκλικὴ στεφάνη (ἢ κυκλικὸς δακτύλιος) (σχ. 79). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς στεφάνης δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E = \pi R^2_1 - \pi R^2_2 = \pi (R^2_1 - R^2_2)$.



σχ. 79.

Ἀσκήσεις

166) Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος 13 cm.

167) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 50,24 cm^2.

168) Τὸ μῆκος ἑνὸς κύκλου εἶναι 37,68 *dm*. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

169) Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 60° κύκλου ἀκτῖνος 10 cm.

170) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικῆς στεφάνης, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους κύκλους ἀκτίνων 8 cm καὶ 5 cm.

171) Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἀκτῖνος R = 3α.

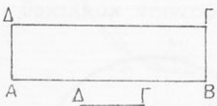
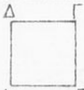
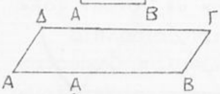
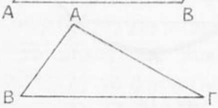
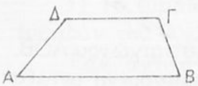
172) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι 24πα². Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

173) Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος R = 4α καὶ κυκλικὸς τομεὺς αὐτοῦ γωνίας 60°. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ κυκλικοῦ τομέως καὶ τὴν περίμετρόν του.

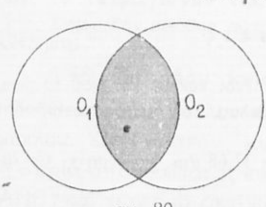
174) Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐπὶ κύκλου ἀκτῖνος R, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἶναι 60^o. Ἐφαρμογή: $R = 15$ cm.

175) Ἡ περίμετρος ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἐπὶ κύκλου ἀκτῖνος 6 dm εἶναι 13,57 dm. Νὰ εὕρητε τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν τοῦ κυκλικοῦ τομέως καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

Πίναξ τύπων τοῦ ἐμβαδοῦ διαφόρων ἐπιπέδων σχημάτων

Εἰκὼν τοῦ εὐθ. σχήμ.	Ὄνομα τοῦ σχήματος	Τύπος δίδων τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ
	Ὀρθογώνιον	$E = \alpha\beta$ (ἢ $E = B\cdot\upsilon$)
	Τετράγωνον	$E = \alpha^2$
	Παραλληλόγραμμον	$E = \beta\cdot\upsilon$
	Τρίγωνον	$E = \frac{\alpha\cdot\upsilon_1}{2} = \frac{\beta\cdot\upsilon_2}{2} = \frac{\gamma\cdot\upsilon_3}{2}$
	Τραπέζιον	$E = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\cdot\upsilon$
	Κύκλος	$E = \pi R^2$

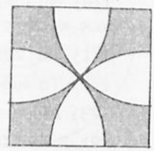
Ἀσκήσεις διάφοροι ἐπὶ τῶν ἐμβαδῶν



σχ. 80.

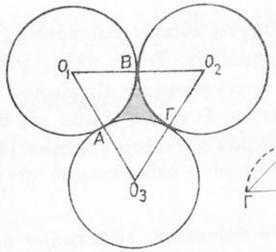
176) Δύο ἴσοι κύκλοι, ἀκτῖνος α, τέμνονται. Τὰ κέντρα των ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ α. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν δύο κύκλων. Ἐφαρμογή: $\alpha = 5$ cm. (Σχῆμα 80).

177) Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς 10 cm. Μὲ κέντρα τὰς κορυφάς του καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου του, γράφομεν τέσσαρα τεταρτοκύκλια κύκλου (περατούμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου). Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφανείας τοῦ σχήματος (81).

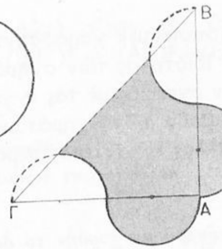


σχ. 81.

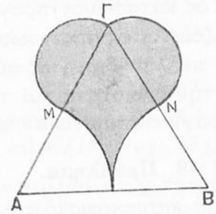
178) Δίδονται τρεῖς ἴσοι κύκλοι κέντρων O_1, O_2, O_3 καὶ ἀκτῖνος $R = 10$ cm. Οὗτοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο καὶ ὁρίζουν οὕτως ἓν καμπυλόγραμμον τρίγωνον ΑΒΓ (τὸ γραμμοσκιασμένον ἐπίπεδον μέρος). Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ καμπυλογράμμου αὐτοῦ τριγώνου (σχ. 82).



σχ. 82



σχ. 83



σχ. 84.

179) Δίδεται ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Τὸ μῆκος τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι α. Μὲ διαμέτρους τὰ ἡμίση τῶν καθέτων πλευρῶν του χαράσσομεν 4 ἡμικύκλια, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 83. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφανείας. Ἐφαρμογή: $\alpha = 4$ cm.

180) Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς μήκους α. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς Β καὶ Α καὶ ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφομεν τόξα κείμενα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β κὰὶ τὰ ὁποῖα περατοῦνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν των. Ἐπίσης γράφομεν δύο ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους $ΓΜ = ΓΝ = \frac{\alpha}{2}$, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 84. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφανείας. Ἐφαρμογή: $\alpha = 6$ cm.

181) Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ, ὀρθογώνιον εἰς τὰ Α καὶ Δ εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν $ΑΔ = ΑΒ = \frac{ΓΔ}{2}$. Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ τραπεζίου εἶναι $6\alpha^2$. Ὑπολογίσατε τὰς βάσεις καὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου συναρτήσει τοῦ α.

182) Χαράξατε τραπέζιον ΑΒΓΔ (ΔΓ//ΑΒ). Εὕρετε τὸ μέσον Ι τῆς ΒΓ καὶ φέρατε τὴν ΔΙ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Συγκρίνατε τὰ ἐμβαδὰ τοῦ τραπεζίου καὶ τοῦ τριγώνου ΔΑΕ.

183) Ἀπὸ τὸ μέσον Ι τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) φέρατε παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως.

1ον. Συγκρίνατε τὰ ἐμβαδὰ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΖΕ.

2ον. Χαράξατε τὴν ΙΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἐκ τοῦ μήκους τῆς ΑΒ καὶ τοῦ μήκους τῆς ΙΚ.

184) Εἰς τὸ ἀνωτέρω τραπέζιον χαράξατε τὰς διαγωνίους, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο·

1ον. Συγκρίνατε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ καὶ

2ον. Συγκρίνατε ἐπίσης τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΔΟΓ.

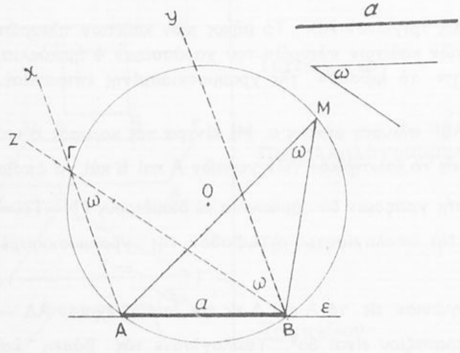
Δ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

§ **47.** Λέγομεν ὅτι κατασκευάζομεν ἓν σχῆμα, ὅταν χαράσσωμεν αὐτὸ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, βάσει ὡρισμένων δεδομένων. Π.χ. ὅταν κατασκευάζωμεν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραί. Ὅταν κατασκευάζωμεν τὴν μεσοκάθετον δεδομένου εὐθυγράμμου τμήματος ἢ ὅταν κατασκευάζωμεν τὴν διχοτόμον μιᾶς δεδομένης γωνίας.

Τὰς κατασκευὰς πραγματοποιοῦμεν χαράσσοντες εὐθείας καὶ κύκλους καὶ στηριζόμενοι εἰς τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων. Τώρα πλέον γνωρίζομεν πολλὰς ἰδιότητας αὐτῶν σχετικὰς μὲ τὰς ἐγγεγραμμένας εἰς κύκλον γωνίας, τὴν ὁμοιότητα καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων. Συνεπῶς εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ πραγματοποιήσωμεν καὶ ἄλλας κατασκευὰς πέραν τῶν ὅσων ἔχομεν μάθει.

§ 48. **Πρόβλημα.**

Νὰ κατασκευασθῇ τόξον κύκλου μὲ χορδὴν τὸ δεδομένον εὐθ. τμῆμα α, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ἐγγράφεται δεδομένη γωνία ω.



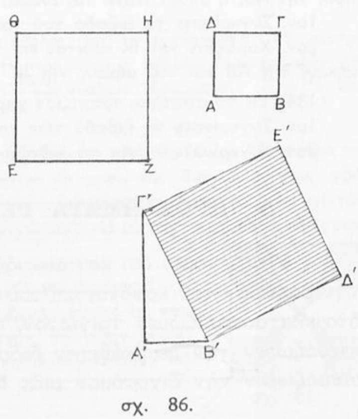
σχ. 85.

Ἐπὶ εὐθείας ε λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ=α καὶ φέρομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε τὰς παραλλήλους ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΨ. Κατασκευάζομεν τώρα γωνίαν $\widehat{\Psi B Z}$ =ω. Ἡ ΒΖ τέμνει τὴν ΑΧ εἰς τὸ σημεῖον Γ. (ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς ω κατὰ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν παραλλήλων). Κατασκευάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὸν περιγεγραμμένον κύκλον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 85). Τὸ τόξον ΑΓΒ αὐτοῦ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι κάθε γωνία ΑΜΒ μὲ τὴν κορυφήν της ἐπ' αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς $\widehat{A\Gamma B}$, δηλαδὴ ἴση πρὸς $\widehat{\omega}$.

§ 49. **Πρόβλημα 1ον.**

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δεδομένων τετραγώνων ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ.

Ἐὰν καλέσωμεν χ τὴν τιμὴν τῆς πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θὰ πρέπει νὰ εἶναι $\chi^2=(AB)^2+(EZ)^2$ Ἐπειδὴ αὐτὸ μᾶς ὑπενθυμίζει τὸ πυθαγόρειον θεώρημα, πραγματοποιοῦμεν τὴν ἑξῆς κατασκευήν. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον Β'Α'Γ' μὲ καθέτους πλευρὰς Α'Β' = ΑΒ καὶ Α'Γ' = ΕΖ. Μὲ πλευρὰς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ κατασκευάζομεν τὸ τετρά-

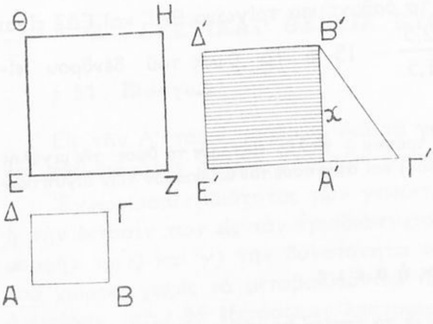


σχ. 86.

γωνον Β'Δ'Ε'Γ' (σχ. 86). Αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι $(Β'Γ')^2 = (Α'Β')^2 + (Α'Γ')^2$, δηλαδὴ $(Β'Γ')^2 = (ΑΒ)^2 + (ΕΖ)^2$.

Πρόβλημα 2ον

Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ (σχ. 87).



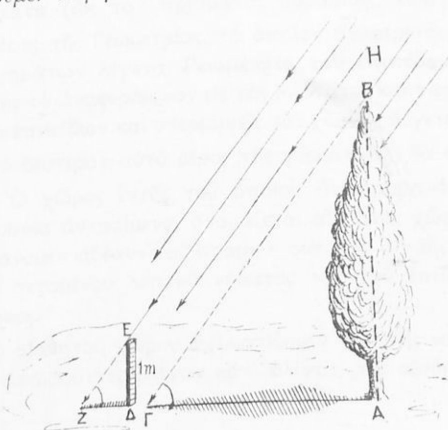
σχ. 87.

Ἐὰν καλέσωμεν χ τὴν τιμὴν τῆς πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, πρέπει νὰ εἶναι $χ^2 = (ΕΖ)^2 - (ΑΒ)^2$. Ἡ σχέσις αὐτὴ ὁδηγεῖ εἰς τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΕΖ καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ΑΒ. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον Α'Β'Γ' ἐκ τῆς καθέτου πλευρᾶς Α'Γ' = ΑΒ καὶ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης Γ'Β' = ΕΖ. Μὲ πλευρὰν τὴν κάθετον Α'Β' κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον Α'Β'Δ'Ε', τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

§ **50**. Ἐνίοτε δυνάμεθα, διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν, νὰ μετρήσωμεν φυσικὰ μεγέθη.

Παράδειγμα :

Μετροῦμεν τὸ μῆκος σκιᾶς δένδρου καὶ τὸ εὑρίσκομεν 22,5 m. Πῶς δυνάμεθα



σχ. 88.

νὰ μετρήσωμεν τὸ ὕψος τοῦ δένδρου (χωρὶς νὰ ἀναρριχηθῶμεν μέχρι τῆς κορυφῆς), χρησιμοποιοῦντες κατακόρυφον στῦλον μήκους ἑνὸς μέτρου; (σχ. 88).

Παριστῶμεν τὸ ὕψος τοῦ δένδρου διὰ τῆς καθέτου πρὸς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν ΑΒ, τὴν σκιὰν διὰ τοῦ τμήματος ΑΓ, τὸν στῦλον διὰ τοῦ ΕΔ καὶ τὴν σκιάν του διὰ τοῦ ΔΖ. Μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους διὰ μετροταινίας τὴν ΔΖ καὶ εὑρίσκομεν ΔΖ $=1{,}5$ m.

Ἐπειδὴ αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ἔρχονται λόγῳ τῆς μεγάλης ἀποστάσεως παράλληλοι, θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}=\widehat{Z}$. Τότε ὅμως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ὅμοια· ἄρα $\frac{AB}{E\Delta}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z} \Longrightarrow \frac{AB}{1\,\text{m}}=\frac{22{,}5}{1{,}5}=15$ m. Τὸ ὕψος τοῦ δένδρου εἶναι 15 m.

Σημείωσις. Λέγεται ὅτι μὲ παρόμοιον τρόπον ὁ Θαλῆς ἐμέτρησε τὸ ὕψος τῆς μεγάλης πυραμίδος (κατὰ ἓν ταξείδιόν του εἰς Αἴγυπτον) καὶ ἀπέσπασε τὸν θαυμασμὸν τῶν αἰγυπτίων σοφῶν.

Ἀσκήσεις

185) Νὰ κατασκευάσητε τόξον κύκλου εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται γωνία 45^0.

186) Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα δι' εὐθείας διερχομένης διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν του.

187) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τριῶν δεδομένων τετραγώνων.

188) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ἰσοῦται πρὸς δεδομένον τμῆμα δ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Α. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 51. Εἰσαγωγή

Εἰς τὴν Α΄ τάξιν, ἐμάθομεν διὰ τὰ **γεωμετρικὰ στερεὰ** (ἢ ἁπλῶς στερεὰ) καὶ τὰς διαφορὰς αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων φυσικῶν στερεῶν.

Ἐγνωρίσαμεν ἰδιότητας τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν α) τὸ μέγεθος αὐτῶν ἢ τὴν ἔκτασίν των εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον, β) τὸ σχῆμα αὐτῶν (τὴν μορφήν των) καὶ γ) τὴν δυνατότητα νὰ ἀλλάσσωμεν τὴν θέσιν των ἐντὸς τοῦ χώρου, χωρὶς νὰ μεταβάλλωνται τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν (εἰς ἀνωτέραν τάξιν θὰ ἐξετάσωμεν λεπτομερέστερον τὴν ἰδιότητα αὐτὴν καὶ θὰ μάθωμεν, ὅτι εἰς ἑκάστην θέσιν ὑπάρχει στερεὸν ἴσον πρὸς τὸ μετατοπιζόμενον). Τέλος ἐγνωρίσαμεν διάφορα γεωμετρικὰ σχήματα (εὐθεῖαν, ἐπίπεδον, γωνίαν τρίγωνα, κύκλον, πολύγωνα, πρίσματα, πυραμίδας, κύλινδρον, κῶνον, καὶ σφαῖραν). Ἐκ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ἄλλα μὲν ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα των ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ λέγονται **ἐπίπεδα σχήματα** (ὡς τά: εὐθεῖα, γωνία, τρίγωνον, πολύγωνον, κύκλος), ἄλλων δὲ τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ λέγονται **μὴ ἐπίπεδα γεωμετρικὰ σχήματα** ἢ **στερεὰ σχήματα** (ὡς τά: πρίσματα, πυραμίδες, κύλινδροι, κ.ἄ.).

Τὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὴν μελέτην τῶν ἐπιπέδων σχημάτων λέγεται **Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου** (ἢ ἐπιπεδομετρία). Τὸ δὲ μέρος αὐτῆς τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς σχέσεις τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἐπιπέδων καὶ στερεῶν εἰς τὸν χῶρον, λέγεται **Γεωμετρία τοῦ χώρου.**

Μὲ τὸ δεύτερον αὐτὸ μέρος τῆς γεωμετρίας, θὰ ἀσχοληθῶμεν ἐν συνεχείᾳ.

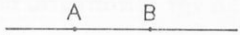
§ 52. Ὁ χῶρος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἀντιλαμβανόμεθα διὰ τῶν αἰσθήσεών μας τὰ φυσικὰ ἀντικείμενα, ὀνομάζεται αἰσθητὸς χῶρος. Εἰς τὸν αἰσθητὸν χῶρον λαμβάνομεν «ἰδέαν» τοῦ σημείου διὰ τῆς αἰχμῆς λεπτῆς βελόνης, τῆς εὐθείας διὰ τεταμένου λεπτοῦ νήματος καὶ τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῆς ἐπιφανείας ὑαλοπίνακος.

Ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ χώρου σχηματίζομεν διὰ τῆς νοήσεως τὸν **Γεωμετρικὸν χῶρον,** ἀφαιροῦντες ὀλίγον κατ᾽ ὀλίγον τὰς αἰσθητὰς ἰδιότητας τῶν ἀντικειμένων.

Στοιχεῖα τοῦ Γεωμετρικοῦ χώρου εἶναι **τὰ σημεῖα, αἱ εὐθεῖαι καὶ τὰ ἐπίπεδα.**

Τὰς ἰδιότητας τῶν στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ χώρου δίδομεν μὲ μερικὰς βασικὰς προτάσεις, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν **ἀξιώματα.**

§ **53. Καθορισμὸς μιᾶς εὐθείας εἰς τὸν χῶρον — 'Αξιώματα :**



σχ. 89α.

1. Διὰ δύο διακεκριμένων τυχόντων σημείων τοῦ χώρου διέρχεται μία εὐθεῖα καὶ μόνον μία. (σχ. 89α).

2. Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἀπεριόριστος (δηλαδὴ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ δύναται νὰ προεκταθῇ ἑκατέρωθεν).

§ **54. Ὁρισμὸς τοῦ ἐπιπέδου.**

Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος μιᾶς ὑδατοδεξαμενῆς ἢ ἑνὸς δοχείου ἢ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑαλοπίνακος, λαμβάνομεν **ἰδέαν τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας,**

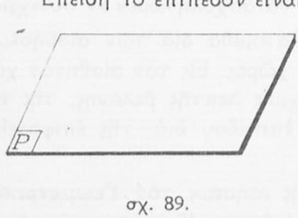
Διὰ νὰ ἐξακριβώσωμεν πρακτικῶς, ἐὰν μία ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος, θέτομεν ἐπ' αὐτῆς ἕνα κανόνα, τὸν ὁποῖον μετατοπίζομεν πρὸς διαφόρους διευθύνσεις, παρατηροῦντες ἐὰν ἡ ἀκμὴ αὐτοῦ ἐφαρμόζῃ εἰς ὅλας τὰς θέσεις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἔχομεν λοιπὸν εἰς τὸν Γεωμ. χῶρον τὸ κάτωθι ἀξίωμα :

Ἓν ἐπίπεδον (p) εἶναι μία ἐπιφάνεια, τοιαύτη ὥστε, ἐὰν δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τότε ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ αὐτοῦ.

Αἱ εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι, ὡς εἴπομεν, ἀπεριόριστοι, ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι μία ἐπιφάνεια ἀπεριόριστος.

Παράστασις τοῦ ἐπιπέδου

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον εἶναι μία ἀπεριόριστος ἐπιφάνεια, παριστῶμεν μόνον ἓν μέρος αὐτοῦ συνήθως δι' ἑνὸς **ὀρθογωνίου** (σχ. 89). Τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ φαίνεται προοπτικῶς ὡς ἓν παραλληλόγραμμον. Ἐπ' αὐτοῦ δὲ σημειοῦμεν ἓν τῶν ἑπομένων λατινικῶν γραμμάτων (p), (q), κ.λ.π.



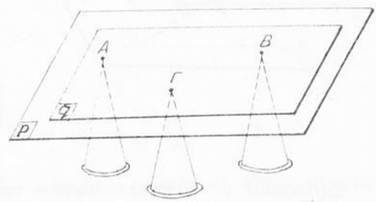
σχ. 89.

Σημ. Ἡ τοιαύτη ὅμως παράστασις τοῦ ἐπιπέδου δὲν πρέπει νὰ μᾶς παρασύρῃ, ὥστε νὰ λησμονῶμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἐκτείνεται ἀπεριορίστως.

§ 55. Καθορισμὸς ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τὸν χῶρον

Ἀξίωμα : Διὰ τριῶν σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας διέρχεται ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον.

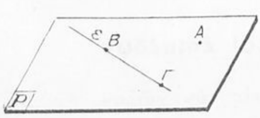
Πρακτικῶς εἶναι εὔκολον νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἀναπαράστασιν τοῦ καθορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου. Τοποθετοῦμεν μίαν μεταλλικὴν πλάκα ἐπὶ τριῶν σημείων π.χ. Α, Β, Γ μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ε καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη **στηρίζεται** ἐπ' αὐτῶν (σχ. 90). (Τοῦτο δὲν ἐπιτυγχάνεται διὰ δύο σημείων). Ἐὰν θελήσωμεν νὰ στηρίξωμεν καὶ ἄλλην μεταλλικὴν πλάκα ἐπὶ τῶν τριῶν σημείων (π.χ. ἄκρων ἀκίδων μεταλλικῶν) Α, Β, Γ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὐτὴ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πρώτης μεταλλικῆς πλακὸς καὶ αἱ ἐπίπεδοι αὐτῶν ἐπιφάνειαι θὰ ταυτισθοῦν. Ἐκ ταύτης καὶ ἄλλων παρομοίων παρατηρήσεων ἐπὶ φαινομένων τῆς καθημερινῆς ζωῆς (π. χ. τράπεζαι, τρίποδοι, καθίσματα κ. ἄ.), δικαιολογοῦμεν διατὶ ἐθέσαμεν εἰς τὸν Γεωμ. χῶρον τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα. Δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἀκόμη, ὅτι :



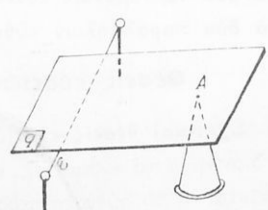
σχ. 90.

I. Διὰ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς σημείου Α, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς διέρχεται ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον

Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ ἓν σημεῖον Α αὐτῆς. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ε δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ καὶ θεωρήσωμεν καὶ τὸ σημεῖον Α, ἔχομεν τρία



σχ. 91.



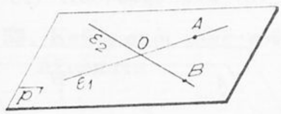
σχ. 92.

σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ὡς ἐμάθομεν ταῦτα ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, τὸ Ρ εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται καὶ ἡ ε (διατί;).

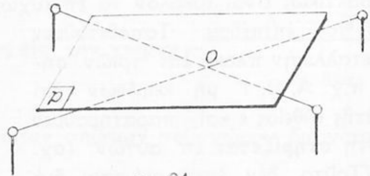
Αὐτὸ δυνάμεθα καὶ πρακτικῶς νὰ διαπιστώσωμεν, ἐὰν στηρίξωμεν μίαν ἐπίπεδον μεταλλικὴν πλάκα ἐπὶ ἑνὸς τεταμένου νήματος (συρματίνου) ε καὶ ἑνὸς σημείου Α (ἄκρου ἀκίδος), τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ νήματος. Τὸ ἐπίπεδον στρεφόμενον περὶ τὴν ε δύναται νὰ διέλθῃ διὰ πάσης νέας θέσεως τοῦ σημείου Α. (Σχ. 92).

II) Διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον

Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἔχομεν τρία σημεῖα τὰ Ο, Α καὶ Β τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.



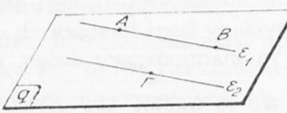
σχ. 93.



σχ. 94.

Δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν τοῦτο καὶ πρακτικῶς, ἐὰν τοποθετήσωμεν μίαν μεταλλικὴν πλάκα ἐπὶ δύο συρματίνων νημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, ὁπότε θὰ ἴδωμεν ὅτι αὕτη στηρίζεται ἐπ' αὐτῶν (σχ. 94).

III) Διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον



σχ. 95.

Αὐτὸ εἶναι φανερόν, διότι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, ἐξ ὁρισμοῦ, κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (σχ. 95).

Ὥστε τὸ ἐπίπεδον ὁρίζεται :

I. Ὑπὸ τριῶν σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

II. Ὑπὸ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται εἰς αὐτήν.

III. Ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν.

IV. Ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

Θέσεις εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων

§ 56. I. Σχετικαὶ θέσεις εὐθειῶν εἰς τὸν χῶρον

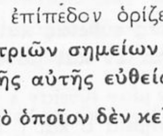
Α. Δύο διακεκριμέναι εὐθεῖαι ε_1, ε_2 δύνανται νὰ ἔχουν τὰς ἑξῆς θέσεις :

α) Νὰ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (νὰ εἶναι συνεπίπεδοι).

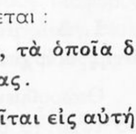
β) Νὰ μὴ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ εὐθεῖαι ἢ θὰ τέμνωνται ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν δὲν τέμνονται καὶ δὲν εἶναι παράλληλοι. Τότε αἱ εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2 λέγονται **ἀσύμβατοι** εὐθεῖαι (ἢ στρεβλαὶ ἢ μὴ συνεπίπεδοι). (Σχ. 96, 97)



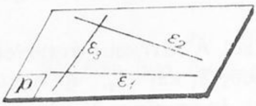
σχ. 96.



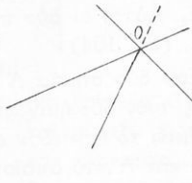
σχ. 97

ΙΙ. Τρεῖς ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι δύνανται :

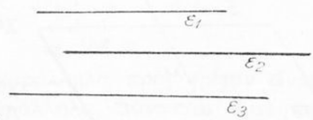
α) Νὰ εἶναι συνεπίπεδοι (σχ. 98).



σχ. 98.



σχ. 99.



σχ. 100.

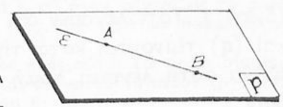
β) Νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, χωρὶς νὰ εἶναι συνεπίπεδοι (σχ. 99).

γ) Νὰ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι χωρὶς νὰ εἶναι συνεπίπεδοι.(Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῆς παραλληλίας, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν) (σχ. 100).

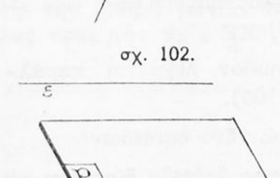
§ 57. Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου

α΄ περίπτωσις :

Ἐὰν μία εὐθεῖα ε ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β μὲ ἓν ἐπίπεδον (p), αὕτη κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ὡς ἐμάθομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου. (Σχ. 101)



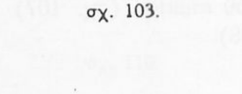
σχ. 101.



σχ. 102.

β΄ περίπτωσις :

Ἐὰν εὐθεῖα ε ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Μ μὲ τὸ ἐπίπεδον (p), λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ε τέμνει τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδον (p) τέμνει τὴν εὐθεῖαν ε. Τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν Μ λέγεται **σημεῖον τομῆς ἢ ἴχνος.** (Σχ. 102)



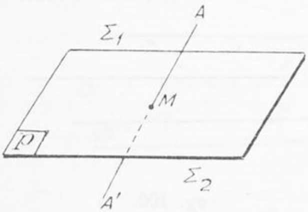
σχ. 103.

γ΄ περίπτωσις :

Ἐὰν τέλος μία εὐθεῖα ε οὐδὲν ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐπίπεδον (p), λέγομεν ὅτι αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. (Σχ. 103)

§ 58. Ἡ ἔννοια τοῦ ἡμιχώρου

Ἓν ἐπίπεδον p, ἐπειδὴ προεκτείνεται ἀπεριορίστως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, χωρίζει τὸν χῶρον εἰς δύο περιοχὰς Σ_1 καὶ Σ_2. Αὐταὶ αἱ δύο περιοχαὶ καλοῦνται **ἡμίχωροι**. (Σχ. 104)



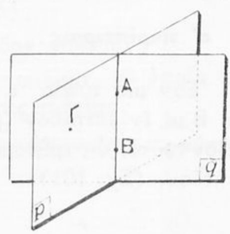
σχ. 104.

Ἐὰν δύο σημεῖα A καὶ A′ ἀνήκουν ἀντιστοίχως εἰς τοὺς δύο ἡμιχώρους Σ_1 καὶ Σ_2, ἡ εὐθεῖα AA′ τέμνει τὸ ἐπίπεδον εἰς ἓν σημεῖον M, μεταξὺ τῶν A καὶ A′, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἡμιευθεῖα MA περιέχεται εἰς τὸν ἡμίχωρον Σ_1 καὶ ἡ MA′ περιέχεται εἰς τὸν ἡμίχωρον Σ_2.

§ 59. Σχετικαὶ θέσεις ἐπιπέδων

A′. Δύο ἐπιπέδων

α) Ἐὰν δύο διακεκριμένα ἐπίπεδα (p) καὶ (q) ἔχουν κοινὰ δύο σημεῖα A, B θὰ ἔχουν κοινὴν καὶ τὴν εὐθεῖαν AB (διατί;). Τότε λέγομεν ὅτι τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν AB. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται **τομὴ** τῶν δύο ἐπιπέδων.

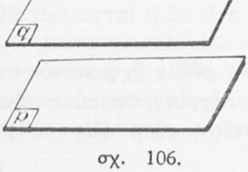


σχ. 105.

Τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον **κεῖται** ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB, διότι τότε αὐτὰ θὰ εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ θὰ ἐταυτίζοντο. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι δυνατόν, διότι τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) εἶναι διακεκριμένα. Τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) λέγονται **τεμνόμενα**. (σχ. 105)

Σημ. Δύο διακεκριμένα ἐπίπεδα, ἐὰν ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ. (Ἀξίωμα).

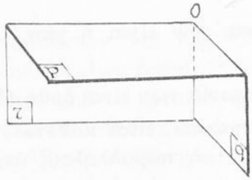
β) Δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον λέγονται **παράλληλα** [(p)//(q)]. (σχ. 106).



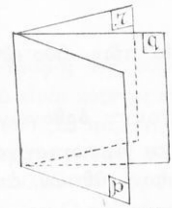
σχ. 106.

B′. Περισσοτέρων τῶν δύο ἐπιπέδων

α) Τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα δύνανται νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (σχ. 107) ἢ διὰ μιᾶς εὐθείας (σχ. 108).

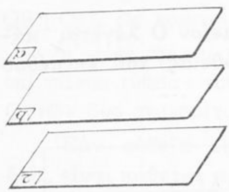


σχ. 107.



σχ. 108.

β) Ἐὰν δύο διακεκριμένα ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα. Δύνανται συνεπῶς καὶ περισσότερα τῶν δύο ἐπίπεδα, νὰ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλα. Παράδειγμα: Αἱ ὀροφαὶ (ἢ τὰ δάπεδα) τῶν ὀρόφων μιᾶς πολυκατοικίας, παράλληλοι πρὸς τὴν ὀροφὴν τοῦ α' ὀρόφου (ἢ τὸ ἔδαφος) εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι. (Σχ. 109)



σχ. 109.

Ἀσκήσεις

189) Εἰς τὴν αἴθουσαν διδασκαλίας νὰ εὕρητε εὐθείας α) παραλλήλους, β) τεμνομένας καὶ γ) ἀσυμβάτους.

190) Εἰς τὴν αἴθουσαν διδασκαλίας ὁρίσατε τὰ ζεύγη τῶν τεμνομένων ἐπιπέδων καὶ τὰ ζεύγη παραλλήλων ἐπιπέδων.

191) Ἔχομεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Εὕρετε τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ.

192) Κατασκευάσατε τρεῖς παραλλήλους εὐθείας ε_1, ε_2 καὶ ε_3 α) ὅταν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ β) ὅταν δὲν κεῖνται ὅλαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (π.χ. διὰ νημάτων παραλλήλως διατεθειμένων).

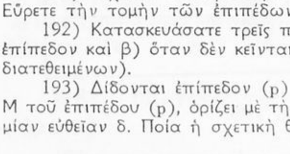
193) Δίδονται ἐπίπεδον (p) καὶ μία εὐθεῖα ε παράλληλος πρὸς αὐτό. Τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (p), ὁρίζει μὲ τὴν ε ἓν ἐπίπεδον (q), τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον (p) κατὰ μίαν εὐθεῖαν δ. Ποία ἡ σχετικὴ θέσις τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ε καὶ δ; (διατί;)

Β. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ—ΚΑΘΕΤΟΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

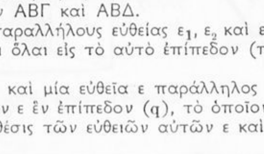
§ 60. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

Θεωροῦμεν δύο εὐθείας χχ' καὶ ψψ' τοῦ χώρου, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσύμβατοι. Ἀπὸ ἓν τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην. Σχηματίζονται τότε τέσσαρες κυρταὶ γωνίαι, ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι ὀξεῖαι (ἴσαι) καὶ δύο ἀμβλεῖαι (ἴσαι) ἢ τέσσαρες γωνίαι ὀρθαί. (Σχ. 110).

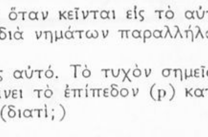
Γωνίαν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν χχ' καὶ ψψ' ὀνομάζομεν τὴν ὀξεῖαν (ἢ τὴν ὀρθὴν) γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ψψ' καὶ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν χχ', ΧΧ', ἡ διερχομένη διὰ σημείου Ο τῆς ψψ'.



σχ. 110.



σχ. 111.



σχ. 112.

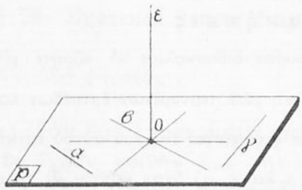
Ἄρα ἡ γωνία τῶν δύο εὐθειῶν χχ΄ και ψψ΄ εἶναι ἡ γων.(ΟΧ, Οψ) (σχ, 110).

Δύο εὐθεῖαι λέγονται **ὀρθογώνιοι**, ὅταν ἡ γωνία των εἶναι **ὀρθὴ** (Σχ.111).

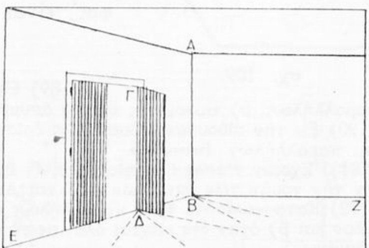
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καὶ εἶναι ὀρθογώνιοι, εἶναι **κάθετοι**. Ὡς παράδειγμα ὀρθογωνίων εὐθειῶν, ἀναφέρομεν τὰς μὴ παραλλήλους ἀκμὰς ἑνὸς κύβου (σχ. 112).

§ 61. Καθετότης εὐθείας καὶ ἐπιπέδου

Μία εὐθεῖα ε τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον (p) εἰς ἓν σημεῖον O λέγεται κάθετος ἐπ' αὐτό, ἐὰν εἶναι κάθετος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τὰς διερχομένας διὰ τοῦ O.



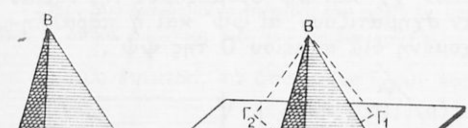
σχ. 113.



σχ. 114.

Δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι ἡ ε εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ (p). (σχ. 113).

Ἡ κατακόρυφος τομὴ δύο τοίχων τῆς σχολικῆς αἰθούσης, εὐθεῖα AB, εἶναι κάθετος πρὸς τὰς τομὰς BZ καὶ BE τῶν ἐπιπέδων τῶν τοίχων καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ δαπέδου. Διὰ τοῦ γνώμονος διαπιστοῦμεν, ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ πατώματος, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ B. Συνεπῶς ἡ εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος πρὸς τὸ πάτωμα. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν διὰ τὴν εὐθεῖαν περιστροφῆς (ΓΔ) (εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῶν στροφέων της) τῆς θύρας τῆς αἰθούσης (σχ. 114). Ἐὰν ἀνοιγοκλείσωμεν αὐτὴν καὶ σημειώσωμεν διὰ κιμωλίας ἐπὶ τοῦ δαπέδου τὰς διαφόρους θέσεις τῆς κάτω εὐθυγράμμου ἀκμῆς τῆς θύρας, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ὑπὸ τῶν ἐν



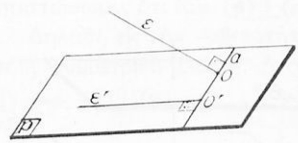
σχ. 115.

λόγῳ ἡμιευθειῶν καὶ τῆς εὐθείας περιστροφῆς τῆς θύρας, μετρούμεναι διὰ τοῦ γνώμονος εἶναι ὀρθαί. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πατώματος. Διὰ νὰ αἰτιολογήσωμεν τὰς ἀνωτέρω παρατηρήσεις, στερεώνομεν δύο γνώμονας τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχουν μίαν κοινὴν πλευρὰν ΑΒ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τοποθετοῦμεν αὐτοὺς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τρόπον ὥστε τὸ Α νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον Ο καὶ αἱ πλευραὶ ΟΓ καὶ ΟΓ′ νὰ κεῖνται εἰς τὸ ἐπίπεδον (σχ. 115). Ἡ κοινὴ πλευρὰ ΟΒ τῶν δύο γνωμόνων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΓ καὶ ΟΓ′ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ Ο ($ΟΒ \perp ΟΓ$ καὶ $ΟΒ \perp ΟΓ'$, ὡς κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου).

Δι᾿ ἑνὸς τρίτου γνώμονος διαπιστοῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου, διερχομένην διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν του, ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (p).

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας ἐπιπέδου, εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. (Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἓν σπουδαῖον θεώρημα τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου).

Σημείωσις. Μία εὐθεῖα ε κάθετος ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν α τοῦ ἐπιπέδου (p) εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἀλλὰ εἶναι δυνατὸν καὶ νὰ μὴ εἶναι ἢ νὰ κεῖται εἰς αὐτό. Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον χωρὶς νὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτό, λέγεται **πλαγία** πρὸς τὸ (p). (σχ. 116)



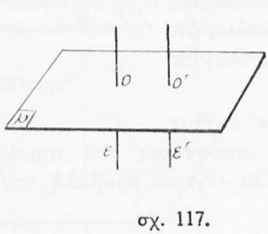
σχ. 116.

§ 62. Ἰδιότητες τῆς καθέτου—(Θεωρήματα)

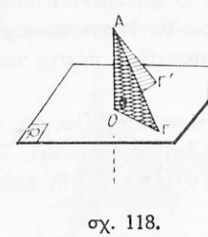
Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸ σύστημα τῶν γνωμόνων τῆς § 61 καταλήγομεν εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα :

α) Ἐξ ἑνὸς σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μόνον **μίαν** εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

β) Δύο εὐθεῖαι ε καὶ ε′ κάθετοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (p) εἶναι παράλληλοι (σχ. 117).



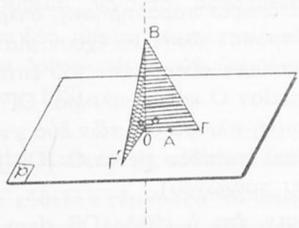
σχ. 117.



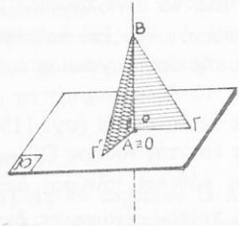
σχ. 118.

γ) Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α, ἐπὶ ἢ ἐκτὸς ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν μόνον κάθετον πρὸς αὐτό (σχ. 118).

δ) Ἀπὸ ἓν σημεῖον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἓν ἐπίπεδον κάθετον πρὸς μίαν εὐθεῖαν. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ μὴν κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ ἢ νὰ κεῖται

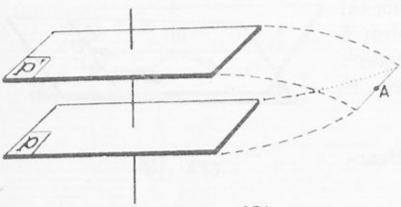


σχ. 119.



σχ. 120.

ἐπὶ αὐτῆς. Διὰ τοῦ συστήματος τῶν δύο γνωμόνων εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου, ὡς τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 119 καὶ σχῆμα 120.



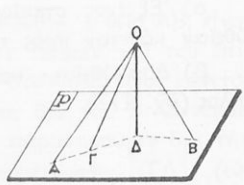
σχ. 121.

ε) Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα (διατί;). Ἐὰν ἐτέμνοντο εἰς τὸ σημεῖον Α, θὰ εἴχομεν ἐξ αὐτοῦ δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

ζ) Μία εὐθεῖα κάθετος εἰς ἓν ἐκ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ ἄλλο.

§ 63. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου

Εἴπομεν ὅτι ἀπὸ ἓν σημεῖον π.χ. Ο, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (p) δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν μόνον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὴν ΟΔ.



σχ. 122.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ο φέρωμεν καὶ διαφόρους πλαγίας πρὸς τὸ ἐπίπεδον, θὰ διαπιστώσωμεν εὐκόλως ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης τοιαύτης πλαγίας (σχ. 122).

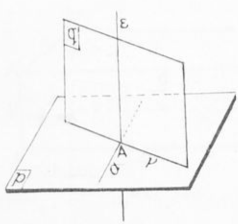
Τὸ μῆκος τῆς καθέτου ΟΔ, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, λέγεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. (Τὸ ἴχνος Δ τῆς καθέτου ΟΔ λέγεται **προβολὴ** τοῦ Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (p)).

§ 64. Καθετότης ἐπιπέδων

Εἴπομεν εἰς τὴν προηγουμένην §·61 ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῶν στροφέων τῆς θύρας σχολικῆς αἰθούσης εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου. Τότε τὸ ἐπίπεδον Θ τῆς θύρας αὐτῆς λέγεται **ἐπίπεδον κάθετον** ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου (διότι ἐτοποθετήθη κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ περιέχῃ τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὸ **ὁριζόντιον** ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου, ἤτοι ΓΔ κατακόρυφος) (σχ. 114).

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τοὺς τοίχους τῆς αἰθούσης διδασκαλίας (ἢ τῆς οἰκίας), οἱ ὁποῖοι κατεσκευάσθησαν οὕτως, ὥστε νὰ περιέχουν **κατακορύφους** εὐθείας, ἤτοι εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ δαπέδου ἢ τῆς ὀροφῆς. (Σημ. Οἱ κτίσται κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τοίχων μιᾶς οἰκοδομῆς χρησιμοποιοῦν τὸ **νῆμα** τῆς **στάθμης** διὰ νὰ ἐπιτύχουν ὥστε οἱ τοῖχοι νὰ εἶναι κατακόρυφοι, δηλ. κάθετοι ἐπὶ τὴν ὁριζόντιον ἐπιφάνειαν τοῦ δαπέδου).

Ἐξ ὅσων ἀναφέρομεν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν γενικῶς ὅτι: **Ἓν ἐπίπεδον (p) λέγεται κάθετον πρὸς ἓν ἄλλον ἐπίπεδον (q), ἐὰν περιέχῃ μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ (q).** (σχ. 123)·


σχ. 123.

Δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ἐὰν $(p)\perp(q)$ τότε καὶ $(q)\perp(p)$. Δηλαδὴ εἰς τὴν καθετότητα τῶν ἐπιπέδων ἰσχύει ἡ συμμετρικὴ ἰδιότης, ἤτοι:

$$(p)\perp(q) \iff (q)\perp(p)$$

Ἀσκήσεις

194) Εὕρετε ἐντὸς τῆς αἰθούσης

α) Ἐπίπεδα κάθετα καὶ β) ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ δάπεδον αὐτῆς, γ) ἐπίπεδα ὁριζόντια καὶ κατακόρυφα καὶ δ) εὐθείας καθέτους ἐπὶ ἐπίπεδον.

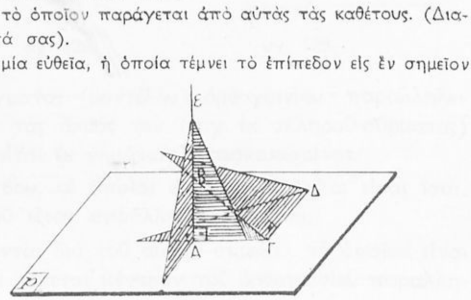
195) Δίδεται ἐπίπεδον (p) καὶ ἓν σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ᾽ αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ σημείου Β χαράσσομεν τὴν ΒΑ κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (p) καὶ τὴν πλαγίαν πρὸς αὐτὸ ΒΓ. Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς ΒΑ εἶναι 6 cm καὶ τῆς ΒΓ εἶναι 10 cm νὰ ὑπολογίσητε τὸ μῆκος τῆς ΑΓ.

196) Δίδεται εὐθεῖα ε, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν σημεῖον Α. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς τὸν χῶρον ἀπείρους καθέτους εἰς τὴν ε.

Ἐξετάσατε τὸ εἶδος τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ αὐτὰς τὰς καθέτους. (Διατυπώσατε φραστικῶς τὰ συμπεράσματά σας).

197) Δίδεται ἐπίπεδον (p). Ἔστω μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐπίπεδον εἰς ἓν σημεῖον

σχ. 124.



σχ. 125.

Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (p). Ἀπὸ ἓν σημεῖον Β τῆς ε φέρομεν τὴν κάθετον ΒΓ πρὸς μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου (p). Ἐξετάσατε ἐὰν αἱ ΑΓ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι (μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τριῶν γνωμόνων τῆς § 61).

198) Δίδεται ἐπίπεδον (P). Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΓ εἰς μίαν εὐθεῖαν αὐτοῦ, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον Γ μὲ ἕνα σημεῖον τυχὸν Β τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (p) εἰς τὸ Α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. (Σχ. 124). (Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γνωμόνων).

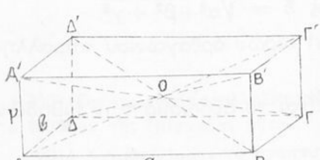
199) Δίδεται ἐπίπεδον (p). Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Β, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπεδου (p), φέρωμεν τὴν κάθετον ΒΓ εἰς μίαν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ μετὰ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΑ (ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ (p)), ἐπὶ τὴν ΓΔ, δείξατε ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (p). (Σχῆμα 125). (Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γνωμόνων).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Α. ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

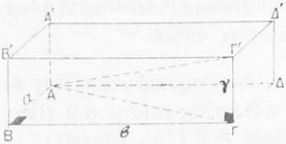
§ **65**. **Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον** εἶναι ἓν στερεόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὀρθογώνια (εἰς τρόπον ὥστε κάθε πλευρὰ ἑκάστου, νὰ εἶναι κοινὴ ἑνὸς μόνον ἄλλου). Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ ὀνομάζονται ἕδραι (ἢ βάσεις) τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου. Αἱ πλευραὶ αὐτῶν λέγονται ἀκμαί. **Διαστάσεις** τοῦ παραλληλεπιπέδου λέγομεν τὰ μήκη τῶν 3 ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι συντρέχουν εἰς τὴν αὐτὴν κορυφήν. Ἡ μία τούτων λέγεται μῆκος, ἡ ἄλλη πλάτος καὶ ἡ τρίτη ὕψος. Π.χ. εἰς τὸ σχ. 126 αἱ $AB=\alpha$, $A\Delta=\beta$ καὶ $AA'=\gamma$.

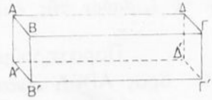


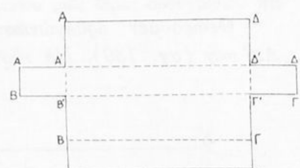
σχ. 126.

Διαγώνιον τοῦ ὀρθογ. παραλ/δου ὀνομάζομεν τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν δύο κορυφαὶ αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν τὰς ἰδιότητας τοῦ ὀρθ. παρ/δου μὲ τὴν


σχ. 127.


σχ. 128.


σχ. 129.

βοήθειαν στερεομετρικοῦ ὑποδείγματος (μοντέλου) ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ ὑλοποιημένας μόνον τὰς ἀκμάς του (π.χ. ἐκ σκληροῦ σύρματος) καὶ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοι εἶναι ἐκ νημάτων κατεσκευασμέναι.

α) Αἱ ἀκμαὶ τοῦ ὀρθ. παρ/δου, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι εἶναι ἴσαι.

β) Αἱ ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι.

γ) Αἱ διαγώνιοί του διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον κάθε μιᾶς ἐξ αὐτῶν καὶ λέγεται **κέντρον** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (εἶναι καὶ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ).

Σημ. Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἰσχύουν δι' ὅλα τὰ παραλληλεπίπεδα, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ προσεχῆ μαθήματα.

δ) Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν διαστάσεών του.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν διαγώνιον $ΑΓ' = δ$ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' (σχ. 127) ἐφαρμόζομεν τὸ Πυθαγόρειον Θεώρημα εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΓ' (τὸ τρίγωνον ΑΓΓ' εἶναι ὀρθογώνιον διότι ἡ ΓΓ' εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΑ. Ἑπομένως γωνία $\widehat{ΑΓΓ'} = 1$ ὀρθ.).

Οὕτως ἔχομεν: $ΑΓ'^2 = ΑΓ^2 + ΓΓ'^2$ καὶ $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$. Ἄρα $ΑΓ'^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΓ'^2 \Longrightarrow δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2$ καὶ ἑπομένως $δ = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}$.

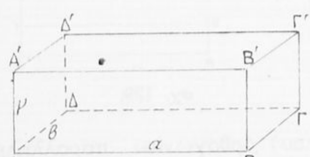
Ἡ ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων δύο ἀπέναντι ἑδρῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγεται ὕψος αὐτοῦ.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθ. παραλ/δου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Ἀνάπτυγμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἐὰν κόψωμεν αὐτὸ κατὰ μῆκος τῆς ΒΓ καὶ τῶν ΒΒ', ΒΑ, Α'Β', ΓΔ, Δ'Γ', ΓΓ' καὶ ἀναπτύξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου (σχ. 128, 129).

§ 66. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις $ΑΒ = α$, $ΑΔ = β$ $ΑΑ' = γ$ (σχ. 130). Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

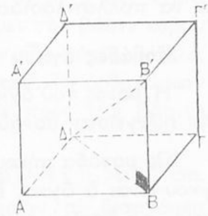


σχ. 130.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ εἶναι α.β καθὼς ἐπίσης α.β εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας Α'Β'Γ'Δ'. (διατί;).

Τὸ ἐβδαδὸν τῆς ἕδρας ΑΒΒ'Α' εἶναι α.γ καθὼς καὶ τῆς ἀπέναντι ἕδρας αὐτῆς ΔΓΓ'Δ'. Τῆς ἕδρας ΑΑ'Δ'Δ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι β.γ καθὼς καὶ τῆς ἀπέναντί της ἕδρας ΒΒ'Γ'Γ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' εἶναι $Ε = 2αβ + 2αγ + 2βγ$ ἢ $\boxed{Ε = 2.(αβ + βγ + γα)}$

§ 67. Κύβος.



σχ. 131.

Κύβος εἶναι ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι.

Ἑπομένως αἱ ἕδραι του εἶναι τετράγωνα ἴσα (σχ. 131).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς κύβου ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ καὶ ἔχομεν $\delta^2=\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2$ ἄρα $\delta^2=3\alpha^2 \iff \delta=\alpha\sqrt{3}$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶναι:

$$E=2.(\alpha.\alpha+\alpha.\alpha+\alpha.\alpha)=2.3\alpha^2 \iff \boxed{E=6\alpha^2}$$

Ἀσκήσεις

200) Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι 6 cm, 5 cm, 4 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

201) Κατασκευάσατε τὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς κύβου ἀκμῆς 3 cm καὶ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του.

202) Δίδεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Αἱ τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8, 10, 12 καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας (ὁλικῆς) τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου 2368 cm². Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

203) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 54 cm² Νὰ εὕρητε τὴν ἀκμὴν αὐτοῦ καὶ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου του.

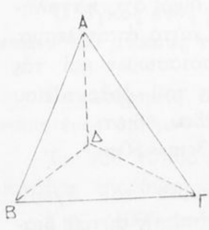
204) Δίδεται τὸ μῆκος, τὸ ὕψος, καὶ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου μιᾶς ἕδρας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ὄγκος στερεῶν

§ 68. **Ὄγκος** ἑνὸς στερεοῦ λέγεται ἡ ἔκτασις τοῦ χώρου, τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τοῦ στερεοῦ, ἐκπεφρασμένη εἰς μονάδας μετρήσεως.

Μέτρησις τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ

Τιμὴ τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ὄγκου αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως ἢ συγκρίσεως τῶν ὄγκων. Τὴν τιμὴν τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 132) συμβολίζομεν διὰ τοῦ (ΑΒΓΔ) καὶ τὸν ὄγκον αὐτοῦ διὰ τοῦ V ἢ $V_{ΑΒΓΔ}$.



σχ. 132.

Μέτρησις τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ ὄγκου αὐτοῦ. Ἡ τιμὴ τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν μονάδα διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

Μονάδες ὄγκου

Ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀκμὴν τὴν ἐκλεγεῖσαν μονάδα μήκους.

Ὡς μονάδα μήκους ὅμως ἔχομεν ὁρίσει τὸ μέτρον (1 m), ἄρα ἡ μονὰς ὄγκου εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου ἀκμῆς ἑνὸς μέτρου· ἤτοι τὸ **κυβικὸν μέτρον**, τὸ ὁποῖον σημειοῦται συντόμως (m^3).

Αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι :

1) Τὸ κυβικὸν δεκατόμετρον (dm^3), ἤτοι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου πλευρᾶς μήκους 1 dm.

2) Τὸ κυβικὸν ἑκατοστόμετρον (cm^3), δηλ. ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου ἀκμῆς μήκους 1 cm καὶ

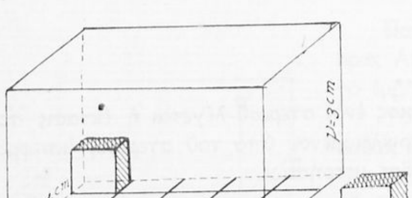
3) Τὸ κυβικὸν χιλιοστόμετρον (mm^3), ἤτοι ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου πλευρᾶς μήκους 1 mm.

§ 69. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Δίδεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις $\alpha = 4$ cm, $\beta = 5$ cm καὶ $\gamma = 3$ cm. *Σκεφθεῖτε πῶς δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸ ἐν λόγῳ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πληροῦμεν τὸ στερεὸν μὲ κύβους πλευρᾶς μήκους 1 cm. Διὰ νὰ πληρωθῇ τοῦτο χρειάζονται 60 κύβοι ὄγκου ἴσου πρὸς 1 cm^3 ἤτοι $V = 60 cm^3$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰς τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, διότι

$$4cm \cdot 5cm \cdot 3cm = 60 cm^3.$$



σχ. 133.

Ἄρα $V = 4\ cm \cdot 5\ cm \cdot 3\ cm = 60\ cm^3$, ἤτοι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις, ἐπεφρασμένας εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους.

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου χωρίζεται εἰς 5 ἐπὶ 4 ἴσα τετράγωνα πλευρᾶς 1 cm. Ἐπὶ ἑκάστου τούτων τοποθετοῦμεν τὴν βάσιν κύβου πλευρᾶς 1 cm καὶ σχηματίζεται ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους 1 cm. Τοῦτο ἔχει ὄγκον 4 cm. 5 cm. 1 cm $= 20$ cm^3. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον χωρίζεται (δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν) εἰς τρία ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τοῦ αὐτοῦ ὄγκου.

Συνεπῶς: $V = 3.20\ cm^3 = 60\ cm^3 = 3\cdot(4\ cm\cdot 5\ cm\cdot 1\ cm) = 4\ cm\cdot 5cm\cdot 3\ cm.$

Ἐὰν δοθῇ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἔχουν μήκη α, β, γ ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\boxed{V = \alpha.\beta.\gamma}$

Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του.

Ἀποδεικνύεται ὅτι τοῦτο ἀληθεύει καὶ ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν α,β,γ εἶναι τυχόντες ἀριθμοί.

Παρατηροῦμεν εἰς τὸν τύπον $V = \alpha.\beta.\gamma$. ὅτι τὸ γινόμενον α.β δίδει τὸ ἐμβαδὸν E_β τοῦ ὀρθογωνίου τῆς βάσεως μὲ διαστάσεις α καὶ β, ἐνῶ τὸ γ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου:

Ἄρα $\boxed{V = E_\beta \cdot \upsilon}$ ἤτοι:

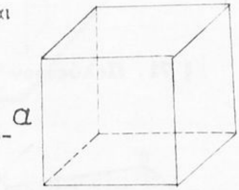
Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

§ 70 Ὄγκος κύβου.

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύβος εἶναι ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι (σχ. 134). Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου εἶναι α, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $V = \alpha.\alpha.\alpha \Rightarrow$

$\boxed{V = \alpha^3}$ (1) ἤτοι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ μήκους τῆς ἀκμῆς του.



σχ. 134.

Παρατήρησις. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ τρίτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται κύβος τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) ἐννοοῦμεν ὅτι κάθε μονὰς ὄγκου, ἰσοῦται μὲ $1000 = 10^3$ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἄρα:

$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3$ ἢ

$1 m^3 = 10^3 dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$

$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000000\ mm^3$$
$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$$

Ἀσκήσεις

205) Εὕρετε τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου πλευρᾶς 3,5 m.

206) Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 5 m, 14 dm, καὶ 8 cm.

207) Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 64 dm^3 καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 16dm^2. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν βάσιν ταύτην.

208) Εὕρετε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς κύβου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 4913 cm^3. (Ὑπόδειξις: ἀναλύσατε τὸν ἀριθμὸν εἰς γινόμενον παραγόντων).

209) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κύβου εἶναι 294 dm^3. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ τοῦ κύβου.

210) Σιδηρουργὸς ἔχει μεταλλικὴν πλάκαν σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 4m, 5 m καὶ 0,5m. Σκοπεύει δὲ νὰ διαιρέσῃ αὐτὴν εἰς κύβους, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ ἀκμὴν 0,05 m. Εἰς πόσους τοιούτους κύβους δύναται νὰ διαιρεθῇ ἡ πλάξ;

211). Δίδεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 5, 6 καὶ ἔχουν ἄθροισμα 70dm. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

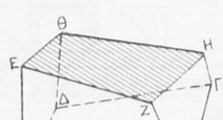
212) Δίδεται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 960 cm^3. Νὰ ὑπολογίσητε τὰς διαστάσεις αὐτοῦ, ὅταν εἶναι γνωστὸν ὅτι αὐταὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6.

213) Ἓν δοχεῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 2m, 3m, 4m. Ἓν ἄλλο δοχεῖον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι ὀκταπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ δοθέντος ἔχει διαστάσεις ἀναλόγους πρὸς τὰς διαστάσεις τοῦ πρώτου δοχείου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ δευτέρου αὐτοῦ δοχείου.

214) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος α τῆς ἀκμῆς ἑνὸς κύβου ἐπὶ 2, πόσος γίνεται ὁ ὄγκος τοῦ κύβου αὐτοῦ; Ἐφαρμογή: α=5 cm.

Β. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

§ 71. Πολύεδρον



σχ. 135.

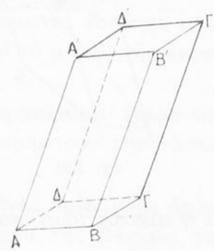
Τὸ παραπλεύρως στερεὸν (σχ. 135) ἀποτελεῖται ἀπὸ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Κάθε πλευρὰ ἑκάστου πολυγώνου ἀνήκει καὶ εἰς ἓν (μόνον ἓν) ἄλλο πολύγωνον. **Τὸ στερεὸν αὐτὸ εἶναι ἓν πολύεδρον.** Τὰ πολύγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται εἶναι αἱ **ἕδραι** τοῦ πολυέδρου. Αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν εἶναι αἱ **ἀκμαὶ** τοῦ πολυέδρου καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν ἑδρῶν αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυέδρου. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ ὁ κύβος εἶναι πολύεδρα.

Σημ. Σημεῖα τοῦ πολυέδρου λέγονται τὰ σημεῖα τῶν ἀκμῶν του καὶ τὰ ἐσωτερικὰ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

§ 72. Πρῖσμα.

Πρῖσμα εἶναι ἓν πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς δὲ ἄλλας παραλληλόγραμμα (σχ. 136).

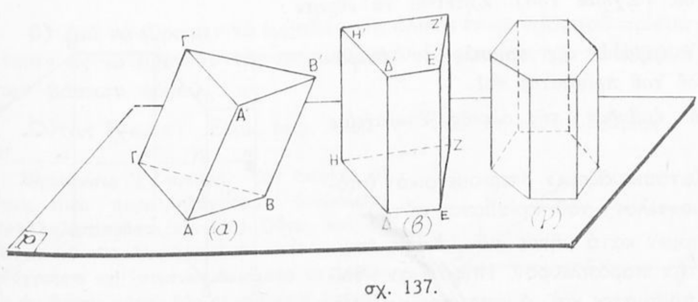
Αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' λέγονται βάσεις τοῦ πρίσματος. Τὰ παραλληλόγραμα λέγονται παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ, ὡς τὰ ΑΒΒ'Α', ΒΓΓ'Β' κ.λ.π. Αἱ ἀκμαὶ ΑΑ', ΒΒ'. . ., αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων λέγονται παράπλευραι ἀκμαί. Αὐταὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.



σχ. 136.

Ἡ ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων λέγεται **ὕψος** τοῦ πρίσματος, π.χ. τὸ ΔΔ' (σχ. 137α). Ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων τὸ πρῖσμα λέγεται **ὀρθὸν πρῖσμα,** ἄλλως λέγεται **πλάγιον.** Συνεπῶς τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν παράπλευρον ἀκμήν του, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνια, π.χ. τὸ ΔΔ' (σχ. 137β).

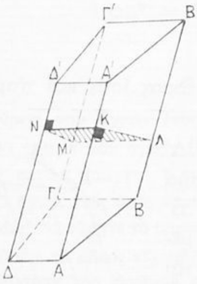
Ἐὰν τὸ πρῖσμα ἔχῃ τριγωνικὰς βάσεις λέγεται **τριγωνικὸν** πρῖσμα, ὡς τὸ ΑΒΓΑ'Β'Γ' τοῦ σχήματος 137α. Ἐὰν ἔχῃ βάσεις τετράπλευρα, πεντάγωνα κ.λ.π. λέγεται ἀντιστοίχως **τετραπλευρικὸν** (σχ. 137β), **πενταγωνικὸν** κ.λ.π. πρῖσμα.



σχ. 137.

Ὅταν ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος, αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, τοῦτο λέγεται **κανονικὸν** πρῖσμα (σχ. 137γ).

Παρατήρησις: Δυνάμεθα, δι' ἁπλῆς κατασκευῆς, νὰ ἔχωμεν στερεομετρικὸν ὑπόδειγμα (μοντέλον) πρίσματος. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν δύο (ἢ περισσότερα) πολύγωνα ἴσα ἐκ ξύλου ἢ χαρτονίου. Δι' ὀπῶν κατεσκευασμένων εἰς τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων αὐτῶν πολυγώνων ἐπιτυγχάνομεν νὰ διέλθουν νήματα, τὰ ὁποῖα διατίθενται παραλλήλως. Διὰ παραλλήλου μεταφορᾶς τῶν πολυγώνων θὰ ἔχωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ πρίσματος (ὀρθοῦ καὶ πλαγίου) καθὼς καὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις ἢ καθέτου τομῆς αὐτοῦ.



σχ. 138.

Ἐὰν φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς παραπλεύρως ἀκμὰς πρίσματος (σχ. 138) λαμβάνομεν ἓν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον λέγεται **κάθετος τομὴ** τοῦ πρίσματος. Αἱ πλευραὶ τῆς καθέτου τομῆς ἑνὸς πρίσματος εἶναι ὕψη τῶν ἀντιστοίχων παραπλεύρων ἑδρῶν, ὅταν ὡς βάσεις αὐτῶν ληφθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί. Εἰς τὰ ὀρθὰ πρίσματα ἡ κάθετος τομὴ ἰσοῦται πρὸς τὰς βάσεις.

73. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πρίσματος

Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας πρίσματος λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν του.

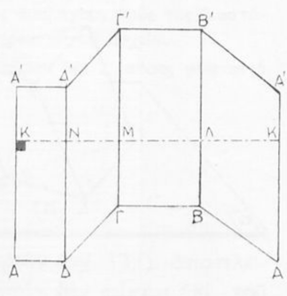
Δίδεται τὸ πλάγιον πρῖσμα ΑΒΓΔΑ'Β'Γ''Δ' καὶ ἔστω ΚΛΜΝ μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ. (Σχῆμα 138). Ζητεῖται νὰ εὕρητε :

α) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ πρίσματος καὶ

β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

α) Κατασκευάζομεν στερεομετρικὸν ὑπόδειγμα (μοντέλον) τοῦ πρίσματος αὐτοῦ.

Κόπτομεν κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς π.χ. τῆς ΑΑ' τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ δοθέντος πρίσματος καὶ ἀναπτύσσομεν τὰς ἕδρας αὐτῆς (τοῦ στερ. ὑποδείγματος) ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.



σχ. 139.

Ἔχομεν οὕτω τὸ σχῆμα 139, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος. Παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα (4) παραλληλόγραμμα, τὰ ΑΒΒ'Α', ΒΓΓ'Β', ΓΔΔ'Γ', ΔΑΑ'Δ', τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι αἱ πλευραὶ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ τῆς καθέτου τομῆς τοῦ πρίσματος καὶ αἱ βάσεις ἴσαι πρὸς τὴν παράπλευρον ἀκμὴν αὐτοῦ. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μήκη τούτων καὶ λ τὸ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς τοῦ πρίσματος, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος αὐτοῦ. Ἤτοι :

$$E_{\text{παρ ἐπιφ. πρισμ.}} = E_{ΑΒΒ'Α'} + E_{ΒΓΓ'Β'} + E_{ΓΔΔ'Γ'} + E_{ΔΑΑ'Δ'} \Longrightarrow$$

$$E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = α.λ + β.λ + γ.λ + δ.λ \text{ συνεπῶς } E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = (α+β+γ+δ).λ \text{ Ἤτοι :}$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς αὐτοῦ.

Ἐὰν τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του εἶναι ἓν ὀρθογώνιον, μὲ διαστάσεις τὰ μήκη τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

Ἄρα : **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος ὀρθοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.**

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεθα νὰ καταλήξωμεν καὶ ἐὰν θεωρήσωμεν ἀπ' εὐθείας τὸ στερεόν, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ στερεομετρικὸν ὑπόδειγμα καὶ τὸ ἀνάπτυγμα αὐτοῦ. Ἐπειδὴ κάθε παράπλευρος ἕδρα εἶναι παραλληλόγραμμον ἔχομεν $E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = E_{ΑΒΒ'Α'} + E_{ΒΓΓ'Β'} + E_{ΒΔΔ'Γ'} + E_{ΔΑΑ'Δ'} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = α.λ + β.λ + γ.λ + δ.λ \Longrightarrow E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = (α+β+γ+δ).λ$$

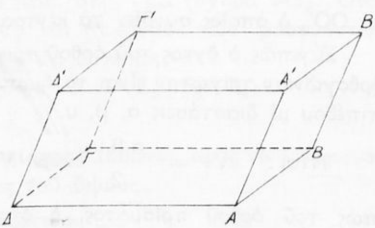
β) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ἴσων βάσεων αὐτοῦ.

Οὕτως ἔχομεν : $E_{\text{ὁλικ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = E_{\text{παρ. ἐπ. πρ.}} + 2.E_{\text{βάσεως}}$

Σημείωσις : Ἓν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα ὀνομάζεται **παραλληλεπίπεδον** (σχ. 140). Οὕτω καὶ αἱ 6 ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσεις αὐτοῦ δύο οἱασδήποτε ἀπέναντι ἕδρας του.

Ὀρθὸν ὀνομάζεται ἓν παραλληλεπίπεδον, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνια.

Συνεπῶς, ὅσα ἀνεφέρομεν ἀνωτέρω διὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας πρίσματος, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ παραλληλεπίπεδα.



σχ. 140.

'Ασκήσεις

215) 'Ορθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 6 cm καὶ 8 cm καὶ ὕψος 15 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του, καθώς, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

216) 'Η κάθετος τομὴ ἑνὸς πλαγίου πρίσματος τριγωνικοῦ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 3 cm. 'Η παράπλευρος ἀκμὴ τοῦ πρίσματος εἶναι 8 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

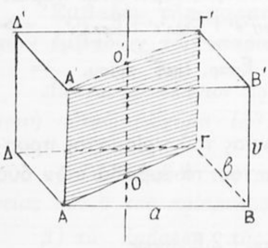
217) Δίδεται κανονικὸν πρῖσμα ἀκμῆς 5m, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἓν τετράγωνον πλευρᾶς 2 m. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ.

218) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος νὰ εἶναι 7 cm καὶ ἡ βάσις εἶς ρόμβος μὲ διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

219) Δίδεται κανονικὸν πρῖσμα ἀκμῆς 5α, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν α) τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του καὶ β) τῆς ὁλικῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας. 'Εφαρμογή: α=13 cm.

§ 74. Ὄγκος πρίσματος

α) Ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον:



σχ. 141.

Δίδεται ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μήκη καθέτων πλευρῶν α καὶ β καὶ ὕψος μήκους υ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις α, β καὶ υ. Τὸ στερεὸν αὐτὸ τέμνεται ὑπὸ τοῦ διαγωνίου ἐπιπέδου ΑΑ'Γ'Γ (σχ. 141) εἰς δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ μήκη καθέτων πλευρῶν α καὶ β καὶ ὕψος υ. Τὰ ὀρθὰ αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἴσα. (ὡς συμμετρικὰ σχήματα πρὸς τὸν ἄξονα ΟΟ', ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' τῶν βάσεων).

Συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, υ.

Ἤτοι: $V = \frac{\alpha.\beta.\upsilon}{2} \Longrightarrow V = \frac{\alpha.\beta}{2}.\upsilon$. 'Αλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ἡ ὁποία εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, εἶναι

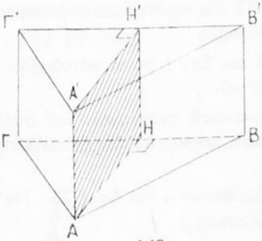
$$E = \frac{\alpha.\beta}{2}. \quad \text{Ἄρα} \quad \boxed{V = E_\beta \, . \, \upsilon}$$

'Επομένως: **'Ο ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

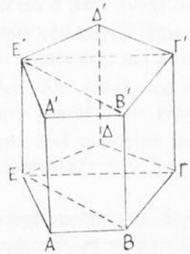
β) Ὄγκος τυχόντος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος:

Δίδεται ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' μὲ βάσιν τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ'Β'Γ', διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα μὲ βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα, διὰ τοῦ ἐπι-



σχ. 142.



σχ. 143.

πέδου ΑΗΗ'Α', τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ὕψους ΑΑ' τοῦ πρίσματος. Δηλαδὴ δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓΓ'Β' (σχ. 142).

Ἄρα:

$$V_{ΑΒΓΑ'Β'Γ'} = V_{ΑΒΗΑ'Β'Η'} + V_{ΓΑΗΓ'Α'Η'} = E_{ΑΒΗ}\cdot υ + E_{ΑΗΓ}\cdot υ = (E_{ΑΒΗ}+E_{ΑΗΓ})\cdot υ = E_{ΑΒΓ}\cdot υ.$$

Ὥστε $V_{ΑΒΓΑ'Β'Γ'} = E_{βάσεως}\cdot υ$

Ἄρα: **Ὁ ὄγκος κάθε ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

γ) Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος μὲ βάσιν τυχὸν πολύγωνον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος πρίσματος καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΕΓ, ΓΕΔ (σχῆμα 143). Ὀνομάζομεν τοὺς ὄγκους αὐτῶν V_1, V_2, V_3 καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών των E_1, E_2, E_3. Τότε ἔχομεν $V_{πρισμ.} = V_1 + V_2 + V_3$. Συνεπῶς

$$V_{πρισμ.} = E_1 υ + E_2 υ + E_3 \cdot υ = (E_1 + E_2 + E_3)\cdot υ$$

Ἑπομένως $V_{πρισμ.} = E_{βασ.}\cdot υ$

Ὥστε: **Ὁ ὄγκος κάθε ὀρθοῦ πρίσματος, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

δ) Ὄγκος τυχόντος πλαγίου πρίσματος.

Ὁ τύπος $V_{βάσεως}\cdot υ$, ὁ χρησιμοποιούμενος διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γενικὸς καὶ ἰσχύει, ὡς θὰ μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν, καὶ διὰ τὰ πλάγια πρίσματα.

Ἄρα γενικῶς: **Ὁ ὄγκος οἱουδήποτε πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

Σημ. Ὁ ὄγκος τυχόντος πρίσματος δίδεται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου $V =$ Εκαθέτου τομῆς $\cdot \lambda$ (ὅπου λ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς).

Ἀσκήσεις

220) Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ὕψους 40 cm ἔχει ὡς βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουν μήκη 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

221) Δίδεται κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρῖσμα ὕψους 12 dm, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως εἶναι 8 dm. Νὰ εὕρετε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

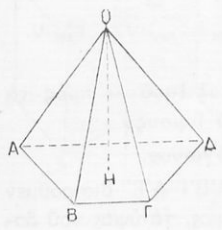
222) Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὄγκον 200 cm^3 καὶ ὕψος 8 cm. Ἐὰν ἡ βάσις αὐτοῦ εἶναι ἓν τετράγωνον, νὰ ὑπολογίσητε τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως αὐτοῦ.

223) Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἑνὸς κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι τριπλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως, εἶναι 324 cm^2. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ τοῦ πρίσματος.

224) Κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρῖσμα ἔχει πλευρὰν τῆς βάσεως α καὶ ὕψος 2α. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος. Ἐφαρμογή : $\alpha = 9$ cm.

Γ. ΠΥΡΑΜΙΣ — ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ — ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

§ 75. Πυραμίς :



σχ. 144.

Πυραμὶς εἶναι ἓν στερεόν, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ ἑνὸς πολυγώνου καὶ ὑπὸ τριγώνων. Τὰ τρίγωνα ἔχουν μίαν κοινὴν κορυφὴν (κειμένην ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου) καὶ ἕκαστον τρίγωνον ἔχει μίαν πλευρὰν κοινὴν μὲ τὸ πολύγωνον. (σχ. 144).

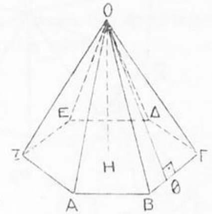
Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ λέγεται βάσις τῆς πυραμίδος τὰ δὲ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, . . . παράπλευροι ἕδραι αὐτῆς. Τὸ σημεῖον Ο λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδος, τὰ δὲ εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΒ, . . . παράπλευροι ἀκμαὶ αὐτῆς. Ἡ ἀπόστασις ΟΗ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ ὕψος αὐτῆς. Τὸ **σύνολον** τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, ἀποτελεῖ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. Ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνον, αὕτη λέγεται **τριγωνική**. Ἐὰν εἶναι τετράπλευρον, πεντάγωνον κ.λ.π. λέγεται **τετραπλευρική, πενταγωνική** κ.λ.π.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι ἓν πολύεδρον μὲ τέσσαρας ἕδρας, καὶ λέγεται **τετράεδρον**.

§ 76. Κανονικὴ πυραμίς :

Μία πυραμὶς λέγεται **κανονική**, ὅταν ἡ βάσις της εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ τὸ ἴχνος τοῦ ὕψους εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. (σχ. 145).

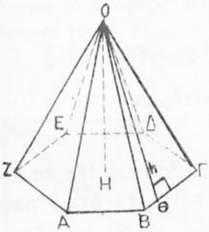
Αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα (ΑΟΒ, ΒΟΓ, . . .). Τὸ ὕψος ΟΘ ἑνὸς ἐκ τῶν ἴσων ἰσοσκελῶν τριγώνων λέγεται ἀπόστημα τῆς κανονικῆς πυραμίδος (ἢ παράπλευρον ὕψος) καὶ συμβολίζεται μὲ h. Ἐὰν κανονικῆς πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, αὕτη λέγεται κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς. Ἓν τετράεδρον εἶναι κανονικόν, ἐὰν αἱ τέσσαρες ἕδραι του εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα ἴσα.



σχ. 145.

§ 77. **Ἐμβαδὸν κανονικῆς πυραμίδος :**

Καλοῦμεν **ἐμβαδὸν πυραμίδος,** τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν αὐτῆς. **Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας** λέγομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῆς.



σχ. 146.

1. Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος :

Δίδεται κανονικὴ πυραμὶς (π.χ. ἑξαγωνικὴ) ΟΑΒΓΔΕΖ (σχ. 146) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως λ_6 *καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος* h.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς καν. πυραμίδος αὐτῆς προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της. Αἱ ἕδραι αὗταί εἶναι ἴσαι.

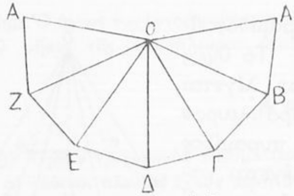
$$\text{Ἄρα } \ E_{\text{παρ. ἐπιφ. πυρ.}} = 6.E_{AOB} = 6.\frac{\lambda_6.h}{2} = \frac{6\lambda_6.h}{2} =$$

$$= \frac{\text{μῆκος περιμέτρου βάσεως} \times \text{μῆκος ἀποστήματος}}{2}$$

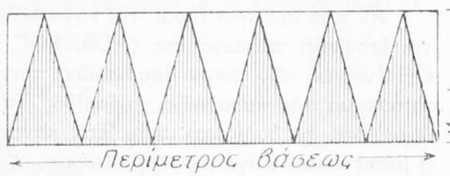
Ἐπομένως : **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιγινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος αὐτῆς.**

Παρατήρησις : 1) Ἐὰν τμήσωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κατὰ μῆκος μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς καὶ ἀναπτύξωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου, ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ σχήματος 146 (σχ. 147).

2) Δυνάμεθα, τέμνοντες τὴν πυραμίδα κατὰ μῆκος ὅλων τῶν παρα-



σχ. 147.



σχ. 148.

πλεύρων ἀκμῶν, νὰ ἔχωμεν τὸ ἀνωτέρω ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς πυραμίδος. (Σχῆμα 148).

Τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς εὑρίσκεται, ἐὰν λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος αὐτῆς.

Ἄρα $E_{\text{παρ. ἐπιφ. καν. πυρ.}} =$

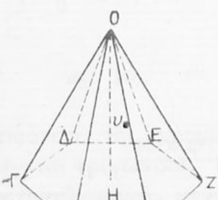
$$= \frac{\text{Μῆκος περιμέτρου βάσεως} \times \text{μῆκος τοῦ ἀποστήματος}}{2}$$

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν ὡς λ_ν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως τῆς κανονικῆς πυραμίδος, ν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως καὶ h τὸ ἀπόστημα τῆς κανονικῆς πυραμίδος θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{E_{\text{παρ. ἐπιφ. καν. πυρ.}} = \frac{\nu.\lambda_\nu.h}{2}}$$

2. Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτῆς.



σχ.. 149

$$\boxed{E_{\text{ολ.}} = E_{\text{παρ.}} + E_{\text{βασ.}}} \quad (1)$$

ἤτοι: $$\boxed{E_{\text{ολ.}} = \frac{\nu.\lambda_\nu.h}{2} + E_{\text{βασ.}}} \quad (2)$$

Ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ διὰ τὰς μὴ κανονικὰς πυραμίδας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, τυχούσης πυραμίδος, προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

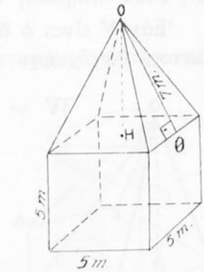
225) Δίδεται κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς πλευρᾶς βάσεως 3 cm, ἡ ὁποία ἔχει ἀπόστημα 9 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

226) Κατασκευάσατε τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἓν τετράγωνον πλευρᾶς 3 cm καὶ τὸ ἀπόστημα 2,5 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

227) Δίδεται κανονικὴ πυραμὶς μὲ βάσιν ἓν τετράγωνον πλευρᾶς 6 cm καὶ ὕψους 4 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

228) Δίδεται μία κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι 10 cm καὶ τὸ ὕψος 6 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

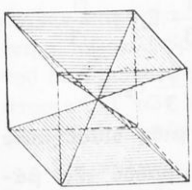
229) Τὸ στερεὸν τοῦ σχήματος 150 ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κύβον πλευρᾶς 5 m καὶ μίαν κανονικὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας τὸ ἀπόστημα εἶναι 7 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του.



σχ. 150.

§ 78. Ὄγκος πυραμίδος

1. Δίδεται κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς μὲ μῆκος πλευρᾶς βάσεως λ καὶ μῆκος ὕψους $υ = \frac{λ}{2}$. *Ζητεῖται νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.*



σχ. 151.

Κατασκευάζομεν ἓξ (6) πυραμίδας ἴσας πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ τοποθετοῦμεν αὐτάς, ὥστε νὰ ἔχουν κοινὴν τὴν κορυφὴν καὶ ἀνὰ δύο κοινὴν παράπλευρον ἕδραν. Τότε σχηματίζεται κύβος ἀκμῆς λ. (σχ. 151).

Ἄρα ὁ ὄγκος ἑκάστης ἐκ τῶν ἴσων αὐτῶν πυραμίδων εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου.

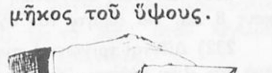
Ἤτοι ἔχομεν $V_{\text{καν. πυρ.}} = \frac{1}{6}\,λ^3 = \frac{1}{3}.λ^2.\,\frac{λ}{2} \Longleftrightarrow \boxed{V = \frac{1}{3}\,E_β\,.υ}$

Ἑπομένως : **Ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

2. Ὁ εὑρεθεὶς ἀνωτέρω διὰ τὸν ὄγκον τῆς κανονικῆς πυραμίδος τύπος, ἰσχύει δι' οἱανδήποτε πυραμίδα, ὡς θὰ ἀποδείξωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πρακτικῶς τὸν τύπον τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος ὡς ἑξῆς :

Χρησιμοποιοῦμεν δύο δοχεῖα. Δοχεῖον σχήματος τριγωνικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ, μὲ ἀνοικτὴν τὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ δοχεῖον πρισματικὸν μὲ βάσιν ἴσην πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, ἰσοϋψὲς πρὸς αὐτήν.

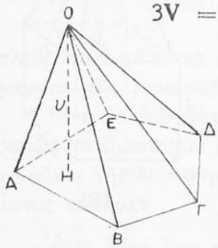


σχ. 152.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν πληρώσωμεν διὰ λεπτῆς ἄμμου (ἢ ὕδατος)τὸ πρῶτον δοχεῖον καὶ ἀδειάσωμεν τὸ περιεχόμενον αὐτοῦ εἰς τὸ δεύτερον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, θὰ χρειασθῇ νὰ ἐπαναλάβωμεν τοῦτο τρεῖς φορὰς μέχρις ὅτου πληρωθῇ τὸ πρισματικὸν δοχεῖον (σχ. 152).

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος καὶ V′ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, θὰ ἔχωμεν :

$$3V = V' \Longleftrightarrow V = \frac{V'}{3} \Longleftrightarrow V = \frac{1}{3}.E_\beta . \upsilon \left(V' = E_\beta \upsilon\right)$$



σχ. 153.

3. Διὰ νὰ μετρήσωμεν τυχοῦσαν πυραμίδα ΟΑΒΓΔΕ (σχ. 153), ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως E_β καὶ ὕψος υ διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΟΑΒΓ, ΟΑΓΔ, ΟΑΔΕ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ὄγκους ἀντιστοίχως V_1, V_2, V_3, ἐμβαδὰ δὲ βάσεων τὰ E_1, E_2, E_3, ἔχοντα ἄθροισμα Ε. Ὅθεν :

$$V_{ΟΑΒΓΔΕ} = V_1 + V_2 + V_3 \Longleftrightarrow V_{ΟΑΒΓΔΕ} = \frac{1}{3} E_2 . \upsilon + \frac{1}{3} . E_3 \upsilon + \frac{1}{3} E_3 \upsilon$$

$$\Longleftrightarrow V_{ΟΑΒΓΔΕ} = \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3).\upsilon \Longleftrightarrow V = \frac{1}{3} E_\beta .\upsilon$$

Ἄρα καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι : **Ὁ ὄγκος μιᾶς οἱασδήποτε πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

230) Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει ὡς βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς μήκους 8 cm καὶ ὕψος 6 cm Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

231) Κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει παράπλευρον ἀκμὴν μήκους 10 cm καὶ ὕψος μήκους 8 cm. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

232) Δίδεται τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ μὲ ἀκμὰς ΟΑ=3α, ΟΒ=4α καὶ ΟΓ=2α, αἱ ὁποῖαι ἀνὰ δύο εἶναι κάθετοι. Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ κορυφῆς Ο καὶ βάσεως ΑΒΓ (Τοῦτο θὰ ἐπιτύχητε διὰ τῆς εὑρέσεως τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος ΑΟΒΓ, κορυφῆς Α καὶ βάσεως ΟΒΓ). Ἐφαρμογή : α=5 cm.

233) Δίδεται μία πυραμὶς ΟΑΒΓΔ κορυφῆς Ο, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι εἷς ρόμβος ΑΒΓΔ πλευρᾶς μήκους 8 cm καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ ἔχει ἐπίσης μῆκος 8 cm. Τὸ ἴχνος Η τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος ΟΗ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ρόμβου. Τὸ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς ΟΒ εἶναι 8 cm. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ.

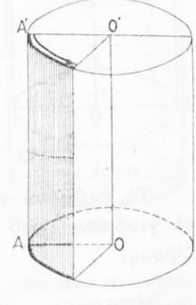
234) Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α. Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον αὐτοῦ. Ἐφαρμογή : α=6 cm.

235) Νὰ συγκρίνητε τὰ ὕψη κανονικοῦ τετραέδρου. (Χρησιμοποιήσατε τὸν ὄγκον αὐτοῦ)

Δ. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ (ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ)—ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΟΡΘΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

§ 79. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος :

Θεωροῦμεν ἓν ὀρθογώνιον ΑΟΟ'Α', σχ. 154 περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΟΟ', ἡ ὁποία παραμένει ἀκίνητος. Διὰ τῆς πλήρους περιστροφῆς του παράγεται εἷς **ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος (ἢ ἐκ περιστροφῆς κύλινδρος)**.



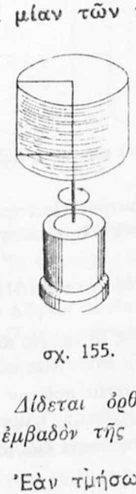
σχ. 154.

Ἡ παραμένουσα ἀκίνητος κατὰ τὴν περιστροφὴν εὐθεῖα ΟΟ', λέγεται **ἄξων** τοῦ κυλίνδρου. Αἱ πλευραὶ ΟΑ καὶ ΟΑ' παράγουν, διὰ τῆς περιστροφῆς, δύο ἴσους κυκλικοὺς δίσκους, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν ΟΟ' ἤτοι παράλληλα μεταξύ των. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως λέγεται **ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου**.

Ἡ πλευρὰ ΑΑ' παράγει διὰ τῆς περιστροφῆς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ΑΑ' λέγεται **γενέτειρα** τοῦ κυλίνδρου. Τὸ κοινὸν μῆκος τῶν γενετειρῶν τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν ΟΟ' τῶν κέντρων τῶν βάσεών του καὶ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἐξ ὅσων εἴπομεν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

Εἷς κύλινδρος ὀρθὸς κυκλικὸς (ἢ ἁπλῶς κύλινδρος) εἶναι ἓν στερεὸν ἐκ περιστροφῆς, παραγόμενον ὑπὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου, περιστρεφομένου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του, παραμένουσαν ἀκίνητον.


σχ. 155.

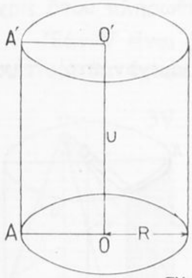
Σημείωσις : Δυνάμεθα διά τινος μηχανισμοῦ νὰ περιστρέψωμεν ταχέως ἓν ὀρθογώνιον (ἐκ χαρτονίου ἢ ἄλλου τινὸς ὑλικοῦ) περὶ μίαν τῶν διαστάσεών του καὶ λόγῳ τοῦ ὀπτικοῦ μεταισθήματος, νὰ ἔχωμεν τὴν εἰκόνα ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων. Ἡ εἰκὼν δὲ αὐτὴ δικαιολογεῖ καὶ κινητικῶς τὸν τρόπον γενέσεως τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου (ἢ ἐκ περιστροφῆς). (Σχ. 155). Εἰς τὸ ἑξῆς, ὅταν λέγωμεν κύλινδρος, θὰ ἐννοοῦμεν ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος.

§ 80. Ἐμβαδὸν ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.

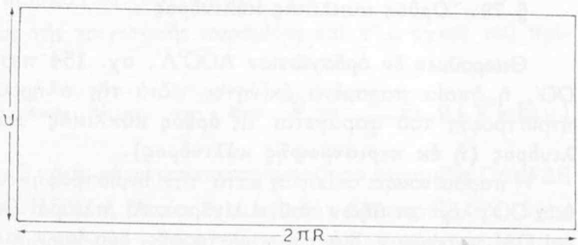
α) Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.

Δίδεται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ἀκτῖνος βάσεως R καὶ ὕψους υ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας.

Ἐὰν τμήσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας του (σχ. 156) καὶ ἀναπτύξωμεν αὐτὴν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, θὰ ἔχωμεν ἓν ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς διαστάσεις τὰ μήκη τοῦ κύκλου τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους (σχ. 157). Ἑπομένως:



σχ. 156.



σχ. 157.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ κύκλου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.

Ἤτοι: $\boxed{E_{\text{κυρτ. ἐπιφ. κυλ.}} = 2\pi R.\upsilon}$

β) Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ προηγουμένου κυλίνδρου, προσθέτομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Οὕτως ἔχομεν: $\boxed{E_{\text{ὁλικ.}} = 2\pi R.\upsilon + 2\pi R^2}$ ἢ ἄλλως

$$E_{\text{ὁλικ.}} = 2\pi R.(\upsilon + R)$$

Ἀσκήσεις

236) Δίδεται κύλινδρος ἀκτῖνος βάσεως 5 cm καὶ ὕψους $\upsilon = 25$ cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν α) τῆς κυρτῆς καὶ β) τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

237) Μία δεξαμενὴ πετρελαίου σχήματος ὀρθοῦ κυλίνδρου ἔχει διάμετρον (ἐσωτερικὴν) βάσεως 10m καὶ ὕψος 20m. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς (ἐσωτερικῆς) ἐπιφανείας τῆς δεξαμενῆς αὐτῆς.

238) Δίδεται κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι 471 cm^2 καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 5 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

239) Ἓν ἄξυστον μολύβιον κυλινδρικὸν ἔχει διάμετρον 6 mm καὶ μῆκος 18 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

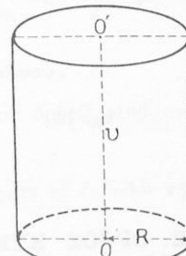
240) Δίδεται ἓν ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις α καὶ β. Περιστρέφομεν αὐτὸ πρῶτον περὶ τὴν μίαν πλευρὰν καὶ δεύτερον περὶ τὴν ἄλλην (διαδοχικὴν πρὸς τὴν πρώτην πλευράν).

Παράγονται οὕτω δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσητε διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν τῶν δύο κυλίνδρων;

§ 81. Ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου

Δίδεται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ἀκτῖνος βάσεως R καὶ ὕψους υ. (σχ. 158) Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνος βάσεως R καὶ ὕψους υ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\boxed{V = \pi . R^2 . υ}$, ὡς θὰ ἀποδείξωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

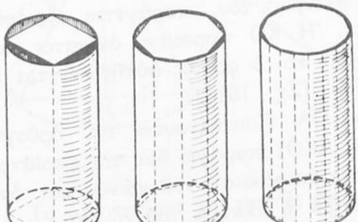


σχ. 158.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν προηγούμενον τύπον μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐννοίας τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον κανονικοῦ πρίσματος. (Ἓν κανονικὸν πρῖσμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι πολύγωνα κανονικὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ αὐτοῦ, γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου).

Ἓν ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον κανονικὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως συνεχῶς διπλασιάζεται προσεγγίζει (ὀλίγον κατ' ὀλίγον) τὸ σχῆμα τοῦ κυλίνδρου.

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς ἀνοικτοῦ ἐκ τῶν ἄνω κυλίνδρου ἐκ χαρτονίου καί τινων κανονικῶν πρισμάτων, ὕψους ἴσου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ βάσεων σχήματος τετραγώνου, κανονικοῦ ὀκταγώνου, κανονικοῦ δεκαεξαγώνου κ.λ.π. (πολυγώνων, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου).


σχ. 159.

Ἐὰν εἰσαγάγωμεν ἓν ἐξ αὐτῶν εἰς τὸν κύλινδρον, αἱ βάσεις του θὰ εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ αὐτοῦ γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου.

Εἰσάγομεν διαδοχικῶς εἰς τὸν κύλινδρον τὰ κανονικὰ πρίσματα μὲ βάσιν τετράγωνον κανονικὸν ὀκτάγωνον, κανονικὸν δεκαεξάγωνον κ.λ.π. καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τοῦ κυλίνδρου καὶ τῶν πρισμάτων συνεχῶς ἐλαττοῦται, καθ' ὅσον αὐξάνει τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος καὶ δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρά. (Σχ. 159)

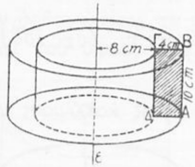
Ὡς ἐκ τούτου λέγομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος προσεγγίζει (ἔχει ὅριον) τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι $V = E_\beta \cdot υ$. Ἑπομένως καὶ τοῦ κυλίνδρου ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $V = E_\beta \,.\, υ = \pi . R . υ$.

(Λεπτομερέστερον θὰ ἐξετάσωμεν τὸ θέμα αὐτὸ εἰς ἀνωτέραν τάξιν).

Ἀσκήσεις

241) Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως R=5 cm καὶ ὕψος 15 cm. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

242) Κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 45π cm³ ἔχει ὕψος 5 cm. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ.



σχ. 160.

243) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου εἶναι 94, 20 cm. Τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 15 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου.

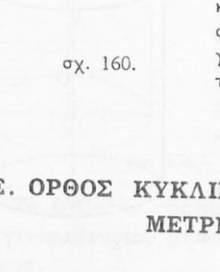
244) Ἓν φρέαρ σχήματος κυλινδρικοῦ ἔχει βάθος 6 m. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τῆς λιθοδομῆς αὐτοῦ, ἐὰν εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ φρέατος εἶναι 3 m καὶ τὸ πάχος τοῦ τοίχου 2,5 dm.

245) Ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις ΑΒ=10 cm καὶ ΒΓ=4 cm στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν ε παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, κειμένην εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην πρὸς 12 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τοῦ παραγομένου στερεοῦ, κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου περὶ τὴν εὐθεῖαν ε. (Σχ. 160).

Ε. ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ (ΚΩΝΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ) — ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΟΡΘΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΩΝΟΥ

§ 82. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος

Θεωροῦμεν ἓν ὀρθογώνιον ΑΚΟ (γων. Κ=1 ὀρθ.). Περιστρέφομεν αὐτὸ περὶ τὴν ΟΚ. Διὰ τῆς πλήρους περιστροφῆς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του, παράγεται **εἷς** ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος. Ἡ ΚΟ παραμένει ἀκίνητος κατὰ τὴν περιστροφὴν καὶ ὁ φορεὺς αὐτῆς λέγεται **ἄξων** τοῦ κώνου. (Σχ. 161).



Σχ. 161

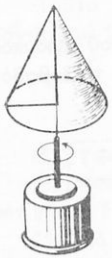
Ἡ πλευρὰ ΟΑ (ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΟ) παράγει διὰ τῆς περιστροφῆς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου καὶ ὀνομάζεται **γενέτειρα ἢ πλευρὰ** τοῦ κώνου.

Ἡ πλευρὰ ΚΑ παράγει, διὰ τῆς περιστροφῆς, ἕνα κυκλικὸν δίσκον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ὁ δίσκος αὐτὸς λέγεται **βάσις** τοῦ κώνου.

Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως R εἶναι ἡ **ἀκτὶς** τοῦ κώνου καὶ τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἡ **κορυφὴ** τοῦ κώνου.

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Ο τοῦ κώνου ἀπὸ τὴν βάσιν, ἤτοι τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΚ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ λέγεται **ὕψος** τοῦ κώνου. Ἡ γωνία ΑΟΚ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΚ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΟΑ' εἶναι ἰσόπλευρον, ἤτοι ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι ἴση μὲ τὴν γενέτειραν τοῦ κώνου, τότε ὁ κῶνος λέγεται **ἰσόπλευρος**.

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ περιστρέψωμεν ταχέως, διά τινος μηχανισμοῦ, ἓν ὀρθογώνιον



Σχ. 162

τρίγωνον (ἐκ χαρτονίου κ.λ.π.) περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ νὰ ἔχωμεν τὴν εἰκόνα ἑνὸς ἐκ περιστροφῆς κώνου εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων (Σχ. 162).

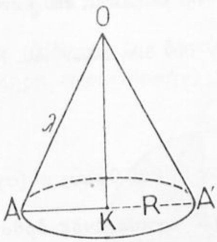
Ἐξ ὅσων ἀνωτέρω εἴπομεν, συμπεραίνομεν ὅτι: **Τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον παράγεται διὰ τῆς πλήρους περιστροφῆς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου περὶ μίαν ἀκίνητον κάθετον πλευρὰν του λέγεται ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος (ἢ κῶνος ἐκ περιστροφῆς).** Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὅταν λέγωμεν κῶνος, θὰ ἐννοοῦμεν ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος.

§ 83. Ἐμβαδὸν ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.

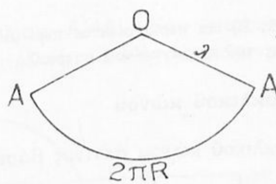
α) Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου:

Δίδεται κῶνος ἀκτῖνος βάσεως R καὶ πλευρᾶς λ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας.

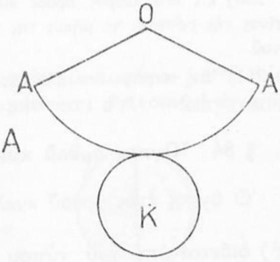
Τέμνομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας αὐτοῦ καὶ ἀναπτύσσομεν αὐτὴν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (σχ. 163, 164).



σχ. 163.



σχ. 164.



σχ. 165.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι εἷς κυκλικὸς τομεὺς τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τὸ τόξον ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἤτοι $\tau = 2\pi R$.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως δίδεται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varepsilon = \tau \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} 2\pi \cdot \lambda = \pi R \lambda$$

Ἄρα $\boxed{E_{\text{κυρτ. ἐπιφ. κών. ἐκ περ.}} = \pi R \lambda}$ ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ ἡμικυκλίου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς γενετείρας αὐτοῦ.

β) Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του (σχ. 165).

Ἤτοι $\boxed{E_{\text{ὁλικ.}} = \pi R\lambda + \pi R^2}$ ἢ ἄλλως $\boxed{E_{\text{ὁλικ.}} = \pi R.(R+\lambda)}$.

Ἀσκήσεις

246) Δίδεται κῶνος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 8 cm καὶ ἡ πλευρὰ 10 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς καὶ τῆς ὁλικῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας.

247) Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει πλευρὰν μήκους 15 cm καὶ ὕψος 12 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας.

248) Νὰ ὑπολογίσητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου, τοῦ ὁποίου τὰ μήκη τοῦ ὕψους καὶ τῆς πλευρᾶς εἶναι ἀντιστοίχως 16 cm καὶ 20 cm.

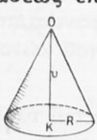
249) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου εἶναι 47,10 dm^2, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 5 dm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

250) Εἷς ἰσόπλευρος ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχει ὕψος 10 cm. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως, τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου αὐτοῦ.

251) Ἓν τετράγωνον πλευρᾶς 20 cm περιστρέφεται περὶ μίαν τῶν διαγωνίων του. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

§ 84. Ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἀκτῖνος βάσεως R καὶ ὕψους υ (σχ. 166) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon}$, ἤτοι **ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ.**



σχ. 166.

Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν αὐτήν. Δυνάμεθα ὅμως μὲ συλλογισμοὺς ἀναλόγους πρὸς ἐκείνους τῆς παραγράφου 81, νὰ εὕρωμεν τὸν τύπον αὐτόν.

Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν κανονικὰς πυραμίδας ἐγγεγραμμένας εἰς τὸν κῶνον, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως συνεχῶς διπλασιάζεται.

Παρατήρησις: Ἐκ τῶν τύπων τῶν ὄγκων ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου καὶ κώνου, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος παρατηροῦμεν ὅτι: **Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸν κῶνον.**

Τοῦτο διαπιστοῦμεν, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν κωνικὸν καὶ κυλινδρικὸν δοχεῖον μὲ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη καὶ ἐργασθῶμεν, ὡς εἰς τὴν § 78.

Ἀσκήσεις

252) Κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 15 cm καὶ ὕψος 40 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

253) Κῶνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι 47,10 cm^2 ἔχει πλευρὰν μήκους 5 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τοῦ κώνου.

254) Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος $\upsilon = 9$ cm καὶ μῆκος γενετείρας $\lambda = 15$ cm.

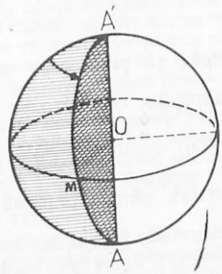
255) Τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι 18,8 dm καὶ ἡ γενέτειρα αὐτοῦ 5 dm. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τοῦ κώνου αὐτοῦ.

256) Δίδεται ἰσόπλευρος κῶνος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 8 cm. Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως καὶ τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

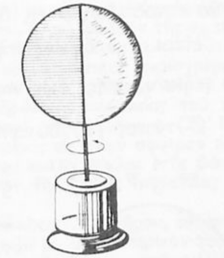
ΣΤ. ΣΦΑΙΡΑ — ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

§ 85. Σφαῖρα:

Δίδεται ἓν ἡμικύκλιον ΑΜΑ΄. Ἐὰν περιστρέψωμεν αὐτὸ (κατὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν) περὶ τὴν ἀκίνητον διάμετρόν του ΑΑ΄ παράγεται ἓν



σχ. 167.


σχ. 168.

στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται σφαῖρα. Κάθε σημεῖον τῆς σφαίρας ἀπέχει τοῦ Ο ἀπόστασιν R, ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἡμικυκλίου. Τὸ Ο λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας. Ἡ σφαῖρα συμβολίζεται: σφαῖρα (Ο, R).

Κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Ο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος R, ὁ ὁποῖος λέγεται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας.

Κάθε δὲ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν, ἀλλὰ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, τὴν τέμνει κατὰ ἕνα κύκλον, ὁ ὁποῖος λέγεται μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας.

Σημ. Δι' ἑνὸς μηχανισμοῦ θέτομεν εἰς ταχεῖαν περιστροφὴν ἡμικύκλιον (ἐκ χαρτονίου ἢ ἄλλου τινὸς ὑλικοῦ) καὶ ἔχομεν τὴν εἰκόνα μιᾶς σφαίρας εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων (σχ. 168).

§ 86. Ἐμβαδὸν σφαίρας.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας (μέγιστος κύκλος).

Ἤτοι : $\boxed{E_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.} = 4\pi R^2}$

Ἀσκήσεις

257) Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 8 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

258) Τὸ μῆκος ἑνὸς μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 50,24 cm. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας.

259) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας εἶναι 50,24 cm². Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς τῆς σφαίρας, καθὼς καὶ τὴν ἀκτῖνα ἄλλης σφαίρας, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς δοθείσης.

260) Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν δύο σφαιρῶν μὲ ἀκτῖνας 3 cm καὶ 2 cm.

261) Νὰ κάμνετε τὴν αὐτὴν ἐργασίαν, ὅταν αἱ ἀκτῖνες εἶναι R_1, R_2.

§ 87. Ὄγκος σφαίρας :

Ὁ ὄγκος V σφαίρας ἀκτῖνος R δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$ (1)

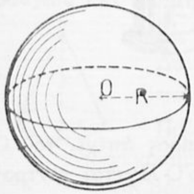
ὡς θὰ ἀποδείξωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

Ἤτοι : **ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ κύβου τοῦ μήκους τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{4}{3}$ π.**

Ὁ τύπος (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς : $V = \frac{4}{3} . \pi R^3 =$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{2} \Longrightarrow V = \frac{1}{6}\pi D^3, \quad \text{ὅπου } D = 2R.$$

Σημ. Ὁ μέγας Ἕλλην μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης ἐπέτυχεν πρῶτος νὰ μετρήσῃ τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας.



σχ. 169.

Ἐφαρμογαί.

1. Δύο σφαῖραι ἔχουν ἀκτῖνας 2 καὶ 3 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων αὐτῶν.

2. Δύο σφαῖραι ἔχουν ἀκτῖνας R_1, R_2. Εὕρετε τὸν λόγον τῶν ὄγκων αὐτῶν.

$$\left(\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)$$

3. Ἐὰν R καὶ 2 R εἶναι αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν, ποία ἡ σχέσις τῶν ὄγκων αὐτῶν;

Ἀσκήσεις

262) Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, ἀκτῖνος 5 m.

263) Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα μιᾶς σφαίρας, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἶναι 113,04 cm^3.

264) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας εἶναι 314 cm^2. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας.

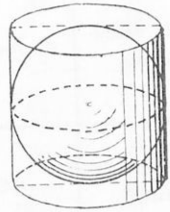
265) Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας εἶναι 113,04 cm^2. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον μιᾶς ἄλλης σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι τριπλασία τῆς ἀκτῖνος τῆς δοθείσης σφαίρας.

266) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστους κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 153,86 cm^2. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ταύτης.

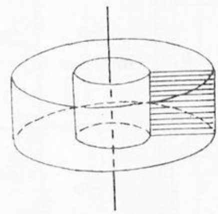
Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ κεφαλαίου V.

267) Ἓν σῶμα σχήματος κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ ἀκτῖνα βάσεως 1,5 dm καὶ μῆκος 4 dm καταλήγει εἰς τὸ ἓν ἄκρον του εἰς κῶνον τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος καὶ ὕψους 2 dm. Εἰς δὲ τὸ ἕτερον ἄκρον

σχ. 170.



σχ. 171.



σχ. 172.

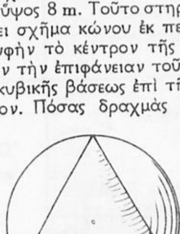
του καταλήγει εἰς ἡμισφαίριον τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος (ἐξωτερικῶς). Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας (ἐξωτερικῆς) τοῦ στερεοῦ καὶ τὸν ὄγκον του. (Σχ. 170)

268) Μία σφαῖρα εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύλινδρον ἐκ περιστροφῆς (σχῆμα 171), ἤτοι ἡ σφαῖρα περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυλίνδρου, ἐφαπτομένη τῶν δύο βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας κατὰ μῆκος ἑνὸς μεγίστου κύκλου. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 5 cm νὰ εὕρητε: α) τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, β) τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ, γ) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, δ) τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας ε) τὸν λόγον τῶν δύο αὐτῶν ἐμβαδῶν καὶ στ) τὸν λόγον τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν αὐτῶν.

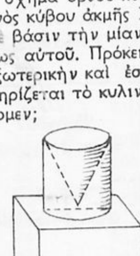
269) Εἰς τὸ ἄνωθεν σχῆμα ἔχομεν ἓν τετράγωνον πλευρᾶς 5 cm, τὸ ὁποῖον περιστρέφεται πλήρως περὶ μίαν εὐθεῖαν ε τοῦ ἐπιπέδου του παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ καὶ κειμένην εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς 3 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ τετραγώνου περὶ τὴν εὐθεῖαν ε. (Σχ. 172)

270) Εἷς ἰσόπλευρος ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος 6 cm (δηλ. ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου καὶ ὁ κύκλος τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας). Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. (Σχ. 173)

271) Ἓν δοχεῖον ἀνοικτὸν ἐκ τῶν ἄνω ἔχει σχῆμα ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, μὲ ἀκτῖνα βάσεως 6 m καὶ ὕψος 8 m. Τοῦτο στηρίζεται ἐπὶ ἑνὸς κύβου ἀκμῆς 10 m. Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δοχείου τούτου ἔχει σχῆμα κώνου ἐκ περιστροφῆς μὲ βάσιν τὴν μίαν τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου τούτου καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς ἄλλης βάσεως αὐτοῦ. Πρόκειται τώρα νὰ ἐλαιοχρωματίσωμεν ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοχείου (ἐξωτερικὴν καὶ ἐσωτερικὴν) καὶ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τῆς κυβικῆς βάσεως ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον πρὸς 85 δρχ. τὸ τετραγ. μέτρον. Πόσας δραχμὰς θὰ ἐξοδεύσωμεν;

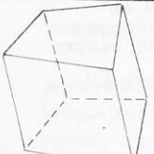
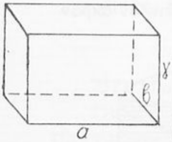
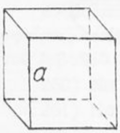
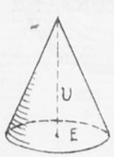
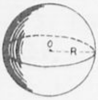


σχ. 173.



σχ. 174.

Πίναξ τύπων ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων διαφόρων στερεῶν

Εἰκὼν στερεοῦ	Ὄνομα Στερεοῦ	Ἐμβαδὸν πρὸς ὑπολογισμὸν	Τύπος δίδων τὸ ἐμβαδὸν	Ὄγκος πρὸς ὑπολογισμὸν	Τύπος δίδων τὸν ὄγκον
	Πρῖσμα	Ἐμβαδὸν παραπλ. ἐπιφανείας Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας	Ὀρθοῦ πρίσματος $E_{\pi\alpha\rho.\acute{\epsilon}\pi.} =$ $=\pi\epsilon\rho.\beta\alpha\sigma X\upsilon$ $E_{\acute{o}\lambda.} = \pi\epsilon\rho.\beta\alpha\sigma.X\upsilon +$ $+2E\beta$	Ὄγκος Πρίσματος	$V = E_\beta \cdot \upsilon$
	Ὀρθ. παρ/δον	Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας	$E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$	Ὄγκος ὀρθ. παρ/δου	α) $V = \alpha.\beta.\gamma$ καὶ β). $V = E_\beta\, \upsilon$
	Κύβος	Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας	$E = 6\alpha^2$	Ὄγκος κύβου	$V = \alpha^3$
	Πυραμὶς (κανονική)	Ἐμβαδὸν παραπλ. ἐπιφανείας Ἐμβαδὸν ὁλικῆς	$E = \frac{\pi\epsilon\rho.\beta\acute{\alpha}\sigma.X\acute{\alpha}\pi\acute{o}\sigma\tau.}{2}$ $E = \frac{\pi\epsilon\rho.\beta\alpha\sigma.X\acute{\alpha}\pi o\sigma\tau}{2} + E_\beta$	Ὄγκος πυραμίδος	$V = \frac{1}{3} E_\beta.\upsilon$
	Πυραμὶς (τυχοῦσα)	Ἐμβαδὸν	$E =$ Ἄθροισ. $E_{\acute{\epsilon}\delta\rho\tilde{\omega}\nu}$	Ὄγκος	$V = \frac{1}{3} E_\beta.\upsilon$
	Κύλινδρος (ὀρθὸς κυκλ.)	Ἐμβαδὸν κυρτ. ἐπιφανείας Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας	$E = 2\pi R\upsilon$ $E = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$ ἢ $E = 2\pi R(\upsilon + R)$	Ὄγκος κυλίνδρου	$V = \pi R^2\upsilon$
	Κῶνος (ὀρθὸς κυκλ.)	Ἐμβαδὸν κυρτ. ἐπιφανείας Ἐμβαδὸν ὁλικ. ἐπιφανείας	$E = \pi R\lambda$ $E = \pi R\lambda + \pi R^2$ ἢ $E = \pi R(R + \lambda)$	Ὄγκος κώνου	$V = \frac{1}{3}\pi.R^2\upsilon$
	Σφαῖρα	Ἐμβαδὸν	$E = 4\pi R^2$	Ὄγκος	$V = \frac{4}{3}\pi.R^3$

Πίναξ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100

α	α^2	α^3	α	α^2	α^3
1	1	1	51	2601	132651
2	4	8	52	2704	140608
3	9	27	53	2809	148877
4	16	64	54	2916	157464
5	25	124	55	3025	166375
6	36	216	56	3136	175616
7	49	343	57	3249	185193
8	64	512	58	3364	195112
9	81	729	59	3481	205379
10	100	1000	60	3600	216000
11	121	1331	61	3721	226981
12	144	1728	62	3844	238328
13	169	2197	63	3969	250047
14	196	2744	64	4096	262144
15	225	3375	65	4225	274625
16	256	4096	66	4356	287496
17	289	4913	67	4489	300756
18	324	5832	68	4624	314432
19	361	6859	69	4761	328509
20	400	8000	70	4900	343000
21	441	9261	71	5041	357911
22	484	10648	72	5184	373248
23	529	12167	73	5329	389017
24	576	13824	74	5476	405224
25	625	15625	75	5625	421875
26	676	17576	76	5776	438976
27	729	19683	77	5929	456533
28	784	21952	78	6084	474552
29	841	24389	79	6241	493039
30	900	27000	80	6400	512000
31	961	29791	81	6561	531441
32	1024	32768	82	6724	551368
33	1089	35937	83	6889	571787
34	1156	39304	84	7056	592704
35	1156	39304	85	7224	614125
36	1225	42875	86	7396	636056
37	1296	46656	87	7569	658503
38	1369	50653	88	7744	681472
39	1444	54872	89	7921	704969
40	1600	64000	90	8100	729000
41	1681	68921	91	8281	753571
42	1764	74088	92	8464	778688
43	1849	79507	93	8649	804357
44	1936	85184	94	8836	830584
45	2025	91125	95	9025	857375
46	2116	97336	96	9216	884735
47	2209	103823	97	9409	912673
48	2304	110592	98	9604	941192
49	2401	117649	99	9801	970299
50	2500	125000	100	10000	1000000

Πίναξ τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100

Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Ἀριθμὸς α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$
1	1,000	26	5,099	51	7,141	76	8,718
2	1,414	27	5,196	52	7,211	77	8,775
3	1,732	28	5,292	53	7,280	78	8,832
4	2,000	29	5,385	54	7,349	79	8,888
5	2,236	30	5,477	55	7,416	80	8,944
6	2,450	31	5,568	56	7,483	81	9,000
7	2,646	32	5,657	57	7,550	82	9,055
8	2,828	33	5,745	58	7,616	83	9,110
9	3,000	34	5,831	59	7,681	84	9,165
10	3,162	35	5,916	60	7,746	85	9,220
11	3,317	36	6,000	61	7,810	86	9,274
12	3,464	37	6,083	62	7,874	87	9,327
13	3,606	38	6,164	63	7,937	88	9,381
14	3,741	39	6,245	64	8,000	89	9,434
15	3,873	40	6,325	65	8,062	90	9,487
16	4,000	41	6,403	66	8,124	91	9,539
17	4,123	42	6,481	67	8,185	92	9,591
18	4,243	43	6,557	68	8,246	93	9,644
19	4,359	44	6,633	69	8,307	94	9,695
20	4,472	45	6,708	70	8,367	95	9,747
21	4,583	46	6,782	71	8,426	96	9,798
22	4,690	47	6,856	72	8,485	97	9,849
23	4,796	48	6,928	73	8,544	98	9,900
24	4,899	49	7,000	74	8,602	99	9,950
25	5,000	50	7,07	75	8,660	100	10,000

Σημείωσις: Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν μὴ τελείων τετραγώνων εἶναι κατὰ προσέγγισιν 0,001.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ - ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι — ΠΕΡΙ ΣΥΝΟΛΩΝ

Σελίς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ — Α' ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Β' ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ — Α' ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ — ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Β' ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΗΣ $\alpha\chi+\beta=0$ ΚΑΙ ΤΗΣ $\alpha\chi+\beta>0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Α' ΛΟΓΟΙ — ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ — ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σελὶς

Δ. ΑΠΛΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III — Α. ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Β' ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ

Γ. ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ — ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Δ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV — Α. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Β. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ — ΚΑΘΕΤΟΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V — ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Ἔκδοσις Β΄, 1970 (VI) — Ἀντίτυπα 100.000 — Ἀριθ. Συμβάσεως 2025/9-4-70

Ἐκτύπωσις-Βιβλιοδεσία: Πάπυρος Γραφικαὶ Τέχναι Α.Ε. Ἰωαννίδου 4 Ἀμαρούσιον

ΟΕ
ΔΒ