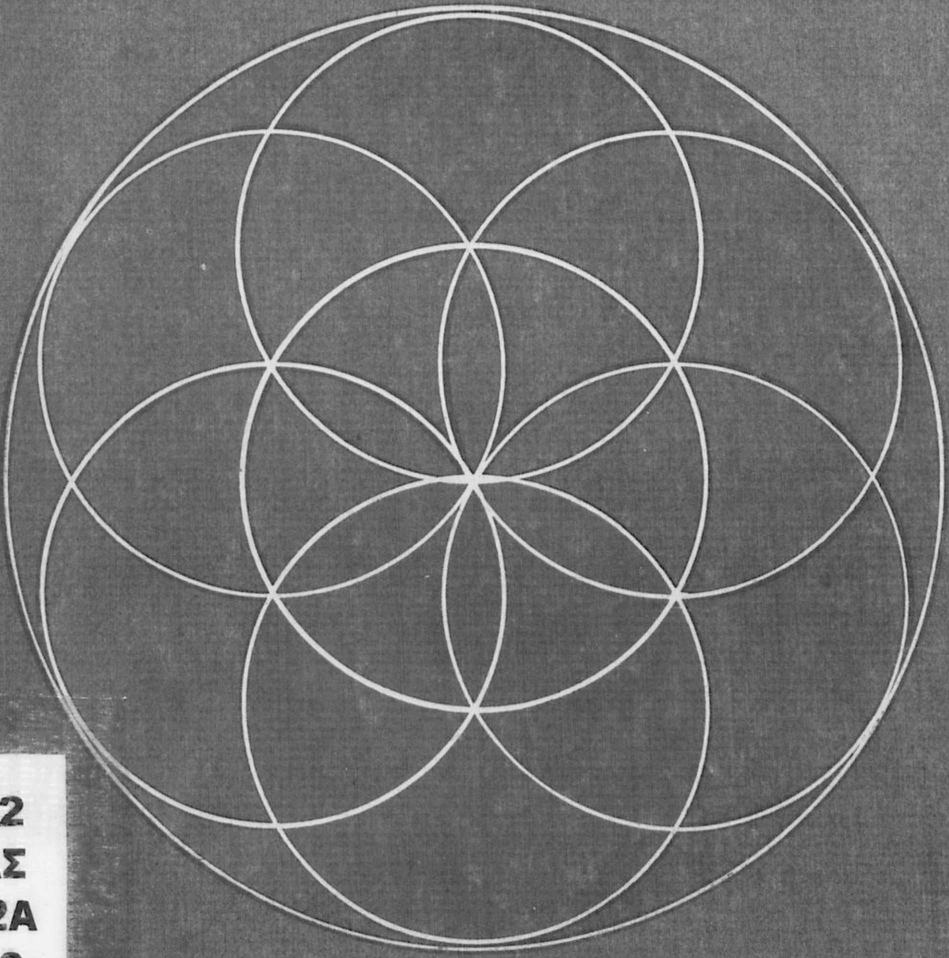
Δ. ΚΥΡΙΑΖΟΠΟΥΛΟΥ - Β. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ — ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ε' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

Κυριαζόπουλος, Αναστάσ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΚΥΡΙΑΖΟΠΟΥΛΟΥ - ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ
ΔΙΔΑΣΚΑΛΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ε' ΤΑΞΕΩΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Α'. ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

1) Ποῖοι ἀριθμοὶ λέγονται ἀκέραιοι. Πῶς γράφονται καὶ πῶς ἀπαγγέλλονται.

Παραδείγματα: 5 μῆλα, 15 λεμόνια, 150 μαθηταί, 1500 πρόβατα, 15000 δραχμαί, 150000 δραχμαί... Οἱ ἀνωτέρω συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιοι. Διατί ;

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς αὐτῆς ἀκεραίας μονάδος. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὅπως ἔχετε μάθει, χωρίζονται εἰς τὴν κλάσιν τῶν μονάδων, τῶν χιλιάδων, τῶν ἑκατομμυρίων, δισεκατομμυρίων κ.ο.κ. Ἑκάστη κλάσις περιλαμβάνει τὴν τάξιν τῶν μονάδων, τὴν τάξιν τῶν δεκάδων καὶ τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων. Ἔτσι ἔχομεν μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας μονάδων. Μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας χιλιάδων. Μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἑκατομμυρίων κ.ο.κ.

Παραστατικὸς πίναξ τῶν κλάσεων καὶ τῶν τάξεων:

Κλάσις	τῶν δισεκατομμυρίων			τῶν ἑκατομμυρίων			τῶν χιλιάδων			τῶν μονάδων		
Τάξις	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
				9	9	9	9	9	9	9	9	9

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ γράφονται καὶ ἀπαγγέλλονται (διαβάζονται) πάντοτε ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας δεκάδας ἢ μονάδας τῆς ἀνωτέρας κλάσεως ἢ τάξεως αὐτῶν. Π.χ. 999 ἑκατομμύρια, 999 χιλιάδες 999 μονάδες – 999.999.999

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Γράψατε καὶ σεῖς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς : Δέκα, εἴκοσι πέντε, ὀκτακόσια δύο, χίλια ἕνα, χίλια πεντακόσια τρία, πέντε χιλιάδες ὀκτακόσια τέσσαρα, δέκα ἓξ χιλιάδες ἑπτακόσια τριάκοντα πέντε, ἐνενήκοντα τέσσαρες χιλιάδες ὀκτακόσια δύο, ἑκατὸν ἑβδομήκοντα πέντε χιλιάδες διακόσια τρία, ὀκτακόσιαι χιλιάδες πεντήκοντα ἕξ, ἐννεακόσιαι χιλιάδες ἑκατὸν δώδεκα, ἕνα ἑκατομμύριον. Δέκα τέσσαρα ἑκατομμύρια πεντακόσιαι τρεῖς χιλιάδες διακόσια πέντε, εἴκοσι δύο ἑκατομμύρια πέντε χιλιάδες δέκα πέντε. Τριάκοντα ἓξ ἑκατομμύρια τετρακόσιαι δύο χιλιάδες δέκα πέντε.

Ἀπαγγείλατε τοὺς ἀκεραίους.

15, 495, 9985, 10468, 25001, 97999, 100002, 248425, 300495, 405125, 818435, 905965, 1000000, 9000000, 15000000, 24625100, 364000525, 405015600, 900425085.

2) Πράξεις τῶν ἀκεραίων.

α) Πρόσθεσις

Πότε κάμνομεν πρόσθεσιν ; Πῶς λέγονται οἱ ἀριθμοὶ τοὺς ὁποίους προσθέτομεν ; Πῶς ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω προσθέσεις :

Νοερῶς: α) $58 + 9$, $42 + 18$, $52 + 29$, $65 + 70 + 35$, $745 + 99$
β) $60 + 80 + 40$, $155 + 45 + 30$, $8465 + 535$, $7255 + 745$
γ) $30500 + 15500$, $65000 + 35000$, $750000 + 250000$

Γραπτῶς: α) $8465 + 14127 + 562$, β) $87128 + 685 + 168402 + 78$, γ) $548975 + 482869$, δ) $128405 + 48005 + 9656$

1. Νὰ εὕρητε τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἔχουν παραλειφθῆ εἰς τὰς κατωτέρω προσθέσεις :

$$\begin{array}{r} 7832- \\ -16-8 \\ 40-92 \\ +\quad -746 \\ \hline -35920 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5-863 \\ 38-18 \\ 684- \\ +\quad 373-8 \\ \hline 1-2796 \end{array}$$

β) Ἀφαίρεσις

Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ποῖος ἀριθμὸς λέγεται μειωτέος ; Ποῖος ἀφαιρετέος ; Τί λέγομεν ὑπόλοιπον ἢ διαφοράν ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελέσετε τὰς ἀφαιρέσεις :

Νοερῶς: α) 320 – 50, 3100 – 600, 85 – 32, 98 – 47, 4250 – 125
β) 82 – 9, 254 – 12, 328 – 99, 438 – 201, 867 – 401
γ) 5000 – 1500, 50000 – 10500, 100000 – 25000, 950000 – 250000.

Γραπτῶς: α) 38948 – 27639, β) 143572 – 98428, γ) 839720 – – 694096, δ) 1684025 – 908878, ε) 3405425 – 1968956.

2. Νὰ εὕρετε τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα λείπουν εἰς τὰς ἑπομένας ἀφαιρέσεις.

$$\begin{array}{r} 982 \\ -\;\;;7 \\ \hline 88; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2;64 \\ -\;176; \\ \hline 10;5 \end{array}$$

γ) Πολλαπλασιασμὸς

Πότε κάμνομεν πολλαπλασιασμόν. Πῶς ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους πολλαπλασιάζομεν ; Πῶς γίνεται ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ;

Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ εὕρετε τὰ γινόμενα :

Νοερῶς : α) 6 × 9, 70 × 4, 600 × 8, 30 × 20, 80 × 5, 400 × 8, 5000 × 9
β) 2 × 53, 2 × 125, 2 × 149, 4 × 35, 4 × 125, 5 × 210 4 × 175
γ) 176 × 10, 298 × 100, 109 × 1000, 150 × 10000, 478 × 100000.

Γραπτῶς : α) 3048 × 650, β) 14060 × 409, γ) 425635 × 8004, δ) 6978 × 1080, ε) 49842 × 2678.

δ) Διαίρεσις

Πότε κάμνομεν διαίρεσιν ; Πότε διαίρεσιν μερισμοῦ καὶ πότε διαίρεσιν μετρήσεως ;

Ποῖος ἀριθμὸς λέγεται διαιρετέος καὶ ποῖος διαιρέτης ; Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ πηλίκον ; Πότε μία διαίρεσις εἶναι τελεία καὶ πότε ἀτελής ; Πῶς διαιρεῖται ἕνας ἀριθμὸς διὰ 10, 100, 1000, κλπ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις :

Νοερῶς : α) 48 : 2, β) 68 : 2, γ) 164 : 2, δ) 248 : 2, ε) 612 : 3, στ) 15 : 5, ζ) 32 : 8, η) 56 : 4, θ) 96 : 4, ι) 175 : 5, ια) 240 : 8, ιβ) 540 : 9.

β) 45850 : 10, 53700 : 100, 68000 : 1000, 38760 : 100, 70650 : 1000.

Γραπτῶς : α) 1890 : 45, β) 6450 : 75, γ) 18500 : 125, δ) 58180 : 185, ε) 496875 : 265, στ) 2416975 : 425.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Μία οἰκογένεια ἐξώδευσε διὰ θέρμανσιν κατὰ τοὺς τρεῖς χειμερινοὺς μῆνας τὰ ἑξῆς ποσά. Τὸν πρῶτον μῆνα 235 δραχμάς, τὸν δεύτερον μῆνα 364 δραχμὰς καὶ τὸν τρίτον μῆνα 98 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν δεύτερον. Πόσα χρήματα ἐξώδευσε καὶ τοὺς τρεῖς μῆνας;

2. Ἕν ποσὸν ἐμοιράσθη εἰς τρεῖς ἀνθρώπους. Ὁ πρῶτος ἔλαβεν 236.650 δραχμάς, ὁ δεύτερος 36.750 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ ὁ τρίτος 52.480 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὸν δεύτερον. Πόσας δραχμὰς ἦτο ὅλον τὸ ποσόν;

3. Ὅταν ἐγεννήθη ὁ Παῦλος ἡ μητέρα του ἦτο 24 ἐτῶν καὶ ὁ πατέρας του ἦτο 8 ἔτη μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν μητέρα του. Σήμερον ὁ Παῦλος εἶναι 14 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς γονεῖς του ;

4. Εἷς γεωργὸς ἠγόρασεν ἕνα σπίτι καὶ ἕνα περιβόλι καὶ ἔδωσε 468.425 δραχμάς. Τὸ περιβόλι ἤξιζε 98.689 δραχμάς. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ σπιτιοῦ;

5. Καταστηματάρχης εἰσέπραξε τὸν περασμένον μῆνα 374.685 δραχμάς. Ἀπὸ αὐτὰς αἱ 349.878 δραχμαὶ ἦσαν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα ἐπώλησε. Πόσον ἦτο τὸ κέρδος του;

6. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 1821 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 1969;

7. Ἐργάτης λαμβάνει τὴν ἡμέραν 93 δραχμάς. Ἕνα μῆνα εἰργάσθη 26 ἡμέρας. Πόσα χρήματα ἐπῆρε;

8. Ἔμπορος ἠγόρασε 789 μέτρα ὕφασμα πρὸς 267 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε δι' ὅλον τὸ ὕφασμα;

9. Κτηνοτρόφος ἐπώλησε 396 ἀρνιὰ πρὸς 265 δραχμὰς τὸ ἕνα. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε;

10. Ἕν τόπι ὕφασμα 58 μέτρων ἐπωλήθη ἀντὶ 3.654 δραχμῶν. Πόσον ἐπωλήθη τὸ μέτρον;

11. Ἐλαιοπαραγωγὸς ἐπώλησε 285 κιλὰ λάδι καὶ εἰσέπραξεν 7.980 δραχμάς. Πόσον ἐπώλησε τὸ κιλόν;

12. Εἰς μίαν μαθητικὴν κατασκήνωσιν ἐμοίρασαν εἰς 235 μαθητὰς 6.580 καραμέλας. Πόσας ἔλαβεν ἕκαστος;

13. Οἰκογενειάρχης ἠγόρασεν ἓν ἠλεκτρικὸν ψυγεῖον ἀντὶ 11.760 δραχμῶν. Θὰ τὸ πληρώσῃ μὲ μηνιαίας δόσεις πρὸς 245 δραχμὰς τὴν δόσιν. Μετὰ πόσους μῆνας θὰ τὸ ἐξοφλήσῃ;

14. Καταστηματάρχης εἰσέπραξεν εἰς ἕνα μῆνα 148.465 δραχμὰς Ἀπὸ τὰ χρήματα αὐτὰ ἐπλήρωσε διὰ μισθοὺς 12.636 δραχμὰς καὶ δι' ἄλλα ἔξοδα 5.843 δραχμάς. Πόσα χρήματα εἶναι ἡ καθαρὰ εἴσπραξίς του;

15. Ἔμπορος εἶχεν εἰς τὴν ἀποθήκην του 36.428 μέτρα ὑφάσματος. Ἀπὸ αὐτὸ ἐπώλησε τὴν πρώτην ἑβδομάδα 4.648 μέτρα, τὴν δευτέραν ἑβδομάδα ἐπώλησε 765 μέτρα περισσότερα ἀπὸ τὴν πρώτην, τὴν τρίτην ἑβδομάδα ἐπώλησε 1867 μέτρα ὀλιγώτερα ἀπὸ τὴν δευτέραν καὶ τὴν τετάρτην ἑβδομάδα ἐπώλησεν ὅσα ἐπώλησε τὰς δύο πρώτας ἑβδομάδας (α' καὶ β'). Πόσα μέτρα ὑφάσματος ἔχει ἀκόμη ἀπώλητα;

16. Κτηματίας εἶχε καλλιεργήσει δύο κτήματα μὲ φασόλια. —Ἀπὸ τὸ ἓν κτῆμα ἔβγαλε 978 καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο 1357 κιλά. Ἐκράτησε διὰ τὸ σπίτι του 150 κιλὰ καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ ἐπώλησε πρὸς 16 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσα χρήματα εἰσέπραξεν;

17. Ὑαλοπώλης ἐπώλησε 84 δωδεκάδας πιάτα πρὸς 14 δραχμὰς τὸ ἕν. Μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα συνεκέντρωσεν ἠγόρασε ποτήρια πρὸς 8 δραχ. τὸ ἕν. Πόσας δωδεκάδας ποτήρια ἠγόρασε;

18. Λαδέμπορος ἠγόρασε 1658 κιλὰ λάδι πρὸς 25 δραχμάς, τὸ κιλόν. Ἀπὸ ὅλον τὸ λάδι εἶχε 63 κιλὰ φύρα. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ κιλὸν τὸ καλὸ λάδι, διὰ νὰ πάρῃ τὰ χρήματά του καὶ νὰ κερδήσῃ καὶ 4805 δραχμάς;

19. Μία τάξις ἀπὸ 25 μαθητὰς ἔκαμε μίαν ἐκδρομὴν μὲ κοινὰ ἔξοδα, ἡ ὁποία ἐστοίχισεν 600 δραχμάς. Μερικοὶ πτωχοὶ μαθηταὶ δὲν εἶχον νὰ πληρώσουν καὶ τὸ μερίδιόν των τὸ ἐπλήρωσαν οἱ ἄλλοι, οἱ ὁποῖοι ἐπλήρωσαν ἐπὶ πλέον 6 δραχμὰς ἕκαστος. Πόσοι μαθηταὶ δὲν ἐπλήρωσαν;

Β'. ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Παραδείγματα:

0,5 μέτρου, 0,75 μέτρου, 15,650 μέτρου, 25,6425 μέτρου, 0,5 δραχμῆς, 0,75 δραχμῆς, 30,25 δραχμαί, 40,5 δραχμαί, 0,5 κιλοῦ, 0,75 κιλοῦ, 0,750 κιλοῦ, 15,250 κιλά.

Παρατήρησις: Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς, ἄλλοι φανερώνουν ὑποδιαιρέσεις ἀκεραίας μονάδος (δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, κλπ.) καὶ ἄλλοι ἀκεραίας μονάδας καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτῶν. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ὅπως ἐμάθετε πέρυσι, λέγονται δεκαδικοί.

Ἐρωτήσεις: Τί διαφέρει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς τοῦ ἀκεραίου ; Ἀπὸ πόσα μέρη ἀποτελεῖται ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός ; Ποῖον τὸ διακριτικὸν γνώρισμα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ;

1) **Γραφὴ δεκαδικῶν ἀριθμῶν:** Π.χ. 5 δέκατα τοῦ μέτρου = = 0,5 μ., ἑβδομήκοντα πέντε ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς = 0,75 δραχ., 12 κιλὰ καὶ 500 γραμμάρια = 12,500 κιλά.

Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Γράψατε μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

8 ἀκέραιος καὶ 5 δέκατα – 4 ἀκέραιος καὶ 25 ἑκατοστὰ – 3 ἀκέραιος καὶ 245 χιλιοστὰ – 0 ἀκέραιος καὶ 8 δέκατα – 9 δέκατα – 0 ἀκέραιος καὶ 37 ἑκατοστὰ – 45 ἑκατοστὰ – 0 ἀκέραιος καὶ 263 χιλιοστὰ – 345 χιλιοστὰ – 5 ἀκέραιος καὶ 8 ἑκατοστὰ – 5 ἀκέραιος 9 χιλιοστὰ – 5 δέκατα – 7 δέκατα – 3 χιλιοστὰ – 4 ἀκέραιος καὶ 1628 δεκάκις χιλιοστὰ – 2375 δεκάκις χιλιοστὰ – 5 ἀκέραιος καὶ 10924 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ – 3 ἀκέραιος καὶ 153625 ἑκατομμυριοστὰ – 240643 ἑκατομμυριοστὰ – 35 χιλιοστὰ – 265 δεκάκις χιλιοστὰ – 338 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ – 450 ἑκατομμυριοστὰ – 3 δέκατα – 3 ἑκατοστὰ – 3 χιλιοστὰ – 3 δεκάκις χιλιοστὰ – 3 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ – 3 ἑκατομμυριοστὰ – 55 δέκατα – 10025 χιλιοστά.

2) **Ἀπαγγελία δεκαδικῶν ἀριθμῶν**

Π.χ. 0,5 = 0 ἀκέραιος καὶ 5 δέκατα.
0,75 δραχ. = 0 ἀκέραιαι δραχμαὶ καὶ 75 ἑκατοστὰ τῆς δραχμῆς.
36,750 κιλ. = 36 κιλὰ καὶ 750 χιλιοστὰ τοῦ κιλοῦ.
Πῶς ἀπαγγέλλονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 'Απαγγείλατε τοὺς δεκαδικούς :

6,8 – 4,37 – 5,750 – 6,3450 – 3,45264 – 2,125634 – 0,5 – 0,75 0,360 – 0,4500 – 0,25960 – 0,350700 – 0,03 – 0,004 – 0,075 – 0,0005 – 0,0034 – 0,00004 – 0,00065 – 0,0375 – 0,00269 – 0,000375

'Ερωτήσεις: Τί παθαίνει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ἂν παραθέσωμεν εἰς τὸ τέλος του ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά ;

Τί παθαίνει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ἂν σβήσωμεν τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἔχει εἰς τὸ τέλος ;

Τί παθαίνει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ἂν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ μίαν θέσιν, δύο θέσεις, τρεῖς θέσεις κ.ο.κ.;

Τί παθαίνει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ἂν μεταφέρωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ μίαν θέσιν, δύο θέσεις, τρεῖς θέσεις κ.ο.κ.;

3) **Πράξεις Δεκαδικῶν ἀριθμῶν :**

α) **Πρόσθεσις**

Παραδείγματα : α)

$$\begin{array}{r} 24{,}500 \\ +\ 25{,}125 \\ \hline 49{,}625 \end{array} \qquad \text{β)}\ \begin{array}{r} 19{,}5 \\ 18{,}875 \\ +\ 20 \\ \hline 58{,}375 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 19{,}500 \\ 18{,}875 \\ +\ 20{,}000 \\ \hline 58{,}375 \end{array}$$

Πῶς προσθέτομεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς ; Τί προσέχομεν ἰδιαιτέρως ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ προσθέσετε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς :

Νοερῶς : α) 15,5 + 0,5, β) 30,2 + 20,8, γ) 25,50 + 10,25, δ) 65,75 + 150,5, ε) 0,125 + 35,375, ζ) 25,500 + 40,750.

Γραπτῶς: α) 405,5 + 250,25 + 465,125 + 848,5065
β) 0,135 + 89, 265 + 0,80 + 168,7525 + 625
γ) 0,0034 + 36,7450 + 168,00250 + 450,56250.

β) **'Αφαίρεσις**

Παραδείγματα : 1) 18,50 – 6,20 μ., 2) 30,75 δραχ. – 25 δραχ.

$$\begin{array}{r} 18{,}50 \\ -\ \ 6{,}20 \\ \hline 12{,}30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30{,}75 \\ -\ 25 \\ \hline 5{,}75 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 30{,}75 \\ -\ 25{,}00 \\ \hline 5{,}75 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 40 \\ -\,24{,}350 \\ \hline 15{,}650 \end{array} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{array}{r} 40{,}000 \\ -\,24{,}350 \\ \hline 15{,}650 \end{array}$$

Ἀσφαλῶς θὰ θυμηθήκατε πῶς ἀφαιροῦμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ἢ ἀκέραιον ἀπὸ δεκαδικὸν καὶ δεκαδικὸν ἀπὸ ἀκέραιον. Διατυπώσατε τὸν κανόνα:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ κάμετε τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις:

Νοερῶς: α) 0,75 – 0,25, β) 0,500 – 0,250, γ) 15,5 – 8,2, δ) 50,5 – – 35,5, ε) 1,50 – 0,75, στ) 85,50 – 65,25, ζ) 345,50 – 250, η) 500 – 150,50.

Γραπτῶς: α) 0,75 – 0,375, β) 60,95 – 0,4656, γ) 15684,75 – 8495,50425, δ) 3450 – 1895,25, ε) 12650 – 4958,0675, στ) 3500,25 – 1750.

γ) Πολλαπλασιασμὸς

Παράδειγμα 1. Διὰ μίαν ἀνδρικὴν ἐνδυμασίαν χρειάζονται 2,85 μέτρα ὕφασμα. Πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῇ διὰ 5 ὁμοίας ἐνδυμασίας;

Λύσις: $$\begin{array}{r} 2{,}85 \text{ μ.} \\ \times \quad 5 \text{ ἐνδ.} \\ \hline 14{,}25 \end{array}$$

Ἀπάντησις: Θὰ χρειασθῇ 14,25 μέτρα.

Παράδειγμα 2. Τὰ 2,85 μέτρα, τὰ ὁποῖα ἐχρειάσθησαν διὰ τὴν μίαν ἐνδυμασίαν τὰ ἠγοράσαμεν πρὸς 245 δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσον ἐπληρώσαμεν;

Λύσις: $$\begin{array}{r} 245 \\ \times \quad 2{,}85 \\ \hline 1225 \\ 1960 \\ 490 \\ \hline 698{,}25 \end{array}$$

Ἀπάντησις: Ἐπληρώσαμεν 698,25 δραχμάς.

Παράδειγμα 3. Ἕνας ὁδοιπόρος βαδίζει τὴν ὥραν 4,75 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ βαδίσῃ εἰς 6,5 ὥρας;

Λύσις:

$$\begin{array}{r} 4{,}75 \\ \times\ \ 6{,}5 \\ \hline 2375 \\ 2850\ \ \\ \hline 30{,}875 \end{array}$$

Ἀπάντησις: Θὰ βαδίσῃ 30,875 χιλιόμετρα.

Παρατήρησις: Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ἔγραψα καὶ ἐπολλαπλασίασα τοὺς ἀριθμούς, ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι. Εἰς τὸ γινόμενον ὅμως ἐχώρισα μὲ ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα εἶχεν ὁ πολλαπλασιαστέος, ἢ ὁ πολλαπλασιαστής, ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες μαζί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ εὕρετε τὰ κατωτέρω γινόμενα:

Νοερῶς: α) 6,5 × 4, β) 4,75 × 2, γ) 15,25 × 3, δ) 0,75 × 2, ε) 0,25 × 3, στ) 0,25 × 4, ζ) 65,5 × 10, η) 54,25 × 10, θ) 36,375 × 100, ι) 486,4750 × 1000, ια) 0,75 × 10, ιβ) 0,125 × 100, ιγ) 0,975 × 100, ιδ) 84,245 × 10000.

Γραπτῶς: α) 265,8 × 39,6, β) 675,5 × 39,25, γ) 750,35 × 0,25, δ) 0,750 × 0,08, ε) 4685,75 × 45, στ) 2685 × 4,75.

δ) Διαίρεσις

1) Δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

Πρόβλημα: Διὰ 6 ὑποκάμισα ἐχρειάσθησαν 15,90 μέτρα ὕφασμα. Πόσον ὕφασμα ἐχρειάσθη διὰ κάθε ὑποκάμισον;

Λύσις:

$$\begin{array}{r|l} 15{,}90 & 6 \\ \cline{2-2} 3\,9\ \ \ & 2{,}65 \\ 30 & \\ 0 & \end{array}$$

Ἀπάντησις: Ἐχρειάσθη 2,65 μέτρα.

Παρατήρησις: Τοὺς ἔγραψα καὶ τοὺς διῄρεσα ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους. Ὅταν ὅμως ἔφθασα εἰς τὴν ὑποδιαστολήν, ἔβαλα καὶ εἰς τὸ πηλίκον ὑποδιαστολὴν καὶ συνέχισα τὴν διαίρεσιν.

2) *Ἀκεραίου διὰ Δεκαδικοῦ.*

Πρόβλημα : Ἕνας παντοπώλης ἔδωσε 437 δραχμὰς καὶ ἠγόρασε ρύζι πρὸς 9,5 δραχμὰς τὸ κιλόν. Πόσα κιλὰ ρύζι ἠγόρασε ;

Λύσις:

$$\begin{array}{r|l} 437 & 9{,}5 \\ \hline 4370 & 95 \\ \hline 570 & 46 \\ 00 & \end{array}$$

Ἀπάντησις : Ἠγόρασε 46 κιλὰ ρύζι.

Παρατήρησις : Βλέπετε πῶς κάμνομεν τὴν διαίρεσιν ; Σβήνομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρέτου καὶ γίνεται ἀκέραιος καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου προσθέτομεν ἕνα μηδενικὸν (διότι ἕνα ἦτο καὶ τὸ δεκαδικὸν ψηφίον τοῦ διαιρέτου).

Διατυπώσατε τὸν κανόνα, πῶς διαιροῦμεν ἀκέραιον διὰ δεκαδικοῦ.

3) *Δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.*

Παραδείγματα:

1)
$$\begin{array}{r|r} 186{,}75 & 2{,}25 \\ \hline 186\ 75 & 225 \\ \hline 0675 & 83 \\ 000 & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} 347{,}25 & 7{,}5 \\ \hline 3472{,}5 & 75 \\ \hline 472 & 46{,}3 \\ 225 & \\ 00 & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|r} 3{,}67 & 0{,}008 \\ \hline 3670 & 8 \\ \hline 47 & 458{,}75 \\ 70 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Παρατήρησις : Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις διὰ νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν σβήνομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρέτου καὶ τὸν κάμνομεν ἀκέραιον. Τὴν ὑποδιαστολὴν δὲ τοῦ διαιρετέου τὴν μεταφέρομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου.

Εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα ἐπειδὴ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου εἶναι ὀλιγώτερα, ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου, παραθέτομεν εἰς τὸ τέλος ἕνα μηδενικόν.

Σεῖς τώρα διατυπώσατε τὸν κανόνα, πῶς διαιροῦμεν δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ.

Σημείωσις: Εἰς τὴν διαίρεσιν δεκαδικῶν δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει τί ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρετέος. Ὁ διαιρέτης ὅμως πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος. Ἐὰν δὲν εἶναι, τὸν κάμνομεν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα προχωροῦμεν εἰς τὴν διαίρεσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

Νοερῶς : α) 15 : 2, β) 10 : 4, γ) 36,6 : 3, δ) 120,8 : 4, ε) 70,50 : 2,
στ) 90,75 : 3, ζ) 50,25 : 5.
α) 86 : 10, β) 165 : 10, γ) 368 : 100, δ) 675 : 1000,
ε) 25,5 : 10, στ) 365,5 : 100, ζ) 4865,5 : 1000,
η) 15485,05 : 10, θ) 25684,25 : 100, ι) 14685,250 : 1000.

Γραπτῶς : α) 1685,5 : 8, β) 9685,25 : 36, γ) 1875 : 0,5, δ) 2475 :0,25
ε) 14684,75 : 1,25, στ) 3647,5 : 2,25, ζ) 6,75 : 0,008.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

20. Μαθητὴς τῆς τάξεώς σας ἐπλήρωσε διὰ τετράδια 36,75 δραχμάς, διὰ χάρτην 7,50 δραχμάς, διὰ χαρτογραφίαν 4,75 δραχμὰς καὶ δι' ἄλλα σχολικὰ εἴδη 15,25 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσε τὸ ὅλον;

21. Ἕνα βαρέλι ἔχει μέσα 378,25 κιλὰ λάδι· διὰ νὰ γεμίσῃ χρειάζονται ἀκόμη 121,75 κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι χωρεῖ τὸ βαρέλι;

22. Παντοπώλης ἔδωσε 568,75 δραχμὰς διὰ νὰ ἀγοράσῃ ζάχαριν, 138,80 δραχμὰς περισσοτέρας, ἀπὸ ὅσας ἔδωσε διὰ τὴν ζάχαριν, διὰ ὄσπρια καὶ 1526,5 δραχμὰς περισσοτέρας, ἀπὸ ὅσας ἔδωσε διὰ τὴν ζάχαριν καὶ τὰ ὄσπρια, διὰ νὰ ἀγοράσῃ λάδι. Ἂν θέλῃ νὰ κερδήσῃ καὶ 875,75 δραχμάς, πόσα πρέπει νὰ εἰσπράξῃ τὸ ὅλον ἀπὸ τὴν πώλησίν των;

23. Ἕνα τόπι ὕφασμα ἦτο 87,25 μέτρα καὶ ἀπὸ αὐτὸ ὁ ἔμπορος ἐπώλησε 39,75. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν εἰς τὸ τόπι;

24. Ἐλαιοπαραγωγὸς παρήγαγε 1350 κιλὰ λάδι. Ἐκράτησε διὰ τὸ σπίτι του 195,50 κιλά, ἐπώλησε δὲ καὶ 348,275 κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι ἔχει ἀκόμη πρὸς πώλησιν;

25. Ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ἕως τὸ Αἴγιον εἶναι 180 χιλιόμετρα. Ἡ ἁμαξοστοιχία Ἀθηνῶν Πατρῶν ἔχει διανύσει 91,250 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ ἀκόμη, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ Αἴγιον;

26. Ἂν δανεισθῶ 34.675,75 δραχμὰς θὰ μοῦ λείπουν ἀκόμη 6.672

δραχμαὶ διὰ νὰ ἀγοράσω ἓν κτῆμα, τὸ ὁποῖον ἀξίζει 124.875,50 δραχμάς. Πόσα χρήματα ἔχω ἰδικά μου;

27. Οἰκογενειάρχης ἠγόρασε 8 δοχεῖα λάδι. Καθένα εἶχε 17,75 κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι ἠγόρασε;

28. Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 164,25 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται τὰ 87,875 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

29. Λαδέμπορος ἠγόρασε 1.675 κιλὰ λάδι πρὸς 26,35 δραχμὰς τὸ κιλόν. Εἰς τὸ λάδι αὐτὸ εἶχε 48,75 κιλὰ φύραν. Τὸ καλὸ λάδι τὸ ἐπώλησε πρὸς 28 δραχμὰς τὸ κιλόν. Ἔχασε ἢ ἐκέρδησε καὶ πόσον;

30. Ἠγοράσαμεν 5 μέτρα ὕφασμα καὶ ἐδώσαμεν 358,75 δραχμάς. Πόσον ἠγοράσαμεν τὸ μέτρον;

31. Ἓν αὐτοκίνητον εἰς 8,5 ὥρας διήνυσε 544 χιλιόμετρα. Μὲ πόσα χιλιόμετρα ἔτρεχε τὴν ὥραν;

32. Ὑδρόμυλος ἀλέθει τὴν ὥραν 148,5 κιλὰ σιτάρι. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ἀλέσῃ 1930,5 κιλά;

33. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 0,5 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 26,40;

34. Εἷς ἄνθρωπος ἐμοίρασε τὴν περιουσίαν του, ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸ σχολεῖον τοῦ χωρίου του ἄφησε 8,75 στρέμματα, εἰς τὴν ἐκκλησίαν 15,25 στρέμματα καὶ τὴν ὑπόλοιπον περιουσίαν του τὴν ἀφῆκεν εἰς τὰ 4 παιδιά του καὶ ἐπῆρε τὸ καθένα 48,74 στρέμματα. Πόσα στρέμματα ἦτο ὁλόκληρος ἡ περιουσία;

35. Ἔμπορος ἐπώλησε 867 πιάτα πρὸς 26 δραχμὰς τὸ ἕν. Ἀπὸ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα εἰσέπραξεν ἔδωσε 8.956,65 δραχμὰς καὶ ἠγόρασε ποτήρια καὶ 6.875,8 δραχμὰς καὶ ἠγόρασε μαχαίρια. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν ἀκόμη;

36. Ἔμπορος ἐπώλησε 28 μέτρα ὑφάσματος ἀντὶ 840 δραχμῶν καὶ ἐκέρδησε 4,5 δραχμὰς ἀπὸ κάθε μέτρον. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸ μέτρον;

37. Μία μαθητικὴ κατασκήνωσις παρέλαβε 95 κουτιὰ κομπόστα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ καθένα περιεῖχε 0,80 τοῦ κιλοῦ, διὰ νὰ μοιρασθῇ εἰς 152 μαθητὰς τῆς κατασκηνώσεως. Πόση κομπόστα ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον μαθητήν;

38. Ἔμπορος ἠγόρασε 340,5 μέτρα ὑφάσματος καὶ ἔδωσε 53.151 δραχμάς. Ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτὸ τὰ 74,75 μέτρα τὰ ἠγόρασε πρὸς 128

δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσον ἠγόρασε τὸ μέτρον τοῦ ὑπολοίπου ὑφάσματος;

39. Ἐργάτης πληρώνεται τὴν ἡμέραν 165 δραχμάς. Ἀπὸ αὐτὰς ἐξοδεύει τὰς 136,75 δραχμάς, καὶ ὅσας τοῦ περισσεύουν τὰς δίδει διὰ τὴν ἐξόφλησιν ἑνὸς χρέους του ἀπὸ 1836,25 δραχμάς. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὸ ἐξοφλήσῃ;

Γ'. ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Παραδείγματα:

Τὰ μαθήματα τῆς ἡμέρας διαρκοῦν 5 ὥρας καὶ 45 πρῶτα λεπτὰ (45').

Ὁ Πέτρος ὑπηρέτησεν στρατιώτης 2 χρόνια 6 μῆνας 15 ἡμέρας.

Ἓν οἰκόπεδον εἶναι : 248 τετρ. μέτρα 75 τετρ. παλάμαι 50 τετρ. δάκτυλοι.

Ὁ Παῦλος ἔλαβεν ἀπὸ τὸν ἀδελφόν του ἀπὸ τὴν Ἀγγλίαν 39 λίρας 15 σελλίνια 10 πέννας.

Παρατήρησις :

Οἱ ἀνωτέρω συγκεκριμένοι ἀριθμοί, ὅπως βλέπετε, δὲν εἶναι οὔτε ἀκέραιοι, οὔτε δεκαδικοί. Εἶναι συμμιγεῖς, διότι, ὅπως ἐμάθετε καὶ πέρυσι εἰς τὴν τετάρτην τάξιν, ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο καὶ περισσοτέρους ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰδικόν του ὄνομα καὶ εἶναι πολλαπλάσιον ἢ ὑποπολλαπλάσιον μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα γίνεται φανερόν, ὅτι, διὰ νὰ ἠμποροῦμεν νὰ γράφωμεν καὶ νὰ διακρίνωμεν τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζωμεν ὡρισμένας βασικὰς μονάδας, μὲ τὰς ὑποδιαιρέσεις καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν.

Αἱ βασικαὶ μονάδες, ἀπὸ τὰς ὁποίας σχηματίζονται συμμιγεῖς ἀριθμοί, εἶναι :

1. Μονάδες Μήκους

Βασικὴ μονὰς διὰ νὰ μετρῶμεν τὰς ἀποστάσεις (μῆκος, πλάτος, ὕψος) εἶναι τὸ γαλλικὸν μέτρον (τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{40.000.000}$ τοῦ γηΐνου μεσημβρινοῦ).

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 παλάμας, κάθε παλάμη εἰς 10 δακτύλους (πόντους), κάθε δάκτυλος εἰς 10 γραμμάς.

Ὥστε 1 μέτρον = 10 παλάμαι = 100 δάκτυλοι = 1000 γραμμαί.

Πολλαπλάσια τοῦ μέτρου εἶναι:

Τὸ δεκάμετρον = 10 μέτρα, τὸ ἑκατόμετρον = 100 μέτρα, τὸ χιλιόμετρον = 1000 μέτρα.

Ἄλλαι μονάδες μήκους εἶναι: α) Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ τὰ 0,75 τοῦ μέτρου. (Ἐχρησιμοποιεῖτο παλαιότερον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν τοίχων. Σήμερον δὲν χρησιμοποιεῖται πλέον). β) Ἡ ὑάρδα (γυάρδα), ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὰ 0,914 τοῦ μέτρου. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 3 πόδας καὶ κάθε ποὺς (πόδι) εἰς 12 δακτύλους (ἴντσας). Τὴν μεταχειρίζονται ἀντὶ μέτρου εἰς τὴν Ἀγγλίαν καὶ εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς.

3. Οἱ ναυτικοὶ χρησιμοποιοῦν τὰς κατωτέρω μονάδας:

α) Τὸ ναυτικὸν μίλιον = 1852 μέτρα. (Ὑπάρχει καὶ τὸ γεωγραφικὸν μίλιον = 7420 μ.).

β) Τὸ ἀγγλικὸν μίλιον = 1609 μ.

γ) Τὴν ναυτικὴν λεύγαν = 5556 μ.

Ἄσκησις: Γράψατε 5 συμμιγεῖς μὲ μονάδας μήκους.

2. Μονάδες τόξων.

Ἡ Μοῖρα: Ἡ μοῖρα εἶναι τὸ ἓν τριακοσιοστὸν ἑξηκοστὸν $\left(\frac{1}{360}\right)$ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, διότι κάθε κύκλος διαιρεῖται εἰς 360 μοίρας (360^0). Ἡ μοῖρα (^{0}) χωρίζεται εἰς 60′ (πρῶτα λεπτὰ) καὶ κάθε πρῶτον λεπτὸν χωρίζεται εἰς 60″ (δεύτερα λεπτά).

Ἄσκησις: Γράψατε 2 συμμιγεῖς μὲ μονάδας τόξων.

3. Μονάδες Ἐπιφανείας.

1. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον (τ.μ.) εἶναι ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου κάθε πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 μέτρον.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τ.μ.: 1 τ.μ. = 100 τετραγωνικὰς παλάμας (τ.π.)

1 τ.π. = 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους (τ.δ.), 1 τ.δ. = 100 τετραγωνικὰς γραμμὰς (τ.γρ.).

Ἑπομένως τὸ 1 τ.μ. = 100 τ.π. = 10.000 τ.δ. = 1000000 τ. γρ.

Πολλαπλάσια τοῦ τετρ. μέτρου

Τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον ἢ ἄριον = 100 τ.μ.

Τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον ἢ ἑκτάριον = 10.000 τ.μ.

Τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον = 1000000 τ.μ. (τοῦτο τὸ μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν πολὺ μεγάλων ἐκτάσεων π.χ. κρατῶν, ἠπείρων, ὠκεανῶν).

2. Διὰ νὰ μετρῶμεν τὰ χωράφια ἔχομεν τὸ βασιλικὸν στρέμμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 1000 τ.μ. (τὸ παλαιὸν στρέμμα ἦτο 1270 τ.μ.).

Σημείωσις: Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῶν οἰκοπέδων ἐχρησιμοποιεῖτο παλαιότερον καὶ ὁ τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ τὰ ἐννέα δέκατα ἕκτα $\left(\frac{9}{16}\right)$, ἢ 0,56 τοῦ τ.μ. Σήμερον δὲν χρησιμοποιεῖται πλέον.

Ἄσκησις : Γράψατε 5 συμμιγεῖς ἀριθμοὺς μὲ μονάδας ἐπιφανείας.

4. Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

Τὸ κυβικὸν μέτρον (κ.μ.) = 1000 κυβικὰς παλάμας ἢ λίτρας. Κάθε κυβικὴ παλάμη (κ.π.) = 1000 κυβικοὺς δακτύλους. Κάθε κυβικὸς δάκτυλος (κ.δ.) = 1000 κυβικὰς γραμμάς. Ἑπομένως 1 κ.μ. = = 1000 κ.π. = 1000000 κ.δ. = 1000000000 κ. γρ.

Ἄσκησις : Γράψατε 2 συμμιγεῖς ἀριθμοὺς μὲ μονάδας ὄγκου.

5. Μονάδες βάρους.

1. Τὸ χιλιόγραμμον ἢ κιλὸν = 1000 γραμμάρια.

2. Ὁ τόννος = 1000 χιλιόγραμμα, χρησιμοποιεῖται διὰ τὰ μεγάλα βάρη.

3. Τὸ καράτι. Τὸ μεταχειριζόμεθα , ὡς μονάδα βάρους, διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους· ἰσοῦται μὲ 0,20 τοῦ γραμμαρίου περίπου.

4. Λίβρα. Εἶναι ἀρχικὴ μονὰς βάρους εἰς τὴν Ἀγγλίαν. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 16 οὐγγίας.

Ἡ 1 λίβρα = 453,6 γραμμάρια.

Παλαιότερον, ὡς μονάδα βάρους, μετεχειριζόμεθα καὶ τὴν ὀκὰν (= 1,28 κιλοῦ).

Ἄσκησις: Γράψατε 2 συμμιγεῖς ἀριθμοὺς τῶν ἀνωτέρω μονάδων.

6. Μονάδες Χρόνου.

Ἀρχικὴ μονὰς διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ἡμέρα (ἡμερονύκτιον). Ἡ ἡμέρα εἶναι ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἡ γῆ, διὰ νὰ κάμῃ μίαν ὁλόκληρον στροφὴν γύρω ἀπὸ τὸν ἄξονά της.

Ὑποδιαιρέσεις τῆς ἡμέρας

α) Ἡ ὥρα. Μία ἡμέρα ἔχει 24 ὥρας.
β) Τὸ πρῶτον λεπτὸν (π). Μία ὥρα ἔχει 60 π. (60′).
γ) Τὸ δεύτερον λεπτὸν (δ). Ἕνα πρῶτον ἔχει 60 δ. (60″).

Πολλαπλάσια τῆς ἡμέρας

α) Ἡ ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας. β) Ὁ μὴν ἔχει 30 ἡμέρας. γ) Τὸ ἔτος (πολιτικὸν ἔτος)) ἔχει 365 ἡμέρας καὶ κάθε τέταρτον ἔτος ἔχει 366 ἡμέρας. Τὸ ἔτος αὐτὸ λέγεται δίσεκτον. Τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας. Ἀπὸ αὐτοὺς ἄλλοι ἔχουν 30 καὶ ἄλλοι 31 ἡμέρας, ἐκτὸς τοῦ Φεβρουαρίου, ὁ ὁποῖος ἔχει 28 ἡμέρας καὶ κατὰ τὰ δίσεκτα ἔτη 29 ἡμέρας.

Εἰς τὰς συναλλαγάς μας, δι’ εὐκολίαν, ὅλοι οἱ μῆνες λογαριάζονται ἀπὸ 30 ἡμέρας. Ἑπομένως τὸ ἐμπορικὸν ἔτος ἔχει 360 ἡμέρας.

δ) Ὁ Αἰὼν ἢ Ἑκατονταετηρὶς = 100 ἔτη.
ε) Ἡ Χιλιετηρὶς = 1000 ἔτη.

Ἄσκησις: Γράψατε 4 συμμιγεῖς ἀριθμοὺς μὲ μονάδας χρόνου.

7. Μονάδες Νομισμάτων.

Ὅπως γνωρίζετε τὰ διάφορα Κράτη ἔχουν διαφόρους μονάδας νομισμάτων.

1. Εἰς τὴν Ἑλλάδα ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ δραχμή. Τὰ χαρτονομίσματα, τὰ ὁποῖα κυκλοφοροῦν σήμερον εἰς τὴν Ἑλλάδα, εἶναι τὰ ἑξῆς:

α) 50 δραχμῶν (πεντηκοντάδραχμον ἢ πενηντάρικο).

β) 100 δραχμῶν (ἑκατοντάδραχμον ἢ ἑκατοστάρικο).

γ) 500 δραχμῶν (πεντακοσιόδραχμον· ἢ πεντακοσάρικο).

δ) 1000 δραχμῶν (χιλιόδραχμον ἢ χιλιάρικο).

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω χαρτονομίσματα κυκλοφορῦν καὶ τὰ κάτωθι κέρματα : Τῆς μιᾶς (1) δραχμῆς (δραχμή), τῶν δύο (2) δραχμῶν (δίδραχμον), τῶν πέντε (5) δραχμῶν (πεντάδραχμον), τῶν δέκα (10) δραχμῶν (δεκάδραχμον) καὶ τῶν εἴκοσι (20) δραχμῶν (εἰκοσάδραχμον). Ἐπίσης καὶ μικρότερα τῆς δραχμῆς : 0,50 – 0,20 – 0,10 καὶ 0,05 δραχμῆς.

2. Ἡ Γαλλία, ἡ Ἑλβετία καὶ τὸ Βέλγιον ἔχουν ὡς ἀρχικὴν μονάδα νομισμάτων τὸ φράγκον = 100 σαντίμ.

3. Ἡ Ἰταλία ἔχει τὴν λιρέτταν = 100 τσεντέσιμα.

4. Ἡ Ἀγγλία ἔχει τὴν λίραν ἢ στερλίναν (£). 1 λίρα ἔχει 20 σελλίνια, τὸ σελλίνιον ἔχει 12 πέννας καὶ ἡ πέννα ἔχει 4 φαρδίνια (τὰ ὁποῖα δὲν χρησιμοποιοῦνται πλέον).

5. Ἡ Ἀμερικὴ ἔχει τὸ δολλάριον ($), τὸ ὁποῖον ἔχει 100 σέντς.

6. Ἡ Τουρκία ἔχει τὴν Τουρκικὴν λίραν, ἡ ὁποία, διαιρεῖται εἰς 100 γρόσια καὶ τὸ κάθε γρόσι διαιρεῖται εἰς 40 παράδες.

7. Ἡ Αἴγυπτος ἔχει τὴν Αἰγυπτιακὴν λίραν. Διαιρεῖται εἰς 100 γρόσια.

8. Ἡ Γερμανία ἔχει τὸ μάρκον.

9. Ἡ Ρωσσία ἔχει τὸ ρούβλιον.

10. Ἡ Ἱσπανία ἔχει τὴν πεσέταν.

11. Ἡ Ρουμανία ἔχει τὸ λέϊ.

12. Ἡ Βουλγαρία ἔχει τὸ λέβι.

13. Ἡ Σερβία ἔχει τὸ δηνάριον.

14. Ἡ Τσεχοσλοβακία ἔχει τὴν κορώναν.

Ἄσκησις: Γράψατε 6 συμμιγεῖς ἀριθμοὺς μὲ μονάδας νομισμάτων.

8. Τροπὴ συμμιγῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας ὡρισμένης τάξεως.

α) Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἀκέραιον.

Πρόβλημα 1. Νὰ εὑρεθῇ πόσαι παλάμαι εἶναι τὰ 25 μέτρα καὶ 6 παλάμαι.

Λύσις: 25 × 10 = 250 παλ. + 6 παλ. = 256 παλάμαι.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 10\times \\ \hline 250 \text{ παλ.} \\ +\ 6 \text{ παλ.} \\ \hline 256 \text{ παλ.} \end{array}$$

Ἐνθυμεῖσθε πῶς γίνεται; Τρέπομεν πρῶτον τὰ 25 μέτρα εἰς παλάμας πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 10, διότι 10 παλάμας ἔχει τὸ μέτρον, καὶ εἰς τὰς 250 παλάμας, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμόν μας, προσθέτομεν καὶ τὰς 6 παλάμας, τὰς ὁποίας ἔχομεν. Ἔτσι εὑρίσκομεν ὅτι τὰ 25 μ. καὶ 6 παλ. = μὲ 256 παλ. Δηλαδὴ τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν τὸν ἐτρέψαμεν εἰς ἀκέραιον, ὁ ὁποῖος μᾶς φανερώνει παλάμας. Αἱ παλάμαι εἰς τὸν συμμιγῆ αὐτὸν εἶναι μονάδες τῆς τελευταίας του τάξεως.

Πρόβλημα 2. Ὁ συμμιγὴς 12 λίραι 8 σελλίνια 4 πένναι νὰ τραπῇ εἰς ἀκέραιον (δηλ. εἰς μονάδας τῆς τελευταίας του τάξεως).

Λύσις:

$$\begin{array}{rl} 12 & \text{λίραι} \\ 20\times & \\ \hline 00 & \\ 24 & \\ \hline 240 & \text{σελλίνια} \\ +\ 8 & \text{»} \\ \hline 248 & \\ \times\ 12 & \text{ἐπειδὴ ἓν σελλίνιον ἔχει 12 πέννας} \\ \hline 496 & \\ 248 & \\ \hline 2976 & \text{πένναι} \\ +\ 4 & \text{»} \\ \hline 2980 & \text{»} \end{array}$$

Καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 12 λίρ. 8 σελλ. 4 πένν. = 2980 πέννας.

Ὥστε: **Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἀκέραιον, τὸν τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας του τάξεως,** ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ τρέψετε εἰς ἀκεραίους τοὺς συμμιγεῖς.

Νοερῶς: α) 2 ὧραι 30 π., β) 6⁰ 40′, γ) 6 κιλὰ 500 γραμμάρια, δ) 2 τ.μ. 5 τ. παλ., ε) 5 τόννοι 250 κιλά.

Γραπτῶς: α) 10 μ. 8 παλ.. 5 δακτ., β) 12 ὧραι 45 π. 40 δ., γ) 3 ἔτη 4 μῆνες 15 ἡμέραι, δ) 5⁰ 30′ 50″, ε) 14 λίραι 12 σελλίνια 7 πένναι.

β) Τροπὴ ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ.

Παράδειγμα 1 : 35365 δευτερόλεπτα νὰ τραποῦν εἰς συμμιγῆ.

Διάταξις τῆς πράξεως : 35365	60 δ	
536	589 π	60 π
565	49	9 ὧραι
25		

Ἀπάντησις : Τὰ 35365 δευτερόλεπτα = 9 ὥρας 49 π. 25 δ.

Παρατήρησις : Πρῶτον διαιροῦμεν τὰ δευτερόλεπτα διὰ τοῦ 60 δ. καὶ τὰ τρέπομεν εἰς 589 πρῶτα λεπτὰ καὶ μᾶς μένουν 25 δ. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὰ 589 π διὰ τοῦ 60 π καὶ τὰ τρέπομεν εἰς 9 ὥρας καὶ μᾶς μένουν 49 π. Δηλαδὴ διαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος μᾶς φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως μᾶς κάμνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἐὰν τὸ πηλίκον περιέχῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τὸ διαιροῦμεν καὶ αὐτὸ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Παράδειγμα 2 : 9875 πένναι νὰ τραποῦν εἰς συμμιγῆ.

9875	12 πέν.	
27	822 σελλ.	20 σελλ.
35	22	41 λίραι
11	=2	

Ἀπάντησις : Αἱ 9875 πένναι = 41 λίρας 2 σελλίν. 11 πέννας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ τρέψετε εἰς συμμιγεῖς τοὺς ἀκεραίους :

Νοερῶς: 65 παλάμαι, 78 δεκάραι, 650 τ.π., 365 πρῶτα λεπτά, 165 σελλ., 1650 μέτρα, 28 ὧραι, 39 μῆνες, 125 ἡμέραι.

Γραπτῶς: 265 δάκτυλοι, 475 δάκτυλοι, 578 δάκτυλοι, 2690 δευτερόλεπτα, 40900 δευτ., 34965 δευτ., 380 σελλίνια, 30640 πένναι, 4750 ἡμέραι, 10900 ἡμέραι, 25600 ἡμέραι, 1675′ (πρῶτα λεπτὰ μοίρας) 12985″ (δευτερόλεπτα μοίρας).

γ. Πῶς τρέπομεν μέτρα εἰς ὑάρδας

Πρόβλημα: Διὰ μίαν ἐνδυμασίαν χρειάζονται 3,20 μ. Πόσας ὑάρδας πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν;

Λύσις: Ἀφοῦ ἡ 1 ὑάρδα εἶναι 0,914 τοῦ μέτρου, τὰ 3,20 μέτρα θὰ εἶναι τόσαι ὑάρδαι, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸ 0,914 εἰς τὸ 3,20 ἤτοι: 3,20 : 0,914 = 3200 : 914 = 3,5 ὑάρδαι ἤ

$$\begin{array}{r|l} 3{,}20 & 0{,}914 \\ \cline{2-2} 3200 & 914 \\ \cline{2-2} 4580 & 3{,}5 \\ 010 & \end{array}$$

Ἀπάντησις: Διὰ τὴν ἐνδυμασίαν πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν 3,5 ὑάρδ.

Ὥστε: **Διὰ νὰ τρέψωμεν τὰ μέτρα εἰς ὑάρδας, διαιροῦμεν τὰ μέτρα διὰ 0,914.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ τραποῦν εἰς ὑάρδας: 15 μ. 38 μ. 45,4 μ. 67,25 μ. 94,75 μ.

δ. Πῶς τρέπομεν ὑάρδας εἰς μέτρα

Πρόβλημα: Ἕνα παλτὸ διὰ νὰ γίνῃ χρειάζεται 4 ὑάρδας ὕφασμα. Πόσα μέτρα πρέπει νὰ ἀγοράσωμεν;

Λύσις: 4 × 0,914 = 3,656 μ.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ὑάρδας εἰς μέτρα πολλαπλασιάζομεν τὰς ὑάρδας ἐπὶ 0,914.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ τραποῦν εἰς μέτρα 28 ὑάρδαι, 50 ὑάρδαι, 98 ὑάρδαι, 150 ὑάρδαι.

9. Αἱ πράξεις τῶν συμμιγῶν.

α) Πρόσθεσις

Πρόβλημα 1: Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε δύο τόπια ὕφασμα. Τὸ ἕνα ἦτο 28 μέτρα καὶ 4 παλάμαι. Τὸ ἄλλο 19 μέτρα καὶ 3 παλάμαι. Πόσον ὕφασμα εἶχον καὶ τὰ δύο τόπια ;

Λύσις: 28 μέτρα 4 παλάμαι
+19 » 3 »
47 » 7 »

Ἀπάντησις: Καὶ τὰ δύο τόπια εἶχον 47 μέτρα καὶ 7 παλ. ὕφασμα.

Πρόβλημα 2. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε 3 τόπια ὕφασμα. Τὸ πρῶτον τόπι ἦτο 26 μέτρα καὶ 5 παλάμαι, τὸ δεύτερον 19 μέτρα καὶ 7 παλάμαι καὶ τὸ τρίτον 17 μέτρα καὶ 6 παλάμαι. Πόσον ὕφασμα ἐπώλησε;

Λύσις: 26 μέτρα 5 παλάμαι
19 » 7 »
+17 » 6 »
62 » 18 » ἢ
63 » 8 »

Ἀπάντησις: Ἐπώλησε 63 μέτρα καὶ 8 παλάμας.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς συμμιγεῖς καὶ εἰς τὰ δύο προβλήματα ἐγράψαμεν τὰ μέτρα κάτω ἀπὸ τὰ μέτρα καὶ τὰς παλάμας κάτω ἀπὸ τὰς παλάμας. Δηλαδὴ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἠρχίσαμεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τὰς παλάμας δηλ. ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν παλαμῶν εὕρομεν 18 παλάμας, ἀλλὰ αἱ 18 παλάμαι κάμνουν 1 μέτρον καὶ μένουν 8 παλάμαι. Τὸ 1 μέτρον αὐτὸ τὸ προσέθεσα εἰς τὰ 62 μέτρα καὶ ἔτσι τὸ ἄθροισμα ἔγινε 63 μέτρα καὶ 8 παλάμαι.

Πῶς προσθέτομεν συμμιγεῖς ἀριθμούς ;

Διατυπώσατε τὸν κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω προσθέσεις :

Νοερῶς : α) 5 μ. 2 παλ. + 12 μ. 7 παλ.
β) 4 ὧραι 35 π. 12 δ. + 5 ὧραι 15 π. 18 δ.
γ) 7 λίραι 3 σελλ. 6 πένναι + 12 λιρ. 9 σελλ. 4 πένν.

Γραπτῶς : α) 4 ἡμ. 6 ὥρ. 30 π. 40 δ. + 5 ἡμ. 11 ὥρ. 20 π. 25 δ. + + 6 ἡμ. 7 ὥρ. 20 π. 15 δ.

β) $90^0\ 45'\ 28'' + 18^0\ 35'\ 45'' + 34^0\ 50'\ 43''$

γ) 5 λιρ. 10 σελλ. 2 πέν. + 8 λιρ. 7 σελλ. 9 πενν. + 12 λιρ. 6 σελλ. 4 πεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

40. Μία οἰκογένεια ἐξώδευσε διὰ θέρμανσιν κατὰ τοὺς χειμερινοὺς μῆνας τὰς ἑξῆς ποσότητας κάρβουνα. Τὸν Δεκέμβριον 220 κιλὰ καὶ 400 γραμμ. Τὸν Ἰανουάριον 450 κιλὰ καὶ 500 γραμμ. τὸν Φεβρουάριον 425 κιλὰ καὶ 300 γραμμ. καὶ τὸν Μάρτιον 375 κιλὰ καὶ 600 γραμμ. Πόσα κάρβουνα ἐξώδευσε καὶ τοὺς 4 μῆνας ;

41. Ὁ Δημητράκης εἶναι 9 ἐτῶν, 9 μηνῶν καὶ 15 ἡμερῶν. Ὁ Γιῶργος εἶναι μεγαλύτερός του κατὰ 1 ἔτος, 7 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ Γιώργου;

42. Ἐργάτης, διὰ νὰ σκάψη ἕνα κῆπον, εἰργάσθη τρεῖς ἡμέρας. Τὴν πρώτην εἰργάσθη 7 ὥρας 30π. καὶ 35 δ., τὴν δευτέραν ἡμέραν 8 ὥρας 25π. καὶ 40δ., τὴν τρίτην ἡμέραν 9 ὥρας 20π. 16δ. Πόσον εἰργάσθη καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας;

43. Ἔλαβε κάποιος ἀπὸ τὸν ἀδελφόν του, ὁ ὁποῖος ἦτο εἰς τὴν Ἀγγλίαν, τρεῖς ἐπιταγάς. Ἡ πρώτη ἐπιταγὴ ἦτο 12 λίραι, 10 σελλίνια καὶ 8 πένναι, ἡ δευτέρα 10 λίραι 9 σελλ. καὶ 7 πένν. καὶ ἡ τρίτη 8 λίραι 6 σελλίνια καὶ 9 πένναι. Πόσα χρήματα ἔλαβε τὸ ὅλον;

44. Κάμετε καὶ σεῖς δύο ἰδικά σας προβλήματα.

β) Ἀφαίρεσις

Πρόβλημα 1. Ἕνα τόπι ὕφασμα ἦτο 35 μέτρα καὶ 6 παλάμαι. Ἀπ' αὐτὸ ἔκοψαν διὰ δύο ἐνδυμασίας 6 μέτρα καὶ 3 παλάμας. Πόσον ὕφασμα ἔμεινε ;

Λύσις:	35 μέτρα	6 παλάμαι
	− 6 »	3 »
	29 »	3 »

Ἀπάντησις : Ἔμειναν 29 μέτρα καὶ 3 παλάμαι.

Πρόβλημα 2. Ἕνα βαρέλι εἶχε μέσα λάδι 150 κιλὰ καὶ 300 γραμ. Επωλήθησαν ἀπὸ αὐτὸ 95 κιλὰ καὶ 600 γραμμάρια. Πόσον λάδι μεινεν εἰς τὸ βαρέλι ;

$$\begin{array}{lrlrl} \text{Λύσις:} & \overset{\overset{149}{\smile}}{150} & \text{κιλὰ} & \overset{\overset{1300}{\smile}}{300} & \text{γραμμάρια} \\ & 95 & » & 600 & » \\ \hline & 54 & » & 700 & » \end{array}$$

Ἀπάντησις : Ἔμειναν εἰς τὸ βαρέλι 54 κιλὰ καὶ 700 γραμμ. λάδι.

Παρατήρησις : Βλέπετε ὅτι καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἐγράψαμεν τοὺς συμμιγεῖς τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, κατόπιν ἐκάμαμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως. Ἰδιαιτέρως προσέξατε τὸ δεύτερον πρόβλημα. Ἐπειδὴ τὰ 600 γραμμ. δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰ 300 γραμμ. δι' αὐτὸ αὐξάνομεν τὰ γραμμ. τοῦ μειωτέου κατὰ ἕνα κιλὸν (1000 γραμμ.), τὸ ὁποῖον δανειζόμεθα ἀπὸ τὰ κιλὰ τοῦ μειωτέου καὶ γίνονται 1300. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὅμως τὰ κιλὰ τοῦ μειωτέου μένουν 149. Τώρα ἀφαιροῦμεν τὰ 600 γραμμ. ἀπὸ τὰ 1300 καὶ μένουν 700 γραμμ. Κατόπιν ἀφαιροῦμεν τὰ 95 κιλὰ ἀπὸ τὰ 149 κιλὰ καὶ μένουν 54 κιλά.

Ὥστε : Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμούς, γράφομεν τὸν ἕνα συμμιγῆ κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον ἔτσι, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν ἰδίαν στήλην, καὶ ἀρχίζομεν νὰ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως. Ἂν ὁ ἀφαιρετέος μιᾶς τάξεως δὲν ἀφαιρῆται, τότε αὐξάνομεν τὸν μειωτέον κατὰ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ τὴν μονάδα αὐτὴν τὴν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἀπὸ ὅπου τὴν ἐπήραμεν.

Πρόβλημα 3. Ἀπὸ ἕνα τόξον περιφερείας 180^0 νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα τόξον $63^0\ 42'\ 25''$. Πόσον εἶναι τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μένει ;

Λύσις : $180^0 - 63^0\ 42'\ 25'' = 116^0\ 17'\ 35''$

$$\begin{array}{lr} \text{Διάταξις τῆς πράξεως :}\ 180^0 = & 179^0\ 59'\ 60'' \\ - & 63^0\ 42'\ 25'' \\ \hline & 116^0\ 17'\ 35'' \end{array}$$

Ἀπάντησις : Τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μένει εἶναι $116^0\ 17'\ 35''$.

Παρατήρησις : Τί εἴχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ; Τί ἐκάμαμεν ;

Πρόβλημα 4. Ὁ Πέτρος ἐγεννήθη εἰς τὰς 20 Δεκεμβρίου 1958. Πόσων ἐτῶν εἶναι ἀκριβῶς σήμερον (25-4-1969).

Λύσις:

$$\begin{array}{rlrlrl}
\overset{\overset{1968}{\smile}}{1969} & \text{ἔτος} & \overset{\overset{16}{\smile}}{4} & \text{μῆνες} & 25 & \text{ἡμέραι}\\
1958 & » & 12 & » & 20 & »\\
\hline
10 & » & 4 & » & 5 & »
\end{array}$$

Ἀπάντησις: Ὁ Πέτρος σήμερον (25-4-69) εἶναι 10 ἐτῶν 4 μηνῶν καὶ 5 ἡμερῶν.

Σημείωσις: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἡλικίαν κάθε ἀνθρώπου, ἀφαιροῦμεν τὴν χρονολογίαν τῆς γεννήσεώς του ἀπὸ τὴν σημερινὴν χρονολογίαν. Καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν πότε ἐγεννήθη, ἀφαιροῦμεν τὴν σημερινὴν ἡλικίαν του ἀπὸ τὴν σημερινὴν χρονολογίαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις:

Νοερῶς: α) 65 κιλὰ 500 γραμμ. – 25 κιλὰ 250 γραμμ.
β) 84 μέτρα 8 παλ. 6 πόντ. – 19 μέτρα 5 παλ. 3 πόν.
γ) 36 λίραι 18 σελλ. – 19 λίραι 12 σελλ.
δ) 15 ἔτη 8 μῆνες – 8 ἔτη 10 μῆνες.

Γραπτῶς: α) 8 ὧραι 35 π. 30 δ. – 4 ὥρ. 30 π. 40 δ.
β) 7 ἔτη 5 μῆν. 10 ἡμ. – 3 ἔτη 8 μῆν. 15 ἡμ.
γ) 25 λιρ. – 14 λιρ. 12 σελλ. 8 πενν.
δ) 24 ὥρ. – 9 ὥρ. 45 π. 30 δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

45. Τυρέμπορος ἠγόρασε ἀπὸ τοὺς κτηνοτρόφους τυρὶ 1350 κιλὰ καὶ 250 γραμμ. Εἶχε φύραν τὸ τυρὶ 29 κιλὰ καὶ 500 γραμμ. Πόσον τυρὶ τοῦ ἔμεινεν;

46. Ἀπὸ τὴν γέννησιν τοῦ Κωστάκη ἐπέρασαν 10 ἔτη, 5 μῆνες, 14 ἡμέραι καὶ 8 ὧραι. Πότε ἐγεννήθη;

47. Ποίαν χρονολογίαν ἐγεννήθητε; Πόσην ἡλικίαν ἔχετε σήμερον; (ἔτη, μῆνες, ἡμέραι).

48. Πόσος χρόνος ἐπέρασε μέχρι σήμερον ἀπὸ τὴν ἡμέραν τῆς κηρύξεως τοῦ Ἑλληνοϊταλικοῦ πολέμου;

49. Γράψατε καὶ σεῖς δύο παρόμοια προβλήματα.

) Πολλαπλασιασμὸς

) *Πῶς πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον.*

Πρόβλημα 1. Ἕνα δοχεῖον χωρεῖ 14 κιλὰ καὶ 100 γραμμ. λάδι. Ιόσον λάδι χωροῦν 3 ὅμοια δοχεῖα ;

Λύσις: 14 κιλὰ 100 γραμμ.
X 3
42 κιλὰ 300 γραμμάρια

Ἀπάντησις : Τὰ τρία δοχεῖα χωροῦν 42 κιλὰ καὶ 300 γραμμ.

Πρόβλημα 2. Εἷς ἐργάτης, ἐργαζόμενος 6 ὥρας καὶ 15 π. τὴν ημέραν, ἐχρειάσθη 5 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψῃ ἕνα κῆπον. Πόσας ὥρας ἰργάσθη τὸ ὅλον ;

Λύσις: 6 ὧραι 15 π
X 5
30 ὧραι 75 π. ἢ
31 15

Ἀπάντησις : Εἰργάσθη τὸ ὅλον 31 ὥρας καὶ 15 π.

Πῶς ἐκάμαμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ; Καὶ εἰς τὰ δύο προβλήματα εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον. Ἠρχίσαμεν νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν συμμιγῆ ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας του τάξεως.

Εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα εὕρομεν γινόμενον 30 ὥρας 75 π. τῆς ὥρας. Τὰ 75 π. ὅμως μᾶς κάμνουν 1 ὥραν καὶ μένουν καὶ 15 π. Τὴν 1 αὐτὴν ὥραν τὴν προσθέτομεν εἰς τὰς 30 ὥρας καὶ γίνονται 31. Ἔτσι τὸ γινόμενον γίνεται 31 ὧραι καὶ 15 π.

Ὥστε : Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως. Εἰς τὸ γινόμενον ὅμως, ἂν αἱ μονάδες μιᾶς τάξεως περιέχουν μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγονται αἱ μονάδες αὗται καὶ προστίθενται εἰς τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί :

Νοερῶς : α) 5 κιλ. 150 γραμμ. × 5, β) 6 ὧραι 12 π. × 4, γ) 15 λιρ
8 σελλ. × 5.

Γραπτῶς : α) 8 χιλιόμετρα 250 μέτρα × 8, β) 5 ἔτη 8 μῆνες 14 ἡμέρα
× 15, γ) 6 ὑάρδαι 2 ποδ. 8 ἴντσαι × 7.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

50. Ὁδοιπόρος βαδίζει τὴν ὥραν 5 χιλιόμετρα καὶ 150 μέτρα. Πόσον θὰ βαδίσῃ εἰς 8 ὥρας;

51. Ἔμπορος ἠγόρασεν ἀπὸ τὴν Ἀγγλίαν 5 τόπια ὕφασμα. Τὸ καθένα ἐκόστιζε 24 λίρας 12 σελλ. καὶ 9 πενν. Πόσα χρήματα ἔδωσε δι' ὅλον τὸ ὕφασμα;

52. Μία ὑφάντρια ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν ὕφασμα 1 ὑάρδ. 2 ποδῶν καὶ 8 δακτύλων. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 48 ὥρας;

2. *Πῶς διαιροῦμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου.*

Πρόβλημα : Εἷς λαδέμπορος ἔχει 6 ὅμοια βαρέλια γεμᾶτα λάδι, τὰ ὁποῖα περιέχουν ὅλα μαζὶ 1 τόννον, 480 κιλὰ καὶ 200 γραμμάρια. Πόσον λάδι χωρεῖ κάθε βαρέλι ;

Διάταξις τῆς πράξεως

Λύσις : 1 τόνν. 480 κιλ. 200 γραμμ.	6
× 1000	0 τόνν. 246 κιλ. 700 γραμμ.
1000 κιλὰ	
+ 480 »	
1480 κιλὰ	
28	
40	
4	
× 1000	
4000 γραμμ.	
+ 200 »	
4200 »	
000	

Ἀπάντησις : Τὸ κάθε βαρέλι χωρεῖ 246 κιλὰ καὶ 700 γραμμάρια. Πῶς ἐκάμαμεν τὴν διαίρεσιν ; Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾽ ἀκεραίου διαιροῦμεν τὰς μονάδας ὅλων τῶν τάξεων τοῦ συμμιγοῦς δι᾽ τοῦ ἀκεραίου, ἀρχίζοντες τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως. Ἐὰν ἀπὸ κάθε μερικὴν διαίρεσιν μένῃ ὑπόλοιπον τὸ τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτὸ προσθέτομεν καὶ τὰς μονάδας τῆς τάξεως αὐτῆς τοῦ συμμιγοῦς (ἂν ὑπάρχουν), τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτὸ τὸ διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ ἀκεραίου. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν μέχρις ὅτου διαιρέσωμεν ὅλας τὰς τάξεις τοῦ συμμιγοῦς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

Νοερῶς : α) 300 κιλὰ 450 γραμμ. : 3, β) 80 λίραι 8 σελλ. 4 πένν. : 4,
γ) 150 μέτρα 6 παλ. : 6

Γραπτῶς : α) 7 ἔτη 8 μῆνες 10 ἡμ. 12 ὧραι : 5
β) 11 μῆνες 25 ἡμ. 10 ὥρ. 20 π. 15 δ. : 4
γ) 15 λίραι 12 σελλ. 8 πενν. : 6

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

53. Ἓν αὐτοκίνητον εἰς 5 ὥρας ἔτρεξεν 183 χιλιόμετρα καὶ 750 μέτρα. Μὲ πόσην ταχύτητα ἔτρεχεν τὴν ὥραν;

54. Ταξιδιώτης ἠγόρασεν ἀπὸ τὸ Λονδῖνον 5 ὑάρδας ὑφάσματος καὶ ἔδωσε 13 λίρας 18 σελλίνια καὶ 4 πέννας. Πόσον ἠγόρασε τὴν κάθε ὑάρδαν;

55. Ἐργάτης εἰς μίαν ἑβδομάδα (6 ἡμέρας) εἰργάσθη 43 ὥρας καὶ 15′. Πόσας ὥρας εἰργάσθη τὴν ἡμέραν;

56. Γράψατε καὶ δύο ἰδικά σας.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

57. Παντοπώλης εἶχε τρία σακκιὰ ρύζι. Τὸ πρῶτον ἐζύγιζε 75 κιλὰ καὶ 200 γραμμ., τὸ δεύτερον 65 κιλ. καὶ 150 γρ. καὶ τὸ τρίτον 58 κιλ. καὶ 240 γρ. Ἀπὸ τὸ ρύζι αὐτὸ ἐπώλησεν 98 κιλὰ καὶ 800 γραμμάρια. Πόσον ρύζι τοῦ ἔμεινε;

58. Ἐλαιοπαραγωγὸς ἔχει τρία ὅμοια βαρέλια γεμᾶτα λάδι. Τὸ καθένα περιέχει 235 κιλὰ καὶ 200 γραμ. Τὸ λάδι αὐτὸ τὸ ἐμοίρασεν εἰς τὰ 4 παιδιά του. Πόσον λάδι ἔλαβεν τὸ καθένα;

59. Μία δακτυλογράφος, διὰ νὰ ἀντιγράψῃ μίαν σελίδα ἑνὸς βιβλίου χρειάζεται 10′ καὶ 30″. Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ, διὰ νὰ ἀντιγράψῃ ἕνα βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 180 σελίδας;

60. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν ἀπὸ τὴν ἅλωσιν τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων μέχρι σήμερον;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

30 ὑάρδαι νὰ τραποῦν εἰς μέτρα.

25 μέτρα νὰ τραποῦν εἰς ὑάρδας.

5 λίραι, 12 σελλίνια καὶ 8 πένναι νὰ τραποῦν εἰς πέννας.

6 ὑάρδαι, 2 πόδες καὶ 8 δάκτυλοι (ἴντσαι) νὰ τραποῦν εἰς ἴντσας.

4 ἡμέραι 10 ὧραι 15′ καὶ 25″ νὰ τραποῦν εἰς δεύτερα λεπ.

7 ὧραι 30′ 40″ νὰ τραποῦν εἰς δεύτερα λεπτά.

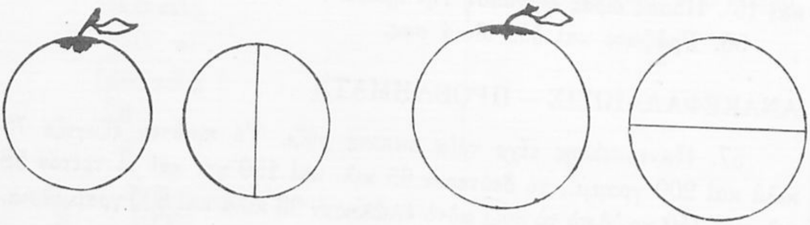
3 ὑάρδαι 2 πόδες καὶ 10 δάκτυλοι νὰ τραποῦν εἰς ὑάρδας.

Δ′. ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Κλασματικὴ μονάς.

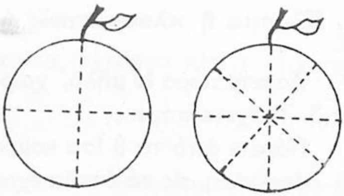
Μία μητέρα διὰ νὰ μοιράσῃ ἓν μῆλον εἰς τὰ δύο μικρὰ παιδιά της τὸ χωρίζει εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ δίδει ἀπὸ ἕνα εἰς κάθε παιδί της (σχ. 1).

Τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον δίδει εἰς κάθε παιδὶ εἶναι μισὸ μῆλον, δηλ. τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἴσα μέρη εἰς τὰ ὁποῖα ἐχώρισε τὸ ὁλόκληρον μῆλον, καὶ λέγεται ἓν δεύτερον. Μία ἄλλη μητέρα θέλει νὰ μοιράσῃ



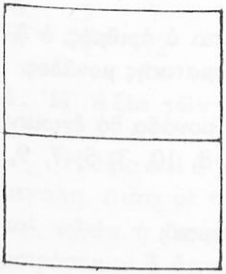
Σχ. 1.

ἕνα πορτοκάλι εἰς τὰ 4 παιδιά της. Τὸ χωρίζει εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ δίδει εἰς τὸ κάθε ἕνα τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 4 κομμάτια, δηλ. τὸ ἓν τέταρτον (Σχ. 2) καὶ ἕνα ἄλλο εἰς 8 ἴσα μέρη (Σχ. 2).

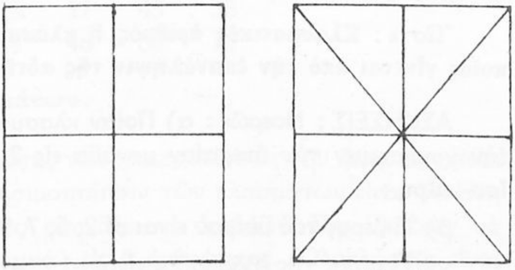


Σχ. 2.

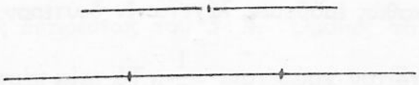
Κόψατε καὶ σεῖς ἕνα φύλλον ἀπὸ τὸ τετράδιόν σας εἰς τὴν μέσην (Σχ. 3), ἓν ἄλλο εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἓν ἄλλο εἰς 8 ἴσα μέρη (σχ. 4) καὶ πάρετε ἕνα κομμάτι ἀπὸ κάθε φύλλον. Τί θὰ ἔχετε εἰς τὰ χέρια σας; Πῶς θὰ ὀνομάσετε τὸ κάθε κομμάτι ; Ἐπίσης κάμετε εἰς τὸ τετράδιόν σας μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ χωρίσατέ την εἰς δύο ἴσα μέρη μὲ τὸ ὑποδεκάμετρόν σας. Κάμετε καὶ μίαν ἄλλην καὶ χωρίσατέ την εἰς 3 μέρη. Πῶς θὰ ὀνομάσωμεν τὸ κάθε μέρος τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ πῶς τῆς δευτέρας; (Σχ.5).



Σχ. 3.



Σχ. 4.



Σχ. 5.

Νὰ χωρίσετε καὶ ἄλλας εὐθείας γραμμὰς εἰς 5, 6, 7, 8, 9 κλπ. ἴσα μέρη. Πῶς ὀνομάζεται τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη κάθε γραμμῆς; Τὸ μῆλον, τὸ πορτοκάλι, τὸ φύλλον εἶναι ἀκέραια πράγματα καὶ λέγονται ἀκέραιαι μονάδες.

Τὸ ἕνα κομμάτι ὅμως αὐτῶν θὰ τὸ ὀνομάζωμεν κλασματικὴν μονάδα.

Ὥστε : **Κλασματικὴ μονὰς λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν (χωρίζομεν) τὴν ἀκεραίαν μονάδα.**

2. Κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμός.

Πάρετε τώρα ἓν μῆλο, χωρίσατέ το εἰς 4 ἴσα κομμάτια καὶ πάρετε τὰ 3. Τί ἔχετε πάρει ;

Πάρετε ἀπὸ τὰ 8 ἴσα κομμάτια ἑνὸς ἄλλου τὰ 5. Τί ἔχετε ; Ἀπὸ τὰ 7 ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσατε μίαν γραμμήν, πάρετε τὰ 6. Τί μέρος τῆς γραμμῆς ἐπήρατε ;

Εἰς τὰ παραδείγματα αὐτὰ ἐπήραμε πολλὰς κλασματικὰς μονάδας καὶ ἐσχηματίσθη εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαφέρει ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς μέχρι τώρα ἀριθμούς, ἀκεραίους, δεκαδικοὺς καὶ συμμιγεῖς. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται κλασματικός.

Ὥστε : **Κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ κλάσμα λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νοερῶς : α) Ποίαν κλασματικὴν μονάδα θὰ ἔχωμεν ἐὰν χωρίσωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 2, 4, 6, 8, 10, 3, 5, 7, 9, ἴσα μέρη ;

β) Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι αἱ 2, 5, 7, 9, παλάμαι ;

γ) Τί μέρος τῆς ἑβδομάδος εἶναι αἱ 2, 4, 6 ἡμέραι ;

3. Γραφὴ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ ὁποῖον, καθὼς ἐμάθομεν, λέγεται ἓν δεύτερον, γράφεται ὡς ἑξῆς : $\frac{1}{2}$. Τὸ ἓν τρίτον γράφεται : $\frac{1}{3}$. Τὰ τρία πέμπτα γράφονται : $\frac{3}{5}$.

Ὥστε : Κάθε κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι χωρίζονται μὲ μίαν ὁριζοντίαν γραμμήν. Ὁ ἐπάνω ἀριθμὸς λέγεται **ἀριθμητὴς** καὶ ὁ κάτω **παρονομαστής**. Καὶ οἱ δύο μαζὶ λέγονται **ὅροι τοῦ κλάσματος.**

Ὁ παρονομαστὴς φανερώνει εἰς πόσα ἴσα μέρη ἐχωρίσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ὁ ἀριθμητὴς πόσα ἴσα μέρη ἐπήραμεν ἀπὸ αὐτά. Διὰ ν' ἀπαγγείλωμεν ἓν κλάσμα ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμητήν του, ὡς ἀπόλυτον ἀριθμητικὸν (ἕν, δύο, τρία κλπ.) καὶ τὸν παρονομαστὴν του ὡς τακτικὸν (πρῶτα, δεύτερα, τρίτα, τέταρτα κλπ.). Π.χ. $\frac{3}{5}$ τρία πέμπτα, $\frac{6}{8}$ ἓξ ὄγδοα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Γράψατε μὲ κλασματικοὺς ἀριθμούς : Δύο τρίτα, πέντε ὄγδοα, ἓν τέταρτον, ἓξ ἔνατα, ἑπτὰ δέκατα, τρία πέμπτα, ἐννέα δέκατα πέμπτα.

β) Τί φανερώνουν τὰ κλάσματα : $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{27}{46}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{58}{70}$.

4. Ἡ ἀξία τῶν κλασμάτων.

Ἡ ἀξία καὶ ἡ χρησιμότης τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ζωήν μας εἶναι μεγάλη. Διότι μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν κλασμάτων εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Π.χ. θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 3 ἄρτους (ψωμιὰ) εἰς 4 ἀνθρώπους. Ὁλοκλήρους εἶναι ἀδύνατον νὰ τοὺς μοιράσωμεν, δι' αὐτὸ χωρίζομεν τὸν κάθε ἄρτον εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ δίδομεν εἰς κάθε ἄνθρωπον ἀπὸ ἕνα κομμάτι. Ἔτσι ἕκαστος θὰ λάβῃ τρεῖς φορὰς τὸ $\frac{1}{4}$ δηλ. $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Τὸ $\frac{3}{4}$ φανερώνει ὅτι ἐμοιράσαμεν τοὺς 3 ἄρτους εἰς 4 ἀνθρώπους. Ἄρα τὸ $\frac{3}{4}$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3 : 4. Ὁμοίως τὸ $\frac{5}{6}$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 : 6 καὶ τὸ $\frac{7}{9}$ εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 : 9.

Ὥστε **κάθε κλάσμα εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.**

Σημείωσις: Κάθε ἀκέραιος δύναται νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ εὕρετε νοερῶς τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν : 3 : 4, 4 : 5, 5 : 6, 6 : 7, 7 : 8, 8 : 9, 12 : 15, 15 : 20, 25 : 30, 14 : 16, 24 : 26.

5. Σύγκρισις κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

α) Τί φανερώνει τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$;

Τί φανερώνει τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$;

Τί φανερώνει τὸ κλάσμα $\frac{6}{6}$;

Τί σχέσιν ἔχουν τὰ κλάσματα αὐτὰ πρὸς τὴν ἀκεραίναν μονάδα ;

Ἀπάντησις : Τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Ὥστε : **Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἴδιοι, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.**

β) Τί φανερώνουν τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$;

Ποίαν σχέσιν ἔχουν τὰ κλάσματα αὐτὰ πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα ;

Ὥστε : Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Τὸ κλάσμα αὐτὸ λέγεται **γνήσιον**.

γ) Τί φανερώνουν τὰ κλάσματα $\frac{4}{2}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{10}{5}$;

Ποίαν σχέσιν ἔχουν τὰ κλάσματα αὐτὰ πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα ;

Ὥστε : Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Τὸ κλάσμα αὐτὸ λέγεται **καταχρηστικόν**.

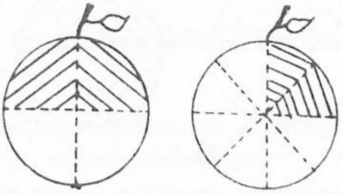
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Γράψατε : Δέκα κλάσματα ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Δέκα κλάσματα μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα. Δέκα κλάσματα μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

β) Νὰ χωρίσετε τὰ παρακάτω κλάσματα εἰς τὰς κατηγορίας των, δηλαδὴ χωριστὰ τὰ ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, χωριστὰ τὰ γνήσια καὶ χωριστὰ τὰ καταχρηστικά :

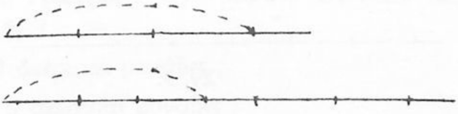
$\frac{4}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{12}{9}$.

6. Σύγκρισις κλασμάτων μεταξύ των.

Ἔχομεν δύο ὅμοια μῆλα, τὸ πρῶτον τὸ χωρίζομεν εἰς 4 ἴσα κομμάτια καὶ τὸ δεύτερον εἰς 8 ἴσα κομμάτια καὶ παίρνομεν δύο κομμάτια ἀπὸ τὸ πρῶτον μῆλον, δηλαδὴ τὰ $\frac{2}{4}$, καὶ δύο κομμάτια ἀπὸ τὸ δεύτερον μῆλον, δηλαδὴ τὰ $\frac{2}{8}$. Ἀπὸ ποῖον μῆλον ἐπήραμεν περισσότερον ; Δηλαδὴ ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτὰ $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{2}{8}$ εἶναι μεγαλύτερον. Καὶ κατὰ τί ὁμοιάζουν τὰ κλάσματα ; (Σχ. 6).


Σχ. 6.

Κάμετε εἰς τὸ τετράδιόν σας δύο εὐθείας καὶ ἴσας μεταξύ των γραμμὰς καὶ νὰ χωρίσετε τὴν πρώτην γραμμὴν εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ τὴν δευτέραν γραμμὴν εἰς 6 ἴσα μέρη· πάρετε ἀπὸ τὴν κάθε γραμμὴν 3 μέρη. Τί ἐπήρατε ἀπὸ κάθε γραμμήν ; Ἀπὸ ποίαν γραμμὴν ἐπήρατε περισσότερον μέρος ; (Σχ. 7).


Σχ. 7.

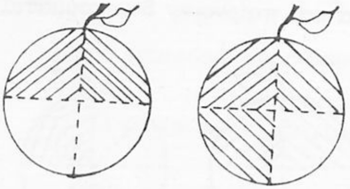
Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτὰ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{6}$ εἶναι μεγαλύτερον ; Καὶ κατὰ τί ὁμοιάζουν τὰ κλάσματα αὐτά ;

Ὥστε: **Μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴδιον ἀριθμητήν, μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μικρότερον παρονομαστήν.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{7}$ εἶναι μεγαλύτερον ; Καὶ διατί ;

β) Βάλετε εἰς τὴν σειράν, ἀναλόγως μὲ τὴν ἀξίαν των, τὰ κλάσματα : $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{5}$.

Παίρνομεν πάλιν δύο ὅμοια μῆλα καὶ τὰ χωρίζομεν εἰς 4 ἴσα μέρη τὸ καθένα. Ἀπὸ τὸ πρῶτον μῆλον παίρνομεν τὰ $\frac{2}{4}$ καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον τὰ $\frac{3}{4}$. Ἀπὸ ποῖον μῆλον ἐπήραμεν περισσότερον ;



Σχ. 8.

Ποῖον ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα εἶναι μεγαλύτερον ; Κατὰ τί ὁμοιάζουν τὰ κλάσματα αὐτά ; (Σχ. 8).

Παίρνομεν τώρα δύο ἴσας εὐθείας γραμμὰς καὶ χωρίζομεν κάθε μίαν εἰς 6 ἴσα μέρη, ἀπὸ τὴν πρώτην παίρνομεν 3 μέρη, δηλαδὴ τὰ $\frac{3}{6}$, καὶ ἀπὸ τὴν δευτέραν 5 μέρη, δηλ. τὰ $\frac{5}{6}$. Ἀπὸ ποίαν γραμμὴν ἐπήραμεν περισσότερον μέρος ; (Σχ. 9).

Σχ. 9.

Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{6}$ καὶ $\frac{5}{6}$ εἶναι μεγαλύτερον ; Κατὰ τί ὁμοιάζουν τὰ κλάσματα αὐτά ;

Ὥστε: **Μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴδιον παρονομαστήν, μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητήν.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$ εἶναι μεγαλύτερον καὶ διατί ;

β) Εἰς τὴν Ε΄ τάξιν ἑνὸς σχολείου τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν μαθητῶν εἶναι ἀγόρια καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ κορίτσια. Τὰ ἀγόρια ἢ τὰ κορίτσια εἶναι περισσότερα καὶ διατί ;

γ) Βάλετε τὰ κλάσματα $\frac{8}{15}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{3}{15}$, εἰς τὴν σειρὰν ἀναλόγως μὲ τὴν ἀξίαν των.

7. Τροπὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα.

α) Πόσα δέκατα ἔχει τὸ ἓν μέτρον, πόσα τὰ 4 καὶ πόσα τὰ 6 μέτρα ; (Γράψατέ τα κλασματικῶς)

β) Μία ἑβδομὰς πόσα ἕβδομα ἔχει ; Πόσα ἕβδομα ἔχουν αἱ 3 ἑβδομάδες ; (Γράψατέ τα κλασματικῶς).

Ὥστε : Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, τοῦ ὁποίου μᾶς δίδεται ὁ παρονομαστής, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον τὸ γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν γράφομεν τὸν δοθέντα. Π.χ. ὁ ἀκέραιος 8 νὰ τραπῇ εἰς πέμπτα : $8 = \frac{40}{5}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : *Νοερῶς καὶ Γραπτῶς :* α) Τρέψατε εἰς ἕκτα τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 2, 4, 5, 6, 7.

β) Πόσα τρίτα ἔχουν 8 ἀκέραιαι μονάδες ;

γ) Πόσα δέκατα ἔχουν 9 ἀκέραιαι μονάδες ;

δ) Ὁ ἀριθμὸς 12 νὰ τραπῇ εἰς τέταρτα.

ε) Ὁ ἀριθμὸς 15 νὰ τραπῇ εἰς ὄγδοα.

Σημείωσις: Τί φανερώνουν τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα.

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{8}{1}$$

Τί παρατηρεῖτε εἰς τὰ κλάσματα αὐτά ;

α) Ὅτι, ὅταν τὸ καταχρηστικὸν κλάσμα ἔχῃ παρονομαστὴν τὴν μονάδα, εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμητήν του.

β) Ὅτι κάθε ἀκέραιος ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸν ἴδιον τὸν ἀκέραιον καὶ παρονομαστὴν τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Μὲ τί ἰσοῦται ἕκαστον τῶν κατωτέρω κλασμάτων ; $\frac{5}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{7}{1},\ \frac{9}{1},\ \frac{10}{1},\ \frac{15}{1},\ \frac{16}{1}$

β) Γράψατε ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 17.

8. Ἐξαγωγὴ ἀκεραίων μονάδων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Νοερῶς καὶ Γραπτῶς).

α) Πόσα μῆλα εἶναι τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ μήλου; καὶ πόσα τὰ $\frac{8}{4}$;

β) Πόσα μέτρα εἶναι τὰ $\frac{24}{10}$ τοῦ μέτρου; καὶ πόσα τὰ $\frac{40}{10}$;

γ) Πόσαι ἀκέραιαι μονάδες εἶναι τὰ $\frac{15}{5}$;

δ) Πόσα ἀχλάδια εἶναι τὰ $\frac{6}{4}$ τοῦ ἀχλαδιοῦ; καὶ πόσα τὰ $\frac{5}{2}$;

ε) Πόσας ἀκεραίας μονάδας καὶ πόσας κλασματικὰς περιέχει τὸ κλάσμα $\frac{13}{4}$; Πόσας τὸ κλάσμα $\frac{7}{3}$;

Ἐδῶ, ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα ἐβγάλαμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας. Αὐτὴ ἡ ἐργασία λέγεται ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων.

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ ἕνα καταχρηστικὸν κλάσμα, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ πηλίκον εἶναι αἱ ἀκέραιαι μονάδες. Ἂν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον, τὸ γράφομεν ἀριθμητὴν κλάσματος καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

α) *Νοερῶς:* Νὰ ἐξαγάγετε τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ τὰ κατωτέρω κλάσματα:

$$\frac{6}{2}=, \frac{12}{6}=, \frac{15}{5}=, \frac{24}{6}=, \frac{27}{9}=, \frac{30}{10}=, \frac{9}{4}=,$$

$$\frac{13}{3}=, \frac{17}{6}=, \frac{23}{5}=, \frac{34}{7}=, \frac{38}{9}=$$

β) *Γραπτῶς:*

$$\frac{135}{5}=, \frac{240}{4}=, \frac{351}{5}=, \frac{875}{25}=, \frac{960}{34}=, \frac{758}{48}=,$$

$$\frac{659}{18}=, \frac{563}{15}=, \frac{496}{12}=$$

9. Μικτοὶ ἀριθμοί.

α) Τὰ 5 ἀκέραια μῆλα καὶ $\frac{3}{8}$ τοῦ μήλου γράφονται ἔτσι: $5\frac{3}{8}$.

β) Τὰ 4 ἀκέραια πορτοκάλια καὶ $\frac{2}{4}$ τοῦ πορτοκαλιοῦ γράφονται ἔτσι: $4\frac{2}{4}$.

Τί παρατηρεῖτε εἰς τοὺς ἀριθμοὺς $5\frac{3}{8}$ καὶ $4\frac{2}{4}$; Ἀπὸ τί ἀποτελοῦνται ; Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται μικτοί.

Ὥστε : **Μικτοὶ ἀριθμοὶ λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Νὰ διαβάσετε τοὺς μικτοὺς ἀριθμούς :

$$6\frac{1}{2},\ 7\frac{3}{6},\ 9\frac{4}{8},\ 10\frac{6}{7},\ 16\frac{3}{5},\ 20\frac{7}{10}.$$

β) Νὰ γράψετε 10 μικτοὺς ἀριθμούς.

10. Πῶς τρέπομεν μικτὸν εἰς κλάσμα;

α) Μία ἑβδομὰς μὲ πόσα ἕβδομα ἰσοῦται ;

Μία ἑβδομὰς καὶ $\frac{3}{7}$ μὲ πόσα ἕβδομα ἰσοῦνται ;

2 ἑβδομάδες καὶ $\frac{5}{7}$ μὲ πόσα ἕβδομα ἰσοῦνται ;

β) Ἕνα μέτρον μὲ πόσα δέκατα ἰσοῦται ;

1 μέτρον καὶ $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου μὲ πόσα δέκατα ἰσοῦνται ;

3 μέτρα καὶ $\frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου μὲ πόσα δέκατα ἰσοῦνται ;

γ) Ἕνα ἔτος μὲ πόσα δωδέκατα ἰσοῦται ;

1 ἔτος καὶ $\frac{7}{12}$ μὲ πόσα δωδέκατα ἰσοῦνται ;

4 ἔτη καὶ $\frac{9}{12}$ μὲ πόσα δωδέκατα ἰσοῦνται ;

Εἰς τὰ παραδείγματα αὐτὰ τί ἐκάμομεν τοὺς μικτοὺς ἀριθμούς ;

Ὥστε : **Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸν ἀριθμητήν. Τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸν βάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.** Π.χ. $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ τρέψετε εἰς κλασματικοὺς τοὺς μικτοὺς ἀριθμούς:

α) *Νοερῶς :* $2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{4}$, $4\frac{3}{5}$, $5\frac{3}{10}$, $8\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{3}$, $10\frac{1}{3}$.

β) *Γραπτῶς :* $14\frac{2}{3}$, $35\frac{6}{8}$, $40\frac{4}{5}$, $53\frac{7}{9}$, $65\frac{1}{4}$, $123\frac{1}{2}$, $202\frac{3}{4}$, $349\frac{4}{10}$, $450\frac{2}{19}$, $500\frac{5}{20}$.

11. Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

1. Ὁ Γιαννάκης εἶχε τὰ $\frac{2}{8}$ τοῦ μήλου. Ὁ Γιῶργος τοῦ ἔδωσε ἄλλα $\frac{2}{8}$ καὶ ἡ ἀδελφούλα του ἄλλα $\frac{2}{8}$. Πόσα ἔχει τώρα ὁ Γιαννάκης ; Θὰ ἔχῃ $\frac{6}{8}$ τοῦ μήλου, δηλαδὴ τριπλάσια. Αὐτὸ τὸ εὑρίσκομεν ἐὰν πάρωμεν τὸ $\frac{2}{8}$ τρεῖς φοράς, ὡς ἑξῆς : $\frac{2 \times 3}{8} = \frac{6}{8}$. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ ἐμεγάλωσε τρεῖς φοράς.

Ὥστε: **Ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητήν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.**

2. Ὁ Γιῶργος ἔχει ἕνα πορτοκάλι χωρισμένον εἰς 4 ἴσα κομμάτια, ἔχει δηλαδὴ τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ πορτοκαλιοῦ. Τὸ μοιράζεται μὲ τὸν ἀδελφόν του. Πόσον παίρνει ἕκαστος ;

Ὁ Γιῶργος παίρνει $\frac{2}{4}$ καὶ ὁ ἀδελφός του ἄλλα $\frac{2}{4}$.

Πῶς τὸ εὑρίσκομεν ; Ὡς ἑξῆς : $\frac{4:2}{4} = \frac{2}{4}$. Ἐδῶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$ ἔγινε μικρότερον δύο φοράς.

Ἄρα: **Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται (μικραίνει) δι' ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ ἀριθμοῦ.**

3. Ὁ Δημητράκης ἔχει τὰ $\frac{2}{2}$ τοῦ μήλου καὶ θέλει νὰ τὸ μοιράσῃ εἰς 3 φίλους του. Πῶς θὰ γίνῃ ;
Καθὼς βλέπετε, τὸ μῆλον εἶναι χωρισμένον εἰς 2 ἴσα κομμάτια καί, ὅπως εἶναι, δὲν μοιράζεται. Πρέπει ἑπομένως τὰ δύο αὐτὰ κομμάτια νὰ τὰ κάμῃ μικρότερα, ὥστε ἀντὶ νὰ ἔχῃ 2 κομμάτια, νὰ ἔχῃ 6 κομμάτια μικρότερα, τὰ ὁποῖα, ἂν τὰ μοιρασθοῦν οἱ 3 φίλοι τοῦ Δημητράκη, θὰ πάρῃ καθένας 2 κομμάτια, δηλαδὴ τὰ $\frac{2}{6}$ τοῦ μήλου.

Πῶς τὸ εὑρίσκομεν; Ὡς ἑξῆς: $\frac{2}{2\times 3} = \frac{2}{6}$. Ἐδῶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$ ἔγινε μικρότερον τρεῖς φοράς.

Ἄρα : **Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον αὐτὸν ἀριθμόν.**

4. Παίρνομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{6}$, τὸ ὁποῖον μᾶς φανερώνει μισὴν ἀκεραίαν μονάδα. Ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν του διὰ 2, θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{6:2} = \frac{3}{3}$, δηλαδὴ μίαν ἀκεραίαν μονάδα.

Τί παρατηροῦμεν ; Ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{6}$ ἐμεγάλωσε δύο φοράς.

Ἄρα: **Ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν του διὰ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ ἀριθμοῦ.**

Τοὺς 4 αὐτοὺς κανόνας ἠμποροῦμεν νὰ τοὺς κάμωμεν ἕνα. Ἠμπορεῖτε σεῖς μόνοι σας ; Προσπαθήσατε, εἶναι εὔκολον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Πότε ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται; β) Πότε ἕνα κλάσμα διαιρεῖται;

5. Παίρνομεν τὰ $\frac{2}{4}$ τοῦ μήλου, δηλ. μισὸ μῆλον. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος αὐτοῦ μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, μὲ τὸ 2 λ.χ., θὰ ἔχωμεν : $\frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8}$, δηλ. πάλιν μισὸ μῆλον.

Ἐὰν τώρα, τοῦ ἰδίου κλάσματος $\frac{2}{4}$, διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους μὲ τὸν ἴδιον πάλιν ἀριθμὸν 2, θὰ ἔχωμεν : $\frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$, δηλ. μισὸ μῆλον.

Ὥστε : **Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, δηλαδὴ λαμβάνομεν κλάσμα ἴσον.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) Κάμετε 4 φορὰς μεγαλύτερα τὰ κλάσματα :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{8}{10}, \frac{15}{20}, \frac{20}{25}, \frac{24}{42}$$

β) Κάμετε 3 φορὰς μικρότερα τὰ κλάσματα :

$$\frac{3}{8}, \frac{6}{10}, \frac{12}{16}, \frac{4}{5}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{20}{23}.$$

γ) Κάμετε τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ ἔχουν ὅρους 5 φορὰς μεγαλυτέρους χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία των :

$$\frac{2}{2}, \frac{6}{9}, \frac{8}{10}, \frac{10}{13}, \frac{13}{15}, \frac{24}{30}.$$

δ) Κάμετε τὰ παρακάτω κλάσματα νὰ ἔχουν ὅρους 4 φορὰς μικροτέρους χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία των :

$$\frac{4}{8}, \frac{8}{24}, \frac{12}{16}, \frac{20}{24}, \frac{32}{40}, \frac{28}{36}.$$

12. Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

Παίρνομεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου, δηλ. μισὸ μέτρον, καὶ διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ 5, ἤτοι : $\frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$, δηλαδὴ πάλιν μισὸ μέτρον. Διότι, καθὼς εἴπομεν ἀνωτέρω, ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἂν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$, ἔχει ὅμως μικροτέρους ὅρους.

Αὐτὴ ἡ πρᾶξις λέγεται ἁπλοποίησις. Ἁπλοποιοῦμεν ἕνα κλάσμα σημαίνει ὅτι διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν καὶ εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα τῆς αὐτῆς ἀξίας, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.

Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἁπλοποίησις τοῦ κλάσματος πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, διὰ τοῦ ὁποίου νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ οἱ δύο του ὅροι. Νὰ μὴ μένῃ δηλαδὴ ὑπόλοιπον. Λ.χ. τὸ κλάσμα $\frac{10}{15}$ ἁπλοποιεῖται μὲ τὸ 5, τὸ $\frac{9}{18}$ ἁπλοποιεῖται μὲ τὸ 9 κ.ο.κ.

Τὰ κλάσματα ὅμως $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$ κλπ. δὲν ἁπλοποιοῦνται μὲ κανένα ἀριθμόν. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται ἀνάγωγα.

13. Κοινοὶ διαιρέται.

Μέγιστος Κοινὸς Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)

Ἔχομεν τὸ κλάσμα $\frac{20}{40}$. Ὁ ἀριθμητὴς 20 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2, διὰ τοῦ 4, διὰ τοῦ 5, διὰ τοῦ 10 καὶ διὰ τοῦ 20. Ὅλοι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ λέγονται διαιρέται τοῦ 20.

Ὁ παρονομαστὴς 40 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται διαιρέται τοῦ 40.

Ἀπὸ τοὺς διαιρέτας αὐτοὺς καὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος οἱ 2, 4, 5, 10, 20 εἶναι διαιρέται καὶ τῶν δύο ὅρων. Διὰ τοῦτο ὀνομάζονται κοινοὶ διαιρέται τοῦ κλάσματος.

Διὰ ποίου ὅμως ἀπὸ τοὺς κοινοὺς αὐτοὺς διαιρέτας μᾶς συμφέρει νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα μας ; Ἀσφαλῶς μὲ τὸ 20, δηλαδὴ μὲ τὸν μεγαλύτερον κοινὸν διαιρέτην, ὁ ὁποῖος λέγεται Μέγιστος Κοινὸς Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.), διότι ἔτσι θὰ εὕρωμεν ἀμέσως κλάσμα ἀνάγωγον, χωρὶς πολλὰς ἁπλοποιήσεις, καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{20 : 20}{40 : 20} = \frac{1}{2}$$

Ἡ ἁπλοποίησις μᾶς διευκολύνει εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων πράξεων, διότι μᾶς δίδει μικροτέρους ἀριθμούς.

14. Διαιρετότης.

Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἁπλοποίησις πρέπει νὰ γνωρίζωμεν πότε εἷς ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑνὸς ἄλλου :

α) Διὰ 2

Εἷς ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 2, ὅταν εἶναι ἄρτιος (ζυγός), ὅταν δηλ. τελειώνῃ εἰς 2, 4, 6, 8 καὶ 0. Λ.χ. 232, 364, 456, 578, 620.

Γράψατε καὶ σεῖς 5 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2.

β) Διὰ 3 ἢ 9

Εἷς ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 3 ἢ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 3 ἢ 9. Λ.χ. 4581, διότι $4 + 5 + 8 + 1 = 18$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 4581. Τὸ 18 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9, ἄρα καὶ ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς 4581 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 9.

Γράψατε 5 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 3 καὶ ἄλλους 5, οἱ ὁποῖοι νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 9.

Σημείωσις: Ὅσοι ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ τοῦ 9, διαιροῦνται καὶ διὰ τοῦ 3.

γ) Διὰ 4.

Εἷς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του εἶναι μηδενικὰ ἢ σχηματίζουν ἀριθμὸν διαιρούμενον διὰ 4.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 3924, 5732, 6540, διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4, διότι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἑκάστου διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4. Διαιροῦνται διὰ τοῦ 4 καὶ οἱ ἀριθμοὶ 2700, 305000 κ.ἄ. διότι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία των εἶναι μηδενικά.

Γράψατε 5 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4.

δ) Διὰ 25.

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 25, ὅταν τελειώνῃ εἰς 25, 50, 75 ἢ εἰς 2 μηδενικά, δηλ. ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, ὡς ἔχουν γραφῆ, σχηματίζουν ἀριθμὸν διαιρούμενον διὰ 25. Λ.χ. οἱ ἀριθμοὶ 4325, 3650, 5875, 6500 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 25.

Γράψατε 5 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 25.

ε) Διὰ 5.

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 5, ὅταν τελειώνῃ εἰς 5 ἢ 0. Λ.χ. οἱ ἀριθμοί : 35, 65, 85, 175, 325, 370, 430, 680, 760, 1000 κλπ. διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 5.

Γράψατε 5 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 5.

στ) Διὰ 10, 100, 1000, 10000 κ.λ.π.

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 10, ὅταν τελειώνῃ εἰς ἕνα τοὐλάχιστον μηδενικόν.

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 100, ὅταν τελειώνῃ εἰς δύο τοὐλάχιστον μηδενικά.

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 1000, ὅταν τελειώνῃ εἰς τρία μηδενικὰ ἢ καὶ περισσότερα καὶ οὕτω καθεξῆς.

Λ.χ. οἱ ἀριθμοὶ 240, 1260, 3750, 4870 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 10.

Οἱ ἀριθμοὶ 500, 1300, 2800, 5900 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 100 καὶ διὰ 10.

Οἱ ἀριθμοὶ 3000, 15000, 175000, 243000 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 1000, διὰ 100 καὶ διὰ 10.

Γράψατε 4 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 10, ἄλλους 4 διὰ 100, ἄλλους 4 διὰ 1000 καὶ 2 διὰ τοῦ 100.000.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἁπλοποιήσετε τὰ κατωτέρω κλάσματα :

$$\frac{2}{4},\ \frac{4}{8},\ \frac{6}{9},\ \frac{9}{12},\ \frac{9}{18},\ \frac{18}{27},\ \frac{12}{16},\ \frac{20}{24},\ \frac{5}{15},\ \frac{30}{45},\ \frac{20}{25},\ \frac{35}{45},$$

$$\frac{20}{30},\ \frac{70}{80},\ \frac{25}{50},\ \frac{50}{75},\ \frac{100}{300},\ \frac{1200}{1500},\ \frac{3000}{5000},\ \frac{10000}{15000}$$

15. Ὁμώνυμα κλάσματα.

Παίρνομεν τὰ κλάσματα $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$. Κατὰ τί ὁμοιάζουν τὰ κλάσματα αὐτά ; Ποῖον ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι μεγαλύτερον ; Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται ὁμώνυμα. Ὥστε : **Ὁμώνυμα κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.**

Εἰς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

Γράψατε 10 κλάσματα ὁμώνυμα.

16. Ἑτερώνυμα κλάσματα.

Τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{8}$ λέγονται ἑτερώνυμα.

Ἑτερώνυμα κλάσματα λέγονται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορετικοὺς παρονομαστάς.

Γράψατε 10 ἑτερώνυμα κλάσματα.

17. Σύγκρισις ὁμωνύμων καὶ ἑτερωνύμων κλασμάτων μεταξύ των.

Πρόβλημα 1. Ἠγοράσαμεν χθὲς $\frac{3}{10}$ τοῦ κιλοῦ λάδι καὶ σήμερον $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ. Πότε ἠγοράσαμεν περισσότερον καὶ διατί ; Τὰ κλάσματα $\frac{3}{10}$ καὶ $\frac{5}{10}$ τί κλάσματα εἶναι ; Ποῖον εἶναι μεγαλύτερον καὶ διατί ;

Πρόβλημα 2. Ἡ Μαρία ἐπῆρε $\frac{6}{10}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρον καὶ ἡ Ἑλένη $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ. Ποία ἠγόρασε περισσότερον βούτυρον ;

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἠξεύρωμεν ποία ἠγόρασε περισσότερον, διότι τὰ κλάσματα $\frac{6}{10}$ καὶ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἑτερώνυμα καὶ δὲν συγκρίνονται.

Δι᾽ αὐτὸ πρέπει νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα.

18. Πῶς τρέπομεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα.

α΄. Δύο ἑτερώνυμα κλάσματα.

Ἂς πάρωμεν τὰ κλάσματα $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{4}{10}$. Εἴπομεν ὅτι διὰ νὰ ἠμπορέσωμεν νὰ τὰ συγκρίνωμεν πρέπει πρῶτον νὰ τὰ κάμωμεν ὁμώνυμα. Ἰδοὺ τί κάμνω. $\overset{\overset{10}{\smile}}{\frac{3}{8}}\ \overset{\overset{8}{\smile}}{\frac{4}{10}} = \frac{30}{80}\ \frac{32}{80}$. Τί κλάσματα ἔχω τώρα; Κάμετε τώρα τὴν σύγκρισιν. Πῶς τὰ ἔτρεψα εἰς ὁμώνυμα; Καθὼς βλέπετε ἐπάνω ἀπὸ τὸ πρῶτον κλάσμα ἔγραψα τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου κλάσματος καὶ ἐπάνω ἀπὸ τὸ δεύτερον κλάσμα ἔγραψα τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου κλάσματος. Ἔπειτα ἐπὶ τὸ 10, τὸ ὁποῖον εἶναι παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου κλάσματος, πολλαπλασιάζω πρῶτον τό 3, δηλ. τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου κλάσματος, καὶ ὅ,τι εὕρω τὸ γράφω ἀριθμητὴν τοῦ νέου κλάσματος, καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζω τὸ 8, δηλ. τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου κλάσματος, καὶ ὅ,τι εὕρω τὸ γράφω παρονομαστὴν τοῦ νέου κλάσματος. Κατόπιν ἐπὶ τὸ 8, ποὺ εἶναι παρονομαστὴς τοῦ πρώτου κλάσματος, πολλαπλασιάζω πρῶτον τὸ 4, δηλ. τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου κλάσματος, καὶ τὸ γινόμενον τὸ γράφω ἀριθμητὴν τοῦ νέου κλάσματος, καὶ ἔπειτα πολλαλασιάζω τὸ 10, δηλ. τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου κλάσματος, καὶ τὸ γινόμενον τὸ γράφω παρονομαστὴν τοῦ νέου κλάσματος.

Ὥστε: **Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου κλάσματος καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου κλάσματος.**

Σημείωσις: Ἐνθυμηθῆτε τί εἴπομεν εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων: Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Νὰ τρέψετε εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα:

α) $\frac{3}{5}\ \frac{2}{2}$, β) $\frac{5}{8}\ \frac{7}{10}$, γ) $\frac{6}{9}\ \frac{3}{6}$, δ) $\frac{1}{3}\ \frac{2}{5}$, ε) $\frac{1}{2}\ \frac{4}{7}$.

2. Νὰ εὕρετε ποῖα ἀπὸ τὰ κατωτέρω κλάσματα εἶναι μεγαλύτερα

α) $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{8}$, β) $\frac{6}{7}$ $\frac{4}{9}$, γ) $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{5}$, δ) $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{5}$, ε) $\frac{1}{3}$ $\frac{6}{7}$

β) Τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα.

Ἂν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ πρέπει νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα. Ἐδῶ ὅμως ἔχομεν : Τρία ἑτερώνυμα κλάσματα. Πῶς θὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα ;

Ἰδοὺ πῶς : $\overset{\overset{24}{\smile}}{\frac{1}{2}}$ $\overset{\overset{12}{\smile}}{\frac{3}{4}}$ $\overset{\overset{8}{\smile}}{\frac{5}{6}} = \frac{24}{48}$ $\frac{36}{48}$ $\frac{40}{48}$. Τώρα ἠμπορεῖτε νὰ τὰ συγκρίνετε. Πῶς ἔτρεψα τὰ τρία αὐτὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ; Ἐπῆρα τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{1}{2}$ καὶ ἐπολλαπλασίασα καὶ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 24, (τὸ 24 εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων δηλ. $4 \times 6 = 24$). Κατόπιν ἐπολλαπλασίασα καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ 12, (τὸ 12 αὐτὸ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων, δηλ. $2 \times 6 = 12$). Καὶ τέλος ἐπολλαπλασίασα καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ 8, (τὸ 8 αὐτὸ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων, δηλ. $2 \times 4 = 8$).

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα ὁσαδήποτε ἑτερώνυμα κλάσματα καὶ ἂν ἔχωμεν.

Ἑπομένως : **Διὰ νὰ τρέψωμεν τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ τρέψετε εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα :

α) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ β) $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{8}$ γ) $\frac{6}{8}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{7}{10}$ δ) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$

ε) $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{6}{10}$ στ) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$

γ'. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ 'Ελάχιστον Κοινὸν Πολλαπλάσιον (Ε.Κ.Π.) τῶν παρονομαστῶν.

Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα ἠμποροῦμεν νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα καὶ μὲ ἄλλον τρόπον, δηλαδὴ μὲ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν

Τί εἶναι ὅμως τὸ Ε.Κ.Π. καὶ πῶς τὸ εὑρίσκομεν ;

Ἂς ἴδωμεν πρῶτον τί εἶναι πολλαπλάσια ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀριθμὸς 4 ἔχει πολλαπλάσια τὸ 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 κλπ. Ὁ ἀριθμὸς 5 ἔχει πολλαπλάσια τὸ 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 κλπ. Ὥστε :

Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ὅταν γίνεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, ἂν τὸν διπλασιάσωμεν, τριπλασιάσωμεν κλπ. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἀπὸ τὰ πολλαπλάσια αὐτὰ τὸ 20, τὸ 40, τὸ 60, τὸ 80 κ.ἄ. εἶναι πολλαπλάσια καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 5 καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζονται κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5. Τὰ κοινὰ αὐτὰ πολλαπλάσια διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 5.

Ὥστε κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι πολλαπλάσιον ὅλων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν, ἤτοι διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ ὅλους αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς.

Τὸ μικρότερον ὅμως ἀπὸ τὰ κοινὰ αὐτὰ πολλαπλάσια εἶναι ὁ ἀριθμὸς 20. Δι' αὐτὸ τὸ 20 λέγεται ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Ὥστε :

'Ελάχιστον Κοινὸν Πολλαπλάσιον (Ε.Κ.Π.) δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον ἀπὸ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

19. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ Ε.Κ.Π.

α'. Εἰς τοὺς ἀκεραίους.

α) Θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 15. Παίρνομεν τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, δηλαδὴ τὸν 15, καὶ κοιτάζομεν ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς πρῶτον διὰ τοῦ 3 καὶ ἔπειτα διὰ τοῦ 5. Βλέπομεν ὅτι τὸ 15 διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 5 καὶ διὰ τοῦ 15. Ἑπομένως τὸ 15 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 15.

β) Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 8, 10, θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Θὰ πάρωμεν τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, δηλ. τὸ 10, καὶ θὰ ἴδωμεν ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Βλέπομεν ὅτι δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4 οὔτε διὰ τοῦ 8, ἄρα τὸ 10 δὲν εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Δι' αὐτὸ διπλασιάζομεν τὸ 10 καὶ γίνεται 20, ἀλλὰ τὸ 20 δὲν εἶναι τὸ Ε.Κ.Π., δι' αὐτὸ τριπλασιάζομεν τὸ 10 καὶ γίνεται 30, οὔτε τὸ 30 ὅμως εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. δι' αὐτὸ τὸ τετραπλασιάζομεν καὶ γίνεται 40. Τὸ 40 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π., τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν, διότι διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους ἀριθμούς.

Ὥστε:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν παίρνομεν τὸν μεγαλύτερον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ βλέπομεν ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς ἄλλους. Ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π.

Ἐὰν ὅμως δὲν διαιρῆται ἀκριβῶς, τὸν διπλασιάζομεν ἢ τὸν τριπλασιάζομεν κ.λ.π., μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς.

Ἄλλος τρόπος εὑρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π.

Καὶ μὲ ἄλλον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἐφαρμόζεται κυρίως ὅταν ἔχωμεν μεγάλους παρονομαστάς. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5, 6, 10. Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν καὶ δεξιά τους σύρομεν μίαν κατακόρυφον γραμμήν.

3	4	5	6	10	2
3	2	5	3	5	2
3	1	5	3	5	3
1	1	5	1	5	5
1	1	1	1	1	

Κατόπιν παρατηροῦμεν ἂν ὑπάρχῃ καὶ εἷς ἔστω ἀριθμός, ὁ ὁποῖος νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2. Βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 10 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2. Γράφομεν τὸν διαιρέτην 2 δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς καὶ εἰς τὸ ὕψος, ποὺ εἶναι γραμμένοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ καὶ κάμνομεν τὴν διαίρεσιν.

Τὰ ἀκριβῆ πηλίκα 2, 3, 5 τῶν διαιρουμένων, ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, τὰ γράφομεν κάτωθεν αὐτῶν, καθὼς καὶ τοὺς μὴ διαιρουμένους διὰ τοῦ 2 ἀριθμούς, ὅτε σχηματίζεται νέα σειρὰ ἀριθμῶν, ἀποτελουμένη ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 3, 2, 5, 3, 5, εἰς τὴν νέαν σειρὰν ἔχομεν ἕνα ἀριθμὸν διαιρούμενον διὰ τοῦ 2. Γράφομεν πάλιν τὸν διαιρέτην 2 κάτωθεν τοῦ ἄλλου 2 εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Εἰς τὴν νέαν σειρὰν παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ἔχομεν ἀριθμοὺς διαιρουμένους διὰ τοῦ 2. Ἔχομεν ὅμως διαιρουμένους διὰ τοῦ 3. Γράφομεν τὸ 3 κάτω ἀπὸ τὸ 2 εἰς τὴν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην καὶ κάμνομεν τὴν διαίρεσιν, ὅπως καὶ ἀνωτέρω. Καὶ σχηματίζομεν τρίτην σειρὰν ἀριθμῶν ἀπὸ τὰ πηλίκα τῶν διαιρουμένων διὰ τοῦ 3 καὶ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς μὴ διαιρουμένους διὰ τοῦ 3, ἀποτελουμένην ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 1, 5, 1, 5.

Εἰς τὴν νέαν σειρὰν ἔχομεν ἀριθμοὺς διαιρουμένους διὰ τοῦ 5. Γράφομεν καὶ αὐτὸν εἰς τὴν στήλην τῶν διαιρετῶν κάτω ἀπὸ τὸ 3 καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν. Τὰ πηλίκα τῆς νέας διαιρέσεως, καθὼς καὶ τοὺς μὴ διαιρουμένους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 5, τοὺς γράφομεν εἰς νέαν σειράν.

Τὴν παραπάνω ἐργασίαν τὴν ἐπαναλαμβάνομεν μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν ἀριθμῶν, εἰς τοὺς ὁποίους νὰ μὴ δύναται νὰ γίνῃ ἄλλη διαίρεσις μὲ κανένα ἀριθμόν.

Τότε πολλαπλασιάζομεν μεταξύ των τοὺς διαιρέτας, τοὺς ὁποίους εὕρομεν καὶ ἐγράψαμεν δεξιὰ τῆς κατακορύφου γραμμῆς, καὶ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔμειναν εἰς τὴν τελευταίαν σειράν. Τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τὸ ζητούμενον Ε.Κ.Π.

Ἔτσι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν 3, 4, 5, 6, 10 $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ (Ε.Κ.Π. $= 60$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ εὕρετε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν.

Μὲ τὸν πρῶτον τρόπον:

α) 4, 6, 10, β) 5, 8, 12, γ) 3, 4, 9, 8.

Μὲ τὸν δεύτερον τρόπον:

α) 6, 9, 12, 8, β) 5, 12, 15, 18, γ) 4, 6, 8, 15.

β'. Εὕρεσις Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ διὰ νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ Ε.Κ.Π. θὰ ἐργασθῶμεν ὅπως καὶ προηγουμένως : Ἐδῶ θὰ πάρωμεν τὸν μεγαλύτερον παρονομαστήν, δηλ. τὸ 5, καὶ θὰ ἴδωμεν ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς ἄλλους παρονομαστάς, δηλ. διὰ τοῦ 2 καὶ 4. Βλέπομεν ὅτι δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς, ἄρα δὲν εἶναι τὸ Ε.Κ.Π., δι' αὐτὸ τὸ διπλασιάζομεν καὶ γίνεται 10. Οὔτε τὸ 10 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. Τὸ τριπλασιάζομεν καὶ γίνεται 15. Οὔτε τὸ 15 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π., τὸ τετραπλασιάζομεν καὶ γίνεται 20. Τὸ 20 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π., τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν. Ἀφοῦ εὕρομεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν, εὔκολα πλέον ἠμποροῦμεν νὰ τρέψωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸν τρόπον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου. Διαιροῦμεν τὸ Ε.Κ.Π., δηλ. τὸ 20 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἑκάστου κλάσματος κατὰ σειρὰν καὶ μὲ τὸ πηλίκον τοῦ καθενὸς πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος.

Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν : Ε.Κ.Π. 20

$$\frac{\overset{\overset{10}{\smile}}{1}}{2} \quad \frac{\overset{\overset{5}{\smile}}{3}}{4} \quad \frac{\overset{\overset{4}{\smile}}{2}}{5} = \frac{10}{20} \quad \frac{15}{20} \quad \frac{8}{20}$$

Ὥστε : Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν (ὅπως ἐμάθομεν) καὶ τὸ διαιροῦμεν δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον τὸ γράφομεν ἐπάνω ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ πολλαπλασιάζομεν μ' αὐτὸ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τὰ κλάσματα :

Μὲ τὸν α' τρόπον :

α) $\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{6}{8}$ β) $\frac{2}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}$ γ) $\frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{6}{10}$

δ) $\frac{2}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{10}$ ε) $\frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{8}{10}$ στ) $\frac{5}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{4}$

Μὲ τὸν β' τρόπον :

α) $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{6}{10}$ β) $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{3}{4}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

α) Ποῖα λέγονται ὁμώνυμα κλάσματα ;

β) Ποῖον ἀπὸ τὰ ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον τὸ μικρότερον ;

γ) Ποῖα λέγονται ἑτερώνυμα κλάσματα ;

δ) Πῶς ἠμποροῦμεν νὰ συγκρίνωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα ;

ε) Μὲ πόσους τρόπους τρέπομεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

61. Μία λάμπα πετρελαίου εἰς 3 ὥρας καίει $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ πετρελαιον, μία ἄλλη λάμπα εἰς τὸν ἴδιον χρόνον καίει $\frac{2}{3}$ τοῦ κιλοῦ. Ποία λάμπα καίει ὀλιγώτερον πετρέλαιον;

62. Ἡ Ἑλενίτσα ἠγόρασε διὰ τὰ μαλλιά της $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου κορδέλλαν. Ἡ Λέλα ἠγόρασε $\frac{5}{8}$ τοῦ μέτρου καὶ ἡ Κικὴ $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου. Ποία ἀπὸ τὰς τρεῖς ἠγόρασε περισσοτέραν κορδέλλαν;

63. Ἕνα παιδὶ μὲ ἕνα κουτὶ μαρμελάδα ἐπέρασε 4 ἡμέρας. Τὴν πρώτην ἡμέραν ἔφαγε τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς μαρμελάδας, τὴν δευτέραν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{8}$, τὴν τρίτην τὰ $\frac{4}{16}$ καὶ τὴν τετάρτην ἡμέραν τὰ $\frac{3}{12}$. Ποίαν ἡμέραν ἔφαγε περισσοτέραν μαρμελάδαν;

64. Τέσσαρες ἐργάται σκάπτουν ἕνα κῆπον. Ὁ πρῶτος σκάπτει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κήπου, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{6}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{9}$ καὶ ὁ τέταρτος τὰ $\frac{3}{12}$. Ποῖος ἔσκαψε περισσότερον:;

20. Πράξεις κλασμάτων.

1. Πρόσθεσις

α) Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα: Ὁ Δημητράκης ἐπῆρε τὰ 4 ὄγδοα ἑνὸς μήλου καὶ ὁ Κωστάκης τὰ 3 ὄγδοα. Πόσα ἐπῆραν καὶ οἱ δύο μαζί ;

Λύσις: Θὰ πάρουν 4 ὄγδοα + 3 ὄγδοα = 7 ὄγδοα.

Ἂν τὰ γράψωμεν μὲ κλασματικὴν μορφήν, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

Τί εἴχομεν ἐδῶ νὰ προσθέσωμεν ; Πῶς ἐπροσθέσαμεν ;

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τὸ ἄθροισμά των τὸ γράφομεν ἀριθμητὴν νέου κλάσματος, παρονομαστὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.
Τὸ νέον κλάσμα εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ προσθέσετε τὰ κλάσματα :

α) Νοερῶς : α) $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$, β) $\frac{2}{10}+\frac{5}{10}$, γ) $\frac{1}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}$.

β) Γραπτῶς : α) $\frac{2}{12}+\frac{5}{12}+\frac{3}{12}$, β) $\frac{3}{15}+\frac{5}{15}+\frac{2}{15}+\frac{4}{15}$,

γ) $\frac{16}{50}+\frac{13}{50}+\frac{10}{50}+\frac{11}{50}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

65. Ὁ Γιωργάκης ἐπῆρε ἀπὸ τὸν θεῖόν του $\frac{5}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου καὶ ἀπὸ τὴν θείαν του $\frac{3}{10}$. Πόσα ἐπῆρε καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ἐν συνόλῳ;

66. Ἐργάτης ἔσκαψε τὴν Δευτέραν τὰ $\frac{4}{15}$ ἑνὸς κήπου, τὴν Τρίτην τὰ $\frac{6}{15}$ καὶ τὴν Τετάρτην τὰ $\frac{5}{15}$. Πόσον ἔσκαψε καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας ;

67. Μία βρύση εἰς μίαν ὥραν γεμίζει τὰ $\frac{5}{20}$ μιᾶς δεξαμενῆς,

ἄλλη βρύση γεμίζει τὰ $\frac{8}{20}$ καὶ τρίτη βρύση τὰ $\frac{4}{20}$. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζουν καὶ αἱ τρεῖς μαζὶ εἰς τὴν μίαν ὥραν;

β) Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα : Ἕνας ἔμπορος ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα ἐπώλησε τὴν πρώτην ἡμέραν τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὴν ἄλλην ἡμέραν τὸ $\frac{1}{4}$. Πόσον ὕφασμα ἐπώλησε καὶ τὰς δύο ἡμέρας;

Λύσις: Ἐπώλησε $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} =$;

Ἐδῶ ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ἑτερώνυμα καὶ πρέπει πρῶτον νὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, ἤτοι :

$$\overset{\overset{4}{\smile}}{\frac{2}{5}} + \overset{\overset{5}{\smile}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \overset{\text{Ε.Κ.Π.} = 20}{\frac{13}{20}}$$

Ἄρα ὁ ἔμπορος ἐπώλησε τὰ $\frac{13}{20}$ τοῦ ὑφάσματος.

Ὥστε :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα τὰ τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ κατόπιν τὰ προσθέτομεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ προστεθοῦν τὰ κλάσματα :

α) $\frac{2}{3} + \frac{4}{6}$ β) $\frac{6}{8} + \frac{9}{15}$ γ) $\frac{9}{10} + \frac{15}{20}$

δ) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ ε) $\frac{3}{5} + \frac{6}{10} + \frac{6}{8}$ στ) $\frac{7}{10} + \frac{4}{6} + \frac{3}{5}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

68. Τρεῖς λάμπαι πετρελαίου ἔκαυσαν ἡ πρώτη $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ, ἡ δευτέρα $\frac{1}{3}$ τοῦ κιλοῦ καὶ ἡ τρίτη $\frac{2}{6}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον ἔκαυσαν καὶ αἱ τρεῖς λάμπαι μαζί;

69. Μία μητέρα ἠγόρασε διὰ τὰς τρεῖς θυγατέρας της κορδέλλαν διὰ τὰ μαλλιά τους. Διὰ τὴν πρώτην ἠγόρασε $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου, διὰ τὴν δευτέραν $\frac{3}{8}$ καὶ διὰ τὴν τρίτην $\frac{5}{16}$ τοῦ μέτρου. Πόσην κορδέλλαν ἠγόρασε καὶ διὰ τὰς τρεῖς θυγατέρας της;

70. Μία οἰκογένεια τὴν Δευτέραν ἔβαλεν εἰς τὸ φαγητὸν $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ λάδι, τὴν Τρίτην $\frac{1}{8}$, τὴν Τετάρτην $\frac{1}{5}$ καὶ τὴν Πέμπτην $\frac{3}{10}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον λάδι ἐξώδευσε καὶ τὰς 4 ἡμέρας ;

γ) Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

Πρόβλημα 1. Ἕνας παντοπώλης ἔχει τρία σακκιὰ ζάχαρι. Τὸ πρῶτον ζυγίζει $40\frac{3}{8}$ κιλά, τὸ δεύτερον $39\frac{2}{8}$ καὶ τὸ τρίτον $43\frac{1}{8}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ζυγίζουν καὶ τὰ τρία μαζί ;

Λύσις: Θὰ ζυγίζουν $40\frac{3}{8} + 39\frac{2}{8} + 43\frac{1}{8} = 122\frac{6}{8}$ κιλά.

Τί εἴχομεν ἐδῶ νὰ προσθέσωμεν ; Πῶς προσεθέσαμεν ;

Πρόβλημα 2. Αἱ τρεῖς ἀνώτεραι τάξεις ἑνὸς σχολείου ἐδενδροφύτευσαν μίαν ἔκτασιν. Ἡ Δ' τάξις $2\frac{1}{4}$ στρέμματα, ἡ Ε' $3\frac{2}{5}$ στρέμματα καὶ ἡ ΣΤ' $5\frac{3}{10}$ στρέμματα. Πόσα στρέμματα ἐδενδροφύτευσαν καὶ αἱ τρεῖς τάξεις μαζί ;

Λύσις:

Ε.Κ.Π. = 20

$$2\overset{\overset{5}{\smile}}{\frac{1}{4}} + 3\overset{\overset{4}{\smile}}{\frac{2}{5}} + 5\overset{\overset{2}{\smile}}{\frac{3}{10}} = 2\frac{5}{20} + 3\frac{8}{20} + 5\frac{6}{20} = 10\frac{19}{20}$$

Τί εἴχομεν ἐδῶ νὰ προσθέσωμεν ; Πῶς προσεθέσαμεν ;

Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς μὲ κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.

Ἀν τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν εἶναι ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ κατόπιν κάμνομεν τὴν πρόσθεσιν.

Σημείωσις: Ἡ πρόσθεσις τῶν μικτῶν γίνεται καὶ μὲ ἄλλον τρόπον. Τρέπομεν δηλ. τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ προσθέτομεν τὰ κλάσματα.

Λ. χ. $3\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5} = \frac{7}{2} + \frac{22}{5} = \frac{35}{10} + \frac{44}{10} = \frac{79}{10} = 7\frac{9}{10}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω προσθέσεις :

Νοερῶς : α) $8\frac{2}{10} + 5\frac{3}{10} + 6\frac{1}{10}$ β) $15\frac{3}{20} + 10\frac{5}{20} + 5\frac{6}{20}$

Γραπτῶς : Μὲ τὸν πρῶτον τρόπον :

α) $5\frac{1}{3} + 7\frac{3}{4}$ β) $9\frac{3}{8} + 6\frac{2}{5}$ γ) $10\frac{1}{2} + 20\frac{3}{4} + 40\frac{5}{6}$

δ) $25\frac{2}{4} + 39\frac{4}{8} + 40\frac{5}{6}$ ε) $2\frac{1}{2} + 8 + 3\frac{2}{4}$

Μὲ τὸν δεύτερον τρόπον :

α) $10 + 3\frac{4}{5} + 6\frac{1}{3}$ β) $8\frac{4}{6} + 5\frac{2}{4} + 9$ γ) $5 + \frac{3}{4} + 6 + 7\frac{1}{2}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

71. Παντοπώλης ἔχει τρία σακκιὰ φασόλια. Τὸ πρῶτον ζυγίζει $65\frac{1}{5}$ κιλά, τὸ δεύτερον $73\frac{3}{8}$ κιλὰ καὶ τὸ τρίτον $59\frac{4}{10}$ κιλά. Πόσον ζυγίζουν καὶ τὰ τρία μαζί;

72. Ἐργάτης σκάπτει ἕνα δρόμον. Τὴν α' ἡμέραν σκάπτει $8\frac{1}{4}$ μέτρα, τὴν β' $9\frac{3}{10}$ μ. καὶ τὴν γ' $12\frac{8}{20}$ μέτρα. Πόσα μέτρα δρόμου σκάπτει καὶ τὰς 3 ἡμέρας ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω προσθέσεις :

Νοερῶς :

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}, \quad \frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}, \quad \frac{2}{20}+\frac{5}{20}+\frac{4}{20}+\frac{6}{20},$$

$$\frac{2}{8}+\frac{5}{8}, \quad \frac{4}{10}+\frac{2}{10}+\frac{6}{10}, \quad \frac{1}{15}+\frac{6}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{35}+\frac{6}{35}+\frac{10}{35}+\frac{5}{35}, \quad \frac{5}{50}+\frac{10}{50}+\frac{8}{50}+\frac{6}{50}$$

Γραπτῶς:

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{8}, \quad \frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}, \quad \frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{8}{10},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{9}, \quad \frac{5}{7}+\frac{2}{4}+\frac{6}{8}, \quad \frac{2}{4}+\frac{7}{8}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2},$$

$$5\frac{4}{6}+3\frac{7}{10}, \quad 3\frac{1}{10}+4\frac{3}{5}+5\frac{3}{8},$$

$$6\frac{3}{9}+8\frac{1}{4}, \quad 7\frac{2}{3}+8\frac{1}{5}+10\frac{3}{4},$$

$$2\frac{1}{6}+4\frac{3}{5}+3\frac{7}{12}+5\frac{2}{20}, \quad 4\frac{2}{3}+5\frac{6}{10}+8\frac{1}{5}+3\frac{4}{6}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

73. Μία μαθήτρια ἔπλεξε τὴν μίαν ἡμέραν $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου δαντέλλαν, τὴν ἄλλην ἡμέραν $\frac{2}{6}$ καὶ τὴν τρίτην ἡμέραν $\frac{2}{8}$ τοῦ μέτρου. Πόσην δαντέλλαν ἔπλεξε καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας;

74. Ἐργάτης σκάπτει ἕνα κῆπον. Τὴν α΄ ἡμέραν ἔσκαψε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κήπου, τὴν β΄ ἡμέραν τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ τὴν γ΄ τὰ $\frac{4}{10}$. Πόσον μέρος τοῦ κήπου ἔσκαψε καὶ τὰς 3 ἡμέρας ;

75. Ἔμπορος ἀπὸ ἓν τόπι ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἦτο 60 μέτρα, ἐπώλησε τὴν Δευτέραν $8\frac{1}{5}$ μέτρα, τὴν Τρίτην $12\frac{2}{4}$ μ. καὶ τὴν Τετάρτην $15\frac{3}{10}$. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἐπώλησε καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας;

76. Ἓν δοχεῖον βενζίνης ἀδειανὸν ζυγίζει $1\frac{1}{4}$ κιλά. Χωρεῖ μέσα $14\frac{5}{10}$ κιλὰ βενζίνης. Πόσον θὰ ζυγίζῃ γεμᾶτον ;

2. Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

α) Ἀφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα: Ἓν δοχεῖον εἶχε μέσα 7 δέκατα τοῦ κιλοῦ λάδι. Ἐρρίψαμεν εἰς τὸ φαγητὸν τὰ 3 δέκατα τοῦ κιλοῦ. Πόσον λάδι ἔμεινεν εἰς τὸ δοχεῖον ;

Λύσις: 7 δέκατα − 3 δέκατα = 4 δέκατα τοῦ κιλοῦ. Ἂν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς τοὺς γράψωμεν μὲ κλασματικὴν μορφήν, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

Τί εἴχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ; Πῶς ἀφῃρέσαμεν ;

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου, τὸ ὑπόλοιπον τὸ γράφομεν ἀριθμητὴν νέου κλάσματος καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον. Τὸ νέον κλάσμα εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἀφαιρέσετε τὰ κλάσματα νοερῶς καὶ γραπτῶς :

α) $\frac{7}{15} - \frac{4}{15}$ β) $\frac{9}{20} - \frac{6}{20}$ γ) $\frac{12}{30} - \frac{7}{30}$ δ) $\frac{15}{40} - \frac{8}{40}$

ε) $\frac{18}{36} - \frac{12}{36}$ στ) $\frac{18}{24} - \frac{9}{24}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

77. Ἡ Μαρίκα ἠγόρασε $\frac{9}{10}$ τοῦ μ. δαντέλλαν. Ἀπὸ αὐτὴν ἔδωσε

εἰς ἕνα πτωχὸν κοριτσάκι τὰ $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου. Πόση δαντέλλα τῆς ἔμεινε;

78. Ὁ Γιῶργος εἶχε $\frac{15}{20}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου καὶ ἐξώδευσε διὰ βιβλία τὰ $\frac{11}{20}$. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

Νὰ γράψετε καὶ σεῖς δύο ὅμοια προβλήματα;

β) Ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Πρόβλημα: Ὁ Δημητράκης εἶχε $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου καὶ ἔδωσε εἰς ἕνα πτωχὸν παιδάκι τὰ $\frac{3}{5}$. Πόσα τοῦ ἔμειναν ;

Λύσις: Θὰ τοῦ ἔμειναν $\frac{9}{10} - \frac{3}{5} =$;

Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα πρέπει νὰ τὰ κάμωμεν ὁμώνυμα.

Ἤτοι : $\frac{9}{10} - \frac{3}{5} = \frac{45}{50} - \frac{30}{50} = \frac{15}{50}$.

Τοῦ ἔμειναν $\frac{15}{50}$ τοῦ δεκαδράχμου.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ κατόπιν τὰ ἀφαιροῦμεν ὅπως ἐμάθομεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ κλάσματα :

α) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8}$, β) $\frac{4}{5} - \frac{3}{6}$, γ) $\frac{9}{10} - \frac{5}{8}$,

δ) $\frac{15}{20} - \frac{5}{10}$, ε) $\frac{20}{30} - \frac{8}{20}$, στ) $\frac{25}{40} - \frac{10}{30}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

79. Μία λάμπα πετρελαίου εἶχε μέσα $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον. Ἕνα βράδυ ἔκαψε $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον πετρέλαιον ἔμεινεν εἰς τὴν λάμπαν;

80. Ὁ Γιῶργος πηδᾷ εἰς τὸ ἅλμα εἰς ὕψος $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου. Ὁ Τάκης πηδᾷ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο πηδᾷ περισσότερον καὶ πόσον;

Γράψατε καὶ δύο ἰδικά σας προβλήματα.

γ) Ἀφαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

Πρόβλημα: Ὁ Κωστάκης εἶχεν $9\frac{4}{5}$ δραχμὰς καὶ ἐξώδευσε διὰ τετράδια $2\frac{3}{5}$ δραχμάς. Πόσαι τοῦ ἔμειναν ;

Λύσις: Θὰ τοῦ ἔμειναν : $9\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5} = 7\frac{1}{5}$ δραχμαί.

Τί εἴχομεν ἐδῶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ; Πῶς ἐκάμαμεν τὴν ἀφαίρεσιν ;

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς μὲ κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαιροῦμεν πρῶτον τοὺς ἀκεραίους καὶ ἔπειτα τὰ κλάσματα. Ἂν τὰ κλάσματα τῶν μικτῶν εἶναι ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομεν πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα κάμνομεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Σημείωσις: Ἡ ἀφαίρεσις τῶν μικτῶν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ ἄλλον τρόπον, ὅπως ἐμάθομεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μικτῶν. Πῶς ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Κάμετε τὰς ἀφαιρέσεις μὲ τὸν πρῶτον τρόπον :

Νοερῶς:

α) $9\frac{3}{4} - 5\frac{2}{4}$, β) $9\frac{7}{8} - 4\frac{5}{8}$, γ) $14\frac{5}{6} - 8\frac{3}{6}$, δ) $20\frac{9}{10} - 6\frac{4}{10}$.

Γραπτῶς

ε) $8\frac{7}{8} - 3\frac{2}{5}$, στ) $12\frac{4}{5} - 6\frac{3}{7}$, ζ) $30\frac{2}{3} - 9\frac{1}{5}$, η) $45\frac{8}{9} - 15\frac{4}{6}$.

Κάμετε τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις μὲ τὸν δεύτερον τρόπον :

α) $8\frac{4}{5} - 4\frac{1}{5}$, β) $6\frac{7}{8} - 3\frac{2}{8}$, γ) $10\frac{5}{6} - 6\frac{2}{3}$, δ) $5\frac{7}{8} - 2\frac{3}{5}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

81. Ὑπάλληλος ἔχει ἡμερομίσθιον $90 \frac{8}{10}$ δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει διὰ τὴν συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του $62 \frac{1}{5}$ δραχμάς. Πόσα χρήματα τοῦ περισσεύουν;

82. Ἓν δοχεῖον ἔχει μέσα $15 \frac{3}{4}$ κιλὰ λάδι. Τὸν ἕνα μῆνα ἡ οἰκογένεια ἔφαγεν $9 \frac{2}{8}$ κιλά. Πόσον λάδι ἔμεινεν εἰς τὸ δοχεῖον;

Γράψατε καὶ δύο προβλήματα ἰδικά σας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ :

Τί παρατηρεῖτε εἰς τὴν ἀφαίρεσιν $8 \frac{3}{10} - 4 \frac{6}{10} =$;

Πῶς θὰ ἀφαιρέσωμεν, ὅταν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου ;

Πρέπει νὰ μεγαλώσωμεν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου τόσον, ὥστε νὰ ἀφαιροῦνται τὰ κλάσματα. Λοιπὸν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 8 τοῦ μειωτέου παίρνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ θὰ μείνουν 7. Τὴν ἀκεραίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν παίρνομεν, τὴν τρέπομεν εἰς δέκατα, ὅπως εἶναι καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου. Ἡ ἀκεραία μονάς, τὴν ὁποίαν ἐπήραμεν, ἔχει $\frac{10}{10}$ καὶ $\frac{3}{10}$, τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ μειωτέος, γίνονται $\frac{13}{10}$.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ἔχωμεν :

$$8 \frac{3}{10} - 4 \frac{6}{10} = 7 \frac{13}{10} - 4 \frac{6}{10} = 3 \frac{7}{10}.$$

Σημείωσις: Ἂν παρίσταται ἀνάγκη, παίρνομεν καὶ δευτέραν ἢ καὶ τρίτην ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου, ἕως ὅτου νὰ ἀφαιροῦνται τὰ κλάσματα.

Μήπως ἠμπορεῖτε σεῖς νὰ ἀφαιρέσετε τοὺς μικτοὺς αὐτοὺς καὶ μὲ ἄλλον τρόπον ; Σκεφθῆτε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἀφαιρέσετε τοὺς μικτοὺς ἀριθμούς :

α) $6 \frac{3}{8} - 2 \frac{5}{8}$, β) $9 \frac{4}{10} - 5 \frac{6}{10}$, γ) $15 \frac{2}{5} - 7 \frac{3}{4}$,

δ) $12 \frac{1}{2} - 5 \frac{3}{4}$, ε) $20 \frac{3}{6} - 7 \frac{4}{5}$, στ) $10 \frac{1}{3} - 4 \frac{6}{3}$.

δ) 'Αφαίρεσις ἀκεραίου ἀπὸ μικτόν.

Πρόβλημα : 'Ο Γιαννάκης εἶχεν $6\frac{3}{5}$ δραχμὰς καὶ ἐξώδευσε διὰ ἓν βιβλίον 4 δρχ. Πόσαι τοῦ ἔμειναν ;

Λύσις: Θὰ τοῦ ἔμειναν $6\frac{3}{5} - 4 = 2\frac{3}{5}$.

Τί εἴχομεν ἐδῶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ; Πῶς ἀφῃρέσαμεν ;

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀπὸ μικτόν, ἀφαιροῦμεν μόνον τοὺς ἀκεραίους καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ μένει τὸ ἴδιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Κάμετε τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις νοερῶς :

α) $8\frac{2}{4} - 3$, β) $16\frac{4}{5} - 6$, γ) $24\frac{3}{8} - 6$, δ) $30\frac{3}{9} - 10$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

83. 'Απὸ ἕνα τόπι ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἦτο $70\frac{5}{10}$ μέτρα, ἐπωλήθησαν 39 μέτρα. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν εἰς τὸ τόπι;

84. Ἕνα βαρέλι γεμᾶτο τυρὶ ζυγίζει $45\frac{1}{2}$ κιλά. 'Αδειανὸν τὸ βαρέλι ἐζύγιζεν 6 κιλά. Πόσα κιλὰ τυρὶ περιέχει;

85. Λαχανοπώλης ἠγόρασε μίαν ἡμέραν $58\frac{3}{4}$ κιλὰ ντομάτες καὶ ἕως τὸ βράδυ τῆς ἰδίας ἡμέρας ἐπώλησε τὰ 45 κιλά. Πόσα κιλὰ ντομάτες τοῦ ἔμειναν ἀπώλητα;

Γράψατε καὶ σεῖς δύο ὅμοια προβλήματα.

ε) 'Αφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον.

Πρόβλημα: 'Από 10 δραχμὰς τὰς ὁποίας εἴχομεν, ἐξωδεύσαμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσαι μᾶς ἔμειναν ;

Λύσις: $10 - \frac{4}{5} = 9\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 9\frac{1}{5}$

Τί εἴχομεν ἐδῶ νὰ ἀφαιρέσωμεν : Καὶ τί ἐκάμαμεν ;

Ὥστε :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον, τρέπομεν τὸν ἀκέραιον εἰς μικτόν, μετατρέποντες μίαν ἀκεραίαν μονάδα του εἰς ὁμώνυμον κλάσμα καὶ ἀφαιροῦμεν κλάσμα ἀπὸ μικτόν.

Σημείωσις: Ἡ ἀφαίρεσις κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιον ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ ἄλλον τρόπον. Τρέπομεν τὸν ἀκέραιον εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν κλάσματα ὁμώνυμα.

Π.χ. $10 - \frac{4}{5} = \frac{50}{5} - \frac{4}{5} = \frac{46}{5} = 9\frac{1}{5}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Κάμετε τὰς ἀφαιρέσεις καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους:

α) $11 - \frac{3}{4}$, β) $17 - \frac{8}{9}$, γ) $19 - \frac{2}{3}$,

δ) $21 - \frac{4}{5}$, ε) $30 - \frac{6}{8}$, στ) $58 - \frac{9}{10}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

86. Ἀπὸ μίαν σανίδα μήκους 4 μέτρων ἐκόψαμεν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μ. Πόση ἔμεινε;

87. Ἓν δοχεῖον περιεῖχε 3 κιλὰ λάδι, ἐρρίψαμεν εἰς τὸ φαγητὸν $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον λάδι ἔμεινεν;

88. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4}{6}$ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 15;

Γράψατε καὶ σεῖς δύο ὅμοια προβλήματα.

στ) Ἀφαίρεσις μικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιον.

Πρόβλημα: Μία στάμνα γεμάτη νερὸ ζυγίζει 10 κιλά. Ἀδειάσαμεν τὰ $4\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσον ζυγίζει τώρα ἡ στάμνα;

Λύσις: Θὰ ζυγίζῃ: $10 - 4\frac{3}{5} = 9\frac{5}{5} - 4\frac{3}{5} = 5\frac{2}{5}$ κιλά.

Τί εἴχομεν ἐδῶ νὰ ἀφαιρέσωμεν; Πῶς ἀφῃρέσαμεν;

Ὥστε :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ ἀκέραιον τρέπομεν καὶ τὸν ἀκέραιον εἰς μικτὸν καὶ ἀφαιροῦμεν μικτὸν ἀπὸ μικτόν, ὅπως ἐμάθομεν.

Σημείωσις: Καὶ ἡ ἀφαίρεσις αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μὲ ἄλλον τρόπον, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Ποῖος εἶναι ὁ τρόπος αὐτός ; Νὰ τὸν εὕρητε μόνοι σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Κάμετε τὰς κατωτέρω ἀφαιρέσεις :

α) $10 - 2\frac{1}{3}$, β) $30 - 8\frac{6}{9}$, γ) $40 - 15\frac{2}{8}$

δ) $100 - 25\frac{2}{4}$, ε) $96 - 23\frac{8}{10}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

89. Ἕνα βαρέλι κρασὶ ζυγίζει γεμᾶτο 800 κιλά. Τὸ ἀπόβαρον (βάρος τοῦ βαρελιοῦ) εἶναι $87\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσον εἶναι τὸ κρασί ;

90. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἦτο 78 μέτρα, ἐπώλησεν ὁ ἔμπορος τὰ $39\frac{9}{10}$ μέτρα. Πόσον ὕφασμα ἔμεινεν;

91. Ἓν δοχεῖον χωρεῖ 3500 κιλὰ νερό. Ἔχει ὅμως μέσα $1975\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσα κιλὰ θέλει νὰ γεμίσῃ ;

Νὰ λύσετε καὶ σεῖς δύο ἰδικά σας προβλήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ παρακάτω ἀφαιρέσεις :

$\frac{4}{5} - \frac{3}{8}$, $8\frac{5}{6} - 3\frac{1}{4}$, $25\frac{5}{8} - 13$, $35 - \frac{5}{6}$,

$\frac{7}{8} - \frac{2}{6}$, $9\frac{8}{10} - 5\frac{6}{7}$, $30\frac{6}{9} - 12$, $28 - 5\frac{2}{3}$,

$\frac{9}{10} - \frac{6}{9}$, $10\frac{3}{9} - \frac{5}{8}$, $40 - \frac{7}{8}$, $30 - 4\frac{6}{5}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

92. Μία μαθήτρια ἔπλεξε 5 μέτρα δαντέλλαν. Ἀπ' αὐτὴν ἔβαλε εἰς τὸ φόρεμά της $\frac{6}{8}$ τοῦ μέτρου. Πόση δαντέλλα τῆς ἔμεινε;

93. Ἕνα δοχεῖον ἔχει μέσα $3 \frac{1}{2}$ κιλὰ λάδι. Ἐβάλομεν εἰς τὸ φαγητὸν $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσο λάδι ἔμεινεν;

94. Κρεοπώλης εἶχε $45 \frac{3}{4}$ κιλὰ κρέας καὶ ἐπώλησε τὰ 38 κιλά. Πόσα κιλὰ τοῦ ἔμειναν;

95. Ἕν δοχεῖον γεμᾶτο λάδι ζυγίζει $15 \frac{1}{4}$ κιλά. Ἀδειανὸν ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον λάδι χωρεῖ;

96. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι $20 \frac{5}{8}$. Ὁ εἷς ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι $\frac{4}{5}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

97 Ἕν αὐτοκίνητον διέτρεξε τὴν πρώτην ἡμέραν $260 \frac{1}{4}$ χιλιόμετρα καὶ τὴν δευτέραν ἡμέραν $35 \frac{3}{5}$ χιλιόμετρα ὀλιγώτερα ἀπὸ τὴν πρώτην. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε τὴν δευτέραν ἡμέραν;

98. Ἐργάτης λαμβάνει ἡμερομίσθιον 90 δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει διὰ τὸ σπίτι του $54 \frac{2}{5}$ δρχ. Τί περίσσευμα ἔχει;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

99. Ἐργάτης σκάπτει ἕνα κῆπον. Τὴν μίαν ἡμέραν σκάπτει τὰ $\frac{4}{10}$ τοῦ κήπου καὶ τὴν ἄλλην ἡμέραν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ κήπου τοῦ μένει ἀκόμη διὰ νὰ σκάψῃ;

100. Τέσσαρες κρουνοὶ γεμίζουν μίαν δεξαμενήν. Ὁ πρῶτος γε-

μίζει τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς δεξαμενῆς ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{3}{10}$. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζει ὁ τέταρτος;

101. Παντοπώλης εἶχε 4 σακκιὰ ρύζι καὶ ὅλα μαζὶ ἐζύγιζαν $170\frac{5}{8}$ κιλά. Τὸ α′ ἐζύγιζε $40\frac{3}{8}$ κιλά, τὸ β′ ἐζύγιζε $40\frac{1}{2}$ κιλὰ καὶ τὸ γ′ $45\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἐζύγιζε τὸ τέταρτον σακκί;

102. Τὸ ταμεῖον τῆς μαθητικῆς κοινότητος τῶν τριῶν ἀνωτέρων τάξεων ἑνὸς σχολείου ἔχει τὰ ἑξῆς ποσά: τῆς Δ′ τάξεως $87\frac{6}{10}$ δραχ., τῆς Ε′ διπλάσια ἀπὸ τῆς Δ′ καὶ τῆς ΣΤ′ ὅσα τῆς Δ′ καὶ Ε′. Πόσα χρήματα ἔχουν τὰ Ταμεῖα καὶ τῶν τριῶν τάξεων;

103. Ὑπάλληλος λαμβάνει μισθὸν 2.980 δραχμὰς τὸν μῆνα. Ἀπ' αὐτὰ ἐξοδεύει διὰ τροφὴν 1050 δραχμάς, διὰ ἐνοίκιον $925\frac{3}{5}$ δραχ., διὰ νερὸ $28\frac{1}{4}$ δραχ. καὶ διὰ φῶς $38\frac{2}{10}$ δραχ. Πόσα χρήματα τοῦ περισσεύουν ;

104. Ἀπὸ ἕνα βαρέλι, τὸ ὁποῖον περιεῖχε 375 κιλὰ λάδι, ἐπωλήθησαν μίαν ἡμέραν $94\frac{3}{4}$ κιλά, ἄλλην ἡμέραν $87\frac{1}{2}$ καὶ τρίτην $79\frac{7}{25}$ κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι ἔμειναν εἰς τὸ βαρέλι;

3. Πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων.

α) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.

Πρόβλημα: Εἷς φάκελος ἀξίζει $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν οἱ 5 φάκελοι ;

Λύσις: Οἱ 5 φάκελοι θὰ ἀξίζουν 5 φορὰς τὸ $\frac{1}{10}$. δηλ. $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}$. Τὸ $\frac{5}{10}$ ὅμως θὰ ἠμπορούσαμεν νὰ τὸ εὕρωμεν γρηγορώτερα, ἂν ἐπολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\frac{1}{10}$ ἐπὶ 5, ἤτοι: $\frac{1}{10} \times 5 = \frac{5}{10}$.

Διατί κάμνομεν πολλαπλασιασμόν ; Τί ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ; Πῶς ἐκάμαμεν τὸν πολλαπλασιασμόν ;

Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, τὸ γινόμενον τὸ βάζομεν ἀριθμητὴν νέου κλάσματος καὶ παρονομαστὴν ἀφήνομεν τὸν ἴδιον. Τὸ νέον κλάσμα εἶναι τὸ γινόμενον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Κάμετε τὰς παρακάτω πράξεις :

α) $\frac{4}{8} \times 5$, β) $\frac{3}{4} \times 7$, γ) $\frac{8}{10} \times 15$, δ) $\frac{4}{5} \times 25$,

ε) $\frac{6}{7} \times 34$, στ) $\frac{5}{6} \times 7$, ζ) $\frac{3}{7} \times 9$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

105. Μία λάμπα πετρελαίου καίει τὴ βραδυὰ $\frac{6}{10}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον. Πόσον πετρέλαιον καίει τὴν ἑβδομάδα; (δηλ. εἰς 7 ἡμέρας);

106. Ἕνα λεμόνι ἀξίζει $\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν τὰ 15 λεμόνια;

107. Τὸ μέτρον ἡ κορδέλλα ἀξίζει $\frac{2}{5}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου. Πόσον ἀξίζουν τὰ 6 μέτρα;

Κάμετε καὶ σεῖς δύο ἰδικά σας προβλήματα.

β) Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.

Πρόβλημα: Τὸ κιλὸν τὰ χόρτα ἀξίζει $4\frac{8}{10}$ δραχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 5 κιλά ;

Λύσις: Θὰ ἀξίζουν $4\frac{8}{10} \times 5 = \frac{48}{10} \times 5 = \frac{240}{10} = 24$ δρ.

Τί πρᾶξιν ἐκάμομεν καὶ διατί ; Πῶς ἐξετελέσαμεν τὸν πολλαπλασιασμόν ;

Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελέσετε τὰς κατωτέρω πράξεις :

α) $2\frac{1}{4} \times 6$, β) $4\frac{1}{2} \times 5$, γ) $10\frac{3}{4} \times 8$. δ) $6\frac{1}{5} \times 10$,

ε) $15\frac{2}{3} \times 9$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

108. Τὸ κιλὸν τὸ ἀλεύρι ἀξίζει $8\frac{2}{10}$ δραχμ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 12 κιλά;

109. Τὸ κιλὸν τὰ πορτοκάλια στοιχίζει $6\frac{2}{5}$ δραχ. Πόσον στοιχίζουν τὰ 15 κιλά;

110. Ἕνα μολύβι ἀξίζει $1\frac{2}{4}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν τὰ 16 μολύβια;

Γράψατε καὶ δύο ἰδικά σας προβλήματα.

γ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα: Τὸ κιλὸν τὸ λάδι ἔχει 32 δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ;

Λύσις : Ἐδῶ γνωρίζομεν πόσον ἔχει τὸ ἕνα κιλὸν καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχει μέρος τοῦ κιλοῦ.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ διὰ νὰ ἴδωμεν καὶ τί πρᾶξιν θὰ κάμωμεν, θὰ τὸ λύσωμεν μὲ τὸν ἀναλυτικὸν τρόπον, τὸν ὁποῖον θὰ λέγωμεν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

(Ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα εἶναι, ὅταν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν δεδομένων μονάδων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς καὶ κατόπιν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς εὑρίσκομεν πάλιν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν, τὴν ὁποίαν ζητεῖ τὸ πρόβλημα).

Ἔτσι ἐδῶ θὰ εἴπωμεν (Σκέψις) :

Ἀφοῦ τὸ ἕνα κιλόν, δηλαδὴ τὰ $\frac{4}{4}$, ἀξίζουν 32 δραχμὰς τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ ὁποῖον εἶναι 4 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὰ $\frac{4}{4}$ θὰ ἀξίζῃ καὶ 4 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. 32 : 4 ἢ $\frac{32}{4}$. (Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν ἠμποροῦμεν ἀμέσως νὰ τὸ παραστήσωμεν ὡς κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, ὅπως ἐμάθομεν). Καὶ τὰ $\frac{3}{4}$, τὰ ὁποῖα ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν, τὰ ὁποῖα εἶναι 3 φορὰς μεγαλύτερα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, θὰ ἀξίζουν καὶ 3 φορὰς περισσότερον δηλ. $\frac{32}{4} \times 3 = \frac{96}{4} = 24$ δραχμάς.

Ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ τὸ λάδι ἀξίζουν 24 δραχμάς.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων γίνεται ὡς ἑξῆς :

1 κιλὸν $= \frac{4}{4} = 32$ δραχ.

$\frac{1}{4}$ $\frac{32}{4}$

$\frac{3}{4}$ $\frac{32 \times 3}{4} = \frac{96}{4} = 24$ δρχ.

Ἐδῶ βλέπομεν ὅτι κάμνομεν πολλαπλασιασμόν. (Ἄρα πολλαπλασιασμὸν κάμνομεν ἀκόμη καὶ ὅταν γνωρίζωμεν πάλιν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος).

Εἰς τὸ πρόβλημά μας τὸ 32 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ τὸ $\frac{3}{4}$ ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ καταλήξαμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 32 ἐπὶ τὸ $\frac{3}{4}$, δηλ. $\frac{32 \times 3}{4}$.

Τί ἔχομεν δηλαδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ; Καὶ πῶς ἠμποροῦμεν μὲ σύντομον τρόπον νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν αὐτήν;

Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, τὸ γινόμενον τὸ

γράφομεν ἀριθμητὴν νέου κλάσματος καὶ παρονομαστὴν γράφομεν τὸν ἴδιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Κάμετε τοὺς κατωτέρω πολλαπλασιασμούς:

α) $8 \times \frac{4}{6}$, β) $9 \times \frac{2}{3}$, γ) $6 \times \frac{12}{15}$.

δ) $18 \times \frac{5}{6}$, ε) $24 \times \frac{15}{20}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(Τὰ προβλήματα νὰ τὰ λύσετε καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους, δηλ. καὶ μὲ τὸν σύντομον τρόπον καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα).

111. Τὸ κιλὸν τὰ φασόλια ἔχουν 18 δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

112. Τὸ κιλὸν τὰ μῆλα ἔχει 8 δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ;

113. Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 96 δραχμ. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ μέτρου;

114. Τὸ κιλὸν τὸ λάδι ἔχει 32 δραχ. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{9}{10}$ τοῦ κιλοῦ;

Γράψατε καὶ 3 ἰδικά σας προβλήματα.

δ) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα: Τὸ κιλὸν τὰ μῆλα ἀξίζει $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

Λύσις: Ἐδῶ γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς κιλοῦ καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν μέρους αὐτοῦ. Ἑπομένως θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν. Θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{8}{10} \times \frac{3}{4}$, ἤτοι κλάσμα ἐπὶ κλάσμα.

Πῶς θὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτόν ;

Καὶ ἐδῶ θὰ μᾶς ὁδηγήσῃ ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.

Σκέψις: Τὸ κιλὸν ἐδῶ εἶναι χωρισμένον εἰς τέταρτα, ἑπομένως θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{4}{4}$.

Ἀφοῦ τὸ ἕνα κιλόν, δηλ. τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ κιλοῦ, ἔχουν $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου, τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ, ποὺ εἶναι 4 φορὰς μικρότερον, θὰ ἔχῃ καὶ 4 φορὰς ὀλιγώτερον. Καὶ διὰ νὰ κάμωμεν τὸ $\frac{8}{10}$ μικρότερον 4 φοράς, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ 4. Ἤτοι $\frac{8}{10 \times 4}$. (Θυμηθῆτε πότε ἕνα κλάσμα μικραίνει). Καὶ τὰ $\frac{3}{4}$, τὰ ὁποῖα ζητοῦμεν καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι τρεῖς φορὰς μεγαλύτερα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, θὰ ἔχουν τρεῖς φορὰς περισσότερον τὸ $\frac{8}{10 \times 4}$ δηλ. θὰ ἔχουν $\frac{8 \times 3}{10 \times 4} = \frac{24}{40}$. (Θυμηθῆτε πότε μεγαλώνει ἕνα κλάσμα).

Ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ μῆλα ἀξίζουν $\frac{24}{40}$ τοῦ δεκαδράχμου.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς :

1 κιλ. = $\frac{4}{4}$	$\frac{8}{10}$ δρχ.
$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{10 \times 4}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{8 \times 3}{10 \times 4} = \frac{24}{40}$

Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{24}{40}$ τὸ εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 8 × 3, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων, καὶ τὸ 10 × 4, οἱ ὁποῖοι εἶναι παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων. Πῶς λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα μὲ τὸν σύντομον τρόπον ;

Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν. Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν τὸ βάζομεν ἀριθμητὴν νέου κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τὸ βάζομεν παρονομαστήν.

Τὸ νέον κλάσμα εἶναι τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Κάμετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$, β) $\frac{6}{8} \times \frac{2}{4}$, γ) $\frac{7}{9} \times \frac{4}{6}$

δ) $\frac{4}{5} \times \frac{7}{8}$, ε) $\frac{2}{4} \times \frac{5}{6}$, στ) $\frac{12}{20} \times \frac{4}{6}$

ζ) $\frac{15}{30} \times \frac{14}{25}$, η) $\frac{24}{35} \times \frac{18}{26}$, θ) $\frac{34}{50} \times \frac{20}{38}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(Τὰ προβλήματα νὰ τὰ λύσετε καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

115. Τὸ κιλὸν τὸ λάχανο στοιχίζει $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου. Πόσον στοιχίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

116. Τὸ κιλὸν τὸ λάδι ἔχει $\frac{8}{25}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ;

117. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ κιλοῦ τὰ μακαρόνια, ὅταν τὸ κιλὸν ἀξίζη τὰ $\frac{11}{20}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου ;

Γράψατε καὶ δύο ἰδικά σας προβλήματα.

ε) Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ κλάσμα.

Πρόβλημα : Τὸ κιλὸν τὰ καρῶτα ἔχουν $6 \frac{2}{5}$ δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ ;

Λύσις: Θὰ ἔχουν $6\frac{2}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{32}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{192}{40}$ τῆς δραχμῆς, ἢ $4\frac{32}{40} = 4\frac{4}{5}$ δρχ.

Τί πρᾶξιν ἐκάμαμεν καὶ διατί ;

Τί εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ; Πῶς ἐκάμαμεν τὸν πολλαπλασιασμόν ;

Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα (ὅπως ἐμάθομεν ἀνωτέρω).

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ τὸ λύσωμεν καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

Πρώτη μας πρᾶξις εἶναι νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, ἔπειτα λύομεν τὸ πρόβλημα ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Θὰ σκεφθῶμεν δηλ. ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ τὸ ἕνα κιλόν, δηλ. τὰ $\frac{8}{8}$, ἀξίζουν $6\frac{2}{5}$ ἢ $\frac{32}{5}$ τῆς δραχμῆς, τὸ $\frac{1}{8}$, ποὺ εἶναι 8 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὰ $\frac{8}{8}$ θὰ ἀξίζῃ καὶ 8 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{32}{5 \times 8}$ καὶ τὰ $\frac{6}{8}$, τὰ ὁποῖα εἶναι 6 φορὰς μεγαλύτερα ἀπὸ τὸ $\frac{1}{8}$, θὰ ἀξίζουν καὶ 6 φορὰς περισσότερον. Δηλ. $\frac{32 \times 6}{5 \times 8} = \frac{192}{40} = 4\frac{32}{40} = 4\frac{4}{5}$ δρχ.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς :

1 κιλ. $= \frac{8}{8}$	$6\frac{2}{5} = \frac{32}{5}$ δρχ.
$\frac{1}{8}$	$\frac{32}{5 \times 8}$
$\frac{6}{8}$	$\frac{32 \times 6}{5 \times 8} = \frac{192}{40} = 4\frac{32}{40} = 4\frac{4}{5}$ δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Κάμετε τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς:

α) $3\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$, β) $4\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$, γ) $10\frac{1}{3} \times \frac{8}{9}$

δ) $15\frac{3}{4} \times \frac{6}{7}$, ε) $20\frac{2}{5} \times \frac{15}{25}$, στ) $35\frac{3}{6} \times \frac{24}{48}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(Νὰ λυθοῦν καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

118. Ἓν κιλὸν ζάχαρι ἔχει $13\frac{6}{10}$ δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

119. Ὁδοιπόρος βαδίζει τὴν ὥραν $5\frac{2}{5}$ χιλιόμετρα. Πόσον θὰ βαδίσῃ εἰς τὰ $\frac{3}{6}$ τῆς ὥρας;

120. Ἓν αὐτοκίνητον διανύει τὴν ὥραν $40\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

Γράψατε καὶ σεῖς δύο ὅμοια προβλήματα.

στ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ μικτόν.

Πρόβλημα: Τὸ κιλὸν τὰ μῆλα στοιχίζουν 8 δραχμάς. Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ $3\frac{2}{5}$ κιλά;

Λύσις: Θὰ πληρώσωμεν:

$$8 \times 3\frac{2}{5} = 8 \times \frac{17}{5} = \frac{136}{5} = 27\frac{1}{5} \text{ δραχ.}$$

Τί εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐδῶ; Πῶς ἐκάμαμεν τὸν πολλαπλασιασμόν;

Νὰ κάμετε μόνοι σας τὸν κανόνα καὶ νὰ τὸν γράψετε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Κάμετε τοὺς κατωτέρω πολλαπλασιασμούς:

α) $2 \times 3\frac{1}{4}$, β) $5 \times 4\frac{2}{3}$, γ) $9 \times 5\frac{6}{8}$, δ) $8 \times 6 \frac{3}{5}$, ε) $10 \times 7 \frac{1}{2}$, στ) $14 \times 9 \frac{2}{5}$,

ζ) $23 \times 6 \frac{2}{4}$, η) $38 \times 12 \frac{2}{3}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

121. Τὸ κιλὸν τὰ φασόλια ἀξίζει 18 δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $9 \frac{4}{5}$ κιλά;

122. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμεν διὰ $4 \frac{1}{4}$ κιλὰ βούτυρον, ὅταν τὸ κιλὸν ἔχῃ 72 δραχμάς;

123. Μία βρύση βγάζει 875 κιλὰ νερὸ τὴν ὥραν. Πόσα κιλὰ θὰ βγάλῃ εἰς $8 \frac{1}{3}$ ὥρας ;

Γράψατε καὶ 3 ἰδικά σας προβλήματα.

ζ) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ μικτόν.

Πρόβλημα : Μία λάμπα πετρελαίου καίει τὴν ὥραν $\frac{1}{10}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον. Πόσον θὰ κάψῃ εἰς $4 \frac{2}{5}$ ὥρας ;

Λύσις: Θὰ κάψῃ $\frac{1}{10} \times 4 \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \times \frac{22}{5} = \frac{22}{50}$ τοῦ κιλοῦ.

Καθὼς βλέπετε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ μικτόν, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα (κατὰ τὰ γνωστά).

Σημείωσις: Τὸ πρόβλημα αὐτὸ νὰ τὸ λύσετε σεῖς καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελέσετε τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς :

α) $\frac{3}{5} \times 4 \frac{1}{3}$, β) $\frac{5}{8} \times 6 \frac{2}{5}$, γ) $\frac{7}{9} \times 3 \frac{2}{6}$,

δ) $\frac{9}{16} \times 9 \frac{3}{10}$, ε) $\frac{8}{10} \times 7 \frac{2}{15}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(Νὰ λυθοῦν καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους).

124. Ἓν κιλὸν ἀλεύρι ἔχει $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκαδράχμου. Πόσον ἔχουν τὰ $38 \frac{1}{2}$ κιλά;

125. Ἓν κιλὸν ἄρτου ἔχει $\frac{5}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου. Πόσον ἔχουν τὰ $4 \frac{3}{4}$ κιλά ;

126. Ἓν αὐτοκίνητον καίει εἰς κάθε χιλιόμετρον $\frac{3}{20}$ τοῦ κιλοῦ βενζίνην. Πόσην βενζίνην θὰ κάψῃ εἰς τὰ $50 \frac{2}{4}$ χιλιόμετρα;

Γράψατε καὶ σεῖς δύο ὅμοια προβλήματα.

η) Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.

Πρόβλημα: Τὸ κιλὸν τὸ ρύζι ἀξίζει $10 \frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $5 \frac{3}{4}$ κιλά ;

Λύσις: Προσπαθήσετε νὰ λύσετε μόνοι σας τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους (σύντομον καὶ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα) καὶ νὰ διατυπώσετε καὶ τὸν κανόνα. Εὔκολον εἶναι .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω πράξεις :

α) $4 \frac{1}{5} \times 6 \frac{2}{3}$, β) $8 \frac{2}{6} \times 7 \frac{4}{5}$, γ) $8 \frac{1}{3} \times 9 \frac{1}{2}$

δ) $5 \frac{3}{4} \times 2 \frac{6}{7}$, ε) $12 \frac{1}{2} \times 6 \frac{2}{5}$, στ) $17 \frac{1}{3} \times 12 \frac{3}{9}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

127. Τὸ κιλὸν τὸ κρέας ἀξίζει $46 \frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ $3 \frac{4}{5}$ κιλά;

128. Ἠγοράσαμεν διὰ μίαν θερινὴν ἐνδυμασίαν $4\frac{6}{10}$ μέτρα ὕφασμα πρὸς $238\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὸ μέτρον. Πόσον ἐπληρώσαμεν διὰ τὸ ὕφασμα;

129. Ἕνα κουτὶ κομπόστα περιέχει $2\frac{2}{4}$ κιλά. Πόσην κομπόστα περιέχουν τὰ $28\frac{1}{2}$ κουτιά;

Γράψατε καὶ σεῖς δύο ὅμοια προβλήματα.

θ) Πολλαπλασιασμὸς πολλῶν κλασμάτων.

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν περισσότερα ἀπὸ δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζοντες ὅλους τοὺς ἀριθμητὰς καὶ βάζοντες τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀριθμητὴν καὶ ὅλους τοὺς παρονομαστὰς καὶ γράφοντες τὸ γινόμενον αὐτῶν παρονομαστήν.

Παραδείγματα :

α) $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{2}{8} = \frac{3 \times 4 \times 6 \times 2}{4 \times 5 \times 7 \times 8} = \frac{144}{1120}$

β) $3 \times 5\frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{11}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 11 \times 2 \times 1}{2 \times 4 \times 2} =$

$= \frac{66}{16} = 4\frac{2}{16}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Νὰ γίνουν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί :

$\frac{2}{5} \times 6, \quad \frac{6}{10} \times 9, \quad 10 \times \frac{5}{8}, \quad 15 \times \frac{6}{9},$

$4\frac{2}{3} \times 9, \quad 12\frac{1}{2} \times 6, \quad 10 \times 3\frac{4}{7}, \quad 28 \times 5\frac{2}{5},$

$\frac{4}{6} \times \frac{2}{3}, \quad \frac{9}{11} \times \frac{6}{9}, \quad 3\frac{4}{8} \times \frac{3}{5}, \quad 8\frac{1}{3} \times \frac{9}{15},$

$\frac{3}{15} \times 4\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{13} \times 3\frac{2}{5}, \quad 6\frac{1}{4} \times 8\frac{2}{5}, \quad 20\frac{1}{2} \times 9\frac{2}{6},$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{7}{8}, \quad \frac{3}{6} \times \frac{6}{9} \times 5.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΕΠΙ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

130. Ἓν γραμματόσημον ἀξίζει $\frac{5}{10}$ τῆς δραχμῆς. Ὁ Τάκης ἠγόρασεν 15 γραμματόσημα. Πόσον ἐπλήρωσε;

131. Ἡ κοινότης τῆς Ε' τάξεως εἰς τὸ τέλος τοῦ σχολικοῦ ἔτους ἔκαμε δῶρον εἰς κάθε μαθητὴν ἀπὸ ἕνα μολύβι, ποὺ ἤξιζε $1\frac{4}{5}$ δραχμάς. Ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως ἦσαν 45. Πόσα χρήματα ἐπλήρωσε δι' ὅλα τὰ μολύβια;

132. Ποῖον εἶναι τὸ τετραπλάσιον τῶν $\frac{8}{10}$ τοῦ χιλιοδράχμου;

133. Τὸ κιλὸν ὁ καφὲς στοιχίζει $84\frac{2}{5}$ δραχμάς. Πόσον στοιχίζουν τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ κιλοῦ;

134. Ποῖος ἀριθμὸς ἀποτελεῖ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ 90;

135. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ τὰ πορτοκάλια, ὅταν τὸ κιλὸν ἔχῃ $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου;

136. Ἕνα πλοῖον διανύει τὴν ὥραν $12\frac{1}{2}$ μίλια. Πόσα μίλια θὰ διανύσῃ εἰς $4\frac{3}{5}$ ὥρας;

137. Μία οἰκογένεια τρώγει τὴν ἡμέραν $2\frac{1}{4}$ κιλὰ ἄρτον. Πόσον ἄρτον χρειάζεται τὴν ἑβδομάδα; (7 ἡμέραι).

138. Ἠκούσαμεν τὴν βροντὴν $3\frac{1''}{2}$ μετὰ τὴν ἀστραπήν. Ὁ ἦχος τρέχει 340 μέτρα τὸ δευτερόλεπτον. Πόσον μακράν μας ἤστραψεν;

139. Ὁδοιπόρος βαδίζει τὴν ὥραν $4\frac{4}{5}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ βαδίσῃ εἰς $6\frac{1}{2}$ ὥρας;

4. Διαίρεσις κλασμάτων.

α) Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου.

Πρόβλημα. Τρία παιδιὰ ἐμοιράσθησαν ἕνα κουτὶ μαρμελάδα, τὸ ὁποῖον ἐζύγιζε $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσην μαρμελάδαν ἐπῆρε τὸ καθένα ;

Λύσις: Ἐδῶ γνωρίζομεν πόσην μαρμελάδαν ἐπῆραν καὶ τὰ 3 παιδιὰ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσην ἐπῆρε τὸ ἕνα. Γνωρίζομεν δηλ. τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνός. Ἑπομένως θὰ κάμωμεν διαίρεσιν. Διαιρετέος εἶναι τὸ $\frac{6}{8}$, διότι κιλὰ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν, καὶ διαιρέτης εἶναι τὸ 3. Ἄλλωστε διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων. Θὰ ἔχωμεν δηλ. $\frac{6}{8} : 3$.

Διὰ νὰ ἴδωμεν πῶς θὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις αὐτή, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς : Ἀφοῦ τὰ 3 παιδιὰ ἐπῆραν $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ μαρμελάδα, τὸ ἕνα παιδὶ θὰ πάρῃ 3 φορὰς ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{6}{8}$ καὶ γνωρίζομεν, ὅτι, διὰ νὰ κάμωμεν ἓν κλάσμα πολλὰς φορὰς μικρότερον, ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὴν παρονομαστήν. Ἐδῶ ὁ ἀριθμητὴς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{6}{8} : 3 = \frac{2}{8}.$$

Τὸ ἴδιον ὅμως θὰ εὕρωμεν, ἄν, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν, πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{6}{8} : 3 = \frac{6}{8 \times 3} = \frac{6}{24}$$

(Ἂν τὸ $\frac{6}{24}$ τὸ ἁπλοποιήσωμεν μὲ τὸ 3, θὰ εὕρωμεν πάλιν $\frac{2}{8}$).

Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, παρονομαστὴν δὲ

ἀφήνομεν τὸν ἴδιον, ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ γινόμενον τὸ γράφομεν παρονομαστήν, ἀριθμητὴν δὲ ἀφήνομεν τὸν ἴδιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Κάμετε τὰς διαιρέσεις :

Νοερῶς : α) $\frac{4}{8} : 4$, β) $\frac{6}{16} : 6$, γ) $\frac{15}{24} : 5$,

δ) $\frac{12}{20} : 3$, ε) $\frac{32}{40} : 8$

Γραπτῶς : α) $\frac{3}{4} : 5$, β) $\frac{7}{10} : 5$, γ) $\frac{8}{30} : 9$

δ) $\frac{6}{10} : 8$, ε) $\frac{9}{20} : 4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

140. Μία οἰκογένεια ἀπὸ 5 ἄτομα τρώγει τὴν ἡμέραν $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἄρτον. Πόσον τρώγει τὸ ἓν ἄτομον;

141. 4 δοχεῖα κενὰ ζυγίζουν $\frac{12}{4}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσον ζυγίζει τὸ ἕνα δοχεῖον;

142. Ἐργάτης εἰς 5 ὥρας ἔσκαψε τὰ $\frac{4}{6}$ ἑνὸς κήπου. Τί μέρος τοῦ κήπου ἔσκαψεν εἰς μίαν ὥραν ;

Γράψατε καὶ δύο ἰδικά σας προβλήματα.

β) Διαίρεσις μικτοῦ δι' ἀκεραίου.

Πρόβλημα. 4 δοχεῖα μὲ λάδι ζυγίζουν 60 $\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσον ζυγίζει τὸ ἕν ;

Λύσις: Ἐδῶ θὰ κάμωμεν διαίρεσιν. Διατί ;

Καὶ θὰ ἔχωμεν : $60\frac{1}{2} : 4 = \frac{121}{2} : 4 = \frac{121}{2 \times 4} = \frac{121}{8} = 15\frac{1}{8}$.

Ὥστε τὸ ἓν δοχεῖον ζυγίζει 15 $\frac{1}{8}$ κιλά.

Τί εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν ; Τί ἐκάμαμεν ;

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, ὅπως γνωρίζομεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Κάμετε τὰς ἀκολούθους διαιρέσεις:

α) $10\frac{5}{6} : 5$, β) $8\frac{4}{5} : 4$, γ) $12\frac{3}{5} : 9$, δ) $3\frac{4}{8} : 4$,

ε) $6\frac{1}{2} : 6$, στ) $17\frac{1}{3} : 6$, ζ) $26\frac{2}{4} : 8$, η) $30\frac{1}{3} : 5$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

113. Μία οἰκογένεια ἀπὸ 8 ἄτομα θέλει τὴν ἡμέρα $3\frac{2}{10}$ κιλὰ ἄρτον. Πόσον ἄρτον θέλει τὸ ἄτομον;

144. Τὰ 6 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν $90\frac{3}{4}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ μέτρον;

145. Ἓν κτῆμα $25\frac{4}{5}$ στρεμμάτων ἐμοιράσθη μεταξὺ τριῶν ἀδελφῶν ἐξ ἴσου. Πόσα στρέμματα ἔλαβεν ἕκαστος;

146. Ἐργάτης ἐπῆρε ἀπὸ ἐργασίαν 12 ἡμερῶν $1084\frac{4}{5}$ δραχμάς. Πόσον ἐπληρώθη τὴν ἡμέραν;

Γράψατε καὶ δύο ἰδικά σας προβλήματα.

γ) Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ κλάσματος.

Πρόβλημα. Μὲ 10 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαριν. Μὲ πόσας δραχμὰς ἀγοράζομεν ἓν κιλόν;

Λύσις: Ἐδῶ γνωρίζομεν τὴν τιμὴν μέρους τοῦ κιλοῦ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχει τὸ κιλόν. Γνωρίζομεν δηλ. τὰ 3 μέρη, τοῦ κιλοῦ καὶ ζητοῦμεν τὴν ἀξίαν τοῦ 1 κιλοῦ.

Δι' αὐτὸ καὶ ἐδῶ θὰ κάμωμεν διαίρεσιν. Καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$10 : \frac{3}{4}$$

Ὅπως βλέπετε ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ κλάσματος. Εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ μᾶς βοηθήσῃ πάλιν ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.

Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἔχουν 10 δραχμάς, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχει τὸ ἕνα κιλόν, δηλ. τὰ $\frac{4}{4}$, θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον ἔχει τὸ $\frac{1}{4}$. Τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ ὁποῖον εἶναι 3 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$, θὰ ἔχῃ καὶ 3 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $\frac{10}{3}$, καὶ ὅλον τὸ κιλόν, δηλ. τὰ $\frac{4}{4}$, τὸ ὁποῖον εἶναι 4 φορὰς περισσότερον ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, θὰ ἔχῃ 4 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{10 \times 4}{3} = \frac{40}{3} = 13\,\frac{1}{3}$.

Ἀπάντησις. Ὥστε τὸ κιλὸν ἡ ζάχαρι ἔχει $13\,\frac{1}{3}$ δραχμάς. Ἡ διάταξις τῶν πράξεων θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} \text{ κιλ.} & 10 \text{ δρχ.} \\ \frac{1}{4} & \frac{10}{3} \\ 1 \text{ κιλ.} = \frac{4}{4} & \frac{10 \times 4}{3} = \frac{40}{3} = 13\,\frac{1}{3} \end{array}$$

Εἰς τὴν λύσιν αὐτὴν βλέπομεν ὅτι, ἐνῷ εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ κλάσματος, κατελήξαμεν νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν. Ἐπολλαπλασιάσαμεν δηλ. τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον δηλ.

$$10 : \frac{3}{4} = 10 \times \frac{4}{3}$$

Συνεπῶς :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καί, ἀντὶ διαιρέσεως, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν. Τὸ νέον κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον.

Σημείωσις : Μέχρι τώρα ἠξεύραμεν πότε κάμνομεν διαίρεσιν, δηλαδή : α) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος (μερισμός), καὶ β) ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ τὴν τιμὴν τῶν πολλων μονάδων καὶ ζητοῦμεν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων (μέτρησις).

Μὲ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα μανθάνομεν ὅτι διαίρεσιν θὰ κάμνωμεν καὶ ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς. Ἐπίσης ὅταν γνωρίζωμεν μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ζητοῦμεν αὐτόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελέσετε τὰς ἑξῆς διαιρέσεις :

α) $5 : \frac{6}{8}$, β) $6 : \frac{2}{3}$, γ) $9 : \frac{4}{5}$,

δ) $10 : \frac{2}{6}$, ε) $17 : \frac{5}{6}$, στ) $26 : \frac{2}{4}$,

ζ) $38 : \frac{3}{8}$, η) $50 : \frac{4}{9}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

147. Τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ τὸ κρέας ἔχουν 36 δραχμάς. Πόσον ἔχει τὸ κιλόν;

148. Μὲ 4 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{8}{10}$ τοῦ κιλοῦ ἄρτον. Πόσον ἔχει τὸ κιλόν;

149. Μὲ 60 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα. Πόσον ἀξίζει τὸ μέτρον;

150. Τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ λάδι ἔχουν 24 δραχμάς. Πόσον ἔχει τὸ κιλόν;

Γράψατε καὶ δύο προβλήματα ἰδικά σας.

δ) Διαίρεσις κλάσματος διὰ κλάσματος.

Πρόβλημα 1. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ τὰ μῆλα ἔχουν $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου. Πόσον ἔχει τὸ κιλόν ;

Λύσις: Θὰ κάμωμεν διαίρεσιν. Διατί ;

Διαιρετέος εἶναι τὰ $\frac{6}{10}$, τὰ ὁποῖα μᾶς φανερώνουν χρήματα, διότι χρήματα ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν.

Καὶ θὰ ἔχωμεν : $\frac{6}{10} : \frac{3}{4}$.

Διὰ τὴν λύσιν θὰ μᾶς βοηθήσῃ ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα :

Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἔχουν $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχει τὸ κιλόν, δηλ. τὰ $\frac{4}{4}$, θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ $\frac{1}{4}$. Τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ ὁποῖον εἶναι 3 φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$, θὰ ἔχῃ καὶ 3 φορὰς ὀλιγώτερον, δηλ. $\frac{6}{10 \times 3}$ καὶ τὸ ἕνα κιλόν, δηλ. τὰ $\frac{4}{4}$, τὰ ὁποῖα εἶναι 4 φορὰς μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ $\frac{1}{4}$, θὰ ἔχουν καὶ 4 φορὰς περισσότερον, ἤτοι : $\frac{6 \times 4}{10 \times 3} = \frac{24}{30}$.

Ἀπάντησις : Τὸ κιλὸν ἔχει $\frac{24}{30}$ τοῦ δεκαδράχμου.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} & \frac{6}{10} \text{ δεκαδραχμ.} \\ \frac{1}{4} & \frac{6}{10\times 3} \\ \frac{4}{4} & \frac{6\times 4}{10\times 3} = \frac{24}{30} \end{array}$$

Ἂν προσέξωμεν τὰς πράξεις τὰς ὁποίας ἐκάμομεν, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ διαιρέτης $\frac{3}{4}$ ἀντεστράφη καὶ ἔγινε $\frac{4}{3}$ καὶ ἀντὶ διαιρέσεως ἐκάμομεν πολλαπλασιασμόν. Ἑπομένως :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος (τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου) καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.

Τὸ νέον κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον.

Πρόβλημα 2. Τὰ $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ κρέας ἔχουν $\frac{1}{4}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου. Πόσον ἔχουν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ ;

Διάταξις τῆς πράξεως :

$\frac{5}{10}$ κιλ $= \frac{1}{4}$ ἑκατονταδράχμου

$\frac{3}{5}$ κιλ. Χ ;

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα γνωρίζομεν πόσον ἔχουν τὰ $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ τὸ κρέας καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν πόσον ἔχουν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ.

Λύσις: 1ος τρόπος.

α) $\frac{1}{4} : \frac{5}{10} = \frac{1}{4} \times \frac{10}{5} = \frac{10}{20}$ ἑκατονταδρ. $\left(= \frac{1}{2} = 50\ \text{δραχ.}\right)$

β) $\frac{10}{20} \times \frac{3}{5} = \frac{30}{100}$ ἑκατονταδρ. $\left(= \frac{3}{10} = 30\ \text{δραχ.}\right)$

2ος τρόπος. Α) Ἁπλῆ ἀναγωγή :

Τρέπομεν πρῶτον τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{5}{10}$ καὶ $\frac{3}{5}$ εἰς ὁμώνυμα $\frac{5}{10}, \frac{6}{10}$ καὶ λέγομεν :

Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{10}$ κιλ. ἔχουν $\frac{1}{4}$ ἑκατονταδρχ.

Τὸ $\frac{1}{10}$ κιλ. θὰ ἔχῃ $\frac{1}{4 \times 5}$

καὶ τὰ $\frac{6}{10}$ κιλ. θὰ ἔχουν $\frac{1 \times 6}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$ ἑκατονταδρχ. $\left(= \frac{3}{10} = 30\ \text{δρχ.}\right)$

Β) Διπλῆ ἀναγωγή.

1) Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{10}$ κιλ. ἔχουν $\frac{1}{4}$ ἑκατονταδρχ.

τὸ $\frac{1}{10}$ κιλ. θὰ ἔχῃ $\frac{1}{4 \times 5}$

Καὶ τὰ $\frac{10}{10} = 1$ κ. θὰ ἔχῃ $\frac{1 \times 10}{4 \times 5} = \frac{10}{20}$ ἑκατονταδρχ.

2) Ἀφοῦ τὸ 1 κιλὸν $= \frac{5}{5}$ ἔχει $\frac{10}{20}$ ἑκατονταδρχ.

τὸ $\frac{1}{5}$ θὰ ἔχῃ $\frac{10}{20 \times 5}$

καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ θὰ ἔχουν $\frac{10 \times 3}{20 \times 5} = \frac{30}{100}$ ἑκατονταδρχ. $\left(= \frac{3}{10} = 30 \text{ δρχ.} \right)$

Σημείωσις 1. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐλύθη καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους, μὲ τὸν σύντομον καὶ μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

Κατὰ τὸν σύντομον τρόπον ἐκάμαμεν πρῶτον διαίρεσιν κλάσματος διὰ κλάσματος $\left(\frac{1}{4} : \frac{5}{10} \right)$ καὶ ἔπειτα πολλαπλασιασμὸν κλάσματος ἐπὶ κλάσμα. Κατὰ τὸν τρόπον μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα τὸ ἐλύσαμεν πρῶτον μὲ ἁπλῆν ἀναγωγήν, ἀφοῦ ἐτρέψαμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, καὶ κατόπιν μὲ διπλῆν ἀναγωγήν. Κατ' αὐτὴν εὕρομεν πρῶτον ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν $\frac{5}{10}$ τὴν τιμὴν τῶν $\frac{10}{10}$ δηλ. τοῦ 1 κιλοῦ. Κατόπιν ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ 1 κιλοῦ $\frac{5}{5}$ εὕρομεν τὴν τιμὴν τῶν $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ.

Καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους εὕρομεν ὅτι τὸ κιλὸν τὸ κρέας ἔχει 50 δραχμὰς καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ ἔχουν 30 δραχμάς.

Σημείωσις 2. Ἂν τὸ πρόβλημα ἔχῃ μικτοὺς ἀριθμοὺς τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ τὸ λύομεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις :

α) $\frac{3}{5} : \frac{4}{6}$, β) $\frac{6}{8} : \frac{3}{7}$, γ) $\frac{2}{3} : \frac{5}{9}$,

δ) $\frac{7}{8} : \frac{6}{10}$, ε) $\frac{8}{10} : \frac{12}{18}$, στ) $\frac{9}{14} : \frac{15}{30}$,

ζ) $\frac{24}{28} : \frac{17}{20}$, η) $\frac{35}{40} : \frac{15}{20}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

151. Τὰ $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν $\frac{4}{5}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου. Πόσον ἀξίζει τὸ μέτρον;

152. Τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ μέτρου ὁ χασὲς ἔχουν $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκαδράχμου. Πόσον ἀξίζει τὸ μέτρον;

153. Μία λάμπα πετρελαίου καίει εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας $\frac{2}{8}$ τοῦ κιλοῦ πετρέλαιον. Πόσον καίει τὴν ὥραν;

154. Τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κιλοῦ τὸ κρέας ἔχουν $\frac{3}{10}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου. Πόσον στοιχίζει τὸ κιλόν;

155. Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζουν $\frac{6}{10}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου. Πόσον κοστίζουν τὰ $6\frac{1}{2}$ μέτρα; (νὰ λυθῇ μὲ ἁπλῆν καὶ διπλῆν ἀναγωγήν).

ε) Διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ.

Πρόβλημα. Τὰ $3\frac{1}{4}$ κιλὰ καρπούζι ἀξίζουν $6\frac{5}{10}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν ;

Λύσις: Θὰ κάμωμεν διαίρεσιν·διατί ; Διαιρετέος εἶναι ὁ $6\frac{5}{10}$, ὁ ὁποῖος φανερώνει χρήματα, διότι χρήματα ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν (ἢ ὁ ὁποῖος φανερώνει τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων).

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$6\frac{5}{10} : 3\frac{1}{4} = \frac{65}{10} : \frac{13}{4} = \frac{65}{10} \times \frac{4}{13} = \frac{260}{130} = 2 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντησις : τὸ κιλὸν ἀξίζει 2 δραχμάς.

Ὥστε : **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν διὰ μικτοῦ, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ διαιροῦμεν κλάσμα διὰ κλάσματος, ὅπως ἐμάθομεν.**

Σημείωσις: Τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύεται καὶ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα, ἀφοῦ προηγουμένως τρέψωμεν καὶ τοὺς δύο μικτοὺς εἰς κλάσματα. Δοκιμάσατε μόνοι σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις :

α) $3\frac{3}{4} : 2\frac{2}{4}$, β) $10\frac{2}{5} : 4\frac{1}{4}$, γ) $2\frac{2}{5} : 1\frac{4}{5}$, δ) $20\frac{1}{2} : 8\frac{3}{6}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

156. Ἠγοράσαμεν $2\frac{2}{4}$ κιλὰ βερύκοκκα καὶ ἐδώσαμεν $12\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον στοιχίζει τὸ κιλόν;

157. Τὰ $5\frac{6}{8}$ κιλὰ χόρτα στοιχίζουν $28\frac{3}{4}$ δραχμάς. Πόσον κοστίζει τὸ κιλόν;

158. Τὰ $4\frac{3}{4}$ κιλὰ φασόλια ἔχουν $85\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον ἔχουν τὰ $7\frac{6}{8}$ κιλά; (Νὰ λυθῇ μὲ διπλῆν ἀναγωγήν).

στ) Διαίρεσις ἀκεραίου διὰ μικτοῦ.

Πρόβλημα. Τὰ $2\frac{2}{4}$ κιλὰ κρέας ἀξίζουν 120 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν ;

Λύσις: Θὰ κάμωμεν διαίρεσιν. Διατί ;

Διαιρετέος θὰ εἶναι ὁ 120, ὁ ὁποῖος φανερώνει χρήματα, διότι χρήματα ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$120 : 2\frac{2}{4} = 120 : \frac{10}{4} = 120 \times \frac{4}{10} = \frac{480}{10} = 48 \text{ δραχ.}$$

Ἀπάντησις : Τὸ κιλὸν τὸ κρέας ἀξίζει 48 δραχμάς. Ἐδῶ εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ μικτοῦ.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ μικτοῦ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν ἀκέραιον διὰ κλάσματος ὅπως ἐμάθομεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις :

α) $5 : 1\frac{3}{6}$, β) $6 : 4\frac{2}{5}$, γ) $15 : 3\frac{1}{2}$, δ) $18 : 5\frac{2}{3}$, ε) $36 : 5\frac{2}{4}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

159. Ὁδοιπόρος εἰς $2\frac{2}{4}$ ὥρας ἐβάδισεν 15 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἐβάδισε τὴν ὥραν;

160. Τὰ $4\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα ἀξίζουν 189 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ μέτρον; (Νὰ λυθῇ μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα).

161. Τὰ $5\frac{3}{4}$ κιλὰ ψάρια τιμῶνται 138 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται τὸ κιλόν;

ζ) Διαίρεσις κλάσματος διὰ μικτοῦ.

Πρόβλημα: Τὰ $2\frac{1}{2}$ κιλὰ μῆλα ἀξίζουν $\frac{1}{4}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν ;

Λύσις: Καὶ ἐδῶ θὰ κάμωμεν διαίρεσιν. Διατί ;

Διαιρετέος εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$. Διατί ;

Θὰ ἔχωμεν : $\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{1}{4} : \frac{5}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ τοῦ ἑκατονταδράχμου (δηλ. 10 δραχμάς).

Παρατήρησις: Τί εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν; Τί ἐκάμαμεν ; Διατυπώσατε τὸν κανόνα, πῶς διαιροῦμεν κλάσμα διὰ μικτοῦ.

Σημείωσις : Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον διαιροῦμεν καὶ μικτὸν διὰ κλάσματος. Π.χ. τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ρετσίνα ἔχουν $7\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον ἔχει τὸ κιλόν ;

Λύσις: $7\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{15}{2} : \frac{3}{4} = \frac{15}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{60}{6} =$ 10 δραχμάς.

Πῶς γίνεται ἡ διαίρεσις τοῦ μικτοῦ διὰ κλάσματος ; Διατυπώσατε τὸν κανόνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

α) $\frac{9}{10} : 4\frac{1}{3}$, β) $\frac{4}{5} : 2\frac{3}{4}$, γ) $\frac{6}{8} : 3\frac{1}{2}$, δ) $\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$,

ε) $6\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$, στ) $10\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$, ζ) $12\frac{1}{2} : \frac{2}{4}$, η) $15\frac{3}{5} : \frac{6}{10}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

162. Τὰ $2\frac{2}{4}$ κιλὰ κολοκύθια ἀξίζουν $\frac{1}{2}$ τοῦ εἰκοσαδράχμου. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν; (Νὰ λυθῇ μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα).

163. Τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ λάδι κοστίζουν $22\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον κοστίζει τὸ κιλόν;

164. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ ρύζι ἀξίζουν $7\frac{1}{2}$ δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ κιλόν;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

α) $\frac{3}{5} : 3$, $\frac{6}{8} : 6$, $\frac{7}{9} : 4$, $\frac{8}{10} : 7$,

β) $4\frac{2}{5} : 2$, $6\frac{4}{8} : 4$, $7\frac{1}{3} : 3$, $9\frac{3}{4} : 8$,

γ) $8 : \frac{4}{6}$, $10 : \frac{2}{3}$, $15 : \frac{6}{8}$,

δ) $\frac{4}{5} : \frac{2}{8}$, $\frac{7}{8} : \frac{4}{9}$, $\frac{14}{15} : \frac{6}{7}$,

ε) $6\frac{1}{3} : 2\frac{4}{5}$, $8\frac{2}{4} : 5\frac{1}{2}$, $10\frac{2}{5} : 7\frac{9}{10}$,

στ) $15 : 3\frac{1}{2}$, $20 : 4\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9} : 3\frac{1}{3}$, $\frac{15}{26} : 4\frac{2}{5}$,

$8\frac{6}{7} : \frac{3}{8}$, $9\frac{6}{8} : \frac{5}{8}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

("Ολαι αἱ περιπτώσεις)

165. 5 ὅμοια σακκιὰ ρύζι ζυγίζουν $250\frac{5}{8}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ζυγίζει τὸ ἕνα σακκί;

166. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ τὸ κρέας ἔχουν 36 δραχμάς. Πόσον ἔχει τὸ κιλόν;

167. Μία λάμπα πετρελαίου εἰς $12\frac{2}{3}$ ὥρας καίει $1\frac{2}{4}$ κιλὰ πετρέλαιον. Πόσον πετρέλαιον καίει τὴν ὥραν;

168. Ποῖον κλάσμα πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{3}{6}$, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$;

Λύσις: $\frac{4}{5} : \frac{3}{6} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{3} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$

169. Ποῖον κλάσμα πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $\frac{4}{8}$, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα $\frac{9}{10}$;

170. Τὰ $5\frac{4}{8}$ κιλὰ ντομάτας στοιχίζουν 22 δραχμάς. Πόσο στοιχίζει τὸ κιλόν;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΩΝ 4 ΠΡΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

171. Ἐπήγαμεν εἰς τὸν μανάβην καὶ ἠγοράσαμεν $3\frac{1}{5}$ κιλὰ πατάτες πρὸς 3 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ $2\frac{1}{2}$ κιλὰ κρεμμύδια πρὸς 5 δραχ. τὸ κιλόν. Ἐδώσαμεν εἰς τὸν μανάβην ἓν ἑκατοντάδραχμον. Πόσα «ρέστα» θὰ μᾶς δώσῃ;

172. Ὑπάλληλος λαμβάνει μηνιαῖον μισθὸν $5650\frac{3}{5}$ δραχμάς. Ἐξοδεύει διὰ συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του $3180\frac{6}{10}$ δραχμάς. Μὲ τὸ περίσσευμα ἑνὸς μηνὸς ἠγόρασε $52\frac{1}{2}$ κιλὰ λάδι. Πόσον ἠγόρασε τὸ κιλόν;

173. Ποῖον κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ τριπλάσιον τοῦ κλάσματος $\frac{7}{10}$;

174. Ἓν σχολεῖον ἔχει 360 μαθητάς. Εἰς τὴν α′ τάξιν φοιτᾷ τὸ

$\frac{1}{4}$ τῶν μαθητῶν, εἰς τὴν δευτέραν τὰ $\frac{2}{12}$, εἰς τὴν γ′ τὰ $\frac{2}{12}$ εἰς τὴν δ′ τὰ $\frac{1}{6}$, εἰς τὴν ε′ τὰ $\frac{3}{20}$ καὶ οἱ ὑπόλοιποι εἰς τὴν στ′. Πόσοι μαθηταὶ φοιτοῦν εἰς κάθε τάξιν;

175. Μία κληρονομία ἀπὸ 300 στρέμματα ἐμοιράσθη μεταξὺ 3 κληρονόμων. Ὁ πρῶτος ἐπῆρε τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς κληρονομίας, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{4}{10}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς. Πόσα στρέμματα ἐπῆρε ἕκαστος κληρονόμος;

176. Ἕνα βαρέλι εἶχε 260 κιλὰ λάδι. Ἀπὸ τὸ λάδι αὐτὸ ἐπωλήθησαν τὰ $\frac{3}{5}$ πρὸς 30 δραχ. τὸ κιλὸν καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 32 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσα χρήματα εἰσεπράχθησαν ἀπὸ ὅλον τὸ λάδι;

177. Ἓν αὐτοκίνητον συγκοινωνίας Ἀθηνῶν - Πατρῶν ἀνεχώρησεν ἀπὸ τὰς Ἀθήνας καὶ εὑρίσκεται εἰς τὴν Κόρινθον, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὰς Ἀθήνας 87 χιλιόμετρα. Ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν - Πατρῶν εἶναι 227 χιλιόμετρα. Πόσας ὥρας θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὴν Κόρινθον εἰς τὰς Πάτρας, ἂν τρέχῃ μὲ ταχύτητα $35\frac{2}{4}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν;

178. Εἷς ταχυδρόμος, διὰ νὰ μοιράσῃ τὰ γράμματα εἰς μίαν ἀγροτικὴν περιοχὴν πρέπει νὰ διανύσῃ 27 χιλιόμετρα. Ἂν ἔχῃ βαδίσει τὴν ἡμίσειαν ἀπόστασιν, πόσας ὥρας θὰ χρειασθῇ διὰ τὴν ὑπόλοιπον ἀπόστασιν, ἂν βαδίζῃ τὴν ὥραν $4\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα ;

179. Ἐργάτης σκάπτει ἕνα κῆπον εἰς 5 ἡμέρας. Ἄλλος ἐργάτης τὸν ἴδιον κῆπον τὸν σκάπτει εἰς 8 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὸν σκάψουν καὶ οἱ δυὸ μαζί;

Λύσις: Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον μέρος τοῦ κήπου σκάπτει ἕκαστος ἐργάτης εἰς μίαν ἡμέραν. Ὁ α′ εἰς μίαν ἡμέραν σκάπτει τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ κήπου καὶ ὁ β′ τὸ $\frac{1}{8}$, καὶ οἱ δύο μαζὶ εἰς μίαν ἡμέραν σκάπτουν $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{8}{40}+\frac{5}{40}=\frac{13}{40}$ τοῦ κήπου. Καὶ ὅλον τὸν κῆπον θὰ τὸν σκάψουν εἰς τόσας ἡμέρας ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸ $\frac{13}{40}$ εἰς τὸ 1, τὸ ὁποῖον φανερώνει ὁλόκληρον τὸν κῆπον δηλ. $1 : \frac{13}{40} = 1 \times \frac{40}{13} = \frac{40}{13} = 3\frac{1}{13}$.

Ὥστε καὶ οἱ δύο ἐργάται θὰ σκάψουν τὸν κῆπον εἰς $3\frac{1}{13}$ ἡμέρας.

180. Ἐργάτης σκάπτει ἕνα ἀμπέλι εἰς 6 ἡμέρας. Δεύτερος ἐργάτης τὸ σκάπτει εἰς 8 ἡμέρας καὶ τρίτος εἰς 10 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ σκάψουν τὸ ἀμπέλι καὶ οἱ τρεῖς ἐργάται μαζί;

181. Μία βρύση γεμίζει μίαν δεξαμενὴν εἰς 6 ὥρας. Δευτέρα βρύση τὴν γεμίζει εἰς 8 ὥρας καὶ τρίτη εἰς 12 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενὴν καὶ αἱ τρεῖς μαζί;

Ε'. ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πολλάκις ἔχομεν νὰ λύσωμεν προβλήματα, τὰ ὁποῖα περιέχουν κλασματικοὺς καὶ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα αὐτά: ἢ τρέπομεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κλάσματα, ἢ τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς δεκαδικούς.

α) Τροπὴ δεκαδικῶν εἰς κλάσματα.

Πρόβλημα. Ἕνα κοριτσάκι ἠγόρασε μισὸ μέτρον κορδέλλαν. Πῶς θὰ γράψωμεν τὸ μισὸ μέτρον μὲ δεκαδικὴν μορφὴν καὶ πῶς μὲ κλασματικήν;

Λύσις: Μισὸ μέτρον $= 0{,}5$ ἢ $\frac{5}{10}$ μ.

3 παλάμαι $= 0{,}3$ ἢ $\frac{3}{10}$ μ.

8 δάκτυλοι $= 0{,}08$ ἢ $\frac{8}{100}$ μ.

5 γραμμαὶ $= 0{,}005$ ἢ $\frac{5}{1000}$ μ.

Εἰς τὰ παραδείγματα αὐτὰ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,5, 0,3, 0,08 καὶ 0,005 τοὺς ἐτρέψαμεν εἰς κλασματικούς. Πῶς;

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, σβήνομεν τὴν ὑποδιαστολήν. Τὸν ἀκέραιον ὁ ὁποῖος προκύπτει τὸν γράφομεν ἀριθμητὴν κλάσματος καὶ παρονομαστὴν γράφομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός.

Σημείωσις: Ἂν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχῃ καὶ ἀκέραιον μέρος καὶ δεκαδικόν, τότε ἢ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα καὶ τὸν κάμνομεν κλασματικὸν ἢ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ τὸ γράφομεν ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τὸ γράφομεν κλάσμα, ὁπότε ὁ δεκαδικὸς τρέπεται εἰς μικτόν. Λ.χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,75 ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{375}{100}$, ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ ὅμως, ἂν θέλωμεν, καὶ ὡς μικτός, δηλ. $3\frac{75}{100}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 1. Νὰ τρέψετε εἰς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς δεκαδικούς:

0,2
0,6
0,8
0,1

0,3
0,5
0,7
0,9

0,05
0,15
0,38
0,350

0,075
0,008
0,3275
0,45.324

0,254.165
8,5
7,3
6,25

18,5
45,165
50,390
560,475

2. Γράψατε καὶ μὲ δεκαδικὴν μορφὴν καὶ μὲ κλασματικήν:

8 μέτρα καὶ 6 παλάμαι, 10 μέτρα καὶ 25 δάκτυλοι, 35 μέτρα καὶ 350 γραμμαί.

β) Τροπὴ κλασμάτων εἰς δεκαδικούς.

Τὸ μισὸ κιλὸν τὸ γράφομεν κλασματικῶς $\frac{5}{10}$ καὶ δεκαδικῶς 0,5.

Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ δεκαδικῶς τὰ γράφομεν 0,75.

Αὐτὰ τὰ εὑρίσκομεν εὔκολα καὶ νοερῶς.

Πῶς ὅμως θὰ γράψωμεν τὰ $\frac{15}{25}$ τοῦ κιλοῦ μὲ δεκαδικὴν μορφήν;

Ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι κάθε κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως μὲ διαιρετέον τὸν ἀριθμητὴν καὶ διαιρέτην τὸν παρονομαστήν.

Λύσις: $\frac{15}{25} = \begin{array}{r|l} 15 & 25 \\ \cline{2-2} 150 & 0,6 \\ 00 & \end{array}$

'Απάντησις : Τὰ $\frac{15}{25} = 0,6$ τοῦ κιλοῦ.

Ὥστε :

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς δεκαδικόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ πηλίκον εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Τρέψατε εἰς δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα :

$$\frac{3}{4},\ \frac{5}{10},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{9},\ \frac{8}{12},\ \frac{15}{20},\ \frac{35}{60},\ \frac{40}{60},\ \frac{60}{90}.$$

γ) Πράξεις ἐπὶ δεκαδικῶν καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁμοῦ.

Πρόβλημα. Μία μητέρα διὰ νὰ κάμῃ ἕνα γλυκὸ ἔβαλε τὰ ἑξῆς ὑλικά : ἀλεύρι $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ, γάλα 0,75 τοῦ κιλοῦ, βούτυρον $\frac{1}{10}$ τοῦ κιλοῦ καὶ διάφορα ἄλλα ὑλικὰ 0,25 τοῦ κιλοῦ. Πόσον βάρος ἔχουν ὅλα μαζὶ τὰ ὑλικὰ τοῦ γλυκοῦ ;

Λύσις: $\frac{3}{4} + 0,75 + \frac{1}{10} + 0,25 =$

Ὅπως βλέπετε ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα καὶ δεκαδικοὺς μαζί. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν πρόσθεσιν αὐτὴν ἔχομεν δύο τρόπους : ἢ τρέπομεν καὶ τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κλάσματα, ὅτε ἔχομεν νὰ κάμωμεν πρόσθεσιν κλασμάτων, ἢ τρέπομεν καὶ τὰ κλάσματα εἰς δεκαδικούς, ὅτε ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δεκαδικούς.

1ος τρόπος: Ε. Κ. Π. 100.

$$\frac{\overset{\overset{25}{\smile}}{3}}{4} + \frac{\overset{\overset{1}{\smile}}{75}}{100} + \frac{\overset{\overset{10}{\smile}}{1}}{10} + \frac{\overset{\overset{1}{\smile}}{25}}{100} = \frac{75}{100} + \frac{75}{100} + \frac{10}{100} \; \frac{25}{100} = \frac{185}{100} = 1\,\frac{85}{100}$$

2ος τρόπος. $0,75 + 0,75 + 0,1 + 0,25 = 1,85$

Ἀπάντησις : Τὰ ὑλικὰ τοῦ γλυκοῦ θὰ ἔχουν βάρος $1\frac{85}{100}$ κιλὰ ἢ 1,85 κιλά.

Δηλαδὴ καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους εὑρίσκομεν τὸ ἴδιον.

Σημείωσις: Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἀφαιροῦμεν, πολλαπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν κλάσματα καὶ δεκαδικοὺς μαζί.

Ὥστε :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν, ἀφαιρέσωμεν, πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς μὲ κλάσματα, ἢ τρέπομεν καὶ τοὺς δεκαδικοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἐκτελοῦμεν πρᾶξιν κλασμάτων ἢ τρέπομεν καὶ τὰ κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς καὶ ἐκτελοῦμεν πρᾶξιν δεκαδικῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Νὰ ἐκτελέσετε τὰς κατωτέρω πράξεις :

$\frac{2}{5} + 0{,}7 + 0{,}35 + \frac{1}{4}$

$0{,}85 + \frac{6}{8} + 3{,}75 + \frac{9}{10}$

$4\frac{7}{10} + 5{,}20 + 3{,}5 + 2\frac{30}{100}$

$15{,}4 - 6\frac{3}{4}$

$65\frac{5}{6} - 30{,}4$

$58{,}6 - 35\frac{1}{4}$

$0{,}7 \times \frac{3}{8}$

$18{,}25 \times \frac{9}{4}$

$5\frac{6}{7} \times 0{,}70$

$0{,}9 : \frac{5}{10}$

$25{,}4 : \frac{5}{8}$

$20\frac{3}{4} : 8{,}75$

$40\frac{1}{2} : 0{,}05$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

182. Ἔμπορος ἐπώλησεν ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα εἰς μίαν κυρίαν $10\frac{3}{4}$ μέτρα, εἰς δευτέραν κυρίαν 7,50 μ. καὶ εἰς τὴν τρίτην κυρίαν $9\frac{1}{2}$ μ. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἐπώλησεν καὶ εἰς τὰς τρεῖς κυρίας ;

183. Ἕνα δοχεῖον περιεῖχε 14,75 κιλὰ λάδι. Ἀπὸ αὐτὸ ἔφαγεν ἡ οἰκογένεια εἰς ἕνα μῆνα $9\frac{3}{5}$ κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι ἔμειναν εἰς τὸ δοχεῖον;

184. Εἷς ὁδοιπόρος βαδίζει τὴν ὥραν 4,85 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ βαδίσῃ εἰς $5\frac{1}{4}$ ὥρας;

185. Ἕνα πλοῖον διέτρεξεν 54,25 μίλια εἰς $3\frac{3}{4}$ ὥρας. Μὲ πόσα μίλια ἔτρεχε τὴν ὥραν;

Γράψατε καὶ σεῖς τρία ὅμοια προβλήματα.

ΣΤ'. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Τί εἶναι σύνθετα κλάσματα.

α) Ἐμάθομεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν τὸ παριστάνομεν ὡς κλάσμα. Π.χ. $3 : 4 = \frac{3}{4}$. Ὁ διαιρετέος γίνεται ἀριθμητὴς καὶ ὁ διαιρέτης παρονομαστής.

Τὸ ἀνωτέρω κλάσμα $\frac{3}{4}$, ὅπως καὶ κάθε κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὺς ὅρους του ἀκεραίους ἀριθμούς, λέγεται ἁπλοῦν κλάσμα.

β) Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $3 : \frac{2}{5}$ θὰ τὸ παραστήσωμεν πάλιν ὡς κλάσμα. Ἀριθμητὴς θὰ εἶναι ὁ διαιρετέος 3 καὶ παρονομαστὴς ὅλον τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$. Δηλ.

$$3 : \frac{2}{5} = \frac{3}{\frac{2}{5}}.$$

Ὁμοίως γίνεται ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν

$$\frac{3}{4} : 6 = \frac{\frac{3}{4}}{6} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}$$

Τὰ ἀνωτέρω κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο ἢ καὶ τοὺς δύο ὅρους των κλασματικοὺς λέγονται σύνθετα κλάσματα.

Σημείωσις: Ἡ γραμμὴ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ συνθέτου κλάσματος γράφεται μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν γραμμὴν τῶν κλασματικῶν ὅρων αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ γράψετε ὡς σύνθετα κλάσματα τὰ πηλίκα τῶν κατωτέρω διαιρέσεων.

α) $5 : \frac{1}{4}$, β) $6 : \frac{2}{3}$, γ) $7 : \frac{3}{5}$, δ) $\frac{1}{4} : 2$,

ε) $\frac{2}{4} : 5$, στ) $\frac{3}{6} : 8$, ζ) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$, η) $\frac{2}{5} : \frac{4}{8}$,

θ) $\frac{5}{6} : \frac{2}{7}$

2. Πῶς τρέπονται τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ.

Παραδείγματα:

α) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{8}$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους $3 \times 5 = 15$ καὶ τὸ γινόμενόν των τὸ γράφομεν ἀριθμητὴν τοῦ νέου ἁπλοῦ κλάσματος καὶ τοὺς δύο μέσους $4 \times 2 = 8$ καὶ τὸ γινόμενόν των τὸ γράφομεν παρονομαστὴν τοῦ νέου ἁπλοῦ κλάσματος. Διότι εἶναι διαίρεσις κλάσματος διὰ κλάσματος.

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

β) $\dfrac{5}{\frac{6}{8}} = \dfrac{\frac{5}{1}}{\frac{6}{8}} = \frac{40}{6}$ γ) $\dfrac{\frac{3}{5}}{7} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{1}} = \frac{3}{35}$

Εἰς τὰ ἀνωτέρω κλάσματα ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἐπειδὴ κάθε ἀκέραιος παριστάνεται ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα συμπληρώνομεν τὰ κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα καὶ τὰ τρέπομεν εἰς ἁπλᾶ, ὅπως εἴδομεν εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα.

δ) $$\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{2}{5}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{17}{5}} = \frac{35}{51}$$

Ἐτρέψαμεν πρῶτον τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα.

ε) Εὐκολώτερον ὅμως εἶναι ν' ἀναλύσωμεν τὸ σύνθετον κλάσμα εἰς διαίρεσιν, ἐφ' ὅσον πᾶν κλάσμα, ὡς εἴπομεν, παριστᾷ μίαν διαίρεσιν:

Παραδείγματα:

α) $$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{18} = 1\,\frac{2}{18} = 1\,\frac{1}{9}$$

β) $$\frac{6}{\frac{2}{8}} = 6 : \frac{2}{8} = 6 \times \frac{8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

γ) $$\frac{5\,\frac{2}{5}}{4} = 5\,\frac{2}{5} : 4 = \frac{27}{5} : 4 = \frac{27}{5 \times 4} = \frac{27}{20} = 1\,\frac{7}{20}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Τὰ κατωτέρω σύνθετα κλάσματα νὰ τὰ τρέψετε εἰς ἁπλᾶ:

α) $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}},\quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{6}{8}},\quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}},\quad \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{6}},\quad \frac{\frac{9}{10}}{\frac{7}{9}}$$

β) $$\frac{8}{\frac{5}{6}},\quad \frac{5}{\frac{6}{8}},\quad \frac{7}{\frac{1}{2}},\quad \frac{6}{\frac{3}{5}},\quad \frac{12}{\frac{2}{4}}$$

γ) $\frac{\frac{1}{2}}{6}, \quad \frac{\frac{3}{5}}{10}, \quad \frac{\frac{2}{6}}{15}, \quad \frac{\frac{4}{5}}{9}, \quad \frac{\frac{7}{8}}{12}$

δ) $\frac{3\frac{4}{5}}{5\frac{6}{7}}, \quad \frac{4\frac{3}{8}}{2\frac{2}{3}}, \quad \frac{12\frac{1}{2}}{15\frac{4}{5}}, \quad \frac{25}{6\frac{1}{4}}, \quad \frac{15\frac{2}{4}}{\frac{8}{9}}$

Συμπλήρωσις πράξεων συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Ὅταν ἐμάθομεν τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς καὶ τὰς διαφόρους πράξεις μὲ συμμιγεῖς δὲν ἐμάθομεν καὶ πῶς ἠμποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτὸν καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἐπίσης συμμιγῆ ἀριθμὸν διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ, διότι δὲν εἴχομεν ἀκόμη μάθει τὰ κλάσματα καὶ τὰς διαφόρους ἀριθμητικὰς πράξεις μὲ κλασματικοὺς ἀριθμούς. Τώρα πλέον, ὅτε ἔχομεν μάθει τελείως τὰ κλάσματα, ἠμποροῦμεν νὰ συμπληρώσωμεν τὴν διδασκαλίαν τῶν συμμιγῶν καὶ μὲ τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) Πῶς πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτόν.

Πρόβλημα: Ἓν αὐτοκίνητον εἰς μίαν ὥραν τρέχει 65 χιλιόμετρα καὶ 200 μέτρα. Πόσον τρέχει εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ;

Λύσις:

65 χιλ. 200 μ
× 3
195 χιλμ. 600 μ

195 χιλ. 600 μ | 4
35 | 48 χιλ. 900 μ.
3 χιλ.
1000 ×
3000 μέτρα
+ 600 »
3600 »
000

'Απάντησις: Εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας τὸ αὐτοκίνητον τρέχει 48 χιλ. καὶ 900 μ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν λοιπὸν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

'Εὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτὸν ἢ δεκαδικόν, τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Νὰ πολλαπλασιάσετε τοὺς συμμιγεῖς:

α) 10 ὧραι 20 π 30 δ $\times \frac{2}{6}$, β) 35 μέτρα 8 παλάμαι 5 δάκτ. $\times 3\frac{3}{5}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

186. 'Οδοιπόρος εἰς μίαν ὥραν βαδίζει 5 χιλιόμ. καὶ 350 μέτρα. Πόσον βαδίζει εἰς τὰ $\frac{9}{10}$ τῆς ὥρας;

187. Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει τὸν μῆνα λάδι 8 κιλὰ καὶ 400 γραμμ. Πόσον λάδι ἐξοδεύει εἰς $3\frac{1}{2}$ μῆνας;

188. 'Εργάτης, διὰ νὰ σκάψῃ ἕνα στρέμμα ἀμπέλι χρειάζεται 4 ἡμέρας καὶ 4 ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον θὰ σκάψῃ ὁλόκληρον τὸ ἀμπέλι, τὸ ὁποῖον εἶναι $5\frac{3}{4}$ στρέμματα; ('Εργάσιμοι ὧραι 8 ἡμερησίως).

β) Πῶς διαιροῦμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος ἢ διὰ μικτοῦ.

Πρόβλημα. Κηπουρὸς σκάπτει τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς κήπου εἰς 8 ὥρας 30′ καὶ 30″. Εἰς πόσον χρόνον θὰ σκάψῃ ὁλόκληρον τὸν κῆπον;

Λύσις: 8 ὧραι 30′ 30″ $: \frac{2}{3} =$ 8 ὧραι 30′ 30″ $\times \frac{3}{2}$

$$
\begin{array}{l}
8 \text{ ὧραι } 30' \; 30'' \\
\times \qquad\qquad 3 \\
\hline
24 \text{ ὧραι } 90' \; 90'' \quad \text{ἢ}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
25 \text{ » } 31' \; 30'' & 2 \\ \cline{2-2}
05 & 12 \text{ ὧρ. } 45' \; 45'' \\
1 \text{ ὥρα} & \\
60 \quad \times & \\ \cline{1-1}
60' & \\
31' \quad + & \\ \cline{1-1}
91' & \\
11 & \\
1 & \\
60 \quad \times & \\ \cline{1-1}
60'' & \\
30'' \quad + & \\ \cline{1-1}
90'' & \\
10 & \\
0 &
\end{array}
$$

Ἀπάντησις : Ὁλόκληρον τὸν κῆπον θὰ τὸν σκάψῃ εἰς 12 ὥρ. 45′ καὶ 45″. Ὥστε : Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομεν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα ὅπως ἔχομεν μάθει. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ, τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα καὶ διαιροῦμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : α) 30 ὑάρδαι 2 πόδια 10 ἴντσαι : $\frac{6}{8}$

β) 4 ἔτη 8 μῆνες 10 ἡμέραι : $3\frac{2}{3}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

189. Ἕν αὐτοκίνητον εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας ἔτρεξεν 49 χιλ. 800 μέτρα. Μὲ πόσην ταχύτητα ἔτρεχε τὴν ὥραν;

190. Τὰ $\frac{6}{8}$ ἀπὸ ἕνα τόπι ὑφάσματος εἶναι 36 μέτρα καὶ 6 παλάμαι. Πόσα μέτρα εἶναι ὅλον τὸ τόπι;

191. Ὁδοιπόρος εἰς $3\frac{3}{4}$ ὥρας ἐβάδισε 15 χιλιόμ. καὶ 750 μέτρα. Πόσον ἐβάδιζε τὴν ὥραν;

γ) Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ.

Πρόβλημα. Μία οἰκογένεια ἀπὸ 5 μέλη ἔφαγεν εἰς ἓν ἔτος 18 κιλὰ μαρμελάδας. Πόσην μαρμελάδαν ἔφαγεν τὸ ἄτομον ;

Λύσις: $18 : 5 = \frac{18}{5}$

$$\text{ἢ}\quad \begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 3 \text{ κιλ. } 600 \text{ γραμμ.} \\ \times 1000 & \\ \cline{1-1} 3000 & \\ 000 & \end{array}$$

κ.ο.κ.

Ὥστε: **Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα (ἢ μικτὸν) εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ πηλίκον εἶναι μονάδες ὅμοιαι πρὸς τὰς μονάδας τοῦ κλάσματος.**

Τὸ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, τὸν διαιροῦμεν καὶ ἐκεῖνον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (διαιρέτου) κ.ο.κ.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

192. Ἐργάτης ἔσκαψε τὴν πρώτην ἡμέραν τάφρον (χαντάκι) μήκους $28\frac{1}{2}$ μ., τὴν ἑπομένην ἔσκαψε $3\frac{3}{4}$ μ. περισσότερον τῆς πρώτης καὶ τὴν τρίτην ἡμέραν 3μ. περισσότερον τῆς δευτέρας ἡμέρας. Πόσα μέτρα ἔσκαψε τὰς τρεῖς ἡμέρας καὶ πόσα ὑπολείπονται ἀκόμη, ἂν τὸ μῆκος τῆς τάφρου ἦτο $112\frac{1}{2}$ μέτρα ;

193. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὑφάσματος μήκους 40 μέτρων ἐπωλήθησαν τρία τεμάχια. Τὸ α′ εἶχε μῆκος $6\frac{1}{2}$ μ., τὸ β′ ἦτο $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου μικρότερον τοῦ α′ καὶ τὸ γ′ $1\frac{1}{2}$ μ. μεγαλύτερον τοῦ β′ Πόσα μέτρα ἐπωλήθησαν τὸ ὅλον καὶ πόσα μένουν ἀπώλητα ἀκόμη;

194. Εἰς ἓν ἐργοστάσιον οἱ ἐργάται ἀρχίζουν τὴν ἐργασίαν των κάθε ἡμέραν εἰς τὰς $6\frac{1}{4}$ π.μ. καὶ διακόπτουν τὴν μεσημβρίαν διὰ φαγητὸν καὶ ἀνάπαυσιν. Ἐπαναλαμβάνουν ταύτην εἰς τὰς $1\frac{1}{2}$ μ.μ. καὶ τελειώνουν εἰς τὰς 4 μ.μ. Πόσας ὥρας ἐργάζονται τὸ ὅλον τὴν ἡμέραν;

195. Βοσκὸς ἔχει 170 πρόβατα καὶ αἶγας (γιδοπρόβατα). Ἀπ' αὐτὰ τὰ $\frac{3}{5}$ εἶναι πρόβατα. Πόσα εἶναι τὰ πρόβατα καὶ πόσαι αἱ αἶγες;

196. Ἠρώτησαν ἕνα ἄλλον βοσκὸν πόσα πρόβατα ἔχει καὶ ἀπήντησεν. «Ἀπὸ ὅσα βλέπετε ἐδῶ ἔχω πωλήσει τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῶν, τὰ ὁποῖα δὲν τὰ ἐπῆραν ἀκόμη, καὶ μοῦ μένουν 80 πρόβατα». Πόσα ἦσαν ὅλα τὰ πρόβατα καὶ πόσα ἐπώλησε; (Ἀπ.: ἦσαν 128 πρ., ἐπώλ. 48 πρ.).

197. Εἷς ἐξώδευσε τὰ $\frac{4}{7}$ τῶν χρημάτων του καὶ τοῦ ἔμειναν ἀκόμη 165 δραχμαί. Πόσα χρήματα ἐξώδευσε καὶ πόσα εἶχε τὸ ὅλον; (Ἀπ. ἐξώδ. 220 δρχ., εἶχε 385 δρχ.).

198. Εἷς ἔμπορος ἠγόρασε 1200 μέτρα ὑφάσματος πρὸς $9\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μ. καὶ τὰ μετεπώλησε πρὸς $12\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ μέτρον. Ἐκέρδησεν ἢ ἔχασεν καὶ πόσα;

199. Ἄλλος ἔμπορος ἠγόρασε 25 τόπια ὑφάσματος (κάθε τόπι ἦτο 38 μέτρα) πρὸς $10\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μέτρον. Μετεπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑφάσματος πρὸς $14\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ μέτρον καὶ τὸ ὑπόλοιπον κατὰ $\frac{3}{4}$ δραχ. ἀκριβότερον. Πόσον ἐκέρδησεν ἐν ὅλῳ;

200. Ἡ μητέρα τῆς Νίκης ἠγόρασε διὰ τὸ παλτό της $4\frac{2}{10}$ μέτρα ὕφασμα πρὸς $145\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μέτρον καὶ $3\frac{3}{5}$ μέτρα φόδρα πρὸς $14\frac{2}{4}$ δρχ. τὸ μέτρον. Ἐπλήρωσε διὰ ραπτικὰ 250 δρχ. Εἶχε τὸ ὅλον 1000 δρχ. Τῆς ἔφθασαν τὰ χρήματα αὐτὰ ἢ ἔμεινε καὶ χρέος καὶ πόσον;

201. Τὰ $\frac{3}{4}$ κιλοῦ καφὲ κοστίζουν $63\frac{3}{5}$ δραχμάς. Πόσον κοστίζει τὸ κιλόν, πόσον τὰ $\frac{6}{10}$ καὶ πόσον τὰ $2\frac{1}{2}$ κιλά;

202. Τὰς παραμονὰς τῶν Χριστουγέννων τὸ φιλόπτωχον Ταμεῖον τῆς ἐνορίας διένειμε εἰς 148 πτωχοὺς ἀπὸ ἕναν ἄρτον ἀξίας $5\frac{3}{4}$ δραχμὰς καὶ ἓν κιλὸν κρέας εἰς ἕκαστον ἀξίας $46\frac{3}{5}$ δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἤξιζον ἐν ὅλῳ τὰ εἴδη, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν εἰς τοὺς πτωχούς ;

203. Δύο ἐργάται σκάπτουν ἕνα ἀμπέλι, ὁ ἕνας εἰς 6 ἡμέρας μόνος του καὶ ὁ ἄλλος εἰς 8 ἡμέρας μόνος του. Ἂν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζὶ εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὸ τελειώσουν;

204. Τρεῖς κρουνοὶ γεμίζουν μίαν δεξαμενήν. Ὁ πρῶτος τὴν γεμίζει μόνος εἰς 8 ὥρας, ὁ β′ μόνος εἰς 12 ὥρας καὶ ὁ γ′ μόνος εἰς 15 ὥρας. Ἂν ἀνοίξουν καὶ οἱ τρεῖς κρουνοὶ μαζί, τί μέρος τῆς δεξαμενῆς θὰ γεμίσουν εἰς 1 ὥραν καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ὁλόκληρος ἡ δεξαμενή;

205. Μία ἄλλη δεξαμενὴ ἔχει δύο κρουνοὺς ὁ εἷς τὴν γεμίζει εἰς 5 ὥρας καὶ ὁ ἄλλος τὴν ἀδειάζει εἰς 6 ὥρας. Ἂν τρέχουν καὶ οἱ δύο μαζὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή ;

206. Κτηματίας ἠγόρασε $7\frac{5}{10}$ μέτρα ὕφασμα. Διὰ νὰ τὸ πληρώσῃ ἐπώλησε $15\frac{1}{4}$ κιλὰ λάδι πρὸς 28 δραχμὰς τὸ κιλόν, $15\frac{3}{4}$ κιλὰ ἐλαίας πρὸς 15 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 60 κιλὰ σῖτον πρὸς $3\frac{1}{2}$ δραχμὰς τὸ κιλόν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας δραχμὰς ἐκόστισεν ὅλον τὸ ὕφασμα καὶ πόσας τὸ μέτρον αὐτοῦ;

207. Ράπτης ἠγόρασε $85\frac{6}{8}$ μ. ὑφάσματος. Ἀφοῦ ἐπώλησε $16\frac{3}{4}$ μέτρα ἐξ αὐτοῦ, μὲ τὸ ὑπόλοιπον κατεσκεύασε ἐνδυμασίας. Πόσας ἐνδυμασίας ἔκαμεν, ἂν διὰ κάθε μίαν ἐχρειάζοντο $5\frac{3}{4}$ μέτρα ;

208. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἠγόρασαν ἓν κτῆμα 40 στρέμματα ἀντὶ 800.000 δραχμῶν. Ὁ α′ ἐπῆρε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κτήματος, ὁ β′ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ὁ γ′

τὸ ὑπόλοιπον. Πόσα στρέμματα ἐπῆρεν ἕκαστος καὶ πόσον ἐπλήρωσε;

209. Πατήρ τις ὥρισε διὰ τῆς διαθήκης του νὰ μοιρασθῆ, μετὰ τὸν θάνατόν του, ἡ περιουσία του ὡς ἑξῆς. Ὁ υἱός του νὰ λάβη τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας του, ἡ θυγάτηρ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας καὶ τὸ ὑπόλοιπον νὰ λάβη ἡ σύζυγός του. Ἂν αὕτη λάβη 45 στρέμματα καὶ 67 $\frac{1}{2}$ χιλιόδραχμα, πόση ἦτο ἡ περιουσία ὁλόκληρος εἰς κτήματα καὶ μετρητὰ καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστον τέκνον αὐτοῦ;

210. Τέσσαρες ἀδελφοὶ ἐμοιράσθησαν 6400 κιλὰ σιτάρι, ἔτσι: ὁ α′ ἔλαβεν τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ, ὁ β′ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ὁ γ′ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ ὁ δ′ τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον. Πόσα κιλὰ ἔλαβεν ἕκαστος;

211. Ἓν αὐτοκίνητον διανύει τὴν ὥραν 48 χιλιόμετρα καὶ 300 μέτρα. Πόσην ἀπόστασιν θὰ διανύση εἰς 8 $\frac{1}{2}$ ὥρας;

212. Εἷς ἀγροτικὸς διανομεύς, διὰ νὰ μοιράση τὰ γράμματα τῆς περιοχῆς του, διέτρεξε 36 χιλιόμετρα καὶ 600 μέτρα εἰς 6 $\frac{2}{3}$ ὥρας. Πόσον ἐβάδιζε τὴν ὥραν;

τὸ ὑπόλοιπον. Πόσα στρέμματα ἐχάρισε ἑκάστης καὶ πόσον ἐκληρονόμει; [illegible] [illegible] νὰ μοιρασθῇ, μετὰ τὸν θάνατό του, ἡ περιουσία του [illegible] [illegible] περιουσίας του, ἡ θυγατέρα του [illegible] τῆς περιουσίας, καὶ τὸ ὑπόλοιπον νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του. Ἂν αὐτὴ λάβῃ 45 στρέμματα καὶ τὰ [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] ὁ α' ἔλαβεν τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ, ὁ β' τὰ [illegible] τοῦ ὑπολοίπου καὶ ὁ γ' [illegible] [illegible]

[illegible] μέτρα. Πόσον [illegible] εἰς [illegible];

[illegible] περιουσίας του, [illegible] [illegible] Πόσην [illegible];

[illegible]

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

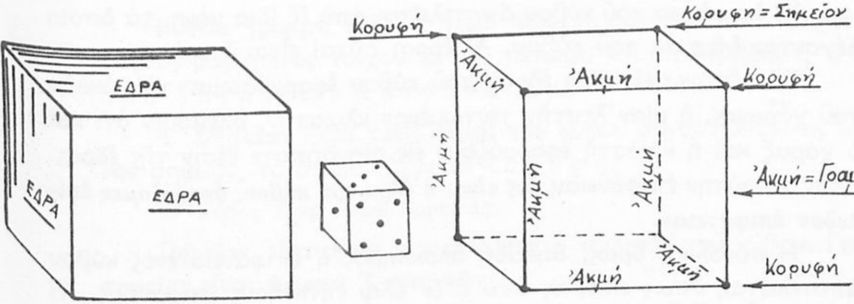
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ*

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ

Ἔννοιαι ἐπιφανειῶν, γραμμῶν, σημείων, γωνιῶν.

Α΄. Ο ΚΥΒΟΣ



1. Αὐτὰ τὰ ὁποῖα βλέπετε εἰς τὴν ἀνωτέρω εἰκόνα εἶναι **κύβοι.** **Κύβος** εἶναι τὰ ζάρια καὶ διάφορα μικρὰ ἢ μεγάλα κυτία, παιγνίδια κ.λ.π. ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο σχῆμα. Ὁ κύβος αὐτὸς ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι, τὴν ἕδραν κλπ. καταλαμβάνει ἕνα ὡρισμένον χῶρον, μέσα εἰς τὸν ὁποῖον δὲν ἠμπορεῖ νὰ χωρέσῃ ἄλλο πρᾶγμα. Δι᾽ αὐτὸ τὸν κύβον καὶ κάθε πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει χῶρον καὶ ἔχει ὡρισμένον ὄγκον καὶ σχῆμα, ὀνομάζομεν *στερεὸν σῶμα*.

Αὐτὸς ὁ τόπος, δηλαδὴ ὁ χῶρος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἓν σῶμα, καλεῖται ὄγκος τοῦ σώματος.

Ὁ κύβος καθὼς καὶ ἄλλα στερεὰ σώματα, ὅπως τὸ μολύβι, ἡ

---

* Ὑπὸ Βασιλικῆς Ἀλεξοπούλου - Καμπαλούρη

κασετίνα, τὸ θρανίον, ἡ ἕδρα, ἡ μπάλλα, τὸ τοῦβλο κ.λ.π., ἐκτὸς τοῦ ὅτι καταλαμβάνουν ἕνα χῶρον, δηλαδὴ ἐκτὸς τοῦ *ὄγκου* των, ἔχουν καὶ ἄλλα *κοινὰ γνωρίσματα*:

— Πρῶτον, ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὕλην καὶ ἔχουν κοινὸν γνώρισμα τὸ **βάρος** των.

— Δεύτερον, τὸ κάθε ἓν ἔχει ὡρισμένην μορφήν, ὡρισμένον **σχῆμα.**

Ἡ Γεωμετρία ἐξετάζει ὅλα τὰ σχήματα.

2. **Ἐπιφάνειαι.** Ὅταν πάρωμεν ἕνα κύβον εἰς τὸ χέρι μας καὶ τὸν παρατηρήσωμεν προσεκτικά, βλέπομεν καὶ ψηλαφῶμεν, ἐὰν θέλωμεν, ὅλα τὰ ἄκρα, εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει.

Αὐτὰ τὰ ἄκρα, ὅλα μαζί, ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου.

Ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος εἶναι *τὸ σύνολον τῶν ἄκρων του.*

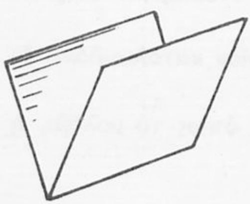
Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ἴδια μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἕδραι τοῦ κύβου. Αἱ ἕδραι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν ἐπάνω εἰς μίαν ἕδραν τοῦ κύβου ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀκμὴν τοῦ χάρακος, ἢ μίαν λεπτὴν τεντωμένην κλωστήν, βλέπομεν ὅτι καὶ ὁ χάραξ καὶ ἡ κλωστὴ ἐφαρμόζουν εἰς οἱανδήποτε θέσιν τῆς ἕδρας. Μίαν τοιαύτην ἐπιφάνειαν, ὡς *εἶναι ἡ ἕδρα τοῦ κύβου, ὀνομάζομεν* **ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.**

Ἡ συνολικὴ ὅμως, δηλαδὴ ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κύβου ἀποτελεῖται, ὅπως εἴδομεν, ἀπὸ 6 ἐν ὅλῳ ἐπιπέδους ἐπιφανείας. Ἡ συνολικὴ αὐτὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **τεθλασμένη ἐπιφάνεια.** Λέγομεν λοιπὸν ὅτι:

Τεθλασμένη ἐπιφάνεια εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας, χωρὶς νὰ ἐμφανίζεται ὡς μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.

Ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ τζάμι τοῦ παραθύρου, ὁ πίναξ τῆς τάξεώς μας, ὁ τοῖχος, τὸ πάτωμα, τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ τραπεζιοῦ καὶ ἄλλα σώματα.



Τεθλασμένην ἐπιφάνειαν ἔχομεν, ὅταν λάβωμεν ἓν φύλλον χάρτου, τὸ ὁποῖον ἀφοῦ τσακίσωμεν, τὸ ἀνοίγομεν ὀλίγον περισσότερον ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν τοῦ τσακίσματος. Τότε βλέπομεν νὰ σχηματίζωνται δύο ἐπίπεδα. Ἔχομεν δηλαδὴ τεθλασμένην ἐπιφάνειαν·

3. **Γραμμαί.** Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, ἀνὰ δύο, τέμνονται καὶ ἡ τομὴ αὕτη εἶναι μία γραμμή. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται **ἀκμὴ** τοῦ κύβου.

Ὁ κύβος ἔχει 12 ἀκμάς.

Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι. Γενικῶς, τὸ μέρος εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται καὶ τέμνονται δύο ἐπιφάνειαι λέγεται γραμμή.

Γραμμὴ ἑπομένως εἶναι ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν. Π.χ. γραμμὴ εἶναι τὸ μέρος, εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται δύο τοῖχοι τῆς τάξεώς μας, ὡς ἐπίσης τὸ μέρος ὅπου συναντᾶται ὁ τοῖχος μὲ τὸ ταβάνι, ἢ ὁ τοῖχος μὲ τὸ πάτωμα.

Ἐὰν ἐπάνω εἰς μίαν ἀκμὴν τοῦ κύβου βάλωμεν τὸν χάρακα ἢ μίαν λεπτὴν τεντωμένην κλωστήν, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει ἀκριβῶς. Ὥστε:

Ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (μέρος αὐτῆς).

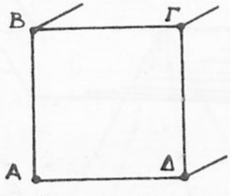
Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν δύο τοίχων τῆς τάξεώς μας ἢ ἑνὸς τοίχου μὲ τὸ πάτωμα κ.λ.π., δηλαδὴ ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

4. **Σημεῖα.** Κάθε τρεῖς ἀκμαὶ τοῦ κύβου συναντῶνται εἰς ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κορυφή.

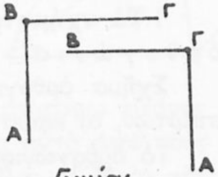
Ὁ κύβος ἔχει ὀκτὼ κορυφάς.

Σημεῖον εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς 8 κορυφὰς τοῦ κύβου. Γενικῶς **σημεῖον** εἶναι **ἡ τομὴ 2 γραμμῶν.**

5. **Γωνίαι.** Ὅπως εἴδομεν, εἰς κάθε κορυφὴν τοῦ κύβου, ἡ ὁποία εἶναι σημεῖον, συναντῶνται αἱ ἀκμαὶ αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί. Ἐὰν πάρωμεν χωριστὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας τοῦ κύβου, ἔστω π.χ. τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ καὶ ἐξετάσωμεν τὰς εὐθείας γραμμάς, εἰς τὰς ὁποίας καταλήγει αὐτὴ ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, δηλαδὴ ἡ ἕδρα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἀπὸ κάθε ἓν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ξεκινοῦν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ σχηματίζουν, ἀνὰ δύο, 4 γωνίας. Ἡ ΑΒ καὶ ΒΓ τὴν γωνίαν ΑΒΓ, ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΓΔ τὴν γωνίαν ΒΓΔ κ.ο.κ. Τὰ σημεῖα Β, Γ κ.λ.π. λέγονται κο-



Ἕδρα Κύβου



Γωνίαι

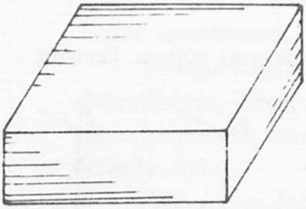
ρυφαὶ τῆς γωνίας καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ πλευραὶ τῆς γωνίας ΑΒΓ, αἱ ΒΓ, ΓΔ πλευραὶ τῆς γωνίας ΒΓΔ κ.λ.π.

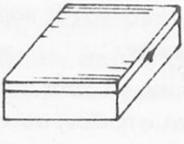
6. **Πολύγωνα.** Κάθε μία ἀπὸ τὰς ἕδρας τοῦ κύβου ἔχει 4 γωνίας. Εἶναι *τετράγωνον*. Ἐὰν ἕνα σχῆμα ἔχῃ 3 γωνίας, λέγεται *τρίγωνον*, ἐὰν 5, *πεντάγωνον* καὶ ἐὰν ἔχῃ πολλάς, λέγεται *πολύγωνον*.

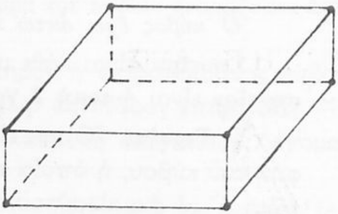
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κασετίνας σας καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πίνακος.
2. Πόσας κορυφάς, πόσας ἀκμὰς καὶ πόσας ἕδρας ἔχει ὁ κύβος;
3. Τί λέγεται ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος;
4. Τί λέγεται γραμμὴ καὶ τί εὐθεῖα γραμμή;

Β΄. ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ







1. **Τὰ σχήματα,** τὰ ὁποῖα βλέπετε εἰς τὴν ἀνωτέρω εἰκόνα, εἶναι ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν τὰ κυτία τῶν σπίρτων, αἱ κασετίναι, τὰ τοῦβλα καὶ διάφορα ἄλλα σώματα.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει, ὅπως καὶ ὁ κύβος, 6 ἕδρας, 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφάς. Ἡ διαφορὰ εἶναι ὅτι μόνον αἱ ἀπέναντι ἕδραι του εἶναι μεταξύ των, ἀνὰ δύο, ἴσαι, ἐνῷ εἰς τὸν κύβον ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

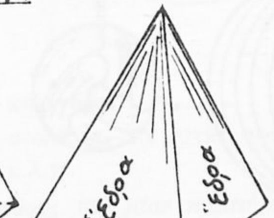
2. **Ἐπιφάνειαι.** Ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι, ὅπως καὶ τοῦ κύβου. Ἐπειδὴ δὲ ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, ἀπὸ πολλὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας, λέγεται τεθλασμένη ἐπιφάνεια.

3. **Γραμμαί.** Αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, συναντῶνται ἀνὰ δύο καὶ τέμνονται καὶ σχηματίζουν 12 ἀκμάς. Καὶ αἱ ἀκμαὶ αὐταὶ εἶναι, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, γραμμαὶ καὶ μάλιστα εὐθεῖαι.

4. **Σημεῖα.** Κάθε τρεῖς ἀκμαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου συναντῶνται καὶ σχηματίζουν, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον, κορυφάς. Αἱ κορυφαὶ αὗται εἶναι σημεῖα.

5. **Γωνίαι.** Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὰς ὁποίας καταλήγει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἕδρας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, σχηματίζουν ἀνὰ δύο, ὅπως καὶ εἰς τὸν κύβον, 4 γωνίας.

Γ΄. Η ΠΥΡΑΜΙΣ



1. **Τὰ σχήματα,** τὰ ὁποῖα βλέπετε εἰς τὰς ἀνωτέρω εἰκόνας εἶναι πυραμίδες. Ἡ πυραμὶς ἐπῆρε τὸ ὄνομα αὐτὸ ἀπὸ τοὺς τάφους τῶν νεκρῶν τῶν ἀρχαίων Αἰγυπτίων. Ὅλαι αἱ ἕδραι τῆς

πυραμίδος, ἐκτὸς ἀπὸ μίαν, καταλήγουν πρὸς τὰ ἐπάνω εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδος. Ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν κορυφὴν λέγεται *βάσις* τῆς πυραμίδος. Ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνον, ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνική, ἐὰν εἶναι τετράγωνον, τετραγωνική, ἐὰν δὲ πολύγωνον, πολυγωνικὴ πυραμίς.

2. Ἡ πυραμίς, καθὼς καὶ ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἐπειδὴ ἔχουν πολλὰς ἕδρας, λέγονται πολύεδρα σώματα.

3. **Ἐπιφάνειαι, γραμμαί, σημεῖα, γωνίαι.**

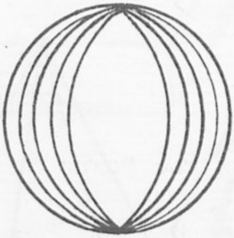
α) Αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι.

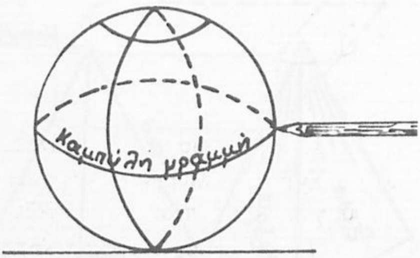
β) Αἱ ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί.

γ) Ἡ κορυφὴ τῆς πυραμίδος καὶ αἱ ἄλλαι κορυφαί, ὅπου συναντῶνται ἡ ἕδρα τῆς βάσεως καὶ ἀνὰ δύο ἄλλαι ἕδραι, εἶναι σημεῖα.

δ) Εἰς κάθε ἕδραν τῆς πυραμίδος σχηματίζονται 3 γωνίαι (τρίγωνα), ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον ἢ ἄλλο πολύγωνον.

Δ'. Η ΣΦΑΙΡΑ





1. Τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα βλέπετε εἰς τὰς ἀνωτέρω εἰκόνας, εἶναι **σφαῖραι.**

Ἡ μπάλλα, τὸ τόπι, τὰ πορτοκάλλια καὶ οἱ βῶλοι ἔχουν σχῆμα σφαίρας.

2. **Ἐπιφάνεια, γραμμαί, σημεῖα.**

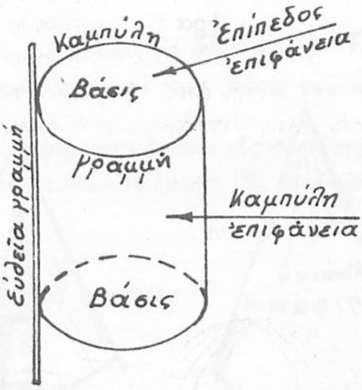
α) Ἐὰν ἐπιχειρήσωμεν ν' ἀκουμβήσωμεν εἰς οἱονδήποτε μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας τὸν χάρακα ἢ μίαν τεντωμένην κλωστήν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι δὲν ἠμποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν, ἀλλ' ἀκουμβοῦν εἰς ἓν μόνον *σημεῖον*. Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δὲν ἔχει κανὲν ἐπίπεδον μέρος.

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη λέγεται **καμπύλη.**

Ὥστε **καμπύλη ἐπιφάνεια** εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία δὲν ἔχει κανὲν ἐπίπεδον μέρος.

β) Ἐὰν ἐπάνω εἰς τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας χαράξωμεν μίαν γραμμήν, ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται **καμπύλη γραμμή.**

Ε΄. Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ



1. Τὰ σχήματα αὐτὰ εἶναι **κύλινδροι.**

Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν οἱ σωλῆνες, τὰ κυτία τοῦ βουτύρου, τοῦ γάλακτος, τῶν κονσερβῶν κ.λ.π.

Ὁ κύλινδρος ἔχει *δύο ἐπιπέδους* καὶ *μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν*. Αἱ δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι τοῦ κυλίνδρου, αἱ ὁποῖαι τελειώνουν γύρω - γύρω εἰς καμπύλην γραμμήν, λέγονται βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

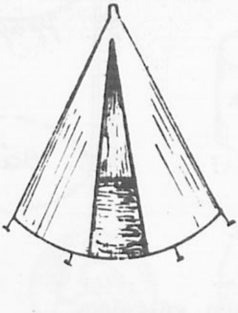
2. **Ἡ συνολικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου**, ἐπειδὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπιπέδους καὶ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, λέγεται μικτὴ ἐπιφάνεια.

Μικτὴν ἐπιφάνειαν λέγομεν ἐκείνην, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα μέρη.

3. Ἡ γραμμὴ εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους βάσεις τοῦ κυλίνδρου, εἶναι καμπύλη γραμμή, διότι κανὲν μέρος αὐτῆς δὲν ἀποτελεῖ εὐθεῖαν.

Ἐπάνω εἰς τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἠμποροῦμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν χάρακα ἢ μίαν τεντωμένην κλωστήν, ἀλλὰ μόνον πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ἀπὸ τῆς μιᾶς βάσεως πρὸς τὴν ἄλλην, καθ' ὃν τρόπον δεικνύει ἡ εἰκών. Ἑπομένως, πρὸς αὐτὴν τὴν κατεύθυνσιν ἠμποροῦμεν νὰ χαράξωμεν εὐθείας γραμμάς. Πρὸς κάθε ἄλλην ὅμως κατεύθυνσιν δὲν ἠμποροῦμεν νὰ χαράξωμεν παρὰ μόνον καμπύλας γραμμάς, διότι ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι καμπύλη.

ΣΤ' Ο ΚΩΝΟΣ



1. Τὰ στερεὰ αὐτὰ σώματα εἶναι **κῶνοι.**

Σχῆμα κώνου ἔχουν ἡ στρογγύλη σκηνὴ τοῦ σχήματος, τὸ μέρος τοῦ μολυβιοῦ, τὸ ὁποῖον ἐξύσαμε μὲ ξυστῆρα.

2. **Ἐπιφάνειαι, γραμμαί, σημεῖα.**

Τὸ ἐπίπεδον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἐπειδὴ χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ τοποθετῆται σταθερὰ ὁ κῶνος, λέγεται *βάσις τοῦ κώνου*.

Ἡ ὑπόλοιπος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ ὁποία λέγεται καὶ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἀρχίζει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης γραμμῆς τῆς βάσεώς του καὶ ὅσον ἀνεβαίνει πρὸς τὰ ἐπάνω, στενεύει γύρω-γύρω καὶ καταλήγει εἰς ἓν μόνον σημεῖον, ἀπέναντι τῆς βάσεως, τὸ ὁποῖον λέγεται *κορυφὴ τοῦ κώνου.*

Ἐπάνω εἰς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἠμποροῦμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν χάρακα ἢ μίαν τεντωμένην κλωστήν, μόνον ὅμως πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρὸς τὴν καμπύλην γραμμὴν τῆς βάσεως, ὁπότε συμπεραίνομεν ὅτι αἱ γραμμαὶ αὗται εἶναι εὐθεῖαι. Πρὸς πᾶσαν ἄλλην κατεύθυνσιν ὁ χάραξ, ἢ ἡ τεντωμένη κλωστὴ δὲν ἐφαρμόζουν, διότι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι καμπύλη.

3. Καὶ ἡ συνολικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἐπειδὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ καμπύλην ἐπιφάνειαν λέγεται **μικτὴ ἐπιφάνεια.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5. Ζωγράφισε ἕνα κύλινδρον καὶ ἕνα κῶνον.

6. Ποῖαι λέγονται βάσεις τοῦ κυλίνδρου καὶ ποία βάσις τοῦ κώνου;

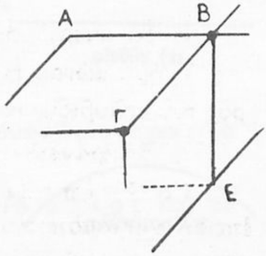
7. Ποίας γραμμὰς ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν ἐπάνω εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου καὶ εἰς ποῖα τμήματα τῆς ἐπιφανείας αὐτῶν;

II. ΣΗΜΕΙΟΝ, ΓΡΑΜΜΑΙ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΑΥΤΩΝ

Α΄. ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ἂν ἀκουμβήσωμεν τὴν μύτην τοῦ μολυβιοῦ μας ἐπάνω εἰς τὸ τετράδιον, ἢ τῆς κιμωλίας ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα, θὰ ἔχωμεν τὴν εἰκόνα ἑνὸς σημείου (.).

Εἰς τὸν κύβον, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὰς πυραμίδας καὶ τὸν κῶνον, *αἱ κορυφαὶ εἶναι σημεῖα.* **Σημεῖον** εἶναι *ἡ θέσις ὅπου συναντῶνται ἢ τέμνονται δύο τοὐλάχιστον* ἀκμαὶ ἢ γραμμαί. Αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ καὶ Ε τοῦ σχήματος εἶναι σημεῖα.



Δηλαδὴ ἡ τομὴ τῶν γραμμῶν ΑΒ καὶ ΓΒ, ΒΕ καὶ ΔΕ εἶναι σημεῖα.

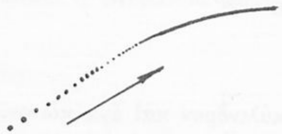
Τὸ σημεῖον εἶναι ἓν πολὺ λεπτὸν στίγμα, *χωρὶς καμμίαν διάστασιν* καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ ἕνα γράμμα. Π.χ. (.Α).

Ἐπίσης ἓν μακρυνὸν ἄστρον εἰς τὸν οὐρανὸν ἢ ἕνας κόκκος σκόνης μᾶς δίδουν τὴν εἰκόνα τοῦ σημείου.

Β΄. ΓΡΑΜΜΑΙ

1. Ἔννοια τῆς Γραμμῆς.

Ἂν μετακινήσωμεν πρὸς μίαν κατεύθυνσιν τὴν μύτην τοῦ μολυβιοῦ ἐπάνω εἰς τὸ τετράδιον, ἢ τῆς κιμωλίας ἐπάνω εἰς τὸν πίνακα,

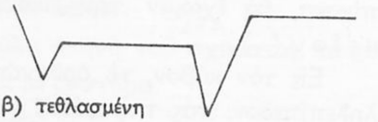


θὰ ἔχωμεν τὴν εἰκόνα μιᾶς γραμμῆς. Ἡ γραμμὴ ἑπομένως εἶναι *μία συνεχὴς σειρὰ θέσεων ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον μετακινεῖται ἐπάνω εἰς μίαν ἐπιφάνειαν ἢ ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον διατρέχει ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κινεῖται.*

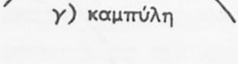
Σχηματίζομεν τὴν εἰκόνα μιᾶς γραμμῆς, ἐὰν πάρωμεν μίαν τρίχα ἢ μίαν κλωστὴν πολὺ λεπτήν, διότι **ἡ γραμμὴ** δὲν ἔχει πάχος· ἔχει μόνον μῆκος. Ἔχει δηλαδὴ *μίαν μόνην διάστασιν* (τὸ μῆκος).

2. Εἴδη γραμμῶν.

α) εὐθεῖα



β) τεθλασμένη



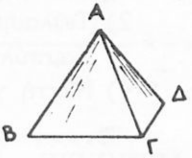
γ) καμπύλη

δ) μικτή

α) **Εὐθεῖα γραμμὴ** λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σχῆμα μιᾶς λεπτῆς καὶ τεντωμένης κλωστῆς.

Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου καὶ τῶν ἄλλων πολυέδρων σωμάτων, διὰ τὰ ὁποῖα ὡμιλήσαμεν ἤδη, εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί.

β) **Τεθλασμένη γραμμὴ** λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας εὐθείας, χωρὶς αὐτὴ νὰ εἶναι εὐθεῖα. Ἡ κλειστὴ γραμμή, π.χ. ἡ ΑΒΓ, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει μία ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς πυραμίδος, εἶναι τεθλασμένη γραμμή. Ἐπίσης ἡ ΑΓΔ.



γ) **Καμπύλη γραμμή.** Σχηματίζομεν τὴν εἰκόνα τῆς καμπύλης γραμμῆς ἀπὸ μίαν λεπτὴν κλωστήν, τὴν ὁποίαν κρατοῦμεν ἀπὸ τὰ ἄκρα της, χωρὶς νὰ τὴν τεντώσωμεν (βλ. εἰκόνα).

Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία δὲν εἶναι εὐθεῖα, οὔτε καὶ κανὲν μέρος αὐτῆς ἀποτελεῖ εὐθεῖαν.

Καμπύλη γραμμὴ εἶναι π.χ. ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας, ἡ κλειστὴ γραμμὴ εἰς τὴν ὁποίαν καταλήγουν αἱ βάσεις ἑνὸς κυλίνδρου ἢ ἑνὸς κώνου κ.ἄ.

δ) **Μικτὴ γραμμὴ** λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθεῖαν καὶ καμπύλην γραμμήν.

III. ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ, ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΩΝ

1. Εἴπομεν ὅτι **αἱ γραμμαὶ** ἔχουν **μίαν μόνην διάστασιν**: Τὸ μῆκος.

2. **Αἱ ἐπιφάνειαι** ἔχουν **δύο διαστάσεις**: Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος.

3. **Τὰ σώματα**, ἐκτεινόμενα πρὸς τρεῖς διευθύνσεις, ἔχουν

τρεῖς διαστάσεις: Τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος. (Τὸ πλάτος λέγεται ἐνίοτε καὶ πάχος, τὸ δὲ ὕψος καὶ βάθος).

Εἴδη γραμμῶν	**Εἴδη ἐπιφανειῶν**
1) Εὐθεῖα γραμμὴ	1) Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια
2) Τεθλασμένη γραμμὴ	2) Τεθλασμένη ἐπιφάνεια
3) Καμπύλη γραμμὴ	3) Καμπύλη ἐπιφάνεια
4) Μικτὴ γραμμὴ	4) Μικτὴ ἐπιφάνεια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

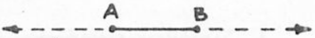
8. α) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.
   β) Τί λέγεται τεθλασμένη γραμμή;
   γ) Τί λέγεται μικτὴ γραμμή;
   δ) Τί λέγεται καμπύλη γραμμή;
   ε) Τί γραμμὴν σχηματίζει κάθε ἓν ἀπὸ τὰ γράμματα Ι Ν Ο Ω Ρ;
9. α) Τί εἴδους ἐπιφάνειαν ἔχει ἓν φύλλον χάρτου ἀπὸ τὸ τετράδιόν σας;
   β) Τί εἴδους ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ κουτὶ μὲ τὰς κιμωλίας;
   γ) Τί εἴδους ἐπιφάνειαν ἔχουν οἱ βῶλοι μὲ τοὺς ὁποίους παίζετε;
   δ) Τί εἴδους ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ κλιμακοστάσιον τῆς οἰκίας σας;
   ε) Τί εἴδους ἐπιφάνειαν ἔχει τὸ κουτὶ τοῦ γάλακτος;
10. Ζωγραφίσατε πράγματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν καμπύλην, τεθλασμένην καὶ μικτὴν ἐπιφάνειαν.

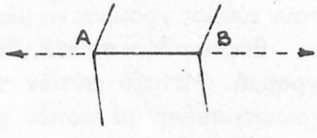
IV. ΕΥΘΕΙΑ, ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ, ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΤΜΗΜΑ, ΧΑΡΑΞΙΣ, ΜΕΤΡΗΣΙΣ

Α'. ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ – ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΤΜΗΜΑ

1. **Εὐθεῖα γραμμή.** Εἴπομεν ὅτι σχηματίζομεν τὴν εἰκόνα μιᾶς εὐθείας γραμμῆς (ΑΒ) ἀπὸ μίαν λεπτὴν τεντωμένην κλωστήν, ἀπὸ τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου, ἀπὸ δύο τοίχους, οἱ ὁποῖοι ἑνώνονται κ.λ.π.

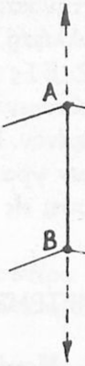
Δυνάμεθα ὅμως νὰ προεκτείνωμεν ὅσον θέλομεν μέρος τῆς εὐθείας γραμμῆς πολὺ πέραν τοῦ σημείου Α, ἢ τοῦ σημείου Β, δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ἀπὸ Β πρὸς Α καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ἀπὸ Α πρὸς Β ἀπεριορίστως. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι **ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἀπεριόριστος**.





2. **Εὐθύγραμμον τμῆμα.** Αὐτὰ τὰ ὁποῖα βλέπομεν εἰς τὰς ἐπιφανείας τῶν σωμάτων, εἰς τὸν χάρακα καὶ εἰς τὰ σχήματα τοῦ βιβλίου δὲν εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί, ἀφοῦ δὲν εἶναι ἀπεριόριστοι, ἀλλὰ μέρη ἢ τμήματα εὐθειῶν γραμμῶν. Δι' αὐτὸ τὰ ὀνομάζομεν **εὐθύγραμμα τμήματα.**

Αἱ γραμμαὶ ΑΒ εἰς τὰ ἀνωτέρω σχήματα εἶναι *εὐθύγραμμα τμήματα*, δηλαδὴ μέρη εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται βεβαίως ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἀλλὰ προεκτείνονται καὶ πέραν αὐτῶν, ἀπεριορίστως.



Β'. ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Ἐπάνω εἰς ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Ο. Τότε ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, χωρίζεται εἰς δύο μέρη : Τὸ ΟΑ καὶ τὸ ΟΒ. Κάθε ἓν ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ μέρη ἔχει ἓν σταθερὸν ἄκρον, τὸ Ο, ἐνῷ δύναται νὰ προεκταθῇ πρὸς τὸ ἄλλο ἄκρον, ὅσον θέλομεν. Δι' αὐτὸ ὀνομάζομεν τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ **ἡμιευθείας**.

ΑΣΚΗΣΙΣ

11. α) Νὰ γράψῃς ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα. β) Νὰ σχηματίσῃς δύο ἡμιευθείας ἐπάνω εἰς ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα.

Γ'. ΧΑΡΑΞΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

1. Συνήθως χαράσσομεν εὐθείας γραμμὰς *μὲ τὸν κανόνα ἢ τὸν χάρακα*. Οἱ τεχνῖται, ἐλαιοχρωματισταί, μαραγκοὶ κ.λ.π. χαράσσουν εὐθείας γραμμὰς εἰς μίαν σανίδα κ.λ.π. ὡς ἑξῆς :

Βάζουν δύο σημεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θέλουν νὰ περάσῃ ἡ εὐθεῖα γραμμή. Μεταξὺ αὐτῶν τῶν σημείων τεντώνουν μίαν κλωστήν, χρωματισμένην μὲ νωπὸν χρῶμα. Ἀνασηκώνουν εἰς τὴν μέσην τὴν κλωστὴν καὶ τὴν ἀφήνουν νὰ πέσῃ ἀποτόμως. Τὸ χρῶμα, τὸ ὁποῖον θὰ κολλήσῃ, σχηματίζει εὐθεῖαν γραμμήν.

2. Εἰς τὸ ἔδαφος χαράσσομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς ἑξῆς : Καρφώνομεν εἰς δύο σημεῖα δύο πασσάλους. Ἐκεῖ δένομεν ἓν νῆμα καλὰ τεντωμένον. Κατόπιν μὲ τὴν μύτην ἑνὸς ξυλίνου ἢ σιδηροῦ πασσάλου σύρομεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τοῦ νήματος. Ἡ μύτη τοῦ πασσάλου χαράσσει εἰς τὸ ἔδαφος εὐθεῖαν γραμμήν.

Δ'. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

1. **Μονὰς μετρήσεως.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἓν γνωστὸν καὶ ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν καὶ θεωροῦμεν ὡς μονάδα.

Ὅταν γίνῃ ἡ σύγκρισις, εὑρίσκομεν ἕνα συγκεκριμένον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν τμῆμα. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται *μῆκος* τοῦ *εὐθυγράμμου τμήματος*.

2. **Μονάδες μήκους.**

Βασικὴ μονὰς μήκους εἶναι τὸ Γαλλικὸν μέτρον (μ.).

α) **Ἓν μέτρον** ἔχει *10 παλάμας*.

Ἡ παλάμη, ἢ δέκατον τοῦ μέτρου, γράφεται : 0,1 μ.

β) **Μία παλάμη** ἔχει *10 δακτύλους* ἢ πόντους. **Ἓν μέτρον** ἐπομένως ἔχει *100 δακτύλους* ἢ *100 πόντους*.

Ὁ δάκτυλος, ἢ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου, γράφεται : 0,01 μ.

γ) **Κάθε δάκτυλος** ἔχει *10 γραμμάς*. Ἓν μέτρον ἐπομένως ἔχει 1000 γραμμάς. Ἡ γραμμή, ἢ χιλιοστὸν τοῦ μέτρου, γράφεται : 0,001 μ.

δ) **Τὰ 1000 μέτρα** λέγονται *χιλιόμετρον* καὶ γράφονται : Χμ.

ε) **Τὰ 10 μέτρα** λέγονται *δεκάμετρον* καὶ γράφονται : Δμ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Νὰ εὔρετε:

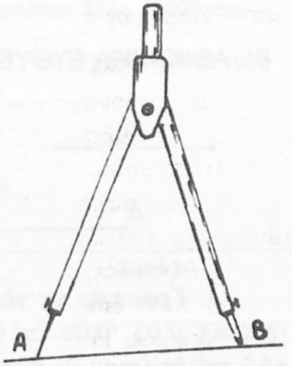
α) Πόσας παλάμας ἔχουν τὰ 8 μ;
β) Πόσας γραμμὰς ἔχουν τὰ 9 μ;
γ) Πόσας παλάμας ἀποτελοῦν τὰ 600 ἑκατοστόμετρα:

V. ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ, ΑΘΡΟΙΣΜΑ - ΔΙΑΦΟΡΑ

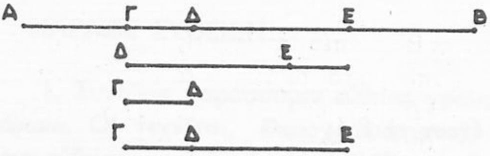
Α΄. ΠΩΣ ΔΥΝΑΜΕΘΑ ΝΑ ΣΥΓΚΡΙΝΩΜΕΝ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

1. **Ὅταν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν** δύο ἢ περισσότερα εὐθύγραμμα τμήματα, ἂν εἶναι ἴσα, ἢ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον τὸ μικρότερον, χρησιμοποιοῦμεν τὸν *διαβήτην*.

Ὁ διαβήτης εἶναι ὄργανον ξύλινον ἢ μεταλλικόν. Ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο πόδια ἢ σκέλη. Τὰ δύο ἄκρα του συνδέονται πρὸς τὰ ἐπάνω μὲ μίαν βίδα. Μὲ τὴν βίδα αὐτὴν σταθεροποιοῦμεν, ἢ ἀφήνομεν χαλαρώτερα τὰ δύο σκέλη τοῦ διαβήτου, ὥστε νὰ πλησιάζουν ἢ νὰ ἀπομακρύνωνται τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο, δηλαδὴ τὸ ἄνοιγμά των νὰ γίνεται μικρότερον ἢ μεγαλύτερον. Εἰς τὸ κάτω μέρος, τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου καταλήγει εἰς αἰχμὴν τὸ δὲ ἄλλο εἰς μίαν ὑποδοχήν, ὅπου στερεώνεται τὸ μολύβι ἢ ἡ κιμωλία. Τὸ ἄνοιγμα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου μᾶς δίδει τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Α, τῆς μύτης τοῦ διαβήτου, ἀπὸ τὸ σημεῖον Β, τῆς μύτης τοῦ μολυβιοῦ ἢ τῆς κιμωλίας, δηλαδὴ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



Σχῆμα Διαβήτου



Γράφομεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα *ΓΔ* καὶ *ΔΕ*. Μὲ τὸν διαβήτην εὑρίσκομεν ὅτι τὸ τμῆμα *ΔΕ* εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΓΔ *(ΔΕ>ΓΔ)*. Ἐπίσης ὅτι τὸ τμῆμα *ΓΕ* εἶναι μεγαλύτερον τοῦ *ΔΕ (ΓΕ>ΔΕ)*.

2. **Μέτρησις.** Ἐάν, ὅπως ἔχομεν τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου μας ἐπάνω ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα *ΓΔ* ἢ *ΔΕ*, ἀκουμβήσωμεν τὴν μύτην τοῦ διαβήτου μας εἰς τὸ 0 (μηδὲν) ἑνὸς μέτρου ἢ ἑνὸς ἠριθμημένου χάρακος, ἡ ἄλλη μύτη τοῦ μολυβιοῦ του, ἡ ὁποία θὰ πέσῃ ἐπάνω εἴς τινα ἀριθμὸν τοῦ μέτρου ἢ τοῦ χάρακος, θὰ μᾶς δείξῃ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος *ΓΔ* ἢ *ΔΕ* εἰς ἑκατοστὰ ἢ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου.

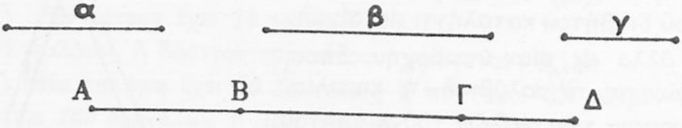
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13. Νὰ γράψετε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ἄλλο εὐθύγραμμον ΒΔ ἴσον μὲ τὸ ΑΒ.

14. Νὰ γράψετε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ μεγαλύτερον ἀπὸ ἓν ἄλλο τμῆμα *ΓΔ*.

15. Νὰ γράψετε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους 0,05 μ. καὶ νὰ λάβετε εἰς αὐτὸ τμῆμα ΒΓ= 0,02 μ. καὶ ΓΔ= 0,01 μ.

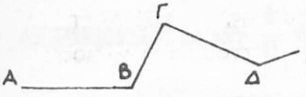
Β'. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ



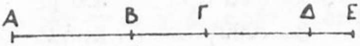
1. Γράφομεν εἰς τὸν πίνακα τρία εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ, μήκους 0,03, 0,04 καὶ 0,02 μ. ἕκαστον. Γράφομεν ἀκόμη μίαν εὐθεῖαν ΑΔ καὶ ὁρίζομεν εἰς αὐτὴν τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, συνεχόμενα, ὥστε τὸ σημεῖον Β τοῦ τμήματος ΑΒ νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ Β τοῦ τμήματος

ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Γ τοῦ τμήματος ΒΓ νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ Γ τοῦ τμήματος ΓΔ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀπὸ τὸ ΑΒ = α, δηλ. 0,03 μ., τὸ ΒΓ = β, δηλ. 0,04 μ. καὶ τὸ ΓΔ = γ, δηλ. 0,02 μ., ἐσχηματίσθη τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ = 0,09 μ. Λέγομεν λοιπὸν ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ = 0,09 μ. εἶναι ἄθροισμα τῶν τμημάτων $\alpha + \beta + \gamma$ $(0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}02 = 0{,}09)$.

2. **Ἄθροισμα πλευρῶν τεθλασμένης.** Τοῦτο θὰ πρέπει νὰ εἶναι ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ, δηλαδὴ τὸ ἴσον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΕ. Τὸ ἄθροισμα *τῶν πλευρῶν μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς* λέγεται *περίμετρος αὐτῆς*.



Τεθλασμένη



Ἄθροισμα

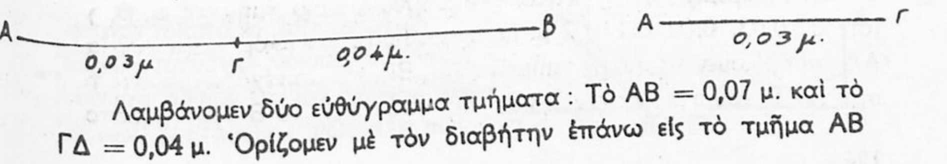
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Νὰ γράψετε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα α = 0,01 μ., ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα β = 0,01 μ. καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

17. Νὰ γράψετε μίαν τεθλασμένην μὲ 3 πλευράς. Ἡ πρώτη πλευρὰ νὰ εἶναι 0,01 μ., ἡ δευτέρα 0,02 μ. καὶ ἡ τρίτη 0,03 μ. Ἔπειτα νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης.

18. Νὰ γράψετε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα α, κατόπιν ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα β, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ α καὶ νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμά του.

Γ'. ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ



Λαμβάνομεν δύο εὐθύγραμμα τμήματα: Τὸ ΑΒ = 0,07 μ. καὶ τὸ ΓΔ = 0,04 μ. Ὁρίζομεν μὲ τὸν διαβήτην ἐπάνω εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρὸς ΓΔ, τὸ ΓΒ. Τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα ΑΓ, τὸ ὁποῖον μένει, εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ΑΒ – ΓΔ καὶ ἔχει μῆκος 0,03 μ. (0,07 – 0,04 = 0,03 μ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

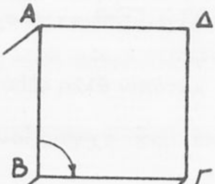
19. Νὰ γράψετε δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα $\alpha = 0{,}01$ μ. καὶ $\beta = 0{,}03$ μ. καὶ νὰ σχηματίσετε τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

20. Νὰ γράψετε μίαν τεθλασμένην γραμμὴν μὲ 3 πλευράς. Ἡ β νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν α καὶ ἡ γ διπλασία τῆς β. Κατόπιν νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμά της.

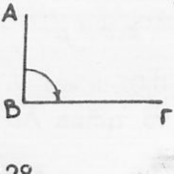
21. Μία τεθλασμένη ἔχει 4 πλευράς: Ἡ α ἔχει μῆκος 0,45 μ., ἡ β τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς α, ἡ γ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς α καὶ ἡ δ τὸ $\frac{1}{9}$ τῆς α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου αὐτῆς.

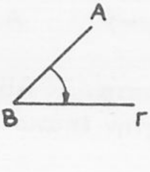
VI. ΓΩΝΙΑΙ — ΕΥΘΕΙΑΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΑΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

1. **Γωνίαι.** Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου, τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τῆς πυραμίδος εἶναι, ὅπως εἴπομεν, πλευραὶ τῶν ἑδρῶν του καὶ πλευραὶ μιᾶς κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς. Αἱ πλευραὶ αὐταὶ ἀρχίζουν ἀνὰ δύο ἀπὸ μίαν κορυφήν, δὲν συμπίπτουν, δηλαδὴ δὲν εἶναι τμήματα τῆς ἰδίας εὐθείας καὶ σχηματίζουν ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας γωνίαν. (Τὴν ΑΒΓ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΓ κ.ο.κ.)



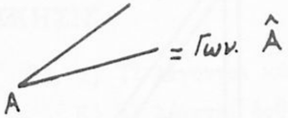
Γωνία λέγεται *τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἡμιευθείας, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ ἓν σημεῖον.*

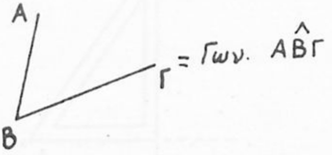




Αἱ ἡμιευθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν γωνίαν, λέγονται *πλευραὶ τῆς γωνίας* καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν, *κορυφὴ τῆς γωνίας.*

Εἰς ἑκάστην γωνίαν γράφομεν ἓν γράμμα εἰς τὴν κορυφήν της καὶ ὀνομάζομεν τὴν γωνίαν μὲ τὸ γράμμα αὐτὸ (Γων $\widehat{A}$) ἢ γράφομεν τρία γράμματα : ἓν εἰς τὴν κορυφήν της, ἓν εἰς τὴν μίαν πλευράν της καὶ τὸ τρίτον εἰς τὴν ἄλλην πλευράν της (γων. $A\widehat{B}\Gamma$). Πρέπει ὅμως νὰ διαβάζωμεν πάντοτε εἰς τὴν μέσην τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς.



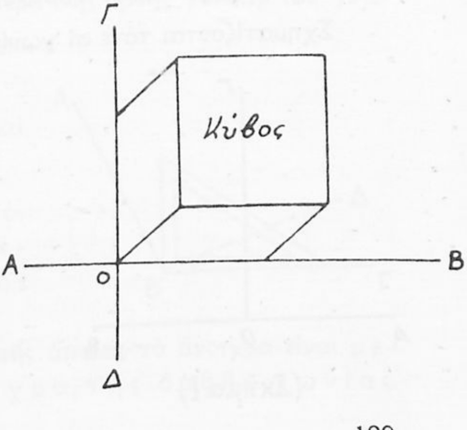


ΑΣΚΗΣΙΣ

22. α) Τί λέγεται γωνία;

β) Νὰ σχηματίσετε μίαν γωνίαν καὶ νὰ ὀνομάσετε αὐτὴν μὲ ὅλους τοὺς τρόπους.

2. **Κάθετοι εὐθεῖαι.** Θέτομεν τὴν ἕδραν ἑνὸς κύβου ἐπάνω εἰς τὸ τετράδιον ἢ εἰς τὸν πίνακα καὶ γράφομεν τὸ μῆκος δύο τεμνομένων πλευρῶν τῆς ἕδρας αὐτῆς. Κατόπιν βγάζομεν τὸν κύβον καὶ προεκτείνομεν τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἐγράψαμεν, πέραν ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, ὅπου συναντῶνται αἱ πλευραὶ τῆς ἕδρας. Βλέπομεν ὅτι σχηματίζονται 4 γωνίαι.

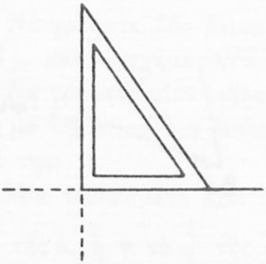


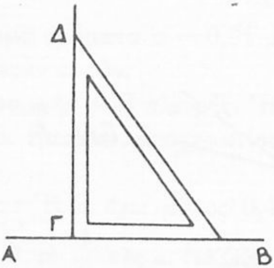
Ἐὰν βάλωμεν μίαν ὁποιανδήποτε γωνίαν μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου ἐπάνω εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας $A\widehat{O}\Gamma$, $\Gamma\widehat{O}B$, $B\widehat{O}\Delta$ καὶ $\Delta\widehat{O}A$, αἱ ὁποῖαι ἐσχηματίσθησαν, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ γωνία αὕτη τοῦ κύβου ἐφαρμόζει καὶ εἰς τὰς 4 γωνίας. Εἶναι λοιπὸν καὶ αἱ 4 γωνίαι *ἴσαι*. Αἱ εὐθεῖαι, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐσχηματίσθησαν αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι, λέγονται *κάθετοι εὐθεῖαι*.

Δύο εὐθεῖαι λέγονται κάθετοι, ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, ὅταν τέμνωνται, εἶναι ἴσαι.

Αἱ κάθετοι εὐθεῖαι σχηματίζουν τὸ σχῆμα τοῦ σταυροῦ (+).

Πῶς γράφομεν καθέτους εὐθείας.



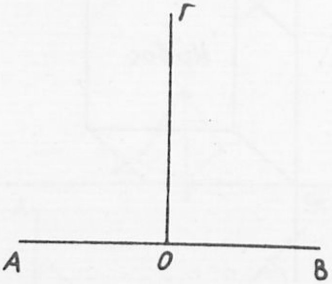


Διὰ νὰ γράψωμεν καθέτους εὐθείας, χρησιμοποιοῦμεν τὸν γνώμονα. Ὁ γνώμων εἶναι ἓν ὄργανον ξύλινον, μεταλλικὸν ἢ πλαστικόν, σχήματος τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο πλευρὰς καθέτους.

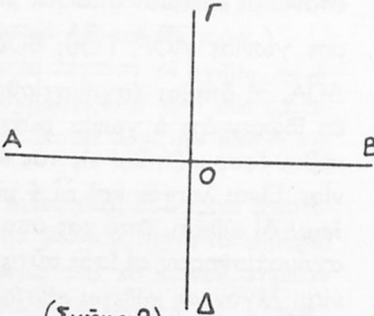
Βάζομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὴν δὲ ἄλλην κάθετον πλευράν του νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ, ὅπου θέλομεν νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον. Μὲ τὸ μολύβι γράφομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον γράφομεν καθέτους εὐθείας.

3. **Ὀρθὴ γωνία.** Λαμβάνομεν τὴν ΓΟ κάθετον εἰς τὴν ΑΒ.

Σχηματίζονται τότε αἱ γωνίαι $A\hat{O}\Gamma$ καὶ $\Gamma\hat{O}B$. Κάθε μία ἀπὸ τὰς



(Σχῆμα 1)



(Σχῆμα 2)

γωνίας ΑΟ̂Γ καὶ ΓΟ̂Β τοῦ σχήματος 1, καθὼς καὶ ἀπὸ τὰς 4 γωνίας ΑΟ̂Δ, ΔΟ̂Β, ΒΟ̂Γ καὶ ΓΟ̂Α τοῦ σχήματος 2, λέγεται *ὀρθὴ γωνία*.

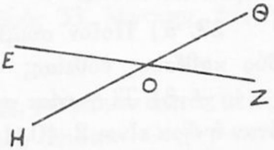
Μία γωνία λέγεται ὀρθή, ἐὰν αἱ πλευραί της εἶναι κάθετοι.

Ὅλαι αἱ γωνίαι τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθαί.

ΑΣΚΗΣΙΣ

23. α) Τί λέγονται κάθετοι εὐθεῖαι;
    β) Τί λέγεται ὀρθὴ γωνία;

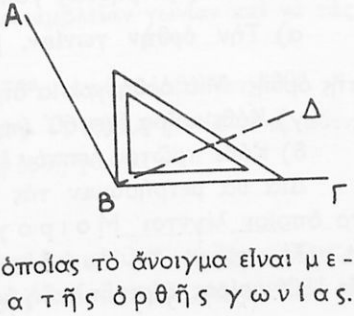
4. **Πλάγιαι εὐθεῖαι.** Λαμβάνομεν τὰς εὐθείας ΕΖ καὶ ΗΘ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΕΟ̂Η, ΗΟ̂Ζ, ΖΟ̂Θ καὶ ΘΟ̂Ε δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ λέγονται **πλάγιαι.**



Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἐὰν αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, ὅταν τέμνωνται, δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

5. **Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία.** Εἰς τὸ ἑπόμενον σχῆμα βλέπομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΒ̂Γ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος, ἐνῶ ἡ γωνία ΓΒ̂Δ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς.

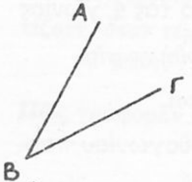
Ἡ γωνία ΓΒ̂Δ λέγεται ὀξεῖα καὶ ἡ γωνία ΑΒ̂Γ λέγεται ἀμβλεῖα.



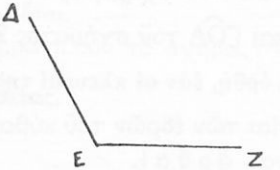
Ὀξεῖα γωνία εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἀμβλεῖα γωνία εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς γωνίας.

$A\hat{B}\Gamma$ = Ὀξεῖα
$\Delta\hat{E}Z$ = Αμβλεῖ



Ὀξεῖα γωνία



Ἀμβλεῖα γωνία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24. α) Τί λέγονται πλάγιαι εὐθεῖαι;

β) Σχηματίσατε δύο καθέτους εὐθείας καὶ ὀνομάσατε τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται.

25. Τί εἴδους γωνίας βλέπετε εἰς τὰ κεφαλαῖα γράμματα Δ, Ν, Ζ, Γ καὶ Υ;

26. Γράψατε μίαν ὀρθήν, μία ὀξεῖαν καὶ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν καὶ ὀνομάσατε αὐτάς.

27. α) Ποῖον σύμβολον εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν σχηματίζεται ἀπὸ δύο καθέτους εὐθείας;

β) Τί γωνίαι σχηματίζονται ἀπὸ τοὺς δείκτας τοῦ ὡρολογίου, ὅταν ἡ ὥρα εἶναι 2, 10, 11;

γ) Τί γωνίαι σχηματίζονται ἀπὸ τοὺς δείκτας τοῦ ὡρολογίου, ὅταν ἡ ὥρα εἶναι 3, 9 καὶ 5;

6. **Μέτρησις γωνιῶν**. Τὰς γωνίας τὰς μετρῶμεν ἀπὸ τὸ ἄνοιγμά των. Μονάδας μετρήσεως γωνιῶν ἔχομεν:

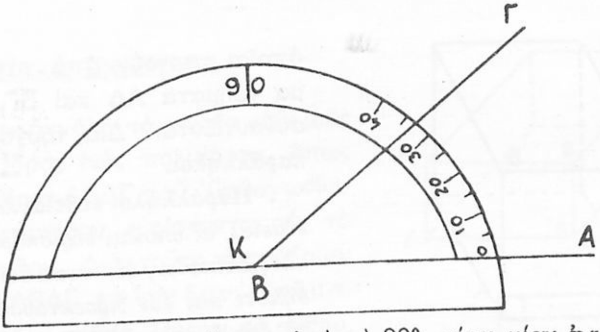
α) Τὴν **ὀρθὴν γωνίαν.** β) Τὴν **μοῖραν,** ἡ ὁποία εἶναι τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς. Μία ὀρθὴ γωνία δηλαδὴ ἔχει 90 μοίρας καὶ γράφεται: 90^0.

γ) Κάθε μοῖρα ἔχει 60′ (πρῶτα λεπτά).

δ) Κάθε πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60″ (δεύτερα λεπτά).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰς γωνίας, μεταχειριζόμεθα ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται Μοιρογνωμόνιον.

Τὸ τόξον τοῦ ἡμικυλίου τοῦ μοιρογνωμονίου εἶναι διῃρημένον εἰς 180^0 μοίρας, φέρει δηλαδὴ ἀρίθμησιν ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0. Εἰς τὸ κάτω



μέρος του καὶ ἀκριβῶς ἀπέναντι ἀπὸ τὸ 90^0, φέρει μίαν ἐγκοπὴν μὲ τὸ σημεῖον Κ.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν $\widehat{ΑΒΓ}$, βάζομεν τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπάνω εἰς τὴν γωνίαν, οὕτως ὥστε τὸ σημεῖον Κ αὐτοῦ νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν κορυφὴν Β τῆς γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ ἡ μία πλευρά, ἔστω ἡ ΑΒ τῆς γωνίας μας, νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπάνω εἰς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Κ0 τοῦ μοιρογνωμονίου. Παρατηροῦμεν τότε ἀπὸ ποίαν ὑποδιαίρεσιν τοῦ μοιρογνωμονίου διέρχεται ἡ ἄλλη πλευρὰ ΒΓ τῆς γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$. Ἐὰν εὕρωμεν π.χ. ὅτι ἐκεῖ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 33, λέγομεν, ὅτι ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ εἶναι 33^0 μοιρῶν.

Ὅταν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν δύο γωνίας, μετρῶμεν αὐτὰς μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ εὑρίσκομεν ἐὰν εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι.

Τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν των.

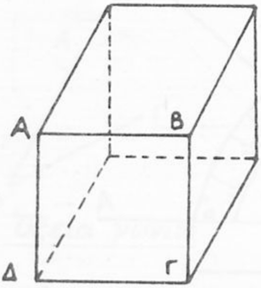
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

28. Νὰ γράψῃς μίαν ὀξεῖαν καὶ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν καὶ νὰ τὰς μετρήσῃς.

29. Νὰ γράψῃς μίαν ὀξεῖαν γωνίαν 70^0 καὶ μίαν ἀμβλεῖαν 120^0.

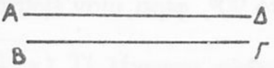
30. Νὰ σχηματίσῃς μίαν γωνίαν 70^0. Τί εἴδους γωνία εἶναι αὐτη καὶ πόσαι μοῖραι τῆς λείπουν διὰ νὰ γίνῃ ὀρθὴ γωνία;

7. **Παράλληλοι εὐθεῖαι.** Αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ τοῦ κύβου εἶναι κάθετοι εἰς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ



ὁποῖαι περνοῦν ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΔ καὶ ΒΓ, οὐδέποτε συναντῶνται. Διὰ τοῦτο λέγονται **παράλληλοι.**

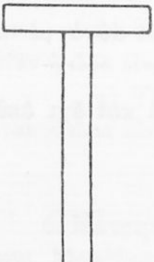
Παράλληλοι εὐθεῖαι *λέγονται δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι, εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δὲν συναντῶνται,(ὁσονδήποτε καὶ ἐὰν προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα των)·*

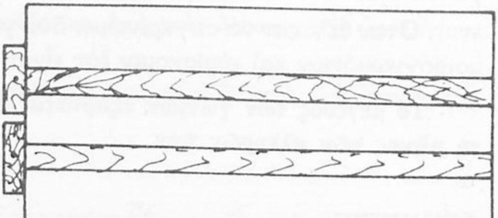


Αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ π.χ. τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ Ὀρθογωνίου Παραλληλεπιπέδου εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

Παράδειγμα παραλλήλων εὐθειῶν μᾶς δίδουν αἱ γραμμαὶ τῶν χαρακωμένων σελίδων τῶν τετραδίων, αἱ σιδηροδρομικαὶ γραμμαὶ (ὄχι εἰς τὰς στροφὰς) κ.λ.π.

Διὰ νὰ γράψωμεν παραλλήλους εὐθείας, χρησιμοποιοῦμεν ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο καθέτους χάρακας, ἕνα μικρὸν καὶ ἕνα μεγάλον εἰς σχῆμα Τ, διὰ τοῦτο καὶ ὀνομάζεται Ταῦ.



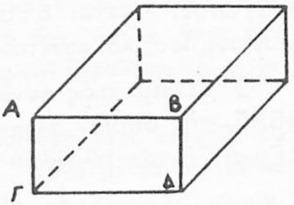


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

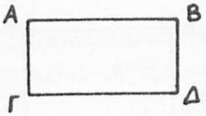
31. Νὰ γράψῃς δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ νὰ ὀνομάσῃς αὐτάς.

32. Νὰ σχεδιάσετε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ νὰ ὀνομάσετε δύο παραλλήλους ἀκμὰς αὐτοῦ.

VII. ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ



Εἴδομεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς ἕδρας ἑνὸς πολυέδρου, ὅπως π.χ. τῆς ἕδρας ΑΒΔΓ τοῦ Ὀρθογωνίου Παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Διὰ τοῦτο ὀνομάζομεν τὴν ἕδραν ΑΒΔΓ ἐπίπεδον σχῆμα.



Ἐπίπεδον σχῆμα *λέγεται τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται εἰς τό αὐτὸ ἐπίπεδον.*

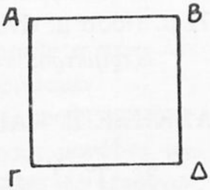
Ἡ γραμμή, ἡ ὁποία περικλείει τὸ ἐπίπεδον σχῆμα λέγεται *περίμετρος τοῦ ἐπιπέδου σχήματος.*

ΑΣΚΗΣΙΣ

33. Ποῦ παρατηρεῖτε ἐπίπεδα σχήματα;

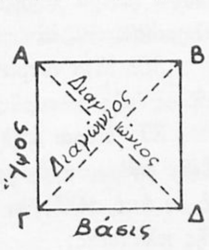
Α΄. ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ

1. **Ἔννοια.** Ἐμάθομεν ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι. Ἐπομένως καὶ ὅλαι αἱ ἀκμαί του εἶναι ἴσαι. Ἐμάθομεν ἐπίσης ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι ἑκάστης ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραί της παράλληλοι. Ἐὰν λοιπὸν πάρωμεν μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας ἑνὸς κύβου, θὰ ἔχωμεν ἓν ἐπίπεδον σχῆμα ὅπως τὸ ΑΒΔΓ τῆς εἰκόνος. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται τετράγωνον.



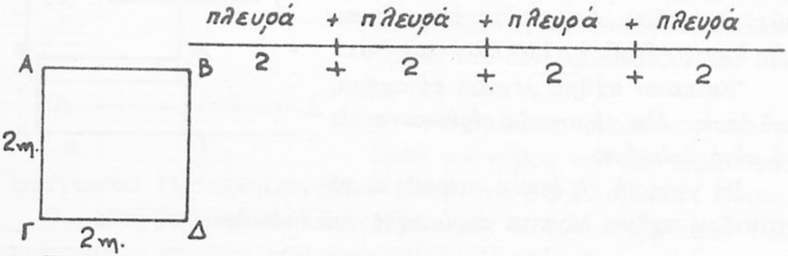
Τετράγωνον λέγεται τὸ τετράπλευρον (ἐπίπεδος ἐπιφάνεια), τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

2. **Στοιχεῖα.** Ἀπὸ τὰς δύο συνεχομένας (τεμνομένας) πλευρὰς ἑκάστου τετραγώνου τὴν μίαν ὀνομάζομεν βάσιν καὶ τὴν ἄλλην ὕψος. Τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ τετραγώνου ὀνομάζομεν **διαστάσεις** αὐτοῦ. Εἰς τὸ τετράγωνον αἱ διαστάσεις (βάσις καὶ ὕψος) εἶναι ἴσαι. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς τοῦ τε-



τραγώνου, λέγεται διαγώνιος. Τὸ τετράγωνον ἔχει δύο διαγωνίους, ἴσας καὶ καθέτους μεταξύ των.

3. **Περίμετρος τετραγώνου.** Ἡ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΔΓ, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ καὶ ΓΑ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ.



Παράδειγμα 1ον : Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 2 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

Λύσις : Πλευρὰ τετρ. = 2 μ. $\boxed{\textit{περίμετρος} = \textit{πλ.} \times 4}$

Θὰ πολλαπλασιάσω τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς 2 μ. ἐπὶ 4, διότι τὸ τετράγωνον ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας. 2 × 4 = 8 μ.

Παράδειγμα 2ον : Ἡ περίμετρος μιᾶς τετραγωνικῆς αὐλῆς εἶναι 72 μ. Πόσα μ. εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ;

Περίμετρος = 72 μ. Πλευρὰ = 72 : 4 = 18 μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

34. Τί λέγεται τετράγωνον; Τί λέγεται περίμετρος αὐτοῦ καὶ πῶς εὑρίσκομεν αὐτήν;

35. Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα τετραγώνου μὲ πλευρὰν 15,60 μ. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα θὰ χρειασθῶμεν καὶ πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσωμεν, ἐὰν τὸ μέτρον τὸ συρματόπλεγμα τιμᾶται 18 δραχμάς;

36. Μία τετραγωνικὴ αὐλὴ ἔχει περίμετρον 18,40 μ. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς της;

37. Γύρω ἀπὸ μίαν τετραγωνικὴν πλατεῖαν, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 49 μ., πρόκειται νὰ φυτευθοῦν δένδρα εἰς ἀπόστασιν 5,6 μέτρων τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσα δένδρα θὰ φυτευθοῦν εἰς ὅλην τὴν περίμετρον τῆς πλατείας;

38. Ἔχει τις ἀγρὸν σχήματος τετραγώνου καὶ ἔσκαψε γύρω - γύρω ἕναν αὔλακα. Ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον μέτρον 8 δρχ. καὶ δι' ὅλον τὸν ἀγρὸν 3.000 δρχ. Πόσα μέτρα ἦτο ἡ περίμετρος τοῦ ἀγροῦ του καὶ πόσα ἑκάστη πλευρά του;

39. Θέλομεν νὰ περιφράξωμεν ἕνα κῆπον, σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰν 19,20 μ., μὲ τρεῖς σειρὰς σύρμα. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθῶμεν καὶ πόσας δραχμὰς θὰ στοιχίσῃ, ἐὰν τὸ μέτρον τοῦ σύρματος τιμᾶται 12 δραχμάς;

40. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου τραπεζομανδήλου, εἰς τὸ ὁποῖον μία νοικοκυρά, διὰ νὰ τοῦ βάλῃ γύρω - γύρω δαντέλλαν, ἠγόρασεν 6 μέτρα;

41. Σχηματίσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας δύο τετράγωνα, τὸ ἓν μὲ πλευρὰν 0,04 μ. καὶ τὸ ἕτερον μὲ πλευρὰν μίαν παλάμην.

4. Ἐμβαδόν

α) **Γενικά.** Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν, π.χ. τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου, ἓν οἰκόπεδον, ἓν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἐσχεδιάσαμεν εἰς τὸ τετράδιόν μας, ἔχομεν μίαν ἄλλην, ὡρισμένην ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα, καὶ συγκρίνομεν πρὸς αὐτὴν τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ μετρήσωμεν. Μὲ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ μέρη τῆς μονάδος ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια αὐτή.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν αὐτήν, λέγεται ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν ἐμετρήσαμεν.

β) **Μονάδες ἐπιφανείας :** Οἱ ἄνθρωποι, διὰ νὰ μετροῦν τὰς διαφόρους ἐπιφανείας, χρησιμοποιοῦν συνήθως διαφόρους μονάδας μετρήσεως. Βασικὴ μονὰς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον,** τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου, μὲ πλευρὰν ἴσην μὲ ἓν μέτρον (Γαλλικόν). Ὅπως ἐμάθομεν εἰς τοὺς συμμιγεῖς, 1 τ.μ. ἔχει 100 τ. παλάμας, 1 τ.π. ἔχει 100 τ. δακτύλους, 1 τ.δ. ἔχει 100 τ. γραμμάς. Οὕτω: 1 τ.μ. = 100 τ.π. = 10.000 τ.δ. = 1.000.000 τ.γ.

Καὶ 1 τ.π. = 0,01 τ.μ.
1 τ.δ. = 0,01 τ.π. = 0,0001 τ.μ.
1 τ.γ. = 0,01 τ.δ. = 0,0001 τ.π. = 0,000001 τ.μ.

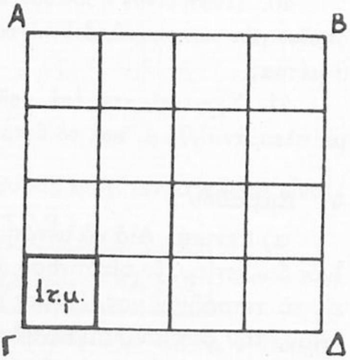
Οὕτω, διὰ νὰ τρέψωμεν μίαν μονάδα ἐπιφανείας εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ 100.

Διὰ νὰ τρέψωμεν μονάδας ἐπιφανείας εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, διαιροῦμεν διὰ 100.

Διὰ μεγαλυτέρας ἐπιφανείας χρησιμοποιοῦμεν τὸ **τετρ. χιλιόμετρον** (1 τετραγ. χιλμ. = 1.000.000 τ.μ.).

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν χρησιμοποιοῦμεν τὸ **στρέμμα**, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τ.μ.

γ) **Ἐμβαδὸν τετραγώνου :** Ἔχομεν τὸ τετράγωνον ΑΒΔΓ. Μετροῦμεν τὰς διαστάσεις του καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ΑΓ (τὸ ὕψος) = 4 μ., ἄρα καὶ ΓΔ (ἡ βάσις) = 4 μ.



Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι βάσις καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι ὕψος, εἰς 4 ἴσα μέρη, ὥστε ἕκαστον μέρος νὰ ἔχῃ μῆκος 1 μέτρον καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς κάθε πλευρᾶς φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον διῃρέθη εἰς 16 μικρότερα καὶ ἴσα τετράγωνα. Τὰ τετράγωνα αὐτὰ ἔχουν ἕκαστον πλευρὰν 1 μ., δηλ. ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν (1 τ.μ. = 1 μ. × 1 μ.). Ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΑΒΔΓ εἶναι 16 τ.μ., δηλαδὴ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως (4 μ.) ἐπὶ τὸ ὕψος (4 μ.). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ τετράγωνα ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι ἴσα, λέγομεν ὅτι : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.*

Ἐμβ. τετρ. = πλευρὰ x πλευρὰν

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

42. Τετραγωνικὴ αὐλὴ ἔχει πλευρὰν 5,60 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

43. Ἀγρὸς τετραγωνικὸς ἔχει περίμετρον 67,20 μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδόν του ;

44. Ἓν τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει πλευρὰν 12,90 μ. Ἐπωλήθη πρὸς 325 δραχμὰς τὸ τ.μ. Πόσας δρχ. εἰσέπραξεν ὁ πωλητής;

45. Ἓν τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει περίμετρον 97,20 μ. Ἐπωλήθη πρὸς 85 δρχ. τὸ τ.μ. Πόσας δρχ. ἐπωλήθη;

46. Ἓν ἀμπέλι σχήματος τετραγώνου, μὲ πλευρὰν 28,5 μ., ἐπωλήθη ὁλόκληρον ἀντὶ 66.604,5 δρχ. Πόσας δρχ. ἐπωλήθη κατὰ τ.μ.;

47. Μία κουζίνα σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰν 2,80 μ. πρόκειται νὰ πλακοστρωθῇ μὲ πλάκας τετραγώνους μὲ πλευρὰν 0,4 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν καὶ πόσας δρχ. θὰ στοιχίσῃ, ἂν ἀγοράσωμεν πρὸς 3,80 δρχ. τὸ πλακάκι καὶ πληρώσωμεν 35 δρχ. τὸ τ.μ. ἐργατικά;

48. Μία τετραγωνικὴ πλατεῖα, ἡ ὁποία ἔχει περίμετρον 300 μ., πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικὰς πλάκας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν πλευρὰν 0,5 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

49. Μία τετραγωνικὴ σάλα μὲ πλευρὰν 6 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικὰς πλάκας μὲ πλευρὰν 0,3 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν καὶ πόσας δρχ. θὰ στοιχίσῃ, ἂν ἀγοράσωμεν πρὸς 4,5 δρχ. τὴν πλάκα καὶ πληρώσωμεν ἐργατικὰ 18 δρχ. δι᾿ ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον;

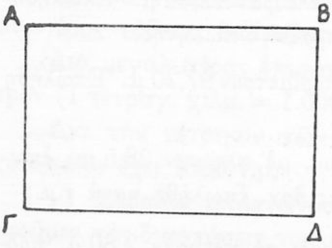
50. Εἰς ἕνα κῆπον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 784 τ.μ., ὑπάρχει μία τετραγωνικὴ δεξαμενή, ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰν 3,20 μ. Πόση ἔκτασις τοῦ κήπου μένει διὰ καλλιέργειαν;

51. Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ κτήματος εἶναι 564 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του καὶ πόσας δρχ. θὰ εἰσπράξωμεν, ἂν πωλήσωμεν πρὸς 18,5 δρχ. τὸν τετρ. τεκτ. πῆχυν; (1 τ.τ.π. $= \frac{9}{16}$ τοῦ τ.μ.).

52. Νὰ χαράξητε ἕκαστος εἰς τὸ τετράδιόν του ἓν τετράγωνον καὶ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν του.

Β΄. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ

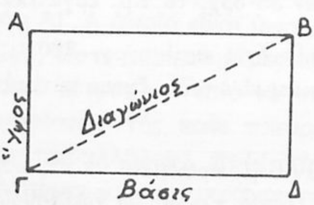
1. **Ἔννοια:** Ἑκάστη τῶν ἑδρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει ὅλας τὰς γωνίας της ὀρθὰς καὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς της ἴσας καὶ παραλλήλους. Ἐὰν λοιπὸν πάρωμεν μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας αὐτάς, θὰ ἔχωμεν ἓν ἐπίπεδον σχῆμα ὅπως τὸ ΑΒΔΓ τῆς εἰκόνος. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ὀρθογώνιον.



Ὀρθογώνιον λέγεται τὸ τετράπλευρον ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀνὰ δύο τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς 4 γωνίας του ὀρθάς.

Ὁ πίναξ τῆς τάξεως, τὸ τζάμι τοῦ παραθύρου, τὸ φύλλον τοῦ τετραδίου ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου.

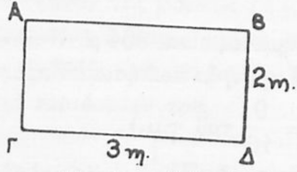
2. **Στοιχεῖα:** Ἀπὸ δύο τεμνομένας πλευρὰς κάθε ὀρθογωνίου, ἔστω ΑΒΔΓ, τὴν μίαν ὀνομάζομεν βάσιν (ΔΓ) ἢ μῆκος καὶ τὴν ἄλλην ὀνομάζομεν ὕψος (ΑΓ) ἢ πλάτος. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου λέγονται διαστάσεις αὐτοῦ.



Ὅπως εἰς τὸ τετράγωνον, διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖο ἑνώνει δύο κορυφὰς τοῦ ὀρθογωνίου, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά του. Καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο διαγωνίους. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι. Αὗται δὲν εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

3. **Περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου** εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

$$\frac{\text{πλευραί}: \ AB + BΔ + ΔΓ + ΓA}{\text{μήκη}: \ 3 + 2 + 3 + 2} = 10 \text{ μ.}$$



ΓΔ = 3 μ., ἀλλὰ καὶ AB = 3 μ.
ΑΓ = 2 μ., ἀλλὰ καὶ ΒΔ = 2 μ.

Κανών: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου, ἠμποροῦμεν νὰ ἐργασθῶμεν μὲ δύο τρόπους:

1ος τρόπος: Πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ 2 καὶ τὸ ὕψος ἐπὶ 2 καὶ κατόπιν προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα.

2ος τρόπος: Προσθέτομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους καὶ τὸ ἄθροισμα τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2.

Σημείωσις: Τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐπίπεδα σχήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται τετράπλευρα, ἐπειδὴ ἔχουν 4 πλευράς.

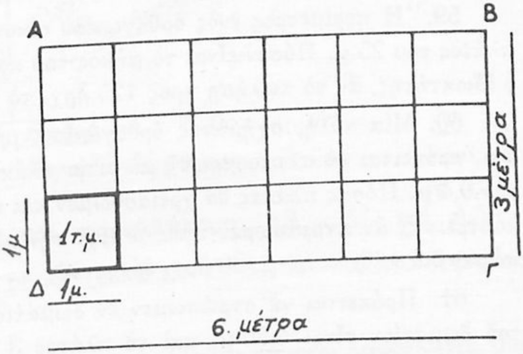
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

53. Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου οἰκοπέδου εἶναι 18,6 μ. καὶ τὸ πλάτος 12,4 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

54. Ἀγρός, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει περίμετρον 330 μ. Τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς του εἶναι 45 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς του;

55. Κτηματίας ἔχει ἓν ὀρθογώνιον κτῆμα, μὲ μῆκος 48 μ. καὶ πλάτος 25 μ. Θέλει νὰ σκάψῃ γύρω - γύρω ἕνα χάνδακα καὶ τοῦ ζητοῦν 30 δρχ. δι' ἕκαστον μέτρον. Πόσας δρχ. θὰ πληρώσῃ διὰ τὸ σκάψιμο τοῦ χάνδακος;

4. **Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου:** Ἔχομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Μετροῦμεν τὰς διαστάσεις του καὶ εὑρίσκομεν ΔΓ = 6 μ. καὶ ΒΓ = 3 μ. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΔΓ, εἰς 6 ἴσα μέρη, ὥστε ἕκαστον μέρος νὰ ἔχῃ μῆκος 1 μέτρον, καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι ὕψος, εἰς 3 ἴσα μέρη, ὥστε ἕκαστον μέρος νὰ ἔχῃ πάλιν μῆκος 1 μ. καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἑκάστης πλευρᾶς φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, βλέπομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον διῃρέθη εἰς 18 ἴσα τετράγωνα. Τὰ τετράγωνα αὐτὰ ἔχουν πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, δηλ. ἐπιφάνειαν, ἴσην πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν (1 τ.μ.). Ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι 18 τ.μ., δηλ. τὸ γινόμενον τῆς βάσεως (6 μ.) ἐπὶ τὸ ὕψος (3 μ.).



Ὥστε: **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς Ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

$$\boxed{\text{Ἐμβ. Ὀρθογ.} = \beta \cdot \upsilon}$$

Σημείωσις: Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν γράμματα, δὲν βάζομεν τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ×, ἀλλὰ μίαν τελείαν (·).

56. Πόσα στρέμματα εἶναι ἕνα ἀμπέλι σχήματος ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 180 μ. καὶ πλάτος 75 μ. καὶ πόσον θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἰδιοκτήτης, ἂν τὸ πωλήσῃ πρὸς 9.250 δρχ. τὸ στρέμμα; (1 στρέμμα = 1000 τ.μ.).

57. Οἰκόπεδον, σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 45,2 μ. καὶ πλάτος 19,5 μ., ἐπωλήθη πρὸς 275 δρχ. τὸν τετρ. τεκτ. πῆχυν (1 τ.τ.π. = $\frac{9}{16}$ τοῦ τ.μ.). Πόσα χρήματα εἰσέπραξεν ὁ ἰδιοκτήτης του;

58. Εἰς ἓν οἰκόπεδον, σχήματος ὀρθογωνίου, μήκους 24,8 μ. καὶ πλάτους 18,6 μ. ἐκτίσθη μία τετράγωνος οἰκία πλευρᾶς 14 μ. Πόσα τετρ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οἰκοπέδου, τὸ ὁποῖον ἔμεινεν ἄκτιστον;

59. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου οἰκοπέδου εἶναι 170 μ. καὶ τὸ πλάτος του 25 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος του καὶ πόσας δρχ. θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἰδιοκτήτης, ἂν τὸ πωλήσῃ πρὸς 125 δρχ. τὸ τ.μ.;

60. Μία αὐλή, σχήματος ὀρθογωνίου, μὲ μῆκος 8 μ. καὶ πλάτος 4 μ. πρόκειται νὰ πλακοστρωθῇ μὲ τετρ. πλάκας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν πλευρὰν 0,4 μ. Πόσας πλάκας θὰ χρειασθῶμεν καὶ πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ πλακόστρωσις, ἂν ἀγοράσωμεν πρὸς 6 δρχ. τὴν μίαν πλάκα καὶ ἂν πληρώσωμεν διὰ κάθε τετρ. μ. 20 δρχ. ἐργατικά;

61. Πρόκειται νὰ στρώσωμεν ἓν δωμάτιον μὲ σανίδας. Τὸ μῆκος τοῦ δωματίου εἶναι 4,80 μ. καὶ τὸ πλάτος 3,20 μ. Πόσας σανίδας θὰ χρειασθῶμεν, ἂν τὸ μῆκος τῆς σανίδος εἶναι 3,20 μ. καὶ τὸ πλάτος της 0,2 μ.;

62. Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου οἰκοπέδου εἶναι 15,60 μ. καὶ τὸ πλάτος του εἶναι ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους του. Πόσα τετρ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν του καὶ ποία ἡ ἀξία του, ἂν πωληθῇ πρὸς 240 δρχ. τὸ τετρ. μέτρον;

Γ'. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

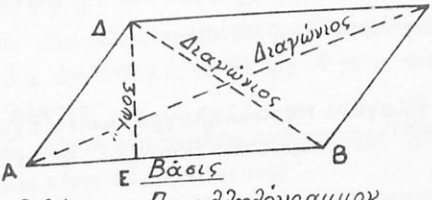
Τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράπλευρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους καὶ δι' αὐτὸ λέγονται παραλληλόγραμμα.

Παραλληλόγραμμον εἶναι ἓν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον, παραλληλόγραμμα εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς ἐπίπεδα σχήματα :

α) Πλάγιον παραλληλόγραμμον.

1. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους (ΑΒ = ΔΓ καὶ ΑΔ = = ΒΓ), τὰς δύο γωνίας ὀξείας ($\Delta\hat{A}B$ καὶ $\Delta\hat{\Gamma}B$) καὶ τὰς δύο ἀμβλείας ($A\hat{\Delta}\Gamma$ καὶ $A\hat{B}\Gamma$).



Πλάγιον Παραλληλόγραμμον.

2. **Ὡς βάσις** τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου λαμβάνεται μία ἀπὸ τὰς δύο μεγαλυτέρας πλευράς του. Εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ ὡς βάσις καὶ μία ἐκ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν του.

3. **Ὕψος** τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευράν της. Τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ἐάν, ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς πλευρᾶς, ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι τῆς βάσεως, φέρωμεν κάθετον ἐπάνω εἰς τὴν βάσιν (ΔΕ). Δι' αὐτό, εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον, ὕψος ὠνομάσαμεν μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς.

4. **Διαγώνιος** τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς του. Τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ἔχει δύο διαγωνίους μὴ ἴσας μεταξύ των.

5. **Περίμετρος παραλληλογράμμου :** Εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ἐργαζόμεθα, ὅπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον.

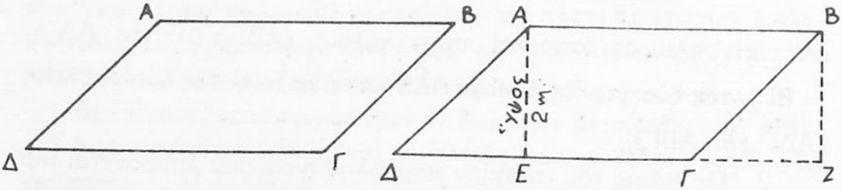
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

63. Κῆπος, σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου, ἔχει πλευρὰς 14,5 μ. καὶ 12,2 μ. Ὁ κῆπος αὐτὸς πρόκειται νὰ περιφραχθῇ μὲ 3 σειρὰς σύρμα. Πόσας δρχ. θὰ στοιχίσῃ, ἂν ἀγοράσωμεν 28 δρχ. τὸ μ. τὸ σύρμα ;

64. Ἡ πρασιὰ ἑνὸς κήπου ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου μὲ πλευρὰς 4,10 μ. καὶ 3,5 μ. Εἰς τὴν πρασιὰν αὐτὴν θὰ φυτεύσωμεν ὁλόγυρα τριανταφυλλιές, ὥστε νὰ ἀπέχῃ ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην 0,80 μ.

Πόσες τριανταφυλλιὲς θὰ φυτεύσωμεν;

6. **Ἐμβαδὸν πλαγίου παραλληλογράμμου :** Ἔχομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Μετροῦμεν τὴν βάσιν ΔΓ, ἔστω 3 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ΑΕ, ἔστω 2 μέτρα. Ἐὰν λάβωμεν τὸ τρίγωνον ΑΕΔ καὶ τὸ τοποθετήσωμεν ἔτσι ὥστε ἡ κορυφὴ Δ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ Γ, τὸ τρίγωνον ΑΕΔ ἔρχεται εἰς τὴν θέσιν ΒΖΓ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ γίνεται ὀρθογώνιον ΑΒΖΕ μὲ βάσιν τὴν ΕΖ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ. Αὐτὸ ἔχει ἐμβαδὸν 3 × 2 = 6 τετρ. μέτρα.



Κανών : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

$$\boxed{\text{Ἐμβ. Παραλ.} = \beta \cdot \upsilon}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

65. Ἀγρὸς σχήματος παραλληλογράμμου ἔχει μῆκος 86 μ. καὶ πλάτος 54 μ. Ἐπωλήθη πρὸς 6.500 δρχ. τὸ στρέμμα. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ὁ πωλητής;

66. Ἓν φύλλον χάρτου ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου. Ἡ βάσις του εἶναι 0,23 μ. καὶ τὸ ὕψος του 0,10 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

67. Ἡ βάσις ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι 28,40 μ. καὶ τὸ ὕψος του τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς βάσεώς του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

68. Ἓν οἰκόπεδον σχήματος παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 32 μ. καὶ ὕψος 24 μ., ἐπωλήθη ὅλον ἀντὶ 57.600 δρχ. Πόσας δρχ. ἐπωλήθη τὸ τ.μ.;

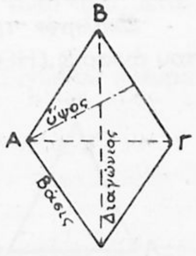
69. Ἓν οἰκόπεδον σχήματος παραλληλογράμμου, μὲ βάσιν 24 μ. καὶ ὕψος 18 μ. ἐπωλήθη πρὸς 84 δρχ. ὁ τετρ. τεκτ. πῆχυς. Πόσας δρχ. ἐπῆρεν ὁ πωλητής;

70. Ἓν φύλλον χάρτου ἔχει περίμετρον 0,80 μ. Τὸ μῆκος του εἶναι 0,30 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

71. Εἰς ἓν κτῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου μὲ βάσιν 30 μ. καὶ ὕψος 28 μ., ἔκτισεν ὁ ἰδιοκτήτης μίαν οἰκίαν, ἡ ὁποία κατέλαβεν ἔκτασιν 264 τ.μ. Πόσα δένδρα ἠμπορεῖ νὰ φυτεύσῃ εἰς τὸ ὑπόλοιπον κτῆμα, ἂν δι' ἕκαστον δένδρον χρειάζωνται 6 τ.μ.;

β) Ρόμβος.

Τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ λέγεται **ρόμβος**. Μὲ τὸν διαβήτην ἐσχηματίσαμεν τὰς 4 πλευράς του ἴσας. Αἱ γωνίαι $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἀμβλεῖαι, αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ εἶναι ὀξεῖαι.

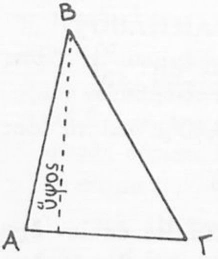


Ρόμβος εἶναι πλάγιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας.

Σχῆμα ρόμβου εὑρίσκομεν συνήθως εἰς μερικὰ κάγκελα.

Σημείωσις : Ἐφ' ὅσον εἶναι πλάγιον παραλληλόγραμμον, ἔχει τὰς δύο γωνίας ὀξείας καὶ τὰς δύο ἀμβλείας.

Δ΄. ΤΡΙΓΩΝΟΝ



1. **Ἔννοια :** Κάθε μία ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ὁμοιάζει πρὸς τὸ παραπλεύρως σχῆμα (ΑΒΓ), τὸ ὁποῖον λέγεται τρίγωνον.

2. **Στοιχεῖα:** Τρίγωνον εἶναι τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας.

Βάσις τοῦ τριγώνου λέγεται μία ἀπὸ τὰς πλευράς του. Ὡς βάσιν λαμβάνομεν οἱανδήποτε πλευράν του.

Κορυφὴ τοῦ τριγώνου λέγεται τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν βάσιν του, δηλ. ἡ κορυφὴ τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίας.

Ὕψος τοῦ τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὴν βάσιν του.

Περίμετρος τοῦ τριγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν του (ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ).

Κάθε τρίγωνον εἶναι μισὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ἤτοι, δύο ἴσα τρίγωνα, καταλλήλως τοποθετούμενα, σχηματίζουν ἓν παραλληλόγραμμον.

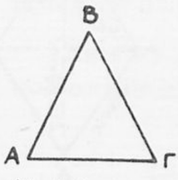
3. Εἴδη τριγώνων.

α) Ἐξέτασις τῶν τριγώνων ἀπὸ τὰς πλευράς των :

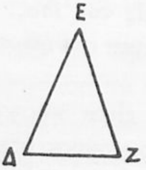
Ἰσοσκελὲς τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μόνον τὰς δύο πλευράς του ἴσας (ΔΕΖ).

Ἰσόπλευρον τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας (ΑΒΓ).

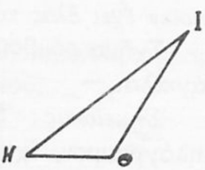
Σκαληνὸν τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευράς του ἀνίσους (ΗΘΙ).



Ἰσόπλευρον.



Ἰσοσκελές



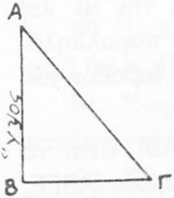
Σκαληνόν.

β) Ἐξέτασις τῶν τριγώνων ἀπὸ τὰς γωνίας των :

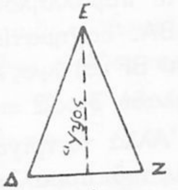
Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν (ΑΒΓ).

Ὀξυγώνιον τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας του ὀξείας (ΔΕΖ).

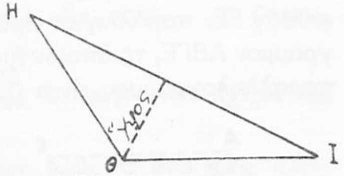
Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν (ΗΘΙ).



Ὀρθογώνιον



Ὀξυγώνιον



Ἀμβλυγώνιον

4. Ἰδιότητες τριγώνων

α) Ἐὰν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον μετρήσωμεν τὰς τρεῖς γωνίας ἑνὸς οἱουδήποτε τριγώνου, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἔχουν ἄθροισμα 180°, δηλ. ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

β) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν (90°) καὶ τὰς ἄλλας δύο ὀξείας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὀξειῶν τούτων γωνιῶν εἶναι 90°.

γ) Αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

δ) Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

ε) Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου πλευρὰ λέγεται **ὑποτείνουσα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

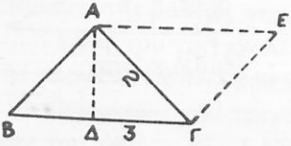
72. Ἐὰν ἡ μία ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 30°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἑτέρα ὀξεῖα γωνία ;

73. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου;

74. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ γωνία, ἡ σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο ἴσας πλευράς του, εἶναι 120^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκατέρα τῶν ἄλλων;

5. Ἐμβαδὸν τριγώνου.

Ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἔστω ὅτι ἡ ΒΓ = 3 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΔ = 2 μ. Φέρομεν εὐθεῖαν ΑΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εὐθεῖαν ΓΕ, παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐσχηματίσθη τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ΒΓ καὶ ὕψος ΑΔ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι β.υ, δηλαδὴ 3 × 2 = 6 τ.μ.



Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ. Ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου

$$\text{ΑΒΓ} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ τ.μ.}$$

Κανών: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν (β) ἐπὶ τὸ ὕψος (υ) αὐτοῦ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.

$$\boxed{\text{Ἐμβ. τριγ.} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

75. Τριγωνικὸν οἰκόπεδον μὲ βάσιν 28 μ. καὶ ὕψος 16,20 μ. ἐπωλήθη πρὸς 120 δρχ. τὸν τετρ. τεκτον. πῆχυν. Πόσον ἐπωλήθη ὁλόκληρον;

76. Εἷς ἠγόρασεν ἓν τριγωνικὸν οἰκόπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 28 μ., πρὸς 75 δρχ. τὸ τετρ. μέτρον καὶ ἐπλήρωσεν 16.800 δρχ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγωνικοῦ οἰκοπέδου;

Σημείωσις: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος, διαιροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τῆς βάσεως καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 2.

77. Γεωργὸς ἐπώλησεν ἕνα τριγωνικὸν ἀγρὸν ἀντὶ 80.000 δρχ. Ὁ ἀγρὸς εἶχεν ὕψος τριγώνου 100 μέτρων καὶ ἐπωλήθη πρὸς 20 δρχ. τὸ τ.μ. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ;

Σημείωσις : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν βάσιν, διαιροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ ὕψους καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 2.

78. Ἡ μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ἑνὸς τριγωνικοῦ κήπου εἶναι 2,6 μ. καὶ ἡ ἄλλη 4,2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

79. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγωνικοῦ ἀγροῦ εἶναι 2.100 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 70 μ. Ποία εἶναι ἡ βάσις του;

80. Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τριγωνικῆς πρασιᾶς εἶναι 4,55 μ. καὶ ἡ βάσις της 2,60 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος της;

81. Σχηματίσατε εἰς τὸ τετράδιόν σας ἓν τριγωνικὸν σχῆμα καὶ μετρήσατε τὸ ἐμβαδόν του.

82. Πόσους τετρ. τεκτ. πήχεις θὰ πάρη κάθε εἷς ἀπὸ τρεῖς ἀδελφούς, οἱ ὁποῖοι ἐμοιράσθησαν ἓν τριγωνικὸν ἀμπέλι, μὲ βάσιν 180 μ. καὶ ὕψος 120 μ.;

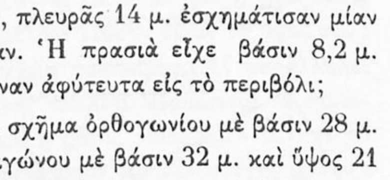
83. Εἰς ἓν τετραγωνικὸν περιβόλι, πλευρᾶς 14 μ. ἐσχημάτισαν μίαν τριγωνικὴν πρασιὰν καὶ τὴν ἐφύτευσαν. Ἡ πρασιὰ εἶχε βάσιν 8,2 μ. καὶ ὕψος 6,4 μ. Πόσα τετρ. μέτρα ἔμειναν ἀφύτευτα εἰς τὸ περιβόλι;

84. Ἀπὸ δύο οἰκόπεδα, τὸ ἓν ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ βάσιν 28 μ. καὶ ὕψος 19 μ. καὶ τὸ ἄλλο, σχῆμα τριγώνου μὲ βάσιν 32 μ. καὶ ὕψος 21 μ. Πόσα τετρ. μέτρα εἶναι μεγαλύτερον τὸ ἓν οἰκόπεδον ἀπὸ τὸ ἄλλο;

Ε΄. ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

1. **Στοιχεῖα.** Τραπέζιον εἶναι τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς δύο μόνον ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους.

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον. Εἰς αὐτὸ μόνον αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι καὶ λέγονται **βάσεις τοῦ τραπεζίου.** Αἱ πλευραὶ αὗται εἶναι ἄνισοι. Ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ (ΑΒ εἰς τὸ σχῆμα) λέ-



γεται μεγάλη βάσις (Β), ἡ δὲ μικροτέρα πλευρὰ (ἐδῶ ἡ ΔΓ) λέγεται μικρὰ βάσις (β).

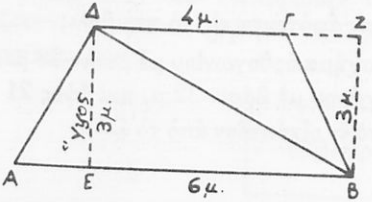
Ὕψος τοῦ τραπεζίου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεών του. Τὴν ἀπόστασιν εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.

Περίμετρος τραπεζίου εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν 4 πλευρῶν του.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

85. Ἓν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ μεγάλην βάσιν 16 μέτρα καὶ μικρὰν βάσιν 12 μ. καὶ ἑκάστην τῶν πλαγίων πλευρῶν 9 μ. Περιεφράχθη μὲ τρεῖς σειρὰς σύρμα. Πόσα μέτρα σύρμα ἐχρειάσθη;

86. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 180 μ. Ἡ μεγάλη βάσις εἶναι 74 μ. καὶ ἡ μικρὰ βάσις 52 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν του;



2. **Ἐμβαδὸν τραπεζίου.** Ἔχομεν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἔστω ὅτι Β, ἡ μεγάλη βάσις αὐτοῦ ΑΒ = 6 μ. καὶ β, ἡ μικρὰ βάσις αὐτοῦ ΔΓ = 4 μ., τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ΔΕ = 3 μ. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΔΒ καὶ βλέπομεν ὅτι ἐσχηματίσθησαν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ. Κάθε ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ τρίγωνα ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{β \cdot υ}{2}$. Δηλαδὴ ΑΒΔ $= \frac{6 \times 3}{2}$ καὶ ΒΓΔ $= \frac{4 \times 3}{2}$, ἐπειδὴ ΔΕ = ΖΒ = 3 μ.

Ἑπομένως τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ αὐτὰ τὰ δύο τρίγωνα, θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων. Δηλαδὴ $\frac{6 \times 3}{2} + \frac{4 \times 3}{2} = \frac{6 + 4}{2} \times 3 = \frac{10}{2} \times 3 = 15$ τ.μ.

Ἄρα τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{Β + β}{2} \cdot υ$.

Κανών : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, προσθέτομεν τὰς δύο βάσεις του (Β + β), τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ 2 καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

$$\boxed{\text{'Εμβ. τραπ.} = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

87. Πόσον ἐστοίχισεν οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου μὲ μῆκος μεγάλης βάσεως 18 μ., μῆκος μικρᾶς βάσεως 14 μ. καὶ ὕψος 19,4 μ., τὸ ὁποῖον ἐπωλήθη πρὸς 428 δρχ. τὸν τετραγ. τεκτ. πῆχυν ;

88. Πόσα στρέμματα εἶναι ἀμπέλι σχήματος τραπεζίου μὲ μῆκος μεγάλης βάσεως 284 μ., μῆκος μικρᾶς βάσεως 198 μ. καὶ ὕψος 162,5 μ.;

89. Ἕν οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ βάσεις 24,8 μ. καὶ 19,4 μ. καὶ ὕψος 15 μ. 'Επωλήθη πρὸς 728 δρχ. τὸ τ.μ. Πόσας δρχ. εἰσέπραξεν ὁ πωλητής ;

90. Ἑνὸς τραπεζίου ἡ κάτω βάσις εἶναι 16,20 μ. καὶ ἡ ἄνω βάσις 3,80 μ. Τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι 25 τετρ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του ;

91. Ἡ στέγη μιᾶς οἰκίας ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Αἱ παράλληλοι πλευραί του εἶναι 16 μ. καὶ 12 μ. Τὸ ὕψος του 6 μ. Πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ κεραμίδια ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων ἡ βάσις εἶναι 0,14 μ. καὶ τὸ ὕψος των 0,08 μ. Πόσα κεραμίδια θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν στέγην αὐτήν ;

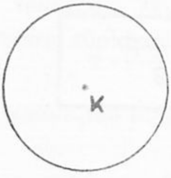
92. 'Αγρὸς σχήματος τραπεζίου, ἔχει τὴν μίαν βάσιν 84 μ. καὶ τὴν ἄλλην 52,2 μ. καὶ ὕψος 30 μ. 'Εὰν τὸν μοιρασθοῦν 3 ἀδελφοί, ἐξ ἴσου, πόσα τετραγ. μέτρα θὰ πάρῃ ὁ καθείς ;

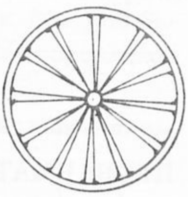
93. Πόσα κλήματα εἶναι φυτευμένα εἰς ἓν ἀμπέλι σχήματος τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη βάσις εἶναι 42 μ. καὶ ἡ μικρὰ βάσις 18 μ. καὶ τὸ ὕψος του 9,4 μ., ἂν εἰς ἕκαστον τετραγ. μέτρον εἶναι φυτευμένα 2 κλήματα ;

94. Πόσα κιλὰ λίπασμα θὰ χρειασθῇ, διὰ νὰ λιπανθῇ κῆπος σχήματος τραπεζίου μὲ παραλλήλους πλευρὰς 12,4 μ. καὶ 8,2 μ. καὶ ὕψος 5 μ., ἐὰν χρειάζωνται 12 γραμμάρια λίπασμα διὰ κάθε τετραγ. παλάμην ;

95. Στέγη σχήματος τραπεζίου ἔχει μεγάλην βάσιν 16 μ., μικρὰν βάσιν 14 μ. καὶ ὕψος 8,4 μ. Πόσα κεραμίδια θὰ χρειασθοῦν, διὰ νὰ σκεπασθῇ, ἐὰν εἰς κάθε τετραγ. μέτρον χρειάζωνται 50 κεραμίδια ;

ΣΤ'. ΚΥΚΛΟΣ





1. Ἔννοια καὶ στοιχεῖα.

α) Τὸ ἐπίπεδον μέρος τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου ἢ ἑνὸς κώνου, δηλαδὴ ἡ βάσις των, περικλείεται ἀπὸ μίαν κλειστὴν καμπύλην γραμμήν. Τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ αὐτὴν τὴν γραμμήν, λέγεται κύκλος καὶ ἡ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, περιφέρεια τοῦ κύκλου.

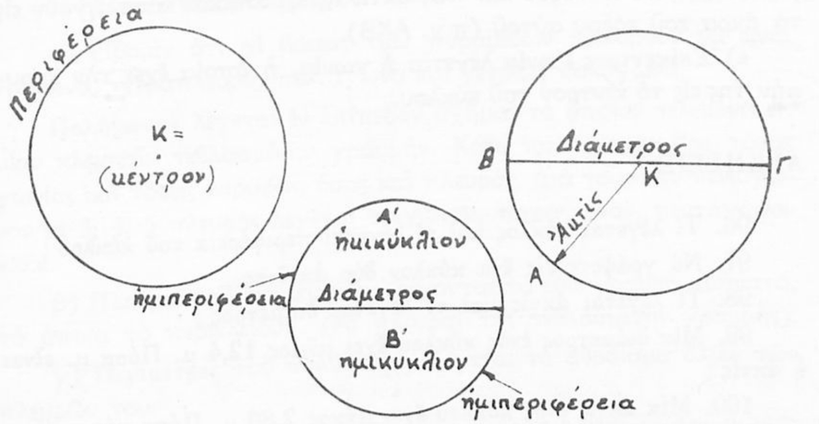
Σχῆμα κύκλου ἔχουν αἱ βάσεις τῶν κυτίων τοῦ γάλακτος, τὰ μεταλλικὰ νομίσματα, οἱ δίσκοι τῶν ὡρολογίων, ἡ τομὴ ἑνὸς λεμονιοῦ, πορτοκαλιοῦ κ.λ.π., δηλαδὴ *ἡ τομὴ μιᾶς σφαίρας.*

β) Γράφομεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου μὲ τὸν διαβήτην. Τὸ σημεῖον, ὅπου ἀκουμβᾶ τὸ μυτερὸ σκέλος τοῦ διαβήτου, λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ τὸ γράμμα Κ. Τὸ ἄλλο σκέλος τοῦ διαβήτου γράφει τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν περιφέρειαν. Ἑπομένως ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον.

Κύκλος λέγεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν κλειστὴν καμπύλην γραμμήν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται *κέντρον.*

γ) **Ἀκτὶς κύκλου** λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Κ) μὲ οἱονδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας του (π.χ. ΚΑ). Εἰς κάθε κύκλον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅσας ἀκτῖνας θέλομεν. *Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.*

δ) **Διάμετρος τοῦ κύκλου** λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τελειώνει εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας (π.χ. ΒΚΓ). Εἰς κάθε κύκλον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅσας διαμέτρους θέλομεν.



Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος του.

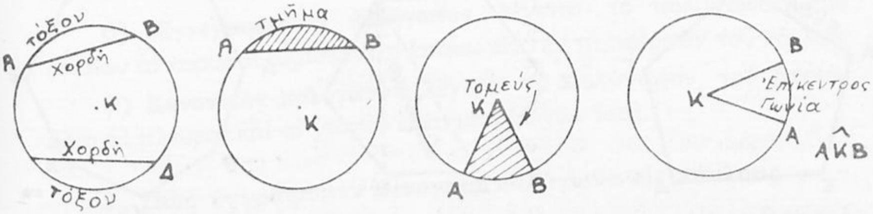
ε) Ἡ διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα ἐπίπεδα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμικύκλια. Κάθε διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα καμπύλα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμιπεριφέρειαι.

2. Τόξον, Χορδή, Τμῆμα, Τομεύς, Ἐπίκεντρος γωνία.

α) **Χορδὴ** λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἑνώνει δύο σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, (π.χ. ΑΒ καὶ ΓΔ).

β) **Τόξον** λέγεται ἓν μέρος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

γ) **Κυκλικὸν Τμῆμα** λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ἓν τόξον καὶ ἀπὸ τὴν χορδήν του.



δ) **Κυκλικὸς Τομεὺς** λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ἓν τόξον καὶ τὰς ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου αὐτοῦ (π.χ. ΑΚΒ).

ε) **Ἐπίκεντρος Γωνία** λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

96. Τί λέγεται κύκλος καὶ τί λέγεται περιφέρεια τοῦ κύκλου;

97. Νὰ γράψετε εἰς ἕνα κύκλον δύο ἀκτῖνας.

98. Τί λέγεται ἀκτὶς καὶ τί λέγεται διάμετρος;

99. Μία διάμετρος ἑνὸς κύκλου ἔχει μῆκος 12,4 μ. Πόσα μ. εἶναι ἡ ἀκτίς;

100. Μία ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου ἔχει μῆκος 2,80 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ διάμετρος;

101. Νὰ γράψετε ἕνα κύκλον καὶ νὰ χρωματίσετε μὲ κόκκινον χρῶμα ἕνα τμῆμα καὶ μὲ μπλὲ χρῶμα ἕνα τομέα.

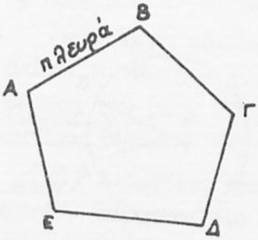
102. Νὰ γράψετε μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 0,04 μ. καὶ μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,01 μ.

103. Τί λέγεται ἐπίκεντρος γωνία;

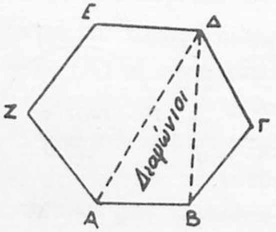
104. Σχεδιάσατε μίαν ἐπίκεντρον γωνίαν καὶ ὀνομάσατε αὐτήν.

105. Νὰ γράψετε ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,04 μ. Κατόπιν νὰ γράψετε μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰς 4 κορυφὰς τοῦ τετραγώνου.

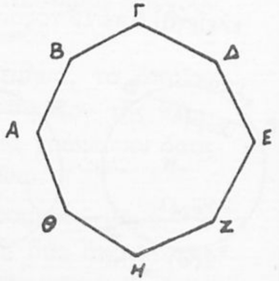
Ζ΄. ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ



Πεντάγωνον



Ἑξάγωνον



Ὀκτάγωνον

1. Ἔννοια καὶ στοιχεῖα.

α) Εἴδομεν ὅτι αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ἠμποροῦν νὰ εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα καὶ γενικῶς πολύγωνα.

Πολύγωνον λέγεται ἓν ἐπίπεδον σχῆμα, τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς μίαν κλειστὴν τεθλασμένην γραμμήν. Κάθε πολύγωνον ἔχει τόσας γωνίας καὶ τόσας κορυφάς, ὅσας καὶ πλευράς. Διὰ τοῦτο ἓν πολύγωνον μὲ 3, 4, 5 πλευρὰς λέγεται τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον κ.ο.κ.

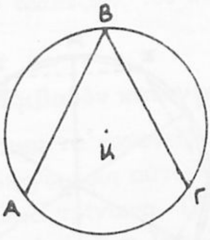
β) **Πλευραὶ** τοῦ πολυγώνου, λέγονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα τὸ περικλείουν. (Αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς).

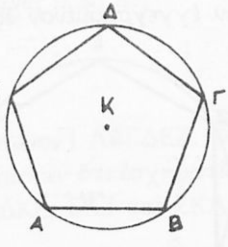
γ) **Περίμετρος** τοῦ πολυγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν του.

δ) **Διαγώνιος** τοῦ πολυγώνου, λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς του.

2. Ἐγγεγραμμένη γωνία, ἐγγεγραμμένα πολύγωνα.

α) **Ἐγγεγραμμένη γωνία** λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου καὶ ἡ κορυφή της εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας.



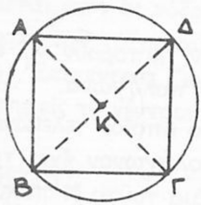


β) **Ἐγγεγραμμένον πολύγωνον** λέγεται τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

γ) **Κανονικὸν πολύγωνον** λέγεται τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

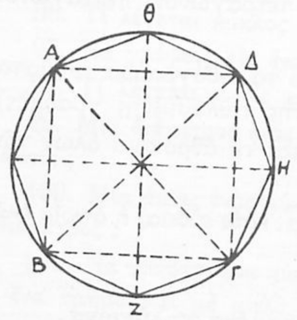
3. Πῶς ἐγγράφομεν κανονικὰ πολύγωνα εἰς κύκλους.

α) **Τετράγωνον**. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς κύκλον, φέ-



ρομεν δύο διαμέτρους, τὴν μίαν κάθετον εἰς τὴν ἄλλην καὶ ἑνώνομεν τὰ ἄκρα των μὲ χορδάς.

Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη, εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

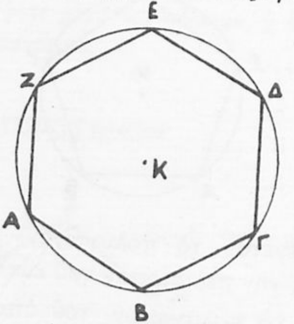


β) **Κανονικὸν ὀκτάγωνον.** Ἀφοῦ ἐγγράψωμεν ἓν κανονικὸν τετράγωνον, φέρομεν δύο διαμέτρους, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου καὶ ἑνώνομεν τὰ ἄκρα των καὶ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου μὲ χορδάς.

Τὸ σχῆμα ΑΕΒΖΓΗΔΘ, τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη, εἶναι κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον.

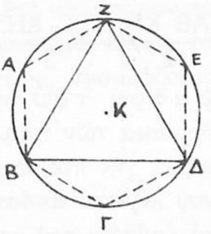
γ) **Κανονικὸν ἑξάγωνον.** Κάνομε τὸν κύκλον. Μὲ τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου (τὴν ἀκτῖνα του) χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν. Παρατηροῦμεν, ὅτι χωρίζεται εἰς 6 ἴσα τόξα.

Ἑνώνομεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ χορδὰς καὶ ἔχομεν κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ.



δ) **Κανονικὸν δωδεκάγωνον.** Γράφομεν πρῶτον ἓν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Κατόπιν διαιροῦμεν εἰς 2 ἴσα μέρη ἕκαστον τόξον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς κάθε πλευράν, φέροντες καθέτους ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἑξαγώνου. Ἑνώνομεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων καὶ ἔχομεν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν δωδεκάγωνον ΑΘΒΙΓΚΔΛΕΜΖΗ.

ε) **Ἰσόπλευρον τρίγωνον.** Γράφομεν πρῶτα τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Κατόπιν ἑνώνομεν τὰς 3 κορυφάς του, ἀνὰ δύο, μὲ χορδὰς καὶ σχηματίζεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΖΒΔ.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

106. Σχεδίασε δύο κύκλους καὶ εἰς τὸν ἕνα νὰ γράψῃς ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ εἰς τὸν ἄλλον τετράγωνον.

107. Νὰ γράψῃς εἰς ἕνα κύκλον ἓν ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ κάθε πλευρὰ νὰ εἶναι 0,02 μ.

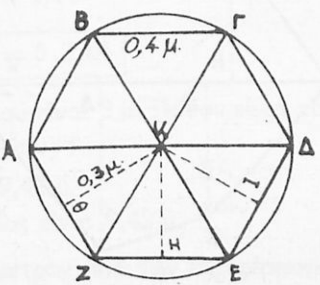
108. Εἰς ἕνα κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 0,03 μ., νὰ γράψῃς ἓν ἑξάγωνον καὶ νὰ εὕρῃς τὴν περίμετρόν του.

109. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀκταγώνου εἶναι 28,8 μ. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ κάθε πλευρά του;

110. Τί θὰ κάνῃ ὁ ξυλουργός, διὰ νὰ κατασκευάσῃ ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι 0,25 μ.;

4. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἔχομεν τὸ κανονικὸν πολύγωνον (ἑξάγωνον) ΑΒΓΔΕΖ. Φέρομεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ. Βλέπομεν ὅτι ἐσχηματίσθησαν 6 ὅμοια τρίγωνα. Τὰ ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ, ΔΚΕ, ΕΚΖ καὶ ΖΚΑ. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι μεταξύ των (ἀκτῖνες κύκλου καὶ ἴσαι πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου). Ἑπομένως καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν εἶναι ἴσα. (Π.χ. ΚΗ = ΚΘ = ΚΙ κ.ο.κ.). Ἔχομεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν καὶ νὰ προσθέσωμεν κατὰ σειρὰν τὰ ἐμβαδὰ $\left(\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}\right)$ τῶν 6 τριγώνων, δηλαδή :



$\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΚΗ}}{2}+\frac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΚΗ}}{2}+\frac{\text{ΓΔ}\cdot\text{ΚΗ}}{2}+\frac{\text{ΔΕ}\cdot\text{ΚΗ}}{2}+\frac{\text{ΕΖ}\cdot\text{ΚΗ}}{2}+\frac{\text{ΖΑ}\cdot\text{ΚΗ}}{2}=$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ (δηλαδὴ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου) ἐπὶ τὸ ὕψος, διὰ 2. Τὸ ὕψος ΚΗ τοῦ τριγώνου λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ πολυγώνου. Ἑπομένως, *διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.*

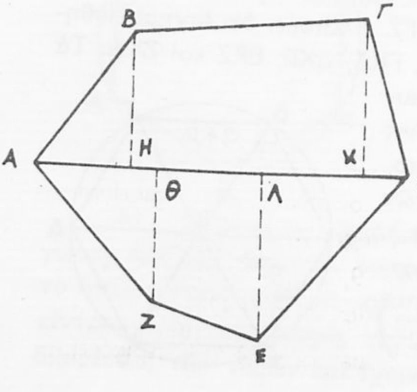
Παράδειγμα. Ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἡ πλευρά του ἔχει μῆκος 0,4 μ. καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς πλευρᾶς του ἀπὸ τὸ κέντρον (δηλ. τὸ ἀπόστημα) 0,3 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

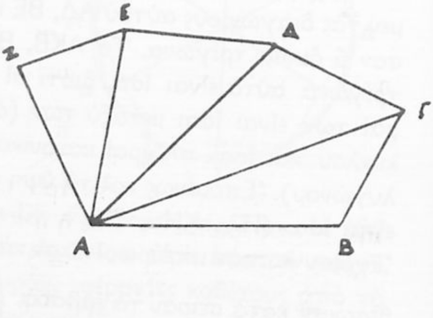
$$\boxed{\textit{Ἐμβ. Πολυγ.} = \frac{\textit{Περίμ.} \cdot \textit{Ἀπόστ.}}{2}}$$

Λύσις : Περίμ. = (0,4 μ. × 6) = 2,4 μ.
2,4 μ. × 0,3 μ. = 0,72 : 2 = 0,36 τ.μ.

Ἀπάντησις : Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου εἶναι 0,36 τ.μ.

Σημείωσις : Ἐπειδὴ εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα ὅλαι αἱ πλευραὶ των εἶναι ἴσαι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν. (Ἐδῶ π.χ. ὅπου ἔχομεν ἑξάγωνον, 0,4 × 6).





'Εὰν τὸ πολύγωνον δὲν εἶναι κανονικόν, τότε, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν του, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια, ὅπως τὰ ἀνωτέρω σχήματα καί, σημειοῦντες τὰ ὕψη αὐτῶν, ἐφαρμόζομεν ὅ,τι μέχρι τοῦδε ἐμάθομεν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

111. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 4 μ. καὶ ἀπόστημα 3,2 μ.;

112. Κάνε ἕνα κύκλον μὲ διάμετρον 0,04 μ. Γράψε ἐντὸς αὐτοῦ ἓν ὀκτάγωνον, τοῦ ὁποίου νὰ εὕρῃς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς, τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

113. Ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος ἑξαγώνου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 12 μ. καὶ τὸ ἀπόστημά του 8,8 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

Η΄. ΜΗΚΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

'Εὰν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου, εὑρίσκομεν πάντοτε πηλίκον $\boxed{3{,}14}$ περίπου.

Ἡ περιφέρεια λοιπὸν τοῦ κύκλου εἶναι 3,14 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν διάμετρόν του καὶ ἡ διάμετρος εἶναι 3,14 φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (κατὰ προσέγγισιν).

Τὸ $\boxed{\pi}$ φανερώνει πάντοτε τὸν ἀριθμὸν $\boxed{3{,}14}$

1ος Κανών. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν διάμετρόν του ἐπὶ 3,14.

$$\boxed{\mathrm{M} = \delta \cdot \pi} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\mathrm{M} = \delta . 3{,}14}$$

Παράδειγμα : Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 3 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του (ἢ ἡ περιφέρειά του) ;

Λύσις : $\mathrm{M} = \delta \cdot \pi$ $\mathrm{M} = 3 \times 3{,}14 = 9{,}42$ μ.

'Απάντησις : Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι 9,42 μ.

2ος Κανών : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διάμετρον ἀπὸ τὴν περιφέρειαν, διαιροῦμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ 3,14 (π). Τὸ πηλίκον εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου.

$$\boxed{\delta = \frac{M}{\pi}}$$

Παράδειγμα : Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου εἶναι 15,70 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός του;

Λύσις : $\delta = \frac{M}{\pi} = 15{,}70 : 3{,}14 = 5$ μ.

Ἀπάντησις : Τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου εἶναι 5 μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

114. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν διάμετρον καὶ πῶς, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ;

115. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 2,4 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

116. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 8,792 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ διάμετρος καὶ πόσα ἡ ἀκτίς ;

117. Κυλινδρικὸς κορμὸς κομμένου δένδρου ἔχει περιφέρειαν 5,652 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός του ;

118. Ὁ τροχὸς μιᾶς ἁμάξης ἔχει ἀκτῖνα 0,8 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ καὶ πόσην ἀπόστασιν θὰ τρέξῃ ὁ τροχὸς τὴν ὥραν, ὅταν κάνῃ 100 στροφὰς εἰς ἓν πρῶτον λεπτόν ;

119. Οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου ἔχουν ἀκτῖνα 0,5 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά των καὶ πόσας στροφὰς θὰ κάνῃ ὁ καθείς, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον διατρέξῃ 94.200 μέτρα ;

120. Ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ μιᾶς ἁμάξης εἶναι 4,71 μ. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος του ;

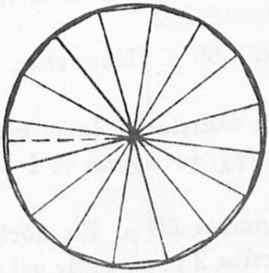
121. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς τροχοῦ εἶναι 0,8 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του ; Πόσον διάστημα διατρέχει τὸ ἁμάξι, εἰς ἓν πρῶτον λεπτόν, ὅταν ὁ τροχὸς κάμνῃ 2 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον ; Πόσον, ὅταν κάμνῃ 5760 στροφὰς τὴν ὥραν ;

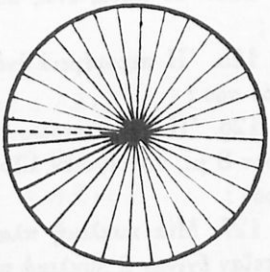
122. Εἰς μίαν κυκλικὴν πλατεῖαν διαμέτρου 150 μέτρων πρόκειται νὰ φυτευθοῦν ροδοδάφναι εἰς ὅλην τὴν περιφέρειάν της, εἰς ἀπόστασιν 3 μέτρων ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην. Πόσαι ροδοδάφναι θὰ φυτευθοῦν ;

123. Ἕν σιδηροῦν στεφάνι διαμέτρου 0,8 μ. πρόκειται νὰ προσαρμοσθῇ εἰς τὴν περιφέρειαν ἑνὸς ξυλίνου τροχοῦ κάρρου. Θερμαίνομεν τοῦτο καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διάμετρος ηὐξήθη κατὰ 10 χιλιοστά. Πόσα χιλιοστὰ θὰ αὐξηθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του;

Θ'. ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

Ἐμάθομεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρόν του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ δύο.





Ἄς φαντασθῶμεν τώρα, ὅτι γράφομεν εἰς κύκλον ἓν κανονικὸν πολύγωνον μὲ μεγάλον ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ ἓν ἄλλο μὲ ἀκόμη μεγαλύτερον ἀριθμόν. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου μικραίνει καί, ὅσον αὐξάνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν, τόσον μικραίνει τὸ μῆκος τῆς κάθε πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ μεγαλώνει τὸ ἀπόστημα, τὸ ὁποῖον τείνει (πλησιάζει) νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἐνῷ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πλησιάζει ὅσο θέλομε νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Ἐμάθομεν ἤδη ὅτι ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου $= \dfrac{\text{περίμ.} \cdot \text{ἀπόστημα.}}{2}$

Ἐδῶ περίμετρον θὰ ἔχωμεν πλέον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας $= 2 \cdot α \cdot 3{,}14$ καὶ ἀπόστημα τὴν ἀκτῖνα α τοῦ κύκλου. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $\dfrac{\cancel{2} \cdot α \cdot 3{,}14 \cdot α}{\cancel{2}} = α \cdot α \cdot 3{,}14.$

Κανών : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ 3,14 (= π).

$$\boxed{\text{'Εμβ. κύκλου} = (\alpha \cdot \alpha \cdot \pi) \text{ ἢ } (\alpha \cdot \alpha \cdot 3,14)}$$

Παράδειγμα : Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 4 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύσις : 'Εμβ. κύκλου $= \alpha \cdot \alpha \cdot \pi = 4 \times 4 \times 3,14 = 50,24$ τ.μ.
'Απάντησις : Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ κύκλου εἶναι 50,24 τ.μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

124. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 3,2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

125. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 7,85 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

126. Ἡ πλακόστρωσις μιᾶς κυκλικῆς πλατείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 8 μ., ἐστοίχισεν 1256 δρχ. Πόσας δρχ. ἐστοίχισεν τὸ 1 τετραγ. μέτρον ;

127. Μία κυκλικὴ πλατεῖα ἔχει διάμετρον 48 μ. Εἰς αὐτὴν τὴν πλατεῖαν ἔγιναν 2 κυκλικὰ παρτέρια μὲ ἀκτῖνα 2 μ.. τὸ καθὲν καὶ ἓν ὀρθογώνιον μὲ μῆκος 4,20 μ. καὶ ὕψος 3,8 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλατείας, ἡ ὁποία δὲν ἔχει φυτευθῆ ;

128. Εἰς μίαν κυκλικὴν πλατεῖαν, ἡ ὁποία εἶχεν ἀκτῖνα 12 μ., κατεσκεύασαν συντριβάνι, μὲ ἀκτῖνα 3 μ. Πόσα τετρ. μέτρα εἶναι ὁ ἐλεύθερος χῶρος τῆς πλατείας ;

129. Ἓν πρόβατον εἶναι δεμένον μὲ σχοινίον 4,20 μ. Πόσα τ.μ. θὰ ἠμπορέσῃ νὰ βοσκήσῃ ;

130. 'Από δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ ἴδιον κέντρον (ὁμόκεντροι), ὁ εἷς ἔχει ἀκτῖνα 2,60 μ. καὶ ὁ ἕτερος 3,90 μ. Πόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δευτέρου κύκλου ;

131. Εἰς τὴν μέσην μιᾶς τετραγωνικῆς πλατείας, πλευρᾶς 56 μ. ὑπάρχει κυκλικὸς ἀνθόκηπος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 10 μ. Πόσα τ.μ. τῆς πλατείας μένουν ἐλεύθερα ;

132. 'Από μίαν λαμαρίνα τετραγωνικὴν, πλευρᾶς 3,20 μ., πρόκειται νὰ κοποῦν δίσκοι διαμέτρου 0,8 μ. Πόσοι δίσκοι θὰ κοποῦν καὶ πόσα τετρ. ἑκατ. θὰ μείνουν ἀποκόμματα ἀπὸ τὴν λαμαρίναν ;

133. Πόσα θὰ πληρώσωμεν, διὰ νὰ τσιμεντάρωμεν τὴν βάσιν μιᾶς

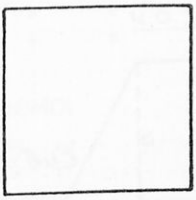
κυλινδρικῆς δεξαμενῆς, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 7,60 μ., ἂν πληρώσωμεν 82 δρχ. κατὰ τ.μ.;

134. Ἀπὸ ἕνα τετραγωνικὸν μουσαμᾶ πλευρᾶς 1,80 μ. κόπτομεν κύκλον, διαμέτρου 1,60 μ., διὰ νὰ σκεπάσωμεν μίαν στρογγύλην τράπεζαν. Ὁ μουσαμᾶς στοιχίζει 76 δρχμ. τὸ τετρ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τοῦ μουσαμᾶ, ὁ ὁποῖος δὲν ἐχρησιμοποιήθη ;

135. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα, τὴν διάμετρον, τὴν περιφέρειαν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς θερμάστρας τοῦ σχολείου καὶ μιᾶς γλάστρας.

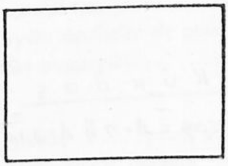
VIII. ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

Τετράγωνον



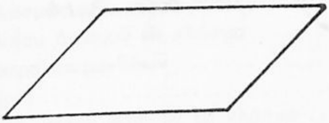
Περίμ. = πλ. · 4
πλ. = περιμ : 4
Ἐμβ. = πλ. · πλ.

Ὀρθογώνιον



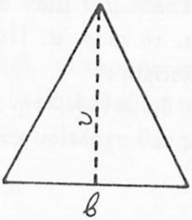
περίμ. = (Β+υ) · 2
Ἐμβ. = Β · υ

Παραλληλόγραμμον



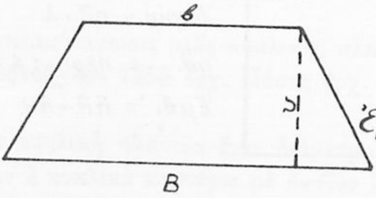
Ἐμβ. = Β · υ

Τρίγωνον



Ἐμβ. = $\frac{β \cdot υ}{2}$

Τραπέζιον



Ἐμβ. = $\frac{(β+Β) \cdot υ}{2}$

Κύκλος

Μ. περιφ. = Δ · π ἢ Δ · 3,14

ἢ 2α · 3,14

Δ = Μ. περιφ. : 3,14 $\left(\frac{Μ}{π}\right)$

Ἐμβ. = α · α · 3,14

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ', 1972 (VI) - ΑΝΤΙΤΥΠΑ 170.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2187/14.2.72
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΔΙΚΑΙΟΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΧΡΗΣΤΟΣ ΣΤ. ΧΡΗΣΤΟΥ

ΟΕ
ΔΒ