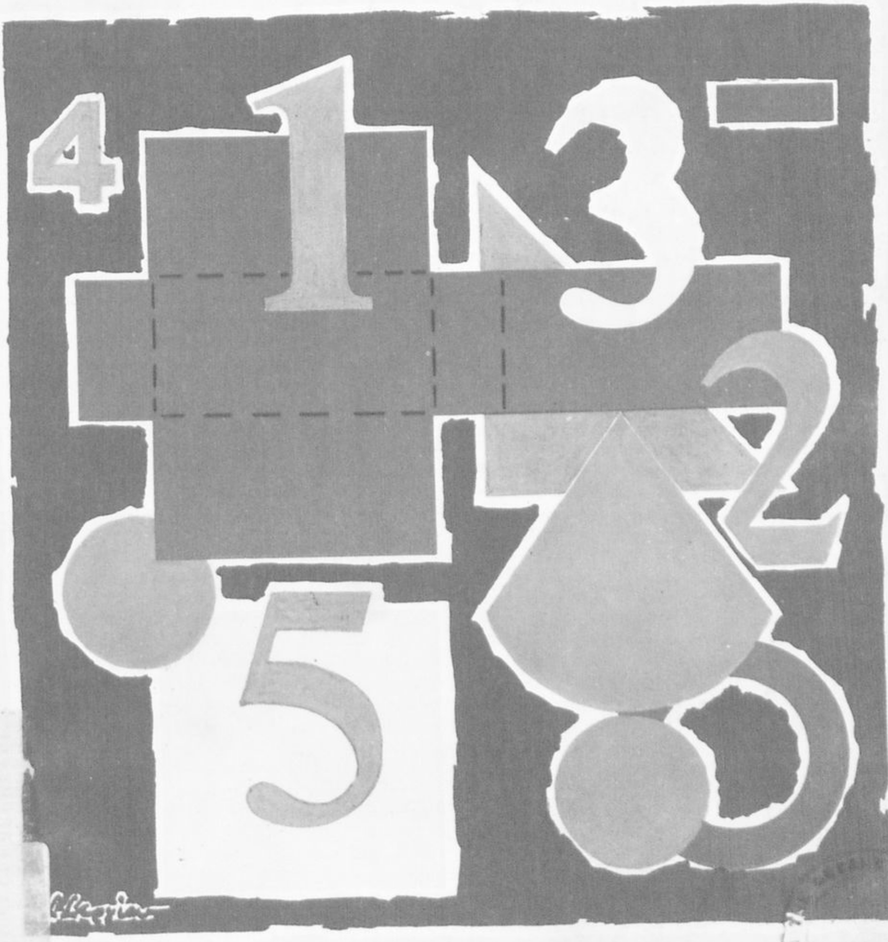
ΗΛΙΑ ΚΩΝ. ΣΑΜΑΡΑ

ἀριθμητική — γεωμετρία

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1974

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Ε/Δ 18

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΑΙ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑΝ

ΗΛΙΑ ΚΩΝ. ΣΑΜΑΡΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΚΑΙ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1974

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1

Α. ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Τὰ ἀριθμητικὰ σύμβολα ἢ ψηφία

0 μηδὲν	5 πέντε
1 ἕνα	6 ἕξι
2 δύο	7 ἑφτὰ
3 τρία	8 ὀχτὼ
4 τέσσερα	9 ἐννιὰ

Τὰ παραπάνω ἀριθμητικὰ σύμβολα ἢ ψηφία ὀνομάζονται **ἀραβικά,** διότι οἱ λαοὶ τῆς Δύσεως τὰ πῆραν ἀπὸ τοὺς Ἄραβες (κατὰ τὸν 9ο μ.Χ. αἰώνα).

2. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μᾶς εἶναι γνωστοὶ ἀπὸ τὶς προηγούμενες τάξεις. Γράφονται μὲ τὴ βοήθεια τῶν προηγούμενων δέκα ἀριθμητικῶν συμβόλων. Στὴ γραφὴ κάθε ἀκέραιου ἀριθμοῦ διακρίνομε ἕνα ὁρισμένο πλῆθος ἀπὸ ψηφία· λ.χ. τὰ σύμβολα

7, 15, 108, 2305, 18000

παριστάνουν (συμβολίζουν) ἀκέραιους ἀριθμούς. Ὁ α΄ (ἀπὸ τ' ἀριστερά) ἔχει ἕνα ψηφίο (μονοψήφιος), ὁ β΄ ἔχει δύο ψηφία (διψήφιος), ὁ γ΄ ἔχει τρία ψηφία (τριψήφιος) κλπ. Τὰ ψηφία ἑνὸς ἀκέραιου ἀριθμοῦ ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερὰ δηλώνουν (κατὰ σειρά):

μονάδες, δεκάδες (μονάδων), ἑκατοντάδες (μονάδων) κτλ. Ἔτσι, λ.χ., ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 2305 ἀναλυτικὰ γράφεται 2Χ + 3Ε + ΟΔ + 5Μ, ὅπου τὰ γράμματα Χ, Ε, Δ, Μ, δηλώνουν (κατὰ σειρά): χιλιάδες, ἑκατοντάδες δεκάδες, μονάδες.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γράψετε μὲ σύντομο τρόπο τοὺς ἀκέραιους ἀριθμούς 1Ε+ 2Δ+ 3Μ, 1Χ+ 7Ε+ 2Δ+ 6Μ, 4ΔΧ+ 5Χ+ 6Ε+ 7Δ+ 5Μ 5ΕΧ+ 6ΔΧ+ 3Χ+ ΟΕ+ 2Δ+ 8Μ.
2. Νὰ γράψετε ἀναλυτικὰ τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς 48, 156, 784, 3561, 19894.

2 Β. ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Ἔννοια, γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Ὅπως ξέρομε ἀπὸ τὴν τέταρτη τάξη, οἱ ἀριθμοὶ 3,25 0,28 5,67 εἶναι δεκαδικοί.

Σὲ κάθε δεκαδικὸ ἀριθμὸ διακρίνομε δύο μέρη· τὸ ἀκέραιο μέρος του (τὸ ἀριστερὰ ἀπὸ τὴν ὑποδιαστολή) καὶ τὸ δεκαδικὸ μέρος του (τὸ δεξιὰ ἀπὸ τὴν ὑποδιαστολή). Ἔτσι λ.χ., ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,67 ἔχει

ἀκέραιο μέρος	5 (5 ἀκέραιες μονάδες),
δεκαδικὸ μέρος	67 (ἑκατοστὰ τῆς μονάδας) καὶ
διαβάζεται:	5 ἀκέραιες μονάδες καὶ 67 ἑκατοστὰ (τῆς μονάδας).

—Τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ, ποὺ εἶναι γραμμένα δεξιὰ ἀπὸ τὴν ὑποδιαστολή, δηλώνουν κατὰ σειρὰ ἀπὸ τ' ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά: δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, δεκάκις χιλιοστὰ (τῆς μοναδας) κλπ.

Ἔτσι ὁ δεκαδικὸς 5,67 μπορεῖ νὰ διαβαστῆ[1] κι ἔτσι: 5 ἀκέραιος καὶ 6 δέκατα καὶ 7 ἑκατοστά.

Ἐπίσης ὁ δεκαδικὸς 28,492 μπορεῖ νὰ διαβαστῆ:

1. νὰ ἀπαγγελθῆ

28 ἀκέραιος καὶ 4 δέκατα καὶ 9 ἑκατοστὰ καὶ 2 χιλιοστά.

—Μπορεῖ, ἀκόμη, ἕνας δεκαδικὸς νὰ διαβάζεται **ὡς ἀκέραιος ἀριθμὸς μονάδων τῆς τελευταίας του «δεκαδικῆς τάξεως»**· λ.χ. ὁ 5,67 διαβάζεται 567 ἑκατοστὰ καὶ ὁ 28,492 διαβάζεται 28492 χιλιοστά.

—Ἂν στὸ τέλος (δεξιὰ) ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράψωμε ὁσαδήποτε μηδενικά, **δὲν ἀλλάζει ἡ «ἀξία» του**·

λ.χ. οἱ ἀριθμοὶ 3,25 3,250 3,2500 3,25000 κτλ. δηλώνουν τὸν ἴδιο δεκαδικὸ ἀριθμό.

Γι' αὐτὸ τὸ λόγο: ἂν στὸ τέλος (δεξιὰ) ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὑπάρχουν ὁσαδήποτε μηδενικά, ἐπιτρέπεται νὰ σβήσωμε ὁσαδήποτε ἀπ' αὐτὰ (δηλ. καὶ ὅλα ἀκόμη). Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα καὶ κάθε ἀκέραιος μπορεῖ νὰ γραφῆ ὡς δεκαδικός· λ.χ. ὁ 58 μπορεῖ νὰ γραφῆ 58,0 58,00 58,000 κτλ.

2. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μὲ τὸ 10, τὸ 100, τὸ 1000 κτλ.

Ὁ πολ/σμὸς καὶ ἡ διαίρεση ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ 10, τὸ 100, τὸ 1000 κτλ. γίνεται κατὰ τὸν τρόπο ποὺ δείχνουν τὰ πιὸ κάτω παραδείγματα.

Πολλαπλασιασμός.
$25,652 \times 10 = 256,52$
$25,652 \times 100 = 2565,2$
$25,652 \times 1000 = 25652$
$25,652 \times 10000 = 256520$
$25,652 \times 100000 = 2565200$ κτλ.

Ὥστε, γιὰ νὰ πολ/με ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ. ....[1]

Διαίρεση.
$25620 : 10 = 2562,0 = 2562$
$25620 : 100 = 256,20 = 256,2$
$25620 : 1000 = 25,620 = 25,62$
$25620 : 10000 = 2,5620 = 2,562$ κτλ.

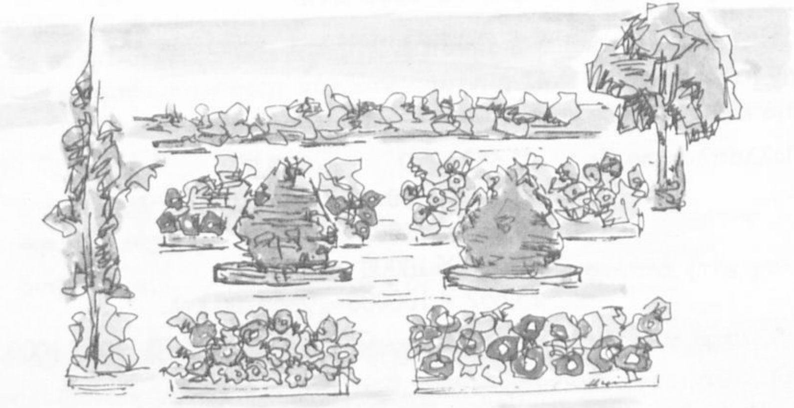
Ὥστε: ....[1]

1. Συμπληρῶστε τὸν κανόνα μόνοι σας.

Ἀσκήσεις

3. Γράψτε τοὺς παρακάτω δεκαδικοὺς ἀριθμούς:
α) ὀχτὼ ἀκέραιος καὶ πέντε δέκατα,
β) ἕξι ἀκέραιος καὶ ὀχτὼ ἑκατοστά,
γ) μηδὲν ἀκέραιος καὶ τέσσερα δέκατα,
δ) μηδὲν ἀκέραιος καὶ ἑφτὰ χιλιοστά,
ε) τρία ἀκέραιος καὶ ὀχτακόσια ἕνα χιλιοστά,
στ) ἐνενήντα δύο ἀκέραιος καὶ εἴκοσι πέντε χιλιοστά.

ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



Ὁ σχολικὸς κῆπος

Πολλὰ Δημοτικὰ Σχολεῖα, ἰδίως ἀπὸ αὐτὰ ποὺ βρίσκονται στὴν ὕπαιθρο, διαθέτουν σχολικὸ κῆπο. Στὸ σχολικὸ κῆπο οἱ μαθητὲς καλλιεργοῦν διάφορα εἴδη ἀπὸ φυτά, ἄνθη καὶ λαχανικά, κυρίως γιὰ καλλωπιστικοὺς καὶ διδακτικοὺς σκοπούς.

1. Ἡ πρόσθεση καὶ ἡ ἀφαίρεση

3

Κύριο πρόβλημα. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου ἀγόρασε δυὸ σακιὰ μὲ λίπασμα. Τὸ πρῶτο περιεῖχε 45 κιλὰ καὶ τὸ δεύτερο 46. Ἀπὸ αὐτὰ χρησιμοποίησε τὰ 36 κιλὰ γιὰ τὴ λίπανση τοῦ σχολικοῦ κήπου. Πόσα κιλὰ λιπάσματος ἀπόμειναν;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

45 κ. λιπ. **46** κ. λιπ. **36** κ. λιπ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ ποσότητα 45 κ. λίπ. ποὺ περιεῖχε τὸ α′ σακί,
β) ἡ ποσότητα 46 κ. λίπ. ποὺ περιεῖχε τὸ β′ σακί,
γ) ἡ ποσότητα τῶν 36 κ. λιπ. ποὺ χρησιμοποιήθηκε.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ συνολικὴ ποσότητα τοῦ λιπάσματος καὶ ἀπὸ τὰ δύο σακιά,
β) ἡ ποσότητα τοῦ λιπάσματος, ἡ ὁποία ἀπόμεινε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ποσότητα τοῦ λιπάσματος ποὺ περιεῖχαν καὶ τὰ δύο σακιά, θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμούς: 45 κ. λιπ. καὶ 46 κ. λιπ.

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ποσότητα τοῦ λιπάσματος, ποὺ ἀπόμεινε ἀχρησιμοποίητη, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα (45 + 46) κ. λιπ. τὰ 36 κ. λιπ.

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς προσθέσεως

$$\begin{array}{rl} 45 & \\ +46 & \textbf{Προσθετέοι} \\ \hline 91 & \textbf{Ἄθροισμα} \end{array}$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$\begin{array}{rl} 91 & \textbf{Μειωτέος} \\ -36 & \textbf{Ἀφαιρετέος} \\ \hline 55 & \textbf{Ὑπόλοιπο} \end{array}$$

Ἀπάντηση. Ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα 55 κ. λιπ.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος

Ἐπειδὴ ἡ ποσότητα τοῦ λιπάσματος, ποὺ περιέχεται σὲ κάθε σακί, εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ ἐκείνη ποὺ χρησιμοποιήθηκε, μποροῦμε νὰ ἀφαιρέσωμε: 46κ. λιπ. — 36 κ. λιπ. καὶ κατόπι νὰ προσθέσωμε στὸ ὑπόλοιπο: (46 — 36) κ. λιπ. τὰ 45 κ. λιπ.

Δηλαδή,

$$\begin{array}{r} 46 \\ -36 \\ \hline 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ +45 \\ \hline 55 \end{array}$$

Ἀπάντηση. Ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα 55 κ. λιπ.

4 **Τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα.** Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου ἀγόρασε δυὸ σακιὰ μὲ λίπασμα. Τὸ α΄ περιεῖχε 45 κιλὰ καὶ τὸ β΄ 46. Πόσα κιλὰ λιπάσματος χρησιμοποίησε ὁ συνεταιρισμὸς γιὰ τὴ λίπανση τοῦ σχολικοῦ κήπου, ἂν ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα 55 κιλά ;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

45 κ. λιπ.   **46** κ. λιπ.   **55** κ. λιπ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ ποσότητα 45 κ. λιπ. ποὺ περιεῖχε τὸ α' σακί,
β) ἡ ποσότητα 46 κ. λιπ. ποὺ περιεῖχε τὸ β' σακί,
γ) ἡ ποσότητα 55 κ. λιπ. ποὺ ἀπόμεινε ἀχρησιμοποίητη.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ συνολικὴ ποσότητα λιπάσματος τῶν δύο σακιῶν,
β) ἡ ποσότητα τοῦ λιπάσματος ποὺ χρησιμοποιήθηκε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ποσότητα τοῦ λιπάσματος ποὺ περιεῖχαν τὰ δυὸ σακιά, θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς 45 κ. λιπ. καὶ 46 κ. λιπ.

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ποσότητα τοῦ λιπάσματος, ποὺ χρησιμοποιήθηκε, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα (45 + 46) κ. λιπ. τὰ 55 κ. λιπ.

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς προσθέσεως

$$\begin{array}{r} 45 \\ +46 \\ \hline 91 \end{array}$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$\begin{array}{r} 91 \\ -55 \\ \hline 36 \end{array}$$

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς χρησιμοποίησε γιὰ τὴ λίπανση τοῦ σχολικοῦ κήπου 36 κιλὰ λιπάσματος.

Συσχετισμός. Στὸ κύριο πρόβλημα (μάθ. 3) εἶχαν δοθῆ:
α) Ἡ ποσότητα τῶν 45 κ. λιπ. ποὺ βρισκόταν στὸ α' σακί,
β) ἡ ποσότητα τῶν 46 κ. λιπ. ποὺ βρισκόταν στὸ β' σακὶ καὶ
γ) ἡ ποσότητα τῶν 36 κ. λιπ. ποὺ χρησιμοποιήθηκε. Βρήκαμε τὴν ποσότητα τῶν 55 κ. λιπ. ποὺ ἀπόμεινε ἀχρησιμοποίητη.

Στὸ ἀντίστροφο πρόβλημα εἶχαν δοθῆ:

α) ἡ ποσότητα τῶν 45 κ. λιπ. ποὺ βρισκόταν στὸ α' σακί,
β) ἡ ποσότητα τῶν 46 κ. λιπ. ποὺ βρισκόταν στὸ β' σακί καὶ
γ) ἡ ποσότητα τῶν 55 κ. λιπ. ποὺ ἀπόμεινε ἀχρησιμοποίητη.
Βρήκαμε τὴν ποσότητα τῶν 36 κ. λιπ. ποὺ χρησιμοποιήθηκε.

5

Πρόβλημα 1ο. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου ἀγόρασε δυὸ σακιὰ μὲ λίπασμα. Τὸ α' περιεῖχε 44,8 κιλὰ καὶ τὸ β' 45,6 κιλά. Ἀπὸ αὐτὰ χρησιμοποίησε 37,650 κιλὰ γιὰ τὴ λίπανση τοῦ σχολικοῦ κήπου. Πόσα κιλὰ ἀπόμειναν ἀπὸ τὸ λίπασμα ;

Λύση

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ ἀπὸ τὸ λίπασμα ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα, θὰ προσθέσωμε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 44,8 κ. λιπ. καὶ 45,6 κ. λιπ. Ἔπειτα θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα (44,8 + 45,6) κ. λιπ. τὰ 37,650 κ. λιπ. Τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀφαιρέσεως θὰ εἶναι ἡ ποσότητα λιπάσματος ποὺ ζητοῦμε καὶ ἡ ὁποία ἔμεινε ἀχρησιμοποίητη.

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς προσθέσεως

$$\begin{array}{r} 44{,}8 \\ +45{,}6 \\ \hline 90{,}4 \end{array}$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$\begin{array}{r} 90{,}400 \\ -37{,}650 \\ \hline 52{,}750 \end{array}$$

Ἀπάντηση. Ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα 52,750 κιλὰ λιπάσματος.

Πρόβλημα 2ο. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου ἀγόρασε δυὸ ρολοὺς συρματοπλέγματος. Ὁ α' ἦταν 45 μέτρα καὶ ὁ β' 46. Γιὰ τὴν περίφραξη τοῦ σχολικοῦ κήπου χρησιμοποιήθηκαν 36 μέτρα. Πόσα μέτρα ἀπόμειναν ἀπὸ τὸ συρματόπλεγμα ;

Λύση

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα μέτρα ἀπὸ τὸ συρματόπλεγμα ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα, θὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς 45μ. συρμ. + 46μ. συρμ. Ἔπειτα θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα (45 + 46) μ. συρμ. τὰ 36 μ. συρμ. Τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀφαιρέσεως θὰ εἶναι τὰ μέτρα ἀπὸ τὸ συρματόπλεγμα ποὺ ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα.

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς προσθέσεως

$$\begin{array}{r} 45 \\ +46 \\ \hline 91 \end{array}$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$\begin{array}{r} 91 \\ -36 \\ \hline 55 \end{array}$$

'Απάντηση. 'Απόμειναν ἀχρησιμοποίητα 55 μ. συρματοπλέγματος.

'Ασκήσεις

4. 'Η Ε' τάξη ἑνὸς σχολείου φύτεψε σὲ μιὰ ἔκταση κοντὰ στὸ χωριὸ 2975 δεντρύλλια πεύκων καὶ ἡ ΣΤ' 3029. 'Από αὐτὰ τὰ 1439 ξεράθηκαν. Πόσα δεντρύλλια ἀναπτύχτηκαν ;

Σημείωση. Νὰ λύσετε τὸ πρόβλημα αὐτό. Νὰ βρῆτε καὶ ἄλλον τρόπο λύσεως. Νὰ συντάξετε καὶ νὰ λύσετε τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα καὶ τέλος νὰ λύσετε τὸ κύριο πρόβλημα α) μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ β) μὲ ἄλλα ἀντικείμενα.

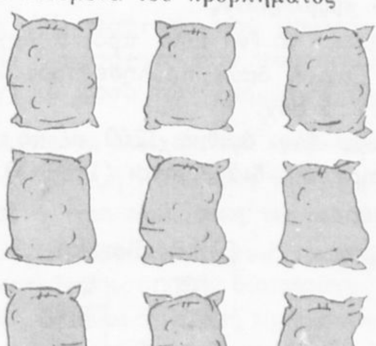
5. 'Ο συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου εἰσέπραξε τὸ Α' ἑξάμηνο τοῦ περασμένου ἔτους 4625,50 δρχ. καὶ τὸ Β' 3965,50. 'Από αὐτὲς ξόδεψε 6395,80 δρχ. Πόσες δρχ. εἶχε στὸ ταμεῖο του στὴν ἀρχὴ αὐτοῦ τοῦ ἔτους ;

Σημείωση. Νὰ κάνετε καὶ σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα ὅ,τι ἀκριβῶς κάνατε καὶ στὸ προηγούμενο.

2. 'Ο πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεση

6 **Κύριο πρόβλημα.** 'Ο συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου πούλησε 1260 κιλὰ πατάτες πρὸς 5 δρχ. τὰ 2 κιλά. Πόσες δρχ. εἰσέπραξε ;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



1260 κ. πατ. **5** δρχ. τὰ **2** κ. πατ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ ποσότητα τῆς πατάτας ποὺ πουλήθηκε· 1260 κ.,

β) ἡ τιμὴ πωλήσεως τῶν 2 κ. πατάτας· 5 δρχ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἑνὸς κιλοῦ πατάτας,

β) τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ εἰσπράχτηκε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ πατάτας, θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὶς 5 δρχ. διὰ 2.

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ εἰσπράχτηκε θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε 1260 κ. πατ. ἐπὶ (5 : 2).

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς διαιρέσεως

Διαιρετέος	5	2	**Διαιρέτης**
	10	2,50	**Πηλίκο**
Ὑπόλοιπο	00	← **Σημ. διαιρέσ.**	

β) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

12 60	**Πολ/στέος**
× 2,50	**Πολ/στὴς**
63 0	**Μερικὰ γινόμενα**
252	
315 0,00	**Ὁλικὸ γινόμενο**

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς εἰσέπραξε 3150 δραχμές.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος

Ἂν ὁ συνεταιρισμος πουλοῦσε τὸ ἕνα κιλὸ πρὸς 5 δρχ., θὰ εἰσέπραττε (1260X5) δρχ. Ἐπειδὴ ὅμως πούλησε πρὸς 5 δρχ. τὰ 2 κιλά, εἰσέπραξε (1260X5) : 2 δρχ.

Ἄρα θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 1260 μὲ τὸ 5 καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ 2, ἤτοι (1260X5) : 2.

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{array}{r} 1260 \\ \times\ 5 \\ \hline 6300 \end{array}$$

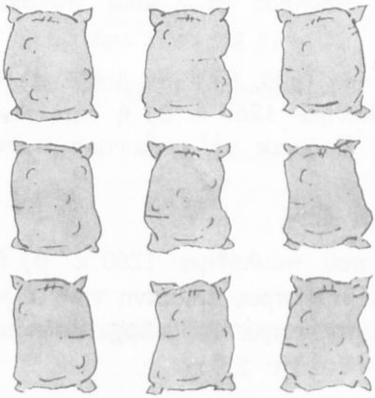
β) τῆς διαιρέσεως

6300	2
03	3150
10	
00	

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς εἰσέπραξε 3150 δραχμές.

7 **Τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα.** Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου πούλησε 1260 κιλὰ πατάτες πρὸς ἕνα ὁρισμένο χρηματικὸ ποσὸ τὰ 2 κιλὰ καὶ εἰσέπραξε 3150 δρχ. Πόσο πούλησε τὰ 2 κιλὰ πατάτες ;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



1260 κ. πατ. **2** κ. πατ. **3150** δρχ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ ποσότητα ποὺ πουλήθηκε· 1260 κ. πατ.,
β) ἡ ποσότητα ποὺ πουλήθηκε μὲ ὁρισμένη τιμή· 2 κ. πατ.,
γ) τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ εἰσπράχτηκε· 3150 δρχ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἑνὸς κιλοῦ πατάτας,
β) ἡ τιμὴ πωλήσεως τῆς ποσότητας τῶν 2 κ. πατ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἑνὸς κιλοῦ πατάτας θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε 3150 δρχ. διὰ 1260. Ἔπειτα, ἐπειδὴ ζητοῦμε τὴν τιμὴ πωλήσεως τῆς ποσότητας τῶν 2 κ. πατ., θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε (3150 : 1260) δρχ. ἐπὶ 2.

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς διαιρέσεως

3150	1260
6300	2,5
0000	

β) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 2 \\ \hline 5{,}0 \end{array}$$

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς πούλησε τὰ 2 κιλὰ πατάτες πρὸς 5 δρχ.

Συσχετισμός. Στὸ κύριο πρόβλημα (μάθ. 6) εἶχαν δοθῆ: α) ἡ ποσότητα τῆς πατάτας ποὺ πουλήθηκε· 1260 κ. β) ἡ τιμὴ πωλήσεως τῶν 2 κ. πατάτας· 5 δρχ. Βρήκαμε τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ εἰσπράχτηκε· 3150 δρχ.

Στὸ ἀντίστροφο πρόβλημα εἶχαν δοθῆ :

α) ἡ ποσότητα τῆς πατάτας ποὺ πουλήθηκε· 1260 κ. β) ἡ ποσότητα τῆς πατάτας ποὺ πουλήθηκε πρὸς ὁρισμένη τιμή· 2 κ. καὶ γ) τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ εἰσπράχτηκε· 3150 δρχ. Βρήκαμε τὴν τιμὴ πωλήσεως τῶν 2 κιλῶν πατάτας· 5 δρχ.

8 **Πρόβλημα 1ο.** Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου πούλησε 525,6 κιλὰ πατάτες πρὸς 17,5 δρχ. τὰ 5 κιλά. Πόσες δρχ. εἰσέπραξε;

Λύση. Ἐπειδὴ τὰ 5 κ. πατ. πουλήθηκαν πρὸς 17,5 δρχ., τὸ 1 κιλὸ πουλήθηκε 17,5 : 5 δρχ. καὶ τὰ 525,6 κιλὰ πατάτας πουλήθηκαν 525,6 × (17,5 : 5) δρχ. Ἑπομένως στὴν ἀρχὴ θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε 17,5 διὰ 5 καὶ ἔπειτα θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε 525,6 ἐπὶ (17,5 : 5).

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς διαιρέσεως

17,5	5
25	3,5
0	

β) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{array}{r} 525{,}6 \\ \times\ 3{,}5 \\ \hline 26280 \\ 15768 \\ \hline 1839{,}60 \end{array}$$

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς εἰσέπραξε 1839,60 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου πούλησε 1260 κιλὰ κρεμμύδια πρὸς 5 δρχ. τὰ 2 κιλά. Πόσες δρχ. εἰσέπραξε;

Λύση. Ἐπειδὴ τὰ 2 κ. κρ. πουλήθηκαν πρὸς 5 δρχ., τὸ 1 κιλὸ πουλήθηκε 5 : 2 δρχ. καὶ τὰ 1260 κ. κρ., 1260Χ(5 : 2) δρχ. Συνεπῶς θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε 5 διὰ 2 καὶ ἔπειτα θὰ πολλαπλασιάσωμε 1260 ἐπὶ (5 : 2).

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς διαιρέσεως   β) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 2{,}5 \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 126\,0 \\ \times\ 2{,}5 \\ \hline 630\,0 \\ 2520 \\ \hline 3150{,}0 \end{array}$$

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς εἰσέπραξε 3150 δρχ.

Ἀσκήσεις

6. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου πούλησε 108 τριαντάφυλλα πρὸς 15,50 δρχ. τὸ ἕνα. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ πῆρε, ἀγόρασε 186 τετράδια. Πόσο ἀγόρασε τὸ ἕνα ;

Σημείωση. Νὰ λύσετε αὐτὸ τὸ πρόβλημα. Νὰ βρῆτε καὶ ἄλλο τρόπο λύσεως. Νὰ συντάξετε καὶ νὰ λύσετε τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα καὶ τέλος νὰ λύσετε τὸ κύριο πρόβλημα α) μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ β) μὲ ἄλλα διάφορα πράγματα.

7. Σ' ἕνα ὀρεινὸ δημοτικὸ σχολεῖο οἱ μαθητὲς τῆς Ε' τάξεως μάζεψαν καὶ πούλησαν 118,5 κιλὰ καρύδια πρὸς 24 δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα, ποὺ πῆραν, ἀγόρασαν 18 τόμους βιβλίων μὲ τὴν ἴδια τιμὴ τὸν κάθε τόμο. Πόσο ἀγόρασαν τὸν ἕνα τόμο ;

Σημείωση. Νὰ κάνετε καὶ σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα ὅ,τι ἀκριβῶς κάνατε καὶ στὸ προηγούμενο.

Γ. ΟΙ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α. ΓΕΝΙΚΑ

9

1. Ἔννοια τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν

Οἱ ἀριθμοὶ

5 μέτρα 6 δεκατόμετρα 75 χιλιοστόμετρα καλωδίου,
4 τόννοι 800 κιλὰ 300 γραμμάρια σιταριοῦ,
3 ὧρες 8^{λ} 20^{δ}, εἶναι, ὅπως ξέρομε, συμμιγεῖς ἀριθμοί.

2. Ἀπαγγελία τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν

Σὲ κάθε συμμιγῆ ἀριθμὸ τόσο ἡ «ἀρχικὴ μονάδα», ὅσο καὶ οἱ ὑποδιαιρέσεις της, ἀπαγγέλλονται καθεμιὰ μὲ τὸ ὄνομά της· π.χ. 10 δρχ. 80 λεπτά, 5 κιλὰ 600 γραμμάρια κτλ.

Οἱ βασικὲς μονάδες μετρήσεως εἶναι οἱ ἑξῆς:

α) Οἱ μονάδες μετρήσεως τοῦ χρόνου

Βασικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ἡμέρα.

Οἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἡμέρας

1 ἡμέρα (=ἕνα ἡμερονύχτιο) =24 ὧρες,
1 ὥρα =60 πρῶτα λεπτὰ $=60^{\lambda}$,
1 λεπτὸ =60 δευτερόλεπτα $=60^{\delta}$.

Τὰ πολλαπλάσια τῆς ἡμέρας

1 ἑβδομάδα	=	7 ἡμέρες,	
1 μήνας	=	30 ἡμέρες,	
1 πολιτικὸ ἔτος	=	365 ἡμέρες	
1 δίσεκτο ἔτος	=	366 ἡμέρες	= 12 μῆνες,
1 ἐμπορικὸ ἔτος	=	360 ἡμέρες	
1 αἰώνας	=	100 ἔτη,	
1 χιλιετηρίδα	=	1000 ἔτη.	

Ἀσκήσεις

8. Μὲ πόσα δευτερόλεπτα ἰσοδυναμεῖ μιὰ ἑβδομάδα;
9. Μὲ πόσους μῆνες ἰσοδυναμοῦν δυὸ αἰῶνες;

10

β) Οἱ μονάδες μετρήσεως τοῦ μήκους

Βασικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους εἶναι τὸ γαλλικὸ μέτρο.

Οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ γαλλικοῦ μέτρου

Τὸ μέτρο ὑποδιαιρεῖται σὲ 10 δεκατόμετρα. Κάθε δεκατόμετρο ὑποδιαιρεῖται σὲ 10 ἑκατοστόμετρα καὶ κάθε ἑκατοστόμετρο σὲ 10 χιλιοστόμετρα.

Ἄρα, 1 μ. = 10 δεκατ. = 100 ἑκατ. = 1000 χιλιοστ.,
1 δεκατ. = 10 ἑκατ. = 100 χιλιοστ.,
1 ἑκατ. = 10 χιλιοστ.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ γαλλικοῦ μέτρου

1 δεκάμετρο = 10 μέτρα,
1 ἑκατόμετρο = 100 μέτρα,
1 χιλιόμετρο = 1000 μέτρα.

Σημείωση[1]. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ γαλλικὸ μέτρο χρησιμοποιοῦμε καὶ τὶς ἀκόλουθες μονάδες μετρήσεως μήκους:

α) Τὸν τεκτονικὸ πήχη, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,75 μ.,

β) τὴ γιάρδα, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,914 μ.

Οἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς γιάρδας

1 γιάρδα = 3 πόδια, 1 πόδι = 12 ἴντσες,
1 πόδι ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,3047 μ.,
1 ἴντσα ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,0254 μ.

γ) τὸ ναυτικὸ μίλι, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1852 μ.,

δ) τὸ ἀγγλικὸ μίλι, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1609 μ.,

ε) τὴ ναυτικὴ λεύγα, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 5556 μ.

γ) Οἱ μονάδες μετρήσεως τοῦ βάρους

Βασικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ βάρους τῶν σωμάτων εἶναι τὸ χιλιόγραμμο ἢ κιλό.

1 χιλιόγραμμο εἶναι ἴσο μὲ 1000 γραμμάρια.
Πολλαπλάσιο τοῦ κιλοῦ εἶναι ὁ τόννος.
1 τόννος ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 χιλιόγραμμα (κιλά).

Σημείωση[1]. Ἄλλες μονάδες μετρήσεως βάρους εἶναι:

α) Τὸ καράτι, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,2 τοῦ γραμμαρίου,

1. Ἡ ἀπομνημόνευση τῆς σημειώσεως αὐτῆς δὲν εἶναι ὑποχρεωτικὴ γιὰ τὸ μαθητή.

β) ἡ λίμπρα, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 453,55 γραμμάρια.

Ἡ λίμπρα (ποὺ χρησιμοποιεῖται στὴν Ἀγγλία μόνο) ὑποδιαιρεῖται σὲ 16 οὐγγιές.

Ἀσκήσεις

10. Μὲ πόσες γιάρδες ἰσοδυναμοῦν 4.750 μέτρα ὕψος;
11. Μὲ πόσα κιλὰ ἰσοδυναμοῦν 235 τόννοι ἀπὸ σιτάρι;

11

δ) Οἱ μονάδες μετρήσεως τῶν νομισμάτων

Βασικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ ἑλληνικοῦ νομίσματος εἶναι ἡ δραχμή, ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 λεπτά. (1 δρχ. = 100 λεπτά).

Χρησιμοποιοῦνται δυὸ εἴδη νομισμάτων: τὰ μεταλλικὰ καὶ τὰ χάρτινα. Τὰ μεταλλικὰ λέγονται κέρματα καὶ τὰ χάρτινα χαρτονομίσματα.

Τὰ κέρματα εἶναι:

α) μικρότερα ἀπὸ τὴ δραχμὴ τὰ ἑξῆς:
τὸ πεντάλεπτο (1 πεντάλ. = 0,05 δρχ.),
τὸ δεκάλεπτο (1 δεκάλ. = 0,10 δρχ.),
τὸ εἰκοσάλεπτο (1 εἰκοσάλ. = 0,20 δρχ.),
τὸ πενηντάλεπτο (1 πενηντάλ. = 0,50 δρχ.),

β) μεγαλύτερα ἀπὸ τὴ δραχμὴ τὰ ἑξῆς:
τὸ δίδραχμο ἢ δίφραγκο (1 δίδρχ. = 2 δρχ.),
τὸ τάλιρο (1 τάλ. = 5 δρχ.), τὸ δεκάρικο (1 δεκάρ. = 10 δρχ.),
τὸ εἰκοσάρικο (1 εἰκοσάρ. = 20 δρχ.).

Τὰ χαρτονομίσματα εἶναι τὰ ἑξῆς:
τὸ πενηντάρικο (1 πενηντ. = 50 δρχ.),
τὸ ἑκατοστάρικο (1 ἑκατοστ. = 100 δρχ.),
τὸ πεντακοσάρικο (1 πεντ. = 500 δρχ.),
τὸ χιλιάρικο (1 χιλ. = 1000 δρχ.).

Κάθε κράτος ἔχει τὸ δικό του νόμισμα (ἐθνικὸ νόμισμα).

Ἡ Γερμανία ἔχει τὸ μάρκο (ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 πφένιχ).

Ἡ Ἀμερικὴ ἔχει τὸ δολάριο. Τὸ δολάριο ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 σέντς· (1 δολ. = 30 δρχ.).

Ἡ Ἀγγλία ἔχει τὴ λίρα ἢ στερλίνα. Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 πένες.

Ἡ Ἰταλία ἔχει τὴ λιρέτα. Ἡ λιρέτα ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 τσεντέσιμα.

Ἡ Γαλλία, ἡ Ἑλβετία καὶ τὸ Βέλγιο ἔχουν τὸ φράγκο. Τὸ φράγκο ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 σαντίμ.

Ἡ Τουρκία καὶ ἡ Αἴγυπτος ἔχουν τὴ λίρα, ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται σὲ 100 γρόσια.

Ἡ Γιουγκοσλαβία ἔχει τὸ δηνάριο.

ε) Οἱ μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν

Ὅπως εἶναι γνωστὸ καὶ ἀπὸ τὴ Δ' τάξη, ὡς βασικὴ μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν χρησιμοποιεῖται διεθνῶς τὸ **τετραγωνικὸ μέτρο** (τ.μ.). Καὶ εἶναι

1 τ.μ. = 100 τ. δεκατόμετρα

1 τ. δεκατ. = 100 τ. ἑκατοστόμ.

1 τ. ἑκατοστόμ. = 100 τ. χιλιοστόμ.

Ἄρα 1 τ.μ. = 100 τ. δεκατ. = 10000 τ. ἑκατ. = 1000000 τ. χιλιοστ.

1 τ. δεκατ. = 100 τ. ἑκατ. = 10000 τ. χιλιοστ.

Ἀσκήσεις

12. Μὲ πόσες δραχμὲς ἰσοδυναμοῦν 60 δολάρια;
13. Μὲ πόσα τ. δεκατ. ἰσοδυναμοῦν 75 τ.μ. αὐλῆς;

Β. ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Ι. Ἡ πρόσθεση καὶ ἡ ἀφαίρεση

12 **Κύριο πρόβλημα.** Ἕνας σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἀγόρασε δυὸ ρολὰ ἀγκαθωτὸ σύρμα γιὰ τὴν περίφραξη ἑνὸς μέρους τοῦ σχολικοῦ κήπου. Τὸ α' ρολὸ ἦταν 7μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ. καὶ τὸ β' 6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ. Πόσο σύρμα χρησιμοποίησε ὁ συνεταιρισμός, ἂν ἀπόμεινε 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ. σύρματος;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

7 μ. **8** δεκατ. **5** ἑκατ. σύρ.
6 μ. **9** δεκατ. **6** ἑκατ. σύρ.
1 μ. **8** δεκατ. **9** ἑκατ. σύρ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ α΄ ρολοῦ σύρ.· 7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.
β) τὸ μῆκος τοῦ β΄ ρολοῦ σύρ.· 6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.
γ) τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ ἀπόμεινε· 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ χρησιμοποιήθηκε,
β) τὸ μῆκος τῶν δυὸ ρολῶν τοῦ σύρματος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῶν δυὸ ρολῶν τοῦ σύρματος, θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τοὺς συμμιγεῖς:
(7μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.) καὶ (6μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.).

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖο χρησιμοποίησε ὁ συνεταιρισμός, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ συνολικὸ μῆκος τοῦ σύρματος, τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ ἀπόμεινε· δηλαδή:
[(7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.) + (6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.)] – (1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.).

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς προσθέσεως	β) τῆς ἀφαιρέσεως
7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.	14 μ. 8 δεκατ. 1 ἑκατ.
+6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.	– 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.
14 μ. 8 δεκατ. 1 ἑκατ.	12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς χρησιμοποίησε 12μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ. σύρματος.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος

Ἐπειδὴ τὸ μῆκος τοῦ κάθε ρολοῦ μὲ σύρμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ ἀπόμεινε, μποροῦμε ν' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου ρολοῦ, τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖο ἀπόμεινε, καὶ κατόπι νὰ προσθέσωμε·

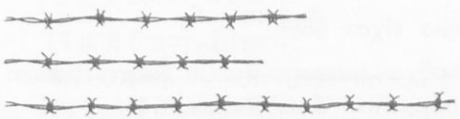
δηλαδή :

7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.	5 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.
−1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.	+6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.
5 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.	12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς χρησιμοποίησε 12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ. σύρματος.

13 **Τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα.** Ἕνας σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἀγόρασε δυὸ ρολὰ ἀγκαθωτὸ σύρμα γιὰ τὴν περίφραξη ἑνὸς μέρους ἀπὸ τὸ σχολικὸ κῆπο. Τὸ α' ρολὸ ἦταν 7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ. καὶ τὸ β' 6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ. Πόσο μῆκος ἀπόμεινε ἀπὸ τὸ σύρμα, ἂν ὁ συνεταιρισμὸς χρησιμοποίησε 12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



7 μ. **8** δεκατ. **5** ἑκατ. σύρ.
6 μ. **9** δεκατ. **6** ἑκατ. σύρ.
12 μ. **9** δεκατ. **2** ἑκατ. σύρ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ α' ρολοῦ σύρ.· 7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.,
β) τὸ μῆκος τοῦ β' ρολοῦ σύρ.· 6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.,
γ) τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ χρησιμοποιήθηκε· 12 μ., 9 δεκατ. 2 ἑκατ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῶν δυὸ ρολῶν ἀπὸ σύρμα,
β) τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ ἀπόμεινε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῶν δυὸ ρολῶν τοῦ σύρματος, θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τοὺς συμμιγεῖς : (7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.) καὶ (6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.).

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, ποὺ ἀπόμεινε, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ συνολικὸ μῆκος τοῦ σύρματος, τὸ μῆκος ἐκεῖνο ποὺ χρησιμοποιήθηκε· δηλαδή: [(7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.) + (6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.)] – (12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.).

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς προσθέσεως	β) τῆς ἀφαιρέσεως
7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.	14 μ. 8 δεκατ. 1 ἑκατ.
+6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.	–12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.
14 μ. 8 δεκατ. 1 ἑκατ.	1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.

Ἀπάντηση. Ἀπόμεινε 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ. σύρματος.

Συσχετισμός. Στὸ κύριο πρόβλημα (μάθ. 12) εἶχαν δοθῆ: α) τὸ μῆκος τοῦ α' ρολοῦ σύρματος· 7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ., β) τὸ μῆκος τοῦ β' ρολοῦ σύρματος· 6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ. καὶ γ) τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ ἀπόμεινε· 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ. Βρήκαμε τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ χρησιμοποιήθηκε· 12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.

Στὸ ἀντίστροφο πρόβλημα εἶχαν δοθῆ:

α) τὸ μῆκος τοῦ α' ρολοῦ σύρματος· 7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ., β) τὸ μῆκος τοῦ β' ρολοῦ σύρματος· 6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ. καὶ γ) τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ χρησιμοποιήθηκε· 12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ. Βρήκαμε τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ ἀπόμεινε· 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.

14

Πρόβλημα 1ο. Ἕνας σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἀγόρασε δυὸ ρολὰ ἀγκαθωτὸ σύρμα γιὰ τὴν περίφραξη ἑνὸς μέρους ἀπὸ τὸ σχολικὸ κῆπο. Τὸ α' ρολὸ ἦταν 18 μ. 7 δεκατ. 8 ἑκατ. καὶ τὸ β' 16 μ. 6 δεκατ. 4 ἑκατ. Τί μῆκος σύρματος χρησιμοποίησε ὁ συνεταιρισμός, ἂν ἀπόμειναν 3 μ. 9 δεκατ. 7 ἑκατ. σύρματος;

Λύση. Ὁ συνεταιρισμὸς ἀγόρασε συνολικὰ σύρμα μήκους (18 μ. 7 δεκατ. 8 ἑκατ.) + (16 μ. 6 δεκατ. 4 ἑκατ.).

Συνεπῶς, ἀφοῦ ἀπόμειναν ἀχρησιμοποίητα 3 μ. 9 δεκατ. 7 ἑκατ. σύρματος, χρησιμοποίησε σύρμα μήκους [(18 μ. 7 δεκατ. 8 ἑκατ.) + (16μ. 6 δεκατ. 4 ἑκατ.)] – (3 μ. 9 δεκατ. 7 ἑκατ.).

Ἐκτελοῦμε τώρα τὶς πράξεις

α) τῆς προσθέσεως	β) τῆς ἀφαιρέσεως
18 μ. 7 δεκατ. 8 ἑκατ.	35 μ. 4 δεκατ. 2 ἑκατ.
+16 μ. 6 δεκατ. 4 ἑκατ.	— 3 μ. 9 δεκατ. 7 ἑκατ.
35 μ. 4 δεκατ. 2 ἑκατ.	31 μ. 4 δεκατ. 5 ἑκατ.

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς χρησιμοποίησε 31 μ. 4 δεκατ. 5 ἑκατ. σύρματος.

Πρόβλημα 2ο. Ἕνας σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἀγόρασε δυὸ λαστιχένιους σωλῆνες γιὰ τὴν ἄρδευση τοῦ σχολικοῦ κήπου. Ὁ α' ἦταν 7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ. καὶ ὁ β' 6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ. Τί μῆκος σωλήνα χρησιμοποίησε ὁ συνεταιρισμός, ἂν ἀπόμειναν 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.

Λύση. Σύμφωνα μ' αὐτὰ ποὺ εἴπαμε παραπάνω (μάθημ. 12), θὰ ἔχωμε:

7 μ. 8 δεκατ. 5 ἑκατ.	14μ. 8 δεκατ. 1 ἑκατ.
+6 μ. 9 δεκατ. 6 ἑκατ.	— 1 μ. 8 δεκατ. 9 ἑκατ.
14 μ. 8 δεκατ. 1 ἑκατ.	12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς χρησιμοποίησε ἀπὸ τὸ σωλήνα τὰ 12 μ. 9 δεκατ. 2 ἑκατ.

Ἄσκηση

14. Ἕνας σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἀγόρασε δυὸ φορτία ζωικὴ κοπριὰ γιὰ τὴ λίπανση τοῦ σχολικοῦ κήπου. Τὸ α' φορτίο ζύγιζε 4 τόννους 56 κιλὰ 720 γραμμάρια καὶ τὸ β' 3 τόννους 685 κιλὰ 980 γραμμάρια. Πόσο βάρος ἀπὸ τὴν κοπριὰ χρησιμοποιήθηκε, ἂν περίσσεψαν 608 κιλὰ 750 γραμμάρια;

Σημείωση. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ νὰ τὸ λύσετε. Νὰ βρῆτε καὶ ἄλλο τρόπο λύσεως. Νὰ συντάξετε καὶ νὰ λύσετε τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα καὶ τέλος νὰ λύσετε τὸ κύριο πρόβλημα α) μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ β) μὲ ἄλλα πράγματα.

15

2. Ὁ πολλαπλασιασμὸς

Πρόβλημα. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου ἀγόρασε 3 κουτιὰ φυτοφάρμακο γιὰ τὸν ψεκασμὸ τῶν φυτῶν τοῦ σχολικοῦ κήπου. Ἂν τὸ κάθε κουτὶ περιεῖχε 4 κιλὰ καὶ 350 γραμμάρια, πόσο βάρος ἀπὸ τὸ φυτοφάρμακο ἀγόρασε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

4 κ. **350** γρ. φυτ. 4 κ. **350** γρ. φυτ. 4 κ. **350** γρ. φυτ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ὁ ἀριθμὸς τῶν κουτιῶν ποὺ ἀγοράστηκαν· 3,

β) τὸ περιεχόμενο κάθε κουτιοῦ· 4 κ. καὶ 350 γρ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

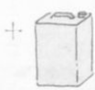
Τὸ βάρος ποὺ εἶχε τὸ φυτοφάρμακο καὶ στὰ 3 κουτιὰ μαζί.

Ἀφοῦ τὸ 1 κουτὶ περιεῖχε 4 κ. καὶ 350 γρ., τὰ 2 κουτιὰ περιεῖχαν 2 φορὲς τὰ 4 κ. καὶ 350 γρ. καὶ τὰ 3 κουτιά, 3 φορὲς τὰ 4 κ. καὶ 350 γρ. φυτοφαρμάκου. Συνεπῶς, γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ φυτοφαρμάκου ἀγόρασε ὁ συνεταιρισμός, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ συμμιγῆ 4 κ. καὶ 350 γρ. (δηλαδὴ τὸ περιεχόμενο τοῦ ἑνὸς κουτιοῦ) ἐπὶ 3 (ὅσα ἦταν τὰ κουτιά). Δηλαδὴ θὰ ὑπολογίσωμε τὸ γινόμενο (4 κ. 350 γρ.)X3.

Ἡ λύση τοῦ προβλήματος σχηματογραφικὰ

4 κ. **350** γρ.

4 κ. **350** γρ.



4 κ. **350** γρ.

12 κ. **1050** γρ., ἤτοι

13 κ. **50** γρ.

Ἀπάντηση. Ὁ συνεταιρισμὸς ἀγόρασε 13 κ. 50 γρ. φυτοφαρμάκου.

Πρακτικὴ λύση τοῦ προβλήματος

$$\begin{array}{rrr} & 4 \text{ κ.} & 350 \text{ γρ.} \\ \times & & 3 \\ \hline & 12 \text{ κ.} & 1050 \text{ γρ., ἤτοι} \\ & 13 \text{ κ.} & 50 \text{ γρ.} \end{array}$$

Ἀσκήσεις

15. Νὰ κάνετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμοὺς (κατὰ τὸν τρόπο, ποὺ εἴδαμε στὸ πιὸ πάνω παράδειγμα):

α) (8 δρχ. 70 λεπτὰ) X 10, β) (10 ὧρες 35^{λ} 42^{δ}) X 8

16. Ἕνας σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἀγόρασε 60 μ. 5 δεκατ. 8 ἑκατ. καλωδίου πρὸς 5 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσα χρήματα πλήρωσε;

16

3. Ἡ διαίρεση

Πρόβλημα. Δυὸ μαθητὲς τῆς Δ΄ τάξεως μοίρασαν ἕνα κομμάτι σχοινί, ποὺ εἶχε μῆκος 8 μ. 3 δεκατ. 6 ἑκατ. σὲ δυὸ ἴσα τμήματα. Πόσο μῆκος εἶχε κάθε τμῆμα ;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὸ σχοινὶ (**8** μ. **3** δεκατ. **6** ἑκατ.)

Ἀριθμὸς ἴσων τμημάτων ποὺ μοιράστηκε· **2**

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος ποὺ εἶχε τὸ σχοινί· 8 μ. 3 δεκατ. 6 ἑκατ.

β) πόσα ἴσα τμήματα ἔγινε τὸ σχοινί· 2.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ μῆκος ποὺ εἶχε κάθε τμῆμα τοῦ σχοινιοῦ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος καθενὸς ἀπὸ τὰ δυὸ ἴσα τμήματα, θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸ συμμιγῆ 8 μ. 3 δεκατ. 6 ἑκατ. μὲ τὸν ἀκέραιο 2· δηλαδή:

(8 μ. 3 δεκατ. 6 ἑκατ.) : 2

Ἡ λύση τοῦ προβλήματος σχηματογραφικὰ

8 μ. **3** δεκατ. **6** ἑκατ. : **2**	
4 μ. **1** δεκατ. **8** ἑκατ.	**4** μ. **1** δεκατ. **8** ἑκατ.

Οἱ δυὸ μαθητὲς χρησιμοποίησαν τὸ δεκάμετρο. Τὸ δεκάμετρο εἶναι μιὰ ταινία μὲ μῆκος 10 μέτρων. Τοποθέτησαν τὸ δεκάμετρο πάνω στὸ κομμάτι τοῦ σχοινιοῦ ἔτσι, ὥστε ἡ ἀρχή του νὰ συμπέση μὲ τὴ μιὰ ἄκρη τοῦ σχοινιοῦ. Ἔπειτα βρῆκαν τὴ μέση τοῦ κομματιοῦ τοῦ σχοινιοῦ καὶ διπλώνοντάς το τὸ ἔκοψαν. Κάθε τμῆμα τοῦ σχοινιοῦ ἀπὸ τὰ δυὸ εἶναι ἴσο μὲ 4 μ. 1 δεκατ. 8 ἑκατ.

Πρακτικὴ λύση τοῦ προβλήματος

```
8 μ.  3 δεκατ. 6 ἑκατ.  | 2
0     1 δεκατ.          |________________________
     ×10 δεκατ.         | 4 μ.  1 δεκατ.  8 ἑκατ.
     __________
      10 ἑκατ.
      +6 ἑκατ.
     __________
      16 ἑκατ.
       0
```

Ἀπάντηση. Τὸ μῆκος κάθε τμήματος ἦταν 4 μ. 1 δεκατ. 8 ἑκατ.

Ἄσκηση

17. Νὰ κάνετε τὶς παρακάτω διαιρέσεις (κατὰ τὸν τρόπο, ποὺ εἴδαμε στὸ πιὸ πάνω παράδειγμα):

α) (2 τόν. 350 κ. 200 γρ.) : 3 β) (1850 δρχ. 70 λεπτά) : 6

Γ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ — ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

17

Κύριο πρόβλημα. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου, ποὺ εἶναι ξυλουργός, ἀγόρασε 5 σανίδες μὲ μῆκος 3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ. τὴν καθεμιά. Τὶς σανίδες αὐτὲς τὶς ἔκοψε σὲ 61 ἴσα τεμάχια, γιὰ νὰ ἐπισκευάση μιὰ σχολικὴ βιβλιοθήκη. Πόσο μῆκος εἶχε κάθε τεμάχιο;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

3 μ. **6** δεκατ. **6** ἑκατ.

σανίδα **5** σανίδες, **61** τεμάχια.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῆς μιᾶς σανίδας· 3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.,

β) ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν σανίδων· 5,

γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν τεμαχίων (σὲ πόσα ἴσα κομμάτια ἔκοψε τὶς 5 σανίδες ὁ ξυλουργὸς) 61.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ συνολικὸ μῆκος ποὺ εἶχαν οἱ 5 σανίδες,

β) τὸ μῆκος ποὺ εἶχε καθένα ἀπὸ τὰ 61 ἴσα τεμάχια.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν 5 σανίδων, θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ συμμιγῆ (3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.) ἐπὶ τὸν ἀκέραιο 5. Ἔπειτα, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τοῦ κάθε τεμαχίου, θὰ κάνωμε τὴ διαίρεση· δηλ.
[(3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.) X 5] : 61

Καὶ τώρα κάνομε τὶς πράξεις

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

3 μ.	6 δεκατ.	6 ἑκατ.
×		5
15 μ.	30 δεκατ.	30 ἑκατ.
18 μ.	3 δεκατ.	

β) τῆς διαιρέσεως

18 μ. 3 δεκατ.	61
× 10 δεκατ.	3 δεκατ.
180 δεκατ.	
+ 3 δεκατ.	
183 δεκατ.	
00	

Ἀπάντηση. Κάθε τεμάχιο εἶχε μῆκος 3 δεκατ.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος

Ἂν ἦταν δυνατὸ νὰ κόψη ὁ ξυλουργὸς κάθε σανίδα σὲ 61 τεμάχια, τὸ κάθε τεμάχιο θὰ εἶχε μῆκος (3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.): 61. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ σανίδες ἦταν 5, τὸ μῆκος κάθε τεμαχίου θὰ ἦταν [(3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.) : 61] X 5.

Καὶ τώρα κάνομε τὶς πράξεις

α) τῆς διαιρέσεως

3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.	61
× 10 δεκατ.	6 ἑκατ.
30 δεκατ.	
+ 6 δεκατ.	
36 δεκατ.	
× 10 ἑκατ.	
360 ἑκατ.	
+ 6 ἑκατ.	
366 ἑκατ.	
00	

β) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

6 ἑκατ.
× 5
30 ἑκατ.
30 ἑκατ. = 3 δεκατ.

Ἀπάντηση. Κάθε τεμάχιο εἶχε μῆκος 3 δεκατ.

18 **Τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα.** Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου, ποὺ εἶναι ξυλουργός, ἀγόρασε 5 σανίδες μὲ μῆκος 3μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ. τὴν καθεμιά. Τὶς σανίδες αὐτὲς τὶς ἔκοψε σὲ ἴσα τεμάχια, ποὺ τὸ καθένα εἶχε μῆκος 3 δεκατ., γιὰ νὰ ἐπισκευάση μιὰ βιβλιοθήκη. Πόσα τέτοια τεμάχια ἔκοψε συνολικά;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

3 μ. **6** δεκατ. **6** ἑκατ., **5** σανίδες, **3** μέτρα

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῆς κάθε σανίδας· 3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.,
β) ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν σανίδων· 5,
γ) τὸ μῆκος ποὺ εἶχε κάθε τεμάχιο, ἀπ' αὐτὰ ποὺ ὁ ξυλουργὸς ἔκοψε τὶς 5 σανίδες· 3 δεκατ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν 5 σανίδων,
β) ὁ ἀριθμὸς τῶν τεμαχίων ποὺ ἔκοψε ὁ ξυλουργός.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν 5 σανίδων, θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ συμμιγῆ (3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.) ἐπὶ τὸν ἀκέραιο 5. Ἔπειτα, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἀριθμὸ τῶν τεμαχίων, θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμὸ [(3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.) × 5] διὰ 3.

Καὶ τώρα κάνομε τὶς πράξεις

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

```
   3 μ.    6 δεκατ.   6 ἑκατ.
×                     5
---------------------------
  15 μ.   30 δεκατ.  30 ἑκατ.
  18 μ.    3 δεκατ.
```

β) τῆς διαιρέσεως

```
   18 μ. 3 δεκατ.  | 3
×  10 δεκατ.       |--------
-----------------  | 61 τεμ.
  180 δεκατ.       |
+   3 δεκατ.       |
-----------------  |
  183 δεκατ.       |
   03 δεκατ.       |
    0              |
```

Ἀπάντηση. Ὁ ξυλουργὸς ἔκοψε 61 τεμάχια.

Συσχετισμός. Στὸ κύριο πρόβλημα (μάθ. 17) εἶχαν δοθῆ:

α) τὸ μῆκος ποὺ εἶχε κάθε σανίδα· 3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ., β) ὁ ἀριθμὸς τῶν σανίδων· 5 καὶ γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν τεμαχίων· 61.

Βρήκαμε τὸ μῆκος κάθε τεμαχίου· 3 δεκατ.

Στὸ ἀντίστροφο πρόβλημα εἶχαν δοθῆ:

α) τὸ μῆκος τῆς μιᾶς σανίδας· 3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ., β) ὁ ἀριθμὸς τῶν σανίδων· 5 καὶ γ) τὸ μῆκος καθενὸς ἀπὸ τὰ ἴσα τεμάχια, ἀπ' αὐτὰ ποὺ ὁ ξυλουργὸς ἔκοψε τὶς 5 σανίδες. Βρήκαμε τὸν ἀριθμὸ τῶν τεμαχίων ποὺ ἔκοψε ὁ ξυλουργός· 61.

19

Πρόβλημα 1ο. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου, ποὺ εἶναι ξυλουργός, ἀγόρασε 8 σανίδες, ποὺ τὸ μῆκος καθεμιᾶς ἦταν 5 μ. 4 δεκατ. 5 ἑκατ. Τὶς σανίδες αὐτὲς τὶς ἔκοψε σὲ 109 ἴσα τεμάχια, γιὰ νὰ ἐπισκευάση μιὰ σχολικὴ βιβλιοθήκη. Ποιό ἦταν τὸ μῆκος κάθε τεμαχίου;

Λύση. Ὁ ξυλουργὸς ἀγόρασε συνολικὰ σανίδες μήκους (5 μ. 4 δεκατ. 5 ἑκατ.) × 8. Συνεπῶς τὸ μῆκος καθενὸς ἀπὸ τὰ 109 ἴσα τεμάχια, στὰ ὁποῖα τὶς ἔκοψε, ἦταν [(5 μ. 4 δεκατ. 5 ἑκατ.) × 8] : 109

Καὶ τώρα κάνομε τὶς πράξεις

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ	β) τῆς διαιρέσεως	
5 μ. 4 δεκατ. 5 ἑκατ.	43 μ. 6 δεκατ.	109
× 8	× 10 δεκατ	4 δεκατ.
40 μ. 32 δεκατ. 40 ἑκατ.	430 δεκατ.	
40 μ. 36 δεκατ. 0 ἑκατ.	+ 6 δεκατ.	
43 μ. 6 δεκατ.	436 δεκατ.	
	0	

Ἀπάντηση. Τὸ μῆκος κάθε τεμαχίου ἦταν 4 δεκατ.

Πρόβλημα 2ο. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου, ποὺ εἶναι ξυλουργός, ἀγόρασε 5 μεταλλικὲς ταινίες, μήκους 3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ. τὴν καθεμιά. Τὶς ταινίες αὐτὲς τὶς ἔκοψε σὲ 61 ἴσα τεμάχια, γιὰ νὰ ἐπισκευάση παλιὰ τελάρα. Πόσο μῆκος εἶχε τὸ κάθε τεμάχιο;

Λύση. Ὁ ξυλουργὸς ἀγόρασε συνολικὰ μῆκος μεταλλικῆς ταινίας (3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.) × 8. Ἄρα τὸ μῆκος καθενὸς ἀπὸ τὰ 61 ἴσα τεμάχια, στὰ ὁποῖα ἔκοψε τὶς ταινίες, ἦταν [(3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.) × 5] : 61.

Καὶ τώρα κάνομε τὶς πράξεις

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ	β) τῆς διαιρέσεως	
3 μ. 6 δεκατ. 6 ἑκατ.	18 μ. 3 δεκατ.	61
× 5	× 10 δεκατ.	3 δεκατ.
15 μ. 30 δεκατ. 30 ἑκατ.	180 δεκατ.	
15 μ. 33 δεκατ. 0 ἑκατ.	+ 3 δεκατ.	
18 μ. 3 δεκατ.	183 δεκατ.	
	00	

Ἀπάντηση. Τὸ μῆκος κάθε τεμαχίου ἦταν 3 δεκατ.

Ἄσκηση

18. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου πούλησε 120 κιλὰ καὶ 300 γραμμάρια ἀμύγδαλα πρὸς 64 δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε, ἀγόρασε 24 βιβλία ποὺ τὸ καθένα ἄξιζε τὸ ἴδιο. Πόσο ἀγόρασε τὸ κάθε βιβλίο;

Σημείωση. Νὰ λύσετε τὸ πρόβλημα αὐτό. Νὰ βρῆτε καὶ ἄλλο τρόπο λύσεως. Νὰ συντάξετε καὶ νὰ λύσετε τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα καὶ τέλος νὰ λύσετε τὸ κύριο πρόβλημα α) μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ β) μὲ ἄλλα πράγματα.

Ἀσκήσεις γιὰ ἐπανάληψη

Α. 19. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε ὄσπρια πρὸς 12,50 δραχ. τὸ κιλό. Ἔδωσε 3.000 δραχ. καὶ πῆρε ρέστα 250 δραχ. Πόσα κιλὰ ὄσπρια ἀγόρασε;

20. Ἡ ἀπόσταση Ἀθηνῶν - Θεσσαλονίκης εἶναι 514 χιλ. Ἕνα αὐτοκίνητο μὲ ταχύτητα 54,375 χιλ. τὴν ὥρα διέτρεξε ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν ἀπόσταση αὐτὴ σὲ 6 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα ἀπομένουν ἀκόμη, γιὰ νὰ διανύση τὸ αὐτοκίνητο;

Β. 21. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 735 κιλὰ λάδι πρὸς 42 δρχ. τὸ κιλό. Ἔπειτα πούλησε ἕνα μέρος ἀπὸ τὸ λάδι αὐτὸ πρὸς 45 δραχ. τὸ κιλὸ καὶ εἰσέπραξε τὰ χρήματα, ποὺ εἶχε δώσει, γιὰ νὰ τὸ ἀγοράση. Πόσα κιλὰ λάδι τοῦ ἀπόμειναν;

22. Ἕνας ἔμπορος ὑαλικῶν εἰδῶν ἀγόρασε πιάτα πρὸς 6,40 δραχ. τὸ ἕνα. Ἐνῶ τὰ μετέφερε, τοῦ ἔσπασαν 75 πιάτα. Τὰ ὑπόλοιπα τὰ πούλησε πρὸς 8,80 δραχ. τὸ ἕνα καὶ εἰσέπραξε τὰ χρήματα ποὺ εἶχε δώσει, γιὰ νὰ τὰ ἀγοράση. Πόσα πιάτα εἶχε ἀγοράσει;

Γ. 23. Οἱ 25 μαθητὲς καὶ μαθήτριες τῆς Ε΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου ἔκαναν μιὰ ἐκδρομὴ ποὺ τοὺς στοίχισε 1000 δραχ. Κάθε μαθητὴς πλήρωσε 44 δραχ. καὶ κάθε μαθήτρια 34 δραχ. Πόσοι ἦταν οἱ μαθητὲς καὶ πόσες οἱ μαθήτριες τῆς τάξεως;

24. Ὁ Πέτρος μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἶχε, ἂν ἀγόραζε 10 τετράδια, θὰ τοῦ χρειάζονταν ἀκόμη 7 δραχ. Ἂν ἀγόραζε 6 τετράδια, θὰ τοῦ περίσσευαν 21 δραχ. Πόσα χρήματα εἶχε;

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Α. ΓΕΝΙΚΑ

Στὰ προηγούμενα μαθήματα μιλήσαμε γενικὰ γιὰ τοὺς ἀκέραιους, τοὺς δεκαδικοὺς καὶ τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς καὶ λύσαμε διάφορα προβλήματα μὲ τὴ βοήθειά τους.

Τὰ προβλήματα, ὅμως, ποὺ παρουσιάζονται στὴν καθημερινὴ ζωή μας, δὲ λύνονται ὅλα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Γι' αὐτὸ ἔχουν ἐπινοηθῆ καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, οἱ κλασματικοί.

Τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, τὶς ἰδιότητές τους καὶ τὶς πράξεις ποὺ μποροῦμε νὰ κάνωμε μὲ αὐτούς, θὰ μάθωμε ἀναλυτικὰ στὰ ἀκόλουθα μαθήματα τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ι. ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

α) Κλασματικὲς μονάδες

20 **Πρόβλημα 1ο.** Ἡ Ἀθηνᾶ καὶ ἡ Παρασκευὴ μοίρασαν ἕνα μῆλο σὲ δυὸ ἴσα μέρη. Τί μέρος τοῦ μήλου πῆρε καθεμιά;

Τὸ μῆλο ὁλόκληρο:

Ἕνα ἀπὸ τὰ 2 ἴσα μεταξύ τους τεμάχια τοῦ μήλου:

Ἡ Ἀθηνᾶ πῆρε:

Ἡ Παρασκευὴ πῆρε:

Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ τὸ μῆλο ὁλόκληρο, χωρίστηκε σὲ 2 ἴσα μέρη.

Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δυὸ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ μῆλο, ὀνομάζεται ἕνα δεύτερο τοῦ μήλου. Τὸ ἕνα δεύτερο γράφεται ἔτσι: $\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ τοῦ μήλου.

Ἀπάντηση. Καθεμιὰ πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήλου.

Ἀσκήσεις

Α. 25. Νὰ κόψετε μιὰ χαρτοταινία σὲ 2 ἴσα μέρη καὶ νὰ ὀνομάσετε καθένα ἀπὸ αὐτά.

Β. 26. Πόσες δραχ. εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δεκάρικου;

Γ. 27. Τί μέρος τοῦ ἑκατοστάρικου εἶναι τὸ πενηντάρικο;
28. Τί μέρος τοῦ χιλιάρικου εἶναι τὸ πεντακοσάρικο;

21

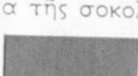
Πρόβλημα 2ο. Ἡ Ἐλπινίκη, ἡ Παρασκευή, ἡ Ἑλένη καὶ ἡ Ἀρετὴ μοίρασαν μιὰ μεγάλη σοκολάτα σὲ 4 ἴσα κομμάτια. Τί μέρος τῆς σοκολάτας πῆρε καθεμιά;

Ἡ σοκολάτα:

Ἡ σοκολάτα σὲ 4 ἴσα κομμάτια:

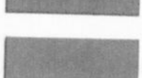
Τὰ 4 ἴσα κομμάτια τῆς σοκολάτας τὰ πῆραν:

ἡ Ἐλπινίκη

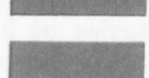


ἡ Ἑλένη

ἡ Παρασκευὴ

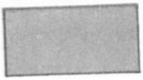


ἡ Ἀρετὴ



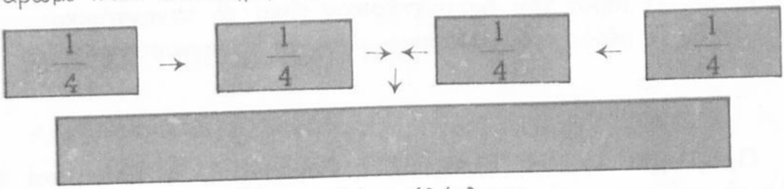
Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ ἡ σοκολάτα, χωρίστηκε σὲ 4 ἴσα κομμάτια.

Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 4 ἴσα κομμάτια, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ σοκολάτα, ὀνομάζεται ἕνα τέταρτο τῆς σοκολάτας. Τὸ ἕνα τέταρτο γράφεται : $\frac{1}{4}$


$= \frac{1}{4}$ τῆς σοκολάτας.

Ἀπάντηση. Καθεμιὰ πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{4}$ τῆς σοκολάτας.

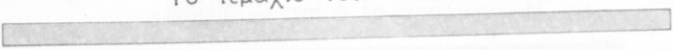
Ἂν τὰ τέσσερα ἴσα κομμάτια τὰ πλησιάσωμε, ὅπως δείχνουν τὰ ὁριζόντια βέλη, ὥσπου ν' ἀκουμπήση τὸ ἕνα στὸ ἄλλο, θὰ πάρωμε πάλι ὁλόκληρη τὴ σοκολάτα.



Ἡ σοκολάτα ὁλόκληρη.

Πρόβλημα 3ο. Ὀχτὼ μαθητὲς ἀπὸ τὴν τάξη σας μοίρασαν ἕνα τεμάχιο καλωδίου σὲ 8 ἴσα κομμάτια. Τί μέρος τοῦ καλωδίου πῆρε καθένας τους;

Τὸ τεμάχιο τοῦ καλωδίου:



Τὸ τεμάχιο τοῦ καλωδίου σὲ 8 ἴσα κομμάτια:

Καθένας ἀπὸ τοὺς ὀχτὼ μαθητὲς πῆρε: 

Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ τὸ τεμάχιο τοῦ καλωδίου, χωρίστηκε σὲ 8 ἴσα κομμάτια.

Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 8 ἴσα κομμάτια, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ τεμάχιο τοῦ καλωδίου, ὀνομάζεται ἕνα ὄγδοο τοῦ καλωδίου. Τὸ ἕνα ὄγδοο γράφεται ἔτσι : $\frac{1}{8}$

 $= \frac{1}{8}$ τοῦ καλωδίου.

Ἀπάντηση. Κάθε μαθητὴς πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ καλωδίου.

Ἂν τὰ 8 ἴσα κομμάτια τοῦ καλωδίου τὰ φέρωμε σ' ἐπαφὴ (ὅπως στὸ πρόβλημα 2ο μὲ τὰ κομμάτια τῆς σοκολάτας), θὰ ἔχωμε ξανὰ τὸ ἀρχικό τεμάχιο τοῦ καλωδίου.

Τὸ καλώδιο ὁλόκληρο.

Ἀσκήσεις

Α. 29. Νὰ κόψετε μιὰ χαρτοταινία σὲ 4 ἴσα κομμάτια καὶ νὰ ὀνομάσετε τὸ ἕνα κομμάτι.

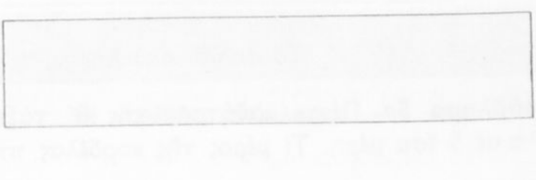
Β. 30. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ νὰ ἔχῃ 4 ἑκατ. μῆκος καὶ νὰ βρῆτε πόσα ἑκατ. εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ ἀπ' αὐτό.

31. Νὰ βρῆτε πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ.

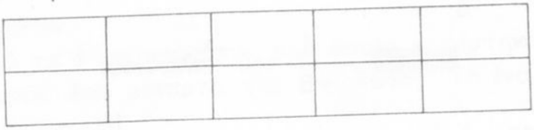
Γ. 32. Νὰ βρῆτε τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὰ 15^{λ}.

33. Τί μέρος τοῦ κιλοῦ εἶναι α) τὰ 500 γραμμάρια, β) τὰ 250 γραμμάρια καὶ γ) τὰ 125 γραμμάρια.

22 **Πρόβλημα 4ο.** Δέκα μαθητὲς τῆς Α' τάξεως μοίρασαν ἕνα φύλλο χαρτόνι σὲ 10 ἴσα κομμάτια. Τί μέρος τοῦ χαρτονιοῦ πῆρε κάθε μαθητής;

Τὸ φύλλο τοῦ χαρτονιοῦ : 

Τὸ φύλλο τοῦ χαρτονιοῦ σὲ 10 ἴσα μέρη:



Κάθε μαθητὴς ἀπὸ τοὺς 10 πῆρε: $\boxed{}$

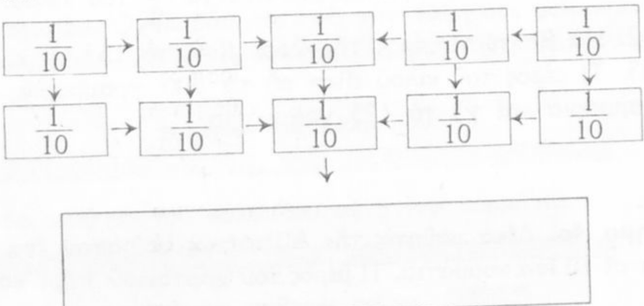
Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ τὸ φύλλο τοῦ χαρτονιοῦ, χωρίστηκε σὲ 10 ἴσα μέρη.

Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 10 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ φύλλο τοῦ χαρτονιοῦ, ὀνομάζεται ἕνα δέκατο τοῦ χαρτονιοῦ. Τὸ ἕνα δέκατο γράφεται ἔτσι: $\frac{1}{10}$

$$\boxed{} = \frac{1}{10} \text{ τοῦ χαρτονιοῦ.}$$

Ἀπάντηση. Κάθε μαθητὴς πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ χαρτονιοῦ.

Ἂν φέρωμε σ' ἐπαφὴ τὰ 10 ἴσα κομμάτια τοῦ χαρτονιοῦ, ὅπως δείχνουν τὰ βέλη, θὰ ἔχωμε ξανὰ ὁλόκληρο τὸ φύλλο τοῦ χαρτονιοῦ.



Τὸ φύλλο ὁλόκληρο.

Πρόβλημα 5ο. Πέντε μαθήτριες τῆς Β' τάξεως μοίρασαν μιὰ κορδέλα σὲ 5 ἴσα μέρη. Τί μέρος τῆς κορδέλας πῆρε καθεμιά;

Ἡ κορδέλα:

Ἡ κορδέλα σὲ 5 ἴσα μέρη:

Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 5 μαθήτριες πῆρε: 

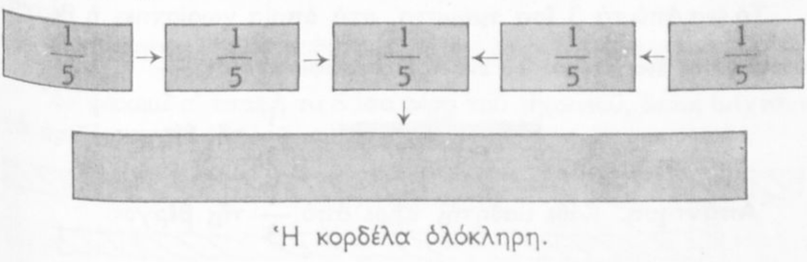
Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ ἡ κορδέλα, χωρίστηκε σὲ 5 ἴσα μέρη.

Τὸ 1 ἀπὸ τὰ 5 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ κορδέλα, ὀνομάζεται ἕνα πέμπτο τῆς κορδέλας. Τὸ ἕνα πέμπτο γράφεται ἔτσι: $\frac{1}{5}$

 $= \frac{1}{5}$ τῆς κορδέλας.

Ἀπάντηση. Κάθε μαθήτρια πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{5}$ τῆς κορδέλας.

Ἂν πλησιάσωμε τὰ 5 ἴσα μέρη τῆς κορδέλας, ὅπως δείχνουν τὰ βέλη, ὥστε νὰ ἔρθουν σ' ἐπαφή, θὰ ἔχωμε ξανὰ ὁλόκληρο τὸ ἀρχικὸ τεμάχιο.



Ἡ κορδέλα ὁλόκληρη.

Ἀσκήσεις

Α. 34. Νὰ κόψετε ἕνα φύλλο ἀπὸ τὸ τετράδιό σας σὲ 10 ἴσα τεμάχια καὶ νὰ ὀνομάσετε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτά.

Β. 35. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ νὰ ἔχῃ μῆκος 1 δεκατ. καὶ νὰ βρῆτε πόσα ἑκατ. εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ καὶ πόσα τὸ $\frac{1}{5}$ ἀπ' αὐτό.

Γ. 36. Πόσα γραμμάρια εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ καὶ πόσα τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ κιλοῦ;

37. Τί μέρος τοῦ ἑκατοστάρικου εἶναι α) τὸ δεκάρικο καὶ β) τὸ εἰκοσάρικο;

23 **Πρόβλημα 6ο.** Τρεῖς μαθητὲς τῆς Β' τάξεως μοίρασαν μιὰ βέργα σὲ 3 ἴσα τμήματα. Τί μέρος τῆς βέργας πῆρε ὁ καθένας;

Ἡ βέργα:

Ἡ βέργα σὲ 3 ἴσα τμήματα:

Καθένας ἀπὸ τοὺς 3 μαθητὲς πῆρε: 

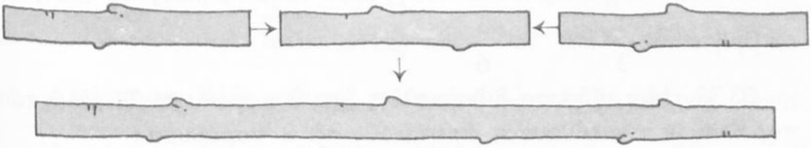
Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ ἡ βέργα, χωρίστηκε σὲ 3 ἴσα τμήματα.

Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 3 ἴσα τμήματα, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ βέργα, ὀνομάζεται ἕνα τρίτο. Τὸ ἕνα τρίτο γράφεται ἔτσι: $\frac{1}{3}$

 $= \frac{1}{3}$ τῆς βέργας.

Ἀπάντηση. Κάθε μαθητὴς πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{3}$ τῆς βέργας.

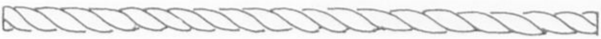
Ἂν φέρωμε σ' ἐπαφὴ τὰ 3 ἴσα τμήματα τῆς βέργας, ὅπως δείχνουν τὰ ὁριζόντια βέλη, θὰ ἔχωμε πάλι τὴ βέργα ὁλόκληρη.



Ἡ βέργα ὁλόκληρη.

Πρόβλημα 7ο. Ἕξι μαθήτριες τῆς Γ' τάξεως, γιὰ νὰ παίξουν «σχοινάκι», μοίρασαν ἕνα σχοινὶ σὲ 6 ἴσα μέρη. Τί μέρος τοῦ σχοινιοῦ πῆρε ἡ καθεμιά;

Τὸ σχοινί :



Τὸ σχοινὶ σὲ 6 ἴσα μέρη :

Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 6 μαθήτριες πῆρε : 

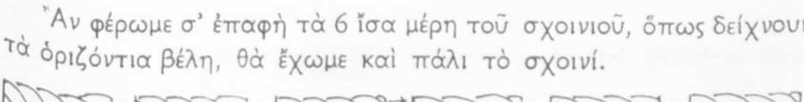
Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ ὅλο τὸ σχοινί, χωρίστηκε σὲ ἕξι ἴσα μέρη.

Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 6 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ σχοινί, ὀνομάζεται ἕνα ἕκτο τοῦ σχοινιοῦ. Τὸ ἕνα ἕκτο γράφεται ἔτσι : $\frac{1}{6}$

 $= \frac{1}{6}$ τοῦ σχοινιοῦ.

Ἀπάντηση. Κάθε μαθήτρια πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ σχοινιοῦ.

Ἂν φέρωμε σ' ἐπαφὴ τὰ 6 ἴσα μέρη τοῦ σχοινιοῦ, ὅπως δείχνουν τὰ ὁριζόντια βέλη, θὰ ἔχωμε καὶ πάλι τὸ σχοινί.



Τὸ σχοινὶ ὁλόκληρο.

Ἀσκήσεις

Α. 38. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 18 ἑκατ. καὶ νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ ἀπ' αὐτό.

Β. 39. Μιὰ αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει 6 παράθυρα. Τί μέρος τῶν παραθύρων τῆς αἴθουσας ἀποτελοῦν τὰ 2 παράθυρα;

40. Πόσες ἡμέρες εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ πόσες τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ μήνα;

Γ. 41. Στὴν ἕκτη τάξη ἑνὸς σχολείου φοιτοῦν 42 μαθητὲς καὶ μαθήτριες. Ἂν οἱ μαθήτριες εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν μαθητῶν, πόσοι εἶναι οἱ μαθητές;

42. Νὰ βρῆτε τί μέρος τοῦ μήνα εἶναι α) οἱ 10 ἡμέρες καὶ β) οἱ 5 ἡμέρες.

43. Τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι α) τὰ $20^{λ}$ καὶ β) τὰ $10^{λ}$;

24 **Πρόβλημα 8ο.** Ἐννιὰ μαθητὲς τῆς Γ' τάξεως μοίρασαν μιὰ ζώνη δερμάτινη σὲ 9 ἴσα μέρη. Τί μέρος τῆς ζώνης πῆρε ὁ καθένας;

Ἡ δερμάτινη ζώνη:

Ἡ ἴδια ζώνη σὲ 9 ἴσα μέρη:

Κάθε μαθητὴς ἀπὸ τοὺς 9 πῆρε: 

Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ ἡ δερμάτινη ζώνη, χωρίστηκε σὲ 9 ἴσα μέρη.

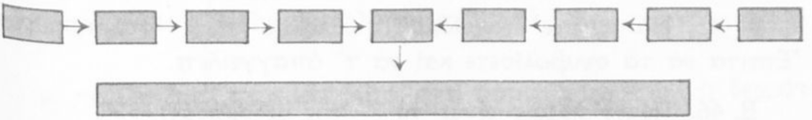
Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 9 ἴσα μέρη, στα ὁποῖα χωρίστηκε ἡ δερμάτινη ζώνη, ὀνομάζεται ἕνα ἔνατο τῆς ζώνης. Τὸ ἕνα ἔνατο γράφεται ἔτσι: $\frac{1}{9}$

 $= \frac{1}{9}$ τῆς δερμάτινης ζώνης.

Ἀπάντηση. Κάθε μαθητὴς πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{9}$ τῆς δερμάτινης ζώνης.

Ἂν φέρωμε σ' ἐπαφή, ὅπως δείχνουν τὰ ὁριζόντια βέλη, τὰ 9 ἴσα μέρη, θὰ ἔχωμε ξανὰ τὴ δερμάτινη ζώνη ὁλόκληρη.

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$

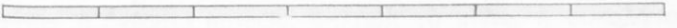


Ἡ δερμάτινη ζώνη ὁλόκληρη.

Πρόβλημα 9ο. Ἑφτὰ μαθητὲς τῆς ΣΤ' τάξεως μοίρασαν ἕνα κομμάτι σύρματος σὲ 7 ἴσα μέρη. Τί μέρος τοῦ σύρματος πῆρε ὁ καθένας;

Τὸ κομμάτι τοῦ σύρματος:

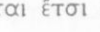
Τὸ κομμάτι σὲ 7 ἴσα μέρη:



Κάθε μαθητὴς ἀπὸ τοὺς 7 πῆρε:

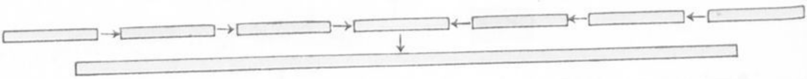
Παραπάνω ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ τὸ ἀρχικὸ κομμάτι σύρμα, χωρίστηκε σὲ 7 ἴσα μέρη.

Τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 7 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ κομμάτι τὸ σύρμα, ὀνομάζεται ἕνα ἕβδομο τοῦ κομματιοῦ τοῦ σύρματος. Τὸ ἕνα ἕβδομο γράφεται ἔτσι: $\frac{1}{7}$

 $= \frac{1}{7}$ τοῦ κομματιοῦ τοῦ σύρματος.

Ἀπάντηση. Κάθε μαθητὴς πῆρε ἀπὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ κομματιοῦ τοῦ σύρματος.

Ἂν τοποθετήσωμε κοντὰ κοντὰ τὰ 7 ἴσα μέρη τοῦ σύρματος, ὥστε νὰ ἔρθουν σ' ἐπαφή, θὰ ἔχωμε καὶ πάλι τὸ ἀρχικὸ κομμάτι σύρματος.



Τὸ ἀρχικὸ κομμάτι.

Ἀσκήσεις

Α. 44. Νὰ κόψετε ἕνα φύλλο τετράδιο σὲ 7 ἴσα κομμάτια καὶ νὰ ὀνομάσετε τὸ καθένα ἀπὸ αὐτά.

45. Νὰ κόψετε ἕνα κομμάτι καλώδιο σὲ 9 ἴσα τμήματα. Ἔπειτα νὰ τὰ συμβολίσετε καὶ νὰ τ' ἀπαγγείλετε.

Β. 46. Πόσες ἡμέρες εἶναι τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς ἑβδομάδας;

Γ. 47. Οἱ μαθητὲς ἑνὸς σχολείου εἶναι 360. Στὴν Ε΄ τάξη του πηγαίνουν 40 μαθητές. Τί μέρος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου ἀποτελοῦν οἱ μαθητὲς τῆς Ε΄ τάξεως;

48. Τί μέρος τῶν 63 δρχ. εἶναι α) οἱ 9 δρχ. καὶ β) οἱ 7 δρχ.;

25 Συμπέρασμα

Στὰ μαθήματα 20, 21, 22, 23 καὶ 24 εἴδαμε ὅτι:

- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 2 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ μῆλο, ὀνομάζεται $\frac{1}{2}$ (ἕνα δεύτερο) τοῦ μήλου,
- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 4 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ σοκολάτα, ὀνομάζεται $\frac{1}{4}$ (ἕνα τέταρτο) τῆς σοκολάτας,
- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 8 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ τεμάχιο καλωδίου, ὀνομάζεται $\frac{1}{8}$ (ἕνα ὄγδοο) τοῦ καλωδίου,

- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 10 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ φύλλο χαρτόνι, ὀνομάζεται $\frac{1}{10}$ (ἕνα δέκατο) τοῦ χαρτονιοῦ,

- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 5 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ κορδέλα, ὀνομάζεται $\frac{1}{5}$ (ἕνα πέμπτο) τῆς κορδέλας,

- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 3 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ βέργα, ὀνομάζεται $\frac{1}{3}$ (ἕνα τρίτο) τῆς βέργας,

- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 6 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ σχοινί, ὀνομάζεται $\frac{1}{6}$ (ἕνα ἕκτο) τοῦ σχοινιοῦ,

- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 9 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ δερμάτινη ζώνη, ὀνομάζεται $\frac{1}{9}$ (ἕνα ἕνατο) τῆς δερμάτινης ζώνης,

- τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ 7 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε τὸ κομμάτι τοῦ σύρματος, ὀνομάζεται $\frac{1}{7}$ (ἕνα ἕβδομο) τοῦ κομματιοῦ τοῦ σύρματος.

Τὰ ἴσα μέρη ἢ κομμάτια, ἢ μερίδια, ἢ τμήματα, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ ἀκέραια μονάδα, δηλαδὴ τὸ μῆλο, ἡ σοκολάτα, τὸ καλώδιο, τὸ χαρτόνι, ἡ κορδέλα, ἡ βέργα, τὸ σχοινί, ἡ δερμάτινη ζώνη καὶ τὸ σύρμα, ὀνομάζονται κλασματικὲς μονάδες.

Τά σύμβολα λοιπὸν

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{10}$$

ποὺ συναντήσαμε ὥς τώρα εἶναι ἀριθμοὶ καὶ λέγονται κλασματικὲς μονάδες. Φυσικά, ὑπάρχουν καὶ ἄλλες κλασματικὲς μονάδες.

Ἄρα, **κλασματικὴ μονάδα** λέγεται τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ ἀκέραια μονάδα.

Ἀσκήσεις

Α. 49. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ μῆκος 24 ἑκατ. Ἔπειτα νὰ βρῆτε μὲ πόσα ἑκατ. ἀντιστοιχεῖ α) τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$ ἀπ' αὐτὸ καὶ β) τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{6}$, τὸ $\frac{1}{8}$ ἀπ' αὐτό.

Β. 50. Ὁ Λεωνίδας ἔχει 70 δρχ. Νὰ βρῆτε πόσες δρχ. εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{7}$, τὸ $\frac{1}{10}$ τῶν χρημάτων τοῦ Λεωνίδα.

Γ. 51. Νὰ βρῆτε τί μέρος ἀπὸ τὶς 36 δρχ. εἶναι α) οἱ 18 δρχ., β) οἱ 9 δρχ., γ) οἱ 6 δρχ., δ) οἱ 4 δρχ. καὶ ε) οἱ 7,20 δρχ.

52. Τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι α) τὰ 30^{λ}, β) τὰ 20^{λ}, γ) τὰ 15^{λ}, δ) τὰ 10^{λ} καὶ ε) τὰ 6^{λ} ;

β) Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ κλάσματα

26 **Πρόβλημα 1ο.** Δυὸ μαθήτριες μοίρασαν μιὰ κορδέλα σὲ 3 ἴσα τμήματα. Ἡ α' πῆρε τὸ ἕνα τμῆμα καὶ ἡ β' τὰ δυό. Τί μέρος τῆς κορδέλας πῆρε ἡ καθεμιά ;

Ἡ κορδέλα :

Ἡ κορδέλα σὲ 3 ἴσα τμήματα :

Ἀπ' αὐτὰ πῆραν :

ἡ α' μαθήτρια:  $= \frac{1}{3}$ τῆς κορδέλας,

ἡ β' μαθήτρια: 

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ β' μαθήτρια πῆρε διπλάσιο μέρος κορδέλας ἀπὸ τὴν πρώτη. Πῆρε 2 φορὲς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς κορδέλας· δηλαδή:

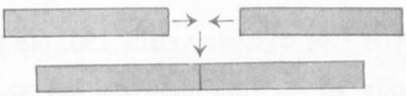
ἕνα τρίτο + ἕνα τρίτο = δύο τρίτα. Τὰ δύο τρίτα γράφονται (συμβολίζονται) ἔτσι: $\frac{2}{3}$

 $= \frac{2}{3}$ τῆς κορδέλας.

Ἀπάντηση. Ἡ α΄ μαθήτρια πῆρε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς κορδέλας καὶ ἡ β΄ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς κορδέλας.

Ἀνασύνθεση τῆς ἀκέραιας μονάδας. Ἂν φέρωμε σ' ἐπαφὴ τὰ δύο μέρη (ὅπως δείχνουν τὰ ὁριζόντια βέλη) τῆς κορδέλας ποὺ πῆρε ἡ β΄ μαθήτρια, θὰ λάβωμε ἕνα μέρος ποὺ θὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς κορδέλας.

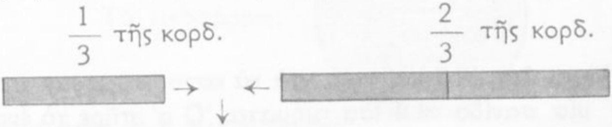
$\frac{1}{3}$ τῆς κορδ. $\frac{1}{3}$ τῆς κορδ.



$\frac{2}{3}$ τῆς κορδέλας

Ἂν τώρα φέρωμε σ' ἐπαφὴ μὲ αὐτὸ τὸ τμῆμα (τὰ δύο τρίτα τῆς κορδέλας) καὶ τὸ κομμάτι ποὺ πῆρε ἡ α΄ μαθήτρια, θὰ ἔχωμε τὴν ἀρχικὴ κορδέλα, ἤτοι τὴν ἀκέραια μονάδα.

$\frac{1}{3}$ τῆς κορδ. $\frac{2}{3}$ τῆς κορδ.



Ἡ κορδέλα ὁλόκληρη.

Πρόβλημα 2ο. Ὁ Νοέμβριος ἔχει 30 ἡμέρες. Μὲ πόσες ἡμέρες ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ἡμερῶν του;

Οἱ 30 ἡμέρες τοῦ Νοεμβρίου (καθεμιὰ συμβολίζεται μὲ τελεία):

● ●

Οἱ 30 ἡμέρες τοῦ Νοεμβρίου σὲ 3 ἴσα μέρη:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●   ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●   ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τὶς ἡμέρες τοῦ Νοεμβρίου ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τὶς ἡμέρες τοῦ Νοεμβρίου: ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● | ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Ἀπάντηση. Τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τὶς ἡμέρες τοῦ Νοεμβρίου ἰσοδυναμοῦν μὲ 20 ἡμέρες.

Ἀσκήσεις

Α. 53. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ μῆκος 12 ἑκατ. καὶ νὰ βρῆτε μὲ πόσα ἑκατ. ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπ' αὐτό.

Β. 54. Οἱ μαθητὲς ἑνὸς σχολείου εἶναι 150. Νὰ βρῆτε μὲ πόσους μαθητὲς ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου.

Γ. 55. Ἀπὸ τοὺς 42 μαθητὲς τῆς ΣΤ' τάξεως ἑνὸς σχολείου τὴν περασμένη Κυριακὴ δὲν πῆγαν στὴν ἐκκλησία οἱ 14. Τί μέρος τῆς τάξεως ἀντιπροσωπεύουν οἱ μαθητὲς αὐτοί;

56. Τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὰ 40^{λ};

27

Πρόβλημα 3ο. Δυὸ μαθητές, γιὰ νὰ κατασκευάσουν παιχνίδια, μοίρασαν μία σανίδα σὲ 4 ἴσα τμήματα. Ὁ α' πῆρε τὸ ἕνα τμῆμα καὶ ὁ β' τὰ τρία. Τί μέρος τῆς σανίδας πῆρε ὁ καθένας;

Ἡ σανίδα:

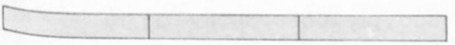
Ἡ σανίδα σὲ 4 ἴσα τμήματα:

Ἀπ' αὐτὰ πῆραν:

ὁ α' μαθητής:  $= \frac{1}{4}$ τῆς σανίδας,

ὁ β' μαθητής: 

Εἶναι φανερὸ ὅτι ὁ δεύτερος μαθητὴς πῆρε τριπλάσιο μέρος σανίδας ἀπὸ τὸν πρῶτο. Συγκεκριμένα πῆρε 3 φορὲς τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς σανίδας· δηλαδή: ἕνα τέταρτο $+$ ἕνα τέταρτο $+$ ἕνα τέταρτο $=$ τρία τέταρτα. Τὰ τρία τέταρτα γράφονται ἔτσι: $\frac{3}{4}$

 $= \frac{3}{4}$ τῆς σανίδας.

Ἀπάντηση. Ὁ α' μαθητὴς πῆρε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς σανίδας καὶ ὁ β' τὰ $\frac{3}{4}$ ἀπ' αὐτήν.

Νὰ κάμετε ἀνασύνθεση τῆς ἀκέραιας μονάδας ὅπως στὸ πρόβλημα 1ο τῆς σελίδας 46.

Πρόβλημα 4ο. Μὲ πόσες δραχμὲς ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου ;

Τὸ εἰκοσάρικο: 

Τὸ εἰκοσάρικο σὲ 4 πεντάδραχμα:

Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου:

= 15 δρχ.

᾿Απάντηση. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου ἰσοδυναμοῦν μὲ 15 δραχμές.

᾿Ασκήσεις

Α. 57. Νὰ βρῆτε μὲ πόσες δραχμὲς ἰσοδυναμοῦν α) τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ β) τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου.

58. Νὰ βρῆτε μὲ πόσες δραχμὲς ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{3}{4}$ α) τοῦ δεκάρικου β) τοῦ ἑκατοστάρικου καὶ γ) τοῦ χιλιάρικου.

Β. 59. Ἕνα σχολεῖο ἔχει 128 θρανία. Νὰ βρῆτε μὲ πόσα θρανία ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{3}{4}$ ἀπ' αὐτά.

Γ. 60. Στὸ σχολικὸ κῆπο ἑνὸς ὀρεινοῦ σχολείου ὑπάρχουν 80 μηλιές, ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ 20 εἶναι νεόφυτες. Τί μέρος ἀπὸ τὶς μηλιὲς ἀντιπροσωπεύουν οἱ νεόφυτες;

Τί μέρος ἀντιπροσωπεύουν οἱ ὑπόλοιπες;

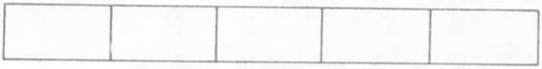
61. Τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὰ 45^{λ};

28

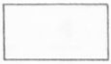
Πρόβλημα 5ο. Ἡ Ἀθηνᾶ ἔκοψε μιὰ χαρτοταινία σὲ 5 ἴσα κομμάτια καὶ ἔδωσε τὸ 1 ἀπὸ αὐτὰ στὴν ἀδερφή της τὴν Παρασκευή, ἐνῶ αὐτὴ κράτησε τὰ 4. Τί μέρος τῆς χαρτοταινίας πῆρε καθεμιά;

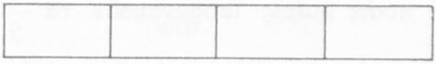
Ἡ χαρτοταινία:

῾Η χαρτοταινία σὲ 5 ἴσα κομμάτια:

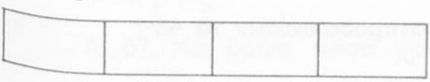


Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἀδερφὲς πῆρε:

ἡ Παρασκευὴ  $= \frac{1}{5}$ τῆς χαρτοταινίας,

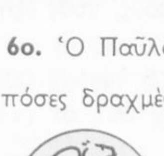
ἡ ᾿Αθηνᾶ 

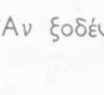
Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ᾿Αθηνᾶ πῆρε τετραπλάσιο μέρος χαρτοταινίας ἀπὸ τὴν Παρασκευή. Συγκεκριμένα πῆρε 4 φορὲς τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς χαρτοναινίας· δηλαδή: ἕνα πέμπτο + ἕνα πέμπτο + ἕνα πέμπτο + ἕνα πέμπτο = τέσσερα πέμπτα. Τὰ τέσσερα πέμπτα γράφονται ἔτσι: $\frac{4}{5}$

 $= \frac{4}{5}$ τῆς χαρτοταινίας.

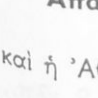
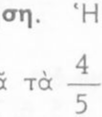
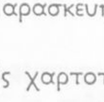
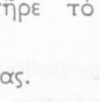
᾿Απάντηση. ῾Η Παρασκευὴ πῆρε τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς χαρτοταινίας καὶ ἡ ᾿Αθηνᾶ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς χαρτοταινίας.

Πρόβλημα 6ο. ῾Ο Παῦλος ἔχει ἕνα δεκάρικο. Ἂν ξοδέψη τὸ $\frac{1}{5}$ ἀπ᾿ αὐτό, πόσες δραχμὲς θὰ τοῦ μείνουν;

Τὸ δεκάρικο: 

Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δεκάρικου: 

Θὰ τοῦ μείνουν:

 +  +  +  $= \frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου.

Ἀφοῦ ὁ Παῦλος θὰ ξοδέψη τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δεκάρικου, θὰ τοῦ μείνουν τὰ $\frac{4}{5}$ ἀπ' αὐτό, δηλαδὴ 8 δραχμές.

Ἀσκήσεις

Α. 62. Μὲ πόσες ἡμέρες ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μήνα;

63. Νὰ βρῆτε μὲ πόσες δραχμὲς ἰσοδυναμοῦν τὰ $\frac{4}{5}$ α) τοῦ πενηντάρικου καὶ β) τοῦ πεντακοσάρικου.

Β. 64. Πόσα γραμμάρια εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ;

Γ. 65. Τί μέρος τοῦ ἑκατοστάρικου ἀντιπροσωπεύει τὸ ἕνα εἰκοσάρικο;

66. Τί μέρος τῆς ὥρας ἀντιπροσωπεύουν τὰ 48^{λ};

29 Συμπέρασμα

Ἀπὸ τὰ παραπάνω μαθήματα συμπεραίνομε ὅτι:

ὁ χωρισμὸς τῆς ἀκέραιας μονάδας σὲ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, κλπ., ἴσα μέρη μᾶς δίνει ἀντίστοιχους ἀριθμούς, τοὺς ἑξῆς:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{2}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3}$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{4}$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{5}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{6}$$

$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{7}{7}$

$\frac{1}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$

$\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{9}{9}$

κλπ.

Οἱ ἀριθμοὶ κάθε σειρᾶς ἀπὸ τὶς παραπάνω προκύπτουν ἀπὸ τὴν «ἐπανάληψη» τῆς ἴδιας κλασματικῆς μονάδας καὶ λέγονται **κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ κλάσματα.** Ἄρα:

κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ κλάσμα λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται ἀπὸ τὴν ἐπανάληψη τῆς ἴδιας κλασματικῆς μονάδας.

Ἀσκήσεις

Α. 67. Νὰ βρῆτε πόσα χρόνια εἶναι: α) τὸ $\frac{1}{2}$, β) τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ γ) τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ αἰώνα.

Β. 68. Πόσες φορὲς πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε τὸ $\frac{1}{7}$, γιὰ νὰ πάρωμε τὴν ἀκέραια μονάδα;

Γ. 69. Νὰ βρῆτε τί μέρος τῆς χιλιετηρίδας εἶναι:
α) τὰ 500 χρόνια β) τὰ 250 χρόνια γ) τὰ 200 χρόνια δ) τὰ 125 χρόνια ε) τὰ 100 χρόνια στ) τὰ 50 χρόνια.

70. Τί μέρος τοῦ κιλοῦ εἶναι α) τὰ 50 γρ. καὶ β) τὰ 25 γρ.;

30

γ) Γραφὴ τῶν κλασμάτων

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{7}{8}$

Ἐξετάζοντας προσεκτικὰ τὰ παραπάνω κλάσματα συμπεραίνομε ὅτι:

κάθε κλάσμα γράφεται μὲ δυὸ ἀκέραιους ἀριθμούς, τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο, ποὺ χωρίζονται μ' ἕνα ὁριζόντιο εὐθύγραμμο τμῆμα.

- Τὸ ὁριζόντιο εὐθύγραμμο τμῆμα λέγεται **κλασματικὴ γραμμή.**
- Ὁ ἀριθμός, ποὺ γράφεται πάνω ἀπὸ τὴν κλασματικὴ γραμμή, λέγεται **ἀριθμητὴς** τοῦ κλάσματος.
- Ὁ ἀριθμός, ποὺ γράφεται κάτω ἀπὸ τὴν κλασματικὴ γραμμή, λέγεται **παρονομαστὴς** τοῦ κλάσματος. Ὁ παρονομαστὴς κάθε κλάσματος **δὲν** πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 0.
- Ὁ παρονομαστὴς φανερώνει σὲ πόσα ἴσα μέρη χωρίστηκε ἡ ἀκέραια μονάδα καὶ ὁ ἀριθμητὴς πόσα πήραμε ἐμεῖς ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη· π.χ.

ὁ παρονομαστὴς 8 τοῦ κλάσματος $\frac{7}{8}$ φανερώνει ὅτι ἡ ἀκέραια μονάδα χωρίστηκε σὲ 8 ἴσα μέρη καὶ ὁ ἀριθμητὴς 7 ὅτι ἀπὸ τὰ 8 ἴσα μέρη πήραμε τὰ 7.

Συντομώτερα, $\frac{7}{8}$ θὰ πῆ: τὰ 7 ἀπὸ τὰ 8 ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα χωρίστηκε ἡ ἀκέραια μονάδα.

- Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρανομαστὴς μαζὶ λέγονται **ὅροι τοῦ κλάσματος.**

δ) Ἀπαγγελία τῶν κλασμάτων

Ὁ ἀριθμητὴς κάθε κλάσματος ἀπαγγέλλεται ὡς ἀπόλυτο ἀριθμητικὸ (ἕνα, δυό, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑφτὰ κλπ.) καὶ ὁ παρονομαστὴς ὡς τακτικὸ (δεύτερο, τρίτα, τέταρτα, πέμπτα, ἕκτα, ἕβδομα κλπ.)· π.χ.

$\frac{1}{2}$, ἕνα δεύτερο· $\frac{2}{3}$, δύο τρίτα· $\frac{6}{7}$, ἕξι ἕβδομα· $\frac{5}{100}$, πέντε ἑκατοστά.

Ἀσκήσεις

Α. 71. Νὰ γράψετε μὲ κλάσματα:

α) ἕνα ὄγδοο, πέντε ἕβδομα, τέσσερα ἑνδέκατα,

β) ἕξι δωδέκατα, ὀχτὼ τριακοστὰ πέμπτα.

72. Ν' ἀπαγγείλετε τὰ κλάσματα:

α) $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{9}{20}$,

β) $\frac{75}{80}$, $\frac{63}{75}$, $\frac{81}{90}$, $\frac{52}{125}$, $\frac{165}{358}$.

Β. 73. Στὸ φυτώριο ἑνὸς σχολικοῦ κήπου ὑπάρχουν 300 μικρὲς ἐλιές. Νὰ βρῆτε : α) τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{1}{3}$, τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{5}$, τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ ἀπ' αὐτὲς καὶ β) τὰ $\frac{2}{3}$, τὰ $\frac{3}{4}$, τὰ $\frac{4}{5}$, τὰ $\frac{5}{6}$ καὶ τὰ $\frac{9}{10}$ ἀπ' αὐτές.

Γ. 74. Στὸ σχολικὸ κῆπο ἑνὸς ὀρεινοῦ σχολείου ὑπάρχουν 60 καρποφόρα δέντρα. Τί μέρος ἀπὸ τὰ δέντρα αὐτὰ ἀντιπροσωπεύουν α) τὰ 10 δέντρα, β) τὰ 50 δέντρα, γ) τὰ 20 δέντρα καὶ δ) τὰ 40 δέντρα;

31

ε) Τὸ κλάσμα ὡς πηλίκο διαιρέσεως

Πρόβλημα. Πέντε μαθήτριες ἀπὸ τὴν τάξη σας μοίρασαν ἐξίσου μεταξύ τους 4 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πῆρε ἡ καθεμιά;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

5 μαθήτριες,

4 δραχμές.

Λύση. Κάθε 1 δραχμὴ εἶναι 5 εἰκοσάλεπτα· ὥστε οἱ 4 δραχμὲς εἶναι $4 \times 5 = 20$ εἰκοσάλεπτα. Τὸ μερίδιο τῆς κάθε μαθήτριας μπορεῖ νὰ βρεθῆ μὲ δυὸ τρόπους:

1ος τρόπος. Ἀπὸ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 4 δραχμὲς ἡ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς 5 μαθήτριες πρέπει νὰ πάρη τὸ $\frac{1}{5}$ της.

Ὥστε: μερίδιο τῆς κάθε μαθήτριας $= \frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς.

2ος τρόπος. Ἀπὸ τὰ 20 εἰκοσάλεπτα ἡ κάθε μαθήτρια πρέπει νὰ πάρη (20 : 5) εἰκοσάλεπτα, δηλ. 4 εἰκοσάλεπτα.

Ὥστε: μερίδιο τῆς κάθε μαθήτριας = τόσα εἰκοσάλεπτα, ὅσο εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως 20:5, δηλ. (20 : 5) εἰκοσάλεπτα.

Γι' αὐτὸ τὸ λόγο μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ 4 διὰ τοῦ 5· δηλαδὴ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ τὸ θεωροῦμε ὡς «πηλίκο διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ του μὲ τὸν παρονομαστή του».

Μποροῦμε, λοιπόν, νὰ γράφωμε:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 5 \\ \hline \text{ὑπόλοιπο} \rightarrow \quad 0 & \frac{4}{5} \ \text{πηλίκο} \end{array}$$

$$\text{καὶ} \quad 4 = 5 \times \frac{4}{5}$$

(διαιρετέος = διαιρέτης X πηλίκο).

Μποροῦμε ἑπομένως νὰ λέμε ὅτι: **κάθε κλάσμα εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητῆ του μὲ τὸν παρονομαστή του.**

Τὰ κλάσματα μᾶς χρησιμεύουν πάρα πολὺ στὴ ζωή μας, διότι μὲ τὴ χρησιμοποίησή τους μποροῦμε νὰ κάνωμε ὁποιαδήποτε διαίρεση καὶ ἀποφεύγομε τὶς ἀτελεῖς διαιρέσεις.

Ἀσκήσεις

75. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες διαιρέσεις:
5 : 6, 2 : 3, 3 : 5, 5 : 7, 7 : 9, 10 : 17, 12 : 25.

76. Νὰ βρῆτε ἀπὸ ποιές διαιρέσεις εἶναι ἀκριβῆ πηλίκα τὰ ἑξῆς κλάσματα:

$$\frac{3}{6},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{7}{15},\quad \frac{25}{100},\quad \frac{50}{200},\quad \frac{13}{65},\quad \frac{10}{235}.$$

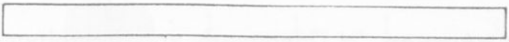
77. Ἑφτὰ μαθήτριες ἀπὸ τὴν Δ΄ τάξη μοίρασαν ἐξίσου 6 πορτοκάλια. Τί μέρος ἀπ᾽ αὐτὰ πῆρε ἡ καθεμιά;

2. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΑ ΜΟΝΑΔΑ

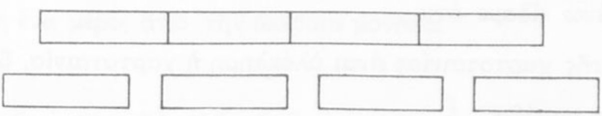
32

α) Κλάσματα ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα

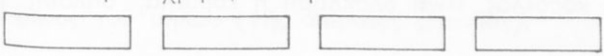
Πρόβλημα 1ο. Ἡ Ἀθηνᾶ ἔκοψε μιὰ χαρτοταινία σὲ 4 ἴσα μέρη, ποὺ τὰ χρησιμοποίησε στὸ μάθημα τῆς χαρτοπλεκτικῆς. Τί μέρος τῆς χαρτοταινίας χρησιμοποίησε;

Ἡ χαρτοταινία: 

Ἡ χαρτοταινία σὲ 4 ἴσα μέρη:



Ἡ Ἀθηνᾶ χρησιμοποίησε:

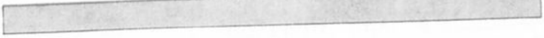


$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4},$$

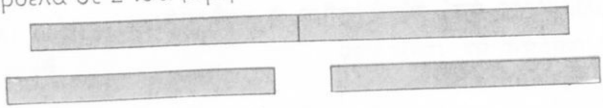
δηλαδὴ χρησιμοποίησε ὁλόκληρη τὴ χαρτοταινία:

Ἀπάντηση: Ἡ Ἀθηνᾶ χρησιμοποίησε τὰ $\frac{4}{4}$ τῆς χαρτοταινίας, δηλαδὴ ὁλόκληρη τὴ χαρτοταινία.

Πρόβλημα 2ο. Ἡ Παρασκευὴ ἔκοψε μιὰ κορδέλα σὲ 2 ἴσα κομμάτια καὶ τὰ χρησιμοποίησε, γιὰ νὰ δέση τὰ μαλλιὰ τῆς κούκλας της. Πόσο μέρος ἀπὸ τὴν κορδέλα χρησιμοποίησε;

Ἡ κορδέλα: 

Ἡ κορδέλα σὲ 2 ἴσα μέρη:



Ἡ Παρασκευὴ χρησιμοποίησε:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2},$$

δηλαδὴ ὁλόκληρη τὴν κορδέλα:

Ἀπάντηση. Ἡ Παρασκευὴ χρησιμοποίησε τὰ $\frac{2}{2}$ τῆς κορδέλας, δηλαδὴ ὁλόκληρη τὴν κορδέλα.

Παραπάνω εἴδαμε ὅτι:

τὰ $\frac{4}{4}$ τῆς χαρτοταινίας εἶναι ὁλόκληρη ἡ χαρτοταινία, δηλαδὴ μιὰ ἀκέραια μονάδα·

τὰ $\frac{2}{2}$ τῆς κορδέλας εἶναι ὁλόκληρη ἡ κορδέλα, δηλαδὴ μιὰ ἀκέραια μονάδα.

Παρατηροῦμε μάλιστα ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{2}{2}$ ἔχουν τοὺς δυὸ ὅρους τους ἴσους. Συνεπῶς:

ἕνα κλάσμα ποὺ οἱ ὅροι του εἶναι ἴσοι ἀριθμοί, εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἀριθμὸ 1 (δηλ. μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα).

Ἀσκήσεις

78. Νὰ γράψετε 5 κλάσματα ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα.

79. Νὰ βρῆτε ποιά ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα:

$$\frac{3}{3}, \quad \frac{6}{6}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{7}{7}, \quad \frac{10}{10}, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{5}{5}, \quad \frac{9}{9}, \quad \frac{8}{8}.$$

33

β) Κλάσματα μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα

Πρόβλημα 1ο. Ἡ Ἀθηνᾶ ἔκοψε ἕνα μῆλο σὲ 4 ἴσα μέρη. Ἀπ' αὐτὰ ἔφαγε μόνο τὰ τρία. Τί μέρος ἀπὸ τὸ μῆλο ἔφαγε ἡ Ἀθηνᾶ;

Τὸ μῆλο:  Τὸ μῆλο σὲ 4 ἴσα κομμάτια: 

Ἡ Ἀθηνᾶ ἔφαγε:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

δηλαδὴ ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα.

Ἀπάντηση. Ἡ Ἀθηνᾶ ἔφαγε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου, δηλαδὴ ἕνα μέρος τοῦ μήλου (τῆς ἀκέραιας μονάδας).

Πρόβλημα 2ο. Ἡ Ἀρετὴ ἔκοψε μιὰ κορδέλα σὲ 3 ἴσα μέρη. Ἀπ' αὐτὰ χρησιμοποίησε τὰ 2. Τί μέρος ἀπὸ τὴν κορδέλα χρησιμοποίησε;

Ἡ κορδέλα: 

Ἡ κορδέλα σὲ 3 ἴσα μέρη:

Ἡ Ἀρετὴ χρησιμοποίησε :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

δηλαδὴ ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν κορδέλα:

Ἀπάντηση. Ἡ Ἀρετὴ χρησιμοποίησε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς κορδέλας, δηλαδὴ ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα.

Παραπάνω εἴδαμε ὅτι:

τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου εἶναι ἕνα μέρος τοῦ ὁλόκληρου μήλου. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ εἶναι πιὸ μικρὸ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 1.

Τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς κορδέλας εἶναι ἕνα μέρος τῆς ὁλόκληρης κορδέλας. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι πιὸ μικρὸ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 1.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ὁ ἀριθμητὴς 3 στὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή του, δηλ. ἀπὸ τὸ 4. Τὸ ἴδιο καὶ ὁ ἀριθμητὴς 2 στὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή του, δηλ. ἀπὸ τὸ 3. Ὥστε:

κάθε κλάσμα ποὺ ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή του εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 1 (δηλ. ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα). Κάθε τέτοιο κλάσμα λέγεται **γνήσιο.**

Ἀσκήσεις

80. Νὰ γράψετε 5 γνήσια κλάσματα.

81. Ποιά ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα εἶναι γνήσια ;

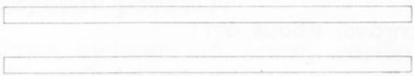
$$\frac{2}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{6}{6}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{9}{10}, \quad \frac{9}{9}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{5}{9}.$$

34

γ) Κλάσματα μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα

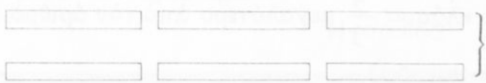
Πρόβλημα. Ἡ Ἐλπινίκη ἔκοψε 2 ἴσες λευκὲς χαρτοταινίες σὲ 3 ἴσα κομμάτια τὴν καθεμιὰ καὶ ἄλλες 2 ἴσες κόκκινες χαρτοταινίες σὲ 5 ἴσα κομμάτια τὴν καθεμιά. Στὸ μάθημα τῆς χαρτοκολλητικῆς χρησιμοποίησε 4 κομμάτια ἀπὸ τὶς λευκὲς χαρτοταινίες καὶ 7 κομμάτια ἀπὸ τὶς κόκκινες. Τί μέρος χαρτοταινίες χρησιμοποίησε ἀπὸ κάθε χρῶμα;

Οἱ λευκὲς χαρτοταινίες :



Κάθε λευκὴ χαρτοταινία σὲ 3 ἴσα μέρη :

ἤτοι:

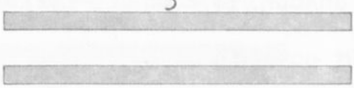


Ἡ Ἐλπινίκη χρησιμοποίησε:

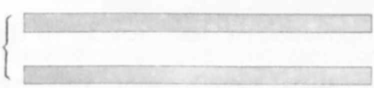
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

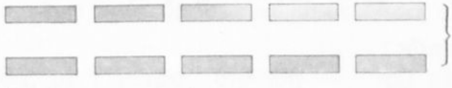
δηλαδὴ μιὰ χαρτοταινία ὁλόκληρη καὶ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τὴν ἄλλη.

Οἱ κόκκινες χαρτοταινίες :



Κάθε κόκκινη χαρτοταινία σὲ 5 ἴσα μέρη :





Ἡ Ἐλπινίκη χρησιμοποίησε :

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{7}{5},$$

δηλαδὴ μιὰ χαρτοταινία ὁλόκληρη καὶ $\frac{2}{5}$ ἀπὸ τὴν ἄλλη.

Ἀπάντηση. Ἡ Ἐλπινίκη χρησιμοποίησε τὰ $\frac{4}{3}$ ἀπὸ τὶς λευκὲς καὶ τὰ $\frac{7}{5}$ ἀπὸ τὶς κόκκινες χαρτοταινίες.

Παραπάνω εἴδαμε ὅτι:

τὰ $\frac{4}{3}$ μιᾶς χαρτοταινίας ἀποτελοῦνται ἀπὸ μιὰ ὁλόκληρη χαρτοταινία καὶ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{3}$ μιᾶς ἄλλης χαρτοταινίας (ἴσης μὲ τὴν πρώτη). Εἶναι, δηλαδή, τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 1 (δηλαδὴ ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα).

Τὰ $\frac{7}{5}$ μιᾶς χαρτοταινίας ἀποτελοῦνται ἀπὸ μιὰ ὁλόκληρη χαρτοταινία καὶ ἀπὸ τὰ $\frac{2}{5}$ μιᾶς ἄλλης χαρτοταινίας (ἴσης μὲ τὴν πρώτη). Εἶναι, δηλαδή, τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 1 (δηλ. ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα).

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμητὴς 4 τοῦ κλάσματος $\frac{4}{3}$ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή του, τὸν 3· τὸ ἴδιο καὶ ὁ ἀριθμητὴς 7 τοῦ κλάσματος $\frac{7}{5}$ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή του, τὸν 5. Συνεπῶς:

κάθε κλάσμα, ποὺ ἔχει ἀριθμητὴ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν παρονομαστή του, εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 1 (δηλ. ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα). Κάθε τέτοιο κλάσμα λέγεται **καταχρηστικό**.

Ἀσκήσεις

82. Νὰ γράψετε 5 καταχρηστικὰ κλάσματα.

83. Νὰ χωρίσετε σὲ κατηγορίες τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{3},\quad \frac{4}{2},\quad \frac{6}{6},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{4}{6},\quad \frac{7}{7},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{9}{10},\quad \frac{11}{11}.$$

35 **δ) Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκέραιων μονάδων**

Πρόβλημα 1ο. Ὁ Πέτρος ἀγόρασε μιὰ λεπτὴ σανίδα γιὰ τὸ μάθημα τῆς χειροτεχνίας, ποὺ εἶχε μῆκος $\frac{20}{10}$ τοῦ μέτρου. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε πόσα μέτρα ἦταν;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

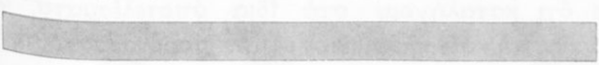
Ἡ σανίδα:

 $= \frac{20}{10}$ μ.

Λύση

Τὸ κλάσμα $\frac{20}{10}$ μέτρα εἶναι καταχρηστικό. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι περιέχει ὁλόκληρα μέτρα, δηλαδὴ ἀκέραιες μονάδες.

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ μισὸ τῆς σανίδας ἦταν:

 $: 2 =$

$=$  $= \frac{10}{10}$ μέτρα.

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι τὸ μισὸ τῆς σανίδας, δηλαδὴ τὸ κλάσμα $\frac{10}{10}$ μέτρα, ἔχει τοὺς ὅρους του ἴσους. Ἄρα εἶναι ἴσο μὲ μιὰ ἀκέραια μονάδα, μὲ 1 μέτρο· δηλαδὴ $\frac{10}{10}$ τοῦ μέτρου $= 1$ μέτρο.

Συνεπῶς ἡ σανίδα, δηλαδὴ τὸ κλάσμα $\frac{20}{10}$ τοῦ μέτρου, ἔχει μῆκος 2 μέτρα.

Ἀπάντηση. Τὸ μῆκος τῆς σανίδας τοῦ Πέτρου ἦταν 2 μ.

Πρόβλημα 2ο. Ἡ μητέρα τῆς Πόπης ἀγόρασε $\frac{4}{3}$ τοῦ κιλοῦ ρύζι. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε πόσα κιλὰ ἦταν;

Λύση. Παρατηροῦμε κι ἐδῶ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$ τοῦ κιλοῦ εἶναι καταχρηστικό. Συνεπῶς περιέχει ὁλόκληρα κιλά, δηλαδὴ ἀκέραιες μονάδες.

Τί σημαίνει ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$ κιλά; Σημαίνει ὅτι χωρίσαμε καθένα ἀπὸ τὰ 4 κιλὰ σὲ 3 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ ὅλα αὐτὰ τὰ μέρη πήραμε τὰ 4· δηλαδὴ πήραμε $\frac{3}{3}$, (δηλ. 1 κιλὸ) καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ κιλοῦ.

Ἀπάντηση. Ἡ μητέρα τῆς Πόπης ἀγόρασε $\left(1 \text{ καὶ } \frac{1}{3}\right)$ κιλὰ ρύζι.

Παραπάνω εἴδαμε ὅτι:

(τὸ καταχρηστικὸ κλάσμα) $\frac{20}{10}$ τοῦ μέτρου $=$ 2 μ.

(τὸ καταχρηστικὸ κλάσμα) $\frac{4}{3}$ τοῦ κιλοῦ $= \left(1 \text{ καὶ } \frac{1}{3}\right)$ κ.

Παρατηροῦμε ὅτι καταλήγομε στὰ ἴδια ἀποτελέσματα, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ κάθε κλάσματος μὲ τὸν παρονομαστή του:

$$(20:10) = \frac{20}{10} = 2\,, \qquad (4:3) = \frac{4}{3} = \left(1 \text{ καὶ } \frac{1}{3}\right)$$

Ἡ ἐργασία, ποὺ κάναμε παραπάνω, ὀνομάζεται **ἐξαγωγὴ τῶν ἀκέραιων μονάδων ἑνὸς καταχρηστικοῦ κλάσματος.** Συνεπῶς:

γιὰ νὰ βγάλωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἑνὸς καταχρηστικοῦ κλάσματος, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ μὲ τὸν παρονομαστή του. Τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκέραιων μονάδων τοῦ κλάσματος. Ἂν ὑπάρχη ὑπόλοιπο, τὸ γράφομε ἀριθμητὴ κλάσματος καὶ παρονομαστή του βάζομε τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἀρχικοῦ κλάσματος.

Ἀσκήσεις

84. Νὰ ἐξαχθοῦν οἱ ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \frac{13}{2}, \frac{17}{4}, \frac{15}{7}, \frac{19}{6}, \frac{125}{2}.$$

3. ΜΕΙΚΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

36 **α) Ἔννοια τῶν μεικτῶν ἀριθμῶν**

Πρόβλημα. Δύο μαθήτριες ἀπὸ τὴ ΣΤ′ τάξη μοίρασαν ἐξίσου μεταξύ τους 5 πορτοκάλια. Πόσα πορτοκάλια πῆρε καθεμιά ;

Τὰ πέντε πορτοκάλια:

Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε μαθήτρια πῆρε ἀπό :

2 ὁλόκληρα πορτοκάλια καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ πορτοκαλιοῦ.

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγομε, κι ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμὸ τῶν πορτοκαλιῶν μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητριῶν· δηλαδή :

$$(5:2) = \frac{5}{2} = \left(2 \text{ καὶ } \frac{1}{2}\right) \text{ πορτοκάλια.}$$

Ἀπάντηση. Κάθε μαθήτρια πῆρε $\left(2 \text{ καὶ } \frac{1}{2}\right)$ πορτοκάλια.

Παραπάνω συναντήσαμε τὸν «ἀριθμὸ» $\left(2 \text{ καὶ } \frac{1}{2}\right)$ πορτοκάλια.

Στὸ 2ο πρόβλημα τοῦ 35ου μαθήματος συναντήσαμε ἐπίσης τὸν «ἀριθμὸ» $\left(1 \text{ καὶ } \frac{1}{3}\right)$ **κιλὰ** ρύζι.

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ προέκυψαν, ὅπως εἴδαμε, ἀπὸ καταχρηστικὰ κλάσματα· ὁ α' ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{5}{2}$ καὶ ὁ β' ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{4}{3}$ μὲ ἐξαγωγὴ τῶν ἀκέραιων μονάδων. Τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς τοὺς γράφομε καὶ τοὺς ἀπαγγέλλομε σύντομα ὡς ἑξῆς:

$2\frac{1}{2}$ πορτοκάλια, $\left(2 \text{ καὶ } \frac{1}{2}\right)$ πορτοκάλια.

$1\frac{1}{3}$ κιλὰ ρύζι, $\left(1 \text{ καὶ } \frac{1}{3}\right)$ κιλὰ ρύζι.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραιο (διαφορετικὸ ἀπὸ τὸν μηδὲν) καὶ ἀπὸ κλάσμα μαζί· γι' αὐτὸ λέμε ὅτι εἶναι **μεικτοὶ ἀριθμοί.**

Ἄρα, μεικτοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκέραιο (διαφορετικὸ ἀπὸ τὸν μηδὲν) καὶ κλάσμα.

Ἀσκήσεις

85. Νὰ γράψετε 5 μεικτοὺς ἀριθμούς.

86. Ν' ἀπαγγείλετε τοὺς παρακάτω μεικτούς:

$2\frac{2}{3}, \quad 3\frac{3}{4}, \quad 4\frac{5}{8}, \quad 6\frac{15}{36}, \quad 5\frac{12}{33}, \quad 7\frac{9}{10}, \quad 8\frac{31}{149}.$

87. Νὰ βγάλετε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα:

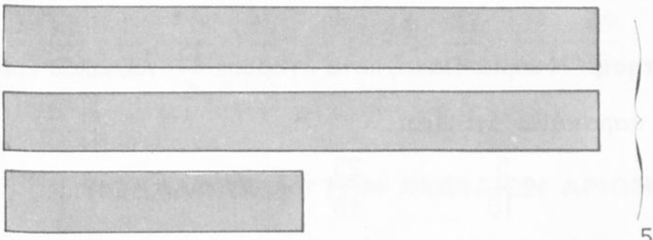
$\frac{4}{3}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{8}{6}, \quad \frac{9}{7}, \quad \frac{10}{7}, \quad \frac{15}{8}, \quad \frac{20}{6}, \quad \frac{20}{8}, \quad \frac{19}{3}.$

37 β) Τροπὴ μεικτοῦ ἀριθμοῦ σὲ κλάσμα

Πρόβλημα 1ο. Ἡ μητέρα τῆς Ἀθηνᾶς ἀγόρασε $2\frac{5}{10}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα δέκατα τοῦ μέτρου ὕφασμα ἀγόρασε ;

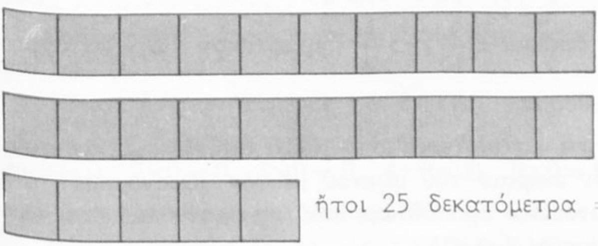
Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος:



$2\frac{5}{10}$ μ.

Λύση. Ἐπειδὴ 1 μέτρο = 10 δεκατόμετρα, τὰ $2\frac{5}{10}$ μέτρα ὕφασμα εἶναι :



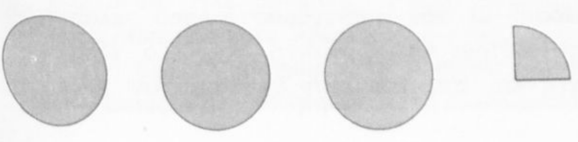
ἤτοι 25 δεκατόμετρα = $\frac{25}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ἀπάντηση. Ἡ μητέρα τῆς Ἀθηνᾶς ἀγόρασε $\frac{25}{10}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα.

Πρόβλημα 2ο. Ἡ κυρία Παναγιώτα ἀγόρασε $3\frac{1}{4}$ κιλὰ κρέας. Πόσα τέταρτα τοῦ κιλοῦ κρέας ἀγόρασε ;

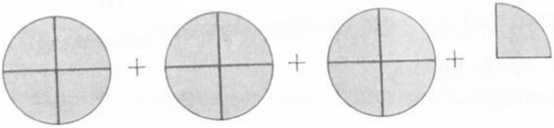
Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Γιὰ εὐκολία μας θὰ παραστήσωμε τὰ κιλὰ μὲ κύκλους.



ἤτοι $3\frac{1}{4}$ κ. κρέας.

Λύση. Ἐπειδὴ 1 κιλὸ $= \frac{4}{4}$ τοῦ κιλοῦ, τὰ $3\frac{1}{4}$ κιλὰ κρέας θὰ εἶναι:



$= \frac{13}{4}$ τοῦ κιλοῦ.

Ἀπάντηση. Ἡ κυρία Παναγιώτα ἀγόρασε $\frac{13}{4}$ τοῦ κιλοῦ κρέας.

Εἴδαμε παραπάνω ὅτι εἶναι:

$$2\frac{5}{10} \text{ μέτρα} = \frac{25}{10} \text{ τοῦ μέτρου,}$$

$$3\frac{1}{4} \text{ κιλὰ} = \frac{13}{4} \text{ τοῦ κιλοῦ,}$$

δηλαδὴ οἱ μεικτοὶ ἀριθμοὶ $2\frac{5}{10}$, $3\frac{1}{4}$ γράφτηκαν ὡς καταχρηστικὰ κλάσματα.

Παρατηροῦμε ὅτι καταλήγομε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος, στὸ γινόμενο προσθέσωμε τὸν ἀριθμητὴ καὶ ἀφήσωμε τὸν ἴδιο παρονομαστή· δηλαδή:

$$2\frac{5}{10} = \frac{(2\times10)+5}{10} = \frac{20+5}{10} = \frac{25}{10}$$

$$3\frac{1}{4} = \frac{(3\times4)+1}{4} = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Ἄρα, γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα μεικτὸ ἀριθμὸ σὲ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος καὶ στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸν ἀριθμητή του. Τὸ ἐξαγόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις

88. Νὰ τρέψετε τοὺς πιὸ κάτω μεικτοὺς ἀριθμοὺς σὲ κλάσματα :

$11\frac{1}{5}$, $12\frac{4}{6}$, $13\frac{1}{8}$, $17\frac{3}{7}$, $18\frac{5}{9}$, $20\frac{4}{5}$, $25\frac{3}{10}$, $102\frac{3}{5}$.

89. Ἀπὸ ποιούς μεικτοὺς προέκυψαν τὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα ;

$\frac{10}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{14}{6}$, $\frac{17}{4}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{19}{3}$, $\frac{20}{7}$.

38

4. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἂς πάρωμε τὸν ἀριθμὸ 2 καὶ ἂς τὸν πολλαπλασιάσωμε μὲ καθέναν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5 κλπ. Θὰ λάβωμε τοὺς ἀριθμούς 1×2, 2×2, 3×2, 4×2, 5×2 κλπ. δηλ. τούς: 2, 4, 6, 8, 10 κλπ.

Καθένας ἀπ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς λέμε ὅτι εἶναι **ἕνα πολλαπλάσιο** τοῦ 2.

Ὅπως ἐργαστήκαμε μὲ τὸ 2, ἔτσι μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε καὶ μὲ κάθε ἀκέραιο ἀριθμό. Εἰδικὰ γιὰ τὸ 0 παρατηροῦμε ὅτι : $1\times0=0$, $2\times0=0$, $3\times0=0$, $4\times0=0$, $5\times0=0$ κλπ.

Ὥστε, **κάθε πολλαπλάσιο τοῦ 0 εἶναι ὁ ἴδιος ὁ 0.**

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ὁ 1 $(1=1\times1)$, ὁ 2 $(2=1\times2)$, ὁ 3 $(3=1\times3)$ κλπ. εἶναι ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ ἑαυτοῦ του. Ὥστε, **κάθε ἀκέραιος εἶναι ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ ἑαυτοῦ του.**

Πολλαπλάσιο λοιπὸν ἑνὸς ἀκέραιου ἀριθμοῦ εἶναι κάθε ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ αὐτοῦ τοῦ ἀκέραιου ἀριθμοῦ μὲ καθέναν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, κλπ.

Παράδειγμα. Ὁ 224 εἶναι ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ 4, διότι

$$56\times4=224.$$

Σημείωση. Τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, κλπ. θὰ τοὺς λέμε **φυσικοὺς ἀριθμούς.**

Ὥστε, **φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὅλοι οἱ γνωστοὶ ὡς τώρα ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἐκτὸς ἀπὸ τὸν μηδέν.**

Ἔτσι π.χ. ὁ 18 εἶναι **φυσικὸς ἀριθμός.**

Οἱ 7, 312, 101 εἶναι **φυσικοὶ ἀριθμοί.**

Τοῦ **φυσικοῦ ἀριθμοῦ** 38 ἕνα πολλαπλάσιο εἶναι ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 76, διότι 2×38=76.

Πρόβλημα. Ἡ Ἰσμήνη θέλει νὰ γράψη τὰ 10 πρῶτα «διαδοχικὰ» πολλαπλάσια καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25 καὶ 7.

Νά πῶς μπορεῖ ἡ Ἰσμήνη νὰ γράψη τὰ πολλαπλάσια ποὺ θέλει:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

Σ' αὐτὸν τὸν πίνακα παρατηροῦμε ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ διάλεξε ἡ Ἰσμήνη, (δηλαδὴ τοὺς 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 7) **διαιρεῖ ἀκριβῶς** τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνο αὐτά.

Αὐτὸ ἰσχύει γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμό.

Ὥστε, κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνο αὐτά.

Ἀσκήσεις

90. Νὰ βρῆτε τὰ 20 πρῶτα διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ ἀκεραίου 2 καὶ νὰ παρατηρήσετε σὲ ποιά ψηφία τελειώνουν.

91. Νὰ βρῆτε τὰ 25 πρῶτα διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ ἀκεραίου 4.

92. Νὰ βρῆτε 10 διαδοχικὰ πολλαπλάσια τοῦ ἀκεραίου 5 καὶ νὰ παρατηρήσετε σὲ ποιά ψηφία τελειώνουν.

93. Νὰ βρῆτε 10 διψήφια πολλαπλάσια τοῦ ἀκεραίου 9.

5. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

Παρακάτω θὰ διατυπώσωμε μερικοὺς κανόνες γιὰ τὴν τέλεια διαίρεση, μερικὰ **κριτήρια διαιρετότητας**, τὰ ὁποῖα θὰ σᾶς ἐπιτρέπουν νὰ διακρίνετε σύντομα πότε ἕνας ἀκέραιος **εἶναι διαιρετὸς** (διαιρεῖται ἀκριβῶς) μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμὸ σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις.

39

1ο κριτήριο. Ἀκέραιοι διαιρετοὶ διὰ 2

Ἐπειδὴ κάθε πολλαπλάσιο τοῦ 2 λήγει σ' ἕνα ἀπὸ τὰ ψηφία 0, 2, 4, 6, 8 (καὶ μόνο), συμπεραίνομε ὅτι:

ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, ἂν λήγῃ σὲ 0, 2, 4, 6 καὶ 8.

Οἱ ἀκέραιοι, ποὺ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, λέγονται ἄρτιοι ἀριθμοί.

Οἱ ἀκέραιοι, ποὺ δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, λέγονται περιττοὶ ἀριθμοί.

2ο κριτήριο. Ἀκέραιοι διαιρετοὶ διὰ 5

Ἐπειδὴ κάθε πολλαπλάσιο τοῦ 5 λήγει σὲ 0 ἢ 5 (καὶ μόνο), συμπεραίνομε ὅτι:

ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ἂν τελειώνῃ σὲ 0 ἢ 5.

3ο κριτήριο. Ἀκέραιοι διαιρετοὶ διὰ 9 ἢ διὰ 3

Ἐπειδὴ (ὅπως μποροῦμε νὰ δοῦμε μὲ διάφορα παραδείγματα) τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν διψηφίων καὶ ἄνω ἀπὸ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9 εἶναι διαιρετὸ διὰ 9 (καὶ ἀντίστροφα), συμπεραίνομε ὅτι:

ἕνας ἀκέραιος διψήφιος καὶ ἄνω εἶναι διαιρετὸς διὰ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸ διὰ 9.

(Ἐπειδὴ ὁ 9 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3· γι' αὐτὸ κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9 εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 3).

Τὸ ἴδιο κριτήριο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸν 3· δηλ. ἕνας ἀκέραιος, διψήφιος καὶ ἄνω, εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι διαιρετὸ διὰ 3.

(Κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 3 δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ διαιρετὸς καὶ διὰ 9· παράδειγμα: ὁ 12 ἢ ὁ 111 κλπ.).

Ἐφαρμογή. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 24, 63, 10101, 53127 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 9 οἱ:

63	διότι	$6+3=9$	καὶ	$9:9=1$
53127	διότι	$5+3+1+2+7=18$	καὶ	$18:9=2$

ἐνῶ διὰ 3 εἶναι διαιρετοὶ ὅλοι· οἱ:

24	διότι	$2+4=6$	καὶ	$6:3=2$
63	διότι	$6+3=9$	καὶ	$9:3=3$
10101	διότι	$1+0+1+0+1=3$	καὶ	$3:3=1$
53127	διότι	$5+3+1+2+7=18$	καὶ	$18:3=6$

Ἀσκήσεις

94. Ποιοί ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 3456, 72, 315, 27, 16005, 99 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, ποιοί διὰ 5, ποιοί δια 9 καὶ ποιοί διὰ 3;

95. Στὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν 31, 36, 13 νὰ βάλετε ἀπὸ ἕνα ψηφίο, ὥστε οἱ τριψήφιοι ποὺ θὰ προκύψουν νὰ εἶναι διαιρετοὶ ταυτόχρονα διὰ 5 καὶ διὰ 9.

40 4ο κριτήριο. Ἀκέραιοι διαιρετοὶ διὰ 4

Γιὰ νὰ διαπιστώσωμε ἂν ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἐξετάζομε τὸ τελευταῖο διψήφιο τμῆμα του. Ἂν αὐτὸ συμβολίζη ἀκέραιο διαιρετὸ διὰ 4, τότε ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 (καὶ ἀντίστροφα)· πράγματι οἱ ἀριθμοί:

112, 116, 120, 212, 224, 236, 400 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4.

Ἄρα, ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ἄν τὸ τελευταῖο (πρὸς τὰ δεξιὰ) διψήφιο τμῆμα του συμβολίζη ἀκέραιο διαιρετὸ διὰ 4.

5ο κριτήριο. Ἀκέραιοι διαιρετοὶ διὰ 25

Ἐπειδὴ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 25 λήγουν σὲ 25, 50, 75 ἢ 00 (καὶ μόνο), συμπεραίνομε ὅτι:

ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ 25, ἂν λήγη σὲ 25, 50, 75 ἢ 00.

6ο κριτήριο. Ἀκέραιοι διαιρετοὶ διὰ 10, 100, 1000...

Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε ἀκέραιος ποὺ τελειώνει σ' ἕνα τουλάχιστο μηδενικό, εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 10 κι ἑπομένως εἶναι διαιρετὸς διὰ 10.

Ἀνάλογα, κάθε ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος τελειώνει σὲ δυὸ τουλάχιστο μηδενικά, εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 100 κι ἑπομένως εἶναι διαιρετὸς διὰ 100.

Κάθε ἀριθμός, ἐπίσης, ποὺ τελειώνει σὲ τρία τουλάχιστο μηδενικά, εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 1000 κι ἑπομένως εἶναι διαιρετὸς διὰ 1000.

Ἄρα, ἕνας ἀκέραιος εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, 100, 1000..., ἂν τελειώνη τουλάχιστο σ' ἕνα, δύο, τρία... μηδενικὰ ἀντίστοιχα.

Ἐφαρμογές. 1. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 230, 2200, 31000, 450000 εἶναι διαιρετοί:

διὰ 10 ὅλοι: 230, 2200, 31000, 450000,
διὰ 100 οἱ 2200, 31000, 450000,
διὰ 1000 οἱ 31000, 450000.

2. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 175, 750, 125, 144, 300, 400 εἶναι διαιρετοί:

διὰ 4 οἱ 144, 300, 400,
διὰ 25 οἱ 175, 750, 125, 300, 400,
διὰ 10 οἱ 750, 300, 400,
διὰ 100 οἱ 300, 400,

διὰ 3 οἱ 144, 300, 750,
διὰ 9 ὁ 144,
διὰ 2 οἱ 750, 144, 300, 400,
διὰ 5 οἱ 175, 750, 125, 300, 400,
διὰ 1000 κανένας.

Ἀσκήσεις

96. Στὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ 22 τοποθετῆστε δύο ψηφία, ὥστε ὁ τετραψήφιος ἀριθμὸς ποὺ θὰ προκύψη νὰ διαιρῆται διὰ 25.

97. Ποιοί ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2244, 34, 3312 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4, ποιοί διὰ 3 καὶ ποιοί διὰ 9;

6. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἰδιότητα 1η.

Ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμὸ

41 **α) ὅταν πολλαπλασιαστῆ ὁ ἀριθμητής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό.**

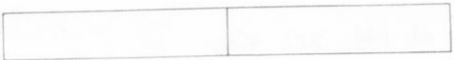
Πρόβλημα. Ἡ κ. Βασιλικὴ ἀγόρασε 2 τεμάχια δαντέλας. Ἂν τὸ κάθε τεμάχιο ἦταν $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου, πόσα δέκατα τοῦ μέτρου δαντέλας ἀγόρασε ;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

1ο τεμάχιο δαντέλας:  $\frac{4}{10}$ μ.

2ο τεμάχιο δαντέλας:  $\frac{4}{10}$ μ.

Λύση. Εἶναι φανερὸ ὅτι καὶ τὰ 2 τεμάχια μαζὶ ἦταν:

 $\frac{8}{10}$ μ.

Ἀπάντηση. Ἡ κ. Βασιλικὴ ἀγόρασε $\frac{8}{10}$ μ. δαντέλα.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος

Ἐπειδὴ τὰ 2 τεμάχια δαντέλας, ποὺ ἀγόρασε ἡ κ. Βασιλική, ἦταν ἴσα, ἔχομε:
(τέσσερα δέκατα τοῦ μέτρου) $\times 2 =$ ὀχτὼ δέκατα τοῦ μέτρου $=$
$\frac{8}{10}$ μ. $= \frac{4 \times 2}{10}$ μ.

Παραπάνω πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμητὴ 4 τοῦ κλάσματος $\frac{4}{10}$ μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν τεμαχίων τῆς δαντέλας 2 καὶ βρήκαμε τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$. Στὴ σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος φαίνεται καθαρὰ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ μ. εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ μ. Γι' αὐτὸ μποροῦμε ἐξάλλου νὰ βεβαιωθοῦμε, ἂν ἀνατρέξωμε καὶ στὴ χρήση τοῦ μέτρου.

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ διπλασιάστηκε, ἔγινε δηλαδὴ $\frac{8}{10}$, μὲ πολλαπλασιασμὸ τοῦ ἀριθμητῆ του 4 ἐπὶ 2.

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ σὲ κάθε ἄλλο κλάσμα.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμητὴ ἑνὸς κλάσματος μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμό, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό·

$$\text{δηλαδὴ } \frac{4 \times 2}{10} = \frac{4}{10} \times 2.$$

Ἀσκήσεις

98. Νὰ πολλαπλασιάσετε τὸν ἀριθμητὴ κάθε κλάσματος ἀπὸ τὰ παρακάτω: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$ καὶ $\frac{2}{20}$ τοῦ μέτρου ἐπὶ 3 καὶ νὰ ἐξετάσετε, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ μέτρου, τί ἔπαθαν τὰ κλάσματα αὐτά.

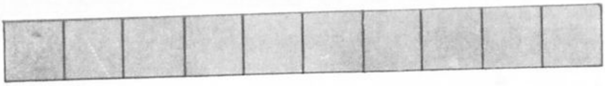
99. Νὰ πολλαπλασιάσετε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{6}$ τοῦ κιλοῦ ἐπὶ 3, 6, 9, 12 καὶ νὰ ἐξετάσετε τί ἔπαθε τὸ κλάσμα $\frac{4}{6}$ τοῦ κιλοῦ.

42

β) ὅταν διαιρεθῆ ὁ παρονομαστής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

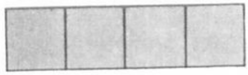
Πρόβλημα. Ἡ κ. Βασιλικὴ ἀγόρασε $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα καὶ ἡ κ. Παναγιώτα $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Ποιά ἀπὸ τὶς δυὸ ἀγόρασε περισσότερο ὕφασμα καὶ πόσο περισσότερο;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



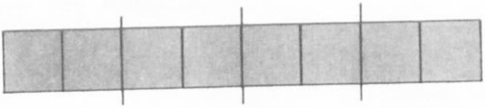
1. μ. ὕφ.

Ἡ κ. Βασιλικὴ ἀγόρασε:



$\frac{4}{10}$ μ. ὕφ.

Ἡ κ. Παναγιώτα ἀγόρασε:



$\frac{4}{5}$ μ. ὕφ.

Λύση. Ἂν συγκρίνωμε τὰ δυὸ τεμάχια ὕφασμα, θὰ διαπιστώσωμε ὅτι ἡ κ. Παναγιώτα ἀγόρασε διπλάσιο ὕφασμα ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ ἀγόρασε ἡ κ. Βασιλική. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου. Τοῦτο μποροῦμε νὰ τὸ ἐπαληθεύσωμε, ἂν ἀνατρέξωμε καὶ στὴ χρήση τοῦ μέτρου.

Πραγματικά, τὰ $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου εἶναι 40 ἑκατοστόμετρα, ἐνῶ τὰ $\frac{4}{5}$ του εἶναι 80 ἑκατοστόμετρα, ἤτοι: (40 ἑκατ.) $\times$ 2 = 80 ἑκατ.

Ἀπάντηση. Ἡ κ. Παναγιώτα ἀγόρασε διπλάσιο ὕφασμα ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ ἀγόρασε ἡ κ. Βασιλική.

Ἂς ἐξετάσωμε ὅμως πιὸ προσεχτικὰ τὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{10} \qquad \frac{4}{5}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν τοὺς ἀριθμητὲς ἴσους καὶ ὅτι ὁ παρονομαστὴς 5 τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ μισὸ τοῦ παρονομαστῆ 10 τοῦ πρώτου κλάσματος. Ἄρα, ἂν διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴ 10 τοῦ πρώτου κλάσματος μὲ τὸν 2, βρίσκομε κλάσμα ἴσο μὲ τὸ δεύτερο· ἤτοι:

$$\frac{4}{10:2}=\frac{4}{5}.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ διπλασιάστηκε, ἔγινε (δηλαδὴ) $\frac{4}{5}$, μὲ διαίρεση τοῦ παρονομαστῆ του 10 διὰ 2.

Τὸ «ἀνάλογο» συμβαίνει καὶ μὲ κάθε ἄλλο κλάσμα.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

ἂν διαιρέσωμε τὸν παρονομαστὴ ἑνὸς κλάσματος μ᾽ ἕνα φυσικὸ ἀριθμό, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό·

$$\text{δηλαδὴ } \frac{4}{10:2}=\frac{4}{10}\times 2.$$

Ἀσκήσεις

100. Νὰ πολλαπλασιάσετε τὸν ἀριθμητὴ 4 τοῦ κλάσματος $\frac{4}{8}$ ἐπὶ 2 κι ἔπειτα νὰ διαιρέσετε τὸν παρονομαστή του, τὸ 8, διὰ 2. Νὰ συγκρίνετε τὰ δύο ἀποτελέσματα. Νὰ διατυπώσετε τὸ σχετικὸ κανόνα.

101. Νὰ διαιρέσετε τὸν παρονομαστὴ 12 τοῦ κλάσματος $\frac{6}{12}$ μὲ τὸ 2 κι ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσετε τὸν ἀριθμητή του, τὸ 6, ἐπὶ 2. Νὰ συγκρίνετε τὰ δύο ἀποτελέσματα.

Ἰδιότητα 2η.

43

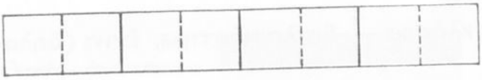
Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται μ᾽ ἕνα φυσικὸ ἀριθμὸ

α) ὅταν πολλαπλασιαστῆ ὁ παρονομαστής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

Πρόβλημα. Ἡ κ. Ἀμαλία ἀγόρασε $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου κορδέλας καὶ τὴ μοίρασε ἐξίσου στὶς 2 θυγατέρες της, τὴν Ἑλένη καὶ τὴν Πόπη. Τί μέρος τῆς κορδέλας πῆρε καθεμιά ;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ κορδέλα, ποὺ ἀγόρασε ἡ κ. Ἀμαλία



$\frac{4}{5}$ μ.

Λύση. Ἐπειδὴ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου $= \frac{100}{5}$ ἑκατοστόμετρα $=$ 20 ἑκατοστόμετρα, τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου θὰ εἶναι (20 ἑκατ.) $\times 4 = 80$ ἑκατοστόμετρα $= 8$ δεκατόμετρα $= \frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου. Ἄρα $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου $= \frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου. Συνεπῶς, τὸ μισὸ τῆς κορδέλας, δηλαδὴ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου, εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ἀπάντηση. Κάθε θυγατέρα τῆς κ. Ἀμαλίας πῆρε $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου κορδέλας.

Καὶ τώρα ἂς ἐξετάσωμε πιὸ προσεχτικὰ τὰ κλάσματα:

$$\frac{4}{5} \qquad \qquad \frac{4}{10}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν ἴσους ἀριθμητὲς καὶ ὅτι ὁ παρονομαστὴς 10 τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ διπλάσιο τοῦ παρονομαστῆ 5 τοῦ πρώτου κλάσματος.

Ἄρα, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ 5 τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ 2, βρίσκομε κλάσμα ἴσο μὲ τὸ δεύτερο· δηλαδή:

$$\frac{4}{5\times 2} = \frac{4}{10}.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ διαιρέθηκε διὰ τοῦ 2, ἔγινε δηλαδὴ $\frac{4}{10}$ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ παρονομαστῆ του 5 ἐπὶ 2.

Τὸ «ἀνάλογο» συμβαίνει καὶ σὲ κάθε ἄλλο κλάσμα.
Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ ἑνὸς κλάσματος μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμό, τὸ κλάσμα διαιρεῖται μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό·

δηλαδὴ $\frac{4}{5\times2} = \frac{4}{5} : 2.$

Ἀσκήσεις

102. Νὰ διαιρέσετε τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{3}{20}$ τοῦ κιλοῦ διὰ 2, χωρὶς νὰ θίξετε τοὺς ἀριθμητές τους. Ἔπειτα νὰ βρῆτε πόσα γραμμάρια ἀντιπροσωπεύει τὸ καθένα ἀπὸ αὐτά.

103. Νὰ διαιρέσετε τὰ κλάσματα : $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{25}{40}$ διὰ 3, χωρὶς νὰ θίξετε τοὺς ἀριθμητές τους.

44

β) ὅταν διαιρεθῆ ὁ ἀριθμητής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

Πρόβλημα. Ἡ κ. Βασιλικὴ ἀγόρασε $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα, γιὰ νὰ ράψη 2 ἴσες ποδιὲς στὶς θυγατέρες της, τὴν Ἀμαλία καὶ τὴν Εὐτυχία. Πόσο ὕφασμα θὰ χρησιμοποιήση γιὰ κάθε ποδιά;

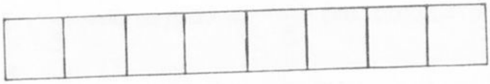
Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

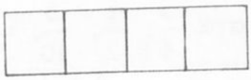
Τὸ ὕφασμα, ποὺ ἀγόρασε ἡ κ. Βασιλική:

$\frac{8}{10}$ μ.

Λύση. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου = 1 δεκατόμετρο = 10 ἑκατοστόμετρα, θὰ εἶναι τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου = 8 δεκατόμετρα = 80 ἑκατοστόμετρα.

Ἄρα γιὰ κάθε ποδιὰ ἡ κ. Βασιλικὴ θὰ χρησιμοποιήση (80 ἑκατοστόμετρα ὕφασμα): 2 = 40 ἑκατοστόμετρα = 4 δεκατόμετρα = $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου. Συνεπῶς τὸ μισὸ ὕφασμα, δηλαδὴ τὸ μισὸ τοῦ κλάσματος $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου, εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$, ἤτοι:

$\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου  : 2 =

=  $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ἀπάντηση: Ἡ κ. Βασιλικὴ θὰ χρησιμοποιήση γιὰ κάθε ποδιὰ $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα.

Ἂς ἐξετάσωμε ὅμως πιὸ προσεχτικὰ τὰ κλάσματα:

$$\frac{8}{10} \qquad \frac{4}{10}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν ἴσους παρονομαστὲς καὶ ὅτι ὁ ἀριθμητὴς 4 τοῦ δευτέρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ μισὸ τοῦ ἀριθμητῆ 8 τοῦ πρώτου κλάσματος. Ἄρα, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ 8 τοῦ πρώτου κλάσματος μὲ τὸν 2, βρίσκομε κλάσμα ἴσο μὲ τὸ δεύτερο· δηλαδή:

$$\frac{8:2}{10} = \frac{4}{10}.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ διαιρέθηκε μὲ τὸ 2, ἔγινε δηλαδὴ $\frac{4}{10}$, ἀφοῦ διαιρέσαμε τὸν ἀριθμητή του 8 μὲ τὸ 2.

Τὸ «ἀνάλογο» συμβαίνει καὶ σὲ κάθε ἄλλο κλάσμα.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ ἑνὸς κλάσματος μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμό, τὸ κλάσμα διαιρεῖται μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό·

$$\text{δηλαδὴ } \frac{8:2}{10} = \frac{8}{10} : 2.$$

Ἀσκήσεις

104. Νὰ κάνετε 5 φορὲς μικρότερα τὰ κλάσματα: $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{80}$, $\frac{20}{25}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{45}{50}$ καὶ $\frac{60}{100}$ τοῦ κιλοῦ, χωρὶς νὰ θίξετε τοὺς παρονομαστές τους. Ἔπειτα νὰ βρῆτε πόσα γραμμάρια ἀντιπροσωπεύει τὸ καθένα ἀπὸ αὐτά.

105. Νὰ κάνετε 3 φορὲς μικρότερα τὰ κλάσματα: $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{21}{25}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{30}{35}$ μὲ ὅποιο τρόπο θέλετε.

45

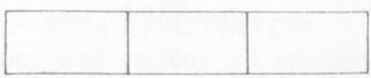
Ἰδιότητα 3η.

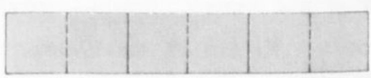
Ἕνα κλάσμα δὲ μεταβάλλεται

α) ἂν πολλαπλασιαστοῦν καὶ οἱ δύο ὅροι του μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό.

Πρόβλημα. Ἡ Ἀθηνᾶ ἔχει δυὸ κορδέλες, μιὰ λευκὴ καὶ μιὰ κόκκινη. Ἡ λευκὴ εἶναι $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου καὶ ἡ κόκκινη $\frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου. Ποιά κορδέλα εἶναι μεγαλύτερη;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ λευκὴ κορδέλα:  $\frac{3}{5}$ μ.

Ἡ κόκκινη κορδέλα:  $\frac{6}{10}$ μ.

Λύση. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου $= \frac{100}{5}$ ἑκατοστόμετρα $= 20$ ἑκατοστόμετρα. Ἄρα τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου $=$ (20 ἑκατοστ.) $\times 3 = 60$ ἑκαστόμετρα $= 6$ δεκατόμετρα $= \frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου· δηλαδὴ $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου $= \frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου. Βλέπομε λοιπὸν ὅτι

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}.$$

Ἀπάντηση. Οἱ 2 κορδέλες τῆς Ἀθηνᾶς εἶναι ἴσες.

Ἂς ἐξετάσωμε ὅμως πιὸ προσεχτικὰ τὰ ἴσα κλάσματα:

$$\frac{3}{5} \qquad\qquad \frac{6}{10}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ δεύτερου κλάσματος $\frac{6}{10}$ εἶναι διπλάσιος ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχό του ὅρο τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{3}{5}$. Κι ἐπειδὴ τὰ κλάσματα εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2}.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, ἂν καὶ οἱ δύο ὅροι του πολλαπλασιάστηκαν ἐπὶ 2, δὲν ἄλλαξε.

β) ἂν διαιρεθοῦν καὶ οἱ δύο ὅροι του μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό.

Ἂς προσέξωμε καὶ πάλι τὰ ἴσα κλάσματα:

$$\frac{6}{10} \qquad\qquad \frac{3}{5}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ δεύτερου κλάσματος $\frac{3}{5}$ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ἀντίστοιχού του ὅρου τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{6}{10}$. Κι ἐπειδὴ τὰ κλάσματα εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2}.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$ μὲ τὴ διαίρεση καὶ τῶν δύο τῶν ὅρων του διὰ 2 δὲν ἄλλαξε.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

ἂν πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμὸ ἢ τοὺς διαιρέσωμε μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό, τὸ κλάσμα δὲ μεταβάλλεται·

δηλαδή: α) $\frac{2}{7} = \frac{2\times7}{7\times7}$ β) $\frac{30}{55} = \frac{30:5}{55:5}$

Ἀσκήσεις

106. Νὰ πολλαπλασιάσετε ἐπὶ 3 τοὺς ὅρους τῶν παρακάτω κλασμάτων:

$\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ, $\frac{3}{10}$ τοῦ κιλοῦ, $\frac{6}{10}$ τῆς ὥρας, $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατοστάρικου, $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Τί παρατηρεῖτε;

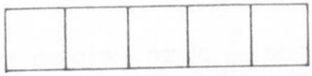
107. Νὰ διαιρέσετε διὰ 2 τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων: $\frac{6}{10}$ τοῦ μήνα, $\frac{50}{100}$ τοῦ αἰώνα, $\frac{10}{20}$ τοῦ κιλοῦ, $\frac{20}{60}$ τῆς ὥρας. Τί παρατηρεῖτε;

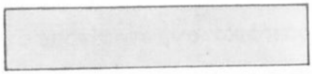
46

7. ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

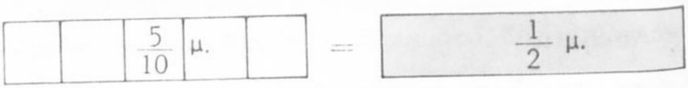
Πρόβλημα. Ἡ Παρασκευὴ ἀγόρασε δυὸ δαντέλες, μιὰ λευκὴ καὶ μιὰ πράσινη. Ἡ λευκὴ ἦταν $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ ἡ πράσινη $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου. Ποιά ἀπὸ τὶς δυὸ δαντέλες ἦταν μεγαλύτερη;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ λευκὴ δαντέλα :  $\frac{5}{10}$ μ.

Ἡ πράσινη δαντέλα :  $\frac{1}{2}$ μ.

Λύση. Εἶναι φανερὸ ὅτι $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου = 5 δεκατόμετρα = 50 ἑκατοστόμετρα. Ἐπίσης $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου = 50 ἑκατοστόμετρα.

Συνεπῶς : 

Ἀπάντηση. Οἱ δυὸ δαντέλες τῆς Παρασκευῆς ἦταν ἴσες.
Ἂς ἐξετάσωμε ὅμως πιὸ προσεχτικὰ τὰ κλάσματα:

$$\frac{5}{10} \qquad \frac{1}{2}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι καθένας ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος εἶναι πενταπλάσιος ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχό του ὅρο τοῦ δεύτερου κλάσματος. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἂν διαιρέσωμε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος διὰ 5, θὰ βροῦμε τὸ δεύτερο κλάσμα.

Πραγματικά: $\frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$.

Ἐξάλλου, μᾶς εἶναι γνωστὸ ὅτι, ἂν διαιρέσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό, τὸ κλάσμα δὲ μεταβάλλεται· συνεπῶς: $\frac{5}{10} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$.

Ἡ πράξη ποὺ κάναμε παραπάνω λέγεται **ἁπλοποίηση** τοῦ κλάσματος $\frac{5}{10}$.

Μὲ τὴν ἁπλοποίηση μποροῦμε νὰ μεταβάλωμε ἕνα κλάσμα μὲ μεγάλους ὅρους σ' ἕνα ἄλλο κλάσμα «ἰσοδύναμό» του ἀλλὰ μέ, ὅσο τὸ δυνατό, μικρότερους ὅρους.

Ἔστω ὅτι θέλομε ν' ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$. Γιὰ νὰ κάνωμε τὴν ἁπλοποίηση αὐτοῦ τοῦ κλάσματος, πρέπει νὰ βροῦμε ἕναν ἀριθμό, ποὺ νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τοὺς ὅρους του. Ἕνας τέτοιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 4· ἑπομένως: $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$.

Τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{3}$ δὲν εἶναι δυνατὸ ν' ἁπλοποιηθοῦν περισσότερο. Αὐτὰ τὰ κλάσματα λέγονται **ἀνάγωγα** κλάσματα.

Ἄρα, ἀνάγωγο κλάσμα λέγεται κάθε κλάσμα ποὺ δὲν εἶναι δυνατὸ ν' ἁπλοποιηθῇ.

Ἀσκήσεις

110. Ν' ἁπλοποιήσετε τὰ κλάσματα:
$\frac{6}{10}$ τοῦ μήνα, $\frac{50}{200}$ τοῦ κιλοῦ, $\frac{6}{10}$ τοῦ χιλιόμετρου.

111. Νὰ βρῆτε ποιά ἀπὸ τὰ κλάσματα:
$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{4}, \frac{6}{12}, \frac{4}{13}, \frac{6}{18}, \frac{9}{81}, \frac{27}{36}, \frac{7}{49}, \frac{3}{71}$
εἶναι ἀνάγωγα. Τὰ ἄλλα νὰ τὰ μετατρέψετε σὲ ἀνάγωγα.

112. Ν' ἁπλοποιήσετε τὰ κλάσματα:
$\frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{2}{4}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{6}{15}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{15}, \frac{18}{21}$.

47 8. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ (Μ.Κ.Δ.) ΔΥΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ ΑΝΑΓΩΓΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Α. Ἂς λάβωμε δυὸ ἀκέραιους ἀριθμούς, λ.χ. τοὺς 60 καὶ 100. Οἱ ἀριθμοὶ 1, 60, 2, 30, 3, 20, 4, 15, 5, 12, 6, 10 εἶναι διαιρέτες τοῦ

60, δηλαδὴ ὁ καθένας τους διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 60. Ἄλλοι διαιρέτες τοῦ 60 δὲν ὑπάρχουν.

Οἱ ἀριθμοὶ 1, 100, 2, 50, 4, 25, 5, 20, 10 εἶναι (ὅλοι) οἱ διαιρέτες τοῦ 100, δηλ. ὁ καθένας τους διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 100. Οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 4, 5, 10, 20 (καὶ μόνο αὐτοὶ) εἶναι **κοινοὶ διαιρέτες τοῦ 60 καὶ τοῦ 100.** Ἀπὸ ὅλους τοὺς κοινοὺς διαιρέτες τοῦ 60 καὶ τοῦ 100 ὁ πιὸ μεγάλος (**ὁ μέγιστος**) εἶναι ὁ 20· γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ὁ 20 εἶναι **ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν 60 καὶ 100** καὶ γράφομε γιὰ συντομία:

Μ.Κ.Δ. (60, 100) = 20.

(Μ,Κ,Δ εἶναι τὰ ἀρχικὰ τῶν λέξεων μέγιστος, κοινός, διαιρέτης).

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομε ὅτι γιὰ κάθε **δυὸ ἀκέραιους ἀριθμοὺς ὑπάρχει ἕνας (μοναδικὸς) φυσικὸς ἀριθμός, ποὺ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τους**.

Ὑπάρχουν ζευγάρια ἀκεραίων, ποὺ ὁ Μ.Κ.Δ. τους εἶναι ὁ 1· λ.χ. Μ.Κ.Δ. (2, 5) = 1.

Κάθε δυὸ τέτοιοι ἀριθμοὶ λέμε ὅτι εἶναι **πρῶτοι μεταξύ τους**.

Β. Ἡ ἔννοια τοῦ Μ.Κ.Δ. δυὸ ἀκεραίων εἶναι χρήσιμη γιὰ τὴν ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων.

Πρόβλημα. Ν' ἁπλοποιηθῆ τὸ κλάσμα $\frac{60}{100}$.

Λύση. Γιὰ ν' ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα $\frac{60}{100}$, πρέπει νὰ διαιρέσωμε καὶ τοὺς δύο ὅρους του μ' ἕναν κοινὸ διαιρέτη τους, διαφορετικὸν ἀπὸ τὸν 1. Ἔτσι εἶναι

$$\frac{60}{100} = \frac{60:2}{100:2} = \frac{30}{50}, \quad \frac{60}{100} = \frac{60:4}{100:4} = \frac{15}{25} \text{ κλπ.}$$

καί: $\frac{60}{100} = \frac{60:20}{100:20} = \frac{3}{5}$. Τὰ κλάσμα αὐτὸ εἶναι ἀνάγωγο (δὲν ἁπλοποιεῖται ἄλλο).

Μᾶς συμφέρει κατὰ τὴν ἁπλοποίηση κάθε κλάσματος νὰ διαιροῦμε τοὺς ὅρους του μὲ τὸ Μ.Κ.Δ. τους· βρίσκομε, ἔτσι, ἰσοδύναμό του κλάσμα, ποὺ εἶναι ἀνάγωγο.

Γιὰ τὸ πρόβλημά μας, ἐπειδὴ Μ.Κ.Δ. (60, 100) = 20, θὰ ἔχωμε ἀμέσως

$$\frac{60}{100} = \frac{60:20}{100:20} = \frac{3}{5}.$$

Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους (δηλ. ἔχουν ἕνα μοναδικό, κοινὸ διαιρέτη, τὸν 1), τότε τὸ κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται (εἶναι ἀνάγωγο).

Ἡ ἁπλοποίηση τῶν μὴ ἀνάγωγων κλασμάτων εἶναι πολὺ χρήσιμη, διότι μᾶς διευκολύνει στὴν ἐκτέλεση τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπάνω στοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, ἀφοῦ μᾶς δίνει κλάσματα μὲ μικρότερους ὅρους.

Ἀσκήσεις

108. Νὰ βρῆτε τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 18 καθὼς καὶ τῶν 36 καὶ 54.

109. Ν' ἁπλοποιήσετε τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{3}{34}, \frac{27}{81}, \frac{6}{18}, \frac{70}{140}, \frac{80}{400}, \frac{25}{125}, \frac{60}{180}.$$

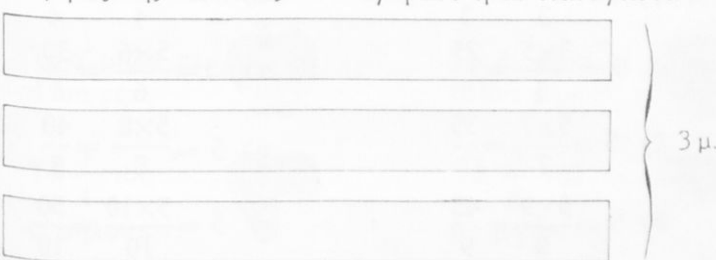
48

9. ΠΩΣ ΤΡΕΠΟΜΕ ΕΝΑΝ ΑΚΕΡΑΙΟ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑ

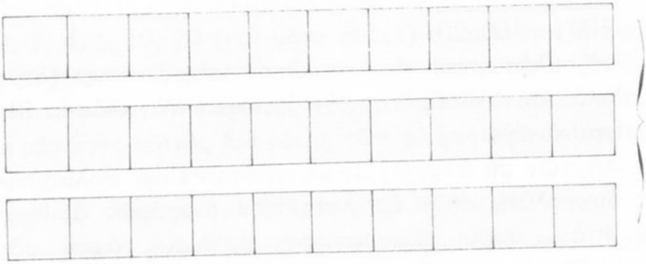
Πρόβλημα. Ἡ κ. Παναγιώτα ἀγόρασε 3 μέτρα δαντέλας. Πόσα δέκατα τοῦ μέτρου δαντέλας ἀγόρασε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὸ μῆκος τῆς δαντέλας ποὺ ἀγόρασε ἡ κ. Παναγιώτα:



Λύση. Ἐπειδὴ 1 μέτρο $= 10$ δεκατόμετρα, τὰ 3 μέτρα εἶναι 3×10 δεκατόμετρα $= 30$ δεκατόμετρα $= \frac{30}{10}$ μέτρα. Γι' αὐτὸ μποροῦμε νὰ βεβαιωθοῦμε καὶ σχηματογραφικά:



$= 30$ δεκ. $=$

$= \frac{30}{10}$ μέτρα.

Ἀπάντηση. Ἡ κ. Παναγιώτα ἀγόρασε $\frac{30}{10}$ μ. δαντέλας.

Εἴδαμε παραπάνω ὅτι:

$$3 \text{ μέτρα} = 3 \times 10 \text{ δεκ.} = \frac{3 \times 10}{10} \text{ μέτρα} = \frac{30}{10} \text{ τοῦ μέτρου},$$

δηλαδὴ ὅτι ὁ ἀκέραιος 3 μέτρα ἔγινε κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν 10.

Καταλαβαίνομε ἀπὸ τὰ παραπάνω ὅτι κάθε ἀκέραιος εἶναι δυνατὸ νὰ γίνῃ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ δεδομένο φυσικὸ ἀριθμό.

Παραδείγματα

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ κάνωμε τὸν ἀκέραιο 5 κλάσμα μὲ παρονομαστὴ α) τὸν 1, β) τὸν 2, γ) τὸν 3, δ) τὸν 4 κλπ. Θὰ ἔχωμε:

α) $5 = \frac{5 \times 1}{1} = \frac{5}{1}$ β) $5 = \frac{5 \times 2}{2} = \frac{10}{2}$

γ) $5 = \frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3}$ δ) $5 = \frac{5 \times 4}{4} = \frac{20}{4}$

ε) $5 = \frac{5 \times 5}{5} = \frac{25}{5}$ στ) $5 = \frac{5 \times 6}{6} = \frac{30}{6}$

ζ) $5 = \frac{5 \times 7}{7} = \frac{35}{7}$ η) $5 = \frac{5 \times 8}{8} = \frac{40}{8}$

θ) $5 = \frac{5 \times 9}{9} = \frac{45}{9}$ ι) $5 = \frac{5 \times 10}{10} = \frac{50}{10}$

Ὥστε, γιὰ νὰ τρέψωμε ἕναν ἀκέραιο σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ δεδομένο φυσικὸ ἀριθμό, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο μὲ τὸ δεδομένο παρονομαστὴ καὶ τὸ γινόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητή, ἐνῶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸ δεδομένο φυσικὸ ἀριθμό.

Σημείωση. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μαζὶ μὲ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς λέγονται **ρητοὶ ἀριθμοί.**

Ἀσκήσεις

113. Νὰ κάνετε κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὸν 5 τοὺς ἀκεραίους: 2 κιλά, 6 μέτρα, 7 ὧρες, 12 μῆνες, 2 χρόνια, 3 μῆλα.

114. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ κάνετε κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὸν 8, τοὺς ἀκεραίους: 5, 10, 4, 6, 3, 0.

10. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

49

1. Σύγκριση δύο κλασμάτων

α) μὲ ἴσους ἀριθμητὲς καὶ ἄνισους παρονομαστὲς

Πρόβλημα. Ἡ Ἑλένη εἶχε δυὸ ἴσα μῆλα. Ἔκοψε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ σὲ 4 ἴσα κομμάτια καὶ τὸ ἄλλο σὲ 8. Πῆρε ἀπὸ τὸ α΄ μῆλο τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ ἀπὸ τὸ β΄ τὰ $\frac{3}{8}$. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{8}$ ποιό εἶναι μεγαλύτερο;

Τὸ α΄ μῆλο:  Τὸ β΄ μῆλο: 

Τὸ α΄ μῆλο σὲ 4 ἴσα μέρη:  Τὸ β΄ μῆλο σὲ 8 ἴσα μέρη: 

Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ α΄ μήλου:  Τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ β΄ μήλου: 

Ἀπὸ τὴ γραφικὴ ἀναπαράσταση γίνεται φανερὸ ὅτι ἡ Ἑλένη πῆρε μεγαλύτερο μέρος ἀπὸ τὸ α΄ μῆλο. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοῦ α' μήλου εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τοῦ β' μήλου.

Ἀπάντηση. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{8}$ μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω καταλαβαίνομε ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{8}$ εἶναι ἄνισα. Τὴ σχέση τῆς ἀνισότητάς τους τὴ συμβολίζομε ἔτσι: $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$ ἢ $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$. Τὸ σημάδι «$<$ (ἢ τὸ $>$)» εἶναι τὸ σύμβολο τῆς ἀνισότητας δυὸ ἀριθμῶν. Στὴν κορυφὴ τοῦ συμβόλου γράφομε τὸ μικρότερο ἀριθμό, ἐνῶ στὸ ἄνοιγμά του τὸ μεγαλύτερο. Ἡ παραπάνω ἀνισότητα ἀπαγγέλλεται «τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$» ἢ «τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$».

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{8}$ ἔχουν ἴσους ἀριθμητές. Ἄρα ἡ «αἰτία» τῆς ἀνισότητάς τους βρίσκεται στοὺς παρονομαστές. Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε, μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, συμπεραίνομε ὅτι:

ἀπὸ δυὸ κλάσματα μὲ ἴσους ἀριθμητὲς καὶ ἄνισους παρονομαστὲς μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μικρότερο παρονομαστή.

Δύο κλάσματα μὲ ἄνισους παρονομαστὲς λέγονται **ἑτερώνυμα κλάσματα.**

Σημείωση. Δύο ἑτερώνυμα κλάσματα μπορεῖ νὰ ἔχουν καὶ ἄνισους ἀριθμητές.

Παράδειγμα. Τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{7}{9}$ εἶναι ἑτερώνυμα κλάσματα.

ʼΑσκήσεις

115. Νὰ βρῆτε ποιό ἀπὸ τὰ κλάσματα εἶναι μικρότερο καὶ ποιό μεγαλύτερο, ἀνάμεσα στὰ παρακάτω ζευγάρια, καὶ νὰ τὰ χαρακτηρίσετε μὲ τὸ ἀνάλογο σύμβολο ἀνισότητας:

α) $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{5}$, β) $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{9}$, γ) $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{10}$, δ) $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{11}$, ε) $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{20}$.

116. Νὰ βάλετε στὴ σειρά, ἀνάλογα μὲ τὸ μέγεθός τους (ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μικρότερο), τὰ παρακάτω κλάσματα (νὰ τὰ συγκρίνετε ἀνὰ δύο):

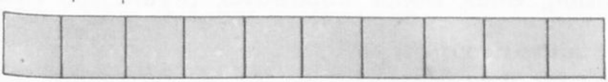
$$\frac{4}{20}, \quad \frac{4}{15}, \quad \frac{4}{8}.$$

50

β) μὲ ἴσους παρονομαστὲς καὶ ἄνισους ἀριθμητὲς

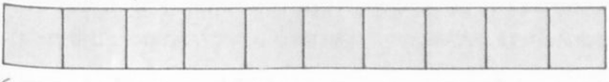
Πρόβλημα. Ἡ Ἐλευθερία ἀγόρασε δυὸ ἴσες κορδέλες, μιὰ κόκκινη καὶ μιὰ πράσινη, καθεμιὰ ἴση μὲ ἕνα μέτρο. Ἀπὸ τὴν πρώτη πῆρε τὰ $\frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ ἀπὸ τὴ δεύτερη τὰ $\frac{8}{10}$. Ἀπὸ τὰ δυὸ κλάσματα $\frac{6}{10}$ καὶ $\frac{8}{10}$ ποιό εἶναι τὸ μεγαλύτερο;

Ἡ κόκκινη κορδέλα:



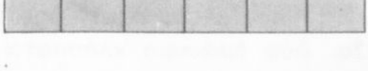
1 μ.

Ἡ πράσινη κορδέλα:

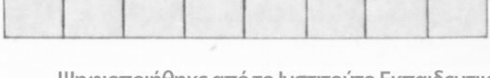


1 μ.

Τὰ $\frac{6}{10}$ τῆς α΄ κορδέλας:



Τὰ $\frac{8}{10}$ τῆς β΄ κορδέλας:



Ἀπὸ τὴ γραφικὴ ἀναπαράσταση γίνεται φανερὸ ὅτι ἡ Ἐλευθερία πῆρε μεγαλύτερο μέρος ἀπὸ τὴν πράσινη κορδέλα. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ἀπάντηση. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{6}{10}$ καὶ $\frac{8}{10}$ μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$.

Εἴδαμε παραπάνω ὅτι :

$\frac{8}{10} > \frac{6}{10}$ (ἤ $\frac{6}{10} < \frac{8}{10}$)

δηλαδὴ ὅτι τὸ $\frac{8}{10}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{6}{10}$ (ἢ τὸ $\frac{6}{10}$ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{8}{10}$).

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{6}{10}$ καὶ $\frac{8}{10}$ ἔχουν ἴσους παρονομαστές. Ἄρα ἡ «αἰτία» τῆς ἀνισότητάς τους βρίσκεται στοὺς ἀριθμητές. Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$, συμπεραίνομε ὅτι :

ἀπὸ δυὸ κλάσματα μὲ ἴσους παρονομαστὲς καὶ ἄνισους ἀριθμητὲς μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μεγαλύτερο ἀριθμητή.

Δύο κλάσματα μὲ ἴσους παρονομαστὲς λέγονται **ὁμώνυμα κλάσματα.**

Σημείωση 1η. Τὰ ὁμώνυμα κλάσματα προέρχονται ἀπὸ τὴν «ἐπανάληψη» τῆς ἴδιας κλασματικῆς μονάδας.

Σημείωση 2α. Δύο ὁμώνυμα κλάσματα μὲ ἴσους ἀριθμητὲς εἶναι ἴσα.

Παράδειγμα. $\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$.

Ἀσκήσεις

117. Νὰ βρῆτε ποιό κλάσμα σὲ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω ζευγάρια κλασμάτων εἶναι τὸ μεγαλύτερο :

$$\alpha)\ \frac{5}{20},\ \frac{2}{20} \qquad \beta)\ \frac{7}{173},\ \frac{100}{173} \qquad \gamma)\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4}.$$

118. Νὰ βρῆτε ποιό ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα εἶναι μικρότερο (νὰ τὰ συγκρίνετε ἀνὰ δύο):

$$\frac{3}{12},\ \frac{10}{12},\ \frac{7}{12}.$$

119. Νὰ γράψετε δυὸ ὁμώνυμα κλάσματα μὲ ἄνισους ἀριθμητὲς καὶ νὰ τοποθετήσετε μεταξύ τους τὸ κατάλληλο σύμβολο ἀνισότητας.

51

2. Σύγκριση κλασμάτων περισσοτέρων ἀπὸ δύο

α) ὁμωνύμων

Πρόβλημα. Ἡ κ. Ἀμαλία ἀγόρασε $\frac{2}{10}$ τοῦ κιλοῦ καφέ, $\frac{5}{10}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη, $\frac{6}{10}$ τοῦ κιλοῦ ρύζι καὶ $\frac{7}{10}$ τοῦ κιλοῦ λάδι. Ἀπὸ ποιό εἶδος ἀγόρασε περισσότερο;

Ἂν παραστήσωμε τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κιλοῦ μὲ **0**, θὰ ἔχωμε :

Ἡ κ. Ἀμαλία ἀγόρασε:
- καφέ : **0 0** $\frac{2}{10}$ κιλά,
- ζάχαρη : **0 0 0 0 0** $\frac{5}{10}$ κιλά,
- ρύζι : **0 0 0 0 0 0** $\frac{6}{10}$ κιλά,
- λάδι: **0 0 0 0 0 0 0** $\frac{7}{10}$ κιλά.

Ἀπάντηση. Ἡ κ. Ἀμαλία ἀγόρασε περισσότερο λάδι.

Ἂς ἐξετάσωμε τώρα πιὸ προσεχτικὰ τὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}.$$

Ἀπὸ ὅ,τι μάθαμε ὡς τώρα, γίνεται φανερὸ ὅτι μεταξὺ τῶν ὁμώνυμων αὐτῶν κλασμάτων μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα, ποὺ ἔχει τὸ μεγαλύτερο ἀριθμητὴ καὶ μικρότερο ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μικρότερο ἀριθμητή. Ἑπομένως:

μεταξὺ ὁσωνδήποτε ὁμώνυμων κλασμάτων μὲ ἄνισους (ἀνὰ δύο) ἀριθμητὲς μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μεγαλύτερο ἀριθμητὴ καὶ μικρότερο ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μικρότερο ἀριθμητή.

Σύμφωνα μ' αὐτὰ ποὺ εἴπαμε, μποροῦμε νὰ ταξινομήσωμε τὰ παραπάνω κλάσματα:

α) σὲ αὔξουσα διάταξη $\frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10},$

β) σὲ φθίνουσα διάταξη $\frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}.$

Ἀσκήσεις

120. Νὰ γράψετε 5 ὁμώνυμα κλάσματα καὶ νὰ τὰ ταξινομήσετε σὲ αὔξουσα διάταξη.

111. Νὰ ταξινομήσετε σὲ φθίνουσα διάταξη τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}.$$

52 **β) ἑτερωνύμων**

Πρόβλημα. Ἡ κ. Βασιλικὴ ἀγόρασε ἕνα τεμάχιο ὕφασμα μὲ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἑκατοστάρικου, λάδι μὲ τὰ $\frac{2}{10}$ τοῦ ἑκατοστάρικου, ὄσπρια μὲ τὰ $\frac{4}{20}$ τοῦ ἑκατοστάρικου καὶ ζυμαρικὰ μὲ τὰ $\frac{5}{25}$ τοῦ ἑκατοστάρικου. Γιὰ ποιό ἀπὸ τὰ εἴδη αὐτὰ ἔδωσε περισσότερα χρήματα;

Λύση

Ἡ κ. Βασιλικὴ ἔδωσε:

γιὰ ὕφασμα: $\frac{1}{5}$ τοῦ ἑκατ/ρικου (= 20 δρχ.),

γιὰ λάδι: $\frac{2}{10}$ τοῦ ἑκατ/ρικου (= 20 δρχ.),

γιὰ ὄσπρια: $\frac{4}{20}$ τοῦ ἑκατ/ρικου (= 20 δρχ.),

γιὰ ζυμαρικά: $\frac{5}{25}$ τοῦ ἑκατ/ρικου (= 20 δρχ.).

Ἀπάντηση. Ἡ κ. Βασιλικὴ ἔδωσε τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσὸ γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ εἴδη ποὺ ἀγόρασε·

Ἀπὸ τὰ παραπάνω γίνεται φανερὸ ὅτι:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25}.$$

Αὐτὸ τὸ ξέρομε καὶ ἀπὸ προηγούμενα, γιατί, ἂν ἁπλοποιήσωμε τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{25}$, βρίσκομε ἀπὸ καθένα τους τὸ $\frac{1}{5}$ δηλ.

$$\frac{2}{10} = \frac{2:2}{10:2} = \frac{1}{5},\quad \frac{4}{20} = \frac{4:4}{20:4} = \frac{1}{5},\quad \frac{5}{25} = \frac{5:5}{25:5} = \frac{1}{5}.$$

Τὸ νὰ συγκρίνωμε ἑτερώνυμα κλάσματα μὲ ἴσους ἀριθμητές, ὅπως εἴδαμε στὸ 49ο μάθημα, εἶναι πράγμα εὔκολο. Μάθαμε ὅτι στὴν περίπτωση αὐτὴ μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μικρότερο παρονομαστή.

Ἂν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα ἔχουν διάφορους ἀριθμητές, τὰ τρέπομε, ὅπως θὰ δοῦμε ἀμέσως παρακάτω, σὲ ὁμώνυμα κι ἔπειτα τὰ συγκρίνομε.

Ἀσκήσεις

122. Νὰ γράψετε 5 ἑτερώνυμα κλάσματα κι ἔπειτα νὰ βρῆτε τὴν κλασματικὴ μονάδα, ἀπὸ τὴν ὁποία ἔγινε τὸ καθένα ἀπὸ αὐτά.

123. Ἡ μητέρα τῆς Παρασκευῆς ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ βού-

τυρο, $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ ὄσπρια, $\frac{12}{16}$ τοῦ κιλοῦ ζυμαρικὰ καὶ $\frac{15}{20}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη. Ἀπὸ ποιό εἶδος ἀγόρασε μεγαλύτερη ποσότητα;

II. ΤΡΟΠΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

53

1. Δύο ἑτερώνυμων κλασμάτων

Πρόβλημα. Ἡ Περσεφόνη ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ λάδι καὶ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο. Τί ἀγόρασε περισσότερο, λάδι ἢ βούτυρο;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ Περσεφόνη ἀγόρασε:

$\frac{3}{4}$ κ. λάδι

$\frac{4}{5}$ κ. βούτ.

Λύση. Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ $= 1000 : 4 = 250$ γραμμάρια καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ του $= 1000 : 5 = 200$ γραμμάρια, θὰ ἔχωμε:

τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ $= 3 \times 250$ γραμμ. $= 750$ γραμμάρια,

τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ $= 4 \times 200$ γραμμ. $= 800$ γραμμάρια.

Ἀπάντηση. Ἡ Περσεφόνη ἀγόρασε περισσότερο βούτυρο.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι ἀπὸ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{5}$ μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$.

῾Ο τρόπος ὅμως αὐτός, μὲ τὸν ὁποῖο συγκρίνομε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα, εἶναι δύσκολος καί ὄχι πάντοτε καὶ δυνατός. Γι' αὐτὸ σὲ παρόμοιες περιπτώσεις τρέπομε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα.

Στὸ 45ο μάθημα εἴδαμε ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό, τὸ κλάσμα δὲ μεταβάλλεται. Συνεπῶς, ἂν στηριχτοῦμε στὴν ἰδιότητα αὐτὴ τῶν κλασμάτων, θὰ ἔχωμε

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}=\frac{15}{20} \quad \text{καὶ} \quad \frac{4}{5}=\frac{4\times4}{5\times4}=\frac{16}{20}.$$

῎Ετσι, ἀντὶ γιὰ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{5}$ ἔχομε νὰ συγκρίνωμε τώρα τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{15}{20}$ καὶ $\frac{16}{20}$, ποὺ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ἐκεῖνα. ᾿Απὸ αὐτὰ εἶναι φανερὸ ὅτι μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{16}{20}$, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$.

῾Επομένως $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$.

Οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 4, μὲ τοὺς ὁποίους πολλαπλασιάσαμε τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{5}$ ἀντίστοιχα, θὰ παρατηρήσατε ὅτι δὲν εἶναι τυχαῖοι. ῾Ο 5 εἶναι παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ καὶ ὁ 4 παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$. Συνεπῶς,

γιὰ νὰ τρέψωμε δυὸ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ δεύτερου κλάσματος καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δεύτερου κλάσματος μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου κλάσματος.

᾿Επὶ πλέον,
γιὰ νὰ συγκρίνωμε δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα καὶ συγκρίνομε τὰ ὁμώνυμα κατὰ τὰ γνωστά.

Ἀσκήσεις

124. Νὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα:

α) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}$ β) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ γ) $\frac{3}{7}, \frac{1}{3}$ δ) $\frac{7}{8}, \frac{6}{9}$.

125. Νὰ συγκρίνετε τὰ παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{2}{6}, \frac{4}{7}$ β) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ γ) $\frac{5}{8}, \frac{7}{9}$ δ) $\frac{3}{10}, \frac{1}{2}$.

54 2. Περισσότερων ἀπὸ δύο ἑτερώνυμων κλασμάτων

Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τῆς Ἑλένης ἀγόρασε $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ καφέ, $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ κακάο καὶ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη. Τί ἀγόρασε περισσότερο: καφέ, κακάο ἢ ζάχαρη;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ μητέρα τῆς Ἑλένης ἀγόρασε:

$\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ $\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ

Λύση. Ἐπειδὴ $\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ $= 1000 : 2 = 500$ γραμμάρια, τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ $= 1000 : 4 = 250$ γραμμάρια καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ κιλοῦ $= 1000 : 5 = 200$ γραμμάρια, θὰ ἔχωμε:

$\frac{1}{2}$ τοῦ κιλοῦ $= 500$ γραμμάρια,

$\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ $= 3 \times 250$ γραμμ. $= 750$ γραμμάρια,

$\frac{4}{5}$ τοῦ κιλοῦ $= 4 \times 200$ γραμμ. $= 800$ γραμμάρια.

Ἀπάντηση. Ἡ μητέρα τῆς Ἑλένης ἀγόρασε περισσότερη ζάχαρη.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι ἀπὸ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{5}$ μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$.

Καὶ τώρα ἂς τρέψωμε τὰ παραπάνω κλάσματα σὲ ὁμώνυμα.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 20}{2 \times 20} = \frac{20}{40}, \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \frac{30}{40}, \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \times 8}{5 \times 8} = \frac{32}{40}.$$

Τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{20}{40}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{32}{40}$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ ἑτερώνυμα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. Μεγαλύτερο ἀσφαλῶς ἀπὸ τὰ παραπάνω ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{32}{40}$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$.

Ἂς δοῦμε ὅμως πῶς τρέψαμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{5}$ σὲ ὁμώνυμα.

Πολλαπλασιάσαμε τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων· δηλαδή:

τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$ ἐπὶ 20 ἤτοι 4×5,

τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 10 ἤτοι 2×5,

τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ ἐπὶ 8 ἤτοι 2×4.

Ἄρα, γιὰ νὰ τρέψωμε τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δύο ὅρους κάθε κλάσματος μὲ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Διατυπῶστε μόνοι σας τὸν κανόνα τῆς συγκρίσεως τριῶν ἢ περισσότερων ἑτερώνυμων κλασμάτων.

Ἀσκήσεις

126. Νὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα:

α) $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}$, β) $\frac{6}{8}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$, γ) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$.

127. Νὰ ταξινομήσετε σὲ αὔξουσα ἢ φθίνουσα διάταξη τὰ παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$ β) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$.

55 12. ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ (Ε.Κ.Π.) ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἂς πάρωμε τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς: 3, 4, 6 καὶ 12 καὶ ἂς σχηματίσωμε τὸν πίνακα μερικῶν πολλαπλασίων τους (πράγμα, ποὺ τὸ ξέρομε ἀπὸ τὸ μάθ. 38).

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120

Ἀπὸ τὸν πίνακα αὐτὸν παρατηροῦμε ὅτι ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσιο καθενὸς ἀπὸ τοὺς 3, 4, 6, 12. Τὸ ἴδιο παρατηροῦμε καὶ γιὰ τὸν 24 (ἂν μάλιστα ὁ πίνακας ἦταν πιὸ μεγάλος, θὰ βλέπαμε ὅτι καὶ ὁ 36 εἶναι πολλαπλάσιο καθενὸς ἀπὸ τοὺς 3, 4, 6, 12, ἀκόμη καὶ ὁ 48, ὁ 60 κ.ἄ.). Γι' αὐτὸ λέμε γιὰ καθέναν ἀπὸ τοὺς 12, 24 36, 48 κλπ. ὅτι εἶναι ἕνα κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀκεραίων 3, 4, 6, 12. Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν 3, 4, 6 καὶ 12 **ἕνα** εἶναι τὸ πιὸ μικρό τους. Αὐτὸ λέμε ὅτι εἶναι τὸ **ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιό τους** καὶ γράφομε γιὰ συντομία: Ε.Κ.Π.(3, 4, 6, 12) = 12.

(Ε.Κ.Π. εἶναι τὰ ἀρχικὰ τῶν λέξεων: ἐλάχιστο, κοινό, πολλαπλάσιο). Ἑπομένως,

ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ἢ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ πιὸ μικρὸ ἀπὸ ὅλα τὰ κοινά τους πολλαπλάσια.

Ἀσκήσεις

128. Νὰ βρῆτε (φτιάχνοντας κατάλληλο πίνακα) τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀκεραίων:
α) 2, 4, 5, 6 β) 3, 5, 10, 15 γ) 6, 8, 12, 16.

129. Νὰ βρῆτε τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀκεραίων 7 καὶ 8, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τοῦ 30 καὶ 85.

130. Νὰ βρῆτε 2 διψήφια καὶ 3 τριψήφια πολλαπλάσια τοῦ ἀκεραίου 13.

56

13. ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ Ε.Κ.Π. ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τὰ προηγούμενα μᾶς ὁδηγοῦν νὰ βρίσκωμε τὸ Ε.Κ.Π. δυό, τριῶν ἢ καὶ περισσότερων φυσικῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸν τρόπο, ποὺ μᾶς δείχνουν τὰ πιὸ κάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 1. Ποιό εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀκεραίων: 2, 5, 10;

Παίρνομε τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους 2, 5 καὶ 10, δηλαδὴ τὸν 10, κι ἐξετάζομε ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους, δηλαδὴ διὰ 2 καὶ διὰ 5. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ 10 διαιρεῖται πραγματικὰ ἀκριβῶς τόσο διὰ 2 ὅσο καὶ διὰ 5. Ἐπειδὴ ὅμως διαιρεῖται καὶ μὲ τὸν ἑαυτό του, συμπεραίνομε ὅτι ὁ 10 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν 2, 5 καὶ 10.

Ἀπάντηση. Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀκεραίων 2, 5 καὶ 10 εἶναι ὁ 10.

Παράδειγμα 2. Δίνονται οἱ ἀκέραιοι 4, 6 καὶ 8 καὶ ζητοῦμε τὸ Ε.Κ.Π. τους.

Παίρνομε τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους ποὺ μᾶς ἔδωσαν, δηλαδὴ τὸν 8, κι ἐξετάζομε ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς ἄλλους, δηλαδὴ διὰ 4 καὶ διὰ 6. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ 8 διαιρεῖται ἀκριβῶς μόνο διὰ 4. Ἑπομένως δὲν εἶναι κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀκεραίων 4, 6 καὶ 8. Γι' αὐτὸ παίρνομε τὸ ἀμέσως μεγαλύτερο πολλαπλάσιο τοῦ 8· δηλαδή: $8\times2(=16)$. Παρατηροῦμε πάλι ὅτι ὁ 16 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 καὶ διὰ 8. Συνεπῶς δὲν εἶναι καὶ αὐτὸς κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀκεραίων 4, 6 καὶ 8. Προχωροῦμε στὸ ἀμέσως μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν 16 πολλαπλάσιο τοῦ 8· δηλαδή: $8\times3(=24)$. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, διὰ 6 καὶ διὰ 8. Ἑπομένως εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τους.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. δεδομένων φυσικῶν ἀριθμῶν, παίρνομε τὸν μεγαλύτερο ἀπὸ αὐτοὺς κι ἐξετάζομε ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους. Ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τους. Ἂν δὲ διαιρῆται ἀκριβῶς, τὸν διπλασιάζομε, τριπλασιάζομε κλπ., ὥσπου νὰ βροῦμε ἕνα πολλαπλάσιό του ποὺ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δεδομένους φυσικοὺς ἀριθμούς.

Ἄσκηση

131. Νὰ βρῆτε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀκεραίων:

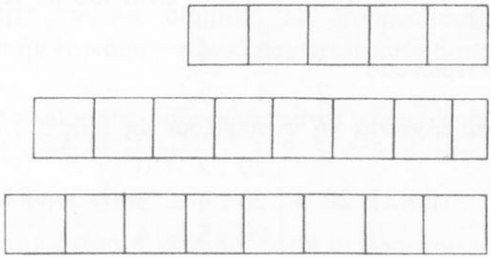
α) 4, 6, 12 δ) 2, 3, 4, 5, 6
β) 5, 8, 10 ε) 25, 50, 75, 100
γ) 4, 5, 8, 10 στ) 27, 54, 81, 243.

57 14. ΠΩΣ ΤΡΕΠΟΜΕ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ Ε.Κ.Π. ΤΩΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ

Πρόβλημα. Τρεῖς μαθήτριες τῆς Ε΄ τάξεως ἔπλεξαν μιὰ δαντέλα. Ἡ α΄ ἔπλεξε $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου, ἡ β΄ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου καὶ ἡ γ΄ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Ποιὰ ἀπὸ αὐτὲς ἔπλεξε περισσότερο;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Κάθε μαθήτρια ἔπλεξε δαντέλα:



ἡ α' $\frac{1}{2}$ μ.,

ἡ β' $\frac{3}{4}$ μ.,

ἡ γ' $\frac{4}{5}$ μ.

Λύση. Ἐπειδὴ τὸ 1 μέτρο = 100 ἑκατοστόμετα, θὰ εἶναι:

$\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου $= (100 : 2) \times 1 = 50 \times 1 = 50$ ἑκατοστόμετρα,

$\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου $= (100 : 4) \times 3 = 25 \times 3 = 75$ ἑκατοστόμετρα,

$\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου $= (100 : 5) \times 4 = 20 \times 4 = 80$ ἑκατοστόμετρα.

Ἀπάντηση. Περισσότερο ἔπλεξε ἡ γ' μαθήτρια.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος. Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγομε, ἂν συγκρίνωμε «ἄμεσα» τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, καὶ $\frac{4}{5}$. Γιὰ νὰ ἐπιτύχωμε ὅμως τὴ σύγκριση τῶν κλασμάτων αὐτῶν, ὅπως μάθαμε, πρέπει νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα. Γιὰ νὰ τρέψωμε τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ σὲ ὁμώνυμα, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1. Βρίσκομε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρανομαστῶν 2, 4, 5. Εἶναι

$$\text{Ε.Κ.Π. } (2,\ 4,\ 5) = \mathbf{20}.$$

2. Διαιροῦμε τὸν 20 μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς 2, 4, 5. Βρίσκομε

$$20 : 2 = \mathbf{10},\quad 20 : 4 = \mathbf{5},\quad 20 : 5 = \mathbf{4}.$$

3. Πολλαπλασιάζομε τώρα τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$ ἐπὶ

10, τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 5 καὶ τοῦ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ 4. Ἔτσι βρίσκομε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{16}{20}$, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἀντίστοιχό του ἀπὸ τὰ ἑτερώνυμα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

Τὴν παραπάνω ἐργασία τὴ συνοψίζομε ὡς ἑξῆς :

$$\text{Ε.Κ.Π. } 20 \rightarrow \left|\begin{array}{l} 20 : 2 = 10 \\ 20 : 4 = 5 \\ 20 : 5 = 4 \end{array}\right.$$

$$\overset{10}{\frac{1}{2}},\ \overset{5}{\frac{3}{4}},\ \overset{4}{\frac{4}{5}} \rightarrow \frac{10}{20},\ \frac{15}{20},\ \frac{16}{20}.$$

Γίνεται πιὰ φανερὸ ὅτι ἀπὸ τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{16}{20}$ μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{16}{20}$, ποὺ εἶναι ἀντίστοιχο μὲ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ καὶ ἴσο μὲ αὐτό.

Ἀπάντηση. Περισσότερο ἔπλεξε ἡ γ' μαθήτρια.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ τρέψωμε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, βρίσκομε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν. Αὐτὸ τὸ διαιροῦμε μὲ τὸν παρονομαστὴ κάθε κλάσματος καὶ πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους του μὲ τὸ πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

Ἄσκηση

132. Νὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα:

α) $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$ β) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ γ) $\frac{4}{15}$, $\frac{6}{30}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{7}{40}$

δ) $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{21}$ ε) $\frac{3}{8}$, $\frac{10}{16}$, $\frac{6}{32}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{80}$.

(Χρησιμοποιῆστε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν).

58

Ἀνακεφαλαίωση - Πορίσματα

Κάθε κλάσμα εἶναι ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως μὲ διαιρετέο τὸν ἀριθμητὴ του καὶ διαιρέτη τὸν παρονομαστή του· δηλαδή: χάρη στὴν ἐπινόηση τῶν κλασμάτων κάθε διαίρεση εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία.

Ὁ παρονομαστὴς κάθε κλάσματος εἶναι ἀριθμὸς φυσικός.

Φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, κλπ.

Ἕνα κλάσμα εἶναι

- ἴσο μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα, ὅταν οἱ ὅροι του εἶναι ἴσοι ἀριθμοί,
- μικρότερο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς του εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστὴ (γνήσιο κλάσμα), καὶ
- μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστὴ (καταχρηστικὸ κλάσμα).

Κάθε καταχρηστικὸ κλάσμα περιέχει ἀκέραιες μονάδες, τὶς ὁποῖες μποροῦμε νὰ βγάλωμε διαιρώντας τὸν ἀριθμητή του μὲ τὸν παρονομαστή του.

Οἱ μεικτοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ φυσικὸ ἀριθμὸ καὶ κλάσμα. Μποροῦμε νὰ τοὺς τρέψωμε σὲ καταχρηστικὰ κλάσματα.

Ἕνα κλάσμα πολλαπλασιάζεται μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμό, ἂν

1) πολλαπλασιαστῆ ὁ ἀριθμητής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό,
2) διαιρεθῆ ὁ παρονομαστής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

Ἕνα κλάσμα διαιρεῖται μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμό, ἂν

1) διαιρεθῆ ὁ ἀριθμητής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό,
2) πολλαπλασιαστῆ ὁ παρονομαστής του μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό,

Ἕνα κλάσμα δὲν ἀλλάζει, ἂν

1) πολλαπλασιαστοῦν καὶ οἱ δύο ὅροι του μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό,
2) διαιρεθοῦν καὶ οἱ δύο ὅροι του μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμό.

Ἁπλοποίηση ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ διαίρεση τῶν ὅρων του μ' ἕνα φυσικὸ ἀριθμὸ (κοινὸ διαιρέτη τους) καὶ ἄρα ἡ εὕρεση ἑνὸς ἄλλου κλάσματος, ποὺ νὰ εἶναι ἰσοδύναμό του, ἀλλὰ μὲ μικρότερους ὅρους.

Ἡ ἁπλοποίηση ἑνὸς κλάσματος συμφέρει νὰ γίνεται, ἀφοῦ διαιρέσωμε τοὺς ὅρους του μὲ τὸ Μ.Κ.Δ. τους, διότι ἔτσι καταλήγομε ἀμέσως σὲ κλάσμα ἀνάγωγο.

Πολλαπλάσιο ἑνὸς ἀκεραίου λέγεται τὸ γινόμενό του μὲ ὁποιονδήποτε φυσικὸ ἀριθμό.

Κάθε ἀκέραιος εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ ἑαυτοῦ του.

Κάθε φυσικὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσιά του καὶ μόνο αὐτά.

Μεταξὺ κλασμάτων

1) μὲ ἴσους τοὺς ἀριθμητὲς καὶ ἄνισους τοὺς παρονομαστές, μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μικρότερο παρονομαστή·

2) μὲ ἴσους παρονομαστὲς καὶ ἄνισους ἀριθμητές, μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ ἔχει τὸ μεγαλύτερο ἀριθμητή.

Ὁμώνυμα λέγονται τὰ κλάσματα, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὴν «ἐπανάληψη» τῆς ἴδιας κλασματικῆς μονάδας. Ἑπομένως,

τὰ ὁμώνυμα κλάσματα ἔχουν ἴσους παρονομαστές.

Δυὸ ὁμώνυμα κλάσματα μὲ ἴσους ἀριθμητὲς εἶναι ἴσα.

Ἑτερώνυμα λέγονται τὰ κλάσματα, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὴν «ἐπανάληψη» διαφορετικῶν κλασματικῶν μονάδων. Μὲ ἄλλα λόγια τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα ἔχουν ἄνισους τοὺς παρονομαστές.

Τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται σὲ ὁμώνυμα μὲ τὴ βοήθεια τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους καὶ μὲ ἄλλους τρόπους.

Προτοῦ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν, ἁπλοποιοῦμε τὰ κλάσματα ἔτσι, ὥστε νὰ γίνουν ἀνάγωγα. Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο οἱ ὅροι τῶν ὁμώνυμων κλασμάτων ποὺ προκύπτουν εἶναι μικρότεροι ἀπὸ τοὺς ἀντίστοιχους ἀρχικοὺς κι ἔτσι εὐκολυνόμαστε πολὺ στὶς σημειούμενες πράξεις.

Ἀσκήσεις

Α. 133. Νὰ βγάλετε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω καταχρηστικὰ κλάσματα:

$$\frac{35}{7},\ \frac{43}{8},\ \frac{34}{5},\ \frac{50}{9},\ \frac{41}{6},\ \frac{63}{4},\ \frac{58}{3},\ \frac{72}{10}.$$

134. Νὰ τρέψετε τοὺς παρακάτω μεικτοὺς ἀριθμοὺς σὲ κλάσματα:

$2\,\frac{3}{5}$, $3\,\frac{1}{6}$, $10\,\frac{4}{9}$, $13\,\frac{3}{10}$, $25\,\frac{2}{3}$, $14\,\frac{5}{8}$, $30\,\frac{4}{11}$, $153\,\frac{3}{17}$.

135. Ν' ἁπλοποιήσετε τὰ παρακάτω κλάσματα:

$\frac{10}{18}$, $\frac{18}{32}$, $\frac{20}{45}$, $\frac{24}{72}$, $\frac{72}{216}$, $\frac{31}{186}$, $\frac{43}{172}$, $\frac{55}{550}$, $\frac{63}{630}$.

Β. 136. Νὰ κάνετε τοὺς ἀκεραίους 5, 6, 7, 8 καὶ 10 κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὸ 9.

137. Νὰ τρέψετε τὰ παρακάτω ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα μὲ τὴ βοήθεια τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τους:

α) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ β) $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{8}{36}$

138. Νὰ συγκρίνετε τὰ κλάσματα $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{11}{24}$ καὶ νὰ τὰ ταξινομήσετε α) σὲ αὔξουσα διάταξη καὶ β) σὲ φθίνουσα διάταξη.

Γ. 139. Νὰ συμπληρώσετε μὲ τέτοιο τρόπο τὰ παρακάτω κλάσματα, ὥστε νὰ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$\frac{4}{7} = \frac{12}{;}$, $\frac{2}{3} = \frac{;}{9}$, $\frac{3}{5} = \frac{12}{;}$, $\frac{5}{6} = \frac{;}{30}$, $\frac{7}{9} = \frac{63}{;}$.

140. Τρεῖς μαθητὲς τῆς ΣΤ΄ τάξεως συμφώνησαν νὰ συναγωνιστοῦν στὸ δρόμο τῶν 1500 μ. Ὁ α΄ διέτρεξε τὴν ἀπόσταση σὲ $\frac{1}{12}$ τῆς ὥρας, ὁ β΄ σὲ $\frac{2}{15}$ τῆς ὥρας καὶ ὁ γ΄ σὲ $\frac{3}{20}$ τῆς ὥρας. Ποιός ἀπὸ τοὺς τρεῖς μαθητὲς τερμάτισε πρῶτος;

140. Στὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν 18, 31 καὶ 36 νὰ τοποθετήσετε ἀπὸ ἕνα ψηφίο ἔτσι, ὥστε οἱ τριψήφιοι ἀριθμοὶ ποὺ θὰ προκύψουν νὰ διαιροῦνται συγχρόνως διὰ 3 καὶ διὰ 2.

Β. ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ

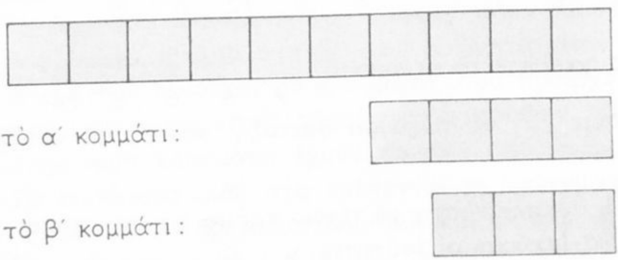
59 α) Πρόσθεση ὁμώνυμων κλασμάτων

Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τῆς Παρασκευῆς ἀγόρασε ἕνα μέτρο κορδέλας. Ἀπὸ αὐτὴ χρησιμοποίησε δύο κομμάτια. Τὸ α΄ ἦταν $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ β΄ $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου.

Τί μέρος τοῦ μέτρου τῆς κορδέλας χρησιμοποίησε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ κορδέλα ποὺ ἀγόρασε ἡ μητέρα τῆς Παρασκευῆς:



1 μ.,

τὸ α΄ κομμάτι: $\frac{4}{10}$ μ.,

τὸ β΄ κομμάτι: $\frac{3}{10}$ μ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ α΄ κομματιοῦ κορδέλας· $\frac{4}{10}$ μ.,

β) τὸ μῆκος τοῦ β΄ κομματιοῦ κορδέλας· $\frac{3}{10}$ μ.

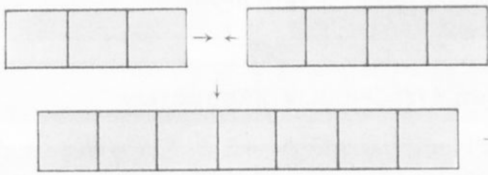
Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν δύο κομματιῶν τῆς κορδέλας.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῶν δύο κομματιῶν τῆς κορδέλας ποὺ χρησιμοποίησε ἡ μητέρα τῆς Παρασκευῆς, θὰ κάνωμε πρόσθεση.

Θὰ προσθέσωμε τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$.

Ἡ λύση τοῦ προβλήματος σχηματογραφικά



$\rightarrow \frac{7}{10}$ μ. κορδ.

Φέραμε τὰ δύο κομμάτια τῆς κορδέλας σ' ἐπαφή, ἐκεῖ ποὺ εἶχαν κοπῆ. Ἔπειτα μετρήσαμε τὰ δέκατα τοῦ μέτρου καὶ βρήκαμε ὅτι τὸ μῆκος τῆς κορδέλας, ποὺ χρησιμοποιήθηκε, εἶναι $\frac{7}{10}$ μ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως

4 δέκατα + 3 δέκατα = 7 δέκατα

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4+3}{10} = \frac{7}{10}$$

Ἀπάντηση. Ἡ μητέρα τῆς Παρασκευῆς χρησιμοποίησε $\frac{7}{10}$ τοῦ μέτρου κορδέλα.

Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καὶ γιὰ τὴν πρόσθεση περισσότερων ἀπὸ δύο ἑτερώνυμων κλασμάτων.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ προσθέσωμε ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτομε τοὺς ἀριθμητές τους καὶ τὸ ἄθροισμά τους τὸ γράφομε ἀριθμητὴ νέου κλάσματος. Παρονομαστὴ γράφομε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις

142. Ἡ Παρασκευὴ εἶχε δυὸ τεμάχια χαρτοταινία. Τὸ α' ἦταν $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ β' $\frac{6}{10}$ τοῦ μέτρου. Τί μῆκος εἶχαν καὶ τὰ δυὸ τεμάχια μαζί;

143. Ἡ μητέρα τῆς Ἑλένης ἀγόρασε τρία κομμάτια κρέας. Τὸ

α΄ ἦταν $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ, τὸ β΄ $\frac{7}{8}$ τοῦ κιλοῦ καὶ τὸ γ΄ $\frac{4}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσα κιλὰ ἦταν καὶ τὰ τρία κομμάτια μαζί;

60

β) Πρόσθεση ἑτερώνυμων κλασμάτων

Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τοῦ Λουκᾶ ἀγόρασε δυὸ τεμάχια ὕφασμα. Τὸ ἕνα ἦταν $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ἄλλο $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου. Πόσο ἦταν τὸ μῆκος καὶ τῶν δυὸ τεμαχίων τοῦ ὑφάσματος μαζί;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὰ δυὸ τεμάχια ὑφάσματος:

 $\frac{1}{2}$ μ.,  $\frac{2}{5}$ μ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ α΄ τεμαχίου $\frac{1}{2}$ μ.,

β) τὸ μῆκος τοῦ β΄ τεμαχίου $\frac{2}{5}$ μ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

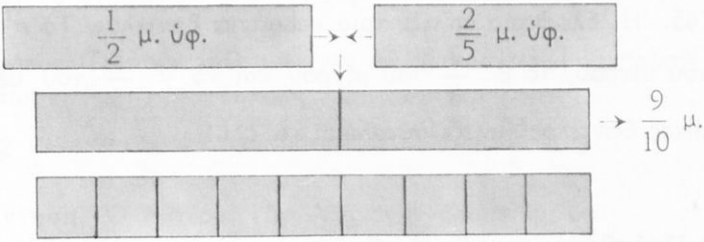
Τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν δυὸ τεμαχίων τοῦ ὑφάσματος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν δυὸ τεμαχίων ποὺ ἀγόρασε ἡ μητέρα τοῦ Λουκᾶ, θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$. Γιὰ νὰ γίνη αὐτό, πρέπει προηγουμένως νὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα. Ἔτσι ἔχομε:

$$\text{Ε.Κ.Π. } 10 \rightarrow \left| \begin{array}{l} 10 : 2 = 5 \\ 10 : 5 = 2 \end{array} \right.$$

$$\overset{5)}{\frac{1}{2}}, \quad \overset{2)}{\frac{2}{5}} \rightarrow \frac{5}{10}, \quad \frac{4}{10}.$$

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



Παραπάνω φέραμε σ᾽ ἐπαφή, κατὰ τὰ γνωστά, τὰ δυὸ τεμάχια τοῦ ὑφάσματος. Ἔπειτα μετρήσαμε τὰ δέκατα τοῦ μέτρου καὶ βρήκαμε ὅτι τὸ μῆκος τῶν δυὸ τεμαχίων τοῦ ὑφάσματος μαζὶ εἶναι $\frac{9}{10}$ μ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως

5 δέκατα + 4 δέκατα = 9 δέκατα

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\overset{5}{\frac{1}{2}}+\overset{2}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{10}+\frac{4}{10}=\frac{9}{10}$$

Ἀπάντηση. Τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν δύο τεμαχίων τοῦ ὑφάσματος ἦταν $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καὶ γιὰ τὴν πρόσθεση περισσότερων ἀπὸ δύο ἑτερώνυμων κλασμάτων.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ προσθέσωμε ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα καὶ κατόπι τὰ προσθέτομε, ὅπως γνωρίζομε.

Ἀσκήσεις

144. Ἡ Ἀθηνᾶ ξόδεψε $\frac{3}{10}$ τοῦ δεκάρικου γιὰ τὴν ἀγορὰ ἑνὸς τετραδίου, $\frac{2}{5}$ τοῦ δεκάρικου γιὰ τὴν ἀγορὰ χρωμάτων καὶ $\frac{1}{2}$

τοῦ δεκάρικου γιὰ τὴν ἀγορὰ μιᾶς σοκολάτας. Πόσα χρήματα ξόδεψε συνολικά;

145. Ἡ Ἐλευθερία ἔπλεξε τρία κομμάτια δαντέλας. Τὸ α΄ ἦταν $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου, τὸ β΄ $\frac{7}{8}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ γ΄ $\frac{5}{6}$ τοῦ μέτρου. Τί μῆκος δαντέλας ἔπλεξε συνολικά;

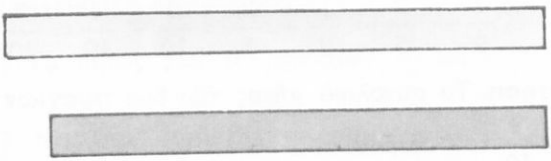
61

γ) Πρόσθεση μεικτῶν ἀριθμῶν

Πρόβλημα. Ὁ πατέρας τῆς Ἀρετῆς ἀγόρασε $2\frac{3}{5}$ μέτρα ὕφασμα, γιὰ νὰ ράψη μιὰ ἐνδυμασία καὶ $2\frac{2}{5}$ μέτρα ὕφασμα, γιὰ νὰ ράψη ἕνα πανωφόρι. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἀγόρασε συνολικά;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὰ δυὸ τεμάχια ὑφάσματος:



$2\frac{3}{5}$ μ.

$2\frac{2}{5}$ μ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ α΄ τεμαχίου $2\frac{3}{5}$ μ.,

β) τὸ μῆκος τοῦ β΄ τεμαχίου $2\frac{2}{5}$ μ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν δυὸ τεμαχίων.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν δυὸ τεμαχίων τοῦ ὑφάσματος ποὺ ἀγόρασε ὁ πατέρας τῆς Ἀρετῆς, θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τοὺς μεικτοὺς ἀριθμούς: $2\frac{3}{5}$, $2\frac{2}{5}$.

1ος τρόπος. Προσθέτομε πρῶτα τοὺς ἀκεραίους καὶ κατόπι τὰ κλάσματα: $2\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5} = 4\frac{5}{5} = 5$.

2ος τρόπος. Τρέπομε τοὺς μεικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ τὰ προσθέτομε, ὅπως γνωρίζομε· δηλαδή:

$$2\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5} = \frac{13}{5} + \frac{12}{5} = \frac{13+12}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Ἀπάντηση. Ὁ πατέρας τῆς Ἀθηνᾶς ἀγόρασε 5μ. ὑφ.

Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καὶ γιὰ τὴν πρόσθεση περισσότερων ἀπὸ δύο μεικτῶν ἀριθμῶν.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ προσθέσωμε μεικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομε πρῶτα τοὺς ἀκεραίους καὶ κατόπι τὰ κλάσματα ἢ τρέπομε τοὺς μεικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ τὰ προσθέτομε, ὅπως γνωρίζομε. (Ἂν τὰ κλάσματα τῶν μεικτῶν εἶναι ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομε προηγουμένως σὲ ὁμώνυμα).

Ἄσκηση

146. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου ἀγόρασε λάδι σὲ τρία δοχεῖα. Τὸ α΄ περιεῖχε $17\frac{1}{2}$ κιλά, τὸ β΄ $16\frac{9}{10}$ κιλὰ καὶ τὸ γ΄ $15\frac{1}{3}$ κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι περιεῖχαν καὶ τὰ τρία δοχεῖα μαζί;

62

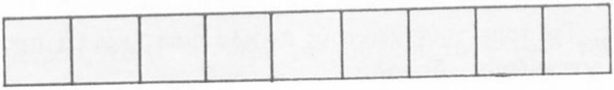
2. Η ΑΦΑΙΡΕΣΗ

α) Ἀφαίρεση δύο ὁμώνυμων κλασμάτων

Πρόβλημα. Ἡ Ἑλένη ἀγόρασε $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου κορδέλα. Ἀπ' αὐτὴν ἔκοψε κι' ἔδωσε στὴν Πόπη $\frac{5}{10}$ τοῦ μέτρου. Τί μῆκος κορδέλας τῆς ἀπόμεινε;

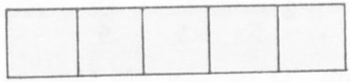
Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ κορδέλα ποὺ ἀγόρασε ἡ Ἑλένη:



$\frac{9}{10}$ μ.

Στὴν Πόπη ἔδωσε:



$\frac{5}{10}$ μ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῆς κορδέλας ποὺ ἀγόρασε ἡ Ἑλένη· $\frac{9}{10}$ μ.,

β) τὸ μῆκος τῆς κορδέλας ποὺ ἔδωσε στὴν Πόπη· $\frac{5}{10}$ μ.

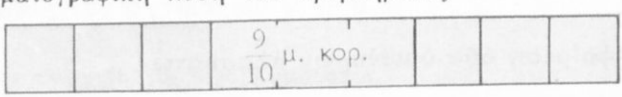
Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ μῆκος τῆς κορδέλας ποὺ ἀπόμεινε στὴν Ἑλένη.

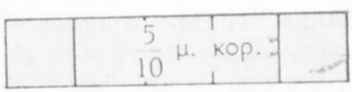
Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς κορδέλας, ποὺ ἀπόμεινε στὴν Ἑλένη, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ μῆκος $\frac{9}{10}$ μ. τῆς κορδέλας τὸ μῆκος $\frac{5}{10}$ μ. τοῦ κομματιοῦ τῆς κορδέλας, ποὺ πῆρε ἡ Πόπη· δηλαδή:

$$\frac{9}{10} - \frac{5}{10}.$$

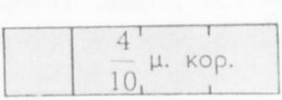
Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



−



=



Παραπάνω κόψαμε ἀπὸ τὴν κορδέλα μήκους $\frac{9}{10}$ μ., κομμάτι μήκους $\frac{5}{10}$ μ. Ἔτσι βρήκαμε ὅτι τὸ μῆκος τῆς κορδέλας ποὺ ἀπόμεινε στὴν Ἑλένη, ἦταν $\frac{4}{10}$ μ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως

9 δέκατα - 5 δέκατα = 4 δέκατα

$$\frac{9}{10} - \frac{5}{10} = \frac{9-5}{10} = \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5}$$

Ἀπάντηση. Ἀπόμεινε στὴν Ἑλένη κορδέλα μήκους $\frac{2}{5}$ μ.

Παρατήρηση. Τὸ ἐξαγόμενο ἀπὸ τὴν πράξη εἶναι, συχνά, χρήσιμο ν' ἁπλοποιῆται, ἂν φυσικὰ αὐτὸ εἶναι δυνατό.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι :

γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ ἕνα κλάσμα ἕνα ὁμώνυμό του κλάσμα, ἀφαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ μειωτέου. Τὴ διαφορὰ τὴ γράφομε ἀριθμητὴ νέου κλάσματος καὶ παρονομαστὴ γράφομε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις

147. Ἡ μητέρα τῆς Ἑλένης ἀγόρασε $\frac{8}{10}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη. Ἀπὸ αὐτὴ κατανάλωσε $\frac{3}{10}$ τοῦ κιλοῦ, γιὰ νὰ κάνη γλυκό. Τί μέρος τοῦ κιλοῦ ζάχαρη τῆς περίσσεψε;

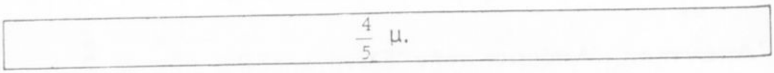
148. Ἡ Μαρία εἶχε $\frac{4}{5}$ τοῦ εἰκοσάρικου δραχμές Ἀγόρασε ἕνα βιβλιαράκι καὶ τῆς ἔμεινε $\frac{1}{5}$ τοῦ εἰκοσάρικου. Πόσο ἀγόρασε τὸ βιβλίο;

63 β) Ἀφαίρεση δύο ἑτερώνυμων κλασμάτων

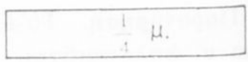
Πρόβλημα. Ἡ Παρασκευὴ εἶχε μιὰ χαρτοταινία μήκους $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Ἀπ' αὐτὴν ἔκοψε κι ἔδωσε στὴν Ἀθηνᾶ ἕνα τεμάχιο μήκους $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου. Πόσο ἦταν τὸ μῆκος τῆς χαρτοταινίας ποὺ ἀπόμεινε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Ἡ χαρτοταινία ποὺ εἶχε ἡ Παρασκευή :



Στὴν Ἀθηνᾶ ἔδωσε:



Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῆς χαρτοταινίας $\frac{4}{5}$ μ.,

β) τὸ μῆκος τοῦ τεμαχίου ποὺ πῆρε ἡ Ἀθηνᾶ· $\frac{1}{4}$ μ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ μῆκος τῆς χαρτοταινίας ποὺ ἀπόμεινε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς χαρτοταινίας ποὺ ἀπόμεινε στὴν Παρασκευή, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ μῆκος $\frac{4}{5}$ μ. τῆς χαρτοταινίας, τὸ μῆκος $\frac{1}{4}$ μ. τοῦ κομματιοῦ, ποὺ πῆρε ἡ Ἀθηνᾶ· δηλαδή:

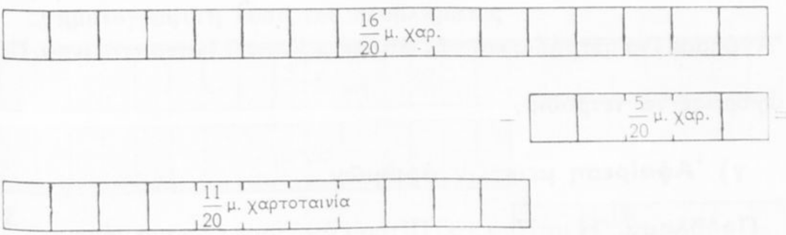
$$\frac{4}{5} - \frac{1}{4}.$$

Γιὰ νὰ κάνωμε, ὅμως, τὴν ἀφαίρεση, πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ τρέψωμε πρῶτα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα. Ἔχομε:

$$\text{Ε.Κ.Π. } 20 \rightarrow \left| \begin{array}{l} 20 : 5 = 4 \\ 20 : 4 = 5 \end{array} \right.$$

$$\overset{4}{\frac{4}{5}}, \ \overset{5}{\frac{1}{4}} \rightarrow \frac{16}{20}, \ \frac{5}{20}.$$

Σχηματογραφική λύση τοῦ προβλήματος



Παραπάνω κόψαμε ἀπὸ τὴ χαρτοταινία μήκους $\frac{16}{20}$ μ. ἕνα τεμάχιο μήκους $\frac{5}{20}$ μ. Ἔτσι βρήκαμε ὅτι τὸ μῆκος τῆς χαρτοταινίας, ποὺ ἀπόμεινε στὴν Παρασκευή, ἦταν $\frac{11}{20}$ μ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως

16 εἰκοστὰ − 5 εἰκοστὰ = 11 εἰκοστὰ

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \overset{4}{\frac{4}{5}} - \overset{5}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{20} - \frac{5}{20} = \frac{16-5}{20} = \frac{11}{20}.$$

Ἀπάντηση. Τὸ μῆκος τῆς χαρτοταινίας, ποὺ ἀπόμεινε, ἦταν $\frac{11}{20}$ μ.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ ἕνα κλάσμα ἕνα ἑτερώνυμό του κλάσμα, τρέπομε τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα καὶ κατόπι ἀφαιροῦμε, ὅπως γνωρίζομε.

᾿Ασκήσεις

149. Τὰ χρήματα τῆς ᾿Αθηνᾶς ἦταν $\frac{9}{10}$ τοῦ πεντακοσάρικου. ᾿Αγόρασε μιὰ σάκα καὶ πλήρωσε $\frac{4}{5}$ τοῦ πεντακοσάρικου. Τί ποσὸ χρημάτων τῆς ἔμεινε;

150. Τὰ χρήματα τῆς Παρασκευῆς ἦταν $\frac{3}{5}$ τοῦ ἑκατοστάρικου. ᾿Αγόρασε ἕνα τετράδιο καὶ τῆς ἀπόμεινε $\frac{1}{2}$ τοῦ ἑκατοστάρικου. Πόσο ἀγόρασε τὸ τετράδιο;

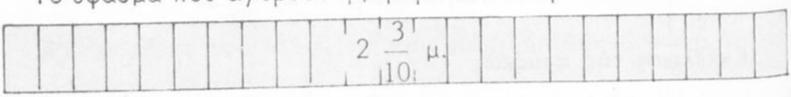
64

γ) ῾Αφαίρεση μεικτῶν ἀριθμῶν

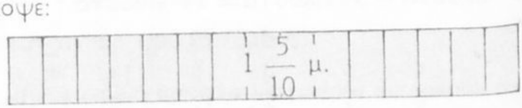
Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τοῦ Πέτρου ἀγόρασε ὕφασμα μήκους $2\frac{3}{10}$ μ. ᾿Απὸ αὐτὸ ἔκοψε $1\frac{5}{10}$ μ., γιὰ νὰ ράψη ἕνα φόρεμα. Τί μῆκος ὑφάσματος τῆς ἀπόμεινε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὸ ὕφασμα ποὺ ἀγόρασε ἡ μητέρα τοῦ Πέτρου:



Τὸ κομμάτι ποὺ ἔκοψε:



Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος $2\frac{3}{10}$ μ.,

β) τὸ μῆκος τοῦ κομματιοῦ ποὺ κόπηκε $1\frac{5}{10}$ μ.

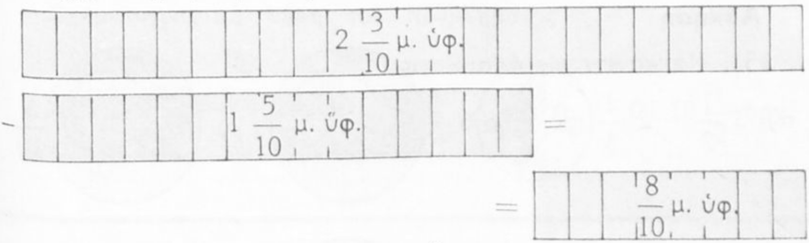
῎Αγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος ποὺ ἀπόμεινε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος ποὺ ἀπόμεινε στὴ μητέρα τοῦ Πέτρου, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ μῆκος $2\frac{3}{10}$ μ. τοῦ ὑφάσματος τὸ μῆκος $1\frac{5}{10}$ μ. τοῦ κομματιοῦ, ποὺ ἔκοψε ἡ μητέρα τοῦ Πέτρου, γιὰ νὰ ράψη τὸ φόρεμα· δηλαδή :

$$2\frac{3}{10} - 1\frac{5}{10}.$$

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



Παραπάνω κόψαμε ἀπὸ τὰ $2\frac{3}{10}$ μ. τοῦ ὑφάσματος ἕνα κομμάτι ἴσο μὲ $1\frac{5}{10}$ μ. Βρήκαμε ὅτι ἀπόμειναν $\frac{8}{10}$ μ. ἀπὸ τὸ ὕφασμα.

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

1ος τρόπος. Ἀφαιροῦμε πρῶτα τοὺς ἀκεραίους καὶ κατόπι τὰ κλάσματα. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου (καὶ συνεπῶς δὲν ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτό), δανειζόμαστε ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου μιὰ μονάδα καὶ τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα μὲ ὅρους ἴσους μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ μειωτέου. Ἔτσι ὁ μειωτέος γίνεται ὡς ἑξῆς :

$2\frac{3}{10} = 1 + 1 + \frac{3}{10} = 1 + \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{13}{10} = 1\frac{13}{10}$. Καὶ τώρα ἔχομε : $2\frac{3}{10} - 1\frac{5}{10} = 1\frac{13}{10} - 1\frac{5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5}$.

2ος τρόπος. Τρέπομε τοὺς μεικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ κατόπι ἀφαιροῦμε, ὅπως γνωρίζομε· δηλαδή:

$$2\frac{3}{10} - 1\frac{5}{10} = \frac{23}{10} - \frac{15}{10} = \frac{23-15}{10} = \frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5}.$$

Ἀπάντηση. Στὴ μητέρα τοῦ Πέτρου ἀπόμειναν $\frac{4}{5}$ μ. ὑφάσματος.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ ἕνα μεικτὸ ἀριθμὸ ἕναν ἄλλο μεικτὸ ἀριθμό, ἀφαιροῦμε πρῶτα τοὺς ἀκεραίους καὶ κατόπι τὰ κλάσματα, ἂν ἀφαιροῦνται, ἢ τρέπομε τοὺς μεικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἀφαιροῦμε, ὅπως γνωρίζομε.

Ἄσκηση

151. Νὰ κάνετε τὶς ἀφαιρέσεις:

α) $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{5}$ β) $6\frac{5}{10} - 5\frac{4}{5}$ γ) $78\frac{2}{5} - 37\frac{9}{10}$

65

δ) Ἀφαίρεση ἀκεραίου ἀπὸ μεικτὸ

Πρόβλημα. Ὁ Παῦλος εἶχε $10\frac{1}{2}$ δρχ. Ἀγόρασε ἕνα μπλὸκ μὲ 5 δραχμές. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

$10\frac{1}{2}$ δρχ.,

5 δρχ.

Τὰ χρήματα ποὺ εἶχε Τὰ χρήματα ποὺ ξόδεψε

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ ποσὸ $10\frac{1}{2}$ δρχ., ποὺ εἶχε ὁ Παῦλος,

β) τὸ ποσὸ 5 δρχ. ποὺ ξόδεψε.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ τοῦ ἔμεινε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ ἔμεινε στὸν Παῦλο, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὶς $10\frac{1}{2}$ δρχ., ποὺ εἶχε, τὶς 5 δρχ. ποὺ ξόδεψε γιὰ τὴν ἀγορὰ τοῦ μπλόκ· δηλαδή :

$$10\frac{1}{2} - 5.$$

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

Οἱ $10\frac{1}{2}$ δρχ.

ἤτοι $5\frac{1}{2}$ δρχ.

Παραπάνω ἀντικαταστήσαμε τὸ δεκάρικο μὲ δυὸ τάλιρα. Ἔπειτα πήραμε τὸ ἕνα τάλιρο. Ἔτσι βρήκαμε ὅτι ἔμειναν $5\frac{1}{2}$ δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως

$$10\frac{1}{2} - 5 = 5\frac{1}{2}.$$

Ἀπάντηση. Στὸν Παῦλο ἔμειναν $5\frac{1}{2}$ δραχμές.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι :

γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε ἀκέραιο ἀπὸ μεικτό, ἀφαιροῦμε τὸν ἀκέραιο ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ καὶ δίπλα ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο γράφομε τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ, ὅπως εἶναι.

Ἀσκήσεις

152. Ὁ πατέρας τοῦ Παύλου ἀγόρασε ἕνα δοχεῖο βούτυρο ποὺ ζύγιζε $17\frac{1}{4}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἦταν τὸ βούτυρο, ἂν τὸ ἀπόβαρο ἦταν 2 κιλά;

153. Ἡ μητέρα τῆς Μαρίας ἔβγαλε 4 κιλὰ λάδι ἀπὸ ἕνα δοχεῖο ποὺ περιεῖχε $14\frac{3}{4}$ κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι ἀπόμειναν στὸ δοχεῖο;

66 ε) Ἀφαίρεση γνήσιου κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιο

Πρόβλημα. Ὁ Πέτρος εἶχε 11 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς δαπάνησε $\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἀπόμειναν;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

11 δρχ.,

Τὰ χρήματα ποὺ εἶχε ὁ Πέτρος

$\frac{1}{2}$ δρχ.

Τὰ χρήματα ποὺ δαπάνησε

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὰ χρήματα ποὺ εἶχε ὁ Πέτρος· 11 δρχ.

β) Τὰ χρήματα ποὺ δαπάνησε· $\frac{1}{2}$ δρχ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὰ χρήματα ποὺ τοῦ ἀπόμειναν.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ ἀπόμεινε στὸν Πέτρο, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὶς 11 δρχ., ποὺ εἶχε, τὸ $\frac{1}{2}$ δρχ., ποὺ ξόδεψε· δηλαδή:

$$11 - \frac{1}{2}.$$

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

$10\ \frac{2}{2}$ δρχ.

$10\ \frac{1}{2}$ δρχ.

Παραπάνω ἀντικαταστήσαμε τὴ δραχμὴ μὲ δυὸ πενηντάλεπτα. Ἔπειτα πήραμε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ καὶ ἀπόμειναν $10\ \frac{1}{2}$ δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως

Γιὰ νὰ μπορέσωμε νὰ κάνωμε τὴν πράξη, πρέπει νὰ τρέψωμε τὸ μειωτέο 11 σὲ μεικτό. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ δανειζόμαστε ἀπ' αὐτὸν μιὰ ἀκέραια μονάδα, τὴν ὁποία τρέπομε σὲ κλάσμα μὲ ὅρους ἴσους μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος· δηλαδή:

$$11 - \frac{1}{2} = 10 + 1 - \frac{1}{2} = 10 + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 10\ \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 10\ \frac{1}{2}.$$

Ἀπάντηση. Στὸν Πέτρο ἀπόμειναν $10\ \frac{1}{2}$ δραχμές.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

για ν' ἀφαιρέσωμε γνήσιο κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιο, τρέπομε τὸν ἀκέραιο σὲ μεικτό, μετατρέποντας μιὰ μονάδα του σὲ κλάσμα μὲ ὅρους ἴσους μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ ἀφαιρετέου κλάσματος καὶ ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ μεικτό.

Ἄσκηση

154. Νὰ κάνετε τὶς ἀφαιρέσεις:

α) $18 - \frac{2}{3}$ β) $20 - \frac{3}{14}$ γ) $100 - \frac{4}{5}$ δ) $1000 - \frac{4}{25}$

67

στ) Ἀφαίρεση μεικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιο

Πρόβλημα. Ὁ Λεωνίδας εἶχε 11 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς δαπάνησε τὶς $5\frac{1}{2}$, γιὰ ν' ἀγοράση ἕνα μολύβι. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Οἱ 11 δραχμὲς

Οἱ $5\frac{1}{2}$ δραχμὲς

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὰ χρήματα ποὺ εἶχε ὁ Λεωνίδας· 11 δρχ.

β) τὰ χρήματα ποὺ δαπάνησε· $5\frac{1}{2}$ δρχ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὰ χρήματα ποὺ τοῦ ἔμειναν.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὰ χρήματα ποὺ ἔμειναν στὸ Λεωνίδα, θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὶς 11 δρχ., ποὺ εἶχε, τὶς $5\frac{1}{2}$ δρχ. ποὺ δαπάνησε, γιὰ ν' ἀγοράση τὸ μολύβι· δηλαδή : $11 - 5\frac{1}{2}$.

Σχηματογραφική λύση τοῦ προβλήματος

11 δραχμὲς

$5\frac{1}{2}$ δραχμὲς

Παραπάνω ἀντικαταστήσαμε τὸ δεκάρικο μὲ δυὸ τάλιρα καὶ τὴ δραχμὴ μὲ δυὸ πενηντάλεπτα. Ἔπειτα πήραμε τὸ ἕνα τάλιρο καὶ τὸ ἕνα πενηντάλεπτο καὶ ἀπόμειναν $5\frac{1}{2}$ δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως

$$11 - 5\frac{1}{2} = 10\frac{2}{2} - 5\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}.$$

Ἀπάντηση. Στὸ Λεωνίδα ἀπόμειναν $5\frac{1}{2}$ δρχ.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε μεικτὸ ἀπὸ ἀκέραιο, τρέπομε τὸν ἀκέραιο σὲ μεικτὸ μετατρέποντας μιὰ μονάδα του σὲ κλάσμα μὲ ὅρους ἴσους μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἀφαιροῦμε μεικτὸ ἀπὸ μεικτό, ὅπως γνωρίζομε.

Ἀσκήσεις

155. Ἡ μητέρα τῆς Ἀσπασίας εἶχε 100 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς ξόδεψε $63\frac{1}{5}$ δραχμές, γιὰ ν' ἀγοράση διάφορα τρόφιμα. Πόσες δραχμὲς τῆς ἔμειναν;

156. Ὁ σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἑνὸς ὀρεινοῦ σχολείου συγκέντρωσε 158 κιλὰ πατάτες. Ἀπὸ αὐτὰ πούλησε $125\frac{5}{8}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ἀπὸ τὶς πατάτες ἀπόμειναν;

ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

68 **Κύριο πρόβλημα.** Ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου ἀπὸ ἕνα δοχεῖο, ποὺ περιεῖχε $17\frac{1}{2}$ κιλὰ λαδιοῦ, ἀφαίρεσε προχτὲς $2\frac{2}{3}$ κιλὰ καὶ σήμερα $2\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσα κιλὰ λαδιοῦ ἔμειναν στὸ δοχεῖο;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ περιεῖχε τὸ δοχεῖο· $17\frac{1}{2}$ κιλά,

β) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἀφαίρεσε προχτὲς ἀπὸ τὸ δοχεῖο ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου· $2\frac{2}{3}$ κιλά,

γ) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἀφαίρεσε σήμερα ἀπὸ τὸ δοχεῖο ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου· $2\frac{1}{2}$ κιλά.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἀφαίρεσε συνολικὰ προχτὲς καὶ σήμερα ἀπὸ τὸ δοχεῖο ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου,

β) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἔμεινε στὸ δοχεῖο.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἀπόμεινε στὸ δοχεῖο, πρέπει νὰ βροῦμε προηγουμένως τὸ συνολικὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἀφαίρεσε ἀπὸ τὸ δοχεῖο ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου· δηλαδὴ θὰ κάνωμε πρῶτα πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τοὺς μεικτοὺς $2\frac{2}{3}$ κ.λ.,

$2\frac{1}{2}$ κ.λ. Ὕστερα θὰ κάνωμε ἀφαίρεση. Θ' ἀφαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο τῆς προσθέσεως ἀπὸ τὸ περιεχόμενο $17\frac{1}{2}$ κ.λ. τοῦ δοχείου· δηλαδή:

$$17\frac{1}{2}\text{ κ.λ.} - \left(2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}\right)\text{ κ.λ.}$$

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τῆς προσθέσεως

$$2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} = 2\overset{(2)}{\frac{2}{3}} + 2\overset{(3)}{\frac{1}{2}} = 2\frac{4}{6} + 2\frac{3}{6} = 4\frac{7}{6} =$$

$$= 4 + \frac{7}{6} = 4 + 1\frac{1}{6} = 5\frac{1}{6},$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$17\frac{1}{2} - 5\frac{1}{6} = 17\overset{(3)}{\frac{1}{2}} - 5\overset{(1)}{\frac{1}{6}} = 17\frac{3}{6} - 5\frac{1}{6} = 12\frac{2}{6} = 12\frac{1}{3}.$$

Ἀπάντηση. Στὸ δοχεῖο ἔμειναν $12\frac{1}{3}$ κιλὰ λάδι.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος

Ἀντὶ γιὰ πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση μποροῦμε νὰ κάνωμε δύο διαδοχικὲς ἀφαιρέσεις· δηλαδή:

$$17\frac{1}{2}\text{ κ.λ.} - 2\frac{2}{3}\text{ κ.λ. καὶ } \left(17\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}\right)\text{ κ.λ.} - 2\frac{1}{2}\text{ κ.λ.}$$

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τῆς πρώτης ἀφαιρέσεως

$$17\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} = 17\overset{(3)}{\frac{1}{2}} - 2\overset{(2)}{\frac{2}{3}} = 17\frac{3}{6} - 2\frac{4}{6} = 16\frac{9}{6} - 2\frac{4}{6} = \mathbf{14\frac{5}{6}}$$

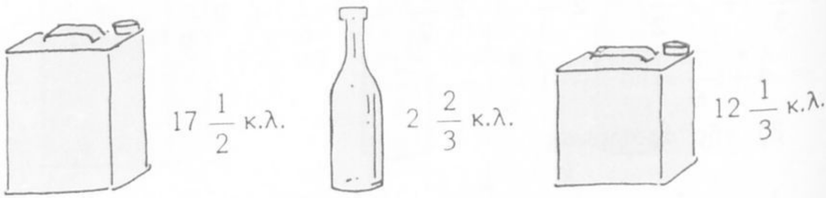
β) τῆς δεύτερης ἀφαιρέσεως

$$\mathbf{14\frac{5}{6}} - 2\frac{1}{2} = 14\overset{(1)}{\frac{5}{6}} - 2\overset{(3)}{\frac{1}{2}} = 14\frac{5}{6} - 2\frac{3}{6} = 12\frac{2}{6} = 12\frac{1}{3}.$$

Ἀπάντηση. Στὸ δοχεῖο ἔμειναν $12\frac{1}{3}$ κιλὰ λάδι.

Τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα. Ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου ἀπὸ ἕνα δοχεῖο, ποὺ περιεῖχε $17\frac{1}{2}$ κιλὰ λάδι, ἔβγαλε προχτὲς $2\frac{2}{3}$ κιλὰ καὶ σήμερα μιὰ ἄλλη ποσότητα. Πόσα κιλὰ λάδι ἔβγαλε σήμερα, ἂν μέσα στὸ δοχεῖο ἀπόμειναν $12\frac{1}{3}$ κιλὰ λάδι;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ περιεῖχε τὸ δοχεῖο· $17\frac{1}{2}$ κιλά,

β) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἔβγαλε προχτὲς ἀπὸ τὸ δοχεῖο ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου· $2\frac{2}{3}$ κιλά,

γ) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἀπόμεινε στὸ δοχεῖο· $12\frac{1}{3}$ κιλά.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ συνολικὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἀπόμεινε τελικὰ στὸ δοχεῖο καὶ τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἔβγαλε προχτές,

β) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἔβγαλε σήμερα ἀπὸ τὸ δοχεῖο ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἔβγαλε σήμερα ἀπὸ τὸ δοχεῖο ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου, πρέπει νὰ βροῦμε προηγουμένως τὸ συνολικὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἔβγαλε προχτὲς ἀπὸ τὸ δοχεῖο καὶ τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἀπόμεινε στὸ δοχεῖο. Γι' αὐτὸ θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τοὺς μεικτούς: $2\frac{2}{3}$ κ.λ., $12\frac{1}{3}$ κ.λ. Στὴ συνέχεια θ' ἀφαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο τῆς προσθέσεως ἀπὸ τὸ περιεχόμενο, $17\frac{1}{2}$ κ.λ. τοῦ δοχείου· δηλαδὴ

$$17\frac{1}{2}\text{ κ.λ.} - \left(2\frac{2}{3} + 12\frac{1}{3}\right)\text{ κ.λ.}$$

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τῆς προσθέσεως

$$2\frac{2}{3} + 12\frac{1}{3} = 14\frac{3}{3} = 14 + 1 = 15$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$17\frac{1}{2} - 15 = 2\frac{1}{2}$$

Ἀπάντηση. Ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου ἀφαίρεσε σήμερα ἀπὸ τὸ δοχεῖο $2\frac{1}{2}$ κιλὰ λάδι.

Συσχετισμός. Στὸ κύριο πρόβλημα (μαθ. 68) μᾶς εἶχαν δοθῆ:

α) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ περιεχόταν στὸ δοχεῖο· $17\frac{1}{2}$ κ.λ.

β) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἀφαιρέθηκε προχτές· $2\frac{2}{3}$ κ. καὶ

γ) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἀφαιρέθηκε σήμερα· $2\frac{1}{2}$ κ.

Βρήκαμε τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἀπόμεινε στὸ δοχεῖο· $12\frac{1}{2}$ κ.

Στὸ ἀντίστροφο πρόβλημα μᾶς εἶχαν δοθῆ:

α) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ περιεῖχε τὸ δοχεῖο· $17\frac{1}{2}$ κ.

β) τὸ βαρος τοῦ λαδιοῦ ποὺ ἀφαιρέθηκε προχτές· $2\frac{2}{3}$ κ. καὶ

γ) τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἀπόμεινε στὸ δοχεῖο· $12\frac{1}{2}$ κ.

Βρήκαμε τὸ βάρος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ ἀφαιρέθηκε σήμερα· $2\frac{1}{2}$ κ.

70 **Πρόβλημα 1ο.** Ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου ἀπὸ ἕνα δοχεῖο, ποὺ περιεῖχε 20 κιλὰ λάδι, ἀφαίρεσε προχτὲς $3\frac{1}{5}$ κιλὰ λάδι καὶ σήμερα $4\frac{3}{10}$ κιλά. Πόσα κιλὰ λάδι ἀπόμειναν στὸ δοχεῖο;

Λύση. Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ λάδι ἀπόμειναν στὸ δοχεῖο, θὰ προσθέσωμε τοὺς μεικτοὺς $3\frac{1}{5}$ κ.λ., $4\frac{3}{10}$ κ.λ. κι ἔπειτα θ' ἀφαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο τῆς προσθέσεως ἀπὸ τὸ περιεχόμενο τοῦ δοχείου:

$$20 \text{ κ.λ.} - \left(3\frac{1}{5} + 4\frac{3}{10}\right) \text{κ.λ.}$$

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τῆς προσθέσεως

$$3\frac{1}{5} + 4\frac{3}{10} = 3\frac{\overset{2}{\frown}1}{5} + 4\frac{\overset{1}{\frown}3}{10} = 3\frac{2}{10} + 4\frac{3}{10} = 7\frac{5}{10} = 7\frac{1}{2}.$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$20 - 7\frac{1}{2} = 19\frac{2}{2} - 7\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

Ἀπάντηση. Στὸ δοχεῖο ἀπόμειναν $12\frac{1}{2}$ κ. λάδι.

Πρόβλημα 2ο. Ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου ἀπὸ ἕνα δοχεῖο, ποὺ περιεῖχε $17\frac{1}{2}$ κιλὰ βούτυρο, ἀφαίρεσε προχθὲς $2\frac{2}{3}$ κιλὰ βούτυρο καὶ σήμερα $2\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσα κιλὰ βούτυρο ἀπόμειναν στὸ δοχεῖο;

Λύση. Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ βούτυρο ἀπόμειναν στὸ δοχεῖο, θὰ προσθέσωμε τοὺς μεικτοὺς $2\frac{2}{3}$ κ. βούτ., $2\frac{1}{2}$ κ. βούτ. κι ἔπειτα θ' ἀφαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο τῆς προσθέσεως ἀπὸ τὸ περιεχόμενο τοῦ δοχείου: $17\frac{1}{2}$ κ. βούτ. $-\left(2\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}\right)$ κ. βούτ.

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τῆς προσθέσεως

$$2\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=2\overset{2}{\frac{2}{3}}+2\overset{3}{\frac{1}{2}}=2\frac{4}{6}+2\frac{3}{6}=4\frac{7}{6}=5\frac{1}{6}$$

β) τῆς ἀφαιρέσεως

$$17\frac{1}{2}-5\frac{1}{6}=17\overset{3}{\frac{1}{2}}-5\overset{1}{\frac{1}{6}}=17\frac{3}{6}-5\frac{1}{6}=12\frac{2}{6}=12\frac{1}{3}.$$

Ἀπάντηση. Στὸ δοχεῖο ἀπόμειναν $12\frac{1}{3}$ κ. βούτυρο.

Ἀσκήσεις

157. Ὁ πατέρας τοῦ Χρίστου εἶχε 500 δραχμές. Ἀπὸ αὐτὲς ξόδεψε $153\frac{1}{2}$ δραχμές, γιὰ ν' ἀγοράση κρέας καὶ $200\frac{1}{4}$ δραχμές, γιὰ ν' ἀγοράση διάφορες κονσέρβες. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν;

Σημείωση. Νὰ λύσετε τὸ παραπάνω πρόβλημα. Νὰ βρῆτε καὶ ἄλλον τρόπο λύσεως. Νὰ συντάξετε καὶ νὰ λύσετε τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα καὶ τέλος νὰ λύσετε τὸ κύριο πρόβλημα α) μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ β) μὲ ἄλλα ἀντικείμενα.

158. Ὁ πατέρας τοῦ Στέλιου εἶναι ἐλαιοπαραγωγός. Ἐφέτος μάζεψε 6000 κιλὰ βρώσιμες (φαγώσιμες) ἐλιές. Ἕνα μέρος ἀπὸ αὐτὲς πούλησε σὲ τρεῖς ἐμπόρους πελάτες του. Στὸν α΄ πούλησε $938\frac{4}{5}$ κιλά, στὸ β΄ $1205\frac{5}{8}$ κιλὰ καὶ στὸν γ΄ $2009\frac{7}{10}$ κιλά.

Πόσα κιλὰ ἐλιὲς τοῦ ἔμειναν;

Σημείωση. Νὰ κάνετε καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ ὅ,τι εἴπαμε καὶ γιὰ τὸ προηγούμενο.

3. Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

71

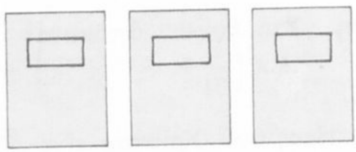
α) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιο

Πρόβλημα. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου διαθέτει γιὰ τὰ μέλη του τετράδια μὲ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου τὸ ἕνα. Ὁ Ἀντρέας, ποὺ εἶναι μέλος του, ἀγόρασε 3 τετράδια. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου:

Τὰ 3 τετράδια :



Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς τετραδίου· $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου,

β) τὸ πλῆθος τῶν τετραδίων ποὺ ἀγόρασε ὁ Ἀντρέας· 3.

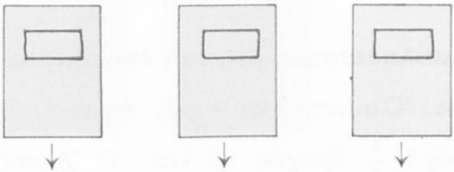
Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ συνολικὴ τιμὴ τῶν 3 τετραδίων.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ συνολικὴ τιμὴ τῶν 3 τετραδίων, πρέπει νὰ «ἐπαναλάβωμε» τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς τετραδίου, δηλαδὴ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάρικου, 3 φορές, ἀφοῦ 3 τετράδια ἀγόρασε ὁ Ἀντρέας.

Ἑπομένως θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ $\frac{4}{5}$ ἐπὶ 3 (δηλ. κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο).

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



$$\left(\frac{4}{5} \times 3\right) \text{δεκ/κου} = \frac{4}{5}\,\text{δεκ/κου} + \frac{4}{5}\,\text{δεκ/κου} + \frac{4}{5}\,\text{δεκ/κου} =$$

$$= \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) \text{δεκ/κου} = \frac{4+4+4}{5}\,\text{δεκ/κου} =$$

$$= \frac{4 \times 3}{5}\,\text{δεκ/κου} = \frac{12}{5}\,\text{δεκ/κου} = 2\,\frac{2}{5}\,\text{δεκ/κου} =$$

$$= 24 \text{ δρχ.}$$

Ἀπὸ τὴν παραπάνω λύση τοῦ προβλήματος καταλαβαίνομε ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ ἀκέραιο ἀριθμὸ εἶναι μιὰ γρήγορη πρόσθεση μὲ ἴσους προσθετέους.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\,\frac{2}{5}.$$

Ἀπάντηση. Ὁ Ἀντρέας, γιὰ 3 τετράδια, πλήρωσε 24 δρχ.

Συμπεραίνομε λοιπὸν ὅτι:

γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιο καὶ τὸ γινόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητὴ νέου κλάσματος. Παρονομαστὴ γράφομε τὸν ἴδιο.

Ἀσκήσεις

159. Νὰ κάνετε τοὺς ἑξῆς πολλαπλασιασμούς:

α) $\frac{5}{6} \times 10$ β) $\frac{7}{8} \times 12$ γ) $\frac{3}{5} \times 10$ δ) $\frac{4}{5} \times 100$

160. Ὁ Χαράλαμπος ἀγόρασε 8 φακελάκια γιὰ κάρτες πρὸς $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς τὸ καθένα. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

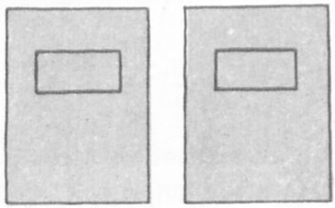
72

β) Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιο

Πρόβλημα. Ὁ συνεταιρισμὸς ἑνὸς σχολείου δίνει στὰ μέλη του τετράδια πρὸς $5\frac{1}{2}$ δραχμὲς τὸ ἕνα. Ὁ Ἄλκης ἀγόρασε 2 ἀπ' αὐτὰ τὰ τετράδια. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Οἱ $5\frac{1}{2}$ δρχ.



Τὰ 2 τετράδια

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς τετραδίου· $5\frac{1}{2}$ δρχ.,

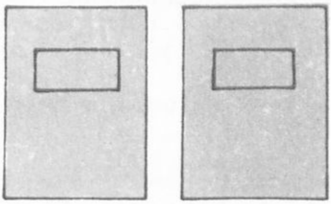
β) τὸ πλῆθος, τῶν τετραδίων, ποὺ ἀγόρασε ὁ Ἄλκης· 2.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ συνολικὴ τιμὴ τῶν 2 τετραδίων.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ συνολικὴ τιμὴ τῶν δύο τετραδίων, πρέπει νὰ «ἐπαναλάβωμε» τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς τετραδίου, δηλαδὴ τὸ μεικτὸ $5\frac{1}{2}$ δραχμές, 2 φορές, ἀφοῦ 2 τετράδια ἀγόρασε ὁ Ἄλκης. Ἐπομένως θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $5\frac{1}{2}$ ἐπὶ 2, (δηλαδή, μεικτὸ ἐπὶ ἀκέραιο).

Σχηματογραφική λύση τοῦ προβλήματος



$$\left(5\frac{1}{2}\times 2\right)\text{δρχ.} = 5\frac{1}{2}\text{ δρχ.} + 5\frac{1}{2}\text{ δρχ.} = \left(5\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}\right)\text{ δρχ.} =$$

$$= 10\frac{2}{2}\text{ δρχ.} = 11\text{ δρχ.}$$

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

1ος τρόπος. $5\frac{1}{2}\times 2 = \left(5\times 2\right) + \left(\frac{1}{2}\times 2\right) = 10 + \frac{2}{2} =$ $= 10 + 1 = 11.$

Δηλαδή, πολλαπλασιάζομε πρῶτα τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο κι ἔπειτα τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο καὶ στὴ συνέχεια προσθέτομε τὰ δυὸ μερικὰ γινόμενα.

2ος τρόπος: $5\frac{1}{2}\times 2 = \frac{11}{2}\times 2 = \frac{11\times 2}{2} = 11.$

Δηλαδή, τρέπομε τὸ μεικτὸ σὲ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο.

Ἀπάντηση. Ὁ Ἄλκης γιὰ τὴν ἀγορὰ τῶν 2 τετραδίων πλήρωσε 11 δραχμές.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μεικτὸ ἐπὶ ἀκέραιο, πολλαπλασιάζομε πρῶτα τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο, ἔπειτα πολλαπλασιάζομε τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο καὶ τέλος προσθέτομε τὰ δυὸ μερικὰ γινόμενα ἤ: τρέπομε τὸ μεικτὸ σὲ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, ὅπως γνωρίζομε.

Ἄσκηση

161. Νὰ κάνετε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

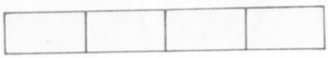
α) $5\frac{1}{6} \times 10$ β) $10\frac{1}{2} \times 12$ γ) $16\frac{2}{5} \times 20$ δ) $125\frac{3}{8} \times 17$

73 γ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα

Πρόβλημα. Ἕνα μέτρο δαντέλας ἀξίζει 10 δραχμές. Ἡ Πόπη ἀγόρασε $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἀπ' αὐτὴ τὴ δαντέλα. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὸ 1 μ. δαντ.



Τὰ $\frac{4}{5}$ μ. δαντ.

Οἱ 10 δρχ.

Λύση

Γνωστὸ στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου δαντέλας· 10 δρχ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος :

Ἡ ἀξία τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου δαντέλας·

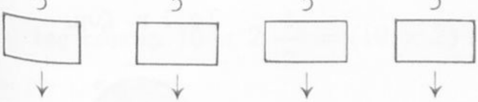
δηλαδή, γνωρίζομε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία ἑνὸς μέρους ἀπ' αὐτή.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου, πρέπει νὰ βροῦμε προηγουμένως τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου. Εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ 1 μέτρο γράφεται $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου. Λέμε τώρα· ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου (δηλ. τὸ 1 μέτρο) ἀξίζουν 10 δραχμές, τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει 5 φορὲς λιγότερο· δηλαδὴ ἀξίζει $\frac{10}{5}$ δραχμές. Ἑπομένως τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν 4 φορὲς περισσότερο ἀπὸ ὅσο ἀξίζει τὸ $\frac{1}{5}$, δηλαδὴ ἀξίζουν: $\left(\frac{10}{5}+\frac{10}{5}+\frac{10}{5}+\frac{10}{5}\right)$ δραχμές. Συνεπῶς πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε:

τὸ $\frac{10}{5}$ ἐπὶ τὸν 4, $\frac{10}{5}\times 4$, δηλαδὴ κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, ἐνῶ, κατὰ τὸ πρόβλημα, θὰ ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀκέραιο 10 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$, $10\times\frac{4}{5}$.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

$\frac{1}{5}$ μ. δ. $\frac{1}{5}$ μ. δ. $\frac{1}{5}$ μ. δ. $\frac{1}{5}$ μ. δ.



$$\frac{10}{5}\text{ δρχ.}+\frac{10}{5}\text{ δρχ.}+\frac{10}{5}\text{ δρχ.}+\frac{10}{5}\text{ δρχ.}=\frac{40}{5}\text{ δρχ.}=8\text{ δρχ.}$$

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$10\times\frac{4}{5}=\frac{10}{5}\times 4=\frac{10\times 4}{5}=\frac{40}{5}=8.$$

Ἀπάντηση. Ἡ Πόπη γιὰ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου δαντέλας ἔδωσε 8 δραχμές.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε· ὅτι:

γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητὴ νέου κλάσματος μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος.

Ἀσκήσεις

162. Νὰ κάνετε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

α) $6 \times \frac{1}{3}$ β) $8 \times \frac{5}{6}$ γ) $20 \times \frac{2}{3}$ δ) $105 \times \frac{2}{3}$

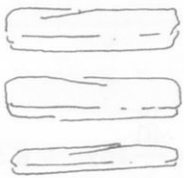
163. Ὁ πατέρας τοῦ Χρίστου ἀγόρασε $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο πρὸς 58 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

74

δ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ μεικτὸ

Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τῆς Ἀσπασίας ἀγόρασε $2\frac{1}{2}$ κιλὰ ζυμαρικὰ πρὸς 10 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



Τὰ $2\frac{1}{2}$ κ. ζυμ.

Τὸ 1 κ. ζυμ.

Οἱ 10 δραχμές.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἀπὸ τὰ ζυμαρικά· 10 δρχ.,

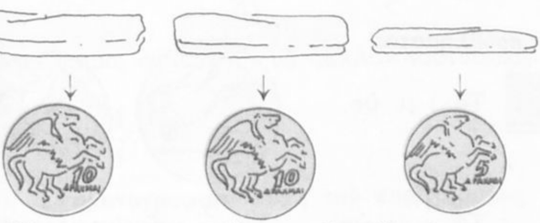
β) Τὸ βάρος τῶν ζυμαρικῶν ποὺ ἀγόρασε ἡ μητέρα τῆς Ἀσπασίας· $2\frac{1}{2}$ κιλά.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τῶν $2\frac{1}{2}$ κιλῶν ἀπὸ τὰ ζυμαρικά.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῶν $2\frac{1}{2}$ κιλῶν ἀπὸ τὰ ζυμαρικά, ποὺ ἀγόρασε ἡ μητέρα τῆς Ἀσπασίας, πρέπει νὰ «ἐπαναλάβωμε» τὴν ἀξία τοῦ ἑνὸς κιλοῦ, ἤτοι: τὶς 10 δραχμές, $2\frac{1}{2}$ φορὲς (ὅσα δηλαδὴ ἦταν τὰ κιλὰ τῶν ζυμαρικῶν). Ἑπομένως θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν 10 ἐπὶ τὸν $2\frac{1}{2}$, $10 \times 2\frac{1}{2}$, δηλαδὴ ἀκέραιο ἐπὶ μεικτό.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



ἤτοι $2\frac{1}{2}$ κ. ζυμ.

$\downarrow$

ἤτοι 25 δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

1ος τρόπος. $10 \times 2\frac{1}{2} = (10 \times 2) + \left(10 \times \frac{1}{2}\right) = 20 + \frac{10}{2} = $
$= 20 + 5 = 25.$

Δηλαδή, πρῶτα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ κι ἔπειτα τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ καὶ στὴ συνέχεια προσθέτομε τὰ δυὸ μερικὰ γινόμενα.

2ος τρόπος. $10 \times 2\frac{1}{2} = 10 \times \frac{5}{2} = \frac{10 \times 5}{2} = \frac{50}{2} = 25.$

Δηλαδή, τρέπομε τὸ μεικτὸ σὲ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα, ὅπως γνωρίζομε.

Ἀπάντηση. Ἡ μητέρα τῆς Ἀσπασίας πλήρωσε 25 δραχμὲς γιὰ τὴν ἀγορὰ $2\frac{1}{2}$ κιλῶν ζυμαρικῶν.

Ἀσκήσεις

164. Νὰ κάνετε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

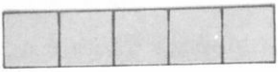
α) $15 \times 2\frac{1}{3}$ β) $20 \times 7\frac{3}{4}$ γ) $35 \times 15\frac{1}{2}$ δ) $40 \times 18\frac{1}{3}$.

165. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου ἀγόρασε $25\frac{1}{2}$ κιλὰ τυρὶ πρὸς 50 δραχμές τὸ κιλό. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

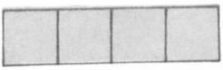
75 **ε) Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα**

Πρόβλημα. Τὸ ἕνα μέτρο ὕφασμα ἀξίζει $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου. Ἡ μητέρα τῆς Εὐτυχίας ἀγόρασε $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



Τὸ 1 μ. ὑφ.



Τὰ $\frac{4}{5}$ μ. ὑφ. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου.

Λύση

Γνωστὸ στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου ὑφάσματος· $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὑφάσματος·

δηλαδή: γνωρίζομε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία ἑνὸς μέρους της.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου τοῦ ὑφάσματος, πρέπει νὰ βροῦμε προηγουμένως τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{5}$ του. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ 1 μέτρο γράφεται $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου. Λέμε τώρα· ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου (δηλ. τὸ 1 μέτρο), ἀξίζουν $\frac{3}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου, τὸ

$\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει 5 φορὲς λιγότερο· δηλαδὴ ἀξίζει $\frac{3}{4\times5}=\frac{3}{20}$ τοῦ εἰκοσάρικου. Ἑπομένως τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν 4 φορὲς περισσότερο ἀπὸ ὅσο ἀξίζει τὸ $\frac{1}{5}$ του· δηλαδὴ ἀξίζουν: $\left(\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}\right)$ τοῦ εἰκοσάρικου. Συνεπῶς πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ $\frac{3}{20}$ ἐπὶ τὸν 4, $\frac{3}{20}\times 4$, δηλ. κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, ἐνῶ, κατὰ τὸ πρόβλημα, θὰ ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

$\boxed{\frac{1}{5}\text{μ.}}$ ύφ. + $\boxed{\frac{1}{5}\text{μ.}}$ ύφ. + $\boxed{\frac{1}{5}\text{μ.}}$ ύφ. + $\boxed{\frac{1}{5}\text{μ.}}$ ύφ. = $\boxed{\frac{4}{5}\text{ μ. ύφ.}}$

↓ ↓ ↓ ↓

$\frac{3}{20}$ εἰκ. + $\frac{3}{20}$ εἰκ. + $\frac{3}{20}$ εἰκ. + $\frac{3}{20}$ εἰκ. = $\frac{12}{20}$ εἰκ. = $\frac{3}{5}$ εἰκ. = 12 δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{20}\times 4=\frac{3\times 4}{4\times 5}=\frac{12}{20}=\frac{12:4}{20:4}=\frac{3}{5}.$$

Ἀπάντηση. Ἡ μητέρα τῆς Εὐτυχίας γιὰ τὴν ἀγορὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὑφάσματος πλήρωσε $\frac{3}{5}$ τοῦ εἰκοσάρικου· ἤτοι 12 δρχ.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴ μὲ ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ μὲ παρονομαστὴ καὶ τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν γράφομε ἀριθμητὴ νέου κλάσματος, ἐνῶ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τὸ γράφομε παρονομαστή του.

Ἀσκήσεις

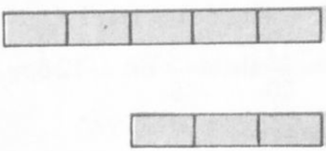
166. Ἡ μητέρα τοῦ Λεωνίδα ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ βακαλάου πρὸς $\frac{2}{5}$ τοῦ ἑκατοστάρικου τὸ ἕνα κιλό. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

167. Ὁ πατέρας τοῦ Χρίστου ἀγόρασε $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ χόρτα πρὸς $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκάρικου τὸ κιλό. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

76 στ) Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ κλάσμα

Πρόβλημα. Τὸ ἕνα μέτρο καλώδιο ἀξίζει $5\frac{1}{2}$ δραχμές. Ὁ Ἠλίας ἀγόρασε $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου ἀπὸ τὸ καλώδιο αὐτό. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



Τὸ 1 μ. καλ.

Τὰ $\frac{3}{5}$ μ. καλ. Οἱ $5\frac{1}{2}$ δραχμές.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου καλωδίου· $5\frac{1}{2}$ δρχ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

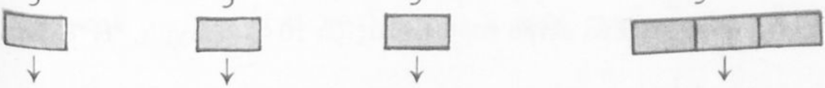
Ἡ ἀξία τῶν $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου τοῦ ἴδιου καλωδίου.

Δηλαδή, γνωρίζομε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία ἑνὸς μέρους της.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῶν $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου καλωδίου, πρέπει νὰ βροῦμε πρῶτα τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{5}$ του. Εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ 1 μέτρο γράφεται $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου. Λέμε τώρα· ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου (δηλ. τὸ 1 μέτρο) ἀξίζουν $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ δραχμές, τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει 5 φορές, λιγότερο· δηλαδὴ ἀξίζει $\frac{11}{2 \times 5}$ δραχμές. Ἄρα τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν 3 φορὲς περισσότερο ἀπ' ὅ,τι ἀξίζει τὸ $\frac{1}{5}$, δηλαδὴ ἀξίζουν: $\left(\frac{11}{2 \times 5} + \frac{11}{2 \times 5} + \frac{11}{2 \times 5}\right)$ δραχμὲς $= \left(\frac{11}{2 \times 5} \times 3\right)$ δραχμὲς $= \frac{11 \times 3}{2 \times 5}$ δραχμές, ἐνῶ κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ $5\frac{1}{2}$, δηλ. τὸ $\frac{11}{2}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, δηλ. μεικτὸ ἐπὶ κλάσμα.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

$\frac{1}{5}$ μ. καλ. $+$ $\frac{1}{5}$ μ. καλ. $+$ $\frac{1}{5}$ μ. καλ. $=$ $\frac{3}{5}$ μ. καλ.



$\frac{11}{2\times5}$ δρχ. $+$ $\frac{11}{2\times5}$ δρχ. $+$ $\frac{11}{2\times5}$ δρχ. $= \frac{33}{10}$ δρχ. $= 3\frac{3}{10}$ δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

1ος τρόπος. $5\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{11 \times 3}{2 \times 5} = \frac{33}{10} = 3\frac{3}{10}$.

Δηλαδή, τρέπομε τὸ μεικτὸ σὲ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, ὅπως γνωρίζομε.

2ος τρόπος. $5\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \left(5 \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{15}{5} + \frac{3}{10} = \frac{30}{10} + \frac{3}{10} = \frac{33}{10} = 3\frac{3}{10}$.

Δηλαδή, πολλαπλασιάζομε πρῶτα τὸν ἀκέραιο τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα κι ἔπειτα τὸ κλάσμα τοῦ μεικτοῦ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ στὴ συνέχεια προσθέτομε τὰ δυὸ μερικὰ γινόμενα.

Ἀπάντηση. Ὁ Ἠλίας γιὰ τὴν ἀγορὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μέτρου καλωδίου πλήρωσε $3\frac{3}{10}$ δραχμές.

Ἀσκήσεις

168. Ἕνα κιλὸ ζάχαρη ἀξίζει $20\frac{1}{5}$ δραχμές. Ἡ μητέρα τοῦ Λάμπρου ἀγόρασε $\frac{5}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

169. Ὁ πατέρας τοῦ Σταύρου κερδίζει $50\frac{1}{2}$ δραχμὲς τὴν ὥρα. Χτὲς ἐργάστηκε $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας. Πόσες δραχμὲς κέρδισε;

77 ζ) Πολλαπλασιασμὸς μεικτοῦ ἐπὶ μεικτὸ

Πρόβλημα. Ἕνα μέτρο κορδέλας ἀξίζει $10\frac{1}{2}$ δραχμές. Ἡ Ἑλένη ἀγόρασε $2\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὸ 1 μ. κορδέλας

Οἱ $10\frac{1}{2}$ δραχμὲς

Τὰ $2\frac{1}{2}$ μ. κορδέλας

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου κορδέλας· $10\frac{1}{2}$ δραχ.,

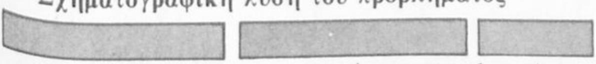
β) τὸ μῆκος τῆς κορδέλας ποὺ ἀγόρασε ἡ Ἑλένη· $2\frac{1}{2}$ μ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τῶν $2\frac{1}{2}$ μ. κορδέλας.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῶν $2\frac{1}{2}$ μ. κορδέλας, τὰ ὁποῖα ἀγόρασε ἡ Ἑλένη, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμε τὴν ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου δηλ. τὶς $10\frac{1}{2}$ δρχ., $2\frac{1}{2}$ φορές. Ἑπομένως θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $10\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸν $2\frac{1}{2}$, δηλ. μεικτὸ ἐπὶ μεικτό.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



1 μ. κορδ. + 1 μ. κορδ. + $\frac{1}{2}$ μ. κόρδ. = $2\frac{1}{2}$ μ. κορδ.

↓ ↓ ↓ ↓

ἤτοι $26\frac{1}{4}$ δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

1ος τρόπος. $10\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \frac{21}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{105}{4} = 26\frac{1}{4}$.

Δηλαδή, τρέπομε τοὺς μεικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, ὅπως γνωρίζομε.

2ος τρόπος. $10\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = \left(10 \times 2\right) + \left(\frac{1}{2} \times 2\right) + \left(10 \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 20 + \frac{2}{2} + \frac{10}{2} + \frac{1}{4} = 20 + 1 + 5 + \frac{1}{4} = 26\frac{1}{4}$.

Δηλαδή, πολλαπλασιάζομε 1) τοὺς δύο ἀκεραίους, 2) τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν ἀκέραιο τοῦ δευτέρου, 3) τὸν ἀκέραιο τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου, 4) τὰ δυὸ κλάσματα. Τέλος προσθέτομε τὰ τέσσερα μερικὰ γινόμενα.

Ἀπάντηση. Ἡ Ἑλένη γιὰ τὴν ἀγορὰ $2\frac{1}{2}$ μ. κορδέλας πλήρωσε $26\frac{1}{4}$ δραχμές.

Ἀσκήσεις

170. Νὰ κάνετε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

α) $5\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{3}$ β) $6\frac{1}{5} \times 5\frac{2}{3}$ γ) $7\frac{3}{4} \times 8\frac{2}{5}$.

171. Ὁ πατέρας τῆς Ἀθηνᾶς ἀγόρασε $2\frac{1}{5}$ κιλὰ κρέας πρὸς $95\frac{3}{4}$ δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

78

η) Πολλαπλασιασμὸς πολλῶν κλασμάτων

Πρόβλημα 1ο. Ὁ Ἀνδρέας θέλει νὰ βρῆ τὸ «γινόμενο» $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{8}{10}$. Μπορεῖτε νὰ τὸν βοηθήσετε;

Λύση. Ἔπειτα ἀπὸ ὅσα μάθαμε στὰ προηγούμενα μαθήματα σχετικὰ μὲ τὴν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων, ἡ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἶναι εὔκολη. Παρατηροῦμε ὅτι ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε περισσότερους ἀπὸ δύο, δηλαδὴ πολλοὺς παράγοντες. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ πρώτους: $\frac{2 \times 1}{5 \times 2}$. Ἔπειτα αὐτὸ τὸ γινόμενό τους τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν τρίτο παράγοντα καὶ βρίσκομε $\frac{2 \times 1 \times 5}{5 \times 2 \times 8}$. Τέλος τὸ νέο αὐτὸ γινόμενο τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν τέταρτο παράγοντα $\frac{8}{10}$ καὶ βρίσκομε $\frac{2 \times 1 \times 5 \times 8}{5 \times 2 \times 8 \times 10}$. Ἑπομένως:

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{8}{10} = \frac{2 \times 1 \times 5 \times 8}{5 \times 2 \times 8 \times 10} = \frac{80}{800} = \frac{80:80}{800:80} = \frac{1}{10}.$$

Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι εἶναι δυνατὸ νὰ φθάσωμε στὸ ἀποτέλεσμα $\frac{1}{10}$, χωρὶς νὰ κάνωμε τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν. Ἀρκεῖ μόνο νὰ ἐξαλείψωμε (νὰ διαγράψωμε) ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ τῆς παραστάσεως $\frac{2 \times 1 \times 5 \times 8}{5 \times 2 \times 8 \times 10}$ τοὺς κοινοὺς (δηλαδὴ τοὺς ἴσους) παράγοντες 2, 5 καὶ 8 (δηλαδὴ μποροῦμε νὰ κάνωμε ἁπλοποίηση τοῦ κλάσματος $\frac{2 \times 1 \times 5 \times 8}{5 \times 2 \times 8 \times 10}$, μιὰ ποὺ ἐδῶ γίνεται). Ἔτσι θὰ ἔχωμε:

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{8}{10} = \frac{2 \times 1 \times 5 \times 8}{5 \times 2 \times 8 \times 10} = \frac{1}{10}$$

Ἀπάντηση. Τὸ γινόμενο τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{8}{10}$ εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$.

Πρόβλημα 2ο. Νὰ βρεθῆ τὸ γινόμενο:

$$\frac{2}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{10}.$$

Λύση. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, θὰ ἔχωμε:

$$\frac{2}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 2}{4 \times 6 \times 9 \times 10} = \frac{36}{2160} = \frac{36:36}{2160:36} = \frac{1}{60}$$

Παρατηροῦμε κι ἐδῶ ὅτι εἶναι δυνατὸ νὰ φτάσωμε στὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ πιὸ εὔκολα, ἄν, πρὶν νὰ κάνωμε τὴν πράξη, ἐκτελέσωμε ὅλες τὶς δυνατὲς ἁπλοποιήσεις. Ἔτσι θὰ ἔχωμε:

$$\frac{2}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{2\times3\times3\times2}{4\times6\times9\times10} = \frac{1\times1\times1\times1}{2\times2\times3\times5} = \frac{1}{60}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε πολλὰ δεδομένα κλάσματα, πολλαπλασιάζομε τοὺς ἀριθμητές των καὶ τὸ γινόμενο τὸ γράφομε ἀριθμητὴ νέου κλάσματος. Παρονομαστὴ γράφομε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων.

Καὶ ἀκόμη ὅτι:

ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε πολλὰ κλάσματα, γιὰ συντομία ἐξαλείφομε τοὺς κοινοὺς παράγοντες (ἂν ὑπάρχουν) τῶν γινομένων τῶν ὁμώνυμων ὅρων τῶν κλασμάτων ἢ κάνομε ἀπὸ πρὶν ὅλες τὶς δυνατὲς ἁπλοποιήσεις τῶν κλασμάτων καὶ κατόπι προχωροῦμε στὴν ἐκτέλεση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀσκήσεις

172. Νὰ κάνετε τοὺς πολλαπλασιασμούς:

α) $\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}$ β) $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}$ γ) $5\times3\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\times5\frac{1}{6}$

173. Νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα:

α) $1\frac{1}{3}\times0\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times5\frac{1}{2}$ β) $3\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{10}{20}\times10\times\frac{1}{5}\times1$

174. Νὰ κάνετε τὶς πράξεις:

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{10}\times\frac{4}{6}\times\frac{10}{20}\right)$$

4. Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ

79

α) Διαίρεση κλάσματος μὲ φυσικὸ ἀριθμὸ

Πρόβλημα. Τρεῖς μαθητὲς τῆς Ε΄ τάξεως ἑνὸς σχολείου μοίρασαν ἐξ ἴσου μεταξύ τους ἕνα κομμάτι σύρμα ποὺ εἶχε μῆκος $\frac{9}{10}$ τοῦ μέτρου. Ποιό ἦταν τὸ μῆκος τοῦ κάθε κομματιοῦ;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

3 μαθητὲς

Τὸ σύρμα $\frac{9}{10}$ μ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ ἀρχικοῦ κομματιοῦ τοῦ σύρματος· $\frac{9}{10}$ μ.,

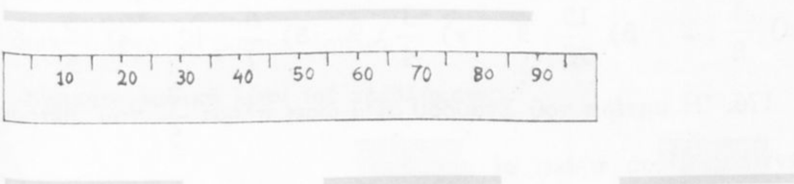
β) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων κομματιῶν τοῦ σύρματος· 3.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Τὸ μῆκος κάθε κομματιοῦ τοῦ σύρματος·

δηλαδή, γνωρίζομε τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν τριῶν ἴσων κομματιῶν τοῦ σύρματος καὶ ζητοῦμε τὸ μῆκος τοῦ ἑνὸς ἀπ' αὐτά. Ἑπομένως θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸν $\frac{9}{10}$ μὲ τὸ 3, δηλ. κλάσμα μὲ ἀκέραιο.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



$\frac{3}{10}$ μ. $\frac{3}{10}$ μ. $\frac{3}{10}$ μ.

Παραπάνω, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ μέτρου, διαιρέσαμε τὸ τεμάχιο τοῦ σύρματος σὲ 3 ἴσα μέρη. Ἔτσι βρήκαμε ὅτι τὸ μῆκος κάθε κομματιοῦ ἦταν $\frac{3}{10}$ μ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως

Ὅπως εἴδαμε στὰ μαθήματα 43ο καὶ 44ο, τὴ διαίρεση κλάσματος μὲ φυσικὸ ἀριθμὸ μποροῦμε νὰ τὴν πραγματοποιήσωμε, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος μὲ τὸ φυσικὸ ἀριθμὸ ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστὴ του μὲ τὸ φυσικὸ ἀριθμό. Συνεπῶς ὑπάρχουν δυὸ τρόποι:

1ος τρόπος. $\frac{9}{10} : 3 = \frac{9:3}{10} = \frac{3}{10}$.

2ος τρόπος. $\frac{9}{10} : 3 = \frac{9}{10 \times 3} = \frac{9}{30} = \frac{9:3}{30:3} = \frac{3}{10}$

Ἀπάντηση. Τὸ μῆκος κάθε κομματιοῦ ἦταν $\frac{3}{10}$ μ.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω καταλήγομε στὸ ἑξῆς συμπέρασμα (ποὺ εἶναι γνωστό):

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα μὲ φυσικὸ ἀριθμό, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς, ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστή του μὲ τὸν φυσικὸ αὐτὸ ἀριθμό.

Ἀσκήσεις

175. Νὰ κάνετε τὶς διαιρέσεις:

α) $\frac{4}{8} : 2$ β) $\frac{15}{20} : 5$ γ) $\frac{3}{4} : 9$ δ) $\frac{6}{7} : 12$ ε) $\frac{3}{5} : 6$

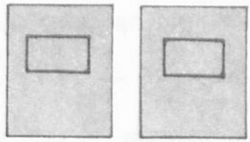
176. Ἡ μητέρα τοῦ Σταύρου σὲ 4 ὧρες πλέκει $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου δαντέλας. Πόσο πλέκει σὲ μιὰ ὥρα;

80 β) Διαίρεση μεικτοῦ μὲ φυσικὸ ἀριθμὸ

Πρόβλημα. Ὁ Ἀλκιβιάδης ἀγόρασε 2 τετράδια τῶν 80 φύλλων τῆς ἴδιας ποιότητας κι ἔδωσε $10\frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τὸ ἕνα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Οἱ $10\frac{1}{2}$ δραχμὲς



Τὰ δύο τετράδια

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ συνολικὴ ἀξία τῶν τετραδίων· $10\frac{1}{2}$ δρχ.,

β) ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων ποὺ ἀγοράστηκαν· 2.

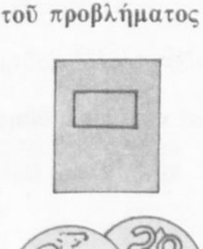
Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

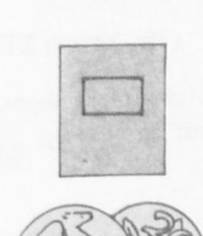
Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς τετραδίου·

δηλαδή, γνωρίζομε τὴν συνολικὴ ἀξία τῶν δύο τετραδίων, τὸ ὅτι τὰ τετράδια εἶναι τῆς ἴδιας ἀξίας, καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τοῦ ἑνός. Ἄρα θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸν $10\frac{1}{2}$ διὰ 2, δηλ. μεικτὸ μὲ φυσικὸ ἀριθμό.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

Οἱ $10\frac{1}{2}$ δρχ.





Μοιράσαμε τὶς $10\frac{1}{2}$ δραχμὲς σὲ δυὸ ἴσα μέρη. Ἔτσι βρήκαμε τὴν ἀξία κάθε τετραδίου· $5 \frac{1}{4}$ δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως

1ος τρόπος. $10 \frac{1}{2} : 2 = \frac{21}{2} : 2 = \frac{21}{2 \times 2} = \frac{21}{4} = 5 \frac{1}{4}.$

Δηλαδή, τρέπομε τὸ μεικτὸ σὲ κλάσμα καὶ διαιροῦμε κλάσμα μὲ φυσικὸ ἀριθμό, ὅπως γνωρίζομε:

2ος τρόπος. $10 \frac{1}{2} : 2 = \left(10 : 2\right) + \left(\frac{1}{2} : 2\right) = 5 + \frac{1}{2 \times 2} =$

$= 5 + \frac{1}{4} = 5 \frac{1}{4}.$

Δηλαδή, διαιροῦμε πρῶτα τὸν ἀκέραιο μὲ τὸ φυσικὸ ἀριθμὸ ἔπειτα τὸ κλάσμα μὲ τὸ φυσικὸ ἀριθμὸ καὶ τέλος προσθέτομε τὰ δυὸ πηλίκα.

Ἀπάντηση. Ὁ Ἀλκιβιάδης ἀγόρασε τὸ ἕνα τετράδιο μὲ $5 \frac{1}{4}$ δραχμές.

Ἀσκήσεις

177. Νὰ κάνετε τὶς διαιρέσεις:

α) $5 \frac{1}{3} : 2$ β) $7 \frac{2}{5} : 3$ γ) $16 \frac{4}{5} : 4$ δ) $23 \frac{7}{11} : 5$

178. Χτὲς ἡ ΣΤ' τάξη διδάχτηκε 4 μαθήματα σὲ $3 \frac{1}{2}$ ὧρες. Πόσο μέρος τῆς ὥρας ἀναλογεῖ σὲ κάθε μάθημα, ἂν οἱ διδακτικὲς ὧρες εἶναι ἰσόχρονες;

81 γ) Διαίρεση ἀκεραίου μὲ κλάσμα

Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τῆς Πηνελόπης ἀγόρασε $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου ὑφάσματος κι ἔδωσε 10 δραχμές. Ποιὰ ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὰ $\frac{2}{5}$ μ. ὑφάσματος

Τὸ 1 μ. ὑφάσματος

Οἱ 10 δραχμὲς

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος ποὺ ἀγοράστηκε· $\frac{2}{5}$ μ.,

β) ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος ποὺ ἀγοράστηκε· 10 δρχ.

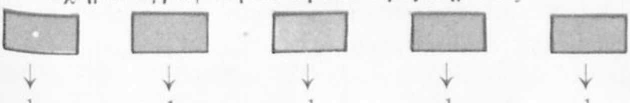
Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου τοῦ ἴδιου ὑφάσματος.

Εἶναι γνωστὸ πώς, ὅταν ξέρωμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων καὶ τὸ πλῆθος των καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς ἀπ' αὐτές, κάνομε διαίρεση. «Ἀνάλογα» κι ἐδῶ: ξέρομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ἴσων κλασματικῶν μονάδων καὶ τὸ πλῆθος των καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῆς ἀκέραιας μονάδας ἀπὸ τὴν ὁποία προῆλθαν οἱ κλασματικές.

Θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε $10 : \frac{2}{5}$, δηλ. ἀκέραιο μὲ κλάσμα.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



$\frac{1}{5}$ μ. ὕφ. + $\frac{1}{5}$ μ. ὕφ. + $\frac{1}{5}$ μ. ὕφ. + $\frac{1}{5}$ μ. ὕφ. + $\frac{1}{5}$ μ. ὕφ. = 1 μ. ὕφ.

ἤτοι 25 δρχ.

Παραπάνω ἀναλύσαμε τὸ ἕνα μέτρο ὑφάσματος σὲ $\frac{5}{5}$ τοῦ μέτρου.

Βρήκαμε πρῶτα τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{5}$ καὶ στὴ συνέχεια τὴν ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου ὑφάσματος.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως

Ἀφοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν 10 δρχ., τὸ $\frac{1}{5}$ του ἀξίζει 2 φορὲς λιγότερο· δηλαδὴ ἀξίζει $\frac{10}{2}$ δρχ. Ἄρα τὰ $\frac{5}{5}$ του (δηλ. τὸ 1 μέτρο) ἀξίζουν 5 φορὲς περισσότερο ἀπὸ ὅ,τι ἀξίζει τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου· δηλαδὴ τὸ 1 μέτρο ἀξίζει : $\left(\frac{10}{2} \times 5\right)$ δρχ. Συνεπῶς ἔχομε:

$$10 : \frac{2}{5} = \frac{10}{2} \times 5 = \frac{10 \times 5}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

Ἀπάντηση. Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ἦταν 25 δρχ.

Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα $\frac{50}{2}$ πρόκυψε σὰν τὸ γινόμενο $\frac{10}{2} \times 5$. Τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα δίνει καὶ ὁ πολ/σμὸς $10 \times \frac{5}{2}$.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς:

1ο. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ἴσων κλασματικῶν μονάδων καὶ τὸ πλῆθος των καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς ἀκέραιας μονάδας, ἀπὸ τὴν ὁποία προῆλθαν οἱ κλασματικές, κάνομε διαίρεση.

2ο. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο μὲ κλάσμα, ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτη καὶ ἀντὶ γιὰ διαίρεση κάνομε πολλαπλασιασμό.

Ἀσκήσεις

179. Νὰ κάνετε τὶς διαιρέσεις:

α) $8 : \frac{4}{5}$ β) $9 : \frac{3}{4}$ γ) $15 : \frac{2}{3}$ δ) $20 : \frac{6}{7}$ ε) $100 : \frac{5}{9}$

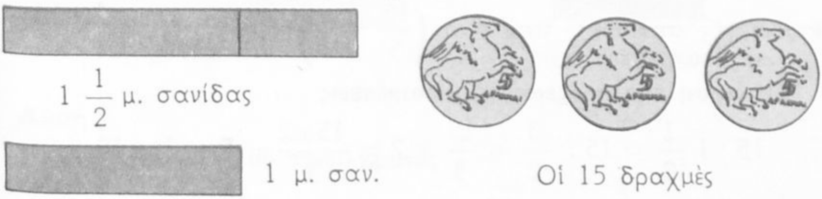
180. Ἡ μητέρα τῆς Μαρίας ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ βούτυρο μὲ 45 δρχ. Πόσο ἀγόρασε τὸ κιλὸ ἀπ' αὐτὸ τὸ βούτυρο;

82

δ) Διαίρεση ἀκεραίου μὲ μεικτὸ

Πρόβλημα. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου μὲ 15 δραχμὲς ἀγόρασε μιὰ σανίδα μήκους $1\frac{1}{2}$ μ. Ποιὰ ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου ἀπ' αὐτὴ τὴ σανίδα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῆς σανίδας ποὺ ἀγοράστηκε· $1\frac{1}{2}$ μ.,

β) ἡ ἀξία τῆς σανίδας ποὺ ἀγοράστηκε. 15 δρχ.

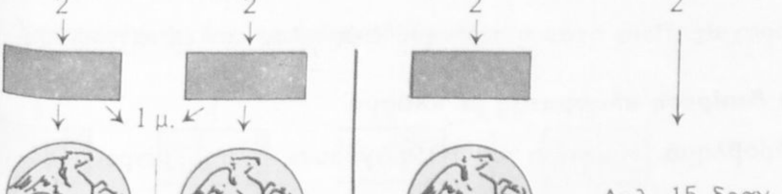
Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου τῆς σανίδας αὐτῆς.

Θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε $15 : 1\frac{1}{2}$, δηλ. ἀκέραιο διὰ μεικτοῦ.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

$\frac{1}{2}$ μ. σαν. $+ \frac{1}{2}$ μ. σαν. $+ \frac{1}{2}$ μ. σαν. $= 1\frac{1}{2}$ μ. σαν.



Παραστήσαμε παραπάνω τὸ $1\frac{1}{2}$ μ. τῆς σανίδας μὲ $\frac{3}{2}$ τοῦ μέτρου. Ἔπειτα βρήκαμε τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου, δηλ. $\frac{15}{3}$ δρχ. καὶ στὴ συνέχεια τὴν ἀξία τῶν $\frac{2}{2}$ τοῦ μέτρου (δηλαδὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου τῆς σανίδας) ποὺ εἶναι $\left(\frac{15}{3} \times 2\right)$ δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως

$$15 : 1\frac{1}{2} = 15 : \frac{3}{2} = \frac{15}{3} \times 2 = \frac{15 \times 2}{3} = 5 \times 2 = 10.$$

Ἀπάντηση. Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου ἀπ' αὐτὴ τὴ σανίδα, ἦταν 10 δρχ.

Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα 5×2 προέκυψε σὰν τὸ γινόμενο $\frac{15}{3} \times 2$, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ $15 \times \frac{2}{3}$.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο μὲ μεικτό, τρέπομε τὸ μεικτὸ σὲ κλάσμα καὶ διαιροῦμε ἀκέραιο μὲ κλάσμα, ὅπως γνωρίζομε.

Ἀσκήσεις

181. Νὰ κάνετε τὶς διαιρέσεις:

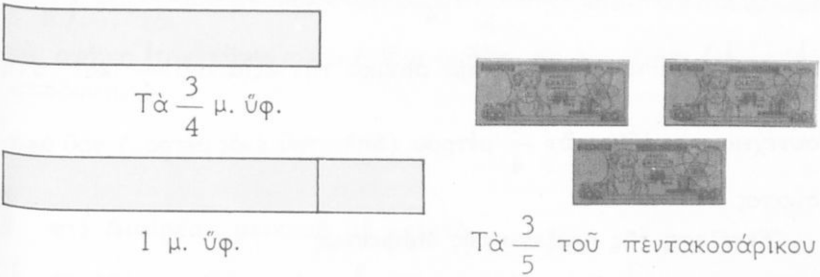
α) $10 : 2\frac{1}{2}$ β) $35 : 3\frac{1}{2}$ γ) $45 : 9\frac{3}{4}$ δ) $168 : 12\frac{4}{5}$

182. Ὁ πατέρας τοῦ Χρίστου ἀγόρασε $17\frac{1}{2}$ κιλὰ λάδι μὲ 525 δραχμές. Ποιὰ ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἀπ' αὐτὸ τὸ λάδι;

83 ε) Διαίρεση κλάσματος μὲ κλάσμα

Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τοῦ Ἠλία ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ὑφάσματος κι ἔδωσε $\frac{3}{5}$ τοῦ πεντακοσάρικου. Ποιὰ ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου ἀπ' αὐτὸ τὸ ὕφασμα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος ποὺ ἀγοράστηκε· $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου,

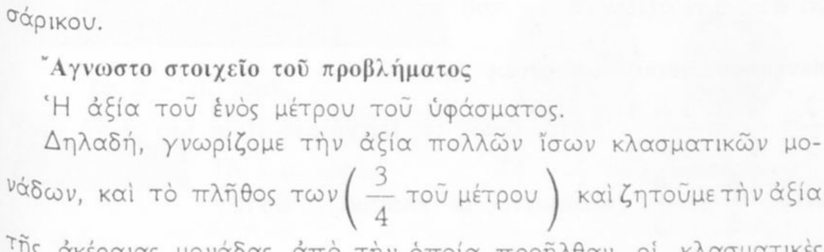
β) ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος ποὺ ἀγοράστηκε· $\frac{3}{5}$ τοῦ πεντακοσάρικου.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου τοῦ ὑφάσματος.

Δηλαδή, γνωρίζομε τὴν ἀξία πολλῶν ἴσων κλασματικῶν μονάδων, καὶ τὸ πλῆθος των $\left(\frac{3}{4}\right.$ τοῦ μέτρου$\left.\right)$ καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τῆς ἀκέραιας μονάδας, ἀπὸ τὴν ὁποία προῆλθαν οἱ κλασματικὲς (τοῦ ἑνὸς μέτρου). Θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε $\frac{3}{5} : \frac{3}{4}$, δηλ. κλάσμα μὲ κλάσμα.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος



᾿Αναλύσαμε παραπάνω τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ὑφάσματος σὲ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$ τοῦ μέτρου. Βρήκαμε ἀρχικὰ τὴν ἀξία τοῦ $\frac{1}{4}$ καὶ στὴ συνέχεια τὴν ἀξία τῶν $\frac{4}{4}$ μέτρου (δηλ. τοῦ ἑνὸς μέτρου) τοῦ ὑφάσματος.

᾿Εκτέλεση τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως

᾿Αφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν $\frac{3}{5}$ τοῦ πεντακοσάρικου, τὸ $\frac{1}{4}$ του ἀξίζει 3 φορὲς λιγότερο· δηλ. ἀξίζει $\frac{3}{5 \times 3}$ τοῦ πεντακοσάρικου.

῎Αρα τὰ $\frac{4}{4}$ του (δηλ. τὸ 1 μέτρο) ἀξίζουν 4 φορὲς περισσότερο ἀπὸ ὅ,τι ἀξίζει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου· δηλαδὴ ἀξίζει $\frac{3 \times 4}{5 \times 3}$ τοῦ πεντακοσάρικου. ῾Επομένως ἔχομε:

$\frac{3}{5} : \frac{3}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 3}$. Αὐτὸ ὅμως τὸ ἐξαγόμενο εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο $\frac{3}{5} \times \frac{4}{3}$ (κλάσματος μὲ κλάσμα). ῞Ωστε:

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{5 \times 3} = \frac{4}{5}.$$ ῎Ητοι 400 δρχ.

᾿Απάντηση : ῾Η τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου ὑφάσματος ἦταν 400 δρχ·

᾿Απὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα μὲ κλάσμα, ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτη καὶ ἀντὶ γιὰ διαίρεση κάνομε πολλαπλασιασμό.

᾿Ασκήσεις

183. Νὰ κάνετε τὶς διαιρέσεις:

α) $\frac{3}{9} : \frac{4}{5}$ β) $\frac{7}{8} : \frac{7}{8}$ γ) $\frac{3}{4} : \frac{2}{15}$ δ) $\frac{4}{5} : \frac{3}{15}$

184. Μιὰ ὁμάδα ἀπὸ μαθητὲς τῆς ΣΤ´ τάξεως ἑνὸς σχολείου

σκάβει τὰ $\frac{3}{16}$ τοῦ σχολικοῦ κήπου σὲ $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας. Σὲ πόσες ὧρες θὰ σκάψη τὸν κῆπο αὐτὸ ἡ ἴδια ὁμάδα, ἂν ἐργάζεται μὲ τὴν ἴδια ἀπόδοση;

84 **στ) Διαίρεση μεικτοῦ μὲ μεικτὸ**

Πρόβλημα. Ἡ μητέρα τῆς Πόπης ἀγόρασε $2\frac{1}{2}$ μέτρα κορδέλας κι ἔδωσε $1\frac{1}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου. Ποιὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου αὐτῆς τῆς κορδέλας;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὰ $2\frac{1}{2}$ μ. κορδ.

Τὸ 1 μ. κορδ.

Τὸ $1\frac{1}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῆς κορδέλας ποὺ ἀγοράστηκε· $2\frac{1}{2}$ μ.,

β) ἡ ἀξία τῆς κορδέλας ποὺ ἀγοράστηκε· $1\frac{1}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου.

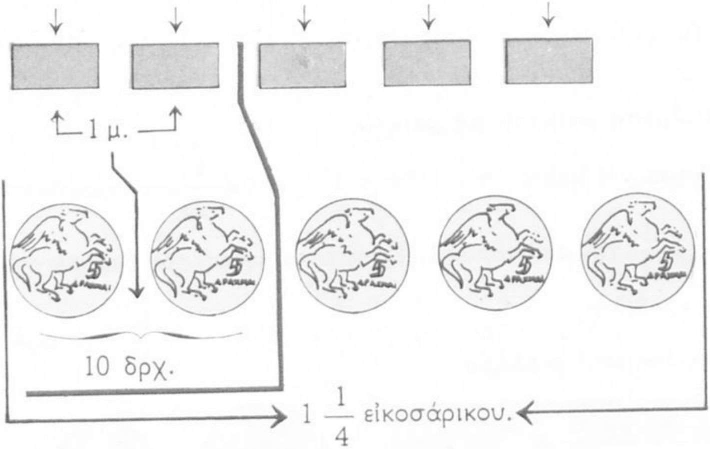
Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου τῆς κορδέλας αὐτῆς.

Θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸν $1\frac{1}{4}$ μὲ τὸν $2\frac{1}{2}$, δηλαδὴ μεικτὸ μὲ μεικτό.

Σχηματογραφικὴ λύση τοῦ προβλήματος

$$\frac{1}{2}\text{ μ. κ.} + \frac{1}{2}\text{ μ. κ.} + \frac{1}{2}\text{ μ. κ.} + \frac{1}{2}\text{ μ. κ.} + \frac{1}{2}\text{ μ. κ.} = 2\,\frac{1}{2}\text{ μ. κορ.}$$



Παραστήσαμε παραπάνω τὰ $2\,\frac{1}{2}$ μέτρα κορδέλας μὲ $\frac{5}{2}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ $1\,\frac{1}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου μὲ $\frac{5}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου. Ἔπειτα φέραμε σὲ ἀντιστοιχία τὸ κάθε $\frac{1}{2}$ τοῦ μέτρου μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ εἰκοσάρικου καὶ βρήκαμε ὅτι τὸ ἕνα μέτρο κορδέλας ἀξίζει 10 δρχ.

Ἐκτέλεση τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως

$$1\,\frac{1}{4} : 2\,\frac{1}{2} = \frac{5}{4} : \frac{5}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{5 \times 2}{4 \times 5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ἀπάντηση. Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μέτρου κορδέλας εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ εἰκοσάρικου, ἤτοι 10 δραχμές.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ διαιρέσωμε μεικτὸ μὲ μεικτό, τρέπομε τοὺς μεικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ διαιροῦμε κλάσμα μὲ κλάσμα, ὅπως γνωρίζομε.

Ἀσκήσεις

185. Νὰ κάνετε τὶς διαιρέσεις:

α) $10\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3}$ β) $20\frac{3}{5} : 6\frac{4}{7}$ γ) $145\frac{2}{3} : 15\frac{3}{4}$ δ) $100\frac{1}{10} : 2\frac{5}{7}$

186. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη ἀγόρασε $9\frac{8}{7}$ κιλὰ βούτυρο μιᾶς ποιότητας κι ἔδωσε $541\frac{1}{2}$ δραχμές. Ποιά ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἀπ' αὐτὸ τὸ βούτυρο;

ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ

85

Κύριο πρόβλημα. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη πούλησε $35\frac{1}{2}$ κιλὰ ἐλιὲς πρὸς $20\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε σιτάρι πρὸς $2\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ σιτάρι ἀγόρασε;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὰ $35\frac{1}{2}$ κ. ἐλ.

Οἱ $20\frac{1}{2}$ δρχ.

Οἱ $5\frac{1}{2}$ δρχ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ βάρος τῶν ἐλιῶν ποὺ πουλήθηκαν· $35\frac{1}{2}$ κ., β) ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἐλιές· $20 \frac{1}{2}$ δρχ.,

γ) ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ σιτάρι· $2 \frac{1}{2}$ δρχ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ εἰσπράχτηκε,

β) τὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ ποὺ ἀγοράστηκε.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ εἰσέπραξε ὁ πατέρας τοῦ Τέλη, θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $35 \frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸν $20 \frac{1}{2}$.

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ ποὺ ἀγοράστηκε, θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο ἀπὸ τὴν προηγούμενη πράξη διὰ $2 \frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$\left(35 \frac{1}{2} \times 20 \frac{1}{2}\right) : 2 \frac{1}{2}.$$

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ

$$35 \frac{1}{2} \times 20 \frac{1}{2} = \frac{71}{2} \times \frac{41}{2} = \frac{71 \times 41}{2 \times 2} = \frac{2911}{4} = 727 \frac{3}{4} \quad \text{ἤ}$$

$$35 \frac{1}{2} \times 20 \frac{1}{2} = \left(35 \times 20\right) + \left(35 \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 20\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 700 + \frac{35}{2} + \frac{20}{2} + \frac{1}{4} = 700 + \frac{70}{4} + \frac{40}{4} + \frac{1}{4} = 700 + \frac{111}{4} =$$

$$= 700 + 27 \frac{3}{4} = 727 \frac{3}{4}.$$

β) τῆς διαιρέσεως

$$727 \frac{3}{4} : 2 \frac{1}{2} = \frac{2911}{4} : \frac{5}{2} = \frac{2911}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2911 \times 2}{20} =$$

$$= \frac{2911}{10} = 291 \frac{1}{10}.$$

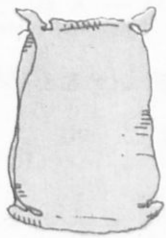
Ἀπάντηση. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη ἀγόρασε $291\frac{1}{10}$ κιλὰ σιτάρι.

Τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη πούλησε $35\frac{1}{2}$ κιλὰ ἐλιὲς πρὸς $20\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ πῆρε ἀγόρασε $291\frac{1}{10}$ κιλὰ σιτάρι ἀπὸ μιὰ ποιότητα. Πόσο ἀγόρασε τὸ ἕνα κιλό;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὰ $35\frac{1}{2}$ κ. ἐλ.

Οἱ $20\frac{1}{2}$ δρχ.



$291\frac{1}{10}$ κ. σιτ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ βάρος τῶν ἐλιῶν ποὺ πουλήθηκαν· $35\frac{1}{2}$ κ.,

β) ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἐλιές· $20\frac{1}{2}$ δρχ.,

γ) τὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ ποὺ ἀγοράστηκε· $291\frac{1}{10}$ κ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ εἰσπράχτηκε,

β) ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ σιταριοῦ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ εἰσέπραξε ὁ πατέρας τοῦ Τέλη, θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $35\frac{1}{2}$ μὲ τὸν $20\frac{1}{2}$.

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἀπὸ τὸ σιτάρι ποὺ ἀγοράστηκε, θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο ἀπὸ τὴν προηγούμενη πράξη διὰ $291 \frac{1}{10}$, δηλαδή :

$$\left(35 \frac{1}{2} \times 20 \frac{1}{2}\right) : 291 \frac{1}{10}.$$

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$35 \frac{1}{2} \times 20 \frac{1}{2} = \frac{71}{2} \times \frac{41}{2} = \frac{71 \times 41}{2 \times 2} = \frac{2911}{4} = 727 \frac{3}{4}$$

β) τῆς διαιρέσεως

$$727 \frac{3}{4} : 291 \frac{1}{10} = \frac{2911}{4} : \frac{2911}{10} = \frac{2911}{4} \times \frac{10}{2911} = \frac{2911 \times 10}{4 \times 2911} =$$

$$= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}.$$

Ἀπάντηση. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη ἀγόρασε τὸ σιτάρι πρὸς $2 \frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό.

Συσχετισμός. Στὸ κύριο πρόβλημα (μαθ. 85) εἶχαν δοθῆ:

α) τὸ βάρος τῶν ἐλιῶν ποὺ πουλήθηκαν· $35 \frac{1}{2}$ κ., β) ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ τῶν ἐλιῶν· $20 \frac{1}{2}$ δρχ. καὶ γ) ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ σιταριοῦ· $2 \frac{1}{2}$ δρχ. Βρήκαμε τὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ ποὺ ἀγοράστηκε· $291 \frac{1}{10}$ κιλά.

Στὸ ἀντίστροφο πρόβλημα εἶχαν δοθῆ:

α) Τὸ βάρος τῶν ἐλιῶν ποὺ πουλήθηκαν· $35 \frac{1}{2}$ κ. β) ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ τῶν ἐλιῶν· $20 \frac{1}{2}$ δρχ. καὶ γ) τὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ ποὺ ἀγοράστηκε· $291\frac{1}{10}$ κ. Βρήκαμε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ σιταριοῦ· $2\frac{1}{2}$ δρχ.

Πρόβλημα 1ο. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη πούλησε $40\frac{2}{5}$ κιλὰ ἐλιὲς πρὸς $21\frac{3}{4}$ δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε σιτάρι πρὸς $2\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ σιτάρι ἀγόρασε;

Λύση. Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ σιτάρι ἀγόρασε ὁ πατέρας τοῦ Τέλη, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $40\frac{2}{5}$ μὲ τὸν $21\frac{3}{4}$ κι' ἔπειτα θὰ διαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ διὰ $2\frac{2}{5}$, δηλαδὴ $\left(40\frac{2}{5}\times 21\frac{3}{4}\right) : 2\frac{2}{5}$.

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$40\frac{2}{5}\times 21\frac{3}{4}=\frac{202}{5}\times\frac{87}{4}=\frac{101\times 87}{5\times 2}=\frac{8787}{10}=878\frac{7}{10},$$

β) τῆς διαιρέσεως

$$878\frac{7}{10} : 2\frac{2}{5}=\frac{8787}{10} : \frac{12}{5}=\frac{8787}{10}\times\frac{5}{12}=\frac{8787\times 1}{2\times 12}=\frac{8787}{24}=$$

$$=366\frac{3}{24}=366\frac{1}{8}.$$

Ἀπάντηση. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη ἀγόρασε $366\frac{1}{8}$ κιλὰ σιτάρι.

Πρόβλημα 2ο. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη πούλησε $35\frac{1}{2}$ κιλὰ σπορέλαιο πρὸς $20\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε λίπασμα πρὸς $2\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ λίπασμα ἀγόρασε;

Λύση. Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ λίπασμα ἀγόρασε ὁ πατέρας τοῦ Τέλη θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν $35\frac{1}{2}$ μὲ τὸν $20\frac{1}{2}$ κι ἔπειτα θὰ διαιρέσωμε τὸ ἐξαγόμενο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ $2\frac{1}{2}$, δηλαδή: $\left(35\frac{1}{2} \times 20\frac{1}{2}\right) : 2\frac{1}{2}$.

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$35\frac{1}{2} \times 20\frac{1}{2} = \frac{71}{2} \times \frac{41}{2} = \frac{71 \times 41}{2 \times 2} = \frac{2911}{4} = 727\frac{3}{4},$$

β) τῆς διαιρέσεως

$$727\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{2911}{4} : \frac{5}{2} = \frac{2911}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2911 \times 1}{2 \times 5} = \frac{2911}{10} = 291\frac{1}{10},$$

Ἀπάντηση. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη ἀγόρασε $291\frac{1}{10}$ κιλὰ λίπασμα.

Ἀσκήσεις

187. Ὁ σχολικὸς συνεταιρισμὸς ἑνὸς ὀρεινοῦ σχολείου πούλησε 100 κιλὰ καρύδια πρὸς $40\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε τετράδια πρὸς $13\frac{1}{2}$ δραχμὲς τὸ καθένα. Πόσα τετράδια ἀγόρασε;

Σημείωση. Νὰ λύσετε τὸ παραπάνω πρόβλημα. Νὰ βρῆτε καὶ ἄλλο τρόπο λύσεως. Νὰ συντάξετε καὶ νὰ λύσετε τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα καὶ τέλος νὰ λύσετε τὸ κύριο πρόβλημα α) μὲ ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ β) μὲ ἄλλα ἀντικείμενα.

188. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου πούλησε 80 τελάρα πρὸς $15\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ ἕνα. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀγόρασε καδρόνια πρὸς 20 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσα μέτρα καδρόνια ἀγόρασε;

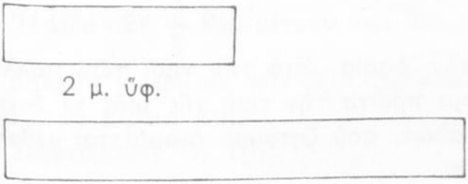
Σημείωση. Νὰ κάνετε καὶ μὲ τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὅ,τι καὶ μὲ τὸ προηγούμενο.

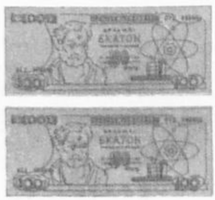
86

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗ ΜΟΝΑΔΑ

Πρόβλημα 1ο. Τὰ δυὸ μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος στοιχίζουν 200 δρχ. Πόσο στοιχίζουν τὰ 4 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος





Οἱ 200 δραχμὲς

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος· 2 μ.,

β) ἡ ἀξία τῶν 2 μ. τοῦ ὑφάσματος· 200 δρχ.

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τῶν 4 μ. τοῦ ἴδιου ὑφάσματος.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πρόβλημα αὐτὸ μπορεῖ νὰ χωριστῆ στὰ ἑξῆς δυὸ ἁπλὰ προβλήματα:

Α΄ πρόβλημα. Τὰ 2 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος στοιχίζουν 200 δρχ. Τὸ 1 μέτρο ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα πόσο στοιχίζει;

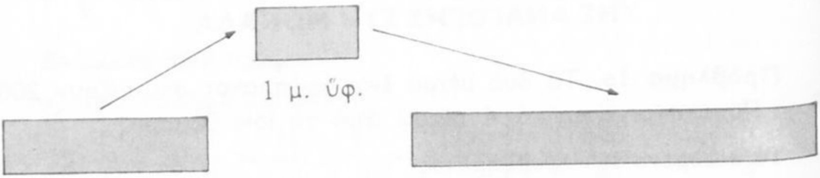
Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ 1 μ. ὕφ. στοιχίζει $200 : 2 = \frac{200}{2} = 100$ δρχ.

Β΄ πρόβλημα. Τὸ 1 μέτρο ὑφάσματος στοιχίζει 100 δρχ. Τὰ 4 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα πόσο στοιχίζουν;

Εὔκολα καταλαβαίνομε ὅτι τὰ 4 μ. στοιχίζουν $100 \times 4 = 400$ δρχ.

Στὸ παραπάνω πρόβλημα ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, χωρὶς νὰ μᾶς δίνεται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς.

Ἀναλύοντας τὸ πρόβλημα αὐτό, γιὰ νὰ βροῦμε ἀπὸ τὴν τιμὴ τῶν 2 μ. ὑφ. τὴν τιμὴ τῶν 4 μ. τοῦ ἴδιου ὑφ., πρῶτα βρήκαμε τὴν τιμὴ τοῦ 1 μ. τοῦ ὑφ. καὶ κατόπι τὴν τιμὴ τῶν 4 μ. αὐτοῦ· δηλαδή:



1 μ. ὕφ.

2 μ. ὕφ. 4 μ. ὕφ.

Ὁ τρόπος αὐτός, μὲ τὸν ὁποῖο ἀπὸ τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν δεδομένων μονάδων βρίσκομε πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς κι ἔπειτα τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ποὺ ζητοῦμε, ὀνομάζεται **μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα**.

Σύντομα λοιπὸν μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ ἀρχικὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς:

τὰ 2 μ. ὑφ. στοιχίζουν 200 δρχ.

τὸ 1 μ. ὑφ. στιχίζει $\frac{200}{2}$ δρχ.

τὰ 4 μ. ὑφ. στοιχίζουν $4 \times \frac{200}{2} = \frac{800}{2} = 400$ δρχ.

Ἀπάντηση. Τὰ 4 μ. ὑφ. στοιχίζουν 400 δρχ.

Ἀσκήσεις

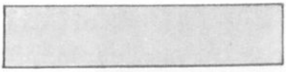
189. Τὰ 5 κιλὰ βούτυρο ἀξίζουν 525 δρχ. Πόσο ἀξίζουν τὰ 18 κιλὰ ἀπ' αὐτὸ τὸ βούτυρο;

190. Τὰ 9 μ. καλώδιο κοστίζουν 63 δρχ. Πόσο κοστίζουν τὰ 232 μ. ἀπ' τὸ ἴδιο καλώδιο;

87

Πρόβλημα 2ο. Ἕνα μέτρο ὑφάσματος ἀξίζει 200 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



1 μ. ὕφ.

$\frac{4}{5}$ μ. ὑφ.

Οἱ 200 δραχμὲς

Λύση

Γνωστὸ στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τοῦ 1 μ. ὑφάσματος 200 δρχ.,

Ἄγνωστο στοιχεῖο τοῦ προβλήματος

Ἡ ἀξία τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου τοῦ ἴδιου ὑφάσματος·

δηλαδὴ γνωρίζομε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία ἑνὸς μέρους της.

Σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὸ 1 μ. ἢ $\frac{5}{5}$ μ. ὑφ. ἀξίζουν 200 δρχ.,

τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει $\frac{200}{5}$ δρχ. καὶ

τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζουν $4 \times \frac{200}{5} = \frac{4 \times 200}{5} = \frac{800}{5} =$

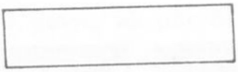
$= 160$ δρχ.

Καὶ σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα πρῶτα βρίσκομε τὴν ἀξία τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδας $\left(\text{τοῦ } \frac{1}{5}\right)$ καὶ κατόπι τῶν πολλῶν κλασματικῶν μονάδων $\left(\text{τῶν } \frac{4}{5}\right)$.

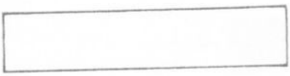
Ἀπάντηση. Τὰ $\frac{4}{5}$ μ. ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ἀξίζουν 160 δρχ.

Πρόβλημα 3ο. Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν $\frac{8}{10}$ τοῦ ἑκατοστάρικου. Πόσο ἀξίζει τὸ 1 μέτρο ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



$\frac{4}{5}$ μ. ὕφ.



1 μ. ὕφ.

Τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ ἑκατοστάρικου

Λύση. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὴν ἀξία ἑνὸς μέρους μιᾶς ἀκέραιας μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν ἀξία τῆς ἀκέραιας αὐτῆς μονάδας.

Σκεφτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου ὑφ. ἀξίζουν $\frac{8}{10}$ τοῦ ἑκατοστάρικου,

τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου ἀξίζει $\frac{8}{10} : 4 = \frac{8}{10 \times 4}$ τοῦ ἑκατοστάρικου,

καὶ τὸ 1 ἢ $\frac{5}{5}$ μ. ὑφ. ἀξίζουν $\frac{8}{10 \times 4} \times 5 = \frac{8 \times 5}{10 \times 4} = \frac{40}{40} = 1$ ἑκατ.

Ἀπάντηση. Τὸ 1 μ. τοῦ ἴδιου ὑφάσματος ἀξίζει 1 ἑκατοστάρικο, ἤτοι 100 δρχ.

Ἀσκήσεις

191. Τὸ κιλὸ τὸ βούτυρο κοστίζει 105 δρχ. Ὁ πατέρας τοῦ Τέλη ἀγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε;

192. Ἡ μητέρα τῆς Ἀρετῆς ἀγόρασε $\frac{2}{5}$ τοῦ κιλοῦ ζάχαρη μὲ $8\frac{4}{5}$ δρχ. Πόσο κόστιζε τὸ κιλὸ ἀπ' αὐτὴ τὴ ζάχαρη;

88 ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

α) Τροπὴ κλάσματος σὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ

Στὸ 31ο μάθημα εἴδαμε ὅτι κάθε κλάσμα εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως μὲ διαιρετέο τὸν ἀριθμητὴ καὶ διαιρέτη τὸν παρονομαστή του. Συνεπῶς, γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα κλάσμα σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ κάνωμε τὴν διαίρεση αὐτή· π.χ. τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{5} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{3}{8} \qquad \frac{8}{7}$$

εἶναι τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ \hline 20 & 0,4 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 30 & 0,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \hline 30 & 0,375 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 7 \\ \hline 10 & 1,142 \\ 30 & \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

Ἄρα: $\frac{2}{5}=0,4 \quad \frac{3}{4}=0,75 \quad \frac{3}{8}=0,375 \quad \frac{8}{7}=1,142$ (περίπου).

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ τρέψωμε κλάσμα σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του μὲ τὸν παρονομαστή του.

β) Τροπὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ σὲ κλάσμα

Ὁ δεκαδικὸς 0,3 τοῦ μέτρου σημαίνει ὅτι διαιρέσαμε τὸ μέτρο σὲ 10 δεκατόμετρα καὶ πήραμε τὰ 3. Τὸ ἴδιο σημαίνει καὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου. Ἑπομένως:

0,3 τοῦ μέτρου $= \frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου.

Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι καὶ

0,75 τῆς δραχμῆς $= \frac{75}{100}$ τῆς δραχμῆς,

$$0{,}375 \text{ τοῦ κιλοῦ} = \frac{375}{1000} \text{ τοῦ κιλοῦ},$$

$$2{,}5 \text{ μέτρα} = \frac{25}{10} \text{ τοῦ μέτρου},$$

$$3{,}75 \text{ δραχμές} = \frac{375}{100} \text{ τῆς δραχμῆς},$$

$$4{,}375 \text{ κιλά} = \frac{4375}{1000} \text{ τοῦ κιλοῦ}.$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

για νὰ τρέψωμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ σὲ κλάσμα, γράφομε ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ χωρὶς τὴν ὑποδιαστολὴ καὶ παρονομαστὴ τὴ μονάδα, μὲ τόσα μηδενικὰ δεξιά της, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ.

Παρατήρηση. Τὰ κλάσματα, ποὺ ἔχουν παρονομαστὴ τὸ 10, 100, 1000 κλπ., λέγονται δεκαδικὰ κλάσματα.

Ἀσκήσεις

193. Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ παρακάτω κλάσματα

α) $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$ β) $\frac{1}{10}$, $\frac{32}{10}$, $\frac{365}{100}$ γ) $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{3}$ δ) $\frac{201}{1000}$

194. Νὰ τρέψετε σὲ κλάσματα τοὺς παρακάτω δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

α) 0,6 0,8 0,9 β) 0,13 0,18 3,12 γ) 0,198 0,396

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

89

1. Ὁρισμός

Στὸ 31ο μάθημα εἴδαμε ὅτι τὸ πηλίκο ἀπὸ τὴ διαίρεση δυὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσωμε μὲ κλάσμα· π.χ.

$$4:5 = \frac{4}{5} \quad 3:7 = \frac{3}{7} \quad 2:3 = \frac{2}{3} \quad 3:4 = \frac{3}{4}$$

Τὰ κλάσματα αὐτά, καθὼς ἐπίσης καὶ ὅλα τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν ὡς ὅρους ἀκέραιους ἀριθμούς, λέγονται **ἁπλὰ κλάσματα.**

Μποροῦμε ὅμως νὰ παραστήσωμε μὲ κλάσμα καὶ τὸ πηλίκο ἀπὸ τὴ διαίρεση κλάσματος μὲ ἀκέραιο, ἀκέραιου μὲ κλάσμα, κλάσματος μὲ κλάσμα, μεικτοῦ μὲ ἀκέραιο κλπ.· π.χ.

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{\frac{4}{5}}{2}, \qquad 5 : \frac{3}{7} = \frac{5}{\frac{3}{7}}, \qquad \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}.$$

Τὰ κλάσματα ποὺ προέκυψαν ἀπὸ τὶς παραπάνω διαιρέσεις λέγονται **σύνθετα κλάσματα**.

Ἄρα: σύνθετα κλάσματα λέγονται τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν τὸν ἕνα τουλάχιστο ἀπὸ τοὺς ὅρους τους κλάσμα.

Ἡ γραμμὴ τοῦ σύνθετου κλάσματος γράφεται πάντοτε μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν κλασματικὴ γραμμή, ποὺ ἔχει κάθε κλασματικὸς ὅρος του.

Σημείωση. Κι ἐδῶ πρέπει νὰ προσέχωμε, ὥστε ὁ παρονομαστὴς κάθε σύνθετου κλάσματος νὰ μὴν εἶναι ὁ ἀριθμὸς μηδέν.

2. Τροπὴ σύνθετου κλάσματος σὲ ἁπλὸ

Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε καὶ παραπάνω, κάθε σύνθετο κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκο ἀπὸ τὴ διαίρεση τοῦ ἀριθμητῆ του μὲ τὸν παρονομαστή του, εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι (λ.χ.):

α) $\dfrac{\frac{4}{5}}{2} = \dfrac{4}{5} : 2 = \dfrac{4 : 2}{5} = \dfrac{2}{5}$,

β) $\dfrac{5}{\frac{3}{7}} = 5 : \dfrac{3}{7} = 5 \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{5 \times 7}{3} = \dfrac{35}{3}$,

γ) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3} : \dfrac{3}{4} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 3} = \dfrac{8}{9}$, δ) $$\frac{2\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{5 \times 1}{2 \times 3} = \frac{5}{6}.$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω καταλήγομε στὸ ἑξῆς συμπέρασμα :

γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα σύνθετο κλάσμα σὲ ἁπλό, πολλαπλασιάζομε τοὺς ἀκραίους ὅρους του καὶ τὸ γινόμενό τους τὸ γράφομε ἀριθμητὴ ἁπλοῦ κλάσματος μὲ παρονομαστὴ τὸ γινόμενο τῶν μεσαίων ὅρων του.

Ἄσκηση

195. Νὰ τρέψετε τὰ παρακάτω σύνθετα κλάσματα σὲ ἁπλά:

α) $\dfrac{5}{\frac{2}{6}}$ β) $\dfrac{\frac{5}{6}}{3}$ γ) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ δ) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}}$ ε) $\dfrac{2\frac{1}{2}}{5\frac{3}{8}}$.

90 Ἀνακεφαλαίωση - Πορίσματα

● Γιὰ νὰ προσθέσωμε ἢ νὰ ἀφαιρέσωμε ἑτερώνυμα κλάσματα, πρέπει προηγουμένως νὰ τὰ τρέψωμε **ὁπωσδήποτε** σὲ ὁμώνυμα.

Ἡ πρόσθεση τῶν κλασμάτων εἶναι πράξη:

1) **ἀντιμεταθετική**· εἶναι π.χ.

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9}.$$

Πραγματικά· τὸ κάθε ἄθροισμα εἶναι ἴσο μὲ $\frac{6}{9}$.

2) **προσεταιριστική**· εἶναι π.χ.

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{2}{8} = \frac{3}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8}\right).$$

Κι' ἐδῶ καθένα ἀπὸ τὰ ἀθροίσματα εἶναι ἴσο μὲ $\frac{6}{8}$.

Στὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τὴ διαίρεση δὲ χρειάζεται νὰ τρέψωμε τὰ κλάσματα ἀπὸ ἑτερώνυμα σὲ ὁμώνυμα.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων εἶναι πράξη:

1) **ἀντιμεταθετική**· εἶναι π.χ.

$$\frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{10}.$$

Πραγματικά· τὸ κάθε γινόμενο εἶναι ἴσο μὲ $\frac{15}{60}$.

2) **προσεταιριστική**· εἶναι π.χ.

$$\left(\frac{2}{7} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right).$$

Κι' ἐδῶ, καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα, εἶναι ἴσο μὲ $\frac{4}{42}$.

3) α) **ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση**· εἶναι π.χ.

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{5} = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\right)$$

Πραγματικά· τόσο τὸ γινόμενο $\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{5}$ ὅσο καὶ τὸ ἄθροισμα $\left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\right)$ εἶναι ἴσα μὲ $\frac{5}{25}$.

β) **ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση**· εἶναι π.χ.

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{5} = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\right).$$

Κι ἐδῶ τόσο τὸ γινόμενο $\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{5}$ ὅσο καὶ ἡ διαφορὰ $\left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}\right)$ ἰσοῦνται μὲ $\frac{1}{25}$.

Ὅταν σ' ἕνα γινόμενο παραγόντων ἕνας παράγοντας εἶναι μηδέν, τότε ὁλόκληρο τὸ γινόμενο μηδενίζεται· π.χ.

$$\frac{2}{5} \times 3 \times \frac{1}{6} \times 0 \times \frac{3}{15} = 0.$$

Στὸν πολλαπλασιασμὸ ἡ μονάδα, ὡς παράγοντας, μπορεῖ νὰ παραλείπεται (γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ μονάδα εἶναι **τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ)· π.χ.

$$1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

Στὴν πράξη τῆς διαιρέσεως, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλασματικός, ἀντιστρέφεται καὶ ἀντὶ γιὰ διαίρεση γίνεται πολλαπλασιασμός.

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται **ἀντίστροφοι ἀριθμοί,** ὅταν ἔχουν γινόμενο τὸν ἀριθμὸ 1· π.χ.

οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ εἶναι ἀντίστροφοι, διότι $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1.$

οἱ ἀριθμοὶ 7, $\frac{1}{7}$ εἶναι ἀντίστροφοι διότι $7 \times \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1.$

Ἐπίσης λέμε ὅτι:

ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{4}{3}$,

ὁ $\frac{4}{3}$ εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{3}{4}$,

ὁ 7 εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{7}$,

ὁ $\frac{1}{7}$ εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ 7.

- Ἡ διαίρεση εἶναι ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση, πράξη ἐπιμεριστική·

α) **ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση·** εἶναι π.χ.

$$\left(\frac{4}{10} + \frac{6}{10}\right) : 2 = \left(\frac{4}{10} : 2\right) + \left(\frac{6}{10} : 2\right).$$

Πραγματικά· τόσο τὸ πηλίκο $\left(\frac{4}{10} + \frac{6}{10}\right) : 2$ ὅσο καὶ τὸ ἄθροισμα $\left(\frac{4}{10} : 2\right) + \left(\frac{6}{10} : 2\right)$ εἶναι ἴσα μὲ $\frac{5}{10}$.

β) **ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση·** εἶναι π.χ.

$$\left(\frac{6}{10} - \frac{4}{10}\right) : 2 = \left(\frac{6}{10} : 2\right) - \left(\frac{4}{10} : 2\right)$$

Κι' ἐδῶ, τόσο τὸ πηλίκο $\left(\frac{6}{10} - \frac{4}{10}\right) : 2$ ὅσο καὶ ἡ διαφορὰ $\left(\frac{6}{10} : 2\right) - \left(\frac{4}{10} : 2\right)$ ἰσοῦνται μὲ $\frac{1}{10}$.

Ἀσκήσεις

Α. 196. Ὁ πατέρας τοῦ Πέτρου πούλησε 235 κιλὰ λάδι πρὸς $60\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ πῆρε, ἀγόρασε $26\frac{3}{5}$ κιλὰ τυρὶ πρὸς $52\frac{1}{4}$ δρχ. τὸ κιλὸ καὶ $17\frac{3}{8}$ κιλὰ ὄσπρια πρὸς $28\frac{2}{5}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσα χρήματα τοῦ περίσσεψαν;

197. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 917 κ. ρύζι πρὸς $19\frac{3}{4}$ δρχ. τὸ κάθε κιλό. Ἀπ' αὐτὰ πούλησε $613\frac{1}{8}$ κ. πρὸς $22\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς $23\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσες δραχμὲς κέρδισε συνολικά;

Β. 198. Κάποιος κτηνοτρόφος πούλησε $128\frac{2}{5}$ κ. τυρὶ πρὸς $48\frac{3}{5}$ δρχ. τὸ κιλό. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ πῆρε, ἀγόρασε ἀλεύρι μιᾶς ποιότητας πρὸς $16\frac{2}{3}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι ἀγόρασε;

199. Ἕνας παντοπώλης ἀπὸ ἕνα βαρέλι γεμάτο μὲ λάδι πούλησε

τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τὴν ποσότητά του καὶ στὴ συνέχεια τὰ $\frac{5}{8}$ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο. Ἔτσι στὸ βαρέλι ἀπόμειναν $52\frac{1}{2}$ κ. λάδι. Πόσα κιλὰ λάδι περιεῖχε ἀρχικὰ τὸ βαρέλι;

Γ. 200. Τρία ἀδέλφια μοίρασαν 63.000 δρχ. Ὁ α΄ πῆρε τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τὸ ποσό, ὁ β΄ τὸ $\frac{1}{2}$ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο καὶ ὁ γ΄ τὸ ὑπόλοιπο ποσό. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ καθένας;

201. Ὁ πατέρας τῆς Ἀθηνᾶς ξόδεψε τὸν περασμένο μήνα τὰ $\frac{2}{5}$ ἀπὸ τὸ μισθό του γιὰ ἔξοδα διατροφῆς, τὸ $\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο γιὰ τὴν ἀγορὰ εἰδῶν ρουχισμοῦ καὶ τὰ $\frac{7}{9}$ του νέου ὑπολοίπου γιὰ νοίκι, φωτισμὸ κλπ. Ἂν τοῦ περίσσεψαν 600 δρχ., πόσος ἦταν ὁ μισθός του;

202. Νὰ γράψετε τὸν ἀντίστροφο ἀριθμὸ καθενὸς ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμούς.

$$2, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{32}{51}, \quad 18, \quad \frac{1}{9}, \quad 1.$$

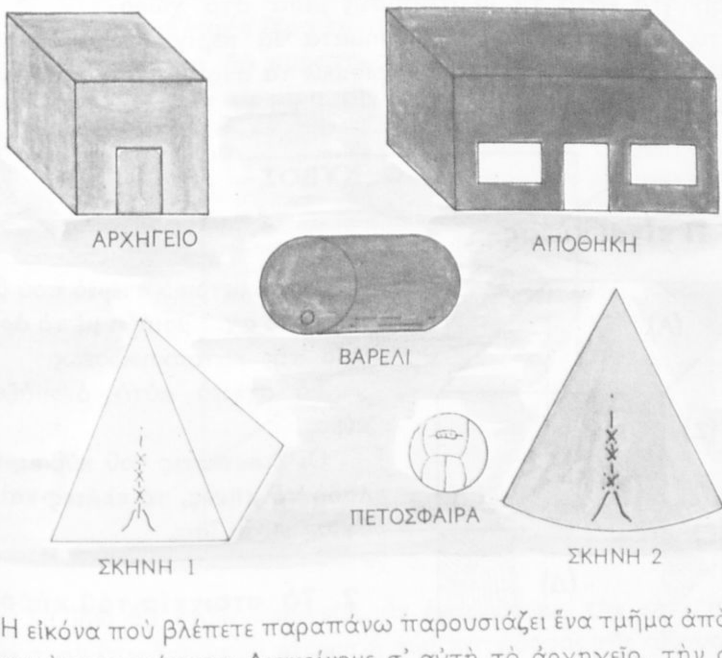
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1

Ι. ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ



Ἡ εἰκόνα ποὺ βλέπετε παραπάνω παρουσιάζει ἕνα τμῆμα ἀπὸ μιὰ μαθητικὴ κατασκήνωση. Διακρίνομε σ' αὐτὴ τὸ ἀρχηγεῖο, τὴν ἀποθήκη, τὴ σκηνὴ 1, ἕνα βαρέλι, τὴ σκηνὴ 2 καὶ μιὰ πετόσφαιρα.

Παρατηροῦμε ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ σώματα αὐτὰ ἔχει ὁρισμένη μορφὴ κι' ἀκόμη ὅτι καταλαμβάνει μιὰν ὁρισμένη ἔκταση μέσα στὸ διάστημα, ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ τὴν καταλάβη ταυτόχρονα ἄλλο σῶμα. Ἐπομένως καθένα ἀπὸ τὰ παραπάνω σώματα ἔχει ὁρισμένο σχῆμα καὶ ὁρισμένον ὄγκο. Εἶναι, δηλαδή, **σ τ ε ρ ε ὸ** σῶμα.

Ἄρα, στερεὸ σῶμα ὀνομάζομε κάθε σῶμα ποὺ ἔχει ὁρισμένο ὄγκο καὶ σχῆμα.

Τὰ στερεὰ σώματα, τὰ ὁποῖα ἐξετάζει ἡ Γεωμετία, ὀνομάζονται **γεωμετρικὰ** στερεὰ σώματα ἤ, ὅπως τὰ λέμε πιὸ σύντομα, **γεωμετρικὰ στερεά,**

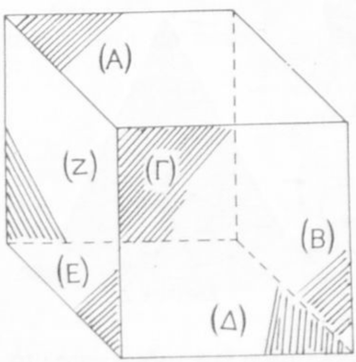
Τὰ γεωμετρικὰ στερεὰ εἶναι νοητὰ ὁμοιώματα τῶν φυσικῶν στερεῶν σωμάτων. Εἶναι δημιουργήματα τοῦ νοῦ μας μὲ μόνα γνωρίσματα τὸν **ὄγκο** καὶ τὸ **σχῆμα.** Τὰ γνωρίσματα αὐτὰ παραμένουν ἀμετάβλητα κατὰ τὶς μετατοπίσεις μέσα στὸ χῶρο.

Στὰ ἀμέσως παρακάτω μαθήματα θὰ περιγράψωμε ὁρισμένα γεωμετρικὰ στερεά, γιὰ νὰ γνωρίσωμε τὰ στοιχεῖα ποὺ τὰ κάνουν νὰ διακρίνωνται.

Α. Ο ΚΥΒΟΣ

2

1. Τί εἶναι κύβος



σχ. 1.

Τὸ γεωμετρικὸ στερεὸ ποὺ βλέπετε στὸ σχ. 1 μοιάζει μὲ τὸ ἀρχηγεῖο τῆς κατασκηνώσεως.

Τὸ στερεὸ αὐτὸ ὀνομάζεται **κύβος.**

Οἱ **διαστάσεις** τοῦ κύβου, δηλαδὴ τὸ **μῆκος,** τὸ **πλάτος** καὶ τὸ **ὕψος,** εἶναι ἴσες.

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ κύβου

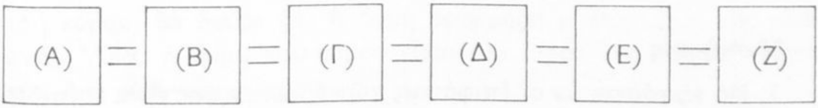
α. Τί εἶναι ἐπιφάνεια τοῦ κύβου

Ἂν ἐξετάσωμε προσεχτικὰ ἕναν κύβο ἀπὸ ὅλες του τὶς μεριές, θὰ δοῦμε ὅλα τὰ ἄκρα του. Τὰ ἄκρα αὐτά, ὅλα μαζί, ἀποτελοῦν τὴν **ἐ π ι φ ά ν ε ι α** τοῦ κύβου.

Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε σῶμα ἔχει τὴν ἐπιφάνειά του. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος τὸ χωρίζει ἀπὸ τὸ διάστημα ποὺ τὸ περιβάλλει.

Κάθε ἐπιφάνεια ἔχει δυὸ διαστάσεις: μῆκος καὶ πλάτος.

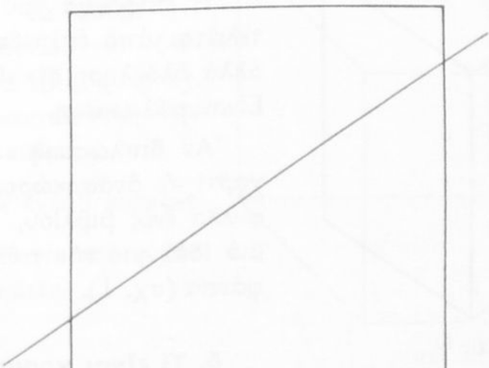
Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὅμοια μέρη. Τὰ μέρη αὐτὰ ὀνομάζονται **ἕ δ ρ ε ς**. Οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.



σχ. 2.

β. Τί εἶναι ἐπίπεδη ἐπιφάνεια

Ἂν σὲ ὁποιαδήποτε ἕδρα τοῦ κύβου ἐφαρμόσωμε μιὰ πολὺ λεπτὴ τεντωμένη κλωστή, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι ἡ κλωστὴ αὐτὴ ἐφαρμόζει ἀκριβῶς σ' ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐπιφάνειας τῆς ἕδρας (σχ. 3).



σχ. 3.

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσωμε, ἂν ἐφαρμόσωμε τὴν κλωστὴ αὐτὴ καὶ στὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα ἢ τοῦ πατώματος τῆς αἴθουσάς μας.

Γι' αὐτὸ ἡ ἐπιφάνεια κάθε ἕδρας τοῦ κύβου, τοῦ πίνακα ἢ τοῦ πατώματος λέγεται **ἐπίπεδη ἐπιφάνεια**. Συνεπῶς,

ἐπίπεδη ἐπιφάνεια εἶναι κάθε ἐπιφάνεια, ἐπάνω στὴν ὁποία ἐφαρμόζει παντοῦ ἡ τεντωμένη κλωστή.

'Από τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

ἡ συνολικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἴσες ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, ποὺ λέγονται ἕδρες του.

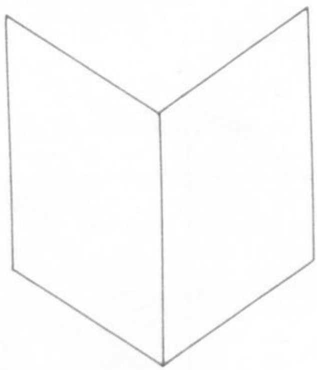
Οἱ ἐπιφάνειες ποὺ ἔχουν τὰ τζάμια τῶν παραθύρων, τὰ μωσαϊκὰ τοῦ πατώματος κλπ., εἶναι ἐπίπεδες ἐπιφάνειες.

'Ασκήσεις

1. Νὰ ἐξετάσετε ἂν οἱ ἐπιφάνειες τῶν θρανίων σας εἶναι ἐπίπεδες.

2. Νὰ ὀνομάσετε καὶ νὰ δείξετε ἐπίπεδες ἐπιφάνειες ποὺ βρίσκονται στὴν αἴθουσα τῆς τάξης σας.

3 γ. Τί εἶναι τεθλασμένη ἐπιφάνεια



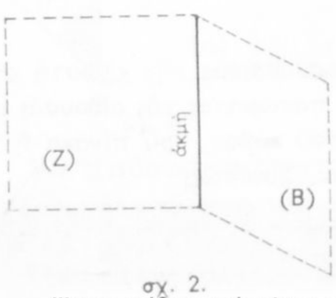
σχ. 1.

'Η ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, ἀλλὰ ὁλόκληρη δὲν εἶναι ἐπίπεδη. Εἶναι **τεθλασμένη.**

Ἂν διπλώσωμε ἕνα κομμάτι χαρτὶ ἢ ἀνασηκώσωμε τὸ ἐξώφυλλο ἑνὸς βιβλίου, θὰ πάρωμε μιὰ ἰδέα γιὰ τὴν τεθλασμένη ἐπιφάνεια (σχ. 1).

δ. Τί εἶναι γραμμὴ

Ἂν παρατηρήσωμε προσεχτικὰ τὶς ἕδρες τοῦ κύβου, θὰ δοῦμε ὅτι αὐτὲς τέμνονται (κόβονται) ἀνὰ δύο.



σχ. 2.

'Η τομὴ δυὸ ἑδρῶν τοῦ κύβου λέγεται **ἀκμή** του (σχ. 2). 'Ο κύβος ἔχει 12 ἀκμές. Οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

Ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι μιὰ **γραμμή**. Ἑπομένως:

γραμμὴ εἶναι ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν.

ε. Τί εἶναι εὐθεία γραμμὴ καὶ τί εὐθύγραμμο τμῆμα

Ἡ εὐθεία γραμμὴ μοιάζει μὲ μιὰ λεπτὴ τεντωμένη κλωστή.

Ἂν τεντώσωμε μιὰ κλωστὴ καὶ τὴν ἐφαρμόσωμε στὴν ἀκμὴ τοῦ κύβου, θὰ δοῦμε ὅτι ἡ ἀκμὴ ἐφαρμόζει μ' ἕνα μέρος τῆς κλωστῆς. Ἄρα, ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι ἕνα μέρος τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἕνα **εὐθύγραμμο τμῆμα.**

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι:

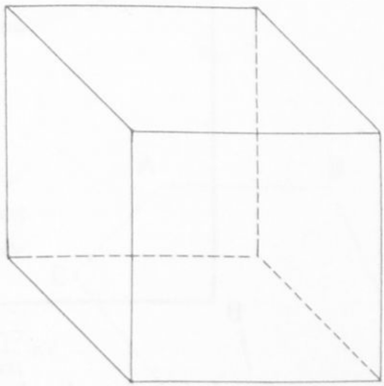
ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα.

στ. Τί εἶναι κορυφὴ καὶ τί σημεῖο

Ἂν ἐξετάσωμε τὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου, θὰ δοῦμε ὅτι αὐτὲς συναντιοῦνται (τέμνονται) ἀνὰ τρεῖς. (σχ. 3). Λέμε ὅτι συναντιοῦνται στὴν **κορυφὴ τοῦ κύβου.**

Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφές.

Κάθε κορυφὴ τοῦ κύβου εἶναι ἕνα **σημεῖο.**



σχ. 3.

Γενικά:

σημεῖο εἶναι ἡ τομὴ δύο γραμμῶν.

Ἀσκήσεις

3. Νὰ ὀνομάσετε τί εἴδους ἐπιφάνεια σχηματίζεται ἀπὸ ἕναν τοῖχο καὶ τὸ δάπεδο τῆς αἴθουσας, μέσα στὴν τάξη σας.

4. Νὰ ὀνομάσετε τὴ γραμμή, στὴν ὁποία τελειώνει ἕνας τοῖχος πρὸς τὸ μέρος τῆς ὀροφῆς τῆς αἴθουσας στὴν τάξη σας.

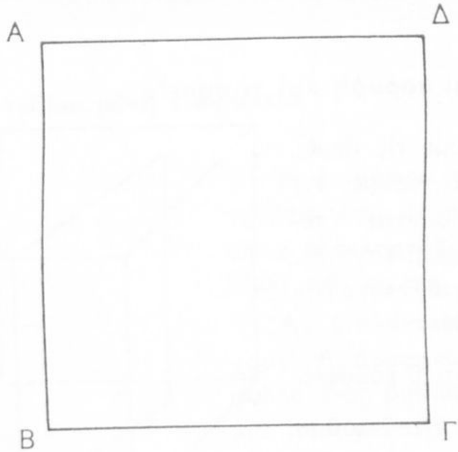
ζ. Τί εἶναι γωνία

Σὲ κάθε κορυφὴ τοῦ κύβου συναντιοῦνται οἱ ἀκμές του, πού, ὅπως εἴδαμε, εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἂς ἐξετάσωμε τώρα μιὰ ἕδρα τοῦ κύβου.

Ἐδῶ πρέπει νὰ ποῦμε ὅτι, γιὰ νὰ ξεχωρίσωμε τὶς **κορυφὲς** τοῦ κύβου, ὀνομάζομε τὴν κάθε μιὰ μὲ **κεφαλαῖο** γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου. Ἔτσι τὶς ἕδρες του τὶς ὀνομάζομε διαβάζοντας τέσσερα γράμματα στὴ σειρά. Καὶ λέμε: διαλέγομε γιὰ ἐξέταση τὴν ἕδρα ΑΒΓΔ (σχ. 1).

Προσέχομε ὅτι ἡ ἐπιφάνειά της περικλείεται ἀπὸ τὶς εὐθεῖες ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ.



σχ. 1.

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι οἱ εὐθεῖες αὐτὲς περνοῦν ἀνὰ δύο ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖο· δηλαδή: οἱ ΑΒ καὶ ΒΓ ἀπὸ τὸ σημεῖο Β, οἱ ΒΓ καὶ ΓΔ ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ, οἱ ΓΔ καὶ ΔΑ ἀπὸ τὸ σημεῖο Δ καὶ οἱ ΔΑ καὶ ΑΒ ἀπὸ τὸ σημεῖο Α.

Περνοῦν λοιπὸν ἀνὰ δύο ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο καὶ δὲν ἀποτελοῦν μιὰ εὐθεία γραμμή. Οἱ εὐθεῖες αὐτὲς γραμμὲς σχηματίζουν 4 ἐπίπεδα σχήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται **γωνίες**.

Οἱ εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΒΓ σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{AB\Gamma}$,

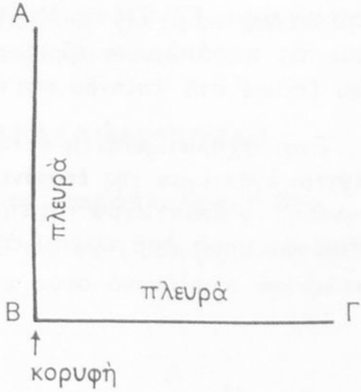
οἱ εὐθεῖες ΒΓ καὶ ΓΔ σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{B\Gamma\Delta}$, οἱ εὐθεῖες ΓΔ καὶ ΔΑ σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{\Gamma\Delta A}$ καὶ οἱ εὐθεῖες ΔΑ καὶ ΑΒ σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{\Delta A B}$.

Οἱ εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΒΓ, ποὺ σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{AB\Gamma}$, στὸ σχ. 2, λέγονται **πλευρὲς** τῆς γωνίας.

Τὸ σημεῖο τομῆς Β τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$ λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας.

Ἑπομένως σὲ κάθε γωνία διακρίνομε τὴν κορυφὴ καὶ τὶς δυὸ πλευρές της.

Τὸ σημάδι ^ εἶναι τὸ σύμβολο τῶν γωνιῶν.



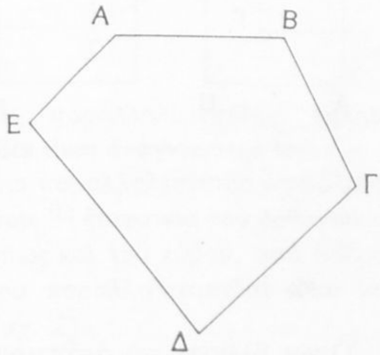
σχ. 2.

η. Τί εἶναι πολύγωνο

Καθεμία ἀπὸ τὶς ἕδρες τοῦ κύβου ἔχει, ὅπως εἴδαμε, τέσσερεις γωνίες. Εἶναι, ὅπως λέμε, **τετράγωνο.**

Ἡ ἕδρα στὸ σχ. 3, ἀπὸ ἄλλο στερεό, ἔχει 5 γωνίες. Αὐτὴ εἶναι ἕνα **πεντάγωνο.**

Γενικά: ἂν μία ἕδρα στερεοῦ ἔχη πολλὲς γωνίες, λέγεται **πολύγωνο.**



σχ. 3.

Ἀσκήσεις

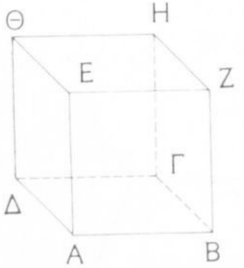
5. Νὰ βρῆτε πόσες γωνίες ἔχει ὁ κύβος.
6. Νὰ σχηματίσετε μία γωνία καὶ νὰ δείξετε τὴν κορυφή της καὶ τὶς πλευρές της.

5

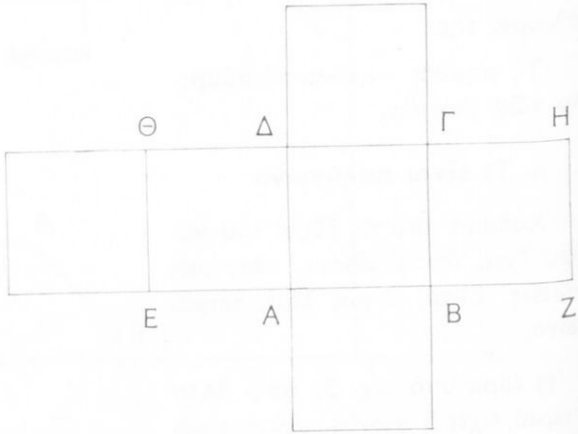
3. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου

Κόβομε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ κύβου (σχ. 1) στὸ μῆκος ἀπὸ τὶς παράπλευρες ἀκμές του ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ καὶ ΔΘ, καθὼς ἐπίσης καὶ στὸ μῆκος ἀπὸ τὶς ἀκμὲς ΕΖ, ΖΗ καὶ ΗΘ τῆς ἐπάνω ἕδρας ΕΖΗΘ. Κατόπι φέρνομε τὶς παράπλευρες ἕδρες καθὼς καὶ τὴν ἐπάνω ἕδρα τοῦ κύβου ἐπάνω στὸ ἐπίπεδο τῆς κάτω ἕδρας του ΑΒΓΔ.

Ἔτσι σχηματίζεται ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια τοῦ σχ. 2, ἡ ὁποία λέγεται **ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας** τοῦ κύβου ΑΒΓΔΕΖΗΘ τοῦ σχ. 1· δηλαδή, τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου εἶναι μία ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς ἐπιφάνειες τῶν 6 ἑδρῶν του.



σχ. 1.



σχ. 2.

Ὅπως βλέπετε, τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου ἔχει τὸ σχῆμα τοῦ σταυροῦ.

Ἂν τώρα ξεκινήσωμε ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειάς του, μποροῦμε νὰ ξανακατασκευάσωμε εὔκολα τὸν κύβο.

Σχῆμα κύβου ἔχουν τὰ ζάρια, οἱ κυβόλιθοι, τὰ ξύλινα κομμάτια μερικῶν παιδικῶν παιχνιδιῶν, μερικὰ κουτιὰ καὶ κιβώτια, διάφορα ἄλλα ἀντικείμενα, μνημεῖα, κτίρια κλπ.

Ἀσκήσεις

7. Νὰ χαράξετε σ' ἕνα κομμάτι χαρτόνι ἀνάπτυγμα ἐπιφάνειας κύβου καὶ κατόπι νὰ κατασκευάσετε τὸν κύβο.

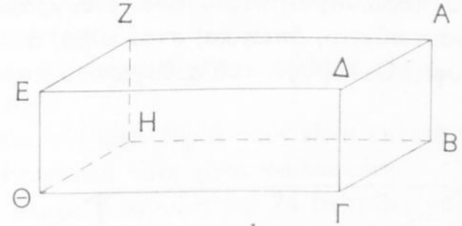
8. Νὰ ἰχνογραφήσετε ἕναν κύβο. Σχεδιάστε ἔπειτα τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειάς του. Κατόπι, μ' ἕνα διαφανές χαρτί, νὰ βεβαιωθῆτε ἂν ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

Β. ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

6

1. Τὰ στοιχεῖα τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

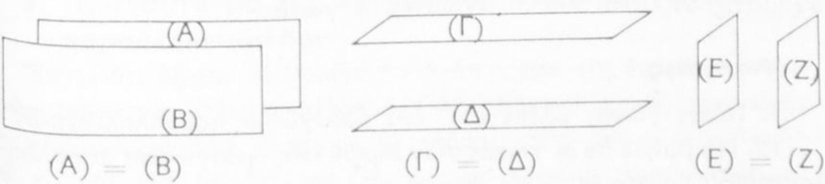
Τὸ γεωμετρικὸ στερεὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ τοῦ σχ. 1 μοιάζει μὲ τὴν ἀποθήκη τῆς κατασκηνώσεως. Τὸ σῶμα αὐτὸ ὀνομάζεται **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.**



σχ. 1.

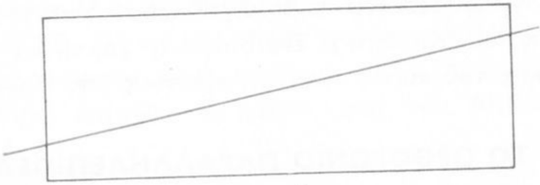
Οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, δηλαδὴ τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος, δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ ἴσες.

Ἂν παρατηρήσωμε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ ὅλα τὰ ἄκρα του, θὰ δοῦμε τὴν ἐπιφάνειά του. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, ἀπὸ 6 ἕδρες. Οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες παρμένες ἀνὰ δύο· δηλαδὴ ἔτσι: (σχ. 2).



σχ. 2.

Ἡ ἐπιφάνεια κάθε ἕδρας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, ἐπίπεδη. Τοῦτο μποροῦμε νὰ τὸ διαπιστώσωμε μὲ μιὰ λεπτὴ τεντωμένη κλωστὴ (σχ. 3).

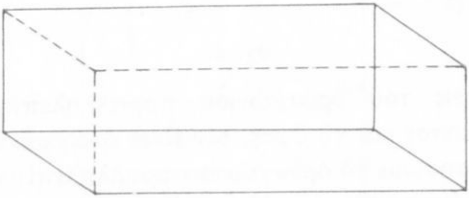


σχ. 3.

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, τεθλασμένη.

Οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου (σχ. 4), ἀνὰ δύο συνεχόμενες, τέμνονται καὶ σχηματίζουν τὶς 12 ἀκμές του. Οἱ ἀκμὲς τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα.

Οἱ ἀκμὲς συναντιοῦνται, ὅπως καὶ στὸν κύβο, ἀνὰ τρεῖς καὶ σχηματίζουν 8 κορυφές. Οἱ κορυφὲς τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι σημεῖα.



σχ. 4.

Οἱ εὐθεῖες γραμμές, στὶς ὁποῖες περατώνεται (τελειώνει) μιὰ ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς ἕδρες τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, σχηματίζουν, ἀνὰ δύο συνεχόμενες, 4 γωνίες.

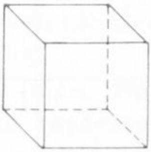
Ἀσκήσεις

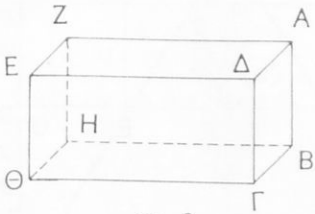
9. Πόσες γωνίες βλέπετε σ' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο;

10. Νὰ βρῆτε ἂν οἱ γωνίες τῶν ἑδρῶν ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μοιάζουν μὲ τὶς γωνίες τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου.

2. Σύγκριση τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καὶ τοῦ κύβου

Ἂν συγκρίνωμε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο πρὸς τὸν κύβο, θὰ βροῦμε ὅτι μεταξύ τους ὑπάρχουν οἱ ἀκόλουθες ὁμοιότητες καὶ διαφορὲς (σχ. 1 καὶ σχ. 2).


σχ. 1.



σχ. 2.

Α. Ὁμοιότητες

α. Τόσο τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ὅσο καὶ ὁ κύβος εἶναι δυὸ γεωμετρικὰ στερεά.

β. Ἔχουν τρεῖς διαστάσεις: μῆκος, πλάτος, ὕψος.

γ. Ἔχουν 6 ἕδρες.

δ. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς κάθε ἕδρας τους εἶναι ἐπίπεδη.

ε. Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά τους εἶναι τεθλασμένη.

στ. Ἔχουν 12 ἀκμές, 8 κορυφὲς καὶ 24 ἐπίπεδες γωνίες.

Β. Διαφορὲς

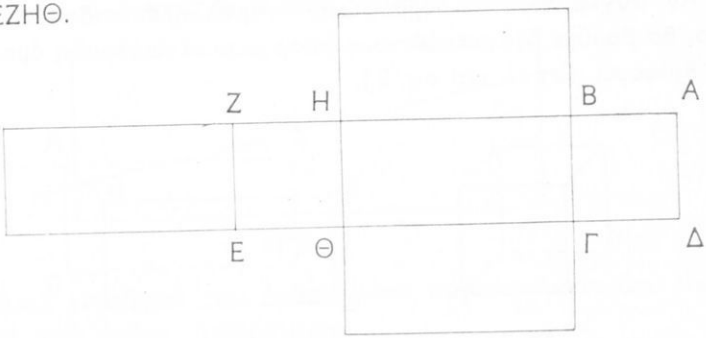
α. Οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μπορεῖ νὰ μὴν εἶναι ὅλες ἴσες, ὅμως τοῦ κύβου εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

β. Οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες ἀνὰ δύο ἀπέναντι, ἐνῶ τοῦ κύβου εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

γ. Οἱ ἀκμὲς τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνὰ 4 ἀπέναντι ἴσες, ἐνῶ τοῦ κύβου εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

3. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΕΖΗΘ τοῦ σχ. 2, ποὺ εἶναι κατασκευασμένο ἀπὸ χαρτόνι. Τὸ κόβομε κατὰ μῆκος τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ, ΑΖ, ΔΕ, ΕΘ, καὶ ΖΗ. Κατόπι φέρνομε τὶς παράπλευρες ἕδρες, καθὼς ἐπίσης καὶ τὴν ἐπάνω ἕδρα του στὸ ἐπίπεδο τῆς κάτω ἕδρας. Ἔτσι παρουσιάζεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχ. 3, ποὺ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΕΖΗΘ.



σχ. 3.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς ἐπιφάνειες τῶν 6 ἑδρῶν του.

Σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου ἔχουν διάφορα χάρτινα, ξύλινα ἢ καὶ μεταλλικὰ κιβώτια, διάφορα ἔπιπλα καὶ σκεύη, τὰ κουτιὰ γιὰ τὴ συσκευασία τῶν φαρμάκων κλπ.

Ἀσκήσεις

11. Νὰ πάρετε ἕνα χαρτοκιβώτιο σὲ σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καὶ νὰ βρῆτε τὸ ἀνάπτυγμά του.

12. Νὰ χαράξετε πάνω σ' ἕνα κομμάτι χαρτόνι ἀνάπτυγμα ἐπιφάνειας ὀρθ. παραλληλεπιπέδου. Κόψτε κατάλληλα τὸ χαρτόνι καὶ κατασκευάστε τὸ παραλληλεπίπεδο.

Γ. Η ΠΥΡΑΜΙΔΑ

8

1. Τί εἶναι πυραμίδα

Τὸ γεωμετρικὸ στερεὸ ποὺ βλέπετε στὸ σχ. 1 μοιάζει μὲ τὴ σκηνὴ 1, ποὺ εἴδαμε στὴν εἰκόνα τῆς κατασκηνώσεως τοῦ 1ου μαθήματος. Τὸ στερεὸ αὐτὸ ὀνομάζεται **πυραμίδα**.

Σχῆμα πυραμίδας ἔχουν οἱ τάφοι τῶν Φαραὼ τῆς ἀρχαίας Αἰγύπτου, οἱ στέγες σὲ ὁρισμένες οἰκοδομές, τὰ ὁρόσημα κ.ἄ.

2. Τὰ στοιχεῖα τῆς πυραμίδας

Ὅπως βλέπετε στὸ σχ. 1, οἱ ἕδρες (Δ), (Ε) καὶ (Ζ) καταλήγουν πρὸς τὰ ἐπάνω σ' ἕνα σημεῖο Κ. Τὸ σημεῖο αὐτὸ λέγεται **κορυφὴ** τῆς πυραμίδας.

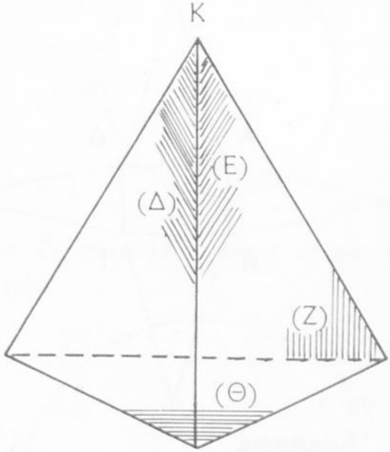
Ἡ ἕδρα (Θ) βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν κορυφὴ καὶ λέγεται **βάση** τῆς πυραμίδας.

Οἱ ἄλλες ἕδρες τῆς πυραμίδας λέγονται **παράπλευρες ἕδρες**.

Ἄρα, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας ἀποτελεῖται, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, ἀπὸ ἕδρες.

Κάθε παράπλευρη ἕδρα τῆς πυραμίδας ἔχει τρεῖς γωνίες καὶ ἄρα, εἶναι ἕνα τρίγωνο.

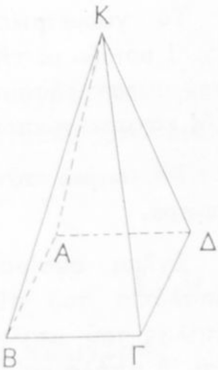
Οἱ ἀκμὲς τῆς πυραμίδας εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα.



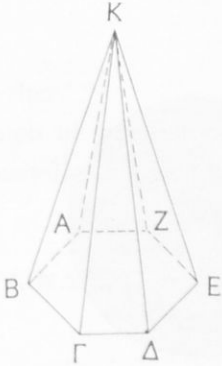
σχ. 1.

Ἡ κορυφὴ τῆς πυραμίδας καὶ οἱ κορυφές της, στὴ βάση εἶναι σημεῖα.

Ἡ βάση τῆς πυραμίδας μπορεῖ νὰ εἶναι τρίγωνο, τετράπλευρο (σχ. 2) ἢ καὶ πολύγωνο (σχ. 3).

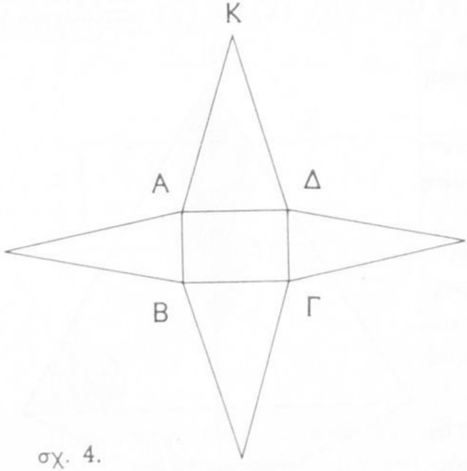


σχ. 2.



σχ. 3.

3. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας



σχ. 4.

Παίρνομε μιὰ πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι καὶ τὴν κόβομε στὸ μῆκος τῶν ἀκμῶν της ἀπὸ τὴν κορυφὴ ὡς τὴ βάση. Ἔπειτα φέρνομε τὶς παράπλευρες ἕδρες της ἐπάνω στὸ ἐπίπεδο τῆς βάσεως. Ἔτσι ἐμφανίζεται ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια τοῦ σχ. 4, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας.

Ἀσκήσεις

13. Νὰ ἰχνογραφήσετε μιὰ πυραμίδα μὲ τριγωνικὴ βάση.

14. Νὰ κατασκευάσετε μιὰ πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι, ἀφοῦ πρῶτα ἰχνογραφήσετε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειάς της.

Δ. Η ΣΦΑΙΡΑ

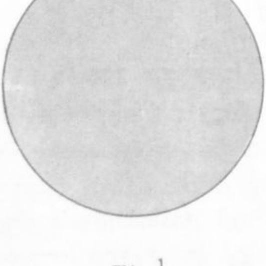
9

1. Τί εἶναι σφαίρα

Τὸ γεωμετρικὸ στερεὸ τοῦ σχ. 1 μοιάζει μὲ τὴν πετόσφαιρα ποὺ παρατηρήσαμε στὴν εἰκόνα τῆς κατασκηνώσεως.

Τὸ στερεὸ αὐτὸ ὀνομάζεται **σφαίρα.**

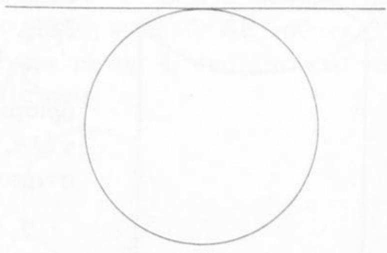
Σχῆμα σφαίρας ἔχουν τὰ μπαλάκια τοῦ πίγκ - πόγκ, οἱ μπίλιες τοῦ μπιλιάρδου, οἱ βόλοι, ἡ μπάλα καὶ διάφορα ἄλλα ἀντικείμενα.



σχ. 1.

2. Τὰ στοιχεῖα τῆς σφαίρας

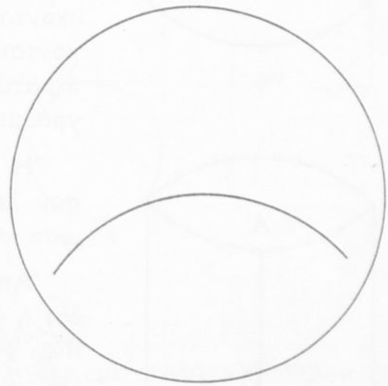
Ἂν ἀκουμπήσωμε σὲ ὁποιοδήποτε μέρος τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας μιὰ τεντωμένη κλωστὴ (σχ. 2), θὰ δοῦμε ὅτι αὐτὴ ἐγγίζει τὴ σφαίρα μόνο σ' ἕνα σημεῖο της. Ἑπομένως, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δ ὲ ν ἔ χ ε ι μ έ ρ η ἐ π ί π ε δ α, ὅπως ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ ἡ πυραμίδα. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι **καμπύλη ἐπιφάνεια.**



σχ. 2.

Στὴν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας (σχ. 3) χαράζομε μιὰ γραμμή. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὴ δὲν ἔχει τὸ σχῆμα τῆς τεντωμένης κλωστῆς. Ἑπομένως, δὲν εἶναι εὐθεία. Ἂν τὴν ἐξετάσωμε προσεχτικότερα, θὰ διαπιστώσωμε ἐπίσης ὅτι κανένα μέρος της δὲν εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα.

Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται **καμπύλη γραμμή.**



σχ. 3.

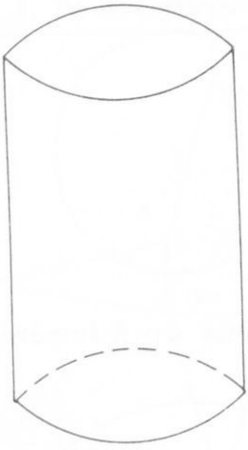
Ἀσκήσεις

15. Νὰ ἰχνογραφήσετε μιὰ σφαίρα.
16. Νὰ κατασκευάσετε μιὰ σφαίρα μὲ πηλό.
17. Νὰ βρῆτε καὶ νὰ δείξετε καμπύλες ἐπιφάνειες καὶ γραμμές.

Ε. Ο ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

1. Τί εἶναι κύλινδρος

Τὸ γεωμετρικὸ στερεὸ τοῦ σχ. 1 μοιάζει μὲ τὸ βαρέλι ποὺ παρα-



σχ. 1.

τηρήσαμε στὴν εἰκόνα τῆς κατασκηνώσεως. Τὸ στερεὸ αὐτὸ ὀνομάζεται **κύλινδρος**.

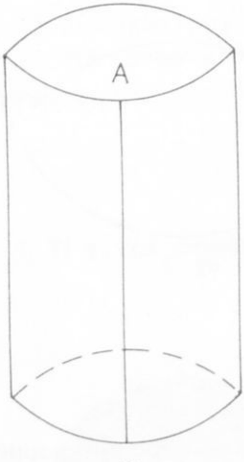
Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν οἱ κορμοὶ σ' ὁρισμένα δέντρα, οἱ κολόνες, τὰ κουτιὰ ἀπὸ γάλα, ὁρισμένα βαρέλια καὶ διάφορα ἄλλα στερεά.

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ κυλίνδρου

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες καὶ μιὰ καμπύλη. Οἱ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες βρίσκονται ἡ μιὰ ἀπέναντι στὴν ἄλλη καὶ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου. Κάθε βάση περατώνεται σὲ μιὰ κλειστὴ καμπύλη γραμμή.

Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ποὺ λέγεται καὶ **κυρτή**, βρίσκεται ἀνάμεσα στὶς δυὸ βάσεις του.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω καταλαβαίνομε ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου δὲν εἶναι ἐπίπεδη οὔτε τεθλασμένη οὔτε κυρτή. Θὰ τὴ λέμε **μεικτὴ** ἐπιφάνεια.



σχ. 2.

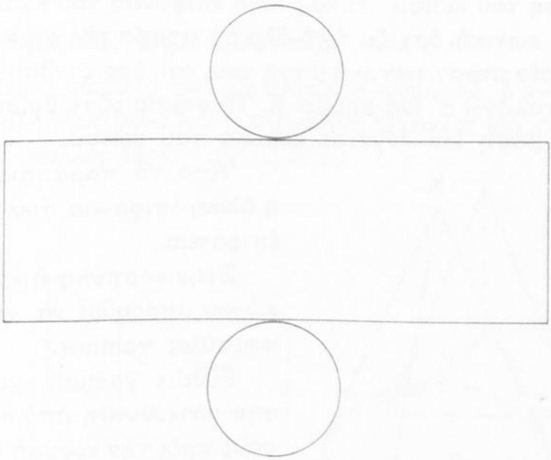
Στὴν καμπύλη ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου μποροῦμε νὰ χαράξωμε εὐθεῖες καὶ καμπύλες γραμμές.

Εὐθεῖες γραμμὲς χαράζομε μόνο παράλληλα πρὸς τὴν κατεύθυνση τῆς AB (σχ. 2) ἐνῶ καμπύλες πρὸς κάθε ἄλλη κατεύθυνση.

3. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου

Παίρνομε ἕναν κύλινδρο ἀπὸ χαρτόνι. Κόβομε τὶς δυὸ βάσεις του ἔτσι, ὥστε καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς νὰ συγκρατιέται ἀπὸ τὴν καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου μ' ἕνα μόνο σημεῖο. Ἔπειτα κόβομε τὴν καμπύλη ἐπιφάνεια κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας γραμμῆς ΑΒ τοῦ σχ. 3· ἁπλώνομε τέλος τὴν ἐπιφάνεια κι ἔχομε τὸ σχ. 4, ποὺ ἀποτελεῖ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου.

σχ. 3.



σχ. 4.

Ἀσκήσεις

18. Νὰ ἰχνογραφήσετε ἕναν κύλινδρο.

19. Νὰ κατασκευάσετε ἕναν κύλινδρο μὲ πηλὸ καὶ ἄλλον μὲ χαρτόνι.

ΣΤ. Ο ΚΩΝΟΣ

1. Τί εἶναι κῶνος

Τὸ γεωμετρικὸ στερεὸ τοῦ σχ. 1 μοιάζει μὲ τὴ σκηνὴ 2, ποὺ παρατηρήσαμε στὴν εἰκόνα τῆς κατασκηνώσεως. Τὸ στερεὸ αὐτὸ ὀνομάζεται **κῶνος**.

Σχῆμα κώνου ἔχουν οἱ καρποὶ ἀπὸ διάφορα φυτά, οἱ στέγες ἀπὸ ὁρισμένες παλιὲς κατοικίες, οἱ κεφαλὲς τῶν πυραύλων, καὶ διάφορα ἄλλα στερεά.

σχ. 1.

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ κώνου

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ εἴδη ἐπιφανειῶν. Ἀπὸ μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια καὶ μιὰ καμπύλη. Ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια μὲ τὴν ὁποία, ὅπως βλέπομε, στηρίζεται ὁ κῶνος, λέγεται **βάση** τοῦ κώνου. Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ ὁποία λέγεται καὶ **κωνική**, ἀρχίζει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης γραμμῆς, στὴν ὁποία περατώνεται ἡ βάση του, καί, ὅσο ἀνεβαίνει, στενεύει καὶ τέλος καταλήγει σ' ἕνα σημεῖο Κ. Τὸ σημεῖο αὐτὸ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴ βάση καὶ λέγεται **κορυφὴ** τοῦ κώνου.

σχ. 2

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεικτὴ ἐπιφάνεια.

Στὴν καμπύλη ἢ κωνικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου μποροῦμε νὰ χαράξωμε εὐθεῖες καὶ καμπύλες γραμμές.

Εὐθεῖες γραμμὲς χαράζομε μόνο πρὸς τὴν κατεύθυνση ἀπὸ κάθε σημεῖο τῆς βάσεως πρὸς τὴν κορυφὴ (σχ. 2), ἐνῶ καμπύλες πρὸς κάθε ἄλλη κατεύθυνση.

3. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου

Παίρνομε ἕναν κῶνο ἀπὸ χαρτόνι. Κόβομε τὴ βάση του μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε νὰ συγκρατιέται ἀπὸ τὴν κωνικὴ ἐπιφάνεια μὲ ἕνα μόνο σημεῖο. Στὴ συνέχεια κόβομε καὶ τὴν κωνικὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς καμπύλης γραμμῆς τῆς βάσεως πρὸς τὴν κορυφή, ἤτοι σὲ εὐθεία γραμμή, καὶ ἔχομε τὸ σχῆμα 3, ποὺ ἀποτελεῖ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.


σχ. 3.

Ἀσκήσεις

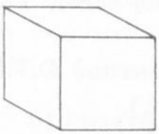
20. Νὰ ἰχνογραφήσετε ἕναν κῶνο.
21. Νὰ κατασκευάσετε ἕναν κῶνο μὲ πηλό.

II. ΣΗΜΕΙΟ, ΓΡΑΜΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΟΥΣ

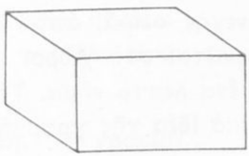
Α. ΣΗΜΕΙΟ

12 Ἔννοια τοῦ σημείου. Σημειοσύνολα

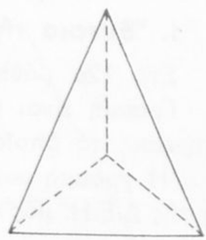
Ἀπ' ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ποὺ ἐξετάσαμε παραπάνω, ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ ἡ πυραμίδα λέγονται καὶ **πολύεδρα**, ἐπειδὴ ἔχουν πολλὲς ἕδρες (σχ. 1, 2, 3).



σχ. 1.



σχ. 2.



σχ. 3.

Ὅπως εἴδαμε, σ' ἕνα πολύεδρο, οἱ συνεχόμενες ἀκμὲς μιᾶς ἕδρας συναντιοῦνται καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο σ' ἕνα σημεῖο· κι' ἔχομε πεῖ ὅτι σημεῖο εἶναι ἡ τομὴ δυὸ γραμμῶν.

Τὸ σημεῖο προσδιορίζει μιὰ θέση. Εἶναι μιὰ μικρὴ κοκκίδα, ἕνα πάρα πολὺ λεπτὸ στίγμα, χωρὶς διαστάσεις. Τὸ παριστάνομε μὲ μιὰ τελεία κι' ἕνα κεφαλαῖο γράμμα· π.χ. γράφοντας Α διαβάζομε «σημεῖο Α», γράφοντας Β διαβάζομε «σημεῖο Β» κλπ.

Ἂν σύρωμε τὴ μύτη τῆς κιμωλίας ἐπάνω στὸν πίνακα, θὰ ἔχωμε τὴν εἰκόνα μιᾶς γραμμῆς. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἴχνος τῆς κιμωλίας σὲ κάθε θέση παριστάνει ἕνα σημεῖο, συμπεραίνομε ὅτι **ἡ γραμμὴ εἶναι μιὰ συνεχὴς σειρὰ ἀπὸ διαδοχικὲς θέσεις ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖο μετακινεῖται στὸ ἐπίπεδο ἢ στὸ χῶρο.** Συνεπῶς, ἡ γραμμὴ εἶναι ἕνα σύνολο ἀπὸ σημεῖα. Ἕνα **σημειοσύνολο**.

Ἐπειδὴ στὴν ἐπιφάνεια καὶ στὸ ἐσωτερικὸ κάθε στερεοῦ ἐννοοῦμε ὅτι χαράσσονται ἄπειρες γραμμές, εὐθεῖες ἢ καμπύλες, γι' αὐτὸ συμπεραίνομε ὅτι καὶ τὰ στερεὰ εἶναι σύνολα σημείων, δηλαδὴ **σημειοσύνολα**.

Ἀσκήσεις

22. Νὰ ἰχνογραφήσετε ἕναν κύβο, ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ μιὰ πυραμίδα. Ἔπειτα νὰ βρῆτε καὶ νὰ ὀνομάσετε διάφορα σημεῖα τους.

23. Νὰ δείξετε στὴν αἴθουσα τῆς τάξεώς σας διάφορα σημεῖα.

Β. ΟΙ ΓΡΑΜΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΟΥΣ

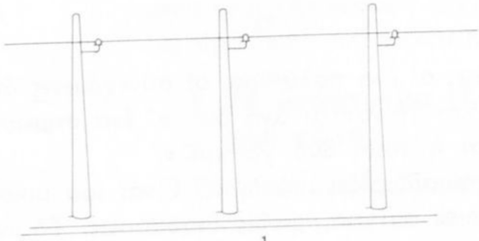
13

1. Ἔννοια τῆς γραμμῆς

Στὸ 12ο μάθημα εἴδαμε τὰ ἑξῆς:

Γραμμὴ εἶναι μιὰ συνεχὴς σειρὰ ἀπὸ διαδοχικὲς θέσεις ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖο μετακινεῖται στὸ χῶρο.

Ἡ γραμμὴ μοιάζει μ' ἕνα λεπτὸ νῆμα. Τὰ σύρματα τοῦ Ο.Τ.Ε. ἢ τῆς Δ.Ε.Η. μᾶς δίνουν μιὰ ἰδέα τῆς γραμμῆς (σχ. 1).



σχ. 1.

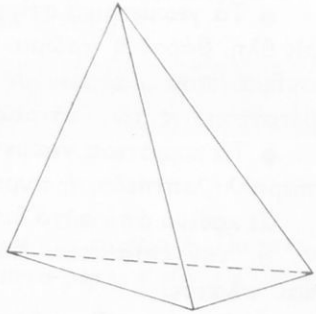
Παραδεχόμαστε ὅτι ἡ γραμμὴ ἔχει μόνο μιὰ διάσταση: τὸ μῆκος.

2. Εἴδη γραμμῶν

α) Εὐθεία γραμμή. Εἴδαμε ὅτι ἡ τομὴ δύο ἑδρῶν ἑνὸς πολυέδρου εἶναι εὐθεία γραμμή. Στὴν ἐπιφάνεια τοῦ χάρακα (σχ. 2) ξεχωρίζομε 4 εὐθεῖες γραμμές. Ἡ εὐθεία γραμμὴ μοιάζει μ' ἕνα καλὰ τεντωμένο νῆμα.

σχ. 2.

β) Τεθλασμένη γραμμή. Ἡ κλειστὴ γραμμή, στὴν ὁποία περατώνεται μιὰ ἀπὸ τὶς ἕδρες τῆς πυραμίδας τοῦ σχ. 3, εἶναι τεθλασμένη γραμμή. Ἄρα, τεθλασμένη λέγεται ἡ γραμμὴ ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, χωρὶς ἡ ἴδια νὰ εἶναι μιὰ εὐθεία.



σχ. 3.

γ) Καμπύλη γραμμή. Ἡ κλειστὴ γραμμή, στὴν ὁποία περατώνεται ἡ βάση τοῦ κώνου τοῦ σχ. 4, εἶναι, ὅπως εἴδαμε, καμπύλη γραμμή. Ἄρα, καμπύλη λέγεται ἡ γραμμὴ ποὺ κανένα μέρος της δὲν εἶναι εὐθεία γραμμή.

σχ. 4.

δ) Μεικτὴ γραμμή. Ἡ γραμμὴ ποὺ βλέπετε στὸ σχ. 5 ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα καὶ μιὰ καμπύλη γραμμή. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται μεικτή. Συνεπῶς μεικτὴ λέγεται ἡ γραμμὴ ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθεῖες καὶ καμπύλες γραμμές.

σχ. 5.

Ἀσκήσεις

24. Νὰ ἰχνογραφήσετε μιὰ εὐθεία καὶ μιὰ τεθλασμένη γραμμή.
25. Νὰ κατασκευάσετε ὅλα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν μὲ σύρμα.

14

Ἀνακεφαλαίωση - Πορίσματα

- Στερεὸ λέγεται κάθε σῶμα ποὺ ἔχει ὁρισμένο ὄγκο καὶ σχῆμα.
- Κάθε στερεὸ σῶμα καθὼς καὶ ὁ χῶρος ποὺ τὸ περιβάλλει ἔχουν τρεῖς διαστάσεις, τὶς ὁποῖες ὀνομάζομε: μῆκος, πλάτος, ὕψος.

● Τὰ γεωμετρικὰ στερεὰ εἶναι δημιουργήματα τοῦ νοῦ μας χωρὶς ὕλη, βάρος ἢ χρῶμα. Ἔχουν μόνο δύο γνωρίσματα, ὄγκο καὶ σχῆμα, ποὺ παραμένουν καθορισμένα καὶ ἀμετάβλητα κατὰ τὶς μετατοπίσεις τῶν στερεῶν μέσα στὸ διάστημα.

● Τὰ κυριότερα γεωμετρικὰ στερεὰ εἶναι: ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ἡ πυραμίδα, ἡ σφαίρα, ὁ κύλινδρος καὶ ὁ κῶνος.

Σὲ καθένα ἀπὸ αὐτὰ διακρίνομε:

α. τὴν ἐπιφάνεια. Κάθε ἐπιφάνεια ἔχει δυὸ διαστάσεις: μῆκος καὶ πλάτος.

Οἱ ἐπιφάνειες διακρίνονται σὲ ἐπίπεδες, τεθλασμένες, καμπύλες καὶ μεικτές.

β. τὴ γραμμή. Ἡ γραμμὴ ἔχει μόνο μιὰ διάσταση: μῆκος.

Οἱ γραμμὲς διακρίνονται σὲ εὐθεῖες, τεθλασμένες, καμπύλες καὶ μεικτές.

γ. τὸ σημεῖο. Τὸ σημεῖο δὲν ἔχει καμιὰ διάσταση.

Τὰ γεωμετρικὰ στερεὰ εἶναι σημειοσύνολα.

Ἀσκήσεις

26. Ν' ἀριθμήσετε καὶ νὰ δείξετε μέσα στὴν αἴθουσα διδασκαλίας τῆς τάξεώς σας τὶς ἕδρες, τὶς κορυφὲς καὶ τὶς ἀκμές της.

27. Νὰ δείξετε διάφορα σώματα καὶ νὰ ὁρίσετε τί εἴδους ἐπιφάνεια ἔχει καθένα ἀπὸ αὐτά.

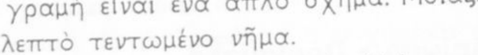
III. ΕΥΘΕΙΑ, ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ, ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ, ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ, ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΗΚΟΥΣ

15

1. Ἡ εὐθεία γραμμή

Ἡ εὐθεία γραμὴ εἶναι ἕνα ἁπλὸ σχῆμα. Μοιάζει, ὅπως εἴδαμε, μ' ἕνα πολὺ λεπτὸ τεντωμένο νῆμα.

Στὴ Γεωμετρία παραδεχόμαστε ὅτι ἡ εὐθεία μπορεῖ νὰ ἐπεκταθῆ σὲ ἄπειρη ἀπόσταση καὶ ἀπὸ τὰ δυὸ μέρη της· π.χ. ἡ εὐθεία τοῦ σχ. 1



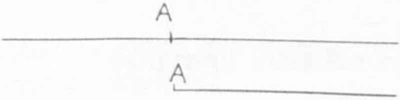
σχ. 1

μπορεῖ νὰ ἐπεκταθῆ ἀπεριόριστα τόσο πρὸς τὴν κατεύθυνση ἀπὸ Α πρὸς Β, ὅσο καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνση ἀπὸ Β πρὸς Α.

Συνεπῶς, ὅταν μιλοῦμε γιὰ εὐθεία, ἐννοοῦμε ὅτι αὐτὴ εἶναι ἀπεριόριστη, δηλαδὴ χωρὶς ἀρχὴ καὶ τέλος.

2. Ἡ ἡμιευθεία

Ἐπάνω στὴν εὐθεία τοῦ σχ. 2 παίρνομε ἕνα σημεῖο Α. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὴ χωρίζεται σὲ δυὸ ἀπεριόριστα μέρη. Καθένα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ ὀνομάζεται **ἡμιευθεία.**



σχ. 2.

Τὸ σημεῖο Α εἶναι ἄκρο στὶς παραπάνω ἡμιευθεῖες καὶ ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴ καθεμιᾶς ἀπὸ αὐτές. Ἑπομένως,

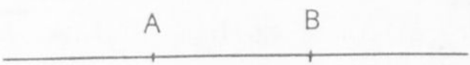
κάθε ἡμιευθεία μπορεῖ νὰ προεκταθῆ ἀπεριόριστα πρὸς μιὰ μόνο κατεύθυνση.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

ἡμιευθεία εἶναι ἕνα ἀπεριόριστο μέρος εὐθείας, ποὺ ἔχει ἕνα μόνο ἄκρο.

3. Τὸ εὐθύγραμο τμῆμα

Ἐπάνω στὴν εὐθεία τοῦ σχ. 3 παίρνομε τὰ σημεῖα Α καὶ Β.



σχ. 3.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ περιορίζουν ἐπάνω στὴν εὐθεία τὸ μέρος ΑΒ. Τὸ μέρος αὐτὸ λέγεται **εὐθύγραμμο τμῆμα.** Τὰ σημεῖα Α καὶ Β λέγονται ἄκρα ἢ πέρατα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος. Ἑπομένως,

εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι ἕνα μέρος εὐθείας ποὺ περατώνεται σὲ δυὸ σημεῖα.

Ἀσκήσεις

28. Νὰ χαράξετε μιὰ εὐθεία κι ἔπειτα νὰ σκεφθῆτε ἂν ἔχη ἄκρα.

29. Νὰ χαράξετε μιὰ εὐθεία κι ἔπειτα νὰ ὁρίσετε ἐπάνω της τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ βρῆτε καὶ νὰ ὀνομάσετε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται.

30. Νὰ χαράξετε μιὰ εὐθεία καὶ νὰ ὁρίσετε πάνω της δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ βρῆτε ποιὲς ἡμιευθεῖες ὁρίζονται μὲ ἀρχὴ τὸ Γ καὶ ποιὲς μὲ ἀρχὴ τὸ Δ.

16

4. Χάραξη τῶν εὐθειῶν γραμμῶν

Εἶναι γνωστὸ ὅτι στὸ τετράδιο μας καὶ γενικὰ σὲ μικρὲς ἐπιφάνειες χαράζομε εὐθεῖες γραμμὲς μὲ τὸ χάρακα.

Πολλὲς φορὲς ὅμως ὑποχρεωνόμαστε νὰ χαράξωμε εὐθεῖες ἐπάνω σὲ μεγαλύτερες ἐπιφάνειες, ὅπως ἐπάνω στὸ ἔδαφος, ἐπάνω σὲ διάφορες σανίδες κλπ. Εἶναι φανερὸ ὅτι στὶς περιπτώσεις αὐτὲς δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ χρησιμοποιήσωμε τὸ χάρακα. Γι' αὐτό, προκειμένου νὰ χαράξωμε μιὰ εὐθεία ἐπάνω στὸ ἔδαφος, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Στερεώνομε δυὸ πασσάλους στὰ σημεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θέλομε νὰ περάση ἡ εὐθεία. Στοὺς πασσάλους αὐτοὺς δένομε ἕνα σχοινί, ἀφοῦ προηγουμένως τὸ τεντώσωμε καλά (σχ. 1). Ἔπειτα παίρνομε

σχ. 1.

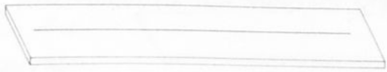
ἕναν αἰχμηρὸ πάσσαλο καὶ τὸν σύρομε κατὰ μῆκος τοῦ σχοινιοῦ μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ αἰχμή του νὰ χαράζη τὸ ἔδαφος. Ἔτσι χαράζεται ἐπάνω στὸ ἔδαφος ἡ εὐθεία ποὺ θέλομε.

Οἱ ξυλοκόποι, οἱ ξυλουργοὶ καὶ διάφοροι ἄλλοι τεχνίτες, ὅταν θέλουν νὰ χαράξουν εὐθεῖες ἐπάνω σὲ κορμοὺς ἀπὸ δέντρα, ἐπάνω σὲ διάφορες σανίδες, καδρόνια κλπ. ἐργάζονται μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Ὁρίζουν δυὸ σημεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θέλουν νὰ περάση ἡ εὐθεία·

τεντώνουν μεταξύ τους (σχ. 2) ἕνα λεπτὸ νῆμα χρωματισμένο μὲ νωπὸ χρῶμα· πιάνουν στὴ συνέχεια τὸ νῆμα ἀπὸ τὴ μέση, τὸ ἀνασηκώνουν λίγο κι ἔπειτα τὸ ἀφήνουν νὰ πέση μὲ ὁρμή.

Ἔτσι τὸ χρῶμα τοῦ νήματος κολλάει στὴ σανίδα καὶ σχηματίζει εὐθεία γραμμή.



σχ. 2.

Ἀσκήσεις

31. Νὰ χαράξετε μιὰ εὐθεία στὸ σχολικὸ κῆπο ἢ στὸ προαύλιο τοῦ σχολείου.

32. Νὰ χαράξετε μιὰ εὐθεία στὸ δάπεδο τῆς τάξης σας μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς βρεγμένου νήματος.

17

5. Μέτρηση εὐθύγραμμου τμήματος

α. Μῆκος εὐθύγραμμου τμήματος

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ μετρήσωμε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ τοῦ σχ. 1. Εἶναι φανερὸ ὅτι, γιὰ νὰ ἐπιτύχωμε τὴ μέτρησή του, πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμε ἕνα ἄλλο ὁρισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ ὁποῖο ἔπειτα ἀπὸ συμφωνία τὸ θεωροῦμε ὡς μονάδα μετρήσεως.

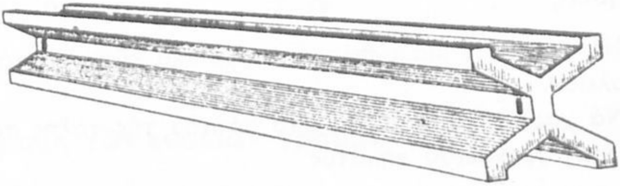
σχ. 1.

σχ. 2.

Ἂν πάρωμε ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ χάρακα τοῦ σχ. 2 καὶ συγκρίνωμε πρὸς αὐτὸν τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, θὰ βροῦμε ὅτι τοῦτο περιέχει τὸ χάρακα τρεῖς φορές. Ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς 3 εἶναι **τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ** μὲ μονάδα μετρήσεως τὸ χάρακα. Ἂν χρησιμοποιήσωμε ἄλλη μονάδα μετρήσεως, διαφορετικὴ ἀπὸ τὸ χάρακα, θὰ βροῦμε ἀσφαλῶς ἕναν ἄλλο ἀριθμὸ ποὺ θὰ ἐκφράζη τὸ μῆκος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ μὲ τὴ νέα μονάδα μετρήσεως.

β. Οἱ μονάδες μετρήσεως τοῦ μήκους

Ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους χρησιμοποιεῖται διεθνῶς τὸ μέτρο. Λέγοντας μέτρο ἐννοοῦμε τὸ **πρότυπο μέτρο** ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δύο χαρακιὲς ἐπάνω σὲ κανόνα κατασκευασμένο ἀπὸ εἰδικὸ μέταλλο. Ὁ κανόνας αὐτὸς βρίσκεται στὸ Διεθνὲς Γραφεῖο Μέτρων καὶ Σταθμῶν στὴ πόλη τῶν Σεβρῶν τῆς Γαλλίας.



Τὸ πρότυπο μέτρο

Γιὰ τὶς ὑποδιαιρέσεις καὶ νὰ πολλαπλάσια τοῦ μέτρου μιλήσαμε στὸ 10ο μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς (σελ. 19).

Οἱ μαθηταὶ νὰ τὰ ἐπαναλάβουν.

Ἀσκήσεις

33. Νὰ μετρήσετε τὸ μῆκος τῆς ἐπιφάνειας τοῦ θρανίου σας μὲ μονάδα μετρήσεως τὴ σπιθαμή σας.

34. Νὰ μετρήσετε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς αἴθουσας διδασκαλίας τῆς τάξεώς σας.

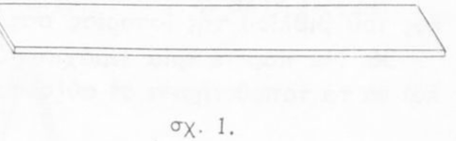
6. Σύγκριση εὐθύγραμμων τμημάτων μεταξύ τους

18

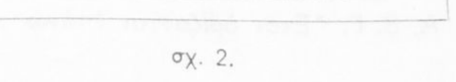
α. Μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἐπιθέσεως

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ συγκρίνωμε μεταξύ τους τὶς σανίδες τοῦ σχ. 1· δηλαδὴ νὰ βροῦμε ἂν εἶναι ἴσες ἢ ἄνισες.

Παίρνομε τὴ μιὰ ἀπὸ αὐτὲς καὶ τὴν τοποθετοῦμε πάνω στὴν ἄλλη. Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν τὰ ἄκρα τῶν δύο σανίδων συμπέσουν ἀπόλυτα, οἱ σανίδες εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Στὴ δεύτερη περίπτωση εὔκολα μποροῦμε νὰ ξεχωρίσωμε ποιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ σανίδες εἶναι μικρότερη ἢ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἄλλη.



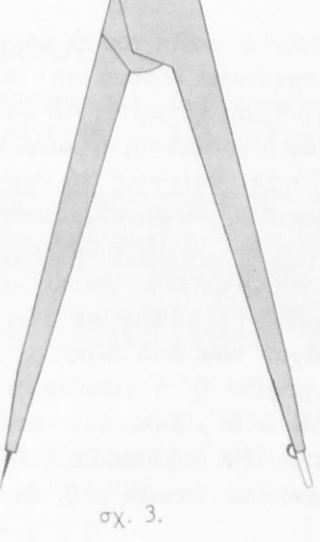
σχ. 1.



σχ. 2.

Ἔστω τώρα ὅτι θέλομε νὰ συγκρίνωμε δυὸ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα χαράξαμε πάνω στὸν πίνακα (σχ. 2). Καταλαβαίνομε ὅτι ἡ σύγκρισή τους δὲν εἶναι δυνατὴ μὲ τὴ μέθοδο τῆς τοποθετήσεως τοῦ ἑνὸς ἐπάνω στὸ ἄλλο (ἐπιθέσεως). Σὲ παρόμοιες περιπτώσεις, γιὰ τὴ σύγκριση εὐθύγραμμων τμημάτων μεταξύ τους, χρησιμοποιοῦμε ἕνα γεωμετρικὸ ὄργανο, ποὺ ὀνομάζεται **διαβήτης**.

Ὁ διαβήτης κατασκευάζεται ἀπὸ ξύλο ἢ ἀπὸ μέταλλο. Ἀποτελεῖται (σχ. 3) ἀπὸ δυὸ ἴσα σκέλη, τὰ ὁποῖα πρὸς τὸ ἐπάνω μέρος συνδέονται μεταξύ τους μὲ μιὰ βίδα (ἕναν κοχλία). Μὲ τὴ βίδα αὐτὴ μποροῦμε νὰ σφίξωμε ἢ καὶ νὰ χαλαρώσωμε ἐλαφρὰ τὰ δυὸ σκέλη τοῦ διαβήτη, ὥστε τὸ ἄνοιγμά τους νὰ μπορῆ νὰ αὐξομειώνεται ἀνάλογα.



σχ. 3.

Τὸ ἕνα σκέλος τοῦ διαβήτη, στὸ κάτω μέρος του, καταλήγει σὲ ψιλὴ μεταλλικὴ αἰχμὴ καὶ τὸ ἄλλο ἔχει ὑποδοχή, γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ στερεώνωμε μιὰ γραφίδα ἢ μιὰ κιμωλία.

Ὅπως θὰ δοῦμε στὸ παρακάτω μάθημα, μὲ τὸ διαβήτη μποροῦμε νὰ συγκρίνωμε εὔκολα δυὸ ἢ καὶ περισσότερα μικρὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ δὲν μποροῦμε νὰ τὰ συγκρίνωμε τοποθετῶντας τὸ ἕνα ἐπάνω στὸ ἄλλο.

Ἀσκήσεις

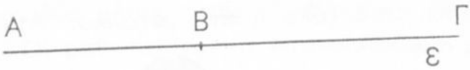
35. Νὰ συγκρίνετε τὸ μῆκος τοῦ ἀναγνωστικοῦ σας πρὸς τὸ μῆκος τοῦ βιβλίου τῆς ἱστορίας σας.

36. Νὰ πάρετε τρία τεμάχια σύρμα. Ἔπειτα νὰ τὰ συγκρίνετε καὶ νὰ τὰ τοποθετήσετε σὲ αὔξουσα διάταξη.

19

β. Μὲ τὸ διαβήτη

Ἔστω ὅτι ἐπάνω στὴν εὐθεία ε τοῦ σχ. 1 παίρνομε τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Ἔτσι ὁρίζονται ἐπάνω της εὐθύγραμμα τμήματα. Διαβάζομε τὰ ΑΒ καὶ ΒΓ, ποὺ θέλομε νὰ τὰ συγκρίνωμε. Ὅπως εἴπαμε, θὰ χρησιμοποιήσωμε τὸ διαβήτη. Καὶ νά πῶς:



σχ. 1.

Στὴν ἀρχὴ χαλαρώνομε τὴ βίδα τοῦ διαβήτη ἔτσι, ποὺ τὰ σκέλη του νὰ μποροῦν νὰ μετακινοῦνται ἐλεύθερα. Ἔπειτα καρφώνομε ἐλαφρὰ τὴν αἰχμὴ τοῦ διαβήτη στὸ ἄκρο Α τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ καὶ μετακινοῦμε τὸ ἄλλο σκέλος του, ὡσότου ἡ γραφίδα ἢ ἡ κιμωλία φτάση στὸ ἄλλο του ἄκρο Β (σχ. 1). Κατόπι σφίγγομε τὰ σκέλη τοῦ διαβήτη μὲ τὴ βοήθεια τῆς βίδας του. Ἔτσι τὸ «ἄνοιγμα», ποὺ ἔχουν τώρα τὰ σκέλη του, εἶναι ἴσο μὲ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Στὴ συνέχεια πηγαίνομε στὸ ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ ΒΓ. Χωρὶς πιὰ νὰ αὐξομειώσωμε τὸ «ἄνοιγμα» τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτη, καρφώνομε τὴν αἰχμή του στὸ ἄκρο Β τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Ἂν ἡ γραφίδα ἢ ἡ κιμωλία πέση στὸ σημεῖο Γ, τότε ἐννοοῦμε ὅτι ΑΒ = ΒΓ, δηλ. ὅτι τὰ δυὸ αὐτὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα. Ἂν ἡ γραφίδα ἢ ἡ κιμωλία πέση ἀνάμεσα στὸ Β καὶ Γ, ἐννοοῦμε ὅτι ΒΓ > ΑΒ, δηλ. ὅτι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Τέλος, ἂν ἡ γραφίδα ἢ ἡ κιμωλία πέση πέρα ἀπὸ τὸ τέλος Γ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΒΓ, ἐννοοῦμε ὅτι ΑΒ〉ΒΓ, δηλ. ὅτι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ.

Ἂν τώρα, καθὼς τὸ «ἄνοιγμα» τοῦ διαβήτη εἶναι ἴσο πρὸς τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, βάλωμε τὴν αἰχμή του στὴν ἀρχὴ ἑνὸς μέτρου (σχ.2), ἡ γραφίδα θὰ μᾶς δείξη ἕναν ἀριθμό. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς παριστάνει τὸ μῆκος σὲ ἑκατοστομέτρα τοῦ «ἀνοίγματος» τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτη, ἄρα καὶ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ «ἄνοιγμα».

σχ. 2.

Ἀσκήσεις

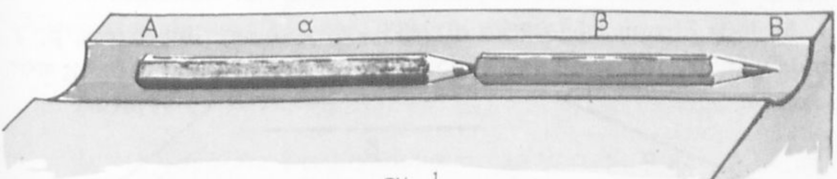
37. Νὰ χαράξετε στὸ τετράδιό σας τρία εὐθύγραμμα τμήματα κι ἔπειτα μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη σας νὰ τὰ συγκρίνετε.

38. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μήκους 0,08 μ. καὶ νὰ ὁρίσετε πάνω σ' αὐτὸ ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ μήκους 0,03 μ.

20

7. Ἄθροισμα εὐθύγραμμων τμημάτων

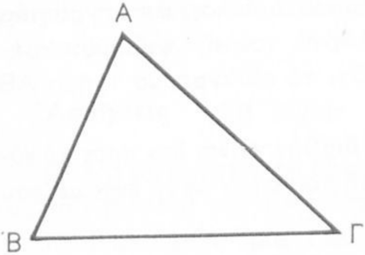
α) Τοποθετοῦμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα, π.χ. δύο μολύβια α, β στὸ αὐλάκι τοῦ θρανίου, ὅπως δείχνει τὸ σχ. 1. δηλαδὴ ἔτσι,



σχ. 1.

ὥστε ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ α νὰ ἀκουμπάη στὸ μολύβι β. Ἔτσι, γίνεται ἕνα νέο εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ ΑΒ, ποὺ τὸ λέμε **ἄθροισμα** τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων α καὶ β, καὶ γράφομε:

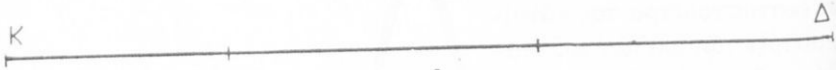
$$\alpha + \beta = AB \quad \text{ἢ} \quad AB = \alpha + \beta$$



σχ. 2.

β) Κατασκευάζομε μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ ἀπὸ σύρμα τὴν ΑΒΓ (σχ. 2).

Πιάνομε τώρα τὶς δυὸ ἄκρες τοῦ σύρματος, ποὺ εἶναι στὸ σημεῖο Α, καὶ ἁπλώνομε τὸ σύρμα καλά, ὥσπου νὰ σχηματιστῆ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα. Θὰ πάρωμε τὴν παρακάτω εἰκόνα (σχ. 3).

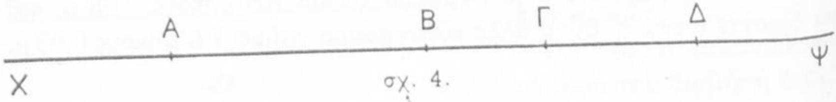


σχ. 3.

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Γράφομε:

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = ΚΔ \quad ἢ \quad ΚΔ = ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ$$

γ) Χαράζομε μιὰ εὐθεία χψ καὶ πάνω σ' αὐτὴν ὁρίζομε τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ στὴ σειρὰ (σχ. 4).

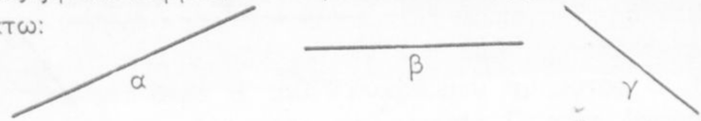


σχ. 4.

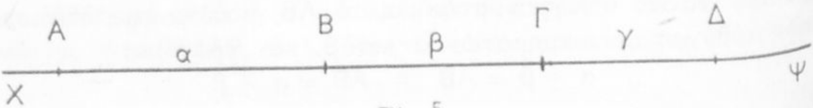
Παρατηροῦμε ὅτι σχηματίστηκαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Λέμε ὅτι αὐτὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν ὡς **ἄθροισμα** τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ· καὶ γράφομε:

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ = ΑΔ \quad ἢ \quad ΑΔ = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ.$$

δ) Μᾶς δίνουν τώρα τρία τυχαῖα εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ καὶ μᾶς ζητᾶνε νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμά τους. Ἐργαζόμαστε ὅπως παρακάτω:



Γράφομε μιὰ εὐθεῖα χψ καὶ πάνω σ' αὐτὴν ὁρίζομε ἕνα σημεῖο Α.



σχ. 5

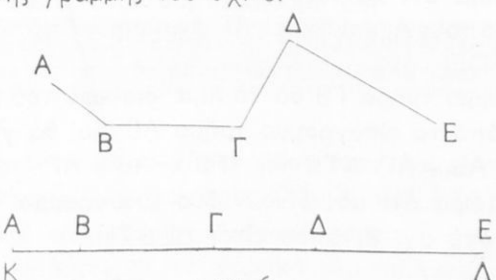
Ὕστερα μὲ τὸ διαβήτη παίρνομε πάνω στὴν χψ τμήματα ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ ὅπως ἀκριβῶς στὸ σχ. 5.

Ἔτσι, σχηματίστηκε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ ποὺ εἶναι τὸ **ἄθροισμα** τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων α, β, γ. Γράφομε:

$$\alpha + \beta + \gamma = \text{ΑΔ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΔ} = \alpha + \beta + \gamma$$

Ἂν ὑποθέσωμε ὅτι α = 0,013 μ., β = 0,021 μ., γ = 0,024 μ., θὰ ἔχωμε ΑΔ = α + β + γ = 0,013 μ. + 0,021 μ. + 0,024 μ. = 0,058 μ.

Καὶ τώρα ἂς βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων τῆς τεθλασμένης γραμμῆς τοῦ σχ. 6.



σχ. 6.

Χαράζομε καὶ πάλι μιὰ εὐθεία καὶ μεταφέρομε πάνω της μὲ τὸ διαβήτη, τὸ ἕνα ἔπειτα ἀπὸ τὸ ἄλλο, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ (σχ. 6). Ἔτσι βρίσκομε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ, ποὺ εἶναι τὸ **ἄθροισμα** τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΕ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς λέγονται **πλευρές** της.

Τὸ ἄθροισμα τῶν **μηκῶν τῶν πλευρῶν** μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς λέγεται **περίμετρος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς**.

Ἀσκήσεις

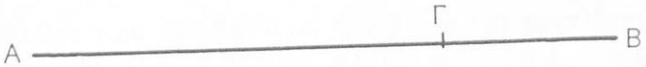
39. Νὰ χαράξετε 4 εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ καὶ δ μὲ μήκη ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς 0,03 μ., 0,04 μ., 0.05 μ., καὶ 0,08 μ. Ἔπειτα νὰ βρῆτε καὶ νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμά τους.

40. Νὰ χαράξετε μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ μὲ πέντε πλευρὲς μήκους 0,05 μ., 0,07 μ., 0,08 μ., 0,04 μ., καὶ 0,06 μ. Ἔπειτα νὰ βρῆτε καὶ νὰ σχηματίσετε τὴν περίμετρό της.

21

8. Διαφορὰ δύο εὐθύγραμμων τμημάτων

α) Γράφομε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Πάνω στὸ ΑΒ καὶ ἀνάμεσα στὰ ἄκρα του Α καὶ Β ὁρίζομε ἕνα σημεῖο Γ (σχ. 1). Ἔτσι, ὁρίσαμε καὶ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΓ, ποὺ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ΑΒ.



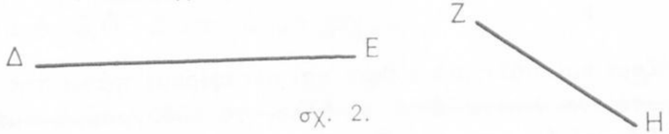
σχ. 1.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν ἴδιο τὸ ἕνα ἄκρο τους Α, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι μέρος ἀπὸ τὸ ΑΒ, δηλαδὴ ΑΒ > ΑΓ (σχ. 1).

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΒ θὰ τὸ λέμε **διαφορὰ** τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΓ ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ· καὶ θὰ γράφωμε:

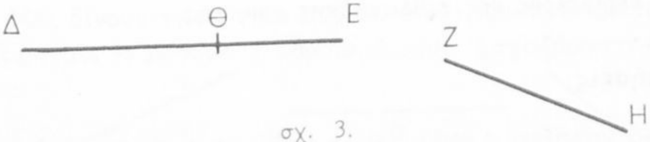
ΑΒ – ΑΓ = ΓΒ ἢ ΓΒ = ΑΒ – ΑΓ

β) Ἔστω τώρα ὅτι μᾶς δίνουν δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΔΕ καὶ ΖΗ ὅπως στὸ σχ. 2, ὅπου εἶναι ΔΕ > ΖΗ.



σχ. 2.

Μᾶς ζητοῦν νὰ βροῦμε τὴ διαφορά τους ΔΕ – ΖΗ. Ἐργαζόμαστε ὅπως παρακάτω. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη ὁρίζομε πάνω στὸ ΔΕ τοῦ σχ. 2, ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΔΘ = ΖΗ (σχ. 3). Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα, παρατηροῦμε ὅτι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΘΕ εἶναι ἡ **διαφορὰ** ΔΕ - ΔΘ, δηλαδὴ ΔΕ – ΔΘ = ΘΕ.



σχ. 3.

Αὐτὴ τὴν ἰσότητα μποροῦμε νὰ τὴ γράψωμε τώρα κι ἔτσι:

ΔΕ – ΖΗ = ΘΕ,

γιατὶ εἴπαμε πὼς λάβαμε ΔΘ = ΖΗ.

Ἔτσι βρέθηκε ἡ ζητούμενη διαφορὰ ΔΕ – ΖΗ. Εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΘΕ.

Ἂν ὑποθέσωμε ὅτι

$$\Delta E = 0{,}08 \text{ μ. καὶ } ZH = 0{,}05 \text{ μ.}$$

θὰ ἔχωμε:

$$\Delta E - ZH = 0{,}08 \text{ μ.} - 0{,}05 \text{ μ.} = 0{,}03 \text{ μ.},$$

Σὲ περίπτωση ποὺ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΔΕ καὶ ΖΗ εἶναι ἴσα, ἡ διαφορά τους θὰ εἶναι:

$$\Delta E - ZH = 0$$

Πραγματικά, ἂν ΔΕ = 0,08 μ. καὶ ΖΗ = 0,08 μ., θὰ ἔχωμε:

$$\Delta E - ZH = 0{,}08 \text{ μ.} - 0{,}08 \text{ μ.} = 0$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ δυὸ εὐθύγραμμων τμημάτων, ἀφαιροῦμε πάντοτε τὸ μικρότερο ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο.

Ἀσκήσεις

41. Νὰ χαράξετε μὲ τὸ χάρακα δυὸ εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β μὲ μήκη ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς 0,10 μ. καὶ 0,04 μ. Ἔπειτα νὰ σχηματίσετε καὶ νὰ βρῆτε τὴ διαφορά τους.

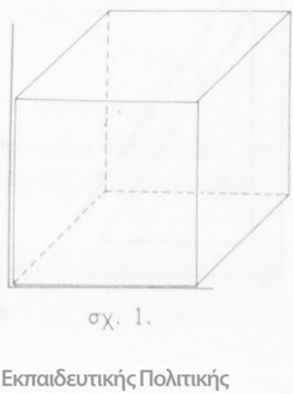
42. Νὰ σχεδιάσετε μὲ τὸ χάρακα μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ μὲ πλευρὲς α, β καὶ γ ἀντιστοίχως ἴσες πρὸς 0,06 μ. 0,03 μ. καὶ 0,1 μ. καὶ στὴ συνέχεια μιὰν ἄλλη μὲ πλευρὲς δ, ε, ζ καὶ η ἀντιστοίχως ἴσες πρὸς 0,02 μ. 0,08 μ. 0,04 μ. καὶ 0,07 μ.
Ἔπειτα νὰ βρῆτε τὴ διαφορὰ τῶν περιμέτρων τους.

22

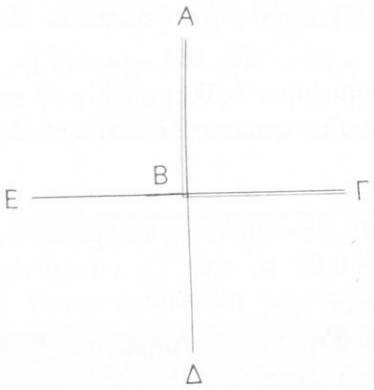
IV. ΤΕΜΝΟΜΕΝΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

1. Κάθετες εὐθεῖες

Βάζομε μιὰ ἀπὸ τὶς ἕδρες ἑνὸς κύβου ἐπάνω στὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς φύλλου ἀπὸ τὸ τετράδιό μας ἢ ἐπάνω στὸν πίνακα τῆς τάξεως (σχ. 1).


σχ. 1.

Στὴ συνέχεια, ἀφοῦ χαράξωμε στὸ φύλλο ἢ στὸν πίνακα δυὸ εὐθεῖες κατὰ μῆκος δυὸ πλευρῶν τῆς ἕδρας αὐτῆς ποὺ νὰ τέμνωνται, ἀποσύρομε τὸν κύβο.



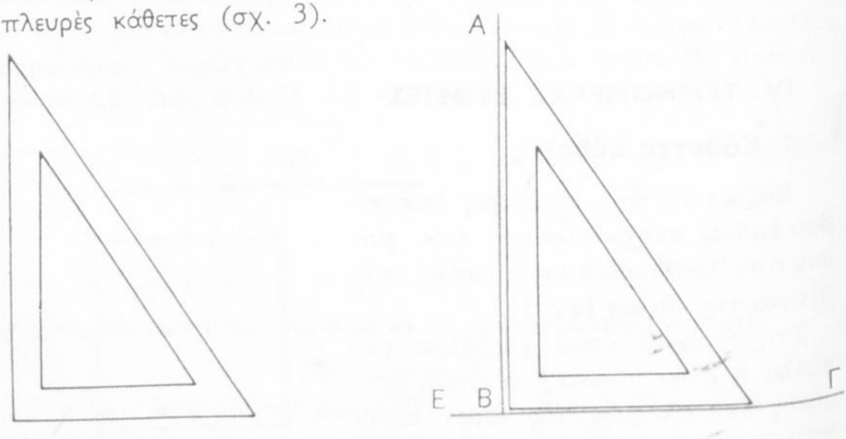
σχ. 2.

Ἔτσι πάνω στὴν ἐπιφάνεια τοῦ φύλλου τοῦ τετραδίου ἢ στὸν πίνακα τῆς τάξεως ἀπομένει ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ τοῦ σχ. 2. Ἂν τώρα προεκτείνωμε τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$ πέρα ἀπὸ τὸ σημεῖο τῆς τομῆς τους Β, θὰ σχηματιστοῦν 4 γωνίες. Ἂν σὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες αὐτὲς θέσωμε τὴ γωνία μιᾶς ἕδρας ἑνὸς κύβου, θὰ διαπιστώσωμε ὅτι αὐτὴ ἐφαρμόζει καὶ στὶς 4 γωνίες ἀκριβῶς.

Ἄρα, οἱ γωνίες $\widehat{ΕΒΑ}$, $\widehat{ΑΒΓ}$, $\widehat{ΓΒΔ}$, $\widehat{ΔΒΕ}$ εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Οἱ εὐθεῖες ΑΔ καὶ ΕΓ, ἀπὸ τὶς ὁποῖες σχηματίζονται οἱ ἴσες γωνίες $\widehat{ΕΒΑ}$, $\widehat{ΑΒΓ}$, $\widehat{ΓΒΔ}$ καὶ $\widehat{ΔΒΕ}$, λέγονται **κάθετες εὐθεῖες**. Ἑπομένως, δυὸ εὐθεῖες λέγονται κάθετες, ἂν τέμνωνται καὶ οἱ γωνίες ποὺ σχηματίζουν εἶναι ὅλες ἴσες.

2. Πῶς χαράζομε κάθετες εὐθεῖες

Γιὰ νὰ χαράξωμε κάθετες εὐθεῖες, χρησιμοποιοῦμε ἕνα ὄργανο ποὺ λέγεται **γνώμονας**. Ὁ γνώμονας ἔχει σχῆμα τριγωνικὸ μὲ δυὸ πλευρὲς κάθετες (σχ. 3).



σχ. 3.

Ἔστω ὅτι στὸ σημεῖο Β τῆς εὐθείας ΕΓ θέλομε νὰ φέρωμε τὴν κάθετη στὴν ΕΓ εὐθεία. Τοποθετοῦμε τὴ μιὰ κάθετη πλευρὰ τοῦ γνώμονα ἐπάνω στὴν εὐθεία ΕΓ ἔτσι, ὥστε ἡ ἄλλη κάθετη πλευρὰ του νὰ περνάῃ ἀπὸ τὸ σημεῖο Β. Ἔπειτα χαράζομε τὴν εὐθεία ΑΒ. Αὐτὴ εἶναι κάθετη στὴν ΕΓ.

Ἀσκήσεις

43. Νὰ χαράξετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα καὶ ἔπειτα δυὸ ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα νὰ περνοῦν ἀνὰ ἕνα ἀπὸ τὰ ἄκρα του καὶ νὰ εἶναι κάθετα σ' αὐτό.

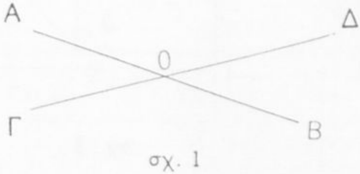
44. Ὁμοίως νὰ χαράξετε δυὸ κάθετες εὐθεῖες καὶ νὰ συγκρίνετε τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζουν, πρὸς τὶς γωνίες μιᾶς ἕδρας ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Τί παρατηρεῖτε;

45. Νὰ γράψετε μιὰ εὐθεία ΑΒ καὶ νὰ σημειώσετε ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθεία αὐτή. Ἔπειτα, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα καὶ τοῦ γνώμονα, νὰ χαράξετε κάθετο πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ περνάῃ ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ.

23

3. Πλάγιες εὐθεῖες

Ἔστω οἱ τεμνόμενες εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ σχ. 1. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ εὐθεῖες αὐτὲς σχηματίζουν τὶς γωνίες $\widehat{A O \Gamma}$, $\widehat{A O \Delta}$, $\widehat{\Delta O B}$ καὶ $\widehat{B O \Gamma}$. Εἶναι φανερὸ ὅτι οἱ γωνίες αὐτὲς δὲν εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους. Ἑπομένως, οἱ εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν τέμνονται καθέτως, ὅπως στὴν περίπτωση τοῦ 22ου μαθήματος. Γι' αὐτὸ οἱ εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται **πλάγιες εὐθεῖες**.



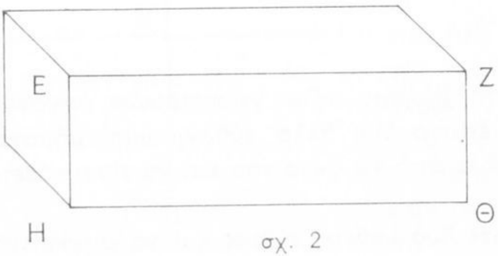
σχ. 1

Συνεπῶς,

δυὸ εὐθεῖες λέγονται πλάγιες, ἂν τέμνωνται καὶ οἱ γωνίες ποὺ σχηματίζουν δὲν εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

4. Παράλληλες εὐθεῖες

Ἂν ἐξετάσωμε προσεχτικὰ τὶς ἀκμὲς ΕΖ καὶ ΗΘ τῆς ἕδρας ΕΖΘΗ τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου τοῦ σχ. 2, θὰ διαπιστώσωμε ὅτι αὐτές, εἶναι κάθετες στὴν πλευρά ΕΗ. Οἱ ἀκμὲς ΕΖ καὶ ΗΘ βρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καί, ἂν προεκταθοῦν, οὐδέποτε ἡ μιὰ θὰ συναντήση τὴν ἄλλη. Γι᾽ αὐτὸ οἱ ἀκμὲς ΕΖ καὶ ΗΘ λέγονται **παράλληλες εὐθεῖες.** Συνεπῶς,



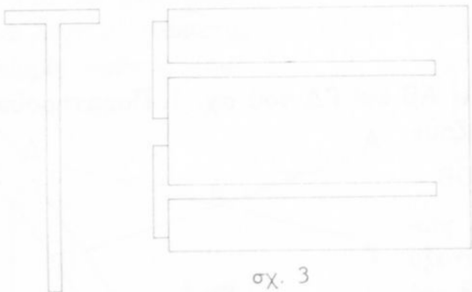
σχ. 2

δυὸ εὐθεῖες λέγονται παράλληλες, ἂν βρίσκωνται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν συναντιοῦνται ὁσοδήποτε καὶ ἂν προεκταθοῦν.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι οἱ ἀπέναντι ἀκμὲς τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.

Παράλληλες εὐθεῖες μποροῦμε νὰ χαράξωμε μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς ὀργάνου ποὺ ὀνομάζεται ταῦ. Τὸ ταῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἄνισους καὶ κάθετους μεταξύ τους κανόνες (χάρακες).

Ὁ μικρότερος κανόνας ὀνομάζεται κεφαλὴ καὶ ὁ μεγαλύτερος βραχίονας (σχ. 3).


σχ. 3

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ χαράξωμε παράλληλες εὐθεῖες ἐπάνω στὸν πίνακα. Τοποθετοῦμε τὴν κεφαλὴ τοῦ ταῦ, ὥστε νὰ ἀκουμπᾶ στὴ μιὰ πλευρὰ τοῦ πίνακα, καὶ τὴν μετακινοῦμε κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς μὲ τὸ βραχίονα ἐπάνω στὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα. Ὅπου θέλομε, σταματᾶμε καὶ χαράζομε εὐθεῖες κατὰ μῆκος τοῦ βραχίονα τοῦ ταῦ. Οἱ εὐθεῖες ποὺ χαράζονται ἔτσι εἶναι παράλληλες.

Ἀσκήσεις

46. Νὰ χαράξετε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα καὶ τοῦ γνώμονα, δυὸ παράλληλες εὐθεῖες καὶ ἔπειτα δυὸ ἄλλες κάθετες στὶς πρῶτες. Τί παρατηρεῖτε;

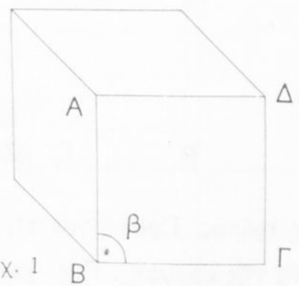
47. Νὰ χαράξετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες κι ἔπειτα μία εὐθεία ποὺ νὰ τὶς κόβῃ πλάγια.

48. Γράψτε μιὰ εὐθεία ΑΒ καὶ πάρτε ἕνα σημεῖο Γ ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθεία. Μὲ τὸ χάρακα καὶ τὸ γνώμονα, χαράξτε μιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ περνάῃ ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ.

V. ΓΩΝΙΕΣ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

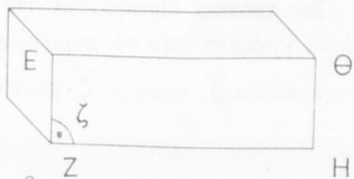
1. Ἔννοια τῆς γωνίας

Οἱ ἀκμὲς ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ τοῦ κύβου, στὸ σχ. 1, ἀρχίζουν ἀπὸ τὴν κορυφή του Β καὶ δὲν ἀποτελοῦν μιὰ εὐθεία. Οἱ ἀκμὲς αὐτές, ὅπως εἴδαμε καὶ στὸ 4ο μάθημα, σχηματίζουν ἕνα σχῆμα ἐπίπεδο, ποὺ λέγεται γωνία. Ἡ γωνία αὐτὴ ὀνομάζεται γωνία $\widehat{B}$ ἢ γωνία $\widehat{\beta}$ ἢ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ ἢ γωνία $\widehat{ΓΒΑ}$.



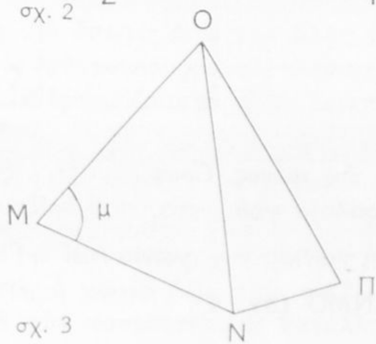
σχ. 1

Οἱ ἀκμὲς ΕΖ καὶ ΖΗ τῆς ἕδρας ΕΖΗΘ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου στὸ σχ. 2 σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{Ζ}$ ἢ $\widehat{\zeta}$ ἢ $\widehat{ΕΖΗ}$ ἢ ΗΖΕ. Οἱ ἀκμὲς ἐπίσης ΟΜ καὶ ΜΝ τῆς πυραμίδας, στὸ σχ. 3, σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{Μ}$ ἢ $\widehat{\mu}$ ἢ $Ο\widehat{Μ}Ν$ ἢ $Ν\widehat{Μ}Ο$.



σχ. 2

Οἱ ἀκμὲς ΑΒ καὶ ΒΓ, ΕΖ καὶ ΖΗ, ΟΜ καὶ ΜΝ τῶν ἑδρῶν ἀπὸ τὰ πολύεδρα τῶν σχημ. 1, 2



σχ. 3

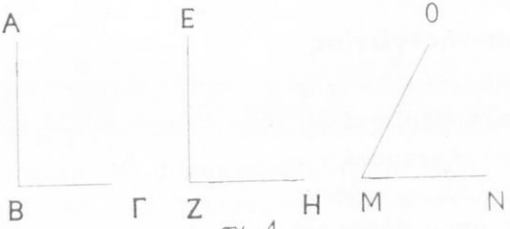
καὶ 3 μποροῦν νὰ γίνουν ἡμιευθεῖες, ἂν προεκταθοῦν ἀπεριόριστα πρὸς τὶς κατευθύνσεις τῶν σημείων Α καὶ Γ, Ε καὶ Η, Ο καὶ Ν ἀντιστοίχως. Ἑπομένως:

γωνία εἶναι ἕνα σχῆμα ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δυὸ ἡμιευθεῖες, οἱ ὁποῖες ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

Οἱ ἡμιευθεῖες ποὺ σχηματίζουν μία γωνία, λέγονται πλευρὲς τῆς γωνίας.

Τὸ σημεῖο τομῆς τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας λέγεται κορυφὴ τῆς γωνίας.

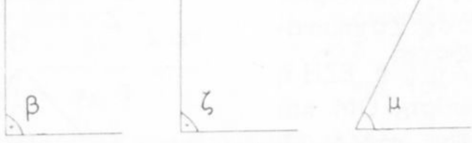
Τὶς γωνίες μποροῦμε νὰ τὶς ἀπαγγέλλωμε μὲ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀκόλουθους τρόπους:



σχ. 4

1ος τρόπος. Προφέρομε τὴ λέξη «γωνία» καὶ στὴ συνέχεια τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς. Π.χ. γωνία $\widehat{Β}$, γωνία $\widehat{Ζ}$, γωνία $\widehat{Μ}$, (σχ. 4).

2ος τρόπος. Προφέρομε τὴ λέξη «γωνία» καὶ στὴ συνέχεια ἕνα μικρὸ γράμμα ποὺ τὸ σημειώνομε στὸ ἐσωτερικὸ μέρος τῆς γωνίας: π.χ. γωνία $\widehat{\beta}$, γωνία $\widehat{\zeta}$, γωνία $\widehat{\mu}$ (σχ. 5).



σχ. 5

3ος τρόπος. Προφέρομε τὴ λέξη «γωνία» καὶ στὴ συνέχεια τὰ τρία κεφαλαῖα γράμματα, ποὺ ὁρίζουν τὶς δύο πλευρὲς καὶ τὴν κορυφὴ τῆς γωνίας: π.χ. γωνία $Α\widehat{Β}Γ$ ἢ $Γ\widehat{Β}Α$, γωνία $Ε\widehat{Ζ}Η$ ἢ $Η\widehat{Ζ}Ε$, γωνία $Ο\widehat{Μ}Ν$ ἢ $Ν\widehat{Μ}Ο$ (σχ. 4).

Τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς γράφεται καὶ ἀπαγγέλλεται πάντοτε ἀνάμεσα στὰ δυὸ ἄλλα.

Ἀσκήσεις

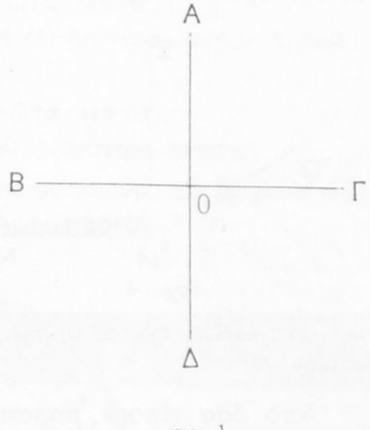
49. Νὰ γράψετε 2 γωνίες. Ἔπειτα νὰ τὶς ὀνομάσετε καὶ νὰ τὶς ἀπαγγείλετε μὲ ὅλους τοὺς τρόπους.

50. Νὰ κατασκευάσετε 2 γωνίες ἀπὸ εὐθύγραμμα σύρματα.

25

2. Τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν

α. Ὀρθὴ γωνία. Οἱ εὐθεῖες ΑΔ καὶ ΒΓ, στὸ σχ. 1, τέμνονται καθέτως στὸ σημεῖο Ο. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὲς σχηματίζουν τὶς γωνίες $\widehat{ΑΟΓ}$, $\widehat{ΓΟΔ}$, $\widehat{ΔΟΒ}$ καὶ $\widehat{ΒΟΑ}$. Οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι ἴσες μεταξύ τους, διότι, ὅπως εἴδαμε στὸ 22ο μάθημα, σὲ καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς ἐφαρμόζει ἀκριβῶς μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες τῆς ἕδρας ἑνὸς κύβου. Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἴσες αὐτὲς γωνίες λέγεται **ὀρθὴ γωνία.** Ἑπομένως,



σχ. 1

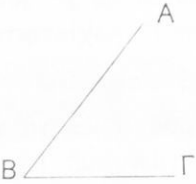
μιὰ γωνία λέγεται ὀρθή, ἂν οἱ πλευρές της εἶναι κάθετες.

Ἂν ἐπιθέσωμε προσεχτικὰ τὴ μιὰ ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἄλλη ὅλες τὶς ἐπίπεδες γωνίες ἑνὸς κύβου ἢ ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου σὲ μιὰ ὀρθὴ γωνία, θὰ δοῦμε ὅτι αὐτὲς ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Συνεπῶς:

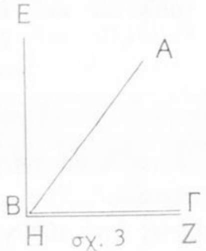
οἱ ἐπίπεδες γωνίες ἑνὸς κύβου ἢ ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὅλες ὀρθὲς γωνίες.

Οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

β. Ὀξεία γωνία. Ὅπως βλέπετε, ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ τοῦ σχ. 2 δὲ μοιάζει μὲ ὀρθή. Ἂν θελήσωμε νὰ τὴν τοποθετήσωμε κατάλληλα



σχ. 2

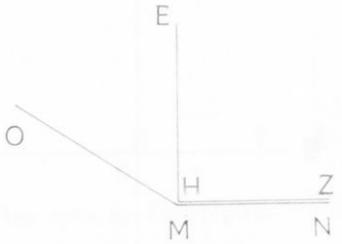


σχ. 3

ἐπάνω στὴν ὀρθὴ γωνία ΕΗ̂Ζ τοῦ σχ. 3 θὰ δοῦμε ὅτι ἡ ΑΒ̂Γ καλύπτει μέρος τῆς ὀρθῆς ΕΗ̂Ζ, δηλ. εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ ΕΗ̂Ζ. Ἡ γωνία ΑΒΓ λέγεται **ὀξεία γωνία.** Ἑπομένως:

μιὰ γωνία λέγεται ὀξεία, ἂν εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ γωνία.

γ. Ἀμβλεῖα γωνία. Ἡ γωνία ΟΜΝ τοῦ σχ. 4 δὲ μοιάζει οὔτε μὲ τὴν ὀρθὴ γωνία ΕΗΖ τοῦ σχ. 3, οὔτε μὲ τὴν ὀξεία γωνία ΑΒ̂Γ τοῦ σχ. 2. Ἂν τοποθετήσωμε κατάλληλα ἐπάνω σ' αὐτή, τὴν ὀρθὴ γωνία ΕΗ̂Ζ θὰ δοῦμε ὅτι τώρα ἡ ὀρθὴ εἶναι μέρος τῆς γωνίας ΟΜ̂Ν, δηλαδὴ ἡ ΟΜ̂Ν εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή. Ἡ γωνία ΟΜ̂Ν λέγεται **ἀμβλεία γωνία.** Ἑπομένως:



σχ. 4

μιὰ γωνία λέγεται ἀμβλεία, ἂν εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ γωνία.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

Ὑπάρχουν τρία εἴδη γωνιῶν: ἡ ὀρθή, ἡ ὀξεία καὶ ἡ ἀμβλεία.
Οἱ πλευρὲς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι κάθετες ἡμιευθεῖες.
Οἱ πλευρὲς τῶν ὀξειῶν καὶ τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν εἶναι ἡμιευθεῖες πλάγιες.

Ἀσκήσεις.

51. Νὰ χαράξετε στὸ τετράδιο σας δυὸ κάθετες εὐθεῖες. Ἔπειτα νὰ τὶς ὀνομάσετε καὶ νὰ πῆτε ποιὲς γωνίες σχηματίζουν.

52. Νὰ χαράξετε στὸ τετράδιό σας δυὸ εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμνωνται πλαγίως. Ἔπειτα νὰ τὶς ὀνομάσετε καὶ νὰ πῆτε τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζονται.

3. Μέτρηση τῶν γωνιῶν

Γιὰ νὰ μετρήσωμε μιὰ γωνία, τὴ συγκρίνομε πρὸς μιὰν ἄλλη γνωστὴ γωνία, τὴν ὁποία, ἔπειτα ἀπὸ συμφωνία, τὴ θεωροῦμε ὡς **μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν.**

Ἀπὸ τὴ σύγκριση αὐτὴ βρίσκομε ἕναν ἀριθμό, ποὺ φανερώνει πόσες φορὲς περιέχεται ἡ μονάδα μετρήσεως ἢ ἕνα μέρος της στὴ γωνία ποὺ μετρήθηκε.

Ὡς μονάδα μετρήσεως γιὰ τὶς γωνίες χρησιμοποιοῦμε συνήθως τὴν ὀρθὴ γωνία.

Ἡ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται σὲ 90 ἴσες γωνίες. Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἴσες αὐτὲς γωνίες ὀνομάζεται **γωνία μιᾶς μοίρας.**

Ἡ μοίρα ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 πρῶτα λεπτά.

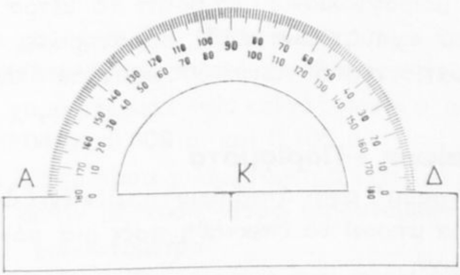
Τὸ πρῶτο λεπτὸ ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 δεύτερα λεπτά· δηλαδή:

1 ὀρθὴ γωνία $= 90^0$ (μοῖρες),

$1^0 = 60'$ (πρῶτα λεπτά),

$1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).

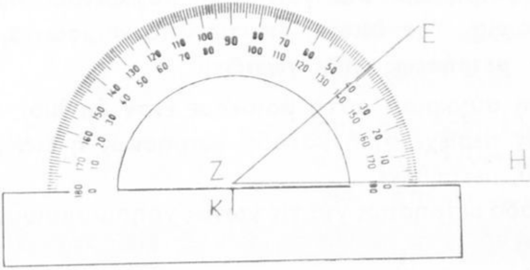
Γιὰ τὴ μέτρηση τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦμε τὸ ὄργανο ποὺ βλέπετε στὸ σχ. 1 αὐτὸ τὸ λέμε **μοιρογνωμόνιο.**



σχ. 1

Τὸ μοιρογνωμόνιο ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἡμικύκλιο διαιρεμένο σὲ 180^0, ἀριθμημένες ἀπὸ τ' ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ (ἀπὸ 0^0 ὡς 180^0) καὶ ἀντίστροφα. Οἱ μοῖρες ἀναγράφονται ἀνὰ 10. Τὰ ἄκρα αὐτοῦ τοῦ ἡμικυκλίου συνδέονται μεταξύ τους μὲ ἕναν κανόνα. Στὴ μέση τοῦ κανόνα ὑπάρχει ἕνα σημεῖο Κ. Τὸ σημεῖο αὐτὸ ὀνομάζεται κέντρο τοῦ μοιρογνωμίου, ἐνῶ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρο Κ, ὀνομάζεται διάμετρος αὐτοῦ.

Καὶ τώρα ἂς μετρήσωμε τὴ γωνία $\widehat{ΕΖΗ}$ τοῦ σχ. 2.



σχ. 2

Βάζομε τὸ μοιρογνωμόνιο ἐπάνω στὴ γωνία $\widehat{ΕΖΗ}$ μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε τὸ κέντρο του Κ νὰ πέση ἀκριβῶς στὴν κορυφὴ Ζ τῆς γωνίας. Ἔπειτα φέρνομε τὴ διάμετρο ΑΔ τοῦ μοιρογωνμίου ἔτσι, ποὺ νὰ συμπέση μὲ τὴν πλευρὰ ΖΗ τῆς γωνίας. Παρατηροῦμε τότε ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας, ἡ ΖΕ, περνάει ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεση 40 τοῦ τόξου. Ἑπομένως, ἡ γωνία $\widehat{ΕΖΗ}$ εἶναι 40^0.

Ἀσκήσεις

53. Νὰ χαράξετε δυὸ εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμωνται πλαγίως καὶ μὲ τὴ βοήθεια τοῦ μοιρογνωμονίου νὰ βρῆτε τὸ μέτρο καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς 4 γωνίες ποὺ σχηματίζονται. Τί παρατηρεῖτε;

54. Νὰ σχηματίσετε μιὰ γωνία 60^0 καὶ μιὰν ἄλλη 35^0.

27 Ἀνακεφαλαίωση - Πορίσματα

- Ἡ εὐθεία γραμμὴ εἶναι ἀπεριόριστη. Δὲν ἔχει ἀρχὴ καὶ τέλος.
- Ἡ ἡμιευθεία μπορεῖ νὰ ἐπεκταθῆ πρὸς μία μόνο κατεύθυνση. Συνεπῶς ἔχει ἀρχή.
- Εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι κάθε κομμάτι ἀπὸ μιὰ εὐθεία γραμμή, τὸ ὁποῖο ἔχει δύο ἄκρα (ἄκρες).
- Εὐθεῖες γραμμὲς χαράζομε μὲ τὸ χάρακα καθὼς καὶ μὲ διάφορους ἄλλους τρόπους.
- Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, τὸ συγκρίνομε πρὸς ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα ὁρισμένο καὶ γνωστό, τὸ ὁποῖο, ἔπειτα ἀπὸ συμφωνία, τὸ θεωροῦμε ὡς μονάδα μετρήσεως.
- Τὸ γαλλικὸ μέτρο εἶναι διεθνὴς μονάδα μετρήσεως μήκους.

● Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ συγκρίνομε, ἀφοῦ τοποθετήσωμε τὸ ἕνα ἐπάνω στὸ ἄλλο καὶ μὲ τὸ διαβήτη.

● Δυὸ εὐθεῖες τέμνονται καθέτως, ἂν οἱ γωνίες ποὺ σχηματίζουν εἶναι ὅλες ἴσες.

● Κάθετες εὐθεῖες χαράζομε μὲ τὸ γνώμονα.

● Δυὸ εὐθεῖες τέμνονται πλαγίως, ἂν οἱ γωνίες ποὺ σχηματίζουν δὲν εἶναι ὅλες ἴσες.

● Δυὸ εὐθεῖες λέγονται παράλληλες, ἂν βρίσκωνται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν συναντιοῦνται, ὁσοδήποτε καὶ ἂν προεκταθοῦν.

● Παράλληλες εὐθεῖες χαράζομε μὲ τὸ ταῦ ἢ μὲ χάρακα καὶ γνώμονα.

● Γωνία εἶναι ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δυὸ ἡμιευθεῖες, οἱ ὁποῖες ἀρχίζουν ἀπὸ ἕνα σημεῖο.

● Σὲ κάθε γωνία διακρίνομε τὴν κορυφὴ καὶ τὶς πλευρές της.

● Οἱ γωνίες διακρίνονται σὲ ὀρθές, ὀξεῖες καὶ ἀμβλεῖες.

● Ὀρθὴ γωνία λέγεται ἡ γωνία ποὺ ἔχει τὶς πλευρὲς της κάθετες.

● Ὀξεία γωνία λέγεται κάθε γωνία μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθή.

● Ἀμβλεία γωνία λέγεται κάθε γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή.

● Τὶς γωνίες τὶς μετροῦμε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο.

Ἀσκήσεις

Α. 55. Νὰ χαράξετε δυὸ ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα κι ἔπειτα νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμα καὶ τὴ διαφορά τους.

56. Νὰ χαράξετε μιὰ εὐθεία καὶ νὰ ὁρίσετε σ' αὐτὴν τρία τμήματα ἴσα πρὸς 0,04 μ., 0,008 μ. καὶ 0,105 μ.

Β. 57. Νὰ βρῆτε πόσα χιλιοστόμετρα ἔχει ἕνα δεκάμετρο.

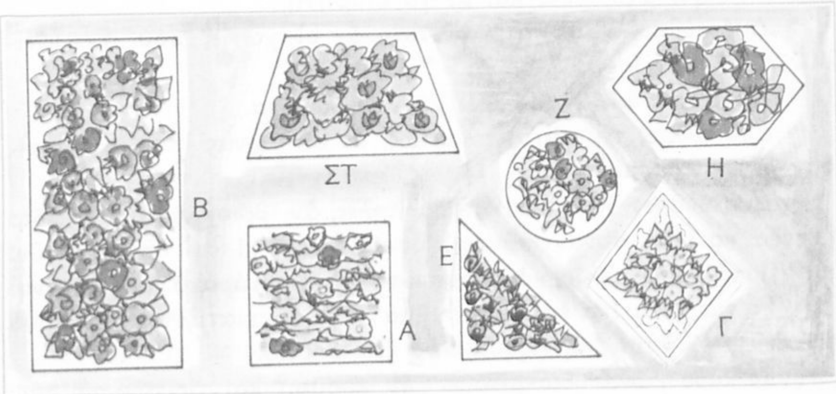
58. Νὰ βρῆτε μὲ πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦν 650 ἑκατοστόμετρα καὶ 1500 χιλιοστόμετρα.

Γ. 59. Μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ ἔχει πέντε πλευρές. Ἡ α΄ ἔχει μῆκος 0,09 μ., ἡ β΄ τὸ μισὸ τῆς α΄, ἡ γ΄ ὅσο ἡ α΄ καὶ ἡ β΄ μαζί, ἡ δ΄ εἶναι διπλάσια τῆς β΄ καὶ ἡ ε΄ τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς α΄.

Νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό της.

60. Μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ μὲ τρεῖς πλευρὲς ἔχει περίμετρο 25 ἑκατοστόμ. Ἡ μία πλευρά της ἔχει μῆκος 7 ἑκατοστόμ. καὶ οἱ ἄλλες δυὸ εἶναι ἴσες. Νὰ βρῆτε τὸ μῆκος καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρές της.

VI. ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ



28 Ἡ παραπάνω εἰκόνα παριστάνει ἕνα μέρος ἀπὸ ἐπίπεδο σχολικὸ κῆπο. Διακρίνομε σ' αὐτὴν ἑφτὰ (7) τμήματα. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε τμῆμα εἶναι μία ἐπίπεδη ἐπιφάνεια μὲ ἰδιαίτερο σχῆμα. Ἡ εἰκόνα δηλαδὴ αὐτὴ παρουσιάζει ἑφτὰ (7) ἐπίπεδα σχήματα.

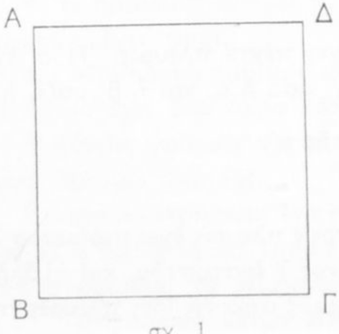
Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι τὰ ἐπίπεδα σχήματα Α, Β, Γ, Ε, ΣΤ καὶ Η, τελειώνουν σὲ εὐθύγραμμα τμήματα. Γι' αὐτό, τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ σχήματα ὀνομάζονται εἰδικὰ καὶ **εὐθύγραμμα σχήματα**.

Καθένα ἀπὸ τὰ παραπάνω ἐπίπεδα σχήματα ἔχει τὸ ὄνομά του καὶ ἰδιαίτερα χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα.

Α. ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Ι. Ἔννοια τοῦ τετραγώνου

Ἂν προσέξωμε καλὰ τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα Α, θὰ δοῦμε ὅτι αὐτὸ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ μιὰ ἕδρα ἑνὸς κύβου. Τὸ ἐξετάζομε ἰδιαιτέρως (σχ. 1).



σχ. 1

Βλέπομε ὅτι τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓΔ τελειώνει σὲ τέσσερα εὐθύγραμμα τμήματα τά:

ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ,

τὰ ὁποῖα ὀνομάζομε **πλευρὲς** τοῦ εὐθύγραμμου σχήματος ΑΒΓΔ·

Ἂν ἐλέγξωμε μὲ τὸ διαβήτη τὶς πλευρὲς αὐτές, θὰ διαπιστώσωμε ὅτι εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Ἐπίσης, ἐλέγχοντας μὲ τὸ γνώμονα τὶς γωνίες τοῦ εὐθύγραμμου σχήματος ΑΒΓΔ, διαπιστώνομε ὅτι εἶναι ὅλες ὀρθές.

Αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα, ποὺ ἔχει τέσσερεις πλευρὲς ἴσες καὶ τέσσερεις γωνίες ὀρθές, τὸ λέμε **τετράγωνο**.

Γιὰ τὸ τετράγωνο ΑΒΓΔ θὰ γράφωμε:

$$ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ,$$

$$Α\widehat{Β}Γ = Β\widehat{Γ}Δ = Γ\widehat{Δ}Α = Δ\widehat{Α}Β = 1 \text{ ὀρθὴ}$$

Ἀκόμη εὔκολα διαπιστώνομε ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν ΒΓ. Ὅλα αὐτὰ σύντομα τὰ γράφωμε ἔτσι:

$$ΑΒ \,//\, ΔΓ \text{ καὶ } ΑΔ \,//\, ΒΓ.$$

Ἀσκήσεις

61. Νὰ βρῆτε καὶ νὰ δείξετε διάφορα ἐπίπεδα σχήματα.

62. Νὰ σχεδιάσετε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα, καὶ τοῦ γνώμονα ἕνα τετράγωνο μὲ μῆκος πλευρᾶς 0,05 μ. κι ἔπειτα νὰ μετρήσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὶς γωνίες του. Τί παρατηρεῖτε;

29

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ τετραγώνου

Ὅπως βλέπομε στὸ σχ. 1, οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου τέμνονται ἀνὰ δύο συνεχόμενες. Ἀπὸ τὶς δύο πλευρὲς τοῦ τετραγώνου ποὺ τέμνονται ἡ μιὰ εἶναι ἡ **βάση** καὶ ἡ ἄλλη τὸ **ὕψος** του. Ἂν πάρωμε ὡς βάση τὴν πλευρὰ ΒΓ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, μποροῦμε νὰ πάρωμε ὡς ὕψος του τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ κάθετες σ᾽ αὐτὴ πλευρές, τὴν ΑΒ ἢ τὴν ΔΓ. Ἡ βάση καὶ τὸ ὕψος τοῦ τετραγώνου λέγονται **διαστάσεις** τοῦ τετραγώνου.

σχ. 1

Οἱ διαστάσεις τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες.

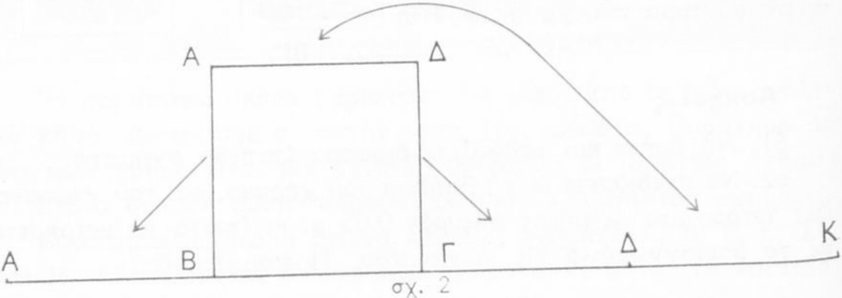
Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΓ, ποὺ ἔχει ἄκρα δυὸ μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ τετραγώνου, λέγεται **διαγώνιος** τοῦ τετραγώνου. Τὸ τετράγωνο ἔχει δυὸ διαγωνίους. Οἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ τέμνονται καθέτως στὴ μέση τους.

Κάθε διαγώνιος χωρίζει τὸ τετράγωνο σὲ δυὸ ἴσα τρίγωνα.

3. Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου

Τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου λέγεται περίμετρος τοῦ τετραγώνου.

Τὸ σχ. 2 δείχνει πῶς βρίσκομε τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ ποὺ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ.



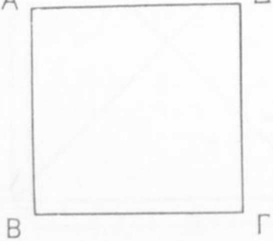
σχ. 2

Ἐπειδὴ οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες μεταξύ τους, καταλαβαίνομε ὅτι:

(περίμετρος) = (μῆκος πλευρᾶς) × 4.
(μῆκος πλευρᾶς) = (περίμετρος) : 4.

Ἐφαρμογές.

Πρόβλημα 1ο. Ἕνας σχολικὸς κῆπος μὲ σχῆμα τετράγωνο ἔχει πλευρὰ 30 μέτρα. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του;



Λύση. Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, ἔχομε:
(περίμετρος τετραγώνου) = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 30 μ. + 30 μ. + 30 μ. + 30 μ. = 120 μ. ἢ (30 μ.) × 4 = 120 μ.

Ἀπάντηση. Ἡ περίμετρος τοῦ σχολικοῦ κήπου εἶναι 120 μ.

Πρόβλημα 2ο. Ἡ περίμετρος ἑνὸς σχολικοῦ κήπου σχήματος τετραγώνου εἶναι 120 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του;

Λύση. (Μῆκος πλευρᾶς τετραγώνου) = (περίμετρος) : 4 = (120 μ.) : 4 = 30 μ.

Ἀπάντηση. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ σχολικοῦ κήπου εἶναι 30 μ.

Ἀσκήσεις

63. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου ἔχει μῆκος 71 μ. Ποιά εἶναι ἡ περίμετρός του;

64. Ἡ περίμετρος ἑνὸς σχολικοῦ προαυλίου μὲ σχῆμα τετράγωνο εἶναι 213,56 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του;

30

4. Μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας τοῦ τετραγώνου

α) Γενικὰ

Γιὰ νὰ μετρήσωμε μιὰ ἐπιφάνεια, τὴ συγκρίνομε πρὸς μιὰν ἄλλη γνωστὴ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποία, ἔπειτα ἀπὸ συμφωνία, τὴ θεωροῦμε ὡς **μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν.**

Ἀπὸ τὴ σύγκριση αὐτὴ βρίσκομε ἕνα συγκεκριμένο ἀριθμὸ ποὺ λέγεται **ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας.** Τὸ ἐμβαδὸν φανερώνει πόσες φορὲς περιλαμβάνεται ἡ μονάδα μετρήσεως ἢ ἕνα μέρος της στὴν ἐπιφάνεια ποὺ μετρήσαμε.

β) Οἱ μονάδες μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν

Ὡς βασικὴ μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν χρησιμοποιεῖται διεθνῶς τὸ **τετραγωνικὸ μέτρο.**

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο εἶναι ἐπιφάνεια τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 μέτρο.

Οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι οἱ ἑξῆς:

1 τ.μ. = 100 τ. δεκατόμετρα,

1 τ. δεκατ. = 100 τ. ἑκατοστόμετρα.

1 τ. ἑκατοστόμετρο = 100 τ. χιλιοστόμετρα.

῾Επομένως:

1 τ.μ. = 100 τ. δεκατόμετρα = 10.000 τ. ἑκατοστόμετρα = 1.000.000 τ. χιλιοστόμετρα.

Καὶ ἀντιστρόφως:

1 τ. δεκατόμετρο = 0,01 τ.μ.

1 τ. ἑκατοστόμ. = 0,01 τ. δεκατόμετρα = 0,0001 τ.μ.,

1 τ. χιλιοστόμ. = 0,01 τ. ἑκατοστόμ. = 0,0001 τ. δεκατόμετρα = 0,000001 τ.μ.

᾿Από τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ τρέψωμε τετραγωνικὰ μέτρα ἢ ὑποδιαιρέσεις τους σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξεως, πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 100.

᾿Αντίθετα γιὰ νὰ τρέψωμε μιὰ ὑποδιαίρεση τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως, διαιροῦμε διὰ 100.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι τὰ ἑξῆς:

Τὸ τετραγωνικὸ δεκάμετρο ἢ ἄριο = 100 τ.μ.,

τὸ τετραγωνικὸ ἑκατόμετρο ἢ ἑκτάριο = 10000 τ.μ.,

τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο = 1.000.000 τ.μ.

Γιὰ τὴ μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας τῶν ἀγρῶν μεταχειριζόμαστε τὸ βασιλικὸ στρέμμα.

῞Ενα βασιλικὸ στρέμμα = 1.000 τ.μ.

Γιὰ τὴ μέτρηση τῶν οἰκοπέδων μεταχειριζόμαστε καὶ τὸν τεκτονικὸ τετραγωνικὸ πήχη.

῞Ενας τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πήχης = $\frac{9}{16}$ τ.μ.

᾿Ασκήσεις

65. Μὲ πόσα τ. δεκατόμετρα ἰσοδυναμοῦν 25 τ.μ.

66. Μὲ πόσα τ. ἑκατοστόμετρα ἰσοδυναμοῦν 2500 τ. χιλιοστόμετρα;

31

Πρόβλημα. Κάποιον σχολικὸ κῆπο, ποὺ ἔχει σχῆμα τετράγωνο μὲ μῆκος πλευρᾶς 55 μ., πρόκειται νὰ τὸν περιφράξουν μὲ 4 σειρὲς ἀγκαθωτὸ σύρμα. Τὸ μέτρο τοῦ σύρματος αὐτοῦ στοιχίζει 2,50 δρχ. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειαστοῦν καὶ πόσες δρχ. θὰ στοιχίση ἡ ἀγορά του;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ σχολικοῦ κήπου εἶναι 55 μ.

πλευρὰ 55 μ.

Ἡ ἀξία 1 μ. τοῦ ἀγκαθωτοῦ σύρματος εἶναι 2,50 δρχ.

ἀγκαθωτὸ σύρμα

Λύση.

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος.

α) τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ σχολικοῦ κήπου· 55μ.,
β) ὁ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν τοῦ σύρματος· 4.,
γ) ἡ ἀξία 1 μ. τοῦ σύρματος· 2,50 δρχ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος:

α) Ἡ περίμετρος τοῦ σχολικοῦ κήπου,
β) τὸ μῆκος τοῦ σύρματος ποὺ θὰ χρειαστῆ γιὰ τὴν περίφραξη τοῦ σχολικοῦ κήπου,
γ) ἡ συνολικὴ ἀξία τοῦ σύρματος.

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα μέτρα ἀγκαθωτοῦ σύρματος θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὴν περίφραξη, πρέπει νὰ βροῦμε προηγουμένως τὴν περίμετρο τοῦ σχολικοῦ κήπου.

Ἐπειδὴ ὁ κῆπος ἔχει σχῆμα τετράγωνο, καταλαβαίνομε ὅτι (περίμετρος) $=$ (μῆκος πλευρᾶς) $\times 4 =$ (55 μ.) $\times$ 4.

Στὴ συνέχεια, γιὰ νὰ βροῦμε πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὴν περίφραξη, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν περίμετρο τοῦ σχολικοῦ κήπου ἐπὶ 4· δηλαδή:

(μῆκος σύρματος) $=$ (περ. σχολ. κήπου) $\times 4 = (55 \times 4 \times 4)$ μ.

Ἔπειτα γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀξία τοῦ σύρματος, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος του ἐπὶ 2,50· δηλαδή:

ἀξία τοῦ σύρματος = (μῆκος συρ.) × 2,50 δρχ. = (55 × 4 × 4 × 2,50) δρχ.

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

(Περίμετρος τοῦ σχολ. κήπου) = (μῆκος πλευρᾶς) × 4 = (55 μ.) × 4 = 220 μ.

(Μῆκος τοῦ σύρματος) = (περιμ. σχολ. κήπου) × 4 = (220 μ.) × 4 = 880 μ.

(Ἀξία τοῦ σύρματος) = (μῆκος συρ.) × 2,50 δρχ. = 880 × 2,50 δρχ. = 2200 δρχ.

Ἀπάντηση. Γιὰ τὴν περίφραξη τοῦ σχολικοῦ κήπου θὰ χρειαστοῦν 880 μ. σύρμα καὶ ἡ ἀγορά του θὰ στοιχίσῃ 2200 δρχ.

Ἀσκήσεις

67. Ἕνα ἀμπέλι σχήματος τετραγώνου καὶ πλευρᾶς 64,8 μ. περιφράχθηκε μὲ 3 σειρὲς σύρμα. Τὸ μέτρο τοῦ σύρματος ἀγοράστηκε πρὸς 2,65 δρχ. Πόσα μέτρα σύρμα χρειάστηκαν καὶ πόσο στοίχισε ἡ περίφραξη;

68. Γιὰ νὰ περιφράξουν ἕνα ἀγρόκτημα σχήματος τετραγώνου, μὲ τρεῖς σειρὲς σύρμα, ἔδωσαν 6000 δρχ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του, ἂν τὸ μέτρο τοῦ σύρματος ἀγοράστηκε πρὸς 2,50 δραχμές;

32

5. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου.

σχ. 1

Μετροῦμε τὶς διαστάσεις τοῦ τετραγώνου (σχ. 1) καὶ βρίσκομε ὅτι:

(βάση) = (ὕψος) = 3 μέτρα.

Στὴ συνέχεια διαιροῦμε τὴ βάση ΒΓ τοῦ τετραγώνου σὲ 3 ἴσα μέρη. Καταλαβαίνομε ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη ἰσοῦται μὲ 1 μέτρο.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα, ποὺ διαιρέσαμε τὴ βάση τοῦ τετραγώνου, χαράζομε παράλληλες πρὸς τὸ ὕψος του ΑΒ.

Ἔπειτα διαιροῦμε καὶ τὸ ὕψος ΑΒ τοῦ τετραγώνου σὲ 3 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεώς του χαράζομε παράλληλες πρὸς τὴ βάση ΒΓ.

Ἔτσι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου διαιρέθηκε σὲ

$3 \times 3 = 9$ ἴσα τετράγωνα.

Εἶναι φανερὸ ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ 9 ἴσα αὐτὰ τετράγωνα, στὰ ὁποῖα διαιρέθηκε τὸ τετράγωνο ΑΒΓΔ, ἔχει πλευρὰ ἴση μὲ 1 μέτρο καὶ ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὴ μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν· δηλαδὴ ἴση μὲ 1 τετραγωνικὸ μέτρο. ἄρα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ καλύπτεται ἀπό:

3 μ. $\times$ 3 μ. $=$ 9 τετραγωνικὰ μέτρα.

Λέμε τώρα: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι 9 τ. μέτρα.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.

Ἐπειδὴ ὅμως, καθὼς εἴδαμε, (βάση) $=$ (ὕψος) $=$ (πλευρὰ τοῦ τετραγώνου), ἐξάγεται ὅτι:

γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος α τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτό της·

δηλαδὴ (ἐμβ. τετρ.) $=$ (πλευρὰ) $\times$ (πλευρά).

ἢ (ἐμβ. τετρ.) $= \alpha \times \alpha$

Ἐφαρμογή :

Τὸ δάπεδο μιᾶς αἴθουσας σχολείου ἔχει σχῆμα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 4 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε παραπάνω, καταλαβαίνομε ὅτι

(ἐμβ. τετρ.) $= \alpha \times \alpha =$ 4 μ. $\times$ 4 μ. $=$ 16 τ.μ.

Ἀσκήσεις

69. Κάποιος σχολικὸς κῆπος ἔχει σχῆμα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 30 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

70. Ἕνα προαύλιο σχολείου ἔχει σχῆμα τετράγωνο μὲ περίμετρο 84 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

33

Πρόβλημα. Τὸ προαύλιο ἑνὸς σχολείου, σχήματος τετραγώνου καὶ πλευρᾶς 15 μ., πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκες σχήματος τετραγώνου καὶ πλευρᾶς 0,50 μ. Πόσες πλάκες θὰ χρειαστοῦν καὶ πόσο θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐπίστρωση τοῦ προαυλίου, ἂν ἡ καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς στοιχίζῃ 10,50 δραχμές;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

πλευρὰ
15 μ.

Ἡ πλάκα

Πλευρὰ πλάκας : 0,50 μ.

Ἡ τιμὴ μιᾶς πλάκας : 10,50 δρχ.

Λύση.

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ πλευρὰ τοῦ τετρ. σχολ. προαυλίου· 15 μ.,
β) ἡ πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς πλάκας· 0,50 μ.,
γ) ἡ ἀξία τῆς μιᾶς πλάκας· 10,50 δρχ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχολικοῦ προαυλίου,
β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς πλάκας,
γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν πλακῶν ποὺ ἀπαιτοῦνται,
δ) ἡ συνολικὴ ἀξία τῶν πλακῶν.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ἀριθμὸ τῶν πλακῶν ποὺ ἀπαιτοῦνται, πρέπει νὰ βροῦμε προηγουμένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαυλίου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς πλάκας.

Ἐπειδή, τόσο τὸ προαύλιο τοῦ σχολείου, ὅσο καὶ ἡ κάθε πλάκα ἔχουν σχῆμα τετράγωνο, ἐννοοῦμε ὅτι:

(ἐμβ. τετρ. προαυλίου) = (πλευρὰ) $\times$ (πλευρὰ) $= 15 \times 15$ τ.μ.,
(ἐμβ. τετρ. πλάκας) = (πλευρὰ) $\times$ (πλευρὰ) $= 0{,}50 \times 0{,}50$ τ.μ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τώρα τὸν ἀριθμὸ τῶν πλακῶν ποὺ ἀπαιτοῦνται γιὰ τὴν ἐπίστρωση τοῦ προαυλίου, θὰ διαιρέσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ προαυλίου μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς πλάκας· δηλαδή:

$$[(15 \times 15)\ \text{τ.μ.}] : [(0{,}50 \times 0{,}50)\ \text{τ.μ.}]$$

Ἀκολούθως γιὰ νὰ βροῦμε τὴ συνολικὴ ἀξία τῶν πλακῶν, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ τῶν πλακῶν ἐπὶ τὴν ἀξία τῆς μιᾶς πλάκας. δηλαδή:

$$[(15 \times 15) : (0{,}50 \times 0{,}50)] \times 10{,}50\ \text{δρχ.}$$

Ἐκτέλεση τῶν πράξεων

α) (Ἐμβ. τετρ. προαυλίου) = πλ. × πλ. = 15 μ. × 15 μ. = 225 τ.μ.

β) (Ἐμβ. τετρ. πλάκας) = πλ × πλ = 0,50 μ. × 0,50 μ. = 0,25 τ.μ.

γ) (Ἀριθμὸς τῶν πλακῶν) = (225 τ.μ.) : (0,25 τ.μ.) = (22500 τ.μ.) : (25 τ.μ.) = 900.

δ) Συνολικὴ ἀξία τῶν 900 πλακῶν εἶναι 900 × 10,50 δρχ. = 9450 δρχ.

Ἀπάντηση. Γιὰ νὰ ἐπιστρώσωμε τὸ προαύλιο, θὰ ἀπαιτηθοῦν 900 πλάκες, οἱ ὁποῖες θὰ στοιχίσουν 9450 δρχ.

Ἀσκήσεις

71. Μιὰ αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει σχῆμα τετράγωνο καὶ περίμετρο 28 μ. Πρόκειται νὰ ἐπιστρωθῆ μὲ τετράγωνες πλάκες πλευρᾶς 0,25 μ. Πόσες πλάκες θὰ χρειαστοῦν καὶ πόσο θὰ στοιχίση ἡ ἐπίστρωση, ἂν κάθε πλάκα ἀξίζη 4,75 δραχμές;

Β. ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

34

1. Ἔννοια τοῦ ὀρθογωνίου

Ἐξετάζοντας μὲ προσοχὴ τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓΔ τοῦ σχ. 1, διαπιστώνομε ὅτι οἱ πλευρές του ἀνὰ δύο ἀπέναντι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες καὶ οἱ γωνίες του ὀρθές·

σχ. 1

δηλαδή:

ΑΒ = ΔΓ καὶ ΑΔ = ΒΓ,

ΑΒ // ΔΓ καὶ ΑΔ // ΒΓ,

$\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΒΓΔ} = \widehat{ΓΔΑ} = \widehat{ΔΑΒ} = 1$ ὀρθή.

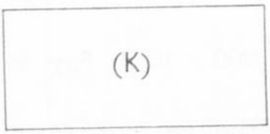
Ἑπομένως, τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓΔ ἔχει ἀκριβῶς τὰ ἴδια χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα ποὺ ἔχει καὶ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἕξι ἕδρες τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο** ἢ ἁπλῶς **ὀρθογώνιο.**

Σχῆμα ὀρθογωνίου ἔχουν τὰ δάπεδα τῶν αἰθουσῶν, οἱ διάδρομοι τοῦ σχολείου, ὁ πίνακας τῆς τάξεώς σας κλπ.

2. Σύγκριση ὀρθογωνίου καὶ τετραγώνου

Συγκρίνοντας τὸ ὀρθογώνιο πρὸς τὸ τετράγωνο, βρίσκομε ἀνάμεσά τους ὁμοιότητες καὶ διαφορές.



σχ. 2

σχ. 3

Α. Ὁμοιότητες

α) Τόσο τὸ ὀρθογώνιο (Κ) ὅσο καὶ τὸ τετράγωνο (Λ) εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα.

β) Ἔχουν 4 πλευρές.

γ) Ἔχουν 4 ὀρθὲς γωνίες.

δ) Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ καθενὸς εἶναι παράλληλες.

Β. Διαφορὲς

Οἱ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἀνὰ δύο ἴσες, ἐνῶ οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

τὸ τετράγωνο εἶναι ὀρθογώνιο μὲ ἴσες πλευρές.

Ἀσκήσεις

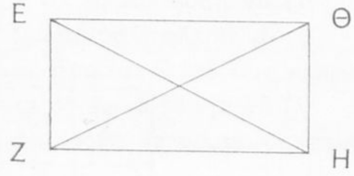
72. Νὰ σχεδιάσετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕνα ὀρθογώνιο μὲ βάση 10 ἑκατοστόμετρα καὶ ὕψος 5 ἑκατοστόμ.

73. Νὰ κατασκευάσετε ὅπως παραπάνω ἕνα ὀρθογώνιο καὶ νὰ μετρήσετε ὅλες τὶς πλευρές του. Τί παρατηρεῖτε;

35

3. Τὰ στοιχεῖα τοῦ ὀρθογωνίου

Οἱ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου, ὅπως βλέπομε στὸ σχ. 1, τέμνονται ἀνὰ δύο συνεχόμενες. Ἀπὸ τὶς δυὸ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου, ποὺ τέμνονται, ἡ μιὰ εἶναι ἡ βάση καὶ ἡ ἄλλη τὸ ὕψος του. Ἂν πάρωμε ὡς βάση τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ τὴν πλευρά του ΖΗ, τότε μποροῦμε νὰ πάρωμε ὡς ὕψος του τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ κάθετες σ' αὐτὴ πλευρές, τὴν ΕΖ ἢ τὴν ΘΗ. Ἡ βάση καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου λέγονται **διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.**



σχ. 1

Οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ ἴσες.

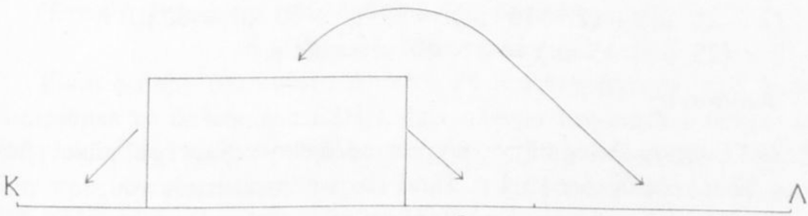
Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΕΗ, ποὺ ἔχει ἄκρα δυὸ μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ ὀρθογωνίου, λέγεται **διαγώνιος** τοῦ ὀρθογωνίου. Τὸ ὀρθογώνιο ἔχει δυὸ διαγωνίους. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ τέμνονται στὸ μέσο τους.

Κάθε διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου τὸ χωρίζει σὲ δυὸ ἴσα τρίγωνα.

4. Ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου

Τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου.

Τὸ σχ. 2 δείχνει πῶς βρίσκομε τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΛ μὲ μῆκος ἴσο μὲ τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ.



σχ. 2

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

περίμετρος ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ = ΕΖ + ΖΗ + ΗΘ + ΘΕ.

Ἐπειδὴ οἱ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἀνὰ δύο ἴσες, καταλαβαίνομε ὅτι:

(περίμετρος ὀρθογωνίου) = 2 × (μῆκος βάσεως) + 2 × (μῆκος ὕψους) ἢ
(περίμετρος ὀρθογωνίου) = 2 × (μῆκος βάσεως + μῆκος ὕψους).
δηλαδή:

τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου μποροῦμε νὰ βροῦμε:

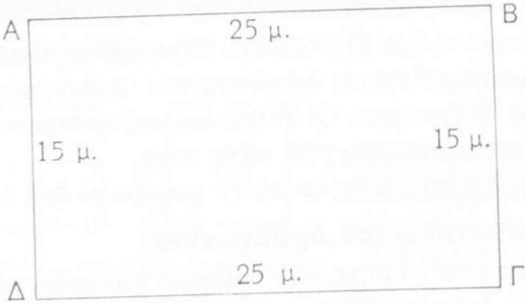
α) ἂν προσθέσωμε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του,

β) ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του ἐπὶ 2 καὶ στὴ συνέχεια προσθέσωμε τὰ δυὸ γινόμενα,

γ) ἂν προσθέσωμε τὰ μήκη τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους καὶ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἄθροισμά τους ἐπὶ 2.

Ἐφαρμογὴ

Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει βάση 25 μ. καὶ ὕψος 15 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του;



Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, ἔχομε:

(περ. ὀρθ.) = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ =
= 25 μ. + 15 μ. + 25 μ. + 15 μ. = 80 μ. ἢ
(2 × 25 μ.) + (2 × 15 μ.) = 50 μ. + 30 μ. = 80 μ. ἢ
2 × (25 μ. + 15 μ.) = 2 × 40 μ. = 80 μ.

Ἀσκήσεις

74. Ἕνας σχολικὸς κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος βάσεως 32 μ. καὶ ὕψους 15,4 μ. Ποιὰ εἶναι ἡ περίμετρός του;

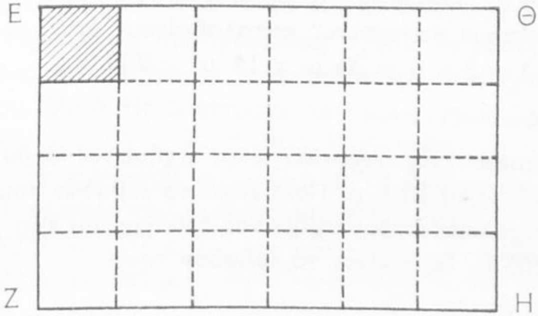
75. Νὰ σχηματίσετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμ. ὀργάνων ἕνα ὀρθογώνιο. Ἔπειτα νὰ μετρήσετε τὰ μήκη ποὺ ἔχουν οἱ πλευρές του καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό του.

36

5. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ τοῦ σχ. 1.

Μετροῦμε τὶς διαστάσεις του καὶ βρίσκομε:
(βάση) = 6 μέτρα, (ὕψος) = 4 μέτρα.



σχ. 1

Στὴ συνέχεια διαιροῦμε τὴ βάση ΖΗ τοῦ ὀρθογωνίου σὲ 6 ἴσα μέρη. Καταλαβαίνομε ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη εἶναι ἴσο μὲ 1 μέτρο.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα, στὰ ὁποῖα διαιρέσαμε τὴ βάση τοῦ ὀρθογωνίου χαράζομε παράλληλες πρὸς τὸ ὕψος του ΕΖ.

Ἔπειτα διαιροῦμε καὶ τὸ ὕψος ΕΖ τοῦ ὀρθογωνίου σὲ 4 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ τῆς διαιρέσεώς του χαράζομε παράλληλες πρὸς τὴ βάση ΖΗ.

Ἔτσι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου διαιρέθηκε σὲ

$$6 \times 4 = 24 \text{ ἴσα τετράγωνα}$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ 24 ἴσα τετράγωνα, στὰ ὁποῖα διαιρέθηκε τὸ ὀρθογώνιο ΕΖΗΘ, ἔχει πλευρὰ ἴση πρὸς 1 μέτρο καὶ ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴ μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν, δηλαδὴ ἴση πρὸς 1 τετραγωνικὸ μέτρο. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ καλύπτεται ἀπό:

$$6 \text{ μ.} \times 4 \text{ μ.} = 24 \text{ τετραγωνικὰ μέτρα.}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος β τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μῆκος υ τοῦ ὕψους του· δηλαδή:

(ἐμβ. ὀρθ.) = (βάση) × (ὕψος), ἢ πιὸ σύντομα

$$(\text{ἐμβ. ὀρθ.}) = \beta \times \upsilon.$$

Ἐφαρμογὴ

Τὸ προαύλιο ἑνὸς σχολείου σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει βάση 20 μ. καὶ ὕψος 14 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε παραπάνω, καταλαβαίνομε ὅτι:

(ἐμβ. ὀρθ.) $= \beta \times \upsilon = 20$ μ. $\times$ 14 μ. $=$ 280 τ.μ.

Ἀσκήσεις

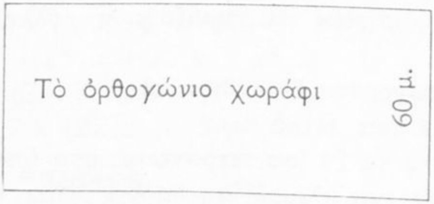
76. Τὸ γήπεδο ἑνὸς σχολείου εἶναι σχήματος ὀρθογωνίου μὲ βάση 35,8μ καὶ ὕψος 23,6 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

77. Ἕνας σχολικὸς κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει βάση 68 μ. καὶ ὕψος 35,365 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

37

Πρόβλημα. Ἡ περίμετρος ἑνὸς πεδινοῦ χωραφιοῦ μὲ σχῆμα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο εἶναι 420 μ. καὶ τὸ πλάτος του 60 μ. Πόσες δρχ. θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἰδιοκτήτης του, ἂν πουλήσῃ τὸ χωράφι του πρὸς 220 δρχ. τὸ τετρ. μέτρο;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος



Ἡ ἀξία 1 τ.μ.· 220 δρχ.

Περ. ὀρθ. χωραφιοῦ: 420 μ.

Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογώνιου χωραφιοῦ· 420 μ.,
β) τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογώνιου χωραφιοῦ· 60 μ.,
γ) ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ 1 τετρ. μέτρου· 220 δρχ.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος

α) Τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογώνιου χωραφιοῦ,
β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογώνιου χωραφιοῦ,

γ) τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἰδιοκτήτης, ἂν πουλήσῃ τὸ χωράφι.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἰδιοκτήτης, ἂν πουλήσῃ τὸ χωράφι, προηγουμένως πρέπει νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν του. Ἀλλά, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν του, μᾶς χρειάζονται οἱ διαστάσεις του. Ἀπὸ τὶς διαστάσεις του ὅμως γνωρίζομε μόνο τὸ πλάτος (ὕψος).

Τὴ βάση τοῦ χωραφιοῦ μποροῦμε νὰ τὴ βροῦμε ὡς ἑξῆς:

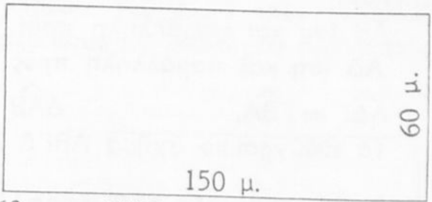
Ἐπειδὴ οἱ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἀνὰ δύο ἴσες, ἔχομε:

60 μ. + 60 μ. = 120 μ.

420 μ. — 120 μ. = 300 μ.

(300 μ.) : 2 = 150 μ.

Ἄρα, ἡ βάση τοῦ ὀρθογώνιου χωραφιοῦ εἶναι 150 μ.



Εἶναι πιὰ φανερὸ ὅτι

(ἐμβ.) = β × υ = 150 μ. × 60 μ. = 9000 τ.μ.

Ἑπομένως, ἂν ὁ ἰδιοκτήτης πουλήσῃ τὸ χωράφι, θὰ εἰσπράξῃ 9000 × 220 δρχ. = 1.980.000 δρχ.

Ἀπάντηση. Ἄρα, ὁ ἰδιοκτήτης, ἂν πουλήσῃ τὸ χωράφι, θὰ εἰσπράξῃ 1.980.000 δρχ.

Ἀσκήσεις

78. Σ' ἕνα οἰκόπεδο σχήματος ὀρθογωνίου μὲ περίμετρο 262 μ. καὶ μῆκος 88 μ. χτίστηκαν δυὸ σπίτια μὲ τετράγωνη κάτοψη καὶ μὲ πλευρὲς 11 μ. καὶ 13 μ. Πόσα τετρ. μέτρα τοῦ οἰκοπέδου ἀπομένουν ἀκάλυπτα;

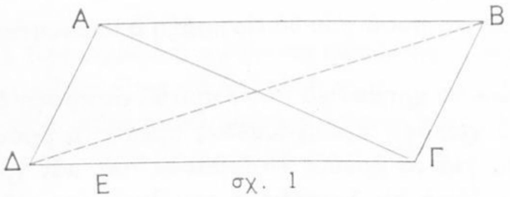
79. Σ' ἕνα ἀγρόκτημα σχήματος ὀρθογωνίου μὲ περίμετρο 334 μ. καὶ πλάτος 42 μ., πρόκειται νὰ φυτευτοῦν 210 ἐλαιόδεντρα. Πόσα τετρ. μέτρα ἀντιστοιχοῦν σὲ καθένα ἀπὸ αὐτά;

Γ. ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

38

1. Ἔννοια τοῦ παραλληλογράμμου

Ἐξετάζοντας μὲ προσοχὴ τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓΔ τοῦ σχ. 1 διαπιστώνομε ὅτι:



σχ. 1

α) οἱ πλευρές του τέμονται ἀνὰ δύο συνεχόμενες,

β) οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἀνὰ δύο ἴσες καὶ παράλληλες,

γ) οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἀνὰ δύο ἴσες.

Δηλαδή:

ΑΒ ἴση καὶ παράλληλη πρὸς τὴ ΔΓ,

ΑΔ ἴση καὶ παράλληλη πρὸς τὴ ΒΓ,

$\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma B A}$, $\widehat{\Delta A B} = \widehat{\Delta\Gamma B}$.

Τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓΔ λέγεται **παραλληλόγραμμο.**

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ παραλληλογράμμου

Ἡ βάση. Ὡς βάση τοῦ παραλληλογράμμου παίρνομε κατὰ προτίμηση τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ μεγαλύτερες πλευρές του.

Τὸ ὕψος. Τὸ κάθετο εὐθύγραμμο τμῆμα πρὸς τὴ βάση καὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰ ποὺ τὰ ἄκρα του βρίσκονται ἐπάνω σ' αὐτὲς τὶς πλευρές, λέγεται ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἂν πάρωμε ὡς βάση τὴν πλευρὰ ΔΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τοῦ σχ. 1, τότε τὸ ὕψος του θὰ εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΕ.

Τὸ ὕψος εἶναι πάντοτε κάθετο ἐπάνω στὴ βάση.

Ἡ διαγώνιος. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΓ ποὺ ἔχει ἄκρα δυὸ μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ παραλληλογράμμου, λέγεται διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου.

Κάθε παραλληλόγραμμο ἔχει δυὸ διαγωνίους, οἱ ὁποῖες τέμνονται στὸ μέσο τους.

Κάθε διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου τὸ χωρίζει σὲ δυὸ ἴσα τρίγωνα.

Ἡ περίμετρος. Τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου.

Βρίσκομε τὴν περίμετρο τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπως ἀκριβῶς καὶ τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἀσκήσεις

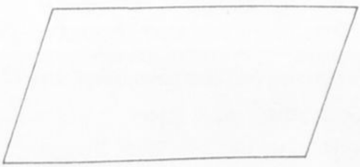
80. Ἕνα προαύλιο σχολείου σχήματος παραλληλογράμμου ἔχει μεγάλη πλευρὰ 85,40 μ. καὶ μικρὴ 13,60 μ. Ποιὰ εἶναι ἡ περίμετρός του;

81. Νὰ σχηματίσετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕνα παραλληλόγραμμο καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό του.

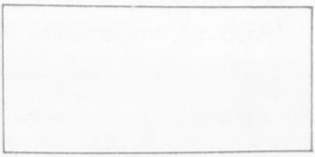
39

3. Σύγκριση παραλληλογράμμου καὶ ὀρθογωνίου

Συγκρίνοντας τὸ παραλληλόγραμμο τοῦ σχ. 1 πρὸς τὸ ὀρθογώνιο τοῦ σχ. 2, βρίσκομε μεταξύ τους τὶς ἀκόλουθες ὁμοιότητες καὶ διαφορές.



σχ. 1



σχ. 2

Α. Ὁμοιότητες

α) Τόσο τὸ παραλληλόγραμμο ὅσο καὶ τὸ ὀρθογώνιο εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα.

β) Ἔχουν 4 πλευρές.

γ) Οἱ ἀπέναντι πλευρές τους εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες, ἀνὰ δύο.

Β. Διαφορὲς

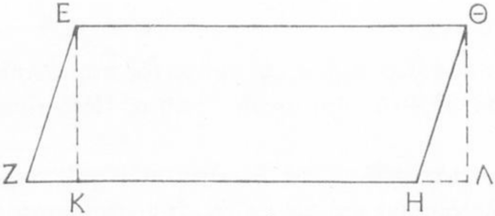
α) Οἱ πλευρὲς τοῦ παραλληλογράμμου μπορεῖ καὶ νὰ μὴν εἶναι κάθετες ἀνὰ δύο συνεχόμενες· τοῦ ὀρθογωνίου τέμνονται καθέτως.

β) Οἱ γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀνὰ δύο ἀπέναντι ἴσες· τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ὅλες ἴσες (ὀρθές).

4. Ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ τοῦ σχ. 3.

Μετροῦμε τὴ βάση καὶ τὸ ὕψος του καὶ βρίσκομε ὅτι:



σχ. 3

βάση ΖΗ = 5 έκ., ΰψος ΕΚ = 2 έκ.

Στή συνέχεια κόβομε τό τρίγωνο ΕΚΖ καί τό μεταφέρομε στή θέση ΘΛΗ. Έτσι τό παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ μετασχηματίζεται στό ορθογώνιο ΕΚΛΘ, τό όποιο έχει:

βάση ΚΛ = ΖΗ = 5 έκ. καί ΰψος ΕΚ = 2 έκ.

καί εμβαδόν, 5 έκ. × 2 έκ. = 10 τ. έκ.

Από τά παραπάνω συμπεραίνομε ότι:

γιά νά βροΰμε τό εμβαδόν τοΰ παραλληλογράμμου πολαπλασιάζομε τό μήκος β τής βάσεως επί τό μήκος υ τοΰ ΰψους του:

δηλαδή: (έμβ. παραλ.) = β × υ.

Ασκήσεις

82. Ένα χωράφι σχήματος παραλληλογράμμου έχει βάση 124,25μ. καί ΰψος 54,5 μ. Ποιό είναι τό εμβαδόν του;

83. Τό πάρκο μιας πόλεως έχει σχήμα παραλληλογράμμου μέ βάση 87,34 μ. καί εμβαδόν 4733,828 τ.μ.

Ποιό είναι τό ΰψος του;

40

Δ. Ο ΡΟΜΒΟΣ

1. Έννοια τοΰ ρόμβου

Εξετάζοντας προσεχτικά τό ευθύγραμμο σχήμα ΑΒΓΔ τοΰ σχ.1, διαπιστώνομε ότι:

α) οί πλευρές του είναι όλες ίσες μεταξύ τους καί τέμνονται ανά δύο συνεχόμενες,

β) οί πλευρές του είναι ανά δύο απέναντι παράλληλες,

γ) οί γωνίες του είναι ανά δύο απέναντι ίσες·

δηλαδή:

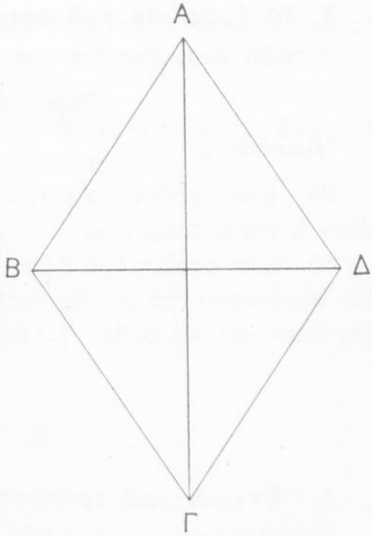
ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ

ΑΒ // ΔΓ καὶ ΒΓ // ΑΔ

$\widehat{BA\Delta} = \widehat{B\Gamma\Delta}$ $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma}$.

Τὸ εὐθύγραμμο· αὐτὸ σχῆμα λέγεται **ρόμβος.**

Ὁ ρόμβος εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο μὲ ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες.



σχ. 1

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ ρόμβου

Ἡ βάση. Ὡς βάση τοῦ ρόμβου μποροῦμε νὰ πάρωμε ὁποιαδήποτε πλευρά του.

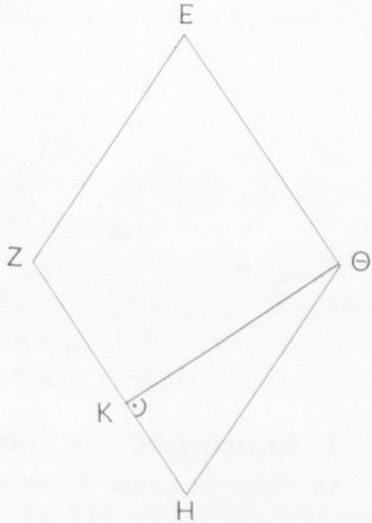
Τὸ ὕψος. Τὸ κάθετο εὐθύγραμμο τμῆμα πρὸς τὴ βάση καὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰ τοῦ ρόμβου ποὺ τὰ ἄκρα του βρίσκονται πάνω σ' αὐτὲς τὶς πλευρές, λέγεται ὕψος τοῦ ρόμβου.

Ἂν πάρωμε ὡς βάση τὴν πλευρὰ ΖΗ τοῦ ρόμβου ΕΖΗΘ τοῦ σχ. 2, τότε ὕψος του θὰ εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΘΚ.

Ἡ διαγώνιος. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΖΘ ποὺ ἔχει ἄκρα δυὸ μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ ρόμβου, λέγεται διαγώνιος τοῦ ρόμβου.

Κάθε ρόμβος ἔχει δυὸ διαγωνίους ποὺ τέμνονται καθέτως στὸ μέσο τους.

Κάθε διαγώνιος τοῦ ρόμβου τὸν χωρίζει σὲ δυὸ ἴσα τρίγωνα.



σχ. 2

Ἡ περίμετρος. Τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ρόμβου λέγεται περίμετρος τοῦ ρόμβου.

3. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου

Ἐπειδὴ ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο, ἐννοῦμε ὅτι:

$$(\text{ἐμβ. ρόμ.}) = \beta \times \upsilon$$

Ἀσκήσεις

84. Ἕνα ἀγρόκτημα ἔχει σχῆμα ρόμβου μὲ πλευρὰ 328 μ. Ποιὰ εἶναι ἡ περίμετρός του;

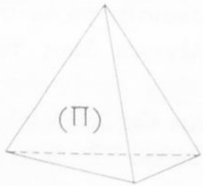
85. Ἕνας ρόμβος ἔχει βάση 10 ἑκατοστομ. καὶ ὕψος 5 ἑκατοστόμ. Νὰ σχεδιάσετε τὸ ρόμβο αὐτὸ μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων καὶ νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδόν του.

Ε. ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

41
1. Ἔννοια τοῦ τριγώνου

Τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓ τοῦ σχ. 1 μοιάζει μὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἕδρες τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας (Π) τοῦ σχ. 2.

σχ. 2



σχ. 1

Ὅπως βλέπομε, οἱ πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ τοῦ σχήματος αὐτοῦ συναντιοῦνται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν τρεῖς γωνίες.

Γι' αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμο αὐτὸ σχῆμα ὀνομάζεται **τρίγωνο.**

Τρίγωνο ὀνομάζεται τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ποὺ ἔχει τρεῖς πλευρές.

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου

Οἱ πλευρές. Ὅπως εἴπαμε καὶ παραπάνω τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ (σχ. 1), στὰ ὁποῖα περατώνεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, λέγονται πλευρές του.

Ἡ βάση. Ὡς βάση τοῦ τριγώνου μποροῦμε νὰ πάρωμε μιὰ ἀπὸ τὶς πλευρές του.

Οἱ κορυφές. Τὰ σημεῖα, στὰ ὁποῖα συναντιοῦνται ἀνὰ δυὸ οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου, λέγονται κορυφὲς τοῦ τριγώνου.

Κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς κορυφές.

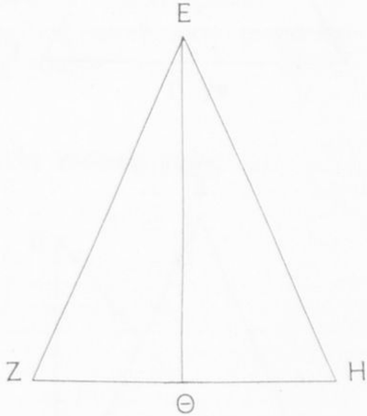
Οἱ γωνίες. Σὲ κάθε κορυφὴ τοῦ τριγώνου συναντιοῦνται ἀνὰ δυὸ οἱ πλευρές του καὶ σχηματίζουν τρεῖς γωνίες.

Τὸ ὕψος. Τὸ κάθετο πρὸς τὴ βάση εὐθύγραμμο τμῆμα, ποὺ τὸ ἕνα ἄκρο του εἶναι πάνω στὴ βάση καὶ τὸ ἄλλο ἡ ἀπέναντι κορυφή, λέγεται ὕψος τοῦ τριγώνου.

Ἂν πάρωμε ὡς βάση τὴν πλευρὰ ΖΗ τοῦ τριγώνου ΕΖΗ, στὸ σχ. 3, τότε ὕψος του θὰ εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΕΘ.

Ἡ περίμετρος. Τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου λέγεται περίμετρος τοῦ τριγώνου.

Τὸ τρίγωνο, ἐπειδὴ ἔχει τρεῖς πλευρές, ὀνομάζεται καὶ **τρίπλευρο.**



σχ. 3

Ἀσκήσεις

86. Νὰ σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα καὶ νὰ μετρήσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὶς γωνίες του.

87. Νὰ σχηματίσετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Ἔπειτα νὰ τὸ διαιρέσετε σὲ δυὸ τρίγωνα καὶ νὰ βρῆτε τὶς περιμέτρους τους. Τί παρατηρεῖτε;

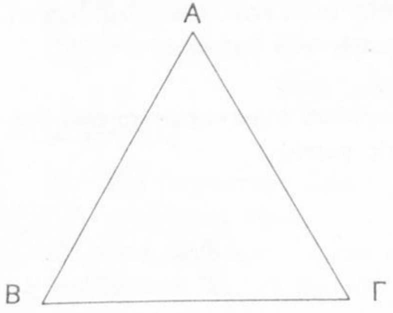
42

3. Εἴδη τριγώνων

α) Διάκριση τῶν τριγώνων ἀπὸ τὶς πλευρές τους.

1. Ἰσόπλευρο τρίγωνο

Ἐξετάζοντας προσεχτικὰ τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ σχ. 1, διαπιστώνομε ὅτι αὐτὲς εἶναι ἴσες μεταξύ τους·



σχ. 1

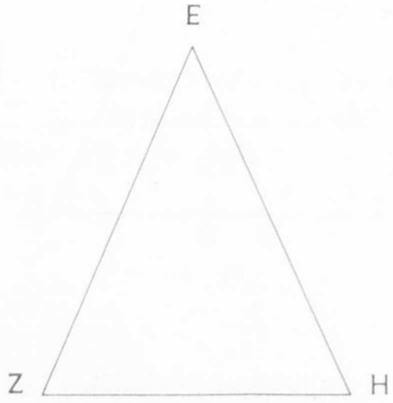
δηλαδή: $AB = B\Gamma = \Gamma A$

Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὀνομάζεται **ἰσόπλευρο τρίγωνο.**

Ἰσόπλευρο τρίγωνο λέγεται τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες.

Τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο λέγεται καὶ ἰσογώνιο, διότι ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

2. Ἰσοσκελὲς τρίγωνο.



σχ. 2

Ἐξετάζοντας τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΕΖΗ τοῦ σχ. 2, παρατηροῦμε ὅτι:

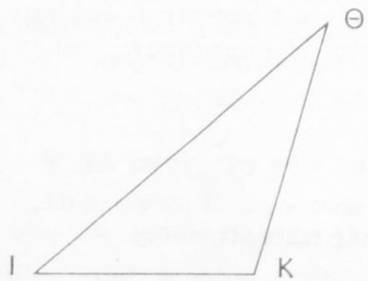
$EZ = ZH$.

Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὀνομάζεται **ἰσοσκελές.**

Ἰσοσκελὲς τρίγωνο λέγεται τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει δυὸ πλευρές του ἴσες.

Οἱ γωνίες, τὶς ὁποῖες σχηματίζει ἡ βάση τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρές του, εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

3. Σκαληνὸ τρίγωνο



σχ. 3

Ἐξετάζοντας τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου ΘΙΚ τοῦ σχ. 3 βρίσκομε ὅτι αὐτὲς εἶναι ἄνισες.

Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὀνομάζεται **σκαληνὸ τρίγωνο.**

Σκαληνὸ τρίγωνο λέγεται τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει τὶς πλευρές του ἀνὰ δύο ἄνισες.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:
τὰ τρίγωνα, ἀνάλογα μὲ τὶς πλευρές τους, διακρίνονται σὲ ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά.

Ἀσκήσεις

88. Νὰ σχεδιάσετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕνα ἰσοσκελὲς καὶ ἕνα σκαληνὸ τρίγωνο. Ἔπειτα μὲ τὸ διαβήτη νὰ συγκρίνετε τὶς πλευρὲς καθενὸς ἀπὸ αὐτά. Τί παρατηρεῖτε;

89. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς χωραφιοῦ μὲ σχῆμα ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 408,45 μ. Ποιὰ εἶναι ἡ περίμετρός του;

43

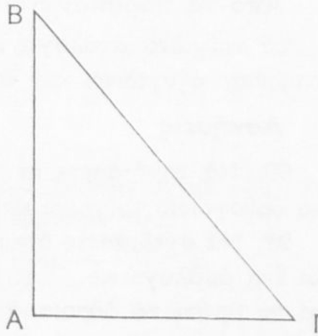
β) Διάκριση τῶν τριγώνων ἀπὸ τὶς γωνίες τους

1. Ὀρθογώνιο τρίγωνο.

Ἐξετάζοντας μὲ προσοχὴ τὶς γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τοῦ σχ. 1 βρίσκομε ὅτι ἀπὸ αὐτὲς ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ὀρθή, ἐνῶ οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ὀξεῖες.

Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὀνομάζεται **ὀρθογώνιο τρίγωνο**.

Ὀρθογώνιο τρίγωνο λέγεται τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες του ὀρθή.



σχ. 1

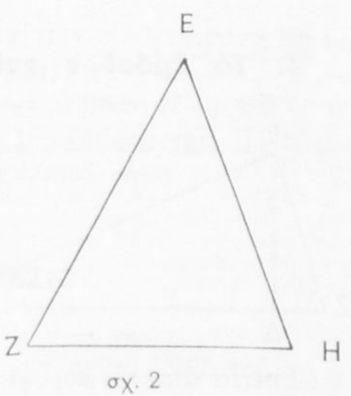
Ἡ πλευρὰ ΒΓ, ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ὀρθὴ γωνία $\widehat{A}$, λέγεται **ὑποτείνουσα** τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ.

Ὁ γνώμονας εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο.

2. Ὀξυγώνιο τρίγωνο.

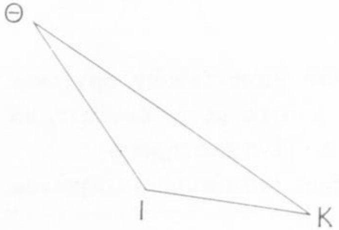
Ὅπως βλέπομε στὸ σχ. 2, τὸ τρίγωνο ΕΖΗ ἔχει ὅλες τὶς γωνίες του ὀξεῖες.

Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὀνομάζεται **ὀξυγώνιο τρίγωνο**.



σχ. 2

Ὀξυγώνιο τρίγωνο λέγεται τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς γωνίες του ὀξεῖες.



σχ. 3

3. Ἀμβλυγώνιο τρίγωνο.

Ἐξετάζοντας τὶς γωνίες τοῦ τριγώνου ΘΙΚ τοῦ σχ. 3, βρίσκομε ὅτι ἀπὸ αὐτὲς ἡ γωνία $\widehat{\mathrm{I}}$ εἶναι ἀμβλεία, ἐνῶ οἱ γωνίες $\widehat{\Theta}$ καὶ $\widehat{\mathrm{K}}$ εἶναι ὀξεῖες.

Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὀνομάζεται **ἀμβλυγώνιο τρίγωνο**.

Ἀμβλυγώνιο τρίγωνο λέγεται τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες του ἀμβλεία.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

τὰ τρίγωνα ἀνάλογα μὲ τὶς γωνίες τους διακρίνονται σὲ ὀρθογώνια, ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

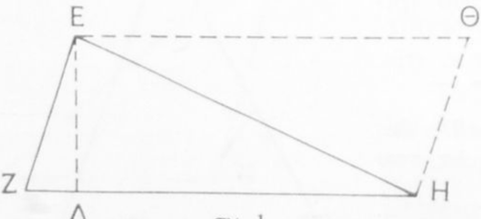
Ἀσκήσεις

90. Νὰ σχεδιάσετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο καὶ νὰ μετρήσετε τὶς ὀξεῖες γωνίες του.

91. Νὰ σχεδιάσετε ὅπως παραπάνω δυὸ τρίγωνα ἕνα ὀξυγώνιο καὶ ἕνα ἀμβλυγώνιο. Ἔπειτα νὰ μετρήσετε τὶς γωνίες τοῦ πρώτου καὶ νὰ βρῆτε τὸ ἄθροισμά τους. Τὸ ἴδιο νὰ κάνετε καὶ γιὰ τὸ δεύτερο τριγωνο. Τί παρατηρεῖτε;

44

4. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου



σχ. 1

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΕΖΗ τοῦ σχ. 1.

Μετροῦμε τὶς διαστάσεις του καὶ βρίσκομε ὅτι:
(βάση) = ΖΗ = 5 ἑκ.
(ὕψος) = ΕΔ = 2 ἑκ.

Ἔπειτα ἀπὸ τὶς κορυφὲς Ε καὶ Η τοῦ τριγώνου φέρομε εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὴ βάση ΖΗ καὶ τὴν πλευρά του ΕΖ, ἀντιστοίχως. Οἱ εὐθεῖες αὐτὲς συναντιοῦνται στὸ σημεῖο Θ. Ἔτσι σχηματίζεται τὸ πραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ, ποὺ ἔχει:

$$(\text{βάση}) = ΖΗ = 5 \text{ ἑκ.}, \ (\text{ὕψος}) = ΕΔ = 2 \text{ ἑκ.}$$

Ἑπομένως ἔχομε:

$$(\text{ἐμβ. παραλληλογράμμου } ΕΖΗΘ) = β \times υ = 5 \text{ ἑκ.} \times 2 \text{ ἑκ.} = 10 \text{ τ.ἑκ.}$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τρίγωνο ΕΖΗ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ, ἕπεται ὅτι:

$$(\text{ἐμβαδὸν τριγώνου } ΕΖΗ) = \frac{10 \text{ τ.ἑκ.}}{2} = \frac{5 \text{ ἑκ.} \times 2 \text{ ἑκ.}}{2} = \frac{β \times υ}{2}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος β τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος υ τοῦ ὕψους του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2, δηλαδή:

$$(\text{ἐμβ. τριγ.}) = \frac{β \times υ}{2}$$

Ἐφαρμογὴ

Τὸ προαύλιο ἑνὸς σχολείου ἔχει σχῆμα τριγωνικὸ μὲ βάση 60 μέτρα καὶ ὕψος 15 μέτρα. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε παραπάνω, καταλαβαίνομε ὅτι:

$$(\text{ἐμβ. τριγ.}) = \frac{β \times υ}{2} = \frac{60 \text{ μ.} \times 15 \text{ μ.}}{2} = \frac{900 \text{ τ.μ.}}{2} = 450 \text{ τ.μ.}$$

Ἀσκήσεις

92. Ἕνας σχολικὸς κῆπος ἔχει σχῆμα τριγωνικὸ μὲ βάση 68 μ. καὶ ὕψος 35 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

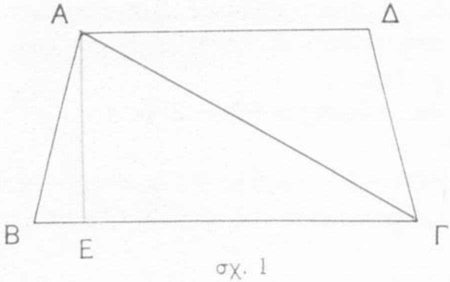
93. Ἕνα χωράφι ἔχει σχῆμα τριγωνικὸ μὲ βάση 126 μ. καὶ ὕψος 45 μ. Πρόκειται νὰ φυτέψωμε σ' αὐτὸ 105 ἐλαιόδεντρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἀντιστοιχοῦν σὲ κάθε ἐλαιόδεντρο;

ΣΤ. ΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

45

1. Ἔννοια τοῦ τραπεζίου

Ἐξετάζοντας μὲ προσοχὴ τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓΔ τοῦ σχ. 1,



σχ. 1

βρίσκομε ὅτι ἀπὸ τὶς ἀπέναντι πλευρές του οἱ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλες. Αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ὀνομάζεται **τραπέζιο.**

Τραπέζιο λέγεται τὸ τετράπλευρο ποὺ ἔχει δυὸ πλευρές του παράλληλες.

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ τραπεζίου

Βάσεις. Οἱ δυὸ παράλληλες πλευρὲς τοῦ τραπεζίου λέγονται βάσεις του.

Οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου μπορεῖ καὶ νὰ μὴν εἶναι ἴσες. Ἡ μεγαλύτερη τότε ἀπὸ αὐτὲς ὀνομάζεται μεγάλη βάση, ἐνῶ ἡ μικρότερη μικρὴ βάση. Τὸ μῆκος τῆς μεγάλη βάσεως τὸ παριστάνομε συνήθως, μὲ τὸ Β καὶ τῆς μικρῆς μὲ τὸ β μικρό.

Τὸ ὕψος. Ἡ ἀπόσταση ποὺ ὑπάρχει ἀνάμεσα στὶς δυὸ βάσεις τοῦ τραπεζίου ὀνομάζεται ὕψος τοῦ τραπεζίου.

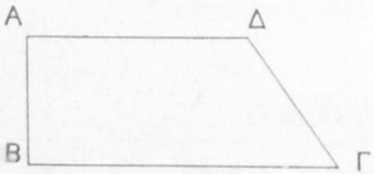
Τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα κάθετο καὶ στὶς δυὸ βάσεις του, καὶ μὲ τὰ ἄκρα του πάνω στὶς βάσεις.

Ἡ διαγώνιος. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει δυὸ μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ τραπεζίου, λέγεται διαγώνιος τοῦ τραπεζίου. Τὸ τραπέζιο ἔχει δυὸ διαγωνίους.

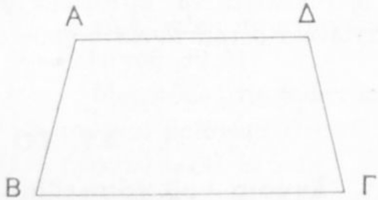
Κάθε διαγώνιος χωρίζει τὸ τραπέζιο σὲ δυὸ ὄχι ἀναγκαστικὰ ἴσα τρίγωνα.

Ἡ περίμετρος. Τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου λέγεται περίμετρος τοῦ τραπεζίου.

3. Εἰδικὰ τραπέζια



σχ. 2



σχ. 3

Τὸ ὀρθογώνιο τραπέζιο

Ὀρθογώνιο τραπέζιο εἶναι τὸ τραπέζιο, ποὺ ἡ μιὰ τουλάχιστον πλευρά του εἶναι κάθετη πρὸς τὶς βάσεις του (σχ. 2).

Τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιο

Ἰσοσκελὲς τραπέζιο εἶναι τὸ τραπέζιο, ποὺ ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὲς μὴ παράλληλες καὶ ἴσες καθὼς καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο (σχ. 3).

Ἀσκήσεις

94. Νὰ σχηματίσετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων στὸ τετράδιό σας ἕνα τραπέζιο. Ἔπειτα νὰ ὀνομάσετε καὶ νὰ δείξετε ὅλα τὰ στοιχεῖα του.

95. Ἕνας σχολικὸς κῆπος ἔχει σχῆμα ἰσοσκελοῦς τραπεζίου μὲ βάσεις 95 μ. καὶ 73μ. καὶ πλευρὲς ποὺ καθεμιὰ εἶναι ἴση πρὸς 36,5μ. Πρόκειται νὰ περιφραχθῆ μὲ 4 σειρὲς ἀγκαθωτὸ σύρμα, ποὺ τὸ μέτρο του στοιχίζει 3,50 δρχ. Πόσο θὰ στοιχίση ἡ περίφραξή του;

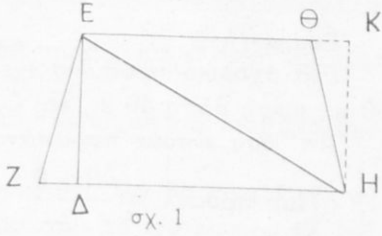
46

4. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΕΖΗΘ τοῦ σχ. 1.

Μετροῦμε τὶς βάσεις καὶ τὸ ὕψος του καὶ βρίσκομε:
(μεγάλη βάση) = ΖΗ = Β = 4 ἑκ.,
(μικρὴ βάση) = ΕΘ = β = 3 ἑκ.,
(ὕψος) = ΕΔ = γ = 2 ἑκ.

Ἔπειτα φέρομε τὴ διαγώνιο ΕΗ τοῦ τραπεζίου.



σχ. 1

Ἔτσι τὸ τραπέζιο ΕΖΗΘ διαιρέθηκε στὰ τρίγωνα ΕΖΗ καὶ ΕΗΘ.

Ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτά, τὸ ΕΖΗ ἔχει:

(βάση) = ΖΗ = Β = 4 ἑκ. καὶ (ὕψος) = ΕΔ = υ = 2 ἑκ.,

ἐνῶ τὸ ΕΗΘ ἔχει:

(βάση) = ΕΘ = β = 3 ἑκ. καὶ (ὕψος) = ΗΚ = ΕΔ = υ = 2 ἑκ.,

Ἑπομένως:

$$(\text{ἐμβ. τριγ. ΕΖΗ}) = \frac{B \times \upsilon}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \text{ τ. ἑκ.}$$

$$(\text{ἐμβ. τριγ. ΕΗΘ}) = \frac{\beta \times \upsilon}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ τ. ἑκ.}$$

Καὶ ἐπειδὴ (ἐμβ. τραπ. ΕΖΗΘ) = (ἐμβ. τριγ. ΕΖΗ) + (ἐμβ. τριγ. ΕΗΘ), θὰ εἶναι (ἐμβ. τραπ. ΕΖΗΘ) = 4 τ. ἑκ. + 3 τ. ἑκ. = 7 τ. ἑκ. ἢ ἀλλιῶς:

$$(\text{ἐμβ. τραπ. ΕΖΗΘ}) = \frac{B \times \upsilon}{2} + \frac{\beta \times \upsilon}{2} = \frac{4 \times 2}{2} + \frac{3 \times 2}{2} =$$

$$= \frac{(4 \times 2) + (3 \times 2)}{2} = \frac{(4 + 3) \times 2}{2} = \frac{4 + 3}{2} \times 2 =$$

$$= \frac{7}{2} \times 2 = 7 \quad (7 \text{ τ. ἑκ.})$$

Βρήκαμε δηλαδὴ ὅτι:

$$(\text{ἐμβ. τραπ. ΕΖΗΘ}) = \frac{4 + 3}{2} \times 2 \quad (\text{τ. ἑκ.})$$

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, πολλαπλασιάζομε τὸ μισὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του, δηλαδή:

$$(\text{ἐμβ. τραπ.}) = \frac{B + \beta}{2} \times \upsilon$$

Ἐφαρμογὴ

Ἕνα σχολικὸ προαύλιο ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ μεγάλη βάση 60 μ., μικρὴ βάση 40 μ., καὶ ὕψος 10 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε παραπάνω, ἐννοοῦμε ὅτι:

$$(\text{ἐμβ. προαυλ.}) = \frac{B + \beta}{2} \times \upsilon = \frac{60 \text{ μ.} + 40 \text{ μ.}}{2} \times 10 \text{ μ.} =$$

$$= \frac{100 \text{ μ.}}{2} \times 10 \text{ μ.} = 50 \text{ μ.} \times 10 \text{ μ.} = 500 \text{ τ.μ.}$$

Ἀσκήσεις

96. Ἕνα χωράφι σχήματος τραπεζίου, μὲ μεγάλη βάση 628 μ., μικρὴ βάση 332 μ. καὶ ὕψος 115,8 μ. ἀγοράστηκε πρὸς 45 δρχ. τὸ τετρ. μέτρο. Πόσο στοίχισε στὸν ἀγοραστή;

97. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ μικρὴ βάση 24 μ.

καὶ μεγάλη διπλάσια ἀπὸ τὴ μικρή. Τὸ ὕψος του ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/4 τῆς μεγάλης βάσεως. Πουλήθηκε πρὸς 725 δρχ. τὸ τετρ. μέτρο. Ποιά ἦταν ἡ ἀξία του;

Ζ. Ο ΚΥΚΛΟΣ

47

1. Ἔννοια τοῦ κύκλου

Ἐξετάζοντας τὸ ἐπίπεδο τμῆμα Ο τοῦ σχ. 1, παρατηροῦμε ὅτι τοῦτο μοιάζει μὲ τὴν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου ἢ μὲ τὶς δυὸ βάσεις ἑνὸς κυλίνδρου.

Τὸ ἐπίπεδο αὐτὸ τμῆμα ὀνομάζεται **κύκλος**. Ὁ κύκλος περατώνεται σὲ μιὰ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **περιφέρεια**.

σχ. 1

Περιφέρεια κύκλου μπορεῖτε νὰ χαράξετε μὲ τὸ διαβήτη σας ὡς ἑξῆς:

Στερεώνετε τὰ σκέλη τοῦ διαβήτη ἔτσι, ὥστε νὰ μὴ μεταβάλλεται ἡ γωνία τους. Στὴ συνέχεια καρφώνετε ἐλαφρὰ τὴν αἰχμὴ τοῦ ἑνὸς σκέλους του σ' ἕνα σημεῖο Ο τοῦ τετραδίου σας καὶ περιφέρετε τὸν διαβήτη σὲ τρόπο, ποὺ ἡ γραφίδα τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ ἐγγίζη συνεχῶς τὸ ἐπίπεδο τοῦ τετραδίου.

Ἔτσι ἡ γραφίδα τοῦ διαβήτη θὰ χαράξη μιὰ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, δηλαδὴ μιὰ περιφέρεια κύκλου.

Τὸ σημεῖο Ο, στὸ ὁποῖο στηρίξαμε τὴν αἰχμὴ τοῦ διαβήτη, ὀνομάζεται **κέντρο τοῦ κύκλου.**

Ἀπὸ τὰ παραπάνω καταλαβαίνομε ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὸ κέντρο του Ο.

Κύκλος λέγεται τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ περατώνεται σὲ μιὰ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται μέσα σ' αὐτὴ καὶ λέγεται κέντρο τοῦ κύκλου.

Σχῆμα κύκλου ἔχουν οἱ βάσεις τῶν κυλινδρικῶν καὶ τῶν κωνικῶν σωμάτων ἢ ἀντικειμένων, τὰ κέρματα, οἱ δίσκοι τοῦ πικάπ, μερικὲς τομὲς σφαιρικῶν σωμάτων καὶ διάφορες ἄλλες ἐπιφάνειες.

'Ασκήσεις

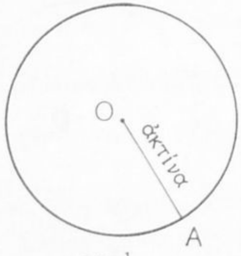
98. Νὰ χαράξετε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη ἕνα κύκλο καὶ νὰ σημειώσετε τὸ κέντρο του.

99. Νὰ βρῆτε καὶ νὰ ὀνομάσετε διάφορες ἐπιφάνειες ποὺ ἔχουν σχῆμα κύκλου.

48

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ κύκλου

Ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΟΑ (σχ. 1) ἔχει ἄκρα τὸ κέντρο τοῦ κύκλου Ο κι ἕνα σημεῖο Α τῆς περιφέρειάς του. Τὸ τμῆμα αὐτὸ λέγεται **ἀκτίνα τοῦ κύκλου.**



σχ. 1

'Ακτίνα κύκλου λέγεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὸ κέντρο του καὶ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφέρειάς του.

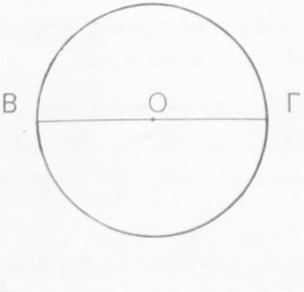
Σὲ κάθε κύκλο μποροῦμε νὰ χαράξωμε ἄπειρες ἀκτίνες.

'Επειδή, ὅπως εἴδαμε στὸ 47ο μάθημα, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ τὸ κέντρο του, συμπεραίνομε ὅτι:

ὅλες οἱ ἀκτίνες τοῦ ἴδιου κύκλου εἶναι ἴσες.

Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΟΓ τοῦ σχ. 2 περνάει ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου Ο καὶ τελειώνει σὲ δυὸ σημεῖα τῆς περιφέρειάς του.

Τὸ τμῆμα αὐτὸ λέγεται **διάμετρος τοῦ κύκλου.**



σχ. 2

Διάμετρος ἑνὸς κύκλου λέγεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρο του καὶ ἔχει ἄκρα δύο σημεῖα τῆς περιφέρειάς του.

Σὲ κάθε κύκλο μποροῦμε νὰ χαράξωμε ἄπειρες διαμέτρους.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ἀκτίνα του. Ἑπομένως:

ὅλες οἱ διάμετροι τοῦ ἴδιου κύκλου εἶναι ἴσες.

Ἂν διπλώσωμε ἕναν κύκλο στὸ μῆκος μιᾶς ἀπ' τὶς διαμέτρους του, θὰ διαπιστώσωμε ὅτι ἡ διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλο σὲ δυὸ ἴσα ἐπίπεδα μέρη, τὰ **ἡμικύκλια,** καὶ τὴν περιφέρειά του σὲ δυὸ ἴσα καμπύλα μέρη, τὶς **ἡμιπεριφέρειες.**

Ἀσκήσεις

100. Νὰ χαράξετε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη ἕνα κύκλο μὲ ἀκτίνα 0,05 μ. καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὴ διάμετρό του.

101. Ἡ διάμετρος μιᾶς κυκλικῆς πρασιᾶς ἑνὸς πάρκου εἶναι 35,5 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἀκτίνα της;

49

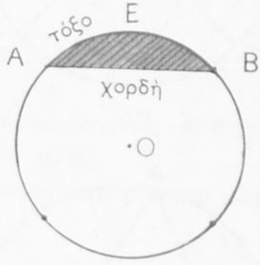
3. Τὰ μέρη τοῦ κύκλου

Ἐπάνω στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο τοῦ σχ. 1 παίρνομε δυὸ σημεῖα Α καὶ Β. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ ὁρίζουν ἕνα μέρος τῆς περιφέρειας, τὸ ΑΕΒ.

Τὸ μέρος αὐτὸ ὀνομάζεται **τόξο.**

Τόξο λέγεται ἕνα μέρος ἀπὸ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Οἱ ἡμιπεριφέρειες τοῦ κύκλου εἶναι τόξα.



σχ. 1

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἔχει ἄκρα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΑΕΒ}$ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου Ο τοῦ σχ. 1.

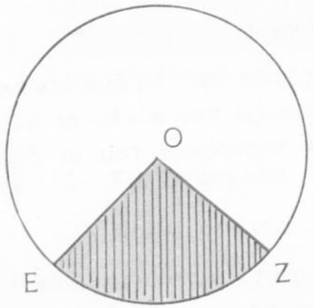
Τὸ εὐθύγραμμο αὐτὸ τμῆμα ὀνομάζεται **χορδή.**

Χορδὴ ἑνὸς τόξου λέγεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου.

Ἀνάμεσα στὸ τόξο $\overset{\frown}{ΑΕΒ}$ καὶ στὴ χορδή του ΑΒ περιέχεται ἕνα μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ΑΕΒΑ, (σχ. 1).

Τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ κύκλου ὀνομάζεται **κυκλικὸ τμῆμα.**

Κυκλικὸ τμῆμα λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου ποὺ τελειώνει σ' ἕνα τόξο καὶ τὴ χορδή του.

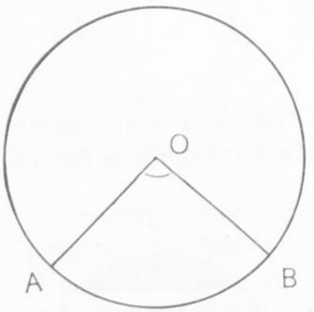


σχ. 2

Ἀνάμεσα στὸ τόξο ΕΖ καὶ τὶς ἀκτίνες ΟΕ καὶ ΟΖ τοῦ κύκλου Ο, ποὺ βλέπετε στὸ σχ. 2, περιέχεται ἕνα μέρος τοῦ κύκλου.

Τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ κύκλου ὀνομάζεται **κυκλικὸς τομέας.**

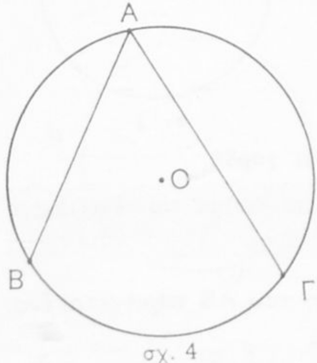
Κυκλικὸς τομέας λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου ποὺ τελειώνει σ' ἕνα τόξο καὶ στὶς ἀκτίνες, οἱ ὁποῖες καταλήγουν στὰ ἄκρα τοῦ τόξου.



σχ. 3

Στὸν κύκλο Ο τοῦ σχ. 3 χαράζομε δυὸ ἀκτίνες, τὶς ΟΑ καὶ ΟΒ. Οἱ ἀκτίνες αὐτὲς σχηματίζουν τὴ γωνία $\widehat{AOB}$. Αὐτὴ ἔχει κορυφὴ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου Ο καὶ γιὰ τοῦτο ὀνομάζεται **ἐπίκεντρος γωνία.**

Ἐπίκεντρος λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου.



σχ. 4

Ἐξετάζοντας τὴ γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ τοῦ σχ. 4, παρατηροῦμε ὅτι ἡ κορυφή της Α βρίσκεται στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο, ἐνῶ οἱ πλευρές της ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι χορδὲς τόξων τῆς ἴδιας περιφέρειας.

Ἡ γωνία αὐτὴ ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένη.**

Μιὰ γωνία λέγεται ἐγγεγραμμένη σὲ κύκλο, ἂν ἡ κορυφή της βρίσκεται στὴν περιφέρειά του καὶ οἱ πλευρές της εἶναι χορδές.

Ἄσκηση

102. Νὰ χαράξετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕνα κύκλο, μιὰ διάμετρό του καὶ δυὸ χορδές του. Ἔπειτα νὰ συγκρίνετε κάθε χορδὴ πρὸς τὴ διάμετρο. Τί παρατηρεῖτε;

Η. ΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

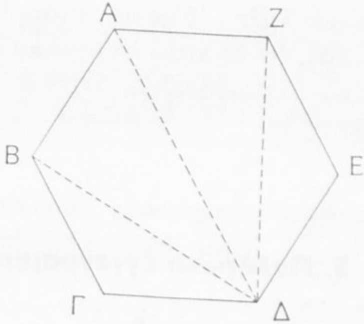
50

1. Ἔννοια τοῦ πολυγώνου

Ἐξετάζοντας προσεχτικὰ τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχ. 1, παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ περατώνεται σὲ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμή.

Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **πολύγωνο.**

Πολύγωνο εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο σχῆμα, ποὺ περατώνεται σὲ μιὰ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμή.



σχ. 1

Εἰδικὰ τὸ πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ λέγεται **ἑξάγωνο.** Δηλαδὴ παίρνει τὸ ὄνομά του ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν του. Τοῦτο συμβαίνει καὶ σὲ κάθε ἄλλο πολύγωνο. Συνεπῶς, τὰ πολύγωνα διακρίνονται σὲ **τρίγωνα, τετράγωνα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα, ἑφτάγωνα, ὀχτάγωνα, δεκάγωνα κλπ.**

Κάθε πολύγωνο ἔχει τὸν ἴδιο ἀριθμὸ γωνιῶν, κορυφῶν καὶ πλευρῶν

2. Τὰ στοιχεῖα τοῦ πολυγώνου

Οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, στὰ ὁποῖα περατώνεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου, λέγονται **πλευρές** του.

Οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου εἶναι καὶ πλευρὲς τῆς κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς, στὴν ὁποία περατώνεται τοῦτο.

Διαγώνιος τοῦ πολυγώνου. Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἔχει ἄκρα δυὸ μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ πολυγώνου, λέγεται **διαγώνιος** τοῦ πολυγώνου.

Ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου λέγεται περίμετρος τοῦ πολυγώνου.

Ἐφαρμογή

Ἕνα σχολικὸ προαύλιο ἔχει σχῆμα ἑφταγώνου μὲ πλευρὲς 35 μ., 40 μ., 28 μ., 36 μ., 32 μ., 37 μ. καὶ 29 μ. Ποιά εἶναι ἡ περίμετρός του;

Λύση. Ἡ περίμετρος τοῦ προαυλίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τὰ μήκη τῶν ἑφτὰ πλευρῶν του· δηλαδή:

35 μ. + 40 μ. + 28 μ. + 36 μ. + 32 μ. + 37 μ. + 29 μ. = 237 μ.

Ἄρα, ἡ περίμετρος τοῦ προαυλίου εἶναι 237 μ.

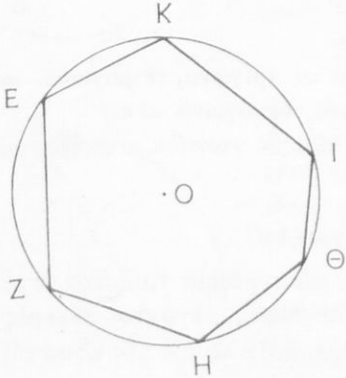
Ἀσκήσεις

103. Νὰ σχεδιάσετε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα ἕνα πολύγωνο καὶ νὰ δείξετε ὅλα τὰ στοιχεῖα του.

104. Ἡ πλατεία ἑνὸς χωριοῦ ἔχει σχῆμα πενταγώνου μὲ πλευρὲς 50 μ., 45 μ., 48,60 μ., 53,95 μ. καὶ 52,85 μ. Ποιά εἶναι ἡ περίμετρός της;

51

3. Πολύγωνο ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο



σχ. 1

Ἐξετάζοντας τὸ πολύγωνο ΕΖΗΘΙΚ, τοῦ σχ. 1, παρατηροῦμε ὅτι οἱ κορυφές του Ε, Ζ, Η, Θ, Ι καὶ Κ βρίσκονται στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο. Οἱ πλευρές του ἄρα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ καὶ ΚΕ εἶναι χορδὲς τῆς ἴδιας περιφέρειας.

Τὸ πολύγωνο αὐτὸ λέγεται **ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο.**

Ἕνα πολύγωνο λέγεται ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο, ἂν οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα τῆς περιφέρειάς του.

4. Κανονικὸ πολύγωνο

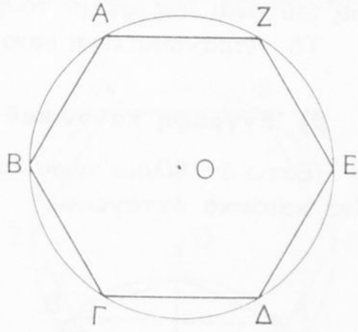
Συγκρίνοντας τὶς πλευρὲς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχ. 2 μὲ τὸν διαβήτη καὶ τὶς γωνίες του μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο βρίσκομε ὅτι:

$ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ$

καὶ $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΒΓΔ} = \widehat{ΓΔΕ} = \widehat{ΔΕΖ} = \widehat{ΕΖΑ} = \widehat{ΖΑΒ}$.

δηλαδὴ οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες καὶ οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες.

Τὸ πολύγωνο αὐτὸ ὀνομάζεται **κανονικό.**



σχ. 2

Ἕνα πολύγωνο λέγεται κανονικό, ἂν ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες καὶ οἱ γωνίες του ἐπίσης ἴσες.

Κάθε κανονικὸ πολύγωνο μπορεῖ νὰ ἐγγραφῆ σὲ κύκλο. (σχ. 2).

Ἄσκηση

105. Νὰ χαράξετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων ἕναν κύκλο καὶ ἕνα ἐγγεγραμμένο σ' αὐτὸν δεκάγωνο.

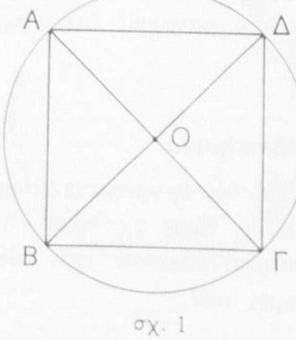
5. Ἐγγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων σὲ κύκλους

52

α) Ἐγγραφὴ τετραγώνου

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ ἐγγράψωμε στὸν κύκλο Ο τοῦ σχ. 1 ἕνα τετράγωνο.

Χαράζομε στὸν κύκλο Ο δυὸ διαμέτρους, τὶς ΑΓ καὶ ΒΔ σὲ τρόπο, ὥστε ἡ μιὰ νὰ εἶναι κάθετη στὴν ἄλλη, καὶ στὴ συνέχεια ἑνώνομε τὰ ἄκρα τους μὲ χορδές. Ἔτσι σχηματίζεται τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ.



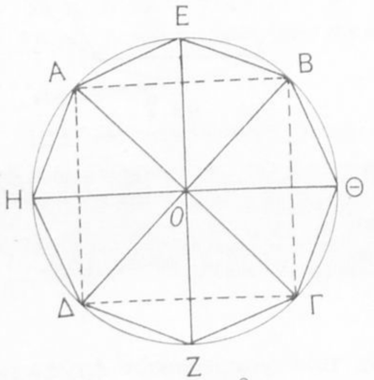
σχ. 1

Τὸ τετράπλευρο αὐτὸ εἶναι ἐγγεγραμμένο τετράγωνο, διότι οἱ κορυφές του βρίσκονται στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο, οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ ὅλες οἱ γωνίες του ὀρθές.

Τὸ τετράγωνο εἶναι κανονικὸ πολύγωνο.

β) Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ὀχταγώνου

Ἔστω ὅτι θέλομε τώρα νὰ ἐγγράψωμε στὸν κύκλο Ο τοῦ σχ. 2 ἕνα κανονικὸ ὀχτάγωνο.



σχ. 2

Ἐγγράφομε στὸν κύκλο Ο ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ, ὅπως περιγράψαμε παραπάνω. Στὴ συνέχεια χαράζομε στὸν κύκλο ἀκόμη δυὸ διαμέτρους, τὶς ΕΖ καὶ ΗΘ μὲ τρόπο ποὺ αὐτὲς νὰ εἶναι κάθετες στὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Ἔπειτα ἀπ' αὐτὰ ἑνώνομε τὰ ἄκρα αὐτῶν τῶν διαμέτρων καὶ τὶς κορυφὲς τοῦ τετραγώνου μὲ χορδές. Ἔτσι σχηματίζεται τὸ ὀχτάγωνο ΑΕΒΘΓΖΔΗ.

Τὸ ὀχτάγωνο αὐτὸ εἶναι ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο Ο, διότι ὅλες οἱ κορυφὲς του βρίσκονται στὴν περιφέρειά του. Τοῦτο εἶναι κανονικό, διότι, ὅπως μποροῦμε νὰ διαπιστώσωμε μὲ τὸ διαβήτη καὶ τὸ μοιρογνωμόνιο, ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ ὅλες οἱ γωνίες του ἐπίσης ἴσες μεταξύ τους.

Συνεχίζοντας ὅπως καὶ παραπάνω, μποροῦμε νὰ ἐγγράψωμε σὲ κύκλο κανονικὸ δεκαεξάγωνο κλπ.

Ἀσκήσεις

106. Νὰ ἐγγράψετε μὲ ἀκρίβεια σὲ κύκλο ἕνα κανονικὸ ὀχτάγωνο.

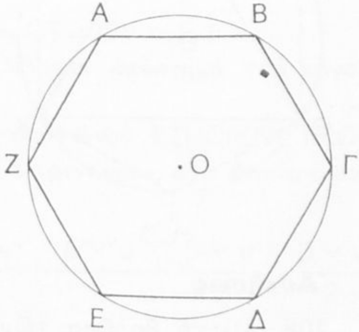
107. Ἕνας σχολικὸς κῆπος ἔχει σχῆμα κανονικοῦ ὀχταγώνου. Ἡ περίμετρός του εἶναι 248,64 μ. Πόσα μέτρα εἶναι καθεμιὰ ἀπὸ τὶς πλευρές του;

53

γ) Ἐγγραφὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου

Ἔστω τώρα ὅτι θέλομε νὰ ἐγγράψωμε σὲ κύκλο ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο.

Γράφομε τὸν κύκλο Ο τοῦ σχ. 1. Ἔπειτα, χωρὶς ν' ἀλλάξωμε τὸ ἄνοιγμα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτη, διαιροῦμε τὴν περιφέρειά του σὲ τόξα μὲ χορδες ἴσες πρὸς τὴν ἀκτίνα του.



σχ. 1

Παρατηροῦμε ὅτι ἔτσι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο χωρίζεται σὲ ἕξι (6) ἴσα τόξα. Ἂν τώρα γράψωμε τὶς χορδὲς τῶν τόξων αὐτῶν προκύπτει τὸ ἐγγεγραμμένο ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Τὸ ἑξάγωνο αὐτὸ εἶναι κανονικό, διότι ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου Ο καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσες μεταξύ τους, δηλαδή:

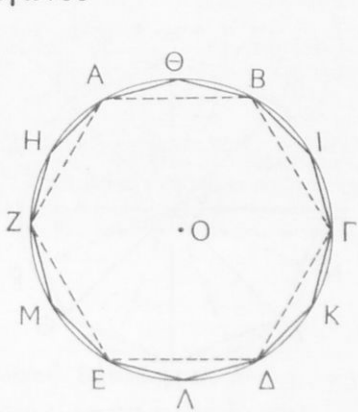
$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZA,$$

καθὼς καὶ ὅλες οἱ γωνίες του, δηλαδή:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = \widehat{E} = \widehat{Z}$$

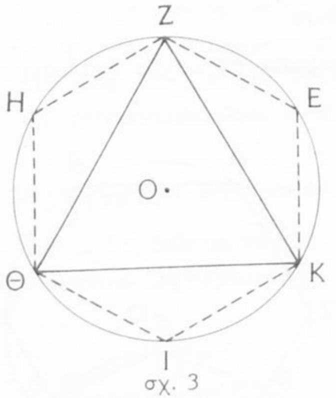
δ) Ἐγγραφὴ κανονικοῦ δωδεκαγώνου

Ἂν τώρα, καθὼς ἔχομε ἐγγράψει τὸ ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχ. 1, διαιρέσωμε καθένα ἀπὸ τὰ ἕξι ἴσα τόξα σὲ δυὸ ἴσα μέρη (μὲ τὸν τρόπο τῶν καθέτων διαμέτρων πρὸς τὶς ἀπεναντι πλευρές του) καὶ ἑνώσωμε αὐτὰ τὰ σημεῖα μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ ἑξαγώνου, θὰ ἔχωμε τὸ ἐγγεγραμμένο δωδεκάγωνο ΑΘΒΙΓΚΔΛΕΜΖΗ τοῦ σχ. 2.



σχ. 2

Τὸ δωδεκάγωνο τοῦτο εἶναι κανονικό.



σχ. 3

ε) Ἐγγραφὴ ἰσόπλευρου τριγώνου

Ἐγγράφομε στὸν κύκλο Ο τοῦ σχ. 3, ὅπως περιγράψαμε παραπάνω, τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ. Στὴ συνέχεια ἑνώνομε 3 κορυφές του, ἔστω τὶς Ζ, Θ καὶ Κ, ἀνὰ δυό, μὲ χορδές. Ἔτσι σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένο τρίγωνο ΖΘΚ.

Τὸ τρίγωνο τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρο.

Ἀσκήσεις

108. Μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων νὰ χαράξετε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 0,04 μ. κι ἔπειτα νὰ ἐγγράψετε σ' αὐτὸν ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο. Νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό του.

109. Ἕνα ἀγρόκτημα ἔχει σχῆμα κανονικὸ δωδεκάγωνο μὲ περίμετρο 1188,60 μ. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος καθεμιᾶς πλευρᾶς του;

54

6. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου

σχ. 1

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου (ὀχταγώνου) ΕΖΗΘΙΚΛΜ τοῦ σχ. 1.

Χαράζομε τὶς διαγωνίους του ΕΙ, ΖΚ, ΗΛ καὶ ΘΜ. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πολύγωνο ΕΖΗΘΙΚΛΜ διαιρέθηκε σὲ 8 τρίγωνα, τὰ ΕΟΖ, ΖΟΗ, ΗΟΘ, ΘΟΙ, ΙΟΚ, ΚΟΛ, ΛΟΜ καὶ ΜΟΕ.

Ἐξετάζοντας τὰ τρίγωνα αὐτὰ βλέπομε ὅτι:

$$ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ = ΘΙ = ΙΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΕ = β,$$

διότι εἶναι πλευρὲς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΕΖΗΘΙΚΛΜ.

Μὲ τὸ διαβήτη διαπιστώνομε ὅτι καὶ τὰ ὕψη τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσα, δηλαδή:

$$ΟΝ = ΟΞ = ΟΠ = ΟΡ = ΟΣ = ΟΤ = ΟΥ = ΟΦ = υ.$$

Καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ ὕψη λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Τώρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΕΖΗΘΙΚΛΜ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν 8 τριγώνων, στὰ ὁποῖα διαιρέθηκε· δηλαδή:

$$(\text{ἐμβ. καν. πολ.}) = \frac{β \times υ}{2} + \frac{β \times υ}{2} + \frac{β \times υ}{2} + \frac{β \times υ}{2} + \frac{β \times υ}{2}$$

$$+ \frac{β \times υ}{2} + \frac{β \times υ}{2} + \frac{β \times υ}{2} = \frac{8 \times β \times υ}{2} = 4 \times β \times υ.$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ γινόμενο $8 \times β$ παριστάνει τὴν **περίμετρο** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΕΖΗΘΙΚΛΜ, ἐνῶ τὸ γινόμενο $4 \times β$ παριστάνει τὴν **ἡμιπερίμετρο** αὐτοῦ.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν περίμετρό του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2· δηλαδή:

$$(\text{ἐμβ. καν. πολ.}) = \frac{(\text{περιμ.}) \times (\text{μῆκος ἀποστ.})}{2}$$

ἢ πιὸ σύντομα:

γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν ἡμιπερίμετρό του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός του.

Ἐφαρμογὴ

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ δαπέδου εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ἀπόστημά του 5,10 μ. περίπου. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, ἔχομε:

$$(\text{ἐμβ. καν. ἑξαγώνου}) = \frac{6 \times \beta \times \upsilon}{2} = 3 \times \beta \times \upsilon = 3 \times 6 \text{ μ.} \times$$
$$\times 5{,}10 \text{ μ.} = 18 \text{ μ.} \times 5{,}10 \text{ μ.} = 91{,}80 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

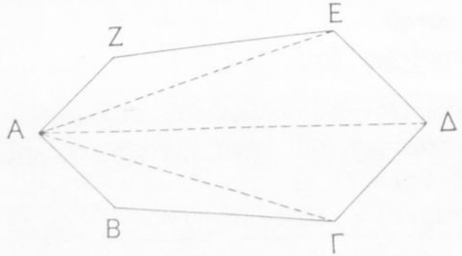
Ἄσκηση

110. Σ' ἕνα οἰκόπεδο ποὺ ἔχει σχῆμα κανονικοῦ δωδεκαγώνου, μὲ πλευρὰ 15 μ. καὶ ἀπόστημα 11,7 μ. περίπου χτίστηκε ἕνα σπίτι μὲ κάτοψη σχήματος ὀρθογωνίου διαστάσεων 14 μ. καὶ 9,15 μ. Πόσα τετρ. μέτρα τοῦ οἰκοπέδου παραμένουν ἀκάλυπτα;

55

7. Ἐμβαδὸν ὁποιουδήποτε πολυγώνου

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ τοῦ σχ. 1.



σχ. 1

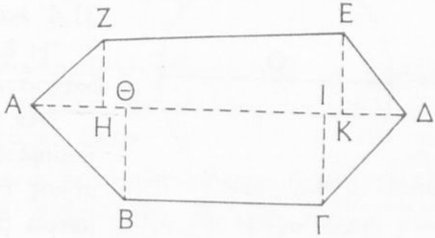
Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ πολύγωνο τοῦτο δὲν εἶναι κανονικό. Ἑπομένως δὲν μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν του, ὅπως τῶν κανονικῶν πολυγώνων.

Γι' αὐτὸ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α΄. τρόπος. Χαράζομε τὶς διαγωνίους ΑΕ, ΑΔ καὶ ΑΓ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Παρατηροῦμε ὅτι τοῦτο διαιρεῖται σὲ τέσσερα (4) τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ καὶ ΑΕΖ. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων (4) τούτων τριγώνων· δηλαδή:

(ἐμβ. πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ) = (ἐμβ. τριγ. ΑΒΓ) + (ἐμβ. τριγ. ΑΓΔ) + (ἐμβ. τριγ. ΑΔΕ) + (ἐμβ. τριγ. ΑΕΖ).

β΄. τρόπος. Χαράζομε τὴ μεγαλύτερη διαγώνιο τοῦ πολυγώνου, τὴν ΑΔ. (σχ. 2) Ἀκολούθως, ἀπὸ τὶς κορυφές του Β, Γ, Ε καὶ Ζ φέρομε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΒΘ, ΓΙ, ΕΚ καὶ ΖΗ κάθετα στὴ διαγώνιο ΑΔ. Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο τὸ πολύγωνο ΑΒΓΔΕΖ διαιρεῖται σὲ τέσσερα (4) ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ΑΘΒ, ΓΙΔ, ΕΚΔ καὶ ΑΗΖ καὶ σὲ δυὸ (2) τραπέζια, τὰ ΒΓΙΘ καὶ ΕΖΗΚ. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων (4) τούτων τριγώνων καὶ τῶν δυὸ (2) τραπεζίων· δηλαδή:



σχ. 2.

(ἐμβ. πολ. ΑΒΓΔΕΖ) = (ἐμβ. τρ. ΑΘΒ) + (ἐμβ. τρ. ΓΙΔ) + (ἐμβ. τρ. ΕΚΔ) + (ἐμβ. τρ. ΑΗΖ) + (ἐμβ. τραπ. ΒΓΙΘ) + (ἐμβ. τραπ. ΕΖΗΚ)

Ἀπὸ τὰ παραπάνω γίνεται φανερὸ ὅτι:

γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μὴ κανονικοῦ πολυγώνου τὸ διαιροῦμε σὲ τρίγωνα ἢ σὲ τρίγωνα καὶ τραπέζια καὶ στὴ συνέχεια βρίσκομε καὶ προσθέτομε τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

111. Ἕνα οἰκόπεδο τριγωνικοῦ σχήματος μὲ βάση 42,75 μ. καὶ ὕψος 24,5 μ. ἀγοράστηκε πρὸς 108 δρχ. τὸ τετρ. μέτρο. Πόσο στοίχισε στὸν ἀγοραστή;

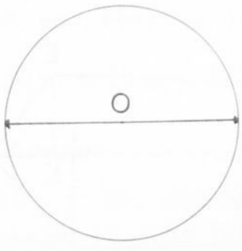
112. Ἕνα χωράφι μὲ σχῆμα τραπέζιο, μεγάλη βάση 78 μ., μικρὴ 52,4 μ. καὶ ὕψος 37,2 μ. ἀγοράστηκε πρὸς 5650 δρχ. τὸ στρέμμα. Πόσο στοίχισε στὸν ἀγοραστή;

Θ. ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

56

1. Μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου

Ἐπάνω σὲ χοντρὸ χαρτόνι χαράζομε κύκλο μὲ ἀκτίνα 5 ἑκατοστόμετρα. Ἔπειτα τὸ κόβομε μὲ προσοχὴ καὶ καλύπτομε τὴν περιφέρειά του ἀκριβῶς μιὰ φορὰ μ' ἕνα λεπτὸ νῆμα. Στὴ συνέχεια μετροῦμε τὸ μῆκος τοῦ νήματος καὶ βρίσκομε ὅτι τοῦτο εἶναι·



σχ. 1

31,4 ἑκατοστόμετρα. Ἄρα καὶ τὸ **μῆκος τῆς περιφέρειας** τοῦ κύκλου εἶναι 31,4 ἑκατοστόμετρα.

Ἡ διάμετρός του εἶναι $5+5=10$ ἑκατοστόμετρα.

Ἂν τώρα διαιρέσωμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας 31,4 ἑκατοστόμετρα μὲ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου της 10 ἑκατοστόμετρα βρίσκομε: $31,4:10=3,14$.

Ἂν ἐπαναλάβωμε τὴν παραπάνω ἐργασία μὲ ἄλλες περιφέρειες, (μὲ διαφορετικὲς ἀκτίνες) βρίσκομε πάντοτε πηλίκον 3,14. Ἑπομένως,

τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας ἑνὸς κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του εἶναι 3,14.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι 3,14 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διάμετρό του.

Τὸ σταθερὸ ἀριθμὸ 3,14 τὸν συμβολίζομε μὲ τὸ γράμμα π·

δηλαδή: $\pi=3,14$.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι:

1. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος Γ τῆς περιφέρειας ἑνὸς κύκλου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος δ τῆς διαμέτρου του ἐπὶ π· δηλαδή:

$$\Gamma=\delta\times\pi \quad \text{ἢ} \quad \Gamma=\delta\times 3,14.$$

2. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος δ τῆς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου, διαιροῦμε τὸ μῆκος Γ τῆς περιφέρειάς του μὲ τὸν σταθερὸ ἀριθμὸ π· δηλαδή:

$$\delta=\frac{\Gamma}{\pi} \quad \text{ἢ} \quad \delta=\frac{\Gamma}{3,14}.$$

Ἐφαρμογὴ

Πρόβλημα 1ο. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κυκλικοῦ πάρκου εἶναι 30 μ. Ποιό εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφέρειάς του;

Λύση. $\Gamma=\delta\times\pi=(30\ \mu.)\times 3,14=94,20\ \mu.$

Πρόβλημα 2ο. Τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας ἑνὸς κυκλικοῦ πάρκου εἶναι 94,20 μ. Ποιό εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του;

Λύση. $\delta = \frac{\Gamma}{\pi} = \frac{94,20\mu.}{3,14} = 30\ \mu.$

Ἀσκήσεις

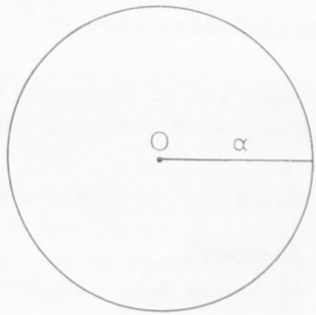
113. Στὴν περιφέρεια ἑνὸς κυκλικοῦ ἀγροκτήματος μὲ ἀκτίνα 100 μ., φυτεύθηκαν 157 πεῦκα σὲ ἴσες ἀποστάσεις μεταξύ τους. Πόσο ἀπέχει κυκλικὰ τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο;

114. Ἡ ἀκτίνα τῶν τροχῶν ἑνὸς αὐτοκινήτου εἶναι 0,50 μ. Πόσα χιλιόμετρα θὰ ἔχει διατρέξη τὸ αὐτοκίνητο, ἂν κάθε τροχός του κάνη 10.000 στροφές;

57

2. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου

Ἔστω ὅτι θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύκλου Ο τοῦ σχ. 1.

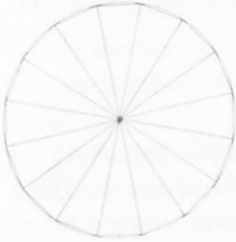


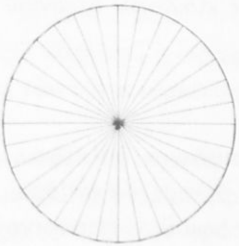
σχ. 1

Στὸ 54ο μάθημα εἴδαμε ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 2· δηλαδή:

$$(\text{ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου}) = \frac{(\text{περίμετρ.}) \times (\text{μῆκος ἀποστ.})}{2}$$

Ἐγγράφομε τώρα στὸν κύκλο Ο, ποὺ θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν, ἕνα κανονικὸ δεκαεξάγωνο καὶ στὴ συνέχεια διπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν του.


σχ. 2


σχ. 3

σχ. 4

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ σχ. 3 δύσκολα «ξεχωρίζεται» ἀπὸ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν συνεχίσωμε νὰ διπλασιάζωμε τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, θὰ ἔρθη στιγμὴ ποὺ ἡ περίμετρός του θὰ συμπέση μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου θὰ γίνη ἴσο μὲ τὴν ἀκτίνα α τοῦ κύκλου Ο. Ἑπομένως, ἂν στὸν τύπο γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἀντικαταστήσωμε τὴν περίμετρό του μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου ($\Gamma = \delta \times \pi$) καὶ τὸ ἀπόστημά του μὲ τὸ μῆκος α τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου Ο, θὰ ἔχωμε:

$$(\text{ἐμβαδὸν κύκλου}) = \frac{\delta \times \pi \times \alpha}{2}$$ Ἐπειδὴ ὅμως $\delta = \alpha + \alpha = 2 \times \alpha$,

ἔχομε $$(\text{ἐμβαδὸν κύκλου}) = \frac{\delta \times \pi \times \alpha}{2} = \frac{2\alpha \times \pi \times \alpha}{2} = \alpha \times \alpha \times \pi.$$

Ἄρα, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνας του ἐπὶ τὸν ἑαυτό του καὶ τὸ γινόμενο ἐπὶ π· δηλαδή:

$(\text{ἐμβ. κύκλου}) = \alpha \times \alpha \times \pi = \alpha \times \alpha \times 3{,}14.$

Ἐφαρμογὴ

Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κυκλικοῦ προαυλίου εἶναι 10 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύση. $(\text{ἐμβ. κύκλου}) = \alpha \times \alpha \times \pi = (10\mu. \times 10\mu.) \times 3{,}14 = 314$ τ.μ.

Ἀσκήσεις

115. Ἡ ἀκτίνα μιᾶς κυκλικῆς πλατείας εἶναι 13,8 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

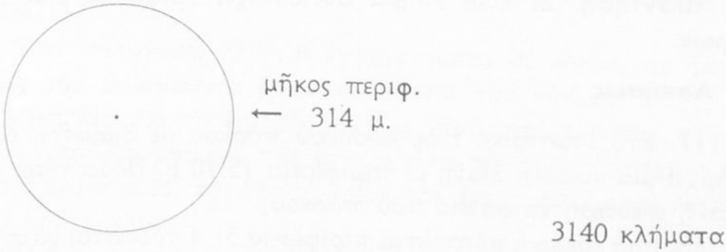
116. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κυκλικοῦ ἁλωνιοῦ εἶναι 6,18 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

58

Πρόβλημα. Στὴν ἐπιφάνεια ἐπίπεδου κυκλικοῦ χωραφιοῦ μὲ μῆκος περιφέρειας 314 μ. θέλομε νὰ φυτέψωμε 3140 κλήματα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα χωραφιοῦ ἀντιστοιχοῦν κατὰ μέσο ὅρο σὲ κάθε κλῆμα;

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος

Τὸ κυκλικὸ χωράφι



Λύση

Γνωστὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος:

α) Τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ χωραφιοῦ· 314 μ.,
β) ὁ ἀριθμὸς τῶν κλημάτων· 3140.

Ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος:

α) Τὰ τετρ. μέτρα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ χωραφιοῦ, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν σὲ κάθε κλῆμα.

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα τετρ. μέτρα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ χωραφιοῦ ἀντιστοιχοῦν σὲ κάθε κλῆμα, πρέπει νὰ βροῦμε προηγουμένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ χωραφιοῦ. Ἀλλά, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειάς του, μᾶς χρειάζεται τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνας του.

Τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνας τοῦ κυκλικοῦ χωραφιοῦ τὸ βρίσκομε ἀφοῦ πρῶτα βροῦμε τὴ διάμετρό του ὡς ἑξῆς:

$$\delta = \frac{\Gamma}{\pi} = \frac{314}{3{,}14} = \frac{31400 \text{ μ.}}{314} = 100 \text{ μ.} \quad \text{Ἄρα}$$

$$\alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{100 \text{ μ.}}{2} = 50 \text{ μ.}$$

Ἡ ἀκτίνα λοιπὸν τοῦ κυκλικοῦ χωραφιοῦ εἶναι 50 μ.

Ἐφαρμόζοντας τώρα τὸν τύπο εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ἔχομε:

(ἐμβ. κυκλικοῦ χωραφιοῦ) $= \alpha \times \alpha \times \pi = (50 \text{ μ.} \times 50 \text{ μ.}) \times 3{,}14 =$
$= (2500 \text{ τ.μ.}) \times 3{,}14 = 7850$ τετρ. μέτρα.

Ἂν τώρα διαιρέσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωραφιοῦ μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν κλημάτων, θὰ βροῦμε τὰ τετρ. μέτρα τῆς ἐπιφάνειάς του, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν σὲ κάθε κλῆμα· δηλαδή:

(7850 τ.μ.) : 3140 = 2,50 τετρ. μέτρα.

Ἀπάντηση. Σὲ κάθε κλῆμα ἀντιστοιχεῖ ἐπιφάνεια 2,50 τετρ. μέτρων.

Ἀσκήσεις

117. Στὸ ἐσωτερικὸ ἑνὸς κυκλικοῦ πάρκου μὲ διάμετρο 65,6 μ. ὑπάρχει μιὰ κυκλικὴ λίμνη μὲ περιφέρεια 15,70 μ. Πόσα τετρ. μέτρα εἶναι ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ πάρκου;

118. Μιὰ κυκλικὴ πλατεία μὲ περιφέρεια 31,4 πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετράγωνες πλάκες, πλευρᾶς 0,20 μ. Πόσες πλάκες θὰ ἀπαιτηθοῦν καὶ πόσο θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐπίστρωση, ἂν κάθε πλάκα ἀξίζῃ 2,80 δρχ.;

59 Ἀνακεφαλαίωση - Πορίσματα

Ἐπίπεδο σχῆμα λέγεται κάθε σχῆμα, ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα του βρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο.

- Τὸ τετράγωνο, τὸ ὀρθογώνιο, τὸ παραλληλόγραμμο, ὁ ρόμβος, τὰ τρίγωνα, τὸ τραπέζιο, τὰ πολύγωνα καὶ ὁ κύκλος εἶναι ἐπίπεδα σχήματα.
- Τὸ τετράγωνο, τὸ ὀρθογώνιο, τὸ παραλληλόγραμμο καὶ ὁ ρόμβος εἶναι τετράπλευρα ποὺ ἔχουν τὶς ἀπέναντι πλευρές τους ἀνὰ δυὸ ἴσες καὶ παράλληλες. Γιὰ τοῦτο τὰ τετράπλευρα αὐτὰ λέγονται παραλληλόγραμμα.
- Οἱ ἀπέναντι γωνίες τῶν παραλληλογράμμων εἶναι ἴσες καὶ οἱ διαγώνιοί τους τέμνονται στὸ μέσο τους.
- Κάθε διαγώνιος ἑνὸς παραλληλογράμμου τὸ χωρίζει σὲ δυὸ ἴσα τρίγωνα.

Κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς πλευρές, τρεῖς κορυφὲς καὶ τρεῖς γωνίες.

- Τὰ τρίγωνα, ἀπὸ τὴν ἄποψη τῶν πλευρῶν τους, διακρίνονται σὲ ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά· ἀπὸ τὴν ἄποψη τῶν γωνιῶν τους σὲ ὀρθογώνια, ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

Ἕνα πολύγωνο λέγεται κανονικό, ἂν ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες καὶ οἱ γωνίες του ἐπίσης ἴσες.

● Ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν του.

● Κάθε πολύγωνο ἔχει τὸν ἴδιο ἀριθμὸ πλευρῶν, κορυφῶν, καὶ γωνιῶν.

● Ἕνα πολύγωνο λέγεται ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο, ἂν ὅλες οἱ κορυφές του βρίσκωνται στὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Κύκλος λέγεται τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ περατώνεται σὲ μιὰ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξίσου ἀπὸ ἕνα σημεῖο, τὸ ὁποῖο βρίσκεται ἐντὸς αὐτῆς καὶ λέγεται κέντρο τοῦ κύκλου.

● Ἡ διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλο σὲ δυὸ ἡμικύκλια καὶ τὴν περιφέρειά του σὲ δυὸ ἡμιπεριφέρειες.

● Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ἀκτίνα του, καὶ 3,14 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν περιφέρειά του.

Ἀσκήσεις

Α΄ 119 Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγωνικοῦ χωραφιοῦ εἶναι 200 μ. Στὸ ἐσωτερικό του ὑπάρχει μιὰ ὀρθογώνια δεξαμενὴ μὲ βάση 18,5 μ. καὶ πλάτος 8,40 μ. Πόσα τετρ. μέτρα καλλιεργοῦνται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ χωραφιοῦ;

120. Ἕνα χωράφι σχήματος τραπεζίου μὲ μεγάλη βάση 135,20 μ., μικρὴ 108,80 μ. καὶ ὕψος 62,5 μ. πουλήθηκε πρὸς 18.750,20 δρχ. τὸ στρέμμα. Πόσο στοίχισε στὸν ἀγοραστή του;

121. Στὸ ἐσωτερικὸ ἑνὸς κυκλικοῦ κήπου μὲ ἀκτίνα 17 μ. ὑπάρχει μιὰ κυκλικὴ δεξαμενὴ μὲ μῆκος διαμέτρου 8 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειάς του;

Β΄ 122 Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγωνικοῦ ἀγροκτήματος εἶναι 7.920,396 τετρ. μέτρα. Ἂν ἡ βάση του εἶναι 198 μ., ποιό εἶναι τὸ ὕψος του;

123. Τρεῖς ἀδερφοὶ μοίρασαν ἕνα πατρικό τους ἀγρόκτημα σχήματος τραπεζίου μὲ μεγάλη βάση 368,10 μ., μικρὴ ἴση πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς μεγάλης καὶ ὕψος 212,4 μ. Πόσα στρέμματα πῆρε καθένας;

124. Οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου ἔχουν ἀκτίνα 0,55 μ. Ἂν τὸ αὐτοκίνητο κινηθῆ σὲ εὐθεία ὁδὸ καὶ οἱ τροχοί του κάνουν $6\frac{1}{2}$ στροφὲς κατὰ δευτερόλεπτο, σὲ ποιά ἀπόσταση ἀπὸ τὸ σημεῖο ἀναχωρήσεώς του θὰ βρίσκεται ἔπειτα ἀπὸ 2 ὧρες;

Γ΄ 125 Στὸ ἐσωτερικὸ ἑνὸς κυκλικοῦ πάρκου μὲ περιφέρεια 317, 14 μ. ὑπάρχει ἕνας ἀνθόκηπος σχήματος ὀρθογωνίου, μὲ περίμετρο 240,8 μ. καὶ βάση 80,30 μ. Ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ πάρκου;

126. Ἕνας γεωργὸς ἔκαμε ἀνταλλαγὴ ἑνὸς χωραφιοῦ σχήματος τετραγώνου πλευρᾶς 60 μ., μ' ἕνα χωράφι τῆς ἴδιας ἀξίας κατὰ τετρ. μέτρο μὲ τὸ προηγούμενο, σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου κατὰ 20 μ. καὶ ἡ βάση του ἦταν 90 μ. Ζημιώθηκε ἢ κέρδισε;

127. Γύρω ἀπὸ ἕνα κυκλικὸ τραπέζι κάθονται 10 ἄτομα. Ἂν σὲ κάθε ἄτομο ἀντιστοιχῇ ἕνα μῆκος ἀπὸ τὴν περιφέρεια τοῦ τραπεζιοῦ 0,628 μ., ποιό εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ τραπεζιοῦ;

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ι. ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ

VI. ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΥΛΗΣ: **Π. Ν. Μπραούζης**
ἀριθ. ἀποφ. Υ.Π.Ε.Π.Θ.Φ. 309.2/324/114445/7-12-74

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄, 1975 (IV) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 230.000 ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2472/14-6-74
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ — ΑΛΕΞ. & ΑΝΝΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ