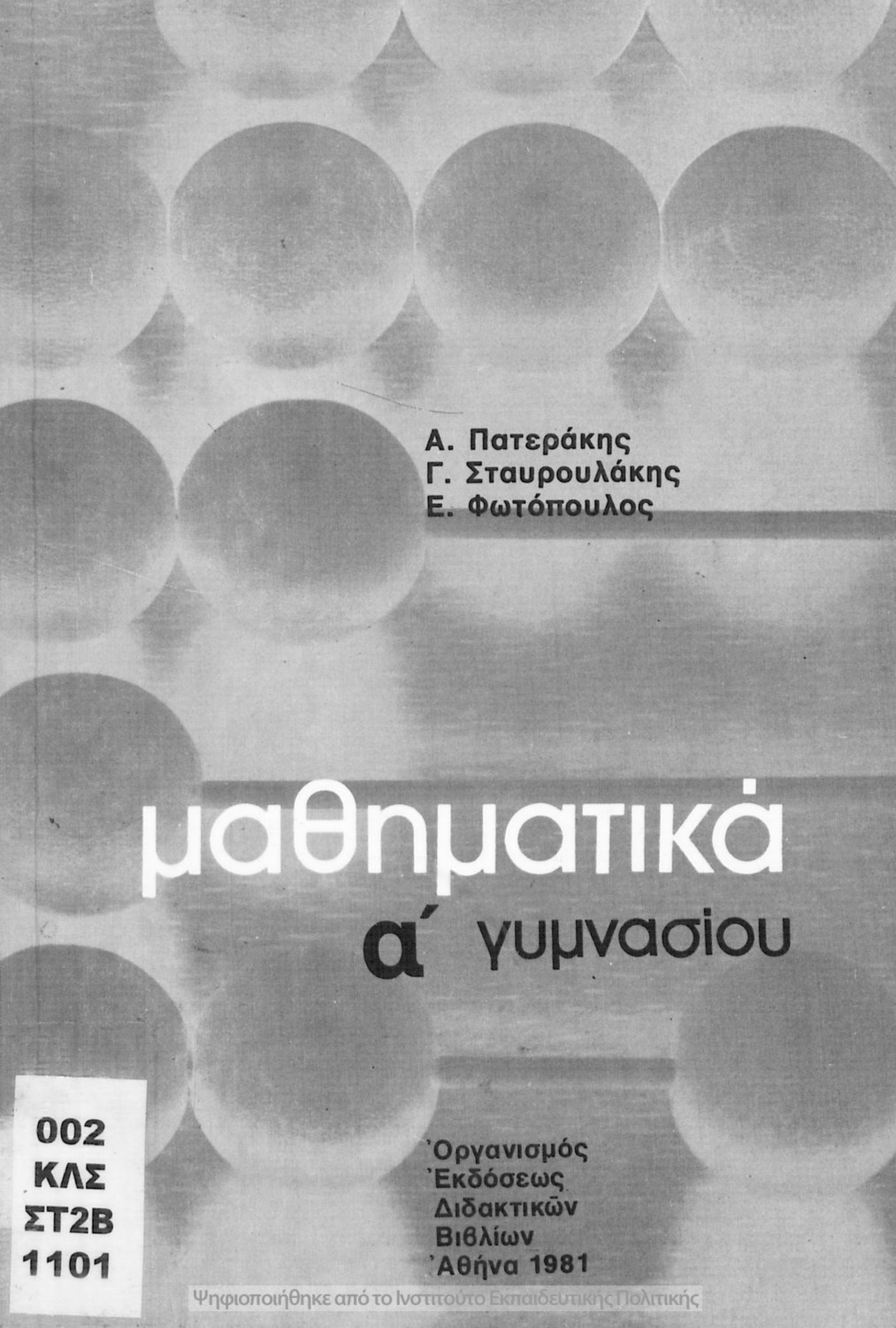


Α. Πατεράκης
Γ. Σταυρουλάκης
Ε. Φωτόπουλος

μαθηματικά
α΄ γυμνασίου

Ὀργανισμός
Ἐκδόσεως
Διδακτικῶν
Βιβλίων
Ἀθήνα 1981

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α/Γ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

ΣΤ 89 ΣΧΒ

Α. ΠΑΤΕΡΑΚΗ - Γ. ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗ - Ε. ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΥ

Πατεράκη Α

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

α΄

ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΑ	ΣΗΜΑΣΙΑ
$\{\ \}$	ἄγκιστρα
$\in, \notin$	ἀνήκει, δέν ἀνήκει
$=, \neq$	ἴσο, διαφορετικό
$\{\ \}, \varnothing$	τό κενό σύνολο
$\sim$	ἰσοδύναμο
$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\subset, \subseteq$	γνήσιο ὑποσύνολο, ὑποσύνολο
T_ν	$T_\nu = \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$
$<, >$	μικρότερο, μεγαλύτερο
$\leqslant, \geqslant$	μικρότερο ἤ ἴσο, μεγαλύτερο ἤ ἴσο
$A\widehat{O}B$	γωνία μέ κορυφή τό O καί πλευρές OA, OB
κυκλ(O, ρ)	κύκλος μέ κέντρο O καί ἀκτίνα ρ
κ. δισκ (O, ρ)	κυκλικὸς δίσκος μέ κέντρο O καί ἀκτίνα ρ
$\widehat{AB}$	τόξο μέ ἄκρα τά A καί B
(AB)	μέτρο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB
$\simeq$	ἴσο μέ προσέγγιση
$\cup, \cap$	ἕνωση, τομή
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$	ε_1 κάθετη στήν ε_2
$\Leftrightarrow$	ἰσοδυναμεῖ μὲ
$\overrightarrow{AB}$	διάνυσμα μέ ἀρχή τό A καί τέλος τό B
$\overline{AB}, \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Ἀλγεβρική τιμή τοῦ $\overrightarrow{AB}$, μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AB}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* = \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-$	$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$	ε_1 παράλληλη πρός τήν ε_2
α^ν	$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$
Μ.Κ.Δ, Ε.Κ.Π	μέγιστος κοινός διαιρέτης, ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο
Q	τό σύνολο τῶν ἀνάγωγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}^*$

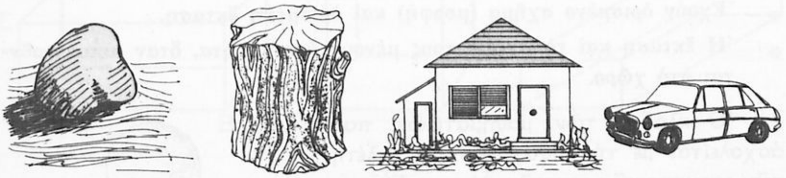
1° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

Τά φυσικά στερεά

1.1. Στό χῶρο πού μᾶς περιβάλλει ὑπάρχει μιά μεγάλη ποικιλία ἀπό ἀντικείμενα, πού τό καθένα τους εἶναι φτιαγμένο ἀπό κάποιο ὑλικό, ἔχει ἕνα ὁρισμένο βάρος καί πιάνει μιά περιορισμένη (μικρή ἤ μεγάλη) ἔκταση. Τά ἀντικείμενα αὐτά λέγονται γενικά **ὑλικὰ σώματα**.

Ὁ ἄνθρωπος νιώθει τό χῶρο μέ τίς αἰσθήσεις του καί προσπαθεῖ νά βρεῖ ὁμοιότητες ἤ διαφορές ἀνάμεσα στά ὑλικά σώματα πού ἀντικρύζει. Ἔτσι παρατηρεῖ ὅτι ὑπάρχουν πολλά ὑλικά σώματα, τά ὁποῖα, ὅταν μετακινοῦνται κάτω ἀπό συνηθισμένες φυσικές συνθῆκες, διατηροῦν ἀμετάβλητη τόσο τήν ἐξωτερική τους ὄψη, ὅσο καί τήν ἔκταση πού πιάνουν στό χῶρο.



Τά ὑλικά αὐτά σώματα λέγονται **φυσικὰ στερεὰ** καί τέτοια εἶναι μιά πέτρα, ἕνα ξύλο, ἕνα σπίτι, ἕνα αὐτοκίνητο κ.λ.π.

Ἡ ἔκταση πού πιάνει ἕνα φυσικό στερεό στό χῶρο περιορίζεται ἀπό τήν *ἐπιφάνειά* του. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ (πού μποροῦμε νά τή φαντασθοῦμε σάν μία ἐπιδερμίδα χωρίς πάχος ἡ ὁποία τό σκεπάζει ἀπό παντοῦ) τοῦ δίνει τήν ἐξωτερική του ὄψη (μορφή), ἤ, ὅπως λέμε ἀλλιῶς, τό **σχῆμα** του.

Ἀπ' ὅσα ἀναφέραμε παραπάνω γιά τό φυσικό στερεό καταλαβαίνουμε ὅτι:

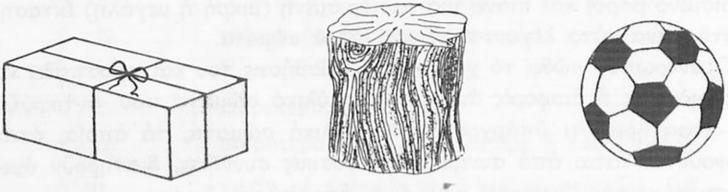
Ὅταν ἕνα φυσικό στερεό μετακινεῖται στό χῶρο, ἡ ἔκταση καί τό σχῆμα του δέν ἀλλάζουν.

Αὐτό ἀκριβῶς ἐννοοῦμε, ὅταν λέμε ὅτι «ἕνα φυσικό στερεό μένει **ἀμετάβλητο** κατά τή μετακίνησή του μέσα στό χῶρο».

Τέλος, παρατηροῦμε πώς κάθε φυσικό στερεό ἁπλώνεται κατά μῆκος (μάκρος), πλάτος καί ὕψος. Ἔχει, ὅπως λέμε, *τρεῖς διαστάσεις*.

Τά γεωμετρικά στερεά

1.2. Ὁ ἄνθρωπος, ἀπό τότε πού ἐμφανίστηκε μέχρι σήμερα, κάνει μιά συνεχή προσπάθεια νά ἐρευνήσει καί νά κατακτήσει τόν ἐξωτερικό του κόσμο. Αὐτό τό κάνει ὄχι μόνο γιά νά ἱκανοποιήσει τό φιλοπερίεργο πνεῦμα του, ἀλλά κυρίως γιά νά ἀντιμετωπίσει τίς πρακτικές ἀνάγκες τῆς ζωῆς του. Στήν προσπάθειά του λοιπόν νά μελετήσει τά φυσικά στερεά παρατήρησε πώς ἔπρεπε νά δώσει ἰδιαίτερη σημασία στό σχῆμα καί τήν ἔκτασή τους. Ἔτσι ἔφτασε στό σημεῖο νά «ἀποξενώσει» τά φυσικά στερεά ἀπό τό ὑλικό πού εἶναι φτιαγμένα καί νά δημιουργήσει μέ τή σκέψη του ἕνα νέο εἶδος στερεῶν, πού τά ὀνόμασε **γεωμετρικὰ στερεά**. Στά στερεά αὐτά «ἀγνοοῦμε» τήν ὕλη τους καί παραδεχόμαστε μόνο ὅτι:

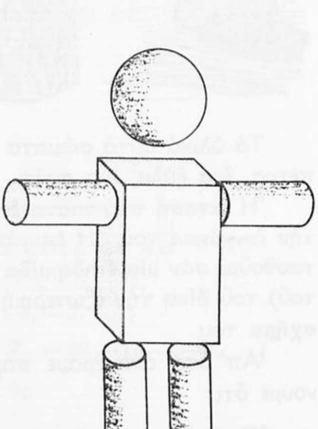


Σχ. 1

- **Ἔχουν ὁρισμένο σχῆμα (μορφὴ) καὶ ὁρισμένη ἔκταση.**
- **Ἡ ἔκταση καὶ τὸ σχῆμα τους μένουν ἀμετάβλητα, ὅταν μετακινοῦνται στὸ χῶρο.**

Ὁ κλάδος τῶν μαθηματικῶν, πού ἀσχολεῖται μέ τήν εἰσαγωγή καί μελέτη τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν, λέγεται **Γεωμετρία**.(1)

Τά γεωμετρικά στερεά ἀντιπροσωπεύουν σχήματα φυσικῶν στερεῶν. Ἐπειδή ὅμως ὑπάρχει, ὅπως εἴπαμε, μεγάλη ποικιλία σχημάτων, εἶναι πρακτικά ἀδύνατο νά τά μελετήσουμε ὅλα. Γι' αὐτό περιοριζόμαστε στή μελέτη ἑνός μικροῦ ἀριθμοῦ ἁπλῶν σχημάτων (τά ὁποῖα περιγράφονται σύντομα καί ἔχουν ἰδιότητες πού βρίσκονται εὔκολα) καί προσπαθοῦμε νά ἀναλύσουμε κάθε πολύπλοκο σχῆμα σέ τέτοια ἁπλά σχήματα.



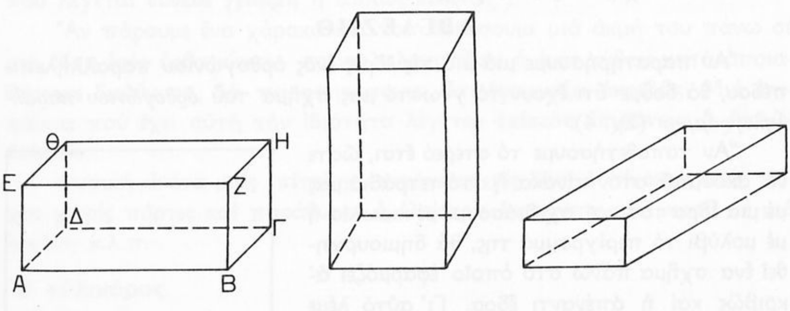
Σχ. 2

(1) Ἡ Γεωμετρία γεννήθηκε, ὅπως γράφει ὁ Ἡρόδοτος, στήν Ἀρχαία Αἴγυπτο ἀπό τήν ἀνάγκη τῶν κατοίκων της νά ξαναμοιράζουν τίς με-

Στό σχῆμα 2 π.χ. βλέπετε μιά τέτοια ἀνάλυση γιά τό σχῆμα τοῦ ἀνθρώπινου σώματος. Ἔτσι λοιπόν τό γεωμετρικό στερεό εἶναι ἕνα μαθηματικό κατασκεύασμα πού μπορεῖ νά ἀντιπροσωπεύει ὄχι μόνο τό σχῆμα ἑνός φυσικοῦ στερεοῦ, ἀλλά καί τό σχῆμα ἑνός μέρους του. Πολλά ἀπό τά συμπεράσματα στά ὁποῖα καταλήγουμε ἀπό τή μελέτη τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν τά ἐφαρμόζουμε στήν καθημερινή ζωή γιά τήν κατασκευή σπιτιῶν, τεχνικῶν ἔργων, μηχανῶν κ.λ.π.

Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καί ὁ κύβος

1.3. Ἕνα ἀπό τά πιό συνηθισμένα σχήματα πού συναντᾶ ὁ ἄνθρωπος στή ζωή του εἶναι τό **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο** (Σχ. 3) τό ὁποῖο μᾶς εἶναι γνωστό ἀπό τό Δημοτικό Σχολεῖο. Τέτοιο σχῆμα ἔχουν π.χ. τά κιβώτια, τά τοῦβλα, ὁρισμένα κτίρια (ἄν τά θεωρήσουμε χωρίς προεξοχές ἤ ἐσοχές) κ.λ.π.



Σχ. 3

Τά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τά σχεδιάζουμε ὅπως θά τά βλέπαμε, ἄν ἦταν διαφανή καί κολλημένα στόν πίνακα ἤ στόν τοῖχο ἤ στό τετράδιό μας. Ἄν παρατηρήσουμε προσεκτικά ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, βλέπουμε ὅτι:

- Περιορίζεται ἀπό ἕξι χωριστά μέρη τά ὁποῖα λέγονται **ἕδρες** του καί ὅλες μαζί οἱ ἕδρες ἀποτελοῦν τήν **ἐπιφάνειά** του.

γάλες ἐκτάσεις πού σκέπαζε κατά τίς πλημμύρες ὁ Νεῖλος. Τίς ἁπλές πρακτικές γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων συστηματοποίησαν ἀργότερα οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες σοφοί. Πιστεύεται ὅτι ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος εἶναι ὁ πρῶτος ὁ ὁποῖος σκέφτηκε νά ξεχωρίσει τό σχῆμα ἑνός φυσικοῦ στερεοῦ ἀπό τό ἴδιο τό στερεό καί νά διατυπώσει βασικές γεωμετρικές ἰδιότητες γιά τά σχήματα. Μετά τό Θαλῆ ἕνα πλῆθος ἀπό σπουδαίους Ἕλληνες Μαθηματικούς, ἀπό τόν Πυθαγόρα μέχρι τόν Εὐκλείδη καί τόν Ἀρχιμήδη, διαμόρφωσαν τή Γεωμετρία ὅπως τήν ἐννοοῦμε σήμερα.

● Ὑπάρχουν ἕδρες πού δέ συναντιοῦνται (δέν κόβονται). Τίς ἕδρες αὐτές τίς λέμε **ἀπέναντι ἕδρες** καί στό σχῆμα μας εἶναι αὐτές πού βρίσκονται ἐμπρός καί πίσω, δεξιά καί ἀριστερά, πάνω καί κάτω. Δύο ἕδρες πού δέν εἶναι ἀπέναντι συναντιοῦνται σέ μιά γραμμή πού λέγεται **ἀκμή** τοῦ στερεοῦ.

Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 12 ἀκμές.

● Κάθε ἀκμή του τελειώνει σέ δυό **σημεῖα** πού λέγονται **κορυφές** του.

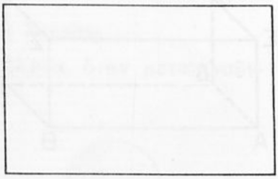
Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 8 κορυφές καί σέ κάθε κορυφή του συναντιοῦνται τρεῖς ἕδρες του καί τρεῖς ἀκμές του.

Γιά νά ἀναγνωρίζουμε τίς κορυφές ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, γράφουμε δίπλα σέ κάθε μιά ἕνα κεφαλαῖο γράμμα (πού εἶναι τό ὄνομά της). Μέ τά κεφαλαῖα αὐτά γράμματα τῶν κορυφῶν του ὀνομάζουμε καί ὅλο τό στερεό. Ἔτσι π.χ. τό πρῶτο ἀπό τά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τοῦ σχήματος 3 διαβάζεται

ΑΒΓΔΕΖΗΘ

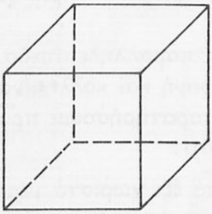
Ἄν παρατηρήσουμε μιά-μιά τίς ἕδρες ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, θὰ δοῦμε ὅτι ἔχουν τό γνωστό μας σχῆμα τοῦ *ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου* (Σχ. 4).

Ἄν τοποθετήσουμε τό στερεό ἔτσι, ὥστε νά ἀκουμπᾷ στόν πίνακα ἤ στό τετράδιό μας μέ μιά ἕδρα του καί σχεδιάσουμε μέ κιμωλία ἤ μέ μολύβι τό περίγραμμά της, θά δημιουργηθεῖ ἕνα σχῆμα πάνω στό ὁποῖο ἐφαρμόζει ἀκριβῶς καί ἡ ἀπέναντι ἕδρα. Γι' αὐτό λέμε πώς **οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι σχήματα ἴσα**.



Σχ. 4

1.4. Ἕνα ἄλλο γνωστό γεωμετρικό σχῆμα εἶναι ὁ **κύβος**. Τέτοιο σχῆμα ἔχουν π.χ. τὰ ζάρια, ὁρισμένα κιβώτια κ.λ.π. Ὁ κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο πού ὅλες οἱ ἕδρες του εἶναι *τετράγωνα* (Σχ. 5).

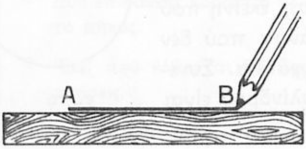


Σχ. 5

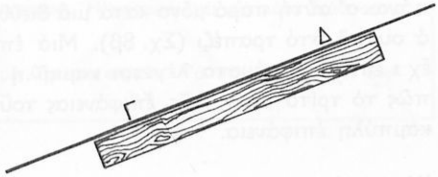
Ἡ εὐθεία καί τό ἐπίπεδο

1.5. Ἄν παρατηρήσουμε μιά λεπτή τεντωμένη κλωστή ἤ ἕνα λεπτό τεντωμένο σύρμα, ἔχουμε τήν εἰκόνα ἑνός **εὐθύγραμμου τμήματος**. Οἱ ἀκμές τοῦ χάρακα, οἱ ἀκμές τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καί τοῦ κύβου εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα.

Εὐθύγραμμα τμήματα γράφουμε μέ τή βοήθεια τοῦ χάρακα, ὅπως δείχνει τό παρακάτω σχῆμα 6.



Σχ. 6



Σχ. 7

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ (Σχ. 6) ἔχει δύο **ἄκρα**, τά σημεῖα Α καί Β. Ἄν φαντασθοῦμε ὅτι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, π.χ. τό ΓΔ (Σχ. 7), προεκτείνεται ἀπεριόριστα καί ἀπό τά δύο ἄκρα του, θά προκύψει μιά γραμμή πού λέγεται **εὐθεία γραμμὴ** ἤ ἁπλῶς **εὐθεία** (1).

Ἄν πάρουμε ἕνα χάρακα καί τοποθετήσουμε μιά ἀκμή του πάνω σέ μιά ἕδρα ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἤ ἑνός κύβου κατά ὁποιαδήποτε διεύθυνση, θά παρατηρήσουμε ὅτι ἐφαρμόζει ἀκριβῶς. Μιά ἐπιφάνεια πού ἔχει αὐτή τήν ἰδιότητα λέγεται **ἐπίπεδη ἐπιφάνεια** ἤ ἁπλῶς **ἐπίπεδο**.

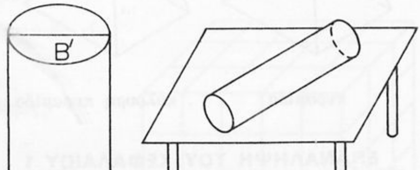
Φυσική εἰκόνα μιᾶς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας μᾶς δίνει ὁ πίνακας, ἕνας τοῖχος χωρίς πόρτες καί παράθυρα, ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ σέ μιά λεκάνη κ.λ.π.

Ὁ κύλινδρος

1.6. Ἕνα ἀρκετά διαδεδομένο γεωμετρικό στερεό εἶναι ὁ **κύλινδρος**. Τά κουτιά μέ τό γάλα, οἱ σωλῆνες, τά σιδερένια βαρέλια, ἔχουν σχῆμα κυλινδρικό.

Ἄν παρατηρήσουμε ἕναν κύλινδρο, βλέπουμε ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του, ἀποτελεῖται ἀπό τρία μέρη, ἀπό τά ὁποῖα τά δύο εἶναι ἐπίπεδα καί λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου (οἱ Β καί Β′ Σχ. 8α).

Ἄν σχεδιάσουμε μέ τό μολύβι μας τό περίγραμμα τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, θά δοῦμε ὅτι ἔχει τό γνωστό μας σχῆμα τοῦ **κύκλου** (Σχ. 9).

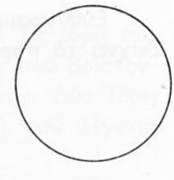


Σχ. 8

---

(1) Γιά εὐθύγραμμα τμήματα καί εὐθεῖες θά μιλήσουμε λεπτομερέστερα σέ ἄλλο κεφάλαιο.

Τό τρίτο μέρος τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου δέν εἶναι ἐπίπεδο καί δέν ἔχει ἐπίπεδα τμήματα, γιατί, ὅπως διαπιστώνουμε εὔκολα, ἡ ἀκμή τοῦ χάρακα δέν ἐφαρμόζει πάνω σ' αὐτή παρά μόνο κατά μιά διεύθυνση, ἐκείνη πού ἀκουμπᾶ στό τραπέζι (Σχ. 8β). Μιά ἐπιφάνεια πού δέν ἔχει ἐπίπεδα τμήματα λέγεται **καμπύλη ἐπιφάνεια**. Συνεπῶς τὸ τρίτο μέρος τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια.



Σχ. 9

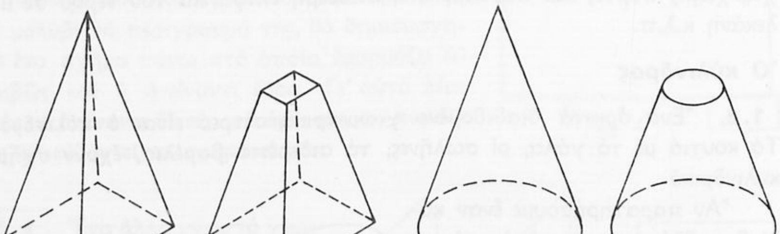
Ἡ σφαίρα

1.7. Ἕνα ἀκόμη πολύ γνωστό μας γεωμετρικό στερεό εἶναι ἡ **σφαίρα**. Τό πορτοκάλι, ὁ βῶλος, τό τόπι, ἔχουν σφαιρική ἐπιφάνεια. Ἄν παρατηρήσουμε μιά σφαίρα, θά δοῦμε πώς πάνω στήν ἐπιφάνειά της ὁ χάρακας (ἡ εὐθεία γραμμή) δέν ἐφαρμόζει σέ καμιά διεύθυνση. Ἑπομένως καί ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι καμπύλη (Σχ. 10).

Σχ. 10

Ἄλλα γεωμετρικά στερεά

1.8. Στό παρακάτω σχῆμα ἔχουμε σχεδιάσει μερικά σχήματα γεωμετρικῶν στερεῶν πού μᾶς εἶναι γνωστά ἀπό τό Δημοτικό καί πού τά βλέπουμε πολλές φορές σέ φυσικά στερεά.



πυραμίδα **κόλουρη πυραμίδα** **κῶνος** **κόλουρος κῶνος**

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

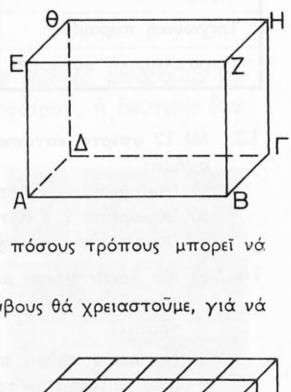
1. Γιά νά μεταφερθοῦμε ἀπό ἕνα φυσικό στερεό στό ἀντίστοιχο **γεωμετρικὸ στερεό**, «ἀγνοοῦμε» τήν ὕλη του καί ἐνδιαφερόμαστε μόνο γιά τό **σχῆμα** καί τήν **ἔκτασή** του. Τό γεωμετρικό στερεό ἔχει *τρεῖς διαστάσεις* (μῆκος, πλάτος, ὕψος) καί παραδεχόμαστε ὅτι **παραμένει ἀμετάβλητο κατὰ τὴ μετακίνησή του στὸ χῶρο** (δηλαδή δέν ἀλλάζει σχῆμα καί ἔκταση). Ἀπό τά πιό συνηθισμένα γεωμετρικά στερεά εἶναι τό **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο**, ὁ **κύβος**, ὁ **κύλινδρος** καί ἡ **σφαίρα**.

2. Κάθε γεωμετρικό στερεό περιορίζεται ἀπό τήν ἐπιφάνειά του.

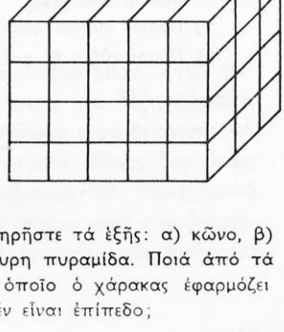
- Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει μόνο δύο διαστάσεις: **μῆκος** καί **πλάτος**.
- Δύο ἐπιφάνειες κόβονται σέ μία **γραμμή**. Ἡ γραμμή ἔχει μία μόνο διάσταση, τό **μῆκος**.
- Ἐκεῖ πού κόβονται δύο γραμμές ἔχουμε **σημεῖο**. Τό σημεῖο δέν ἔχει διαστάσεις.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Πάρτε δύο κουτιά ἀπό σπίρτα. Μέ πόσους τρόπους μπορεῖτε νά τά ἐφαρμόσετε, ὥστε νά σχηματιστεῖ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο; Προσπαθῆστε νά κάνετε ἕνα σχέδιο.
2. Πόσα κουτιά ἀπό σπίρτα θά χρειαστοῦμε, γιά νά κατασκευάσουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πού νά εἶναι τρεῖς φορές πιό μακρύ, τρεῖς φορές πιό πλατύ καί δύο φορές πιό ψηλό ἀπό ἕνα κουτί σπίρτα;
3. Μέσα στό χῶρο τοῦ σχολείου βρεῖτε διάφορα ἀντικείμενα πού ξέρετε τό γεωμετρικό σχῆμα τους. Στά ἀντικείμενα αὐτά ὁρίστε εἴδη ἐπιφανειῶν.
4. Στό ἀπέναντι σχῆμα ἡ κορυφή Α εἶναι μπροστά, ἀριστερά καί κάτω. Νά ὁρίσετε μέ ὅμοιο τρόπο τίς θέσεις τῶν ἄλλων κορυφῶν.

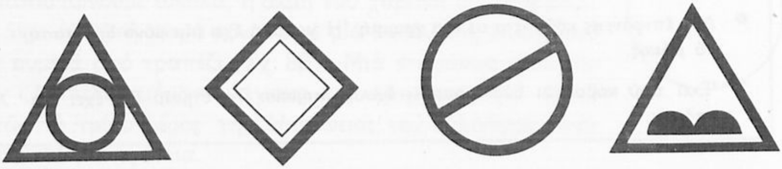


5. Σχεδιάστε ἕναν κύβο. Ἕνας μαθητής παρατηρεῖ ὅτι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρες καί κάθε ἕδρα 4 ἀκμές. Βγάζει ἔτσι τό συμπέρασμα ὅτι ὁ κύβος ἔχει $4 \times 6 = 24$ ἀκμές. Εἶναι σωστό αὐτό;
6. Ἀπό ἕνα κουτί παιδικῶν παιχνιδιῶν πάρτε 4 ὅμοιους κύβους καί τοποθετῆστε τους, ὥστε νά σχηματιστεῖ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Μέ πόσους τρόπους μπορεῖ νά γίνει αὐτό; Μπορεῖ νά σχηματιστεῖ νέος κύβος;
7. Στήν προηγούμενη ἄσκηση πόσους τό λιγότερο κύβους θά χρειαστοῦμε, γιά νά κατασκευάσουμε ἕνα μεγαλύτερο κύβο;
8. Τό ἀπέναντι ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο εἶναι συναρμολογημένο ἀπό κύβους.
   α) Ἀπό πόσους κύβους ἀποτελεῖται;
   β) Σέ πόσους κύβους φαίνονται 3 ἕδρες;
   γ) σέ πόσους 2 ἕδρες;
   δ) σέ πόσους 1 ἕδρα;



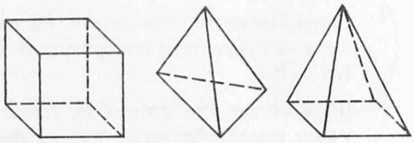
9. Τοποθετῆστε 10 δίδραχμα (τῆς ἴδιας σειρᾶς) τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, ὥστε νά ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Τί σχῆμα θά γίνει; Ἕνα δίδραχμο τί σχῆμα ἔχει;
10. Στά γεωμετρικά στερεά τοῦ σχολείου σας παρατηρῆστε τά ἑξῆς: α) κῶνο, β) κύλινδρο, γ) σφαίρα, δ) κόλουρο κῶνο, ε) κόλουρη πυραμίδα. Ποιά ἀπό τά στερεά αὐτά ἔχουν μέρος ἐπιφάνειας πάνω στό ὁποῖο ὁ χάρακας ἐφαρμόζει σέ διαφορετικές θέσεις καί ὅμως τό μέρος αὐτό δέν εἶναι ἐπίπεδο;

11. Στά παρακάτω σήματα όδικῆς κυκλοφορίας ποιά γεωμετρικά σχήματα ἀναγνωρίζετε;



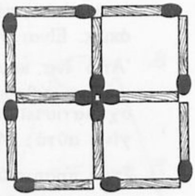
● ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

12. Γιά τά ἀπέναντι στερεά συμπληρῶστε τόν παρακάτω πίνακα. Παρατηρεῖτε καμιά σχέση μεταξύ τῶν ἀριθμῶν τῆς ἴδιας σειρᾶς στίς δυό τελευταῖες στῆλες;



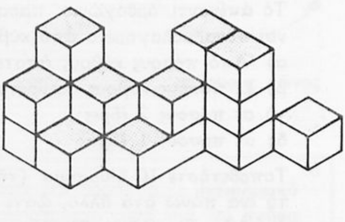
Ὄνομα στερεοῦ	ἀριθμός ἑδρῶν	ἀριθμός κορυφῶν	ἀριθμός ἀκμῶν	ἄθροισμα ἑδρῶν καί κορυφῶν
Κύβος				
Τριγωνική πυραμίδα				
Τετραπλευρική πυραμίδα				

13. Μέ 12 σπίρτα κατασκευάστε τό ἀπέναντι τετραγωνικό σχῆμα:



α) Ἀφαιρέστε 4 σπίρτα, ὥστε νά μείνει ἕνα τετράγωνο.
β) Ἀφαιρέστε 2 σπίρτα, ὥστε νά μείνουν 3 τετράγωνα.
γ) Ἀφαιρέστε 4 σπίρτα, ὥστε νά μείνουν 2 τετράγωνα.

14. α) Νά βρεῖτε πόσοι μικροί κύβοι εἶναι στό ἀπέναντι στερεό πού ἀκουμπᾶ μέ ὅλες του τίς στῆλες στό τραπέζι.
β) Νά βρεῖτε ἀκόμη πόσων μικρῶν κύβων φαίνονται οἱ τρεῖς ἕδρες καί πόσων οἱ δύο ἕδρες.
γ) Πόσων κύβων φαίνεται ἡ μία ἕδρα;
δ) Πόσοι κύβοι δέ φαίνονται;



2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εἰσαγωγή

2.1. Στό Δημοτικό Σχολεῖο μάθαμε ἀρκετά πράγματα γιά τούς ἀριθμούς, τίς πράξεις τους, τά σχήματα τῆς Γεωμετρίας κ.λ.π. Στό Γυμνάσιο θά μάθουμε βέβαια περισσότερα, ἀλλά θά γίνει ἐπανάληψη κι αὐτῶν πού κάναμε στό Δημοτικό, μαθαίνοντάς τα τώρα μέ τρόπο πού νά ἱκανοποιεῖ περισσότερο τήν περιέργειά μας. Γιά νά γίνει ὅμως αὐτό, πρέπει πρῶτα νά ἀποκτήσουμε ὁρισμένες χρήσιμες γνώσεις πού θά μᾶς βοηθήσουν νά διατυπώνουμε ἁπλά καί πιό σωστά τίς διάφορες ἔννοιες τῶν μαθηματικῶν. Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἀναφερθοῦμε σέ μερικές ἀπό τίς γνώσεις αὐτές.

Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου

2.2. Ἄν θέλαμε νά περιγράψουμε τίς παρακάτω εἰκόνες, μποροῦμε νά ποῦμε πώς ἡ πρώτη παριστάνει μιά **ὁμάδα** ποδοσφαίρου, ἡ δεύτερη ἕνα

σμῆνος ἀεροπλάνων καί ἡ τρίτη μιά **συλλογή** γραμματοσήμων. Στήν περιγραφή πού κάναμε γιά κάθε εἰκόνα χρησιμοποιήσαμε μιά λέξη (**ὁμάδα, σμῆνος, συλλογή**) ἡ ὁποία δηλώνει ὅτι μιά συγκέντρωση ἀπό διαφορετικά ἀντικείμενα ἀντιμετωπίζεται σάν μιά ὁλότητα. Τέτοιου εἴδους ἐκφράσεις εἶναι πολύ συνηθισμένες, καί ὅλοι μας καταλαβαίνουμε τό περιεχόμενό τους. Λέμε π.χ. «ἡ οἰκογένειά μου» καί ἐννοοῦμε τά ἄτομα πού τήν ἀποτελοῦν, ἤ «ὁ ἐμπορικός στόλος τῆς Ἑλλάδας» καί ἐννοοῦμε τά ἐμπορικά πλοῖα πού τόν ἀποτελοῦν.

Στά μαθηματικά, ὅταν θέλουμε διαφορετικά ἀντικείμενα νά τά ἀντιμετωπίσουμε σάν μιά ὁλότητα, χρησιμοποιοῦμε τή λέξη **σύνολο**.

Τά ἀντικείμενα πού ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο λέγονται **στοιχεῖα** ἤ **μέλη** τοῦ συνόλου.

Ἔτσι π.χ. «ἡ οἰκογένειά μου» εἶναι ἕνα σύνολο, «ὁ ἐμπορικὸς στόλος τῆς Ἑλλάδας» εἶναι ἕνα ἄλλο σύνολο.

Γιά νά χρησιμοποιοῦμε σωστά τή λέξη «σύνολο», πρέπει νά ξεκαθαρίσουμε μερικά πράγματα, κι αὐτά εἶναι:

- Μέ τή λέξη *«ἀντικείμενο»* δέν ἐννοοῦμε μόνο χειροπιαστά πράγματα. Ἀντικείμενα θεωροῦνται π.χ. καί οἱ ἀριθμοί, τά χρώματα, οἱ μέρες, τά γράμματα, τά σύμβολα τῶν πράξεων κ.λ.π.
- Ὅλα τά ἀντικείμενα πού ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο πρέπει νά εἶναι (ἤ νά θεωροῦνται) διαφορετικά μεταξύ τους.

Ἔτσι π.χ. τό σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «κάλαντα» ἔχει γιά στοιχεῖα του τά: **κ, α, λ, ν, τ** (δηλαδή τά διάφορα **α** πού ὑπάρχουν στή λέξη δέν ἀποτελοῦν διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ συνόλου). Στό σύνολο ὅμως τῶν κερμάτων πού ἔχω στήν τσέπη μου, δύο ὅμοια τάλληρα π.χ. θεωροῦνται διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ συνόλου.

- Γιά νά εἶναι ὁρισμένο ἕνα σύνολο, πρέπει ὅλα τά στοιχεῖα του νά εἶναι ἐντελῶς γνωστά.

Καθορισμός καί παράσταση συνόλου

2.3. Γιά νά παραστήσουμε ἕνα σύνολο, γράφουμε συνήθως τά στοιχεῖα του ἀνάμεσα σέ δυό **ἄγκιστρα** ({ }) καί τά χωρίζουμε μεταξύ τους μέ κόμματα. Λέμε τότε ὅτι καθορίσαμε τό σύνολο *μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του*(1). Ἔτσι π.χ.

— Τό σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «κάλαντα» γράφεται:

$$\{κ,α,λ,ν,τ\}$$

καί διαβάζεται «σύνολο μέ στοιχεῖα κ,α,λ,ν,τ» ἤ πιό ἁπλά «σύνολο κ,α,λ,ν,τ».

— Τό σύνολο τῶν συμβόλων τῶν τεσσάρων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς γράφεται:

$$\{+, \times, -, :\}$$

— Τό σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους γράφεται:

$$\{\text{Γενάρης, Φλεβάρης, ..., Δεκέμβρης}\}.$$

---

(1) Σημειώνουμε ἐδῶ πώς δέν ἔχει καμιά σημασία ἡ σειρά μέ τήν ὁποία ἀναγράφονται τά στοιχεῖα τοῦ σύνολου μέσα στά ἄγκιστρα.

Στό τελευταῖο παράδειγμα γράψαμε μερικά ἀπό τά πρῶτα στοιχεῖα τοῦ συνόλου, μετά γράψαμε τρεῖς τελεῖες πού ὑπονοοῦν τά ἑπόμενα στοιχεῖα του, καί τέλος γράψαμε τό τελευταῖο στοιχεῖο του. Αὐτό μποροῦμε νά τό κάνουμε, μόνο ὅταν ἔχουμε ἕνα σύνολο μέ πολλά στοιχεῖα τά ὁποῖα βρίσκονται σέ κάποια προκαθορισμένη σειρά.

Ὅταν ἔχουμε ἕνα σύνολο μέ πολλά στοιχεῖα τά ὁποῖα δέ βρίσκονται σέ προκαθορισμένη σειρά, εἶναι πολύ κοπιαστικό, καί πολλές φορές ἀδύνατο νά γράψουμε ὅλα τά στοιχεῖα του. Τότε γράφουμε ἀνάμεσα σέ ἄγκιστρα μιά ἁπλή φράση πού χαρακτηρίζει ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου καί μόνο αὐτά. Λέμε τότε πώς καθορίσαμε τό σύνολο *μέ περιγραφή τῶν στοιχείων του*. Ἔτσι π.χ.

— Τό σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς Α΄ τάξεως τοῦ σχολείου μου, γράφεται:

{οἱ μαθητές τῆς Α΄ τάξεως τοῦ σχολείου μου}.

— Τό σύνολο τῶν νησιῶν τοῦ Αἰγαίου γράφεται:

{τά νησιά τοῦ Αἰγαίου}.

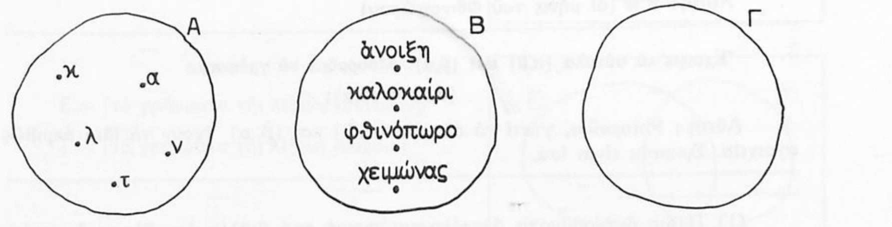
Μέ περιγραφή μπορεῖ νά καθοριστεῖ καί ὁποιοδήποτε ἀπό τά προηγούμενα σύνολα. Π.χ. τό σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους γράφεται:

{οἱ μῆνες τοῦ ἔτους}.

Ἕνα σύνολο τό παριστάνουμε συνήθως γιά συντομία ἤ γιά εὐκολία μας μέ ἕνα ἀπό τά κεφαλαῖα γράμματα Α,Β,Γ,... τοῦ ἀλφαβήτου μας. Γιά νά δηλώσουμε π.χ. ὅτι τό γράμμα Α παριστάνει τό σύνολο {κ,λ,α,ν,τ}, γράφουμε

$$Α = \{κ,α,λ,ν,τ\}$$

Ἐπίσης μποροῦμε νά παραστήσουμε ἕνα σύνολο μέ ἕνα **διάγραμμα.** Μέ τή λέξη αὐτή ἐννοοῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἁπλή κλειστή γραμμή (π.χ. ἕναν κύκλο) στό ἐσωτερικό τῆς ὁποίας σημειώνουμε μέ τελεῖες τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου.[1]



Σχ. 1 Σχ. 2 Σχ. 3

(1) Ὅταν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου εἶναι πολλά, ἀρκούμαστε γιά τό διάγραμμά του σέ μιά ἁπλή κλειστή γραμμή.

Τά παραπάνω σχήματα 1,2 καί 3 εἶναι ἀντιστοίχως τά διαγράμματα(1) τῶν συνόλων:

Α = {κ,α,λ,ν,τ}, Β = {οἱ ἐποχές τοῦ ἔτους}, Γ = {οἱ κάτοικοι τῆς Ἑλλάδας}

Ἴσα σύνολα

2.4. Ἄς παραστήσουμε μέ Α τό σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «ὀξυγόνο» καί μέ Β τό σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «ὑδρογόνο». Μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων τους τά σύνολα αὐτά εἶναι:

Α = {ο, υ} καί Β = {υ, ο}

Ὅπως βλέπουμε, τά σύνολα Α καί Β ἔχουν τά ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα.

> Δύο σύνολα Α καὶ Β ποὺ ἔχουν τὰ ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα λέγονται **ἴσα** καὶ γράφουμε γι' αὐτὰ
>
> Α = Β ἢ Β = Α

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι τά γράμματα Α καί Β δέν παριστάνουν δυό διαφορετικά σύνολα, ἀλλά εἶναι ὀνομασίες τοῦ ἴδιου συνόλου {ο, υ}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά παρασταθεῖ μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του τό σύνολο**
Α = {τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 1220}
Λύση: Α = {1, 2, 0}

2. **Νά παρασταθεῖ μέ περιγραφή τό σύνολο**
Β = {Σεπτέμβρης, Ὀκτώβρης, Νοέμβρης}
Λύση: Β = {οἱ μῆνες τοῦ Φθινοπώρου}

3. **Ἔχουμε τά σύνολα {α,β} καί {β,α}. Μποροῦμε νά γράφουμε**
{α,β} = {β,α};

Λύση : Μποροῦμε, γιατί τά σύνολα {α, β} καί {β, α} ἔχουν τά ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα. Συνεπῶς εἶναι ἴσα.

(1) Τέτοια διαγράμματα ἀναφέρονται συχνά στά βιβλία ὡς «Βέννια διαγράμματα» ἀπό τό ὄνομα τοῦ Ἄγγλου Μαθηματικοῦ John Venn (1834-1923) ὁ ὁποῖος πρῶτος τά χρησιμοποίησε στά σύνολα. Ἐπίσης ἀναφέρονται ὡς «διαγράμματα τοῦ Euler», γιατί ὁ σπουδαῖος Γερμανός Μαθηματικός Euler (1707-1783) ἦταν ὁ πρῶτος πού χρησιμοποίησε στά νεώτερα χρόνια παραστάσεις μέ διαγράμματα. Πάντως ὁ πρῶτος πού χρησιμοποίησε διαγραμματικές παραστάσεις ἦταν ὁ Ἀριστοτέλης.

4. **Νά γραφεῖ μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους τό σύνολο μέ στοιχεῖα: α,β,γ.**

Λύση : {α, β, γ} , {α, γ, β} , { . . }

{ . . } , { . . . }, , { . . . }

5. **Παρακάτω ἔχουμε μερικά σύνολα καθορισμένα μέ ἀναγραφή ἤ μέ περιγραφή. Νά τά καθορίσετε μέ τόν ἄλλο τρόπο.**

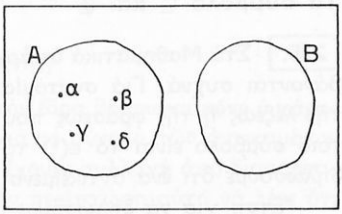
Ἀναγραφή	Περιγραφή
{ +, −, ×, :}	{ . . . . }
{ . . . }	{ τά δίχρονα φωνήεντα }
{ α, ε, η, ι, ο, υ, ω }	{ . . . . }
{ . . . . }	{τά γράμματα τῆς λέξεως «ἐννέα»}

6. **Νά συμπληρωθοῦν τά κενά στά σύνολα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ καί στά διαγράμματά τους.**

Σύνολα — **Διαγράμματα συνόλων**

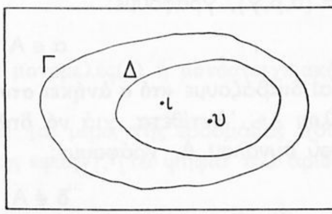
Α = { . . . . }

Β = { ε, ζ, η }



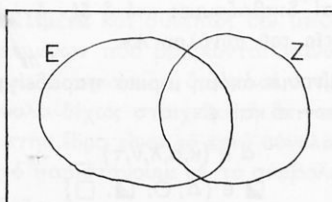
Γ = { τά φωνήεντα }

Δ = { }



Ε = {τά γράμματα τῆς λέξεως «σύνολο»}

Ζ = {τά γράμματα τῆς λέξεως «νόμοι»}



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ φράση «τά ψηλά βουνά τῆς Ἑλλάδας» ὁρίζει κάποιο σύνολο.
2. Ἐξετάστε τό ἴδιο γιά τή φράση «οἱ ψηλοί συμμαθητές μου».

3. Νά γράψετε τό σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας πού ἀρχίζουν ἀπό Τ μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του. Κάνετε τό ἴδιο γιά τό σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας πού ἀρχίζουν ἀπό Π.

4. Νά γράψετε μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του τό σύνολο τῶν δακτύλων τοῦ ἑνός χεριοῦ.

5. Νά γράψετε τό σύνολο τῶν μηνῶν πού ἀρχίζουν ἀπό Ι.

6. Κάνετε τό ἴδιο γιά τούς μῆνες πού ἀρχίζουν ἀπό Α.

7. Γράψτε μιά λέξη πού τά γράμματά της νά εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{α,λ\}$.

8. Γράψτε δύο λέξεις πού τά γράμματά τους νά εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{α, ν\}$.

9. Νά γράψετε τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ὡρῶν κατά τίς ὁποῖες οἱ δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ: α) εἶναι σέ εὐθεία γραμμή, β) σχηματίζουν ὀρθή γωνία.

10. Νά γράψετε μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων τους τό σύνολα: α) τῶν φωνηέντων, β) τῶν συμφώνων καί γ) τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «θαλασσινό» καί νά κάνετε τά διαγράμματα τῶν συνόλων αὐτῶν.

Τά σύμβολα $\in$ καί $\notin$

2.5. Στά Μαθηματικά ὑπάρχουν λέξεις ἤ μικρές φράσεις πού ἐπαναλαμβάνονται συχνά. Γιά συντομία στό γράψιμο χρησιμοποιοῦμε στή θέση τῆς λέξεως ἤ τῆς φράσεως πού ἐπαναλαμβάνεται ἕνα σύμβολο. Ἕνα τέτοιο σύμβολο εἶναι τό $\in$(1) τό ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε, ὅταν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα ἀντικείμενο εἶναι στοιχεῖο ἑνός ὁρισμένου συνόλου.

Ἔτσι, γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό α εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A = \{α,β,γ\}$, γράφουμε:

$$α \in A \quad ἤ \quad α \in \{α,β,γ\}$$

καί διαβάζουμε **«τό α ἀνήκει στό σύνολο Α»** ἤ **«τό α εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α»**. Ἀντίθετα, γιά νά δηλώσουμε π.χ. ὅτι τό δ δέν εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α, γράφουμε:

$$δ \notin A \quad ἤ \quad δ \notin \{α,β,γ\}$$

καί διαβάζουμε: **«τό δ δέν ἀνήκει στό σύνολο Α»** ἤ **«τό δ δέν εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α»**.

Δίνουμε ἀκόμη μερικά παραδείγματα γιά τή χρησιμοποίηση τῶν συμβόλων $\in$ καί $\notin$

$α \in \{κ,α,λ,ν,τ\}$, $β \notin \{κ,α,λ,ν,τ\}$

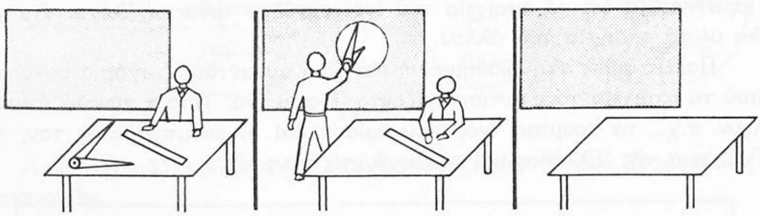
◪ $\in \{\triangle, \bigcirc,$ ◪, $\square\}$, ◑ $\notin \{\triangle, \bigcirc,$ ◪, $\square\}$

(1) Εἶναι τό ∈ σέ βυζαντινή γραφή, ἀρχικό γράμμα τῆς λέξεως «ἐστί» πού σημαίνει «εἶναι».

Τό μονομελές σύνολο — Τό κενό σύνολο

2.6. Οἱ παρακάτω εἰκόνες δείχνουν μιά τάξη σέ ὥρα μαθήματος καί σέ τρεῖς διαφορετικές χρονικές στιγμές. Ἄς ἐπιχειρήσουμε σέ κάθε μιά τους νά καθορίσουμε τό σύνολο:

{τά ἀντικείμενα πού βρίσκονται πάνω στήν ἕδρα}



Ἡ πρώτη εἰκόνα δείχνει τήν τάξη, ὅταν ἀρχίζει τό μάθημα καί, ὅπως βλέπουμε, πάνω στήν ἕδρα βρίσκονται ὁ χάρακας καί ὁ διαβήτης.

Ἔτσι τό παραπάνω σύνολο εἶναι τό:

{χάρακας, διαβήτης}

Στή δεύτερη εἰκόνα βλέπουμε πώς πάνω στήν ἕδρα βρίσκεται **μόνο ὁ χάρακας** καί συνεπῶς δέ θά ἔπρεπε νά μιλᾶμε γιά τό σύνολο τῶν ἀντικειμένων πού βρίσκονται πάνω στήν ἕδρα, ἀφοῦ δέν ἔχουμε συλλογή ἀπό διαφορετικά ἀντικείμενα. Συμφωνοῦμε ὅμως καί στήν περίπτωση αὐτή νά λέμε ὅτι ἔχουμε «σύνολο μέ ἕνα στοιχεῖο», τό

{χάρακας}

Κάθε σύνολο μέ ἕνα μόνο στοιχεῖο τό λέμε **μονομελές**(1) ἤ **μονοστοιχειακό** σύνολο.

Ἔτσι π.χ. μονομελή εἶναι τά σύνολα: {οἱ μέρες τῆς ἑβδομάδας πού ἀρχίζουν ἀπό Κ}, {τά φωνήεντα τῆς λέξεως «φῶς»}, {τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 111} κ.λ.π.

Τέλος, ἡ τρίτη εἰκόνα δείχνει τήν τάξη ὅταν πιά τέλειωσε τό μάθημα. Τώρα πάνω στήν ἕδρα **δέν ὑπάρχουν ἀντικείμενα** καί συνεπῶς δέν μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά τό σύνολο τῶν ἀντικειμένων πού βρίσκονται πάνω στήν ἕδρα, ἀφοῦ δέν ὑπάρχουν στοιχεῖα του. Συμφωνοῦμε ὅμως καί στήν περίπτωση αὐτή νά λέμε ὅτι ἔχουμε «σύνολο δίχως στοιχεῖα» ἤ ὅτι τό σύνολο τῶν ἀντικειμένων πού εἶναι πάνω στήν ἕδρα εἶναι **τό κενό σύνολο**. Τό κενό σύνολο εἶναι **ἕνα καί μοναδικό** καί τό παριστάνουμε μέ τό σύμβολο

{ } ἤ μέ τό σύμβολο $\varnothing$

(1) Δέν πρέπει νά μπερδεύουμε ἕνα μονομελές σύνολο, π.χ. τό {α}, μέ τό στοιχεῖο του α, γιατί αὐτά εἶναι δυό διαφορετικές ἔννοιες (ὅπως π.χ. ἄλλο πράγμα εἶναι ἕνα κλουβί μέ ἕνα πουλί μέσα σ' αὐτό, καί ἄλλο τό πουλί χωρίς τό κλουβί).

Ἄλλα παραδείγματα τοῦ κενοῦ συνόλου εἶναι: {οἱ μῆνες μέ 32 μέρες}, {οἱ μέρες τῆς ἑβδομάδας πού ἀρχίζουν ἀπό Α} κ.λ.π.

Ἰσοδύναμα σύνολα

2.7. Ἄς πάρουμε τά σύνολα:
{οἱ νομοί τῆς Ἑλλάδας} καί {οἱ πρωτεύουσες τῶν νομῶν τῆς Ἑλλάδας}. Παρατηροῦμε ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ ἑνός συνόλου *ἀντιστοιχίζονται ἕνα μέ ἕνα* μέ τά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου.

Πολλές φορές στήν καθημερινή μας ζωή συναντᾶμε ζευγάρια συνόλων πού τά στοιχεῖα τους ἀντιστοιχίζονται ἕνα μέ ἕνα. Τέτοια σύνολα ἀποτελοῦν π.χ., τά κουμπιά ἑνός πουκαμίσου καί οἱ κουμπότρυπές του, τά Γυμνάσια τῆς Ἑλλάδας καί οἱ Διευθυντές τους κ.λ.π.

> Δύο σύνολα Α καί Β πού μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε τά στοιχεῖα τους ἕνα μέ ἕνα τά λέμε **ἰσοδύναμα**.

Γιά τά σύνολα αὐτά γράφουμε:

$$A \sim B \quad \text{ἤ} \quad B \sim A$$

καί διαβάζουμε *«Α ἰσοδύναμο Β»* ἤ *«Β ἰσοδύναμο Α»*.

Ἔτσι π.χ. τά σύνολα Α = {α,β,γ,δ} καί Β = {Ἄνοιξη, Καλοκαίρι, Φθινόπωρο, Χειμώνας} εἶναι ἰσοδύναμα, γιατί μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε τά στοιχεῖα τους ἕνα μέ ἕνα. Ἡ ἀντιστοιχία τῶν στοιχείων μπορεῖ νά σημειωθεῖ μέ διπλά βέλη (⟷) ὅπως φαίνεται στήν παρακάτω διάταξη.

Α = { α , β , γ , δ }

↕ ↕ ↕ ↕

Β = {Ἄνοιξη, Καλοκαίρι, Φθινόπωρο, Χειμώνας}

Δύο σύνολα δέν εἶναι πάντα ἰσοδύναμα, ὅπως π.χ. τά:

Α = {α,β,γ,δ} καί Φ = {τά φωνήεντα}.

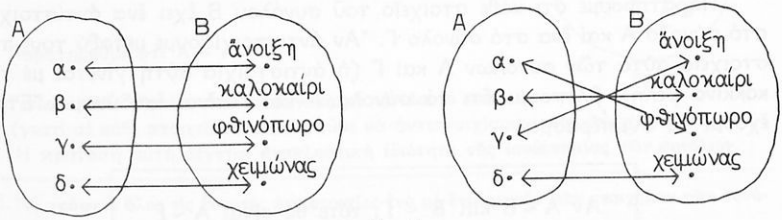
Αὐτό τό καταλαβαίνουμε ἀμέσως, ἄν ἐπιχειρήσουμε νά ἀντιστοιχίσουμε τά στοιχεῖα τους ἕνα μέ ἕνα.

Α = {α, β, γ, δ}

↕ ↕ ↕ ↕

Β = {α, ε, η, ι, ο, υ, ω }

Ἄν ἔχουμε τά διαγράμματα δύο ἰσοδύναμων συνόλων Α καί Β, ἡ ἀντιστοιχία τῶν στοιχείων τους ἕνα μέ ἕνα μπορεῖ πάλι νά σημειωθεῖ μέ διπλά βέλη. Στό σχῆμα 4 βλέπουμε τά ἰσοδύναμα σύνολα

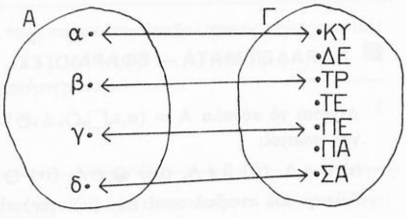


Σχ. 4

A = {α,β,γ,δ} καί B = {οἱ ἐποχές τοῦ ἔτους} σέ δυό διαφορετικές ἀντιστοιχίες.

Τό σχῆμα 5 δείχνει ὅτι τά σύνολα A = {α,β,γ,δ} καί Γ = {οἱ μέρες τῆς ἑβδομάδας} δέν εἶναι ἰσοδύναμα (γιατί ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ Γ πού δέν ἀντιστοιχίζονται μέ στοιχεῖα τοῦ A).

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, γιά νά εἶναι δυό σύνολα ἰσοδύναμα, πρέπει:

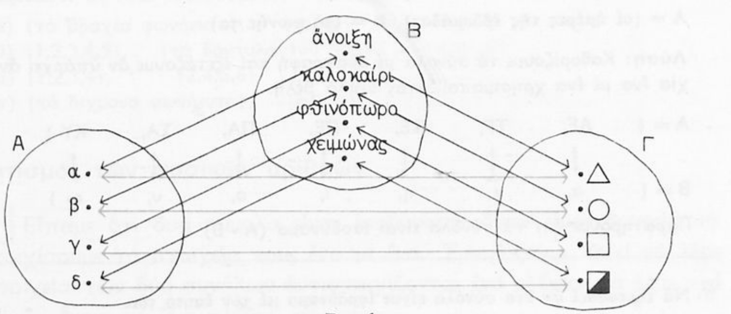


Σχ. 5

- **Σέ διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ ἑνός συνόλου νά ἀντιστοιχίζονται διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου.**
- **Στή μεταξύ τους ἀντιστοιχία νά μήν περισσεύουν στοιχεῖα κανενός συνόλου.**

Μιά ἰδιότητα τῶν ἰσοδύναμων συνόλων

2.8. Ἄς πάρουμε τώρα τά τρία σύνολα



Σχ. 6

$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B =$ {οἱ ἐποχές τοῦ ἔτους} καί $\Gamma = \{\Delta, \bigcirc, \square, ◪\}$ γιά τά ὁποῖα, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 6, ἰσχύουν $A \sim B$ καί $B \sim \Gamma$.

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου B ἔχει ἕνα ἀντίστοιχο στό σύνολο A καί ἕνα στό σύνολο Γ. Ἄν ἀντιστοιχίσουμε μεταξύ τους τά στοιχεῖα αὐτά τῶν συνόλων A καί Γ (ἡ ἀντιστοιχία αὐτή γίνεται μέ τά κόκκινα βέλη), βλέπουμε ὅτι τά σύνολα A καί Γ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἔτσι ἔχουμε τό συμπέρασμα:

> Ἄν $A \sim B$ καί $B \sim \Gamma$, τότε θά εἶναι $A \sim \Gamma$

Ἡ πρόταση αὐτή λέγεται **μεταβατική ἰδιότητα** τῆς ἰσοδυναμίας τῶν συνόλων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται τό σύνολο $A = \{\alpha, \varepsilon, \square, \bigcirc, \Delta, ⊖\}$. Ποιοί ἀπό τούς ἑπόμενους συμβολισμούς εἶναι σωστοί;**

(ι) $\alpha \in A$, (ιι) $\beta \notin A$, (ιιι) $⊖ \in A$, (ιν) $\bigcirc \in A$, (ν) $\Delta \notin A$, (νι) $\beta \in A$.

Λύση: Οἱ συμβολισμοί (i), (ii), (iv) εἶναι σωστοί. Οἱ (iii), (v), (vi) εἶναι λάθος.

2. **Νά καθορισθοῦν μέ ἀναγραφή τά σύνολα:**

ι) A = {οἱ μῆνες μέ ἀρχικό γράμμα Φ}

ιι) B = {οἱ μαθητές τοῦ τμήματός μου μέ ἡλικία μικρότερη ἀπό 6 χρόνια}.

Λύση: (i) A = {Φεβρουάριος}, δηλαδή εἶναι μονομελές σύνολο
(ii) Δέν ὑπάρχουν μαθητές στό τμῆμα μου μέ ἡλικία μικρότερη ἀπό 6 χρόνια. Συνεπῶς τό σύνολο B εἶναι τό $\varnothing$.

3. **Νά ἐξετασθεῖ ἄν εἶναι ἰσοδύναμα τά σύνολα:**

A = {οἱ ἡμέρες τῆς ἑβδομάδας}, B = {τά φωνήεντα}.

Λύση: Καθορίζουμε τά σύνολα μέ ἀναγραφή καί ἐξετάζουμε ἄν ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα μέ ἕνα χρησιμοποιώντας διπλά βέλη.

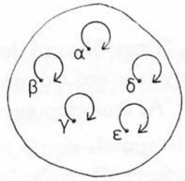
$$\begin{array}{llllllll} A = \{ & ΔΕ, & ΤΡ, & ΤΕ, & ΠΕ, & ΠΑ, & ΣΑ, & ΚΥ \,\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B = \{ & \alpha, & \varepsilon, & \eta, & \iota, & o, & \upsilon, & \omega \,\} \end{array}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τά σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα ($A \sim B$)

4. **Νά ἐξετασθεῖ ἄν ἕνα σύνολο εἶναι ἰσοδύναμο μέ τόν ἑαυτό του.**

Λύση: Παίρνουμε π.χ. τό σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ καί κάνουμε τήν ἀντιστοιχία:

A = { α, β, γ, δ, ε }
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
A = { α β γ δ, ε }



Σχ. 7

Παρατηροῦμε ὅτι A ∼ A.

Γενικά: **κάθε σύνολο εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸν ἑαυτό του**
(γιατί σέ κάθε στοιχεῖο του μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε τόν ἑαυτό του).
Ἡ πρόταση αὐτὴ λέγεται **ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα τῆς ἰσοδυναμίας τῶν συνόλων**.

---

5. Νά γράψετε ὅλες τίς δυνατές ἀντιστοιχίες ἕνα μέ ἕνα μεταξύ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Γ = {α,β,γ} καί Δ = {□, △, ○}.

Λύση: {α, β, γ}, {α, β, γ}, {α, β, γ}, {α, β, γ}, {α, β, γ}, {α, β, γ}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{□, △, ○}, { ·, ·, · }, { ·, ·, · }, { ·, ·, · }, { ·, ·, · }, { ·, ·, · }

---

6. Νά βρεῖτε καί νά γράψετε δίπλα ποιοί ἀπό τούς παρακάτω συμβολισμούς εἶναι σωστοί:

∅ = {∅} λάθος, α ∈ { } . . ., 0 = ∅ . . ., ∅ = { } . . ., 0 ∈ { } . . .,
{οἱ ἄνθρωποι πού ἔχουν πατήσει στή Σελήνη} = ∅ . . .

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Νά βρεῖτε ποιοί ἀπό τούς παρακάτω συμβολισμούς εἶναι σωστοί καί ποιοί ὄχι.
i) α ∈ {τά μικρά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου μας},
ii) κύβος ∈ {τά γεωμετρικά στερεά}, iii) νυχτερίδα ∈ {τά πουλιά},
iv) {α, β} ∈ {α, β, γ}.

12. Νά κάνετε τό ἴδιο στίς περιπτώσεις: i) 1 ∉ {οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοί},
ii) {1,2,α,β} = {α,β,2,1}, iii) 2 ∈ {τά βραχέα φωνήεντα}.

13. Νά γράψετε τό σύνολο τῶν βουνῶν τῆς Ἑλλάδας μέ ὕψος πάνω ἀπό 3500 μέτρα.

14. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν πόλεων τῆς Ἑλλάδας μέ πληθυσμό πάνω ἀπό i) 1 ἑκατομμύριο, ii) 4 ἑκατομμύρια.

15. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν συμμαθητῶν σας μέ ὕψος πάνω ἀπό 2,20 μέτρα;

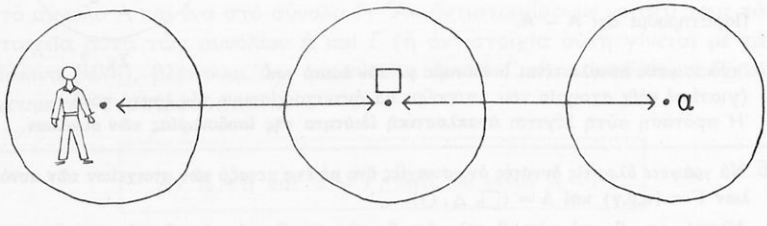
16. Ἐξετάστε ἄν εἶναι ἰσοδύναμα τά σύνολα:
i) {τά βραχέα φωνήεντα}, {○, ●}
ii) {1,2,3,4,5}, {τά δάκτυλα τοῦ δεξιοῦ μου ποδιοῦ}
iii) {1,2,3,4}, {2,4,6,8}
iv) {τά δίχρονα φωνήεντα}, {α, ι, υ}.

Σχηματισμός τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

2.9. Εἴπαμε ὅτι δυό σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα, ὅταν εἶναι δυνατό νά ἀντιστοιχίσουμε τά στοιχεῖα τους ἕνα μέ ἕνα. Συνηθίζουμε ἀντί νά λέμε «τά στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων ἀντιστοιχίζονται ἕνα μέ ἕνα», νὰ λέμε «*τά δυό σύνολα ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος στοιχείων*».

Ἔτσι ὅλα τά ἰσοδύναμα μεταξύ τους σύνολα ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος στοιχείων καί τό πλῆθος αὐτό εἶναι ἕνα κοινό γνώρισμά τους.

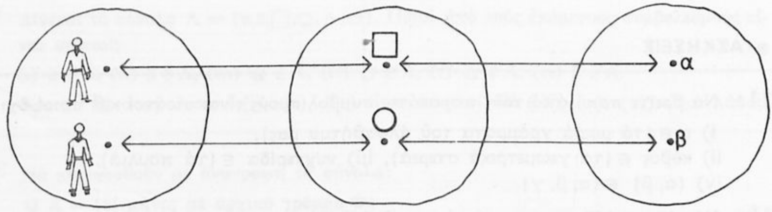
Ἄς θεωρήσουμε τώρα ὅλα τά μονομελή σύνολα. Αὐτά εἶναι ἰσοδύναμα



Σχ. 8

μεταξύ τους καί τό κοινό γνώρισμά τους (τό πλῆθος τῶν στοιχείων τους) τό ἐκφράζουμε μέ τή λέξη **ἕνα** (Σχ. 8).

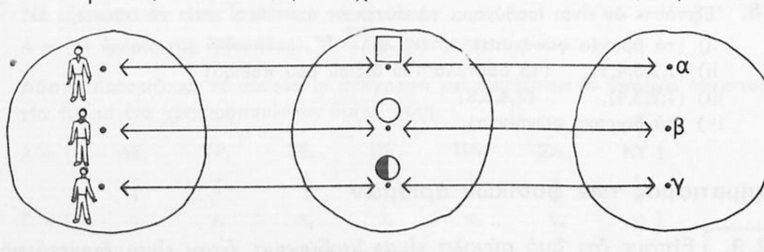
Βάζοντας ἕνα ἀκόμη στοιχεῖο σέ καθένα ἀπό τά μονομελή σύνολα σχηματίζουμε σύνολα πού εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμα (ἀφοῦ μποροῦμε νά



Σχ. 9

ἀντιστοιχίσουμε μεταξύ τους καί τά νέα στοιχεῖα πού βάλαμε) (Σχ. 9). Τό κοινό γνώρισμα τῶν συνόλων αὐτῶν (δηλ. τό πλῆθος τῶν στοιχείων τους) ἐκφράζεται μέ τή λέξη **δύο**.

Ἄν βάλουμε ἕνα ἀκόμη στοιχεῖο σέ καθένα ἀπό τά διμελή σύνολα,



Σχ. 10

σχηματίζουμε σύνολα τά ὁποῖα, ὅπως δείχνεται μέ τόν ἴδιο τρόπο, εἶναι ἐπίσης ἰσοδύναμα (Σχ. 10).

Τό κοινό γνώρισμα τῶν συνόλων αὐτῶν ἐκφράζεται μέ τή λέξη **τρία.**

Εἶναι φανερό πώς τήν προηγούμενη ἐργασία γιά τό σχηματισμό ἰσοδύναμων συνόλων μποροῦμε νά τή συνεχίσουμε ὅσο θέλουμε.

Ὡς ἐδῶ δέν κάναμε λόγο γιά τό κενό σύνολο, γιατί, ὅπως εἴπαμε, εἶναι μοναδικό καί δέν ὑπάρχουν ἄλλα σύνολα ἰσοδύναμα μ' αὐτό. Πάντως καί τό κενό σύνολο ἔχει ἕνα χαρακτηριστικό γνώρισμα. **Δέν ἔχει στοιχεῖα.** Τό χαρακτηριστικό αὐτό γνώρισμα τό ἐκφράζουμε μέ τή λέξη **μηδέν**. Οἱ λέξεις **μηδέν**, **ἕνα**, **δύο**, **τρία**, **τέσσερα**, **. . .** πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά ἐκφράσουμε τό χαρακτηριστικό γνώρισμα τοῦ κενοῦ συνόλου καί τά κοινά γνωρίσματα (δηλ. τά πλήθη τῶν στοιχείων τους) τῶν ἰσοδύναμων συνόλων, εἶναι οἱ ὀνομασίες τῶν **φυσικῶν ἀριθμῶν** πού παριστάνονται μέ τά γνωστά μας σύμβολα(1)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Τό σύνολο πού σχηματίζουν οἱ φυσικοί ἀριθμοί ὀνομάζεται **σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν** καί παριστάνεται μέ $\mathbb{N}$.(2) Ἔχουμε λοιπόν

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}}$$

Μέ τίς τρεῖς τελεῖες πού βάλαμε μετά τό ψηφίο 4 ἐννοοῦμε ὄχι μόνο πώς τά ἑπόμενα στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{N}$ βρίσκονται μέ γνωστή διαδικασία καί ἔχουν προκαθορισμένη σειρά, ἀλλά ἀκόμη ὅτι **οἱ φυσικοί ἀριθμοί δέν ἔχουν τέλος.**

Ἕνα τέτοιο σύνολο στά μαθηματικά τό λέμε **ἀπειροσύνολο**. Ἄν ἀπό τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐξαιρέσουμε τό 0, ἔχουμε ἕνα νέο σύνολο, τό $\{1,2,3,4,\ldots\}$, πού παριστάνεται μέ $\mathbb{N}^*$ καί διαβάζεται «νί ἄστρο». Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}}$$

Εἶναι φανερό πώς καί τό σύνολο $\mathbb{N}^*$ εἶναι ἀπειροσύνολο.

Παράσταση τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέ γράμματα

2.10. Στά μαθηματικά χρησιμοποιοῦμε συχνά γράμματα, γιά νά παραστήσουμε ἀριθμούς. Αὐτό τό ξέρουμε ἀπό τό Δημοτικό Σχολεῖο, ὅπου

(1) Τά σύμβολα 1,2,3,4,5,6,7,8,9, πού χρησιμοποιοῦνται σήμερα σχεδόν ἀπ' ὅλο τόν κόσμο, ἐπινοήθηκαν ἀπό τούς Ἰνδούς. Ἀπ' αὐτούς τά πῆραν οἱ Ἄραβες καί τά διέδωσαν στή Β. Ἀφρική καί τήν Ἱσπανία, ἀπ' ὅπου ἔφτασαν καί στήν ὑπόλοιπη Εὐρώπη πρίν ἀπό χίλια χρόνια περίπου. Γι' αὐτό τά σύμβολα αὐτά λέγονται, ὄχι πολύ σωστά, **Ἀραβικά ψηφία**. Τό σύμβολο 0 ἐπινοήθηκε ἀργότερα.

(2) Τό σύμβολο $\mathbb{N}$ προέρχεται ἀπό τό ἀρχικό γράμμα τῆς λέξεως Natural, ἤ Naturel πού σημαίνει «φυσικός».

γιά νά βροῦμε π.χ. τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ διαστάσεις α καί β χρησιμοποιοῦμε τόν τύπο

$$\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$$

Στόν τύπο αὐτό κάθε γράμμα μπορεῖ νά πάρει διάφορες τιμές, ἀνάλογα μέ τό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο πού μᾶς δίνεται. Ἔτσι μπορεῖ νά ἔχουμε $\alpha = 10$ ἑκ. $\beta = 5$ ἑκ., ἤ $\alpha = 12$ ἑκ., $\beta = 3$ ἑκ. κ.λ.π.

Τά γράμματα πού χρησιμοποιοῦμε, γιά νά παραστήσουμε ἀριθμούς, λέγονται **γενικοί ἀριθμοί**. Γιά γενικούς ἀριθμούς θά χρησιμοποιοῦμε συνήθως τά μικρά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου μας.

Γνήσιο ὑποσύνολο ἑνός συνόλου

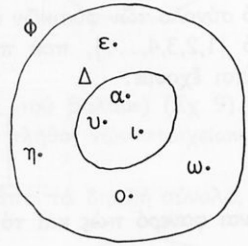
2.11. Ἄς θεωρήσουμε τά σύνολα

Α = {οἱ κάτοικοι τῆς Ἑλλάδας}

Β = {οἱ κάτοικοι τῆς Εὐρώπης}.

Παρατηροῦμε πώς τό σύνολο Α σχηματίζεται ἀπό μερικά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Β, γι' αὐτό λέγεται **γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Β**. Γενικά:

> Κάθε σύνολο Α, πού σχηματίζεται ἀπό μερικά στοιχεῖα (ὄχι ὅλα) ἑνός συνόλου Β, λέγεται γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Β.



Σχ. 11

Ἔτσι τό σύνολο Δ = {τά δίχρονα φωνήεντα} εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Φ = {τά φωνήεντα}. Ἐπίσης γνήσια ὑποσύνολα τοῦ Φ εἶναι τά {η, ω, ι}, {τά μακρά φωνήεντα}, κ.λ.π.

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

> Ἕνα σύνολο Α εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο ἑνὸς συνόλου Β, ἄν ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ Α ἀνήκουν στό Β καί ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο στοιχεῖο τοῦ Β, πού δέν ἀνήκει στό Α.

Γιά νά δηλώσουμε πώς τό σύνολο Α εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Β, γρά-φουμε

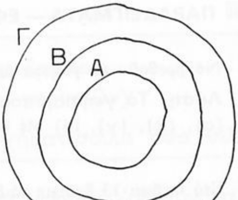
$$\boxed{A \subset B}$$

καί διαβάζουμε *«τό A εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ B»*.

Ἔτσι λοιπόν ἄν ἔχουμε τά σύνολα A = {οἱ μαθητές τῆς τάξεώς μου} καί B = {οἱ μαθητές τοῦ Γυμνασίου μου}, μποροῦμε νά γράφουμε $A \subset B$.

Μιά ἰδιότητα τῶν γνήσιων ὑποσυνόλων

2.12. Ἄς πάρουμε τώρα τρία σύνολα A, B, Γ τέτοια, ὥστε $A \subset B$ καί $B \subset \Gamma$, π.χ. τά A = {τά μακρά φωνήεντα}, B = {τά φωνήεντα}, Γ = {τά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου}. Ἀφοῦ τό Γ περιέχει ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ B καί ἄλλα ἀκόμη καί τό B περιέχει ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A καί ἄλλα ἀκόμη, συμπεραίνουμε πώς τό Γ θά περιέχει ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ A καί ἄλλα ἀκόμη (Σχ. 12). Συνεπῶς θά εἶναι $A \subset \Gamma$.



Σχ. 12

Καταλήξαμε λοιπόν στό συμπέρασμα:

Ἄν εἶναι $A \subset B$ καί $B \subset \Gamma$, τότε θά εἶναι καί $A \subset \Gamma$.

Τήν ἰδιότητα αὐτή τή λέμε **μεταβατική**.

Ὑποσύνολο ἑνός συνόλου

2.13. Ἄς θεωρήσουμε τά σύνολα
A = {οἱ παρόντες μαθητές τῆς τάξεώς μου},
B = {οἱ μαθητές τῆς τάξεώς μου}.

Γιά τά σύνολα αὐτά παρατηροῦμε ὅτι:
ἤ δέ θά ἀπουσιάζει κανείς μαθητής, ὁπότε $A = B$,
ἤ θά ἀπουσιάζουν μερικοί μαθητές, ὁπότε $A \subset B$.

Σέ περιπτώσεις ὅπως αὐτή τῶν παραπάνω συνόλων A καί B, ἀντί νά γράφουμε «$A = B$ ἤ $A \subset B$», γράφουμε πιό σύντομα

$$\boxed{A \subseteq B}$$

καί διαβάζουμε *«τό A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ B»*.

Τό κενό σύνολο θεωρεῖται ὑποσύνολο κάθε συνόλου (ἀκόμη καί τοῦ ἑαυτοῦ του).

Δηλαδή γιά κάθε σύνολο B μποροῦμε νά γράφουμε

$$\boxed{\varnothing \subseteq B}$$

Ἂν σκεφτοῦμε ὅπως στήν § 2.12, καταλήγουμε στό συμπέρασμα:

Ἂν εἶναι $A \subseteq B$ καί $B \subseteq \Gamma$, τότε θά εἶναι καί $A \subseteq \Gamma$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι ἰσχύει καί ἐδῶ ἡ *μεταβατική ἰδιότητα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

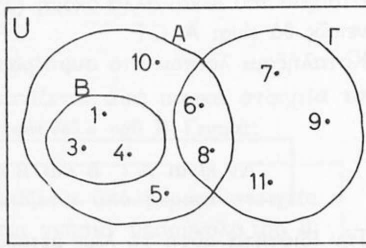
1. **Νά βρεθοῦν τά γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου {α,β,γ}**

Λύση: Τά γνήσια ὑποσύνολα τοῦ {α,β,γ} εἶναι: i) τό ∅. ii) Μέ ἕνα στοιχεῖο τά {α}, {β}, {γ}. iii) Μέ δύο στοιχεῖα τά {α,β}, {α,γ}, {β,γ}.

2. **Στό σχῆμα 13 ἔχουμε τά διαγράμματα τῶν συνόλων Α,Β,Γ,U.**
Νά βρεῖτε ποιά ἀπό τά σύνολα αὐτά εἶναι γνήσια ὑποσύνολα ἄλλων.

Λύση: Εἶναι $B \subset A$, $A \subset U$, $B \subset U$, $\Gamma \subset U$.

Σημείωση. Γιά τά σύνολα Α καί Γ δέν μποροῦμε νά γράψουμε $A \subseteq \Gamma$ οὔτε $\Gamma \subseteq A$. Τά σύνολα αὐτά *«δέ συγκρίνονται»*.



Σχ. 13

3. **Δίνονται τά σύνολα $A = \{1,2,3,\ldots,12\}$, $B = \{2,4,6,8,10,12\}$, $\Gamma = \{3,6,9,12\}$, $\Delta = \{6,12\}$. Ποιές ἀπό τίς σχέσεις $B \subseteq A$, $\Gamma \subset \Delta$, $\Gamma \subseteq \Delta$, $B \subseteq B$, $\Delta \subseteq B$, $\Delta \subseteq \Delta$ καί $A \subseteq \Gamma$ εἶναι σωστές;**

Λύση: $B \subseteq A$ (σωστή), $\Gamma \subset \Delta$ (λάθος), $\Gamma \subseteq \Delta$ (λάθος), $B \subseteq B$ (σωστή), $\Delta \subseteq B$ (σωστή), $\Delta \subseteq \Delta$ (σωστή) καί $A \subseteq \Gamma$ (λάθος).

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ $B \subseteq B$, $\Delta \subseteq \Delta$ εἶναι σωστές, δηλαδή *κάθε σύνολο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του* **(ἀνακλαστική ἰδιότητα).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Νά γράψετε τρία γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Α = {τά γράμματα τῆς λέξεως «θερμόμετρο»}.

18. Νά βρεῖτε ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «ἀλλά».

19. Νά ὁρίσετε τό ὑποσύνολο τοῦ ℕ πού τά στοιχεῖα του εἶναι μονοψήφιοι ἀριθμοί.

20. Νά ὁρίσετε ὅλα τά μονομελή ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Α = {τά γράμματα τῆς λέξεως «ἀπό»}.

21. Νά κάνετε τό ἴδιο γιά ὅλα τά ὑποσύνολα μέ δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α = {τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ «53254»}.

Γνήσια ὑποσύνολα τοῦ ℕ

2.14. Κάθε σύνολο πού ἔχει στοιχεῖα φυσικούς ἀριθμούς (καί δέν εἶναι τό ἴδιο τό ℕ) εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

Ἔτσι π.χ. γνήσια ὑποσύνολα τοῦ ℕ εἶναι τὰ σύνολα

$\{2,5,7\}$
$\{0,5,10,15,20,25\}$
$\{0,2,4,6,\ldots\}$ (τό σύνολο τῶν ἄρτιων)
$\{1,3,5,7,\ldots\}$ (τό σύνολο τῶν περιττῶν)

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πώς μποροῦμε νά σχηματίσουμε ὅσα θέλουμε γνήσια ὑποσύνολα τοῦ ℕ.

Στά μαθηματικά μᾶς ἐνδιαφέρουν πολύ τά γνήσια ὑποσύνολα τοῦ

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,\ldots\}$$

πού σχηματίζονται μέ τά πρῶτα στοιχεῖα του.

$$T_1 = \{1\}$$
$$T_2 = \{1,2\}$$
$$T_3 = \{1,2,3\}$$
$$T_4 = \{1,2,3,4\}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Αὐτά τά σύνολα τά λέμε **ἀρχικά ἀποκόμματα** (ἤ **ἀρχικά τμήματα**) τοῦ ℕ* καί τά συμβολίζουμε, ὅπως βλέπουμε, μέ τό ἴδιο γράμμα Τ, τό ὁποῖο συνοδεύεται ἀπό ἕνα *δείκτη* πού μᾶς λέει ποιό εἶναι τό τελευταῖο στοιχεῖο τους. Ἔτσι π.χ. μέ τό T_{85} ἐννοοῦμε τό ἀρχικό ἀπόκομμα $\{1,2,3,\ldots,85\}$.

Εἶναι φανερό ὅτι κάθε ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ ℕ* εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο ὅλων τῶν ἑπόμενων ἀποκομμάτων του (μέ τή σειρά πού τά γράψαμε πιό πάνω). Ἔτσι, ἀφοῦ εἶναι καί $\varnothing \subset T_1$, ἔχουμε:

$$\boxed{\varnothing \subset T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \ldots \subset T_\nu \subset \ldots}$$

Πεπερασμένα σύνολα — πληθάριθμος συνόλου

2.15. Κάθε σύνολο τό ὁποῖο εἶναι ἰσοδύναμο μέ ἕνα ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ ℕ* λέγεται **πεπερασμένο σύνολο.**

Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα ὁρισμένο σύνολο, π.χ. τό σύνολο τῶν φωνηέντων

$$\Phi = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}.$$

Γιά νά βροῦμε μέ ποιό ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ ℕ* εἶναι ἰσοδύναμο τό σύνολο Φ, ἀντιστοιχίζουμε τά στοιχεῖα του *ἕνα μὲ ἕνα* μέ τά πρῶτα στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \Phi & = & \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\} \\ & & \;\updownarrow\;\updownarrow\;\updownarrow\;\updownarrow\;\updownarrow\;\updownarrow\;\updownarrow \\ \mathbb{N}^* & = & \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \;\; 8, 9, \ldots\} \end{array}$$

Βλέπουμε ἀμέσως πώς τό σύνολο Φ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ἀρχικό ἀπόκομμα T_7. Τό τελευταῖο στοιχεῖο τοῦ T_7, δηλαδή ὁ φυσικός ἀριθμός 7, ἀντιπροσωπεύει τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Φ καί λέγεται **πληθάριθμος** τοῦ Φ ἤ **πληθικός ἀριθμός** τοῦ Φ.

Ἡ ἐργασία πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τόν πληθάριθμο ἑνός συνόλου, λέγεται **ἀπαρίθμηση** τοῦ συνόλου αὐτοῦ.

Στήν πράξη γιά νά κάνουμε ἀπαρίθμηση ἑνός συνόλου, π.χ. τῶν θρανίων τῆς τάξεώς μας, τά δείχνουμε ἕνα-ἕνα καί προφέρουμε διαδοχικά τούς ἀριθμούς 1,2,3 κ.λ.π. Ὁ φυσικός ἀριθμός πού προφέρουμε τελευταῖο εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου τῶν θρανίων τῆς τάξεώς μας.

Ὡς πληθάριθμο τοῦ κενοῦ συνόλου παίρνουμε τό μηδέν.

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε γιά τόν πληθάριθμο καταλαβαίνουμε ὅτι:

α) **Τά ἀρχικά ἀποκόμματα $T_1, T_2, T_3, \ldots$ τοῦ $\mathbb{N}^*$ ἔχουν πληθάριθμους τούς φυσικούς 1, 2, 3, ... ἀντιστοίχως.**

β) **Τά ἴσα σύνολα ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο.**

γ) **Τά ἰσοδύναμα σύνολα ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο.**

δ) **Τά σύνολα πού ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο εἶναι ἰσοδύναμα.**

Τά ἀπειροσύνολα δέν εἶναι πεπερασμένα σύνολα, γιατί δέν εἶναι ἰσοδύναμα μέ κάποιο ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ $\mathbb{N}^*$.

Ἴσοι ἀριθμοί

2.16. Ἄς θεωρήσουμε δυό πεπερασμένα σύνολα Α καί Β καί ἄς ὀνομάσουμε α καί β τούς πληθάριθμούς τους. Ἄν τά σύνολα Α καί Β εἶναι ἰσοδύναμα, θά ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο καί ἔτσι οἱ γενικοί ἀριθμοί α καί β θά παριστάνουν τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό. Δυό τέτοιοι γενικοί ἀριθμοί λέγονται **ἴσοι**. Γιά νά δηλώσουμε ὅτι δυό γενικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι ἴσοι, γράφουμε:

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

Δύο φυσικοί ἀριθμοί πού δέν εἶναι ἴσοι λέγονται **ἄνισοι** (ὄχι ἴσοι). Γιά νά δηλώσουμε ὅτι οἱ γενικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι ἄνισοι, γράφουμε:

$$\boxed{\alpha \neq \beta}$$

καί διαβάζουμε *«ὁ α εἶναι διαφορετικός ἀπό τόν β»* ἤ *«ὁ α εἶναι ἄνισος πρός τόν β»*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Μέ ποιό ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ $\mathbb{N}^*$ εἶναι ἰσοδύναμο καθένα ἀπό τά σύνολα: Α = {οἱ μῆνες τοῦ ἔτους}, Β = {οἱ μέρες τῆς ἑβδομάδας}, Γ = {οἱ νομοί τῆς Θράκης}, Δ = {τά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου}. Νά βρεθοῦν οἱ πληθάριθμοί τους.**

Λύση: Ἄν ἐργασθοῦμε ὅπως στήν § 2.15, βρίσκουμε ὅτι: $A \sim T_{12}$, $B \sim T_7$, $\Gamma \sim T_3$, $\Delta \sim T_{24}$. Συνεπῶς οἱ πληθάριθμοι τῶν συνόλων αὐτῶν εἶναι τοῦ Α ὁ 12, τοῦ Β ὁ 7, τοῦ Γ ὁ 3, τοῦ Δ ὁ 24.

2. **Ποιά ἀπό τά παρακάτω σύνολα εἶναι πεπερασμένα καί ποιά ἀπειροσύνολα: Α = {οἱ κάτοικοι τῆς Ἀθήνας}, Β = {3,6,9,12, ...}, Γ = {0,2,4,6,...,70}**

Λύση: Τά σύνολα Α καί Γ εἶναι πεπερασμένα, γιατί εἶναι ἰσοδύναμα μέ κάποιο ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ $\mathbb{N}^*$. Τό Β εἶναι ἀπειροσύνολο.

3. **Ποιά ἀπό τά ἑπόμενα σύνολα ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο; Α = {οἱ νομοί τῆς Ἑλλάδας}, Β = {τά Ἑπτάνησα}, Γ = {οἱ πρωτεύουσες τῶν νομῶν τῆς Ἑλλάδας}, Δ = {τά φωνήεντα}, Ε = {τά κράτη τῆς Βαλκανικῆς}.**

Λύση: Τά σύνολα Α καί Γ ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο, γιατί $A \sim \Gamma$. Ἐπίσης τά Β καί Δ ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο, γιατί $B \sim T_7$ καί $T_7 \sim \Delta$, ὁπότε $B \sim \Delta$ (μεταβατική ἰδιότητα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22. Νά βρεῖτε τούς πληθάριθμους τῶν συνόλων: i) {2,4,6,...,20}, ii) {τά νησιά τῆς Δωδεκανήσου}, iii) {τά σύμφωνα τοῦ ἀλφαβήτου}, iv) {οἱ τάξεις τοῦ Γυμνασίου}.

23. Μέ ποιό ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ $\mathbb{N}^*$ εἶναι ἰσοδύναμο καθένα ἀπό τά σύνολα: Α = {τά σύμφωνα τῆς λέξεως «ἄν»}, Β = {οἱ μῆνες μέ 31 ἡμέρες}, Γ = {τά Ἑπτάνησα}, Δ = {τά φωνήεντα τῆς λέξεως «καρτερικός»}, Ε = {οἱ νομοί τῆς Κρήτης}. Ποιά ἀπό τά σύνολα αὐτά εἶναι ἰσοδύναμα καί ποιοί οἱ πληθάριθμοί τους;

24. Ποιοί εἶναι οἱ πληθάριθμοι τῶν συνόλων Α = {0,2,4,...,28}, Β = {5,10,15,...,90}, Γ = {10,20,30,...,90}.

25. Μέ ποιό ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ $\mathbb{N}^*$ εἶναι ἰσοδύναμο καθένα ἀπό τά σύνολα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

Τά σύμβολα $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$

2.17. Ἄς πάρουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τόν 3 πού εἶναι πληθάριθμος τοῦ T_3 καί τόν 12 πού εἶναι πληθάριθμος τοῦ T_{12}. Ἐπειδή εἶναι $T_3 \subset T_{12}$, λέμε ὅτι ὁ 3 εἶναι **μικρότερος** ἀπό τόν 12.

Γενικά, ἄν ἔχουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς α καί β, θά λέμε ὅτι:

Ὁ α εἶναι μικρότερος ἀπό τόν β, ὅταν $T_\alpha \subset T_\beta$.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ὁ α εἶναι μικρότερος ἀπό τόν β, γράφουμε

$$\boxed{\alpha < \beta}$$

Ἔτσι π.χ. $3 < 7$, γιατί $T_3 \subset T_7$, καί $5 < 12$, γιατί $T_5 \subset T_{12}$.

Ὅταν ὁ α εἶναι μικρότερος ἀπό τόν β, ὁ β λέγεται **μεγαλύτερος** ἀπό τόν α. Τότε γράφουμε:

$$\boxed{\beta > \alpha}$$

Δηλαδή οἱ δύο συμβολισμοί $\alpha < \beta$ καί $\beta > \alpha$ ἔχουν τήν ἴδια σημασία. Τά σύμβολα $<$ καί $>$ λέγονται **σύμβολα ἀνισότητας** καί οἱ σχέσεις $\alpha < \beta$ καί $\beta > \alpha$ λέγονται **ἀνισότητες.**

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι ὁ συμβολισμός $\alpha \neq \beta$ πού εἴδαμε στήν § 2.16 σημαίνει $\alpha < \beta$ ἤ $\alpha > \beta$.

Μιά ἰδιότητα τῶν ἀνισοτήτων

2.18. Ἄς θεωρήσουμε τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς α,β,γ, τέτοιους, ὥστε

$$\alpha < \beta \quad \text{καί} \quad \beta < \gamma$$

Τότε ὅμως θά εἶναι $T_\alpha \subset T_\beta$ καί $T_\beta \subset T_\gamma$· ὁπότε συμπεραίνουμε ὅτι $T_\alpha \subset T_\gamma$ *(μεταβατική ἰδιότητα)*. Συνεπῶς θά εἶναι $\alpha < \gamma$.

Καταλήξαμε λοιπόν στό συμπέρασμα:

Ἄν εἶναι $\alpha < \beta$ καί $\beta < \gamma$, τότε θά εἶναι καί $\alpha < \gamma$

Ἡ πρόταση αὐτή λέγεται *μεταβατική ἰδιότητα* τῶν ἀνισοτήτων.

Σημείωση: Τίς ἀνισότητες $\alpha < \beta$ καί $\beta < \gamma$ τίς γράφουμε συντομότερα

$$\alpha < \beta < \gamma$$

Ἰδιότητες τῶν πληθάριθμων συνόλων

2.19. Ἄς πάρουμε τώρα δυό πεπερασμένα σύνολα Α καί Β τέτοια, ὥστε $A \subset B$, π.χ. τά $A = \{$τά σύμφωνα$\}$, $B = \{$τά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου$\}$. Τό σύνολο Α ἔχει πληθάριθμο 17 (γιατί $A \sim T_{17}$) καί τό Β ἔχει πληθάριθμο 24 (γιατί $B \sim T_{24}$). Ἐπειδή εἶναι $T_{17} \subset T_{24}$, θά εἶναι $17 < 24$. Γενικά:

Ἄν ἕνα σύνολο Α εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο ἑνός συνόλου Β, ὁ πληθάριθμος τοῦ Α εἶναι μικρότερος ἀπό τόν πληθάριθμο τοῦ Β.

Ἀπ' αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι:

Ἄν ἕνα σύνολο Α εἶναι ἰσοδύναμο μέ ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο ἑνός συνόλου Β, ὁ πληθάριθμος τοῦ Α εἶναι μικρότερος ἀπό τόν πληθάριθμο τοῦ Β.

Ἔτσι π.χ. ἄν παραστήσουμε μέ α τόν πληθάριθμο τοῦ συνόλου Α = {οἱ μαθητές τῆς τάξεώς μου} καί μέ β τόν πληθάριθμο τοῦ συνόλου Β = {οἱ μαθητές τοῦ Γυμνασίου μου}, θά εἶναι $\alpha < \beta$, γιατί εἶναι $A \subset B$.

Στήν § 2.13 εἴδαμε πώς, ὅταν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα σύνολο Α εἶναι ἴσο μέ ἕνα σύνολο Β ἤ γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Β, ἀντί νά γράψουμε «$A = B$ ἤ $A \subset B$» γράφουμε πιό σύντομα $A \subseteq B$.

Γιά τούς πληθάριθμους α καί β τῶν συνόλων αὐτῶν πρέπει νά γράφουμε «$\alpha = \beta$ ἤ $\alpha < \beta$». Γιά συντομία ὅμως (ὅπως καί στά σύνολα) γράφουμε

$$\boxed{\alpha \leq \beta}$$

καί διαβάζουμε «ὁ α εἶναι **μικρότερος ἤ ἴσος** τοῦ β».

Ὅταν ἔχουμε $\alpha \leq \beta$, τότε λέμε πώς ὁ β εἶναι **μεγαλύτερος ἤ ἴσος** τοῦ α, καί γράφουμε

$$\boxed{\beta \geq \alpha}$$

Δηλαδή οἱ συμβολισμοί $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \geq \alpha$ ἔχουν τήν ἴδια σημασία.

Ἡ διάταξη στό $\mathbb{N}$

2.20. Εἴδαμε πώς οἱ φυσικοί ἀριθμοί 0, 1, 2, 3, ... εἶναι ἀντιστοίχως πληθάριθμοι τῶν συνόλων $\varnothing, T_1, T_2, T_3, \ldots$

Ἀφοῦ γιά τά σύνολα ἰσχύει

$$\varnothing \subset T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \ldots,$$

θά εἶναι καί
$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι οἱ φυσικοί ἀριθμοί μποροῦν πάντα νά μποῦν σέ μιά σειρά ἔτσι, ὥστε αὐτός πού προηγεῖται νά εἶναι ὁ μικρότερος. Ἡ σειρά αὐτή λέγεται **φυσική διάταξη τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.** Ἔχοντας τούς φυσικούς ἀριθμούς στή φυσική τους διάταξη παρατηροῦμε ὅτι:

α) Τό μηδέν εἶναι τό μικρότερο στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{N}$.

β) Δέν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός, πού νά εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{N}$.

γ) Ἄν ἔχουμε δύο ἄνισους φυσικούς ἀριθμούς α καί β, θά εἶναι

$$\alpha < \beta \text{ ἤ } \beta < \alpha.$$

δ) Ἄν ἔχουμε δύο ὁποιουσδήποτε φυσικούς ἀριθμούς α καί β, θά εἶναι

$$\alpha < \beta \text{ ἤ } \alpha = \beta \text{ ἤ } \beta < \alpha.$$

ε) Ὅταν γιά δύο φυσικούς ἀριθμούς α καί β ἰσχύουν συγχρόνως $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \alpha$, τότε θά εἶναι $\alpha = \beta$ (ἀφοῦ ἀποκλείεται νά εἶναι συγχρόνως καί ἴσοι καί ἄνισοι, ὅπως ἐπίσης ἀποκλείεται νά εἶναι συγχρόνως $\alpha < \beta$ καί $\alpha > \beta$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ἄν A = {οἱ παρόντες μαθητές τῆς τάξεώς μου} καί B = {οἱ μαθητές τῆς τάξεώς μου}, νά βρεθεῖ ποιά σχέση ὑπάρχει μεταξύ τῶν πληθάριθμῶν τους α καί β.

Λύση: Ἐπειδή εἶναι $A \subseteq B$, θά εἶναι $\alpha \leq \beta$.

2. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές πού μπορεῖ νά πάρει ὁ φυσικός ἀριθμός x σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω σχέσεις:

i) $x < 4$, ii) $x \leq 3$, iii) $2 < x < 6$, iv) $0 \leq x \leq 5$, v) $10 < x \leq 12$.

Λύση: i) $x = 0$ ἤ $x = 1$ ἤ $x = 2$ ἤ $x = 3$, ii) $x = 0$ ἤ $x = 1$ ἤ $x = 2$ ἤ $x = 3$, iii) $x = 3$ ἤ $x = 4$ ἤ $x = 5$, iv) $x = 0$ ἤ $x = 1$ ἤ $x = 2$ ἤ $x = 3$ ἤ $x = 4$ ἤ $x = 5$, v) $x = 11$ ἤ $x = 12$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

26. Νά ὁρίσετε τό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{N}$ γιά τά στοιχεῖα x τοῦ ὁποίου ἰσχύουν: $3 < x < 10$.

27. Νά κάνετε τό ἴδιο, ἄν εἶναι $x > 8$ ἤ $x < 3$.

28. Νά κάνετε τό ἴδιο, ἄν γιά τά στοιχεῖα τοῦ ὑποσυνόλου τοῦ $\mathbb{N}$ ἰσχύουν $x \geq 9$ καί $x < 20$

29. Νά ὁρίσετε τό σύνολο Σ μέ τό μικρότερο πληθάριθμο, ὥστε νά εἶναι $A \subseteq \Sigma$ καί $B \subseteq \Sigma$, ὅπου: i) $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B = \{\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, ii) $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, iii) $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B = \varnothing$, iv) $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί $B = \{\beta,\varepsilon,\delta\}$, v) $A = \{\alpha,\gamma\}$ καί $B = \{\beta,\delta,\varepsilon\}$.

30. Νά βρεῖτε τίς τιμές πού μπορεῖ νά πάρει ὁ φυσικός ἀριθμός ψ σέ κάθε μιά ἀπό τίς περιπτώσεις: i) $\psi \leq 6$, ii) $3 \leq \psi < 5$, iii) $0 \leq \psi \leq 3$, iv) $2 < \psi \leq 3$, v) $5 \leq \psi < 6$.

31. Γιά τούς φυσικούς ἀριθμούς x καί ψ εἶναι γνωστό ὅτι $x < \psi < 6$ καί $2 < x < 5$. Νά ὁρίσετε τά ζεύγη τιμῶν πού μποροῦν νά πάρουν τά x καί ψ.

1. Ἡ λέξη **σύνολο** χρησιμοποιεῖται, ὅταν διαφορετικά μεταξύ τους ἀντικείμενα ἀντιμετωπίζονται σάν μιά ὁλότητα. Τά ἀντικείμενα αὐτά εἶναι τά **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου καί ὁ συμβολισμός

$$\alpha \in A \quad (\text{ἤ } \alpha \notin A)$$

σημαίνει πώς τό ἀντικείμενο α ἀνήκει (ἤ δέν ἀνήκει) στό A.

Ἕνα σύνολο μπορεῖ νά καθοριστεῖ:

- *μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του*, π.χ. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- *μέ περιγραφή μιᾶς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῶν στοιχείων του*, π.χ. A = {οἱ κάτοικοι τῆς Ἀθήνας}

Τά σύνολα πού ἔχουν τά ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα λέγονται **ἴσα** καί τότε γράφουμε $A = B$.

Τά σύνολα μέ ἕνα στοιχεῖο λέγονται **μονομελή**. Τό **κενό σύνολο** δέν ἔχει στοιχεῖα καί εἶναι μοναδικό. Συμβολίζεται μέ: $\varnothing$ ἤ $\{\ \}$.

Τό σύνολο A, πού σχηματίζεται ἀπό μερικά μόνο στοιχεῖα ἑνός συνόλου B, λέγεται **γνήσιο ὑποσύνολο** τοῦ B καί γράφουμε $A \subset B$. Ἰσχύει ἐδῶ ἡ μεταβατική ἰδιότητα. «Ἄν $A \subset B$ καί $B \subset \Gamma$, τότε θά εἶναι $A \subset \Gamma$».

Μέ τό συμβολισμό $A \subseteq B$ ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι «$A = B$ ἤ $A \subset B$».

2. Τά σύνολα A καί B, πού τά στοιχεῖα τους ἀντιστοιχίζονται *ἕνα μέ ἕνα*, λέγονται **ἰσοδύναμα**. Γράφουμε: $A \sim B$.

Τά ἰσοδύναμα σύνολα ἔχουν τόν ἴδιο **πληθάριθμο**, πού εἶναι ἕνας **φυσικός ἀριθμός**. Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι τό

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

Τό γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{N}$ πού προκύπτει ἄν ἐξαιρέσουμε τό 0, εἶναι τό

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$$

Τά σύνολα: $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{1,2\}$, $T_3 = \{1,2,3\}, \ldots,$ $T_\alpha = \{1,2,3,\ldots,\alpha\}$ λέγονται **ἀρχικά ἀποκόμματα τοῦ** $\mathbb{N}^*$. Κάθε σύνολο ἰσοδύναμο μέ ἕνα ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ $\mathbb{N}^*$ λέγεται **πεπερασμένο**.

Ἄν εἶναι $A \sim T_\alpha$, ὁ φυσικός ἀριθμός α εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ A.

Ἄν α καί β εἶναι οἱ πληθάριθμοι τῶν ἰσοδύναμων συνόλων A καί B, γράφουμε $\alpha = \beta$ καί ἐννοοῦμε ὅτι οἱ γενικοί ἀριθμοί α καί β παριστάνουν τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό.

Ὡς πληθάριθμο τοῦ κενοῦ συνόλου παίρνουμε τό μηδέν.

3. Ὁ ἀριθμός α εἶναι **μικρότερος** ἀπό τόν β (γράφουμε $\alpha < \beta$), ἄν $T_\alpha \subset T_\beta$.

Ἔτσι ἔχουμε τή «*φυσική διάταξη*» τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

Ὁ συμβολισμός $\alpha < \beta$ γράφεται καί $\beta > \alpha$ καί διαβάζεται «ὁ β εἶναι **μεγαλύτερος** ἀπό τόν α».

Γιά δύο φυσικούς ἀριθμούς α καί β θά ἔχουμε $\alpha < \beta$ ἤ $\alpha = \beta$ ἤ $\beta < \alpha$.

Μέ τό συμβολισμό $\alpha \leq \beta$ ἐννοοῦμε «$\alpha = \beta$ ἤ $\alpha < \beta$» καί μέ τόν $\alpha \geq \beta$, «$\alpha = \beta$ ἤ $\alpha > \beta$». Ἔτσι, ἄν ἰσχύουν καί οἱ δύο ἀνισότητες $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \alpha$, καταλαβαίνουμε ὅτι θά εἶναι $\alpha = \beta$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

32. Νά γράψετε δύο σύνολα ἰσοδύναμα μέ τό σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους.

33. Δίνεται τό σύνολο Σ = {1,3,4,7}. Νά γράψετε τό σύνολο πού θά βρεῖτε, ἄν: i) προσθέσετε σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ Σ τόν ἀριθμό 5, ii) διπλασιάσετε κάθε στοιχεῖο τοῦ Σ καί προσθέσετε τόν ἀριθμό 3. Ποιά σχέση ἔχουν τά νέα σύνολα μέ τό Σ;

34. Νά γράψετε δύο γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Α = {τά γράμματα τῆς λέξεως «καρτερία»}, ὥστε τό ἕνα νά εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου.

35. Δίνεται τό σύνολο Α = {2,4,6,8,...}. α) Νά βρεῖτε μέ ποιό τρόπο δημιουργοῦνται τά στοιχεῖα του. β) Νά ὑπολογίσετε τό ἕβδομο καί τό ἑκατοστό στοιχεῖο του. γ) Τό Α εἶναι πεπερασμένο σύνολο ἤ ἀπειροσύνολο;

36. Στά παρακάτω τετραγωνάκια εἶναι γραμμένοι ἀριθμοί μέ κάποια λογική σειρά.

1	4	8	13	19					

Μπορεῖτε νά τήν καταλάβετε; Συμπληρῶστε τά ὑπόλοιπα τετραγωνάκια.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

37. Νά γράψετε ὅλα τά γνήσια ὑποσύνολα τῶν συνόλων {1,2,3} καί {α,β,γ,δ}.

38. Δίνεται τό σύνολο Τ = {1,4,7,10,...}. α) Νά βρεῖτε μέ ποιό τρόπο δημιουργοῦνται τά στοιχεῖα του. β) Νά ὑπολογίσετε τό ἔνατο καί τό εἰκοστό ἕκτο στοιχεῖο του. γ) Τό Τ εἶναι πεπερασμένο σύνολο ἤ ἀπειροσύνολο;

39. Τέσσερις φυσικοί ἀριθμοί παριστάνονται μέ τά γράμματα α,β,γ,δ. Μᾶς λένε ὅτι ἀπό τούς α καί β μικρότερος εἶναι ὁ α καί ἀπό τούς γ καί δ μικρότερος εἶναι ὁ γ. i) Ποιές βέβαιες ἀνισότητες μποροῦμε νά γράψουμε; ii) Ἄν εἶναι καί $\beta < \gamma$, τί μποροῦμε νά συμπεράνουμε γιά τούς α καί δ; iii) Ἄν $\alpha > \delta$, τί μποροῦμε νά συμπεράνουμε γιά τούς β καί γ;

40. Γιά τούς φυσικούς ἀριθμούς x, ψ, ω εἶναι γνωστό ὅτι $x < \omega < \psi$, $5 < x < 9$, $6 < \psi < 9$. Νά ὁρίσετε τό σύνολο τῶν τιμῶν, πού μπορεῖ νά πάρει καθένας ἀπό τούς x, ψ, ω.

41. Ὁ μαθητής Α μᾶς δίνει 4 διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς, πού τούς ὀνομάζουμε α,β,γ,δ. Ὁ μαθητής Β μᾶς δίνει ἐπίσης 4 διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς α΄,β΄,γ΄, δ΄. Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι β = δ΄. Νά τοποθετήσετε στή φυσική τους διάταξη τούς παραπάνω ἀριθμούς.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

Εἰσαγωγὴ

3.1. Τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι πεπερασμένο. Ἔτσι εἶναι ἀδύνατο νά ἔχουμε γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ἰδιαίτερο ὄνομα καί ἰδιαίτερο σύμβολο, πού νά εἶναι ἄσχετο μέ τά ὀνόματα καί τά σύμβολα τῶν ἄλλων φυσικῶν ἀριθμῶν.

Γιά τό λόγο αὐτό ἀναγκάστηκαν οἱ ἄνθρωποι νά βροῦν τρόπους μέ τούς ὁποίους μποροῦμε νά ἀπαγγέλλουμε τούς φυσικούς ἀριθμούς μέ λίγες σχετικά λέξεις καί νά τούς γράφουμε χρησιμοποιώντας λίγα σύμβολα.

Τό σύνολο τῶν κανόνων μέ τούς ὁποίους γίνεται ἡ ὀνομασία καί ἡ γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν λέγεται **σύστημα ἀριθμήσεως**.

Τό δεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως

3.2. Στό Δημοτικό Σχολεῖο μάθαμε τήν ἀπαγγελία (τά ὀνόματα) καί τή γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό **δεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως**. Ἔτσι ἐδῶ θά περιγράψουμε μόνο τούς νόμους (κανόνες) στούς ὁποίους στηρίζεται τό σύστημα αὐτό. Οἱ νόμοι αὐτοί εἶναι:

- *Οἱ ἀριθμοί ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, ἀποτελοῦν τίς μονάδες τοῦ συστήματος. Ὁ ἀριθμός «ἕνα» λέγεται καί ἁπλή μονάδα ἤ μονάδα πρώτης τάξεως.*
- *Δέκα μονάδες πρώτης τάξεως σχηματίζουν μιά μονάδα δεύτερης τάξεως πού λέγεται δεκάδα.*
- *Δέκα μονάδες δεύτερης τάξεως σχηματίζουν μιά μονάδα τρίτης τάξεως πού λέγεται ἑκατοντάδα.*
- *Δέκα μονάδες τρίτης τάξεως σχηματίζουν μιά μονάδα τέταρτης τάξεως πού λέγεται χιλιάδα κ.ο.κ.*

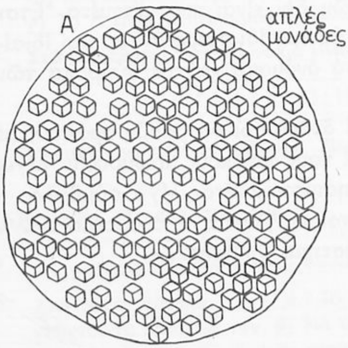
Ἀπ' αὐτά βλέπουμε πώς ὁ γενικός νόμος τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἶναι:

> Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως.

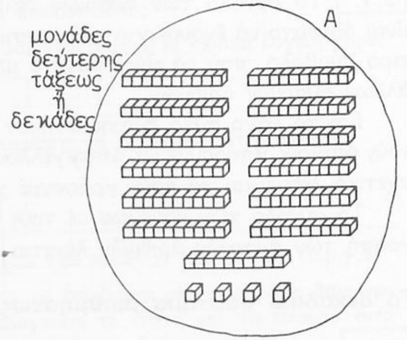
Ὁ ἀριθμὸς «*δέκα*» πού μᾶς λέει πόσες μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιά μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως λέγεται **βάση** τοῦ συστήματος. Τό σύστημα αὐτό λέγεται **δεκαδικό**, ἀκριβῶς γιατί βάση του εἶναι ὁ ἀριθμός «δέκα».

Ἡ γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό δεκαδικό σύστημα

3.3. Στό προηγούμενο κεφάλαιο εἴδαμε πώς κάθε φυσικός ἀριθμός εἶναι πληθάριθμος ἑνός πεπερασμένου συνόλου. Ἄς πάρουμε λοιπόν ἕνα σύνολο Α μέ στοιχεῖα μικρούς ὅμοιους κύβους, (Σχ. 1) κι ἄς βροῦμε πῶς γράφεται ὁ πληθάριθμός του στό δεκαδικό σύστημα.

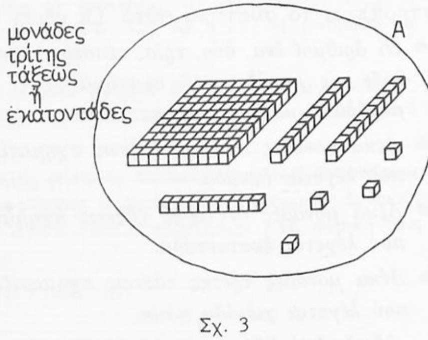


Σχ. 1



Σχ. 2

Παίρνουμε πρῶτα τά στοιχεῖα τοῦ Α (τούς κύβους) ἀνά δέκα καί σχηματίζουμε ὅσα ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα μποροῦμε, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 2. Οἱ κύβοι πού περίσσεψαν εἶναι λιγότεροι ἀπό δέκα, καί εἶναι οἱ «*μονάδες*» τοῦ πληθάριθμου, ἐνῶ τά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα πού σχηματίσαμε ἀποτελοῦν «*δεκάδες*» τοῦ πληθάριθμου. Παίρνουμε μετά τίς δεκάδες ἀνά δέκα καί σχηματίζουμε ὅσα (μεγαλύτερα) ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα μποροῦμε, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 3. Τά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα πού περισσεύουν καί πού εἶναι λιγότερα ἀπό δέκα εἶναι οἱ δεκάδες τοῦ πληθάριθμου, ἐνῶ τά μεγαλύτερα ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι «*ἑκατοντάδες*» τοῦ πληθάριθμου. Ἄν καί οἱ ἑκατοντάδες τοῦ πληθάριθμου ἦταν περισσότερες ἀπό δέκα, θά τίς ἑνώναμε ἀνά δέκα καί θά σχη-



Σχ. 3

ματίζαμε κύβους πού θά ἦταν οἱ «*χιλιάδες*» τοῦ πληθάριθμου, κ.ο.κ. Ἐπειδή στό παράδειγμα πού πήραμε οἱ ἑκατοντάδες εἶναι λιγότερες ἀπό δέκα (καὶ δὲν μποροῦμε νά σχηματίσουμε χιλιάδα), καταλαβαίνουμε πώς ὁ πληθάριθμος τοῦ Α εἶναι ὁ φυσικός ἀριθμός

«μία ἑκατοντάδα, τρεῖς δεκάδες, τέσσερις μονάδες».

Ἀπό τόν τρόπο πού σχηματίσαμε τόν πληθάριθμο τοῦ συνόλου Α στό δεκαδικό σύστημα καταλαβαίνουμε ὅτι:

Κάθε φυσικός ἀριθμός ἀποτελεῖται ἀπό μονάδες διάφορων τάξεων (τοῦ συστήματος αὐτοῦ) **καί τό πλῆθος τῶν μονάδων κάθε τάξεως θά εἶναι ἕνας ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς**

μηδέν, ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα.

Γιά νά γράψουμε λοιπόν ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς, μᾶς ἀρκοῦν δέκα μόνο σύμβολα, τά ὁποῖα θά ἀντιπροσωπεύουν τούς δέκα αὐτούς ἀριθμούς.

Ὡς τέτοια παίρνουμε τά ἀραβικά σύμβολα,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

τά ὁποῖα ἀπό δῶ καί πέρα θά τά λέμε *ψηφία*.

Ἔτσι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου Α γράφεται

«1 ἑκατοντάδα, 3 δεκάδες, 4 μονάδες».

Συμφωνοῦμε ἀκόμη, ὅταν γράφουμε τούς φυσικούς ἀριθμούς, νά ἀκολουθοῦμε τούς ἑξῆς κανόνες:

- *Ἀριστερά ἀπό τίς μονάδες μιᾶς τάξεως νά γράφουμε τίς μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως.*
- *Ἄν δέν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, στή θέση τους νά γράφουμε τό μηδέν.*

Μέ τή συμφωνία αὐτή οἱ δεκάδες θά γράφονται ἀριστερά ἀπό τίς μονάδες, οἱ ἑκατοντάδες ἀριστερά ἀπό τίς δεκάδες, κ.ο.κ. Ἐπειδή ἡ θέση πού γράφονται οἱ μονάδες κάθε τάξεως εἶναι τελείως ὁρισμένη, μποροῦμε νά παραλείπουμε τίς λέξεις «μονάδες», «δεκάδες», «ἑκατοντάδες»... Ἔτσι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου Α, μέ τή συμφωνία πού κάναμε, γράφεται 134. Ἐπίσης ὁ ἀριθμός «2 χιλιάδες, 5 μονάδες» γράφεται 2005.

Ἄς ἀνακεφαλαιώσουμε τώρα τούς κανόνες πού ἰσχύουν γιά τή γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

- Κάθε φυσικός ἀριθμός (πού δέν εἶναι μονοψήφιος) γράφεται μέ ψηφία τά ὁποῖα τοποθετοῦνται τό ἕνα δίπλα στό ἄλλο.
- Τό τελευταῖο (πρός τά δεξιά) ψηφίο παριστάνει τίς μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ, ἐνῶ κάθε ψηφίο πού γράφεται ἀριστερά ἑνός ἄλλου παριστάνει μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως.
- Ὅταν δέν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, στή θέση τους γράφουμε τό μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά γραφεῖ πιό ἁπλά καθένας ἀπό τούς ἀριθμούς:**
i) 5 χιλιάδες, 3 ἑκατοντάδες, ii) 2 χιλιάδες, 3 μονάδες, iii) 8 χιλιάδες, 5 δεκάδες, 3 μονάδες.

Λύση: i) 5300 ii) 2003 iii) 8053.

2. **Νά γραφοῦν μέ τίς μονάδες κάθε τάξεως οἱ ἀριθμοί: i) 5607 ii) 9050 iii) 20306**

Λύση: i) 5 χιλιάδες, 6 ἑκατοντάδες, 7 μονάδες, ii) 9 χιλιάδες, 5 δεκάδες, iii) 2 δεκάδες χιλιάδων, 3 ἑκατοντάδες, 6 μονάδες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά γραφεῖ πιό ἁπλά καθένας ἀπό τούς ἀριθμούς: i) 6 χιλιάδες, 5 δεκάδες, 7 μονάδες, ii) 8 δεκάδες χιλιάδων, 9 ἑκατοντάδες, 5 δεκάδες, iii) 9 χιλιάδες, 1 μονάδα.

2. Νά γραφοῦν μέ τίς μονάδες κάθε τάξεως οἱ ἀριθμοί: i) 76500, ii) 205050, iii) 57010, iv) 60006.

3. Ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως εἶναι «μία δεκάδα χιλιάδων, τρεῖς χιλιάδες, ἑπτά ἑκατοντάδες, ἐννέα μονάδες». Γράψτε πιό ἁπλά τόν ἀριθμό αὐτό.

4. Ποιός εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμός: α) μέ δύο ψηφία, β) μέ τρία ψηφία, γ) μέ τέσσερα ψηφία;

5. Ἀπό τούς τριψήφιους ἀριθμούς πού ἔχουν ὅλα τά ψηφία τους διαφορετικά ποιός εἶναι ὁ μικρότερος καί ποιός ὁ μεγαλύτερος;

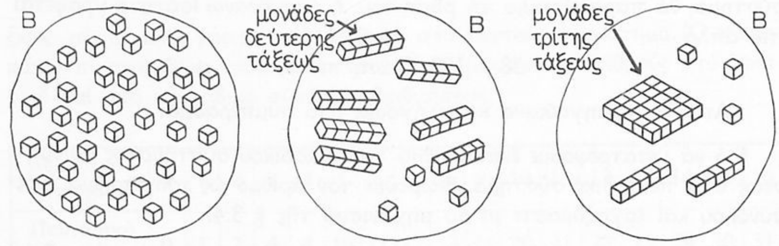
Τό πενταδικό σύστημα

3.4. Τό δεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως, ὅπως εἴδαμε, στηρίζεται στήν ἀρχή «*δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως*». Μέ ἀνάλογο τρόπο μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ἄλλο σύστημα ἀριθμήσεως, πού νά στηρίζεται στήν ἀρχή:

> Πέντε μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιά μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως.

Τό σύστημα αὐτό τό ὁποῖο ἔχει *βάση* τόν ἀριθμό *πέντε* λέγεται **πενταδικό σύστημα ἀριθμήσεως.**

Γιά νά βροῦμε πῶς γράφεται ὁ πληθάριθμος ἑνός συνόλου στό πενταδικό σύστημα ἀριθμήσεως, ἀκολουθοῦμε πάλι τή διαδικασία τῆς § 3.3. Στό παρακάτω σχῆμα 4 φαίνεται ἡ διαδικασία αὐτή σ' ἕνα ὁρισμένο σύνολο Β (τοῦ ὁποίου ὁ πληθάριθμος στό δεκαδικό σύστημα εἶναι ὁ 38). Ἀπό



Σχ. 4

τό τελευταῖο σχῆμα βλέπουμε ὅτι ὁ πληθάριθμος τοῦ Β στό πενταδικό σύστημα εἶναι

«μιά εἰκοσιπεντάδα, δύο πεντάδες, τρεῖς μονάδες».

Ἀπό τόν τρόπο πού σχηματίσαμε τόν πληθάριθμο τοῦ Β στό πενταδικό σύστημα καταλαβαίνουμε ὅτι:

α) Κάθε φυσικός ἀριθμός ἀποτελεῖται ἀπό μονάδες διάφορων τάξεων τοῦ συστήματος αὐτοῦ καί β) τό πλῆθος τῶν μονάδων κάθε τάξεως θά εἶναι ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς μηδέν, ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα.

Γιά νά γράψουμε λοιπόν ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς στό πενταδικό σύστημα, μᾶς ἀρκοῦν πέντε μόνο σύμβολα, τά ὁποῖα θά ἀντιπροσωπεύουν τούς πέντε αὐτούς ἀριθμούς καί ὡς τέτοια παίρνουμε τά

0, 1, 2, 3, 4

Συμφωνοῦμε ἀκόμη ὅτι γιά τή γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό πενταδικό σύστημα θά ἰσχύουν οἱ ἴδιοι κανόνες τῆς § 3.3, ὁπότε ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου Β γράφεται

123 (βάση πέντε)

καί διαβάζεται *«ἕνα, δύο, τρία, βάση πέντε».*

Μετατροπή φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἀπό τό δεκαδικό στό πενταδικό σύστημα

3.5. Ἡ ἐργασία πού κάναμε στήν προηγούμενη παράγραφο, γιά νά γράψουμε τόν πληθάριθμο τοῦ συνόλου Β στό πενταδικό σύστημα, ἦταν συγχρόνως καί ἡ ἐργασία μετατροπῆς τοῦ ἀριθμοῦ 38 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος σέ ἀριθμό τοῦ πενταδικοῦ συστήματος.

Ἔτσι λοιπόν μποροῦμε νά γράφουμε:

38 (βάση δέκα) = 123 (βάση πέντε)

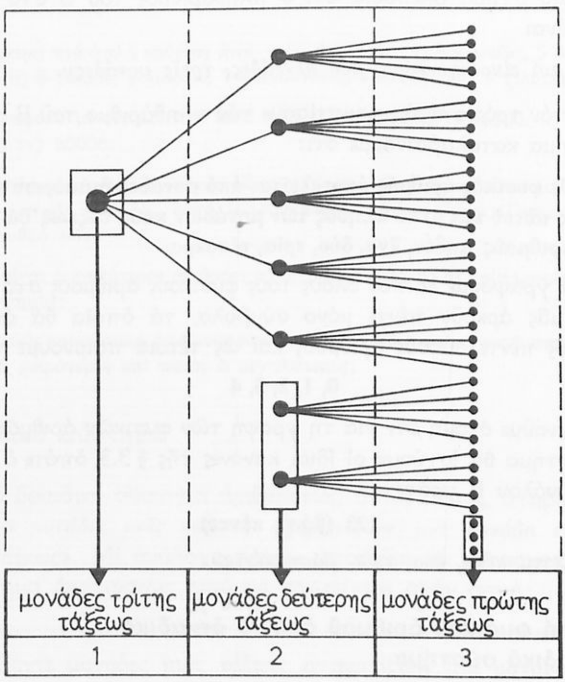
Ἄν συμφωνήσουμε ὅτι, ὅταν γράφεται ἕνας ἀριθμός στό δεκαδικό σύστημα, θά παραλείπουμε τή βάση του, ή παραπάνω ἰσότητα γράφεται πιό άπλά

$$38 = 123 \text{ (βάση πέντε)}$$

Ἀπό τά προηγούμενα καταλήγουμε στό συμπέρασμα.

Γιά νά μετατρέψουμε ἕναν ἀριθμό τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως στό πενταδικό σύστημα, θεωροῦμε τόν ἀριθμό ὡς πληθάριθμο ἑνός συνόλου καί ἐργαζόμαστε μέ τό μηχανισμό τῆς § 3.4.

Ὁ μηχανισμός αὐτός μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ μέ τό παρακάτω διάγραμμα (δέντρο), στό ὁποῖο οἱ τελεῖες τῆς δεξιότερης στήλης παριστάνουν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Β (τῆς § 3.4).



$$38 = 123 \text{ (βάση πέντε)}$$

Σχ. 5

Ἀπό τό σχεδιάγραμμα αὐτό βλέπουμε ὅτι παίρνοντας τίς μονάδες μιᾶς τάξεως ἀνά πέντε (ἀρχίζοντας ἀπό τίς ἁπλές μονάδες) σχηματίζουμε τίς μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως. Ἀκόμη βλέπουμε πώς οἱ μονάδες πού περισσεύουν ἀπό κάθε τάξη δίνουν τό ψηφίο τῶν μονάδων τῆς τάξεως αὐτῆς στή γραφή τοῦ ἀριθμοῦ στό πενταδικό σύστημα. Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τούς δεκαεπτά πρώτους φυσικούς ἀριθμούς στό δεκαδικό καί στό πενταδικό σύστημα ἀριθμήσεως.

Δεκαδικό σύστημα	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Πενταδικό σύστημα	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31

Τό δυαδικό σύστημα ἀριθμήσεως

3.6. Ἄν στηριχθοῦμε στήν ἀρχή «*δύο μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιά μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως*», δημιουργοῦμε ἕνα νέο σύστημα ἀριθμήσεως μέ βάση τόν ἀριθμό δύο, πού λέγεται **δυαδικό σύστημα ἀριθμήσεως**.

Μέ σκέψεις ὅμοιες μ' αὐτές πού κάναμε στό δεκαδικό καί στό πενταδικό σύστημα ἀριθμήσεως, καταλήγουμε στό συμπέρασμα πώς γιά τή γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό δυαδικό σύστημα μᾶς χρειάζονται δύο σύμβολα καί ὡς τέτοια παίρνουμε τά

0, 1

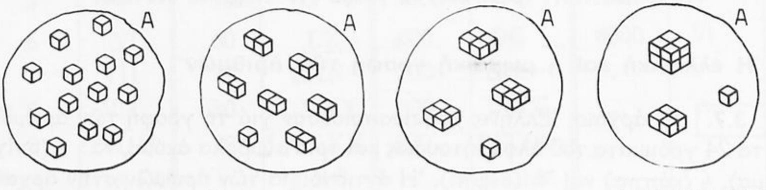
Ἡ σχηματική διαδικασία γιά νά βροῦμε πῶς γράφεται ὁ πληθάριθμος ἑνός συνόλου στό δυαδικό σύστημα εἶναι ἐντελῶς ὅμοια μέ ἐκείνη πού χρησιμοποιήσαμε γιά νά βροῦμε πῶς γράφεται ὁ πληθάριθμος ἑνός συνόλου στό δεκαδικό καί στό πενταδικό σύστημα.

Τό δυαδικό σύστημα ἀριθμήσεως εἶναι σήμερα πολύ χρήσιμο, γιατί σ' αὐτό στηρίζεται ἡ λειτουργία τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά γραφεῖ ὁ ἀριθμός 13 στό δυαδικό σύστημα ἀριθμήσεως.**

Λύση: Μποροῦμε νά πάρουμε ἕνα σύνολο μέ πληθάριθμο 13 καί νά σχηματίσουμε τίς μονάδες διάφορων τάξεων τοῦ πληθάριθμου στό δυαδικό σύστημα (Σχ. 6).



13 = 1101(βάση δύο)

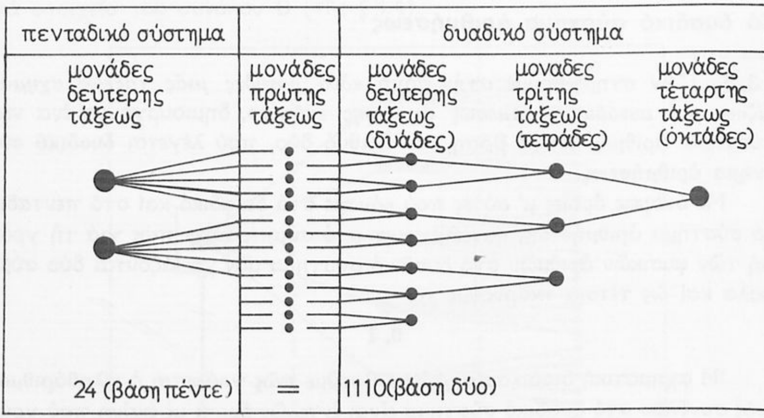
Σχ. 6

2. **Συμπληρῶστε τόν παρακάτω πίνακα.**

δεκαδικό σύστημα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
δυαδικό σύστημα													

3. **Νά γραφεῖ ὁ ἀριθμός 24 (βάση πέντε) στό δυαδικό σύστημα**

Μονάδες διαφόρων τάξεων



Σχ. 7

● **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

6. Ὁ ἀριθμός 41 νά γραφεῖ στό πενταδικό σύστημα. Τό ἴδιο καί ὁ ἀριθμός 29.
7. Οἱ ἀριθμοί 19 καί 27 νά γραφοῦν στό δυαδικό σύστημα.
8. Οἱ ἀριθμοί 424 (βάση πέντε) καί 2342 (βάση πέντε) νά γραφοῦν στό δεκαδικό σύστημα.
9. Τό ἴδιο γιά τούς ἀριθμούς 1001 (βάση δύο) καί 1001101 (βάση δύο).
10. Ὁ ἀριθμός 320 (βάση πέντε) νά γραφεῖ στό δυαδικό σύστημα.
11. Ὁ ἀριθμός 11011 (βάση δύο) νά γραφεῖ στό πενταδικό σύστημα.

Ἡ ἑλληνική καί ἡ ρωμαϊκή γραφή τῶν ἀριθμῶν

3.7. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες χρησιμοποιοῦσαν γιά τή γραφή τῶν ἀριθμῶν τά 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου μας καί τρία σύμβολα ἀκόμη, τά: ς (στίγμα), ϟ (κόππα) καί ϡ (σαμπί). Ἡ ἀντιστοιχία τῶν ἀριθμῶν στήν ἀρχαία ἑλληνική καί τή σημερινή γραφή δίνεται ἀπό τόν παρακάτω πίνακα.

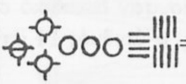
σημερινή γραφή	ἀρχ. ἑλλην. γραφή	σημερινή γραφή	ἀρχ. ἑλλην. γραφή	σημερινή γραφή	ἀρχ. ἑλλην. γραφή	σημερινή γραφή	ἀρχ. ἑλλην. γραφή
1	α'	10	ι'	100	ρ'	1000	͵α
2	β'	20	κ'	200	σ'	2000	͵β
3	γ'	30	λ'	300	τ'	3000	͵γ
4	δ'	40	μ'	400	υ'	4000	͵δ
5	ε'	50	ν'	500	φ'	5000	͵ε
6	ς'	60	ξ'	600	χ'	6000	͵ς
7	ζ'	70	ο'	700	ψ'	.	.
8	η'	80	π'	800	ω'	.	.
9	θ'	90	ϟ'	900	ϡ'	.	.

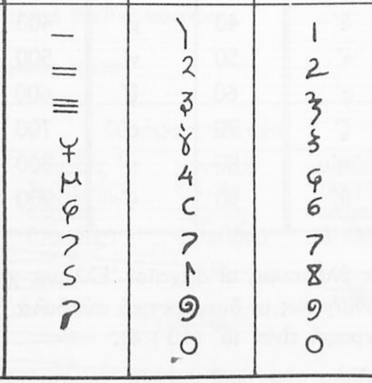
Ὅπως βλέπουμε, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες χρησιμοποιοῦσαν δεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως μέ διαφορετικά σύμβολα. Ἔτσι π.χ. ὁ ἀριθμός 14 στήν ἑλληνική γραφή εἶναι ιδ' (10+4).

Ἕνα ἄλλο σύστημα γραφῆς χρησιμοποιοῦσαν οἱ Ρωμαῖοι. Ἡ ἀντιστοιχία τῶν ἀριθμῶν στή σημερινή καί τή ρωμαϊκή γραφή δίνεται στόν πίνακα πού ἀκολουθεῖ.

σημερινή γραφή	ρωμαϊκή γραφή	σημερινή γραφή	ρωμαϊκή γραφή	σημερινή γραφή	ρωμαϊκή γραφή	σημερινή γραφή	ρωμαϊκή γραφή
1	I	10	X	100	C	1000	M
2	II	20	XX	200	CC	2000	MM ἤ $\overline{II}$
3	III	30	XXX	300	CCC	3000	MMM ἤ $\overline{III}$
4	IIII ἤ IV	40	XXXX ἤ XL	400	CCCC ἤ CD	4000	$\overline{IV}$
5	V	50	L	500	D	5000	$\overline{V}$
6	VI	60	LX	600	DC	6000	$\overline{VI}$
7	VII	70	LXX	700	DCC	.	.
8	VIII	80	LXXX	800	DCCC	.	.
9	VIIII ἤ IX	90	LXXXX ἤ XC	900	DCCCC ἤ CM	.	.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Ἀριθμητικά σύμβολα Β' συστήματος μινωϊκῆς γραφῆς		Ἐξέλιξη γραφῆς ἀραβικῶν συμβόλων Ἰνδική γραφή			
		200 π.Χ.	600 μ.Χ.	900 μ.Χ.	σήμερα
μονάδες	|				1
δεκάδες	—				2
ἑκατοντάδες	O				3
χιλιάδες					4
δεκάδες χιλιάδων					5
					6
Παράδειγμα:					7
 =12348					8
					9
					0



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. **Σύστημα ἀριθμήσεως** εἶναι ἕνα σύνολο κανόνων στούς ὁποίους στηρίζεται ὁ σχηματισμός τῶν ὀνομάτων καί ἡ γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.
Τό **δεκαδικό** σύστημα στηρίζεται στήν ἀρχή *«δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιά μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως»*. Τό πλῆθος *«δέκα»* εἶναι ἡ **βάση** τοῦ συστήματος. Γιά νά γράψουμε τούς φυσικούς ἀριθμούς στό δεκαδικό σύστημα, χρησιμοποιοῦμε τά δέκα ἀραβικά ψηφία:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

2. Γενικά ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως μέ βάση τό φυσικό ἀριθμό α ($\alpha > 1$) στηρίζεται στήν ἀρχή:
«α μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μία μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως». Γιά νά γράψουμε τούς φυσικούς ἀριθμούς στό σύστημα αὐτό, χρειαζόμαστε α σύμβολα τά ὁποῖα λέγονται **ψηφία**.

3. Στή γραφή ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ σ' ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως ἰσχύουν οἱ κανόνες:

- Κάθε φυσικός ἀριθμός ὁ ὁποῖος δέν εἶναι μονοψήφιος γράφεται μέ ψηφία πού τοποθετοῦνται τό ἕνα δίπλα στό ἄλλο.
- Τό τελευταῖο (πρός τά δεξιά) ψηφίο παριστάνει τίς μονάδες, ἐνῶ κάθε ψηφίο πού γράφεται ἀριστερά ἀπό ἕνα ἄλλο παριστάνει μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως.
- Ὅταν δέν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, στή θέση τους γράφουμε τό μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

12. Νά γράψετε μέ άραβικά ψηφία τούς άριθμούς κβ', ξε', ,αλοδ' τῆς ἑλληνικῆς γραφῆς.

13. Νά γράψετε στήν ἑλληνική γραφή τούς ἀριθμούς: 480, 796, 1821 καί 1940.

14. Νά γράψετε μέ ἀραβικά ψηφία τούς ἀριθμούς: LXXI, DCCXXIII, MDCLXV.

15. Νά γράψετε ὅλους τούς τριψήφιους ἀριθμούς πού ἔχουν διαφορετικά ψηφία, τά ὁποῖα εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου: α) {1,4,6}, β) {0,3,7}.

16. Νά βρεῖτε πόσοι εἶναι ὅλοι: α) οἱ διψήφιοι ἀριθμοί, β) οἱ τριψήφιοι ἀριθμοί, γ) οἱ τετραψήφιοι ἀριθμοί.

17. Πόσες φορές θά χρησιμοποιήσουμε κάθε ψηφίο, γιά νά γράψουμε ὅλους τούς ἀριθμούς ἀπό τό 1 ὥς τό 100;

18. Ἀπό τούς τετραψήφιους ἀριθμούς, πού ἔχουν ὅλα τά ψηφία τους διαφορετικά: α) ποιός εἶναι ὁ μικρότερος, β) ποιός εἶναι ὁ μεγαλύτερος;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

19. Νά βρεῖτε πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι ἀριθμοί πού εἶναι γραμμένοι μέ διαφορετικά ψηφία.

20. Ὁ ἀριθμός 221 (βάση τρία) νά γραφεῖ στό δυαδικό σύστημα.

21. Νά βρεῖτε πόσα ψηφία χρειαζόμαστε, γιά νά σελιδομετρήσουμε ἕνα βιβλίο μέ 284 σελίδες.

22. Πόσες σελίδες ἔχει ἕνα βιβλίο τοῦ ὁποίου ἡ σελιδομέτρηση χρειάστηκε 690 ψηφία;

23. Ἄν παραστήσουμε μέ Δ τόν ἀριθμό 10 καί μέ Ε τόν ἀριθμό 11 τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος, νά γράψετε στό δεκαδικό σύστημα τόν ἀριθμό ΔΕ7 (βάση δώδεκα).

24. Ὁ ἀριθμός 47 (βάση δώδεκα) νά γραφεῖ στό δεκαδικό σύστημα. Τό ἴδιο καί ὁ ἀριθμός 144 (βάση δώδεκα).

ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Εἰσαγωγή

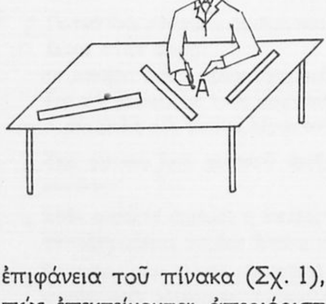
4.1. Στό 1ο κεφάλαιο, ὅταν κάναμε λόγο γιά τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, μιλήσαμε πρώτη φορά γιά τό **σημεῖο.** Εἴχαμε πεῖ πώς κάθε κορυφή του εἶναι ἕνα σημεῖο. Ἡ μύτη ἑνός καλοξυσμένου μολυβιοῦ, ἡ μύτη μιᾶς καρφίτσας, ἕνας κόκκος σκόνης, ὅταν δέ λαμβάνεται ὑπόψη τό ὑλικό ἀπό τό ὁποῖο εἶναι φτιαγμένα, ἀντιπροσωπεύουν σημεῖα.

Ἕνα σημεῖο δέν ἔχει διαστάσεις (μῆκος, πλάτος, ὕψος) οὔτε ὕλη.
Χαρακτηριστικά ὁ μεγάλος γεωμέτρης τῆς ἀρχαιότητας Εὐκλείδης ἔγραφε *«σημεῖο εἶναι κεῖνο πού δέν ἔχει μέρη»*.

Κάθε σύνολο σημείων (σημειοσύνολο) τό λέμε **γεωμετρικό σχῆμα** ἤ ἁπλῶς **σχῆμα.**

Τό ἐπίπεδο ὡς βασικό σημειοσύνολο

4.2. Ἕνα ἀπό τά πιό βασικά γεωμετρικά σχήματα εἶναι τό ἐπίπεδο. Στό πρῶτο κεφάλαιο εἴπαμε πώς **ἐπίπεδη ἐπιφάνεια** ἤ **ἐπίπεδο** εἶναι ἡ ἐπιφάνεια στήν ὁποία ὁ χάρακας ἐφαρμόζει ἐντελῶς κατά ὁποιαδήποτε διεύθυνση κι ἄν τοποθετηθεῖ πάνω σ' αὐτή. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνός τραπεζιοῦ, ἡ



Σχ. 1

ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα (Σχ. 1), ἡ ἐπιφάνεια ἑνός τζαμιοῦ, ἄν φαντασθοῦμε πώς ἐπεκτείνονται ἀπεριόριστα, μᾶς δίνουν φυσικές εἰκόνες ἐπιπέδων. Ἐμεῖς ἀπό δῶ καί πέρα θά ταυτίζουμε τό ἐπίπεδο μέ τή σελίδα τοῦ βιβλίου πού διαβάζουμε ἤ τή σελίδα τοῦ τετραδίου πού γράφουμε ἤ μέ τόν πίνακα.

Τό ἐπίπεδο δέν ἔχει ὕψος (πάχος). Ἔχει μόνο *δύο διαστάσεις*, **μῆκος** καί **πλάτος**. Ἕνα σημεῖο τό παριστάνουμε στό ἐπίπεδο (π.χ. στή σελίδα πού γράφουμε) μέ μιά τελεία[1]. Δίπλα στό σημεῖο (δηλ. στήν τελεία) γράφουμε ἕνα κεφαλαῖο γράμμα πού εἶναι τό «ὄνομα» τοῦ σημείου.

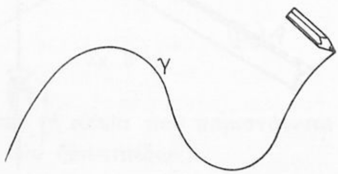
Εἶναι φανερό ὅτι μποροῦμε νά πάρουμε στό ἐπίπεδο ὅσα σημεῖα θέλουμε καί μάλιστα ὅσο κοντά θέλουμε τό ἕνα στό ἄλλο. Ὥστε:

Τό ἐπίπεδο εἶναι ἕνα σημειοσύνολο μέ ἄπειρα στοιχεῖα.

Κάθε γνήσιο ὑποσύνολο ἑνός ἐπιπέδου εἶναι ἐπίσης σημειοσύνολο καί λέγεται **ἐπίπεδο σχῆμα**. Παρακάτω βλέπουμε μερικά ἐπίπεδα σχήματα.

Σχ. 2

Ἄν ἀκουμπήσουμε τή μύτη ἑνός μολυβιοῦ πάνω στό χαρτί καί σύρουμε τό μολύβι, θά γράψουμε πάνω στό χαρτί ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα πού λέγεται **ἐπίπεδη γραμμή** ἤ ἁπλῶς **γραμμή** (Σχ. 3). Μιά γραμμή τή συμβολίζουμε μέ ἕνα μικρό γράμμα. Ἔτσι π.χ. γιά τό σχῆμα 3 λέμε «ἡ γραμμή γ».



Σχ. 3

Μιά γραμμή ἔχει μόνο *μιά διάσταση*, **μῆκος**.

Ἀπό τόν τρόπο πού κατασκευάζεται μιά γραμμή μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι:

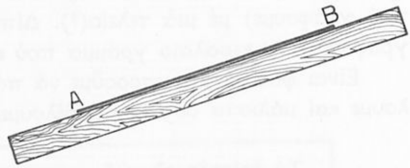
Ἡ γραμμή γράφεται ἀπό ἕνα σημεῖο πού κινεῖται.

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα

4. 3. Ἄς γράψουμε μέ τή βοήθεια ἑνός χάρακα (Σχ. 4) μιά ἐπίπεδη γραμμή ἡ ὁποία νά ἀρχίζει ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί νά τελειώνει σ' ἕνα ση-

(1) Ἡ παράσταση τοῦ σημείου μέ τελεία γίνεται ἀπό ἀνάγκη καί δέν εἶναι ἀκριβής, γιατί ὅσο μικρή κι ἄν κάνουμε τήν τελεία, ἔχει διαστάσεις. Αὐτό μποροῦμε νά τό διαπιστώσουμε, ἄν χρησιμοποιήσουμε ἕνα μεγεθυντικό φακό.

μεῖο Β. Ἡ γραμμή αὐτή, ὅπως εἴδαμε στό κεφ. 1, λέγεται **εὐθύγραμμο τμῆμα** (1) (ἤ ἁπλῶς **τμῆμα**) μέ ἄκρα τά σημεῖα Α καί Β καί γράφεται συμβολικά **ΑΒ** ἤ **ΒΑ**. Εἰκόνα ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος μᾶς δίνει μιά πλευρά ἑνός ὀρθογωνίου, ἡ ἀκμή ἑνός κύβου, μιά λεπτή τεντωμένη κλωστή κ.λ.π. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα, ὅπως καί κάθε γραμμή, εἶναι ἕνα σύνολο σημείων.

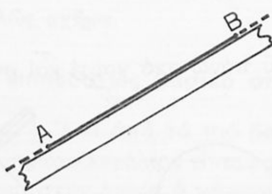


Σχ. 4

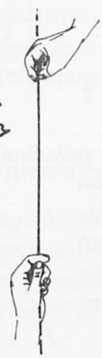
Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται καί **ἀπόσταση τῶν σημείων Α καί Β.**

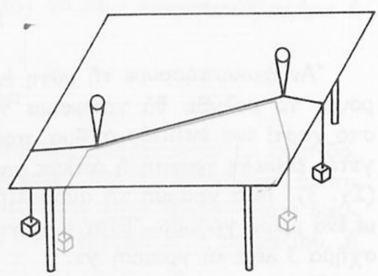
Ἡ εὐθεία

4.4. Ἄς πάρουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ κι ἄς φαντασθοῦμε πώς μέ ἕνα χάρακα τό προεκτείνουμε ἀπεριόριστα καί ἀπό τά δύο ἄκρα του



Σχ. 5


Σχ. 6


Σχ. 7

(Σχ. 5). Ἡ γραμμή πού προκύπτει λέγεται **εὐθεία γραμμή** ἤ ἁπλῶς **εὐθεία**. Ἀπό τόν τρόπο πού ὁρίσαμε τήν εὐθεία καταλαβαίνουμε ὅτι:

Ἡ εὐθεία ἐκτείνεται ἀπεριόριστα καί ἀπό τά δύο μέρη της.

Δηλαδή ἡ εὐθεία δέν ἔχει ἄκρα. Φυσική εἰκόνα τῆς εὐθείας μᾶς δίνει μιά λεπτή τεντωμένη κλωστή (Σχ. 6), ἄν φυσικά προεκταθεῖ ἀπεριόριστα καί ἀπό τά δύο μέρη της.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό σημεῖα Α καί Β πάνω στήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζιοῦ κι ἄς καρφώσουμε πάνω σ' αὐτά δυό λεπτά καρφάκια (Σχ. 7). Ἄν πάρουμε δυό λεπτές κλωστές μέ διαφορετικά χρώματα, πού νά ἔχουν βάρη στά ἄκρα τους, καί τίς τοποθετήσουμε στό τραπέζι ὅπως

(1) τμῆμα = κομμάτι

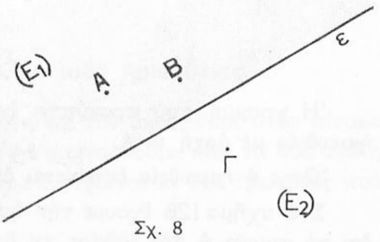
δείχνει τό σχῆμα, θά παρατηρήσουμε πώς τά κομμάτια τους πού βρίσκονται ἀνάμεσα στά σημεῖα Α καί Β κολλοῦν τό ἕνα στό ἄλλο. Ἀπ' αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι **ἀπό δυό σημεῖα περνᾶ μιά μόνο εὐθεία.**

Ἑπομένως, γιά νά γράψουμε μιά εὐθεία γραμμή, ἀρκεῖ νά ξέρουμε δύο σημεῖα της, π.χ. τά Α καί Β. Ἡ μοναδική εὐθεία πού περνᾶ ἀπ' αὐτά γράφεται «**εὐθεία ΑΒ**».

Εἶναι φανερό ὅτι μιά εὐθεία ἔχει ἄπειρα σημεῖα καί μποροῦμε νά πάρουμε δυό σημεῖα της ὅσο κοντά θέλουμε.

Τό ἡμιεπίπεδο

4. 5. Σ' ἕνα ἐπίπεδο γράφουμε μιά εὐθεία ε (Σχ. 8). Βλέπουμε ἀμέσως πώς ἡ ε χωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου σέ δύο μέρη (ὑποσύνολα), τά (E_1) καί (E_2). Καθένα μέρος ἀπ' αὐτά μαζί μέ τήν εὐθεία ε ἀποτελοῦν ἕνα σχῆμα πού λέγεται **ἡμιεπίπεδο** καί ἡ εὐθεία ε λέγεται **ἀκμή** του. Τά μόνα κοινά σημεῖα πού ἔχουν τά δυό ἡμιεπίπεδα εἶναι τά σημεῖα τῆς εὐθείας ε. Μιά φυσική εἰκόνα δύο τέτοιων ἡμιεπιπέδων ἔχουμε, ἄν διπλώσουμε καί τσακίσουμε ἕνα φύλλο χαρτί καί μετά τό ξεδιπλώσουμε πάνω σ' ἕνα τραπέζι (ἡ εὐθεία πού παριστάνεται ἀπό τό τσάκισμα εἶναι ἡ κοινή ἀκμή τῶν δύο ἡμιεπιπέδων).

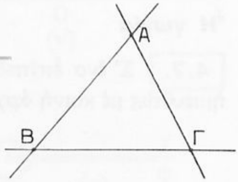


Σχ. 8

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά χαράξετε καί νά ὀνομάσετε ὅλες τίς εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπό τρία σημεῖα Α,Β,Γ, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.**

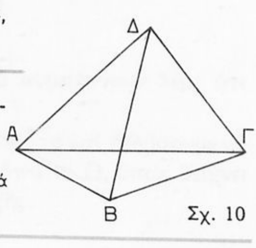
Λύση: Στό σχῆμα 9 ἔχουμε γράψει τίς εὐθεῖες πού ὁρίζονται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ. Αὐτές εἶναι οἱ «εὐθεία ΑΒ», «εὐθεία ΒΓ», «εὐθεία ΑΓ».



Σχ. 9

2. **Ὀνομάστε τά εὐθύγραμμα τμήματα πού ἔχουν ἄκρα τά τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ (Σχ. 10).**

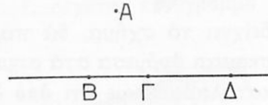
Λύση: Τά εὐθύγραμμα τμήματα πού ὁρίζονται εἶναι τά ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ,ΒΓ,ΒΔ,ΓΔ.



Σχ. 10

3. Νά χαράξετε καί νά ὀνομάσετε ὅλες τίς εὐθεῖες πού ὁρίζονται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ, τοῦ διπλανοῦ σχήματος.

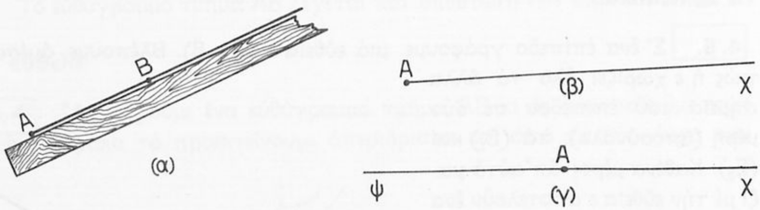
Λύση: Οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι ΑΒ,...



Σχ. 11

Ἡ ἡμιευθεία

4.6. Ἄς πάρουμε πάλι ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ κι ἄς φαντασθοῦμε πώς μέ τή βοήθεια ἑνός χάρακα τό προεκτείνουμε ἀπεριόριστα μόνο ἀπό τό ἕνα ἄκρο του, π.χ. τό Β (Σχ. 12α).



Σχ. 12

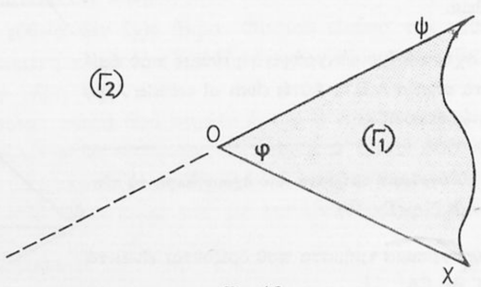
Ἡ γραμμή πού προκύπτει ἔχει ἕνα μόνο ἄκρο, τό Α, καί λέγεται **ἡμιευθεία μέ ἀρχή τό Α.**

Ὥστε **ἡ ἡμιευθεία ἐκτείνεται ἀπεριόριστα μόνο ἀπό τό ἕνα μέρος της.**

Στό σχῆμα 12β ἔχουμε τήν ἡμιευθεία Αx. Στό σχῆμα 12γ βλέπουμε ὅτι τό σημεῖο Α τῆς εὐθείας xy διαχωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα της σέ δύο μέρη (ὑποσύνολα). Καθένα ἀπ' αὐτά μαζί μέ τό Α ἀποτελεῖ μιά ἡμιευθεία μέ ἀρχή τό Α. Οἱ δυό ἡμιευθεῖες Αx, Αψ λέγονται **ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.**

Ἡ γωνία

4.7. Σ' ἕνα ἐπίπεδο (π.χ. στό χαρτί πού σχεδιάζουμε) γράφουμε δυό ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή Ο, τίς Οx καί Οψ(Σχ. 13). Οἱ ἡμιευθεῖες αὐτές χω-



Σχ. 13

ρίζουν ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου σέ δυό μέρη (ὑποσύνολα), τά (Γ_1) καί (Γ_2).

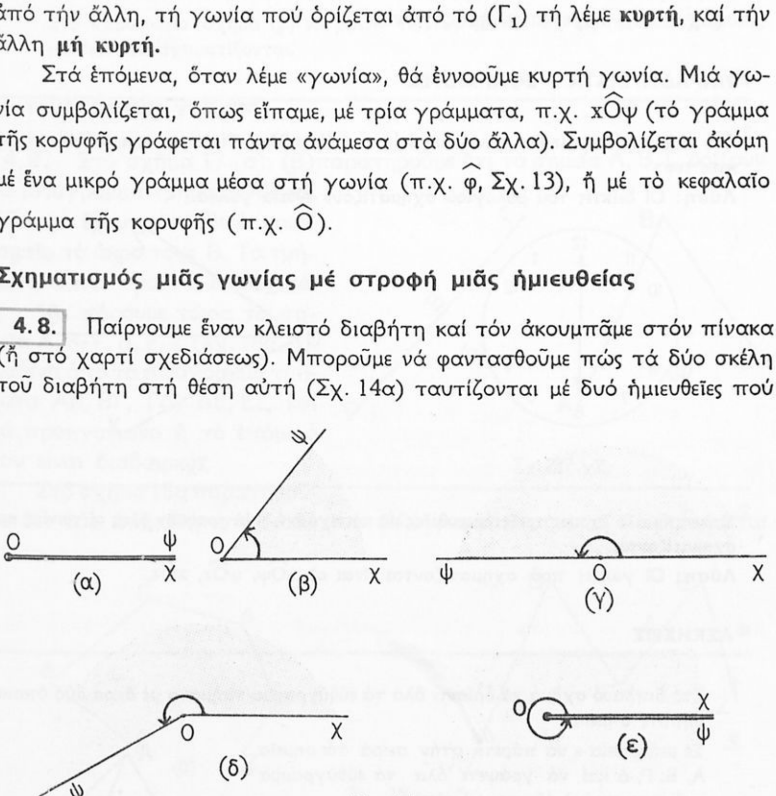
Καθένα μέρος ἀπ' αὐτά μαζί μέ τίς ἡμιευθεῖες Οx καί Οψ λέγεται **γωνία** καί γράφεται $x\widehat{O}\psi$. Τό σημεῖο Ο λέγεται **κορυφή** τῆς γωνίας καί οἱ ἡμιευθεῖες Οx καί Οψ λέγονται **πλευρές** της.

Παρατηροῦμε τώρα πώς, ὅταν προεκταθεῖ κάθε πλευρά της, ἀφήνει τή γωνία πού ὁρίζεται ἀπό τό (Γ_1) στό ἴδιο μέρος της (στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο), ἐνῶ τήν ἄλλη γωνία πού ὁρίζεται ἀπό τό (Γ_2) τή χωρίζει (τήν ἀφήνει σέ διαφορετικά ἡμιεπίπεδα). Γιά νά ξεχωρίζουμε λοιπόν τή μιά γωνία ἀπό τήν ἄλλη, τή γωνία πού ὁρίζεται ἀπό τό (Γ_1) τή λέμε **κυρτή**, καί τήν ἄλλη **μή κυρτή**.

Στά ἑπόμενα, ὅταν λέμε «γωνία», θά ἐννοοῦμε κυρτή γωνία. Μιά γωνία συμβολίζεται, ὅπως εἴπαμε, μέ τρία γράμματα, π.χ. $x\widehat{O}\psi$ (τό γράμμα τῆς κορυφῆς γράφεται πάντα ἀνάμεσα στὰ δύο ἄλλα). Συμβολίζεται ἀκόμη μέ ἕνα μικρό γράμμα μέσα στή γωνία (π.χ. $\widehat{\varphi}$, Σχ. 13), ἤ μέ τὸ κεφαλαῖο γράμμα τῆς κορυφῆς (π.χ. $\widehat{O}$).

Σχηματισμός μιᾶς γωνίας μέ στροφή μιᾶς ἡμιευθείας

4.8. Παίρνουμε ἕναν κλειστό διαβήτη καί τόν ἀκουμπᾶμε στόν πίνακα (ἤ στό χαρτί σχεδιάσεως). Μποροῦμε νά φαντασθοῦμε πώς τά δύο σκέλη τοῦ διαβήτη στή θέση αὐτή (Σχ. 14α) ταυτίζονται μέ δυό ἡμιευθεῖες πού



Σχ. 14

συμπίπτουν, τίς Οx καί Οψ. Δυό ἡμιευθεῖες πού συμπίπτουν λέμε ὅτι σχηματίζουν **μηδενική γωνία**.

Ἄν κρατήσουμε σταθερό τό σκέλος Οx τοῦ διαβήτη καί ἀρχίσουμε νά ἀνοίγουμε τό σκέλος Οψ, περιστρέφοντάς το γύρω ἀπό τό Ο, ὅπως δείχνει τό βέλος στά ἄλλα σχήματα, παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

α) Σέ κάθε θέση τῆς Οψ ἔχουμε μιά ὁρισμένη γωνία καί ἔτσι μποροῦμε νά λέμε ὅτι **ἡ γωνία παράγεται ἀπό τή στροφή μιᾶς ἡμιευθείας.**

β) Ὅταν ἡ ἡμιευθεία Οψ πέσει πάνω στήν ἀντικείμενη ἡμιευθεία τῆς Οχ (Σχ. 14γ), λέμε ὅτι ἡ γωνία $x\widehat{O}\psi$ εἶναι **εὐθεία γωνία** ἤ **ἀποπλατυσμένη γωνία**.

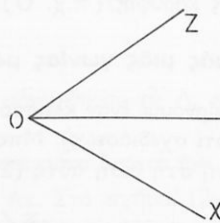
γ) Ἄν ἡ ἡμιευθεία Οψ συνεχίσει τήν περιστροφή της κατά τήν ἴδια φορά (Σχ. 14δ), σέ κάθε θέση της θά ἔχουμε τώρα μιά μή κυρτή γωνία. Ἡ μή κυρτή γωνία πού σχηματίζεται, ὅταν ἡ Οψ πέσει πάνω στήν Οχ (Σχ. 14 ε), λέγεται **πλήρης γωνία**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 **Στό σχῆμα 15 ἔχουμε ἕνα ρολόϊ πού δείχνει 6 (ἀκριβῶς). Τί γωνία σχηματίζουν οἱ δεῖκτες του;**

Λύση: Οἱ δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ σχηματίζουν εὐθεία γωνία.

Σχ. 15



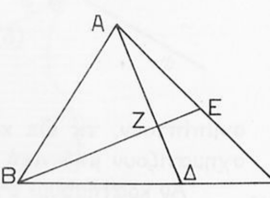
Σχ. 16

2 **Στό σχῆμα 16 ἔχουμε τρεῖς ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή. Νά γραφοῦν ὅλες οἱ γωνίες πού σχηματίζονται.**

Λύση: Οἱ γωνίες πού σχηματίζονται εἶναι οἱ $x\widehat{O}\psi$, $\psi\widehat{O}z$, $x\widehat{O}z$,

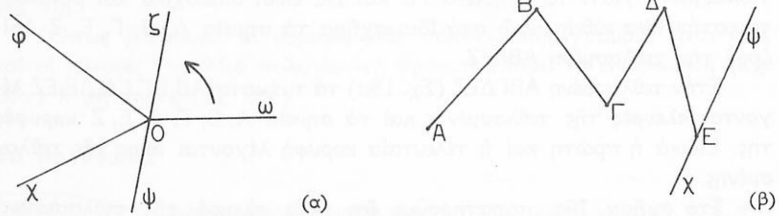
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στό διπλανό σχῆμα νά ὁρίσετε ὅλα τά εὐθύγραμμα τμήματα μέ ἄκρα δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα.
2. Σέ μιά εὐθεία ε νά πάρετε στήν σειρά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καί νά γράψετε ὅλα τά εὐθύγραμμα τμήματα πού ὁρίζονται μ' αὐτά.
3. Σέ μιά εὐθεία πάρτε τά σημεῖα Α, Β, Γ. Μέ ποιούς τρόπους μπορεῖτε νά ὀνομάσετε τήν εὐθεία αὐτή;
4. Σέ μιά εὐθεία ε νά πάρετε τά σημεῖα Α, Β, Γ, ὥστε τό τμῆμα ΑΓ νά εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ τμήματος ΑΒ.



5. Στό παρακάτω σχῆμα (α) ἔχουν γραφεῖ ἡμιευθεῖες μέ ἀρχή τό σημεῖο Ο καί γωνίες πού διαγράφονται ὅπως δείχνει τό βέλος. Νά ἀναφέρετε: α) τρεῖς ἀπό τίς

κυρτές γωνίες πού σχηματίζονται, β) δύο ἀπό τίς μή κυρτές, γ) εὐθεῖες γωνίες, ἄν ὑπάρχουν.

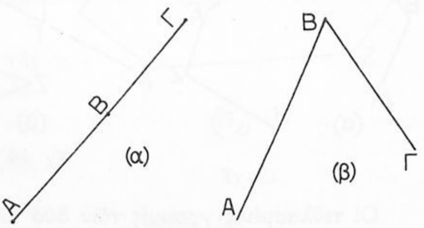


6. Στό παραπάνω σχῆμα (β) νά βρεῖτε τίς κυρτές, τίς μή κυρτές καί τίς εὐθεῖες γωνίες πού σχηματίζονται.

Ἡ τεθλασμένη γραμμή

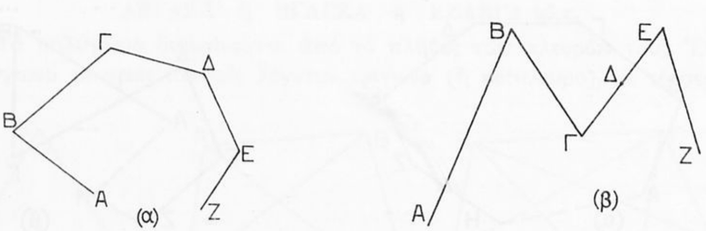
4.9. Στό σχῆμα 17 (α), (β)παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ὁρίζουν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΒΓ ποὺ ἔχουν μοναδικὸ κοινὸ σημεῖο τὸ ἄκρο τους Β. Τὰ τμήματα αὐτά λέγονται **διαδοχικά**.

Ἄς πάρουμε τώρα τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ (Σχ. 18α, β). Καθένα ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, καί τό προηγούμενο ἤ τὸ ἑπόμενό του εἶναι διαδοχικά.



Σχ. 17

Στό σχῆμα 18α παρατηροῦμε ὅτι δύο ὁποιαδήποτε διαδοχικά εὐθύγραμμα τμήματα δέ βρίσκονται



Σχ. 18

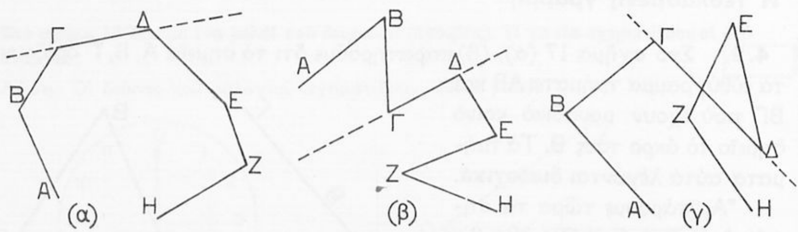
στήν ἴδια εὐθεία. Στήν περίπτωση αὐτὴ θά λέμε ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ σχηματίζουν μιὰ **τεθλασμένη γραμμή** πού θά τὴ σημειώνουμε ΑΒΓΔΕΖ.

Ἔτσι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ στό σχῆμα 17β ὁρίζουν τήν τεθλασμένη ΑΒΓ, ἐνῶ δέν ὁρίζουν τεθλασμένη στὸ σχῆμα 17α.

Ἐπίσης τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ στὸ σχῆμα 18β δὲν ὁρίζουν τεθλασμένη, γιατί τὰ τμήματα ΓΔ καὶ ΔΕ εἶναι διαδοχικά καί βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, ἐνῶ στό ἴδιο σχῆμα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Ε, Ζ ὁρίζουν τὴν τεθλασμένη ΑΒΓΕΖ.

Στὴν τεθλασμένη ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 18α) τὰ τμήματα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΖ λέγονται **πλευρές** τῆς τεθλασμένης καὶ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ **κορυφές** της. Εἰδικά ἡ πρώτη καί ἡ τελευταία κορυφή λέγονται **ἄκρα** τῆς τεθλασμένης.

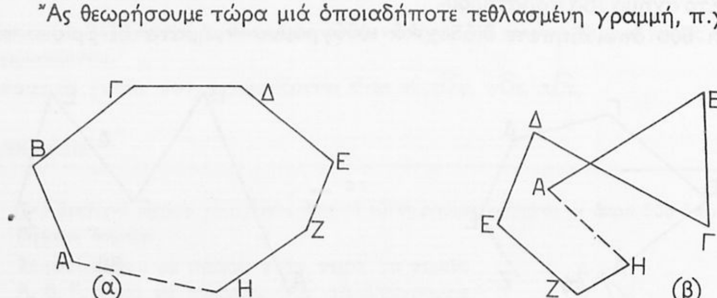
Στό σχῆμα 19α παρατηροῦμε ὅτι **κάθε πλευρά** τῆς τεθλασμένης, ὅταν προεκταθεῖ καὶ ἀπό τὰ δύο ἄκρα της, ἀφήνει τήν τεθλασμένη πρός τό ἴδιο μέρος (στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο). Κάθε τέτοια τεθλασμένη γραμμή λέγεται **κυρτή.**



Σχ. 19

Οἱ τεθλασμένες γραμμές τῶν δύο ἄλλων σχημάτων δέν εἶναι κυρτές, γιατί ὑπάρχει πλευρά (π.χ. ἡ ΓΔ) ἡ ὁποία, ὅταν προεκταθεῖ, δέν ἀφήνει ὅλες τίς πλευρές στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα μιά ὁποιαδήποτε τεθλασμένη γραμμή, π.χ. τήν



Σχ. 20

ΑΒΓΔΕΖΗ (Σχ. 20) κι ἄς φέρουμε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΗΑ πού ἑνώνει τά ἄκρα της. Τότε σχηματίζεται μιά νέα τεθλασμένη γραμμή, ἡ ΑΒΓΔΕΖΗΑ, πού ἡ ἀρχή της καί τό τέλος της συμπίπτουν. Ἡ γραμμή αὐτή λέγεται **κλειστή τεθλασμένη** ἤ **πολυγωνική**.

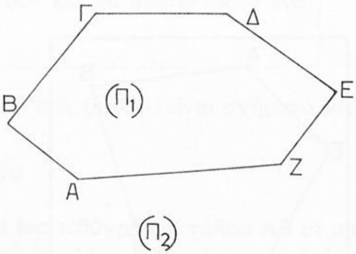
Τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΖ,ΖΗ,ΗΑ λέγονται πάλι

πλευρές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς καί τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, **κορυφές** της.

Ὅπως βλέπουμε, οἱ κορυφές μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς εἶναι ὅσες καί οἱ πλευρές της. Μιά πολυγωνική γραμμή μπορεῖ νά εἶναι **κυρτή** (Σχ. 20α) ἤ **μή κυρτή** (Σχ. 20β).

Τά πολύγωνα

4.10. Ἄς θεωρήσουμε μιά κλειστή κυρτή πολυγωνική γραμμή, π.χ. τήν ΑΒΓΔΕΖΑ (Σχ. 21). Ἡ γραμμή αὐτή χωρίζει τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου σέ δυό μέρη (ὑποσύνολα) τά (Π_1) καί (Π_2). Ἀπ' αὐτά τό (Π_1) «περιορίζεται» ἀπό τήν πολυγωνική γραμμή, ἐνῶ τό (Π_2) ἐκτείνεται ἀπεριόριστα. Τό μέρος (Π_1) μαζί μέ τήν πολυγωνική γραμμή ἀποτελοῦν ἕνα σχῆμα πού λέγεται **κυρτό πολύγωνο** ἤ ἁπλά **πολύγωνο**.



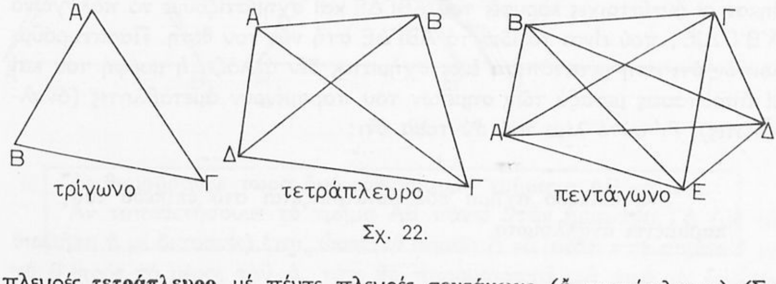
Σχ. 21

Οἱ πλευρές καί οἱ κορυφές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΒΓΔΕΖΑ λέγονται **πλευρές** καί **κορυφές** τοῦ πολυγώνου, ἐνῶ οἱ κυρτές γωνίες $Z\widehat{A}B$, $A\widehat{B}\Gamma$, $B\widehat{\Gamma}\Delta$, ... λέγονται **γωνίες** τοῦ πολυγώνου καί τίς συμβολίζουμε συνήθως μέ $\widehat{\mathbf{A}}$, $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$, ...

Ἕνα πολύγωνο ἔχει τόσες κορυφές καί τόσες γωνίες, ὅσες εἶναι καί οἱ πλευρές του. Για νά σημειώσουμε ἕνα πολύγωνο, γράφουμε διαδοχικά ὅλες τίς κορυφές του. Ἔτσι τό πολύγωνο τοῦ σχήματος 21 σημειώνεται

ΑΒΓΔΕΖ ἤ ΒΓΔΕΖΑ ἤ ΕΖΑΒΓΔ κλπ.

Τά πολύγωνα διακρίνονται ἀπό τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τους. Ἕνα πολύγωνο μέ τρεῖς πλευρές λέγεται **τρίγωνο** (ἤ τρίπλευρο), μέ τέσσερις



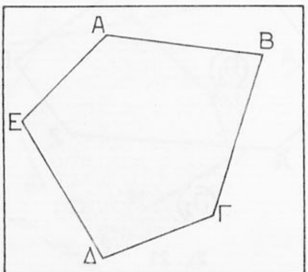
Σχ. 22.

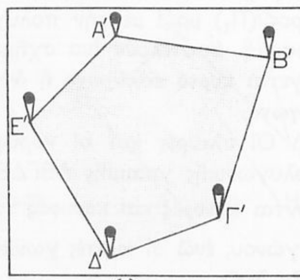
πλευρές **τετράπλευρο**, μέ πέντε πλευρές **πεντάγωνο** (ἤ πεντάπλευρο) (Σχ. 22) κλπ.

Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει δυό κορυφές ἑνός πολυγώνου καί δέν εἶναι πλευρά του λέγεται **διαγώνιος** τοῦ πολυγώνου. Ἔτσι στό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ οἱ διαγώνιοί του εἶναι τά ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ. Ἕνα τετράπλευρο ἔχει δύο μόνο διαγωνίους, π.χ. τό ΑΒΓΔ ἔχει διαγωνίους τίς ΑΓ καί ΒΔ. Τό τρίγωνο δέν ἔχει διαγωνίους.

Μετατόπιση ἐπίπεδου σχήματος. Ἴσα σχήματα

4.11. Ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα μποροῦμε νά τό ἀποτυπώσουμε σ᾽ ἕνα διαφανές χαρτί καί μετά νά τό *μετατοπίσουμε* σέ μιά νέα θέση τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἐργασία αὐτή γιά τό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ (Σχ. 23α) γίνεται ὡς ἑξῆς:





Σχ. 23

Παίρνουμε ἕνα διαφανές χαρτί, τό ἁπλώνουμε πάνω στό σχῆμα καί σχεδιάζουμε τό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ (Σχ. 23α). Ἔπειτα μετατοπίζουμε τό διαφανές σέ μιά ἄλλη θέση καί τρυπᾶμε μέ μιά καρφίτσα τίς κορυφές τοῦ πολυγώνου (Σχ. 23β). Οἱ τρυπίτσες πού κάνει ἡ καρφίτσα στό χαρτί σχεδιάσεως εἶναι οἱ κορυφές τοῦ ΑΒΓΔΕ στή νέα του θέση. Βγάζουμε τώρα τό διαφανές, ὀνομάζουμε Α′, Β′, Γ′, Δ′, Ε′ τά σημάδια στά ὁποῖα μεταφέρθηκαν οἱ ἀντίστοιχες κορυφές τοῦ ΑΒΓΔΕ καί σχηματίζουμε τό πολύγωνο Α′Β′Γ′Δ′Ε′, πού εἶναι τό ἴδιο τό ΑΒΓΔΕ στή νέα του θέση. Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι στή μετατόπιση ἑνός σχήματος δέν ἀλλάζει ἡ μορφή του καί οἱ ἀποστάσεις μεταξύ τῶν σημείων του παραμένουν ἀμετάβλητες (ἀναλλοίωτες). Γι᾽ αὐτό λέμε πιό σύντομα ὅτι:

> Ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ μετατοπίζεται στό ἐπίπεδό του παραμένει ἀναλλοίωτο.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι μᾶς δίνουν τά δυό παραπάνω πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καί Α′Β′Γ′Δ′Ε′ (Σχ. 23) δίχως νά ξέρουμε πώς τό δεύτερο ἔχει προκύψει ἀπό μετατόπιση τοῦ πρώτου. Τότε, ἄν ἀποτυπώναμε τό ΑΒΓΔΕ σέ διαφανές χαρτί καί τοποθετούσαμε τό διαφανές κατάλληλα πάνω στό πολύγωνο Α'Β'Γ'Δ'Ε', θά βλέπαμε ὅτι τά δυό πολύγωνα ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς καί ἀποτελοῦν ἕνα μόνο σχῆμα. Δυό τέτοια πολύγωνα λέγονται **ἴσα** καί γράφουμε

$$\boxed{ΑΒΓΔΕ = Α'Β'Γ'Δ'Ε'}$$

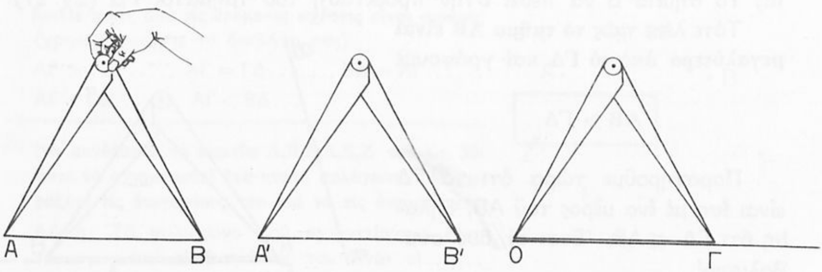
Γενικά:

> Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ὅταν μποροῦν (μέ κατάλληλη μετατόπιση τοῦ ἑνός) νά ἐφαρμόσουν καί νά ἀποτελέσουν ἕνα μόνο σχῆμα.

Ἔτσι π.χ. οἱ σελίδες ἑνός τετραδίου ἤ ἑνός βιβλίου εἶναι σχήματα ἴσα.

Ἴσα καί ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα

4.12. Ἄν θέλουμε νά μετατοπίσουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σέ μιά ἄλλη θέση, μποροῦμε νά τό ἀποτυπώσουμε σ' ἕνα διαφανές χαρτί καί νά ἀκολουθήσουμε τή διαδικασία τῆς προηγούμενης παραγράφου. Εἰδικά ὅμως γιά τά εὐθύγραμμα τμήματα ἐργαζόμαστε πιό εὔκολα χρησιμοποιώντας τό *διαβήτη*, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 24, ὅπου τό ΑΒ ἔχει μετατοπιστεῖ στίς θέσεις Α'Β' καί ΟΓ.



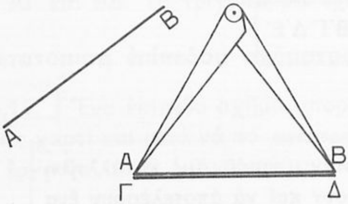
Σχ. 24

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ.

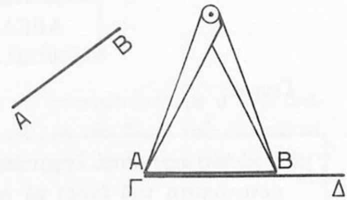
Ἄν τοποθετήσουμε τό τμῆμα ΑΒ πάνω στήν ἡμιευθεία ΓΔ (μέ τόν διαβήτη ἤ μέ διαφανές) ἔτσι, ὥστε τό σημεῖο Α νά πέσει στό σημεῖο Γ καί τό Β πρός τό μέρος τοῦ Δ, τότε θά παρουσιαστεῖ μιά ἀπό τίς ἑπόμενες περιπτώσεις.

ι) Τό σημεῖο Β νά πέσει πάνω στό Δ (Σχ. 25). Στήν περίπτωση αὐτή **τά τμήματα ΑΒ καί ΓΔ εἶναι ἴσα** (§ 4.11) καί γράφουμε

$$\boxed{AB = \Gamma\Delta}$$



Σχ. 25



Σχ. 26

ιι) Τό σημεῖο Β νά πέσει ἀνάμεσα στά Γ καί Δ, ὁπότε τό ΑΒ εἶναι ἴσο μέ ἕνα μέρος τοῦ ΓΔ. Στήν περίπτωση αὐτή (Σχ. 26) λέμε πώς **τό ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπό τό ΓΔ** καί γράφουμε

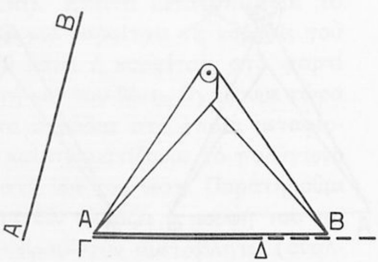
$$\boxed{AB < \Gamma\Delta}$$

Δηλαδή:

> Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπό ἕνα ἄλλο τμῆμα ΓΔ, ὅταν τό ΑΒ εἶναι ἴσο μέ ἕνα μέρος τοῦ ΓΔ.

ιιι) Τό σημεῖο Β νά πέσει στήν προέκταση τοῦ τμήματος ΓΔ (Σχ. 27). Τότε λέμε πώς **τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ΓΔ** καί γράφουμε

$$\boxed{AB > \Gamma\Delta}$$



Σχ. 27

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τό ΓΔ εἶναι ἴσο μέ ἕνα μέρος τοῦ ΑΒ, δηλαδή ὅτι ΓΔ < ΑΒ. Ἔτσι οἱ δυό συμβολισμοί

ΑΒ > ΓΔ καί ΓΔ < ΑΒ

ἐκφράζουν τό ἴδιο πράγμα.

Ἄν τά τμήματα ΑΒ καί ΓΔ δέν εἶναι ἴσα, λέγονται **ἄνισα**. Τότε γράφουμε

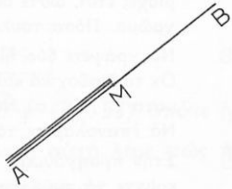
$$\boxed{AB \neq \Gamma\Delta}$$

Ὁ συμβολισμός λοιπόν ΑΒ ≠ ΓΔ σημαίνει ΑΒ < ΓΔ ἤ ΑΒ > ΓΔ.

Τό μέσο εὐθύγραμμου τμήματος

4.13. Γράφουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί παίρνουμε μιά λεπτή κλωστή ἴση μέ τό ΑΒ. Διπλώνουμε τήν κλωστή καί ὅπως εἶναι διπλωμένη τήν τεντώνουμε κατά μῆκος τοῦ ΑΒ βάζοντας τό ἕνα ἄκρο της στό Α (Σχ. 28). Τό ἄλλο ἄκρο τῆς κλωστῆς θά πέσει σ' ἕνα σημεῖο Μ, πού θά χωρίζει τό ΑΒ σέ δύο ἴσα μέρη

$$MA = MB$$



Σχ. 28

Τό σημεῖο Μ λέγεται **μέσο** τοῦ ΑΒ.
Μποροῦμε ἀκόμη νά βροῦμε τό μέσο τοῦ ΑΒ μέ ἀποτύπωση σέ διαφανές καί δίπλωση.

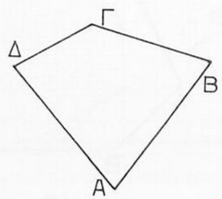
Ἀπό τόν τρόπο πού βρήκαμε τό μέσο τοῦ ΑΒ καταλαβαίνουμε ὅτι:

Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει ἕνα μόνο μέσο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά συγκριθοῦν μεταξύ τους οἱ πλευρές τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στό σχῆμα 29.**

Λύση: Ἄν χρησιμοποιήσουμε τό διαβήτη ἤ διαφανές, βρίσκουμε ὅτι ΒΓ < ΑΒ, ΑΒ = ΑΔ, ΓΔ < ΑΔ, ΓΔ < ΒΓ.



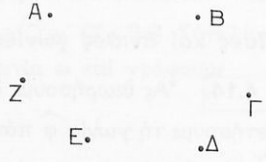
Σχ. 29

2. **Νά φέρετε τίς διαγωνίους τοῦ ΑΒΓΔ (Σχ. 29) καί νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες σχέσεις εἶναι σωστές** (χρησιμοποιῆστε τό διαβήτη σας)

ΑΓ > ΓΔ....., ΑΓ = ΓΔ......, ΒΔ = ΑΓ.....,
ΑΓ < ΓΔ......, ΑΓ < ΒΔ......

3. **Νά συνδέσετε τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ τοῦ Σχ. 30 ὥστε νά σχηματισθεῖ ἕνα κυρτό πολύγωνο. Νά χαράξετε τίς διαγωνίους του καί νά τίς ὀνομάσετε.**

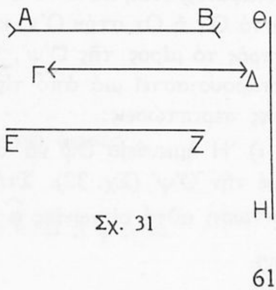
Λύση: Τό πολύγωνο πού σχηματίστηκε εἶναι τό...... καί οἱ διαγώνιοί του εἶναι οἱ......



Σχ. 30

4. **Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε 4 εὐθύγραμμα τμήματα. Δίχως νά χρησιμοποιήσετε ὄργανα ἀπαντῆστε ποιό εἶναι μικρότερο καί ποιό μεγαλύτερο.**

Ἄν ἐπαληθεύσετε τό συμπέρασμά σας μέ τό διαβήτη, θά διαπιστώσετε ὅτι δέν πρέπει νά βγάζουμε συμπεράσματα μόνο μέ τήν παρατήρηση, γιατί τά συμπεράσματα αὐτά δέν εἶναι πάντοτε σωστά.



Σχ. 31

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7. Νά προεκτείνετε καί ἀπό τά δυό μέρη τίς πλευρές ἑνός τριγώνου. Σέ ποιές καί πόσες περιοχές χωρίζεται τό ἐπίπεδο μέ τόν τρόπο αὐτό; Χρωματίστε τίς περιοχές ἔτσι, ὥστε ὅσες ἔχουν κοινό εὐθ. τμῆμα ἤ ἡμιευθεία νά ἔχουν διαφορετικό χρῶμα. Πόσα τουλάχιστο χρώματα θά χρειαστεῖτε;

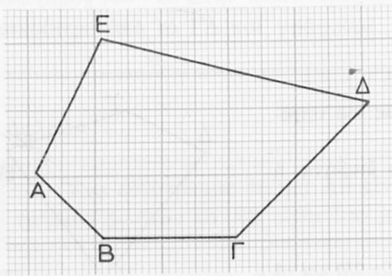
8. Νά γράψετε δύο ἡμιευθεῖες Οx, Οψ, πού νά μήν ἀποτελοῦν εὐθεία. Πάρτε στήν Οx τά διαδοχικά καί ἴσα τμήματα ΟΑ, ΑΒ καί στήν Οψ τά διαδοχικά καί ἴσα τμήματα ΟΓ, ΓΔ. α) Νά γράψετε τά τμήματα ΑΓ καί ΒΔ καί νά τά συγκρίνετε. β) Νά ἐπαναλάβετε τό ἴδιο γιά ἄλλες ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή.

9. Στήν προηγούμενη ἄσκηση νά βρεῖτε τό μέσο Μ τοῦ τμήματος ΒΔ καί νά συγκρίνετε τά τμήματα ΒΜ καί ΑΓ.

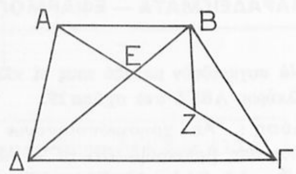
10. Νά γράψετε κεφαλαῖα γράμματα (τοῦ τύπου) πού νά ἔχουν ἴσες πλευρές.

11. Νά πάρετε τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε ἔτσι, ὥστε ἀνά τρία νά μήν ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία. Νά χαράξετε δύο τεθλασμένες γραμμές μέ ἄκρα τά Α καί Ε, πού νά ἔχουν κορυφές τά ἄλλα σημεῖα. Ὑπάρχει καί ἄλλη τέτοια γραμμή;

12. Σέ τετραγωνισμένο χαρτί νά γράψετε, χωρίς ἀποτύπωση, ἕνα σχῆμα ἴσο μέ τό ΑΒΓΔΕ πού βλέπετε στό παρακάτω σχῆμα (α).



(α)

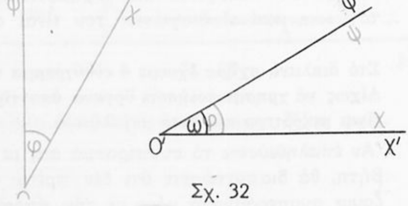


(β)

13. Νά ὁρίσετε ὅλα τά τρίγωνα πού ἔχουν σχηματιστεῖ στό παραπάνω σχῆμα (β).

Ἴσες καί ἄνισες γωνίες

4.14. Ἄς θεωρήσουμε δυό γωνίες $x\widehat{O}\psi = \widehat{\varphi}$ καί $x'\widehat{O'}\psi' = \widehat{\omega}$. Ἄν τοποθετήσουμε τή γωνία $\widehat{\varphi}$ πάνω στήν $\widehat{\omega}$ (ἀφοῦ τήν ἀποτυπώσουμε σέ διαφανές) ἔτσι, ὥστε τό Ο νά πέσει στό Ο', ἡ Οx στήν Ο'x' καί ἡ Οψ πρός τό μέρος τῆς Ο'ψ', τότε θά παρουσιαστεῖ μιά ἀπό τίς ἑπόμενες περιπτώσεις:



Σχ. 32

ι) Ἡ ἡμιευθεία Οψ νά συμπέσει μέ τήν Ο'ψ' (Σχ. 32). Στήν περίπτωση αὐτή οἱ **γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι ἴσες** καί γράφουμε

$$\boxed{\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}}$$

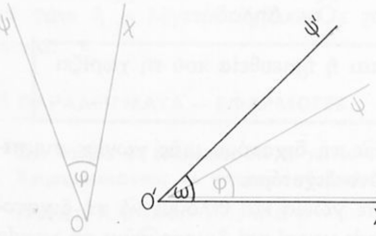
᾿Απ᾿ αὐτό καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι:

Ὅλες οἱ εὐθεῖες γωνίες εἶναι ἴσες.

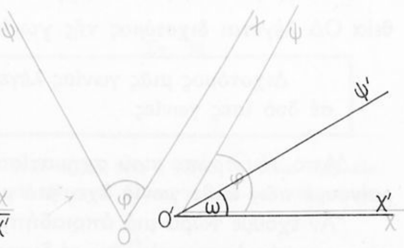
ιι) Ἡ ἡμιευθεία Οψ νά πέσει «μέσα» στή γωνία $x'\widehat{O'}\psi'$ (Σχ. 33), ὁπότε ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἴση μέ ἕνα μέρος τῆς $\widehat{\omega}$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε πώς **ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ εἶναι μικρότερη ἀπό τή γωνία $\widehat{\omega}$** καί γράφουμε

Ὥστε: $$\boxed{\widehat{\varphi} < \widehat{\omega}}$$

Μιά γωνία $\widehat{\varphi}$ εἶναι μικρότερη ἀπό μιά γωνία $\widehat{\omega}$, ὅταν ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἴση μέ ἕνα μέρος τῆς $\widehat{\omega}$.



Σχ. 33



Σχ. 34

ιιι) Ἡ ἡμιευθεία Οψ νά πέσει ἔξω ἀπό τή γωνία $x'\widehat{O'}\psi'$ (Σχ. 34). Τότε λέμε πώς **ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή γωνία $\widehat{\omega}$** καί γράφουμε

$$\boxed{\widehat{\varphi} > \widehat{\omega}}$$

Παρατηροῦμε τώρα πώς ἡ γωνία $\widehat{\omega}$ εἶναι ἴση μέ ἕνα μέρος τῆς $\widehat{\varphi}$, δηλαδή εἶναι $\widehat{\omega} < \widehat{\varphi}$. Ἑπομένως οἱ συμβολισμοί

$$\widehat{\varphi} > \widehat{\omega} \quad \text{καί} \quad \widehat{\omega} < \widehat{\varphi}$$

ἐκφράζουν τό ἴδιο πράγμα.

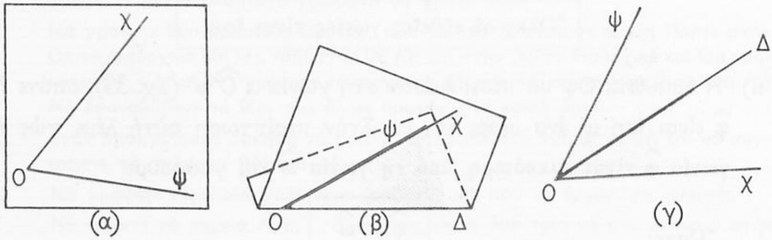
Ἄν οἱ γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ δέν εἶναι ἴσες, λέγονται **ἄνισες**.

Τότε γράφουμε $$\boxed{\widehat{\varphi} \neq \widehat{\omega}}$$

Ὁ συμβολισμός λοιπόν $\widehat{\varphi} \neq \widehat{\omega}$ σημαίνει $\widehat{\varphi} < \widehat{\omega}$ ἤ $\widehat{\varphi} > \widehat{\omega}$.

Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας

4.15. Σ' ἕνα φύλλο χαρτί σχεδιάζουμε μιά γωνία $x\widehat{O}\psi$ (Σχ. 35α). Διπλώνουμε ἔπειτα τό χαρτί ἔτσι, ὥστε ἡ Oψ νά συμπέσει μέ τήν Ox (Σχ. 35β)



Σχ. 35

καί τό τσακίζουμε. Εἶναι φανερό πώς μετά τό ἄνοιγμα τοῦ φύλλου, ἡ τσάκιση OΔ χωρίζει τή γωνία $x\widehat{O}\psi$ σέ δυό ἴσες γωνίες (Σχ. 35γ). Ἡ ἡμιευθεία OΔ λέγεται **διχοτόμος** τῆς γωνίας $x\widehat{O}\psi$. Δηλαδή:

> Διχοτόμος μιᾶς γωνίας λέγεται ἡ ἡμιευθεία πού τή χωρίζει σέ δυό ἴσες γωνίες.

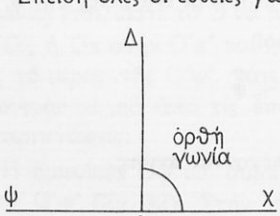
Ἀπό τόν τρόπο πού σχηματίσαμε τή διχοτόμο μιᾶς γωνίας συμπεραίνουμε πώς **κάθε γωνία ἔχει μιά μόνο διχοτόμο.**

Ἄν ἔχουμε τώρα μιά ὁποιαδήποτε γωνία καί θέλουμε νά τή διχοτομήσουμε, τήν ἀποτυπώνουμε σέ διαφανές χαρτί καί διχοτομοῦμε τή γωνία στό διαφανές μέ δίπλωση. Μετά χρησιμοποιώντας καρφίτσα ἀποτυπώνουμε τή διχοτόμο στήν ἀρχική γωνία.

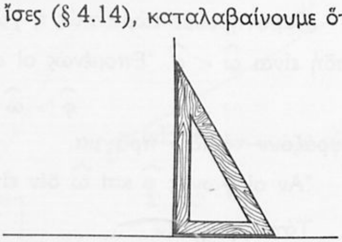
Ἡ ὀρθή γωνία

4.16. Σχηματίζουμε μιά εὐθεία γωνία $x\widehat{O}\psi$ (Σχ. 36) καί φέρνουμε τή διχοτόμο της OΔ (μέ δίπλωση). Κάθε μιά ἀπό τίς ἴσες γωνίες $x\widehat{O}\Delta$ καί $\psi\widehat{O}\Delta$ τή λέμε **ὀρθή γωνία**.

Ἐπειδή ὅλες οἱ εὐθεῖες γωνίες εἶναι ἴσες (§ 4.14), καταλαβαίνουμε ὅτι:



Σχ. 36



Σχ. 37

"Ολες οἱ ὀρθές γωνίες εἶναι ἴσες.

Στήν πράξη κατασκευάζουμε ὀρθές γωνίες μέ τό *γνώμονα*, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 37.

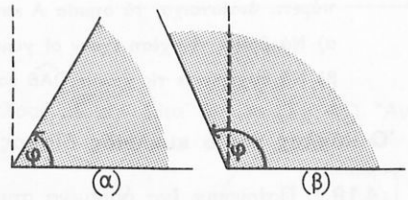
Ὀξεία καί ἀμβλεία γωνία

4.17. "Αν ἔχουμε μιά γωνία $\widehat{\varphi}$ καί τή συγκρίνουμε μέ μιά ὀρθή γωνία, θά συμβεῖ μιά ἀπό τίς ἑπόμενες περιπτώσεις:

- Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ νά εἶναι ὀρθή.
- Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ νά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ὀρθή (Σχ. 38α).

Τότε ἡ $\widehat{\varphi}$ λέγεται **ὀξεία** γωνία.

- Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ νά εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ὀρθή (Σχ. 38β) καί τότε ἡ $\widehat{\varphi}$ λέγεται **ἀμβλεία** γωνία.

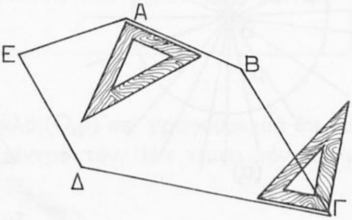


Σχ. 38

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό σχῆμα 39 βλέπουμε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ὀξεία, ἐνῶ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ἀμβλεία. Χρησιμοποιώντας τό γνώμονα νά βρεῖτε τί εἶναι οἱ ἄλλες γωνίες τοῦ πολυγώνου.**

Λύση: Ἡ $\widehat{B}$ εἶναι....., ἡ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ....., ἡ $\widehat{E}$ εἶναι .....



Σχ. 39

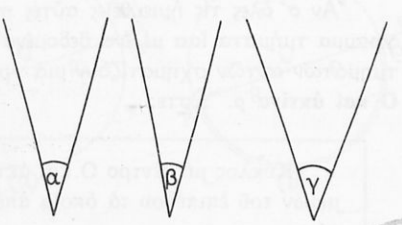
2. **"Εχουμε τρεῖς ἄνισες γωνίες $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ (Σχ. 40). Μέ πόσες τό λιγότερο συγκρίσεις μποροῦμε νά βροῦμε τή μεγαλύτερη καί τή μικρότερη γωνία;**

Λύση: Συγκρίνουμε τίς γωνίες $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$ καί τίς $\widehat{\beta}$ καί $\widehat{\gamma}$ (ἀφοῦ τίς ἀποτυπώσουμε σέ διαφανές).

"Αν εἶναι $\widehat{\alpha} < \widehat{\beta}$ καί $\widehat{\beta} < \widehat{\gamma}$, τότε ἔχουμε καί $\widehat{\alpha} < \widehat{\gamma}$ (μεταβατική ἰδιότητα). Συνεπῶς ἡ μικρότερη εἶναι ἡ $\widehat{\alpha}$ καί ἡ μεγαλύτερη ἡ $\widehat{\gamma}$.

"Αν εἶναι $\widehat{\alpha} < \widehat{\beta}$ καί $\widehat{\gamma} < \widehat{\beta}$, τότε χρειάζεται νά συγκρίνουμε καί τίς $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\gamma}$.

"Ωστε θέλουμε τό λιγότερο δύο συγκρίσεις.



Σχ. 40

14. Νά γράψετε μιά κυρτή γωνία καί νά βρεῖτε πρακτικά τή διχοτόμο της. Νά κατασκευάσετε τήν ἀντικείμενη ἡμιευθεία τῆς διχοτόμου καί νά ἐξετάσετε ἄν αὐτή εἶναι διχοτόμος τῆς μή κυρτῆς γωνίας, πού ἔχει τίς ἴδιες πλευρές.

15. Νά χωρίσετε μέ πρακτικό τρόπο μιά γωνία σέ τέσσερις ἴσες γωνίες.

16. Νά ὑποδείξετε ἀντικείμενα, πού ἔχουν ὀρθές γωνίες.

17. Νά βρεῖτε κεφαλαῖα γράμματα (τοῦ τύπου) πού νά ἔχουν, α) γωνίες ὀρθές, β) γωνίες ἀμβλεῖες.

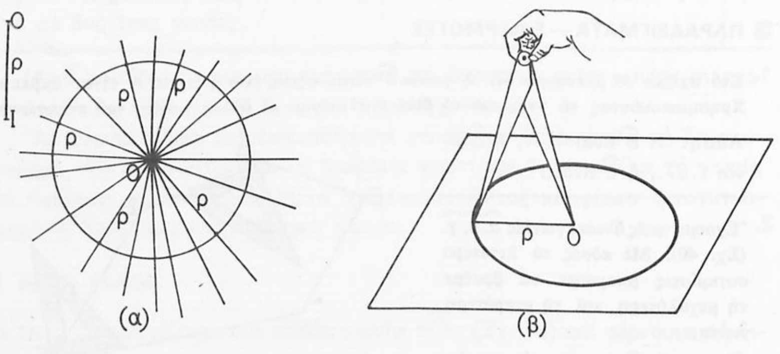
18. Νά σχηματίσετε μιά κυρτή γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί στίς πλευρές της Οx καί Οψ νά πάρετε, ἀντίστοιχα, τά σημεῖα Α καί Β, ὥστε ΟΑ = ΟΒ.

α) Νά βρεῖτε τί σχέση ἔχουν οἱ γωνίες $\widehat{OAB}$ καί $\widehat{OBA}$ μεταξύ τους.

β) Νά συγκρίνετε τίς γωνίες $\widehat{OAB}$ καί $\widehat{OBA}$ μέ τήν ὀρθή γωνία.

Ὁ κύκλος καί ὁ κυκλικός δίσκος

4.18. Παίρνουμε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ο σ' ἕνα ἐπίπεδο καί θεωροῦμε ὅλες τίς ἡμιευθεῖες τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχουν ἀρχή τό Ο (Σχ. 41α).

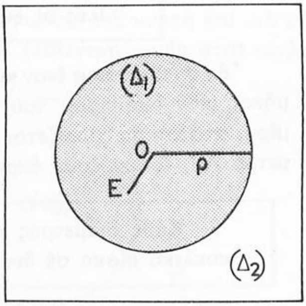


Σχ. 41

Ἄν σ' ὅλες τίς ἡμιευθεῖες αὐτές πάρουμε, μέ ἀρχή τό σημεῖο Ο, εὐθύγραμμα τμήματα ἴσα μέ ἕνα δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ρ, τά ἄκρα τῶν τμημάτων αὐτῶν σχηματίζουν μιά γραμμή πού λέγεται **κύκλος μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ρ**. Ὥστε:

> Κύκλος μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ρ εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἀπέχουν ἀπό τό Ο ἀπόσταση ἴση μέ ρ.

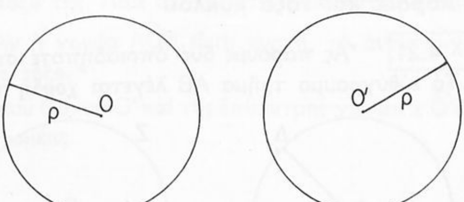
Ὁ κύκλος αὐτός θά γράφεται **«κυκλ. (O, ρ)»**[1]. Κύκλους κατασκευάζουμε μέ τό διαβήτη (Σχ. 41β). Ἕνας κύκλος χωρίζει ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου σέ δυό μέρη (ὑποσύνολα) (Δ_1) καί (Δ_2) (Σχ. 42), ἀπό τά ὁποῖα τό (Δ_1) «περιορίζεται» ἀπό τόν κύκλο, ἐνῶ τό (Δ_2) ἐκτείνεται ἀπεριόριστα. Τό (Δ_1) μαζί μέ τόν κύκλο ἀποτελοῦν ἕνα σχῆμα πού λέγεται **κυκλικός δίσκος μέ κέντρο O καί ἀκτίνα ρ** καί γράφεται κ.δισ. (O, ρ).



Σχ. 42

Ἴσοι κύκλοι

4.19. Κατασκευάζουμε δύο κύκλους μέ τήν ἴδια ἀκτίνα (Σχ. 43). Ἄν ἀποτυπώσουμε τόν ἕνα σέ διαφανές καί τόν τοποθετήσουμε κατάλληλα πάνω στόν ἄλλο, θά δοῦμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

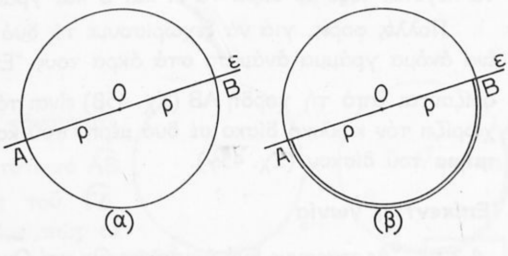


Σχ. 43

> Δύο κύκλοι (ἤ κυκλικοί δίσκοι) πού ἔχουν ἴσες ἀκτίνες εἶναι ἴσοι.

Διάμετρος κύκλου

4.20. Σχηματίζουμε τώρα ἕναν κύκλο (O,ρ) καί γράφουμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία ε, πού νά περνᾶ ἀπό τό κέντρο του. Ἡ ε τέμνει τόν κύκλο σέ δύο σημεῖα A καί B, γιά τά ὁποῖα ἔχουμε OA=OB =ρ (Σχ. 44α). Τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου (καί τοῦ ἀντίστοιχου κυκλικοῦ δίσκου) καί, ὅπως βλέπουμε, εἶναι ἴση μέ δύο ἀκτίνες. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:



Σχ. 44

(1) Μερικές φορές γιά συντομία γράφουμε: ὁ κύκλος O.

Όλες οἱ διάμετροι ἑνός κύκλου εἶναι ἴσες.

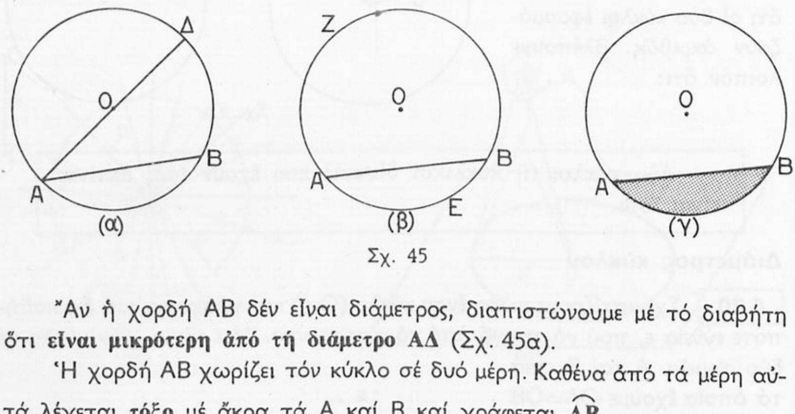
Ἄν σχεδιάσουμε ἕναν κύκλο σέ διαφανές χαρτί καί τό διπλώσουμε κατά μῆκος μιᾶς διαμέτρου του, π.χ. τῆς ΑΒ (Σχ. 44β), θά δοῦμε πώς τά δύο μέρη, στά ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύκλος (καί ὁ κυκλικός δίσκος) ἀπό τή διάμετρο ΑΒ, ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Ἔτσι καταλαβαίνουμε ὅτι:

Κάθε διάμετρος κύκλου χωρίζει καί τόν κύκλο καί τόν κυκλικό δίσκο σέ δυό ἴσα μέρη.

Καθένα ἀπό τά δυό ἴσα μέρη, στά ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύκλος μέ μιά διάμετρό του, λέγεται **ἡμικύκλιο** καί καθένα ἀπό τά δυό ἴσα μέρη, στά ὁποῖα χωρίζεται ὁ κυκλικός δίσκος, λέγεται **ἡμικυκλικός δίσκος**.

Χορδές καί τόξα κύκλου

4.21. Ἄς πάρουμε δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Β ἑνός κύκλου Ο. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται **χορδή** τοῦ κύκλου (Σχ. 45).



Σχ. 45

Ἄν ἡ χορδή ΑΒ δέν εἶναι διάμετρος, διαπιστώνουμε μέ τό διαβήτη ὅτι **εἶναι μικρότερη ἀπό τή διάμετρο ΑΔ** (Σχ. 45α).

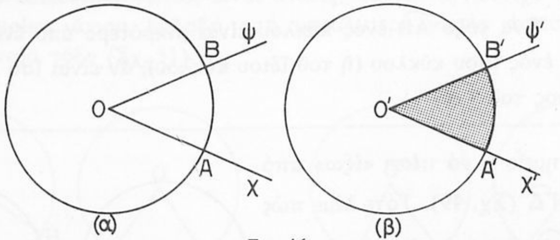
Ἡ χορδή ΑΒ χωρίζει τόν κύκλο σέ δυό μέρη. Καθένα ἀπό τά μέρη αὐτά λέγεται **τόξο** μέ ἄκρα τά Α καί Β καί γράφεται $\widehat{AB}$.

Πολλές φορές, γιά νά ξεχωρίσουμε τά δυό αὐτά τόξα, γράφουμε καί ἕνα ἀκόμα γράμμα ἀνάμεσα στά ἄκρα τους. Ἔτσι π.χ. τά δυό τόξα πού ὁρίζονται ἀπό τή χορδή ΑΒ (Σχ. 45β) εἶναι τά $\widehat{AEB}$ καί $\widehat{AZB}$. Μιά χορδή χωρίζει τόν κυκλικό δίσκο σέ δυό μέρη, πού καθένα τους λέγεται **κυκλικό τμῆμα** τοῦ δίσκου (Σχ. 45γ).

Ἐπίκεντρη γωνία

4.22. Ἄς πάρουμε δυό ἡμιευθεῖες Οx καί Οψ μέ ἀρχή τό κέντρο Ο ἑνός κύκλου κι ἄς ὀνομάσουμε Α καί Β τά σημεῖα στά ὁποῖα τέμνουν τόν κύκλο

(Σχ. 46α). Οἱ ἡμιευθεῖες αὐτές ὁρίζουν δυο γωνίες, μιά κυρτή καί μιά μή κυρτή. Κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες αὐτές λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία** στόν κύκλο



Σχ. 46

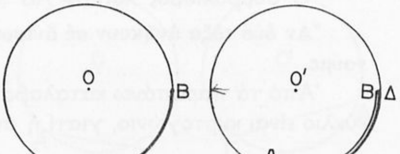
Ο. Παρατηροῦμε πώς κάθε μιά ἀπό τίς ἐπίκεντρες γωνίες περιέχει ἕνα τόξο $\widehat{AB}$ πού λέγεται **ἀντίστοιχο τόξο** της. Λέμε ἀκόμη ὅτι ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ *βαίνει* στό τόξο $\widehat{AB}$. Ἄν ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι κυρτή, τό ἀντίστοιχο τόξο της λέγεται **κυρτογώνιο τόξο.** *

Τό κοινό μέρος τοῦ κυκλικοῦ δίσκου Ο′ καί τῆς ἐπίκεντρης γωνίας $x'\widehat{O'}\psi'$ (Σχ. 46β) λέγεται **κυκλικός τομέας**.

Ἴσα καί ἄνισα τόξα

4.23. Σέ δυό ἴσους κύκλους Ο καί Ο′ παίρνουμε δυό τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$. Ἄν ἀποτυπώσουμε τόν κύκλο Ο σέ διαφανές καί τόν τοποθετήσουμε πάνω στόν Ο′ ἔτσι, ὥστε τό Ο νά πέσει στό Ο′ τό Α στό Γ καί τό Β πρός τό μέρος τοῦ Δ, θά παρουσιαστεῖ μιά ἀπό τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

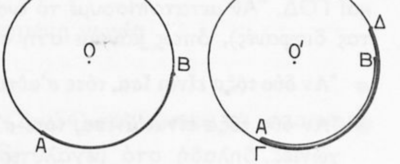
i) Τό σημεῖο Β νά πέσει πάνω στό Δ (Σχ. 47). Τότε **τά τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα** καί γράφουμε



Σχ. 47

$$\boxed{\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}}$$

ii) Τό σημεῖο Β νά πέσει «ἀνάμεσα» στά Γ καί Δ (Σχ. 48), ὁπότε τό $\widehat{AB}$ εἶναι ἴσο μέ ἕνα μέρος τοῦ $\widehat{\Gamma\Delta}$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε πώς **τό τόξο $\widehat{AB}$ εἶναι μικρότερο ἀπό τό $\widehat{\Gamma\Delta}$** καί γράφουμε



Σχ. 48

* Ὅταν γράφουμε $\widehat{AB}$ ἐννοοῦμε τό κυρτογώνιο τόξο $\widehat{AB}$.

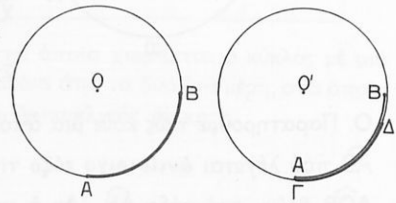
$$\boxed{\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}$$

Δηλαδή

> Ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ἑνός κύκλου εἶναι μικρότερο ἀπό ἕνα τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ἑνός ἴσου κύκλου (ἤ τοῦ ἴδιου κύκλου), ἄν εἶναι ἴσο μέ ἕνα μέρος τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

iii) Τό σημεῖο Β νά πέσει «ἔξω» ἀπό τό τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 49). Τότε λέμε πώς **τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$** καί γράφουμε

$$\boxed{\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}$$



Σχ. 49

Στήν περίπτωση αὐτή παρατηροῦμε ὅτι $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} < \overset{\frown}{AB}$. Συνεπῶς οἱ συμβολισμοί $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} < \overset{\frown}{AB}$ ἐκφράζουν ἀκριβῶς τό ἴδιο πράγμα.

Ἄν τά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δέν εἶναι ἴσα, λέγονται **ἄνισα.**

Τότε γράφουμε $\overset{\frown}{AB} \neq \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$

Ὁ συμβολισμός λοιπόν $\overset{\frown}{AB} \neq \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ σημαίνει $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ἤ $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Ἄν δύο τόξα ἀνήκουν σέ ἄνισους κύκλους, δέν μποροῦμε νά τά συγκρίνουμε.

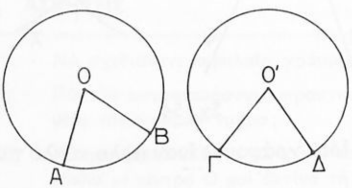
Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι κάθε τόξο μικρότερο ἀπό ἡμικύκλιο εἶναι κυρτογώνιο, γιατί ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία εἶναι κυρτή.

Σύγκριση τόξων, ἐπίκεντρων γωνιῶν καί χορδῶν τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων

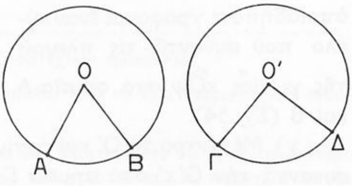
4.24. Σέ δυό **ἴσους κύκλους** Ο καί Ο' (ἤ στόν **ἴδιο κύκλο**) παίρνουμε δυό τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί σχηματίζουμε τίς ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$ καί $\Gamma\hat{O}\Delta$. Ἄν μετατοπίσουμε τό ἕνα τόξο πάνω στό ἄλλο (χρησιμοποιώντας διαφανές), ὅπως κάναμε στή σύγκρισή τους, θά διαπιστώσουμε ὅτι:

- **Ἄν δύο τόξα εἶναι ἴσα, τότε σ' αὐτά βαίνουν ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες** (Σχ.50).
- **Ἄν δύο τόξα εἶναι ἄνισα, τότε σ' αὐτά βαίνουν ὁμοίως ἄνισες ἐπίκεντρες γωνίες**, δηλαδή στό μεγαλύτερο τόξο βαίνει ἡ μεγαλύτερη ἐπίκεντρη γωνία (Σχ. 51).

- **Ἂν δύο ἐπίκεντρες γωνίες εἶναι ἴσες, καί τά ἀντίστοιχα τόξα τους εἶναι ἴσα** (Σχ. 50).
- **Ἂν δύο ἐπίκεντρες γωνίες εἶναι ἄνισες, καί τά ἀντίστοιχα τόξα τους εἶναι ὁμοίως ἄνισα**, δηλαδή στή μεγαλύτερη γωνία ἀντιστοιχεῖ τό μεγαλύτερο τόξο (Σχ. 51).



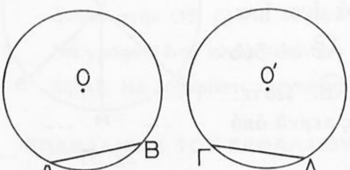
Σχ. 50



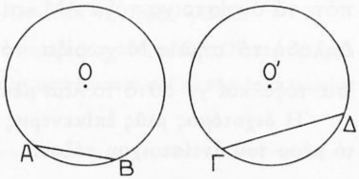
Σχ. 51

Συγκρίνοντας τώρα (μ'ἕνα διαβήτη) τίς χορδές τους διαπιστώνουμε ὅτι:

- **Ἂν δύο τόξα εἶναι ἴσα, καί οἱ χορδές τους εἶναι ἴσες** (Σχ. 52).
- **Ἂν δύο κυρτογώνια τόξα εἶναι ἄνισα, καί οἱ χορδές τους εἶναι ὁμοίως ἄνισες** (Σχ. 53).
- **Ἂν δύο χορδές εἶναι ἴσες, τά κυρτογώνια τόξα τους εἶναι ἴσα** (Σχ. 52).
- **Ἂν δύο χορδές εἶναι ἄνισες, τά κυρτογώνια τόξα τους εἶναι ὁμοίως ἄνισα** (Σχ. 53).



Σχ. 52



Σχ. 53

Οἱ παραπάνω ἰδιότητες εἶναι πολύ χρήσιμες στίς γεωμετρικές κατασκευές. Ἔτσι π.χ. μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἴσα τόξα ἤ ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες παίρνοντας δύο ἴσες χορδές (μέ ἕνα διαβήτη).

Κατασκευή γωνίας ἴσης μέ μιά δεδομένη γωνία (μέ χρήση διαβήτη καί χάρακα)

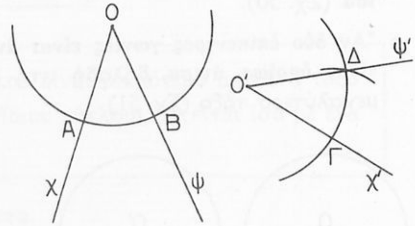
4.25. Μᾶς δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}\psi$ (Σχ. 54) καί θέλουμε νά κατασκευάσουμε μιά ἄλλη γωνία ἴση μέ τήν $x\widehat{O}\psi$.

Ἡ κατασκευή αὐτή μπορεῖ νά γίνει μέ διαφανές, ὅπως μάθαμε στήν

§ 4.11. Θά δοῦμε τώρα καί μιά ἄλλη κατασκευή, πού γίνεται μέ χάρακα καί διαβήτη, ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβέστερη καί γι' αὐτό εἶναι πολύ χρήσιμη στίς σχεδιάσεις.

α) Γράφουμε μιά ἡμιευθεία Ο'x'.

β) Μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ὁποιαδήποτε γράφουμε ἕναν κύκλο πού συναντᾶ τίς πλευρές τῆς γωνίας $x\widehat{O}\psi$ στά σημεῖα Α καί Β (Σχ. 54).



Σχ. 54

γ) Μέ κέντρο τό Ο' καί ἀκτίνα **τήν ἴδια** γράφουμε ἕναν ἄλλο κύκλο πού συναντᾶ τήν Ο'x' στό σημεῖο Γ.

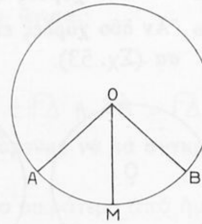
δ) Μέ κέντρο τό Γ καί **ἀκτίνα ἴση μέ τή χορδή ΑΒ** γράφουμε κύκλο πού συναντᾶ τόν προηγούμενο στό Δ καί φέρνουμε τήν Ο'Δ. Ἡ $\Gamma\widehat{O'}\Delta$ εἶναι ἴση μέ τήν $A\widehat{O}B$, γιατί βαίνουν σέ ἴσα τόξα.

Μέσο τόξου

4.26. Στόν κύκλο Ο (Σχ. 55) παίρνουμε ἕνα τόξο ΑΒ καί σχηματίζουμε τή γωνία $A\widehat{O}B$. Βρίσκουμε τή διχοτόμο της ΟΜ (μέ ἀποτύπωση καί δίπλωση).

Συνεπῶς οἱ γωνίες $A\widehat{O}M$ καί $B\widehat{O}M$ εἶναι ἴσες, ὁπότε τά ἀντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{BM}$ θά εἶναι ἴσα. Δηλαδή τό σημεῖο Μ χωρίζει τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ σέ δύο ἴσα τόξα καί γι' αὐτό τό λέμε **μέσο** τοῦ $\overset{\frown}{AB}$. Ὥστε:

Ἡ διχοτόμος μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας περνᾶ ἀπό τό μέσο τοῦ ἀντίστοιχου τόξου.

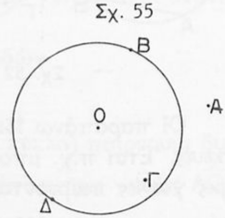


Σχ. 55

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό σχῆμα 56 ὀνομάζουμε κ τό σημειοσύνολο τοῦ κύκλου καί (δ) τό σημειοσύνολο τοῦ ἀντίστοιχου κυκλικοῦ δίσκου. Νά συνδέσετε μέ τά σύμβολα ∈, ∉ τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μέ τά κ καί (δ).**

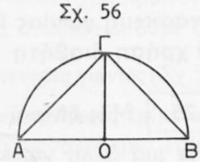
Λύση: Α ∉ κ, Β..... κ, Γ..... κ, Δ..... κ, Α...(δ), Β∈(δ), Γ...(δ), Δ...(δ)



Σχ. 56

2. **Στό ἀπέναντι ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΟΒ, ἡ ΟΓ σχηματίζει ὀρθή γωνία μέ τήν ΟΑ. Νά συγκριθοῦν: α) Τά τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ καί β) οἱ χορδές ΑΓ, ΓΒ.**

Λύση: α) Ἄν χρησιμοποιήσουμε διαφανές, βρίσκουμε ὅτι $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B}$. Αὐτό ὅμως μποροῦμε νά τό



Σχ. 57

συμπεράνουμε ἀμέσως, γιατί οἱ ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{AO\Gamma}$ καί $\widehat{\Gamma OB}$ εἶναι ἴσες (γιατί εἶναι ὀρθές). Ἑπομένως καί τά ἀντίστοιχα τόξα τους θά εἶναι ἴσα, δηλαδή $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B}$.
β) Μέ τό διαβήτη βρίσκουμε πώς χορδή ΑΓ = χορδή ΒΓ. Αὐτό μποροῦμε νά τό συμπεράνουμε ἐπίσης καί χωρίς τή χρήση τοῦ διαβήτη, γιατί οἱ ΑΓ καί ΓΒ εἶναι χορδές τῶν ἴσων τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Νά σχεδιάσετε κεφαλαῖα γράμματα, πού νά ἔχουν ἡμικύκλια.

20. Πῶς θά κατασκευάσουμε πρακτικά ἕναν κύκλο, πού νά ἔχει διάμετρο ἕνα δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα;

21. Νά γράψετε κύκλο μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ὅση θέλετε. Μετά νά γράψετε δεύτερο κύκλο μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα τή διάμετρο τοῦ πρώτου καί νά πάρετε σ' αὐτόν τά διαδοχικά καί ἴσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$. Οἱ ἀκτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ συναντοῦν τόν πρῶτο κύκλο στά σημεῖα Α',Β',Γ'. α) Νά συγκρίνετε τά τόξα $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{B'\Gamma'}$ μεταξύ τους. β) Μπορεῖτε νά συγκρίνετε τά τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ καί $\overset{\frown}{A'\Gamma'}$;

22. Ἄν γιά τά τόξα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως ἔχουμε $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{B\Gamma}$, τί μποροῦμε νά συμπεράνουμε γιά τά τόξα $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{B'\Gamma'}$;

23. Νά γράψετε ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο καί νά πάρετε τά διαδοχικά καί ἴσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma}$. Νά φέρετε τή χορδή ΑΓ καί νά πάρετε τό μέσο της Μ. Νά συγκρίνετε τό εὐθ. τμῆμα ΑΜ μέ τή χορδή ΑΒ.

24. Στήν προηγούμενη ἄσκηση νά φέρετε τήν ἀκτίνα ΟΒ. α) Ἐξετάστε ἄν τό Μ ἀνήκει στήν ΟΒ. β) Νά συγκρίνετε τήν $\widehat{OMA}$ μέ τήν ὀρθή γωνία.

25. Νά γράψετε ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο καί νά φέρετε δύο ἀκτίνες ΟΑ, ΟΒ καί τή χορδή ΑΒ. Νά συγκρίνετε τίς γωνίες $\widehat{OAB}$, $\widehat{OBA}$ μεταξύ τους καί μέ τήν ὀρθή γωνία.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Τό **ἐπίπεδο** εἶναι ἐπιφάνεια στήν ὁποία ὁ χάρακας ἐφαρμόζει ἀκριβῶς κατά ὁποιαδήποτε διεύθυνση. Μέ τό χάρακα γράφουμε **εὐθύγραμμα τμήματα**. Ἡ **εὐθεία γραμμή** προκύπτει, ἄν προεκτείνουμε ἀπεριόριστα ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα κι ἀπό τά δύο ἄκρα του. Ἡ εὐθεία ὁρίζεται ἀπό δύο σημεῖα της.
Ἕνα σημεῖο μιᾶς εὐθείας τή χωρίζει σέ δύο **ἡμιευθεῖες**.
Ἡ εὐθεία χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ δύο **ἡμιεπίπεδα**.
Δύο ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή ὁρίζουν δύο **γωνίες**, μία **κυρτή** καί μία **μή κυρτή**.
Ὅταν λέμε ἁπλῶς «*γωνία* $\widehat{xOy}$», ἐννοοῦμε τήν κυρτή γωνία.

2. Ἡ **τεθλασμένη** γραμμή ὁρίζεται ἀπό μία σειρά εὐθύγρ. τμημάτων, πού ἀνά δύο διαδοχικά δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.
Ἡ *κλειστή πολυγωνική γραμμή*, πού κάθε πλευρά της ὅταν προεκτείνεται τήν ἀφήνει στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο, ὁρίζει ἕνα **κυρτό πολύγωνο**.
Δύο σχήματα λέγονται **ἴσα**, ἄν τό ἕνα μέ κατάλληλη μετατόπιση ἐφαρμόζει ἀκριβῶς στό ἄλλο.

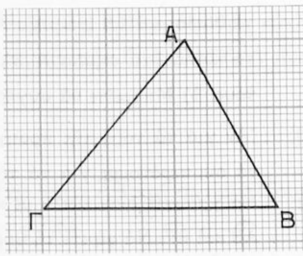
Διχοτόμος γωνίας εἶναι ἡ ἡμιευθεία πού τή χωρίζει σέ δύο ἴσες γωνίες. Ἡ διχοτόμος μιᾶς εὐθείας γωνίας τή χωρίζει σέ δύο ἴσες γωνίες, πού κάθε μιά λέγεται **ὀρθή γωνία**. **Ὅλες οἱ ὀρθές γωνίες εἶναι ἴσες.**

Κάθε γωνία μικρότερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ὀξεία** καί κάθε γωνία μεγαλύτερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ἀμβλεία**.

3. Τά σημεῖα ἑνός **κύκλου** ἀπέχουν ἀπό τό **κέντρο** του τήν ἴδια ἀπόσταση ρ πού λέγεται **ἀκτίνα** τοῦ κύκλου. **Διάμετρος** τοῦ κύκλου λέγεται κάθε **χορδή** του πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο του. **Ὅλες οἱ διάμετροι ἑνός κύκλου εἶναι ἴσες. Ἐπίκεντρη** γωνία σέ κύκλο εἶναι κάθε γωνία μέ κορυφή τό κέντρο τοῦ κύκλου. Στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες ἔχουν ἴσα ἀντίστοιχα τόξα καί ἴσες ἀντίστοιχες χορδές.

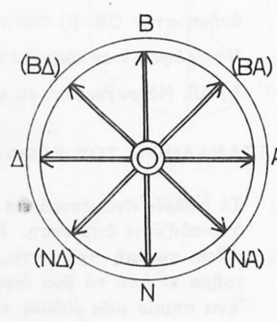
● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

26. Στό διπλανό σχῆμα ἔχει σχεδιαστεῖ τό τρίγωνο ΑΒΓ. α) Νά ὁρίσετε μέ τό μάτι σ' ἕνα ἄλλο τετραγωνισμένο χαρτί δύο σημεῖα Δ καί Ε ἔτσι, ὥστε ΔΕ = ΑΒ. β) Νά σχεδιάσετε ἕνα νέο τρίγωνο ἴσο μέ τό ΑΒΓ χωρίς ἀποτύπωση.



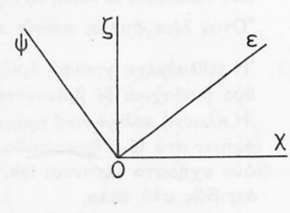
27. Σέ μιά εὐθεία γωνία $x\widehat{O}\psi$ φέρνουμε τήν ἡμιευθεία Οz. Γράφουμε τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $x\widehat{O}z$ καί $\psi\widehat{O}z$. Νά συγκριθεῖ ἡ γωνία, πού σχηματίζουν οἱ διχοτόμοι, μέ τήν ὀρθή γωνία.

28. Τό διπλανό σχῆμα δείχνει τό καντράν μιᾶς ναυτικῆς πυξίδας. Τά διαδοχικά τόξα πού βλέπετε εἶναι ἴσα. Νά ὁρίσετε: α) ἐπίκεντρες γωνίες, β) ὀξεῖες γωνίες, γ) ἀμβλεῖες γωνίες, δ) εὐθεῖες γωνίες, ε) ὀρθές γωνίες.



29. Νά γράψετε ἕναν κύκλο καί ἀπό ἕνα σημεῖο του Α νά πάρετε διαδοχικά καί ἴσα τόξα, πού ἡ χορδή τους νά εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα. Θά παρατηρήσετε ὅτι θά ξανάρθετε στό σημεῖο Α. Νά φέρετε τίς ἀκτίνες στά ἄκρα τῶν τόξων. α) Νά συγκρίνετε τίς ἐπίκεντρες διαδοχικές γωνίες πού σχηματίζονται. β) Σχηματίζονται εὐθεῖες γωνίες;

30. Στό διπλανό σχῆμα ἡ $x\widehat{O}\psi$ εἶναι ἀμβλεία, ἐνῶ οἱ $x\widehat{O}z$ καί $\psi\widehat{O}\varepsilon$ εἶναι ὀρθές. Νά συγκρίνετε τίς $x\widehat{O}\varepsilon$, $\psi\widehat{O}z$ μεταξύ τους καί μέ τήν ὀρθή.



31. Νά γράψετε ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο καί νά φέρετε δύο διαμέτρους του ΑΟΒ καί ΓΟΔ.

Νά πάρετε τό μέσο Μ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$ καί νά φέρετε τή διάμετρο ΜΟΝ. Νά συγκρίνετε τά τόξα $\overset{\frown}{ΝΒ}$ καί $\overset{\frown}{ΝΔ}$.

32. Στήν προηγούμενη ἄσκηση νά πάρετε τό μέσο Ρ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΑΔ}$ καί νά φέρετε τή διάμετρο ΡΟΣ. Νά συγκρίνετε τίς γωνίες $Μ\hat{O}Ρ$, $Μ\hat{O}Σ$, $Σ\hat{O}Ν$ καί $Ν\hat{O}Ρ$ μεταξύ τους καί μέ τήν ὀρθή γωνία.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

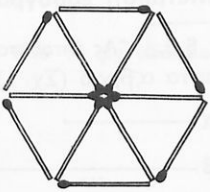
33. Νά σχηματίσετε ἕνα πεντάγωνο καί νά φέρετε ὅλες τίς διαγωνίους του. Πόσες εἶναι; Νά κάνετε τό ἴδιο μέ ἕνα ἑξάγωνο. Μπορεῖτε νά βρεῖτε τρόπο νά ὑπολογίζετε τόν ἀριθμό τῶν διαγωνίων χωρίς νά τίς μετρᾶτε;

34. Βρεῖτε πόσες διαγωνίους ἔχει ἕνα δεκάγωνο χωρίς νά τό σχηματίσετε. Κάνετε τό ἴδιο γιά ἕνα: α) ἑπτάγωνο, β) τετράπλευρο, γ) 25-γωνο, δ) ν-γωνο, ε) τρίγωνο.

35. Νά γράψετε ἕνα ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΟΒ καί νά πάρετε ἕνα σημεῖο του Γ. Νά φέρετε τίς χορδές ΓΑ καί ΓΒ καί νά συγκρίνετε τή γωνία $Α\hat{Γ}Β$ μέ τήν ὀρθή. Κάνετε τό ἴδιο γιά ἕνα ἄλλο σημεῖο Δ τοῦ ἡμικυκλίου.

36. Νά σχηματίσετε μία ὀρθή γωνία $x\hat{O}ψ$ καί ἕναν κύκλο μέ κέντρο τό Ο. Νά φέρετε τή διάμετρο ΑΟΒ ἔτσι, ὥστε νά μή χωρίζει τή γωνία $x\hat{O}ψ$. α) Νά συγκρίνετε κάθε μία ἀπό τίς $Α\hat{O}x$, $Β\hat{O}ψ$ μέ τήν ὀρθή γωνία. β) Ἐπίσης τίς $Α\hat{O}ψ$ καί $Β\hat{O}x$.

37. Νά γράψετε ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο καί νά πάρετε δύο διαδοχικά καί ἴσα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ καί $\overset{\frown}{ΒΓ}$. Νά φέρετε τίς διαμέτρους ΑΟΑ', ΒΟΒ', ΓΟΓ'. α) Ποιά σχέση ὑπάρχει μεταξύ τῶν τόξων $\overset{\frown}{Α'Β'}$ καί $\overset{\frown}{Β'Γ'}$; β) Ποιά εἶναι ἡ θέση τῆς ΟΒ' στή γωνία $Α'\hat{O}Γ'$.



38. Μέ 12 σπίρτα σχηματίζουμε τό διπλανό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό 6 ἴσα τρίγωνα. Χρησιμοποιῆστε ἀκόμη 6 σπίρτα καί τοποθετῆστε τα κατάλληλα, ὥστε τά τρίγωνα νά γίνουν ἐννέα.

39. Στό σχῆμα τῆς ἀσκήσεως 38 νά ἀφαιρέσετε: α) δύο σπίρτα ἔτσι, ὥστε νά μείνουν 4 ἴσα τρίγωνα, β) δύο σπίρτα ἔτσι, ὥστε νά μείνουν 2 ἴσα τετράπλευρα καί 2 ἴσα τρίγωνα, γ) τρία σπίρτα ἔτσι, ὥστε νά μείνουν 3 ἴσα τρίγωνα.

40. Νά σχηματίσετε μία ὀρθή γωνία $\hat{O}$ καί νά πάρετε ἕνα σημεῖο Α στή μία πλευρά της καί ἕνα σημεῖο Β στήν ἄλλη. Νά βρεῖτε τό μέσο Μ τοῦ τμήματος ΑΒ καί νά συγκρίνετε μεταξύ τους τά τμήματα ΟΜ καί ΜΑ.

Ἔτσι δημιουργεῖται μιά *ἀντιστοιχία ἕνα μὲ ἕνα* μεταξύ τῶν στοιχείων

τοῦ συνόλου $\Lambda = \{ A, \; B, \; \Gamma, \; \Delta, \ldots \}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

καί τοῦ συνόλου $\mathbb{N}^* = \{ 1, \; 2, \; 3, \; 4, \ldots \}$

Ἄν τώρα ἀντιστοιχίσουμε στήν ἀρχή O τῆς ἡμιευθείας τό μηδέν, ἔχουμε πάλι *ἀντιστοιχία ἕνα μέ ἕνα* μεταξύ τῶν στοιχείων

τοῦ συνόλου $M = \{ O, \; A, \; B, \; \Gamma, \; \Delta, \ldots \}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

καί τοῦ συνόλου $\mathbb{N} = \{ 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \ldots \}$.

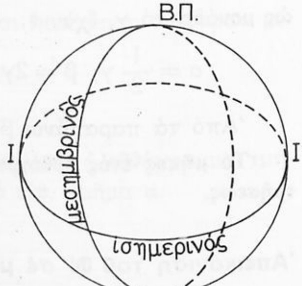
Μέ τήν ἀντιστοιχία αὐτή «τοποθετοῦμε» ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς στήν ἡμιευθεία Ox ἤ, ὅπως λέμε ἀλλιῶς, *«ἀπεικονίζουμε τό $\mathbb{N}$ σέ μιά ἡμιευθεία»*.

Ἡ ἀπεικόνιση αὐτή ἐξαρτᾶται ἀπό τή μονάδα μετρήσεως **α** (1). Δηλαδή ἄν παίρναμε ὡς μονάδα μετρήσεως ἕνα ἄλλο τμῆμα $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\alpha}$, τότε οἱ ἀριθμοί 1, 2, 3, 4, . . . θά ἀντιστοιχίζονταν σέ διαφορετικά σημεῖα τῆς Ox. Σέ μιά τέτοια ἀπεικόνιση τοῦ $\mathbb{N}$ βλέπουμε ὅτι **ἀπό δυό φυσικούς ἀριθμούς ὁ μικρότερος βρίσκεται ἀριστερά.**

Μονάδες μετρήσεως μήκους (2)

5. 4. Ὡς μονάδα μετρήσεως μήκους παίρνουμε τό γνωστό μας **μέτρο** (m) πού εἶναι, κατά μεγάλη προσέγγιση, ἴσο μέ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἀντιπροσωπεύει τό $\dfrac{1}{40\,000\,000}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Τό μέτρο ὑποδιαιρεῖται σέ 10 **παλάμες** ἤ **δεκατόμετρα** (dm). Κάθε παλάμη ὑποδιαιρεῖται σέ 10 **δακτύλους** ἤ **ἑκατοστόμετρα** (cm) ἤ **πόντους** καί κάθε δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται σέ 10 **γραμμές** ἤ **χιλιοστόμετρα** (mm).



Σχ. 3

(1) Ὅταν σέ μιά ἡμιευθεία Ox ἔχουμε καθορίσει μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων της, ἡ ἡμιευθεία λέγεται **ἡμιάξονας**.

(2) Οἱ πρῶτες μονάδες μετρήσεως γιά τά διάφορα μεγέθη ἐμφανίστηκαν, ὅταν οἱ ἄνθρωποι ἄρχισαν νά ὀργανώνονται σέ κοινωνικές ὁμάδες καί νά ἀναπτύσσουν συναλλαγές. Φαίνεται ὅτι πρῶτα καθιερώθηκαν οἱ μονάδες μήκους (γιατί ὁ ἄνθρωπος ἔπρεπε νά ὑπολογίσει τίς διαστάσεις τῆς κατοικίας του ἀνάλογα μέ τίς σωματικές του διαστάσεις, νά μετρήσει τίς ἀποστάσεις πού ἔκανε γιά νά βρεῖ τροφή κ.λ.π.) καί τέτοιες ἦταν ἡ παλάμη, ἡ πιθαμή, τό βῆμα, ἡ ὀργιά κ.ἄ. πού εἶχαν σχέση μέ τό ἀνθρώπινο σῶμα. Ἴσως

Δηλαδή τό μέτρο ὑποδιαιρεῖται κατά τό δεκαδικό σύστημα, ὁπότε εἶναι:

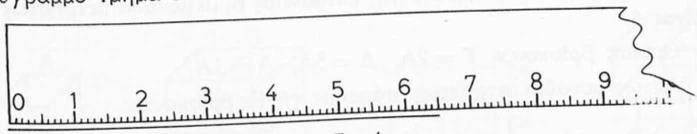
$$\boxed{\begin{aligned} 1\,\mathrm{m} &= 10\,\mathrm{dm} \\ 1\,\mathrm{dm} &= 10\,\mathrm{cm} \\ 1\,\mathrm{cm} &= 10\,\mathrm{mm} \\ 1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm} &= 100\,\mathrm{cm} = 1000\,\mathrm{mm} \end{aligned}}$$

Γιά νά μετρήσουμε μεγάλες ἀποστάσεις, χρησιμοποιοῦμε τό **χιλιόμετρο** (km) (1 km = 1000 m).

Ἄλλες μονάδες μήκους εἶναι:

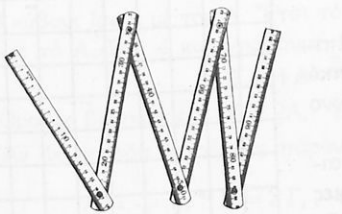
Ὁ **τεκτονικός πῆχης** (τ. π.),	1 τ.π. = 75 cm = $\frac{3}{4}$ m
Τό **μίλι ξηρᾶς**,	1 μίλι ξηρᾶς = 1609 m
Τό **μίλι τῆς θάλασσας**,	1 μίλι θάλασ. = 1852 m

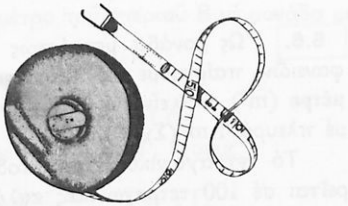
Γιά νά μετρήσουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (σέ σχέδιο), χρησιμοποιοῦμε συνήθως *ὑποδεκάμετρο* (Σχ. 4). Τό ὑποδεκάμετρο εἶναι ἕνα ὑλικό εὐθύγραμμο τμῆμα στό ὁποῖο ἀπεικονίζεται ἕνα ἀρχικό ἀπόκομμα τοῦ $\mathbb{N}^*$.



Σχ. 4

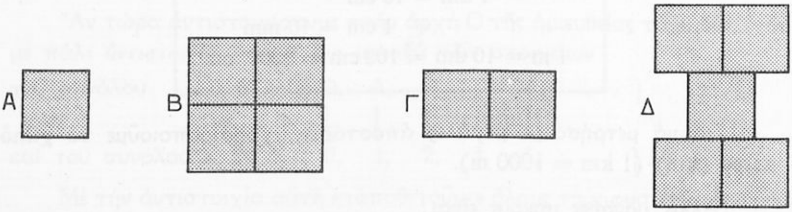
Τέτοια ὑλικά σώματα λέγονται *βαθμολογημένα ὄργανα*. Στό παρακάτω σχῆμα ἔχουμε δύο ἀκόμη βαθμολογημένα ὄργανα.





ἡ φράση «εἶναι 10 βήματα» νά ἔμεινε ἀπό τότε. Ἀργότερα μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου καί τήν πρόοδο τῆς ἐπιστήμης καθιερώθηκαν ἄλλες συμβατικές μονάδες μετρήσεως γιά ὅλα τά μεγέθη, πού χρησιμοποιοῦνται σήμερα ἀπ' ὅλα σχεδόν τά κράτη, μέ σκοπό τή διευκόλυνση στίς συναλλαγές καί τή συνεννόηση μεταξύ τῶν λαῶν. Οἱ πρότυπες αὐτές μονάδες φυλάσσονται στό Διεθνές Γραφεῖο Μέτρων καί Σταθμῶν τῆς Γαλλίας. Ἡ βαθμολόγηση τῶν ὀργάνων γίνεται σήμερα μέ βάση τίς πρότυπες αὐτές μονάδες.

5.5. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι θέλουμε νά μετρήσουμε τίς ἐπιφάνειες Α,Β,Γ,Δ (Σχ. 5) παίρνοντας γιά μονάδα μετρήσεως τήν ἐπιφάνεια Α.



Σχ. 5

Παρατηροῦμε πώς ἡ ἐπιφάνεια Β ἀποτελεῖται ἀπό 4 ἐπιφάνειες ἴσες μέ τήν Α. Συνεπῶς τό μέτρο τῆς ἐπιφάνειας Β, μέ μονάδα μετρήσεως τήν ἐπιφάνεια Α, εἶναι 4. Γράφουμε

$$Β = 4Α$$

Τό μέτρο μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται καί **ἐμβαδό** της. Ἔτσι ἡ ἰσότητα Β = 4Α σημαίνει ὅτι τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας Β, μέ μονάδα μετρήσεως τήν Α, εἶναι 4.

Ὁμοίως βρίσκουμε Γ = 2Α, Δ = 5Α, Α = 1Α.

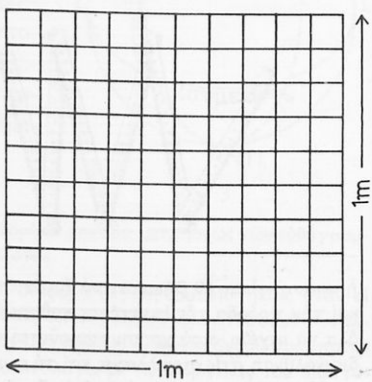
Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τή Γ, βρίσκουμε:

$$Α = \frac{1}{2}\,Γ, \quad Β = 2Γ, \quad Γ = 1Γ, \quad Δ = \frac{5}{2}\,Γ.$$

Μονάδες μετρήσεως ἐπιφάνειας

5.6. Ὡς μονάδα μετρήσεως ἐπιφανειῶν παίρνουμε τό **τετραγωνικό μέτρο** (m^2), πού εἶναι ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 1 m (Σχ. 6).

Τό τετραγωνικό μέτρο ὑποδιαιρεῖται σέ 100 **τετραγωνικές παλάμες** ἤ **τετραγωνικά δεκατόμετρα** (dm^2). Κάθε τετραγωνική παλάμη ὑποδιαιρεῖται σέ 100 **τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα** (cm^2) καί κάθε τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο ὑποδιαιρεῖται σέ 100 **τετραγωνικά χιλιοστόμετρα** (mm^2).



Σχ. 6

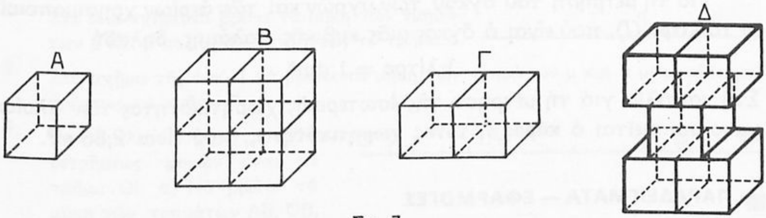
$$1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2$$
$$1\ \mathrm{dm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2$$
$$1\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{mm}^2$$
$$1\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{dm}^2 = 10\,000\ \mathrm{cm}^2 = 1\,000\,000\ \mathrm{mm}^2$$

Γιά τή μέτρηση μεγάλων ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦμε τό **τετραγωνικό χιλιόμετρο** (km^2), πού εἶναι ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 1 km. Στή χώρα μας γιά τή μέτρηση τῶν οἰκοπέδων χρησιμοποιεῖται ἀκόμη ὁ **τετραγωνικός τεκτονικός πήχης** (τ.τ.π.), πού εἶναι $\frac{9}{16}\ \mathrm{m}^2$ $\left(\text{τετράγωνο μέ πλευρά } 75\ \mathrm{cm} \text{ ἤ } \frac{3}{4}\ \mathrm{m}\right)$.

Γιά τή μέτρηση τῶν ἀγρῶν χρησιμοποιοῦμε τό **στρέμμα**, πού εἶναι $1000\ \mathrm{m}^2$.

Μέτρηση στερεῶν (ὄγκων)

5.7. Θεωροῦμε τώρα τά στερεά Α,Β,Γ,Δ (Σχ. 7) καί παίρνουμε γιά μονάδα μετρήσεως τό στερεό Α. Παρατηροῦμε πώς τό στερεό Β ἀποτελεῖται



Σχ. 7

ἀπό 4 κύβους ἴσους μέ τόν Α. Ἔτσι τό μέτρο τοῦ στερεοῦ Β, μέ μονάδα μετρήσεως τό Α, εἶναι 4 καί γράφουμε

$$\mathrm{B} = 4\,\mathrm{A}$$

Ὁμοίως βρίσκουμε $\Gamma = 2\mathrm{A}, \quad \Delta = 5\,\mathrm{A}, \quad \mathrm{A} = 1\,\mathrm{A}$.

Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τό στερεό Γ, ἔχουμε:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\,\Gamma, \quad \mathrm{B} = 2\,\Gamma, \quad \Delta = \frac{5}{2}\,\Gamma, \quad \Gamma = 1\,\Gamma.$$

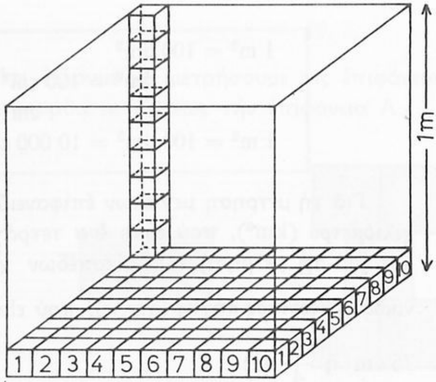
Τό μέτρο ἑνός στερεοῦ λέγεται καί **ὄγκος** του.

Μονάδες μετρήσεως ὄγκου

5.8. Ὡς μονάδα μετρήσεως ὄγκου παίρνουμε τό **κυβικό μέτρο** (m^3) πού εἶναι ἕνας κύβος μέ ἀκμή 1 m (Σχ. 8).

Τό κυβικό μέτρο ὑποδιαιρεῖται σέ 1000 **κυβικές παλάμες** ἤ **κυβικά δεκατόμετρα** (dm^3).

Κάθε κυβική παλάμη ὑποδιαιρεῖται σέ 1000 **κυβικά ἑκατοστόμετρα** (cm^3) καί κάθε κυβικό ἑκατοστόμετρο ὑποδιαιρεῖται σέ 1000 **κυβικά χιλιοστόμετρα** (mm^3).



Σχ. 8

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3$$
$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$$
$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$$
$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$$

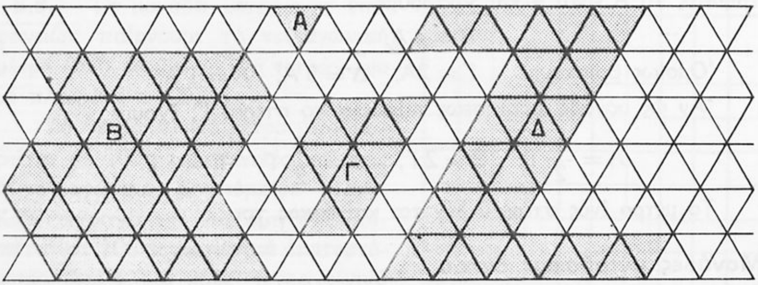
Γιά τή μέτρηση τοῦ ὄγκου τῶν ὑγρῶν καί τῶν ἀερίων χρησιμοποιοῦμε τό **λίτρο** (l), πού εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς κυβικῆς παλάμης, δηλαδή

$$1\ \text{λίτρο} = 1\ dm^3$$

Στή ναυτιλία γιά τή μέτρηση τῆς ἐσωτερικῆς χωρητικότητας τῶν πλοίων χρησιμοποιεῖται ὁ **κόρος** ἤ **τόνος χωρητικότητας**, πού εἶναι 2,86 m^3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωροῦμε τίς ἐπιφάνειες Α,Β,Γ,Δ (Σχ. 9). Νά βρεθεῖ τό μέτρο κάθε μιᾶς, ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τήν ἐπιφάνεια Α.**



Σχ. 9

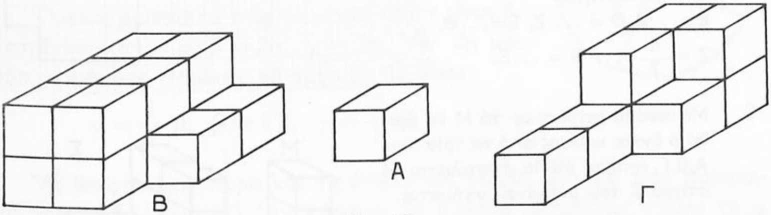
Λύση: Τό μέτρο τῆς Α εἶναι 1, τῆς Β εἶναι 40, τῆς Γ 10, καί τῆς Δ 34.

2. **Νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν ἐπιφανειῶν Α,Β,Γ,Δ τῆς προηγούμενης ἐφαρμογῆς, ἄν πάρετε ὡς μονάδα μετρήσεως τήν ἐπιφάνεια Γ, καί νά συμπληρώσετε τίς ἰσότητες:**

$$Α = \frac{1}{10}Γ, \quad Β = \ldots, \quad Γ = \ldots, \quad Δ = \ldots$$

3. **Νά βρεῖτε τόν ὄγκο καθενός ἀπό τά στερεά Α,Β,Γ (Σχ. 10) μέ μονάδα μετρήσεως τό Α ἤ τό Β. Ἔπειτα νά συμπληρώσετε τίς ἰσότητες:**

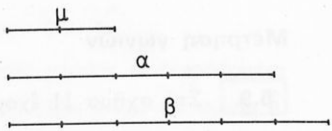
Α = 1Α, Β = 14Α, Γ = ...Α, Α = ...Β, Β = ...Β, Γ = ...Β.



Σχ. 10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

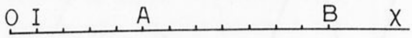
1. Στό διπλανό σχῆμα νά βρεῖτε τά μήκη τῶν τμημάτων α καί β μέ μονάδα μετρήσεως τό τμῆμα μ.



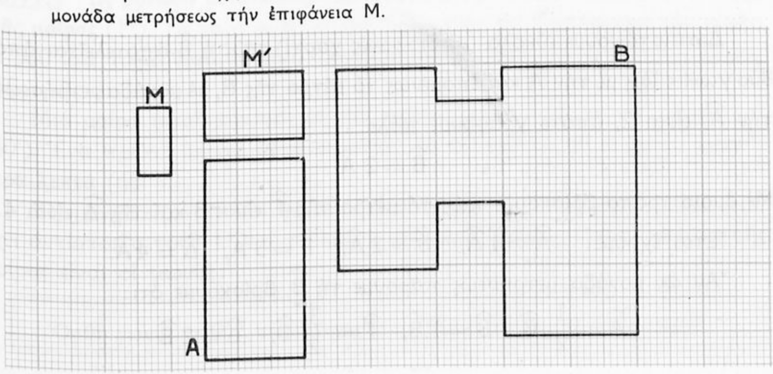
2. Στό ἴδιο σχῆμα νά βρεῖτε τά μήκη τῶν τμημάτων μ καί β μέ μονάδα μετρήσεως τό τμῆμα α.

3. Στό σχῆμα τῆς ἀσκ. 1 νά βρεῖτε τά μήκη τῶν τμημάτων μ καί α μέ μονάδα μετρήσεως τό τμῆμα β.

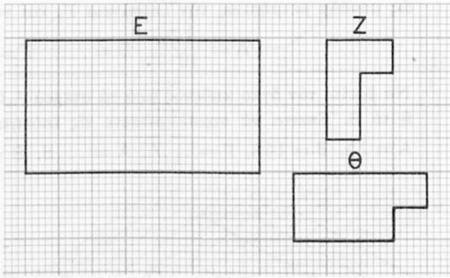
4. Στό διπλανό σχῆμα μονάδα μετρήσεως μηκῶν εἶναι τό τμῆμα ΟΙ. α) Νά βρεῖτε τά μήκη τῶν τμημάτων ΑΒ, ΟΒ, ΟΑ. β) Νά συγκρίνετε τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ μέ τή διαφορά τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων ΟΒ καί ΟΑ.



5. Στό παρακάτω σχῆμα νά βρεθοῦν τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν Α καί Β μέ μονάδα μετρήσεως τήν ἐπιφάνεια Μ.



6. Στό σχῆμα τῆς ἀσκήσεως 5 νά βρεθοῦν τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν Μ, Α, Β μέ μονάδα μετρήσεως τή Μ′.



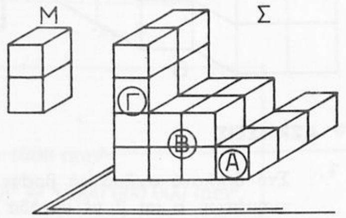
7. Ὁμοίως τά ἐμβαδά τῶν Μ, Μ′, Β μέ μονάδα μετρήσεως τήν Α.

8. Μέ τίς ἐπιφάνειες τοῦ διπλανοῦ σχήματος νά συμπληρώσετε τίς ἰσότητες:

Ε = . . . Ζ, Θ = . . . Ζ, Ε = . . . Θ,

$Ζ = \frac{4}{7}$ . . ., Θ = . . . Ε.

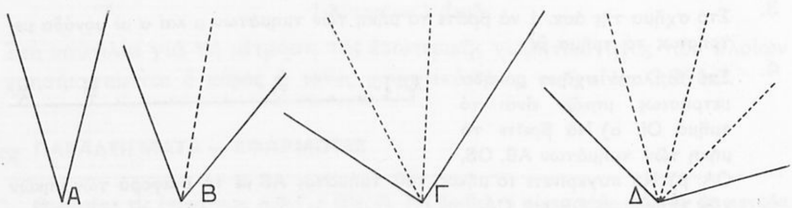
9. Μέ μονάδα μετρήσεως τό Μ νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος καθενός ἀπό τά τρία μέρη Α,Β,Γ, ἀπό τά ὁποῖα ἀποτελεῖται τό στερεό Σ τοῦ διπλανοῦ σχήματος.



10. Μέ μονάδα μετρήσεως τό Μ νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ Σ τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

Μέτρηση γωνιῶν

5.9. Στό σχῆμα 11 ἔχουμε τίς γωνίες $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$, $\widehat{Γ}$, $\widehat{Δ}$.



Σχ. 11

Διαπιστώνουμε εὔκολα (μέ διαφανές χαρτί) πώς ἡ $\widehat{Β}$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο γωνίες ἴσες μέ τήν $\widehat{Α}$ καί ἑπομένως τό μέτρο τῆς $\widehat{Β}$, μέ μονάδα μετρήσεως τήν $\widehat{Α}$, εἶναι 2, ὁπότε γράφουμε πάλι

$$\widehat{Β} = 2\,\widehat{Α}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε πώς τό μέτρο τῆς $\widehat{Γ}$ εἶναι 3 καί τῆς $\widehat{Δ}$ εἶναι 4.

Ἔτσι ἔχουμε: $\widehat{Α} = 1\,\widehat{Α}$, $\widehat{Β} = 2\,\widehat{Α}$, $\widehat{Γ} = 3\,\widehat{Α}$, $\widehat{Δ} = 4\,\widehat{Α}$.

Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τή $\widehat{Β}$, βρίσκουμε ὅτι:

$$\widehat{Α} = \frac{1}{2}\,\widehat{Β},\quad \widehat{Β} = 1\,\widehat{Β},\quad \widehat{Γ} = \frac{3}{2}\,\widehat{Β},\quad \widehat{Δ} = 2\,\widehat{Β}$$

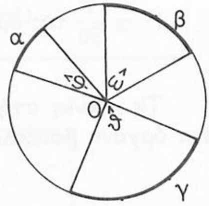
Μέτρηση τόξων

5.10. Στόν κύκλο Ο (Σχ. 12) ἔχουμε πάρει τά τόξα α, β, γ. Μέ διαφανές (ἤ μέ τό διαβήτη) διαπιστώνουμε πώς τό τόξο β ἀποτελεῖται ἀπό δύο τόξα ἴσα μέ τό α. Συνεπῶς τό μέτρο τοῦ β εἶναι 2 καί γράφουμε

$$\beta = 2\alpha$$

Ὁμοίως βρίσκουμε πώς τό μέτρο τοῦ γ εἶναι 3. Ἔτσι ἔχουμε $\alpha = 1\alpha$, $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$. Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τό τόξο β, θά εἶναι

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta, \quad \beta = 1\beta, \quad \gamma = \frac{3}{2}\beta.$$



Σχ. 12

Ἄς θεωρήσουμε τώρα καί τίς ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{\varphi}, \widehat{\omega}, \widehat{\theta}$ πού βαίνουν στά τόξα α,β,γ (Σχ. 12). Ἄν πάρουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τόξων τό α καί ὡς μονάδα μετρήσεως γωνιῶν τή γωνία $\widehat{\varphi}$ πού βαίνει στό «μοναδιαῖο» τόξο (δηλαδή στό τόξο α), παρατηροῦμε ὅτι:

$$\beta = 2\alpha, \quad \widehat{\omega} = 2\widehat{\varphi} \quad \text{καί} \quad \gamma = 3\alpha, \quad \widehat{\theta} = 3\widehat{\varphi}.$$

Δηλαδή τό μέτρο τοῦ τόξου β καί τό μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ ἐκφράζονται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό. Τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τό τόξο γ καί τή γωνία $\widehat{\theta}$. Γενικά:

> Τό μέτρο ἑνός τόξου εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τῆς ἀντίστοιχής του ἐπίκεντρης γωνίας, ἄν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν πάρουμε τήν ἐπίκεντρη γωνία πού βαίνει στή μονάδα τῶν τόξων.

Μονάδες μετρήσεως τόξων καί γωνιῶν

5.11. Ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων ἑνός κύκλου παίρνουμε τό **τόξο μιᾶς μοίρας** (1^0). Τό τόξο μιᾶς μοίρας βρίσκεται, ἄν διαιρέσουμε τόν κύκλο σέ 360 ἴσα τόξα. Καθένα ἀπό τά τόξα αὐτά εἶναι τόξο μιᾶς μοίρας.

Μιά μοίρα ὑποδιαιρεῖται σέ 60 **πρῶτα λεπτά** (60′). Ἕνα πρῶτο λεπτό ὑποδιαιρεῖται σέ 60 **δεύτερα λεπτά** (60″).

$$1^0 = 60'$$
$$1' = 60''$$
$$1^0 = 60' = 3600''$$

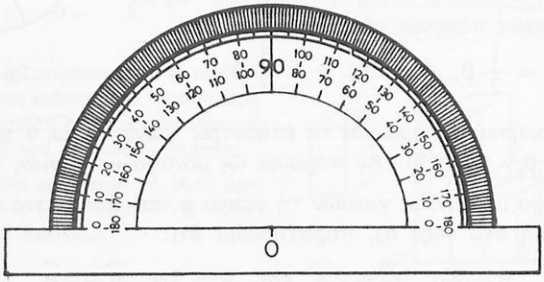
Ὡς μονάδα μετρήσεως γωνιῶν παίρνουμε τήν ἐπίκεντρη γωνία πού ἔχει ἀντίστοιχο τόξο 1^0 καί τή λέμε **γωνία μιᾶς μοίρας**. Πολλαπλάσια τῆς μοίρας εἶναι οἱ γωνίες:

> Ὀρθή γωνία $= 90^0$, εὐθεία γωνία $= 180^0$, πλήρης γωνία $= 360^0$.

Ἄν πάρουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν τήν ὀρθή γωνία, ἔχουμε

$$\boxed{1^0 = \frac{1}{90} \text{ τῆς ὀρθ., εὐθεία γωνία} = 2 \text{ ὀρθ., πλήρης γωνία} = 4 \text{ ὀρθ.}}$$

Τίς γωνίες στήν πράξη τίς μετρᾶμε μέ τό *μοιρογνωμόνιο*, πού εἶναι ἕνα ὄργανο βαθμολογημένο σέ μοῖρες (Σχ. 13).



Σχ. 13

Μονάδες βάρους

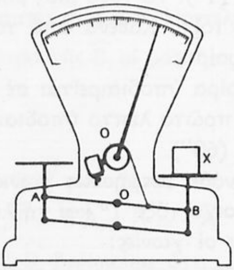
5.12. Γιά τή μέτρηση τοῦ βάρους ὡς μονάδα μετρήσεως παίρνουμε τό **χιλιόγραμμο βάρους** ἤ **κιλό** (kg*). Ἕνα κιλό εἶναι περίπου τό βάρος ἑνός λίτρου ἀποσταγμένου νεροῦ.

Ἕνα κιλό ὑποδιαιρεῖται σέ 1000 **γραμμάρια βάρους** (gr*). Γιά τή μέτρηση μεγάλων βαρῶν χρησιμοποιοῦμε τόν **τόνο** (t).

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg*}, \quad 1 \text{ kg*} = 1000 \text{ gr*}$$

Στίς παρακάτω εἰκόνες βλέπουμε ὄργανα μετρήσεως βάρους.

Δυναμόμετρο (κανταράκι)



Ζυγός

Μονάδες χρόνου

5.13. Μονάδα μετρήσεως χρόνου εἶναι ἡ **ἡμέρα**. Ἡ ἡμέρα ὑποδιαιρεῖται σέ 24 **ὧρες** (h). Μία ὥρα ὑποδιαιρεῖται σέ 60 **πρῶτα λεπτά** (min). Ἕνα πρῶτο λεπτό ὑποδιαιρεῖται σέ 60 **δεύτερα λεπτά** (sec).

Πολλαπλάσια τῆς ἡμέρας εἶναι τό **ἔτος** πού εἶναι περίπου 365,25 ἡμέρες καί ὁ **αἰώνας** πού εἶναι 100 ἔτη.

$$1 \text{ ἡμέρα} = 24 \text{ ὧρες}$$
$$1 \text{ ὥρα} = 60 \text{ min}$$
$$1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$$
$$1 \text{ ἔτος} = 365{,}25 \text{ ἡμέρες}, \quad 1 \text{ αἰώνας} = 100 \text{ ἔτη}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\Delta}$ εἶναι οἱ γωνίες στό σχῆμα 11, νά συμπληρωθοῦν οἱ ἰσότητες**

$$\widehat{B} = \ldots \widehat{\Delta}, \quad \widehat{\Gamma} = \frac{3}{4} \ldots, \quad \widehat{A} = \ldots \widehat{\Gamma}, \quad \widehat{B} = \ldots \widehat{\Gamma}.$$

2. **Νά τραποῦν σέ μοῖρες:**

i) $45^0\ 25'$, ii) $80^0\ 25'\ 30''$

Λύση: (i) $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^0$, συνεπῶς $45^0\, 25' = \left(45\,\frac{25}{60}\right)^0$.

(ii) $1^0 = 60' = 3600''$, ἑπομένως $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^0$

$$25'\, 30'' = 1530'' = \left(\frac{1530}{3600}\right)^0.$$

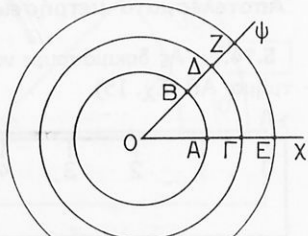
Ἄρα: $80^0\, 25'\, 30'' = \left(80\,\frac{1530}{3600}\right)^0.$

3. **Νά συμπληρωθεῖ ὁ πίνακας:**

	sec	min	h
2 h 35 min	9300	155	......
25 min 30 sec	......	......	$\frac{1530}{3600}$

4. **Στό διπλανό σχῆμα ἡ γωνία $x\widehat{O}\psi$ εἶναι 45^0. Νά βρεθοῦν τά μέτρα τῶν τόξων $\widehat{AB}, \widehat{\Gamma\Delta}, \widehat{EZ}$ σέ μοῖρες. Ἔπειτα νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν τόξων σέ mm μέ τή χρησιμοποίηση κλωστῆς. Ποιό εἶναι τό συμπέρασμα;**

Λύση: Τό μέτρο καθενός ἀπό τά τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{EZ}$ εἶναι 45^0, γιατί ὅπως ξέρουμε τό μέτρο ἑνός τόξου σέ μοῖρες εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας.

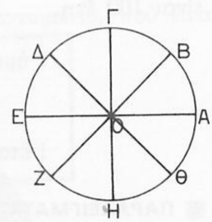


Σχ. 14

Τό μῆκος τοῦ $\overset{\frown}{ΑΒ}$ εἶναι (περίπου) 8 mm, τοῦ $\overset{\frown}{ΓΔ}$ (περίπου) 12 mm καί τοῦ $\overset{\frown}{ΕΖ}$ 16 mm. Ὥστε: **Τό μέτρο ἑνός τόξου σέ μοῖρες δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, τό μῆκος του ὅμως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.**

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

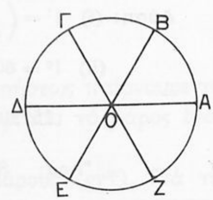
11. Μέ μονάδα μετρήσεως τήν ὀρθή γωνία νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν γωνιῶν (βλέπε διπλανό σχῆμα): α) $\widehat{ΑΟΒ}$, ὅπου ΟΒ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας, β) $\widehat{ΑΟΔ}$, ὅπου ΟΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{ΓΟΕ}$, γ) $\widehat{ΑΟΕ}$, δ) μή κυρτή $\widehat{ΑΟΖ}$, ε) μή κυρτή $\widehat{ΑΟΗ}$, ϛ) τῆς πλήρους γωνίας Ο.



12. Μέ μονάδα μετρήσεως τή 1^0 νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

13. Μέ μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τό τόξο πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὀρθή γωνία, νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν τόξων (σχῆμα ἀσκ. 11): α) $\overset{\frown}{ΑΒ}$, β) $\overset{\frown}{ΑΓΔ}$, γ) $\overset{\frown}{ΒΓΔ}$, δ) $\overset{\frown}{ΑΔΗ}$, ε) $\overset{\frown}{ΕΘΒ}$.

14. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε ἕξι ἴσα διαδοχικά τόξα. Ἄν πάρουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν τήν $\widehat{ΑΟΒ}$, νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν γωνιῶν: α) $\widehat{ΑΟΓ}$, β) $\widehat{ΑΟΔ}$, γ) μή κυρτῆς $\widehat{ΑΟΕ}$, δ) μή κυρτῆς $\widehat{ΑΟΖ}$.



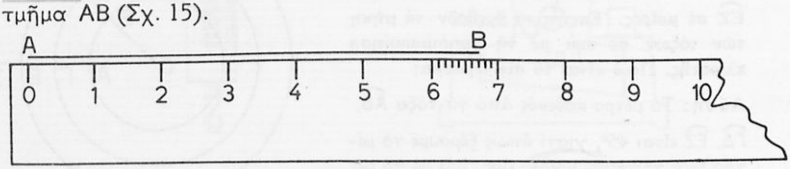
15. Στό σχῆμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως μέ μονάδα μετρήσεως γωνιῶν τήν $\widehat{ΑΟΓ}$, νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν γωνιῶν: α) $\widehat{ΑΟΒ}$, β) $\widehat{ΕΟΖ}$, γ) $\widehat{ΒΟΕ}$, δ) μή κυρτῆς $\widehat{ΑΟΕ}$, ε) μή κυρτῆς $\widehat{ΑΟΖ}$, ϛ) πλήρους γωνίας Ο.

16. Στό σχῆμα τῆς ἀσκήσεως 14 μέ μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τό τόξο $\overset{\frown}{ΑΒΓ}$ νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν: α) $\overset{\frown}{ΑΖ}$, β) $\overset{\frown}{ΒΓΔ}$, γ) $\overset{\frown}{ΓΕΖ}$, δ) $\overset{\frown}{ΑΓΖ}$, ε) $\overset{\frown}{ΓΔ}$.

17. Στό σχῆμα τῆς ἀσκ. 14 μέ μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων τό ἡμικύκλιο νά βρεῖτε τά μέτρα τῶν τόξων: α) $\overset{\frown}{ΒΓΔ}$, β) $\overset{\frown}{ΑΖΕ}$, γ) $\overset{\frown}{ΑΓΕ}$, δ) $\overset{\frown}{ΑΒΓ}$, ε) $\overset{\frown}{ΒΔΑ}$.

Ἀποτελέσματα μετρήσεων

5.14. Ἄς δοκιμάσουμε νά μετρήσουμε ἕνα μέγεθος, π.χ. τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ (Σχ. 15).



Σχ. 15

Ὅπως βλέπουμε στό σχῆμα, τό ἄκρο του B εἶναι ἀνάμεσα στίς ὑποδιαιρέσεις 6 cm καί 7 cm, ἀλλά πιό κοντά στήν ὑποδιαίρεση 7 cm.

Λέμε πώς τό μέτρο ἤ τό μῆκος τοῦ AB εἶναι *μέ προσέγγιση ἴσο* μέ 7 cm καί γράφουμε $(AB) \simeq 7$ cm (διαβάζουμε «τό μῆκος τοῦ AB εἶναι μέ προσέγγιση ἴσο μέ 7 cm»).

Πολλές φορές γιά συντομία δέ βάζουμε τήν παρένθεση. Ἔτσι γράφουμε ἁπλά π.χ. $AB = 7$ cm καί ἐννοοῦμε ὅτι τό μῆκος τοῦ AB εἶναι 7 cm. Ὁμοίως γράφουμε $\widehat{\alpha} = 30^0$ (ἤ $\tau = 30^0$) καί ἐννοοῦμε ὅτι τό μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\alpha}$ (ἤ τοῦ τόξου τ) εἶναι 30^0.

Ἄν κανείς θέλει μεγαλύτερη ἀκρίβεια (προσέγγιση), θά παρατηρήσει πώς τό σημεῖο B εἶναι λίγο μετά τήν ὑποδιαίρεση 7 mm καί λίγο πρίν τήν ὑποδιαίρεση 8 mm. Γι' αὐτό ἀκριβέστερα τό μέτρο τοῦ AB εἶναι ὁ *συμμιγής* 6 cm 7 mm.

Δηλαδή εἶναι $(AB) \simeq 6$ cm 7 mm

Ὅταν ἡ μονάδα μετρήσεως ὑποδιαιρεῖται κατά τό δεκαδικό σύστημα, ὁ συμμιγής γράφεται καί ὡς δεκαδικός ἀριθμός.

Ἔτσι τό μῆκος τοῦ AB μπορεῖ νά γραφεῖ

$$(AB) \simeq 6{,}7 \text{ cm}.$$

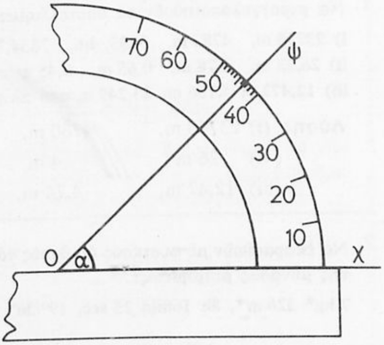
Ἐπειδή τά 7 mm εἶναι $\frac{7}{10}$ cm, τό μέτρο τοῦ AB γράφεται μέ κλασματική μορφή $(AB) \simeq 6\frac{7}{10}$ cm ἤ $(AB) = \frac{67}{10}$ cm.

Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τό 1 mm, βλέπουμε πώς τό μέτρο τοῦ AB εἶναι περίπου 67 mm, δηλαδή

$$(AB) \simeq 67 \text{ mm}.$$

Βλέπουμε δηλαδή πώς στίς περιπτώσεις πού τό ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως εἶναι συμμιγής ἤ δεκαδικός ἤ κλασματικός ἀριθμός, μποροῦμε μέ κατάλληλη ἀλλαγή τῆς μονάδας μετρήσεως νά τό ἐκφράσουμε μέ φυσικό ἀριθμό.

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἐργαζόμαστε, ὅταν θέλουμε νά μετρήσουμε ὁποιοδήποτε μέγεθος. Ἔτσι π.χ. τό μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\alpha}$ (Σχ. 16) εἶναι περίπου 43^0, δηλαδή εἶναι $\widehat{\alpha} \simeq 43^0$, καί μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια $\widehat{\alpha} \simeq 43^0\,30'$.



Σχ. 16

Μπορούμε ἀκόμη νά γράφουμε:(1)

$$\widehat{\alpha} \simeq \left(43\frac{30}{60}\right)^0 = \left(43\frac{1}{2}\right)^0 = (43{,}5)^0 = 2610'$$

Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα συμπεραίνουμε ὅτι:

- **Τό ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως μπορεῖ νά εἶναι φυσικός ἤ συμμιγής ἤ δεκαδικός ἤ κλασματικός ἀριθμός.**
- **Στίς περιπτώσεις πού τό ἀποτέλεσμα μιᾶς μετρήσεως εἶναι συμμιγής ἤ δεκαδικός ἤ κλασματικός ἀριθμός μποροῦμε μέ κατάλληλη ἀλλαγή τῆς μονάδας μετρήσεως νά τό ἐκφράσουμε μέ φυσικό ἀριθμό.**

Στρογγυλοποίηση ἀποτελεσμάτων

5.15. Ὁ ἄνθρωπος ἀπό τή φύση του ἔχει τήν τάση νά συγκρατεῖ στή μνήμη του ὅ,τι εἶναι περισσότερο γενικό καί σημαντικό. Ἔτσι, ἄν κάποτε ἔμαθε πώς ἡ ἀπόσταση Ἀθήνα - Θεσ/νίκη εἶναι 516 km, θά συγκρατήσει τά 500 km. Ἐπίσης ἄν διάβασε κάπου ὅτι ὁ πληθυσμός τῆς Ἀθήνας τό 1976 ἦταν 2 976 314 κάτοικοι, θά συγκρατήσει τό 3 000 000.

Συνηθίζουμε λοιπόν νά *στρογγυλοποιοῦμε* τά ἀποτελέσματα διάφορων μετρήσεων, ὅταν αὐτά εἶναι δύσκολο νά ἀπομνημονευθοῦν καί δέν ἔχει μεγάλη σημασία ἡ ἀκρίβεια. Ἡ στρογγυλοποίηση γίνεται στήν πλησιέστερη μονάδα, δεκάδα, ἑκατοντάδα κ.λ.π., ἤ ἀκόμη καί σέ δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά κ.λ.π., ἀνάλογα μέ τήν ἀκρίβεια πού θέλουμε. Π.χ. τά 65,3 m στρογγυλοποιοῦνται στά 65 m, τά 29,37 στρέμματα στρογγυλοποιοῦνται στά 29,4 στρέμματα κ.λ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά στρογγυλοποιηθοῦν τά ἀποτελέσματα:**

i) 23738 m, 4783 m, 5835, 4m, 7834,7 m στήν πλησιέστερη δεκάδα μέτρων.
ii) 26,35 m, 3,78 m, 0,65 m, 0,45 m στήν πλησιέστερη μονάδα.
iii) 12,472 m 4,736 m, 23,249 m στό πλησιέστερο ἑκατοστόμετρο.

Λύση:

(i)	23740 m,	4780 m,	5840 m,	7830 m
(ii)	26 m ,	4 m,	1 m,	0 m
(iii)	12,47 m,	4,74 m,	23,25 m.	

2. **Νά ἐκφρασθοῦν μέ φυσικούς ἀριθμούς τά ἑπόμενα ἀποτελέσματα μετρήσεων μέ ἀλλαγή τῆς μονάδας μετρήσεως:**

7 kg* 326 gr*, 8h 16min 25 sec, $19^0\ 36'$, 5 dm^2 7 cm^2 18 mm^2

---

(1) Ἐπειδή ἡ μοίρα δέν ὑποδιαιρεῖται κατά τό δεκαδικό σύστημα, εἶναι λάθος νά γράφουμε τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως $43^0 30'$ ὡς δεκαδικό $(43{,}30)^0$.

Λύση: 7 kg* 326 gr* = 7000 gr* + 326 gr* = 7326 gr*

8 h 16 min 25 sec = 28800 sec + 960 sec + 25 sec = 29785 sec

$19^0\ 36' = 1140' + 36' = 1176'$

5 dm² 7 cm² 18 mm² = 50 000 mm² + 700 mm² + 18 mm² = 50718 mm²

3. **Νά βρεθεῖ (καί νά γραφεῖ δίπλα της) ποιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἰσότητες εἶναι σωστή καί ποιά λάθος.**

7 m 6 dm = 7,6 m σωστή, 3 h 26 min = 3,26 h λάθος, $75^0\ 42' = \left(75\frac{42}{60}\right)^0 \ldots,$

12 m² 7 dm² 8 cm² = 1207,08 dm²...

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18. Τό ἐμβαδό μιᾶς ἐπιφάνειας εἶναι 74 m² 30 cm². Νά τραπεῖ σέ cm².
19. Τό ἐμβαδό 25 m² 42 cm² νά τραπεῖ σέ m² (ὡς μικτός καί ὡς δεκαδικός).
20. Ἕνα ἐμβαδό εἶναι 4,75 m². Νά τραπεῖ σέ cm² καί σέ mm².
21. 6 dm³ 25 cm³ νά τραποῦν σέ cm³ καί dm³
22. Πόσες μοῖρες εἶναι μία γωνία πού εἶναι ἴση μέ $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς;
23. Μία γωνία εἶναι 120'. Νά τραπεῖ σέ μέρη ὀρθῆς.
24. Γωνία $32^0\ 25'$, νά τραπεῖ σέ πρῶτα λεπτά καί σέ μέρη ὀρθῆς.
25. 7 h 25 min νά τραποῦν σέ min.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1. Στή **μέτρηση** τῶν μεγεθῶν συγκρίνουμε ἕνα μέγεθος μέ ἕνα ἄλλο ὁμοειδές πού τό παίρνουμε γιά **μονάδα**.
Τό ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως εἶναι τό **μέτρο** τοῦ μεγέθους. Τό μέτρο ἑνός μεγέθους ἐξαρτᾶται ἀπό τή μονάδα μετρήσεως.

● Τό μέτρο ἑνός εὐθ. τμήματος λέγεται **μῆκος**.

● Τό μέτρο μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται **ἐμβαδό**.

● Τό μέτρο τοῦ χώρου, πού κατέχει ἕνα στερεό, λέγεται **ὄγκος**.

2. Τό σύνολο ℕ ἀπεικονίζεται σέ μιά ἡμιευθεία (**ἡμιάξονα**) ἄν πάρουμε ἀπό τήν ἀρχή της διαδοχικά ἴσα εὐθ. τμήματα καί ἀντιστοιχίσουμε στήν ἀρχή τῆς ἡμιευθείας τό 0 καί στό τέλος τῶν διαδοχικῶν τμημάτων τούς φυσικούς 1,2,3, ...

3. Οἱ κυριότερες μονάδες μετρήσεως εἶναι:

● Τό **μέτρο** (m) ἤ γαλλικό μέτρο γιά τή μέτρηση εὐθ. τμημάτων.

● Τό **τετραγωνικό μέτρο** (m²) γιά τή μέτρηση ἐπιφανειῶν.

● Τό **κυβικό μέτρο** (m³) γιά τή μέτρηση ὄγκων.

● Τό **τόξο μιᾶς μοίρας** (1^0), πού εἶναι τόξο ἴσο μέ τό $\frac{1}{360}$ τοῦ κύκλου, γιά τή μέτρηση τῶν τόξων.

- Ἡ **γωνία μιᾶς μοίρας** καί ἡ **ὀρθή γωνία** γιά τή μέτρηση τῶν γωνιῶν.
- Τό **χιλιόγραμμο** ἤ **κιλό** (kg*) γιά τή μέτρηση βάρους.
- Ἡ **ἡμέρα** γιά τή μέτρηση χρόνου.

Τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων εἶναι ἀριθμοί: φυσικοί, κλασματικοί, δεκαδικοί, συμμιγεῖς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

26. Μία γωνία εἶναι 12° 5′ 18″. Νά τραπεῖ σέ δεύτερα λεπτά καί σέ μέρη ὀρθῆς.

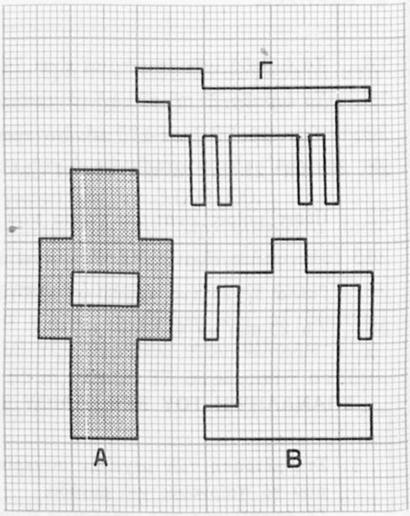
27. Τά 18 min τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι; Πόσα sec ἔχουν;

28. $1\frac{3}{4}$ h πόσα sec εἶναι;

29. Ἕνα τοῦβλο ζυγίζει 1 kg* καί μισό τοῦβλο. Πόσο βάρος ἔχει τό τοῦβλο;

30. Νά συμπληρωθεῖ ὁ παρακάτω πίνακας μέ τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν Α,Β,Γ τοῦ διπλανοῦ σχήματος

	mm²	cm²	dm²
Α			
Β			
Γ			



31. Νά συμπληρώσετε τίς ἑπόμενες ἰσότητες: i) 18 m 7 dm = 187. . ., ii) 30° 20′ = . . . , iii) 5 h 15 min = . . . h, iv) 65 m² 25 dm² 70 cm² = . . . dm², v) 6 h 20 min = . . . min.

32. Νά στρογγυλοποιήσετε τούς ἑπόμενους ἀριθμούς:
   i) 15828, 3276503, 1478,56, 27863,89 στήν πλησιέστερη πεντάδα χιλιάδων,
   ii) 326,51, 1893,75, 31196, 9798,20 στήν πλησιέστερη πεντάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

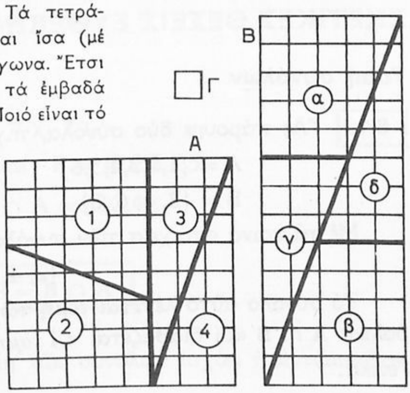
33. Ἕνας τενεκές γεμάτος περιέχει 18 kg* λάδι. Θέλουμε μέ ἕνα δοχεῖο πού χωρεῖ 6 kg* λάδι νά μεταφέρουμε ἀπό τόν τενεκέ 8 kg* λάδι, σέ ἕνα ἄλλο δοχεῖο πού χωρεῖ 10 kg*. Πῶς θά γίνει ἡ μεταφορά;

34. Ἀπό τρεῖς ὅμοιες σφαῖρες ἡ μία εἶναι πιό ἐλαφριά. Πῶς θά τή βροῦμε, ἄν διαθέτουμε ζυγαριά (χωρίς σταθμά), μέ μιά μόνο ζύγιση;

35. Διαθέτουμε ἕνα ζυγό καί σταθμά 1 kg*, 3 kg*, 9 kg*. Πῶς θά μπορέσουμε νά ζυγίσουμε μέ μιά μόνο ζύγιση, βάρος α) 5 kg*, β) 7 kg*, γ) 8 kg*;

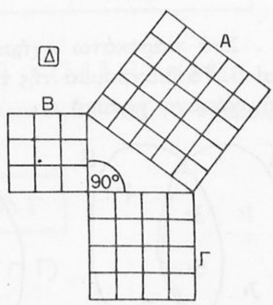
36. Ἔχουμε ἐννέα ὅμοιες σφαῖρες ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία εἶναι ἐλαφρότερη. Πῶς θά τή βροῦμε, ἄν διαθέτουμε ζυγαριά (χωρίς σταθμά) μέ δύο ζυγίσεις;

37. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τό τετράγωνο Α χωρισμένο στά τετράπλευρα (1), (2) καί στά τρίγωνα (3), (4) καί τό ὀρθογώνιο Β χωρισμένο στά τετράπλευρα (α), (β) καί στά τρίγωνα (γ), (δ). Τά τετράπλευρα (1), (2), (α), (β) φαίνονται ἴσα (μέ τό μάτι) καθώς καί τά τέσσερα τρίγωνα. Ἔτσι φαίνεται ὀρθό τό συμπέρασμα ὅτι τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν Α καί Β εἶναι ἴσα. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδό κάθε ἐπιφάνειας μέ μονάδα μετρήσεως τό τετράγωνο Γ; Βρίσκετε τό ἴδιο ἐμβαδό; Ἄν ὄχι, μπορεῖτε νά ἐξηγήσετε γιατί;



38. Στό παρακάτω σχῆμα, μέ μονάδα μετρήσεως τό τετράγωνο Δ νά βρεῖτε τά ἐμβαδά τῶν τετραγώνων Α, Β, Γ. Μπορεῖτε νά διατυπώσετε ἕνα συμπέρασμα;

39. **Μεγάλοι ἀριθμοί :** α) Ὁ ἥλιος ἀπέχει ἀπό τή γῆ περίπου 150 ἑκατομμύρια km. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση αὐτή σέ m; β) Τό πλησιέστερο ἄστρο-ἀπλανής, ἀπέχει ἀπό τό ἡλιακό μας σύστημα τόση ἀπόσταση, ὥστε τό φῶς χρειάζεται 4,3 χρόνια γιά νά τή διατρέξει. Νά βρεῖτε πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση αὐτή σέ km, ἄν ξέρετε ὅτι τό φῶς σέ ἕνα ἔτος διατρέχει διάστημα 9,5 τρισεκατομμύρια km.



40. Ἔχουμε ἕνα δοχεῖο γεμάτο μέ 24 kg* λάδι καί τρία ἄδεια δοχεῖα πού χωροῦν τό ἕνα 10 kg*, τό δεύτερο 12 kg* καί τό τρίτο 6 kg* λάδι. Χρησιμοποιώντας μόνο τά δοχεῖα αὐτά νά μοιράσετε τό λάδι ἐξίσου σέ τρία δοχεῖα.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΝ

Τομή συνόλων

6.1. Ἄς πάρουμε δύο σύνολα, π.χ. τά

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Μέ τά κοινά στοιχεῖα τῶν συνόλων αὐτῶν σχηματίζουμε τό σύνολο

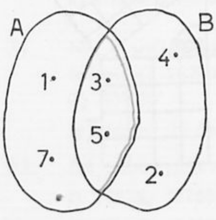
$$\{2, 4, 6\}$$

Τό σύνολο αὐτό λέγεται **τομή** τῶν συνόλων Α καί Β, γράφεται συμβολικά $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ καί διαβάζεται «*Α τομή Β*».

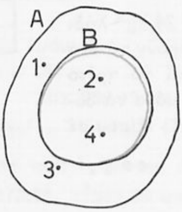
Γενικά:

> Τομή δύο συνόλων Α καί **Β** λέγεται τό σύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά στοιχεῖα τῶν δύο αὐτῶν συνόλων.

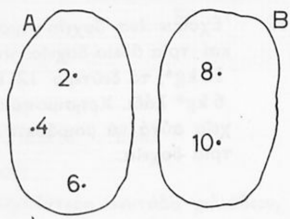
Στά παρακάτω σχήματα ἔχουμε τά διαγράμματα δύο συνόλων Α καί Β. Τό διάγραμμα τῆς τομῆς $A \cap B$ τῶν δύο συνόλων σημειώνεται μέ τήν κόκκινη γραμμή.



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

i) Στό σχῆμα 1 ἔχουμε $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ καί

$$A \cap B = \{3,5\}.$$

ii) Στό σχῆμα 2 εἶναι $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4\}$ καί

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι,

ἄν εἶναι $B \subseteq A$, τότε $A \cap B = B$.

δηλαδή, **ἡ τομή ἑνός συνόλου μέ ἕνα ὑποσύνολό του εἶναι ἴση μέ τό ὑποσύνολο.**

iii) Στό σχῆμα 3 τά σύνολα δέν ἔχουν κοινά στοιχεῖα.

Δύο τέτοια σύνολα λέγονται **ξένα** καί, ὅπως βλέπουμε, ἡ τομή τους εἶναι τό κενό σύνολο, δηλαδή

$$A \cap B = \varnothing$$

Ἰδιότητες τῆς τομῆς

6.2. i) Παίρνουμε δύο σύνολα, π.χ. τά

$$A = \{1,2,3,4\} \quad \text{καί} \quad B = \{0,2,3,4,5\}.$$

Βρίσκουμε $A \cap B = \{2,3,4\}$ καί $B \cap A = \{2,3,4\}$.

Εἶναι δηλαδή

$$\boxed{A \cap B = B \cap A}$$

Γι' αὐτό λέμε ὅτι γιά τήν τομή τῶν συνόλων ἰσχύει ἡ **ἀντιμεταθετική** ἰδιότητα.

ii) Ἄς πάρουμε τώρα τά σύνολα

$$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{0,2,3,4,5\} \text{ καί } \Gamma = \{3,4,5,6\}.$$

Βρίσκουμε διαδοχικά

$A \cap B = \{2,3,4\}$, $(A \cap B) \cap \Gamma = \{2,3,4\} \cap \{3,4,5,6\} = \{3,4\}$.

Τό σύνολο $\{3,4\}$ τό λέμε τομή τῶν συνόλων A, B, Γ καί τό συμβολίζουμε $A \cap B \cap \Gamma$. Δηλαδή

$$\boxed{A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma}$$

Ἄς βροῦμε τώρα καί τό σύνολο $A \cap (B \cap \Gamma)$

Ἔχουμε $B \cap \Gamma = \{3,4,5\}$ καί

$A \cap (B \cap \Gamma) = \{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5\} = \{3,4\}$

Διαπιστώνουμε δηλαδή ὅτι εἶναι

$$(A \cap B) \cap \Gamma = \{3,4\} \text{ καί}$$
$$A \cap (B \cap \Gamma) = \{3,4\},$$

ὁπότε ἔχουμε

$$\boxed{(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)}$$

Γι' αὐτό λέμε ὅτι στήν τομή τῶν συνόλων ἰσχύει ἡ **προσεταιριστική** ἰδιότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Τομή τεσσάρων συνόλων Α,Β,Γ,Δ λέγεται τό σύνολο $(A\cap B\cap \Gamma)\cap \Delta$ καί συμβολίζεται μέ $A\cap B\cap \Gamma\cap \Delta$. Χρησιμοποιώντας τά σύνολα $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $\Gamma = \{0, 2, 3, 4, 5\}$ καί $\Delta = \{0, 2, 3, 5, 6\}$ νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰσότητα**

$$A\cap B\cap \Gamma\cap \Delta = \Gamma\cap A\cap \Delta\cap B$$

Λύση: i) $A\cap B = \{4,5,6\}$

$A\cap B\cap\Gamma = (A\cap B)\cap\Gamma = \{4,5,6\} \cap \{0,2,3,4,5\} = \{4,5\}$

$A\cap B\cap\Gamma\cap\Delta = (A\cap B\cap\Gamma)\cap\Delta = \{4,5\} \cap \{0,2,3,5,6\} = \{5\}$.

ii) $\Gamma\cap A = \{2,4,5\}$

$\Gamma\cap A\cap\Delta = (\Gamma\cap A)\cap\Delta = \{2,4,5\} \cap \{0,2,3,5,6\} = \{2,5\}$

$\Gamma\cap A\cap\Delta\cap B = (\Gamma\cap A\cap\Delta)\cap B = \{2,5\} \cap \{1,3,4,5,6\} = \{5\}$.

Συνεπῶς εἶναι $A\cap B\cap\Gamma\cap\Delta = \Gamma\cap A\cap\Delta\cap B$.

2. **Ἄν εἶναι $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί $A\cap B = \{\beta,\delta\}$, ποιό μπορεῖ νά εἶναι τό σύνολο Β;**

Λύση: Τά στοιχεῖα β καί δ πρέπει νά ἀνήκουν καί στό Β (ἀφοῦ εἶναι κοινά στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων). Συνεπῶς τό Β περιέχει ὁπωσδήποτε τά στοιχεῖα β καί δ καί ἐπιπλέον μπορεῖ νά περιέχει ὁποιοδήποτε ἄλλο στοιχεῖο ἐκτός ἀπό τό α καί τό γ. Π.χ. μπορεῖ νά εἶναι $B = \{\beta,\delta\}$ ἤ $B = \{\beta,\delta,\eta,\theta\}$ ἤ $B = \{\beta,\delta,1,7\}$, κ.λ.π.

3. **Χρησιμοποιώντας τά σύνολα Α = {τά γράμματα τῆς λέξεως «ἀριθμοί»}, Β = {τά γράμματα τῆς λέξεως «ποτήρι»}, Γ = {τά φωνήεντα τῆς λέξεως «θρανίο»}, νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰσότητα $(A\cap\Gamma)\cap B = (\Gamma\cap B)\cap A$.**

Λύση: Παριστάνουμε πρῶτα τά σύνολα μέ ἀναγραφή.

$A = \{\alpha,\rho,\iota,\theta,\mu,o\}$, $B = \{\pi,o,\tau,\eta,\rho,\iota\}$, $\Gamma = \{\alpha,\iota,o\}$

Ἔχουμε:

$A\cap\Gamma = \{\alpha,\iota,o\}$	$\Gamma\cap B = \{o,\iota\}$
$(A\cap\Gamma)\cap B = \{\iota,o\}$	$(\Gamma\cap B)\cap A = \{o,\iota\}$.

Συνεπῶς $(A\cap\Gamma)\cap B = (\Gamma\cap B)\cap A$.

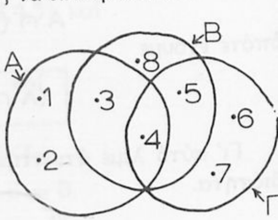
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἄν $A = \{1,3,5,7,9,10\}$ καί $B = \{2,4,6,8,10\}$, νά βρεῖτε τό $A\cap B$ καί νά κάνετε τό ἀντίστοιχο διάγραμμα.

2. Νά βρεθεῖ ἡ τομή τῶν συνόλων Α = {τά γράμματα τῆς λέξεως «λαός»} καί Β = {τά γράμματα τῆς λέξεως «λαγός»} καί νά γίνει τό ἀντίστοιχο διάγραμμα.

3. Ἄν $A = \{0,1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $\Gamma = \{2,3,4,5\}$ νά ἐπαληθεύσετε ὅτι $(A\cap\Gamma)\cap B = (B\cap A)\cap\Gamma$.

4. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τά διαγράμματα τριῶν συνόλων Α,Β,Γ. Νά βρεῖτε μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων τους τά σύνολα: α) $A\cap B$, β) $A\cap\Gamma$, γ) $B\cap\Gamma$, δ) $A\cap B\cap\Gamma$.



5. Ἄν εἶναι Α = {τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ «1370723»}, Β = {τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ

«13007»}, $\Gamma = \{$τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ «3001»$\}$, νά βρεῖτε τό σύνολο $A \cap B \cap \Gamma$ καί νά κάνετε τό διάγραμμα.

6. Μέ τά σύνολα A, B τῆς ἀσκήσεως 5 νά ἐπαληθεύσετε ὅτι εἶναι $A \cap B = B \cap A$.

7. Ἄν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, x, y\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\Gamma = \{x, y\}$, νά βρεῖτε τό σύνολο $A \cap B \cap \Gamma$ καί νά κάνετε τό διάγραμμα.

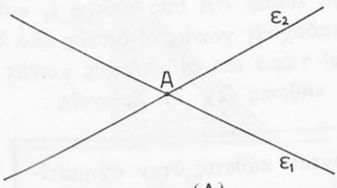
8. Μέ τά σύνολα τῆς ἀσκήσεως 7 νά ἐπαληθεύσετε ὅτι εἶναι $(A \cap \Gamma) \cap B = (B \cap \Gamma) \cap A$.

Σχετικές θέσεις δύο εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου

6.3. Ξέρουμε ὅτι δύο εὐθεῖες πού ἔχουν δυό κοινά σημεῖα συμπίπτουν (ἤ ὅπως λέμε ἀλλιῶς **«ταυτίζονται»**) (§ 4.4).

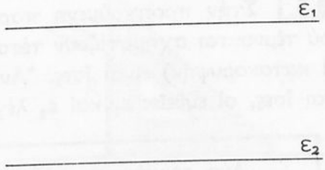
Ἔτσι, ἄν θεωρήσουμε δύο ὁποιεσδήποτε *διαφορετικές* εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ἑνός ἐπιπέδου, θά ἔχουμε μιά ἀπό τίς δύο περιπτώσεις:

i) Οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο A (Σχ. 4). Τότε λέμε πώς οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 **τέμνονται** στό A.



$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{A\}$

Σχ. 4



$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$

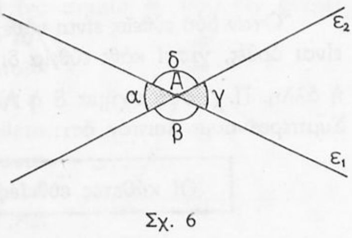
Σχ. 5

ii) Οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (Σχ. 5). Τότε λέμε πώς οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι **παράλληλες** καί γράφουμε $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$.

Ἐπειδή θεωροῦμε τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ὡς σημειοσύνολα, ἡ τομή τους ἤ θά ἔχει ἕνα μόνο στοιχεῖο (ὅταν τέμνονται Σχ. 4), ὁπότε γράφουμε $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{A\}$, ἤ θά εἶναι τό κενό σύνολο (ὅταν εἶναι παράλληλες Σχ. 5) καί τότε γράφουμε $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$.

Κατακορυφήν γωνίες

6.4. Ὅταν δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο A, σχηματίζονται τέσσερις διαδοχικές γωνίες $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}, \widehat{\delta}$ πού ἔχουν κοινή κορυφή τό σημεῖο A (Σχ. 6).



Σχ. 6

Ἄν παρατηρήσουμε τώρα τίς γωνίες $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\gamma}$, βλέπουμε ὅτι οἱ πλευρές κάθε μιᾶς εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες (προεκτάσεις) τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Δυό τέτοιες γωνίες λέγονται **κατακορυφήν**.

Ὥστε: **Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, ὅταν οἱ πλευρές τῆς μιᾶς εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.**

Εἶναι φανερό ὅτι καί οἱ γωνίες $\widehat{\beta}$ καί $\widehat{\delta}$ εἶναι κατακορυφήν. Ἔτσι βλέπουμε πώς, ὅταν δύο εὐθεῖες τέμνονται, σχηματίζουν δύο ζεύγη κατακορυφήν γωνιῶν.

Ἄν ἀποτυπώσουμε τή γωνία $\widehat{\alpha}$ σέ διαφανές χαρτί καί τήν τοποθετήσουμε κατάλληλα πάνω στή $\widehat{\gamma}$, θά δοῦμε ὅτι οἱ δύο γωνίες ταυτίζονται. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

Οἱ κατακορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες.

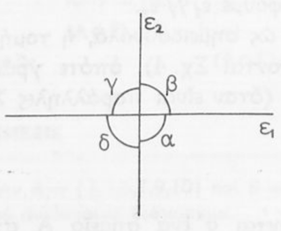
Εὐθεῖες κάθετες

6.5. Στήν προηγούμενη παράγραφο εἴδαμε ὅτι δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 πού τέμνονται σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες οἱ ὁποῖες ἀνά δύο (οἱ κατακορυφήν) εἶναι ἴσες. Ἄν συμβεῖ τώρα καί οἱ τέσσερις γωνίες νά εἶναι ἴσες, οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 λέγονται **κάθετες** (Σχ. 7). Συνεπῶς:

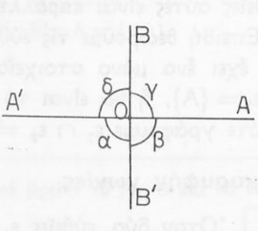
Δύο τεμνόμενες εὐθεῖες λέγονται κάθετες ὅταν σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικὲς γωνίες ἴσες.

Ὅταν οἱ ε_1 καί ε_2 εἶναι κάθετες, γράφουμε συμβολικά

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \quad (\varepsilon_1 \text{ κάθετη στήν } \varepsilon_2)$$



Σχ. 7



Σχ. 8

Ὅταν δύο εὐθεῖες εἶναι κάθετες, οἱ τέσσερις γωνίες πού σχηματίζονται εἶναι ὀρθές, γιατί κάθε εὐθεία διχοτομεῖ τίς εὐθεῖες γωνίες πού σχηματίζει ἡ ἄλλη. Π.χ. στό σχῆμα 8 ἡ AA′ διχοτομεῖ τίς δύο εὐθεῖες γωνίες $\widehat{BOB'}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

Οἱ κάθετες εὐθεῖες σχηματίζουν ὀρθές γωνίες.

Ἔτσι, γιά νά κατασκευάσουμε κάθετες εὐθεῖες, ἀρκεῖ νά κατασκευάσουμε μιά ὀρθή γωνία καί νά προεκτείνουμε τίς πλευρές της. Ἡ κατασκευή γίνεται πρακτικά μέ τή βοήθεια ἑνός γνώμονα ὁ ὁποῖος, ὅπως ξέρουμε, ἔχει μιά ὀρθή γωνία.

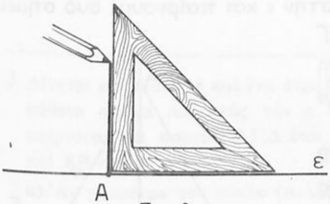
Ἄς δοῦμε τώρα **πῶς μποροῦμε νά κατασκευάσουμε μιά εὐθεία, πού νά περνᾶ ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί νά εἶναι κάθετη πρός μιά δεδομένη εὐθεία ε.**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

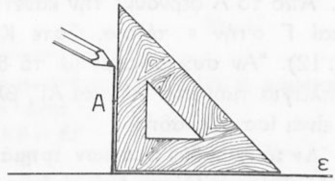
i) Τό σημεῖο Α νά ἀνήκει στήν εὐθεία ε.

ii) Τό σημεῖο Α νά μήν ἀνήκει στήν ε.

Ἡ κατασκευή τῆς κάθετης εὐθείας γίνεται καί στίς δύο περιπτώσεις μέ τή βοήθεια ἑνός γνώμονα πού τοποθετεῖται ὅπως δείχνουν τά σχήματα



Σχ. 9



Σχ. 10

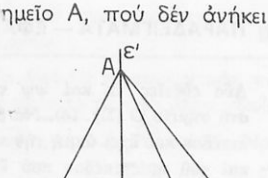
9 καί 10. Δηλαδή ἡ μιά πλευρά τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐφαρμόζει στήν εὐθεία ε καί ἡ ἄλλη περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Α.

Ἄν σέ κάθε μιά ἀπό τίς παραπάνω δύο περιπτώσεις (ι) καί (ιι) δοκιμάσουμε νά κατασκευάσουμε καί ἄλλη κάθετη στήν εὐθεία ε, πού νά περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Α, βλέπουμε ὅτι ἡ εὐθεία αὐτή συμπίπτει μέ τήν προηγούμενη. Ἀπ' αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι:

> Ἀπό ἕνα σημεῖο Α μποροῦμε νά φέρουμε μιά μόνο εὐθεία κάθετη πρός μιά εὐθεία ε.

Ἀπόσταση σημείου ἀπό εὐθεία

6.6. Ἄς θεωρήσουμε μιά εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο Α, πού δέν ἀνήκει σ' αὐτή. Ἀπό τό σημεῖο Α φέρνουμε τήν εὐθεία ε' κάθετη στήν ε. Τό σημεῖο Κ, στό ὁποῖο ἡ ε' τέμνει τήν ε, λέγεται **ἴχνος τῆς ε' στήν ε.** Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται **κάθετο τμῆμα ἀπό τό Α πρός τήν ε.** Ἄν πάρουμε πάνω στήν ε καί ἄλλα σημεῖα, π.χ. τά Β,Γ,Δ (Σχ. 11), τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ εἶναι **«πλάγια» πρός τήν ε.**



Σχ. 11

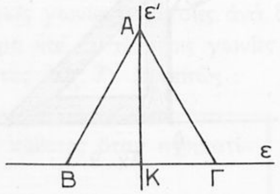
Συγκρίνουμε τώρα μέ τό διαβήτη μας τό κάθετο τμῆμα ΑΚ μέ τά πλάγια τμήματα ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ καί βλέπουμε ὅτι εἶναι $AK < AB$, $AK < A\Gamma$, $AK < A\Delta$. Δηλαδή:

> Τό κάθετο τμῆμα ΑΚ πρός τήν εὐθεία ε εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα πού ἑνώνει τό Α μέ σημεῖο τῆς ε.

Τό κάθετο τμῆμα ΑΚ τό λέμε **ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπό τήν εὐθεία ε.**

Ἰδιότητες τῶν πλάγιων τμημάτων

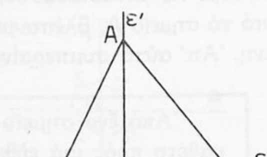
6.7. Παίρνουμε μιά εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο Α πού νά μήν ἀνήκει σ' αὐτήν. Ἀπό τό Α φέρνουμε τήν κάθετη ΑΚ στήν ε καί παίρνουμε δυό σημεῖα Β καί Γ στήν ε τέτοια, ὥστε $KB = K\Gamma$ (Σχ. 12). Ἄν συγκρίνουμε μέ τό διαβήτη τά πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ, βλέπουμε ὅτι εἶναι ἴσα. Δηλαδή:



Σχ. 12

Ἄν τά ἴχνη δύο πλάγιων τμημάτων ΑΒ καί ΑΓ ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό ἴχνος Κ τῆς καθέτου, τότε τά πλάγια αὐτά τμήματα εἶναι ἴσα.

Ἄς πάρουμε τώρα στήν ε δύο σημεῖα Β καί Δ τέτοια, ὥστε $K\Delta > KB$ (Σχ. 13). Συγκρίνουμε μέ τό διαβήτη τά πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΔ καί βλέπουμε ὅτι $A\Delta > AB$. Δηλαδή:

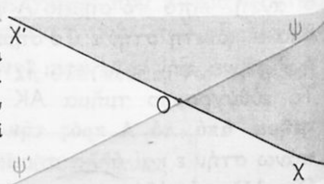


Σχ. 13

Ἄν τά ἴχνη δύο πλάγιων τμημάτων ΑΒ καί ΑΔ ἔχουν ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τό ἴχνος τῆς καθέτου, τότε τά πλάγια αὐτά τμήματα εἶναι ὁμοίως ἄνισα (δηλαδή μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού τό ἴχνος του ἀπέχει περισσότερο ἀπό τό ἴχνος τῆς καθέτου).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δύο εὐθεῖες xx΄ καί ψψ΄ τοῦ ἐπιπέδου τέμνονται στό σημεῖο Ο (Σχ. 14). Νά βρεθεῖ ἡ τομή τοῦ ἡμιεπιπέδου πού ἔχει ἀκμή τήν xx΄ καί περιέχει τήν Οψ καί τοῦ ἡμιεπιπέδου πού ἔχει ἀκμή τήν ψψ΄ καί περιέχει τήν Οx.**



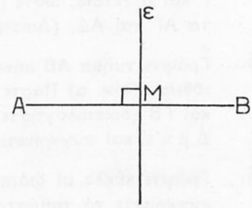
Σχ. 14

Λύση: Ὅπως ξέρουμε, τά ἡμιεπίπεδα εἶναι σημειοσύνολα. Ἄς παραστήσουμε λοιπόν τό πρῶτο ἡμιεπίπεδο μέ ἡμιεπ. (xx', Oψ) καί τό δεύτερο μέ ἡμιεπ. (ψψ', Ox). Ὅπως βλέπουμε στό σχῆμα 14, θά εἶναι

$$\text{ἡμιεπ.}\,(xx', O\psi) \cap \text{ἡμιεπ.}\,(\psi\psi', Ox) = x\widehat{O}\psi$$

2. **Νά γράψετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί νά φέρετε τήν κάθετο στό μέσο του.**

Λύση: Γράφουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ (Σχ. 15). Μέ ἀποτύπωση σέ διαφανές καί δίπλωση βρίσκουμε τό μέσο του Μ. Ἔπειτα μέ ἕνα γνώμονα φέρνουμε τήν κάθετο στό σημεῖο Μ. Ἡ κάθετος ε στό μέσο τοῦ ΑΒ λέγεται **μεσοκάθετος** τοῦ ΑΒ.



Σχ. 15

3. **Δίνεται μιά εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σ' αὐτή. Ἀπό τό Α φέρνουμε τό κάθετο τμῆμα ΑΚ πρός τήν ε (Σχ. 16). Στήν ε παίρνουμε τά σημεῖα Β,Γ,Δ ἔτσι, ὥστε ΚΒ = ΚΓ καί ΚΒ < ΚΔ.**

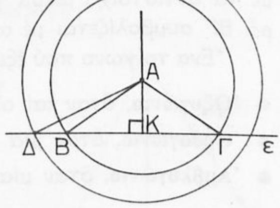
α) Ἄν γράψουμε τόν κύκλο (Α,ΑΒ), ἀπό ποιό ἄλλο σημεῖο θά περάσει;

β) Ἄν γράψουμε τόν κύκλο (Α,ΑΔ), θά περάσει ἀπό τό Β;

Δικαιολογῆστε τίς ἀπαντήσεις σας.

Λύση: α) Ἐπειδή πήραμε ΚΒ = ΚΓ, θά εἶναι ΑΒ = ΑΓ. Ἔτσι ὁ κύκλος (Α,ΑΒ) θά περάσει καί ἀπό τό Γ.

β) Ὅπως βλέπουμε, ὁ κύκλος (Α,ΑΔ) δέν περνᾶ ἀπό τό Β. Αὐτό δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ εἶναι ΚΔ > ΚΒ, θά εἶναι καί ΑΔ > ΑΒ. Ἑπομένως ὁ κύκλος αὐτός δέ θά περάσει ἀπό τό Β. (Τό Β θά εἶναι «μέσα» στόν κύκλο).



Σχ. 16

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9. Γράψτε τρεῖς εὐθεῖες, πού νά περνοῦν ἀπό τό σημεῖο Ο. Νά σημειώσετε ὅλα τά ζεύγη τῶν κατακορυφήν γωνιῶν πού σχηματίζονται.

10. Δύο εὐθεῖες τέμνονται στό σημεῖο Ο, ὥστε ἡ μία ἀπό τίς τέσσερις γωνίες πού σχηματίζονται νά εἶναι 67^0. Νά ὑπολογίσετε κάθε μία ἀπό τίς τρεῖς ἄλλες γωνίες.

11. Γράψτε κύκλο μέ κέντρο Ο καί πάρτε δύο ἴσα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma}$. Φέρτε τίς διαμέτρους ΑΟΑ', ΒΟΒ' καί ΓΟΓ' καί συγκρίνετε τά τόξα $\overset{\frown}{A'B'}$, $\overset{\frown}{B'\Gamma'}$ καί $\overset{\frown}{AB}$.

12. Γράψτε δύο ὀρθές γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $x'\widehat{O'}y'$ καί πάρτε τά σημεῖα Α στήν Οx καί Β στήν Οy. Πάρτε ἀκόμη τό σημεῖο Α' στήν Ο'x', ὥστε Ο'Α' = ΟΑ, καί τό σημεῖο Β' στήν Ο'y', ὥστε Ο'Β' = ΟΒ. Νά συγκρίνετε τά τμήματα ΑΒ καί Α'Β'.

13. Κατασκευάστε γωνία $x\widehat{O}y = 50^0$ καί πάρτε στό ἐσωτερικό της ἕνα σημεῖο Α. Φέρτε τίς ἀποστάσεις ΑΒ καί ΑΓ τοῦ Α ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας. Συγκρίνετε τίς ἀποστάσεις ΑΒ καί ΑΓ.

14. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α νά φέρετε τό κάθετο τμῆμα ΑΒ πρός τήν εὐθεία ε ($A \notin \varepsilon$). Στίς ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες, πού ὁρίζει τό σημεῖο Β στήν ε, νά πάρετε τά σημεῖα Γ καί Δ τέτοια, ὥστε (ΒΓ) = 4 cm καί (ΒΔ) = 5 cm. Νά συγκρίνετε τά τμήματα ΑΓ καί ΑΔ. (Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας).

15. Γράψτε τμῆμα ΑΒ μήκους 4 cm καί στό μέσο του Μ νά φέρετε τήν κάθετή του εὐθεία x'Mx. α) Πάρτε τό σημεῖο Γ στήν x'Mx καί συγκρίνετε τά τμήματα ΓΑ καί ΓΒ (δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας). β) Πάρτε τό σημεῖο Δ ἔτσι, ὥστε $\Delta \notin x'x$ καί συγκρίνετε τά τμήματα ΔΑ καί ΔΒ.

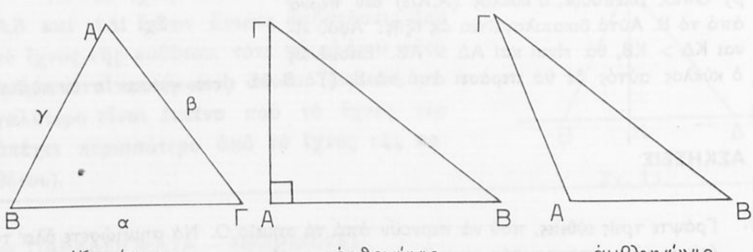
16. Γράψτε κύκλο μέ διάμετρο ΑΒ καί πάρτε τό μέσο Γ τοῦ ἑνός ἡμικυκλίου. Νά συγκρίνετε τά τμήματα ΓΑ καί ΓΒ. (Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας).

Εἴδη τριγώνων

6.8. Οἱ τρεῖς πλευρές καί οἱ τρεῖς γωνίες ἑνός τριγώνου λέγονται **κύρια στοιχεῖα** του. Ὅπως εἴδαμε στήν § 4.10 οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζονται μέ $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$. Οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου θά συμβολίζονται μέ τά ἀντίστοιχα μικρά γράμματα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν. Ἔτσι ἡ πλευρά ΒΓ συμβολίζεται μέ α, ἡ ΑΓ μέ β καί ἡ ΑΒ μέ γ.

Ἕνα τρίγωνο πού ἐξετάζεται ὡς πρός τίς γωνίες του λέγεται:

- **Ὀξυγώνιο,** ὅταν καί οἱ τρεῖς γωνίες του εἶναι ὀξεῖες (Σχ. 17).
- **Ὀρθογώνιο,** ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή (Σχ. 18).
- **Ἀμβλυγώνιο,** ὅταν μία γωνία του εἶναι ἀμβλεία (Σχ. 19).



ὀξυγώνιο — Σχ. 17

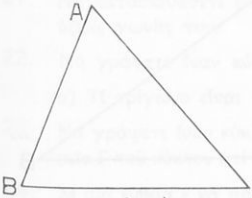
ὀρθογώνιο — Σχ. 18

ἀμβλυγώνιο — Σχ. 19

Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ πλευρά πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τήν ὀρθή γωνία λέγεται **ὑποτείνουσα** καί οἱ πλευρές τῆς ὀρθῆς γωνίας λέγονται **κάθετες πλευρές** του.

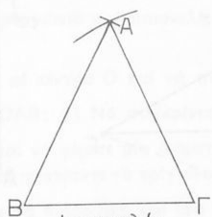
Ὅταν ἕνα τρίγωνο ἐξετάζεται ὡς πρός τίς πλευρές του λέγεται:

● **Σκαληνό,** ὅταν οἱ πλευρές του εἶναι ἄνισες μεταξύ τους (Σχ. 20).
● **Ἰσοσκελές,** ὅταν δύο πλευρές του εἶναι ἴσες μεταξύ τους (Σχ. 21).
● **Ἰσόπλευρο,** ὅταν καί οἱ τρεῖς πλευρές του εἶναι ἴσες (Σχ. 22).



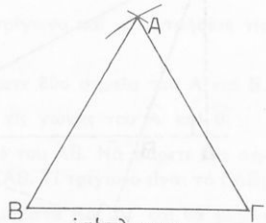
σκαληνό

Σχ. 20



ἰσοσκελές

Σχ. 21



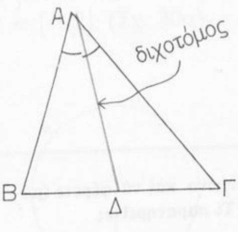
ἰσόπλευρο

Σχ. 22

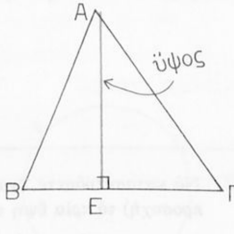
Δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνός τριγώνου

6.9. α) Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει μιά κορυφή ἑνός τριγώνου μέ τό μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου. Ἔτσι στό τρίγωνο ΑΒΓ (Σχ. 23) τό τμῆμα ΑΜ εἶναι μιά διάμεσός του. Εἶναι φανερό ὅτι κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς διαμέσους.

Σχ. 23



Σχ. 24



Σχ. 25

β) Στό τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τή διχοτόμο μιᾶς γωνίας του, π.χ. τῆς Α, καί ὀνομάζουμε Δ τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνει τήν ἀπέναντι πλευρά.

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ λέγεται **διχοτόμος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 24).

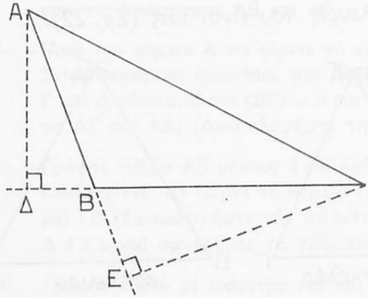
Εἶναι φανερό ὅτι κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς διχοτόμους.

γ) Ἡ ἀπόσταση κάθε κορυφῆς ἑνός τριγώνου ἀπό τήν ἀπέναντι πλευρά λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου. Ἔτσι στό τρίγωνο ΑΒΓ τό κάθετο τμῆμα ΑΕ πρός τή ΒΓ εἶναι ἕνα ὕψος του (Σχ. 25).

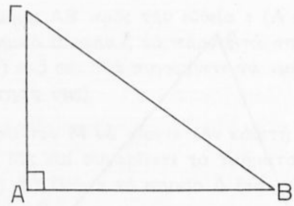
Εἶναι πάλι φανερό ὅτι κάθε τρίγωνο ἔχει τρία ὕψη.

Ὅταν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο, τά δύο ὕψη του, πού ἀντιστοιχοῦν στίς πλευρές τῆς ἀμβλείας γωνίας, εἶναι «ἔξω» ἀπό τό τρίγωνο

(Σχ. 26), ἐνῶ ὅταν τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο δύο ὕψη του συμπίπτουν μέ τίς κάθετες πλευρές του (Σχ. 27).



Σχ. 26

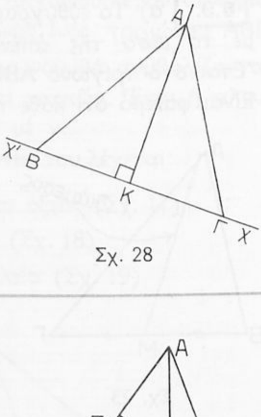


Σχ. 27

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στό σχῆμα 28 ἡ ΑΚ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν εὐθεία xx΄. Ἐπίσης εἶναι ΚΒ = ΚΓ. Τί εἴδους τρίγωνο εἶναι τό ΑΒΓ;

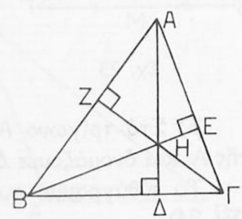
Λύση: Ἀφοῦ εἶναι ΚΒ = ΚΓ, θά εἶναι καί ΑΒ = ΑΓ. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 28

2. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο καί νά φέρετε (μέ προσοχή) τά τρία ὕψη του. Τί παρατηρεῖτε;

Λύση: Στό διπλανό σχῆμα 29 ἔχει γίνει ἡ ἐργασία αὐτή καί βλέπουμε ὅτι τά τρία ὕψη τοῦ τριγώνου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό Η.



Σχ. 29

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Νά κατασκευάσετε ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο καί νά φέρετε προσεκτικά τά τρία ὕψη του. Τί παρατηρεῖτε;

18. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο καί νά φέρετε προσεκτικά τίς διχοτόμους του. Τί παρατηρεῖτε;

19. Κάνετε τό ἴδιο γιά τίς διαμέσους ἑνός τριγώνου.

20. Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1$ ὀρθή) καί νά φέρετε τή διάμεσό του ΑΔ. α) Νά συγκρίνετε τά τμήματα ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. β) Τί τρίγωνα εἶναι τά ΔΑΒ καί ΔΑΓ;

21. Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο καί νά μετρήσετε τίς ὀξεῖες γωνίες του.

22. Νά γράψετε ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο καί νά πάρετε δύο σημεῖα του Α καί Β. α) Τί τρίγωνο εἶναι τό ΟΑΒ; β) Νά συγκρίνετε τίς γωνίες του $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$.

23. Νά γράψετε ἕναν κύκλο καί νά φέρετε μία διάμετρό του ΑΒ. Νά πάρετε ἕνα σημεῖο Γ τοῦ κύκλου καί νά σχηματίσετε τό τρίγωνο ΓΑΒ. Τί τρίγωνο εἶναι τό ΓΑΒ;

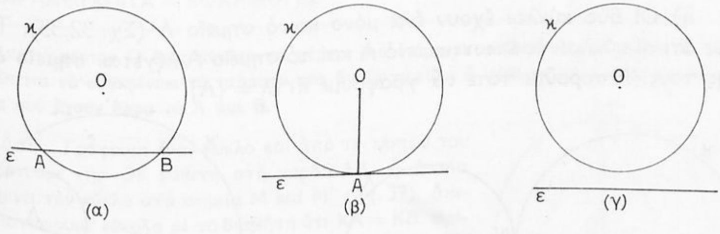
24. Σέ μιά εὐθεία ε νά πάρετε τά διαδοχικά καί ἴσα τμήματα ΒΔ, ΔΓ καί νά φέρετε μία ἡμιευθεία Δx. Πάρτε στή Δx τό σημεῖο Α, ὥστε νά εἶναι ΔΑ = ΔΒ. α) Τί τρίγωνο εἶναι τό ΑΒΓ; β) Τί εἶναι ἡ ΑΔ στό τρίγωνο ΑΒΓ;

Σχετικές θέσεις εὐθείας καί κύκλου

6.10. Ἄν γράψουμε ἕναν κύκλο κ καί μιά εὐθεία ε, θά παρουσιαστεῖ μιά ἀπό τίς τρεῖς παρακάτω περιπτώσεις:

i) Ἡ εὐθεία καί ὁ κύκλος ἔχουν δύο κοινά σημεῖα Α καί Β. Τότε λέμε πώς ἡ εὐθεία ε **τέμνει** τόν κύκλο.

Ἐπειδή θεωροῦμε τήν εὐθεία καί τόν κύκλο ὡς σημειοσύνολα, μποροῦμε νά γράφουμε $\varepsilon \cap \kappa = \{A, B\}$ (Σχ. 30α).



$\varepsilon \cap \kappa = \{A, B\}$ $\qquad$ $\varepsilon \cap \kappa = \{A\}$ $\qquad$ $\varepsilon \cap \kappa = \varnothing$

Σχ. 30

ii) Ἡ εὐθεία ε καί ὁ κύκλος ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Α (Σχ. 30β). Τότε λέμε ὅτι ἡ εὐθεία ε **ἐφάπτεται** τοῦ κύκλου κ στό σημεῖο Α. Ἡ εὐθεία ε λέγεται **ἐφαπτομένη** τοῦ κύκλου καί τό Α **σημεῖο ἐπαφῆς**. Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά γράφουμε $\varepsilon \cap \kappa = \{A\}$.

Μέ τό γνώμονα διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι **ἡ ἀκτίνα ΟΑ πού καταλήγει στό σημεῖο ἐπαφῆς εἶναι κάθετη στήν ἐφαπτομένη ε.**

᾽Απ᾽ αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι, **γιά νά φέρουμε τήν ἐφαπτομένη σ᾽ ἕνα σημεῖο Α ἑνός κύκλου Ο, ἀρκεῖ νά φέρουμε εὐθεία κάθετη στό ἄκρο τῆς ἀκτίνας ΟΑ.**

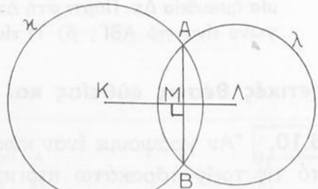
iii) Ἡ εὐθεία καί ὁ κύκλος δέν ἔχουν κοινά σημεῖα (Σχ. 30γ). Τότε λέμε ὅτι ἡ εὐθεία ε *δέν τέμνει* τόν κύκλο καί γράφουμε $ε \cap κ = \varnothing$.

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

6.11. Ἄν γράψουμε δύο κύκλους, θά παρουσιαστεῖ μιά ἀπό τίς τρεῖς ἑπόμενες περιπτώσεις:

i) Οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, π.χ. τά Α καί Β (Σχ. 31). Τότε λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **τέμνονται.**

Ἄν ὀνομάσουμε τούς κύκλους αὐτούς κ καί λ, μποροῦμε νά γράφουμε $κ \cap λ = \{Α, Β\}$.

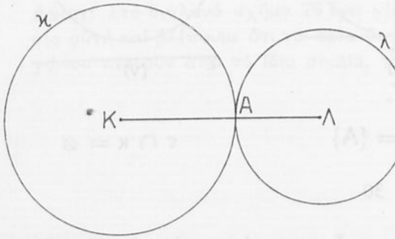


Σχ. 31

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ, πού ἔχει ἄκρα τά κέντρα τῶν κύκλων, λέγεται **διάκεντρος** τῶν δύο κύκλων. (Μέ τόν ὅρο *διάκεντρος* ἐννοοῦμε καί τήν εὐθεία ΚΛ). Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, πού ὁρίζεται ἀπό τά δύο σημεῖα τῆς *τομῆς* τους, λέγεται **κοινή χορδή.**

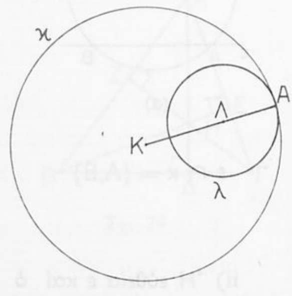
Μέ τό γνώμονα διαπιστώνουμε ὅτι $ΑΒ \perp ΚΛ$ καί μέ τό διαβήτη ὅτι $ΑΜ = ΜΒ$. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι **ἡ διάκεντρος εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς.**

ii) Οἱ δύο κύκλοι ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο Α (Σχ. 32,33). Τότε λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται** στό Α καί τό σημεῖο Α λέγεται **σημεῖο ἐπαφῆς** τους. Μποροῦμε τότε νά γράφουμε $κ \cap λ = \{Α\}$.



$κ \cap λ = \{Α\}$

Σχ. 32



$κ \cap λ = \{Α\}$

Σχ. 33

Στήν περίπτωση αὐτή παρατηροῦμε ὅτι:

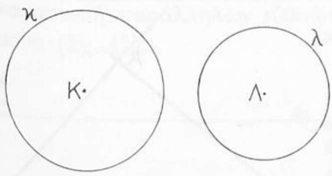
Οἱ κυκλικοί δίσκοι μπορεῖ νά βρίσκονται ὁ ἕνας ἔξω ἀπό τόν ἄλλο

(Σχ. 32) καί λέμε τότε ὅτι οἱ κύκλοι *ἐφάπτονται ἐξωτερικά*, ἤ ὁ ἕνας κυκλικός δίσκος νά βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο (Σχ. 33) καί τότε λέμε ὅτι οἱ κύκλοι *ἐφάπτονται ἐσωτερικά*.

Διαπιστώνουμε ἀκόμη (μέ ἕναν κανόνα) ὅτι **τό σημεῖο ἐπαφῆς βρίσκεται πάνω στή διάκεντρο τῶν δύο κύκλων.**

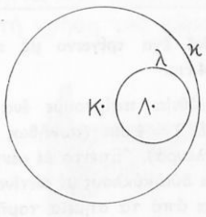
iii) Οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινά σημεῖα (Σχ. 34,35).

Τότε λέμε ὅτι οἱ κύκλοι *δέν τέμνονται* καί γράφουμε $\kappa \cap \lambda = \varnothing$



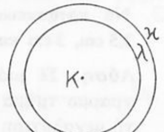
$\kappa \cap \lambda = \varnothing$

Σχ. 34



$\kappa \cap \lambda = \varnothing$

Σχ. 35



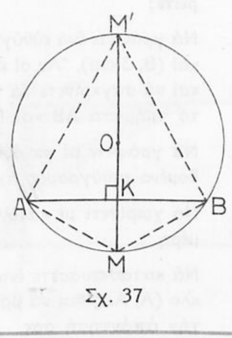
Σχ. 36

Παρατηροῦμε καί ἐδῶ ὅτι μπορεῖ οἱ κυκλικοί δίσκοι νά βρίσκονται ὁ ἕνας ἔξω ἀπό τόν ἄλλο (Σχ. 34) ἤ ὁ ἕνας κυκλικός δίσκος νά βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο (Σχ. 35 καί 36). Στή δεύτερη περίπτωση ὅταν οἱ κύκλοι ἔχουν τό ἴδιο κέντρο λέγονται **ὁμόκεντροι** (Σχ. 36).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἀπό τό κέντρο Ο ἑνός κύκλου νά φέρετε μιά διάμετρο κάθετη σέ μιά χορδή του ΑΒ. Ἔπειτα νά συγκρίνετε τά τμήματα στά ὁποῖα χωρίζει ἡ κάθετος τή χορδή, καί τά τόξα πού ἔχουν ἄκρα τά Α καί Β.**

Λύση: Γράφουμε ἕναν κύκλο καί ἀπό τό κέντρο του φέρνουμε τήν ΟΚ κάθετη στή χορδή ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Μ καί Μ′ (Σχ. 37). Διαπιστώνουμε εὔκολα μέ τό διαβήτη ὅτι ΚΑ = ΚΒ. Βρίσκουμε ἀκόμη (μέ τό διαβήτη) ὅτι ΜΑ = ΜΒ καί Μ′Α = Μ′Β. Ἑπομένως θά εἶναι $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$ καί $\overset{\frown}{M'A} = \overset{\frown}{M'B}$.



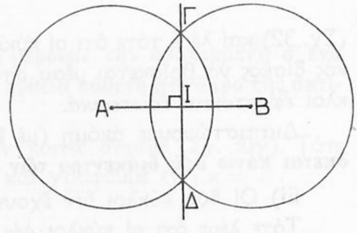
Σχ. 37

Ὥστε: **Ἡ κάθετος ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου σέ μιά χορδή διχοτομεῖ τή χορδή καί τά ἀντίστοιχα τόξα.**

2. **Νά κατασκευάσετε μέ κανόνα καί διαβήτη τή μεσοκάθετο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ.**

Λύση: Μέ κέντρα τά Α καί Β καί ἀκτίνα τήν ἴδια γράφουμε δύο κύκλους πού νά τέμνονται σέ δύο σημεῖα Γ καί Δ (Σχ. 38) καί φέρνουμε τή ΓΔ. Ξέρουμε ὅτι εἶναι ΓΔ⊥ΑΒ. Ἄν τώρα συγκρίνουμε τά ΙΑ καί ΙΒ μέ τό διαβήτη θά δοῦμε ὅτι εἶναι ἴσα. Συνεπῶς ἡ ΓΔ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

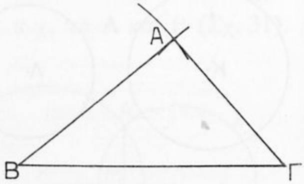
Ὥστε: **Ἄν δύο ἴσοι κύκλοι τέμνονται, τότε ἡ κοινή χορδή τους εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς διακέντρου.**



Σχ. 38

3. **Νά κατασκευασθεῖ ἕνα τρίγωνο μέ πλευρές 2,5 cm, 3 cm καί 4 cm.**

Λύση: Σέ μιά εὐθεία παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (ΒΓ) = 4 cm (συνήθως ἴσο μέ τή μεγαλύτερη πλευρά). Ἔπειτα μέ κέντρα τά Β καί Γ γράφουμε δύο κύκλους μέ ἀκτίνες 3 cm καί 2,5 cm. Τό ἕνα ἀπό τά σημεῖα τομῆς τους εἶναι ἡ τρίτη κορυφή τοῦ τριγώνου (Σχ. 39).



Σχ. 39

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Σέ μιά εὐθεία ε νά πάρετε ἕνα σημεῖο Α καί στό σημεῖο αὐτό νά φέρετε τήν ἡμιευθεία Αx κάθετο στήν ε. Νά πάρετε ἕνα σημεῖο Ο τῆς Αx, ὥστε (ΟΑ) = 3 cm. Νά γράψετε τόν κύκλο (Ο,2 cm) καί νά βρεῖτε τή θέση του ὡς πρός τήν εὐθεία ε. Μετά γράψτε τόν κύκλο (Ο,3 cm) καί βρεῖτε τή θέση του ὡς πρός τήν εὐθεία ε.

26. Νά γράψετε ἕναν κύκλο Ο καί νά πάρετε δύο σημεῖα του Α καί Β (ὄχι στήν ἴδια διάμετρο). Νά κατασκευάσετε τίς ἐφαπτόμενες εὐθεῖες τοῦ κύκλου Ο στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν αὐτές τέμνονται στό σημεῖο Γ, νά συγκρίνετε: α) τά τμήματα ΓΑ, ΓΒ, β) τίς γωνίες $\widehat{ΟΓΑ}$ καί $\widehat{ΟΓΒ}$. Κάνετε τό ἴδιο γιά ἄλλα δύο σημεῖα. Τί παρατηρεῖτε;

27. Νά γράψετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μέ μῆκος 3 cm καί τούς κύκλους (Α, 3 cm) καί (Β, 3 cm). Ἄν οἱ κύκλοι αὐτοί τέμνονται στά σημεῖα Γ καί Δ, α) νά γράψετε καί νά συγκρίνετε τά τμήματα ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ καί ΔΒ, β) νά βρεῖτε πῶς τέμνονται τά τμήματα ΑΒ καί ΓΔ.

28. Νά γράψετε μέ κανόνα καί διαβήτη ἕναν κύκλο, πού νά ἔχει διάμετρο ἕνα δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ.

29. Νά χωρίσετε μέ κανόνα καί διαβήτη ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σέ τέσσερα ἴσα μέρη.

30. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί τό ὕψος του ΑΔ. Νά γράψετε τόν κύκλο (Α, ΑΔ) καί νά βρεῖτε τή θέση τῆς εὐθείας ΒΓ καί τοῦ κύκλου. Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας.

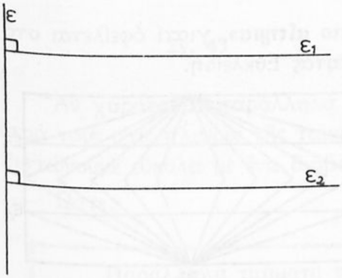
Εὐθεῖες παράλληλες

6.12. Ξέρουμε ὅτι δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 ἑνός ἐπιπέδου, πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο, λέγονται παράλληλες καί γράφουμε γι' αὐτές $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

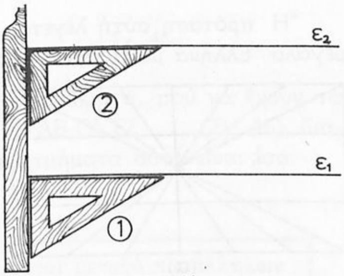
Ἄς χαράξουμε τώρα μιά εὐθεία ε καί δυό εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, πού νά εἶναι κάθετες στήν ε (Σχ. 40). Οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί συνεπῶς εἶναι παράλληλες.

Ὥστε: **δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 κάθετες στήν ἴδια εὐθεία εἶναι παράλληλες.**

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή προκύπτει ἕνας πρακτικός τρόπος γιά τήν κατασκευή παράλληλων εὐθειῶν μέ τή χρήση τοῦ χάρακα καί τοῦ γνώμονα (Σχ. 41).



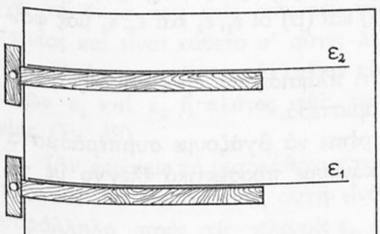
Σχ. 40



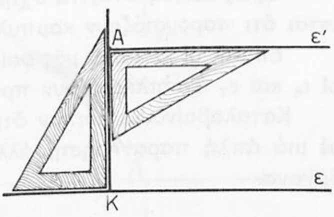
Σχ. 41

Τοποθετοῦμε τή μιά κάθετη πλευρά τοῦ γνώμονα κατά μῆκος τοῦ χάρακα (θέση 1 Σχ. 41) καί γράφουμε τήν εὐθεία ε_1. Ἔπειτα μετατοπίζουμε τό γνώμονα στή θέση 2 καί γράφουμε τήν ε_2. Τότε θά εἶναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Στά σχεδιαστήρια χαράσσονται παράλληλες εὐθεῖες μ' ἕνα εἰδικό ὄργανο πού λέγεται «ταῦ» (Σχ. 42). Τό ρόλο τοῦ χάρακα παίζει τώρα ἡ πλευρά μιᾶς πινακίδας, πάνω στήν ὁποία γλιστράει τό «ταῦ» ὅπως δείχνει τό σχῆμα 42.



Σχ. 42



Σχ. 43

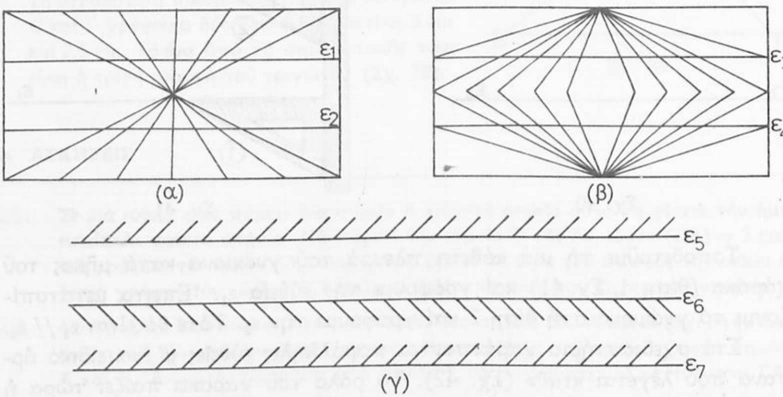
Ἄς δοῦμε τώρα πῶς **θά κατασκευάσουμε εὐθεία παράλληλη πρός μιά ὁρισμένη εὐθεία ε, ἡ ὁποία νά διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει στήν ε.**

Φέρνουμε πρῶτα ἀπό τό σημεῖο Α τήν εὐθεία ΑΚ κάθετη στήν εὐθεία ε (Σχ. 43), ὅπως μάθαμε στήν § 6.5 (ii). Ἔπειτα φέρνουμε τήν εὐθεία ε' κάθετη στήν ΑΚ στό σημεῖο Α. Οἱ εὐθεῖες ε καί ε' εἶναι παράλληλες, γιατί καί οἱ δύο εἶναι κάθετες στήν ΑΚ.

Ἄν δοκιμάσουμε νά φέρουμε μέ ὁποιοδήποτε ἄλλο τρόπο ἀπό τό σημεῖο Α μιά ἄλλη παράλληλη πρός τήν εὐθεία ε, θά δοῦμε ὅτι αὐτή ταυτίζεται μέ τήν ε'. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού βρίσκεται ἔξω ἀπό μιά εὐθεία ε μιά μόνο παράλληλη εὐθεία μποροῦμε νά φέρουμε πρός τήν ε.

Ἡ πρόταση αὐτή λέγεται «**εὐκλείδειο αἴτημα**», γιατί ὀφείλεται στό μεγάλο Ἕλληνα μαθηματικό τῆς ἀρχαιότητας Εὐκλείδη.



Σχ. 44

Στά παραπάνω σχήματα εἶναι $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 \,//\, \varepsilon_4$, $\varepsilon_5 \,//\, \varepsilon_6$, $\varepsilon_6 \,//\, \varepsilon_7$.

Ὅμως κοιτάζοντας τά σχήματα (α) καί (β) οἱ ε_1, ε_2 καί ε_3, ε_4 μᾶς φαίνεται ὅτι παρουσιάζουν καμπυλότητα.

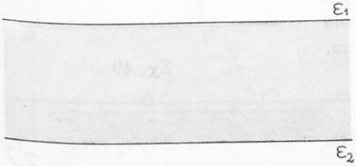
Ἐπίσης οἱ ε_5 καί ε_6 μᾶς φαίνεται ὅτι πλησιάζουν πρός τά δεξιά, ἐνῶ οἱ ε_6 καί ε_7 ὅτι πλησιάζουν πρός τά ἀριστερά.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι δέν πρέπει νά βγάζουμε συμπεράσματα μέ μιά ἁπλή παρατήρηση, ἀλλά νά κάνουμε προσεκτικό ἔλεγχο μέ τά ὄργανα.

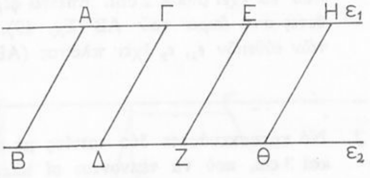
Ταινία (ἤ ζώνη) παράλληλων εὐθειῶν

6.13. Δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 χωρίζουν ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τους σέ τρία μέρη (ὑποσύνολα). Τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου πού ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα τῶν παραλλήλων ε_1 καί ε_2 καί τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού βρίσκονται μεταξύ τῶν παραλλήλων λέγεται **ταινία** (ἤ **ζώνη**) **μέ πλευρές ε_1 καί ε_2** (Σχ. 45).

Ἡ ταινία δύο παράλληλων εὐθειῶν ἐκτείνεται ἀπεριόριστα καί ἀπό τά δύο μέρη της.



Σχ. 45



Σχ. 46

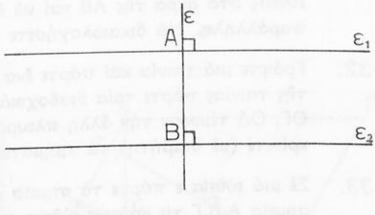
Ἄν χαράξουμε παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα, πού νά ἔχουν τά ἄκρα τους στίς πλευρές τῆς ταινίας, π.χ. τά ΑΒ,ΓΔ,ΕΖ, . . . (Σχ. 46), διαπιστώνουμε εὔκολα μέ ἕνα διαβήτη ὅτι τά τμήματα αὐτά εἶναι ἴσα.

Ὥστε:

> Παράλληλα τμήματα πού περιέχονται μεταξύ παράλληλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα.

Παίρνουμε τώρα μιά ταινία μέ πλευρές ε_1 καί ε_2 καί φέρνουμε μιά εὐθεία ε κάθετη στήν ε_1 στό σημεῖο Α, ἡ ὁποία τέμνει τήν ε_2 στό σημεῖο Β (Σχ. 47).

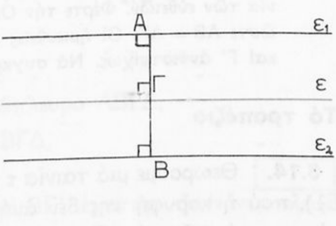
Διαπιστώνουμε μέ τό γνώμονα ὅτι ἡ ε εἶναι κάθετη καί στήν ε_2.



Σχ. 47

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ πού ἔχει τά ἄκρα του στίς πλευρές τῆς ταινίας καί εἶναι κάθετο σ' αὐτές λέγεται **ἀπόσταση τῶν παράλληλων εὐθειῶν ε_1 καί ε_2** ἤ **πλάτος τῆς ταινίας** (Σχ. 48).

Ἄν φέρουμε τή μεσοκάθετο ε τοῦ πλάτους ΑΒ τῆς ταινίας, αὐτή εἶναι παράλληλη πρός τίς πλευρές ε_1, ε_2 τῆς ταινίας (γιατί καί οἱ τρεῖς εἶναι κάθετες στήν ΑΒ) καί ἀπέχει ἀπ' αὐτές ἴσες ἀποστάσεις (ΓΑ = ΓΒ). Γι' αὐτό ἡ ε λέγεται **μεσοπαράλληλη τῶν ε_1 καί ε_2** ἤ **μεσοπαράλληλη τῆς ταινίας**.

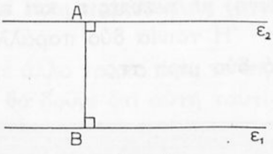


Σχ. 48

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά κατασκευασθεῖ μιά ταινία, πού νά ἔχει πλάτος 2 cm.**

Λύση: Παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, πού νά ἔχει μῆκος 2 cm. Ἔπειτα φέρνουμε κάθετες στά ἄκρα τοῦ ΑΒ (Σχ. 49). Ἡ ταινία τῶν εὐθειῶν ε_1, ε_2 ἔχει πλάτος (ΑΒ) = 2 cm.

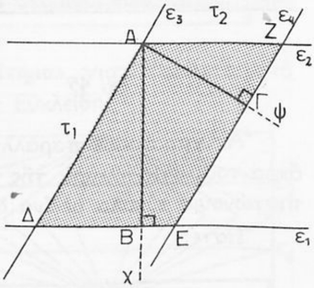


Σχ. 49

2. **Νά κατασκευάσετε δύο ταινίες μέ πλάτη 2 cm καί 3 cm, πού νά τέμνονται οἱ πλευρές τους, καί νά βρεῖτε τήν τομή τους.**

Λύση: Στίς πλευρές μιᾶς γωνίας $x\widehat{A}\psi$ παίρνουμε δύο τμήματα ΑΒ καί ΑΓ μέ μήκη 3 cm καί 2 cm ἀντιστοίχως (Σχ. 50). Κατόπιν ἐργαζόμαστε ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα καί κατασκευάζουμε τίς ταινίες τ_1 καί τ_2 μέ πλάτη ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα, ἡ τομή τῶν δύο ταινιῶν εἶναι τό τετράπλευρο ΑΔΕΖ. Δηλαδή

$$\tau_1 \cap \tau_2 = ΑΔΕΖ$$



Σχ. 50

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Νά γράψετε ἕναν κύκλο Ο καί μιά διάμετρό του ΑΒ. Νά φέρετε τίς ἐφαπτόμενες εὐθεῖες στά ἄκρα τῆς ΑΒ καί νά ἐξετάσετε ἄν οἱ εὐθεῖες αὐτές τέμνονται ἤ εἶναι παράλληλες. Νά δικαιολογήσετε τήν ἀπάντησή σας.

32. Γράψτε μιά ταινία καί πάρτε ἕνα σημεῖο Ο στό ἐσωτερικό της. Στή μιά πλευρά τῆς ταινίας πάρτε τρία διαδοχικά ἴσα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Οἱ εὐθεῖες ΟΑ,ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ τέμνουν τήν ἄλλη πλευρά τῆς ταινίας στά σημεῖα Α′,Β′,Γ′,Δ′. Νά συγκρίνετε (μέ διαβήτη) τά τμήματα Α′Β′,Β′Γ′,Γ′Δ′.

33. Σέ μιά εὐθεία ε πάρτε τά σημεῖα Α, Β, Γ ὥστε (ΑΒ) = (ΒΓ) = 2 cm. Φέρτε στά σημεῖα Α,Β,Γ τίς κάθετες εὐθεῖες πρός τήν ε. Γράψτε μιά ἄλλη εὐθεία ε′, πού νά τέμνει τίς κάθετες στά σημεῖα Α′,Β′,Γ′. Νά συγκρίνετε τά τμήματα Α′Β′ καί Β′Γ′.

34. Γράψτε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε′ καί πάρτε ἕνα σημεῖο Ο ἔξω ἀπό τήν ταινία τῶν εὐθειῶν. Φέρτε τήν ΟΑ⊥ε καί πάρτε στήν ε τά σημεῖα Β καί Γ τέτοια, ὥστε ΑΒ = ΑΓ. Οἱ ἡμιευθεῖες ΟΒ καί ΟΓ τέμνουν τήν εὐθεία ε′ στά σημεῖα Β′ καί Γ′ ἀντιστοίχως. Νά συγκρίνετε τά τμήματα ΓΓ′ καί ΒΒ′.

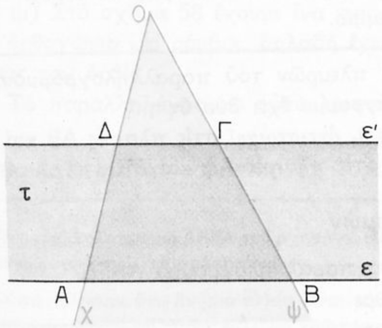
Τό τραπέζιο

6.14. Θεωροῦμε μιά ταινία τ μέ πλευρές ε καί ε′ καί μία γωνία $x\widehat{O}\psi$ (Σχ. 51), πού ἡ κορυφή της δέν ἀνήκει στή ταινία καί οἱ πλευρές της Οx, Οy τέμνουν τίς πλευρές τῆς ταινίας στά σημεῖα Α,Δ καί Β,Γ ἀντιστοίχως.

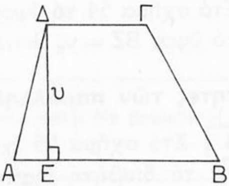
Ἡ τομή τῆς ταινίας μέ τή γωνία εἶναι τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ,

$$\tau \cap x\widehat{O}\psi = AB\Gamma\Delta,$$

τό ὁποῖο λέγεται **τραπέζιο**.



Σχ. 51

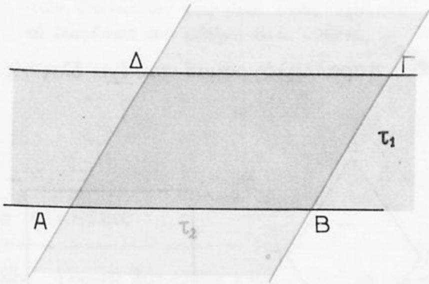


Σχ. 52

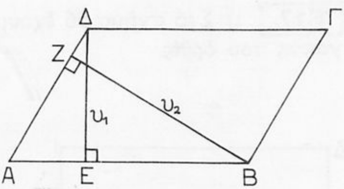
Στό τραπέζιο ΑΒΓΔ οἱ παράλληλες πλευρές ΑΒ καί ΓΔ λέγονται **βάσεις** του. Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο βάσεων (δηλ. τό πλάτος τῆς ταινίας), λέγεται **ὕψος** τοῦ τραπεζίου καί συνήθως σημειώνεται μέ **υ** (Σχ. 52).

Τό παραλληλόγραμμο

6.15. Ἄς πάρουμε τώρα δύο ταινίες τ_1 καί τ_2 πού οἱ πλευρές τους νά τέμνονται κι ἄς ὀνομάσουμε Α,Β,Γ,Δ τά σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν τους (Σχ. 53).



Σχ. 53



Σχ. 54

Ἡ τομή τους $\tau_1 \cap \tau_2$ εἶναι τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ,

$$\tau_1 \cap \tau_2 = AB\Gamma\Delta,$$

τό ὁποῖο λέγεται **παραλληλόγραμμο**.

Οἱ ΑΒ καί ΓΔ καθώς καί οἱ ΑΔ καί ΒΓ λέγονται *ἀπέναντι πλευρές* τοῦ παραλληλογράμμου.

επειδή είναι ΑΒ // ΓΔ καί ΑΔ // ΒΓ, μποροῦμε ἀκόμη νά ὁρίσουμ τό παραλληλόγραμμο ὡς ἑξῆς:

Ἕνα τετράπλευρο πού ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο.

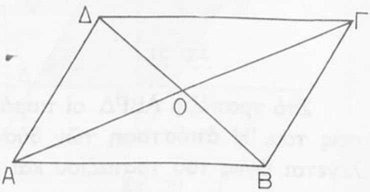
Ἡ ἀπόσταση τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται **ὕψος** του. Κάθε παραλληλόγραμμο ἔχει δύο ὕψη.

Στό σχῆμα 54 τό ὕψος $ΔΕ = υ_1$ *ἀντιστοιχεῖ* στίς πλευρές ΑΒ καί ΓΔ, ἐνῶ τό ὕψος $ΒΖ = υ_2$ *ἀντιστοιχεῖ* στίς πλευρές ΑΔ καί ΒΓ.

Ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων

6.16. Στό σχῆμα 55 ἔχουμε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Μέ τό διαβήτη διαπιστώνουμε ὅτι εἶναι $ΑΒ = ΓΔ$, $ΒΓ = ΑΔ$ καί $ΟΑ = ΟΓ$, $ΟΒ = ΟΔ$. Δηλαδή:

- **Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.**
- **Οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.**



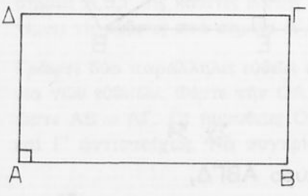
Σχ. 55

Ἄν ἀποτυπώσουμε τίς γωνίες $\widehat{Α}$ καί $\widehat{Β}$ σέ διαφανές, βρίσκουμε ὅτι αὐτές εἶναι ἀντιστοίχως ἴσες μέ τίς $\widehat{Γ}$ καί $\widehat{Δ}$. Ἑπομένως:

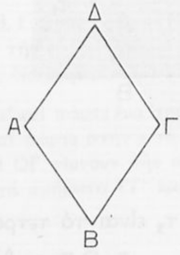
- **Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες[1].**

Εἴδη παραλληλογράμμων

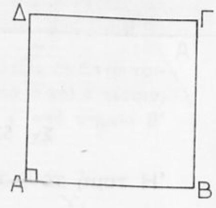
6.17. i) Στό σχῆμα 56 ἔχουμε ἕνα παραλληλόγραμμο πού ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀρθές.



Σχ. 56



Σχ. 57



Σχ. 58

(1) Οἱ παραπάνω ἰδιότητες εἶναι *χαρακτηριστικές*. Δηλαδή ἄν ἕνα τετράπλευρο ἔχει μιά ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές, τότε εἶναι παραλληλόγραμμο.

Τό παραλληλόγραμμο αὐτό λέγεται **ὀρθογώνιο**.

Δύο διαδοχικές πλευρές ἑνός ὀρθογωνίου λέγονται **διαστάσεις** του.

ii) Στό σχῆμα 57 ἔχουμε ἕνα παραλληλόγραμμο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες. Ἕνα τέτοιο παραλληλόγραμμο λέγεται **ρόμβος**.

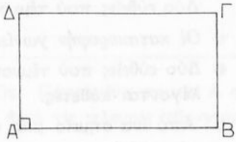
iii) Στό σχῆμα 58 ἔχουμε ἕνα παραλληλόγραμμο πού εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καί ρόμβος, δηλαδή ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες καί τίς γωνίες του ὀρθές.

Τό παραλληλόγραμμο αὐτό λέγεται **τετράγωνο**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος 59 ἔχει $\widehat{A} = 1$ ὀρθή. Νά βρεθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες του χωρίς τή χρήση ὀργάνων.**

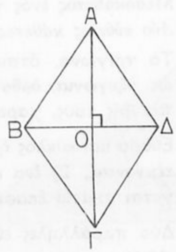
Λύση: Ξέρουμε ὅτι, ἄν μιά εὐθεία εἶναι κάθετη σέ μιά ἀπό δύο παράλληλες, θά εἶναι κάθετη καί στήν ἄλλη. Συνεπῶς θά ἔχουμε $AB \perp B\Gamma$, ἄρα $\widehat{B} = 1$ ὀρθή. Στό παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες. Ἔτσι θά ἔχουμε $\widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 1$ ὀρθή καί $\widehat{\Delta} = \widehat{B} = 1$ ὀρθή. Δηλαδή τό παραλληλόγραμμο αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.



Σχ. 59

2. **Στό διπλανό σχῆμα 60 ἔχουμε ἕνα ρόμβο. Νά συγκρίνετε τίς γωνίες τῶν διαγωνίων του μέ τήν ὀρθή γωνία.**

Λύση: Μέ τό γνώμονα βρίσκουμε πώς οἱ γωνίες τῶν διαγωνίων του εἶναι ὀρθές. Συνεπῶς:
οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι κάθετες.



Σχ. 60

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Γράψτε δύο εὐθεῖες ε καί ε', πού νά τέμνονται στό σημεῖο Ο ἔτσι, ὥστε μία ἀπό τίς γωνίες πού σχηματίζονται νά εἶναι 42^o. Στήν εὐθεία ε πάρτε τά σημεῖα Α καί Γ, ὥστε $OA = O\Gamma$, καί στήν ε' τά σημεῖα Β καί Δ, ὥστε $OB = O\Delta$. α) Τί σχῆμα εἶναι τό ΑΒΓΔ; β) Συγκρίνετε τά τμήματα ΑΒ καί ΓΔ. (Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας).

36. Γράψτε δύο εὐθεῖες τεμνόμενες στό σημεῖο Ο καί πάρτε στίς τέσσερις ἡμιευθεῖες, ἀρχίζοντας ἀπό τό Ο, τέσσερα ἴσα τμήματα. Νά ἑνώσετε τά ἄκρα τους καί νά ἐξετάσετε τί εἴδους τετράπλευρο θά προκύψει.

37. Κάνετε τό ἴδιο γιά δύο εὐθεῖες πού τέμνονται καθέτως στό Ο.

38. Νά σχηματίσετε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ πού νά ἔχει τή γωνία $\widehat{B}$ ὀξεία καί νά φέρετε τά δύο ὕψη του ἀπό τήν κορυφή Α.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

1. **Τομή** δύο συνόλων Α καί Β λέγεται τό σύνολο $A \cap B$ πού ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων. Ἄν τά σύνολα δέν ἔχουν κοινά στοιχεῖα, ἡ τομή τους εἶναι τό κενό σύνολο καί τά σύνολα λέγονται **ξένα μεταξύ τους.**

Στήν τομή συνόλων ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

- **Ἀντιμεταθετική** $A \cap B = B \cap A$
- **Προσεταιριστική** $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$.

2. Δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου ἔχουν: ἤ ἕνα κοινό σημεῖο καί λέμε τότε ὅτι οἱ εὐθεῖες **τέμνονται** ἤ κανένα κοινό σημεῖο καί λέγονται **παράλληλες.**

Δύο εὐθεῖες πού τέμνονται σχηματίζουν **κατακορυφήν γωνίες.**

- *Οἱ κατακορυφήν γωνίες εἶναι ἴσες.*
- Δύο εὐθεῖες πού τέμνονται καί σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες ἴσες, λέγονται **κάθετες.**
- Ἀπό ἕνα σημεῖο μιᾶς εὐθείας ἤ ἔξω ἀπ' αὐτήν περνᾶ *μία μόνο κάθετος πρός τήν εὐθεία.*
- Τό κάθετο τμῆμα ἀπό ἕνα σημεῖο πρός μία εὐθεία λέγεται **ἀπόσταση** τοῦ σημείου ἀπό τήν εὐθεία. Ἡ ἀπόσταση εἶναι μικρότερη ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα ἀπό τό σημεῖο πρός τήν εὐθεία.
- **Μεσοκάθετος** ἑνός τμήματος εἶναι ἡ εὐθεία ἡ κάθετη στό μέσο του.
- *Δύο εὐθεῖες κάθετες στήν ἴδια εὐθεία εἶναι παράλληλες.*

3. Τά τρίγωνα, ὅταν ἐξετάζονται ὡς πρός τίς γωνίες τους, χαρακτηρίζονται ὡς **ὀξυγώνια, ὀρθογώνια** καί **ἀμβλυγώνια** καί ὅταν ἐξετάζονται ὡς πρός τίς πλευρές τους, χαρακτηρίζονται ὡς **σκαληνά, ἰσοσκελή** καί **ἰσόπλευρα.**

4. Εὐθεία καί κύκλος ἤ δύο κύκλοι μπορεῖ νά ἔχουν: 1) δύο κοινά σημεῖα, ὁπότε **τέμνονται,** 2) ἕνα κοινό σημεῖο, ὁπότε **ἐφάπτονται** καί τό κοινό σημεῖο λέγεται **σημεῖο ἐπαφῆς,** 3) κανένα κοινό σημεῖο.

5. Δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1, ε_2 ὁρίζουν μιά **ταινία** (ἤ **ζώνη**) μέ **πλευρές** τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2.

Τό **τραπέζιο** ὁρίζεται ἀπό τήν τομή μιᾶς ταινίας καί μιᾶς γωνίας, ὅταν οἱ πλευρές τους τέμνονται.

Τό **παραλληλόγραμμο** ὁρίζεται ἀπό τήν τομή δύο ταινιῶν, ὅταν οἱ πλευρές τους τέμνονται. Σέ κάθε παραλληλόγραμμο:

- **Οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.**
- **Οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες.**
- **Οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.**

Ἕνα παραλληλόγραμμο λέγεται:

Ὀρθογώνιο, ἄν ἔχει τίς γωνίες του ὀρθές.

Ρόμβος, ἄν ἔχει τίς πλευρές του ἴσες.

Τετράγωνο, ἄν ἔχει τίς γωνίες του ὀρθές καί τίς πλευρές του ἴσες.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

39. Ἂν Α = {τά *ἄηχα* σύμφωνα}, Β = {τά *στιγμιαῖα* σύμφωνα}, νά βρεθεῖ τό Α ∩ Β καί νά γίνει τό σχετικό διάγραμμα.

40. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν (ΒΓ) = 6,5 cm, $\widehat{B} = 60^0$ καί $\widehat{\Gamma} = 75^0$.

41. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν (ΒΓ) = 3 cm, (ΑΒ) = 5 cm, (ΑΓ) = = 4 cm. Μπορεῖτε νά βρεῖτε τί τρίγωνο σχηματίστηκε;

42. Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ὅταν $\widehat{A} = 65^0$, (ΑΒ) = 4 cm καί (ΑΓ) = = 5,5 cm.

43. Γράψτε ἕναν κύκλο καί φέρτε δύο τυχαῖες διαμέτρους. Ἂν ἑνώσετε τά ἄκρα τους, τί σχῆμα θά προκύψει;

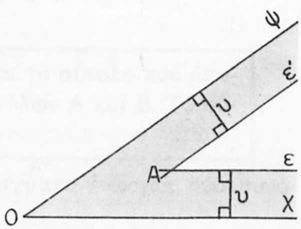
44. Στά ἄκρα τῶν διαμέτρων τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά φέρετε τίς ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου. Αὐτές τέμνονται καί σχηματίζουν ἕνα τετράπλευρο. Τί τετράπλευρο εἶναι αὐτό;

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

45. Γράψτε μιά γωνία $x\widehat{O}y$ καί τή διχοτόμο της Oz. Πάρτε ἕνα σημεῖο Α στή διχοτόμο καί φέρτε τίς ἀποστάσεις του ΑΒ καί ΑΓ ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$. Νά συγκρίνετε τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ.

46. Στήν προηγούμενη ἄσκηση νά γράψετε τόν κύκλο (Α, ΑΒ). α) Ἀπό ποιό ἄλλο σημεῖο θά περάσει ὁ κύκλος; β) Ποιά εἶναι ἡ θέση τοῦ κύκλου ὡς πρός τίς πλευρές τῆς $x\widehat{O}y$; (Δικαιολογῆστε τίς ἀπαντήσεις σας).

47. Στό διπλανό σχῆμα ἔχουμε τή γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί τίς ταινίες τῶν εὐθειῶν ε, Οx καί ε΄, Οy μέ τό ἴδιο πλάτος υ. α) Νά φέρετε τίς ἀποστάσεις τοῦ σημείου τομῆς Α τῶν εὐθειῶν ε καί ε΄ ἀπό τίς πλευρές τῆς $x\widehat{O}\psi$ καί νά τίς συγκρίνετε (δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας). β) Νά βρεῖτε τή θέση τοῦ Α ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας.



48. Γράψτε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Στηριχθεῖτε στίς ἀσκήσεις 45 καί 47 καί δικαιολογῆστε ὅτι οἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του τέμνονται στό ἴδιο σημεῖο !.

49. Στήν προηγούμενη ἄσκηση ἔστω ΙΔ ἡ ἀπόσταση τοῦ Ι ἀπό τήν πλευρά ΒΓ τοῦ τριγώνου. Γράψτε τόν κύκλο (Ι, ΙΔ) καί βρεῖτε ποιά εἶναι ἡ θέση του ὡς πρός τίς πλευρές τοῦ τριγώνου.

50. Γράψτε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί φέρτε τίς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν του ΑΒ καί ΑΓ, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό σημεῖο Ο. Στηριχθεῖτε στήν § 6.7 καί στήν ἐφαρμ. 2 τῆς § 6.11 καί δικαιολογῆστε ὅτι τό Ο βρίσκεται στή μεσοκάθετο τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

51. Στήν προηγούμενη ἄσκηση νά δικαιολογήσετε ὅτι ὁ κύκλος (Ο, ΟΑ) περνᾶ καί ἀπό τίς κορυφές Β καί Γ τοῦ τριγώνου.

52. Γράψτε μιά γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί πάρτε τά σημεῖα Α καί Γ στήν πλευρά της Ox καί τά Β καί Δ στήν Οψ ἔτσι, ὥστε ΟΒ = ΟΑ, ΟΔ = ΟΓ. α) Νά φέρετε τά τμήματα ΑΔ

καί ΒΓ καί νά τά συγκρίνετε. β) Ἄν $Α\Delta \cap ΒΓ = \{Ζ\}$, νά συγκρίνετε τά τμήματα ΖΑ, ΖΒ καθώς καί τά τμήματα ΖΓ, ΖΔ.

53. Στήν προηγούμενη ἄσκηση ἔστω $ΟΖ \cap ΑΒ = \{Η\}$ καί $ΟΖ \cap Γ\Delta = \{Ε\}$. α) Νά μετρήσετε τίς γωνίες στό Ε καί στό Η. β) Νά βρεῖτε τί σχῆμα εἶναι τό ΑΒΔΓ.

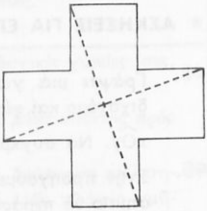
54. Γράψτε κύκλο μέ κέντρο Ο καί μία χορδή του ΑΒ. Γράψτε ἀκόμη τόν κύκλο (Α, ΑΒ) ὁ ὁποῖος τέμνει τόν πρῶτο κύκλο στό Γ. Δικαιολογῆστε ὅτι ἡ ΑΟ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ.

55. Γράψτε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (ΑΒ) = 5 cm. Νά βρεῖτε τέσσερα σημεῖα Γ,Δ,Ε,Ζ, πού τό καθένα τους νά ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά Α καί Β καί ἀκόμη νά εἶναι (ΓΔ) = (ΔΕ) = (ΕΖ) = 3 cm.

56. Γράψτε μία ταινία μέ πλάτος 3 cm καί μετά τρεῖς κύκλους, πού νά ἐφάπτονται στίς πλευρές τῆς ταινίας, καί ὁ μεσαῖος νά ἐφάπτεται (ἐξωτερικά) στούς δύο ἄλλους.

57. Γράψτε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί μετά τούς κύκλους (Β, ΒΑ), (Γ, ΓΑ). Οἱ κύκλοι αὐτοί τέμνονται σ' ἕνα δεύτερο σημεῖο Α'. Ἄν $ΑΑ' \cap ΒΓ = \{\Delta\}$, νά δικαιολογήσετε ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

58. Νά κόψετε τό διπλανό σταυρό (ἀφοῦ τόν ἀποτυπώσετε) σέ τρία κομμάτια, ὥστε ἅμα τά συναρμολογήσετε κατάλληλα (χωρίς ἐπικαλύψεις), νά δώσουν δύο συνεχόμενα ἴσα τετράγωνα.



ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Ἕνωση συνόλων

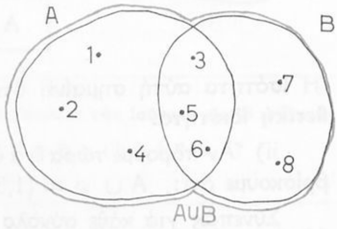
7.1. Ἄς πάρουμε δύο σύνολα, π.χ. τά

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$.

Ἀπό τά σύνολα αὐτά μποροῦμε νά σχηματίσουμε τό σύνολο

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

πού ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα καί τῶν δύο συνόλων Α καί Β. Τό σύνολο αὐτό λέγεται **ἕνωση** τῶν συνόλων Α καί Β, γράφεται συμβολικά $\mathbf{A \cup B}$ καί διαβάζεται «*Α ἕνωση Β*»



Σχ. 1

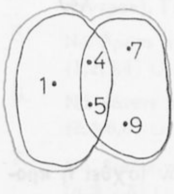
Στό σχῆμα 1 ἔχουμε τά διαγράμματα τῶν συνόλων Α καί Β, ἀπό τά ὁποῖα παίρνουμε τό διάγραμμα τῆς ἑνώσεώς τους (πού ὁρίζεται ἀπό τήν χρωματιστή γραμμή).

Γενικά :

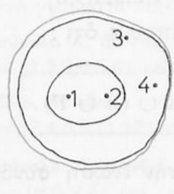
> Ἕνωση δύο συνόλων Α καί Β λέγεται τό σύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα καί τῶν δύο συνόλων Α καί Β. Τό σύνολο αὐτό τό συμβολίζουμε $A \cup B$.

Παρακάτω δίνουμε μερικά ἀκόμη παραδείγματα ἑνώσεως δύο συνόλων καί τά διαγράμματά τους.

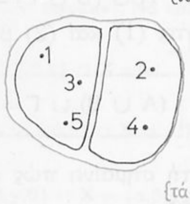
1) $\{1, 4, 5\} \cup \{4, 5, 7, 9\} = \{1, 4, 5, 7, 9\}$ (Σχ. 2)
2) $\{1, 2\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ (Σχ. 3)
3) $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (Σχ. 4)
4) {τά φωνήεντα} ∪ {τά σύμφωνα} = {τά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου} (Σχ. 5).



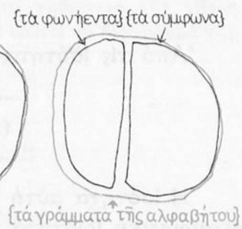
Σχ. 2



Σχ. 3



Σχ. 4



Σχ. 5

Ἰδιότητες τῆς ἑνώσεως

7.2. i) Ἄς πάρουμε δύο σύνολα, π.χ. τά $A=\{1,2,3,4\}$ καί $B=\{3,5,6\}$.

Βρίσκουμε ὅτι: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

καί $B \cup A = \{3,5,6,1,2,4\}$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι εἶναι:

$$\boxed{A \cup B = B \cup A}$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή σημαίνει ὅτι στήν ἕνωση συνόλων ἰσχύει ἡ **ἀντιμεταθετική** ἰδιότητα.

ii) Ἄν πάρουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο, π.χ. τό $A = \{1,3,5,7\}$, βρίσκουμε ὅτι: $A \cup \varnothing = \{1,3,5,7\} \cup \{\ \} = \{1,3,5,7\} = A$.

Συνεπῶς γιά κάθε σύνολο A ἰσχύει

$$\boxed{A \cup \varnothing = A}$$

γι᾽ αὐτό τό $\varnothing$ τό λέμε **οὐδέτερο στοιχεῖο** τῆς ἑνώσεως.

iii) Παίρνουμε τώρα τρία σύνολα, π.χ. τά:

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6\}$, $\Gamma = \{3,4,5,6\}$.

Βρίσκουμε τό σύνολο $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

καί τό σύνολο $(A \cup B) \cup \Gamma = \{1,2,3,4,6\} \cup \{3,4,5,6\}$ ἤ

$$(A \cup B) \cup \Gamma = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad (1)$$

Τό τελευταῖο αὐτό σύνολο λέγεται **ἕνωση τῶν συνόλων A, B, Γ** καί συμβολίζεται μέ $A \cup B \cup \Gamma$. Ἔχουμε λοιπόν

$$\boxed{A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ὁρίζεται ἡ ἕνωση περισσότερων συνόλων.

Ἄς σχηματίσουμε τώρα τό σύνολο $A \cup (B \cup \Gamma)$.

Ἔχουμε: $B \cup \Gamma = \{2,3,4,5,6\}$

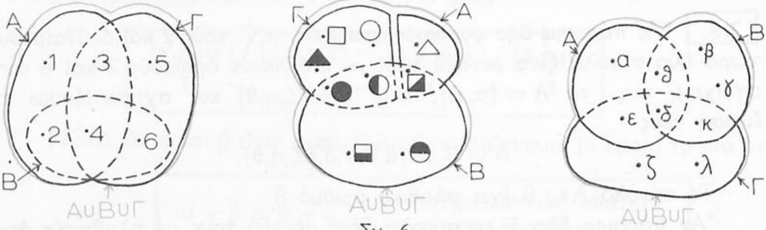
$$A \cup (B \cup \Gamma) = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἰσότητες (1) καί (2) βλέπουμε ὅτι:

$$\boxed{(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)}$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή σημαίνει πώς στήν ἕνωση συνόλων ἰσχύει ἡ **προσεταιριστική** ἰδιότητα.

Παρακάτω δίνουμε μερικά διαγράμματα ἑνώσεως τριῶν συνόλων.



Σχ. 6

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Μέ τά σύνολα $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,3,4\}$ νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰσότητα $A \cup B = B \cup A$.**

Λύση: Ἔχουμε $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ καί $B \cup A = \{2, 3, 4, 1, 5, 7\}$

Βλέπουμε ἔτσι ὅτι $\quad A \cup B = B \cup A$

2. **Μέ τά σύνολα Α = {τά γράμματα τῆς λέξεως «πόσο»}, Β = {τά φωνήεντα τῆς λέξεως «ποτήρι»}, Γ = {τά γράμματα τῆς λέξεως «ποτό»} νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰσότητα**

$$(A \cup \Gamma) \cup B = \Gamma \cup (B \cup A)$$

Λύση: Παριστάνουμε πρῶτα τά σύνολα μέ ἀναγραφή:

$A = \{\pi, o, \sigma\}$, $\quad B = \{o, \eta, \iota\}$, $\quad \Gamma = \{\pi, o, \tau\}$.

Ἔχουμε λοιπόν διαδοχικά :

$A \cup \Gamma = \{\pi,o,\sigma,\tau\}$	$B \cup A = \{\pi,o,\sigma,\eta,\iota\}$
$(A \cup \Gamma) \cup B = \{\pi,o,\sigma,\eta,\iota,\tau\}$	$\Gamma \cup (B \cup A) = \{\pi,o,\sigma,\eta,\iota,\tau\}$

Συνεπῶς εἶναι $\quad (A \cup \Gamma) \cup B = \Gamma \cup (B \cup A)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἄν Α = {τά *ἄηχα* σύμφωνα}, Β = {τά *στιγμιαῖα* σύμφωνα}, νά βρεῖτε (μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του), τό σύνολο $A \cup B$ καί νά κάνετε τό διάγραμμά του.
2. Ἄν Α = {τά γράμματα τῆς λέξεως «καλάμι»}, Β = {τά γράμματα τῆς λέξεως «κλίμα»}, νά βρεῖτε τό σύνολο $A \cup B$ καί νά κάνετε τό διάγραμμά του.
3. Ἄν $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{5,6,7,8,9\}$, $\Gamma = \{1,7,9,10\}$ νά βρεῖτε τό σύνολο $A \cup B \cup \Gamma$ καί νά κάνετε τό διάγραμμά του.
4. Νά παραστήσετε μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων τήν ἕνωση τῶν συνόλων: Α = = {τά γράμματα τῆς λέξεως «κεχριμπάρι»}, Β = {τά γράμματα τῆς λέξεως «κέντρο»}, Γ= {τά γράμματα τῆς λέξεως «κέρμα»}. Νά κάνετε τό διάγραμμά της.
5. Νά βρεῖτε τό σύνολο Χ, ἄν εἶναι:
$\{1,2,3,4\} \cup X = \{1,2,3,4,5,6\}$ καί $\{1,2,3,4\} \cap X = \varnothing$
6. Νά κάνετε τό ἴδιο, ἄν εἶναι:
$\{2,4,6,8\} \cup X = \{2,4,6,8,11,12\}$ καί $\{2,4,6,8\} \cap X = \{2\}$
7. Νά βρεῖτε τό σύνολο Χ, ἄν εἶναι :
$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cup X = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cap X = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$

Πρόσθεση φυσικῶν ἀριθμῶν

7.3. Ἄς πάρουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 2 καί 6. Παίρνουμε τώρα δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους μέ πληθικούς ἀριθμούς 2 καί 6 ἀντιστοίχως, π.χ. τά $A = \{\alpha, \beta\}$, $B = \{\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta\}$ καί σχηματίζουμε τήν ἕνωσή τους

$$A \cup B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta\}.$$

Τό σύνολο $A \cup B$ ἔχει πληθικό ἀριθμό 8.

Ἄν πάρουμε δύο ἄλλα σύνολα, ξένα μεταξύ τους, μέ πληθικούς ἀριθμούς πάλι τό 2 καί τό 6, π.χ. τά $\Gamma = \{<, >\}$ καί $\Delta = \{\subset, \supset, =, +, -, \cdot\}$ βλέπουμε ὅτι ἡ ἕνωσή τους

$$\Gamma \cup \Delta = \{<, >, \subset, \supset, =, +, -, \cdot\}$$

ἔχει ἐπίσης πληθικό ἀριθμό τόν 8.

Δηλαδή ἄν πάρουμε δυό ὁποιαδήποτε σύνολα ξένα μεταξύ τους μέ πληθικούς ἀριθμούς 2 καί 6, ἡ ἕνωσή τους ἔχει πάντα πληθικό ἀριθμό 8.

Ὁ ἀριθμός 8 λέγεται **ἄθροισμα** τοῦ 2 μέ τόν 6 καί γράφεται ὅπως ξέρουμε $2+6=8$ (ἤ $8=2+6$)

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \{\alpha,\beta\} & \cup & \{\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta\} & = & \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta\} \\ 2 & + & 6 & = & 8 \end{array}}$$

Γενικά:

> Ἄθροισμα τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ α μέ τό φυσικό ἀριθμό β λέγεται ὁ πληθικός ἀριθμός τῆς ἑνώσεως $(A \cup B)$ δύο συνόλων Α καί Β, τά ὁποῖα εἶναι ξένα μεταξύ τους καί ἔχουν πληθικούς ἀριθμούς α καί β ἀντιστοίχως.

Τήν πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν τή λέμε **πρόσθεση στό $\mathbb{N}$**.

Οἱ ἀριθμοί α καί β λέγονται **προσθετέοι** ἤ **ὅροι** τοῦ ἀθροίσματος.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

7.4. i) Ἄς πάρουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 3 καί 4, καί δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους μέ πληθάριθμους 3 καί 4, π.χ. τά $A = \{\kappa,\lambda,\mu\}$, $B = \{\pi,\rho,\sigma,\tau\}$. Ἔχουμε μάθει ὅτι:

— Ὁ πληθάριθμος τοῦ $A \cup B$ εἶναι $3+4$

— Ὁ πληθάριθμος τοῦ $B \cup A$ εἶναι $4+3$

— $A \cup B = B \cup A$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι: $3+4=4+3$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \{\kappa,\lambda,\mu\} \cup \{\pi,\rho,\sigma,\tau\} & = & \{\pi,\rho,\sigma,\tau\} \cup \{\kappa,\lambda,\mu\} \\ 3 \quad + \quad 4 & = & 4 \quad + \quad 3 \end{array}}$$

Γενικά, ἄν α καί β εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, βρίσκουμε μέ ὅμοιο τρόπο ὅτι:

$$\boxed{\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad \textit{(ἀντιμεταθετική ἰδιότητα τῆς προσθέσεως)}}$$

Ἡ ἰδιότητα αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει νά λέμε ὅτι *«τό α + β εἶναι τό ἄθροισμα τῶν α καί β»*, ἀντί νά λέμε «τό α + β εἶναι τό ἄθροισμα τοῦ α μέ τόν β».

ii) Ὅταν ὁ ἕνας προσθετέος εἶναι 0, δηλαδή ὁ πληθάριθμος τοῦ $\varnothing$, τότε ἀπό τήν ἰδιότητα

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

συμπεραίνουμε ὅτι $\boxed{\alpha+0=0+\alpha=\alpha}$

Ἔτσι ἔχουμε $3+0=0+3=3$, $4+0=0+4=4$, $1+0=0+1=1$ κ.λ.π.

Δηλαδή τό μηδέν εἶναι τό *οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως*.

iii) Ἄς πάρουμε τώρα τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 2, 3 καί 6. Βρίσκουμε διαδοχικά,

$$2+3=5 \quad \text{καί} \quad (2+3)+6=5+6=11$$

Ὁ ἀριθμός 11 λέγεται *ἄθροισμα τῶν φυσικῶν 2, 3 καί 6* καί γράφεται $2+3+6$. Ἔτσι ἔχουμε

$$2+3+6=(2+3)+6$$

Γενικά, ἄν α,β,γ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί ὁρίζουμε

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma}$$

Ὁμοίως ὁρίζουμε τό ἄθροισμα τεσσάρων ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἄς πάρουμε τώρα τά σύνολα $A=\{\alpha,\beta\}$, $B=\{\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $\Gamma=\{\zeta,\eta,\theta,\iota,\kappa,\lambda\}$ πού εἶναι ἀνά δύο ξένα μεταξύ τους καί ἔχουν πληθικούς ἀριθμούς 2,3,6 ἀντιστοίχως.

Ἀπό τήν ἰδιότητα $\quad (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$

συμπεραίνουμε ὅτι $\quad (2+3)+6=2+(3+6)$

Γενικά, ἄν α,β,γ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, βρίσκουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅτι:

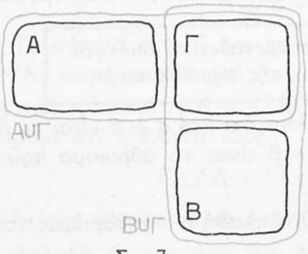
$$\boxed{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \qquad \textit{(προσεταιριστική ἰδιότητα)}}$$

Έτσι έχουμε π.χ. $(3+4)+6=7+6=13$ καί $3+(4+6)=3+10=13$.

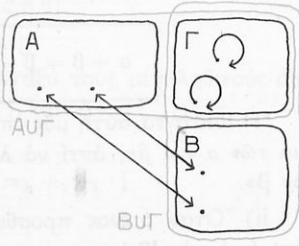
iv) Στό σχήμα 7 έχουμε τά διαγράμματα τών συνόλων Α,Β,Γ, Α∪Γ καί Β∪Γ. Παρατηρούμε τώρα ότι:

1ο) Τά σύνολα Α καί Γ είναι ξένα μεταξύ τους.

2ο) Τά σύνολα Β καί Γ είναι ξένα μεταξύ τους.



Σχ. 7



Σχ. 8

Άν οί πληθάριθμοι τών συνόλων Α,Β,Γ είναι άντιστοίχως α,β,γ, ξέρουμε ότι ό πληθάριθμος τοῦ Α ∪ Γ θά είναι $\alpha+\gamma$ καί τοῦ Β ∪ Γ, θά είναι $\beta+\gamma$.

Άς ύποθέσουμε τώρα ότι είναι $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

Τότε τά σύνολα Α ∪ Γ καί Β ∪ Γ είναι ίσοδύναμα. Μπορούμε συνεπώς νά άντιστοιχίσουμε τά στοιχεία τους ένα μέ ένα. Μιά τέτοια άντιστοιχία έχουμε κάνει στό σχήμα 8, στήν όποία μάλιστα κάθε στοιχείο τοῦ Γ άντιστοιχίζεται στόν έαυτό του.

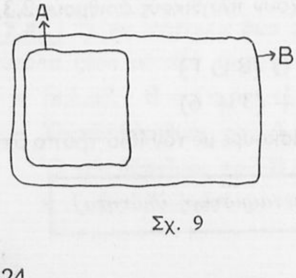
Καταλαβαίνουμε τώρα ότι στήν άντιστοιχία αύτή τά στοιχεία τών συνόλων Α καί Β άντιστοιχίζονται ένα μέ ένα. Έπομένως τά σύνολα Α καί Β είναι ίσοδύναμα καί θά έχουν τόν ίδιο πληθάριθμο, δηλ. $\boldsymbol{\alpha=\beta}$.

Άπό τά παραπάνω λοιπόν συμπεραίνουμε ότι:

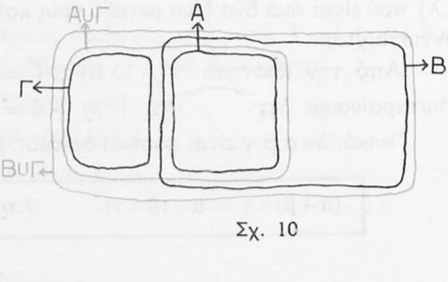
Άν $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, τότε $\alpha=\beta$.

Ή πρόταση αύτή λέγεται **ίδιότητα τῆς διαγραφῆς**.

v) Στό σχήμα 9 έχουμε τά διαγράμματα δύο συνόλων Α καί Β καί στό σχήμα 10 τά διαγράμματα τών συνόλων Α ∪ Γ καί Β ∪ Γ.



Σχ. 9



Σχ. 10

Ἀπό τά σχήματα αὐτά βλέπουμε ὅτι:

1ο) $A \subset B$

2ο) Τά σύνολα Α καί Γ εἶναι ξένα μεταξύ τους, ὅπως ἐπίσης καί τά σύνολα Β καί Γ

3ο) Ὅταν εἶναι $A \subset B$, τότε εἶναι καί $A \cup \Gamma \subset B \cup \Gamma$

4ο) Ὅταν εἶναι $A \cup \Gamma \subset B \cup \Gamma$, τότε εἶναι καί $A \subset B$.

Ἄς δοῦμε τώρα τί συμβαίνει μέ τούς πληθάριθμους τῶν συνόλων αὐτῶν.

Ἀπό τό 3ο συμπεραίνουμε ὅτι

ἄν εἶναι $\alpha < \beta$, τότε εἶναι $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$

καί ἀπό τό 4ο **ἄν εἶναι $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, τότε εἶνα $\alpha < \beta$.**

Τίς δύο αὐτές ἰδιότητες τίς γράφουμε

$$\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα:**

α) 7+8+10+14+21, β) 8+14+7+21+10

Λύση: α) $\underbrace{7+8}+10+14+21 = \underbrace{15+10}+14+21 = \underbrace{25+14}+21 = 39+21 = 60$

β) $\underbrace{8+14}+7+21+10 = \underbrace{22+7}+21+10 = \underbrace{29+21}+10 = 50+10 = 60$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι **ἕνα ἄθροισμα δέν ἀλλάζει, ἄν ἀλλάξουμε τή θέση τῶν προσθετέων του.**

2. **Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα: 13+9+28.**

Λύση: $13+9+28 = 13+(7+2)+28 = (13+7)+(2+28) = 20+30 = 50.$

Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό καταλαβαίνουμε πώς, ὅταν μᾶς ἐξυπηρετεῖ, **μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε ἕναν ὅρο ἀθροίσματος μέ δύο (ἤ περισσότερους) προσθετέους πού τόν ἔχουν ὡς ἄθροισμα.**

3. **Νά βρεθοῦν σέ καθένα ἀπό τά ἑπόμενα τετράγωνα τά ἀθροίσματα τῶν ἀριθμῶν ὁριζόντια, κατακόρυφα καί διαγώνια. Τί παρατηρεῖτε;**

11	6	7
4	8	12
9	10	5

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

10	15	8
9	11	13
14	7	12

Λύση: $11+6+7 = 24$, $11+4+9 = 24$, $11+8+5 = 24$ ... κ.λ.π.

Παρατηροῦμε πώς ὅλα τά ὁριζόντια, κατακόρυφα καί διαγώνια ἀθροίσματα σέ καθένα ἀπό τά τετράγωνα αὐτά εἶναι ἴσα. Τετράγωνα, ὅπως αὐτά, λέγονται **μαγικά**.

4. Νά συμπληρωθοῦν τά κενά στίς ἑπόμενες σχέσεις, ὅπως ἔγινε στήν (i)

i) ἄν $\alpha+3=2+3$, τότε $\alpha=2$
ii) ἄν $x+5<7+5$, τότε $x<\ldots$
iii) ἄν $4<y$, τότε $4+1<\ldots$
iv) ἄν $14<\alpha+6$, τότε $\ldots<\alpha$

5. Μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως νά ἐξηγηθεῖ ἡ γνωστή μας τεχνική τῆς πράξεως μέ παράδειγμα τούς ἀριθμούς 367 καί 586.

Λύση : Ἀναλύουμε κάθε ἀριθμό στίς μονάδες διάφορων τάξεων.

$367+586=(3E+6\Delta+7M)+(5E+8\Delta+6M)=3E+6\Delta+7M+5E+8\Delta+6M=$
$=(3E+5E)+(6\Delta+8\Delta)+(7M+6M)=$(ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική ἰδιότητα)
$=8E+14\Delta+13M=$
$=8E+15\Delta+3M=$
$=9E+5\Delta+3M=$
$=953$

ἤ πιό ἁπλά

$$\begin{array}{r} 367 \\ +\,586 \\ \hline 953 \end{array}$$

Δηλαδή, γιά νά προσθέσουμε φυσικούς ἀριθμούς, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε τίς μονάδες μέ τίς μονάδες, τίς δεκάδες μέ τίς δεκάδες, κ.λ.π. Γι' αὐτό ἄλλωστε γιά εὐκολία μας στήν ἐκτέλεση τῆς πράξεως, κάνουμε τή γνωστή διάταξη (χρῶμα).

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Μέ τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{2,6,7\}$, νά γράψετε ὅλους τούς διψήφιους ἀριθμούς μέ διαφορετικά ψηφία καί νά βρεῖτε τό ἄθροισμά τους.

9. Ἄν $x=2$, νά βρεῖτε τούς ἀριθμούς πού παριστάνουν τά γράμματα $y=x+3$, $\omega=y+4$, $\varphi=\omega+5$.

10. Μέ τά χρήματα πού εἶχε κάποιος, ἀγόρασε ἕνα κουστούμι 4250 δρχ., παπούτσια 675 δρχ., ἕνα πουλόβερ 835 δρχ. καί τοῦ ἔμειναν 9163 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε;

11. Νά ὑπολογίσετε τά ἀπέναντι ἀθροίσματα κατά στῆλες καί γραμμές.

$$\begin{array}{rcrl} 458 & + & 3461 & = \ldots \\ 17851 & + & 24608 & = \ldots \\ 9008 & + & 724 & = \ldots \\ \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & = \ldots \end{array}$$

12. Νά ἐξετάσετε ἄν τό ἀπέναντι τετράγωνο εἶναι μαγικό (ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδ. 3).

14	9	13	2
3	12	8	15
4	11	7	16
17	6	10	5

13. Νά βάλετε τό κατάλληλο σύμβολο ἰσότητας ἤ ἀνισότητας στή θέση τοῦ ἐρωτηματικοῦ.

α) $17+13\ ;\ 15+15$, β) $12+29\ ;\ 13+29$, γ) $(7+15)+21\ ;\ 7+36$.
δ) $(13+9)+(15+21)\ ;\ 28+30$, ε) $(\alpha+4)+3\ ;\ \alpha+7$.

14. Βρεῖτε μέ τό νοῦ σας τά ἀθροίσματα (παράδ. 1 καί 2):
α) $8+98$, β) $24+97$, γ) $27+233$, δ) $45+445$.

15. Τό ἴδιο γιά τά ἀθροίσματα:
α) $38+(12+231)$, β) $565+(435+673)$, γ) $201+(167+99)$.

16. Πάρτε τρεῖς διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς καί προσθέστε τούς δυό ἀκραίους. Τί σχέση ἔχει ὁ μεσαῖος μέ τό ἄθροισμα αὐτό; Κάνετε τό ἴδιο γιά ἄλλη τριάδα διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

17. Πάρτε τέσσερις διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς καί προσθέστε τούς δύο ἀκραίους καί χωριστά τούς δύο μεσαίους. Τί παρατηρεῖτε; Κάνετε τό ἴδιο γιά ἄλλη τετράδα διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

18. Στή διπλανή πρόσθεση νά ἀντικαταστήσετε τά γράμματα μέ κατάλληλα ψηφία.

$$\begin{array}{r} 4\,8\,7\,\alpha \\ 5\,0\,\beta\,7 \\ \hline \gamma\,\delta\,3\,9 \end{array}$$

Πίνακες — Πρόσθεση πινάκων

7.5. Οἱ παρακάτω πίνακες δείχνουν τόν ἀριθμό τῶν ἀγοριῶν καί τῶν κοριτσιῶν ἑνός μικτοῦ Γυμνασίου κατά τάξη καί τμῆμα, ὅπως ἐπίσης καί τό συνολικό ἀριθμό τῶν ἀγοριῶν καί τῶν κοριτσιῶν κατά τάξη.

Ἀγόρια

Τάξη	Τμῆμα 1ο	Τμῆμα 2ο	Ἄθροισμα
Α′	18	20	38
Β′	37	16	53
Γ′	17	19	36

(1)

Κορίτσια

Τάξη	Τμῆμα 1ο	Τμῆμα 2ο	Ἄθροισμα
Α′	17	14	31
Β′	0	22	22
Γ′	21	16	37

(2)

Γιά νά δείξουμε τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο βρίσκουμε τό ἄθροισμα τῶν μαθητῶν καί τῶν μαθητριῶν στά δύο τμήματα κάθε τάξεως, γράφουμε μόνο τούς ἀριθμούς κάθε στήλης (δίχως τήν ἐξήγηση τῶν γραμμῶν καί στηλῶν), ὁπότε ἔχουμε

Ἀγόρια

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 37 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 53 \\ 36 \end{pmatrix} \quad (1')$$

Κορίτσια

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 37 \end{pmatrix} \quad (2')$$

Οἱ προηγούμενοι πίνακες (1) καί (2) (ἄν ἐναλλάξουμε γραμμές μέ στῆλες) μποροῦν νά γραφοῦν καί μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο.

Ἀγόρια

Τμῆμα	Τάξη Α′	Τάξη Β′	Τάξη Γ′
1ο	18	37	17
2ο	20	16	19
Ἄθροισμα	38	53	36

(3)

Κορίτσια

Τμῆμα	Τάξη Α′	Τάξη Β′	Τάξη Γ′
1ο	17	0	21
2ο	14	22	16
Ἄθροισμα	31	22	37

(4)

Γιά νά δείξουμε πάλι πῶς βρίσκουμε τό ἄθροισμα τῶν μαθητῶν καί μαθητριῶν κάθε τάξεως, γράφουμε:

Ἀ γ ό ρ ι α

$$(18 \quad 37 \quad 17) + (20 \quad 16 \quad 19) = (38 \quad 53 \quad 36) \qquad (3')$$

Κ ο ρ ί τ σ ι α

$$(17 \quad 0 \quad 21) + (14 \quad 22 \quad 16) = (31 \quad 22 \quad 37) \qquad (4')$$

Οἱ πίνακες (1) καί (2) μποροῦν νά γραφοῦν σέ ἕνα συγκεντρωτικό πίνακα:

	Τμῆμα 1ο		Τμῆμα 2ο		Ἄθροισμα	
Τάξη	Ἀγόρια	Κορίτσια	Ἀγόρια	Κορίτσια	Ἀγόρια	Κορίτσια
Α′	18	17	20	14	38	31
Β′	37	0	16	22	53	22
Γ′	17	21	19	16	36	37

(5)

καί, γιά νά δείξουμε πῶς βρίσκουμε τό ἄθροισμα τῶν μαθητῶν καί μαθητριῶν, θά γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 37 & 0 \\ 17 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 16 & 22 \\ 19 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 31 \\ 53 & 22 \\ 36 & 37 \end{pmatrix} \qquad (5')$$

Οἱ πίνακες (3) καί (4) μποροῦν νά γραφοῦν, σ' ἕνα συγκεντρωτικό πίνακα.

		Τάξη Α′	Τάξη Β′	Τάξη Γ′
Τμῆμα 1ο	Ἀγόρια	18	37	17
	Κορίτσια	17	0	21
Τμῆμα 2ο	Ἀγόρια	20	16	19
	Κορίτσια	14	22	16
Ἄθροισμα	Ἀγόρια	38	53	36
	Κορίτσια	31	22	37

(6)

Ἔτσι ἔχουμε πάλι $\begin{pmatrix} 18 & 37 & 17 \\ 17 & 0 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 16 & 19 \\ 14 & 22 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 53 & 36 \\ 31 & 22 & 37 \end{pmatrix}$ (6′)

Τά σύμβολα $\begin{pmatrix}18\\37\\17\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}20 & 14\\16 & 22\\19 & 16\end{pmatrix}$, $(18\ 37\ 17)$, $\begin{pmatrix}18 & 37 & 17\\17 & 0 & 21\end{pmatrix}$, κ.λ.π.

λέγονται **πίνακες** .Οἱ ἀριθμοί κάθε πίνακα λέγονται **στοιχεῖα** τοῦ πίνακα.

Οἱ πίνακες μᾶς βοηθᾶνε πολύ στά μαθηματικά, γιατί μᾶς ἐπιτρέπουν νά γράφουμε μέ συντομία καί σαφήνεια τά δεδομένα ἑνός προβλήματος (*πινακοποίηση τῶν δεδομένων*).

Ἕνας πίνακας μπορεῖ νά ἀποτελεῖται ἀπό μιά ἤ περισσότερες στῆλες καί ἀπό μιά ἤ περισσότερες γραμμές.

Ἔτσι π.χ. ὁ πρῶτος ἀπό τούς παραπάνω πίνακες ἀποτελεῖται ἀπό μιά στήλη καί τρεῖς γραμμές, ὁ δεύτερος ἀπό δύο στῆλες καί τρεῖς γραμμές, ὁ τρίτος ἀπό μιά γραμμή καί τρεῖς στῆλες καί ὁ τέταρτος ἀπό δυό γραμμές καί τρεῖς στῆλες.

Ὅταν δύο (ἤ περισσότεροι) πίνακες ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμό γραμμῶν καί τόν ἴδιο ἀριθμό στηλῶν, λέμε ὅτι ἔχουν τίς ἴδιες **διαστάσεις**.

$$\begin{pmatrix}18 & 17\\37 & 0\\17 & 21\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}20 & 14\\16 & 22\\19 & 16\end{pmatrix}$$

Ἄν ἔχουμε δύο πίνακες μέ τίς ἴδιες διαστάσεις, κάθε στοιχεῖο τοῦ ἑνός πίνακα ἔχει ἕνα ἀντίστοιχο στοιχεῖο στόν ἄλλο πίνακα. Εἶναι αὐτό πού ἀνήκει στήν ἀντίστοιχη γραμμή καί τήν ἀντίστοιχη στήλη. Π.χ. ὁ 37 στόν πρῶτο πίνακα βρίσκεται στήν **πρώτη στήλη** καί στή **δεύτερη γραμμή.** Ὁ ἀντίστοιχός του στόν ἄλλο πίνακα εἶναι ὁ 16.

Παρατηρώντας τίς ἰσότητες (1'), (2'), (3'), (4'), (5') καί (6') βλέπουμε πώς ὁ πίνακας τοῦ δεύτερου μέλους, σέ κάθε μιά ἀπ' αὐτές, σχηματίζεται ἀπό τήν πρόσθεση τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τῶν δύο πινάκων τοῦ πρώτου μέλους. Ὁ πίνακας αὐτός λέγεται **ἄθροισμα** τῶν πινάκων τοῦ πρώτου μέλους.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

> Γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα δύο (ἤ περισσότερων) πινάκων, πού ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις, σχηματίζουμε ἕναν πίνακα μέ τίς ἴδιες διαστάσεις πού κάθε στοιχεῖο του εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τῶν πινάκων πού μᾶς δίνονται.

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$\begin{pmatrix}5 & 3 & 6\\7 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+6 & 3+0 & 6+1\\7+2 & 0+1 & 2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 3 & 7\\9 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 11\\2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+1+9 & 8+2+11\\2+3+2 & 0+1+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 21\\7 & 11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι δέν μποροῦμε νά προσθέσουμε πίνακες, ὅταν αὐτοί δέν ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Μετά τόν πρῶτο γύρο ἑνός πρωταθλήματος τρεῖς ὁμάδες ἔφεραν τά ἑξῆς ἀποτελέσματα:

ἡ Α κέρδισε 4 ἀγῶνες, ἔφερε 2 ἰσοπαλίες καί ἔχασε 3 ἀγῶνες
ἡ Β » 6 » » 2 » » » 1 ἀγῶνα
ἡ Γ » 7 » » 1 ἰσοπαλία » » 1 »

Νά πινακοποιήσετε τά ἀποτελέσματα καί μέ πρόσθεση τῶν πινάκων νά βρεῖτε πόσους ἀγῶνες ἔδωσε κάθε ὁμάδα.

20. Τρεῖς ἔμποροι προμηθεύτηκαν τήν περασμένη ἑβδομάδα τά ἑξῆς εἴδη:

ὁ Α μακαρόνια 50 kg*, ρύζι 30 kg*, ζάχαρη 20 kg*,
ὁ Β » 40 » » 25 » » 25 »
ὁ Γ » 60 » » 20 » » 30 »

καί τήν ἑβδομάδα αὐτή,

ὁ Α μακαρόνια 40 kg*, ρύζι 25 kg*, ζάχαρη 24 kg*
ὁ Β » 45 » » 35 » » 40 »
ὁ Γ » 28 » » 42 » » 35 »

α) Νά πινακοποιήσετε τά δεδομένα τῶν δύο ἑβδομάδων.

β) Μέ πρόσθεση πινάκων νά βρεῖτε τίς προμήθειες κάθε ἐμπόρου.

21. Σέ σχολικούς ἀγῶνες τέσσερα σχολεῖα Α, Β, Γ, Δ πέτυχαν τά ἀποτελέσματα:

α) **Ἀγῶνες δρόμου**

τό Α: α′ νίκες 2, β′ νίκες 4, γ′ νίκες 2
τό Β: α′ » 2, β′ » 2, γ′ » 1
τό Γ: α′ » 1, β′ » 1, γ′ » 2
τό Δ: α′ » 2, γ′ » 2

β) **Ρίψεις**

α′ νίκες 1, γ′ νίκες 1
α′ » 1, β′ νίκες 1, γ′ » 2
α′ » 1,
β′ » 2

γ) **Κολύμβηση**

τό Α: α′ νίκες 1, β′ νίκες 1, γ′ νίκες 1, τό Β: α′ νίκες 1, β′ νίκες 1,
τό Γ: β′ νίκες 1, γ′ νίκες 2 καί τό Δ: α′ νίκες 1, β′ νίκες 1.

i) Νά πινακοποιήσετε τά ἀποτελέσματα κατά εἶδος ἀγώνα.

ii) Νά βρεῖτε, κατά εἶδος νίκης, τό ἄθροισμα τῶν νικῶν κάθε σχολείου.

22. Ἄν $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 21 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 13 & 12 & 11 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 19 \\ 16 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

νά βρεῖτε: α) τόν πίνακα $(A+B)+\Gamma$, β) τόν πίνακα $A+(B+\Gamma)$. γ) Μπορεῖτε νά ἐξηγήσετε γιατί οἱ πίνακες εἶναι ἴσοι;

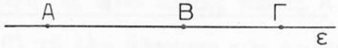
23. Νά ἀντικαταστήσετε τά γράμματα x, y, ω μέ κατάλληλους ἀριθμούς στίς ἑπόμενες ἰσότητες:

α) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ \omega & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 11 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$, β) $\begin{pmatrix} 9 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 25 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Πρόσθεση εὐθύγραμμων τμημάτων

7.6. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε δυό διαδοχικά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΒΓ (Σχ. 11).

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΓ τό λέμε **ἄθροισμα** τῶν ΑΒ καί ΒΓ καί γράφουμε

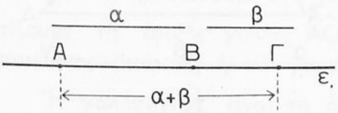


Σχ. 11

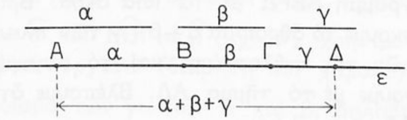
$$\boxed{AB + B\Gamma = A\Gamma}$$

Γιά νά προσθέσουμε δυό ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμα τμήματα α καί β, παίρνουμε πάνω σέ μιά εὐθεία ε (μέ τό διαβήτη) δύο διαδοχικά εὐθύγραμμα τμήματα $AB = \alpha$ καί $B\Gamma = \beta$ (Σχ. 12). Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΓ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν α καί β, δηλαδή

$$\alpha + \beta = AB + B\Gamma = A\Gamma.$$



Σχ. 12



Σχ. 13

Γιά νά προσθέσουμε περισσότερα ἀπό δύο εὐθύγραμμα τμήματα προσθέτουμε τά δύο πρῶτα στό ἄθροισμά τους προσθέτουμε τό τρίτο κ.λ.π.

Ἔτσι γιά νά προσθέσουμε π.χ. τά τμήματα α,β,γ (Σχ. 13), παίρνουμε πάνω σέ μιά εὐθεία ε τά τμήματα $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$ καί $\Gamma\Delta = \gamma$.

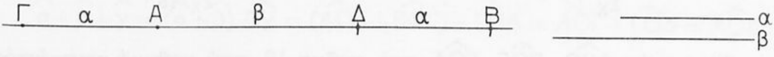
Ἔχουμε τότε

$$\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = (AB + B\Gamma) + \Gamma\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta = A\Delta$$

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως εὐθύγραμμων τμημάτων

7.7. Ὅπως στήν πρόσθεση τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἔτσι καί στήν πρόσθεση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ἰσχύουν, ὅπως θά δοῦμε, ἡ *ἀντιμεταθετική* καί ἡ *προσεταιριστική* ἰδιότητα.

i) Ἀπό τό σχῆμα 14 διαπιστώνουμε μέ τό διαβήτη ὅτι $\Gamma\Delta = AB$.

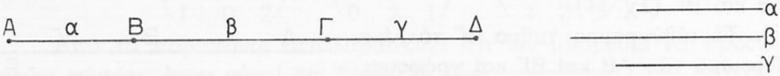


Σχ. 14

Συνεπῶς $\Gamma A + A\Delta = A\Delta + \Delta B$ ἤ

$$\boxed{\alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad (\textit{ἀντιμεταθετική ἰδιότητα})}$$

ii) Ἀπό τό σχῆμα 15 βρίσκουμε ὅτι

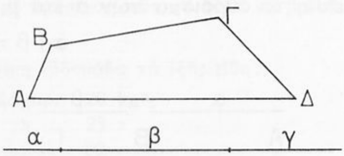


Σχ. 15

$$(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}) + \text{ΓΔ} = \text{ΑΓ} + \text{ΓΔ} = \text{ΑΔ} \quad \text{καί}$$
$$\text{ΑΒ} + (\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}) = \text{ΑΒ}+\text{ΒΔ} = \text{ΑΔ}, \quad \text{δηλαδή} \quad \text{εἶναι}$$
$$(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ})+\text{ΓΔ} = \text{ΑΒ} + (\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}) \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma) \qquad (\textit{προσεταιριστική ἰδιότητα})}$$

iii) Στό σχῆμα 16 ἔχουμε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ καί μιά τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ μέ τά ἴδια ἄκρα. Βρίσκουμε τό ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$ τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης καί τό συγκρίνουμε μέ τό τῆμμα ΑΔ. Βλέπουμε ὅτι $\text{ΑΔ} < \alpha+\beta+\gamma$.



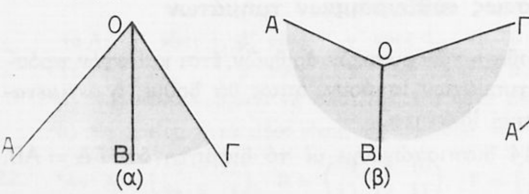
Σχ. 16

Γενικά:

> Τό εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε τεθλασμένη γραμμή πού ἔχει τά ἴδια ἄκρα.

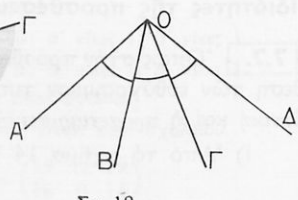
Πρόσθεση γωνιῶν

7.8. Στό σχῆμα 17 (α) (β) οἱ γωνίες $\widehat{\text{ΑΟΒ}}$ καί $\widehat{\text{ΒΟΓ}}$ ἔχουν μιά κοινή πλευρά, τήν ΟΒ, καί δέν ἔχουν ἄλλα κοινά σημεῖα. Τίς γωνίες αὐτές τίς λέμε ἐφεξῆς.



(α) (β)

Σχ. 17



Σχ. 18

Τίς γωνίες $\widehat{\text{ΑΟΒ}}$, $\widehat{\text{ΒΟΓ}}$, $\widehat{\text{ΓΟΔ}}$ στό σχῆμα 18, πού καθεμιά τους, ἐκτός ἀπό τήν πρώτη, καί ἡ προηγούμενή της εἶναι ἐφεξῆς γωνίες, τίς λέμε **διαδοχικές.** Συνεπῶς:

- **Δύο γωνίες ἑνός ἐπιπέδου λέγονται ἐφεξῆς, ὅταν ἔχουν μιά πλευρά κοινή καί δέν ἔχουν ἄλλα κοινά σημεῖα.**
- **Περισσότερες ἀπό δύο γωνίες λέγονται διαδοχικές, ἄν καθεμιά τους, ἐκτός ἀπό τήν πρώτη, καί ἡ προηγούμενή της εἶναι ἐφεξῆς γωνίες.**

Τή γωνία $\widehat{A O \Gamma}$ στό σχῆμα 17 (α) (β) τή λέμε **ἄθροισμα** τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{BO\Gamma}$ καί γράφουμε

$$\boxed{\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}}$$

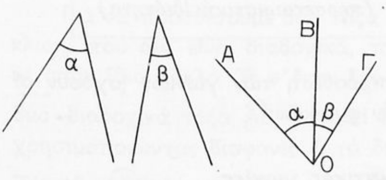
Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν λέγεται ἡ κυρτή (ἤ μή κυρτή) γωνία πού σχηματίζεται ἀπό τίς μή κοινές πλευρές τους καί περιέχει τήν κοινή πλευρά.

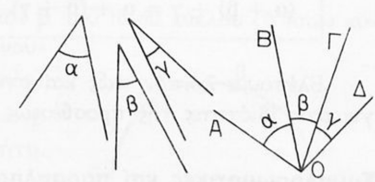
Γιά νά προσθέσουμε δύο γωνίες $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$ πού δέν εἶναι ἐφεξῆς, σχηματίζουμε τίς ἐφεξῆς γωνίες $\widehat{AOB} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\beta}$ (Σχ. 19) χρησιμοποιώντας διαφανές ἤ τά γεωμετρικά ὄργανα (διαβήτη καί χάρακα).

Ἡ γωνία $\widehat{AO\Gamma}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$, δηλαδή

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}.$$



Σχ. 19



Σχ. 20

Γιά νά προσθέσουμε περισσότερες ἀπό δύο γωνίες, προσθέτουμε τίς δύο πρῶτες, στό ἄθροισμά τους προσθέτουμε τήν τρίτη κ.λ.π.

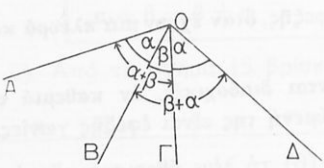
Ἔτσι γιά νά προσθέσουμε π.χ. τίς γωνίες $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ (Σχ. 20), σχηματίζουμε τίς διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB} = \widehat{\alpha}$, $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\beta}$, $\widehat{\Gamma O \Delta} = \widehat{\gamma}$.

Ἔχουμε τότε

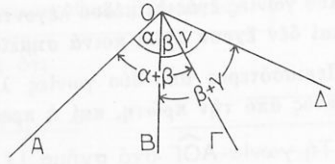
$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}) + \widehat{\gamma} = (\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma}) + \widehat{\Gamma O \Delta} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma O \Delta} = \widehat{AO\Delta}.$$

Ἰδιότητες προσθέσεως γωνιῶν

7.9. i) Ἀπό τό σχῆμα 21 βρίσκουμε (μέ χρησιμοποίηση διαφανοῦς) ὅτι:



Σχ. 21



Σχ. 22

$$\widehat{\text{ΑΟΓ}} = \widehat{\text{ΒΟΔ}}$$

δηλαδή $\quad \widehat{\text{ΑΟΒ}} + \widehat{\text{ΒΟΓ}} = \widehat{\text{ΒΟΓ}} + \widehat{\text{ΓΟΔ}}$ ἤ

$$\boxed{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \widehat{\beta} + \widehat{\alpha} \qquad \textit{(ἀντιμεταθετική ἰδιότητα)}}$$

ii) Ἀπό τό σχῆμα 22 ἔχουμε:

$$(\widehat{\text{ΑΟΒ}} + \widehat{\text{ΒΟΓ}}) + \widehat{\text{ΓΟΔ}} = \widehat{\text{ΑΟΓ}} + \widehat{\text{ΓΟΔ}} = \widehat{\text{ΑΟΔ}},$$

$$\widehat{\text{ΑΟΒ}} + (\widehat{\text{ΒΟΓ}} + \widehat{\text{ΓΟΔ}}) = \widehat{\text{ΑΟΒ}} + \widehat{\text{ΒΟΔ}} = \widehat{\text{ΑΟΔ}}.$$

Ἑπομένως: $\quad (\widehat{\text{ΑΟΒ}} + \widehat{\text{ΒΟΓ}}) + \widehat{\text{ΓΟΔ}} = \widehat{\text{ΑΟΒ}} + (\widehat{\text{ΒΟΓ}} + \widehat{\text{ΓΟΔ}})$ ἤ

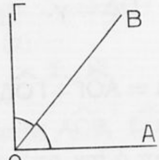
$$\boxed{(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}) + \widehat{\gamma} = \widehat{\alpha} + (\widehat{\beta} + \widehat{\gamma}) \qquad \textit{(προσεταιριστική ἰδιότητα)}}$$

Βλέπουμε λοιπόν πώς καί στήν πρόσθεση τῶν γωνιῶν ἰσχύουν οἱ γνωστές ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν φυσικῶν.

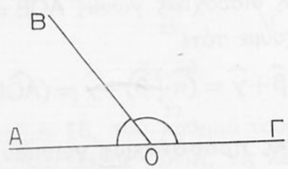
Συμπληρωματικές καί παραπληρωματικές γωνίες

7.10. Στό σχῆμα 23 οἱ γωνίες $\widehat{\text{ΑΟΒ}}$ καί $\widehat{\text{ΒΟΓ}}$, πού ἔχουν ἄθροισμα μιά ὀρθή γωνία, λέγονται **συμπληρωματικές**.

Οἱ γωνίες $\widehat{\text{ΑΟΒ}}$ καί $\widehat{\text{ΒΟΓ}}$ (Σχ. 24), πού ἔχουν ἄθροισμα μιά εὐθεία γωνία, λέγονται **παραπληρωματικές**.



Σχ. 23



Σχ. 24

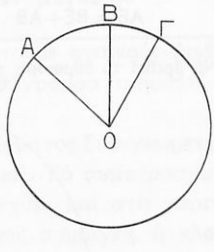
Γενικά:

- **Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές, ἄν ἔχουν ἄθροισμα μιά ὀρθή γωνία.**
- **Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές, ἄν ἔχουν ἄθροισμα μία εὐθεία γωνία.**

Πρόσθεση τόξων

7.11. Στόν κύκλο Ο (Σχ. 25) ἔχουμε τά *διαδοχικά τόξα* $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma}$, δηλαδή τά τόξα πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἐφεξῆς ἐπίκεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{BO\Gamma}$.

Τό τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$ πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AO\Gamma}$ (ἡ ὁποία εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ἐπίκεντρων γωνιῶν $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{BO\Gamma}$) λέγεται **ἄθροισμα** τῶν τόξων $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma}$.



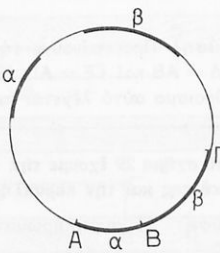
Γράφουμε:

$$\boxed{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{A\Gamma}}$$

Σχ. 25

Γιά νά προσθέσουμε δύο τόξα α καί β τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) πού δέν εἶναι διαδοχικά, παίρνουμε στόν ἴδιο κύκλο (ἤ σ' ἕναν ἴσο κύκλο) δύο διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = \alpha$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma} = \beta$ χρησιμοποιώντας διαφανές ἤ τό διαβήτη. Τό τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τόξων α καί β, δηλαδή

$$\alpha + \beta = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{A\Gamma}.$$



Σχ. 26

Γιά νά προσθέσουμε περισσότερα ἀπό δύο τόξα, προσθέτουμε τά δύο πρῶτα, στό ἄθροισμά τους προσθέτουμε τό τρίτο κ.λ.π.

Πάντως **γιά νά μποροῦμε νά προσθέσουμε τόξα, πρέπει ὅλα νά βρίσκονται στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.**

Ὅπως εἴδαμε, ἡ πρόσθεση τῶν τόξων ἀνάγεται σέ πρόσθεση τῶν ἀντίστοιχων ἐπίκεντρων γωνιῶν. Ἐπομένως στήν πρόσθεση τῶν τόξων θά ἰσχύουν οἱ ἴδιες ἰδιότητες, πού εἴδαμε στήν πρόσθεση τῶν γωνιῶν, δηλαδή:

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	*(ἀντιμεταθετική)*
$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	*(προσεταιριστική)*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

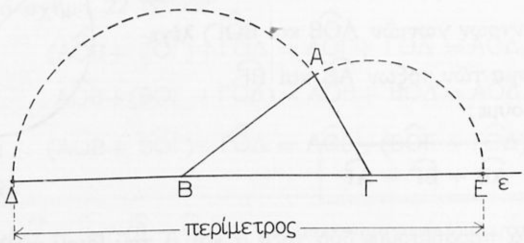
1. Στήν εὐθεία ε (Σχ. 27) παίρνουμε κατά σειρά τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε. Νά γραφεῖ τό εὐθύ-

Σχ. 27

γραμμο τμῆμα ΑΕ μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους σάν ἄθροισμα δύο εὐθύγραμμων τμημάτων.

Λύση: ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ , ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ , ΑΕ = ΑΔ + ΔΕ,
ΑΕ = ΒΕ + ΑΒ , ΑΕ = ΓΕ + ... , ΑΕ = ...

2. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 28).

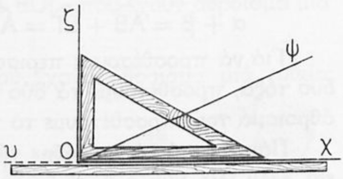


Σχ. 28

Λύση: Προεκτείνουμε τήν πλευρά ΒΓ καί παίρνουμε μέ τό διαβήτη τμήματα ΒΔ = ΑΒ καί ΓΕ = ΑΓ. Ἔτσι ἔχουμε ΔΕ = ΔΒ + ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ. Τό ἄθροισμα αὐτό λέγεται **περίμετρος** τοῦ τριγώνου.

3. Στό σχῆμα 29 ἔχουμε τήν ὀξεία γωνία $x\widehat{O}\psi$. Πῶς θά σχηματίσουμε τή συμπληρωματική της καί τήν παραπληρωματική της;

Λύση: Ἡ συμπληρωματική της εἶναι ἡ $\psi\widehat{O}z$ καί γιά νά τή σχηματίσουμε χρησιμοποιοῦμε τό γνώμονα, ὅπως δείχνει τό σχῆμα. Ἡ παραπληρωματική της εἶναι ἡ $\psi\widehat{O}\upsilon$ καί γιά νά τή σχηματίσουμε προεκτείνουμε τή μία πλευρά τῆς $x\widehat{O}\psi$.



Σχ. 29

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ καί ΕΖ, ὥστε νά εἶναι ΑΒ = ΓΔ καί ΒΓ = ΔΕ. Νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα: i) ΑΒ + ΔΕ, ii) ΒΓ + + ΕΖ, iii) ΑΒ + ΔΖ.

25. Ὁμοίως τά ἀθροίσματα: i) ΑΔ + ΒΓ, ii) ΓΖ + ΔΕ, iii) ΑΔ + ΒΓ + ΕΖ.

26. Νά σχηματίσετε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί νά βρεῖτε τήν περίμετρό του.

27. Ὁμοίως γιά ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ.

28. Νά σχηματίσετε πέντε διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OE}$ καί $\widehat{EOZ}$, ὥστε κάθε μία νά εἶναι μικρότερη ἀπό 70^0 καί νά εἶναι $\widehat{AOB} = \widehat{EOZ}$ καί $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Delta OE}$. Νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα: i) $\widehat{AOB} + \widehat{\Delta OE}$, ii) $\widehat{BO\Gamma} + \widehat{EOZ}$, iii) $\widehat{\Gamma OZ} + \widehat{\Delta OE}$.

29. Ὁμοίως τά ἀθροίσματα: i) $\widehat{AO\Delta} + \widehat{BO\Gamma}$, ii) $\widehat{BO\Delta} + \widehat{EOZ} + \widehat{BO\Gamma}$.

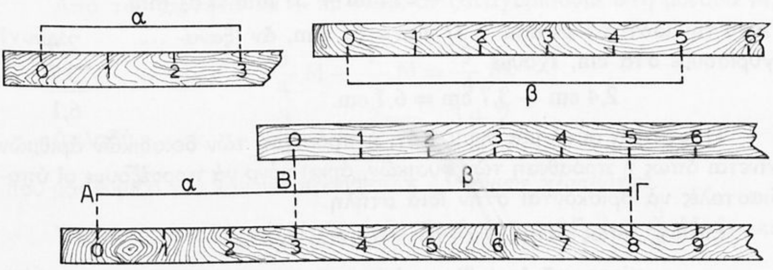
30. Νά γράψετε ἕναν κύκλο καί νά πάρετε τά διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$, ὥστε καθένα νά εἶναι μικρότερο ἀπό 90^0 καί νά εἶναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Delta E}$. Νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα: i) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Delta E}$, ii) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB\Gamma}$, iii) $\overset{\frown}{AB\Delta} + \overset{\frown}{B\Gamma}$.

Τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν

7.12. Στό κεφάλαιο αὐτό μάθαμε νά προσθέτουμε φυσικούς ἀριθμούς ὅπως ἐπίσης καί διάφορα γεωμετρικά μεγέθη (εὐθύγραμμα τμήματα, γωνίες, τόξα).

Τώρα θά δοῦμε ποιό εἶναι τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ὅταν τά μέτρα τους εἶναι φυσικοί ἀριθμοί. Τό συμπέρασμα στό ὁποῖο θά καταλήξουμε θά διαπιστώσουμε ὅτι ἰσχύει καί στίς περιπτώσεις πού τά μέτρα τῶν προσθετέων εἶναι δεκαδικοί, συμμιγεῖς ἤ κλασματικοί ἀριθμοί.

Ἄς πάρουμε λοιπόν δύο ὁμοειδή γεωμετρικά μεγέθη, π.χ. τά εὐθύγραμμα τμήματα α καί β (Σχ. 30) μέ μέτρα 3 cm καί 5 cm ἀντιστοίχως.



Σχ. 30

Τό ἄθροισμά τους εἶναι τό τμῆμα ΑΓ (Σχ. 30) καί, ὅπως βλέπουμε, ἔχει μέτρο 8 cm. Παρατηροῦμε τώρα πώς τό μέτρο τοῦ ΑΓ βρίσκεται, ἄν προσθέσουμε τό μέτρο τοῦ α (3 cm) καί τό μέτρο τοῦ β (5 cm), δηλαδή

$$8 \text{ cm} = 3 \text{ cm} + 5 \text{ cm}.$$

Ὥστε: **μέτρο τοῦ (α + β) = μέτρο τοῦ α + μέτρο τοῦ β.** (1)

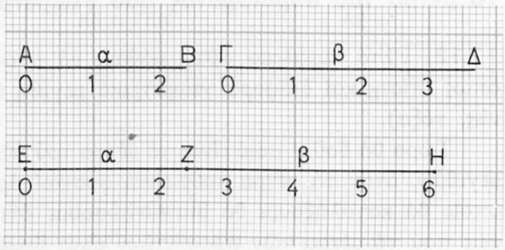
Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, ἄν ἀντί γιά εὐθύγραμμα τμήματα πάρουμε γωνίες ἤ τόξα, ἀρκεῖ **νά ἔχουν μετρηθεῖ μέ τήν ἴδια μονάδα**.

Γενικά λοιπόν, ὅταν τά μέτρα γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, ἔχουμε:

Τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τους.

Τό παραπάνω συμπέρασμα θά διαπιστώσουμε τώρα ὅτι ἰσχύει καί στίς περιπτώσεις πού τά μέτρα τῶν μεγεθῶν εἶναι δεκαδικοί, συμμιγεῖς ἤ κλασματικοί ἀριθμοί.

i) Ἄς πάρουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα μέ μέτρα δεκαδικούς ἀριθμούς, π.χ. τά $\alpha = 2{,}4$ cm καί $\beta = 3{,}7$ cm (Σχ. 31). Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τό 1 mm, τότε τό μέτρο τοῦ α εἶναι 24 mm καί τό μέτρο τοῦ β εἶναι 37 mm, δηλαδή φυσικοί ἀριθμοί. Ἑπομένως σύμφωνα μέ τό παραπάνω συμπέρασμα θά ἔχουμε:



Σχ. 31

$$\text{μέτρο τοῦ } (\alpha+\beta) = \text{μέτρο τοῦ } \alpha + \text{μέτρο τοῦ } \beta$$
$$= 24 \text{ mm} + 37 \text{ mm} = 61 \text{ mm}.$$

Ἀπό τήν ἰσότητα $24 \text{ mm} + 37 \text{ mm} = 61 \text{ mm}$, ἄν ξαναγυρίσουμε στά cm, ἔχουμε

$$2{,}4 \text{ cm} + 3{,}7 \text{ cm} = 6{,}1 \text{ cm}.$$

$$\begin{array}{r} 2{,}4 \\ +\ 3{,}7 \\ \hline 6{,}1 \end{array}$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή μᾶς θυμίζει ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὅπως ἡ πρόσθεση τῶν φυσικῶν, ἀρκεῖ μόνο νά προσέξουμε οἱ ὑποδιαστολές νά βρίσκονται στήν ἴδια στήλη.

Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε, $(\alpha+\beta) = 6{,}1$ cm, ἔχουμε:

μέτρο τοῦ (α + β) = μέτρο τοῦ α + μέτρο τοῦ β.

ii) Παίρνουμε τώρα δύο εὐθύγραμμα τμήματα μέ μέτρα συμμιγεῖς, π.χ. τό α μέ μέτρο 6 dm 8 cm καί τό β μέ μέτρο 2 dm 5 cm. Ἄν πάρουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τό 1 cm, τότε τό μέτρο τοῦ α θά εἶναι 68 cm καί τό μέτρο τοῦ β 25 cm, δηλαδή φυσικοί ἀριθμοί. Ἔτσι θά ἔχουμε:
Μέτρο τοῦ $(\alpha+\beta)$ = μέτρο τοῦ α + μέτρο τοῦ β $= 68 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 93 \text{ cm}$.

Ἡ ἰσότητα $68 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 93 \text{ cm}$ μπορεῖ νά γραφεῖ

$$(6 \text{ dm } 8 \text{ cm}) + (2 \text{ dm } 5 \text{ cm}) = 9 \text{ dm } 3 \text{ cm},$$

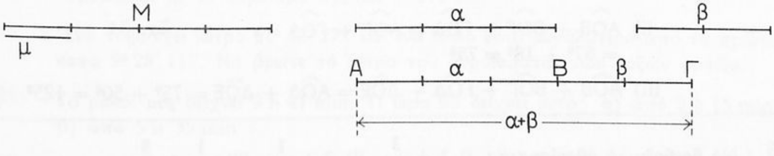
πού μᾶς θυμίζει τήν πρόσθεση τῶν συμμιγῶν, ὅπως τή μάθαμε στό Δημοτικό Σχολεῖο. Ἡ παραπλεύρως διάταξη μᾶς εὐκολύνει στήν ἐκτέλεση τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{rrr} & 6\ \mathrm{dm} & 8\ \mathrm{cm} \\ + & 2\ \mathrm{dm} & 5\ \mathrm{cm} \\ \hline & 8\ \mathrm{dm} & 13\ \mathrm{cm} \\ \text{ἤ} & 9\ \mathrm{dm} & 3\ \mathrm{cm} \end{array}$$

Ἐπειδή εἶναι $(\alpha + \beta) = 9\ \mathrm{dm}\ 3\ \mathrm{cm}$, βλέπουμε πώς ἰσχύει πάλι ἡ γνωστή σχέση:

μέτρο τοῦ $(\alpha + \beta)$ = μέτρο τοῦ α + μέτρο τοῦ β.

iii) Ἄς πάρουμε τέλος δυό εὐθύγραμμα τμήματα μέ μέτρα κλασματικούς ἀριθμούς, π.χ. τά $\alpha = \frac{3}{4}$ Μ καί $\beta = \frac{2}{4}$ Μ, ὅπου Μ εἶναι ἡ μονάδα



Σχ. 32

μετρήσεως (Σχ. 32). Χωρίζουμε τή μονάδα μετρήσεως Μ σέ 4 ἴσα μέρη καί παίρνουμε γιά μονάδα μετρήσεως τό ἕνα ἀπό αὐτά, τό ὁποῖο ὀνομάζουμε «*τέταρτο τοῦ Μ*» ἤ μ. Τότε θά ἔχουμε:

μέτρο τοῦ $\alpha = 3\mu$ καί μέτρο τοῦ $\beta = 2\mu$

καί σύμφωνα μέ τή σχέση (1) θά ἔχουμε:

μέτρο τοῦ $(\alpha+\beta)$ = μέτρο τοῦ α + μέτρο τοῦ $\beta = 3\mu + 2\mu = 5\mu$.

Ἀπό τήν ἰσότητα $3\mu + 2\mu = 5\mu$, ἄν ξαναγυρίσουμε στή μονάδα Μ, ἔχουμε

$$\frac{3}{4}\,\mathrm{M} + \frac{2}{4}\,\mathrm{M} = \frac{5}{4}\,\mathrm{M}.$$

Δηλαδή $$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4},$$

πού μᾶς θυμίζει τόν κανόνα προσθέσεως *ὁμώνυμων κλασμάτων*.

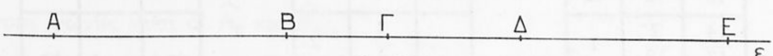
Ἐξάλλου, ἐπειδή τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος ΑΓ εἶναι $\frac{5}{4}$ Μ, ἔχουμε πάλι:

μέτρο τοῦ $(\alpha+\beta)$ = μέτρο τοῦ α + μέτρο τοῦ β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε στή σειρά τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε, ὥστε ΑΒ = 3,5 cm, ΒΓ = = 1,5 cm, ΓΔ = 2 cm, ΔΕ = 3,1 cm. Νά βρεθοῦν τά μέτρα τῶν τμημάτων ΑΓ, ΑΕ καί ΒΕ.**

Λύση:



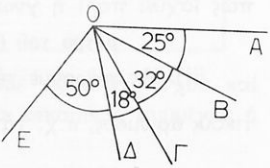
Σχ. 33

Ἔχουμε: μέτρο ΑΓ = μέτρο ΑΒ + μέτρο ΒΓ = 3,5 cm + 1,5 cm = 5 cm,

μέτρο ΑΕ = μέτρο ΑΓ + μέτρο ΓΔ + μέτρο ΔΕ = 5 cm + 2 cm + 3,1 cm = 10,1 cm

καί μέτρο ΒΕ = μέτρο ΒΓ + μέτρο ΓΔ + μέτρο ΔΕ = 1,5 cm + 2 cm + 3,1 cm = = 6,6 cm.

2. **Στό σχῆμα 34 ἔχουμε τέσσερις διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}=25^0$, $\widehat{BO\Gamma}=32^0$, $\widehat{\Gamma O\Delta}=18^0$, $\widehat{\Delta OE}=50^0$. Νά βρεθοῦν τά μέτρα τοῦ ἀθροίσματος: i) τῶν δύο πρώτων, ii) τῶν τριῶν πρώτων καί iii) τῶν τεσσάρων γωνιῶν.**



Σχ. 34

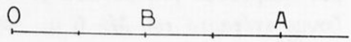
Λύση: i) $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 25^0 + 32^0 = 57^0$

ii) $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} = 57^0 + 18^0 = 75^0$

iii) $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} = \widehat{AO\Delta} + \widehat{\Delta OE} = 75^0 + 50^0 = 125^0$.

3. **Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα : i) $1 + \frac{3}{4}$, ii) $2 + \frac{1}{4}$, iii) $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}$.**

Λύση: Παίρνουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τό ΟΑ = μ καί τό χωρίζουμε σέ 4 ἴσα μέρη (Σχ. 35). Ἔτσι ἔχουμε: μέτρο ΟΑ = 1 μ, ἀλλά καί μέτρο ΟΑ = $\frac{4}{4}$ μ. Συνεπῶς $1 = \frac{4}{4}$. Ὁμοίως ἔχουμε $1 = \frac{2}{2}$, $1 = \frac{8}{8}$ κ.λ.π.



Σχ. 35

Ἐπίσης εἶναι μέτρο ΟΒ = $\frac{1}{2}$ μ, ἀλλά καί μέτρο ΟΒ = $\frac{2}{4}$ μ. Συνεπῶς $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Ἑπομένως ἔχουμε:

i) $1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, ii) $2 + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$,

iii) $\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} + \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$.

4. **Νά συμπληρωθοῦν τά κενά στίς ἑπόμενες προσθέσεις:**

$$\begin{array}{r} 3\;2\;,\;\square\;6 \\ \square\square\;9\;,\;1\;5 \\ \hline 1\;6\;\square\;,\;7\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 6\ \text{h} & \square\,5\ \text{min} \\ 1\,\square\ \text{h} & 4\;8\ \text{min} \\ \hline \square\,9\ \text{h} & 6\,\square\ \text{min} \end{array} \ \text{ἤ} \ \ldots\text{h}\ \ \ldots\text{min}$$

5. **Νά συμπληρώσετε τά ἑπόμενα μαγικά τετράγωνα, ὅπως ἔγινε μέ τό πρῶτο:**

$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{8}{12}$
$\frac{9}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{13}{12}$
$\frac{14}{12}$	$\frac{7}{12}$	1

$\frac{3}{2}$		
	$\frac{7}{4}$	
	$\frac{3}{4}$	2

		2,5
2,6	2,8	3

31. Νά πάρετε ἕνα κουτί ἀπό σπίρτα: α) Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα δύο τμημάτων ἴσων μέ τή μεγαλύτερη καί τή μικρότερη ἀκμή. β) Νά βρεῖτε τά μήκη τῶν τμημάτων αὐτῶν σέ cm καί mm καί νά τά προσθέσετε.

32. Ἔχουμε τά εὐθύγραμμα τμήματα $\alpha = \frac{1}{2}$ m καί $\beta = \frac{3}{4}$ m. Νά βρεῖτε τό μῆκος τοῦ $\alpha+\beta$, i) σέ m, ii) σέ cm.

33. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα 7,6 m + 21 cm + 15 mm σέ cm.

34. Ὁμοίως σέ m τό ἄθροισμα 245 cm + 175 cm.

35. Ἕνα τόξο ἔχει μέτρο $61^0\,42'\,27''$ καί ἕνα ἄλλο εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό πρῶτο κατά $9^0\,28'\,11''$. Νά βρεῖτε τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων αὐτῶν.

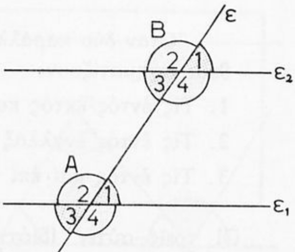
36. Τό ρολόϊ μας δείχνει 9 h 47 min. Τί ὥρα θά δείχνει μετά: α) ἀπό 2 h 15 min, β) ἀπό 5 h 35 min :

37. Τό ρολόϊ μας δείχνει 7 h 25 min. Τί ὥρα θά δείχνει μετά: α) ἀπό $\frac{3}{4}$h, β) ἀπό $1\frac{1}{2}$h;

Γωνίες παράλληλων εὐθειῶν πού τέμνονται ἀπό ἄλλη εὐθεία

7.13. Ὅταν δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται ἀπό μιά ἄλλη εὐθεία ε στά σημεῖα Α καί Β, σχηματίζονται ὀκτώ γωνίες: τέσσερις μέ κορυφή τό Α, πού τίς σημειώνουμε μέ $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3$, $\widehat{A}_4$ καί τέσσερις μέ κορυφή τό Β, πού τίς σημειώνουμε μέ $\widehat{B}_1$, $\widehat{B}_2$, $\widehat{B}_3$, $\widehat{B}_4$ (Σχ. 36).

Μέ τίς γωνίες αὐτές σχηματίζουμε ζεύγη παίρνοντας μία γωνία μέ κορυφή τό Α καί μία γωνία μέ κορυφή τό Β. Ὁρισμένα ἀπό τά ζεύγη αὐτά, ἀνάλογα μέ τή θέση πού ἔχουν ὡς πρός τίς δύο παράλληλες καί τήν εὐθεία πού τίς τέμνει, ἔχουν ἰδιαίτερα ὀνόματα.



Σχ. 36

Ἔτσι οἱ γωνίες $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_1$ λέγονται **ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη**. (Ἄλλες τέτοιες γωνίες εἶναι οἱ $\widehat{A}_2$ καί $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_4$ καί $\widehat{B}_4$, $\widehat{A}_3$ καί $\widehat{B}_3$).

Οἱ γωνίες $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_3$ λέγονται **ἐντός ἐναλλάξ** (τέτοιες εἶναι καί οἱ γωνίες $\widehat{A}_2$ καί $\widehat{B}_4$).

Οἱ γωνίες $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_4$ λέγονται **ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη** (ἄλλες τέτοιες γωνίες εἶναι οἱ $\widehat{A}_2$ καί $\widehat{B}_3$).

Ἄν ἀποτυπώσουμε σέ διαφανές χαρτί τή γωνία $\widehat{A}_1$ καί τήν τοποθετήσουμε (καταλλήλως) πάνω στή γωνία $\widehat{B}_1$, θά δοῦμε ὅτι οἱ δύο αὐτές γωνίες ἐφαρμόζουν. Ἑπομένως εἶναι ἴσες, δηλαδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι καί $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$. Ἔχουμε τώρα:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$ ὡς κατακορυφήν,

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_3$ ὡς κατακορυφήν καί

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$, ὅπως εἴδαμε παραπάνω.

Ἑπομένως εἶναι $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_3$.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι $\widehat{A}_4 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 = \widehat{B}_4$.

Οἱ γωνίες $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{A}_2$ ἔχουν ἄθροισμα μιά εὐθεία γωνία, δηλαδή 2 ὀρθές.

Ἐπειδή εἶναι $\widehat{B}_4 = \widehat{A}_2$, καί οἱ γωνίες $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_4$ θά ἔχουν ἄθροισμα μία εὐθεία γωνία, δηλαδή 2 ὀρθές.

Ἀπό τά παραπάνω λοιπόν συμπεραίνουμε ὅτι:

Ὅταν δύο παράλληλες εὐθεῖες τέμνονται ἀπό μιά ἄλλη πλαγίως:

- **ὅλες οἱ ὀξεῖες γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους καί ὅλες οἱ ἀμβλεῖες γωνίες εἶναι ἐπίσης ἴσες μεταξύ τους,**
- **μιά ὀξεία καί μιά ἀμβλεία γωνία ἔχουν ἄθροισμα μιά εὐθεία γωνία.**

Πιό ἀναλυτικά ἔχουμε:

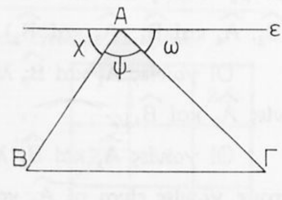
> Ὅταν δύο παράλληλες εὐθεῖες τέμνονται ἀπό μιά ἄλλη εὐθεία, σχηματίζουν:
>
> 1. Τίς ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες ἴσες.
> 2. Τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες ἴσες.
> 3. Τίς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Οἱ τρεῖς αὐτές ἰδιότητες εἶναι *χαρακτηριστικές* τῶν παράλληλων εὐθειῶν, δηλαδή ἄν ἔχουμε δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 καί ἰσχύει μιά ἀπό τίς ἰδιότητες (1), (2), (3), τότε οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι παράλληλες. Αὐτό εἶναι πολύ σημαντικό, γιατί, συγκρίνοντας μόνο δύο γωνίες, μποροῦμε νά καταλάβουμε ἄν δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλες ἤ ὄχι.

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου

7.14. Στό σχῆμα 37 ἡ εὐθεία ε εἶναι παράλληλη πρός τήν πλευρά ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Παρατηροῦμε ὅτι $\widehat{x} = \widehat{B}$ καί $\widehat{\omega} = \widehat{\Gamma}$, γιατί εἶναι ἐντός ἐναλλάξ. Βλέπουμε ἀκόμη ὅτι $\widehat{\psi} = \widehat{A}$.



Σχ. 37

Ἐπειδή οἱ γωνίες $\widehat{x}$, $\widehat{\psi}$, $\widehat{\omega}$ ἔχουν ἄθροισμα μιά εὐθεία γωνία, δηλαδή 2 ὀρθές, ἔχουμε:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\widehat{\psi}+\widehat{x}+\widehat{\omega}=2 \text{ ὀρθές}.$$

Ὥστε:

> Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου εἶναι δύο ὀρθές.

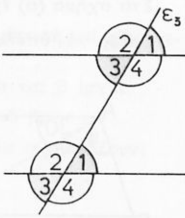
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό διπλανό σχῆμα εἶναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες τοῦ σχήματος, ἄν $\widehat{A_3}=50^0$.**

Λύση: Ξέρουμε ὅτι ὅλες οἱ ὀξεῖες γωνίες τοῦ σχήματος εἶναι ἴσες μεταξύ τους, ὅπως ἐπίσης καί ὅλες οἱ ἀμβλεῖες γωνίες. Ἔτσι ἔχουμε $\widehat{B_1}=\widehat{B_3}=\widehat{A_1}=\widehat{A_3}=50^0$.

Ὅπως βλέπουμε στό σχῆμα 38, οἱ γωνίες $\widehat{A_1}$ καί $\widehat{A_4}$ κάνουν μιά εὐθεία γωνία, δηλαδή 180^0. Ἐπειδή εἶναι $\widehat{A_1}=50^0$, θά εἶναι $\widehat{A_4}=180^0-50^0=130^0$. Συνεπῶς

$$\widehat{B_2}=\widehat{B_4}=\widehat{A_2}=\widehat{A_4}=130^0.$$

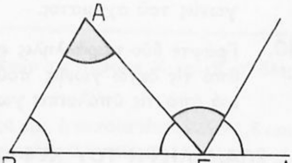


Σχ. 38

2. **Σ' ἕνα τρίγωνο ἡ γωνία πού σχηματίζεται ἀπό μιά πλευρά καί τήν προέκταση μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς λέγεται «ἐξωτερική γωνία» τοῦ τριγώνου.**

Νά συγκρίνετε τήν ἐξωτερική γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μέ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$ τοῦ τριγώνου.

Λύση: Ἀποτυπώνουμε τίς γωνίες $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$ σέ διαφανές καί τίς τοποθετοῦμε πάνω στή γωνία ΑΓΔ, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 39. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι $\widehat{A\Gamma\Delta}=\widehat{A}+\widehat{B}$. Αὐτό μπορούσαμε νά τό συμπεράνουμε καί ὡς ἑξῆς:



Σχ. 39

$$\widehat{A\Gamma\Delta}+\widehat{\Gamma}=2 \text{ ὀρθές καί } \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2 \text{ ὀρθές}.$$

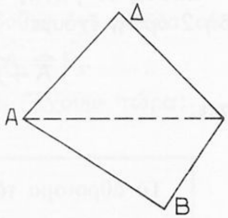
Ἑπομένως $\widehat{A\Gamma\Delta}+\widehat{\Gamma}=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}$, ἄρα $\widehat{A\Gamma\Delta}=\widehat{A}+\widehat{B}$ (ἰδιότητα διαγραφῆς).

Δηλαδή, **κάθε ἐξωτερική γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου.**

3. **Στό σχῆμα 40 ἔχουμε ἕνα κυρτό τετράπλευρο. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του.**

Λύση: Φέρνουμε μιά διαγώνιό του καί ἔτσι χωρίζεται σέ δυό τρίγωνα. Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων, δηλαδή 2 ὀρθές + 2 ὀρθές = 4 ὀρθές. Ἔτσι ἔχουμε

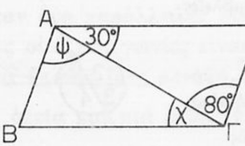
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 4 \text{ ὀρθές.}$$



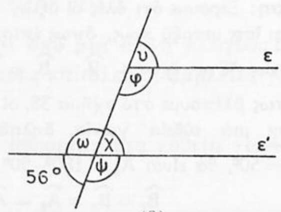
Σχ. 40

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

38. Στό σχῆμα (α) ἔχουμε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Μέ τά δεδομένα τοῦ σχήματος νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες $\widehat{x}$, $\widehat{\psi}$, $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Delta}$.



(α)



(β)

39. Στό σχῆμα (β) οἱ εὐθεῖες ε καί ε΄ εἶναι παράλληλες. Νά ὑπολογίσετε τίς ἄλλες γωνίες τοῦ σχήματος.

40. Γράψτε δύο παράλληλες εὐθεῖες καί μία τρίτη πού νά τίς τέμνει ἔτσι, ὥστε μία ἀπό τίς ὀκτώ γωνίες πού σχηματίζονται νά εἶναι 42°. Νά ὑπολογίσετε κάθε μιά ἀπό τίς ὑπόλοιπες γωνίες.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. **Ἕνωση** δύο συνόλων Α καί Β λέγεται τό σύνολο $A \cup B$ πού τά στοιχεῖα του ἀνήκουν στό σύνολο Α εἴτε στό Β ἤ καί στά δύο.
Στήν ἕνωση τῶν συνόλων ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

- **Ἀντιμεταθετική** $A \cup B = B \cup A$
- **Προσεταιριστική** $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
- Τό $\varnothing$ **εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο** $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A.$

2. **Ἄθροισμα δύο φυσικῶν ἀριθμῶν** α καί β λέγεται ὁ πληθάριθμος τῆς ἑνώσεως δύο ξένων συνόλων μέ πληθάριθμους α καί β.
Στήν πρόσθεση φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

- **Ἀντιμεταθετική** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- **Προσεταιριστική** $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
- **Τό 0 εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο** $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
- **Τῆς διαγραφῆς** ἄν $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, τότε $\alpha=\beta$

3. Ὅταν τοποθετήσουμε ἀριθμούς σέ γραμμές καί στῆλες μέ ἴδιο ἀριθμό στοιχείων γιά κάθε γραμμή ἤ στήλη, ἔχουμε ἕναν **πίνακα**.

Ἄθροισμα δύο πινάκων πού ἔχουν τίς ἴδιες *διαστάσεις* εἶναι ἕνας πίνακας μέ τίς ἴδιες διαστάσεις πού ἔχει γιά στοιχεῖα τά ἀθροίσματα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τῶν δύο πινάκων:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta & \theta & \iota \\ \kappa & \lambda & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\eta & \beta+\theta & \gamma+\iota \\ \delta+\kappa & \varepsilon+\lambda & \zeta+\mu \end{pmatrix}.$$

4. **Ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν εὐθύγραμμων τμημάτων** α καί β πού βρίσκονται σέ μιά εὐθεία εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού ὁρίζεται ἀπό τά μή κοινά ἄκρα τῶν α καί β. Γιά νά προσθέσουμε δύο ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμα τμήματα, τά κάνουμε διαδοχικά στήν ἴδια εὐθεία. Ἀνάλογα βρίσκεται τό **ἄθροισμα γωνιῶν καί τόξων.**

Στήν πρόσθεση γεωμετρικῶν μεγεθῶν ἰσχύουν ἡ **ἀντιμεταθετική** καί ἡ **προσεταιριστική** ἰδιότητα.

Γιά τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν α καί β ἰσχύει

μέτρο τοῦ (α + β) = μέτρο τοῦ α + μέτρο τοῦ β.

5. Δύο παράλληλες εὐθεῖες πού τέμνονται ἀπό τρίτη εὐθεία σχηματίζουν:

- Τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες ἴσες.
- Τίς ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες ἴσες.
- Τίς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Οἱ ἰδιότητες αὐτές εἶναι *χαρακτηριστικές* τῶν παράλληλων εὐθειῶν, δηλαδή, ἄν ἰσχύει μιά ἀπ' αὐτές, οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

41. Ἄν $X \cup \Psi = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $X \cap \Psi = \{\alpha\}$, νά βρεθοῦν τά σύνολα Χ καί Ψ σ' ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις.

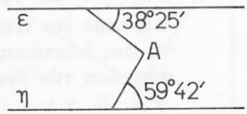
42. Ἡ μικρότερη πλευρά ἑνός τριγώνου ἔχει μῆκος 3,4 cm, ἡ μεσαία εἶναι κατά 1,8 cm μεγαλύτερη ἀπό τήν πρώτη καί ἡ τρίτη εἶναι κατά 0,8 cm μεγαλύτερη ἀπό τή μεσαία. Νά κατασκευαστεῖ τό τρίγωνο καί νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς περιμέτρου του.

43. Ἄν $\alpha+\beta=78$, νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $37+(\alpha+76)+\beta$.

44. Ἡ βάση ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχει μῆκος 7 dm καί κάθε σκέλος του εἶναι κατά $\frac{9}{4}$ dm μεγαλύτερο ἀπό τή βάση του. Νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς περιμέτρου του σέ cm.

45. Ἡ πρώτη ἀπό τρεῖς διαδοχικές γωνίες ἔχει μέτρο $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς, ἡ δεύτερη ἔχει μέτρο κατά $\frac{1}{10}$ ὀρθῆς μεγαλύτερο ἀπό τήν πρώτη καί ἡ τρίτη ἔχει μέτρο ὅσο οἱ δύο ἄλλες μαζί. Νά βρεθεῖ τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματός τους.

46. Μία τάξη ἔχει 38 μαθητές. Ὅλοι οἱ μαθητές παίζουν μπάλα, εἴτε κολυμποῦν. Ξέρουμε ὅτι 29 μαθητές παίζουν μπάλα καί 25 μαθητές κολυμποῦν. Νά βρεῖτε: α) πόσοι μαθητές ἀσχολοῦνται καί μέ τά δύο ἀθλήματα συγχρόνως, β) πόσοι παίζουν μόνο μπάλα, γ) πόσοι μόνο κολυμποῦν.



47. Στό ἀπέναντι σχῆμα οἱ εὐθεῖες ε καί η εἶναι παράλληλες. Μέ τά δεδομένα τοῦ σχήματος νά ὑπολογιστεῖ ἡ κυρτή γωνία $\widehat{A}$.

48. Ἕνας πατέρας διαθέτει γιά τό παιδί του 255 δρχ. πού τίς δίνει ὡς ἑξῆς: Τήν α′ ἡμέρα 1 δρχ., τή β′ ἡμέρα 2 δραχ., τήν γ′ 4 δρχ., τήν δ′ 8 δρχ. κ.ο.κ. (διπλασιάζοντας κάθε ἡμέρα τό ποσό τῆς προηγούμενης), ὥσπου νά τελειώσουν τά χρήματα. Ἄν τά παιδιά ἦταν δύο καί τούς ἔδινε τά χρήματα μέ τόν ἴδιο τρόπο, νά βρεῖτε (χωρίς πράξεις) σέ πόσες μέρες θά τέλειωναν τά χρήματα.

49. Ἕνα κατάστημα ἠλεκτρικῶν εἰδῶν ἀπασχολεῖ 3 ὑπαλλήλους. Ὁ α′ πούλησε σ᾽ἕνα μήνα 5 τηλεοράσεις καί 7 ραδιόφωνα καί τόν ἑπόμενο μήνα 3 τηλεοράσεις, 5 ραδιόφωνα καί 2 πλυντήρια. Ὁ β′ ὑπάλληλος πούλησε τόν πρῶτο μήνα 4 τηλεοράσεις καί 1 πλυντήριο καί τόν ἑπόμενο μήνα 4 ραδιόφωνα. Ὁ γ′ ὑπάλληλος πούλησε τόν πρῶτο μήνα 2 τηλεοράσεις, 9 ραδιόφωνα καί 2 πλυντήρια καί τόν ἑπόμενο μήνα 6 τηλεοράσεις καί 5 ραδιόφωνα. Νά πινακοποιήσετε τά δεδομένα καί νά βρεῖτε πόσα ἀπό κάθε εἶδος πούλησε τό κατάστημα αὐτό στούς δύο μῆνες.

50. Νά σχηματίσετε ἕνα τετράγωνο καί νά βρεῖτε: α) τό μῆκος τῆς περιμέτρου του μέ μονάδα μετρήσεως τήν πλευρά του, β) τό μῆκος τῆς περιμέτρου του μέ μονάδα μετρήσεως τό ἄθροισμα δύο πλευρῶν του καί γ) τό μῆκος μιᾶς πλευρᾶς του μέ μονάδα μετρήσεως τήν περίμετρό του.

51. Νά συμπληρώσετε τό διπλανό μαγικό τετράγωνο.

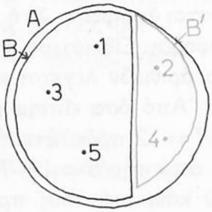
25		21		17
		39	22	30
31	19	27		
	32		28	
37	20	33		29

52. Ἡ πρώτη πλευρά ἑνός τετραπλεύρου εἶναι ὅσο ἡ δεύτερη καί ἡ τρίτη μαζί, ἐνῶ ἡ δεύτερη εἶναι ὅσο ἡ τρίτη καί ἡ τέταρτη μαζί. Ἡ τρίτη πλευρά τοῦ τετραπλεύρου ἔχει μῆκος 4,6 cm καί ἡ τέταρτη πλευρά ἔχει μῆκος μεγαλύτερο ἀπό τήν τρίτη κατά 1,5 cm. Νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ τετραπλεύρου.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Συμπληρωματικό ἑνός συνόλου

8.1. Ἄς πάρουμε ἕνα σύνολο, π.χ. τό $A = \{1,2,3,4,5\}$, καί ἕνα ὁποιοδήποτε ὑποσύνολό του, π.χ. τό $B = \{1,3,5\}$. Τότε δημιουργεῖται ἀμέσως ἕνα νέο σύνολο πού *ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ A πού δέν ἀνήκουν στό B*. Τό νέο αὐτό σύνολο λέγεται **συμπληρωματικό** (ἤ **συμπλήρωμα**) τοῦ B ὡς πρός τό A καί συμβολίζεται μέ B′ (Σχ. 1). Ἔτσι τό συμπληρωματικό τοῦ παραπάνω συνόλου B, ὅπως βλέπουμε καί στό σχῆμα 1, εἶναι τό σύνολο $B' = \{2,4\}$.



Σχ. 1

Ἀπό τόν τρόπο τῆς κατασκευῆς τοῦ B′ συμπεραίνουμε ὅτι αὐτό εἶναι ξένο πρός τό B καί ὅτι ἡ ἕνωσή του μέ τό B εἶναι τό σύνολο A.

$$\boxed{B \cap B' = \varnothing, \quad B \cup B' = A}$$

Ἄς πάρουμε ἀκόμη τό σύνολο Π τῶν παιδιῶν πού φοιτοῦν σ' ἕνα Δημοτικό Σχολεῖο κι ἄς παραστήσουμε μέ A τό σύνολο τῶν ἀγοριῶν πού φοιτοῦν στό σχολεῖο αὐτό. Τό A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Π καί τό συμπληρωματικό τοῦ A ὡς πρός τό Π θά εἶναι τό σύνολο K τῶν κοριτσιῶν πού φοιτοῦν στό ἴδιο σχολεῖο.

Ἀφαίρεση φυσικῶν ἀριθμῶν

8.2. Στό δεύτερο παράδειγμα τῆς προηγούμενης παραγράφου ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου Π εἶναι ὁ 128 καί τοῦ A ὁ 75. Ἄν παραστήσουμε μέ x τόν πληθάριθμο τοῦ K, τότε, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε γιά τό ἄθροισμα δύο φυσικῶν ἀριθμῶν, θά ἔχουμε

$$x + 75 = 128.$$

Ὁ ἀριθμός x, πού ὅταν προστεθεῖ μέ τόν 75 μᾶς δίνει ἄθροισμα τόν 128, λέγεται **διαφορά τοῦ 75 ἀπό τόν 128** καί συμβολίζεται μέ **128 — 75.**

Ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ὁ 53, δηλαδή

$$128 - 75 = 53, \text{ γιατί } 53 + 75 = 128.$$

Γενικά: **Ἄν α καί β εἶναι δύο φυσικοί ἀριθμοί καί $α \geq β$, τότε διαφορά τοῦ β ἀπό τόν α λέγεται ὁ φυσικός ἀριθμός γ ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθεῖ μέ τόν β, μᾶς δίνει ἄθροισμα τόν α.**

Ἡ διαφορά τοῦ β ἀπό τόν α συμβολίζεται α–β.

Ἔτσι θά γράφουμε

$$\boxed{γ = α - β, \quad \text{ὅταν} \quad γ + β = α} \qquad (1)$$

π.χ. 12–7 = 5, γιατί 5+7 = 12 καί 15–9 = 6, γιατί 6+9 = 15.

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τή διαφορά δύο φυσικῶν ἀριθμῶν λέγεται **ἀφαίρεση**. Στή διαφορά α–β οἱ ἀριθμοί **α** καί **β** λέγονται **ὅροι** τῆς διαφορᾶς. Εἰδικότερα ὁ **α** λέγεται **μειωτέος** καί ὁ **β** **ἀφαιρετέος**. Ἡ διαφορά δύο ἀριθμῶν λέγεται καί **ὑπόλοιπο** τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἀπό ὅσα εἴπαμε μέχρι τώρα καταλαβαίνουμε ὅτι ἀπό τήν ἰσότητα 5+7 = 12 προκύπτει ἡ ἰσότητα 5 = 12–7 (καθώς καί ἡ 7 = 12–5), ἀλλά καί ἀπό τήν 5 = 12–7 προκύπτει ἡ 5+7 = 12. Δύο ἰσότητες σάν αὐτές, πού κάθε μιά τους προκύπτει ἀπό τήν ἄλλη, λέγονται **ἰσοδύναμες** καί συνδέονται μεταξύ τους μέ τό σύμβολο ⇔, πού διαβάζεται «**ἰσοδυναμεῖ μέ**» ἤ «**ὅταν καί μόνο ὅταν**». Ἔτσι γράφουμε

$$5 + 7 = 12 \Leftrightarrow 5 = 12 - 7$$

καί γενικά $$\boxed{γ + β = α \quad \Leftrightarrow γ = α - β}$$

Ἡ πρόσθεση καί ἡ ἀφαίρεση εἶναι πράξεις ἀντίστροφες

8.3. Ἄς πάρουμε τώρα ἕναν ἀριθμό, π.χ. τόν 8, κι ἄς δοῦμε τί θά πάθει, ἄν τοῦ προσθέσουμε ἕναν ἄλλο ἀριθμό, π.χ. τόν 5, καί ἀπό τό ἐξαγόμενο ἀφαιρέσουμε τόν 5 (ἤ πρῶτα ἀφαιρέσουμε τόν 5 ἀπό τόν 8 καί στό ἐξαγόμενο προσθέσουμε τόν 5).

8 +5 = 13 8 –5 = 3

(8+5)–5 = 13–5 = 8 (8–5)+5 = 3+5 = 8

δηλαδή (8+5)–5 = 8 καί (8–5)+5 = 8

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι καί στίς δύο περιπτώσεις βρήκαμε ἐξαγόμενο πάλι τόν 8. Γενικά ἄν α καί β εἶναι δύο ἀριθμοί μέ $α \geq β$, ἔχουμε

$$\boxed{(α+β)-β = α \quad \text{καί} \quad (α-β)+β = α}$$

Δηλαδή, **ἄν σέ ἕναν ἀριθμό α προσθέσουμε ἕναν ἀριθμό β καί ἀπό τό ἐξαγόμενο ἀφαιρέσουμε τόν β (ἤ ἄν ἀφαιρέσουμε τόν β ἀπό τόν α καί στό**

ἐξαγόμενο προσθέσουμε τόν β), βρίσκουμε πάλι τόν ἀριθμό α. Μέ ἄλλα λόγια, ἡ πρόσθεση καί ἡ ἀφαίρεση ἑνός ἀριθμοῦ, ἄν ἐφαρμοσθοῦν διαδοχικά, *ἀλληλοεξουδετερώνονται.* Γι' αὐτό τίς πράξεις πρόσθεση καί ἀφαίρεση τίς λέμε **ἀντίστροφες.**

Ἡ ἔννοια τῆς ἐξισώσεως

8.4. Προηγουμένως, γιά νά βροῦμε τόν πληθάριθμο x τοῦ συνόλου Κ τῶν κοριτσιῶν τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου, σχηματίσαμε τήν ἰσότητα

$$x + 75 = 128 \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή περιέχει, ὅπως βλέπουμε, ἕνα γενικό ἀριθμό, τόν x. Ἄς δώσουμε τώρα στόν x διάφορες τιμές, π.χ. τίς 50, 53, 60.
Ὅταν $x = 50$, ἡ (1) γίνεται $50+75 = 128$, πού εἶναι ψευδής, γιατί

$$50+75 = 125 < 128.$$

Ὅταν $x = 53$, ἡ (1) γίνεται $53+75 = 128$, πού εἶναι ἀληθής.
Ὅταν $x = 60$, ἡ (1) γίνεται $60+75 = 128$, πού εἶναι ψευδής, γιατί

$$60+75 = 135 > 128.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν πώς μόνο ἡ τιμή $x = 53$ κάνει τήν παραπάνω ἰσότητα ἀληθή ἤ, ὅπως λέμε ἀλλιῶς, **ἐπαληθεύει** τήν παραπάνω ἰσότητα.

Τέτοιες ἰσότητες, πού γίνονται ἀληθεῖς μόνο γιά ὁρισμένες τιμές τοῦ x, λέγονται ἐξισώσεις.

Τό γράμμα x λέγεται **ἄγνωστος** τῆς ἐξισώσεως καί ἡ τιμή τοῦ x πού τήν ἐπαληθεύει λέγεται **ρίζα** ἤ **λύση** τῆς ἐξισώσεως. Ἡ διαδικασία πού ἀκολουθοῦμε, γιά νά βροῦμε τή ρίζα μιᾶς ἐξισώσεως, λέγεται **ἐπίλυση** τῆς ἐξισώσεως.

Οἱ ἐξισώσεις μᾶς βοηθοῦν πολύ στή λύση διάφορων προβλημάτων. Ἄς πάρουμε τώρα τήν ἰσότητα

$$x + 5 = 5 + x,$$

πού εἶναι γνωστή ἀπό τήν πρόσθεση (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα). Ἡ ἰσότητα αὐτή γίνεται ἀληθής, ὁποιαδήποτε τιμή κι ἄν πάρει ὁ x.

Π.χ. $1+5 = 5+1, \quad 2+5 = 5+2, \quad 3+5 = 5+3$ κ.λ.π.

Τέτοιες ἰσότητες πού γίνονται ἀληθεῖς γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x τίς λέμε εἰδικότερα ταυτότητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ καί $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, νά βρεθεῖ τό B'.**

Λύση: $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

2. **Νά βρεθοῦν οἱ διαφορές, i) 18 - 6, ii) α - α iii) α - 0.**

Λύση: (i) $18-6=12$, γιατί $12+6=18$
(ii) $\alpha-\alpha=0$, γιατί $0+\alpha=\alpha$
(iii) $\alpha-0=\alpha$, γιατί $\alpha+0=\alpha$

---

3. **Ἄν $A=\{\kappa, \lambda, \mu\}$ καί $B=\{\kappa, \lambda\}$, νά βρεθεῖ τό συμπληρωματικό σύνολο ὡς πρός τό A καθενός ἀπό τά σύνολα B, A, ∅.**

Λύση: $B'=\{\mu\}$, $A'=\varnothing$, $\varnothing'=A$

---

4. **Ἀπό τήν ἰσότητα 3+5 = 8 ποιές ἰσοδυναμίες μπορεῖτε νά γράψετε;**

Λύση: Ἀπό τήν $3+5=8$ συμπεραίνουμε ὅτι $3=8-5$ καί $5=8-3$. Ἔτσι ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες

$$3+5=8 \Leftrightarrow 3=8-5 \quad \text{καί} \quad 3+5=8 \Leftrightarrow 5=8-3.$$

Αὐτές τίς γράφουμε $3+5=8 \Leftrightarrow 3=8-5 \Leftrightarrow 5=8-3$ καί γενικά

$$\boxed{\gamma+\beta=\alpha \Leftrightarrow \gamma=\alpha-\beta \Leftrightarrow \beta=\alpha-\gamma}$$

---

5. **Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις**
i) x+9 = 13, ii) x—6 = 8, iii) 7—x = 3.

Λύση: Γιά νά ἐπιλύσουμε μιά ἐξίσωση, χρησιμοποιοῦμε τίς παραπάνω ἰσοδυναμίες. Ἔτσι ἔχουμε:

i) $x+9=13 \Leftrightarrow x=13-9 \Leftrightarrow x=4$
ii) $x-6=8 \Leftrightarrow x=8+6 \Leftrightarrow x=14$
iii) $7-x=3 \Leftrightarrow 3+x=7 \Leftrightarrow x=7-3 \Leftrightarrow x=4$

---

6. **Π ρ ό β λ η μ α. Ἕνα παιδί ἔχει 247 δραχμές καί θέλει νά ἀγοράσει ἕνα παιγνίδι, πού κάνει 450 δρχ. Πόσα χρήματα θέλει ἀκόμη;**

Λύση: Ἄς ποῦμε πώς θέλει ἀκόμη x δραχμές. Θά πρέπει τότε

$$x+247=450$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή, πού λέγεται *«ἐξίσωση τοῦ προβλήματος»*, γίνεται διαδοχικά :

$$x+247=450 \Leftrightarrow x=450-247 \Leftrightarrow x=203.$$

Ὥστε θέλει ἀκόμη 203 δρχ.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστω A = {τά φωνήεντα} καί B = {τά βραχέα φωνήεντα}. Νά βρεῖτε τό συμπληρωματικό σύνολο τοῦ B ὡς πρός τό A μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του καί νά κάνετε τά διαγράμματα τῶν συνόλων.
2. Τό ἴδιο γιά τά σύνολα A = {τά ἄηχα σύμφωνα} καί B = {τά στιγμιαῖα σύμφωνα}.
3. Τό ἴδιο ἄν A = {τά ἀριθμητικά ψηφία} καί $B=\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$.
4. Ἄν $A=\{3, 5, 7, 9\}$, νά βρεθοῦν τά συμπληρωματικά, ὡς πρός τό A, ὅλων τῶν διμελῶν ὑποσυνόλων τοῦ A.
5. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α) $17+x=18$, β) $15+x=27$, γ) $12+x=12$, δ) $x+14=25$.

6. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $x-15=27$, β) $x-12=2$, γ) $x-347=63$, δ) $x-629=512$.

7. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $41-x=13$, β) $127-x=75$, γ) $345-x=300$, δ) $128-x=128$.

8. Νά βρεθεῖ ποιός ἀριθμός πρέπει νά προστεθεῖ στόν 39, γιά νά προκύψει ὁ 82.

9. Ποιός ἀριθμός πρέπει νά ἀφαιρεθεῖ ἀπό τόν 384, γιά νά προκύψει ὁ 59;

10. Νά συμπληρώσετε τίς ἑπόμενες ἰσοδυναμίες:

α) $3+x=7 \Leftrightarrow x=\dots$, β) $y+5=13 \Leftrightarrow y=\dots$

γ) $y-8=x \Leftrightarrow y=\dots$, δ) $21-x=9 \Leftrightarrow x=\dots$

11. Ἀπό ποιόν ἀριθμό ἄν ἀφαιρέσουμε 159, θά βροῦμε 211;

Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως

8.5. i) Παίρνουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 12 καί 7, καί βρίσκουμε τή διαφορά τους $12-7=5$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

$(12+1)-(7+1)=13-8=5$ καί $(12-1)-(7-1)=11-6=5$.

$(12+2)-(7+2)=14-9=5$ καί $(12-2)-(7-2)=10-5=5$

$(12+3)-(7+3)=15-10=5$ καί $(12-3)-(7-3)=9-4=5$

Γενικά:

$$\boxed{(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha-\beta \ (\beta\leq\alpha)^{(1)} \text{ καί } (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta(\gamma\leq\beta\leq\alpha)}$$

Δηλαδή: **Ἄν προσθέσουμε (ἤ ἀφαιρέσουμε) στό μειωτέο καί στόν ἀφαιρετέο μιᾶς διαφορᾶς τόν ἴδιο ἀριθμό, ἡ διαφορά δέν ἀλλάζει.**

ii) Ἄν εἶναι $\alpha=\beta$, θά εἶναι καί $(\alpha-\gamma)+\gamma=(\beta-\gamma)+\gamma$ (βλέπε § 8.3). Στήν τελευταία ἰσότητα ἐφαρμόζουμε τήν ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς τῆς προσθέσεως (διαγράφουμε τό γ), ὁπότε παίρνουμε τήν ἰσότητα $\alpha-\gamma=$ $=\beta-\gamma$. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι, ἄν εἶναι $\alpha=\beta$, θά εἶναι καί $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$.

Ἀντιστρόφως, ἄν ἔχουμε $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$ καί προσθέσουμε τό γ καί στά δύο μέλη της, προκύπτει ἡ ἰσότητα $(\alpha-\gamma)+\gamma=(\beta-\gamma)+\gamma$ ἤ $\alpha=\beta$.

Συνεπῶς οἱ ἰσότητες $\alpha=\beta$ καί $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$ εἶναι ἰσοδύναμες, δηλαδή

$$\boxed{\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha-\gamma=\beta-\gamma} \qquad (1)$$

Ἄς πάρουμε τώρα τήν ἀνισότητα $5<7$. Ἔχουμε

$5-3=2$ καί $7-3=4$. Βλέπουμε ὅτι $2<4$, δηλαδή $5-3<7-3$.

---

(1) Ἀπό δῶ καί πέρα, ὅταν ἔχουμε μιά διαφορά $\alpha-\beta$, θά ἐννοοῦμε, χωρίς νά τό γράφουμε, ὅτι εἶναι $\beta\leq\alpha$.

Ἀντιστρόφως ἀπό τήν 5–3 < 7–3 προκύπτει ἡ
(5–3)+3<(7–3)+3 ἤ 5<7 (προσθέσαμε τό 3 καί στά δύο μέλη).

Δηλαδή, κάθε μιά ἀπό τίς ἀνισότητες $5 < 7$ καί $5-3 < 7-3$, προκύπτει ἀπό τήν ἄλλη. Ἀνισότητες σάν αὐτές τίς λέμε **ἰσοδύναμες** καί γράφουμε (ὅπως στίς ἰσοδύναμες ἰσότητες)

$$5 < 7 \Leftrightarrow 5-3 < 7-3 \quad \text{καί γενικά}$$

$$\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha-\gamma < \beta-\gamma \qquad (2)}$$

Οἱ «*ἰσοδυναμίες*» (1) καί (2) μᾶς λένε ὅτι ἰσχύει καί στήν ἀφαίρεση ἡ ἰδιότητα τῆς **διαγραφῆς** γιά τήν ἰσότητα καί τήν ἀνισότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐξετασθεῖ ἄν ἰσχύουν καί γιά τήν ἀφαίρεση οἱ γνωστές ἰδιότητες τῆς προσθέσεως** (ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική, οὐδέτερο στοιχεῖο).

Λύση: i) Ἄς πάρουμε δυό φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 5 καί 8. Ἐπειδή εἶναι $8 > 5$, ὑπάρχει ἡ διαφορά $8-5 = 3$, ἀλλά δέν ὑπάρχει ἡ $5-8$. Συνεπῶς **δέν μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά ἀντιμεταθετική ἰδιότητα στήν ἀφαίρεση.**

ii) Ἔχουμε $(20-9)-4 = 11-4 = 7$ καί
$20-(9-4) = 20-5 = 15.$

Ὅπως βλέπουμε, $(20-9)-4 \neq 20-(9-4)$.

Δηλαδή **στήν ἀφαίρεση δέν ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα**.

iii) Ὅπως ξέρουμε, $5-0 = 5$, ἀλλά ἡ διαφορά $0-5$ δέν ὑπάρχει.

Ἑπομένως **τό 0 δέν εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς ἀφαιρέσεως.**

2. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων i) (45+15)—25, ii) (45-25)+15.**

Λύση: i) $(45+15)-25 = 60-25 = 35$ ii) $(45-25)+15 = 20+15 = 35$

Ὥστε $(45+15)-25 = (45-25)+15$ καί γενικά:

$$\boxed{(\alpha+\beta)-\gamma = (\alpha-\gamma)+\beta}$$

3. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων i) 29—(8+7), ii) (29—8)—7.**

Λύση: i) $29-(8+7) = 29-15 = 14$
ii) $(29-8)-7 = 21-7 = 14$

Ὥστε: $29-(8+7) = (29-8)-7$ καί γενικά

$$\boxed{\alpha-(\beta+\gamma) = (\alpha-\beta)-\gamma}$$

4. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων: i) 25—(10—4), ii) (25+4)—10.**

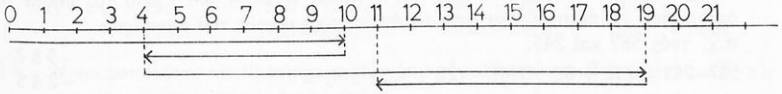
Λύση: i) $25-(10-4) = 25-6 = 19$
ii) $(25+4)-10 = 29-10 = 19$

Συνεπῶς $25-(10-4) = (25+4)-10$ καί γενικά

$$\boxed{\alpha-(\beta-\gamma) = (\alpha+\gamma)-\beta}$$

˙Αριθμητικές παραστάσεις

8.6. Σέ πολλά προβλήματα τό ἐξαγόμενο δέ βρίσκεται μόνο μέ μιά πρόσθεση ἤ μέ μιά ἀφαίρεση, ἀλλά μέ μιά σειρά ἀπό διαδοχικές τέτοιες πράξεις. Γιά νά βροῦμε π.χ. πόσα βήματα προχώρησε ἕνα ἄτομο, ὅταν ἔκαμε ἀρχικά 10 βήματα μπροστά, μετά γύρισε 6 βήματα πίσω, μετά προχώρησε 15 βήματα μπροστά καί τέλος γύρισε 8 βήματα πίσω, θά πρέπει νά κάνουμε τίς ἑξῆς πράξεις:



i) $10-6=4$
ii) $4+15=19$
iii) $19-8=11$

Προχώρησε λοιπόν τελικά 11 βήματα μπροστά.

Τή διαδοχική σειρά τῶν πράξεων αὐτῶν τή γράφουμε πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$10-6+15-8$$

Μιά σειρά ἀριθμῶν, πού συνδέονται μεταξύ τους μέ τά σύμβολα τῆς προσθέσεως καί τῆς ἀφαιρέσεως (ὅπως πιό πάνω), λέγεται **ἀριθμητική παράσταση**. Οἱ ἀριθμοί λέγονται **ὅροι** τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως. Γιά νά βροῦμε τό ἐξαγόμενο μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως, κάνουμε διαδοχικά τίς πράξεις μέ τή σειρά πού εἶναι σημειωμένες. Ἔτσι γιά τήν προηγούμενη παράσταση ἔχουμε:

$$\underbrace{10-6}+15-8=\underbrace{4+15}-8=19-8=11.$$

Τό ἐξαγόμενο πού βρίσκουμε ἀπό μιά ἀριθμητική παράσταση λέγεται **τιμή τῆς παραστάσεως.**

Ὅταν σέ μιά ἀριθμητική παράσταση ὑπάρχουν παρενθέσεις, **ἐκτελοῦμε πρῶτα τίς πράξεις μέσα στίς παρενθέσεις.** Π.χ.

$$(7+8-5)+(12-3+4)-(15-6)=10+13-9=14.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων:**
i) 18—7—10+17+26 ii) 51+34—26+32—45.

Λύση: i) $\underbrace{18-7}-10+17+26=\underbrace{11-10}+17+26=\underbrace{1+17}+26=18+26=44.$

ii) $\underbrace{51+34}-26+32-45=\underbrace{85-26}+32-45=\underbrace{59+32}-45=91-45=46.$

2. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:**
i) (17+8+15)—(12+6+11), ii) (17—12) + (8—6) +(15—11).

Λύση: i) $(17+8+15)-(12+6+11) = 40-29 = 11$.
ii) $(17-12)+(8-6)+(15-11) = \underbrace{5+2}+4 = 7+4 = 11$.

Ὥστε $(17+8+15)-(12+6+11) = (17-12)+(8-6)+(15-11)$.

---

3. **Μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως νά ἐξηγηθεῖ ἡ γνωστή μας τεχνική τῆς πράξεως.**

Λύση: i) Ἄς πάρουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς τέτοιους, ὥστε ὅλα τά ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου νά ἀφαιροῦνται ἀπό τά ἀντίστοιχα ψηφία τοῦ μειωτέου, π.χ. τούς 587 καί 245.

$587-245 = (5E+8\Delta+7M)-(2E+4\Delta+5M) =$
$= (5-2)E+(8-4)\Delta+(7-5)M$ (βλ. παράδ. 2) $= 3E+4\Delta+2M = 342$

$$\begin{array}{r} 587 \\ -245 \\ \hline 342 \end{array}$$

ii) Ἄς πάρουμε τώρα τή διαφορά 234–87.
$234-87 = (2E+3\Delta+4M)-(8\Delta+7M)$. Ὅπως βλέπουμε ἐδῶ, τό 7 δέν ἀφαιρεῖται ἀπό τό 4 οὔτε τό 8 ἀπό τό 3, γι' αὐτό καταφεύγουμε στή χρησιμοποίηση τῆς ἰδιότητας (i) τῆς ἀφαιρέσεως.

$234-87 = (2E+3\Delta+4M)-(8\Delta+7M) = (2E+3\Delta+4M+10M)-(8\Delta+1\Delta+7M) =$
$= (2E+3\Delta+14M)-(9\Delta+7M) = (2E+3\Delta+10\Delta+14M)-(1E+9\Delta+7M) =$
$= (2E+13\Delta+14M)-(1E+9\Delta+7M) = (2-1)E+(13-9)\Delta+(14-7)M =$
$= 1E+4\Delta+7M = 147$.

Ἡ ἐργασία αὐτή γίνεται πολύ σύντομα μέ τήν παραπλεύρως διάταξη.
Τό κρατούμενο λοιπόν στήν ἀφαίρεση εἶναι δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως, οἱ ὁποῖες προστέθηκαν στό μειωτέο.

$$\begin{array}{ccc} & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ & 8 & 7 \\ 1 & 1 & \\ \hline 1 & 4 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 234 \\ -\ 87 \\ \hline 147 \end{array}$$

Γιά νά μήν ἀλλάξει ἡ διαφορά, προσθέτουμε μιά μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως (τό κρατούμενο) στόν ἀφαιρετέο.
Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἀφαιρέσεως, θά πρέπει 147+87 νά εἶναι 243. Ὁ ἔλεγχος αὐτός ἀποτελεῖ τή **δοκιμή τῆς ἀφαιρέσεως.**

---

4. **Νά σθμπληρωθοῦν τά ψηφία πού λείπουν στίς παρακάτω ἀφαιρέσεις, ὅπως ἔγινε μέ τήν πρώτη.**

$$\begin{array}{r} 1\,7\,\boxed{9}\,8 \\ -\ \ 4\,7\,\boxed{2} \\ \hline \boxed{1}\,\boxed{3}\,2\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{}\,3\,\boxed{}\,6 \\ -\ 2\,\boxed{}\,8\,9 \\ \hline 5\,0\,3\,\boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,\boxed{}\,7\,8 \\ -\ 2\,6\,\boxed{}\,3 \\ \hline \boxed{}\,9\,2\,\boxed{} \end{array}$$

---

5. **Νά συμπληρωθοῦν οἱ ἀριθμοί πού λείπουν στά ἑπόμενα μαγικά τετράγωνα.**

		6
		11
	5	10

24			21
		19	16
17	14		
12		22	9

Λύση: Νά παρατηρήσετε ὅτι στό πρῶτο μαγικό τετράγωνο εἶναι συμπληρωμένη ἡ τελευταία στήλη, ἐνῶ στό δεύτερο εἶναι συμπληρωμένη ἡ διαγώνιος.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Νά βρεῖτε μέ τό νοῦ σας τά ἐξαγόμενα:
α) $800-500$, β) $800-540$, γ) $800-549$

13. Ὁμοίως τά ἐξαγόμενα:

α) $57-30$,	$57-37$,	$57-35$,	$57-39$
β) $85-44$,	$93-77$,	$83-49$,	$97-58$
γ) $842-131$,	$956-738$,	$843-657$,	$888-555$
δ) $877-799$,	$733-694$,	$2956-1634$,	$3647-1648$

14. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες $\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$, $\alpha-\beta=(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$, γιά νά ὑπολογίσετε τίς διαφορές :

α) $77-36$,	$67-29$,	$86-77$,	$91-36$
β) $83-57$,	$51-26$,	$43-28$,	$82-37$
γ) $81-46$,	$85-49$,	$691-446$,	$742-367$
δ) $674-239$,	$834-439$,	$823-238$,	$846-749$

15. Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω σχέσεις εἶναι ἀληθεῖς:
α) $24<47-24$, β) $51<102-51$ γ) $104-42\geq 42$

16. Τρεῖς ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 2000. Ὁ α΄ εἶναι 319 καί ὁ β΄ εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν α΄ κατά 48. Ποιός εἶναι ὁ τρίτος;

17. Νά βρεῖτε ἕναν ἁπλό τρόπο, γιά νά ὑπολογίσετε τίς διαφορές :
α) $1674-701$, β) $(5000+127)-(3000+126)$, γ) $(120+17+50)-57$

18. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τιμές τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων:
α) $25-5+18-12+2$, β) $42-13+3-9-1+7$

19. Σέ μιά οἰκοδομή χρειάζονται 17 000 τοῦβλα. Τρία αὐτοκίνητα μεταφέρουν: τό α΄ 4 100, τό β΄ 3430 καί τό γ΄ 3850 τοῦβλα. Στή μεταφορά ἔσπασαν 435 τοῦβλα. Πόσα πρέπει νά μεταφερθοῦν ἀκόμη;

20. Συμπληρῶστε τά παρακάτω τετράγωνα, γιά νά γίνουν μαγικά.

5		6
	8	
10		

		9
		14
15		13

15	20	
	16	
	12	

21. Νά ὑπολογίσετε μέ δύο τρόπους τίς διαφορές:
α) $(78+19+86)-58$, β) $(546+837)-186$, γ) $546-(89-45)$
δ) $356-(84+97+76)$, ε) $(95+74+97)-(83+58+47)$

22. Τό ἄθροισμα τεσσάρων ἀριθμῶν εἶναι 395000. Ὁ α΄ εἶναι 75472, ὁ β΄ μικρότερος ἀπό τόν α΄ κατά 37614 καί ὁ γ΄ ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί αὐτοί.

23. Νά βρεῖτε ποιούς ἀριθμούς παριστάνουν τά γράμματα στίς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α) $\begin{array}{r} 5\delta 728 \\ -\ 3583\alpha \\ \hline \varepsilon 0\gamma\beta 4 \end{array}$ β) $\begin{array}{r} \varepsilon 51\beta 7 \\ -\ 4\gamma 53 \\ \hline 9\delta 73\alpha \end{array}$ γ) $\begin{array}{r} 6\delta 30\alpha \\ -\ 4\beta 6 \\ \hline \varepsilon 5\gamma 51 \end{array}$

Ἀφαίρεση πινάκων

8.7. Ἄς πάρουμε τόν παρακάτω πίνακα πού εἴχαμε δεῖ στήν πρόσθεση.

	Τμῆμα 1ο		Τμῆμα 2ο		Ἄθροισμα	
	Ἀγόρια	Κορίτσια	Ἀγόρια	Κορίτσια	Ἀγόρια	Κορίτσια
Τάξη Α′	18	17	20	14	38	31
Τάξη Β′	37	0	16	22	53	22
Τάξη Γ′	17	21	19	16	36	37

Εἴχαμε δεῖ ὅτι $\begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 37 & 0 \\ 17 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 16 & 22 \\ 19 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 31 \\ 53 & 22 \\ 36 & 37 \end{pmatrix}$

Ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ἔχουμε τούς πίνακες $\begin{pmatrix} 38 & 31 \\ 53 & 22 \\ 36 & 37 \end{pmatrix}$ καί $\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 16 & 22 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$, ὑπάρχει ἕνας τρίτος πίνακας, ὁ $\begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 37 & 0 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}$, πού ὅταν προστεθεῖ στό δεύτερο, δίνει ἄθροισμα τόν πρῶτο. Ὁ πίνακας αὐτός λέγεται **διαφορά** τοῦ $\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 16 & 22 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$ ἀπό τόν $\begin{pmatrix} 38 & 31 \\ 53 & 22 \\ 36 & 37 \end{pmatrix}$ καί γράφουμε

$$\begin{pmatrix} 38 & 31 \\ 53 & 22 \\ 36 & 37 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 16 & 22 \\ 19 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 37 & 0 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι εἶναι $38-20 = 18$, $53-16 = 37$, $36-19 = 17$, $31 - 14 = 17$, $22 - 22 = 0$ καί $37-16 = 21$.

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

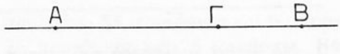
- **Γιά νά ἀφαιρέσουμε δύο πίνακες πρέπει νά ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις.**
- **Ἡ διαφορά δύο πινάκων, εἶναι ἕνας πίνακας (μέ τίς ἴδιες διαστάσεις) πού τά στοιχεῖα του εἶναι ἴσα μέ τή διαφορά τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τῶν δύο πινάκων.**

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως ἰσχύουν καί στήν ἀφαίρεση πινάκων.

Ἀφαίρεση γεωμετρικῶν μεγεθῶν (εὐθύγραμμων τμημάτων, γωνιῶν καί τόξων)

8.8. Ὅπως στήν ἀφαίρεση τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί τῶν πινάκων, ἔτσι καί στήν ἀφαίρεση τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, **διαφορά α—β δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν** εἶναι ἕνα μέγεθος ὁμοειδές μέ τά α,β, τό ὁποῖο, ἄν προστεθεῖ στό β, δίνει ἄθροισμα τό α.

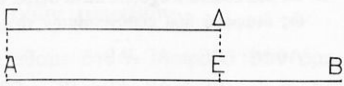
i) Στό σχῆμα 2 ἔχουμε ΑΓ + ΓΒ = ΑΒ καί συνεπῶς τό ΓΒ εἶναι ἡ διαφορά τοῦ ΑΓ ἀπό τό ΑΒ, δηλαδή



Σχ. 2

$$\boxed{\text{ΑΒ} - \text{ΑΓ} = \text{ΓΒ}, \text{ γιατί } \text{ΑΓ} + \text{ΓΒ} = \text{ΑΒ}.}$$

Γιά νά ἀφαιρέσουμε τό τμῆμα ΓΔ ἀπό τό ΑΒ (Σχ. 3), τό μετατοπίζουμε (μέ τό διαβήτη) στή θέση ΑΕ. Ἡ διαφορά τους εἶναι τό ΕΒ.

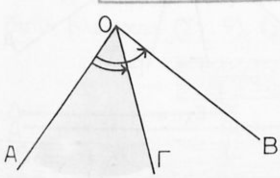


Σχ. 3

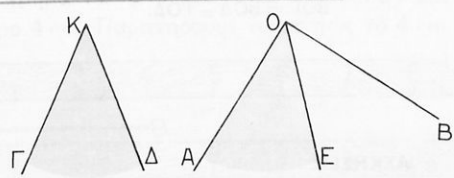
$$\text{ΑΒ} - \text{ΓΔ} = \text{ΕΒ}, \text{ γιατί } \text{ΓΔ} + \text{ΕΒ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΒ} = \text{ΑΒ}.$$

ii) Ἀπό τό σχῆμα 4 ἔχουμε

$$\boxed{\widehat{\text{ΑΟΒ}} - \widehat{\text{ΑΟΓ}} = \widehat{\text{ΓΟΒ}}, \text{ γιατί } \widehat{\text{ΑΟΓ}} + \widehat{\text{ΓΟΒ}} = \widehat{\text{ΑΟΒ}}.}$$



Σχ. 4

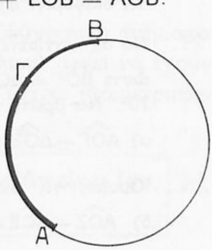


Σχ. 5

Γιά νά ἀφαιρέσουμε τή γωνία $\widehat{\text{ΓΚΔ}}$ ἀπό τήν $\widehat{\text{ΑΟΒ}}$ (Σχ. 5), μετατοπίζουμε τή γωνία $\widehat{\text{ΓΚΔ}}$ στή θέση $\widehat{\text{ΑΟΕ}}$ (μέ διαφανές ἤ μέ τό διαβήτη). Ἡ διαφορά τους εἶναι ἡ $\widehat{\text{ΕΟΒ}}$.

$$\widehat{\text{ΑΟΒ}} - \widehat{\text{ΓΚΔ}} = \widehat{\text{ΕΟΒ}}, \text{ γιατί } \widehat{\text{ΓΚΔ}} + \widehat{\text{ΕΟΒ}} = \widehat{\text{ΑΟΕ}} + \widehat{\text{ΕΟΒ}} = \widehat{\text{ΑΟΒ}}.$$

iii) Ὁμοίως διαφορά τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$ ἀπό τό $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ εἶναι τό τόξο $\overset{\frown}{\text{ΓΒ}}$, δηλ.



Σχ. 6

$$\boxed{\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} - \overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = \overset{\frown}{\text{ΓΒ}}, \text{ γιατί } \overset{\frown}{\text{ΑΓ}} + \overset{\frown}{\text{ΓΒ}} = \overset{\frown}{\text{ΑΒ}}.}$$

Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι, **γιά νά ἀφαιρέσουμε**

δυό τόξα, πρέπει νά βρίσκονται στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.

Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι **οἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν θά ἰσχύουν καί στήν ἀφαίρεση ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

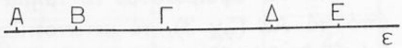
1. **Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά τοῦ πίνακα** $\begin{pmatrix} 14 & 9 & 11 \\ 18 & 32 & 25 \end{pmatrix}$ **ἀπό τόν** $\begin{pmatrix} 25 & 17 & 19 \\ 18 & 44 & 36 \end{pmatrix}$.

Λύση: $\begin{pmatrix} 25 & 17 & 19 \\ 18 & 44 & 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 9 & 11 \\ 18 & 32 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-14 & 17-9 & 19-11 \\ 18-18 & 44-32 & 36-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 8 \\ 0 & 12 & 11 \end{pmatrix}$.

2. **Σέ μιά εὐθεία ε ἔχουμε κατά σειρά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε** (Σχ. 7). **Νά ἐκφρασθεῖ τό ΒΓ ὡς διαφορά δύο εὐθύγραμμων τμημάτων.**

Λύση: ΒΓ = ΑΓ–ΑΒ

ΒΓ = ΔΒ–ΔΓ, ΒΓ = ΕΒ – ΕΓ.

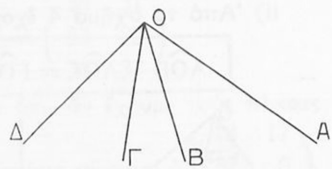


Σχ. 7

3. **Νά ἐκφρασθεῖ ἡ γωνία** $\widehat{BO\Gamma}$ **τοῦ διπλανοῦ σχήματος ὡς διαφορά δύο γωνιῶν.**

Λύση: $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{AOB}$

$\widehat{BO\Gamma} = \widehat{BO\Delta} - \widehat{\Gamma O\Delta}$.



Σχ. 8

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ καί ΕΖ, ὥστε νά εἶναι ΑΒ = ΓΔ καί ΒΓ = ΔΕ. Νά βρεῖτε τίς διαφορές: α) ΑΓ – ΔΕ, β) ΒΔ–ΑΒ, γ) ΒΖ – ΔΕ.

25. Ὁμοίως τίς: α) ΔΖ–ΒΓ, β) ΑΕ–ΓΔ, γ) ΑΖ–ΒΔ, δ) ΑΖ–ΒΓ–ΕΖ.

26. Νά σχηματίσετε τό σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ, ὥστε ΑΒ < ΒΓ < ΑΓ. Νά βρεῖτε τίς διαφορές: α) ΒΓ–ΑΒ, β) ΑΓ–ΒΓ, γ) ΑΓ–ΑΒ.

27. Νά σχηματίσετε τίς διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, $\widehat{\Delta OE}$ καί $\widehat{EOZ}$ ἔτσι, ὥστε $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Delta OE}$ καί $\widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{EOZ}$ καί κάθε μιά γωνία νά εἶναι μικρότερη ἀπό 70^0. Νά βρεῖτε τίς διαφορές:

α) $\widehat{AO\Gamma} - \widehat{\Delta OE}$, β) $\widehat{BO\Delta} - \widehat{\Delta OE}$, γ) $\widehat{BO\Delta} - \widehat{EOZ}$, δ) $\widehat{AO\Delta} - \widehat{EOZ}$.

28. Ὁμοίως τίς διαφορές: α) $\widehat{\Delta OZ} - \widehat{BO\Gamma}$, β) $\widehat{BOZ} - \widehat{\Gamma O\Delta}$, γ) $\widehat{AOZ} - \widehat{BO\Delta}$. δ) $\widehat{AOZ} - \widehat{\Delta OE} - \widehat{AOB}$.

29. Στό σκαληνό τρίγωνο τῆς ἀσκ. 26 νά βρεῖτε τή διαφορά $\widehat{AB\Gamma} - \widehat{A\Gamma B}$.

30. Νά γράψετε έναν κύκλο καί νά πάρετε τά διαδοχικά τόξα $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΔ}$, $\widehat{ΔΕ}$ έτσι, ὥστε $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$ καί $\widehat{ΒΓ} = \widehat{ΔΕ}$ καί κάθε τόξο νά εἶναι μικρότερο ἀπό 90^0. Νά βρεῖτε τίς διαφορές:

α) $\widehat{ΑΒΓ} - \widehat{ΔΕ}$, β) $\widehat{ΓΔΕ} - \widehat{ΑΒ}$, γ) $\widehat{ΑΒ} + \widehat{ΔΕ} - \widehat{ΓΔ}$, δ) $\widehat{ΑΓΕ} - \widehat{ΒΓ}$.

31. Ἕνα κατάστημα πούλησε μέ ἐκπτώσεις 43 πουλόβερ, 54 πουκάμισα καί 60 γραβάτες καί χωρίς ἐκπτώσεις 19 πουλόβερ, 26 πουκάμισα καί 25 γραβάτες. Νά πινακοποιήσετε τά δεδομένα καί νά βρεῖτε πόσα κομμάτια ἀπό κάθε εἶδος πούλησε παραπάνω μέ ἐκπτώσεις.

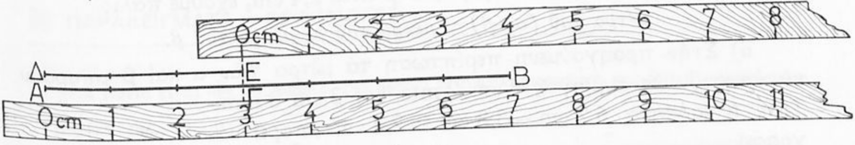
32. Νά βρεῖτε τή διαφορά τῶν πινάκων: $Α = \begin{pmatrix} 75 & 13 & 11 \\ 125 & 80 & 9 \end{pmatrix}$, $Β = \begin{pmatrix} 35 & 5 & 8 \\ 95 & 47 & 0 \end{pmatrix}$.

Τό μέτρο τῆς διαφορᾶς δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν

8.9. Στήν προηγούμενη παράγραφο μάθαμε ὅτι ἡ διαφορά δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν (εὐθ. τμημάτων, γωνιῶν, τόξων) εἶναι ἕνα μέγεθος ὁμοειδές μέ αὐτά. Θά δοῦμε τώρα πῶς θά ὑπολογίζουμε τό μέτρο τῆς διαφορᾶς αὐτῆς, ὅταν εἶναι γνωστά τά μέτρα τῶν ὅρων της.

Ἄς πάρουμε πρῶτα δύο ὁμοειδή γεωμετρικά μεγέθη μέ μέτρα φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τά τμήματα ΑΒ καί ΔΕ (Σχ. 9) μέ μέτρα 7 cm καί 3 cm ἀντιστοίχως.

Ἡ διαφορά τους εἶναι τό τμῆμα ΓΒ (ΑΒ–ΔΕ = ΑΒ–ΑΓ = ΓΒ) καί ὅπως βλέπουμε (Σχ. 9), ἔχει μέτρο 4 cm. Παρατηροῦμε τώρα πώς τό 4 cm



Σχ. 9

μποροῦμε νά τό βροῦμε ἀμέσως ἀφαιρώντας τά μέτρα τῶν δυό εὐθύγραμμων τμημάτων 7 cm – 3 cm = 4 cm. Ἔτσι ἔχουμε:

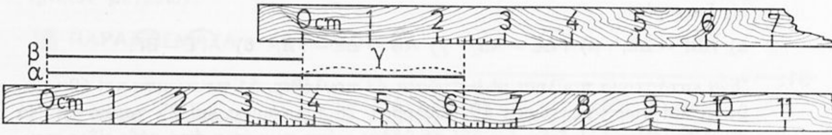
> Μέτρο τοῦ (α–β) = μέτρο τοῦ α – μέτρο τοῦ β.

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, ἄν ἀντί γιά εὐθύγραμμα τμήματα πάρουμε γωνίες ἤ τόξα (τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων) ἀρκεῖ νά ἔχουν μετρηθεῖ μέ τήν ἴδια μονάδα. Γενικά λοιπόν, ὅταν τά μέτρα γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, ἔχουμε:

> Τό μέτρο τῆς διαφορᾶς δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά τῶν μέτρων τους.

Ἡ πρόταση αὐτή, ὅπως θά δοῦμε, ἰσχύει καί ὅταν τά μέτρα τους εἶναι δεκαδικοί, συμμιγεῖς ἤ κλασματικοί ἀριθμοί.

i) Ἄς πάρουμε τώρα τά εὐθύγραμμα τμήματα α καί β (Σχ. 10) μέ μέτρα 6,2 cm καί 3,8 cm ἀντιστοίχως.



Σχ. 10

Ἄν ὡς μονάδα πάρουμε τό 1 mm, τότε τό μέτρο τοῦ α εἶναι 62 mm καί τοῦ β 38 mm, δηλαδή φυσικοί ἀριθμοί. Ἑπομένως σύμφωνα μέ τό παραπάνω συμπέρασμα θά ἔχουμε:

$$\text{μέτρο τοῦ } (\alpha-\beta) = \text{μέτρο τοῦ } \alpha - \text{μέτρο τοῦ } \beta = $$
$$= 62 \text{ mm} - 38 \text{ mm} = 24 \text{ mm}.$$

Ἡ ἰσότητα 62 mm − 38 mm = 24 mm, ἄν ξαναγυρίσουμε στήν ἀρχική μονάδα (τό cm), γράφεται

$$6{,}2 \text{ cm} - 3{,}8 \text{ cm} = 2{,}4 \text{ cm}$$

πού μᾶς θυμίζει ὅτι ἡ ἀφαίρεση τῶν δεκαδικῶν γίνεται ὅπως ἡ ἀφαίρεση τῶν φυσικῶν, ἀρκεῖ νά προσέχουμε οἱ ὑποδιαστολές νά εἶναι στήν ἴδια στήλη.

$$\begin{array}{r} 6{,}2 \\ -\ 3{,}8 \\ \hline 2{,}4 \end{array}$$

Ἐπειδή τό μέτρο τῆς διαφορᾶς α—β εἶναι 2,4 cm, ἔχουμε πάλι:

$$\textit{μέτρο τοῦ } (\alpha-\beta) = \textit{μέτρο τοῦ } \alpha - \textit{μέτρο τοῦ } \beta.$$

ii) Στήν προηγούμενη περίπτωση τά μέτρα τῶν α καί β μποροῦν νά γραφοῦν ὡς συμμιγεῖς 6 cm 2 mm καί 3 cm 8 mm. Τότε ἡ ἰσότητα 6,2 cm − 3,8 cm = 2,4 cm μπορεῖ νά γραφεῖ

$$(6 \text{ cm } 2 \text{ mm}) - (3 \text{ cm } 8 \text{ mm}) = 2 \text{ cm } 4 \text{ mm}$$

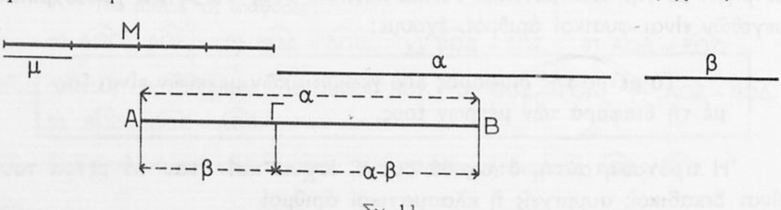
πού μᾶς θυμίζει τήν ἀφαίρεση τῶν συμμιγῶν πού μάθαμε στό Δημοτικό Σχολεῖο.

$$\begin{array}{rr} & 12 \\ 6 \text{ cm} & 2 \text{ mm} \\ 4 & \\ -\ 3 \text{ cm} & 8 \text{ mm} \\ \hline 2 \text{ cm} & 4 \text{ mm} \end{array}$$

Ἐπειδή τό 2 cm 4 mm εἶναι τό μέτρο τῆς διαφορᾶς α—β ἔχουμε πάλι:

$$\textit{μέτρο τοῦ } (\alpha-\beta) = \textit{μέτρο τοῦ } \alpha - \textit{μέτρο τοῦ } \beta.$$

iii) Ἄς πάρουμε τέλος τά εὐθύγραμμα τμήματα α καί β μέ μέτρα $\frac{5}{4}$ Μ καί $\frac{2}{4}$ Μ ἀντιστοίχως, ὅπου Μ ἡ μονάδα μετρήσεως (Σχ. 11).



Σχ 11

Χωρίζουμε τή μονάδα Μ σέ 4 ἴσα μέρη καί παίρνουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τό ἕνα ἀπ' αὐτά, πού τό ὀνομάζουμε «*τέταρτο τῆς Μ*» καί τό παριστάνουμε μέ **μ** $\left(\frac{1}{4}\mathrm{M} = 1\,\mu\right)$.

Ἔτσι τώρα τό μέτρο τοῦ α εἶναι 5 μ καί τοῦ β 2μ, δηλαδή φυσικοί ἀριθμοί. Ἑπομένως γιά τή διαφορά τους (ΓΒ = α–β) θά ἔχουμε:

$$\text{μέτρο τοῦ } (\alpha-\beta) = \text{μέτρο τοῦ } \alpha - \text{μέτρο τοῦ } \beta =$$
$$= 5\mu - 2\mu = 3\mu.$$

Ἡ ἰσότητα $5\mu - 2\mu = 3\mu$, ἄν ξαναγυρίσουμε στήν ἀρχική μονάδα, γράφεται

$$\frac{5}{4}\mathrm{M} - \frac{2}{4}\mathrm{M} = \frac{3}{4}\mathrm{M}.$$

Δηλαδή $$\frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5-2}{4},$$

πού μᾶς θυμίζει τόν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως *ὁμώνυμων κλασμάτων*.

Ἐπειδή τό μέτρο τῆς διαφορᾶς τους εἶναι $\frac{3}{4}$Μ, ἔχουμε πάλι:

μέτρο τοῦ (α—β) = μέτρο τοῦ α — μέτρο τοῦ β.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Μιά γωνία εἶναι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Νά βρεθεῖ ἡ συμπληρωματική της καί ἡ παραπληρωματική της.

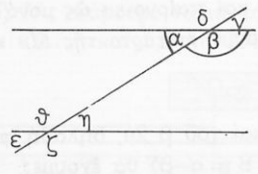
Λύση: Ἄν ὀνομάσουμε $\widehat{x}$ τή συμπληρωματική της καί $\widehat{y}$ τήν παραπληρωματική της, θά ἔχουμε:

$\widehat{x} + \frac{2}{5}$ ὀρθ. = 1 ὀρθ. καί $\widehat{y} + \frac{2}{5}$ ὀρθ. = 2 ὀρθ., ὁπότε λύνοντας τίς ἐξισώσεις αὐτές ἔχουμε:

$$\widehat{x} + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow \widehat{x} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \text{ ὥστε } \widehat{x} = \frac{3}{5} \text{ ὀρθῆς},$$
$$\widehat{y} + \frac{2}{5} = 2 \Leftrightarrow \widehat{y} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{10}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}, \text{ ὁπότε } \widehat{y} = \frac{8}{5} \text{ ὀρθῆς}.$$

2. Στό παρακάτω σχῆμα ἡ γωνία $\widehat{\alpha}$ εἶναι 35° 20′. Νά βρεθεῖ πόσο εἶναι κάθε μιά ἀπό τίς ἑπτά ἄλλες γωνίες.

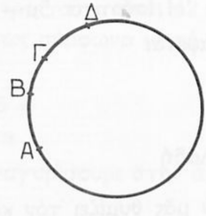
Λύση: Ξέρουμε πώς οἱ 4 ὀξεῖες γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους καί οἱ 4 ἀμβλεῖες εἶναι ἐπίσης ἴσες. Ἔτσι ἔχουμε $\widehat{\eta} = \widehat{\varepsilon} = \widehat{\gamma} = \widehat{\alpha} = 35^0\,20'$ καί ἐπειδή $\widehat{\beta} + \widehat{\alpha} = 180^0$, θά εἶναι $\widehat{\beta} + (35^0\,20') = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{\beta} = 180^0 - (35^0\,20') = 144^0\,40'$, ὁπότε $\widehat{\zeta} = \widehat{\theta} = \widehat{\delta} = \widehat{\beta} = 144^0\,40'$.



Σχ. 12

	60′
180°	0′
36°	
35°	20′
144°	40′
ἤ	
179°	60′
35°	20′
144°	40′

3. **Στόν κύκλο Ο (Σχ. 13) παίρνουμε κατά σειρά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ἔτσι, ὥστε $\overset{\frown}{AB} = 38^0\ 40'$, $\overset{\frown}{AB\Gamma} = 63^0\ 15'$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = 57^0\ 25'$. Νά βρεθοῦν τά μέτρα τῶν τόξων $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί $\overset{\frown}{A\Gamma\Delta}$.**



Σχ. 13

Λύση: $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma} - \overset{\frown}{AB} = (63^015') - (38^040') = 24^035'$

$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{B\Gamma} = (57^025') - (24^035') = 32^050'$

$\overset{\frown}{A\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{AB\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = (63^015') + (32^050') = 96^0\ 5'$

4. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως : $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$.**

Λύση: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{5}{6} - \frac{4}{6}} + \frac{3}{6} = \frac{5-4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6}$.

5. **Νά συμπληρωθοῦν τά διπλανά μαγικά τετράγωνα.**

Λύση: Νά παρατηρήσετε ὅτι τά δυό τετράγωνα ἔχουν συμπληρωμένη τή δεύτερη γραμμή.

		$\frac{9}{8}$
$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$
	1	

			14,9
14,1	14,6	14,7	14,2
14,5			
14		15	13,7

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Τό μολύβι μου εἶχε μῆκος 15 cm καί μέ τό γράψιμο ἔμεινε 7 cm 8 mm. Πόσο μῆκος χάθηκε;

34. Ἡ μεγάλη πλευρά ἑνός τετραδίου εἶναι 26,6 cm καί ἡ μικρή 15 cm 8 mm. Νά βρεῖτε τή διαφορά τους.

35. Ἕνα φορτηγό αὐτοκίνητο ζυγίζει φορτωμένο 7 t 45 kg* καί ἄδειανό 3 t 600 kg*. Πόσο εἶναι τό φορτίο του;

36. Δύο παράλληλες εὐθεῖες τέμνονται ἀπό μιά ἄλλη, ὥστε μία ἀπό τίς γωνίες πού σχηματίζονται νά εἶναι 142° 25′. Νά βρεῖτε κάθε μία ἀπό τίς ἄλλες γωνίες.

37. Μιά γωνία εἶναι $\frac{11}{18}$ ὀρθῆς. Νά βρεῖτε τό μέτρο τῆς συμπληρωματικῆς καί τῆς παραπληρωματικῆς της σέ ὀρθές καί σέ μοῖρες.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

1. Ἄν Β καί Β′ εἶναι ὑποσύνολα ἑνός συνόλου Α τέτοια, ὥστε $B \cap B' = \varnothing$ καί $B \cup B' = A$, τότε τό Β′ λέγεται **συμπληρωματικό** τοῦ Β ὡς πρός τό Α.

2. **Διαφορά** $\alpha - \beta$ $(\alpha \geq \beta)$ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας τρίτος φυσικός γ τέτοιος, ὥστε $\beta + \gamma = \alpha$.

3. Κάθε ἰσότητα τῆς μορφῆς $x + 3 = 7$ λέγεται **ἐξίσωση**. Τό γράμμα x λέγεται **ἄγνωστος** τῆς ἐξισώσεως. Ἡ τιμή πού πρέπει νά βάλουμε στή θέση τοῦ x, γιά νά ἀληθεύει ἡ ἐξίσωση (ἐδῶ τό 4), λέγεται **λύση** ἤ **ρίζα** τῆς ἐξισώσεως.

4. Ἡ βασική ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως στό $\mathbb{N}$ εἶναι
$\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$, $\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$ $(\alpha \geq \beta$ καί $\beta \geq \gamma)$.

5. Γιά νά ἀφαιρέσουμε πίνακες, σχηματίζουμε ἕναν πίνακα μέ στοιχεῖα τίς διαφορές τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τῶν πινάκων (γιά νά μποροῦν νά ἀφαιρεθοῦν δύο πίνακες, πρέπει νά ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις).

6. Γιά νά ἀφαιρέσουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ἀποκόπτουμε ἀπό τό μεγαλύτερο (ἀρχίζοντας ἀπό τό ἕνα ἄκρο του) ἕνα τμῆμα ἴσο μέ τό μικρότερο. Τό τμῆμα πού μένει εἶναι ἡ διαφορά.
Μέ ὅμοιο τρόπο γίνεται ἡ ἀφαίρεση τόξων (τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων) καί γωνιῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

38. Νά βρεῖτε μέ δύο τρόπους τά ἐξαγόμενα:
i) $785 + (547 - 389)$, ii) $834 - (259 - 87)$, iii) $1847 - (843 + 549)$,
iv) $(50 - 30) + (85 - 34)$, v) $(956 + 245) - 250$.

39. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως: $285 - 145 + 739 - 600 - 59$.

40. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α) $17 - x = 12 - 5$, β) $14 = 18 - x$, γ) $156 - 28 - x = 85 - 47$.

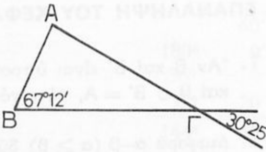
41. Ἄν $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & 7 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$, νά βρεῖτε τόν πίνακα $A - B$.

42. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως: $7{,}7 - 3{,}25 + 12{,}08 - 10{,}13$.

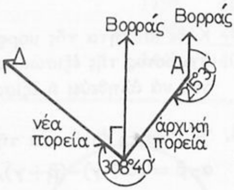
43. Ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου μία γωνία εἶναι $27^{o}\,18'\,40''$. Νά βρεῖτε τήν ἄλλη ὀξεία γωνία του.

44. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A} = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς, $\widehat{B} = \frac{3}{10}$ ὀρθῆς. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

45. Μέ τά στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τοῦ διπλανοῦ σχήματος νά ὑπολογίσετε τή γωνία του $\widehat{A}$.



46. Ἡ γωνία πορείας ἑνός πλοίου (ἤ ἀεροπλάνου) ὁρίζεται ἀπό τή διεύθυνση τοῦ Βορρᾶ καί τή διεύθυνση πρός τήν ὁποία κινεῖται τό πλοῖο. Τή μετρᾶμε ἀπό τό Βορρά κατά τή φορά πού κινοῦνται οἱ δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ. Μέ τά στοιχεῖα τοῦ διπλανοῦ σχήματος νά βρεῖτε κατά πόση γωνία θά στραφεῖ τό πλοῖο στό σημεῖο Γ ἀπό τήν ἀρχική του πορεία.



47. Στίς ἐξετάσεις ἑνός μικτοῦ γυμνασίου πῆραν μέρος: ἀπό τήν Α′ τάξη 28 ἀγόρια, 11 κορίτσια, ἀπό τή Β′ 19 ἀγ., 17 κορ. καί ἀπό τή Γ′ 18 ἀγ., 12 κορ.
Προβιβάστηκαν: ἀπό τήν Α′ 25 ἀγ., 10 κορ., ἀπό τή Β′ 14 ἀγ., 14 κορ. καί ἀπό τή Γ′ 15 ἀγ., 9 κορ. Νά πινακοποιήσετε τά δεδομένα καί νά βρεῖτε πόσα ἀγόρια καί πόσα κορίτσια ἀπό κάθε τάξη δέν προβιβάστηκαν.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

48. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:
i) $\alpha-\beta-\gamma$, ii) $\alpha-(\beta-\gamma)$, ὅταν $\alpha=349$, $\beta=180$, $\gamma=109$.

49. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α) $966-(502+x)=364$, β) $548-(45-x)=520$.

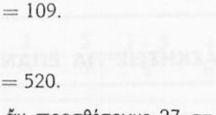
50. Ἡ διαφορά δύο ἀριθμῶν εἶναι 84. Πόση θά γίνει: α) ἄν προσθέσουμε 27 στό μειωτέο, β) ἄν ἀφαιρέσουμε 48 ἀπό τόν ἀφαιρετέο.

51. Ἡ διαφορά δύο ἀριθμῶν εἶναι 84. Πόση θά γίνει: α) ἄν προσθέσουμε 22 στό μειωτέο καί 17 στόν ἀφαιρετέο, β) ἄν ἀφαιρέσουμε 31 ἀπό τό μειωτέο καί 25 ἀπό τόν ἀφαιρετέο, γ) ἄν προσθέσουμε 20 στό μειωτέο καί ἀφαιρέσουμε 10 ἀπό τόν ἀφαιρετέο.

52. Δίνεται ἡ παράσταση $500-(\alpha+\beta)$, ὅπου $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ καί $\alpha+\beta<500$. Νά κάνετε ἕνα πρόβλημα, πού ἡ λύση του νά ἀνάγεται στήν παράσταση αὐτή.

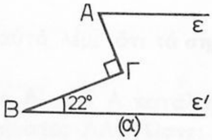
53. Ξέρουμε ὅτι $\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$ (παραδ. 4 § 8.5). Τά τρία γράμματα παριστάνουν τούς ἀριθμούς 2, 6, 9, ἀλλά δέν ξέρουμε ποιόν παριστάνει κάθε γράμμα. Νά βρεῖτε ποιές τιμές μπορεῖ νά πάρει κάθε γράμμα.

54. Στό διπλανό σχῆμα οἱ ἡμιευθεῖες Βε καί Γε′ εἶναι παράλληλες. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ $\widehat{A}$.



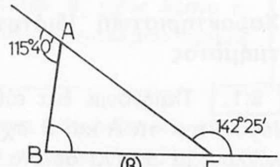
55. Σέ ἕνα λεωφορεῖο εἶναι Ἕλληνες καί ξένοι, ἄνδρες, γυναῖκες, ἀγόρια, κορίτσια. Ἕνας ἐπιβάτης μετράει: 9 ἀγόρια, 9 Ἑλληνόπουλα, 15 ἄνδρες, 5 ξένα ἀγόρια, 23 πρόσωπα Ἕλληνες, 12 ἄνδρες Ἕλληνες, 7 ξένες (γυναῖκες καί κορίτσια), 8 ξένα παιδιά. Πόσοι ἦταν στό λεωφορεῖο ἀπό κάθε κατηγορία;

56. Στό διπλανό σχῆμα οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ εἶναι παράλληλες καί ἡ $\widehat{\Gamma}$ ὀρθή. Νά βρεῖτε τή γωνία $\widehat{A}$.



(α)

57. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία $\widehat{B}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα πού ἀναγράφονται στό διπλανό σχῆμα β.



(β)

58. Στό τετράγωνο (α) ἔχουν τοποθετηθεῖ στήν τύχη οἱ ἀριθμοί ἀπό τό 9 μέχρι τό 17. Νά τούς ἀλλάξετε θέση, ὥστε τό τετράγωνο νά γίνει μαγικό.

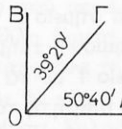
59. Στό τετράγωνο (β) νά συμπληρωθοῦν τά κενά, ὥστε τό τετράγωνο νά γίνει μαγικό.

9	11	10
15	16	12
17	14	13

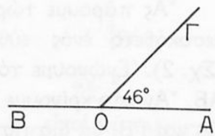
(α)

9	2	
5		3

(β)



(γ)



(δ)

60. Στό σχῆμα (γ) οἱ γωνίες $\widehat{A O \Gamma}$ καί $\widehat{B O \Gamma}$ εἶναι συμπληρωματικές. Νά τίς διχοτομήσετε καί νά ὑπολογίσετε τή γωνία, πού σχηματίζουν οἱ διχοτόμοι τους.

61. Νά κάνετε τό ἴδιο στό σχῆμα (δ) πού οἱ γωνίες $\widehat{A O \Gamma}$ καί $\widehat{B O \Gamma}$ εἶναι παραπληρωματικές.

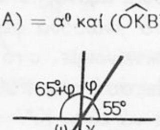
62. Σέ μιά ἐκδρομή χρησιμοποιήθηκαν 3 λεωφορεῖα. Τό α′ εἶχε 42 θέσεις, ἐνῶ τοῦ β′ οἱ θέσεις ἦταν λιγότερες κατά 7 ἀπό τό α′. Τό γ′ λεωφορεῖο εἶχε 4 θέσεις περισσότερες ἀπό τό β′, ἀλλά σ' αὐτό ἔμειναν ἄδειες 8 θέσεις. Πόσοι ἦταν οἱ ἐκδρομεῖς;

63. Σέ μιά ἡμιευθεία Οx παίρνουμε τά σημεῖα Α καί Β, ὥστε $(OA) = 5$ cm καί $(OB) = 9$ cm καί τό μέσο Μ τοῦ τμήματος ΑΒ. Νά ὑπολογίσετε τό μῆκος τοῦ τμήματος ΟΜ. Ὑπολογίστε ἐπίσης τό ΟΜ, ὅταν $(OA) = \alpha$ cm καί $(OB) = \beta$ cm.

64. Σέ ἕναν κύκλο Κ παίρνουμε τά σημεῖα Ο, Α, Β, ὥστε $(\overset{\frown}{OA}) = \alpha^0$ καί $(\overset{\frown}{OAB}) = \beta^0$ καί τό μέσο Μ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Νά ὑπολογίσετε τό μέτρο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{OAM}$.

65. Ἀπό ἕνα σημεῖο Κ φέρνουμε τίς ἡμιευθεῖες ΚΟ, ΚΑ, ΚΒ, ὥστε ἡ ΚΑ νά εἶναι μέσα στή γωνία $\widehat{OKB}$ καί τή διχοτόμο ΚΜ τῆς $\widehat{AKB}$. Ἄν εἶναι $(\widehat{OKA}) = \alpha^0$ καί $(\widehat{OKB}) = \beta^0$, νά ὑπολογίσετε τό μέτρο τῆς $\widehat{OKM}$.

66. Στό διπλανό σχῆμα νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{x}, \widehat{\psi}, \widehat{\omega}$, καί $\widehat{\varphi}$.

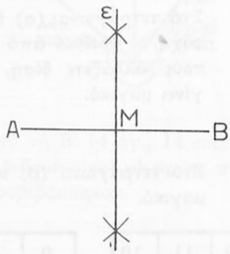


9° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος

9.1. Παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Μέ κέντρα τά Α καί Β σχηματίζουμε δυό **ἴσους** κύκλους μέ ἀκτίνα ἀρκετά μεγάλη, ὥστε οἱ κύκλοι νά τέμνονται (Σχ. 1). Στήν §6.11 ἐφ. 2 εἴδαμε ὅτι ἡ εὐθεία ε, πού περιέχει τήν κοινή χορδή τῶν δύο κύκλων, εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ.

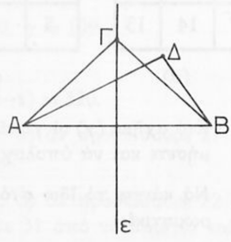


Σχ. 1

Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα σημεῖο Γ πάνω στή μεσοκάθετο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ (Σχ. 2). Ἑνώνουμε τό σημεῖο Γ μέ τά ἄκρα τοῦ ΑΒ. Ἄν συγκρίνουμε μέ τό διαβήτη τά τμήματα ΓΑ καί ΓΒ, θά διαπιστώσουμε ὅτι εἶναι

$$ΓΑ = ΓΒ$$

Παίρνουμε καί ἕνα σημεῖο Δ ἔξω ἀπό τή μεσοκάθετο ε τοῦ ΑΒ. Μέ τό διαβήτη διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι εἶναι $ΔΑ > ΔΒ$, δηλαδή $ΔΑ \neq ΔΒ$.



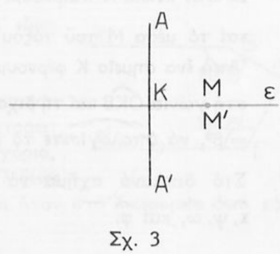
Σχ. 2

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

> • Τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος καί μόνο αὐτά ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τά ἄκρα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος.

Σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα

9.2. Ἔχουμε μιά εὐθεία ε, πού τήν ὀνομάζουμε **ἄξονα**, καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτή. Μέ τό γνώμονα φέρνουμε τήν $ΑΚ \perp ε$ καί τήν προεκτείνουμε στό ἄλλο ἡμιεπίπεδο. Στήν προέκτασή της παίρνουμε τό σημεῖο Α' ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΚΑ' = ΚΑ. Τό σημεῖο Α' τό λέμε **συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τόν ἄξονα ε**. Εἶναι



Σχ. 3

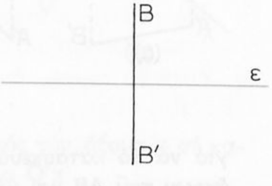
φανερό ὅτι τό συμμετρικό τοῦ Α′ εἶναι τό Α. Γι᾽ αὐτό λέμε ὅτι **τά σημεῖα Α καί Α′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα ε.**

᾽Από τόν τρόπο πού βρήκαμε τό συμμετρικό Α′ τοῦ Α καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ ἄξονας ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΑ′. Ὥστε:

> Δυό σημεῖα Α καί Α′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα ε, ὅταν ἡ εὐθεία ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΑ′.

Εἶναι φανερό ὅτι ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἄξονα ε συμπίπτουν μέ τά συμμετρικά τους. Ἔτσι π.χ. τό συμμετρικό Μ′ ἑνός σημείου Μ τοῦ ἄξονα (Σχ.3) εἶναι τό ἴδιο τό Μ.

Τό συμμετρικό ἑνός σημείου Β ὡς πρός ἄξονα ε τό βρίσκουμε καί μέ ἕναν ἄλλο πρακτικό τρόπο. Διπλώνουμε τό χαρτί γύρω ἀπό τήν εὐθεία ε, ὥστε τό ἡμιεπίπεδο πού περιέχει τό σημεῖο Β νά πέσει στό ἄλλο ἡμιεπίπεδο (Σχ. 4). Σημαδεύουμε μέ μιά καρφίτσα τή θέση τοῦ Β καί μετά ξεδιπλώνουμε τό χαρτί.



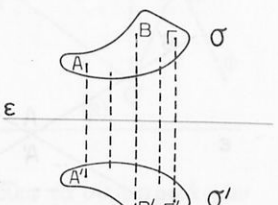
Σχ. 4

Τό σημάδι πού ἄφησε ἡ καρφίτσα, δηλαδή τό Β′, εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Β ὡς πρός τόν ἄξονα ε. Πραγματικά, ὅπως διαπιστώνουμε εὔκολα μέ τό γνώμονα καί τό διαβήτη, ἡ ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΒ′ καί συνεπῶς τά σημεῖα Β καί Β′ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα ε.

Συμμετρικό σχήματος ὡς πρός ἄξονα

9.3. Ἄς πάρουμε μιά εὐθεία ε καί ἕνα σχῆμα σ (Σχ. 5). Τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων τοῦ σ ὡς πρός ἄξονα ε ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο σχῆμα σ′, πού τό λέμε **συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τόν ἄξονα ε.**

Εἶναι φανερό ὅτι τό συμμετρικό τοῦ σχήματος σ′ ὡς πρός τόν ἄξονα ε εἶναι τό σ, γι᾽ αὐτό λέμε ὅτι τά σχήματα σ καί σ′ εἶναι **συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα ε.**



Σχ. 5

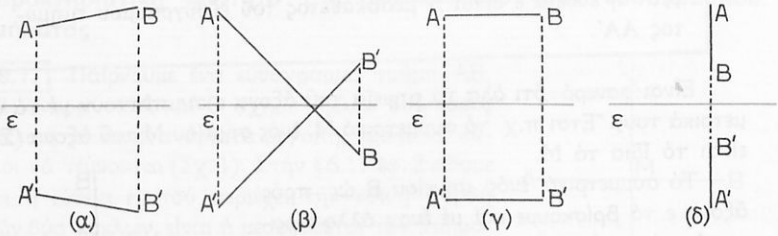
Ἄν διπλώσουμε τώρα τό χαρτί γύρω ἀπό τήν εὐθεία ε ἔτσι, ὥστε τό ἕνα ἡμιεπίπεδο νά ἐφαρμόσει στό ἄλλο, κάθε σημεῖο Α,Β,Γ,. . . τοῦ σ θά πέσει στό συμμετρικό του Α′,Β′,Γ′,. . ., πού εἶναι σημεῖο τοῦ σ′. Συνεπῶς τά σχήματα σ καί σ′ θά ἐφαρμόσουν καί ἑπομένως εἶναι ἴσα. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:

> Δύο σχήματα συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἴσα.

Συμμετρικά διάφορων ἁπλῶν σχημάτων

9.4. **I. Τό συμμετρικό εὐθύγραμμου τμήματος.**

Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε παραπάνω τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος AB ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἕνα ἴσο εὐθύγραμμο τμῆμα. Συνεπῶς



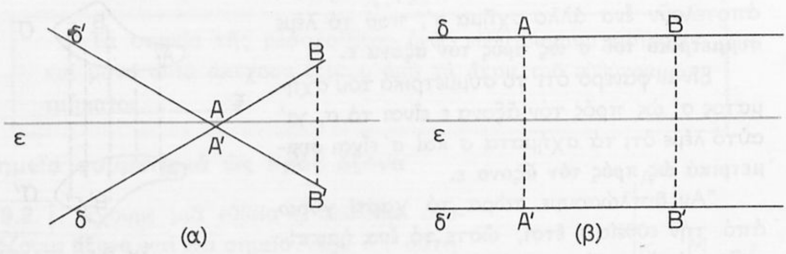
Σχ 6

γιά νά τό κατασκευάσουμε, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά A′, B′ τῶν ἄκρων τοῦ AB καί νά τά ἑνώσουμε.

Στά σχήματα 6 (α), (β), (γ), (δ) τό A′B′ εἶναι τό συμμετρικό τοῦ AB σέ τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις.

II. Τό συμμετρικό εὐθείας.

Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας δ ὡς πρός ἄξονα ε εἶναι πάλι εὐθεία. Γιά νά τήν ὁρίσουμε, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά δύο σημείων της. Ἡ εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τά σημεῖα αὐτά εἶναι ἡ συμμετρική τῆς δ ὡς πρός τόν ἄξονα.



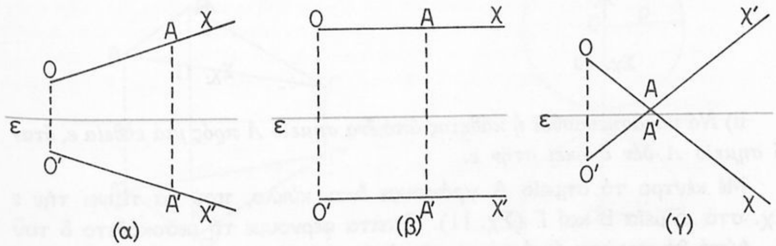
Σχ. 7

Τό συμμετρικό τῆς εὐθείας δ σέ καθένα ἀπό τά παραπάνω σχήματα εἶναι ἡ εὐθεία δ′. Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν ἡ εὐθεία δ τέμνει τόν ἄξονα συμμετρίας ε σ'ἕνα σημεῖο A (Σχ. 7α), τότε καί ἡ συμμετρική της δ′ περνᾶ ἀπό τό A.

Ἄν ἡ δ εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα (Σχ. 7 β), τότε καί ἡ συμμετρική της δ′ εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα.

III. Τό συμμετρικό ἡμιευθείας.

Τό συμμετρικό μιᾶς ἡμιευθείας Ox ὡς πρός ἄξονα ε εἶναι πάλι ἡμιευθεία. Συνεπῶς γιά νά τήν κατασκευάσουμε, ἀρκεῖ νά βροῦμε τό συμμετρικό τῆς ἀρχῆς τῆς Ox καί τό συμμετρικό ἑνός ὁποιουδήποτε ἄλλου σημείου της.

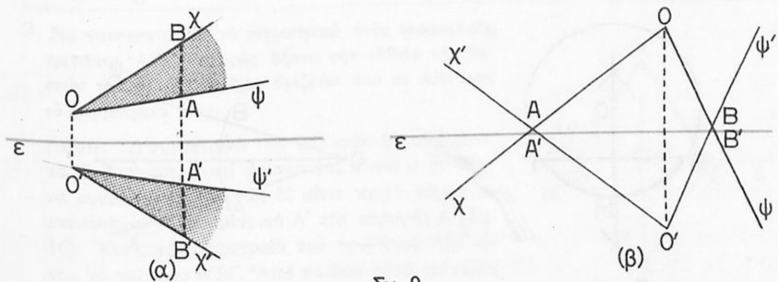


Σχ. 8

Ἔτσι τό συμμετρικό τῆς ἡμιευθείας Ox ὡς πρός τόν ἄξονα ε σέ καθένα ἀπό τά παραπάνω σχήματα εἶναι ἡ ἡμιευθεία O′x′.

IV. Τό συμμετρικό γωνίας.

Τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}\psi$ ὡς πρός ἄξονα ε εἶναι μία γωνία ἴση



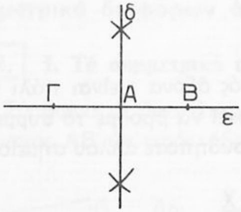
Σχ. 9

μέ αὐτή. Γιά νά τήν κατασκευάσουμε, ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά τῶν πλευρῶν τῆς $x\widehat{O}\psi$ (Σχ. 9).

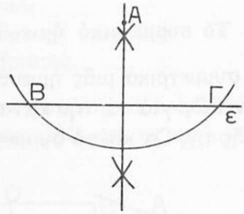
Κατασκευές μέ κανόνα καί διαβήτη

9.5. i) *Νά κατασκευασθεῖ ἡ κάθετος σέ ἕνα σημεῖο A μιᾶς εὐθείας ε.*

Παίρνουμε μέ τό διαβήτη στήν ε ἀπό τό ἕνα καί ἀπό τό ἄλλο μέρος τοῦ Α δυό τμήματα ΑΒ = ΑΓ (Σχ. 10). Ἔπειτα κατασκευάζουμε ὅπως μάθαμε (§ 9.1) τή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ.



Σχ. 10



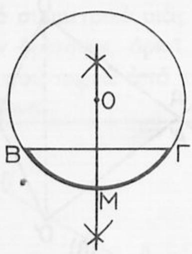
Σχ. 11

ii) *Νά κατασκευασθεῖ ἡ κάθετος ἀπό ἕνα σημεῖο Α πρός μιά εὐθεία ε, ὅταν τό σημεῖο Α δέν ἀνήκει στήν ε.*

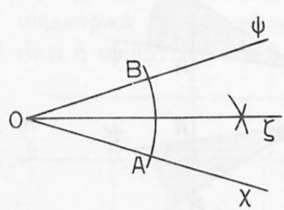
Μέ κέντρο τό σημεῖο Α γράφουμε ἕναν κύκλο, πού νά τέμνει τήν ε π.χ. στά σημεῖα Β καί Γ (Σχ. 11). Ἔπειτα φέρνουμε τή μεσοκάθετο δ τοῦ ΒΓ. Αὐτή θά περάσει ἀπό τό σημεῖο Α (γιατί τό Α ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά Β καί Γ, § 9.1).

iii) *Νά διχοτομήσετε ἕνα τόξο κύκλου* $\widehat{ΒΓ}$.

Γράφουμε τή χορδή τοῦ τόξου καί μετά φέρνουμε τή μεσοκάθετο τῆς χορδῆς (Σχ. 12). Ἡ μεσοκάθετος αὐτή τέμνει τό τόξο $\widehat{ΒΓ}$ σ' ἕνα σημεῖο Μ, πού εἶναι τό μέσο του. Πραγματικά, μέ τό διαβήτη διαπιστώνουμε ὅτι χορδή ΒΜ = χορδή ΜΓ, ὁπότε εἶναι καί $\widehat{ΒΜ} = \widehat{ΜΓ}$ (§ 4.24).



Σχ. 12



Σχ. 13

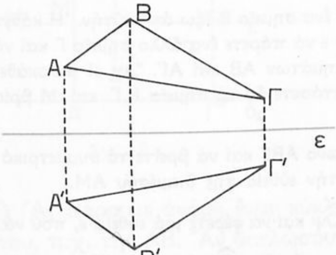
iv) *Νά κατασκευασθεῖ ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας* $x\widehat{O}ψ$.

Κάνουμε τή γωνία ἐπίκεντρη γράφοντας ἕναν κύκλο μέ κέντρο τό Ο. Ὁ κύκλος αὐτός τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας στά σημεῖα Α καί Β (Σχ. 13). Ἔπειτα φέρνουμε τή μεσοκάθετο τῆς χορδῆς ΑΒ. Αὐτή περνᾶ ἀπό τήν κορυφή Ο (γιατί ΟΑ = ΟΒ) καί διχοτομεῖ τή γωνία (ἀφοῦ διχοτομεῖ τό ἀντίστοιχο τόξο της, βλ. § 4.24).

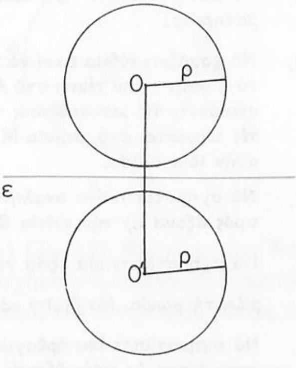
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά κατασκευασθεῖ τό συμμετρικό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα ε.**

Λύση: Γιά νά κατασκευάσουμε τό συμμετρικό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν του ὡς πρός ἄξονα ε καί τά ἑνώνουμε (Σχ. 14).



Σχ. 14



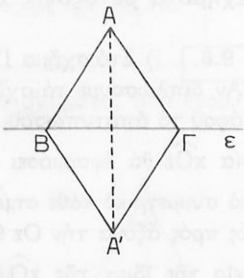
Σχ. 15

2. **Νά κατασκευασθεῖ τό συμμετρικό ἑνός κύκλου (Ο,ρ) ὡς πρός ἄξονα ε.**

Λύση: Τό συμμετρικό τοῦ κύκλου (Ο, ρ) ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἕνας ἴσος κύκλος. Γιά νά τόν κατασκευάσουμε λοιπόν, βρίσκουμε τό συμμετρικό Ο′ τοῦ κέντρου Ο ὡς πρός τόν ἄξονα ε καί ἔπειτα γράφουμε τόν κύκλο (Ο′, ρ) (Σχ. 15).

3. **Νά κατασκευασθεῖ τό συμμετρικό ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία τῆς βάσεώς του ΒΓ. Τί σχῆμα ὁρίζεται ἀπό τό ΑΒΓ καί τό συμμετρικό του;**

Λύση: Τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν Β καί Γ εἶναι τά ἴδια σημεῖα, γιατί βρίσκονται πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας. Συνεπῶς δέ μένει παρά νά κατασκευάσουμε τό συμμετρικό Α′ τῆς κορυφῆς Α (Σχ. 16). Ἔτσι, τό συμμετρικό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τό τρίγωνο Α′ΒΓ. Ἀπό τά δύο αὐτά τρίγωνα σχηματίζεται τό τετράπλευρο ΑΒΑ′Γ πού εἶναι ρόμβος, γιατί ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες.



Σχ. 16

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ = 4 cm καί νά φέρετε τή μεσοκάθετό του. Κατόπι νά κατασκευάσετε ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ = 3 cm, πού νά ἀπέχει ἀπό τό ΑΒ 2 cm καί νά ἔχει τήν ἴδια μεσοκάθετο.

2. Στό σχῆμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά φέρετε τά τμήματα ΑΓ καί ΒΔ καί νά τά συγκρίνετε. Νά συγκρίνετε ἀκόμη τά τμήματα ΑΔ καί ΒΓ.

3. Σέ μιά εὐθεία ε νά πάρετε τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε ὥστε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = 15 mm. Στά σημεῖα αὐτά νά φέρετε κάθετες εὐθεῖες στήν ε. Νά βρεῖτε ποιές ἀπ' τίς κάθετες αὐτές εἶναι μεσοπαράλληλες ταινιῶν.

4. Μέ κανόνα καί διαβήτη νά κατασκευάσετε τά ὕψη ἑνός ὀξυγώνιου καί ἑνός ἀμβλυγώνιου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

5. Νά κατασκευάσετε τίς διαμέσους ἑνός τριγώνου μέ κανόνα καί διαβήτη. Τί παρατηρεῖτε;

6. Νά χαράξετε εὐθεία ε καί νά πάρετε ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπ' αὐτήν. Ἡ κάθετος ἀπό τό Β στήν ε τήν τέμνει στό Α. Στήν ε νά πάρετε ἕνα ἄλλο σημεῖο Γ καί νά κατασκευάσετε τίς μεσοκαθέτους τῶν τμημάτων ΑΒ καί ΑΓ. Ἄν οἱ μεσοκάθετοι αὐτές τέμνονται στό σημεῖο Μ, νά ἐξετάσετε ἄν τά σημεῖα Β,Γ καί Μ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

7. Νά σχηματίσετε ἕνα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ καί νά βρεῖτε τό συμμετρικό του ὡς πρός ἄξονα α) τήν εὐθεία ΒΓ, β) τήν εὐθεία τῆς διαμέσου ΑΜ.

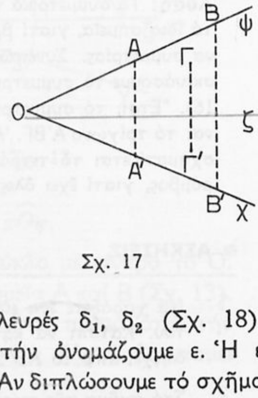
8. Νά σχηματίσετε μιά ὀξεία γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί νά φέρετε μιά εὐθεία ε, πού νά μή χωρίζει τή γωνία. Νά βρεῖτε τό συμμετρικό τῆς $x\widehat{O}\psi$ ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία ε.

9. Νά σχηματίσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) καί νά βρεῖτε τό συμμετρικό του ὡς πρός ἄξονα: α) τήν εὐθεία ΒΓ, β) τήν εὐθεία ΑΒ, γ) τήν εὐθεία τοῦ ὕψους του ΑΔ.

10. Νά γράψετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καί τούς κύκλους (Α, ΑΒ) καί (Β, ΑΒ), οἱ ὁποῖοι τέμνονται στά σημεῖα Γ καί Δ. Κατόπι μέ κέντρα πάλι τά Α καί Β νά γράψετε δύο ἄλλους ἴσους κύκλους, πού νά τέμνονται στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά βρεῖτε τή θέση τῶν σημείων Γ,Δ,Ε καί Ζ ὡς πρός τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ.

Σχήματα μέ ἄξονες συμμετρίας

9.6. i) Στό σχῆμα 17 ἔχουμε μιά γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί τή διχοτόμο της Oz. Ἄν διπλώσουμε τό σχῆμα γύρω ἀπό τήν Oz (ἀφοῦ τό ἀποτυπώσουμε σέ διαφανές), ἡ γωνία $x\widehat{O}z$ θά ἐφαρμόσει μέ τή $z\widehat{O}\psi$. Συνεπῶς τό συμμετρικό κάθε σημείου τῆς γωνίας $x\widehat{O}\psi$ ὡς πρός ἄξονα τήν Oz θά εἶναι πάλι ἕνα σημεῖο τῆς ἴδιας τῆς $x\widehat{O}\psi$. Π.χ. τό συμμετρικό τοῦ Α εἶναι τό Α', τοῦ Β τό Β', τοῦ Γ τό Γ' κ.λ.π. Γι' αὐτό λέμε πώς **ἡ εὐθεία Oz εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς γωνίας $x\widehat{O}\psi$.**

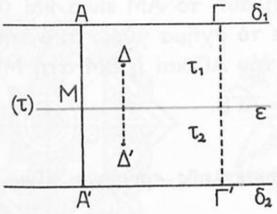


Σχ. 17

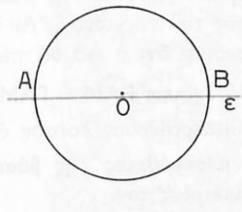
ii) Ἄς πάρουμε τώρα μιά ταινία τ μέ πλευρές δ_1, δ_2 (Σχ. 18). Φέρνουμε τή μεσοπαράλληλο τῆς ταινίας καί τήν ὀνομάζουμε ε. Ἡ ε χωρίζει τήν ταινία τ σέ δύο ταινίες, τίς τ_1 καί τ_2. Ἄν διπλώσουμε τό σχῆμα γύρω ἀπό τή μεσοπαράλληλο ε, οἱ δύο ταινίες τ_1 καί τ_2 ἐφαρμόζουν.

Συνεπῶς τό συμμετρικό κάθε σημείου τῆς ταινίας τ ὡς πρός ἄξονα τή μεσοπαράλληλό της ε εἶναι σημεῖο τῆς ταινίας τ.

Γι' αὐτό λέμε ὅτι **ἡ εὐθεία ε εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς ταινίας τ.**



Σχ. 18



Σχ. 19

iii) Ἄς πάρουμε ἀκόμη ἕναν κύκλο (Ο,ρ) (Σχ. 19). Φέρνουμε μιά διάμετρό του, π.χ. τήν ΑΒ. Ἄν διπλώσουμε τό σχῆμα γύρω ἀπό τή διάμετρο ΑΒ, τά δυό μέρη στά ὁποῖα χωρίστηκε ὁ κύκλος καί ὁ κυκλικός δίσκος θά ἐφαρμόσουν.

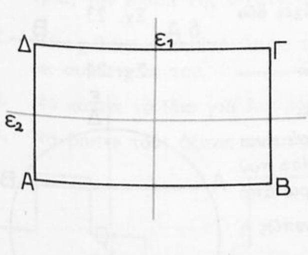
Συνεπῶς **ἡ εὐθεία πού ὁρίζεται ἀπό τή διάμετρο ΑΒ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ κύκλου καί τοῦ κυκλικοῦ δίσκου.**

Καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ κύκλος καί ὁ κυκλικός δίσκος ἔχουν ἄπειρους ἄξονες συμμετρίας.

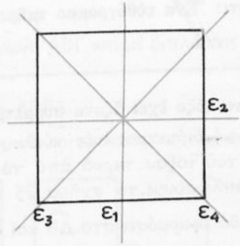
Γενικά:

> Μιά εὐθεία ε λέγεται ἄξονας συμμετρίας ἑνός σχήματος, ὅταν τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ σχήματος ὡς πρός ἄξονα τήν ε εἶναι πάλι σημεῖο τοῦ ἴδιου σχήματος.

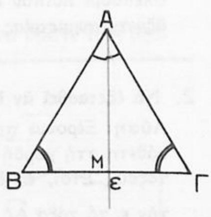
Παρακάτω βλέπουμε ἀκόμη μερικά γεωμετρικά σχήματα, πού ἔχουν ἄξονες συμμετρίας.



Σχ. 20



Σχ. 21



Σχ. 22

Στό σχῆμα 20 βλέπουμε πώς ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει 2 ἄξονες συμμετρίας, τίς μεσοπαραλλήλους τῶν ταινιῶν ἀπό τίς ὁποῖες ὁρίζεται. Στό σχῆμα 21 ἔχουμε ἕνα τετράγωνο. Τό τετράγωνο ἔχει 4 ἄξονες συμμετρίας, τίς 2 μεσοπαραλλήλους τῶν ταινιῶν καί τίς 2 διαγωνίους του πού εἶναι καί διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.

Στό σχῆμα 22 ἔχουμε ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Ἡ ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΒΓ. Δηλαδή τό ΑΜ εἶναι καί ὕψος καί διάμεσος τοῦ τριγώνου. Ἄν διπλώσουμε τό σχῆμα γύρω ἀπό τήν ε, διαπιστώνουμε ὅτι ἡ ΑΒ θά πέσει πάνω στήν ΑΓ καί ἡ ΒΜ στή ΜΓ. Συνεπῶς θά ἔχουμε $\widehat{ΒΑΜ} = \widehat{ΓΑΜ}$ καί $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

- **Ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἄξονας συμμετρίας του.**
- **Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἀκόμη καί ὕψος καί διάμεσος.**
- **Οἱ γωνίες τῆς βάσεως ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσες.**

Συμπεραίνουμε ἀκόμη ὅτι:

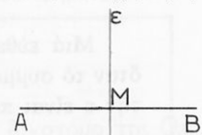
- **Ὅταν δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσα, τά ἴχνη τους ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό ἴχνος τῆς καθέτου.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

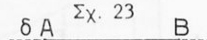
1. Νά βρεῖτε τούς ἄξονες συμμετρίας, πού ἔχει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα.

Λύση: Φέρνουμε τή μεσοκάθετο ε τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἄν διπλώσουμε τό σχῆμα γύρω ἀπό τήν ε (ἀφοῦ τό ἀποτυπώσουμε σέ διαφανές), θά δοῦμε ὅτι τό τμῆμα ΑΜ θά ἐφαρμόσει στό τμῆμα ΜΒ (Σχ. 23). Αὐτό σημαίνει πώς τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ ΑΒ ὡς πρός τήν ε εἶναι πάλι σημεῖο τοῦ ΑΒ. Συνεπῶς ἡ ε εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ ΑΒ. Ἄν πάρουμε ὡς ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία δ στήν ὁποία περιέχεται τό ΑΒ (Σχ. 24), τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ ΑΒ εἶναι τό ἴδιο σημεῖο. Ἑπομένως καί ἡ εὐθεία δ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ ΑΒ.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι: **Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει δύο ἄξονες συμμετρίας.**



Σχ. 23

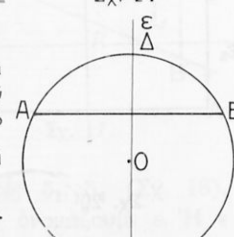


Σχ. 24

2. Νά ἐξετασθεῖ ἄν ἕνα τόξο ἔχει ἄξονα συμμετρίας.

Λύση: Ξέρουμε πώς ἡ διάμετρος ἑνός κύκλου πού εἶναι κάθετη στή χορδή τοῦ τόξου περνᾶ ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου. Ἔτσι, ἄν διπλώσουμε τό σχῆμα 25 γύρω ἀπό τήν ε, τό τόξο $\overset{\frown}{ΑΔ}$ θά ἐφαρμόσει στό $\overset{\frown}{ΔΒ}$ καί συνεπῶς ἡ εὐθεία ε εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$.

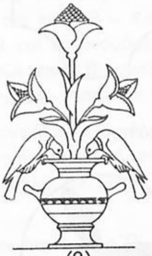
Βλέπουμε λοιπόν ὅτι: **Κάθε τόξο ἔχει ἕναν ἄξονα συμμετρίας** (τήν εὐθεία πού ὁρίζεται ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου καί τό μέσο τοῦ τόξου).



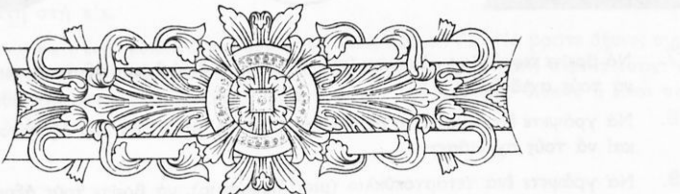
Σχ. 25

Στά παρακάτω σχήματα (β), (γ), (δ) νά φέρετε τούς ἄξονες συμμετρίας, ὅπως ἔχει γίνει στό σχῆμα (α).


(α)


(β)


(γ)


(δ)

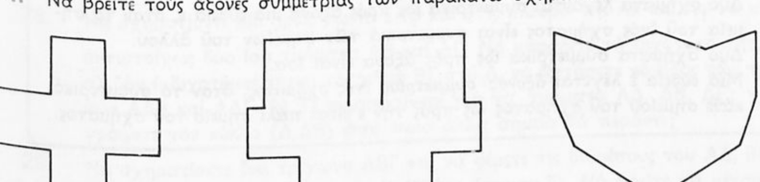
● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά σχηματίσετε γωνία $x\widehat{A}y = 60^0$ καί νά πάρετε στίς πλευρές της δυό ἴσα τμήματα ΑΒ καί ΑΓ. Νά χαράξετε τή διχοτόμο τῆς $x\widehat{A}y$ (μέ κανόνα καί διαβήτη). α) Ἄν ἡ διχοτόμος τέμνει τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ στό Μ, νά συγκρίνετε τά τμήματα ΜΒ καί ΜΓ. β) Νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. γ) Νά βρεῖτε τό συμμετρικό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία τῆς διχοτόμου.

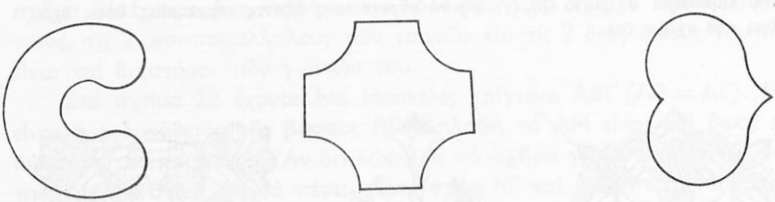
2. Νά σχεδιάσετε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ καί μέ διπλώσεις νά βρεῖτε τούς ἄξονες συμμετρίας του.

13. Νά κάνετε τό ἴδιο γιά ἕνα ρόμβο ΑΒΓΔ.

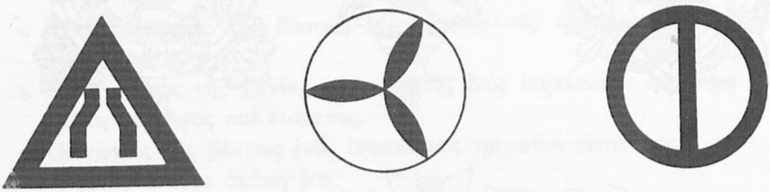
14. Νά βρεῖτε τούς ἄξονες συμμετρίας τῶν παρακάτω σχημάτων.



15. Ὁμοίως τῶν σχημάτων.



16. Ὁμοίως τῶν παρακάτω σχημάτων.



17. Νά βρεῖτε κεφαλαῖα γράμματα (τοῦ τύπου), πού νά ἔχουν ἄξονες συμμετρίας καί νά τούς σχεδιάσετε.

18. Νά γράψετε ἕνα ἡμικύκλιο μέ διάμετρο AB, νά βρεῖτε ἄν ἔχει ἄξονες συμμετρίας καί νά τούς σχεδιάσετε.

19. Νά γράψετε ἕνα τεταρτοκύκλιο (μισό ἡμικύκλιο), νά βρεῖτε τούς ἄξονες συμμετρίας του καί νά τούς σχεδιάσετε.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9

1. Γιά νά χαράξουμε τή **μεσοκάθετο** ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος AB, γράφουμε δύο ἴσους κύκλους μέ κέντρα τά A καί B πού νά τέμνονται. Ἡ *κοινή χορδή* τους ὁρίζει τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος AB.
Μέ παρόμοιο τρόπο χαράζουμε καί τήν κάθετο σέ μιά εὐθεία ε ἀπό ἕνα σημεῖο A πού βρίσκεται στήν ε ἤ εἶναι ἔξω ἀπό τήν ε, καθώς καί τή διχοτόμο μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}\psi$.
Τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος καί μόνο αὐτά ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τά ἄκρα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος.

2. Δύο σημεῖα A καί A′ λέγονται **συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα** μιά εὐθεία ε, ὅταν ἡ ε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AA′.
Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα μιά εὐθεία ε, ὅταν τά σημεῖα τοῦ ἑνός σχήματος εἶναι συμμετρικά τῶν σημείων τοῦ ἄλλου.
Δύο σχήματα συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἴσα.
Μιά εὐθεία ε λέγεται *ἄξονας συμμετρίας ἑνός σχήματος*, ὅταν τό συμμετρικό κάθε σημείου τοῦ σχήματος ὡς πρός τήν ε εἶναι πάλι σημεῖο τοῦ σχήματος.

20. Νά χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί μιά εὐθεία ε. Νά βρεῖτε στήν ε ἕνα σημεῖο, πού νά ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά Α καί Β.

21. Νά γράψετε μιά γωνία $x\widehat{O}\psi$ καί στίς πλευρές της Οx καί Οψ νά πάρετε ἀντιστοίχως τμήματα ΟΑ = 3 cm καί ΟΒ = 4 cm. α) Νά χαράξετε τίς μεσοκαθέτους τῶν τμημάτων ΟΑ καί ΟΒ καί νά ὀνομάσετε Κ τό σημεῖο τομῆς τους. Νά συγκρίνετε τά τμήματα ΚΟ, ΚΑ καί ΚΒ μεταξύ τους. β) Νά γράψετε τόν κύκλο (Κ, ΚΟ) καί νά δικαιολογήσετε γιατί θά περάσει ἀπό τά Α καί Β.

22. Νά σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί νά χαράξετε τίς μεσοκαθέτους τῶν τριῶν πλευρῶν του. Νά δικαιολογήσετε ὅτι οἱ μεσοκάθετοι διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο. Νά γράψετε τόν κύκλο (Ο, ΟΑ). Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας.

23. Σέ μιά εὐθεία x′x νά πάρετε ἕνα σημεῖο Ο. Στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρός τή x′x νά σχηματίσετε δύο ἴσες γωνίες $x'\widehat{O}\psi'$ καί $x\widehat{O}\psi$. Νά χαράξετε τή διχοτόμο τῆς $\psi'\widehat{O}\psi$ (μέ κανόνα καί διαβήτη) καί νά δικαιολογήσετε γιατί ἡ διχοτόμος εἶναι κάθετη στή x′x.

24. Νά γράψετε ἕναν κύκλο Ο καί δύο ἴσες χορδές ΑΒ καί ΓΔ. Νά βρεῖτε ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος καί νά τούς χαράξετε. (Ὑπάρχουν τρεῖς περιπτώσεις: οἱ χορδές τέμνονται στόν κυκλικό δίσκο ἤ ἐκτός τοῦ κυκλικοῦ δίσκου ἤ εἶναι παράλληλες).

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

25. Νά σχηματίσετε γωνία $x\widehat{O}\psi = 40^0$. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς πλευρᾶς Οx νά φέρετε τήν κάθετο στήν Οx, ἡ ὁποία τέμνει τήν Οψ στό Β. Ἀπό τό Β νά φέρετε τήν κάθετο στήν Οψ, ἡ ὁποία τέμνει τήν Οx στό Γ. Νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. (Ἡ χάραξη τῶν καθέτων νά γίνει μέ κανόνα καί διαβήτη).

26. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A} = 38^0$ καί $\widehat{B} = 76^0$. Νά χαράξετε (μέ κανόνα καί διαβήτη) τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό σημεῖο Ο. α) Νά ὑπολογίσετε τή γωνία $B\widehat{O}\Gamma$. β) Νά βρεῖτε τί σχέση ἔχει ἡ $B\widehat{O}\Gamma$ μέ τήν $\widehat{A}$.

27. Νά γράψετε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ=3 cm καί νά τό χωρίσετε σέ τρία ἴσα μέρη μέ τά σημεῖα Δ καί Ε. Νά σχηματίσετε τή γωνία $B\widehat{A}\Gamma = 45^0$. Μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία ΑΓ νά βρεῖτε τό συμμετρικό τοῦ ΑΒ. Ἀκόμη νά βρεῖτε τά συμμετρικά Δ′, Ε′ τῶν Δ καί Ε καί νά συγκρίνετε τά τμήματα ΑΔ′,Δ′Ε′ καί Ε′Β′.

28. Νά σχηματίσετε μία ὀρθή γωνία $x\widehat{A}\psi$ καί στίς πλευρές της Αx καί Αψ νά πάρετε ἀντιστοίχως δύο ἴσα τμήματα ΑΒ καί ΑΓ. Νά χαράξετε τή διχοτόμο τῆς $x\widehat{A}\psi$. α) Ἄν ἡ διχοτόμος τέμνει τό τμῆμα ΒΓ στό Δ, νά ἐξετάσετε τό εἶδος τῶν τριγώνων ΑΔΒ καί ΑΔΓ. β) Τί συμπεραίνετε γιά τά τμήματα ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ; γ) Ἄν γράψετε τόν κύκλο (Δ,ΔΒ) ἀπό ποιά ἄλλα σημεῖα θά περάσει;

29. Νά σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί νά φέρετε τίς διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό σημεῖο Κ (βλέπε ἄσκηση 5). Νά βρεῖτε τά μέτρα: τῆς

διαμέσου ΑΔ μέ μονάδα μετρήσεως τό ΚΔ, τῆς διαμέσου ΒΕ μέ μονάδα τό ΚΕ καί τῆς διαμέσου ΓΖ μέ μονάδα τό ΚΖ. Τί παρατηρεῖτε; Νά διατυπώσετε τό σχετικό συμπέρασμα.

30. Νά σχηματίσετε ἕνα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ μέ $AB < B\Gamma < A\Gamma$. Μέ χρήση τῆς μεσοκαθέτου νά βρεῖτε τή διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

31. Γράψτε δύο ὁμόκεντρους κύκλους καί πάρτε ἕνα σημεῖο Α στόν ἐσωτερικό κύκλο. Φέρτε τήν ἐφαπτομένη τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου στό σημεῖο Α καί ὀνομάστε Β καί Γ τά σημεῖα στά ὁποῖα τέμνει τόν ἐξωτερικό κύκλο. Νά δικαιολογήσετε ὅτι εἶναι $AB = A\Gamma$.

32. Γράψτε δύο ὁμόκεντρους κύκλους καί φέρτε μιά εὐθεία ἡ ὁποία νά τέμνει τούς κύκλους κατά σειρά στά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Νά δικαιολογήσετε ὅτι εἶναι $AB = \Gamma\Delta$.

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{Z}$ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Μεγέθη πού ἐπιδέχονται ἀντίθεση

10.1. α) Στή Γεωγραφία τά ὑψόμετρα τῶν διάφορων τόπων ὁρίζονται μέ βάση τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας. Ξέρουμε π.χ. ὅτι ἡ κορυφή τοῦ Ὀλύμπου ἔχει ὑψόμετρο 2917 m **πάνω** ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, ἐνῶ ἡ Νεκρή Θάλασσα ἔχει ὑψόμετρο 394 m **κάτω** ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας.

β) Στή Φυσική μάθαμε γιά τό θερμόμετρο, μέ τό ὁποῖο μετρᾶμε τή θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος. Ἀκοῦμε νά λένε π.χ. πώς ἡ θερμοκρασία στήν Ἀθήνα σήμερα ἦταν 15^0 C **πάνω** ἀπό τό μηδέν, ἤ στή Φλώρινα 5^0 C **κάτω** ἀπό τό μηδέν κ.λ.π.

γ) Στήν Ἱστορία οἱ χρονολογίες ἀρχίζουν νά μετροῦνται μέ βάση τό ἔτος γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ. Π.χ. ἡ ναυμαχία τῆς Σαλαμίνας ἔγινε τό 480 **πρό** Χριστοῦ, ἐνῶ ἡ ἅλωση τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἔγινε τό 1453 **μετά** Χριστόν.

δ) Ἄν σταθοῦμε στήν εἴσοδο τοῦ σπιτιοῦ μας καί παρακολουθήσουμε τήν κίνηση τῶν ἀνθρώπων στό δρόμο, θά δοῦμε πώς ἄλλοι πηγαίνουν πρός τά **ἀριστερά** καί ἄλλοι πρός τά **δεξιά**.

Στίς παραπάνω περιπτώσεις, ἀλλά καί σέ ἄλλες παρόμοιες, συναντοῦμε μεγέθη, τά ὁποῖα μεταβάλλονται κατά δύο ἀντίθετες *φορές*. Γιά νά δηλώσουμε τίς ἀντίθετες φορές, χρησιμοποιοῦμε λέξεις ὅπως οἱ: *πάνω - κάτω, πρό - μετά, δεξιά - ἀριστερά* κ.λ.π.

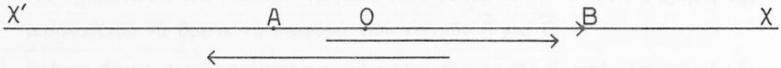
Στό κεφάλαιο αὐτό, μέ ἀφορμή τά μεγέθη πού ἐπιδέχονται ἀντίθεση, θά μιλήσουμε γιά ἕνα νέο σύνολο ἀριθμῶν, πού εἶναι «γενικότερο» ἀπό τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Διανύσματα μέ κοινό φορέα

10.2. Οἱ δυό ἀντίθετες φορές μεταβολῆς καί οἱ τιμές πού παίρνουν τά μεγέθη πού ἐπιδέχονται ἀντίθεση μποροῦν νά παρασταθοῦν σχηματικά (καί μέ τόν ἴδιο τρόπο γιά ὅλα τά μεγέθη) ἄν χρησιμοποιήσουμε μιά εὐθεία.

Θά περιοριστοῦμε ἐδῶ στήν περίπτωση τοῦ δρόμου μπροστά στό σπίτι μας καί στήν κίνηση τῶν ἀνθρώπων σ' αὐτόν.

῾Ο δρόμος παριστάνεται σχηματικά μέ μιά εὐθεία x΄x (Σχ. 1) καί ἡ θέση μας σημειώνεται μέ τό σημεῖο Ο. Τά δυό βέλη δείχνουν τίς δυό **ἀντί-**



Σχ. 1

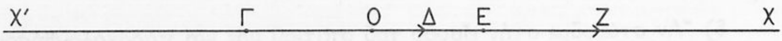
θετες φορές σύμφωνα μέ τίς ὁποῖες γίνεται ἡ κίνηση. Ἕνας ἄνθρωπος βρίσκεται κάποια στιγμή στή θέση πού σημειώνεται μέ τό σημεῖο Α, βαδίζει πρός τά δεξιά καί σταματᾶ στό σημεῖο Β. Πάνω στήν εὐθεία ὁρίστηκε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα τά Α καί Β. Τώρα ὅμως τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ παρουσιάζει ἕνα νέο στοιχεῖο: Διαγράφεται κατά μιά **καθορισμένη φορά**, ἀπό τά ἀριστερά πρός τά δεξιά.

Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ τό ὁποῖο διαγράφεται μέ φορά ἀπό τό Α πρός τό Β λέγεται διάνυσμα μέ ἀρχή τό Α καί τέλος τό Β.

Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι διάνυσμα μέ ἀρχή τό Α καί τέλος τό Β, γράφουμε $\overrightarrow{AB}$ καί τό σχεδιάζουμε μέ ἕνα βέλος (Σχ. 1).

῾Η εὐθεία x΄x πού περνᾶ ἀπό τά Α καί Β λέγεται **φορέας** ἤ **στήριγμα** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

Στό σχῆμα 2 πήραμε στό φορέα x΄x τά διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{EZ}$, πού διαγράφονται μέ τήν ἴδια φορά. Λέμε πώς τά διανύσματα αὐτά εἶναι



Σχ. 2

ὁμόρροπα. Ἐπίσης τά διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ καί $\overrightarrow{ZE}$ εἶναι ὁμόρροπα.

Τά διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{ZE}$ διαγράφονται κατά ἀντίθετες φορές καί γι᾿ αὐτό τά λέμε **ἀντίρροπα**.

Ἄν ἡ ἀρχή καί τό τέλος ἑνός διανύσματος συμπίπτουν, τό διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** καί συμβολίζεται μέ $\vec{0}$.

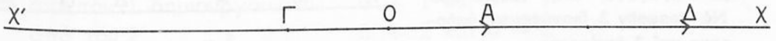
Μέτρο καί ἀλγεβρική τιμή διανύσματος

10.3. Στό κεφάλαιο 5 μάθαμε ὅτι, γιά νά μετρήσουμε ἕνα μέγεθος, παίρνουμε ἕνα ὁμοειδές μέγεθος γιά μονάδα. Τό ἴδιο κάνουμε καί γιά τή μέτρηση τῶν διανυσμάτων.

Γιά ὅλα τά διανύσματα πού ἔχουν τόν ἴδιο φορέα (εἶναι στήν ἴδια εὐθεία) παίρνουμε γιά μονάδα ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπό τά διανύσματα αὐτά. Τό διάνυσμά αὐτό τό λέμε **μοναδιαῖο**. Συνηθίζουμε νά παίρνουμε ὡς μοναδιαῖο ἕνα διάνυσμα πού διαγράφεται ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά.

Στό σχῆμα 3 παίρνουμε ὡς μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\overrightarrow{OA}$.

Παρατηροῦμε ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ εἶναι τέσσερις φορές τό



Σχ. 3

τμῆμα ΟΑ, δηλαδή τό μῆκος τοῦ ΓΔ (μέ μονάδα τό ΟΑ) εἶναι 4. Τόν ἀριθμό 4 τόν λέμε **μέτρο** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἤ τοῦ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Γενικά: **Μέτρο ἑνός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται τό μῆκος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Συμβολίζεται μέ $|\overrightarrow{AB}|$** καί διαβάζεται «*μέτρο τοῦ* $\overrightarrow{AB}$».

Ἔτσι γιά τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἤ τό $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ ἔχουμε:

$$|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 4 \qquad \text{καί} \qquad |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| = 4.$$

Ὁ 4 ὅμως δέ μᾶς λέει ἄν τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (ἤ τό $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$) εἶναι ὁμόρροπο ἤ ἀντίρροπο μέ τό μοναδιαῖο διάνυσμα. Γιά νά δηλώσουμε λοιπόν ὅτι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπο ἤ ἀντίρροπο μέ τό μοναδιαῖο, βάζουμε μπροστά ἀπό τό μέτρο του τό σημεῖο + (σύν) ἤ τό − (πλήν) ἀντιστοίχως.

Ἔτσι προκύπτει ἕνας νέος ἀριθμός πού λέγεται **ἀλγεβρική τιμή** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καί συμβολίζεται μέ $\overline{AB}$. Π.χ. γιά τά διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ τοῦ σχήματος 3 ἔχουμε:

$$\overline{\Gamma\Delta} = +4 \qquad \text{καί} \qquad \overline{\Delta\Gamma} = -4$$

καί διαβάζουμε «*ἀλγεβρική τιμή τοῦ* $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ *ἴσον σύν τέσσερα*» καί «*ἀλγεβρική τιμή τοῦ* $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ *ἴσον πλήν τέσσερα*».

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνός διανύσματος μᾶς δηλώνει τό μέτρο τοῦ διανύσματος, καί συγχρόνως μᾶς δείχνει ἀμέσως ἄν τό διάνυσμα εἶναι ὁμόρροπο ἤ ἀντίρροπο μέ τό μοναδιαῖο διάνυσμα.

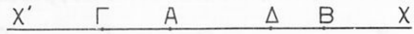
Τά σύμβολα + καί − λέγονται **πρόσημα** καί **δέν εἶναι ἐδῶ σύμβολα πράξεων**.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

> Γιά νά βροῦμε τήν ἀλγεβρική τιμή ἑνός διανύσματος, βρίσκουμε πρῶτα τό μέτρο του μέ μονάδα τό εὐθύγραμμο τμῆμα τοῦ μοναδιαίου διανύσματος καί στόν ἀριθμό πού θά βροῦμε βάζουμε μπροστά τό +, ἄν τό διάνυσμα εἶναι ὁμόρροπο μέ τό μοναδιαῖο, ἤ τό —, ἄν εἶναι ἀντίρροπο. Τό μέτρο καί ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι τό μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στό σχῆμα 4 ἔχουμε πάρει τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ στήν εὐθεία x΄x. Νά γραφοῦν 3 διανύσματα ὁμόρροπα καί 2 ἀντίρροπα.**



Σχ. 4

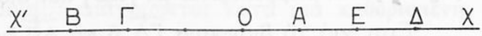
Λύση: Ὁμόρροπα εἶναι π.χ. τά $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AB}$

καί ἀντίρροπα τά $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{B\Delta}$.

2. **Στό σχῆμα 5 ἔχουμε τά διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma E}$, $\overrightarrow{E\Delta}$.**

α) Νά βρεθοῦν τά μέτρα τους μέ μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\overrightarrow{OA}$ καί οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους.

β) Νά βρεθοῦν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}$, $\overrightarrow{OE}$.



Σχ. 5

Λύση: α) Εἶναι $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 5$, $|\overrightarrow{\Gamma E}| = 4$, $|\overrightarrow{E\Delta}| = 1$ καί

$\overline{\Gamma\Delta} = +5$, $\overline{\Gamma E} = +4$, $\overline{E\Delta} = +1$.

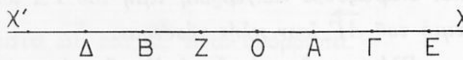
β) $\overline{OA} = +1$, $\overline{OB} = -3$, $\overline{O\Gamma} = \ldots$, $\overline{O\Delta} = \ldots$, $\overline{OE} = \ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

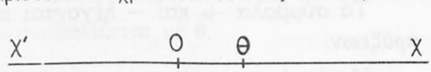
1. Νά κατατάξετε τά διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{\Gamma O}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta O}$, $\overrightarrow{OB}$ καί $\overrightarrow{O\Gamma}$ (Σχ. 5) σέ δύο ὁμάδες, πού καθεμιά νά περιλαμβάνει τά ὁμόρροπα μεταξύ τους διανύσματα.

2. Νά βρεῖτε τίς ἀλγεβρικές τιμές τῶν παραπάνω διανυσμάτων μέ μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\overrightarrow{OA}$ καί νά τίς κατατάξετε σέ δύο ὁμάδες, πού ἡ καθεμιά νά περιλαμβάνει ἀριθμούς μέ τό ἴδιο πρόσημο.

3. Στήν εὐθεία x΄x εἶναι σημειωμένα στή σειρά σημεῖα, πού ὁρίζουν ἴσα διαδοχικά εὐθύγραμμα τμήματα.
Μέ μοναδιαῖο τό διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ νά βρεῖτε τίς ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων: $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{E\Delta}$.



4. Στήν εὐθεῖα x΄x τό σημεῖο Ο παριστάνει τό χρόνο εἰσόδου σας στό Γυμνάσιο. Σημειῶστε τήν εἰκόνα τοῦ χρόνου πού πήγατε στήν Ε΄ Δημοτικοῦ; Πῶς θά σημειώσετε τήν εἰκόνα τοῦ χρόνου ἀποφοιτήσεως ἀπό τό Γυμνάσιο; (μέ κανονικές σπουδές).



Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί

10.4. Στήν προηγούμενη παράγραφο γιά τή μέτρηση τῶν διανυσμάτων ἑνός φορέα δημιουργήσαμε μιά καινούργια ἔννοια, τήν «*ἀλγεβρική τιμή διανύσματος*».

Οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων δίνονται μέ «νέους ἀριθμούς» πού καθένας τους «συνοδεύεται» ἀπό τό πρόσημο + ἤ − (π.χ. +4, −4).

Ὅπως εἴδαμε ἀπό τό φυσικό 4 δημιουργήθηκαν ὁ $+4$ καί ὁ -4.

Γενικά ἀπό κάθε φυσικό ἀριθμό, ἐκτός ἀπό τό μηδέν, δημιουργοῦνται δύο νέοι ἀριθμοί.

Ἔτσι ἀπό τόν 1 δημιουργοῦνται: ὁ $+1$ καί ὁ -1
ἀπό τόν 2 » ὁ $+2$ καί ὁ -2
ἀπό τόν 3 » ὁ $+3$ καί ὁ -3
. . . . κ.λ.π.

- Οἱ νέοι αὐτοί ἀριθμοί, πού γίνονται ἀπό τούς φυσικούς μέ τήν προσθήκη τοῦ προσήμου $+$ ἤ τοῦ $-$, λέγονται **ἀκέραιοι.**
- Οἱ ἀκέραιοι πού ἔχουν τό πρόσημο $+$ λέγονται **θετικοί.**
- Οἱ ἀκέραιοι πού ἔχουν τό πρόσημο $-$ λέγονται **ἀρνητικοί.**
- Δύο (ἤ περισσότεροι) ἀκέραιοι ἀριθμοί πού ἔχουν τό ἴδιο πρόσημο λέγονται **ὁμόσημοι**. Π.χ. οἱ $+7$, $+3$, $+6$ εἶναι ὁμόσημοι. Τό ἴδιο καί οἱ -7, -6.
- Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί πού ἔχουν διαφορετικά πρόσημα λέγονται **ἑτερόσημοι**. Π.χ. οἱ $+7$, -10 εἶναι ἑτερόσημοι.

Τό σύνολο τῶν ἀκεραίων

10.5. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί $0, +1, -1, +2, -2, \ldots$ κ.λ.π. γίνονται, ὅπως εἴδαμε, ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς, ἄν τούς ἐφοδιάσουμε μέ τό πρόσημο $+$ ἤ $-$ (τό $+0$ καί τό -0 ταυτίζονται, γι' αὐτό γράφουμε ἁπλά 0).

Ἔτσι ἀπό τό $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ δημιουργοῦμε ἕνα νέο σύνολο, τό

$$\{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$$

πού ὀνομάζεται **σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν**.

Τό σύνολο αὐτό συμβολίζεται μέ $\mathbb{Z}$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}.$$

Τό ἴδιο σύνολο χωρίς τό 0 τό συμβολίζουμε μέ $\mathbb{Z}^*$, ἐνῶ μέ $\mathbb{Z}^*_+$ καί $\mathbb{Z}^*_-$ συμβολίζουμε τά σύνολα τῶν θετικῶν καί τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων ἀντιστοίχως. Τέλος τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν ἀκεραίων, δηλ. τῶν θετικῶν μαζί μέ τό 0, τό συμβολίζουμε μέ $\mathbb{Z}_+$ καί τό σύνολο τῶν μή θετικῶν ἀκεραίων μέ $\mathbb{Z}_-$.

Εἶναι δηλαδή:

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \cdots\}\\
\mathbb{Z}_+ &= \{0, +1, +2, +3, \cdots\}\\
\mathbb{Z}_- &= \{0, -1, -2, -3, \cdots\}\\
\mathbb{Z}^* &= \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, \cdots\}\\
\mathbb{Z}^*_+ &= \{+1, +2, +3, \cdots\}\\
\mathbb{Z}^*_- &= \{-1, -2, -3, \cdots\}
\end{aligned}}$$

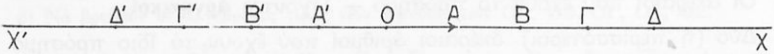
Εἶναι φανερό ὅτι τά παραπάνω σύνολα εἶναι ἀπειροσύνολα καί ὅτι ἰσχύει:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-.}$$

Παράσταση τῶν ἀκεραίων σέ μιά εὐθεία

10.6. Σέ μιά εὐθεία x'x (Σχ. 6) παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ο καί τό μοναδιαῖο διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$. Μιά τέτοια εὐθεία λέγεται **ἄξονας**.

Στήν εὐθεία αὐτή παίρνουμε μέ τό διαβήτη, δεξιά τοῦ Ο τά τμήματα

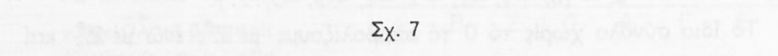


Σχ. 6

ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ,... κ.λ.π., ὅλα ἴσα μέ τό ΟΑ καί ἀριστερά τοῦ Ο τά τμήματα ΟΑ′, Α′Β′, Β′Γ′, Γ′Δ′,... κ.λ.π. πάλι ἴσα μέ τό ΟΑ.

Ὁρίζονται ἔτσι τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}$,..., τά ὁποῖα ἔχουν ἀλγεβρικές τιμές $+1$, $+2$, $+3$, $+4$,... ἀντιστοίχως καί τά διανύσματα $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{O\Gamma'}$, $\overrightarrow{O\Delta'}$,..., τά ὁποῖα ἔχουν ἀλγεβρικές τιμές $-1, -2, -3, -4, \ldots$ ἀντιστοίχως.

Συμφωνοῦμε τώρα νά τοποθετοῦμε στό τέλος καθενός ἀπό τά διανύσματα αὐτά τήν ἀλγεβρική τιμή του. Π.χ. στό Α τοποθετοῦμε τό $+1$,



Σχ. 7

στό Γ′ τό -3, κ.λ.π.

Ἔτσι τοποθετοῦμε ὅλους τούς ἀκέραιους ἀριθμούς στόν ἄξονα x′x (Σχ. 7). Ἡ ἡμιευθεία Οx πού περιέχει τό μοναδιαῖο διάνυσμα λέγεται **θετικός ἡμιάξονας** καί ἡ ἄλλη (ἡ Οx′) **ἀρνητικός ἡμιάξονας**.

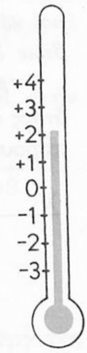
Πρακτικές ἐφαρμογές τῶν ἀκεραίων

10.7. Ἡ εἰσαγωγή τῶν ἀκεραίων εὐκολύνει ἐκφράσεις ὅπως αὐτές πού συναντήσαμε στήν § 10.1, π.χ. ἀριστερά - δεξιά, πρό Χριστοῦ - μετά Χριστόν, πάνω-κάτω κ.λ.π. Ἔτσι, ἀντί νά ποῦμε πώς κινηθήκαμε πάνω σέ μιά εὐθεία ε ἀπό τό σημεῖο Ο, π.χ. τρία βήματα δεξιά ἤ ἀριστερά, μποροῦμε νά λέμε ὅτι κάναμε πάνω στήν ε, ἀπό τό Ο, $+3$ βήματα ἤ -3 βήματα.

Ἐπίσης ἀντί νά λέμε τό ἔτος 500 π.Χ. ἤ 1900 μ.Χ., μποροῦμε νά λέμε, τό ἔτος -500 ἤ $+1900$.

Μιά θερμοκρασία σημειώνεται μέ θετικό ἀριθμό, ἄν εἶναι πάνω ἀπό τό μηδέν, καί μέ ἀρνητικό, ἄν εἶναι κάτω ἀπό τό μηδέν. Ἔτσι π.χ. **— 3 βαθμοί** σημαίνει *3 βαθμοί κάτω ἀπό τό μηδέν*, καί **+ 2 βαθμοί** σημαίνει *2 βαθμοί πάνω ἀπό τό μηδέν*.

Ἀκόμη ἀντί νά λέμε «ἡ θερμοκρασία ἀνέβηκε (ἤ κατέβηκε) τρεῖς βαθμούς», λέμε «*ἡ θερμοκρασία μεταβλήθηκε + 3 βαθμούς* (ἤ *— 3 βαθμούς*)». Τό θερμόμετρο εἶναι ἕνα βαθμολογημένο ὄργανο πού δείχνει τή θερμοκρασία μέ θετικούς καί ἀρνητικούς ἀριθμούς (Σχ. 8).

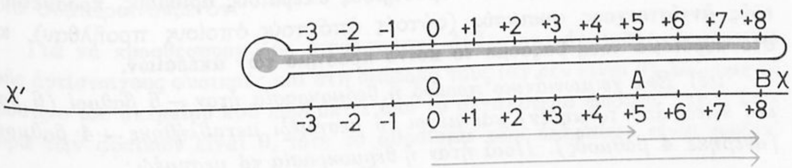


Σχ. 8

Ἡ πρόσθεση τῶν ἀκεραίων

10.8. Παρακάτω θά λύσουμε ἁπλά προβλήματα σχετικά μέ μεταβολές θερμοκρασίας, γιά νά καταλάβουμε τήν ἔννοια τοῦ ἀθροίσματος ἀκεραίων. Τά προβλήματα αὐτά μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν μέ προβλήματα πού ἀναφέρονται σέ ἄλλα μεγέθη τά ὁποῖα ἐπιδέχονται ἀντίθεση, π.χ. κέρδος - ζημία, ὑψόμετρο πάνω καί κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας κ.λ.π.

i) Ἕνα πρωί ἡ θερμοκρασία ἦταν + 5 βαθμοί (5 βαθμοί πάνω ἀπό τό



Σχ. 9

μηδέν) καί μέχρι τό μεσημέρι μεταβλήθηκε + 3 βαθμούς (ἀνέβηκε 3 βαθμούς). Ποιά ἦταν ἡ θερμοκρασία τό μεσημέρι;

Ἀπεικονίζουμε τή θερμομετρική κλίμακα στήν εὐθεία x′x, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 9. Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι ἡ ὑδραργυρική στήλη πού ἔφθανε στή θέση A τό πρωί, μέ τήν ἄνοδο τῆς θερμοκρασίας κατά 3 βαθμούς ἔφθασε στή θέση B.

Ἑπομένως ἡ θερμοκρασία τό μεσημέρι ἦταν $+8$ βαθμοί.

Ἔχουμε λοιπόν:

(5 βαθ. πάνω ἀπό τό μηδέν) + (3 βαθ. ἄνοδος) = 8 βαθ. πάνω ἀπό τό μηδέν

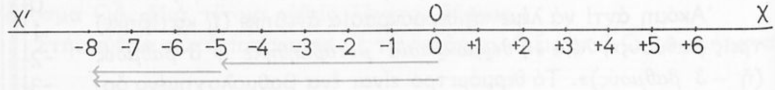
ἤ (+ 5 βαθμοί) + (+ 3 βαθμοί) = + 8 βαθμοί. Συνεπῶς:

$$(+5)+(+3)=+8.$$

ii) Ἕνα χειμωνιάτικο ἀπόγευμα ἡ θερμοκρασία ἦταν — 5 βαθμοί (5 βαθ-

μοί κάτω ἀπό τό μηδέν) καί μέχρι τό βράδυ μεταβλήθηκε -3 βαθμούς (κατέβηκε 3 βαθμούς). Ποιά ἦταν ἡ βραδυνή θερμοκρασία;

Ἀπεικονίζουμε πάλι τή θερμομετρική κλίμακα σέ μιά εὐθεία (Σχ. 10), ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση. Ἡ πτώση τῆς θερμοκρασίας θά παρουσιάζεται *μέ μετακίνηση πρός τά ἀριστερά.*



Σχ. 10

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ὁ ὑδράργυρος μετακινήθηκε ἀπό τή θέση -5 πού ἦταν τό μεσημέρι στή θέση -8. Ἑπομένως ἡ βραδυνή θερμοκρασία ἦταν -8 βαθμοί (8 βαθμοί κάτω ἀπό τό μηδέν).

Ἔχουμε λοιπόν:

(5 βαθ. κάτω ἀπό τό μηδέν) + (3 βαθ. πτώση) = 8 βαθ. κάτω ἀπό τό μηδέν

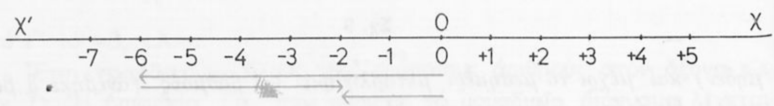
ἤ (–5 βαθμοί) + (–3 βαθμοί) = –8 βαθμοί. Συνεπῶς:

$$(-5) + (-3) = -8.$$

Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά καί ἄλλα παρόμοια συμπεραίνουμε ὅτι:

Γιά νά προσθέσουμε δύο ὁμόσημους ἀκέραιους ἀριθμούς, προσθέτουμε τούς ἀντίστοιχους φυσικούς (αὐτούς ἀπό τούς ὁποίους προῆλθαν), **καί στό ἄθροισμά τους βάζουμε τό κοινό πρόσημο τῶν ἀκεραίων.**

iii) Ἕνα χειμωνιάτικο πρωϊνό ἡ θερμοκρασία ἦταν -6 βαθμοί (6 βαθμοί κάτω ἀπό τό μηδέν) καί μέχρι τό μεσημέρι μεταβλήθηκε $+4$ βαθμούς (ἀνέβηκε 4 βαθμούς). Ποιά ἦταν ἡ θερμοκρασία τό μεσημέρι;



Σχ. 11

Ὅπως εἴδαμε καί στήν πρώτη περίπτωση ἡ ἄνοδος τῆς θερμοκρασίας παρουσιάζεται στήν εὐθεία τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν *μέ μετακίνηση πρός τά δεξιά.* Συνεπῶς ὁ ὑδράργυρος ἀπό τή θέση -6 πῆγε στή θέση -2 (Σχ. 11). Ἄρα ἡ θερμοκρασία τό μεσημέρι ἦταν -2 βαθμοί (2 βαθμοί κάτω ἀπό τό μηδέν).

Ἔχουμε λοιπόν:

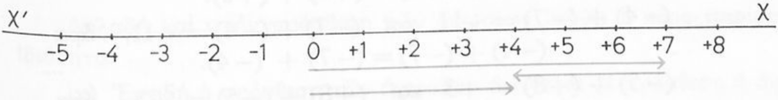
(6 βαθ. κάτω ἀπό τό μηδέν) + (4 βαθ. ἄνοδος) = 2 βαθ. κάτω ἀπό τό μηδέν

ἤ (–6 βαθμοί) + (+ 4 βαθμοί) = – 2 βαθμοί. Συνεπῶς:

$$(-6) + (+4) = -2.$$

iv) Ἡ θερμοκρασία ἕνα μεσημέρι ἦταν +7 βαθμοί (7 βαθμοί πάνω ἀπό τό μηδέν) καί ὡς τό βράδυ μεταβλήθηκε −3 βαθμούς (κατέβηκε 3 βαθμούς). Ποιά ἦταν ἡ βραδυνή θερμοκρασία;

Ὅπως ξέρουμε πιά ἡ πτώση τῆς θερμοκρασίας παρουσιάζεται στήν



Σχ. 12

εὐθεία τῶν ἀκεραίων μέ κίνηση πρός τά ἀριστερά. Ἔτσι ὁ ὑδράργυρος ἀπό τή θέση +7 πῆγε στή θέση +4 (Σχ. 12).

Ἑπομένως ἡ βραδυνή θερμοκρασία ἦταν +4 βαθμοί (4 βαθμοί πάνω ἀπό τό μηδέν).

Ἔχουμε λοιπόν:

(7 βαθ. πάνω ἀπό τό μηδέν) + (3 βαθ. πτώση) = 4 βαθ. πάνω ἀπό τό μηδέν

ἤ (+ 7 βαθμοί) + (−3 βαθμοί) = + 4 βαθμοί. Συνεπῶς:

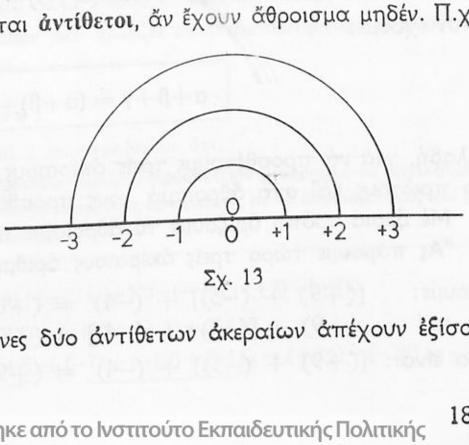
$$(+7) + (-3) = +4.$$

Ἀπό τά δύο τελευταῖα παραδείγματα (iii καί iv) καί ἄλλα παρόμοια συμπεραίνουμε ὅτι:

Γιά νά προσθέσουμε δύο ἑτερόσημους ἀκέραιους ἀριθμούς, ἀφαιροῦμε τούς ἀντίστοιχους φυσικούς καί στή διαφορά τους (ἄν δέν εἶναι 0), βάζουμε τό πρόσημο τοῦ ἀκεραίου πού προκύπτει ἀπό τό μεγαλύτερο φυσικό. Ἄν ἡ διαφορά τῶν φυσικῶν εἶναι 0, τότε τό ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι μηδέν.

Ἀντίθετοι ἀκέραιοι

10.9. Δύο ἀκέραιοι λέγονται **ἀντίθετοι**, ἄν ἔχουν ἄθροισμα μηδέν. Π.χ. οἱ +2 καί −2 εἶναι ἀντίθετοι, γιατί $(+2) + (-2) = 0$. Ἐπίσης οἱ +3 καί −3 εἶναι ἀντίθετοι, γιατί $(+3) + (-3) = 0$.



Σχ. 13

Παρατηροῦμε δηλαδή ὅτι **δύο ἀκέραιοι εἶναι ἀντίθετοι ὅταν προκύπτουν ἀπό τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό**. Ὅπως βλέπουμε στό σχ. 13 οἱ εἰκόνες δύο ἀντίθετων ἀκεραίων ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τήν ἀρχή O.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως ἀκεραίων

10.10. i) Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι:

$$(+6)+(+2)=+8 \text{ καί } (+2)+(+6)=+8, \text{ ἄρα}$$
$$(+6)+(+2)=(+2)+(+6).$$
$$(-4)+(-7)=-11 \text{ καί } (-7)+(-4)=-11, \text{ ἄρα}$$
$$(-4)+(-7)=(-7)+(-4).$$
$$(-5)+(+8)=+3 \text{ καί } (+8)+(-5)=+3, \text{ ἄρα}$$
$$(-5)+(+8)=(+8)+(-5).$$
$$(+2)+(-7)=-5 \text{ καί } (-7)+(+2)=-5, \text{ ἄρα}$$
$$(+2)+(-7)=(-7)+(+2).$$

Ἄν ἀντί γιά τούς ἀριθμούς αὐτούς πάρουμε ὁποιουσδήποτε ἄλλους ἀκέραιους ἀριθμούς θά καταλήξουμε στό ἴδιο συμπέρασμα.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι στήν πρόσθεση τῶν ἀκεραίων ἰσχύει ἡ **ἀντιμεταθετική** ἰδιότητα.

$$\boxed{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$$

ii) Ἐπίσης ἔχουμε:

$(+5)+0=0+(+5)=+5$, $(-9)+0=0+(-9)=-9$

καί γενικά

$$\boxed{\alpha+0=0+\alpha=\alpha}$$

Δηλαδή, τό 0 εἶναι τό **οὐδέτερο στοιχεῖο** τῆς προσθέσεως στό $\mathbb{Z}$.

iii) Μάθαμε πώς τό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ δύο ἀκεραίων α καί β εἶναι ἀκέραιος. Ἐπομένως τό ἄθροισμα τοῦ $\alpha+\beta$ μέ ἕναν τρίτο ἀκέραιο γ θά εἶναι ἐπίσης ἀκέραιος ἀριθμός καί γράφεται $(\alpha+\beta)+\gamma$.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma}$$

Δηλαδή, γιά νά προσθέσουμε τρεῖς ἀκέραιους ἀριθμούς προσθέτουμε τούς δύο πρώτους καί στό ἄθροισμά τους προσθέτουμε τόν τρίτο.

Μέ ὅμοιο τρόπο ὁρίζουμε τό ἄθροισμα περισσότερων ἀκεραίων.

Ἄς πάρουμε τώρα τρεῖς ἀκέραιους ἀριθμούς, π.χ. τούς $+9, -3, -4$.

Ἔχουμε: $[(+9)+(-3)]+(-4)=(+6)+(-4)=+2$

καί $(+9)+[(-3)+(-4)]=(+9)+(-7)=+2$

Ἄρα εἶναι: $[(+9)+(-3)]+(-4)=(+9)+[(-3)+(-4)]$.

Ἄν ἀντί γιά τούς ἀριθμούς αὐτούς πάρουμε ὁποιουσδήποτε ἄλλους καταλήγουμε στό ἴδιο συμπέρασμα. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)}$$

Δηλαδή καί στήν πρόσθεση τῶν ἀκεραίων ἰσχύει ἡ **προσεταιριστική** ἰδιότητα.

iv) Ἐπειδή ἡ πρόσθεση τῶν ἀκεραίων ἀνάγεται σέ πρόσθεση ἤ ἀφαίρεση φυσικῶν ἀριθμῶν, θά ἰσχύει ἡ ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς:

$$\boxed{\alpha+\gamma = \beta+\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα:**

i) (—5) + (+7) + (—9) + (+3), ii) (+7) + (—9) + (+3) + (—5).

Λύση: i) $\underbrace{(-5)+(+7)}+(-9)+(+3) = \underbrace{(+2)+(-9)}+(+3) = (-7)+(+3) = -4.$

ii) $\underbrace{(+7)+(-9)}+(+3)+(-5) = \underbrace{(-2)+(+3)}+(-5) = (+1)+(-5) = -4.$

Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό καί ἄλλα παρόμοια καταλαβαίνουμε ὅτι:

Ἕνα ἄθροισμα πολλῶν ἀκεραίων δέν ἀλλάζει ἄν ἀλλάξουμε τή θέση τῶν ὅρων του.

2. **Νά βρεθοῦν τά ἀθροίσματα:**

i) (+7) + (—10) + (—6) + (+4), ii) (+7) + (—16) + (+4).

Λύση: i) $\underbrace{(+7)+(-10)}+(-6)+(+4) = \underbrace{(-3)+(-6)}+(+4) = (-9)+(+4) = -5.$

ii) $\underbrace{(+7)+(-16)}+(+4) = (-9)+(+4) = -5.$

Στό δεύτερο ἄθροισμα ἔχουμε ἀντικαταστήσει τούς -10 καί -6 μέ τό ἄθροισμά τους -16 καί βλέπουμε ὅτι τό τελικό ἀποτέλεσμα δέν ἄλλαξε.

Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό καί ἄλλα παρόμοια καταλαβαίνουμε ὅτι:

Ἕνα ἄθροισμα πολλῶν ἀκεραίων δέν ἀλλάζει ἄν ἀντικαταστήσουμε μερικούς προσθετέους μέ τό ἄθροισμά τους.

Σπουδαία παρατήρηση:

Ἀπό τά παραδείγματα 1 καί 2 συμπεραίνουμε ὅτι:

Γιά νά ὑπολογίσουμε ἕνα ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τούς θετικούς μέ τό ἄθροισμά τους, τούς ἀρνητικούς μέ τό ἄθροισμά τους καί μετά νά προσθέσουμε τά δύο ἀποτελέσματα.

3. **Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα: (+6)+(—7)+(+12)+(—10)+(+8)+(—11).**

Λύση: $(+6)+(-7)+(+12)+(-10)+(+8)+(-11) =$

$= \underbrace{(+6)+(+12)+(+8)}+\underbrace{(-7)+(-10)+(-11)} = (+26)+(-28) = -2.$

4. **Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα: $(+4)+(-8)+(-10)+(+8)$.**

Λύση: Μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό ἄθροισμα αὐτό, ὅπως ἔχουμε μάθει. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι οἱ -8 καί $+8$ εἶναι ἀντίθετοι, συνεπῶς τό ἄθροισμά τους εἶναι 0 καί μποροῦμε νά τούς παραλείψουμε.

Ἔτσι ἔχουμε $(+4)+(-8)+(-10)+(+8) = (+4)+(-10) = -6$.

Ὥστε: **Ἄν σ' ἕνα ἄθροισμα ὑπάρχουν δυό ἀντίθετοι ὅροι, μποροῦμε νά τούς παραλείπουμε.**

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $(+7)+(-13)$, β) $(+9)+(-5)$, γ) $(-12)+(+23)$, δ) $(-11)+(-10)$,
ε) $(-4)+(+9)+(+15)+(-8)$, ς) $(+10)+(-14)+(-28)+(+18)$,
ζ) $(-456)+(-379)$, η) $(+185)+(-273)+(-427)+(+515)$.

6. Νά ἐξετάσετε ἄν τά ἑπόμενα τετράγωνα εἶναι μαγικά.

−3	+5	−2
+1	0	−1
+2	−5	+3

−2	+6	−1
+2	+1	0
+3	−4	+4

+3	+10	−25
−32	−4	+24
+17	−18	−10

7. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα τῶν πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} +8 & -12 & +3 \\ -1 & +4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{καί} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & +4 \\ +5 & -12 & +4 \end{pmatrix}.$$

8. Ἕνα ὑποβρύχιο βρίσκεται 115 m κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας. Στή συνέχεια κατεβαίνει 18 m, ἀνεβαίνει 37 m, ξαναανεβαίνει 22 m, κατεβαίνει 48 m, κατεβαίνει 35 m καί τέλος ἀνεβαίνει 56 m. Σέ ποιό βάθος θά βρίσκεται τώρα τό ὑποβρύχιο;

9. Ἕνα κινητό βρίσκεται στόν ἄξονα τῶν ἀκεραίων στό -23. Στή συνέχεια κάνει τίς ἑπόμενες κινήσεις: -7, -19, $+28$, -35, $+13$. Σέ ποιό σημεῖο θά βρεθεῖ μετά τήν τελευταία κίνηση;

10. Τό ταμεῖο μιᾶς μαθητικῆς κοινότητας εἶχε 963 δρχ. καί σέ ἕνα μήνα παρουσίασε τήν ἑπόμενη κίνηση: εἴσπραξη 750 δρχ., πληρωμή 285 δρχ., πληρωμή 476 δρχ., εἴσπραξη 328 δρχ., εἴσπραξη 185 δρχ. καί πληρωμή 79 δρχ. Πόσα χρήματα θά ἔχει τό ταμεῖο τῆς κοινότητας στό τέλος τοῦ μήνα αὐτοῦ;

Ἀφαίρεση ἀκεραίων

$\boxed{\textbf{10.11.}}$ Στό σύνολο $\mathbb{Z}$ ὁρίζουμε μιά δεύτερη πράξη, τήν **ἀφαίρεση**, ὅπως ἀκριβῶς τήν ὁρίσαμε στό $\mathbb{N}$.

Ἔτσι ἄν α καί β εἶναι δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, **ὀνομάζουμε διαφορά τοῦ**

β ἀπό τόν α ἕναν τρίτο ἀκέραιο γ (πού τόν συμβολίζουμε μέ **α—β**), **ὁ ὁποῖος ὅταν προστεθεῖ μέ τόν β, μᾶς δίνει ἄθροισμα τόν α.** Δηλαδή:

$$\boxed{\gamma = \alpha - \beta \Leftrightarrow \gamma + \beta = \alpha}$$

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τή διαφορά δύο ἀκεραίων λέγεται **ἀφαίρεση** στό $\mathbb{Z}$.

Ἄς προσπαθήσουμε τώρα νά βροῦμε τή διαφορά δύο ἀκεραίων, π.χ. τοῦ -8 ἀπό τόν $+5$.

Ἄν ὀνομάσουμε x τή διαφορά αὐτή, θά ἔχουμε:

$$x = (+5) - (-8).$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς διαφορᾶς παίρνουμε τήν ἐξίσωση:

$$x + (-8) = +5.$$

Ἄν προσθέσουμε καί στά δύο μέλη της τόν ἀντίθετο τοῦ -8 (δηλ. τόν $+8$), ἡ ἐξίσωση γίνεται διαδοχικά:

$$x + \underbrace{(-8) + (+8)} = (+5) + (+8)$$
$$x + 0 = (+5) + (+8)$$
$$x = (+5) + (+8)$$

Δηλαδή: $(+5) - (-8) = (+5) + (+8).$

Ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα καταλαβαίνουμε ὅτι:

Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἀπό ἕναν ἀκέραιο α ἕναν ἀκέραιο β, προσθέτουμε στόν α (μειωτέο) τόν ἀντίθετο τοῦ β (ἀφαιρετέου), δηλαδή:

$$\boxed{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

Π.χ. $(-3) - (+7) = (-3) + (-7) = -10$

$(+12) - (-5) = (+12) + (+5) = +17$

$(-9) - (-1) = (-9) + (+1) = -8.$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ ἀφαίρεση στό $\mathbb{Z}$ μετατρέπεται σέ πρόσθεση καί συνεπῶς **εἶναι πάντοτε δυνατή**, δηλαδή **ἡ διαφορά α — β ὑπάρχει πάντοτε.**

Ἀπ' αὐτό ὅμως συμπεραίνουμε ὅτι κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $x + \beta = \alpha$ ἔχει λύση στό $\mathbb{Z}$ (γιατί $x + \beta = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha - \beta \Leftrightarrow x = \alpha + (-\beta)$).

Ἀλγεβρικά ἀθροίσματα

10.12. Μιά σειρά ἀκέραιων ἀριθμῶν, πού συνδέονται μέ τά σύμβολα τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως, λέγεται **ἀλγεβρικό ἄθροισμα**.

Π.χ. τό $(-3) + (+4) - (+7) + (-8) - (-6)$

εἶναι ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα.

Ἐπειδή ἡ ἀφαίρεση στό ℤ μετατρέπεται σέ πρόσθεση, ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἄθροισμα.

Ἔτσι γιά τό παραπάνω ἀλγεβρικό ἄθροισμα ἔχουμε:

$$(-3)+(+4)-(+7)+(-8)-(-6)=(-3)+(+4)+(-7)+(-8)+(+6)=$$
$$=(-3)+(-7)+(-8)+(+4)+(+6)=$$
$$=(-18)+(+10)=-8.$$

Πολλές φορές γιά νά ἀπλουστεύσουμε τή γραφή ἑνός ἀθροίσματος ἀκεραίων παραλείπουμε τό σημεῖο + τῆς προσθέσεως καί γράφουμε τούς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος τόν ἕνα δίπλα στόν ἄλλο καί καθένα μέ τό πρόσημό του.

Π.χ. i) $(+7)+(-5)+(+8)+(-9)=+7-5+8-9=+7+8-5-9=$
$=+15-14=+1.$

ii) $(-12)-(-5)+(-3)-(+2)+(+7)=$
$=(-12)+(+5)+(-3)+(-2)+(+7)=-12+5-3-2+7=$
$=-12-3-2+5+7=$
$=-17+12=-5.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις:**
$(+35)-(+20)$, $(-30)-(+18)$, $(+25)-(-8)$, $(-25)-(-17)$.

Λύση: $(+35)-(+20)=(+35)+(-20)=+15$
$(-30)-(+18)=(-30)+(-18)=-48$
$(+25)-(-8)=(+25)+(+8)=+33$
$(-25)-(-17)=(-25)+(+17)=-8.$

2. **Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**
i) $x+(-8)=-3$, ii) $(+5)+x=+12$, iii) $(-4)-x=+30$.

Λύση: i) $x+(-8)=-3 \Leftrightarrow x+(-8)+(+8)=(-3)+(+8) \Leftrightarrow x=+5.$
ii) $(+5)+x=+12 \Leftrightarrow (-5)+(+5)+x=(-5)+(+12) \Leftrightarrow x=+7.$
iii) $(-4)-x=+30 \Leftrightarrow -4=x+(+30) \Leftrightarrow (-4)+(-30)=x+(+30)+(-30) \Leftrightarrow$
$-34=x$ ἤ $x=-34.$

3. **Νά συμπληρωθεῖ ὁ ἀριθμός πού λείπει σέ κάθε μιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἰσότητες:**

i) $(+4)+\square=+7$, ii) $\square-(-12)=-18$,
iii) $(-5)+\square=-9$, iv) $\square+(+3)=-22.$

Λύση: Νά παραστήσετε μέ x τόν ἀριθμό πού λείπει καί νά ἐπιλύσετε τίς ἐξισώσεις πού θά προκύψουν.

Γιά τήν (i) ἔχουμε:

$(+4)+x=+7 \Leftrightarrow x=(+7)-(+4) \Leftrightarrow x=(+7)+(-4) \Leftrightarrow x=+3.$

ii) . . . . . .

iii) . . . . . .

iv) . . . . . .

4. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα :

$$(+7)-(+10)+(+6)+(-12)-(-5).$$

Λύση: $(+7)-(+10)+(+6)+(-12)-(-5)=(+7)+(-10)+(+6)+(-12)+(+5)$

$=\underbrace{(+7)+(+6)+(+5)}+\underbrace{(-10)+(-12)}=(+18)+(-22)=-4.$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $(+39)-(+25)$, β) $(-73)-(+279)$, γ) $(+158)-(-96)$,

δ) $(-156)-(-342)$, ε) $(+578)-(+459)$, ϛ) $(-752)-(-498)$.

12. Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα:

α) $(+38)-(-79)-(+35)+(-64)$, β) $(-456)-(-962)-(+193)-(-278)$.

13. Ὁμοίως τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα:

α) $(-56)-(+122)+(+163)+(-354)$, β) $(-59)-(+94)+(-86)-(+39)$.

γ) $0-(+36)$, δ) $0-(-55)-(+32)+(-76)-(+35)-(-44)$.

14. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $x+(-12)=-15$, β) $x+(-25)=0$, γ) $x-(+73)=0$.

15. Ὁμοίως οἱ ἐξισώσεις:

α) $0+x=-29$, β) $(+75)-x=+125$, γ) $x-(-38)=(-14)+(+19)$

16. Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά τῶν πινάκων: $A=\begin{pmatrix}-43 & +18\\ +36 & +15\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}+14 & -25\\ +36 & -84\end{pmatrix}$.

17. Νά συμπληρώσετε τά ἑπόμενα τετράγωνα, ὥστε νά γίνουν μαγικά.

+13		−55
	−4	
		−21

−6	−1	+4
		−3

+9		−5	+6
−2		+4	+1
	−1		
−3			−6

18. Νά συμπληρωθεῖ ὁ ἀριθμός πού λείπει στίς ἑπόμενες ἰσότητες:

i) $-25-\square=-19$, ii) $\square-(+29)=-8$,

iii) $(-11)-\square+(+13)-(+7)=+32$, iv) $\square-(+59)-(-72)=-100$.

Ἡ σχέση τῆς ἀνισότητας στό σύνολο τῶν ἀκεραίων

10.13. Θά πάρουμε πάλι μερικά παραδείγματα μέ θερμοκρασίες, τά ὁποῖα θά μᾶς βοηθήσουν νά κατανοήσουμε καλύτερα τή σχέση τῆς ἀνισότητας μεταξύ τῶν ἀκεραίων. Ἀντί γιά θερμοκρασίες θά μπορούσαμε νά πάρουμε παραδείγματα μέ κέρδος καί ζημία, κ.λ.π.

Ξέρουμε ὅλοι μας ὅτι:

Ἡ θερμοκρασία τῶν $+15$ βαθμῶν εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή θερμοκρασία τῶν $+3$ βαθμῶν.

Ἡ θερμοκρασία τῶν $+8$ βαθμῶν εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή θερμοκρασία τῶν 0 βαθμῶν.

Ἡ θερμοκρασία τῶν -10 βαθμῶν εἶναι μικρότερη ἀπό τή θερμοκρασία τῶν 0 βαθμῶν.

Ἡ θερμοκρασία τῶν $+10$ βαθμῶν εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή θερμοκρασία τῶν -5 βαθμῶν.

Ἡ θερμοκρασία τῶν -2 βαθμῶν εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή θερμοκρασία τῶν -10 βαθμῶν.

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

- Ἀπό δύο θετικούς ἀκέραιους ἀριθμούς μεγαλύτερος θεωρεῖται ἐκεῖνος πού προκύπτει ἀπό τό μεγαλύτερο φυσικό.
  Π.χ. $+18 > +3$, $+5 > +4$ κ.λ.π. (ἤ $+3 < +18$, $+4 < +5$ κ.λ.π.).
- Κάθε θετικός ἀριθμός θεωρεῖται μεγαλύτερος ἀπό τό μηδέν.
  Π.χ. $+10 > 0$, $+3 > 0$ κ.λ.π. (ἤ $0 < +10$, $0 < +3$ κ.λ.π.).
- Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός θεωρεῖται μικρότερος ἀπό τό μηδέν.
  Π.χ. $-15 < 0$, $-2 < 0$ κ.λ.π. (ἤ $0 > -15$, $0 > -2$ κ.λ.π.).
- Κάθε θετικός ἀριθμός θεωρεῖται μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἀρνητικό.
  Π.χ. $+10 > -5$, $+3 > -7$ κ.λ.π. (ἤ $-5 < +10$, $-7 < +3$ κ.λ.π.).
- Ἀπό δύο ἀρνητικούς ἀριθμούς μεγαλύτερος θεωρεῖται ἐκεῖνος πού προκύπτει ἀπό τό μικρότερο φυσικό.
  Π.χ. $-2 > -10$, $-5 > -20$ κ.λ.π. (ἤ $-10 < -2$, $-20 < -5$ κ.λ.π.).

Σέ ὅλες τίς παραπάνω περιπτώσεις μποροῦμε εὔκολα νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ διαφορά τοῦ μικρότερου ἀπό τό μεγαλύτερο εἶναι θετικός ἀριθμός. Γενικά γιά δυό ὁποιουσδήποτε ἀκέραιους α καί β ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$$

Ἄν πάρουμε τώρα τίς ἀνισότητες

$-4 < -2$ καί $-2 < -1$, βλέπουμε ὅτι $-4 < -1$.

Ἐπίσης ἄν πάρουμε τίς ἀνισότητες

$-7 < +2$ καί $+2 < +3$, βλέπουμε ὅτι $-7 < +3$.

Γενικά:

Ἂν $\alpha < \beta$ καί $\beta < \gamma$, τότε εἶναι καί $\alpha < \gamma$	*(μεταβατική ἰδιότητα)*

Ἀντιστοιχία τῶν συνόλων $\mathbb{Z}_+$ καί $\mathbb{N}$

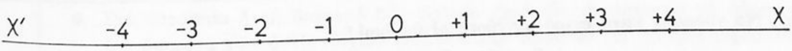
10.14. Ὕστερα ἀπό τίς παραπάνω διαπιστώσεις μποροῦμε νά γράψουμε τή διάταξη τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς:

$$\ldots < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4 < \ldots$$

Ἔτσι μέ τή διάταξη αὐτή τό $\mathbb{Z}$ μποροῦμε νά τό γράψουμε

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}.$$

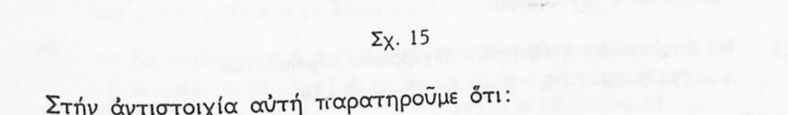
Ἄς ξαναγυρίσουμε τώρα στόν ἄξονα τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν.



Σχ. 14

Ὅπως βλέπουμε στό σχῆμα 14 ἀπό δυό ἀκεραίους ὁ μεγαλύτερος ἀπεικονίζεται σέ σημεῖο τοῦ ἄξονα πού βρίσκεται «δεξιά» ἀπό τό σημεῖο στό ὁποῖο ἀπεικονίζεται ὁ μικρότερος.

Στό παρακάτω σχῆμα ἔχουμε κάνει μιά *ἀντιστοιχία ἕνα μέ ἕνα* μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbb{Z}_+$ καί τοῦ $\mathbb{N}$ μέ τήν ὁποία κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{Z}_+$ ἀντιστοιχίζεται στό στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{N}$ ἀπό τό ὁποῖο προκύπτει.



Σχ. 15

Στήν ἀντιστοιχία αὐτή παρατηροῦμε ὅτι:

i) Σέ δυό ἄνισα στοιχεῖα τοῦ ἑνός συνόλου ἀντιστοιχοῦν ὁμοίως ἄνισα στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Π.χ.

$$\begin{array}{ccc} +3 & < & +5 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ 3 & < & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} +4 & < & +7 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ 4 & < & 7 \end{array} \quad \text{κ.λ.π.}$$

Δηλαδή οἱ διατάξεις τους εἶναι «ὅμοιες».

ii) Στό ἄθροισμα ἤ τή διαφορά δύο στοιχείων τοῦ ἑνός συνόλου ἀντιστοιχεῖ τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ ἄλλου. Π.χ.

$$\begin{array}{ccccc} (+3) & + & (+5) & = & +8 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 3 & + & 5 & = & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (+6) & - & (+2) & = & +4 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 6 & - & 2 & = & 4 \end{array} \quad \text{κ.λ.π.}$$

Ἑπομένως καί ὡς πρός τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί τῆς ἀφαιρέσεως ὑπάρχει πλήρης «ὁμοιότητα».

Γιά τούς δύο αὐτούς λόγους (i καί ii) συνηθίζουμε νά ταυτίζουμε τό σύνολο $\mathbb{Z}_+$ μέ τό $\mathbb{N}$. Ἔτσι γράφουμε συνήθως 1 ἀντί $+1$, 2 ἀντί $+2$, 3 ἀντί $+3$ κ.λ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά γραφοῦν κατά σειρά μεγέθους οἱ ἀριθμοί:**

$$-7,\ +5,\ -3,\ +4,\ -1,\ +9,\ -10,\ +6.$$

Λύση: $-10 < -7 < -3 < -1 < +4 < +5 < +6 < +9$.

2. **Ἄν $x \in \mathbb{Z}_+$ καί $x < 4$, ποιές τιμές μπορεῖ νά πάρει ὁ x;**

Λύση: Τά στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_+$ πού εἶναι μικροτέρα ἀπό τόν 4 εἶναι τά 0, $+1$, $+2$, $+3$. Συνεπῶς $x \in \{0, +1, +2, +3\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Ἄν ὁ ἀκέραιος ἀριθμός x εἶναι τέτοιος, ὥστε $-4 \leq x < 5$, νά γράψετε τό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ x.

20. Δίνεται τό σύνολο $A = \{0, +7, -3, -9, 4, -5, 5, 1, -7, -1\}$. Νά γράψετε τά στοιχεῖα του κατά σειρά μεγέθους, ὥστε α) νά προηγεῖται ὁ μικρότερος, β) νά προηγεῖται ὁ μεγαλύτερος.

21. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων:
$A = 13+5-20-7+9$, $B = -8+25-36-9+14$.

22. Γιά τούς ἀκέραιους ἀριθμούς x καί y ξέρουμε ὅτι εἶναι $-7 < x \leq -2$ καί $x < y < 1$. Νά γράψετε τά σύνολα τῶν τιμῶν πού μποροῦν νά πάρουν τά x καί y.

23. Ἄν εἶναι $x = -256$ καί $y = x+56$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ y.

24. Ἄν εἶναι $\alpha = -49$ καί $\beta = +84$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $\alpha - \beta$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 10

1. Μέ ἀφορμή τά μεγέθη πού ἐπιδέχονται ἀντίθεση, μιλήσαμε γιά τά **διανύσματα** μέ κοινό φορέα. Οἱ **ἀλγεβρικές τιμές** τῶν διανυσμάτων δίνονται μέ τούς **ἀκέραιους ἀριθμούς**. Τό σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν εἶναι τό

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$$

καί εἶναι ἕνα *ἀπειροσύνολο*.

- Γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό ὑπάρχει ὁ **ἀντίθετός** του ἀκέραιος, ὥστε τό ἄθροισμά τους νά εἶναι μηδέν (πού δέ συμβαίνει στό $\mathbb{N}$).
- Στό σύνολο τῶν ἀκεραίων **ἡ ἀφαίρεση εἶναι πάντοτε δυνατή** (πού ἐπίσης δέ συμβαίνει στό $\mathbb{N}$).

2. Ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{Z}$ εἶναι τό σύνολο τῶν **μή ἀρνητικῶν ἀκεραίων**

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, \ldots\}.$$

Μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathbb{Z}_+$ καί τοῦ συνόλου $\mathbb{N}$ τῶν φυσικῶν ὑπάρχει *ἀντιστοιχία ἕνα μέ ἕνα* ἔτσι, ὥστε:

- Σέ δύο ἄνισους θετικούς ἀριθμούς ἀντιστοιχοῦν ὁμοίως ἄνισοι φυσικοί ἀριθμοί (οἱ διατάξεις τῶν $\mathbb{Z}_+$ καί $\mathbb{N}$ εἶναι ὅμοιες).
- Στό ἄθροισμα ἤ τή διαφορά δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τῶν ἀντίστοιχών τους φυσικῶν ἀριθμῶν (οἱ πράξεις «*πρόσθεση*» καί «*ἀφαίρεση*» στά σύνολα $\mathbb{Z}_+$ καί $\mathbb{N}$ εἶναι ὅμοιες).

Γιά τό λόγο αὐτό συνηθίζουμε νά ταυτίζουμε τό σύνολο $\mathbb{Z}_+$ μέ τό $\mathbb{N}$, δηλ. νά γράφουμε 5 ἀντί $+5$, 8 ἀντί $+8$, κ.λ.π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

25. Νά βρεῖτε πόσα χρόνια πέρασαν μέχρι σήμερα: α) ἀπό τήν ἅλωση τῆς Κωνσταντινουπόλεως (1453 μ.Χ.), β) ἀπό τή ναυμαχία τῆς Σαλαμίνας (480 π.Χ.).

26. Νά συμπληρώσετε τίς ἑπόμενες ἰσοδυναμίες:

i) $(-6)+(-9) = -15 \Leftrightarrow (-9) = (-15) - \ldots$

ii) $x + (-3) = +8 \Leftrightarrow x = \ldots$

iii) $(-7)+x < (-7)+(-5) \Leftrightarrow x < \ldots$

27. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

i) $(+35) + x = -27$, ii) $x-(-16) = +16$, iii) $(+7)-x = -15$,
iv) $(-23)-(-9)-x = (+25)-(+18)$.

28. α) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων:

i) $A = 9+19-33+5-57-8$, ii) $B = -6+3+2-12-5$,
iii) $\Gamma = -14+4-10-7$, iv) $\Delta = 13-6+24-11$.

β) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $A-B-\Gamma+\Delta$.

29. Γιά τούς ἀκέραιους ἀριθμούς x, y, ω ξέρουμε ὅτι εἶναι: $-2 \leq x < 3$, $-2 < y \leq 3$ καί $x < \omega < y$. Νά βρεῖτε τά σύνολα τῶν τιμῶν πού παίρνουν οἱ x, y καί ω.

30. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί x, y καί ω παίρνουν τιμές ἀπό τό σύνολο $A = \{-3, -1, +4, -5\}$. Ἄν εἶναι $x < \omega < y$, νά βρεῖτε τίς τιμές πού μπορεῖ νά πάρει ὁ ω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

31. Ἂν εἶναι $x = -4$, $y = 15+x$, $\omega = -8-y$ καί $\varphi = y-\omega$, νά βρεῖτε τίς τιμές τῶν y, ω καί φ.

32. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
i) $-8+9-x-7 = 11-5-13$, ii) $(+16)-(-11)+x = (-18)+(+24)$.

33. Ἂν εἶναι $A = 9-14+3-27$, $B = -17-25+4-6$, $\Gamma = -12+9-17-20$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $A-B+\Gamma$.

34. Ἂν $\alpha = -375$, $\beta = 628$, $\gamma = -956$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $\alpha-\beta-\gamma$.

35. Στόν ἄξονα τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν παίρνουμε τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ μέ ἀλγεβρικές τιμές: $\overline{OA} = -7$ καί $\overline{OB} = -3$. Ἂν M εἶναι τό μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB, νά βρεθεῖ ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$.

36. Στό διπλανό τετράγωνο εἶναι τοποθετημένοι στήν τύχη διάφοροι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Νά τούς τοποθετήσετε κατάλληλα, ὥστε τό τετράγωνο νά γίνει μαγικό.

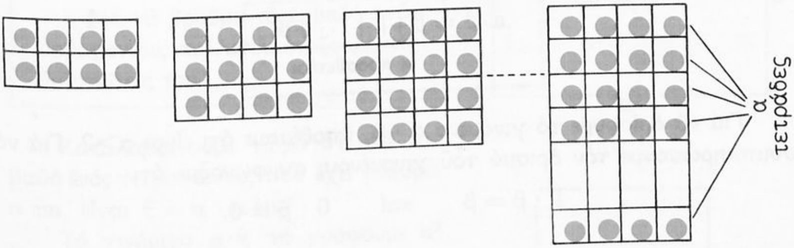
17	−3	−13
27	−8	7
22	2	12

11° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν

11.1. Στό παρακάτω σχῆμα βλέπουμε κουτιά μέ βώλους οἱ ὁποῖοι εἶναι τοποθετημένοι σέ τετράδες. Τό πρῶτο κουτί ἔχει δύο τετράδες



Σχ. 1

$(4+4=8$ βώλους), τό δεύτερο ἔχει τρεῖς τετράδες $(4+4+4=12$ βώλους), τό τρίτο ἔχει τέσσερις τετράδες $(4+4+4+4=16$ βώλους) κ.λ.π. Συνεπῶς γιά νά βροῦμε τό περιεχόμενο κάθε κουτιοῦ, ἀρκεῖ νά ξέρουμε πόσες τετράδες ἔχει.

Συμφωνοῦμε τώρα, ἀντί νά γράφουμε

$$4+4, \quad 4+4+4, \quad 4+4+4+4, \text{ κ.λ.π.}$$

νά γράφουμε ἀντιστοίχως

$$2\cdot 4 \ (\text{ἤ } 2\times 4), \quad 3\cdot 4 \ (\text{ἤ } 3\times 4), \quad 4\cdot 4 \ (\text{ἤ } 4\times 4) \text{ κ.λ.π.}$$

ὅπου οἱ ἀριθμοί $2, 3, 4, \ldots$ φανερώνουν τό πλῆθος τῶν τετράδων.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$2\cdot 4 = 4+4$$
$$3\cdot 4 = 4+4+4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha\cdot 4 = 4\underbrace{+4+\ldots+}_{\alpha \text{ προσθετέοι}}4 \qquad (\alpha \geq 2)$$

Γενικότερα, ἄν κάθε σειρά στά κουτιά εἶχε β βώλους καί γράφαμε τό περιεχόμενό τους μέ ἀνάλογο τρόπο, θά εἴχαμε:

$$2 \cdot \beta = \beta + \beta$$
$$3 \cdot \beta = \beta + \beta + \beta$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$\alpha \cdot \beta = \underbrace{\beta + \beta + \ldots + \beta}_{\alpha \text{ προσθετέοι}} \qquad (\alpha \geq 2)$$

Τό α · β διαβάζεται «*α φορές β* ἤ *α ἐπί β*».

Ὁ ἀριθμός πού συμβολίζεται μέ **α · β** λέγεται **γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ α μέ τόν ἀριθμό β** καί, ὅπως εἴδαμε, σημαίνει τό ἄθροισμα α προσθετέων ἴσων μέ τόν β. Δηλαδή

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = \underbrace{\beta + \beta + \cdots + \beta}_{\alpha \text{ προσθετέοι}}}$$

Γιά νά ὁρίσουμε τό γινόμενο α · β, ὑποθέσαμε ὅτι εἶναι $\alpha \geq 2$. Γιά νά συμπληρώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου, συμφωνοῦμε ὅτι

$$1 \cdot \beta = \beta \qquad \text{καί} \qquad 0 \cdot \beta = 0.$$

1·4=4 0·4=0

Σχ. 2

Τήν πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν τή λέμε **πολλαπλασιασμό στό ℕ**. Οἱ ἀριθμοί α καί β στό γινόμενο α · β λέγονται **παράγοντες** τοῦ γινομένου. Ὁ α, πού δηλώνει πόσες φορές παίρνουμε τόν β, λέγεται **πολλαπλασιαστής** καί ὁ β λέγεται **πολλαπλασιαστέος**.

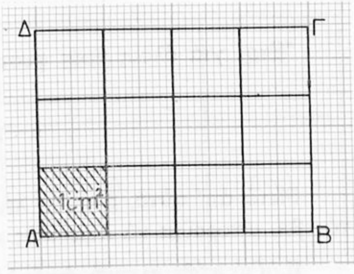
Οἱ ἀριθμοί $0 \cdot \beta = 0$, $1 \cdot \beta = \beta$, $2 \cdot \beta$, $3 \cdot \beta, \ldots$ λέγονται **πολλαπλάσια** τοῦ β.

Ἐμβαδό ὀρθογωνίου καί τετραγώνου. Γεωμετρική παράσταση τοῦ γινομένου δύο φυσικῶν ἀριθμῶν

11.2. Παίρνουμε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ πλευρές 4 cm καί 3 cm καί τό χωρίζουμε σέ τετράγωνα, ὅπως δείχνει τό σχῆμα 3. Ὅπως βλέπουμε, τό ὀρθογώνιο ἀποτελεῖται ἀπό 3 σειρές τετράγωνα πού κάθε μιά τους ἔχει 4 τετράγωνα ἤ ἀπό 4 στῆλες πού κάθε μιά τους ἔχει 3 τετράγωνα. Συνεπῶς τό ΑΒΓΔ ἀποτελεῖται ἀπό 3 · 4 ἤ ἀπό 4 · 3 τετράγωνα.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι εἶναι $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Ἐπειδή καθένα ἀπό τά τετράγωνα αὐτά εἶναι 1 cm^2, ἄν παραστήσουμε μέ Ε τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου, ἔχουμε

$$E = 3 \cdot 4 \text{ cm}^2 \text{ (ἤ } E = 4 \cdot 3 \text{ cm}^2\text{)}.$$



Σχ. 3

Γενικά, ἄν α καί β εἶναι οἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου, βρίσκουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅτι

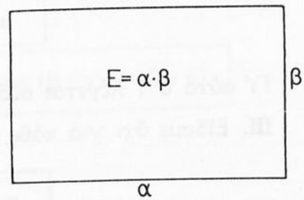
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

καί ὅτι τό ἐμβαδό του Ε θά εἶναι

$$\boxed{E = \alpha \cdot \beta}$$

Δηλαδή:

> Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζουμε τίς διαστάσεις του.



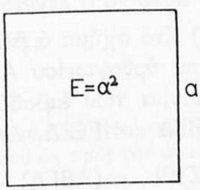
Σχ. 4

Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι τό ἐμβαδό ἑνός τετραγώνου, πού ἔχει πλευρά α cm, εἶναι $E = \alpha \cdot \alpha \text{ cm}^2$.

Τό γινόμενο $\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha}$ τό γράφουμε $\boldsymbol{\alpha^2}$ καί τό διαβάζουμε «*α στό τετράγωνο*».

Τό ἐμβαδό τετραγώνου λοιπόν πού ἔχει πλευρά α εἶναι

$$\boxed{E = \alpha^2}$$



Σχ. 5

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι τό γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν διαφορετικῶν ἀπό τό μηδέν (ὅπως π.χ. τό $3 \cdot 4$) παριστάνει τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογωνίου μέ διαστάσεις τούς παράγοντες τοῦ γινομένου (3 καί 4).

Ἐπειδή τό ἐμβαδό ὀρθογωνίου ποτέ δέν εἶναι μηδέν, συμπεραίνουμε ὅτι **τό γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν διαφορετικῶν ἀπό τό μηδέν ποτέ δέν εἶναι μηδέν.**

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν

11.3. I. Στήν προηγούμενη παράγραφο εἴδαμε ὅτι

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

ὅταν α καί β εἶναι φυσικοί ἀριθμοί διαφορετικοί ἀπό τό μηδέν.

Όταν ὁ ἕνας τουλάχιστο παράγοντας εἶναι μηδέν, π.χ. $\alpha = 0$, ἔχουμε $0 \cdot \beta = 0$ καί $\beta \cdot 0 = \underbrace{0+0+\cdots+0}_{\beta \text{ προσθετέοι}} = 0$. Ἄρα $0 \cdot \beta = \beta \cdot 0$.

Ἔτσι γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha} \qquad (\textit{ἀντιμεταθετική ἰδιότητα})$$

Μετά ἀπ' αὐτό, ἀντί νά λέμε πώς «τό $\alpha \cdot \beta$ εἶναι γινόμενο τοῦ α μέ τόν β», μποροῦμε νά λέμε πώς «*τό $\alpha \cdot \beta$ εἶναι γινόμενο τῶν α καί β*».

II. Γιά κάθε φυσικό ἀριθμό α ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha}$$

Γι' αὐτό ὁ 1 λέγεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

III. Εἴδαμε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό α ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0}$$

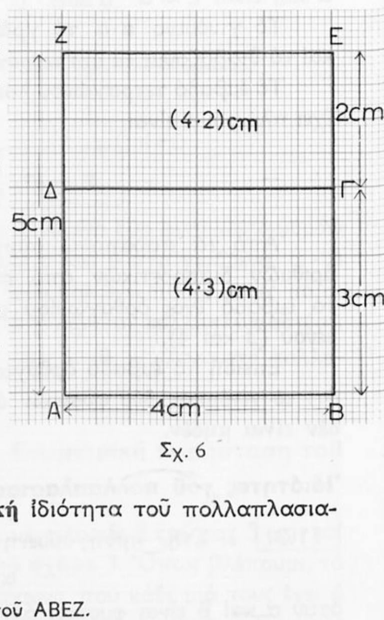
Γι' αὐτό τό 0 λέγεται **ἀπορροφητικό στοιχεῖο** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

IV) Στό σχῆμα 6 βλέπουμε ὅτι τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΖ εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων ΑΒΓΔ καί ΓΕΖΔ. Δηλαδή

$$(\text{ΑΒΕΖ})^{(1)} = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΓΕΖΔ}) \quad \text{ἤ}$$

$$(4 \cdot 5)\ \text{cm}^2 = (4 \cdot 3)\ \text{cm}^2 + (4 \cdot 2)\ \text{cm}^2 \quad \text{ἤ}$$

$$4 \cdot (\overline{3+2}) = (4 \cdot 3) + (4 \cdot 2).$$



Σχ. 6

Ἄν οἱ διαστάσεις τῶν τριῶν ὀρθογωνίων εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί $(\text{ΑΒ}) = \alpha$, $(\text{ΒΓ}) = \beta$ καί $(\text{ΓΕ}) = \gamma$, θά ἔχουμε:

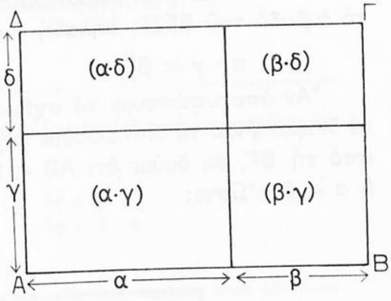
$$\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)}$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή ἐκφράζει τήν **ἐπιμεριστική** ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση.

(1) Μέ (ΑΒΕΖ) παριστάνουμε τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΕΖ.

Ἐπειδή στόν πολλαπλασιασμό ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα, ἡ ἰσότητα αὐτή γράφεται καί

$$(\beta+\gamma) \cdot \alpha = (\beta \cdot \alpha) + (\gamma \cdot \alpha).$$



Σχ. 7

Στό διπλανό σχῆμα 7 τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ὀρθογωνίων.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = (\alpha\cdot\gamma)+(\alpha\cdot\delta)+(\beta\cdot\gamma)+(\beta\cdot\delta)}$$

Ἀπό τό σχῆμα 6 βλέπουμε ὅτι:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΒΕΖ}) - (\text{ΓΕΖΔ})$$

ἤ $\quad (4 \cdot 3)\ \text{cm}^2 = (4 \cdot 5)\ \text{cm}^2 - (4 \cdot 2)\ \text{cm}^2.$

Ἄρα $\quad 4\cdot(5-2) = (4 \cdot 5) - (4 \cdot 2)$ καί γενικά:

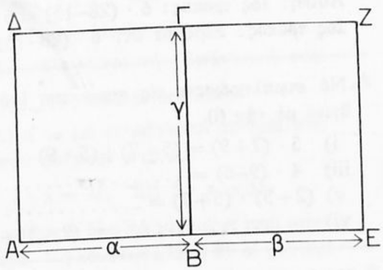
$$\boxed{\alpha\cdot(\beta-\gamma) = (\alpha\cdot\beta)-(\alpha\cdot\gamma)}$$

(*ἐπιμεριστική* ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν ἀφαίρεση).

V. Τά δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καί ΒΕΖΓ στό σχῆμα 8 ἔχουν ἴσα ἐμβαδά. Δηλαδή εἶναι

$$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

Ἄν ἀποτυπώσουμε τό σχῆμα σέ διαφανές καί τό διπλώσουμε γύρω ἀπό τή ΒΓ, τά δύο ὀρθογώνια θά ἐφαρμόσουν ἀκριβῶς. Συνεπῶς θά εἶναι ΑΒ = ΒΕ ἤ $\alpha = \beta$. Ὥστε:



Σχ. 8

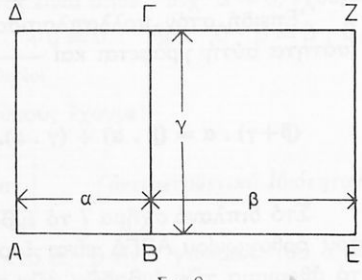
$$\boxed{\text{Ἄν } \alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma \text{ καί } \gamma \neq 0, \text{ τότε } \alpha = \beta}$$

(*ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς*).

Στό σχῆμα 9 τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι μικρότερο ἀπό τό ἐμβαδό τοῦ ΒΕΖΓ, δηλαδή εἶναι

$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Ἄν ἀποτυπώσουμε τό σχῆμα 9 σέ διαφανές καί τό διπλώσουμε γύρω ἀπό τή ΒΓ, θά δοῦμε ὅτι ΑΒ < ΒΕ ἤ $\alpha < \beta$. Ὥστε:



Σχ. 9

$$\boxed{\text{Ἄν } \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma, \text{ τότε } \alpha < \beta}$$

(ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά δικαιολογήσετε ὅτι $4 \cdot (3+2) = (4 \cdot 3) + (4 \cdot 2)$, μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου καί τῆς ἀντιμεταθετικῆς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως.

Λύση: $4 \cdot (3+2) = (3+2) + (3+2) + (3+2) + (3+2)$ (ὁρισμός γινομένου) = $= 3+2+3+2+3+2+3+2 = 3+3+3+3+2+2+2+2$ (ἀντιμ. ἰδιότ. προσθ.) = $=(4 \cdot 3) + (4 \cdot 2)$ (ὁρισμ. γινομ.).

2. Νά βρεθεῖ μέ δύο τρόπους τό ἐξαγόμενο τῶν πράξεων $12 . (15+5)$.

Λύση: 1ος τρόπος: $12 \cdot (15+5) = 12 \cdot 20 = 240$.

2ος τρόπος: Σύμφωνα μέ τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση ἔχουμε: $12 \cdot (15+5) = (12 \cdot 15) + (12 \cdot 5) = 180 + 60 = 240$.

3. Νά βρεθεῖ μέ δύο τρόπους τό ἐξαγόμενο τῶν πράξεων $6 \cdot (28-13)$.

Λύση: 1ος τρόπος: $6 \cdot (28-13) = 6 \cdot 15 = 90$.

2ος τρόπος: Ξέρουμε ὅτι $6 \cdot (28-13) = (6 \cdot 28) - (6 \cdot 13) = 168 - 78 = 90$.

4. Νά συμπληρώσετε τίς παρακάτω ἰσότητες ἐφαρμόζοντας γνωστές ἰδιότητες, ὅπως ἔγινε μέ τήν (i).

i) $5 \cdot (7+9) = (5 \cdot 7) + (5 \cdot 9)$ ii) .... $= (6 \cdot 10) + (6 \cdot 4)$

iii) $4 \cdot (9-6) =$ .... iv) .... $= (3 \cdot 6) - (3 \cdot 2)$

v) $(2+3) \cdot (5+7) =$ ....

vi) .... $= (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (8 \cdot 3) + (8 \cdot 4)$.

5. Νά βρεθεῖ ὁ φυσικός ἀριθμός β πού ἐπαληθεύει τή σχέση $5 . \beta = 45$.

Λύση: Ἡ $5 \cdot \beta = 45$ γράφεται $5 \cdot \beta = 5 \cdot 9$, ἄρα $\beta = 9$ (§ 11.3, ἰδιοτ. διαγραφῆς).

6. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν τιμῶν, πού μπορεῖ νά πάρει ὁ φυσικός α, ὥστε νά ἰσχύει i) $3 . \alpha < 12$, ii) $2 . \alpha \leq 10$.

Λύση: i) Ἡ $3 \cdot \alpha < 12$ γράφεται $3 \cdot \alpha < 3 \cdot 4$, ὁπότε ἔχουμε $\alpha < 4$. Ἑπομένως τό σύνολο τῶν τιμῶν, πού μπορεῖ νά πάρει ὁ α, εἶναι τό $\{0, 1, 2, 3\}$.

Νά ἐργασθεῖτε μέ ὅμοιο τρόπο γιά τή (ii).

ii) ....

7. Νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο παραγόντων μέ ὅλους τούς δυνατούς (διαφορετικούς) τρόπους καθένας ἀπό τούς ἀριθμούς 12, 16, 5.

Λύση: $12 = 12 \cdot 1$ $\quad 12 = 2 \cdot 6 \quad 12 = 3 \cdot 4$

$16 = 16 \cdot 1 \quad 16 = 2 \cdot 8 \quad 16 = 4 \cdot 4$

$5 = 5 \cdot 1$

–Ὁ 12, πού μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο φυσικῶν πού κανένας τους δέν εἶναι ὁ 1 (π.χ. $2 \cdot 6$), λέγεται **σύνθετος** ἤ **ὀρθογώνιος** ἀριθμός.

–Ὁ 16, πού μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο ἴσων παραγόντων ($4 \cdot 4$), λέγεται **τετράγωνος** ἀριθμός.

–Ὁ 5, πού εἶναι διαφορετικός ἀπό τόν 1 καί δέν μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο παραγόντων πού κανείς τους νά μήν εἶναι 1, λέγεται **πρῶτος** ἀριθμός.

Γενικά:

- **Ἕνας φυσικός ἀριθμός λέγεται σύνθετος ἤ ὀρθογώνιος, ἄν μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν διαφορετικῶν ἀπό τό 1.**
- **Ἕνας φυσικός ἀριθμός λέγεται τετράγωνος, ἄν μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο ἴσων παραγόντων.**
- **Ἕνας φυσικός ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τόν 1 λέγεται πρῶτος, ἄν δέν μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο παραγόντων διαφορετικῶν ἀπό τό 1.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ὑπολογίσετε ἀπό μνήμης τά γινόμενα:
α) $3 \cdot 21$, β) $4 \cdot 25$, γ) $4 \cdot 125$, δ) $5 \cdot 110$, ε) $5 \cdot 220$, ς) $5 \cdot 330$.

2. Ποιοί ἀπό τούς ἀριθμούς 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, εἶναι:
α) σύνθετοι, β) τετράγωνοι, γ) πρῶτοι. Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας.

3. Νά «χωρίσετε» τό σύνολο $A = \{50, 51, 52, \ldots, 100\}$ στά ὑποσύνολα:
$B = \{$οἱ σύνθετοι ἀριθμοί πού ἀνήκουν στό $A\}$, $\Gamma = \{$οἱ τετράγωνοι ἀριθμοί πού ἀνήκουν στό $A\}$, $\Delta = \{$οἱ πρῶτοι ἀριθμοί πού ἀνήκουν στό $A\}$.

4. Νά ὁρίσετε τό x ὅταν: i) $2 \cdot x = 14$, ii) $7 \cdot x = 21$, iii) $5 \cdot x = 35$.

5. Δύο φυσικοί ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 10. Νά γράψετε ὅλα τά γινόμενα πού μποροῦν νά δώσουν καί νά βρεῖτε τό μεγαλύτερο. Νά κάνετε τό ἴδιο, ἄν οἱ φυσικοί ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 14. Μπορεῖτε νά καταλήξετε σέ κάποιο συμπέρασμα;

6. Ἄν εἶναι $x = 11$, νά ἐξετάσετε ποιές ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες εἶναι σωστές:
α) $2 \cdot x + 1 = 23$, β) $58 = 5 \cdot x + 3$, γ) $6 \cdot x - 6 = 66$, δ) $81 - 3 \cdot x = 48$.
ε) $11 - x = 11$.

7. Νά ὁρίσετε τά ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{N}$ γιά τά στοιχεῖα τῶν ὁποίων εἶναι:
α) $5 \cdot x \leq 25$, β) $7 \cdot x \leq 42$, γ) $8 \leq 2 \cdot x \leq 22$.

8. Μᾶς δίνεται ὅτι $7 \cdot x = 0$. Ποιά τιμή πρέπει νά ἔχει ὁ x;

9. Ὑπολογίστε μέ δύο τρόπους τά γινόμενα :α) $(17+2+21) \cdot 9$, β) $(781 - 142) \cdot 7$, γ) $(11+3) \cdot (10+4)$.

Γινόμενο τριῶν ἤ περισσότερων φυσικῶν — ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

11.4. Ἄς πάρουμε τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 2, 3 καί 5. Βρίσκουμε διαδοχικά $2 \cdot 3 = 6$ καί $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$. Ὁ ἀριθμός 30 λέγεται γινόμενο τῶν φυσικῶν 2, 3 καί 5 καί γράφεται $2 \cdot 3 \cdot 5$. Ἔτσι ἔχουμε

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 3) \cdot 5$$

Γενικά : $\boxed{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma}$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ὁρίζουμε τό γινόμενο τεσσάρων φυσικῶν ἀριθμῶν κ.λ.π. Ἕνα γινόμενο πού ἔχει περισσότερους ἀπό δύο παράγοντες λέγεται **γινόμενο πολλῶν παραγόντων.**

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:
$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$ καί $2 \cdot (3 \cdot 5) = 2 \cdot 15 = 30$. Δηλαδή

$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5).$$

Γενικά, ἄν ἔχουμε τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς α,β,γ, γιά τό γινόμενό τους $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\boxed{(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)}$$ *(προσεταιριστική ἰδιότητα).*

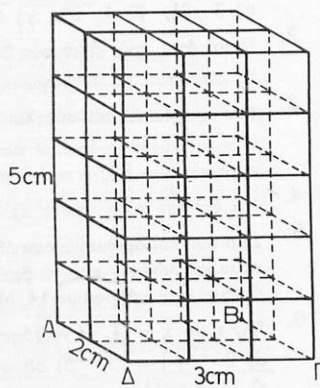
Μία γεωμετρική ἐξήγηση τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητας δίνεται στό σχῆμα 10.

Τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει διαστάσεις 2 cm, 3 cm, 5 cm.

Ὅπως βλέπουμε, ἀποτελεῖται ἀπό 5 ὁριζόντιες πλάκες πού κάθε μιά τους ἔχει $2 \cdot 3$ κύβους ἴσους μέ τή μονάδα ὄγκου ($1\ cm^3$). Σύνεπῶς ὁ ὄγκος του εἶναι

$$(2 \cdot 3) \cdot 5\ cm^3.$$

Μποροῦμε ὅμως νά ποῦμε πώς ἀποτελεῖται ἀπό 2 κατακόρυφες πλάκες (μιά μπρός καί μιά πίσω) πού κάθε μιά τους ἔχει $3 \cdot 5$ κύβους τοῦ $1\ cm^3$. Ἔτσι ὁ ὄγκος του εἶναι $2 \cdot (3 \cdot 5)\ cm^3$. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ



Σχ. 10

ἰσότητα $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$ ἐκφράζει μέ δύο τρόπους τόν ὄγκο τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Ἄν λοιπόν παραστήσουμε μέ V τόν ὄγκο ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α,β,γ, θά εἶναι

$$\boxed{V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$$

Δηλαδή:

> Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῶν διαστάσεών του.

Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ὄγκος κύβου μέ ἀκμή α εἶναι

$$V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha.$$

Τό γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$ τό γράφουμε α^3 καί τό διαβάζουμε «*α στόν κύβο*».

Ἔτσι ἔχουμε $\boxed{V = \alpha^3}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:**
$2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4$, $4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6$, $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5$.

Λύση :
$$\underbrace{2 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 4 = \underbrace{10 \cdot 6} \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240$$
$$\underbrace{4 \cdot 5} \cdot 2 \cdot 6 = \underbrace{20 \cdot 2} \cdot 6 = 40 \cdot 6 = 240$$
$$\underbrace{6 \cdot 4} \cdot 2 \cdot 5 = \underbrace{24 \cdot 2} \cdot 5 = 48 \cdot 5 = 240$$

Παρατηροῦμε ὅτι: $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 = 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5$, δηλαδή **ἕνα γινόμενο πολλῶν παραγόντων δέν ἀλλάζει, ἄν ἀλλάξουμε τή θέση τῶν παραγόντων του.**

2. **Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:**
$(4 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 6$ $(4 \cdot 6) \cdot 5 \cdot 3$, $4 \cdot (5 \cdot 6) \cdot 3$, $4 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 6)$.

Λύση :
$$(4 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 6 = 60 \cdot 6 = 360$$
$$(4 \cdot 6) \cdot 5 \cdot 3 = 24 \cdot 5 \cdot 3 = 120 \cdot 3 = 360$$
$$4 \cdot (5 \cdot 6) \cdot 3 = 4 \cdot 30 \cdot 3 = 120 \cdot 3 = 360$$
$$4 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 6) = 4 \cdot 5 \cdot 18 = 20 \cdot 18 = 360.$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι:
$$(4 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 6 = (4 \cdot 6) \cdot 5 \cdot 3 = 4 \cdot (5 \cdot 6) \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 6).$$

Δηλαδή, **γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕναν γινόμενο μέ ἕναν ἀριθμό, ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα μόνο παράγοντα τοῦ γινομένου μέ τόν ἀριθμό** (ἀφήνοντας τούς ἄλλους ὅπως εἶναι).

3. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:**

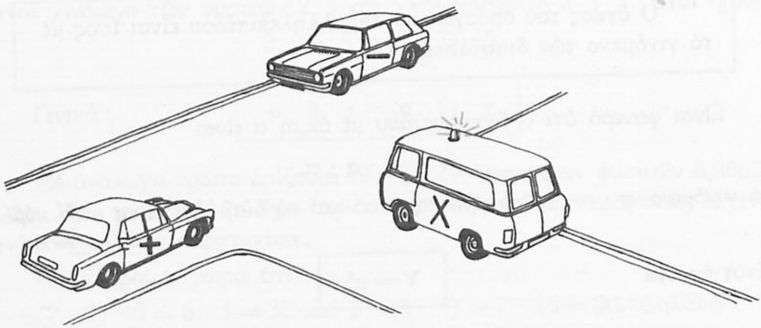
3 . 7+8 . 11 — 5 . 9+7 . 8

Λύση: Γιά νά βροῦμε τήν τιμή μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως, ἐκτελοῦμε πρῶτα τούς πολλαπλασιασμούς (ἄν ὑπάρχουν) καί μετά τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις.

Ἔτσι ἔχουμε:

$3 \cdot 7+8 \cdot 11-5 \cdot 9+7 \cdot 8 = \underbrace{21+88}-45+56 = \underbrace{109-45}+56 = 64+56 = 120.$

Λέμε ὅτι κατά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων **ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει προτεραιότητα.** Στήν παρακάτω εἰκόνα δίνουμε σχηματικά τήν προτεραιότητα τῶν πράξεων. Τό νοσοκομειακό (Χ) ἔχει πάντα προτεραιότητα.



4. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως 2 . (7+6—4)+4 · (15—9).**

Λύση: Ὅταν ὑπάρχουν παρενθέσεις, μποροῦμε νά κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις μέσα στίς παρενθέσεις καί μετά νά κάνουμε τούς πολλαπλασιασμούς. Ἔτσι ἔχουμε:

$2 \cdot (7+6-4)+4 \cdot (15-9) = 2 \cdot 9+4 \cdot 6 = 18+24 = 42.$

Ἡ παρακάτω εἰκόνα δείχνει ὅτι οἱ πράξεις μέσα στίς παρενθέσεις ἔχουν προτεραιότητα.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τῆς παραστάσεως αὐτῆς μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

$2 \cdot (7+6-4)+4 \cdot (15-9) = 2 \cdot 7+2 \cdot 6-2 \cdot 4+4 \cdot 15-4 \cdot 9 = 14+12-8+60-$
$-36 = 26-8+60-36 = 18+60-36 = 78-36 = 42.$

Δυνάμεις

11.5. Σέ προηγούμενες παραγράφους μάθαμε ὅτι ἕνα γινόμενο δύο παραγόντων πού εἶναι ἴσοι μέ **α**, γράφεται $\boldsymbol{\alpha^2}$ καί ἕνα γινόμενο τριῶν παραγόντων, πού εἶναι ἴσοι μέ **α**, γράφεται $\boldsymbol{\alpha^3}$.

Ὁμοίως ἕνα γινόμενο τεσσάρων παραγόντων ἴσων μέ **α** θά τό γράφουμε $\boldsymbol{\alpha^4}$ καί γενικά ἕνα γινόμενο **ν** παραγόντων ἴσων μέ **α** ($\nu \geq 2$) θά τό γράφουμε $\boldsymbol{\alpha^\nu}$.

Ἔχουμε λοιπόν :

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$$
$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Τά σύμβολα $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots, \alpha^\nu$ λέγονται **δυνάμεις τοῦ α.**

Εἰδικότερα τό $\boldsymbol{\alpha^2}$ λέγεται **δεύτερη δύναμη** τοῦ α καί διαβάζεται *«α στή δευτέρα ἤ α στό τετράγωνο»*.

Τό $\boldsymbol{\alpha^3}$ λέγεται **τρίτη δύναμη** τοῦ α καί διαβάζεται *«α στήν τρίτη ἤ α στόν κύβο»*.

Γενικά τό σύμβολο $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ λέγεται **νιοστή δύναμη** τοῦ α καί διαβάζεται *«α στή νί»*.

Στή δύναμη $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ ὁ **α** λέγεται **βάση** καί ὁ **ν** (πού μᾶς δείχνει τό πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων) λέγεται **ἐκθέτης**.

Θά ζητήσουμε τώρα νά ὑπολογίσουμε τίς διαδοχικές δυνάμεις τοῦ 1 καί τοῦ 10.

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$\dots\dots\dots$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000.$
$\dots\dots\dots$

Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Κάθε δύναμη τοῦ 1 εἶναι ἴση μέ 1.**
- **Μιά δύναμη τοῦ 10 εἶναι ἴση μέ τόν ἀριθμό πού προκύπτει, ἄν γράψουμε τή μονάδα καί κατόπι τόσα μηδενικά, ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἐκθέτης.**

Ὅταν σέ μιά ἀριθμητική παράσταση ὑπάρχουν καί δυνάμεις, γιά νά βροῦμε τήν τιμή της, ἐκτελοῦμε τίς πράξεις μέ τήν ἑξῆς σειρά:

- Κάνουμε πρῶτα τίς πράξεις, πού σημειώνονται μέσα σέ παρενθέσεις.
- Ὑπολογίζουμε τίς δυνάμεις.
- Ἐκτελοῦμε τούς πολλαπλασιασμούς.
- Κάνουμε τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις.

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε:

$$\begin{aligned} 12\cdot 3^2-5\cdot 4+2^3-(7-2\cdot 3) &= 12\cdot 3^2-5\cdot 4+2^3-(7-6)\\ &= 12\cdot 3^2-5\cdot 4+2^3-1\\ &= 12\cdot 9-5\cdot 4+8-1\\ &= 108-20+8-1 = 88+8-1 = 96-1 = 95. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ὁ ἀριθμός 89567 νά γραφεῖ ὡς ἀριθμητική παράσταση μέ τή βοήθεια δυνάμεων τοῦ 10.**

Λύση:
$$\begin{aligned} 89567 &= 80000+9000+500+60+7\\ &= 8\cdot 10000+9\cdot 1000+5\cdot 100+6\cdot 10+7\\ &= 8\cdot 10^4+9\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+7. \end{aligned}$$

2. **Ὁ ἀριθμός 11011 (βάση δύο) νά γραφεῖ ὡς ἀριθμητική παράσταση μέ τή βοήθεια δυνάμεων τοῦ 2 (τῆς βάσεως).**

Λύση: 11011 (βάση δύο) $= 10000+1000+0+10+1$ (βάση δύο)
$= 1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2+1.$

3. **Νά τραπεῖ ὁ ἀριθμός 3042 (βάση πέντε) στό δεκαδικό σύστημα.**

Λύση: 3042 (βάση πέντε) $= 3000+0+40+2$ (βάση πέντε) $=$
$= 3\cdot 5^3+0\cdot 5^2+4\cdot 5+2 =$
$= 3\cdot 125+0\cdot 25+4\cdot 5+2 = 375+20+2 = 397.$

4. **Μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νά ἐξηγηθεῖ ἡ γνωστή μας τεχνική τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.**

i) Ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι μονοψήφιος.

π.χ.
$$\begin{aligned} 35\times 7 &= (3\Delta+5M)\cdot 7\\ &= (3\cdot 7)\Delta+(5\cdot 7)M\\ &= 21\Delta+35M\\ &= 21\Delta+3\Delta+5M\\ &= 24\Delta+5M\\ &= 2E+4\Delta+5M = 245 \end{aligned}$$

Στήν πράξη γιά συντομία κάνουμε τή διάταξη $\longrightarrow$ $\begin{array}{r} 35\\ \times\ 7\\ \hline 245 \end{array}$

ii) Ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι τό 10,100,1000,...

$35\cdot 10 = 35\Delta = 3E+5\Delta = 350$

$35\cdot 100 = 35E = 3X+5E = 3500$

Δηλαδή **γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕναν ἀριθμό μέ τό 10, 100, 1000 κ.λ.π., βάζουμε στό τέλος του ἕνα, δύο, τρία, κ.λ.π. μηδενικά.**

iii) Τά ψηφία τοῦ ἑνός παράγοντα, ἐκτός ἀπό τό πρῶτο, εἶναι μηδέν.

$35 \cdot 70 = 35 \cdot (7 \cdot 10) = (35 \cdot 7) \cdot 10$
$= 245 \cdot 10 = 2450$

ἤ ἁπλούστερα $\longrightarrow$ $\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 70 \\ \hline 2450 \end{array}$

iv) Καί οἱ δύο παράγοντες εἶναι πολυψήφιοι

π.χ. $35 \cdot 73 = 35 \cdot (70+3) = 35 \cdot 70 + 35 \cdot 3$
$= 2450 + 105$
$= 2555$

$\begin{array}{rr} 35 \cdot \ 3 = & 105 \\ 35 \cdot 70 = & 2450 \\ \hline & 2555 \end{array}$

Ἡ διαδικασία αὐτή ἁπλουστεύεται μέ τή γνωστή μας διάταξη $\longrightarrow$

$\begin{array}{rl} 35 & \\ \times\ 73 & \\ \hline 105 & \text{(πρῶτο μερικό γινόμενο)} \\ 245 & \text{(δεύτερο μερικό γινόμενο)} \\ \hline 2555 & \end{array}$

Δοκιμή τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Γιά νά ἐλέγξουμε ἄν τό ἀποτέλεσμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι σωστό, κάνουμε ἐναλλαγή τῶν παραγόντων καί ἐκτελοῦμε πάλι τόν πολλαπλασιασμό. Σύμφωνα μέ τήν ἀντιμεταθετική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τά δυό ἀποτελέσματα πρέπει νά εἶναι τά ἴδια.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10. Ἡ περίμετρος ἑνός τετραγώνου εἶναι 24 cm. Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό του σέ cm^2 καί mm^2.

11. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ διαστάσεις 25 m καί 18 m. Ποιά ἡ τιμή τοῦ οἰκοπέδου, ἄν τό 1 m^2 κοστίζει 2500 δρχ;

12. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει διαστάσεις 60 cm, 45 cm, 30 cm. Πόσα cm^2 χαρτί χρειαζόμαστε, γιά νά τό καλύψουμε ἀκριβῶς;

13. Νά ὁρίσετε τά ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{N}$ γιά τά στοιχεῖα τῶν ὁποίων εἶναι: α) $x^2 \leq 64$, β) $x^2 \geq 25$, γ) $16 \leq x^2 \leq 81$.

14. Νά κάνετε τό ἴδιο, ἄν εἶναι: α) $x^2 < 16$, β) $x^2 > 49$.

15. Νά μετατραποῦν στό δεκαδικό σύστημα οἱ ἀριθμοί:
α) 1403 (βάση πέντε), β) 21212 (βάση τρία), γ) 101010 (βάση δύο).

16. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:
α) $7 \cdot 11 - 6 \cdot 10 + (8-3) \cdot 2 + 13$, β) $(15+6) \cdot 4 - (15-6) \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 5$

17. Νά κάνετε τό ἴδιο γιά τίς παραστάσεις:
α) $5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 4 \cdot 5 + (11+3) \cdot 7 - 6 \cdot 3^2$, β) $2 \cdot 5^3 - 200 + 5 \cdot 2^4 - 2 \cdot 13 \cdot 5$.

18. Μία δεξαμενή μέ σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἔχει διαστάσεις 5 m, 3 m, 8 m. Νά βρεθεῖ ἡ χωρητικότητά της: α) σέ m^3, β) σέ l (λίτρα).

19. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μέ πλάτος 18 m. Πόσο θά αὐξηθεῖ τό ἐμβαδό του, ἄν τό μῆκος του αὐξηθεῖ κατά 4 m;

20. Νά βρεῖτε ἀπό μνήμης τά ἐξαγόμενα: α) $2 \cdot 481 \cdot 5$, β) $25 \quad 657 \cdot 4$, γ) $8 \cdot 212 \cdot 125$.

21. Νά ὑπολογίσετε μέ ἁπλό τρόπο τά γινόμενα:

α) $5 \cdot 100 \cdot 8$, β) $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25$, γ) $1240 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25$, δ) $420 \cdot 5 \cdot 10$.

22. Νά κάνετε τόν ἕνα παράγοντα κατάλληλο γινόμενο καί νά βρεῖτε ἀπό μνήμης τά ἐξαγόμενα: α) $142 \cdot 5$, β) $25 \cdot 64$, γ) $48 \cdot 125$, δ) $1280 \cdot 5$, ε) $888 \cdot 25$.

Πολλαπλασιασμός πίνακα μέ ἀριθμό

11.6. Στόν πίνακα Ι φαίνεται ὁ ἀριθμός τῶν μαθητῶν ἑνός Γυμνασίου κατά τμῆμα. Ἄν κάθε μαθητής πλήρωσε 50 δρχ. γιά μιά ἐκδρομή, τότε ὁ πίνακας ΙΙ δείχνει τά χρήματα πού πλήρωσε κάθε τμῆμα.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι (ΜΑΘΗΤΩΝ)

Τμῆμα	Τάξη		
	Α′	Β′	Γ′
1ο	38	35	33
2ο	37	36	32

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ (ΧΡΗΜΑΤΩΝ)

Τμῆμα	Τάξη		
	Α′	Β′	Γ′
1ο	50·38	50·35	50·33
2ο	50·37	50·36	50·32

Ὅπως βλέπουμε, ὁ πίνακας ΙΙ προκύπτει ἀπό τόν πίνακα Ι, ἄν πολλαπλασιάσουμε τό πλῆθος τῶν μαθητῶν κάθε τμήματος μέ τόν ἀριθμό 50.

Τούς πίνακες Ι καί ΙΙ μποροῦμε νά τούς γράψουμε

$$\begin{pmatrix} 38 & 35 & 33 \\ 37 & 36 & 32 \end{pmatrix} \text{ καί } \begin{pmatrix} 50\cdot 38 & 50\cdot 35 & 50\cdot 33 \\ 50\cdot 37 & 50\cdot 36 & 50\cdot 32 \end{pmatrix}.$$

Ὁ δεύτερος ἀπό τούς πίνακες αὐτούς λέγεται **γινόμενο** τοῦ πρώτου πίνακα μέ τόν 50 καί γράφεται

$$50\cdot\begin{pmatrix} 38 & 35 & 33 \\ 37 & 36 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\cdot 38 & 50\cdot 35 & 50\cdot 33 \\ 50\cdot 37 & 50\cdot 36 & 50\cdot 32 \end{pmatrix}.$$

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕναν πίνακα μέ ἕναν ἀριθμό, πολλαπλασιάζουμε ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ πίνακα μέ τόν ἀριθμό.

Πολλαπλάσια εὐθύγραμμου τμήματος, τόξου, γωνίας

11.7. Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου δύο φυσικῶν ἀριθμῶν ξέρουμε ὅτι, ἄν α εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός, ἔχουμε

$0 \cdot \alpha = 0$, $1 \cdot \alpha = \alpha$, $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$, $3 \cdot \alpha = \alpha + \alpha + \alpha$ καί γενικά

$$\lambda \cdot \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{\lambda \text{ προσθετέοι}}.$$

Μέ ἐντελῶς ὅμοιο τρόπο ὁρίζουμε τό γινόμενο ἑνός γεωμετρικοῦ μεγέθους (εὐθ. τμήματος, τόξου, γωνίας) μέ φυσικό ἀριθμό.

I. Παίρνουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί σχηματίζουμε τά τμήματα $ΒΓ = ΑΒ$ καί $ΓΔ = ΑΒ$ (Σχ. 11).

Ἔτσι ἔχουμε

$ΑΓ = ΑΒ + ΑΒ$, $ΑΔ = ΑΒ + ΑΒ + ΑΒ$

Σχ. 11

καί γράφουμε

$ΑΓ = 2 \cdot ΑΒ$[1], $ΑΔ = 3 \cdot ΑΒ$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ὁρίζουμε τό $4 \cdot ΑΒ$ κ.λ.π.

Γενικά, ἄν $\lambda \in \mathbb{N}$ καί $\lambda \geq 2$ ὁρίζουμε

$$\boxed{\lambda \cdot \mathrm{AB} = \underbrace{\mathrm{AB} + \mathrm{AB} + \ldots + \mathrm{AB}}_{\lambda \text{ προσθετέοι}}}$$

Ὁρίζουμε ἀκόμη $1 \cdot ΑΒ = ΑΒ$ καί $0 \cdot ΑΒ = 0$ (μηδενικό εὐθύγραμμο τμῆμα)[2]. Τό τμῆμα $\lambda \cdot ΑΒ$ ($\lambda \in \mathbb{N}$) λέγεται **γινόμενο τοῦ τμήματος ΑΒ μέ τόν ἀριθμό λ.**

Τά τμήματα $0 \cdot ΑΒ = 0$, $1 \cdot ΑΒ$, $2 \cdot ΑΒ$ κ.λ.π. λέγονται **πολλαπλάσια** τοῦ ΑΒ.

II. Παίρνουμε τώρα τό τόξο $\widehat{AB}$ (Σχ. 12) καί σχηματίζουμε τά τόξα

$\widehat{ΒΓ} = \widehat{ΑΒ}$ καί $\widehat{ΓΔ} = \widehat{ΑΒ}$

Ἔτσι ἔχουμε $\widehat{ΑΓ} = \widehat{ΑΒ} + \widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΑΔ} = \widehat{ΑΒ} + \widehat{ΑΒ} + \widehat{ΑΒ}$

καί γράφουμε $\widehat{ΑΓ} = 2 \cdot \widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΑΔ} = 3 \cdot \widehat{ΑΒ}$.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ὁρίζουμε τό $4 \cdot \widehat{ΑΒ}$, κ.λ.π.

Γενικά, ἄν $\lambda \in \mathbb{N}$ καί $\lambda \geq 2$, ὁρίζουμε

$$\boxed{\lambda \cdot \widehat{\mathrm{AB}} = \underbrace{\widehat{\mathrm{AB}} + \widehat{\mathrm{AB}} + \ldots + \widehat{\mathrm{AB}}}_{\lambda \text{ προσθετέοι}}}$$

Ὁρίζουμε ἀκόμη $1 \cdot \widehat{ΑΒ} = \widehat{ΑΒ}$ καί $0 \cdot \widehat{ΑΒ} = 0$ (μηδενικό τόξο)[3].

Τό τόξο $\lambda \cdot \widehat{ΑΒ}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, λέγεται **γινόμενο τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$ μέ τόν ἀριθμό λ.**

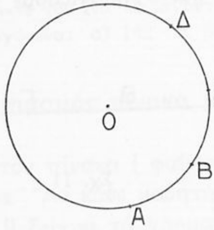
---

(1) Πολλές φορές γράφουμε 2ΑΒ καί γενικά λΑΒ ἀντί $2 \cdot ΑΒ$ ἤ $\lambda \cdot ΑΒ$. Τό ἴδιο κάνουμε καί γιά τά τόξα καί τίς γωνίες.

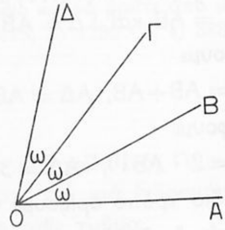
(2) Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα λέγεται μηδενικό, ὅταν τά ἄκρα του συμπίπτουν.

(3) Ἕνα τόξο λέγεται μηδενικό, ὅταν τά ἄκρα του συμπίπτουν καί ἡ ἐπίκεντρη γωνία πού βαίνει σ' αὐτό εἶναι μηδενική.

Τά τόξα $0 \cdot \widehat{AB}$, $1 \cdot \widehat{AB}$, $2 \cdot \widehat{AB}$ κ.λ.π. λέγονται **πολλαπλάσια** τοῦ $\widehat{AB}$.



Σχ. 12



Σχ. 13

III. Ὅπως στά εὐθύγραμμα τμήματα καί τά τόξα, ἔτσι καί γιά τίς γωνίες γράφουμε

$$A\widehat{O}\Gamma = 2 \cdot \widehat{\omega}, \quad A\widehat{O}\Delta = 3 \cdot \widehat{\omega} \quad (\Sigma\chi.\ 13)$$

καί γενικά

$$\boxed{\lambda \cdot \widehat{\omega} = \underbrace{\widehat{\omega} + \widehat{\omega} + \ldots + \widehat{\omega}}_{\lambda \text{ προσθετέοι}}}$$

Ὁρίζουμε ἀκόμη $1 \cdot \widehat{\omega} = \widehat{\omega}$ καί $0 \cdot \widehat{\omega} = 0$ (μηδενική γωνία).

Ἡ γωνία $\lambda \cdot \widehat{\omega}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, λέγεται **γινόμενο τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ μέ τόν ἀριθμό λ.**

Οἱ γωνίες $0 \cdot \widehat{\omega}$, $1 \cdot \widehat{\omega}$, $2 \cdot \widehat{\omega}$ κ.λ.π. λέγονται **πολλαπλάσια** τῆς $\widehat{\omega}$.

Μέτρο πολλαπλάσιου εὐθύγραμμου τμήματος, τόξου, γωνίας

11.8. Στήν πρόσθεση (Κεφ. 7) μάθαμε ὅτι τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος γεωμετρικῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν μέτρων τους, ὅταν ἔχουν μετρηθεῖ μέ τήν ἴδια μονάδα.

Ἄς πάρουμε λοιπόν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Θά ζητήσουμε νά βροῦμε τό μέτρο ἑνός πολλαπλάσιού του, π.χ. τοῦ $3 \cdot AB$, στίς περιπτώσεις πού τό μέτρο τοῦ ΑΒ εἶναι φυσικός ἤ συμμιγής ἤ δεκαδικός ἤ κλασματικός ἀριθμός.

1η περίπτωση: $(AB) = 5$ cm.

Ἐπειδή $3AB = AB + AB + AB$, τό μέτρο τοῦ 3ΑΒ θά εἶναι $5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm} = 3 \cdot 5\text{ cm} = 15\text{ cm}$.

2η περίπτωση: $(AB) = 5 \text{ cm } 8 \text{ mm}$.

$$\begin{array}{rr} 5 \text{ cm} & 8 \text{ mm} \\ & 3 \\ \hline 15 \text{ cm} & 24 \text{ mm} \\ 17 \text{ cm} & 4 \text{ mm} \end{array}$$

Ἐπειδή εἶναι $5 \text{ cm } 8 \text{ mm} = 58 \text{ mm}$, τό μέτρο τοῦ 3AB εἶναι

$3 \cdot 58 \text{ mm} = 58 \text{ mm} + 58 \text{ mm} + 58 \text{ mm}$. (1)

Ἄν ξαναγυρίσουμε στήν ἀρχική γραφή τοῦ μέτρου ἡ (1) γίνεται

$3 \cdot (5 \text{ cm } 8 \text{ mm}) = (5 \text{ cm } 8 \text{ mm}) + (5 \text{ cm } 8 \text{ mm}) + (5 \text{ cm } 8 \text{ mm})$ ἤ

$3 \cdot (5 \text{ cm } 8 \text{ mm}) = 15 \text{ cm } 24 \text{ mm} = 17 \text{ cm } 4 \text{ mm}$.

Ἡ περίπτωση αὐτή μᾶς θυμίζει τόν πολλαπλασιασμό συμμιγῆ μέ φυσικό ἀριθμό πού μάθαμε στό Δημοτικό σχολεῖο.

3η περίπτωση: $(AB) = 5{,}8 \text{ cm}$.

$$\begin{array}{r} 5{,}8 \\ \times \quad 3 \\ \hline 17{,}4 \end{array}$$

Ἐπειδή $5{,}8 \text{ cm} = 58 \text{ mm}$,
τό μέτρο τοῦ 3 AB εἶναι $3 \cdot 58 \text{ mm} = 174 \text{ mm}$.
Ἄν ξαναγυρίσουμε στά cm, ἔχουμε

$3 \cdot 5{,}8 \text{ cm} = 17{,}4 \text{ cm}$,

πού μᾶς θυμίζει τόν πολλαπλασιασμό δεκαδικοῦ μέ φυσικό ἀριθμό.

4η περίπτωση: $(AB) = \frac{2}{5} \text{ m}$.

Ἄν ὡς μονάδα μήκους πάρουμε τό $\frac{1}{5}$ m καί τό ὀνομάσουμε μ $\left(\frac{1}{5} \text{ m} = 1\text{μ}\right)$ τότε θά εἶναι $(AB) = 2\text{μ}$.

Ἑπομένως τό μέτρο τοῦ 3 AB θά εἶναι

$$3 \cdot 2\,\text{μ} = 6\,\text{μ}.$$

Ἄν ξαναγυρίσουμε στήν ἀρχική μονάδα ἡ ἰσότητα αὐτή γίνεται

$$3 \cdot \frac{2}{5} \text{ m} = \frac{6}{5} \text{ m} = \frac{3 \cdot 2}{5} \text{ m}.$$

Ἄρα $\quad 3 \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{3 \cdot 2}{5}$,

πού μᾶς θυμίζει τόν πολλαπλασιασμό φυσικοῦ ἀριθμοῦ μέ κλάσμα.

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Ὅταν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα πολλαπλασιάζεται μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό, τότε καί τό μέτρο του πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό.**

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, ἄν ἀντί γιά εὐθύγραμμα τμήματα πάρουμε τόξα ἤ γωνίες.

Ἐμβαδό ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ διαστάσεις κλασματικούς ἤ δεκαδικούς ἀριθμούς

11.9. **1η περίπτωση.** *Οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι κλάσματα.* Παίρνουμε ἕνα ὀρθογώνιο, π.χ. τό ΑΒΓΔ (Σχ. 14), μέ διαστάσεις (AB) =

$=\frac{4}{5}$ Μ καί $(ΑΔ)=\frac{2}{5}$ Μ (Μ εἶναι ἡ μονάδα μήκους). Ἄν ὡς μονάδα μήκους πάρουμε τό ΑΙ, πού εἶναι ἴσο μέ $\frac{1}{5}$ Μ, καί τό ὀνομάσουμε μ, τότε θά εἶναι:

$$(ΑΕ)=(ΕΖ)=5μ,$$

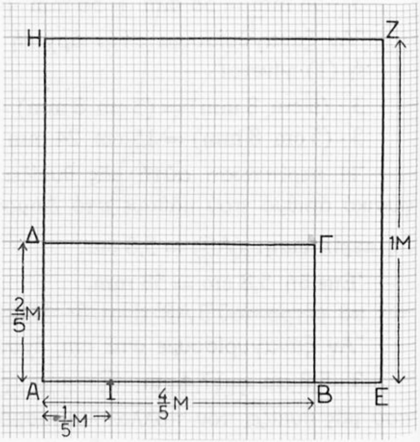
$$(ΑΒ)=4\,μ \quad \text{καί} \quad (ΑΔ)=2μ.$$

Τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου ΑΕΖΗ εἶναι

$$5μ\cdot 5μ=25\,μ^2.$$

Συνεπῶς $1\,Μ^2=25\,μ^2$ ἤ

$1\,μ^2=\frac{1}{25}\,Μ^2.$



Σχ. 14

Τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι

$$4\,μ\cdot 2\,μ=8\,μ^2.$$

Ἄν ξαναγυρίσουμε στή μονάδα Μ, ἔχουμε

$$\frac{4}{5}\,Μ\cdot\frac{2}{5}\,Μ=\frac{8}{25}\,Μ^2=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 5}\,Μ^2.$$

Ὥστε $$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 5}.$$

Ἄν οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἑτερώνυμα κλάσματα, π.χ. $\frac{3}{4}$ Μ καί $\frac{5}{8}$ Μ, μποροῦμε νά τά κάνουμε ὁμώνυμα, ὁπότε ἔχουμε $\frac{3}{4}\,Μ=\frac{6}{8}\,Μ$. Τώρα σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη περίπτωση ἔχουμε:

$$\frac{3}{4}\,Μ\cdot\frac{5}{8}\,Μ=\frac{6}{8}\,Μ\cdot\frac{5}{8}\,Μ=\frac{30}{64}\,Μ^2=\frac{15}{32}\,Μ^2=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 8}\,Μ^2.$$

Ἔτσι ἔχουμε: $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 8}.$

Ἡ ἰσότητα αὐτή, καθώς καί ἡ $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 5}$ μᾶς θυμίζει τόν πολλαπλασιασμό τῶν κλασμάτων, πού μάθαμε στό Δημοτικό.

2η περίπτωση. *Οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι δεκαδικοί ἀριθμοί.*

Παίρνουμε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις (ΑΒ) = 5,6 cm καί (ΒΓ) = 4,3 cm (Σχ. 15). Ξέρουμε ὅτι 5,6 cm = 56 mm καί 4,3 cm = 43 mm. Ἑπομένως τό ἐμβαδό τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι

$$56\ \mathrm{mm}\cdot 43\ \mathrm{mm}=2408\ \mathrm{mm}^2 \qquad (1)$$

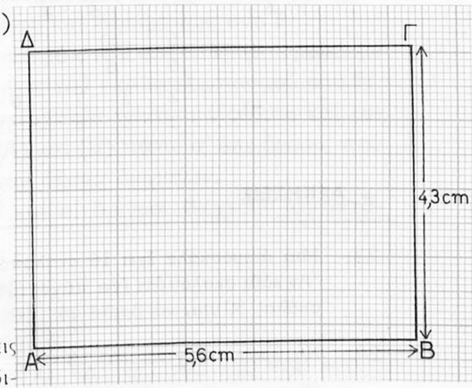
᾿Αλλά, ὅπως εἶναι γνωστό, $100\ \text{mm}^2 = 1\ \text{cm}^2$. ῎Αρα τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι $24{,}08\ \text{cm}^2$. ῎Ετσι, ἄν ξαναγυρίσουμε στά cm, ἡ ἰσότητα (1) γράφεται

$5{,}6\ \text{cm} \cdot 4{,}3\ \text{cm} = 24{,}08\ \text{cm}^2$.

῾Επομένως $5{,}6 \cdot 4{,}3 = 24{,}08$. πού μᾶς θυμίζει τόν πολλαπλασιασμό δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{r} 5{,}6 \\ \times\ 4{,}3 \\ \hline 168 \\ 224 \\ \hline 24{,}08 \end{array}$$

᾿Από τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:



Σχ. 15

- **Τό ἐμβαδό ὀρθογωνίου** (μέ διαστάσεις φυσικούς ἤ κλασματικούς ἤ δεκαδικούς ἀριθμούς) **εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν διαστάσεών του.**
- **Τό γινόμενο δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα, πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν.**
- **Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δύο δεκαδικούς, τούς πολλαπλασιάζουμε σάν νά εἶναι φυσικοί καί στό γινόμενο χωρίζουμε μέ ὑποδιαστολή ἀπό τό τέλος τόσα δεκαδικά ψηφία, ὅσα ἔχουν καί οἱ δύο παράγοντες.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:**

$\mathbf{5 \cdot (7 \quad 3 \quad 4)}$, $\quad \mathbf{3{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3{,}5 & 2{,}3 \\ 4 & 10 & 5 \end{pmatrix}}$.

Λύση: $5 \cdot (7 \quad 3 \quad 4) = (5 \cdot 7 \quad 5 \cdot 3 \quad 5 \cdot 4) = (35 \quad 15 \quad 20)$

$$3{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3{,}5 & 2{,}3 \\ 4 & 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \cdot 6 & 3{,}6 \cdot 3{,}5 & 3{,}6 \cdot 2{,}3 \\ 3{,}6 \cdot 4 & 3{,}6 \cdot 10 & 3{,}6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21{,}6 & 12{,}6 & 8{,}28 \\ 14{,}4 & 36 & 18 \end{pmatrix}.$$

2. **Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:**

$\mathbf{35{,}46 \cdot 10}$ $\qquad \mathbf{35{,}46 \cdot 100}$ $\qquad \mathbf{35{,}46 \cdot 1000}$

Λύση:

$$\begin{array}{r} 35{,}46 \\ \times\ 10 \\ \hline 354{,}60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35{,}46 \\ \times\ 100 \\ \hline 3546{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35{,}46 \\ \times\ 1000 \\ \hline 35460{,}00 \end{array}$$

῎Εχουμε λοιπόν: $35{,}46 \cdot 10 = 354{,}6$, $35{,}46 \cdot 100 = 3546$ καί $35{,}46 \cdot 1000 = 35460$.

Δηλαδή, **γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα δεκαδικό ἀριθμό μέ 10, 100, 1000 κ.λ.π., μεταφέρουμε τήν ὑποδιαστολή πρός τά δεξιά 1, 2, 3 κ.λ.π. θέσεις.**

3. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:**

i) $6 \cdot \frac{5}{6}$, ii) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8}$.

Λύση: i) $6 \cdot \frac{5}{6} = \frac{30}{6} = 5$.

ii) $\underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}} \cdot \frac{7}{8} = \frac{6}{15} \cdot \frac{7}{8} = \frac{42}{120}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Μιά ἀνεμόσκαλα ἔχει 16 σκαλοπάτια, τά ὁποῖα ἀπέχουν μεταξύ τους 25 cm. Ἄν κάθε σκαλοπάτι ἔχει πάχος (ὕψος) 6 cm καί περισσεύουν ἀπό κάθε μεριά τῆς σκάλας 30 cm, νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς σκάλας.

24. Νά βρεῖτε τά γινόμενα: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ καί $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ καί μετά τό ἄθροισμα τῶν πινάκων πού προκύπτουν.

25. Ἡ Ἀθήνα ἀπέχει ἀπό τή Θεσσαλονίκη 516 km. Δύο αὐτοκίνητα ἀναχωροῦν συγχρόνως ἀπό τίς δύο πόλεις μέ ταχύτητες 60 km/h καί 70 km/h ἀντιστοίχως. Πόσο θά ἀπέχουν τά δύο αὐτοκίνητα μετά ἀπό 3 h;

26. Τέσσερα γραφεῖα θερμαίνονται μέ 4 ὅμοιες θερμάστρες. Ἄν κάθε θερμάστρα καίει 2,4 l/h πετρέλαιο καί ἀνάβει 7,5 h τήν ἡμέρα, νά βρεῖτε πόσο θά κοστίσει τό πετρέλαιο, πού θά κάψουν οἱ θερμάστρες σέ 5 ἑβδομάδες, ἄν τό λίτρο κάνει 8,5 δραχμές. (1 ἑβδομάδα ἔχει 6 ἐργάσιμες ἡμέρες).

27. Ἕνα οἰκόπεδο κοστίζει 650 000 δραχμές. Διαθέτει κάποιος 3t λάδι πρός 70 δραχ/kg*, 10t ρύζι πρός 8,125 δρχ/kg* καί μετρητά. Πόσα μετρητά πρέπει νά διαθέσει γιά τήν ἀγορά του;

28. Χρησιμοποιοῦμε 12 σπίρτα καί κατασκευάζουμε ἕνα τετράγωνο. Κάθε σπίρτο ἔχει μῆκος 3,5 cm. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου.

29. Ἕνα ποδήλατο κινεῖται σ' ἕναν κυκλικό στίβο καί σέ 1 min διατρέχει τόξο $7^0\ 28'$. Πόσο τόξο θά διατρέξει σέ $\frac{1}{4}$ h.

30. Ἕνα ρολόι πάει μπροστά 1 min 40 sec κάθε 12 h. Ἄν ρυθμίστηκε σήμερα στήν κανονική ὥρα, πόσο θά πηγαίνει μπροστά μετά 4 ἡμέρες;

31. Ἕνα περιβόλι ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ διαστάσεις 32,5 m καί 28 m. Μέσα στό περιβόλι ὑπάρχει μία τετράγωνη στέρνα μέ πλευρά 4,5 m. Πόση ἐλεύθερη ἔκταση ἔχει τό περιβόλι;

32. Γιά ἕνα γλύκισμα χρειάζονται: 2 kg* ἀλεύρι, 1 kg* ζάχαρι, 0,4 kg* βούτυρο, 6 αὐγά καί 3 φακελάκια βανίλια. Γιά ἄλλο γλύκισμα χρειάζονται: 1,5 kg* ἀλεύρι, 1,2 kg* ζάχαρι, 0,6 kg* βούτυρο, 9 αὐγά καί 4 φακελάκια βανίλια. Νά πινακοποιήσετε τά δεδομένα αὐτά καί νά βρεῖτε τόν πίνακα τῶν ὑλικῶν πού θά χρειασθοῦν γιά τριπλάσιες ποσότητες τῶν δύο γλυκισμάτων.

33. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἔχει μῆκος 7 m 6 dm. Πόσο θά μειωθεῖ τό ἐμβαδό του, ἄν ἐλαττώσουμε τό πλάτος του κατά 3,5 m;

34. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα: α) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10$, β) $8 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$.

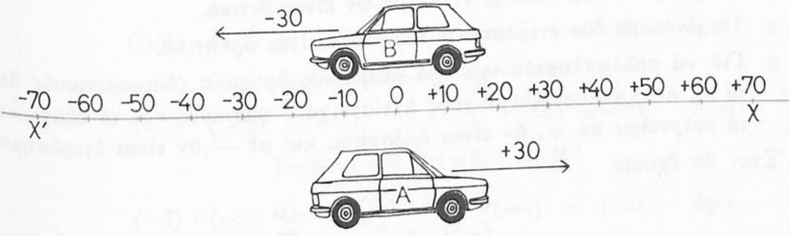
Πολλαπλασιασμός στό $\mathbb{Z}$

11.10. Ὅπως εἴδαμε γιά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση στό $\mathbb{Z}$ ἰσχύουν οἱ γνωστές ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως στό $\mathbb{N}$.

Θά ὁρίσουμε τώρα τόν πολλαπλασιασμό στό $\mathbb{Z}$ καί θά διαπιστώσουμε πάλι ὅτι ἰσχύουν οἱ γνωστές μας ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbb{N}$.

Γιά νά κάμουμε παραστατική τήν ἐργασία αὐτή, παίρνουμε καί μελετοῦμε τήν κίνηση δύο αὐτοκινήτων (A) καί (B) πάνω σ' ἕνα δρόμο, πού στό σχῆμα 16 τόν ἐξομοιώνουμε μέ ἕναν ἄξονα ἀκεραίων.

Ἐμεῖς βρισκόμαστε στό σημεῖο O καί οἱ ἀριθμοί δείχνουν ἀποστάσεις (σέ χιλιόμετρα) ἀπό τό O.



Σχ. 16

Τήν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου πού πάει δεξιά τή σημειώνουμε μέ $+$, π.χ. $+\,30$ χλμ τήν ὥρα, καί ἐκείνου πού πάει ἀριστερά μέ $-$, π.χ. -30 χλμ τήν ὥρα. Ὡς ἀρχή γιά τή μέτρηση τοῦ χρόνου παίρνουμε τή στιγμή πού περνᾶ τό αὐτοκίνητο ἀπό τό O. Ἔτσι π.χ. τό χρόνο «2 ὧρες ἀπό τή στιγμή πού πέρασε ἀπό τό O» τόν παριστάνουμε μέ $+2$ ὧρες, ἐνῶ τό χρόνο «2 ὧρες πρίν φθάσει στήν ἀρχή» τόν παριστάνουμε μέ -2 ὧρες.

i) Ἄς πάρουμε τώρα τό αὐτοκίνητο (A) κι ἄς ζητήσουμε νά βροῦμε ποῦ θά βρίσκεται π.χ. 2 ὧρες μετά ἀπό τή στιγμή πού πέρασε ἀπό τό O καί ποῦ βρισκόταν 2 ὧρες πρίν φθάσει στό O.

Διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι :

Μετά 2 ὧρες θά βρίσκεται στό $+60$ χιλιόμετρο.

Ἔτσι θά ἔχουμε ($+2$ ὧρες) $\cdot$ ($+30$ χλμ) $= +60$ χλμ. Ἄρα

$$(+2)\cdot(+30) = +60 \tag{1}$$

Πρίν 2 ὧρες βρισκόταν στό -60 χλμ.

Ἔτσι ἔχουμε (-2 ὧρες) $\cdot$ ($+30$ χλμ) $= -\,60$ χλμ. Ἄρα

$$(-2)\cdot(+30) = -60. \tag{2}$$

ii) Ἄς μελετήσουμε τώρα τήν κίνηση τοῦ αὐτοκινήτου (B) πού πάει ἀριστερά κι ἄς ζητήσουμε πάλι νά βροῦμε πού θά βρίσκεται π.χ. 2 ὧρες μετά τό πέρασμά του ἀπό τό Ο καί ποῦ βρισκόταν 2 ὧρες πρίν φθάσει στό Ο. Μετά 2 ὧρες θά βρίσκεται στό –60 χλμ.

Θά ἔχουμε λοιπόν $(+2 \text{ ὧρες}) \cdot (-30 \text{ χλμ}) = -60$ χλμ. Ἄρα

$$(+2) \cdot (-30) = -60 \tag{3}$$

Πρίν 2 ὧρες βρισκόταν στό +60 χλμ.

Ἔτσι ἔχουμε $(-2 \text{ ὧρες}) \cdot (-30 \text{ χλμ}) = +60$ χλμ. Ἄρα

$$(-2) \cdot (-30) = +60 \tag{4}$$

Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα καί ἄλλα παρόμοια συμπεραίνουμε ὅτι:

- **Τό γινόμενο δύο ὁμόσημων ἀκεραίων εἶναι θετικό.**
- **Τό γινόμενο δύο ἑτερόσημων ἀκεραίων εἶναι ἀρνητικό.**
- **Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δυό ἀκέραιους ἀριθμούς (διαφορετικούς ἀπό τό 0), πολλαπλασιάζουμε τούς ἀντίστοιχους φυσικούς καί τό ἐξαγόμενο τό παίρνουμε μέ +, ἄν εἶναι ὁμόσημοι, καί μέ —, ἄν εἶναι ἑτερόσημοι.**

Ἔτσι θά ἔχουμε

$$(-3) \cdot (+2) = -6$$
$$(-5) \cdot (-7) = +35$$
$$(+6) \cdot (-4) = -24.$$

- **Ὅταν ὁ ἕνας (τουλάχιστον) παράγοντας εἶναι 0, ὡς γινόμενό τους παίρνουμε τό 0.**

Ἔτσι ἔχουμε, π.χ. $(+3) \cdot 0 = 0 \cdot (+3) = 0$
$(-5) \cdot 0 = 0 \cdot (-5) = 0$ καί $0 \cdot 0 = 0$.

Γινόμενο τριῶν ἤ περισσότερων ἀκεραίων

11.11. Ὅπως στούς φυσικούς ἀριθμούς ἔτσι καί στό $\mathbb{Z}$, γιά νά βροῦμε τό γινόμενο τριῶν ἤ περισσότερων ἀκεραίων, πολλαπλασιάζουμε τούς δύο πρώτους, τό γινόμενό τους μέ τόν τρίτο κ.λ.π. μέχρι νά τελειώσουν ὅλοι οἱ παράγοντες.

Π.χ. εἶναι

$$(+2) \cdot (+5) \cdot (+6) = [(+2) \cdot (+5)] \cdot (+6) = (+10) \cdot (+6) = +60$$
$$(+2) \cdot (-5) \cdot (+6) = [(+2) \cdot (-5)] \cdot (+6) = (-10) \cdot (+6) = -60$$
$$(+2) \cdot (-5) \cdot (-6) = [(+2) \cdot (-5)] \cdot (-6) = (-10) \cdot (-6) = +60$$
$$\underbrace{(-2) \cdot (+5)} \cdot (-4) \cdot (-3) = \underbrace{(-10) \cdot (-4)} \cdot (-3) = (+40) \cdot (-3) = -120.$$

Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Τό γινόμενο τριῶν ἤ περισσότερων παραγόντων, διαφορετικῶν ἀπό τό μηδέν, εἶναι θετικό, ὅταν ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοί ἤ τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.**

● **Ὅταν τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι περιττός ἀριθμός, τότε τό γινόμενο εἶναι ἀρνητικό.**

Οἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbb{Z}$

11.12. Μέ τά παρακάτω παραδείγματα διαπιστώνουμε εὔκολα ὅτι οἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbb{Z}$ εἶναι οἱ γνωστές μας ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbb{N}$.

Πιό συγκεκριμένα ἔχουμε:

i) $(+4)\cdot(+5) = +20, \quad (+5)\cdot(+4) = +20,$ ἄρα

$$(+4)\cdot(+5) = (+5)\cdot(+4).$$

$(+4)\cdot(-5) = -20, \quad (-5)\cdot(+4) = -20,$ ἄρα

$$(+4)\cdot(-5) = (-5)\cdot(+4).$$

$(-4)\cdot(+5) = -20, \quad (+5)\cdot(-4) = -20,$ ἄρα

$$(-4)\cdot(+5) = (+5)\cdot(-4).$$

$(-4)\cdot(-5) = +20, \quad (-5)\cdot(-4) = +20,$ ἄρα

$$(-4)\cdot(-5) = (-5)\cdot(-4)$$

καί γενικά

$$\boxed{\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha}$$ (*ἀντιμεταθετική* ἰδιότητα)

ii) $\left.\begin{array}{l}[(+2)\cdot(-3)]\cdot(-5) = (-6)\cdot(-5) = +30\\ (+2)\cdot[(-3)\cdot(-5)] = (+2)\cdot(+15) = +30\end{array}\right\}$, ἄρα

$$[(+2)\cdot(-3)]\cdot(-5) = (+2)\cdot[(-3)\cdot(-5)]$$

καί γενικά

$$\boxed{(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)}$$ (*προσεταιριστική* ἰδιότητα)

iii) $\left.\begin{array}{l}(+2)\cdot[(+7)+(-3)] = (+2)\cdot(+4) = +8\\ (+2)\cdot(+7)+(+2)\cdot(-3) = (+14)+(-6) = +8\end{array}\right\}$, ἄρα

$$(+2)\cdot[(+7)+(-3)] = (+2)\cdot(+7)+(+2)\cdot(-3)$$

καί γενικά

$$\boxed{\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma}$$ (*ἐπιμεριστική* ἰδιότητα τοῦ πολ/μοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση)

iv) $(+1)\cdot(+3)=(+3)\cdot(+1)=+3$, $(+1)\cdot(-3)=(-3)\cdot(+1)=-3$

καί γενικά

$$\boxed{(+1)\cdot\alpha=\alpha\cdot(+1)=\alpha}$$

(τό $+1$ εἶναι τό *οὐδέτερο στοιχεῖο* τοῦ πολ/μοῦ)

v) Ἀκόμη εἶναι

$$\boxed{0\cdot\alpha=\alpha\cdot 0=0}$$

(τό 0 εἶναι *ἀπορροφητικό στοιχεῖο* τοῦ πολ/μοῦ).

Δυνάμεις ἀκεραίων

11.13. Οἱ δυνάμεις μέ βάση ἀκέραιο ἀριθμό ὁρίζονται ὅπως ἀκριβῶς οἱ δυνάμεις μέ βάση φυσικό. Ἔτσι εἶναι

$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(+4)\cdot(-2)=-8$
$(-4)^2=(-4)\cdot(-4)=+16$
$(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=(+9)\cdot(-3)\cdot(-3)=(-27)\cdot(-3)=+81.$

Εἶναι φανερό τέλος ὅτι, γιά νά βροῦμε τήν τιμή μιᾶς παραστάσεως στήν ὁποία ἔχουν σημειωθεῖ πράξεις μέ ἀκεραίους, ἀκολουθοῦμε τήν ἴδια σειρά πού ἀκολουθήσαμε καί στούς φυσικούς (βλέπε § 11.5).

Π.χ. ἔχουμε

$$\begin{aligned}(-2)^2\cdot(+3)-[(-2)-(+7)]\cdot(-4) &= (-2)^2\cdot(+3)-[(-2)+(-7)]\cdot(-4)\\ &= (-2)^2\cdot(+3)-(-9)\cdot(-4)\\ &= (+4)\cdot(+3)-(-9)\cdot(-4)\\ &= (+12)-(+36)\\ &= (+12)+(-36)\\ &= -24.\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως**
$(+2)\cdot(-3)-(+7)\cdot(-5)-(-3)\cdot(-4)+(+3)\cdot(-6)$.

Λύση: $(+2)\cdot(-3)-(+7)\cdot(-5)-(-3)\cdot(-4)+(+3)\cdot(-6)=(-6)-(-35)-(+12)+$ $+(-18)=(-6)+(+35)+(-12)+(-18)=(-36)+(+35)=-1.$

2. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως**
$A=(-3)\cdot(-2)\cdot(+4)\cdot(-1)-(-5)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(+3)+(-3)\cdot[(+7)+(-6)-(-2)]$.

Λύση: $\underbrace{(-3)\cdot(-2)}\cdot(+4)\cdot(-1)=\underbrace{(+6)\cdot(+4)}\cdot(-1)=(+24)\cdot(-1)=-24$

$\underbrace{(-5)\cdot(-2)}\cdot(-1)\cdot(+3)=\underbrace{(+10)\cdot(-1)}\cdot(+3)=(-10)\cdot(+3)=-30$

$(-3)\cdot[(+7)+(-6)-(-2)]=(-3)\cdot[(+7)+(-6)+(+2)]=(-3)\cdot(+3)=-9.$

Ἄρα $A=(-24)-(-30)+(-9)=(-24)+(+30)+(-9)=(-33)+(+30)=-3.$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

α) $(+4)\cdot(-3)$, β) $(-5)\cdot(+7)$, γ) $(-3)\cdot(-8)$, δ) $(+6)\cdot(+7)$.

36. Ὁμοίως τά ἐξαγόμενα:

α) $(+1)\cdot(-5)\cdot(-2)$, β) $(-4)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-3)$,

γ) $(+3)\cdot(-5)\cdot(+1)\cdot(-6)$.

37. Ὁμοίως τά ἐξαγόμενα:

i) $(+7)\cdot(-2)\cdot(+4)$, ii) $(-5)\cdot(+4)\cdot(-1)\cdot(-2)$,

iii) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)$.

38. Ὁμοίως τά ἐξαγόμενα:

i) $(-3)^2$, ii) $(-4)^2$., ii) $(-1)^4$, iv) $(-7)^2$, v) $(-5)^2$

39. Ὁμοίως τά ἐξαγόμενα:

i) $(-3)^3$, ii) $(-1)^5$, iii) $(-4)^3$, iv) $(-2)^7$, v) $(-5)^3$

40. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $(-7)\cdot(+2)+(+3)\cdot(-5)\cdot(-2)-(-1)\cdot(+6)\cdot(-4)$

β) $(-5)\cdot(-3)^2\cdot(-1)^5-(+3)^2\cdot(-2)^2+(+4)\cdot(8-3)$

γ) $(+4)\cdot(-2)\cdot(-3)+(+5)\cdot(-4)^2-(-7)\cdot[(-3)+(+6)+(-10)]$.

41. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή κάθε μιᾶς ἀπό τίς παρακάτω παραστάσεις:

α) $(-5)\cdot(+7)$ καί $(+7)\cdot(-5)$, β) $(-4)\cdot(-9)$ καί $(-9)\cdot(-4)$,

γ) $(+3)\cdot[(-5)\cdot(+4)]$ καί $[(+3)\cdot(-5)]\cdot(+4)$.

42. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:

α) $(-9)\cdot[(+3)+(-5)]$ καί $(-9)\cdot(+3)+(-9)\cdot(-5)$

β) $(+2)\cdot[(-7)-(+3)]$ καί $(+2)\cdot(-7)-(+2)\cdot(+3)$

Μπορεῖτε νά βγάλετε κάποιο συμπέρασμα;

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 11

1. **Γινόμενο** τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ α μέ τό φυσικό β, λέγεται τό ἄθροισμα α προσθετέων, πού καθένας τους εἶναι ἴσος μέ τόν β.

$$\alpha\cdot\beta=\underbrace{\beta+\beta+\ldots+\beta}_{\alpha\ \text{προσθετέοι}}$$

Στόν πολλαπλασιασμό τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

- **Ἀντιμεταθετική** $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
- **Προσεταιριστική** $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
- **Τό 1 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο** $\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$

- **Τὸ 0 εἶναι ἀπορροφητικὸ στοιχεῖο** $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
- Ἀκόμη ἰσχύει ἡ **ἐπιμεριστική** ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση καί ὡς πρός τήν ἀφαίρεση.

$\delta \cdot (\alpha+\beta+\gamma) = \delta \cdot \alpha + \delta \cdot \beta + \delta \cdot \gamma, \quad \gamma \cdot (\alpha-\beta) = \gamma \cdot \alpha - \gamma \cdot \beta.$

2. Νιοστή δύναμη ($\nu \geq 2$) ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ α λέγεται τό γινόμενο ν παραγόντων ἴσων μέ α.

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ὁ α εἶναι ἡ **βάση** καί ὁ ν ὁ **ἐκθέτης** τῆς δυνάμεως.

3. Ἕνας ἀριθμός λέγεται **σύνθετος** ἤ **ὀρθογώνιος**, ἄν μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν διαφορετικῶν ἀπό τό 1, ἐνῶ ἄν μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς δεύτερη δύναμη ἑνός φυσικοῦ λέγεται **τετράγωνος**. Ἕνας φυσικός ἀριθμός, διαφορετικός ἀπό τόν 1, λέγεται πρῶτος,ἄν δέν μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο δύο παραγόντων διαφορετικῶν ἀπό τόν 1.

4. Τό **ἐμβαδό** ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου εἶναι τό γινόμενο τῶν δύο διαστάσεών του καί ὁ **ὄγκος** ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι τό γινόμενο τῶν τριῶν διαστάσεών του.

$$E = \alpha \cdot \beta, \qquad V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma.$$

Τό ἐμβαδό τετραγώνου καί ὁ ὄγκος κύβου (μέ πλευρά α) εἶναι ἀντίστοιχα

$$E = \alpha^2, \qquad V = \alpha^3.$$

5. **Γινόμενο ἑνός πίνακα μέ φυσικό ἀριθμό** εἶναι ὁ πίνακας πού βρίσκουμε, ἄν πολλαπλασιάσουμε τά στοιχεῖα του μέ τόν ἀριθμό

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \alpha & \lambda \cdot \beta & \lambda \cdot \gamma) \\ \lambda . \delta & \lambda \cdot \varepsilon & \lambda \cdot \zeta) \end{pmatrix}.$$

6. **Γινόμενο ἑνός γεωμετρικοῦ μεγέθους α** (εὐθ. τμῆμα, γωνία, τόξο) **μέ τόν φυσικό ἀριθμό λ** λέγεται τό ἄθροισμα λ προσθετέων ἴσων μέ α.

7. Γιά νά **πολλαπλασιάσουμε δύο ἀκέραιους ἀριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τούς ἀντίστοιχους φυσικούς καί στό ἐξαγόμενο βάζουμε

- πρόσημο σύν (+), ἄν εἶναι ὁμόσημοι,
- πρόσημο πλήν (–), ἄν εἶναι ἑτερόσημοι.

Στόν πολλαπλασιασμό ἀκεραίων, ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

43. Μᾶς δίνεται ὅτι $x \cdot x = 0$. Ποιά τιμή πρέπει νά πάρει ὁ x;

44. Στή θέση τοῦ ἐρωτηματικοῦ νά θέσετε τό κατάλληλο σύμβολο ἰσότητας ἤ ἀνισότητας: α) $(73+23) \cdot 9$; $73 \cdot 9 + 23 \cdot 9$
β) $104 \cdot 11 - 11 \cdot 64$; $(104-64) \cdot 11$, γ) $12 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6$; $(12+5+4) \cdot 5$
δ) $15 \cdot 4 + 4 \cdot 5$; $20 \cdot 4$.

45. Ἄν $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 13$ μέ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, νά βρεῖτε ποιές τιμές μποροῦν νά πάρουν τά γράμματα α,β,γ.

46. Ὁμοίως ἄν εἶναι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 9$.

47. Νά ὑπολογίσετε τίς τιμές τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων:
α) $(17+4-9) \cdot 3+(13-6) \cdot 5$, β) $(31-14) \cdot 8+(16+14-20) \cdot 5$,
γ) $(25+2) \cdot 9-8 \cdot 9+(12-8) \cdot 3$.

48. Ἡ βάση μιᾶς μηχανῆς εἶναι ἀπό μπετόν σέ σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις 2m, 80 cm, 40 cm. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο της.

49. Μεταλλικό ἐξάρτημα μηχανῆς ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις 30 cm, 8 cm, 3 dm. Νά βρεῖτε τό βάρος του, ἄν τό εἰδικό βάρος τοῦ μετάλλου εἶναι 8 gr*/cm³.

50. Νά ὑπολογίσετε τίς δυνάμεις: α) $3^4, 9^2, 13^2, 110^2$, β) $130^2, 1100^2, 0^5$.

51. Ὁμοίως τίς δυνάμεις: α) $(-5)^4, (+5)^4, (+3)^5, (-3)^5$, β) $(+7)^3, (-7)^3, (+6)^2, (-6)^2$.

52. Οἱ ἀριθμοί ἕνα ἑκατομμύριο, ἕνα δισεκατομμύριο, ἕνα τρισεκατομμύριο νά γραφοῦν ὡς δυνάμεις τοῦ 10.

53. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων: α) $(4 \cdot 10^3) \cdot (5 \cdot 10^2)$, β) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 1^6$, γ) $2^3+3^2+1^6$, δ) $(7 \cdot 10^2) \cdot (11 \cdot 10^3)$, ε) $5^2+1^3+6^2$.

54. Νά βρεῖτε τά τριπλάσια τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 4. Νά βρεῖτε μετά τούς κύβους τους καί νά κάνετε σύγκριση τῶν ἐξαγομένων.

55. Πόσο μεγαλώνει τό 7^3, ἄν στή βάση του προστεθεῖ τό 3;

56. Νά μετατρέψετε τούς παρακάτω ἀριθμούς στό δεκαδικό σύστημα:
α) 43241 (βάση πέντε), β) 22222 (βάση τρία), γ) 1111111 (βάση δύο).

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

57. Ἡ βάση ἑνός κύβου ἔχει περίμετρο 28 cm. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο του.

58. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει μῆκος 20 cm, πλάτος 14 cm καί ὕψος 25 cm. Πόσο θά μεταβληθεῖ ὁ ὄγκος του, ἄν αὐξήσουμε τό μῆκος του κατά 8 cm καί ἐλαττώσουμε τό πλάτος του κατά 3 cm;

59. Μᾶς δίνουν ὅτι $(x-1) \cdot (x-2) = 0$, ποιές τιμές μπορεῖ νά πάρει ὁ x;

60. Ὁ ἕνας παράγοντας γινομένου δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ 728. Ἄν ὁ ἄλλος παράγοντας μεγαλώσει κατά 22, πόσο θά μεταβληθεῖ τό γινόμενο;

61. Γιά ποιές τιμές τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι: i) $4 \leq x^2 \leq 64$, ii) $49 \leq x^2 \leq 100$.

62. Ἄν εἶναι $\alpha = -3$, $\beta = -2$, $\gamma = +5$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:
i) $\alpha \cdot \beta+\beta \cdot \gamma+\gamma \cdot \alpha$, ii) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, iii) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

63. Σέ τετραγωνισμένο χαρτί κατασκευάστε δύο τετράγωνα μέ πλευρές 3 cm καί 4 cm. Κατασκευάστε ἐπίσης, στό ἴδιο χαρτί, ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές 3 cm καί 4 cm καί βρεῖτε τό μῆκος τῆς ὑποτείνουσάς του. Κατασκευάστε μετά ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά τήν ὑποτείνουσα. Βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ τελευταίου τετραγώνου καί συγκρίνετέ το μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο πρώτων τετραγώνων.

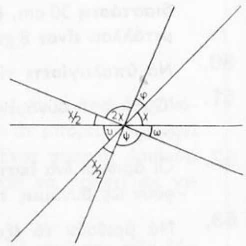
64. Στόν α' γύρο τοῦ πρωταθλήματος ἐθνικῆς κατηγορίας ποδοσφαίρου τέσσερις ὁμάδες ἔφεραν: ἡ Α' 7 νίκες, 4 ἰσοπαλίες καί 6 ἧττες, ἡ Β' 5 νίκες, 9 ἰσοπαλίες καί

3 ἧττες, ἡ Γ' 9 νίκες, 2 ἰσοπαλίες καί 6 ἧττες καί ἡ Δ' 6 νίκες, 10 ἰσοπαλίες καί 1 ἧττα. Νά πινακοποιήσετε τά δεδομένα κατά εἶδος ἀποτελέσματος καί νά βρεῖτε τούς βαθμούς πού πῆρε κάθε ὁμάδα, ἄν γιά τή νίκη παίρνει 2 βαθμούς, γιά τήν ἰσοπαλία 1 καί γιά τήν ἧττα 0 βαθμούς.

65. Ὅλη ἡ ἐπιφάνεια ἑνός κύβου εἶναι 96 cm^2. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο του.

66. Δύο εὐθεῖες ε καί ε' τέμνονται ἔτσι, ὥστε μία ἀπό δύο ἐφεξῆς γωνίες πού σχηματίζονται εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό τριπλάσιο τῆς ἄλλης κατά 30^0. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες πού σχηματίζονται.

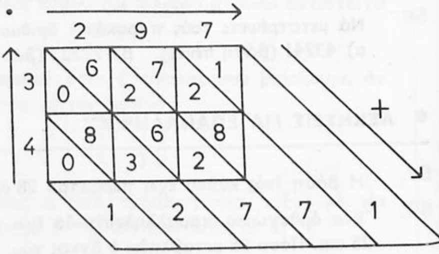
67. Στό διπλανό σχῆμα νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες x, ψ, ω, φ, υ.



Περίεργα

Ἕνας ἄλλος τρόπος πολλαπλασιασμοῦ.

68. Πρόκειται νά ὑπολογισθεῖ τό γινόμενο 43 · 297. Ἡ πράξη διατάσσεται ὅπως φαίνεται δίπλα. Μπορεῖτε νά ἐξηγήσετε τόν τρόπο πολλαπλασιασμοῦ;



69. Πολλαπλασιάστε τόν ἀριθμό 12345679 α) μέ τό 2, β) μέ τό 9, γ) πρῶτα μέ τό 2 καί τό γινόμενο πού θά βρεῖτε μέ τό 9.

12° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Διαμερισμός συνόλου

12.1. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο Ε τῶν κατοίκων τῆς Ἑλλάδας καί τά σύνολα τῶν κατοίκων τῶν νομῶν τῆς Ἑλλάδας.

Γιά τά σύνολα τῶν κατοίκων τῶν νομῶν παρατηροῦμε ὅτι:

- Εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Ε.
- Εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνά δύο.
- Ἡ ἕνωσή τους εἶναι τό σύνολο Ε.

Λέμε τότε ὅτι τά σύνολα τῶν κατοίκων τῶν νομῶν ἀποτελοῦν ἕνα **διαμερισμό** τοῦ Ε.

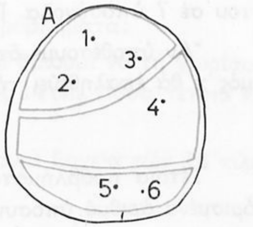
Ἄς πάρουμε ἀκόμη τό σύνολο $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ καί τά ὑποσύνολά του $B = \{1,2,3\}$, $\Gamma = \{4\}$, $\Delta = \{5,6\}$.

Βλέπουμε ὅτι: $B \cap \Gamma = \varnothing$, $B \cap \Delta = \varnothing$,

$\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ καί

$B \cup \Gamma \cup \Delta = A$,

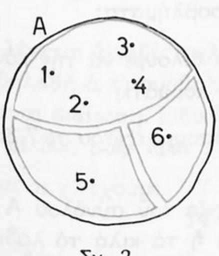
δηλαδή τά σύνολα Β,Γ,Δ ἀποτελοῦν ἕνα διαμερισμό τοῦ Α. Ὁ διαμερισμός αὐτός φαίνεται μέ τά διαγράμματα στό σχῆμα 1.



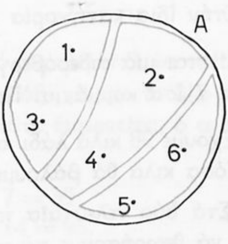
Σχ. 1

Γενικά, ἄν ἔχουμε ἕνα σύνολο $A \neq \varnothing$ καί πάρουμε ὁρισμένα ὑποσύνολά του (διαφορετικά ἀπό τό $\varnothing$) τέτοια, ὥστε νά εἶναι ξένα ἀνά δύο καί ἡ ἕνωσή τους νά εἶναι τό σύνολο Α, λέμε ὅτι ἔχουμε κάνει ἕνα διαμερισμό τοῦ Α.

Εἶναι φανερό ὅτι σ' ἕνα σύνολο Α μποροῦμε γενικά νά κάνουμε περισσότερους ἀπό ἕνα διαμερισμούς.



Σχ. 2



Σχ. 3

Π.χ. στά δύο τελευταῖα σχήματα τῆς προηγούμενης σελίδας βλέπουμε δύο ἄλλους διαμερισμούς τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ἄν παρατηρήσουμε τό διαμερισμό τοῦ σχήματος 3, βλέπουμε ὅτι *ὅλα τά ὑποσύνολα τοῦ διαμερισμοῦ ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος στοιχείων* (δηλαδή εἶναι ἰσοδύναμα). Ἕνας τέτοιος διαμερισμός λέγεται εἰδικότερα **μερισμός τοῦ Α.**

Προβλήματα μερισμοῦ

12.2. Ἄς προσέξουμε τώρα τά ἑξῆς προβλήματα:

1ο. Θέλουμε νά μοιράσουμε 98 ἀχλάδια σέ 7 καλάθια ἔτσι, ὥστε ὅλα τά καλάθια νά ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμό ἀχλαδιῶν.
Πόσα ἀχλάδια θά ἔχει κάθε καλάθι;

2ο. Ἔχουμε 98 τετράδια καί θέλουμε νά τά κάνουμε 7 δέματα ἔτσι, ὥστε ὅλα τά δέματα νά ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμό τετραδίων.
Πόσα τετράδια θά ἔχει κάθε δέμα;

Καί στά δύο προηγούμενα προβλήματα παρατηροῦμε ὅτι:

Ἔχουμε ἕνα σύνολο Α μέ 98 στοιχεῖα καί θέλουμε νά κάνουμε μερισμό του σέ 7 ὑποσύνολα. Πόσα στοιχεῖα θά ἔχει κάθε ὑποσύνολο;

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι κάθε ὑποσύνολο ἔχει x στοιχεῖα, ὁ φυσικός ἀριθμός x θά ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση

$$7 \cdot x = 98.$$

Τέτοια προβλήματα, στά ὁποῖα ἔχουμε μερισμό ἑνός συνόλου Α σέ ὁρισμένο ἀριθμό ὑποσυνόλων του καί ζητοῦμε τό πλῆθος τῶν στοιχείων κάθε ὑποσυνόλου, λέγονται **προβλήματα μερισμοῦ**.

Στά προβλήματα αὐτά δίνεται γενικά ἕνας φυσικός ἀριθμός β (τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Α) καί ἕνας φυσικός ἀριθμός $\alpha \neq 0$ (τό πλῆθος τῶν ὑποσυνόλων τοῦ μερισμοῦ) καί ζητοῦμε ἕνα φυσικό ἀριθμό x τέτοιον, ὥστε

$$\alpha \cdot x = \beta.$$

Στήν ἴδια κατηγορία ὑπάγονται καί τά προβλήματα:

3ο. Δίνεται μιά σιδερόβεργα μέ μῆκος 98 cm καί θέλουμε νά τήν κόψουμε σε 7 ἴσα κομμάτια. Πόσα cm θά εἶναι κάθε κομμάτι;

4ο. Ἔχουμε 98 κιλά λάδι καί θέλουμε νά τό μοιράσουμε ἐξίσου σέ 7 δοχεῖα. Πόσα κιλά θά βάλουμε σέ κάθε δοχεῖο ;

(Στά δύο τελευταῖα προβλήματα ὡς στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α μποροῦμε νά θεωρήσουμε τά κομμάτια τοῦ ἑνός cm ἤ τά κιλά τό λάδι).

Προβλήματα μετρήσεως

12.3 Πολλές φορές θέλουμε νά κάνουμε μερισμό ἑνός συνόλου Α σέ ὑποσύνολα πού γνωρίζουμε τό πλῆθος τῶν στοιχείων τους. Στήν περίπτωση αὐτή πρέπει νά προσδιορίσουμε τόν ἀριθμό τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Α. Τέτοια προβλήματα λέγονται **προβλήματα μετρήσεως**.

Προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους εἶναι π.χ. τά:

1ο. Θέλουμε νά μοιράσουμε 98 ἀχλάδια σέ καλάθια, πού τό καθένα τους νά ἔχει 14 ἀχλάδια. Πόσα καλάθια θά χρειαστοῦμε;

2ο. Ἔχουμε 98 τετράδια καί θέλουμε νά τά κάνουμε δέματα, πού τό καθένα τους νά ἔχει 14 τετράδια. Πόσα δέματα θά κάνουμε;

Στά προβλήματα αὐτά, ἄν ὀνομάσουμε x τόν ἀριθμό τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Α, ὁ x θά εἶναι ὁ φυσικός ἀριθμός πού θά προκύπτει ἀπό τήν ἐξίσωση

$$14 \cdot x = 98.$$

Γενικά, ἄν τό σύνολο Α ἔχει β στοιχεῖα καί καθένα ἀπό τά ὑποσύνολα στά ὁποῖα μερίζεται ἔχει α στοιχεῖα, ὁ x θά ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση

$$\alpha \cdot x = \beta.$$

Στήν ἴδια κατηγορία ὑπάγονται καί τά προβλήματα:

3ο. Δίνεται μιά σιδερόβεργα μέ μῆκος 98 cm καί θέλουμε νά τή χωρίσουμε σέ κομμάτια, πού καθένα τους νά ἔχει μῆκος 14 cm. Πόσα τέτοια κομμάτια θά προκύψουν;

4ο. Ἔχουμε 98 κιλά λάδι καί θέλουμε νά γεμίσουμε δοχεῖα τῶν 14 κιλῶν. Πόσα δοχεῖα θά χρειαστοῦμε;

Ἡ ἐξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ καί ἡ τελεία διαίρεση στό $\mathbb{N}$

12.4. Στούς δύο τύπους προβλημάτων πού ἐξετάσαμε παραπάνω, μᾶς δίνονται δύο φυσικοί ἀριθμοί **α** καί **β** καί πρέπει νά βροῦμε ἕναν τρίτο φυσικό ἀριθμό x, πού ὅταν πολλαπλασιασθεῖ μέ τόν **α** νά δίνει γινόμενο **β**. Ὁ ἀριθμός x, ἄν ὑπάρχει, θά προσδιορίζεται μέ τήν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha \cdot x = \beta$$

καί λέγεται **ἀκριβές πηλίκο τοῦ β μέ τόν α**. Τό ἀκριβές πηλίκο τοῦ β μέ τόν α (δηλαδή ὁ x) συμβολίζεται μέ **β : α** καί ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκεται λέγεται **διαίρεση**. Εἰδικότερα ὁ ἀριθμός β λέγεται **διαιρετέος**, ὁ α **διαιρέτης** καί οἱ δύο μαζί **ὅροι** τῆς διαιρέσεως.

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε $7 = 35 : 5$, γιατί $5 \cdot 7 = 35$

$14 = 98 : 7$, γιατί $7 \cdot 14 = 98$.

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου, ἀλλά καί ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα, καταλαβαίνουμε ὅτι ἄν ἰσχύει μιά ἀπό τίς δύο ἰσότητες $\alpha x = \beta$ (1) καί $x = \beta : \alpha$, ἰσχύει καί ἡ ἄλλη. Δύο τέτοιες ἰσότητες, ὅπως ξέρουμε, λέγονται ἰσοδύναμες καί γράφουμε

$$\boxed{x = \beta : \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \cdot x = \beta}$$

Ὅπως εἴπαμε εἶναι $7 = 35 : 5$, γιατί $5 \cdot 7 = 35$.
Εἶναι ὅμως καί $5 = 35 : 7$, γιατί $7 \cdot 5 = 35$.
Ὁμοίως εἶναι $72 : 8 = 9$ καί $72 : 9 = 8$, γιατί $8 \cdot 9 = 72$.

Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά βλέπουμε ὅτι ἄν εἶναι γνωστή μιά ἀπό τίς τρεῖς ἰσότητες (σέ κάθε περίπτωση) συμπεραίνουμε τίς δύο ἄλλες.

Γενικά, ἄν ξέρουμε ὅτι γιά τούς φυσικούς ἀριθμούς α, β, γ ἰσχύει μιά ἀπό τίς ἰσότητες

$$\gamma = \beta : \alpha \quad ἤ \quad \alpha = \beta : \gamma \quad ἤ \quad \alpha \cdot \gamma = \beta,$$

συμπεραίνουμε τίς δύο ἄλλες. Ἑπομένως οἱ ἰσότητες αὐτές εἶναι ἰσοδύναμες καί γράφουμε

$$\boxed{\alpha = \beta : \gamma \;\Leftrightarrow\; \alpha \cdot \gamma = \beta \;\Leftrightarrow\; \gamma = \beta : \alpha}$$

Ὅταν ὑπάρχει τό ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ β μέ τόν α, λέμε ὅτι *«ὁ β διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸν α»* (2) ἤ ὅτι *«ὁ α διαιρεῖ τὸν β»* καί ἡ διαίρεση τοῦ β μέ τόν α λέγεται **τελεία διαίρεση.**

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου

$$\gamma = \beta : \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \cdot \gamma = \beta$$

βλέπουμε ὅτι, **ὁ β διαιρεῖται μέ τόν α μόνο, ὅταν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ α.**

Ἔτσι π.χ. ὁ 7 διαιρεῖ τούς $1 \cdot 7 = 7$, $2 \cdot 7 = 14$, $3 \cdot 7 = 21$ κ.λ.π. ἀλλά δέν διαιρεῖ τόν 30, γιατί δέν εἶναι πολλαπλάσιό του.

Γιά νά δοῦμε λοιπόν ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός, π.χ. ὁ 245, διαιρεῖται μέ τόν 35, ἀλλά καί γιά νά βροῦμε τό ἀκριβές πηλίκο, ὅταν ὑπάρχει, σχηματίζουμε τά διαδοχικά πολλαπλάσια τοῦ 35.

$1 \cdot 35 = 35$, $2 \cdot 35 = 70$, $3 \cdot 35 = 105$, $4 \cdot 35 = 140$, $5 \cdot 35 = 175$, $6 \cdot 35 = 210$, $7 \cdot 35 = 245$.

Ὅπως βλέπουμε ὁ 245 διαιρεῖται μέ τόν 35 καί τό πηλίκο εἶναι $245 : 35 = 7$.

Ἀπό ὅσα εἴπαμε μέχρι τώρα καταλαβαίνουμε ὅτι γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ ἤ μετρήσεως πρέπει νά κάνουμε διαίρεση. Στήν

---

(1) Πολλές φορές γράφουμε 2x, 3x, αx, κ.λ.π. ἀντί $2 \cdot x$, $3 \cdot x$, $\alpha \cdot x$, κ.λ.π.
(2) Πολλές φορές λέμε πιό ἁπλά *«ὁ β διαιρεῖται μέ τόν α»*.

πρώτη περίπτωση λέμε ὅτι ἔχουμε **διαίρεση μερισμοῦ** καί στή δεύτερη **διαίρεση μετρήσεως**.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

- Στίς διαιρέσεις μερισμοῦ ὁ διαιρετέος καί τό πηλίκο ἀναφέρονται σέ ὁμοειδή ποσά.
- Στίς διαιρέσεις μετρήσεως ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης ἀναφέρονται σέ ὁμοειδή ποσά.
- Ἀπό κάθε πρόβλημα μερισμοῦ φτιάχνουμε ἀμέσως ἕνα πρόβλημα μετρήσεως καί ἀντιστρόφως, ἀρκεῖ νά κάνουμε ἐναλλαγή διαιρέτη - πηλίκου (βλέπε προβλήματα 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 § 12.2 καί § 12.3).

Είδικές περιπτώσεις

12.5. Σέ ὅλα τά προηγούμενα προβλήματα ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης ἦταν διαφορετικοί ἀπό τό μηδέν.

Θά ἐξετάσουμε τώρα τί συμβαίνει, ὅταν ὁ ἕνας ἀπ' αὐτούς εἶναι μηδέν.

i) Ἄς πάρουμε π.χ. τό διαιρετέο $\beta = 5$ καί τό διαιρέτη $\alpha = 0$.

Ἄν ὑπάρχει τό πηλίκο $5:0$ καί εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός x, θά ἔχουμε $5:0 = x$, ὁπότε θά εἶναι $0 \cdot x = 5$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἀδύνατο γιατί ἔχουμε πάντα $0 \cdot x = 0$.

Ὥστε **δέν ὑπάρχει τό πηλίκο τοῦ 5 μέ τό 0**. Λέμε λοιπόν ὅτι:

Ἡ διαίρεση μέ τό 0 εἶναι ἀδύνατη [1]

ii) Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι εἶναι $\beta = 0$ καί $\alpha \neq 0$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση $\alpha \cdot x = 0$ προκύπτει ὅτι $x = 0$ (γιατί $\alpha \neq 0$).

Συνεπῶς: $\boxed{\text{Ἄν } \alpha \neq 0, \text{ τότε } 0 : \alpha = 0}$

iii) Ξέρουμε ὅτι $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$. Ἔτσι ἔχουμε

$$\boxed{\alpha : 1 = \alpha \quad \text{καί} \quad \alpha : \alpha = 1}$$

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Ὁ μηδέν διαιρεῖται μέ κάθε φυσικό ἀριθμό $\alpha \neq 0$.**
- **Ὁ ἕνα διαιρεῖ ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς.**
- **Ἕνας φυσικός ἀριθμός $\alpha \neq 0$ διαιρεῖ ὅλα τά πολλαπλάσιά του καί μόνο αὐτά.**

---

(1) Ἀπό δῶ καί πέρα ὅταν γράφουμε $\beta : \alpha$, θά ἐννοοῦμε, χωρίς νά τό γράφουμε, ὅτι εἶναι $\alpha \neq 0$.

Ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση εἶναι πράξεις ἀντίστροφες

12.6. Ἄς πάρουμε ἕνα φυσικό ἀριθμό, π.χ. τόν 12, κι ἄς ἐξετάσουμε τί θά πάθει, ἄν τόν πολλαπλασιάσουμε μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό κι ἔπειτα διαιρέσουμε τό ἐξαγόμενο μέ τόν ἴδιο ἀριθμό (ἤ ἄν τόν διαιρέσουμε μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό καί ἔπειτα πολλαπλασιάσουμε τό ἐξαγόμενο μέ τόν ἴδιο ἀριθμό), π.χ. τόν 4.

$12 \cdot 4 = 48$	$12 : 4 = 3$
$48 : 4 = 12$	$3 \cdot 4 = 12$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι καί στίς δύο περιπτώσεις βρήκαμε ἐξαγόμενο πάλι 12.

Γενικά:

$\boxed{(\alpha \cdot \beta) : \beta = \alpha}$ καί $\boxed{(\alpha : \beta) \cdot \beta = \alpha}$ (ἀρκεῖ ὁ β νά διαιρεῖ τόν α)

Δηλαδή, **ἄν ἕνα φυσικό ἀριθμό α τόν πολλαπλασιάσουμε μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό $\beta \neq 0$ καί τό ἐξαγόμενο τό διαιρέσουμε μέ τόν β (ἤ ἄν τόν διαιρέσουμε μέ τόν β καί τό ἐξαγόμενο τό πολλαπλασιάσουμε μέ τόν β), βρίσκουμε πάλι τόν ἀριθμό α.**

Μ' ἄλλα λόγια ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό διαφορετικό ἀπό τό 0, ἄν ἐφαρμοσθοῦν διαδοχικά *ἀλληλοεξουδετερώνονται*. Γι' αὐτό λέμε πώς οἱ πράξεις αὐτές εἶναι **ἀντίστροφες**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά διαμερίσετε τό σύνολο Α = {α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ} σέ τρία ὑποσύνολα μέ διατήρηση τῆς σειρᾶς πού εἶναι γραμμένα τά στοιχεῖα του. Τό ἴδιο σύνολο νά μερισθεῖ σέ δύο ὑποσύνολα μέ διατήρηση τῆς σειρᾶς τῶν στοιχείων του.**

Λύση: Ἕνας διαμερισμός τοῦ συνόλου Α εἶναι π.χ. ὁ

Β = {α,β}, Γ = {γ,δ,ε}, Δ = {ζ,η,θ,ι,κ}.

Ὅταν μερίζουμε ἕνα σύνολο, τά ὑποσύνολά του ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο. Ἑπομένως καθένα ἀπό τά ὑποσύνολα θά ἔχει $10 : 2 = 5$ στοιχεῖα. Συνεπῶς θά εἶναι Β = {α,β,γ,δ,ε}, Γ = {ζ,η,θ,ι,κ}.

2. **Νά βρεθοῦν τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων:**

i) 24 : 4, ii) 108 : 12.

Λύση: i) Βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι $4 \cdot 6 = 24$. Ἑπομένως $24 : 4 = 6$.

ii) Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί εἶναι ἀρκετά μεγάλοι βρίσκουμε τά διαδοχικά πολλαπλάσια τοῦ 12 (§ 12.4).

$1 \cdot 12 = 12,\ 2 \cdot 12 = 24, \ldots,\ 8 \cdot 12 = 96,\ 9 \cdot 12 = 108$. Ἄρα $108 : 12 = 9$.

Ἡ ἐργασία αὐτή εἶναι πολύ κοπιαστική καί μποροῦμε νά τήν ἁπλουστεύσουμε ἄν ποῦμε $10 \cdot 12 = 120$, ὁπότε βρίσκουμε μόνο τό $9 \cdot 12 = 108$.

3. **Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**

i) $5 . x = 30$, ii) $35 : x = 7$, iii) $2x+3 = 15$, iv) $(4x+3) : 5 = 7$, v) $9 : (x+3) = 3$.

Λύση: i) Γιά νά λύσουμε ἐξισώσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς χρησιμοποιοῦμε τίς ἰσοδυναμίες $\alpha \cdot x = \beta \Leftrightarrow x = \beta : \alpha$ ἤ $\alpha \cdot \gamma = \beta \Leftrightarrow \gamma = \beta : \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta : \gamma$.

$5 \cdot x = 30 \Leftrightarrow x = 30 : 5 \Leftrightarrow x = 6$.

ii) $35 : x = 7 \Leftrightarrow 35 = 7 \cdot x \Leftrightarrow x = 35 : 7 \Leftrightarrow x = 5$.

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τήν ἰσοδυναμία $\gamma = \beta : \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta : \gamma$ βρίσκουμε ἀμέσως

$35 : x = 7 \Leftrightarrow x = 35 : 7 \Leftrightarrow x = 5$.

iii) $2x+3 = 15 \Leftrightarrow 2x = 15-3 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 12 : 2 \Leftrightarrow x = 6$.

iv) $(4x+3) : 5 = 7 \Leftrightarrow 4x+3 = 35 \Leftrightarrow 4 \cdot x = 32 \Leftrightarrow x = 32 : 4 \Leftrightarrow x = 8$.

v) $9 : (x+3) = 3 \Leftrightarrow x+3 = 9 : 3 \Leftrightarrow x+3 = 3 \Leftrightarrow x = 3-3 \Leftrightarrow x = 0$.

4. **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $13 \cdot x = 40$ στό σύνολο $\mathbb{N}$.**

Λύση: Ὑπολογίζουμε τά διαδοχικά πολλαπλάσια τοῦ 13 καί βρίσκουμε ὅτι:

$$13 \cdot 3 = 39 < 40 \quad \text{καί} \quad 13 \cdot 4 = 52 > 40.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση **δέν ἔχει λύση στό $\mathbb{N}$** ἤ, ὅπως λέμε ἀλλιῶς, εἶναι **ἀδύνατη στό $\mathbb{N}$.**

5. **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $0 \cdot x = 14$.**

Λύση: Ἐπειδή γιά κάθε τιμή τοῦ x εἶναι $0 \cdot x = 0 \neq 14$, ἡ ἐξίσωση αὐτή δέν ἔχει λύση.

Λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι **ἀδύνατη**.

6. **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $0 \cdot x = 0$.**

Λύση: Γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ x θά εἶναι $0 \cdot x = 0$. Δηλαδή λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι κάθε φυσικός ἀριθμός. Γι' αὐτό λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $0 \cdot x = 0$ εἶναι **ἀόριστη ἤ ταυτότητα.**

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά κάνετε ἕνα διαμερισμό τοῦ συνόλου $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$ διατηρώντας τή σειρά τῶν στοιχείων του: i) σέ δύο ὑποσύνολα, ii) σέ τρία ὑποσύνολα.
2. Δίνεται τό σύνολο $\Sigma = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Νά τό μερίσετε (διατηρώντας τή σειρά τῶν στοιχείων του) σέ ὑποσύνολα: α) μέ τρία στοιχεῖα, β) μέ τέσσαρα στοιχεῖα.
3. Ἀπό τίς ἰσότητες $35 \cdot 46 = 1610$, $783 \cdot 69 = 54027$, $1799630 = 7658 \cdot 235$, νά βρεθοῦν τά πηλίκα: α) $1610 : 46$, β) $54027 : 783$, γ) $1610 : 35$, δ) $1799630 : 7658$, ε) $54027 : 69$, ζ) $1799630 : 235$.
4. Βρεῖτε ποιοί ἀπό τούς διψηφίους ἀριθμούς διαιροῦνται μέ τόν 7.
5. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα: α) $(156 : 39) \cdot 39$, β) $(138 \cdot 76) : 76$.

6. Βρεῖτε ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες ἰσότητες εἶναι σωστές.

α) $5 : 1 = 5$ β) $0 : 3 = 3$ γ) $0 : 3 = 0$ δ) $4 : 4 = 4$

ε) $4 : 4 = 0$ ϛ) $0 : 1 = 1$ ζ) $7 : 7 = 1$ η) $7 : 1 = 1$

θ) $6 : 0 = 6$ ι) $2 : 0 = 0$.

7. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $27 \cdot x = 243$ β) $x : 12 = 4$ γ) $2832 : x = 472$

δ) $5 \cdot x + 7 = 22$ ε) $8x - 12 = 60$ ϛ) $(12x + 6) : 3 = 12$

ζ) $(5x - 7) : 2 = 19$ η) $26 - 3x = 5$ θ) $(26 - 3x) : 2 = 4$.

8. Ὁ ἦχος μεταδίδεται στόν ἀέρα μέ ταχύτητα 325 m/sec (μέτρα ἀνά δευτερόλεπτο). Πόσος χρόνος θά χρειασθεῖ γιά νά ἀκουστεῖ μιά βροντή, ἄν ἡ ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο τῆς ἀστραπῆς εἶναι 3575 m;

9. Μιά θερμάστρα κατανάλωσε σέ τρεῖς βδομάδες 4 δοχεῖα πετρέλαιο πού καθένα χωράει 14 *l*. Τό ἕνα λίτρο κοστίζει 9 δραχμές. Πόση εἶναι ἡ δαπάνη τῆς θερμάστρας σ' ἕνα μήνα (30 ἡμέρες).

10. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

i) $x + 2x + 3x = 24$ ii) $7x + 5x - 4x = 32$

iii) $15x = 45 + 10x$ vi) $43x - 2x = 432 + 5x$.

Ἰδιότητες τῆς τελείας διαιρέσεως

12.7. i) Παίρνουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς α καί β τέτοιους, ὥστε ἡ διαίρεση β : α νά εἶναι τελεία, π.χ. τούς 24 καί 6, καί βρίσκουμε τό πηλίκο τους.

$$24 : 6 = 4.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

$(24 \cdot 2) : (6 \cdot 2) = 48 : 12 = 4$ καί $(24 : 2) : (6 : 2) = 12 : 3 = 4$

$(24 \cdot 3) : (6 \cdot 3) = 72 : 18 = 4$ καί $(24 : 3) : (6 : 3) = 8 : 2 = 4$

$(24 \cdot 4) : (6 \cdot 4) = 96 : 24 = 4$

$(24 \cdot 5) : (6 \cdot 5) = 120 : 30 = 4$

Γενικά:

$\boxed{(\alpha \cdot \lambda) : (\beta \cdot \lambda) = \alpha : \beta}$ καί $\boxed{(\alpha : \lambda) : (\beta : \lambda) = \alpha : \beta \quad \text{(ὅταν ὁ λ διαιρεῖ τούς α καί β)}}$

Δηλαδή, **ἄν πολλαπλασιάσουμε (ἤ διαιρέσουμε, ὅταν διαιροῦνται) καί τούς δύο ὅρους μιᾶς τελείας διαιρέσεως μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό (διαφορετικό ἀπό τό 0), τό πηλίκο δέν ἀλλάζει.**

ii) Ἄς πάρουμε τώρα τούς φυσικούς ἀριθμούς 30 καί 18 καί ἕναν τρίτο, πού νά διαιρεῖ καί τούς δύο, π.χ. τόν 6.

"Εχουμε: $30 = 6 \cdot 5$ ἐπομένως $30 : 6 = 5$

$18 = 6 \cdot 3$ ἐπομένως $18 : 6 = 3$

"Αρα $30+18 = 6 \cdot 5+6 \cdot 3$

ἤ $30+18 = 6 \cdot (5+3)$. Ἑπομένως $(30+18) : 6 = 5 + 3$

ἤ $(30+18) : 6 = (30 : 6)+(18:6)$

"Αν ἀφαιρέσουμε τούς ἀριθμούς αὐτούς, ἔχουμε

$30-18 = 6 \cdot 5-6 \cdot 3$

ἤ $30-18 = 6 \cdot (5-3)$. Ἑπομένως $(30-18) : 6 = 5 - 3$

ἤ $(30-18) : 6 = (30 : 6)-(18 : 6)$

Γενικά, ἄν ὁ φυσικός ἀριθμός γ διαιρεῖ τούς φυσικούς α καί β ἔχουμε:

$$\boxed{(\alpha+\beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) + (\beta : \gamma) \quad \text{καί} \quad (\alpha-\beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma)}$$

Δηλαδή:

- **"Αν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους, θά διαιρεῖ καί τό ἄθροισμά τους καί τή διαφορά τους.**
- **Γιά νά διαιρέσουμε ἕνα ἄθροισμα (ἤ μιά διαφορά) δύο φυσικῶν ἀριθμῶν μέ ἕναν ἄλλο πού τούς διαιρεῖ, μποροῦμε νά διαιρέσουμε καί τούς δύο ὅρους μέ τόν ἀριθμό καί νά προσθέσουμε (ἤ νά ἀφαιρέσουμε) τά πηλίκα.**

iii) Εἴδαμε προηγουμένως (§ 12.6) ὅτι $(\alpha \cdot \beta) : \beta = \alpha$.

Γιά τόν ἴδιο λόγο ἔχουμε

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) : \beta = [(\alpha \cdot \gamma) \cdot \beta] : \beta = \alpha \cdot \gamma.$$

Δηλαδή, **γιά νά διαιρέσουμε ἕνα γινόμενο μέ ἕναν παράγοντά του, ἐξαλείφουμε ἀπό τό γινόμενο τόν παράγοντα αὐτόν.**

Π.χ. $(4 \cdot 3 \cdot 5) : 3 = 4 \cdot 5 = 20$, $(4 \cdot 3 \cdot 5) : 4 = 3 \cdot 5 = 15$.

iv) "Ας πάρουμε τώρα τό φυσικό ἀριθμό 3 καί ἕναν ἄλλο πού νά διαιρεῖται μέ τόν 3, π.χ. τόν 12.

"Εχουμε: $12 = 3 . 4$

$(2 \cdot 12) : 3 = (2 \cdot 3 \cdot 4) : 3 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot (12 : 3)$

$(3 \cdot 12) : 3 = (3 \cdot 3 \cdot 4) : 3 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot (12 : 3)$

$(4 \cdot 12) : 3 = (4 \cdot 3 \cdot 4) : 3 = 4 \cdot 4 = 4 \cdot (12 : 3)$

$(5 \cdot 12) : 3 = (5 \cdot 3 \cdot 4) : 3 = 5 \cdot 4 = 5 \cdot (12 : 3)$

Γενικά, ἄν ὁ γ διαιρεῖ τόν β θά ἰσχύει:

$$\boxed{(\sigma \cdot \beta) : \gamma = \alpha \cdot (\beta : \gamma)}$$

Δηλαδή:

- **Ἄν ἕνας φυσικός διαιρεῖ ἕναν ἄλλο, θά διαιρεῖ καί τά πολλαπλάσιά του.**
- **Γιά νά διαιρέσουμε ἕνα γινόμενο μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό, πού διαιρεῖ ἕναν παράγοντά του, ἀρκεῖ νά διαιρέσουμε μόνο τόν παράγοντα αὐτό μέ τό φυσικό (καί τούς ἄλλους παράγοντες νά τούς ἀφήσουμε ὅπως εἶναι).**

Π.χ. $(12 \cdot 18 \cdot 5) : 6 = 12 \cdot (18 : 6) \cdot 5 = 12 \cdot 3 \cdot 5 = 180.$

v) Ἄς ὑπολογίσουμε τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων

$60 : (3 \cdot 4)$ καί $(60 : 3) : 4$. Ἔχουμε

$60 : (3 \cdot 4) = 60 : 12 = 5$ καί

$(60 : 3) : 4 = 20 : 4 = 5.$

Συνεπῶς $60 : (3 \cdot 4) = (60 : 3) : 4$ καί γενικά

$$\boxed{\alpha : (\beta \cdot \gamma) = (\alpha : \beta) : \gamma \quad (\text{ἀρκεῖ τό } \beta \cdot \gamma \text{ νά διαιρεῖ τόν } \alpha)}$$

Ὁμοίως ἔχουμε $\alpha : (\beta \cdot \gamma \cdot \delta) = [(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta.$

Προτεραιότητα τῶν πράξεων

12.8. Σέ μιά ἀριθμητική παράσταση ἐκτός ἀπό τίς προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις μπορεῖ νά εἶναι σημειωμένοι πολλαπλασιασμοί καί διαιρέσεις. Τότε γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως ἀκολουθοῦμε μιά ὁρισμένη σειρά (προτεραιότητα) στήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων.

Ἡ σειρά αὐτή εἶναι:

- **Ἐκτελοῦμε τίς πράξεις μέσα στίς παρενθέσεις.**
- **Ἐκτελοῦμε τούς πολλαπλασιασμούς καί τίς διαιρέσεις.**
- **Τέλος ἐκτελοῦμε τίς προσθέσεις καί τίς ἀφαιρέσεις.**

Π.χ. $28 : 7 + 3 \cdot (16-11) - (19+8) : 9 - (6 \cdot 5) : 3 = 28 : 7 + 3 \cdot 5 - 27 : 9 - 30 : 3$
$= 4 + 15 - 3 - 10 = 19 - 3 - 10 = 16 - 10 = 6.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἐξετάσετε ἄν ἰσχύουν ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα στή διαίρεση, καθώς καί ἄν τό 1 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς διαιρέσεως.**

Λύση: i) Ἄς πάρουμε π.χ. τούς φυσικούς ἀριθμούς 6 καί 3.
$6 : 3 = 2$, ἀλλά ὁ 6 δέ διαιρεῖ τόν 3. Ἑπομένως *στή διαίρεση δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα.*

ii) Ἔχουμε π.χ. $(48 : 6) : 2 = 8 : 2 = 4$ καί $48 : (6 : 2) = 48 : 3 = 16.$
Ὅπως βλέπουμε $(48 : 6) : 2 \neq 48 : (6 : 2)$, δηλαδή *στή διαίρεση δέν ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα.*

iii) Ξέρουμε ὅτι $5 : 1 = 5$, ἀλλά ὁ 5 δέ διαιρεῖ τό 1. Συνεπῶς *τό 1 δέν εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς διαιρέσεως.*

---

2. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:**
$(72 + 40 + 48) : 8$ καί $(72 : 8) + (40 : 8) + (48 : 8)$.

Λύση: $(72+40+48) : 8 = 160 : 8 = 20$.
$(72 : 8)+(40 : 8)+(48 : 8) = 9+5+6 = 20$.
Ἐπομένως $(72+40+48) : 8 = (72 : 8)+(40 : 8)+(48 : 8)$.
Γενικά, ἄν ὁ φυσικός δ διαιρεῖ τούς φυσικούς α,β,γ, ἰσχύει

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta)+(\gamma : \delta).}$$

---

3. **Νά βρεθοῦν μέ δύο τρόπους τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:**
i) $(72+54) : 9$, ii) $(126 - 60) : 6$.

Λύση: 1ος τρόπος. $(72+54) : 9 = 126 : 9 = 14$.
2ος τρόπος. Ἐπειδή ὁ 9 διαιρεῖ τούς 72 καί 54, ἔχουμε
$(72+54) : 9 = (72 : 9)+(54 : 9) = 8+6 = 14$.
ii) **1ος τρόπος** $(126-60) : 6 =$ ....
2ος τρόπος ....

---

4. **Νά βρεθεῖ τό πηλίκο τῆς παραστάσεως $3\alpha\beta + 5\alpha - 2\alpha$ μέ τό α ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$).**

Λύση: Ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχουμε:
$3\alpha\beta+5\alpha-2\alpha = (3\beta+5-2) \cdot \alpha = (3\beta+3) \cdot \alpha$. Ἐπομένως εἶναι
$(3\alpha\beta+5\alpha-2\alpha) : \alpha = 3\beta+3$.

---

5. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων:**
i) $64 - 63 : 3 + (36+12) : 4$, ii) $28 : 7 + 33 - (18-9) : 9+2 . 6$.

Λύση: i) $64-63 : 3+(36+12) : 4=64-63 : 3+48 : 4=64-21+12 = 43+12=55$.
ii) $28 : 7+3 \cdot 5-(18-9) : 9+2 \cdot 6 = 28 : 7+3 \cdot 5-9 : 9+2 \cdot 6 =$
$= 4+15-1+12 = 19-1+12 = 18+12 = 30$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

11. Νά βρεθοῦν ἀπό μνήμης τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:
i) $(18 \cdot 36 \cdot 5) : 36$, ii) $(13 \cdot 48 \cdot 5) : 24$, iii) $320 : (4 \cdot 8)$.

12. Νά βρεθοῦν τά πηλίκα τῶν παρακάτω παραστάσεων μέ τό 8 χωρίς νά ἐκτελεστοῦν οἱ πολλαπλασιασμοί:
i) $5 \cdot 8+7 \cdot 8-4 \cdot 8$, ii) $8 \cdot 13-8 \cdot 4-8 \cdot 2$, iii) $8 \cdot x \cdot y-8 \cdot x+16$.

13. Νά βρεθοῦν τά πηλίκα τῶν παρακάτω παραστάσεων μέ τό α ($\alpha \neq 0$):
i) $15 \cdot \alpha \cdot \beta-6 \cdot \alpha$, ii) $12 \cdot \alpha \cdot \beta+7 \cdot \alpha-3 \cdot \alpha$.

14. Νά ὑπολογισθοῦν μέ δύο τρόπους τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:
i) $(24 \cdot 5 \cdot 6) : 8$, ii) $672 : (8 \cdot 7 \cdot 3)$.

15. Νά βρεθοῦν μέ δύο τρόπους τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

i) $(84 + 48-24) : 12$, ii) $(5 \cdot 12-3 \cdot 4+18) : 6$,

iii) $(79550+5547) : 43$. iv) $(10670-968) : 11$.

16. Χωρίς νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις νά βρεῖτε ποιά ἀπό τά παρακάτω γινόμενα διαιροῦνται μέ τόν 5 καί νά δικαιολογήσετε τήν ἀπάντησή σας.

$15 \cdot 17$, $24 \cdot 30 \cdot 7$, $15 \cdot 12 \cdot 3$, $25 \cdot 30 \cdot 6$.

17. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν ἀριθμητικῶν παραστάσεων:

i) $72+(28+12) : 4-39 : 3+6 \cdot 5$, ii) $54-39 : 13+27-(26-14) : 3$.

iii) $23 \cdot (32-26+18)+6 \cdot (35-17-10)-(120+30-20) : 13$.

18. Νά λύσετε μέ δύο τρόπους τό πρόβλημα: Τό πρῶτο τμῆμα μιᾶς τάξεως ἔχει 36 μαθητές καί τό δεύτερο 33 μαθητές. Πόσες τριάδες μποροῦν νά γίνουν ἀπό τούς μαθητές τῶν δύο τμημάτων σέ μιά παράταξη;

19. Ὁμοίως τό πρόβλημα: Μία τάξη ἑνός σχολείου ἔχει 68 μαθητές. Μία ἡμέρα ἀπασχολήθηκαν 24 μαθητές σ' ἕναν ἔρανο. Πόσες τετράδες θά γίνουν κατά τήν πρωινή σύνταξη τή μέρα αὐτή ἀπό τούς μαθητές πού ἔμειναν;

Ἡ τελεία διαίρεση στό σύνολο ℤ

12.9. Στό κεφάλαιο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μιλήσαμε γιά τό γινόμενο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν. Ἔτσι μάθαμε ὅτι:

$(-5) \cdot (+3) = -15$, $(-7) \cdot (-2) = +14$, $(+6) \cdot (+5) = +30$.

Ὁ ἀριθμός $+3$, ὁ ὁποῖος ὅταν πολλαπλασιασθεῖ μέ τόν -5 δίνει γινόμενο -15, λέγεται **ἀκριβές πηλίκο** τοῦ -15 μέ τόν -5 καί γράφεται πάλι $\mathbf{(-15) : (-5)}$. Ἔτσι ἔχουμε $(-15) : (-5) = +3$.

Γιά τόν ἴδιο λόγο ἔχουμε $(-15) : (+3) = -5$.

Ὁμοίως ἔχουμε:

$(+14) : (-7) = -2$ καί $(+14) : (-2) = -7$, γιατί $(-2) \cdot (-7) = +14$

$(+30) : (+5) = +6$ καί $(+30) : (+6) = +5$, γιατί $(+5) \cdot (+6) = +30$

Γενικά, **ἄν δίνονται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί β καί α (α ≠ 0) καί ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε α · x = β, τότε ὁ x λέγεται ἀκριβές πηλίκο τοῦ β μέ τόν α καί συμβολίζεται μέ β : α.**

Ὁ ἀριθμός β λέγεται πάλι **διαιρετέος** καί ὁ α **διαιρέτης**.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι τό ἀκριβές πηλίκο δύο ἀκεραίων ὁρίζεται ἀκριβῶς ὅπως καί στούς φυσικούς ἀριθμούς.

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ πηλίκου δύο ἀκεραίων καί ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Τό ἀκριβές πηλίκο δύο ὁμόσημων ἀκέραιων ἀριθμῶν εἶναι θετικός ἀριθμός, ἐνῶ δύο ἑτερόσημων εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.**

- **Τό ἀκριβές πηλίκο δύο ἀκέραιων ἀριθμῶν ὑπάρχει μόνο, ὅταν ὑπάρχει τό ἀκριβές πηλίκο τῶν ἀντίστοιχών τους φυσικῶν ἀριθμῶν.**
- **Τό ἀκριβές πηλίκο δύο ἀκεραίων βρίσκεται, ἄν στό ἀκριβές πηλίκο τῶν ἀντίστοιχών τους φυσικῶν ἀριθμῶν θέσουμε τό πρόσημο +, ἄν οἱ ἀριθμοί εἶναι ὁμόσημοι, ἤ τό πρόσημο —, ἄν εἶναι ἑτερόσημοι.**
- **Ὅλες οἱ ἰδιότητες τῆς τελείας διαιρέσεως στό $\mathbb{N}$ ἰσχύουν καί στή διαίρεση στό $\mathbb{Z}$.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:**
i) $(+3):(-1)$, ii) $(-20):(-4)$, iii) $(-32):(+4)$.

Λύση: i) $(+3):(-1)=-3$, γιατί $(-1)\,(-3)=+3$,
ii) $(-20):(-4)=+5$, γιατί $(+5)\cdot(-4)=-20$,
iii) $(-32):(+4)=-8$, γιατί $(+4)\cdot(-8)=-32$.

2. **Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**
i) $(-3)\cdot x=+21$, ii) $(+4)\cdot x+(+20)=-12$, iii) $(-3)\cdot[x+(+12)]=-60$.

Λύση: i) $(-3)\cdot x=+21 \Leftrightarrow x=(+21):(-3) \Leftrightarrow x=-7$.
ii) $(+4)\cdot x+(+20)=-12 \Leftrightarrow (+4)\cdot x=(-12)-(+20) \Leftrightarrow (+4)\cdot x=-32 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=(-32):(+4) \Leftrightarrow x=-8$.
iii) $(-3)\cdot[x+(+12)]=-60 \Leftrightarrow (-3)x+(-3)\cdot(+12)=-60 \Leftrightarrow (-3)\cdot x+(-36)=-60 \Leftrightarrow (-3)\cdot x=(-60)-(-36) \Leftrightarrow (-3)\cdot x=(-60)+(+36)$
$\Leftrightarrow (-3)\cdot x=-24 \Leftrightarrow x=(-24):(-3) \Leftrightarrow x=+8$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

20. Νά βρεῖτε τά πηλίκα: α) $[(-9)+(+3)]:(+2)$,
β) $[(+12)-(-6)]:(+3)$, γ) $[(-4)+(+9)+(-15)]:(+5)$.

21. Ὁμοίως: α) $[(-12)\cdot(+7)\cdot(-2)]:(-6)$, β) $[(+8)-(-6)-(+2)]:(-4)$.

22. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις: α) $[x+(-1)]:(+2)=-9$,
β) $(+5)\cdot x+(-8)=-28$, γ) $[x+(-5)]:(+5)=-12$.

23. Νά βρεῖτε τά πηλίκα: α) $[(-8):(+4)]:(-2)$,
β) $[(+8)-(-7)]:[(-12)-(+3)]$, γ) $[(-36):(-12)]:[(+48):(-16)]$.

24. Ἄν εἶναι $\alpha=-3$, $\beta=-4$, $\gamma=+6$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως
$[4\cdot\alpha+6\cdot\beta+(-2)\cdot\gamma]:(-\gamma)$.

Ἡ ἀτελής διαίρεση στό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

12.10. Στήν § 12.5 εἴδαμε, ὅτι γιά νά διαιρεῖται ἕνας φυσικός ἀριθμός β μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό α, πρέπει ὁ β νά εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ α. Ἔτσι π.χ. ὁ

137 δέ διαιρεῖται μέ τόν 30 (γιατί ὁ 137 δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 30).

Ἄς δοῦμε τώρα ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ, στό ὁποῖο κανένας ἀπό τούς δύο φυσικούς ἀριθμούς δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἄλλου:

«Ἕνας ὀρνιθοτρόφος μάζεψε σέ μιά μέρα 137 αὐγά. Πόσες αὐγοθῆκες μπορεῖ νά γεμίσει, ἄν καθεμιά παίρνει 30 αὐγά»;

Στό πρόβλημα αὐτό ἔχουμε ἕνα σύνολο αὐγῶν μέ πληθάριθμο 137 καί θέλουμε νά τό διαμερίσουμε σέ ἰσοδύναμα ὑποσύνολα, πού τό καθένα τους νά ἔχει πληθάριθμο 30.

Ὅταν ὁ ὀρνιθοτρόφος γεμίσει τήν πρώτη αὐγοθήκη, θά ἔχει χρησιμοποιήσει **30** αὐγά. Μέ τό γέμισμα τῆς δεύτερης αὐγοθήκης θά ἔχει χρησιμοποιήσει $\mathbf{30 + 30 = 2 \cdot 30}$ αὐγά συνολικά. Μέ τήν τρίτη θά ἔχει χρησιμοποιήσει συνολικά $\mathbf{3 \cdot 30}$ αὐγά κ.λ.π. Μ' ἄλλα λόγια ὁ ὀρνιθοτρόφος γεμίζοντας τίς αὐγοθῆκες σχηματίζει τά διαδοχικά πολλαπλάσια τοῦ 30, πού εἶναι τά:

$$0 \cdot 30 = 0, \;\; 1 \cdot 30 = 30, \;\; 2 \cdot 30 = 60, \;\; 3 \cdot 30 = 90, \;\; 4 \cdot 30 = 120, \text{ κ.λ.π.}$$

Ἡ ἐργασία τοῦ ὀρνιθοτρόφου θά τελειώσει, ὅταν θά πάρει τό μεγαλύτερο πολλαπλάσιο τοῦ 30, τό ὁποῖο δέν ὑπερβαίνει τόν 137, δηλαδή τό 120, γιατί εἶναι

$$4 \cdot 30 = 120 < 137 \quad \text{καί} \quad 5 \cdot 30 = 150 > 137,$$

δηλαδή
$$4 \cdot 30 < 137 < 5 \cdot 30.$$

Ἔτσι ὁ ὀρνιθοτρόφος θά γεμίσει τέσσερις αὐγοθῆκες καί θά τοῦ περισσέψουν μερικά αὐγά, τά ὁποῖα δέν ἀρκοῦν γιά νά γεμίσει ἄλλη αὐγοθήκη.

Μέ ὅσα εἴπαμε παραπάνω βλέπουμε ὅτι:

- Τό μεγαλύτερο πολλαπλάσιο τοῦ 30, πού εἶναι μικρότερο ἀπό τόν 137, ὁρίζεται ἀπό τό φυσικό ἀριθμό 4 καί εἶναι τό $4 \cdot 30 = 120$.
- Ὁ 137 ὑπερβαίνει τό $4 \cdot 30$ κατά 17, δηλαδή

$$137 - 4 \cdot 30 = 137 - 120 = 17.$$

Ἔτσι μποροῦμε νά γράφουμε

$$137 = 4 \cdot 30 + 17 \tag{1}$$

Ἡ πράξη αὐτή μέ τήν ὁποία ἀπό τούς ἀριθμούς 137 καί 30 βρίσκουμε δύο ἄλλους, τούς 4 καί 17, ὥστε νά ἀληθεύει ἡ ἰσότητα (1), λέγεται πάλι **διαίρεση** τοῦ 137 μέ τόν 30.

Γιά νά τή διακρίνουμε ἀπό τήν τελεία διαίρεση, τή χαρακτηρίζουμε ὡς **ἀτελή διαίρεση.**

Ὁ 137 εἶναι ὁ **διαιρετέος** καί ὁ 30 ὁ **διαιρέτης** τῆς διαιρέσεως αὐτῆς. Ὁ ἀριθμός 4, ὁ ὁποῖος μᾶς δίνει τό μεγαλύτερο πολλαπλάσιο τοῦ 30 πού δέν ὑπερβαίνει τόν 137, λέγεται **πηλίκο** τῆς διαιρέσεως καί ὁ ἀριθμός $137 - 4 \cdot 30 = 137 - 120 = 17$ λέγεται **ὑπόλοιπο** καί **εἶναι πάντα μικρότερο ἀπό τόν διαιρέτη.**

Ἄν παραστήσουμε μέ Δ τό διαιρετέο, μέ δ τό διαιρέτη, μέ π τό πηλίκο καί μέ υ τό ὑπόλοιπο μιᾶς διαιρέσεως, ἔχουμε

$$\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \quad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < \delta)}$$

Εἶναι φανερό πώς, ἄν $\upsilon = 0$, ἔχουμε $\Delta = \delta \cdot \pi$, δηλαδή ἡ διαίρεση εἶναι τελεία.

Μιά ἀτελής διαίρεση, π.χ. τοῦ 137 μέ τόν 30, παριστάνεται συμβολικά **137 : 30**. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, **τό σύμβολο β : α (ἤ Δ : δ) παριστάνει ὄχι μόνο τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως σέ μιά τελεία διαίρεση, ἀλλά καί τήν πράξη τῆς διαιρέσεως στήν ἀτελή διαίρεση.**

Ἐδῶ ὁ συμβολισμός 137 : 30 παριστάνει τήν πράξη τῆς διαιρέσεως καί ὄχι τό πηλίκο. Συνεπῶς εἶναι λάθος νά γράφουμε $137 : 30 = 4$. Γράφουμε ὅμως

$$137 = 30 \cdot 4 + 17.$$

Ἰδιότητες τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως

12.11. Ἄς πάρουμε τή διαίρεση 36 : 15, στήν ὁποία τό πηλίκο εἶναι 2 καί τό ὑπόλοιπο 6. Πολλαπλασιάζουμε τό διαιρετέο καί τό διαιρέτη μέ 2, 3, 4 κ.λ.π. καί σχηματίζουμε τό πίνακα Ι.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Δ	δ	π	υ
36	15	2	6
72	30	2	12
108	45	2	18
144	60	2	24
. .	. .	. .	. .

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

Δ	δ	π	υ
144	60	2	24
72	30	2	12
48	20	2	8
36	15	2	6
12	5	2	2

Ἀπό τόν πίνακα αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι:

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τό διαιρετέο καί τό διαιρέτη μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό (διαφορετικό ἀπό τό 0), τό πηλίκο δέν ἀλλάζει, ἀλλά τό ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.

Ἀπό τόν πίνακα ΙΙ καταλαβαίνουμε ὅτι:

Ἄν διαιρέσουμε τό διαιρετέο καί τό διαιρέτη μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό (πού τούς διαιρεῖ ἀκριβῶς) τό πηλίκο δέν ἀλλάζει, ἀλλά τό ὑπόλοιπο διαιρεῖται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.

Ἀπό τήν τελευταία αὐτή ἰδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι:

- **Ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους, θά διαιρεῖ καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς τους.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως 25 : 39.**

Λύση: Ὁ διαιρετέος 25 εἶναι μικρότερος ἀπό τό διαιρέτη 39. Ἄρα τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι 0 ($0 \cdot 39 < 25 < 1 . 39$) καί τό ὑπόλοιπο 25.
Γενικά, ὅταν σέ μιά διαίρεση ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος ἀπό τό διαιρέτη, τό πηλίκο εἶναι 0 καί τό ὑπόλοιπο ἴσο μέ τό διαιρετέο.

2. **Μέ ἐφαρμογή τῆς § 12.11 νά βρεθεῖ τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῶν διαιρέσεων: i) 50 : 14, ii) 47 : 5.**

Λύση: i) $50 : 2 = 25$ καί $14 : 2 = 7$.
Ἡ διαίρεση 25 : 7 δίνει πηλίκο 3 καί ὑπόλοιπο 4. Ἐπειδή $50 = 2 \cdot 25$ καί $14 = 2 \cdot 7$ ἡ διαίρεση 50 : 14 θά δώσει πηλίκο 3 καί ὑπόλοιπο $2 \cdot 4 = 8$.
ii) $47 \cdot 2 = 94$ καί $5 \cdot 2 = 10$.
Ἡ διαίρεση 94 : 10 δίνει πηλίκο 9 καί ὑπόλοιπο 4. Ἑπομένως ἡ διαίρεση 47 : 5 θά δώσει πηλίκο 9 καί ὑπόλοιπο $4 : 2 = 2$.

3. **Νά ἐξηγηθεῖ ἡ γνωστή μας τεχνική τῆς διαιρέσεως.**

Λύση: Ἄς πάρουμε ὡς παράδειγμα τή διαίρεση 7826 : 38.
Ἔχουμε $7826 : 38 = (7Χ + 8Ε + 2Δ + 6Μ) : 38$
Ἐπειδή οἱ 7 χιλιάδες, ὅταν διαιρεθοῦν μέ τό 38, δίνουν πηλίκο 0 χιλιάδες, τίς μετατρέπουμε σέ 70 ἑκατοντάδες κι ἔτσι ἔχουμε:

$$7826 : 38 = (70Ε + 8Ε + 2Δ + 6\,Μ) : 38 = (78Ε + 2Δ + 6Μ) : 38 =$$
$$= (76\,Ε + 2Ε + 2Δ + 6Μ) : 38 = (76Ε + 20Δ + 2Δ + 6Μ) : 38 =$$
$$= (76Ε + 22Δ + 6Μ) : 38 = (76 : 38)Ε + (22Δ + 6Μ) : 38 =$$
$$= 2Ε + (22Δ + 6Μ) : 38.$$

Ἐπειδή πάλι οἱ 22 δεκάδες, ὅταν διαιρεθοῦν μέ 38 δίνουν πηλίκο 0 δεκάδες καί ὑπόλοιπο 22 δεκάδες (ἤ 220 μονάδες) θά ἔχουμε,

$$7826 : 38 = 2Ε + 0Δ + (220Μ + 6Μ) : 38 =$$
$$= 2Ε + 0Δ + (226 : 38)Μ.$$

Ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος δίνει τό μεγαλύτερο πολλαπλάσιο τοῦ 38 πού δέν ὑπερβαίνει τό 226 εἶναι ὁ 5 ($5 \cdot 38 = 190$, ἐνῶ $6 \cdot 38 = 228$), γι' αὐτό ἡ διαίρεση 226 : 38 δίνει πηλίκο 5 μονάδες καί ὑπό-

$$\begin{array}{r|l} 7826 & 38 \\ \cline{2-2} -76 & 205 \\ \cline{1-1} 22 & \\ -0 & \\ \cline{1-1} 226 & \\ -190 & \\ \cline{1-1} 36 & \end{array}$$

ἤ πιό ἁπλᾶ

$$\begin{array}{r|l} 7826 & 38 \\ \cline{2-2} 226 & 205 \\ 36 & \end{array}$$

λοιπο $226 - 5 \cdot 38 = 226 - 190 = 36$ μονάδες. Ἑπομένως ἡ διαίρεση $7826 : 38$ δίνει πηλίκο $2Ε + 0Δ + 5Δ$ καί ὑπόλοιπο 36 Μ ἤ πηλίκο 205 καί ὑπόλοιπο 36.
Ἡ ἐργασία αὐτή στήν πράξη γίνεται ὅπως δείχνει ἡ διάταξη στή σελίδα 242, πού μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τό Δημοτικό Σχολεῖο.

Σημείωση. Παρατηροῦμε ὅτι, ἐνῶ τίς 0 χιλιάδες πού βρήκαμε ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως $7 : 38$ τίς παραλείψαμε, γιατί τό 0 εἶναι τό πρῶτο ψηφίο τοῦ πηλίκου, τίς 0 δεκάδες πού βρήκαμε ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως $22 : 38$ δέν τίς παραλείψαμε, γιατί τό μηδέν αὐτό εἶναι ἐνδιάμεσο ψηφίο τοῦ πηλίκου.
Ξέρουμε ὅτι γιά τή διαίρεση ἰσχύει

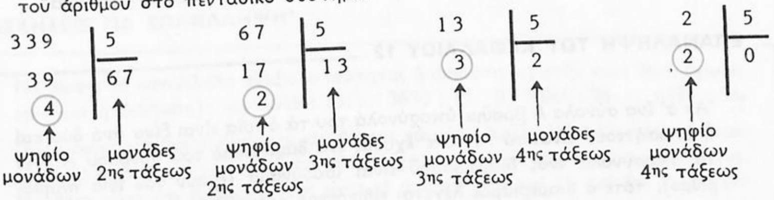
$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon.$$

Γιά νά βεβαιωθοῦμε ὅτι ἡ διαίρεση ἔγινε σωστά, πολλαπλασιάζουμε τό διαιρέτη 38 μέ τό πηλίκο 205 καί προσθέτουμε τό ὑπόλοιπο 36. Ἄν βροῦμε τό διαιρετέο ἡ διαίρεση ἔγινε σωστά. Πραγματικά εἶναι

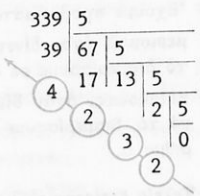
$$38 \cdot 205 = 7790, \qquad 7790 + 36 = 7826.$$

4. **Νά τραπεῖ ὁ ἀριθμός 339 στό πενταδικό σύστημα.**

Λύση: Στήν § 3.5 (Σχ. 7) βλέπουμε ὅτι, ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμό 38 μέ τό 5, τό ὑπόλοιπο μᾶς δίνει τίς μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ στό πενταδικό σύστημα καί τό πηλίκο εἶναι τό πλῆθος τῶν μονάδων 2ης τάξεως (δηλαδή οἱ πεντάδες).
Ἄν διαιρέσουμε τόν ἀριθμό τῶν πεντάδων μέ τό 5, τό ὑπόλοιπο μᾶς δίνει τό ψηφίο τῶν μονάδων 2ης τάξεως καί τό πηλίκο εἶναι τό πλῆθος τῶν μονάδων 3ης τάξεως.
Ἄν συνεχίσουμε ἔτσι μέχρι νά βροῦμε πηλίκο 0, τά ὑπόλοιπα μᾶς δίνουν τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ στό πενταδικό σύστημα.



Ἡ ἐργασία αὐτή γίνεται πιό ἁπλά μέ τή διπλανή διάταξη. Ἔτσι ἔχουμε $339 = 2324$ (βάση πέντε).
Ὁ τρόπος αὐτός μετατροπῆς ἀπό τό δεκαδικό σύστημα σέ ἄλλο λέγεται *μέθοδος τῶν ὑπολοίπων*.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Νά βρεθεῖ τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῶν διαιρέσεων:
α) $139 : 5$, β) $126 : 15$, γ) $83 : 25$, δ) $16 : 23$.

26. Νά συμπληρωθοῦν τά κενά στίς παρακάτω ἰσότητες:
$17 = \square \cdot 5 + 2$, $58 = 7 \cdot 8 + \square$, $\square = 3 \cdot 9 + 3$.

27. Ἀπό τίς ἰσότητες: $28 = 6 \cdot 4 + 4$, $128 = 12 \cdot 10 + 8$, $560 = 6 \cdot 90 + 20$, βρεῖτε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῶν διαιρέσεων:
α) $28 : 6$, β) $128 : 12$, γ) $560 : 90$, δ) $128 : 10$.

28. Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: α) μέ τόν 7, β) μέ τόν 3, γ) μέ τόν 11 καί δ) μέ τόν 69.

29. Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ α μέ τόν 9 εἶναι 8. Νά βρεῖτε: α) τό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως α : 9 καί β) τό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ α.

30. Ποιός εἶναι ὁ μεγαλύτερος τριψήφιος φυσικός ἀριθμός, πού διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τόν 18;

31. Ἡ διαίρεση α : 247 δίνει πηλίκο 63 καί ὑπόλοιπο 128. Νά βρεῖτε τόν ἀριθμό α.

32. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α) $7x+5=47$, β) $4\cdot(x+3)=20$, γ) $9x+11=110$.

33. Νά συμπληρώσετε τά ψηφία πού λείπουν στίς διαιρέσεις:

α)
$$\begin{array}{r|l} 5\;2\;\square\;\square & 5\;9 \\ \cline{2-2} \square\;1\;7 & 8\;\square \\ \square\;\square & \end{array}$$

β)
$$\begin{array}{r|l} 3\;8\;\square\;\square & \square\;5 \\ \cline{2-2} \square\;5 & 2\;\square\;\square \\ \square\;\square\;6 & \\ \square & \end{array}$$

34. Νά τραπεῖ ὁ ἀριθμός 546 στό ἑπταδικό σύστημα ἀριθμήσεως καί ὁ ἀριθμός 129 στό δυαδικό σύστημα.
Ἐπίσης ὁ ἀριθμός 2211 (βάση τρία) νά τραπεῖ στό δυαδικό σύστημα.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 12

1. Ἄν σ' ἕνα σύνολο Α βροῦμε ὑποσύνολά του τά ὁποῖα εἶναι ξένα ἀνά δύο καί ἡ ἕνωσή τους εἶναι τό Α, τότε ἔχουμε ἕνα **διαμερισμό** τοῦ συνόλου Α. Ἄν τά ὑποσύνολα ἑνός διαμερισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμα (ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο), τότε ὁ διαμερισμός λέγεται εἰδικότερα **μερισμός**.
Ἔχουμε προβλήματα:
- **μερισμοῦ**, ὅταν δίνεται ἕνα σύνολο $A \neq \varnothing$ μέ πληθάριθμο β καί ζητᾶμε νά τό διαμερίσουμε σέ α ἰσοδύναμα ὑποσύνολα,
- **μετρήσεως**, ὅταν δίνεται ἕνα σύνολο $A \neq \varnothing$ μέ πληθάριθμο β καί ζητᾶμε νά τό διαμερίσουμε σέ ἰσοδύναμα ὑποσύνολα, τά ὁποῖα νά ἔχουν πληθάριθμο α.

2. **Τελεία διαίρεση** τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β μέ τό φυσικό ἀριθμό $\alpha \neq 0$ λέγεται ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε ἕναν τρίτο φυσικό ἀριθμό γ (ἄν ὑπάρχει) τέτοιο, ὥστε $\beta=\alpha\cdot\gamma$.
Ὁ β λέγεται **διαιρετέος**, ὁ α **διαιρέτης** καί ὁ γ **ἀκριβές πηλίκο** τῆς τελείας διαιρέσεως.

Στήν τελεία διαίρεση ἔχουμε:
- $\alpha\cdot\gamma=\beta \Leftrightarrow \gamma=\beta:\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta:\gamma$.
- Ἡ ἐξίσωση $\alpha\cdot x=\beta$ ἔχει λύση τή $x=\beta:\alpha$.
- $0:\alpha=0$, $\alpha:1=\alpha$, $\alpha:\alpha=1$.
- Ἡ διαίρεση μέ τό μηδέν εἶναι **ἀδύνατη**.

- Ἄν οἱ φυσικοί ἀριθμοί β καί γ διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό φυσικό ἀριθμό $\alpha \neq 0$, τότε τό ἄθροισμα τους καί ἡ διαφορά τους διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τόν α.
- Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε (ἄν διαιροῦνται) τούς ὅρους μιᾶς τελείας διαιρέσεως μέ τό φυσικό ἀριθμό $\lambda \neq 0$, τότε τό πηλίκο δέν ἀλλάζει.

3. Στό σύνολο $\mathbb{Z}$ τῶν *ἀκέραιων ἀριθμῶν* ἡ τελεία διαίρεση ὁρίζεται ὅπως καί στό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τό πηλίκο δύο ἀκεραίων εἶναι :

- **θετικό**, ἄν οἱ ἀκέραιοι εἶναι **ὁμόσημοι**,
- **ἀρνητικό**, ἄν οἱ ἀκέραιοι εἶναι **ἑτερόσημοι**.

4. Στήν *ἀτελή διαίρεση* **πηλίκο** εἶναι ὁ μεγαλύτερος φυσικός ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὅταν πολλαπλασιασθεῖ μέ τό διαιρέτη δ ($\delta \in \mathbb{N}^*$), δίνει γινόμενο μικρότερο ἀπό τό διαιρετέο Δ ($\Delta \in \mathbb{N}$). Ὁ **διαιρετέος** Δ, ὁ **διαιρέτης** δ, τό **πηλίκο** π καί τό **ὑπόλοιπο** υ συνδέονται μέ τήν σχέση

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \qquad (0 \leq \upsilon < \delta).$$

Στήν ἀτελή διαίρεση:

- Ὅταν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε (ἄν διαιροῦνται ἀκριβῶς) διαιρετέο καί διαιρέτη μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό, τότε τό πηλίκο δέν ἀλλάζει, ἀλλά τό ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται (ἤ διαιρεῖται) μέ τόν ἴδιο ἀριθμό.
- Ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους, θά διαιρεῖ καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

35. Νά θέσετε τό κατάλληλο σύμβολο ἰσότητας ἤ ἀνισότητας στήν κενή θέση (χωρίς νά γίνει ἡ διαίρεση): α) 3645 : 15... 3630 : 15 β) 6496 : 56... 6496 : 58.

36. Ἕνας ἔκανε μιά ἀτελή διαίρεση καί θέλησε νά μάθει ἀπέξω τό διαιρετέο, τό διαιρέτη, τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο, ἀλλά ξέχασε τή σειρά τους καί ἕναν ἀπ' ὅλους. Θυμᾶται μόνο ὅτι ἀνάμεσά τους εἶναι οἱ ἀριθμοί 8, 9 καί 11 καί ὅτι κανείς δέν ἔχει παραπάνω ἀπό δύο ψηφία. Μπορεῖτε νά βρεῖτε τόν τέταρτο ἀριθμό καί τή σειρά τους;

37. Δύο ἐργάτες παίρνουν μεροκάματο ὁ α' 375 δρχ. καί ὁ β' 450 δρχ. Γιά 29 συνολικά μεροκάματα πῆραν 11775 δραχμές. Πόσα μεροκάματα ἔκανε ὁ καθένας;

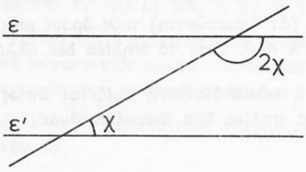
38. Κάποιος ἀγόρασε ὕφασμα καί ἔδωσε 24375 δρχ. Ἄν ἀγόραζε 15 m παραπάνω, θά ἔδινε 30 000 δρχ. συνολικά. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἀγόρασε;

39. Ἕνας ἐργάτης παίρνει μεροκάματο 585 δρχ. καί πληρώνει 3750 δρχ. τό μήνα γιά ἐνοίκιο καί 250 δρχ. τήν ἡμέρα γιά ἔξοδα τῆς οἰκογένειάς του. Σέ πόσους μῆνες θά συγκεντρώσει 59400 δρχ.; (1 μήνας = 30 ἡμέρες, ἐργάζεται 26 ἡμέρες τό μήνα).

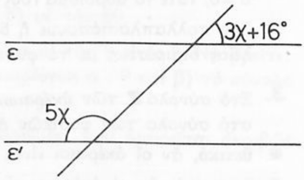
40. Νά συμπληρώσετε τούς ἀριθμούς πού λείπουν στίς ἰσότητες:
α) $\square : (-7) = -3$, β) $(-32) : \square = -4$, γ) $0 : (-3) = \square$
Δικαιολογῆστε τίς ἀπαντήσεις σας.

41. Ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες ἰσότητες εἶναι σωστές;
i) $(-8) : (-8) = 0$, ii) $(-4) : 0 = -4$, iii) $0 : (-9) = 0$,
iv) $0 : (-3) = -3$, v) $(-6) : (-6) = +1$, vi) $(-5) : (+5) = 0$.

42. Στό σχῆμα (α) οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ εἶναι παράλληλες. Νά βρεθεῖ ὁ χ σέ μοῖρες.



(α)



(β)

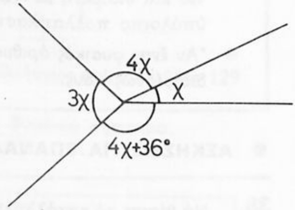
43. Νά γίνει τό ἴδιο στό σχῆμα (β), ὅπου πάλι οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ εἶναι παράλληλες.

44. Ἕνα λεξικό ἀποτελεῖται ἀπό 8 τόμους τῶν 600 σελίδων πού εἶναι τοποθετημένοι κολλητά σέ μιά βιβλιοθήκη. Ἕνα σκουλήκι τρυπᾶ 100 φύλλα κάθε 6 ὧρες καί κάθε ἐξώφυλλο σέ 1,5 ὧρες. Σέ πόσες ὧρες θά τρυπήσει ὅλους τούς τόμους;

45. Ποιός εἶναι ὁ μικρότερος τριψήφιος ἀριθμός πού διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 11;

46. Ποιός εἶναι ὁ μεγαλύτερος διψήφιος ἀριθμός πού διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 16;

47. Νά βρεῖτε τή γωνία χ σέ μοῖρες ἀπό τό διπλανό σχῆμα.



48. Τό πηλίκο τοῦ ἀριθμοῦ 7064 μέ τό φυσικό ἀριθμό α εἶναι 261 καί τό ὑπόλοιπο 17. Ποιός εἶναι ὁ α;

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

49. Τί θά πάθει τό πηλίκο μιᾶς τελείας διαιρέσεως ἄν: α) τριπλασιασθεῖ ὁ διαιρετέος, β) διπλασιασθεῖ ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης, γ) τετραπλασιασθεῖ ὁ διαιρετέος καί διπλασιασθεῖ ὁ διαιρέτης;

50. Σέ μιά διαίρεση ὁ διαιρέτης εἶναι 8 καί τό πηλίκο εἶναι ἴσο μέ τό ὑπόλοιπο. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ διαιρετέου.

51. Ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἡ $\widehat{B}$ εἶναι κατά 36° μεγαλύτερη ἀπό τήν $\widehat{A}$ καί κατά 36° μικρότερη ἀπό τή $\widehat{\Gamma}$. Νά βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου.

52. Ἔχουμε τήν ἰσότητα $\beta = 19 \cdot \alpha + 20$ μέ $\alpha \neq 0$. i) Εἶναι τό 20 ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως β : 19; ii) Ποιά εἶναι ἡ μικρότερη τιμή τοῦ α, ὥστε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως β : α νά εἶναι 20;

53. Ἄν κάθε μαθητής πληρώσει 220 δρχ. γιά μιά ἐκδρομή τῆς τάξεώς του, θά λείψουν 1320 δρχ. Ἄν ὅμως πληρώσει ὁ καθένας 250 δρχ. θά περισσέψουν 1320 δρχ. Πόσοι εἶναι οἱ μαθητές τῆς τάξεως;

54. Ἄν στό δωδεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως παραστήσουμε τό δέκα μέ Δ καί τό 11 μέ Ε, νά τραπεῖ ὁ ἀριθμός 784438 στό δωδεκαδικό σύστημα, καί ὁ ἀριθμός 3Δ5Ε6 (βάση δώδεκα) στό πενταδικό καί στό ὀκταδικό σύστημα.

13ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ

Τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ

13.1. Στήν § 11.1 μάθαμε ὅτι τά πολλαπλάσια ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι οἱ ἀριθμοί πού προκύπτουν ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμό μέ

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ἔτσι τά πολλαπλάσια τοῦ $\alpha \neq 0$ εἶναι οἱ ἀριθμοί

$$0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$$

Τά πολλαπλάσια τοῦ α σχηματίζουν ἕνα *ἀπειροσύνολο* τό ὁποῖο λέγεται **σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ α** καί παριστάνεται μέ Π_α.

$$\boxed{\Pi_\alpha = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots\}}$$

Π.χ. τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 εἶναι τό

$\Pi_3 = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$, τοῦ 8 εἶναι τό $\Pi_8 = \{0, 8, 16, 24, \ldots\}$ κ.λ.π.

Ἰδιότητες τῶν πολλαπλασίων ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ

13.2. Ἀπό τή διαίρεση ξέρουμε ὅτι:

i) Ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ τά πολλαπλάσιά του καί μόνον αὐτά (§ 12.5).

Π.χ. ὁ 6 διαιρεῖ μόνο τούς φυσικούς ἀριθμούς 0, 6, 12, 18, . . .

ii) Ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ ἕναν ἄλλο, θά διαιρεῖ καί τά πολλαπλάσιά του (§ 12.5).

Π.χ. ὁ 5 διαιρεῖ τό 10, ἑπομένως θά διαιρεῖ καί τούς 0, 10, 20, 30, 40, . . .

iii) Ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους (ἤ καί περισσότερους) θά διαιρεῖ καί τό ἄθροισμά τους (§ 12.7).

iv) Ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους, θά διαιρεῖ καί τή διαφορά τους (§ 12.7).

v) Ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους, θά διαιρεῖ καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς τους (§ 12.11).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά γραφοῦν τά σύνολα τῶν πολλαπλασίων τοῦ 2 καί τοῦ 3. Τί συμπέρασμα βγάζετε γιά τό 0;**

Λύση: Τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 2 εἶναι τό $\Pi_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$. (Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου αὐτοῦ λέγονται **ἄρτιοι** ἀριθμοί). Τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 εἶναι τό $\Pi_3 = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι τό μηδέν εἶναι πολλαπλάσιο καί τοῦ 2 καί τοῦ 3. Γενικά γιά κάθε φυσικό ἀριθμό α ἔχουμε $0 \cdot \alpha = 0$. Ἄρα

Τό μηδέν εἶναι πολλαπλάσιο κάθε φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

2. **Νά γράψετε τό σύνολο τῶν ἀρτίων πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν 25 καί μικρότεροι ἀπό τόν 40.**

Λύση: Τό σύνολο αὐτό εἶναι τό $\{26, 28, 30, 32, 34, 36, 38\}$.

3. **Νά βρεῖτε ποιῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιο ὁ 24.**

Λύση: Εἶναι πολλαπλάσιο τῶν: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά γράψετε τό σύνολο τῶν διψήφιων πολλαπλασίων τοῦ 11.
2. Κάμετε τό ἴδιο γιά τά διψήφια πολλαπλάσια τῶν 6 καί 12. Ποιά σχέση ἔχουν τά σύνολα αὐτά;
3. Χωρίς νά κάνετε πράξεις νά δικαιολογήσετε ὅτι τά ἀθροίσματα καί οἱ διαφορές: $80+32$, $80-32$, $48+8$, εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 4.
4. Ἄν ξέρουμε ὅτι ὁ φυσικός ἀριθμός α εἶναι ἄρτιος, τί μποροῦμε νά ποῦμε γιά τούς ἀριθμούς α^2 καί α^3;
5. Ξέρουμε ὅτι ὁ ἀριθμός 37X (3, 7, X εἶναι ψηφία) εἶναι ἄρτιος. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ X;
6. Νά γράψετε τό σύνολο τῶν ἀριθμῶν πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν 20 καί μικρότεροι ἀπό τόν 49 καί εἶναι συγχρόνως πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καί 4.
7. Κάνετε τό ἴδιο γιά τά πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 4, 5 καί 6 πού εἶναι μεγαλύτερα ἀπό τόν 40 καί μικρότερα ἀπό τόν 55.

Κριτήρια διαιρετότητας

13.3. Θά ἐφαρμόσουμε τώρα τίς ἰδιότητες πού ἀναφέραμε στήν προηγούμενη παράγραφο, γιά νά βροῦμε κανόνες μέ τούς ὁποίους θά μποροῦμε σέ ὁρισμένες πολύ συνηθισμένες περιπτώσεις, νά ἀναγνωρίζουμε ἀμέσως, ἄν κάποιος φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται μέ ἕναν ἄλλο, χωρίς νά ἐκτελοῦμε τή διαίρεση.

Αὐτοί οἱ κανόνες λέγονται **κριτήρια διαιρετότητας**.

α) Κριτήριο διαιρετότητας μέ τό 10, 100, 1000,...

Ξέρουμε ὅτι γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἕνα φυσικό ἀριθμό μέ 10,100, 1000,..., παραθέτουμε στό τέλος τοῦ ἀριθμοῦ ἕνα, δύο, τρία,... μηδενικά ἀντιστοίχως. Ἔτσι τά πολλαπλάσια τοῦ 10, 100, 1000,... τελειώνουν ἀντιστοίχως τουλάχιστο σέ ἕνα, δύο, τρία... μηδενικά.

Ἑπομένως, **ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ 10, 100, 1000,..., ἄν τελειώνει ἀντιστοίχως τουλάχιστο σέ ἕνα, δύο, τρία,... μηδενικά.**

Π.χ. ὁ ἀριθμός 2600 διαιρεῖται μέ τό 10 καί τό 100, ἀλλά δέ διαιρεῖται μέ τό 1000.

β) Κριτήριο διαιρετότητας μέ τό 2 ἤ μέ τό 5.

Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί 2 καί 5 διαιροῦν τό 10, θά διαιροῦν καί τά πολλαπλάσια τοῦ 10.

Ἄς πάρουμε τώρα ἕναν πολυψήφιο ἀριθμό, π.χ. τόν 728. Αὐτός γράφεται $720 + 8$. Ὁ 720 διαιρεῖται μέ τό 2 καί τό 5, γιατί εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 10. Συνεπῶς ὁ 728 θά διαιρεῖται μέ τό 2 ἤ τό 5, ὅταν καί τό ψηφίο τῶν μονάδων του, δηλ. τό 8, διαιρεῖται μέ τό 2 ἤ τό 5 ἀντιστοίχως (γιατί τότε τό ἄθροισμα $720+8$ θά διαιρεῖται μέ τό 2 ἤ τό 5 (§ 13.2)).

Ἐπειδή λοιπόν ὁ 8 διαιρεῖται μέ τό 2, ὁ ἀριθμός 728 θά διαιρεῖται μέ τό 2, ἐνῶ ὁ 728 δέ διαιρεῖται μέ τό 5, γιατί τό 8 δέ διαιρεῖται μέ τό 5.

Γενικά:

Ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 2 ἤ μέ τό 5, ἄν τό τελευταῖο ψηφίο του διαιρεῖται μέ τό 2 ἤ μέ τό 5 ἀντιστοίχως.

Δηλαδή γιά νά δοῦμε ἄν ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 2 ἤ μέ τό 5, ἐξετάζουμε μόνο ἄν τό τελευταῖο ψηφίο του διαιρεῖται μέ τό 2 ἤ μέ τό 5.

γ) Κριτήριο διαιρετότητας μέ τό 9 ἤ μέ τό 3.

Νά ἐξετάσετε ἄν μποροῦν νά μοιράσουν ἐξίσου 3657 δρχ. σέ 9 ἤ σέ 3 παιδιά χωρίς νά ἐκτελεσθεῖ ἡ διαίρεση.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1$$
$$1000 = 999 + 1.$$

Βλέπουμε λοιπόν πώς, ὅταν μοιράζουμε ἐξίσου στά 9 παιδιά 10 ἤ 100, ἤ 1000 δραχμές, περισσεύει κάθε φορά 1 δραχμή. Ὅταν μοιράσουμε λοιπόν τά 3 χιλιάρικα, θά μᾶς περισσέψουν 3 δρχ., ὅταν μοιράσουμε τά 6 ἑκατοστάρικα, θά μᾶς περισσέψουν 6 δρχ. καί ὅταν μοιράσουμε τά 5 δεκάρικα, θά μᾶς περισσέψουν 5 δρχ.

Συνολικά λοιπόν θά μᾶς περισσέψουν

$$3+6+5+7 \text{ δραχμές.}$$

Ἄν αὐτά τά χρήματα μποροῦν νά μοιραστοῦν ἐξίσου στά 9 παιδιά, τότε καί ὅλα τά χρήματα θά μποροῦν νά μοιραστοῦν ἐξίσου στά 9 παιδιά. Συνεπῶς ὁ 3657 θά διαιρεῖται μέ τό 9, ἄν τό ἄθροισμα $3+6+5+7$ διαιρεῖται μέ τό 9.

Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί 9, 99, 999 διαιροῦνται καί μέ τό 3, συμπεραίνουμε ὅτι ὁ 3657 διαιρεῖται μέ τό 3, ἄν τό ἄθροισμα $3+6+5+7$ διαιρεῖται μέ τό 3.

Γενικά:

Ἕνας φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 9 ἤ μέ τό 3, ἄν τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διαιρεῖται μέ τό 9 ἤ τό 3 ἀντιστοίχως.

Στό παράδειγμά μας εἶναι $3+6+5+7=21$. Ἄρα ὁ 3657 διαιρεῖται μέ τό 3, ἀλλά δέ διαιρεῖται μέ τό 9.

Ἀνάλυση σύνθετου φυσικοῦ ἀριθμοῦ σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων

13.4. Ἄς πάρουμε ἕνα σύνθετο ἀριθμό, π.χ. τόν 54.

Αὐτός γράφεται:

$$54=2\cdot 27 \qquad \text{ἤ} \qquad 54=3\cdot 18 \qquad \text{ἤ} \qquad 54=6\cdot 9$$

Ἄν πάρουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε γινόμενο δύο παραγόντων τοῦ 54 καί κάθε παράγοντά του, πού εἶναι σύνθετος ἀριθμός, τόν γράψουμε πάλι ὡς γινόμενο δύο παραγόντων, θά ἔχουμε τότε τόν ἀριθμό 54 γραμμένο ὡς γινόμενο τριῶν ἤ τεσσάρων παραγόντων. Μέ τήν ἐργασία αὐτή οἱ παραπάνω ἰσότητες γράφονται κατά σειρά

$$54=2\cdot 3\cdot 9 \qquad \text{ἤ} \qquad 54=3\cdot 2\cdot 9 \qquad \text{ἤ} \qquad 54=3\cdot 2\cdot 3\cdot 3.$$

Ἄν συνεχίσουμε τήν ἴδια ἐργασία γράφοντας πάλι κάθε σύνθετο παράγοντα, πού ἐμφανίζεται στό γινόμενο, ὡς γινόμενο δύο παραγόντων, θά καταλήξουμε τελικά νά ἔχουμε σέ ὅλες τίς περιπτώσεις τόν 54 γραμμένο ὡς γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ἔτσι οἱ παραπάνω ἰσότητες γράφονται κατά σειρά.

$$54=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3 \qquad \text{ἤ} \qquad 54=3\cdot 2\cdot 3\cdot 3 \qquad \text{ἤ} \qquad 54=3\cdot 2\cdot 3\cdot 3.$$

Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται **ἀνάλυση τοῦ 54 σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων** καί, ὅπως βλέπουμε, ἀπό ὁποιοδήποτε γινόμενο δύο παραγόντων τοῦ 54 κι ἄν ξεκινήσουμε, θά καταλήξουμε τελικά στό ἴδιο γινόμενο πρώτων παραγόντων, τό ὁποῖο γράφεται πιό ἁπλά

$$54=2\cdot 3^3.$$

Γενικά, **κάθε σύνθετος φυσικός ἀριθμός ἀναλύεται κατά ἕνα μόνο τρόπο σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

Στήν ἀνάλυση ἑνός σύνθετου φυσικοῦ ἀριθμοῦ σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων μᾶς βοηθοῦν τά κριτήρια διαιρετότητας πού μάθαμε στήν προηγούμενη παράγραφο.

Ἄς πάρουμε γιά παράδειγμα τόν ἀριθμό 168. Βρίσκουμε τό μικρότερο πρῶτο παράγοντά του, πού εἶναι ὁ 2 (θυμηθεῖτε τό κριτήριο διαιρετότητας μέ τό 2). Ἔτσι εἶναι

$$168 = 2 \cdot 84.$$

Στή συνέχεια βρίσκουμε τό μικρότερο πρῶτο παράγοντα τοῦ 84 πού εἶναι πάλι ὁ 2. Ἑπομένως ἔχουμε $84 = 2 \cdot 42$

καί $$168 = 2 \cdot 2 \cdot 42.$$

Τήν ἐργασία αὐτή, πού τή διάταξή της τή βλέπετε παραπλεύρως, τή συνεχίζουμε ὥσπου νά βροῦμε ὅλους τούς πρώτους παράγοντες τοῦ ἀριθμοῦ 168.

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ἔτσι τελικά θά ἔχουμε :

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad \text{ἤ}$$

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεῖτε ποιοί ἀπό τούς ἀριθμούς 48, 256, 410, 635, 729, 1500, 18612 διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό 10, 100, 2, 5, 3, 9. Δικαιολογῆστε τίς ἀπαντήσεις σας.**

Λύση: i) Μέ τό 10 διαιροῦνται οἱ 410 καί 1500, γιατί τελειώνουν σ' ἕνα τουλάχιστο μηδενικό.

ii) Μέ τό 100 διαιρεῖται ὁ 1500, γιατί τελειώνει σέ δύο μηδενικά.

iii) Μέ τό 2 διαιροῦνται οἱ 48, 256, 410, 1500, καί 18612, γιατί τό τελευταῖο ψηφίο τους διαιρεῖται μέ τό 2.

iv) Μέ τό 5 διαιροῦνται οἱ 410, 635 καί 1500, γιατί τό τελευταῖο ψηφίο τους διαιρεῖται μέ τό 5.

v) Μέ τό 3 διαιροῦνται οἱ 48, 729, 1500 καί 18612, γιατί τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων καθενός διαιρεῖται μέ τό 3.

vi) Μέ τό 9 διαιροῦνται οἱ 729 καί 18612, γιατί τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων καθενός διαιρεῖται μέ τό 9.

2. **Νά βρεῖτε τά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 2837 μέ τό 10 καί μέ τό 5, χωρίς νά κάνετε τή διαίρεση.**

Λύση: Ἐπειδή $2837 = 2830 + 7 = 10 \cdot 283 + 7$, τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ 2837 μέ τό 10 εἶναι τό 7 (δηλ. τό τελευταῖο ψηφίο του).

Ἔχουμε ἀκόμη $2837 = 2835 + 2$.

Τό 2835 διαιρεῖται μέ τό 5 καί ἑπομένως τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ 2837 μέ τό 5 εἶναι τό 2 (δηλαδή τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου μέ τό 5).

3. Συμπληρῶστε τά τετραγωνάκια μέ κατάλληλο ψηφίο, ὥστε οἱ ἀριθμοί πού θά προκύψουν νά διαιροῦνται μέ τό 9.

i) 5 □ 6, ii) 3 □ 4 5, iii) 4 2 3 □.

Λύση: i) Τό ἄθροισμα τῶν γνωστῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ πού ζητᾶμε εἶναι

$$5 + 6 = 11.$$

Ὁ μικρότερος ἀριθμός πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 11 καί διαιρεῖται μέ τό 9 εἶναι ὁ 18. Ἑπομένως τό τετραγωνάκι πρέπει νά συμπληρωθεῖ μέ τό ψηφίο 7 $(7 = 18 - 11)$

ii) $3 + 4 + 5 = 12$. Ὁ μικρότερος . . . .

. . . .

iii) . . . .

. . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Συμπληρῶστε τό τετραγωνάκι σέ καθένα ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς μέ κατάλληλο ψηφίο, ὥστε ὁ ἀριθμός πού θά προκύψει νά διαιρεῖται μέ τό 9.

6 □ 4, 9 □ 5 4, 6 0 1 □, □ 3 8 6.

9. Νά ἀντικαταστήσετε τό α μέ κατάλληλο ψηφίο, ὥστε ὁ ἀριθμός πού θά προκύψει ἀπό τόν 325α νά διαιρεῖται μέ τό 2 καί τό 3.

10. Σέ ποιό ψηφίο πρέπει νά τελειώνει ἕνας ἀριθμός, γιά νά διαιρεῖται μέ τό 2 καί τό 5 συγχρόνως;

11. Νά ἀντικαταστήσετε τά γράμματα x καί y μέ κατάλληλα ψηφία, ὥστε ὁ ἀριθμός 5x7y νά εἶναι πολλαπλάσιο τῶν 5 καί 9.

12. Κάμετε τό ἴδιο γιά τόν ἀριθμό 42xy, ὥστε νά διαιρεῖται μέ τό 3 καί μέ τό 5.

13. Χωρίς νά κάνετε πράξεις νά δικαιολογήσετε ὅτι οἱ διαφορές 288–63, 2610–684 διαιροῦνται μέ τό 9.

14. Χρησιμοποιώντας τά ψηφία 7, 2, 4, 5 μιά φορά τό καθένα νά γράψετε ἀριθμούς, πού νά εἶναι διαιρετοί μέ τό 2.

15. Γιατί ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 9, τότε καί ὁ ἀριθμός πού προκύπτει, ὅταν γράψουμε τά ψηφία του μέ ὁποιαδήποτε σειρά θά διαιρεῖται πάλι μέ τό 9;

16. Νά γίνουν γινόμενα πρώτων παραγόντων οἱ ἀριθμοί
i) 72, ii) 1440, iii) 2160, iv) 4200, v) 12^2.

17. Νά συγκρίνετε τούς ἀριθμούς 2520 καί $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

18. Νά βρεῖτε ποιῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀναλύσεις σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων οἱ παραστάσεις: i) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, ii) $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, iii) $3^3 \cdot 5 \cdot 11^2$, iv) $2^5 \cdot 7^2 \cdot 13$.

Κοινά πολλαπλάσια καί Ε.Κ.Π. δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν

13.5. Ἄς θεωρήσουμε τά σύνολα τῶν πολλαπλασίων δύο φυσικῶν ἀριθμῶν, π.χ. τοῦ 6 καί τοῦ 8,

$\Pi_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 36, 42, 48, \ldots\}$,

$\Pi_8 = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, \ldots\}$,

κι ἄς σχηματίσουμε τήν τομή τους.

$\Pi_6 \cap \Pi_8 = \{0, 24, 48, 72, \ldots\}$.

Κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\Pi_6 \cap \Pi_8$ εἶναι συγχρόνως πολλαπλάσιο τοῦ 6 καί τοῦ 8 καί λέγεται **κοινό πολλαπλάσιό** τους.

Τό σύνολο $\Pi_6 \cap \Pi_8$ εἶναι τό **σύνολο τῶν κοινῶν πολλαπλασίων** τῶν ἀριθμῶν 6 καί 8.

Ἄν ἔχουμε περισσότερους ἀπό δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς ἀριθμούς 5, 6, 10 τότε βρίσκουμε:

$\Pi_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$,

$\Pi_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$,

$\Pi_{10} = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, \ldots\}$.

Τό σύνολο τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τους εἶναι τό

$\Pi_5 \cap \Pi_6 \cap \Pi_{10} = \{0, 30, 60, 90, \ldots\}$.

Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά καί ἄλλα παρόμοια καταλαβαίνουμε ὅτι τό σύνολο τῶν κοινῶν πολλαπλασίων δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν:

- **Εἶναι ἀπειροσύνολο.**
- **Ἔχει ἕνα μικρότερο στοιχεῖο διαφορετικό ἀπό τό μηδέν.**
- **Ὅλα τά στοιχεῖα του εἶναι πολλαπλάσια τοῦ μικρότερου αὐτοῦ στοιχείου.**

Τό μικρότερο ἀπό τά κοινά πολλαπλάσια δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν, πού εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν, ὀνομάζεται **ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν (Ε. Κ. Π.). Ἔτσι τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν 6 καί 8 εἶναι ὁ ἀριθμός 24 καί γράφουμε συμβολικά

$$\text{Ε.Κ.Π.}\ (6, 8) = 24.$$

Ὁμοίως εἶναι: $\text{Ε.Κ.Π.}\ (5, 6, 10) = 30.$

Ὅταν ὁ ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς, πού ζητᾶμε τό Ε.Κ.Π. τους, διαιρεῖται μέ τούς ἄλλους, τότε βρίσκουμε εὔκολα ὅτι ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι τό Ε.Κ.Π. Π.χ. ἄν ἔχουμε τούς ἀριθμούς 8, 12, 24,

βρίσκουμε $\Pi_8 \cap \Pi_{12} \cap \Pi_{24} = \{0, 24, 48, \ldots\}$,

δηλαδή Ε.Κ.Π. (8, 12, 24) = 24.

Εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π. δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν

13.6. Ὁ προηγούμενος τρόπος γιά τήν εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π. εἶναι πολύ κοπιαστικός ὅταν οἱ ἀριθμοί εἶναι μεγάλοι. Γι' αὐτό θά δοῦμε ἐδῶ ἕνα σύντομο τρόπο γιά τήν εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π.

Ἄς ζητήσουμε νά βροῦμε π.χ. τό Ε.Κ.Π. (70, 90, 135).

Γράφουμε τούς ἀριθμούς αὐτούς σέ μιά σειρά καί δεξιά ἀπό τόν τελευταῖο χαράζουμε μιά κατακόρυφη γραμμή ὅπως στή διπλανή διάταξη. Βρίσκουμε τό μικρότερο πρῶτο ἀριθμό πού διαιρεῖ τουλάχιστο ἕναν ἀπ' αὐτούς (στό παράδειγμά μας εἶναι ὁ 2) καί τόν γράφουμε στήν ἴδια γραμμή μέ τούς ἀριθμούς, δεξιά ἀπό τήν κατακόρυφη. Κάτω ἀπό κάθε ἀριθμό γράφουμε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεώς του μέ τόν παράγοντα πού βρήκαμε, ἄν διαιρεῖται ἀκριβῶς, ἤ τόν ἴδιο τόν ἀριθμό, ἄν δέ διαιρεῖται ἀκριβῶς. Στή νέα σειρά ἀριθμῶν πού βρήκαμε (35, 45, 135) ἐργαζόμαστε ὁμοίως.

70	90	135	2
35	45	135	3
35	15	45	3
35	5	15	3
35	5	5	5
7	1	1	7
1	1	1	

Τήν ἐργασία αὐτή τή συνεχίζουμε μέχρις ὅτου φτάσουμε σέ μιά σειρά ἀπό μονάδες. Τό Ε.Κ.Π. βρίσκεται τότε, ἄν σχηματίσουμε τό γινόμενο τῶν πρώτων ἀριθμῶν πού ἔχουμε γράψει δεξιά ἀπό τήν κατακόρυφη γραμμή. Στό παράδειγμά μας εἶναι:

$$\text{Ε.Κ.Π. } (70, 90, 135) = 2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7 = 2\cdot3^3\cdot5\cdot7 = 1890.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν:**
i) 24, 72, 144, ii) 28, 32, 56 καί τῶν 32, 56.

Λύση: i) Ε.Κ.Π. (24, 72, 144) = 144, γιατί ὁ 144 εἶναι πολλαπλάσιο καί τοῦ 24 καί τοῦ 72.

ii) Βρίσκουμε ὅτι: Ε.Κ.Π. (28, 32, 56) = 224 καί Ε.Κ.Π. (32, 56) = 224.

Ἄρα Ε.Κ.Π. (28, 32, 56) = Ε.Κ.Π. (32, 56).

Δηλαδή, **ἄν ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς διαιρεῖ κάποιον ἄλλο, μπορεῖ νά παραλειφθεῖ ἀπό τή διαδικασία τῆς εὑρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π. τους.**

2. **Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν 24, 36, 40.**

Λύση: Ξέρουμε ὅτι τά κοινά πολλαπλάσια δύο ἤ περισσότερων ἀριθμῶν εἶναι τά πολλαπλάσια τοῦ Ε.Κ.Π. τους καί ἐπειδή Ε.Κ.Π. (24, 36, 40) = 360, ἔχουμε

$\Pi_{24} \cap \Pi_{36} \cap \Pi_{40} = \Pi_{360} = \{0, 360, 720, 1080, \dots\}$.

3. **Τρεῖς ἐργάτες κάνουν νυχτερινή ἐργασία (βάρδια) ὁ α΄ κάθε 2 ἡμέρες, ὁ β κάθε 3 καί ὁ γ΄ κάθε 4 ἡμέρες. Ἄν σήμερα ἔχουν νυχτερινή βάρδια καί οἱ τρεῖς μαζί, μετά ἀπό πόσες ἡμέρες θά ἔχουν γιά πρώτη φορά πάλι μαζί νυχτερινή βάρδια ;**

Λύση: Ὁ α΄ θά κάνει νυχτερινή βάρδια μετά 2,4,6, κ.λ.π. ἡμέρες, δηλαδή μετά ἀπό ἀριθμό ἡμερῶν πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2. Γιά τόν ἴδιο λόγο ὁ β΄ θά κάνει νυχτερινή βάρδια μετά ἀπό ἀριθμό ἡμερῶν πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 καί ὁ γ΄ μετά ἀπό ἀριθμό ἡμερῶν πού εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 4. Ἔτσι οἱ τρεῖς ἐργάτες θά ἔχουν συγχρόνως νυχτερινή βάρδια μετά ἀπό ἀριθμό ἡμερῶν πού θά εἶναι κοινό πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καί 4. Ἐπειδή ὅμως θέλουμε νά μάθουμε πότε θά ἔχουν νυχτερινή βάρδια συγχρόνως γιά πρώτη φορά, πρέπει νά βροῦμε τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καί 4. Εἶναι Ε.Κ.Π. $(2, 3, 4) = $ Ε.Κ.Π. $(3, 4) = 12$. Ἄρα μετά 12 ἡμέρες θά κάνουν γιά πρώτη φορά νυχτερινή βάρδια συγχρόνως οἱ τρεῖς ἐργάτες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Γράψτε τό σύνολο τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν φυσικῶν 24, 36, 42.

20. Γράψτε τά σύνολα τῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν 36, 52, 48 πού εἶναι μικρότερα ἀπό 250 καί βρεῖτε τήν τομή τους.

21. Νά βρεῖτε τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν i) 15, 30 ii) 15, 18, 48, iii) 24, 36, 48.

22. Ἐπίσης τῶν ἀριθμῶν i) 16, 36, 42, ii) 216, 348, 648.

23. Τρεῖς ἀθλητές προπονοῦνται σέ ἕνα στίβο καί ξεκινοῦν τήν ἴδια στιγμή ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Ὁ πρῶτος διατρέχει τό στίβο σέ 8 min, ὁ β΄ σέ 9 min καί ὁ γ΄ σέ 10 min. Μετά πόσα min θά βρεθοῦν καί οἱ τρεῖς μαζί στό σημεῖο ἀπ' ὅπου ξεκίνησαν, γιά 1η φορά καί πόσες φορές θά ἔχει διατρέξει τό στίβο ὁ καθένας;

24. Ἕνας ὀρνιθοτρόφος ρωτήθηκε πόσες κότες ἔχει καί ἀπάντησε ὡς ἑξῆς: «Ἔχω περισσότερες ἀπό 400 καί λιγότερες ἀπό 500. Ὅταν τίς μετρῶ ἀνά 5 ἤ 8 ἤ 12, δέν περισσεύει καμιά». Πόσες κότες ἔχει ὁ ὀρνιθοτρόφος;

Κοινοί διαιρέτες καί Μ.Κ.Δ. δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν

13.7. Ὅπως μάθαμε σέ προηγούμενα μαθήματα, ἕνας φυσικός ἀριθμός β διαιρεῖται μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό $\alpha \neq 0$, ὅταν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ α, δηλαδή ὅταν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός γ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha \cdot \gamma$. Τότε λέμε ὅτι ὁ α εἶναι **διαιρέτης** (ἤ **παράγοντας**) τοῦ β. Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι ἕνας πρῶτος ἀριθμός ἔχει διαιρέτες μόνο τόν 1 καί τόν ἑαυτό του, ἐνῶ ἕνας σύνθετος ἀριθμός ἔχει καί ἄλλους διαιρέτες. Ἔτσι π.χ. ὁ ἀριθμός 18 ἔχει διαιρέτες τούς 1, 2, 3, 6, 9, 18. Οἱ διαιρέτες τοῦ 18 σχηματίζουν ἕνα *πεπερασμένο* σύνολο πού λέγεται **σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ 18** καί συμβολίζεται μέ Δ_{18}. Δηλαδή

$$\Delta_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Γενικά τό σύνολο τῶν διαιρετῶν ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$ εἶναι πεπερασμένο καί παριστάνεται μέ Δ_α.

Ἂς πάρουμε τώρα δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 24 καί 30. Βρίσκουμε τά σύνολα τῶν διαιρετῶν τους

$$\Delta_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\},$$
$$\Delta_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

καί σχηματίζουμε τήν τομή τους

$$\Delta_{24} \cap \Delta_{30} = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\Delta_{24} \cap \Delta_{30}$ εἶναι συγχρόνως διαιρέτης τοῦ 24 καί τοῦ 30 καί λέγεται **κοινός διαιρέτης** τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Τό σύνολο $\Delta_{24} \cap \Delta_{30}$ εἶναι τό **σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν** τῶν ἀριθμῶν 24 καί 30.

Ἂν ἔχουμε τρεῖς ἀριθμούς, π.χ. τούς 27, 36, 45, βρίσκουμε:

$$\Delta_{27} = \{1, 3, 9, 27\},$$
$$\Delta_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\},$$
$$\Delta_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}.$$

Τό σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τους εἶναι τό

$$\Delta_{27} \cap \Delta_{36} \cap \Delta_{45} = \{1, 3, 9\}.$$

Ἐπειδή τό σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν *εἶναι πεπερασμένο, θά ἔχει ἕνα μικρότερο στοιχεῖο (τό 1) καί ἕνα μεγαλύτερο.*

Ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς κοινούς διαιρέτες δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν λέγεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν (Μ.Κ.Δ.).

Ἔτσι ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 24 καί 30 εἶναι ὁ ἀριθμός 6 καί σημειώνεται

Μ.Κ.Δ. (24, 30) = 6.

Ὁμοίως εἶναι Μ.Κ.Δ. (36, 27, 45) = 9.

Ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 4 καί 9 εἶναι ὁ 1, γιατί

$$\Delta_4 \cap \Delta_9 = \{1, 2, 4\} \cap \{1, 3, 9\} = \{1\}.$$

Ἀριθμοί πρῶτοι μεταξύ τους

13.8. Οἱ ἀριθμοί 4 καί 9 πού ἔχουν Μ.Κ.Δ. τή μονάδα λέγονται **πρῶτοι μεταξύ τους**. Λέμε ἀκόμη ὅτι *ὁ 4 εἶναι πρῶτος πρός τόν 9* (καί ἀντιστρόφως). Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί 16, 24, 25 εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους, γιατί

Μ.Κ.Δ. (16, 24, 25) = 1.

Γενικά, **δύο ἤ περισσότεροι φυσικοί ἀριθμοί λέγονται πρῶτοι μεταξύ τους, ἄν ὁ Μ.Κ.Δ. τους εἶναι ἡ μονάδα.**

Ἰδιότητες τοῦ Μ. Κ. Δ.

13.9. i) Ἂς πάρουμε δύο φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 24 καί 42. Ἔχουμε Μ.Κ.Δ. (24, 42) = 6.

Ἂν ἀντικαταστήσουμε τόν 42 μέ τή διαφορά $42-24=18$, βρίσκουμε πάλι ὅτι Μ.Κ.Δ. $(24, 18)=6$. (Αὐτό ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: ἀφοῦ ὁ 6 διαιρεῖ τούς 24 καί 42, θά διαιρεῖ καί τή διαφορά τους, δηλ. τό 18).

Ἄς πάρουμε τώρα τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς 20, 28, 36, πού ἔχουν Μ.Κ.Δ. $(20, 28, 36)=4$.

Ἂν ἀντικαταστήσουμε τόν 28 καί τόν 36 μέ τούς $28-20=8$ καί $36-20=16$, βρίσκουμε πάλι ὅτι Μ.Κ.Δ. $(20, 8, 16)=4$.

Δηλαδή, **ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν δέν ἀλλάζει, ἄν ἀντικαταστήσουμε ἕναν (ἤ περισσότερους) μέ τή διαφορά κάποιου ἄλλου ἀπό αὐτόν.**

ii) Ἄς πάρουμε τώρα τούς ἀριθμούς 36, 60, 96.

Ἔχουμε Μ.Κ.Δ. $(36, 60, 96)=12$.

Ἂν ἀντικαταστήσουμε π.χ. τόν 96 μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ τόν 36, πού εἶναι ὁ 24, βρίσκουμε πάλι ὅτι

$$\text{Μ.Κ.Δ. } (36, 60, 24)=12,$$

δηλαδή, Μ.Κ.Δ. $(36, 60, 96)=$ Μ.Κ.Δ. $(36, 60, 24)$ (1)

Γενικά, **ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν δέν ἀλλάζει, ἄν ἀντικαταστήσουμε ἕναν (ἤ περισσότερους) ἀπ' αὐτούς μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ κάποιον ἄλλο.**

iii) Εἴδαμε (§ 13.7) ὅτι $\Delta_{24} \cap \Delta_{30}=\{1, 2, 3, 6\}$ καί

$$\Delta_{27} \cap \Delta_{36} \cap \Delta_{45}=\{1, 3, 9\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι καί στά δύο παραδείγματα οἱ κοινοί διαιρέτες διαιροῦν τό Μ.Κ.Δ.

Γενικά, **οἱ κοινοί διαιρέτες δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτες τοῦ Μ.Κ.Δ.**

Εὕρεση τοῦ Μ. Κ. Δ.

13.10. Ὁ τρόπος πού χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως γιά τήν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ. εἶναι πολύ κοπιαστικός. Θά δοῦμε τώρα μιά εὔκολη μέθοδο γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία στηρίζεται στήν ἰδιότητα (ii) πού εἴδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο.

Ἄς ζητήσουμε νά βροῦμε π.χ. τό Μ.Κ.Δ. (1422, 2358, 1296). Ἀντικαθιστοῦμε καθένα ἀπό τούς ἀριθμούς 1422 καί 2358 μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ τό 1296 (πού εἶναι ὁ μικρότερος). Στούς ἀριθμούς πού θά βροῦμε συνεχίζουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο κ.λ.π.

---

(1) Αὐτό ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ ὁ 12 διαιρεῖ τούς 96 καί 36 θά διαιρεῖ καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς τους (§ 13.2).

Ἔτσι ἔχουμε: Μ.Κ.Δ. (1422, 2358, 1296) = Μ.Κ.Δ. (126, 1062, 1296)
= Μ.Κ.Δ. (126, 54, 36)
= Μ.Κ.Δ. (18, 18, 36)
= Μ.Κ.Δ. (18, 0, 0) = 18.

Ἄρα εἶναι Μ.Κ.Δ. (1422, 2358, 1296) = 18.

Ἡ ἐργασία αὐτή ἁπλουστεύεται μέ τή διπλανή διάταξη. Γράφουμε τούς ἀριθμούς στή σειρά καί κατεβάζουμε τό μικρότερο (δηλαδή τό 1296). Κάτω ἀπό καθένα ἀπό τούς ἄλλους γράφουμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μέ τό 1296. Στή νέα σειρά συνεχίζουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο. Ὅταν καταλήξουμε σέ μιά σειρά πού ἔχει ὅλους τούς ἀριθμούς 0 ἐκτός ἀπό ἕνα, ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ.

1422	2358	1296
126	1062	1296
126	54	36
18	18	36
18	0	0

Εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π. καί Μ.Κ.Δ. μέ ἀνάλυση σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων.

13.11. Παίρνουμε τούς φυσικούς ἀριθμούς 72, 120, 180. Μετά τήν ἀνάλυσή τους σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων γράφονται:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 3 = (2^2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 3$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5 = (2^2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5$$
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 5 = (2^2 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 5.$$

Καταλαβαίνουμε τώρα ὅτι Μ.Κ.Δ. (72, 120, 180) = $2^2 \cdot 3$ (γιατί οἱ ἀριθμοί 72, 120, 180 δέν ἔχουν ἄλλο κοινό παράγοντα).

Δηλαδή, **γιά νά βροῦμε τόν Μ.Κ.Δ. ἀριθμῶν πού εἶναι ἀναλυμένοι σέ γινόμενο πρώτων παραγόντων, σχηματίζουμε ἕνα γινόμενο ἀπό τούς κοινούς μόνο παράγοντες καί καθένα μέ τό μικρότερο ἐκθέτη.**

Τό Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν πρέπει νά διαιρεῖται καί μέ τούς τρεῖς ἀριθμούς. Ἑπομένως **πρέπει νά ἔχει ὅλους τούς παράγοντες τῶν ἀριθμῶν καί καθένα μέ τό μεγαλύτερο ἐκθέτη**. Ἔτσι ἔχουμε

Ε.Κ.Π. (72, 120, 180) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν 264, 360, 696.**

Λύση: Ξέρουμε ὅτι οἱ κοινοί διαιρέτες δύο ἤ περισσότερων ἀριθμῶν εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ Μ.Κ.Δ. τους καί ἐπειδή Μ.Κ.Δ. (264, 360, 696) = 24, ἔχουμε

$$\Delta_{264} \cap \Delta_{360} \cap \Delta_{696} = \Delta_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

2. **Νά βρεθεῖ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν : 12, 18, 24. καί τῶν 12, 18.**

Λύση: Ἔχουμε Μ.Κ.Δ. (12, 18, 24) = 6, καί Μ.Κ.Δ. (12, 18) = 6. Ἄρα
Μ.Κ.Δ. (12, 18, 24) = Μ.Κ.Δ. (12, 18).

Δηλαδή, **ἄν ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς διαιρεῖται μέ ἕναν ἄλλο ἀπ' αὐτούς, μπορεῖ νά παραλειφθεῖ ἀπό τή διαδικασία τῆς εὑρέσεως τοῦ Μ.Κ.Δ. τους.**

---

3. **Ἕνα ἐργοστάσιο ἀπασχολεῖ 40 ἄνδρες, 24 γυναῖκες καί 16 παιδιά. Πόσες τό πολύ ὁμοιόμορφες ὁμάδες (ὁμάδες δηλαδή, πού νά περιέχουν τόν ἴδιο ἀριθμό ἀνδρῶν, τόν ἴδιο ἀριθμό γυναικῶν καί τόν ἴδιο ἀριθμό παιδιῶν) μπορεῖ νά σχηματίσει ὁ διευθυντής τοῦ ἐργοστασίου; Ἀπό πόσους ἄνδρες, πόσες γυναῖκες καί πόσα παιδιά θά ἀποτελεῖται κάθε ὁμάδα;**

Λύση: Οἱ 40 ἄνδρες θά χωριστοῦν ἐξίσου σέ ὁμάδες. Ἔτσι ὁ ἀριθμός τῶν ὁμάδων θά εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀριθμοῦ 40 τῶν ἀνδρῶν. Γιά τόν ἴδιο λόγο ὁ ἀριθμός τῶν ὁμάδων θά εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀριθμοῦ 24 τῶν γυναικῶν καί τοῦ ἀριθμοῦ 16 τῶν παιδιῶν. Ἑπομένως ὁ ἀριθμός τῶν ὁμάδων θά εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 24 καί 16. Ἐπειδή τώρα ὁ ἀριθμός τῶν ὁμάδων θέλουμε νά εἶναι ὁ μεγαλύτερος πού μπορεῖ νά γίνει, θά πρέπει νά εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. (40, 24, 16) πού εἶναι ὁ 8. Ἑπομένως θά σχηματισθοῦν 8 ὁμοιόμορφες ὁμάδες. Κάθε ὁμάδα θά περιέχει:

40 : 8 = 5 ἄνδρες, 24 : 8 = 3 γυναῖκες καί 16 : 8 = 2 παιδιά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Γράψτε τά σύνολα τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν: i) 12 καί 18, ii) 15, 45, iii) 90, 120, 150, iv) 17, 21, v) 12, 36, 48.

26. Δύο ἀριθμοί ἔχουν κοινό διαιρέτη τόν 24. Νά δικαιολογήσετε ὅτι θά ἔχουν κι ἄλλους κοινούς διαιρέτες.

27. Νά βρεῖτε τό Μ. Κ. Δ. τῶν ἀριθμῶν: i) 48, 60, ii) 32, 84, 96, iii) 12, 24, 50, iv) 15, 60, 90.

28. Ἔχουμε 256 τετράδια, 176 μολύβια, 48 σβηστῆρες καί 64 ξύστρες. Πόσα τό πολύ ὅμοια δέματα μποροῦμε νά φτιάξουμε. καί πόσα τετράδια, μολύβια, σβηστῆρες καί ξύστρες θά περιέχει τό καθένα;

29. Σ' ἕναν ἔρανο συγκεντρώθηκαν 55 000 δρχ., 220 κουβέρτες καί 385 φανέλλες. Σέ πόσες τό πολύ οἰκογένειες μποροῦν νά διανεμηθοῦν κατά ὁμοιόμορφο τρόπο καί πόσα θά πάρη κάθε οἰκογένεια ἀπό κάθε εἶδος;

30. Δύο ἀριθμοί ἔχουν Μ.Κ.Δ. τόν 24. Ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ 144. Ποιά μπορεῖ νά εἶναι ἡ μεγαλύτερη τιμή τοῦ ἄλλου;

31. Ἡ διαίρεση ἑνός ἀριθμοῦ x μέ τό 42 ἀφήνει ὑπόλοιπο 18. Ποιός εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. (x, 42);

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 13

1. Τά **πολλαπλάσια** ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ $α \neq 0$ σχηματίζουν τό ἀπειροσύνολο

$$Π_α = \{0, α, 2α, 3α, \ldots\}.$$

- Κάθε ἀριθμός $α \neq 0$ διαιρεῖ ὅλα τά πολλαπλάσιά του καί μόνο αὐτά.

- Ἄν ἕνας ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους, θά διαιρεῖ καί τό ἄθροισμα καί τή διαφορά τους.
- Ἄν ἕνας ἀριθμός διαιρεῖ δύο ἄλλους, θά διαιρεῖ καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς τους.

2. Ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται ἀκριβῶς:

- *μέ τό 10, ἤ τό 100, ἤ τό 1000, κ.λ.π ἄν τελειώνει τουλάχιστο σέ ἕνα ἤ δύο, ἤ τρία κ.λ.π. μηδενικά ἀντιστοίχως,*
- *μέ τό 2 ἤ μέ τό 5, ἄν τό ψηφίο τῶν μονάδων του διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 2 ἤ μέ τό 5 ἀντιστοίχως,*
- *μέ τό 3 ἤ μέ τό 9, ἄν τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 3 ἤ μέ τό 9 ἀντιστοίχως.*

Οἱ παραπάνω κανόνες λέγονται **κριτήρια διαιρετότητας**.

3. Κάθε σύνθετος ἀριθμός ἀναλύεται κατά ἕνα μόνο τρόπο σέ *γινόμενο πρώτων παραγόντων.*

4. Κάθε φυσικός ἀριθμός πού εἶναι συγχρόνως πολλαπλάσιο δύο ἄλλων φυσικῶν ἀριθμῶν λέγεται **κοινό πολλαπλάσιό** τους. Τό **σύνολο τῶν κοινῶν πολλαπλασίων** δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν:

- *εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολο,*
- *ἔχει ἕνα μικρότερο στοιχεῖο διαφορετικό ἀπό τό μηδέν πού λέγεται* **ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** *τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν (Ε.Κ.Π.).*
- *ὅλα τά στοιχεῖα του εἶναι πολλαπλάσια τοῦ Ε.Κ.Π.*

5. Ἕνας φυσικός ἀριθμός $\delta \neq 0$ λέγεται **διαιρέτης** ἤ **παράγοντας** τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ α, ὅταν τόν διαιρεῖ ἀκριβῶς. Οἱ διαιρέτες ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ σχηματίζουν ἕνα πεπερασμένο σύνολο, τό **σύνολο τῶν διαιρετῶν (παραγόντων) του.**

Κάθε φυσικός ἀριθμός $\delta \neq 0$, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ ἀκριβῶς δύο ἤ περισσότερους φυσικούς ἀριθμούς, λέγεται **κοινός διαιρέτης** ἤ **κοινός παράγοντας** τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Τό **σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν** δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν:

- *Εἶναι ἕνα πεπερασμένο σύνολο*
- *Ἔχει ἕνα μεγαλύτερο στοιχεῖο πού λέγεται* **μέγιστος κοινός διαιρέτης** *τῶν ἀριθμῶν (Μ.Κ.Δ.).*
- *Οἱ κοινοί διαιρέτες δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτες τοῦ Μ.Κ.Δ. τους.*

6. Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἤ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν δέ μεταβάλλεται:

- ἄν ἀντικαταστήσουμε ἕναν ἀπ' αὐτούς μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μ' ἕναν ἀπό τούς ἄλλους,
- ἄν παραλείψουμε ἕναν ἀπ' αὐτούς, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται μέ ἕναν ἀπό τούς ἄλλους.

7. Δύο ἤ περισσότεροι φυσικοί ἀριθμοί λέγονται **πρῶτοι μεταξύ** τους, ἄν ὁ Μ.Κ.Δ. τους εἶναι ἡ μονάδα.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

32. Δικαιολογῆστε ὅτι κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $18\alpha + 45$ $(\alpha \in \mathbb{N})$, διαιρεῖται μέ τό 9.

33. Συμπληρῶστε τά τετραγωνάκια καθενός ἀπό τούς ἀριθμούς :
3 □ 7 □, □ 81 □, 3 □ □ 4, □ □ 98
μέ κατάλληλα ψηφία, ὥστε οἱ ἀριθμοί πού θά προκύψουν νά διαιροῦνται συγχρόνως μέ τό 2 καί τό 9.

34. Κάνετε τό ἴδιο στούς ἀριθμούς 4 □ 7 □, □ 73 □, 65 □ □, ὥστε νά διαιροῦνται συγχρόνως μέ τό 3 καί τό 5.

35. Οἱ μαθητές ἑνός σχολείου μποροῦν νά παραταχθοῦν σέ τριάδες, πεντάδες καί ὀχτάδες χωρίς νά περισσεύει κανένας. Νά βρεῖτε πόσους μαθητές ἔχει τό σχολεῖο αὐτό, ἄν ξέρετε ὅτι εἶναι λιγότεροι ἀπό 400 καί περισσότεροι ἀπό 350.

36. Ἄν διαιρέσουμε τούς ἀριθμούς 143 καί 190 μέ τό φυσικό ἀριθμό α, βρίσκουμε ὑπόλοιπα 13 καί 8 ἀντιστοίχως. Μπορεῖτε νά βρεῖτε τόν ἀριθμό α;

37. Ἕνας ἀνθοπώλης διαθέτει 58 τριαντάφυλλα, 145 γαρύφαλλα καί 203 κρίνους καί θέλει νά κάνει ὁμοιόμορφες ἀνθοδέσμες. Πόσα ἄνθη ἀπό κάθε εἶδος πρέπει νά τοποθετήσει σέ κάθε ἀνθοδέσμη; Πόσες ἀνθοδέσμες θά κάνει;

38. Νά βρεῖτε τό Ε.Κ.Π. καί τό Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 18 καί 24. Τούς ἀριθμούς πού θά βρεῖτε νά τούς πολλαπλασιάσετε καί τό ἐξαγόμενο νά τό συγκρίνετε μέ τό γινόμενο $18 \cdot 24$. Τί παρατηρεῖτε; Κάνετε τό ἴδιο μέ τούς ἀριθμούς 315 καί 495.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

39. Δύο ἀριθμοί ἔχουν Ε.Κ.Π. 48 καί Μ.Κ.Δ. 8. Ὁ ἕνας εἶναι ὁ 16. Νά βρεθεῖ ὁ ἄλλος.

40. Παραπλεύρως βλέπετε ἕνα παράδειγμα γιά τήν εὕρεση τοῦ Ε.Κ.Π. δύο ἀριθμῶν. Μπορεῖτε νά συμπληρώσετε τούς ἀριθμούς πού λείπουν;

39	...	2
...	28	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	

41. Δύο φίλοι, ὁ ψηλός καί ὁ κοντός, περπατᾶνε μαζί. Ὁ ψηλός ἔχει βῆμα 80 cm καί ὁ κοντός 60 cm. Ἄν ξεκινήσουν τήν ἴδια στιγμή, μετά πόσα βήματα θά συγχρονιστοῦν πάλι, γιά πρώτη φορά; Πόσο διάστημα θά ἔχουν διανύσει;

42. Ποιός εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἄν διαιρεθεῖ μέ τούς 2, 3, 5, ἀφήνει ὑπόλοιπο 1;

43. Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ α μέ τόν 56 εἶναι 35. Νά βρεθεῖ ὁ Μ.Κ.Δ. (α, 56). Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ α;

44. Ἕνας βοσκός ρωτήθηκε πόσα πρόβατα ἔχει καί εἶπε. «Ἔχω περισσότερα ἀπό 700 καί λιγότερα ἀπό 800. Ἄν τά χωρίσω σέ ὁμάδες ἀνά 8 ἤ 12 ἤ 15, περισσεύουν 7». Πόσα πρόβατα εἶχε;

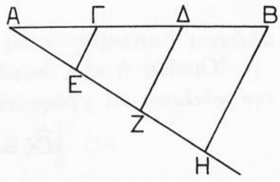
45. Ἕνα ξύλο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις 75 cm, 60 cm, 30 cm καί πρόκειται νά κοπεῖ σέ ἴσους κύβους, χωρίς ἀπώλεια ξύλου. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἀκμή κάθε κύβου, γιά νά γίνουν ὅσο τό δυνατό λιγότεροι κύβοι ἀπό τό ξύλο; Πόσοι κύβοι θά γίνουν;

46. Νά βρεθεῖ φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό τόν 400 καί μικρότερος ἀπό τόν 500 ὁ ὁποῖος ἄν διαιρεθεῖ μέ τό 12 ἤ τό 15, ἀφήνει ὑπόλοιπο 0, ἐνῶ ἄν διαιρεθεῖ μέ τό 9 ἀφήνει ὑπόλοιπο 6.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Διαίρεση εὐθύγραμμου τμήματος σέ ἴσα μέρη

14.1. Σέ προηγούμενα μαθήματα μάθαμε νά βρίσκουμε τό μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος μέ κανόνα καί διαβήτη. Ἔτσι μποροῦμε νά χωρίσουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σέ δύο ἴσα μέρη. Ἄν καθένα ἀπό αὐτά τό χωρίσουμε πάλι σέ δύο ἴσα μέρη, θά ἔχουμε χωρίσει τό ἀρχικό τμῆμα σέ $2 \cdot 2 = 2^2$ ἴσα μέρη. Ἡ ἐργασία αὐτή μπορεῖ νά συνεχισθεῖ ὅσο θέλουμε. Ἔτσι μποροῦμε νά χωρίσουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σέ $2, 2^2, 2^3, 2^4$ κ.λ.π. ἴσα μέρη. Θά δοῦμε τώρα ἕνα πιό γενικό τρόπο, γιά νά χωρίζουμε ἕνα τμῆμα σέ ὅσα θέλουμε ἴσα μέρη.



Σχ. 1

Ἄς πάρουμε λοιπόν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ (Σχ. 1) κι ἄς ζητήσουμε νά τό χωρίσουμε σέ τρία ἴσα μέρη. Ἀπό τό ἕνα ἄκρο του, π.χ. τό Α, φέρνουμε μιά ἡμιευθεία Αχ. Πάνω στήν Αx παίρνουμε διαδοχικά τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΕ = ΕΖ = ΖΗ. Φέρνουμε τό ΗΒ καί ἀπό τά σημεῖα Ε καί Ζ φέρνουμε παράλληλες πρός τήν ΗΒ, πού τέμνουν τό ΑΒ στά σημεῖα Γ καί Δ. Μέ τό διαβήτη διαπιστώνουμε ὅτι ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

Μέ ὅμοιο τρόπο ἐργαζόμαστε γιά νά χωρίσουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα σέ ὅσα θέλουμε ἴσα μέρη.

Ἐπειδή εἶναι ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ, θά εἶναι ΑΒ = 3 · ΑΓ.

Δηλαδή, ἄν τό τμῆμα ΑΓ πολλαπλασιασθεῖ μέ τόν ἀριθμό 3, δίνει γινόμενο τό ΑΒ. Τότε λέμε ὅτι τό ΑΓ εἶναι τό **πηλίκο** τῆς διαιρέσεως τοῦ ΑΒ μέ τόν 3 καί γράφουμε

$$ΑΒ : 3 = ΑΓ.$$

Γιά τόν ἴδιο λόγο λέμε ὅτι: ΑΒ : 3 = ΓΔ καί ΑΒ : 3 = ΔΒ.

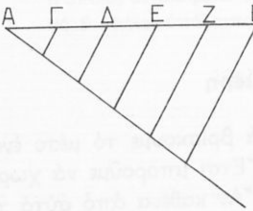
Γενικά, ἄν γιά δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καί β ἔχουμε $\alpha = \nu \cdot \beta$ (ὅπου $\nu \in \mathbb{N}^*$), θά εἶναι $\alpha : \nu = \beta$.

Συμβολικά:

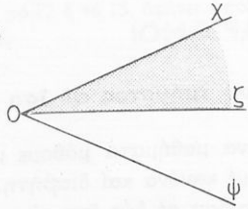
$$\boxed{\alpha : \nu = \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha = \nu \cdot \beta}$$

Ἡ ἔννοια τοῦ κλάσματος

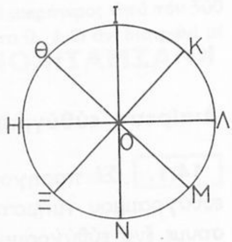
14.2. Στά παρακάτω σχήματα ἔχουμε χωρίσει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σέ πέντε ἴσα μέρη (Σχ. 2), μιά γωνία $x\widehat{O}\psi$ σέ δυό ἴσα μέρη (Σχ. 3) καί ἕναν κύκλο σέ ὀκτώ ἴσα μέρη (Σχ. 4).



Σχ. 2



Σχ. 3



Σχ. 4

Τό ΑΓ ὀνομάζεται *«ἕνα πέμπτο τοῦ ΑΒ»* καί γράφεται

$$ΑΓ = \frac{1}{5}\,ΑΒ.$$

Ὁμοίως ἡ $x\widehat{O}\zeta$ ὀνομάζεται *«ἕνα δεύτερο τῆς $x\widehat{O}\psi$»*, τό $\overset{\frown}{ΗΘ}$ *«ἕνα ὄγδοο του κύκλου»* καί γράφουμε ἀντιστοίχως

$$x\widehat{O}\zeta = \frac{1}{2}\,x\widehat{O}\psi, \quad \overset{\frown}{ΗΘ} = \frac{1}{8}\ (\text{κύκλου}).$$

Τά σύμβολα $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ (τά ὁποῖα δηλώνουν τί μέρος τοῦ ὅλου εἶναι καθένα ἀπό τά ἴσα μέρη, στά ὁποῖα χωρίσαμε ἕνα μέγεθος) τά λέμε **κλασματικές μονάδες**.

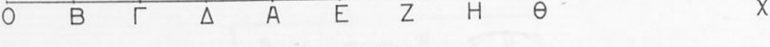
Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ ὀνομάζεται *«δύο πέμπτα τοῦ ΑΒ»* καί γράφεται

$$ΑΔ = \frac{2}{5}\,ΑΒ.$$

Ἐπίσης $\overset{\frown}{ΗΚ} = \frac{3}{8}$ (κύκλου) *«τρία ὄγδοα τοῦ κύκλου»* κ.λ.π.

Τά σύμβολα $\frac{2}{5}$ καί $\frac{3}{8}$ τά λέμε **κλασματικούς ἀριθμούς** ἤ **κλάσματα**.

Ἄν πάρουμε τήν ἡμιευθεία διατάξεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί χωρίσουμε σέ τέσσερα ἴσα μέρη κάθε τμῆμα πού ὁρίζεται ἀπό δύο διαδοχικούς φυσικούς ἀριθμούς (Σχ. 5), θά ἔχουμε:



Σχ. 5

$$ΟΔ = \frac{3}{4} ΟΑ, \quad ΟΕ = \frac{5}{4} ΟΑ, \quad ΟΗ = \frac{7}{8} ΟΘ, \quad κ.λ.π.$$

Τά σύμβολα $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}$ εἶναι ἐπίσης κλασματικοί ἀριθμοί.

Γενικά λοιπόν

> **Κλασματικός ἀριθμός** ἤ **κλάσμα** λέγεται κάθε σύμβολο τῆς μορφῆς $\frac{α}{β}$, ὅπου α καί β εἶναι φυσικοί ἀριθμοί καί $β \neq 0$.

Τό κλάσμα $\frac{α}{β}$ διαβάζεται *«α πρὸς β»* ἤ *«α διὰ β»*. Ὁ α λέγεται **ἀριθμητής** καί ὁ β **παρονομαστής** τοῦ κλάσματος. Ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής λέγονται **ὅροι** τοῦ κλάσματος.

Τό κλάσμα ὡς γινόμενο φυσικοῦ ἀριθμοῦ μέ κλασματική μονάδα

14.3. Ἀπό τό σχῆμα 5 καταλαβαίνουμε ὅτι:

$$ΟΔ = \frac{3}{4} ΟΑ \text{ καί } ΟΔ = 3 \cdot ΟΒ = 3 \cdot \frac{1}{4} ΟΑ.$$

Συνεπῶς : $\frac{3}{4} ΟΑ = 3 \cdot \frac{1}{4} ΟΑ.$

Αὐτό σημαίνει ὅτι $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}.$

Ὁμοίως εἶναι $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$ καί γενικά

$$\boxed{\frac{α}{β} = α \cdot \frac{1}{β}}$$

Δηλαδή, **ὁ κλασματικός ἀριθμός $\frac{α}{β}$ προκύπτει ἀπό τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{β}$, ἄν τήν πάρουμε α φορές.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **α) Τί μέρος τοῦ δίδραχμου εἶναι ἡ δραχμή;**
   β) Τί μέρος τοῦ τάλληρου εἶναι τό δίδραχμο;
   γ) Τί μέρος τοῦ δίδραχμου εἶναι τό τάλληρο;

Λύση: α) 1 δίδραχμο = 2 δραχμές, ἄρα 1 δραχμή = $\frac{1}{2}$ τοῦ δίδραχμου.

β) Μία δραχμή = $\frac{1}{5}$ τοῦ τάλληρου, 1 δίδραχμο = 2 δραχ. = $\frac{2}{5}$ τοῦ τάλληρου,

γ) 1 τάλληρο = 5 δραχμές = $\frac{5}{2}$ τοῦ δίδραχμου.

---

2. **α) Νά βρεῖτε τά $\frac{3}{5}$ τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως πού ἔχει 30 μαθητές.**

β) Νά βρεῖτε πόσα γραμμάρια εἶναι τά $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ.

Λύση: α) Χωρίζουμε τούς 30 μαθητές σέ 5 ἰσοπληθεῖς ὁμάδες. Ἔτσι τό $\frac{1}{5}$ τῶν 30 μαθητῶν εἶναι 6 μαθητές (30:5) καί τά $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$ εἶναι $3 \cdot 6 = 18$ μαθητές.

β) Τό $\frac{1}{10}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι 100 γραμμάρια (1000 : 10), τά $\frac{7}{10}$ θά εἶναι 700 γραμμάρια.

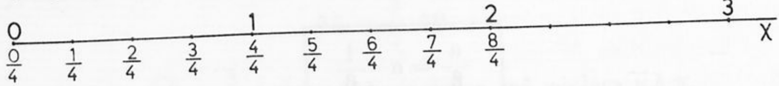
Κλασματική γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

14.4. Στό σχῆμα 5 εἴδαμε ὅτι:

$$OB = \frac{1}{4}OA, \quad O\Gamma = \frac{2}{4}OA, \quad O\Delta = \frac{3}{4}OA, \text{ κ.λ.π.}$$

Ἐπειδή τό τμῆμα ΟΑ εἶναι ἡ μονάδα μετρήσεως, οἱ ἀριθμοί $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$, κ.λ.π. εἶναι ἀντιστοίχως τά μέτρα τῶν τμημάτων ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, κ.λ.π.

Συνεπῶς στά σημεῖα Β, Γ, Δ, κ.λ.π. τῆς ἡμιευθείας διατάξεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (Σχ. 5) μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε τούς ἀριθμούς $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ κ.λ.π. (Σχ. 6).



Σχ. 6

Στήν ἀρχή Ο ἀντιστοιχίζουμε τό $\frac{0}{4}$ (γιατί $\frac{0}{4}$ΟΑ εἶναι τό μηδενικό εὐθύγραμμο τμῆμα).

Ὅταν δύο ἀριθμοί ἀντιστοιχίζονται στό ἴδιο σημεῖο, θά εἶναι ἴσοι, γιατί παριστάνουν τό μέτρο τοῦ ἴδιου εὐθύγραμμου τμήματος (μέ μονάδα τό ΟΑ).

Ἔτσι λοιπόν ἀπό τό σχῆμα 6 ἔχουμε:

i) $\frac{4}{4} = 1$. Ὁμοίως εἶναι $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{2}{2} = 1$ καί γενικά

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha} = 1}$$

Δηλαδή, **ἕνα κλάσμα πού οἱ ὅροι του εἶναι ἴσοι μεταξύ τους, εἶναι ἴσο μέ 1.**

ii) $2 = \frac{8}{4}$, $3 = \frac{12}{4}$, $4 = \frac{16}{4}$ κ.λ.π.

δηλαδή, $2 = \frac{2 \cdot 4}{4}$, $3 = \frac{3 \cdot 4}{4}$, $4 = \frac{4 \cdot 4}{4}$ καί γενικά

$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta}}$$

Ὥστε, **κάθε φυσικός ἀριθμός α μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς κλάσμα μέ δεδομένο παρονομαστή β καί ἀριθμητή τό α · β.**

Ἔτσι π.χ. ἔχουμε $5 = \frac{5 \cdot 3}{3} = \frac{15}{3}$, $8 = \frac{8 \cdot 2}{2} = \frac{16}{2}$ κ.λ.π.

Ἀπό τόν προηγούμενο κανόνα καταλαβαίνουμε ὅτι εἶναι:

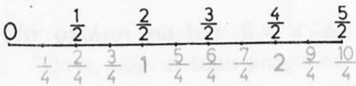
$2 = \frac{2 \cdot 1}{1} = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3 \cdot 1}{1} = \frac{3}{1}$, $8 = \frac{8 \cdot 1}{1} = \frac{8}{1}$ κ.λ.π. καί γενικά

$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha}{1}}$$

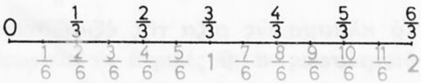
Δηλαδή, **κάθε φυσικός ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς κλάσμα μέ ἀριθμητή τόν ἀριθμό αὐτό καί παρονομαστή τή μονάδα.**

Ἴσα κλάσματα - ἁπλοποίηση κλάσματος

14.5. Ἀπό τά σχήματα 7 καί 8 συμπεραίνουμε ὅτι εἶναι:



Σχ. 7



Σχ.8

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4}, \quad \frac{5}{2} = \frac{10}{4}, \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}, \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \quad \frac{5}{3} = \frac{10}{6}.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι σέ ὅλες τίς περιπτώσεις ἔχουμε

$1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2$, $5 \cdot 4 = 10 \cdot 2$, $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$,
$2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$, $5 \cdot 6 = 10 \cdot 3$.

Γενικά, δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ἴσα,** ὅταν $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ὅταν} \quad \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma}$$

Στά παραπάνω ἴσα κλάσματα παρατηροῦμε ὅτι:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ἤ $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$, $\quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ ἤ $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2}$, $\quad \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$ ἤ $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}$.

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ἤ $\frac{2}{6} = \frac{2 : 2}{6 : 2}$, $\quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ἤ $\frac{6}{4} = \frac{6 : 2}{4 : 2}$, $\quad \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ ἤ $\frac{10}{6} = \frac{10:2}{6:2}$.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι:

> Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε (ὅταν διαιροῦνται) καί τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό, διαφορετικό ἀπό τό μηδέν, προκύπτει ἴσο κλάσμα.

Ἔτσι π.χ. $\frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 5}{18 \cdot 5} = \frac{60}{90}$ καί $\frac{12}{18} = \frac{12 : 2}{18 : 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$.

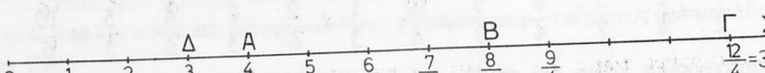
Ἄν διαιρέσουμε καί τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό, βρίσκουμε ἕνα ἴσο κλάσμα μέ μικρότερους ὅρους. Τήν ἐργασία αὐτή τή λέμε **ἁπλοποίηση** τοῦ κλάσματος.

Ἄν ὁ ἀριθμός μέ τόν ὁποῖο διαιροῦμε καί τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τους, βρίσκουμε ἕνα ἴσο κλάσμα πού οἱ ὅροι του εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους. Τό κλάσμα αὐτό τό λέμε **ἀνάγωγο**.

Π.χ. ἐπειδή Μ.Κ.Δ. (12, 18) = 6, ἔχουμε $\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$.

Τό κλάσμα ὡς ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha \cdot x = \beta$ καί ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$

14.6. Ἀπό τό σχῆμα 9 βλέπουμε ὅτι $ΟΓ = 4 \cdot ΟΔ$ ἤ $ΟΓ = 4 \cdot \frac{3}{4}$ ΟΑ



Σχ. 9

Εἶναι ὅμως καί $ΟΓ = 3 \cdot ΟΑ$.

Ἔτσι ἔχουμε $\qquad 4 \cdot \frac{3}{4} ΟΑ = 3 \cdot ΟΑ.$

Ἑπομένως $\qquad 4 \cdot \frac{3}{4} = 3.$

Μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι εἶναι

$$8 \cdot \frac{2}{8} = 2, \quad 5 \cdot \frac{4}{5} = 4 \quad \text{καί γενικά}$$

$$\boxed{\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \beta} \qquad (1)$$

Δηλαδή, **τό γινόμενο ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἕνα κλάσμα, πού τόν ἔχει ὡς παρονομαστή, εἶναι ἴσο μέ τόν ἀριθμητή.**

Ἀπό τήν ἰσότητα (1) συμπεραίνουμε ὅτι:

i) Τό κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha \cdot x = \beta$ (γιατί ἄν βάλουμε τό $\frac{\beta}{\alpha}$ στή θέση τοῦ x, ἡ ἐξίσωση ἀληθεύει).

Μποροῦμε λοιπόν νά γράφουμε

$$\boxed{\alpha \cdot x = \beta \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}}$$

ii) Τό κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$, πού ὅταν πολλαπλασιασθεῖ μέ τό φυσικό ἀριθμό α, δίνει γινόμενο τό φυσικό ἀριθμό β, μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τό ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως $\beta : \alpha$.

Δηλαδή

$$\boxed{\beta : \alpha = \frac{\beta}{\alpha}}$$

Ὥστε, **κάθε κλάσμα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ του μέ τόν παρονομαστή.**

Ἀπό τά παραπάνω καταλαβαίνουμε ὅτι:

- Ἡ ἐξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ $(\alpha \neq 0)$ ἔχει πάντα λύση, τή $x = \frac{\beta}{\alpha}$.
- Ἡ διαίρεση $\beta : \alpha$ $(\alpha \neq 0)$ εἶναι πάντα δυνατή καί δίνει πηλίκο τό κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα $\frac{120}{210}$.**

Λύση: $\frac{120}{210} = \frac{120:10}{210:10} = \frac{12}{21} = \frac{12:3}{21:3} = \frac{4}{7}$.

Τό $\frac{4}{7}$ δέν ἁπλοποιεῖται, δηλαδή εἶναι ἀνάγωγο.

Γιά νά βροῦμε μέ μιά ἁπλοποίηση τό ἀνάγωγο κλάσμα, μέ τό ὁποῖο εἶναι ἴσο ἕνα κλάσμα, πρέπει νά ἁπλοποιήσουμε μέ τό Μ.Κ.Δ. τῶν ὅρων του. Ἐπειδή ἐδῶ Μ.Κ.Δ. (120, 210) = 30, ἔχουμε $\frac{120}{210} = \frac{120:30}{210:30} = \frac{4}{7}$.

2. **Νά ὁρισθεῖ ὁ x, ὥστε $\frac{45}{63} = \frac{x}{7}$.**

Λύση: 1ος τρόπος: Μ.Κ.Δ. (45,63) = 9. Ἄρα $\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$, ὁπότε $\frac{5}{7} = \frac{x}{7}$, ἑπομένως $x = 5$.

2ος τρόπος: Ξέρουμε ὅτι ἄν $\frac{45}{63} = \frac{x}{7}$, τότε εἶναι $63 \cdot x = 7 \cdot 45$, ὁπότε ἔχουμε

$$63 \cdot x = 315 \Leftrightarrow x = 315 : 63 \Leftrightarrow x = 5.$$

3. **Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**

i) $3x + 5 = 32$, ii) $5x - 7 = 16$, iii) $182 - 12x = 60$.

Λύση: i) $3x+5 = 32 \Leftrightarrow 3x = 32-5 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow x = \frac{27}{3} \Leftrightarrow x = 9$.

ii) $5x - 7 = 16 \Leftrightarrow 5x = 16 + 7 \Leftrightarrow 5x = 23 \Leftrightarrow x = \frac{23}{5}$.

iii) $182 - 12x = 60 \Leftrightarrow 182-60 = 12x \Leftrightarrow 122 = 12x \Leftrightarrow x = \frac{122}{12} = \frac{61}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1*. Νά βρεῖτε: α) Πόσα λεπτά εἶναι τά $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. β) Πόσα gr* εἶναι τό $\frac{1}{20}$ τοῦ kg*. γ) Πόσα mm^2 εἶναι τό $\frac{1}{5}$ cm^2. δ) Πόσες δραχμές εἶναι τά $\frac{3}{20}$ τοῦ ἑκατοστάρικου.

2. Νά βρεῖτε: α) Πόσα cm^2 εἶναι τό $\frac{1}{5}$ dm^2. β) Πόσα cm^2 εἶναι τά $\frac{3}{5}$ dm^2. γ) Πόσα πρῶτα λεπτά εἶναι τά $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας.

3. Ἕνα σχολεῖο ἔχει 260 μαθητές. Νά βρεῖτε πόσοι εἶναι τά $\frac{3}{5}$ τῶν μαθητῶν.

4. Νά σχεδιάσετε ένα τμήμα AB μέ μήκος $\frac{3}{5}$ dm καί ένα άλλο ΓΔ μέ μήκος $\frac{3}{50}$ m. καί νά τά συγκρίνετε.

5. Ένα εὐθύγραμμο τμῆμα AB ἔχει μῆκος 1 dm 2 cm. Νά ὁρίσετε στήν εὐθεία AB: α) σημεῖο Γ, ὥστε $ΑΓ = \frac{1}{4}$ AB, β) σημεῖο Δ, ὥστε $ΑΔ = \frac{2}{3}$ AB, γ) σημεῖο Ε, ὥστε $ΑΕ = \frac{5}{3}$ AB.

6. Νά ὁρισθεῖ ὁ x, ὥστε: α) $\frac{4}{x} = \frac{12}{36}$, β) $\frac{15}{x} = \frac{45}{60}$, γ) $\frac{5x}{21} = \frac{10}{42}$, δ) $\frac{3x}{40} = \frac{135}{360}$.

7. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:
α) $\frac{10}{15}$, β) $\frac{34}{14}$, γ) $\frac{32}{100}$, δ) $\frac{75}{225}$, ε) $\frac{222}{333}$, ς) $\frac{144}{42}$, ζ) $\frac{75}{120}$.

8. Ὁμοίως τά: α) $\frac{18}{12 \cdot 21}$, β) $\frac{15 \cdot 7}{35}$, γ) $\frac{12 \cdot 8}{15 \cdot 32}$, δ) $\frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{9 \cdot 12 \cdot 15}$, ε) $\frac{9 \cdot \alpha}{18 \cdot \alpha}$ ὅπου $\alpha \in \{2,3,4,\ldots\}$.

9. Νά βρεῖτε κλάσμα ἴσο μέ $\frac{1}{3}$ καί μέ ἀριθμητή α) 7, β) 10, γ) 18, δ) 5.

10. Νά γράψετε ὡς κλάσμα μέ παρονομαστή τό 45 τούς φυσικούς ἀριθμούς α) 8, β) 12, γ) 35, δ) 67.

11. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α) $13x = 11$, β) $5x = 1$, γ) $17x = 15$, δ) $7x = 12$, ε) $21x = 0$.

12. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:
α) $3(x-2) = 5$, β) $2x + 4 = 7$, γ) $5x - 6 = 4$, δ) $2(x + 4) = 8$.

Ὁμώνυμα καί ἑτερώνυμα κλάσματα

14.7. Δύο ἤ περισσότερα κλάσματα λέγονται **ὁμώνυμα**, ὅταν ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή, ἐνῶ, ὅταν δέν ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή, λέγονται **ἑτερώνυμα**.

Π.χ. τά κλάσματα $\frac{3}{8}$ καί $\frac{5}{8}$ εἶναι ὁμώνυμα, ἐνῶ τά $\frac{3}{8}$ καί $\frac{5}{6}$ εἶναι ἑτερώνυμα.

Ἄν πάρουμε τά κλάσματα $\frac{3}{8}$ καί $\frac{5}{6}$ καί πολλαπλασιάσουμε τούς ὅρους καθενός μέ 2, 3, 4, . . . βρίσκουμε, ὅπως ξέρουμε, ἴσα κλάσματα. Ἔτσι ἔχουμε

$$\frac{3}{8}=\frac{6}{16}=\frac{9}{24}=\frac{12}{32}=\frac{15}{40}=\frac{18}{48}=\ldots$$

$$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=\frac{30}{36}=\frac{35}{42}=\frac{40}{48}=\ldots$$

Βλέπουμε λοιπόν, ὅτι τά ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{8}$ καί $\frac{5}{6}$ μποροῦμε νά τά ἀντικαταστήσουμε μέ τά ἴσα τους ὁμώνυμα

$$\frac{9}{24}, \ \frac{20}{24} \quad \text{ἤ μέ τά} \quad \frac{18}{48}, \ \frac{40}{48} \quad \text{κ.λ.π.}$$

Εἶναι φυσικό νά προτιμήσουμε τά $\frac{9}{24}$ καί $\frac{20}{24}$, γιατί ἔχουν μικρότερους ὅρους. Βλέπουμε ἀκόμη ὅτι ὁ κοινός παρονομαστής τους (ὁ 24) εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 8 καί 6.

Ἑπομένως, **γιά νά τρέψουμε ἑτερώνυμα κλάσματα σέ ὁμώνυμα, βρίσκουμε τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους καί ἔπειτα πολλαπλασιάζουμε καί τούς δύο ὅρους κάθε κλάσματος μέ τό πηλίκο τοῦ Ε.Κ.Π. μέ τόν παρονομαστή τοῦ κλάσματος αὐτοῦ.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά τραποῦν σέ ὁμώνυμα τά κλάσματα $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{7}{15}$.**

Λύση: Ε.Κ.Π. (12, 8, 15) = 120.

120 : 12 = 10, 120 : 8 = 15, 120 : 15 = 8, ὁπότε ἔχουμε:

$$\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 10}{22\cdot 10}=\frac{12}{120}, \quad \frac{3}{8}=\frac{3\cdot 15}{8\cdot 15}=\frac{45}{120}, \quad \frac{7}{15}=\frac{7\cdot 8}{15\cdot 8}=\frac{56}{120}.$$

2. **Νά τραποῦν σέ ὁμώνυμα τά κλάσματα $\frac{7}{8}, \frac{22}{16}$.**

Λύση: Ἔχουμε $\frac{22}{16}=\frac{11}{8}$, ὁπότε βλέπουμε πώς τά κλάσματα $\frac{7}{8}$ καί $\frac{11}{8}$ εἶναι ὁμώνυμα.

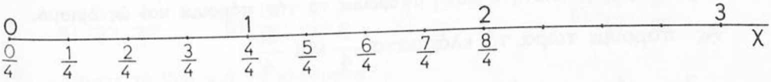
Γιά τό λόγο αὐτό συμφέρει, πρίν προχωρήσουμε στήν τροπή ἑτερώνυμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα, νά κάνουμε τίς ἀπαραίτητες ἁπλοποιήσεις.

3. **Νά τραποῦν σέ ὁμώνυμα τά κλάσματα $\frac{10}{15}, \frac{10}{12}, \frac{11}{18}$.**

Λύση: Ἔχουμε $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ καί Ε.Κ.Π. (3, 6, 18) = 18. Ἔτσι τά ἀντίστοιχως ἴσα τους ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι τά $\frac{12}{18}, \frac{15}{18}, \frac{11}{18}$.

Ἄνισα κλάσματα

14.8. Παίρνουμε πάλι τήν ἡμιευθεία διατάξεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί χωρίζουμε καθένα ἀπό τά τμήματα πού ὁρίζονται ἀπό τίς «εἰκόνες» δύο διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν σέ ἴσα μέρη, π.χ. σέ 4 (Σχ. 10).



Σχ. 10

Ὅταν κάναμε τήν ἀπεικόνιση τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν σέ μιά ἡμιευθεία (§ 5.3), παρατηρήσαμε ὅτι ἀπό δύο φυσικούς ἀριθμούς ὁ μικρότερος βρίσκεται «ἀριστερά».

Ὁμοίως, ἄν πάρουμε δύο κλάσματα, π.χ. τά $\frac{3}{4}$ καί $\frac{5}{4}$, τό $\frac{3}{4}$ πού βρίσκεται ἀριστερά ἀπό τό $\frac{5}{4}$ (Σχ. 10), λέμε ὅτι εἶναι μικρότερο ἀπό τό $\frac{5}{4}$ ἤ ὅτι τό $\frac{5}{4}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό $\frac{3}{4}$ καί γράφουμε $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$ ἤ $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, **ἀπό δύο ὁμώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο εἶναι αὐτό πού ἔχει μεγαλύτερο ἀριθμητή.** Δηλαδή

$$\boxed{\text{ἄν } \alpha > \beta, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}}$$

Γιά νά συγκρίνουμε δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα καί συγκρίνουμε τά ἴσα τους ὁμώνυμα κλάσματα.

Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τά κλάσματα $\frac{3}{7}$ καί $\frac{5}{12}$.

Ἔχουμε Ε.Κ.Π. (7, 12) = 84.

Ἄρα $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 12}{7 \cdot 12} = \frac{36}{84}$ καί $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{35}{84}$.

Ἐπειδή εἶναι $\frac{36}{84} > \frac{35}{84}$, θά εἶναι καί $\frac{3}{7} > \frac{5}{12}$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι $3 \cdot 12 > 5 \cdot 7$.

Ἄς πάρουμε ἀκόμη δύο ἄλλα ἄνισα κλάσματα, π.χ. τά $\frac{3}{8}$ καί $\frac{5}{12}$.

Ἔχουμε $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ καί $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$, δηλαδή $\frac{5}{12} > \frac{3}{8}$.

Παρατηροῦμε πάλι ὅτι $5 \cdot 8 > 3 \cdot 12$.

Γενικά:

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ὅταν} \quad \alpha \cdot \delta > \beta \cdot \gamma$$

Σημείωση: Τήν ἰδιότητα αὐτή μποροῦμε νά τήν πάρουμε καί ὡς ὁρισμό.

Ἄς πάρουμε τώρα τά κλάσματα $\frac{3}{4}$ καί $\frac{5}{4}$.

Εἶναι $\frac{3}{4} < \frac{4}{4}$ καί $\frac{5}{4} > \frac{4}{4}$, δηλαδή εἶναι:

$$\frac{3}{4} < 1 \quad \text{καί} \quad \frac{5}{4} > 1.$$

Γενικά:

$$\text{ἄν } \alpha < \beta, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} < 1, \text{ ἐνῶ ἄν } \alpha > \beta, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} > 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά βρεῖτε ποιό ἀπό τά κλάσματα $\frac{3}{5}$ καί $\frac{3}{7}$ εἶναι μεγαλύτερο:

Λύση: Ἐπειδή εἶναι $3 \cdot 7 = 21$ καί $3 \cdot 5 = 15$, δηλαδή $3 \cdot 7 > 3 \cdot 5$, θά εἶναι $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$.

Γενικά, ὅταν δύο κλάσματα ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμητή, μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μικρότερο παρονομαστή.

2. Νά βρεῖτε ποιό ἀπό τά παρακάτω κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο καί ποιό μικρότερο: $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{16}$.

Λύση: Ε.Κ.Π. $(8, 12, 16) = 48$.

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{30}{48}, \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{28}{48}, \quad \frac{11}{16} = \frac{11 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{33}{48}.$$

Ἔχουμε λοιπόν $\frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{11}{16}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13. Νά γίνουν ὁμώνυμα τά κλάσματα: α) $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}$, β) $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, γ) $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}$, δ) $\frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \frac{1}{3}$, ε) $\frac{7}{12}, \frac{15}{30}, \frac{11}{18}$.

14. Ὁμοίως τά κλάσματα: α) $\frac{14}{25}, \frac{22}{40}, \frac{17}{5}$ β) $\frac{54}{60}, \frac{9}{12}, \frac{15}{25}$ γ) $\frac{5}{8}, \frac{14}{16}, \frac{6}{24}$, δ) $\frac{5}{72}, \frac{7}{96}, \frac{9}{120}$, ε) $\frac{35}{60}, \frac{21}{36}, \frac{20}{48}$.

15. Συγκρίνετε τά κλάσματα καί τοποθετῆστε ἀνάμεσά τους τό κατάλληλο σύμβολο ($>$, $=$, $<$).

α) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, β) $\frac{10}{14}, \frac{5}{7}$, γ) $\frac{13}{20}, \frac{12}{18}$, δ) $\frac{16}{17}, \frac{26}{28}$.

16. Κάμετε τό ἴδιο γιά τά κλάσματα:

α) $\frac{13}{12}, \frac{26}{24}$, β) $\frac{4}{9}, \frac{4}{8}$, γ) $\frac{25}{27}, \frac{24}{27}$, δ) $\frac{12}{17}, \frac{31}{54}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πρόσθεση κλασμάτων

14.9. Στήν § 7.12 εἴδαμε ὅτι, *γιά νά προσθέσουμε δύο ὁμώνυμα κλάσματα, σχηματίζουμε ἕνα κλάσμα μέ τόν ἴδιο παρονομαστή καί μέ ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τους.*

Ἔτσι ἔχουμε

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}}$$

Ὅταν ἔχουμε νά προσθέσουμε δύο ἑτερώνυμα κλάσματα τά τρέπουμε σέ ὁμώνυμα καί ἔπειτα προσθέτουμε τά ὁμώνυμα κλάσματα ὅπως ξέρουμε.

$$\text{Π.χ. } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}.$$

Γενικά :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\gamma \cdot \delta} + \frac{\beta \cdot \gamma}{\gamma \cdot \delta} = \frac{\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma}{\gamma \cdot \delta}}$$

Γιά νά προσθέσουμε τρία ἤ περισσότερα κλάσματα, προσθέτουμε τά δύο πρῶτα, στό ἄθροισμά τους προσθέτουμε τό τρίτο κ.λ.π.

$$\text{Π.χ. } \overbrace{\frac{2}{3}}^{4} + \overbrace{\frac{3}{4}}^{3} + \overbrace{\frac{5}{6}}^{2} = \underbrace{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}} + \frac{10}{12} = \frac{17}{12} + \frac{9}{12} = \frac{26}{12}.$$

Ε.Κ.Π. (3, 4, 6) = 12.

Γενικά :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\zeta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}\right) + \frac{\varepsilon}{\zeta}}$$

Τό ἄθροισμα ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ καί ἑνός κλάσματος, π.χ. τό $3+\frac{2}{5}$, γράφεται πιό ἁπλά $3\frac{2}{5}$ καί λέγεται **μικτός ἀριθμός**.

Ἄν γράψουμε τό 3 ὡς κλάσμα μέ παρονομαστή τό 5, θά ἔχουμε

$$3=\frac{3\cdot 5}{5}=\frac{15}{5} \quad \text{καί} \quad 3\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}.$$

Λέμε τότε ὅτι *τρέψαμε τό μικτό σέ κλάσμα.*

Ἄν γράψουμε τώρα $\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}$, λέμε ὅτι *κάναμε ἐξαγωγή τῶν ἀκέραιων μονάδων τοῦ κλάσματος.*

Γιά τήν ἐξαγωγή τῶν ἀκέραιων μονάδων ἑνός κλάσματος διαιροῦμε τόν ἀριθμητή του μέ τόν παρονομαστή. Τό πηλίκο εἶναι οἱ ἀκέραιες μονάδες (ὁ φυσικός ἀριθμός) καί τό ὑπόλοιπο, ἄν ὑπάρχει, δείχνει τό πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων.

$$\begin{array}{r|l} 341 & 7 \\ \hline 61 & 48 \\ 5 & \end{array}$$

Π.χ. $$\frac{341}{7}=48\frac{5}{7}.$$

Ὅπως εἴδαμε, ἡ πρόσθεση κλασμάτων ἀνάγεται σέ πρόσθεση φυσικῶν ἀριθμῶν, ἑπομένως καί στήν πρόσθεση τῶν κλασμάτων θά ἰσχύουν οἱ γνωστές ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι θά ἔχουμε:

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha}{\beta}$	*ἀντιμεταθετική*
$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)+\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$	*προσεταιριστική*
$\frac{\alpha}{\beta}+0=\frac{\alpha}{\beta}$	*οὐδέτερο στοιχεῖο*

Ἀφαίρεση κλασμάτων

14.10. Ἡ ἀφαίρεση στά κλάσματα ὁρίζεται ὅπως καί στούς φυσικούς ἀριθμούς. Δηλαδή, διαφορά δύο κλασμάτων εἶναι ἕνα τρίτο κλάσμα, πού ἄν τό προσθέσουμε στόν ἀφαιρετέο, βρίσκουμε ἄθροισμα τό μειωτέο.

Π. χ. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}$, γιατί $\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$.

Γενικά :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}}$$

Γιά νά ἀφαιρέσουμε ἑτερώνυμα κλάσματα, τά τρέπουμε πρῶτα σέ ὁμώνυμα.

Π.χ. $\frac{\overbrace{5}^{2}}{6} - \frac{\overbrace{1}^{3}}{4} = \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{10-3}{12} = \frac{7}{12}$ (Ε.Κ.Π. (6, 4) = 12).

Εἶναι φανερό ὅτι καί στήν ἀφαίρεση τῶν κλασμάτων θά ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα $3\frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$.**

Λύση: Ε.Κ.Π. (4, 6, 3) = 12.

$$3\frac{\overbrace{1}^{3}}{4} + \frac{\overbrace{5}^{2}}{6} + \frac{\overbrace{2}^{4}}{3} = 3\frac{3}{12} + \frac{10}{12} + \frac{8}{12} = 3\frac{21}{12} = 4\frac{9}{12} \quad \text{ἤ}$$

$$3\frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{\overbrace{13}^{3}}{12} + \frac{\overbrace{5}^{2}}{6} + \frac{\overbrace{2}^{4}}{3} = \frac{39}{12} + \frac{10}{12} + \frac{8}{12} = \frac{57}{12} = 4\frac{9}{12}.$$

2. **Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά $9\frac{2}{5} - 4\frac{3}{4}$.**

Λύση: Ε.Κ.Π. (5, 4) = 20.

1ος τρόπος

$$9\frac{2}{5} - 4\frac{3}{4} = \frac{\overbrace{47}^{4}}{5} - \frac{\overbrace{19}^{5}}{4} = \frac{188}{20} - \frac{95}{20} = \frac{93}{20} = 4\frac{13}{20}.$$

2ος τρόπος

Ἐπειδή $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$, παίρνουμε ἀπό τόν 9 μιά μονάδα καί τήν κάνουμε $\frac{5}{5}$. Ἔτσι

ἔχουμε $9\frac{2}{5} - 4\frac{3}{4} = 8\frac{\overbrace{7}^{4}}{5} - 4\frac{\overbrace{3}^{5}}{4} = 8\frac{28}{20} - 4\frac{15}{20} =$

$$= (8-4) + \left(\frac{28}{20} - \frac{15}{20}\right) = 4 + \frac{13}{20} = 4\frac{13}{20}.$$

3. **Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $A = 4\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} + 1\frac{4}{6}$.**

Λύση: Ε.Κ.Π. (6, 3, 6) = 6

$$A = 4\frac{\overbrace{1}^{1}}{6} - 2\frac{\overbrace{1}^{2}}{3} + 1\frac{\overbrace{4}^{1}}{6} = \underbrace{4\frac{1}{6} - 2\frac{2}{6}}\,1 + \frac{4}{6} = \underbrace{3\frac{7}{6} - 2\frac{2}{6}} + 1\frac{4}{6}$$

$$= 1\frac{5}{6} + 1\frac{4}{6} = 2\frac{9}{6} = 3\frac{3}{6} = 3\frac{1}{2}.$$

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Νά ὑπολογίσετε τά ἀθροίσματα: α) $\frac{1}{7} + \frac{5}{7} + \frac{2}{7}$, β) $\frac{3}{10} + 4\frac{7}{10} + \frac{1}{10}$, γ) $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} + 4\frac{3}{10} + 7$.

18. Ὁμοίως τά ἀθροίσματα: α) $12\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + 6\frac{1}{2}$, β) $\frac{9}{20} + 2\frac{5}{6} + \frac{7}{12}$.

19. Νά ὑπολογίσετε μέ δύο τρόπους τά ἀθροίσματα: α) $1\frac{1}{4}\,\mathrm{h} + \frac{1}{3}\,\mathrm{h}$, β) $4\frac{6}{10}\,\mathrm{m} + \frac{13}{2}\,\mathrm{m}$, γ) $5\frac{3}{4}\,\mathrm{Kg}^* + 1\,\mathrm{Kg}^* + 2\frac{1}{10}\,\mathrm{Kg}^*$.

20. Νά βρεῖτε κλάσμα ἴσο μέ τό $\frac{2}{5}$ πού οἱ ὅροι του νά ἔχουν ἄθροισμα 28. Κάμετε τό ἴδιο γιά τό κλάσμα $\frac{126}{162}$ μέ ἄθροισμα τῶν ὅρων του 32.

21. Νά ὑπολογίσετε τίς διαφορές:
α) $\frac{1}{2} - \frac{3}{10}$, β) $8\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$, γ) $12\frac{2}{3} - \frac{5}{6}$, δ) $41\frac{7}{8} - 21$.

22. Ὁμοίως τίς διαφορές: α) $4 - \frac{3}{5}$, β) $25\frac{3}{5} - 19\frac{1}{2}$, γ) $12\frac{4}{7} - 5\frac{2}{9}$.

23. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα: α) $\left(18\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4}\right) - 8\frac{1}{3}$, β) $42 - \left(12\frac{3}{4} + 9\frac{2}{3}\right)$, γ) $\left(12\frac{4}{5} + 2\frac{3}{4}\right) - \left(9\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}\right)$.

24. Ὁμοίως τό ἐξαγόμενο: $\left(13\frac{2}{7} - 5\right) - \left(4\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}\right)$.

25. Ἀπό ἕνα περιβόλι τά $\frac{2}{5}$ φυτεύτηκαν μέ πατάτες, τά $\frac{3}{10}$ μέ ντομάτες καί τό ὑπόλοιπο μέ φασόλια. Τί μέρος τοῦ περιβολιοῦ φυτεύτηκε μέ φασόλια;

26. Ποιός ἀριθμός πρέπει νά προστεθεῖ στό ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{2}{9}$ καί $\frac{3}{7}$, γιά νά προκύψει ἡ μονάδα;

27. Ποιός ἀριθμός πρέπει νά ἀφαιρεθεῖ ἀπό τή διαφορά τῶν μικτῶν $7\frac{5}{6}$ καί $2\frac{2}{3}$, γιά νά προκύψει $\frac{1}{2}$;

28. Μιά γωνία εἶναι τά $\frac{2}{9}$ ὀρθῆς καί μία ἄλλη εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν πρώτη κατά $\frac{2}{18}$ ὀρθῆς. Νά βρεῖτε: α) Πόση εἶναι ἡ συμπληρωματική καί πόση ἡ παραπληρωματική γωνία τοῦ ἀθροίσματός τους.
β) Πόση εἶναι ἡ συμπληρωματική γωνία τῆς διαφορᾶς τους.

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

14.11. Στήν § 11.9 εἴδαμε ὅτι, γιά νά πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε τούς ἀριθμητές τους καί τό γινόμενο βάζουμε ἀριθμητή, καί τούς παρονομαστές τους καί τό γινόμενο βάζουμε παρονομαστή. Δηλαδή

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}}$$

Τό γινόμενο τριῶν (ἤ περισσότερων) κλασμάτων ὁρίζεται ὅπως καί στούς φυσικούς ἀριθμούς, δηλαδή

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός κλασμάτων ἀνάγεται σέ πολλαπλασιασμό φυσικῶν ἀριθμῶν. Συνεπῶς καί στόν πολλαπλασιασμό τῶν κλασμάτων θά ἰσχύουν οἱ γνωστές ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\alpha}{\beta} \qquad \textit{ἀντιμεταθετική}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\right) \qquad \textit{προσεταιριστική}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)&=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)&=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\end{aligned}\right\} \textit{ἐπιμεριστική}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1=\frac{\alpha}{\beta} \qquad \textit{οὐδέτερο στοιχεῖο}$$

Ἀντίστροφοι ἀριθμοί

14.12. Δύο ἀριθμοί λέγονται **ἀντίστροφοι**, ὅταν ἔχουν γινόμενο τή μονάδα. Ἔτσι π.χ. ὁ ἀντίστροφος τοῦ 9 εἶναι τό κλάσμα $\frac{1}{9}$, γιατί $9 \cdot \frac{1}{9} = 1$.

Ἐπίσης ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ $\frac{4}{3}$, γιατί $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$.

Γενικά, ὅταν $\alpha \neq 0$ καί $\beta \neq 0$, τά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι ἀντίστροφοι ἀριθμοί.

Ὁ μηδέν δέν ἔχει ἀντίστροφο.

Διαίρεση κλασμάτων

14.13. Ἡ διαίρεση τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὅπως καί ἡ διαίρεση τῶν φυσικῶν.

Ἔτσι πηλίκο τῆς διαιρέσεως $\frac{3}{5} : \frac{6}{7}$ λέγεται ὁ κλασματικός (γενικά) ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὅταν πολλαπλασιασθεῖ μέ τό διαιρέτη $\frac{6}{7}$, θά δώσει γινόμενο τό διαιρετέο $\frac{3}{5}$.

Ἄν ὀνομάσουμε αὐτό τόν ἀριθμό x, θά ἔχουμε

$$x \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{5}.$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη τῆς παραπάνω ἰσότητας μέ τόν ἀντίστροφο τοῦ $\frac{6}{7}$, θά ἔχουμε

$$x \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} \quad \text{ἤ} \quad x \cdot 1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6}.$$

Ἄρα $$\frac{3}{5} : \frac{6}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6}.$$

Γενικά : $$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}}$$

Δηλαδή, **γιά νά διαιρέσουμε δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε τό διαιρετέο μέ τόν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη.**

Σύνθετα κλάσματα

14.14. Ὅπως τό πηλίκο δύο φυσικῶν ἀριθμῶν γράφεται ὡς κλάσμα, ἔτσι καί τό πηλίκο δύο κλασμάτων συμφωνοῦμε νά τό γράφουμε ὡς κλάσμα.

Π.χ. $$\frac{4}{5}:\frac{7}{9}=\cfrac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{9}}, \qquad \frac{3}{4}:5=\cfrac{\frac{3}{4}}{5}, \qquad 3:\frac{5}{7}=\cfrac{3}{\frac{5}{7}}.$$

Ἕνα κλάσμα, πού τουλάχιστο ὁ ἕνας ὅρος του εἶναι ἐπίσης κλάσμα, λέγεται **σύνθετο κλάσμα**. Γιά νά ξεχωρίζει ἡ γραμμή τοῦ σύνθετου κλάσματος γράφεται πάντα πιό μεγάλη ἀπό τίς γραμμές τῶν ἄλλων κλασμάτων. Γιά νά τρέψουμε ἕνα σύνθετο κλάσμα σέ ἁπλό, δηλαδή γιά νά βροῦμε τό ἁπλό κλάσμα μέ τό ὁποῖο εἶναι ἴσο, διαιροῦμε τόν ἀριθμητή του μέ τόν παρονομαστή του.

Ἔτσι π.χ. $$\cfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}.$$

$$\cfrac{\frac{7}{8}}{3}=\frac{7}{8}:3=\frac{7}{8}:\frac{3}{1}=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{24}.$$

Στό ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μέ τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του.

Π.χ. ἄν πάρουμε τό κλάσμα $\cfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$, ἔχουμε Ε.Κ.Π. $(4,7)=28$

καί $$\cfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\cfrac{\frac{3}{4}\cdot 28}{\frac{5}{7}\cdot 28}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Νά βρεθεῖ τό γινόμενο $\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{5}$ μέ δύο τρόπους.

Λύση: 1ος τρόπος: $\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{5}=\frac{33}{20}=1\frac{13}{20}.$

2ος τρόπος: $\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{5}=\frac{3}{4}\cdot\left(2+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{4}\cdot 2+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=$

$$=\frac{\overset{5}{\smile}\,6}{4}+\frac{\overset{1}{\smile}\,3}{20}=\frac{30}{20}+\frac{3}{20}=\frac{33}{20}=1\frac{13}{20}.$$

2. Νά βρεθεῖ τό γινόμενο $4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{6}$ μέ δυό τρόπους.

Λύση: 1ος τρόπος: $4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{6} = \frac{9}{2} \cdot \frac{11}{6} = \frac{99}{12} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$.

2ος τρόπος: $4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{6} = \left(4 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{6}\right) =$

$= 4 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = 4 + \overset{2}{\frac{20}{6}} + \overset{6}{\frac{1}{2}} + \overset{1}{\frac{5}{12}} = 4 + \frac{40}{12} + \frac{6}{12} + \frac{5}{12} =$

$= 4 + \frac{51}{12} = 4 + 4\frac{3}{12} = 8\frac{1}{4}$.

3. Νά βρεθοῦν τά γινόμενα i) $18 \cdot \frac{28}{9}$, ii) $24 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{2}{11}$.

Λύση: i) $18 \cdot \frac{28}{9} = \frac{18 \cdot 28}{9} = \frac{2 \cdot 28}{1} = 56.$

ii) $24 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{2}{11} = \frac{24 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2}{8 \cdot 15 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2}{8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{14}{5}$.

4. Ὁ καφές, ὅταν καβουρντιστεῖ, χάνει τά $\frac{12}{100}$ τοῦ βάρους του.

Ἄν ἕνας καφεπώλης καβουρντίσει 9 κιλά καφέ, πόσος θά μείνει;

Λύση: 1ος τρόπος: Θά βροῦμε πόσα κιλά καφές θά χαθεῖ μέ τό καβούρντισμα. Γι' αὐτό πολλαπλασιάζουμε τό $\frac{12}{100}$ μέ τό 9 καί ἔχουμε $\frac{12}{100} \cdot 9 = \frac{108}{100}$. Ἄρα θά χαθεῖ $\frac{108}{100}$ κιλά καφές καί θά μείνει $9 - \frac{108}{100} = \overset{100}{\frac{9}{1}} - \overset{1}{\frac{108}{100}} = \frac{900}{100} - \frac{108}{100} = \frac{792}{100} = 7\frac{92}{100}$ κιλά (ἤ 7 κιλά καί 920 γραμμάρια).

2ος τρόπος: Ἀφοῦ χάνονται τά $\frac{12}{100}$ τοῦ βάρους θά μείνουν τά $\frac{100}{100} - \frac{12}{100} = \frac{88}{100}$ τοῦ βάρους. Ἄρα θά μείνουν $\frac{88}{100} \cdot 9 = \frac{792}{100} = 7\frac{92}{100}$ κιλά.

5. Νά βρεθοῦν τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων: i) $2\frac{2}{5} : 4$. ii) $2\frac{5}{6} : 2\frac{1}{4}$.

Λύση: i) Τρέπουμε τό μικτό σέ κλάσμα $2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$.

$$2\frac{2}{5} : 4 = \frac{12}{5} : \frac{4}{1} = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

ii) $2\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$, $\quad 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

Ἄρα $\quad 2\frac{5}{6} : 2\frac{1}{4} = \frac{17}{6} : \frac{9}{4} = \frac{17}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{68}{54} = \frac{34}{27} = 1\frac{7}{27}$.

6. **Νά τρέψετε σέ άπλά τά σύνθετα κλάσματα:**

i) $\dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{22}{5}}$, ii) $\dfrac{17}{\frac{5}{4}}$, iii) $\dfrac{\frac{13}{6}}{26}$.

Λύση: i) $\dfrac{\frac{11}{3}}{\frac{22}{5}} = \dfrac{11}{3} : \dfrac{22}{5} = \dfrac{11}{3} \cdot \dfrac{5}{22} = \dfrac{11 \cdot 5}{3 \cdot 22} = \dfrac{5}{3 \cdot 2} = \dfrac{5}{6}$.

ii) $\dfrac{17}{\frac{5}{4}} = 17 : \dfrac{5}{4} = 17 \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{17 \cdot 4}{5} = \dfrac{68}{5} = 13\dfrac{3}{5}$.

iii) $\dfrac{\frac{13}{6}}{26} = \dfrac{13}{3} : 26 = \dfrac{13}{6} : \dfrac{26}{1} = \dfrac{13}{6} \cdot \dfrac{1}{26} = \dfrac{13 \cdot 1}{6 \cdot 26} = \dfrac{1}{6 \cdot 2} = \dfrac{1}{12}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

29. Ὑπολογίστε τά γινόμενα:

α) $\dfrac{3}{8} \cdot 16$, β) $\dfrac{5}{6} \cdot 4$, γ) $\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{10}{3}$, δ) $\dfrac{7}{5} \cdot \dfrac{3}{4}$.

30. Ὁμοίως τά γινόμενα:

α) $1\dfrac{1}{4} \cdot 9$, β) $3\dfrac{2}{3} \cdot 6$, γ) $1\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{3}$, δ) $5\dfrac{2}{3} \cdot 8\dfrac{1}{2}$.

31. Ὑπολογίστε τά γινόμενα: α) $\dfrac{4}{9} \cdot 11 \cdot 3$, β) $\dfrac{3}{8} \cdot 4^2$, γ) $\dfrac{13}{8} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot 10$.

32. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

α) $\dfrac{8}{11} \cdot \dfrac{11}{8}$, β) $\dfrac{7}{8} \cdot \dfrac{8}{5} \cdot \dfrac{5}{11}$, γ) $\dfrac{8}{11} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{22}{31}$, δ) $14\dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot 2\dfrac{1}{5} \cdot 2$.

33. Νά βρεθοῦν μέ δύο τρόπους τά ἐξαγόμενα:

α) $\left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{3}$, β) $\left(\dfrac{7}{10} - \dfrac{2}{5}\right) \cdot 4$, γ) $\left(1\dfrac{2}{3} + 4\right) \cdot \dfrac{4}{5}$.

34. Ὁμοίως τά: α) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \dfrac{1}{10}$, β) $\left(2\dfrac{2}{3} - 1\dfrac{1}{4}\right) \cdot 1\dfrac{1}{2}$,

γ) $9\dfrac{1}{12} \cdot 4 - 2\dfrac{5}{12} \cdot 4 + 1\dfrac{7}{12} \cdot 12$.

35. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μέ ἀκμές $5\dfrac{1}{2}$ cm, $4\dfrac{3}{4}$ cm, $1\dfrac{1}{2}$ cm.

36. Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις: α) $\dfrac{48}{53} : 12$, β) $3\dfrac{1}{4} : 13$, γ) $5 : \dfrac{3}{7}$,

δ) $\dfrac{3}{8} : \dfrac{5}{4}$, ε) $\dfrac{3}{4} : \dfrac{6}{11}$, ϛ) $12 : 3\dfrac{1}{2}$, ζ) $11\dfrac{2}{3} : 2\dfrac{1}{5}$.

37. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα: α) $\left(1\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}\right):1\frac{5}{6}$,

β) $\left(9\frac{6}{7}-4\frac{1}{3}\right):\left(2-\frac{2}{3}\right)$, γ) $\left(\frac{2}{3}+4\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right):\left(2-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)$.

38. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $\frac{1}{5}x=2$, β) $\frac{1}{8}x=7$, γ) $\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$, δ) $3x=\frac{4}{5}$.

39. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα: α) $(32:11):8$, β) $(72:10):12$.

40. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἔχει πλάτος $7\frac{3}{5}$ m καί ἐμβαδό $114\ m^2$. Νά βρεθεῖ τό μῆκος του.

41. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

α) $2+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$, β) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot 24-8\frac{2}{3}:12$.

42. Νά τραποῦν σέ ἁπλά τά κλάσματα:

$\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}$, $\dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{4}}$, $\dfrac{\frac{7}{3}}{5}$, $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}$, $\dfrac{2\frac{1}{3}}{5\frac{1}{2}}$.

43. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

α) $\left(2+\frac{3}{4}\right):\frac{1}{2}+5\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}-\left(\frac{2}{3}:\frac{1}{4}\right)$, β) $\left(2\frac{1}{3}+7\frac{2}{4}-\frac{5}{6}\right)\cdot 12+8\frac{1}{2}-3\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$.

Τά σχετικά κλάσματα

14.15. Ἔχουμε μάθει ὅτι, ὅταν τά α καί β εἶναι φυσικοί ἀριθμοί καί $\alpha\neq 0$, τό κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha\cdot x=\beta$. Συμφωνοῦμε τώρα καί ὅταν τά α καί β εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί $(\alpha\neq 0)$, τή λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς νά τήν παριστάνουμε πάλι μέ $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἔτσι π.χ. ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $(+3)\cdot x=-5$ παριστάνεται μέ $\frac{-5}{+3}$,

τῆς ἐξισώσεως $(-7)\cdot x=+6$ μέ $\frac{+6}{-7}$,

τῆς ἐξισώσεως $(+6)\cdot x=+8$ μέ $\frac{+8}{+6}$,

τῆς ἐξισώσεως $(-9)\cdot x=-12$ μέ $\frac{-12}{-9}$.

Τά σύμβολα τῆς μορφῆς $\frac{\beta}{\alpha}$ μέ $\beta\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in\mathbb{Z}^*$ τά λέμε **σχετικά κλάσματα.**

Ἡ ἰσότητα στά σχετικά κλάσματα ὁρίζεται ὅπως καί ἡ ἰσότητα στά κλάσματα (§ 14.5).

Δηλαδή, δύο σχετικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ θά λέγονται ἴσα, ὅταν $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$.

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ὅταν} \quad \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma}$$

Ἔτσι ἔχουμε: $\frac{-5}{+6} = \frac{+5}{-6}$, γιατί $(-5) \cdot (-6) = (+5) \cdot (+6)$

$\frac{-7}{-8} = \frac{+7}{+8}$, γιατί $(-7) \cdot (+8) = (+7) \cdot (-8)$

$\frac{-3}{+4} = \frac{-15}{+20}$, γιατί $(-3) \cdot (+20) = (-15) \cdot (+4)$

$\frac{-12}{-18} = \frac{-2}{-3}$, γιατί $(-12) \cdot (-3) = (-2) \cdot (-18)$.

Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά καταλαβαίνουμε ὅτι:

- **Ἄν ἀλλάξουμε τά πρόσημα τῶν ὅρων ἑνός σχετικοῦ κλάσματος, βρίσκουμε ἴσο σχετικό κλάσμα.**
- **Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε (ὅταν διαιροῦνται) καί τούς δύο ὅρους ἑνός σχετικοῦ κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο, βρίσκουμε ἴσο σχετικό κλάσμα.**

Ἄς πάρουμε τώρα δύο κλάσματα μέ ἀρνητικό παρονομαστή, π.χ. τά $\frac{+7}{-8}$ καί $\frac{-5}{-9}$. Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

$$\frac{+7}{-8} = \frac{-7}{+8} \quad \text{καί} \quad \frac{-5}{-9} = \frac{+5}{+9}.$$

Συνεπῶς, **ὁ παρονομαστής ἑνός κλάσματος μπορεῖ νά θεωρεῖται πάντοτε θετικός ἀριθμός** (γιατί, ἄν εἶναι ἀρνητικός, ἀλλάζουμε τά πρόσημα τῶν ὅρων του). Π.χ. $\frac{+3}{-5} = \frac{-3}{+5}$, $\frac{-7}{-8} = \frac{+7}{+8}$.

Ἐπειδή τούς θετικούς ἀκεραίους τούς ἔχουμε ταυτίσει μέ τούς φυσικούς ἀριθμούς, μποροῦμε νά παραλείπουμε τό πρόσημο + ἀπό τούς ὅρους ἑνός σχετικοῦ κλάσματος, ὅταν ὑπάρχει.

Ἔτσι π.χ. $\frac{-3}{+5} = \frac{-3}{5}$ καί $\frac{+7}{+8} = \frac{7}{8}$.

Συμφωνοῦμε τώρα τό $+$ ἤ $-$ τοῦ ἀριθμητῆ νά τό γράφουμε μπροστά ἀπό τή γραμμή τοῦ κλάσματος (καί ὅταν εἶναι $+$, μποροῦμε νά τό παραλείπουμε).

Ἔτσι ἔχουμε $\frac{+5}{+8} = + \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$, $\frac{-3}{-5} = \frac{+3}{+5} = + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$,

$$\frac{-6}{+7} = \frac{-6}{7} = - \frac{6}{7}, \quad \frac{+9}{-11} = \frac{-9}{+11} = \frac{-9}{11} = - \frac{9}{11}.$$

Τά σχετικά κλάσματα, πού ἔχουν μπροστά ἀπό τή γραμμή τοῦ κλάσματος τό πρόσημο $+$ ἤ κανένα πρόσημο, τά λέμε **θετικά σχετικά κλάσματα**, ἐνῶ αὐτά πού ἔχουν τό $-$ τά λέμε **ἀρνητικά σχετικά κλάσματα.**

Συνεπῶς τά θετικά σχετικά κλάσματα τά ταυτίζουμε μέ τά κλάσματα.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἀπό κάθε κλάσμα μποροῦν νά προκύψουν δύο σχετικά κλάσματα, ἄν θέσουμε μπροστά ἀπό τή γραμμή τοῦ κλάσματος τό πρόσημο $+$ ἤ $-$. Ἔτσι π.χ. ἀπό τό $\frac{3}{4}$ προκύπτουν τό $+\frac{3}{4}$ καί τό $-\frac{3}{4}$.

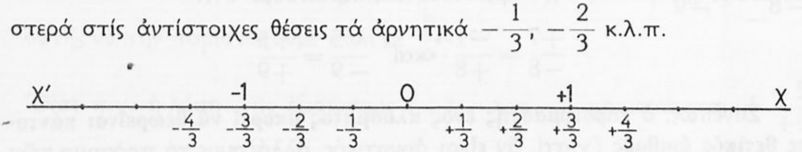
Δύο σχετικά κλάσματα λέγονται **ὁμόσημα**, ἄν ἔχουν τό ἴδιο πρόσημο καί **ἑτερόσημα**, ἄν ἔχουν διαφορετικά πρόσημα.

Π.χ. τά $+\frac{3}{4}$, $+\frac{7}{8}$ ἤ τά $-\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{9}$ εἶναι ὁμόσημα, ἐνῶ τά $-\frac{3}{4}$, $+\frac{5}{6}$ εἶναι ἑτερόσημα.

Ἕνα σχετικό κλάσμα λέγεται **ἀνάγωγο**, ἄν τό κλάσμα ἀπό τό ὁποῖο προκύπτει εἶναι ἀνάγωγο.

Τά σχετικά κλάσματα μποροῦμε νά τά παραστήσουμε πάνω στόν ἄξονα τῶν ἀκεραίων, ὅπως κάναμε μέ τά κλάσματα στόν ἄξονα τῶν φυσικῶν (Σχ. 10).

Στό παρακάτω σχῆμα 11 ἔχουμε χωρίσει κάθε τμῆμα, πού ὁρίζεται ἀπό τίς εἰκόνες δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, σέ 3 ἴσα τμήματα. Δεξιά ἀπό τό Ο τοποθετοῦμε διαδοχικά τά θετικά κλάσματα $+\frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3}$ κ.λ.π. καί ἀριστερά στίς ἀντίστοιχες θέσεις τά ἀρνητικά $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$ κ.λ.π.



Σχ. 11

Τό σύνολο $\mathbb{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν

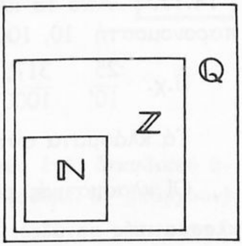
14.16. Θεωροῦμε τώρα τό σύνολο πού ἔχει γιά στοιχεῖα του ὅλα τ' *ἀνάγωγα σχετικά κλάσματα*. Τό σύνολο αὐτό τό ὀνομάζουμε σύνολο τῶν **ρητῶν ἀριθμῶν** καί τό συμβολίζουμε μέ $\mathbb{Q}$.

῞Οταν λοιπόν λέμε, ὅτι τό γράμμα α παριστάνει ἕνα ρητό ἀριθμό, ἐννοοῦμε ὅτι ὁ ἀριθμός αὐτός μπορεῖ νά εἶναι ἀκέραιος ἤ σχετικό κλάσμα. Π.χ. οἱ ἀριθμοί 2, $-\frac{3}{4}$, 0, −7 κ.λ.π., εἶναι ρητοί ἀριθμοί.

᾽Απ᾽ ὅσα εἴπαμε γιά τά σύνολα

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ὅτι $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, γιατί οἱ φυσικοί ἀριθμοί ταυτίζονται μέ τούς θετικούς ἀκεραίους, καί $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, γιατί κάθε ἀκέραιος μπορεῖ νά γραφεῖ, ὡς σχετικό κλάσμα μέ παρονομαστή 1.



Σχ. 12

Γράφουμε λοιπόν $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}$

Τό σχῆμα 12 μᾶς δίνει μιά ἐποπτική εἰκόνα γιά τά σύνολα αὐτά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά βρεῖτε ποιοί ἀπό τούς συμβολισμούς:**

α) $+\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$, β) $-3 \in \mathbb{Q}$, γ) $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$, δ) $0 \in \mathbb{Q}$, ε) $-2 \in \mathbb{N}$ εἶναι ἀληθεῖς.

Λύση: Οἱ συμβολισμοί $+\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$, $-3 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, εἶναι ἀληθεῖς, γιατί τά $+\frac{3}{4}$, $-3 = -\frac{3}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$ εἶναι ἀνάγωγα κλάσματα. ῾Ο $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$ εἶναι ψευδής, γιατί ὁ $-\frac{2}{3}$ δέν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Τέλος ὁ $-2 \in \mathbb{N}$ εἶναι ψευδής, γιατί ὁ −2, δέν εἶναι φυσικός ἀριθμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

44. ᾽Από τήν ἰσότητα $(-3) \cdot 12 = 4 \cdot (-9)$ νά γράψετε δύο ἴσα σχετικά κλάσματα.

45. Νά γράψετε τρία σχετικά κλάσματα ἴσα μέ τό $\frac{-2}{9}$.

46. Ποιοί ἀπό τούς ἑπόμενους συμβολισμούς εἶναι ἀληθεῖς. Δικαιολογῆστε τήν ἀπάντησή σας. α) $\frac{-3}{7} \notin \mathbb{Z}$, β) $-1 \in \mathbb{Q}$, γ) $+1 \in \mathbb{Q}$, δ) $-3 \in \mathbb{N}$.

47. Ποιά ἀπό τά σχετικά κλάσματα: $-\frac{5}{6}$, $+\frac{7}{4}$, $\frac{-15}{18}$, $\frac{-10}{12}$, $\frac{21}{12}$, $\frac{+14}{8}$, -2, $\frac{-12}{3}$, $\frac{-14}{7}$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους;

Δεκαδικά κλάσματα

14.17. Ἀπό τά κλάσματα ἰδιαίτερη σημασία ἔχουν ἐκεῖνα πού ἔχουν παρονομαστή 10, 100, 1000 κ.λ.π. δηλαδή μιά δύναμη τοῦ 10.

Π.χ. $\frac{25}{10}$, $\frac{3175}{1000}$, $\frac{49}{10000}$ κ.λ.π.

Τά κλάσματα αὐτά λέγονται **δεκαδικά κλάσματα**.

Οἱ κλασματικές μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.λ.π. λέγονται **δεκαδικές κλασματικές μονάδες**.

Παρατηροῦμε ὅτι: $10 \cdot \frac{1}{10000} = \frac{1}{1000}$, $10 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{100}$, $10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$

δηλαδή, **δέκα κλασματικές μονάδες μιᾶς τάξεως κάνουν μιά μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως.**

Ἔχουμε ἀκόμη $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$. Συνεπῶς οἱ δεκαδικές κλασματικές μονάδες ἀποτελοῦν συνέχεια τῶν μονάδων τῶν διάφορων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως (Κεφ. 3).

. . . χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες, μονάδες, δέκατα, ἑκατοστά, . . .

Δεκαδικοί ἀριθμοί

14.18. Ἄς πάρουμε ἕνα δεκαδικό κλάσμα, π.χ. $\frac{46207}{1000}$. Αὐτό μπορεῖ νά γραφεῖ $\frac{40000+6000+200+7}{1000} = \frac{40000}{1000} + \frac{6000}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{7}{1000} =$

$= 40 + 6 + \frac{2}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000} = 46 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$

καί συμφωνοῦμε νά τό γράφουμε 46,207.

Ἔτσι ἔχουμε $\frac{46207}{1000} = 46{,}207$.

Ὅπως βλέπουμε, στή γραφή αὐτή τηροῦνται οἱ ἴδιοι κανόνες πού ἰσχύουν καί στή γραφή τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό δεκαδικό σύστημα.

- **Κάθε ψηφίο γραμμένο ἀμέσως ἀριστερά ἑνός ἄλλου παριστάνει μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως.**
- **Ἄν δέν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, στή θέση τους βάζουμε τό 0.**

Ἔτσι θά εἶναι $\frac{267}{10} = 26{,}7$, $\frac{39}{1000} = 0{,}039$ κ.λ.π. Τά δεκαδικά κλάσματα, ὅταν γραφοῦν μέ τό νέο συμβολισμό, λέγονται **δεκαδικοί ἀριθμοί.**

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ἀκόμη ὅτι, γιά νά διαιρέσουμε ἕνα φυσικό ἀριθμό μέ 10, 100, 1000 κ.λ.π., χωρίζουμε ἀπό τό τέλος του μέ ὑποδιαστολή ἕνα, δύο, τρία κ.λ.π ψηφία ἀντιστοίχως.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι

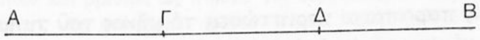
$$\frac{75}{100} = \frac{750}{1000} = \frac{7500}{10000} = \dots$$

$$\text{ἤ} \quad 0{,}75 = 0{,}750 = 0{,}7500 = \dots$$

Δηλαδή, **μποροῦμε στό τέλος τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ νά γράψουμε ὅσα μηδενικά θέλουμε (ἤ νά σβήσουμε, ἄν ὑπάρχουν) χωρίς νά ἀλλάξει ἡ ἀξία του.**

Τό μέτρο τοῦ πηλίκου γεωμετρικοῦ μεγέθους μέ φυσικό ἀριθμό

14.19. i) Ἄς πάρουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μέ μῆκος 7 cm (Σχ.13). Ἄν τό χωρίσουμε π.χ. σέ 3 ἴσα μέρη ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ, ἔχουμε 3 ΑΓ = ΑΒ.



Σχ. 13

Ἄν παραστήσουμε μέ x cm τό μῆκος τοῦ ΑΓ, τότε τό μῆκος τοῦ ΑΒ θά εἶναι $3 \cdot x$. Ἔτσι θά ἔχουμε

$$3 \cdot x = 7 \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{7}{3}.$$

ii) Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι (ΑΒ) = 7,35 dm καί ὅτι τό χωρίζουμε σέ 3 ἴσα μέρη. Ἄν παραστήσουμε μέ x dm τό μῆκος καθενός ἀπό τά τρία ἴσα μέρη στά ὁποῖα χωρίσαμε τό ΑΒ, τότε θά εἶναι

$$3 \cdot x = 7{,}35.$$

Ὅπως καί στούς φυσικούς ἀριθμούς, ὁ x εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως 7,35 : 3. Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως πάρουμε τό 1 mm, τό μῆκος τοῦ ΑΒ εἶναι 735 mm. Ἄρα τό μῆκος σέ mm καθενός ἀπό τάς τμήματα πού χωρίστηκε τό ΑΒ εἶναι $735 : 3 = 245$ (1)

Ὥστε καθένα ἀπό τά ἴσα τμήματα θά ἔχει μῆκος 245 mm ἤ 2,45 dm.

Ἑπομένως: $7{,}35 : 3 = 2{,}45$ (2)

Ἡ ἰσότητα αὐτή, ἄν συγκριθεῖ μέ τήν (1), μᾶς θυμίζει τό γνωστό κανόνα τῆς διαιρέσεως δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ φυσικό πού μάθαμε στό Δημοτικό Σχολεῖο. Δηλαδή ὅτι, **ἡ διαίρεση δεκαδικοῦ μέ φυσικό γίνεται ὅπως καί ἡ διαίρεση τῶν φυσικῶν, ἀρκεῖ, ὅταν φθάσουμε στήν ὑποδιαστολή καί πρίν κατεβάσουμε τό πρῶτο δεκαδικό ψηφίο, νά βάλουμε ὑποδιαστολή στό πηλίκο.**

7,35	3
1 3	2,45
15	
0	

iii) Ἄν τό ΑΒ ἔχει μῆκος τό συμμιγή 8 dm 7 cm ἤ 87 cm καί τό χωρίσουμε σέ 3 ἴσα μέρη, τό μῆκος καθενός ἀπό τά μέρη αὐτά θά εἶναι

$$\begin{array}{r|l} 87 & 3 \\ \cline{2-2} 27 & 29 \\ 0 & \end{array} \qquad (1)$$

$$87 : 3 = 29 \text{ cm} \quad \text{ἤ} \quad 2 \text{ dm } 9 \text{ cm}.$$

Ἄν ξαναγυρίσουμε στήν ἀρχική γραφή τοῦ μέτρου τοῦ ΑΒ, ἔχουμε

$$(8 \text{ dm } 7 \text{ cm}) : 3 = 2 \text{ dm } 9 \text{ cm}.$$

$$\begin{array}{rr|l} 8 \text{ dm} & 7 \text{ cm} & 3 \\ \cline{3-3} 2 & +20 \text{ cm} & 2 \text{ dm} \quad 9 \text{ cm} \\ \times\, 10 \text{ cm} & 27 \text{ cm} & \\ \cline{1-1} 20 \text{ cm} & 0 & \end{array} \qquad (2)$$

Βλέπουμε λοιπόν, ὅτι γιά νά διαιρέσουμε συμμιγή μέ φυσικό ἀριθμό, τρέπουμε τό συμμιγή σέ μονάδες τελευταίας τάξεως καί μετά κάνουμε διαίρεση φυσικῶν ἀριθμῶν (87 : 3).

Πολλές φορές μᾶς διευκολύνει ἡ ἐκτέλεση τῆς πράξεως νά γίνεται μέ τόν τρόπο πού φαίνεται στή δεύτερη διάταξη τῆς πράξεως, γιατί τότε ἔχουμε τό πηλίκο γραμμένο ὡς συμμιγή.

Σ' ὅλες τίς παραπάνω περιπτώσεις τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ μέ φυσικό ἀριθμό καί ἐπειδή τό πηλίκο ἑνός φυσικοῦ ἤ ἑνός κλάσματος μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό ὑπάρχει πάντα καί εἶναι κλάσμα, συμπεραίνουμε ὅτι:

Ὅταν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (καί γενικά ἕνα γεωμετρικό μέγεθος) διαιρεθεῖ μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό, καί τό μέτρο του διαιρεῖται μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό.

Διαίρεση δεκαδικοῦ μέ δεκαδικό

14.20. Ἄς πάρουμε τήν ἐξίσωση:

$$1{,}5 \cdot x = 6{,}45.$$

Καί ἐδῶ, ὅπως καί στούς φυσικούς ἀριθμούς, ὁ x λέγεται πηλίκο τοῦ 6,45 μέ τόν 1,5 καί συμβολίζεται $6{,}45 : 1{,}5$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή παίρνουμε διαδοχικά

$$10 \cdot 1{,}5 \cdot x = 10 \cdot 6{,}45 \quad \text{ἤ} \quad 15 \cdot x = 64{,}5.$$

Τώρα βλέπουμε ὅτι $x = 64{,}5 : 15$ καί τή διαίρεση αὐτή ξέρουμε νά τήν ἐκτελέσουμε. Ὥστε

$$6{,}45 : 1{,}5 = 4{,}3.$$

$$\begin{array}{r|l} 64{,}5 & 15 \\ \cline{2-2} 4\;5 & 4{,}3 \\ 0 & \end{array}$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι, **γιά νά διαιρέσουμε δεκαδικό μέ δεκαδικό, πολλαπλασιάζουμε διαιρετέο καί διαιρέτη μέ 10, 100, 1000 κ.λ.π., ὥστε νά γίνει ὁ διαιρέτης φυσικός ἀριθμός, καί μετά διαιροῦμε δεκαδικό μέ φυσικό.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ — ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Νά τραποῦν σέ συμμιγεῖς οἱ φυσικοί ἀριθμοί: i) 19116″, ii) 170315 cm².**

Λύση: i) Ἐπειδή 60″ = 1′, τά 19116″ θά εἶναι (19116 : 60)′. Ἡ διαίρεση 19116 : 60 δίνει πηλίκο 318 καί ὑπόλοιπο 36. Ἔτσι εἶναι: 19116″ = = 318′ 36″.

Ὁμοίως ἡ διαίρεση 318 : 60 δίνει πηλίκο 5 καί ὑπόλοιπο 18. Ἐπομένως τελικά θά εἶναι:

19116″ = 318′ 36″ = 5° 18′ 36″.

19116″	60	
111	318′	60
516	**18′**	**5°**
36″		

ii) Ὁμοίως βρίσκουμε 170315 cm² = 17m² 3 dm² 15 cm².

2. **Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις: i) 1,176 : 56, ii) 1,04 : 3,3.**

Λύση: i) Στή διαίρεση 1,176 : 56, ὅπως βλέπουμε στή διπλανή διάταξη τῆς πράξεως, τό ἀκέραιο μέρος τοῦ πηλίκου (πού εἶναι μηδέν καί βρέθηκε ὡς πηλίκο τῆς διαιρέσεως 1 : 56) δέν παραλείπεται, ἄν καί εἶναι πρῶτο ψηφίο. Ἐπίσης δέν παραλείπεται καί τό μηδέν πού εἶναι μετά τήν ὑποδιαστολή.

1,176	56
56	0,021
0	

ii) Γιά νά κάνουμε τή διαίρεση αὐτή πολλαπλασιάζουμε τό διαιρετέο καί τό διαιρέτη μέ τό 10 γιά νά γίνει ὁ διαιρέτης φυσικός ἀριθμός. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἡ διαίρεση αὐτή συνεχίζεται ἀπεριόριστα καί τά ψηφία 1 καί 5 τοῦ πηλίκου ἐπαναλαμβάνονται συνεχῶς μέ τήν ἴδια σειρά. Στήν περίπτωση αὐτή σταματᾶμε τή διαίρεση σέ κάποιο δεκαδικό ψηφίο καί λέμε ὅτι ἔχουμε *πηλίκο μέ προσέγγιση*. Ἀριθμοί ὅπως ὁ 0,31515. . . λέγονται **δεκαδικοί περιοδικοί** καί γι' αὐτούς θά μάθουμε περισσότερα στή Β' τάξη.

10,4000	33
50	0,31515
170	
50	
170	
5	

Δεκαδική προσέγγιση ρητοῦ

14.21. Ἄς πάρουμε ἕνα ρητό ἀριθμό, π.χ. τόν $\frac{3}{4}$. Ξέρουμε ὅτι τό κλάσμα αὐτό παριστάνει τό ἀκριβές πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ μέ τόν παρονομαστή. Γράφουμε λοιπόν 3 = 3,00 καί κάνουμε τή διαίρεση μέ τό 4. Ἔτσι ἔχουμε $\frac{3}{4} = 0,75$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ὁ $\frac{3}{4}$ *τρέπεται ἀκριβῶς σέ δεκαδικό ἀριθμό.*

3,00	4
20	0,75
0	

Ἄς πάρουμε τώρα τό ρητό $\frac{51}{22}$. Γράφουμε 51 = 51,000 ... καί κάνουμε τή διαίρεση μέ τό 22. Τό πηλίκο εἶναι ὁ δεκαδικός περιοδικός ἀριθμός 2, 31818. . . . Στήν περίπτωση αὐτή σταματᾶμε τή διαίρεση σέ κάποιο δεκαδικό

51,000. . .	22
7 0	2,318. . .
40	
180	
4	

ψηφίο καί λέμε ὅτι ἔχουμε **πηλίκο μέ προσέγγιση δεκάτου, ἑκατοστοῦ,** ...

Στό παράδειγμά μας, ἄν σταματήσουμε τή διαίρεση στό τρίτο δεκαδικό ψηφίο, λέμε ὅτι ὁ 2,318 εἶναι *προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ἔλλειψη* τοῦ $\frac{51}{22}$ καί γράφουμε $\frac{51}{22} \simeq 2{,}318$.

Ἄν γράψουμε $\frac{51}{22} \simeq 2{,}319$, λέμε ὅτι ὁ 2,319 εἶναι *προσέγγιση χιλιοστοῦ μέ ὑπεροχή* τοῦ $\frac{51}{22}$.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ

48. Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις: α) 145,088 : 3,4, β) 2 : 9, γ) 7,8 : 2,4.

49. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἔχει ἐμβαδό 128,7 cm^2 καί μῆκος 16,5 cm. Νά βρεθεῖ τό πλάτος του.

50. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:
α) $19+25{,}2 : 6-(7{,}3-5{,}9)\cdot 5+0{,}96 : 0{,}2$
β) $(157{,}35+469{,}53) : 0{,}3+(96{,}3-49{,}5) : 0{,}09-6{,}34\cdot 1{,}5$.

51. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ μῆκος 28,2 m. Νά βρεθεῖ τό πλάτος του, ἄν ξέρετε ὅτι πουλήθηκε μέ 2000 δρχ. τό 1 m^2 καί κόστισε συνολικά 879840 δρχ.

52. Ἡ περίμετρος ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 67,36 dm καί ἡ βάση του 23,14 dm. Νά βρεθεῖ τό μῆκος κάθε μιᾶς ἀπό τίς ἄλλες πλευρές του.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 14

1. Ἡ ἔννοια τῆς **κλασματικῆς μονάδας** δημιουργεῖται μέ τό χωρισμό ἑνός μεγέθους σέ ἴσα μέρη. Ἡ κλασματική μονάδα εἶναι ἕνα σύμβολο πού δηλώνει ἕνα ἀπό τά ἴσα μέρη, στά ὁποῖα χωρίστηκε ἕνα μέγεθος.

● **Κλασματικός ἀριθμός** ἤ **κλάσμα** λέγεται κάθε σύμβολο τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπου $\alpha \in \mathbb{N}$ καί $\beta \in \mathbb{N}^*$.

● Τό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ προκύπτει ἀπό τήν κλασματική μονάδα $\frac{1}{\beta}$, ἄν τήν πάρουμε α φορές, $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

● Ἕνα κλάσμα μέ ἴσους ὅρους ἰσοῦται μέ 1, $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

● Κάθε φυσικός ἀριθμός α μπορεῖ νά τραπεῖ σέ κλάσμα μέ παρονομαστή β καί ἀριθμητή $\alpha \cdot \beta$, $\alpha = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta}$.

● Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ἴσα**, ἄν $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$.

● Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε (ὅταν διαιροῦνται) καί τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό ($\neq 0$), προκύπτει ἴσο κλάσμα.

● Τό κλάσμα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τό ἀκριβές πηλίκο τοῦ ἀριθμητῆ του μέ τόν παρονομαστή.

● Ἀπό δύο ὁμώνυμα κλάσματα **μεγαλύτερο** εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει μεγαλύτερο ἀριθμητή.

● Ἄν ὁ ἀριθμητής ἑνός κλάσματος εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν παρονομαστή, τό κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τή μονάδα, καί ἄν ὁ ἀριθμητής εἶναι μικρότερος ἀπό τόν παρονομαστή, εἶναι μικρότερο ἀπό τή μονάδα.

2. **Ἄθροισμα** ὁμώνυμων κλασμάτων λέγεται ἕνα κλάσμα ὁμώνυμο μέ αὐτά τό ὁποῖο ἔχει ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν.

● **Διαφορά** ὁμώνυμων κλασμάτων λέγεται ἕνα κλάσμα ὁμώνυμο μέ αὐτά τό ὁποῖο ἔχει ἀριθμητή τή διαφορά τῶν ἀριθμητῶν.

● **Γινόμενο** κλασμάτων λέγεται τό κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητή τό γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τό γινόμενο τῶν παρονομαστῶν.

● Δύο ἀριθμοί λέγονται **ἀντίστροφοι**, ἄν ἔχουν γινόμενο τή μονάδα.

● Τό **πηλίκο** τῆς διαιρέσεως δύο κλασμάτων βρίσκεται, ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν διαιρετέο μέ τόν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη.

● **Σύνθετο κλάσμα** λέγεται ἕνα κλάσμα, πού τουλάχιστο ὁ ἕνας ὅρος του εἶναι ἐπίσης κλάσμα.

3. **Σχετικό κλάσμα** εἶναι κάθε σύμβολο τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}^*$.

● Ἡ ἰσότητα στά σχετικά κλάσματα ὁρίζεται ὅπως καί στά κλάσματα, δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \text{ ὅταν } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma.$$

● Κάθε σχετικό κλάσμα μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς κλάσμα μέ ἕνα πρόσημο + ἤ –, π.χ. $+\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$.

● Τά κλάσματα πού ἔχουν τό πρόσημο (+) λέγονται **θετικά** καί αὐτά πού ἔχουν τό (–) **ἀρνητικά**. Τά θετικά κλάσματα μποροῦμε νά τά ταυτίζουμε μέ τά κλάσματα.

● Δύο κλάσματα λέγονται **ὁμόσημα**, ἄν ἔχουν τό ἴδιο πρόσημο, καί **ἑτερόσημα**, ἄν ἔχουν διαφορετικά πρόσημα.

● Τό σύνολο τῶν ἀνάγωγων σχετικῶν κλασμάτων λέγεται **σύνολο τῶν ρητῶν** καί παριστάνεται μέ $\mathbb{Q}$.

● Ὅταν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα διαιρεῖται μέ ἕνα φυσικό ἀριθμό καί τό μέτρο του διαιρεῖται μέ τόν ἴδιο φυσικό.

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ*

53. Νά βρεῖτε : α) πόσα min εἶναι τά $\frac{2}{5}$ τοῦ τέταρτου τῆς ὥρας, β) πόσα sec εἶναι τά $\frac{11}{60}$ τῆς ὥρας.

54. Νά βρεῖτε ἄλλη γραφή γιά : α) τά $\frac{2}{5}$ τῆς μοίρας, β) τό $\frac{1}{5}$ τοῦ τόνου, γ) τά $\frac{4}{5}$ τοῦ Kg*.

55. Κάνετε τό ἴδιο γιά : α) τά $\frac{5}{60}$ τῶν 360^0, β) τά $\frac{4}{9}$ τῶν 90^0, γ) τά $\frac{2}{5}$ τοῦ δίδραχμου, δ) τά $\frac{5}{6}$ τῶν $42^0\,30'$.

56. Ποιό πρέπει νά εἶναι τό x στίς ἀκόλουθες σχέσεις : α) $\frac{1}{5}$ τῶν x m εἶναι 2m, β) $\frac{1}{3}$ τῶν x^0 εἶναι 20^0, γ) $\frac{1}{8}$ τῶν x Kg* εἶναι 2 Kg*.

57. Ἐπίσης στίς σχέσεις :

α) $\frac{2}{7}$ τῶν x ἡμερῶν εἶναι 2 ἡμέρες, β) $\frac{2}{4}$ τῶν x h εἶναι 2 h.

58. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα : α) $4 : \frac{2}{3}$, β) $9 : \frac{3}{4}$, γ) $5 : \frac{4}{5}$.

59. Ὁμοίως τά : α) $12 : 1\frac{1}{2}$, β) $8 : 4\frac{1}{3}$, γ) $1\frac{2}{5} : \frac{1}{2}$, δ) $\frac{4^2}{9} : 1\frac{4}{5}$.

60. Ὁμοίως τά : α) $\left(24 : 6\frac{1}{3}\right) : 2$, β) $\left(2\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2}\right) : 4$, γ) $\left(\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{2}$.

61. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

α) $\frac{5x}{21} = \frac{10}{42}$, β) $\frac{3x}{40} = \frac{90}{360}$, γ) $\frac{2x-1}{5} = \frac{31}{50}$, δ) $\frac{8}{x-3} = 8$, ε) $\frac{2x}{9} = 1$.

62. Ὁμοίως οἱ ἐξισώσεις :

α) $\frac{11}{6}x = \frac{3}{4}$, β) $\frac{11}{4}x = 1\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$, γ) $\left(\frac{8}{13} - \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2} + \frac{1}{13}$.

63. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα : α) $4\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$, β) $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}$, γ) $7\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$, δ) $\left(1\frac{8}{9} \cdot \frac{4}{11}\right) : 17$, ε) $\left(1\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}\right)$.

64. Ὁμοίως τά : α) $\left(7\frac{1}{2} - 4\frac{1}{4}\right) : 2 - (8 : 3) : 5$, β) $14\frac{7}{10} : 4 + 2\frac{1}{4} + 9\frac{9}{10}$.

65. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τετραγώνου πού ἔχει περίμετρο $18\frac{1}{2}$ m.

66. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο κύβου πού ἔχει ἀκμή 2,3 cm.

67. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου μέ διαστάσεις:

α) 10 cm, 4,5 cm, β) $8\frac{4}{5}$ cm, 7 cm.

68. Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἔχει ἐμβαδό $25\frac{1}{4}$ dm² καί μῆκος $6\frac{1}{2}$ dm. Νά βρεθεῖ τό πλάτος του.

69. Ἕνα βαρέλι χωρᾶ 150 *l* βενζίνη καί εἶναι γεμάτο κατά τά $\frac{2}{3}$. Πόση βενζίνη χωρᾶ ἀκόμη;

70. Ἕνα ἐμπόρευμα πουλιέται μέ κέρδος $\frac{7}{20}$ τῆς ἀξίας του πρός 7020 δραχμές. Ποιά εἶναι ἡ ἀξία του;

71. Πέντε τόπια ὕφασμα τῶν 52 m τό καθένα ἀγοράστηκαν καινούργια πρός 240 δρχ. τό m. Τό ὕφασμα πλύθηκε καί ἔχασε (μάζεψε) τό $\frac{1}{13}$ τοῦ μήκους του. Πόσο πρέπει νά πουλιέται τό 1 m, ὥστε τελικά νά ἀφήσει κέρδος τά $\frac{3}{10}$ τῆς ἀξίας του;

● ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ **

72. Ἕνας ἔμπορος πούλησε $3\frac{1}{5}$ m ὕφασμα πρός 270 δρχ./m. Ἀπό λάθος ὅμως ὑπολόγισε τό ὕφασμα $3\frac{1}{2}$ m καί ἔτσι εἰσέπραξε περισσότερα. Πόσα χρήματα πρέπει νά ἐπιστρέψει;

73. Μία ἁμαξοστοιχία φεύγει στίς 7 h ἀπό τήν πόλη Α καί πρέπει νά φθάσει σέ 5 h 10 min στήν πόλη Β πού ἀπέχει 217 Km. Στίς 7 h 40 min φεύγει ἀπό τήν πόλη Α μιά ἄλλη ἁμαξοστοιχία πού φθάνει τήν πρώτη στό 175 χιλιόμετρο. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τῆς δεύτερης ἁμαξοστοιχίας;

74. Στό θαλασσινό νερό τό $\frac{1}{20}$ τοῦ βάρους του εἶναι ἁλάτι. Πόσο καθαρό νερό πρέπει νά ἀναμίξουμε σέ 40 Kg* θαλασσινοῦ, ὥστε τό ἁλάτι νά εἶναι τό $\frac{1}{50}$ ὅλου τοῦ βάρους;

75. Ἕνας ἔμπορος εἶχε 650 m ὕφασμα καί πούλησε τά $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{6}{15}$ του πρός 80,40 δρχ./m καί τό ὑπόλοιπο πρός 90 δρχ./m. Πόσα χρήματα πῆρε;

76. Ἕνας τεχνίτης καί ὁ βοηθός του πληρώνονται γιά μιά δουλειά 29280 δραχμές. Ὁ τεχνίτης κάνει 26 ἡμερομίσθια καί ὁ βοηθός του 38, ἀλλά τό ἡμερομίσθιο τοῦ τεχνίτη εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ἡμερομίσθιο τοῦ βοηθοῦ του κατά τά $\frac{2}{3}$ τοῦ τελευταίου. Ποιό εἶναι τό ἡμερομίσθιο καθενός.

77. Σέ μιά χειμερινή περίοδο τά $\frac{3}{5}$ τῶν παιδιῶν μιᾶς τάξεως πέρασαν γρίππη καί τά $\frac{3}{4}$ ἰλαρά. Ὅλα τά παιδιά ἀρρώστησαν. Τί μέρος τῶν παιδιῶν τῆς τάξεως πέρασε καί τίς δύο ἀρρώστιες;

78. Μιά μπαλίτσα ρίχνεται ἀπό κάποιο ὕψος καί ἀναπηδᾶ. Κάθε φορά ἀνεβαίνει τά $\frac{2}{5}$ τοῦ προηγούμενου ὕψους. Ἀπό ποιό ὕψος ρίχτηκε ἀρχικά, ἄν στήν τρίτη ἀναπήδηση ἀνέβηκε σέ ὕψος 1,6 m;

79. Νά βρεθεῖ ὁ μικρότερος φυσικός ἀριθμός ὁ ὁποῖος, ὅταν διαιρεῖται μέ τούς ἀριθμούς $\frac{8}{25}$, $\frac{24}{42}$, $\frac{10}{13}$, δίνει πηλίκα φυσικούς ἀριθμούς.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τρεῖς τρόποι. **2.** 18. **5.** Ὄχι. Ἔχει 12 ἀκμές (γιατί;).
6. 2 τρόποι. Δέν σχηματίζεται νέος κύβος. **7.** 8 κύβους.
8. α) 60 κύβους, β) σέ 1 κύβο, γ) σέ 9 κύβους, δ) σέ 26 κύβους.
9. Κύλινδρος. Κυλινδρικό. **10.** Σέ ὅλα ἐκτός ἀπό τή σφαίρα καί τήν κόλουρη πυραμίδα.
11. Τρίγωνα, κύκλους, τετράγωνα.
12. Ἄν στόν ἀριθμό ἀκμῶν προσθέσουμε 2, βρίσκουμε τό ἄθροισμα ἑδρῶν καί κορυφῶν.
14. α) 18 κύβοι, β) 8 κύβων φαίνονται 3 ἕδρες καί 3 κύβων οἱ 2 ἕδρες, γ) 2 κύβων, δ) 5 κύβοι (18–13).

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ὄχι. **2.** Ὄχι. **3.** {Τρίτη, Τετάρτη}, {Πέμπτη, Παρασκευή}.
4. {ἀντίχειρας, δείκτης, μέσος, παράμεσος, μικρός}.
5. {Ἰανουάριος, Ἰούνιος, Ἰούλιος}. **6.** {Ἀπρίλιος, Αὔγουστος}.
7. ἀλλά. **8.** ἀνά, ἄν. **9.** {6, 12}, {3, 9}.
10. α) {α, ι, ο}, β) {θ, λ, σ, ν}, γ) {θ, α, λ, σ, ι, ν, ο}.
11. i) καί ii) σωστοί, iii) καί iv) λάθος. **12.** i) καί iii) λάθος, ii) σωστός.
13. $\varnothing$. **14.** i) {Ἀθῆναι}, ii) $\varnothing$. **15.** $\varnothing$.
16. Σ' ὅλες τίς ἐρωτήσεις ἰσοδύναμα.
17. {θ, ε, ρ, μ, ο}, {μ, ε, τ, ρ, ο}, {ε, ρ, μ, ο}. **18.** $\varnothing$, {α}, {λ}, {α,λ}.
19. {0, 2, ... 9}. **20.** {α}, {π}, {ο}.
21. {5, 3}, {5, 2}, {5, 4}, {3, 2}, {3, 4}, {2, 4}.
22. i) 10, ii) 12, iii) 17, iv) 3. **23.** $Α \sim Τ_1$, $Β \sim Γ \sim Τ_2$, $Δ \sim Ε \sim Τ_4$.
24. τοῦ Α ὁ 15, τοῦ Β ὁ 18, τοῦ Γ ὁ 9. **26.** {4, 5, 6, 7, 8, 9}.
27. {0, 1, 2, 9, 10, 11, . . .}. **28.** {9, 10, 11, . . ., 19}.
29. i) {α,β,γ,δ,ε}, ii) {α,β,γ,δ}, iii) {α,β,γ}, iv) {α,β,γ,δ,ε}, v) {α,β,γ,δ,ε}.
30. i) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ii) 3, 4, iii) 0, 1, 2, 3, iv) 3, v) 5.
31. Ἀπό τή $2 < x < 5$ βρίσκουμε $x = 3$ ἤ $x = 4$ καί σέ συνδυασμό μέ τή $x < \psi < 6$, τίς τιμές $x = 3$ καί $\psi = 4$, $x = 3$ καί $\psi = 5$, $x = 4$ καί $\psi = 5$.
32. {τά νησιά τῆς Δωδεκανήσου}, {οἱ δώδεκα Ἀπόστολοι}.
33. i) {6, 8, 9, 12}, ii) {5, 9, 11, 17} Εἶναι ἰσοδύναμα.
34. {α, τ, ι}, {κ, α, τ, ι}.
35. α) Εἶναι διπλάσια τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbb{N}^*$, β) τό 7ο εἶναι 14 καί τό 100ο εἶναι 200, γ) ἀπειροσύνολο.
36. Στό πρῶτο προσθέτουμε 3 καί βρίσκουμε τό δεύτερο, ἄν σ' αὐτό προσθέσουμε 4 βρίσκουμε τό τρίτο κ.λ.π. Οἱ ἀριθμοί πού λείπουν εἶναι, κατά σειρά, 26, 34, 43, 53, 64.

37. $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}.
$\varnothing$, {α}, {β}, {γ}, {δ}, {α,β}, {α,γ}, {α,δ}, {β,γ}, {β,δ}, {γ,δ}, {α, β, γ}, {α, β, δ}, {α, γ, δ}, {β, γ, δ}.

38. α) Τό δεύτερο στοιχεῖο προκύπτει ἀπό τό πρῶτο (1) ἄν προσθέσουμε 3, τό τρίτο ἄν στό πρῶτο (1) προσθέσουμε $2 \times 3 = 6$ κ.λ.π.
β) τό 9ᵒ στοιχεῖο 25 καί τό 26ᵒ στοιχεῖο 76. γ) ἀπειροσύνολο.

39. i) $\alpha < \beta$ καί $\gamma < \delta$, ii) ὅτι $\alpha < \delta$, iii) ὅτι $\gamma < \beta$.

40. τοῦ x εἶναι τό {6, 7, 8}, τοῦ ψ τό {7, 8}, τοῦ ω τό {7}.

41. $\alpha' < \beta' < \gamma' = \alpha < \beta = \delta' < \gamma < \delta$.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. i) 6057, ii) 80950, iii) 9001.
5. μικρότερος ὁ 102, μεγαλύτερος ὁ 987.
6. 41 = 131 (βάση πέντε), 29 = 104 (βάση πέντε).
7. 19 = 10011 (βάση δύο) , 27 = 11011 (βάση δύο).
8. 424 (βάση πέντε) = 114, 2342 (βάση πέντε) = 347.
9. 1001 (βάση δύο) = 9, 1001101 (βάση δύο) = 77.
10. 320 (βάση πέντε) = 85 = 1010101 (βάση δύο).
11. 11011 (βάση δύο) = 27 = 102 (βάση πέντε).
12. α) 22, β) 65, γ) 1974.
13. α) υπ′, β) ψϟς′, γ) ,αωκα′, δ) αϡμ′.
14. α) 71, β) 723, γ) 1665.
15. α) 146, 164, 416, 461, 614, 641, β) 307, 370, 703, 730.
16. α) 90, β) 900, γ) 9000.
17. Τό μηδέν 11 φορές, τό ἕνα 21 φορές, κάθε ἄλλο ψηφίο 20 φορές.
18. α) 1023, β) 9876.
19. Οἱ διψήφιοι ὅλοι εἶναι 90. Μέ ἴδια ψηφία εἶναι 9. Μέ διαφορετικά ψηφία 90 − 9 = 81.
20. 221 (βάση τρία) = 2 ἐνιάδες, 2 τριάδες, 1 μονάδα = $(2 \times 9) + (2 \times 3) + 1 = 25 =$ = 11001 (βάση δύο).
21. Γιά τίς πρῶτες 9 σελίδες 9 ψηφία, γιά τίς ἑπόμενες 90 σελίδες (ὅσοι οἱ διψήφιοι) 180 ψηφία. Γιά τίς ὑπόλοιπες 185 (284 −99) σελίδες, 555 ψηφία. Συνολικά 744.
22. 189 ψηφία χρησιμοποιοῦνται γιά τίς πρῶτες 99 σελίδες. Τά ὑπόλοιπα 501 (690 − 189) χρησιμοποιοῦνται γιά 167 σελίδες. Ἔχει 266 σελίδες.
23. ΔΕ7 (βάση δώδεκα) = 10 ἑκατοσαραντατετράδες, 11 δωδεκάδες, 7 μονάδες = 1579.
24. 47 (βάση δώδεκα) = 55, 144 (βάση δώδεκα) = 196.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΒΖ, ΓΔ, ΓΕ, ΔΖ, ΕΖ.
2. ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ.
3. εὐθεία ΑΒ, εὐθεία ΑΓ, εὐθεία ΒΓ.
4. Τό Γ θά βρίσκεται μεταξύ Α καί Β.
5. α) $\omega\widehat{O}z$, $\omega\widehat{O}\varphi$, $\varphi\widehat{O}x$, β) μή κυρτή $\omega\widehat{O}\psi$, μή κυρτή $\varphi\widehat{O}\omega$, γ) $z\widehat{O}\psi$.

6. Κυρτές είναι: $\widehat{ΑΒΓ}$, $\widehat{ΒΓΔ}$, $\widehat{ΓΔΕ}$, $\widehat{ΔΕx}$, $\widehat{ΔΕψ}$ – μή κυρτές: $\widehat{ΑΒΓ}$, $\widehat{ΒΓΔ}$, $\widehat{ΓΔΕ}$, $\widehat{ΔΕx}$, $\widehat{ΔΕψ}$ – εὐθεῖες γωνίες: $\widehat{ψΕx}$.

7. Σχηματίζονται 7 περιοχές. Χρειάζονται τουλάχιστο 2 χρώματα.

8. α) ΑΓ < ΒΔ, β) ἰσχύει γιά ὁποιεσδήποτε ἡμιευθεῖες.

9. ΒΜ = ΑΓ. **10.** Α, Δ, Ε, Κ κ.λ.π.

11. ΑΒΓΔΕ, ΑΓΒΔΕ. Ἄλλη εἶναι ΑΒΔΓΕ. Ὑπάρχουν κι' ἄλλες.

12. Ἀρκεῖ νά προσέξουμε σέ ποιές διασταυρώσεις βρίσκονται οἱ κορυφές τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ.

13. ΑΒΔ, ΑΒΕ, ΑΒΖ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, ΒΕΖ, ΓΔΕ. **14.** Ναί.

15. Χωρίζουμε τή γωνία σέ δύο (§ 4.15) καί κάθε μιά πάλι σέ δύο.

16. Ὁ γνώμονας, τό ζάρι, τό τετράδιο κ.λ.π.

17. α) Γ, Ε, Π κ.λ.π., β) Α, Χ κ.λ.π.

18. α) Μέ ἀποτύπωση σέ διαφανές βρίσκουμε ὅτι εἶναι ἴσες.
β) Μέ τό γνώμονα βρίσκουμε ὅτι εἶναι ὀξεῖες.

19. Θ, Φ, D, Ψ κ.λ.π.

20. Βρίσκουμε τό μέσο τοῦ τμήματος ὅπως στήν § 4.13. Αὐτό εἶναι τό κέντρο.

21. α) $\widehat{Α'Β'} = \widehat{Β'Γ'}$, β) Ὄχι. Δέν εἶναι τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων.

22. $\widehat{Α'Β'} < \widehat{Β'Γ'}$. **23.** ΑΜ < ΑΒ.

24. α) Ναί, β) $\widehat{ΟΜΑ}$ = 1 ὀρθή γωνία.

25. Οἱ $\widehat{ΟΑΒ}$, $\widehat{ΟΒΑ}$ εἶναι ἴσες καί καθεμιά ὀξεία.

26. Ὅπως στήν ἄσκηση 12. **27.** Εἶναι ὀρθή γωνία.

28. α) Ἐπίκεντροι γωνίες εἶναι $\widehat{ΑΟ}$[ΒΑ], [ΒΑ]$\widehat{ΟΔ}$, [ΝΑ]$\widehat{Ο}$[ΝΔ] κ.λ.π.
β) $\widehat{ΑΟ}$[ΒΑ], [ΒΑ]$\widehat{ΟΒ}$, $\widehat{ΒΟ}$[ΒΔ] κ.λ.π., γ) $\widehat{ΑΟ}$[ΒΔ], $\widehat{ΑΟ}$[ΝΔ], $\widehat{ΔΟ}$[ΝΑ] κ.λ.π.,
δ) $\widehat{ΑΟΔ}$, $\widehat{ΒΟΝ}$, [ΒΑ] $\widehat{Ο}$ [ΝΔ], [ΒΔ] $\widehat{Ο}$ [ΝΑ],
ε) $\widehat{ΑΟΒ}$, [ΒΑ]$\widehat{Ο}$[ΒΔ], $\widehat{ΒΟΔ}$ κ.λ.π.

29. α) Εἶναι ἴσες μεταξύ τους, β) Ναί, οἱ $\widehat{ΑΟΔ}$, $\widehat{ΒΟΕ}$ καί $\widehat{ΓΟΖ}$.

30. $\widehat{xOε} = \widehat{ψOz}$. Καθεμία εἶναι ὀξεία.

31. $\widehat{ΝΒ} = \widehat{ΝΔ}$.

32. Εἶναι ἴσες μεταξύ τους καί μέ τήν ὀρθή γωνία.

33. Οἱ διαγώνιοι εἶναι 5. Ἀπό κάθε κορυφή φέρνουμε διαγώνιο πρός τίς 5–3 = 2 κορυφές πού δέν εἶναι διαδοχικές της. Ἀπό τίς 5 κορυφές φέρνουμε 5×2 = 10. Ἔτσι ὅμως κάθε διαγώνιο τήν παίρνουμε 2 φορές. Ἑπομένως οἱ διαγώνιοι θά εἶναι 10 : 2 = 5. Τό ἑξάγωνο ἔχει 9 διαγωνίους.

34. Σκεπτόμαστε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. Τό δεκάγωνο ἔχει 35 διαγωνίους.
α) 14, β) 2, γ) 275, δ) $\frac{ν \times (ν-3)}{2}$, ε) τό τρίγωνο καμία.

35. Μέ τό γνώμονα βρίσκουμε ὅτι ἡ $\widehat{ΑΓΒ}$ εἶναι ὀρθή γωνία ὁποιαδήποτε κι ἄν εἶναι ἡ θέση τοῦ Γ στό ἡμικύκλιο.

36. Σχηματίζονται δύο ὀξεῖες καί δύο ἀμβλεῖες γωνίες.

37. α) $\widehat{Α'Β'} = \widehat{Β'Γ'}$, β) ἡ ΟΒ' εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{Α'ΟΓ'}$.

40. ΟΜ = ΜΑ.

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. $\alpha = 2{,}5\mu.$, $\beta = 3\mu.$
2. $\mu = \frac{2}{5}\alpha$, $\beta = 1\frac{1}{5}\alpha.$
3. $\mu = \frac{1}{3}\beta$, $\alpha = \frac{5}{6}\beta.$
4. α) $AB = 7OI$, $OA = 5OI$, $OB = 12OI$.
   β) Ἡ διαφορά τῶν μηκῶν ΟΒ καί ΟΑ εἶναι 7, ὅσο δηλαδή καί τό μῆκος τοῦ ΑΒ (μονάδα μετρήσεως τό ΟΙ).
5. $A = 9\,M$, $B = 28\,M$.
6. $M = \frac{1}{3}M'$, $A = 3M'$, $B = 9\frac{1}{3}M'$.
7. $M = \frac{1}{9}A$, $M' = \frac{1}{3}A$, $B = 3\frac{1}{9}A$.
8. $E = 7Z$, $\Theta = 1\frac{3}{4}Z$, $E = 4\Theta$, $Z = \frac{4}{7}\Theta$, $\Theta = \frac{1}{4}E$.
9. $A = 1\frac{1}{2}M$, $B = 4\,M$, $\Gamma = 4\,M$.
10. $\Sigma = 9\frac{1}{2}M$.
11. α) $A\widehat{O}B = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας, β) $A\widehat{O}\Delta = 1\frac{1}{2}$ ὀρθῆς γωνίας,
    γ) $A\widehat{O}E = 2$ ὀρθές γωνίες, δ) μή κυρτή $A\widehat{O}Z = 2\frac{1}{2}$ ὀρθές γωνίες,
    ε) μή κυρτή $A\widehat{O}H = 3$ ὀρθές γωνίες, ϛ) πλήρης $\widehat{O} = 4$ ὀρθές γωνίες.
12. α) $A\widehat{O}B = 45°$, β) $A\widehat{O}\Delta = 135°$, γ) $A\widehat{O}E = 180°$, δ) μή κυρτή $A\widehat{O}Z = 225°$,
    ε) μή κυρτή $A\widehat{O}H = 270°$, ϛ) πλήρης $\widehat{O} = 360°$.
13. α) $\frac{1}{2}$, β) $1\frac{1}{2}$, γ) 1, δ) 3, ε) 2,5.
14. α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 5.
15. α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{2}$, γ) 1,5, δ) 2, ε) 2,5, δ) 3.
16. α) $\frac{1}{2}$, β) 1, γ) $1\frac{1}{2}$, δ) 2,5, ε) $\frac{1}{2}$.
17. α) $\frac{2}{3}$, β) $\frac{2}{3}$, γ) $1\frac{1}{3}$, δ) $\frac{2}{3}$, ε) $1\frac{2}{3}$.
18. $740030\ cm^2$.
19. $25{,}0042\ m^2$.
20. $47500\ cm^2$ ἤ $4750000\ mm^2$.
21. $6025cm^3$ ἤ $6{,}025\ dm^3$.
22. $60°$.
23. $\frac{1}{45}$ ὀρθῆς γωνίας.
24. Σέ πρῶτα λεπτά εἶναι 1945′ καί σέ μέρη ὀρθῆς $\frac{389}{1080}$.
25. 445 min.
26. Εἶναι 43518″ καί $\frac{7253}{54000}$ μέρη ὀρθῆς.
27. $\frac{3}{10}$ h ἤ 1080 sec.
28. 6300 sec.
29. 2 kg*.

30. $A = 500\ mm^2$, $B = 502\ mm^2$, $\Gamma = 305\ mm^2 = 3{,}05\ cm^2$.

31. i) dm, ii) 1820, iii) $5\frac{1}{4}$, iv) 6525,7, v) 380.

32. i) 15000, 3275000, 0, 30000. ii) 325, 1895, 31195, 9800.

33. Πρῶτα χωρίζουμε τό λάδι ἐξίσου στόν τενεκέ (Τ), στό δοχεῖο τῶν 6 kg* (δ) καί στό δοχεῖο (Δ). Μετά ἀπογεμίζουμε τό Δ ἀπό τό δ καί μεταφέρουμε τό λάδι τῶν 10 kg* τοῦ Δ στό Τ καί τά 2 kg* τοῦ δ στό Δ. Ἡ συνέχεια εὔκολη.

34. Ζυγίζουμε δύο σφαῖρες. Εὔκολα βρίσκεται ἡ ἐλαφρότερη σφαίρα.

35. α) Βάζομε στό ἕνα μέρος τοῦ ζυγοῦ τά 9 kg* καί στό ἄλλο τά (1+3) kg* = 4 kg* καί τόν ἰσορροποῦμε μέ ἕνα βάρος. Τό βάρος αὐτό εἶναι 5 kg*. β), γ) Ὁμοίως.

36. Χωρίζουμε τίς σφαῖρες σέ 3 τριάδες καί συνεχίζουμε ὅπως στήν ἄσκ. 34.

37. Α = 64Γ, Β = 65Γ. Ἡ διαφορά βρίσκεται στήν ἀτέλεια τῶν ὀργάνων καί στή μονάδα μετρήσεως πού θά πάρουμε. Σχήματα μέ μονάδα μετρήσεως 2 cm ἤ 3 cm θά δείξουν τή διαφορά καλύτερα.

38. Α = 25Δ, Β = 16Δ, Γ = 9Δ. Ἐμβαδό τοῦ Α = ἐμβαδό τοῦ Β + ἐμβαδό τοῦ Γ.

39. α) 150 δισεκατομμύρια m (150.000.000.000 m).
β) 408,5 τρισεκατομμύρια km (408.500.000.000.000 km).

40. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 33.

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. {10}. 2. {λ, α, ο, ς}.

3. $(A \cap \Gamma) \cap B = (B \cap A) \cap \Gamma = \{2,3,4\}$.

4. α) {3,4}, β) {4}, γ) {4,5}, δ) {4}.

5. {0, 1, 3} 6. {0, 1, 3, 7}. 7. $\varnothing$.

8. $(A \cap \Gamma) \cap B = (B \cap \Gamma) \cap A = \varnothing$.

9. Σχηματίζονται ἕξι ζεύγη κατακορυφήν γωνιῶν.

10. Οἱ ἄλλες εἶναι κατά σειρά 113°, 67°, 113°.

11. $\widehat{A'B'} = \widehat{B'\Gamma'} = \widehat{AB}$. 12. ΑΒ = Α'Β'.

13. Ἄν τό Α εἶναι στή διχοτόμο τῆς $x\widehat{O}\psi$, τότε ΑΒ = ΑΓ, ἀλλιῶς ΑΒ ≠ ΑΓ.

14. ΑΓ < ΑΔ (γιατί ΒΓ < ΒΔ). 15. α) ΓΑ = ΓΒ, β) ΔΑ ≠ ΔΒ.

16. ΓΑ = ΓΒ. 17.–18.–19. Τέμνονται στό ἴδιο σημεῖο.

20. α) ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ, β) Ἰσοσκελή. 21. Κάθε μία ἔχει μέτρο 45°.

22. α) Ἰσοσκελές, β) $\widehat{A} = \widehat{B}$.

23. Ὀρθογώνιο στό Γ ($\widehat{\Gamma} = 1$ ὀρθή).

24. α) Ὀρθογώνιο στό Α, β) διάμεσος.

25. Ὁ (Ο,2 cm) καί ἡ ε δέν ἔχουν κοινό σημεῖο. Ὁ (Ο,3 cm) καί ἡ ε ἐφάπτονται.

26. α) ΓΑ = ΓΒ, β) $O\widehat{\Gamma}A = O\widehat{\Gamma}B$. Ἰσχύουν γιά ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ κύκλου.

27. α) ΓΑ = ΓΒ = ΔΑ = ΔΒ. β) Καθένα εἶναι μεσοκάθετο τοῦ ἄλλου.

28. Τό κέντρο εἶναι τό μέσο τοῦ ΑΒ.

29. Χωρίστε το πρῶτα σέ 2 καί καθένα πάλι σέ 2.

30. ΒΓ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

31. Παράλληλες. 32. Α'Β' = Β'Γ' = Γ'Δ'.

33. Α'Β' = Β'Γ'.

34. ΓΓ' = ΒΒ'.

35. α) Παραλληλόγραμμο, β) ΑΒ = ΓΔ.

36. Ὀρθογώνιο.

37. Τετράγωνο.

38. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν § 6.15.

39. {κ, π, τ}.

40. Πάρτε (ΒΓ) = 6,5 cm. Μέ πλευρά τή ΒΓ καί κορυφές Β,Γ νά σχηματίσετε γωνίες 60°, 75° ἀντιστοίχως στό ἴδιο μέρος τῆς ΒΓ. Οἱ ἄλλες πλευρές τέμνονται στό Α.

41. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 3 § 6.11. Ὀρθογώνιο στό Γ.

42. Σχηματίστε $\widehat{A} = 65°$ καί στίς πλευρές της πάρτε (ΑΒ) = 4 cm, (ΑΓ) = 5,5 cm.

43. Ὀρθογώνιο.

44. Ρόμβος.

45. ΑΒ = ΑΓ.

46. α) Ἀπό τό Γ, β) Ἐφάπτεται.

47. α) Οἱ ἀποστάσεις ἴσες. β) Βρίσκεται στή διχοτόμο τῆς $x\widehat{O}y$.

48. Γιατί ἀπέχει ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τίς πλευρές.

49. Ἐφάπτεται καί στίς 3 πλευρές.

50. Γιατί ΟΒ = ΟΓ.

51. Γιατί ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

52. α) ΑΔ = ΒΓ, β) ΖΑ = ΖΒ, ΖΓ = ΖΔ.

53. α) ὀρθές. β) Τραπέζιο.

54. Γιατί ΑΟ διάκεντρος καί ΒΓ κοινή χορδή.

55. Τά Γ,Δ,Ε,Ζ βρίσκονται στή μεσοκάθετο τοῦ ΒΓ.

56. Τά κέντρα τους εἶναι στή μεσοπαράλληλο τῆς ταινίας. Οἱ ἀκτίνες τους ἴσες μέ τό μισό τοῦ πλάτους τῆς ταινίας.

57. Στηριχτεῖτε στήν ἄσκηση 54.

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. {τ,δ,θ,π,β,φ,κ,γ,x}.
2. {κ, α, λ, μ, ι}.
3. {1,3,5,6,7,8,9,10}.
4. {κ,ε,χ,ρ,ι,μ,π,α,ν,τ,ο}.
5. Χ = {5,6}.
6. Χ = {2, 11, 12}.
7. Χ = {α, β, γ, δ}.
8. 26, 27, 62, 67, 72, 76 – Ἄθροισμα 330.
9. $y = 5$, $\omega = 9$, $\varphi = 14$.
10. 14923 δρχ.
12. Ναί. Ἄθροισμα ὁριζόντια, κατακόρυφα, διαγώνια τό 38.
13. α) =, β) <, γ) =, δ) =, ε) =.
14. α) 106, β) 121, γ) 260, δ) 490.
15. α) 281, β) 1673, γ) 467.
16. Ὁ μεσαῖος εἶναι τό μισό τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκραίων.
17. Τό ἴδιο ἄθροισμα.
18. $\alpha = 2$, $\beta = 6$, $\delta = 9$, $\gamma = 9$.

19. Πίνακας νικῶν $N = (4\ 6\ 7)$, ἰσοπαλιῶν $I = (2\ 2\ 1)$, ἡττῶν $H = (3\ 1\ 1)$. $N+I+H = (9\ 9\ 9)$. 9 ἀγῶνες.

20. Πρώτη ἑβδομάδα — Δεύτερη ἑβδομάδα — Ἄθροισμα πινάκων

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 \\ 40 & 25 & 25 \\ 60 & 20 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 & 25 & 24 \\ 45 & 35 & 40 \\ 28 & 42 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 & 55 & 44 \\ 85 & 60 & 65 \\ 88 & 62 & 65 \end{pmatrix}$$

Ἀπό τόν τελευταῖο πίνακα βρίσκομε τίς προμήθειες κάθε ἐμπόρου.

21. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση καταρτίζοντας πίνακα γιά κάθε ἀγώνισμα. Τό Α' σχολεῖο εἶχε 4 α' νίκες, 5 β' νίκες καί 4 γ' νίκες, τό Β' σχολεῖο εἶχε 4 α', 4 β' καί 3 γ' νίκες, τό Γ' σχολεῖο εἶχε 2 α', 2 β' καί 4 γ' νίκες, τό Δ' σχολεῖο εἶχε 3 α' καί 3 β' καί 2 γ' νίκες.

22. α) καί β) Ἄθροισμα ὁ πίνακας $\begin{pmatrix} 26 & 33 & 41 \\ 50 & 19 & 32 \end{pmatrix}$. γ) Γιατί στήν πρόσθεση φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα.

23. α) $y = 7$, $x = 3$, $\omega = 4$, β) $\omega = 10$, $x = 12$, $y = 5$.

24. i) ΑΓ ἤ ΓΕ, ii) ΔΖ, iii) ΓΖ.

25. i) ΑΕ, ii) ΒΖ, iii) ΑΖ.

26. Σχηματίζουμε τό τετράπλευρο καί μετατοπίζουμε τίς πλευρές του σέ μιά ἡμιευθεία ὥστε νά γίνουν διαδοχικές.

27. Ὅπως στήν ἄσκηση 26.

28. i) $A\widehat{O}\Gamma$, ii) $\Delta\widehat{O}Z$, iii) $B\widehat{O}Z$.

29. i) $A\widehat{O}E$, ii) $A\widehat{O}E$ ἤ $B\widehat{O}Z$.

30. i) $\widehat{AB\Gamma}$ ἤ $\widehat{\Gamma\Delta E}$, ii) $\widehat{A\Gamma\Delta}$, iii) $\widehat{ABE}$.

32. α) 1,25 m, β) 125 cm.

33. 782,5 cm.

34. 4,20 m.

35. 132° 53′ 5″.

36. α) 12 h 2 min, β) 3 h 22 min μετά τό μεσημέρι.

37. α) 8 h 10 min, β) 8 h 55 min, δηλαδή 9 παρά 5.

38. $\widehat{x} = 30°$, $\widehat{\psi} = 80°$, $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 70°$.

39. $\widehat{x} = \widehat{\upsilon} = 56°$, $\widehat{\psi} = \widehat{\omega} = \widehat{\varphi} = 124°$.

40. Οἱ ὀξεῖες 42°, οἱ ἀμβλεῖες 138°.

41. $X = \{\alpha\}$ καί $\Psi = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ ἤ $X = \{\alpha,\beta\}$ καί $\Psi = \{\alpha,\gamma\}$ ἤ $X = \{\alpha,\gamma\}$ καί $\Psi = \{\alpha,\beta\}$ ἤ $X = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $\Psi = \{\alpha\}$.

42. Ἡ κατασκευή του θά γίνει ὅπως μάθαμε στό 6° κεφάλαιο, ἀφοῦ πρῶτα βροῦμε τά μήκη τῶν πλευρῶν του. Ἡ περίμετρος ἔχει μῆκος 14,6 cm.

43. 191.

44. 255 cm.

45. $1\frac{4}{5}$ ὀρθῆς γωνίας.

46. α) 16, β) 13, γ) 9.

47. Ἀπό τό σημεῖο Α νά φέρετε εὐθεία παράλληλη πρός τίς εὐθεῖες ε καί η. Χρησιμοποιεῖστε τίς ἰδιότητες πού μάθατε στήν § 7.13. Ἡ γωνία Α ἔχει μέτρο 98° 7′.

48. Θά τελείωναν 1 ἡμέρα νωρίτερα.

49. Καταρτίζουμε πρῶτα πίνακες μέ τά προιόντα πού διέθεσε κάθε ὑπάλληλος. Ἀπό τό ἄθροισμα τῶν πινάκων καταρτίζουμε νέους πίνακες μέ τά εἴδη πού διέθεσε τό κατάστημα κάθε μήνα. Διέθεσε 20 τηλεοράσεις, 30 ραδιόφωνα, 5 πλυντήρια.

50. α) 4, β) 2, γ) 1/4.

51. Βρεῖτε πρῶτα τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς διαγωνίου πού εἶναι συμπληρωμένη σ' ὅλα τά τετράγωνα. Αὐτό εἶναι 135. Μετά βρεῖτε ποιά γραμμή, στήλη, ἤ διαγώνιος εἶναι συμπληρωμένη σ' ὅλα τά τετράγωνα ἐκτός ἀπό ἕνα καί συμπληρῶστε το. Συνεχίστε μέ τόν ἴδιο τρόπο.

52. 36,7 m.

8ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. B' = {α, η, ι, υ, ω}.
2. B' = {γ, χ, β, φ, δ, θ}.
3. B' = ∅.
4. Τοῦ {3,5} τό {7,9}, τοῦ {3,7} τό {5,9}, τοῦ {3,9} τό {5,7} κ.λ.π.
5. α) $x = 1$, β) $x = 12$, γ) $x = 0$, δ) $x = 11$.
6. α) $x = 42$, β) $x = 14$, γ) $x = 410$, δ) $x = 1141$.
7. α) $x = 28$, β) $x = 52$, γ) $x = 45$, δ) $x = 0$.
8. Ἄν x ὁ ἀριθμός θά ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x + 39 = 82$, ὁ ἀριθμός 43.
9. 325.
10. α) $x = 7-3$, β) $y = 13-5$, γ) $y = x+8$, δ) $x = 21-9$.
11. 370.

12.—13.—14. Ἐφαρμόζουμε τίς ἰδιότητες τῆς § 8.5 καί τίς ἐφαρμογές 2, 3 καί 4.

15. α) καί β) Ψευδής, γ) Ἀληθής.
16. 1314.
17. α) 973, β) 2001, γ) 130.
18. (Βλέπε ἐφαρ. 1). α) 28, β) 29.
19. 6055 τοῦβλα.
20.

5	13	6
9	8	7
10	3	11

11	16	9
10	12	14
15	8	13

15	20	13
14	16	18
19	12	17

21. α) 125, β) 1197, γ) 502, δ) 99, ε) 78.
22. ὁ β' 37858, ὁ γ' 113330 καί ὁ δ' 168340.
23. α) $\alpha = 4$, $\beta = 9$, $\gamma = 8$, $\delta = 6$, $\varepsilon = 2$, β) $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $\gamma = 4$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 9$, γ) $\alpha = 7$, $\beta = 5$, $\gamma = 8$, $\delta = 6$, $\varepsilon = 6$.
24. α) AB, β) BΓ, γ) ΓZ. 25. α) EZ, β) BE, γ) ΓZ, δ) AΔ.
26. Μετατοπίζουμε τό τμῆμα πού ἀφαιρεῖται σ' ἕνα ἴσο του τμῆμα τοῦ μειωτέου.

27.—28. Ἐργαστεῖτε ὅπως στίς ἀσκήσεις 24 καί 25.

29. Μετατοπίστε τή $\widehat{\Gamma}$ στήν ἴση της $\widehat{AB\Delta}$ μέσα στή $\widehat{B}$ ὅπως μάθατε στήν § 4.25.
30. Ἐργαστεῖτε ὅπως στίς ἀσκήσεις 24 καί 25.
31. Πίνακας διαφορᾶς (24 28 35). 24 πουλόβερ, 28 πουκάμισα, 35 γραβάτες.

32. $\begin{pmatrix} 40 & 8 & 3 \\ 30 & 33 & 9 \end{pmatrix}$.

33. 7 cm 2 mm.

34. 10,8 cm ἤ 10 cm 8 mm.

35. 3 t 445 kg*.

36. Οἱ ἀμβλεῖες 142° 25′ καί οἱ ὀξεῖες 37° 35′.

37. Συμπληρωματική $\frac{7}{18}$ ὀρθῆς ἤ 35°, παραπληρωματική $\frac{25}{18}$ ὀρθῆς ἤ 125°.

38. Βλέπετε παραδείγματα § 8.5. i) 943, ii) 662, iii) 455, iv) 71, v) 951.

39. 220.

40. α) $x = 10$, β) $x = 4$, γ) $x = 90$.

41. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 3 \\ \frac{3}{6} & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

42. 6,40.

43. 62° 41′ 20″

44. $\widehat{\Gamma} = 1\frac{3}{10}$ ὀρθῆς.

45. $\widehat{A} = 82° \ 23'$.

46. 93° 10′.

47. Πίνακας διαφορᾶς $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Δέν προβιβάστηκαν: Α′ τάξη 3 ἀγόρια καί 1 κορίτσι, Β′ τάξη 5 ἀγόρια καί 3 κορίτσια, Γ′ τάξη 3 ἀγόρια καί 3 κορίτσια.

48. i) 60, ii) 278.

49. α) $x = 100$, β) $x = 17$.

50. α) 111 β) 132.

51. α) 89, β) 78. γ) 114.

53. Ἐξετάστε πότε γίνονται οἱ ἀφαιρέσεις $(\alpha+\gamma)-\beta$ καί $\beta-\gamma$, $\alpha = 9$, $\beta = 6$, $\gamma = 2$.

54. Φέρτε τήν ἡμιευθεία Αx παράλληλη πρός τήν ἡμιευθείαν Βε. $\widehat{A} = 85° \ 20'$.

55. 23 Ἕλληνες, 15 ξένοι.

56. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκ. 54· $\widehat{A} = 68°$.

57. $\widehat{B} = 78° \ 5'$.

58.

16	9	14
11	13	15
12	17	10

Βρεῖτε καί μόνοι σας ἄλλη θέση.

59.

9	2	7
4	6	8
5	10	3

60. 45°

61. 90°.

62. 108.

63. Βρεῖτε πρῶτα τό μέτρο τοῦ ΑΒ καί μετά τοῦ ΑΜ. $(OM) = \frac{5+9}{2}$ cm $= 7$ cm.

Γενικά $(OM) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

64.—65. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 63. Καί στίς δύο ἀσκήσεις βρίσκουμε $\frac{\alpha° + \beta°}{2}$

66. $\widehat{x} = 95°$, $\widehat{\omega} = 55°$, $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi} = 30°$.

9ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 2 § 6.11 καί στήν § 9.5.

2. ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ = ΒΓ.

3. Οἱ κάθετες στά σημεῖα Β, Γ, Δ.

4.—5. Τέμνονται στό ἴδιο σημεῖο.

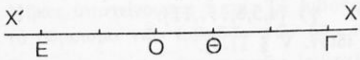
6. Βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

7. α) Βρεῖτε τό συμμετρικό τῆς κορυφῆς Α. β) Ὁμοίως τῶν κορυφῶν Β καί Γ.

8. Βρεῖτε τά συμμετρικά τοῦ Ο, ἑνός σημείου Α τῆς Οx καί ἑνός σημείου Β τῆς Οψ.

9. α) Βρεῖτε τό συμμετρικό τῆς Α. β) Ὁμοίως τῆς Γ. γ) Ὁμοίως τῶν Β καί Γ.
10. Βρίσκονται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ.
11. α) ΜΒ = ΜΓ, β) $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$. γ) Τό ἴδιο τό ΑΒΓ.
12. Τά τρία ὕψη του.
13. Οἱ διαγώνιοί του.
17. Α, Χ, Υ, Π, Φ κ.λ.π.
18. Ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.
19. Ἡ διχοτόμος τῆς ἐπίκεντρης γωνίας.
20. Τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνει τήν ε ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.
21. α) ΚΑ = ΚΟ = ΚΒ, β) Εἶναι συνέπεια τοῦ α).
22. Στηριχτεῖτε στό συμπέρασμα τῆς § 9.1.
23. Ἄν ΟΖ ἡ διχοτόμος τῆς $\psi'\widehat{O}\psi$, δικαιολογῆστε ὅτι εἶναι $x'\widehat{O}Z = Z\widehat{O}x$. Μετά στηριχτεῖτε στήν § 6.5.
24. Ἡ εὐθεία πού ὁρίζεται ἀπό τό Ο καί τό σημεῖο τομῆς τῶν χορδῶν. Ἄν οἱ χορδές εἶναι παράλληλες, τότε οἱ ἄξονες συμμετρίας εἶναι δύο.
25. $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 50^\circ$.
26. α) $B\widehat{O}\Gamma = 109^\circ$. β) Εἶναι 90° σύν τό μισό τῆς $\widehat{A}$.
27. Βρεῖτε τό συμμετρικό Β′ τοῦ σημείου Β. ΑΔ′ = Δ′Ε′ = Ε′Β′.
28. α) Ὀρθογώνια στό Δ καί ἰσοσκελή, β) ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ, γ) τό Β καί τό Γ.
29. Τό μέτρο εἶναι 3.
30. Σημειῶστε μέ Δ τό σημεῖο τομῆς τῆς ΑΓ καί τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΒΓ. $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = A\widehat{B}\Delta$.
31.–32. Στηριχτεῖτε στά συμπεράσματα τῆς § 9.6.

10ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Στή μία ὁμάδα τά: $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma O}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ καί στήν ἄλλη τά: $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta O}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$.
2. +1, +2, +6 καί −2, −5, −1, −5, −3, −3, −2.
3. $\overline{O\Gamma} = +2$, $\overline{\Delta B} = +1$, $\overline{OB} = -2$, $\overline{\Delta A} = +4$, $\overline{AB} = -3$, $\overline{E\Delta} = -6$.
4. 

Εἰκόνα εἰσόδου στήν Ε′ Δημοτικοῦ τό Ε μέ $\overline{OE} = -2$. Εἰκόνα ἀποφοιτήσεως ἀπό τό Γυμνάσιο τό Γ, ὅπου $\overline{O\Gamma} = +3$.
5. α) −6, β) +4, γ) +11, δ) −21, ε) +12, ς) −14, ζ) −835, η) 0.
6. Τό πρῶτο καί τό δεύτερο εἶναι μέ ἀθροίσματα 0 καί +3. Τό τρίτο δέν εἶναι.
7. $\begin{pmatrix} +6 & -12 & +7 \\ +4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.
8. Νά παραστήσετε τό ἀρχικό βάθος καί τίς μεταβολές τοῦ βάθους τοῦ ὑποβρυχίου μέ ἀκεραίους. Βρίσκεται στό −101 (δηλαδή σέ βάθος 101 m).
9. −43.
10. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 8. 1386 δρχ.
11. α) +14, β) −352, γ) +254, δ) +186, ε) +119, ς) −254.
12. α) +18, β) +591.
13. α) −369, β) −278, γ) −36, δ) −44.
14. α) x = −3, β) x = +25, γ) x = +73.

15. α) x = –29, β) x = –50, γ) x = –33.

16. $\begin{pmatrix} -57 & +43 \\ 0 & +99 \end{pmatrix}$.

17. Ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 τῆς § 7.4.

18. i) –6, ii) +21, iii) –37, iv) –113.

19. {–4, –3, –2, . . ., 4}.

20. α) {–9, –7, –5, –3, –1, 0, 1, 4, 5, +7}, β) γράψτε το μόνοι σας.

21. α) 0, β) –14.

22. Τοῦ x: {–6, –5, –4, –3, –2} καί τοῦ y: {–5, –4, –3, –2, –1, 0}.

23. –200.

24. –133.

25. α) 526, β) 2459.

26. Στηριχτῆτε στίς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καί τῆς ἀφαιρέσεως.

27. i) x = –62, ii) x = 0, iii) x = +22, iv) x = –21.

28. α) A = –65, B = –18, Γ = –27, Δ = 20, β) 0.

29. Τοῦ x τό {–2, –1, 0, 1,2}, τοῦ y τό {–1, 0, 1, 2, 3}, τοῦ ω τό {–1,0,1,2}.

30. –3 καί –1.

31. y = 11, ω = –19, φ = 30.

32. i) x = 1, ii) x = –21.

33. Ὑπολογίστε πρῶτα τίς τιμές τῶν Α,Β,Γ. Τιμή τοῦ Α–Β+Γ τό –25.

34. –47.

35. $\overline{OM} = -5$.

36. Μία θέση βλέπετε δίπλα

–8	17	12
27	7	–13
2	–3	22

11ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2. α) 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, β) 25, γ) 29, 31.

3. Στό Γ ἀνήκουν οἱ: 64, 81, 100, στό Δ οἱ: 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Ὅλοι οἱ ἄλλοι ἀνήκουν στό σύνολο Β.

4. i) x = 7, ii) x = 3, iii) x = 7.

5. 0,9, 16, 21, 24, 25 (π.χ. 2+8 = 10, ἐνῶ 2 · 8 = 16). Μεγαλύτερο τό 25 (= 5 · 5). Ὁμοίως 0,13, 24, 33, 40, 45, 48, 49. Μεγαλύτερο τό 49 (= 7·7). Παρατηρῆστε ὅτι 10 : 2 = 5, 14 : 2 = 7 καί διατυπῶστε συμπέρασμα.

6. α) Ἀληθής, β) ἀληθής, γ) ψευδής, δ) ἀληθής, ε) ψευδής.

7. α) {0, 1, 2, 3, 4, 5}, β) {0, 1, 2,. . .,6}, γ) {4,5,6,. . .,11}.

8. 7x = 0 (= 7 · 0). Ἄρα x = 0 (βλέπε ἰδιοτ. V § 11.3).

9. Ἐφαρμόστε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα (§ 11.3, IV). α) 360, β) 4473, γ) 196.

10. Βρεῖτε τήν πλευρά του. Ἐμβαδό: 36 cm² ἤ 3600 mm².

11. 1 125 000 δρχ.

12. Βρεῖτε τό ἐμβαδό κάθε ἕδρας. 11700 cm² χαρτί.

13. α) Βρεῖτε τούς τετράγωνους οἱ ὁποῖοι δέν εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν 64. {0, 1, 2, . . .,8}, β) {5, 6, 7, 8, . . .}, γ) {4, 5, 6, 7, 8, 9}.

14. α) {0, 1, 2, 3}, β) {8, 9, 10, . . .}.

15. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 § 11.5. α) 228, β) 212, γ) 42.

16. α) 40, β) 118.

17. α) 44, β) 0.

18. α) 120 m³, β) 120 000 l.

19. 72 m².

20. α) 4 810, β) 65 700, γ) 212 000.

21. α) 4 000, β) 1 000, γ) 620 000, δ) 21 000.

22. α) 710, β) 1 600, γ) 6 000, δ) 6 400, ε) 22 200.

23. 5.31 m.

24. Γινόμενα : $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 20 \\ 10 & 15 & 25 \end{pmatrix}$. Ἄθροισμα : $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 20 \\ 19 & 21 & 28 \end{pmatrix}$.

25. 126 km. **26.** 18360 δρχ. **27.** 358750 δρχ.

28. 110,25 cm². **29.** 112°. **30.** 13 min 20 sec.

31. 889,75 m². **32.** (10,5 6,6 3 45 21). **33.** 26 m² 60 dm².

34. α) 7, β) 8. **35.** α) −12, β) −35, γ) +24, δ) +42.

36. α) +10, β) +24, γ) +90. **37.** i) −56, ii) −40, iii) −120.

38. i) +9, ii) +16, iii) +1, iv) +49, v) +25.

39. i) −27, ii) −1, iii) −64, iv) −128, v) −125.

40. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν § 11.13 καί τά παραδ. 1, 2. α) −8, β) +29, γ) +55.

41. α) −35, β) +36, γ) −60.

42. α) +18, β) −20. Ἐπιμεριστική ἰδιότητα.

43. x = 0. **44.** α) =, β) =, γ) >, δ) =.

45. α = 13, β = 1, γ = 1 ἤ α = 1, β = 13, γ = 1 ἤ α = 1, β = 1, γ = 13.

46. Ὁ ἕνας ἀπό τούς α,β,γ εἶναι 9 καί οἱ δύο ἄλλοι 1 ἤ οἱ δύο εἶναι 3 καί ὁ ἄλλος 1.

47. α) 71, β) 186, γ) 183.

48. Ἐκφράστε τίς διαστάσεις μέ τήν ἴδια μονάδα. 640 dm³. **49.** 57,6 kg*.

50. α) 81, 81, 169, 12100, β) 16900, 1 210 000, 0.

51. α) +625, +625, +243, −243, β) +343, −343, +36, −36.

52. 10^6, 10^9, 10^{12}.

53. α) 2 000 000 ἤ $2 \cdot 10^6$, β) 72, γ) 18, δ) 7 700 000 ἤ $77 \cdot 10^5$, ε) 62.

54. Τριπλάσια: 3, 9, 12—κύβοι: 1, 27, 64. **55.** 657 (1000 − 343).

56. Ἐργαστῆτε ὅπως στό παρ. 3 § 11.5. α) 2946, β) 242, γ) 127.

57. 343 cm³. **58.** Θά αὐξηθεῖ κατά 700 cm³.

59. Στηριχτῆτε στήν ἰδιότ. III § 11.3.

60. Νά συμβολίσετε μέ α τόν ἄλλο παράγοντα καί νά ἐφαρμόσετε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα. Αὐξάνει κατά 16016.

61. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκ. 13. i) 2, 3, 4, . . ., 8, ii) 7, 8, 9, 10.

62. Νά θέσετε τίς τιμές τῶν γραμμάτων σέ κάθε παράσταση καί νά ἐργαστῆτε ὅπως στήν § 11.13. i) −19, ii) 0, iii) −22.

63. Μῆκος ὑποτείνουσας 5 cm. Τό ἐμβαδό τοῦ τελευταίου τετραγώνου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο πρώτων.

64. Σχηματίστε τούς πίνακες νικῶν, ἰσοπαλιῶν καί ἡττῶν καί βρεῖτε τά γινόμενά τους μέ τούς ἀντίστοιχους βαθμούς. Ἡ Α πῆρε 18β, ἡ Β 19, ἡ Γ 20, ἡ Δ 22β.

65. Βρεῖτε τήν ἐπιφάνεια μιᾶς ἕδρας καί μετά τήν ἀκμή τοῦ κύβου. 64 cm³.

66. Συμβολίστε μέ x τή μικρότερη γωνία. Θά ἔχετε τήν ἐξίσωση: $x + 3 \cdot x + 30° = 180°$. 37° 30′, 142° 30′.

67. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ γωνίες x, φ, $2 \cdot x$ καί $\frac{x}{2}$ ἔχουν ἄθροισμα 180°. x = υ = 45°, ψ = 90°, ω = φ = 22° 30′.

12ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. α) {α, β}, {γ,δ,ε,ζ}. β) {α,β,γ}, {δ}, {ε,ζ}.

2. α) {1,2,3}, {4,5,6}, {7,8,9}, {10,11,12}, β) {1,2,3,4}, {5,6,7,8}, {9,10,11,12}.

3. α) 35, β) 69, γ) 46, δ) 235, ε) 783, ϛ) 7658.

4. Τά διψήφια πολλαπλάσια τοῦ 7 (14,21,28,...,98).

5. α) 156, β) 138. 6. Σωστές οἱ: α), γ), ζ). Λάθος οἱ ἄλλες.

7. α) $x = 9$, β) $x = 48$, γ) $x = 6$, δ) $x = 3$, ε) $x = 9$, ϛ) ἀδύνατη στό $\mathbb{N}$, ζ) $x = 9$, η) $x = 7$, θ) $x = 6$.

8. 11 sec. 9. 720 δρχ.

10. i) $x = 4$, ii) $x = 4$, iii) $x = 9$, iv) $x = 12$.

11. i) 90, ii) 130, iii) 10.

12. Ἐφαρμόστε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα. i) 8, ii) 7, iii) $x \cdot y - x + 2$.

13. i) $15 \cdot \beta - 6$, ii) $12 \cdot \beta + 4$.

14. Στηριχτεῖτε στήν ἰδιότ. (iv) § 12.7. i) 90, ii) 4.

15. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμ. 3, i) 9, ii) 11, iii) 1979, iv) 882.

16. Στηριχτεῖτε στήν § 12.5. Ὅλα τά γινόμενα διαιροῦνται μέ τό 5.

17. i) 99, ii) 74, iii) 590. 18. Ἐπιμεριστική ἰδιότητα. 23.

19. 11. 20. α) -3, β) $+6$, γ) -2. 21. α) -28, β) -3.

22. α) $x = -17$, β) $x = -4$, γ) $x = -55$.

23. α) $+1$, β) -1, γ) -1.

24. Τοποθετεῖστε στή θέση τῶν γραμμάτων τίς τιμές τους. Τιμή $= +8$.

25. Γιά συντομία στηριχτεῖτε στήν § 12.11. α) $\pi = 27$, $\upsilon = 4$, β) $\pi = 8$, $\upsilon = 6$, γ) $\pi = 3$, $\upsilon = 8$, δ) $\pi = 0$, $\upsilon = 16$.

26. Στήν α΄ ἰσότητα 3, στή β΄ 2 καί στή γ΄ 30.

27. α) $\pi = 4$, $\upsilon = 4$, β) $\pi = 10$, $\upsilon = 8$, γ) $\pi = 6$, $\upsilon = 20$, δ) $\pi = 12$, $\upsilon = 8$.

28. α) {0,1,2,3,4,5,6}, β) {0,1,2}, γ) {0,1,2,...,10}. δ) {0,1,2,...,68}.

29. α) {0,1,2,...,8}. β) Σύμφωνα μέ τήν $\alpha = 8 \cdot 9 + \upsilon$ ἔχουμε {72,73,74,...,80}.

30. 990. 31. 15689. 32. α) $x = 6$, β) $x = 2$, γ) $x = 11$.

33. Στηριχτεῖτε στήν ἐφαρμ. 3.

34. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παρ. 4, 546 = 1410 (βάση ἑπτά), 129 = 10000001 (βάση δύο), 2211 (βάση τρία) = 76 = 1001100 (βάση δύο).

35. α) $>$, β) $>$.

36. Ἀποκλείεται ἕνας ἀπ' αὐτούς νά εἶναι διαιρετέος. Ἐξετάστε ποιός μπορεῖ νά εἶναι διαιρέτης. $\Delta = 97$, $\delta = 11$, $\pi = 8$, $\upsilon = 9$.

37. Βρεῖτε πόσα χρήματα θά ἔπαιρναν ἄν εἶχαν καί οἱ δυό τό μεροκάματο τοῦ α΄. Ὁ α΄ ἔκανε 17 καί ὁ β΄ 12 μεροκάματα.

38. 65 m. 39. 15 μῆνες. 40. α) $+21$, β) $+8$, γ) 0.

41. Σωστές οἱ: (iii) καί (v). Λάθος οἱ ἄλλες. 42. $x = 60°$.

43. $x = 20° \ 30'$. 44. 168 ὧρες. 45. 110.

46. 96. 47. $x = 27°$.

48. Στηριχτεῖτε στήν ἰσότητα $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$. $\alpha = 27$.

49. α) τριπλασιάζεται, β) ἀμετάβλητο, γ) διπλασιάζεται.

50. Ἐφαρμόστε τήν ἰσότητα $\Delta = 8 \cdot \pi + \upsilon$, ὅπου $\pi = \upsilon$ καί $\upsilon \in \{0,1,2,...,7\}$.

51. $A = 24°$, $B = 60°$, $\Gamma = 96°$.

52. α) Ὄχι, γιατί $\upsilon > \delta$, β) 21.

53. Τό ἄθροισμα 1320+1320 καλύπτεται ἀπό τίς 250-220 = 30 δρχ. 88 μαθητές.

54. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παρ. 4 § 12.11 καί στά παράδ. 2 καί 3 § 11.5.
784438 = 319Ε5Δ (βάση δώδεκα),
3Δ5Ε6 (βάση δώδεκα) = 10032341 (βάση πέντε) = 234732 (βάση ὀκτώ).

13ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. {11, 22, 33, . . . , 99}.

2. Α = {12, 18, 24, 30, 36, . . . , 96}, Β = {12, 24, 36, . . . , 96}. Β ⊂ Α.

3. Στηριχτεῖτε στήν § 13.2. **4.** Εἶναι ἄρτιοι.

5. {0,2,4,6,8}. **6.** {24, 36, 48}. **7.** ∅.

8. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 3. Τά ψηφία εἶναι κατά σειρά: 8, 0 ἤ 9, 2, 1.

9. Ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση: α = 2 ἤ α = 8.

10. Σέ 0. **11.** ψ = 0, x = 6 ἤ ψ = 5, x = 1.

12. ψ = 0 καί x = 0 ἤ 3 ἤ 6 ἤ 9. ψ = 5 καί x = 1 ἤ 4 ἤ 7.

13. Στηριχτεῖτε στήν § 13.2.

14. Γράφονται 6 ἀριθμοί μέ τελευταῖο ψηφίο τό 2 καί 6 μέ τελευταῖο ψηφίο τό 4.

15. Στηριχτεῖτε στό κριτήριο διαιρετότητας μέ τό 9.

16. i) $2^3 \cdot 3^2$, ii) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$, iii) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$, iv) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, v) $2^4 \cdot 3^2$.

17. Ἴσοι. **18.** i) 504, ii) 450, iii) 16335, iv) 20384.

19. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παρ. 2. {0,504, 1008, 1512,. . .}.

20. {0}. **21.** i) 30, ii) 720, iii) 144. **22.** i) 1008, ii) 18792.

23. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 3. 360 min – ὁ α' 45, ὁ β' 40, ὁ γ' 36 γύρους.

24. Ὅπως στήν ἐφαρ. 3 . 480 κότες.

25. i) {1,2,3,6}, ii) {1,3,5,15}, iii) {1,2,3,5,6,10,15,30}, iv) {1}, v) {1,2,3,4,6,12}

26. Τούς διαιρέτες τοῦ 24 (§ 13.9).

27. i) 12, ii) 4, iii) 2, iv) 15.

28. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παρ. 3.

29. Ὁμοίως. **30.** 120. **31.** 6.

32. Στηριχτεῖτε στήν § 13.2.

33. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 1 τῆς § 13.2 καί τήν ἐφαρ. 3 τῆς § 13.4.

34. Τό τελευταῖο ψηφίο εἶναι 0 ἤ 5. Ἐργαστεῖτε μετά ὅπως στήν ἐφαρ. 3 τῆς § 13.4.

35. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 3 τῆς § 13.6. 360.

36. Δικαιολογῆστε ὅτι οἱ ἀριθμοί 143–13 καί 190-8 ἔχουν κοινό διαιρέτη τόν α.
α = 26.

37. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδ. 2 τῆς § 13.11. 29 ἀνθοδέσμες. Σέ κάθε ἀνθοδέσμη 2 τριαντάφυλλα, 5 γαρύφαλλα, 7 κρίνους.

38. Ἐξαγόμενα ἴσα μέ 432 καί 155925 ἀντίστοιχα.

39. Στηριχτεῖτε στήν προηγούμενη ἄσκηση. 24.

40 Οἱ ἀριθμοί εἶναι 39 καί 56 καί Ε.Κ.Π. τό $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$.

41. Μετά 3 βήματα τοῦ ψηλοῦ καί 4 τοῦ κοντοῦ. 240 cm. **42.** 31.

43. Στηριχτεῖτε στήν § 13.9 καί στή Δ = δπ+υ. {35,91,147,203, . . .}.

44. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 3 τῆς § 13.6 καί προσθέστε 7. 727 πρόβατα.

45. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρ. 3 τῆς § 13.6. 15 cm. 40 κύβοι.

46. Βρεῖτε τά κοινά πολλαπλάσια τῶν 12 καί 15 μεταξύ 400 καί 500 καί δικαιολογῆστε ποιό ἀπ' αὐτά, ἄν διαιρεθεῖ μέ τό 9, ἀφήνει ὑπόλοιπο 6.

14ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. α) 40 λεπτά, β) 50 gr*, γ) 20 mm², δ) 15 δρχ.

2. α) 20 cm², β) 60 cm², γ) 50 min.

3. 156. 4. Ἴσα μέ μῆκος 6 cm.

5. α) (ΑΓ) = 3 cm, β) (ΑΔ) = 8 cm, γ) (ΑΕ) = 2 dm.

6. α) $x = 12$, β) $x = 20$, γ) $x = 1$, δ) $x = 5$.

7. α) $\frac{2}{3}$, β) $\frac{17}{7}$, γ) $\frac{8}{25}$, δ) $\frac{1}{3}$, ε) $\frac{2}{3}$, ϛ) $\frac{24}{7}$, ζ) $\frac{5}{8}$.

8. α) $\frac{1}{14}$, β) 3, γ) $\frac{1}{5}$, δ) $\frac{8}{27}$, ε) $\frac{1}{2}$.

9. α) $\frac{7}{21}$, β) $\frac{10}{30}$, γ) $\frac{18}{54}$, δ) $\frac{5}{15}$.

10. α) $\frac{360}{45}$, β) $\frac{540}{45}$, γ) $\frac{1575}{45}$, δ) $\frac{3015}{45}$.

11. α) $x = \frac{11}{13}$, β) $x = \frac{1}{5}$, γ) $x = \frac{15}{17}$, δ) $x = \frac{12}{7}$, ε) $x = 0$.

12. α) $x = \frac{11}{3}$, β) $x = \frac{3}{2}$, γ) $x = 2$, δ) $x = 0$.

13. α) $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, β) $\frac{20}{24}$, $\frac{21}{24}$, γ) $\frac{6}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{21}{30}$, δ) $\frac{9}{21}$, $\frac{7}{21}$, $\frac{7}{21}$, ε) $\frac{21}{36}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{22}{36}$.

14. α) $\frac{56}{100}$, $\frac{55}{100}$, $\frac{340}{100}$, β) $\frac{18}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{12}{20}$, γ) $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{8}$, δ) $\frac{100}{1440}$, $\frac{105}{1440}$, $\frac{108}{1440}$, ε) $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{12}$.

15. α) $<$, β) $=$, γ) $<$, δ) $>$.

16. α) $=$, β) $<$, γ) $>$, δ) $>$.

17. α) $1\frac{1}{7}$, β) $5\frac{1}{10}$, γ) $12\frac{1}{30}$.

18. α) $19\frac{7}{8}$, β) $3\frac{13}{15}$

19. Ἐργαστεῖτε ὅπως στό παράδ. 2. α) $1\frac{7}{12}$ h, β) $11\frac{1}{10}$ m, γ) $8\frac{17}{20}$ kg*.

20. Βρεῖτε τά ἴσα τους κλάσματα. $\frac{8}{20}$ καί $\frac{14}{18}$ ἀντιστοίχως.

21. α) $\frac{1}{5}$, β) $8\frac{7}{20}$, γ) $11\frac{5}{6}$, δ) $20\frac{7}{8}$.

22. α) $3\frac{2}{5}$, β) $6\frac{1}{10}$, γ) $7\frac{22}{63}$.

23. α) $13\frac{5}{12}$, β) $19\frac{7}{12}$, γ) $2\frac{9}{10}$.

24. $5\frac{1}{28}$.

25. Τά $\frac{3}{10}$.

26. $\frac{22}{63}$.

27. $4\frac{2}{3}$.

28. α) ἡ συμπληρωματική $\frac{4}{9}$ ὀρθ. καί ἡ παραπληρωματική $1\frac{4}{9}$ ὀρθ., β) $\frac{8}{9}$ ὀρθ.

29. α) 6, β) $3\frac{1}{3}$, γ) $1\frac{1}{3}$, δ) $1\frac{1}{20}$.

30. α) $11\frac{1}{4}$, β) 22, γ) $\frac{5}{6}$, δ) $48\frac{1}{6}$.

31. α) $14\frac{2}{3}$, β) 6, γ) 13.

32. α) 1, β) $\frac{7}{11}$, γ) $\frac{12}{31}$, δ) $52\frac{8}{21}$.

33. Ἐφαρμόστε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα: α) $\frac{3}{8}$, β) $1\frac{1}{5}$, γ) $4\frac{8}{15}$.

34. Ὁμοίως : α) $\frac{17}{300}$, β) $2\frac{1}{8}$, γ) $45\frac{2}{3}$.

35. $39\frac{3}{16}$ cm³.

36. α) $\frac{4}{53}$, β) $\frac{1}{4}$, γ) $11\frac{2}{3}$, δ) $\frac{3}{10}$, ε) $1\frac{3}{8}$, ϛ) $3\frac{3}{7}$, ζ) $5\frac{10}{33}$.

37. α) $2\frac{9}{11}$, β) $4\frac{1}{7}$, γ) $2\frac{13}{40}$.

38. α) $x = 10$, β) $x = 56$, γ) $x = \frac{3}{4}$, δ) $x = \frac{4}{15}$.

39. α) $\frac{4}{11}$, β) $\frac{3}{5}$.

40. 15 m.

41. α) $2\frac{3}{10}$, β) $17\frac{26}{45}$.

42. Εἶναι κατά σειρά ἴσα μέ τά : $\frac{15}{4}$, $\frac{32}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{21}{10}$, $\frac{14}{33}$.

43. α) $7\frac{17}{42}$, β) $113\frac{17}{30}$.

44. $\frac{-3}{4} = \frac{-9}{12}$ (Βρεῖτε κι ἄλλα).

45. $\frac{-4}{18}$, $\frac{2}{-9}$, $\frac{-6}{27}$.

46. α), β), γ) ἀληθεῖς. Ὁ δ) ψευδής.

47. $-\frac{5}{6}=\frac{-15}{18}=-\frac{10}{12}$, $+\frac{7}{4}=\frac{21}{12}=\frac{+14}{8}$, $-2=\frac{-14}{7}$.

48. α) 42,672941, β) 0,222. . ., γ) 3,25.

49. 7,8 m.

50. α) 21, β) 2600,09.

51. 15,6 m.

52. 22,11 dm.

53. α) 6 min, β) 660 sec.

54. α) 24′, β) 200 kg*, γ) 800 gr*.

55. α) 300°, β) 40°, γ) 80 λεπτά, δ) 35° 25′.

56. α) x = 10 m, β) x° = 60°, γ) x = 16 kg*.

57. α) x = 7 ἡμέρ., β) x = 4 h.

58. α) 6, β) 12, γ) 6,25.

59. α) 8, β) $1\frac{11}{13}$, γ) $2\frac{4}{5}$, δ) $\frac{80}{81}$.

60. α) $1\frac{17}{19}$, β) $\frac{9}{40}$, γ) $1\frac{1}{3}$.

61. α) x = 1, β) $x=\frac{10}{3}$, γ) x = 2,05, δ) x = 4, ε) x = 4,5

62. α) $x=\frac{9}{22}$, β) $x=\frac{10}{33}$, γ) x = 5.

63. α) $3\frac{1}{4}$, β) $6\frac{1}{4}$, γ) 25,9, δ) $\frac{4}{99}$, ε) $12\frac{1}{4}$.

64. α) $1\frac{11}{120}$, β) 15,825.

65. $21\frac{25}{64}$ m².

66. 12,167 cm³.

67. α) 45 cm², β) 61,6 cm².

68. $3\frac{23}{26}$ dm.

69. 50 *l*.

70. Τά $\frac{20}{20}+\frac{7}{20}=\frac{27}{20}$ κάνουν 7200 δρχ. Ἡ ἀξία του 5200 δρχ.

71. 338 δρχ.

72. 81 δρχ.

73. Ἡ ταχύτητα τῆς α′ ἁμαξοστοιχίας εἶναι 42 km/h. Ἡ β′ ἁμαξ. διανύει τά 175 km σέ $3\frac{1}{2}$ h. Ταχύτητα β′ ἁμαξ. 50 km/h.

74. Βρεῖτε τό ἁλάτι πού περιέχουν τά 40 kg*. Παραστῆστε μέ x ὅλο τό μίγμα. Θά ἔχετε τήν ἐξίσωση $x\cdot\frac{1}{50}=2$. 60 kg* καθαρό νερό.

75. Βρεῖτε πρῶτα τά $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{6}{15}$ τοῦ ὑφάσματος. Πῆρε 56628 δρχ.

76. Τό ἡμερομίσθιο τοῦ τεχνίτη εἶναι $\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ τοῦ ἡμερομίσθιου τοῦ βοηθοῦ.

Βρεῖτε τά 26 ἡμερ. τοῦ τεχνίτη πόσα ἡμερομίσθια τοῦ βοηθοῦ κάνουν. Ἡμερομίσθιο βοηθοῦ 360 δρχ. καί τεχνίτη 600 δρχ.

77. Βρεῖτε πρῶτα τί μέρος τῶν παιδιῶν πέρασε μόνο γρίππη καί τί μέρος μόνο ἰλαρά.

Τά $\frac{7}{20}$ τῶν παιδιῶν πέρασαν καί τίς δύο ἀρρώστειες.

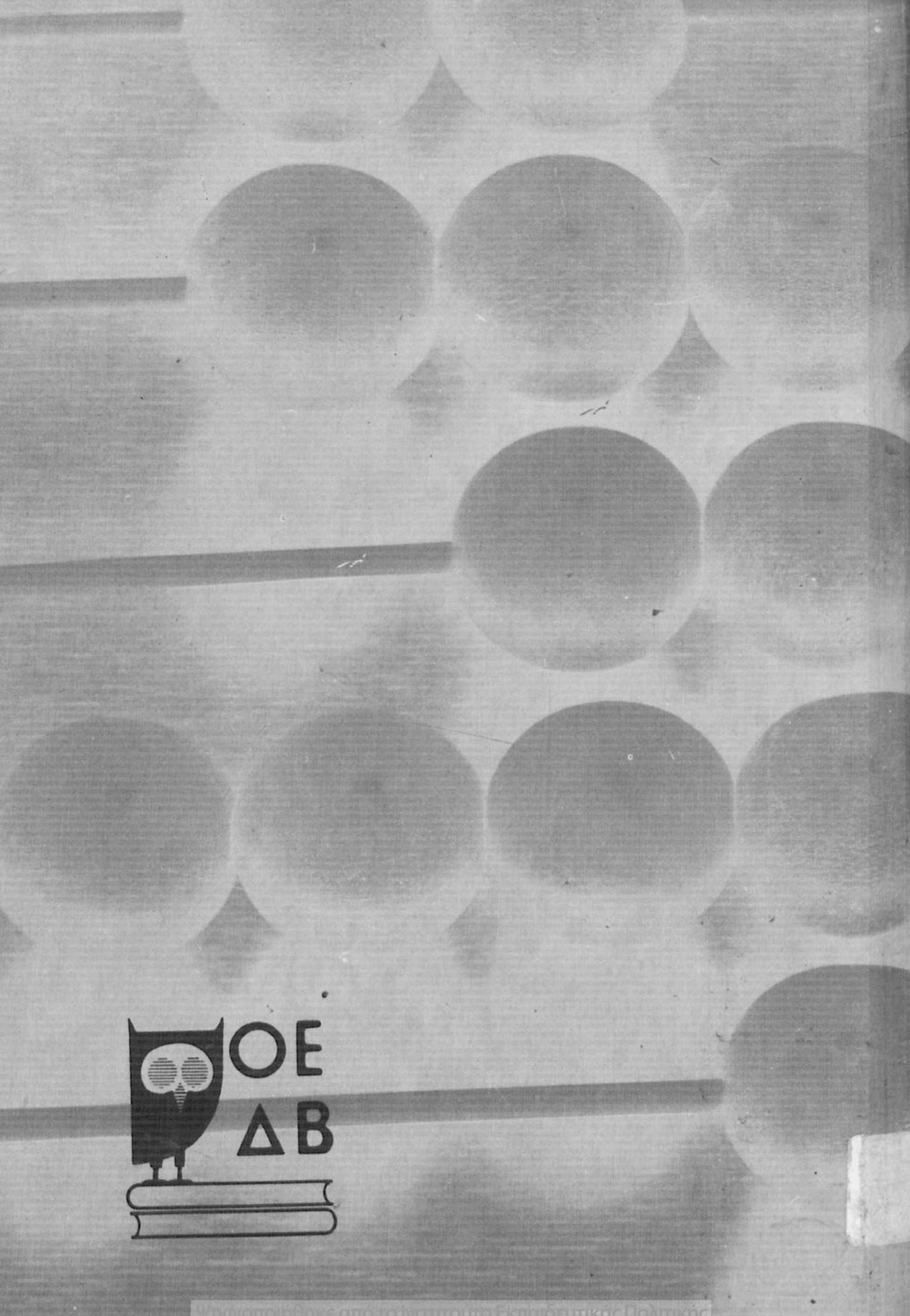
78. Βρεῖτε τί μέρος τοῦ ἀρχικοῦ ὕψους ἀνέβηκε μετά τή γ' ἀναπήδηση. Ἀρχικό ὕψος

$\frac{8}{5}:\frac{8}{125}=25$ m.

79. Κάνετε τό κλάσμα $\frac{24}{42}$ ἀνάγωγο. Παραστῆστε μέ α τό φυσικό πού ζητᾶτε καί παρατηρῆστε ὅτι $\alpha:\frac{8}{25}=\alpha\cdot\frac{25}{8}=\frac{\alpha}{8}\cdot 25$. Ὁμοίως γιά τά ἄλλα κλάσματα. Ὁ α εἶναι τό Ε.Κ.Π. $(8, 4, 10)=40$.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ


ΟΕ
ΔΒ