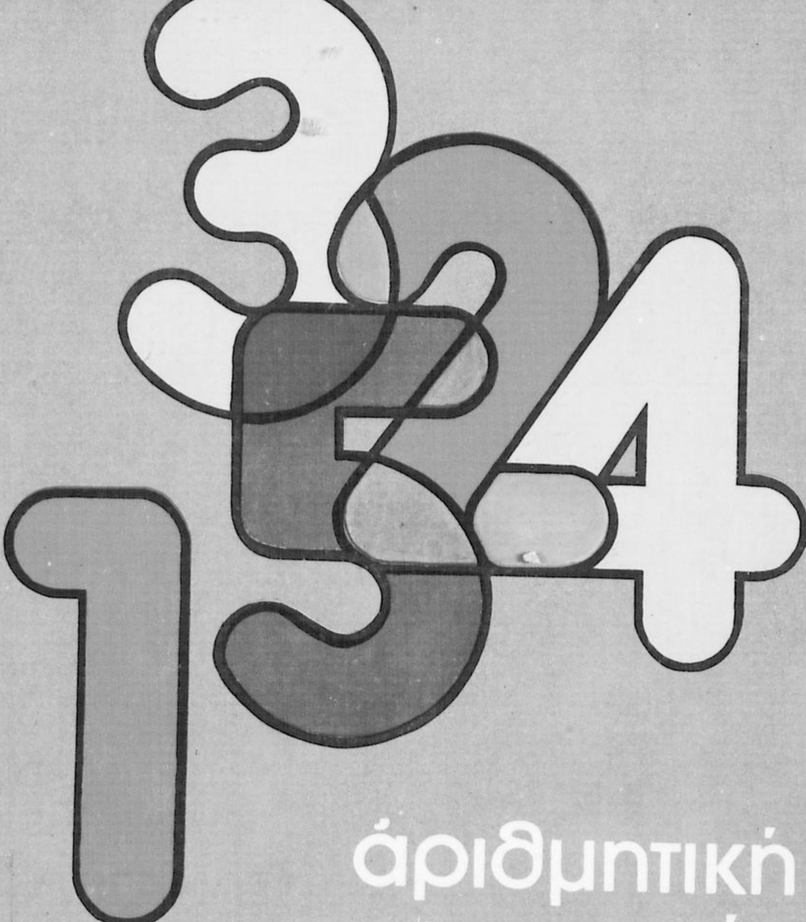
ΙΩΑΝΝΟΥ Κ. ΤΖΟΥΦΛΑ - ΜΑΡΙΑΝΘΗΣ Ι. ΤΖΟΥΦΛΑ



άριθμητική γεωμετρία

δ' δημοτικοῦ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ - ΑΘΗΝΑ 1982

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Δ/Δ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Δ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΙΩΑΝΝΟΥ Κ. ΤΖΟΥΦΛΑ – ΜΑΡΙΑΝΘΗΣ Ι. ΤΖΟΥΦΛΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Δ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1982

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Ἀκέραιοι ἀριθμοί

1. Ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ – Ἀριθμητική

Ὅταν σχεδιάζετε νά ταξιδέψετε μέ αὐτοκίνητο εἶναι φανερό, πώς θά ἀκουστοῦν οἱ παρακάτω ἐρωτήσεις:

Εἰκ. 1

1. Πόσο μακριά; 3. Μέ πόση ταχύτητα;
2. Πόσες ὧρες; 4. Πόσοι θά εἴμαστε;

Γιά νά δώσετε σωστές ἀπαντήσεις στίς παραπάνω ἐρωτήσεις, χρειάζεστε **ἀριθμούς.**

Μέ ἄλλα λόγια οἱ ἐκφράσεις: 300 χιλιόμετρα, 4 ὧρες, 90 χιλιόμετρα τήν ὥρα, θά εἴμαστε 5 ἄνθρωποι, εἶναι **ἀριθμοί.**

Ὁ κλάδος τῶν μαθηματικῶν πού ἀσχολεῖται μέ τούς ἀριθμούς λέγεται **ἀριθμητική.**

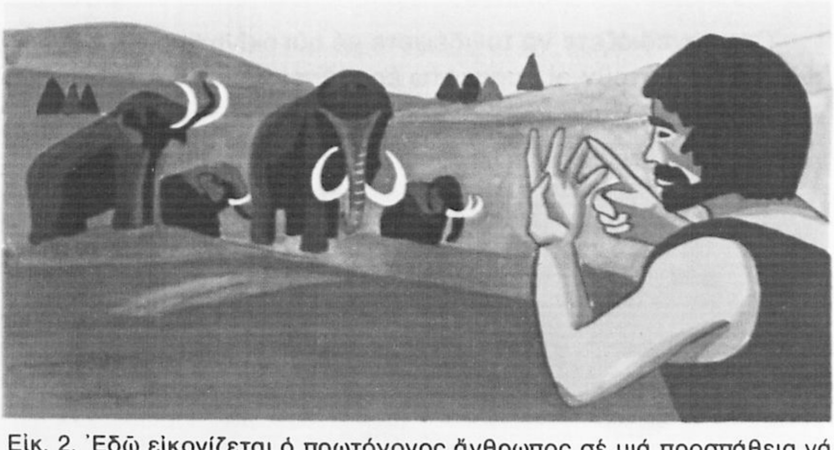
Βλέπετε; ➧

Ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ ἔχετε, ὅταν πρόκειται ν' ἀπαντήσετε στήν ἐρώτηση: Πόσα;

Ἐρωτήσεις:

Στίς παρακάτω ἐρωτήσεις ν' ἀπαντήσετε μέ ἀριθμούς:

1) Πόσα παράθυρα ἔχει ἡ τάξη σας;
2) Πόσες πόρτες ἔχει τό αὐτοκίνητό σας;
3) Πόσες λάμπες φωτίζουν τήν τάξη σας;
4) Πόσες τάξεις ἔχει τό σχολεῖο σας;



Εἰκ. 2. Ἐδῶ εἰκονίζεται ὁ πρωτόγονος ἄνθρωπος σέ μιά προσπάθεια νά δώσει ἀπάντηση στήν ἐρώτηση: πόσα;

2. Ἀκέραιοι ἀριθμοί καί ψηφία

Ἄς πάρουμε ἕνα κουτί πού βάζουμε βόλους. Ἄν εἶναι ἄδειο, τότε λέμε πώς τό κουτί περιέχει μηδέν βόλους. Αὐτό τό παραστaίνουμε μέ τό σύμβολο: (0) μηδέν.

Εἰκ. 3

Ἂν δέν εἶναι ἄδειο, τοῦ παίρνουμε τούς βόλους, τόν ἕνα μετά τόν ἄλλο, καί τούς τοποθετοῦμε πάνω στό τραπέζι.

Παρακάτω εἰκονίζουμε τά σύνολα τῶν βόλων, πού σχηματίζονται σέ κάθε νέα τοποθέτηση ἑνός νέου βόλου.

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

Ὀνόματα ἀριθμῶν:	μηδέν	ἕνα	δύο	τρία	τέσσερα	πέντε	ἕξη	ἑπτά ...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Ψηφία:	0	1	2	3	4	5	6	7 ...

(Τίς τρεῖς τελεῖες τίς βάζουμε γιά νά δηλώσουμε, πώς οἱ ἀριθμοί συνεχίζονται χωρίς τέλος.)

Οἱ ἔννοιες πού χαρακτηρίζουν τά σύνολα τῶν βόλων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Σ' αὐτούς δίνουμε τά ὀνόματα: μηδέν, ἕνα, δύο, τρία, ... καί τούς συμβολίζουμε μέ: 0, 1, 2, 3, ... πού λέγονται **ψηφία.** Καί ὅπως κάθε νέα συλλογή ἔχει ἕνα βόλο παραπάνω, ἔτσι καί κάθε νέος ἀκέραιος ἀριθμός, πού ἀριθμεῖ τή συλλογή αὐτή, ἔχει μιά μονάδα παραπάνω.

Ἀπό ἐδῶ καταλαβαίνουμε πώς **οἱ ἀριθμοί** εἶναι ποσοτικές ἔννοιες.

Καί τά **ψηφία** χρησιμοποιοῦνται γιά νά γράφονται οἱ ἀριθμοί.

Βλέπετε; ➧

Ἀριθμοί εἶναι ποσοτικές ἔννοιες καί ὄχι λέξεις ἤ σύμβολα πού τά χρησιμοποιοῦμε γιά νά παρασταίνουμε αὐτές τίς ἔννοιες.

Ἄλλο τό ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ καί ἄλλο ἀριθμός.

Παραδείγματα:

Ὅπως κάθε μία ἀπό τίς παρακάτω εἰκόνες παρασταίνει:

Ἕνα γράμμα, Μιά γλάστρα, Μιά ὀμπρέλα, Ἕνα παράθυρο.

Ἔτσι καί μέ τήν ἀριθμητική ἔκφραση: π.χ. 77 συμβολίζουμε ἕναν ἀριθμό πού ἐκτιμᾶ ἕνα πλῆθος 77 ἀντικειμένων.

Εἰκ. 4. Στόν παραπάνω πίνακα σημειώνεται ἡ ἐξέλιξη τῶν Ἰνδο-αραβικῶν συμβόλων ἀπό τό 800 μ.Χ. μέχρι σήμερα.

3. Γνωρίζετε ὅτι:

Τά ἀριθμητικά σύμβολα πού ἔχετε γιά νά μαθαίνετε, νά γράφετε, νά διαβάζετε καί νά τά χρησιμοποιεῖτε στούς ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς εἶναι γνωστό, πώς οἱ Ἰνδοί τά χρησιμοποιοῦσαν ἀπό τό 350 πρό Χριστοῦ (π.Χ.);

ΟΤΙ: Ἀργότερα τά δίδαξαν οἱ Ἄραβες στούς Εὐρωπαίους;

Γι' αὐτό πιθανόν ὀνομάστηκαν καί **Ἀραβικοί ἀριθμοί.**

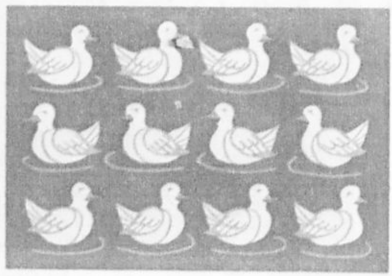
Τά σύμβολα αὐτά δέν τελειοποιήθηκαν σέ ὁρισμένο χρόνο ἤ τόπο.

Αὐτά ἐξελίχθηκαν μέ συνεχή ἀνάπτυξη καί πιθανόν τελειοποιήθηκαν στήν περίοδο τοῦ τελευταίου αἰώνα.

4. Ἀπαρίθμηση:

Ἡ πράξη πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε τό πλῆθος (τόν ἀριθμό) τῶν βόλων τοῦ κουτιοῦ, στό μάθημα τῆς σελίδας 6, λέγεται **ἀπαρίθμηση** ἤ **καταμέτρηση** τῶν βόλων, τοῦ κουτιοῦ. Κάθε βόλος εἶναι καί μία **ἀκέραια** μονάδα.

Κατά τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἐργαζόμαστε, ὅταν θέλουμε ν' ἀπαριθμήσουμε τά πράγματα (στοιχεῖα) ἑνός ἄλλου συνόλου, ὅπως στό παράδειγμα τῆς εἰκόνας: τά παπάκια.



Εἰκ. 5

Ἀπαριθμῶ τά παπάκια καί βρίσκω πώς εἶναι 12. Τό κάθε παπάκι εἶναι μία ἀκέραια μονάδα.

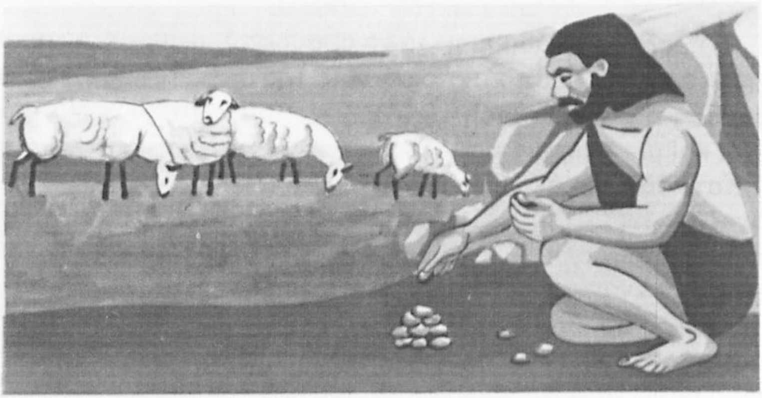
Τά πράγματα (στοιχεῖα), πού ἀποτελοῦν τό σύνολο, λέγονται **μονάδες.** Κι ὅπως τά σύνολα ἀποτελοῦνται ἀπό πράγματα (στοιχεῖα), ἔτσι καί οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, πού μετροῦν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου, ἀποτελοῦνται ἀπό **μονάδες.** Ἐξαιρεῖται μόνον ὁ **ἀκέραιος ἀριθμός μηδέν (0)** πού ἀντίθετα, φανερώνει πώς λείπει κάθε μονάδα.

Προβλήματα:

1. Γιά νά πάρουμε 10 δραχμές, πόσες μονάδες θά προσθέσουμε στίς 7 δραχμές, στίς 5 δραχμές, στίς 4 δραχμές;
2. Γιά νά πάρουμε 10 γραμμάρια, πόσες μονάδες πρέπει νά προσθέσουμε στά 5 γραμμάρια, στά 8 γραμμάρια, στά 9 γραμμάρια;
3. Ποιά μονάδα θά χρησιμοποιήσουμε γιά τήν ἀρίθμηση: ἀγοριῶν ἤ κοριτσιῶν; καί ποιά μονάδα θά χρησιμοποιήσουμε γιά νά ἀριθμήσουμε: 1) καναρίνια, 2) κότες, 3) καναρίνια καί κότες σά σύνολο;

5. Γνωρίζετε ὅτι:

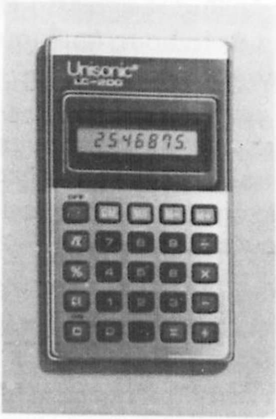
Ἡ ἰδέα τῆς καταμέτρησης ἤ ἀπαρίθμησης τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου εἶναι τόσο παλιά, ὅσο καί ὁ πολιτισμός; Τό σχέδιο εἰκονίζει τόν παλιό ἄνθρωπο ν' ἀπαριθμεῖ τά πρόβατα τοῦ κοπαδιοῦ του.



Εἰκ. 6

Ὅταν τό πρωί τά πρόβατα ἔφευγαν ἀπ' τό μαντρί, γιά κάθε πρόβατο ὁ βοσκός ἔβαζε κατά μέρος ἕνα χαλίκι. Ἔτσι σχημάτιζε ἕνα σωρό ἀπό χαλίκια. Στήν ἐρώτηση: πόσα πρόβατα εἶχε, ἔδειχνε τό σωρό τῶν χαλικιῶν. Ὅταν τό κοπάδι γύριζε τό βράδυ στό μαντρί, γιά κάθε πρόβατο ἔπαιρνε ἕνα χαλίκι ἀπό τό σωρό.

Ἐάν μετά τήν εἴσοδο ὅλων τῶν προβάτων δέν ἔμενε κανένα χαλίκι στό σωρό, γνώριζε πώς τά πρόβατά του γύρισαν ὅλα.



Σύγχρονες μέθοδοι

Στήν εἰκόνα βλέπετε μιά σύγχρονη ἠλεκτρονική ὑπολογιστική μηχανή. Ἐκτελεῖ τίς 4 πράξεις χωρίς λάθος καί μέ ταχύτητα πολύ μεγάλη.

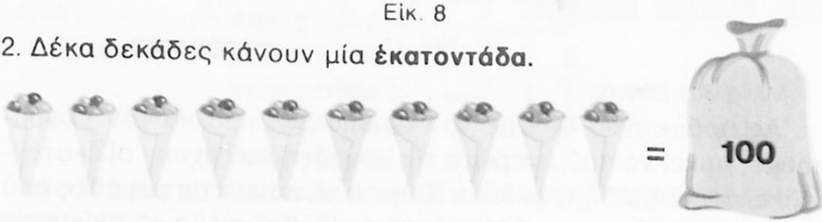
Εἰκ. 7

6. Ἀρίθμηση κατά τό δεκαδικό σύστημα

1. Δέκα ἀκέραιες μονάδες κάνουν μία **δεκάδα**.

Εἰκ. 8

2. Δέκα δεκάδες κάνουν μία **ἑκατοντάδα**.



Εἰκ. 9

3. Δέκα ἑκατοντάδες κάνουν μία **χιλιάδα**.

Εἰκ. 10

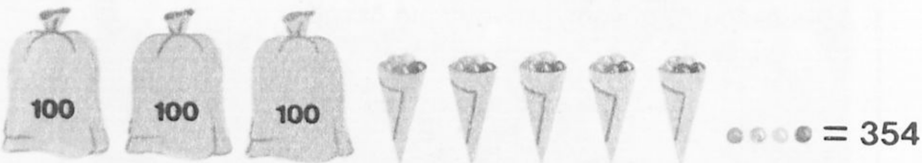
4. Ἄν σέ κάθε δεκάδα προσθέσουμε τούς ἀριθμούς ἀπό τό 1 ὥς τό 9, τότε θά σχηματίσουμε ὅλους τούς ἀκέραιους ἀριθμούς ἀπό τό 10 ὥς τό 100, ὅπως φαίνεται στήν εἰκόνα:

Μέ ἄλλα λόγια:

Ἄς ποῦμε πώς ἔχουμε τόν ἀριθμό 54. Γιά νά τόν ἐκφράσουμε, ἀρκεῖ νά ποῦμε πρῶτα τίς ἁπλές μονάδες πού ἔχουν οἱ δεκάδες του, δηλαδή πενήντα. Ὕστερα νά ποῦμε τίς ἁπλές μονάδες του, δηλαδή τέσσερα. Ἔτσι ὁ ἀριθμός 54 ἐκφράζεται: πενήντα τέσσερα.

Εἰκ. 11

5. Ἄν σέ κάθε ἑκατοντάδα προσθέσουμε τούς ἀκέραιους ἀριθμούς ἀπό τό 1 ὥς τό 99, τότε θά σχηματίσουμε ὅλους τούς ἀκέραιους ἀπό τό 100 ὥς τό 1000, ὅπως τό παράδειγμα τῆς εἰκόνας:



Εἰκ. 12

Μέ ἄλλα λόγια:

Ἄς ποῦμε πώς ἔχουμε τόν ἀριθμό 354. Γιά νά τόν ἐκφράσουμε, ἀρκεῖ νά ποῦμε πρῶτα τίς μονάδες πού ἔχουν οἱ ἑκατοντάδες του, δηλαδή τρακόσια. Ἔπειτα νά ποῦμε τίς μονάδες πού ἔχουν οἱ δεκάδες του, δηλαδή πενήντα. Καί τέλος νά ποῦμε τίς ἁπλές μονάδες του, δηλαδή τέσσερα. Ἔτσι ὁ ἀριθμός 354 ἐκφράζεται: τρακόσια πενήντα τέσσερα.

7. Ἀριθμογραφία θέσεως

Οἱ ἀριθμοί εἶναι ἄπειροι. Δέν ἔχουν τέλος. Ἄν ἦταν ἀνάγκη νά παρασταίνουμε κάθε ἀριθμό μέ τό δικό του σύμβολο, θά χρειαζόμασταν ἄπειρα σύμβολα. Αὐτό ὅμως εἶναι **ἀδύνατο.** Εὐτυχῶς πού ἔγινε μιά πολύ μεγάλη ἐπινόηση καί:

Ὅπως μέ τά 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου γράφουμε ὅλες τίς λέξεις, ἔτσι καί μέ τά **ἐννέα** ἀριθμόσημα: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 πού, λέγονται **σημαντικά** ψηφία, καί μέ τό (0) **μηδέν** μαζί, γράφουμε ὅλους τούς ἀριθμούς.

Ἡ ἐπινόηση αὐτή βασίζεται καί στή συμφωνία ὅτι: τό ἴδιο ψηφίο, ἀνάλογα μέ τή θέση, πού θά ἔχει μέσα στόν ἀριθμό, νά δηλώνει, **μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, χιλιάδες** κ.τ.λ. Μέ ἄλλα λόγια:

1. Ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός νά γράφεται μέ ἕνα ἤ περισσότερα ψηφία τό ἕνα δίπλα στ' ἄλλο, ὅπως π.χ. 978. Τό πρῶτο ψηφίο ἀπό τά δεξιά (τό 8) σημαίνει ἁπλές μονάδες. Τό δεύτερο, πάντα ἀπό δεξιά (τό 7) σημαίνει δεκάδες, τό τρίτο (τό 9) σημαίνει ἑκατοντάδες.
2. Ἄν δέν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως, νά γράφουμε τόν ἀριθμό μηδέν (0).

Παραδείγματα:

1) Ὁ ἀριθμός 347 ν' ἀποτελεῖται ἀπό 3 4 7
ἑκατοντάδες
δεκάδες
ἁπλές μονάδες

2) Ὁ ἀριθμός 805 ν' ἀποτελεῖται ἀπό 8 0 5
ἑκατοντάδες
δεκάδες
ἁπλές μονάδες

Ἐδῶ παρατηροῦμε, πώς ὁ μηδέν στόν ἀριθμό 805, παρόλο ὅτι παρασταίνει μηδέν δεκάδες, ὡστόσο δέν παραλείπεται, γιατί ἔτσι μόνον ὁ 8 θά κατέχει τήν τρίτη θέση, δηλαδή τή θέση τῶν ἑκατοντάδων. Ἐνῶ ἄν παραλείπαμε τόν μηδέν, τότε ὁ 8 θά βρισκόταν στή δεύτερη θέση, ὅπου εἶναι ἡ θέση τῶν δεκάδων. Δηλαδή θά ἦταν 85.

Ὅπως φαίνεται ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα, κάθε ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει δύο ἀξίες:

1) Τήν **ἀξία θέσεως** μέσα στόν ἀριθμό. Δηλαδή: Στήν πρώτη

ἀπό τά δεξιά θέση νά παρασταίνει ἁπλές μονάδες. Στή δεύτερη ἀπό δεξιά πρός τ' ἀριστερά θέση νά παρασταίνει δεκάδες. Στήν τρίτη ἀπό δεξιά πρός τ' ἀριστερά θέση νά παρασταίνει ἑκατοντάδες, καί

2) Ἔχει τήν **ἀπόλυτη ἀξία,** πού εἶναι ἡ ἀριθμητική του ἀξία. π.χ. στόν ἀριθμό 222 ὁ 2 ἔχει ἀπόλυτη ἀξία 2 καί ἀξία θέσεως, στήν πρώτη ἀπό τά δεξιά θέση 2 ἁπλές μονάδες, στή δεύτερη, πάντα ἀπό δεξιά, 2 δεκάδες καί στήν τρίτη 2 ἑκατοντάδες.

Βλέπετε; ➧

> Ἡ θέση στόν ἀριθμό καθενός ἀπό τά ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, καί 9 προσδιορίζει καί τό μέγεθος τοῦ ἀριθμοῦ.

Μέ τήν παραπάνω συμφωνία γράφουμε κατά σειρά τά ψηφία τῶν διαφόρων μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά, χωρίς νά εἶναι ἀνάγκη νά σημειώνουμε στό καθένα τό εἶδος τῶν μονάδων.

Παραδείγματα:

1. Ἀντί τοῦ: 4 ἑκατοντάδες καί 7 δεκάδες καί 0 μονάδες ἤ 4Ε καί 7Δ καί 0Μ, γράφουμε: 470.

2. Ἀντί τοῦ: 3 χιλιόμετρα = 3 χιλιάδες μέτρα, γράφουμε: 3.000 μ.

3. Νά ἀναλυθοῦν στίς μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων οἱ ἀριθμοί: 374 καί 604.

Ἀπάντηση:

3Ε + 7Δ + 4Μ = 374
6Ε + 0Δ + 4Μ = 604

4. Νά βρεῖτε τούς ἀριθμούς πού ἀντιπροσωπεύουν οἱ ἐκφράσεις:
   α). 2Ε + 0Δ + 3Μ
   β). 3Ε + 0Δ + 2Μ
   γ). 5Δ + 0Δ + 0Μ

Ἀπάντηση:

α). 2Ε + 0Δ + 3Μ = 203

β). 3Ε + 0Δ + 2Μ = 302

γ). 5Δ + 0Δ + 0Μ = 500

Προβλήματα:

5. Νά ἀναλυθοῦν στίς μονάδες διαφόρων τάξεων οἱ ἀριθμοί:
18, 79, 120, 408, 500, 196, 666, 999.
6. Νά βρεῖτε τούς ἀριθμούς πού ἀντιπροσωπεύουν οἱ ἐκφράσεις:
3Δ + 2Μ
2Ε + 6Δ + 4Μ
5Ε + 0Δ + 0Μ
9Ε + 6Δ + 9Μ
7. Ἕνας ἀριθμός εἶναι τριψήφιος. Ποιᾶς τάξεως μονάδες παρασταίνει τό πρῶτο ψηφίο ἀπό ἀριστερά;
8. Πόσες δεκάδες ὑπάρχουν στήν ἑκατοντάδα;
9. Πόσες ἑκατοντάδες ὑπάρχουν στή χιλιάδα;
10. Γράψτε τό 500 + 50 + 5 σέ ἁπλή μορφή.
Τί δηλώνουν τά τρία 5 στόν ἀριθμό πού ἔχετε γράψει σέ ἁπλή μορφή;
11. Σκεφθεῖτε τόν ἀριθμό 77. Ποιά εἶναι ἡ σημασία τοῦ ἀριστεροῦ 7, καί ποιά ἡ σημασία τοῦ δεξιοῦ 7;
12. Σκεφθεῖτε τόν ἀριθμό 556. Ποιά ἡ σημασία καθενός ἀπό τά 5;
13. Οἱ ἀριθμοί: 20 καί ὁ ἀριθμός 2, ἔχουν τό ψηφίο 2.
Ποιά ἡ σημασία κάθε 2;
14. Οἱ ἀριθμοί 54 καί 45 ἔχουν τά ἴδια ψηφία. Ποιά ἡ σημασία τῶν ψηφίων 5 καί 4 στούς ἀριθμούς;
15. Στή γραφή τῶν ἀριθμῶν 683 καί 386 χρησιμοποιοῦνται τά ἴδια ψηφία. Ποιά ἡ αἰτία πού οἱ ἀριθμοί ἔχουν διαφορετική ἀξία;
16. Ὁ ἀριθμός 767 ἔχει μόνο δύο διάφορα ψηφία. Ἔχουν τά δύο 7 τήν ἴδια σημασία;
17. Ἄν ἀλλάξετε τή θέση τῶν ψηφίων, 3 καί 7 στόν ἀριθμό 973, θά πάρετε μικρότερο ἤ μεγαλύτερο ἀριθμό;
18. Ὅμοια ἄν ἀλλάξετε τή θέση τῶν ψηφίων 9 καί 7 στόν ἀριθμό 970, θά πάρετε ἀριθμό μικρότερο ἤ μεγαλύτερο;
Δικαιολογεῖστε τίς ἀπαντήσεις σας.
19. Οἱ Ὀλυμπιακοί ἀγῶνες ἄρχισαν στήν Ὀλυμπία τό 776 π.Χ.
Ποιό ἀπό τά δύο 7 ἔχει τή μεγαλύτερη ἀξία καί γιατί;
20. Διαβάστε τόν ἀριθμό 101. Πῶς ἀπαγγέλλεται καθένα ἀπό τά 1;
21. Διαβάστε τόν ἀριθμό 67. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ 6 καί πῶς ὁ 7;

22. Διαβάστε τόν ἀριθμό 709. Πῶς ἀπαγγέλλεται ὁ 9 καί πῶς ὁ 7; καί πῶς ὁ μηδέν;

23. Στόν ἀριθμό 700, ἀφοῦ δέν ὑπάρχουν δεκάδες καί μονάδες, γιατί δέν παραλείπονται τά μηδενικά;

24. Φανταστεῖτε τόν ἀριθμό 507. Ποιά ἡ σημασία τοῦ μηδενός; Ἀφοῦ ὁ ἀριθμός δέν ἔχει δεκάδες, γιατί δέν παραλείπεται ὁ ἀριθμός μηδέν;

25. Ὁ Κώστας σκέφτηκε, ὅτι στόν ἀριθμό 120 δραχμές, δέν ὑπάρχει λόγος νά γραφτεῖ τό μηδέν, γιατί δέν ἀντιπροσωπεύει τίποτα. Ἔτσι ἔγραψε 12. Ἔγραψε σωστά ἤ λάθος καί γιατί;

Βλέπετε; ➧

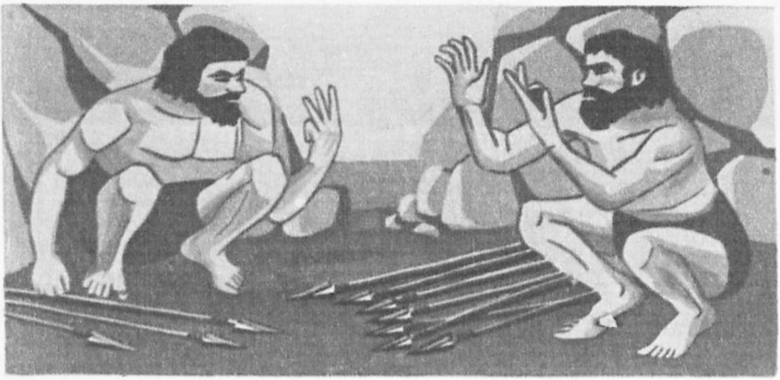
> Τό ψηφίο μηδέν (0) πού γράφεται μέσα στόν ἀριθμό, κρατᾶ τ' ἄλλα ψηφία στή σωστή τους θέση καί δηλώνει ὅτι λείπουν οἱ μονάδες τῆς θέσεως πού κατέχει.

Εἰκ. 13. «Ἡ κόρη μας βάζει κάτω τά ἀγόρια στήν ἀριθμητική».

8. Γνωρίζετε:

Πῶς διαμορφώθηκε τό δεκαδικό σύστημα ἀριθμήσεως;

Τό σχέδιο πού ἀκολουθεῖ, εἰκονίζει τόν παλαιό ἄνθρωπο, σέ μιά προσπάθεια νά ἀπαντήσει στήν ἐρώτηση πόσα;



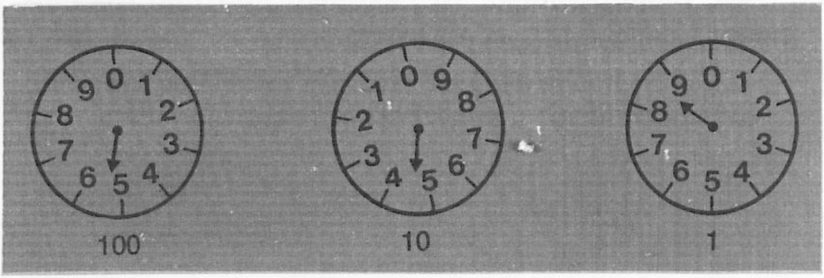
Εἰκ. 14

Ὅπως βλέπετε **ἀντιστοιχοῦσε** σέ κάθε δάχτυλο τοῦ χεριοῦ του καί ἕνα βέλος. Κι ἄν τά βέλη ἦταν περισσότερα ἀπό τά δάχτυλά του π.χ. κατά ὀκτώ, ἔδειχνε ὅλα τά δάχτυλα καί τῶν δυό χεριῶν του καί σέ συνέχεια ἔδειχνε πάλι ἄλλα ὀκτώ δάχτυλα. Αὐτό πού λέμε σήμερα δέκα ὀκτώ.

Ἐδῶ λοιπόν βλέπουμε, ὅτι τό πρῶτο ἀριθμητικό βοήθημα τοῦ ἀνθρώπου ἦταν τά δάχτυλα τῶν χεριῶν του. Αὐτά σχηματίζουν ἕνα πρότυπο, ἀξιοσημείωτο καί ἁπλό σύνολο πού σ' αὐτό ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμός δέκα. Μέ τό σύνολο αὐτό διαμορφώθηκε πιθανόν καί τό δεκαδικό μας σύστημα ἀριθμήσεως.

9. Δεκαδική ἀρίθμηση στά ρολόγια πού μετροῦν τήν κατανάλωση ρεύματος καί νεροῦ:

Παρακάτω εἰκονίζεται τό «καντράν» ἑνός ἠλεκτρικοῦ μετρητή τῆς Δ.Ε.Η. Αὐτό ἀριθμεῖ τήν κατανάλωση τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος.



Εἰκ. 15

Ἡ λειτουργία του βασίζεται στήν παρακάτω ἀρχή.

1. Τό «καντράν» πού σημειώνεται μέ 1 ἀριθμεῖ τίς μονάδες.
2. Τό καντράν πού σημειώνεται μέ 10 ἀριθμεῖ τίς δεκάδες.

   Δηλαδή ὅταν ὁ δείκτης τοῦ 1 κάνει μία ὁλόκληρη στροφή, ὁ δείκτης τοῦ 10 μετατοπίζεται κατά ἕναν ἀριθμό.
3. Τό καντράν 100 ἀριθμεῖ τίς ἑκατοντάδες. Δηλαδή ὅταν ὁ δείκτης πού σημειώνει τίς δεκάδες, κάνει ἕναν ὁλόκληρο γύρο, ὁ δείκτης τῶν ἑκατοντάδων μετατοπίζεται κατά ἕναν ἀριθμό. Ὅμοια καί γιά τά ἄλλα «καντράν».
4. Ὅταν πρόκειται νά διαβάσουμε τήν κατανάλωση, ἀρχίζουμε ἀπό τό ἀριστερό «καντράν» πρός τά δεξιά, καί διαβάζουμε τό μικρότερο ἀριθμό, ὅταν ὁ δείκτης βρίσκεται ἀνάμεσα σέ δύο ἀριθμούς. Στό καντράν τῆς εἰκόνας, ἡ κατανάλωση εἶναι 558.

Προβλήματα:

26. Πόσα ψηφία ἔχει ἕνας ἀριθμός ἄν τό πρῶτο ἀπό τ' ἀριστερά ψηφίο ἐκφράζει ἑκατοντάδες;

26. Πόσοι μονοψήφιοι ἀριθμοί ὑπάρχουν;

27. Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοί ὑπάρχουν, ἀνάμεσα στόν 100 καί 200, πού τό ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων τους εἶναι 1;

29. Πόσοι διψήφιοι ἀριθμοί ὑπάρχουν, πού τό ψηφίο τῶν δεκάδων εἶναι 4;

10. Συγκεκριμένοι ἀριθμοί

Ἡ μητέρα ἀγόρασε σήμερα ἀπό τήν ἀγορά: 2 κιλά λαχανικά, 1 κιλό κρέας, 3 πακέτα μακαρόνια καί 8 αὐγά.

Ἐδῶ βλέπουμε πώς οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά περιγράψουμε τά ψώνια τῆς μητέρας, δέ φανερώνουν μόνο τό **πλῆθος** τῶν μονάδων τῶν εἰδῶν πού ἀγόρασε ἡ μητέρα, ἀλλά καί τό **εἶδος** τῶν μονάδων.

Οἱ ἀριθμοί αὐτοί ὀνομάζονται **συγκεκριμένοι.**

Εἰκ. 16

11. Ἀφηρημένοι ἀριθμοί

Στό μάθημα τῆς ᾠδικῆς γιά νά ἀρχίσουν ὅλοι μαζί οἱ μαθητές ἡ δασκάλα δίνει τό σύνθημα: 1, 2, 3.

Ἐδῶ βλέπουμε πώς οἱ ἀριθμοί 1, 2, 3 πού χρησιμοποιεῖ ἡ δασκάλα γιά ν' ἀρχίσει τό τραγούδι δέ δηλώνουν κανένα εἶδος μονάδων. Τούς ἀριθμούς αὐτούς τούς λέμε **ἀφηρημένους.**

Βλέπετε; ➧

> Οἱ ἀριθμοί πού δηλώνουν τό εἶδος τῶν μονάδων πού ἀντιπροσωπεύουν, λέγονται **συγκεκριμένοι** καί αὐτοί πού δέ δηλώνουν κανένα εἶδος μονάδων, λέγονται **ἀφηρημένοι.**

Προβλήματα:

30. Ἀπό τούς παρακάτω ἀριθμούς ποιοί εἶναι οἱ συγκεκριμένοι καί ποιοί οἱ ἀφηρημένοι;
 5 τετράδια, 8 μολύβια, 20 αὐτοκίνητα, 7, 8, 15.
31. Γράψτε δύο συγκεκριμένους καί δύο ἀφηρημένους ἀριθμούς.

12. Ὁμοειδεῖς καί ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί

1. Ἡ αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει 2 **παράθυρα** ἀπό δεξιά καί 3 **παράθυρα** ἀπό ἀριστερά.
2. Ἡ τάξη μου ἔχει 20 ἀγόρια καί 12 κορίτσια.

Στό πρῶτο παράδειγμα πού οἱ ἀριθμοί ἀναφέρονται στό ἴδιο πράγμα (εἶδος) λέγονται **ὁμοειδεῖς.**

Στό δεύτερο παράδειγμα, πού ἀναφέρονται σέ **διαφορετικά** πράγματα (εἴδη) λέγονται **ἑτεροειδεῖς.**

Προβλήματα:

32. Γράψτε δύο ὁμοειδεῖς καί δύο ἑτεροειδεῖς ἀριθμούς.
33. Ἀπό τούς ἀριθμούς: 11 βιβλία, 7 τετράδια, 3 αὐτοκίνητα Φίατ, 6 αὐτοκίνητα Φόρντ, 18 βιβλία μαθηματικῶν, 6 πρόχειρα τετράδια, ποιοί εἶναι ὁμοειδεῖς καί ποιοί ἑτεροειδεῖς;
34. Νά συμπληρώσετε τίς τελεῖες μέ λέξεις, ὥστε οἱ ἀριθμοί νά γίνουν: 1) ὁμοειδεῖς καί 2) ἑτεροειδεῖς.
 5 ...., 8 ...., 7 ...., 6 ....

13. Ἀξιοσημείωτα σύνολα ἀριθμῶν

1. Φυσική σειρά τῶν ἀριθμῶν. Ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Οἱ ἀφηρημένοι ἀριθμοί: 0, 1, 2, 3, ...

ἀποτελοῦν μιά διάταξη μέ τή σειρά πού δίνονται, πού λέγεται: **φυσική σειρά τῶν ἀριθμῶν.**

Τό χαρακτηριστικό αὐτῆς τῆς σειρᾶς εἶναι, ὅτι ἀρχίζει ἀπό τόν ἀριθμό 1 καί συνεχίζεται πρός τά δεξιά χωρίς τελειωμό. Καί ὁ ἀριθμός πού προηγεῖται ἔχει μιά μονάδα λιγότερη ἀπό αὐτόν πού ἀκολουθεῖ.

Δηλαδή: $0, 1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, \dots$

2. Ἀκέραιοι ἀριθμοί

Οἱ φυσικοί ἀριθμοί:

$0, 1, 2, 3, 4, \dots$

λέγονται καί ἀκέραιοι ἀριθμοί τῆς ἀριθμητικῆς.

14. Ἄλλα εἴδη ἀκεραίων ἀριθμῶν

1. Ἄρτιοι (ζυγοί) ἀριθμοί:

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού ἔχουν γιά τελευταῖο ψηφίο:

2, 4, 6, 8, καί 0

ὀνομάζονται ἄρτιοι ἤ ζυγοί ἀριθμοί.

Δεχόμαστε καί τόν ἀκέραιο ἀριθμό μηδέν (0) σάν ἄρτιο.

2. Περιττοί (ἤ μονοί) ἀριθμοί:

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί πού ἔχουν γιά τελευταῖο ψηφίο:

1, 3, 5, 7, καί 9

ὀνομάζονται περιττοί ἀριθμοί.

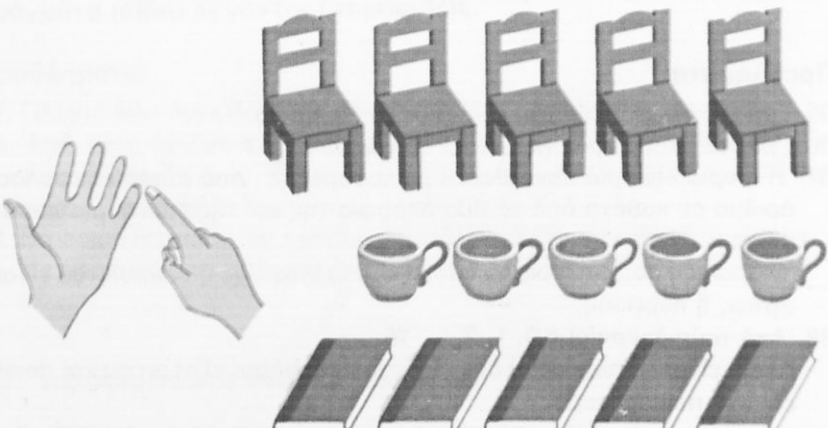
Προβλήματα:

35. Γράψτε ὅλους τούς ἄρτιους μεταξύ 20 καί 30.
36. Γράψτε ὅλους τούς περιττούς μεταξύ 9 καί 17.
37. Ἡ Μαρία εἶχε μία σακουλίτσα μέ καραμέλες. Ἀπό αὐτές ἔδωσε ἴσο ἀριθμό σέ καθένα ἀπό τά δύο ἀδέρφια της καί τῆς ἔμεινε μία καραμέλα.
    Ὁ ἀριθμός πού φανερώνει πόσες καραμέλες εἶχε ἡ σακουλίτσα εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός;
38. Ἀπό τούς ἀκεραίους 0, 1, 2, ..., 15
    Πόσοι εἶναι σέ πλῆθος οἱ ἄρτιοι (ζυγοί) καί πόσοι οἱ περιττοί καί ποιοί εἶναι οἱ περισσότεροι;
39. Ἀπό δυό διαδοχικούς ἄρτιους ἀριθμούς αὐτός, πού προηγεῖται πόσες μονάδες ἔχει παραπάνω ἀπό αὐτόν, πού ἀκολουθεῖ.


Εἰκ. 17. «Δέν εἶναι καί τόσο κουτός στήν ἀριθμητική. Ὑπολόγισε ἀκριβῶς, πόσες ὧρες μαθημάτων μένουν ὥς τίς διακοπές».

15. Σύγκριση ἀκεραίων ἀριθμῶν

Ἴσοι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Διάφοροι ἀριθμοί.


Εἰκ. 18

Οἱ συλλογές πού εἰκονίζονται, ἔχουν ἕνα κοινό χαρακτηριστικό. Ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος ἀντικειμένων.

Εἶναι φανερό πώς κι οἱ ἀριθμοί πού ἐκφράζουν τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων τῶν συλλογῶν αὐτῶν, ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος μονάδων.

Οἱ ἀριθμοί, πού ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος μονάδων, λέγονται **ἴσοι ἀριθμοί.** π.χ. Ὁ ἀριθμός τῶν δαχτύλων τῆς εἰκόνας εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν καθισμάτων κι αὐτός ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν φλυτζανιῶν καί τῶν βιβλίων.

Τό σύμβολο πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά δηλώσουμε ἰσότητα εἶναι: (=), πού διαβάζεται: «εἶναι ἴσον μέ...».

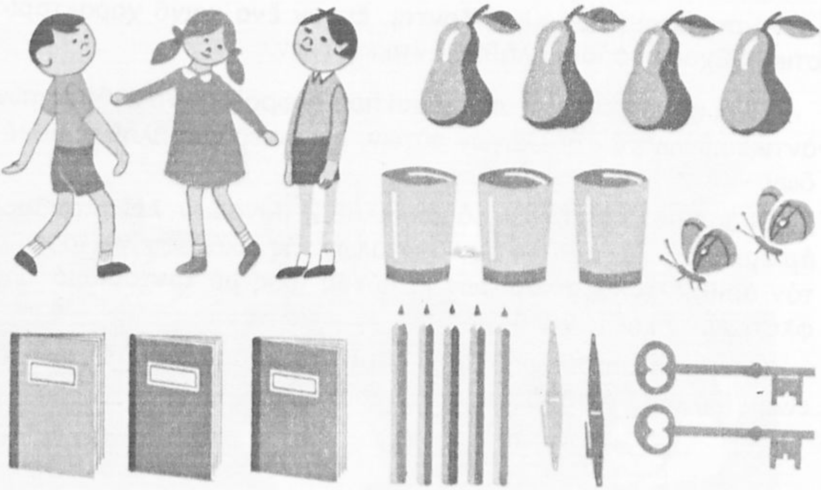
Βλέπετε; ➧ Ἴσοι εἶναι οἱ ἀριθμοί πού ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος μονάδων.

Ὅταν δύο ἀριθμοί δέν εἶναι ἴσοι, λέμε ὅτι εἶναι **διάφοροι.** Αὐτό συμβολίζεται: $5 \neq 6$ καί διαβάζεται: «ὁ 5 εἶναι διάφορος τοῦ 6».

16. Παρατηρήσεις

Παρατηρῆστε τήν παρακάτω εἰκόνα κι ἐξηγῆστε τίς παρακάτω προτάσεις:

1. Ὑπάρχουν τόσα παιδιά ὅσα καί τά τετράδια;
2. Ὑπάρχουν λιγότερα παιδιά ἀπό τά μολύβια;
3. Ὑπάρχουν περισσότερα παιδιά ἀπό τά στυλό;
4. Σέ ποιά σχέση βρίσκονται οἱ ἀριθμοί πού προσδιορίζουν τά παραπάνω σύνολα;
5. Κάνετε καί σεῖς συγκρίσεις μέ ἀντικείμενα τῆς εἰκόνας.

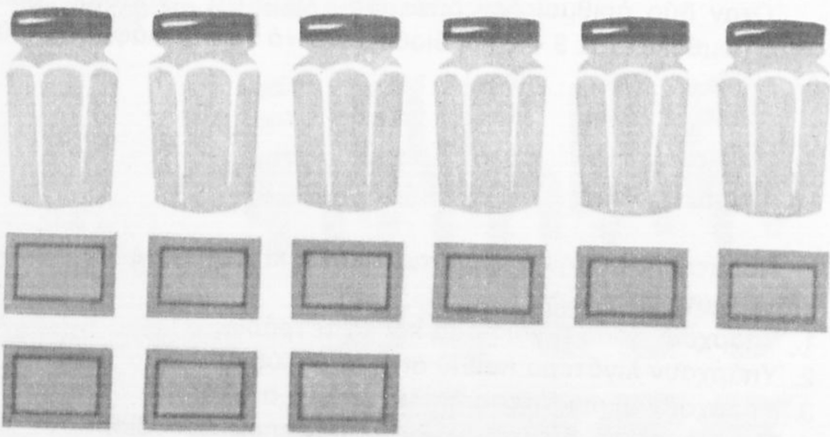


Εἰκ. 19

17. Ἄνισοι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Παρακάτω εἰκονίζεται μία συλλογή ἀπό γυάλες καί μιά συλλογή ἀπό ἐτικέτες.

Βλέπουμε ὅτι σέ κάθε γυάλα ἀντιστοιχεῖ μία ἐτικέτα, καί μᾶς περισσεύουν καί ἐτικέτες.



Εἰκ. 20. Ὁ ἀριθμός τῶν γυαλῶν εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐτικετῶν.

Μέ ἄλλα λόγια οἱ συλλογές δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος ἀντικειμένων. Εἶναι φανερό ὅτι καί οἱ ἀριθμοί πού ἐκφράζουν τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων τῶν συλλογῶν αὐτῶν δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος μονάδων. Οἱ ἀριθμοί πού δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος μονάδων ὀνομάζονται **ἄνισοι** ἀριθμοί.

Βλέπετε;

> Οἱ ἀριθμοί πού δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος μονάδων, λέγονται **ἄνισοι** ἀριθμοί. Καί ἀπό δύο ἀριθμούς, αὐτός πού ἔχει τίς λιγότερες μονάδες, λέγεται μικρότερος τοῦ ἄλλου.

Σᾶς θυμίζουμε ἀκόμα πώς ἀπό δύο ἄνισους ἀκέραιους ἀριθμούς, ὁ μικρότερος προηγεῖται στή φυσική σειρά τῶν ἀριθμῶν: 1, 2, 3, ...

Παραδείγματα:

Ὁ 5 εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 8, γιατί στή φυσική σειρά τῶν ἀριθμῶν: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... ὁ 5 γράφεται πρίν ἀπό τό 8. Συμβολικά τό παρασταίνουμε: $5 < 8$.

Τό σύμβολο $<$ διαβάζεται: εἶναι μικρότερος τοῦ...
Ὅμοια: $8 > 5$
Τό σύμβολο $>$ διαβάζεται: εἶναι μεγαλύτερος τοῦ...
Οἱ γραφές: $8 > 5$
$5 < 8$
Ὀνομάζονται ἀνισότητες.

Προβλήματα:

40. Γράψτε ὅλους τούς ἀριθμούς, πού εἶναι μικρότεροι τοῦ 4.
41. Γράψτε ὅλους τούς ἀριθμούς πού εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 6 ἀλλά μικρότεροι τοῦ 9.
42. Ὑπάρχει ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 7 καί μικρότερος τοῦ 6;
43. Νά βρεῖτε ἕναν ἀριθμό πού νά μήν εἶναι ἴσος μέ τόν 7.
    Ὁ ἀριθμός πού χρησιμοποιήσατε εἶναι μεγαλύτερος ἤ μικρότερος τοῦ 7;

Χρησιμοποιεῖστε τά σύμβολα < ἤ >.

44. Ἡ Κατίνα εἶπε: «Μαρία ἔχω 5 κοῦκλες». Ἡ Μαρία ἀπάντησε: «Ἔχω περισσότερες κούκλες ἀπό σένα, ἀλλά σέ ἀριθμό μικρότερο ἀπό 7». Νά βρεῖτε πόσες κούκλες εἶχε ἡ Μαρία.
45. Πόσοι φυσικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν μεγαλύτεροι τοῦ μηδενός καί μικρότεροι τοῦ 2;
46. Νά γραφοῦν ὅλοι οἱ διψήφιοι ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τοῦ 69 πού βρίσκονται μέ τήν ἑξῆς συμφωνία: Τό ψηφίο τῶν δεκάδων νά εἶναι κατά μονάδα μεγαλύτερο ἀπό τό ψηφίο τῶν μονάδων.
47. Ποιός ὁ μικρότερος ἀκέραιος μέ 2 ψηφία; καί ποιός μέ 3;
48. Ποιός ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος μέ 2 ψηφία; καί ποιός μέ 3;
49. Ποιός εἶναι ὁ πιό μεγάλος ἀριθμός πού μπορεῖτε νά παρουσιάσετε μέ τή χρήση τῶν παρακάτω ψηφίων, μέ τή συμφωνία ὅτι κάθε ψηφίο θά τό χρησιμοποιήσετε μιά καί μόνον φορά.
   2, 3   1, 0, 4,   3, 0, 5

Προβλήματα ἐπαναλήψεως:

50. Πόσους διψήφιους ἀριθμούς μποροῦμε νά γράψουμε μέ τά ψηφία 7 καί 8. Νά τούς βάλετε κατά σειρά μεγέθους μέ τή χρήση τοῦ κατάλληλου συμβόλου.
51. Πόσους τριψήφιους ἀριθμούς μποροῦμε νά γράψουμε μέ τά ψηφία 4, 3, 5; Νά τούς βάλετε κατά σειρά μεγέθους.
52. Γράψτε τό μεγαλύτερο ἀκέραιο, ἀφοῦ χρησιμοποιήσετε μόνο μιά φορά τά ψηφία: 1 καί 9
53. Γράψτε τό μικρότερο τριψήφιο ἀκέραιο, ἀφοῦ χρησιμοποιήσετε τά ψηφία: 6, 0 καί 1 μόνο μιά φορά.
54. Γράψτε τό μεγαλύτερο καί ὕστερα τό μικρότερο ἀκέραιο, ἀφοῦ χρησιμοποιήσετε μόνο ἀπό μιά φορά τά ψηφία: 8, 0 καί 9.
55. Σημειῶστε στούς παρακάτω ἀριθμούς τήν ἀξία θέσεως κάθε ψηφίου του: 156, 324, 617, 304.
56. Ποιά εἶναι ἡ ἀξία θέσεως τοῦ ψηφίου 1 στίς παρακάτω περιπτώσεις: 71, 174, 11, 100, 19.
57. Ποιά εἶναι ἡ σημασία τοῦ ἀριθμοῦ μηδέν (0) στούς ἀριθμούς: 301, 200, 120.
58. Ὁ 400 ἔχει: .... ἑκατοντάδες, ... δεκάδες, ... μονάδες.
59. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 20 καί 30, πόσοι ἀριθμοί γράφονται μέ δύο διάφορα ψηφία;

18. Κάνετε αὐτοεξέταση

Στήν ἀριστερή στήλη σημειώνουμε τούς ὅρους, καί στή δεξιά τή σημασία τους. Ἀφοῦ ἀντιγράψετε στό τετράδιό σας σέ μιά στήλη τούς ἀριθμούς ἀπό 1 ἕως τό 10, νά γράψτε δίπλα τό γράμμα πού ἀντιπροσωπεύει τήν ὀρθή ἀπάντηση στή δεξιά στήλη.

1. Ἀριθμός	α. Εἶναι τό σύνολο: 0, 1, 2, 3, 4, ...
2. Ἀπαρίθμηση τῶν πραγμάτων μιᾶς συλλογῆς	β. Ποσοτική ἔννοια.
3. Ἴσοι ἀκέραιοι	γ. Ἡ ἐργασία πού γίνεται γιά τήν εὕρεση τοῦ ἀριθμοῦ, πού δηλώνει τό πλῆθος τῶν πραγμάτων μιᾶς συλλογῆς.
4. Ἄνισοι ἀκέραιοι	δ. Ὅσοι ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος μονάδων.
5. Συγκεκριμένοι ἀριθμοί	ε. Ὅσοι μετροῦν ὁμοειδή ποσά.
6. Ἀφηρημένοι ἀριθμοί	στ. Ὅσοι συνοδεύονται ἀπό τό εἶδος τῶν μονάδων τους.
7. Ὁμοειδεῖς ἀριθμοί.	ζ. Ὅσοι δέν δηλώνουν κανένα εἶδος μονάδων.
8. Φυσικοί ἀριθμοί.	η. Εἶναι τό σύνολο: 0, 1, 2, 3, 4...
9. Ἀκέραιοι ἀριθμοί.	θ. Οἱ ἀριθμοί πού ἀριθμοῦν συλλογές, πού δέν ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος πραγμάτων.
10. Ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί	ι. Ὅσοι μετροῦν ἑτεροειδή ποσά.

Βαθμός ἐπιτυχίας = (Πλῆθος ὀρθῶν ἀπαντήσεων) × 4.

Ποῦ κατατάσσεστε	Ἄριστα	Καλά	Μέτρια	Ὄχι ἱκανοποιητικά
	40 - 34	34 - 26	26 - 20	κάτω ἀπό 20

19. Γιά νά θυμηθεῖτε τό λεξιλόγιό σας

Στήν ἀριστερή στήλη γράφουμε τούς ὅρους καί τά σύμβολα, καί στή δεξιά τούς κανόνες.

Ἀφοῦ ἀντιγράψετε στό τετράδιό σας τούς ἀριθμούς ἀπό 1 ἕως 8 σέ μιά στήλη, γράψτε δίπλα σέ κάθε ἀριθμό τό γράμμα τῆς δεξιᾶς στήλης, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὀρθή ἀπάντηση.

1. >	α. Ἡ θέση τοῦ ψηφίου μέσα στόν ἀριθμό
2. ἀριθμός	β. Γιά νά δηλωθεῖ ὅτι δέν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως.
3. ἀξία θέσεως ψηφίου	γ. Πολλαπλασιασμό μέ τόν 10
4. χρήση τοῦ μηδενός	δ. Εἶναι μεγαλύτερος τοῦ...
5. <	ε. Εἶναι μικρότερος τοῦ...
6. =	στ. Εἶναι ἴσος μέ...
7. μετάθεση ψηφίου σέ ἀριθμό μία θέση πρός τά ἀριστερά σημαίνει:	ζ. Τά 10 δάχτυλα τῶν χεριῶν τοῦ ἀνθρώπου
8. ἀρχή τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως	η. Ἡ ἔννοια μέ τήν ὁποία ὁρίζουμε μία ποσότητα.

Βαθμός ἐπιτυχίας = (πλῆθος ὀρθῶν ἀπαντήσεων) × 4

Ποῦ κατατάσσεστε;	Ἄριστα	Καλά	Μέτρια	Ὄχι ἱκανοποιητικά
	32 - 28	28 - 24	24 - 20	κάτω ἀπό 20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Πρόσθεση
Ἀφαίρεση
Πολλαπλασιασμός
Διαίρεση
Πῶς θά λύσω
ἕνα πρόβλημα

Οἱ τέσσερις ἀριθμητικές πράξεις

20. Οἱ ἀριθμοί μέχρι τό 1000

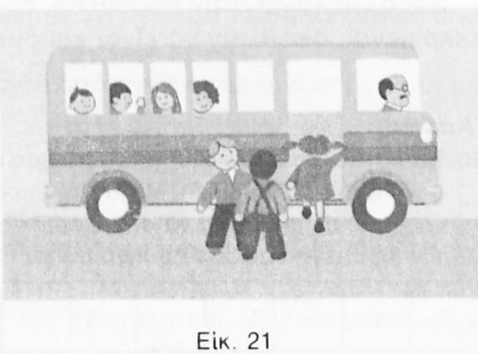
Ὅταν μᾶς δοθοῦν δύο ἤ καί περισσότεροι ἀριθμοί, μποροῦμε ἀπ' αὐτούς νά κατασκευάσουμε ἄλλους μέ τέσσερις τρόπους, πού τούς λέμε **ἀριθμητικές πράξεις** καί ἔχουν τά ὀνόματα: **Πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός** καί **διαίρεση**. Στά παρακάτω θά ἀναπτύξουμε τίς πράξεις αὐτές ἀρχίζοντας ἀπό τήν εὐκολότερη, τήν πρόσθεση.

Πρόσθεση

21. Ἄθροισμα ἀριθμῶν

ΓΙΑ ΝΑ ΓΝΩΡΙΣΕΤΕ
ΤΑ ΟΝΟΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

	25
προσθετέοι:	+17
ἄθροισμα:	42



Εἰκ. 21

25 μαθητές τῆς τετάρτης τάξεως καί 17 μαθητές τῆς πέμπτης, ἀνέβηκαν στό λεωφορεῖο, γιά νά πᾶνε ἐκδρομή. Πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ μαθητές, πού ἀνέβηκαν στό λεωφορεῖο;

Ἀριθμοῦμε τούς μαθητές πού εἶναι μέσα στό λεωφορεῖο καί τούς βρίσκουμε 42.

Ὁ ἀριθμός 42 μαθητές λέγεται **ἄθροισμα** τῶν ἀριθμῶν 25 μαθητές καί 17 μαθητές, πού λέγονται **προσθετέοι.**

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό ἄθροισμα, λέγεται **πρόσθεση.**

Τήν πρόσθεση σημειώνουμε μέ τό σύμβολο (+), πού διαβάζεται: **καί** ἤ **σύν.**

Γράφουμε δηλαδή: 25 μαθητές + 17 μαθητές = 42 μαθητές.

Ἤ μέ ἀφηρημένους ἀριθμούς: 25 + 17 = 42.

Βλέπετε; ➧

> Στήν πρόσθεση δίδονται **δυό** ἀριθμοί καί ἀπ' αὐτούς ζητᾶμε νά βροῦμε ἕναν τρίτο ἀριθμό, πού νά περιέχει μόνο τίς μονάδες τῶν δύο ἀριθμῶν.

Μέ τήν παραπάνω ἰδιότητα ἡ πρόσθεση χαρακτηρίζεται σάν μιά **διμελής** πράξη.

Τούς ἀριθμούς 5 θρανία καί 4 βιβλία **δέν** μποροῦμε νά τούς προσθέσουμε, γιατί δέν εἶναι **ὁμοειδεῖς.**

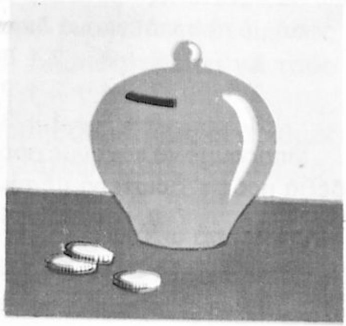
Μέ ἄλλα λόγια στήν πρόσθεση, ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι, ὀφείλουν νά εἶναι καί ὁμοειδεῖς.

Ἄσκηση:

60. Νά κατασκευάσετε στό τετράδιό σας ἕνα σχῆμα ὅπως τό παρακάτω πού νά ἔχει 12 θυρίδες. Μετά στήν πρώτη γράψτε τό 0, στή δεύτερη τό 1, καί σέ συνέχεια νά συμπληρώνετε τίς θυρίδες μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο προηγουμένων θυρίδων.

0	1										

22. Πρόσθεση περισσότερων ἀπό δύο ἀριθμῶν.



Πρόβλημα:

Στή γιορτή τοῦ Νίκου, ὁ πατέρας τοῦ ἀγόρασε ἕναν κουμπαρά. Γιά νά τόν «ἀσημώσουν» τά τέσσερα ἀδέρφια του, τοῦ ἔρριξαν, ὁ πρῶτος 3 δραχμές, ὁ δεύτερος 7, ὁ τρίτος 8, καί ὁ τέταρτος 9 δραχμές. Πόσες δραχμές ἔχει ὁ κουμπαράς τοῦ Νίκου;

Εἰκ. 22

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα αὐτό, θά κάνουμε πρόσθεση. Εἴπαμε ὅμως παραπάνω, πώς στήν πρόσθεση παίρνουν μέρος μόνο δυό προσθετέοι, καί γι' αὐτό τήν ὀνομάσαμε διμελή πράξη.

Τώρα παρουσιάζεται πρόβλημα μέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους. Πῶς πρέπει νά ἐργαστοῦμε, γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἄθροισμα:

$$3 + 7 + 8 + 9;$$

Παρατηροῦμε, πώς:

Βῆμα πρῶτο: $3 + 7 = 10$

Βῆμα δεύτερο: ...... $10 + 8 = 18$

Βῆμα τρίτο: .... $18 + 9 = 27$.

Στήν πράξη, δηλαδή αὐτή κάνουμε συνεχεῖς προσθέσεις, παίρνοντας τούς ἀριθμούς δυό - δυό.

Πρακτικά ὅμως ἀκολουθοῦμε τή μέθοδο τοῦ **πηδήματος** ἀπό τόν ἕνα ἀριθμό στόν ἄλλο.

Μέ ἄλλα λόγια τό μάτι πηδᾶ ἀπό τόν ἕνα ἀριθμό στόν ἄλλο μέ **κανονικό ρυθμό**, καί λέμε:

$$3 + 7 + 8 + 9$$

$$10 \quad 18 \quad 27$$

$$\longrightarrow$$

Γιά νά προσθέσουμε περισσότερους ἀπό δυό ἀριθμούς, προσθέτουμε τόν πρῶτο μέ τόν δεύτερο, τό ἄθροισμα μέ τόν τρίτο, τό νέο ἄθροισμα μέ τόν τέταρτο καί ἐξακολουθοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο, μέχρι νά ἐξαντληθοῦν ὅλοι οἱ προσθετέοι.

Ἀσκήσεις:

60. Νά κάνετε τίς παρακάτω προσθέσεις μέ τή μέθοδο τοῦ πηδήματος καί μέ προσπάθεια νά διατηρήσετε ἕναν κανονικό ρυθμό.

1. 8 + 5 + 3 + 8 + 5 + 7 + 9 + 3
2. 7 + 4 + 2 + 9 + 5 + 4 + 1 + 6
3. 6 + 5 + 1 + 3 + 7 + 8 + 4 + 6

Μποροῦμε νά κάνουμε πρόσθεση καί μέ ἀντίθετη διεύθυνση. Ἀπό τά δεξιά πρός τ' ἀριστερά μέ τόν ἴδιο κανονικό ρυθμό. Π.χ.

9 + 5 + 9 + 4 + 8 + 7 + 6 + 2 + 1

51 42 37 28 24 16 9 3

←

Ἀσκήσεις:

61. Νά κάνετε τίς παρακάτω προσθέσεις μέ τή μέθοδο τοῦ πηδήματος καί μέ κανονικό ρυθμό ἀρχίζοντας ἀπό τά δεξιά πρός τ' ἀριστερά.

1. 6 + 8 + 5 + 9 + 7 + 8 + 5 + 3
2. 7 + 9 + 3 + 6 + 9 + 8 + 6 + 8
3. 4 + 7 + 9 + 7 + 8 + 4 + 5 + 9

63. Νά κάνετε στό τετράδιό σας ἕνα σχῆμα, ὅπως τό παρακάτω πού νά ἔχει 9 θυρίδες. Στήν πρώτη νά γράψετε τό 0, στή δεύτερη τό 1, καί στήν τρίτη τό 2. Σέ συνέχεια γράψτε τόν ἀριθμό πού βρίσκετε ἄν προσθέτετε τούς τρεῖς προηγουμένους ἀριθμούς.

0	1	2						

64. Ὅμοιο μέ 9 θυρίδες καί νά τούς προσθέτετε ἀνά τέσσερις.

1	1	2	3					

13. Ἡ τεχνική τῆς προσθέσεως

Ὁ Νίκος εἶχε 308 γραμματόσημα Ἑλληνικά καί τοῦ ἔδωσε ὁ θεῖος του 173 Ἀμερικανικά, 78 Ἀγγλικά καί 235 διάφορα ἄλλα γραμματόσημα. Πόσα γραμματόσημα ἔχει ὅλα ὅλα ὁ Νίκος;

Γιά νά βροῦμε πόσα γραμματόσημα ἔχει ὅλα ὅλα ὁ Νίκος πρέπει νά βροῦμε ἕναν ἀριθμό πού νά ἔχει τόσες μονάδες, ὅσες ἔχουν οἱ ἀριθμοί 308, 173, 78, καί 235. Δηλαδή πρέπει νά τούς προσθέσουμε.

Ἀλλά γιά νά γίνει αὐτό πρέπει νά θυμηθοῦμε, πώς οἱ ἀριθμοί σχηματίζονται ἀπό μονάδες διαφόρων τάξεων. Δηλ.: ἁπλές μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες.

Γι' αὐτό γράφουμε τούς ἀριθμούς τόν ἕναν κάτω ἀπό τόν ἄλλο ἔτσι, ὥστε οἱ μονάδες νά εἶναι κάτω ἀπό τίς μονάδες, οἱ δεκάδες κάτω ἀπό τίς δεκάδες, καί οἱ ἑκατοντάδες κάτω ἀπό τίς ἑκατοντάδες. Καί ἐκτελοῦμε τήν πρόσθεση ἔτσι:

	Ε	Δ	Μ
	3	0	8
	1	7	3
		7	8
	2	3	5
Ἄθροισμα: →	7	9	4

Ἡ πράξη γίνεται πρακτικά ἔτσι:

$$\begin{array}{r} 308 \\ 173 \\ +\ 78 \\ 235 \\ \hline 794 \end{array}$$

Πρῶτο βῆμα: Προσθέτουμε τούς ἀριθμούς στή στήλη τῶν μονάδων. Τό ἄθροισμα 24 ἀναλύεται σέ δυό δεκάδες καί τέσσερις μονάδες. Γράφουμε τίς 4 μονάδες στή στήλη τῶν μονάδων, καί «**κρατοῦμε**» τό 2 γιά τή στήλη τῶν δεκάδων.

Δεύτερο βῆμα: Τό ἄθροισμα στή στήλη τῶν δεκάδων εἶναι 17 καί 2 τά «**κρατούμενα**» 19 δεκάδες, πού ἀναλύονται σέ μιά ἑκατοντάδα καί 9 δεκάδες. Γράφουμε τό 9 στή στήλη τῶν δεκάδων καί «**κρατοῦμε**» 1 ἑκατοντάδα γιά τή στήλη τῶν ἑκατοντάδων.

Τρίτο βῆμα: Τό ἄθροισμα στή στήλη τῶν ἑκατοντάδων εἶναι 6 ἑκατοντάδες καί 1 τό «**κρατούμενο**» **7.** Γράφουμε τό 7 στή στήλη τῶν ἑκατοντάδων.

Ἀπάντηση: Ὁ Νίκος ἔχει ὅλα - ὅλα 794 γραμματόσημα.

Βλέπετε; ➧

> Όταν πρόκειται νά προσθέσουμε ἀριθμούς, τούς γράφουμε τόν ἕναν κάτω ἀπό τόν ἄλλο ἔτσι, ὥστε οἱ μονάδες κάθε τάξεως νά βρίσκονται στήν ἴδια στήλη. Μετά προσθέτουμε ἀρχίζοντας ἀπό τή στήλη τῶν μονάδων καί προχωροῦμε πρός τ' ἀριστερά γράφοντας στήν κάθε στήλη τό ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς κάθε τάξεως. Προσέχουμε νά προσθέτουμε τό **«κρατούμενο»**, ἄν ὑπάρχει, στή στήλη του.

Μαθαίνετε διασκεδάζοντας:

66. Οἱ φυσικοί ἀριθμοί πού εἶναι γραμμένοι στίς κυψέλες τῶν τετραγώνων ἔχουν τοποθετηθεῖ ἔτσι ὥστε: κάθε ὁριζόντια σειρά νά ἔχει τό ἴδιο ἄθροισμα, μέ τό ἄθροισμα κάθε κατακόρυφης στήλης· καί τό ἴδιο μέ τό ἄθροισμα κάθε διαγώνιας. Μπορεῖτε νά τό ἐπαληθεύσετε;

Τά τετράγωνα αὐτά λέγονται «μαγικά τετράγωνα»

4	55	34
61	31	1
28	7	58

76	11	156
161	81	1
6	151	86

Ἀσκήσεις:

65. Νά κάνετε τίς προσθέσεις ὁριζόντια καί κάθετα.

$45 + 35 + 70 + 66 =$

$27 + 43 + 52 + 44 =$

$53 + 21 + 72 + 25 =$

$36 + 54 + 63 + 32 =$

$67 + 24 + 15 + 12 =$

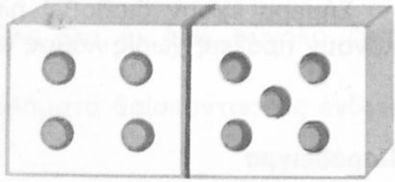
ΜΕΛΕΤΑΣ ΣΩΣΤΑ ΟΤΑΝ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΣ ΝΑ:

1. Εἶσαι μακρυά ἀπό τηλεόραση καί συζητήσεις καί διαθέτεις ἀρκετό χρόνο.
2. Μελετᾶς προσεκτικά καί πάντοτε μέ χαρτί καί μολύβι.
3. Καταλαβαίνεις τά σύμβολα, τούς ὅρους καί ἐπεξηγηματικά παραδείγματα τοῦ μαθήματος.

23. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

Πρώτη ἰδιότητα. (Μεταθετική).

Στό διπλανό ντόμινο, ἄν προσθέσουμε τά σημεῖα καί τῶν δυό θυρίδων, ἀρχίζοντας ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀριστερῆς θυρίδας, ἔχουμε:



Εἰκ. 23

$$4 + 5 = 9$$

Ἄν ἀρχίσουμε τήν πρόσθεση ἀπό τά σημεῖα τῆς δεξιᾶς θυρίδας, θά ἔχουμε:

$$5 + 4 = 9$$

Ἀπό τά παραπάνω βλέπουμε πώς:

$$4 + 5 = 5 + 4$$

Βλέπετε; ➧

> Μποροῦμε ν' ἀλλάξουμε τή σειρά τῶν δυό προσθετέων καί νά τούς προσθέσουμε μέ ὅποια σειρά θέλουμε χωρίς τό ἄθροισμα ν' ἀλλάξει.

Λέμε, τότε πώς ἡ πρόσθεση ἔχει τή **μεταθετική** ἰδιότητα.

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

66. Νά συμπληρωθοῦν οἱ παρακάτω ἐκφράσεις καί νά ὀνομάσεις τήν ἰδιότητα πού ἐφαρμόζεις.

32 + 12 = 12 + ..
70 + 90 = .. + 70
11 + 17 = 17 + ..

24. Δοκιμή τῆς προσθέσεως

Γιά νά κάνουμε τήν πράξη τῆς δοκιμῆς τῆς προσθέσεως, ἀκολουθοῦμε τήν παρακάτω πορεία, πού βασίζεται στήν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως. Ἀλλάζουμε τή σειρά τῶν προσθετέων καί τούς προσθέτουμε πάλι. Ἤ τούς προσθέτουμε ἀπό τά πάνω πρός τά κάτω καί ὕστερα ἀπό τά κάτω πρός τά πάνω. Ἄν βροῦμε τό ἴδιο ἄθροισμα, λέμε πώς ἡ πράξη εἶναι σωστή.

Σήμερα ἔχουν διαδοθεῖ ἠλεκτρονικές ἀριθμομηχανές πού κάνουν πράξεις χωρίς λάθος καί πολύ σύντομα.

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 138 \\ 215 \\ 312 \\ \hline 665 \end{array} \quad ἤ \quad \begin{array}{r} 312 \\ 215 \\ 138 \\ \hline 665 \end{array} \quad ἤ \quad \begin{array}{r} 215 \\ 312 \\ 138 \\ \hline 665 \end{array}$$

Ἐδῶ ἡ πράξη εἶναι σωστή γιατί βρίσκω τό ἴδιο ἄθροισμα 665

Βλέπετε; ➧ Δοκιμή μιᾶς πράξεως εἶναι μιά ἄλλη πράξη ἤ καί πράξεις, πού κάνουμε γιά νά βεβαιωθοῦμε πώς ἡ πρώτη πράξη πού κάναμε, εἶναι σωστή.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

Νά κάνετε τίς παρακάτω προσθέσεις καί τίς δοκιμές τους, ἀφοῦ βάλετε τόν ἕνα κάτω ἀπό τόν ἄλλο.

68. 845+56+4	73. 432+12+8	78. 109+801+6
69. 362+89+8	74. 809+53+7	79. 119+210+4+87
70. 349+101+11	75. 33+309+6	80. 104+5+106+7+108
71. 811+11+4	76. 612+16+5	81. 121+120+9+122+23
72. 409+3+6	77. 328+607+4	82. 222+23+224+225+3

83. Πόσοι μαθητές φοιτοῦν στήν τετάρτη τάξη, ὅταν στήν τρίτη πού εἶναι 23 λιγότεροι φοιτοῦν 31 μαθητές;

25. Πότε κάνουμε πρόσθεση

Μερικά προβλήματα τῆς ἀριθμητικῆς περιέχουν λέξεις, πού μᾶς λένε, πώς πρέπει νά κάνουμε πρόσθεση χωρίς ν' ἀναφέρεται ἡ λέξη: **Πρόσθεση.**

Οἱ ἐνδεικτικές λέξεις εἶναι: Ὅλα ὅλα, ἐν ὅλῳ, σύνολο, ὅλα μαζί κ.τ.λ.

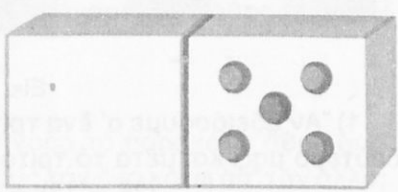
Νά λύσετε τά παρακάτω προβλήματα βρίσκοντας τίς ἐνδεικτικές λέξεις.

Προβλήματα:

84. Εἶναι 218 χιλιόμετρα ἡ ἀπόσταση Ἀθηνῶν - Λαμίας, 120 χιλιόμετρα Λαμία - Λάρισα καί 170 Λάρισα - Θεσσαλονίκη. Πόση εἶναι ὅλη ἡ ἀπόσταση Ἀθηνῶν - Θεσσαλονίκης;
85. Ὅταν ὁ πατέρας τοῦ Νίκου ἔκανε ἕνα ταξίδι, ξόδεψε γιά μιά μέρα: γιά φαγητό 205 δρχ., γιά εἰσιτήρια 199 δρχ. καί γιά μικροδαπάνες 35 δρχ. Πόσες δραχμές ξόδεψε ὅλες ὅλες;
86. Ὁ θεῖος Κώστας γιά συντήρηση τοῦ αὐτοκινήτου του ἀγόρασε μερικά νέα ἀνταλλακτικά καί πλήρωσε: γιά μπουζί 240 δραχμές, γιά πλατίνες 175 δραχμές, γιά φίλτρο λαδιοῦ 118 δραχμές καί γιά φίλτρο ἀέρος 120 δραχμές. Πόσα ξόδεψε ὅλα ὅλα;
87. Ἀπό ἕνα ντεπόζιτο γεμάτο νερό καταναλώθηκαν τήν πρώτη ἡμέρα 255 κιλά νερό. Τή δεύτερη 209 κιλά καί τήν τρίτη 301 κιλά. Πόσα κιλά θέλει γιά νά ξαναγεμίσει τό ντεπόζιτο;
88. Ἕνας μαθητής χρωστάει σέ δυό συμμαθητές του τό ἴδιο χρηματικό ποσό. Παρατηρεῖ, πώς ἄν μέ τά χρήματα πού ἔχει, ξοφλήσει τόν ἕνα θά τοῦ περισσεύουν καί 23 δραχμές. Καί πώς γιά νά ξοφλήσει καί τόν ἄλλο, τοῦ χρειάζονται ἀκόμα 17 δραχμές. Πόσες δραχμές εἶχε;

26. Ἰδιότητα δεύτερη. (Τοῦ οὐδέτερου στοιχείου)

Στό διπλανό ντόμινο, ἄν ἀθροίσουμε τά σημεῖα καί τῶν δυό θυρίδων, θά ἔχουμε: ἄν ἀρχίσουμε τήν πρόσθεση ἀπό τά σημεῖα τῆς ἀριστερῆς θυρίδας:



Εἰκ. 24

$$0 + 5 = 5$$

Ἄν ἀρχίσουμε ἀπό τά σημεῖα τῆς δεξιᾶς θυρίδας θά ἔχουμε.

$$5 + 0 = 5$$

Βλέπετε; ➧ Ὁ ἀκέραιος ἀριθμός 0 σ' ὁποιονδήποτε ἀριθμό καί ἄν προστεθεῖ δέν τόν μεταβάλλει.

Ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα, πού ἔχει ὁ ἀκέραιος ἀριθμός μηδέν, ὀνομάζεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** στήν πρόσθεση.

27. Ἰδιότητα τρίτη. (Προσεταιριστική)

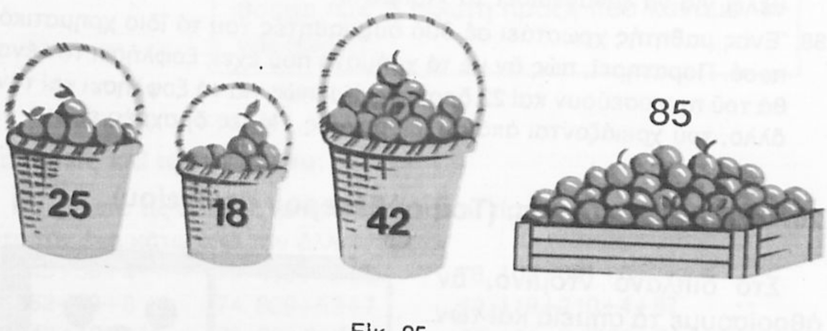
Πρόβλημα:

Ἔχουμε τρία καλάθια μέ μῆλα. Τό πρῶτο μέ 25 μῆλα. Τό δεύτερο μέ 18, καί τό τρίτο μέ 42 μῆλα. Πόσα μῆλα ἔχουν καί τά τρία καλάθια μαζί;

Πρέπει νά βροῦμε τό ἄθροισμα:

$$25 + 18 + 42$$

Βλέπουμε πώς:



Εἰκ. 25

1) Ἄν ἀδειάσουμε σ' ἕνα τρίτο καλάθι, πρῶτα τό πρῶτο καί τό δεύτερο μαζί καί μετά τό τρίτο, θά ἔχουμε:

$$(25 + 18) + 42 = 85 \text{ μῆλα.}$$

2) Ἂν ἀδειάσουμε τό δεύτερο καί τό τρίτο μαζί καί μετά τό πρῶτο, θά ἔχουμε:

(18 + 42) + 25 = 85 μῆλα.

Ἀπό αὐτά συμπεραίνουμε πώς:

(25 + 18) + 42 = (18 + 42) + 25

Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται **προσεταιριστική.**
Ἀπό τά παραπάνω βλέπουμε, πώς γιά νά προσθέσουμε τρεῖς ἀριθμούς, τούς προσθέτουμε ἀνά δύο μέ ὁποιαδήποτε σειρά.

Παρατήρηση:

Στίς παραπάνω ἐκφράσεις γράψαμε: (25 + 18), ἀντί τοῦ 43. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή τήν παρένθεση, γιά νά δηλώσουμε, ὅτι ἡ πράξη ἔχει γίνει. Τό ἴδιο κάναμε καί πιό κάτω. Γράψαμε: (18 + 42), ἀντί τοῦ 60. Ὅταν δηλαδή βάλουμε μερικούς προσθετέους μέσα σέ παρένθεση φανταζόμαστε πώς ἡ πράξη ἔχει γίνει.

Ἀσκήσεις:

89. Μπορεῖς νά βρεῖς ἕνα διψήφιο ἀριθμό, πού τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νά εἶναι 8 καί τό ψηφίο τῶν δεκάδων του νά εἶναι ἐπίσης 8;
90. Μπορεῖς νά βρεῖς ἕναν τριψήφιο ἀριθμό πού τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νά εἶναι 5 καί τό ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων του νά εἶναι ἐπίσης 5;

28. Ἀποτελέσματα τῶν ἰδιοτήτων

Ἡ μεταθετική καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα μποροῦν νά μᾶς βοηθήσουν νά ὑπολογίσουμε πιό γρήγορα ἕνα ἄθροισμα ἀπό πολλούς ἀριθμούς.

Παράδειγμα:

1ο). Πῶς θά ὑπολογίσουμε γρήγορα τό παρακάτω ἄθροισμα, χωρίς νά βάλουμε τούς προσθετέους τόν ἕνα κάτω ἀπ' τόν ἄλλο;

28 + 35 + 2 + 15

Μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε μέ τό νοῦ μας: (28 + 2) + (35 + 15) = 30 + 50 = 80

2ο). Παρόμοια μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί γιά τό ἄθροισμα:

17 + 11 + 2 + 23 + 29 + 18 = (17 + 23) + (11 + 29) + (2 + 18) = 40 + 40 + 20 = 100.

Ἀσκήσεις:

Νά ὑπολογιστοῦν μέ τόν πιό εὔκολο δυνατό συνδυασμό τά ἀθροίσματα, ὅπως στά προηγούμενα παραδείγματα:

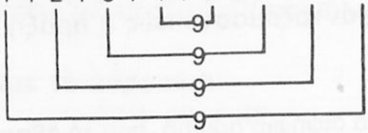
91. 45 + 55 + 100
92. 130 + 400 + 270
93. 153 + 28 + 247
94. 225 + 68 + 32
95. 502 + 260 + 140
96. 416 + 313 + 87

Ὅμοια στίς ἀσκήσεις:

97. 57 + 100 + 43
98. 235 + 150 + 65
99. 127 + 254 + 473
100. 84 + 213 + 16
101. 137 + 250 + 63
102. 244 + 235 + 256

103. Νά ὑπολογιστεῖ μέ τόν πιό εὔκολο δυνατό τρόπο τό ἄθροισμα:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9



104. Ὅμοια: 91 + 82 + 73 + 54 + 65 + 36 + 27 + 38 + 19

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ		
1.	5+7 = 7+5	Μεταθετική
2.	9+0 = 9 ἤ 0+9 = 9	Τοῦ οὐδέτερου στοιχείου.
3.	(5+4)+6 = (4+6)+5	Προσεταιριστική

ΠΟΤΕ ΣΧΕΔΙΑΖΕΙΣ ΣΩΣΤΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΟΥ.

Ὅταν εἶσαι βέβαιος, πώς κατανόησες τό προηγούμενο, πρίν προχωρήσεις στό ἑπόμενο.

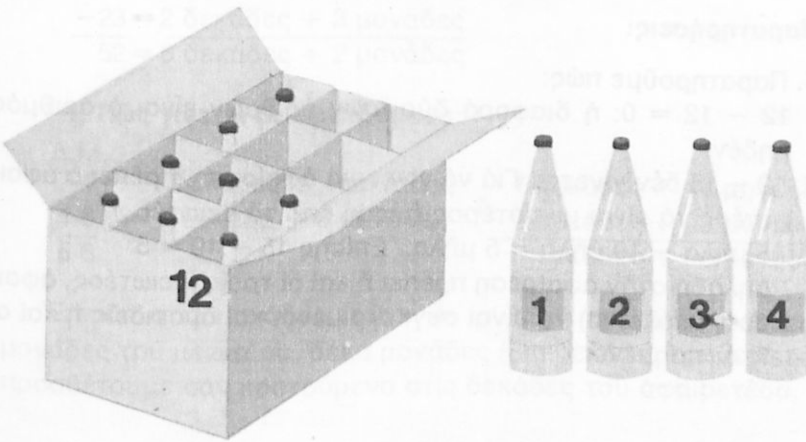
Ὅταν σέ κάθε βῆμα σου χρησιμοποιεῖς τούς κανόνες γιά ὁδηγούς καί

Ὅταν ἐλέγχεις καί ἐπαληθεύεις τήν ἐργασία σου.

29. Ἀφαίρεση

Ἔννοια

Μέσα σέ ἕνα κιβώτιο ἔχουν τοποθετηθεῖ 12 μπουκάλια μεταλλικοῦ νεροῦ. Ἄν βγάλουμε ἀπό τό κιβώτιο 4 μπουκάλια, πόσα μπουκάλια θά μείνουν σ' αὐτό;



Εἰκ. 26

Εἶναι φανερό, πώς ὁ ἀριθμός πού ἀναζητᾶμε, εἶναι αὐτός πού πρέπει νά προστεθεῖ στόν 4, γιά νά μᾶς δώσει τόν 12.

Δηλαδή: 4 + ; = 12

Αὐτόν τόν ἀριθμό τόν συμβολίζουμε: 12 − 4 καί γράφουμε:

12 − 4 = ;

Ἀριθμοῦμε τά μπουκάλια πού ἀπέμειναν στό κιβώτιο καί τά βρίσκουμε 8.

Μέ ἄλλα λόγια ὁ ἀριθμός 12 − 4 εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν ἀριθμό 8. Αὐτό γράφεται:

12 − 4 = 8

Δηλαδή, ὅπως μποροῦμε ν' αὐξήσουμε κάθε ἀριθμό, ἄν τοῦ προσθέσουμε κι ἄλλες μονάδες ἔτσι μποροῦμε καί νά τόν ἐλαττώσουμε, ἄν τοῦ **παραλείψουμε μερικές** μονάδες. Ἡ πράξη πού κάνουμε γιά νά ἐλαττώσουμε ἕναν ἀριθμό κατά τόσες μονάδες, ὅσες ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός πού μᾶς δίνεται, λέγεται **ἀφαίρεση.**

Ὁ ἀριθμός 12, πού ἐλαττώνεται, λέγεται **μειωτέος.**

Ὁ ἀριθμός 4 πού ἀφαιρεῖται, λέγεται **ἀφαιρετέος.**

Τό ἐξαγόμενο, πού βρίσκουμε, ἐδῶ τό 8, λέγεται **ὑπόλοιπο** ἤ **διαφορά.**

Τήν ἀφαίρεση τή συμβολίζουμε μέ τό (–) πού διαβάζεται: πλήν ἤ μεῖον.

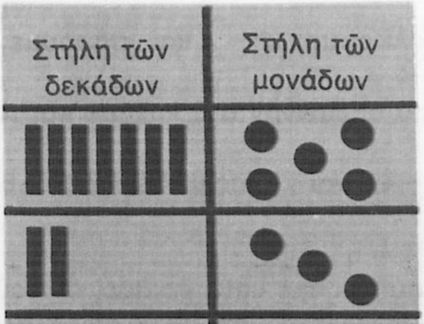
Παρατηρήσεις:

1. Παρατηροῦμε πώς:
   12 – 12 = 0: ἡ διαφορά δύο ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἀριθμός μηδέν.
2. 12 – 15 δέν γίνεται. Γιά νά γίνει μιά ἀφαίρεση, πρέπει ὁ ἀφαιρετέος νά εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος ἀπό τό μειωτέο.
3. 15 μῆλα – 10 μῆλα = 5 μῆλα. Ἐπίσης 15 – 10 = 5.

   Δηλαδή στήν ἀφαίρεση πρέπει ἤ καί οἱ τρεῖς (μειωτέος, ἀφαιρετέος, ὑπόλοιπο) νά εἶναι συγκεκριμένοι καί ὁμοειδεῖς ἤ καί οἱ τρεῖς ἀφηρημένοι.

30. Ἡ τεχνική τῆς ἀφαιρέσεως

Πρόβλημα: Ἡ δασκάλα ἄνοιξε ἕνα δέμα μέ 75 τετράδια. Ἀπό



Δεκάδες	Μονάδες
7	5
2	3
5	2

αὐτά μοίρασε 23 στούς μαθητές τῆς τάξεως. Πόσα ἔμειναν;

Ἔμειναν (75 − 23) τετράδια + 52 τετράδια

Μέ τό παραπάνω πρόβλημα πρέπει νά ὑπολογίσουμε τό 75 − 23.

Διάταξη τῆς πράξεως:

Δ.Μ.

$$\begin{array}{rl} 75 = & 7 \text{ δεκάδες} + 5 \text{ μονάδες} \\ -23 = & 2 \text{ δεκάδες} + 3 \text{ μονάδες} \\ \hline 52 = & 5 \text{ δεκάδες} + 2 \text{ μονάδες} \end{array}$$

1) Πῶς γίνεται μέ κρατούμενα:

Δ.Μ.

$$\begin{array}{rl} 7\,4 = & 7 \text{ δεκάδες} + 4 \text{ μονάδες} \\ 1\,8 = & 1 \text{ δεκάδα} + 8 \text{ μονάδες}, \\ \hline 5\,6 & \end{array} \quad \text{ἤ} \quad \begin{array}{l} 7 \text{ δεκάδες} + 14 \text{ μονάδες} \\ 2 \text{ δεκάδες} + \ \ 8 \text{ μονάδες} \\ \hline 5 \text{ δεκάδες} + \ \ 6 \text{ μονάδες} \end{array}$$

Ἐπειδή στίς μονάδες ὁ 8 > 4, γι' αὐτό προσθέτουμε στίς μονάδες τοῦ μειωτέου, δέκα μονάδες (μία δεκάδα) καί μετά τήν προσθέτουμε σάν κρατούμενο στίς δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου.

Βλέπετε; ➧

> Ὅταν πρόκειται νά ἀφαιρέσουμε δύο ἀκέραιους, γράφουμε τό μικρότερο κάτω ἀπό τό μεγαλύτερο, μέ τίς μονάδες κάθε τάξεως στήν ἴδια στήλη. Ἀρχίζοντας τήν ἀφαίρεση ἀπό τά δεξιά, γράφουμε, σέ κάθε στήλη, τή διαφορά τῶν μονάδων κάθε τάξεως πού ἀφαιροῦμε. Ἄν σέ μιά στήλη ἡ ἀφαίρεση δέν γίνεται, τότε αὐξάνουμε τό ψηφίο τοῦ μειωτέου κατά 10 μονάδες τῆς τάξεως αὐτῆς καί ὕστερα αὐξάνουμε κατά 1 τό ἀκόλουθο πρός τ' ἀριστερά ψηφίο τοῦ ἀφαιρετέου.

31. Δοκιμή τῆς ἀφαιρέσεως

Ἀπό τίς σχέσεις 25 − 20 = 5 καί 20 + 5 = 25 παρατηροῦμε πώς ἄν στό ὑπόλοιπο προσθέσουμε τόν ἀφαιρετέο, τότε βρίσκουμε τό μειωτέο. Δηλαδή:

(Μειωτέος) = (ἀφαιρετέος) + (ὑπόλοιπο)

Ἔτσι κάνουμε καί τή δοκιμή τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἀκόμα βλέπουμε πώς: 25 − 5 = 20. Δηλαδή:

(Μειωτέος) − (Ὑπόλοιπο) = Ἀφαιρετέος.

Παραδείγματα:

Ἕνα σχολεῖο ἔχει 587 μαθητές. Ἀπ' αὐτούς 235 εἶναι ἀγόρια. Πόσα εἶναι τά κορίτσια;

Θά κάνουμε μιά ἀφαίρεση.

	Δοκιμή α	**Δοκιμή β**
587 μειωτέος	235 ἀφαιρετέος	587 μειωτέος
−235 ἀφαιρετέος	+352 ὑπόλοιπο	−352 ὑπόλοιπο
352 ὑπόλοιπο	587 μειωτέος	235 ἀφαιρετέος

Ἀπάντηση: τά κορίτσια εἶναι 352.

Ἀσκήσεις:

Νά γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις καί οἱ δοκιμές τους.

105. $\begin{array}{r} 42 \\ -21 \\ \hline \end{array}$	106. $\begin{array}{r} 53 \\ -\ 7 \\ \hline \end{array}$	107. $\begin{array}{r} 84 \\ -53 \\ \hline \end{array}$
108. $\begin{array}{r} 754 \\ -397 \\ \hline \end{array}$	109. $\begin{array}{r} 539 \\ -294 \\ \hline \end{array}$	110. $\begin{array}{r} 724 \\ -248 \\ \hline \end{array}$
111. $\begin{array}{r} 653 \\ -179 \\ \hline \end{array}$	112. $\begin{array}{r} 701 \\ -613 \\ \hline \end{array}$	113. $\begin{array}{r} 824 \\ -\ 57 \\ \hline \end{array}$

Νά συμπληρωθοῦν οἱ τελεῖες μέ ψηφία, πού λείπουν στίς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

114. $\begin{array}{r} 3.7 \\ -.8. \\ \hline 138 \end{array}$ 115. $\begin{array}{r} .38 \\ -5.2 \\ \hline 376 \end{array}$ 116. $\begin{array}{r} 9.0 \\ -.90 \\ \hline 720 \end{array}$

117. $\begin{array}{r} .. \\ -19 \\ \hline 17 \end{array}$ 118. $\begin{array}{r} 27 \\ -.. \\ \hline 19 \end{array}$ 119. $\begin{array}{r} 625 \\ -... \\ \hline 432 \end{array}$ 120. $\begin{array}{r} ... \\ -324 \\ \hline 547 \end{array}$

Β΄

121. Νά συμπληρωθοῦν τά (;) μέ τούς κατάλληλους ἀριθμούς.
   29 − 16 = 15 − ; (Ὑπόδειξη: 29 − 16 = 13. Ἔτσι 13 = 15 − 2)
   42 − ; = 37 − 17
   54 − 14 = ; − 18
122. Νά βάλετε στά (;) τό μεγαλύτερο δυνατό ἀριθμό ἔτσι, ὥστε νά ἀληθεύουν οἱ σχέσεις:
   26 + ; < 35 (Ὑπόδειξη: 26 + 8 = 34 < 35)
   ; + 59 < 83 (Ὑπόδειξη: πρέπει ; + 59 = 82 < 83)
   ; − 6 < 18
   12 − ; < 9
123. Νά βρεῖτε τό μικροτερο ἀκέραιο ἔτσι, ὥστε:
   ; − 28 > 25 (Ὑπόδειξη: Πρέπει ; − 28 = 26 > 25)
   44 − ; > 27
124. Νά βάλετε τό σύμβολο πού ἁρμόζει < ἤ > στίς παρακάτω περιπτώσεις:
   84 − 19 ... 84 − 25 (Ὑπόδειξη: > ἤ <)
   72 − 16 ... 80 − 16
   91 − 31 ... 91 − 48
125. Συμπληρῶστε τόν ἀριθμό πού λείπει στίς παρακάτω περιπτώσεις:
   ; − 38 = 119
   212 − ; = 109
   ; − ; = 0
   ; − ; = 5
126. Στήν ἀφαίρεση δύο ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως; Νά κάνετε ἀριθμητικό παράδειγμα.

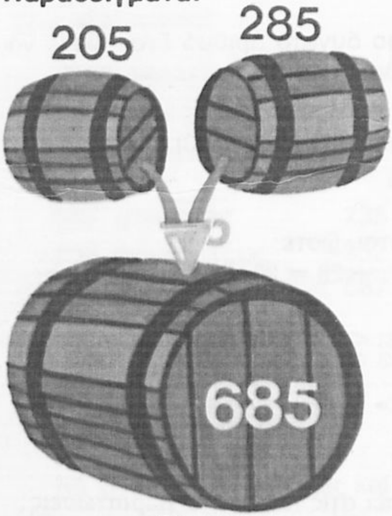
32. Πῶς θά λύσεις ἕνα πρόβλημα

Γιά νά λύσεις ἕνα πρόβλημα, πρέπει:

1. Νά τό διαβάσεις ἀργά καί προσεκτικά, ὥστε νά τό καταλάβεις πολύ καλά, γιά νά εἶσαι ἱκανός ν' ἀπαντᾶς μέ εὐκολία στίς

ἐρωτήσεις:
– Τί μοῦ ζητεῖται νά βρῶ;
– Τί μοῦ δίνεται;
– Τί πράξεις πρέπει νά κάνω γιά νά φτάσω στήν ἀπάντηση;
2. Νά κάνεις σωστά τίς πράξεις.
3. Νά συγκρίνεις τήν ἀπάντηση μ' ἐκείνη, πού ἔχεις ἐκτιμήσει.
'Εδῶ πρέπει νά σημειωθεῖ πώς, ὅταν κάθε ἐνέργειά σου εἶναι προσχεδιασμένη, ἡ ἐργασία προχωρεῖ μέ ἄνεση. Ἡ δέ ἱκανότητα νά ἐργάζεσαι μέ ἕνα πρόγραμμα, εἶναι μιά ἀπ' τίς πολυτιμότερες ἀρετές, πού πρέπει ν' ἀναπτύξεις.

Παραδείγματα:



Εἰκ. 27

Μέσα σ' ἕνα ἄδειο βαρέλι, πού χωράει 685 κιλά κρασί, ἀδειάσαμε δύο ἄλλα, πού τό ἕνα περιεῖχε 285 κιλά καί τ' ἄλλο 205 κιλά. Πόσο κρασί χωρεῖ ἀκόμα τό βαρέλι;

Τί πρέπει νά κάνετε:
1. Νά βρεῖτε πρῶτα, πόσα κιλά κρασί περιέχουν καί τά δύο μικρά βαρέλια, πού ἀδειάσαμε.

$$\begin{array}{r} 285 \\ +205 \\ \hline 490 \end{array}$$

2. Ν' ἀφαιρέσετε αὐτό πού βρήκατε ἀπ' τόν ἀριθμό, πού δηλώνει, πόσο κρασί χωράει τό μεγάλο βαρέλι.

$$\begin{array}{r} 685 \\ -490 \\ \hline 195 \end{array}$$

'Απάντηση: Ὥστε χωράει ἀκόμη 195 κιλά.

32α. Πότε κάνετε ἀφαίρεση

Μερικά προβλήματα περιέχουν λέξεις ἤ ἐκφράσεις, πού μᾶς λένε πώς πρέπει νά κάνουμε **ἀφαίρεση,** χωρίς ν' ἀναφέρεται ἤ λέξη ἀφαίρεση.

Τέτοιες ἐνδεικτικές λέξεις εἶναι: πόσο **μένει**, πόσο **διαφέρει**, πόσα **λείπουν**, πόσο **ὑπολείπεται**, πόσο **αὐξήθηκε** κ.τ.λ.

Στά προβλήματα πού ἀκολουθοῦν νά ἐπισημάνετε τίς ἐνδεικτικές λέξεις, καί νά τά λύσετε.

Προβλήματα:

127. Ὁ Περικλῆς γεννήθηκε τό 490 π.Χ. καί πέθανε τό 429 π.Χ. Πόσα χρόνια ἔζησε;
128. Ὁ Παρθενώνας, ναός τῆς Ἀθηνᾶς προστάτιδας τῆς Ἀθήνας, εἶναι ἔργο τῶν ἀρχιτεκτόνων Ἰκτίνου καί Καλλικράτη, σέ στενή συνεργασία μέ τό Φειδία. Ἡ κατασκευή του ἄρχισε τό 447 π.Χ. καί τό ἔργο τελείωσε τό ἔτος 438 π.Χ. Πόσα χρόνια κράτησε ἡ κατασκευή του;
129. Σέ μιά περίοδο ἐκπτώσεων ἕνα φόρεμα πουλήθηκε 679 δρχ., ἐνῶ ἡ κανονική του τιμή ἦταν 932 δρχ. Τί ποσό τῆς κανονικῆς τιμῆς ἦταν ἡ ἔκπτωση;
130. Ἕνας διψήφιος ἀριθμός ἀρχίζει μέ τό ψηφίο 8. Γράφουμε ἀνάμεσα στά ψηφία του τόν ἀριθμό 0. Πόσο μεγαλώνει ὁ ἀριθμός;
131. Ἕνας βοσκός ἔχει 350 πρόβατα. Πόσα πρέπει νά πουλήσει γιά νά τοῦ μείνουν 269;
132. Ἕνας πατέρας ἦταν 27 ἐτῶν, ὅταν γεννήθηκε ὁ γιός του. Πόσων ἐτῶν ἦταν ὁ γιός του, ὅταν ὁ πατέρας ἦταν 72 ἐτῶν;
133. Δίνεται ὁ ἀριθμός 576. Ποιόν ἀριθμό παίρνετε ἄν γράψετε τά ψηφία του μέ ἀντίστροφο σειρά; Πόσο διαφέρουν οἱ ἀριθμοί;
134. Στήν πρόσθεση: 178 + 289 + 97

     Ἕνας μαθητής δέν ὑπολόγισε τά κρατούμενα. Πόση διαφορά βρῆκε;
135. Μιά διαδρομή 803 χιλιομέτρων πρέπει νά τή διανύσει ἕνα αὐτοκίνητο σέ δύο ἡμέρες. Ἄν τήν πρώτη μέρα διανύσει 369 χιλιόμετρα, πόσα μένουν γιά τή δεύτερη μέρα;
136. Ἄν ἀλλάξετε τή θέση τῶν ψηφίων 8 καί 3 στόν ἀριθμό 583 θά πάρετε ἀριθμό μικρότερο ἤ μεγαλύτερο, καί πόσο;
137. Ἄν ἀλλάξετε τή θέση τῶν ψηφίων 4 καί 7 στόν ἀριθμό 470, θά πάρετε ἀριθμό μικρότερο ἤ μεγαλύτερο καί πόσο;
138. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο ἐργάζονται 90 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καί παιδιά. Ἄν οἱ ἄνδρες καί τά παιδιά εἶναι 60, ἐνῶ οἱ γυναῖκες καί τά παιδιά εἶναι 50, πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες, πόσες οἱ γυναῖκες καί πόσα τά παιδιά;

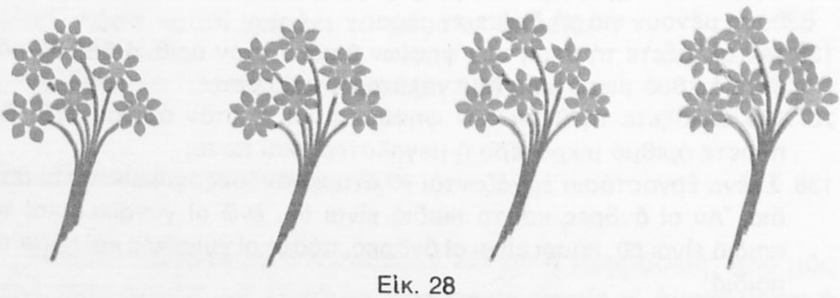
Προβλήματα προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως

139. Μιά σάλα κινηματογράφου διαθέτει 850 θέσεις. Σέ μιά παράσταση πουλήθηκαν 250 εἰσιτήρια γιά τόν ἐξώστη καί 522 εἰσιτήρια γιά τήν πλατεία. Ἔχει ἄλλες θέσεις ἀδειανές καί πόσες;
140. Ἕνα λεωφορεῖο 40 θέσεων ἦταν «πλῆρες» κατά τήν ἀναχώρηση. Στήν 1η στάση κατέβηκαν 9 ἐπιβάτες, στή 2η στάση κατέβηκαν 9, ἀλλά ἀνέβηκαν 11 νέοι ἐπιβάτες. Στήν 3η στάση κατέβηκαν 14, ἀλλά ἀνέβηκαν 7 νέοι ἐπιβάτες. Ἡ 4η στάση ἦταν τό τέρμα. Ὅλοι οἱ ἐνδιάμεσοι ἐπιβάτες ταξίδεψαν μέχρι τέρμα. Πόσοι ἐπιβάτες κατέβηκαν καί πόσοι ἔφθασαν στό τέρμα;
141. Γιά νά ἀγοράσω ἕνα βιβλίο ἀξίας 980 δραχμῶν ἔβγαλα ἀπό τόν κουμπαρά μου 312 δραχμές. Μοῦ ἔδωσε καί ὁ πατέρας μου 510 δραχμές καί τίς ὑπόλοιπες ὁ παπποῦς μου. Πόσες μοῦ ἔδωσε ὁ παπποῦς;
142. Στίς γυμναστικές ἐπιδείξεις πῆραν μέρος 4 σχολεῖα. Τό α΄ εἶχε 183 μαθητές. Τό β΄ 23 περισσότερους ἀπό τό α΄ καί 11 λιγότερους ἀπό τό γ΄. Ἄν ὅλοι οἱ μαθητές ἦταν 821, πόσοι ἦταν οἱ μαθητές τοῦ δ΄ σχολείου;
143. Ἕνας αὐγοπώλης εἶχε 875 αὐγά. Ἀπό αὐτά πούλησε τήν πρώτη μέρα 217, τήν ἄλλη 49 περισσότερα ἀπό τήν πρώτη καί τήν τρίτη 75 λιγότερα ἀπό τή δεύτερη. Πόσα αὐγά τοῦ ἔμειναν;
144. Ἕνας περιπτεριοῦχος εἶχε στό συρτάρι του 974 δραχμές. Ἀπό αὐτές ἔδωσε σέ ἕναν ἀντιπρόσωπο ἐργοστασίου, πού κάνει σοκολάτες 525 δραχμές. Σέ λίγο ἀγόρασε κάποιος εἴδη ἀξίας 317 δραχμῶν. Πόσες δραχμές ἔχει στό συρτάρι του ὁ περιπτεριοῦχος;

33. Πολλαπλασιασμός

Ἔννοια

Πόσα λουλουδάκια εἰκονίζονται στίς 4 ἀνθοδέσμες;



Εἰκ. 28

Γιά νά ύπολογίσουμε τά λουλούδια, πού εἰκονίζονται στίς 4 ἀνθοδέσμες, θά ἐργαστοῦμε κατά δύο τρόπους:

Πρῶτος τρόπος:

Θά προσθέσουμε τούς ἀριθμούς πού ἀντιπροσωπεύουν τό πλῆθος τῶν λουλουδιῶν κάθε δέσμης.

6 λουλούδια + 6 λουλούδια + 6 λουλούδια + 6 λουλούδια = 24 λουλούδια

Δεύτερος τρόπος

Ἐπειδή ἡ πρόσθεση αὐτή ἔχει τό χαρακτηριστικό νά ἔχει ὅλους τούς προσθετέους ἴσους, συμφωνοῦμε νά τή γράφουμε πιό ἁπλά καί πιό σύντομα, ἔτσι:

6 × 4 = 24 (Διαβάζεται : 6 ἐπί 4)

καί νά λέμε πώς τό 6 **πολλαπλασιάζεται** μέ τό 4.

Ἡ σύντομη ἐκτέλεση μιᾶς τέτοιας πρόσθεσης λέγεται **πολλαπλασιασμός.**

Ὁ ἀριθμός 24, πού εἶναι τό ἐξαγόμενο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται **γινόμενο** καί οἱ ἀριθμοί 6 καί 4 **παράγοντες** τοῦ γινομένου.

Ὁ ἀριθμός 6 πού ἐπαναλαμβάνεται σάν προσθετέος λέγεται **πολλαπλασιαστέος.**

Καί ὁ ἀριθμός 4, πού δηλώνει πόσες φορές ἐπαναλαμβάνουμε τόν πολλαπλασιαστέο λέγεται πολλαπλασιαστής. Τό σημεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τό (×) ἐπί.

Κι ὅταν ἀναζητοῦμε τό γινόμενο δύο ἀριθμῶν, **κάνουμε πολλαπλασιασμό.**

Βλέπετε;

> Πολλαπλασιασμός λέγεται ἡ σύντομη ἐκτέλεση μιᾶς προσθέσεως μέ ἴσους προσθετέους.

Ἀσκήσεις

145. Νά γράψετε σέ μορφή γινομένου τά ἀθροίσματα:

8 κιλά + 8 κιλά + 8 κιλά + 8 κιλά =

11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 =

25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 =
17 + 17 + 17 + 17 =
1 + 1 + 1 + 1 + 1 =
0 + 0 =

β) Νά γράψετε σέ μορφή ἀθροίσματος τά γινόμενα:
(15 τετράδια) × 3, 7 × 4, 105 × 7, 12 × 11.

34. Εἶδος τοῦ γινόμενου

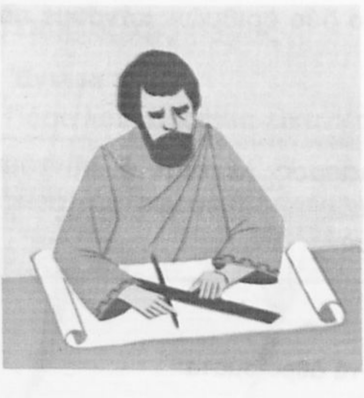
Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα: 1) 14 × 5 καί 2) (6 μέτρα) × 4

1) 14 × 5 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 70

2) (6 μέτρα) × 4 = 6 μέτρα + 6 μέτρα + 6 μέτρα + 6 μέτρα = 24 μέτρα.

Ἀπό τά παραπάνω διαπιστώνουμε, πώς:

1) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι συγκεκριμένος, τότε τό γινόμενο εἶναι ἀριθμός συγκεκριμένος καί ὁμοειδής μέ τόν πολλαπλασιαστέο καί
2) Ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι πάντοτε ἀφηρημένος ἀριθμός, γιατί δηλώνει πόσες φορές ἐπαναλαμβάνουμε τόν πολλαπλασιαστέο.



Εἰκ. 29
Ὁ Πυθαγόρας ἕνας ἀπό τούς μεγαλύτερους Ἕλληνες φιλόσοφους γεννήθηκε στή Σάμο τό 580 π.Χ. Αὐτός καί οἱ μαθητές του ἔδωκαν μεγάλη ὤθηση στήν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν, ἰδιαίτερα τῆς Γεωμετρίας.

35. Πολλαπλασιασμός μονοψηφίων ἀριθμῶν

Πίνακας τοῦ Πυθαγόρα.

Τό γινόμενο δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν π.χ. τοῦ 7 × 8 δέν εἶναι δύσκολο νά τό μάθουμε καί νά τό ὑπολογίζουμε «ἀπέξω». Τό μαθαίνουμε ἀπό τόν «πίνακα τοῦ Πυθαγόρα» πού ἡ χρήση του εἶναι ἁπλή.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Εἰκ. 30

Τό γινόμενο τῶν ἀριθμῶν π.χ. 9 × 8 βρίσκεται στή διασταύρωση τῆς γραμμῆς, πού ἀρχίζει ἀπό τό 9 καί τῆς στήλης πού ἀρχίζει ἀπό τό 8, καί εἶναι 72.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

146. Νά συμπληρωθοῦν τά ἐρωτηματικά ἔτσι, πού οἱ ἀριθμοί νά γίνουν συγκεκριμένοι:
(48 κιβώτια) × 9 = 432 ;
(134;) × 5 = 670 δρχ.
(25;) × 6 = 150 μέτρα
(45 κιλά) × 8 = 360;

Νά βάλετε τίς παρακάτω προσθέσεις σέ μορφή πολλαπλασιασμοῦ, πού νά ζητεῖται τό γινόμενο.

147. 25 λίτρα + 25 λίτρα + 25 λίτρα + 25 λίτρα + 25 λίτρα = ;

148. 109 δραχμές + 109 δραχμές + 109 δραχμές = ;

149. 56 μέτρα + 56 μέτρα + 56 μέτρα + 56 μέτρα + 56 μέτρα = ;

150. 5 χιλιόμετρα + 5 χιλιόμετρα + 5 χιλιόμετρα = ;

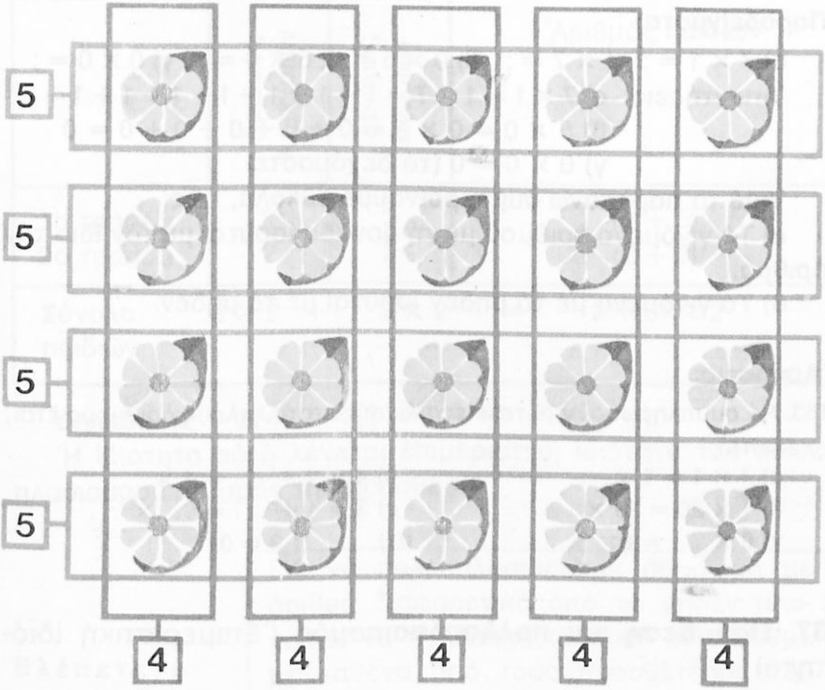
151. Ἡ κυκλική πίστα δοκιμῆς τῶν αὐτοκινήτων ἔχει μῆκος 27 χιλιόμετρα. Ἡ δοκιμή τῶν αὐτοκινήτων γίνεται σέ 9 στροφές. Ποιά ἀπόσταση διατρέχουν;

152. Ἕνα νόμισμα τῆς μιᾶς δραχμῆς ζυγίζει 6 γραμμάρια. Ποιό εἶναι τό βάρος ποσοῦ 9 δραχμῶν;

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

36. 1η Ἰδιότητα: «Μεταθετική» ἤ «ἐναλλακτική».

Πόσες εἶναι οἱ μαργαρίτες τῆς εἰκόνας;
Τίς ὑπολογίζετε μέ δύο τρόπους:



Εἰκ. 31

Πρῶτος τρόπος

Ἔχετε 5 μαργαρίτες σέ 4 σειρές:

$5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4 = 20$ μαργαρίτες

Δεύτερος τρόπος

Ἔχετε 4 μαργαρίτες σέ 5 στῆλες:

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 5 = 20$ μαργαρίτες.

Ἄν συγκρίνετε τά δύο ἐξαγόμενα βλέπετε πώς: $5 \times 4 = 4 \times 5$

Βλέπετε; Τό γινόμενο δύο ἀριθμῶν δέν ἀλλάζει, ὅταν ἀλλάξετε τή σειρά τῶν παραγόντων του.

Ἡ ἰδιότητα αὐτή εἶναι ἡ μεταθετική

Παραδείγματα:

α) $7 \times 1 = ;$, $1 \times 7 = ;$, β) $0 \times 5 = ;$, $5 \times 0 = ;$, γ) $0 \times 0 = ;$

Ἀπαντήσεις: α) $7 \times 1 = 1 \times 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$

β) $5 \times 0 = 0 \times 5 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

γ) $0 \times 0 = 0$ (τό δεχόμαστε)

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε εὔκολα, πώς:

α) Τό γινόμενο ἀριθμοῦ μέ τή μονάδα ἰσοῦται μέ τόν ἴδιο τόν ἀριθμό.

β) Τό γινόμενο μέ τό μηδέν ἰσοῦται μέ τό μηδέν.

Ἀσκήσεις:

153. Νά συμπληρωθοῦν οἱ τελεῖες μέ τούς κατάλληλους ἀριθμούς ἔτσι, ὥστε:

α) $4 \times 1 = 1 \times \ldots$

β) $1 \times 20 = 20 \times \ldots$

γ) $8 \times \ldots = 8$

δ) $4 = 1 + \ldots = 1 \times \ldots$

ε) $3 = 1 + \ldots = \ldots \times \ldots$

στ) $\ldots \times 9 = 0$

37. Πρόσθεση καί πολλαπλασιασμός (Ἐπιμεριστική ἰδιότητα)

Μπορεῖτε νά ὑπολογίσετε τό πλῆθος τῶν ἀγοριῶν καί τῶν κοριτσιῶν τῆς εἰκόνας;

Εἰκ. 32

Βλέπουμε πώς σέ κάθε τραπέζι, κάθονται 3 ἀγόρια καί 2 κορίτσια. Γιά νά βροῦμε τόν ἀριθμό ὅλων τῶν παιδιῶν, ἐργαζόμαστε κατά δύο τρόπους, ὁριζόντια καί κάθετα, ὅπως φαίνεται στόν παρακάτω πίνακα.

	Ἀριθμός κοριτσιῶν	Ἀριθμός ἀγοριῶν	Ἀριθμός παιδιῶν
1ο τραπέζι	2	3	(2 + 3)
2ο τραπέζι	2	3	(2 + 3)
Σύνολο παιδιῶν	2 × 2 +	3 × 2 =	(2 + 3) × 2

Δηλαδή: (2 + 3) × 2 = (2 × 2) + (3 × 2)

Ἡ ἰδιότητα αὐτή λέγεται ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση:

Βλέπετε; ➧

> Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἄθροισμα μέ ἀριθμό διαφορετικό ἀπό τό μηδέν μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμό μέ καθένα ἀπό τούς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος κι ὕστερα νά προσθέσουμε τά γινόμενα πού βρήκαμε.

Παραδείγματα:

1. (3 + 7) × 8 = 3 × 8 + 7 × 8 = 24 + 56 = 80
2. (12 + 1) × 3 = 12 × 3 + 1 × 3 = 36 + 3 = 39
3. (10 + 3) × 5 = 10 × 5 + 3 × 5 = 50 + 15 = 65

Ἀσκήσεις:

154. Νά γίνει ἐφαρμογή τῆς παραπάνω ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας στίς ἀσκήσεις:
α) (3 + 9) × 8, β) (12 + 8) × 4, γ) (4 + 10) × 6, δ) (1 + 7) × 9.

155. Ἀφοῦ βάλετε στή θέση τῆς τελείας τόν κατάλληλο ἀριθμό, νά βρεῖτε τό ἐξαγόμενο. (10 + .) × 5 = 50 + 15 =
(10 + 9) × 8 = 80 + . . . =
(10 + 7) × 7 = . + 49 =

38. Τεχνική τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

1. Πολλαπλασιαστής μονοψήφιος: – Χωρίς κρατούμενα

Νά βρεθεῖ τό γινόμενο: 23 × 3 = ;

Βλέπουμε πώς:

23 × 3 = (2 δεκάδες + 3 μονάδες) × 3
= 6 δεκάδες + 9 μονάδες = 69

Διάταξη τῆς πράξεως:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3 \\ \hline 69 \end{array}$$

Λέμε: 3 ἐπί 3 = 9, γράφουμε τό 9 στή στήλη τῶν μονάδων.
Ὕστερα: 3 ἐπί 2 = 6, γράφουμε τό 6 στή στήλη τῶν δεκάδων

2. Μέ κρατούμενα:

Νά βρεθεῖ τό γινόμενο: 114 × 4

Βλέπουμε πώς:

114 × 4 = (1 ἑκ. + 1 δεκ. + 4 μον.) × 4
= 4 ἑκ. + 4 δεκ. + 1 δεκ. + 6 μον.
= 4 ἑκ. + 5 δεκ. + 6 μον. = 456

Διάταξη τῆς πράξεως:

$$\begin{array}{r} 114 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 456 \end{array}$$

Λέμε: 4 ἐπί 4 = 16, γράφουμε τό 6 στή θέση τῶν μονάδων καί «κρατοῦμε» 1.
Ὕστερα: 1 ἐπί 4 = 4 καί ἕνα τό «κρατούμενο» = 5, γράφουμε τό 5 στή θέση τῶν δεκάδων.
Ὕστερα: 1 ἐπί 4 = 4 γράφουμε τό 4 στή θέση τῶν ἑκατοντάδων.

3. Όμοια: 187 × 5

Βλέπουμε πώς:

187 × 5 = (1 έκ. + 8 δεκ. + 7 μον.) × 5
= 5 έκ. + 40 δεκ. + 35 μον.
= 5 έκ. + 4 έκ. + 3 δεκ. + 5 μον.
= 9 έκ. + 3 δεκ. + 5 μον. = 935

Διάταξη τῆς πράξεως:

$$\begin{array}{r} 187 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 935 \end{array}$$

Λέμε: 5 ἐπί 7 = 35 γράφουμε τό 5 στή θέση τῶν μονάδων καί «κρατοῦμε» 3. Ύστερα: 5 ἐπί 8 = 40 καί 3 τό «κρατούμενο» 43. Γράφουμε τό 3 στή θέση τῶν δεκάδων καί «κρατοῦμε» 4. Ύστερα: 1 ἐπί 5 = 5 καί 4 τό «κρατούμενο» 9. Γράφουμε τό 9 στή θέση τῶν ἑκατοντάδων.

Ἀσκήσεις:

156. Νά βρεῖτε τά ἐξαγόμενα:

18 × 2 =	17 × 3 =	36 × 7 =
24 × 4 =	27 × 5 =	45 × 6 =

157.

215 × 4 =	134 × 5 =	204 × 3 =
136 × 2 =	233 × 3 =	120 × 6 =

Πολλαπλασιασμός διψήφιου μέ διψήφιο

39. Ἁπλές περιπτώσεις

1) Πολλαπλασιασμός μέ τό 10, 20, 30 κ.τ.λ.

1ο Παράδειγμα: 10 × 49 = (1 δεκάδα) × 49 = 49 δεκάδες = 490 μονάδες

2ο Παράδειγμα: 50 × 18 = (5 δεκάδες) × 18 = 90 δεκάδες = 900 μονάδες

3ο Παράδειγμα: 20 × 30 = (2 δεκάδες) × 30 = 60 δεκάδες = 600 μονάδες

Βλέπετε; ➧

> α) Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἀριθμό μέ τό 10 γράφουμε δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ ἕνα μηδέν.
>
> β) Ὅταν ὁ ἕνας ἤ καί οἱ δύο παράγοντες τελειώνουν σέ μηδενικά, τότε κάνουμε τόν πολλαπλασιασμό, χωρίς τά μηδενικά καί στά δεξιά τοῦ γινομένου γράφουμε τά μηδενικά, πού ἔχουν οἱ παράγοντες.

2). Νά βρεθεῖ τό γινόμενο: 26×24

Ἔχουμε:

26 × 24 = (2 δεκ. + 6 μον.) × 24
= 48 δεκ. + 144 μον.
= 4 ἑκ. + 8 δεκ. + 1 ἑκ. + 4 δεκ. + 4 μον.
= 5 ἑκ. + 12 δεκ. + 4 μον.
= 5 ἑκ. + 1 ἑκ. + 2 δεκ. + 4 μον.
= 6 ἑκ. + 2 δεκ. + 4 μον. = 624

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 26 \\ \hline 144 \\ 48 \\ \hline 624 \end{array}$$

Λέμε: 4 ἐπί 6 = 24 γράφουμε τό 4 στή θέση τῶν μονάδων καί «κρατοῦμε» 2.

Ὕστερα: 2 ἐπί 6 = 12 καί 2 τά «κρατούμενα» 14. Γράφουμε τό 14 στή θέση τῶν δεκάδων.

Ὕστερα: 2 ἐπί 4 = 8. Γράφουμε τό 8 στή θέση τῶν δεκάδων.

Μετά 2 ἐπί 2 = 4. Γράφουμε τό 4 στή θέση τῶν ἑκατοντάδων.

Μετά προσθέτουμε τά μερικά γινόμενα καί βρίσκουμε: 624

40. Δοκιμή τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Γιά νά ἐλέγξουμε τό ἐξαγόμενο ἑνός πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀκεραίων, κάνουμε ἀκόμα μιά φορά τήν πράξη, ἀφοῦ ἐναλλάξουμε τούς δύο ἀριθμούς, ὅπως φαίνεται στό πλαϊνό παράδειγμα. Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως πρέπει νά βροῦμε τό ἴδιο ἐξαγόμενο. Ἄν αὐτό συμβαίνει, τότε καί οἱ δύο ἐκτελέσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι ὀρθές, γιατί εἶναι ἀπίθανο νά ἔγιναν τά ἴδια λάθη.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 26 \\ \hline 144 \\ 48 \\ \hline 624 \end{array} \quad ἤ \quad \begin{array}{r} 26 \\ \times 24 \\ \hline 104 \\ 52 \\ \hline 624 \end{array}$$

Ἄν τά ἐξαγόμενα διαφέρουν, τότε σέ μιά ἀπό τίς δύο πράξεις δέν εἶναι σωστή.

Ἀσκήσεις:

158. Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

1) 37 × 10	2) 89 × 10	3) 63 × 10	4) 80 × 5
5) 35 × 20	6) 140 × 6	7) 200 × 3	8) 440 × 2
9) 40 × 20	10) 190 × 7	11) 110 × 8	12) 35 × 20

159. Νά βρεῖς τά γινόμενα καί νά κάνεις τίς δοκιμές στά παρακάτω:

1) 33 × 27	2) 38 × 26	3) 22 × 41	4) 12 × 47

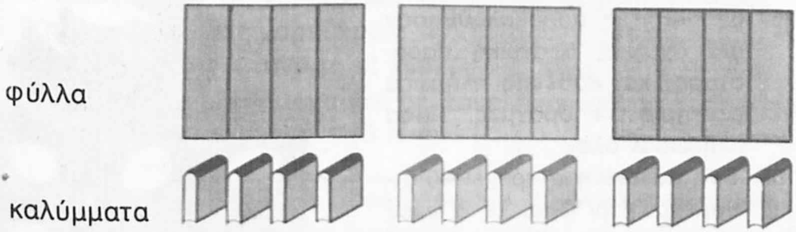
159) Κατά πόσες θέσεις μετακινεῖται ὁ 9 στόν ἀριθμό 49, ὅταν τόν πολλαπλασιάσουμε μέ τό 10; καί κατά πόσες τό 4;

Βλέπετε; ➧ Ἡ ἀξία ψηφίου πολλαπλασιάζεται μέ τό 10, κάθε φορά πού τό ψηφίο μετακινεῖται κατά μία θέση πρός τά ἀριστερά.

Χρήση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στή λύση προβλημάτων

Προβλήματα

1ο. Μέ ἕνα φύλλο βιβλιοδετικοῦ χαρτιοῦ, ὁ βιβλιοδέτης βιβλιοδετεῖ 4 βιβλία. Πόσα βιβλία βιβλιοδετεῖ μέ 3 φύλλα βιβλιοδετικοῦ χαρτιοῦ;



Εἰκ. 33

Βλέπουμε, πῶς κάνουμε (4 καλύμματα) × 3 = 12 καλύμματα.

2ο. Πρίν ἀναχωρήσει γιά διακοπές ὁ πατέρας τοῦ Κώστα, ἀγόρασε 3 φίλμς μέ 36 «πόζες», τό καθένα. Πόσες φωτογραφίες μπορεῖ νά βγάλει μέ αὐτά τά φίλμς;

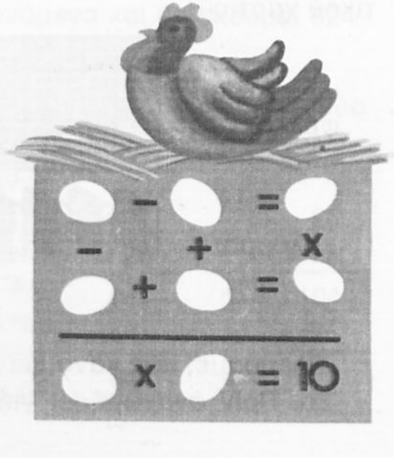
Εἶναι φανερό πώς θά βγάλει 3 φορές τό 36 πόζες
ἤ (36 πόζες) × 3 = 108 πόζες.

Στά δυό παραπάνω προβλήματα μᾶς δίνουν τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας καί μᾶς ζητοῦν τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων καί γιά νά βροῦμε τά ζητούμενα, πολλαπλασιάσαμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας μέ τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων.

Βλέπετε; ➧ Ὅταν μᾶς δίνεται ἡ τιμή τῆς μιᾶς μονάδας καί ζητοῦμε τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων, κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Προβλήματα:

161. Ἕνα δοχεῖο μαρμελάδα ζυγίζει 12 κιλά. Πόσο ζυγίζουν 25 ὅμοια δοχεῖα;
162. Ἕνα κιλό λάδι πωλεῖται 94 δραχμές. Πόσο κοστίζει ἕνα δοχεῖο 8 κιλῶν;
163. Πόσα ποτήρια εἶναι 27 δωδεκάδες;
164. 32 μαθητές τῆς τετάρτης τάξεως πῆγαν ἐκδρομή καί ὁ καθένας πλήρωσε γιά εἰσιτήριο 29 δραχμές. Πόσες δραχμές πλήρωσαν ὅλοι;
165. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 26 δοχεῖα μέλι. Τό κάθε δοχεῖο περιεῖχε 22 κιλά. Πόσα κιλά μέλι ἀγόρασε;
166. Ἕνας μανάβης πούλησε ἕνα καφάσι σταφύλια τῶν 19 κιλῶν πρός 52 δραχμές τό κιλό. Πόσα χρήματα πῆρε;
167. 60 μαθητές παρακολούθησαν μιά σχολική θεατρική παράσταση, καί καθένας πλήρωσε εἰσιτήριο 14 δραχμές. Πόσα πλήρωσαν ὅλοι;
168. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει 90 χιλιόμετρα τήν ὥρα. Σέ 8 ὧρες πόσα χιλιόμετρα θά διανύσει;
169. Γράψτε μέσα στά αὐγά ἀριθμούς ἀπό 1 ὡς τό 5 ἔτσι, ὥστε κάνοντας τίς πράξεις πού εἶναι σημειωμένες ὁριζόντια καί κάθετα νά ἔχετε τό ἀποτέλεσμα 10.

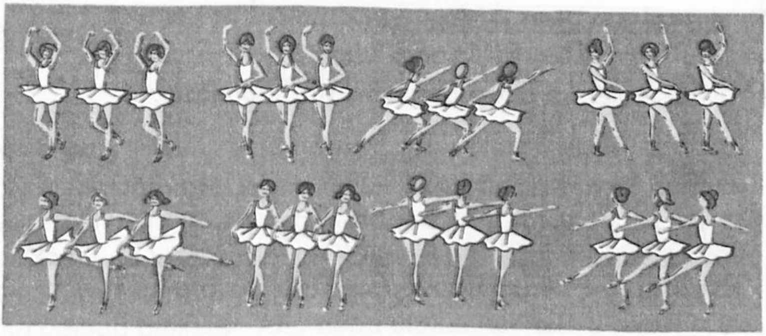


41. 3η Ἰδιότητα: Προσεταιριστική

Πολλαπλασιασμός περισσότερων ἀριθμῶν.

Πῶς θά ὑπολογίσουμε τίς χορεύτριες τῆς εἰκόνας;

3x4



3x4

(2 x 3) + (2 x 3) + (2 x 3) + (2 x 3)

Πρῶτος τρόπος:

1ο. Ὑπολογίζουμε τίς χορεύτριες τῆς πρώτης σειρᾶς: 3 × 4

2ο. Ὑπολογίζουμε τίς χορεύτριες τῆς δεύτερης: 3 × 4

Δηλαδή οἱ χορεύτριες καί τῶν δύο σειρῶν εἶναι: 2 × (3 × 4)

Δεύτερος τρόπος:

1ο. Ὑπολογίζουμε τίς χορεύτριες τῆς πρώτης στήλης: (2 × 3)

2ο. Ὑπολογίζουμε τίς χορεύτριες τῆς δεύτερης στήλης: (2 × 3)

3ο. Ὑπολογίζουμε τίς χορεύτριες τῆς τρίτης στήλης: (2 × 3)

4ο. Ὑπολογίζουμε τίς χορεύτριες τῆς τέταρτης στήλης: (2 × 3)

Δηλαδή καί στίς 4 στῆλες οἱ χορεύτριες εἶναι: (2 × 3) × 4

Τά παραπάνω ἐξαγόμενα καί μέ τούς δύο τρόπους εἶναι τά ἴδια. Εἶναι: (2 × 3) × 4 = 2 × (3 × 4).

Βλέπετε;

> Γιά νά ὑπολογίσουμε τό γινόμενο τριῶν ἀριθμῶν διαφορετικῶν ἀπό τό μηδέν, μποροῦμε: Τό γινόμενο τῶν δύο πρώτων νά τό πολλαπλασιάσουμε μέ τόν τρίτο, ἤ τό γινόμενο τῶν δύο τελευταίων νά τό πολλαπλασιάσουμε μέ τόν πρῶτο.

Γι' αὐτό λέμε, πώς στό γινόμενο τριῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ **προσεταιριστική** ἰδιότητα.

Ὕστερα ἀπό τά παραπάνω: Μποροῦμε τό γινόμενο τριῶν ἀριθμῶν νά τό γράφουμε χωρίς παρενθέσεις.

Ὑπολογισμός τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων

Νά ὑπολογιστεῖ τό γινόμενο:

$$3 \times 5 \times 4 \times 7 \times 2$$

Ὑπολογίζεται ὅπως σημειώνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 5 \\ \hline 15 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 4 \\ \hline 60 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 60 \\ \times\ 7 \\ \hline 420 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 420 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 840 \end{array}$$

Βλέπετε; ➧

> Γιά νά ὑπολογίσουμε τό γινόμενο περισσοτέρων τῶν 3 παραγόντων διαφορετικῶν ἀπό τό 0, πολλαπλασιάζουμε τόν πρῶτο μέ τό δεύτερο, τό γινόμενο μέ τόν τρίτο, τό νέο γινόμενο μέ τόν τέταρτο καί ἐξακολουθοῦμε μέχρις ὅτου ἐξαντληθοῦν οἱ παράγοντες.

Ἀσκήσεις - Προβλήματα:

170. Νά ὑπολογιστοῦν, χωρίς χαρτί καί μολύβι, τά γινόμενα:
1) $8 \times 10 \times 10$ 2) $2 \times 3 \times 4 \times 10$ 3) $2 \times 4 \times 20 \times 2$
4) $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ 5) $0 \times 9 \times 16$ 6) $16 \times 9 \times 0$

171. Τρεῖς ἄνθρωποι ἔχουν ὁ καθένας 3 παιδιά, τό κάθε παιδί ἔχει 3 βιβλία καί τό κάθε βιβλίο 3 τόμους. Πόσους τόμους ἔχουν ὅλα μαζί τά παιδιά;

172. Κάθε μία ἀπό τίς 4 πλευρές τοῦ σχολείου μας ἔχει 6 παράθυρα καί κάθε παράθυρο ἔχει 8 τζάμια. Πόσα τζάμια ἔχουν ὅλα τά παράθυρα;

173. 4 κιβώτια περιέχουν βιβλία. Ἄν τό καθένα ἔχει 8 δέματα καί κάθε δέμα ἔχει 8 βιβλία, πόσα βιβλία ἔχουν;

42. Διαίρεση

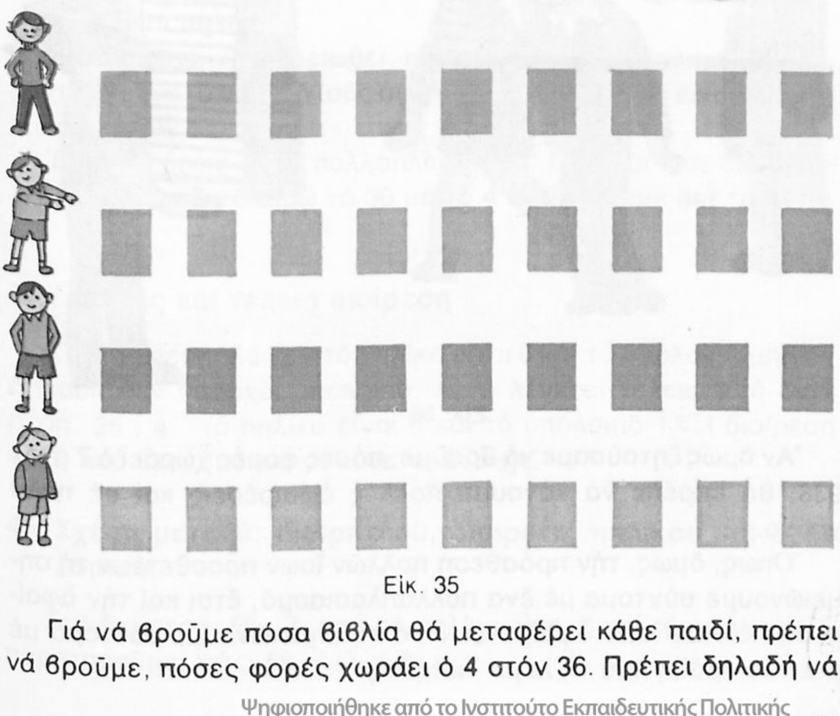
Ἔννοια

ΓΙΑ ΝΑ ΓΝΩΡΙΣΕΤΕ ΤΑ ΟΝΟΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

$$\begin{array}{lr|l} \text{Διαιρετέος} \rightarrow & 36 & \underline{4} \leftarrow \text{Διαιρέτης} \\ \text{Ὑπόλοιπο} \rightarrow & 0 & 9 \leftarrow \text{Πηλίκο} \end{array}$$

Πρόβλημα:

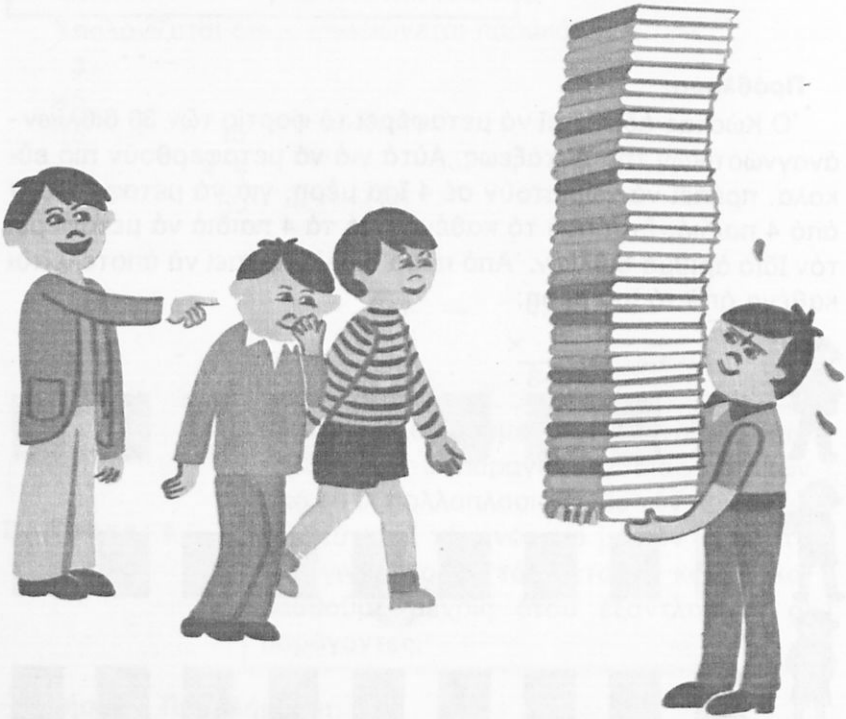
Ὁ Κώστας ἀδυνατεῖ νά μεταφέρει τό φορτίο τῶν 36 βιβλίων - ἀναγνωστικῶν τῆς Δ΄ τάξεως. Αὐτά γιά νά μεταφερθοῦν πιό εὔκολα, πρέπει νά χωριστοῦν σέ 4 ἴσα μέρη, γιά νά μεταφερθοῦν ἀπό 4 παιδιά, ἔτσι πού τό καθένα ἀπό τά 4 παιδιά νά μεταφέρει τόν ἴδιο ἀριθμό βιβλίων. Ἀπό πόσα βιβλία πρέπει νά ἀποτελεῖται καθένα ἀπό τά ἴσα μέρη;



Εἰκ. 35

Γιά νά βροῦμε πόσα βιβλία θά μεταφέρει κάθε παιδί, πρέπει νά βροῦμε, πόσες φορές χωράει ὁ 4 στόν 36. Πρέπει δηλαδή νά πάρουμε ἀρχικά 4 βιβλία καί νά δώσουμε σέ κάθε παιδί ἀπό ἕνα, ὁπότε θά μείνουν 32 βιβλία. Νά πάρουμε πάλι ἄλλα 4 βιβλία καί νά δώσουμε ἀπό ἕνα σέ κάθε παιδί, καί νά συνεχίσουμε, ἕως ὅτου ἐξαντληθοῦν ὅλα τά βιβλία. Ὅπως φαίνεται στή διπλανή εἰκόνα, τό κάθε παιδί θά μεταφέρει 9 βιβλία. Ὅσες φορές δηλαδή θά ἀφαιρέσουμε τόν 4 ἀπό τό 36.

Λύσαμε, λοιπόν, τό πρόβλημα μέ 9 συνεχεῖς ἀφαιρέσεις.



Εἰκ. 36

Ἄν ὅμως ζητούσαμε νά βροῦμε, πόσες φορές χωράει ὁ 7 στόν 938, θά ἔπρεπε νά κάνουμε πολλές ἀφαιρέσεις καί σέ πολύ χρόνο.

Ὅπως, ὅμως, τήν πρόσθεση πολλῶν ἴσων προσθετέων τή σημειώνουμε σύντομα μέ ἕνα πολλαπλασιασμό, ἔτσι καί τήν ἀφαίρεση πολλῶν ἴσων ἀφαιρετέων θά τή σημειώνουμε σύντομα μέ μιά νέα πράξη πού τή λέμε **διαίρεση.**

Βλέπετε;

Διαίρεση λέγεται ἡ πράξη πού κάνουμε γιά νά βροῦμε σύντομα, πόσες φορές τό πολύ χωράει ἕνας ἀριθμός μέσα σέ ἕναν ἄλλον καί τί περισσεύει, ἄν περισσεύει.

Παράδειγμα: Πόσες φορές χωράει ὁ 8 στόν 35; Μέ 4 συνεχεῖς ἀφαιρέσεις βρίσκουμε πώς χωράει 4 φορές καί μένει καί 3 **ὑπόλοιπο.**

43. Γραφή τῆς διαιρέσεως

Ὁ ἀριθμός 36, στό παραπάνω παράδειγμα, εἶναι ὁ **διαιρετέος** καί ὁ 4 **ὁ διαιρέτης.**

Τή διαίρεση σημειώνουμε μέ τό σύμβολο (:), πού διαβάζεται **διά** καί τό γράφουμε μεταξύ διαιρετέου καί διαιρέτη ἔτσι:

$$36 : 4 = 9$$

Ὁ 9 εἶναι **πηλίκο.**

Ἐδῶ πρέπει νά σημειωθεῖ, πώς ὁ διαιρετέος πρέπει νά εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος ἤ ἴσος ἀπό τό διαιρέτη, γιά νά εἶναι δυνατή ἡ διαίρεση.

Ἐπίσης, ὅπως στόν πολλαπλασιασμό, ἔτσι καί στή διαίρεση λέμε συχνά, πώς διαιρῶ τό 36 μέ τό 4 ἀντί νά λέμε **διά** τοῦ 4.

44. Ἀτελής καί τέλεια διαίρεση

Στή διαίρεση 54 : 9 τό πηλίκο εἶναι 6 καί τό ὑπόλοιπο μηδέν. Δηλαδή δέν ὑπάρχει ὑπόλοιπο. Αὐτή λέγεται **τέλεια.** Στή διαίρεση 25 : 4 τό πηλίκο εἶναι 6 καί τό ὑπόλοιπο 1. Ἡ διαίρεση αὐτή πού ἔχει ὑπόλοιπο, λέγεται **ἀτελής.**

45. Σχέση μεταξύ: διαιρετέου, διαιρέτη, πηλίκου καί ὑπόλοιπου.

Στή διαίρεση: 58 : 7, πού τό πηλίκο εἶναι 8 καί τό ὑπόλοιπο 2 παρατηροῦμε, πώς: $58 = (7 \times 8) + 2$

Όμοια στή διαίρεση 36 : 4 = 9 παρατηρούμε πώς: 36 = 4 × 9
Δηλαδή: (Διαιρετέος) = (διαιρέτης) × (πηλίκο) + (ύπόλοιπο)

Βλέπετε; ➧

> Σέ κάθε διαίρεση ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τοῦ διαιρέτη, ἐπί τό πηλίκο, σύν τό ὑπόλοιπο (ἄν ὑπάρχει).

Ἀπό τό παραπάνω γίνεται φανερό, πώς μέ τή **διαίρεση βρίσκουμε τό μεγαλύτερο ἀκέραιο, πού τό γινόμενό του μέ τό διαιρέτη δέν ξεπερνᾶ τό διαιρετέο.**

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

174. Νά βρεῖτε νοερά, μέ τή χρήση τοῦ Πυθαγόρειου πίνακα τά παρακάτω πηλίκα καί ὑπόλοιπα.
1) 72 : 9 = 2) 63 : 7 = 3) 28 : 7 = 4) 35 : 5 =
5) 60 : 7 = 6) 62 : 8 = 7) 79 : 9 = 8) 27 : 4 =
10) 36 : 5 =

175. Ἀπό τήν ἰσότητα 216 = 12 × 18 πόσες καί ποιές διαιρέσεις παίρνετε: (Ὑπόδειξη: Διαιρετέος = (διαιρέτης) × (πηλίκο).

176. Νά βρεῖτε τό μισό στούς παρακάτω ἀριθμούς (διαίρεση διά 2).
120, 80, 162, 184, 206, 228, 308, 494, 286, 240, 244.

177. Νά βρεῖτε τό τρίτο καθενός ἀπό τούς ἀριθμούς (διαίρεση διά 3).
180, 90, 120, 150, 240, 600, 279, 339, 930, 366.

178. Νά συμπληρωθοῦν οἱ ἰσότητες: 1) ... = 11 × 12 + 7,
2) 227 = 13 × 17 + ... (Ὑπόδειξη: (Διαιρετέος) = (Διαιρέτης) × (Πηλίκο)+(Ὑπόλοιπο).

179. Στή διαίρεση πού ἔκανε ἕνας μαθητής διά 17 ἔγραψε πηλίκο 5 καί ὑπόλοιπο 23. Ἔγραψε σωστά; Μπορεῖτε νά τό διορθώσετε;

180. Ποιές τιμές μπορεῖ νά πάρει τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως διά 5;

181. Ἄν τό γινόμενο δύο ἀριθμῶν εἶναι 81 καί ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι 9, ποιός εἶναι ὁ ἄλλος;

182. Μέ ποιόν ἀριθμό πρέπει να πολλαπλασιασθεῖ ὁ 7, γιά νά δώσει γινόμενο τόν 63;

183. Γιά νά γίνει τέλεια, μιά ἀτελής διαίρεση, ποιόν ἀριθμό πρέπει νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τό διαιρετέο;

184. Ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως στή διαίρεση;

43. Ἡ τεχνική τῆς διαιρέσεως

1. Διαιρέτης μονοψήφιος

Πρόβλημα:

Ἕνας φιλάνθρωπος μοίρασε 438 δραχμές σέ 6 φτωχούς. Πόσα πῆρε κάθε φτωχός;

Παρατηροῦμε, πώς:

438 δραχμές = 4 κατοστάρικα + 3 δεκάρικα + 8 δραχμές.

Δέν μπορεῖ ὅμως νά μοιράσει τά 4 κατοστάρικα στά 6 πρόσωπα. Μπορεῖ ὅμως νά τά ἀντικαταστήσει μέ 40 δεκάρικα. Θά ἔχει τότε νά μοιράσει: 43 δεκάρικα στά 6 πρόσωπα.

Τό πηλίκο 43 : 6 εἶναι 7 καί μένει ὑπόλοιπο 1 δεκάρικο.

Βλέπουμε, λοιπόν, πώς κατά τήν πρώτη διανομή κάθε φτωχός πῆρε 7 δεκάρικα καί

Ὑπολείπονται γιά διανομή:

1 δεκάρικο + 8 δραχμές = 18 δραχμές.

Τό πηλίκο 18 : 6 εἶναι 3 καί τό ὑπόλοιπο μηδέν.

Κατά τή δεύτερη, λοιπόν, διανομή κάθε ἕνας ἀπό τούς 6 φτωχούς πῆρε 3 δραχμές.

Ὥστε κάθε φτωχός θά πάρει: 7 δεκάρικα + 3 δραχμές = 73 δραχμές.

Πρακτικά γίνεται ὅπως παρακάτω:

1ος μερικός διαιρετέος ὁ 43	→ 438	6	
	−42	73	(πηλίκο)
2ος μερικός διαιρετέος	→ 18		
	−18		
Ὑπόλοιπο	→ 0		

Πρακτικά λέμε:

Ἕνα ψηφίο ἔχει ὁ διαιρέτης (τόν 6), ἕνα χωρίζουμε καί ἀριστερά τοῦ διαιρετέου (τόν 4). Τό 6 στό 4 δέ χωράει, γι' αὐτό χωρίζουμε κι ἄλλο ψηφίο, τό 3, πού τώρα γίνεται 43.

Ὁ 43 λέγεται πρῶτος μερικός διαιρετέος. Κι ἐξακολουθοῦμε νά λέμε: τό 6 στό 43 χωράει 7. Γράφουμε τό 7 σάν πρῶτο ψηφίο τοῦ πηλίκου, καί τό γινόμενο 6 × 7 = 42, ἀφαιρούμενο ἀπό τό 43 ἀφήνει ὑπόλοιπο ἕνα (1).

Κατεβάζουμε καί τό ψηφίο, τοῦ διαιρετέου 8, πού τότε γίνεται 18. Ὁ 18 εἶναι ὁ δεύτερος μερικός διαιρετέος. Κι ἐξακολουθοῦμε νά λέμε τό 6 στό 18 χωράει 3 φορές. Γράφουμε τό 3 σάν δεύτερο ψηφίο τοῦ πηλίκου καί τό γινόμενο 6 × 3 = 18 ἀφαιρούμενο ἀπό τό 18, ἀφήνει ὑπόλοιπο μηδέν. Ἔτσι βρίσκουμε πηλίκο 73 καί ὑπόλοιπο μηδέν.

3. Δοκιμή τῆς διαιρέσεως

Ἡ δοκιμή βασίζεται στόν κανόνα:

(Διαιρετέος) = (Διαιρέτης) × (πηλίκο) + (ὑπόλοιπο).

Γιά τήν προηγούμενη διαίρεση ἔχουμε:

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times\ 6 \\ \hline 438 \end{array}$$

Ἐπειδή βρήκαμε τό διαιρετέο, ἡ πράξη εἶναι σωστή.

Ἐδῶ πρέπει νά σημειώσουμε, πώς τό ὑπόλοιπο πρέπει πάντοτε νά εἶναι μικρότερο ἀπό τό διαιρέτη.

Διαίρεση μέ ὑπόλοιπο καί ἡ δοκιμή της.

$$\begin{array}{r|l} 839 & 7 \\ \cline{2-2} 13 & 119 \\ 69 & \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 119 \\ \times\ 7 \\ \hline 833 \\ +\ 6 \\ \hline 839 \end{array}$$

Ἀσκήσεις:

Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις καί οἱ δοκιμές τους:

185. 512 : 4, 631 : 3, 658 : 5, 748 : 6.

186. 969 : 8, 824 : 9, 985 : 5, 666 : 5.

Νά συμπληρωθοῦν οἱ ἰσότητες:

187. ; × 5 + 35 = 410,

188. ; × 8 = 280

189. $\begin{array}{r|l} \ldots & 9 \\ \cline{2-2} 7 & 99 \end{array}$

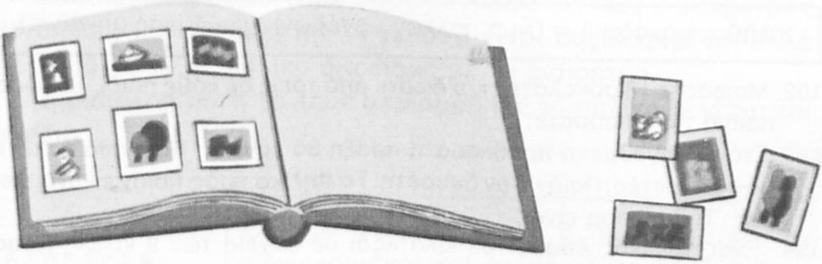
[Ὑπόδειξη: (Διαιρετέος) = (διαιρέτης) × (πηλίκο) + (Ὑπόλοιπο)].

44. Διαίρεση μετρήσεως

1ο πρόβλημα:

Σ' ἕνα ἄλμπουμ πρόκειται νά ταξινομήσουμε 72 φωτογραφίες.

Σέ κάθε σελίδα τοποθετοῦμε 6 φωτογραφίες. Πόσες σελίδες θά μᾶς χρειαστοῦν;



Εἰκ. 37

Εἶναι φανερό, πώς θά μᾶς χρειαστοῦν τόσες σελίδες, ὅσες φορές ὁ 6 χωράει στόν 72. Θά κάνουμε δηλαδή διαίρεση: 72 : 6. Εὔκολα βρίσκουμε πηλίκο **12 σελίδες** καί ὑπόλοιπο μηδέν.

Ἐδῶ ἔχουμε διαίρεση μέ διαιρετέο (72 φωτογραφίες) καί διαιρέτη (6 φωτογραφίες) συγκεκριμένους καί ὁμοειδεῖς. Βλέπουμε ὅμως, πώς τό εἶδος τοῦ πηλίκου δέν ὁρίζεται ἀπό τό εἶδος τοῦ διαιρετέου ἤ τοῦ διαιρέτη, ἀλλά ἀπό τήν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος. Ἡ διαίρεση αὐτή εἶναι: **μέτρηση** καί τό πηλίκο λέγεται **λόγος.**

Βλέπετε; ➧

Ὅταν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι συγκεκριμένοι καί ὁμοειδεῖς, ἡ διαίρεση εἶναι **μετρήσεως.**

Πότε κάνουμε διαίρεση μετρήσεως

Ὅπως φαίνεται στό παραπάνω παράδειγμα, διαίρεση μετρήσεως κάνουμε, ὅταν ξέρουμε: τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας (6 φωτογραφίες στή μιά σελίδα), τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων (72 φωτογραφίες) καί ζητοῦμε τό πλῆθος τῶν μονάδων, πού ἀντιστοιχοῦν στήν τιμή αὐτή.

Προβλήματα:

190. Ἕνα μέτρο κορδέλα ἀξίζει 9 δραχμές. Μέ 108 δραχμές πόσα μέτρα ἀγοράζουμε;

191. Νά διατυπώσεις ἕνα πρόβλημα, πού νά ζητεῖται τό πλῆθος τῶν μονάδων.

(πλῆθος μονάδων) = (τιμή πολλῶν μονάδων) : (τιμή μιᾶς μονάδας)

192. Μοιράστε 18 σοκολάτες καί δῶστε ἀπό τρεῖς σέ κάθε παιδί. Σέ πόσα παιδιά τίς μοιράσατε;

193. Στό προηγούμενο πρόβλημα τί πράξη θά κάνετε; Ποιόν θά βάλετε σάν διαιρετέο; Ποιόν σάν διαιρέτη; Τό πηλίκο πρός ποιόν εἶναι ὁμοειδές; Τί διαίρεση εἶναι;

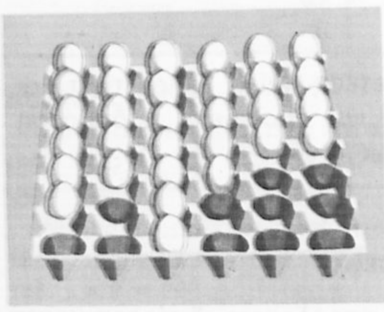
194. Ἕνας χωρικός ἔβαλε 135 κιλά λάδι σέ δοχεῖα τῶν 9 κιλῶν. Πόσα δοχεῖα χρησιμοποίησε;

195. Πόσα τάλιρα κάνουν 775 δραχμές;

45. Διαίρεση μερισμοῦ

2ο Πρόβλημα:

Ἕνας αὐγοπώλης θέλει νά τοποθετήσει σέ 8 αὐγουλιέρες 248 αὐγά. Πόσα αὐγά θά βάζει σέ κάθε αὐγουλιέρα;



Εἰκ. 38

Εἶναι φανερό, πώς θά βάλει σέ κάθε αὐγουλιέρα τόσα αὐγά, ὅσες φορές χωράει τό 8 στό 248. Ἄν κάνουμε τή διαίρεση 248 : 8, βρίσκουμε πώς σέ κάθε αὐγουλιέρα θά τοποθετήσει 31 αὐγά.

Συμπεράσματα:

Στό πρῶτο πρόβλημα γνωρίζαμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας (6 φωτογραφίες), τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων (72 φωτογραφίες) καί ζητοῦμε νά βροῦμε τό πλῆθος τῶν μονάδων, πού ἀντιστοιχεῖ στήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων.

Στό δεύτερο πρόβλημα: Γνωρίζουμε τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων καί ζητοῦμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας.

Ἐδῶ παρατηροῦμε, (προβλ. παράγραφο 42) πώς ὁ διαιρετέος (36 βιβλία) καί ὁ διαιρέτης (4 παιδιά) εἶναι **συγκεκριμένοι** ἀλλά **ἑτεροειδεῖς** τό δέ πηλίκο ὁμοειδές μέ τό διαιρετέο.

Τή διαίρεση αὐτή τή λέμε **μερισμοῦ** καί τό πηλίκο λέγεται καί **μερίδιο.**

Βλέπετε; ➧

> Ὅταν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι συγκεκριμένοι καί ἑτεροειδεῖς, τότε ἡ διαίρεση εἶναι **μερισμοῦ.**

46. Πότε κάνουμε διαίρεση μερισμοῦ

Ὅπως φαίνεται στό προηγούμενο παράδειγμα, διαίρεση μερισμοῦ κάνουμε: Ὅταν γνωρίζουμε τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων (36 βιβλία) καί ζητοῦμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας (τό μερίδιο πού ἀντιστοιχεῖ στό κάθε παιδί γιά μεταφορά).

Προβλήματα:

196. Νά μοιραστοῦν 135 τετράδια σέ 9 μαθητές. Πόσα τετράδια θά πάρει ὁ καθένας;

197. Στό προηγούμενο πρόβλημα τί πράξη θά κάνετε; Ποιόν ἀριθμό θά πάρετε σάν διαιρετέο; Τό πηλίκο πρός ποιόν εἶναι ὁμοειδές. Τί διαίρεση εἶναι;

198. Νά διατυπώσετε ἕνα πρόβλημα μέ τούς ἀριθμούς 63 καί 9, πού νά ζητεῖται ἡ τιμή τῆς μιᾶς μονάδας.

199. Μιά μητέρα μοίρασε ἐξ ἴσου 450 δραχμές στά 5 παιδιά της. Πόσα ἔδωσε στό καθένα;

200. Νά διατυπώσεις ἕνα πρόβλημα, πού νά ζητεῖται ἡ τιμή τῆς μιᾶς μονάδας.

(Ἡ τιμή μιᾶς μονάδας) = (τιμή πολλῶν μονάδων) : (πλῆθος μονάδων)

201. Τά 8 μέτρα ὕφασμα ἔχουν 248 δραχμές. Πόσο ἔχει τό 1 μέτρο;

202. Ἕνα αὐτοκίνητο σέ 7 ὧρες διέτρεξε μιά ἀπόσταση 735 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεχε τήν ὥρα;

203. 972 κιλά πορτοκάλια πρόκειται νά συσκευαστοῦν γιά ἀποστολή σέ 9 κιβώτια. Πόσα πορτοκάλια θά πάρει τό κάθε κιβώτιο;
204. 896 αὐγά πρόκειται νά συσκευαστοῦν σέ 8 κιβώτια ἴσα. Πόσα αὐγά πρέπει νά χωρεῖ τό κάθε κιβώτιο;
205. 6 κιβώτια μέ ἴσο ἀριθμό κιλῶν μήλων περιέχουν 618 κιλά. Πόσα κιλά περιέχει τό κάθε κιβώτιο;
206. 5 βιβλία ἀριθμητικῆς ἔχουν ὅλα μαζί 440 φύλλα. Πόσα φύλλα ἔχει τό κάθε βιβλίο καί πόσες σελίδες;
207. Ἄν ἕνα αὐτοκίνητο γιά νά τρέξει ἕνα διάστημα 826 χιλιομέτρων χρειάζεται 7 ὧρες, πόσα χιλιόμετρα ἀναλογοῦν στήν ὥρα;
208. Μιά χαρτοβιομηχανία πρέπει νά παραδώσει στήν ἐπιχείρηση μιᾶς ἐφημερίδας, 36 ρολά χαρτί γιά τήν ἔκδοση τῆς ἐφημερίδας. Τό αὐτοκίνητο, πού διαθέτει ἡ βιομηχανία γιά τή μεταφορά, ἔχει τή δυνατότητα νά μεταφέρει τό πολύ 9 ρολά χαρτί. Ἄν ἡ μεταφορά γίνεται σέ ἀπόσταση 48 χιλιομέτρων, ποιά ἀπόσταση θά διανύσει τό αὐτοκίνητο;
209. Ἕνα αὐτοκίνητο γιά νά διατρέξει ἕνα διάστημα 840 χιλιομέτρων, χρειάστηκε 8 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε τήν ὥρα; ἄν δεχθοῦμε ὅτι κάθε ὥρα διέτρεχε ἴσο διάστημα;
210. Μιά βρύση γεμίζει σέ 8 ὧρες μιά ἄδεια δεξαμενή, πού χωρεῖ 888 κιλά νερό. Πόσα κιλά νεροῦ ρίχνει τήν ὥρα;
211. Ἀπό δύο σιδηροδρόμους ὁ ἕνας διατρέχει 675 χιλιόμετρα σέ 9 ὧρες. Ἕνας ἄλλος σιδηρόδρομος διατρέχει 480 χιλ. σέ 6 ὧρες. Ποιός εἶναι ταχύτερος; καί πόσα χιλιόμετρα τήν ὥρα;
212. Ἕνας χωρικός πούλησε 45 κιλά πατάτες πρός 20 δραχμές τό κιλό. Πόσα κιλά λάδι θά πάρει πρός 150 δραχμές τό κιλό;
213. Ἡ Μαρία ἔχει 94 δραχμές καί ἡ Ἑλένη 68 δραχμές. Πόσες δραχμές πρέπει νά δώσει ἡ Μαρία στήν Ἑλένη, γιά νά ἔχουν ἴσα χρήματα; καί πόσα γιά νά ἔχει ἡ Μαρία 10 δραχμές περισσότερα;

47. Εἰδικές περιπτώσεις διαιρέσεων

1. Ἀπό τίς ἰσότητες: (Διαιρετέος) = (Διαιρέτης) × (πηλίκο)

1) $7 = 7 \times 1$
2) $7 = 1 \times 7$
3) $0 = 5 \times 0$

Συμπεραίνουμε:
1) $7 : 7 = 1$
2) $7 : 1 = 7$
3) $0 : 5 = 0$

Βλέπετε;

> 1) Κάθε ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν διαιρούμενος μέ τόν ἑαυτό του δίνει πηλίκο 1.
> 2) Κάθε ἀριθμός διαιρούμενος μέ τή μονάδα δίνει πηλίκο τόν ἑαυτό του.
> 3) Ὁ μηδέν, ὅταν διαιρεθεῖ μέ φυσικό ἀριθμό, διαφορετικό ἀπό τό μηδέν, δίνει πηλίκο μηδέν.

2. Ἡ διαίρεση: 3 : 0 = ; εἶναι δυνατή;

Παρατηροῦμε ὅτι τό 3 : 0 μᾶς λέει, πώς πρέπει νά βροῦμε σάν πηλίκο ἕναν ἀριθμό, πού ἄν πολλαπλασιασθεῖ μέ τό μηδέν, νά δίνει τό 3. Αὐτό ὅμως εἶναι ἀδύνατο (γιατί); (Σελίδα 54 παράδειγμα β, γ).

Ἄρα: **διαίρεση φυσικοῦ ἀριθμοῦ μέ τό μηδέν εἶναι ἀδύνατος.**

3. Προβλήματα:

1. Ἄν μοιραστοῦν 20 τετράδια σέ 3 παιδιά, πόσα θά πάρει τό καθένα;
2. Ἄν μοιραστοῦν διπλάσια (40) τετράδια σέ διπλάσια (6) παιδιά πόσα θά πάρει τό καθένα;
3. Ἄν μοιραστοῦν 3πλάσια (60) τετράδια σέ τριπλάσια (9) παιδιά, πόσα θά πάρει τό καθένα;

Τί παρατηρεῖτε·

Βλέπετε;

> Ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε καί τό διαιρετέο καί τό διαιρέτη μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό διαφορετικό ἀπό τό μηδέν, τό μέν πηλίκο παραμένει ἀμετάβλητο, τό δέ ὑπόλοιπο (ἄν ὑπάρχει) πολλαπλασιάζεται ἤ διατηρεῖται μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό.

Ἀσκήσεις:

214. Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις: (Ὑπόδ.: (πηλίκο) × (διαιρέτης) = Διαιρετέος)

1) 0 : 3	2) 8 : 8	3) .. × 8 = 0	4) 9 : 9
5) 0 : 9	6) .. × 8 = 8	7) ... × 3 = 3	8) 27 : 27

Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη τῶν 4 πράξεων:

215. Νά κάνετε τίς παρακάτω πράξεις:

1) 109 + 101 + 105	11) 48 × 13
2) 201 + 102 + 5	12) 37 × 18
3) 506 + 114 + 93	13) 39 × 17
4) 409 + 201 + 52	14) 41 × 22
5) 309 + 108 + 69	15) 84 × 11
6) 735 − 602	16) 839 : 5
7) 809 − 344	17) 966 : 3
8) 999 − 99	18) 934 : 6
9) 960 − 609	19) 806 : 7
10) 532 − 50	20) 564 : 8

216. Νά συμπληρώσετε τούς ἀριθμούς πού σημειώνονται μέ τελεῖες στίς παρακάτω περιπτώσεις:
1) 672 :...= 7, 2) ... : 9 = 16, 3) ... × 8 = 880, 4) 590 :...= 35

217. Γράψτε ὅλους τούς πολλαπλασιασμούς δύο ἀκεραίων πού ἔχουν γινόμενο:
1) 16, 2) 20, 3) 46, 4) 56, 5) 64

Προβλήματα γιά ἐπανάληψη τῶν 4 πράξεων

218. Κατά τή διάρκεια τοῦ ταξιδιοῦ του ὁ κ. Δαφνόπουλος παρατήρησε ὅτι τό αὐτοκίνητό του διέτρεξε ἀπόσταση 189 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἔχει νά διατρέξει ἀκόμα, γιά νά καλύψει μιά ἀπόσταση 306 χιλιομέτρων;

219. Σέ μιά θεατρική παράσταση ἦταν 905 ἄτομα. Ἀπό αὐτά 118 ἦταν παιδιά καί τ' ἄλλα ἄνδρες καί γυναῖκες. Οἱ ἄνδρες ἦταν 37 περισσότεροι ἀπό τίς γυναῖκες. Πόσοι ἦταν οἱ ἄνδρες καί πόσες οἱ γυναῖκες;

220. Ὁδηγώντας μέσα στήν πόλη μέ πυκνή κυκλοφορία ὁ κύριος Δαφνόπουλος διαπίστωσε, πώς χρησιμοποίησε 24 λίτρα καύσιμα καί διέτρεξε ἀπόσταση 360 χιλιομέτρων. Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε μέ ἕνα λίτρο καύσιμα;

221. Ἕνας γυαλοπώλης πούλησε μιά δωδεκάδα πιάτα καί πῆρε 660 δραχμές. Ἀπό αὐτές 168 ἦταν κέρδος. Πόσο εἶχε ἀγοράσει τό ἕνα;

222. Ἕνα πλοῖο ἔκανε ἕνα ταξίδι σέ 21 ὧρες. Τίς πρῶτες 11 ὧρες ἔπλεε μέ 15 μίλια τήν ὥρα. Τίς ὑπόλοιπες ὧρες ἔπλεε μέ 17 μίλια. Πόσα μίλια ἦταν ὅλο τό ταξίδι του;

223. Ένας μανάβης άγόρασε μήλα πρός 340 δραχμές τά 10 κιλά καί τά πούλησε πρός 250 δραχμές τά 5 κιλά. Άν πούλησε 60 κιλά μήλα πόσες δραχμές κέρδισε;

224. Δυό πεζοπόροι φίλοι, πού τά χωριά τους άπέχουν 36 χιλιόμετρα, ξεκίνησαν τήν ϊδια ώρα ό καθένας άπό τό χωριό του καί βαδίζουν μέχρι νά συναντηθοῦν. Άν ό πρῶτος βαδίζει 5 χιλιόμετρα τήν ώρα καί ό δεύτερος 4, σέ πόσες ὧρες θά συναντηθοῦν καί σέ ποιά άπόσταση άπό τό χωριό τοῦ πρώτου;

225. Κάποιος ταχυδρόμος εἶχε στήν τσάντα του 108 έπιστολές συστημένες καί άπλές. Οί άπλές ἦταν κατά 30 περισσότερες άπό τίς συστημένες. Πόσες ἦταν οί άπλές καί πόσες οί συστημένες;

226. Μιά πωλήτρια γραμματοσήμων εἶχε χρεωθεῖ 290 γραμματόσημα τῶν 2 δραχμῶν καί τῶν 5 δραχμῶν. Τά γραμματόσημα τῶν δύο δραχμῶν ἦσαν 20 λιγότερα άπό τά γραμματόσημα τῶν 5 δραχμῶν. Πόσες δραχμές θά είσπράξει άπό τήν πώλησή τους;

227. Τό λεωφορεῖο μέ τό όποῖο γύρισε ό Γιῶργος άπό τήν πόλη εἶχε 52 έπιβάτες πού ό καθένας πλήρωσε είσιτήριο 19 δραχμές. Άπό τά χρήματα τῶν είσιτηρίων ό όδηγός έπλήρωσε 712 δραχμές γιά τή λίπανση τῆς μηχανῆς τοῦ αὐτοκινήτου. Πόσα χρήματα τοῦ ἔμειναν;

228. Ένας χωρικός πούλησε 6 κιλά λάδι πρός 150 δραχμές τό κιλό καί μέ τά χρήματα πού πῆρε άγόρασε 3 μέτρα ὕφασμα πρός 219 δραχμές τό μέτρο. Πόσα χρήματα τοῦ περίσσεψαν;

229. Ένας βιβλιοπώλης άγόρασε 7 δωδεκάδες μολύβια πρός 11 δραχμές τό ἕνα. Πόσα ρέστα θά πάρει άπό ἕνα χιλιάρικο;

230. Ένα αὐτοκίνητο διανύει μιά άπόσταση σέ 4 ὧρες. Άν ἔτρεχε μέ ταχύτητα 30 χιλιόμετρα τήν ώρα περισσότερο, θά διέτρεχε τήν άπόσταση σέ 3 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ὅλη ή άπόσταση;

231. Μιά κυρία άγόρασε 19 κουτιά γάλα καί πλήρωσε 551 δραχμές. Πόσα ἔδωσε μιά ἄλλη κυρία πού άγόρασε 33 κουτιά γάλα τῆς ϊδιας ποιότητας;

232. Ένας γυαλοπώλης έπρόκειτο νά πουλήσει ποτήρια πρός 5 δρχ. τό ἕνα. Κατά τή μεταφορά ὅμως τοῦ ἔσπασαν 20 καί πούλησε τά ύπόλοιπα πρός 9 δραχμές τό ἕνα, μά δέ ζημιώθηκε. Πόσα ποτήρια πούλησε;

233. Μέ 850 δραχμές άγόρασε κάποιος 5 κιλά λάδι καί πῆρε ρέστα 100 δραχμές. Πόσο άγόρασε τό κιλό τό λάδι;

234. Γιά 3 μέτρα ὕφασμα καί γιά τήν έξόφληση χρέους 65 δραχμῶν, ἔδωσε κάποιος 950 δραχμές. Πόσο τιμᾶται τό μέτρο τοῦ ὑφάσματος;

235. 7 κιλά ζάχαρη άξίζουν 120 δραχμές άκριβότερα άπ' τά 4 κιλά. Πόση

εἶναι ἡ τιμή τοῦ ἑνός κιλοῦ;

236. Ὁ πατέρας τοῦ Κωστάκη εἶναι 39 ἐτῶν. Ὁ Κωστάκης εἶναι 9 ἐτῶν καί ἡ ἀδερφή του 5 ἐτῶν. Μπορεῖτε νά βρεῖτε, ποιά θά εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα, ὅταν τά δύο παιδιά θά ἔχουν ἄθροισμα ἡλικίας 50 ἐτῶν;

237. Ἕνας φιλάνθρωπος θέλει νά μοιράσει ἕνα χρηματικό ποσό σέ φτωχούς. Παρατηρεῖ ὅμως, πώς ἄν δώσει σέ καθένα ἀπό 70 δραχμές, θά τοῦ περισσέψουν 150 δρχ. Ἄν δώσει στόν καθένα ἀπό 80, θά τοῦ λείψουν 100 δρχ. Πόσοι εἶναι οἱ φτωχοί;

238. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἕνα τόπι ὕφασμα πρός 160 δραχμές τό μέτρο. Ὑπολόγισε ὅμως, ὅτι, ἄν τό πλήρωνε 175 δρχ. τό μέτρο, θά τοῦ ἔλειπαν 900 δρχ. Πόσο ἦταν τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος;

239. Θέλω νά μοιράσω 400 δραχμές σέ τρεῖς ἀνθρώπους, ἔτσι πού ὁ β΄ νά λάβει 25 δραχμές περισσότερες ἀπό τόν α΄, καί ὁ γ΄ 50 δραχμές περισσότερες ἀπό τόν β΄. Πόσες θά δώσω στόν καθένα;

240. Πρόκειται 336 μαθητές νά μεταφερθοῦν σέ ἐκδρομή μέ αὐτοκίνητο. Ἄν μεταφερθοῦν μέ 7 αὐτοκίνητα, πόσα παιδιά θά τοποθετηθοῦν σέ καθένα, καί πόσα ἄν σέ 8 αὐτοκίνητα;

241. Σέ κάποιο μαθητή δόθηκαν 50 προβλήματα γιά λύση. Συμφωνήθηκε νά ἀμείβεται μέ 2 μονάδες γιά κάθε πρόβλημα, πού θά λύνει καί νά χάνει μιά μονάδα γιά κάθε πρόβλημα, πού δέ θά λύνει. Ὅταν ἐργάστηκε καί στά 50 προβλήματα, εἶχε κερδίσει 79 μονάδες. Σέ πόσα προβλήματα ἔδωσε λύση;

ΔΕΝ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙΤΕ ΤΟ ΣΩΣΤΟ ΔΡΟΜΟ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΟΤΑΝ:

1. Ἀναβάλλετε τήν μελέτη σας γιά ἀργότερα.
2. Δέν ἀκολουθεῖτε τίς ὁδηγίες καί τούς κανόνες.
3. Σταματᾶτε τή μελέτη σας πρίν κατανοήσετε ὅλα τά μέρη τοῦ θέματος.
4. Δέ ρωτᾶτε γιά τά πράγματα πού δέν καταλαβαίνετε καί
5. Ὅταν μπαίνετε σέ πειρασμό νά δανειστεῖτε τίς λύσεις ἀπό φίλους σας ἤ ἀπό βιβλία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

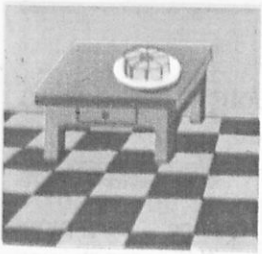
Τό τετράγωνο
Τό ὀρθογώνιο
Τό τρίγωνο
Ὁ κύκλος

Ἐπίπεδα σχήματα

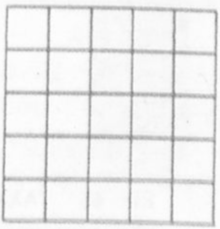
48. Τό τετράγωνο

Ἔννοια

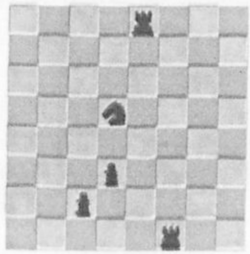
Βλέπουμε τό τετράγωνο στά πλακάκια τῆς κουζίνας ἤ τοῦ μπάνιου, στό τετραγωνισμένο τετράδιο ἀριθμητικῆς, στά καρρέ κεντήματος, στή σκακιέρα πού εἰκονίζεται κ.τ.λ.



Εἰκ. 39



Εἰκ. 40

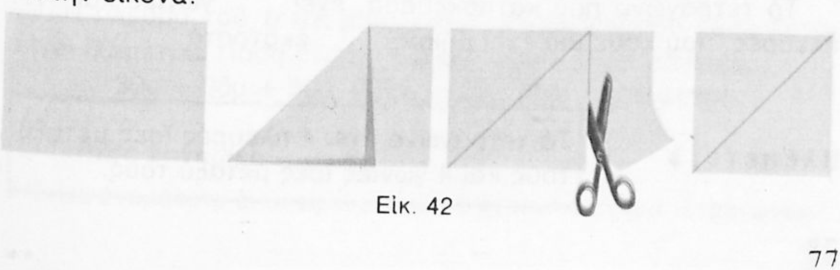


Εἰκ. 41

49. Πῶς θά κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο

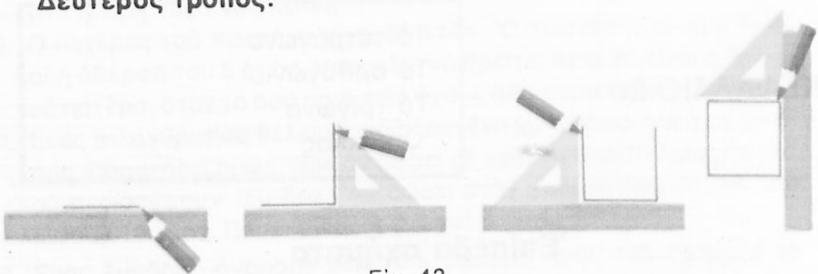
Πρῶτος τρόπος

Διπλώνετε ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου σας, ὅπως τό βλέπετε στήν εἰκόνα:



Εἰκ. 42

Δεύτερος τρόπος:



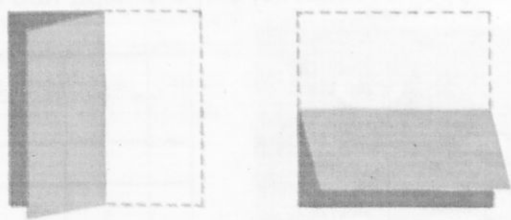
Εἰκ. 43

Μέ τή βοήθεια τοῦ κανόνα καί τοῦ γνώμονα, ὅπως βλέπετε στήν παραπάνω εἰκόνα.

Παρατηρήσεις:

Παρατηρῆστε τό τετράγωνο, πού κατασκευάσατε:

Εἰκ. 44



Εἰκ. 45 Ἄλλος τρόπος σύγκρισης πλευρῶν καί γωνιῶν τοῦ τετραγώνου.

1. Πόσες γωνίες ἔχει καί πόσες πλευρές;
2. Νά μετρήσετε τό μέγεθος τῶν γωνιῶν του μέ τή βοήθεια τοῦ γνώμονα.
3. Νά βρεῖτε τό μῆκος κάθε πλευρᾶς μέ τό ὑποδεκάμετρο.

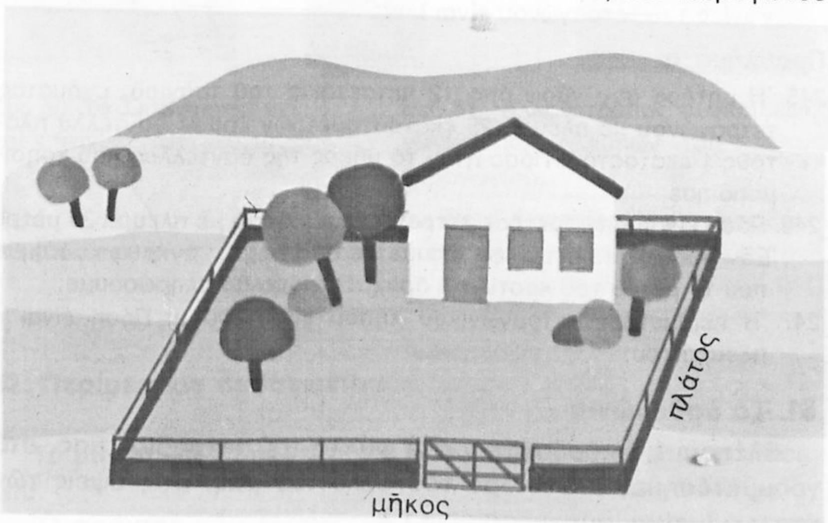
Τό τετράγωνο πού κατασκεύασα, ἔχει .... γωνίες καί .... πλευρές, πού κάθε μιά ἔχει μῆκος ..... ἑκατοστά.

Βλέπετε; ➧

Τό τετράγωνο ἔχει 4 πλευρές ἴσες μεταξύ τους καί 4 γωνίες ἴσες μεταξύ τους.

50. Περίμετρος τετραγώνου

Τό μῆκος καί τό πλάτος εἶναι οἱ διαστάσεις τοῦ τετραγώνου.



Εἰκ. 46

Ὁ φράχτης πού εἰκονίζεται, ἀκολουθεῖ τό περίγραμμα τοῦ τετραγώνου τοῦ οἰκοπέδου. Γιά νά βροῦμε τό μῆκος τοῦ σύρματος τοῦ φράχτη πρέπει νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου δηλ. τήν **περίμετρο** τοῦ τετραγώνου.

Βλέπετε;

Περίμετρος τετραγώνου λέγεται τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

Παράδειγμα:

Ἡ πλευρά τοῦ τετραγώνου τοῦ οἰκοπέδου πού εἰκονίζεται, εἶναι 30 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου;

$$30\mu + 30\mu + 30\mu + 30\mu = 30\mu \times 4 = 120 \text{ μέτρα.}$$

Πρακτικές ἐργασίες

242. Νά ὀνομάσετε ἀντικείμενα, πού νά ἔχουν τό σχῆμα τετραγώνου.

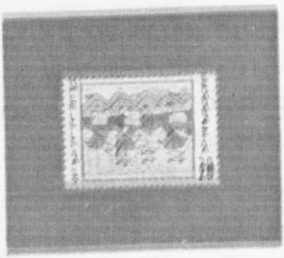
243. Μέ τό διαβήτη νά ἐξακριβώσετε πώς ὅλες οἱ πλευρές τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες.
244. Μέ τή γωνία ἑνός φύλλου τετραδίου νά διαπιστώσετε, πώς ὅλες οἱ γωνίες τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες.

Προβλήματα

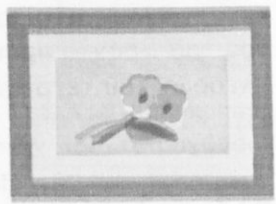
245. Ἡ μητέρα σου γύρω ἀπό 12 πετσετάκια τοῦ τσαγιοῦ, σχήματος τετραγώνου μέ πλευρά 25 ἑκατοστομέτρων ἔραψε δαντέλλα πλάτους 1 ἑκατοστοῦ. Πόσο ἦταν τό μῆκος τῆς δαντέλλας πού χρησιμοποίησε;
246. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τετραγωνικοῦ κήπου μέ πλευρά 35 μέτρα; Ἐάν πρόκειται νά τόν φράξουμε μέ δύο σειρές ἀγκαθωτό σύρμα, πού τό μέτρο του κοστίζει 6 δραχμές πόσο θά πληρώσουμε;
247. Ἡ περίμετρος τετραγωνικοῦ κήπου εἶναι 100 μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

51. Τό ὀρθογώνιο

Βλέπουμε τό ὀρθογώνιο στά φύλλα τοῦ τετραδίου μας, στά γραμματόσημα, στά κάδρα τοῦ σαλονιοῦ μας, στίς ὄψεις τῶν χαρτοκιβωτίων, συσκευασίας κ.τ.λ.


Εἰκ. 47


Εἰκ. 48

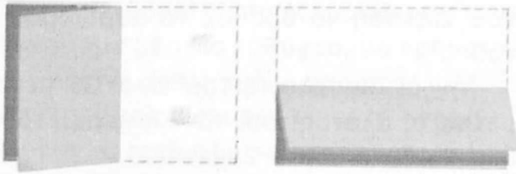

Εἰκ. 49

Παρατηρῆστε: Τό ἐξώφυλλο τοῦ τετραδίου σας:

1. Πόσες γωνίες ἔχει;
2. Νά βρεῖτε τό μέγεθος κάθε γωνίας μέ τή βοήθεια τοῦ γνώμονα.
3. Πόσες πλευρές ἔχει; Νά βρεῖτε μέ τή βοήθεια τοῦ ὑποδεκάμετρού σας τό μῆκος κάθε πλευρᾶς.
4. Νά σημειώσετε τ' ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων.

Τό ὀρθογώνιο ἔχει ... γωνίες ... καί τίς πλευρές ἀνά δύο ... ἴσες.

Εἰκ. 50. Τό Ὀρθογώνιο ἔχει 4... καί 4 γωνίες... μεταξύ τους.



Εἰκ. 51 Ἄλλος τρόπος συγκρίσεως γωνιῶν καί πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου.

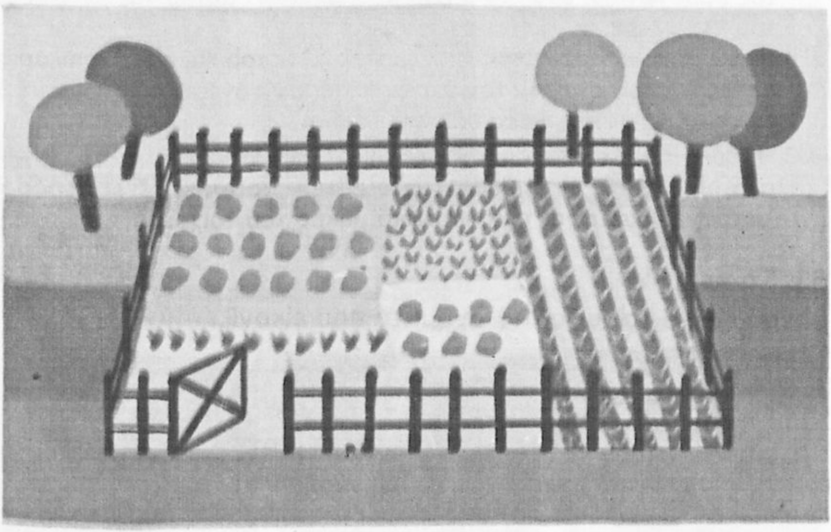
Βλέπετε; ➧

Τό ὀρθογώνιο ἔχει 4 γωνίες ἴσες μεταξύ τους καί τίς ἀπέναντι πλευρές ἀνά δύο ἴσες.

52. Περίμετρος ὀρθογωνίου

Τό **μῆκος** καί τό **πλάτος** τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι οἱ διαστάσεις του.

Ὁ φράχτης πού εἰκονίζεται, ἀκολουθεῖ τό περίγραμμα τοῦ



Εἰκ. 52

ὀρθογωνίου κήπου. Γιά νά βροῦμε τό μῆκος τοῦ σύρματος, πού θά χρειαστεῖ γιά περίφραξη πρέπει νά βροῦμε τήν **περίμετρό** του. Δηλαδή νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν του.

Ἄν οἱ διαστάσεις του εἶναι 35 μέτρα τό μῆκος του καί 28 μέτρα τό πλάτος του, τότε ἡ περίμετρός του εἶναι:

$35\mu + 28\mu + 35\mu + 28\mu = (35 \times 2) + (28 \times 2)$
$= (35\mu + 28\mu) \times 2 = 126\mu$. (Γιατί;)

Ἐδῶ σημειώνουμε, πώς τό 35μ + 28μ εἶναι ἡ **ἡμιπερίμετρος** τοῦ ὀρθογωνίου.

Πρακτικές ἐργασίες

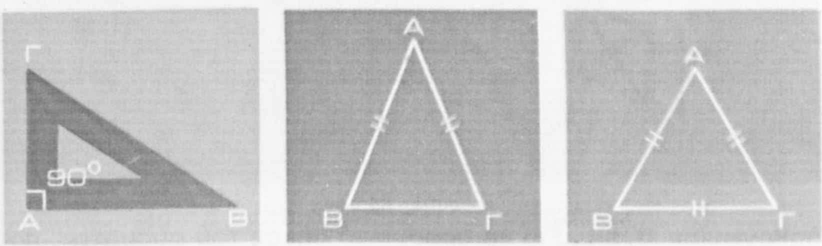
248. Νά δείξετε ἀντικείμενα, πού ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου.
249. Νά δείξετε τό μῆκος καί τό πλάτος τοῦ τετραδίου σας καί νά τό μετρήσετε.
250. Νά κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 4 ἑκατοστόμετρα καί κατόπιν ἕνα ὀρθογώνιο μέ 6 ἑκατοστόμετρα μῆκος καί 4 ἑκατοστόμετρα πλάτος. Μετά νά βρεῖτε τίς διαφορές τους.

Προβλήματα:

251. Πόσο σύρμα θά χρειαστεῖ, γιά νά περιφράξουμε ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου, ὅταν τό μῆκος του εἶναι 201 μέτρα καί τό πλάτος του 247 μέτρα.
252. Ἕνας ὀρθογώνιος κῆπος ἔχει πλάτος 17 μέτρα καί μῆκος διπλάσιο ἀπ' τό πλάτος του. Ἄν τόν περιφράξουμε μέ ἀγκαθωτό σύρμα μέ 9 δραχμές τό μέτρο, πόσα θά πληρώσουμε;
253. Ἡ αὐλή τοῦ σχολείου μας ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο μέ μῆκος 64 μ. καί πλάτος 36 μ. Αὐτή περιβάλλεται ἀπό ἕναν τοῖχο, καί ἔχει εἴσοδο 6 μέτρων. Πόσο εἶναι τό ἐσωτερικό μῆκος τοῦ τοίχου;

53. Τό τρίγωνο

Βλέπουμε τό τρίγωνο στά σχήματα πού εἰκονίζεται:



Ὁ γνώμονας

Εἰκ. 53

Έχει τρεῖς πλευρές. Ἄν σημειώσουμε στό τετράδιό μας τρία σημεῖα Α, Β καί Γ καί τά ἑνώσουμε μέ τρία **εὐθύγραμμα τμήματα**, θά πάρουμε μιά τριγωνική **κλειστή τεθλασμένη γραμμή**.

Αὐτό τό σχῆμα, πού θά ἔχει τρεῖς πλευρές εἶναι τό **τρίγωνο**.

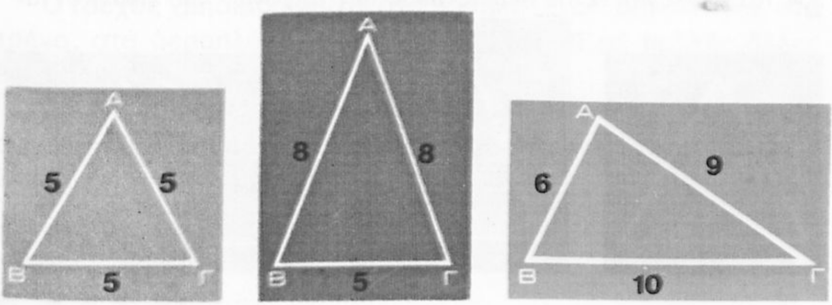
Τά σημεῖα Α, Β καί Γ, εἶναι οἱ **κορυφές** τοῦ τριγώνου καί τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἶναι οἱ **πλευρές** του

Βλέπετε; ◆

Τρίγωνο εἶναι τό σχῆμα, πού σχηματίζεται ἀπό μιά κλειστή τριγωνική τεθλασμένη γραμμή.

Εἴδη τριγώνων μέ κριτήριο τήν πλευρά

3 πλευρές ἴσες 2 πλευρές ἴσες ἄνισες πλευρές



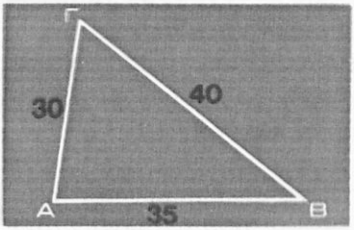
Ἰσόπλευρο Ἰσοσκελές Σκαληνό

Εἰκ. 54

Βλέπετε; ◆

Τό τρίγωνο πού ἔχει 3 πλευρές ἴσες λέγεται ἰσόπλευρο. Τό τρίγωνο πού ἔχει δύο πλευρές ἴσες λέγεται ἰσοσκελές. Τό τρίγωνο πού ἔχει ἄνισες πλευρές ἀνά δύο λέγεται σκαληνό.

54. Περίμετρος τοῦ τριγώνου



Εἰκ. 55

Γιά νά βροῦμε τήν περίμετρο ἑνός τριγώνου πρέπει νά βροῦμε τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν του.

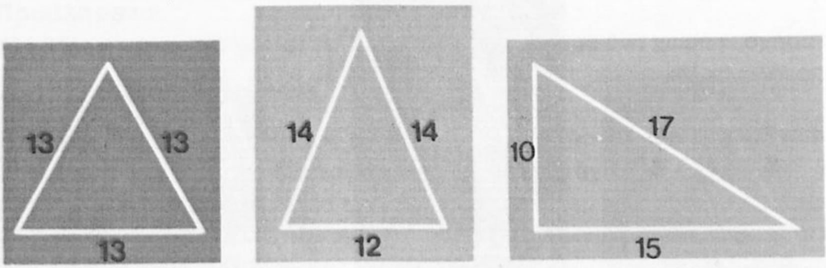
Στό σχέδιο πού εἰκονίζεται ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι:

30μ + 35μ + 45μ = 110 μέτρα

Βλέπετε; ➧ Περίμετρος τριγώνου ὀνομάζεται τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν του.

Ἀσκήσεις

254 Νά ὑπολογίσετε τίς περιμέτρους τῶν τριγώνων πού εἰκονίζονται:



Ἡ περίμετρος εἶναι: .... Ἡ περίμετρος εἶναι: .... Ἡ περίμετρος εἶναι: ....

Εἰκ. 56

255 Νά συμπληρωθεῖ ὁ παρακάτω πίνακας:

Μῆκος πλευρῶν	Περίμετρος
45 ἑκ., 75 ἑκ., 45 ἑκ.	....
32 παλ., 63 παλ., 47 παλ.	....
15 μ., 15 μ., 15 μ.	....

256. Νά συμπληρωθεῖ ὁ παρακάτω πίνακας:

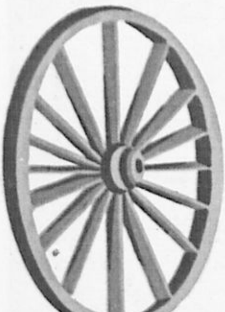
Ἰσόπλευρα τρίγωνα		Ἰσοσκελῆ τρίγωνα		
Μιά πλευρά	Περίμετρος	Μία τῶν ἴσων πλευρῶν	Τρίτη πλευρά	Περίμετρος
6 ἑκατ.,	....	5 ἑκατ.	3 ἑκατ.	....
....	30 μ.	10 μ.	4 μ.	....
9 παλ,	....	24 μ.	.....	78 μ.

55. Ὁ κυκλικός δίσκος, ὁ κύκλος καί τά στοιχεῖα του

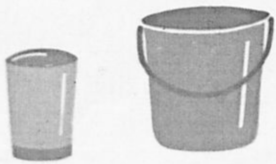
Ὁ τροχός εἶναι μιά ἀπό τίς σπουδαιότερες ἀνακαλύψεις τοῦ ἀνθρώπου.

Ὁ τροχός χρησιμοποιεῖται στά ποδήλατα, στ' αὐτοκίνητα, στά τρένα, στά ἀεροπλάνα, στά ἐργαστήρια, καί σέ πολλές ἄλλες ἐφαρμογές.

Θέλετε νά μάθετε μερικά ἀπό τά μαθηματικά τοῦ τροχοῦ; Τό σχῆμα πού ἔχει κάθε ὄψη τοῦ τροχοῦ τό ὀνομάζουμε κυκλικό **δίσκο**.



Εἰκ. 57



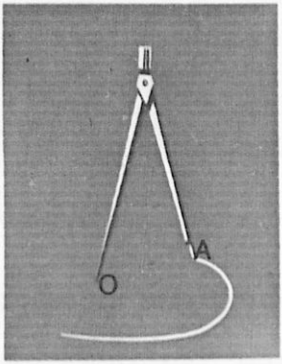
Εἰκ. 58

Εἰκ. 59

Κυκλικός δίσκος εἶναι ἡ βάση τοῦ ποτηριοῦ πού εἰκονίζεται ὅπως καί ἡ βάση ἑνός κάδου κ. τ. λ.

Στοιχεῖα τοῦ κυκλικοῦ δίσκου

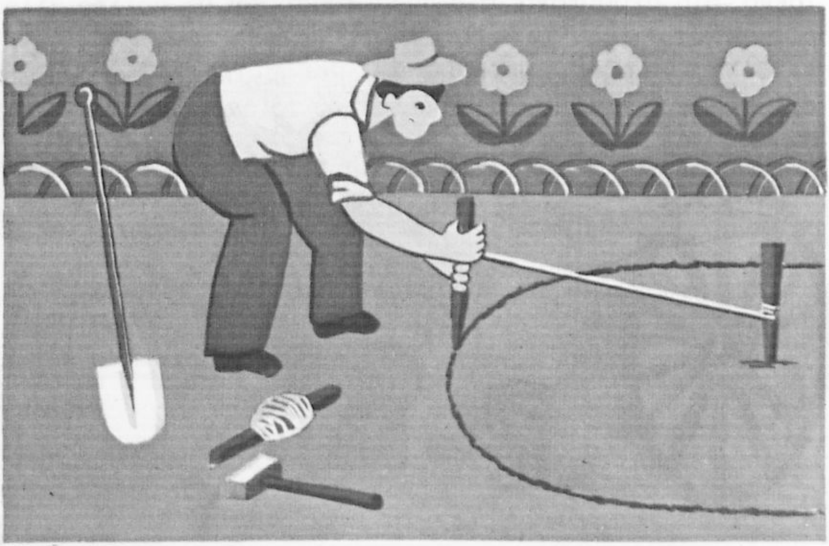
Ἡ γραμμή στήν ὁποία τελειώνει ὁ κυκλικός δίσκος ὀνομάζεται **κύκλος.**



Κύκλους γράφουμε μέ τό ὄργανο πού λέγεται **διαβήτης.** Τό σημεῖο πού στηρίζουμε τό διαβήτη, γιά νά γράψουμε τόν κύκλο, ὅπως φαίνεται καί στό σχέδιο, ὀνομάζεται **κέντρο** τοῦ κύκλου.

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει τό ἕνα ἄκρο του στό κέντρο τοῦ κυκλικοῦ δίσκου καί τό ἄλλο σέ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου, ὀνομάζεται **ἀκτίνα** τοῦ κυκλικοῦ δίσκου ἤ τοῦ κύκλου. Π.χ. ἡ ΟΑ εἰκ. 60.

Εἰκ. 60. Ἀπό τόν τρόπο τῆς κατασκευῆς βλέπουμε:
1. ὅλες οἱ ἀκτίνες εἶναι ἴσες 2. ὅλες οἱ διάμετροι εἶναι ἴσες

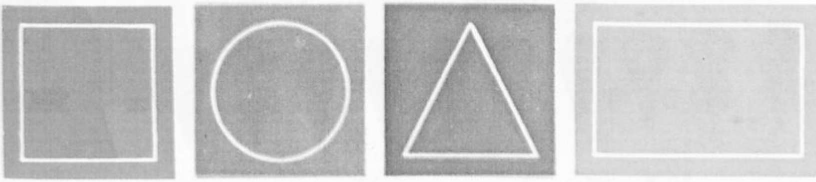


Εἰκ. 61

Καί τέλος τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει τά ἄκρα του ἐπάνω στόν κύκλο καί περνᾶ ἀπό τό κέντρο, ὀνομάζεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου ἤ τοῦ κυκλικοῦ δίσκου. Π.χ. ΑΒ στήν εἰκ. 59.

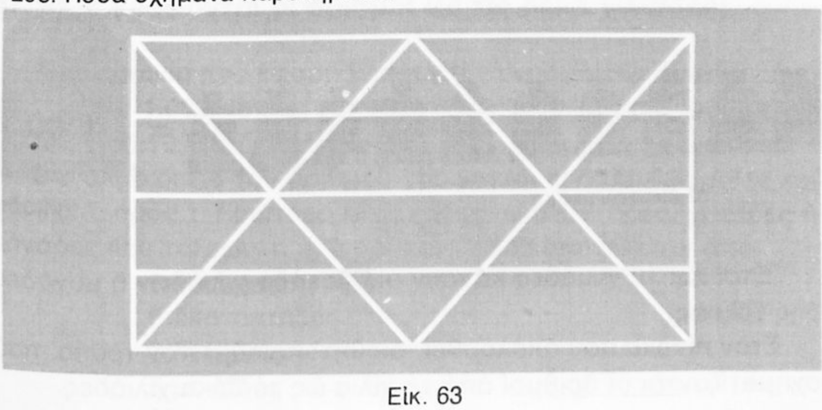
Ἀσκήσεις:

257. Ὀνομάστε σώματα, πού εἰκονίζουν κύκλο καί κυκλικό δίσκο.
258. Νά δείξετε σέ ἕνα νόμισμα τόν κυκλικό δίσκο καί τόν κύκλο, κατόπιν μέ αὐτό νά χαράξετε ἕναν κύκλο.
259. Νά μετρήσετε τήν ἀκτίνα καί τή διάμετρο ἑνός ποτηριοῦ.
260. Μέ τό ψαλίδι νά κόψετε ἕνα χάρτινο κυκλικό δίσκο ἀκτίνος 3 ἑκατ. Νά χαράξετε μιά διάμετρο. Νά διπλώσετε τόν κύκλο κατά μῆκος τῆς διαμέτρου. Νά συγκρίνετε τά δύο μέρη. Τί βλέπετε;
261. Μέ τό ἴδιο κέντρο νά χαράξετε τρεῖς κύκλους μέ ἀκτίνες 2, 3 καί 4 ἑκατοστόμετρα. Νά χαράξετε ὕστερα ἀπό μιά ἀκτίνα τους.
262. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος ἑνός κύκλου, πού ἔχει ἀκτίνα 5 ἑκατοστῶν καί πόση ἡ ἀκτίνα ἑνός ἄλλου κύκλου, πού ἔχει διάμετρο 12 ἑκατοστῶν;
263. Σημειῶστε στό χαρτί σας ἕνα σημεῖο Α. Πῶς μπορειτε νά βρεῖτε τό κέντρο ἑνός κύκλου, πού ἔχει ἀκτίνα 4 ἑκατοστόμετρα καί περνάει ἀπό τό Α;
264. Νά γραφεῖ τό ὄνομά τους:



Εἰκ. 62

265. Πόσα σχήματα παρατηρεῖτε;



Εἰκ. 63

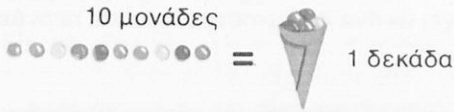
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Οἱ ἀριθμοί πέρα
ἀπό τό 1000

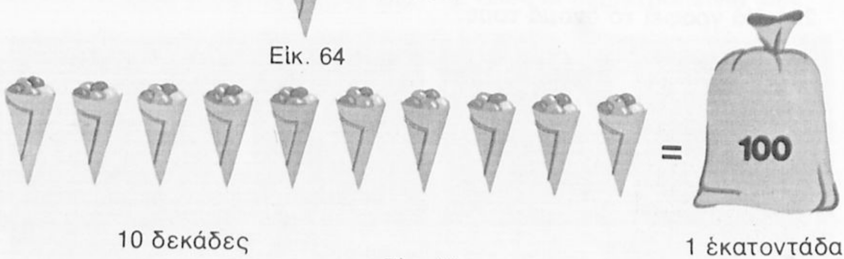
Ἔννοια,
αἰσθητοποίηση,
σειρά τάξεως,
γραφή καί ἀπαγγελία τῶν χιλιάδων καί τῶν πολυψηφίων.
Ἀνάλυση.

56. Ἔννοια

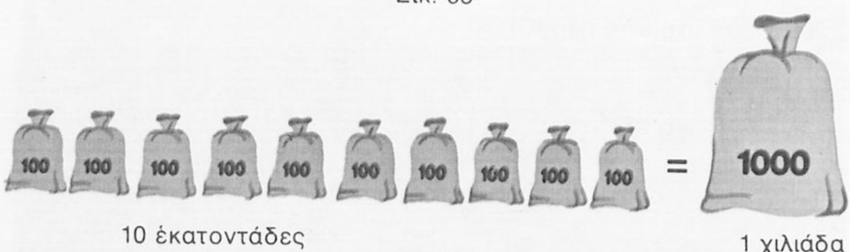
Οἱ ἀριθμοί πέρα ἀπό τό χίλια σχηματίζονται μέ τήν ἴδια **συμφωνία,** πού σχηματίσατε τούς ἀριθμούς ἀπό τό 1 ὥς τό 999. Δηλαδή ὅπως:



Εἰκ. 64



Εἰκ. 65



Εἰκ. 66

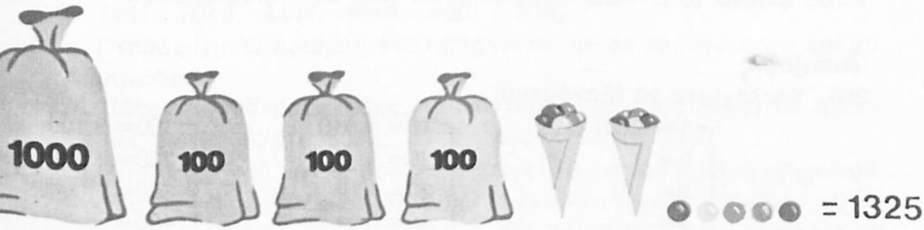
Ἔτσι καί 10 χιλιάδες κάνουν μιά **δεκάδα χιλιάδων** ἤ μονάδες 5ης **τάξεως.**

Στόν πίνακα πού ἀκολουθεῖ, αἰσθητοποιοῦμε τόν τρόπο, πού σχηματίζονται οἱ ἀριθμοί ἀπό τό χίλια ὥς τό δέκα χιλιάδες.

1 χιλιάδα	+ 1 χιλιάδα	= 2 χιλιάδες	=	2.000
2 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 3 χιλιάδες	=	3.000
3 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 4 χιλιάδες	=	4.000
4 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 5 χιλιάδες	=	5.000
5 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 6 χιλιάδες	=	6.000
6 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 7 χιλιάδες	=	7.000
7 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 8 χιλιάδες	=	8.000
8 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 9 χιλιάδες	=	9.000
9 χιλιάδες	+ 1 χιλιάδα	= 10 χιλιάδες	=	10.000

Εἰκ. 67

Ἄν βάλουμε ἀνάμεσα ἀπό δύο συνεχόμενες χιλιάδες τούς ἀριθμούς ἀπό 1 ὥς τό 999, θά ἔχουμε ὅλους τούς ἀριθμούς ἀπό 1.000 ὡς 10.000 π.χ.



Εἰκ. 69

57. Πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοί ὥς τίς δέκα χιλιάδες;

Ἡ συμφωνία πού ἐφαρμόζεται γιά τή γραφή τῶν ἀριθμῶν ἀπό τό 1 ὥς τό 1.000, ἰσχύει καί γιά τή γραφή τῶν ἀριθμῶν ἀπό τό 1.000 ὥς τό 10.000 δηλαδή:

Στό ἄκρο δεξιό τοῦ ἀριθμοῦ γράφονται οἱ ἁπλές μονάδες καί συνέχεια πρός τ' ἀριστερά οἱ δεκάδες, ἑκατοντάδες, χιλιάδες ἤ μονάδες 4ης τάξεως. π.χ. ὁ ἀριθμός 7.835 ἀποτελεῖται ἀπό:

7 χιλιάδες
8 ἑκατοντάδες
3 δεκάδες
5 μονάδες

Ὅμοια ὁ ἀριθμός 8.079 ἀποτελεῖται ἀπό:

8 χιλιάδες
0 ἑκατοντάδες
7 δεκάδες
9 μονάδες

58. Πῶς διαβάζεται ἕνας ἀριθμός μέ περισσότερα ἀπό 3 ψηφία.

Ὁ ἀριθμός 5.749 διαβάζεται: πέντε χιλιάδες-ἑπτακόσια-σαράντα-ἐννέα. Χωρίζουμε δηλαδή τόν ἀριθμό σέ τριψήφια μέρη, ἀρχίζοντας ἀπ' τά δεξιά πρός τ' ἀριστερά καί διαβάζουμε πρῶτα τίς χιλιάδες καί μετά ὅλο μαζί τό τριψήφιο τμῆμα, δίνοντας σέ κάθε ψηφίο τό ὄνομα τῶν μονάδων πού ἀντιπροσωπεύει.

Ἀσκήσεις

266. Ὑπολογίστε τά ἐξαγόμενα:

$$9.000+\begin{cases}1= 9.001\\ 2=\\ 3=\\ 4=\\ 5=\\ 6=\\ 7=\\ 8=\\ 9=\end{cases}\qquad 9.000+\begin{cases}10= 9.010\\ 20=\\ 30=\\ 40=\\ 50=\\ 60=\\ 70=\\ 80=\\ 90=\end{cases}\qquad 9.000+\begin{cases}100= 9.100\\ 200=\\ 300=\\ 400=\\ 500=\\ 600=\\ 700=\\ 800=\\ 900=\end{cases}$$

267.

$$10.000+\begin{cases}1.000 = 11.000\\ 2.000 =\\ 3.000 =\\ 4.000 =\\ 5.000 =\\ 6.000 =\\ 7.000 =\\ 8.000 =\\ 9.000 =\end{cases}$$

9999 + 1 = 10.000	7005 + 5 = 7.010
8009 + 1 =	8069 + 11 =
7006 + 4 =	9085 + 15 =
1870 + 30 =	6079 + 1 =
2005 + 25 =	4050 + 100 =
4007 + 100 =	8060 + 60 =
8070 + 30 =	9450 + 50 =
10000 − 100 =	10000 − 10 =

268. Γράψτε τόν ἀριθμό 5.000 + 500 + 50 + 5 σέ ἁπλή μορφή. Τί δηλώνουν τά τέσσερα 5 στόν ἀριθμό πού ἔχετε γράψει σέ ἁπλή μορφή;

269. Γράψτε σέ ἁπλή μορφή τούς ἀριθμούς:

α) $6000 + 500 + 20 + 3 = 6523$ β) $9000 + 400 + 80 + 7$

γ) $8000 + 800 + 80 + 8$ δ) $6000 + 300 + 40 + 4$

ε) $8000 + 100 + 10 + 1$ στ) $5000 + 200 + 20 + 5$

270. Γράψτε σέ ἁπλή μορφή τούς ἀριθμούς:

α) $8 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1 = 8456$

β) 9Χ + 1Ε + 1Δ + 7Μ

γ) $8 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 4 \times 1$ δ) 6Χ + 0Ε + 0Δ + 0Μ

271. Νά ἀναλυθοῦν σέ μονάδες, διαφόρων τάξεων οἱ ἀριθμοί:
4749, 8008, 9520, 4078, 1001, 9999.
(Ὑπόδειξη: Ὁ ἀριθμός 4237 ἀναλύεται σέ 4Χ + 2Ε + 3Δ + 7Μ)

272. Νά ἀναλυθοῦν σέ χιλιάδες καί μονάδες οἱ ἀριθμοί:
5478, 7811, 4075, 8888, 1002, 6578
(Ὑπόδειξη: Ὁ ἀριθμός 6732 ἔχει 6 χιλιάδες + 732 μονάδες).

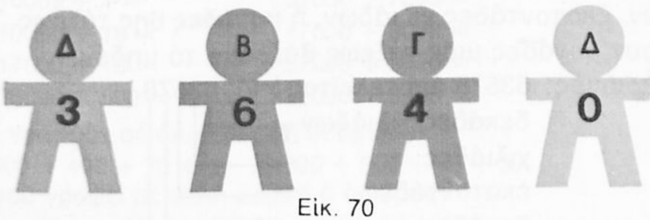
273. Ν' ἀναλυθοῦν σέ ἑκατοντάδες καί μονάδες οἱ ἀριθμοί:
7447, 8049, 4444, 8008, 6001, 7080
(Ὑπόδειξη: Ὁ ἀριθμός 4420 ἀναλύεται σέ 44 ἑκατοντάδες καί 20 μονάδες).

274. Πόσες μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες χιλιάδες ἔχουν οἱ ἀριθμοί: 6472, 6211, 5055, 6712, 4224, 5564 3399
(Ὑπόδειξη: Γιά νά τίς βροῦμε, ἀπαγγέλλουμε τόν ἀριθμό μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ἤ δεκάδων ἤ ἑκατοντάδων ἤ χιλιάδων π.χ. ὁ ἀριθμός 4652 ἔχει 4652 μονάδες, 465 δεκάδες, 46 ἑκατοντάδες, 4 χιλιάδες).

275. Ποιά ἡ ἀξία θέσεως τοῦ 2 στούς ἀριθμούς:
3672, 6325, 4257, 2676, 2007, 6028, 2222.

276. Ἀφοῦ χρησιμοποιήσετε τά παρακάτω ψηφία μόνο μιά φορά, νά γράψετε τό μεγαλύτερο ἀριθμό, πού μπορεῖτε νά σχηματίσετε: 4, 9, 0, 6.

277. Σέ ποιά διάταξη πρέπει νά τοποθετηθοῦν τά πρόσωπα Α, Β, Γ, καί Δ γιά νά σχηματίσουν τά ψηφία τους τό μεγαλύτερο δυνατό ἀριθμό:



Εἰκ. 70

καί ποιά θέση πρέπει νά ἔχουν, γιά νά μᾶς σχηματίσουν τό μικρότερο;

59. Οἱ ἀριθμοί ὥς τό 100 χιλιάδες

Ὅπως μέ τήν ἐπανάληψη τῆς χιλιάδας 10 φορές κάνουμε τή δεκάδα χιλιάδων ἤ μονάδων 5ης τάξεως, ἔτσι καί μέ τήν ἐπανάληψη 10 φορές τῆς δεκάδας χιλιάδων, δηλαδή τῆς μονάδας 5ης τάξεως, κάνουμε τήν ἑκατοντάδα χιλιάδων ἤ μονάδα 6ης τάξεως. Στόν πίνακα πού ἀκολουθεῖ, βλέπετε ἀναλυτικά, πῶς σχηματίζονται οἱ ἀριθμοί ἀπό 10 ὥς τό 100 χιλιάδες.

10 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 20 χιλιάδες = 20.000
20 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 30 χιλιάδες = 30.000
30 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 40 χιλιάδες = 40.000
40 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 50 χιλιάδες = 50.000
50 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 60 χιλιάδες = 60.000
60 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 70 χιλιάδες = 70.000
70 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 80 χιλιάδες = 80.000
80 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 90 χιλιάδες = 90.000
90 χιλιάδες + 10 χιλιάδες = 100 χιλιάδες = 100.000

Εἰκ. 71

Ἄν ἀνάμεσα ἀπό δύο συνεχόμενες δεκάδες χιλιάδων βάλω τούς ἀριθμούς ἀπό 1 ὥς τό 9999 θά ἔχω ὅλους τούς ἀριθμούς ἀπό 10 ὥς τίς 100 χιλιάδες.

60. Πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοί ἀπό 10 χιλιάδες ὥς 100 χιλιάδες

Οἱ ἀριθμοί ἀπό 10 χιλιάδες ὥς 100 χιλιάδες γράφονται μέ τήν ἴδια συμφωνία, πού γράφονται κι οἱ ἀριθμοί ἀπό 1 ὥς 10.000. Δηλαδή: στό ἄκρο δεξιό γράφονται οἱ μονάδες καί συνέχεια πρός τ' ἀριστερά οἱ δεκάδες, ἑκατοντάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδων, ἑκατοντάδες χιλιάδων, ἤ **μονάδες** 6ης τάξεως. Ἄν δέν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως βάζουμε τό μηδέν.

π.χ. ὁ ἀριθμός: 63578 ἀποτελεῖται ἀπό: 63578

δεκάδες χιλιάδων ←
χιλιάδες ←
ἑκατοντάδες ←
δεκάδες ←
ἁπλές μονάδες ←

Ἄν ἀνάμεσα ἀπό δύο διαδοχικές δεκάδες χιλιάδων βάλουμε τούς ἀριθμούς ἀπό 1 ὥς 9999, θά ἔχουμε ὅλους τούς ἀριθμούς ἀπό 10000 ὥς 100.000.

61. Πῶς διαβάζονται οἱ ἀριθμοί ἀπό 10 χιλιάδες ὥς 100 χιλιάδες

Ὁ ἀριθμός π.χ. 65.278 διαβάζεται:
ἑξήντα πέντε χιλιάδες διακόσιες ἑβδομήντα ὀκτώ μονάδες.

Χωρίζουμε, δηλαδή, τόν ἀριθμό σέ τριψήφια μέρη, ἀρχίζοντας ἀπό τά δεξιά πρός τ' ἀριστερά του καί κατόπιν διαβάζουμε χωριστά κάθε μέρος ἀρχίζοντας ἀπό τά ἀριστερά πρός τά δεξιά σάν νά ἦταν ἕνας ἀριθμός. Διαβάζοντας χαρακτηρίζουμε τό κάθε μέρος μέ τ' ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου του.

Παραδείγματα:

234.657, διακόσιες τριαντατέσσερις χιλιάδες ἑξακόσιες πενήντα ἑπτά μονάδες.

34.987, τριάντα τέσσερις χιλιάδες, ἐννιακόσιες ὀγδόντα ἑπτά μονάδες.

Ἀσκήσεις:

278. Νά βρεθοῦν:

$$10.000 + \left\{\begin{array}{l} 1000 = \\ 3000 = \\ 5000 = \\ 7000 = \\ 9000 = \end{array}\right. \quad 10.000 + \left\{\begin{array}{l} 20000 = \\ 40000 = \\ 60000 = \\ 80000 = \\ 90000 = \end{array}\right. \quad 100.000 - \left\{\begin{array}{l} 2000 = 98.000 \\ 4000 = \\ 6000 = \\ 8000 = \\ 10000 = \end{array}\right.$$

279.

10009 + 1 =	32000 + 7000 =
10090 + 10 =	47000 + 3000 =
17000 + 10 =	57000 + 3000 =
25000 + 500 =	67000 + 3000 =

280. Νά γραφοῦν σέ ἁπλή μορφή οἱ ἀριθμοί:
60000 + 400 + 70 + 8, 70.000 + 600 + 40 + 3

281. Ἀφοῦ γραφεῖ σέ ἁπλή μορφή ὁ ἀριθμός
80000 + 800 + 80 + 8,
νά ἀναγνωριστεῖ ἡ ἀξία θέσεως τοῦ 8.

282. Νά ἀναλυθοῦν στίς μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων οἱ ἀριθμοί:
9999, 87878, 54545, 96969.

283. Νά τοποθετηθοῦν τά πρόσωπα Α, Β, Γ, Δ, καί Ε σέ τέτοια σειρά, πού ὁ ἀριθμός πού θά σχηματίζεται νά εἶναι: 1) ὁ μικρότερος δυνατός καί 2) ὁ μεγαλύτερος δυνατός.

Εἰκ. 72

Οἱ ἀριθμοί ὥς τό ἑκατομμύριο

62. Πῶς σχηματίζονται:

Ἄν πάρω τήν ἑκατοντάδα χιλιάδων σάν νέα μονάδα, τότε μέ τήν ἐπανάληψή της 10 φορές θά κάνω τό ἑκατομμύριο ἤ **μονάδα** 7ης τάξεως.

Στόν πίνακα πού ἀκολουθεῖ, βλέπετε ἀναλυτικά πῶς σχηματίζονται οἱ ἀριθμοί.

100 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 200 χιλιάδες = 200.000
200 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 300 χιλιάδες = 300.000
300 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 400 χιλιάδες = 400.000
400 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 500 χιλιάδες = 500.000
500 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 600 χιλιάδες = 600.000
600 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 700 χιλιάδες = 700.000
700 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 800 χιλιάδες = 800.000
800 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 900 χιλιάδες = 900.000
900 χιλιάδες + 100 χιλιάδες = 1 ἑκατομμύριο = 1.000.000

63. Πῶς γράφονται οἱ ἀριθμοί ὥς τό ἑκατομμύριο.

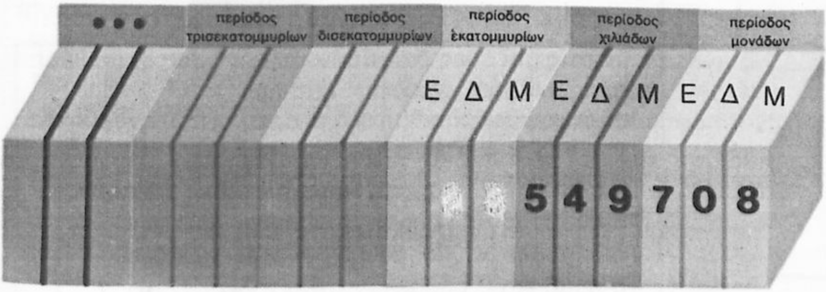
Κι ἐδῶ οἱ ἀριθμοί ἀκολουθοῦν τήν ἴδια συμφωνία γραφῆς. Δηλαδή: στό δεξιό ἄκρο τοῦ ἀριθμοῦ γράφονται οἱ μονάδες καί συνέχεια πρός τ' ἀριστερά: δεκάδες, ἑκατοντάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδων, ἑκατοντάδες χιλιάδων, **ἑκατομμύριο** ἤ μονάδα 7ης τάξεως.

π.χ. ὁ ἀριθμός: 587423 ἀποτελεῖται ἀπό:

5 ἑκατοντάδες χιλιάδων
8 δεκάδες χιλιάδων
7 χιλιάδες
4 ἑκατοντάδες
2 δεκάδες
3 μονάδες

Ἐάν ἀνάμεσα ἀπό δύο συνεχόμενες ἑκατοντάδες χιλιάδων βάλουμε τούς ἀριθμούς ἀπό 1 ὡς 99999, θά ἔχουμε ὅλους τούς ἀριθμούς ἀπό 100 χιλιάδες ὥς τό ἑκατομμύριο. Ὅπως ὁ ἀριθμός: πεντακόσιες ἕνδεκα χιλιάδες διακόσιες εἴκοσι τρεῖς μονάδες. Δηλαδή 511.223 μονάδες.

64. Πῶς διαβάζονται οἱ ἀριθμοί ὥς τό ἑκατομμύριο



Εἰκ. 73

Γιά νά διαβάσουμε ἕναν ἀριθμό, τόν χωρίζουμε, ἀρχίζοντας ἀπό δεξιά πρός τ' ἀριστερά, σέ τριψήφια μέρη, δηλαδή σέ **περιόδους**, καί κατόπιν διαβάζουμε κάθε τμῆμα χωριστά, ἀρχίζοντας ἀπ' τ' ἀριστερά, δίνοντας τό ὄνομα τῶν περιόδων. π.χ. ὁ ἀριθμός 549.708 διαβάζεται: 549 χιλιάδες, 708 μονάδες.

Ἀσκήσεις:

284. Νά γραφοῦν σέ ἁπλῆ μορφή οἱ ἀριθμοί:

563.000 + 700 + 80 + 8

285. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

$$100.000 + \begin{cases} 10.000 = 110.000 \\ 20.000 = \\ 30.000 = \\ 40.000 = \\ 50.000 = \\ 60.000 = \\ 70.000 = \\ 80.000 = \\ 90.000 = \end{cases}$$

286.

$$100.000 + \begin{cases} 100.000 = \\ 200.000 = \\ 300.000 = \\ 400.000 = \\ 500.000 = \\ 600.000 = \\ 700.000 = \\ 800.000 = \\ 900.000 = \end{cases}$$

287.

$$1.000.000 - \begin{cases} 10.000 = 990.000 \\ 20.000 = \\ 30.000 = \\ 40.000 = \\ 50.000 = \\ 60.000 = \\ 70.000 = \\ 80.000 = \\ 90.000 = \end{cases}$$

288.

$$1.000.000 - \begin{cases} 100.000 = 900.000 \\ 200.000 = \\ 300.000 = \\ 400.000 = \\ 500.000 = \\ 600.000 = \\ 700.000 = \\ 800.000 = \\ 900.000 = \end{cases}$$

289. Νά ἀναλυθοῦν στίς μονάδες διαφόρων τάξεών τους οἱ ἀριθμοί:
678409, 949049, 804809, 700049, 803308.

290. Νά γραφοῦν ὁλόγραφα καί ἀριθμητικά οἱ ἀριθμοί πού ἀναλύονται:
5Ε/Χ + 6 Δ/Χ + 7 Μ/Χ + 3Ε + 7Δ + 6Μ

(Ὑπόδειξη: Τό σύμβολο Ε/Χ σημαίνει ἑκατοντάδες χιλιάδων.
Τό σύμβολο Δ/Χ σημαίνει δεκάδες χιλιάδων.
Τό σύμβολο Μ/Χ σημαίνει μονάδες χιλιάδων.
Τό σύμβολο Ε σημαίνει ἑκατοντάδες.
Τό σύμβολο Δ σημαίνει δεκάδες.
Τό σύμβολο Μ σημαίνει μονάδες.

291. Νά γραφοῦν ὁλόγραφα καί ἀριθμητικά οἱ ἀριθμοί πού ἀναλύονται:
4 Ε/Χ + 0 Δ/Χ + 0 Μ/Χ + 4 Ε + 5 Δ + 6 Μ
5 Ε/Χ + 4 Δ/Χ + 3 Μ/Χ + 4 Ε + 0 Δ + 0 Μ

65. Οἱ ἀριθμοί ἀπό ἕνα ἑκατομμύριο καί πάνω.

Πῶς σχηματίζονται:

Ἄν τό ἕνα ἑκατομμύριο τό ἐπαναλάβουμε 10 φορές, θά κάνουμε μιά δεκάδα ἑκατομμυρίων ἤ **μονάδα 8ης τάξεως.**

Ἄν τή μονάδα τῆς 8ης τάξεως τήν ἐπαναλάβουμε 10 φορές, θά κάνουμε μιά ἑκατοντάδα ἑκατομμυρίων ἤ **μονάδα** 9ης τάξεως. Ἄν προχωρήσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο, θά κάνουμε μονάδες: 10ης, 11ης ... κλ. τάξεων, ὅπως φαίνεται στόν πίνακα τῆς σελίδας ... 95

66. Πῶς διαβάζονται οἱ πολυψήφιοι ἀριθμοί

Τούς χωρίζουμε σέ τριψήφια τμήματα, δηλαδή σέ περιόδους, ἀρχίζοντας ἀπ' τά δεξιά πρός τ' ἀριστερά καί κατόπιν διαβάζουμε τόν ἀριθμό, ἀρχίζοντας ἀπ' τ' ἀριστερά πρός τά δεξιά. Ὅταν διαβάζουμε τά τμήματα, δίνουμε τά ὀνόματα τῶν περιόδων τους. π.χ. ὁ ἀριθμός 5.542.367.951 διαβάζεται:

5 δισεκατομμύρια, 542 ἑκατομμύρια, 367 χιλιάδες 951 μονάδες.

Γιά καλύτερη κατανόηση παρακολουθῆστε τόν παρακάτω πίνακα:

περίοδος τρισεκατομμυρίων			περίοδος δισεκατομμυρίων			περίοδος ἑκατομμυρίων			περίοδος χιλιάδων			περίοδος μονάδων			Διαβάζεται
Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	Ε	Δ	Μ	
														1	Ἕνα
													1	0	δέκα
												1	0	0	ἑκατό
											1	0	0	0	χίλια
										1	0	0	0	0	δέκα χιλιάδ.
									1	0	0	0	0	0	ἑκατό χιλ.
								1	0	0	0	0	0	0	ἕνα ἑκατομ.
							1	0	0	0	0	0	0	0	10 ἑκατομ.
						1	0	0	0	0	0	0	0	0	100 ἑκατομ.
					1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 δισεκατομ.

Ἀσκήσεις:

292. Οἱ παρακάτω ἀριθμοί νά ἀναλυθοῦν στίς μονάδες τῶν διαφόρων τάξεών τους.
   524.793, 80.808.088, 5.697.489.911, 875.497.023.
294. Νά διαβάσετε τούς ἀριθμούς:
   48.502.000, 89.970.324, 105.409, 101.910.111

67. Ἑλληνική καί Ρωμαϊκή γραφή τῶν ἀριθμῶν*

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες χρησιμοποιοῦσαν τό δεκαδικό σύστημα γραφῆς τῶν ἀριθμῶν. Ἔγραφαν τούς ἀριθμούς μέ (27) σύμβολα, πού τά σημειώνουμε στόν πίνακα πού ἀκολουθεῖ:

Ἰνδοαραβικά σύμβολα	Ἑλληνικά σύμβολα	Ρωμαϊκά σύμβολα	Ἰνδοαραβικά σύμβολα	Ἑλληνικά σύμβολα	Ρωμαϊκά σύμβολα	Ἰνδοαραβικά σύμβολα	Ἑλληνικά σύμβολα	Ρωμαϊκά σύμβολα
0	–	–				100	ρ΄	C
1	α΄	I	10	ι΄	X	200	σ΄	
2	β΄	II	20	κ΄		300	τ΄	
3	γ΄	III	30	λ΄		400	υ΄	
4	δ΄	IV	40	μ΄		500	φ΄	D
5	ε΄	V	50	ν΄	L	600	χ΄	
6	στ΄	VI	60	ξ΄		700	ψ΄	
7	ζ΄	VII	70	ο΄		800	ω΄	
8	η΄	VIII	80	π΄		900	ϡ΄	
9	θ΄	IX	90	ϟ΄		1000	͵α	

Εἰκ. 74

Οἱ Ρωμαῖοι χρησιμοποιοῦσαν τά σύμβολα, πού σημειώνουμε στόν ἴδιο πίνακα μέ τούς ἑξῆς κανόνες:

1. Κάθε ἀριθμός, πού γράφεται ἀριστερά μεγαλυτέρου του, ἀφαιρεῖται ἀπ' αὐτόν.
2. Κάθε ἀριθμός, πού γράφεται δεξιά μεγαλυτέρου του, προστίθεται σ' αὐτόν.

* Προαιρετικά.

3. Όμοια ψηφία πού ἐπαναλαμβάνονται, προσθέτονται.

Τά Ἑλληνικά καί Ρωμαϊκά σύμβολα χρησιμοποιοῦνται καί σήμερα στά κεφάλαια τῶν βιβλίων. Τά ρωμαϊκά σέ μερικά ρολόγια καί ἀλλοῦ.

Στήν Ἑλληνική καί Ρωμαϊκή γραφή τῶν ἀριθμῶν δέν ὑπῆρχε τό σύμβολο μηδέν (0), γιατί δέν ὑπῆρχε ἡ ἀριθμογραφία τῆς θέσεως.

Ἡ χρησιμοποίηση τοῦ μηδενός εἶναι μιά ἀπό τίς εὐφυέστερες ἐπινοήσεις τοῦ ἀνθρώπινου λογικοῦ, πού συνετέλεσε καί στήν προαγωγή τοῦ σύγχρονου πολιτισμοῦ.

ΠΩΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΜΕΛΕΤΑΣ

Ἡ κυριότερη ἀρχή γιά νά μελετήσεις μαθηματικά εἶναι:

Νά γνωρίζεις τόν τρόπο λύσεως ὁρισμένων εἰδῶν προβλημάτων.

Καί γιά νά λύσεις ἕνα πρόβλημα, ἀκολούθησε τήν παρακάτω πορεία:

Βῆμα 1ο: Διάβασε (διάβασε πολλές φορές ἄν εἶναι ἀπαραίτητο) τό πρόβλημα προσεχτικά γιά νά εἶσαι σέ θέση νά γνωρίζεις:

α. Τί πρόκειται νά βρεῖς

β. Τί στοιχεῖα σοῦ δίδονται

γ. Τί ἐπιπλέον στοιχεῖα, ἄν χρειάζονται, μπορεῖς νά χρησιμοποιήσεις.

Βῆμα 2ο. Κάνε ἕνα σχέδιο τοῦ προβλήματος, ἄν μπορεῖς. Γράψε στήν κατάταξη ὅλα ὅσα γνωρίζεις γύρω ἀπό τό πρόβλημα.

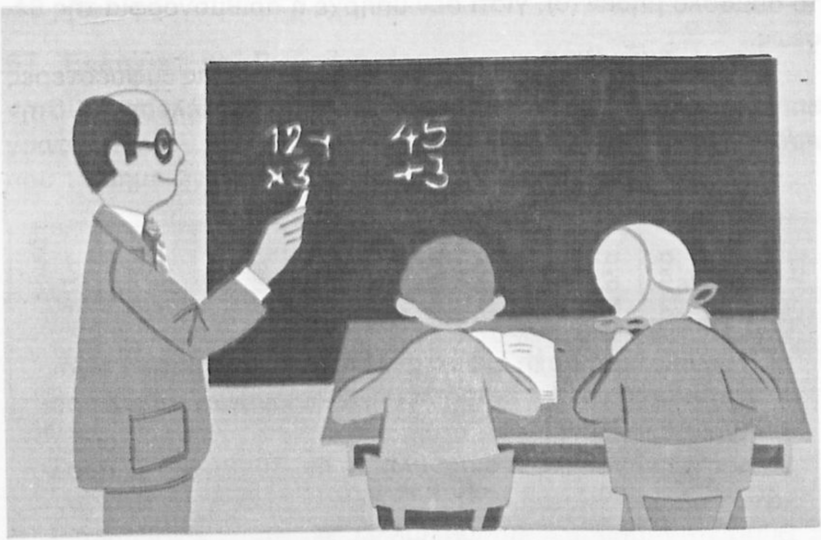
Βῆμα 3ο. Ἀποφάσισε ποιά πράξη ἤ συνδυασμό πράξεων πρέπει νά κάνεις, γιά νά βρεῖς τήν ἀπάντηση.

Βῆμα 4ο. Κάνε μέ μεγάλη προσοχή τίς ἀπαραίτητες πράξεις.

Βῆμα 5ο. Νά σκεφθεῖς, ἄν ἡ ἀπάντηση πού βρῆκες εἶναι ἱκανοποιητική καί κατόπιν νά κάνεις τόν ἔλεγχο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

Πρόσθεση
Ἀφαίρεση
Πολλαπλασιασμός
Διαίρεση



Εἰκ. 75

Οἱ 4 πράξεις μέ πολυψήφιους ἀριθμούς

68. Ἀριθμητικές πράξεις

Ὅπως καί μέ ὀλιγοψήφιους ἀριθμούς, ἔτσι καί μέ πολυψήφιους, ὅταν μᾶς δοθοῦν δύο ἤ περισσότεροι ἀριθμοί, μποροῦμε ἀπ' αὐτούς νά κατασκευάσουμε ἄλλους μέ τέσσερις τρόπους. Τούς τρόπους αὐτούς ὀνομάζουμε **ἀριθμητικές πράξεις.** Οἱ πράξεις αὐτές ἔχουν τά ὀνόματα: **Πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός** καί **διαίρεση.**

Αὐτές οἱ πράξεις μέ πολυψήφιους ἀριθμούς γίνονται, ὅπως καί μέ τούς ὀλιγοψήφιους. Ἐδῶ γιά νά τίς θυμηθεῖτε θ' ἀρχίσουμε πάλι ἀπό τήν πιό ἁπλή. Τήν πρόσθεση:

69. Πρόσθεση

Ὁ πρῶτος ὄροφος μιᾶς πολυκατοικίας δίνει ἐνοίκιο: 17.800 δραχμές. Ὁ δεύτερος 21.050, ὁ τρίτος 32.300 καί ὁ τέταρτος 38.850. Πόσο ἐνοίκιο δίνουν ὅλοι οἱ ὄροφοι μαζί;

Εἰκ. 76

ΓΙΑ ΝΑ ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ΤΑ ΟΝΟΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

Ὅροι

ἤ

προσθετέοι

ἄθροισμα →

Ὅπως καί στούς ὀλιγοψήφιους, ἔτσι κι ἐδῶ, πρέπει νά βροῦμε ἕναν ἀριθμό, πού νά ἔχει τόσες μονάδες, ὅσες ἔχουν ὅλοι μαζί οἱ ἀριθμοί: 17.800, 21.050, 32.300, 38.850. Ἡ πράξη πού κάνουμε στίς περιπτώσεις αὐτές εἶναι ἡ **πρόσθεση.**

Ἡ τεχνική τῆς προσθέσεως καί ἡ δοκιμή της εἶναι αὐτή, πού ἀναπτύχθηκε στό 2ο Κεφάλαιο.

Γράφετε, δηλαδή, τούς ἀριθμούς τόν ἕναν κάτω ἀπό τόν ἄλλον, ἔτσι ὥστε οἱ μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως νά βρεθοῦν στήν ἴδια στήλη.

Στήν ἐκτέλεση τῆς πράξεως πρέπει:

1. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων στή στήλη τῶν μονάδων.
2. Νά βρεῖτε πόσες μονάδες ἔχει καί πόσες δεκάδες αὐτό τό ἄθροισμα.
3. Νά γράψετε τίς μονάδες στή στήλη τους καί νά «κρατεῖστε» τίς δεκάδες.
4. Νά προσθέσετε τό κρατούμενο μαζί μέ τά ψηφία τῶν δεκάδων καί νά συνεχίσετε πρός τ' ἀριστερά μέ τόν ἴδιο τρόπο.
5. Νά κάνετε τή δοκιμή, ὅπως καί στούς ὀλιγοψήφιους.

70. Ὁριζόντια πρόσθεση

Στήν ὁριζόντια πρόσθεση ἐφαρμόζουμε τή μέθοδο τοῦ **πηδήματος** ἀπό τόν ἕναν ἀριθμό στόν ἄλλον. Κατά τήν ἐφαρμογή της τό μάτι πηδάει ἀπ' τόν ἕναν ἀριθμό στόν ἄλλον μέ κανονικό ρυθμό.

π.χ. $9 + 5 + 4 + 8 + 9 + 2 + 1 + 6 = 44$

71. Δοκιμή τῆς προσθέσεως

Ὅπως καί στούς ὀλιγοψήφιους ἀριθμούς, ἔτσι καί στούς πολυψήφιους, ἡ δοκιμή βασίζεται στήν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως. Δηλαδή ἀλλάζουμε τή σειρά τῶν προσθετέων καί τούς προσθέτουμε πάλι. Ἤ τούς προσθέτουμε ἀπό πάνω πρός τά κάτω καί μετά ἀπό τά κάτω πρός τά πάνω. Ἄν βροῦμε τό ἴδιο ἄθροισμα, λέμε πώς ἡ πράξη εἶναι σωστή, γιατί εἶναι ἀπίθανο νά ἔγιναν τά ἴδια λάθη.

Παράδειγμα.

20703		9		4586
4586	ἤ	241	ἤ	241
241		4586		9
9		20703		20703
25539		25539		25539

῾Ασκήσεις:

295. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα:

1462 μέτρα	13091	12372	89765
763 μέτρα	42603	67	8765
	241	5417	101
		9	18

296. Νά κάνετε τίς παρακάτω προσθέσεις «῾Οριζόντια» καί «Κάθετα» καί τίς δοκιμές τους.

23512 +	818	+	8 +	899	=	
208 +	7707	+	12509 +	7423	=	
250409 +	1011	+	3201 +	6512	=	
12 +	1002	+	812 +	303	=	

297. ᾿Αφοῦ βάλετε τόν ἕναν κάτω ἀπό τόν ἄλλον, νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα καί νά κάνετε τίς δοκιμές στίς παρακάτω περιπτώσεις:
1) 26893 + 72811 + 4509 + 603
2) 3781 + 16893 + 611 + 88
3) 45 + 62587 + 7098 + 512
4) 678506 + 87 + 809 + 506

298. ῾Ομαδοποιῆστε ἀνά δύο τούς παρακάτω ἀριθμούς:
1654, 231, 4137, 2985, ἔτσι ὥστε νά ἔχουμε:
1) Μιά πρόσθεση χωρίς κρατούμενα.
2) Μιά πρόσθεση μέ κρατούμενο πού νά μεταφέρεται στίς δεκάδες.
3) Μιά πρόσθεση μέ κρατούμενο πού νά μεταφέρεται στίς ἑκατοντάδες.
4) Μιά πρόσθεση μέ κρατούμενο πού νά μεταφέρεται στίς δεκάδες καί ἄλλο κρατούμενο πού νά μεταφέρεται στίς ἑκατοντάδες.

Προβλήματα προσθέσεως:

299. ᾿Από τήν 1 ᾿Ιανουαρίου τοῦ ἔτους 480 π.Χ. κατά τό ὁποῖο ἔγινε ἡ ναυμαχία τῆς Σαλαμίνας μέχρι 31 Δεκεμβρίου 1978 πόσα ἔτη ἔχουν περάσει;

300. Ένας ὀρειβάτης ὑπολογίζει πώς, ἄν ἀνεβεῖ 1468 μέτρα ἀκόμη, θά βρεθεῖ στήν κορυφή τοῦ Ὄλυμπου. Πόσο εἶναι τό ὕψος τοῦ Ὄλυμπου, ἄν ὁ ὀρειβάτης βρίσκεται σέ ὕψος 1450 μέτρων;

301. Μιά δεξαμενή περιέχει 132.500 κιλά νερό. Γιά νά γεμίσει χρειάζεται ἀκόμα 9999 κιλά νερό. Πόσο νερό χωράει ἡ δεξαμενή;

302. Οἱ Ὀλυμπιακοί ἀγῶνες ἄρχισαν τό 777 π.Χ. Πόσα χρόνια πέρασαν μέχρι τό 1978;

303. Ἡ μάχη τοῦ Μαραθώνα ἔγινε τό ἔτος 490 π.Χ. Πόσα χρόνια πέρασαν μέχρι τό 1978;

304. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπόρευμα ἀξίας 132.000 δραχμές. Πόσο πρέπει νά τό πουλήσει γιά νά κερδίσει 28.000 δρχ.;

305. Ἕνας ἔμπορος πούλησε μιά ἀνδρική ἐνδυμασία 5.212 δραχμές μέ ζημιά 712 δραχμές. Πόσο τοῦ κόστισε;

306. Στίς ἐκπτώσεις ἕνας ἔμπορος πούλησε ραπτομηχανή, ἀντί 8.050 δραχμές, μέ ζημία 1002 δραχμές. Πόσο τοῦ κόστισε;

307. Ἕνας ἔμπορος πούλησε τόν πρῶτο μήνα 7.963 κιλά ἐμπόρευμα καί πῆρε 270.742 δραχμές. Τό δεύτερο μήνα πούλησε 8.763 κιλά ἐμπόρευμα καί πῆρε 297.942 δραχμές καί τόν τρίτο μήνα πούλησε 12.356 κιλά ἐμπόρευμα καί πῆρε 420.104 δραχμές. Πόσα κιλά ἐμπόρευμα πούλησε καί πόσες δραχμές πῆρε;

308. Ἕνας φιλάνθρωπος διέθεσε ἕνα χρηματικό ποσό σέ τρεῖς φτωχές οἰκογένειες, μέ τήν ἐντολή: ἡ πρώτη νά πάρει 42.375 δραχμές, ἡ δεύτερη 13.500 δραχμές περισσότερες ἀπ' τήν πρώτη καί ἡ τρίτη 21.580 περισσότερες ἀπ' τή δεύτερη. Πόσα πῆρε ἡ δεύτερη καί πόσα ἡ τρίτη οἰκογένεια καί πόσα χρήματα διέθεσε ὁ φιλάνθρωπος;

309. Ὅταν γεννήθηκε ἕνα παιδί, ἡ μητέρα του ἦταν 22 χρόνων κι ὁ πατέρας του ἦταν 11 χρόνια μεγαλύτερος ἀπ' τή μητέρα του. Τώρα τό παιδί εἶναι 18 ἐτῶν. Πόσων χρόνων εἶναι ὁ πατέρας του καί πόσο ἡ μητέρα του;

310. Ὁ Πυθαγόρας γεννήθηκε 285 χρόνια πρίν τή γέννηση τοῦ Ἀρχιμήδη, πού αὐτός πέθανε τό ἔτος 212 π.Χ. σέ ἡλικία 75 χρόνων. Πόσα χρόνια πέρασαν μέχρι σήμερα ἀπ' τή γέννηση τοῦ Πυθαγόρα;

311. Ἕνα χρηματικό ποσό μοιράστηκε σέ τρία πρόσωπα. Τό πρῶτο ἔλαβε 65.090 δραχμές. Τό δεύτερο 28.700 δραχμές περισσότερες ἀπ' τό πρῶτο καί τό τρίτο 18.760 δραχμές περισσότερες ἀπ' τό δεύτερο. Πόσο ἦταν τό χρηματικό ποσό;

72. Ἀφαίρεση

Τήν 1η Ἰανουαρίου, μιά πόλη ἀριθμοῦσε 147.255 κατοίκους: Στό τέλος τοῦ ἔτους ὁ πληθυσμός ἀνέβηκε σέ 148.132 κατοίκους. Πόση εἶναι ἡ αὔξηση τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως;

Εἰκ. 77

ΓΙΑ ΝΑ ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ΤΑ ΟΝΟΜΑΤΑ ΤΟΥΣ		
Μειωτέος	⟶	148132
Ἀφαιρετέος	⟶	147255
Ὑπόλοιπο	⟶	877

Εἶναι φανερό πώς, ὅταν θέλουμε νά βροῦμε «πόσο **αὐξήθηκε**» κάνουμε ἀφαίρεση.

Ἡ τεχνική τῆς ἀφαιρέσεως καί ἡ δοκιμή της εἶναι αὐτή, πού ἀναπτύχθηκε στό 2ο κεφάλαιο.

Γράφετε, δηλαδή, τούς ἀριθμούς τό μικρότερο κάτω ἀπό τό μεγαλύτερο, ἔτσι ὥστε οἱ μονάδες νά βρίσκονται στήν πρώτη στήλη, οἱ δεκάδες στή δεύτερη, οἱ ἑκατοντάδες στήν τρίτη κτλ. γιατί ἔτσι θά βρεθοῦν οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοί στήν ἴδια στήλη, πού μποροῦμε νά τούς ἀφαιρέσουμε, ἐπειδή ἀλλιῶς δέν μποροῦμε νά κάνουμε ἀφαίρεση.

Στήν ἐκτέλεση τῆς ἀφαιρέσεως λέτε: 5 ἀπό 2 δέν ἀφαιρεῖται, 5 ἀπό 12, 7, γράφετε τόν 7 καί «κρατᾶτε» τόν 1.

Γιατί «κρατᾶτε» τόν 1;

Προσθέτετε, σέ συνέχεια, τό κρατούμενο στίς δεκάδες καί ἐπαναλαμβάνετε τά ἴδια καί γιά τίς ἄλλες στῆλες.

Τά ὑπόλοιπα πού βρίσκετε κάθε φορά ἀπό τίς συνεχόμενες ἀφαιρέσεις στίς στῆλες, εἶναι τά ψηφία τοῦ ὑπολοίπου τῶν δύο ἀριθμῶν. Στό παράδειγμα τό ὑπόλοιπο εἶναι: 877 κάτοικοι.

73. Δοκιμή τῆς ἀφαιρέσεως

1. Μπορεῖτε νά προσθέσετε τό ὑπόλοιπο μέ τόν ἀφαιρετέο, ὁπότε νά βρεῖτε τό μειωτέο.

ἀφαίρεση	δοκιμή
$\begin{array}{r} 2517 \\ -\ 631 \\ \hline 1886 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1886 \\ +\ 631 \\ \hline 2517 \end{array}$

2. Μπορεῖτε νά ἀφαιρέσετε τό ὑπόλοιπο ἀπ' τό μειωτέο, ὁπότε πρέπει νά βρεῖτε τόν ἀφαιρετέο.

Ἀφαίρεση	Δοκιμή
$\begin{array}{r} 8746 \\ -5412 \\ \hline 3334 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8746 \\ -3334 \\ \hline 5412 \end{array}$

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

312. Νά γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις στίς παρακάτω περιπτώσεις καί οἱ δοκιμές τους:

356300 − 184684   52574408 − 9730230

7831355 − 4338743   804375000 − 62700000

313. Νά συμπληρωθοῦν οἱ τελεῖες μέ ψηφία στίς παρακάτω περιπτώσεις:

6987	.....	.3.6	.230.
−	− 9845	− 2.9.	− 354.0
2576	18667	1564	1..50

314. Σέ μιά ἀφαίρεση ὁ μειωτέος εἶναι 5786 καί ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μέ τό ὑπόλοιπο. Ποιός ὁ ἀφαιρετέος καί ποιό τό ὑπόλοιπο;
315. Ἡ Ἑλληνική ἐπανάσταση ἔγινε τό 1821. Πόσα χρόνια πέρασαν ἀπό τότε;
316. Ἡ ἀνακάλυψη τῆς τυπογραφίας ἔγινε ἀπ' τό Γουτεμβέργιο τό 1436. Πόσα χρόνια πέρασαν ἀπό τότε;
317. Ποιός ἀριθμός ἄν προστεθεῖ στόν 78412, θά δώσει τόν 84509;
318. Ἕνας ἀγόρασε ἕνα αὐτοκίνητο 378.450 δραχμές καί σ' ἕνα χρόνο τό πούλησε 403.400. Πόσα κέρδισε;
319. Τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 12.518 καί ὁ ἕνας ἀπ' αὐτούς εἶναι ὁ 7.007. Ποιός εἶναι ὁ ἄλλος;
320. Τρία βαρέλια γεμάτα λάδι περιέχουν: τό α΄ 107 κιλά, τό δεύτερο 6 κιλά περισσότερο ἀπ' τό α' καί τό τρίτο 9 κιλά λιγότερο ἀπ' τό δεύτερο. Πόσα κιλά λάδι ἔχουν καί τά τρία βαρέλια;
321. Ὁ Κώστας θέλει ν' ἀγοράσει ἕνα ποδήλατο ἀξίας 2.850 δρχ. Μέσα στόν κουμπαρά του ἔχει 730 δραχμές. Πόσα πρέπει νά συμπληρώσει ὁ πατέρας του;
322. Μιά ὁμάδα τουριστῶν ἔκανε τίς διαδρομές της μ' αὐτοκίνητο. Τήν πρώτη μέρα διάνυσε 883 χιλιόμετρα, τή δεύτερη 429 χιλιόμετρα, τήν τρίτη 476 καί τήν τέταρτη 329 χιλ. Στό τέλος τῆς διαδρομῆς τό «κοντέρ» ἔδειχνε 29.187 χιλιόμετρα. Τί ἔδειχνε πρίν ξεκινήσουν καί τί στό τέλος κάθε ἡμερήσιας διαδρομῆς;
323. Τό ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 1.870. Δυό ἀπ' αὐτούς ἔχουν ἄθροισμα 1.585 κι ἕνας ἀπ' αὐτούς εἶναι ὁ 632. Νά βρεθοῦν οἱ τρεῖς ἀριθμοί.
324. Τό ἄθροισμα δύο ἀκέραιων ἀριθμῶν εἶναι 50 καί ἡ διαφορά τους 16. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως

325. Μιά δεξαμενή περιέχει 22.785 κιλά νερό. Ἀφαιροῦμε ἀρχικά 3.070 κιλά νερό, κατόπιν 6.060 κιλά νερό καί ὕστερα ἀνοίγουμε τήν κάνουλα ἀπ' τήν ὁποία χύθηκαν 9.090 κιλά νερό. Πόσα κιλά νερό περιέχει ἀκόμα ἡ δεξαμενή;
326. Σέ μιά οἰκογένεια ὁ πατέρας κερδίζει τό χρόνο 298.800 δραχμές, ἡ μητέρα κερδίζει 28.700 λιγότερα, καί τά δύο παιδιά κερδίζουν: ὁ μέν πρῶτος 32.550 λιγότερα ἀπ' τόν πατέρα κι ὁ ἄλλος 29.580 λιγότερα ἀπ' τή μητέρα. Πόσα εἰσπράττει ὅλη ἡ οἰκογένεια;

327. Δύο ἀδελφοί πῆραν ἀπ' τόν πατέρα τους 20.000 δραχμές μέ τήν ἐντολή ὁ μεγαλύτερος νά πάρει 4.000 δραχμές περισσότερες ἀπ' τό μικρότερο. Πόσες δραχμές θά πάρει ὁ καθένας;

328. Σ' ἕνα σχολεῖο φοιτοῦσαν 100 μαθητές, ἀγόρια καί κορίτσια καί νήπια. Τ' ἀγόρια καί τά νήπια ἦταν 70. Τά κορίτσια καί τά νήπια ἦταν 40. Πόσα ἦταν τ' ἀγόρια, πόσα τά κορίτσια καί πόσα τά νήπια;

329. Ἕνας βιβλιοπώλης ἀγόρασε βιβλία ἀξίας 5.875 δραχμές καί τετράδια ἀντί 2.850 δραχμές. Κατά τήν πώληση εἰσέπραξε καί ἀπ' τά δύο 10.500 δραχμές. Πόσα κέρδισε;

330. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε καφέ καί ζάχαρη καί πλήρωσε 16.800 δραχμές. Ἀπ' τόν καφέ εἰσέπραξε 12.850 δραχμές κι ἀπ' τή ζάχαρη 9.090 δραχμές. Κέρδισε ἤ ζημιώθηκε καί πόσα;

331. Οἱ περιουσίες δύο ἀδελφῶν διαφέρουν κατά 301.402 δρχ. Ἐάν ὁ πλουσιότερος ἔχει 903.508 δραχμές, ποιά εἶναι ἡ περιουσία τοῦ ἄλλου καί πόσο διαφέρει ἀπ' τήν περιουσία τῆς ἀδελφῆς του πού εἶναι 412.618 δραχμές;

332. Ὁ πληθυσμός τῶν Νομῶν τῆς Θεσσαλίας εἶναι 696.384 κατοίκους. Ἀπ' αὐτούς ὁ Νομός Μαγνησίας ἔχει 162.285 κατοίκους. Ὁ Νομός Τρικάλων 142.781 κατοίκους, καί ὁ Νομός Καρδίτσας 153.542 κατοίκους. Πόσους κατοίκους ἔχει ὁ Νομός Λαρίσης;

333. Δύο συνεταῖροι ζημιώθηκαν σέ μιά ἐπιχείρηση, ὁ Α΄ 583.000 δραχμές καί ὁ Β΄ 585.000 δραχμές. Ἔτσι τό κεφάλαιο πού ἔμεινε καί στούς δύο μαζί ἦταν 917.000 δραχμές. Ἄν τό ἀρχικό κεφάλαιο τοῦ Α΄ ἦταν 785.000, ποιό ἦταν τό κεφάλαιο τοῦ Β΄;

334. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπόρευμα ἀξίας 136.500 δραχμές. Πούλησε ἕνα μέρος ἀπ' αὐτό καί εἰσέπραξε 141.500 δραχμές, ἐνῶ ἡ ἀξία ἐκείνου πού ἔμεινε, ἦταν 33.500 δραχμές. Ζητεῖται τό κέρδος τοῦ ἐμπόρου.

335. Ποιόν ἀριθμό πρέπει νά προσθέσουμε στόν 7.408, γιά νά πάρουμε ἀριθμό πού ἀποτελεῖται ἀπό 8 ὀκτάρια;

336. Ποιόν ἀριθμό πρέπει ν' ἀφαιρέσετε ἀπό τόν 8.888, γιά νά πάρετε τόν 6.666;

337. Θέλει κάποιος ν' ἀγοράσει ἕνα ἀγροτικό αὐτοκίνητο ἀξίας 257.000 δρχ. Ἄν ὅμως εἶχε ἀκόμα 46.500 δραχμές θά τό ἀγόραζε καί θά τοῦ περίσσευαν καί 12.500. Πόσα χρήματα εἶχε;

338. Ἡ Μαρία σήμερα εἶναι 18 ἐτῶν καί ἡ μητέρα της 42 ἐτῶν. Ὅταν φθάσει στήν ἡλικία τῆς μητέρας της, πόσων ἐτῶν θά εἶναι ἐκείνη;

339. Δύο ἀδελφοί πρόκειται νά μοιραστοῦν μιά κληρονομιά 1.165.800 δραχμές. Σύμφωνα μέ τή διαθήκη ὁ μεγαλύτερος ἔπρεπε νά πάρει 252.400 δραχμές περισσότερες ἀπ' τό μικρότερο. Πόσα θά πάρει ὁ καθένας;

74. Καί μιά ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως

Ἀπό δύο ἀδέρφια ὁ Πέτρος εἶχε 7.000 δραχμές καί ὁ Κώστας 5.000 δραχμές:.

α) Πόσο διαφέρουν τά χρήματα τῶν δύο ἀδερφῶν.

β) Ἄν ὁ πατέρας τούς δώσει ἀπό δύο χιλιάδες στόν καθένα, πόσο θά διαφέρουν τά χρήματά τους;

γ) Ἄν πληρώσουν χρέος καί δώσουν ἀπό 3.000 δραχμές ὁ καθένας πόσο θά διαφέρουν τά χρήματά τους;

Ἀπαντώντας

α) θά διαφέρουν 7.000 − 5.000 = 2.000 δρχ.

β) θά διαφέρουν (7.000 + 2.000) − (5.000 + 2.000) = 2.000 δραχμές

γ) θά διαφέρουν (7.000 − 3.000) − (5.000 − 3.000) = 2.000 δραχμές.

Βλέπετε; ➧

> Ἄν στό μειωτέο καί τόν ἀφαιρετέο μιᾶς ἀφαιρέσεως προσθέσουμε ἤ ἀφαιρέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό, ἡ διαφορά δέν ἀλλάζει.

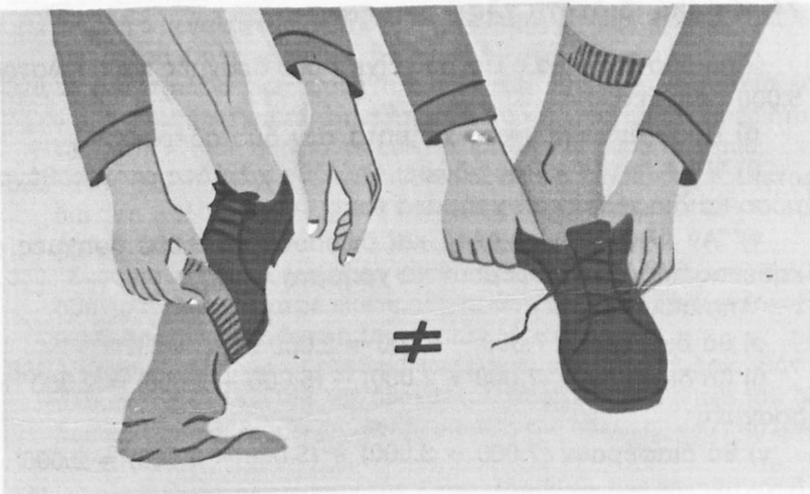
Στήν ἰδιότητα αὐτή βασίζεται καί ἡ πράξη τῆς ἀφαιρέσεως μέ κρατούμενα (Γιατί;).

75. Γιά νά θυμηθεῖτε τίς ἰδιότητες

Ποιόν ἀριθμό πρέπει νά τοποθετήσουμε, γιά νά συμπληρώσουμε τίς ἰσότητες; Καί ν' ἀναφέρετε τήν ἰδιότητα πού ἐφαρμόζετε:

1. 10 + 6 = 6 + ;	2. 134 + 17 = 17 + ;
3. (4 + 6) + 8 = 4 + (6 + ;)	4. (8 + 3) + 2 = 8 + (; + 2)
5. 3 + (2 + 1) = (3 + ;) + 1	6. 8 + (10 + 7) = (8 + 10) + ;
7. 5 + 0 = 0 + ;	8. (6 − 4) = (6 + 2) − (4 + ;)
9. 20 − 16 = (20 − 4) − (16 − ;)	10. (50 − ;) = (50 − 10) − (30 − 10)

11. Ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως στήν ἀφαίρεση;



Εἰκ. 78 Ἐδῶ δέν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.

76. Πολλαπλασιασμός

Πρόβλημα 1ο

Ἕνα ποδήλατο ἀξίζει 2.558 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τά 156 ὅμοια ποδήλατα;

Ἐδῶ γνωρίζουμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας καί θέλουμε νά βροῦμε τήν τιμή τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων. Θά κάνουμε πολλαπλασιασμό:

$$2558 \times 156$$

77. Ἡ τεχνική τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Παρατηροῦμε πώς:

1. Ὁ πολλαπλασιαστής 156 ἀναλύεται σέ 1 ἑκατοντάδα, 5 δεκάδες καί 6 μονάδες.
2. Ὅταν ὁ ἀριθμός 2558 πολλαπλασιάζεται μέ τό 6, τό γινόμενο: 15348 παρασταίνει μονάδες.
3. Ὅταν ὁ 2558 πολλαπλασιάζεται μέ τό 5, τό γινόμενο: 12790 παρασταίνει δεκάδες.

Ἐδῶ πρέπει νά προσέξουμε ποῦ θά τοποθετήσουμε τίς δεκάδες. Δηλαδή τό ψηφίο μηδέν τοῦ 12790 γράφεται στή στήλη τῶν δεκάδων.

4. Ὅταν ὁ 2558 πολλαπλασιάζεται μέ τόν 1 τό γινόμενο: 2558 παρασταίνει ἑκατοντάδες.

Ἐδῶ πρέπει νά προσέξουμε τήν τοποθέτηση τοῦ τελευταίου ψηφίου 8 τοῦ ἀριθμοῦ 2558 νά βρεθεῖ στή στήλη τῶν ἑκατοντάδων.

		2558
		156
6 ποδήλατα πρός 2558	⟶	15348
5 δεκάδες ποδ. πρός 2558	⟶	12790
1 ἑκατ. ποδήλ. πρός 2558	⟶	2558
Ἄθροισμα:	⟶	397048

78. Δοκιμή τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Ἕνα κατάστημα ἠλεκτρικῶν εἰδῶν πούλησε σ' ἕνα ἑξάμηνο 375 ἠλεκτρικές κουζίνες πρός 7465 δραχμές τή μία. Πόσα εἰσέπραξε;

Κι ἐδῶ γνωρίζουμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας καί ζητοῦμε τήν τιμή τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων. Θά κάνουμε πολλαπλασιασμό. Ἐκτέλεση τῆς πράξεως. Ἡ δοκιμή (ὅπως καί στό α΄ μέρος)

```
  7465                 375
× 375                 7465
 37325          ἤ   ________
52255                 1875
22395                2250
2799375             1500
                   2625
                  ___________
                   2799375
```

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πολλαπλασιασμοί καί νά γίνουν οἱ δοκιμές τους:

340.	233 × 124	356 × 245	892 × 423
341.	2526 × 336	3742 × 157	5112 × 433

342. Ποιά ἡ ἀξία 53 μέτρων ὕφασμα μέ 718 δραχμές τό μέτρο;

343. Ποιό εἶναι τό βάρος 53 σάκων ἐμπορεύματος μέ 125 κιλά βάρος κάθε σάκου;

344. Ποιά εἶναι ἡ ἀξία 236 λαμπατέρ πρός 618 δρχ. τό ἕνα;

Ὁμάδα Β΄

345. Ἕνας ἐργάτης παίρνει 22.500 δραχμές τό μήνα, πόσα παίρνει σέ ἕνα χρόνο;

346. Μιά ἀγελάδα κατεβάζει 23 κιλά γάλα τήν ἡμέρα. Πόσα κιλά γάλα κατεβάζει σέ ἕνα ἔτος τῶν 365 ἡμερῶν καί πόσο 18 ὅμοιες ἀγελάδες;

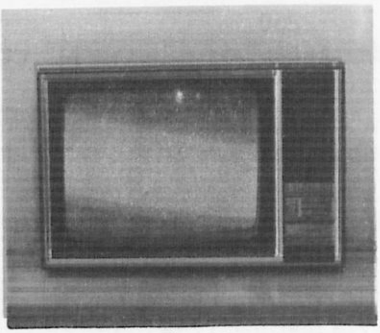
347. Ἕνας ἐργάτης παίρνει γιά ἐργασία μιᾶς ὥρας 135 δραχμές. Ἄν ἐργαστεῖ 8 ἑβδομάδες καί σέ κάθε ἑβδομάδα οἱ ἐργάσιμες ἡμέρες εἶναι 6, πόσα χρήματα θά πάρει ἄν σέ κάθε ἐργάσιμη ἡμέρα ἐργάζεται 7 ὧρες;

348. Γιά τόν πλουτισμό τῆς βιβλιοθήκης τοῦ σχολείου ἀγοράστηκαν 466 τόμοι βιβλίων. Ἀπό αὐτούς, 72 ἀγοράστηκαν πρός 268 δραχμές ὁ ἕνας, 57 πρός 265 δρχ. ὁ ἕνας, 78 πρός 428 δρχ. ὁ ἕνας καί οἱ ὑπόλοιποι πρός 312 δραχμές ὁ ἕνας. Πόσο στοίχισε ἡ ἀγορά τῶν βιβλίων;

349. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἀπό μιά φρουταγορά, μπανάνες πρός 77 δραχμές τό κιλό. Τήν ἑπόμενη ἑβδομάδα, τίς ἴδιες μπανάνες ἀγόρασε πρός 56 δραχμές τό κιλό. Ποιά ἡ διαφορά τιμῆς γιά μιά ἀγορά 185 κιλῶν; (Ὑπόδειξη: Μπορεῖτε νά χρησιμοποιήσετε δύο τρόπους, γιά νά βρεῖτε τήν ἀπάντηση).

Πρόβλημα 2ο

Νά ὑπολογίσετε τήν ἀξία 205 τηλεοράσεων πρός 11.575 δραχμές τή μία.



Εἰκ. 80

Ἀφοῦ γνωρίζετε τήν ἀξία τῆς μιᾶς τηλεοράσεως καί ζητᾶτε τήν ἀξία τῶν πολλῶν, θά κάνετε πολλαπλασιασμό:

$$11575 \times 205$$

Βλέπουμε πώς:

1. Ὁ πολλαπλασιαστής 205 ἀναλύεται σέ:
 5 μονάδες καί
 2 ἑκατοντάδες.
2. Ὅταν ὁ ἀριθμός 11.575 πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἀριθμό 5, πού παρασταίνει μονάδες, τό γινόμενο 57.875 παρασταίνει μονάδες.
3. Ὅταν ὁ ἀριθμός 11.575 πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἀριθμό 2, πού παρασταίνει ἑκατοντάδες, τό γινόμενο 23.150 παρασταίνει ἑκατοντάδες.
4. Προσέξτε τήν τοποθέτηση τοῦ ψηφίου 0, τοῦ ἀριθμοῦ 23.150. Γράφεται στή στήλη τῶν ἑκατοντάδων.

Πρακτικά γίνεται ἔτσι:

		11.575
		× 205
5 μονάδες τηλεοράσεων πρός 11.575	⟶	57.875
2 ἑκατοντάδες τηλεοράσεων, πρός 11.575	⟶	23150
ἀξία 205 τηλεοράσεων	⟶	2.372.875

Ἀσκήσεις:

Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα καί νά γίνουν οἱ δοκιμές τους:

350. 3789 × 105 , 2057 × 309 , 25372 × 206 , 8099 × 503

351. 2549 × 101 , 609 × 609 , 7808 × 108 , 6549 × 203

Προβλήματα:

352. Ποιά ἡ ἀξία 58 στυλό πρός 506 δραχμές τόν ἕνα;

353. Ποιό εἶναι τό βάρος 108 σάκων σταφίδας τῶν 50 κιλῶν;

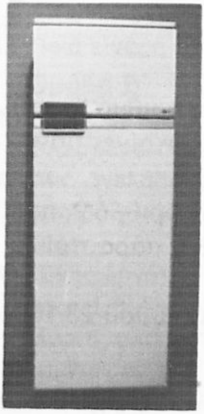
354. Νά συμπληρωθοῦν οἱ παρακάτω πολλαπλασιασμοί:

$$\begin{array}{r} .3.15 \\ \times\quad 8 \\ \hline 6.7320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4.3. \\ \times\quad 9 \\ \hline 40824 \end{array}$$

355. Ἐπαληθεῦστε τήν ἰσότητα τῶν 8 γινομένων, πού παίρνουμε ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τῶν ἀριθμῶν: μιᾶς σειρᾶς ἤ μιᾶς στήλης ἤ μιᾶς διαγωνίου.

32	64	2
1	16	256
128	4	8

79. Συντομεύσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ



Εἰκ. 81

Πόσο στοιχίζουν 72 ψυγεῖα πρός 8.000 δραχμές τό καθένα;

72 ψυγεῖα ἀξίζουν: 8.000 × 72 =
= 8 χιλιάδες × 72
= 576 χιλιάδες (γιατί;)
= 576.000 δρχ.

Πρόβλημα 3ο

Πόσο στοιχίζουν 700 ρολόγια πρός 800 δραχμές τό ἕνα:

Τό γινόμενο 800 × 700 = (8 ἑκατοντάδες) × 700
= 5.600 ἑκατοντάδες
= 560.000 δρχ.

Εἰκ. 82

Αὐτό μποροῦμε νά τό βροῦμε ἀμέσως, ἄν παραλείψουμε τά μηδενικά, πολλαπλασιάσουμε τούς ἀριθμούς πού απομένουν καί δεξιά τοῦ γινομένου γράψουμε τά μηδενικά.

Νά βρεῖτε τά γινόμενα:

1) 100 × 5 = (1 ἑκατ.) × 5 = 5 ἑκατοντάδες = 500 μονάδες.
2) 1000 × 25 = (1 χιλιάδα) × 25 = 25 χιλιάδες = 25.000 μονάδες.
3) 10.000 × 45 = (1 δεκάδα χιλιάδων) × 45 = 45 δεκάδες χιλιάδων = 45.000 μονάδες.

Βλέπετε;

> Ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν πολλαπλασιάζεται μέ τό 10, 100 ἤ 1.000 κ.τ.λ. ὅταν γραφτοῦν δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ, ὅσα μηδενικά ἀκολουθοῦν τή μονάδα.

'Ασκήσεις:

Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:

356. 444 × 100 = ; 8875 × 1000 = ;

357. 3000 × 5 = ; 4000 × 12 = ;

358. 5000 × 600 = ; 10000 × 10 = ;

359. 4 × 30000 = ; 90 × 6000 = ;

'Ασκήσεις καί προβλήματα ἐπί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Νά βρεθοῦν τά γινόμενα:

'Ομάδα Α'

360. 375 × 208 = ; 527 × 700 = ; 649 × 403 =

361. 4028 × 203 = ; 7800 × 600 = ; 3807 × 4050 = ;

362. Ποιό εἶναι τό βάρος 108 σάκων λιπάσματος τῶν 50 κιλῶν;

363. Πόση εἶναι ἡ ἀξία 65 φωτογραφικῶν μηχανῶν πρός 805 δρχ. ἡ κάθε μιά;

364. Ποιό εἶναι τό ἔσοδο σέ 300 ἡμέρες ἐργασίας ἑνός ἐργάτη μέ ἡμερομίσθιο 900 δραχμές;

365. Πόσο στοιχίζει μιά ἐγκυκλοπαίδεια 24 τόμων πρός 705 δραχμές τόν τόμο;

'Ομάδα Β'

366. Μιά μητέρα ἀγόρασε 3 λάμπες πρός 805 δραχμές τή μία. Πόσα ρέστα θά πάρει, ἄν δώσει 3 χιλιόδραχμα;

367. Μιά κοινότητα ἀγόρασε γιά τό σχολεῖο της 65 θρανία πρός 1.005 δραχμές τό ἕνα καί 3 πίνακες πρός 700 δραχμές τόν ἕναν. Ποιό εἶναι ὅλο τό ποσό πού ἔδωσε γιά τήν ἀγορά;

368. Ἕνα ἐργοστάσιο ἀποστέλλει 162 κιβώτια μέ ἐμπόρευμα. Κάθε ἄδειο κιβώτιο ζυγίζει 15 κιλά, καί χωράει 100 κιλά ἐμπόρευμα. Ποιό εἶναι τό ὑλικό βάρος τοῦ ἐμπορεύματος;

369. Σ' ἕνα χρόνο ἕνας ἐργάτης ἐργάστηκε τίς 105 ἡμέρες μέ ἡμερομίσθιο 608 δραχμές καί τίς ὑπόλοιπες 208 μέρες μέ ἡμερομίσθιο 1.000 δραχμές. Πόσα πῆρε ὅλα - ὅλα;

370. Γιά μιά σχολική παράσταση πουλήθηκαν 107 εἰσιτήρια τῶν 150 δραχμῶν τό καθένα, 105 εἰσιτήρια τῶν 200 δραχμῶν τό καθένα καί 102 εἰσιτήρια τῶν 300 δραχμῶν τό καθένα. Πόσα εἰσπράχθηκαν ὅλα - ὅλα;

371. Ἕνα λεωφορεῖο ἐξυπηρετεῖ μιά γραμμή μήκους 103 χιλιομέτρων. Ποιά ἀπόσταση διανύει, ὅταν κάνει 6 φορές τή διαδρομή τήν ἑβδομάδα; Καί πόση ἀπόσταση διανύει σέ 15 ἑβδομάδες;

80. Διαίρεση (Μέ διαιρέτη διψήφιο)

ΓΙΑ ΝΑ ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ΤΑ ΟΝΟΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

		Διαιρετέος
437	25	⟵ Διαιρέτης
25	17	⟵ Πηλίκο
187		
175		
12		⟵ Ὑπόλοιπο

Οἱ πιό ἁπλές περιπτώσεις διαιρέσεως

Διαίρεση μέ τό 10 ἤ 100 ἤ 1.000.

Πρόβλημα:

Νά μοιραστοῦν 375 δραχμές σέ 10 ἀνθρώπους.

Γιά νά βρῶ, πόσα θά πάρει καθένας, πρέπει νά βρῶ τό πηλίκο:

375 : 10

Ἀλλά 375 = 37 δεκάρικα + 5 δραχμές.

Εἶναι φανερό, πώς ἄν μοιράσω τά 37 δεκάρικα ἤ 370 δρχ. σέ 10 ἀνθρώπους ὁ καθένας θά πάρει 37 δραχμές. Δηλ. στή διαίρεση 375 : 10, τό πηλίκο εἶναι 37 καί τό ὑπόλοιπο 5.

Ὅμοια στή διαίρεση:

4785 : 100, τό πηλίκο εἶναι 47 καί τό ὑπόλοιπο 85.

Ἐπίσης στή διαίρεση 7854 : 1.000, τό πηλίκο εἶναι 7 καί τό ὑπόλοιπο 854.

Βλέπετε; ➧

Ὅταν ἔχετε νά διαιρέσετε ἕναν ἀριθμό μέ τό 10, 100, 1.000, χωρίζετε ἀπό τά δεξιά τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ διαιρέτης. Ὁ ἀριθμός πού ἀποτελοῦν τά ψηφία, πού μένουν, εἶναι τό πηλίκο, κι ὁ ἀριθμός πού ἀποτελοῦν τά ψηφία, πού χωρίζετε εἶναι τό ὑπόλοιπο.

'Ασκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

372. Ποιό μῆκος εἶναι 10, 100, 1.000 φορές μικρότερο ἀπ' τό χιλιόμετρο;
373. 12.859 δραχμές πόσα δεκάρικα εἶναι, πόσα ἑκατοστάρικα καί πόσα χιλιάρικα;
374. 1.000 ἄτομα παρακολούθησαν μιά θεατρική παράσταση. Ἄν ἡ ἐπιχείρηση πῆρε 225.000, πόσο στοίχιζε τό κάθε εἰσιτήριο;
375. Νά συμπληρωθεῖ ὁ πίνακας:

'Αριθμοί	διά 10		διά 100		διά 1.000	
	πηλίκο	ὑπόλοιπο	πηλίκο	ὑπόλοιπο	πηλίκο	ὑπόλοιπο
561379	56137	9	5613	79	561	379
87456						
103107						
457686						

81. Ὅταν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης τελειώνουν σέ μηδενικά.

Πρόβλημα 1ο:

30 σχολικές σάκες στοιχίζουν 12.000 δραχμές. Πόσο στοιχίζει μία σάκα;

'Απάντηση:

Ἡ κάθε σάκα στοιχίζει 12.000 : 30.

Παρατηροῦμε, πώς 10 φορές λιγότερες σάκες, δηλαδή 3 σάκες, πρέπει νά στοιχίζουν 10 φορές λιγότερες δραχμές. Δηλαδή 1.200 δρχ.

Δηλ.: 3 σάκες στοιχίζουν 1.200 δραχμές
ἤ 1 σάκα στοιχίζει 1.200 : 3 = 400 δραχμές.

Πρόβλημα 2ο

300 σχολικές σάκες στοιχίζουν 120.000 δραχμές. Πόσο στοιχίζει ἡ μία σάκα;

Ἀπάντηση:

Ἡ μία σάκα στοιχίζει 120.000 : 300

Παρατηροῦμε πώς 100 φορές λιγότερες σάκες (δηλαδή 3 σάκες), πρέπει νά στοιχίζουν καί 100 φορές λιγότερες δραχμές. Δηλαδή 1.200 δρχ.

Δηλ.: 3 σάκες στοιχίζουν 1.200 δραχμές

ή 1 σάκα στοιχίζει 1.200 : 3 = 400 δραχμές.

Βλέπετε;

> Ὅταν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης τελειώνουν σέ μηδενικά, μποροῦμε νά διαγράφουμε τόν ἴδιο ἀριθμό μηδενικῶν κι ἀπ' τούς δύο, χωρίς τό πηλίκο, (πού θά βροῦμε) νά μεταβληθεῖ.

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

376. Πόσα μηδενικά μποροῦμε νά παραλείψουμε κι ἀπ' τό διαιρετέο κι ἀπ' τό διαιρέτη στίς παρακάτω διαιρέσεις;
420 : 60, 2.500 : 50, 28.000 : 7.000, 36.000 : 4.000

377. Ἕνας μαθητής ἔγραψε 800 λέξεις σέ 40 λεπτά τῆς ὥρας. Πόσες λέξεις ἔγραψε σέ ἕνα λεπτό;

378. Μιά ὥρα διαιρεῖται σέ 60 πρῶτα λεπτά. Πόσες ὧρες εἶναι 1.800 λεπτά;

Β΄ Γραπτά

389. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:
960 : 40, 3.900 : 300, 75.000 μ : 5.000,
51.000 δρχ. : 3.000, 84.000 γραμμάρια : 70.

380. Σέ 15 σελίδες ἑνός βιβλίου ὑπάρχουν 8.400 λέξεις. Ἐάν εἶναι γνωστό πώς κάθε σελίδα ἔχει 40 σειρές, πόσες λέξεις ὑπάρχουν σέ κάθε σειρά;

381. Ἀτμόπλοιο τρέχει 10 μίλια τήν ὥρα. Πόσες ὧρες θά κάνει ἀπ' τόν Πειραιά ὥς τό Βόλο, πού ἀπέχει 190 μίλια; Κι ἄν ἀναχωρήσει στίς 9 τό πρωί, ποιά ὥρα θά φθάσει στό Βόλο;

382. Ἕνας ἀγόρασε μιά ἠλεκτρική κουζίνα μέ 16.200 δραχμές, καί θά τήν πληρώσει ὕστερα ἀπό 90 μέρες. Πόσα πρέπει νά ἀποταμιεύει τή μέρα;

82. Διαίρεση δύο όποιωνδήποτε ἀριθμῶν.

Εἰκ. 83

Ἕνας ἔμπορος γυαλικῶν ἀγόρασε 67 ζυγαριές κουζίνας καί ἔδωσε 17.755 δρχ. Πόσο τοῦ στοίχισε κάθε ζυγαριά;

Γιά νά βροῦμε, πόσο τοῦ στοίχισε κάθε ζυγαριά, πρέπει νά ὑπολογίσουμε τό πηλίκο:

$$17.755 : 67$$

Γιά νά βροῦμε τό πρῶτο ψηφίο τοῦ πηλίκου, ἀποχωρίζουμε ἀπό τό διαιρετέο τόσα ψηφία ἀπ' τ' ἀριστερά, ὥστε νά βρίσκουμε ἀριθμό, πού ἄν διαιρεθεῖ μέ τό διαιρέτη νά δίνει μονοψήφιο πηλίκο.

Στό παράδειγμα ἀποχωρίζουμε τό 177 καί μοιράζοντάς το σέ 67 ἴσα μέρη βρίσκουμε πηλίκο 2 (γιατί 2 × 67 = 134, ἐνῶ 3 × 67 = 201) καί ὑπόλοιπο 43 ἑκατοντάδες.

Μένει λοιπόν νά μοιράσουμε 4.355 δραχμές, σέ 67 ἴσα μέρη.

Χωρίζουμε πάλι τίς 435 δεκάδες καί διαιροῦμε μέ τό 67. Ἔχουμε πηλίκο 6 δεκάδες καί ὑπόλοιπο 33 δεκάδες, πού μαζί μέ τίς 5 μονάδες κάνουν 335 μονάδες, πού θά μοιραστοῦν πάλι σέ 67 ἴσα μέρη.

Διαίρεση		Δοκιμή
17755	67	265
134	265	× 67
4355		1855
402		1590
335		17755
335		
000		

Τό πηλίκο τοῦ 335 διά τοῦ 67 εἶναι 5 (4 × 67 = 268, ἀλλά 5 × 67 = 335 καί τό ὑπόλοιπο 0).

Βλέπετε;

> Κάθε διαίρεση πού ἔχει πηλίκο πολυψήφιο, χωρίζεται σέ δύο ἤ πολλές διαδοχικές διαιρέσεις μέ πηλίκα μονοψήφια.

Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό, πῶς ἡ ἐκτέλεση μιᾶς διαιρέσεως ἀνάγεται στή διαδοχική ἐκτέλεση διαιρέσεων μέ μονοψήφιο πηλίκο.

Στό παραπάνω παράδειγμα: 17.755 : 67

Διαίρεση 1η

177 ἑκατ.	67
134	2 ἑκατ.
43 ἑκατ.	

Διαίρεση 2η

435 δεκ.	67
402	6 δεκ.
33 δεκ.	

Διαίρεση 3η

335 μον.	67
335	5 μον.
0 μονάδες	

Δηλαδή τό τελικό ὑπόλοιπο εἶναι μηδέν (τελεία διαίρεση) καί τό τελικό πηλίκο = 2 ἑκατ. + 6 δεκάδες + 5 μονάδες = **265 δρχ.** καί γιά συντομία σημειώνουμε τή διαίρεση ὅπως παραπάνω.

Δοκιμή: $\boxed{\text{(Διαιρέτης)} \times \text{(Πηλίκο)} + \text{Ὑπόλοιπο} = \text{Διαιρετέος.}}$

Ἐδῶ 265 × 67 = 17.755

Ἀσκήσεις:

Νά κάνετε τίς παρακάτω διαιρέσεις καί τίς δοκιμές τους.

383. 10089 : 19   1989 : 17   8464 : 92
384. 1225 : 35   9477 : 243   623946 : 57
385. 725730 : 34 =   379512 : 54 =   284875 : 85 =
386. Νά βρεῖτε τό διαιρετέο στίς παρακάτω διαιρέσεις:

...	47	...	85	...	92
21	89		703	23	47

387. Νά συμπληρώσετε τίς παρακάτω πράξεις:
... × 37 = 13875,   ... × 85 = 31790, ... × 39 = 13767.
388. 85 ὅμοια ἀντικείμενα ἀξίζουν 7.225 δραχμές. Πόσο ἀξίζει τό ἕνα;
389. Τό γινόμενο δύο ἀριθμῶν εἶναι 99.102 καί ὁ ἕνας ἀπ' αὐτούς εἶναι ὁ 1.194. Ποιός εἶναι ὁ ἄλλος;

Προβλήματα:

390. Μέ ἕνα σύνολο 1.296 μολυβιῶν, πόσα κουτιά τῶν 36 μολυβιῶν μποροῦμε νά γεμίσουμε;
391. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 17 δίσκους μέ 2.975 δραχμές. Πόσο τοῦ

στοιχίζει κάθε δίσκος; Γιά νά κερδίσει 45 δραχμές ἀπό κάθε δίσκο, πόσα πρέπει νά εἰσπράξει ἀπό τήν πώληση;

392. Σέ 30 ἡμέρες 25 ἀγελάδες καταναλώνουν 7.500 κιλά χόρτο. Πόσο χόρτο καταναλώνει κάθε ἀγελάδα τήν ἡμέρα;

393. Δύο οἰκογένειες κληρονόμησαν ἀπό ἕνα συγγενή τους 2.350.000 δραχμές μέ τήν ἐντολή τοῦ διαθέτη: ἡ μία οἰκογένεια νά πάρει τριπλάσια τῆς ἄλλης. Πόσα πῆρε ἡ κάθε μιά;

394. Ἀγόρασε κάποιος πρόβατα κι ἀρνιά μέ 262.500 δραχμές. Ἀγόρασε τά πρόβατα πρός 12.500 δραχμές τό ἕνα καί τ' ἀρνιά πρός 13.750 δραχμές τό ἕνα. Ὅσα ὅμως ἦταν τά πρόβατα, τόσα ἦταν καί τ' ἀρνιά. Πόσα ἀγόρασε ἀπό κάθε εἶδος;

395. Σ' ἕνα σχολικό χρόνο, μοιράσθηκαν ἀπό τήν Κυβέρνηση, σέ 547.650 μαθητές τῶν ἀνώτερων τάξεων στά Δημοτικά σχολεῖα 4.928.850 βοηθητικά βιβλία δωρεάν. Πόσα βοηθητικά βιβλία πῆρε ὁ κάθε μαθητής;

83. Συντομίες στή διαίρεση

Σέ μερικά προβλήματα διαιρέσεως δέν ὑπάρχει ὑπόλοιπο Π.χ. τό 25 εἶναι δυνατό νά διαιρεθεῖ μέ τό 5, χωρίς ν' ἀφήνει ὑπόλοιπο, ἀλλά τό 25 δέν διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 2.

Ὅταν γνωρίζετε ἄν ἕνας ἀριθμός εἶναι δυνατό νά διαιρεῖται μέ τό 2, 3, 5, 9, τότε συντομεύετε τήν ἐργασία σας.

Προβλήματα:

Διαιρώντας βρεῖτε.

1ο). Ποιοί ἀπό τούς ἀριθμούς, πού εἶναι γραμμένοι παρακάτω, διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τόν 2;

26, 854, 723, 15, 92, 1108, 500, 77, 101, 4089.

Κοιτάξτε τό τελευταῖο ψηφίο τῶν ἀριθμῶν καί φτιάξτε ἕναν κανόνα.

Βλέπετε;

Οἱ ἀριθμοί πού τελειώνουν σέ 0, 2, 4, 6 καί 8, δηλαδή οἱ ἄρτιοι εἶναι αὐτοί πού διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό 2.

2ο). Διαιρώντας βρεῖτε, ποιοί ἀπ' τούς ἀριθμούς, πού εἶναι γραμμένοι παρακάτω, διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό 5;

32, 105, 96, 84, 250, 3615, 61, 119, 8845, 27.

Κοιτάξτε τό τελευταῖο ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ καί φτιάξτε ἕναν κανόνα, πού νά λέτε, πότε ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 5.

Βλέπετε; ➧

> Οἱ ἀριθμοί πού τελειώνουν στό 0 ἤ 5 διαιροῦνται μέ τό 5 ἀκριβῶς.

3ο) Διαιρώντας βρεῖτε, ποιοί ἀπ' τούς ἀριθμούς: 1500, 36, 8217, 7840, 53, 100 διαιροῦνται μέ τό 3 ἤ 9. Ἐλέγξτε τόν κανόνα πού φτιάξατε.

Βλέπετε; ➧

> Ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται μέ τό 3 ἤ τό 9 ὅταν τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του σχηματίζει ἀριθμό πού νά διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 3 ἤ τό 9.

Ἀσκήσεις:

396. Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων στόν ἀριθμό 4.611. Εἶναι τό ἄθροισμα διαιρετό μέ τό 3; Εἶναι ὁ ἀριθμός 4.611 διαιρετός μέ τό 3;

397. Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων στόν ἀριθμό 20.614. Εἶναι τό ἄθροισμα διαιρετό μέ τό 3; Εἶναι ὁ ἀριθμός διαιρετός μέ τό 3;

398. Εἶναι ὁ ἀριθμός 46.575 διαιρετός μέ τό 3 ἤ μέ τό 9; Γιατί;

399. Ποιοί ἀπ' τούς ἀριθμούς:
 408, 426, 792, 800, 900, 702, 4.050, 1505, 1.135
 εἶναι διαιρετοί μέ τό 2, ποιοί μέ τό 3, ποιοί μέ τό 5 καί ποιοί μέ τό 9;

84. Διαίρεση μετρήσεως καί διαίρεση μερισμοῦ

Ὅσα εἴπαμε στό α΄ μέρος γιά τά εἴδη διαιρέσεως, μετρήσεως καί μερισμοῦ, τά ἴδια ἐφαρμόζονται καί σέ πολυψήφιους ἀριθμούς.

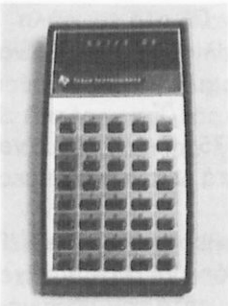
Προβλήματα:

Νά χαρακτηρίσετε, ἄν εἶναι διαίρεση μετρήσεως ἤ διαίρεση μερισμοῦ στά παρακάτω προβλήματα καί ἀφοῦ λυθοῦν νά κάνετε τίς δοκιμές τους.

400. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 78 μέτρα ὕφασμα μέ 8.814 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τό μέτρο τοῦ ὑφάσματος;

401. Ένα οικόπεδο πουλήθηκε πρός 10.500 δρχ. τό τ.μ. (τετραγωνικό μέτρο) ἀντί 8.463.000 δραχμές. Πόσα τετραγωνικά μέτρα ἦταν τό οἰκόπεδο;
402. Ένα ραδιόφωνο ἀγοράστηκε 18900 δραχμές, καί θά ἐξοφληθεῖ σέ 18 μηνιαῖες δόσεις. Πόσες δραχμές εἶναι ἡ κάθε δόση;
403. Ένας αὐτοκινητιστής συμφώνησε νά μεταφέρει ἀπ' τή Νάουσα στήν Ἀθήνα 4.386 κιβώτια μῆλα. Πόσους δρόμους θά κάνει, ἄν σέ κάθε δρόμο μεταφέρει 258 κιβώτια;
404. Ένας ὑπάλληλος παίρνει μισθό γιά ἕνα χρόνο 151.475 δραχμές. Πόσες δραχμές παίρνει τή μέρα; (1 χρόνος = 365 μέρες).
405. Ένας γεωργός ἔσπειρε 138 στρέμματα σιτάρι καί πῆρε 30.774 κιλά. Πόσα κιλά σιτάρι πῆρε ἀπό κάθε στρέμμα;

85. Πῶς θά λύσετε ἕνα πρόβλημα



Εἰκ. 84

Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 400 ἀριθμομηχανές πρός 350 δραχμές τή μία. Πούλησε 280 καί πῆρε τά χρήματα, πού ἔδωσε ν' ἀγοράσει τίς 400 ἀριθμομηχανές καί 14.000 δραχμές ἀκόμα. Πόσο πούλησε τή μία ἀριθμομηχανή;

Γιά νά λύσετε τό πρόβλημα αὐτό πρέπει ν' ἀπαντήσετε στίς ἐρωτήσεις:

1. Τί σᾶς ζητᾶ νά προσδιορίσετε τό πρόβλημα;
2. Πόσα χρήματα πλήρωσε ὁ ἔμπορος;
3. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε ἀπό τήν πώληση;
4. Τί πρέπει νά κάνετε, γιά νά φθάσετε στή σωστή ἀπάντηση;

2. Πόσα χρήματα πλήρωσε γιά τήν ἀγορά τῶν ἀριθμομηχανῶν; Πλήρωσε γιά τήν ἀγορά 140.000 δρχ.	350 ×400 140.000
3. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε ἀπό τήν πώληση τῶν 280 ἀριθμομηχανῶν:	140.000 +14.000 154.000

4. Πόσο πούλησε κάθε ἀριθμομηχανή. Κάθε ἀριθμομηχανή τήν πούλησε 550 δραχμές.	154.000 140 000	280 550
Ἀπάντηση: Τήν κάθε ἀριθμομηχανή τήν πούλησε 550 δραχμές		

Σύνθετα προβλήματα τῶν τεσσάρων πράξεων:

406. Τά 58 κιλά τυρί ἀξίζουν 11310 δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τά 23 κιλά;
407. Ἔμπορος πούλησε 63 μ. ὑφάσματος ἀντί 6.489 δραχμές. Ἀπ' τήν πώληση κέρδισε 1.575 δραχμές. Πόσο εἶχε ἀγοράσει τό μέτρο;
408. Ἡ ἀπόσταση Γῆς - Ἥλιου εἶναι 150.000.000 χιλιόμετρα. Τό φῶς διανύει 300.000 χιλιόμετρα στό δευτερόλεπτο. Πόσα δευτερόλεπτα χρειάζεται τό φῶς νά φθάσει ἀπ' τόν Ἥλιο στήν Γῆ;
409. Ἡ Γῆ, κατά τήν περιφορά της γύρω ἀπό τόν Ἥλιο, διανύει σ' ἕνα μήνα (30 ἡμέρες) 75.168.720 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα διανύει τήν κάθε μέρα;
410. Ἡ ἀπόσταση τῆς Σελήνης ἀπ' τή Γῆ εἶναι 378.675 χιλιόμετρα. Ἕνα διαστημόπλοιο, πού διατρέχει 420.750 μέτρα στό λεπτό, σέ πόσες ὧρες θά φθάσει ἀπό τή Γῆ στή Σελήνη;
411. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος, πού κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα διέτρεξε σέ 35 δευτερόλεπτα 42.375 μέτρα περισσότερα, ἀπ' ὅσα εἶχε διατρέξει σέ 20 δευτερόλεπτα. Ποιά εἶναι ἡ ταχύτητά του σέ χιλιόμετρα ἀνά ὥρα;
412. Μιά μοδίστρα εἰσπράττει 3800, δραχμές τή μέρα καί ξοδεύει 2500 δραχμές. Μετά πόσο χρόνο θά ἐξοικονομήσει 45.500 δραχμές, γιά ν' ἀγοράσει μιά ραπτομηχανή;
413. Ἔμπορος ἀγόρασε 235 μέτρα ὑφάσματος, ἀντί 17.625 δρχ. Πόσο πρέπει νά πουλήσει ὅλο τό ὕφασμα, γιά νά κερδίσει 18 δραχμές τό μέτρο;
414. Γεωργός ὀφείλει στήν Ἀγροτική Τράπεζα 155.675 δραχμές. Πούλησε 275 κιλά λάδι πρός 85 δραχμές τό κιλό καί μέ τά χρήματα πού πῆρε ἐξόφλησε ἕνα μέρος τοῦ χρέους. Συμφώνησε τά ὑπόλοιπα νά τά πληρώσει σέ 18 μηνιαῖες δόσεις. Πόσες δραχμές εἶναι κάθε δόση;
415. Ἔμπορος ἀγόρασε ὕφασμα μέ 625 δραχμές τά 5 μέτρα καί τό πούλησε μέ 1.885 δραχμές τά 13 μέτρα. Ἀπ' τήν πώληση κέρδισε 1.100 δραχμές. Πόσα μέτρα ἀγόρασε;
416. Ἔμπορος ἀγόρασε τυρί πρός 160 δραχμές τό κιλό καί τό πούλησε

πρός 195 δραχμές τό κιλό. Ἀπ' τήν πώληση κέρδισε 1400 δραχμές. Πόσα κιλά τυρί ἀγόρασε;

417. Δύο ἄνθρωποι ἀγόρασαν μαζί 76 κιλά λάδι πρός 160 δραχμές τό κιλό. Ἀλλά ὁ ἕνας πλήρωσε 640 δραχμές παραπάνω ἀπ' τόν ἄλλο. Πόσα κιλά πῆρε ὁ καθένας καί πόσα χρήματα ἔδωσε;

418. Γεωργός πούλησε 637 κιλά σιτάρι μέ 5.096 δραχμές. Κατόπιν ἀγόρασε κριθάρι μέ 4.550 δραχμές. Ἄν τό κιλό τοῦ κριθαριοῦ ἦταν κατά μιά δραχμή φτηνότερο, πόσα κιλά κριθάρι ἀγόρασε;

419. Μιά νοικοκυρά ἀγόρασε πιάτα καί πλήρωσε 732 δραχμές. Ἄν ἀγόραζε ὅμως 4 πιάτα ἀκόμα, θά πλήρωνε 976 δραχμές. Πόσα πιάτα ἀγόρασε;

420. Ἕνας ἀγόρασε ποτήρια νεροῦ καί πλήρωσε 576 δραχμές. Ἄν ἀγόραζε 8 λιγότερα θά πλήρωνε 288 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τό κάθε ποτήρι καί πόσα ποτήρια ἀγόρασε;

421. Μιά νοικοκυρά ἀγόρασε 24 πιάτα φαγητοῦ καί 18 πιάτα φρούτου καί πλήρωσε ὅλα ὅλα 2.454 δραχμές. Κάθε πιάτο φαγητοῦ ἦταν ἀκριβότερο ἀπό κάθε πιάτο φρούτου κατά 6 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τό κάθε πιάτο τοῦ φαγητοῦ καί πόσο τοῦ φρούτου;

422. Πατέρας καί γιός παίρνουν μαζί ἡμερομίσθιο 1.525 δραχμές. Ἄν γιά τόν ἴδιο ἀριθμό ἡμερομισθίων πάρουν ὁ μέν πατέρας 10.200 δραχμές, ὁ δέ γιός 8.100 δραχμές, ποιό εἶναι τό ἡμερομίσθιο τοῦ καθενός;

423. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἕνα τόπι ὕφασμα καί πλήρωσε 33.750 δραχμές. Ὅταν τό πούλησε πῆρε 37.500 δραχμές καί κέρδισε 75 δραχμές τό μέτρο. Πόσα μέτρα ἦταν ὅλο τό ὕφασμα;

424. Σέ 34 οἰκογένειες μοιράστηκε μιά οἰκοπεδική ἔκταση σέ ἴσα οἰκόπεδα καί οἱ 23 οἰκογένειες πῆραν 5.750 τετραγωνικά μέτρα. Πόσα τετραγωνικά μέτρα ἦταν ἡ ἔκταση;

425. Γιά τήν ἐργασία 10 ἡμερῶν, 12 ἐργάτες καί 15 ἐργάτριες πῆραν 239.250 δραχμές. Ἄν κάθε ἐργάτης παίρνει τήν ἡμέρα 160 δραχμές περισσότερο ἀπό κάθε ἐργάτρια, ποιό τό ἡμερομίσθιο καθενός;

426. Τό εἰσιτήριο τοῦ τρένου Λαμία - Ἀθήνα εἶναι 317 δραχμές τῆς α΄ θέσεως καί 195 τῆς β΄ θέσεως. Ἄν 160 ἐπιβάτες πλήρωσαν 36.690 δραχμές, πόσοι ἐπιβάτες ἦσαν στήν α΄ θέση καί πόσοι στή β΄;

427. Ὑπάλληλος ὑπολογίζει πώς, ἄν ξοδεύει τό μήνα 26.200 δραχμές, θά ἔχει ἔλλειμμα 6.200 δραχμές τό μήνα. Πόσες δραχμές πρέπει νά ξοδεύει τό μήνα, γιά νά τοῦ περισσεύουν 5.300 δραχμές;

428. Ἕνα πλοῖο μέ ταχύτητα 16 μιλίων τήν ὥρα διέτρεξε τήν ἀπόσταση ἀνάμεσα σέ δύο λιμάνια σέ 14 ὧρες. Μέ ποιά ταχύτητα ἔπρεπε νά κινηθεῖ, γιά νά φθάσει 6 ὧρες νωρίτερα;

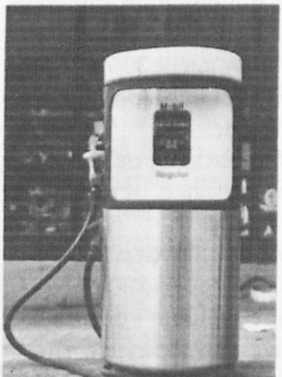
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Έννοια
Γραφή - Ἀνάγνωση
Κάθετες εὐθεῖες
Παράλληλες εὐθεῖες
Ταινία

Δεκαδικοί ἀριθμοί

86. Ρόλος τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Ὅταν θέλετε νά ἀγοράσετε ἕνα ἀντικείμενο, τότε ἡ ἀξία του πιθανόν νά ἐκφράζεται μέ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό δραχμῶν. Πολύ συχνά ὅμως δέ συμβαίνει αὐτό. Ἔτσι ἕνα λίτρο π.χ. βενζίνη, ἀξίζει περισσότερες ἀπό 21 δραχμές καί λιγότερες ἀπό 22.



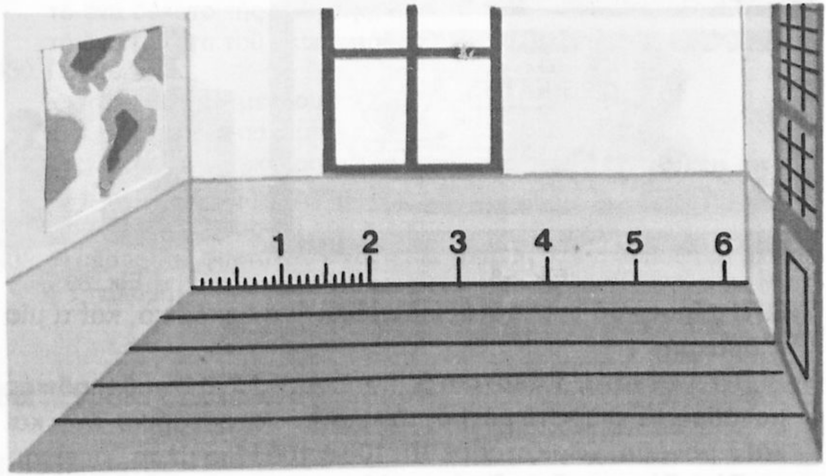
Εἰκ. 85

Αὐτή τήν ἀνάγκη καλύπτει ἕνα νέο εἶδος ἀριθμῶν πού ὀνομάζονται **δεκαδικοί ἀριθμοί.** Γιά τό λόγο αὐτό ἡ μονάδα νομισμάτων (ἡ δραχμή) χωρίζεται σέ 10 ἴσα μέρη, πού λέγονται δεκάρες. Ἔτσι ἡ τιμή τοῦ λίτρου τῆς βενζίνης ἄν εἶναι 21 δραχμές καί 6 δεκάρες, θά γράφεται: 21,6 καί θά διαβάζεται 21 καί 6 δέκατα δραχμές.

Ὅμοια πολλά μεγέθη ὅταν μετρηθοῦν, τά μέτρα τους ἐκφράζονται μέ δεκαδικούς ἀριθμούς, ὅπως μήκη, βάρη κ τ. λ.

Τό χαρακτηριστικό αὐτῶν τῶν μεγεθῶν εἶναι πώς δέ σχηματίζονται ἀπό ξεχωρισμένα μέρη. Π.χ. τό μῆκος τῆς αἴθουσας διδασκαλίας εἶναι:

6 μέτρα καί 28 ἑκατοστά, ἤ σέ δεκαδική γραφή: 6,28 μ. πού διαβάζεται 6 καί 28 ἑκατοστά τοῦ μέτρου.

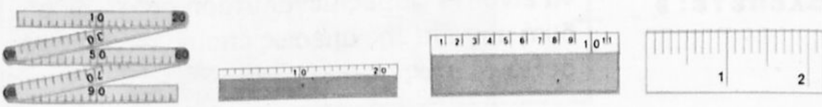


Εἰκ. 86

Οἱ μονάδες ἀπ' τίς ὁποῖες γίνονται οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί λέγονται: **δεκαδικές μονάδες.**

Βλέπετε; ➧ Δεκαδικοί εἶναι ἕνα νέο εἶδος ἀριθμῶν, ὄχι ἀκέραιων, πού ἀνάμεσα στά ψηφία τους ὑπάρχει ἕνα «κόμμα».

87. Ἔννοια τῆς δεκαδικῆς μονάδας

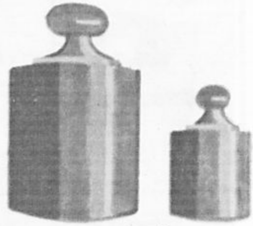


Μέτρο Παλάμη Ἑκατοστόμετρο Χιλιοστό

Εἰκ. 87

1. Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι μία παλάμη, τί ἕνας δάκτυλος καί τί μία γραμμή;
2. Τί μέρος τοῦ κιλοῦ εἶναι ἕνα γραμμάριο;

Εἰκ. 88



Εἰκ. 89

3. Τί μέρος τοῦ ἑκατοστάρικου εἶναι ἕνα δεκάρικο, καί τί μία δραχμή;

Τό **1 δέκατο, 1 ἑκατοστό, 1 χιλιοστό** λέγονται **δεκαδικές** μονάδες. Κι ὅπως τό μέτρο, τό κιλό, τό κατοστάρικο, ἔτσι καί κάθε μονάδα, χωρίζεται σέ 10, 100 ἤ 1000 ἴσα μέρη, κι εἶναι:

Τό 1 δέκατο: δεκαδική μονάδα πρώτης τάξεως

Τό 1 ἑκατοστό: δεκαδική μονάδα δεύτερης τάξεως

Τό 1 χιλιοστό: δεκαδική μονάδα τρίτης τάξεως

Παρατηροῦμε ἀκόμα πώς:

1 μονάδα = 10 δέκατα
1 δέκατο = 10 ἑκατοστά
1 ἑκατοστό = 10 χιλιοστά

Βλέπετε;

Οἱ δεκαδικές μονάδες εἶναι ταξινομημένες ἔτσι, ὥστε ἡ δεκαδική μονάδα μιᾶς τάξεως νά εἶναι 10 φορές μεγαλύτερη ἀπ' τή δεκαδική μονάδα τῆς ἀμέσως ἑπομένης πρός τά δεξιά τάξεως.

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

429. Ποιό εἶναι:
τό ἕνα δέκατο τοῦ δεκάρικου;
τό ἕνα δέκατο τοῦ εἰκοσάδραχμου;

τό ἕνα δέκατο τῆς δραχμῆς;
τό ἕνα δέκατο τοῦ ἑκατοντάδραχμου;

430. Ποιό εἶναι:
τό 1 δέκατο τοῦ μέτρου;
τό 1 δέκατο τῆς παλάμης;
τό 1 δέκατο τοῦ ἑκατοστοῦ τοῦ μέτρου;
τό 1 χιλιοστό τοῦ μέτρου;

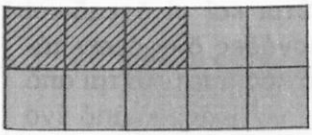
431. Ποιό εἶναι τό χιλιοστό τοῦ κιλοῦ;

432. Τί μέρος τοῦ δακτύλου εἶναι ἡ μιά γραμμή, καί τί μέρος τοῦ μέτρου ἡ 1 παλάμη;

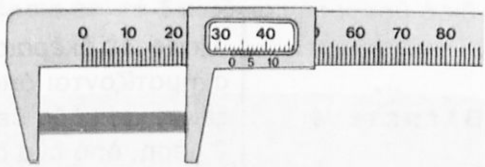
88. Ἔννοια δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ

Προβλήματα:

1. Ἀπό πόσες δεκαδικές μονάδες ἀποτελεῖται τό γραμμοσκιασμένο μέρος;

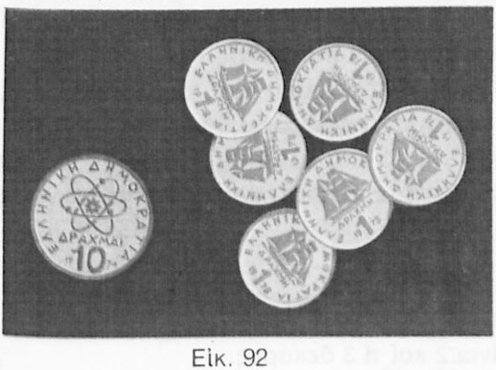


Εἰκ. 90

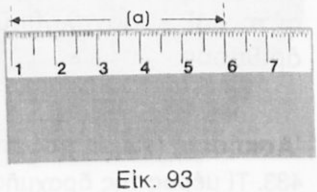


Εἰκ. 91

2. Ἀπό πόσα χιλιοστά ἀποτελεῖται τό μῆκος τοῦ ἐλάσματος πού βρίσκεται ἀνάμεσα στούς δύο βραχίονες τοῦ «βερνιέρου»;
3. Τί μέρος τοῦ δεκάρικου εἶναι οἱ ἕξι δραχμές;



Εἰκ. 92



Εἰκ. 93

4. Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι τό μῆκος τοῦ τμήματος (α);

Οἱ ἀριθμοί: 3 δέκατα
23 χιλιοστά τοῦ μέτρου
6 δέκατα τοῦ δεκάρικου
6 ἑκατοστά τοῦ μέτρου

λέγονται **δεκαδικοί ἀριθμοί.**

Κι ὅπως οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί γίνονται ἀπό τήν ἐπανάληψη τῆς ἀκέραιας μονάδας, ἔτσι καί οἱ δεκαδικοί γίνονται ἀπό τήν ἐπανάληψη τῆς δεκαδικῆς μονάδας. Π.χ. ὁ 3 δέκατα, γίνεται ἀπό τήν ἐπανάληψη τῆς δεκαδικῆς μονάδας 1 δέκατο 3 φορές.

Κι ὁ ἀριθμός 23 χιλιοστά ἀπό τήν ἐπανάληψη τοῦ 1 χιλιοστοῦ 23 φορές. Ἀκόμα παρατηροῦμε πώς, ὁ ἀριθμός 23 χιλιοστά τοῦ μέτρου, ἀποτελεῖται ἀπό 2 ἑκατοστά καί 3 χιλιοστά.

Ὅμοια ὁ ἀριθμός: 5,234 χιλιοστά ἀποτελεῖται ἀπό:

5 ἀκέραιο, 2 δέκατα, 3 ἑκατοστά καί 4 χιλιοστά.

Βλέπετε; ➧

Ὅπως οἱ ἀκέραιοι, ἔτσι καί οἱ δεκαδικοί σχηματίζονται ἀπό μονάδες διαφόρων τάξεων, καί κάθε δεκαδικός ἀποτελεῖται ἀπό 2 μέρη, ἀπό ἕνα ἀκέραιο μέρος κι ἀπό ἕνα δεκαδικό μέρος, ποί χωρίζονται μέ ἕνα κόμμα.

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί πού γράψαμε ὥς τώρα, ἀκολουθοῦνται κι ἀπό ἕνα ὄνομα. Δηλαδή εἶναι συγκεκριμένοι.

Ὅποια ὅμως καί ἄν εἶναι ἡ ὀνομασία τους, οἱ ἀριθμητικές τους ἰδιότητες πού θ' ἀναφέρουμε παρακάτω, εἶναι πάντα ἴδιες. Μποροῦμε λοιπόν γιά συντομία νά παραλείπουμε τήν ὀνομασία αὐτή καί ν' ἀσχοληθοῦμε μέ τούς ἀντίστοιχους ἀφηρημένους ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

433. Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι 2 καί τί 3 δεκάρες;

434. Τί μέρος τοῦ δεκάρικου εἶναι 6, 7 ἤ 8 δραχμές;
435. Τί μέρος τοῦ κατοστάρικου εἶναι 3, τί 8 καί τί 12 δραχμές;

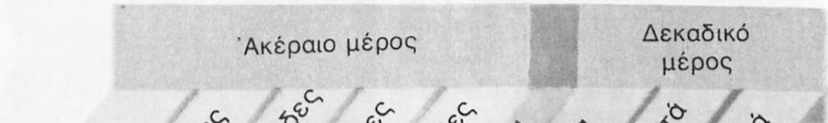
89. Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί

Ὅπως στούς ἀκέραιους ἔτσι καί στούς δεκαδικούς ἀριθμούς ἡ θέση τοῦ ψηφίου καθορίζει καί τήν ἀξία του.

Δηλαδή: κάθε ψηφίο πού εἶναι ἀριστερά ἄλλου ψηφίου παρασταίνει μονάδες 10 φορές μεγαλύτερες ἀπ' ἐκεῖνο. Κατά συνέπεια κάθε ψηφίο, πού εἶναι γραμμένο στά δεξιά ἄλλου ψηφίου παρασταίνει μονάδες 10 φορές μικρότερες ἀπ' ἐκεῖνο.

Ὁ παρακάτω πίνακας μᾶς διευκολύνει, ὥστε νά τοποθετήσουμε κάθε ψηφίο στή σωστή του θέση, ἀνάλογα μέ τίς μονάδες πού παρασταίνει.

Τό μηδέν συμπληρώνει τήν τάξη, πού δέν ἔχει μονάδες, καί τό κόμμα (,) χωρίζει τό **ἀκέραιο** ἀπ' τό **δεκαδικό** μέρος τοῦ ἀριθμοῦ.



Εἰκ. 94

Παραδείγματα:

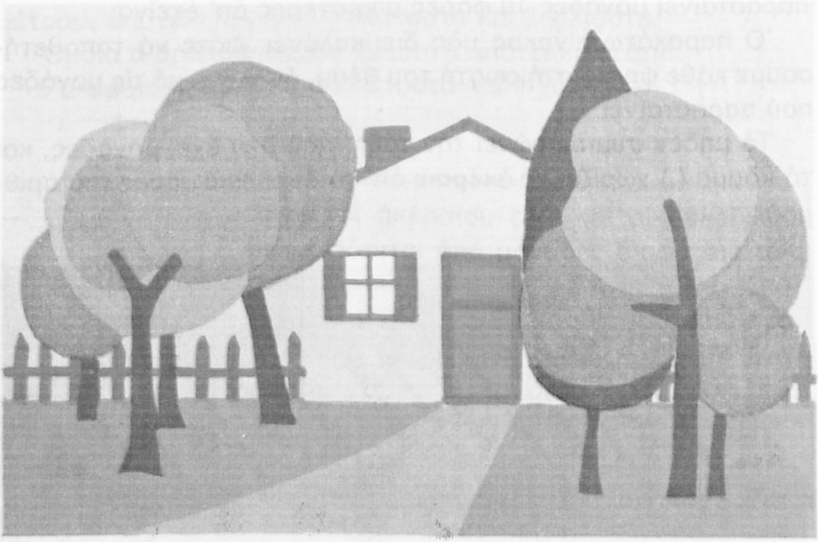
1. Τό πλάτος τοῦ μαυροπίνακα εἶναι 2 μέτρα, 8 παλάμες, 4 δάκτυλοι, 3 γραμμές.

Αὐτό γράφεται 2, 843 μέτρα. Ἤ πιό ἁπλά: 2,847 μ.

Ἐπίσης τό ἴδιο σέ παλάμες γράφεται: 28,43 παλάμες. Ἤ πιό ἁπλά 28,43 π.

Ὅμοια τό ἴδιο γράφεται σέ δάκτυλους: 284,3 δάκτυλοι. Ἤ πιό ἁπλά: 284,3 δ.

Ἤ ἀκόμα τό ἴδιο γράφεται: 2.843 γραμμές.



Εἰκ. 95

2. Ἡ ἀπόσταση δύο δένδρων τοῦ κήπου μας εἶναι: 22 μέτρα, 2 παλάμες, 2 δάκτυλοι.

Αὐτό γράφεται: σέ μέτρα 22,22 μ.

– Σέ παλάμες: 222,2 π.

– Σέ γραμμές: 2222 γ.

3. Τό πάχος μιᾶς διπλωμένης ἐφημερίδας εἶναι: 3 χιλιοστά τοῦ μέτρου. Αὐτό γράφεται: 0,003 μ.

Βλέπετε; ➧

> Βάζουμε τό κόμμα γιά νά δηλώσουμε, πώς: ή πρώτη θέση ἀριστερά ἀπ' τό κόμμα σημαίνει μονάδες, πού χρησιμοποιοῦμε γιά τή μέτρηση, κι ή πρώτη ἀπ' τά δεξιά ἀπ' τό κόμμα θέση, σημαίνει δέκατα τῆς μονάδας αὐτῆς.

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί πού ἔχουν σάν ἀκέραιο μέρος τό μηδέν, ὅπως:

0,3, 0,075, 0,5 λέγονται **γνήσιοι** δεκαδικοί ἀριθμοί.

Ἐνῶ οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί:

3,5, 27,8, 6,075 πού τό ἀκέραιο μέρος τους δέν εἶναι μηδέν λέγονται **μικτοί** δεκαδικοί ἀριθμοί.

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

436. Ποιό μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράφεται ἀριστερά καί ποιό δεξιά ἀπ' τό κόμμα;
437. Ποιές δεκαδικές μονάδες γράφονται στήν πρώτη θέση μετά τό κόμμα, ποιές στή δεύτερη καί ποιές στήν τρίτη;
438. Σέ ποιά θέση γράφονται τά ἑκατοστά καί σέ ποιά τά χιλιοστά;
439. Ποιές δεκαδικές μονάδες γράφονται στήν τρίτη θέση μετά τό κόμμα;
440. Νά γραφεῖ ἡ ἀξία θέσεως τοῦ ψηφίου 2 στούς ἀριθμούς:

432,678 .... 3267,563 ....
726,345 .... 15,342 ....
896,250 .... 0,020 ....

441. Νά γραφοῦν οἱ ἀριθμοί:
 1) ἕνα δέκατο
 2) τέσσερα δέκατα
 3) ἑξήντα πέντε ἑκατοστά
 4) ὀκτακόσια τριάντα δύο χιλιοστά
 5) ἕξι χιλιοστά

6) 12 χιλιοστά
7) 7 καί 3 ἑκατοστά
8) 23 καί 5 χιλιοστά

442. Νά γραφοῦν οἱ ἀριθμοί:
4 δεκάδες, 7 μονάδες, 6 δέκατα, 5 χιλιοστά
2 μονάδες, 3 ἑκατοστά, 4 χιλιοστά
7 δέκατα, 8 χιλιοστά

90. Πῶς διαβάζεται ἕνας δεκαδικός ἀριθμός

1. Διαβάζουμε χωριστά τό ἀκέραιο μέρος καί λέμε τή λέξη κόμμα. Ἔπειτα διαβάζουμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ ἀριθμοῦ σάν νά ἦταν κι αὐτό ἀκέραιος, καί λέμε τό ὄνομα τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

π.χ.: Ὁ ἀριθμός: 7,055 διαβάζεται: ἑπτά κόμμα καί 55 χιλιοστά. Ὅμοια ὁ ἀριθμός: 2,84 διαβάζεται: δύο κόμμα καί 84 ἑκατοστά. Ἤ ὀρθότερα: δύο ἀκέραιος καί 84 ἑκατοστά.

2. Διαβάζουμε πρῶτα τό ἀκέραιο μέρος καί μετά τά δεκαδικά ψηφία καί καθένα μέ τ' ὄνομά του.

π.χ.: Ὁ 4,756 διαβάζεται 4 ἀκέραιος καί 7 δέκατα, 5 ἑκατοστά, καί 6 χιλιοστά.

3. Διαβάζουμε τόν ἀριθμό σάν νά ἦταν ἀκέραιος μέ τό ὄνομα τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

π.χ.: Ὁ ἀριθμός 7,32 διαβάζεται: 732 ἑκατοστά καί ὁ ἀριθμός 54,2 διαβάζεται: 542 δέκατα.

Βλέπετε;

Γιά νά διαβάσουμε ἕνα δεκαδικό ἀριθμό διαβάζουμε:
- Πρῶτα τό ἀκέραιο μέρος καί μετά ὅλο τό δεκαδικό μαζί μέ τ' ὄνομα τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου, ἤ
- Ὅλα μαζί, σάν ἀκέραιο, μέ τ' ὄνομα τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου ἤ
- Πρῶτα τόν ἀκέραιο καί μετά κάθε δεκαδικό ψηφίο μέ τ' ὄνομά του.

Ἀσκήσεις (χωρίς χαρτί καί μολύβι)

443. Νά διαβάσετε μέ τόν πρῶτο τρόπο τούς δεκαδικούς ἀριθμούς:
0,61 11,04 7,35 23,008
0,005 0,44 222,22 3,036.
444. Νά διαβάσετε μέ τό δεύτερο τρόπο τούς παρακάτω δεκαδικούς ἀριθμούς:
6,32 8,12 5,07 2,009 4,09.
445. Νά διαβάσετε μέ τόν τρίτο τρόπο τούς δεκαδικούς ἀριθμούς:
0,415 1,589 3,007 8,80 7,090

91. Ὁ ρόλος τοῦ μηδενός στούς δεκαδικούς ἀριθμούς

Προβλήματα:

446. Ἕνας μαθητής ἔγραψε τόν ἀριθμό 25 χιλιοστά, ἔτσι: 0,25. Πῶς ἔπρεπε νά τόν γράψει;
Γιατί πρέπει νά βάλουμε τό μηδέν ἀνάμεσα στό κόμμα καί τό 2;
447. Τί σημαίνει τό μηδέν στόν ἀριθμό: 47,308;
Γιατί δέν παραλείπεται;
448. Ἔχει ὁ ἀριθμός: 0,25 τήν ἴδια ἀξία μέ τόν ἀριθμό 0,025; Ἀφοῦ τό μηδέν σημαίνει **«τίποτε»**, γιατί τό γράφουμε;
449. Χρειάζονται τά μηδενικά στόν ἀριθμό: 0,700, καθώς καί στόν ἀριθμό: 0,007;
Ἐξηγῆστε, γιατί πρέπει νά γράφουμε τά μηδενικά στή δεύτερη περίπτωση, ἐνῶ στήν πρώτη μποροῦμε νά τά παραλείψουμε;
450. Ποιά μηδενικά εἶναι ἀπαραίτητα στόν ἀριθμό: 9,030 καί γιατί;

Βλέπετε;

1. Ὅπως στούς ἀκέραιους ἔτσι καί στούς δεκαδικούς, τό ψηφίο **μηδέν** μπαίνει γιά νά δηλώσει τήν ἀπουσία μονάδων μιᾶς ὁρισμένης τάξεως.
2. Ἄν στά δεξιά ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράψουμε ἕνα ἤ περισσότερα μηδενικά, ἡ ἀξία (τό μέγεθος) τοῦ ἀριθμοῦ δέν ἀλλάζει.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, κάθε ἀκέραιο ἀριθμό μποροῦμε νά τόν γράφουμε μέ δεκαδική μορφή. Ἀρκεῖ δεξιά τοῦ ἀριθμοῦ νά γράφουμε ἕνα κόμμα καί δεξιά ἀπό τό κόμμα ἕνα ἤ περισσότερα μηδενικά.

π.χ.: 12 = 12,0 = 12,00 = 12,000.

92. Σύγκριση τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Ποιός ἀπ' τούς δεκαδικούς: 31,45 καί 31,457 εἶναι μεγαλύτερος;

Ὅπως παρατηρήσαμε παραπάνω, ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δέ μεταβάλλεται, ἄν στά δεξιά του γράψουμε μηδενικά.

Αὐτό μᾶς ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα πώς μποροῦμε πάντοτε νά παρουσιάσουμε δύο δεκαδικούς ἀριθμούς μέ τό ἴδιο πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων.

Ἡ σύγκριση στή συνέχεια τῶν δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἀνάγεται στή σύγκριση ἀκέραιων ἄν παραλείψουμε τό κόμμα.

Στό παράδειγμά μας παρατηροῦμε:

$$31{,}450 \text{ καί } 31{,}457$$

ἤ

$$31450 < 31457$$

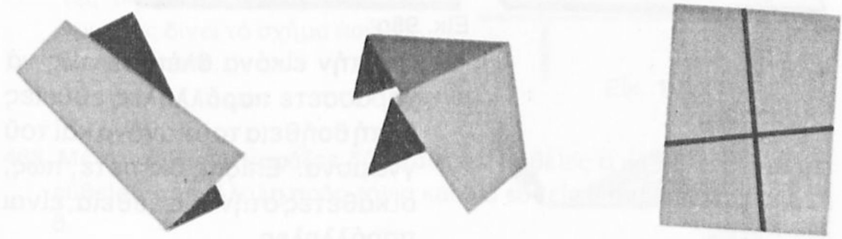
Ἀσκήσεις:

451. Στούς παρακάτω ἀριθμούς καταργῆστε τά μηδενικά πού δέν εἶναι ἀπαραίτητα, χωρίς ν' ἀλλάζει ἡ ἀξία τοῦ ἀριθμοῦ:
 1,500 χιλιόμετρα, 3,020 κιλά, 16,40 μέτρα, 28,040 μέτρα.
452. Ποιό ποσό εἶναι μικρότερο: 7 δέκατα ἤ 800 χιλιοστά;
453. Ποιό ποσό εἶναι μεγαλύτερο: 5 δέκατα τοῦ κιλοῦ ἤ 400 χιλιοστά;
454. 60 ἑκατοστά τοῦ κιλοῦ μέ πόσα χιλιοστά ἀντιστοιχοῦν;
 (Ὑπόδειξη: 0,60 = 0,600. Γιατί;)
455. Τά 8 δέκατα τοῦ μέτρου μέ πόσα χιλιοστά ἀντιστοιχοῦν;
456. Τά 700 χιλιοστά τοῦ κιλοῦ πόσα ἑκατοστά καί πόσα δέκατα εἶναι;
457. Τά 8 δέκατα τοῦ κιλοῦ πόσα χιλιοστά εἶναι;
458. Νά συγκρίνετε τά 3 δέκατα, τά 30 ἑκατοστά, τά 300 χιλιοστά.
459. Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι τά 500 χιλιοστά;
460. Νά συγκρίνετε τά 0,5 τοῦ μέτρου μέ τά 0,30 τοῦ μέτρου.

92. Κάθετες εὐθεῖες, παράλληλες εὐθεῖες - ταινία

Μέ τή βοήθεια ἑνός φύλλου τοῦ τετραδίου μας μέ διπλώσεις.

1. Διπλώνουμε ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου μας.
2. Ξαναδιπλώνουμε αὐτό τό φύλλο ἔτσι, πού νά συμπέσει ἐπάνω στόν ἑαυτό του τό πρῶτο τσάκισμα, ὅπως φαίνεται στό σχέδιο.

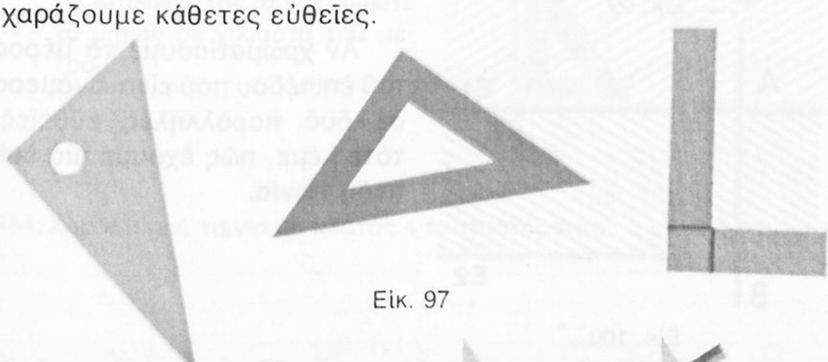


Εἰκ. 96

Οἱ εὐθεῖες γραμμές πού θά φανοῦν στά τσακίσματα εἶναι κάθετες εὐθεῖες.

Λέμε ἀκόμα πώς οἱ εὐθεῖες αὐτές σχηματίζουν ὀρθές γωνίες.

Στό σχέδιο εἰκονίζεται ὁ **γνώμονας** πού μέ τή βοήθειά του χαράζουμε κάθετες εὐθεῖες.

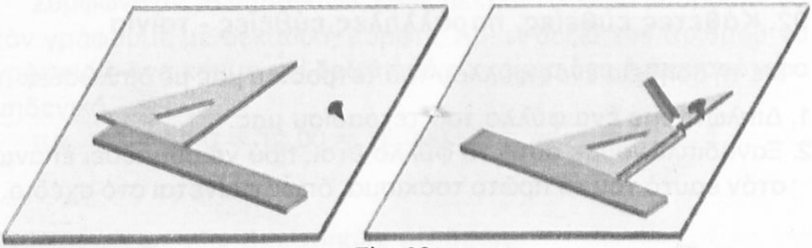


Εἰκ. 97

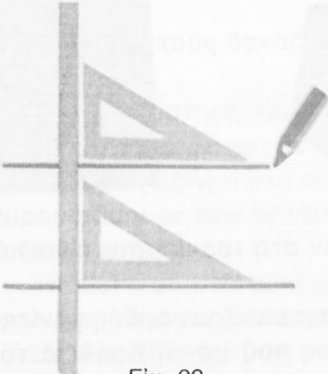
Στό σχέδιο εἰκονίζεται ὁ τρόπος πού μποροῦμε νά χαράζουμε μιά εὐθεία κάθετη σέ μιά ἄλλη, μέ τό **γνώμονα.**

Εἰκ. 98

Παρακάτω εἰκονίζεται ὁ τρόπος πού χαράσσεται μιά εὐθεία κάθετη σέ μιά ἄλλη, **ὅταν περνᾶ ἀπό ὁρισμένο σημεῖο.**

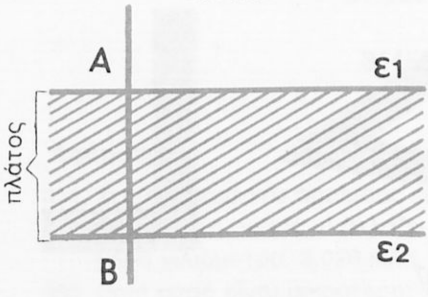


Εἰκ. 98α



Εἰκ. 99

Στήν εἰκόνα βλέπετε πῶς νά χαράσσετε **παράλληλες** εὐθεῖες μέ τή βοήθεια τοῦ κανόνα καί τοῦ γνώμονα. Ἐπίσης βλέπετε, πώς, οἱ κάθετες στήν ἴδια εὐθεία, εἶναι παράλληλες.



Εἰκ. 100

Ἄν χρωματίσουμε τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου πού εἶναι ἀνάμεσα σέ δυό παράλληλες εὐθεῖες, τότε λέμε, πώς ἔχουμε μιά **ἐπίπεδη ταινία.**

Τό τμῆμα ΑΒ τῆς κοινῆς καθέτου τῶν δύο παραλλήλων ε1 καί ε2 ὀνομάζεται πλάτος τῆς ταινίας.

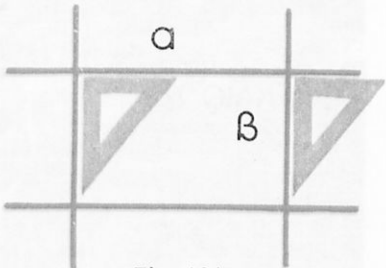
Τήν ταινία τή βλέπουμε:

Σ' ἕνα ὁλόκληρο φύλλο τετραδίου, στά εἰσιτήρια τῶν λεωφορείων, στά χαρτονομίσματα, στίς διάφορες κορδέλες κ τ λ., ἄν ὅλα αὐτά τά τοποθετήσουμε πάνω στό τραπέζι ἤ στό θρανίο.

Ἄν κόψουμε ἕνα φύλλο τετραδίου σέ ταινίες, κατά μῆκος τῶν γειτονικῶν γραμμῶν του, θά πάρουμε ταινίες τοῦ ἰδίου πλάτους.

᾿Ασκήσεις:

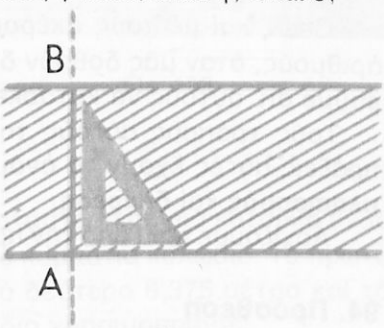
461. Νά χαράξετε δύο εὐθεῖες α καί β κάθετες μεταξύ τους. Μετά νά χαράξετε μιά εὐθεία κάθετη στήν α καί μιά εὐθεία κάθετη στή β. Τί μποροῦμε νά ποῦμε γιά αὐτές τίς νέες εὐθεῖες; Ποιά ἔννοια σᾶς δίνει τό σχῆμα πού κατασκευάσατε;



Εἰκ. 101

462. Μέ τό γνώμονα χαράξτε δύο κάθετες εὐθεῖες α καί β. Χαράξτε μιά εὐθεία γ παράλληλη πρός τήν α καί μιά εὐθεία δ παράλληλη πρός τή β.
Τί μποροῦμε νά ποῦμε γιά τίς εὐθεῖες γ καί β, δ καί γ, α καί δ;

463. Χαράξτε μιά ταινία. Μετά χαράξτε μιά κάθετη **στίς ἀκμές** τῆς ταινίας.
Τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ ορίζει τό πλάτος τῆς ταινίας, δῶστε τό μῆκος σέ χιλιοστά τοῦ μέτρου.



Εἰκ. 102

464. Χαράξτε μιά ταινία μέ πλάτος 4 ἑκατοστόμετρα.

ΟΤΑΝ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ

1. Μή σταματᾶτε. Συνεχίστε τή μελέτη σας ἔστω καί μέ ἀργό ρυθμό.
2. Βεβαιωθεῖτε ὅτι ἀντιληφθήκατε τό θέμα.
3. ᾿Επιχειρῆστε νά φτιάξετε ἕνα εὔκολο πρόβλημα πού νά μοιάζει μέ αὐτό. Λύστε το καί ἀκολουθῆστε τήν ἴδια πορεία καί γιά τό δύσκολο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

Πρόσθεση
Ἀφαίρεση
Πολλαπλασιασμός
Παραλληλόγραμμα
Διαίρεση

Οἱ 4 πράξεις μέ δεκαδικούς ἀριθμούς

93. Γενικά

Ὅπως καί μέ τούς ἀκέραιους ἔτσι καί μέ τούς δεκαδικούς ἀριθμούς, ὅταν μᾶς δοθοῦν δύο ἤ περισσότεροι δεκαδικοί, μποροῦμε ἀπ' αὐτούς νά κατασκευάσουμε ἄλλους, μέ 4 τρόπους.

Τούς τρόπους αὐτούς τούς λέμε: **ἀριθμητικές πράξεις.** Οἱ πράξεις αὐτές ἔχουν τά ὀνόματα: **πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός** καί **διαίρεση.**

Ἀρχίζουμε πάλι ἀπό τήν πρόσθεση πού εἶναι καί ἁπλούστερη.

94. Πρόσθεση

Πρόβλημα 1ο

Τά δύο πεζοδρόμια σέ ἕνα δρόμο ἔχουν πλάτη τό καθένα 3,8 μέτρα καί τό κατάστρωμα τοῦ δρόμου ἔχει πλάτος 12,82 μέτρα. Πόσο εἶναι τό πλάτος ὅλου τοῦ δρόμου;

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα πρέπει νά προσθέσουμε καί τούς τρεῖς ἀριθμούς: 3,8 + 12,82 + 3,8.

Παρατηροῦμε ὅμως, πώς ἐπειδή μόνον ὁμοειδεῖς ἀριθμούς μποροῦμε νά προσθέσουμε, γι' αὐτό πρέπει νά τούς διατάξουμε ἔτσι, ὥστε νά βρεθοῦν τά κόμματα στήν ἴδια στήλη, πού τότε οἱ μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως θά βρεθοῦν στήν ἴδια στήλη. Μετά νά κάνουμε τήν πράξη, ὅπως καί μέ τούς ἀκέραιους ἀριθμούς.

Ἡ διάταξη γίνεται ἔτσι:

Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	κόμμα	Δέκατα	ἑκατοστά	χιλιοστά
		3	,	8		
	1	2	,	8	2	
		3	,	8		
	2	0	,	4	2	

Εἰκ. 103

ἤ ἁπλά

$$\begin{array}{r} 3{,}8 \\ 12{,}82 \\ 3{,}8 \\ \hline 20{,}42 \end{array}$$

πλάτος τοῦ δρόμου → 20,42 μέτρα

Πρόβλημα 2ο

Γιά νά κάνει τήν ἠλεκτρική ἐγκατάσταση σέ μιά κατοικία ἕνας ἠλεκτρολόγος, χρησιμοποίησε τρία κομμάτια καλώδιο. Τό πρῶτο κομμάτι εἶχε μῆκος 46,5 μέτρα. Τό δεύτερο 8,375 μέτρα καί τό τρίτο 47 μέτρα. Πόσο μῆκος καλώδιο χρησιμοποίησε;

Λύση:

$$\begin{array}{l} 46{,}5 \\ \quad 8{,}375 \\ 47 \\ \hline 101{,}875 \end{array} \qquad \text{ἤ πιό ἁπλά} \qquad \begin{array}{r} 46{,}500 \\ 8{,}375 \\ 47{,}00 \\ \hline 101{,}875 \end{array}$$

Ἀπό τά παραπάνω διαπιστώνουμε πώς:

1. Ἄν μερικοί προσθετέοι ἔχουν λιγότερα δεκαδικά ψηφία, γιά νά τούς κάνουμε ἰσάριθμους τά συμπληρώνουμε μέ μηδενικά.
2. Καί κάθε ἀκέραιο τόν γράφουμε σέ δεκαδική μορφή μέ ἰσάριθμα μηδενικά σάν δεκαδικά ψηφία.

Βλέπετε; ➧

> Γιά νά προσθέσουμε δεκαδικούς ἀριθμούς, τούς γράφουμε τόν ἕνα κάτω ἀπό τόν ἄλλο, ἔτσι ὥστε τά κόμματα νά βρίσκονται στήν ἴδια στήλη. Κάνουμε τήν πρόσθεση ὅπως καί στούς ἀκέραιους καί στό ἐξαγόμενο βάζουμε τό κόμμα στή στήλη του.

Παρατηρήσεις:

1. Ἡ δοκιμή τῆς προσθέσεως γίνεται ὅπως καί στούς ἀκέραιους.
2. Ὅταν ἀπό τούς ἀριθμούς πού προσθέτουμε κάποιος εἶναι συγκεκριμένος, τότε πρέπει κι ὅλοι οἱ ἄλλοι νά εἶναι συγκεκριμένοι καί **ὁμοειδεῖς**.
3. Σέ ὅσους προσθετέους λείπουν στό τέλος ψηφία τάξεων πού ἔχουν ἄλλοι, γράφουμε στίς θέσεις τους μηδενικά.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

465. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ προσθέσεις καί νά γίνουν καί οἱ δοκιμές τους.
   132,5 + 72,06 + 87,8
   24,004 + 3,008 + 4,04
   105,05 + 92,103 + 75,6
   0,002 + 0,03 + 0,040
466. Τό βάρος τοῦ Κώστα εἶναι 68,450 κιλά καί τοῦ Νίκου 56,830 κιλά. Πόσα κιλά ζυγίζουν καί οἱ δύο μαζί;
467. Ἕνα μηχανουργεῖο ἀγόρασε 3 βαρέλια πετρέλαιο γιά τήν κίνηση τῆς μηχανῆς του. Τό α΄ ζυγίζει, χωρίς τό δοχεῖο: 244,560 κιλά, τό β΄ 168,050 κιλά καί τό τρίτο 135,50 κιλά. Πόσα κιλά πετρέλαιο ἀγόρασε;
468. Γιά τήν κατασκευή τριῶν ἐνδυμασιῶν χρειάστηκαν: γιά τήν α΄ 1,65 μέτρα. Γιά τή β΄ 2,38 μέτρα καί γιά τήν γ΄ 2,50 μ. Πόσα μέτρα χρειάζονται καί οἱ τρεῖς μαζί;
469. Ἕνας ἔμπορος κέρδισε ἀπό τά μεταξωτά ὑφάσματα: 13.567,60, ἀπό τά βαμβακερά 118.567,80 καί ἀπό τά μάλλινα 99904,3. Πόσες δραχμές κέρδισε ἀπ' ὅλα;
470. Ἕνα κατάστημα πούλησε τή μιά μέρα 27,75 μ. ἀπό ἕνα τόπι ὕφασμα, τήν ἄλλη μέρα πούλησε 15,5 μ. καί τοῦ ἔμειναν 19 μ. Πόσο ἦταν τό μῆκος τοῦ ὑφάσματος;
471. Δύο αὐτοκίνητα ξεκίνησαν τήν ἴδια ὥρα τό ἕνα ἀπό Λαμία πρός Ἀθήνα καί τό ἄλλο ἀπό Ἀθήνα πρός Λαμία. Ὅταν συναντήθηκαν τό

ἕνα εἶχε διατρέξει 95,75 χιλιόμετρα, καί τό ἄλλο 24,5 χιλιόμετρα περισσότερα. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση Λαμίας - Ἀθηνῶν;

472. Ἕνας ἀγρότης εἶχε δύο σακιά λίπασμα. Ἀπ' τό πρῶτο πῆρε 17,60 κιλά καί ἀπ' τό δεύτερο 13 κιλά περισσότερο καί τό ἔρριξε στό χωράφι του. Τό ὑπόλοιπο λίπασμα πού ἔμεινε καί στά δύο σακιά ἦταν 69,40 κιλά. Πόσα κιλά λίπασμα εἶχαν καί τά δύο σακιά;

95. Ἀφαίρεση

Ὁ Γιῶργος εἶχε 25,50 δραχμές καί πλήρωσε γιά ἕνα παγωτό 7,20 δραχμές. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

Γιά νά βροῦμε πόσα τοῦ ἔμειναν πρέπει νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τίς 25,50 πού εἶχε, τίς 7,20 πού ἔδωσε γιά τό παγωτό.

Παρατηροῦμε ὅμως, πώς ἐπειδή μόνο ὁμοειδεῖς ἀριθμούς μποροῦμε ν' ἀφαιρέσουμε, γι' αὐτό πρέπει νά τούς διατάξουμε ἔτσι, ὥστε νά βρεθοῦν τά κόμματα στήν ἴδια κατακόρυφη στήλη, ὅπως φαίνεται στόν παρακάτω πίνακα, γιατί μόνο ἔτσι οἱ μονάδες τῆς ἴδιας τάξεως, δηλαδή ὁμοειδεῖς μέ ὁμοειδεῖς, θά βρεθοῦν στήν ἴδια στήλη.

Μετά κάνουμε τήν ἀφαίρεση, ὅπως καί στούς ἀκέραιους. Προσέχουμε μόνο στό ἐξαγόμενο νά βάλουμε τό κόμμα στή στήλη του.

Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	κόμμα	Δέκατα	Ἑκατοστά	Χιλιοστά
3	2	5	,	5	0	
		7	,	2	0	
3	1	8	,	3	0	

Πρακτικά ἡ πράξη γίνεται ἔτσι:

325,50 ⟵ Μειωτέος
− 7,20 ⟵ Ἀφαιρετέος
318,30 ⟵ Ὑπόλοιπο

Ἀπάντηση: τοῦ ἔμειναν 318,30 δραχμές.

Ἄλλα παραδείγματα:

Νά βρεθοῦν τά ὑπόλοιπα: 132,5 − 8,475,
35,05 − 8,
5,06 − 0,004

1). $\begin{array}{r} 132{,}5 \\ -\ 8{,}475 \\ \hline 124{,}025 \end{array}$ ἤ $\begin{array}{r} 132{,}500 \\ -\ 8{,}475 \\ \hline 124{,}025 \end{array}$ 2). $\begin{array}{r} 35{,}05 \\ -8 \\ \hline 27{,}05 \end{array}$ ἤ $\begin{array}{r} 35{,}05 \\ -8{,}00 \\ \hline 27{,}05 \end{array}$

3). $\begin{array}{r} 5{,}06 \\ -0{,}004 \\ \hline 5{,}056 \end{array}$ ἤ $\begin{array}{r} 5{,}060 \\ -0{,}004 \\ \hline 5{,}056 \end{array}$

Ὅπως βλέπετε στά παραδείγματα, ἄν ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς δέν ἔχει τό ἴδιο πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μέ τόν ἄλλο, συμπληρώνουμε μέ μηδενικά.

Βλέπετε; ➧

Κάνουμε τήν ἀφαίρεση, ὅπως καί μέ τούς ἀκέραιους, ἀρκεῖ νά γράφουμε τά κόμματα στήν ἴδια στήλη. Ἐάν ὁ ἕνας ἀπ' τούς δυό δέν ἔχει τό ἴδιο πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μέ τόν ἄλλο, συμπληρώνουμε μέ μηδενικά.

Ἡ δοκιμή γίνεται, ὅπως στούς ἀκέραιους.

Δοκιμή

π.χ. $\begin{array}{r} 13{,}52 \\ -8{,}30 \\ \hline 5{,}22 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8{,}30 \\ +5{,}22 \\ \hline 13{,}52 \end{array}$ ἤ $\begin{array}{r} 13{,}52 \\ -5{,}22 \\ \hline 8{,}30 \end{array}$

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

473. Νά γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις μέ τίς δοκιμές τους.

2,08 – 1,05	10,006 – 6,003
5,65 – 4,32	18,015 – 4
11,736 – 0,014	58,426 – 39,18

474. Ἀγόρασε κάποιος 5,05 μ. ὕφασμα γιά ἕνα κουστούμι καί ἕνα παλτό. Ἄν τό κουστούμι χρειάζεται 2,80 μέτρα πόσα χρειάζεται τό παλτό;

475. Δύο αὐτοκίνητα ξεκίνησαν ἀπό τήν Ἀθήνα γιά τή Λάρισα τήν ἴδια ὥρα καί ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Τό πρῶτο κινεῖται μέ ταχύτητα 98,5 χιλιόμετρα τήν ὥρα καί τό β΄ 86,5. Πόσο θά ἀπέχουν ὕστερα ἀπό μιά ὥρα καί πόσο ὕστερα ἀπό 2;

476. Ἕνας ἐργάτης πρόκειται ν' ἀνοίξει μιά σούδα μήκους 37,65 μ. Τίς 2 πρῶτες μέρες ἔσκαψε τά 18,20 μ. Πόσα μέτρα μένουν ἀκόμα;

477. Ποιόν ἀριθμό πρέπει νά προσθέσουμε στόν 353,25 γιά νά βροῦμε τόν ἀριθμό 412,500;

478. Ἕνας μανάβης ἀγόρασε 4 καφάσια μῆλα. Τό α΄ ζυγίζει 24,750 κιλά τό δεύτερο 1,300 κιλά περισσότερο ἀπό τό πρῶτο καί τό γ΄ 2,300 λιγότερο ἀπ' τό δεύτερο καί τό δ΄ 0,600 κιλά λιγότερο ἀπ' τό γ΄. Πόσο ζυγίζει τό καθένα καί πόσο ὅλα μαζί;

Προβλήματα προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως:

479. Μιά νοικοκυρά πλήρωσε γιά καφέ 86,40 δραχμές. Για ζαχαρη 21,60 δραχμές καί γιά διάφορα ἄλλα τρόφιμα 158,70 δραχμές. Πόσα πλήρωσε, καί τί ρέστα θά πάρει ἀπό ἕνα πεντακοσάρικο;

480. Ἕνας μαθητής, γιά νά πληρώσει τά βιβλία πού ἀγόρασε ἀπ' τό βιβλιοπώλη, τοῦ ἔδωσε ἕνα πεντακοσάρικο. Ὁ βιβλιοπώλης τοῦ ζήτησε 22,50 δραχμές ἀκόμη καί τοῦ ἐπέστρεψε ἕνα κατοστάρικο. Πόσο ἄξιζαν τά βιβλία;

481. Δύο ἀδέρφια μαζεύουν χρήματα, γιά νά ἀγοράσουν ἕνα ποδήλατο πού πουλιέται 2.800 δραχμές. Ὁ Κώστας μάζεψε 1.080,80 καί ὁ Νίκος 909,50. Πόσες δραχμές θά ζητήσουν νά συμπληρώσει ὁ πατέρας;

482. Ἕνας μανάβης εἶχε 4 τελάρα μῆλα πού ζύγιζαν 86,300 κιλά. Πούλησε τό πρωί 36,800 κιλά καί τό ἀπόγευμα 27,300 κιλά. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

483. Ὁ πατέρας ἔφυγε γιά τήν ἀγορά μέ 1.000 δραχμές. Ἀπ' αὐτές ἔδωσε γιά κρέας 208,50 δραχμές, γιά φροῦτα 106,80 δρχ. καί γιά διάφορα ἄλλα ψώνια 112,60 δραχμές. Πόσες δραχμές τοῦ ἔμειναν;

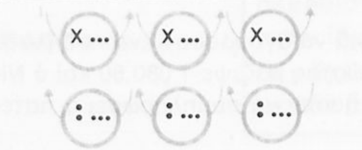
484. Ἡ Μαρία ἀγόρασε 3 μέτρα κορδέλα. Ἀπ' αὐτή ἔκοψε 0,75 μ. γιά τά μαλλιά, κι ἔδωσε καί μισό μέτρο στήν ἀδερφή της. Πόσα μέτρα τῆς ἔμειναν;

485. Ἡ μητέρα ἀγόρασε ἕνα μπουκάλι γάλα 21,80 δραχμές καί ἕνα κιλό τυρί 186,50 δραχμές. Πόσα ρέστα θά πάρει ἀπό ἕνα χιλιάρικο;

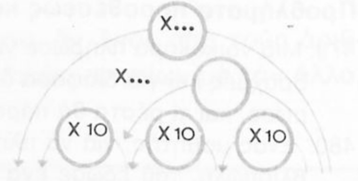
96. Πολλαπλασιασμός καί διαίρεση δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ 10, 100, 1.000

Α΄. Ν' ἀντιγράψετε στό τετράδιό σας καί νά συμπληρώσετε τίς παρακάτω μετατροπές:

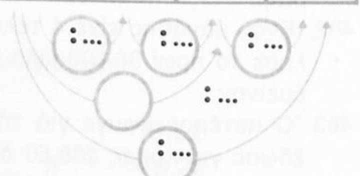
Μέτρα	Παλάμες	Ἑκατοστά	Χιλιοστό-μετρα
35,6			
	46,95		
		876	
			1 485



Β΄. Ν' ἀντιγράψετε στό τετράδιό σας καί νά συμπληρώσετε τόν παρακάτω πίνακα



2,162			
	14,75		
		231,8	
			4 565



Νά βρεῖτε τούς πολλαπλασιαστές καί διαιρέτες, κατά τή φορά τοῦ βέλους (→)

Ὅπως βλέπετε ἀπό τόν παραπάνω πίνακα:

Γιά νά πολλαπλασιάσετε δεκαδικό ἀριθμό μέ 10 μετατοπίζετε τό κόμμα **μιά** θέση πρός τά δεξιά.

Γιά νά πολλαπλασιάσετε δεκαδικό ἀριθμό μέ 100, μετατοπίζετε τό κόμμα **δύο** θέσεις πρός τά δεξιά.

Γιά νά πολλαπλασιάσετε δεκαδικό ἀριθμό μέ 1.000, μετατοπίζετε τό κόμμα **τρεῖς** θέσεις πρός τά δεξιά.

Γιά νά διαιρέσετε δεκαδικό ἀριθμό μέ 10, μετατοπίζετε τό κόμμα **μία** θέση πρός τ' ἀριστερά.

Γιά νά διαιρέσετε δεκαδικό ἀριθμό μέ 100, μετατοπίζετε τό κόμμα **δύο** θέσεις πρός τ' ἀριστερά.

Γιά νά διαιρέσετε δεκαδικό ἀριθμό μέ 1.000, μετατοπίζετε τό κόμμα **τρεῖς** θέσεις πρός τ' ἀριστερά.

Ἀσκήσεις:

486. Νά ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

57,80 × 10	100 × 0,00785	357,5 × 100
362,300 × 100	100 × 0,1821	2,4 × 10

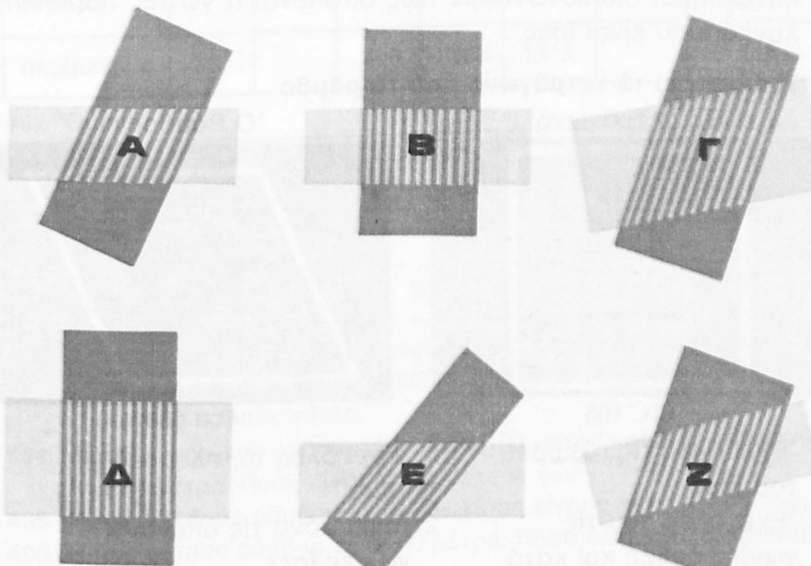
487. Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις:

27,5 : 10	137,5 : 100	3571,5 : 100
0,25 : 10	2,4 : 100	25,35 : 100

Προβλήματα:

488. Μιά πετσέτα φαγητοῦ χρειάζεται 0,55 μ. ὕφασμα. Πόσα μέτρα τοῦ ἴδιου ὑφάσματος θά χρειαστοῦν γιά α) 10 πετσέτες καί β) γιά 100 πετσέτες;
489. 100 κιλά ρύζι κοστίζουν 2.780 δραχμές. Πόσο κοστίζει τό 1 κιλό;
490. Ἕνας βιβλιοπώλης πούλησε 1.000 μολύβια καί πῆρε 7.800 δραχμές. Πόσο πούλησε τό ἕνα;

97. Τί εἶναι παραλληλόγραμμο καί ποιά τά εἴδη του



Εἰκ. 104

1. Στά σχέδια πού βλέπετε, ἔχει γραμμοσκιαστεῖ τό κοινό μέρος δύο ταινιῶν. Αὐτό τό κοινό μέρος τῶν δύο ταινιῶν λέγεται **παραλληλόγραμμο.**

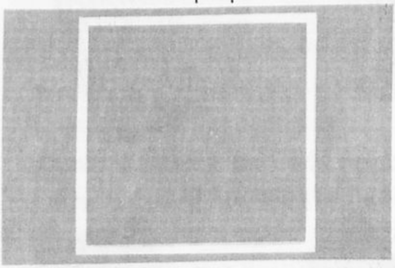
2. Τό παραλληλόγραμμο Β σχηματίζεται ἀπό τό κοινό μέρος δύο **καθέτων** ταινιῶν διαφόρου πλάτους. Αὐτό ὀνομάζεται **ὀρθογώνιο.**
3. Τό παραλληλόγραμμο Δ σχηματίζεται ἀπό τό κοινό μέρος δύο καθέτων ταινιῶν τοῦ ἰδίου πλάτους. Αὐτό ὀνομάζεται **τετράγωνο.**
4. Τό παραλληλόγραμμο Γ σχηματίζεται ἀπό τό κοινό μέρος δύο ταινιῶν τοῦ ἰδίου πλάτους καί ὄχι καθέτων. Αὐτό ὀνομάζεται **ρόμβος.**

Μέ τό διαβήτη μας διαπιστώνουμε πώς:

1. Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ παραλληλόγραμμου εἶναι ἴσες.
2. Ὅλες οἱ πλευρές τοῦ ρόμβου καί τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.
3. Ἄν σέ ἕνα διαφανές χαρτί ἀποτυπώσουμε τή γωνία τοῦ παραλληλόγραμμου καί τήν τοποθετήσουμε στήν ἀπέναντί της κατάλληλα, διαπιστώνουμε πώς οἱ ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.

Τί διαφέρει τό τετράγωνο ἀπό τό ρόμβο

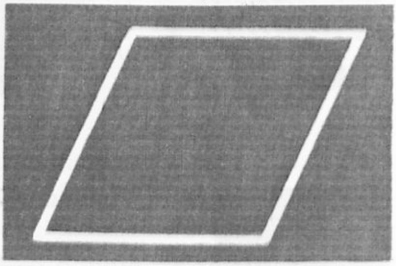
Τό τετράγωνο



Εἰκ. 105

1. Ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες.
2. Ἔχει ὅλες του τίς γωνίες ὀρθές καί κατά συνέπεια ἴσες.

Ὁ Ρόμβος



Εἰκ. 106

1. Ἔχει ὅλες τίς πλευρές ἴσες.
2. Ἔχει μόνο τίς ἀπέναντι γωνίες ἴσες.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα

(πρός ἐπανάληψη τῶν τετραπλεύρων)

Γνωρίζουμε ὅτι:

Ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου μέ πλευρά 4 μ. εἶναι: 4μ. + 4μ. + 4μ. + 4μ. = 16μ.

Ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου μέ μῆκος 6 μ. καί πλάτος 4 μ. εἶναι: 4μ. + 6μ. + 4μ. + 6μ. = 20μ.

Ὑπενθυμίζουμε ἀκόμα πώς περίμετρος ἑνός σχήματος ὀνομάζεται τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν του.

491. Συμπληρῶστε τόν πίνακα.

Γιά μονάδα μήκους νά θεωρεῖται τό ἑκατοστόμετρο.

Ὀρθογώνιο	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η
Μῆκος	28	320	90			249	267
πλάτος	13	204		129	241	97	
περίμετρος			420	836	1318		918

492. Ὅμοια

Τετράγωνο	Α	Β	Γ	Δ
Πλευρά	20		128	
Περίμετρος		80		360

493. Ὅταν διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε, ἤ τετραπλασιάσουμε τίς διαστάσεις ὀρθογωνίου τί παθαίνει ἡ περίμετρος; Χρησιμοποιῆστε ἀριθμητικά παραδείγματα.

494. Μιά πλευρά ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 100 μέτρα καί ἡ γειτονική της εἶναι 70 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

495. Ἡ πλευρά ἑνός ρόμβου εἶναι 5 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

496. Ἡ περίμετρος ρόμβου εἶναι 60 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

(χωρίς χαρτί καί μολύβι)

Νά διακρίνετε, ἄν οἱ παρακάτω προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς ἤ ὄχι:

497. Κάθε ὀρθογώνιο εἶναι παραλληλόγραμμο;

498. Κάθε παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος;

499. Κάθε τετράγωνο εἶναι ὀρθογώνιο; Καί κάθε ὀρθογώνιο εἶναι τετράγωνο;

500. Κάθε ρόμβος εἶναι τετράγωνο; Καί κάθε τετράγωνο εἶναι ρόμβος;

501. Κάθε παραλληλόγραμμο εἶναι ὀρθογώνιο;

502. Κάθε ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο;

98. Πολλαπλασιασμός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἀκέραιο

Πρόβλημα:

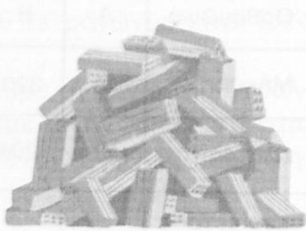
Ἕνα τοῦβλο ζυγίζει 2,450 κιλά. Πόσο ζυγίζουν τά 45 τοῦβλα;

Ἐδῶ ξέρουμε τήν τιμή τῆς μιᾶς μονάδας καί ζητᾶμε τήν τιμή τῶν πολλῶν μονάδων. Θά κάνουμε πολλαπλασιασμό. Θά πολλαπλασιάσουμε τό 2,450 μέ τό 45.

Γιά νά ὑπολογίσουμε τό γινόμενο:

$$2{,}450 \times 45$$

θά κάνουμε τά παρακάτω βήματα:



Εἰκ. 107

Βῆμα 1ο. Μετατρέπουμε τά κιλά σέ γραμμάρια (Μέ ποιό ἀριθμό πρέπει νά πολλαπλασιάσουμε)

$$2{,}450 \times 1.000 = 2.450 \text{ γραμμάρια.}$$

Βῆμα 2ο. Μέ πολλαπλασιασμό θά ὑπολογίσουμε τό βάρος τῶν 45 τούβλων.

$$2.450 \times 45 = 110.250 \text{ γραμμάρια.}$$

Βῆμα 3ο. Θά μετατρέψουμε τά 110.250 γραμμάρια σέ κιλά. (Μέ ποιόν ἀριθμό πρέπει νά διαιρέσουμε;)

$$110.250 : 1.000 = 110{,}250 \text{ κιλά.}$$

Ἀπάντηση: Τά 45 τοῦβλα ζυγίζουν: 110,250 κιλά.

Πρακτικά ἡ πράξη γίνεται, ὅπως σημειώνεται παράπλευρα.

2,450	→	Πολλαπλασιαστέος
45	→	Πολλαπλασιαστής
12250		
9800		
110,250	→	Γινόμενο

Δηλαδή:

Γράφουμε τόν πολλαπλασιαστή κάτω ἀπό τόν πολλαπλασιαστέο, σάν νά ἦταν ἀκέραιοι. Μετά κάνουμε τόν πολλαπλασιασμό ὅπως ξέρουμε. Ὅταν τελειώσουμε χωρίζουμε ἀπό τά δεξιά πρός τ' ἀριστερά τοῦ τελικοῦ γινομένου τόσα δεκαδικά ψηφία, ὅσα δεκαδικά ἔχει, ὁ δεκαδικός παράγοντας.

Ἄλλα παραδείγματα:

1)
$$\begin{array}{r} 0,4937 \\ 2 \\ \hline 0,9874 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 12 \\ 0,003 \\ \hline 0,036 \end{array}$$

Βλέπετε; ➧

> Ὅταν ἔχουμε νά πολλαπλασιάσουμε δεκαδικό ἀριθμό μέ ἀκέραιο ἐκτελοῦμε τήν πράξη, ὅπως ξέρουμε μέ τούς ἀκεραίους. Χωρίζουμε σέ συνέχεια ἀπό τά δεξιά τοῦ γινομένου τόσα δεκαδικά ψηφία ὅσα ἔχει ὁ δεκαδικός παράγοντας.

Ἡ δοκιμή γίνεται ὅπως στούς ἀκέραιους.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

Στίς παρακάτω περιπτώσεις ἔχει γίνει ὁ πολλαπλασιασμός. Μπορεῖτε νά βάλετε τό κόμμα στή σωστή του θέση;

503. $0,079 \times 3 = 237$
504. $412 \times 0,008 = 3296$
505. $49,78 \times 24 = 119472$
506. $0,459 \times 17 = 7803$
507. $6,118 \times 39 = 238602$
508. $37,37 \times 23 = 85951$

509. Νά ὑπολογίσετε τά γινόμενα: $7,346 \times 0,008$, $0,42 \times 0,7$, $2,765 \times 0,0004$.
510. Πόσο κρασί μᾶς χρειάζεται γιά νά γεμίσουμε 200 μπουκάλια κρασί τῶν 0,75 λίτρων;
511. Ποιό εἶναι τό βάρος 300 λίτρων λαδιοῦ, ἄν τό κάθε λίτρο ζυγίζει 0,910 κιλά;
512. Ποιό εἶναι τό βάρος 35 ρολῶν σύρμα σιδερένιο, ὅταν τό κάθε ρολό ζυγίζει 4,600 κιλά;
513. Πόσο ζυγίζουν 45 σάκοι σιταριοῦ, ὅταν ὁ καθένας ζυγίζει 75,500 κιλά;

514. Ποιό εἶναι τό βάρος 32 ὁμοίων κιβωτίων, ὅταν τό καθένα ζυγίζει 37,600 κιλά;

99. Πολλαπλασιασμός δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Πρόβλημα:

Ποιό εἶναι τό βάρος σιδηροσωλήνα 2,16 μέτρων μήκους, ὅταν τό μέτρο ζυγίζει 3,5 κιλά;

Ἐδῶ γνωρίζουμε τό βάρος τοῦ 1 μέτρου καί ζητᾶμε τό βάρος 2,16 μέτρων. Θά κάνουμε πολλαπλασιασμό:

$$3{,}5 \text{ κιλά} \times 2{,}16$$

Γιά νά ὑπολογίσουμε τό παραπάνω γινόμενο θά προχωρήσουμε ὅπως παρακάτω:

Βῆμα 1ο. Μετατρέπουμε τά 2,16 μέτρα σέ ἑκατοστά. (Μέ ποιό ἀριθμό πρέπει νά πολλαπλασιάσουμε;)

$$2{,}16 \times 100 = 216 \text{ ἑκατοστά}$$

Βῆμα 2ο. Βρίσκουμε τό βάρος τοῦ 1 ἑκατοστόμετρου μέ διαίρεση. (Μέ ποιό ἀριθμό πρέπει νά διαιρέσουμε;)

$$3{,}5 : 100 = 0{,}035 \text{ κιλά}$$

Βῆμα 3ο. Ὑπολογίζουμε τέλος τό βάρος τῶν 216 ἑκατοστῶν, ἀφοῦ ξέρουμε τό βάρος τοῦ 1 ἑκατοστομέτρου, μέ πολλαπλασιασμό.

$$0{,}035 \times 216 = 7{,}560 \text{ κιλά}$$

πού αὐτό εἶναι καί τό βάρος τῶν 2,16 μέτρων πού ζητᾶμε. Δηλαδή: 3,5 × 2,16 = 7,560 κιλά. Πρακτικά ὅμως τό γινόμενο ὑπολογίζεται πιό εὔκολα, ὅπως τό σημειώνουμε πιό κάτω.

<table>
<tr>
<td>

$$\begin{array}{r l}
3{,}5 & \rightarrow \text{Πολλαπλασιαστέος} \\
2{,}16 & \rightarrow \text{Πολλαπλασιαστής} \\
\hline
210 & \\
35 & \\
70 & \\
\hline
7{,}560 & \rightarrow \text{Γινόμενο}
\end{array}$$

</td>
<td>

Ἄλλο παράδειγμα:

$$\begin{array}{r}
0{,}0045 \\
0{,}7 \\
\hline
0{,}00315
\end{array}$$

</td>
</tr>
</table>

Ὕστερα ἀπ' τά παραπάνω βλέπουμε πώς:

Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δύο δεκαδικούς ἀριθμούς βαδίζουμε ἔτσι:

Βῆμα 1ο. Πολλαπλασιάζουμε τούς ἀριθμούς χωρίς κόμματα.

Βῆμα 2ο. Μετροῦμε τά δεκαδικά ψηφία πού ἔχουν καί οἱ δύο δεκαδικοί πού πολλαπλασιάσαμε.

Βῆμα 3ο. Μετροῦμε ἀπ' τό δεξιό τοῦ γινομένου τό ἴδιο πλῆθος ψηφίων καί βάζουμε ἀνάμεσα τό κόμμα.

Βῆμα 4ο. Ἄν τό γινόμενο ἔχει λιγότερα ψηφία ἀπ' τά δεκαδικά πού μετρήσαμε, τότε γράφουμε πρός τ' ἀριστερά τοῦ ἀριθμοῦ τόσα μηδενικά ὅσα εἶναι τά ψηφία πού λείπουν κι ἕνα ἐπί πλέον, σάν ἀκέραιο μέρος.

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{r} 1,35 \\ \times\ 4,8 \\ \hline 1080 \\ 540 \\ \hline 6,480 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,09 \\ \times\ 0,3 \\ \hline 0,027 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8,09 \\ \times 30,8 \\ \hline 6472 \\ 2427 \\ \hline 249,172 \end{array}$$

Παρατήρηση: Ἡ δοκιμή γίνεται ὅπως καί στούς ἀκεραίους.

Ἀσκήσεις:

515. Νά τοποθετήσετε τό κόμμα στή σωστή του θέση στούς πολλαπλασιασμούς:

$0,7 \times 0,3 = 21$ $\quad$ $0,07 \times 0,8 = 56$ $\quad$ $0,16 \times 4 = 64$

$1,5 \times 7 = 105$ $\quad$ $1,5 \times 3,5 = 525$ $\quad$ $3,6 \times 0,5 = 180$

516. Νά βρεῖτε τά γινόμενα καί νά γίνει ἡ δοκιμή τους.

$$\begin{array}{r} 0,47 \\ \times 0,23 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19,37 \\ \times 40,8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,95 \\ \times 0,2 \\ \hline \end{array}$$

Προβλήματα:

517. Σέ μιά μαθητική κατασκήνωση ὑπολογίζεται, πώς σέ κάθε μαθητή ἀναλογεῖ 0,760 κιλά ψωμί. Πόσα κιλά θά χρειαστοῦν ἄν ἡ κατασκήνωση ἔχει 375 μαθητές.

518. Ἀπό ἕνα κιλό ἀλεύρι γίνονται 1,58 κιλά ψωμί. Πόσα κιλά ψωμί γίνονται μέ 32,5 κιλά ἀλεύρι.

519. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 20 δωδεκάδες κάλτσες πρός 97,50 δρχ. τό ζευγάρι. Ἀπ' τήν πώληση εἰσέπραξε 35.520 δραχμές. Κέρδισε, καί πόσα;

520. Δύο αὐτοκίνητα ξεκίνησαν συγχρόνως ἀπό τήν πόλη Α πρός τήν πόλη Β. Τό πρῶτο μέ ταχύτητα 100,5 χιλιόμετρα τήν ὥρα καί τό β΄ μέ

97,5 χιλιόμετρα τήν ὥρα. Ὕστερα ἀπό 2,5 ὧρες πόσα χιλιόμετρα θά ἔχει διανύσει τό καθένα καί πόσο θ' ἀπέχουν;

521. Ὁ ἦχος διατρέχει μέσα στό νερό 1.517,03 μέτρα στό δευτερόλεπτο. Σέ 3,4 δευτερόλεπτα πόσο διατρέχει;

522. Ἑνός ἀνθρώπου τό βῆμα ἔχει μῆκος 0,58 τοῦ μέτρου. Ἄν κάμει σέ κάθε πρῶτο λεπτό 18 βήματα, σέ 5,5 λεπτά πόσα μέτρα θά διατρέξει;

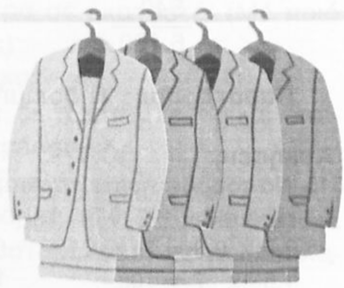
99. Διαίρεση τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

100. Διαίρεση δεκαδικοῦ μέ ἀκέραιο

1η Περίπτωση. (Ὁ διαιρετέος μεγαλύτερος ἀπό τό διαιρέτη)

Πρόβλημα:

Μέ 19,60 μέτρα ὕφασμα ράβονται 7 ἀνδρικά κοστούμια. Μέ πόσα μέτρα ράβεται τό κάθε κοστούμι;



Εἰκ. 108

Ἐδῶ ξέρουμε μέ πόσα μέτρα ράβονται 7 κοστούμια καί ζητᾶμε νά μάθουμε μέ πόσα μέτρα ράβεται τό 1 κοστούμι.

Θά κάνουμε διαίρεση μερισμοῦ.

19,60 : 7

Γιά νά μπορέσουμε ὅμως νά κάνουμε τή διαίρεση αὐτή, τρέπουμε τά μέτρα σέ δακτύλους ἤ ἑκατοστά. (Μέ ποιόν ἀριθμό πρέπει νά πολλαπλασιάσουμε;).

Τά 19,60 μέτρα = 1.960 ἑκατοστά. Τώρα ἔχουμε νά διαιρέσουμε ἀκεραίους.

```
1960 | 7
56   |----
  00 | 280

19,60 | 7
56    |----
  00  | 2,80
```

Ἀπάντηση: Κάθε ἀνδρικό κουστούμι χρειάζεται 280 ἑκατοστά ἤ 2,80 μέτρα.

Πρακτική ἐργασία

Πρακτικά ἐργαζόμαστε, ὅπως καί στή διαίρεση μέ ἀκεραίους. Μόνο, πού ὅταν φθάσουμε στό κόμμα, θά σημειώσουμε κόμμα καί στό πηλίκο καί ὕστερα συνεχίζουμε τή διαίρεση.

2η Περίπτωση. (Ὁ διαιρετέος μικρότερος ἀπό τό διαιρέτη)

Πρόβλημα:

Νά μοιραστοῦν 2,575 κιλά καφέ σέ 5 φτωχές οἰκογένειες. Πόσα κιλά θά πάρει ἡ κάθε οἰκογένεια;

2,575	5
07	0,515
25	
0	

Καί ἐδῶ θά κάνουμε διαίρεση μερισμοῦ. Θά μοιράσουμε τά 2,575 κιλά καφέ σέ 5 οἰκογένειες.

Εἶναι φανερό πώς κάθε οἰκογένεια θά πάρει λιγότερο ἀπό 1 κιλό. Μέ ἄλλα λόγια τό πηλίκο εἶναι μικρότερο τῆς ἀκεραίας μονάδας. Γι' αὐτό βάζουμε (0), στό πηλίκο καί συνεχίζουμε, ὅπως ξέρουμε μέ τούς ἀκεραίους.

Ὥστε ἡ κάθε οἰκογένεια θά πάρει 0,515 κιλά καφέ.

Βλέπετε; ➧

> Γιά νά διαιρέσουμε δεκαδικό μέ ἀκέραιο, διαφορετικό ἀπό τό μηδέν, κάνουμε τή διαίρεση σάν νά ἦταν ἀκέραιοι. Μόλις ὅμως τελειώσει ἡ διαίρεση τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου βάζουμε στό πηλίκο κόμμα (,) καί συνεχίζουμε, ὅπως ξέρουμε. Μόνο ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος ἀπό τό διαιρέτη, τότε βάζουμε μηδέν κόμμα (0,) καί συνεχίζουμε τήν πράξη.

• **Ἄλλο παράδειγμα**

Πρόβλημα:

Νά μοιράσουμε σέ 8 κορίτσια 3 μέτρα κορδέλα. Πόσα μέτρα θά πάρει κάθε κορίτσι;

Θά κάνουμε διαίρεση μερισμοῦ. Θά μοιράσουμε τά 3 μέτρα κορδέλα στά 8 κορίτσια.

3 : 8

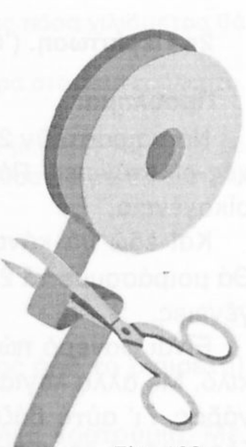
3,000	8
60	0,375
40	
0	

Ἐδῶ ἔχουμε διαίρεση δύο ἀκεραίων, πού ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό διαιρετέο.

Στίς περιπτώσεις αὐτές, γράφουμε τό διαιρετέο σέ μορφή δεκαδικοῦ.

Δηλαδή στά δεξιά τοῦ ἀκεραίου γράφουμε κόμμα (,) καί σέ συνέχεια μηδενικά τόσα, ὅσα δεκαδικά ψηφία, πρέπει νά ἔχει τό πηλίκο.

Ὕστερα γράφουμε στό πηλίκο: μηδέν κόμμα (0,) καί συνεχίζουμε ὅπως ξέρουμε.



Εἰκ. 109

Δοκιμή τῆς διαιρέσεως

Ἡ δοκιμή γίνεται ὅπως στούς ἀκεραίους.

Παράδειγμα:

Νά γίνει ἡ διαίρεση καί ἡ δοκιμή της.

Διαιρετέος ⟶	41,50	7	⟵ διαιρέτης
	65	5,92	⟵ πηλίκο
	20		
Ὑπόλοιπο ⟶	6		

Δοκιμή

$$\begin{array}{r} 5{,}92 \\ \times\ 7 \\ \hline 41{,}44 \\ +0{,}06 \\ \hline 41{,}50 \end{array}$$

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

523. Νά βρεῖτε τά πηλίκα καί νά κάνετε τίς δοκιμές τους:

1) 7,4 : 2	5) 54,18 : 8	9) 1,64 : 12	13) 0,75 : 7
2) 9,6 : 4	6) 95,49 : 9	10) 0,458 : 8	14) 57,51 : 27
3) 8,36 : 3	7) 76,32 : 3	11) 24 : 35	15) 0,134 : 67
4) 14,32 : 5	8) 54,72 : 12	12) 0,03 : 6	16) 9 : 12

524. Ὁ μάγειρας μιᾶς ταβέρνας ἔχει νά μαγειρέψει 9,540 κιλά κρέας. Ἄν τό κόψει σέ 53 μερίδες, πόσο εἶναι τό βάρος κάθε μερίδας;

525. Ἕνας ἐργάτης πῆρε 12163,5 δραχμές γιά 17 μέρες ἐργασίας. Πόσο ἦταν τό μεροκάματο;

526. Μέ 8,160 κιλά καφέ κάνουμε 102 φακελάκια. Πόσο ζυγίζει τό κάθε φακελάκι;

527. Μέ 39,60 δραχμές ἀγοράζω 12 αὐγά. Πόσο ἀγοράζω τό ἕνα;

101. Μιά ἰδιότητα τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν

Πρόβλημα:

Νά μοιραστοῦν: 1) 6 τετράδια σέ 2 παιδιά
2) 60 τετράδια σέ 20 παιδιά
3) 600 τετράδια σέ 200 παιδιά

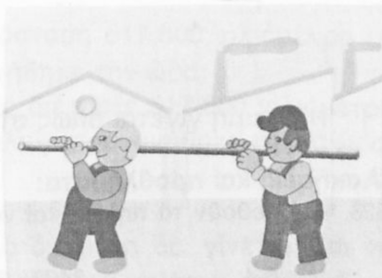
Πόσα τετράδια πρέπει νά πάρει τό κάθε παιδί σέ κάθε περίπτωση; Τί παρατηρεῖτε;

Βλέπετε; ➧

> Ὅταν καί ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης πολλαπλασιαστοῦν μέ 10, 100, ἤ 1.000, τό πηλίκο δέ μεταβάλλεται.

102. Διαίρεση ἀκέραιου μέ δεκαδικό

Πρόβλημα: Γιά τήν παροχή νεροῦ σέ κατοικία χρειάστηκε νά κόψουμε ἕνα νεροσωλήνα 9 μέτρων μήκους σέ κομμάτια μήκους 0,75 μέτρου. Σέ πόσα κομμάτια θά κοπεῖ ὁ νεροσωλήνας;



Εἰκ. 110

Γιά νά βροῦμε σέ πόσα κομμάτια θά κοπεῖ ὁ νεροσωλήνας, θά πρέπει νά κάνουμε διαίρεση μετρήσεως: 9 : 0,75

Ἡ διαίρεση ὅμως μέ διαιρέτη δεκαδικό δέ γίνεται. Γιά νά γίνει πρέπει, χωρίς ν' ἀλλάξει τό πηλίκο, νά κάνουμε τό διαιρέτη ἀκέραιο. Γι' αὐτό, ὅπως μάθαμε, πολλαπλασιάζουμε διαιρέτη καί διαιρετέο μέ τό 100.

Μέ ἄλλα λόγια, γιά νά γίνει ὁ διαιρέτης ἀκέραιος πρέπει νά μεταθέσουμε τό κόμμα δύο θέσεις πρός τά δεξιά καί νά βάλουμε δύο μηδενικά δεξιά τοῦ διαιρετέου. Τότε ἀντί νά ἔχουμε:

9 : 0,75 ἔχουμε 900 : 75,

πού γίνεται ὅπως ξέρουμε

900 150 00	75 12	Ὥστε θά κοπεῖ σέ 12 κομμάτια

Βλέπετε; ➧

> Ἡ διαίρεση ἀκέραιου μέ δεκαδικό δέ γίνεται. Γι' αὐτό σβήνουμε τό κόμμα τοῦ δεκαδικοῦ διαιρέτη καί γράφουμε στό τέλος τοῦ διαιρετέου τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικά ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης.

Παραδείγματα:

```
480 | 6,4       ἤ    4800 | 64
    |------           320 |----
    |                  00 | 75
```

```
3879 | 0,75     ἤ    387900 | 75
     |-------           129 |------
     |                  540 | 5172
                        150 |
                         00 |
```

Ἡ δοκιμή γίνεται ὅπως στή διαίρεση δεκαδικοῦ μέ ἀκέραιο.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

528. Νά βρεθοῦν τά πηλίκα καί νά γίνουν οἱ δοκιμές τους στίς διαιρέσεις:

544 : 6,4	3402 : 6,3
900 : 7,5	3879 : 0,75
441 : 1,8	785 : 2,5

528α. Ὁ πατέρας τοῦ Κώστα ἀγόρασε 2,80 μέτρα ὕφασμα καί πλήρωσε 1.680 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τό μέτρο;

528β. Ὁ Νίκος ἀποταμιεύει 125,50 δραχμές τήν ἡμέρα. Σέ πόσες μέρες θά συγκεντρώσει ποσό 18.825 δραχμές γιά ν' ἀγοράσει τηλεόραση;

528γ. Πόσες μέρες πρέπει νά ἐργαστεῖ μιά ἐργάτρια μέ μεροκάματο 808 δραχμές γιά ν' ἀγοράσει ἠλεκτρική κουζίνα πού ἔχει ἀξία 22638 δραχμές;

103. Διαίρεση ἀριθμοῦ μέ: 0,1 ἤ 0,01 ἤ 0,001

Ἄν ἐφαρμόσουμε τά παραπάνω σέ διαίρεση μέ διαιρέτη τόν 0,1 ἤ τόν 0,01 ἤ τόν 0,001, τότε θά ἔχουμε:

α) 37,45 : 0,1 = 374,5 : 1 = 374,5

β) 2,475 : 0,01 = 247,5 : 1 = 247,5
γ) 0,0025 : 0,001 = 2.5 : 1 = 2,5

Βλέπετε; ➧ Γιά νά διαιρέσουμε έναν ἀριθμό μέ 0,1 ἤ 0,01 ἤ 0,001, ἀρκεῖ νά τόν πολλαπλασιάσουμε ἀντίστοιχα μέ 10 ἤ 100 ἤ 1.000.

Ἀσκήσεις:

529. Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις:

3,3 : 0,001   0,90 : 0,1   3,747 : 0,001   0,003 : 0,01

104. Διαίρεση δεκαδικοῦ μέ δεκαδικό

Πρόβλημα:

Ἕνα αὐτοκίνητο διέτρεξε ἀπόσταση 517,500 χιλιόμετρα σέ 4,5 ὧρες. Μέ πόσα χιλιόμετρα κινήθηκε τήν ὥρα;

Ἐδῶ ξέρουμε πώς σέ 4,5 ὧρες διέτρεξε 517,500 χιλιόμετρα καί ζητᾶμε νά μάθουμε μέ πόσα χιλιόμετρα κινήθηκε τή μιά ὥρα. Θά κάνουμε διαίρεση μερισμοῦ:

517,500 : 4,5

Ἡ διαίρεση ὅμως μέ δεκαδικό διαιρέτη δέ γίνεται. Γιά νά γίνει πρέπει νά τρέψουμε, χωρίς βλάβη τοῦ πηλίκου, τό δεκαδικό διαιρέτη σέ ἀκέραιο. Γι' αὐτό πολλαπλασιάζουμε τό δεκαδικό διαιρέτη καί τό διαιρετέο μέ τό 10.

Μέ ἄλλα λόγια σβήνουμε τό κόμμα τοῦ διαιρέτη, ὥστε νά γίνει ἀκέραιος καί γιά νά μήν ἀλλάξει τό πηλίκο μεταθέτουμε πρός τά δεξιά τό κόμμα τοῦ διαιρετέου μιά θέση.

Ἔτσι ἔχουμε:

517,500 : 4,5 ἤ 5175,00 : 45 ἤ

$$\begin{array}{r|l} 5175 & 45 \\ \cline{2-2} 67 & 115 \\ 225 & \\ 00 & \end{array}$$

Ὥστε θά κινηθεῖ μέ 115 χιλ. τήν ὥρα.

Ἄλλο παράδειγμα:

376,5 : 0,06 ἤ 37650 : 6 = 6.275.

Βλέπετε; ➧

> Ἄν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός, ἡ διαίρεση δέ γίνεται. Γι' αὐτό σβήνουμε τό κόμμα τοῦ διαιρέτη, ὥστε νά γίνει ἀκέραιος. Μετά μεταφέρουμε τό κόμμα τοῦ διαιρετέου τόσες θέσεις πρός τά δεξιά, ὅσα δεκαδικά ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης. Ἄν ὁ διαιρετέος ἔχει λιγότερα δεκαδικά ψηφία ἀπό τό διαιρέτη συμπληρώνουμε μέ μηδενικά.

Ὅταν ἡ διαίρεση δύο ἀκέραιων εἶναι ἀτελής, βάζουμε στό πηλίκο ἕνα κόμμα. Ὕστερα βάζουμε στά δεξιά τοῦ ὑπολοίπου μηδέν καί συνεχίζουμε τή διαίρεση.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα:

530. 7,56 : 4,2 9,88 : 5,2 14,2 : 3,7 7,88 : 0,02 8,91 : 2,2
0,369 : 0,03 12,8 : 3,2 7,56 : 0,03 4,95 : 0,05

531. Κάποιος ἀγόρασε 2,8 μέτρα ὕφασμα καί πλήρωσε 1.872,50 δρχ. Πόσο ἀγόρασε τό μέτρο;

532. Ἕνα αὐτοκίνητο σέ 4,5 ὧρες ἔτρεξε 407,25 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεξε σέ μιά ὥρα;

533. Γιά ἕνα μαντήλι χρειαζόμαστε 0,35 μέτρα ὕφασμα. Πόσα μαντήλια θά φτιάξουμε μέ 71,40 μέτρα ὕφασμα;

534. Ἕνας ἔβαλε στό ρεζερβουάρ τοῦ αὐτοκινήτου του βενζίνη πρός 21,60 τό λίτρο καί πλήρωσε 561,60 δραχμές. Πόσα λίτρα ἔβαλε;

535. Τό κιλοβάτ τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχίζει 4,70 δραχμές. Κάποιος πλήρωσε 1301,90 δραχμές. Πόσα κιλοβάτ εἶχε καταναλώσει;

536. Γιά μιά παιδική ἐνδυμασία χρειαζόμαστε 1,8 μέτρα ὕφασμα. Πόσες ὅμοιες ἐνδυμασίες θά φτιάξουμε μέ 66,6 μέτρα ἀπό τό ἴδιο ὕφασμα;

537. Ἕνας ἀγόρασε 8,35 μέτρα κορδέλα καί ἔδωσε 150,30 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τό μέτρο;

Προβλήματα διαφόρων πράξεων
(Ἀκέραιων καί δεκαδικῶν)

538. Ἕνας κτηνοτρόφος πούλησε 52,200 κιλά τυρί πρός 195,50 δραχμές τό κιλό. Ἀπό τά χρήματα πού πῆρε ἔδωσε γιά ν' ἀγοράσει λάδι 5.000,10 δραχμές καί μέ τά ὑπόλοιπα ἀγόρασε ἀλεύρι πρός 17,35 δραχμές τό κιλό. Πόσο ἀλεύρι ἀγόρασε;

539. Ἕνας χωρικός πούλησε 546 κιλά σιτάρι πρός 14,50 δραχμές τό κιλό,

308 κιλά λάδι πρός 152,50 δραχμές τό κιλό, 72 κιλά μέλι πρός 246,80 δραχμές τό κιλό καί ἕνα μοσχάρι 47250 δραχμές. Ἀπό τά χρήματα πού πῆρε πλήρωσε στήν Ἀγροτική Τράπεζα 76.500, 60 γιά ἐξόφληση χρέους. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

539α. Μιά σκάλα ἔχει ὕψος 1,76 μέτρα καί ἔχει 8 σκαλοπάτια. Πόσα μέτρα ὕψος ἔχει κάθε σκαλοπάτι;

540. Ἕνας φούρναρης πούλησε 306,50 κιλά ψωμί πρός 24,50 δρχ. τό κιλό καί 204,5 κιλά ψωμί ἄλλης ποιότητας πρός 32,50 δραχμές τό κιλό. Πόσα εἰσέπραξε;

541. Ὁ πατέρας ἀγόρασε 1,750 κιλά κρέας πρός 105,50 δραχμές τό κιλό. Πόσα πλήρωσε;

542. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 38,5 μέτρα ὕφασμα πρός 508 δραχμές τό μέτρο. Ἀπό τήν πώληση εἰσέπραξε 27373,50 δραχμές. Πρός πόσο πούλησε τό μέτρο; Καί πόσα κέρδισε;

543. Μιά νοικοκυρά ἀγόρασε 18 κιλά μαλλιά. Στό πλύσιμο ἔχασαν τό μισό τοῦ βάρους τους καί στό λανάρισμα ἄλλα 0,50 κιλά. Πόσα κιλά τῆς ἔμειναν;

544. Ἀγόρασε κάποιος μολύβια πρός 2,75 δραχμές τό ἕνα. Ἀλλά σέ κάθε δωδεκάδα ἔπαιρνε ἕνα σάν δῶρο. Ἔδωσε γιά τήν ἀγορά 825 δραχμές. Πόσα μολύβια πῆρε σάν δῶρο;

545. Ἀγόρασε κάποιος 55 μέτρα ὕφασμα πρός 125,5 δραχμές τό μέτρο. Πούλησε κατόπιν ἕνα μέρος πρός 276,10 δραχμές τό μέτρο καί παρατήρησε πώς τό ὑπόλοιπο τοῦ ἔμεινε κέρδος. Πόσα μέτρα ἦταν τό ὑπόλοιπο;

546. Ἕνας ἀγόρασε 6 δοχεῖα λίπος πού τό καθένα περιεῖχε 15 κιλά καί πλήρωσε 11250 δραχμές. Πόσο πρέπει νά πουλήσει τό κιλό γιά νά τοῦ μείνει κέρδος ἕνα δοχεῖο;

547. Κάποιος ἀγόρασε λάδι καί πλήρωσε 4.162,50 δραχμές. Ἐάν ὅμως ἀγόραζε 7 κιλά λιγότερο θά πλήρωνε 3.515 δρχ. Πόσο πλήρωσε τό κιλό;

548. Ἕνας ἀγόρασε δύο δοχεῖα λάδι καί πλήρωσε 2.775 δραχμές μέ 92,50 δραχμές τό κιλό. Τό ἕνα δοχεῖο εἶχε 6 κιλά λιγότερο ἀπ' τό ἄλλο. Πόσα κιλά εἶχε τό κάθε δοχεῖο;

549. Δύο τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν τό ἴδιο μῆκος καί πουλήθηκαν 3.595,5 δρχ. Τό μέτρο τοῦ α΄ πουλήθηκε 80,50 δρχ. καί τοῦ β΄ 60,50 δραχμές. Πόσα μέτρα ἦταν τό καθένα;

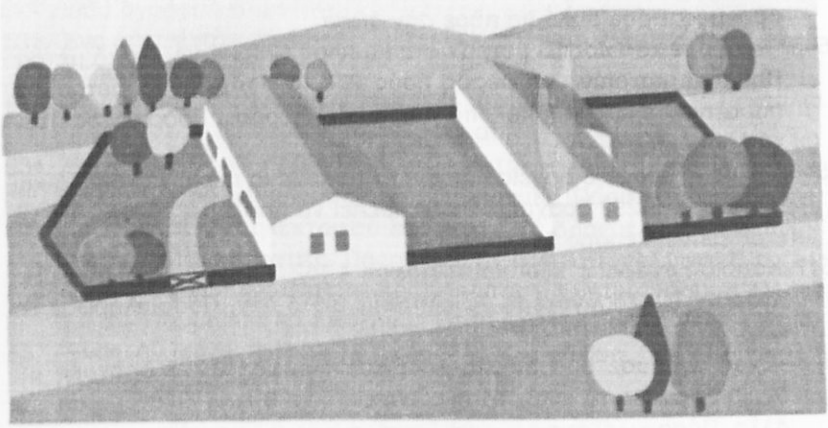
550. Ἕνας κτηνοτρόφος πούλησε τυρί καί πῆρε 13391,75 δραχμές. Ἄν ὅμως πουλοῦσε τό τυρί 7,50 δραχμές ἀκριβότερα θά κέρδιζε ἐπί πλέον 513,75 δραχμές. Πόσα κιλά πούλησε καί πρός πόσο πούλησε τό κιλό;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

Μέτρηση ἐπιφάνειας
Κλάσματα
Κύβος
Παραλληλεπίπεδο
Σφαίρα
Κύλινδρος

105. Μέτρηση ἐπιφανειῶν

Τό ἀγροτικό σπίτι τοῦ Δαφνόπουλου, πού εἰκονίζεται, ἔχει ἕναν κῆπο μπροστά καί μιά αὐλή πίσω. Ὁ Δαφνόπουλος θέλει νά ἐξακριβώσει, ποιό εἶναι μεγαλύτερο: ὁ κῆπος ἤ ἡ αὐλή; Αὐτό δέν εἶναι εὔκολο νά τό ἐξακριβώσει.



Εἰκ. 111

Ἀκόμα, ὁ γειτονικός κῆπος, πού φαίνεται στήν εἰκόνα, εἶναι μεγαλύτερος ἤ μικρότερος ἀπό τόν κῆπο τοῦ Δαφνόπουλου;

Ὁ κῆπος τοῦ Δαφνόπουλου, ἡ αὐλή του, ὁ κῆπος τοῦ γείτονα εἶναι ἐπιφάνειες.

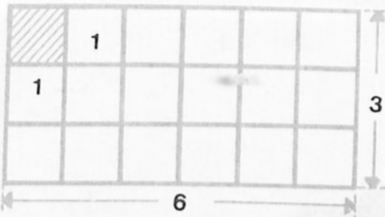
Παρουσιάζεται συχνά ἡ ἀνάγκη νά συγκρίνουμε ἐπιφάνειες καί νά γνωρίσουμε, ποιά εἶναι μεγαλύτερη καί ποιά μικρότερη.

Γιά νά ἁπλουστέψουμε τή σύγκριση, ἀντιστοιχίζουμε στήν ἐπιφάνεια ἕναν ἀριθμό, πού νά ἐκφράζει τό **μέτρο** της, πού λέγεται **ἐμβαδό** τῆς ἐπιφάνειας. Μέ ἄλλα λόγια βρίσκουμε πόσες φορές χωράει μιά τετραγωνική μονάδα καί τά μέρη αὐτῆς, μέσα σέ μιά ἐπιφάνεια.

Γιά τή μέτρηση τῶν ἐπιφανειῶν ἀρχίζουμε ἀπό τίς πιό ἁπλές πού εἶναι τό ὀρθογώνιο καί τό τετράγωνο.

105α. Ἐμβαδόν ὀρθογώνιου

Πρόβλημα: Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδόν ὀρθογώνιου μέ μῆκος 6 ἑκατοστά καί πλάτος 3 ἑκατοστά.



Εἰκ. 112

Πρόκειται μέ ἄλλα λόγια νά συγκρίνουμε ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 1 ἑκατ. καί ἕνα ὀρθογώνιο μέ **διαστάσεις** 6 ἑκατ. μῆκος καί 3 ἑκατ. πλάτος.

Ἐπάνω στό μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου παίρνουμε συνεχιστά τό 1 ἑκατ. 6 φορές καί 3 φορές στό πλάτος του. Τά σημεῖα πού διαιροῦν τότε τίς πλευρές σέ τμήματα 1 ἑκατ., τά συνδέουμε μέ παράλληλες εὐθεῖες πρός τίς πλευρές τοῦ ὀρθογώνιου. Ἔτσι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου διαιρεῖται σέ τετραγωνάκια τοῦ 1 τετραγωνικοῦ ἑκατοστομέτρου, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα.

Ἄς μετρήσουμε πόσα εἶναι.

Τρεῖς σειρές ἀπό 6 τετραγωνάκια ἡ κάθε μιά κάνουν:

$$3 \times 6 = 18 \text{ τετραγωνάκια}$$

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογώνιου εἶναι $3 \times 6 = 18$ τετρ. ἑκατ.

Βλέπετε;

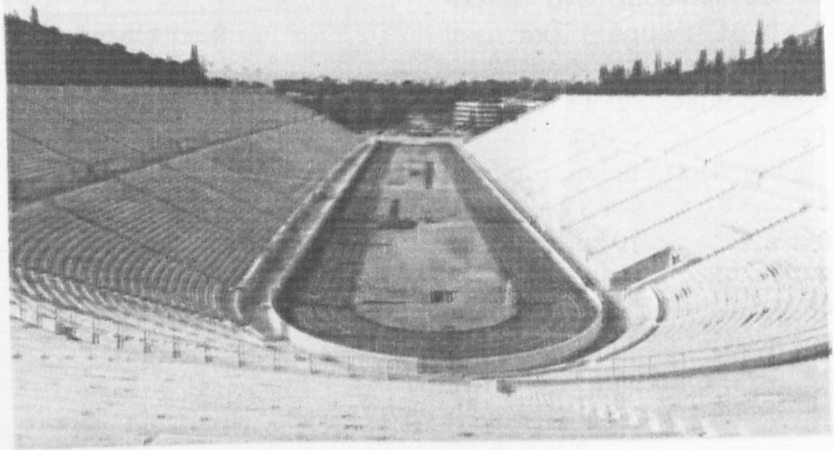
> Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδό ὀρθογώνιου, μετροῦμε τό μῆκος καί τό πλάτος μέ τήν ἴδια μονάδα μήκους καί πολλαπλασιάζουμε τούς δύο ἀριθμούς πού βρίσκουμε.

Τό ἐμβαδό θά ἐκφράζεται στή μονάδα ἐπιφάνειας πού χρησιμοποιήσαμε. Π.χ. ἄν χρησιμοποιήσαμε τό ἑκατοστόμετρο γιά μονάδα μήκους, τότε τό ἐμβαδό θά ἐκφράζεται σέ τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα.

Ἄν χρησιμοποιήσαμε γιά μονάδα μήκους τό μέτρο, τότε τό ἐμβαδό θά ἐκφράζεται σέ τετραγωνικά μέτρα.

Παράδειγμα:

Ὁ στίβος τοῦ Παναθηναϊκοῦ Σταδίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, μέ μῆκος 204 μέτρα καί πλάτος 35 μέτρα. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.



Εἰκ. 113

Ἐδῶ γιά μονάδα μήκους χρησιμοποιήσαμε τό μέτρο. Τό ἐμβαδό του θά εἶναι:

$$204 \times 35 = 7.140 \text{ τετραγ. μέτρα}$$

Ὁ στίβος λοιπόν τοῦ Παναθηναϊκοῦ Σταδίου ἔχει ἐμβαδό:

7.140 τετραγωνικά μέτρα.

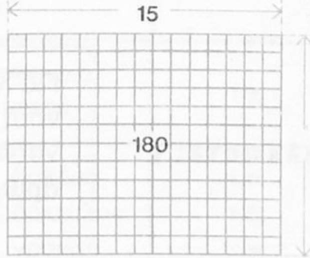
Ἀντίστροφος ὑπολογισμός

Ὑπολογίστε τό πλάτος, πού πρέπει νά δώσουμε σ' ἕνα ὀρθογώνιο μέ μῆκος 15 ἑκατοστά, γιά νά ἔχει ἐμβαδό 180 τετραγωνικά ἑκατοστά.

Τό γινόμενο τοῦ πλάτους, πού ζητοῦμε ἐπί τό δοσμένο μῆκος 15 ἑκατοστά εἶναι 180 τετρ. ἑκατοστά.

Ἐπομένως τό πλάτος θά εἶναι τό πηλίκο τοῦ 180 διά τοῦ 15.

Δηλαδή: 180 : 15 = 12 μέτρα

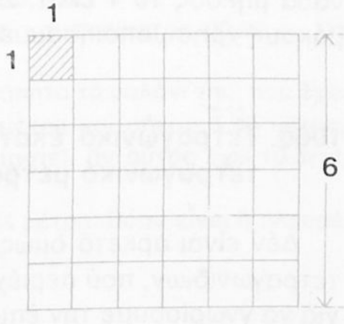


Εἰκ. 114

106. Ἐμβαδό τετράγωνου

Νά βρεθεῖ τό ἐμβαδό τετράγωνου μέ πλευρά 6 ἑκατ.

Ὅπως καί στό ὀρθογώνιο, ἔτσι καί ἐδῶ, πρέπει νά συγκρίνουμε τά δύο τετράγωνα μέ πλευρές 1 ἑκατοστό τό ἕνα καί 6 ἑκατοστά τό ἄλλο.



Εἰκ. 115

Μέ ἄλλα λόγια θά βροῦμε πόσες φορές τό πρῶτο τετράγωνο μέ πλευρά 1 ἑκατοστό περιέχεται στό δεύτερο τετράγωνο μέ πλευρά 6 ἑκατοστά.

Παίρνουμε σέ κάθε πλευρά τοῦ μεγάλου τετραγώνου, 6 φορές συνέχεια, 1 ἑκατ., κι ἔτσι τή διαιροῦμε σέ 6 ἴσα τμήματα.

Συνδέουμε τά διαιρετικά σημεῖα μέ παράλληλες εὐθεῖες πρός τίς πλευρές τοῦ τετράγωνου, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα.

Τό τετράγωνο ἔτσι διαιρεῖται σέ τετραγωνάκια, πού τό καθένα ἔχει ἐπιφάνεια 1 τετραγωνικό ἑκατοστό.

Ἄς μετρήσουμε, τώρα, πόσα τετράγωνα εἶναι:

Εἶναι 6 σειρές, ἀπό 6 τετραγωνάκια ἡ κάθε μιά κάνουν:

$6 \times 6 = 36$ τετραγωνάκια.

Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετράγωνου εἶναι: $6 \times 6 = 36$ τετρ. ἑκατοστά.

Βλέπετε; ➧

Γιά νά βροῦμε τό ἐμβαδό ἑνός τετράγωνου, μετροῦμε τήν πλευρά του μέ μιά μονάδα μήκους καί πολλαπλασιάζουμε τόν ἀριθμό πού βρίσκουμε μέ τόν ἑαυτό του.

Ὅπως στό ὀρθογώνιο, ἔτσι κι ἐδῶ τό ἐμβαδό τοῦ τετραγώνου θά ἐκφράζεται σέ τετρ. ἑκατοστά, ἄν χρησιμοποιήσουμε γιά μονάδα μήκους τό 1 ἑκατ. Σέ τετραγωνικά μέτρα, ἄν γιά μονάδα μήκους χρησιμοποιήσουμε τό μέτρο.

106α. Τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο, τετραγωνική παλάμη, τετραγωνικό μέτρο.

Δέν εἶναι ἀρκετό ὅμως νά γνωρίζουμε μόνο τόν ἀριθμό τῶν τετραγωνιδίων, πού περιέχονται σ' ἕνα ὀρθογώνιο ἤ τετράγωνο, γιά νά γνωρίσουμε τήν ἐπιφάνειά του. Πρέπει νά γνωρίζουμε καί τό μέγεθος κάθε τετραγωνιδίου.

Τό τετράγωνο πού ἔχει πλευρά 1 ἑκατοστόμετρο λέγεται **τετραγωνικό ἑκατοστόμετρο** (συμβολίζεται: τ.ἑ.).

Τό τετράγωνο πού ἔχει πλευρά μιά παλάμη, λέγεται τετραγωνική παλάμη (τ.π.).

Τό τετράγωνο πού ἔχει πλευρά 1 μέτρο, λέγεται **τετραγωνικό** μέτρο (τ.μ.).

Τό τετραγωνικό μέτρο εἶναι **ἀρχική** μονάδα μετρήσεως, τῶν ἐπιφανειῶν.

Τίς μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν τίς περιλαβαίνουμε στόν ἀκόλουθο πίνακα.

	Τετράγωνα πού ἔχουν πλευρά	Μονάδα ἐπιφάνειας	Συμβολισμός
Ἀρχική μονάδα	1 μέτρο	τετραγωνικό μέτρο	τ.μ.
πολλαπλάσια	1 χιλιόμετρο	τετραγωνικό χιλιόμετρο	τ.χ.
Ὑποπολλαπλάσια	1 παλάμη 1 δάκτυλος 1 γραμμή	τετρ. παλάμη τετρ. δάκτυλος τετρ. γραμμή	τ.π. τ.δ. τ.γ.

Προβλήματα:

551. Ὁ Παρθενώνας ἔχει μῆκος 69,51 μέτρα καί περίμετρο 200,74 μέτρα. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό τοῦ δαπέδου του.
552. Τό Θησεῖο ἔχει πλάτος 13,72 μέτρα καί περίμετρο 90,98 μ. Νά βρεῖτε τό ἐμβαδό του.
553. Μιά νοικοκυρά θέλει νά στρώσει μέ τάπητα τό σαλόνι της, πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μέ πλάτος 4,20 μέτρα καί μῆκος 5,40 μέτρα. Πόσα μέτρα ἀπό τόν τάπητα θά χρειαστεῖ, ἄν αὐτός ἔχει πλάτος 2,70 μέτρα;
554. Ἡ περίμετρος τετραγώνου εἶναι 60,24 μέτρα. Πόσο εἶναι ἡ πλευρά του καί πόσο τό ἐμβαδό του;

Ἀσκήσεις:
Μέ χαρτονάκι

555. Νά κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 1 ἑκατοστόμετρο καί να τό ἀποκόψετε.
556. Νά κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 1 παλάμη καί νά τό ἀποκόψετε.
557. Νά χαράξετε στόν πίνακα ἤ στό ἔδαφος ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά 1 μέτρο.
558. Ἀπό πόσα τετραγωνίδια ἀποτελεῖται 1 τετράγωνο, κατασκευασμένο σέ τετραγωνισμένο φύλλο τετραδίου, μέ πλευρά 4 διαιρέσεις, 6 διαιρέσεις, 7 διαιρέσεις;
559. Ἀπό πόσα τετραγωνίδια ἀποτελεῖται, ἕνα τετράγωνο κατασκευασμένο σέ τετραγωνισμένο φύλλο τετραδίου, μέ μῆκος 8 διαιρέσεις καί πλάτος 8 διαιρέσεις;

560. Ἕνα τετράγωνο ἔχει πλευρά 5 ἑκατ. Τό τετραγωνίζουμε μέ διάστημα 1 ἑκατ. Ἀπό πόσα τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα ἀποτελεῖται;

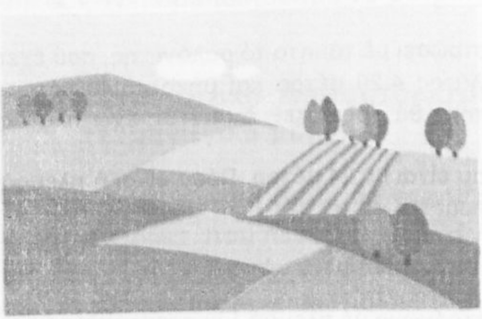
561. Ἀπό πόσα τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα ἀποτελεῖται ἕνα τετράγωνο μέ περίμετρο 16 ἑκατοστόμετρα;

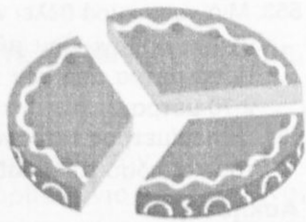
107. Κλάσματα

Γενικά: Μιά ἀπό τίς σημαντικότερες ἐπινοήσεις τοῦ ἀνθρώπου εἶναι ἕνας νέος ἀριθμός, πού ὀνομάζεται: **κλάσμα.** Τό κλάσμα τό χρησιμοποιοῦμε γιά νά δείξουμε τό μέρος ἑνός πράγματος.

Γιά νά δηλώσουμε π.χ. πώς ἕνα ἀπό τά 3 μέρη τῆς τούρτας, πού εἰκονίζεται, τό ἔχουμε πάρει, χρησιμοποιοῦμε τό κλάσμα: **ἕνα τρίτο.**

Στό σχέδιο εἰκονίζεται ἕνα χωράφι πού δέν ἔχει διαιρεθεῖ σέ ἴσα μέρη καί μιά τούρτα, πού ἔχει διαιρεθεῖ σέ **ἴσα μέρη.**





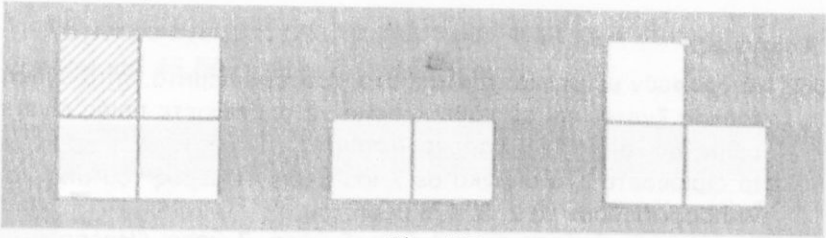
Εἰκ. 116

Ὅταν ἕνα ὅλο διαιρεθεῖ σέ ἴσα μέρη, τότε καθένα ἀπό τά ἴσα μέρη του, παίρνει τό ὄνομα: **κλασματική μονάδα.**

Στήν περίπτωση τῆς τούρτας, πού ἔχει διαιρεθεῖ σέ τρία ἴσα μέρη, καθένα μέρος εἶναι: τό ἕνα τρίτο τῆς ὅλης τούρτας.

Ὅταν τό ὅλο δέ διαιρεῖται σέ ἴσα μέρη τότε καθένα ἀπό τά μέρη του δέν ἔχει χωριστό ὄνομα, ὅπως στήν περίπτωση τοῦ χωραφιοῦ.

Σύμφωνα μ' αὐτά μποροῦμε νά λέμε:



Εἰκ. 117

Τό τετράγωνο εἶναι διαιρεμένο σέ 4 ἴσα μέρη. Τό γραμμοσκιασμένο μέρος εἶναι τό 1 τέταρτο τοῦ τετραγώνου.

Ἐδῶ εἶναι τά 2 μέρη τοῦ τετράγωνου. Δηλ. 2 τέταρτα τοῦ τετραγώνου.

Ἐδῶ εἶναι τά 3 μέρη ἤ τά 3 τέταρτα τοῦ τετραγώνου.

Οἱ ποσότητες: ἕνα τέταρτο, δύο τέταρτα, τρία τέταρτα, εἶναι κλάσματα τοῦ ὅλου τετραγώνου.

Αὐτά τά κλάσματα μποροῦν νά γραφοῦν ἔτσι:

ἕνα τέταρτο: $\frac{1}{4}$ ἤ 1/4, δύο τέταρτα: $\frac{2}{4}$ ἤ 2/4, τρία τέταρτα: $\frac{3}{4}$ ἤ 3/4.

Οἱ δύο ἀριθμοί πού ἀποτελοῦν τό κλάσμα λέγονται: **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Π.χ. στό κλάσμα $\frac{3}{4}$ οἱ ἀριθμοί 3 καί 4 εἶναι οἱ ὅροι του.

Ὁ ἀριθμός πού γράφεται κάτω ἀπό τή γραμμή λέγεται **παρονομαστής** τοῦ κλάσματος. Π.χ. ὁ 4 εἶναι ὁ παρονομαστής τοῦ 3/4.

Ὁ ἀριθμός πού γράφεται πάνω ἀπό τή γραμμή λέγεται **ἀριθμητής** τοῦ κλάσματος.

Ὁ παρονομαστής δηλώνει σέ πόσα ἴσα μέρη χωρίσαμε τήν **ἀκεραία μονάδα** καί ὁ ἀριθμητής πόσα πήραμε ἀπ' αὐτά.

Τό $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... εἶναι κλασματικές μονάδες

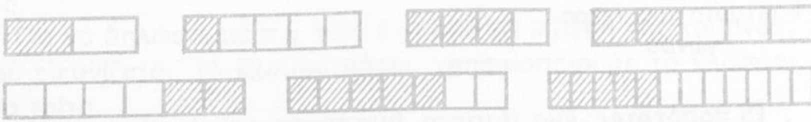
καί, ὅπως οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί γίνονται ἀπό τήν ἐπανάληψη τῆς ἀκέραιας μονάδας, ἔτσι καί οἱ κλασματικοί ἀριθμοί γίνονται ἀπό τήν ἐπανάληψη τῆς κλασματικῆς μονάδας.

Γιά νά διαβάσουμε ἕνα κλάσμα διαβάζουμε πρῶτα τόν ἀριθμητή καί μετά τόν παρονομαστή του. Π.χ. τά κλάσματα:

$\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, διαβάζονται: πέντε ἕκτα, ἕνα δεύτερο, ἕνα τρίτο.

Ἀσκήσεις:

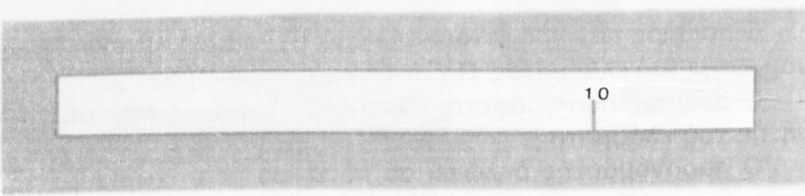
562. Νά γραφοῦν μέ ψηφία τά κλάσματα: τέσσερα πέμπτα, ἑπτά ὄγδοα, τέσσερα ἔνατα, καί σέ κάθε κλάσμα νά σημειώσετε ποιός εἶναι ὁ ἀριθμητής καί ποιός ὁ παρονομαστής του.
563. Νά διαιρέσετε ἕνα σπάγκο σέ 7 ἴσα μέρη. Τί μέρος τοῦ σπάγκου ἀντιπροσωπεύουν τά 2, 3, 4, 5 μέρη του.
564. Τί μέρος τῆς ἡμέρας εἶναι 1 ὥρα, 5 ὧρες, 7 ὧρες. (Ἡμέρα = 12 ὧρες).
565. Σημειῶστε τό κλάσμα τοῦ ὅλου πού ἀντιπροσωπεύει τό γραμμοσκιασμένο μέρος στίς παρακάτω περιπτώσεις, καί μετά τό λευκό μέρος.



Εἰκ. 118

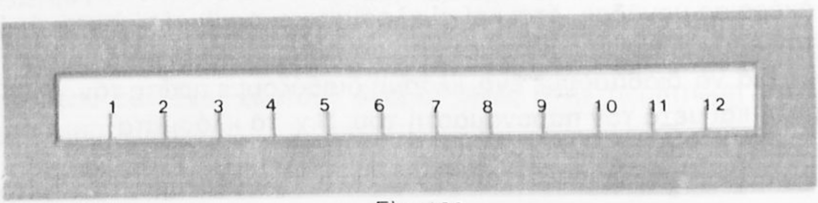
566. Γράψτε σέ μορφή κλάσματος τοῦ μέτρου: 3 παλάμες, 55 δακτύλους, 116 γραμμές.
567. Γράψτε σέ μορφή κλάσματος τοῦ κιλοῦ τά: 300 γραμμάρια, 700 γραμμάρια.

108. Δεκαδικά κλάσματα



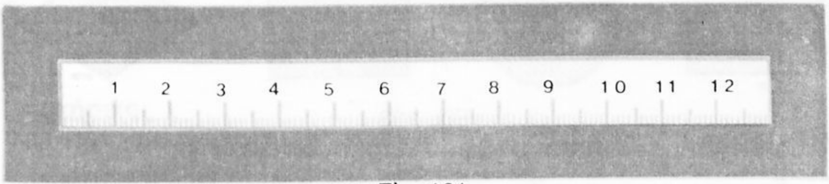
Εἰκ. 119

Τό μέτρο διαιρεῖται σέ 10 παλάμες. Κάθε παλάμη εἶναι: $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου καί 3 παλάμες τά $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου.



Εἰκ. 120

Τό μέτρο ἔχει 100 δάκτυλους. Κάθε δάκτυλος εἶναι τό $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου καί 45 δάκτυλοι $\frac{45}{100}$ τοῦ μέτρου.



Εἰκ. 121

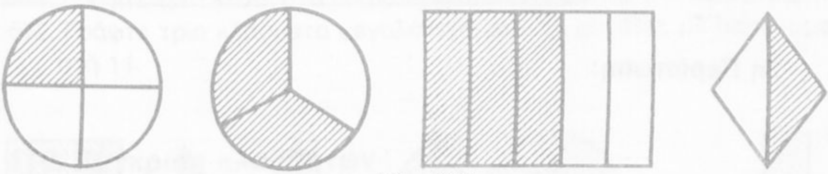
Τό μέτρο διαιρεῖται σέ 1.000 γραμμές. Κάθε γραμμή εἶναι τό 1/1000 τοῦ μέτρου καί 615 γραμμές, τά $\frac{615}{1000}$ τοῦ μέτρου.

Τά κλάσματα, πού ἔχουν παρονομαστή 10, 100, 1000, ... λέγονται **δεκαδικά** κλάσματα.

Τά ἄλλα κλάσματα λέγονται **κοινά** κλάσματα.

109. Σύγκριση κλασμάτων μέ τήν ἀκέραια μονάδα

1η Περίπτωση:



Εἰκ. 122

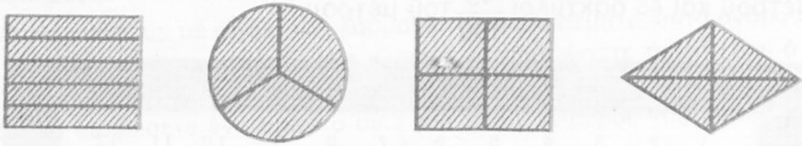
Τό γραμμοσκιασμένο μέρος παρασταίνει τό:

$\frac{1}{4}$ τοῦ ὅλου	$\frac{2}{3}$ τοῦ ὅλου	$\frac{3}{5}$ τοῦ ὅλου	$\frac{1}{2}$ τοῦ ὅλου

Ὅλα τά παραπάνω κλάσματα εἶναι μικρότερα ἀπό τήν ἀκέραια μονάδα καί λέγονται **γνήσια**.

Βλέπετε; ➧ Ἕνα κλάσμα εἶναι μικρότερο ἀπ' τήν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος ἀπ' τόν παρονομαστή του.

2η Περίπτωση:



Εἰκ. 123

Τό γραμμοσκιασμένο μέρος παρασταίνει τά:

$\frac{5}{5}$ τοῦ ὅλου $\quad$ $\frac{3}{3}$ τοῦ ὅλου $\quad$ $\frac{4}{4}$ τοῦ ὅλου $\quad$ $\frac{4}{4}$ τοῦ ὅλου

Ὅλα τά παραπάνω κλάσματα εἶναι ἴσα μέ τήν ἀκέραια μονάδα καί λέγονται **κοινά** κλάσματα.

Βλέπετε; ➧ Ἕνα κλάσμα εἶναι ἴσο μέ τήν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι ἴσος μέ τόν παρονομαστή του.

3η Περίπτωση:

Εἰκ. 124

Τό γραμμοσκιασμένο μέρος παρασταίνει τά:

$\frac{4}{3}$ τοῦ ὅλου $\quad$ $\frac{5}{4}$ τοῦ ὅλου $\quad$ $\frac{3}{2}$ τοῦ ὅλου $\quad$ $\frac{7}{5}$ τοῦ ὅλου

Ἤ 1 καί $\frac{1}{3}$ τοῦ ὅλου, 1 καί $\frac{1}{4}$ τοῦ ὅλου, 1 καί $\frac{1}{2}$ τοῦ ὅλου, 1 καί $\frac{2}{5}$ τοῦ ὅλου.

Ὅλα τά παραπάνω κλάσματα εἶναι μεγαλύτερα ἀπό τήν ἀκέραια μονάδα καί λέγονται **κοινά** κλάσματα.

Βλέπετε; ➧

> Ἕνα κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τήν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν παρονομαστή του.

Ἀσκήσεις:

568. Νά συμπληρωθοῦν οἱ τελεῖες μέ ἀριθμούς, ὥστε τά κλάσματα νά γίνουν ἴσα μέ τήν ἀκέραια μονάδα.

$\frac{.}{5}$ $\quad \frac{.}{7}$ $\quad \frac{9}{.}$ $\quad \frac{13}{.}$ $\quad \frac{.}{17}$ $\quad \frac{45}{\ }$

569. Τί πρέπει νά προσθέσετε στούς ἀριθμητές σέ καθένα ἀπό τά παρακάτω κλάσματα, ὥστε νά γίνουν ἴσα μέ τή μονάδα;

$\frac{3}{4}$ $\quad \frac{5}{6}$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad \frac{4}{5}$ $\quad \frac{6}{12}$

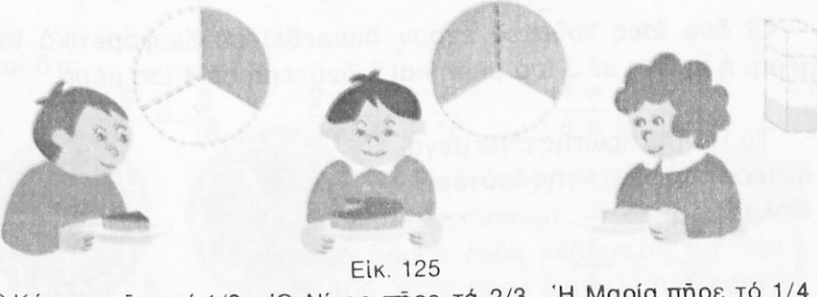
570. Τί πρέπει νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τούς ἀριθμητές ἀπό τά παρακάτω κλάσματα, ὥστε νά γίνουν ἴσα μέ τήν ἀκέραια μονάδα;

$\frac{4}{3}$ $\quad \frac{5}{4}$ $\quad \frac{6}{5}$ $\quad \frac{9}{8}$ $\quad \frac{19}{18}$

571. Γράψτε τρία κλάσματα μικρότερα ἀπό τή μονάδα, μέ παρονομαστή 7.
572. Γράψτε τρία κλάσματα μεγαλύτερα ἀπό τή μονάδα, μέ παρονομαστή 11.

110. Σύγκριση κλασμάτων

Παρακάτω εἰκονίζονται κλάσματα γλυκῶν καί βούτυρου.



Εἰκ. 125

Ὁ Κώστας πῆρε τό 1/3 τῆς τούρτας — Ὁ Νίκος πῆρε τά 2/3 τῆς τούρτας — Ἡ Μαρία πῆρε τό 1/4 τοῦ βούτυρου

Μπορούμε νά συγκρίνουμε τά κομμάτια τῶν 3 παιδιῶν; Δηλαδή τά κλάσματα;

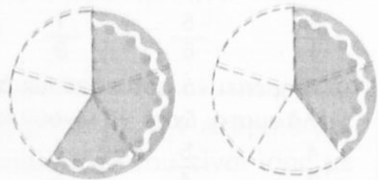
Εἶναι εὔκολο νά συγκρίνουμε τά κομμάτια τοῦ Κώστα καί τοῦ Νίκου. Δέν μποροῦμε, ὅμως νά συγκρίνουμε τό μερίδιο τῆς Μαρίας μέ τά μερίδια τοῦ Κώστα καί τοῦ Νίκου, γιατί τῆς Μαρίας προέρχεται ἀπό ἄλλο μέγεθος (εἶδος).

Βλέπετε; ➧

> Μπορούμε νά συγκρίνουμε μόνο κλάσματα πού προέρχονται ἀπό τό αὐτό μέγεθος.

Ἄνισα κλάσματα:

Τά 3/5 τῆς τούρτας πού εἰκονίζεται, εἶναι ἕνα κλάσμα μεγαλύτερο ἀπό τά 2/5 τῆς τούρτας.



Εἰκ. 126

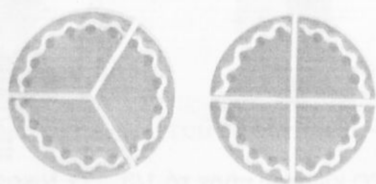
Βλέπετε; ➧

> Ὅταν δύο κλάσματα ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή, μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τό μεγαλύτερο ἀριθμητή.

Οἱ δύο ἴσες τοῦρτες ἔχουν διαιρεθεῖ σέ διαφορετικά ἴσα μέρη: ἡ πρώτη σέ 3 ἴσα μέρη καί ἡ δεύτερη σέ 4 ἴσα μέρη.

Τό 1/3 τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό 1/4 τῆς δεύτερης. Δηλαδή:

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

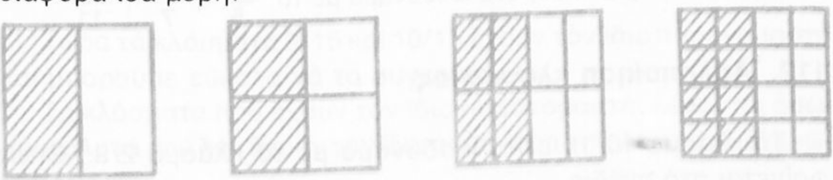


Εἰκ. 127

Βλέπετε; ➧	Όταν δύο κλάσματα ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμητή, μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τό μικρότερο παρονομαστή.

111. Ἰσοδύναμα κλάσματα

Παρακάτω εἰκονίζεται ἡ ἴδια ἀκέραια μονάδα διηρημένη σέ διάφορα ἴσα μέρη:



Εἰκ. 128

Χωρίζεται στά δύο. Χωρίζεται στά 4. Χωρίζεται στά 8. Χωρίζεται στά 16.

Ἡ τιμή τοῦ γραμμοσκιασμένου κλάσματος δέν ἔχει ἀλλάξει.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$$

Τά κλάσματα αὐτά ὀνομάζονται ἰσοδύναμα. Ἀκόμα βλέπουμε, πώς:

$$\frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{8:8}{16:8} = \frac{1}{2}$$

καί ὅτι:

$$\frac{1 \times 8}{2 \times 8} = \frac{8}{16} \qquad \frac{2 \times 4}{4 \times 4} = \frac{8}{16} \qquad \frac{4 \times 2}{8 \times 2} = \frac{8}{16}$$

Βλέπετε; ➧	Όταν πολλαπλασιάσουμε, ἤ διαιρέσουμε τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, παίρνουμε ἕνα κλάσμα ἰσοδύναμο μέ τό πρῶτο.

Ἀσκήσεις:

573. Νά τακτοποιήσετε τά παρακάτω κλάσματα σέ σειρά μεγέθους:

$$\frac{4}{7} \qquad \frac{6}{7} \qquad \frac{1}{7} \qquad \frac{5}{7} \qquad \frac{2}{7}$$

574. Ὅμοια:

$$\frac{8}{17} \qquad \frac{7}{17} \qquad \frac{12}{17} \qquad \frac{1}{17} \qquad \frac{9}{17} \qquad \frac{11}{17}$$

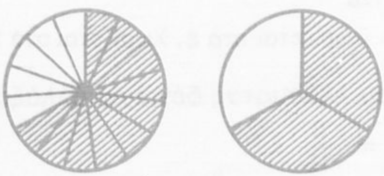
575. Νά συμπληρωθοῦν οἱ ἰσότητες:

$$\frac{1}{3} = \frac{.}{6} \qquad \frac{3}{7} = \frac{.}{14} \qquad \frac{2}{3} = \frac{6}{.} \qquad \frac{5}{7} = \frac{15}{.}$$

576. Νά βρεῖτε τρία κλάσματα ἰσοδύναμα μέ τό: $\frac{3}{5}$ ἤ $\frac{4}{7}$ ἤ $\frac{9}{11}$

112. Ἀπλοποίηση κλάσματος

Τό κλάσμα 10/15 εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό κλάσμα 2/3. Ὅπως φαίνεται στό σχέδιο.



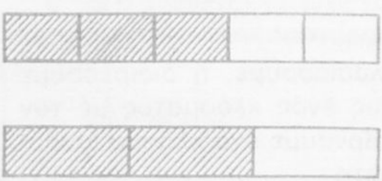
Εἰκ. 129

Μποροῦμε ὅμως καί χωρίς τό σχέδιο νά ἐπαληθεύσουμε τήν ἰσότητα, ἄν διαιρέσουμε καί τούς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέ τόν 5. Ἡ πράξη πού κάνουμε λέγεται **ἀπλοποίηση** τοῦ κλάσματος.

Βλέπετε;

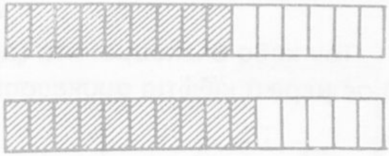
> Ἀπλοποίηση, εἶναι ἡ πράξη πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε ἕνα κλάσμα ἴσο μέ τό ἀρχικό, ἀλλά μέ μικρότερους ὅρους.

113. Ὁμώνυμα καί ἑτερώνυμα κλάσματα



Εἰκ. 130

Ἀπό τά κλάσματα $\frac{3}{5}$ καί $\frac{2}{3}$ δέν μποροῦμε νά ξέρουμε ποιό εἶναι τό μεγαλύτερο, γιατί δέν ἔχουν οὔτε τόν ἴδιο ἀριθμητή, οὔτε τόν ἴδιο παρονομαστή. Γιά νά μπορέσουμε νά τά συγκρίνουμε, πρέπει νά τά τρέψουμε σέ ἄλλα, ἰσοδύναμα μ' αὐτά, ἀλλά μέ τόν ἴδιο παρονομαστή.



Εἰκ. 131

Γι' αὐτό διαιροῦμε τή μονάδα σέ τόσα ἴσα μέρη πού νά περιλαβαίνει καί τούς δύο παρονομαστές. Δηλ. σέ 15 ἴσα μέρη.

Ἔτσι τό $\frac{3}{5}$ γίνεται $\frac{9}{15}$:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15} \quad \text{καί τό} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

Τώρα τά κλάσματα 9/15 καί 10/15 ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή καί μποροῦμε εὔκολα νά τά συγκρίνουμε.

Τά κλάσματα πού ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή, λέγονται **ὁμώνυμα.** Αὐτά πού δέν ἔχουν τόν ἴδιο παρονομαστή, λέγονται: **ἑτερώνυμα:**

Βλέπετε; ➧

Γιά νά τρέψουμε 2 ἑτερώνυμα κλάσματα σέ ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζουμε τούς δύο ὅρους καθενός, μέ τόν παρονομαστή τοῦ ἄλλου.

Ἀσκήσεις:

577. Νά γίνουν ὁμώνυμα τά κλάσματα: $\frac{1}{2}$ καί $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ καί $\frac{2}{3}$

578. Ὅμοια: $\frac{8}{9}$ καί $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ καί $\frac{4}{6}$

579. Ὅμοια: $\frac{7}{8}$ καί $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$ καί $\frac{6}{7}$

580. Ὅμοια: $\frac{12}{17}$ καί $\frac{13}{21}$, $\frac{25}{47}$ καί $\frac{32}{33}$

581. Ποιό ἀπό τά κλάσματα: $\frac{37}{57}$, $\frac{42}{51}$ εἶναι μικρότερο;

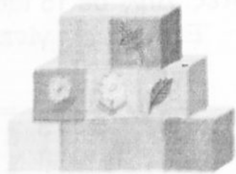
582. Ποιό ἀπό τά κλάσματα εἶναι μεγαλύτερο; $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{11}$

114. Ὁ κύβος

Τόν κύβο βλέπουμε: στά ζάρια, στά ξύλινα παιδικά παιγνίδια, ἤ σέ μερικά κιβώτια συσκευασίας.

Εἰκ. 132

Εἰκ. 133



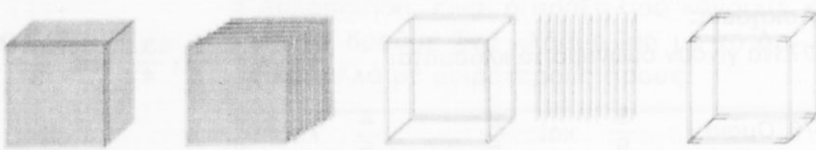
Εἰκ. 134

Πόσες ἕδρες ἔχει ὁ κύβος;

Ἕδρες στόν κύβο λέγονται τά τετράγωνα, πού τόν περιορίζουν.

Πόσες ἀκμές ἔχει ὁ κύβος;

Ἀκμές λέγονται οἱ πλευρές τῶν τετραγώνων.

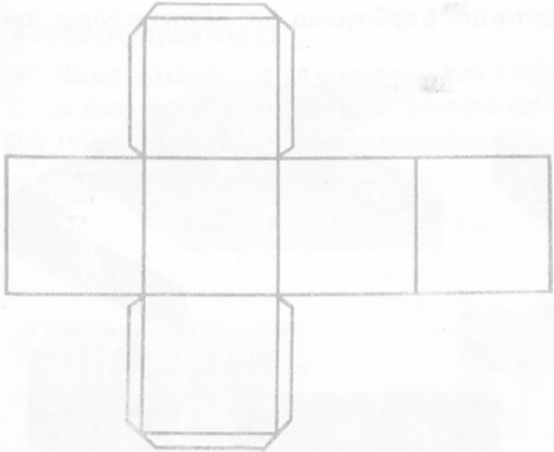


Εἰκ. 135

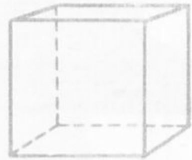
Ὁ κύβος — Ἔχει 6 ἕδρες πού εἶναι ἴσα τετράγωνα — Ἔχει 12 ἀκμές ἴσες μεταξύ τους — Ἔχει 8 κορυφές

Νά βρεῖτε τό μέγεθος κάθε γωνίας τῶν ἑδρῶν του, ἄν τίς συγκρίνετε μέ τήν ὀρθή.

Στό σχέδιο βλέπετε, πῶς μπορεῖτε νά κατασκευάσετε κύβο ἀπό χαρτόνι.



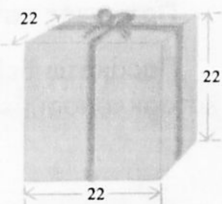
Εἰκ. 136



Εἰκ. 137

᾽Ασκήσεις:

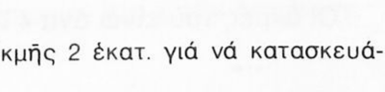
583. Ἡ ἀκμή τοῦ κύβου εἶναι 5 ἑκατ. Πόσο μῆκος ἔχουν ὅλες οἱ ἀκμές μαζί;
584. Ὅλες οἱ ἀκμές ἑνός κύβου ἔχουν μῆκος 312 ἑκατ. Πόσο εἶναι τό μῆκος τῆς ἀκμῆς του;
585. Πόσους κύβους χρειαζόμαστε, ἀκμῆς 2 ἑκατ. γιά νά κατασκευάσουμε 1 κύβο ἀκμῆς 4 ἑκατοστῶν;
586. Γιά νά δέσεις αὐτό τό κυβικό πακέτο πού εἰκονίζεται, μέ κλωστή, πόσα μέτρα κλωστή θά σοῦ χρειαστοῦν;



Εἰκ. 138

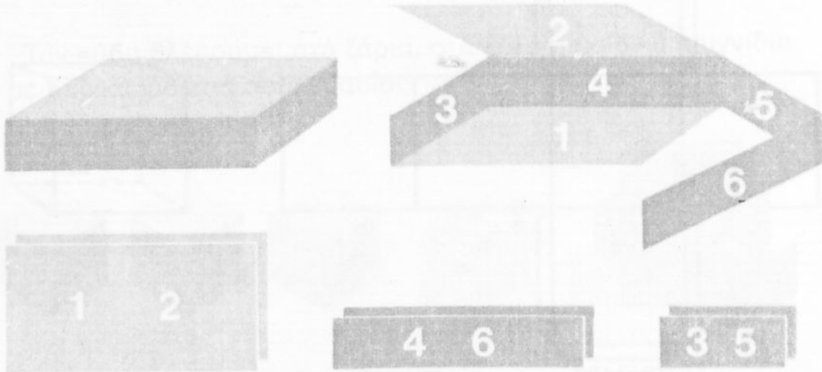
115. ᾽Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Τό σχῆμα πού ἔχει τό κουτί μέ τά σπίρτα, τά περισσότερα χαρτοκιβώτια συσκευασίας, τά κλειστά βιβλία, τό κουτί μέ τίς κιμωλίες καί ἄλλα, εἶναι τό σχῆμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



Εἰκ. 139

Τά στερεά αὐτά περιορίζονται ἀπό 6 ὀρθογώνια, πού λέγονται ἕδρες τοῦ παραλληλεπίπεδου.



Εἰκ. 140

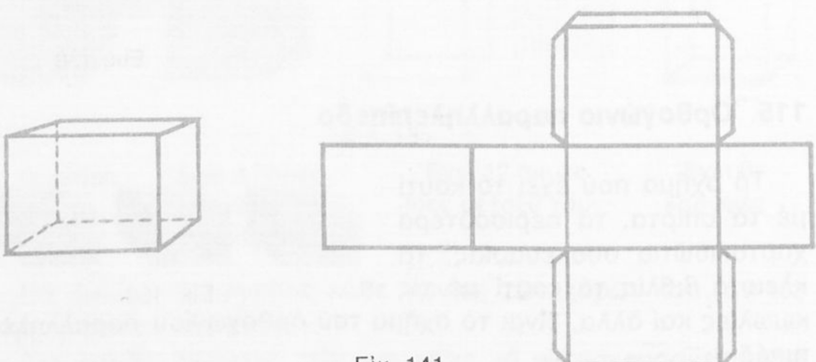
Ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει **3 διαστάσεις**: Τό **μῆκος**, τό **πλάτος** καί τό **ὕψος**.

Οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι ἴσα ὀρθογώνια.

Οἱ ἀκμές του εἶναι ἀνά 4 ἴσες.

Πρακτικές κατασκευές:

Παρακάτω δείχνουμε πῶς, ἀπό ἕνα χαρτονάκι, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

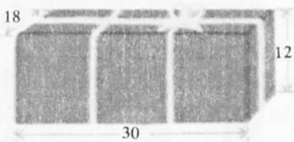


Εἰκ. 141

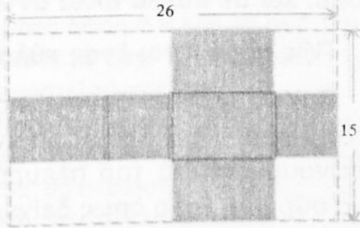
Ἀσκήσεις πρακτικές:

587. Νά κατασκευάσετε μέ χαρτονάκι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μέ διαστάσεις 75 χιλιοστά, 45 χιλιοστά καί 35 χιλιοστά τοῦ μέτρου.

588. Πόσο μῆκος κλωστῆς θά χρειαστεῖτε, γιά νά δέσετε τό πακέτο πού εἰκονίζεται;



Εἰκ. 142

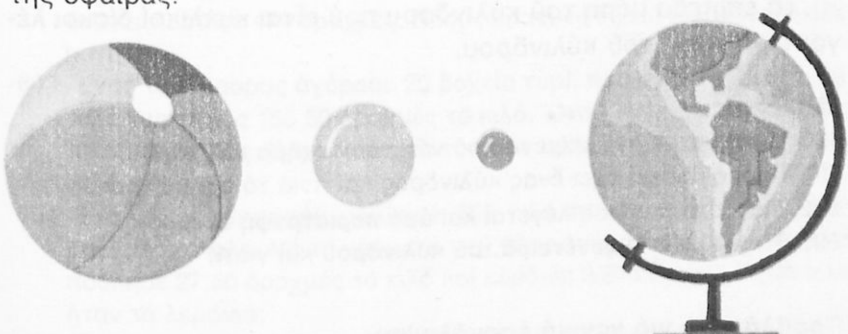


Εἰκ. 143

589. Στό σχέδιο 143, πού εἰκονίζεται, βλέπετε πῶς κατασκευάζεται ἕνα παραλληλεπίπεδο, μέ τό ὕψος του, ἴσο πρός τό πλάτος του. Μπορεῖτε νά βρεῖτε τίς διαστάσεις του; τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν του, καθώς καί τό ἐμβαδόν τοῦ χαρτονιοῦ πού χρησιμοποιήσατε;

Ἡ σφαίρα

Γενικά: Ἕνα μπαλόνι, μιά μπάλα παιγνιδιοῦ πίγκ-πόγκ ἤ τένις ἤ ποδόσφαιρου ἤ μπάσκετ-μπώλ ἤ ἑνός βόλου δίνουν τήν εἰκόνα τῆς σφαίρας.

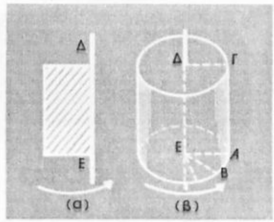


Εἰκ. 144

116. Ὁ κύλινδρος

Τό στερεό πού εἰκονίζεται παράπλευρα, ὀνομάζεται **κύλινδρος.** Τόν κύλινδρο τόν βλέπουμε: σ' ἕνα στρογγυλό ἄξυστο μολύβι, στά κουτιά μέ γάλα ἐβαπορέ, καί σέ πολλά ἄλλα ἀντικείμενα.

Πῶς παράγεται ἕνας κύλινδρος:



Παίρνουμε ἕνα ὀρθογώνιο ἀπό ξύλο ἤ ἀπό χαρτόνι ἤ ἀπό λαμαρίνα καί στερεώνουμε τή μιά του πλευρά ἐπάνω σ' ἕνα σύρμα ἤ ξύλο ὅπως δείχνει τό παράπλευρο σχῆμα (α). Περιστρέφουμε κατόπιν τό σύρμα ἤ τό ξύλο γύρω ἀπό τόν ἑαυτό του, ὅσο μποροῦμε πιό γρήγορα.

Ἔτσι θά παρατηρήσουμε πώς ἡ γρήγορη περιστροφή του δίνει τήν εἰκόνα τοῦ κυλίνδρου. Σχ. (β).

Ἐπειδή ὁ κύλινδρος παράγεται μέ τήν περιστροφή τοῦ ὀρθογωνίου, γύρω ἀπό μιά τῶν πλευρῶν του, λέγεται καί **στερεό ἀπό περιστροφή.**

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΔΕ λέγεται **ὕψος** τοῦ κύλινδρου.

Ἐπίσης τό ΔΕ λέγεται καί **ἄξονας** τοῦ κύλινδρου.

Ἡ πλευρά ΑΓ πού στίς διάφορες θέσεις της **γεννάει** τήν κυρτή (παράπλευρη) ἐπιφάνεια τοῦ κύλινδρου, λέγεται καί **γενέτειρα** τοῦ κύλινδρου.

Τά ἐπίπεδα μέρη τοῦ κύλινδρου πού εἶναι κυκλικοί δίσκοι λέγονται **βάσεις** τοῦ κύλινδρου.

Ἀσκήσεις:

590. Ὀνομάσετε ἀντικείμενα πού νά ἔχουν σχῆμα κύλινδρου.
591. Πόσες βάσεις ἔχει ἕνας κύλινδρος καί ποιό τό σχῆμα τους;
592. Γιατί ὁ κύλινδρος λέγεται καί **ἀπό περιστροφή στερεό;**
593. Τί ὀνομάζεται **γενέτειρα** τοῦ κύλινδρου καί γιατί;

Προβλήματα γιά γενική ἐπανάληψη:

594. Κάποιος πού ρωτήθηκε, σέ ποιά ἡλικία πέθανε ὁ πατέρας του, εἶπε:

εἶμαι 47 χρόνων καί ἤμουν 19, ὅταν ὁ πατέρας μου εἶχε τή σημερινή μου ἡλικία. Ὁ πατέρας μου πέθανε ὅταν γεννήθηκε ὁ γιός μου, πού σήμερα εἶναι 11 ἐτῶν. Σέ ποιά ἡλικία πέθανε;

595. Ἀπό τρεῖς ἐργάτες ὁ Α΄ παίρνει ἡμερομίσθιο 31,50 δρχ. περισσότερες ἀπό τό Β΄ καί 38,50 περισσότερες ἀπό τόν Γ. Ἄν τό ἡμερομίσθιο τοῦ Β΄ εἶναι 795 δραχ., ποιά εἶναι τά ἡμερομίσθια τοῦ Α΄ καί Γ΄;

596. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 204.506,80 δρχ. Ἀφοῦ πούλησε ἕνα μέρος εἰσέπραξε 212.506,80 δρχ. Ἄν ἡ ἀξία τῶν ὑπολοίπων ἦταν 37.500 δρχ., νά ὑπολογιστεῖ τό κέρδος.

597. Μεταξύ τῶν μαθητῶν ἑνός σχολείου ἔγινε ἔρανος γιά συγκέντρωση ἑνός χρηματικοῦ ποσοῦ. Ἄν ὁ καθένας ἔδινε 15 δραχμές, θά ἔλειπαν 105 δρχ., ἄν ὅμως ἔδιναν 20 δρχ. θά περίσσευαν 110 δρχ. Πόσοι ἦταν οἱ μαθητές, καί τί ποσό ἤθελαν νά συγκεντρώσουν;

598. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἕνα τόπι ὕφασμα καί πλήρωσε 7.440 δρχ. Ὅταν τό πούλησε, πῆρε 9.000 δρχ. κι ἔτσι εἶχε κερδίσει 26 δρχ. τό μέτρο. Πόσα μέτρα ἦταν τό ὕφασμα;

599. Ἡ ἀπόσταση Γῆς - Σελήνης εἶναι 388.675 χιλιόμετρα. Ἕνα διαστημόπλοιο, πού τρέχει μέ ταχύτητα 13.000 μέτρα τό δευτερόλεπτο, σέ πόσες ὧρες θά φτάσει στό φεγγάρι;

600. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 96 μέτρα ὕφασμα, πρός 204,50 δραχμές τό μέτρο. Ἀπό αὐτά πούλησε τό τέταρτο, πρός 298,50 δρχ. τό μέτρο καί τό ὑπόλοιπο, πρός 267,50 δραχμές τό μέτρο. Πόσα κέρδισε;

601. Ἕνας ἔμπορος κατασκεύασε 43 ὅμοια φορέματα, ἀπό ἕνα τόπι ὕφασμα, καί τοῦ περίσσεψαν 8,25 μέτρα. Πόσα μέτρα ἦταν ὅλο τό τόπι, ἄν γιά κάθε φόρεμα χρησιμοποιήθηκαν 2,25 μέτρα ὕφασμα;

602. Ἕνας γυαλοπώλης ἀγόρασε 144 ποτήρια. Στή μεταφορά τοῦ ἔσπασαν 12 ποτήρια καί τά ὑπόλοιπα τά πούλησε πρός 20,50 δραχμές τό ἕνα καί κέρδισε 474 δραχμές. Πόσες δραχμές εἶχε ἀγοράσει τό κάθε ποτήρι;

603. Ἕνας τυρέμπορος ἀγόρασε 20 δοχεῖα τυρί, πού τό καθένα εἶχε 20 κιλά τυρί, πρός 155,50 δραχμές τό κιλό. Ὅταν τό πούλησε κέρδισε 13.654 δραχμές. Πόσο πούλησε τό κάθε κιλό, ἄν τό τυρί εἶχε καί 12 κιλά φύρα;

604. Ἕνας φρουτέμπορος πούλησε 555 κιλά πορτοκάλια πρός 12,50 δραχμές τό κιλό. Μέ τά χρήματα πού πῆρε ἀγόρασε λεμόνια, πού τά πούλησε 27,50 δραχμές τό κιλό καί κέρδισε 3.375 δραχμ. Πόσα κιλά ἦταν τά λεμόνια;

605. Ἕνας γεωργός πούλησε 512 κιλά βαμβάκι, πρός 27,50 δραχμές τό κιλό, μέ τά χρήματα πού πῆρε ἀγόρασε 2,80 μέτρα ὕφασμα γιά ἕνα κουστούμι του καί τοῦ ἔμειναν καί 11.525 δραχμές. Πόσες δραχμές

ἀγόρασε τό μέτρο τό ὕφασμα;

606. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 108 μέτρα ὕφασμα, πρός 203 δραχμές τό μέτρο. Μέ τό ὕφασμα αὐτό, κατασκεύασε ὅμοια φορέματα, πού γιά τό καθένα χρειάστηκε 2,25 μέτρα. Πόσο πρέπει νά πουλήσει τό καθένα ἀπό τά φορέματα, γιά νά κερδίσει 12.252 δραχμές;

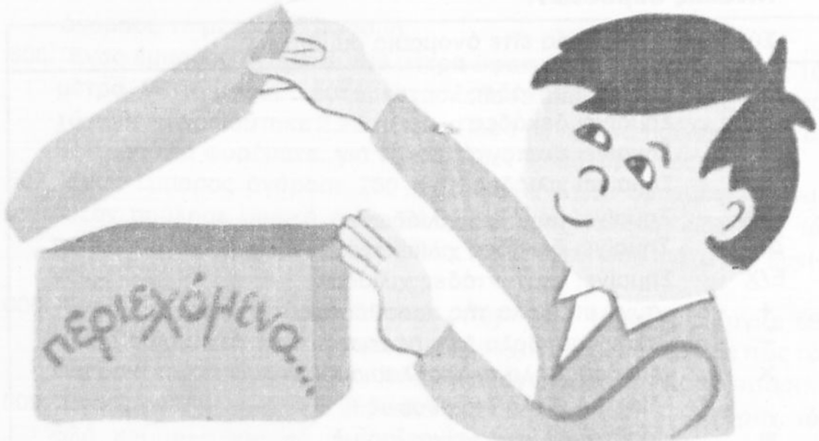
607. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 250 πιάτα πρός 51,60 δραχμές τό ἕνα. Ὅταν πούλησε μερικά πρός 64,50 δραχμές τό ἕνα, εἶδε πώς τά πιάτα πού τοῦ ἔμειναν ἦταν κέρδος. Νά βρεθεῖ πόσα πιάτα τοῦ ἔμειναν.

608. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 4 σακιά σιτάρι, πού τό καθένα ζύγιζε 58 κιλά. Πούλησε τά 3 σακιά, πρός 6,40 δραχμές τό κιλό καί εἶδε πώς τό ἕνα σακί τοῦ ἔμεινε κέρδος. Πόσο εἶχε ἀγοράσει τό κιλό τό σιτάρι;

609. Ἕνας μανάβης ἀγόρασε 285 κιλά πορτοκάλια, πρός 18,50 δραχ. τό κιλό, καί μῆλα πού γιά νά τ' ἀγοράσει πλήρωσε διπλάσιο ποσό καί 1.470 δραχμές ἀκόμα. Πόσες δραχμές πλήρωσε, γιά τά πορτοκάλια καί τά μῆλα;

Πίνακας συμβόλων:

Σύμβολο	Σημασία εἴτε ὀνομασία συμβόλων
Μ	Σημαίνει μονάδες
Δ	Σημαίνει δεκάδες
Ε	Σημαίνει ἑκατοντάδες
Χ	Σημαίνει χιλιάδες
Μ/Χ	Σημαίνει μονάδες χιλιάδων
Δ/Χ	Σημαίνει δεκάδες χιλιάδων
Ε/Χ	Σημαίνει ἑκατοντάδες χιλιάδων
$+$	«σύν» σύμβολο τῆς προσθέσεως
$-$	«πλήν» σύμβολο ἀφαιρέσεως
$\times$	«ἐπί» σύμβολο πολλαπλασιασμοῦ
$:$	«διά» σύμβολο διαιρέσεως
$=$	«ἰσοῦται μέ...», «εἶναι ἴσο μέ...»
$<$	«εἶναι μικρότερο ἀπό...»
$>$	«εἶναι μεγαλύτερο ἀπό...»
$\neq$	«εἶναι διάφορο ἀπό...»
( )	τή χρησιμοποιοῦμε γιά νά δηλώσομε μιά ὁλότητα
Δ	διαιρετέος
δ	διαιρέτης
π	πηλίκο
υ	ὑπόλοιπο



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΟΙ 4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΕΡΑ ΑΠΟ ΤΟ 1000

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ: ΕΙΡΗΝΗ ΝΟΜΙΚΟΥ

Τά ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τό κάτωθι βιβλιόσημο γιά ἀπόδειξη τῆς γνησιότητας αὐτῶν.

Ἀντίτυπο στερούμενο τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπο. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἤ χρησιμοποιῶν αὐτό διώκεται κατά τίς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ Νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α' 108).

ΕΚΔΟΣΗ Δ' 1982 (ΙΙ) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 210.000 ΣΥΜΒΑΣΗ 3695/14-12-81
ΕΚΤΥΠΩΣΗ: ΚΟΥΣΕΝΤΟΣ-ΔΑΒΕΡΩΝΗΣ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Α.ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ＆ ΥΙΟΣ

ΟΕ
ΔΒ